

بنی جبرية (١)



السنة الثانية رياضيات

قسم الرياضيات



منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

بقى جبرية (1)

الدكتور

حمزة إبراهيم حاكمي
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

٢٠١٣-٢٠١٢ م

١٤٣٥-١٤٣٤ هـ

جامعة دمشق



الفهرس

٥.....	الفهرس
٩.....	المقدمة
١٣.....	الفصل الأول
١٣.....	نظرية المجموعات
١٣.....	مقدمة
١٦.....	١-١. العلاقات الثلاثية
٣١.....	٢-١. المجموعات المرتبة جيداً
٤٨.....	٣-١. قدرة مجموعة والمجموعات متساوية القدرة
٥٨.....	٤-١. للمجموعات القابلة للعد
٦٣.....	٥-١. بعض الخواص للأعداد الصحيحة
٧٠.....	٦-١. تولفق الأعداد الصحيحة
٧٥.....	تمارين (١)
٧٧.....	الفصل الثاني
٧٧.....	نظرية الزمر
٧٧.....	١-٢. الزمرة والزمرة الجزئية
٨٨.....	٢-٢. زمرة الجمع والضرب بالمقلص n
٩١.....	٣-٢. المرافقات والدليل ومبرهنة لاغرانج
٩٨.....	تمارين محاولة (٢)
١٠١.....	تمارين (٢)
١٠٣.....	الفصل الثالث
١٠٣.....	الزمرة الدوارة
١٠٣.....	١-٣. الزمرة الدوارة
١١٨.....	٢-٣. تطبيقات الزمرة الدوارة

١٢١.....	تمارين محلولة (٣)
١٢٦.....	تمارين (٣)
١٢٩.....	الفصل الرابع
١٢٩.....	زمرة التباديل
١٢٩.....	١-٤. زمرة التباديل
١٤٢.....	٢-٤. زمرة القياس
١٥٢.....	تمارين محلولة (٤)
١٥٩.....	تمارين (٤)
١٦١.....	الفصل الخامس
١٦١.....	الزمرة الجزئية الناعمة و زمرة الخارج
١٦١.....	١-٥. الزمرة الجزئية الناعمة
١٦٧.....	٢-٥. زمرة الخارج
١٧٢.....	تمارين محلولة (٥)
١٧٨.....	تمارين (٥)
١٧٩.....	الفصل السادس
١٧٩.....	التشاكلات الزمرة ومبرهنات التماثل
٢٠٠.....	تمارين محلولة (٦)
٢٠٣.....	تمارين (٦)
٢٠٥.....	الفصل السابع
٢٠٥.....	زمرة التماثلات
٢١٨.....	تمارين محلولة (٧)
٢٢٢.....	تمارين (٧)
٢٢٣.....	الفصل الثامن
٢٢٣.....	الجداء والمجموع المباشر لزمرة
٢٢٣.....	١-٨. الجداء المباشر للزمرة
٢٣١.....	٢-٨. المجموع المباشر للزمرة
٢٣٦.....	٣-٨. الجداء نصف المباشر للزمرة

٢٣٩.....	تمارين محلولة (٨)
٢٤٢.....	تمارين (٨)
٢٤٥.....	الفصل التاسع.....
٢٤٥.....	النظرية الأساسية للزمرة التبادلية المنتهية و المنتهية التوليد.....
٢٤٥.....	١-٩. الزمر التبادلية المنتهية.....
٢٥٤.....	٢-٩. الزمر التبادلية المنتهية التوليد.....
٢٦٦.....	تمارين محلولة (٩)
٢٦٨.....	تمارين (٩)
٢٦٩.....	الفصل العاشر.....
٢٦٩.....	الـ P-زمر ومبرهات سيلوف.....
٢٦٩.....	١-١٠. الـ P-زمر.....
٢٧٤.....	٢-١٠. مبرهات سيلوف.....
٢٨٦.....	تمارين محلولة (١٠)
٢٨٩.....	تمارين (١٠)
٢٩١.....	الفصل الحادي عشر.....
٢٩١.....	تصنيف الزمر المنتهية.....
٢٩٩.....	تمارين محلولة (١١)
٣٠٢.....	تمارين (١١)
٣٠٥.....	الفصل الثاني عشر.....
٣٠٥.....	الزمر القابلة للحل و الزمر عديمة القوى.....
٣٠٥.....	١-١٢. الزمر القابلة للحل.....
٣١٣.....	٢-١٢. الزمر عديمة القوى.....
٣٣١.....	٣-١٢. الـ M-زمر.....
٣٤٠.....	تمارين محلولة (١٢)
٣٤٣.....	تمارين (١٢)
٣٤٥.....	الفصل الثالث عشر.....
٣٤٥.....	الزمر البسيطة.....

٣٤٥.....	١-١٣. الزمر الجزئية الأعظمية.
٣٦٠.....	٢-١٣. الزمر الجزئية الأصغرية وزمرة <i>Fitting</i> .
٣٦٧.....	٣-١٣. الزمر البسيطة.
٣٧٤.....	٤-١٣. العلاقات والمولدات.
٣٨٦.....	تمارين محلولة (١٣)
٣٨٩.....	تمارين (١٣)
٣٩١.....	الفصل الرابع عشر
٣٩١.....	تمديدات الزمر
٣٩١.....	١-١٤. المتواليات التامة.
٣٩٢.....	٢-١٤. تمديدات الزمر.
٣٩٩.....	٣-١٤. التمديدات المنشطة.
٤٠٥.....	تمارين محلولة (١٤)
٤٠٧.....	تمارين (١٤)
٤٠٩.....	الفصل الخامس عشر
٤٠٩.....	نظرية للفئات
٤٠٩.....	١-١٥. الفئة والفئة التثوية.
٤١٤.....	٢-١٥. الدوال.
٤٢٢.....	٣-١٥. الجداء الديكارتي للفئات.
٤٢٦.....	٤-١٥. تكافؤ الفئات.
٤٣١.....	تمارين محلولة (١٥)
٤٣٣.....	تمارين (١٥)
٤٣٥.....	المصطلحات العلمية
٤٤٢.....	المراجع العلمية

المقدمة

من أين يبدأ الجبر؟

يمكن القول: إن أسس الجبر تبدأ من حيث بدأت عمليات الجمع و الضرب للأعداد الصحيحة، ومن ثم استبدال الأعداد بالأحرف لإجراء عمليات مشابهة للعمليات الحسابية، من هنا يمكن الحديث عن بدايات الجبر. بعد ذلك بدأت المحاولات للإجابة عن التساؤلات والمسائل التي بدأت تظهر وتواجه الشعوب في تلك الأزمنة.

ولكن الجزء الأصعب من الجواب المرتبط في وصف البنى الجبرية الأساسية في أيامنا هذه مثل الزمرة، الحلقة، المودول، متى بدأت؟

لحسن الحظ أن معظم الموضوعات الجبرية تضمنت مسائل محددة منها ذات طابع نظري وأخرى ذات طابع تطبيقي، وقد كانت الحلول لهذه المسائل سبباً لإدخال مفاهيم جديدة، وتطوير الجزء النظري من هذا العلم الذي قدم بدوره حلولاً لمسائل جديدة. وقد أدى هذا التطور في البنى الجبرية إلى تجاوز مفهوم المجموعة المزدودة بعمليات جبرية (حسابية) إلى إدخال مفاهيم جديدة مثل الفضاءات الطوبولوجية والمعادلات التفاضلية وغيرها. وقد كان هذا التطور سبباً في تطور علوم أخرى، وكما قال كبير علماء الميكانيك الكوانتي ديراك: إن الفيزياء الحديثة تتطلب أكثر فأكثر الرياضيات المجردة وتطور أسسها مثل الهندسة اللاقليدية والجبر التبادلي. وتستخدم للموضوعات الجبرية في دراسة خواص الجسم الصلب وعلم البلورات.

ويعد كتاب البنى الجبرية (١) مدخلاً إلى الجبر المجرد، فقد وضع لطلبة الرياضيات في السنة الثانية، وخصص لدراسة نظرية الزمر ليقدم للقارئ العربي معظم موضوعات هذه النظرية. ويضم الكتاب خمسة عشر فصلاً كتبت جميعها بلغة علمية بسيطة بحيث انتهت كل فقرة بتطبيق، وألحق كل فصل بعدد كبير ومتنوع من التمارين المحولة وغير المحولة بحيث يمكن اعتبار هذا الكتاب مغنياً لكل من الناحيتين النظرية والعملية على السواء.

يبدأ الكتاب بدراسة المجموعات، فيدرس في الفصل الأول المجموعات والعلاقات الثنائية بما في ذلك علاقات التكافؤ والترتيب وبشيء من التفصيل المجموعات المرتبة جيداً، ثم يدرس بعد ذلك قدرة المجموعة والمجموعات القابلة للعد ولينتهي بدراسة بعض الخواص للأعداد الصحيحة.

وخصص الفصل الثاني لتعريف الزمرة والزمرة الجزئية ودراسة زمرتي الجمع والضرب بالمقامس، ولينتهي هذا الفصل بدراسة المرافقات.

أما الزمرة الدوارة وتطبيقاتها فدرست في الفصل الثالث مع عدد كبير من التمارين والتطبيقات التي توضح أهمية هذا الموضوع.

وخصص الفصل الرابع لدراسة زمرة التباديل وزمر القياسات.

عولج في الفصل الخامس مفهوم الزمرة الناقمية وزمرة الخارج وعلاقة الزمرة بزمرة الخارج لها.

أما التشاكلات الزمرية ومبرهنات التماثل، فقد عولجت في الفصل السادس الذي أتبع بعدد كاف من التمارين المحولة التي توضح العلاقة الوثيقة بين الزمرة والتشاكلات الزمرية.

وخصص الفصل السابع لدراسة زمرة التماثلات والتماثلات الداخلية وعلاقة هذه التماثلات بالزمرة ذاتها.

كما خصص الفصل الثامن لدراسة المجموع والجداء المباشر للزمر.

أما الزمر التبديلية المنتهية والزمر التبديلية المنتهية التوليد وتمثيلها فقد عولجت في الفصل التاسع وألحقت بعدد كاف من التمارين التي تبين كيفية هذا النشر.

بينما خصص الفصل العاشر لدراسة الـ p -زمر ومبرهنات سيلوف.

وخصص الفصل الحادي عشر لتصنيف الزمر المنتهية وقد صنفت فيه معظم الزمر

المنتهية وألحق بجدول يبين فيه عدد الزمر التي مراتبها أصغر أو تساوي 100.

أما الفصل الثاني عشر فقد درست فيه الزمر القابلة للحل والزمر عديمة القوى وبشكل مفصل بالإضافة إلى الـ M -زمر.

وتتضمن الفصل الثالث عشر دراسة وافية للزمر الجزئية الأعظمية والأصغرية بالإضافة إلى الزمر البسيطة والزمر الحرة والثنائية.

بينما خصص الفصل الرابع عشر لدراسة المتتاليات النامية وتمديدات الزمر وبشكل خاص التمديدات المنشطرة.

وأخيراً، فقد خصص الفصل الخامس عشر لدراسة الفئات والدوال. ونلفت الانتباه إلى أنه يجب قراءة الصيغ المكتوبة بالأحرف الأجنبية من اليسار إلى اليمين.

هذا والي أمل أن يؤدي هذا الكتاب الفائدة المرجوة منه وهي:
- أن يحصل الطالب على أساس قوي في هذا الموضوع حيث توجد الكثير من الكتب التي تعالج هذه الموضوعات ولكن أريد من الطالب أكثر من ذلك أريد منه أن يشاركني وجهة نظري في أن الجبر المجرد يعد مادة معاصرة حيث إن مفاهيمها كما ذكرنا سابقاً تستخدم كثيراً في الفيزياء والكيمياء وعلوم الحاسوب بالإضافة إلى الرياضيات.

- كما أريد من القارئ أن يستمتع بقراءة هذا الكتاب، حيث إن الطالب يفترض أن كتب الرياضيات من حيث طبيعة المادة هي كتب نظرية بحتة، ولا تمت إلى الواقع بصلة، وقد بذلت جهدي لتغيير هذه النظرة في هذا الكتاب.
وفي النهاية لابد من شكر الأستاذ الدكتور عبد الواحد أبو حمدة الذي رافقني في رحلة إعداد هذا الكتاب، ولم يبخل في تزويدي بالملاحظات والإرشادات في طريقة عرض الموضوعات التي وردت ضمن هذا الكتاب.

والله ولي التوفيق

المؤلف
د. حمزة حاكمي

دمشق
أيار ٢٠٠٤



الفصل الأول

نظرية المجموعات

مقدمة.

تعد المجموعة واحدة من أهم المفاهيم في نظرية المجموعات، وقد أدى استخدام مفهوم المجموعة من دون أي تحديد إلى ظهور بعض النتائج المتناقضة، وقد حاول كثير من العلماء وضع أسس لنظرية المجموعات لأجل التخلص من هذه التناقضات. وبعد العالم الألماني (G.Cantor 1845-1918) أحد هؤلاء الذين ساهموا في وضع هذه الأسس واليه يعود ما يمكن قوله بتعريف المجموعة (إذا صح التعبير):

تعريف.

للمجموعة هي جملة أشياء تشترك بخاصة معينة أو تجمعها صفة مشتركة، وتتعين المجموعة بمعرفة الأشياء التي تتكون منها والتي تسمى بعناصر المجموعة. نرسم للمجموعة بأحرف كبيرة $A, B, C, \dots$ ولعناصرها بأحرف صغيرة. فعندما نقول x عنصر من المجموعة A نكتب ذلك باختصار $x \in A$ وفي الحالة المعاكسة نكتب $x \notin A$. نقول عن المجموعة A إنها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر من A هو عنصر من B ونعبر عن ذلك $A \subseteq B$. نقول عن المجموعتين A, B إنهما متساويتان إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ونكتب $A = B$. جماعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة A نرمز لها $P(A)$. المجموعة التي لا تحوي أي عنصر نرمز لها Φ وتسمى المجموعة الخالية. بالاعتماد على الرموز السابقة نجد أنه إذا كانت المجموعة A فإن $\Phi \subseteq A$. كذلك إذا كانت المجموعات A, B, C والتي من أجلها $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$. من أجل أي مجموعتين اختياريتين A, B نعرف التقاطع $A \cap B$ والاتحاد $A \cup B$ بالشكل

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

من أجل أي مجموعتين A, B ، القضايا التالية متكافئة:

$$A \subseteq B \quad -1 \quad A \cap B = A \quad -2 \quad A \cup B = B \quad -3$$

أيًا كانت المجموعتين A, B ، نسمي المجموعة الجزئية $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ متممة المجموعة B في A . القضايا التالية صحيحة أيًا كانت المجموعات A, B, C :

$$-1 \quad \text{خاصة الانتماء:} \quad A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

$$-2 \quad \text{الخاصة التبادلية:} \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$-3 \quad \text{الخاصة التجميعية:}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$-4 \quad \text{الخاصة التوزيعية:}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$-5 \quad A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$$

$$-6 \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

$$-7 \quad A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

$$-8 \quad A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$$

$$-9 \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$-10 \quad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

$$-11 \quad (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$$

نسمي المجموعة $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ الفرق التناظري للمجموعتين A, B .

يتمتع الفرق التناظري للمجموعات A, B, C بالخواص التالية:

$$-1 \quad A \Delta B = B \Delta A$$

$$-2 \quad (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

$$-3 \quad A \Delta \emptyset = A$$

$$-4 \quad A \Delta A = \emptyset$$

$$-5 \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

إن الاجتماع و التقاطع يعرف كل منهما لأجل أي جماعة من المجموعات، فإذا كانت $\{A_i : i \in I\}$ جماعة من المجموعات الجزئية A_i لمجموعة ما، حيث الدليل i يمسح المجموعة I (دون استثناء الحالة $A_i = A$ من أجل $i \neq I$)، عندئذ نعرف التقاطع $\cap \{A_i : i \in I\}$ والاجتماع $\cup \{A_i : i \in I\}$ بالشكل

$$\cap \{A_i : i \in I\} = \{x : x \in A_i, \forall i \in I\}$$

$$\cup \{A_i : i \in I\} = \{x : x \in A_i, i \in I \text{ الأدلة } \}$$

نرمز للتقاطع والاجتماع السابقين $\bigcap_{i \in I} A_i$ و $\bigcup_{i \in I} A_i$ على الترتيب، إذا كانت

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ نعبّر عن التقاطع و الاجتماع السابقين على الترتيب بالشكل:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

أيًا كانت المجموعتين A, B نسمي المجموعة $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ الجداء الديكارتي للمجموعتين A, B . يتمتع الجداء الديكارتي بالخواص التالية:

$$1 - (A \cup B) \times D = (A \times D) \cup (B \times D), \quad A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$$

$$2 - (A \cap B) \times D = (A \times D) \cap (B \times D), \quad A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D)$$

$$3 - (A \setminus B) \times D = (A \times D) \setminus (B \times D), \quad A \times (B \setminus D) = (A \times B) \setminus (A \times D)$$

وذلك أيًا كانت المجموعات A, B, D .

أخيرًا، سوف نورد فيما يلي الرموز التي سنستخدمها لمجموعات الأعداد :

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية. $N^* = N \setminus \{0\}$ مجموعة الأعداد

الطبيعية المغايرة للصفر. Z مجموعة الأعداد الصحيحة. Q مجموعة الأعداد

العادية. R مجموعة الأعداد الحقيقية.

١-١. العلاقات الثنائية.

تعريف.

لتكن P مجموعة غير خالية. نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $P \times P$ علاقة ثنائية على المجموعة P أو علاقة على P . إذا كانت ρ علاقة على المجموعة P وكان $(a, b) \in \rho$ فإننا نقول إن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة ρ ونكتب $a\rho b$ أي أنه $\forall a, b \in P$ فإن:

$$(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a\rho b$$

يمكن تعريف أكثر من علاقة على المجموعة الواحدة.

إذا كانت $\rho = \{(a, a); \forall a \in P\}$ نسمي العلاقة ρ في هذه الحالة علاقة قطرية.

إذا كانت $\rho = P \times P$ نقول عن العلاقة ρ إنها واحدة.

- نقول عن العلاقة ρ إنها انعكاسية إذا تحقق الشرط: $\forall a \in P; a\rho a$.

- نقول عن العلاقة ρ إنها تناظرية إذا تحقق الشرط: $\forall a, b \in P; a\rho b \Rightarrow b\rho a$.

- نقول عن العلاقة ρ إنها متعدية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a, b, c \in P; a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$$

- نقول عن العلاقة ρ إنها تخالفية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a, b \in P; a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b$$

توجد في الرياضيات أشياء كثيرة تكون مختلفة بحسب مفهوم ما و متطابقة أو متكافئة بحسب مفهوم آخر. على سبيل المثال، $4+4$ و $2+1$ هما مقداران مختلفان حتما بالنسبة إلى عملية الجمع العادية المعرفة على الأعداد، بينما باقي قسمة $4+4$ على 5 يساوي باقي قسمة $2+1$ على 5. أي أن المقدارين $4+4$ و $2+1$ متطابقان أو متكافئان إذا كانت عملية الجمع هي باقي القسمة على 5. لهذا السبب نحن بحاجة إلى تقنية جديدة لدراسة هذه المفاهيم وهذه التقنية سوف ندعوها علاقة التكافؤ التي نوردنا من خلال التعريف التالي:

تعريف.

لنكن ρ علاقة على المجموعة P ، نقول عن ρ أنها علاقة تكافؤ على P إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

إذا كانت ρ علاقة تكافؤ على المجموعة P ، نسمي المجموعة

$$\bar{a} = \{x : x \in P; a\rho x\}$$

حيث $a \in P$ صف تكافؤ العنصر a . ونسمي العنصر a ممثلاً لهذا الصف. كذلك

نسمي مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة ρ بمجموعة الخارج ونرمز لها P/ρ ، أي

$$P/\rho = \{\bar{a} : a \in P\}$$

العلاقة بين صفوف التكافؤ نوردتها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١-١-١.

لنكن ρ علاقة على المجموعة P و $a, b \in P$. عندئذ $b \in \bar{a}$ عندما وفقط

$$\bar{a} = \bar{b}$$

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن $b \in \bar{a}$. ليكن $x \in \bar{a}$ عندئذ $a\rho x$ وبما أن $a\rho b$ فإن $b\rho a$ ولكون العلاقة ρ متعدية نستنتج أن $b\rho x$ وهذا يبين لنا أن $x \in \bar{b}$ أي أن $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. ليكن $y \in \bar{b}$ عندئذ $b\rho y$ وبما أن $b \in \bar{a}$ فإن $a\rho b$ ولكون العلاقة ρ متعدية نجد أن $a\rho y$ أي أن $y \in \bar{a}$ ومنه $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. مما سبق نجد أن $\bar{a} = \bar{b}$.

كفاية الشرط. لدينا $b \in \bar{b} = \bar{a}$ وذلك لكون العلاقة ρ انعكاسية.

مفهوم آخر من المفاهيم الهامة في الرياضيات نوردته من خلال التعريف التالي:

تعريف.

لنكن $\Sigma = \{A_i : i \in I\}$ أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة غير الخالية

P . نقول عن Σ أنها تشكل تجزئة للمجموعة P إذا تحقق ما يلي:

١- أيًا كان $i \in I$ فإن $A_i \neq \Phi$.

٢- أيًا كان $i, j \in I$ إما $A_i = A_j$ أو $A_i \cap A_j = \Phi$.

$$P = \bigcup_{i \in I} A_i \quad 3-$$

المبرهنة التالية تبين لنا كيفية الحصول على تجزئة من خلال علاقة التكافؤ:

مبرهنة ٢-١-١.

لتكن ρ علاقة تكافؤ على المجموعة P . إن مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة ρ تشكل تجزئة للمجموعة P .

البرهان.

لتكن $Pl\rho = \{\bar{a} : a \in P\}$ مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة ρ ، بما أن العلاقة ρ انعكاسية فإن $a\rho a$ وذلك أيا كان $a \in P$ ومنه $a \in \bar{a}$ ، أي أن $\bar{a} \neq \emptyset$ وذلك أيا كان $a \in Pl\rho$. ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in Pl\rho$ إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ يتم المطلوب. لنفرض أن $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ عنئذ يوجد $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$ وحسب التمهيدية (١-١-١) فإن $\bar{x} = \bar{a}$ و $\bar{x} = \bar{b}$ ومنه $\bar{a} = \bar{b}$. واضح أن $P = \bigcup_{i \in I} A_i$ مما سبق نجد أن المجموعة $Pl\rho$ تشكل تجزئة للمجموعة P .

العلاقة بين التجزئة وعلاقة التكافؤ نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٣-١-١.

إذا كانت Σ تجزئة للمجموعة P فإن العلاقة ρ المعرفة على P بالشكل التالي:

$$\forall a, b \in P; a\rho b \Leftrightarrow \exists A \in \Sigma; a, b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P وأن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي و فقط هي عناصر للتجزئة Σ . أي أن $Pl\rho = \Sigma$.

البرهان.

واضح أن العلاقة ρ انعكاسية و تناظرية، لنبرهن على أنها متعدية. ليكن $a, b, c \in P$ بحيث $a\rho b$ و $b\rho c$. بما أن $a\rho b$ فإنه يوجد $A \in \Sigma$ بحيث $a, b \in A$. كذلك بما أن $b\rho c$ فإنه يوجد $B \in \Sigma$ بحيث $b, c \in B$. مما سبق نجد أن $b \in A \cap B$ أي أن $A \cap B \neq \emptyset$ ولكون Σ تجزئة للمجموعة P نستنتج أن $A = B$ ومنه $a, c \in A$ أي أن $a\rho c$ وهكذا نجد أن العلاقة ρ متعدية. لنبرهن الآن أن $Pl\rho = \Sigma$. ليكن

$\bar{a} \in Pl\rho$ حيث $a \in P$ ، بما أن $a \in P = \bigcup_{B \in \Sigma} B$ فإنه يوجد $B_0 \in \Sigma$ بحيث $a \in B_0$ ،
 لنبرهن أن $\bar{a} = B_0$. ليكن $x \in B_0$ عنده $a, x \in B_0$ ومنه $a\rho x$ أي أن $x \in \bar{a}$ وبالتالي
 $B_0 \subseteq \bar{a}$. ليكن $y \in \bar{a}$ عنده $a\rho y$ ومنه يوجد $B_1 \in \Sigma$ بحيث $a, y \in B_1$ وهكذا فإن
 $a \in B_0 \cap B_1$ وبالتالي $B_0 = B_1$ أي أن $y \in B_0$ وهذا يبين لنا أن $\bar{a} \subseteq B_0$. مما
 سبق نجد أن $\bar{a} = B_0$ أي أن $Pl\rho \subseteq \Sigma$. لنبرهن الآن الاحتواء المعاكس، ليكن $B \in \Sigma$
 عنده $B \neq \emptyset$ ومنه يوجد $a \in B$. من جهة أخرى، لدينا $a \in \bar{a}$ لنبرهن أن $B = \bar{a}$.
 ليكن $x \in \bar{a}$ عنده $a\rho x$ وبالتالي يوجد $A \in \Sigma$ بحيث $a, x \in A$ وهذا يعني أن
 $a \in A \cap B$ أي أن $A = B$ ومنه $x \in B$ وهذا يبين لنا أن $\bar{a} \subseteq B$. ليكن $y \in B$
 عنده $a, y \in B$ أي أن $a\rho y$ وبالتالي $y \in \bar{a}$ وهكذا نجد أن $B \subseteq \bar{a}$. مما سبق نجد أن
 $B = \bar{a}$. وهذا يبين لنا أن $\Sigma \subseteq Pl\rho$ وبالتالي $\Sigma = Pl\rho$.

ملاحظة:

لتكن Σ تجزئة للمجموعة P ، وجدنا حسب المبرهنة (٣-١-١) أن التجزئة Σ تولد
 علاقة تكافؤ على المجموعة P . سوف نرمز لعلاقة التكافؤ هذه بالرمز ρ_Σ .
 مبرهنة ١-١-٤.

لتكن Σ, Θ تجزئتين للمجموعة P . ولنفرض أن ρ_Σ, ρ_Θ علاقتي التكافؤ المولدتين
 من خلال Σ, Θ على الترتيب. عنده $\Sigma = \Theta$ عندما وفقط عندما $\rho_\Sigma = \rho_\Theta$.
 البرهان.

لزوم الشرط: لنفرض أن $\Sigma = \Theta$. وليكن $(a, b) \in \rho_\Theta$ وحسب المبرهنة (١-١-٢)
 (٣) يوجد $A \in \Theta$ بحيث $a, b \in A$ وحسب الفرض فإن $A \in \Sigma$ أي أن $(a, b) \in \rho_\Sigma$
 وهذا يبين لنا أن $\rho_\Theta \subseteq \rho_\Sigma$. بشكل مشابه نبرهن على الاحتواء المعاكس، مما سبق
 نجد أن $\rho_\Sigma = \rho_\Theta$.

كفاية الشرط: ينتج من المبرهنة (٣-١-١) وذلك لأنه إذا كان $\rho_\Sigma = \rho_\Theta$ عنده يكون
 $Pl\rho_\Sigma = Pl\rho_\Theta$ وبالتالي فإن $\Sigma = \Theta$.

و جدنا سابقا أن كل علاقة تكافؤ على مجموعة ما تولد تجزئة لهذه المجموعة، وكذلك كل تجزئة لهذه المجموعة تولد علاقة تكافؤ. وبالتالي يمكن أن توجد على المجموعة الواحدة أكثر من علاقة تكافؤ وأكثر من تجزئة. المبرهنة التالية تبين لنا مدى الارتباط بين علاقات التكافؤ على مجموعة ما وتجزئات هذه المجموعة. لأجل ذلك لنفرض أن $\mathcal{I}$ هي مجموعة التجزئات لمجموعة ما P و $\mathcal{I}_0$ مجموعة علاقات التكافؤ على هذه المجموعة.

مبرهنة ١-١-٥.

يوجد تطبيق متباين وغامر (تقابل) بين $\mathcal{I}$ و $\mathcal{I}_0$.

البرهان.

لنعرف التطبيق $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_0$: f بالشكل $f(\Sigma) = \rho_\Sigma$ حيث ρ_Σ هي علاقة التكافؤ على المجموعة P المولدة بالتجزئة Σ . إن التطبيق f متباين لأنه أيا كانت $\Sigma, \Theta \in \mathcal{I}$ بحيث $f(\Sigma) = f(\Theta)$ فإن $\rho_\Sigma = \rho_\Theta$ وحسب المبرهنة (١-١-٤) ينتج أن $\Sigma = \Theta$. كذلك f غامر لأنه إذا كانت $\rho \in \mathcal{I}_0$ فإنه حسب المبرهنة (١-١-٢) المجموعة $Pl\rho$ تشكل تجزئة للمجموعة P وبالتالي $Pl\rho \in \mathcal{I}$ وحسب المبرهنة (١-١-٣) فإن $f(Pl\rho) = \rho$.

علاقة أخرى من العلاقات الهامة على المجموعات نوردتها من خلال التعريف

التالي:

تعريف.

لنكن ρ علاقة على المجموعة P . نقول عن العلاقة ρ إنها علاقة ترتيب جزئية على المجموعة P إذا كانت العلاقة ρ انعكاسية، تخالفية ومتعدية. يرمز عادة لعلاقة الترتيب الجزئية بالرمز $\leq$. نسمي الثنائية $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا. لنلق الضوء على واحدة من العلاقات التي من خلالها يمكننا الحصول على علاقتي تكافؤ وترتيب في آن واحد وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-١-٦.

لتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية على المجموعة P . علنذ:

١- العلاقة ρ المعرفة على P بالشكل التالي:

$$\forall a, b \in P \quad a \rho b \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على P .

٢- العلاقة $\leq$ المعرفة على المجموعة $Pl\rho$ بالشكل التالي:

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in Pl\rho \quad \bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

هي علاقة ترتيب جزئية على $Pl\rho$.

البرهان.

١- البرهان على أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على P نتركه للقارئ.

٢- للبرهان على أن العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب جزئية على المجموعة $Pl\rho$ لابد لنا في البداية البرهان على أن العلاقة $\leq$ معرفة جيداً على المجموعة $Pl\rho$. ليكن $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in Pl\rho$ بحيث $\bar{a} = \bar{c}$ و $\bar{b} = \bar{d}$ ولنفرض أنه إذا كان $\bar{a} \leq \bar{b}$ فإن $\bar{c} \leq \bar{d}$. لنفرض أن $\bar{a} \leq \bar{b}$ علنذ $a \leq b$ وبما أن $c \in \bar{c} = \bar{a}$ فإن $a \rho c$ ومنه $a \leq c$ و $c \leq a$. كذلك بما أن $d \in \bar{d} = \bar{b}$ فإن $b \rho d$ وبالتالي $d \leq b$ و $b \leq d$. مما سبق نستنتج أن $c \leq a \leq b \leq d$ أي أن $c \leq d$ ومنه $\bar{c} \leq \bar{d}$. واضح أن $(\leq)$ هي علاقة انعكاسية ومتعدية على المجموعة $Pl\rho$.

لنبرهن على أنها تخالفية. ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in Pl\rho$ بحيث $\bar{a} \leq \bar{b}$ و $\bar{b} \leq \bar{a}$ علنذ $a \leq b \leq a$ وبالتالي $a \rho b$ أي أن $h \in \bar{a} = \bar{b}$ ومنه $\bar{a} = \bar{b}$.

نأتي الآن لدراسة خواص بعض العناصر في المجموعات المرتبة جزئياً.

تعريف.

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر أصغر في P إذا حقق الشرط:

$$\forall x \in P \quad a \leq x$$

إذا كانت المساواة في السلسلة السابقة محققة في كل مكان فإن السلسلة (*) تنقطع.
لنفرض أن l أول دليل في السلسلة (*) المساواة عنده غير محققة أي أن

$$a = a_1 = a_2 = \dots = a_{l-1} > a_l \geq a_{l+1} \geq \dots$$

وبما أن $a_l < a$ فإن السلسلة $a_l \geq a_{l+1} \geq a_{l+2} \geq \dots$ حسب الفرض تنقطع وبالتالي السلسلة (*). تنقطع وهذا يبين لنا أن العنصر a يتمتع بالخاصة $\odot_0$. وحسب الفرض فإن جميع عناصر المجموعة P تحقق الخاصة $\odot_0$. وبالتالي المجموعة P تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة.

(3) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أنه توجد في P مجموعة جزئية M غير خالية لا تحوي عنصراً أصغرياً. وليكن $a_1 \in M$ وبما أن a_1 ليس أصغرياً في M فإنه يوجد $a_2 \in M$ بحيث $a_1 > a_2$. لنفرض أنه تم الحصول على العناصر $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ من عناصر M . وبما أن العنصر a_n ليس أصغرياً في M فإنه يوجد $a_{n+1} \in M$ بحيث $a_n > a_{n+1}$. وهكذا نجد أننا حصلنا على السلسلة المتناقصة

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

والتي لا تحقق الشرط (3) مما يناقض الفرض. وهذا يبين لنا أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من P تحوي عنصراً أصغرياً.

نأتي الآن لإثبات أن مجموعة الأعداد الطبيعية تحقق الشرط الأصغري، وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة 1-1-9.

يوجد في كل مجموعة جزئية وغير خالية من N عنصر أصغر.

البرهان.

لتكن A مجموعة جزئية وغير خالية من N . إذا كان $0 \in A$ أو $A = N$ فإن A تحوي عنصراً أصغرياً وهو الصفر. لنفرض أن $A \subset N$ وأن $0 \notin A$. ولناخذ المجموعة

$$S = \{x : x \in N, \quad x \leq a \quad \forall a \in A\}$$

فلنجد أن $o \in S$. كما أن $S \neq N$ لأنه إذا كانت $S = N$ فإن $A \subset S$. ليكن $b \in A$ عندئذ $b+1 \in S$ وحسب تعريف المجموعة S فإن $b+1 \leq b$ وهذا غير ممكن. وهذا يبين لنا أن $S \neq N$ وبالتالي يوجد $k \in S$ بحيث $k+1 \notin S$ ومنه $k \leq a$. وذلك أيضاً كان $a \in A$. لنبرهن على أن $k \in A$. لنفرض جذاً أن $k \notin A$ عندئذ أيضاً كان $a \in A$ فإن $k < a$. ليكن $a_0 \in A$ عندئذ $k < a_0$. لنفرض أن $m = a_0 - k$ فلنجد أن $a_0 = m + k$ وبفرض أن $t = m - 1$ يكون

$$a_0 = t + (k+1)$$

أي أن $k+1 \leq a_0$. وهذا يبين لنا أنه أيضاً كان $a \in A$ فإن $k+1 \leq a$ وبالتالي $k+1 \in S$ مما يناقض اختيار العنصر k بحيث $k+1 \notin S$. مما سبق نستنتج أن $k \in A$ و أن k عنصر أصغر في A .

من التمهيدية (٧-١-١) والمبرهنة (٩-١-١) نستنتج أن مجموعة الأعداد الطبيعية تحقق الشرط الأصغري. بينما مجموعة الأعداد الصحيحة Z لا تحقق الشرط الأصغري بالنسبة إلى علاقة الترتيب المألوفة المعرفة على الأعداد الصحيحة، لأنها لا تملك عنصراً أصغراً. ولكن إذا عرفنا على Z علاقة ترتيب جزئية جديدة بالشكل

$$o < 1 < 2 < 3 < \dots < -1 < -2 < -3 < \dots$$

فإن Z تصبح في هذه الحالة محققة للشرط الأصغري.

تعريف.

لنكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $a, b \in P$. نقول عن العنصرين a, b إنهما متقاربان إذا تحقق الشرط: إما $a \leq b$ أو $b \leq a$. ونقول عن المجموعة المرتبة جزئياً إنها مرتبة كلياً إذا كان كل عنصرين فيها متقاربين.

تمهيدية ١-١-١.

لنكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً. إن مفهومي العنصر الأصغر (الأكبر) والعنصر الأصغري (الأعظمي) يتطابقان.
البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ.

تعريف.

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P .

- نقول عن العنصر $a \in P$ أنه حداً أعلى للمجموعة A إذا حقق الشرط:

$$\forall x \in A \text{ فإن } a \geq x.$$

- نقول عن العنصر $a \in P$ أنه حداً أدنى للمجموعة A إذا حقق الشرط:

$$\forall y \in A \text{ فإن } y \geq a.$$

نأتي الآن إلى صياغة تمهيدية زورن والتي تعتبر واحدة من موضوعات نظرية المجموعات وهي تشكل أحد الأدوات الرياضية الفعالة عند التعامل مع المجموعات غير المنتهية.

تمهيدية زورن.

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. إذا كانت كل مجموعة جزئية من P وغير خالية ومرتبطة كلياً تملك حداً أعلى (أدنى) واحداً على الأقل علانئذ يوجد في P عنصراً أعظماً (أصغرياً) واحداً على الأقل.

إن تمهيدية زورن تكافئ نصاً آخر يسمى موضوعة الاختيار والتي تلخص على ما يلي:

موضوعة الاختيار.

إذا كانت A مجموعة ما غير خالية علانئذ يوجد تطبيق $f: S(A) - \Phi \rightarrow A$ يحقق $f(B) \in B$ وذلك أيأ كان $B \in S(A)$ و $B \neq \Phi$. حيث $S(A)$ هي مجموعة الأجزاء للمجموعة A .

بالعودة إلى تعريف الحدين الأعلى والأدنى لمجموعة نجد أنه إذا كانت A مجموعة جزئية وغير خالية من المجموعة المرتبة جزئياً P وكان $a \in P$ حداً أعلى للمجموعة A فإن أي عنصر آخر $b \in P$ يحقق $b \geq a$ يكون أيضاً حداً أعلى للمجموعة A . وهذا يبين لنا أن الحد الأعلى للمجموعة A في حال وجوده ليس وحيداً

وهذا الكلام ينطبق أيضاً على الحد الأدنى للمجموعة A . بمعنى آخر، إذا وجد للمجموعة A حداً أدنى في P فهو ليس وحيداً، لأجل هذا سوف ندخل المفهوم التالي:

تعريف.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P .

- نسمي مجموعة الحدود العليا للمجموعة A في P بالمخروط الأعلى للمجموعة A في P ونرمز له A^Δ .

- نسمي مجموعة الحدود الدنيا للمجموعة A في P بالمخروط الأدنى للمجموعة A في P ونرمز له A^∇ .

إن كلا من المخروطين الأعلى والأدنى يتمتعان بعدد من الخواص نورد بعضها منها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-١-١١.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً وكل من A, B مجموعة جزئية وغير خالية من P .

عندئذ:

$$١ - \text{ إذا كانت } A \subseteq B \text{ فإن } A^\Delta \subseteq B^\Delta \text{ وأن } B^\nabla \subseteq A^\nabla.$$

$$٢ - A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}.$$

$$٣ - A^\Delta = A^{\Delta\nabla\Delta}.$$

$$٤ - A^\nabla = A^{\nabla\Delta\nabla}.$$

$$٥ - (A \cup B)^\Delta = A^\Delta \cap B^\Delta.$$

$$٦ - (A \cup B)^\nabla = A^\nabla \cap B^\nabla.$$

البرهان.

١ - ليكن $a \in B^\Delta$ عندئذ يكون a حداً أعلى للمجموعة B أي أن $a \geq x$ وذلك أي

كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $a \geq x$ أي كان $x \in A$ أن a حداً أعلى

للمجموعة A وبالتالي $x \in A^\Delta$ ومنه $B^\Delta \subseteq A^\Delta$. ليكن $b \in B^\nabla$ عندئذ b هو حداً أدنى

للمجموعة B أي أن $b \leq x$ وذلك أيًا كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $b \leq x$ أيًا كان $x \in A$ وبالتالي b هو حد أدنى للمجموعة A ومنه $b \in A^\nabla$ أي أن $A^\nabla \subseteq B^\nabla$.

٢ - ليكن $x \in A$ عندئذ أيًا كان $a \in A^\Delta$ فإن $a \geq x$ ومنه فإن x هو حداً أدنى للمجموعة A^Δ ومنه $x \in A^{\Delta\nabla}$ أي أن $A \subseteq A^{\Delta\nabla}$. ليكن $y \in A$ عندئذ أيًا كان $b \in A^\nabla$ فإن $b \leq y$ أي أن y هو حداً أعلى للمجموعة A^∇ ومنه $y \in A^{\nabla\Delta}$ أي أن $A \subseteq A^{\nabla\Delta}$. مما سبق نجد أن $A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$.

٣ - لدينا حسب (٢) أن $A \subseteq A^{\Delta\nabla}$ وحسب (١) نجد أن $A^{\Delta\nabla\Delta} \subseteq A^\Delta$. من جهة أخرى، لنفرض أن $D = A^\Delta$ عندئذ حسب (٢) فإن $D \subseteq D^{\Delta\nabla} \cap D^{\nabla\Delta}$ ومنه $D \subseteq D^{\nabla\Delta}$ وبالتالي $A^\Delta \subseteq A^{\Delta\nabla\Delta}$. مما سبق نجد أن $A^\Delta = A^{\Delta\nabla\Delta}$.

٤ - يبرهن بشكل مشابه للحالة (٣).

٥ - بما أن $A, B \subseteq A \cup B$ فإنه حسب (١) نجد أن $(A \cup B)^\Delta \subseteq A^\Delta$ ، وأن $(A \cup B)^\Delta \subseteq B^\Delta$ ومنه $(A \cup B)^\Delta \subseteq A^\Delta \cap B^\Delta$. ليكن $a \in A^\Delta \cap B^\Delta$ عندئذ:

- $a \in A^\Delta$ أي أن $a \geq x$ وذلك أيًا كان $x \in A$.

- $a \in B^\Delta$ أي أن $a \geq x$ وذلك أيًا كان $x \in B$. ومنه $a \geq x$ أيًا كان $x \in A \cup B$ أي

أن $a \in (A \cup B)^\Delta$ وبالتالي $a \in (A \cap B)^\Delta$ مما سبق نجد أن $(A \cup B)^\Delta = A^\Delta \cap B^\Delta$.

٦ - يبرهن بشكل مشابه للحالة (٥).

تعريف.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P .

١ - نقول عن العنصر $a \in P$ أنه حد أعلى أصغري للمجموعة A في P إذا تحقق:

- a حداً أعلى للمجموعة A .

- من أجل أي حد أعلى آخر v للمجموعة A فإن $a \leq v$.

نرمز للحد الأعلى الأصغري للمجموعة A في P بالرمز $\sup_P A$.

٢ - نقول عن العنصر $b \in P$ أنه حد أدنى أعظمي للمجموعة A في P إذا تحقق:

- b حدا أدنى للمجموعة A .

- من أجل أي حد أدنى آخر u للمجموعة A فإن $b \geq u$.

نرمز للحد الأدنى الأعظمي للمجموعة A في P بالرمز $\inf_P A$.

مثال.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً و $a, b \in P$. إذا كان $a \leq b$ فإن $\sup\{a, b\} = b$ وإن $\inf\{a, b\} = a$.

إن المثال السابق يبين لنا أنه في المجموعة المرتبة جزئياً P فإن كل مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين متقاربين تملك حداً أعلى أصغرياً وحداً أدنى أعظمياً. وهذه النتيجة يمكن تعميمها على النحو التالي: إذا كانت P مجموعة مرتبة جزئياً فإن كل مجموعة جزئية من P ومرتبة كلياً تملك حداً أدنى أعظمياً وحداً أعلى أصغرياً. واحدة من خواص $\sup$ و $\inf$ نوردتها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١-١-١٢.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً و A, B مجموعة جزئية وغير خالية من P بحيث $A \subseteq B$. إذا وجد كل من $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$ فإن

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf B \leq \inf A$$

البرهان.

نفرض أن $a = \sup A$ وأن $b = \sup B$. بما أن $b \geq x$ أيما كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $b \geq x$ وذلك أيما كان $x \in A$ أي أن b حد أعلى للمجموعة A . وبما أن a هو أصغر الحدود العليا للمجموعة A نجد أن $a \leq b$.

لنفرض أن $a_0 = \inf A$ وأن $b_0 = \inf B$. بما أن $b_0 \leq x$ أيما كان $x \in B$ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $b_0 \leq x$ وذلك أيما كان $x \in A$ أي أن b_0 حد أدنى للمجموعة B . وبما أن a_0 هو أكبر الحدود الدنيا للمجموعة A نجد أن $a_0 \geq b_0$.

نأتي الآن لدراسة خاصة أخرى من خواص $\sup$ و $\inf$ وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-١-١٣.

لتكن $\{A_\alpha\}$ أسرة من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة المرتبة جزئياً P . إذا كان $A = \cup A_\alpha$ وإذا وجد كل من $\sup A, \sup A_\alpha, \inf A, \inf A_\alpha$ فإن

$$\sup A = \sup\{\sup A_\alpha\}, \quad \inf A = \inf\{\inf A_\alpha\}$$

البرهان.

لنفرض أن $a = \sup A$ وأن $a_\alpha = \sup A_\alpha$. بما أن $a \geq x_\alpha$ أيًا كان $x_\alpha \in A_\alpha$ فإن $a \geq a_\alpha$ وذلك أيًا كان α . ليكن $v \geq a_\alpha$ لأجل كل α عندئذ $v \geq x_\alpha$ أيًا كان $x_\alpha \in A_\alpha$ ومنه $v \geq x$ لأجل كل $x \in A$. مما سبق نجد أن $v \geq a$ وحسب التعريف نجد أن

$$\sup A = a = \sup\{a_\alpha\} = \sup\{\sup A_\alpha\}$$

بشكل مشابه نبرهن أن $\inf A = \inf\{\inf A_\alpha\}$.

علاقة أخرى تصف لنا مدى الارتباط بين $\sup$ و $\inf$ والمخروط الأعلى لمجموعة لدرسها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-١-١٤.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P . إذا وجد $\sup A$ أو $\inf A$ فإن $\sup A = \inf A^\Delta$ و $\inf A = \sup A^\Delta$.

البرهان.

لنفرض أن $\sup A$ موجود وأن $a = \sup A$ ، عندئذ $a \geq x$ أيًا كان $x \in A$. بالإضافة لذلك فإن $a \leq y$ أيًا كان $y \in A^\Delta$. من جهة أخرى، ليكن $v \leq y$ لأجل كل $y \in A^\Delta$ عندئذ بما أن $a \in A^\Delta$ فإن $v \leq a$. مما سبق نجد أن $a = \inf A^\Delta$. إذا وجد $\inf A$ وبفرض أن $b = \inf A$ عندئذ أيًا كان $x \in A$ فإن $x \leq b$ أيًا كان $y \in A^\Delta$ ومنه $x \leq b$ لأجل كل $x \in A$. ليكن $u \geq x$ لأجل كل $x \in A$ عندئذ $u \in A^\Delta$ ومنه $u \geq b$. مما سبق نجد أن $b = \sup A$.

مبرهنة ١-١-١٥.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P . إذا وجد
 $\inf A$ أو $\sup A^\vee$ فإن $\sup A^\vee = \inf A$.
 البرهان.

يبرهن بطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة (١-١-١٤) لذلك نتركه كتمرين للقارئ. ◊

٢-١. المجموعات المرتبة جيداً.

تعريف.

نقول عن المجموعة غير الخالية أنها مرتبة جيداً إذا كانت مرتبة كلياً وتحقق الشرط
 الأصغري.

ينتج من التعريف أن كل مجموعة مرتبة جيداً A تحوي عنصراً أصغراً لرمز له 0
 وبما أن المجموعة A مرتبة كلياً فإن العنصر الذي يلي 0 لرمز له 1 وهكذا.
 تعريف.

لتكن A مجموعة مرتبة جيداً و $a \in A$. نسمي المجموعة

$$S(a) = \{x : x \in A; x < a\}$$

قطاعاً ابتدائياً للعنصر a في A . ينتج من التعريف أن $S(0) = \emptyset$.

تعريف.

لتكن A مجموعة مرتبة جيداً و $a \in A$. نقول عن العنصر a إنه عنصر نهاية إذا
 كان القطع الابتدائي $S(a)$ لا يحوي عنصراً أكبر.

خواص القطع الابتدائي $S(a)$ عندما يكون العنصر a عنصر نهاية لدرسها من
 خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٢-١.

لتكن A مجموعة مرتبة جيداً و $a \in A$ عنصر نهاية. عندئذ

$$S(a) = \bigcup_{b < a} S(b)$$

البرهان.

ليكن $b \in \bigcup_{b < a} S(b)$ عندها يوجد $b_0 < a$ يحقق $b \in S(b_0)$ ومنه $b < b_0 < a$ أي $b < a$ وبالتالي $b \in S(a)$ أي أن $\bigcup_{b < a} S(b) \subseteq S(a)$. ليكن $x \in S(a)$ ولنفرض أن $x+1$ هو العنصر الذي يلي العنصر x . بما أنه لا توجد عناصر بين $x, x+1$ فإن $x+1 \leq a$ وبما أن العنصر a هو عنصر نهاية فإن $x+1 \neq a$ أي أن $x+1 < a$ وهكذا نجد أن $x \in S(x+1) \subseteq \bigcup_{b < a} S(b)$ مما سبق نجد أن $S(a) = \bigcup_{b < a} S(b)$.

لندرس الآن التكافؤ بين تمهيدية زورن وموضوع الاختيار والنصوص الأخرى التي تكافئ هذين النصين وذلك من خلال المبرهنة التالية:
مبرهنة ١-٢-٢.

القضايا التالية متكافئة:

١ - موضوع الاختيار.

من أجل أي مجموعة غير خالية A يوجد تطبيق $\varphi: S(A) \setminus \emptyset \rightarrow A$ يحقق $\varphi(B) \in B$ وذلك من أجل أي مجموعة جزئية وغير خالية من A .
٢ - مبرهنة زرمelo.

يمكن تعريف علاقة ترتيب على أي مجموعة غير خالية تجعل منها مجموعة مرتبة جيداً.

٣ - مبرهنة هاوسدورف.

أي مجموعة جزئية مرتبة كلياً من مجموعة مرتبة جزئياً تكون محتواة في مجموعة جزئية مرتبة كلياً أعظمية.

٤ - تمهيدية زورن.

لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً. إذا كان المخروط الأعلى لأي مجموعة جزئية من P ومرتبته كلياً ليس خالياً فإن المجموعة P تحوي عناصر أعظمية.

• - لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً. إذا كان $\sup B$ موجود لأجل أي مجموعة جزئية B من P ومرتبة كلياً فإن المجموعة P تحوي عناصر أعظمية.
البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (5). لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً ولنفرض أن $\sup B$ موجود لأجل أي مجموعة جزئية B من P ومرتبة كلياً. وليكن $\varphi: S(P) \setminus \Phi \rightarrow P$ التطبيق الموجود بحسب موضوع الاختيار (الفرض). ولنفرض جـداً أن المجموعة P لا تحوي عناصر أعظمية عندئذ أياً كان $x \in P$ فإن المجموعة $\{x^\Delta \setminus x\}$ تكون غير خالية وذلك لأن العنصر x ليس أعظمية. للعرف التطبيق $f: P \rightarrow P$ بالشكل $f(x) = \varphi(x^\Delta \setminus x)$ وذلك أياً كان $x \in P$. لنختار من المجموعة P العنصر a_0 . لأجل إتمام البرهان لابد لنا من بعض التعاريف والتمهيدات الضرورية والتي سنوردها الآن:
تعريف.

نقول عن المجموعة الجزئية H من P إنها زورنية إذا كان:

$$1 - a_0 \in H$$

$$2 - \text{أياً كان } x \in H \text{ فإن } f(x) \in H$$

$$3 - \text{من أجل أي مجموعة جزئية ومرتبة كلياً } C \text{ من } H \text{ فإن } \sup C \in H.$$

تمهيدية ١.

القضايا التالية صحيحة.

$$1 - \text{النقاط } H_0 \text{ لجميع المجموعات الزورنية من } P \text{ هو مجموعة زورنية في } P.$$

$$2 - a_0^\Delta \text{ هي مجموعة زورنية.}$$

$$3 - H_0 \subseteq a_0^\Delta.$$

البرهان.

١ - لنفرض أن H_0 هي تقاطع جميع المجموعات الزورنية من P . عندئذ $a_0 \in H_0$. ليكن $x \in H_0$ عندئذ x ينتمي إلى أية مجموعة زورنية H من P وبالتالي فإن $f(x)$ ينتمي لأية مجموعة زورنية H من P أي أن $f(x) \in H_0$. لتكن C

مجموعة جزئية من H_0 ومرتبعة كلياً عندئذ فإن C محتواة في أية مجموعة زورنية H من P وحسب الفرض فإن $\sup C$ ينتمي إلى أية مجموعة زورنية H من P أي أن $\sup C \in H_0$.

٢- بما أن $a_0 \geq a_0$ فإن $a_0 \in a_0^\Delta$. ليكن $x \in a_0^\Delta$ عندئذ فإن

$$f(x) = \varphi(x^\Delta \setminus x) \in x^\Delta \setminus x$$

أي أن x هو حد أعلى للعنصر a_0 وبالتالي $f(x) \in a_0^\Delta$. لتكن $C \subseteq a_0^\Delta$ مجموعة مرتبعة كلياً، عندئذ حسب الفرض فإن $\sup C$ موجود. لنفرض أن $d = \sup C$ عندئذ $d \geq c$ أي أن $c \in C$ وبما أن $C \subseteq a_0^\Delta$ فإن c حد أعلى للعنصر a_0 أي أن $\sup C \in a_0^\Delta$. مما سبق نجد أن المجموعة a_0^Δ زورنية.

٣- من (١) و (٢) ينتج أن $H_0 \subseteq a_0^\Delta$.

تعريف.

نقول عن العنصر $a \in H_0$ إنه عنصر مميز إذا حقق الشرط: من أجل أي عنصر

$$z \in H_0 \text{ يحقق } z < a \text{ فإن } f(z) \leq a$$

تسمى a عنصراً مميزاً.

ليكن $a \in H_0$ عنصراً مميزاً عندئذ فإن المجموعة

$$B(a) = \{z : z \in H_0, z \leq a \vee f(a) \leq z\}$$

هي مجموعة زورنية.

البرهان.

إن $a_0 \in H_0$ لأن $a_0 \in H_0 \subseteq a_0^\Delta$ وبالتالي $a_0 \leq a$. ليكن $x \in B(a)$ عندئذ إما

$$x < a \text{ أو } x = a \text{ أو } f(a) \leq x$$

- في حالة $x < a$ وبما أن العنصر a مميز فإنه حسب التعريف يكون $f(x) \leq a$

وبالتالي حسب تعريف المجموعة $B(a)$ فإن $f(x) \in B(a)$.

- في حالة $x = a$ فإن $f(x) = f(a)$ ومنه $f(a) \leq f(x)$ وحسب تعريف المجموعة

$$B(a) \text{ نجد أن } f(x) \in B(a)$$

- في حالة $x \leq f(a)$. بما أن

$$f(x) = \varphi(x^\Delta \setminus x) \in x^\Delta \setminus x$$

فإن $x > f(x)$ ومنه $f(a) \leq x < f(x)$ وحسب تعريف المجموعة $B(a)$ ينتج أن $f(x) \in B(a)$.

لتكن $C \subseteq B(a)$ مجموعة مرتبة كلياً ولنبرهن على أن $\sup C \in B(a)$. بما أن $C \subseteq B(a)$ فإن $C \subseteq H_0$ وبما أن المجموعة H_0 زورنية فإن $\sup C \in H_0$. لأجل المجموعة C لميز حالتين:

- $C \subseteq a^\nabla$ عنده $\sup C \in a^\nabla$ ومنه $\sup C \in a^\nabla \cap H_0$ أي أن $\sup C \leq a$ وبالتالي $\sup C \in B(a)$.

- $C \not\subseteq a^\nabla$ ومنه يوجد $c \in C$ بحيث $c \not\leq a$ وبما أن $c \in B(a)$ فإن $f(a) \leq c$ وبالتالي $f(a) \leq \sup C$ ومنه $\sup C \in B(a)$. مما سبق نجد أن المجموعة $B(a)$ زورنية.

تمهيدية ٣.

لنفرض أن A هي مجموعة كل العناصر المميزة في المجموعة H_0 . إن المجموعة A هي مجموعة زورنية.
البرهان.

