

ميكانيك الإنشاءات -1-

القسم النظري



السنة: الثالثة
القسم : الهندسة الإنشائية

منشورات جامعة دمشق

كلية الهندسة المدنية

ميكانيك الإنشاءات -1-

القسم النظري

الدكتور
فؤاد تلتلو
المدرس في قسم
الهندسة الإنشائية

الدكتور
شاهين غلاييني
الأستاذ المساعد في قسم
الهندسة الإنشائية

الدكتور
إدوارد شديد
الأستاذ في قسم
الهندسة الإنشائية

1426-1427 هـ

2005 - 2006 م

جامعة دمشق



فهرس محتويات الكتاب

13	الفصل الأول : المنشآت المقررة وغير المقررة
15	1- دور التحليل الإنشائي
16	2- تصنيف المنشآت
17	3- المنشآت المقررة
21	4- المنشآت غير المقررة
27	5- نظرية الجائز المرافق
33	الفصل الثاني : نظريات الطاقة
35	1- مفهوم العمل والطاقة
37	2- الطاقة الكامنة بدلالة الإجهادات الداخلية
39	3- الطاقة الكامنة بدلالة القوى الداخلية
46	4- نظرية كاستيليانو
55	5- نظرية العمل المتبادل
56	6- نظرية الانتقال المتبادل

57	الفصل الثالث : نظرية العمل الوهمي
60	1- تحديد الانتقالات وزوايا الدوران
67	2- حساب التكاملات
74	3- تطبيقات العمل الوهمي على الإطارات المقررة
75	4- تحليل الإطارات غير المقررة بتطبيق نظرية العمل الوهمي
79	5- معالجة المنشآت غير المقررة بطريقة العمل الوهمي خارجياً
82	6- الإطارات غير المقررة من الدرجة الأولى داخلياً
87	7- تمارين عملية على نظرية العمل الوهمي
92	8- الإطارات غير المقررة لأي عدد من المجاهيل (n)
101	9- طريقة العمل الوهمي للمنشآت التي تحتوي على عناصر انعطاف وعناصر قوى محورية.
102	10- التناظر والتناظر العكسي.
111	الفصل الرابع : الجوائز الشبكية المقررة وغير المقررة
113	1- مقدمة عامة عن الجوائز الشبكية وطرق تحليلها
118	2- حساب الانتقالات للجوائز الشبكية المقررة باستخدام مبدأ العمل الوهمي.
122	3- أمثلة عملية
138	4- الجوائز الشبكية غير المقررة بطريقة العمل الوهمي
	5- أمثلة تطبيقية

141	الفصل الخامس : طريقة المركز المرن والتشبيه العمودي
143	1- طريقة المركز المرن
	2- أمثلة تطبيقية
161	3- طريقة التشبيه العمودي
	4- أمثلة تطبيقية
186	5- التناظر والتناظر العكسي
197	الفصل السادس : نظرية العزوم الثلاثة
199	1- مقدمة
199	2- إيجاد معادلة العزوم الثلاثة
203	3- الجوائز المستمرة ذات المقاطع العرضية المتغيرة
204	4- معالجة الإطارات غير المقررة باستخدام نظرية العزوم الثلاثة.
	5- أمثلة تطبيقية
213	6- هبوط المساند في الجوائز المستمرة بنظرية العزوم الثلاثة
215	7- معالجة الجوائز المستمرة ذات المفاصل الداخلية
	8- أمثلة تطبيقية

المقدمة

يعد علم ميكانيك الإنشاءات من العلوم الأساسية والرئيسية الهندسية في برامج كليات الهندسة والمعاهد الفنية العليا. وهو أيضاً من الركائز الأساسية التي يستند إليها الكيان العلمي للمهندسين. وفي عصرنا الحاضر يزداد الاهتمام بتحليل الإنشاءات؛ لأنها تحتوي على عدد من المسائل الإنشائية المعقدة، وتزداد الحاجة إلى معرفة الخصائص الفيزيائية والميكانيكية للمادة، وقوانين السكون، والخصائص الديناميكية التي تمكن المهندس من إدراك ما يطرأ على المادة من تغيرات في سلوكها الإنشائي.

إن ثمة عدداً من دور الهندسة تنهض بعبء برامج تسمح بالحساب الأتوماتيكي للمنشآت المختلفة، فعلى أصحابها من المهندسين الإنشائيين أن يلمّوا بمبادئ علم مقاومة المواد وحساب العناصر الإنشائية، ثم يحسنوا استخدام البرامج الحاسوبية حتى يكونوا قادرين على تقويم نتائجهم، ومناقشتها مناقشة سليمة وفعالة.

وأما المهندس الذي يدير ورشة عمل فإنه يستطيع غالباً أن يحل -دون استخدام الأجهزة الإلكترونية- مشاكل يسيرة في حساب الإنشاءات.

فمن الضروري ألا يكتفي بمعرفة قواعد مقاومة المواد فحسب وإنما عليه أن يلم أيضاً بنتائج العناصر الإنشائية إلماماً كبيراً؛ ولذا يطلب إليه أن يدرس ويعرف الحسابات الذهنية أو الآلية في تحقيق منشأة ما بطريقة اقتصادية محددة ودقيقة، وفي تحسين الخواص الفيزيائية والميكانيكية للمواد التي ستكون دائماً العامل الأساسي للتطور في فن الإنشاء.

ومن هذه الأهمية نضع هذا الكتاب بين أيدي الطلاب والمهندسين الناشئين لاستذكار المعلومات الأساسية في علم حساب الإنشاءات الذي يعد مقررأ أساسيا ورئيسياً لطلاب الهندسة المدنية. آمليين أن يقدم الفائدة المرجوة للزملاء المهندسين في أسلوب شامل وحديث وميسر.



يحتوي هذا الكتاب على الفصول الآتية :

1. لمحة عامة على المنشآت المقررة وغير المقررة وطرق تقريرها والأعمال المؤثرة فيها.
2. نظرية كاستيليانو الأولى.
3. تطبيقات على نظرية كاستيليانو الأولى.
4. نظرية كاستيليانو الثانية.
5. تطبيقات على نظرية كاستيليانو الثانية.
6. نظرية العمل الوهمي (منشآت مقررة).
7. نظرية العمل الوهمي (منشآت غير مقررة).
8. تطبيقات على نظرية العمل الوهمي .
9. التناظر على نظرية العمل الوهمي .
10. الجوائز الشبكية المقررة (عمل وهمي).
11. الجوائز الشبكية غير المقررة (عمل وهمي).
12. المركز المرن (منشآت متناظرة).
13. المركز المرن (منشآت غير متناظرة).
14. التشبيه العمودي (منشآت متناظرة).
15. التشبيه العمودي (منشآت غير متناظرة).
16. تطبيقات عامة على التشبيه العمودي.
17. نظرية العزوم الثلاثة (جوائز مستمرة).
18. نظرية العزوم الثلاثة (إطارات متناظرة).
19. نظرية العزوم الثلاثة (إطارات غير متناظرة).
20. نظرية العزوم الثلاثة (أظفار - عقدة ثلاثية - مفاصل).

وإننا نرجو أخيراً أن يجد قراء صفحات هذا الكتاب من طلاب علم الهندسة
وأساتذته وفيه كل الفائدة. وإننا نأمل أن يحتل ركناً أساسياً في مكتبة علم الهندسة
والله الموفق.

دمشق في / / 2004م

المؤلفون

أ.د. إدوارد شديد

د. شاهين غلاييني

د. فؤاد تلتلو

الفصل الأول

المنشآت المقررة وغير المقررة



1- دور التحليل الإنشائي :

يلعب التحليل الإنشائي في مجال الهندسة المدنية، كذلك في مجالات الهندسات الأخرى؛ كهندسة الطيران، وهندسة الآلات، وهندسة السفن، وهندسة العمارة، دوراً أساسياً مهماً.

إن وظيفة المهندس الأساسية هي تصميم منشآت تتميز بالخصائص الآتية :

1- الأمان : أي أن يكون المنشأ قادراً على مقاومة الأحمال والقوى المؤثرة فيه بدرجة أمان كافية .

2- تحقيق شروط الاستخدام : مثلاً ألا يحدث تشوه زائد (كما في حالة السهم الزائد في الجسور أو الأسقف) يعيق استثمار المنشأ أو يوحى بعدم أمان المنشأ. أو مثلاً أن تحدث تشققات كحالة الخزانات أو كحالة تشقق البيتون في وسط ضار للتسليح، أو كحالة أن تكون هذه التشققات ظاهرة بحيث توحى بعدم أمان المنشأ.

3- اقتصادية المنشأ : أي أن يحقق المنشأ الأمان وشروط الاستخدام وفق الحد الأدنى من المواد المستخدمة.

إن الخطوة الأساسية في تصميم المنشآت هي التحليل الإنشائي وتتضمن هذه الخطوة:

1- تمثيل المنشأ كنموذج إنشائي؛ مثلاً جائر بسيط أو مستمر أو إطار.

2- تحديد الأحمال والقوى التي تؤثر فيه : وتصنف الأحمال إلى :

- الأحمال الميتة:- كحمولة الوزن الذاتي، وحمولات التغطية، وحمولات الجدران.

- الأحمال الحية:- كحمولات الاستثمار (الأشخاص والتجهيزات)

- ضغط الماء في الخزانات.

- ضغط الرياح.
- حمولة الثلج.
- الهزات الأرضية.

وتتضمن الكودات الخاصة بكل بلد معطيات لهذه الأحمال.

- 3- حساب القوى الداخلية : بعد معرفة الأحمال والقوى الخارجية يتم حساب القوى الداخلية في المنشأ (العزوم، القوى الناعمية، القوى القاصة).
- 4- تصميم مقاطع المنشأ : تحدد مقاطع المنشأ لتكون مقاومة للقوى الداخلية ومحققة لشروط الاستثمار.

إن نظرة تاريخية لموضوع التحليل الإنشائي تبين لنا ارتباط هذا الموضوع بالإنسان منذ الأزل ومنذ استخدامه للكهوف، واستخدامه للأدوات الأولية الحجرية، ومن ثم بناء مساكنه وأدواته من وسائل نقل وأدوات حرب. إن الشواهد الحاضرة إلى الآن كالأهرامات -مثلاً- تبين لنا مدى معرفة قدماء المصريين بقوانين علم السكون.

إن التقدم التقني عموماً، والتقدم في مجال التحليل الإنشائي مكّن الإنسان من بناء المنشآت الضخمة والقياسية، كمنطحات السحاب، والجسور المعلقة، والأبراج العالية. ومن استخدام البرامج الضخمة لحل المنشآت بمساعدة الكمبيوتر.

2- تصنيف المنشآت :

يمكن تصنيف المنشآت وفق عدة معايير :

- وفق شكل المنشأ

- منشآت حجمية : أو كتلية كالسدود مثلاً

- منشآت سطحية : ونميز منها :

* المنشآت السطحية المستوية :

- الجدران : كالجدران الحاملة، أو جدران القص. القوى

المؤثرة تنطبق على السطح.

- البلاطات : كالأسقف المستوية، الحمولات عمودية على

المستوي.

هناك أنواع مختلفة من البلاطات:

+ البلاطات المصممة باتجاه واحد أو باتجاهين

+ بلاطات الهوردي

+ البلاطات المعصبة

+ البلاطات الفطرية

* المنشآت السطحية المنحنية (القشريات)

- انحناء باتجاه واحد كالقشرية الاسطوانية

- انحناء باتجاهين كالقشرية الدورانية

- منشآت خطية: كالإطارات (الأعمدة والجوائز). والجوائز الشبكية

المنشآت الخطية يمكن أن تكون فراغية أو مستوية.

نقتصر في مقرر ميكانيك الإنشاءات : على المنشآت الخطية المستوية.

وتصنف المنشآت إلى منشآت مقررة ومنشآت غير مقررة.

3- المنشآت المقررة :

المنشآت المقررة هي منشآت يمكن تحليلها (إيجاد دور الأفعال والقوى الداخلية

(اعتماداً على معادلات التوازن لا غير.

ويمكن تصنيف المنشآت المقررة إلى :

● منشآت مقررة بسيطة : جائر بسيط، ظفر، إطار ثلاثي الفاصل. شكل

(1-1)

- منشآت مركبة : تعتمد على تشكيل منشأ أساسي ومنشأ ثانوي.

شكل (2،3-1)

- تركيب المنشأ (أي تنفيذه أو بناؤه) يتم من الأساسي نحو الثانوي. شكل

(3-1)

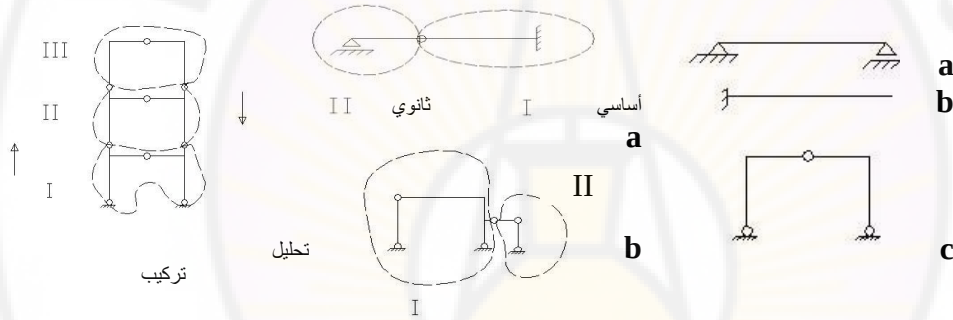
- تحليل المنشأ يتم بالعكس من الثانوي إلى الأساسي، فالثانوي ينقل

حمولة إلى الأساسي في حين الأساسي لا ينقل حمولة إلى الثانوي.

شكل (3-1)

- فضلاً عن أهمية هذه الفكرة في تحليل المنشأ المركب فهي تفيد في تقرير

المنشآت غير المقررة.



شكل (3-1)

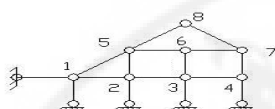
شكل (2-1)

شكل (1-1)

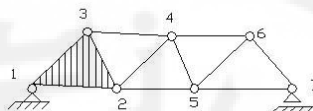
بالنسبة للجوائز الشبكية فإن الجوائز الشبكية البسيطة يمكن أن تُشكل

بأسلوبين :

- 1- شكل صلد أساسي من مثلث، ثم إضافة عقدة وقضيين حتى نحصل على الجائز الشبكي الصلد، ثم تقييده بثلاثة قيود (ثلاثة قضبان أو مفصل وقضيب، أو مفصل ومتدحرج). شكل (4-1)
- 2- الانطلاق من تشكيل عقدة مقيدة بقضيين (ثنائية)، ثم تشكيل عقدة جديدة (عقدة وقضيين) التشكيل الداخلي والخارجي معاً. شكل (5-1)



شكل (5-1)

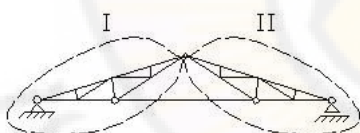


شكل (4-1)

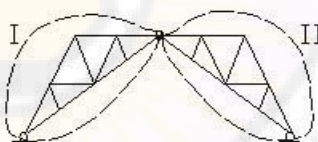
ويمكن أن نشكل جوائز شبكية مركبة من أجزاء شبكية صلبة لتشكيل جملة صلبة. شكل (6،7-1)

مثلاً الشكل (6-1) يمثل جائز شبكي صلد يتم تشكيله من الجزئين الصلدين I و II على شكل إطار ثلاثي المفاصل.

والشكل (7-1) يمثل جائز شبكي صلد تم تشكيله من الجزئين الصلدين I و II بمفصل وقضيب.



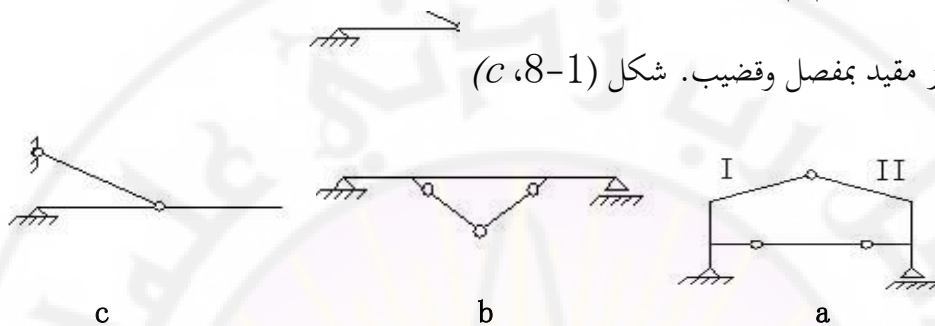
شكل (7-1)



شكل (6-1)

بالإضافة إلى المنشآت التي تتعرض للانعطاف (كالإطارات) والمنشآت التي تتعرض لقوى محورية (كالجوائز الشبكية) هناك المنشآت التي تحوي عناصر انعطاف وعناصر قوى محورية كالمنشآت المبينة. شكل (8-1)

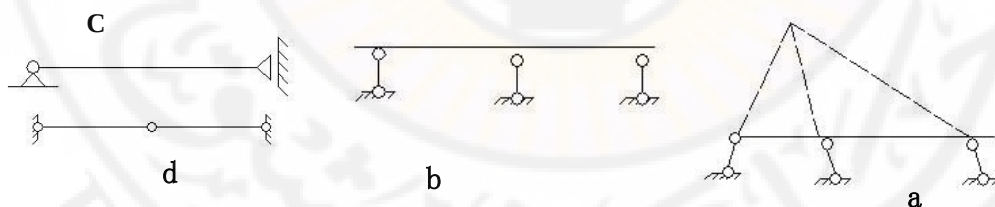
إطار مع شداد : يمكن اعتباره مشكلاً من الشكلين الصلدين I و II ، حيث تم ربطهما بمفصل وقضيب لتصبح الجملة شكلاً صلباً. شكل (8-1، a) جائر بسيط، ثم تم تشكيل عقدة بقضيبين. شكل (8-1، b) جائر مقيد بمفصل وقضيب. شكل (8-1، c)



شكل (8-1)

شروط التقييد :

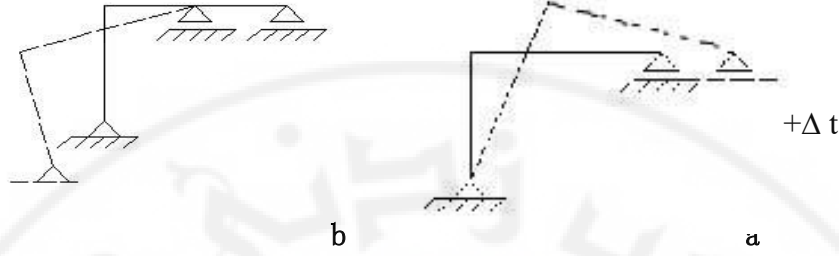
- يُقيد المنشأ بثلاثة قضبان غير متلاقية ولا متوازية. شكل (9-1، a، b)
- رد فعل التدرج لا يمر بالمفصل (نقطة تلاقي قضيبين يمكن اعتبارها مفصلاً) والمتدرج يمكن اعتباره قضيباً. شكل (9-1، c)
- ثلاثة مفاصل ليست على استقامة واحدة . شكل (9-1، d)



شكل (9-1)

مميزات المنشآت المقررة :

ثمة ميزة أساسية للمنشآت المقررة هي أن ارتفاع درجة الحرارة أو هبوط المساند لا يؤدي إلى نشوء قوى داخلية. شكل (10-1)



شكل (10-1)

4- المنشآت الغير مقررة :

المنشآت المقررة هي منشآت تحوي قيوداً إضافية (داخلية أو خارجية)، حيث إن معادلات التوازن لا تمكن أن تحدد القوى الداخلية في المنشأ. إن درجة عدم التقرير هي عدد القيود الإضافية، أو القيود اللازم حذفها لتقرير المنشأ.

إن المنشأ الغير مقرر يمكن أن يعتبر منشأ مقررّاً بالإضافة إلى قوى إضافية مجهولة تعوض عن القيود المحذوفة لتقرير المنشأ.

فالإطار المبين في الشكل (11-1، a) هو إطار غير مقرر من الدرجة الثالثة، وهذا الإطار يمكن اعتباره مكافئاً للإطار المقرر الذي نحصل عليه بحذف الوثاقة اليسارية -مثلاً- والتعويض عن الوثاقة بالقوى X_1 , X_2 , X_3 . كما في الشكل (11-1، b)

وهذه القوى تُحدد من شروط التشوه عند الوثاقة المحذوفة؛ أي من شروط الانتقال الأفقي والشاقولي والدوران معدومة.

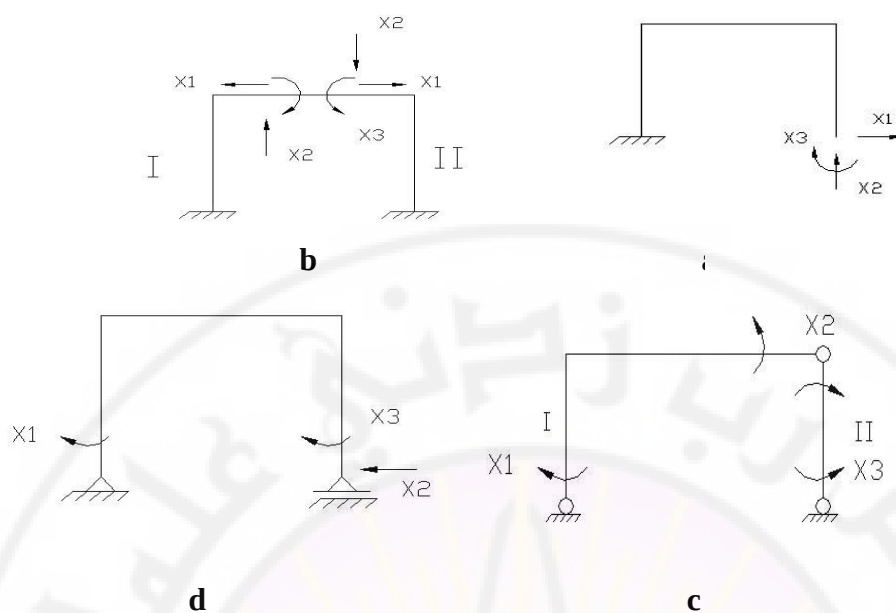
نلاحظ أن المجاهيل X_1 , X_2 , X_3 تمثل قوى تعوض عن القيود المحذوفة لتقرير المنشأ سكونياً؛ لذلك نسمي هذا الأسلوب بطريقة القوى.

إن طريقة الحل وفق هذا الأسلوب (طريقة القوى) تتضمن خطوة تقرير المنشأ، ولتقرير المنشأ هناك خيارات متعددة.



شكل (11-1)

- وعملية تقرير المنشأ يمكن أن تتم بطرق مختلفة مثلاً :
- حذف وثاقة (أو قيد عموماً)، فحذف الوثاقة اليمينية هو أسلوب آخر لتقرير المنشأ . شكل (12-1 ، a)
- عملية القطع في نقطة داخلية، حيث نحصل على الشكلين الصلبين (I و II) كل منهما مرتبط بوثاقة. شكل (12-1 ، b)
- إضافة مفاصل : تشكيل إطار ثلاثي المفاصل من الشكلين الصلبين (I و II) والمفاصل الثلاثة ليست على استقامة واحدة. شكل (12-1 ، d)
- تخفيض درجة القيد: مثلاً تحويل الوثاقة إلى متدرج، والوثاقة الثانية إلى مفصل. شكل (12-1 ، d)

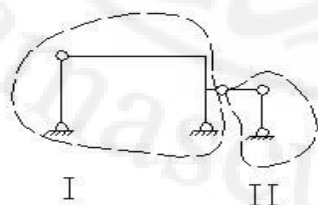


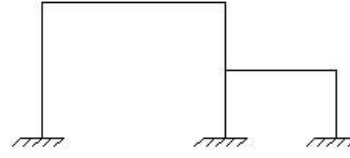
شكل (12-1)

ويمكن الاستفادة من فكرة المنشآت المقررة المركبة لتقرير المنشآت الغير مقررة. فالمنشأ المبين في الشكل (13-1، a)، يمكن تقريره بإضافة 6 مفاصل، وتشكيل إطار ثلاثي المفاصل أساسي I، وإطار ثلاثي المفاصل ثانوي II. شكل (13-1، b)

وبالنسبة لوضع مفصل يربط قضيبين فإنه يلغي مجهولاً واحداً هو عزم الاستمرار بين القضيبين، وبالنسبة لوضع مفصل يربط n قضيب يوافق $n-1$ مفصل عادي (أي يلغي $n-1$ مجهول). شكل (14-1)

مثلاً المفصل الذي يربط العناصر الثلاثة يكافئ مفصلين بسيطين. شكل (15-1)

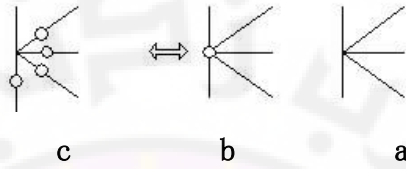




b

a

شكل (13-1)

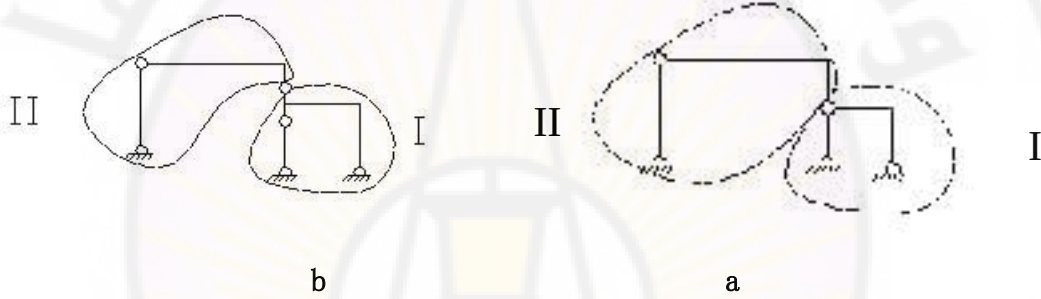


c

b

a

شكل (14-1)



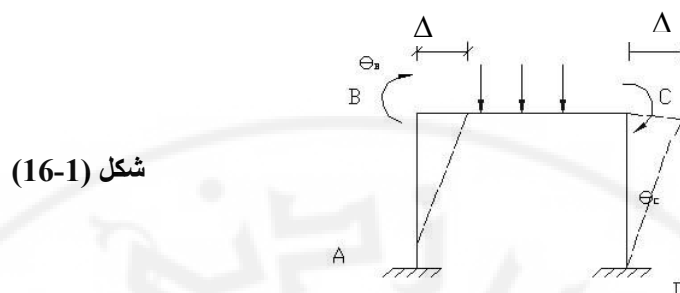
b

a

شكل (15-1)

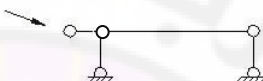
هناك أسلوب آخر لحل المنشآت الغير مقررة هو طريقة الانتقالات، المجاهيل في هذه الطريقة هي الانتقالات التي تتوافق مع درجات الحرية للمنشأ .
 فالعقدة في منشأ لها إمكانية الدوران، ويمكن أن يكون لها إمكانية الإزاحة.
 مثلاً الإطار المبين في الشكل (16-1) يحوي إمكانية الدوران للعقدة $B(\theta_B)$ ، وإمكانية الدوران للعقد $C(\theta_C)$ ، وإمكانية الإزاحة Δ للمنشأ.

إن معرفة درجة الإزاحة في المنشأ يمكن تحديدها بمعرفة عدد القضبان اللازمة لتشكيل صلد من المنشأ مع افتراض أن العقد مفاصل. شكل (17-1)



شكل (17-1)

قيّد يمنع الإزاحة



إن عزوم الطرفين لعنصر تتعلق بالحمولات الطبقة على العنصر (عزوم وثاقة)، وتتعلق بزوايا الدوران، وكذلك بالإزاحة (الانتقال النسبي للطرفين بشكل متعامد على محور العنصر).

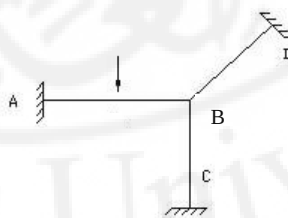
فالعنصر AB والعنصر CD يعانيان من وجود عزوم إزاحة، في حين أنه لا توجد عزوم إزاحة في العنصر BC .

من كتابة معادلات التوازن في العقد، ومعادلات توازن إضافية توافق حالات الإزاحة في المنشأ نحصل على جملة معادلات نحدد من خلالها انتقالات المنشأ.

بمعرفة الانتقالات نحدد العزوم على أطراف العناصر ومن ثم القوى الداخلية.

إن كل من الأسلوبين السابقين في حل المنشآت الغير مقررة (طريقة القوى

وطريقة الانتقالات) يمكن أن يكون فعالاً في حل أنواع معينة من المسائل. مثلاً :

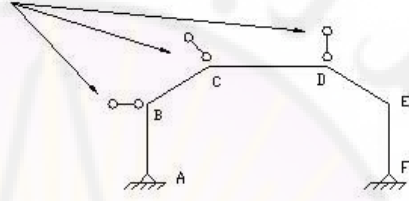


شكل (18-1)

يبين الشكل (18-1) إطار غير مقرر من الدرجة 6 بالنسبة لطريقة القوى بالنسبة لطريقة الانتقالات فهناك مجهول واحد لا غير θ_B .

ثلاثة قيود لمنع الإزاحة

شكل (19-1)

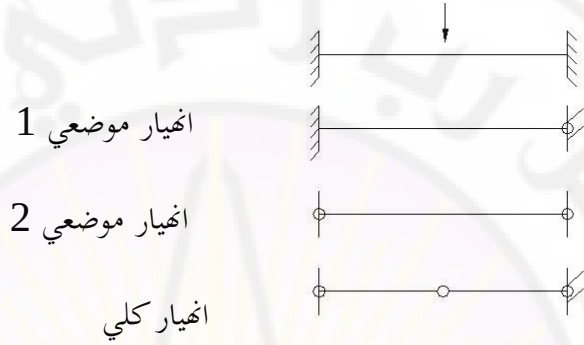


ويبين الشكل (19-1) إطار غير مقرر من الدرجة الأولى بالنسبة لطريقة القوى وبالنسبة لطريقة الانتقالات هناك 7 مجاهيل: (4 دورانات و 3 إزاحات).
عندما تكون درجة عدم التقرير السكوني في طريقة القوى، أو عدد الانتقالات في طريقة الانتقالات عالياً (أكثر من ثلاثة) يصبح من المناسب الحل بواسطة الحاسوب. حيث تتوفر برامج جاهزة للحساب الإنشائي، أو يمكن برمجة الطريقة للحل بمساعدة الحاسوب.

وتتميز المنشآت الغير مقررة بالخصائص الآتية :

- هبوط الساند، أو تغير درجة الحرارة يؤدي إلى نشوء قوى داخلية.

- القوى الداخلية تتبع لقساوات العناصر (تغير المقاطع يؤدي إلى تغير القوى الداخلية).
- اقتصادية أكثر من المنشآت المقررة .
- مناسبة لطريقة الإنشاء (الصب في المكان حيث يكون اتصال العناصر مستمراً).
- يحصل توزيع للاجهادات عند حصول انهيار موضعي. شكل (1-20)



شكل (1-20)

الجائز المرافق :

إن فكرة الجائز المرافق التي تتلخص باعتبار مخطط العزم كحمولة على جائز، نسميه بالجائز المرافق، وتحدد شروط استناد هذا الجائز من شروط تشوه الجائز الأصلي، حيث إن رد الفعل في الجائز المرافق يقابل دوران في الجائز الأصلي، والعزم في الجائز المرافق يقابل انتقال، (تم التطرق لهذه الفكرة في مقرر مقاومة المواد).

سنبين فيما يلي أمثلة في استخدام فكرة الجائز المرافق ب :

- حساب تشوه نقاط في الجائز.

- حل لبعض الجوائز الموثوقة الطرفين، والموثوقة من طرف، والمتفصلة من طرق (حساب عزوم الوثاقة).
- حل لبعض الجوائز غير مقررة.
- إيجاد العلاقة بين عزوم الطرفين وبين انتقالات الطرفين

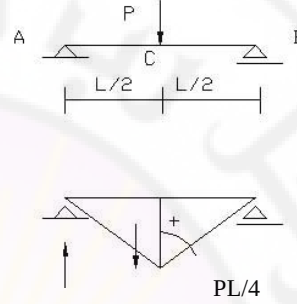
مثال : حساب الانتقال في الوسط لجائر بسيط يخضع لقوة مركزة في الوسط. شكل (12-1)

$$EI\theta_A = \frac{1}{2} \frac{PL}{4} \frac{1}{2}$$

$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{PL}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{EI}$$

$$= \frac{PL^3}{48EI}$$



شكل (21-1)

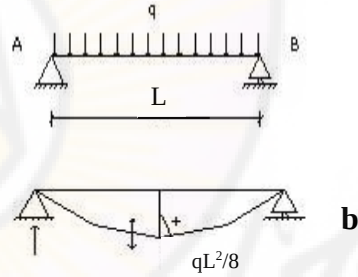
- جائر بسيط يخضع لقوة موزعة بانتظام. شكل (22-1)

$$\theta_A = \frac{3}{3} \frac{qL^2}{8} \frac{1}{2} \frac{1}{EI}$$

$$= \frac{qL^3}{28EI}$$

$$\Delta_C = \frac{qL^2}{24EI} \frac{5}{8} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5qL^4}{384EI}$$

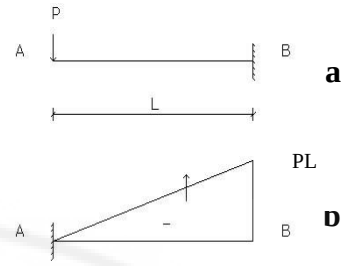


شكل (22-1)

- جائز ظفري يخضع لقوة مركزة شكل (23-1)

$$\Delta_A = \frac{1}{2} L P L \frac{2}{3} L \frac{1}{EI}$$

$$= \frac{PL^3}{8EI}$$

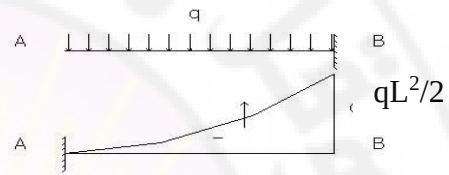


شكل (23-1)

- جائز ظفري يخضع لقوة موزعة بانتظام. شكل (24-1)

$$\Delta_A = \frac{1}{3} L \frac{qL^2}{2} \frac{3}{4} L \frac{1}{EI}$$

$$= \frac{qL^4}{8EI}$$



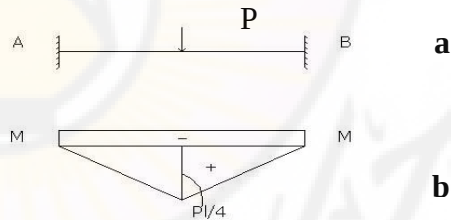
شكل (24-1)

حساب عزوم الوثاقة

- جائز موثوق الطرفين يخضع لقوة مركزة في المنتصف

$$ML = \frac{1}{2} L \frac{PL}{4}$$

$$M = \frac{PL}{8}$$

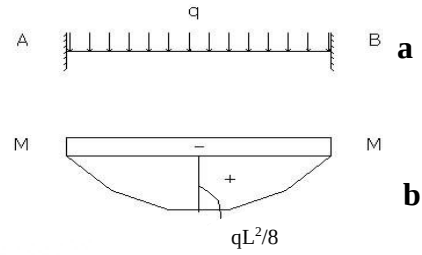


شكل (25-1)

- جائز موثوق من الطرفين يخضع لحمولة موزعة بانتظام. شكل (26-1)

$$ML = \frac{2}{3} L \frac{qL^2}{8}$$

$$M = \frac{qL^2}{12}$$



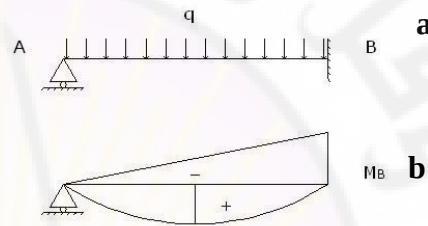
شكل (26-1)

- جائز موثوق طرف ومتمفصل من طرف شكل (27-1)

$$\sum M_A = 0 \text{ للجائز المرافق}$$

$$\frac{1}{2} M_B L \frac{2}{3} L = \frac{2}{3} L \frac{qL^2}{8} \frac{L}{2}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{8}$$



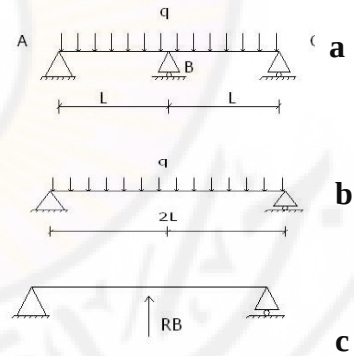
شكل (27-1)

- حل جائز غير مقرر (جائز مستمر على فئتين) :

$$\Delta_B = 0$$

$$\frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{R_B(2L)^3}{48EI}$$

$$R_B = \frac{5}{4} qL$$



شكل (28-1)

- العلاقة بين عزمي الطرفين وبين الانتقالات وإزاحة الطرفين : شكل (29-1)

$$\theta_A = \frac{AC_1}{LEI} + \frac{1}{2}LM_A \frac{2}{3EI} + \frac{1}{2}LM_B \frac{1}{3EI} + \frac{\Delta}{L}$$

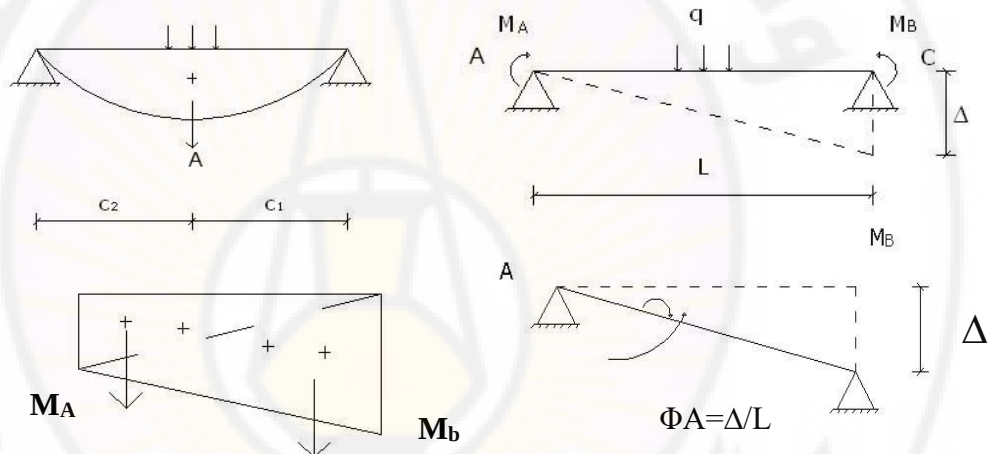
$$\theta_B = \frac{AC_2}{L} \frac{1}{EI} + \frac{1}{2}LM_A \frac{1}{3EI} + \frac{1}{2}LM_B \frac{2}{3EI} - \frac{\Delta}{L}$$

$$2\theta_A - \theta_B = \frac{2AC_1}{LEI} + \frac{M_A L}{2EI} + \frac{3\Delta}{L} - \frac{AC_2}{LEI}$$

$$M_A = \frac{4EI}{L} \theta_A - \frac{2EI}{L} \theta_B - \frac{4AC_1}{L^2} + \frac{2AC_2}{L^2} - \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

وبالمثل نجد :

$$M_B = -\frac{2EI}{L} \theta_A + \frac{4EI}{L} \theta_B + \frac{2AC_1}{L^2} - \frac{4AC_2}{L^2} + \frac{6EI\Delta}{L^2}$$



شكل (29-1)



الفصل الثاني

نظريات الطاقة



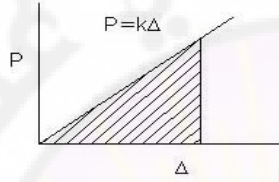
1- مفهوم العمل والطاقة :

يمكن التعرف على مفهوم الطاقة بدراسة نابض ثابت صلابته k ، عندما يخضع النابض إلى قوة P يحصل انتقال Δ لنهاية النابض، وتكون القوة P والاستطالة Δ متناسبة خطياً. شكل (1-2)

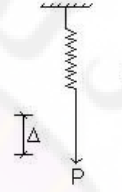
$$P = K\Delta$$

خلال الانتقال Δ تقوم القوة P بعمل خارجي W

$$W = \frac{1}{2} P\Delta$$



b



a

شكل (1-2)

يظهر العامل $\frac{1}{2}$ لأن القوة P تتناسب مع Δ (القوة ليست ثابتة) والعمل يمثل مساحة

المثلث المظلل في تابع القوة $P = K\Delta$

العمل الخارجي W يتحول إلى طاقة كامنة داخلية U في النابض ويتحقق :

$$\begin{aligned} W = U &= \frac{1}{2} P\Delta \\ &= \frac{1}{2} \frac{P^2}{K} = \frac{1}{2} K\Delta^2 \end{aligned}$$

حيث نلاحظ وجود العامل $\frac{1}{2}$ ، القوة المرفوعة 2 التقسيم على عامل الصلابة.