ليكن $a \in A$ ولنبرهن أن $f(a) \in A$ أي لنبرهن أن العنصر $f(a)$ هو عنصر مميز في H_0 . ليكن $z \in H_0$ وبحق $z < f(a)$ ولنبرهن على أن $f(z) \leq f(a)$. بما أن H_0 هي تقاطع جميع المجموعات الزورنية في P وأن $B(a)$ مجموعة زورنية وحسب التمهيدية (٢) نجد أن $z \in H_0 \subseteq B(a)$ ومنه إما $f(a) \leq z$ أو $z \leq a$. وبما أن المتراجحة $f(a) \leq z$ غير محققة لأن $z < f(a)$ نجد أن $z \leq a$. إذا كان $z = a$ عنده $f(z) = f(a)$. إذا كان $z < a$ وبما أن العنصر a هو عنصر مميز فإن $f(z) < a$. كذلك بما أن

$$f(a) = \varphi(a^\Delta \setminus a) \in a^\Delta \setminus a$$

نجد أن $f(a) > a$ ومنه يكون $f(z) \leq a < f(a)$. مما سبق نجد أن $f(z) \leq f(a)$ وبالتالي العنصر $f(a)$ هو عنصر مميز أي أن $f(a) \in A$.

لتكن $C \subseteq A$ مجموعة مرتبة كلياً وأن $w = \sup C$ ولنبرهن على أن $w \in A$. أي لنبرهن على أن العنصر w هو عنصر مميز. ليكن $z \in H_0$ ويحقق $z < w$ ولنبرهن على أن $f(z) < w$. بما أن $z < w$ علئذ يوجد $c \in C$ بحيث $z < c$ لأنه إذا كان $z \nless c$ لأجل جميع العناصر $c \in C$ ولكون العنصر c هو عنصر مميز $\forall c \in C$ وأن المجموعة $B(c)$ هي مجموعة زورنية وذلك حسب التمهيدية (٢) فإن $z \in H_0 \subseteq B(c)$ ومنه إما $z = c$ أو $z < f(c) \leq c$ وذلك أيما كان $c \in C$ ومنه $z \geq w$ وهذا يناقض كون $z < w$. مما سبق نجد أنه يوجد $c \in C$ بحيث $z < c$ وبما أن العنصر c هو عنصر مميز فإن $f(z) \leq c < w$ وهذا يبين لنا أن العنصر w هو عنصر مميز أي أن $w \in A$.

تمهيدية ٤.

المجموعة H_0 مرتبة كلياً.

لنبرهان.

وجدنا حسب التمهيدية (٣) أن المجموعة A هي مجموعة زورنية في P وحسب التمهيدية (١) فإن $H_0 \subseteq A$ أي أن جميع عناصر المجموعة H_0 هي عناصر مميزة. ليكن $a, b \in H_0$ وحسب التمهيدية (٢) بما أن العنصر a هو عنصر مميز فإن المجموعة $B(a)$ هي مجموعة زورنية وبالتالي $b \in H_0 \subseteq B(a)$ ومنه حسب تعريف المجموعة $B(a)$ إما $b \leq a$ أو $a < f(a) < b$ وهذا يبين لنا أن المجموعة H_0 مرتبة كلياً.

لنعد إلى إثبات الاقتضاء (١) $\Leftrightarrow$ (٥).

لنأخذ المجموعة H_0 المعرفة في التمهيدية (١) وحسب الفرض فإن $\sup H_0$ موجود. لنفرض أن $w = \sup H_0$ وحسب التمهيدية (٤) فإن المجموعة H_0 مرتبة كلياً أي أن $w \in H_0$ وبما أن المجموعة H_0 زورنية وذلك حسب التمهيدية (١) فإن $f(w) \in H_0$.

وهذا يبين لنا أن $w < f(w) \leq w$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن المجموعة P تحتوي عناصر أعظمية.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). لتكن P مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن C مجموعة جزئية من P ومرتبعة كلياً. إذا كان $P = C$ يتم المطلوب. لنفرض أن $P \neq C$ ولنأخذ المجموعة $L = P \setminus C$ وحسب الفرض فإنه بالإمكان تعريف علاقة ترتيب $\leq_0$ على المجموعة L بحيث تجعل المجموعة L مرتبة جيداً. لنعرف على المجموعة L الخاصة $\mathcal{S}$ إذا حققت الشرط: لأجل جميع العناصر $\beta \in L$ التي من أجلها $\alpha \leq_0 \beta$ توجد مجموعات مرتبة كلياً $L \subseteq C_\beta$ تحقق:

$$C \subseteq C_\beta - 1.$$

$$٢ - \text{ إذا كان } \alpha \leq_0 \beta \leq_0 \gamma \text{ فإن } C_\gamma \subseteq C_\beta.$$

$$٣ - \text{ إذا كان } \beta \in C_\beta \text{ فإن } \beta \text{ غير متقارن مع أي عنصر } \eta \in C_\gamma \text{ وذلك لأجل جميع العناصر } \beta \leq_0 \gamma.$$

لأجل العنصر الأصغر $0 \in L$ لنفرض أنه:

$$- \text{ إذا كان } 0 \text{ غير متقارن مع أي عنصر من عناصر } C \text{ فإن } C_0 = C.$$

$$- \text{ في الحالة المعاكسة فإن } C_0 = C \cup 0.$$

فلنجد أن 0 يحقق الخاصة (٤).

ليكن $\alpha \in L$ ولنفرض أن جميع العناصر $x \in L$ التي من أجلها $x < \alpha$ تحقق الخاصة $\mathcal{S}$ ولنبرهن على أن العنصر α يحقق الخاصة $\mathcal{S}$.

بما أنه أياً كان $\alpha \leq_0 \beta \leq_0 \gamma$ فإن $C_\gamma \subseteq C_\beta$ وبالتالي فإن المجموعة $\bar{C} = \bigcup_{\beta < \gamma} C_\beta$ هي

مجموعة مرتبة كلياً. لنفرض أنه:

$$- \text{ إذا كان العنصر } \alpha \text{ غير متقارن مع أي عنصر من عناصر } \bar{C} \text{ فإن } \bar{C} = C.$$

$$- \text{ في الحالة المعاكسة } \bar{C} = \bar{C} \cup \alpha.$$

لنجد أن العنصر α يحقق الخاصة $\mathcal{S}$. وحسب شرط الاستقراء نجد أن المجموعة L تحقق شرط الاستقراء، أي أن كل عنصر من L يحقق الخاصة $\mathcal{S}$. بمعنى آخر، لأجل

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

سلسلة متزايدة من عناصر المجموعة C . عندئذ

$$x_1 \geq_{A_1} x_2 \geq_{A_2} x_3 \geq_{A_3} \dots$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \dots \in \Theta$. لنفرض أنه تم الإثبات على أن $x_k \geq_{A_k} x_{k+1}$ وذلك لأجل كل دليل $k < m$. عندئذ $x_m \in A_1$ وأن $x_m \geq_{A_m} x_{m+1}$.

إذا كان $A_1 \leq' A_m$ عندئذ من الواضح أن $x_m \geq_{A_1} x_{m+1}$.

لنفرض أن $A_1 \leq' A_m$. إذا كان $x_{m+1} \in A_1$ عندئذ $x_{m+1} \geq_{A_m} x_m$ وهذا غير ممكن. وإذا كان $x_{m+1} \in A_1$ وأن $x_{m+1} >_{A_1} x_m$ عندئذ يكون $x_{m+1} >_{A_m} x_m$ وهذا أيضا غير ممكن. أي أن $x_{m+1} >_{A_1} x_m$ مما يبق نجد أنه تم الحصول على السلسلة المتزايدة

$$x_1 \geq_{A_1} x_2 \geq_{A_2} x_3 \geq_{A_3} \dots$$

وبما أن المجموعة A_1 تحقق الشرط الأصغري وحسب المبرهنة (١-١-٨) فإن هذه السلسلة تنقطع، بمعنى أنه يوجد دليل n من أجله

$$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة C مرتبة جيدا أي أن $C \in P(R)$.

ليكن $A \in \mathfrak{I}$ عندئذ $A \subseteq C$ وأنه أيا كان $x, y \in A$ بحيث $x \leq_A y$ ينتج أن $x \leq y$. إذا كان $x \in A, y \in C \setminus A$ عندئذ يوجد $B \in \mathfrak{I}$ بحيث $y \in B \setminus A$. وبما أن $A \leq' B$ نجد أن $x \leq_B y$ وبالتالي $x < y$ وهكذا نجد أن $A \leq' C$ وذلك أيا كان $A \in \mathfrak{I}$ أي أن $C \in \mathfrak{I}^h$. ليكن $D \in \mathfrak{I}^h$ عندئذ $A \subseteq D$ وذلك أيا كان $A \in \mathfrak{I}$ وهذا يبين لنا أن $C \subseteq D$. ليكن $x, y \in C$ بحيث $x \leq_C y$ عندئذ يوجد $A \in \mathfrak{I}$ يحقق $x \leq_A y$ ومنه $x \leq_D y$. إذا كان $c \in C$ و $d \in D \setminus C$ عندئذ يوجد $A \in \mathfrak{I}$ يحقق أن $c \in A$ وبالتالي $c <_D d$ وهكذا نجد أن $C \leq' D$ وبالتالي $C = \sup \mathfrak{I}$. وهكذا نجد أنه في المجموعة المرتبة جزئيا $P(R)$ كل مجموعة جزئية B من $P(R)$ ومرتبة كلياً يوجد $\sup B$ وحسب الفرض (٥) فإن المجموعة $P(R)$ تحوي عنصراً أعظماً وليكن Q . إذا كان $Q = R$ يتم المطلوب.

لنفرض أن $Q \neq R$ ولنأخذ عنصر $q \in Q$ ولنضعه بعد جميع عناصر المجموعة Q فنحصل على مجموعة جديدة $\bar{Q}$ مرتبة جيداً وأن $\bar{Q} \in P(R)$ وبالتالي يكون $Q < \bar{Q}$ مما يناقض كون Q عنصراً أعظماً في $P(R)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنكن $\mathcal{I}$ مجموعة غير خالية وحسب الفرض (2) يمكن اعتبار المجموعة $\mathcal{I}$ مرتبة جيداً. لنكن A مجموعة جزئية من $\mathcal{I}$ وغير خالية، وبما أن المجموعة $\mathcal{I}$ تحقق الشرط الأصغري فإن المجموعة A تحوي عنصراً أصغر وليسكن $\varphi(A)$. لنسوف العلاقة $\varphi: S(\mathcal{I}) \setminus \emptyset \rightarrow \mathcal{I}$ فنجد أنه أياً كانت $A \subseteq \mathcal{I}$ فإن $\emptyset \neq A$ وبما أن $\varphi(A) \in A$ والعنصر الأصغر وحيد فإن العلاقة φ هي تطبيق.

هدفنا التالي هو مقارنة المجموعات المرتبة جيداً، ولأجل هذا لا بد لنا من بعض المفاهيم والنتائج الجديدة وأول هذه المفاهيم هو التعريف التالي:

تعريف.

لنكن A, B مجموعات مرتبة جزئياً. نقول عن A, B إنهما متماثلتان إذا وجد تطبيق متباين وغامر (تقابل) من إحدى المجموعتين إلى الأخرى وليكن $f: A \rightarrow B$ يحقق أياً كان $x, y \in A$ فإن $x, y \in A$ فإن $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \leq y$ ونعبر عن ذلك $A \approx B$.

تمهيدية ١-٢-٣.

لنكن Q مجموعة مرتبة جيداً و $\odot: Q \rightarrow Q$ تماثل. علئذ أياً كان $x \in Q$ فإن

$$\odot(x) \geq x$$

البرهان.

لنفرض أنه يوجد $x \in Q$ يحقق $\odot(x) < x$ ولنأخذ المجموعة

$$S = \{s : s \in Q; \odot(s) < s\}$$

فنجدها أن المجموعة S غير خالية لأن $x \in S$. وبما أن المجموعة Q مرتبة جيداً فهي تحقق الشرط الأصغري وبالتالي فإن المجموعة S تحوي عنصراً أصغر وليكن a . بما أن $a \in S$ فإن $\odot(a) < a$. وبما أن a عنصر أصغر في S نجد أن $\odot(a) \notin S$ وحسب تعريف المجموعة S يكون $\odot(\odot(a)) \geq \odot(a)$.

من جهة أخرى بما أن $\ominus(a) < a$ فإن

$$\ominus(\ominus(a)) \leq \ominus(a)$$

ومنه نجد أن

$$\ominus(\ominus(a)) \leq \ominus(a) \leq \ominus(\ominus(a))$$

أي أن $\ominus(\ominus(a)) = \ominus(a)$ ولكون $\ominus$ متبايناً نجد أن $\ominus(a) = a$ وهذا يناقض كون $\ominus(a) < a$. مما سبق نجد أن المجموعة $S = \emptyset$ وبالتالي يكون $\ominus(x) \geq x$ وذلك أياً كان $x \in Q$.

بالاعتماد على التمهيدية السابقة لحصل على الحقيقة الهامة التالية:

تمهيدية ١-٢-٤.

لتكن Q, Q' مجموعتين مرتبتين جيداً و $f: Q \rightarrow Q'$ تماثل. عندئذ أياً كان $a \in Q$ فإن

$$f(S(a)) = S(f(a))$$

البرهان.

ليكن $x \in f(S(a))$ عندئذ يوجد $y \in S(a)$ بحيث $x = f(y)$ وبما أن $y < a$ فإن $x = f(y) < f(a)$ وبالتالي $x \in S(f(a))$. أي أن $f(S(a)) \subseteq S(f(a))$.
ليكن $x' \in S(f(a))$ عندئذ $x' \in Q'$ وبالتالي يوجد $y' \in Q$ بحيث $x' = f(y')$ ومنه $x' = f(y') < f(a)$ أي أن $y' < a$ ومنه $y' \in S(a)$ وهكذا فإن $x' = f(y') \in f(S(a))$.

أي أن $f(S(a)) \subseteq S(f(a))$ وهكذا نجد أن $f(S(a)) = S(f(a))$.

خ. أخرى تتعلق بالمجموعات المرتبة جيداً نوردتها من خلال التمهيدية

التالية:

تمهيدية ١-٢-٥.

أي مجموعة مرتبة جيداً لا يمكن أن تماثل أي قطاع ابتدائي منها.

البرهان.

لتكن Q مجموعة مرتبة جيداً ولنفرض أنه يوجد $a \in Q$ بحيث إن Q تماثل القطع
الابتدائي $S(a)$. عندئذ يوجد تماثل $\Theta: Q \rightarrow S(a)$ وبما أن $a \in Q$ فإن
 $\Theta(a) \in S(a)$ أي أن $\Theta(a) < a$ وهذا يناقض التمهيدية (١-٢-٣) ومنه فإن
المجموعة Q لا يمكن أن تماثل أي قطاع ابتدائي منها. هـ
حقيقة أخرى تتعلق بالمجموعات المرتبة جيداً ضرورية لنا في دراستنا لوردها من
خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١-٢-٦.

لتكن Q, Q' مجموعتين مرتبتين جيداً و $a \in Q, a', b' \in Q'$. إذا وجد تماثل
 $\varphi: Q \rightarrow S(b')$ وتماثل آخر $\psi: S(a) \rightarrow S(a')$ عندئذ :

$$١ - a' < b' -$$

$$٢ - \text{أيا كان } x \in S(a) \text{ فإن } \varphi(x) = \psi(x).$$

البرهان.

١ - بما أن المجموعة Q' مرتبة جيداً و $a', b' \in Q'$ عندئذ إما $a' < b'$ أو
 $a' = b'$ أو $a' > b'$. لنفرض أن $a' \geq b'$ عندئذ $S(b') \subseteq S(a')$ وذلك لأنه أيا كان
 $y \in S(b')$ فإن $y < b' \leq a'$ ومنه $y \in S(a')$.
من جهة أخرى بما أن ψ تماثل فإن $\psi^{-1}: S(a') \rightarrow S(a)$ أيضاً تماثل وأن
كذلك $\psi^{-1}(S(a')) = S(a)$

$$\varphi(\psi^{-1}(S(a'))) = \varphi(S(a)) \subseteq S(b')$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة المرتبة جيداً $S(b')$ تماثل قطاع ابتدائي منها مما يناقض
التمهيدية (١-٢-٥) ومنه $a' < b'$.

٢ - لنفرض أنه يوجد عنصر $x \in S(a)$ بحيث $\varphi(x) \neq \psi(x)$ ولنأخذ المجموعة

$$\mathfrak{I} = \{x : x \in S(a); \varphi(x) \neq \psi(x)\}$$

فلنجد أن المجموعة $\mathfrak{I}$ غير خالية ولكون المجموعة Q مرتبة جيداً فإن المجموعة $\mathfrak{I}$
تحتوي عنصراً أصغراً وليكن b عندئذ $b \in S(a)$ وأن $\varphi(b) \neq \psi(b)$. وحسب (١) بما

أن $a' < b'$ فإن $S(b') \subseteq S(a')$ وأن $S(a') \subseteq S(b')$ وبالتالي يوجد $c' \in S(b')$ يحقق $\psi(b) = c'$ وبما أن φ غامر يوجد $c \in Q$ بحيث $\varphi(c) = c'$ وهكذا نجد أن $\psi(b) = \varphi(c)$ كما أن $b < c$ وبما أن $b, c \in Q$ عندئذ إما $b < c$ أو $b \geq c$. من جهة أخرى، بما أن $\psi(b) = \varphi(c)$ نجد أن $b \neq c$.

لنفرض أن $b > c$ عندئذ $c < b < a$ ومنه $b, c \in S(a)$ وبما أن العنصر b هو عنصر أصغر في المجموعة S وأن $c < b$ فإن $c \in S$ أي أن $\psi(c) = \varphi(c)$ ومنه

$$\psi(b) = \varphi(c) = \psi(c)$$

ولكون ψ تماثل ينتج أن $b = c$ وهذا غير ممكن كما أوضحنا سابقاً. مما سبق نجد أن

$$b < c \text{ ومنه } \varphi(S(c)) = S(\varphi(c)) \text{ وبما أن } \psi(b) = \varphi(c) \text{ نجد أن}$$

$$\varphi(S(c)) = S(\varphi(c)) = S(\psi(b))$$

أي أن

$$\psi^{-1} \circ \varphi(S(c)) = \psi^{-1}(S(\varphi(c))) = \psi^{-1}(S(\psi(b))) = S(b)$$

وهذا يبين لنا أن

$$\psi^{-1} \circ \varphi : S(c) \rightarrow S(b)$$

تماثل أي أن المجموعة المرتبة جيداً $S(c)$ تماثل قطاع ابتدائي منها هو $S(b)$ وهذا يناقض التمهيدية (١-٢-٥). مما سبق نجد أن $\psi(x) = \varphi(x)$ وذلك أياً كان $x \in S(a)$.

نأتي الآن إلى دراسة مبرهنة المقارنة الخاصة بالمجموعات المرتبة جيداً، وذلك من خلال ... هة التالية:

مبرهنة ٧-٢. (مبرهنة المقارنة).

لنكن P, P' مجموعات مرتبة جيداً. عندئذ واحدة فقط من القضايا التالية تكون محققة:

١ - المجموعة P تماثل P' .

٢ - المجموعة P تماثل قطاع ابتدائي من P' .

٣ - المجموعة P' تماثل قطاع ابتدائي من P .

البرهان.

لنشكل المجموعة $\bar{P}$ وذلك بإضافة عنصر Ω إلى المجموعة P يقع بعد جميع عناصر المجموعة P . ولنشكل المجموعة $\bar{P}'$ بإضافة عنصر Ω' إلى المجموعة P' يقع بعد جميع عناصر المجموعة P' . فلحصل بذلك على مجموعتين مرتبتين جيداً وهي $\bar{P}$ و $\bar{P}'$. من الواضح أن $P = S(\Omega)$ وأن $P' = S(\Omega')$. لنأخذ المجموعة:

$$S = \{\sigma : \sigma \in \bar{P}; \quad S(\sigma) \neq S(\sigma') \quad \forall \sigma' \in \bar{P}'\}$$

إذا كان $\Omega \notin S$ نجد أنه يوجد $\Theta \in \bar{P}'$ بحيث $\Theta \in S(\Omega) \approx S(\Theta)$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $\Omega = \Theta$ نجد أن

$$P = S(\Omega) \approx S(\Omega') = P'$$

وهنا تتحقق القضية الأولى من المبرهنة.

- الحالة الثانية. إذا كان $\Omega \neq \Theta$ نجد أن

$$P = S(\Omega) \approx S(\Theta)$$

وهنا تتحقق القضية الثانية من المبرهنة.

لنفرض أن $\Omega \in S$. بما أن المجموعة $\bar{P}$ مرتبة جيداً فهي تحقق الشرط الأصغري وبالتالي فإن المجموعة S تحوي عنصراً أصغر وليكن α . إن العنصر α ليس عنصراً في $\bar{P}$ (علل ذلك). إذا وجد $\alpha - 1$ العنصر الذي يسبق α عندئذ $\alpha - 1 \in S$ وبالتالي يوجد تماثل

$$\varphi : S(\alpha - 1) \rightarrow \beta'$$

حيث $\beta' \in \bar{P}'$ ، وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $\beta' = \Omega'$ فإنه يتحقق للقضية الثالثة من المبرهنة.

- الحالة الثانية. $\beta' \neq \Omega'$ عندئذ يوجد $\beta' + 1$ العنصر الذي يلي β' (لأن المجموعة $\bar{P}'$ مرتبة جيداً).

لنعرف العلاقة $\bar{\varphi} : S(\alpha) \rightarrow S(\beta' + 1)$ بالشكل التالي: أيا كان $\gamma \in S(\alpha)$ فإن

$$\varphi_\beta : S(\beta) \rightarrow S(\beta') \text{ و } \varphi_\gamma : S(\gamma) \rightarrow S(\gamma')$$

حيث $\gamma', \beta' \in \overline{P'}$ وحسب التمهيدية (٦-٢-١) فإن $\gamma' < \beta'$ وأن $\varphi_\gamma(\xi) = \varphi_\beta(\xi)$ وذلك إما كان $\xi \in S(\gamma)$ ومنه

$$\varphi_\beta(\xi_2) = \varphi(\xi_2) = \varphi(\xi_1) = \varphi_\gamma(\xi_1) = \varphi_\beta(\xi_1)$$

وبما أن φ_β تماثل نجد أن $\xi_1 = \xi_2$ أي أن التطبيق φ متباين. كما أن φ عامر، لأنه إذا كان $\xi \in S(\alpha')$ عنده $\alpha' < \xi$ أي أن $\xi \notin S'$ وبالتالي $S(\xi) \neq S(\xi')$ وذلك إما كان $\xi \in S$. وهذا يبين لنا أن $S(\xi) \neq S(\xi')$ وذلك إما كان $\alpha < \xi$ وبما أن $S(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} S(\beta)$ فإنه يوجد $\beta < \alpha$ بحيث $\xi < \beta$ أي يوجد تماثل

$\varphi_\beta : S(\beta) \rightarrow S(\beta')$ حيث $\beta \in \overline{P'}$ وأن $\xi' = \varphi_\beta(\xi) = \varphi(\xi)$ مما سبق نجد أن φ تقابل بين $S(\alpha)$ و $S(\alpha')$ ويحقق

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in S(\alpha); \quad \xi_1 = \xi_2 \Leftrightarrow \varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2)$$

(تأكد من ذلك). أي أن التطبيق $\varphi : S(\alpha) \rightarrow S(\alpha')$ تماثل وهذا يناقض كون العنصر $\alpha \in S$ مما سبق نجد أنه قد تم البرهان على أن واحدة فقط من القضايا (١)-(٣) تكون محققة. وحسب التمهيدية (٦-٢-١) لا يمكن أن تتحقق القضيتان (١) و (٢) معا أو (١) و (٣) معا. كما أن القضيتين (٢) و (٣) لا تتحققان معا لأنه في الحالة العاكسة نجد أن المجموعة P تماثل قطاع ابتدائي منها مما يناقض التمهيدية (١-٢-٥). هـ

٣-١. قدرة مجموعة و المجموعات متساوية القدرة.

إن مفهوم المقارنة بين المجموعات يلعب دوراً هاماً في الرياضيات بشكل عام وفي الجبر المجرد بشكل خاص ولا سيما عند التعامل مع المجموعات غير المنتهية. وتعد علاقة الاحتواء بين المجموعات أبسط المعايير للمقارنة بين المجموعات من حيث طبيعة العناصر. فإذا كانت A, B مجموعتين غير خاليتين فإننا نقول أن $A \subset B$ عندما فقط عندما يكون كل عنصر من A هو عنصر من B .

المعيار الآخر للمقارنة بين المجموعات هو علاقة التساوي بين المجموعات وهذا المعيار في الحقيقة ينتج عن المعيار الأول، وتكون المجموعتان A, B متساويتين عندما وفقط عندما $A \subset B$ و $B \subset A$. أما إذا كانت $A \not\subset B$ أو $B \not\subset A$ فإننا نلاحظ أن المعايير السابقة للمقارنة بين المجموعتين A, B غير فعالة في هذه الحالة. لهذا السبب سوف ندخل في هذه الفقرة معياراً جديداً يمكننا من المقارنة بين المجموعات وسوف نسمي هذا المعيار قدرة المجموعة.

تعريف.

لتكن A, B مجموعتين اختياريين. نقول إن قدرة المجموعة A تساوي قدرة المجموعة B إذا وجد تقابل بين المجموعتين A و B . ونقول في هذه الحالة أن المجموعتين A, B متكافئتان ونرمز لذلك بالرمز $(\sim)$. أي أن

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{Card}A = \text{Card}B \Leftrightarrow \exists f : A \xrightarrow{0111-10-0111-011-10} B$$

ينتج من التعريف مباشرة أنه إذا كانت المجموعتان A, B منتهيتين فإن $A \sim B$ عندما وفقط عندما كلتا المجموعتين تملكان العدد ذاته من العناصر. وهذا يبين لنا أن قدرة المجموعة المنتهية هو مفهوم يعبر عن كمية العناصر التي تتألف منها المجموعة. أما قدرة المجموعة غير المنتهية فهو تعميم لمفهوم كمية العناصر التي تتألف منها المجموعة. وهكذا نجد أن مفهوم القدرة بشكل عام يعطينا إمكانية للمقارنة بين المجموعات من حيث كمية العناصر. من جهة أخرى إن مفهوم القدرة يعطينا إمكانية لتجزئة أي جماعة من المجموعات وهذا يتضح لنا مباشرة خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١-٣-١.

لتكن $\mathcal{I} = \{A_i : i \in I\}$ أسرة من المجموعات. إن العلاقة $(\sim)$ على المجموعة $\mathcal{I}$ هي علاقة تكافؤ، وصفوف تكافؤ هذه العلاقة هي المجموعات متساوية القدرة.

البرهان.

نتركه كتمرين للقارئ. ◻

المثال التالي يعد من أهم التطبيقات على المجموعات المتساوية القدرة.

مثال.

- ١ - قدرتا أي مجالين حقيقيين مختلفين متساويتان.
 - ٢ - قدرتا أي مجالين حقيقيين مفتوحين متساويتان.
 - ٣ - قدرتا أي مجالين حقيقيين مفتوحين من اليسار فقط متساويتان.
 - ٤ - قدرتا أي مجالين حقيقيين مفتوحين من اليمين فقط متساويتان.
- البرهان.

١ - ليكن $[a, b]$ و $[c, d]$ مجالين حقيقيين بحيث $a \neq b$ و $c \neq d$. العلاقة

$f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ المعرفة بالشكل التالي: أيًا كان $x \in [a, b]$ فإن

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c$$

هو تقابل (تأكد من ذلك). وبالتالي

$$\text{Card}[a, b] = \text{Card}[c, d]$$

٢ - ليكن $]a, b[$ و $]c, d[$ مجالين حقيقيين مفتوحين بحيث $a \neq b$ و $c \neq d$. وهنا

نميز الحالات التالية:

أ- طرفًا كل من المجالين $]a, b[$ و $]c, d[$ محدودان وفي هذه الحالة يعتبر التطبيق

$f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ المعرفة بالشكل: أيًا كان $x \in]a, b[$ فإن

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c$$

هو تقابل وبالتالي يتم المطلوب.

ب- طرفًا المجال $]a, b[$ محدودين والطرف الأيسر للمجال $]c, d[$ غير محدود. أي

أن $]c, d[=]-\infty, d[$. وفي هذه الحالة يكون التطبيق $f:]-\infty, d[\rightarrow]-\infty, d[$ المعرفة

بالشكل التالي: أيًا كان $x \in]-\infty, d[$ فإن

$$f(x) = \frac{x}{x+2} + d$$

هو تقابل، ومنه نجد

$$\text{Card}[a, b[= \text{Card}] - 2, 0[= \text{Card}] - \infty, d[$$

وذلك بالاعتماد على (١).

ث- طرفي المجال $a, b[$ محدودين والطرف الأيمن للمجال $c, d[$ غير محدود أي $c, d[=]c, \infty[$. في هذه الحالة فإن العلاقة $f:]0, 2[\rightarrow]c, \infty[$ المعرفة بالشكل التالي:
أيًا كان $x \in]0, 2[$ فإن

$$f(x) = \frac{x}{2-x} + c$$

هي تقابل وبالاعتماد على (١) نجد أن

$$\text{Card}[a, b[= \text{Card}]0, 2[= \text{Card}]c, \infty[$$

د- طرفا المجال $a, b[$ محدودان وطرفا المجال $c, d[$ غير محدودين. أي $c, d[=]-\infty, \infty[$. في هذه الحالة فإن العلاقة $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-\infty, \infty[$ المعرفة بالشكل التالي: أيًا كان $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ فإن $f(x) = \tan x$ هي تقابل ومنه
 $\text{Card}[a, b[= \text{Card}] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= \text{Card}] - \infty, \infty[$

٣- ليكن $a, b[$ و $c, d[$ مجالين حقيقيين مفتوحين من اليمين فقط بحيث $a \neq b$ و $c \neq d$. وهنا نميز الحالات التالية:

أ- الطرف الأيمن في كلا المجالين محدود. عندئذ العلاقة $f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ المعرفة بالشكل التالي: أيًا كان $x \in]a, b[$ فإن

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a} + c$$

هي تقابل، وبذلك نجد أن

$$\text{Card}[a, b[= \text{Card}]c, d[$$

ب- الطرف الأيمن لأحد المجالين غير محدود. لنفرض أن الطرف الأيمن للمجال $a, b[$ محدود والطرف الأيمن للمجال $c, d[$ غير محدود. عندئذ $c, d[=]c, \infty[$ ومنه العلاقة $f:]0, 2[\rightarrow]c, \infty[$ المعرفة بالشكل التالي:
أيًا كان $x \in]0, 2[$ فإن

$$f(x) = \frac{x}{2-x} + c$$

هي تقابل. ومنه

$$Card[a, b[= Card[0, 2[= Card[c, \infty[$$

٤ - يبرهن بشكل مشابه للحالة (٣). ٥

بعد أن توصلنا إلى الشرط اللازم والكافي لتساوي قدرتي مجموعتين نأتي الآن لدراسة الشرط اللازم والكافي كي تكون قدرة مجموعة ما أصغر من قدرة مجموعة أخرى.
تعريف.

نقول إن قدرة المجموعة A أصغر من قدرة المجموعة B إذا وجد تطبيق متباين من A إلى B . بمعنى آخر

$$Card A \leq Card B \Leftrightarrow \exists f : A \xrightarrow{\text{one-to-one}} B$$

بالاعتماد على هذا التعريف يمكننا صياغة شرط آخر لتساوي قدرتي مجموعتين وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٣-٢. (كانتور - برنشتاين).

لتكن A, B مجموعتين اختياريّتين. إذا وجد تطبيق متباين من A إلى B وتطبيق متباين آخر من B إلى A ، عندئذ تكون $A \sim B$.

البرهان.

لنفرض أن $f : A \rightarrow B$ تطبيق متباين و $\Psi : B \rightarrow A$ تطبيق متباين أيضاً. لنضع $f(A) = B_1$ فيكون $f : A \rightarrow B_1$ تقابلاً. أيضاً إذا فرضنا $A_1 = \Psi(B)$ يكون $\Psi : B \rightarrow A_1$ تقابلاً أيضاً. من جهة أخرى إن مقصور Ψ على B_1 أي $\Psi_{B_1} : B_1 \rightarrow A_1$ هو تطبيق متباين و بفرض $A_2 = \Psi_{B_1}(B_1)$ نجد أن التطبيق $\Psi_{B_1} : B_1 \rightarrow A_2$ هو تقابل. وهكذا نجد أن التطبيق

$$\Theta = \Psi_{B_1} \circ f : A \rightarrow A_2$$

تقابل. وبفرض أن $A_0 = A$ يكون $\odot(A_0) = A_2$. لنفرض أن $\odot(A_{i-2}) = A_i$ حيث $i = 2, 3, 4, \dots$ عندئذ نحصل على السلسلة التالية

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_{n-1} \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$$

من المجموعات الجزئية من A . من خلال المجموعات A_i سوف نشكل تجزئة للمجموعتين A_0, A_1 . لنفرض أن $D = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$. عندئذ يكون

$$A_1 = D \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1}) \right] \text{ و } A_0 = D \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i-1} \setminus A_i) \right]$$

ومكذا نجد أن الجماعة $\{D, (A_{i-1} \setminus A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ هي تجزئة للمجموعة A_0 . وأن الجماعة $\{D, (A_i \setminus A_{i+1})\}_{i=1}^{\infty}$ هي تجزئة للمجموعة A_1 . من جهة أخرى فإن

$$A_0 = D \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i}) \right]$$

أيضاً

$$A_1 = D \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i}) \right]$$

وبفرض أن $S = D \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i}) \right]$ نجد أن

$$A_1 = S \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}) \right] \text{ و } A_0 = S \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \right]$$

أي أن الجماعة $\{S, (A_{2i} \setminus A_{2i+1})\}_{i=0}^{\infty}$ تشكل تجزئة للمجموعة A_0 وكذلك الجماعة

$\{S, (A_{2i+2} \setminus A_{2i+3})\}_{i=0}^{\infty}$ تشكل تجزئة للمجموعة A_1 . لنعرف التطبيق $\bar{\Psi} : A_0 \rightarrow A_1$

بالشكل التالي: أيا كان $a \in A_0$ فإن

$$\bar{\Psi}(a) = \begin{cases} a & a \in S \\ \odot(a) & a \notin S \end{cases}$$

إن التطبيق $\bar{\Psi}$ متباين لأنه إذا كان $a, b \in A_0$ بحيث $a = b$ فإنه:

- إذا كان $a \in S$ فإن $\bar{\Psi}(a) = a = b = \bar{\Psi}(b)$.

- إذا كان $a \notin S$ فإن $\bar{\Psi}(a) = \odot(a) = \odot(b) = \bar{\Psi}(b)$.

البرهان.

بما أنه بالإمكان تعريف علاقات ترتيب على المجموعات A و B بحيث تجعلها مجموعات مرتبة جيداً فإنه حسب المبرهنة (١-٢-٧) تتحقق واحدة فقط من الحالات التالية:

- ١- المجموعة A تكافئ المجموعة B .
 - ٢- المجموعة A تكافئ مجموعة جزئية من B .
 - ٣- المجموعة B تكافئ مجموعة جزئية من A .
- و إلا تكون مبرهنة كانتور - برنشتاين محققة. ◊
- العمليات على القدرات.

وجدنا سابقاً أن كل عدد طبيعي يمثل قدرة لمجموعة منتهية، وانطلاقاً من هذا سوف نقوم بتعريف عمليات مشابهة للعمليات على الأعداد الطبيعية (جمع وضرب ...) بحيث تتطابق هذه العمليات مع مثيلاتها في مجموعة الأعداد الطبيعية. تعريف.

لتكن m قدرة لمجموعة ما. نقول إن m هي مجموع القدرتين m_1, m_2 أي $m = m_1 + m_2$ إذا كانت كل مجموعة قدرتها m يمكن تمثيلها على شكل اجتماع لمجموعتين غير متقاطعتين قدرة إحداها m_1 وقدرة الأخرى m_2 .

تمهيدية ١-٣-٦.

لأجل أي مجموعتين A_1, A_2 توجد مجموعتان B_1, B_2 بحيث $A_1 \sim B_1$ و $A_2 \sim B_2$ وأن $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

البرهان.

ليكن $a_1 \neq a_2$ عنصرين ما (على سبيل المثال $a_1 = 1, a_2 = 2$) ولنضع

$$B_2 = \{a_2\} \times A_2 \text{ و } B_1 = \{a_1\} \times A_1$$

فلنجد أن التطبيقات التالية $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ المعرفة بالشكل $f_1(x) = (a_1, x)$ أيما كان $x \in A_1$ و $f_2: A_2 \rightarrow B_2$ المعرفة بالشكل $f_2(y) = (a_2, y)$ أيما كان $y \in A_2$ كل

منهما تقابل (نأكد من ذلك) ومنه $A_1 \sim B_1$ و $A_2 \sim B_2$ وأن $B_1 \cap B_2 = \Phi$.
تمهيدية ١-٣-٧ .

لأجل أي قدرتين m_1, m_2 توجد القدرة $m_1 + m_2$.
البرهان .

بما أن m_1, m_2 قدرتان فإنه يوجد مجموعتان A_1, A_2 بحيث $CardA_1 = m_1$ وأن $CardA_2 = m_2$.
لنأخذ المجموعتين B_1, B_2 المعرفتين في التمهيدية (١-٣-٦) . بما أن $B_1 \cap B_2 = \Phi$ فإنه حسب التعريف

$$Card(B_1 \cup B_2) = CardB_1 + CardB_2 = CardA_1 + CardA_2 = m_1 + m_2$$

المبرهنة التالية تبين لنا خواص عملية الجمع .

مبرهنة ١-٣-٨ .

إن جمع القدرات تبديلي وتجميعي . بمعنى أنه من أجل القدرات m_1, m_2, m_3 فإن :

$$m_1 + m_2 = m_2 + m_1 - ١$$

$$(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3) - ٢$$

البرهان .

١ - لنفرض أن A مجموعة تحقق $CardA = m_1 + m_2$ عندئذ توجد مجموعتان A_1, A_2 بحيث $A = A_1 \cup A_2$ و $A_1 \cap A_2 = \Phi$ وأن $CardA_1 = m_1, CardA_2 = m_2$.
ومنه نجد أن $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$. بشكل مشابه نبرهن على الخاصة ٢ .
للتعرف الآن كيفية جداء القدرات .

تعريف .

نقول عن القدرة m إنها جداء للقدرتين m_1, m_2 أي $m = m_1 \cdot m_2$ إذا كانت كل مجموعة قدرتها m تساوي جداء ديكارتي لمجموعتين A_1, A_2 بحيث $CardA_1 = m_1, CardA_2 = m_2$. أي أن $Card(A_1 \times A_2) = CardA_1 \cdot CardA_2$.
يلتج من التعريف أن جداء القدرتين m_1, m_2 موجود دائما .

خواص جداء القدرات وعلاقته بالمجموع نوردما من خلال المبرهنة التالية :

مبرهنة ١-٣-٩.

إن جداء القدرات يتمتع بالخواص التالية: أيا كانت القدرات m_1, m_2, m_3 فإن:

$$1. m_1.m_2 = m_2.m_1$$

$$2. (m_1.m_2).m_3 = m_1.(m_2.m_3)$$

$$3. m_1(m_2 + m_3) = m_1.m_2 + m_1.m_3$$

البرهان.

لنكن A, B, D مجموعات تحقق

$$CardA = m_1, CardB = m_2, CardD = m_3$$

١- بما أن المجموعتين $A \times B, B \times A$ متكافئتان أي $A \times B \sim B \times A$ فإنه حسب

التعريف

$$Card(A \times B) = Card(B \times A)$$

$$ومنه m_1.m_2 = m_2.m_1$$

٢- بما أن $(A \times B) \times D \sim A \times (B \times D)$ نجد

$$Card(A \times B) \times D = CardA \times (B \times D)$$

$$ومنه Card(A \times B).CardD = CardA.Card(B \times D)$$

$$(m_1.m_2).m_3 = m_1.(m_2.m_3)$$

٣- لنفرض أن $A \cap D = \Phi$ علئذ بما أن $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$ فإن

$$0. m_1(m_2 + m_3) = m_1.m_2 + m_1.m_3$$

١-٤. المجموعات القابلة للعد.

وجدنا سابقاً أن العلاقة $(\sim)$ أو علاقة تساوي القدرات هي علاقة تكافؤ على المجموعات، وبالتالي فإن هذه العلاقة تجزئ لنا أي جماعة من المجموعات إلى صفوف تكافؤ. إن أحد أهم صفوف تكافؤ هذه العلاقة هو صف التكافؤ المولد بمجموعة الأعداد الطبيعية $[N^*]$.

تعريف.

سوف نقول عن المجموعة A إنها قابلة للعد، إذا كانت تنتمي إلى صف التكافؤ المولد بمجموعة الأعداد الطبيعية الناتج عن العلاقة $(\sim)$. أو بمعنى آخر، نقول عن المجموعة A إنها قابلة للعد إذا كانت قدرتها مساوية لقدرة مجموعة الأعداد الطبيعية N^* . والذي يكافئ بدوره إمكانية ترقيم عناصر المجموعة A بواسطة الأعداد الطبيعية. لرمز لقدرة مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز $\aleph_0$ ونقرأ (ألف صفر) وبالتالي تكون قدرة أي مجموعة قابلة للعد مساوية $\aleph_0$.

من التعريف ينتج مباشرة أن أي مجموعة قابلة للعد هي مجموعة غير خالية و غير منتهية.

أمثلة:

- ١- المجموعة N^* قابلة للعد.
- ٢- مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة قابلة للعد، لأن العلاقة $f: N^* \rightarrow 2Z^+$ المعرفة بالشكل $f(n) = 2n$ أياً كان $n \in N^*$ تكون تقابلاً.
- ٣- كل من المجموعات Z^+ و Z^- قابلة للعد.
- ٤- مجموعة الأعداد الصحيحة Z قابلة للعد لأن العلاقة $f: Z \rightarrow N^*$ المعرفة بالشكل التالي أياً كان $n \in Z$ فإن

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ 2|n| & n < 0 \end{cases}$$

هي تقابل.

- ٥- مجموعة الأعداد العادية Q قابلة للعد.

نعلم أن كل عنصر $\alpha \in Q$ هو عبارة عن كسر $\alpha = \frac{p}{q}$ غير قبل للاختصار حيث $p, q \in Z$ وأن $q > 0$ ، وهذه الكتابة وحيدة. نسمي المجموع $|p| + q$ ارتفاع العدد α . واضح أن الأعداد التي يكون ارتفاع كل منها n تشكل مجموعة منتهية، فعلى سبيل المثال يوجد عدد واحد فقط ارتفاعه 1 هو $\frac{0}{1}$ وأنه يوجد عددين ارتفاع كل منهما 2

هما $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$ وتوجد أربعة أعداد ارتفاع كل منها 3 وهي $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{1}$ وهكذا. سوف نقوم بترقيم جميع الأعداد $\alpha \in Q$ بحسب ارتفاعها ونبدأ بالعدد الذي ارتفاعه 1 ثم بالأعداد التي ارتفاعها 2 وهكذا، فلنجد أنه بهذه العملية يتم بناء تقابل بين N^* و Q وهذا يبين أن المجموعة Q قابلة للعد.

نأتي الآن إلى دراسة خواص المجموعات القابلة للعد وأولى هذه الخواص نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٤-١.

كل مجموعة جزئية وغير منتهية من N^* تكون قابلة للعد.

البرهان.

لنكن D مجموعة جزئية من N^* وغير منتهية. ولكون المجموعة N^* تحقق الشرط الأصغري، لنفرض أن a_1 العنصر الأصغر في D و a_2 العنصر الأصغر في $D \setminus \{a_1\}$ و a_3 العنصر الأصغر في $D \setminus \{a_1, a_2\}$.

لنفرض أنه تم تعيين العنصر a_k الذي هو عنصراً أصغراً في المجموعة $D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ عندئذ بالامكان تعيين العنصر a_{k+1} والذي هو عنصراً أصغراً في المجموعة $D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. نتابع بالاستقراء على هذا الشكل نجد أن $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ أي أن المجموعة D قابلة للعد.

المبرهنة السابقة يمكن تعميمها على النحو التالي:

مبرهنة ٢-٤-١.

أي مجموعة جزئية وغير منتهية من مجموعة قابلة للعد تكون أيضاً قابلة للعد.

البرهان.

لنكن D مجموعة قابلة للعد و S مجموعة جزئية من D وغير منتهية. بما أن المجموعة D قابلة للعد يوجد تقابل $f: D \rightarrow N^*$ من جهة أخرى، للتطبيق $\Psi: S \rightarrow D$ المعروف بالشكل $\Psi(a) = a$ أيأ كان $a \in S$ هو تطبيق متباين وهذا يبين لنا أن التطبيق $f \circ \Psi: S \rightarrow N^*$ متباين. وبما أن المجموعة $f \circ \Psi(S)$

غير منتهية ومحتواة في N^* نستنتج أن المجموعة $\Psi(S) \circ f$ قابلة للعد. بهذا الشكل نجد أن المجموعة S قابلة للعد. ◻

وجدنا أن كل مجموعة قابلة للعد هي مجموعة غير منتهية، وهنا لا بد لنا من التساؤل هل العكس صحيح، بمعنى آخر، هل كل مجموعة غير منتهية تكون قابلة للعد. الجواب عن هذا التساؤل نجده في المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٤-٣.

كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد.

البرهان.

لتكن S مجموعة غير منتهية ولنفرض أن x_1 هو العنصر المختار من المجموعة S اعتماداً على موضوع الاختيار. ولنفرض أيضاً x_2 العنصر المختار من المجموعة $S \setminus \{x_1\}$. لنفرض أنه تم تعيين العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ بالطريقة السابقة. عندئذ يمكننا تعيين العنصر x_{n+1} على أنه العنصر المختار من المجموعة $S \setminus \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ وذلك حسب موضوع الاختيار أيضاً. وهكذا نحصل بالاستقراء على التطبيق المتباين $f: N^* \rightarrow S$ الذي قاعدة ربطه $f(n) = x_n$ وذلك أياً كان $n \in N^*$. وهكذا نجد أن المجموعة

$$f(N^*) = \{x_n : n \in N^*\}.$$

قابلة للعد وأن $f(N^*) \subseteq S$. ◻

تمهيدية ١-٤-٤.

لتكن A مجموعة قابلة للعد. إذا كانت K مجموعة جزئية منتهية من A عندئذ تكون المجموعة $A \setminus K$ قابلة للعد.

البرهان.

إن المجموعة $A \setminus K$ غير منتهية (تأكد من ذلك). وحسب المبرهنة (١-٤-٣) فهي تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد ولتكن B . ومنه يوجد تقابل $f: N^* \rightarrow B$. من جهة أخرى يوجد تطبيق متباين $\Phi: B \rightarrow A \setminus K$ ، وهكذا نجد أن التطبيق

$\Phi \circ f : N^* \rightarrow A \setminus K$ هو تطبيق متباين. كذلك بما أن المجموعة A قابلة للعد يوجد تقابل $f_1 : A \rightarrow N^*$ وكذلك يوجد تطبيق متباين $\Phi_1 : A \setminus K \rightarrow A$. وهكذا نجد أن التطبيق $\Phi_1 \circ f_1 : A \setminus K \rightarrow N^*$ هو تطبيق متباين. وحسب المبرهنة (٢-٤-١) نجد أن المجموعة $A \setminus K$ قابلة للعد.

خواص أخرى للمجموعات القابلة للعد نوردتها من خلال التمهيديتين التاليتين:

تمهيدية ٥-٤-١.

لتكن A مجموعة قابلة للعد و B مجموعة غير منتهية. تكون المجموعة B قابلة للعد في كل من الحالات التالية:

١- إذا وجد تطبيق متباين $f : B \rightarrow A$.

٢- إذا وجد تطبيق غامر $g : A \rightarrow B$.

البرهان.

١- ليكن $f : B \rightarrow A$ تطبيق متباين ولنفرض أن $f(B) = H$ عندئذ التطبيق $f : B \rightarrow H$ تقابل، وبالتالي تكون المجموعة H غير منتهية وبما أن $H \subseteq A$ وحسب المبرهنة (٢-٤-١) فإن المجموعة H تكون قابلة للعد، وبالتالي المجموعة B تكون أيضاً قابلة للعد.

٢- ليكن $g : A \rightarrow B$ تطبيقاً غامراً. لأجل كل عنصر $y \in B$ لنثبت عنصراً واحداً فقط $x_y \in A$ بحيث $g(x_y) = y$. بهذا الشكل نحصل على التطبيق المتباين $\Theta : B \rightarrow A$ الذي قاعدة ربطه $\Theta(y) = x_y$ ، وبما أن المجموعة B غير منتهية حسب (١) تكون المجموعة B قابلة للعد.

تمهيدية ٦-٤-١.

القضايا التالية صحيحة:

١- المجموعة $N^* \times N^*$ قابلة للعد.

٢- إذا كانت المجموعة D قابلة للعد فإن المجموعة $D \times D$ تكون قابلة للعد.

٣- إذا كانت المجموعتان A, B قابلتين للعد تكون المجموعة $A \cup B$ قابلة للعد.

٤- إذا كانت المجموعة A قابلة للعد والمجموعة K منتهية فإن المجموعة $A \cup K$ تكون قابلة للعد.

البرهان.

١- التطبيق $f: N^* \times N^* \rightarrow N^*$ الذي قاعدة ربطه $f((n, m)) = 2^n \cdot 3^m$ ، وذلك أياً كان $(n, m) \in N^* \times N^*$ هو تطبيق متباين وحسب التمهيدية (١-٤-٥) تكون المجموعة غير المنتهية $N^* \times N^*$ قابلة للعد.

٢- لنفرض أن المجموعة D قابلة للعد، عندئذ يوجد تقابل $g: D \rightarrow N^*$. لنعرف التطبيق $f: D \times D \rightarrow N^* \times N^*$ الذي قاعدة ربطه

$$f((a, b)) = (g(a), g(b))$$

وذلك أياً كان $(a, b) \in D \times D$ فلجد أن f تقابل وبالتالي تكون المجموعة $D \times D$ قابلة للعد. كلاً من ٣ و ٤ نتركه كتمرين للقارئ. هـ

١-٥. بعض الخواص للأعداد الصحيحة.

كثيراً ما نستخدم في الجبر المجرد خواص الأعداد الصحيحة وفي هذه الفقرة سوف ندرس بعض هذه الخواص. وجدنا في الفقرة (١-١) أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من N^* تحوي عنصراً أصغرياً أو أصغراً (N^* مجموعة مرتبة كلياً). يمكننا صياغة هذه الحقيقة بشكل آخر.

نتيجة.

كل مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة تحوي عنصراً أصغراً. بما أن مفهوم قابلية القسمة يلعب دوراً أساسياً في نظرية الأعداد، لأجل ذلك سوف نبدأ بالتعريف التالي:

تعريف.

ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b \neq 0$.

- نقول إن b قاسم للعدد a في Z إذا وجد $q \in Z$ يحقق $a = bq$.

- نقول عن $p \in \mathbb{Z}$ إنه عدد أولي إذا كان $p > 1$ وكانت مجموعة قواسمه هي $\{1, -1, p, -p\}$.

- نقول عن $s \in \mathbb{Z}$ إنه مضاعف للعدد $t \in \mathbb{Z}$ إذا وجد $u \in \mathbb{Z}$ يحقق $s = ut$.
كما ذكرنا، أن مفهوم قابلية القسمة بعد أحد أهم خواص الأعداد الصحيحة وهذا المفهوم سوف تحدده لنا المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٥-١. (خوارزمية القسمة).

ليكن $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث $b > 0$ عندئذ يوجد $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = qb + r$ وأن $0 \leq r < b$. زد على ذلك فإن q, r يتعيان بشكل وحيد.

البرهان.

لنأخذ المجموعة

$$S = \{a - kb : k \in \mathbb{Z}, a - kb \geq 0\}$$

نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \in S$. في هذه الحالة واضح أن $S \neq \emptyset$ وبالتالي يوجد $k_0 \in \mathbb{Z}$ بحيث $a - k_0 b = 0$ أي أن $a = k_0 b$ ، ومنه العدد b قاسم للعدد a . وهنا نأخذ $q = k_0$ و $r = 0$. والمبرهنة صحيحة في هذه الحالة.

- الحالة الثانية: $0 \notin S$. لنبرهن في هذه الحالة أن $S \neq \emptyset$. سوف نميز الحالات التالية:

- إذا كان $a > 0$ فإن $a - 0b \in S$ وبالتالي $a - 0b > 0$ فإن $a > 0$ وبالتالي $a - 0b \in S$.

- إذا كان $a < 0$ فإن $a - (2a)b = a(1 - 2b) > 0$ وبالتالي $a - (2a)b \in S$.

- إذا كان $a = 0$ فإن $0 - (-1)b > 0$ وبالتالي $0 - (-1)b \in S$.

مما سبق نجد أن $S \neq \emptyset$ كما أن $S \subseteq \mathbb{N}^*$ ومنه S تحوي عنصراً أصغراً، وليكن $r = a - qb$ وبالتالي $a = qb + r$ حيث $r > 0$. لنبرهن على أن $r < b$. لنفرض جذاً أن $r > b$ عندئذ $r - b > 0$ وبالتالي $a - (q+1)b = a - qb - b = r - b > 0$ وبالتالي $a - (q+1)b \in S$ وأن $a - (q+1)b < a - qb = r$ وهذا يناقض كون r عنصراً أصغراً في S . إذا

كان $r = b$ فإنه في هذه الحالة يكون $a = (1-q)b$ أي أن $a - (1-q)b \in S$ وأن $a - (1-q)b = 0$ وهذا يناقض كون $0 \notin S$. مما سبق نجد أن $0 \leq r < b$.
برهان الوحداية. لنفرض أن $a = qb + r$ وأن $a = q_1b + r_1$ حيث $0 \leq r < b$ و $0 \leq r_1 < b$ وأن $r_1, q_1 \in \mathbb{Z}$. ومنه $qb + r = q_1b + r_1$ و بفرض أن $r_1 \geq r$ نجد
 $b(q - q_1) = r_1 - r$ أي أن b قاسم للعدد $r_1 - r$. ولكن $0 \leq r_1 - r < b$. وهذا يبين لنا
أن $r_1 - r = 0$ وبالتالي $r = r_1$ وكذلك $q = q_1$.
ملاحظة.

المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كان $b < 0$ وفي هذه الحالة يكون $a = qb + r$ حيث $0 \leq r < |b|$. نسمي a المقسوم ونسمي b المقسوم عليه ونسمي q ناتج (خسارج) القسمة وأخيراً نسمي r باقي القسمة.
نأتي الآن لدراسة خاصة جديدة للأعداد الصحيحة وهي القاسم المشترك الأعظم لعددين.
تعريف. (القاسم المشترك الأعظم).

ليكن a, b عددين صحيحين مغايرين للصفر. القاسم المشترك الأعظم للعددين a و b هو أكبر عدد صحيح موجب يقسم a و b في آن واحد. ونرمز له $\gcd(a, b)$.
إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ نقول في هذه الحالة أن العددين a و b أوليين فيما بينهما.
المبرهنة التالية تثبت لنا أن القاسم المشترك الأعظم لأي عددين صحيحين مغايرين للصفر موجود.
مبرهنة ١-٥-٢.

ليكن a, b عددين صحيحين مغايرين للصفر. عندئذ يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $\gcd(a, b) = as + bt$. زد على ذلك فإن $\gcd(a, b)$ هو أصغر عدد صحيح موجب من الشكل $as + bt$.
البرهان.
لنأخذ المجموعة

$$S = \{am + bn > 0 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

من الواضح أن المجموعة S غير خالية، كما أن $S \subset \mathbb{N}^*$ وبالتالي فإن المجموعة S تحوي عنصراً أصغراً وليكن $d = as + bt$ حيث $s, t \in \mathbb{Z}$. وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = qd + r$ وأن $0 \leq r < d$. لنفرض أن $r > 0$ عندئذ

$$r = a - qd = a - q(as + bt) = a - aqs - qbt = a(1 - qs) + b(-qt) \in S$$

وهذا يناقض كون d عنصراً أصغراً في S . ومنه نجد أن $r = 0$ وبالتالي $a = qd$ أي أن d قاسم للعدد a . بشكل مشابه نبرهن أن d قاسم للعدد b . مما سبق نجد أن d قاسم مشترك للعددين a و b .

ليكن d_0 قاسماً مشتركاً آخر للعددين a و b عندئذ يوجد $h, k \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = d_0 h$ و $b = d_0 k$ ومنه

$$d = as + bt = d_0 hs + d_0 kt = d_0 (hs + kt)$$

وهذا يبين لنا أن $d \geq d_0$. مما سبق نجد أن d هو قاسم مشترك أعظم للعددين a و b .

توجد خاصية أخرى للأعداد الصحيحة، وهذه الخاصة تسمى المضاعف المشترك الأصغر.

تعريف.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين المغايرين للصفر a و b هو أصغر عدد صحيح موجب يكون مضاعفاً لكل من العددين a و b في آن واحد. وسوف نرمز له $\text{lcm}(a, b)$.

خواص كل من القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر لعددين والعلاقة بينهما نوردتها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١-٥-٣.

لتكن a و b أعداداً صحيحة موجبة، و لنفرض أن $d = \gcd(a, b)$ و $m = \text{lcm}(a, b)$. عندئذ القضايا التالية صحيحة:

- ١- إذا كان $t \in Z$ و يقسم العددين a و b فإن t يقسم d .
 ٢- إذا كان $s \in Z$ مضاعفاً للعددين a و b فإن s يكون مضاعفاً للعدد m .

البرهان.

١- بما أن $d = \gcd(a, b)$ عندئذ يوجد $q, r \in Z$ بحيث $d = aq + br$. لنفرض أن t يقسم كلا من a و b عندئذ يوجد $t_1, t_2 \in Z$ بحيث $a = t_1 t$ و $b = t_2 t$ ومنه

$$d = t_1 t q + t_2 t r = t(t_1 q + t_2 r)$$

وهذا يبين لنا أن t يقسم d .

٢- بما أن $m = \text{lcm}(a, b)$ يوجد $m_1, m_2 \in Z$ بحيث $m = m_1 a$ و $m = m_2 b$. ليكن s مضاعفاً آخر للعددين a و b عندئذ يوجد $n_1, n_2 \in Z$ بحيث $s = n_1 a$ و $s = n_2 b$. وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $s = qm + r$ وأن $0 \leq r < m$. لنفرض جلاً أن $r \neq 0$ عندئذ $r = s - qm = n_1 a - qm_1 a = (n_1 - qm_1)a$ ومنه $r = s - qm = n_2 b - qm_2 b = (n_2 - qm_2)b$ و

وهذا يناقض كون $m = \text{lcm}(a, b)$. مما سبق نجد أن $r = 0$ وبالتالي $s = qm$ أي أن s هو مضاعف للعدد m .

تمهيدية ١-٥-٤ .

أيًا كانت الأعداد $a, b, c \in Z$ القضايا التالية متكافئة:

$$1- \gcd(a, bc) = 1$$

$$2- \gcd(a, b) = 1 \text{ و } \gcd(a, c) = 1$$

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن $\gcd(a, bc) = 1$ عندئذ يوجد $s, t \in Z$ بحيث $at + s(bc) = 1$ ومنه $at + b(cs) = 1$ وهذا يبين لنا أن $\gcd(a, b) = 1$ وأن $\gcd(a, c) = 1$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض جلاً أن $\gcd(a, bc) = d > 1$ عندئذ فإن d يقسم كلا من a و bc وبالتالي يوجد $s, t \in Z$ بحيث $a = dt$ و $bc = ds$. من جهة أخرى، بما أن

حيث أن كلاً من p_i و q_j أعداد أولية و $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq t$ بما أن p_1 عدد أولي و يقسم الجداء $q_1, q_2, \dots, q_r$ وحسب التمهيدية (1-0-6) فإن p_1 يقسم أحد المضارب $q_1, q_2, \dots, q_r$. لنفرض أن p_1 يقسم q_j . وبما أن كلاً من p_1 و q_j أعداد أولية نجد أن $p_1 = q_j$ ومنه يكون

$$p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_{j-1} \cdot q_{j+1} \cdot \dots \cdot q_r$$

بمتابعة العمل بهذا الشكل عدداً منتهياً من المرات نجد أن $r = t$ وأنه بعد إعادة الترتيب فإن $p_i = q_i$ وذلك لأجل كل دليل $1 \leq i \leq r$.

٦-١. توافق الأعداد الصحيحة.

في هذه الفقرة سوف ندرس واحدة من أهم تطبيقات خوارزمية القسمة.
تعريف.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً وليكن $a, b \in \mathbb{Z}$. نقول عن العددين a و b إنهما متطابقان بالمقياس n إذا كان $a - b$ يقبل القسمة على n وكتب $a \equiv b \pmod{n}$. سوف نرمز لباقي قسمة a على n بالرمز $a \bmod n$.
مثال.

$$8 \bmod 3 = 2 \text{ و } 19 \bmod 3 = 1 \text{ و } 23 \bmod 6 = 5$$

ممن أجعل $n = 5$ و $a = 57$ و $b = 37$ فإن $a \equiv b \pmod{5}$ لأن
 $a - b = 57 - 37 = 20 = 4 \cdot 5$.

من التعريف ينتج مباشرة ما يلي:

نتيجة.

١- إذا كان العدد الصحيح a يقبل القسمة على n فإن $a \equiv 0 \pmod{n}$.

٢- إذا كان باقي قسمة a على n يساوي r فإن $a \equiv r \pmod{n}$.

نأتي الآن لدراسة بعض خواص التوافق للأعداد الصحيحة.

تمهيدية ١-٦-١.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً وليكن $a, b \in \mathbb{Z}$. الشرط اللازم والكافي كي يكون $a \equiv b \pmod{n}$ هو أن يكون باقي قسمة a على n يساوي باقي قسمة b على n . أي أن

$$a \bmod n = b \bmod n$$

البرهان.

لنؤم الشرط. لنفرض أن $a \equiv b \pmod{n}$ عندئذ $a - b = tn$ حيث $t \in \mathbb{Z}$. من جهة أخرى، حسب خوارزمية القسمة فإنه يوجد $q, q_1, r, r_1 \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = qn + r$ و $b = q_1n + r_1$ وأن $0 \leq r, r_1 < n$. بفرض أن $r > r_1$ عندئذ

$$a - b = (q - q_1)n + (r - r_1)$$

وحسب الفرض فإن $r - r_1 = 0$ وبالتالي $r = r_1$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $a = qn + r$ و $b = q_1n + r$ حيث $q, q_1, r \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq r < n$. ومنه $a - b = (q - q_1)n$. وهذا يبين لنا أن $a \equiv b \pmod{n}$.

التمهيدية التالية تعطينا خواص علاقة التوافق ($\equiv$) على مجموعة الأعداد الصحيحة.

تمهيدية ٢-٦-١.

علاقة التوافق ($\equiv$) على مجموعة الأعداد الصحيحة هي علاقة تكافؤ.

البرهان.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أولاً كان $a \in \mathbb{Z}$ فإن $a - a = 0n = 0$ ومنه $a \equiv a \pmod{n}$ والعلاقة ($\equiv$) انعكاسية. أولاً كان $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث $a \equiv b \pmod{n}$ فإن $a - b$ يقبل القسمة على n وبالتالي $b - a$ ومنه $b \equiv a \pmod{n}$ والعلاقة ($\equiv$) تناظرية. أولاً كان $a, b, c \in \mathbb{Z}$ بحيث

$$b \equiv c \pmod{n} \text{ و } a \equiv b \pmod{n}$$

فإن $a - b = qn$ و $b - c = q_1n$ حيث $q, q_1 \in \mathbb{Z}$ ومنه

$$a - c = a - b + b - c = (q + q_1)n$$

أي أن $a \equiv c \pmod{n}$ والعلاقة $(\equiv)$ متعدية. مما سبق نجد أن العلاقة $(\equiv)$ هي علاقة تكافؤ على Z . نعين صفوف تكافؤ هذه العلاقة. ليكن $a \in Z$ فلنجد أن صف التكافؤ المولد بالعنصر a هو

$$[a] = \{x : x \in Z; \quad x \equiv a \pmod{n}\}$$

وهذا يبين لنا أن

$$[a] = \{x : x \in Z; x - a = an : a \in Z\}$$

أي أن $[a] = \{x : x \in Z; x = a + an : a \in Z\}$ وأن مجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة أو مجموعة الخارج هي $Z/\equiv = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$.
خواص الجمع و الضرب بالمقاس n نجدها في التمهيدية التالية:
تمهيدية ٣-٦-١.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. القضايا التالية صحيحة:

١- إذا كان $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Z$ بحيث $a_1 \pmod{n} = b_1 \pmod{n}$ و $a_2 \pmod{n} = b_2 \pmod{n}$ عندئذ:

$$(a_1 \pm a_2) \pmod{n} = (b_1 \pm b_2) \pmod{n}$$

$$a_1 \cdot a_2 \pmod{n} = b_1 \cdot b_2 \pmod{n}$$

٢- إذا كان $a, b \in Z$ بحيث $a \pmod{n} = b \pmod{n}$ عندئذ:

$$a^m \pmod{n} = b^m \pmod{n} \quad \text{فإن } m \in Z$$

$$k \cdot a \pmod{n} = k \cdot b \pmod{n} \quad \text{فإن } k \in Z$$

٣- إذا كان $a, b, c \in Z$ بحيث $(a + b) \pmod{n} = c \pmod{n}$ عندئذ:

$$a \pmod{n} = (c - b) \pmod{n}$$

البرهان.

سنتركه للقارئ كتمرين.

خواص أخرى ضرورية لنا في المستقبل نوردتها في المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٦-٤.

ليكن $n > 1$ عدد صحيح. القضايا التالية صحيحة:

- ١- أيًا كان $a, b \in Z$ فإن $(a+b) \bmod n = a \bmod n + b \bmod n$.
 - ٢- أيًا كان $a, b, s, t \in Z$ بحيث $\gcd(s, t) = 1$ فإن $a \equiv b \bmod st$ عندما و فقط عندما $a \equiv b \bmod s$ و $a \equiv b \bmod t$.
 - ٣- أيًا كان $a, b \in Z$ فإن $(a.b) \bmod n = (a \bmod n).(b \bmod n)$.
- البرهان.

- ١- لدينا حسب خوارزمية القسمة $a = q_1 n + r_1$ و $b = q_2 n + r_2$ حيث $0 \leq r_1, r_2 < n$ و $q_1, q_2, r_1, r_2 \in Z$ ومنه

$$a + b = (q_1 + q_2)n + (r_1 + r_2)$$

وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \leq r_1 + r_2 < n$. عندئذ
- $$(a+b) \bmod n = r_1 + r_2 = a \bmod n + b \bmod n$$
- الحالة الثانية: $n \leq r_1 + r_2$. بما أن $0 \leq r_1, r_2 < n$ فإن $n \leq r_1 + r_2 < 2n$ وبالتالي $0 \leq r_1 + r_2 - n < n$ وهذا يبين لنا أن $r_1 + r_2 = n + (r_1 + r_2 - n)$ وهكذا
- $$(a+b) \bmod n = (r_1 + r_2) \bmod n = a \bmod n + b \bmod n$$
- ٢- لزوم الشرط. لنفرض أن $a \equiv b \bmod st$ عندئذ $a - b$ يقبل القسمة على st وهذا بدوره يؤدي إلى أن $a - b$ يقبل القسمة على s و t في آن واحد. أي
- $$a \equiv b \bmod s \text{ و } a \equiv b \bmod t$$
- كفاية الشرط. لنفرض أن $a \equiv b \bmod s$ و $a \equiv b \bmod t$ عندئذ يوجد $\gamma, \gamma_1 \in Z$ بحيث $a - b = \gamma_1 s$ و $a - b = \gamma t$ وبما أن $\gcd(s, t) = 1$ يوجد $\alpha, \beta \in Z$ بحيث $\alpha t + \beta s = 1$ ومنه $a - b = (a - b)\alpha t + (a - b)\beta s$ وبالتالي
- $$a - b = \alpha \gamma_1 (st) + \gamma \beta (st)$$
- أي أن $a - b = (\alpha \gamma_1 + \gamma \beta)st$ وهذا يبين لنا أن $a - b$ يقبل القسمة على st . وبالتالي

$$a \equiv b \pmod{n}$$

٣- لنفرض أن $a = qn + r$ و $b = q_1n + r_1$ حيث $q, q_1, r, r_1 \in \mathbb{Z}$ وأن $0 \leq r, r_1 < n$. عندئذ $ab = (qq_1n + qr_1 + q_1r)n + rr_1$ وهنا لميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \leq rr_1 < n$. عندئذ

$$(ab) \pmod{n} = rr_1 = (a \pmod{n})(b \pmod{n})$$

- الحالة الثانية: $n \leq rr_1 < n^2$. عندئذ بالمكان كتابة rr_1 بالشكل $rr_1 = q_0n + r_0$ حيث $0 \leq r_0 < n$ و $q_0, r_0 \in \mathbb{Z}$ ومنه

$$ab = (qq_1n + qr_1 + q_1r + q_0)n + r_0$$

وهذا يبين لنا أن $ab \pmod{n} = r_0 = rr_1 \pmod{n} = (a \pmod{n})(b \pmod{n})$

تمارين (١)

- ١ - من أجل أي عدد صحيح موجب n أثبت أن $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- ٢ - لتكن $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ أعداداً أولية مختلفة. أثبت أنه أياً كان $1 \leq i \leq n$ فإن العدد p_i لا يقسم المقدار $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.
- ٣ - أثبت أن مجموعة الأعداد الأولية قابلة للعد.
- ٤ - لسمي الأعداد التالية $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ أعداد فيبونس وتعرف بالشكل التالي $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ، وذلك أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$. أثبت أن $f_n < 2^n$.
- ٥ - لتأخذ المجموعة $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ولتعرف على S العلاقة ρ بالشكل التالي $\forall (a, b), (c, d) \in S$ فإن $(a, b) \rho (c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ أثبت أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على S ثم عين صفوف تكافؤ هذه العلاقة ووضح المعنى الهندسي لها.
- ٦ - لتعرف على R العلاقة ρ بالشكل $\forall a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a \rho b \Leftrightarrow ab \geq 0$. أثبت أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.
- ٧ - لتكن M مجموعة مرتبة جزئياً. أثبت أن القضيتين التاليتين متكافئتان:
 أ - كل مجموعة جزئية وغير خالية من M تملك عنصراً أعظماً (واحد على الأقل).
 ب - كل سلسلة متزايدة $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ من عناصر M تتقطع، أي يوجد دليل t يحقق $a_t = a_{t+1} = a_{t+2} = \dots$.
- ٨ - لتكن P مجموعة غير خالية و ρ علاقة متعدية معرفة على P وتحقق:
 - العلاقة ρ ليست انعكاسية.
 - أياً كان $x, y \in P$ بحيث $x \rho y$ فإن $y \rho x$ (غير محققة).

ملاحظات.

نقول عن الزمرة G التي قانون تشكيلها الضرب $(.)$ إنها زمرة ضربية. ونقول عن الزمرة G التي قانون تشكيلها الجمع $(+)$ إنها زمرة جمعية. إذا كانت G زمرة ضربية و $a \in G$ و n عدد صحيح موجب فإننا نعرف القوة a^n بأنها عنصر من G من الشكل $a^n = a.a.a.\dots.a$ حيث عدد المضاريب في الطرف الأيمن يساوي n . وتعرف القوة a^0 بأنها العنصر المحايد في G . وإذا كان العدد الصحيح n سالباً فإن $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

سوف نورد الآن الجدول التالي الذي يبين الرموز المستخدمة في كل من الزمر الضربية و الجمعية.

الزمرة الجمعية	الزمرة الضربية	
$+$	$.$	قانون التشكيل
$a+b$	ab	تشكيل العناصر
$.$	e أو 1	المحايد
$-a$	a^{-1}	المقلوب (النظير)
na	a^n	القوة (المضاعف)
$a-b$	ab^{-1}	

سوف نتفق على أن الزمر التي ندرسها زمراً ضربية ما لم نقل خلاف ذلك، وبشكل صريح.
تعريف.

نقول عن الزمرة G إنها تبديلية إذا كان قانون التشكيل المعروف عليها تديلياً، أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall a, b \in G; \quad ab = ba$$

أمثلة.

١- مجموعة الأعداد الحقيقية $(R, +)$ وكذلك مجموعة الأعداد الصحيحة $(Z, +)$ هي زمرة بالنسبة إلى عملية جمع الأعداد. بينما $(Z, \cdot)$ ليست زمرة بالنسبة إلى عملية ضرب الأعداد. لماذا؟

٢- المجموعة الجزئية $\{1, -1, i, -i\}$ من مجموعة الأعداد العقدية تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية ضرب الأعداد العقدية.

٣- المجموعة

$$M_2(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية جمع المصفوفات.

٤- المجموعة

$$GL(2, R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R \right\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات.

٥- المجموعة

$$GL(2, R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1, a, b, c, d \in R \right\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات.

تمارين.

أوجد العنصر المحايد والمقلوب (النظير) في كل من الزمر الواردة في المثال السابق، ثم بين أيها من الزمر السابقة تبديلية.

سوف نورد الآن خواص بعض العناصر في الزمرة.

تمهيدية ١-٢-١.

لنكن G زمرة. القضايا التالية صحيحة:

١ - المحايد في G وحيد.

٢ - مقلوب أي عنصر في G وحيد.

٣ - قانون الاختصار محقق. أي $\forall a, b, c \in G$ بحيث $ab = ac$ فإن $b = c$. كذلك إذا كان $ba = ca$ فإن $b = c$.

٤ - إذا كان $a \in G$ فإن $(a^{-1})^{-1} = a$.

٥ - إذا كان $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in G$ فإن

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$$

البرهان.

سوف نتركه كتدريباً للقارئ. ◊

الزمرة الجزئية.

تعريف.

لنكن G زمرة و H مجموعة جزئية وغير خالية من G . نقول عن H إنها زمرة جزئية من G إذا كانت H بحد ذاتها زمرة بالنسبة إلى العملية المعرفة على G .
يلتج مباشرة من التعريف أن كلاً من $\{e\}$ ، G زمرة جزئية من G .

لمعرفة إذا كانت المجموعة غير الخالية H من الزمرة G هي زمرة جزئية، ليس من الضروري التحقق من جميع شروط الزمرة حسب التعريف. المبرهنة التالية تعطينا بعض الاختبارات الأبسط كي تكون المجموعة H زمرة جزئية من G .
مبرهنة ٢-١-٢.

لنكن G زمرة و H مجموعة جزئية وغير خالية من G . الشروط التالية متكافئة:

١- H زمرة جزئية من G .

٢- أي $a, b \in H$ فإن

$$ab \in H$$

- أي $a \in H$ فإن $a^{-1} \in H$.

٣- أي $a, b \in H$ فإن $ab^{-1} \in H$.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). ينتج بشكل مباشر من تعريف الزمرة الجزئية.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). ليكن $a, b \in H$ عندئذ وحسب (2) فإن $b^{-1} \in H$ وبالتالي $ab^{-1} \in H$.

(3) $\Leftrightarrow$ (1). بما أن العملية المعرفة على H هي ذاتها العملية المعرفة على G فإن العملية (.) تجميعية على H . لنبرهن على أن $e \in H$. بما أن المجموعة H غير خالية فإنه يوجد في H عنصر واحد على الأقل، وليكن x . لنضع $a = x$ و $b = x$ فلنجد حسب الفرض أن $e = xx^{-1} = ab^{-1} \in H$.

لنبرهن الآن أنه أياً كان $y \in H$ فإن $y^{-1} \in H$. ليكن $y \in H$ لنضع $a = e$ و $b = y$ فلنجد أن $y^{-1} = ey^{-1} = ab^{-1} \in H$. أخيراً، وحسب التعريف كي تكون H زمرة جزئية من G بقي أن نبرهن أن H مغلقة بالنسبة إلى العملية (.)، أي يجب أن نبرهن أنه أياً كان $x, y \in H$ فإن $xy \in H$. ليكن $x, y \in H$ ولنضع $a = x$ و $b = y^{-1}$ فلنجد حسب الفرض أن $xy = x(y^{-1})^{-1} = ab^{-1} \in H$. بهذا الشكل نكون قد أثبتنا أن H هي زمرة جزئية من G .
أمثلة.

١- لتكن G زمرة تبديلية. إن المجموعة

$$H = \{x : x \in G, x^2 = e\}$$

زمرة جزئية من G .

بما أن $e^2 = e$ عندئذ $e \in H$ وبالتالي المجموعة H غير خالية. ليكن $x, y \in H$ عندئذ

$$(xy^{-1})^2 = (xy^{-1})(xy^{-1}) = x^2(y^2)^{-1} = ee^{-1} = e$$

وبالتالي $xy^{-1} \in H$. وحسب المبرهنة (٢-١-٢) نجد أن المجموعة H هي زمرة جزئية من G .

٢- لتكن G زمرة تبديلية. إن المجموعة $H = \{x^2 : x \in G\}$ زمرة جزئية من G .

بما أن $e \in G$ فإن $e^2 \in H$ وبالتالي المجموعة H غير خالية. ليكن $a^2, b^2 \in H$ عندئذ

$a, b \in G$ وبالتالي $ab^{-1} \in G$ أي أن $(ab^{-1})^2 \in H$. من جهة أخرى، فإن

$$a^2(b^{-1})^2 = (ab^{-1})(ab^{-1}) = (ab^{-1})^2 \in H$$

وحسب المبرهنة (٢-١-٢) نجد أن المجموعة H زمرة جزئية من G .

٣ - ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح. عندئذ المجموعة

$$nZ = \{nm : m \in Z\}$$

هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $(Z, +)$.

بما أن $nZ = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}$ فإن المجموعة nZ غير خالية. ليكن

$nm_1, nm_2 \in nZ$ وبما أن $m_1, m_2 \in Z$ فإن $m_1 - m_2 \in Z$ وبالتالي

$$nm_1 - nm_2 = n(m_1 - m_2) \in nZ$$

وحسب المبرهنة (٢-١-٢) نجد أن المجموعة nZ زمرة جزئية من Z .

اختبار آخر للزمرة الجزئية يتعلق بالمجموعات المنتهية نورد من خلال المبرهنة

التالية:

مبرهنة ٢-١-٣.

لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية من G . الشرط اللازم والكافي كي

تكون المجموعة H زمرة جزئية من G هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$\forall a, b \in H; \quad ab \in H$$

البرهان.

لزوم الشرط. واضح.

كفاية الشرط. لدينا حسب الفرض أن $ab \in H$ وذلك أيأ كان $a, b \in H$. وحسب

المبرهنة (٢-١-٢) يكفي لإثبات أن المجموعة H زمرة جزئية من G أن نبرهن أنه

أيأ كان $a \in H$ فإن $a^{-1} \in H$. ليكن $a \in H$. نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $a = e$ عندئذ $a^{-1} = a \in H$.

- الحالة الثانية: $a \neq e$. بما أن المجموعة H مغلقة بالنسبة إلى العملية $(\cdot)$ فإن

$a, a^2, a^3, \dots \in H$ ولكون المجموعة H منتهية فإنه يوجد $i, j \in N^*$ بحيث $i \neq j$

وأن $a^i = a^j$. لنفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > 0$. كما أن $a^{i-j} = e$ ولكون $a \neq e$

فإن $i - j > 1$ ومنه $a^{i-j-1} = aa^{i-j-1} = e$.

وبما أن $i - j - 1 \geq 1$ فإن $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$. وهذا يبين لنا أن المجموعة H زمرة جزئية في G .

خواص القوى في الزمرة نوردتها من خلال التمهيدية التالية:
تمهيدية ٢-١-٤.

لنكن G زمرة و $a \in G$ وليكن $n, m \in \mathbb{Z}$. عندئذ:

$$e^n = e \quad -١$$

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad -٢$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad -٣$$

البرهان.

١- واضح.

٢- لنميز الحالات التالية:

- الحالة الأولى: العدان n, m موجبان. عندئذ:

$$a^n a^m = (\underbrace{a.a.\dots.a}_{n\text{-once}})(\underbrace{a.a.\dots.a}_{m\text{-once}}) = (\underbrace{a.a.\dots.a}_{(n+m)\text{-once}}) = a^{n+m}$$

- الحالة الثانية: كل من n, m أعداد سالبة. عندئذ $n = -r$ و $m = -s$ حيث r, s أعداداً موجبة. ومنه

$$a^n a^m = a^{-r} a^{-s} = (a^{-1})^r (a^{-1})^s = (a^{-1})^{r+s} = a^{-(r+s)} = a^{-r-s} = a^{n+m}$$

- الحالة الثالثة: العددين n, m من إشارتين مختلفتين. لنفرض أن $n > 0$ و $m < 0$. عندئذ $m = -r$ حيث r عدد موجب. ومنه

$$a^n a^m = a^n a^{-r} = a^n (a^{-1})^r$$

وهنا نميز الحالات التالية:

$$\text{أولاً: } n = r \text{ عندئذ } a^n a^m = a^n (a^{-1})^n = e = a^{n-n} = a^{n-r} = a^{n+m}$$

ثانياً: $n > r$. لنفرض أن $n - r = k$ عندئذ $n = k + r$ ومنه

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{k+r} a^{-r} = (a^k a^r) a^{-r} = a^k (a^r a^{-r}) = a^k e = a^k \\ &= a^{n-r} = a^{n+(-r)} = a^{n+m} \end{aligned}$$

ثالثاً: $n < r$. نبرهن بشكل مشابه للحالة السابقة.

٣ - سوف نميز الحالات التالية.

الحالة الأولى: كل من n, m أعداد موجبة. عندئذ

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m\text{-once}} = \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-once}}) (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-once}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-once}})}_{m\text{-once}} = a^{nm}$$

الحالة الثانية: كل من n, m أعداد سالبة. عندئذ بالمكان كتابة كل من n, m

بالشكل $n = -r$ و $m = -s$ حيث r, s أعداد موجبة. ومنه

$$a^n = a^{-r} = (a^{-1})^r = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{r\text{-once}}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= (\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{r\text{-once}})^{-s} = [(\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{r\text{-once}})^{-1}]^s = \\ &= [(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{r\text{-once}})]^s = (a^r)^s = a^{rs} \end{aligned}$$

وذلك بالاستفادة من الحالة الأولى. ومنه $(a^n)^m = a^{rs} = a^{(-r)(-s)} = a^{nm}$

الحالة الثالثة: العددين n, m من إشارتين مختلفتين. لنفرض أن $n > 0$ و $m < 0$ عندئذ

$m = -r$ حيث r عدد موجب. ومنه

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= (a^n)^{-r} = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-once}})^{-r} = [(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-once}})^{-1}]^r = \\ &= (\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n\text{-once}})^r = [(a^{-1})^n]^r \end{aligned}$$

وبالاعتماد على الحالة الأولى نجد $(a^n)^m = (a^{-1})^{nr} = a^{-(nr)} = a^{n(-r)} = a^{nm}$

أما إذا كان $n < 0$ و $m > 0$ عندئذ $n = -s$ حيث s عدد موجب. ومنه

$$(a^n)^m = (a^{-s})^m = [(a^{-1})^s]^m = (a^{-1})^{sm} = a^{-sm} = a^{(-s)m} = a^{nm}$$

بعض الزمر الجزئية الهامة والضرورية لنا في دراستنا المقبلة نوردتها من خلال

المبرهنة التالية:

مبرهنة ٢-١-٥.

لتكن G زمرة. علنن:

- ١- أيًا كان $a \in G$ فإن المجموعة $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ هي زمرة جزئية تبديلية في G .
 - ٢- المجموعة $Z(G) = \{a : a \in G; ax = xa \quad \forall x \in G\}$ هي زمرة جزئية تبديلية من G تسمى مركز الزمرة G .
 - ٣- أيًا كان $a \in G$ فإن المجموعة $C(a) = \{x : x \in G; ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G تسمى مركز العنصر a في G .
- البرهان.

١- لدينا $e = a^0 \in \langle a \rangle$. أي أن المجموعة $\langle a \rangle$ غير خالية. ليكن $a^n, a^m \in \langle a \rangle$ علنن وحسب التمهيدية (٢-١-٤) فإن

$$a^n (a^m)^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$$

و بالتالي المجموعة $\langle a \rangle$ زمرة جزئية من G وهي تبديلية لأنه وحسب التمهيدية (٢-٤-١) فإن $a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n$.

٢- بما أن $ex = xe$ أيًا كان $x \in G$ نجد أن $e \in Z(G)$. ليكن $a, b \in Z(G)$. علنن أيًا كان $x \in Z(G)$ فإن $bx = xb$ وبالتالي $xb^{-1} = b^{-1}x$. كذلك بما أن $a \in Z(G)$ فإن $ab^{-1} = b^{-1}a$ ومنه

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (xb^{-1})a = x(b^{-1}a) = x(ab^{-1})$$

وذلك أيًا كان $x \in G$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $Z(G)$ زمرة جزئية من G . واضح حسب التعريف أن $Z(G)$ تبديلية.

٣- يبرهن بشكل مشابه كما في (٢). ◊

لندرس الآن تأثير عملية التقاطع على الزمر الجزئية وذلك من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ٢-١-٦.

لتكن G زمرة. إن تقاطع أية جماعة من الزمر الجزئية من G هو زمرة جزئية من G .

البرهان.

لتكن $\{A_i : i \in I\}$ جماعة من الزمر الجزئية من G . إن $\bigcap_{i \in I} A_i$ هو مجموعة جزئية وغير خالية من G لأن $e \in \bigcap_{i \in I} A_i$. ليكن $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ عندئذ أيا كان $i \in I$ فإن $x, y \in A_i$ وبما أن A_i زمرة جزئية من G فإن $x \cdot y^{-1} \in A_i$ وبالتالي $x \cdot y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} A_i$. وهذا يبين لنا أن $\bigcap_{i \in I} A_i$ هو زمرة جزئية من G .

وجدنا حسب التمهيدية السابقة أن تقاطع أي عدد من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية فهل هذا صحيح بالنسبة إلى عملية الإجماع؟ في الحالة العامة يمكننا القول إن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية، وهذا ما سوف يوضحه المثال التالي:

مثال.

ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً. وجدنا سابقاً أن المجموعة $n\mathbb{Z}$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. ومنه فإن كلا من $2\mathbb{Z}$ و $5\mathbb{Z}$ هي زمر جزئية من $\mathbb{Z}$. بينما $2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ ليس زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن $2, 5 \in 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ بينما $7 = 2 + 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$. من جهة أخرى، نجد أن المجموعة $2\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ لأن $2\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

لندرس الآن ومن خلال التمهيدية التالية الشرط الذي من أجله يكون اجتماع أي عدد من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية.

تمهيدية ٢-١-٧.

لتكن G زمرة و $\Gamma = \{A_i : i \in I\}$ جماعة من الزمر الجزئية من G . إذا كانت المجموعة Γ مرتبة كلياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء فإن $\bigcup_{i \in I} A_i$ يشكل زمرة جزئية من G .

البرهان.

واضح أن $\bigcup_{i \in I} A_i$ هو مجموعة جزئية من G وغير خالية. ليكن $x, y \in \bigcup_{i \in I} A_i$ عندها يوجد $j, k \in I$ بحيث $x \in A_j$ و $y \in A_k$. وبما أن المجموعة Γ مرتبة كلياً، عندها إما $A_j \subseteq A_k$ أو $A_k \subseteq A_j$. لنفرض أن $A_j \subseteq A_k$ عندها $x, y \in A_k$ وبما أن A_k زمرة جزئية من G نجد أن $x \cdot y^{-1} \in A_k \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $\bigcup_{i \in I} A_i$ تشكل زمرة جزئية من G .

المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون اجتماع زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية:

مبرهنة ٢-١-٨.

لتكن H و K زمرتين جزئيتين من الزمرة G . عندها $K \cup H$ زمرة جزئية من G عندما وفقط عندما $K \subseteq H$ أو $H \subseteq K$.

البرهان.

لنؤم الشرط. لنفرض أن $K \cup H$ زمرة جزئية من G . ولنفرض جديلاً أن $K \not\subseteq H$ و $H \not\subseteq K$. عندها يوجد $h \in H$ بحيث $h \notin K$ و $k \in K$ بحيث $k \notin H$. ومنه $h, k \in K \cup H$ ولكون الاجتماع $K \cup H$ زمرة فإن $hk \in K \cup H$. لنفرض أن $x = hk$ ، بما أن $x \in K \cup H$ عندها إما $x \in H$ أو $x \in K$. إذا كان $x \in H$ عندها $k = h^{-1}x \in H$ وهذا يناقض الفرض. إذا كان $x \in K$ عندها $h = xk^{-1} \in K$ وهذا أيضاً يناقض الفرض. مما سبق نجد أنه إما $K \subseteq H$ أو $H \subseteq K$. كفاية الشرط. واضح.

مبرهنة ٢-٢-١.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. ولتكن

$$D = \{1, 2, 3, \dots, (n-1)\}$$

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة D زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس n هو أن يكون العدد n أولياً.
البرهان.

لنؤم الشرط. لنفرض أن D زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس n . ولنفرض جدياً أن العدد n غير أولي عندئذ يوجد $k, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $n = kt$ وأن $1 < k, t < n$. ومنه $k, t \in D$ وبما أن $n = kt$ نجد أن $kt \bmod n = 0 \notin D$ أي أن المجموعة D ليست مغلقة وهذا يناقض كونها زمرة. إذاً العدد n أولي.

كفاية الشرط. لنفرض أن العدد n أولي. ولنبرهن أن $D = U(n)$. واضح أن $U(n) \subseteq D$. ليكن $a \in D$ عندئذ $1 \leq a < n$ لا يقسم a وبما أن العدد n أولي فإن $\gcd(a, n) = 1$ وبالتالي $a \in U(n)$. أي أن $D \subseteq U(n)$. مما سبق نجد أن $D = U(n)$ ومنه فإن D هي زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n .
تمهيدية ٢-٢-٢.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً و k قاسماً موجباً للعدد n . إن المجموعة

$$U_k(n) = \{x : x \in U(n); \quad x \equiv 1 \bmod k\}$$

زمرة جزئية من الزمرة $U(n)$.

البرهان.

واضح أن $1 \in U_k(n)$. وبما أن الزمرة $U(n)$ منتهية فإن المجموعة $U_k(n)$ منتهية أيضاً. وحسب المبرهنة (٢-١-٣) يكفي كي تكون المجموعة $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U(n)$ هو أن يتحقق الشرط أياً كان $x, y \in U_k(n)$ فإن $x \otimes y \in U_k(n)$.
ليكن $x, y \in U_k(n)$ عندئذ $x, y \in U(n)$ وأن $x \equiv 1 \bmod k$ و $y \equiv 1 \bmod k$ ومنه $x = \alpha_1 k + 1$ و $y = \alpha_2 k + 1$ حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ ومنه

$$xy = (\alpha_1 k + 1)(\alpha_2 k + 1) = (\alpha_1 \alpha_2 k + \alpha_1 + \alpha_2)k + 1$$

وبما أن $x \otimes y \in U(n)$ وأن $xy \equiv 1 \pmod{k}$ فإن $x \otimes y \in U_k(n)$ وهكذا فإن

$U_k(n)$ زمرة جزئية من $U(n)$.

تطبيق.

من أجل $k=3$ و $n=21$ فإن

$$U_3(21) = \{1, 4, 10, 13, 16, 19\}$$

هي زمرة جزئية من $U(21)$.

٢-٣. المرافقات و الدليل و مبرهنة لاغرانج.

للتعرف في البداية على جداء المجموعات في الزمرة.

تعريف.

لتكن G زمرة و A, B مجموعتين جزئيتين وغير خاليتين من G . إن جداء المجموعتين A, B يرمز له $A.B$ ويعرف بالشكل التالي:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

إذا كانت $A = \{a\}$ عندئذ

$$AB = aB = \{ab : b \in B\}$$

بشكل مشابه، إذا كانت $B = \{b\}$ فإن

$$AB = Ab = \{ab : a \in A\}$$

تعريف.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . وليكن $a, b \in G$ نسمي المجموعة

$$a.H = \{ah : h \in H\}$$

مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في G . كما نسمي المجموعة

$$H.b = \{hb : h \in H\}$$

مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G .

مثال.

في الزمرة Z_9 لنأخذ الزمرة الجزئية $H = \{0, 3, 6\}$. إن المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في Z_9 هي:

$$0 + H = \{0, 3, 6\} = 3 + H = 6 + H$$

$$1 + H = \{1, 4, 7\} = 4 + H = 7 + H$$

$$2 + H = \{2, 5, 8\} = 5 + H = 8 + H$$

في المثال السابق وجدنا أن المرافقتين اليساريتين $3 + H$ و $6 + H$ متساويتان. فهل هذا صحيح في الحالة العامة؟ وإذا كانت الإجابة بالنفي فهل تحوي المرافقات اليسارية غير المتساوية عناصر مشتركة؟

أيضاً، في المثال السابق وبما أن الزمرة Z_9 تبديلية فإن $6 + H = H + 6$. فهل هذا يبقى صحيحاً في الحالة العامة؟ الإجابة عن هذه تساؤلات و تساؤلات أخرى لجدوها في المبرهنة التالية والتي تعطينا خواص المرافقات اليسارية.

مبرهنة ٢-٣-١.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G ، وليكن $a, b \in G$. القضايا التالية صحيحة:

$$١- a \in aH$$

$$٢- aH = H \text{ عندما وفقط عندما } a \in H$$

$$٣- إما } aH = bH \text{ أو } aH \cap bH = \Phi$$

$$٤- aH = bH \text{ عندما وفقط عندما } a^{-1}b \in H$$

$$٥- Card aH = Card bH = Card H$$

$$٦- aH \text{ زمرة جزئية من } G \text{ عندما وفقط عندما } a \in H$$

$$٧- H = aHa^{-1} \text{ عندما وفقط عندما } aH = bH$$

$$٨- بفرض أن } M_1 = \{aH : a \in G\} \text{ و } M_2 = \{Ha : a \in G\} \text{ عندئذ}$$

$$Card M_1 = Card M_2$$

$$٩- كل من } M_1 \text{ و } M_2 \text{ تشكل تجزئة للمجموعة } G$$

البرهان.

$$1 - a = ae \in aH$$

٢ - لنفرض أن $aH = H$ علئذ أيا كان $h \in H$ يوجد $h_0 \in H$ بحيث $h = ah_0$ ومنه $a \in H$ وبالتالي $a = hh_0^{-1} \in H$

لنفرض أن $a \in H$ علئذ $aH \subseteq HH = H$ من جهة أخرى، أيا كان $h \in H$ فإن $h = a(a^{-1}) \in aH$ ومنه $H \subseteq aH$ ومنه $aH = H$

٣ - إذا كان $aH \cap bH = \emptyset$ يتم المطلوب. لنفرض أن $aH \cap bH \neq \emptyset$ علئذ يوجد $x \in aH \cap bH$ وبالتالي فإن $x = ah_1 = bh_2$ حيث $h_1, h_2 \in H$. وهكذا فإن $a = bh_2h_1^{-1}$ وحسب (٢) نجد أن $aH = b(h_2h_1^{-1})H = bH$

٤ - ينتج مباشرة من الخاصة (٢).

٥ - للعرف العلاقة $f: aH \rightarrow bH$ بالشكل التالي: أيا كان $h \in H$ فإن $f(ah) = bh$ فنجد أن f تقابلاً لأنه أيا كان $h_1, h_2 \in H$ فإن

$$ah_1 = ah_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2 \Leftrightarrow bh_1 = bh_2 \Leftrightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$$

ليكن $y \in bH$ علئذ يوجد $h \in H$ بحيث $y = bh$ وبما أن $ah \in aH$ فإن $f(ah) = bh = y$ مما سبق نجد أن f تقابلاً وبالتالي $CardaH = CardbH$ وبما أن $e \in H$ فإن $eH = H$ وبالتالي

$$CardaH = CardbH = CardH$$

٦ - لنفرض أن aH زمرة جزئية من G علئذ $e \in aH$ وبما أن $e \in eH$ نجد أن $aH \cap eH \neq \emptyset$ وحسب (٣) نستنتج أن $aH = eH = H$

لنفرض أن $a \in H$ علئذ حسب (٢) فإن $aH = H$ وبالتالي aH زمرة جزئية من G .

٧ - نتركه للقارئ.

٨ - إن العلاقة $\varphi: M_r \rightarrow M_r$ المعرفة بالشكل: أيا كان $Ha \in M_r$ فإن

$$\varphi(Ha) = a^{-1}H$$

تشكل تقابلاً، لأنه أيا كان $Ha, Hb \in M_r$ فإن

$$Ha = Hb \Leftrightarrow H = aHa^{-1} \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow ba^{-1}H = H \Leftrightarrow a^{-1}H = b^{-1}H \Leftrightarrow \varphi(Ha) = \varphi(Hb)$$

ليكن $bH \in M_1$ عندئذ $b^{-1} \in G$ ومنه

$$\varphi(Hb^{-1}) = (b^{-1})^{-1}H = bH \text{ وأن } Hb^{-1} \in M_1$$

٩- ينتج مباشرة من الخاصتين (١) و (٣) ومن أن $G = \bigcup_{a \in G} aH$

ملاحظة.

المبرهنة السابقة صحيحة من أجل المرافقات اليمينية.

تعريف.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G نسمي $CardM_1$ حيث M_1 مجموعة

المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G بدليل H في G ويرمز له $(G:H)$.

وحسب المبرهنة السابقة فإن $(G:H) = CardM_1 = CardM_2$

كذلك نسمي $CardG$ بمرتبة الزمرة G ونرمز لها بالرمز $(G:1)$.

ينتج من هذا التعريف أن $(G:G) = 1$ وأن $(G:\{e\}) = (G:1)$.

سوف نورد الآن واحدة من المبرهنات الأساسية والهامة للزمر المنتهية والتي أثبتها

لاغرانج Lagrange عام ١٧٧٠ وعدت لأكثر من مئتي عام أهم مبرهنات نظرية

الزمر.

مبرهنة ٢-٣-٢. (مبرهنة لاغرانج ١٧٧٠).

لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G . عندئذ: $(G:1) = (G:H)(H:1)$.

أي أن مرتبة أية زمرة جزئية من G تقسم مرتبة الزمرة G . كذلك، دليل أية زمرة

جزئية من G يقسم مرتبة الزمرة G .

البرهان.

لنفرض أن $a_1H, a_2H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية

H في G . و بما أن المجموعة

$$M_1 = \{a_iH: 1 \leq i \leq n\}$$

تشكل تجزئة للزمرة G فإن

$$G = a_1 H \cup a_2 H \cup \dots \cup a_n H$$

ومنه

$$(G:1) = Card a_1 H + Card a_2 H + \dots + Card a_n H$$

وبما أن $Card a_1 H = Card H$ نجد أن $(G:1) = n \cdot Card H$ أي أن

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

ملاحظة.

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح. ويعد *Paolo - Ruffini* أول من أورد مثلاً
يثبت صحة ذلك في عام ١٧٩٩.
مبرهنة ٣-٣-٢.

لتكن G زمرة و H, K زمراً جزئياً من G بحيث $K \subseteq H$. إذا كان دليلان من
الأدلة الثلاثة التالية $(G:K)$ ، $(G:H)$ ، $(H:K)$ منتهياً عندئذ:

$$(G:K) = (G:H)(H:K)$$

البرهان.

لنفرض أن اثنين من الأدلة $(G:K)$ ، $(G:H)$ ، $(H:K)$ منتهياً. عندئذ تكون جميع
الأدلة السابقة منتهية. ولنفرض أن $(G:H) = n$ وأن

$$\{x_i H: x_i \in G; 1 \leq i \leq n\}$$

مجموعة كل المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في G . ولنفرض
أيضاً $(H:K) = m$ وأن

$$\{y_j K: y_j \in H; 1 \leq j \leq m\}$$

مجموعة كل المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية K في H . كذلك، لنفرض
أن M_1 مجموعة كل المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية K في G وأن

$$M = \{x_i y_j K: 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$$

من الواضح أن $M \subseteq M_1$ لأن كل عنصر من M هو مرافقة يسارية للزمرة الجزئية

تمارين محلولة (٢)

١. لتكن n, k, m أعداداً صحيحة موجبة. ولنفرض أن m يقسم k و k يقسم n .

أثبت أن زمرة جزئية من $U_m(n)$.

الحل.

بما أن m يقسم k و k يقسم n يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $k = sm$ و $n = tk$ ومنه $n = tsm$ ، أي أن m يقسم n . بما أن كلا من m و k قواسم للمعدد n فإنه حسب التمهيدية (٢-١-١) كلا من $U_k(n)$ و $U_m(n)$ زمرة جزئية من $U(n)$. وبالتالي يكفي كي تكون $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$ أن نبرهن $U_k(n) \subseteq U_m(n)$.
ليكن $y \in U_k(n)$ عندئذ $y \in U(n)$ و يحقق $y \equiv 1 \pmod{k}$ وبالتالي يوجد $\alpha \in \mathbb{Z}$ بحيث $y = \alpha k + 1$ ومنه $y = \alpha sm + 1$ أي أن $y \equiv 1 \pmod{m}$ وبالتالي $y \in U_m(n)$. وهذا يبين لنا أن $U_k(n) \subseteq U_m(n)$ أي أن $U_k(n)$ زمرة جزئية من $U_m(n)$.

٢. لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . عندئذ أيا كان $a \in G$ فإن:

- أ- المجموعة aHa^{-1} زمرة جزئية من G تسمى الزمرة المرافقة للزمرة H .
- ب- إذا كانت الزمرة H تبديلية فإن الزمرة aHa^{-1} أيضاً تكون تبديلية.

الحل.

أ- واضح أن $aHa^{-1} \neq \emptyset$. ليكن $x, y \in aHa^{-1}$ عندئذ يوجد $h_1, h_2 \in H$ بحيث $x = ah_1a^{-1}$ و $y = ah_2a^{-1}$ ومنه

$$xy^{-1} = (ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1}) = (ah_1a^{-1})(ah_2^{-1}a^{-1}) = ah_1h_2^{-1}a^{-1}$$

وبما أن H زمرة جزئية فإن $h_1h_2^{-1} \in H$ وبالتالي $ah_1h_2^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$.

ب- واضح أنه إذا كانت H تبديلية فإن $xy = yx$ وذلك أياً

كان $x, y \in aHa^{-1}$.

٣. لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . إن المجموعة

$$C(H) = \{x : x \in G; \quad xh = hx: \quad \forall h \in H\}$$

تشكل زمرة جزئية من G تسمى ממركز الزمرة H في G .

الحل.

واضح أن $C(H) \neq \emptyset$ لأن $e \in C(H)$. ليكن $x, y \in C(H)$ عندئذ: أيضاً كان $h \in H$ فإن $xh = hx$ و $yh = hy$ ومنه $h(y^{-1}x) = (hy^{-1})x = hxy^{-1}$ وبالتالي

$$(xy^{-1})h = x(y^{-1}h) = x(hy^{-1}) = (xh)y^{-1} = (hx)y^{-1} = h(xy^{-1})$$

وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} \in C(H)$. أي أن $C(H)$ زمرة جزئية من G .

٤. لنفرض أن $H = \{x : x \in U(20); \quad x \equiv 1 \pmod{3}\}$. هل H زمرة جزئية

من الزمرة $U(20)$ ؟

الحل.

لدينا $U(20) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ وأن $H = \{1, 7, 13, 19\}$. نلاحظ أن $13 \in H$

بينما $13 \cdot 13 \notin H$. وبالتالي H ليست زمرة جزئية من $U(20)$.

٥. لتكن G زمرة تبديلية و $n \in \mathbb{Z}$. أثبت أن المجموعة

$$K = \{x : x \in G; x^n = e\}$$

الحل.

واضح أن المجموعة K غير خالية. ليكن $x, y \in G$ عندئذ

$$(xy^{-1})^n = x^n (y^{-1})^n = x^n (y^n)^{-1} = e$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة K زمرة جزئية من G .

٦. لتكن S مجموعة غير خالية مزودة بعملية تجميعية (.) تحقق قانون الاختصار

من اليمين واليسار، (أي أنه أياً كان $x, y, z \in S$ بحيث $xy = xz$ أو $yx = zx$ فإن $y = z$) ولنفرض أنه أياً كان $a \in S$ فإن المجموعة $\{a^k : k = 1, 2, \dots\}$ منتهية.

أثبت أن $(S, .)$ زمرة.

الحل.

ليكن $a \in S$. بما أن المجموعة $\{a^k : k = 1, 2, \dots\}$ منتهية يوجد $n, m \geq 1$ بحيث $n \neq m$ وأن $a^n = a^m$. لنفرض أن $m > n$ عندهذاً $a^m = aa^n$ وحسب قانون الاختصار فإن $a^{m-n+1} = aa$. لنفرض أن $r(a) = m - n + 1 > 1$ ومنه أياً كان $x \in S$ فإن $aa^{r(a)-1}x = a^{r(a)}x = ax$ وبالتالي $a^{r(a)-1}x = x$. بشكل مشابه نجد أن $xa^{r(a)-1} = x$ وهذا يبين لنا أن $a^{r(a)-1} = e$ هو عنصر حيادي في S وهذا الحيادي وحيد. إذا كان $r(a) = 2$ عندهذاً $a^2 = a = e$ أي أن $a = a^{-1}$. إذا كان $r(a) > 2$ عندهذاً $a^{r(a)-2}a = e$ أي أن $a^{r(a)-2}$ مقلوب للعنصر a . مما سبق نجد أن $(S, \cdot)$ زمرة. هـ

تمارين (٢)

- ١- انقل العبارات التالية من الزمرة الضربية إلى الزمرة الجمعية.
 - $a^2 b^3$
 - $a^{-2} (b^{-1} c)^2$
 - $(ab^2)^{-3} c^2 = e$
- ٢- لتكن G زمرة و $a, b \in G$ وليكن $n \in \mathbb{Z}$. أثبت أن $(a^{-1} b a)^n = a^{-1} b^n a$.
- ٣- أوجد مقلوب العنصر $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ في $GL(2, \mathbb{Z}_{11})$.
- ٤- ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أثبت أن الزمرة $U(n)$ تحوي عنصرين على الأقل يحققان $x^2 = 1$.
- ٥- لتكن G زمرة تبديلية و $a, b \in G$. أثبت أنه أيما كان العدد الصحيح n فإن $(ab)^n = a^n b^n$.
- ٦- أثبت أن الشرط اللازم و الكافي كي تكون الزمرة G تبديلية هو أن يتحقق الشرط التالي: أيما كان $a, b \in G$ فإن $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$.
- ٧- أثبت أن الزمرة G تكون تبديلية في كل من الحالات التالية:
 - $\forall a, b, c \in G: ab = ca \Rightarrow b = c$
 - $\forall a, h \in G: (ab)^2 = a^2 b^2$
 - $\forall a \in G: a^2 = e$
- ٨- أثبت أن المجموعة $\{1, 2, 3\}$ لا تشكل زمرة بالنسبة إلى لعملية الضرب بالمقاس 4. بينما المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ هي زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 5.
- ٩- لتكن G زمرة. أثبت أن $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C(a)$.
- ١٠- لتكن G زمرة و $a \in G$. أثبت أن $C(a) = C(a^{-1})$.

١١- عين كلاً من الزمر التالية: $U_{10}(30)$, $U_5(30)$, $U_5(20)$, $U_4(20)$.

١٢- في الزمرة $G = CL(2, R)$ أوجد $C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $C\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $Z(G)$.

١٣- أثبت أنه إذا كانت الزمرة G تبديلية فإن $Z(G) = G$.

١٤- لتكن G زمرة و $a \in G$. أثبت أن للزمرة $\langle a \rangle$ هي زمرة جزئية من $C(a)$.

١٥- لتكن G زمرة تبديلية وليكن n عدد صحيح موجب. أثبت أن المجموعة

$$G^n = \{g^n : g \in G\}$$

١٦- لتكن G زمرة تبديلية وليكن n عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن المجموعة

$$H = \{a : a \in G; (ag)^n = g^n; \forall g \in G\}$$

تشكل زمرة جزئية من G .

١٧- ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة

الجزئية $H = nZ$ في Z .

١٨- أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H = 3Z$ في Z .

١٩- أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة $H = \{1, 11\}$ في الزمرة $U(30)$.

٢٠- هل تشكل المجموعة $H = \{a + bi : a, b \in R, ab \geq 0\}$ زمرة جزئية من

زمرة الأعداد العقدية بالنسبة إلى عملية جمع الأعداد العقدية؟

٢١- هل تشكل المجموعة $H = \{a + bi : a, b \in R, a^2 + b^2 = 1\}$ زمرة

جزئية من زمرة الأعداد العقدية بالنسبة إلى عملية ضرب الأعداد العقدية؟

الفصل الثالث

الزمرة الدوارة

في هذا الفصل سوف نتعرف على الزمرة الدوارة واختباراتها ونتعرف أيضا على خواصها الهامة. لأجل ذلك لابد لنا في البداية من التعرف إلى بعض المفاهيم الأساسية.

١-٣. الزمرة الدوارة.

تمهيدية ١-٣-١.

لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية وغير خالية من G . القضايا التالية صحيحة:

١- تقاطع جميع الزمر الجزئية من G التي كل منها يحوي S هو زمرة جزئية من G تحوي S نرمز لها $\langle S \rangle$.

٢- $\langle S \rangle$ أصغر زمرة جزئية من G تحوي S .

٣- $\langle S \rangle$ عنصر أصغري في مجموعة الزمر الجزئية من G والتي كل منها يحوي S .

البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ.

تعريف.

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G . نسمي الزمرة $\langle S \rangle$ الزمرة المولدة بالمجموعة S ، ونسمي عناصر S مجموعة مولدات الزمرة $\langle S \rangle$. إذا كانت المجموعة S منتهية عندئذ نقول إن الزمرة $\langle S \rangle$ منتهية التوليد. وفي الحالة المعاكسة، نقول إن الزمرة $\langle S \rangle$ غير منتهية التوليد. وإذا كانت $S = \{a\}$ حيث $a \in G$ فإن

$$\langle S \rangle = \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

٤- الزمرة G غير منتهية.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). ليكن $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث $n \neq m$. ولنفرض جدلاً أن $a^n = a^m$ عندئذ

يكون $\phi(n) = \phi(m)$ ولكون التطبيق ϕ متبايناً ينتج أن $n = m$ وهذا يناقض الفرض. إذاً $a^n \neq a^m$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). واضح.

(٣) $\Leftrightarrow$ (٤). إن الشرط (٣) يبين لنا أن التطبيق ϕ متباين ولكونه عامراً حسب التمهيدية (٣-١-٤) نجد أن ϕ تقابل وبالتالي تكون $\text{Card}Z = \text{Card}G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة G غير منتهية.

(٤) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض جدلاً أن التطبيق ϕ غير متباين عندئذ يوجد $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث $n \neq m$ وأن $\phi(n) = \phi(m)$ أي أن $a^n = a^m$. لنفرض أن $n > m$ عندئذ $n - m > 0$. بما أن $a^{n-m} = a^0 = e$ فإن المجموعة

$$S = \{k : k \in \mathbb{N}^*; a^k = e\}$$

غير خالية، وبالتالي فهي تحوي عنصراً أصغر وليكن t . إن $a^t = e$. لبرهن في هذه

الحالة أن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\}$.

واضح أن $\{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\} \subseteq G$.

ليكن $x \in G$ عندئذ $x = a^s$ حيث $s \in \mathbb{Z}$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $s = qt + r$ وأن $0 \leq r < t$ ومنه

$$x = a^s = a^{qt+r} = a^{qt} a^r = (a^t)^q a^r = a^r$$

أي أن $x \in \{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\}$ وهكذا نجد أن $G \subseteq \{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\}$. مما سبق

نجد أن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{t-1}\}$ أي أن الزمرة G منتهية وهذا يناقض الفرض.

وهكذا فإن التطبيق ϕ متباين.

نتيجة.

ينتج من المبرهنة السابقة أن كل زمرة دوارة وغير منتهية تكون قابلة للعد.

المبرهنة الأخيرة أوضحت لنا متى تكون الزمرة الدوارة غير منتهية، وهذا يبين لنا أنه إذا لم تتحقق شروط المبرهنة الأخيرة، فإن الزمرة الدوارة تكون منتهية. وفي هذه الحالة يتبادر إلى الذهن ما هي عناصر هذه الزمرة. المبرهنة التالية تجيب عن هذا التساؤل.

مبرهنة ٣-١-٦.

لتكن G زمرة دوارة مولدة بالعنصر $a \in G$. أي $G = \langle a \rangle$. القضايا التالية متكافئة:
١- الزمرة G منتهية.