إذا اعتبرنا جائزاً بسيطاً يخضع لقوة P في المنتصف، شكل (2-2) فالانتقال Δ في المنتصف (نقطة تطبيق القوة) يعطى بالعلاقة:

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$P = \frac{48EI}{L^3} \Delta$$

$$= K\Delta, K = \frac{48EI}{L^3}$$

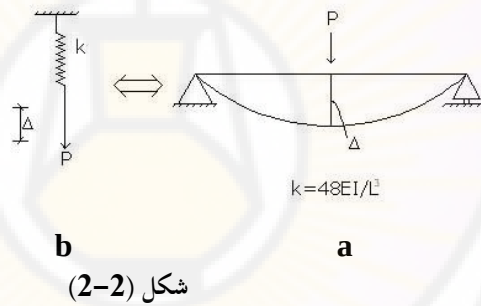
فالجائز يكافئ نابض ثابت صلابته

$$K = \frac{48EI}{L^3}$$

تقوم القوة P بعمل خارجي W

$$W = \frac{1}{2} P\Delta = \frac{1}{2} P \frac{PL^3}{48EI} = \frac{P^2 L^3}{96EI} = U$$

وهذا العمل يساوي الطاقة الكامنة الداخلية في الجائز نتيجة عمل القوى الداخلية في الجائز.



2- الطاقة الكامنة بدلالة الاجهادات الداخلية:

لنعتبر عنصر تفاضلي حجمي $dv = dxdydz$ من المنشأ. يؤثر في كل سطح إجهاد ناظمي واجهادين مماسين. شكل (3-2)

تحت تأثير هذه الاجهادات تحصل تشوهات في العنصر التفاضلي.

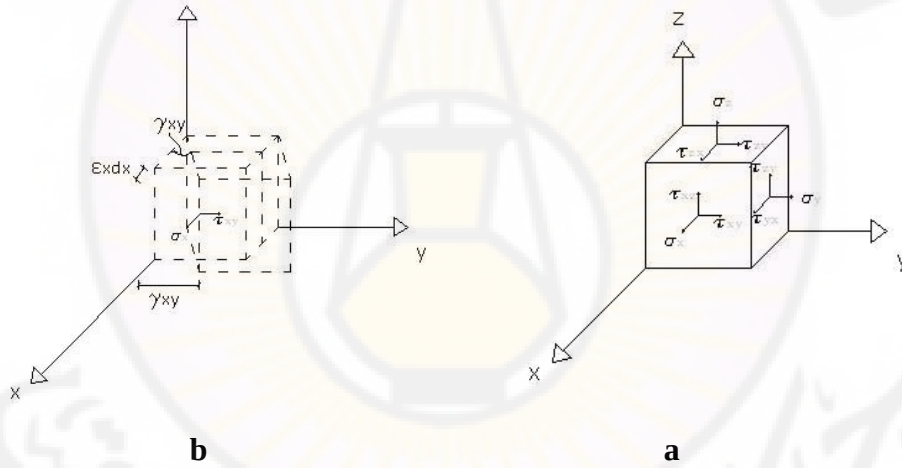
التشوهات الطولية:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

μ عامل التمدد العرضي (عامل بواسون)



شكل (3-2)

تشوهات اجهادات القص

$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}$$

حيث :

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \text{ عامل مرونة القص}$$

$$\epsilon_{yx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yx}$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}$$

والعمل الذي تقوم به القوة الداخلية للعنصر التفاضلي الذي يمثل الطاقة الكامنة التفاضلية dU يساوي:

$$\begin{aligned} dU = & \frac{1}{2} \sigma_x dydz \cdot \epsilon_x dx + \frac{1}{2} \sigma_y dx dz \cdot \epsilon_y dy \\ & + \frac{1}{2} \sigma_z dx dy \cdot \epsilon_z dz + \frac{1}{2} \tau_{xy} dydz \cdot \epsilon_{xy} dx \\ & + \frac{1}{2} \tau_{yz} dzdx \cdot \epsilon_{yz} dy + \frac{1}{2} \tau_{zx} dx dy \cdot \epsilon_{zx} dz \end{aligned}$$

بالتعويض في علاقات التشوهات بدلالة الاجهادات نحصل على :

$$dU = \frac{1}{2E} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] dv$$

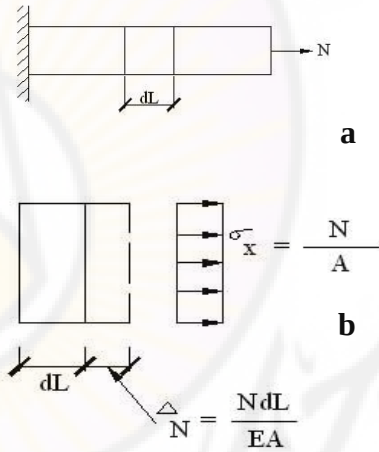
والطاقة الكامنة الكلية في المنشأ هي تكامل بالنسبة للحجم في الطاقة الكامنة التفاضلية

$$U = \int_v dU$$

3- الطاقة الكامنة بدلالة القوى الداخلية:

أ- حالة قوة ناظمية : لنعتبر أن عنصراً يتعرض إلى قوة ناظمية N ولنأخذ عنصر تفاضلي dL

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} N \Delta_N \\ \Delta_N &= \varepsilon_x dL = \frac{\sigma_x}{E} dL \\ &= \frac{N}{EA} dL \\ dU &= \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dL \end{aligned}$$



شكل (4-2)

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dL \quad \text{الطاقة الكامنة}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L \quad \text{في حالة } N \text{ ثابتة على طول العنصر } L$$

$$U = \sum \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L \quad \text{لمجموعة عناصر (كحالة الجائز الشبكي)}$$

ب- حالة قوة خاصة : وتميز الحالتين :

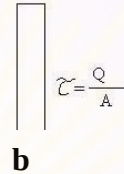
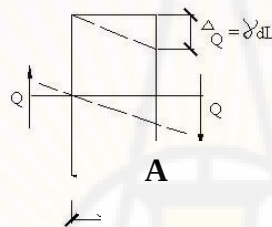
ب-1 : حالة توزيع منتظم :

$$dU = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q$$

$$\Delta_Q = \frac{\delta U}{\delta Q}$$

$$= \frac{\zeta}{C}$$

$$= \frac{\zeta}{A}$$



$$dU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{AQ} dL$$

شكل (5-2)

ب-2 : حالة توزيع حقيقي : لنعتبر مقطعاً مستطيلاً bh ، بسبب

ترافق العزم والقوة القاصة فإن اجهادات القص في المقطع

$$\zeta = \frac{Q\delta}{Ib} \quad \text{تتغير وفق العلاقة:}$$

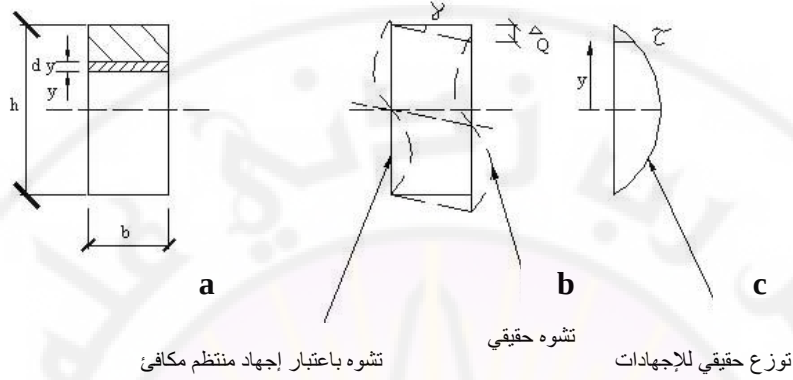
حيث :

العزم السكوني للمساحة المحددة δ $= b \left(y - \frac{h}{2} \right) \left(\frac{1}{2} y + \frac{h}{2} \right)$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

بـ y وطرف القطع

(المساحة المظللة)



شكل (6-2)

إيجاد العمل في العنصر dL يتم بإجراء تكامل على مساحة القطع

$$\begin{aligned} dU &= 2 \int_0^{h/2} \frac{1}{2} \tau_F dy \cdot \Delta dL \\ &= 2 \int_0^{h/2} \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} b dy \cdot dL \\ &= \int_0^{h/2} \frac{Q^2 S^2}{I^2 b^2 G} b \cdot dy \cdot dL \\ &= \int_0^{h/2} \frac{Q^2}{I^2 b^2 G} \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 b \cdot dy \cdot dL \\ &= \frac{Q^2 b}{4 I^2 G} dL \int_0^{h/2} \left(\frac{h^2}{16} - 2 \frac{h^2}{4} y^2 + y^4 \right) \cdot dy \end{aligned}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

بإجراء التكامل وبتعويض :

$$dU = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{AG} dL \quad \text{نجد :}$$

العلاقة يمكن أن تكتب بالشكل الآتي :

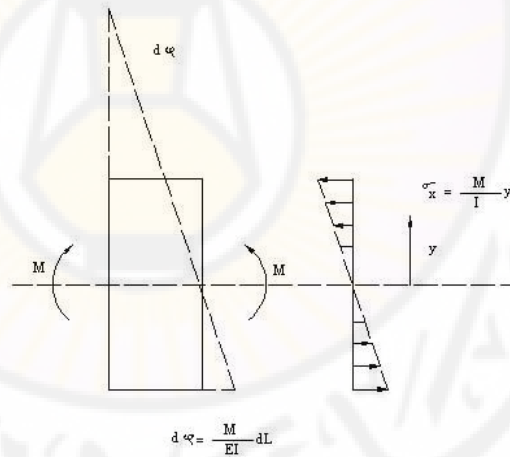
$$dU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{KAG} dL$$

حيث : K عامل توزيع اجهدادات القص ويتعلق بشكل المقطع.

$$K = \frac{5}{6} \quad \text{مقطع مستطيل.}$$

ج : حالة عزم :

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M \\ &= \frac{1}{2} M d\varphi \\ &= \frac{1}{2} M \cdot \frac{d\varphi}{dL} dL \\ &= \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dL \end{aligned}$$



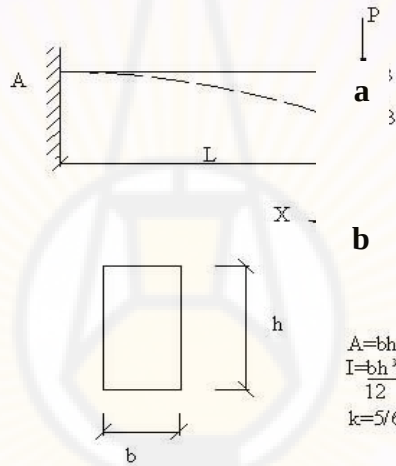
الطاقة الكامنة الداخلية بدلالة القوى الداخلية: (الحالة العامة للمنشآت الخطية المستوية).

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dL + \int \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dL + \int \frac{1}{2} \frac{Q^2}{KAG} dL$$

مثال: المطلوب حساب العمل الخارجي W والطاقة الداخلية U والانتقال Δ_B

$$W = \frac{1}{2} P \Delta_B$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dL + \int_0^L \frac{1}{2} \frac{Q^2}{KAG} dL$$



$$Mx = -Px$$

$$Qx = +P$$

$$dL = dx$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2EI} (-Px)^2 dx + \int_0^L \frac{P^2}{2KAG} dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{P^2 L^3}{3EI} + \frac{1}{2} \frac{P^2 L^2}{KAG}$$

لدينا : G

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$\mu = 0.2 \rightarrow 0.3$ عامل التمدد العرضي (القيم العملية)

$$\mu = 0.25$$

نعمد :

$$G = 0.4E$$

بمساواة العمل الخارجي والطاقة الداخلية

$$U = W$$

نجد الانتقال Δ_B

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{KAG} \\ &= \frac{PL^3}{3EI} \left[1 + \frac{3EI}{KAGL^2} \right] \\ &= \frac{PL^3}{3EI} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

إن النسبة الأعظمية لـ $\frac{h}{L}$ هي بحدود

$$\max \frac{h}{L} = \frac{1}{5}$$

بالتالي :

$$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI} [1 + 0.03]$$

من العلاقة نجد أن تأثير القوة القاصة بالنسبة للعزم M هو تأثير ضئيل 3% ؛
لذلك يهمل تأثيرها في الحساب العملي .

أيضاً تأثير القوة N بالنسبة إلى M ويهمل في الحسابات العملية؛ لذلك يبسط
حساب الطاقة الكامنة إلى:

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dL$$

بالنسبة للمنشآت المعرضة للانعطاف (إطارات

وجوائز)، أي نهمل تأثير N و Q بالنسبة لـ M
شكل (9-2 ، a)

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dL$$

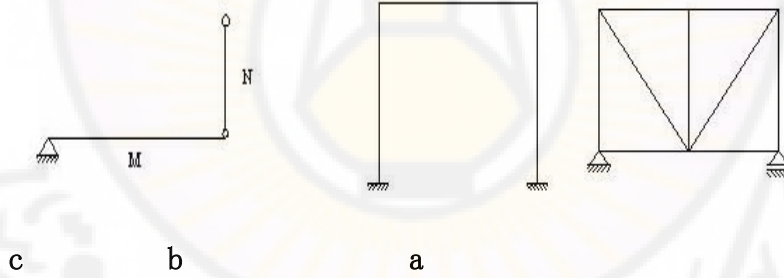
$$= \sum \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L$$

بالنسبة للجوائز الشبكية شكل (9-2 ، b)

$$U = \int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dL$$

$$+ \int \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dL$$

بالنسبة للمنشآت التي تحوي عناصر انعطاف
وعناصر قوى محوية شكل (9-2 ، c)



شكل (9-2)

4- نظرية كاستليانو

أ- حالة كاستليانو الأولى :

وتنص على أن مشتق الطاقة الكامنة بالنسبة إلى قوة مؤثرة في المنشأ يساوي

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \text{ أي: القوة وفق اتجاه القوة، أي:}$$

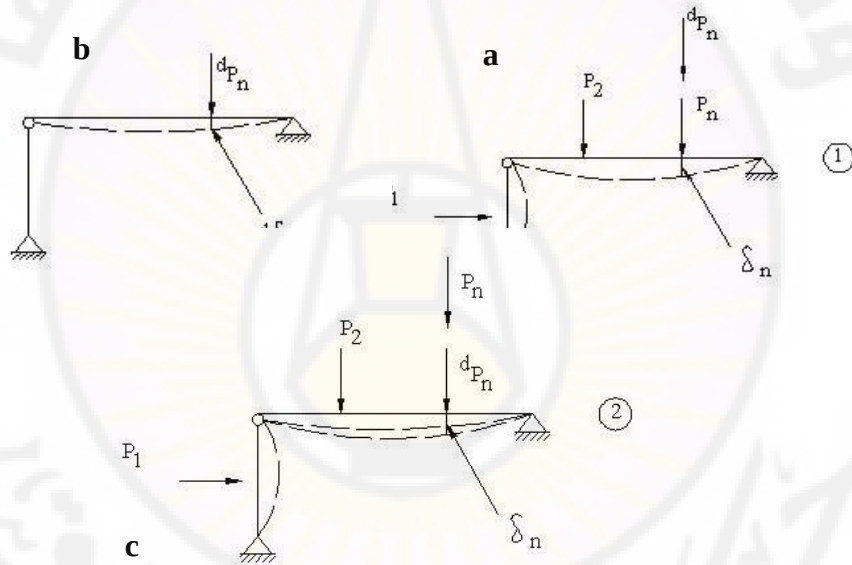
يمكن أن نبرهن على ذلك باعتبار المنشأ المبين الذي يخضع للقوى $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، فالطاقة الكامنة للمنشأ تتبع لهذه القوى، أي :

$$U = U (P_1, P_2, \dots, P_n)$$

بفرض أن القوة P_n قد زادت بمقدار تفاضلي dP_n فإن الطاقة الكامنة تزداد

وتصبح في هذه الحالة (الحالة -1) :

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n$$



شكل (10-2)

لنفترض أنه تم تطبيق الزيادة التفاضلية dP_n في البداية دون وجود الأحمال p_n ، p_2 ، p_1 ، ... ، فنحصل على تشوة تفاضلي $d\delta_n$ ويكون لدينا عمل خارجي $\frac{1}{2} dP_n \cdot d\delta_n$ وهو عمل تفاضلي من الدرجة الثانية يمكن إهماله أمام مقادير تفاضلية من الدرجة الأولى.

نفترض الآن تطبيق القوى p_1 ، p_2 ، p_n ، ... ، فالطاقة الكامنة في هذه الحالة (الحالة -2) هي: $U + dP_n \cdot \delta_n$ بمساواة الطاقة الكامنة في الحالتين نجد :

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n$$

وهي علاقة كاستليانو الأولى.

ملاحظات :

1- يمكن أن تمثل القوة p عزم M ومن ثم δ تمثل زاوية دوران θ

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M}$$

2- يبسط حساب مشتق الطاقة الكامنة إلى :

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dL \quad \text{للإطارات والجوائز}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P} &= \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} dL \quad \text{للجوائز الشبكية} \\ &= \sum \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} L \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dL + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} dL \quad \text{للمنشآت المشتركة (عناصر انعطاف)}$$

وعناصر قوى محورية)

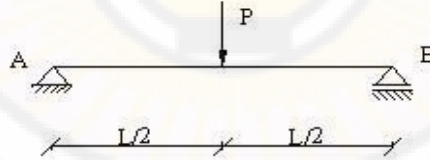
3- في حال حساب انتقال نقطة لا تؤثر فيها قوة فعلية في اتجاه الانتقال المطلوب، يتم تطبيق قوة وهمية $\bar{P}$ في جهة الانتقال المطلوب، بعد عملية الاشتقاق للقوة الداخلية نعدم القوة الوهمية.

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}}$$

مثال : شكل (11-2)

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dL \\ &= 2 \int_0^{L/2} \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{2}x\right) \left(\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{P}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} \\ &= \frac{PL^3}{48EI}\end{aligned}$$

$$M_x = \frac{P}{2}x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial P} = \frac{x}{2}$$



شكل (11-2)

مثال : حساب Δ_A و θ_A : شكل (2-12)

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} dL$$

$$= \int_0^L \frac{1}{EI} \left(-\bar{P}x - \frac{qx^2}{2} \right) (-x) dx$$

$$= \frac{qL^3}{8EI}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial \bar{M}_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}_A} dL$$

$$= \int_0^L \frac{1}{EI} \left(0 - \frac{qx^2}{2} \right) (-1) dx$$

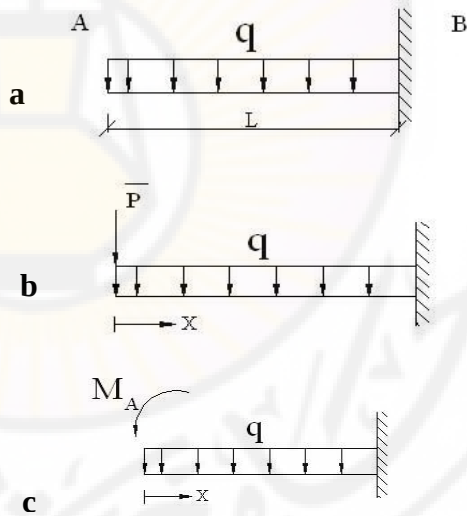
$$= \frac{qL^3}{6EI}$$

$$M_x = -\bar{P}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \bar{P}} = -x$$

$$M_x = -\bar{M}_A - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \bar{M}_A} = -1$$



ب- نظرية كاستليانو الثانية (نظرية العمل الأصغري)

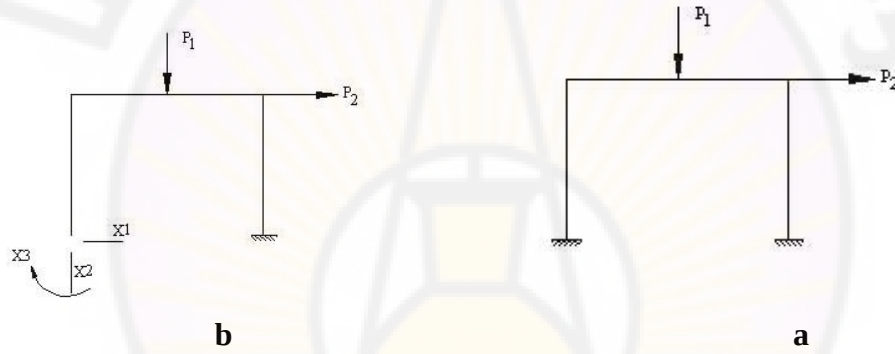
وتنص على أن القوى الفائضة في المنشأ غير المقرر تأخذ قيماً، بحيث تجعل الطاقة الكامنة في نهاية حدية أصغرية.

مثلاً بالنسبة للإطار المبين :

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_3} = 0$$



شكل (2-13)

وبتعبير آخر فإن التعابير السابقة تمثل الانتقالات عند القيود الإضافية التي تم إزالتها والتعويض عنها بالمجاهيل، ومن ثم فهذه النظرية تتطابق مع النظرية الأولى، ويمكن أن تقرأ بالشكل: الانتقالات عند المجاهيل الإضافية معدومة .

مثال : حل المنشأ الغير مقرر بطريقة كاستليانو الثانية : شكل (14-2)

$$M_x = Rx - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial R} = x$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0$$

$$\int_0^L \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial R} dL = 0$$

$$\int_0^L \left(Rx - \frac{q}{2} x^2 \right) x dx = 0$$

$$\int \left(Rx^2 - \frac{q}{2} x^3 \right) dx = 0$$

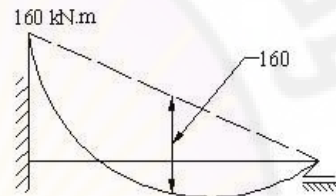
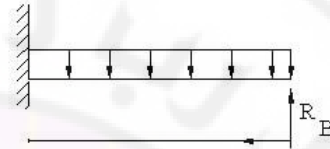
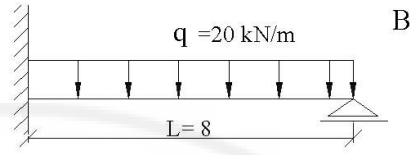
$$\left[\frac{Rx^3}{3} - \frac{qx^4}{8} \right]_0^L = 0$$

$$\frac{Rx^3}{3} - \frac{qL^4}{8} = 0$$

$$R = \frac{3}{8} qL$$

$$= \frac{3}{8} (20)8$$

$$= 60 \text{ kN}$$



M_{final}

شكل (14-2)

مثال : يطلب تعيين ردود الأفعال وعزوم المساند للإطار غير المقرر والموضح في الشكل،

علماً بأن عزم العطالة للعنصر الأفقي (I_2) يساوي ضعف عزم العطالة (I_1)

لكل من العنصرين الرأسين ($I_2 = 2I_1$)

(بطريقة نظرية كاستليانو) :

الحل : بكتابة معادلة العزم للعنصر الرأسي (AB) أو العنصر (CD) نجد :

$$M_y = M - H_y \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial M} = 1, \frac{\partial M_y}{\partial H} = -y$$

حيث (M) هي العزم عند المسند (A) ، ويلاحظ نتيجة للتناظر أن عزوم

الوثاقة عند المسندين (A, B) متساوية بالإضافة لتساوي ردود الأفعال الرأسية

والأفقية عند هذين المسندين.

- معادلة العزم للعنصر الأفقي :

$$M_x = M + \frac{q\lambda}{2} X - Hh - \frac{qX^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial M} = 1, \frac{\partial M_x}{\partial H} = -h$$

يتم معالجة المسألة على النحو التالي :

3- نكتب معادلة الميل أو الدوران عند النقطة (A) علماً أن قيمة

الميل معدومة بسبب الوثاقة (A) .

$$0 = \theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = 2 \int_0^h \frac{2M}{2EI_1} \frac{\partial M_y}{\partial M} dy + \int_0^\lambda \frac{2M}{2EI_2} \frac{\partial M}{\partial M} dx$$

$$0 = \frac{2}{I_1} = \int_0^h (M - Hy)(1) dy + \frac{1}{I_2} \int_0^\lambda M + \frac{q\lambda}{2} x - Hh - \frac{qx^2}{2} (1) dx$$

$$0 = \frac{2h}{I_1} = (M - \frac{Hh}{2}) + \frac{1}{I_2} (M + \frac{q\lambda^2}{12} - Hh) = 0$$

بتعويض المقادير (I_2, I_1, h) بقيمتها

$$18M - 72H + 288 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

-4 نكتب معادلة الانتقال الأفقي عند النقطة (A) علماً بأن

هذا الانتقال يساوي الصفر.

$$0 = \delta h = \frac{\partial U}{\partial H} = 2 \int_0^h \frac{2M}{2EI_1} \frac{\partial My}{\partial H} dy + \int_0^\lambda \frac{2M}{2EI_2} \frac{\partial Mx}{\partial H} dx$$

$$0 = \frac{2}{I_1} = \int_0^h (M - Hy)(-y) dy + \frac{1}{I_2} \int_0^\lambda M + \frac{q\lambda x}{2} - Hh - \frac{qx^2}{2} (-h) dx$$

$$0 = \frac{2}{I_1} = \int_0^h (Hy^2 - My) dy + \frac{1}{I_2} \int_0^\lambda (Mx + \frac{q\lambda x^2}{4} - Hhx - \frac{qx^2}{2})(-h) dx$$

$$0 = \frac{2}{I_1} = \left[\frac{Hy^2}{3} - \frac{My^2}{0} \right]_0^h + \frac{1}{I_2} \left[Mx + \frac{q\lambda x^2}{4} - Hhx - \frac{qx^3}{6} \right]_0^\lambda (-h)$$

$$= \frac{2}{I_1} = \left[\frac{Hy^2}{3} - \frac{My^2}{0} \right] + \frac{1}{I_2} \left[(-M\lambda h - \frac{q\lambda^3 h}{4} + Hh^2 \lambda + \frac{q\lambda^3 h}{6}) \right]$$

وبعد تعويض المقادير (λ, h, I_2) بقيمتها

$$360H - 72M - 1728 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1), (2) نجد :

$$H = 8t$$

$$M = 16mt$$

$$M_B = M_C = 32mt$$

5- نظرية العمل المتبادل (نظرية بيتي) :

لنعتبر حالتين للجائز المبين شكل (2-15) :

- الحالة الأولى: تؤثر القوة p_1 في الجائز في النقطة 1

- الحالة الثانية : القوة p_2 في النقطة 2

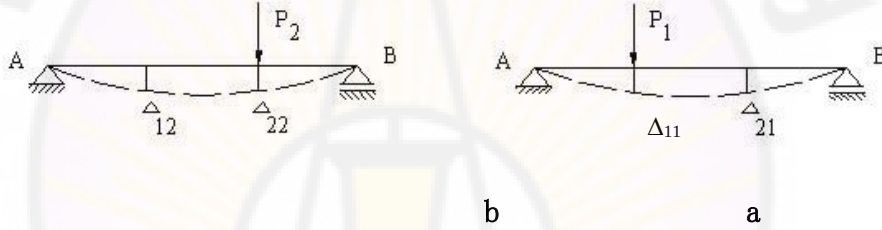
حسب النظرية يتحقق :

$$P_1 \Delta_{12} = p_2 \Delta_{21}$$

وبشكل عام :

$$W_{12} = W_{21}$$

أي إن العمل الذي تقوم به قوى الحالة الأولى من جراء انتقالات الحالة الثانية يساوي عمل قوى الحالة الثانية من جراء انتقالات الحالة الأولى.



شكل (2-15)

لبرهنة العلاقة السابقة نفترض تطبيق القوة p_2 بعد تطبيق القوة p_1 فالعمل

في هذه الحالة : شكل (2-16 ، a)

$$W = \frac{1}{2} p_1 \Delta_{11} + p_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} p_2 \Delta_{22}$$

نفترض الآن تطبيقاً تدريجياً للقوتين معاً؛ شكل (2-16 ، b) فالعمل في

هذه الحالة :

$$W = \frac{1}{2} p_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12}) + \frac{1}{2} p_2 (\Delta_{21} + \Delta_{22})$$

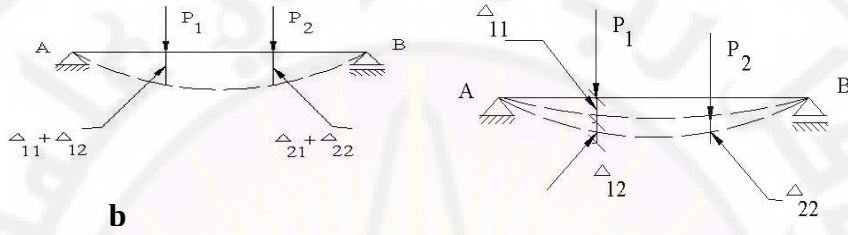
والعمل W في الحالتين متساوٍ، أي :

$$\frac{1}{2} p_1 \Delta_{11} + p_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} p_2 \Delta_{22} =$$

$$\frac{1}{2} p_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12}) + \frac{1}{2} p_2 (\Delta_{21} + \Delta_{22})$$

ونحصل على :

$$p_1 \Delta_{12} = p_2 \Delta_{21}$$



شكل (2-16)

6- نظرية الانتقال المتبادل (نظرية ماكسويل) :

نفرض أن القوة : $p_1 = 1$ تؤثر في النقطة 1 انتقال النقطة 2 من جراء تأثير هذه القوة هو δ_{21}

وهذا الانتقال يساوي الانتقال δ_{12} ، انتقال النقطة 1 من جراء تطبيق القوة $p_1 = 1$ في النقطة 2 ، أي :

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

وهذه العلاقة يمكن استنتاجها من علاقة العمل المتبادل بتعويض :

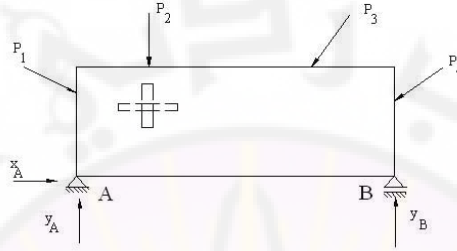
$$p_1 = p_2 = 1$$

الفصل الثالث

نظرية العمل الوهمي



يستخدم مبدأ الانتقال الوهمي ليبرهن على نظرية العمل الوهمي، وذلك على اعتبار أن المنشأة الموضحة بالشكل (1-2) متوازنة تحت تأثير القوى الخارجية وردود الأفعال إن كل عنصر في أي منشأ هو في حالة التوازن تحت تأثير الاجهادات الناتجة فيه والناجمة عن الحمولات الخارجية. فإذا كان المنشأ يبدي أي انتقال وهمي فإن العنصر سيتشوه ويتطاوّل ويدور كأنه عنصر صلب (صلد).



الشكل (1-2)

يحدد العمل الوهمي الكلي بواسطة الاجهادات المحيطة للعنصر بالقيمة (dw_i) الناتجة عن الحركات المحيطة للعنصر بسبب التشوه، أما الجزء المتبقي من العمل الوهمي $(dw_e - dw_i)$ فهو ناتج من حركة العنصر الذي يبدو وكأنه جسم صلب (صلد). وهذه الكمية تساوي الصفر حسب مبدأ العمل الوهمي (الانتقال الوهمي) وهذا يعني :

$$dw_e - dw_i = 0$$

$$dw_e = dw_i \quad \text{إذن}$$

إن العمل الوهمي في عناصر المنشأة كافة يعطينا : $w_e = w_i$

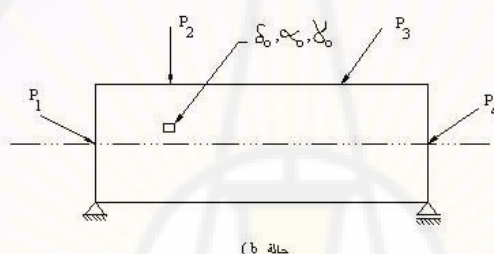
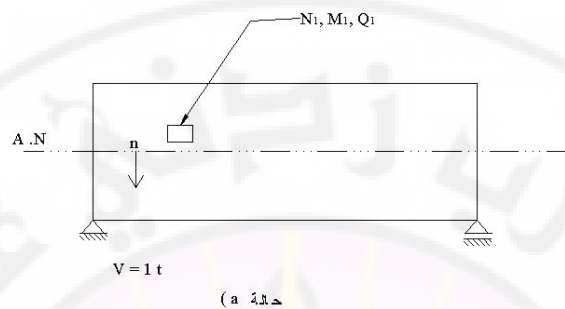
ونشير هنا إلى أن كل عنصرين متجاورين لهما اجهادات متساوية ومتعاكسة.

لذا فإن نظرية العمل الوهمي يمكن أن يعبر عنها بالشكل الآتي :

إذا كان لدينا منشأة مشوهة، بحالة توازن تحت تأثير مجموعة من القوى، فإنها

تبقى في حالة توازن خلال تأثيراتها لتشوهات وهمية صغيرة، حينئذ فإن العمل المعطى من القوى الخارجية يساوي للعمل للقوى الداخلية خلال التشوه الوهمي.

تحديد الانتقالات وزوايا الدوران



الشكل (2-2)

باستخدام نظرية العمل الوهمي فإنه من الضروري تحديد السهم الوهمي في أي مقطع $n(y_n)$ من أجل الجائز البسيط المبين والحمولة الموضحة بالشكل (b-2-2) نفترض أن جائزاً غير محمل لحمولة واحدة ($v = 1t$) في النقطة (n) الحالة (a) من الشكل (2-2)، وأن المنشأة قد خضعت للتشوه الوهمي تحت تأثير القوى (p)

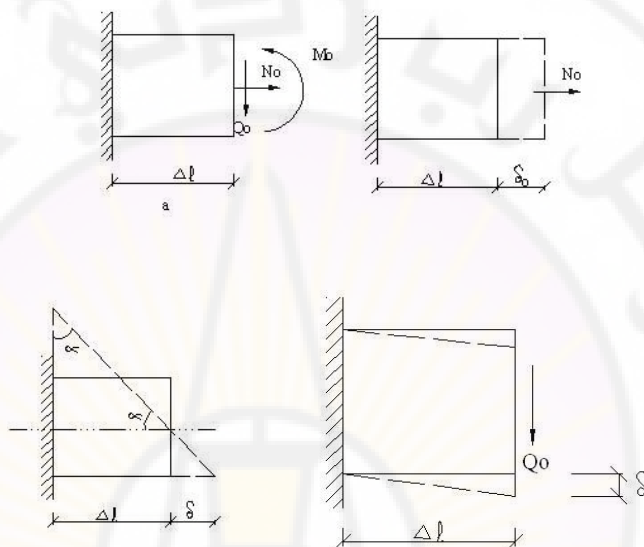
كما هو واضح من الشكل (2-2-b).

حسب نظرية العمل الوهمي لدينا :

$$W_e = W_i$$

$$1y_n = \sum_0^L N_1 \delta_0 + \sum_0^L M_1 \alpha_0 + \sum_0^L Q_1 \rho_0 \dots \dots \dots (1)$$

نستبدل قيم $\alpha_0, \delta_0, \rho_0$ بقيمها والتي يمكن إيجادها على الشكل الآتي كما هو موضح بالشكل (2-3).



الشكل (2-3)

* التشوه الناتج عن (N_0) هو :

$$\frac{\delta}{\Delta \lambda} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

$$\delta_0 = \frac{N_0}{A.E} \Delta\lambda$$

حيث (E) هو معامل المرونة أو معامل يونغ، والشكل (2-3-b) يوضح التشوه الناتج عن (N_0).

* التشوه الناتج عن (M_0) هو :

$$\frac{\delta'}{\Delta\lambda} = \frac{\sigma}{E} = \frac{My}{I.E}$$

$$\delta' = \frac{M_0 \cdot y}{I.E} \Delta\lambda$$

فالتشوه هو :

$$\alpha_0 = \frac{\delta'}{y} = \frac{M}{I.E} \Delta\lambda$$

وزاوية الدوران هي :

$$\frac{\phi}{\Delta\lambda} = \frac{\sigma}{G} = \frac{Q}{A_r G}$$

* التشوه الناتج عن Q هو :

$$\phi_0 = \frac{Q_0}{A_r G} \Delta\lambda$$

حيث (A_r) مساحة القطع الأصغرية وهي تساوي ($\frac{5}{6} A$) من المقطع المستطيل و

(G) عامل الصلابة $G = \frac{E}{2(1+m)}$ حيث (m) هو معامل بواسون

الشكل (2-3-d) يوضح التشوه الناتج عن (Q) .

من أجل الفولاذ المطاوع :

$$G = \frac{2100}{2(1+0,3)} = 800t / cm^2$$

$$G = \frac{220}{2(1+0,125)} = 100t / cm^2$$

حيث افترضنا عنصراً بطول (L) ومقطعاً عرضياً (A) وعزم العطالة (I) ، وهذا العنصر قد اقتطع من جائر خاضع لمجموعة حمولات خارجية ناتجة في العنصر، والتي تعطي:

N - قوة ناظمة

M - عزم انعطاف

Q - قوة قاطعة

نعوض قيم δ_0 ، α_0 ، ρ_0 في العلاقة (1) فنجد :

$$1.y_n = \sum_0^L \frac{N_0 N_1}{AE} \Delta\lambda + \sum_0^L \frac{M_0 M_1}{IE} \Delta\lambda + \sum_0^L \frac{Q_0 Q_1}{A_r G} \Delta\lambda \dots \dots \dots (2)$$

حيث N_0 ، M_0 ، Q_0 هي القوى الداخلية الناتجة عن الحمولات الخارجية، Q_1 ، N_1 ، M_1 هي القوى الداخلية الناتجة عن الحمولات الوهمية ($v = 1t$) المطبقة على الجائر غير المحمل في الوضع المبين وبالاتجاه الموافق للانتقال.

من أجل الجوائر والإطارات ذات المقطع النظامي يكون تأثير القوى النازمية والقاطعة صغيراً مقارنة مع عزوم الانعطاف، عندئذ فإن المعادلة (2) يمكن تبسيطها إلى الشكل :

$$1.y_n = \sum_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} \Delta\lambda$$

ومن أجل الجوائر الشبكية المتفصلة عند التقاء الأعضاء فإن العلاقة العامة تصبح:

$$1.y_n = \sum_0^L \frac{N_0 N_1}{AE} \Delta\lambda$$

وبطريقة مشابهة يمكن أن نبرهن على أن زاوية دوران الخط الوسطي للمنشأة (الجائر) في نقطة (n) ، وهذا يعني ميل الزاوية α_n الناتجة عن الحمولات الخارجية، يمكن تحديدها

بتطبيق حمولة عزم، وهي على الجائز غير الخاضع للحمولات (غير المحمل) ($v =$
 $1t.m$) في النقطة (n)، وهذا يعطينا قوى داخلية Q'_1, M'_1, N'_1 عندئذ :

$$1.\tan \alpha_n = 1\alpha_n = \sum_0^L \frac{N_0 N'_1}{AE} \Delta\lambda + \sum_0^L \frac{M_0 M'_1}{IE} \Delta\lambda + \sum_0^L \frac{Q_0 Q'_1}{A_r G} \Delta\lambda \dots \dots \dots (3)$$

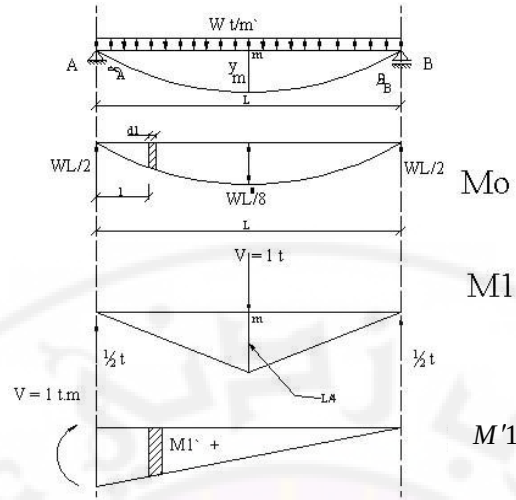
وكما ذكرنا أعلاه فإن العلاقة العامة (3) يمكن تبسيطها على الشكل الآتي في حالة الجوائز البسيطة والإطارات العادية :

$$1.\alpha_n = \sum_0^L \frac{M_0 M'_1}{EI} \Delta\lambda$$

في حالة الجوائز الشبكية البسيطة (العادية)

$$1.\alpha_n = \sum_0^L \frac{N_0 N'_1}{AE} \Delta\lambda$$

مثال: ليكن لدينا جائز يستند استناداً بسيطاً طوله (L)، حيث EI ذات قيمة ثابتة، معرض لحمولة موزعة بانتظام wt/m احسب الانتقال الشاقولي (Y_m) في وسط المجاز، وزاوية الدوران α_A عند المساند كما هو موضح بالشكل (4-2).