٢- يوجد في Z عناصر n, m بحيث $n \neq m$ وأن $a^n = a^m$.

٣- يوجد في N^* عنصر مثل k يحقق $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$ وهذه العناصر مختلفة مثلثي مثلثي.

لنبرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). ليكن $n, m \in Z$ بحيث $n \neq m$ وأن $a^n = a^m$. لنفرض أن $n > m$ عندئذ $n - m > 0$. وبما أن $a^{n-m} = e$ فإن المجموعة

$$S = \{t : t \in N^*; a^t = e\}$$

غير خالية وبالتالي فهي تحوي عنصراً أصغر وليكن k . إن $a^k = e$. لنبرهن أن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$.

واضح أن $\{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\} \subseteq G$.

ليكن $y \in G$ عندئذ $y = a^s$ حيث $s \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $s = qk + r$ وأن $0 \leq r < k$ ومنه $a^s = (a^k)^q a^r = a^r$ أي $a^s = a^{qk+r} = a^{qk} a^r = (a^k)^q a^r = a^r$

أن $x \in \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$ وهكذا نجد أن $G \subseteq \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$. مما سبق نجد أن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$.

لنفرض جدلاً أنه يوجد في G عناصر a^i, a^j تحقق $a^i = a^j$ وأن $i \neq j$. لنفرض أن $i > j$ عندئذ $0 < i - j < k$ وأن $a^{i-j} = e$ وهذا يناقض كون k أصغر عدد صحيح

موجب من أجله $e = a^k$. وهكذا، نجد أن جميع عناصر G مختلفة مثلي مثلي.

(٣) $\Leftarrow$ (١). واضح.

تعريف. لتكن G زمرة و $g \in G$ نسمي أصغر عدد صحيح موجب n من أجله $e = g^n$ بمرتبة العنصر g ونرمز له $o(g)$ ، ونقول في هذه الحالة إن العنصر g ذو مرتبة منتهية أو محدودة. ونقول عن العنصر g إنه ذو مرتبة غير منتهية إذا كان $e \neq g^n$ وذلك أيًا كان $n \in \mathbb{N}^*$ ، ونعبر عن ذلك $o(g) = \infty$.

ينتج من التعريف أنه لإيجاد مرتبة العنصر g من الزمرة G يكفي حساب متتالية الجداءات $g, g^2, g^3, \dots$ حتى نصل إلى عنصر الوحدة للزمرة G لأول مرة، ويكون في هذه الحالة الأس مساوياً لمرتبة العنصر g . وإذا لم نحصل على عنصر الوحدة، عندئذ يكون العنصر g ذا مرتبة غير منتهية.

مثال.

لنأخذ الزمرة

$$U(15) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقياس 15. لإيجاد مرتبة العنصر 7 نقوم بحساب متتالية الجداءات $7, 7^2, 7^3, \dots$ فنجد أن

$$7^4 = 1, 7^3 = 13, 7^2 = 4, 7^1 = 7$$

ومنه $o(7) = 4$. كذلك لإيجاد مرتبة العنصر 11 لدينا $11^1 = 11, 11^2 = 1$. إذاً $o(11) = 2$. بشكل مشابه نجد أن $o(4) = 2$ وأن $o(2) = 4$ وأيضاً $o(14) = 2, o(13) = 4, o(8) = 4, o(1) = 1$.

مثال.

في الزمرة

$$Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

بالنسبة إلى عملية الجمع بالمقياس 10. لإيجاد مرتبة العنصر 2 نقوم بحساب متتالية العناصر $2, 2.2, 3.2, \dots$ فنجد أن

$$5.2 = 0, 4.2 = 8, 3.2 = 6, 2.2 = 4, 1.2 = 2$$

ومنه تكون $o(2) = 5$. بطريقة مشابهة نجد أن

$$o(0) = 1, o(7) = 10, o(5) = 2, o(6) = 5$$

مثال.

في زمرة الأعداد الصحيحة Z نجد أن كل عنصر من Z مغاير للصفر مرتبته غير منتهية لأنه، أيًا كان $a \in Z$ فإن كل عنصر من العناصر $a, 2a, 3a, \dots$ هو عنصر مغاير للصفر.

بعض الخواص لمرتبة العنصر نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٣-١-٧.

لتكن G زمرة و $a \in G$ مرتبته n . القضايا التالية صحيحة:

$$١- \text{أيًا كان العدد الصحيح } s \text{ حيث } 1 \leq s \leq n \text{ فإن } o(a^s) = o(a^{n-s})$$

$$٢- \text{إذا وجد } k \in Z \text{ بحيث } a^k = e \text{ فإن } n \text{ يقسم } k.$$

$$٣- \text{أيًا كان العدد الصحيح } t \text{ الذي يقسم } n \text{ فإن } o(a^{\frac{n}{t}}) = t$$

$$٤- \text{إذا كانت } G = \langle a \rangle \text{ فإن } G = (G:1) = n$$

البرهان.

$$١- \text{ بما أن } o(a) = n \text{ فإن } a^n = e \text{ ومنه } a^{n-s} = a^{-s} \text{ وهذا يبين لنا أن}$$

$$o(a^s) = o(a^{-s}) = o(a^{n-s})$$

$$٢- \text{ ليكن } k \in Z \text{ بحيث } a^k = e. \text{ حسب خوارزمية القسمة يوجد } q, r \in Z \text{ بحيث}$$

$$k = qn + r \text{ وأن } 0 \leq r < n. \text{ للفرض أن } r \neq 0 \text{ علنئذ}$$

$$a^k = a^{qn+r} = a^{qn} a^r = (a^n)^q a^r = a^r$$

$$\text{وهكذا نجد } a^r = a^k = e \text{ وأن } 0 < r < n \text{ وهذا يناقض كون } o(a) = n. \text{ مما سبق نجد}$$

$$\text{أن } r = 0 \text{ وبالتالي } k = qn, \text{ أي أن } n \text{ يقسم } k.$$

$$٣- \text{ ليكن } t \in Z \text{ بحيث أن } t \text{ يقسم } n. \text{ علنئذ } a^{\frac{n}{t}} = a^{\frac{n}{t}t} = e. \text{ ليكن } \beta \in Z \text{ بحيث}$$

$\beta < t$ ويحقق $(a^t)^\beta = e$ علئذ فإن $a^{\frac{n}{t}\beta} = e$ وأن $\frac{n}{t}\beta < n$ وهذا يناقض كون

$$o(a^t) = t \text{ مما سبق نجد } o(a^{\frac{n}{t}}) = t$$

٤ - لنفرض أن $G = \langle a \rangle$ وأن $(G:1) = m$. حسب المبرهنة (٦-١-٣) فإن

$$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\}$$

وحيث إن m هو أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^m = e$. وهذا يبين لنا

$$m = o(a) = n$$

مثال.

في الزمرة $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ بالنسبة إلى عملية الجمع بالمقاس 6 نجد أن كلاً من العنصرين 1, 5 مولداً للزمرة Z_6 . أي $\langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = Z_6$ بينما العنصر 2 ليس مولداً لهذه الزمرة. لأن $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\} \neq Z_6$.

المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي تكون عناصر الزمرة الدورية المنتهية مولدات لها:

مبرهنة ٦-١-٣.

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية مرتبتها n مولدة بالعنصر a . الشروط التالية متكافئة:

$$١ - G = \langle a^k \rangle \text{ حيث } k \in Z$$

$$٢ - \gcd(n, k) = 1 \text{ أي أن العنصرين } k \text{ و } n \text{ أوليان فيما بيدهما.}$$

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن $G = \langle a^k \rangle$ حيث $k \in Z$. ولنفرض جـدلاً أن

$\gcd(n, k) = d > 1$ علئذ يوجد $s, t \in Z$ بحيث $k = dt$ و $n = ds$. وبفرض أن

مرتبة العنصر a^k تساوي m نجد $s' = e = (a^{dt})^s = (a^{ds})^t = (a^k)^s$ حيث إن

$m \leq s < n$. وهذا يبين لنا أن العنصر a^k ليس مولداً للزمرة G وهذا يناقض

كون $G = \langle a^k \rangle$. مما سبق نستنتج أن $\gcd(n, k) = 1$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن $\gcd(n, k) = 1$ عندئذ يوجد $u, v \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = un + vk$ ومنه

$$a = a^{un+vk} = (a^n)^u (a^k)^v \in \langle a^k \rangle$$

وهذا يبين لنا أنه أياً كان $s \leq n$ فإن s مما سبق نجد أن $G = \langle a^k \rangle$.
من أجل $G = Z_n$ و $a = 1$ فإن المبرهنة الأخيرة تعطينا النتيجة التالية:
نتيجة.

في الزمرة Z_n كل عنصر $k \in Z_n$ يكون مولداً للزمرة Z_n عندما وفقط عندما $\gcd(n, k) = 1$.

مثال.

لنأخذ الزمرة $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. وجدنا سابقاً أن $Z_8 = \langle 1 \rangle = \langle 7 \rangle$. من جهة أخرى وباعتماد على النتيجة الأخيرة، وبما أن $\gcd(3, 8) = 1$ و $\gcd(5, 8) = 1$ فإن $Z_8 = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$.

المبرهنة التالية تبين لنا عدد جميع الزمر الجزئية في زمرة دوارة منتهية وكيفية إيجاد هذه الزمر الجزئية.
مبرهنة ٣-١-٩.

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر a . القضايا التالية صحيحة:

- ١- أي زمرة جزئية من G تكون دوارة.
- ٢- إذا كانت الزمرة G منتهية ومرتبته n فإن مرتبة أي زمرة جزئية من G تقسم n .
- ٣- إذا كانت الزمرة G منتهية ومرتبته n وكان $k \in \mathbb{Z}$ يقسم n فإنه توجد في G زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها k وهي $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$.

البرهان.

- ١- لتكن H زمرة جزئية من G . إذا كانت $H = \{e\}$ عندئذ $H = \langle e \rangle$ وبالتالي الزمرة H دوارة. لنفرض أن $H \neq \{e\}$ عندئذ يوجد $x \in H$ بحيث $x \neq e$ وبما أن $x \in G$ فإن $x = a^t$ حيث $t \in \mathbb{Z}$ ومنه فإن المجموعة

$$\mathfrak{I} = \{s : s \in N^* : a^s \in H\}$$

غير خالية. وبالتالي فإن المجموعة $\mathfrak{I}$ تحوي عنصراً أصغر، وليكن k . وهكذا فإن $a^k \in H$. وهذا يبين لنا أن $\langle a^k \rangle \subseteq H$. ليكن $y \in H$ علئذ $y \in G$ ومنه يوجد $m \in Z$ بحيث $y = a^m$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $m = qk + r$ وأن $0 \leq r < k$. لافترض أن $r \neq 0$ علئذ

$$a^m = a^{qk+r} = a^{qk} a^r = (a^k)^q a^r$$

وهكذا نجد أن $a^r = a^m a^{-qk} \in H$ وهذا يناقض كون k أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^k \in H$. إذاً $r = 0$ وهذا يبين لنا أن $m = qk$ وبالتالي $y = a^m = a^{qk} = (a^k)^q \in \langle a^k \rangle$ مما سبق نجد أن $H = \langle a^k \rangle$ أي أن الزمرة الجزئية H دوارة.

٢ - إذا كانت الزمرة G منتهية فإن مرتبة أية زمرة جزئية من G تقسم مرتبة الزمرة G وذلك حسب مبرهنة لاغرانج.

٣ - ليكن $k \in Z$ بحيث k يقسم n علئذ $n = ks$ حيث $s \in Z$ ومنه $(a^{\frac{n}{k}})^k = a^n = e$ ومنه $a^{\frac{n}{k}} \in H$ وهذا يبين لنا أنه أياً كان $t \in Z$ بحيث $t < k$ فإن $(a^{\frac{n}{k}})^t \neq e$ وان $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$ زمرة جزئية من G مرتبتها k . لتكن H زمرة جزئية من G مرتبتها k ولنبهرن أن $H = \langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$. بما أن الزمرة G دوارة، فإنه حسب (١) تكون الزمرة الجزئية H أيضاً دوارة وبالتالي $H = \langle a^m \rangle$ حيث m أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^m \in H$ ، وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $n = qm + r$ ، وإن $0 \leq r < m$. إن $r = 0$ لأنه إذا كان $r \neq 0$ علئذ $a^r = a^n a^{-qm} \in H$ وبالتالي $a^r = a^n a^{-qm} \in H$ حيث $0 < r < m$ وهذا غير ممكن. إذن $r = 0$ وبالتالي $n = qm$ وهكذا فإن

$$k = (H : 1) = (\langle a^m \rangle : 1) = \frac{n}{m}$$

مما سبق نجد أن $m = \frac{n}{k}$ وبالتالي $H = \langle a^m \rangle = \langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$.

لنورد الآن المثال التالي كتطبيق على المبرهنة الأخيرة.

مثال.

لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها 30. بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة فإن كل زمرة جزئية من G هي من الشكل $\langle a^m \rangle$ حيث m قاسم للعدد 30. بالإضافة لذلك، إذا كان $k \in \mathbb{Z}$ قاسماً للعدد 30 فإنه توجد في G زمرة جزئية وحيدة مرتبتها k وهي بالتحديد $\langle a^{\frac{30}{k}} \rangle$. لنوجد الآن حسب ما ورد أعلاه جميع الزمر الجزئية من G ومرتبتها وهذه الزمر هي:

الزمرة	$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^{29}\}$	ومرتبتها 30.
الزمرة	$\langle a^2 \rangle = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, \dots, a^{28}\}$	ومرتبتها 15.
الزمرة	$\langle a^3 \rangle = \{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}, \dots, a^{27}\}$	ومرتبتها 10.
الزمرة	$\langle a^5 \rangle = \{e, a^5, a^{10}, a^{15}, a^{20}, a^{25}\}$	ومرتبتها 6.
الزمرة	$\langle a^6 \rangle = \{e, a^6, a^{12}, a^{18}, a^{24}\}$	ومرتبتها 5.
الزمرة	$\langle a^{10} \rangle = \{e, a^{10}, a^{20}\}$	ومرتبتها 3.
الزمرة	$\langle a^{15} \rangle = \{e, a^{15}\}$	ومرتبتها 2.
الزمرة	$\langle a \rangle = \{e\}$	ومرتبتها 1.

ملاحظة.

في المبرهنة الأخيرة إذا كانت $G = \mathbb{Z}_n$ و $a = 1$ فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية:

نتيجة.

ليكن $k \in \mathbb{Z}$ بحيث k يقسم n . عندئذ الزمرة $\langle \frac{n}{k} \rangle$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة في $\mathbb{Z}_n$ والتي مرتبتها k .

تطبيق.

لنوجد جميع الزمر الجزئية في $\mathbb{Z}_{30}$ ومرتبتها. حسب النتيجة الورد أعلاه، فإن جميع الزمر الجزئية $\mathbb{Z}_{30}$ ومرتبتها هي:

- الزمرة $\langle 1 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 29\}$ ومرتبته 30.
- الزمرة $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 28\}$ ومرتبته 15.
- الزمرة $\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 27\}$ ومرتبته 10.
- الزمرة $\langle 5 \rangle = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ ومرتبته 6.
- الزمرة $\langle 6 \rangle = \{0, 6, 12, 18, 24\}$ ومرتبته 5.
- الزمرة $\langle 10 \rangle = \{0, 10, 20\}$ ومرتبته 3.
- الزمرة $\langle 15 \rangle = \{0, 15\}$ ومرتبته 2.
- الزمرة $\langle 30 \rangle = \{0\}$ ومرتبته 1.

المبرهنة التالية تعد واحدة من اختبارات الزمرة الدوارة:

مبرهنة ١٠-١-٣.

كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.

البرهان.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها العدد الأولي p . إن $\langle e \rangle \neq G$ ومنه يوجد في G عنصر $a \neq e$ بحيث $a \neq e$. لنأخذ الزمرة الجزئية $\langle a \rangle$ ، بما أن $\langle a \rangle \neq \langle e \rangle$ فإن $G = \langle a \rangle$. لأنه إذا كانت $G \neq \langle a \rangle$ فإن مرتبة الزمرة الجزئية $\langle a \rangle$ تقسم مرتبة الزمرة G (حسب مبرهنة لاغرانج)، وهذا غير ممكن لأن العدد p أولي. مما سبق نجد أن $G = \langle a \rangle$ والزمرة G تكون دوارة.

تمهيدية ١١-١-٣.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها n . القضايا التالية صحيحة:

١- أي $a \in G$ فإن $a^n = e$.

٢- أي $a \in G$ فإن $o(a)$ تقسم n .

البرهان.

١- ليكن $a \in G$ مرتبته k عندئذ $a^k = e$. لنأخذ الزمرة الجزئية $\langle a \rangle$. و بما أن

$$\langle \langle a \rangle : 1 \rangle = o(a) = k$$

وحسب مبرهنة لاغرانج، فإن العدد k يقسم n ومنه يوجد $s \in Z$ بحيث $n = ks$ ومنه
 $a^n = (a^k)^s = e^s = e$

٢ - ليكن $a \in G$ مرتبته k . علنئذ فإن الزمرة الجزئية $\langle a \rangle$ مرتبتها k وحسب لاغرانج
 فإن k يقسم n .

وجدنا أنه إذا كانت الزمرة G مولدة بالعنصر a ، فإن كل عنصر من G يكتب
 بالشكل a^n حيث $n \in Z$. وهنا يحق لنا التساؤل ما هي عناصر الزمرة G إذا كانت
 $G = \langle a \rangle$ حيث S مجموعة غير خالية من G . المبرهنة التالية تعطينا الإجابة عن هذا
 التساؤل.

مبرهنة ١٢-١-٣.

لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية غير خالية من G . ونفرض أن B هي
 مجموعة الجداءات المنتهية من الشكل $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ بحيث x_i أو x_i^{-1} ينتمي إلى B
 لأجل $1 \leq i \leq n$ علنئذ:

$$1 - B = \langle S \rangle$$

$$2 - y \in \langle S \rangle \text{ عندما فقط عندما } y = x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} x_{i_3}^{k_3} \dots x_{i_l}^{k_l} \text{ حيث } x_{i_j} \text{ وأن } k_j \in Z, 1 \leq j \leq l$$

البرهان.

١ - واضح أن $B \neq \Phi$. ليكن

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m \in B$$

علنئذ

$$(x_1 x_2 \dots x_n)(y_1 y_2 \dots y_m)^{-1} = x_1 x_2 \dots x_n y_m^{-1} y_{m-1}^{-1} \dots y_2^{-1} y_1^{-1} \in B$$

مما سبق نجد أن B زمرة جزئية من G وتحتوي S لأنه أياً كان $x \in S$ فإن $x \in B$.

ومنه $B \subseteq \langle S \rangle$. من جهة أخرى، لتكن H زمرة جزئية من G تحتوي S علنئذ

$B \subseteq H$ لأنه أياً كان $z \in B$ فإن $z = z_1 z_2 z_3 \dots z_k$ حيث $z_i \in S$ و $1 \leq i \leq k$

وبما أن $S \subseteq H$ فإن $z = z_1 z_2 z_3 \dots z_k \in H$ وهذا يبين لنا أن $B \subseteq \langle S \rangle$.

مما سبق نجد أن $B = \langle S \rangle$.

٢ - لزوم الشرط. ليكن $y \in \langle S \rangle$. حسب (١) نجد أن $y = y_1 y_2 y_3 \dots y_t$

حيث $y_i \in S$ و $1 \leq i \leq t$.

كفاية الشرط. واضح.

ملاحظة.

إن المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حال كون المجموعة S غير منتهية.

واحد من الأسئلة الهامة المتعلقة بالزمر منتهية التوليد هو السؤال التالي: هل كل زمرة جزئية من زمرة منتهية التوليد تكون منتهية التوليد؟ الإجابة في الحالة العامة هو أنه ليس بالضرورة أن تكون الزمر الجزئية لزمرة منتهية التوليد هي زمرة منتهية التوليد. وهنا يبرز سؤال آخر متى يكون ذلك صحيحا. المبرهنة التالية تعطينا الإجابة عن ذلك التساؤل.

مبرهنة ١-٣-١٣.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . إذا كان $(G:H)$ منته عتد الشرط

التالية متكافئة:

١ - الزمرة G منتهية التوليد.

٢ - الزمرة الجزئية H منتهية التوليد.

البرهان.

لنفرض أن $(G:H) = n$ عتد فإن عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H

في G يساوي n . لنفرض أن هذه المرافقات هي $a_1 H, a_2 H, \dots, a_n H$ حيث

$a_1, a_2, \dots, a_n \in G$. لنفرض أن $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة G منتهية التوليد، عتد توجد مجموعة منتهية

$X \subseteq G$ بحيث $\langle X \rangle = G$. لنفرض أن $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ فنجد أن المجموعة

X^{-1} منتهية وبالتالي تكون المجموعة $\mathcal{I} = X \cup X^{-1}$ منتهية. ومنه أيا كان $x \in \mathcal{I}$ و

أيا كان $y \in S$ فإن $yx \in G = \bigcup_{i=1}^n a_i H$ وبالتالي يوجد دليل $1 \leq j \leq n$ بحيث

$xy \in a_j H$ ومنه يوجد $h_{yx} \in H$ بحيث $yx = a_j h_{yx}$ أي أن $yx = a_j^{-1} yx$. لنأخذ المجموعة

$$T = \{h_{yx} : y \in S, x \in \mathfrak{I}\}$$

لنجد أن المجموعة T منتهية لأن كلا من $S, \mathfrak{I}$ مجموعات منتهية. للبرهن على أن $H = \langle T \rangle$ ، ليكن $h \in H$ وبما أن $h \in G$ فإن $h = x_1 x_2 \cdots x_m$ حيث $x_i \in X$ و $1 \leq i \leq m$. لنعرف متتالية العناصر (t_i) من عناصر المجموعة T بالشكل $t_1 = e$ وأن $x_i t_i H = t_{i+1} H$ وذلك أياً كان $i \leq m$ فلنجد أن

$$\begin{aligned} t_{m+1} H &= x_m t_m H = x_m x_{m-1} t_{m-1} H = x_m x_{m-1} x_{m-2} t_{m-2} H = \cdots = \\ &= x_m x_{m-1} x_{m-2} \cdots x_2 x_1 H = hH = H \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $t_{m+1} = e$ كما أن

$$h = t_1 x_1 (t_2^{-1} t_1) x_2 (t_3^{-1} t_2) x_3 \cdots (t_m^{-1} t_{m-1}) x_m t_m^{-1}$$

ومنه

$$h = (t_1 x_1 t_2^{-1}) (t_2 x_2 t_3^{-1}) (t_3 x_3 t_4^{-1}) \cdots (t_m x_m t_{m+1}^{-1})$$

والذي يمثل جداء منتهياً لعناصر من T . مما سبق نجد أن $H = \langle T \rangle$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن الزمرة الجزئية H منتهية التوليد، عندها توجد مجموعة منتهية $Y \subseteq H$ بحيث $H = \langle Y \rangle$ ومنه فإن $G = S.H$ (جداء مجموعات) لأنه وبما أن كلا من S, H مجموعات جزئية من G فإن $SH \subseteq G$. من جهة أخرى، ليكن $g \in G$ وبما أن $G = \bigcup_{i=1}^n a_i H$ يوجد دليل $1 \leq j \leq n$ بحيث $g \in a_j H$ وبالتالي

$$g \in a_j H \subseteq SH \text{ أي أن } G \subseteq SH \text{ ومنه } G = SH.$$

لنبرهن على أن $G = \langle S \cup Y \rangle$. بما أن $S \cup Y \subseteq G$ فإن $\langle S \cup Y \rangle \subseteq G$. ليكن $x \in G$ عندها $x = sh$ حيث $h \in H, s \in S$ ومنه

$$s \in S \subseteq S \cup Y \subseteq \langle S \cup Y \rangle, \quad h \in H = \langle Y \rangle \subseteq \langle S \cup Y \rangle$$

أي أن $x = sh \in \langle S \cup Y \rangle$ وبالتالي $G \subseteq \langle S \cup Y \rangle$. مما سبق نجد أن $G = \langle S \cup Y \rangle$.

وبما أن كلا من المجموعتين S, Y منتهية فإن المجموعة $S \cup Y$ هي مجموعة منتهية وهذا يبين لنا أن الزمرة G منتهية التوليد.

خاصة أخرى من خواص الزمر منتهية التوليد نورددها في المبرهنة التالية:

مبرهنة ٣-١-١٤.

لتكن G زمرة منتهية التوليد. عندئذ G لا يمكن أن تساوي اجتماع لسلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا تساوي G .
البرهان.

لتكن X مجموعة جزئية منتهية من G وغير خالية ولنفرض أن $G = \langle X \rangle$ ولتكن

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$$

سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا تساوي G . ولنفرض أن

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \quad \text{عندئذ أيا كان } x \in X \text{ يوجد دليل } i_x \text{ بحيث } x \in H_{i_x} \text{، لنضع}$$

$$j = \max\{i_x : x \in X\}$$

عندئذ $\forall x \in X$ فإن $x \in H_j$ ومنه $X \subseteq H_j$ وبالتالي $G = \langle X \rangle \subseteq H_j \subset G$ أي أن

$$G = H_j \text{ وهذا غير ممكن.}$$

٣-٢. تطبيقات الزمرة الدوارة.

في عام ١٧٦٣ أوجد $L. Euler$ طريقة لإيجاد عدد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من n والأولية مع n . للتعرف إلى هذه الطريقة لابد لنا من التعريف التالي:

تعريف.

لنعرف التابع $\phi: N^* \rightarrow N^*$ بالشكل التالي: أياً كان $n \in N^*$ فإن $\phi(n) = 1$

عندما $n = 1$. إذا كان $n > 1$ فإن $\phi(n) = s$ حيث s هو عدد جميع الأعداد $k \in N^*$

حيث $k < n$ وأن $\gcd(n, k) = 1$. نسمي التابع ϕ تابع أولر.

تمارين محلولة (٣)

١ - لتكن G زمرة و $a, b \in G$ بحيث $o(a) = n$ و $o(b) = m$. علنذ:

أ - إذا كان $ab = ba$ و $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ فإن $o(ab) = \text{lcm}(n, m)$.

ب - إذا كان $ab = ba$ و $\gcd(n, m) = 1$ فإن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ وأن

$$o(ab) = o(a) \cdot o(b)$$

الحل.

أ - لنفرض أن $k = \text{lcm}(n, m)$ علنذ يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $k = sm$ و $k = tn$

ومنه $e = (ab)^k = a^k b^k = a^{sm} b^{tn} = e$ ولنفرض أن $o(ab) = \lambda$ علنذ $\lambda \leq k$ من جهة

أخرى، لدينا $e = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda$ ومنه $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ وهذا يبين لنا أن

λ يقبل القسمة على n و m في آن واحد، وبالتالي $\lambda \geq k$. مما سبق نجد أن $\lambda = k$

$$o(ab) = \lambda = \text{lcm}(n, m)$$

ب - لنفرض أن $ab = ba$ و $\gcd(n, m) = 1$. ليكن $y \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ ، ولنفرض أن

$o(y) = s$ علنذ $y^s = e$. بما أن $y \in \langle a \rangle$ علنذ فإن $y^n = e$ كذلك بما أن $y \in \langle b \rangle$

فإن $y^m = e$ وهذا يبين لنا أن s يقسم كلياً من n و m وبما أن $\gcd(n, m) = 1$ نجد

أن $s = 1$ وبالتالي $y = e$. أي أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$. وحسب (أ) فإن

$$o(ab) = \text{lcm}(n, m) = nm = o(a)o(b)$$

٢ - لتكن G زمرة منتهية. أثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب n يحقق $a^n = e$ وذلك

أياً كان $a \in G$.

الحل.

لنفرض أن $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ وأن $o(a_i) = n_i$ حيث $1 \leq i \leq k$. ولنفرض

أن $n = n_1 n_2 n_3 \dots n_k$. فلنجد أنه أيّاً كان $a \in G$ فإن $a^n = e$.

٣ - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G ، و ليكن $a \in G$. أثبت أنه إذا كانت الزمرة H دوارة فإن الزمرة aHa^{-1} أيضاً دوارة.
الحل.

إن aHa^{-1} زمرة جزئية من G . لنفرض أن $H = \langle h \rangle$ حيث $h \in H$ ولبرهن أن $\langle aha^{-1} \rangle = aHa^{-1}$. بما أن $aha^{-1} \in aHa^{-1}$ فإن $\langle aha^{-1} \rangle \subseteq aHa^{-1}$. ليكن

$y \in aHa^{-1}$ عندها $y = ah^m a^{-1}$ حيث $m \in \mathbb{Z}$ ومنه

$$y = ah^m a^{-1} = (aha^{-1})^m \in \langle aha^{-1} \rangle$$

مما سبق نجد أن $aHa^{-1} \subseteq \langle aha^{-1} \rangle$ وبالتالي فإن $aHa^{-1} = \langle aha^{-1} \rangle$.
٤ - لتكن G زمرة تبديلية، و p عدداً أولياً. أثبت أن المجموعة

$$H = \{x : x \in G, \quad o(x) = p^n : n \in \mathbb{N}\}$$

زمرة جزئية من G .

الحل.

واضح أن $e \in H$ لأن $o(e) = 1 = p^0$. ليكن $x, y \in H$ ولنفرض أن $o(x) = p^n$ و $o(y) = p^m$ حيث $n, m \in \mathbb{Z}$. لنفرض أن $n \geq m$. بما أن $o(y^{-1}) = p^m$ فإن $(xy^{-1})^{p^n} = x^{p^n} (y^{-1})^{p^n} = e$ وهذا يبين لنا أن $o(xy^{-1}) \leq p^n$ ، وبما أن $o(xy^{-1})$ يقسم p^n فإن $o(xy^{-1}) = p^s$ حيث $1 \leq s \leq n$ وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} \in H$.

٥ - لتكن G زمرة تبديلية. أثبت أن المجموعة $K = \{x : x \in G, \quad o(x) \in \mathbb{N}^*\}$ زمرة جزئية من G . لسمي الزمرة K زمرة الفتل. وتكون G زمرة فتل، إذا كان كل عنصر G ذا مرتبة منتهية.

الحل.

واضح أن $e \in K$ لأن $o(e) = 1$. ليكن $x, y \in K$ ولنفرض أن $o(x) = n$ و $o(y) = m$ حيث $n, m \in \mathbb{Z}$. لنفرض أن $n \geq m$. بما أن $o(y^{-1}) = m$ فإن $(xy^{-1})^{nm} = (x^n)^m [(y^{-1})^m]^n = e$ وهذا يبين لنا أن $o(xy^{-1}) \leq nm$ ومنه $xy^{-1} \in K$. أي أن K زمرة جزئية من G .

٦ - لتكن G زمرة تبديلية تحوي عنصرين مرتبة كل منهما 2. أثبت أن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 4.
الحل.

ليكن $a, b \in G$ بحيث $o(a) = o(b) = 2$. لنأخذ المجموعة $K = \{e, a, b, ab\}$. فلنجد أنها زمرة جزئية من G مرتبتها 4. لأنه بالاعتماد على الجدول التالي:

	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ba	e	a
ab	ab	b	a	e

نجد أن المجموعة K مغلقة بالنسبة إلى العملية المعرفة على G .

٧ - لتكن G زمرة و $a, b \in G$ بحيث $ab = ba$. لنفرض أن $o(a) = n$ و $o(b) = m$.
إذا كان $\gcd(n, m) = 1$ عندئذ

$$\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle = \{a^i b^j : 0 \leq i < n, 0 \leq j < m\}$$

الحل.

لنبرهن في البداية أن $\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle$. بما أن $a, b \in \langle a, b \rangle$ فإن $ab \in \langle a, b \rangle$ وبما أن $\langle a, b \rangle$ أصغر زمرة جزئية في G تحوي ab نجد أن $\langle a, b \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. من جهة أخرى، بما أن $\gcd(n, m) = 1$ يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = nt + ms$ ومنه

$$a = a^1 = a^{nt+ms} = a^{nt} a^{ms} = a^{nt} = a^{ms} = a^{ms} b^{ms} = (ab)^{ms} \in \langle ab \rangle$$
بشكل مشابه نجد أن $b \in \langle a, b \rangle$ ومنه $\langle a, b \rangle = \langle ab \rangle$. مما سبق نجد $\langle a, b \rangle = \langle ab \rangle$.
يلتج من تعريف الزمرة الدوارة أن

$$\langle a, b \rangle = \{a^i b^j : 0 \leq i < n, 0 \leq j < m\}$$

٨ - لتكن G زمرة و $a \in G$ مرتبة n . عندئذ:

$$\langle a^k \rangle = \langle a^{\gcd(n, k)} \rangle \quad -1$$

ب-
$$o(a^k) = \frac{n}{\gcd(n, k)}$$

ت- $\langle a^r \rangle = \langle a^s \rangle$ عندما وفقط عندما $\gcd(n, r) = \gcd(n, s)$

الحل.

أ - بما أن k مضاعف للعدد $\gcd(n, k)$ فإن $\langle a^k \rangle \subseteq \langle a^{\gcd(n, k)} \rangle$ من جهة أخرى،

يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $\gcd(n, k) = sn + tk$ ومنه

$$a^{\gcd(n, k)} = a^{sn+tk} = a^{sn} a^{tk} = a^{tk} = (a^k)^t \in \langle a^k \rangle$$

وهذا يبين لنا أن $\langle a^{\gcd(n, k)} \rangle \subseteq \langle a^k \rangle$ مما سبق نجد أن $\langle a^k \rangle = \langle a^{\gcd(n, k)} \rangle$.

ب - بالاعتماد على المبرهنة (٣-١-٧) وحسب (١) نجد أن

$$o(a^k) = o(a^{\gcd(n, k)}) = \frac{n}{\gcd(n, k)}$$

ت - لنفرض أن $\langle a^r \rangle = \langle a^s \rangle$ وحسب (٢) نجد

$$\frac{n}{\gcd(n, r)} = o(a^r) = o(a^s) = \frac{n}{\gcd(n, s)}$$

وهذا يبين لنا أن $\gcd(n, r) = \gcd(n, s)$. لنفرض أن $\gcd(n, r) = \gcd(n, s)$ عندها

$$\text{حسب (١) فإن } \langle a^r \rangle = \langle a^{\gcd(n, r)} \rangle = \langle a^{\gcd(n, s)} \rangle = \langle a^s \rangle$$

٩ - لتكن G زمرة و $a, b \in G$. لنفرض أن $o(a) = 3$ و $o(b) = 2$ وأن $ba^2 = ab$.

صلدك:

أ - المجموعة $D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ زمرة جزئية في G .

ب- $D_3 = \langle a, b \rangle$

ت- $D_3 = \{a^i b^j : 0 \leq i < 3 \quad 0 \leq j < 2\}$

الحل.

أ - بما أن المجموعة D_3 منتهية يكفي لإثبات أنها زمرة جزئية من G أن نبرهن

أنها مغلقة بالنسبة إلى العملية المعرفة على G ، وهذا محقق من خلال الجدول التالي:

	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

- ب - بما أن D_3 زمرة وأن $a, b \in G$ نجد أن $\langle a, b \rangle \subseteq D_3$. الاحتواء المعاكس واضح. مما سبق نجد أن $D_3 = \langle a, b \rangle$.
- ت - ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة (٣-١-١٢) .

تمارين (٣)

- ١- أوجد مرتبة كل من الزمر التالية: $U(20)$ ، $U(12)$ ، $U(10)$ و Z_{12} .
- ٢- أوجد مرتبة كل عنصر من عناصر الزمر الواردة في التمرين (١).
- ٣- أثبت أن $U(14) = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$ وأن $U(14) = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle$ و $Z_{10} = \langle 3 \rangle$.
- ٤- أوجد جميع عناصر الزمرة الجزئية $\langle 20 \rangle$ في Z_{30} .
- ٥- أثبت أنه من أجل أي عدد صحيح موجب n توجد زمرة دوارة مرتبتها n .
- ٦- أثبت أنه إذا كان $k \in U(20)$ فإن $\langle k \rangle \neq U(20)$.
- ٧- لتكن G زمرة و $a \in G$. أثبت أن $o(a) = o(a^{-1})$.
- ٨- لتكن G زمرة و $a \in G$ مرتبته 15. أوجد مراتب العناصر التالية في G :
 a^3, a^6, a^9, a^{12} -
 a^2, a^4, a^8, a^{14} -
 a^5, a^{10} -
- ٩- أثبت أن الزمرة $U(15)$ تحوي 6 زمر جزئية دوارة. أوجد هذه الزمر.
- ١٠- في الزمرة $U(40)$ أوجد زمرة جزئية دوارة مرتبتها 4 وأخرى ليست دوارة مرتبتها 4 أيضاً ثم أوجد المرافقات اليسارية لهذه الزمر.
- ١١- أوجد جميع المولدات للزمر Z_8 ، Z_6 ، Z_{20} .
- ١٢- أوجد عناصر الزمر الجزئية $\langle 20 \rangle$ ، $\langle 10 \rangle$ في Z_{30} .
- ١٣- أوجد عناصر الزمر الجزئية $\langle 3 \rangle$ ، $\langle 7 \rangle$ في $U(20)$.
- ١٤- لتكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة بحيث $o(a) = 24$. أوجد جميع مولدات الزمرة الجزئية التي مرتبتها 8.
- ١٥- لتكن G زمرة تبديلية ولتكن
 $H = \{a : a \in G; o(a) \text{ divides } 12\}$
 أثبت أن H زمرة جزئية من G .

- ١٦- ليكن $n, m \in \mathbb{Z}$ وأن $k = \text{lcm}(n, m)$. أثبت أن $\langle k \rangle = \langle n \rangle \cap \langle m \rangle$.
- ١٧- أثبت أن الزمرة $U(2^n)$ حيث $n \geq 3$ ليست دارة.
- ١٨- لتكن G زمرة و $a, b \in G$. أثبت أن $o(ab) = o(ba)$.
- ٢٠- لتكن G زمرة و $a, b \in G$. إذا كان $a, b \in Z(G)$ أثبت أن $ab = ba$.



مثال.

إن التبديل α للمجموعة $\{1,2,3,4\}$ معرف على الشكل:

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 3, \quad \alpha(3) = 1, \quad \alpha(4) = 4$$

هناك طريقة أفضل للتعبير عن التبديل α وهي:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

في هذه الحالة القيم $\alpha(j)$ تقع مباشرة تحت القيم j وذلك أيًا كان $j \in \{1,2,3,4\}$.

بشكل مشابه، التبديل β للمجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ المعطى بالشكل:

$$\beta(1) = 5, \beta(2) = 3, \beta(3) = 1, \beta(4) = 6, \beta(5) = 2, \beta(6) = 4$$

يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

إن تركيب التباديل يتم إيجاداه من اليمين إلى اليسار بأن نتحرك من أعلى إلى أسفل ثم

من جديد من أعلى إلى أسفل. كما في المثال التالي:

مثال.

لنأخذ التبدلين γ, σ المعرفين بالشكل:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ولنعين التبديل $\gamma \circ \sigma$ فنجد أن:

$$\gamma \circ \sigma(2) = \gamma(\sigma(2)) = \gamma(4) = 2, \quad \gamma \circ \sigma(1) = \gamma(\sigma(1)) = \gamma(2) = 4$$

بالطريقة نفسها يتعين لدينا التبديل $\gamma \circ \sigma$ ويكون:

$$\gamma \circ \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

لنورد الآن بعض الأمثلة:

أمثلة ٤-١-٢.

١. الزمرة التناظرية S_3 . لنفرض أن S_3 مجموعة كل التتابع المتباينة للمجموعة $\{1,2,3\}$. إن المجموعة S_3 مع عملية تركيب التطبيقات تشكل زمرة مرتبتها 6. وعناصر هذه الزمرة هي:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, & \alpha &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, & \beta &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \gamma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, & \delta &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, & \mu &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نلاحظ أن $\mu = \alpha^2 \circ \gamma$, $\delta = \alpha \circ \gamma$, $\beta = \alpha^2$ كما أن

$$\gamma \circ \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \alpha \circ \gamma$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة التناظرية S_3 ليست تبديلية.

٢. الزمرة التناظرية S_n .

لتكن $n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ وعناصرها من الشكل:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \end{bmatrix}$$

لوجود مرتبة الزمرة S_n . يوجد لدينا n خيار لتعيين $\alpha(1)$. عندما يتعين $\alpha(1)$ يبقى لدينا $(n-1)$ إمكانية لتعيين $\alpha(2)$. وبمعرفة $\alpha(2)$ تبقى لدينا $(n-2)$ إمكانية لمعرفة $\alpha(3)$ وهكذا، بالمتابعة على هذا المنوال نرى أن الزمرة S_n تحوي $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ عنصراً. كما أن الزمرة S_n حيث $n \geq 3$ ليست تبديلية، وذلك كما وجدنا في المثال (١) أن الزمرة S_3 ليست تبديلية.

كذلك الزمرة S_4 ليست تبديلية لأنه لو أخذنا

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\circ \cdot \alpha \circ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \beta \circ \alpha$$

تأمل المربع.

لنفرض أن $D_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. سوف نربط كل حركة في D_4 بتبديل مواقع كل من رؤوس المربع الأربعة. لنحدد مواقع الرؤوس الأربعة ولنعتبر هذه المواقع هي المواقع البدائية (قبل الحركة). بعد الدوران (مع عقارب الساعة) 90° .

فنهصل على التبديل $\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. بينما لو كان الدوران حول المحور الأفقي

فنهصل على التبديل $\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. إن العنصرين ρ, ϕ يولدان زمرة التباديل

للمجموعة D_4 .

الترميز الدوري.

يوجد ترميز آخر يستخدم لأجل تبديل محددة يسمى الترميز الدوري وقد عرفه لأول مرة الرياضي الفرنسي كوشي عام ١٨١٥. لتورد بعض الأمثلة على هذا الترميز.

مثال.

لنأخذ التبديل

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

بالاعتماد على الترميز الدوري يمكن أن نكتب β على الشكل $\beta = (4, 6)(3, 1, 5, 2)$ أو على الشكل $(2, 3, 1, 5)(6, 4)$.

تعريف.

كل عبارة من الشكل $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m)$ تسمى دوراً طوله m أو m -دور.

ضرب الأدوار.

نعرف ضرب الأدوار بأن نضع في ذهنا أن الدور هو تبديل يثبت كل عنصر غير ظاهر في الدور. نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

أمثلة ٤-١-٢.

١. الزمرة التناظرية S_3 . لنفرض أن S_3 مجموعة كل التتابع المتباينة للمجموعة $\{1,2,3\}$. إن المجموعة S_3 مع عملية تركيب التطبيقات تشكل زمرة مرتبتها 6. وعناصر هذه الزمرة هي:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, & \alpha &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, & \beta &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \gamma &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, & \delta &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, & \mu &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نلاحظ أن $\mu = \alpha^2 \circ \gamma$, $\delta = \alpha \circ \gamma$, $\beta = \alpha^2$ كما أن

$$\gamma \circ \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \alpha \circ \gamma$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة التناظرية S_3 ليست تبديلية.

٢. الزمرة التناظرية S_n .

لتكن $n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ وعناصرها من الشكل:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \end{bmatrix}$$

لنوجد مرتبة الزمرة S_n . يوجد لدينا n خيار لتعيين $\alpha(1)$. عندما يتعين $\alpha(1)$ يبقى لدينا $(n-1)$ إمكانية لتعيين $\alpha(2)$. وبمعرفة $\alpha(2)$ تبقى لدينا $(n-2)$ إمكانية لمعرفة $\alpha(3)$ وهكذا، بالمتابعة على هذا المنوال نرى أن الزمرة S_n تحوي $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ عنصراً. كما أن الزمرة S_n حيث $n \geq 3$ ليست تبديلية، وذلك كما وجدنا في المثال (١) أن الزمرة S_3 ليست تبديلية.

كذلك الزمرة S_4 ليست تبديلية لأنه لو أخذنا

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\circ \cdot \alpha \circ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \beta \circ \alpha$$

تتألف المربع.

لنفرض أن $D_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. سوف نربط كل حركة في D_4 بتبديل مواقع كل من رؤوس المربع الأربعة. لتحديد مواقع الرؤوس الأربعة ولنعبر هذه المواقع هي المواقع البدائية (قبل الحركة). بعد الدوران (مع عقارب الساعة) 90° .

فلنحصل على التبديل $\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ بينما لو كان الدوران حول المحور الأفقي

فلنحصل على التبديل $\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ إن العنصرين ρ, ϕ بولدان زمرة التباديل

للمجموعة D_4 .

الترميز الدوري.

يوجد ترميز آخر يستخدم لأجل تبديلات محددة يسمى الترميز الدوري وقد عرفه لأول مرة الرياضي الفرنسي كوشي عام ١٨١٥. لنورد بعض الأمثلة على هذا الترميز.

مثال.

لنأخذ التبديل

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

بالاعتماد على الترميز الدوري يمكن أن نكتب β على الشكل $\beta = (4, 6)(3, 1, 5, 2)$ أو على الشكل $\beta = (2, 3, 1, 5)(6, 4)$.

تعريف.

كل عبارة من الشكل $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m)$ تسمى دوراً طوله m أو m -دور.

ضرب الأعداد.

نعرف ضرب الأعداد بأن نضع في ذهننا أن الدور هو تبديل يثبت كل عنصر غير ظاهر في الدور. نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال.

الدور (4,6) في S_6 يعبر عن التبدل $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. بهذه الطريقة يمكن أن

نضرب الأتوار بأن نعددها كتبدل معطاة بشكل سهمي.

مثال.

في S_8 لناخذ التبدلين

$$\beta = (1,2,3,7)(6,4,8)(5) \text{ و } \alpha = (1,3)(2,7)(4,5,6)(8)$$

بالا مكان إهمال الفواصل بين العناصر، أي بالمكان التعبير عن α, β بالشكل

$$\beta = (1237)(648)(5) \text{ و } \alpha = (13)(27)(456)(8)$$

إن جداء التبدلين $\alpha\beta$ هو

$$\alpha \circ \beta = (13)(27)(456)(8)(1237)(648)(5)$$

ولكن من المرغوب به التعبير عن هذا التبدل بشكل أتوار منفصلة، أي أتوار مختلفة لا تحوي أعداداً مشتركة مع الأخذ بالحسبان أن تركيب التتابع من اليمين إلى اليسار وأن كل دور لا يحوي رمزاً ما فإنه يثبت ذلك الرمز. وهنا نبدأ مثلاً بالعدد 1 نبدأ من اليمين: نلاحظ إن (5) تثبت 1، وأن (648) تثبت 1، وأن (1237) ترسل 1 إلى 2، كما أن (8) تثبت 2، وأن (456) تثبت 2، وأن (27) ترسل 2 إلى 7، وأن (13) تثبت 7، وبالتالي نجد $\alpha \circ \beta = (17\cdots)$. لمعرفة بقية العناصر نعيد كامل العملية بدءاً من 7 فلنجد دور بعد آخر من اليمين إلى اليسار $3 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 7$. ومنه $\alpha \circ \beta = (173\cdots)$. وهكذا في النهاية

$$\alpha \circ \beta = (1732)(48)(56)$$

مثال.

في S_5 لناخذ التبدلين

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فلنجد أن $\alpha = (12)(3)(45)$ و $\beta = (153)(24)$. وبالتالي فإن

$$\alpha \circ \beta = (12)(3)(45)(153)(24) = (14)(253)$$

ملاحظات.

- في الترميز الدوري معظم الرياضيون لا يكتبون الأدوار التي لها مدخل واحد فقط. وفي هذه الحالة يمكن أن نفهم أن كل عنصر غير مكتوب يطبق على نفسه. فمثلاً التبديل $\alpha = (12)(3)(45)$ يمكن كتابته على الشكل $\alpha = (12)(45)$. وكذلك التبديل

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

يكتب على الشكل $\beta = (134)$.

- التبديل الواحدي يتألف فقط من أدوار كل منها ذو مدخل واحد ولهذا لا يمكن أن نحذف كل هذه الأدوار. وفي هذه الحالة يمكننا أن نكتب أي واحدة من هذه الأدوار. فمثلاً التبديل

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

يمكن التعبير عنه على الشكل $\varepsilon = (5)$ أو $\varepsilon = (1)$.

لنورد الآن عددا من المبرهنات حول التباديل والأدوار.

مبرهنة ٤-١-٣.

كل تبدل لمجموعة منتهية يكتب كدور أو جداء لأدوار منفصلة.

البرهان.

ليكن α تبدلاً للمجموعة $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. كي نكتب α على شكل أدوار منفصلة نختار عنصراً من A وليكن a_1 . لنضع

$$a_2 = \alpha(a_1), \quad a_3 = \alpha(\alpha(a_1)) = \alpha^2(a_1)$$

وهكذا حتى نصل إلى $a_{m+1} = \alpha^m(a_1)$ وذلك من أجل عدد ما m . إن العدد m موجود لأن المتتالية

$$a_1, \alpha(a_1), \alpha^2(a_1), \alpha^3(a_1), \dots$$

منتهية وذلك لأن المجموعة A منتهية. وبالتالي يوجد $i \neq j$ بحيث $\alpha^i(a_1) = \alpha^j(a_1)$. بفرض $i < j$ وأن $m = j - i$ فنجد أن $a_1 = \alpha^m(a_1)$. نعتبر عن هذه العلاقة بين $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ بالشكل $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \dots$ حيث النقاط الثلاث في النهاية تشير إلى أننا قد لا نكون استفدنا كل المجموعة A بهذه العملية. في هذه الحالة نختار عنصراً آخر b_1 من A غير ظاهر في الدور الأول و نتابع حتى نولد دوراً جديداً كما في السابق. أي نفرض $b_2 = \alpha(b_1)$ و $b_3 = \alpha^2(b_1)$ وهكذا حتى نصل إلى $b_1 = \alpha^k(b_1)$ من أجل عدد ما k . إن الدور الجديد الذي حصلنا عليه لن يحوي أي عنصر مشترك مع الدور الأول. لنفرض أنه يوجد عنصر مشترك بين الدورين السابقين، عندئذ يوجد i, j بحيث $\alpha^i(a_1) = \alpha^j(b_1)$ و $b_1 = \alpha^{j-i}(a_1)$ وبالتالي $b_1 = a_1$ حيث $1 \leq i \leq m$. وهذا يناقض طريقة اختيار العنصر b_1 . نتابع هذه العملية حتى ننهي جميع عناصر A . فنحصل بذلك على التبديل التالي:

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)(b_1, b_2, b_3, \dots, b_k) \dots (c_1, c_2, c_3, \dots, c_l)$$

وبهذه الطريقة نرى أن كل تبديل يمكن أن يكتب كجداء لأدوار منفصلة.
 المبرهنة التالية تعطينا واحدة من الخواص التي تتمتع بها الأدوار المنفصلة.

مبرهنة ٤-١-٤.

ليكن $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ و $\beta = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ دورين لا يملكان عناصر مشتركة. عندئذ: $\alpha\beta = \beta\alpha$.

البرهان.

من أجل عدم التخصيص، لنفرض أن α و β هما تبديلان للمجموعة

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$$

حيث إن c_i هي عناصر المجموعة S التي تبقى ثابتة من اليسار من خلال α و β .
 لنبرهن أن $\alpha\beta = \beta\alpha$. أي لنبرهن أولاً كان $x \in S$ فإن $\alpha\beta(x) = \beta\alpha(x)$. ليكن $x \in S$. نميز الحالات التالية:

- الحالة الأولى: $x \in \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$. لنفرض أن $x = a_i$ ، عندئذ

$$(\alpha\beta)(a_i) = \alpha(\beta(a_i)) = \alpha(a_{i+1}) = a_{i+1}$$

وذلك لأن β يثبت كل العناصر a_i حيث $1 \leq i \leq m$. (إن a_{i+1} يمثل a_i في الحالة $i = m$). كذلك

$$\alpha\beta = \beta\alpha \text{ أي أن } (\beta\alpha)(a_i) = \beta(\alpha(a_i)) = \beta(a_i) = a_{i+1}$$

- الحالة الثانية: $x \in \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ تعالج بطريقة الحالة الأولى نفسها.

- الحالة الثالثة: $x \in \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ وبما أن كلا من α و β يثبتان العناصر c_i نجد أن

$$(\beta\alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(x) = x \text{ وأن } (\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x) = x$$

وبهذا الشكل يتم المطلوب. ◊

ميزة أخرى من ميزات الترميز الدوري توضحه المبرهنة التالية:

مبرهنة ٤-١-٥.

مرتبة أي تبديل لمجموعة منتهية مكتوب بشكل أدوار منفصلة هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال الأدوار.
البرهان.

ليكن $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ دوراً طوله n . وليكن $k \leq n$ عندئذ:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)^k = (a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$$

وهذا يبين لنا أن الدور الذي طوله n مرتبته تساوي n . ليكن α و β دورين منفصلين طول كل منهما على الترتيب m, n ، وليكن k المضاعف المشترك الأصغر للعددين m, n . عندئذ كل من α^k و β^k هو التبديل المطابق ε . وبما أن كلا من α و β تبادليان لأنهما لا يحويان عناصر مشتركة فإن $\alpha^k \beta^k = \beta^k \alpha^k = \varepsilon$ ، وهذا يبين لنا أن مرتبة العنصر $\alpha\beta$ تقسم k . لنفرض أن مرتبة العنصر $\alpha\beta$ تساوي l عندئذ $(\alpha\beta)^l = \alpha^l \beta^l = \varepsilon$ ومنه $\alpha^l = \beta^{-l}$. وبما أن α و β لا يملكان عناصر مشتركة، فإن الشيء ذاته محقق لأجل α' و β^{-l} . أي أن كلا من α' و β^{-l} لا يملكان رموزاً مشتركة، وذلك لأن رفع الدور إلى قوة لن يعطينا رموزاً جديدة. إذا كان α' و β^{-l}

متساويين وليس بينهما رموز مشتركة فإن $\alpha' = \beta^{-1} \varepsilon$ لأن كل عنصر من α' يثبت من خلال β^{-1} والعكس أيضا صحيح. مما سبق نجد أن كلاً من m و n يقسمان t وهذا يبين لنا أن k هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين m و n ويقسم t أيضا. أي أن $t = k \cdot 0$.
تعريف.

كل تبديل من الشكل (ab) يسمى 2-دوراً.
مبرهنة ١-١-٦.

كل تبديل من S_n حيث $n > 1$ هو جداء مؤلف من 2-دور.
البرهان.

نلاحظ أن التبديل المطابق يمكن التعبير عنه بالشكل (12)(12)، وبالتالي فإن التبديل المطابق هو جداء مؤلف من 2-دور. وبالاعتماد على المبرهنة (١-١-٣) نجد أن كل تبديل يكتب على شكل جداء لأنوار منفصلة

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)(b_1, b_2, b_3, \dots, b_l) \dots (c_1, c_2, c_3, \dots, c_r)$$

وهذا الجداء يساوي

$$(a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \dots (a_1 a_2)(b_1 b_l)(b_1 b_{l-1}) \dots (b_1 b_2)(c_1 c_r)(c_1 c_{r-1}) \dots (c_1 c_2)$$

من خلال المثال التالي سوف نوضح كيفية كتابة كل دور كجداء مؤلف من 2-دور.
مثال.

$$(12345) = (15)(14)(13)(12)$$

$$(12345) = (54)(53)(25)(15)$$

$$(12345) = (21)(25)(24)(23)$$

$$(12345) = (54)(52)(21)(23)(13)$$

إن المثال السابق يوضح لنا أن تحليل أي تبديل إلى جداء مؤلف من 2-دور ليس وحيداً.

تمهيدية ٤-١-٧.

إذا كان $\varepsilon = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_r$ حيث β_1 عبارة عن 2- دور، عندها فإن r عدد زوجي.

البرهان.

واضح أن $r \neq 1$ وذلك لأن أي دور طوله 2 لن يكون تبديلاً مطابقاً. البرهان سنورده بالاستقراء على r . إذا كان $r = 2$ يتم المطلوب. من أجل $r > 2$ للفرض أن التمهيدية صحيحة من أجل أي عدد $k < r$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$. بما أن $(ij) = (ji)$ فإن الجداء $\beta_1 \beta_2$ يمكن التعبير عنه بأحد الأشكال التالية:

$$(ab)(ab) = \varepsilon$$

$$(ab)(ac) = (bc)(ab)$$

$$(ab)(cd) = (cd)(ab)$$

$$(ab)(bc) = (bc)(ac)$$

إذا تحققت الحالة الأولى عندئذ بإمكاننا حذف $\beta_1 \beta_2$ من الجداء الأصلي ويكون لدينا

$$\varepsilon = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_r$$

وحسب الفرض الاستقرائي يكون العدد $r-2$ زوجياً. في الحالات الثلاث المتبقية سوف نستبدل $\beta_1 \beta_2$ في الطرف الأيسر بما يساويه في الطرف الأيمن لنحصل على جداء جديد مؤلف من 2- دور فيه r حد ويساوي التبديل المطابق وفي هذه الحالة يصبح العدد الصحيح الأول a في 2- دور الثاني من الجداء بدلاً من الأول. نعيد الآن الإجراء السابق من أجل $\beta_1 \beta_2$ لنحصل:

- إما على جداء مؤلف من 2- دور فيه $r-2$ حد يساوي التطبيق المطابق، وحسب الفرض الاستقرائي يكون العدد $r-2$ زوجياً.

- أو على جداء جديد مؤلف من 2- دور فيه r حد لأجله يكون العدد الصحيح a في الـ 2- دور الثالث. بمتابعة العملية السابقة عدداً منتهياً من المرات نصل إلى الجداء $\beta_{r-1} \beta_r$. إن $\beta_{r-1} \beta_r$ هو بالتأكيد التبديل المطابق، لأنه إذا لم يكن $\beta_{r-1} \beta_r$ التبديل

المطابق فإننا نحصل على جداء مؤلف من 2-أدوار يحوي r حداً فيه العدد الصحيح α يقع في 2-دور الأخير وتبديل كهذا لن يثبت العدد α وهذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن $\beta_{r-1}\beta_r$ هو التبديل المطابق وهكذا، حسب الفرض الاستقرائي فإن 2- r هو عدد زوجي. هـ

مبرهنة ٤-١-٨.

إذا أمكن كتابة التبديل α كجداء لعدد زوجي من 2-دور عندئذ كل تركيب للتبديل α في جداء من 2-دور يجب أن يتألف من عدد زوجي. أي أنه إذا كان

$$\alpha = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_s \text{ و } \alpha = \beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_r$$

حيث β_i, γ_j كل منهما عبارة عن 2-دور، $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s$. فإن r و s كلاهما زوجي أو كلاهما فردي.

البرهان.

لنفرض أن

$$\alpha = \beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_r \text{ و } \alpha = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_s$$

حيث كل من β_i و γ_j عبارة عن 2-دور. عندئذ:

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_s = \beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_r$$

ومنه

$$\varepsilon = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_s\beta_r^{-1}\beta_{r-1}^{-1}\cdots\beta_1^{-1}$$

وبما أن كل 2-دور هو مقلوب لنفسه نجد أن

$$\varepsilon = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_s\beta_r\beta_{r-1}\cdots\beta_1$$

وحسب التمهيدية (٤-١-٧) فإن العدد $s+r$ هو عدد زوجي. ومنه r و s كلاهما

فردي أو كلاهما زوجي. هـ

تعريف.

نسمي كل تبديل يمكن كتابته كجداء لعدد زوجي من 2-دور تبديلاً زوجياً. ونسمي

كل تبديل يمكن كتابته كجداء لعدد فردي من 2-دور تبديلاً فردياً.

بالاعتماد على المبرهنتين (٦-١-٤) و (٨-١-٤) نجد أن كل تبديل إما أن يكون زوجياً أو يكون فردياً فقط. ولا يمكن أن يكون زوجياً وفردياً في آن واحد. انطلاقاً من هذه الحقيقة نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة ٩-١-٤.

مجموعة التباديل الزوجية في الزمرة S_n تشكل زمرة جزئية من S_n .
البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ. ◊

بعض التطبيقات على زمرة التباديل.
تعريف.

لتكن G زمرة التباديل للمجموعة S . وليكن $i \in S$. نسمي المجموعة

$$Stab_G(i) = \{\phi : \phi \in G, \phi(i) = i\}$$

مثبت النقطة i في G .

تمهيدية ١٠-١-٤.

لتكن G زمرة التباديل للمجموعة S . إن المجموعة $Stab_G(i)$ زمرة جزئية في G وذلك أياً كان $i \in S$.
البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ. ◊

تعريف.

لتكن G زمرة التباديل للمجموعة S . وليكن $s \in S$. نسمي المجموعة

$$orb_G(s) = \{\phi(s) : \phi \in G\}$$

مدار النقطة s بالنسبة إلى الزمرة G . واضح من التعريف أن $orb_G(s)$ هو مجموعة جزئية في S وذلك $\forall s \in S$.

لنورد المثال التالي بناءً على التعاريف السابقة.

مثال.

لنأخذ زمرة التباديل التالية:

$$G = \{(1), (132)(465)(78), (132)(465), (123)(456), (123)(458)(78), (78)\}$$

علتذ:

$$\begin{aligned} orb_G(1) &= \{1, 3, 2\} & Stab_G(1) &= \{(1), (78)\} \\ orb_G(2) &= \{2, 1, 3\} & Stab_G(2) &= \{(1), (78)\} \\ orb_G(4) &= \{4, 6, 5\} & Stab_G(4) &= \{(1), (78)\} \\ orb_G(7) &= \{7, 8\} & Stab_G(7) &= \{(1), (123)(465), (123)(456)\} \end{aligned}$$

لو أمعنا النظر في المثال السابق لوجدنا أن مرتبة الزمرة G تساوي إلى جداء مدار أي نقطة بمثبتها. لنورد تعميما لهذه الحقيقة من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-١-١١.

لتكن G زمرة التباديل لمجموعة ما S . علتذ $\forall i \in S$ فإن

$$(G : 1) = \text{Card } orb_G(i) \cdot (Stab_G(i) : 1)$$

البرهان.

حسب مبرهنة لاغرانج وبما أن $Stab_G(i)$ زمرة جزئية في G وذلك أيا كان $i \in S$

فإن

$$(G : Stab_G(i)) = \frac{(G : 1)}{(Stab_G(i) : 1)}$$

وبساوي عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $Stab_G(i)$ في G . ومنه يكفي لإثبات المبرهنة أن يتحقق $(G : Stab_G(i)) = \text{Card } orb_G(i)$. وهذا يتحقق إذا وجد تقابل

بين مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $Stab_G(i)$ والمجموعة $orb_G(i)$. لنفرض أن M_i هي مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $Stab_G(i)$ في G . ولنعرّف العلاقة $T : M_i \rightarrow orb_G(i)$ بالشكل التالي: أيا كان $\varphi \cdot Stab_G(i) \in M_i$ فإن $T(\varphi \cdot Stab_G(i)) = \varphi(i)$ فلجد أن العلاقة T معرفة جيداً (تطبيق) لأنه أيا كان :

$$f \cdot Stab_G(i), \varphi \cdot Stab_G(i) \in M_i$$

بحيث $f.Stab_G(i) = \varphi.Stab_G(i)$ فإنه حسب المبرهنة (٢-٣-١) نجد

$$\varphi(i) \in Stab_G(i) \text{ ومنه } f^{-1} \circ \varphi(i) = i \text{ وبالتالي } \varphi(i) = f(i) \text{ أي أن}$$

$$T(\varphi.Stab_G(i)) = T(f.Stab_G(i))$$

بطريقة مشابهة نبرهن على أن التطبيق T متباين. كذلك فإن T غامر لأنه أباً

كانت $j \in orb_G(i)$ يوجد $\alpha \in G$ بحيث $\alpha(i) = j$ وبالتالي $\alpha.Stab_G(i) \in M_1$ وهكذا

$$T(\alpha.Stab_G(i)) = \alpha(i) = j$$

٢-٤. زمرة القياس.

١ - القياس على مستقيم.

لنفرض أن $\mathcal{M}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و $S_{\mathcal{M}}$ زمرة التباديل للمجموعة $\mathcal{M}$. ليكن

$a, b \in \mathcal{M}$ ، نعلم أن القيمة المطلقة $|a - b|$ تمثل البعد (المسافة) بين النقطتين a, b .

سوف نرمز للمسافة بين النقطتين a, b بالرمز $d(a, b)$.

تمهيدية ١-٢-٤.

لتكن $S_{\mathcal{M}}$ زمرة التباديل للمجموعة $\mathcal{M}$ ولنأخذ المجموعة

$$I(\mathcal{M}) = \{\sigma : \sigma \in S_{\mathcal{M}}; d(x, y) = d(\sigma(x), \sigma(y)); \forall x, y \in \mathcal{M}\}$$

إن المجموعة $I(\mathcal{M})$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $S_{\mathcal{M}}$.

البرهان.

إن المجموعة $I(\mathcal{M})$ غير خالية، لأن التطبيق المطابق $I_{\mathcal{M}}$ على المجموعة $\mathcal{M}$ هو

عنصر من $S_{\mathcal{M}}$ ويحقق أباً كان $a, b \in \mathcal{M}$ فإن

$$d(I_{\mathcal{M}}(a), I_{\mathcal{M}}(b)) = d(a, b)$$

أي أن $I_{\mathcal{M}} \in I(\mathcal{M})$.

ليكن $\sigma \in I(\mathcal{M})$ ولنبرهن على أن $\sigma^{-1} \in I(\mathcal{M})$. بما أن $\sigma \in S(\mathcal{M})$ ولكون $S_{\mathcal{M}}$ زمرة

فإن $\sigma^{-1} \in S_{\mathcal{M}}$ كما أن σ^{-1} يحقق

$$d(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)) = d(\sigma(\sigma^{-1}(a)), \sigma(\sigma^{-1}(b))) = d(a, b)$$

وذلك أباً كان $a, b \in \mathcal{M}$ أي أن $\sigma^{-1} \in I(\mathcal{M})$.

ليكن $\sigma, \tau \in I(\mathcal{R})$ عندئذ $\tau^{-1} \in I(\mathcal{R})$ وأن

$$\begin{aligned} d(\sigma \circ \tau^{-1}(a), \sigma \circ \tau^{-1}(b)) &= d(\sigma(\tau^{-1}(a)), \sigma(\tau^{-1}(b))) = \\ &= d(\tau^{-1}(a), \tau^{-1}(b)) = d(a, b) \end{aligned}$$

وذلك أياً كان $a, b \in \mathcal{R}$ أي أن $\sigma \circ \tau^{-1} \in I(\mathcal{R})$. مما سبق نجد أن $I(\mathcal{R})$ زمرة جزئية من الزمرة $S_{\mathcal{R}}$.
تعريف.

نسمى الزمرة $I(\mathcal{R})$ زمرة القياس على $\mathcal{R}$.

لندرس الآن واحدة من الحالات التي يتساوى فيها أي عنصرين من $I(\mathcal{R})$ وذلك من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ٢-٢-٤.

ليكن $\sigma, \tau \in I(\mathcal{R})$. إذا وجد $a, b \in \mathcal{R}$ بحيث $a \neq b$ وأن

$$\sigma(a) = \tau(a), \sigma(b) = \tau(b)$$

عندئذ $\sigma = \tau$.

البرهان.

ليكن $c \in \mathcal{R}$ عندئذ

$$d(c, a) = d(\sigma(c), \sigma(a)) = |\sigma(c) - \sigma(a)|$$

$$d(c, a) = d(\tau(c), \tau(a)) = |\tau(c) - \tau(a)|$$

ومنه $|\sigma(c) - \sigma(a)| = |\tau(c) - \tau(a)|$ أي أن

$$\sigma(c) - \sigma(a) = \pm(\tau(c) - \tau(a))$$

ولنفرض أن $\sigma(c) \neq \tau(c)$.

إذا كان $\sigma(c) - \sigma(a) = +(\tau(c) - \tau(a))$ عندئذ بما أن $\sigma(a) = \tau(a)$ وأن

$$\sigma(c) - \sigma(a) = \tau(c) - \tau(a)$$

$$\sigma(c) - \tau(c) = \sigma(a) - \tau(a) = \sigma(a) - \sigma(a) = 0$$

أي أن $\sigma(c) = \tau(c)$ وهذا مرفوض فرضاً. ومنه فإن

$$\sigma(c) - \sigma(a) = -(\tau(c) - \tau(a))$$

وبالتالي

$$\sigma(c) + \tau(c) = \sigma(a) + \tau(a) = \sigma(a) + \sigma(a) = 2\sigma(a)$$

بشكل مشابه نجد أن $\sigma(c) + \tau(c) = 2\sigma(b)$ ومنه فإن $2\sigma(a) = 2\sigma(b)$ أي أن $\sigma(a) = \sigma(b)$ وبما أن σ متباين فإن $a = b$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $\sigma(c) = \tau(c)$ وذلك أيا كان $c \in \mathbb{R}$ أي أن $\sigma = \tau$.

٢ - القياس في المستوي.

لنرمز للمستوي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بالرمز $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ولنكن

$$A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B) \in E$$

نعرف المسافة بين النقطتين A, B في المستوي E بالشكل

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

والتي سوف نرمز لها $d(A, B)$.

لنفرض أن S_E هي زمرة التباديل للمجموعة E . ولندرس التمهيدية التالية:

تمهيدية ٤-٢-٣.

لنكن S_E زمرة التباديل للمجموعة E ولنأخذ المجموعة

$$I(E) = \{\sigma : \sigma \in S_E; \quad d(A, B) = d(\sigma(A), \sigma(B)); \quad \forall A, B \in E\}$$

إن المجموعة $I(E)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة S_E .

البرهان.

إن المجموعة $I(E)$ غير خالية، لأن التطبيق المطابق I_E على المجموعة E هو

عنصر من الزمرة S_E ويحقق $d(I_E(A), I_E(B)) = d(A, B)$ وذلك أيضاً

كان $A, B \in E$. أي أن $I_E \in I(E)$. ليكن $\tau \in I(E)$ ولنبرهن على أن $\tau^{-1} \in I(E)$.

بما أن $\tau \in S_E$ ولكون S_E زمرة فإن $\tau^{-1} \in S_E$ ، بالإضافة لذلك فإن

$$d(\tau^{-1}(A), \tau^{-1}(B)) = d(\tau(\tau^{-1}(A)), \tau(\tau^{-1}(B))) = d(A, B)$$

وذلك أياً كان $A, B \in E$ ، أي أن $\tau^{-1} \in I(E)$. ليكن $\sigma, \tau \in I(E)$ عندها

$$d(\sigma \circ \tau^{-1}(A), \sigma \circ \tau^{-1}(B)) = d(\sigma(\tau^{-1}(A)), \sigma(\tau^{-1}(B))) = \\ = d(\tau^{-1}(A), \tau^{-1}(B)) = d(A, B)$$

وذلك أياً كان $A, B \in E$. أي أن $\sigma \circ \tau^{-1} \in I(E)$. مما سبق نجد أن زمرة جزئية من الزمرة S_E .

تعريف.

نسمي الزمرة $I(E)$ زمرة القياس على $E = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$.

هدفنا الآن هو دراسة إحدى الحالات التي يتساوى فيها أي عنصرين من $I(E)$ لأجل ذلك لابد لنا من التمهيدية التالية:

تمهيدية ٤-٢-٤.

ليكن $\sigma \in I(E)$ و $A, B, C \in E$ ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة. ولنفرض أن

$$\sigma(A) = A', \sigma(B) = B', \sigma(C) = C'$$

عندئذ المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

البرهان.

بما أن

$$d(A', B') = d(\sigma(A), \sigma(B)) = d(A, B)$$

$$d(A', C') = d(\sigma(A), \sigma(C)) = d(A, C)$$

$$d(B', C') = d(\sigma(B), \sigma(C)) = d(B, C)$$

نجد أن أضلاع المثلثين ABC و $A'B'C'$ متساوية وبالتالي فإن المثلثين السابقين متشابهان.

تمهيدية ٥-٢-٤.

ليكن $\sigma, \tau \in S_E$. إذا وجدت ثلاثة نقاط $A, B, C \in E$ ليست على استقامة واحدة تحقق

$$\sigma(A) = \tau(A), \sigma(B) = \tau(B), \sigma(C) = \tau(C)$$

عندئذ $\sigma = \tau$.

البرهان.

لنكن $D \in E$ نقطة اختيارية من المستوي E . ولنفرض أن

$$d(A, D) = a, \quad d(B, D) = b, \quad d(C, D) = c$$

وأن

$$\sigma(A) = \tau(A) = A', \sigma(B) = \tau(B) = B', \sigma(C) = \tau(C) = C'$$

عندئذ يكون لدينا

$$d(A', \sigma(D)) = d(\sigma(A), \sigma(D)) = a = d(A', \tau(A))$$

$$d(B', \sigma(D)) = d(\sigma(B), \sigma(D)) = b = d(B', \tau(B))$$

$$d(C', \sigma(D)) = d(\sigma(C), \sigma(D)) = c = d(C', \tau(C))$$

وهندسيا هذا يتحقق فقط عندما $\sigma(D) = \tau(D)$ وذلك بالاعتماد على التمهيدية (٤-٢-٢)

٤.٠

المبرهنة التالية تصف لنا طبيعة عناصر الزمرة $I(E)$.

مبرهنة ٤-٢-٦.

كل قياس في المستوى الإقليدي يمكن التعبير عنه كجداء العكاس و دوران

وانسحاب.

البرهان.

ليكن $\sigma \in I(E)$. ولتكن $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1)$ ثلاث نقاط في المستوى

E ليست على استقامة واحدة.

- لنفرض أن $\sigma(A) = (a,b)$ ولنأخذ الانسحاب $\tau_{-a,-b}$ (انظر التمرين المحلول ٢)

فلجد أن

$$\tau_{-a,-b} \circ \sigma(A) = \tau_{-a,-b}(\sigma(A)) = \tau_{-a,-b}(a,b) = (a-a, b-b) = (0,0)$$

وهذا يبين لنا أن $\tau_{-a,-b} \circ \sigma(A) = A$

- لنفرض أن $B = \tau_{-a,-b} \circ \sigma(B)$ فلجد أن

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d(\tau_{-a,-b} \circ \sigma(B), \tau_{-a,-b} \circ \sigma(A)) = d(\sigma(B), \sigma(A)) = d(A, B) = \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 1 \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن طول القطعة المستقيمة AB يساوي 1. بفرض أن القطعة المستقيمة

AB تصلع زاوية Θ مع المحور ox فلجد أن $B_1 = (\cos \Theta, \sin \Theta)$

لنأخذ الدوران $\rho_{-\Theta}$ (انظر التمرين المحلول ٤) فنجد أن

$$\begin{aligned}\rho_{-\Theta}(B_1) &= \rho_{-\Theta}(\cos \Theta, \sin \Theta) = \\ &= (\cos \Theta \cos(-\Theta) - \sin \Theta \sin(-\Theta), \cos \Theta \sin(-\Theta) + \sin \Theta \cos(-\Theta)) = \\ &= (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta, 0) = (1, 0) = B\end{aligned}$$

مما سبق نجد أن $\rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b}(B_1) = B$ أي أن $\rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(B) = B$ بالإضافة لذلك فإن $\rho_{-\Theta}(A) = A$ ومنه

$$A = \rho_{-\Theta}(A) = \rho_{-\Theta}(\tau_{a-b}(\sigma(A))) = \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(A)$$

- لنفرض أن $C' = \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(C)$ فنجد أن

$$d(C', A) = d(\rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(C), \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(A)) = d(C, A) = 1$$

$$d(C', B) = d(\rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(C), \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(B)) = d(C, B) = \sqrt{2}$$

وبفرض أن $C' = (x_{C'}, y_{C'})$ نجد أن

$$\sqrt{(x_{C'} - x_A)^2 + (y_{C'} - y_A)^2} = 1$$

أي أن $x_{C'}^2 + y_{C'}^2 = 1$ كذلك $\sqrt{(x_{C'} - x_B)^2 + (y_{C'} - y_B)^2} = \sqrt{2}$ ومنه

$(x_{C'} - 1)^2 + y_{C'}^2 = 2$ ومنه فإن $x_{C'} = 0, y_{C'}^2 = 1$ وبالتالي إما $y_{C'} = 1$ أو

$y_{C'} = -1$ أي أن إما $C' = (0, 1)$ أو $C' = (0, -1)$.

- لنفرض أن μ هو الانعكاس المطابق إذا كانت $C' = C$ ومنه $\mu(C') = C$.

- وأن μ هو الانعكاس بالنسبة إلى المحور ox إذا كانت $C' = (0, -1)$ (انظر التمرين

المحلول ٣) فنجد أن $\mu(C') = \mu(0, -1) = (0, 1) = C$ وبالتالي يكون لدينا

$$\mu \circ \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(A) = A$$

$$\mu \circ \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(B) = B$$

$$\mu \circ \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma(C) = C$$

وحسب التمهيدية (٤-٢-٥) نجد أن $\mu \circ \rho_{-\Theta} \circ \tau_{a-b} \circ \sigma = I_E$ وبالتالي نجد

$$\sigma = \mu^{-1} \circ \rho_{-\Theta}^{-1} \circ \tau_{a-b}^{-1} = \mu \circ \rho_{\Theta} \circ \tau_{a-b}$$

وهذا يبين لنا أن أي قياس σ للمستوي E هو عبارة عن انعكاس μ ودوران ρ_{Θ}

والسحاب τ .

تمهيدية ٧-٢-٤.

ليكن $E = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ المستوي الإقليدي ولتكن $K \subseteq E$ مجموعة جزئية وغير خالية من المستوي E . ولنأخذ المجموعة $I(K) \subseteq I(E)$ المعرفة بالشكل التالي:

$$\sigma \in I(K) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma \in I(E) \\ \forall s \in K; \quad \sigma(s) \in K \\ \forall \sigma(t) \in K; \quad t \in K \end{cases}$$

إن $I(K)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(E)$.

البرهان.

واضح أن المجموعة $I(K)$ غير خالية، لأن التطبيق المطابق على E هو عنصر من $I(K)$. ليكن $\sigma \in I(K)$ عندهذا $\sigma^{-1} \in I(K)$ لأنه بما أن $\sigma \in I(K) \subseteq I(E)$ وأن $I(E)$ زمرة فإن $\sigma^{-1} \in I(E)$ وأنه

$$\forall s \in K; \quad \sigma(\sigma^{-1}(s)) = s \in K$$

وبما أن $\sigma \in I(K)$ فإن $\sigma^{-1} \in I(K)$ من جهة أخرى، ليكن $\sigma^{-1}(t) \in K$ عندهذا $\sigma(\sigma^{-1}(t)) = t \in K$ ولأن $\sigma^{-1} \in I(E)$ ومعه فإن $\sigma \in I(K)$ ليكن $\sigma, \tau \in I(K)$ عندهذا $\tau^{-1} \in I(K)$. لنبرهن على أن $\sigma \circ \tau^{-1} \in I(K)$. أيا كان $s \in K$ فإن $\tau^{-1}(s) \in K$ وبالتالي فإن $\sigma(\tau^{-1}(s)) = \sigma \circ \tau^{-1}(s) \in K$

لنفرض أن $\sigma \circ \tau^{-1}(t) \in K$ وبما أن $\sigma \circ \tau^{-1}(t) = \sigma(\tau^{-1}(t))$ فإن $\tau^{-1}(t) \in K$ ولكون $\tau^{-1} \in I(K)$ فإن $t \in K$. مما سبق وحسب تعريف المجموعة $I(K)$ نجد أن $\sigma \circ \tau^{-1} \in I(K)$ ومنه فإن المجموعة $I(K)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(E)$.
تعريف.

نسمي الزمرة $I(K)$ المعرفة في التمهيدية (٧-٢-٤) الزمرة التناظرية للمجموعة K .

تمهيدية ٨-٢-٤.

ليكن K مضلعاً نوئياً منتظماً. عندهذا توجد دائرة وحيدة تمر برؤوس هذا المضلع. نسمي مركز هذه الدائرة مركز المضلع K .

البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ. ◊

بالاعتماد على التمهيدية (٧-٢-٤) وجدنا أن المجموعة $I(K)$ تمثل زمرة جزئية من الزمرة $I(E)$ وذلك أياً كانت المجموعة الجزئية $K \subseteq E$. سوف ندرس الآن الزمرة $I(K)$ عندما تمثل المجموعة K مضلعاً منتظماً في المستوي E وسوف نبدأ بالتمهيدية التالية:

تمهيدية ٩-٢-٤.

ليكن K مضلعاً منتظماً في المستوي E مركزه o . عندئذ أياً كان $\sigma \in I(K)$ فإن $\sigma(o) = o$.

البرهان.

ليكن $\tau \in I(E)$ عندئذ فإن $\tau(K)$ هو مضلع نولي منتظم لأن τ هو قياس على E . ومنه أياً كان $\sigma \in I(K)$ فإن $\sigma(K)$ مضلع نولي منتظم مطابق للمضلع K وحسب تعريف المجموعة $I(K)$ فإن $\sigma(K) \subseteq K$. وبما أن هذا محقق أياً كان $\sigma \in I(K)$ وأن $\sigma^{-1} \in I(K)$ فإن $\sigma^{-1}(K) \subseteq K$ وبالتالي $K \subseteq \sigma(K)$. مما سبق نجد أن $\sigma(K) = K$ وبما أن o هو مركز المضلع K فإن $\sigma(o)$ هو مركز المضلع $\sigma(K)$ وذلك لأن σ قياس على E . وبسبب وحدانية الدائرة المارة برؤوس المضلع K نجد أن $\sigma(o) = o$ وذلك لأن $\sigma(K) = K$. ◊

تمهيدية ١٠-٢-٤.

ليكن K مضلعاً نولياً منتظماً في المستوي E . عندئذ الصورة المباشرة لأي رأس من رؤوس المضلع K وفق القياس σ هو رأس للمضلع K .

البرهان.

لنفرض أن مركز المضلع K هو o . وأن A أحد رؤوس هذا المضلع عندئذ وبما أن $\sigma(o) = o$ وذلك حسب التمهيدية (٩-٢-٤) وبفرض أن r هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المضلع K نجد أن

$$r = d(o, A) = d(\sigma(0), \sigma(A)) = d(0, \sigma(A))$$

وهذا يبين لنا أن $\sigma(A)$ هو رأس المضلع $\sigma(K) = K$.
تعريف.

لتكن $K \subseteq E$ مجموعة غير خالية من المستوى الإقليدي. نقول عن الزمرة
التناظرية $I(K)$ إنها D -زمرة إذا كان K مضلعاً منتظماً.

إذا كان K مضلعاً نولياً منتظماً فإننا نرمز للزمرة $I(K)$ بالرمز D_n .
هنا الآن هو دراسة مرتبة الزمرة D_n وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١١-٢-٤.

ليكن $K \subseteq E$ مضلعاً نولياً منتظماً. عندئذ $(D_n : 1) = 2n$.

البرهان.

لنفرض أن K مضلع نولي منتظم في المستوى E وأن $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ هي
رؤوس المضلع. وليكن $\sigma \in I(K)$ قياس للمجموعة K . لنرمز للقياس σ بالرمز σ_j
إذا كان $\sigma(A_1) = A_j$ حيث $1 \leq j \leq n$. فنجد أن $\sigma_j(A_1) = \sigma(A_1) = A_j$ ومنه فإن
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ تمثل جميع الدورانات للمضلع K حول المركز o بزاوية
 $\frac{2\pi(j-1)}{n}$ وهذه الدورانات مختلفة، وذلك لأن $\sigma(K) = K$ مضلع منتظم.

لنفرض أن τ هو الانعكاس بالنسبة إلى المستقيم المار بالرأس A_1 والمركز o
للمضلع K . فنجد أن $\tau(A_1) = A_1$ وأن $\tau(o) = o$ وذلك حسب التمهيدية (٩-٢-٤)
لأن $\tau \in I(K)$. لنفرض أن $\tau(A_2) = A_n$ وبما أن النقاط o, A_1, A_2 ثلاث نقاط من
المستوي E ليست على استقامة واحدة نجد أن هذه النقاط كافية لتحديد الانعكاس τ
ومنه فإن $\sigma_1 \circ \tau, \sigma_2 \circ \tau, \sigma_3 \circ \tau, \dots, \sigma_n \circ \tau \in I(K)$ ، وجميع هذه العناصر مختلفة
لأنه إذا كان $\sigma_i \circ \tau = \sigma_j \circ \tau$ فإن

$$\sigma_i \circ \tau(A_1) = \sigma_j \circ \tau(A_1)$$

وبالتالي فإن $\sigma_i(A_1) = \sigma_j(A_1)$ أي أن $A_i = A_j$ وهذا محقق فقط عندما $i = j$
ومنه $\sigma_i = \sigma_j$. مما سبق نجد أن

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1 \circ \tau, \sigma_2 \circ \tau, \sigma_2 \circ \tau, \dots, \sigma_n \circ \tau \in I(K)$$

وهذه العناصر مختلفة مثلي مثلي، لأنه إذا كان $\sigma_i \circ \tau = \sigma_j$ عندئذ فإن

$$\sigma_i(A_1) = \sigma_i \circ \tau(A_1) = \sigma_j(A_1)$$

ومنه فإن $A_i = A_j$ وبالتالي $i = j$ أي أن $\sigma_i \circ \tau = \sigma_i$ وهذا يبين لنا أن $\sigma_i = \tau$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الزمرة $D_n = I(K)$ تحوي $2n$ عنصراً على الأقل. لنبرهن على أن الزمرة $D_n = I(K)$ تحوي $2n$ عنصراً على الأكثر. ليكن $\sigma \in I(K)$ ولكون K مضلع نولي منتظم فإنه توجد n إمكانية لأجل تعيين الرأس $\sigma(A_1)$. وذلك لأن $\sigma(A_1)$ هو أحد الرؤوس $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ للمضلع. لنفرض أنه تم تعيين الرأس $\sigma(A_1)$ عندئذ فإن الرأس $\sigma(A_2)$ يتعين بطريقتين فقط إحداهما $\sigma(A_1)$ وتتعين بالشكل

$$d(\sigma(A_1), \sigma(A_2)) = d(A_1, A_2)$$

والإمكانية الأخرى للرأس $\sigma(A_2)$ هي $\sigma(A_i)$ حيث $i = 3, 4, \dots, n$. وهذا يبين لنا أن الزمرة D_n تحتوي على الأكثر $2n$ عنصر. مما سبق نجد أن $(D_n : 1) = 2n$.

تمارين محلولة (٤)

١ - ليكن $a \in \mathbb{R}$. إن التطبيق $\sigma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $\sigma_a(x) = x + a$ وذلك
أيًا كان $x \in \mathbb{R}$ هو قياس على $\mathbb{R}$ يسمى الانسحاب بمقدار a ويحقق $\sigma_a^{-1} = \sigma_{-a}$.
الحل.

إن التطبيق σ_a متباين، لأنه أيًا كان $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث $\sigma_a(x) = \sigma_a(y)$ فإن
 $x + a = y + a$ وبالتالي $x = y$. كذلك σ_a غامر، لأنه إذا كان $x \in \mathbb{R}$
فإن $x - a \in \mathbb{R}$ وبالتالي $(x - a) + a = x$ مما سبق نجد أن التطبيق
 σ_a تقابل. لنبرهن على أن $d(\sigma_a(x), \sigma_a(y)) = d(x, y)$ لدينا
 $d(\sigma_a(x), \sigma_a(y)) = |\sigma_a(x) - \sigma_a(y)| = |(x + a) - (y + a)| = |x - y| = d(x, y)$
ومنه فإن σ_a هو قياس على $\mathbb{R}$.

لنبرهن على أن $\sigma_a^{-1} = \sigma_{-a}$. بما أن σ_a تقابل فإن σ_a^{-1} موجود هو أيضا تقابل ويحقق
 $\sigma_a \circ \sigma_a^{-1}(x) = \sigma_a(\sigma_a^{-1}(x)) = x$ فإن $x \in \mathbb{R}$ أيًا كان $x \in \mathbb{R}$ ومنه $\sigma_a \circ \sigma_a^{-1} = I_{\mathbb{R}}$
وبالتالي
 $\sigma_a \circ \sigma_a^{-1}(x) = \sigma_a(\sigma_a^{-1}(x)) = \sigma_a^{-1}(x) + a = x$

ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \sigma_a^{-1}(x) = x - a = \sigma_{-a}(x)$$

أي أن $\sigma_a^{-1} = \sigma_{-a}$.

٢ - ليكن $a, b \in \mathbb{R}$. إن التطبيق $\sigma_{a,b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل

$$\sigma_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$$

وذلك أيًا كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ هو قياس على $\mathbb{R}^2$ يسمى الانسحاب بمقدار (a, b) في
المستوي $\mathbb{R}^2$ ويحقق $\sigma_{a,b}^{-1} = \sigma_{-a, -b}$.

الحل.

إن التطبيق $\sigma_{a,b}$ متباين لأنه أيًا كان $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ بحيث
 $\sigma_{a,b}(x, y) = \sigma_{a,b}(x_1, y_1)$ فإن $(x + a, y + b) = (x_1 + a, y_1 + b)$ وبالتالي

$(x, y) = (x_1, y_1)$ ومنه $x = x_1, y = y_1$ أي أن $x + a = x_1 + a, y + b = y_1 + b$
 كذلك $\sigma_{a,b}$ عامر لأنه إذا كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ فإن $(x - a, y - b) \in \mathbb{R}^2$ وبالتالي
 $\sigma_{a,b}(x - a, y - b) = (x - a + a, y - b + b) = (x, y)$

مما سبق نجد أن التطبيق $\sigma_{a,b}$ تقابل.

لنبرهن على أن $d(\sigma_{a,b}(x, y), \sigma_{a,b}(x_1, y_1)) = d((x, y), (x_1, y_1))$ إن
 $d(\sigma_{a,b}(x, y), \sigma_{a,b}(x_1, y_1)) = d((x, y), (x_1, y_1)) =$
 $= d((x + a, y + b), (x_1 + a, y_1 + b)) =$
 $= \sqrt{(x + a - (x_1 + a))^2 + (y + b - (y_1 + b))^2} =$
 $= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = d((x, y), (x_1, y_1))$

وهذا يبين لنا أن التحويل $\sigma_{a,b}$ هو قياس. لنبرهن على أن $\sigma_{a,b}^{-1} = \sigma_{-a,-b}$. بما أن $\sigma_{a,b}$
 تبديل فإن $\sigma_{a,b}^{-1}$ موجود ويحقق $\sigma_{a,b} \circ \sigma_{a,b}^{-1} = I_{\mathbb{R}^2}$ ومنه أياً كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ فإن
 $\sigma_{-a,-b} \circ \sigma_{a,b}(x, y) = \sigma_{-a,-b}(x + a, y + b) = (x + a - a, y + b - b) = (x, y)$
 أي أن $\sigma_{a,b}^{-1} = \sigma_{-a,-b}$ وبالتالي فإن $\sigma_{a,b} \circ \sigma_{a,b}^{-1} = I_{\mathbb{R}^2}$.

٣ - ليكن $y \in \mathbb{R}$. إن التطبيق $\sigma_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعروف بالشكل
 $\sigma_y(x, y) = (x, -y)$ وذلك أياً كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ هو قياس على $\mathbb{R}^2$ يسمى الانعكاس
 بالنسبة للمحور ox . ويحقق $\sigma_y^{-1} = \sigma_y$.

الحل.

إن التطبيق σ_y متباين لأنه أياً كان $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ بحيث
 $\sigma_y(x, y) = \sigma_y(x_1, y_1)$ فإن $(x, -y) = (x_1, -y_1)$ وبالتالي $x = x_1, y = y_1$ ومنه
 $(x, y) = (x_1, y_1)$. كذلك σ_y عامر لأنه إذا كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ فإن $(x, -y) \in \mathbb{R}^2$
 وبالتالي $\sigma_y(x, -y) = (x, -(-y)) = (x, y)$ مما سبق نجد أن σ_y تبديل. لنبرهن على
 أن $\sigma_y^{-1} = \sigma_y$. لنكن $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ عندها

$$\sigma_y^2(x, y) = \sigma_y \circ \sigma_y(x, y) = \sigma_y(x, -y) = (x, -(-y)) = (x, y)$$

أي أن $\sigma_y^2 = I_{\mathbb{R}^2}$ وبالتالي فإن $\sigma_y^{-1} = \sigma_y$.

٤ - التطبيق $\rho_\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل

$$\rho_\Theta(x, y) = (x \cos \Theta - y \sin \Theta, x \sin \Theta + y \cos \Theta)$$

وذلك أيًا كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ هو قياس على $\mathbb{R}^2$ يسمى الدوران في المستوي $\mathbb{R}^2$ بزاوية مقدارها Θ ويحقق $\rho_\Theta^{-1} = \rho_{-\Theta}$.

الحل.

ليكن $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ بحيث $\rho_\Theta(x, y) = \rho_\Theta(x_1, y_1)$ عندئذ

$$x \cos \Theta - y \sin \Theta = x_1 \cos \Theta - y_1 \sin \Theta$$

$$x \sin \Theta + y \cos \Theta = x_1 \sin \Theta + y_1 \cos \Theta$$

بضرب المعادلة الأولى بـ $\cos \Theta$ والثانية بـ $\sin \Theta$ ثم نجمع فنجد

$$x(\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta) = x_1(\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta)$$

ومنه $x = x_1$. نضرب المعادلة الأولى بـ $-\sin \Theta$ والثانية بـ $\cos \Theta$ وبالجمع نجد أن

$$y(\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta) = y_1(\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta)$$

ومنه $y = y_1$. كذلك فإن ρ_Θ غامر لأنه إذا كانت $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ فإن

$$x = a \cos \Theta - b \sin \Theta \in \mathbb{R}, \quad y = a \sin \Theta + b \cos \Theta \in \mathbb{R}$$

وبالتالي يكون

$$(x, y) = (a \cos \Theta - b \sin \Theta, a \sin \Theta + b \cos \Theta) \in \mathbb{R}^2$$

وأن

$$\rho_\Theta(x, y) = (a(\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta), b(\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta)) = (a, b)$$

مما سببنا أن ρ_Θ تبديل. لنبرهن على أنه أيًا كان $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ فإن

$$d(\rho_\Theta(x, y), \rho_\Theta(x_1, y_1)) \in d((x, y), (x_1, y_1))$$

$$d(\rho_\Theta(x, y), \rho_\Theta(x_1, y_1)) =$$

$$d((x \cos \Theta - y \sin \Theta, x \sin \Theta + y \cos \Theta), (x_1 \cos \Theta - y_1 \sin \Theta, x_1 \sin \Theta + y_1 \cos \Theta)) =$$

$$= \sqrt{[(x \cos \Theta - y \sin \Theta) - (x_1 \cos \Theta - y_1 \sin \Theta)]^2 + [(x \sin \Theta + y \cos \Theta) - (x_1 \sin \Theta + y_1 \cos \Theta)]^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{[(x-x_1)\cos\Theta - (y-y_1)\sin\Theta]^2 + [(x-x_1)\sin\Theta + (y-y_1)\cos\Theta]^2} = \\
&= \sqrt{(x-x_1)^2(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) + (y-y_1)^2(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta)} = \\
&= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = d((x,y), (x_1,y_1))
\end{aligned}$$

مما سبق نجد أن ρ_Θ هو قياس على $\mathbb{R}^2$.

لنبرهن على أن $\rho_\Theta^{-1} = \rho_{-\Theta}$. ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ عندئذ

$$\begin{aligned}
\rho_{-\Theta} \circ \rho_\Theta(x,y) &= \rho_{-\Theta}(x\cos\Theta - y\sin\Theta, x\sin\Theta + y\cos\Theta) = \\
&= \sqrt{(x\cos\Theta - y\sin\Theta)\cos(-\Theta) - (x\sin\Theta + y\cos\Theta)\sin(-\Theta), \\
&\quad (x\cos\Theta - y\sin\Theta)\sin(-\Theta) + (x\sin\Theta + y\cos\Theta)\cos(-\Theta))} = \\
&= \sqrt{(x\sin^2\Theta + y\cos^2\Theta), y(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta)} = (x,y)
\end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $\rho_\Theta^{-1} = \rho_{-\Theta}$ وبالتالي $\rho_\Theta^{-1} \circ \rho_\Theta = I_{\mathbb{R}^2}$.

٥ - لندرس بشيء من التفصيل الزمرتين S_3 و S_4 ولكن قبل ذلك لنتعرف على تناظر الأشكال الهندسية في المستوي. إن الشكل الهندسي في المستوي يمكن أن يملك تناظراً واحداً أو أكثر. حيث إن محور التناظر لأي شكل هندسي هو المحور الذي يقسم هذا الشكل إلى جزئين متساويين.

إذا وجد للشكل الهندسي في المستوي محور تناظر، نقول عن هذا الشكل إنه متناظر بالنسبة إلى هذا المحور. نوع آخر من التناظر للأشكال الهندسية في المستوي هو التناظر بالنسبة إلى النقطة التي تسمى مركز التناظر.

إن التناظر بالنسبة إلى النقطة يمكن تعميمه بالشكل التالي: نقول عن النقطة O أنها مركز تناظر من المرتبة n للشكل الهندسي M إذا كان الشكل الهندسي ينطبق على نفسه عبر دورانه (حول مركز التناظر) بزاوية $\frac{2\pi}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب و $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. فعلى سبيل المثال المربع له مركز تناظر من المرتبة الرابعة. يوجد لكل نوع من أنواع التناظر تبديل يسمى تبديل تناظر (متناظر) وهو تبديل لمجموعة متناظرة (بالنسبة للنقطة أو محور) من نقاط المستوي. فعلى سبيل المثال، إذا كانت النقطة O مركز تناظر من المرتبة n فإن التبديل المتناظر بالنسبة إلى هذا المركز هو التبديل الذي ينتج عن دوران جميع النقاط في المستوي (المتناظرة

بالنسبة إلى المركز O حول O بزوايا قدرها $\frac{2\pi}{3}$ (مع أو عكس عقارب الساعة). للوضع من خلال بعض الأمثلة زمرة التباديل للأشكال الهندسية المتناظرة.

٦ - الزمرة التناظرية للمثلث المنتظم (متساوي الأضلاع).

لنرقم رؤوس المثلث المنتظم بالأعداد 1, 2, 3. كما نعلم فإن مجموعة التباديل للمجموعة {1, 2, 3} تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات. وعناصر هذه الزمرة هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}$$

حيث $i_k = \varphi(k)$ هو رقم المكان الذي يشغله الرأس رقم k بعد إجراء التبديل φ ، حيث $k = 1, 2, 3$. إن مركز تناظر المثلث المنتظم O هو مركز تناظر من المرتبة الثالثة حيث إن الدورانات $\varphi_1 = \varepsilon, \varphi_2, \varphi_3$ حول المركز O بزوايا $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ على الترتيب تعيد المثلث إلى وضعه الأول. كما أن للمثلث المنتظم ثلاث محاور تناظر. وأن التباديل $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ تعين محاور التناظر i, n, m على الترتيب، المارة من رؤوس المثلث ومركزه. لنوجد التباديل التناظرية لهذا المثلث.

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1), \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (123), \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (132)$$

وهذه التباديل تمثل الدورانات حول المركز O .

$$\varphi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (23), \quad \varphi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (13), \quad \varphi_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (12)$$

وهذه التباديل تمثل التناظرة بالنسبة إلى محاور التناظر. بالإضافة لذلك نلاحظ أن $\varphi_1^3 = \varepsilon$ حيث $i = 1, 2, 3$ وأن $\varphi_j^2 = \varepsilon$ حيث $j = 4, 5, 6$. نلاحظ أيضا أن φ_2 يولد جميع الدورانات حول المركز O . إن زمرة التباديل $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ للمثلث المنتظم يرمز لها بالرمز D_3 وهي زمرة مرتبتها 6.

٧ - الزمرة التناظرية للمربع.

للرقم رؤوس المربع بالأرقام $\{1,2,3,4\}$. إن أي حركة للمربع تتم عبر دورانه حول مركز تناظر هو هذه الدورانات هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ بزوايا $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ على الترتيب. أو من خلال دورانه حول محاور التناظر m, k, n, l والتي سوف نرمز لها $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ على الترتيب. إن الدورانات α_i حيث $1 \leq i \leq 8$ تمثل زمرة للتبادل للمجموعة $\{1,2,3,4\}$ وهي

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = (1), \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = (1234)$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (13)(24), \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1432)$$

وهذه التباديل تمثل الدورانات حول المركز ونلاحظ هنا أن $\alpha_i^4 = \alpha_1 = \varepsilon$ حيث $i = 1, 2, 3, 4$ وأن التبدل α_2 يعد مولداً لهذه التباديل. كما أن الدورانات حول محاور التناظر فهي

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (12)(34), \quad \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (14)(23)$$

$$\alpha_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (24), \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (13)$$

ونلاحظ هنا أيضاً أن $\alpha_j^2 = \varepsilon$ حيث $j = 5, 6, 7, 8$.

$$\alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (12)(34), \quad \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (14)(23)$$

$$\alpha_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (24), \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (13)$$

ونلاحظ هنا أيضاً أن $\alpha_j^2 = \varepsilon$ حيث $j = 5, 6, 7, 8$.

٨ - أوجد جميع الزمر الجزئية من الزمرة التناظرية S_3 .

الحل.

لدينا $(\varepsilon), S_3$ زمر جزئية في S_3 .

من جهة أخرى، بما أن كل عنصر من S_3 يولد زمرة جزئية وحسب مبرهنة لاغرانج فإن مرتبة هذا العنصر يجب أن يقسم مرتبة الزمرة S_3 وبما أن $(S_3 : 1) = 6$ فإنه توجد لدينا عناصر في S_3 مراتبها 1, 2, 3. وبالتالي يوجد في S_3 :

- عنصر واحد مرتبته 1 هو العنصر المحايد.

- ثلاثة عناصر مرتبة كل منها تساوي 2 وهي (12), (13), (23).

- عنصران مرتبة كل منهما تساوي 3 وهي (123), (132).

وبمنه يوجد في S_3 ثلاث زمر جزئية مرتبة كل منها تساوي 2 وهي

$$T = \{1, (12)\}; \quad U = \{1, (13)\}; \quad V = \{1, (13)\}$$

وزمرتان مرتبة كل منهما تساوي 3 وهما

$$K = \{1, (123), (123)^2\}; \quad H = \{1, (132), (132)^2\}$$

وبملاحظة أن $(132) = (123)^2$ نجد أن $K = H$ أي توجد زمرة واحدة فقط مرتبتها

3.

تمارين (٤)

- ١- أوجد مرتبة كل من التباديل التالية:
 $(14), (147), (14762), (124)(357), (124)(356), (124)(3578), (1243)(3521), (12)(134)(152), (135), (1356), (13567).$
- ٢- بين أي من التباديل التالية زوجي و أيها فردي.
 $(1243)(3521), (12)(134)(152), (135), (1356), (13567).$
- ٣- لتكن S مجموعة منتهية و $f: S \rightarrow S$ تابع (تطبيق). أثبت أن الشرط اللازم و الكافي كي يكون f متباين هو أن يكون f غامراً.
- ٤- ليكن α تبديلاً ما. أثبت أنه إذا كان α زوجياً فإن α^{-1} زوجياً وأنه إذا كان α فردياً فإن α^{-1} فردي.
- ٥- لتكن $H = \{\beta \in S_3, \beta(1) = 1, \beta(3) = 3\}$. أثبت أن H زمرة جزئية من S_3 .
- ٦- ليكن $\alpha: Z \rightarrow Z$ تطبيق معرف بالشكل $\alpha(n) = n+1$ وذلك أيما كان $n \in Z$ -
 $\beta: Z \rightarrow Z$ تطبيق معرف بالشكل $\beta(2n) = 2n$ و $\beta(2n+1) = 2n+3$ وذلك أيما كان $n \in Z$ -
 $\gamma: Z \rightarrow Z$ تطبيق معرف بالشكل $\gamma(2n) = 2(n+1)$ و $\gamma(2n+1) = 2n+1$ وذلك أيما كان $n \in Z$ -
 أثبت أن كلاً من α, β, γ هي تباديل للمجموعة Z وأن $\alpha \circ \alpha = \gamma \circ \beta = \beta \circ \gamma$.
- ٧- لنفرض أن K مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ولنأخذ المجموعة $I(K) = \{\oplus : \oplus \in I(K); \oplus(s) \in K; \forall s \in K\}$.
 أثبت أن المجموعة $I(K)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathfrak{M}, \circ)$.
- ٨- لنفرض أن Q مجموعة الأعداد العادية ولنأخذ المجموعة

$$I(Q) = \{\Theta : \Theta \in I(\mathfrak{N}); \quad \Theta(q) \in Q; \quad \forall q \in Q\}$$

أثبت أن المجموعة $I(Q)$ زمرة جزئية من الزمرة $I(\mathfrak{N})$.

٩- ليكن

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد كلاً من

$$\alpha^{-1}; \quad \alpha\beta; \quad \beta\alpha$$

١٠- ليكن

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

اكتب كلاً من α, β بالشكل التالي:

- على شكل جداء لأدوار مختلفة.

- على شكل جداء لـ 2-دور.

١١- ليكن $\alpha, \beta \in S_n$. أثبت أن التبديل $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ هو تبديل زوجي.

١٢- أوجد عدد العناصر من المرتبة الخامسة في الزمرة S_6 .

١٣- في الزمرة A_5 أحسب الجداءات التالية:

$$(123); \quad (235); \quad (145)$$

- أوجد $x^{-1}yx$ إذا كان

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad y = (135)(24)$$

- أوجد $x^{-1}yx$ إذا كان

$$x = (123); \quad y = (13)$$

الفصل الخامس

الزمرة الجزئية الناعظمية و زمرة الخارج

١-٥ . الزمرة الجزئية الناعظمية.

وجدنا من خلال دراستنا للمرافقات اليسارية واليمينية أنه إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة G و $a \in G$ فليس من الضروري أن يكون $aH = Ha$. إذ توجد حالات محددة من أجلها $aH \neq Ha$. لأجل ذلك سوف ندخل المفهوم التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . نقول عن الزمرة الجزئية H إنها ناعظمية في G إذا تحقق الشرط التالي: أيًا كان $a \in G$ فإن $aH = Ha$. ينتج مباشرة من التعريف ما يلي:

- لأجل أية زمرة G فإن كلاً من G و $\{e\}$ زمرة جزئية ناعظمية في G .

- كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناعظمية.

هناك العديد من الشروط المكافئة لمفهوم الزمرة الناعظمية. في هذه الفقرة سوف نختار أحد هذه الشروط التي تعتبر أسهل في التطبيق وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-١-٥.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . الشروط التالية متكافئة:

١- الزمرة الجزئية H ناعظمية في G .

٢- أيًا كان $a \in G$ فإن $aHa^{-1} \subseteq H$.

٣- أيًا كان $a \in G$ فإن $a^{-1}Ha \subseteq H$.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية H ناعظمية في G عندئذٍ $aH = Ha$ ومنه

$$aHa^{-1} \subseteq H$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3). واضح.

(3) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $a \in G$ عندئذ $a^{-1}Ha \subseteq H$ من جهة أخرى، بما أن $a^{-1} \in G$ فإن $aHa^{-1} \subseteq H$ ومنه $a^{-1}Ha \subseteq H$. مما سبق نجد أن $H = a^{-1}Ha$ ، وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

بعض الخواص للزمرة الجزئية الناظمية سوف نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٥-١-٢.

لتكن G زمرة. القضايا التالية صحيحة:

١- تقاطع أية أسرة من الزمر الجزئية الناظمية من G هو زمرة جزئية ناظمية في G .

٢- الزمرة الجزئية $Z(G)$ ناظمية في G .

٣- لتكن H و K زمريتين جزئيتين في G بحيث $K \subseteq H$. إذا كانت الزمرة الجزئية K ناظمية في G فإن الزمرة K تكون ناظمية في H .

٤- إذا كانت H زمرة جزئية في G وكان $(G:H) = 2$ ، عندئذ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

البرهان.

١ - لتكن $\{M_i; i \in I\}$ أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G . وجدنا سابقاً أن $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ زمرة جزئية في G . للبرهن على أن $M \subseteq gMg^{-1}$ وذلك أيأ كان $g \in G$. ليكن $g \in G$ عندئذ أيأ كان $z \in gMg^{-1}$ يوجد $x \in M$ بحيث $z = gxg^{-1}$. وبما أن الزمرة M_i ناظمية في G وذلك $\forall i \in I$ فإن $z = gxg^{-1} \in M_i$ وذلك $\forall i \in I$ ومنه $z \in \bigcap_{i \in I} M_i = M$. وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية M ناظمية في G .

٢ - وجدنا سابقاً أن المجموعة

$$Z(G) = \{a : a \in G; ax = xa \quad \forall x \in G\}$$

زمرة جزئية في G . للبرهن أن $bZ(G)b^{-1} \subseteq Z(G)$ وذلك $\forall b \in G$. أيأ كان $y \in Z(G)$ فإن $y \in Z(G)$ $byb^{-1} = ybb^{-1} = y$ وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية

$Z(G)$ ناظمية في G .

٣ - بما أن الزمرة K ناظمية في G عندئذ $aKa^{-1} \subseteq K$ وذلك $\forall a \in G$ وبالتالي فإن

$$hKh^{-1} \subseteq K \text{ وذلك } \forall h \in H \text{ وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية } K \text{ ناظمية في } H.$$

٤ - لتكن H زمرة جزئية في G تحقق $(G:H) = 2$ وهذا يبين أن مجموعة المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة H في G هي $\{H, aH\}$ حيث $a \in G$ وهنا لميز حالتين:

- إذا كان $a \in H$ عندئذ $aH = Ha$

- إذا كان $a \notin H$ عندئذ بما أن $G = H \cup aH$ نجد أن $aH = G \setminus H = Ha$ وفي

كلا الحالتين يتبين لنا أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

إن جداء زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية. المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون جداء أي زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية:

مبرهنة ٣-١-٥.

لتكن G زمرة و A, B زمرتين جزئيتين في G . القضايا التالية متكافئة:

١- AB زمرة جزئية في G .

٢- $AB = \langle A \cup B \rangle$

٣- $AB = BA$

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الجداء AB زمرة جزئية من G . عندئذ

$$a = ae \in AB \quad \forall a \in A; \quad b = eb \in AB \quad \forall b \in B; \quad \text{ومنه } A \cup B \subseteq AB$$

وهذا يبين لنا أن $\langle A \cup B \rangle \subseteq AB$.

ليكن $x \in AB$ عندئذ يوجد $c \in A$ و $d \in B$ بحيث $x = cd$ ومنه

$$c, d \in A \cup B \subseteq \langle A \cup B \rangle \text{ وهذا يبين لنا أن } x = cd \in \langle A \cup B \rangle \text{ وهكذا فإن}$$

$$AB \subseteq \langle A \cup B \rangle. \text{ مما سبق نجد أن } AB = \langle A \cup B \rangle.$$

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). بفرض $AB = \langle A \cup B \rangle$ عندئذ الجداء AB زمرة جزئية من G . ليكن $y \in AB$ عندئذ $y^{-1} \in AB$ ومنه $y^{-1} = ab$ حيث $a \in A, b \in B$ وهكذا فإن $y = b^{-1}a^{-1} \in BA$ أي أن $AB \subseteq BA$.

ليكن $z \in BA$ عندئذ $z = cd$ حيث $c \in D, d \in A$ ومنه فإن $z = (d^{-1}c^{-1})^{-1} \in AB$ وبالتالي $BA \subseteq AB$. مما سبق نجد أن $AB = BA$.

(٣) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن $AB = BA$. واضح أن $AB \neq \Phi$. ليكن $x, y \in AB$ عندئذ $x = ab$ و $y = a_1b_1$ حيث $a, a_1 \in A$ و $b, b_1 \in B$. وهكذا نجد أن $xy^{-1} = a(bb_1^{-1})a_1^{-1}$. لنفرض أن $b_0 = bb_1^{-1} \in B$ عندئذ $xy^{-1} = a(b_0)a_1^{-1}$ وبما أن $b_0a_1^{-1} \in BA = AB$ فإنه يوجد $a_0 \in A$ و $b_2 \in B$ بحيث $b_0a_1^{-1} = a_0b_2$ وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} = ab_0a_1^{-1} = aa_0b_2 \in AB$. مما سبق نجد أن الجداء AB زمرة جزئية من G .

شرط آخر كي يكون جداء زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية لورده من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٤-٤.

لتكن G زمرة و A, B زمرتين جزئيتين في G . إذا كانت الزمرة B ناظمية في G . عندئذ:

١- الجداء AB زمرة جزئية من G .

٢- $AB = BA$.