الشكل (4-2)

الحل: إنه من السهل حساب مخطط الانعطاف الناتج عن الحمولة الخارجية ورسمه (مخطط M_0)، وعزم الانعطاف الناتج عن الحمولة المطبقة $V = 1t$ شاقولياً في (m) للجائز غير الحمل (مخطط M_1)، ومخطط الانعطاف الناتج عن $V = +1mt$ المطبقة في (A) للجائز غير الحمل (مخطط M_1').
لدينا :

$$1.y_m = \sum_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} \Delta\lambda = \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda$$

$$= 2 \int_0^{L/2} \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda$$

ففي أي مقطع على بعد (λ) من الجهة اليسرى للمسند (A) لدينا :

$$M_0 = W \frac{L}{2} \cdot \lambda - W \frac{\lambda^2}{2}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot \lambda$$

ومنه يكون لدينا :

$$\begin{aligned} Y_m &= \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{WL}{2} \cdot \lambda - \frac{WL^2}{2} \right) \frac{1}{2} \lambda d\lambda \\ &= \frac{W}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} (L\lambda^2 - \lambda^3) d\lambda \\ &= \frac{W}{2EI} \left[L \cdot \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{5}{384} \frac{WL^4}{EI} \end{aligned}$$

ولدينا :

$$1. \alpha_A = \sum_0^L \frac{M_0 M'_1}{EI} \Delta \lambda = \int_0^L \frac{M_0 M'_1}{EI} d\lambda$$

وفي أي مقطع على بعد λ (من الجهة اليسرى للمسند (A)

$$M_0 = W \frac{L}{2} \cdot \lambda - W \frac{\lambda^2}{2}$$

$$M'_1 = 1 - \frac{\lambda}{L}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{WL}{2} \cdot \lambda - W \frac{\lambda^2}{2} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{L} \right) d\lambda \\ &= \frac{W}{2EI} \int_0^L \left(L\lambda - 2\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{L} \right) d\lambda \end{aligned}$$

$$= \frac{W}{2EI} \left[L \cdot \frac{\lambda^2}{2} - 2 \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4L} \right]_0^L = \frac{1}{24} \frac{WL^3}{EI}$$

2-3 حساب التكاملات:

يمكن تسهيل حل التكامل في المثال السابق باعتماد طريقة سهلة حيث يمكن أن نستخدم طريقة لحل مثل هذا التكامل :

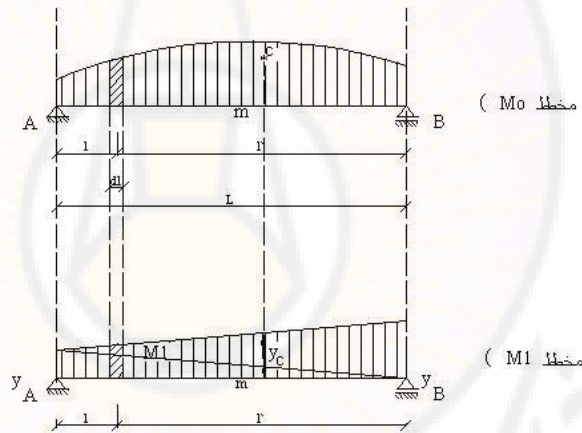
$$1. y_n = \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda \dots \dots \dots (4)$$

وسوف نستخدم ثلاث حالات يمكن مصادفتها في حساب التكاملات :

الحالة الأولى : حالة كون مخطط (M_0) منحنياً ومخطط (M_1) خطياً.

ليكن لدينا مخطط M_0 و M_1 المبينان بالشكل (2-5) من العلاقة (4) لدينا ثابت EI وذلك لكل عنصر من عناصر المنشأة، إذا لم يكن : ثابتاً EI فإنه يتوجب القسمة على العامل EI .

الشكل (2-5)



إن M_0 : تمثل مخطط عزم الانعطاف للحمولات الخارجية وهو بشكل منحنٍ و M_1 أو M'_1 تمثل مخطط العزم بشكل خطي.

وفي أي مقطع على بعد λ (و λ') من النهاية اليسرى على الترتيب للمساند $(A$ و $B)$ لدينا:

$$M_1 = y_A \frac{\lambda'}{L} + y_B \frac{\lambda}{L}$$

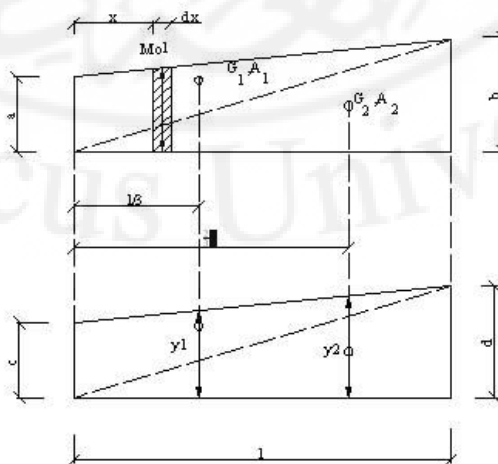
وهو يمثل مجموع عزمي مخطط (M_1) للمثلثين من تشابه المثلثات حيث (M_1) موضحة على الشكل (2-5).

من العلاقة (4) نجد :

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda &= \frac{1}{EI} \int_0^L M_0 \left(y_A \frac{\lambda'}{L} + y_B \frac{\lambda}{L} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{y_A}{L} \int_0^L M_0 \lambda' d\lambda' + \frac{y_B}{L} \int_0^L M_0 \lambda d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{y_A}{L} (A.b) + \frac{y_B}{L} (A.a) \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[A \left(y_A \frac{b}{L} + y_B \frac{a}{L} \right) \right] = \frac{1}{EI} (A y_C) \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

حيث (A) تمثل مساحة مخطط عزم الانعطاف (M_0) و (Y_C) هي الارتفاع المقابل لمركز ثقل (M_0) من مخطط (M_1) .

الحالة الثانية: حالة كون مخططي (M_0) و (M_1) بشكل خطي:



الشكل (6-2)

ليكن لدينا مخططا M_0 و M_1 المبينان بالشكل (6-2)

نلاحظ من الشكل أن مخطط (M_0) على شكل شبه منحرف قاعدته اليسرى (a) وقاعدته اليمنى (b) وارتفاعه (λ).

ومخطط (M_1) على شكل شبه منحرف قاعدته اليسرى (c) واليمنى (d) وارتفاعه (λ).

من الحالة الأولى لدينا حسب العلاقة :

$$\int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} (A_1 y_1 + A_2 y_2) \dots \dots \dots (6)$$

ولكن :

$$y_1 = c + \frac{d - c}{3} = \frac{2c + d}{3}$$

$$y_2 = c + \frac{2(d - c)}{3} = \frac{c + 2d}{3}$$

نعوض في العلاقة (6) قيم (y_1) و (y_2) فنجد:

$$\int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[A_1 \frac{(2c+d)}{3} + A_2 \left(\frac{c+2d}{2} \right) \right]$$

كما نعوض قيم (A_1) و (A_2) ضمن هذه العلاقة من مخططي عزيم الانعطاف:

$$A_1 = \frac{a\lambda}{2}, A_2 = \frac{b\lambda}{2}$$

$$\int_0^\lambda \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{\lambda}{EI} \left[\frac{a}{2} \frac{(2c+d)}{3} + \frac{b}{2} \left(\frac{c+2d}{3} \right) \right]$$

$$\int_0^\lambda \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{\lambda}{EI} \left[\frac{ac}{3} + \frac{ad}{6} + \frac{bc}{6} + \frac{bd}{3} \right]$$

وبترتيب العلاقة نجد :

$$\int_0^\lambda \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{\lambda}{EI} \left[\frac{a.c}{3} + \frac{b.d}{3} + \frac{a.d}{6} + \frac{b.c}{6} \right] \dots\dots\dots (7)$$

نلاحظ هنا أنه عندما تكون $(a = c)$ و $(b = d)$ تصبح العلاقة (7) على الشكل الآتي:

$$\int_0^\lambda \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{\lambda}{EI} \left[\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{a.b}{6} + \frac{ab}{6} \right]$$

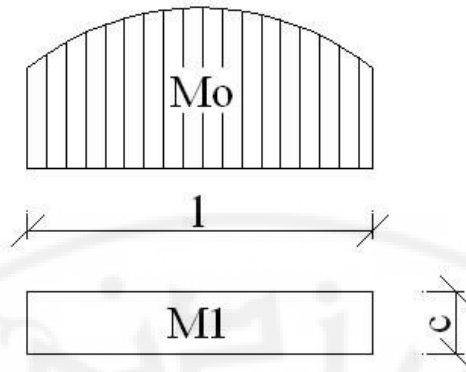
$$\int_0^\lambda \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{\lambda}{E3I} (a^2 + b^2 + ab) \dots\dots\dots (8)$$

الحالة الثالثة : وهي الحالة التي يكون فيها مخطط (M_0) منحنياً ومخطط (M_1)

قيمة ثابتة:

وتفسير ذلك أن مخطط M_1 على شكل مستطيل وذو ارتفاع ثابت (C) المبين

بالشكل (7-2) .



الشكل (7-2)

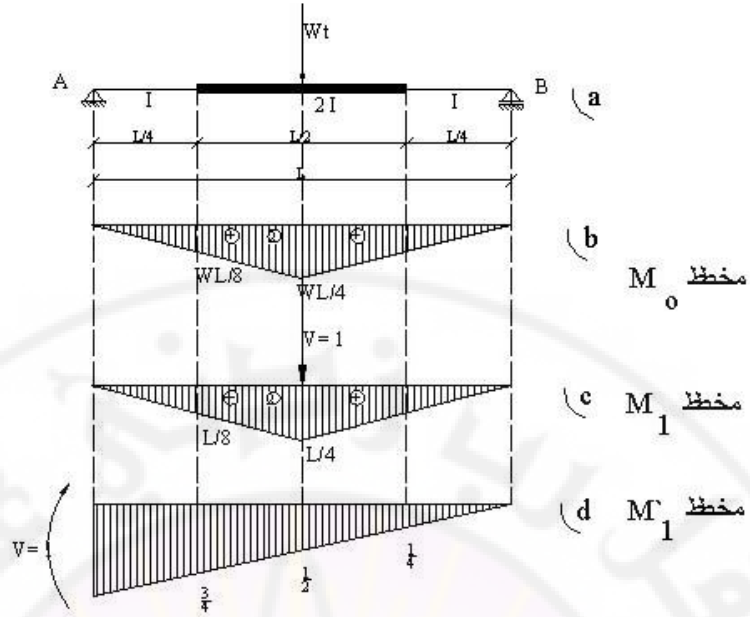
يمكن أن نكتب حسب ماسبق :

$$\int_0^{\lambda} \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{A.c}{EI}$$

وهنا نحسب مساحة (M_0) والتي هي (A) ونضربها بالارتفاع الثابت المقابل لمركز ثقل المساحة (C) ونقسمها على (EI) .

مثال: احسب الانتقال الشاقولي في وسط المجاز وزاوية الدوران عند المساند وذلك في حالة جائز بسيط الاستناد حيث $E = \text{const}$ و I متغيرة (كما يبينه الشكل) ويحمل حمولة متمركزة في وسط المجاز قدرها $(w \text{ ton})$.

الحل: المخططات الموضحة بالشكل الآتي تبين قيم M_0 و M_1 و M_1' فالانتقال للنقطة (n) وسط المجاز هو :



نلاحظ هنا أن هناك تناظراً في مخطط عزم الانعطاف (M_0)، ولذا نكتفي بحساب نصف مساحة مخطط عزم الانعطاف ونضربها بـ (2) كي نعمر على كامل مساحة العزم (M_0)

ومن الملاحظ أنه بوجود تغير في عزم الانعطاف فإنه يمكننا أن نجزي مخطط

عزم الانعطاف إلى قسمين (1) و (2) المبين بالشكل فنجد :

$$y_n = \frac{2}{E} \left[\frac{1}{I} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{WL}{8} \cdot \frac{L}{4} \times \frac{L}{12} + \frac{1}{2I} \left(\frac{WL}{8} \cdot \frac{L}{8} \cdot \frac{L/4}{3} + \frac{WL}{4} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L/4}{3} + \frac{WL}{8} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L/4}{6} + \frac{WL}{4} \cdot \frac{L}{8} \cdot \frac{L/4}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{E} \left[\frac{1}{I} \cdot \frac{WL^3}{768} + \frac{1}{2I} \left(\frac{WL^3}{4(192)} + \frac{WL^3}{4(48)} + \frac{WL^3}{4(192)} + \frac{WL^3}{4(192)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{WL^3}{384} + \frac{1}{4EI} \left[\left(\frac{WL^3 + 4WL^3 + WL^3 + WL^3}{192} \right) \right]$$

بعد توحيد المخارج (المقامات)

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{WL^3}{384} + \frac{1}{4EI} \left[\left(\frac{7WL^3}{192} \right) \right]$$

$$= \frac{4WL^3 + 14WL^3}{1536EI} = \frac{18WL^3}{1536EI} = \frac{3WL^3}{256EI}$$

أما زاوية الدوران في كل من A و B فهي :

$$\alpha_A = \beta_B \int_0^{\lambda} \frac{M_0 M'_1}{EI} d\lambda$$

$$= \frac{1}{E} \left[\frac{1}{I} \left(\frac{WL}{8} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{12} + \frac{WL}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{24} \right) + \frac{1}{2I} \left(\frac{WL}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{L}{12} + \frac{WL}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{12} + \frac{WL}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{24} + \frac{WL}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{L}{24} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2I} \left(\frac{WL}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{12} + \frac{WL}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{WL}{4} \cdot \frac{L}{24} + \frac{1}{2} \cdot \frac{WL}{8} \cdot \frac{L}{24} + \frac{1}{I} \left(\frac{WL}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{12} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{E} \left[\left(\frac{3WL^2}{384} + \frac{WL^2}{192} \right) + \frac{1}{2I} \left(\frac{3WL^2}{384} + \frac{WL^2}{96} + \frac{WL^2}{384} + \frac{3WL^2}{384} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2I} \left(\frac{WL^2}{96} + \frac{WL^2}{384} + \frac{WL^3}{384} + \frac{WL^2}{384} \right) + \frac{1}{I} \left(\frac{WL^3}{384} \right)$$

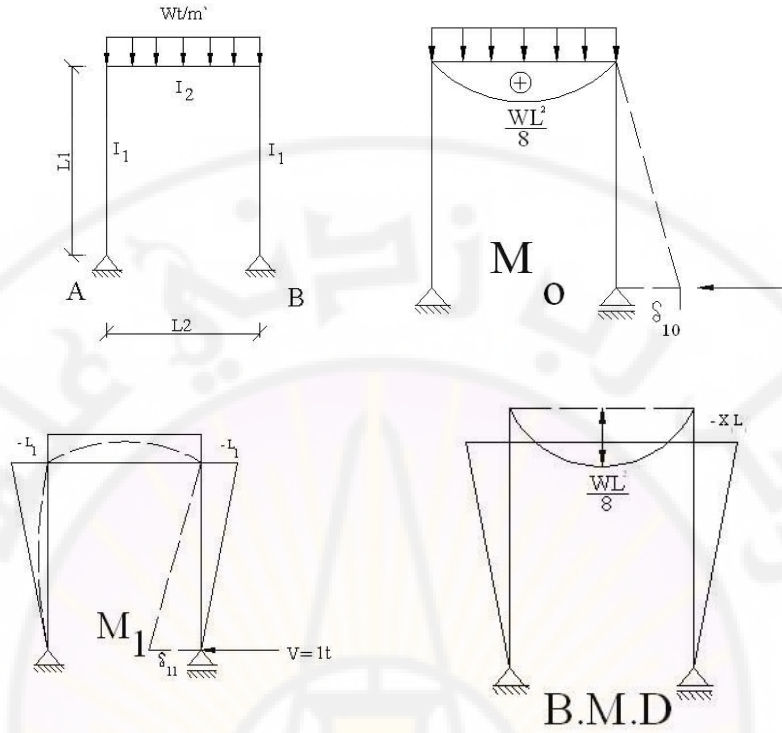
$$\begin{aligned}
&= \frac{6WL^2}{384EI} + \frac{1}{2IE} \left(\frac{11WL^2}{384} \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{7WL^2}{384} \right) + \frac{1}{IE} \cdot \frac{WL^2}{384} \\
\alpha_A &= \frac{30WL^2}{768EI} = \frac{5}{128} \cdot \frac{WL^2}{EI} \\
\alpha_A &= \frac{5}{128} \cdot \frac{WL^2}{EI}
\end{aligned}$$

تطبيقات العمل الوهمي على الإطارات المقررة:

يمكن استخدام نظرية العمل الوهمي وتطبيقاتها من أجل الانتقالات وزوايا الدوران في الإطارات المقررة، كما ويمكن اعتبار الأعضاء المختلفة للإطار كأنها جوائز خاضعة لقواها الداخلية الوهمية، أما حلها فيعتمد على الفقرات السابقة في دراسة العمل الوهمي.

تحليل الإطارات غير المقررة بتطبيق نظرية العمل الوهمي :

الإطارات غير المقررة من الدرجة الأولى خارجياً.



شكل (8-2)

الإطار المبين بالشكل (8-2) متمفصل في كل من (A) و (B) فهو إطار غير مقرر من الدرجة الأولى.

إن مركبات ردود الفعل في المسندين هي أربعة. بينما معادلات التوازن السكوني هي ثلاثة. لذا فإنه من الضروري وجود معادلة إضافية رابعة تعتمد على السلوك المرن . إن تطبيق نظرية العمل الوهمي في تحليل الإطار يمكن اعتمادها على الشكل الآتي :

1- نختار للإطار غير المقرر إطاراً مقررًا وذلك بإزالة إحدى المركبات لعدم

التقرير في أحد المساند المبينة في (A) و (B)؛ فالشكل الجديد يظهر إطاراً محدداً بمسندين أحدهما مفصل، والآخر متدحرج (أو منزلق) ويكون رد الفعل في (B) هو ($N_B = X_1$)، ويصبح مخطط عزم الانعطاف (M_0) هو المخطط الناتج عن تأثير الحمولات الخارجية.

2- نطبق على الإطار نفسه بعد إزالة الحمولات الخارجية المطبقة عليه حمولة وهمية $V = 1t$ عند المسند (B) وذلك مكان إزالة إحدى المركبات وذلك في الاتجاه (X_1) ونرسم مخطط عزم الانعطاف (M_1) بالنسبة لهذه الحمولة الوهمية.

3- إن الانتقال الأفقي عند المسند المتدحرج (B) من الإطار المقرر هو انتقال ناتج عن الحمولات المطبقة خارجياً، ويمكن الحصول عليه من العلاقة:

$$\delta_{01} = \int_A^B \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda$$

وبشكل مشابه فإن الانتقال الأفقي في (B) الناتج عن الحمولة الوهمية $V = 1t$ معطى بالعلاقة :

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{M_1 M_1}{EI} d\lambda = \int_A^B \frac{M_1^2}{EI} d\lambda$$

حينئذ فإن الانتقال الأفقي الكلي في (B) الناتج عن الحمولات الخارجية ورد الفعل المجهول (X_1) هو :

$$\delta_B = \delta_{01} + X_1 \delta_{11}$$

4- عندئذ فإن الانتقال الأفقي عند (B) يجب أن يساوي

الصفر وذلك في الحالة الأساسية للإطار قبل تقريره لأن المسند (B) هو مسند مفصلي ومنه :

$$\delta_B = 0$$

$$\delta_{10} = X_1 \delta_{11} = 0 \quad \text{أي :}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad \text{ومننه:}$$

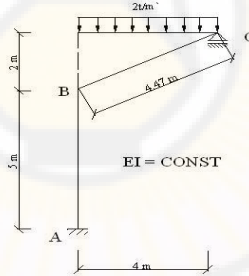
5- إن عزم الانعطاف النهائي في أي مقطع من الإطار غير المقرر

$$M = M_0 + X_1 M_1$$

وهذا يعني أن مخطط عزم الانعطاف يمكن الحصول عليه بجمع (M_0) و $(X_1 M_1)$

(M_1) حيث إن (M_1) هو مخطط عزم الانعطاف الناتج عن الحمولة الوهمية $V = 1t$ ، وبعد استخراج قيمة (X_1) حيث إن مركبات ردود الأفعال الثلاثة الباقية يمكن الحصول عليها من معادلات التوازن. عندئذ فإن مخطط القوى الداخلية يمكن حسابه بالطريقة الاعتيادية.

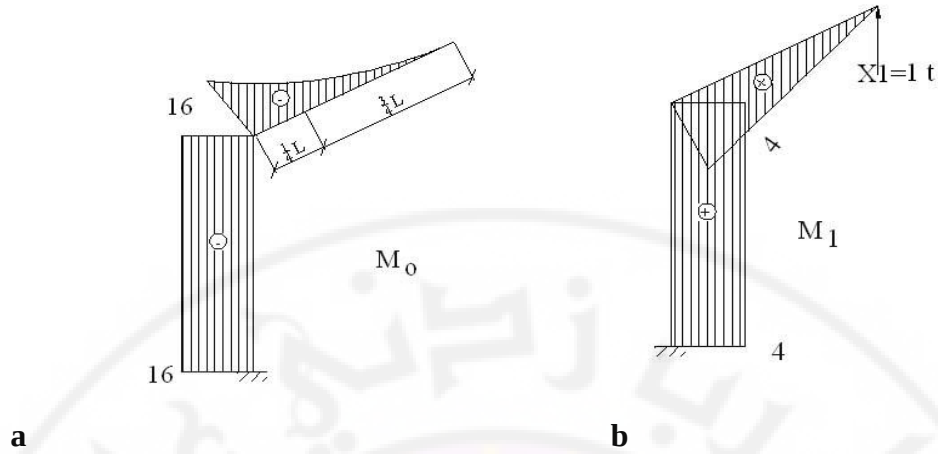
مثال : ليكن لدينا الإطار المبين بالشكل (9-2) والحمولات والأبعاد الموضحة على الشكل المطلوب: حل الإطار المبين، ثم ارسم مخطط عزمه النهائي بطريقة العمل الوهمي:



شكل (9-2)

نرسم مخطط عزم الانعطاف (M_0) ثم نحسب قيم δ_{01} و δ_{11} وبما أن

الإطار غير مقرر من الدرجة الأولى فإنه يتوجب حساب قيمة (X_1) المجهول الوحيد.



شكل (10-2)

نحسب قيم كل من δ_{01} و δ_{11} فنجد :

$$\delta_{01} = \frac{1}{EI} \left[\frac{-16(4,47)}{3} \left(\frac{3(4)}{4} \right) - 16(5)(4) \right] = \frac{391,52}{EI}$$

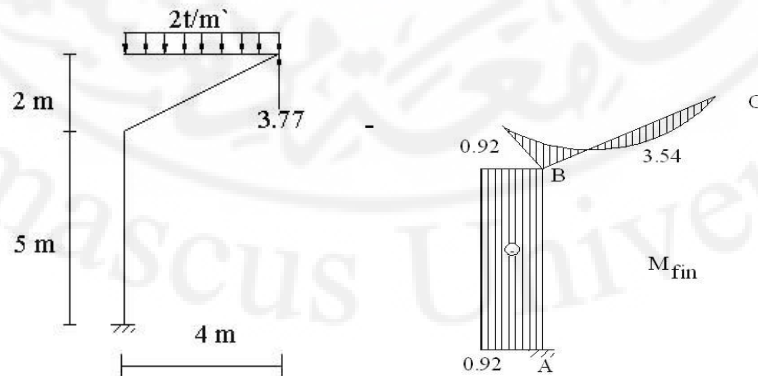
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4(4,47)}{2} \frac{2}{3} (4) - 4(5)(4) \right] = \frac{103,84}{EI}$$

$$\delta_{01} + \delta_{11} X_1 = 0$$

ومن المعادلة العامة

ومنه

$$X_1 = \frac{-391,52}{103,84} = 3,77t$$



a

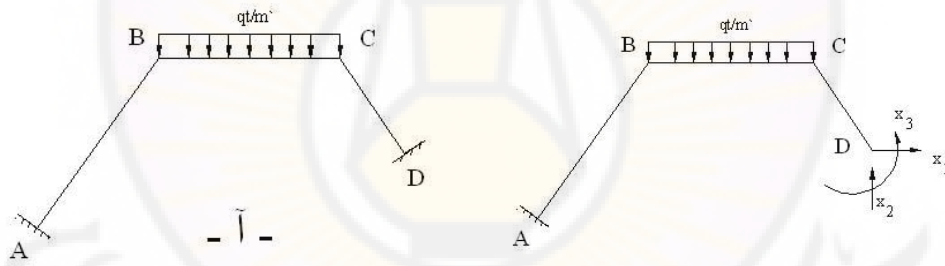
b

شكل (2-11)

معالجة المنشآت غير المقررة بطريقة العمل الوهمي خارجياً:

تحلل الأطر غير المقررة بصورة عامة بطريقة العمل الوهمي، والتي تسمى بطريقة إزاحة المساند أو انتقائها، وذلك لإيجاد ردود الأفعال عند المساند التي لا تكفي معادلات التوازن الثلاث لتعيينها.

لنأخذ الإطار الآتي والذي يخضع لحمل موزع بانتظام، حل هذا الإطار يعني إيجاد ثلاثة ردود أفعال، نحسبه غير مقرر من الدرجة الثالثة:



شكل (2-12)

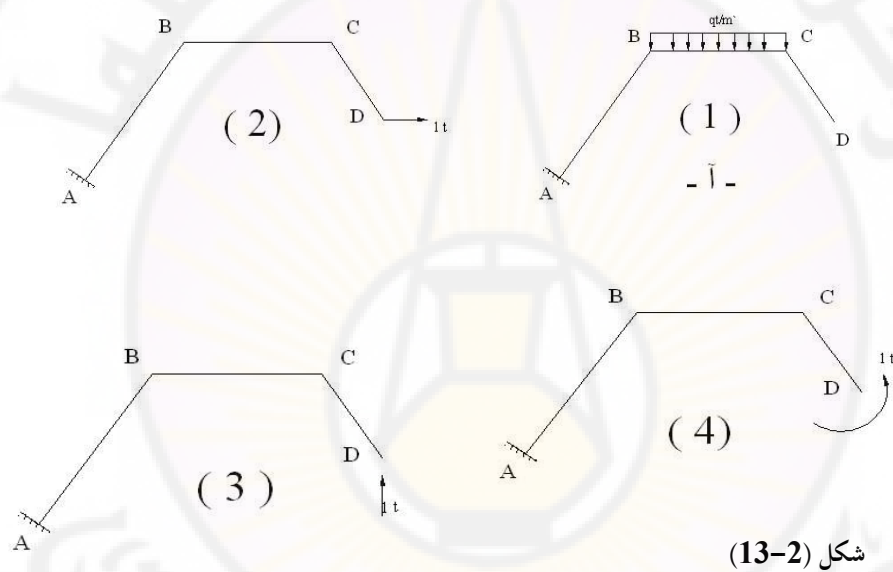
الطريقة المتبعة في الحل :

1- يتم تحرير الإطار من روابطه التي تكون السبب في عدم تقريره بحيث يصبح إطاراً مقررأ.

2- نرسم في حالة الجملة الأساسية مخطط عزم الانعطاف (M_0) تحت تأثير الحمولات الخارجية المطبقة على الإطار.

3- يتم تفريغ الجملة الأساسية من الحمولات الخارجية ثم نطبق عند الطرف الحر D حمولة وهمية "واحدة الحمولات" في الاتجاه الأفقي، ونرسم مخطط (M_1) للجملة الأساسية، كما هو مبين بالشكل (2-13).

4- نطبق عند الطرف D حمولة وهمية بالاتجاه الرأسي، ونرسم مخطط (M_2) للجملة الأساسية. الشكل (3-13).



شكل (2-13)

5- أخيراً نطبق عند الطرف نفسه حمولة وهمية "واحدة العزم" في اتجاه الدوران،

ونرسم مخطط (M_3) للجملية الأساسية.

6- نكتب العلاقات التي تعطي قيمة الانتقالات الأفقية والرأسية والدوران عند

الطرف D تحت تأثير الحمولات الخارجية المطبقة في الإطار ومركبات القوى

X_1, X_2, X_3 العاملة عند الطرف D والذي هو ممنوع من الانزياح فيكون

:

$$(1) \dots\dots\dots \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} = 0$$

$$(2) \dots\dots\dots \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = 0$$

$$(3) \dots\dots\dots \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = 0$$

حيث :

$$\delta_{11} = \int_A^D \frac{M_1^2}{EI} d\lambda$$

$$\delta_{10} = \int_A^D \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_A^D \frac{M_1 M_2}{EI} d\lambda \quad \delta_{20} = \int_A^D \frac{M_0 M_2}{EI} d\lambda$$

$$\delta_{22} = \int_A^D \frac{M_2^2}{EI} d\lambda$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \int_A^D \frac{M_1 M_3}{EI} d\lambda, \quad \delta_{30} = \int_A^D \frac{M_0 M_3}{EI} d\lambda$$

$$\delta_{33} = \int_A^D \frac{M_3^2}{EI} d\lambda$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = \int_A^D \frac{M_2 M_3}{EI} d\lambda$$

بحل المعادلات (1), (2), (3) نحصل على قيمة ردود الأفعال X_3, X_2

X_1 عند المسند D . تم إهمال قيم القوى القاصة والمحورية في حساب الازاحات كونها

ذات تأثير محدود في قيمة الازاحات بالمقارنة مع تأثير عزوم الانعطاف.

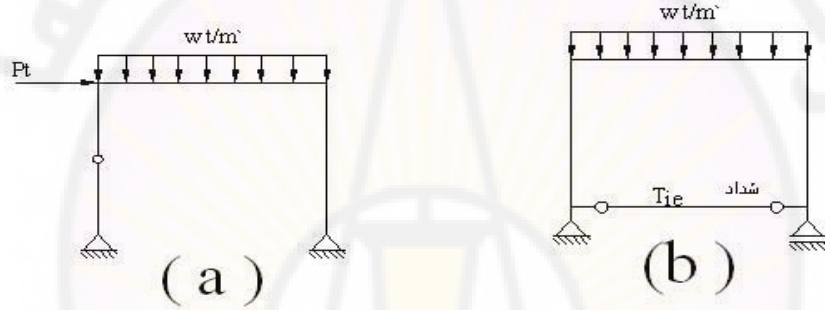
يتم تعيين قيمة عزم الانعطاف الناتج في المقاطع المختلفة باستخدام العلاقة :

$$M_{Final} = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3$$

الإطارات غير المقررة من الدرجة الأولى داخلياً:

عندما يكون البناء على شكل نفق، ومعرض لحمولات شاقولية أو جانبية، يمكن أن يؤثر في القوى الداخلية الناجمة عن الإطارات غير المقررة خارجياً. أحد هذه الأمور، وفي معظم الحالات هو انتشار منشآت مقررة خارجياً، بينما تكون داخلياً غير مقررة.

ويمكن أن تكون الإطارات غير مقررة داخلياً من الدرجة الأولى، ويكون عموماً الحصول عليها بتشكيل مفاصل، كما هو موضح بالشكل :



شكل (14-2)

ويمكن وضع شداد كعنصر من عناصر المنشأة، كما هو موضح بالشكل (b) والحل في مثل هذه الحالة هو الأخذ بعين الاعتبار قوة الشد في عنصر الشداد، وهذا يعني أن المعادلة من أجل تقرير أو إيجاد (X_1)، والذي هو في هذه الحالة قوة الشد في الشداد، ويمكن التعبير عن ذلك كما يأتي:

$$0 = \text{الزيادة في طول الشداد (أو تقاصره)} + X_1 \delta_{11} + \delta_{10}$$

$$0 = L_t \text{ في الشداد} + \text{الاجهاد} + X_1 \delta_{11} + \delta_{10}$$

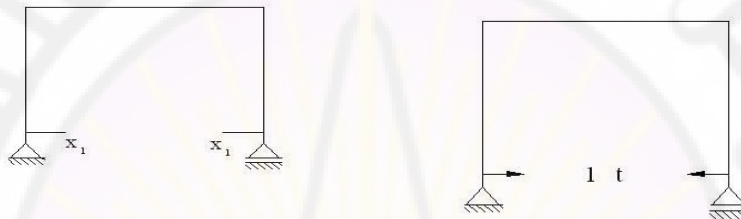
$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + \frac{X_1}{A_t E_t} L_1 = 0$$

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \frac{L_t}{A_t E_t}} \quad \text{ومنه :}$$

حيث : L_t : هو طول الشدّاد

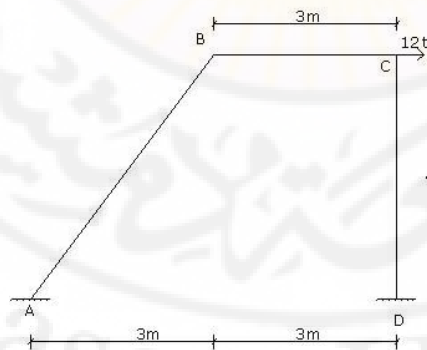
A_t : مساحة مقطع الشدّاد

E_t : معامل المرونة للشدّاد



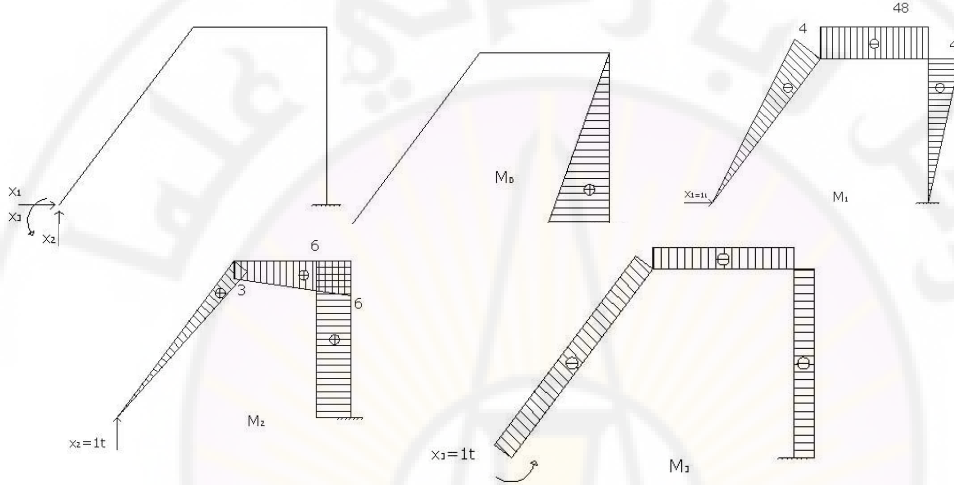
شكل (15-2)

مثال : ليكن لدينا الإطار المبين بالشكل الأبعاد والحمولات موضحة عليه $EI = const.$ المطلوب حل الإطار بطريقة العمل الوهمي :



شكل (16-2)

الحل : لحل مثل هذا الإطار بطريقة العمل الوهمي نلجأ إلى إزالة الوثاقة في (A)، حيث يلاحظ أن الإطار غير مقرر من الدرجة الثالثة. ثم نستبدل ردود الأفعال للوثاقة بـ (X_3, X_2, X_1) نرسم مخططات M_0, M_1, M_2, M_3 كما هو موضح بالشكل (17-2):



شكل (17-2)

بما أن الإطار غير مقرر من الدرجة الثالثة يلزمنا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي :

$$\delta_{01} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\delta_{02} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\delta_{03} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

نحسب الانتقالات:

$$\delta_{33}, \delta_{32}, \delta_{31}, \delta_{03}, \delta_{23}, \delta_{22}, \delta_{21}, \delta_{02}, \delta_{13}, \delta_{12}, \delta_{11}, \delta_{01}$$

$$\delta_{01} = \frac{1}{EI} \left[\frac{48(4)}{2} \left(\frac{-4}{3} \right) \right] = -\frac{128}{EI}$$

$$\delta_{02} = \frac{1}{EI} \left[\frac{48(4)}{2} (6) \right] = \frac{576}{EI}$$

$$\delta_{03} = \frac{1}{EI} \left[\frac{48(4)}{2} (-1) \right] = -\frac{96}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4(5)}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4(3)(4) + \frac{4(4)}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{96}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4(5)}{2} \cdot \frac{2}{3} (3) - 4(3)(4,5) - \frac{4(4)}{2} (6) \right] = -\frac{122}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4(5)(1)}{2} + 4(3)(1) + \frac{4(4)(1)}{2} \right] = \frac{30}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{3(5)}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \left\{ \frac{3(3)}{3} + \frac{3(6)}{6} + \frac{6(3)}{3} + \frac{6(6)}{3} \right\} + 6(4) \cdot 6 \right] = \frac{222}{EI}$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{EI} \left[\frac{3(5)}{2} (-1) + \frac{3+6}{2} (3)(-1) + 6(4)(-1) \right] = -\frac{45}{EI}$$

$$S_{33} = \frac{1}{EI} \left[1(5) + 1(3) + 1(4) \right] = \frac{12}{EI}$$

وبتعويض القيم المعطاة أعلاه في المعادلات الثلاث نجد :

$$-128 + 96X_1 - 122X_2 + 30X_3 = 0$$

$$576 - 122X_1 + 222X_2 - 45X_3 = 0$$

$$-96 + 30X_1 - 45X_2 + 12X_3 = 0$$

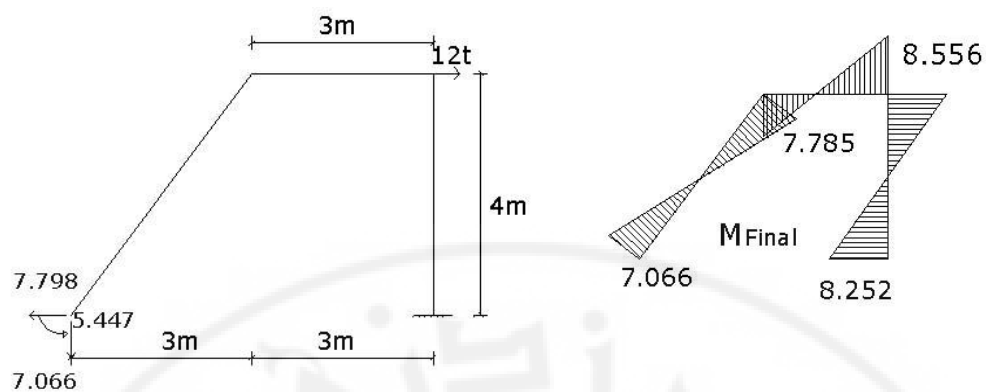
بحل المعادلات الثلاث نجد قيم X_3, X_2, X_1 كما يأتي :

$$X_1 = -7,798 \text{ t}$$

$$X_2 = -5,447 \text{ t}$$

$$X_3 = +7,066 \text{ t}$$

نرسم مخطط عزم الانعطاف النهائي كما هو مبين بالشكل فنجد :

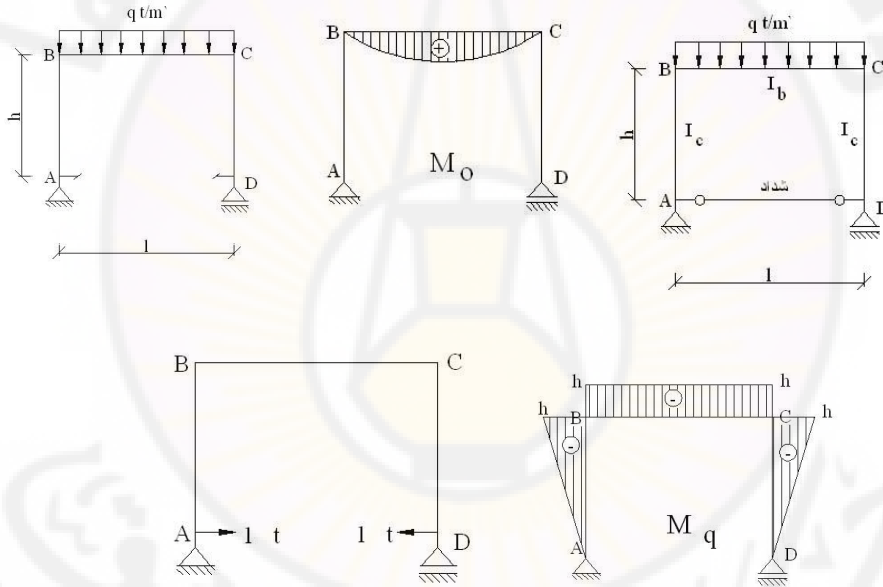


شكل (2-18)

تمارين عملية على نظرية العمل الوهمي:

مثال : الإطار $ABCD$ محمول على مسندين أحدهما ثابت (A) والآخر متدحرج (D) يتعرض لحمولة موزعة بانتظام كما هو موضح بالشكل. يصل بين (A) و (D) شداد بمقطع ثابت (A) وعامل مرونته الطول (E_t) المطلوب إيجاد القوة المحورية في الشداد المذكور.

الحل : الإطار غير مقرر من الدرجة الأولى داخلياً لوجود الشداد (AD) .
نزيل القوة ونستعويض عنها بقوة وهمية قدرها $(1t)$ ، نرسم مخطط (M_0) للجملة الأساسية ثم (M_1) فنجد :



لدينا (التشوه في الشد) $\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = -$

حيث X_1 القوة المحورية في الشد:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_b} \left(\frac{2}{3} \frac{q\lambda^2}{8} \right) \lambda(-h) = -\frac{q\lambda^3 h}{12EI_b}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_c} \left(\frac{h^2}{2} \cdot \frac{2h}{3} \right) + \frac{1}{EI_b} [h^2 \cdot \lambda]$$

$$\delta_{11} = \frac{2h^3}{3EI_c} + \frac{h^2 \lambda}{EI_b}$$

$$\frac{-q\lambda^3 h}{12EI_b} + \left[\frac{2h^3}{3EI_c} + \frac{h^2 \lambda}{EI_b} \right] X_1 = \frac{-X_1 \lambda}{AE_t} \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = -\frac{X_1 \lambda}{EI_t}$$

ومنه:

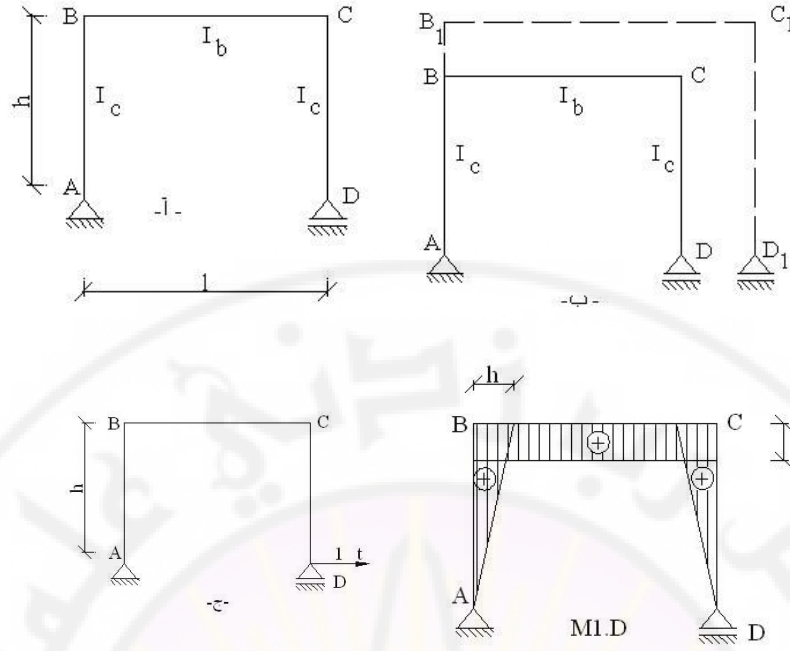
$$X_1 = \frac{q\lambda^3 h / 12EI_b}{2h^3 / 3EI_c + h^2 \lambda / EI_b + \frac{\lambda}{AE_t}}$$

مثال : الإطار $ABCD$ المتفصل في (A) و (D) يخضع لارتفاع في درجة حرارته

بمقدار t^0 درجة مئوية، والمطلوب إيجاد رد الفعل الأفقي الناتج عن هذا التغير

الحراري، مع العلم أن عامل التمدد الحراري هو α ، وأن الأطوال هي كما

يوضحه الشكل (بطريقة العمل الوهمي).



لو فرضنا أن المفصل في (D) قد تحول إلى مسند منزلق أفقياً، فإن هذا يعني أنه لدى ارتفاع درجة الحرارة بمقدار t^0 درجة مئوية فإن (D) تنزلق إلى (D_1) ويصبح الإطار في الوضعية $A_1B_1C_1D_1$ ، ومن ثم فإن المجاز (BC) يتمدد بمقدار δ_{01} الذي يمكن حسابه كالاتي :

$$\delta_{01} = \alpha \cdot t \cdot \lambda$$

ويجب الإشارة إلى أن المفصل في (D) يمنع فقط الانزلاق الأفقي δ_{01} ، في حين أنه لا يعيق على الإطلاق تمدد AB و DC ، وكذلك فإن رد الفعل الأفقي هو المجهول الذي يجب تحديد قيمته، وعليه فإننا نضطر إلى فرض وحدة القوى في (D) وفي الاتجاه الأفقي.

نحسب مخطط الانعطاف (M_1D) ثم نحسب قيمة الانتقال δ 11 من حساب مساحة كل جزء من المخطط (M_1D)، وضربه بالترتيب المقابل لمركز ثقل الجزء نفسه، وهكذا نجد :

$$\delta_{11} = \frac{2h^3}{3EI_c} + \frac{h^2\lambda}{AI_b}$$

وتكون قيمة رد الفعل الأفقي في كل من A و D كالآتي :

$$X_1 = -\frac{\frac{\alpha.t.\lambda}{2h^3} + \frac{h^2\lambda}{EI_b}}{3EI_c}$$

أما الانعطاف في C أو في B فيعطى بالعلاقة :

$$M_c = M_B = X_1 h$$

$$M_C = M_B = -\frac{\frac{\alpha.t.\lambda}{2h^2} + \frac{h\lambda}{EI_b}}{3EI_c}$$

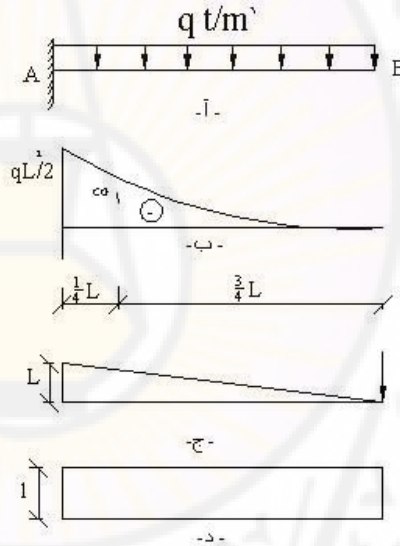
مثال : جائر ظفري AB معرض لآمولة q موزعة بانتظام؁ كما يوضح الشكل والمطلوب : إيجاد قيمة الميل عند المقطع B ؁ وكذلك قيمة الانتقال الرأسي في ذلك المقطع؁ علماً أن مقطع الجائر المنتظم على كامل طوله.

الحل : نرسم مخطط العزم (M_0) للجائر تحت تأثير الآمولة الخارجية؁ كما يوضح الشكل (ب) ؁ ثم نرسم مخطط (M_1) الناتج عن واحدة الآمولة المطبقة في B وإلى الأسفل؁ وذلك لإيجاد السهم في B وهذا المخطط موضح بالشكل (ج) ثم نكتب:

$$y_B = \int_A^B \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda$$

$$y_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{q\lambda^2}{2} \right) (\lambda) \left(-\frac{3}{4}\lambda \right)$$

$$y_B = \frac{q\lambda^4}{8EI}$$



ولإيجاد الدوران في B نطبق واحدة العزوم في B ، وفي اتجاه عقارب الساعة، ثم نرسم المخطط M_1' الناتج من واحدة العزوم على الجائز AB ، وهذا مخطط موضح بالشكل (د) ثم نكتب :

$$\alpha_B = \int_A^B \frac{M_0 M_1'}{EI} d\lambda$$

$$\alpha_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{q\lambda^2}{2} \right) (\lambda) (-1)$$

$$\alpha_B = \frac{q\lambda^3}{6EI}$$

الإطارات غير المقررة لأي عدد من المجاهيل (n)

إن الطريقة المتبعة يمكن أن تطبق في حل الإطارات بوجود عدد ما من المجاهيل لردود الأفعال X_1, X_2, X_3 وهكذا.

نقرر الإطار، ونرسم مخطط عزم الانعطاف (M_0) للحمولات الخارجية المطبقة. بعد ذلك نطبق الحمولات الوهمية (قوى أو عزوم) ($V=1t$) للإطار غير الحمل بالحمولات الخارجية وللإطار نفسه الذي كان محملاً. نطبق الحمولات الوهمية في الاتجاهات لـ $X_1, X_2, X_3 \dots$ وهكذا، وكذلك $M_1, M_2, M_3 \dots$ وهكذا ونرسم مخططات العزوم المطابقة لها.

بعد ذلك سنجد عدداً من المعادلات التي تساوي عدد المجاهيل غير المقررة لمركبات ردود الأفعال، والتي يمكن الحصول عليها من هذه المعادلات.

على سبيل المثال، عندما يكون الانتقال الكلي δ_1 في اتجاه مركبة رد الفعل X_1 فإنه يكون مساوياً الصفر ويتم الحصول على المعادلات على الشكل الآتي :

$$(9) \dots \begin{cases} \delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots = 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots = 0 \\ \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots = 0 \end{cases}$$

ومن هنا نرى أنه في حال اعتبار $X_1, X_2, X_3 \dots$ موجودة في آن واحد كحمولة خارجية، فإن مجموع الانتقال الأفقي العائد إلى هذه القوى، والانتقال الأفقي العائد للحمولة الموزعة بانتظام يكون مساوياً للصفر. وكذلك فإن مجموع الانتقال الشاقولي العائد إلى $X_1, X_2, X_3 \dots$ والانتقال الشاقولي العائد إلى القوى الموزعة بانتظام يكون مساوياً للصفر.

كذلك يمكننا القول إنه في حال وجود مساند وثيقة فإن مجموع الدوران العائد إلى هذه القوى $X_1, X_2, X_3 \dots$ والحمولة الخارجية المطبقة (مثلاً موزعة بانتظام) يكون مساوياً للصفر أيضاً تكون الوثيقة تامة.

إن جملة المعادلات (9) هي المتبعة غالباً في حل الإطارات غير المقررة بطريقة الأعمال الوهمية حيث إن :

$$\delta_{10} = \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} d\lambda \quad \delta_{12} = \int_0^L \frac{M_1 M_2}{EI} d\lambda \quad , \quad \delta_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} d\lambda$$

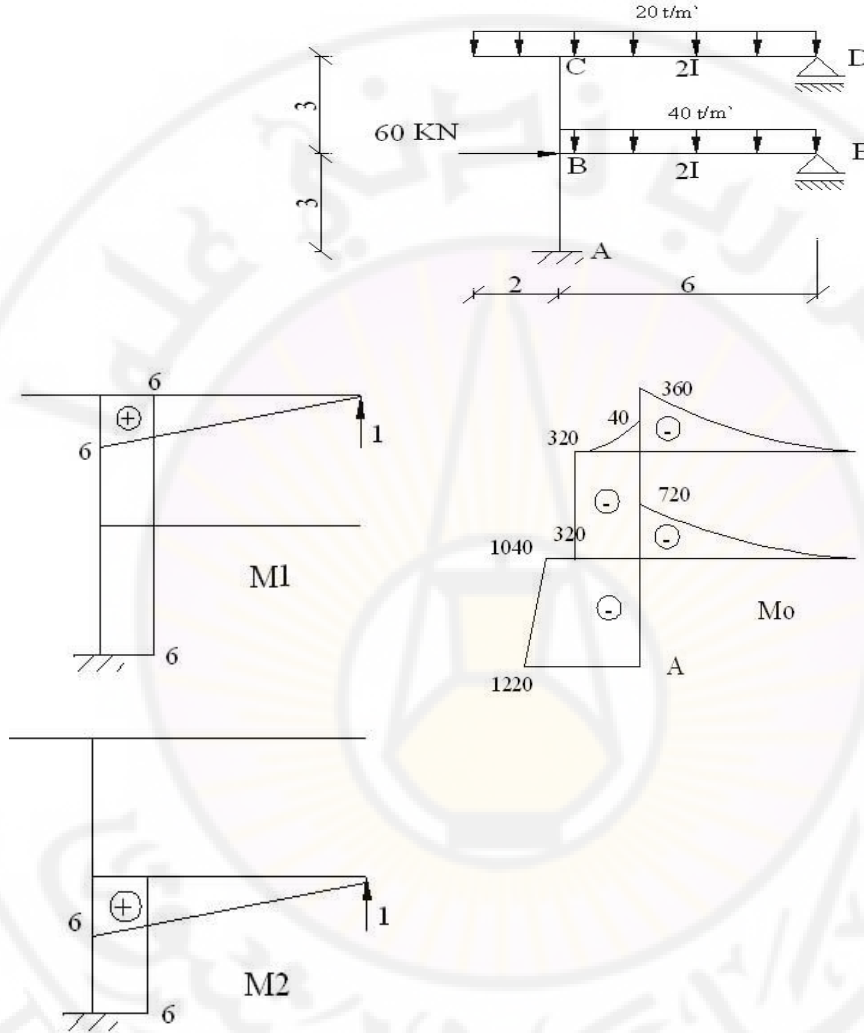
وهكذا دواليك.....

وبحل جملة المعادلات بأن واحد فإن قيم $X_1, X_2, X_3 \dots$ وهكذا تكون معروفة، وبالنهاية فإن العزم النهائي للإطار يعطى بالعلاقة:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 + \dots$$

مثال - الإطار غير مقرر من الدرجة

- نقرره بحذف المسندين المتدحرجين في E, D .
- نرسم مخطط (M_0) من الأحمال الخارجية.
- نرسم مخططي (M_1) (M_2) من وحدات القوى باتجاه المجاهيل الفائضة.



$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -94.0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \frac{360.6}{3} \frac{3}{4} \cdot 6 - 620.3 \cdot 6 - \frac{3}{6} (2 \cdot 1040.6 + 2 \cdot 1220.6 + 1040.6 + 1220.6) \right]$$

$$= -\frac{27720}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \frac{720.6}{3} \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1040+1220}{2} \cdot 3.6 \right] = -\frac{23580}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \frac{6.6}{2} \frac{2}{3} \cdot 6 + 6.6 \cdot 6 \right] = \frac{252}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} [6.3 \cdot 6] = \frac{108}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{108}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{6.6}{2} \frac{2}{3} \cdot 6 + 6.3 \cdot 6 \right] = \frac{144}{EI}$$

$$252 X_1 + 108 X_2 = 27720 \quad (1)$$

$$108 X_1 + 144 X_2 = 23480 \quad (2)$$

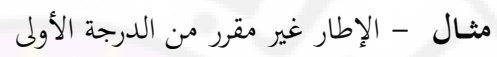
بالحل المشترك للمعادلتين (1) , (2) نجد :

$$X_1 = 58.68 \text{ KN}$$

$$X_2 = 119.74 \text{ KN}$$

ويكون :

$$M_{Final} = M_0 + 58.68 M_1 + 119.74 M_2$$



M_0 - فرسہ

M_1 - فرسم



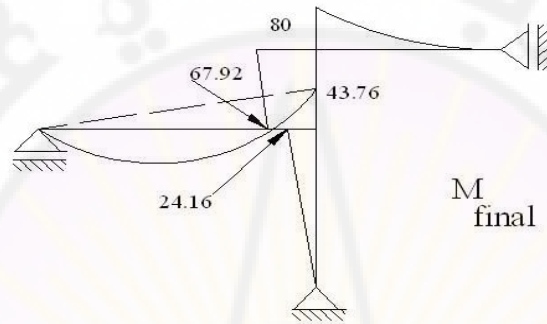
$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$EI.\delta_{10} = \frac{80.2.2}{2} + \frac{6}{6}(-80.6 + 0 + 4.5.3) = -580$$

$$EI.\delta_{11} = \frac{2.2.2}{3} + \frac{6.6.6}{3} + \frac{4.4.4}{3} = 96$$

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 6.04 \text{ KN}$$

$$M_{Fin} = M_0 + 6.04 M_1$$

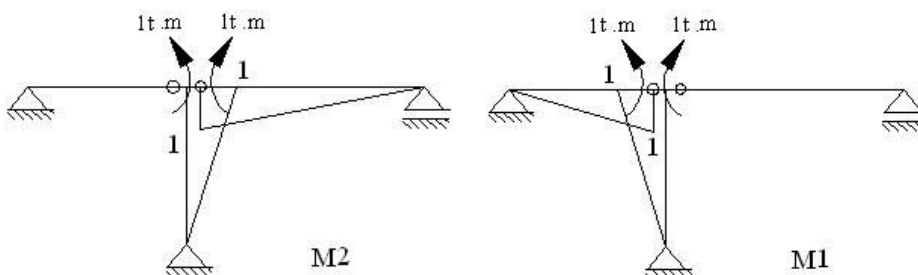
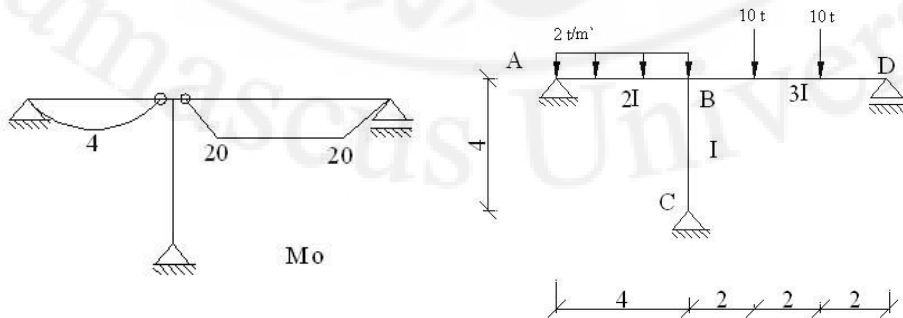


مثال - رسم مخطط عزم الانعطاف

- الإطار غير مقرر من الدرجة الثانية

- نقرره بوضع مفصلين كما هو مبين ونرسم مخطط M_0 .

- نرسم مخططي M_1 و M_2 .



$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4.4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{3EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{2+6}{2} \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{40}{3EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1.4 \cdot 1}{3} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1.4 \cdot 1}{3} \right) = \frac{2}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1.4 \cdot 1}{3} \right) = -\frac{4}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{1.6 \cdot 1}{3} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1.4 \cdot 1}{3} \right) = \frac{2}{EI}$$

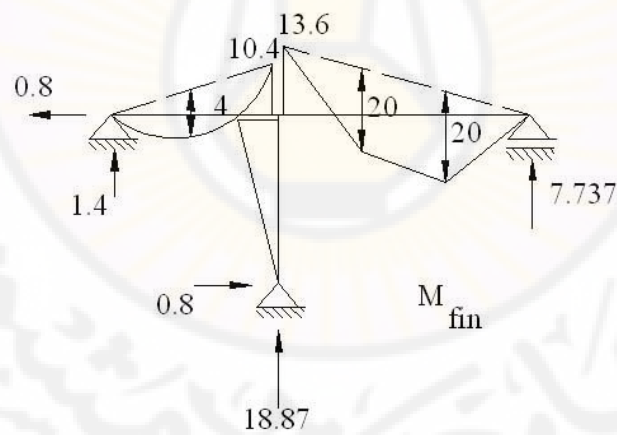
$$\frac{8}{3} + 2X_1 - \frac{4}{3} X_2 = 0$$

$$\frac{40}{3} - \frac{4}{3} X_1 + 2X_2 = 0$$

$$X_1 = -10.4 \text{ t.m}$$

$$X_2 = -13.5$$

$$M_{Fin} = -10.4M_1 - 13.5M_2 + M_0$$





طريقة العمل الوهمي للمنشآت التي تحوي عناصر انعطاف وعناصر قوى محورية

مثال :

$$\delta_{10} = \int_{AB} M_1 \frac{M_0}{EI} d\lambda + \int_{BC} N_1 \frac{N_0}{EA} d\lambda$$

$$= \frac{1}{E_1 I_1} \left[-\frac{2}{3} 6(45) \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{E_2 A_2} \left[-(30) \frac{1}{6} 6 \right]$$

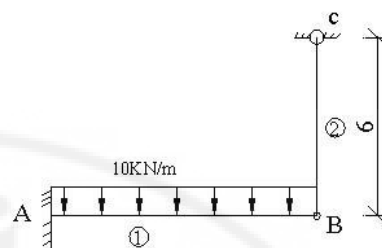
$$= \frac{-90}{2.1 \times 10^7 (3000000) 10^{-8}} - \frac{30}{2.1 \times 10^8 (2) 10^{-4}}$$

$$= \frac{-45}{2.1 \times 10}$$

$$\delta_{11} = \int_{AB} M_1 \frac{M_1}{EI} d\lambda + \int_{BC} N_1 \frac{N_1}{EA} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2.1 \times 10^4} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{6} 6 \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{62} 6 \right]$$

$$= \frac{1}{2.1 \times 10^4} \frac{3}{4}$$

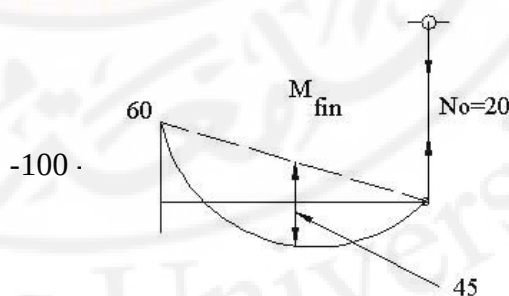
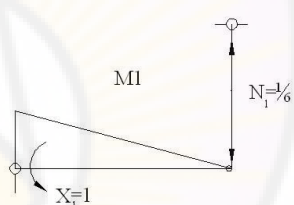
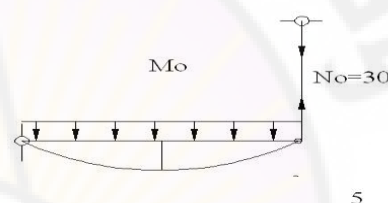


$$E_1 = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}$$

$$I_1 = 3000000 \text{ cm}^4$$

$$E_2 = 2.1 \times 10^8$$

$$A_2 = 2 \text{ cm}^2$$



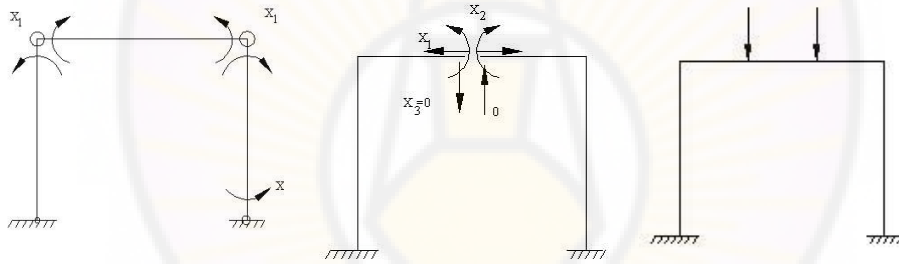
$$M_A = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{45(4)}{3} = 60 \text{KNm}$$

$$N_{BC} = 30 - \frac{1}{6} 60 = 20 \text{KN}$$

التناظر والتناظر العكسي :

أ- حالة التناظر :

ليكن لدينا الإطار المتناظر المبين والذي يخضع لأحمال متناظرة :
عند التقرير بالقطع لدى محور التناظر نلاحظ أن القص ينعدم ويبقى مجهولين X_1 و X_2 ، حيث نحصل في هذه الحالة على :
مخطط M_0 متناظر ، مخطط M_1 متناظر ، مخطط M_2 متناظر
مخطط M_3 من القوة القاصة $Q = X_3$ متناظر عكسياً



إن تكامل مخطط متناظر في مخطط متناظر عكسي ينعدم ومن ثم:

$$\delta_{30} \delta_{31} \delta_{32} = 0 \Rightarrow X_3 = Q = 0$$

عند التقرير بوضع مفاصل نلاحظ أن العزم في العقدتين المتناظرتين متساوٍ

بسبب التناظر.

ب- حالة التناظر العكسي :

لنعتبر المنشأ المتناظر المبين والذي يخضع إلى حمولات متناظرة عكسية.

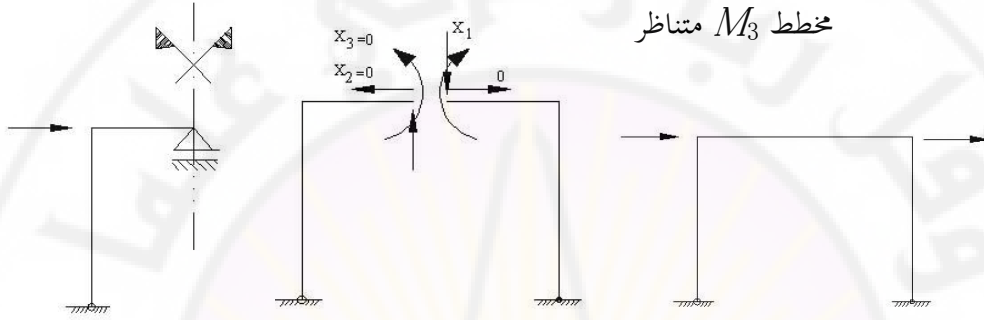
عند التقرير بالقطع عند محور التناظر :

مخطط M_0 متناظر عكسياً

مخطط M_1 متناظر عكسياً

مخطط M_2 متناظر

مخطط M_3 متناظر



يؤدي ذلك :

$$\begin{aligned}\delta_{20} &= \delta_{21} = 0 \\ \delta_{30} &= \delta_{31} = 0 \\ \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 &= 0 \\ \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 &= 0\end{aligned}$$

وهذا يعطي

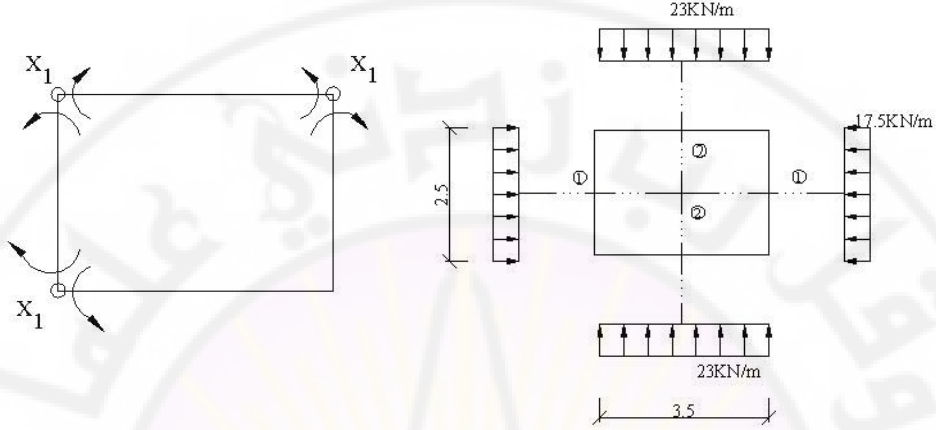
$$X_2 = X_3 = 0$$

أي يبقى مجهول واحد هو قوة القص

لذلك يمكن حل المسألة بوضع متدحرج عند محور التناظر وحل نصف المنشأ.

مثال

لنفرض لدينا الإطار المغلق الذي يخضع للحمولات المتناظرة في الاتجاهين .
الإطار المغلق غير مقرر من الدرجة الثالثة، وبسبب التناظر في الاتجاهين نجد أن
الإطار أصبح غير مقرر من الدرجة الأولى.



$$h_1 = 15\text{cm}$$

$$h_2 = 20\text{cm}$$

نقرره بوضع ثلاثة مفاصل (مجهول واحد) إن عطالة المقطع تتناسب مع الارتفاع

للأس 3

$$I = bh^3 / 12$$

ومن ثم يمكن اعتبار نسب العطالة هي :

$$I_1 = 1.5^3 I = 3.38 I$$

$$I_2 = 2^3 I = 8 I$$

$$EI\delta_{10} = 2 \left[\frac{2}{3} 3.5(35.22) \right] \frac{1}{8} + 2 \left[\frac{2}{3} 2.5(13.67) \right] \frac{1}{3.38}$$

$$EI\delta_{10} = 34.03$$

$$EI\delta_{11} = 2 \left[\frac{2.5}{8} + \frac{2.5}{3.38} \right]$$

$$EI\delta_{11} = 2.354$$

$$X_1 = -\frac{34.03}{2.354} = 14.45 \text{KNW}$$





حساب الانتقالات في المنشآت غير المقررة :

لنفرض لدينا الإطار المبين غير المقرر من الدرجة $n=2$ والمراد حساب Δ_D الشاقولي .

$$\Delta_D = \int \bar{M}_{1n} \frac{M_{Final}}{EI} dL$$

يبرهن على أن هذا الانتقال يساوي

$$\Delta_D = \int \bar{M}_{10} \frac{M_{Final}}{EI} dL$$

حيث :

العزم النهائي من الحمولات

M_{Final}

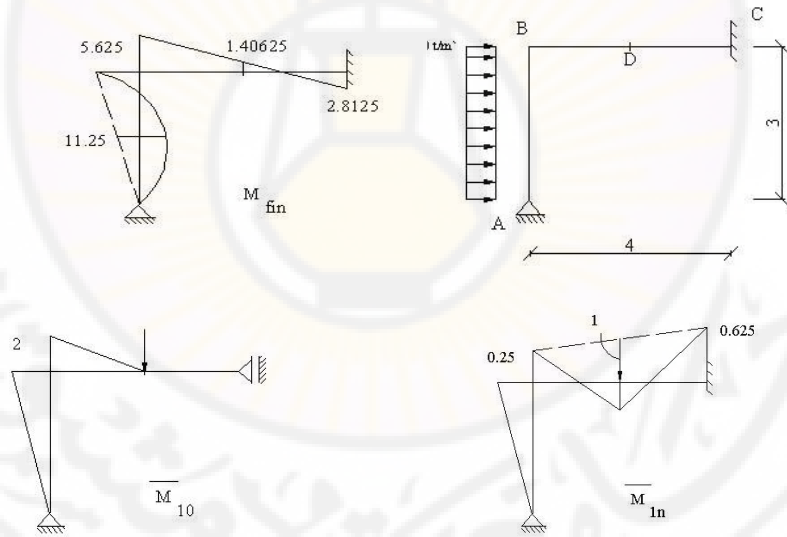
العزم النهائي من القوة الواحدة على الجملة غير المقررة من

$\bar{M}_{1n}$

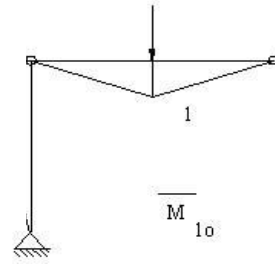
الدرجة n

العزم من القوة الواحدة على جملة أساسية مقررة (أية جملة)

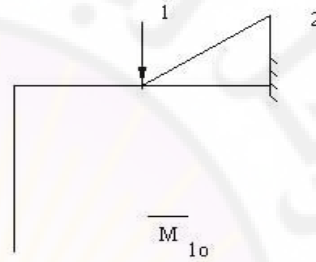
$\bar{M}_{10}$



$$\begin{aligned}
 EI\Delta_{\Delta} &= \int \bar{M}_{1n} M_{Final} dL \\
 &= \frac{1}{2} 3(5.625) \frac{2}{3} 0.25 \\
 &\quad - \frac{2}{3} 3(11.25) \frac{1}{2} 0.25 \\
 &\quad - \frac{2}{3} 4(1.40625) \\
 &\quad + \frac{4}{6} [2(5.625)0.25 - 2(2.8125)(0.625)] \\
 &\quad + (5.625)0.625 - (2.8125)0.25
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -2.8125 \\
 EI\Delta_D &= \int \bar{M}_{10} M_{Final} dL \\
 &= -\frac{1}{2} 4(1.41) \\
 &= -2.8125
 \end{aligned}$$

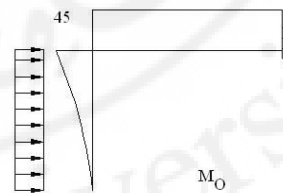


$$\begin{aligned}
 EI\Delta_D &= \int \bar{M}_{10} M_{Final} dL \\
 &= \frac{2}{6} [-2(2.8125)2 + (1.41)2] \\
 &= -2.8125
 \end{aligned}$$

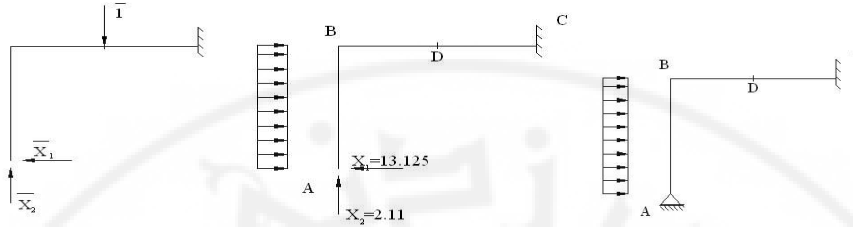
$$\begin{aligned}
 EI\Delta_D &= \int \bar{M}_{10} M_{Final} dL \\
 &= \frac{1}{2} 3(5.625) \frac{2}{3} 2 - \frac{2}{3} 3(11.25)1 + \frac{2}{5} [2(5.625)2 + (1.41)2] \\
 &= -2.8125
 \end{aligned}$$

أيضاً يمكن كتابة :

$$\Delta_D = \int \bar{M}_{1n} \frac{M_0}{EI} dL$$



$$\begin{aligned}
 EI\Delta &= +\frac{1}{3}(45)\frac{3}{4}0.25 \\
 &+ \frac{0.25+0.625}{2}4(45) - \frac{1}{2}4(45) \\
 &= -2.8125
 \end{aligned}$$



أي أن انتقالات الجملة الغير المقررة هي انتقالات الجملة المقررة بعد معرفة المجاهيل، واعتبارها قوى تؤثر في المنشأ، وبشكل آخر من كتابة :

$$\bar{M}_{1n} = \bar{M}_{10} + \bar{X}_1 M_1 + \bar{X}_2 M_2$$

$$M_{Final} = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2$$

يمكن استنتاج :

$$\int \bar{M}_{1n} M_{Final} dL = \int M_{10} M_{Final} dL$$

وذلك بملاحظة أن :

$$\begin{aligned}
 &\int M_1 M_{Final} dL \\
 &= \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0
 \end{aligned}$$

الانتقال الكلي عند المجهول X_1 وكذلك :

$$\begin{aligned}
 &\int M_2 M_{Final} dL \\
 &= \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0
 \end{aligned}$$



الفصل الرابع

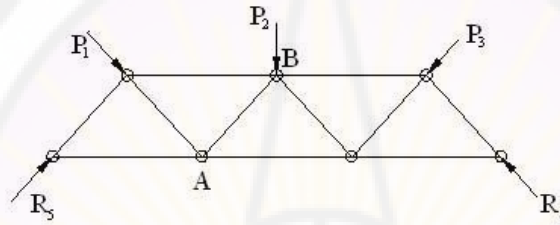
الجوائز الشبكية المقررة وغير المقررة



تحتوي الجوائز الشبكية على مجموعة من القضبان تتم فصل بعضها في النهايات، كما ويتم وصل القضبان مع بعضها بواسطة البراشيم أو اللحام. ولتعيين القوى المحورية العاملة في القضبان تحت تأثير الأحمال الخارجية المطبقة في نهايات (العقد) نفترض أن القضبان ذات اتصال مفصلي. وفي الحالة التي تتصل فيها القضبان اتصالاً وثيقاً فلا بد من الأخذ بالحسبان الاجهادات الثانوية الناشئة من المقاومة لدوران العقد.

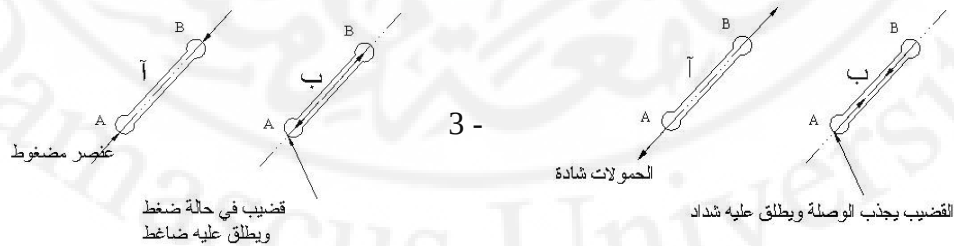
القوى الداخلية في عناصر الجائز الشبكي وفي القضبان المتمفصلة:

نفترض أن جميع قضبان الجائز الشبكي مستقيمة، وأنها متمفصلة في نهاياتها، كما في الشكل (1-4) وتخضع لقوى ناظرية لاغير.



الشكل (1-4)

من أجل التوازن فإن الأحمال الخارجية والقوى الداخلية يجب أن تكون متعادلة؛ أي أنه يجب أن تكون مطبقة على طول محور القضيب AB ففي الشكل (2-4) الموضح نجد أن الحمولات تضغط في A و B وبذلك يكون العنصر مضغوطاً، وعلى هذا يتوجب أن يكون رد فعل داخلي في القضيب مساوٍ للحمولات الخارجية ويعاكسها.



الشكل (4-2)

يمكن أن يكون القضيب في الجائز الشبكي مضغوطاً أو مشدوداً.
ويستعاض عن هذا القضيب بقوتين متساويتين ومتعاكستين مطبقتين في النهايتين:

الجوائز الشبكية المقررة :

يعبر عن العلاقة بين عدد القضبان وعدد العقد في أي جائز شبكي مستو ومقرر بالشكل الآتي :

$$m = 2J - 3$$

حيث : m : عدد القضبان في الجائز

J : عدد العقد في الجائز

ويمكن استنتاج العلاقة السابقة : كون العقدة الواحدة تعطي معادلتين توازن تربط الحمولات الخارجية والقوى الداخلية في القضبان، بينما يتطلب تعيين ردود الأفعال المجهولة ثلاث معادلات.

طرق تحديد القوى الداخلية في قضبان الجائز الشبكي المقرر:

تخضع قضبان الجائز لقوى محورية شادة أو ضاغطة، ويمكن تحديدها بالطريقة التحليلية أو التخطيطية أو بالطريقتين معاً. وبصورة عامة فإن أية طريقة تستخدم معادلات التوازن الثلاث .

ويمكن استعمالها لمعالجة الجوائز الشبكية المقررة. ونكتفي بتعداد الطرق الأساسية في تعيين القوى بالقضبان، دون التعرض لشرح هذه الطرق :

- طريقة مخطط القوى.
- طريقة المقاطع
- طريقة التحليل عند العقد

الانتقالات المرنة في الجوائز الشبكية المقررة :

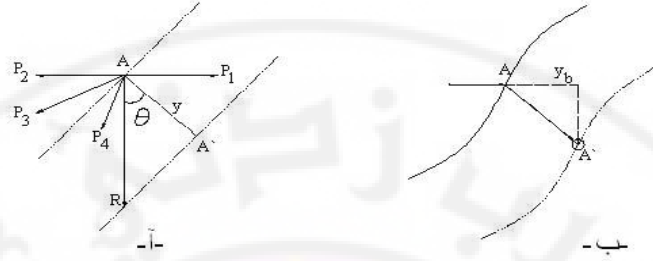
عندما يخضع الجائز الشبكي إلى مجموعة من الحملات الخارجية المطبقة عند العقد تنشأ في قضبان هذا الجائز اجهادات ناظرية ضاغطة أو شادة تؤدي لتشوه هذه القضبان. تتناسب قيمة التشوه الكلي δ للقضيب مع الاجهادات العاملة فيه. وتبعاً للتغير في الطول الأصلي للقضبان فإن الجائز يتعرض لتغير في شكله، بحيث تخضع كل عقدة من عقد الجائز لانتقال أفقي وآخر رأسي، ويمكن تطبيق نظرية العمل الوهمي في تعيين هذه الانتقالات.

ولحساب الانتقالات في مختلف عقد الجائز الشبكي لابد من دراسة مبدأ العمل الوهمي.

مبدأ العمل الوهمي :

أ- نقطة الكتلة : لنفترض كتلة ما على شكل نقطة وخاضعة لتأثير مجموعة من الحمولات ذات المحصلة R كما في الشكل (3-4)، فإذا حصلت هذه النقطة على إزاحة Y بينما بقيت الحمولة ثابتة نجد :

$$\text{العمل الناتج} = R.Y \cos \theta$$



الشكل (3-4)

فإذا كانت مجموعة الأحمال متوازنة، فإن المحصلة R تساوي الصفر. كذلك فإن العمل الناتج سيساوي الصفر، ويمكن إيراد شرط التوازن بشكل آخر: إذا أبدت النقطة الكتلية أية إزاحة وهمية، وكان العمل الناتج يساوي الصفر، فإن النقطة ستكون في وضعية التوازن. ب- إن العمل ينتج فقط بواسطة حمولة تتحرك على خط عملها. وعلى هذا فإن النقطة A على حدود المنشأ قد تتحرك إلى A' ، ولكن الإزاحة الموافقة للحمولة P هي المركبة Y_P .

ج- الأجسام القابلة للتشوه : يتكون الجسم القابل للتشوه من مجموعة من النقاط الكتلية والمتراصة بجانب بعضها بعضاً. مجموعة هذه النقاط تكون في حالة توازن وينطبق عليها مبدأ العمل الوهمي السابق ذكره. العمل الكلي الناتج (W)

$$W = W_e + W_i$$

حيث (W_e) العمل الناتج عن الحمولات الخارجية المؤثرة في النقطة المدروسة.

(W_i) العمل الناتج من القوى الداخلية المؤثرة في النقطة المدروسة.

ومن أجل نقاط الجسم كافة فإنه يجب إجراء التجميع.

$$\sum W = \sum W_e + \sum W_i = 0$$

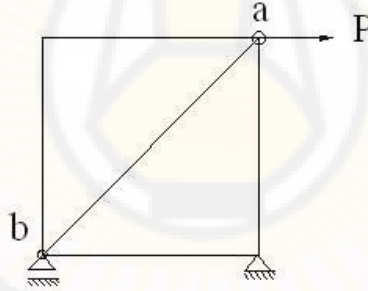
أما العمل الوهمي الخارجي فمن السهل حساب

$$W_e = \sum P.y$$

حيث P : القوى المطبقة، و Y : هي الإزاحة الموافقة في كل حالة.

أما العمل الوهمي الداخلي، فقد لا يكون بتلك السهولة فيما يخص العمل الوهمي الخارجي.

فلو كان لدينا الجائز الشبكي المبين بالشكل (4-4) ولنعتمد أحد أجزائه وليكن الشداد (ab) فإذا كانت (N) هي محصلة اجهدادات الشد على هذا القضيب والذي يخضع إلى استطالة تساوي δ فإن العمل الناتج عن القوة يساوي $N.\delta$



الشكل (4-4)

إن العمل الناشئ في المفصل = - (العمل الناشئ في القضيب) من أجل مجموعة
المفاصل (العقد) ومجموعة القضبان فإن :

$$\begin{aligned} &= \sum W_e + \sum W_i \text{ العمل الوهمي الكلي} \\ &= \sum W_e - \sum \text{"العمل الناشئ في القضبان"} \\ &\sum W_e = \sum N \cdot \delta \end{aligned}$$

وحيث إن العمل الكلي يساوي الصفر نجد :

$$\sum W_e = \sum N \cdot \delta$$

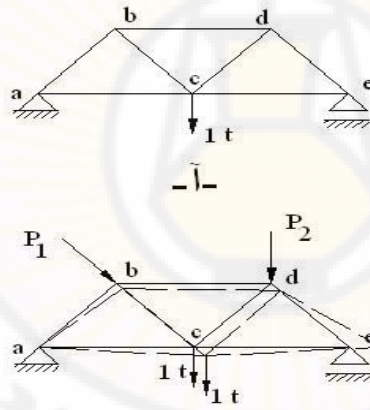
حيث N : القوة في القضيب (محصلة الاجهادات)

δ : تشوهات القضيب والناشئة عن القوة N

وهذا يعني طريقة لحساب التشوهات في المنشآت.