٣- $AB = \langle A \cup B \rangle$.

البرهان.

١ - واضح أن $AB \neq \Phi$. ليكن $x, y \in AB$ عندئذ يوجد $a_1, a_2 \in A$ و $b_1, b_2 \in B$ بحيث $x = a_1a_2$ و $y = b_1b_2$ ومنه $xy^{-1} = a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1} = a_1b_1(a_2b_2^{-1}a_2^{-1})$. لنفرض أن $b_0 = a_2b_2^{-1}a_2^{-1} \in B$ وذلك لأن الزمرة الجزئية B ناظمية في G ومنه

$$xy^{-1} = a_1 b_1 a_2^{-1} b_0 = a_1 a_2^{-1} (a_2 b_1 a_2^{-1}) b_0$$

أيضاً، بما أن B ناظمية في G فإن $a_2 b_1 a_2^{-1} = b' \in B$ وهكذا نجد أن

$$xy^{-1} = a_1 a_2^{-1} b' b_0 \in AB$$

(٢) و (٣) ينتج بشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة.

خواص إضافية أخرى للزمرة الجزئية الناظمية والتي سوف تكون ضرورية لنا

في دراستنا المقبلة نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٥-١-٥.

لتكن G زمرة و A, B زمرتين جزئيتين في G . القضايا التالية صحيحة:

١ - إذا كانت كل من الزمرتين A, B ناظمية في G فإن الجداء AB هو زمرة جزئية ناظمية في G .

٢ - إذا كانت كل من الزمرتين A, B تبديلية و ناظمية في G وإذا كان $A \cap B = \langle e \rangle$ فإن الجداء AB هو زمرة تبديلية.

٣ - إذا كانت الزمرة A ناظمية في G ونواة فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G .

البرهان.

١ - لنفرض أن كلا من الزمرتين A, B ناظمية في G . عللئذ بالاعتماد على

المبرهنة الأخيرة نجد أن الجداء AB هو زمرة جزئية في G . للبرهن الآن على تحقق الشرط

$$\forall g \in G; \quad g(AB)g^{-1} \subseteq AB$$

ليكن $z \in g(AB)g^{-1}$ عللئذ يوجد $a \in A, b \in B$ بحيث

$$z = g(ab)g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1}) \in AB$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة AB ناظمية في G .

٢ - لنفرض أن كلا من الزمرتين A, B تبديلية و ناظمية في G وأن $A \cap B = \langle e \rangle$

عللئذ لئى كان $a \in A, b \in B$ فإن $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in B$ كذلك

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

مما سبق نجد أن $ab = ba$ وبالتالي الزمرة الجزئية AB تبديلية.

٣- لنفرض أن الزمرة A ناظمية في G وأن $A = \langle a \rangle$ حيث $a \in A$. لتكن T زمرة جزئية من A علنذ فإن T زمرة جزئية في G ودوارة. لنفرض أن $T = \langle a^m \rangle$. لنفرض على أنه $gTg^{-1} \subseteq T$ $\forall g \in G$; ليكن $z \in gTg^{-1}$ علنذ يوجد $(a^m)^k \in T$ بحيث $z = g(a^m)^k g^{-1}$ ومنه بما أن الزمرة الجزئية A ناظمية في G فإن $(gag^{-1})^k = ga^k g^{-1} \in A$ وبالتالي $ga^k g^{-1} = a^s$ حيث $s \in Z$ وهذا يبين لنا أن $z = g(a^m)^k g^{-1} = g(a^k)^m g^{-1} = [(gag^{-1})^k]^m = (a^s)^m = (a^m)^s \in T$ وهذا يبين لنا أن T زمرة جزئية ناظمية في G .

توجد علاقة هامة بين جداء الزمر الجزئية وتقاطعها لا بد من ذكرها هنا وذلك من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ٥-١-٦.

لتكن A, B, D زمر جزئية من الزمرة G بحيث $A \subseteq B$. علنذ

$$A(B \cap D) = AB \cap AD - ١$$

$$(B \cap D)A = BA \cap DA - ٢$$

البرهان.

١- ليكن $x \in A(B \cap D)$ علنذ $x = ab$ حيث $a \in A, b \in (B \cap D)$ وبالتالي

$b \in B, b \in D$ ومنه $x = ab \in AB, x = ab \in AD$ وبالتالي $x \in AB \cap AD$ أي أن

$$A(B \cap D) \subseteq AB \cap AD$$

ليكن $y \in AB \cap AD$ علنذ $y \in AB$ ومنه $y = a_1 b_1$ حيث $a_1 \in A, b_1 \in B$. كذلك

$y \in AD$ ومنه $y = a_2 d$ حيث $a_2 \in A, d \in D$. وبما أن $a_1 b_1 = a_2 d$ ومنه

$$d = a_2^{-1} (a_1 b_1) = (a_2^{-1} a_1) b_1 \in A \cap D$$

وذلك لأن $A \subseteq B$ ومنه $a_2 d \in A(B \cap D)$ أي أن $y = a_2 d \in A(B \cap D)$.

مما سبق نجد أن $A(B \cap D) = AB \cap AD$.

٢ - يبرهن بشكل مشابه ولذلك نتركه تمريناً للقارئ. هـ

٢-٥. زمرة الخارج.

الخاصة الهامة التي تتميز فيها الزمرة الجزئية الناعمية عن غيرها من الزمر الجزئية هو أن كل مرافقة يسارية (يمينية) لها تكون زمرة جزئية أيضاً. فإذا كانت G زمرة و H زمرة جزئية ناعمية في G عندئذ، أيا كان $a \in G$ فإن $aH = Ha$. وهذا يبين لنا أن مجموعة المرافقات اليسارية تساوي مجموعة المرافقات اليمينية للزمرة H في G . وقد وجدنا سابقاً أن مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة H في G تشكل تجزئة للزمرة G وهذه التجزئة تعرف لنا علاقة تكافؤ ρ على G وهذه العلاقة تكون معرفة بالشكل

$$\forall a, b \in G; \quad a \rho b \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

(تأكد من ذلك) إن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي عناصر المجموعة التي تشكل تجزئة للزمرة G . بمعنى آخر، صفوف ~~تلك~~ هذه العلاقة هي المرافقات اليسارية للزمرة H في G . سوف نرمز لمجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة بالرمز G/H . فنجد أن

$$G/H = \{aH : a \in G\}$$

خواص هذه المجموعة و بنيتها الجبرية توضحها المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٢-٥. (هولدر ١٨٨٩).

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناعمية في G . لتعرف على المجموعة

$$G/H = \{aH : a \in G\} \text{ العملية } (.) \text{ بالشكل التالي:}$$

$$\forall aH, bH \in G/H; \quad (aH)(bH) = (ab)H$$

عندئذ:

- ١- العملية $(.)$ داخلية.
- ٢- العملية $(.)$ معرفة جيداً.
- ٣- العملية $(.)$ تجميعية.
- ٤- يوجد في G/H عنصر حيادي هو H .

٥- لكل عنصر $aH \in G/H$ مقلوب هو $a^{-1}H \in G/H$.

٦- المجموعة G/H زمرة بالنسبة للعملية $(.)$.

البرهان.

١ - كون العملية $(.)$ داخلية، ينتج ذلك من التعريف مباشرة.

٢ - ليكن $aH, a'H, bH, b'H \in G/H$ بحيث $aH = a'H$ و $bH = b'H$ عندئذ

$$\text{يوجد } h_1, h_2 \in H \text{ بحيث } a' = ah_1, \quad b' = bh_2, \text{ وهذا يبين لنا أن}$$

$$(a'H)(b'H) = (a'b')H = (ah_1)(bh_2)H = (ah_1b)H = (ah_1)Hb =$$

$$= aHb = (ab)H = (aH)(bH)$$

٣ - ليكن $aH, bH, dH \in G/H$ عندئذ

$$[(aH)(bH)]dH = [(ab)H]dH = [(ab)d]H = [a(bd)]H = (aH)[(bd)H] =$$

$$= (aH)[(bH)(dH)]$$

٤ - ليكن $aH \in G/H$ عندئذ وبما أن $H = eH$ نجد أن

$$(aH)H = (aH)(eH) = (ae)H = aH$$

بشكل مشابه نجد أيضاً $H(aH) = aH$.

٥ - ليكن $aH \in G/H$ عندئذ $a^{-1}H \in G/H$ ومنه

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$$

بشكل مشابه نجد أن $(a^{-1}H)(aH) = H$.

٦ - مما سبق نجد أن المجموعة G/H مع العملية $(.)$ تشكل زمرة.

تعريف.

نسمى الزمرة المعرفة في المبرهنة السابقة زمرة الخارج للزمرة G وفق H .

سوف نورد الآن بعض الأمثلة التي توضح لنا مفهوم زمرة الخارج.

مثال.

في زمرة الأعداد الصحيحة Z نعلم أن المجموعة

$$4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}$$

زمرة جزئية من Z ، وبما أن الزمرة Z تبادلية، فإن الزمرة الجزئية $4Z$ تكون ناظرية

في Z . إن المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $4Z$ في Z هي:

$$0+4Z = 4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}$$

$$1+4Z = \{1, 5, 9, 13, \dots, -3, -7, -11, \dots\}$$

$$2+4Z = \{2, 6, 10, 14, \dots, -2, -6, -10, \dots\}$$

$$3+4Z = \{3, 7, 11, 15, \dots, -1, -5, -9, \dots\}$$

$$4+4Z = 4Z; \quad 5+4Z = 1+4Z$$

$$6+4Z = 2+4Z; \quad 7+4Z = 3+4Z$$

ومنه نجد أن المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $4Z$ في Z هي

$$4Z; \quad 1+4Z; \quad 2+4Z; \quad 3+4Z$$

وبالتالي فإن زمرة الخارج $Z/4Z$ هي:

$$Z/4Z = \{4Z; \quad 1+4Z; \quad 2+4Z; \quad 3+4Z\}$$

وبذلك يمكن الحصول على الجدول التالي بالنسبة إلى العملية $(+)$ المعرفة على $Z/4Z$:

	$4Z$	$1+4Z$	$2+4Z$	$3+4Z$
$4Z$	$4Z$	$1+4Z$	$2+4Z$	$3+4Z$
$1+4Z$	$1+4Z$	$2+4Z$	$3+4Z$	$4Z$
$2+4Z$	$2+4Z$	$3+4Z$	$4Z$	$1+4Z$
$3+4Z$	$3+4Z$	$4Z$	$1+4Z$	$2+4Z$

مثال.

لنأخذ الزمرة:

$$Z_{18} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 17\}$$

وجدنا سابقاً أن $\langle \frac{18}{3} \rangle$ هي زمرة جزئية في Z_{18} وناظمية لأن الزمرة Z_{18} تبديلية.

نفترض أن $H = \langle \frac{18}{3} \rangle = \langle 6 \rangle = \{0, 6, 12\}$ فنجد أن $H = \langle \frac{18}{3} \rangle = \langle 6 \rangle = \{0, 6, 12\}$. وأن المرافقات اليسارية

للزمرة الجزئية H في Z_{18} هي:

$$0 + H = \{0, 6, 12\} = H = 6 + H = 12 + H$$

$$3 + H = \{3, 9, 15\} = 9 + H = 15 + H$$

$$1 + H = \{1, 7, 13\} = 7 + H = 13 + H$$

$$4 + H = \{4, 10, 16\} = 10 + H = 16 + H$$

$$2 + H = \{2, 8, 14\} = 8 + H = 14 + H$$

$$5 + H = \{5, 11, 17\} = 11 + H = 17 + H$$

وهكذا نجد أن المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في Z_{18} هي:

$$H; \quad 1 + H; \quad 2 + H; \quad 3 + H; \quad 4 + H; \quad 5 + H$$

وبالتالي فإن زمرة الخارج Z_{18}/H هي

$$Z_{18}/H = \{H, 1 + H, 2 + H, 3 + H, 4 + H, 5 + H\}$$

والجدول التالي يبين لنا العملية (+) المعرفة على Z_{18}/H .

	H	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$5 + H$
H	H	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$5 + H$
$1 + H$	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$5 + H$	H
$2 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$5 + H$	H	$1 + H$
$3 + H$	$3 + H$	$4 + H$	$5 + H$	H	$1 + H$	$2 + H$
$4 + H$	$4 + H$	$5 + H$	H	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$
$5 + H$	$5 + H$	H	$1 + H$	$2 + H$	$3 + H$	$4 + H$

إن أهمية زمرة الخارج لزمرة ما تكمن في أن زمرة الخارج في كثير من الأحيان تعطينا بعض المعلومات عن الزمرة نفسها، والمبرهنة الأولى التي تبين لنا ذلك سوف نوردنا الآن.

مبرهنة ٢-٢-٥.

لتكن G زمرة. إذا كانت الزمرة $G/Z(G)$ دوارة علئذ تكون الزمرة G تبديلية. البرهان.

نفرض أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة مولدة بالعنصر $g.Z(G)$ حيث $g \in G$. وليكن $a, b \in G$ علئذ يوجد $i, j \in Z$ بحيث

$$b.Z(G) = (g.Z(G))' = g'.Z(G) \text{ و } a.Z(G) = (g.Z(G))' = g'.Z(G)$$

وهكذا نجد أن $a = g'x$, $b = g'y$ حيث $x, y \in Z(G)$ ومنه

$$\begin{aligned} ab &= (g'x)(g'y) = g'(xg'y) = (g'g')(xy) = \\ &= (g'g')(xy) = (g'y)(g'x) = ba \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة G تبديلية.

المبرهنة التالية تبين لنا طبيعة الزمر الجزئية في زمرة الخارج.

مبرهنة ٣-٢-٥.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G . كل زمرة جزئية من الزمرة G/H

هي من الشكل D/H حيث D زمرة جزئية من G تحوي H .

البرهان.

لتكن $\bar{D}$ زمرة جزئية من الزمرة G/H . ولبرهن أن $\bar{D} = D/H$ حيث D زمرة

جزئية من G تحوي H . لنأخذ المجموعة

$$D = \{g : g \in G; \quad gH \in \bar{D}\}$$

بما أن $\bar{D}$ زمرة جزئية من G/H فإن $eH = H \in \bar{D}$ ومنه $e \in D$ وبالتالي $D \neq \emptyset$.

ليكن $x, y \in D$ عندها $xH, yH \in \bar{D}$ ومنه

$$(xy)^{-1}H = (xH)(y^{-1}H) = (xH)(yH)^{-1} \in \bar{D}$$

وهكذا نجد أن $xy^{-1} \in D$ وبالتالي D زمرة جزئية من G . ليكن $h \in H$. بما أن

$$hH = H \in \bar{D} \text{ فإن } h \in D \text{ أي } H \subseteq D.$$

ليكن $\bar{d} \in \bar{D}$ عندها $\bar{d} \in G/H$ وبالتالي $\bar{d} = dH$ ولكون $\bar{d} \in \bar{D}$ فإن $d \in D$ ومنه

$\bar{d} \in D/H$ أي أن $\bar{D} \subseteq D/H$. ليكن $cH \in D/H$ عندها $c \in D$ ومنه $cH \in \bar{D}$ أي

أن $\bar{D} = D/H$. مما سبق نجد أن $\bar{D} = D/H$.

تمارين محلولة (٥)

١- لتكن $G = U(32)$ و $H = U_{16}(32)$. أوجد زمرة الخارج $G \setminus H$.

الحل.

لدينا

$$G = U(32) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$$

إن $(G:1) = 16$. كما أن $H = U_{16}(32) = \{1, 17\}$ زمرة جزئية ناظرية في G . للوجد

جميع المرافقات اليسارية للزمرة H في G . إن

$$1H = \{1, 17\}, \quad 3H = \{3, 19\}, \quad 5H = \{5, 21\}, \quad 7H = \{7, 23\}$$

$$9H = \{9, 25\}, \quad 11H = \{11, 27\}, \quad 13H = \{13, 29\}, \quad 15H = \{15, 31\}$$

جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة H في G . أي أن

$$G/H = \{1H, 3H, 5H, 7H, 9H, 11H, 13H, 15H\}$$

٢- لتكن N زمرة جزئية ناظرية من الزمرة G . لنفرض أن $(G/N:1) = m$.

أ - أثبت أن $x^m \in N$ وذلك أيًا كان $x \in G$.

ب - ليكن $g \in G$ وأن $g^n \in N$ حيث $n \in N^*$ وأن $\gcd(n, m) = 1$ علنذا $g \in N$.

الحل.

أ - ليكن $x \in G$. لميز حالتين:

- إذا كان $x \in N$ علنذا $x^m \in N$.

- إذا كان $x \notin N$ علنذا $xN \in G \setminus N$ وبما أن مرتبة الزمرة $G \setminus N$ تساوي m

وحسب التمهيدية (٣-١-١٢) فإن $(xN)^m = N$ ومنه $x^m N = N$ مما

سبق نجد أن $x^m \in N$.

ب - بما أن $\gcd(n, m) = 1$ علنذا يوجد $u, v \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = un + vm$ ومنه

$$g = g^{un+vm} = (g^n)^u (g^m)^v \in K$$

ومنه $gK = K$ أي أن $g \in K$.

٣- تعريف.

لتكن G زمرة. نسمي أصغر عدد صحيح موجب n يحقق $x^n = e$ وذلك أيضاً كان $x \in G$ معامل الزمرة G .

أثبت أن كل زمرة تبديلية منتهية تملك معامل يقسم مرتبة الزمرة G .

الحل.

لتكن G زمرة تبديلية منتهية ولنفرض أن $(G:1) = m$. لنأخذ المجموعة

$$S = \{s : s \in N^*; \quad x^s = e, \quad \forall x \in G\}$$

إن المجموعة S غير خالية لأن $m \in S$. وبما أن كل مجموعة جزئية وغير خالية من N^* تملك عنصراً أصغر، فإن S تملك عنصراً أصغر وليكن n . وحسب خوازمية القسمة يوجد $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $m = qn + r$ وأن $0 \leq r < n$ لنفرض أن $r \neq 0$ عندئذ أياً كان $x \in G$ فإن $x = x^m = x^{qn+r} = (x^n)^q x^r = (x^n)^q x^r = x^r$ فإن $x \in S$ وملسه $r \in S$ وهذا يناقض كون n عنصراً أصغر في S . مما سبق نجد أن $r = 0$ وبالتالي n يقسم m .

٤- لتكن G زمرة منتهية غير تبديلية مرتبتها حيث P عدد أولي. أثبت أنه إذا كان

$$(Z(G):1) = p \quad \text{فإن} \quad Z(G) \neq \langle e \rangle.$$

الحل.

بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G وحسب لاغرانج فإن مرتبة الزمرة $Z(G)$ تقسم P^3 وهذا يبين لنا أن $(Z(G):1) \in \{1, p, p^2, p^3\}$ ولكون $Z(G) \neq \langle e \rangle$ فإن $(Z(G):1) \neq 1$. من جهة أخرى بما أن الزمرة G ليست تبديلية

فإن $(Z(G):1) \neq p^3$. وبما أن الزمرة $Z(G)$ ناظمية في G فإن

$$(G/Z(G):1) = \frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = \frac{p^3}{p^2} = p.$$

أي أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة وحسب المبرهنة (٥-٢-٢) تكون الزمرة G تبديلية

وهذا مرفوض فرضاً. أي أن $(Z(G):1) \neq p^2$ مما سبق نجد أن $(Z(G):1) = p$.

٥- لتكن G زمرة منتهية مرتبتها pq حيث p, q أعداد أولية ليست بالضرورة

مختلفة. أثبت أن مرتبة الزمرة $Z(G)$ إما تساوي 1 أو تساوي pq .

الحل.

بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G وحسب مبرهنة لاغرانج، فإن $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$ وهنا نميز حالتين: - الحالة الأولى. إذا كانت الزمرة G تبديلية عندئذ فإن $G = Z(G)$ وبالتالي $(Z(G):1) = pq$. - الحالة الثانية. الزمرة G ليست تبديلية، عندئذ $(Z(G):1) \neq pq$. لنفرض أن $(Z(G):1) = p$ عندئذ $(G/Z(G):1) = q$ وبالتالي الزمرة $G/Z(G)$ دوارة وحسب المبرهنة (٥-٢-٢) تكون الزمرة G تبديلية وهذا مرفوض فرضاً. كذلك الأمر عندما $(Z(G):1) = q$. مما سبق نجد أن $(Z(G):1) = 1$.

٦- لنكن G زمرة و H, K زمير جزئية منتهية في G . عندئذ فإن

$$(KH:1) = \frac{(K:1)(H:1)}{(K \cap H:1)}.$$

الحل.

لنفرض أن $(K:1) = m$ و $(H:1) = n$. إن المجموعة KH تحوي بالتحديد nm عنصراً. وهنا نميز حالتين: - الحالة الأولى. إذا كان $K \cap H = \langle e \rangle$ ، في هذه الحالة، فإن جميع عناصر المجموعة KH مختلفة فيما بينها. لأنه إذا وجد $kh, k_1h_1 \in KH$ بحيث $kh = k_1h_1$ وأن $k, k_1 \in K, h, h_1 \in H$ ومنه $kh_1^{-1} = k^{-1}k_1 \in H \cap K = \langle e \rangle$ فإن $h = h_1$ و $k = k_1$ ، وهكذا فإن

$$(KH:1) = nm = (K:1)(H:1) = \frac{(K:1)(H:1)}{(K \cap H:1)}$$

- الحالة الثانية. $K \cap H \neq \langle e \rangle$. نلاحظ في هذه الحالة أن عناصر المجموعة KH ليست جميعها مختلفة. لأنه إذا كان $h \in H, k \in K$ بحيث $k \neq h$ وبما أن $K \cap H \neq \langle e \rangle$ يوجد عنصر $t \in K \cap H, t \neq e$. ومنه $kh = (kt)(t^{-1}h)$ وأن $k \neq kt, h \neq t^{-1}h$. لنفرض أن $(K \cap H:1) = s$. وليكن $h \in H, k \in K$ ، عندئذ أيا كان $t \in K \cap H$ فإن $kh = (kt)(t^{-1}h)$ ، وهذا يبين لنا أن كل عنصر من المجموعة KH يمكن كتابته على الأقل في s شكل في KH . من جهة أخرى،

ليكن $kh, k_1h_1 \in KH$ بحيث $h \neq h_1, k \neq k_1$ وأن $kh = k_1h_1$ عندئذ
 $k^{-1}k_1 = hh_1^{-1} \in K \cap H$ بفرض أن $t = k^{-1}k_1 = hh_1^{-1}$ نجد أن
 $h = th_1, k = k_1t^{-1}$ مما سبق نجد أن كل عنصر من المجموعة KH يمكن
 كتابته بالتحديد في s شكل في KH . وهذا يبين لنا أن

$$|(KH:1)| = \frac{nm}{s} = \frac{(K:1)(H:1)}{(K \cap H:1)}$$

٧- لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G . نسمي تقاطع جميع الزمر
 الجزئية الناظمية في G والتي كل منها يحوي H اللصاقة الناظمية للزمرة H ونرمز
 لها $L(H)$. أثبت أن

١ - $L(H)$ هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في G تحوي H .

$$2 - L(H) = \langle ghg^{-1}; g \in G, h \in H \rangle$$

الحل.

١ - لتكن $\mathfrak{J}$ مجموعة كل الزمر الجزئية الناظمية في G التي كل منها يحوي H .
 وبما أن $H \in \mathfrak{J}$ فإن $\mathfrak{J}$ غير خالية وحسب المبرهنة (٥-١-٢) نجد أن $L(H)$

زمرة جزئية ناظمية في G تحوي H حيث $L(H) = \bigcap_{K \in \mathfrak{J}} K$.

لتكن M زمرة جزئية ناظمية في G تحوي H علئذ $M \in \mathfrak{J}$ ومنه

$$L(H) = \bigcap_{K \in \mathfrak{J}} K \subseteq M$$

وهذا يبين لنا أن $L(H)$ هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في G تحوي H .

٢ - ليكن $g \in G, h \in H$ و $K \in \mathfrak{J}$ وبما أن الزمرة H ناظمية في G علئذ
 $ghg^{-1} \in H \subseteq K$ ومنه

$$\forall K \in \mathfrak{J}; \{ghg^{-1}; g \in G, h \in H\} \subseteq K$$

$$\{ghg^{-1}; g \in G, h \in H\} \subseteq \bigcap_{K \in \mathfrak{J}} K = L(H)$$

وبالتالي $\langle ghg^{-1}; g \in G, h \in H \rangle \subseteq L(H)$

من جهة أخرى، أيا كان $h \in H$ وبما أن الزمرة H ناظمية في G فإن $H = gHg^{-1}$ وذلك أيا كان $g \in G$. ومنه لأجل كل $h \in H$ يوجد $h_0 \in H$ و $g \in G$ بحيث

$$h = gh_0g^{-1} \in \langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$$

أي أن الزمرة $\langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$ تحوي الزمرة H ، وبما أنها ناظمية

نجد أن $L(H) \subseteq \langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$. مما سبق نجد أن

$$L(H) = \langle ghg^{-1}; \quad g \in G, h \in H \rangle$$

٨ - لنكن K زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G و $\bar{G} = G/K$ ولنكن S مجموعة جزئية من G و $\bar{S} = \{xK : x \in S\}$. والمطلوب:

١ - أثبت أنه إذا كانت المجموعة S مولدة للزمرة G فإن المجموعة $\bar{S}$ تكون مولدة للزمرة $\bar{G} = G/K$.

٢ - إذا كانت الزمرة G منتهية التوليد ومولدة بـ n عنصر فإن الزمرة $\bar{G}$ تكون منتهية التوليد ومولدة بـ n عنصر.

الحل.

١ - ليكن $\bar{g} \in \bar{G}$ عنده $\bar{g} = gK$ حيث $g \in G$. وبما أن المجموعة S مولدة

للزمرة G فإن $g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} \dots g_t^{\alpha_t}$ حيث $g_j \in S$ وذلك من أجل $1 \leq j \leq t$ وأن $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ حيث $1 \leq j \leq t$. ومنه

$$\bar{g} = gK = (g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} \dots g_t^{\alpha_t})K = (g_1K)^{\alpha_1} (g_2K)^{\alpha_2} (g_3K)^{\alpha_3} \dots (g_tK)^{\alpha_t}$$

وبما أن العناصر $g_j \in S$ فإن $g_jK \in \bar{S}$ حيث $1 \leq j \leq t$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $\bar{S}$ مولدة للزمرة $\bar{G} = G/K$.

٢ - ينتج من (١) في حالة المجموعة S منتهية وأن $\text{Card}(S) = n$.

٩ - لنكن H, K, M زمر جزئية ناظمية من الزمرة G بحيث $M \subseteq H$. إذا كان

$$\frac{HK}{MK} \subseteq Z\left(\frac{G}{MK}\right) \quad \text{فإن} \quad \frac{H}{M} \subseteq Z\left(\frac{G}{M}\right)$$

الحل.

ليكن $\bar{y} \in \frac{HK}{MK}$ ولنبرهن أنه أيا كان $\bar{x} \in \frac{G}{MK}$ فإن $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$. ليكن $\bar{x} \in \frac{G}{MK}$ علنئذ $\bar{x} = x(MK)$ حيث $x \in G$. من جهة أخرى، فإن $\bar{y} = (hk)(MK)$ حيث $h \in H, k \in K$ ومنه

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x(MK)[(hk)(MK)] = (x(hk))(MK) = ([x(hk)]M)K$$

$$(x(hk))M = (xM)[(hM)(kM)] = [(xM)(hM)](kM)$$

وبما أن $hM \in \frac{H}{M} \subseteq Z(\frac{G}{M})$ فإن

$$\begin{aligned} (x(hk))M &= (hM)[(xM)(kM)] = (hM)[(kM)(xM)][(hM)(kM)](xM) = \\ &= ((hk)M)(xM) = [(hk)x]M \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \bar{y} &= ([x(hk)]M)K = [(hk)x]MK = ((hk)x)MK = [(hk)(MK)]x(MK) = \\ &= [(hk)(MK)]x(MK) = \bar{y} \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

تمارين (٥)

- ١ - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G .
 - أثبت أنه إذا كانت الزمرة G دوارة فإن الزمرة G/H تكون أيضاً دوارة.
 - أثبت أنه إذا كانت الزمرة G تبديلية فإن الزمرة G/H تكون أيضاً تبديلية.
- ٢ - أوجد مرتبة العنصر $\langle 6 \rangle + 5$ في الزمرة $Z_{18}/\langle 6 \rangle$.
- ٣ - أوجد مرتبة العنصر $\langle 8 \rangle + 14$ في الزمرة $Z_{24}/\langle 8 \rangle$.
- ٤ - أوجد جميع عناصر الزمرة $U(20)/U_5(20)$.
- ٥ - لتكن $G = Z/\langle 20 \rangle$ و $H = \langle 4 \rangle$. أوجد جميع عناصر G, H .
- ٦ - لتكن G زمرة و $g \in G$. أثبت أن $\langle g \rangle Z(G)$ زمرة جزئية تبديلية في G .
- ٧ - لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية ناظمية في G . أثبت أن مرتبة العنصر gH في G/H تقسم مرتبة العنصر g في G وذلك أياً كان $g \in G$.
- ٨ - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G مرتبتها 2. أثبت أن $H \subseteq Z(G)$.
- ٩ - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . إذا كانت كل مرافقة يسارية للزمرة H في G هي مرافقة يمينية، أثبت أن H ناظمية في G .
- ١٠ - لتكن N زمرة جزئية من الزمرة G بحيث $(G:N) = 2$. أثبت أنه إذا كان $x, y \in G$ بحيث $x \notin N, y \notin N$ فإن $xy \in N$.
- ١١ - لتكن G زمرة و n عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أنه إذا كانت المجموعة $H = \{x : x \in G; o(x) = n\}$ زمرة جزئية من G فإنها تكون ناظمية في G .
- ١٢ - لتكن G زمرة و H, K زمرة جزئية من G و لنفرض أن $(H:1) = n, (K:1) = m$. إذا كان $\gcd(n, m) = 1$ أثبت أن $H \cap K = \langle e \rangle$.
- ١٣ - ليكن $n > 2$ عدداً صحيحاً. أثبت أن المجموعة $U(n)^2 = \{x^2; x \in U(n)\}$ زمرة جزئية في $U(n)$ وأن $U(n)^2 \not\subseteq U(n)$.
- ١٤ - أثبت أن $U(55)^3 = \{x^3; x \in U(55)\} = U(55)$.

الفصل السادس

التشاكلات الزمرية ومبرهنات التماثل

في هذه الفقرة سوف ندرج واحدة من أهم الأفكار الأساسية في الجبر، وهي مفهوم التشاكل أو مفهوم (*homomorphism*). إن مصطلح التشاكل أو *homomorphism* أتى من الكلمات الإغريقية (*homo*) وتعني يشبه أو مشابه وكلمة (*morphe*) وتعني شكلاً أو صيغة، وجبرياً، فإن مصطلح التشاكل يعني البنى المتشابهة. و بعد *Camille Jordan* أول من أدخل هذا المفهوم وذلك عام ١٨٧٠. لنتعرف بداية على التشاكل بين زمريتين.

تعريف.

ليكن G و $\bar{G}$ زمريتين ما. نسمي كل تطبيق (تابع) $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً إذا حقق الشرط: أيأ كان $x, y \in G$ فإن

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

قبل أن نبدأ بدراسة خواص التشاكل الزمري، لنأخذ التعريف التالي:

تعريف.

ليكن $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكل زمري. نسمي المجموعة:

$$\text{Ker} f = \{x: x \in G; f(x) = \bar{e}\}$$

حيث $\bar{e}$ حيادي الزمرة $\bar{G}$ ، نواة التشاكل الزمري f .

من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس خواص التشاكل الزمري والتي سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة.

مبرهنة ١-٦.

ليكن $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً حيث $G, \bar{G}$ زمريتين اختياريتين. ولنفرض أن $e, \bar{e}$ حيادي كل من الزمريتين $G, \bar{G}$ على الترتيب. وليكن $g \in G$ و H زمرة جزئية من G . عندئذ:

$$1- f(e) = \bar{e}$$

$$2- f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$$

$$3- f(g^n) = [f(g)]^n \text{ وذلك أياً كان } n \in \mathbb{Z}$$

$$4- \text{Ker } f \text{ زمرة جزئية ناظمية في } G$$

$$5- \text{المجموعة } f(H) = \{f(h); h \in H\} \text{ زمرة جزئية في } \bar{G}$$

$$6- \text{إذا كانت الزمرة } H \text{ دوارة فإن } f(H) \text{ دوارة.}$$

$$7- \text{إذا كانت الزمرة } H \text{ تبديلية فإن } f(H) \text{ تبديلية.}$$

$$8- \text{إذا كانت الزمرة } H \text{ ناظمية في } G \text{ فإن } f(H) \text{ ناظمية في } f(G)$$

$$9- \text{إذا كان } o(g) = n \text{ فإن } o(f(g)) \text{ تقسم } n$$

$$10- \text{إذا كانت } (H:1) = n \text{ فإن } (f(H):1) \text{ تقسم } n$$

$$11- \text{إذا كان } f(g) = g' \text{ فإن } f^{-1}(g') = \{x: x \in G, f(x) = g'\} = g.Ker f$$

$$12- \text{إذا كانت } \bar{K} \text{ زمرة جزئية في } \bar{G} \text{ فإن } f^{-1}(\bar{K}) = \{k: k \in G, f(k) \in \bar{K}\}$$

$$\text{زمرة جزئية في } G$$

$$13- \text{إذا كانت } \bar{K} \text{ ناظمية في } \bar{G} \text{ فإن } f^{-1}(\bar{K}) \text{ ناظمية في } G$$

$$14- \text{Ker } f = \langle e \rangle \text{ عندما و فقط عندما التطبيق } f \text{ متباين.}$$

البرهان.

$$1- \text{لدينا } ee = e \text{ ومنه } e\bar{e} = f(e) \text{ وحسب قانون الاختصار في}$$

$$\text{الزمرة نجد أن } f(e) = \bar{e}$$

$$2- \text{لدينا } gg^{-1} = e \text{ ومنه } f(gg^{-1}) = f(e) = \bar{e} \text{ وهذا يبين لنا أن}$$

$$f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$$

٣ - ينتج مباشرة من التعريف.

٤ - بما أن $f(e) = \bar{e}$ نجد أن المجموعة $Ker f$ غير خالية. ليكن $x, y \in Ker f$ عندها
 $f(x) = f(y) = \bar{e}$ ومنه

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = \bar{e}\bar{e} = \bar{e}$$

وهذا يبين لنا أن $xy^{-1} \in Ker f$ وبالتالي $Ker f$ زمرة جزئية في G . ليكن

$z \in Ker f, a \in G$ عندها $aza^{-1} \in G$ كما أن

$$f(aza^{-1}) = f(a)f(z)f(a^{-1}) = f(a)[f(a)]^{-1} = \bar{e}$$

أي أن $aza^{-1} \in Ker f$. وهذا يبين لنا أن $a.Ker f.a^{-1} \subseteq Ker f$ وذلك أيًا كان $a \in G$.
 أي أن الزمرة الجزئية $Ker f$ ناظمية في G .

٥ - بما أن $e \in H$ فإن $f(e) = \bar{e}$ ومنه فإن $f(H)$ مجموعة جزئية من $\bar{G}$
 وغير خالية. ليكن $y_1, y_2 \in f(H)$ عندها يوجد $x_1, x_2 \in H$ بحيث
 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ومنه

$$y_1 y_2^{-1} = f(x_1)[f(x_2)]^{-1} = f(x_1 x_2^{-1}) \in f(H)$$

أي أن $f(H)$ زمرة جزئية في $\bar{G}$.

٦ - لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ حيث $a \in H$ ولنبين أن $\langle f(a) \rangle = f(H)$. بما
 أن $a \in H$ فإن $f(a) \in f(H)$ وبالتالي $\langle f(a) \rangle \subseteq f(H)$. ليكن $y \in f(H)$
 عندها $y = f(x)$ حيث $x \in H$ ومنه $x = a^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. وهكذا فإن

$$y = f(x) = f(a^n) = [f(a)]^n \in \langle f(a) \rangle$$

أي أن $f(H) \subseteq \langle f(a) \rangle$. مما سبق نجد أن $f(H) = \langle f(a) \rangle$ وبالتالي الزمرة $f(H)$
 نوارة.

٧ - نتركه للقارئ.

٨ - لنفرض أن الزمرة H ناظمية في G . عندها $yHy^{-1} \subseteq H$ وذلك أيًا
 كان $y \in G$. ليكن $a \in f(H)$ و $x \in f(G)$ عندها $x = f(y)$, $a = f(h)$, حيث
 $y \in G, h \in H$ ومنه فإن $yhy^{-1} \in H$ وبالتالي

$$f(yhy^{-1}) = f(y)f(h)[f(y)]^{-1} = xax^{-1} \in f(H)$$

وهكذا فإنه أيا كان $x \in f(G)$ ينتج أن $xf(H)x^{-1} \subseteq f(H)$ وبالتالي الزمرة الجزئية $f(H)$ ناظمية في $f(G)$.

٩ - لنفرض أن $o(g) = n$ وأن $o(f(g)) = m$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $n = qm + r$ وأن $0 \leq r < m$. لنفرض أن $r \neq 0$ عندئذ

$$e = g^n = g^{mq} g^r$$

$$\bar{e} = f(e) = f(g^{mq})f(g^r) = [(f(g))^m]^q (f(g))^r = (f(g))^r$$

وهذا يناقض كون $o(f(g)) = m$ أي أن $r = 0$ وبالتالي $n = qm$.

١٠ - يبرهن بطريقة مشابهة للخاصة (٩).

١١ - نعلم أن $f^{-1}(g') = \{x : x \in G, f(x) = g'\}$ ليكن $x \in f^{-1}(g')$ عندئذ فإن

$f(x) = g' = f(g)$ ومنه $f(g^{-1}x) = \bar{e}$ وهذا يبين لنا أن $g^{-1}x \in \text{Ker } f$ وبالتالي

$x \in g \cdot \text{Ker } f$ أي أن $f^{-1}(g') \subseteq g \cdot \text{Ker } f$ ليكن $z \in g \cdot \text{Ker } f$ عندئذ $z = gx$

حيث $x \in \text{Ker } f$ ومنه $f(z) = f(g)f(x) = g'$ وهذا يبين لنا أن $z \in f^{-1}(g')$

وبالتالي $f^{-1}(g') = g \cdot \text{Ker } f$ مما سبق نجد أن $f^{-1}(g') = g \cdot \text{Ker } f$.

١٢ - واضح أن $f^{-1}(\bar{K}) \subseteq G$ لأن $\Phi \neq f^{-1}(\bar{K})$ لأن $f(e) = \bar{e} \in \bar{K}$ ليكن $x, y \in f^{-1}(\bar{K})$

عندئذ $x, y \in G$ وأن $f(x), f(y) \in \bar{K}$ ومنه

$$f(x)[f(y)]^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in \bar{K}$$

أي أن $xy^{-1} \in f^{-1}(\bar{K})$ وبالتالي $f^{-1}(\bar{K})$ زمرة جزئية من G .

١٣ - حسب (١٢) إن $f^{-1}(\bar{K})$ زمرة جزئية من G ليكن $g \in G$ وللبرهن أن

$$gf^{-1}(\bar{K})g^{-1} \subseteq f^{-1}(\bar{K})$$

ليكن $z \in f^{-1}(\bar{K})$ عندئذ $gzg^{-1} \in G$ وأن

$$f(gzg^{-1}) = f(g)f(z)f(g^{-1}) \in f(g)\bar{K}[f(g)]^{-1} \subseteq \bar{K}$$

وهكذا نجد أن $gf^{-1}(\bar{K})g^{-1} \subseteq f^{-1}(\bar{K})$ وبالتالي الزمرة $f^{-1}(\bar{K})$ ناظمية في G .

١٤ - لنفرض أن $\text{Ker } f = \langle e \rangle$ ليكن $a, b \in G$ بحيث $f(a) = f(b)$ ومنه

$$f(a)[f(b)]^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = \bar{e}$$

وبالتالي $ab^{-1} \in \text{Ker} f$ أي أن $ab^{-1} = e$ ومنه $a = b$ و التشاكل f متباين. لنفرض أن f متباين، وليكن $z \in \text{Ker} f$ عندئذ $f(z) = \bar{e} = f(e)$ ومنه يكون $z = e$ وبالتالي $\text{Ker} f = \langle e \rangle$.

الخاصة (٤) من المبرهنة السابقة نقول أن نواة أي تشاكل زمري هي زمرة جزئية ناظمية. المبرهنة التالية تبين لنا أن عكس هذه الخاصة صحيح أيضاً.
مبرهنة ٦-٢.

لتكن G زمرة. كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر. البرهان.

لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G . ولناخذ العلاقة $\pi: G \rightarrow G/H$ المعرفة بالشكل $\forall g \in G$ فإن $\pi(g) = gH$. واضح أن العلاقة π تشاكل لأنه $\forall g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\pi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)H = (g_1 H)(g_2 H) = \pi(g_1) \pi(g_2)$$

كذلك π غامر، لأنه $\forall xH \in G/H$ فإن $x \in G$ وبالتالي $\pi(x) = xH$.

لنبرهن على أن $\text{Ker} \pi = H$. ليكن $h \in H$ عندئذ $\pi(h) = hH = H$ ومنه $h \in \text{Ker} \pi$ أي أن $H \subseteq \text{Ker} \pi$. ليكن $k \in \text{Ker} \pi$ عندئذ $\pi(k) = kH = H$ ومنه $k \in H$ وبالتالي $\text{Ker} \pi \subseteq H$. مما سبق نجد أن $\text{Ker} \pi = H$.

تعريف.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية. نسمي التشاكل الزمري الغامر $\pi: G \rightarrow G/H$ المعرفة بالشكل $\pi(g) = gH$ $\forall g \in G$ التشاكل الطبيعي (القانوني) الغامر.

تعريف.

لتكن $G, \bar{G}$ زمريتين اختياريتين و $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً. نقول عن f إنه تماثل إذا كان f متبايناً وغامراً. ونقول عن الزمريتين $G, \bar{G}$ إنهما متماثلتان إذا وجد بينهما تماثل، ونعبر عن ذلك $G \approx \bar{G}$.

ماذا يعني وجود تماثل بين زمرتين؟

لفرض أنه لدينا طالبان أحدهما عربي والآخر إنكليزي. إذا طلب منهما عدد مجموعة من الكتب، فإن الطالب العربي يقول واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة،.... والطالب الإنكليزي يقول $one, two, three, four, \dots$. هل الطالبان يقومان بأشياء مختلفة في هذه الحالة؟ بالطبع لا، فكلا الطالبين يقومان بعد مجموعة الكتب ولكن يستخدمان لأجل ذلك مصطلحات مختلفة. أيضا الطالب العربي يقول اثنان زائد ثلاثة يساوي خمسة بينما الطالب الإنكليزي يقول $two + three = five$. في هذه الحالة أيضا كلا الطالبان يعبران عن عملية الجمع ولكن بمصطلحات مختلفة. وهذه حال الزمر المتماثلة. فإذا كانت لدينا زمرتان متماثلتان فهذا يعني أن هاتين الزمرتين متشابهتان ولكن الفرق بينهما يكون غالبا في المصطلحات أو طبيعة العناصر. بمعنى آخر الزمر المتماثلة تملك الخواص الجبرية ذاتها.

العلاقة الهامة بين التشاكلات الزمرية وزمر الخارج نوردتها من خلال المبرهنة التالية والتي غالبا ما تسمى النظرية الأساسية للتشاكلات الزمرية.

مبرهنة ٦-٣. (مبرهنة التماثل الأولى 1870 Jordan).

ليكن $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً. عندئذ:

$$1 - G / \text{Ker} f \approx \text{Im } f$$

$$2 - \text{إذا كان } f \text{ غامراً فإن } G / \text{Ker} f \approx \bar{G}$$

البرهان.

١ - لنعرف العلاقة $\varphi: G / \text{Ker} f \rightarrow \text{Im } f$ بالشكل التالي:

$$\forall g. \text{Ker} f \in G / \text{Ker} f; \quad \varphi(g. \text{Ker} f) = f(g)$$

لنبرهن في البداية أن العلاقة φ معرفة جيداً. ليكن $x. \text{Ker} f, y. \text{Ker} f \in G / \text{Ker} f$

بحيث $x. \text{Ker} f = y. \text{Ker} f$ عندئذ $(x^{-1}.y). \text{Ker} f = \text{Ker} f$ وبالتالي $(x^{-1}.y) \in \text{Ker} f$

ومنه $f(x^{-1}.y) = e$. أي أن $f(x) = f(y)$. وهذا يبين لنا أن العلاقة φ تطابق،

كذلك φ تشاكل لأن

$$\phi[(x.Kerf)(y.Kerf)] = \phi(xy.Kerf) = f(xy) =$$

$$= f(x)f(y) = \phi(x.Kerf)\phi(y.Kerf)$$

أيضا ϕ متباين، لأنه إذا كان $f(x) = f(y)$ فإن $f(x^{-1}y) = \bar{e}$ وبالتالي $x^{-1}y \in Kerf$ ومنه $x.Kerf = y.Kerf$. وهو غامر، لأنه إذا كان $z \in Im f$ فإن $z = f(x)$ حيث $x \in G$ وبالتالي $x.Kerf \in G/Kerf$ وأن $\phi(x.Kerf) = f(x) = z$ مما سبق نجد أن $G/Kerf \approx \bar{G}$.

٢ - ينتج مباشرة من (١) لأنه في هذه الحالة يكون $Im f = \bar{G}$.

مبرهنة أخرى تتعلق بالتماثلات الزمرية نوردها لأن:

مبرهنة ٤-٦. (مبرهنة التماثل الثانية).

لتكن G زمرة و H, K زمرتين جزئيتين من G . إذا كانت الزمرة الجزئية K ناظمية في G ، علنًا

$$HK/K = KH/K = \langle H \cup K \rangle / K \approx H/H \cap K$$

البرهان.

وجدنا سابقا (المبرهنة ٥-١-٤) أن $KH = HK = \langle H \cup K \rangle$ ومنه

$$HK/K = KH/K = \langle H \cup K \rangle / K$$

لنبرهن أن $HK/K \approx H/H \cap K$.

لنعرف العلاقة $f: H \rightarrow HK/K$ بالشكل التالي: $\forall h \in H$ فإن $f(h) = hK$. واضح أن العلاقة f هي تطبيق. كما أن f تشاكل لأنه

$$f(h_1 h_2) = (h_1 h_2)K = (h_1 K)(h_2 K) = f(h_1)f(h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in H$$

كذلك f غامر لأنه إذا كان $\bar{y} \in HK/K$ فإن $\bar{y} = yK$ حيث $y \in HK$ وبالتالي $y = hk$ حيث $h \in H, k \in K$ وهكذا نجد أن

$$\bar{y} = yK = (hk)K = (hK)(kK) = (hK)K = hK$$

وبما أن $h \in H$ نجد أن $hK = \bar{y}$ و $f(h) = hK$ وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن

$H/Kerf \approx HK/K$. لنبرهن الآن على أن $Kerf = H \cap K$. لنكن $a \in Kerf$

عندئذ $a \in H$ وأن $f(a) = aK = K$ وهكذا فإن $a \in K$ وبالتالي $a \in H \cap K$ أي أن $\text{Ker } f \subseteq H \cap K$. كذلك إذا كان $b \in H \cap K$ فإن $f(b) = bK = K$ وبالتالي $b \in \text{Ker } f$ ومنه $H \cap K \subseteq \text{Ker } f$ وهذا يبين لنا أن $\text{Ker } f = H \cap K$. مما سبق نجد أن $HK/K \approx H/H \cap K$.

مبرهنة أخرى تتعلق بالتماثلات الزمرية نورددها فيما يلي:

مبرهنة ٥-٦. (مبرهنة التماثل الثالثة).

لتكن G زمرة و H, K زمرتين جزئيتين ناظميتين في G بحيث $K \subseteq H$. عندئذ:

١- الزمرة K ناظمية في H .

٢- الزمرة H/K ناظمية في G/K .

٣- $(G/K)/(H/K) \approx G/H$.

البرهان.

١- ينتج من المبرهنة (٥-١-٢).

٢- سوف نبرهن أن الزمرة H/K هي نواة لتشاكل زمري مطلقه الزمرة G/K .

لنعرف العلاقة $\varphi: G/K \rightarrow G/H$ بالشكل التالي:

$$\forall gK \in G/K; \quad \varphi(gK) = gH$$

إن العلاقة φ تطبيق، لأنه أيأ كان $g_1K, g_2K \in G/K$ بحيث $g_1K = g_2K$ عندئذ

$$g_1 \in g_2K = g_2K \subseteq g_2H$$

$$\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) \text{ أي } g_1H = g_2H$$

كما أن φ تشاكل لأن

$$\varphi(g_1K.g_2K) = \varphi((g_1g_2)K) = (g_1g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K)$$

لنبرهن أن $\text{Ker } \varphi = H/K$. ليكن $xK \in \text{Ker } \varphi$ عندئذ $xK \in \text{Ker } \varphi$ ومنه $\varphi(xK) = xH = H$

وهكذا فإن $xK \in H/K$ أي أن $\text{Ker } \varphi \subseteq H/K$. ليكن $yK \in H/K$ عندئذ

$y \in H$ ومنه $\varphi(yK) = yH = H$ أي أن $yK \in \text{Ker } \varphi$. وبالتالي $H/K \subseteq \text{Ker } \varphi$.

مما سبق نجد أن $\text{Ker } \varphi = H/K$. وبما أن الزمرة $\text{Ker } \varphi$ ناظمية في G/K نجد أن

الزمرة H/K ناظمية في G/K .

٣ - لإثبات أن $(G/K)/(H/K) \approx G/H$ يكفي أن نبرهن أن التشاكل φ المعرف في (٢) غامر. ليكن $\bar{z} \in G/H$ عندئذ $\bar{z} = zH$ وحيث $z \in G$ ومنه $zK \in G/K$ وأن $\varphi(zK) = zH = \bar{z}$ وهذا يبين لنا أن التشاكل φ غامر، وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $(G/K)/\text{Ker}\varphi = (G/K)/(H/K) \approx G/H$.

واحدة من أهم تطبيقات مبرهنة التماثل الأولى هي الحقيقة التالية:

مبرهنة ٦-٦.

ليكن $n > 1$ عدد صحيح. عندئذ: $Z/\langle n \rangle \approx Z_n$.

البرهان.

لنعرف العلاقة $\varphi: Z \rightarrow Z_n$ بالشكل التالي:

$$\forall m \in Z; \quad \varphi(m) = m \pmod{n}$$

واضح أن العلاقة φ تطبيق وأن هذا التطبيق هو تشاكل لأنه $\forall m_1, m_2 \in Z$ فإن

$$\begin{aligned} \varphi(m_1 + m_2) &= (m_1 + m_2) \pmod{n} = m_1 \pmod{n} + m_2 \pmod{n} = \\ &= \varphi(m_1) + \varphi(m_2) \end{aligned}$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة (١-٦-٤). كما أن التشاكل φ غامر، لأنه إذا كان $s \in Z_n$ فإن $s \in Z$ وأن $s < n$ ومنه $s \pmod{n} = s$ وهكذا حسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $Z/\text{Ker}\varphi \approx Z_n$. لنبرهن على أن $\text{Ker}\varphi = \langle n \rangle$. ليكن $x \in \text{Ker}\varphi$ عندئذ $\varphi(x) = x \pmod{n} = 0$ ومنه $x = mn$ حيث $m \in Z$. أي أن $x \in nZ = \langle n \rangle$ وبالتالي $\text{Ker}\varphi \subseteq \langle n \rangle$. من جهة أخرى، ليكن $y \in \langle n \rangle$ عندئذ $y = nt$ حيث $t \in Z$ وبالتالي $\varphi(y) = y \pmod{n} = 0$ أي أن $y \in \text{Ker}\varphi$. وهكذا نجد أن $\langle n \rangle \subseteq \text{Ker}\varphi$. مما سبق نجد أن $\text{Ker}\varphi = \langle n \rangle$. وبالتالي $Z/\langle n \rangle \approx Z_n$.

مبرهنة هامة أخرى تتعلق بالزمر المتماثلة وبشكل خاص بالزمر الدوارة التي تسمى مبرهنة التصنيف للزمر الدوارة. وهذه المبرهنة من جهة تصنف لنا الزمر الدوارة غير المنتهية ومن جهة أخرى تصنف الزمر الدوارة المنتهية من حيث المرتبة.

مبرهنة ٦-٧.

القضايا التالية صحيحة:

- ١- أية زمرة دوارة وغير منتهية تماثل الزمرة Z .
- ٢- جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية متماثلة.
- ٣- كل زمرة دوارة منتهية ومرتبعتها n تماثل الزمرة Z_n .
- ٤- جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها متماثلة.

البرهان.

١ - لنكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة وغير منتهية. ولنأخذ التطبيق $f: Z \rightarrow G$ المعروف بالشكل

$$\forall n \in Z; \quad f(n) = a^n$$

واضح أن التطبيق f هو تشاكل متباين وغامر، أي أن $G \cong Z$.

٢ - ينتج من (١) وبشكل مباشر.

٣- لنكن $G = \langle a \rangle$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n . ولنعرّف العلاقة $\varphi: Z_n \rightarrow G$ بالشكل التالي $\varphi(m) = a^m$ ، فنجد أن العلاقة φ هي تطبيق وهذا التطبيق متباين لأنه $\forall m_1, m_2 \in Z_n$ فإن $0 \leq m_1, m_2 < n$ ومنه

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow a^{m_1} = a^{m_2} \Leftrightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2)$$

كما أن φ غامر، لأنه إذا كان $y \in G$ فإن $y = a^s$ حيث $0 \leq s < n$ ، أي أن $s \in Z_n$ وبالتالي $\varphi(s) = a^s = y$. بقي أن نبرهن أن φ تشاكل، وهو كذلك لأنه $\forall m_1, m_2 \in Z_n$ فإن

$$m_1 + m_2 = \begin{cases} m_1 + m_2 & m_1 + m_2 < n \\ m_1 + m_2 - n & m_1 + m_2 \geq n \end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \varphi(m_1 + m_2) &= \begin{cases} a^{m_1 + m_2} = a^{m_1} a^{m_2} & m_1 + m_2 < n \\ a^{m_1 + m_2 - n} = a^{m_1} a^{m_2} a^{-n} = a^{m_1} a^{m_2} & m_1 + m_2 \geq n \end{cases} \\ &= \varphi(m_1) \varphi(m_2) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن φ تماثل، أي أن $G \approx Z_n$.

٤ - ينتج وبشكل مباشر من (٢).^٥

لنورد الآن واحدة من خواص التماثلات الزمرية المتعلقة بمرتبة العنصر والتي
ضرورية لنا في المستقبل.

تمهيدية ٦-٨.

ليكن $f: G \rightarrow \bar{G}$ تماثلاً زمرياً وليكن $a \in G$. عندئذ $o(a) = o(f(a))$.
البرهان.

لنفرض أن $o(a) = n$ وأن $o(f(a)) = m$. عندئذ $[f(a)]^m = [f(a)]^n = \bar{e}$ ومنه
فإن m يقسم n أي يوجد $t \in \mathbb{Z}$ بحيث $n = mt$. من جهة أخرى، نجد أن
 $a^m = a^n = e$ وبالتالي العدد n يقسم m ومنه يوجد $s \in \mathbb{Z}$ بحيث $m = ns$ وهكذا فإن
 $n = mt = nst$ وهذا يبين لنا أن $st = 1$ وبالتالي $s = t = 1$ أي أن $n = m$.^٥
لنورد الآن بعض الأمثلة على الزمر المتماثلة وغير المتماثلة.
مثال.

الزمر التالية متماثلة $U(10)$, Z_4 , $U(5)$ أي

$$U(5) \approx Z_4 \approx U(10)$$

الحل.

نعلم أن Z_4 زمرة دوارة مرتبتها 4. لقد وجدنا سابقاً أن $U(10)$ هي زمرة مولدة
بالعنصر 3 ومرتبتها 4 ومنه $Z_4 \approx U(10)$.

لندرس الزمرة $U(5) = \{1, 2, 3, 4\}$. نلاحظ أن

$$3^0 = 1, \quad 3^1 = 3, \quad 3^2 = 4, \quad 3^3 = 2$$

مما سبق نجد أن $U(5) = \langle 3 \rangle$ ، أي أن الزمرة $U(5)$ دوارة مرتبتها 4 ومنه
 $U(5) \approx Z_4$ وهكذا فإن $U(5) \approx Z_4 \approx U(10)$.