حساب الانتقالات للجوائز الشبكية المقررة باستخدام مبدأ العمل الوهمي:

ليكن لدينا الجوائز الشبكية الموضح بالشكل (4-5) والذي يخضع لوحدة
الحمولات (1طن) المطبقة عند العقدة (2) :

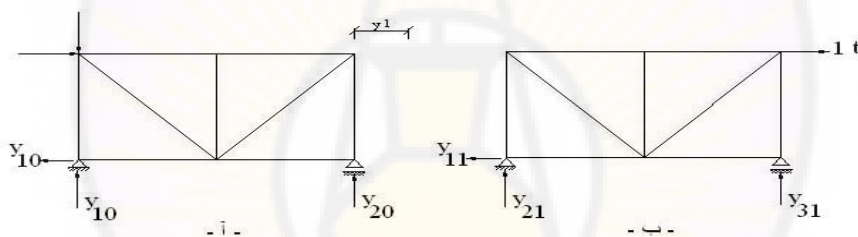


الشكل (4-5)

تؤدي هذه الحمولة إلى نشوء قوى في سائر قضبان الجوائز، ولترمز لكل قوة من
القوى هذه بالرمز N_1 . كما يوضح الشكل - ب - الجوائز نفسه، ولكن تحت تأثير

مجموعة من الحمولات المطبقة في العقد ولتكن ($P_1, P_2, \dots$) إن الخط المنقط يوضح وضعية الجائز بعد تطبيق مجموعة الحمولات ($P_1, P_2, \dots$) وذلك نسبة إلى وضعه الأصلي عندما كان يخضع فحسب إلى واحدة الحمولات. العقدة C انتقلت بالمسافة ΔC في اتجاه واحدة الحمولات وسندرس إمكان حساب هذه الانتقالات. ولنعتمد الجائز الشبكي الموضح في الشكل (4-6)، ولندرس انتقالاته تحت تأثير العوامل الآتية :

- الأحمال الخارجية ($P_1, P_2, \dots$)
- محصلة الاجهادات في القضبان ($N_{10}, N_{20}, N_{30}, \dots$)
- ردود الأفعال عند المساند الخارجية ($Y_{10}, Y_{20}, Y_{30}, \dots$)
- فالتشوهات ستكون :
- انتقالات المفصل (العقدة) في مختلف الاتجاهات $Y_1, Y_2, \dots$
- التغير في أطوال القضبان $\delta_{10}, \delta_{20}, \dots$



لنفترض أن المنشأ مطبق عليه واحدة الحمولات (1) طن بعد رفع الحمولات الخارجية ونطلق على هذه المنشأة المجموعة الثانية في الشكل (4-6، ب) والتي تحتوي على الحمولات الآتية:

- الحمولات الخارجية : واحدة الحمولة (1 طن)

• محصلة الاجهادات الداخلية (N_{11}, N_{21}, N_{31})

• ردود الأفعال (Y_{11}, Y_{21}, Y_{31})

لدينا : الصفر = العمل الوهمي Σ

ولكن :

$$\begin{aligned}\sum W_e &= 1.y_1 \\ \sum W_i &= -(N_{11}\delta_{10} + N_{21}\delta_{20} + N_{31}\delta_{30} + \dots) \\ &= -\sum N_1\delta_0\end{aligned}$$

وتبعاً لمبدأ العمل الوهمي :

$$1.y_1 = +\sum N_1\delta_0$$

$$y_1 = +\sum N_1\delta_0$$

وهي تمثل انتقال المجموعة الأولى والموافقة له واحدة الحمولات (1 طن).

خطوات العمل كمايلي:

أ- تحليل القوى N_0 في المنشأ ثم حساب التشوهات δ_0 في أطوال القضبان

وتحت تأثير الحمولات المطبقة كافة أي :

- تبعاً لمحصلة الاجهادات N_0 ومن ثم:

$$\delta_0 = \frac{N_0 \Delta L}{AE}$$

- تبعاً لفروقات درجة الحرارة :

$$\delta_0 = \alpha(\Delta L).t$$

- وتبعاً لفروقات الأطوال العائدة لأخطاء التصنيع : $\delta_0 = e$

وحيث إن القوى الشادة موجبة فإن استطالة القضيب موجبة، وأما النقص في طول القضيب والعائد لقوى الضغط فهو ذو إشارة سالبة).

حيث : $L \Delta$: الطول الأصلي للقضيب قبل التشوه

α : معامل التمدد الحراري لمادة المنشأ

t : تغير درجة الحرارة

e : فرق الطول نتيجة خطأ التصنيع.

ب- يطبق على المنشأ واحدة الحمولات (1 طن) وفي الاتجاه (Y)، حيث يطلب حساب الانتقال (أي أن Y باتجاه الانتقال المطلوب)، ويتم حساب قيمة محصلة الاجهادات (N_1) في مختلف قضبان المنشأ.

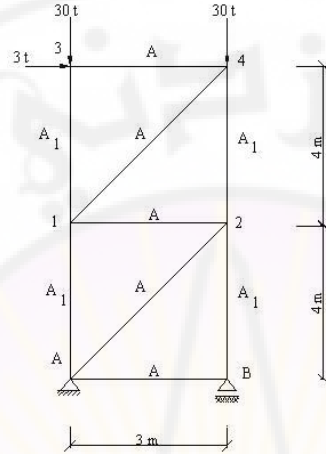
ج- باستعمال مبدأ العمل الوهمي :

$$1y = \sum \frac{N_1 N_0 \Delta L}{EA} + \sum N_1 \alpha (\Delta L).t + \sum N_1.e$$

أمثلة عملية :

مثال:

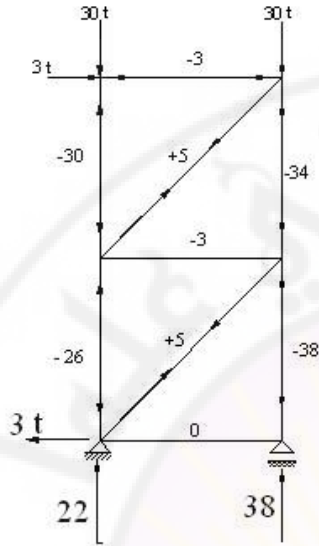
المطلوب حساب قيمة الانتقال الرأسي والانتقال الأفقي للعقدة (4) من الجائز الشبكي الموضح بالشكل (4-7) . علماً أن مساحة المقاطع العرضية لمختلف قضبان الجائز الشبكي موضحة على الشكل نفسه، وأن (A) تساوي (20) سم² ، بينما (A₁) تساوي (40) سم² ومعامل المرونة الطولي (E) للقضبان تساوي (2000) طن/سم².



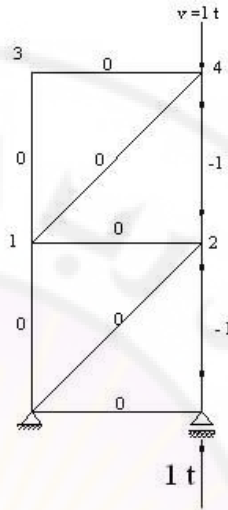
الشكل (4-7)

الحل:

باستعمال طريقة التحليل عند العقد، فإنه يمكن إيجاد القوى في قضبان الجائز كما هو موضح بالشكل (4-8) وذلك تحت تأثير مجموعة الحمولات الخارجية المطبقة على هذا الجائز (وهو ما يسمى بالمخطط (N_0)).
ثم نقوم بإيجاد هذه القوى في القضبان تحت تأثير واحدة الحمولات الشكل (4-9) المطبقة عند العقدة (4) في الاتجاه الرأسي (وهو ما يسمى بالمخطط N_1) ،
أولاً ثم في الاتجاه الأفقي المخطط (N_1) . كما هو موضح بالشكل (4-10).



الشكل (8-4)



الشكل (9-4)

ومن المعلوم أن الانتقال الكلي للعقدة (4) يحتوي على مركبتين إحداها رأسية والأخرى أفقية أي :

$$y_4 = \sum_A^B \frac{N_1 N_0}{EA} \Delta L$$

$$x_4 = \sum_A^B \frac{N_0 N'_1}{EA} \Delta L$$

الانتقال الكلي يساوي :

$$\delta_4 = \sqrt{(y_4)^2 + (x_4)^2}$$

* الانتقال الرأسي للعقدة (4) :

* الانتقال الأفقي للعقدة (4) :

الشكل (4-10)

-124 -

القضيب	ΔL cm	A cm ²	N ₀ Ton	N ₁ ton	N ₁ ' ton	$\frac{N_0 N_1 \Delta L}{AE}$	$\frac{N_0 N_1' \Delta L}{AE}$
A-1	400	40	-26	0	+4/3	0	-0.1733
1-3	400	40	-30	0	0	0	0
B-2	400	40	-38	-1	-8/3	+0.190	+0.5067
2-4	400	40	-34	-1	-4/3	+0.170	+0.2267
A-B	300	20	0	0	0	0	0
1-2	300	20	-3	0	-1	0	+0.0225
3-4	300	20	-3	0	0	0	0
A-2	500	20	+5	0	+5/3	0	+0.1042
1-4	500	20	+5	0	+5/3	0	+0.1042
						+0.3600	+0.791

الجوائز الشبكية غير المقررة :

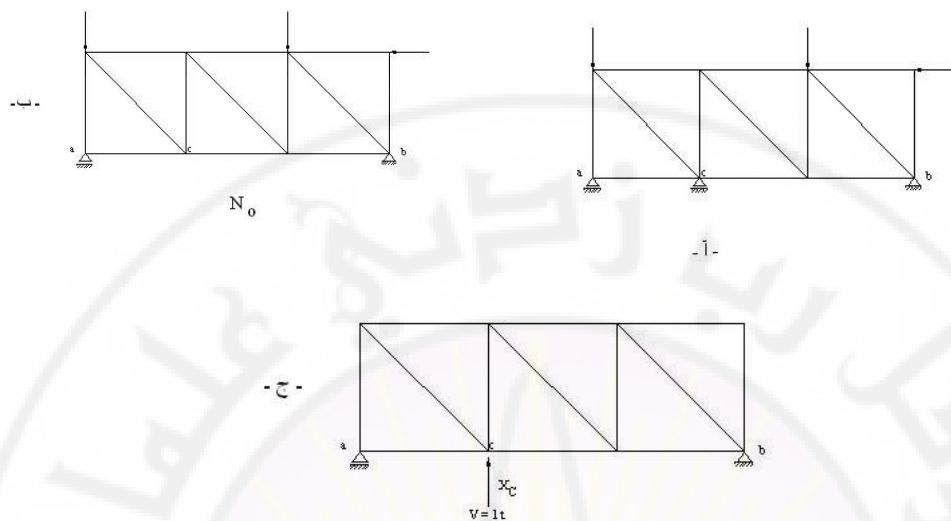
يقال عن الجائز إنه غير مقرر عندما يتعذر تعيين ردود الأفعال عند المساند الخارجية، أو تعيين القوى في القضبان تحت تأثير الحمولات الخارجية باستخدام معادلات التوازن الثلاث. ومنه يمكن أن يكون الجائز الشبكي غير مقرر داخلياً، أو خارجياً، أو داخلياً وخارجياً معاً.

سندرس فيما يأتي الحالتين الأوليتين، أما الحالة الثالثة فهي مجموع الحالتين معاً:

* الجوائز الشبكية غير المقررة خارجياً :

يوضح الشكل (4-11، أ) جائزاً شبكياً يحتوي على ثلاثة مساند؛ أي أن هناك أربعة ردود أفعال، ومن ثم فالجائز غير مقرر خارجياً من الدرجة الأولى . يمكن معالجة الجائز المذكور باستعمال مبدأ العمل الوهمي :

- نرفع أحد المساند بحيث يصبح الجائز مقررًا، وليكن المسند (2) ثم نعين القوى في القضبان الجائز تحت تأثير الحمولات الخارجية (مخطط N_0) كما هو موضح بالشكل (11-4، ب).



الشكل (11-4)

- نطبق حمولة وهمية (واحدة الحمولات) رأسية في موضع المسند المرفوع (2) مع إزالة الحمولات الخارجية. نعين القوى في قضبان الجائز تحت تأثير واحدة الحمولات المذكورة (مخطط N_1) كما يوضحه الشكل (11-4، ج).
- يتم حساب الانتقالات الموافقة حسب مبدأ العمل الوهمي :

$$\delta_{10} = \sum_a^b \frac{N_0 N_1}{EA} \Delta L$$

$$\delta_{11} = \sum_a^b \frac{N_1 N_1}{EA} \Delta L$$

حيث إن قيمة الانتقال الرأسي عند (C) يجب أن تساوي الصفر نظراً لوجود المسند أي أنه:

$$\delta_{10} + X_c \delta_{11} = 0$$

ومنه :

$$X_c = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

تمثل (X_c) رد الفعل للمسند (C) ، وبذلك يمكن تعيين بقية ردود الأفعال في المساند. وأما القوى في قضبان الجائز فيمكن حسابها من العلاقة :

$$N = N_0 + X_c N_1$$

*تحليل الجوائز الشبكية غير المقررة داخلياً :

يوضح الشكل (4-12، أ) جائزاً شبكياً مقررّاً خارجياً نظراً لوجود ثلاثة ردود أفعال لاغير في المسندين (a, b)، وبتطبيق العلاقة :

$$m + r = 2J + X$$

حيث m : عدد القضبان في الجائز

J : عدد العقد المفصل في الجائز

r : عدد ردود الأفعال الخارجية للمساند

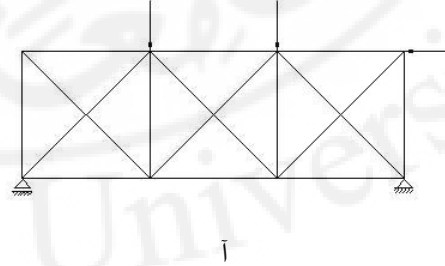
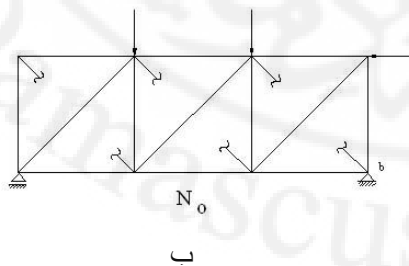
X : مجموع درجات عدم التقرير الخارجي والداخلي معاً

أي :

$$16 + 3 = 2 \times 8 + x$$

$$19 = 16 + x \Rightarrow x = 3$$

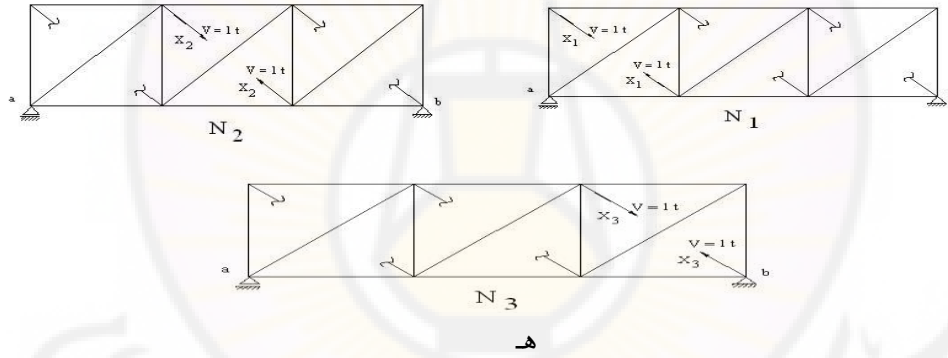
أي إن الجائز غير مقرر من الدرجة الثالثة، وكونه مقررّاً خارجياً فهذا يعني أن درجات عدم التقرير الثلاث داخلية.



الشكل (12-4)

ويتم معالجة الجائز بتطبيق مبدأ العمل الوهمي كما يأتي :

- نرفع القضبان الداخلية الثلاثة الزائدة بحيث يصبح الجائز مقررًا، ثم نعين القوى في القضبان: (مخطط N_0) تحت تأثير الحمولات الخارجية الشكل (12-4 ، ب).
- نطبق حمولة وهمية (واحدة الحمولات) بدلاً من القضيب الداخلي المرفوع، وبعد تفريغ كامل الحمولات الخارجية نعين قضبان الجائز، ثم نحسب مخطط (N_1) و (N_2) و (N_3) لكل حمولة على حدة، كما هو موضح بالأشكال (13-4 ، ج)، (13-4 ، د)، (13-4 ، هـ).



- يتم حساب الإزاحات الموافقة حسب نظرية العمل الوهمي:

$$\delta_{10} = \sum_a^b \frac{N_0 N_1}{EA} \Delta L$$

$$\delta_{11} = \sum_a^b \frac{N_1 N_1}{EA} \Delta L$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_a^b \frac{N_1 N_2}{EA} \Delta L$$

$$\delta_{13} = \sum_a^b \frac{N_1 N_3}{EA} \Delta L$$

ونحسب $\delta_{20}, \delta_{30}, \dots, \delta_{32}, \delta_{33}$.

ولكن الازاحات في نهايتي كل قضيب من القضبان المقطوعة تساوي التشوهات في هذه القضبان ومن ثم:

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} = -X_1 \frac{L_t}{A_t \cdot E}$$

$$\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = -X_2 \frac{L_t}{A_t \cdot E}$$

$$\delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = -X_3 \frac{L_t}{A_t \cdot E}$$

حيث : L_t : طول القضيب المفروض

A_t : مساحة القضيب المفروض

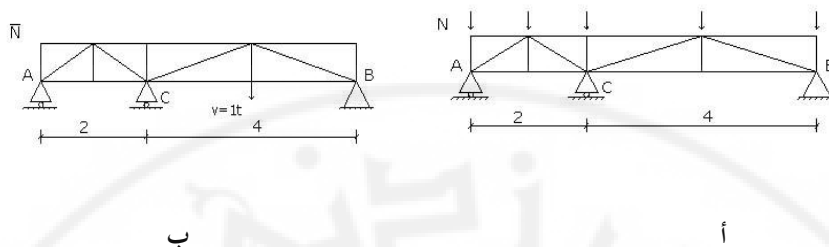
بحل المعادلات الثلاث السابقة نحصل على القوى الداخلية (X_3, X_2, X_1) في القضبان الثلاثة الأخيرة المعتمدة.

وأخيراً يمكن تعيين القوى في بقية القضبان للجوائز من العلاقة :

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3$$

* انتقال الجوائز الشبكية غير المقررة:

يتم حساب الانتقال بنظرية العمل الوهمي : ليكن لدينا الجائز الشبكي الشكل (14-4 ، أ) غير المقرر خارجياً من الدرجة الأولى، ويتم حساب الانتقال الرأسي في العقدة (4) كما يأتي :



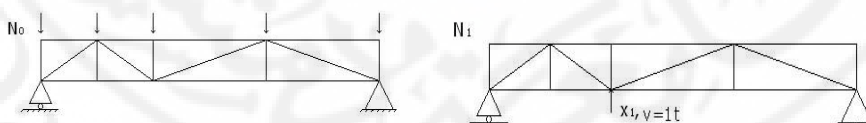
الشكل (14-4)

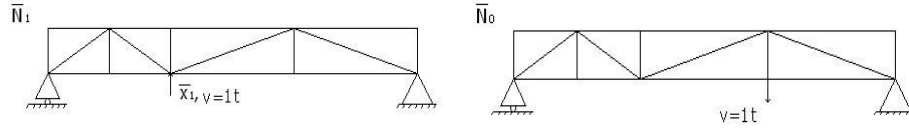
$$y_4 = \sum_A^B \frac{N\bar{N}}{EA} \Delta L$$

حيث : N : القوى المحورية في قضبان الجائز الشبكي غير المقرر تحت تأثير الحمولات الخارجية المطبقة على الجائز.

$\bar{N}$: القوى المحورية في قضبان الجائز الشبكي غير المقرر تحت تأثير حمولة وهمية (واحدة الحمولات) تعمل رأسياً في العقدة (4) بعد تفريغ الحمولات الخارجية الأخرى الشكل (14-4 ، ب)

والشكل (15-4) يوضح طريقة الحل :





الشكل (4-15)

حيث :

$$N = N_0 + X_1 N_1$$

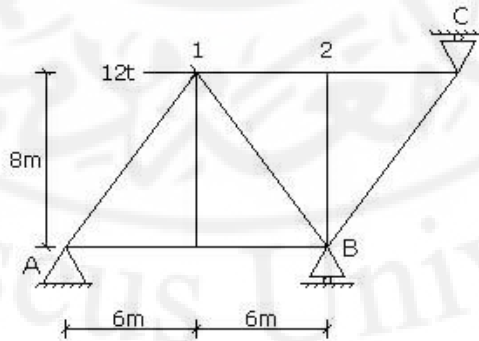
$$\bar{N} = \bar{N}_0 + \bar{X}_1 \bar{N}_1$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على الحل المطلوب.

حيث : N_0 : القوى الداخلية في قضبان الجوائز الشبكي المقرر للجملة الأساسية المختارة تحت تأثير الحمولة الوهمية (واحدة الحمولات) المطبقة رأسياً في العقدة (4) .

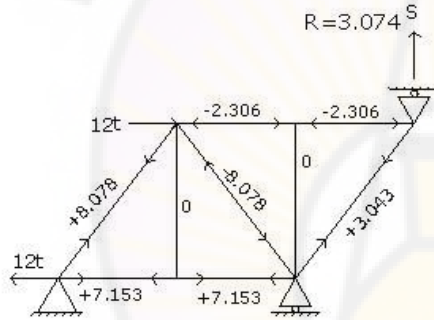
مثال :

المطلوب إيجاد قيمة الانتقال الأفقي عند العقدة (1) في الجوائز الشبكي الموضح بالشكل (4-16) والخاضع لحمولة خارجية تساوي (12) طناً مطبقة أفقياً عند العقدة (1) علماً أن مساحة مقاطع القضبان متساوية وكل منها (A) ، ومعامل المرونة الطولي ثابت .



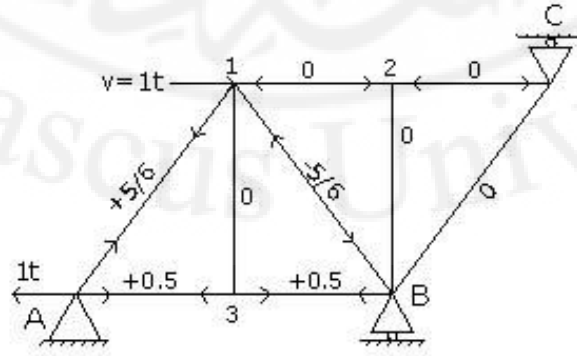
الشكل (16-4)

الحل : الجائز الشبكي غير مقرر خارجياً من الدرجة الأولى
 يتم اختيار الجملة الأساسية بحذف المسند (C) ، ومن ثم حساب القوة الرأسية (R_C) ؛ أي رد الفعل عند المسند المذكور .
 ويوضح الشكل (17-4) القوى الداخلية (مخطط N) في قضبان الجائز غير المقرر تحت تأثير الحمولات الخارجية المفهومة.



الشكل (17-4)

كما يوضح الشكل (18-4) القوى الداخلية (مخطط $\bar{N}_0$) في قضبان الجائز الشبكي المقرر للجملة الأساسية تحت تأثير الحمولة الوهمية (واحدة الحمولات) المطبقة عند العقدة (1) في اتجاه الانتقال المطلوب حسابه (أفقياً).



مخطط $\bar{N}_0$ الشكل (18-4)

يوضح الجدول المعطيات اللازمة لحساب الانتقال الأفقي عند العقدة (1)،
وأخيراً فإن الانتقال المطلوب عند تلك العقدة يساوي المجموع الجبري للعمود الأخير من
الجدول المذكور أي :

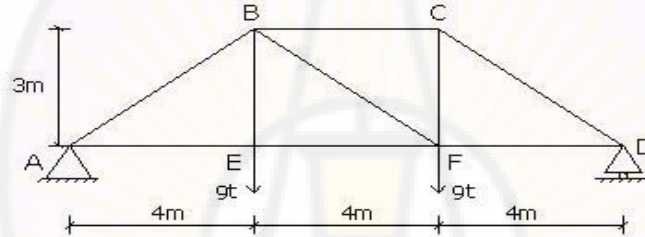
$$X_1 = \sum_A^C \frac{N\bar{N}_0}{EA} \Delta L = \frac{17755,13}{E}$$

القضيب	ΔL cm	A Cm ²	N Ton	N ₀ ' Ton	$\frac{N_0 N \Delta L}{AE}$
1-A	1000	A	+8.078	+5/6	+ 6731.667
1-3	800	A	0	0	0
1-B	1000	A	-8.078	-5/6	+ 6731.667

2-B	800	A	0	0	0
C-B	1000	A	+3.843	0	0
2-C	600	A	-2.306	0	0
2-1	600	A	-2.306	0	0
3-B	600	A	+7.153	+1/2	+ 2145.900
3-A	600	A	+7.153	+1/2	+ 2145.900
					<u>17755.13</u>
					<i>E</i>

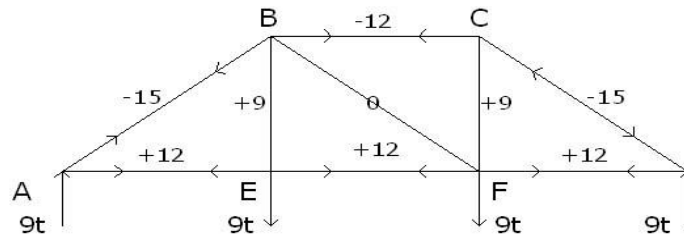
مثال :

المطلوب حساب الانتقال الأفقي للعقدة (C) من الجائز الشبكي المبين بالشكل (19-4) علماً أن مساحة مقطع كل قضيب $A = 5 \text{ cm}^2$ ، وأن عامل المرونة للمادة التي صنعت منها القضبان $E = 2000 \text{ t/cm}^2$



الشكل (19-4)

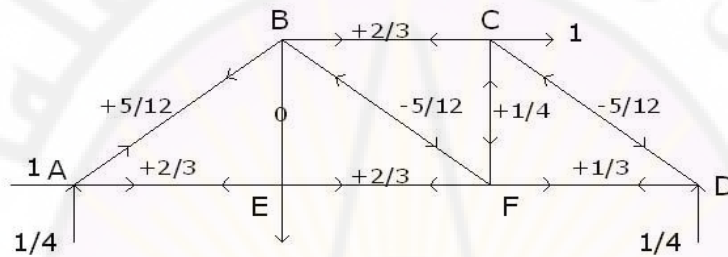
- نحسب ردود الأفعال والقوى الداخلية في أضلاع الجائز الشبكي من تأثير الحمولات الخارجية . الشكل (20-4)



N_0

الشكل (20-4)

- نطبق واحدة القوى الأفقية في النقطة C ، ونحسب ردود الأفعال والقوى الداخلية في أضلاع الجوائز الشبكي من تأثيرها . الشكل (21-4)



N_1

الشكل (21-4)

- نحسب المقادير $\sum \frac{N_0 N_1}{AE} . L$ لأضلاع الجوائز الشبكي كافة، فيكون الانتقال الأفقي للنقطة C هو:

$$\Delta_{h,C} = \sum \frac{N_0 N_1}{AE} . L$$

ننظم الحسابات في جدول كالآتي :

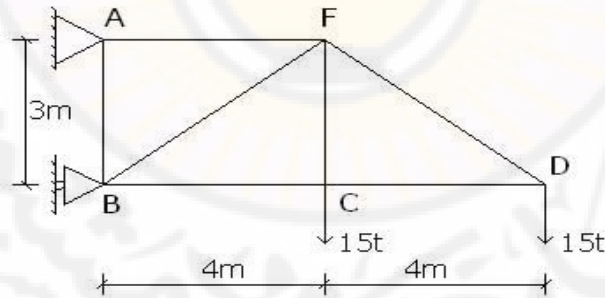
العنصر	L	N_0	N_1	$N_0 N_1 . L$
--------	-----	-------	-------	---------------

	Cm			
AB	500	-15	+5/12	-3125
BF	500	0	-5/12	0
CD	500	-15	-5/12	+3125
BE	300	+9	0	0
CF	300	+9	1/4	+675
BC	400	-12	2/3	-3200
AE	400	+12	2/3	+3200
EF	400	+12	2/3	+3200
FD	400	+12	1/3	+1600
			Σ	+5475

$$\Delta_{h,C} = \frac{5475}{5.2000} = 0,5475cm$$

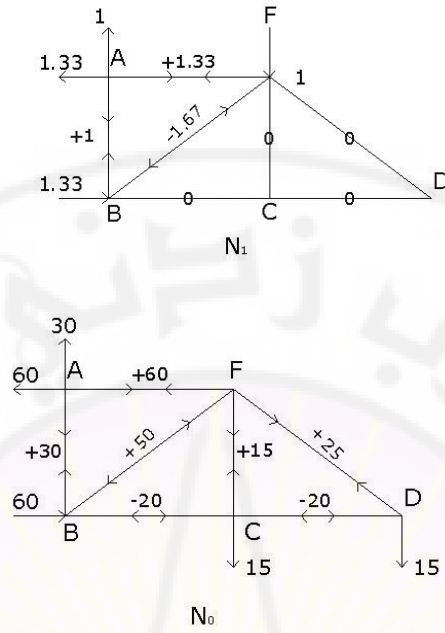
مثال :

المطلوب تعيين الانتقال الشاقولي للعقدة (F) من الجائز الشبكي المبين بالشكل (12-4)، علماً أن مساحة مقطع كل القضيبين AF، BF هي 60 cm^2 ، والباقي 30 cm^2 ، وأن $E = 1800 \text{ t/cm}^2$.



الشكل (4-22)

الحل : نوجد N_1, N_0 كما في الشكل (4-23) وننظم الحسابات في الجدول الآتي:



الشكل (4-23)

العنصر	L	A	N_0	N_1	$\frac{N_0 N_1}{A} \cdot L$
AF	400	60	+60	+1.33	532
BC	400	30	-20	0	0
CD	400	30	-20	0	0
AB	300	30	+30	+1	300
FC	300	30	+15	0	0
BF	500	60	-50	-1.67	695.83

FD	500	30	+25	0	0
				Σ	1527.83

$$\delta_{V,F} = \frac{1527,83}{1800} = 0,85cm$$

حل الجوائز الشبكية غير المقررة بطريقة العمل الوهمي :

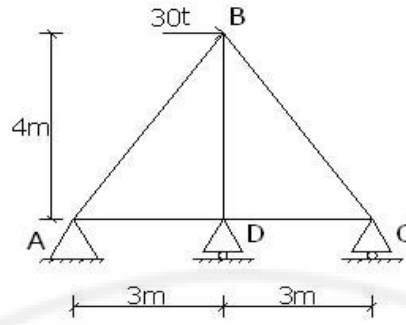
يتم الحل بالبحث أولاً عن المساند الزائدة في حال عدم التقرير الخارجي، أو القضبان الزائدة في حال عدم التقرير الداخلي، فنزيلها مفترضين أن المجاهيل هي: $X_1, X_2, \dots$ ونوجد القوى الداخلية N_0 في قضبان الجوائز الشبكية الذي أصبح مقررًا والناجمة عن الحمولات الخارجية، ثم نزيل هذه الحمولات، ونضع المجهول X_1 ونفرضه مساوياً واحدة الحمولة، ونوجد القوى الداخلية N_1 وكذلك الأمر بالنسبة للمجهول $X_2, X_3, \dots$ ، ثم نطبق معادلات العمل الوهمي المعروفة مع الانتباه إلى انعدام الطرف الثاني لهذه المعادلات في حال عدم التقرير الخارجي ومساواته المقدار $-\frac{X_i.L}{E.A}$ في حال عدم التقرير الداخلي.

ثم نوجد المجاهيل $X_1, X_2, X_3, \dots$ وتكون القوى الداخلية النهائية في قضبان الجوائز الشبكية هي :

$$N_{fin} = N_0 + N_1.X_1 + N_2.X_2 + N_3.X_3 + \dots$$

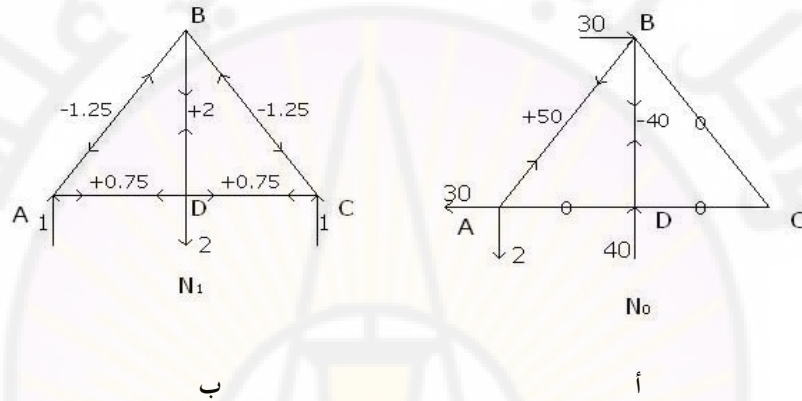
مثال :

- (المطلوب إيجاد القوى الداخلية في قضبان الجوائز الشبكية المبين بالشكل (24-4) وردود الأفعال علماً أن $(EA = Const)$.



الشكل (24-4)

الحل : الجائز غير مقرر خارجياً درجة أولى تقرر بإزالة المسند المتدحرج C .



الشكل (25-4)

العنصر	L	N_0	N_1	$N_0.N_1.L$	$N_1^2.L$	N_{fin}
AD	3	0	+0.75	0	1.6875	+13.55
DC	3	0	+0.75	0	1.6875	+13.55
DB	4	-40	+2	-320	16	-3.86
AB	5	+50	-1.25	-312.5	7.8125	+27.41
CB	5	0	-1.25	0	7.8125	-22.59

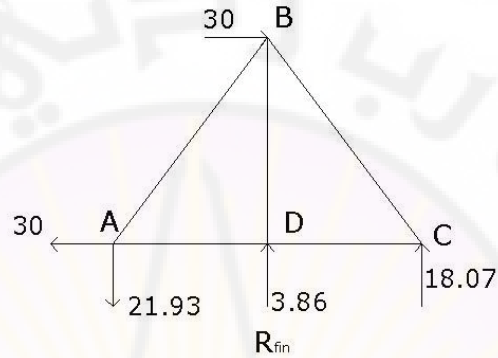
			Σ	-632.5	35	
--	--	--	----------	--------	----	--

$$-632.5 + 53 X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 18.07$$

$$N_{fin} = N_0 + N_1.X_1$$

وقيم القوى الداخلية موجودة في العمود الأخير من الجدول السابق .

$$R_{fin} = R_0 + R_1. X_1$$



الفصل الخامس

طريقة المركز المرن والتشبيه العمودي



1- طريقة المركز المرن :

وهي تطبيقاً خاصة لطريقة العمل الوهمي وذلك في حالة الإطارات ذات الفتحة الواحدة والأقواس، إذ إن استعمالها محدود بهاتين الحالتين اللتين يوجد بهما ثلاث مركبات ردود فعل فائضة أو أقل.

لنعتبر الإطار المبين بالشكل (1-5) والموثوق في مسنديه A, D .

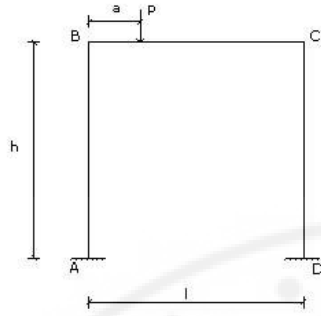
إن لهذا الإطار ثلاثة فوائض، ولتكن مركبات ردود الفعل الثلاثة هي X_3, X_2, X_1 في المسند D . فإذا أزلنا هذا المسند أصبح بإمكان النقطة D أن تنتقل أفقياً وشاقولياً ودائرياً. الشكل (1-5) لنحسب هذه الانتقالات في D والناجمة عن الحمولة الخارجية P ، ولنسميها δ_{10} , δ_{20} , δ_{30} ، حيث :

δ_{10} : الانتقال الأفقي الناتج عن الحمولة الخارجية.

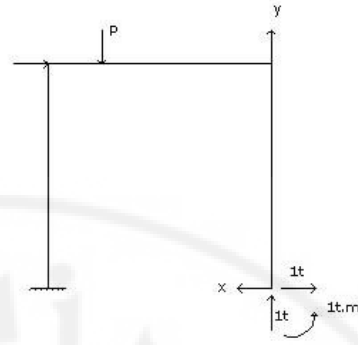
δ_{20} : الانتقال الشاقولي الناتج عن الحمولة الخارجية.

δ_{30} : الدوران الناتج عن الحمولة الخارجية.

ثم لنطبق وحدة حمولة أفقية، ثم وحدة حمولة شاقولية، ثم وحدة عزم كل على حدة كما في الشكل (2-5) ولنحسب الانتقادات الأفقية والشاقولية والدائرية للنقطة D والناجمة عن كل من هذه الوحدات منفردة، فإنه يكون مجموع الانتقالات بكل من الاتجاهات الأفقية والشاقولية والدائرية متوافقاً مع طبيعة الوثاقة في D أي أنها تساوي الصفر .



الشكل (5-1)



الشكل (5-2)

ويمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= 0\end{aligned}\quad (1-5)$$

حيث :

δ_{ij} : الانتقال الناتج عن تطبيق الحمولة الواحدية i بالاتجاه j

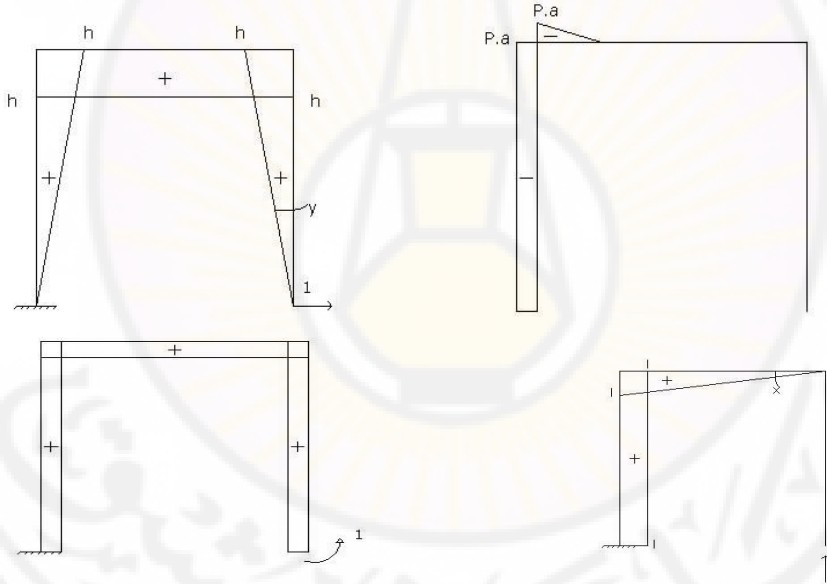
إن هذه العوامل التسعة δ_{ij} تسمى بعوامل المرونة، وتعريف عامل المرونة هو

الانتقال الناتج عن تطبيق وحدة القوة. انظر الشكل (5-3).

يمكن حساب هذه الانتقالات كما يأتي :

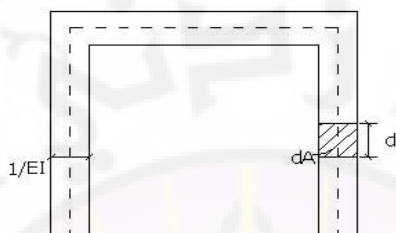
$$\begin{aligned}
\delta_{12} = \delta_{21} &= \int M_1 \frac{M_2}{EI} .dL = \int y.x. \frac{dL}{EI} \\
\delta_{13} = \delta_{31} &= \int M_1 \frac{M_3}{EI} .dL = \int y. \frac{dL}{EI} \\
\delta_{23} = \delta_{32} &= \int M_2 \frac{M_3}{EI} .dL = \int x. \frac{dL}{EI} \\
\delta_{11} &= \int M_1 \frac{M_1}{EI} .dL = \int y^2. \frac{dL}{EI} \\
\delta_{22} &= \int M_2 \frac{M_2}{EI} .dL = \int x^2. \frac{dL}{EI} \\
\delta_{33} &= \int M_3 \frac{M_3}{EI} .dL = \int \frac{dL}{EI}
\end{aligned} \tag{2-5}$$

حيث M_3, M_2, M_1 هي العزوم في أي نقطة من نقاط الإطار والناجئة عن تطبيق :



الشكل (3-5)

وحدة حمولة أفقية أو شاقولية أو دائرية (وحدة عزم)، dL هي زيادة صغيرة في الطول على محور أي عضو من الإطار، وإذا فرضنا أن $\frac{1}{EI}$ هي عرض اعتباري للعضو، كانت العبارة $\frac{dL}{EI}$ مساوية لـ dA وهي زيادة صغيرة في المساحة الاعتبارية على محور العضو، ونطلق على هذه المساحة الاعتبارية اسم المساحة المرنة كما في الشكل (4-5).



الشكل (4-5)

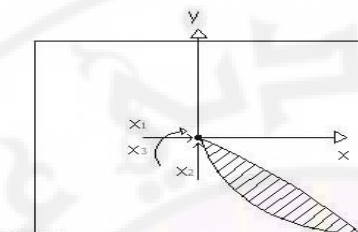
في المعادلات السابقة نلاحظ أن $\int xy dA$ هو جداء العطالة للمساحة المرنة حول المحورين x, y وأن $\int x dA$ ، $\int y dA$ هما العزوم الأولى للمساحة المرنة حول x, y على التوالي.

نبدل المحاور الإحداثية السابقة في الشكل (1-1) بمحاور إحداثية أخرى تكون فيها العزوم الأولى وجداء العطالة للمساحة المرنة مساوية للصفر. وتصبح المعادلات السابقة كما يأتي :

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{22} X_2 &= 0 \\ \delta_{30} + \delta_{33} X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3-5)$$

وهذه المحاور يجب أن تمر من مركز ثقل المساحة المرنة كما في الشكل (5-5) وتسمى بالمركز المرن. ونعتبر أن المركز المرن متصل بالنقطة D بواسطة ذراع صلبة وهمية متناهية في القساوة.

انظر الشكل (4)، والمحوران الجديدان هما x و y الماران من المركز المرن.