مثال.

الزمرتان $U(10)$, $U(12)$ غير متماثلتين.

الحل.

لندرس الزمرة $U(12) = \{1, 5, 7, 11\}$. نلاحظ أن $1^2 = 1, 5^2 = 1, 7^2 = 1, 11^2 = 1$. أي
 أن $\forall x \in U(12); x^2 = 1$.

لنفرض جدلاً أن $U(12) \approx U(10)$ ولنرمز لهذا التماثل $\varphi: U(10) \rightarrow U(12)$ فنجد أن

$$\varphi(9) = \varphi(3.3) = \varphi(3)\varphi(3) = [\varphi(3)]^2 = 1$$

كما أن

$$\varphi(1) = \varphi(1.1) = \varphi(1)\varphi(1) = [\varphi(1)]^2 = 1$$

ومنه $\varphi(9) = \varphi(1)$ بينما $9 \neq 1$ وهذا يناقض كون φ إثنين الزمرتان $U(12)$, $U(10)$ غير متماثلتين.

تطبيق ٦-٩.

ما هو عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} .

الحل.

ليكن $\varphi: Z_{12} \rightarrow Z_{30}$ تشاكلاً زمرياً. بما أن الزمرة Z_{12} دوارة مولدة بالمعدد ١ أي $Z_{12} = \langle 1 \rangle$ عندئذ أيما كان $k \in Z_{12}$ فإن $\varphi(k) = k\varphi(1)$ وذلك حسب الخاصة (٣) من المبرهنة (٦-١). وهذا يبين لنا أن التشاكل φ يتعين بشكل تام بمعرفة $\varphi(1)$. لنفرض أن $\varphi(1) = a$ عندئذ $\varphi(k) = ka$ وذلك أيما كان $k \in Z_{12}$. بما أن $o(1) = 12$ وحسب الخاصة (٩) من المبرهنة (٦-١) فإن $o(a)$ تقسم 12. كذلك $o(a)$ تقسم 30. أي أن $o(a)$ تقسم 12, 30 في آن واحد. وبما أن المجموعة $\{1, 2, 3, 6\}$ هي القواسم المشتركة لكل من 12, 30 فإن $o(a) \in \{1, 2, 3, 6\}$ وبملاحظة أن عناصر الزمرة Z_{30} التي مراتبها 1, 2, 3, 6 هي $\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ نستنتج أن $a \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ ومنه قيمة $\varphi(1)$ لها ستة احتمالات، وهي

$$\varphi(1) = 0, \varphi(1) = 5, \varphi(1) = 10, \varphi(1) = 15, \varphi(1) = 20, \varphi(1) = 25$$

وهذا يبين لنا أنه توجد ستة تشاكلات زمرية من الزمرة Z_{12} إلى الزمرة Z_{30} .

توجد علاقة هامة بين الزمر الجزئية وتقاطعاتها سوف نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٦-١٠.

لنكن G زمرة و A, B, C, D زمر جزئية ناظمية من G تحقق أن A ناظمية في B و C ناظمية في D . علندئذ:

١ - الزمرة $A(B \cap C)$ ناظمية في $A(B \cap D)$.

٢ - الزمرة $C(D \cap A)$ ناظمية في $C(D \cap B)$.

$$\frac{A(B \cap D)}{A(B \cap C)} \cong \frac{C(D \cap B)}{C(D \cap A)} \quad ٣$$

البرهان.

١ - بما أن الزمرة A ناظمية في B وأن $(B \cap C) \subseteq B$ فإن $A(B \cap C)$ زمرة جزئية في B . لنأخذ العلاقة $f: B \cap D \rightarrow D$ المعرفة بالشكل $f(x) = x$ أي كان $x \in B \cap D$ من الواضح أن f تشاكل متباين. من جهة أخرى، بما أن الزمرة C ناظمية في D لنأخذ التشاكل القانوني الغامر $\varphi: D \rightarrow D/C$ المعرفة بالشكل $\varphi(d) = dC$ وذلك أي كان $d \in D$ علندئذ

$$\psi = \varphi \circ f: B \cap D \rightarrow D/C$$

هو تشاكل زمري وأن $\text{Ker } \psi = B \cap C$ لأنه إذا كان $a \in \text{Ker } \psi$ فإن $a \in B \cap D$ وأن $\psi(a) = C$ ومنه

$$C = \psi(a) = \varphi \circ f(a) = \varphi(f(a)) = \varphi(a) = aC$$

أي أن $a \in C$ ومنه $a \in (B \cap D) \cap C = B \cap C$ لأن $C \subseteq D$ وبالتالي $\text{Ker } \psi \subseteq B \cap C$. ليكن $b \in B \cap C$ وبما أن $C \subseteq D$ فإن $b \in B \cap D$ ومنه $f(b) = b$ كما أن

$$\psi(b) = \varphi \circ f(b) = \varphi(f(b)) = \varphi(b) = bC = C$$

أي أن $b \in \text{Ker } \psi$ ومنه $B \cap C \subseteq \text{Ker } \psi$. مما سبق نجد أن $\text{Ker } \psi = B \cap C$. وبما أن الزمرة $\text{Ker } \psi$ ناظمية في $B \cap D$ فإن الزمرة $B \cap C$ ناظمية في $B \cap D$.

لنأخذ التشاكل القانوني الغامر $\pi: B \rightarrow B/A$ وحسب المبرهنة (٦-١) فإن التشاكل π يحافظ على النظمية. بمعنى آخر، بما أن $B \cap C, B \cap D \subseteq B$ وأن $B \cap C$ ناظمية في $B \cap D$ فإن $\pi(B \cap C)$ ناظمية في $\pi(B \cap D)$ أي أن الزمرة $A(B \cap C)$ ناظمية في $A(B \cap D)$.

٢ - يبرهن بطريقة مشابهة للحالة (١).

٣ - بما أن $B \cap C \subseteq B \cap D$ فإن $(B \cap C)(B \cap D) = B \cap D$ ومنه

$$\frac{A(B \cap D)}{A(B \cap C)} = \frac{A(B \cap C)(B \cap D)}{A(B \cap C)}$$

وحسب مبرهنة التماثلات الزمرية الثانية فإن

$$(*) \quad \frac{A(B \cap C)(B \cap D)}{A(B \cap C)} \approx \frac{(B \cap D)}{(B \cap C) \cap A(B \cap C)}$$

من جهة أخرى وبما أن الزمرة A ناظمية في B فإن $A(B \cap C) = (B \cap C)A$ ، وبما أن $A \subseteq B$ وحسب التمهيدية (٥-١-٦) فإن

$$A(B \cap C) = AB \cap AC = B \cap AC$$

$$(B \cap C)A = BA \cap CA = B \cap CA$$

ومنه $B \cap AC = B \cap CA$ أي أن

$$(B \cap AC) \cap AC = (B \cap CA) \cap AC = AC$$

$$B \cap AC = B \cap CA \cap AC = A(B \cap C)$$

من جهة أخرى بما أن الزمرة C ناظمية في D فإن

$$C(A \cap D) = (A \cap D)C$$

أيضا بما أن $C \subseteq D$ وحسب التمهيدية (٥-١-٦) فإن

$$C(A \cap D) = CA \cap CD = CA \cap D$$

$$(A \cap D)C = AC \cap DC = AC \cap D$$

ومنه $CA \cap D = AC \cap D$ وهذا يبين أن

$$AC \cap (CA \cap D) = AC \cap (AC \cap D)$$

$$AC \cap CA \cap D = AC \cap D = C(A \cap D)$$

مما سبق نجد أن

$$B \cap D \cap A(B \cap C) = B \cap D \cap B \cap CA \cap AC = B \cap D \cap CA \cap AC = \\ = A(B \cap C) \cap C(A \cap D)$$

بالتعويض في العلاقة (*) نجد أن

$$\frac{A(B \cap D)}{A(B \cap C)} \approx \frac{B \cap D}{B \cap D \cap A(B \cap C)} = \frac{B \cap D}{A(B \cap C) \cap C(A \cap D)}$$

بطريقة مشابهة نجد أن

$$\frac{C(B \cap D)}{C(A \cap D)} \approx \frac{B \cap D}{A(B \cap C) \cap C(A \cap D)}$$

$$\therefore \frac{A(B \cap D)}{A(B \cap C)} \approx \frac{C(D \cap B)}{C(D \cap A)}$$

مبرهنة ٦-١١.

ليكن $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً غامراً. لنفرض أن $\mathfrak{I}$ هي مجموعة كل الزمر الجزئية في G والتي كل منها يحوي $\text{Ker } \varphi$ و أن $\bar{\mathfrak{I}}$ هي مجموعة كل الزمر الجزئية في $\bar{G}$. عندئذ

١ - يوجد تطابق متباين وغامر بين $\mathfrak{I}, \bar{\mathfrak{I}}$.

٢ - لنكن $H \in \mathfrak{I}$ الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة H ناظمية في G هو أن تكون الزمرة $\bar{\varphi}(H)$ ناظمية في $\bar{G}$.

٣ - من أجل أية زمرة جزئية ناظمية $H \in \mathfrak{I}$ فإن $\frac{\bar{G}}{\bar{\varphi}(H)} \approx \frac{G}{H}$.

البرهان.

١ - لنعرف العلاقة $\bar{\varphi}: \mathfrak{I} \rightarrow \bar{\mathfrak{I}}$ بالشكل التالي

$$\forall H \in \mathfrak{I}; \quad \bar{\varphi}(H) = \varphi(H) = \bar{H}$$

واضح أن $\bar{H}$ زمرة جزئية في $\bar{G}$ أي أن $\bar{H} \in \bar{\mathfrak{I}}$ وذلك لأن φ تشاكلاً حسب المبرهنة (٦-١). كما أن العلاقة $\bar{\varphi}$ معرفة جيداً، لأنه إذا كانت $H_1, H_2 \in \mathfrak{I}$

بحيث $H_1 = H_2$ فإن $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$ ومنه $\bar{\varphi}(H_1) = \bar{\varphi}(H_2)$. لإثبات أن التطبيق $\bar{\varphi}$ تقابل يكفي أن نبرهن على وجود تطبيق $\bar{\psi}: \bar{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{G}$ يحقق $\bar{\varphi}\bar{\psi} = I_{\bar{\mathfrak{G}}}, \bar{\psi}\bar{\varphi} = I_{\mathfrak{G}}$.

لنعرف علاقة $\bar{\psi}: \bar{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{G}$ بالشكل التالي

$$\forall \bar{K} \in \bar{\mathfrak{G}}; \quad \bar{\psi}(\bar{K}) = \varphi^{-1}(\bar{K})$$

إن $\varphi^{-1}(\bar{K})$ زمرة جزئية في G تحوي $\text{Ker } \varphi$ ومنه $\varphi^{-1}(\bar{K}) \in \mathfrak{G}$ لأنه إما كان $g \in \text{Ker } \varphi$ فإن $\bar{K} = \bar{e}$ ومنه $\varphi(g) = \bar{e} \in \bar{K}$ وهذا يبين لنا أن $\text{Ker } \varphi \subseteq \varphi^{-1}(\bar{K})$ أي أن $\varphi^{-1}(\bar{K}) \in \mathfrak{G}$. كما أن العلاقة $\bar{\psi}$ معرفة جيداً، لأنه إذا كانت $\bar{K}_1, \bar{K}_2 \in \bar{\mathfrak{G}}$ بحيث $\bar{K}_1 = \bar{K}_2$ عندئذ إما كان $x \in \varphi^{-1}(\bar{K}_1)$ فإن $\varphi(x) \in \bar{K}_1 = \bar{K}_2$ ومنه $x \in \varphi^{-1}(\bar{K}_2)$. مما سبق نجد أن $\varphi^{-1}(\bar{K}_1) \subseteq \varphi^{-1}(\bar{K}_2)$ وبشكل مشابه نجد أن $\varphi^{-1}(\bar{K}_2) \subseteq \varphi^{-1}(\bar{K}_1)$ ومنه

$$\bar{\psi}(\bar{K}_1) = \varphi^{-1}(\bar{K}_1) = \varphi^{-1}(\bar{K}_2) = \bar{\psi}(\bar{K}_2)$$

لنبرهن على أن $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = I_{\mathfrak{G}}$. ليكن $H \in \mathfrak{G}$ عندئذ

$$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}(H) = \bar{\psi}(\bar{\varphi}(H)) = \bar{\psi}(\varphi(H)) = \varphi^{-1}(\varphi(H))$$

لنبرهن على أن $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$. ليكن $y \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$ عندئذ $\varphi(y) \in \varphi(H)$ ومنه يوجد $h \in H$ بحيث $\varphi(y) = \varphi(h)$ ومنه $\varphi(yh^{-1}) = \bar{e}$ أي أن $yh^{-1} \in \text{Ker } \varphi \subseteq H$ وبما أن $h \in H$ نجد أن $y \in H$ وبالتالي $\varphi^{-1}(\varphi(H)) \subseteq H$. من جهة أخرى، ليكن $x \in H$ عندئذ $\varphi(x) \in \varphi(H)$ ومنه $x \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$ أي أن $H \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(H))$ مما سبق نجد أن $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$. وهذا يبين لنا أن

$$\forall H \in \mathfrak{G}; \quad \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}(H) = H$$

وبالتالي $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = I_{\mathfrak{G}}$.

لنبرهن الآن على أن $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = I_{\bar{\mathfrak{G}}}$. ليكن $\bar{M} \in \bar{\mathfrak{G}}$ عندئذ

$$\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}(\bar{M}) = \bar{\varphi}(\bar{\psi}(\bar{M})) = \bar{\varphi}(\varphi^{-1}(\bar{M})) = \varphi(\varphi^{-1}(\bar{M}))$$

لنبرهن على أن $\varphi(\varphi^{-1}(\bar{M})) = \bar{M}$. ليكن $x \in \varphi(\varphi^{-1}(\bar{M}))$ عندئذ
 يوجد $z \in \varphi^{-1}(\bar{M})$ بحيث $x = \varphi(z) \in \bar{M}$ ومنه نجد أن $\varphi(\varphi^{-1}(\bar{M})) \subseteq \bar{M}$.
 ليكن $y \in \bar{M}$ وبما أن التشاكل φ غامر يوجد $g \in G$ بحيث $\varphi(g) = y \in \bar{M}$
 ومنه $g \in \varphi^{-1}(\bar{M})$ وبالتالي $y = \varphi(g) \in \varphi(\varphi^{-1}(\bar{M}))$ أي أن $\bar{M} \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(\bar{M}))$.
 مما سبق نجد أن $\varphi(\varphi^{-1}(\bar{M})) = \bar{M}$ وهذا يبين لنا أن

$$\forall \bar{M} \in \bar{\mathfrak{Z}}; \quad \bar{\varphi} \circ \bar{\psi}(\bar{M}) = \bar{M}$$

ومنه $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = I_{\bar{\mathfrak{Z}}}$ وهذا يبين لنا أن التطبيق $\bar{\varphi}$ تقابل.

٢ - لنكن $H \in \mathfrak{Z}$ عندئذ $\text{Ker } \varphi \subseteq H$.

لزوم الشرط. لنفرض أن الزمرة H ناظمية في G عندئذ وحسب المبرهنة (٦-١) فإن
 الزمرة $\bar{H} = \varphi(H)$ تكون ناظمية في الزمرة $\bar{G} = \varphi(G)$.
 كفاية الشرط. لنفرض أن الزمرة $\bar{H} = \varphi(H)$ ناظمية في الزمرة $\bar{G} = \varphi(G)$ وحسب
 المبرهنة (٦-١) فإن الزمرة H تكون ناظمية في G .

٣ - لنكن $H \in \mathfrak{Z}$ زمرة جزئية ناظمية في G وحسب (٢) فإن الزمرة $\bar{H}$ ناظمية
 في $\bar{G}$. بفرض أن $\bar{\nu} : \bar{G} \rightarrow \frac{\bar{G}}{\bar{H}}$ التشاكل القانولي الغامر عندئذ $\bar{\nu} : \bar{G} \rightarrow \frac{\bar{G}}{\bar{H}}$
 $\varphi \circ \nu : G \rightarrow \frac{\bar{G}}{\bar{H}}$

تشاكل زمري غامر وحسب المبرهنة (٦-٣) فإن $\frac{\bar{G}}{\bar{H}} \approx \frac{G}{\text{Ker } \varphi}$. لنبرهن على

أن $\text{Ker } \varphi = H$ ، ليكن $y \in \text{Ker } \varphi$ عندئذ

$$\nu \circ \varphi(y) = \nu(\varphi(y)) = \varphi(y)\bar{H} = \bar{H}$$

ومنه $\varphi(y) \in \bar{H} = \varphi(H)$ وبالتالي $y \in \varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$ أي أن $\text{Ker } \varphi \subseteq H$.
 ليكن $h \in H$ عندئذ

$$\nu \circ \varphi(h) = \nu(\varphi(h)) = \nu(\bar{h}) = \bar{h}\bar{H} = H$$

ومنه نجد أن $h \in \text{Ker } \varphi$. مما سبق نجد أن $\text{Ker } \varphi = H$ ، وهذا يبين لنا أن

$$\frac{\bar{G}}{\bar{H}} \approx \frac{G}{H}$$

بالعودة إلى التطبيق السابق يمكننا ملاحظة أن $\gcd(12,30) = 6$. وهنا بحق لنا التساؤل إن كان بالإمكان تعميم النتيجة السابقة من أجل أي عددين صحيحين موجبين. المبرهنة التالية تعطينا جوابا ايجابيا على هذا التساؤل، ولإثبات هذه الحقيقة سوف نذكر بتابع أولر.

تعريف.

نسمي التابع $\varphi: N^* \rightarrow N^*$ المعروف بالشكل التالي: $\forall n \in N^*$ فإن $\varphi(n) = 1$ عندما $n = 1$. وعندما $n > 1$ فإن $\varphi(n) = s$ حيث s هو عدد جميع الأعداد $k \in N^*$ والتي تحقق $k < n$ وأن $\gcd(k, n) = 1$.

سوف نقبل الحقيقة التالية الخاصة بتابع أولر من دون برهان.

مبرهنة ٦-١٢.

لتكن k, n أعداداً صحيحة موجبة و φ تابع أولر. إن

$$\sum_d \varphi(d) = \gcd(k, n)$$

حيث إن المجموع مأخوذ على جميع القواسم المشتركة d للعددين k, n . مبرهنة ٦-١٣.

إن عدد جميع التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_n إلى الزمرة Z_k يساوي $\gcd(k, n)$.

البرهان.

لدينا $Z_n = \langle 1 \rangle$ ومنه أي تشاكل زمري $f: Z_n \rightarrow Z_k$ يحقق $f(h) = hf(1)$ وذلك أيا كان $h \in Z_n$. وهذا يبين لنا أن التشاكل f يتعين بشكل تام بمعرفة $f(1)$. لنفرض أن $f(1) = a$. بما أن $o(1) = n$ وحسب الخاصة (٣) من المبرهنة (٦-١) فإن $o(a) = n$. كذلك بما أن $a \in Z_k$ فإن $o(a)$ تقسم k . لنفرض أن $o(a) = d$. إن d قاسم مشترك للعددين k, n . من جهة أخرى، بما أن d يقسم k فإنه حسب المبرهنة (٣-١) - (٩) توجد في Z_k زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها d وهي $\langle \frac{k}{d} \rangle$. وحسب المبرهنة (٣-١) (٨-١) فإن كل عدد s أصغر من d ويحقق $\gcd(s, d) = 1$ يكون مولدا لهذه الزمرة

الجزئية. وحسب تعريف تابع أولر فإن عدد جميع مولدات الزمرة $\left\langle \frac{k}{d} \right\rangle$ يساوي $\phi(d)$ حيث ϕ تابع أولر. وبما أن كل تشاكل زمري من الزمرة Z_n إلى الزمرة Z_k بصور 1 بأحد مولدات الزمرة $\left\langle \frac{k}{d} \right\rangle$ وذلك من أجل كل قاسم مشترك d للعددين k, n . وهذا يبين لنا أن عدد جميع التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_n إلى الزمرة Z_k يساوي $\sum_d \phi(d)$ حيث أن المجموع مأخوذ على جميع القواسم المشتركة للعددين k, n . وحسب المبرهنة (١١-٦) فإن $\sum_d \phi(d) = \gcd(k, n)$.

نأتي الآن لدراسة العلاقة بين الزمر وزمرة التعويضات لمجموعة وذلك من خلال مبرهنة كايلى. لأجل ذلك لابد لنا من التمهيدية التالية:

تمهيدية ١٤-٦.

لتكن G زمرة و $g \in G$. عندئذ:

- ١- العلاقة $T_g: G \rightarrow G$ المعرفة بالشكل $T_g(x) = gx$ $\forall x \in G$ هي تقابل.
- ٢- المجموعة $\bar{G} = \{T_g, g \in G\}$ هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.
- ٣- $G \cong \bar{G}$.

البرهان.

١ - نتركه للقارئ.

٢ - واضح أن المجموعة $\bar{G}$ غير خالية لأن التطبيق T_e هو عنصر من $\bar{G}$. كما أن $\bar{G}$ مغلقة بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات، لأنه إذا كان $T_g, T_h \in \bar{G}$ فإن $T_g \circ T_h = T_{gh} \in \bar{G}$ وذلك لأنه إذا كان $x \in G$ فإن

$$T_g \circ T_h(x) = T_g(T_h(x)) = T_g(hx) = g(hx) = (gh)x = T_{gh}(x)$$

وهذا يبين لنا أن $T_g \circ T_h = T_{gh}$. وبما أن العملية $(\circ)$ تجميعية وأن $\bar{G}$ تحوي عنصر حيادي T_e ولكل عنصر T_g مقلوب هو $T_g^{-1} = (T_g)^{-1}$ (تأكد من ذلك). نجد أن المجموعة $\bar{G}$ زمرة.

٣ - لنعرف العلاقة $\bar{G} > G : \varphi$ بالشكل $\varphi(g) = T_g$ وذلك أيا كان $g \in G$. فلنجد

أن φ تطبيق متباين، لأنه أيا كان $g, h \in G$ فإن

$$g = h \Leftrightarrow gx = hx, \forall x \in G \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_g(x) = T_h(x), \forall x \in G \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_g = T_h \Leftrightarrow \varphi(g) = \varphi(h)$$

كما أن التطبيق φ هو تشاكل لأنه أيا كان $g, h \in G$ فإن $\varphi(gh) = T_{gh} = T_g \circ T_h$

ومن الواضح أن التطبيق φ غامر. مما سبق نجد أن φ تماثل وبالتالي $G \approx \bar{G}$.

مبرهنة ٦-١٥. (Cayley-1854).

كل زمرة تماثل زمرة جزئية من زمرة تباديل.

البرهان.

لتكن G زمرة و D زمرة التباديل للمجموعة G . حسب التمهيدية (٦-١٣) فإن

$$G \approx \bar{G} \subseteq D$$

مبرهنة ٦-١٦. (مبرهنة كايلي المعممة).

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G و S زمرة التباديل لمجموعة المرافقات

اليسارية للزمرة H في G . عندئذ يوجد تشاكل زمري $\alpha: G \rightarrow S$ يحقق:

$$1 - \text{Ker } \alpha \subseteq H$$

٢ - إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G تحقق $K \subseteq H$ عندئذ $K \subseteq \text{Ker } \alpha$.

البرهان.

لنفرض أن $M = \{aH : a \in H\}$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة H في G

وأن

$$S = \{T_g : g \in G\}$$

حيث $T_g: M \rightarrow M$ وأن $T_g(aH) = (ga)H$ وذلك أيا كان $aH \in M$. ولنعرف

العلاقة $\alpha: G \rightarrow S$ بالشكل $\alpha(g) = T_g$ وذلك أيا كان $g \in G$. فلنجد أن العلاقة

تطبيق لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ فإن $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$

وبالتالي $g_1(aH) = g_2(aH)$ وذلك أيا كان $aH \in M$ ومنه $(g_1a)H = (g_2a)H$

أي أن $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$. كذلك التطبيق α تشاكل لأن $\alpha(g_1 g_2) = T_{g_1 g_2}$ وأنه أيا كان $aH \in M$ فإن

$$T_{g_1 g_2}(aH) = ((g_1 g_2)a)H = g_1(g_2 a)H = T_{g_1}(g_2 a)H = \\ = T_{g_1}(T_{g_2}(aH)) = T_{g_1} \circ T_{g_2}(aH)$$

ومنه $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$ أي أن $\alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1) \circ \alpha(g_2)$

١- ليكن $g \in \text{Ker } \alpha$ عندئذ $\alpha(g) = T_g$ أي أن $T_g = T_e$ وبما أن $H \in M$ نجد أن $H = T_g(H) = T_e(H) = gH$ ومنه فإن $g \in H$ أي أن $\text{Ker } \alpha \subseteq H$

٢- لنكن K زمرة جزئية ناظمية في G وأن $K \subseteq H$ عندئذ أيا كان $a \in G$ فإن $K = aKa^{-1}$. ومنه أيا كان $k \in K$ يوجد $k' \in K$ بحيث $k = ak'a^{-1}$ أي أن $ka = ak'$ ومنه نجد أن

$$T_k(aH) = (ka)H = (ak')H = a(k'H) = aH$$

ومنه نجد أن $T_k = \alpha(k)$ هو التطبيق المطابق وبالتالي $k \in \text{Ker } \alpha$ وهذا يبين لنا أن $K \subseteq \text{Ker } \alpha$.

نتيجة.

لنكن G زمرة منتهية و $H \neq G$ زمرة جزئية من G تحقق أن مرتبة الزمرة G لا تقسم $(G:H)$. عندئذ فإن الزمرة H تحوي زمرة جزئية ناظمية K من G بحيث $K \neq \langle e \rangle$. البرهان.

ليكن $\alpha: G \rightarrow S$ التشاكل الموجود بحسب المبرهنة (٦-١٥). عندئذ فإن $\text{Ker } \alpha$ زمرة جزئية ناظمية تحقق $\text{Ker } \alpha \subseteq H$ وأن $G/\text{Ker } \alpha$ تماثل زمرة جزئية من الزمرة S حيث S هي زمرة التباديل لمجموعة المرافقات اليسارية للزمرة H في G . ومنه $(G/\text{Ker } \alpha:1)$ بحسب مبرهنة لاغرانج تقسم $(G:H) = (S:1)$. وبما أن $(G:1)$ لا تقسم $(G:H)$ فإن $(\text{Ker } \alpha:1) > 1$.

تمارين محلولة (٦)

١- لتكن n, k أعداداً صحيحة موجبة، ولنفرض أن k يقسم n . عندئذ:

أ - يوجد تشاكل زمري من الزمرة $U(n)$ إلى الزمرة $U(k)$ لواته $U_k(n)$.

ب - $Z_n / \langle k \rangle \cong Z_k$.

الحل.

أ - ليكن $x \in U(n)$ عندئذ $x < n$ وأن $\gcd(x, n) = 1$. وحسب خوارزمية القسمة، يوجد $q, r \in Z$ بحيث $x = qk + r$ وأن $0 \leq r < k$. إن $r \neq 0$ لأنه إذا كان $r = 0$ فإن $x = qk$ ، أي أن k يقسم x وبما أن k يقسم n فرضاً نجد أن k يقسم كلياً من n, x وهذا يناقض كون $\gcd(x, n) = 1$. ومنه $0 < r < k$. كما أن $\gcd(r, k) = 1$ ، لأنه إذا كان $\gcd(r, k) = d > 1$ نجد أن d يقسم k ولكون k يقسم n فإن d يقسم n . من جهة أخرى، يوجد $\alpha, \beta \in Z$ بحيث $r = d\alpha$ ، $k = d\beta$ ، ومنه $x = (q\beta + \alpha)d$ وهذا يبين لنا أن d يقسم كلياً من n, x ، مما يناقض كون $\gcd(x, n) = 1$. مما سبق نجد أن $r \in U(k)$. لنعرف العلاقة $\varphi: U(n) \rightarrow U(k)$ بالشكل

$$\forall x \in U(n); \quad \varphi(x) = r = x \bmod -k$$

فنجد أن φ تطبيق، لأنه $\forall x, y \in U(n)$ بحيث $x = y$ فإن $x \bmod -k = y \bmod -k$ وهذا يبين لنا أن $\varphi(x) = \varphi(y)$. كذلك φ تشاكل، لأنه وبالاعتماد على المبرهنة (١-٦-٤) فإن

$$\varphi(xy) = (xy) \bmod -k = (x \bmod -k)(y \bmod -k) = \varphi(x)\varphi(y)$$

لنبرهن أن $\text{Ker } \varphi = U_k(n)$. ليكن $x \in \text{Ker } \varphi$ عندئذ $x \bmod -k = 1$ ومنه $\varphi(x) = x \bmod -k = 1$ وبالتالي $x \in U_k(n)$ وبالتالي $\text{Ker } \varphi \subseteq U_k(n)$. بشكل مشابه يبرهن على الاحتواء المعاكس. مما سبق نجد أن $\text{Ker } \varphi = U_k(n)$.

ب - للعرف العلاقة $Z_k \rightarrow Z_n$ بالشكل $f(x) = x \bmod k$ ، $\forall x \in Z_n$. فلجد أن f تشاكل زمري عامر وأن $\langle k \rangle = \text{Ker} f$ ، وحسب المبرهنة (٦-٣) نجد أن $Z_n / \langle k \rangle \cong Z_k$.

٢ - نقول عن الزمرة G إنها زمرة فتل إذا كان كل عنصر من G مرتبته منتهية أي

$$\forall g \in G; \quad o(g) \in N^*$$

- ١ - إذا كانت الزمرة G هي زمرة فتل فإن أية زمرة جزئية من G هي زمرة فتل.
 - ٢ - لتكن K زمرة جزئية ناظمية في G . إذا كانت الزمرة G زمرة فتل فإن الزمرة G/K هي أيضا زمرة فتل.
 - ٣ - لتكن K زمرة جزئية ناظمية في G . إذا كان كل من الزمرتين K و G/K زمرة فتل فإن الزمرة G هي زمرة فتل.
- الحصل.

١ - واضح.

٢ - لنفرض أن الزمرة G هي زمرة فتل وأن K زمرة جزئية ناظمية في G . وليكن $\bar{g} \in G/K$ عندهذا $\bar{g} = gK$ حيث $g \in G$ وبما أن الزمرة G هي زمرة فتل فإن $o(g) \in N^*$. لنفرض أن $o(g) = n$ عندهذا

$$\bar{g}^n = (gK)^n = g^n K = K$$

وبالتالي تكون $o(\bar{g}) = n$ أي أن $o(\bar{g}) \in N^*$ ومنه الزمرة G/K هي زمرة فتل.

٣ - لتكن K زمرة جزئية ناظمية في G ولنفرض أن الزمرتين K و G/K هما زمرة فتل وليكن $g \in G$. إذا كان $g \in K$ فإن $o(g) \in N^*$. لنفرض أن $g \notin K$ عندهذا $\bar{g} = gK \in G/K$ وبما أن الزمرة G/K هي زمرة فتل يوجد $m \in N^*$ بحيث $o(\bar{g}) = m$ ومنه $K = \bar{g}^m = (gK)^m = g^m K$ وبالتالي فإن العنصر $g^m \in K$ وبما أن الزمرة K هي زمرة فتل فإن $o(g^m) \in N^*$. لنفرض أن $o(g^m) = n$ عندهذا $o(g) = nm$. مما سبق نجد أن الزمرة G هي زمرة فتل.

٣ - لنكن $\bar{G}, G$ زميرتين ما و $\bar{e}, e$ حيايداً كل من $\bar{G}, G$ على الترتيب و $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكل زمري و K زمرة جزئية من الزمرة $\bar{G}$ ، عندئذ:

١ - $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من G تحوي $\text{Ker} f$.

٢ - إذا كانت H زمرة جزئية من G تحوي $\text{Ker} f$ وتحقق $f(H) = K$ فإن $f^{-1}(K) = H$.

الحل.

١ - لنكن K زمرة جزئية من الزمرة $\bar{G}$ وحسب المبرهنة (٦-١) فإن $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من G . ليكن $x \in \text{Ker} f$ عندئذ $f(x) = \bar{e} \in K$ ومنه $x \in f^{-1}(K)$ وبالتالي فإن $\text{Ker} f \subseteq f^{-1}(K)$.

٢ - لنكن H زمرة جزئية من G تحوي $\text{Ker} f$ وتحقق $f(H) = K$ وليكن $h \in H$ عندئذ $f(h) \in f(H) = K$ ومنه $h \in f^{-1}(K)$ أي أن $H \subseteq f^{-1}(K)$. ليكن $x \in f^{-1}(K)$ عندئذ فإن $f(x) \in K = f(H)$ ومنه يوجد $y \in H$ بحيث $f(x) = f(y)$ وبالتالي $f(xy^{-1}) = \bar{e}$ أي أن $xy^{-1} \in \text{Ker} f \subseteq H$ ومنه فإن $x \in Hy = H$ وهذا يبين لنا أن $f^{-1}(K) \subseteq H$ مما سبق نجد أن $f^{-1}(K) = H$.

٤ - ليكن $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً عامراً و K زمرة جزئية من $\bar{G}$ بحيث $(\bar{G} : K) = n < \infty$. إذا كان $H = f^{-1}(K)$ عندئذ $(G : H) = n$.

الحل.

لنفرض أن $(\bar{G} : K) = n$ وأن $H = f^{-1}(K)$. ولنفرض أن $\bar{g}_1 K, \bar{g}_2 K, \dots, \bar{g}_n K$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة K في $\bar{G}$. وبما أن التشاكل f فإنه يوجد $g_i \in G$ بحيث $f(g_i) = \bar{g}_i$ لأجل جميع $1 \leq i \leq n$. لنبرهن على أن $g_1 H, g_2 H, \dots, g_n H$ هي جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة H في G . لنفرض أن $g_i H = g_j H$ عندئذ $g_i^{-1} g_j \in H$ ومنه $\bar{g}_i^{-1} \bar{g}_j = (f(g_i))^{-1} f(g_j) = f(g_i^{-1} g_j) = f(g_i^{-1} g_j) \in f(H) \subseteq K$ وهذا يبين لنا أن $\bar{g}_i K = \bar{g}_j K$ وحسب الفرض فإن $i = j$.

لتكن gH مرافقة يسارية للزمرة H في G عندئذ $f(g) \in \overline{G} = \bigcup_{i=1}^n g_i K$ ومنه يوجد دليل $1 \leq i \leq n$ بحيث $f(g) \in \overline{g}_i K = f(g_i) K$ وبالتالي يوجد $k \in K$ من أجله $f(g) = \overline{g}_i k$. وبما أن $g, g_i \in G$ للفرض أن $x = g_i^{-1} g$ عندئذ $f(x) = f(g_i^{-1} g) = (f(g_i))^{-1} f(g) = \overline{g}_i^{-1} \overline{g}_i k = k \in K$ أي أن $f(g_i^{-1} g) \in K$ ومنه $f^{-1}(K) = H$ وبالتالي $g \in g_i H$ وهكذا فإن $gH = g_i H$ ، مما سبق نجد أن $(G:H) = n$.

تمارين (٦)

- ١- أثبت أن الزمرتين $U(8)$, $U(10)$ غير متماثلتين.
- ٢- أثبت أن الزمرتين $U(8)$, $U(12)$ متماثلتان.
- ٣- لتكن G زمرة. أثبت أن التطبيق $f: G \rightarrow G$ المعرف بالشكل $f(g) = g^{-1}$ أيضاً كان $g \in G$ يكون تماثلاً للزمرة G عندما وفقط عندما تكون الزمرة G تبادلية.
- ٤- أثبت أن التطبيق $\alpha: U(16) \rightarrow U(16)$ المعرف بالشكل $\alpha(x) = x^3$ أيضاً كان $x \in U(16)$ هو تماثل للزمرة $U(16)$. هل يبقى α تماثلاً إذا كانت قاعدة ربطه $\alpha(x) = x^2$, $\alpha(x) = x^5$.
- ٥- بين فيما إذا كانت الزمرتان $U(20)$, $U(24)$ متماثلتين أم لا.

٦- أثبت أن التطبيق $f(a+ib) = a-ib$ هو تماثل لزمرة الأعداد العقدية بالنسبة إلى عملية جمع الأعداد العقدية.

٧- لنكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها m وليكن n عدداً صحيحاً موجباً يحقق $\gcd(m,n) = 1$. أثبت أن التطبيق $f: G \rightarrow G$ المعرفة بالشكل $f(a) = a^n$ هو تماثل للزمرة G .

٨- لنفرض أن $\varphi: Z_{30} \rightarrow Z_{30}$ تشاكل وأن $\text{Ker } \varphi = \{0, 10, 20\}$. إذا كان $\varphi(23) = 6$ ، أوجد $\varphi^{-1}(6)$ ، ثم عين التشاكل φ .

٩- ليكن $f: Z_{12} \rightarrow Z_{10}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل التالي $f(x) = 3x$ ، $\forall x \in Z_{12}$. بين فيما إذا كان f تشاكلاً أم لا.

١٠- لنفرض أن $\varphi: U(30) \rightarrow U(30)$ تشاكل وأن $\text{Ker } \varphi = \{1, 11\}$. إذا كان $\varphi(7) = 7$ أوجد $\varphi^{-1}(7)$ ، ثم عين التشاكل φ .

١١- لنفرض أن $f: U(40) \rightarrow U(40)$ تشاكل وأن $\text{Ker } f = \{1, 9, 17, 33\}$. إذا كان $f(11) = 11$ أوجد $f^{-1}(11)$ ، ثم عين التشاكل f .

١٢- لنكن G زمرة منتهية و $f: G \rightarrow Z_{10}$ تشاكلاً زمرياً. أثبت أن مرتبة الزمرة G تقبل القسمة على 10.

١٣- ما هو عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_8 .

١٤- ما هو عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_{10} .

الفصل السابع

زمرة التماثلات

في هذا الفصل سوف ندرس أنواعاً محددة من التماثلات الزمرية.
تعريف.

لتكن $G, \bar{G}$ زمريتين و $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً. نقول عن التشاكل f أنه تماثل زمري إذا كان f متبايناً وعاوراً. إذا كانت $\bar{G} = G$ فإننا نقول عن التماثل f إنه أوتومورفيزم أو تماثل للزمرة G . وندرمز لمجموعة تماثلات الزمرة G بالرمز $Aut(G)$.
تمهيدية ١-٧.

لتكن G زمرة. إن مجموعة تماثلات الزمرة G ، أي $Aut(G)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.
البرهان.

نتركه للقارئ. ◊

إن أول من درس الزمرة $Aut(G)$ هو $O.Holder$ عام ١٨٩٣ وتلاه $E.H.Moore$ عام ١٨٩٤ وبشكل مستقل عن الآخر. من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس خواص بعض العناصر في الزمرة $Aut(G)$.
مبرهنة ٢-٧.

لتكن G زمرة و $a \in G$. ولتكن $T_a: G \rightarrow G$ علاقة معرفة بالشكل $\forall x \in G$ فإن
 $T_a(x) = axa^{-1}$ عللنا:
١- T_a تماثل للزمرة G .
٢- $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$.
البرهان.

١ - ليكن $x_1, x_2 \in G$ بحيث $x_1 = x_2$ ، عندئذ $ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1}$ وبالتالي

$T_a(x_1) = T_a(x_2)$ أي أن العلاقة T_a تطبيق. كما أن التطبيق T_a متباين، لأنه إذا كان

$T_a(x_1) = T_a(x_2)$ فإن $ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1}$ وبالتالي $x_1 = x_2$. وهو تشاكل، لأن

$$T_a(x_1x_2) = a(x_1x_2)a^{-1} = (ax_1a^{-1})(ax_2a^{-1}) = T_a(x_1)T_a(x_2)$$

كذلك T_a غامر، لأنه إذا كان $y \in G$ فإن $a^{-1}ya \in G$ وبالتالي

$$T_a(a^{-1}ya) = (aa^{-1})y(aa^{-1}) = y$$

وهذا يبين لنا أن التطبيق T_a هو تماثل للزمرة G .

٢ - وجدنا حسب (١) أن $(T_a)^{-1}$ هو تماثل للزمرة G وبحق

$$T_a \circ (T_a)^{-1} = (T_a)^{-1} \circ T_a = T_e$$

ومنه أياً كان $x \in G$ فإن

$$[T_a \circ (T_a)^{-1}](x) = T_a(T_a^{-1}(x)) = x$$

وبالتالي $x = aT_a^{-1}(x)a^{-1}$ أي أن $aT_a^{-1}(x)a^{-1} = x$ وهذا يبين لنا أن

$$T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$$

تعريف.

لتكن G زمرة و $a \in G$. نسمي التماثل T_a بالتماثل الداخلي للزمرة G . نرمز

لمجموعة التماثلات الداخلية للزمرة G بالرمز $\text{Inn}(G)$.

خواص المجموعة $\text{Inn}(G)$ وعلاقتها بالزمرة $\text{Aut}(G)$ ندرسها من خلال المبرهنة

التالية:

مبرهنة ٧-٣.

لتكن G زمرة. عندئذ:

١- $\text{Inn}(G)$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $\text{Aut}(G)$.

٢- $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$.

البرهان.

١ - لنبرهن في البداية على أن $Inn(G)$ زمرة جزئية من الزمرة $Aut(G)$. واضح أن $Inn(G) \subseteq Aut(G)$. كما أن $Inn(G) \neq \emptyset$ لأن العنصر $T_e \in Inn(G)$ ، حيث $T_e(x) = exe^{-1} = x$ وذلك أياً كان $x \in G$. ليكن $T_a, T_b \in Inn(G)$ عندئذ أياً كان $x \in G$ فإن

$$\begin{aligned}(T_a \circ T_b^{-1})(x) &= T_a \circ T_{b^{-1}}(x) = T_a(b^{-1}xb) = (ab^{-1})x(ba^{-1}) = \\ &= (ab^{-1})x(ab^{-1})^{-1} = T_{ab^{-1}}(x)\end{aligned}$$

أي أن $T_a \circ T_b^{-1} = T_{ab^{-1}} \in Inn(G)$. بهذا الشكل نجد أن $Inn(G)$ زمرة جزئية من الزمرة $Aut(G)$. لنبرهن الآن على أن الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$. ليكن $\varphi \in Aut(G)$ ولنبرهن أن

$$\varphi \circ Inn(G) \circ \varphi^{-1} \subseteq Inn(G)$$

ليكن $\psi \in \varphi \circ Inn(G) \circ \varphi^{-1}$ عندئذ يوجد $T_a \in Inn(G)$ بحيث $\psi = \varphi \circ T_a \circ \varphi^{-1}$ ومنه أياً كان $x \in G$ فإن

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \varphi \circ T_a \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi \circ T_a(\varphi^{-1}(x)) = \varphi(a\varphi^{-1}(x)a^{-1}) = \\ &= \varphi(a)x\varphi^{-1}(a) = T_{\varphi(a)}(x)\end{aligned}$$

ومنه نجد أن

$$\psi = \varphi \circ T_a \circ \varphi^{-1} = T_{\varphi(a)} \in Inn(G)$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في الزمرة $Aut(G)$.

٢ - لنعرف العلاقة $\Theta: G \rightarrow Inn(G)$ بالشكل التالي: أياً كان $a \in G$ فإن $\Theta(a) = T_a$. إن العلاقة Θ تطابق، لأنه أياً كان $a_1, a_2 \in G$ بحيث $a_1 = a_2$ ، عندئذ $a_1xa_1^{-1} = a_2xa_2^{-1}$ وذلك أياً كان $x \in G$ ومنه $T_{a_1}(x) = T_{a_2}(x)$ وهذا يبين لنا أن $T_{a_1} = T_{a_2}$ وبالتالي $\Theta(a_1) = \Theta(a_2)$. كذلك التطبيق Θ تشاكل، لأنه وبما أن $\Theta(a_1a_2) = T_{a_1a_2}$ ومنه أياً كان $y \in G$ فإن

$$T_{a_1a_2}(y) = (a_1a_2)y(a_1a_2)^{-1} = a_1(a_2ya_2^{-1})a_1^{-1} = T_{a_1}(a_2ya_2^{-1}) = T_{a_1} \circ T_{a_2}(y)$$

وهذا يبين لنا أن $T_{a_1a_2} = T_{a_1} \circ T_{a_2}$ ومنه

$$\Theta(a_1 a_2) = T_{a_1 a_2} = T_{a_1} \circ T_{a_2} = \Theta(a_1) \circ \Theta(a_2)$$

مما سبق نجد أن التطبيق Θ هو تماثل، وهو غامر (تأكد من ذلك). وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن $G / \text{Ker } \Theta \approx \text{Inn}(G)$.

لنبرهن الآن على أن $\text{Ker } \Theta = Z(G)$. ليكن $a \in \text{Ker } \Theta$ عندهذا $\Theta(a) = T_a = T_e$ ومنه أيًا كان $x \in G$ فإن $T_a(x) = T_e(x)$ وبالتالي $axa^{-1} = x$ أي أن $ax = xa$ وهذا يبين لنا أن $a \in Z(G)$ أي أن $\text{Ker } \Theta \subseteq Z(G)$. ليكن $b \in Z(G)$ عندهذا أيًا كان $y \in G$ فإن $ay = ya$ ومنه $aya^{-1} = y$ وبالتالي $T_a(y) = T_e(y)$ وهكذا فإن $\Theta(a) = T_a = T_e$ أي أن $Z(G) \subseteq \text{Ker } \Theta$. مما سبق نجد أن $\text{Ker } \Theta = Z(G)$ ، أي أن $G / Z(G) \approx \text{Inn}(G)$.

من أجل بعض الزمر المنتهية G فإن زمرة التماثلات $\text{Aut}(G)$ لها خاصية هامة جداً، وقبل البدء بدراسة هذه للخاصة، لندرس التطبيق التالي من أجل $G = Z_{10}$.

تطبيق.

لنأخذ الزمرة $G = Z_{10}$. لنوجد الزمرة $\text{Aut}(Z_{10})$.

الحل.

لدينا

$$Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

وهي زمرة دوارة أحد مولداتها هو 1. ليكن $\alpha \in \text{Aut}(Z_{10})$ إن α هو تماثل للزمرة Z_{10} ومنه أيًا كان $k \in Z_{10}$ فإن

$$\alpha(k) = \alpha(\underbrace{1+1+\dots+1}_{k\text{-times}}) = \underbrace{\alpha(1) + \alpha(1) + \dots + \alpha(1)}_{k\text{-times}} = k\alpha(1)$$

لنوجد قيمة $\alpha(1)$. بما أن α تماثل للزمرة Z_{10} ، فإنه حسب التمهيدية (٦-٨) فإن $o(\alpha(1)) = o(1) = 10$ وأن $1, 3, 7, 9 \in Z_{10}$ هي جميع العناصر من Z_{10} والتي مرتبة كل منها 10 (تأكد من ذلك). ومنه فإن قيمة $\alpha(1)$ لها أربع احتمالات وهي

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(1) = 3, \quad \alpha(1) = 7, \quad \alpha(1) = 9$$

لنفرض أن α_1 هو التطبيق من Z_{10} إلى Z_{10} والذي يصور $1 \in Z_{10}$ بنفسه أي $1 \rightarrow 1$ وأن α_3 هو التطبيق $3 \rightarrow 1$ وأن α_7 هو التطبيق $7 \rightarrow 1$ وأن α_9 هو التطبيق $9 \rightarrow 1$.
لنبرهن أن كلاً من $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_7, \alpha_9$ هي تماثلات للزمرة Z_{10} . لدينا

$$\alpha_1(1) = 1, \quad \alpha_3(1) = 3, \quad \alpha_7(1) = 7, \quad \alpha_9(1) = 9$$

من الواضح أن α_1 هو التماثل المطابق. من أجل α_3 لدينا $\alpha_3(1) = 3$ وأن

$$\alpha_3(2) = \alpha_3(1+1) = \alpha_3(1) + \alpha_3(1) = 3 + 3 = 6$$

كما أن

$$\alpha_3(3) = 9, \quad \alpha_3(4) = 2, \quad \alpha_3(5) = 5, \quad \alpha_3(6) = 8$$

$$\alpha_3(7) = 1, \quad \alpha_3(8) = 4, \quad \alpha_3(9) = 7, \quad \alpha_3(0) = 10$$

بهذا الشكل نجد أن $\alpha_3: Z_{10} \rightarrow Z_{10}$ متباين، وبما أن الزمرة Z_{10} منتهية فإن α_3 غامر. وهكذا نجد أن التطبيق α_3 هو تقابل. لنبرهن على أن α_3 تشاكل. ليكن $a, b \in Z_{10}$ عندئذ:

$$\alpha_3(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = \alpha_3(a) + \alpha_3(b)$$

مما سبق نجد أن التطبيق $\alpha_3: Z_{10} \rightarrow Z_{10}$ هو تماثل للزمرة Z_{10} .

بشكل مشابه نجد أن كلاً من α_7, α_9 هي أيضاً تماثلات للزمرة Z_{10} . كما أنه على سبيل المثال $\alpha_3 \circ \alpha_3 = \alpha_9$ لأن

$$\alpha_3 \circ \alpha_3(1) = \alpha_3(3) = 3 \cdot 3 = 9 = \alpha_9(1)$$

وهذا يبين لنا أن $\alpha_3 \circ \alpha_3 = \alpha_9$. وبذلك يمكننا الحصول على الجدول التالي بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات المعرفة على الزمرة $\text{Aut}(Z_{10})$.

$U(10)$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

جدول الزمرة $U(10)$

$Aut(Z_{10})$	α_1	α_3	α_7	α_9
α_1	α_1	α_3	α_7	α_9
α_3	α_3	α_9	α_1	α_7
α_7	α_7	α_1	α_9	α_3
α_9	α_9	α_7	α_3	α_1

جدول الزمرة $Aut(Z_{10})$

وبمقارنة جدول الزمرة $Aut(Z_{10})$ مع جدول الزمرة $U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$ نجد أن

$$Aut(Z_{10}) \cong U(10)$$

إن النتيجة التي توصلنا إليها من خلال التطبيق السابق صحيحة لأجل كل عدد صحيح $n > 1$. ولإثبات هذه الحقيقة لابد لنا من المبرهنة التالية:

مبرهنة ٤-٧.

ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً. عندئذ لأجل كل عدد صحيح $0 < r < n$ وبحقق $\gcd(r, n) = 1$ يوجد تماثل للزمرة Z_n .

البرهان.

ليكن $0 < r < n$ عدد صحيح وبحقق $\gcd(r, n) = 1$. ولنعرف العلاقة $\varphi: Z_n \rightarrow Z_n$ بالشكل التالي: أيأ كان $k \in Z_n$ فإن $\varphi(k) = rk \bmod n$. فنجد أنه أيأ كان $k_1, k_2 \in Z_n$ بحيث $k_1 = k_2$ فإن $rk_1 = rk_2$ وبالتالي

$$rk_1 \bmod n = rk_2 \bmod n$$

وهذا يبين لنا أن $\varphi(k_1) = \varphi(k_2)$. كما أن التطبيق φ متباين، لأنه إذا كان $\varphi(k_1) = \varphi(k_2)$ عندئذ $rk_1 \bmod n = rk_2 \bmod n$ ، وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q_1, q_2, r_1 \in Z$ بحيث

$$rk_1 = q_1n + r_1 \text{ و } rk_2 = q_2n + r_1 \text{ و } 0 \leq r_1 < n$$

ومنه $r(k_1 - k_2) = (q_1 - q_2)n$. لنفرض جدلاً أن $k_1 - k_2 \neq 0$ عندئذ $q_1 - q_2 \neq 0$ وبما أن $\gcd(r, n) = 1$ ، يوجد $t, s \in Z$ بحيث $1 = rt + ns$ أي أن $sn = 1 - rt$. كذلك $sr(k_1 - k_2) = (1 - rt)(q_1 - q_2)n$ ومنه $sr(k_1 - k_2) = sn(q_1 - q_2)$ وبالتالي

$$sr(k_1 - k_2) = (q_1 - q_2) - rt(q_1 - q_2)$$

أي أن $(q_1 - q_2) = r(s(k_1 - k_2) + t(q_1 - q_2))$ ومنه فإن r يقسم $(q_1 - q_2)$. بفرض أن $a = s(k_1 - k_2) + t(q_1 - q_2)$ نجد $ra = (q_1 - q_2)$ وهكذا فإن $r(k_1 - k_2) = ran$ وبالتالي $k_1 - k_2 = an$ ، أي أن n يقسم $k_1 - k_2$ وهذا يناقض كون $k_1 - k_2 < n$. مما سبق نجد أن $k_1 - k_2 = 0$ وبالتالي $k_1 = k_2$. وبما أن الزمرة Z_n منتهية فإن φ عامر، وهذا يبين لنا أن φ تقابل. ولنبهرن على أنه تشاكل ليكن $k_1, k_2 \in Z_n$ عندئذ

$$\begin{aligned}\varphi(k_1 + k_2) &= r(k_1 + k_2) \bmod n = (rk_1 + rk_2) \bmod n = \\ &rk_1 \bmod n + rk_2 \bmod n = \varphi(k_1) + \varphi(k_2)\end{aligned}$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة (١-٦-٤). مما سبق نجد أن φ هو تماثل للزمرة Z_n .
نأتي الآن إلى المبرهنة التي تبين لنا طبيعة الزمرة $Aut(Z_n)$.
مبرهنة ٧-٥.

ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً. عندئذ $Aut(Z_n) \cong U(n)$.

البرهان.

ليكن $\alpha \in Aut(Z_n)$. كما وجدنا في التطبيق السابق، فإن α يتعين بتعيين القيمة $\alpha(1) \in U(n)$. لنعرف العلاقة $T: Aut(Z_n) \rightarrow U(n)$ بالشكل التالي: أيّا كان $\alpha \in Aut(Z_n)$ فإن $T(\alpha) = \alpha(1)$. فنجد أن T تطبيق، لأنه إذا كان $\alpha, \beta \in Aut(Z_n)$ بحيث $\alpha = \beta$ فإن $\alpha(1) = \beta(1)$ وبالتالي $T(\alpha) = T(\beta)$. كذلك T متباين، لأنه إذا كان $T(\alpha) = T(\beta)$ عندئذ $\alpha(1) = \beta(1)$ وبالتالي أيّا كان $k \in Z_n$ فإن $k\alpha(1) = k\beta(1)$ أي أن $\alpha(k) = \beta(k)$ ، ومنه $\alpha = \beta$. بالإضافة لذلك فإن T عامر، لأنه إذا كان $r \in U(n)$ فإن $0 < r < n$ وأن $\gcd(n, r) = 1$. وحسب المبرهنة (٧-٤) يوجد تماثل φ للزمرة Z_n وأن $T(\varphi) = \varphi(1) = r$ وذلك حسب تعريف φ في المبرهنة (٧-٤). مما سبق نجد أن T تقابل. لنبرهن على أن T تشاكل. ليكن $\alpha, \beta \in Aut(Z_n)$ عندئذ

$$T(\alpha \circ \beta) = \alpha \circ \beta(1) = \alpha(\underbrace{1+1+\dots+1}_{\beta(1)\text{-times}}) = \underbrace{\alpha(1) + \alpha(1) + \dots + \alpha(1)}_{\beta(1)\text{-times}} = \\ = \alpha(1)\beta(1) = T(\alpha)T(\beta)$$

مما سبق نجد أن T تماثل. ◊

توجد خواص أخرى هامة لتماثلات الزمرة بشكل عام و للتماثلات الداخلية للزمرة بشكل خاص. وأولى هذه الخواص نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٦-٧.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G هو أن يكون $f(H) = H$ وذلك أيًا كان $f \in \text{Inn}(G)$. البرهان.

لنقوم الشرط. لنفرض أن الزمرة H ناظمية في G ، عندئذ $f = T_a$ حيث $a \in G$ ومنه أيًا كان $h \in H$ فإن $f(h) = T_a(h) = aha^{-1} \in H$ وبالتالي $f(H) \subseteq H$. ليسكن $k \in H$ ، عندئذ $k \in aHa^{-1}$ وبالتالي يوجد $k_0 \in H$ بحيث

$$k = ak_0a^{-1} = T_a(k_0) = f(k_0) \in f(H)$$

أي أن $H \subseteq f(H)$. مما سبق نجد أن $f(H) = H$ ، وذلك أيًا كان $f \in \text{Inn}(G)$. كفاية الشرط. لنفرض أنه أيًا كان $f \in \text{Inn}(G)$ فإن $f(H) = H$. ليسكن $h \in H$ ، عندئذ أيًا كان $g \in G$ فإن $ghg^{-1} = T_g(h) \in T_g(H) = H$ وهذا يبين لنا أن $gHg^{-1} \subseteq H$ وذلك أيًا كان $g \in G$ ، أي أن الزمرة H ناظمية في G . ◊

نأتي الآن لدراسة نوع جديد من الزمر الجزئية وذلك بالاعتماد على زمرة

التماثلات.