الشكل (5-5)

من الواضح أنه لكي تتلاشى عوامل المرونة المذكورة في المعادلات (5-2) ومن ثم لكي تصح المعادلات (3) يجب توفر شرطين أساسيين :

- الشرط الأول : أن العزم الأول للمساحة المرنة حول محوري الإحداثيات يجب أن يساوي الصفر ولكي يكون هذا صحيحاً يجب أن يكون مبدأ الإحداثيات منطبقاً مع مركز ثقل المساحة المرنة.

- الشرط الثاني : إن جداء عطالة المساحة المرنة يجب أن يساوي الصفر، وهذا يتحقق إذا كان أحد محاور الإحداثيات أو كلاهما محوراً للتناظر كان هذا الشرط مستوفياً، وغالباً ما يكون المحور y هو محور تناظر للإطار.

أما إذا لم يحتو المنشأ على أية محاور للتناظر فإنه يتوجب علينا لتحقيق الشرط الثاني إيجاد الزاوية التي يجب أن يدور بها المحورين المارين من المركز المرن حتى نحصل

على المحاور الرئيسية، ولكن المجهود الذي يتطلبه إيجاد المحورين الرئيسيين في حالة انعدام التناظر يفوق الجهد اللازم لحل المعادلات (5-1)، لذلك نكتفي بالمحاور المتعامدة المارة من المركز المرن، ومن ثم تصبح المعادلات (5-2) كما يأتي:

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= 0\end{aligned}\quad (4-5)$$

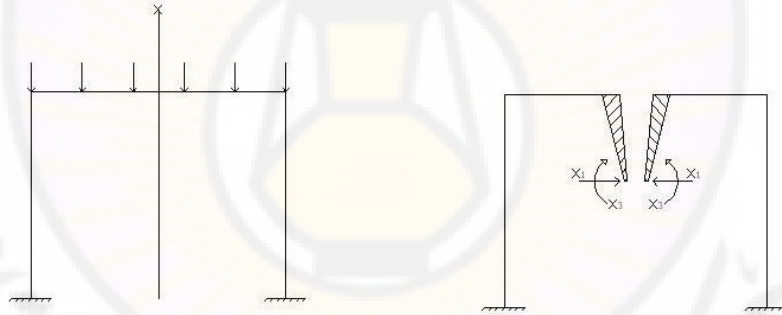
$$\delta_{30} + \delta_{33} X_3 = 0$$

حالة التناظر العام : عندما يكون الإطار متناظراً بالشكل والأحمال فإن المعادلات (5-3) تصبح كما يأتي :

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \quad (5-5)$$

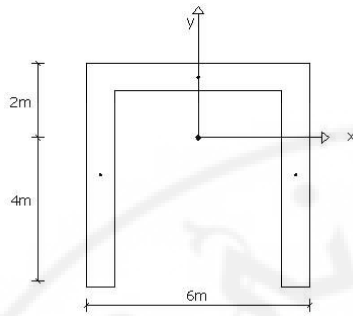
$$\delta_{30} + \delta_{33} X_3 = 0$$

أي أن قوة القص بالنسبة لمحور التناظر معدومة، ويكون تقرير الإطار بالقطع في محور التناظر ووصل ذراعين وهميين صليدين مع المركز المرن كما في الشكل (5-6).

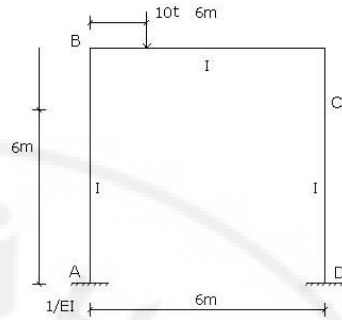


الشكل (5-6)

مثال : ارسم مخطط عزم الانعطاف للإطار المبين بالشكل (7-5)



الشكل (8-5)



الشكل (7-5)

الحل : نلاحظ أن شكل الإطار (دون الحمولة) متناظر حول المحور y ، لذلك يمكن استخدام المعادلات (3-5) وتكون خطوات الحل كما يأتي :

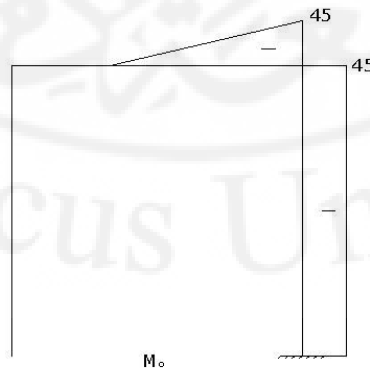
1- نوجد المركز المرن للمساحة المرنة الشكل (8-5) .

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

$$A = \frac{6}{EI} \cdot 3 = \frac{18}{EI}$$

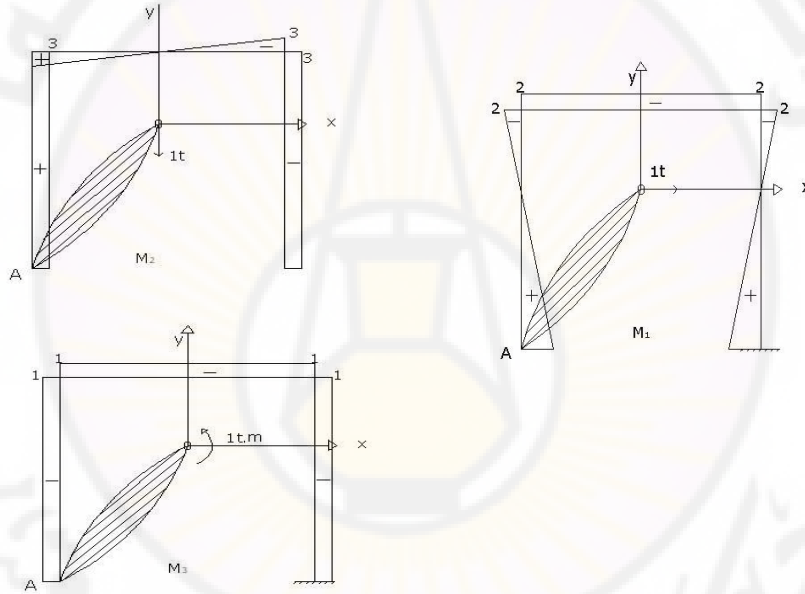
$$\bar{y} = \frac{\frac{6}{EI} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{6}{EI} \cdot 6}{\frac{18}{EI}} = 4m$$

2- نقرر الإطار بحذف الوثاقة في A ونرسم مخطط M_0 الشكل (9-5).



الشكل (9-5)

3- نصل ذراعاً صلباً بين A و O (المركز المرن) ونطبق القوى الواحدية (أفقية، شاقولية، عزم) ونرسم المخططات M_1, M_2, M_3 الشكل (9).



الشكل (10-5)

4- نشكل المعادلات ونحسب العوامل :

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{22} X_2 = 0$$

$$\delta_{30} + \delta_{33} X_3 = 0$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 45.4,5 \cdot (-2) \right] + \frac{1}{EI} \left[-45.6 \cdot (1) \right] = -\frac{67,5}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 45.4,5 \cdot (-1.5) \right] + \frac{1}{EI} \left[-45.6 \cdot (-3) \right] = \frac{371,25}{EI}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 45.4,5 \cdot (-1) \right] + \frac{1}{EI} \left[-45.6 \cdot (-1) \right] = \frac{371,25}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\underline{4.4.4} + \underline{2.2.2}) \cdot 2 + \frac{1}{EI} (2.6.2) = \frac{72}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} (\underline{3.3.3}) \cdot 2 + \frac{1}{EI} (3.6.3) \cdot 2 = \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} (1.6) \cdot 3 = \frac{18}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 0,94 \text{ t.m}$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = -7,63 \text{ t.m}$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = -20,63 \text{ t.m}$$

ويكون :

$$M_{Final} = M_0 + 0,94 M_1 - 7,63 M_2 - 20,63 M_3$$

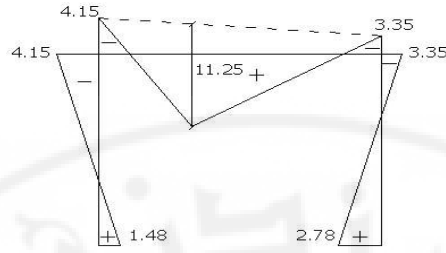
$$M_A = + 1,48 \text{ t.m}$$

$$M_B = - 4,15 \text{ t.m}$$

$$M_C = - 3,35 \text{ t.m}$$

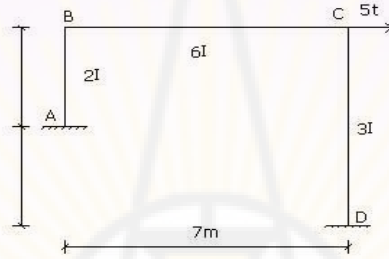
$$M_D = + 2,78 \text{ t.m}$$

ويكون مخطط العزم كما في الشكل (5-11) :



الشكل (5-11)

مثال : ارسم مخطط الانعطاف للإطار المبين بالشكل (5-12)



الشكل (5-12)

1- الإطار ليس له محور تناظر، نقرره بجذف الوثاقة A ، ونرسم مخطط M_0 كما في

الشكل (5-13)



الشكل (5-13)

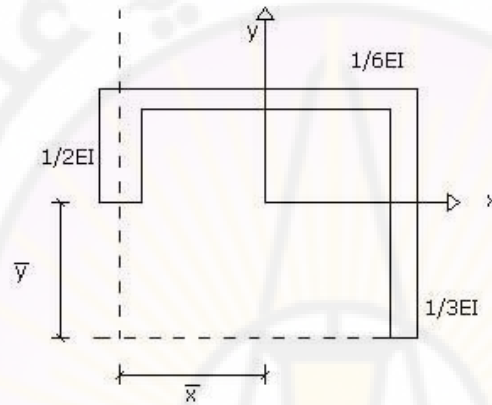
2- نرسم المساحة المرنة ونعين المركز المرن من المعادلتين كما في الشكل (5-14)

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{A} : \bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

$$A = \frac{1}{2EI} \cdot 2.5 + \frac{1}{6EI} \cdot 7 + \frac{1}{3EI} \cdot 3.5$$

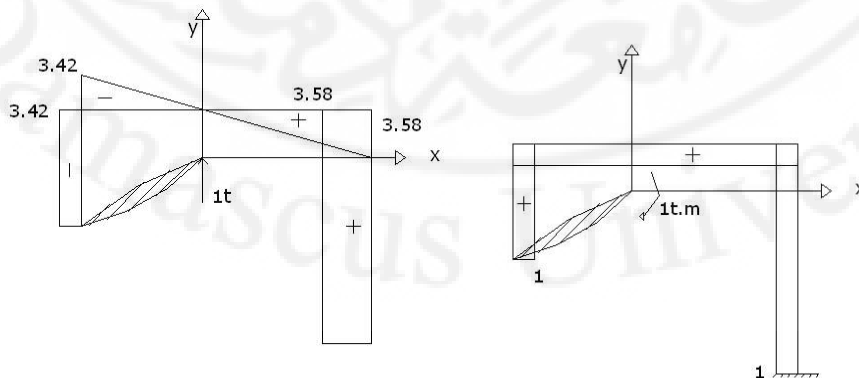
$$A = \frac{3.58}{EI}$$

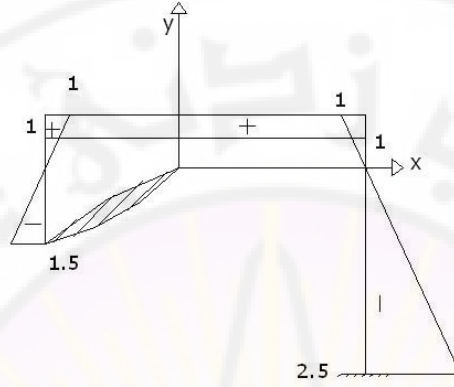
$$\bar{x} = 3.42m; \quad \bar{y} = 2.5m$$



الشكل (5-14)

3- نرسم المخططات M_1 , M_2 , M_3 وذلك بعد وصل المركز المرن مع النقطة A بذراع صلده كما في الشكل (5-15).





الشكل (5-15)

$$\delta_{10} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{3,5}{5} [- 2.17.5 \cdot 2,5 + 17,5 \cdot 1] = - \frac{13,61}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{17,5.3,5}{2} \cdot 3,58 \right) = \frac{36,55}{EI}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{17,5.3,5}{2} \cdot 1 \right) = \frac{10,21}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1,5.1,5.1,5}{3} + \frac{1,1.1}{3} \right) + \frac{1}{6EI} (1.7.1) + \frac{1}{3EI} \left(\frac{1,1.1}{3} + \frac{2,5.2,5.2,5}{3} \right)$$

$$= \frac{3,74}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} (3,42.2,5.3,42) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{7}{3} (3,42^2 + 3,58^2 - 3,42 \cdot 3,58)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3EI} (3,58 \cdot 3,5 \cdot 3,58) \\
\delta_{22} &= \frac{34,34}{EI} \\
\delta_{33} &= \frac{1}{2EI} (1,2,5,1) + \frac{1}{6EI} (1,7,1) + \frac{1}{3EI} (1,3,5,1) \\
&= \frac{3,58}{3EI}
\end{aligned}$$

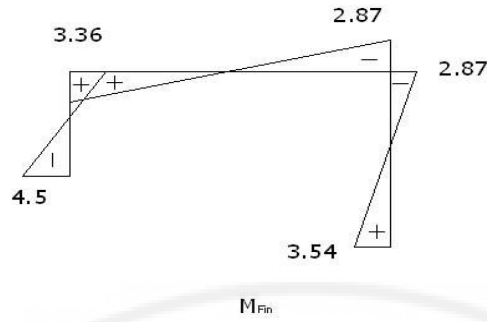
$$\begin{aligned}
\delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{2EI} \left[\frac{-1,5+1}{2} \cdot 2,5 \cdot (-3,42) \right] \\
&+ \frac{1}{6EI} \left[\frac{3,58-3,42}{2} \cdot 7,1 \right] \\
&+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{-1,5+1}{2} \cdot (2,5) \cdot 3,58 \right] \\
&= \frac{1,97}{3EI}
\end{aligned}$$

4- نشكل المعادلات، وهي المعادلات (4) :

$$\begin{aligned}
-13,61 + 3,74 x_1 - 1,97 x_2 &= 0 \\
36,55 - 1,97 x_1 + 34,34 x_2 &= 0 \\
10,21 + 3,58 x_3 &= 0 \\
X_3 &= 2,85 \text{ t.m} \\
X_1 &= 3,17 \text{ t.m} \\
X_2 &= -0,89 \text{ t.m}
\end{aligned}$$

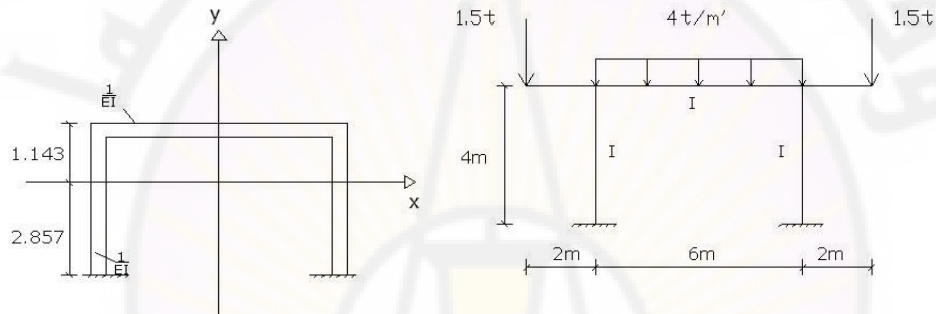
$$M_{Final} = M_0 + 3,17 M_1 - 0,89 M_2 - 2,85 M_3 \quad \text{ويكون :}$$

ونرسم المخطط كما في الشكل (5-16)



الشكل (5-16)

مسألة : ارسم عزم الانعطاف للإطار المبين بالشكل (5-17)



الشكل (5-18)

الشكل (5-17)

الإطار متناظر تماماً

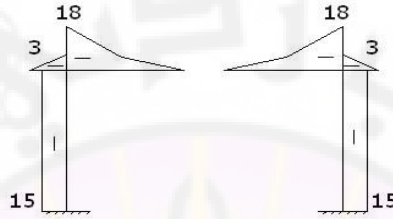
$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

1- نحسب $\bar{y}$ من العلاقة :

$$A = \frac{1}{EI} \cdot 4.2 + \frac{1}{EI} \cdot 6 = \frac{14}{EI} \quad \text{كما في الشكل (5-18)}$$

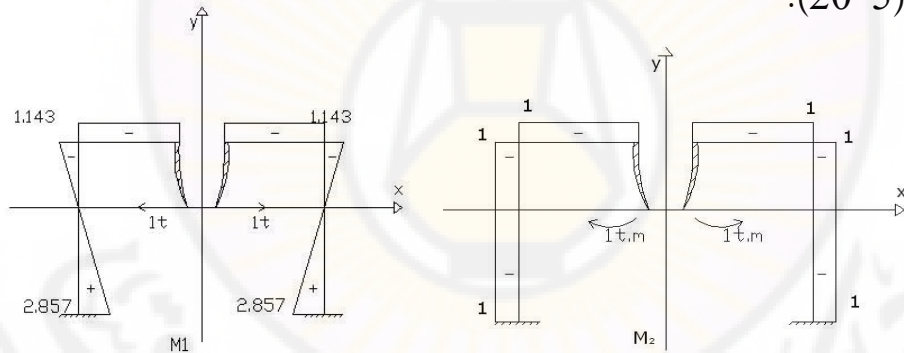
$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{EI} \cdot 2.2 + \frac{6}{EI} \cdot 4}{\frac{14}{EI}} = 2.857m$$

2- نقرر الإطار بالقطع في محور التناظر ونرسم M_0 كما في الشكل (5-19)



الشكل (5-19)

3- نصل مركز الثقل ومكان القطع بذراعين صلدتين، ونطبق قوة واحدة أفقية، وعزم واحد، أما قوة القص فهي معدومة بسبب التناظر كما في الشكل (5-20).



الشكل (5-20)

4- نشكل المعادلات وهي في هذه الحالة المعادلات رقم (5)

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \quad (5)$$

$$\delta_{30} + \delta_{33} X_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 \cdot 1,143 + \frac{2,857 - 1,143}{2} \cdot 4 \cdot (-1,5) \right] \cdot 2 \\ &= -\frac{61,64}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left[3 \cdot 1,143 \cdot 1,143 + \frac{4}{3} (1,143^2 + 2,857^2 \right. \\ &\quad \left. - 1,143 \cdot 2,857) \right] \cdot 2 = \frac{24,38}{EI} \end{aligned}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 \cdot 1 + 15 \cdot 4 \cdot 1 \right] \cdot 2 = \frac{156}{EI}$$

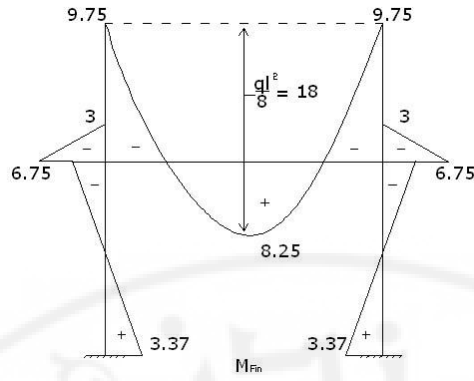
$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} (4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 2 = \frac{14}{EI}$$

$$X_1 = 2,53$$

$$X_3 = -11,14$$

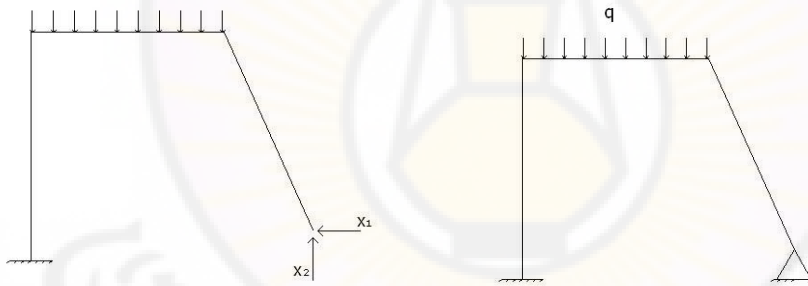
$$M_{Final} = M_0 + 2,53 M_1 - 7,63 M_2 - 11,14 M_3$$

ونرسم المخطط كما في الشكل (5-21).

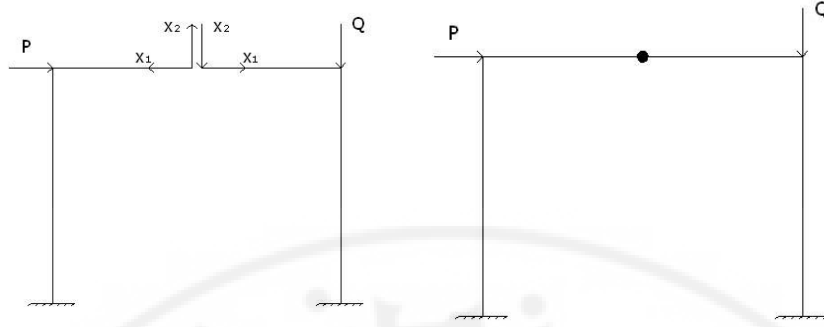


الشكل (5-21)

في حالة وجود مسند طرفي ثابت، أو متدحرج، أو مفصل داخلي فإن المركز المرن يصبح في المسند الطرفي أو المفصل الداخلي، وتصبح المسألة كأنها مسألة تحل بطريقة العمل الوهمي كما في الشكلين (5-22) و (5-23).

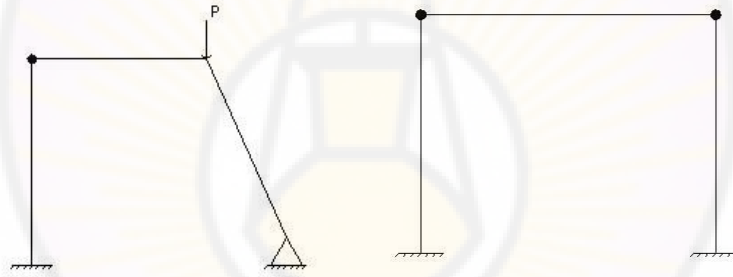


الشكل (5-22)



الشكل (5-23)

أما إذا احتوى الإطار على مفصلين أو مسند طرفي ومفصل داخلي فإن هذه الطريقة غير مناسبة لحل مثلاً هذا النوع من الإطارات الشكل (5-24) والشكل (5-25).



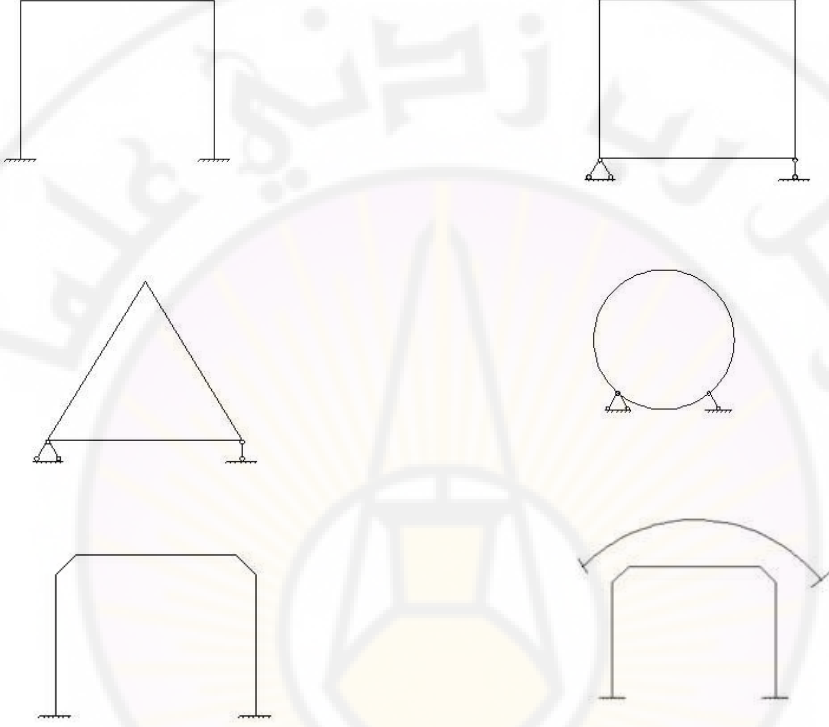
الشكل (5-25)

الشكل (5-24)

2- طريقة التشبيه العمودي :

مبدأ طريقة التشبيه العمودي :

تستخدم هذه الطريقة لحل المنشآت غير المقررة، ذات الطابق الواحد، والفتحة الواحدة، الشكل (5-26) ويشمل ذلك الإطار المغلق والقوس (درجة عدم التقرير 3)، وهذه الطريقة مطورة عن طريقة العمل الوهمي.



الشكل (5-26)

بإتباع خطوات الحل بطريقة العمل الوهمي :

- 1- تقرير المنشأ وإيجاد M_0
- 2- وضع تطبيق واحدة القوى $X_i = 1$ عند القيود المحذوفة وإيجاد M_i

3- حساب التشوهات

$$\delta_{i0} = \int M_i \frac{M_0}{EI} dL, \quad \delta_{ij} = \int M_i \frac{M_j}{EI} dL$$

4- تشكيل جملة المعادلات :

$$\delta_{i0} + \sum \delta_{ij} X_j = 0$$

X_i

5- حل المعادلات وإيجاد

M_{Final}

6- العزم النهائي

طريقة التشبيه العمودي :

لنعتبر الإطار المبين جانباً غير المقرر من الدرجة 3 : شكل (5-27)

1- تقرير المنشأ وإيجاد M_0 والمنشأ مقرر.

2- تطبيق القوى الواحدة القابلة للمجاهيل X_1, X_2, X_3 وإيجاد M_1, M_2, M_3 .

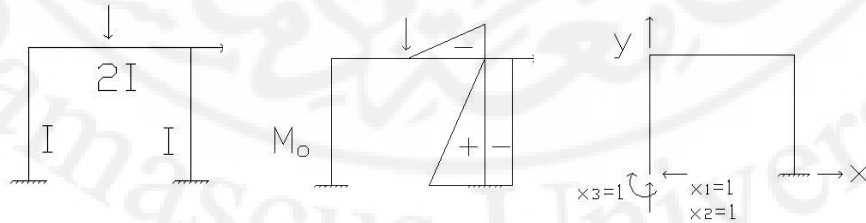
في هذه الخطوة سنعتمد المحاور الإحداثية x و y وسنختار اتجاه القوى الواحدة

بحيث تعطي عزماً موجباً (داخل الإطار) عندما تكون x و y موجبتين ومن ثم يكون :

$$M_1 = 1 \cdot y = y$$

$$M_2 = 1 \cdot x = x$$

$$M_3 = 1$$



الشكل (5-27)

3- حساب التشوهات :

أ- التشوهات المتبادلة :

$$\delta_{12} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dL = \int xy \frac{dL}{EI}$$

بفرض : $dA = \frac{dL}{EI}$ نجد :

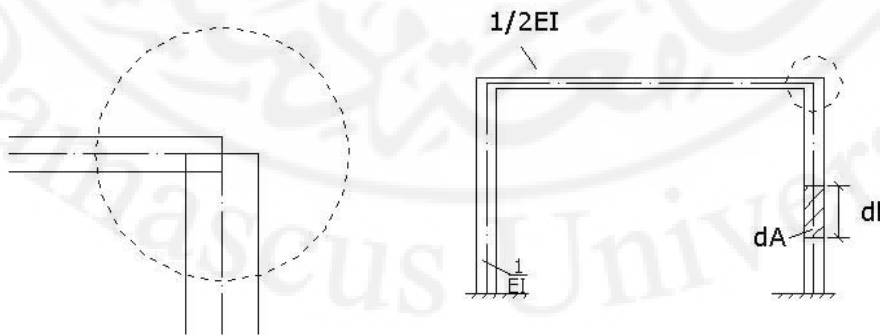
$$\delta_{12} = \int xy dA = I_{xy}$$

$$\delta_{13} = \int y dA = \delta_x$$

$$\delta_{23} = \int x dA = \delta_y$$

نعرف $dA = \frac{dL}{EI}$ بعنصر المساحة التفاضلي من المقطع الشبيه ومن ثم فإن

المقطع الشبيه هو عبارة عن مجموعة من الشرائح، طول كل منها طول العنصر في المنشأ الأصلي، وعرض كل شريحة هو $\frac{1}{EI}$ لذلك العنصر.



الشكل الحسابي للشرائح عند العقدة

الشكل (5-28)

ب - التشوهات المباشرة

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dL = \int y^2 dA = I_x$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2^2}{EI} dL = \int x^2 dA = I_y$$

$$\delta_{33} = \int \frac{M_3^2}{EI} dL = \int dA = A$$

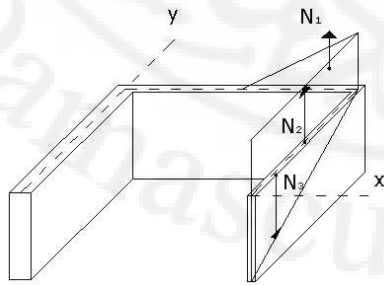
وهي خواص المقطع الشبيه.

ج- تشوهات الأحمال الخارجية :

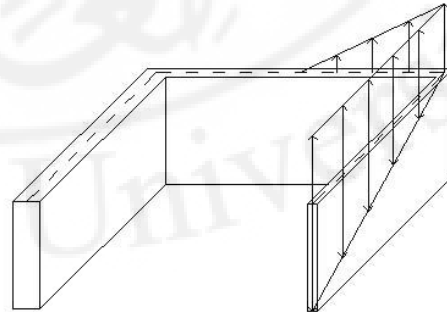
$$\delta_{10} = \int M_1 \frac{M_0}{EI} dL = \int y M_0 dA = M_x$$

$$\delta_{20} = \int M_2 \frac{M_0}{EI} dL = \int x M_0 dA = M_y$$

$$\delta_{30} = M_3 \frac{M_0}{EI} dL = \int M_0 dA = N$$



6.



الشكل (5-29)

يمكن اعتبار M_0 كإجهاد يؤثر في مقطع عمود له شكل المقطع الشبيه .
وبالتالي فإن حاصلة الإجهاد :

$$\int M_0 dA = N = \sum N_i$$

تسمى بالأحمال المرنة وهي تساوي مساحة مخطط M_0

$$M_x = \sum N_i y_i \text{ عزم الأحمال المرنة } N \text{ حول المحور } x$$

$$M_y = \sum N_i x_i \text{ عزم الأحمال المرنة } N \text{ حول المحور } y$$

4- تشكيل جملة المعادلات :

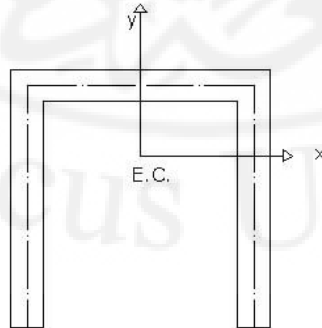
$$M_x + I_x X_1 + I_{xy} X_2 + \delta_x X_3 = 0$$

$$M_y + I_{xy} X_1 + I_y X_2 + \delta_y X_3 = 0$$

$$N + \delta_x X_1 + \delta_y X_2 + A X_3 = 0$$

* باختيار المحاور x و y مارة من مركز الثقل يكون لدينا

$$\delta_x = \delta_y = 0$$



الشكل (5-30)

نسمي مركز الثقل للمقطع الشبيه بالمركز المرن (E.C.)
وفي حالة كون المحاور x, y رئيسية يكون :

$$I_{yx} = 0$$

وبالتالي جملة المعادلات تأخذ الشكل :

$$M_x + I_x X_1 = 0$$

$$M_y + I_y X_2 = 0$$

$$N + A X_3 = 0$$

5- تحديد المجاهيل : وبهذه الطريقة تم تبسيط حل جملة المعادلات :

$$X_1 = -\frac{M_x}{I_x}$$

$$X_2 = -\frac{M_y}{I_y}$$

$$X_3 = -\frac{N}{A}$$

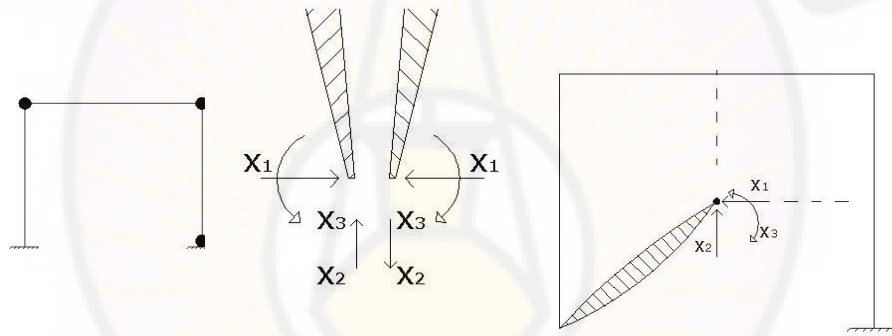
6- العزم النهائي :

$$M_{Final} = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3$$

$$= M_0 - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{N}{A}$$

ملاحظة :

- عند التقرير بحذف الوثاقة أو القطع (المجاهيل في نقطة واحدة)، فالمجاهيل X_3, X_2, X_1 تمثل قوى في المركز المرن ويمكن تخيل ذراع صلد يصل المركز المرن بالمنشأ.
- في حالة التقرير بأسلوب آخر (المجاهيل ليست في نقطة واحدة—مثلاً ثلاثة مفاصل) يبقى الأسلوب نفسه للحل، غير أن المجاهيل X_3, X_2, X_1 ليست لها دلالة بأنها قوى في المركز المرن.



الشكل (31-5)

ومن ثم نلخص خطوات الحل بطريقة التشبيه العمودي :

1- إيجاد المقطع الشبيه ومركز ثقله.

2- إيجاد خواص المقطع الشبيه.

3- إيجاد الأحمال المرنة والعزوم المرنة نتيجة الأحمال الخارجية.

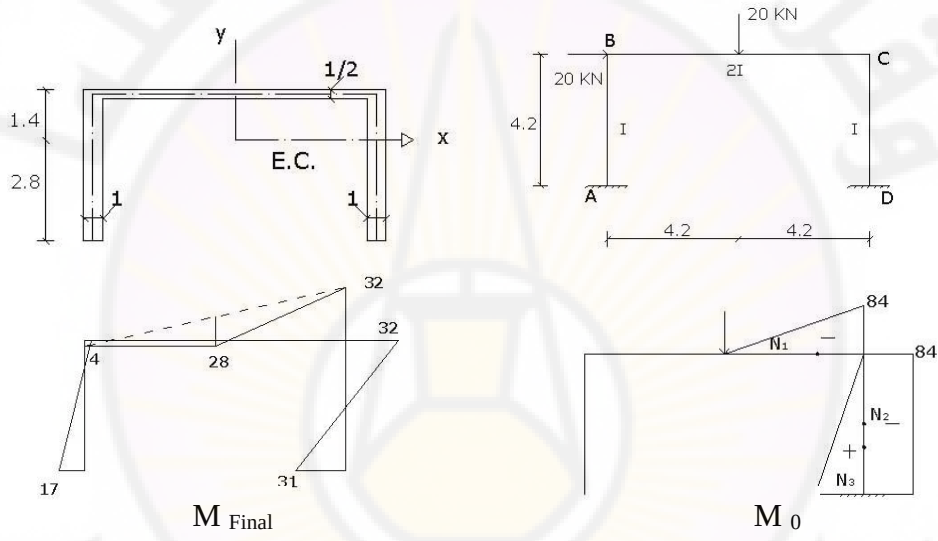
4- العزم النهائي :

$$M_{Final} = M_0 - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{N}{A}$$

إن العلاقة التي تلزم لحساب العزم النهائي تشبه علاقة تحديد الاجهادات الناعمية في عمود يتعرض لأحمال لامركزية، ومن هنا جاءت تسمية "التشبيه العمودي".

2- الإطارات المتناظرة :

مثال :



1- المقطع الشبيه المركز المرن ، يمكن أن نفرض:

$$\frac{1}{EI} = 1$$

$$\bar{x} = 4.2$$

$$\bar{y} = \frac{2(1)4.2(1.2) + \frac{1}{2}8.4(4.2)}{2(1)4.2 + \frac{1}{2}8.4} = 2.8$$

2- خواص المقطع المشبه :

$$A = 12.6$$

$$I_x = 1 \frac{(4.2)^3}{3} 2 - 12.5(1.4)^2 = 24.696$$

$$I_y = \frac{1}{2} \frac{(8.4)^3}{12} + 2(1)4.2(4.2)^2 = 172.872$$

3- الأحمال والعزوم المرنة :

$$N_1 = - \frac{1}{2} 4.2 (84) \frac{1}{2} = - 88.2$$

$$N_2 = - 4.2 (84) 1 = - 352.8$$

$$N_3 = + \frac{1}{2} 4.2 (84) 1 = 176.4$$

$$M = \sum N_i = -264.6$$

$$\begin{aligned} M_x &= \sum N_i y_i \\ &= - 88.2 (1.4) + 352.8 (2.8 - 2.1) \\ &\quad - 176.4 (2.8 - \frac{1}{3} 4.2) = - 123.48 \end{aligned}$$

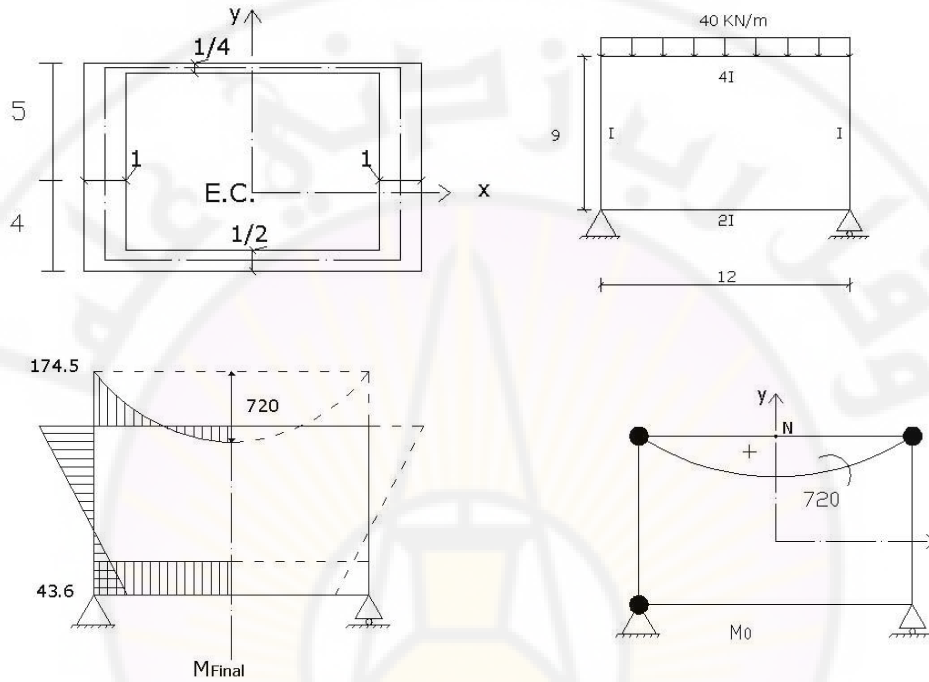
$$\begin{aligned} M_y &= - 88.2 (\frac{2}{3} 4.2) + (- 352.8 + 176.4) 4.2 \\ &= - 987.84 \end{aligned}$$

4- العزم النهائي :

$$M_{Final} = M_0 + \frac{123.48}{24.696} y + \frac{987.84}{172.872} x + \frac{264.6}{12.6}$$

$$M_{Final} = M_0 + 5y + 5.714x + 21$$

مثال 2-2 إطار متناظر مغلق:



الشكل (33-5)

1- المقطع الشبيه ، يمكن أن نفرض:

$$\frac{1}{EI} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1(9)4.5(2) + \frac{1}{4}12(9)}{1(9)2 + 12(\frac{1}{2}) + 12(\frac{1}{4})} = 4$$

2- خواص المقطع الشبيه :

$$A = 27$$

$$I_x = 2 \left[\frac{1(9)^3}{12} + 1(9) (0.5)^2 \right] + \frac{1}{2} (12) 4^2 + \frac{1}{4} (12) 5^2 = 297$$

$$I_y = \frac{1}{4} \frac{12^3}{12} + \frac{1}{2} \frac{12^3}{12} + 2 (1) (9) 6^2 = 756$$

3- الأحمال والعزوم المرنة :

في المنشآت المتناظرة والأحمال المتناظرة (حالة التناظر) نختار جملة مقررة بحيث

يكون M_0 متناظراً وبالتالي ينعدم $(M_y = 0)$ ، ولا داعي لحساب I_y .

$$N = \frac{2}{3} 12 (720) = 1440$$

$$M_x = 1440 (5) = 7200$$

$$M_y = 0$$

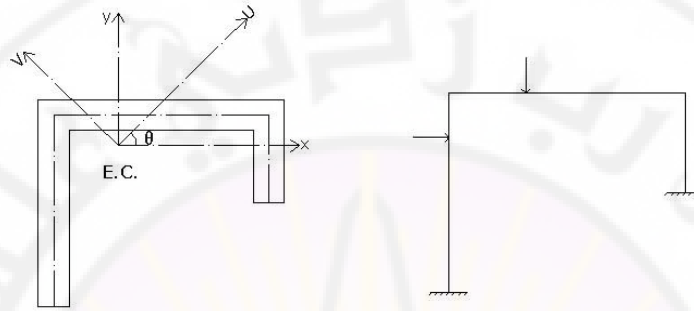
4- العزم النهائي :

$$M_{Final} = M_0 - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{N}{A}$$

$$M_{Final} = M_0 - \frac{7200}{297} y - 0 - \frac{1440}{27}$$

$$M_{Final} = M_0 - 24.24y - 53.3$$

الإطارات غير المتناظرة :



الشكل (34-5)

في هذه الحالة $I_{xy} \neq 0$

توجد طريقتان لحل الإطارات غير المتناظرة $I_{xy} \neq 0$

1- إيجاد المحاور الرئيسية u, v التي تصنع زاوية θ مع المحاور x, y وتحدد بالعلاقة :

$$tg2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

2- الإبقاء على المحاور x, y وفي هذه الحالة نحصل على جملة المعادلات :

$$M_x + I_x X_1 + I_{xy} X_2 = 1$$

$$M_y + I_{xy} X_1 + I_y X_2 = 0$$

$$N + AX_3 = 0$$

وبالحل نجد :

$$X_1 = -\frac{M_x - M_y \frac{I_{xy}}{I_y}}{I_x(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y})} = -\frac{M'_x}{I'_x}$$

$$X_2 = -\frac{M_y - M_x \frac{I_{xy}}{I_y}}{I_x(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y})} = -\frac{M'_y}{I'_y}$$

حيث في هذه الحالة نحسب قيماً معدلة :

$$I'_x = I_x(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y})$$

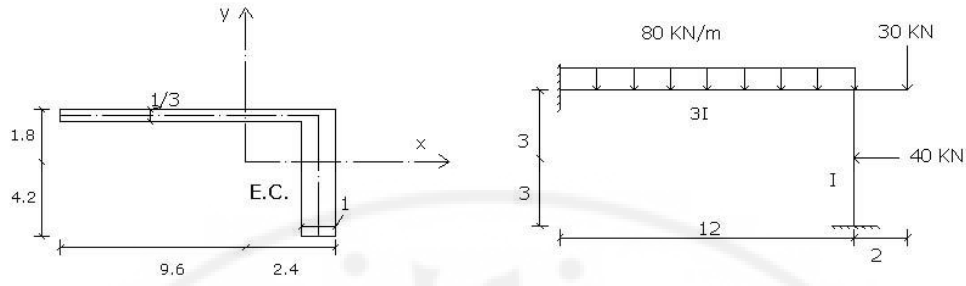
$$I'_y = I_y(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y})$$

$$M'_x = M_x - M_y \frac{I_{xy}}{I_y}$$

$$M'_y = M_y - M_x \frac{I_{xy}}{I_x}$$

ويبقى أسلوب الحل نفسه كما في السابق .

مثال 1-3



الشكل (5-35)

1- المقطع الشبيه :

الأجزاء المقررة من المنشآت لاتدخل في المقطع الشبيه وإنما يدخل تأثير العزوم عليها في الأحمال المرنة للجملة الأساسية .

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{3} (12) 6}{\frac{1}{3} (12) + 1(6)} = 3.4$$

$$\bar{y} = \frac{1(6)3 + \frac{1}{3} (12) 6}{\frac{1}{3} (12) + 1(6)} = 4.2$$

2- خواص المقطع الشبيه :

$$A = \frac{1}{3} (12) + 1 (6) = 10$$

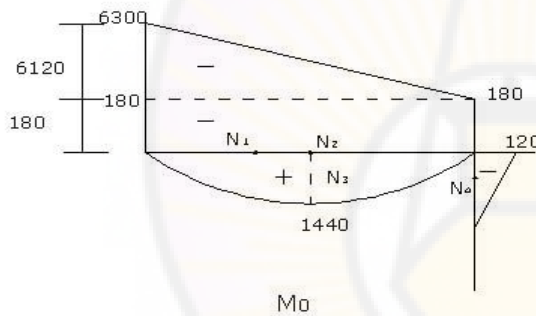
$$I_x = \frac{1}{3} (12) (1.8)^2 + \frac{1(6)^3}{12} + 1(6) (1.2)^2 = 39.6$$

$$I_y = \frac{1}{3} \frac{(12)^3}{12} + \frac{1}{3} (12) (3.6)^3 = 134.4$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} (12) (-3.6) (1.8) + 1 (6) (2.4) (-1.2) \\ = -43.2$$

$$I'_x = I_x \left(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y} \right) \\ = 39.6 \left[1 - \frac{43.2^2}{(39.6)(134.4)} \right] \\ = 39.6 (0.65) = 25.75 \\ I'_y = 134.4 (0.65) = 87.36$$

3- الأحمال والعزوم المرنة :



الشكل (36-5)

$$N_1 = - \frac{1}{3} \frac{2}{3} 12 (6120) = - 12240$$

$$N_2 = - \frac{1}{3} 12 (180) = - 720$$

$$N_3 = + \frac{1}{3} \frac{2}{3} 12 (1440) = 3840$$

$$N_4 = -1 \frac{1}{2} 3(120) = -180$$

$$N = -9300$$

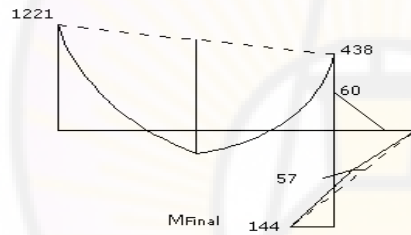
$$\begin{aligned} M_x &= \sum N_i Y_i \\ &= (-12240 - 720 + 3840)(1.8) - 180(0.8) \\ &= -16560 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \sum N_i X_i \\ &= -12240(-5.6) - 720(-3.6) + 3840(-3.6) - 180(2.4) \\ &= 56880 \end{aligned}$$

$$M'_x = M_x - M_y \frac{I_{xy}}{I_y} = -16560 - 56880 \frac{(-43.2)}{134.4} = 1722.8$$

$$M'_y = M_y - M_x \frac{I_{xy}}{I_x} = 56880 - (-16560) \frac{(-46.2)}{39.6}$$

4- العزم النهائي :



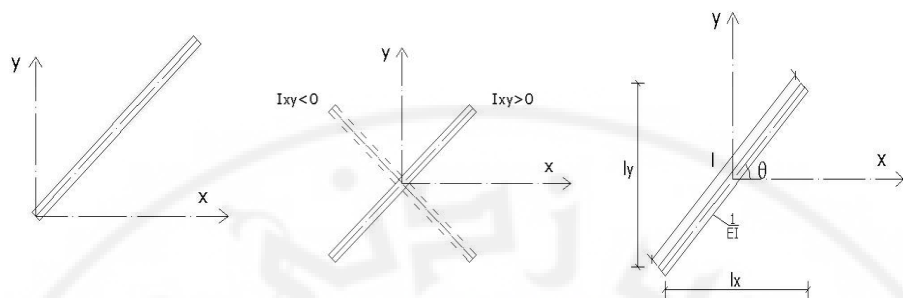
الشكل (5-37)

$$M_{Final} = M_0 - \frac{M'_x}{I'_x} y - \frac{M'_y}{I'_y} x - \frac{N}{A}$$

$$M_{Final} = M_0 - \frac{1722.8}{25.75} y - \frac{38814.5}{87.36} x - \frac{(-9300)}{10}$$

$$M_{Final} = M_0 - 67y - 444.75x + 930$$

العناصر المائلة



الشكل (5-38)

$$I_x = \frac{bL^3}{12} \sin^2 \theta = \frac{L}{EI} \frac{L_y^2}{12}$$

$$I_y = \frac{bL^3}{12} \cos^2 \theta = \frac{L}{EI} \frac{L_x^2}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{bL^3}{12} \sin \theta \cos \theta = \frac{L}{EI} \frac{L_x L_y}{12}$$

بالنسبة لإشارة I_{xy}

$I_{xy} > 0$ الشريحة في الربع الأول والثالث.

$I_{xy} < 0$ الشريحة في الربع الثاني والرابع.

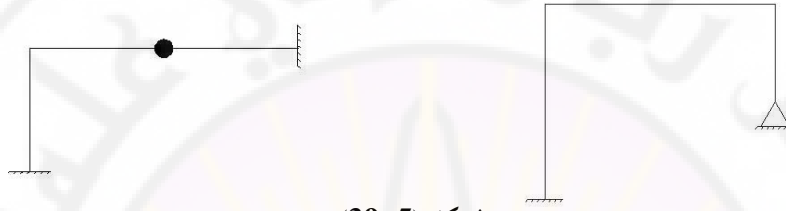
في حالة المحاور x و y تمر من طرف الشريحة

$$I_x = \frac{L}{EI} \frac{L_y^2}{3}$$

$$I_y = \frac{L}{EI} \frac{L_x^2}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{L}{EI} \frac{L_x L_y}{3}$$

4-4 الإطارات بمفصل :



الشكل (5-39)

يمكن أن يكون المفصل داخلياً أو هو مفصل خارجي. عند المفصل نلاحظ أن $M = 0$.

$$\frac{1}{EI} = \infty \quad \text{نفترض عند المفصل } I = 0 \text{ ومن ثم:}$$

$$dA = \infty, A = \infty$$

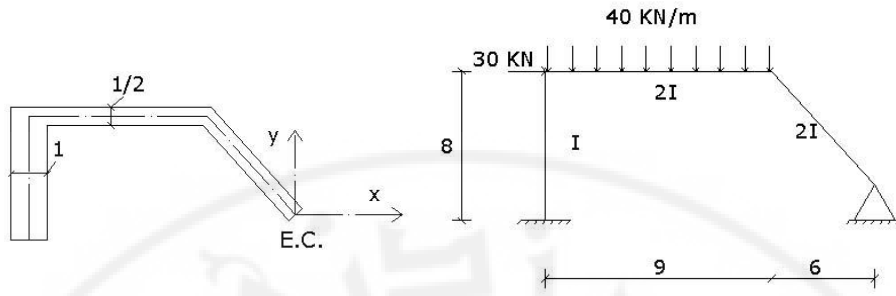
ويكون المفصل هو المركز المرن.

ويتحقق باعتبار $A = \infty$

$$X_3 - \frac{N}{A} = 0$$

ويبقى لدينا مجهولان لا غير ، ولا داعي لحساب N .

مثال 1-4



الشكل (40-5)

1- المقطع الشبيه :

2- خواص المقطع الشبيه :

$$A = \infty$$

$$I_x = \frac{1}{2} 10 \frac{8^2}{3} + \frac{1}{2} 9 (8)^2 + 1 \frac{(8)^3}{3}$$

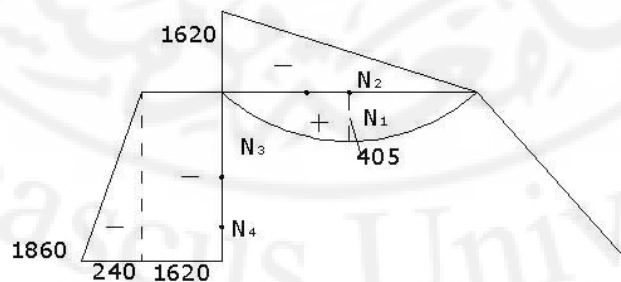
$$= 565.33$$

$$I_y = \frac{1}{2} (10) \frac{6^2}{3} + 1(8) (15)^2 + \frac{1}{2} \frac{9^3}{12} + 1(9) 10.5^2$$

$$= 2386.5$$

$$I_{xy} = -\frac{1}{2} 10 \frac{6(8)}{3} + 1(8) (4)(-15) + \frac{1}{2} 9(8)(-10.5) = -938$$

3- الأحمال والعزوم المرنة :



M₀

الشكل (5-41)

$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{2} 9 (405) = 1215$$

$$N_2 = - \frac{1}{2} \frac{1}{2} 9 (1620) = - 3645$$

$$N_3 = - 1620 (8) = - 12960$$

$$N_4 = - \frac{1}{2} 240 (8) = - 960$$

$$M_x = \sum N_i Y_i$$

$$= (1215 - 3645) 8 - 12960 (4) - 960 \frac{8}{3}$$

$$= - 73840$$

$$M_y = \sum N_i X_i$$

$$= 1215 (- 10.5) - 3645 (-12) - (12960 + 960) (-15)$$

$$= 239782.5$$

$$M_x' = M_x - M_y \frac{I_{xy}}{I_y} = -73840 - 239782.5 \frac{(-938)}{2386.5}$$

$$= 20405$$

$$M_y' = M_y - Mx \frac{I_{xy}}{I_x} = 239782.5 (-73840) \frac{(-938)}{565.33}$$

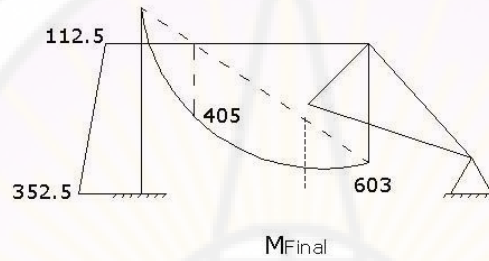
$$= 117266.6$$

4- العزم النهائي :

$$M_{Final} = M_0 - \frac{M'_x}{I'_x} y - \frac{M'_y}{I'_y} x - \frac{N}{A}$$

$$= M_0 - \frac{20405}{196065} y - \frac{117266.6}{830} x$$

$$= M_0 - 103.8 y - 141.3 x$$



الشكل (5-42)

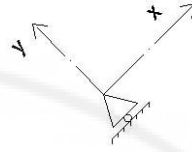
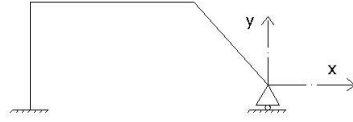
5- الإطارات بمتدحرج :

$$X_1 = \frac{M_x}{I_x} = 0$$

$I_x = \infty$ ومن ثم نفرض
بشكل عام :

$$I_x = \infty$$

بالنسبة لمحور الانزلاق



الشكل (43-5)

مثال 5-1

1- المقطع الشبيه :

2- خواص المقطع الشبيه :

$$A = \infty$$

$$I_x = \infty$$

$$I_y = \frac{1(12)^3}{3} + 1(6)12^2 = 1440$$

3- الأحمال والعزوم المرنة :

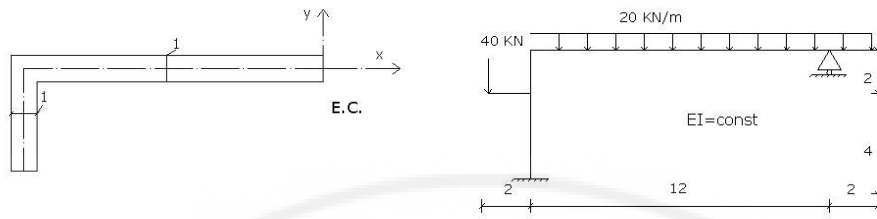
$$N_1 = -\frac{1}{2}12(160) = -960$$

$$N_2 = +\frac{2}{3}12(360) = 2880$$

$$N_3 = 4(80) = +320$$

$$M_y = -960(-4) + 2880(-6)$$

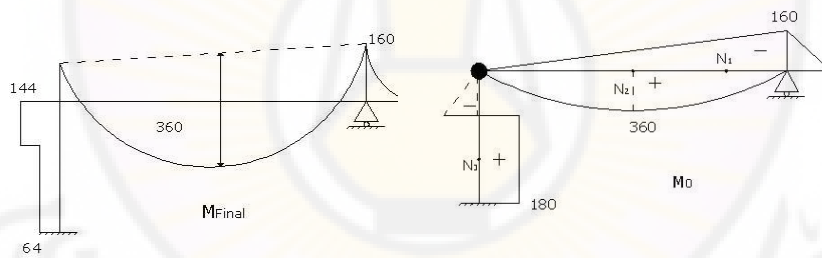
$$+ 320 (-12) = -17280$$



الشكل (44-5)

4- العزم النهائي :

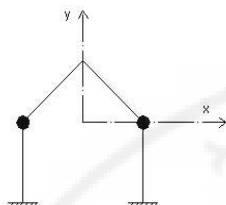
$$\begin{aligned} M_{Final} &= M_0 - \frac{M_y}{I_y} x \\ &= M_0 - \frac{-17280}{1440} x \\ &= M_0 + 12x \end{aligned}$$



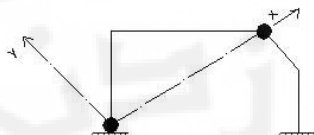
الشكل (45-5)

6- الإطار بمفصلين :

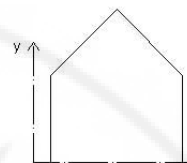
في حالة المنشآت ذات المفصلين سواء كانت هذه المفاصل داخلية أم خارجية فإن الخط الواصل بين المفصلين هو المحور المرن، نحسب عزم عطالة المقطع الشبيه بالنسبة للمحور المرن فقط. حيث عزم عطالة المقطع الشبيه بالنسبة للمحور المتعامد مع المحور المرن هي ∞ .



مفصلين داخليين



مفصل داخلي ومفصل خارجي
الشكل (5-46)



مفصلين خارجيين

مثال 6-1

1- المقطع الشبيه :

2- خواص المقطع الشبيه :

$$A = \infty$$

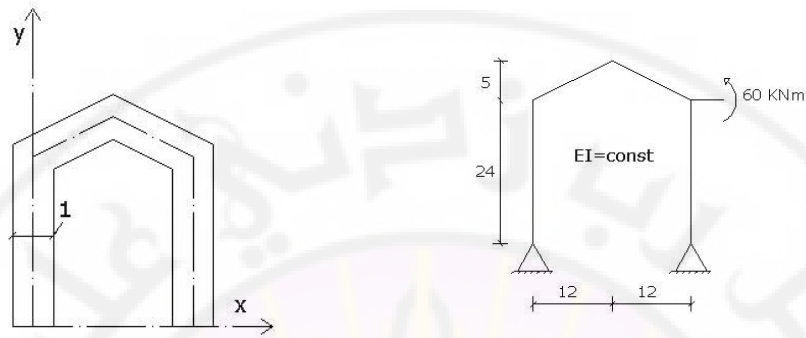
$$I_y = \infty$$

$$I_x = 2 \frac{1(24)^3}{3} + 2 \left[13 \frac{5^2}{12} + 13 (26.5)^2 \right]$$

$$= 27529$$

3- الأحمال والعزوم المرنة :

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{2} 13 (30) (24 + \frac{2}{3} 5) \\
 &+ 13 (30) (24 + 5/2) \\
 &+ \frac{1}{2} 13 (30) (24 + 5/3) = 20670
 \end{aligned}$$

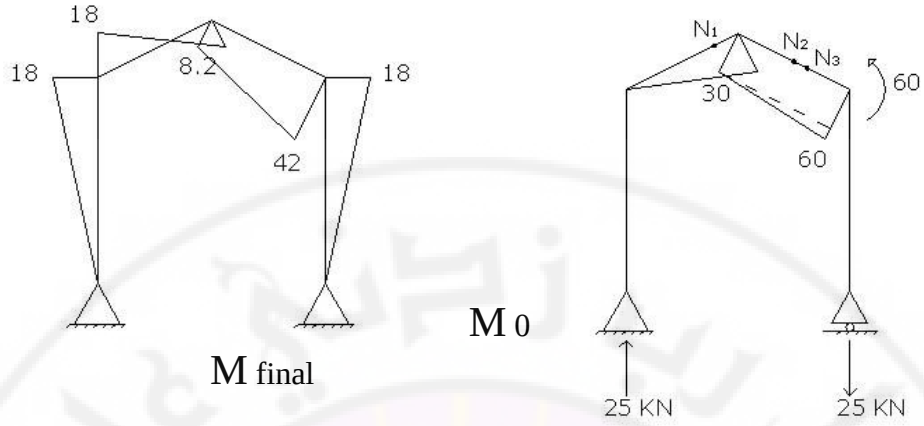


محور مرين

الشكل (5-47)

4- العزم النهائي :

$$\begin{aligned}
 M_{Final} &= M_0 - \frac{M_x}{I_x} y \\
 &= M_0 - \frac{20670}{27529} y \\
 &= M_0 - 0.571 y
 \end{aligned}$$



الشكل (5-47)

7- التناظر والتناظر العكسي :

في المنشآت المتناظرة يقع المركز المرن على محور التناظر .

وفي المنشآت المتناظرة يمكن أن نميز الحالات الآتية :

- 1- الأحمال متناظرة : (حالة تناظر)
- 2- الأحمال متناظرة عكسياً : (حالة التناظر العكسي)
- 3- الأحمال في الحالة العامة : (حالة تناظر + حالة تناظر عكسي)

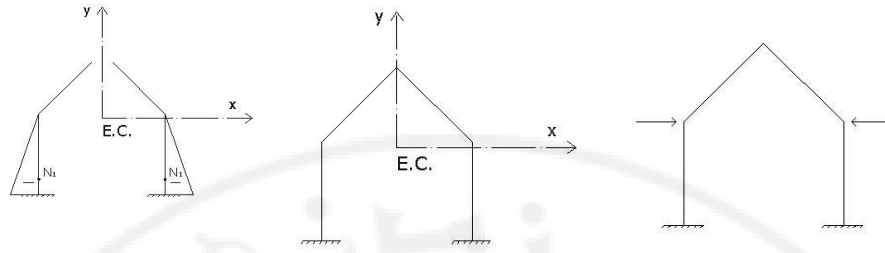
حالة التناظر :

$$M_y = 0$$

$$I_y$$

لاداعي لحساب

$$X_2 = - \frac{M_y}{I_y} = 0$$



الشكل (5-48)

حالة التناظر العكسي :



الشكل (5-49)

$$N = 0$$

$$M_x = 0$$

$$I_y, M_y$$

$$I_x, A$$

نحسب فقط

لاداعي لحساب

ولاداعي لتحديد المركز المرن لأن I_y لا تتعلق بالمركز المرن

مثال 7-1 تناظر عكسي

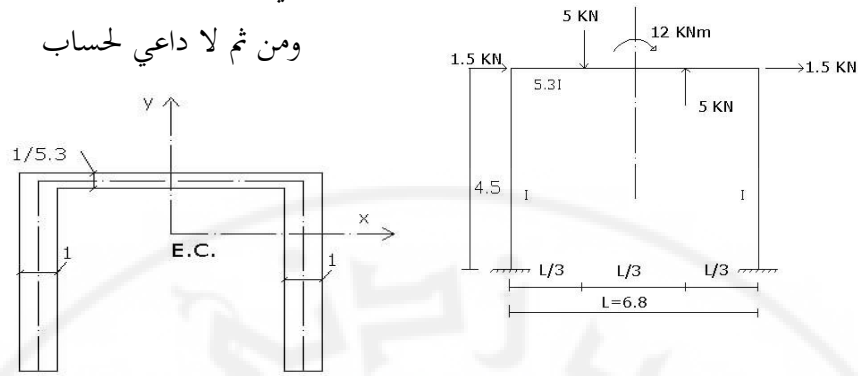
1- المقطع الشبيه : حالة التناظر العكسي :

$$N = 0, M_x = 0$$

نحسب فقط I_y, M_y

لاداعي حساب I_x, A

ومن ثم لا داعي لحساب $\bar{y}$



الشكل (51-5)

2- خواص المقطع الشبيه :

$$I_y = \frac{1}{5.3} \frac{6.8^3}{12} + 1 (4.5) (3.4)^2 \cdot 2$$

$$= 108.484$$

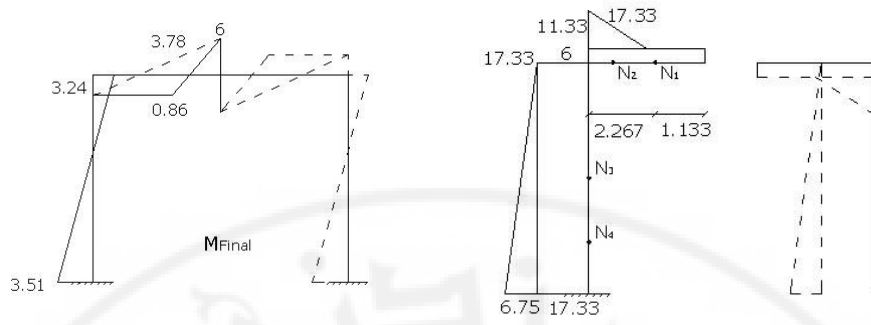
3- الأحمال والعزوم المرنة :

$$M_y = 2 \left[3.4 (6) \frac{1}{5.3} \frac{3.4}{2} \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{6.8}{3} \right) (11.33) \frac{1}{5.3} (2.644)$$

$$+ 4.5 (17.333) 3.4$$

$$\left. + \frac{1}{2} 4.5 (6.75) 3.4 \right] = + 659.58$$



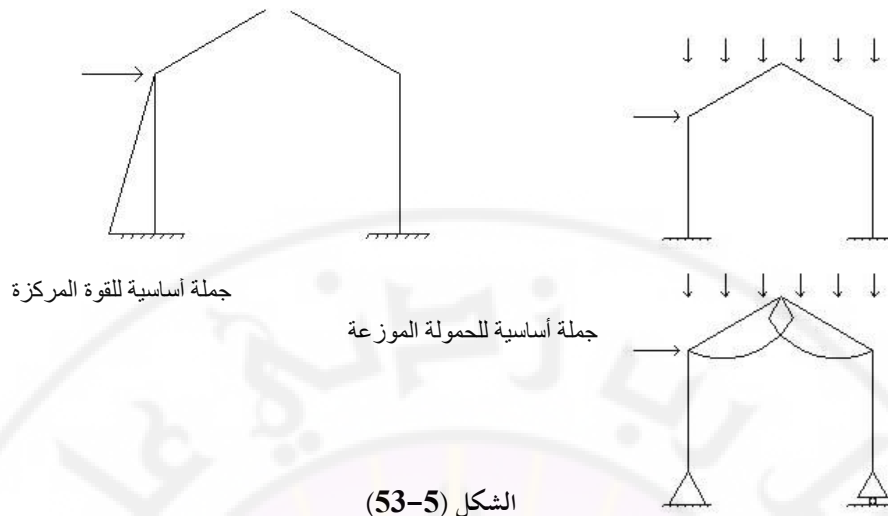
الشكل (52-5)

4- العزم النهائي :

$$\begin{aligned}
 M_{Final} &= M_0 - \frac{M_y}{I_y} x \\
 &= M_0 - \frac{659.58}{108.984} x \\
 &= M_0 - 6.052 x
 \end{aligned}$$

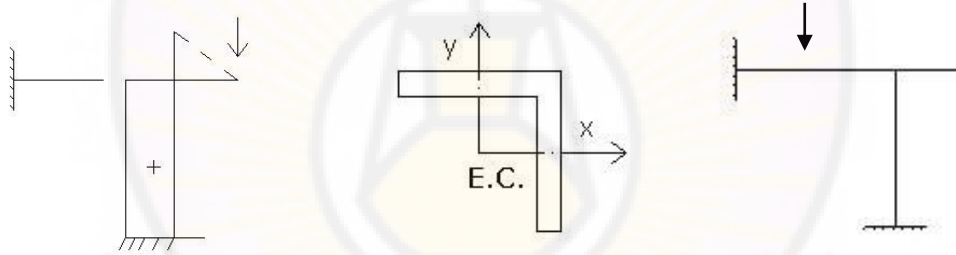
ملاحظات :

1- يمكن اختيار جمل أساسية متباينة للأحمال المختلفة في المنشأ الواحد، بحيث يكون كل اختيار موفق بالنسبة لحمولة ما، ولكن لايناسب الحمولات الأخرى. ويمكن اعتبار ذلك مزية أساسية للطريقة.



الشكل (53-5)

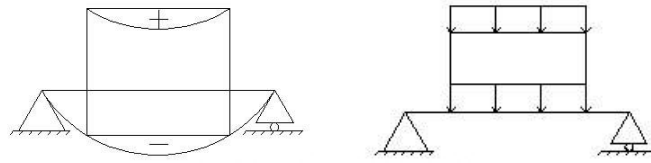
2- الأجزاء المقررة من المنشأ لا تدخل في المقطع الشبيه، وإنما يدخل تأثيرها في M_0 للمقطع الشبيه.



الشكل (54-5)

3- مراعاة إشارة M_0 : - فهي داخل المقطع موجبة.

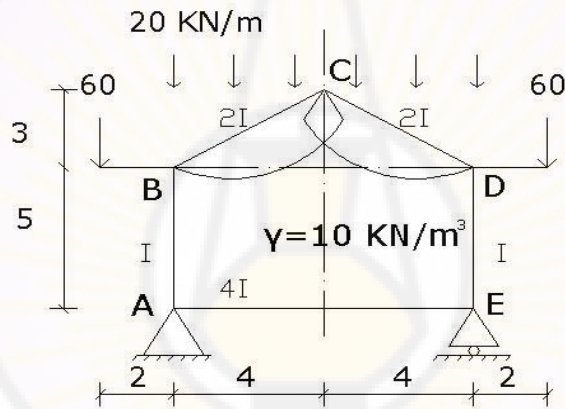
- وخارجة سالبة.



الشكل (55-5)

مثال 1-8 تناظر

$$\bar{y} = \frac{2(1)5(2.5) + 2\frac{1}{2}5(6.2)}{8(\frac{1}{4}) + 2(1)5 + 2\frac{1}{2}5} = 3.382$$



الشكل (56-5)

2- خواص المقطع الشبيه :

$$A = 17$$

$$I_x = 2 \left[\frac{1(5)^3}{12} + 1(5)(0.882)^2 \right] \\ + 2 \left[\frac{1}{2}(5) \frac{3^2}{12} + \frac{1}{2}(5)(3.118)^2 \right] \\ + \frac{1}{4}(8)(3.382)^2 = 103.85$$

I_y لا داعي لحساب

3- الأحمال والعزوم المرنة :

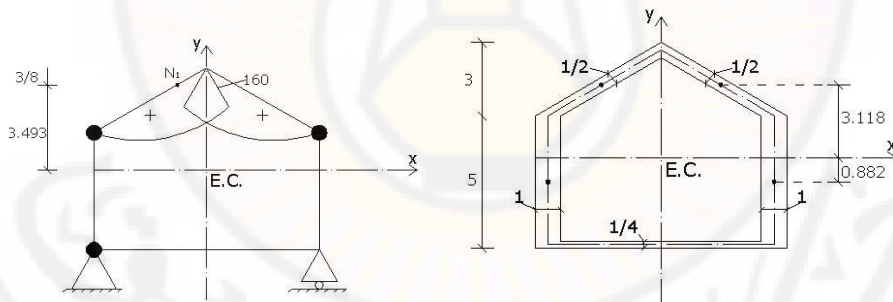
- الحمولة الموزعة على السقف

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) 5(160) = 266.6$$

- الحمولة المركزة على الظفر

$$N_2 = 1(5)120 = 600$$

$$N_3 = \frac{1}{4} 4(120) = 120$$



الشكل (5-57)

- حمولة ضغط المياه

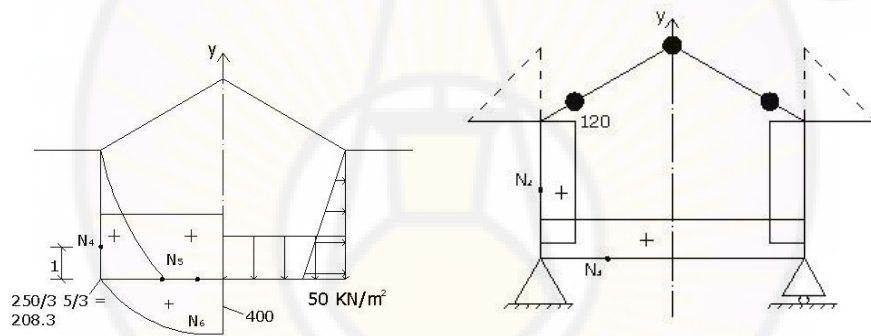
$$N_4 = 1 \frac{1}{4} 5 \frac{250}{2} \frac{5}{3} = 260.4$$

$$N_5 = \frac{1}{4} 4 \frac{250}{2} \frac{5}{3} = 208.3$$

$$N_6 = -\frac{1}{4} \frac{2}{3} 4 \frac{50(8)^2}{8} = -266.7$$

$$N = 2 \sum N_i = 2377.4$$

$$\begin{aligned} M_x &= 2 [266.7 (3.493) - 600 (0.882) \\ &\quad - 120 (3.382) - 260.4 (2.382) \\ &\quad - 208.3 (3.382) + 266.7 (3.382)] \\ &= -853.14 \end{aligned}$$

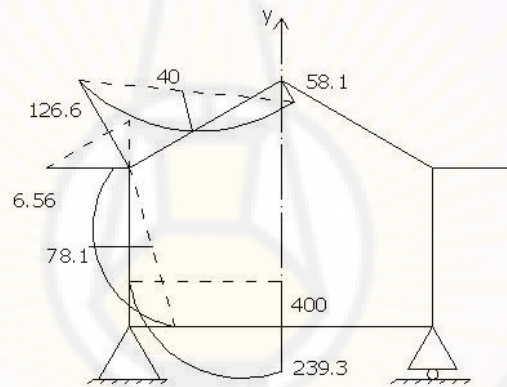


الشكل (58-5)

4- العزم النهائي :

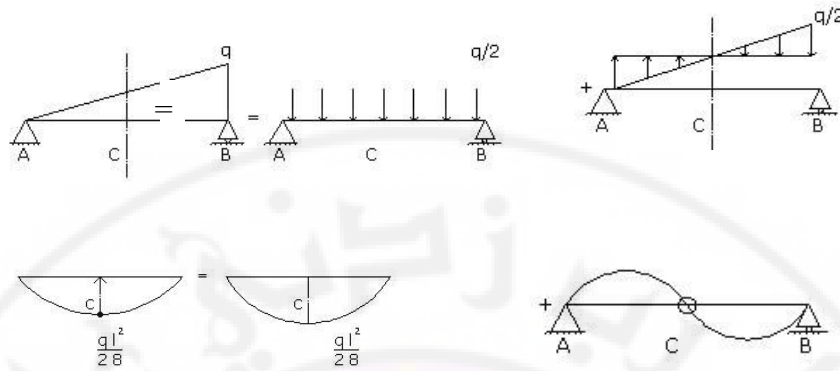
$$\begin{aligned}
 M_{Final} &= M_0 - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{N}{A} \\
 &= M_0 - \frac{(-853.14)}{103.85} y - \frac{2377.4}{17} \\
 &= M_0 + 8.215 y - 139.
 \end{aligned}$$

النقطة	x	y	M ₀	M _{Final}
A	-4	-3.382	328.33	160.7
B	-4	1.618	120	-6.56
C	0	4.618	160	58.1
F	0	-3.382	-71.67	-239.3



الشكل (59-5)

ملاحظة: بالنسبة للحمولة المثلثية (رسم المخطط) : القيمة في الوسط $\frac{q}{2} \frac{L^2}{8}$



الشكل (5-60)



الفصل السادس

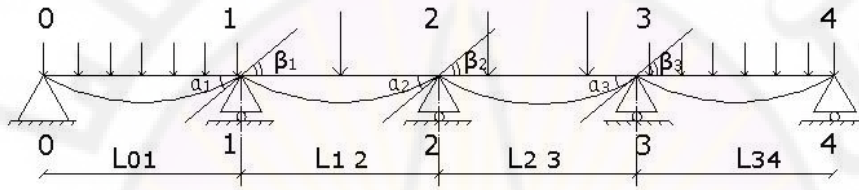
نظرية العزوم الثلاثة



مقدمة :

ليكن لدينا جائر مستمر مصنوع من المادة نفسها وله عزم عطالة ثابت (مقطع منتظم). يستند إلى عدد (n) من المساند، وعملاً بأية طريقة كانت، وهو غير مقرر. كما في الشكل (1-6).

نلاحظ أنه نتيجة لاستمرار الجائر فوق المساند الداخلية (1، 2، ...) فإن المماس عند كل مسند من هذه المساند يؤدي لتشكيل زاويتين متقابلتين ومتساويتين وذلك بين مماس الخط والوضعية الأصلية للجائر المستمر قبل انحنائه، بمعنى أن الميلان على طرفي المسند الداخلي الواحد تكون متساوية، أي:



الشكل (1-6)

$$-\alpha_1 = \beta_1$$

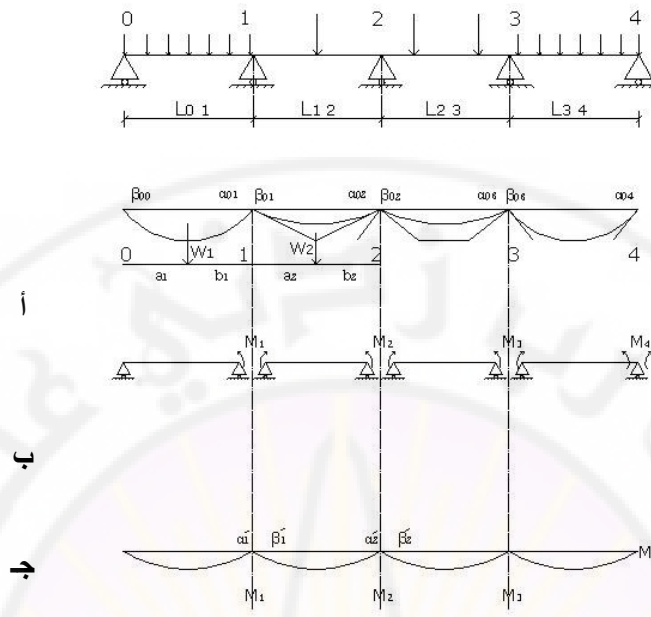
$$-\alpha_2 = \beta_2$$

$$-\alpha_3 = \beta_3$$

إيجاد معادلة العزوم الثلاثة

لتحليل الجائر؛ أي لإيجاد القوى الداخلية بما فيها عزوم الانعطاف عند المساند نعمل إلى تحويله لجملة مقررة، وذلك بفرض أنه قد جرى عند المساند فتصبح الجملة مكونة من عدة جوائر بسيطة الاستناد، ولتحقيق الاستمرارية الأصلية للجائر المعتمد دراسته لابد من أن نطبق عزوم الاستمرار $(M_1, M_2, M_3, \dots)$ في نهايات الجوائر

البيسطة المكونة للجملة الأساسية، كما هو موضح بالشكل (2-6):



الشكل (2-6)

إن خط الانحناء المرن للجائر هو منحني مستمر ، لذا فالميل عند أي مسند مضاف إليه الميل الناشئ من عزوم الاستمرار عند المساند يجب أن يكون هو نفسه سواء قد جرى استنتاجه من الطرف الأيمن أم من الأيسر، وبالنظر إلى الشكل، واعتماد المسند الثاني رقم (1) من الشكل (2-6، أ) .

تكون زاوية الميل إلى يسار المسند الثاني والناجمة عن الحمولات الخارجية :

$$\alpha_{01} = - \frac{W_1 a_1}{\lambda_{01} EI}$$

زاوية الميل إلى اليمين من المسند الثاني والناجئة عن حملات خارجية :

$$\beta_{01} = -\frac{W_2 b_2}{\lambda_{12} EI}$$

ومن الشكل (6-2، ج) نجد :

زاوية الميل إلى اليسار من المسند الثاني والناجئة عن عزوم الاستمرار :

$$\alpha'_{01} = -\frac{M_1 \lambda_{01}}{3EI}$$

زاوية الميل إلى اليمين من المسند الثاني والناجئة عن عزوم الاستمرار :

$$\beta'_1 = +\left(\frac{M_1 \lambda_{12}}{3EI} + \frac{M_2 \lambda_{12}}{6EI}\right)$$

حيث : W_1 : مساحة مخطط عزوم الانعطاف للجائز البسيط في الفتحة الأولى (الوزن المرن)

W_2 : مساحة مخطط عزوم الانعطاف للجائز البسيط في الفتحة الثانية (الوزن المرن المطبق على الفتحة الثانية).

a_1 : بُعد مركز مساحة مخطط عزوم الانعطاف في الفتحة الأولى عن المسند الأيسر الأول.

a_2 : بُعد مركز مساحة مخطط عزوم الانعطاف في الفتحة الثانية عن المسند الأيمن للفتحة الثانية (المسند الثالث).

ومن شرط تساوي الميل إلى يسار المسند ويمينه في الجائز المفروض نجد :

$$\alpha_{01} + \alpha'_1 = \beta_{01} + \beta'_1$$

$$-\frac{W_1 a_1}{\lambda_{01} EI} - \frac{M_1 \lambda_{01}}{3EI} = \frac{W_2 b_2}{\lambda_{12} EI} + \left(\frac{M_1 \lambda_{12}}{3EI} + \frac{M_2 \lambda_{12}}{6EI}\right)$$

$$\frac{M_1\lambda_{01}}{3EI} + \frac{M_1\lambda_{12}}{3EI} + \frac{M_2\lambda_{12}}{6EI} = -\left(\frac{W_1a_1}{\lambda_{01}EI} + \frac{W_2b_2}{\lambda_{12}EI}\right)$$

$$\frac{2M_1\lambda_{01}}{EI} + \frac{2M_1\lambda_{12}}{EI} + \frac{M_2\lambda_{12}}{EI} = -6\left(\frac{W_1a_1}{\lambda_{01}EI} + \frac{W_2b_2}{\lambda_{12}EI}\right)$$

ولكن :

$$\left(\frac{W_1a_1}{\lambda_{01}EI} + \frac{W_2b_2}{\lambda_{12}EI}\right)$$

هو رد الفعل المرن (*Elastic reaction*) على طرفي المسند (1) للجملة

الأساسية وذلك تحت تأثير الحمولات الخارجية ومن ثم:

$$2M_1\left(\frac{\lambda_{01}}{EI} + \frac{\lambda_{12}}{EI}\right) + M_2\frac{\lambda_{12}}{EI} = -6\left(\frac{r_1}{EI} + \frac{r_2}{EI}\right)$$

وعندما تكون (*EI*) ثابتة على كامل طول الجائز المستمر كما فرضنا منذ

البداية تصبح المعادلة على الشكل الآتي:

$$2M_1(\lambda_{01} + \lambda_{12}) + M_2\lambda_{12} = -6(r_1 + r_2) \dots (1)$$

حيث : r_1 : رد الفعل المرن للجملة الأساسية تحت تأثير الحمولات الخارجية، للفتحة

على يسار المسند المدروس.

r_2 : رد الفعل المرن للجملة الأساسية تحت تأثير الحمولات الخارجية، للفتحة

على يمين المسند المدروس.