تعريف.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . نقول عن الزمرة الجزئية H أنها متميزة في G ، إذا كان $f(H) = H$ وذلك أيًا كان $f \in \text{Aut}(G)$.

يعد G Frobenius أول من أدخل مفهوم الزمرة المتميزة عام ١٨٩٥. من التعريف السابق وبالاعتماد على المبرهنة (٦-٧) نجد أن مفهوم الزمرة المتميزة ما هو

إلا تعميم لمفهوم الزمرة الناعمية، وهذا المفهوم يبين لنا أنه توجد علاقة هامة بين الزمر الجزئية لزمرة وبين زمرة التماثلات لهذه الزمرة. بعض خواص الزمرة المتميزة نورد هنا من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٧-٧.

لتكن G زمرة. علنئذ:

- ١- أية زمرة جزئية متميزة في G تكون ناعمية في G .
- ٢- إذا كانت H, K زمراً جزئياً من G بحيث $H \subseteq K$ ، علنئذ، إذا كانت K متميزة في G و H متميزة في K فإن H تكون متميزة في G .
- ٣- إذا كانت H, K زمريتين جزئيتين من G بحيث $H \subseteq K$ ، علنئذ، إذا كانت K ناعمية في G و H متميزة في K فإن H تكون ناعمية في G .

البرهان.

١ - ينتج مباشرة من المبرهنة (٦-٧).

٢ - بما أن K متميزة في G ، علنئذ $f(K) = K$ وذلك أياً كان $f \in \text{Aut}(G)$. كذلك بما أن H متميزة في K ، علنئذ $\varphi(H) = H$ وذلك أياً كان $\varphi \in \text{Aut}(K)$. ليكن $\theta \in \text{Aut}(G)$ ، علنئذ فإن مقصور θ على K والذي سوف نرمز له $\theta_K : K \rightarrow G$ هو تشاكل متباين، وبما أن $\theta(K) = K$ نجد أن $\theta_K : K \rightarrow K$ هو تماثل للزمرة K ، أي أن $\theta_K \in \text{Aut}(K)$ ، وهذا يبين لنا أن $\theta(H) = \theta_K(H) = H$ وذلك أياً كان $\theta \in \text{Aut}(G)$ ، أي أن الزمرة H تكون متميزة في G .

٣ - بما أن الزمرة K ناعمية في G ، فإن $f(K) = K$ وذلك أياً كان $f \in \text{Inn}(G)$. كذلك، بما أن H متميزة في K فإن $\varphi(H) = H$ وذلك أياً كان $\varphi \in \text{Aut}(K)$. ليكن $\theta \in \text{Inn}(G)$ علنئذ فإن مقصور θ على K والذي سوف نرمز له $\theta_K : K \rightarrow G$ هو تشاكل متباين، وحسب الفرض فإن $\theta(K) = K$ نجد أن $\theta_K : K \rightarrow K$ هو تماثل للزمرة K ، أي أن $\theta_K \in \text{Aut}(K)$ ، وحسب الفرض فإن $\theta_K(H) = H$ وهذا يبين

لذا أن $\oplus(H) = \oplus_K(H) = H$ وذلك أياً كان $\oplus \in \text{Inn}(G)$ ، وحسب المبرهنة (٦-٧) فإن الزمرة H تكون ناظمية في G .

مبرهنة ٧-٨.

لتكن G و K زمرة جزئية متميزة في G . عللئذ:

١ - أياً كان $\alpha \in \text{Aut}(G)$ فإن العلاقة $\bar{\alpha}: G/K \rightarrow G/K$ المعرفة بالشكل $\bar{\alpha}(gK) = \alpha(g)K$ وذلك أياً كان $gK \in G/K$ هو تماثل للزمرة G/K أي أن $\bar{\alpha} \in \text{Aut}(G/K)$.

٢ - لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G بحيث $K \subseteq H \subseteq G$. إذا كانت الزمرة H/K متميزة في الزمرة G/K فإن الزمرة H تكون متميزة في الزمرة G .

البرهان.

١ - ليكن $\alpha \in \text{Aut}(G)$ ولنعرف العلاقة $\bar{\alpha}: G/K \rightarrow G/K$ بالشكل $\bar{\alpha}(gK) = \alpha(g)K$ وذلك أياً كان $gK \in G/K$. $\bar{\alpha}$ تطبيق لأنه أياً كان $g_1K, g_2K \in G/K$ بحيث $g_1K = g_2K$ فإن $(g_1g_2^{-1})K = K$ ومنه $g_1g_2^{-1} \in K$ وبما أن الزمرة K متميزة في G فإن $\alpha(g_1g_2^{-1}) \in \alpha(K) = K$ أي أن

$$\alpha(g_1)\alpha(g_2^{-1}) = \alpha(g_1)(\alpha(g_2))^{-1} \in K$$

ومنه $\alpha(g_1)K = \alpha(g_2)K$ وبالتالي $\bar{\alpha}(g_1K) = \bar{\alpha}(g_2K)$. كما أن $\bar{\alpha}$ تشاكل لأن

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(g_1K.g_2K) &= \bar{\alpha}((g_1g_2)K) = \alpha(g_1g_2)K = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))K = \\ &= (\alpha(g_1)K)(\alpha(g_2)K) = \bar{\alpha}(g_1K)\bar{\alpha}(g_2K) \end{aligned}$$

كما أن التطبيق $\bar{\alpha}$ متباين لأنه إذا كان $\bar{\alpha}(g_1K) = \bar{\alpha}(g_2K)$ فإن

$$\alpha(g_1)K = \alpha(g_2)K \text{ وبالتالي فإن } \alpha(g_1)(\alpha(g_2))^{-1}K = K \text{ ومنه}$$

$$\alpha(g_1g_2^{-1}) \in K = \alpha(K) \text{ وبالتالي يوجد } k \in K \text{ بحيث } \alpha(g_1g_2^{-1}) = \alpha(k) \text{ وبما أن}$$

$$\alpha \text{ تماثل فإن } g_1g_2^{-1} = k \in K \text{ وبالتالي } (g_1g_2^{-1})K = K \text{ وهكذا نجد أن}$$

$$g_1K = g_2K. \text{ كذلك } \bar{\alpha} \text{ غامر لأنه أياً كان } gK \in G/K \text{ فإن } g \in G = \alpha(G) \text{ لأن}$$

$$\alpha \text{ تماثل ومنه يوجد } x \in G \text{ بحيث } g = \alpha(x). \text{ وبما أن } x \in G \text{ فإن } xK \in G/K \text{ وأن}$$

$$\bar{\alpha}(xK) = \alpha(x)K = gK$$

مما سبق نجد أن $\bar{\alpha} \in \text{Aut}(G/K)$.

٢- لكن H زمرة جزئية من الزمرة G بحيث $K \subseteq H \subseteq G$. وبما أن الزمرة K متميزة في G فإنه حسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة K ناظمية في G وبالتالي فإن K ناظمية في H . لنفرض أن الزمرة H/K متميزة في G/K . وليكن $\alpha \in \text{Aut}(G)$ عندئذ حسب (١) فإن $\bar{\alpha} : G/K \rightarrow G/K$ حيث $\bar{\alpha}(gK) = \alpha(g)K$ وذلك أيًا كان $gK \in G/K$. هو تماثل للزمرة G/K . أي أن $\bar{\alpha} \in \text{Aut}(G/K)$ وبما أن الزمرة H/K متميزة في G/K فإن $\bar{\alpha}(H/K) = H/K$. ليكن $h \in H$ عندئذ $hK \in H/K$ ومنه

$$\bar{\alpha}(hK) = \alpha(h)K \in H/K$$

ومنه $\alpha(h) \in H$ أي أن $\alpha(H) \subseteq H$. وبما أن $\alpha \in \text{Aut}(G)$ فإن $\alpha^{-1} \in \text{Aut}(G)$ وبالتالي $\alpha^{-1}(H) \subseteq H$ ومنه $\alpha(\alpha^{-1}(H)) \subseteq \alpha(H)$ أي أن $H \subseteq \alpha(H)$. مما سبق نجد أن $\alpha(H) = H$. وبالتالي الزمرة H متميزة في الزمرة G . ملاحظة.

إن عكس الطلب (٢) من المبرهنة السابقة غير صحيح.

تمهيدية ٧-٩.

لتكن G و K زمرة جزئية من G . الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة K متميزة في G هو أن يتحقق الشرط $\alpha(K) \subseteq K$ وذلك $\forall \alpha \in \text{Aut}(G)$. البرهان.

لزوم الشرط. واضح.

كفاية الشرط. لنفرض أنه $\forall \alpha \in \text{Aut}(G)$ فإن $\alpha(K) \subseteq K$ وبما أن $\alpha^{-1} \in \text{Aut}(G)$ عندئذ $\alpha^{-1}(K) \subseteq K$ وبالتالي $K \subseteq \alpha(K)$ ومنه $\alpha(K) = K$ أي أن الزمرة K متميزة في G .

تعريف.

لتكن G زمرة و $K \neq \langle e \rangle$ زمرة جزئية ناظمية في G . نقول إن K زمرة جزئية ناظمية أصغرية في G إذا لم توجد في G زمرة جزئية ناظمية L في G تحقق $\langle e \rangle \neq L \subset K$.

تمهيدية ٧-١٠.

لتكن G زمرة و K زمرة جزئية ناظمية أصغرية في G . عندئذ إما K تبديلية أو $Z(K) = \langle e \rangle$.

البرهان.

إذا كان $Z(K) = \langle e \rangle$ يتم المطلوب.

لنفرض أن $Z(K) \neq \langle e \rangle$ وحسب التمرين المحلول (١) فإن الزمرة $Z(K)$ متميزة في K وبما أن الزمرة K ناظمية في G وحسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة $Z(K)$ تكون ناظمية في G وبما أن $Z(K) \neq \langle e \rangle$ نجد أن $Z(K) = K$ أي أن الزمرة K تبديلية. ◻

مبرهنة ٧-١١.

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً و G, H زميرتين تبديليتين. عندئذ

١ - المجموعة $G'' = \{g'' : g \in G\}$ زمرة جزئية من الزمرة G .

٢ - إذا كانت $G \approx H$ عندئذ $G'' \approx H''$ و $\frac{G}{G''} \approx \frac{H}{H''}$.

البرهان.

١ - إن $e = e'' \in G''$. ليكن $x, y \in G''$ عندئذ يوجد $g_1, g_2 \in G$ بحيث

$$x = g_1'', y = g_2'' \text{ ومنه}$$

$$x \cdot y^{-1} = g_1'' \cdot g_2^{-1} = (g_1 \cdot g_2^{-1})'' \in G''$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة G'' زمرة جزئية من الزمرة G .

٢ - لنفرض أن $f: G \rightarrow H$ تماثل ولنعرف العلاقة $\varphi: G'' \rightarrow H''$ بالشكل

$$\forall g'' \in G''; \quad \varphi(g'') = (f(g))''$$

فلجد أن φ تطبيق لأنه أيا كان $g_1'', g_2'' \in G''$ بحيث $g_1'' = g_2''$ فإن $g_1'', g_2'' \in G$ ومنه

$$(f(g_1''))'' = f(g_1'') = f(g_2'') = (f(g_2''))''$$

وبالتالي فإن $\varphi(g_1'') = \varphi(g_2'')$. كما أن φ تشاكل لأن

$$\begin{aligned} \varphi(g_1'' \cdot g_2'') &= \varphi((g_1 \cdot g_2)'') = (f(g_1 \cdot g_2))'' = (f(g_1) \cdot f(g_2))'' = \\ &= (f(g_1))'' \cdot (f(g_2))'' = \varphi(g_1'') \varphi(g_2'') \end{aligned}$$

كما أن φ متباين لأنه إذا كان $\varphi(g_1'') = \varphi(g_2'')$ عندئذ $(f(g_1''))'' = (f(g_2''))''$

ومنه $f(g_1'') = f(g_2'')$ وبما أن f تماثل نجد أن $g_1'' = g_2''$. وهو أيضا غامر، لأنه

إذا كان $h'' \in H''$ فإن $h \in H$ وبما أن f غامر فإنه يوجد $g \in G$ بحيث $f(g) = h$.

من جهة أخرى، $g'' \in G''$ وأن $g'' = (f(g))'' = h''$. مما سبق نجد أن φ تماثل.

$$\circ \cdot \frac{G}{G''} \approx \frac{H}{H''} \text{ أن بشكل مشابه نجد أن}$$

تمارين محلولة (٧)

١- لتكن G زمرة. أثبت أن الزمرة الجزئية $Z(G)$ متميزة في G .

الحل.

لنبرهن أن $f(Z(G)) = Z(G)$ وذلك أولاً كان $f \in \text{Aut}(G)$ ، ليكن $a \in Z(G)$ ولنبرهن أن $f(a) \in Z(G)$ ، ليكن $x \in G$ ، بما أن $f(G) = G$ ، فباله يوجد $y \in G$ بحيث $x = f(y)$ ومنه

$$xf(a) = f(y)f(a) = f(ya) = f(ay) = f(a)f(y) = f(a)x$$

وبالتالي $f(a) \in Z(G)$ ، أي أن $f(Z(G)) \subseteq Z(G)$ ، مما سبق، وبما أن $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$ نجد أن $f^{-1}(Z(G)) \subseteq Z(G)$ ومنه $Z(G) \subseteq f(Z(G))$. وهذا يبين لنا أن $f(Z(G)) = Z(G)$ ، أي أن الزمرة $Z(G)$ متميزة في G .

٢- لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G . عندئذ:

أ- المجموعة $N(H) = \{x : x \in G, xHx^{-1} = H\}$ هي زمرة جزئية في G تسمى منازم الزمرة الجزئية H في G .

ب- المجموعة $C(H) = \{x : x \in G, xhx^{-1} = h; \forall h \in H\}$ هي زمرة جزئية في G تسمى مركز الزمرة الجزئية H في G .

ت- تماثل زمرة جزئية من الزمرة $\text{Aut}(H)$.

الحل.

أ - واضح أن $N(H)$ مجموعة جزئية من G وغير خالية. ليكن $x, y \in N(H)$ عندئذ $(xy^{-1})H(xy^{-1})^{-1} = x(y^{-1}Hy)x^{-1} = xHx^{-1} = H$ أي أن $xy^{-1} \in N(H)$.

ب - راجع التمرين المنطوق (٢-٣).

ت - لنعرف العلاقة $f : N(H) \rightarrow \text{Aut}(H)$ بالشكل التالي: أيًا كان $g \in N(H)$ فإن $f(g) = T_g$. إن f تطبيق، لأنه أيًا كان $g_1, g_2 \in N(H)$ بحيث $g_1 = g_2$ ، عندئذ

فإن $\forall h \in H$ فإن $g_1 h g_1^{-1} = g_2 h g_2^{-1}$ ومنه $T_{g_1} = T_{g_2}$ ، أي أن $f(g_1) = f(g_2)$. كذلك f تشاكل، لأنه إذا كان $f(g_1 g_2) = T_{g_1 g_2}$ ومنه فإن

$$T_{g_1 g_2}(h) = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} = T_{g_1}(T_{g_2}(h)) = T_{g_1} T_{g_2}(h)$$

وذلك $\forall h \in H$ أي أن $f(g_1 g_2) = T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2} = f(g_1) f(g_2)$. لنفرض أن $\text{Im } f = K$ ، عندئذ حسب الخاصة (٥) من المبرهنة (٦-١) فإن K زمرة جزئية من الزمرة $\text{Aut}(H)$ وأن $f: N(H) \rightarrow K$ هو تشاكل زمري غامر. لنبرهن على أن $\text{Ker } f = C(H)$. ليكن $g \in \text{Ker } f$ عندئذ $g \in N(H)$ وأن $g H g^{-1} = H$. كذلك فإن $f(g) = T_g$ وأن $f(g) = T_e$ ، ومنه أيضاً كان $h \in H$ فإن $T_g(h) = T_e(h)$ وبالتالي $g h g^{-1} = h$ أي أن $g \in C(H)$ ومنه $\text{Ker } f \subseteq C(H)$. بشكل مشابه يبرهن على الاحتواء المعاكس. وحسب مبرهنة التماثل الزمري الأولى فإن $N(H)/\text{Ker } f = N(H)/C(H) \approx K$.

٣- نتكن G زمرة. عندئذ

١- إذا كانت الزمرة G دوارة فإن الزمرة $\text{Aut}(G)$ تبديلية.

٢- إذا كانت $(G:1) = p$ حيث P عدد أولي عندئذ $(\text{Aut}(G):1) = p-1$.

الحل.

١- لنفرض أن $G = \langle g \rangle$ حيث $g \in G$ وليكن $\alpha, \beta \in \text{Aut}(G)$. بما أن

$$\alpha(g), \beta(g) \in G = \langle g \rangle \text{ لنفرض أن } \alpha(g) = g^r, \beta(g) = g^s \text{ حيث } r, s \in \mathbb{Z} \text{ ومنه}$$

$$(\alpha \circ \beta)(g) = \alpha(\beta(g)) = \alpha(g^s) = (\alpha(g))^s = (g^r)^s = g^{r \cdot s} = g^{s \cdot r} = (g^s)^r =$$

$$= (\beta(g))^r = \beta(g^r) = \beta(\alpha(g)) = \beta \circ \alpha(g)$$

ومنه نجد أن $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

٢- لنفرض أن $(G:1) = p$ عندئذ الزمرة G دوارة. لنفرض أن $G = \langle g \rangle$. أياً كان

$r \in \mathbb{Z}$ فإن العلاقة $\alpha: G \rightarrow G$ المعرفة بالشكل $\alpha(g) = g^r$ هي تماثل للزمرة G (تأكد من ذلك). وبما أن $o(g) = p$ فإن $o(g^r) = o(g) = p$ ، ومنه نجد أنه توجد

$p-1$ إمكانية للعنصر g^r بهذا الشكل نجد أن $(\text{Aut}(G):1) = p-1$.

٤ - لتكن G, H زمير تبديلية وأن $\zeta(G), \zeta(H)$ زميرتا القتل لكل من الزميرتين G, H على الترتيب (راجع التمرين المحلول (٣-٥)). إذا كان $G \approx H$ ، عندئذ:

$$1 - \zeta(G) \approx \zeta(H).$$

$$2 - \frac{G}{\zeta(G)} \approx \frac{H}{\zeta(H)}.$$

الحل.

لنفرض أن $G \approx H$ ولنرمز لهذا التماثل بالرمز $\varphi: G \rightarrow H$.

١ - لنفرض أن $f: \zeta(G) \rightarrow \zeta(H)$ هو مقصور φ على الزمرة الجزئية $\zeta(G)$. واضح أن f هو تشاكل متباين وأنه أي $a \in \zeta(G)$ فإن $f(a) = \varphi(a)$. ليكن $x \in \zeta(G)$ عندئذ يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n = e$ ومنه $\varphi(x^n) = \varphi(e) = e$ وبالتالي $(\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = \varphi(e) = e$ وبالتالي $\varphi(x) \in \zeta(H)$ وهكذا نجد أنه

$$\forall x \in \zeta(G); \quad f(x) = \varphi(x) \in \zeta(H)$$

وبالتالي $f(\zeta(G)) \subseteq \zeta(H)$. وهذا يبين لنا أن $f: \zeta(G) \rightarrow \zeta(H)$ تشاكل متباين. لنبرهن على أنه غامر. ليكن $y \in \zeta(H) \subseteq H$ وبما أن φ غامر يوجد $z \in G$ بحيث $\varphi(z) = y$. من جهة أخرى، بما أن $y \in \zeta(H)$ يوجد $m \in N^*$ بحيث $\varphi(z^m) = y^m = e$ أي $\varphi(z^m) \in \text{Ker } \varphi = \langle e \rangle$ لأن φ متباين وبالتالي $z^m = e$ أي $z \in \zeta(G)$ وأن $f(z) = \varphi(z) = y$ مما سبق نجد أن $\zeta(G) \approx \zeta(H)$.

٢ - لنعرف العلاقة $\bar{\varphi}: \frac{G}{\zeta(G)} \rightarrow \frac{H}{\zeta(H)}$ بالشكل $\bar{\varphi}(x\zeta(G)) = \varphi(x)\zeta(H)$ وذلك

أيًا كان $x\zeta(G) \in \frac{G}{\zeta(G)}$. إن تطبيق φ لأنه أيًا كان $x\zeta(G), y\zeta(G) \in \frac{G}{\zeta(G)}$ بحيث

$x\zeta(G) = y\zeta(G)$ فإن $x\zeta(G) \in y\zeta(G)$ وبالتالي يوجد $a \in \zeta(G)$ بحيث $y = xa$ ومنه

$\varphi(y) = \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a)$ وبمما أن $a \in \zeta(G)$ وحسب (١) فإن

$\varphi(a) \in \varphi(\zeta(G)) = \varphi(\zeta(H))$ وبالتالي $\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(a) \in \varphi(x)\zeta(H)$ وبالتالي $\bar{\varphi}(x\zeta(G)) = \varphi(x)\zeta(H)$ وبما أن

$\varphi(y) \in \varphi(y)\zeta(H)$ نجد ————— أن $\varphi(x)\zeta(H) = \varphi(y)\zeta(H)$ أي أن
 $\overline{\varphi(x)\zeta(G)} = \overline{\varphi(y)\zeta(G)}$ كما أن φ تشاكل لأن

$$\overline{\varphi(x)\zeta(G)} \cdot \overline{\varphi(y)\zeta(G)} = \overline{\varphi(xy)\zeta(G)} = \varphi(xy)\zeta(H) = \varphi(x)\zeta(H) \cdot \varphi(y)\zeta(H) = \\ = \overline{\varphi(x)\zeta(G)} \cdot \overline{\varphi(y)\zeta(G)}$$

بالإضافة لذلك إن φ متباين لأنه إذا كان $\overline{\varphi(x)\zeta(G)} = \overline{\varphi(y)\zeta(G)}$ فإن
 $\varphi(x)\zeta(H) = \varphi(y)\zeta(H)$ ومنه $\varphi(y) \in \varphi(x)\zeta(H)$ وبالتالي يوجد $b \in \zeta(H)$
بحيث $\varphi(y) = \varphi(x)b$ وحسب (١) بما أن $\varphi(\zeta(G)) = \zeta(H)$ يوجد $b_1 \in \zeta(G)$
بحيث $\varphi(b_1) = b$ ومنه $\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(b_1) = \varphi(xb_1)$ وبما أن φ متباين
فإن $y = xb_1 \in x\zeta(G)$ وبما أن $y \in y\zeta(G)$ نجد أن $x\zeta(G) = y\zeta(G)$. كما أن $\overline{\varphi}$
غامر (تأكد من ذلك)، مما سبق نجد $\overline{\varphi}$ تماثل. ◊

تمارين (٧)

- ١ - أوجد كلاً من $Aut(Z_6)$ و $Aut(Z_{30})$.
- ٢ - لتكن R^+ زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة بالنسبة إلى الضرب. أثبت أن التطبيق $\varphi(x) = \sqrt{x}$ هو تماثل للزمرة R^+ .
- ٣ - لتكن G زمرة. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة G تبديلية هو أن يكون $(Inn(G) : 1) = 1$.
- ٤ - أثبت أن التطبيق $\varphi : Z \oplus Z \rightarrow Z$ المعرف بالشكل $\forall(a,b) \in Z \oplus Z, \quad \varphi(a,b) = a - b$ هو تشاكل زمري، ثم عين نواة هذا التشاكل.
- ٥ - لتكن G زمرة دوارة منتهية. أثبت أن كل زمرة جزئية من G هي زمرة متميزة في G .
- ٦ - لتكن G زمرة غير تبديلية. أثبت أن الزمرة $Aut(G)$ ليست دوارة.
- ٧ - لتكن G زمرة و A زمرة جزئية متميزة في G ، ولتكن B زمرة جزئية من G تحوي A . إذا كانت الزمرة $\frac{B}{A}$ متميزة في $\frac{G}{A}$ فإن الزمرة B تكون متميزة في G .
- ٨ - لتكن G زمرة و K زمرة جزئية ناظمية في G . ولتكن A, H زمرة جزئية من G بحيث $K \subseteq A, K \subseteq H$. إذا كانت الزمرة $\frac{A}{K}$ متميزة في $\frac{H}{K}$ وكانت الزمرة H ناظمية في G فإن الزمرة A تكون ناظمية في G .
- ٩ - لتكن G زمرة. إذا كانت H زمرة جزئية متميزة في G فإن الزمرة $C(H)$ تكون متميزة في G .
- ١٠ - لتكن G زمرة تبديلية و H زمرة جزئية من G . أثبت أن:
 - ١ - $\zeta(H) = H \cap \zeta(G)$.
 - ٢ - $\frac{\zeta(G)}{\zeta(H)} \approx \frac{H\zeta(G)}{H} \subseteq \zeta\left(\frac{G}{H}\right)$.
 حيث $\zeta(G)$ هي زمرة الفتل للزمرة G .

الفصل الثامن

الجداء و المجموع المباشران لزمر

في هذا الفصل سوف نعالج طريقتين للتعامل مع الزمر، الأولى هي كيفية تركيب مجموعة من الزمر للحصول على زمرة أكبر، والثانية هي كيفية تجزئة زمرة للحصول على زمر أصغر منها. وهذه الطرق سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة للزمر التبادلية المنتهية.

٨-١. الجداء المباشر للزمر.

تعريف.

لنكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ مجموعة منتهية من الزمر، يعرف الجداء المباشر (الخارجي) للزمر السابقة على أنه المجموعة:

$$\{(g_1, g_2, \dots, g_n), \quad g_i \in G_i; \quad 1 \leq i \leq n\}$$

والذي سوف نرمز له $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$. أي أن:

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n), \quad g_i \in G_i; \quad 1 \leq i \leq n\}$$

تمهيدية ٨-١-١.

لنكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ مجموعة منتهية من الزمر. إن الجداء المباشر

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n), \quad g_i \in G_i; \quad 1 \leq i \leq n\}$$

هو زمرة بالنسبة إلى العملية (•) المعرفة كما يلي:

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n \text{ فإن}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$

يشكل زمرة الحياضي فيها هو $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ حيث e_i هو حياضي الزمرة G_i وذلك

لأجل كل $1 \leq i \leq n$ ، ومقلوب العنصر $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هو

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$$

البرهان.

سوف نتركه للقارئ.

مثال.

لنأخذ الزمرتين

$$U(10) = \{1, 3, 7, 9\}, \quad U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$$

الجداء المباشر للزمرتين $U(8)$ و $U(10)$ هو

$$U(8) \oplus U(10) = \{(1,1), (1,3), (1,7), (1,9), (3,1), (3,3), (3,7), (3,9), (5,1), (5,3), (5,7), (5,9), (7,1), (7,3), (7,7), (7,9)\}$$

كما أن

$$(3,7).(7,9) = (3.7 \bmod -8, 7.9 \bmod -10) = (5,3)$$

كذلك

$$(3,9).(3,3) = (3.3 \bmod -8, 9.3 \bmod -10) = (1,7)$$

مثال.

لنأخذ الزمرتين

$$Z_2 = \{0,1\}, \quad Z_3 = \{0,1,2\}$$

فنجد أن الجداء المباشر للزمرتين Z_3 و Z_2 هو

$$Z_2 \oplus Z_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$$

كما أن الزمرة $Z_2 \oplus Z_3$ هي زمرة دوارة مرتبتها 6، ومولدة بالعنصر $(1,1)$ ، لأن

$$1.(1,1) = (1,1), \quad 2.(1,1) = (1,1).(1,1) = (1+1, 1+1) = (0,2)$$

$$3.(1,1) = (1,1).(1,1).(1,1) = (1+1+1, 1+1+1) = (1,0)$$

$$4.(1,1) = (0,1), \quad 5.(1,1) = (1,2), \quad 6.(1,1) = (0,0)$$

مما سبق نجد أن $Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_6$.

نأتي الآن إلى دراسة خواص الجداء المباشر لزمرة، وذلك من خلال المبرهنة

التالية:

مبرهنة ٨-١-٢.

لتكن G_1, G_2 زميرتين وليكن e_1, e_2 حيادياً كل من G_1, G_2 على الترتيب. ولناخذ زميرتي الجداء المباشر $G_1 \oplus G_2$ و $G_2 \oplus G_1$. القضايا التالية صحيحة:

$$1- G_1 \oplus G_2 \approx G_2 \oplus G_1.$$

$$2- Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2).$$

$$3- \text{كلًا من } G_1 \oplus \langle e_2 \rangle \text{ و } \langle e_1 \rangle \oplus G_2 \text{ زمرة جزئية من الزمرة } G_1 \oplus G_2.$$

$$4- G_2 \approx \langle e_1 \rangle \oplus G_2, G_1 \approx G_1 \oplus \langle e_2 \rangle.$$

٥- الزمرة $G_1 \oplus G_2$ تبديلية عندما فقط عندما تكون كل من الزميرتين G_1 و G_2 تبديلية.

البرهان.

سوف نقوم بالبرهان على ١ و ٢ فقط ونترك البقية للقارئ.

١- لنعرف العلاقة $f: G_1 \oplus G_2 \rightarrow G_2 \oplus G_1$ بالشكل التالي: أياً كان $(x, y) \in G_1 \oplus G_2$ فإن $f((x, y)) = (y, x)$ فنجد أن العلاقة f هي تطبيق متباين، لأنه أياً كان $(x, y), (x_1, y_1) \in G_1 \oplus G_2$ فإن

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1, y = y_1 \Leftrightarrow$$

$$(y, x) = (y_1, x_1) \Leftrightarrow f((x, y)) = f((x_1, y_1))$$

كذلك، واضح أن التطبيق f عامر. لنبرهن على أن التطبيق f هو تشاكل

$$f[(x, y)(x_1, y_1)] = f((xx_1, yy_1)) = (yy_1, xx_1) =$$

$$= (y, x)(y_1, x_1) = f((x, y))f((x_1, y_1))$$

وهذا يبين لنا أن $G_1 \oplus G_2 \approx G_2 \oplus G_1$.

٢- ليكن $(a, b) \in Z(G_1 \oplus G_2)$ عندئذ، أياً كان $x \in G_1$ و أياً كان $y \in G_2$ فإن $(x, y) \in G_1 \oplus G_2$ ومنه $(a, b)(x, y) = (x, y)(a, b)$ وبالتالي فإن

$$(ax, by) = (xa, yb) \text{ أي أن } ax = xa, \quad by = yb \text{ وهذا يبين لنا أن}$$

$$(a, b) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$$

وهكذا نجد أن $Z(G_1 \oplus G_2) \subseteq Z(G_1) \oplus Z(G_2)$. ليكن $(a, b) \in Z(G_1) \oplus Z(G_2)$ عندئذ، أيًا كان $(x, y) \in G_1 \oplus G_2$ فإن

$$(x, y)(a, b) = (xa, yb) = (ax, by) = (a, b)(x, y)$$

أي أن $(a, b) \in Z(G_1 \oplus G_2)$. ومنه $Z(G_1) \oplus Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \oplus G_2)$. مما سبق نجد أن

$$Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2)$$

خاصة أخرى للجداء المباشر نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٨-١-٣.

لتكن G_1, G_2 و H_1, H_2 زمير اختيارية. إذا كان $G_1 \approx H_1$ و $G_2 \approx H_2$ ، عندئذ فإن $G_1 \oplus G_2 \approx H_1 \oplus H_2$.
البرهان.

لنفرض أن $f_1: G_1 \rightarrow H_1$ و $f_2: G_2 \rightarrow H_2$ هما التماثلان المفروضان. ولنعرف العلاقة $f: G_1 \oplus G_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2$ بالشكل التالي: أيًا كان $(x, y) \in G_1 \oplus G_2$ فإن $f((x, y)) = (f_1(x), f_2(y))$ فنجد أن f تماثل. وسوف نترك إثبات ذلك للقارئ. ه
لنورد من خلال المبرهنة التالية طريقة مبسطة لحساب مرتبة عنصر من الجداء المباشر لزمير، وذلك بالاعتماد على مراتب المركبات.
مبرهنة ٨-١-٤.

مرتبة كل عنصر من الجداء المباشر لعدد منته من الزمير المنتهية يساوي المضاعف المشترك الأصغر لمراتب المركبات.
البرهان.

لتكن G_i زمرة منتهية، حيث $1 \leq i \leq n$. وليكن

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) \in G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$$

ولنبرهن أن

$$o((g_1, g_2, \dots, g_n)) = \text{lcm}(o(g_1), o(g_2), \dots, o(g_n))$$

للسهولة ودون المس بالعمومية، سوف نبرهن هذه الحقيقة من أجل $n = 2$. بمعلى آخر لنبرهن على أن

$$o((g_1, g_2)) = \text{lcm}(o(g_1), o(g_2))$$

لنفرض أن $t = o((g_1, g_2))$. عندئذ $(g_1, g_2)' = (g_1', g_2') = (e_1, e_2)$. من جهة أخرى، لنفرض أن $s = \text{lcm}(o(g_1), o(g_2))$ عندئذ

$$(g_1, g_2)^s = (g_1^s, g_2^s) = (e_1, e_2)$$

حيث كل من e_1, e_2 هو حيادي الزمرة G_1, G_2 على الترتيب. مما سبق وحسب المبرهنة (٧-١-٣) نجد أن t يقسم s أي أن $t \leq s$. بفرض أن $t < s$. عندئذ فإن كلا من m_1, m_2 يقسم t . ومنه فإن t مضاعف للعددين m_1, m_2 ، وهذا يبين لنا أن $t \geq s$ أي أن $t = s$. ومنه فإن

$$o((g_1, g_2)) = \text{lcm}(o(g_1), o(g_2))$$

نأتي الآن إلى المبرهنة التالية، والتي تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون الجداء المباشر لزمرة دوارة منتهية هو زمرة دوارة.

مبرهنة ٨-١-٥.

لتكن H, K زمرتين دوارتين منتهيتين. الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة $K \oplus H$ دوارة هو أن تكون مرتبة كل من H, K عددين أوليين فيما بينهما. البرهان.

لنفرض أن $H = \langle h \rangle$, $K = \langle k \rangle$ حيث $h \in H$, $k \in K$. ولنفرض أيضاً أن $(K \oplus H : 1) = mn$. واضح في هذه الحالة أن $(H : 1) = n$, $(K : 1) = m$.

لنقوم الشرط. لنفرض أن الزمرة $K \oplus H$ دوارة. ولنفرض جـدلاً أن

$\text{gcd}(m, n) = t > 1$ عندئذ $k^{\frac{m}{t}} \in K$ ومرتبته t و $h^{\frac{n}{t}} \in H$ مرتبته t أيضاً. ومنه كل

من الزمرتين $\langle (k^{\frac{m}{t}}, e) \rangle, \langle (e, h^{\frac{n}{t}}) \rangle$ دوارة ولهما المرتبة نفسها وهي t وهاتان

الزمرتان مختلفتان، وهذا يناقض المبرهنة (٩-١-٣) إذن $t = 1$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $\gcd(m, n) = 1$ عندئذ حسب المبرهنة (٨-١-٤) فإن

$$o((k, h)) = \text{lcm}(o(k), o(h)) = \text{lcm}(m, n) = mn = (K \oplus H : 1)$$

ومنه نجد أن العنصر (k, h) هو مولد للزمرة $K \oplus H$ وبالتالي تكون الزمرة $K \oplus H$ دوارة. ◊

يمكن تعميم المبرهنة (٨-١-٥) لأجل أي عدد منته من الزمر الدوارة المنتهية وذلك من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ٨-١-٦.

لتكن G_i زمرة دوارة منتهية، حيث $1 \leq i \leq n$. الشرط اللازم والكافي كي تكون زمرة الجداء المباشر $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ دوارة هو أن تكون $(G_i : 1)$ ، $(G_j : 1)$ أعداداً أولية فيما بينها وذلك أيأ كان $i \neq j$ ، $1 \leq i, j \leq n$. البرهان.

ينتج بشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة، ولذلك سوف نتركه للقارئ. ◊
بما أن أي زمريتين دوارتين منتهيتين و لهما المرتبة نفسها متماثلتين وأن الزمرة Z_n دوارة ومنتهية وذلك أيأ كان $n > 1$ ، وبالاتماد على المبرهنة (٨-١-٦) يمكننا صياغة النتيجة التالية:

نتيجة.

ليكن $m > 1$ عدد صحيح يحقق $m = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$. عندئذ

$$Z_m \approx Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \dots \oplus Z_{n_r}$$

عندما فقط عندما، تكون الأعداد $n_1, n_2, \dots, n_r$ أولية فيما بينها، وذلك أيأ كان $1 \leq i, j \leq n$ ، $i \neq j$. ◊

بالاعتماد على ما سبق نورد المثال التالي.

مثال.

بما أن العددين 2, 3 أوليان فيما بينهما، فإن $Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_6$. كذلك بما أن العددين 5, 6 أوليان فيما بينهما، فإن $Z_5 \oplus Z_6 \approx Z_{30}$ ، ومنه

$$\begin{aligned}
 Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 &\approx Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_3 \approx Z_2 \oplus Z_{30} \\
 Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 &\approx Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_3 \approx Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \approx \\
 &\approx Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_{10} \approx Z_6 \oplus Z_{10}
 \end{aligned}$$

بيدما

$$Z_2 \oplus Z_{30} \neq Z_{60}$$

لذات الآن لدراسة الجداء المباشر للزمرة $U(n)$ وخواصه.

مبرهنة ٧-١-٨.

لتكن s, t أعداداً صحيحة موجبة بحيث $\gcd(s, t) = 1$. عندئذ

$$U(st) \approx U(s) \oplus U(t) \quad -١$$

$$U_s(st) \approx U(t) \quad -٢$$

$$U_t(st) \approx U(s) \quad -٣$$

البرهان.

١ - لتعرف العلاقة $f: U(st) \rightarrow U(s) \oplus U(t)$ بالشكل التالي: أياً كان

$k \in U(st)$ فإن $f(k) = (k \bmod -s, k \bmod -t)$ فنجد أن العلاقة f تطابق، لأنه أياً

كان $k_1, k_2 \in U(st)$ بحيث $k_1 = k_2$ فإن

$$k_1 \bmod -s = k_2 \bmod -s, \quad k_1 \bmod -t = k_2 \bmod -t$$

ومنه $(k_1 \bmod -s, k_1 \bmod -t) = (k_2 \bmod -s, k_2 \bmod -t)$ وهذا يبين لنا أن

$$f(k_1) = f(k_2) \text{ . كذلك } f \text{ متباين، لأنه إذا كان } f(k_1) = f(k_2) \text{ فإن}$$

$$(k_1 \bmod -s, k_1 \bmod -t) = (k_2 \bmod -s, k_2 \bmod -t)$$

أي أن

$$k_1 \bmod -s = k_2 \bmod -s, \quad k_1 \bmod -t = k_2 \bmod -t$$

وبما أن $\gcd(s, t) = 1$ وحسب المبرهنة (١-٦-٤) نجد أن

$$k_1 \bmod -(st) = k_2 \bmod -(st)$$

وبما أن $k_1, k_2 \in U(st)$ فإن

$$k_1 = k_1 \bmod -(st) = k_2 \bmod -(st) = k_2$$

كما أن f تشاكل لأن

$$\begin{aligned} f(k_1 k_2) &= (k_1 k_2 \bmod -s, k_1 k_2 \bmod -t) = \\ &= (k_1 \bmod -s, k_1 \bmod -t)(k_2 \bmod -s, k_2 \bmod -t) = f(k_1)f(k_2) \end{aligned}$$

وكذلك f غامر، لأنه أيأ كان $(a, b) \in U(s) \oplus U(t)$ فإن $ab \in U(s) \oplus U(t)$ ، ومنه

$$f(ab) = (ab \bmod -s, ab \bmod -t) = (a, b)$$

مما سبق نجد أن f تماثل.

٢ - نعلم أنه إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً و k قاسماً للعدد n ، فإن

$$U_k(n) = \{x : x \in U(n), \quad x \equiv 1 \bmod -k\}$$

لنعرف العلاقة $\varphi : U_s(st) \rightarrow U(t)$ بالشكل التالي: أيأ كان $x \in U_s(st)$ فإن

$\varphi(x) = x \bmod -t$. فنجد أن العلاقة φ تطبيق، لأنه أيأ كان $x, y \in U_s(st)$ بحيث

$x = y$ فإن $x \bmod -t = y \bmod -t$ ومنه $\varphi(x) = \varphi(y)$. كذلك فإن φ متباين، لأنه

إذا كان $\varphi(x) = \varphi(y)$ فإن $x \bmod -t = y \bmod -t$ وحسب المبرهنة (٤-٦-١) فإن

$$x = x \bmod -(st) = y \bmod -(st) = y$$

كما أن φ تشاكل لأن

$$\varphi(xy) = xy \bmod -t = (x \bmod -t)(y \bmod -t) = \varphi(x)\varphi(y)$$

كذلك φ غامر.

٣ - يبرهن بشكل مشابه.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الهامة التالية:

نتيجة.

ليكن $m > 1$ عدداً صحيحاً يحقق $m = n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ حيث $\gcd(n_i, n_j) = 1$ وذلك

من أجل $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$. عنئذ:

$$U(m) \approx U(n_1) \oplus U(n_2) \oplus U(n_3) \oplus \dots \oplus U(n_k)$$

مثال.

لدينا $105 = 7 \cdot 15, 105 = 5 \cdot 21$. وبما أن $\gcd(7, 15) = 1, \gcd(5, 21) = 1$ فإن

$$U(105) \approx U(7) \oplus U(15), U(105) \approx U(5) \oplus U(21)$$

$$U(105) \approx U(5) \oplus U(3) \oplus U(7)$$

بالإضافة لذلك فإن

$$U(7) \approx U_{15}(105) = \{1, 16, 31, 46, 61, 76\}$$

$$U(5) \approx U_{21}(105) = \{1, 22, 43, 64\}$$

$$U(15) \approx U_7(105) = \{1, 8, 22, 29, 43, 64, 71, 92\}$$

$$U(3) \approx U_{35}(105) = \{1, 71\}$$

$$U(21) \approx U_5(105) = \{1, 11, 16, 26, 31, 41, 46, 61, 71, 76, 86, 101\}$$

مبرهنة ٨-١-٨.

لتكن K زمرة جزئية ناظرية في الزمرة G_1 و H زمرة جزئية ناظرية في الزمرة G . عندئذ $H \oplus K$ زمرة جزئية ناظرية في الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$. البرهان.

واضح أن $H \oplus K$ زمرة جزئية من الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$. لنبرهن على أنه

$$\forall g \in G; \quad g(H \oplus K)g^{-1} \subseteq H \oplus K$$

ليكن $(x, y) \in g(H \oplus K)g^{-1}$ عندئذ يوجد $(h, k) \in H \oplus K$ بحيث $(x, y) = g(h, k)g^{-1}$ وبما أن $g \in G = G_1 \oplus G_2$ فإن $g = (g_1, g_2)$ حيث $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ ومثله

$$\begin{aligned} (x, y) &= (g_1, g_2)(h, k)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h, k)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = \\ &= (g_1 h g_1^{-1}, g_2 k g_2^{-1}) \in H \oplus K \end{aligned}$$

وذلك لأن الزمرة K ناظرية في الزمرة G_1 و H ناظرية في الزمرة G_2 . مما سبق نجد أن الزمرة $H \oplus K$ زمرة جزئية من الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$.

٨-٢. المجموع المباشر للزمر.

تعريف.

لتكن G زمرة ولتكن $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناظرية من الزمرة G . نقول عن الزمرة G إنها مجموع مباشر للزمر H_i حيث $1 \leq i \leq n$ ونكتب $G = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_n$ إذا تحقق:

$$1- G = H_1.H_2.H_3....H_n = \{h_1.h_2.h_3....h_n, \quad h_i \in H_i; \quad 1 \leq i \leq n\}$$

$$2- (H_1.H_2.H_3....H_i) \cap H_{i+1} = \langle e \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

قبل البدء بدراسة المجموع المباشر وخواصه لابد لنا من التمهيدية التالية:

تمهيدية ٨-٢-١.

لتكن K, H زمراً جزئية ناظرية في G . إذا كان $K \cap H = \langle e \rangle$ عندئذ أياً

كان $h \in H$ و $k \in K$ فإن $hk = kh$.

البرهان.

ليكن $h \in H, \quad k \in K$ عندئذ $h^{-1} \in H$ ، $khk^{-1}h^{-1} = (khk^{-1})h^{-1} \in H$ كما أن

$khk^{-1}h^{-1} = k(hk^{-1}h^{-1}) \in K$ وهذا يبين لنا أن $khk^{-1}h^{-1} \in H \cap K = \langle e \rangle$ ومنه

$$hk = kh.$$

المبرهنة التالية تبين لنا كيفية تمثيل عناصر المجموع المباشر أزمراً.

مبرهنة ٨-٢-٢.

لتكن K, H زمراً جزئية ناظرية في G . الشروط التالية متكافئة:

$$1- G = K \times H$$

٢- أياً كان $g \in G$ فإن g يكتب بصورة وحيدة على النحو $g = kh$

حيث $h \in H, \quad k \in K$.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن $G = K \times H$ عندئذ $G = K.H$ ومنه أياً كان $g \in G$ فإن

$g = kh$ حيث $h \in H, \quad k \in K$ لنفرض أن $g = kh = k_1h_1$ حيث

$k, k_1 \in K, \quad h, h_1 \in H$ ومنه $h_1h^{-1} = k_1^{-1}k \in H \cap K = \langle e \rangle$ أي أن

$$h = h_1, \quad k = k_1$$

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). بما أن H ناظرية في G عندئذ $H.K = K.H$ وهي زمرة جزئية في G .

وحسب الفرض فإن $G = K.H$ لنفرض جـداً أن $K \cap H \neq \langle e \rangle$ عندئذ يوجد

$y \in K \cap H$ وأن $y \neq e$ ومنه $y = k = h$ حيث $k \in K, \quad h \in H$ وهكذا نجد أن

$kh^{-1} = e$ وهذا يناقض كون الكتابة وحيدة، إذن $K \cap H = \langle e \rangle$ وبالتالي $G = K \times H$.

يمكن تعميم المبرهنة (٨-٢-٢) من أجل أي عدد منته من الزمر الجزئية الناعمية وهذا التعميم يمكن صياغته بالشكل التالي:

مبرهنة ٨-٢-٣.

لتكن $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناعمية من الزمرة G . الشروط التالية متكافئة:

$$1- G = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_n$$

٢- أياً كان $g \in G$ فإن g يكتب بصورة وحيدة على النحو التالي $g = h_1 h_2 h_3 \dots h_n$ حيث $h_i \in H_i$ لأجل كل $1 \leq i \leq n$.

البرهان.

نتيج بشكل مباشر من المبرهنة الأخيرة، ولذلك سوف نتركه للقارئ.

العلاقة الهامة بين الجداء المباشر والمجموع المباشر لزممر نوردها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٨-٢-٤.

لتكن K, H زمر جزئية ناعمية من الزمرة G . عندئذ

$$K \times H \approx K \oplus H$$

البرهان.

لتعرف العلاقة $\varphi: K \times H \rightarrow K \oplus H$ بالشكل التالي: أياً كان $kh \in K.H$ فإن $\varphi(kh) = (k, h)$. فنجد أن العلاقة φ تطابق متباين، لأنه أياً كان $kh, k_1 h_1 \in K \times H$ فإن

$$kh = k_1 h_1 \Leftrightarrow k = k_1, \quad h = h_1 \Leftrightarrow (k, h) = (k_1, h_1) \Leftrightarrow \varphi(kh) = \varphi(k_1 h_1)$$

واضح أن التطبيق φ عامر. كذلك إن تشاكل لأن

$$\varphi((kh)(k_1 h_1)) = \varphi((kk_1)(hh_1)) = (kk_1, hh_1) = (k, h)(k_1, h_1) = \varphi(kh)\varphi(k_1 h_1)$$

مما سبق نجد أن $K \times H \approx K \oplus H$.

مبرهنة ٨-٢-٥.

لتكن $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناعمية من الزمرة G .
عندئذ

$$H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_n \approx H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$$

البرهان.

نتركه للقارئ.

مبرهنة ٨-٢-٦.

لتكن G زمرة و H, K زمراً جزئيتين ناعميتين في G بحيث $G = K \times H$ وليتكن L زمرة جزئية من G . عندئذ:

١ - توجد تشاكلات زمرية غامرة $\pi: G \rightarrow H, \rho: G \rightarrow K$.

٢ - كل من الزمر الجزئية $K \cap L, H \cap L$ ناعمية في الزمرة L .

٣ - الزمرة $H \cap L$ ناعمية في $\pi(L)$ والزمرة $K \cap L$ ناعمية في $\rho(L)$.

٤ - $L = (K \cap L) \times (H \cap L)$ عندما وفقط عندما

$$\pi(L) = H \cap L, \rho(L) = K \cap L$$

البرهان.

١ - ليكن $g \in G$ عندئذ فإن g يكتب بصورة وحيدة على الشكل $g = kh$ حيث

$k \in K, h \in H$. لنعرف العلاقة $\pi: G \rightarrow H$ بالشكل $\pi(g) = h$ فلجد أن تطبيق

لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$ فإنه يوجد $k_1, k_2 \in K, h_1, h_2 \in H$ بحيث

$g_1 = k_1 h_1, g_2 = k_2 h_2$. لنفرض أن $g_1 = g_2$ عندئذ $k_1 h_1 = k_2 h_2$ ومنه

$$h_1 = h_2, k_1 = k_2$$
 وبالتالي

$$\pi(g_1) = h_1 = h_2 = \pi(g_2)$$

لنبرهن على أن التطبيق π تشاكل. حسب التمهيدية (٨-٢-١) فإن $kh = hk$ وذلك

$\forall h \in H, k \in K$ ومنه

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(k_1 h_1 k_2 h_2) = \pi(k_1 k_2 h_1 h_2) = h_1 h_2 = \pi(g_1) \pi(g_2)$$

ومنه π تشاكل كما أنه غامر، لأنه أيًا كان $h \in H$ فإن $\pi(h) = h$ بشكل مشابه نجد أن العلاقة $\rho: G \rightarrow K$ هي أيضا تشاكل غامر.

٢- إن $K \cap L$ زمرة جزئية من L . ليكن $g \in L$ ، ولنبرهن على أن $g(K \cap L)g^{-1} \subseteq K \cap L$. ليكن $x \in g(K \cap L)g^{-1}$ عندئذ يوجد $y \in K \cap L$ بحيث $x = gyg^{-1} \in K$ وبما أن $y \in K$ وأن الزمرة K ناظمية في G فإن $x = gyg^{-1} \in K$ من جهة أخرى، لدينا $g, y \in L$ ومنه $x = gyg^{-1} \in L$ ، وهذا يبين لنا أن $x = gyg^{-1} \in K \cap L$ أي أن الزمرة $K \cap L$ ناظمية في L . بشكل مشابه نجد أن الزمرة $H \cap L$ ناظمية في L .

٣- لدينا حسب (٢) الزمرة $H \cap L$ ناظمية في L ومنه حسب المبرهنة (٦-١) فإن الزمرة $\pi(H \cap L)$ تكون ناظمية في $\pi(L)$. لنفرض أن π_0 هو مقصور التشاكل π على H فنجد أن $\pi_0: H \rightarrow H$ وأن $\pi_0(h) = \pi(h) = h$ وذلك أيًا كان $h \in H$ ومنه فإن

$$H \cap L = \pi_0(H \cap L) = \pi(H \cap L) \subseteq \pi(L)$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $H \cap L$ ناظمية $\pi(L)$. بشكل مشابه نجد أن الزمرة $K \cap L$ ناظمية في $\rho(L)$.

٤- لنفرض أن $L = (K \cap L) \times (H \cap L)$ عندئذ وحسب تعريف كل من π, ρ فإن $\pi(L) = (H \cap L)$ وأن $\rho(L) = (K \cap L)$.

لنفرض أن $\pi(L) = (H \cap L)$ وأن $\rho(L) = (K \cap L)$. لدينا حسب (٢) كل من $K \cap L, H \cap L$ زمرة جزئية ناظمية في L ومنه فإن الجداء $(K \cap L) \cdot (H \cap L)$ زمرة جزئية في L أي أن $(K \cap L) \cdot (H \cap L) \subseteq L$.

ليكن $y \in L = KH$ عندئذ $y \in G = KH$ ومنه $y = kh$ حيث $k \in K, h \in H$ ومنه حسب تعريف التشاكلات π, ρ فإن

$$h = \pi(kh) = \pi(y) = \pi(L) = H \cap L$$

$$k = \rho(kh) = \rho(y) \in \rho(L) = K \cap L$$

ومنه نجد أن $y = kh \in (K \cap L)(H \cap L)$ أي أن $L \subseteq (K \cap L)(H \cap L)$ وبالتساوي فإن $L = (K \cap L)(H \cap L)$ وأن $(K \cap L) \cap (H \cap L) = \langle e \rangle$ ومنه نجد أن $L = (K \cap L) \times (H \cap L)$.

٨-٣. الجداء نصف المباشر للزممر.

لتكن A, B زممرتين ما ولنفرض وجود تشاكل $\varphi: B \rightarrow \text{Aut}(A)$ ولنفرض أنه

$$\forall b \in B, \quad \varphi(b) = \hat{b} \in \text{Aut}(A)$$

لنأخذ المجموعة

$$G = A \oplus B = \{(a, b); \quad a \in A, b \in B\}$$

وجدنا في الفقرة (٨-١) أن المجموعة G تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة بالشكل:

$$\forall (a, b), (a_1, b_1) \in G; \quad (a, b) \cdot (a_1, b_1) = (aa_1, bb_1)$$

لنعرف على المجموعة G عملية أخرى (.) بالشكل التالي:

$$\forall (a, b), (a_1, b_1) \in G; \quad (a, b) \cdot (a_1, b_1) = (a \cdot \hat{b}(a_1), bb_1)$$

تمهيدية ٨-٣-١.

المجموعة $G = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall (a, b), (a_1, b_1) \in G; \quad (a, b) \cdot (a_1, b_1) = (a \cdot \hat{b}(a_1), bb_1)$$

البرهان.

واضح أن المجموعة G غير خالية، كما أن العملية (.) داخلية على G وأن العنصر (e_A, e_B) هو العنصر المحايد في G بالنسبة إلى هذه العملية. وأن العملية (.) تجميعية لأنه $\forall (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G$ فإن

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot [(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] &= (a, b) \cdot (a_1 \cdot \hat{b}_1(a_2), b_1 b_2) = (a \cdot \hat{b}(a_1 \cdot \hat{b}_1(a_2)), b(b_1 b_2)) = \\ &= (a \cdot \hat{b}(a_1) \cdot \hat{b}(\hat{b}_1(a_2)), (bb_1)b_2) = (a \cdot \hat{b}(a_1) \cdot \hat{b} \circ \hat{b}_1(a_2), (bb_1)b_2) = \end{aligned}$$

$= (a\hat{b}(a_1), \hat{b}b_1(a_2), (bb_1)b_2) = (a\hat{b}(a_1), bb_1)(a_2, b_2) = [(a, b)(a_1, b_1)](a_2, b_2)$
 ولكل عنصر $(a, b) \in G$ يوجد مقلوب هو $(\hat{b}^{-1}(a), b^{-1}) = (a, b)^{-1}$. (تأكد من ذلك).
 تعريف.

لتكن A, B زميرتين. نسمي الزمرة G بالنسبة إلى العملية المعرفة في التمهيديّة (٨-١-٣) زمرة الجداء نصف المباشر للزميرتين A, B وذلك بالنسبة إلى التشاكل $\varphi: B \rightarrow \text{Aut}(A)$.
 ملاحظة.

لتكن G زمرة الجداء نصف المباشر للزميرتين A, B بالنسبة إلى التشاكل $\varphi: B \rightarrow \text{Aut}(A)$ إذا كان

$$\forall b \in B, \quad \varphi(b) = \hat{b} = I_A$$

فإن G هي زمرة الجداء المباشر للزمير A, B .
 مبرهنة ٨-٣-