وتمثل المعادلة السابقة (1) علاقة العزوم الثلاثة عند المسند الأول. وبالطريقة نفسها يمكن

معالجة بقية أجزاء الجائز المستمر، فمثلاً بالنسبة للمسند الآتي رقم (2) من الشكل

السابق نفسه نستطيع كتابة المعادلة الآتية :

$$M_1\lambda_{12} + 2M_2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) + M_3\lambda_{23} = -6(r'_1 + r'_2)$$

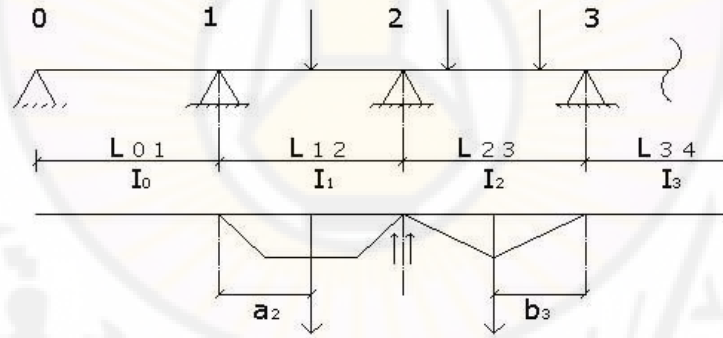
حيث ($r'_1 + r'_2$) تساوي مجموع ردود الأفعال المرنة للجملة الأساسية تحت تأثير

الحمولات الخارجية وذلك عند المسند الثاني .

وعلى هذا الأساس ففي أي جائل مستمر يؤول على عدد (n) من المساند فإنه يمكن تكوين $(n-2)$ معادلة. وبحل تلك الجملة من المعادلات نحصل على عزوم الاستمرار، ومنها يمكن رسم مخطط عزم الانعطاف النهائي بطريقة التجميع (*Super Position*) مع العزوم الأساسية للجوائز البسيطة. وبالطريقة نفسها نستطيع الحصول على ردود الأفعال عند المساند ورسم مخطط القوى القاصة.

الجوائز المستمرة ذات المقاطع العرضية المتغيرة :

في التطبيقات السابقة لمعادلة العزوم الثلاثة كانت قيمة EI ثابتة على كامل فتحات الجوائز المستمر. وأما في الحالة العامة فإنه من الممكن أن تكون هذه القيمة متغيرة، بمعنى أن مقطع الجائل يختلف من فتحة إلى أخرى، ولكنه يبقى ثابتاً على الفتحة الواحدة (مع بقاء المساند ثابتة) كما هو موضح بالشكل (3-6):



الشكل (3-6)

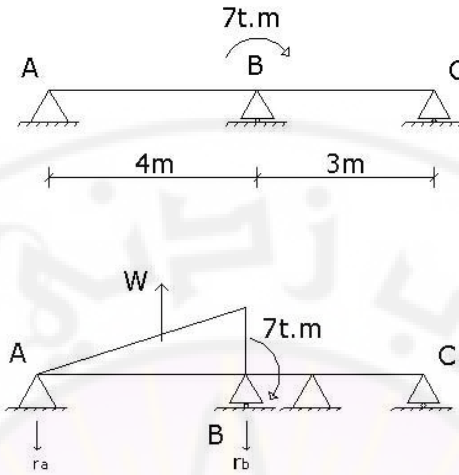
ومن ثم فإن معادلة العزوم الثلاثة تصبح في هذه الحالة -ولدى تطبيقها عند المسند (2) مثلاً- على الشكل الآتي:

$$M_1 \frac{\lambda_{12}}{I_1} + 2M_2 \left(\frac{\lambda_{12}}{I_1} + \frac{\lambda_{23}}{I_2} \right) + M_3 \frac{\lambda_{23}}{I_2} = -6 \left(\frac{W_2 a_2}{\lambda_{12} I_1} + \frac{W_3 b_3}{\lambda_{23} I_2} \right)$$

وعندما تتغير أبعاد المقطع العرضي من نقطة إلى أخرى على الفتحة الواحدة نفسها، فإن معادلة العزم الثلاثة لا يمكن عندئذ كتابتها بالشكل السابق. وفي هذه الحالة يجب تعديل مخططات عزوم الانعطاف للجملية الأساسية وللمساند بحيث يختلف عما درسناه سابقاً.

معالجة الإطارات غير المقررة باستخدام نظرية العزوم الثلاثة :

تستخدم نظرية العزوم الثلاثة المشروحة سابقاً لتعيين القوى الداخلية في الأطر غير المقررة، والتي لا تتعرض لأية إزاحة جانبية. (Side sway).
 مثال : جائر مستمر ABC ذو مقطع منتظم على كامل طوله، يتعرض لمزدوجة 7t.m عند المسند B الشكل (4-6). والمطلوب إيجاد قيمة عزم الاستمرار عند المسند B.



الشكل (4-6)

الحل : يتم رسم مخطط عزم الانعطاف للجائز المدروس وذلك بفصل الجائز إلى جائزين بسيطين كما هو موضح بالشكل ب- كما ويتم حساب الوزن المرن بالإضافة لردود الأفعال المرنة.

$$W = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14 \text{ m}^2 t$$

$$r_a = \frac{1}{3} W = \frac{14}{3} \text{ m}^2 t$$

$$r_b = \frac{2}{3} \times W = \frac{28}{3} \text{ m}^2 t$$

أو

بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة عند المسند B نجد :

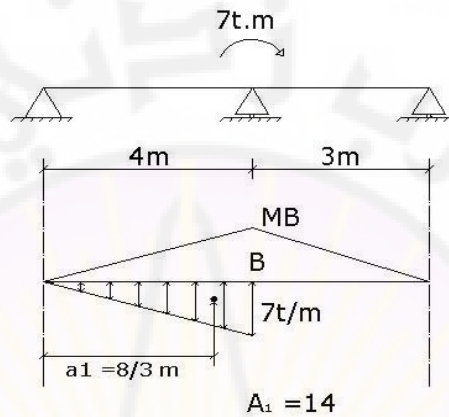
$$0 + 2M_B (4+3) + 0 = -6 \left(\frac{-28}{3} \right)$$

$$14M_B = 56$$

$$M_B = +\frac{56}{14} = 4m.t$$

ومنه

تعليق على المسألة : يمكن أن يرسم كما في الشكل (5-6)



الشكل (5-6)

$$2M_B (4+3) = \left(\frac{14 \left(\frac{8}{3} \right)}{4} \right)$$

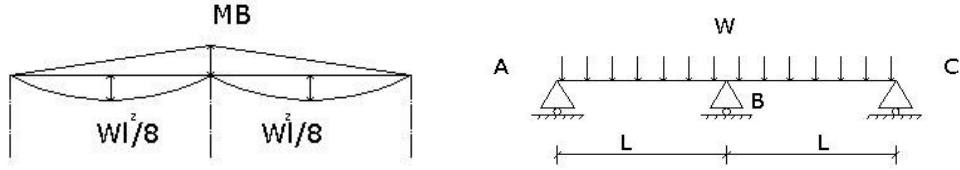
$$14M_B = +56$$

$$M_B = 4t.m$$

مثال : الجائز ABC ذو طول $(2L)$ يستند إلى ثلاثة مساند ذات مسافات متساوية،

ومحمّل حموله موزعة بانتظام (W) بوحدة الطول. المطلوب إيجاد قيم عزم

الانعطاف عند المساند.



الشكل (6-6)

الحل : بتطبيق نظرية العزوم الثلاثة على الجائز المبين نحصل على :

$$M_A.L + 2M_B(L + L) + M_C.L = -6 \left(\frac{W_1 a_1}{\lambda_{01} EI} + \frac{W_2 b_2}{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{01}} EI} \right)$$

$$0 + 2M_B(2\lambda) + 0 = -6 \left[\left(\frac{2}{3} \lambda \frac{W\lambda^2}{8} \cdot \frac{\lambda}{2 \times \lambda} + \frac{W\lambda^2}{8} \frac{\lambda}{2\lambda} \times \frac{2}{3} \right) \lambda \right]$$

$$4M_B.\lambda = \frac{-W\lambda^3}{4} - \frac{W\lambda^3}{4} = \frac{-W\lambda^3}{2}$$

$$M_B = -\frac{W\lambda^2}{8}$$

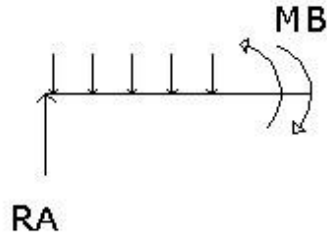
ومنه

ولإيجاد ردود الأفعال (R_A) نكتب معادلة عزم الانعطاف في (B) فنجد :

$$-R_A.L + WL.\frac{L}{2} = -M_B = +\frac{W\lambda^2}{8}$$

$$R_A = \frac{WL}{2} - \frac{WL}{8} = \frac{3}{8}WL$$

$$R_A.L - W\lambda\frac{\lambda}{2} - M_B = 0$$



$$R_A \lambda = +M_B + \frac{W\lambda^2}{2}$$

$$R_A \lambda = + \frac{\left(\frac{-W\lambda^2}{8} \right)}{\lambda} + \frac{W\lambda^3}{2\lambda}$$

$$R_A = \frac{-W\lambda}{2} + \frac{W\lambda}{2}$$

$$(R_A) \quad R_C = \frac{3}{8}WL \quad \text{بالتناظر مع}$$

$$R_B = 2WL - (R_A + R_C) = 2WL - \frac{3}{4}WL = \frac{5}{4}WL$$

إن معادلة عزم الانعطاف BMD في المجال AB هي :

$$M_X = \frac{3}{8}WLX - \frac{WX^2}{2}$$

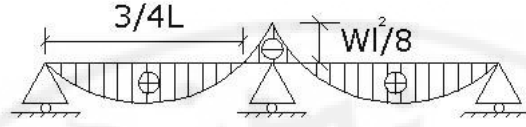
$$M_B = \frac{3}{8}WL^2 - \frac{WL^2}{2} = \frac{WL^2}{8} \quad \Leftarrow \quad X = L \quad \text{عندما يكون}$$

وأما نقطة انعدام العزم في المجال AB فهي تحدد بـ

$$\frac{3}{8}WL^2 - \frac{WL^2}{2} = 0 \Rightarrow X = \frac{3}{4}L$$

وهذا يعطينا:

ومنه يمكن أن نرسم عزم الانعطاف BMD كما هو مبين بالشكل (6-7) :

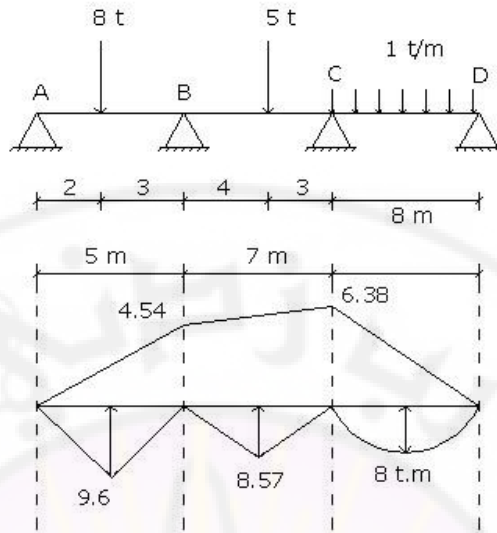


الشكل (6-7)

$$\frac{3}{8}WLX - \frac{WX^2}{2} = 0$$

$$\frac{3}{8}L = \frac{X}{2} \Rightarrow X = \frac{3}{4}L$$

مثال : جائر مستمر $ABCD$ ، طوله $(20m)$ ، يستند إلى مساند عند نهاياته وفي وسطه ضمن مستو واحد، أبعاده موضحة بالشكل (6-8) ومحمل ضمن مجازاته بحمولات متمركزة وموزعة بانتظام ضمن المجالات AB, BC, CD . المطلوب أن توجد قيم العزوم عند المساند وردود أفعال المساند الأربعة.



الشكل (8-6)

الحل : يمكننا أن نمثل مخطط الانعطاف في الشكل لكل مجاز على انفراد وذلك بالإضافة إلى عزوم المساند التي يوضحها هذا المخطط.

من أجل المجاز AB

$$M_{\max} = \frac{Wab}{L} = \frac{8 \times 2 \times 3}{5} = 9,6t.m$$

$$R_A 5 - 8.3 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{8.3}{5} \Rightarrow M = \frac{8.2.3}{5} = \frac{Wab}{L}$$

$$W = S = -\frac{1}{2} \times 5 \times 9,6$$

$$a = \frac{1}{3}(5+2) = \frac{7}{3}$$

وحيث نأخذ A مبدأ نجد :

$$S.a = \frac{5 \times 9,6 \times 7}{2 \times 3} = 56$$

$$M_A = 0$$

من أجل المجاز BC

$$M_{\max} = \frac{5 \times 4 \times 3}{7} = 8,57t, m$$

$$S.a = \left(\frac{1}{2} \times 7 \times 8,5 \right) \cdot \frac{1}{3} (7 + 3) = 100$$

مع افتراض أن C مبدأ

$$S.a = \left(\frac{1}{2} \times 7 \times 8,57 \right) \cdot \frac{1}{3} (7 + 4) = 110$$

مع افتراض أن B مبدأ

من أجل المجاز CD نجد أن

$$M_{\max} = 8t.m = \frac{1 \times 8 \times 8}{5}$$

$$S.a = \frac{2}{3} \times 8 \times 8 \times \frac{8}{2} = 170,67$$

حيث إن D تعد مبدأ وأن $M_D = 0$

نطبق علاقة العزوم الثلاثة من أجل المجازين AB و BC فنجد :

$$5M_A + 2M_B(5+7) + 7M_C + \frac{6S_1.a_1}{5} + \frac{6S_2.a_2}{7} = 0$$

بالتعويض نجد:

$$0 + 24M_B + 7M_C = \frac{6 \times 56}{5} + \frac{6 \times 100}{7}$$

ومنه يكون :

$$M_B + 0,29M_C = 6,38$$

بالطريقة ذاتها نجد للمجاذين BC و CD أن :

$$7M_B + 2M_C(7+8) + 8M_D + \frac{6S'_1.a_1}{7} + \frac{6S_2.a_2}{8} = 0$$

$$7M_B + 30M_C + 0 = \frac{6 \times 110}{8} + \frac{6 \times 170,67}{7} = 94,3 + 128$$

$$M_B + 4,28M_C = 31,76 \dots \dots \dots (2)$$

حيث إن $M_D = 0$

بحل المعادلتين (1) , (2) نجد :

$$M_C = 6,35t.m$$

$$M_B = 4,54t$$

لإيجاد رد الفعل في A نكتب معادلة العزم من أجل M_B فنجد :

$$R_A(5) + 8 \times 3 = M_B = -4,53$$

$$R_A = \frac{24 - 4,53}{5} = \frac{19,46}{5} = 3,89$$

رد الفعل في B نكتب معادلة العزم من أجل M_C فنجد :

$$-R_A(5+7) - R_B \times 7 + 8(3+7) + 5(3) = M_C = 6,35$$

$$-3,89 \times 12 + 7R_B + 80 + 15 = 6,35$$

$$R_B = \frac{-46 + 80 + 15 - 6,35}{7} = 6.t$$

رد الفعل في D نكتب معادلة العزم حول النقطة C أي :

$$-R_D \times 8 + (1 \times 8 \times 4) = M_C = 6,35$$

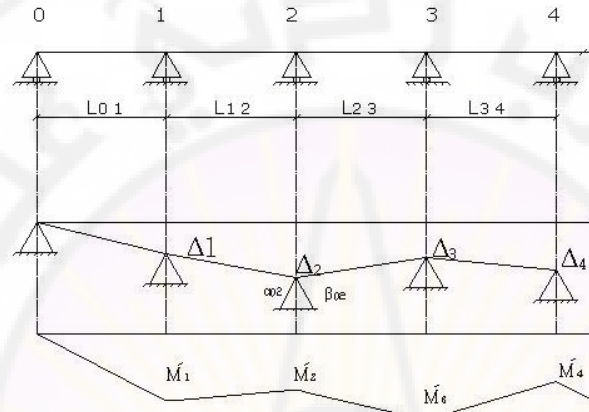
$$R_D = \frac{32 - 6,53}{8} = 3,21.t$$

أما رد الفعل في C فهو :

$$R_C = (8+5+8) - (R_A + R_B + R_D)$$

$$R_C = 21 - (3,89 + 6 + 3,21) = 21 - 13,10 = 7,96.t$$

هبوط المساند في الجوائز المستمرة بنظرية العزوم الثلاثة :



الشكل (9-6)

لنفرض أنه لدينا جائزاً مستمراً أبعاد مقاطعه ثابتة على كامل طول فتحاته، الشكل (9-6) ولا يخضع لأية حمولة، وزنه الذاتي مهمل. ولنفرض أن مساند هذا الجائز

قد تعرضت لهبوط نسبي فيما بينها، قيمة هذا الهبوط تساوي $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$.

إن هذا الهبوط لن يؤدي إلى نشوء اجهادات في الجملة الأساسية، ولكنه يؤدي إلى تغيير في ميول المقاطع العرضية بالقرب من نقاط الاستناد، ولنأخذ مثلاً حالة المسند

(2) فنجد:

$$\alpha_{02} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\lambda_{12}}$$

$$\beta_{02} = -\left(\frac{\Delta_2 - \Delta_3}{\lambda_{23}}\right)$$

تكون معادلة العزوم الثلاثة في حال هبوط المساند :

$$M'_1\lambda_{12} + 2M'_2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) + M'_3\lambda_{23} = 6EI \left[\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\lambda_{12}} + \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{\lambda_{23}} \right]$$

ومعادلة العزوم الثلاثة عند المسند (3):

$$M'_2\lambda_{23} + 2M'_3(\lambda_{23} + \lambda_{34}) + M'_4\lambda_{34} = 6EI \left[\frac{\Delta_3 - \Delta_2}{\lambda_{23}} + \frac{\Delta_3 - \Delta_4}{\lambda_{34}} \right]$$

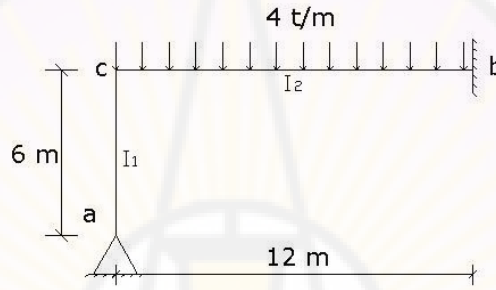
وهذه هي معادلة العزوم الثلاثة المستخدمة في تعيين العزوم في المساند، والناشئة عن هبوط مساند الجوائز المستمرة ذات المقطع العرضي الثابت. أما في الجوائز المستمرة ذات عزم العطالة المتغير من فتحة لأخرى ولكنه ثابت في الفتحة الواحدة فإن المعادلة تأخذ الشكل الآتي :

$$\frac{M'_1\lambda_{12}}{6EI_{12}} + 2M'_2 \left(\frac{\lambda_{12}}{6EI_{12}} + \frac{\lambda_{23}}{6EI_{23}} \right) + \frac{M'_3\lambda_{23}}{6EI_{23}} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\lambda_{12}} + \frac{\Delta_2 - \Delta_3}{\lambda_{23}}$$

معالجة الجوائز المستمرة ذات المفاصل الداخلية :

يمكن استخدام نظرية العزوم الثلاثة في معالجة الجوائز المستمرة التي تحتوي على مفاصل داخلية، حيث نفترض هذه المفاصل على أنها مساند ذات عزوم استمرار مساوية الصفر، وتخضع لهبوط يساوي (y) . ونظراً لوجود المجهول الإضافي (y) فإننا نحتاج لمعادلة إضافية لكل مفصل داخلي، ويتم الحصول عليها من معادلة القص عند ذلك المفصل.

مثال : المطلوب رسم مخطط عزم الانعطاف تحت تأثير الأحمال المطبقة على الإطار غير المقرر الموضح بالشكل (6-10). علماً أن الإطار ذو مقاطع متغيرة من عنصر إلى آخر. ولكنها ثابتة على العنصر المستقيم الواحد نفسه، وبحيث $(I_2=1,5I_1)$.



الشكل (6-10)

الحل : يتضح من الشكل أن الإطار المدروس ممنوع من الحركة الجانبية نتيجة لوجود الوثاقفة (b) ومن ثم يمكن استخدام معادلة العزوم الثلاثة السابق استنتاجها لمعالجته. ولتسهيل الحل نتصور حصول دوران للعنصر (ac) بزاوية (90°) حتى يتخذ استقامة العنصر (bc) مع مراعاة دوران الأحمال المطبقة عليه بالأسلوب نفسه، وذلك في حال وجود هذه الأحمال.

نحصل بعد عملية الدوران على الجائز المستمر (acb) المكافئ للإطار

المدرّوس والمحمول عند (a) , (b) , (c) .

- حساب الأوزان المرنة :

$$M_{\max} = \frac{4(12)^2}{8} = 76m.t$$

$$W = \frac{2}{3} \times 72 \times 12 = 576m^2t$$

$$r_c = r_b = \frac{576}{2} = 288m^2t$$

بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة عند المسند (c) نجد :

$$0 + 2M_c \left(\frac{6}{I_1} + \frac{12}{1,5I_1} \right) + M_b + \left(\frac{12}{1,5I_1} \right) = -6 \left(\frac{288}{1,5I_1} \right)$$

$$M_b + 3,5M_c = -144 \dots \dots \dots (1)$$

ومنه

وبتطبيق المعادلة عند المسند (b) نجد :

$$M_c \left(\frac{12}{1,5I_1} \right) + 2M_b + \left(\frac{12}{1,5I_1} \right) + 0 = -6 \left(\frac{288}{1,5I_1} \right)$$

$$2M_b + M_c = -144 \dots \dots \dots (2)$$

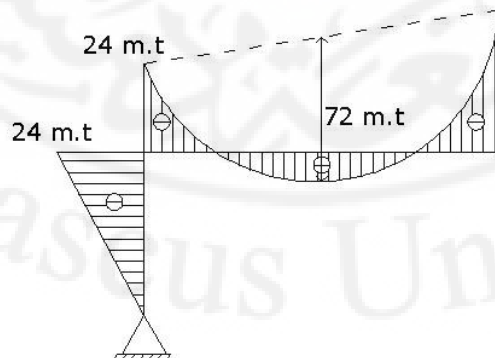
ومنه

بحل المعادلتين (1) , (2) نجد :

$$M_c = -24m.t$$

$$M_b = 60m.t$$

يوضح الشكل (6-11) مخطط عزم الانعطاف للإطار المفروض:

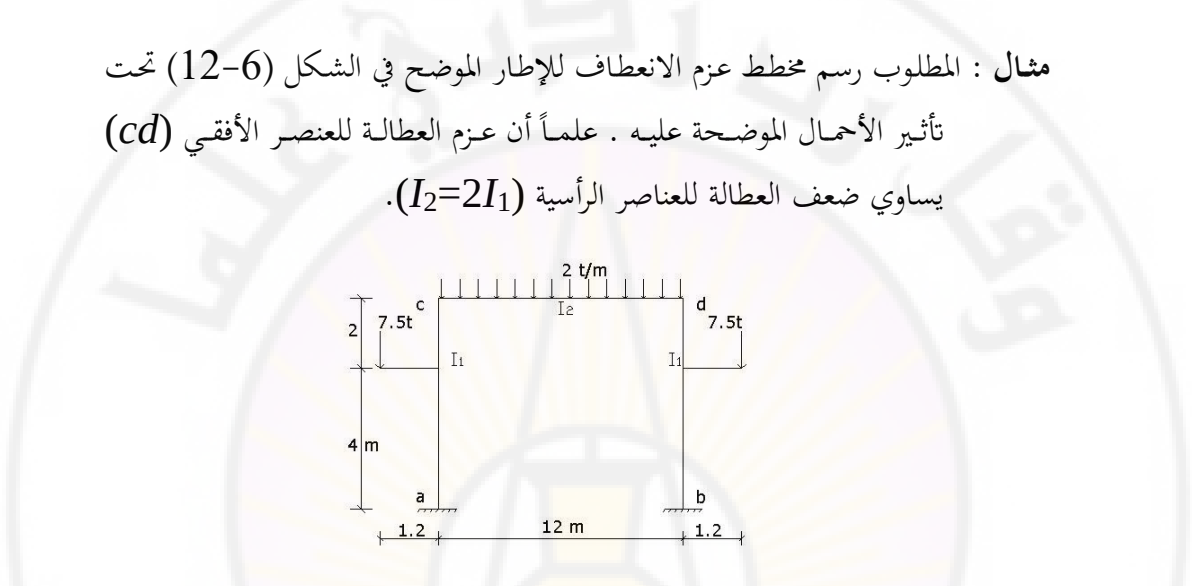


الشكل (11-6)

مثال : المطلوب رسم مخطط عزم الانعطاف للإطار الموضح في الشكل (6-12) تحت تأثير الأحمال الموضحة عليه . علماً أن عزم العطالة للعنصر الأفقي (cd) يساوي ضعف العطالة الرأسية ($I_2=2I_1$).

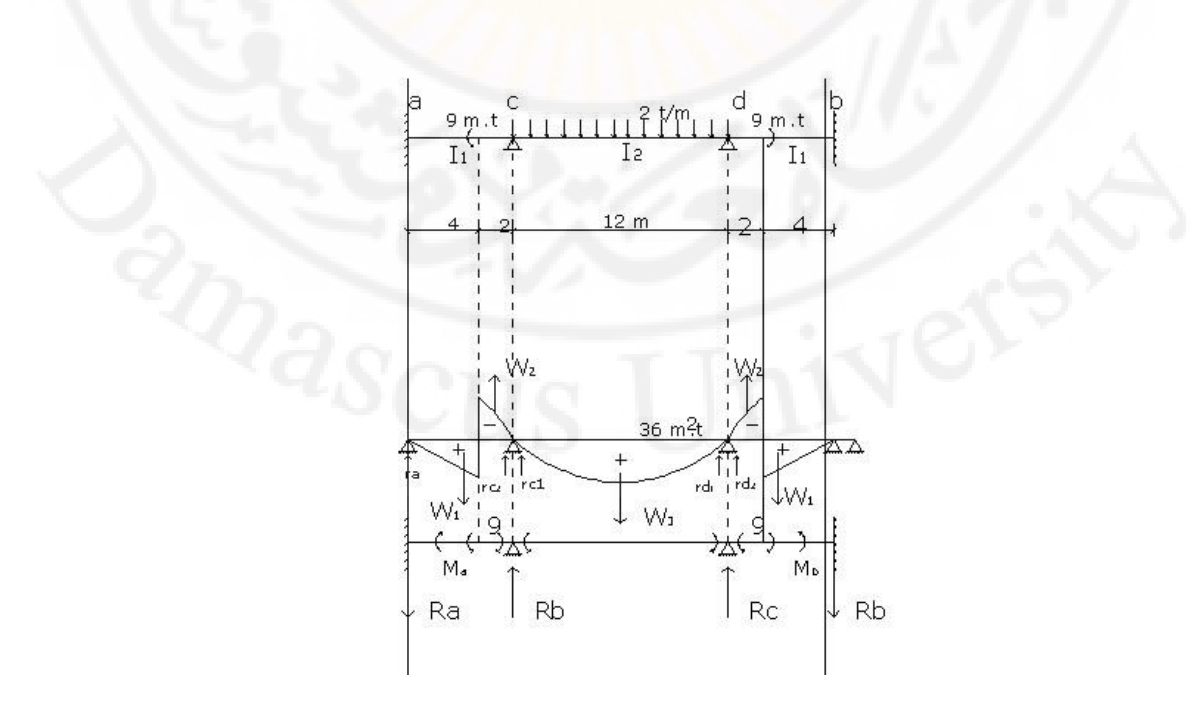
The diagram shows a portal frame with two vertical columns and a horizontal beam. The left column is labeled 'a' at the base and 'c' at the top. The right column is labeled 'b' at the base and 'd' at the top. The beam is labeled 'cd'. The columns have a moment of inertia I_1 , and the beam has a moment of inertia I_2 . A uniformly distributed load of 2 t/m is applied to the beam. At the top of each column, there is a horizontal point load of $7.5t$ acting to the right. The frame is supported by fixed supports at the bases 'a' and 'b'. Dimensions are given: 1.2 m from each column center to the beam ends, and 4 m for the column height.

مثال : المطلوب رسم مخطط عزم الانعطاف للإطار الموضح في الشكل (6-12) تحت تأثير الأحمال الموضحة عليه . علماً أن عزم العطالة للعنصر الأفقي (cd) يساوي ضعف العطالة الرأسية ($I_2=2I_1$).



الحل : تتم معالجة الإطار المدروس على أساس أنه جائز مستمر، كما يوضح الشكل (6-13) :

الحل : تتم معالجة الإطار المدروس على أساس أنه جائز مستمر، كما يوضح الشكل (6-13) :



الشكل (6-13)

وتبعاً للتناظر فإن :

$$1).....M_a = M_b$$

$$2).....M_c = M_d$$

الأوزان المرنة:

$$W_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12m^2t$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3m^2t$$

$$W_3 = \frac{2}{3} \times 36 \times 12 = 288m^2t$$

ردود الأفعال المرنة :

$$r_{c1} = r_{d1} = \frac{W_3}{2} = 144m^2t$$

$$r_a = 6m^2.t, r_{c2} = 3m^2t$$

$$r_b = 6m^2.t, r_{d2} = 3m^2t$$

بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة عند المسند (a) نجد :

$$0 + 2Ma \left(\frac{6}{I_1} \right) + M_c \left(\frac{6}{I_1} \right) = -6 \left(\frac{6}{I_1} \right)$$

$$3).....2M_a + M_c = -6$$

ومرة أخرى بتطبيق المعادلة عند المسند (c) نجد :

$$M_a \left(\frac{6}{I_1} \right) + 2Mc \left(\frac{6}{I_1} + \frac{12}{I_2} \right) = M_d \left(\frac{12}{I_2} \right) = -6 \left(\frac{3}{I_1} + \frac{144}{I_2} \right)$$

$$4).....M_a + 4M_c + M_d = -75$$

بحل جملة المعادلات نجد:

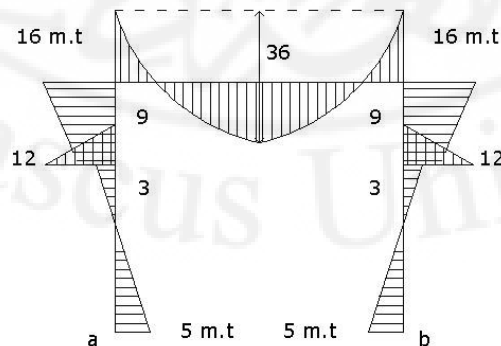
$$M_a = M_b = 5m.t$$

$$M_c = M_d = 16m.t$$

كما يوضح الشكل (6-14) مخطط عزم الانعطاف :

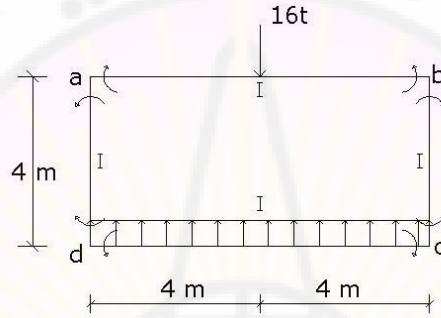
$$R_a = R_b = 2m.t$$

$$R_c = R_d = 14m.t$$



الشكل (6-14)

مثال : يطلب إيجاد عزوم العقد في الإطار الموضح في الشكل (6-15):



الشكل (6-15)

الحل : يمكن قطع الإطار عند (d) مثلاً ونشره على خط مستقيم واحد، بحيث يستعاض عن العقد بمساند، فنحصل على جائز مستمر .

- بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة عند المسند (b) مثلاً نجد :

$$8M_a + 2M_b(8 + 4) + 4M_c = -6(64 + 0)$$

$$2M_a + 6M_b + M_c = -96 \dots \dots \dots (1)$$

- وبتطبيق المعادلة مرة أخرى عند المسند (c) نجد :

$$4M_b + 2M_c(4 + 8) + 8M_d = -6(42,67 + 0)$$

$$M_b + 6M_c + 2M_d = -64 \dots \dots \dots (2)$$

وبسبب التناظر لدينا :

$$M_a = M_b$$

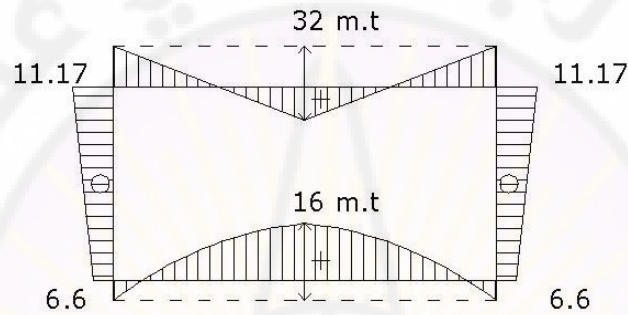
$$M_c = M_d$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على :

$$M_a = M_b = -11,17 \text{ m.t}$$

$$M_c = M_d = -6,6 \text{ m.t}$$

يوضح الشكل (6-16) مخطط عزم الانعطاف للإطار المدروس .

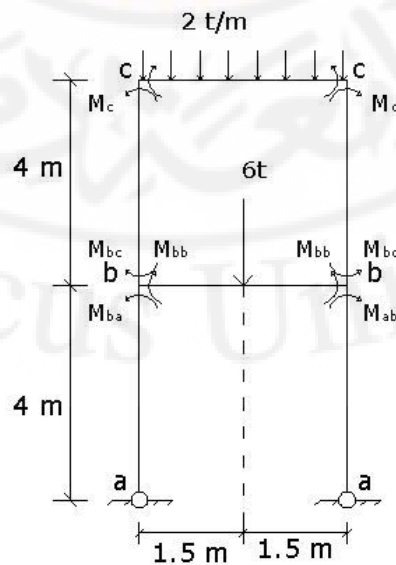


الشكل (6-16)

مثال : يطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف وتعيين ردود الأفعال للإطار الموضح في

الشكل (6-17) . علماً أن مقطع الإطار منتظم على كامل عناصره

:($EI = \text{const}$)



الشكل (6-17)

الحل : بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة للمجالين (ab) , (bc) نجد :

$$8M_{ba} + 8M_{bc} + 4M_c = 0 \dots\dots\dots(1)$$

في حال المجالين (bc) , (cc) نجد :

$$4M_{bc} + 2M_c(4+3) + 3M_c = -6(2,25)$$

$$4M_{bc} + 17M_c = -6 \times 2,25 \dots\dots\dots(2)$$

وفي حال المجالين (bb) , (ab) نجد :

$$8M_{ba} + 6M_{bb} + 3M_{bb} = -6(3,375)$$

$$8M_{ba} + 9M_{bb} = 20,25 \dots\dots\dots(3)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على ثلاث معادلات بأربع مجاهيل ولدينا معادلة

إضافية تخص توازن العقدة (b) ومن ثم :

$$-M_{ba} + M_{bb} + M_{bc} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

وبحل المعادلات الأربع السابقة نحصل على قيم العزوم عند المساند :

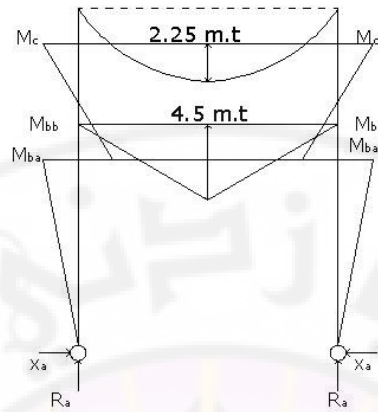
$$M_{bb} = -1,721m.t$$

$$M_c = -1,059m.t$$

$$M_{ba} = -0,596m.t$$

$$M_{bc} = 1,125 \text{ m.t}$$

يوضح الشكل (18-6) مخطط عزم الانعطاف للإطار المدروس



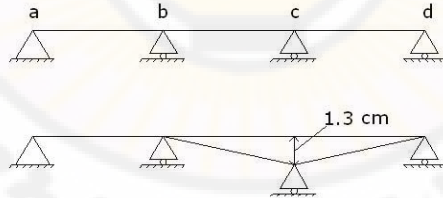
الشكل (18-6)

ردود الأفعال عند المساند الخارجية :

$$R_a = 6t$$

$$X_a = 0,15t$$

مثال : المطلوب حساب قيمة عزوم الانعطاف للجوائز المستمر الموضح في الشكل (6)-
 (19) وذلك نتيجة لهبوط المسند (c) مقدار (1.3) سم . علماً أن المقطع ثابت لكامل طول الجوائز وقيمتة EI تساوي (5000) طن.م² .



الشكل (19-6)

الحل : بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة عند المسند (b) نجد :

$$0 + 2M_b(5,5 + 8) + 8M_c \times 8 = 6 \times 5000 \left(0 + \frac{0 - 0,013}{8} \right)$$

$$27M_b + 8M_c = -48,75 \dots \dots \dots (1)$$

وبتطبيق المعادلة نفسها عند المسند (c) نجد :

$$M_b \times 8 + 2M_c(8 + 5,5) + 0 = 6 \times 5000 \times \left(\frac{0,013}{8} + \frac{0,013}{5,5} \right)$$

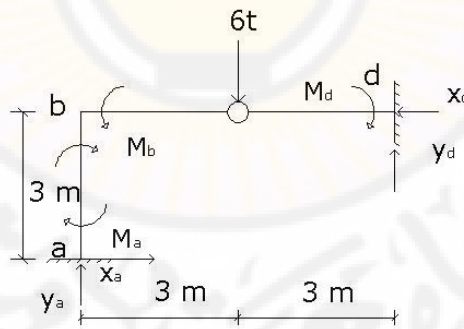
$$8M_b + 27M_c = 119,66 \dots \dots \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) , (2) معاً نجد:

$$M_c = \frac{452,6}{83,13} = 5,44 \text{ m.t}$$

$$M_b = -3,40 \text{ m.t}$$

مثال : الإطار الموضح بالشكل موثوق في نهايتين (a) , (d) ويحتوي على المفصل (c) . المطلوب حساب العزوم للمساند تحت تأثير الحمولة الموضحة في الشكل (6-20).



الحل : الإطار ممنوع من الحركة الجانبية نتيجة للمسند (d) الموثوق :

نكتب معادلة العزوم الثلاثة عند المسند (a):

$$0 + 2M_a(0 + 3) + 3M_b = 0$$

$$2M_a + M_b = 0$$

والمعادلة عند المسند (b) (بمعنى عند زاوية الإطار (b)):

$$3M_a + 2M_b(3 + 3) = 6EI\left(\frac{0 - y}{3}\right)$$

حيث (y) هبوط المفصل (c) بالنسبة للمسند (b):

$$3M_a + 12M_b = -2EIy$$

وأخيراً نطبق المعادلة عند المسند (d)

$$2M_d(3 + 0) + 0 = 6EI\left(\frac{0 - y}{3}\right)$$

$$6M_d = -2EIy$$

وباختصار الحد $(-2EIy)$ من المعادلات السابقة نحصل على المجموعة الآتية :

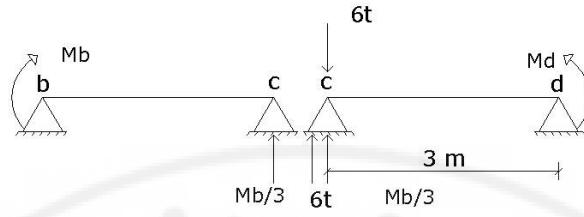
$$(1) \dots\dots\dots 2M_a + M_b = 0$$

$$(2) \dots\dots\dots M_a + 4M_b = 2M_d$$

نحصل هنا على معادلتين بثلاثة مجاهيل، والمعادلة الأخرى التي يمكن أن

نحصل عليها هي معادلة القص عند المفصل (c) مع ملاحظة الشكل

: (21-6)



الشكل (21-6)

$$\frac{M_d}{3} + \frac{M_b}{3} + 6 = 0$$

$$(3).....M_d + M_b = -18$$

بحل المعادلات الثلاثة (1) , (2) , (3) نحصل على قيم العزوم:

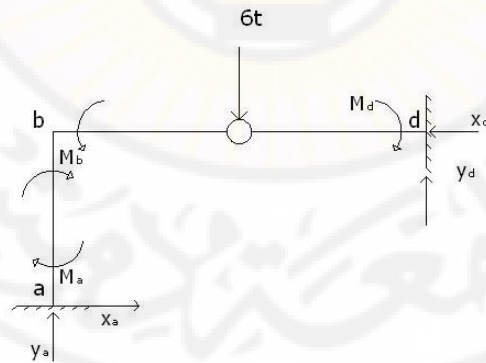
$$M_a = 3,273m.t$$

$$M_b = -6,545m.t$$

$$M_d = -11,455m.t$$

ويوضح الشكل (22-6) قيم عزوم الانعطاف بالإضافة لردود الأفعال الخارجية عند

المساند حيث :



الشك

$$y_a = 2,182t$$

$$X_a = 3,273t$$

$$y_d = 3,818t$$

$$X_d = 3,273t$$

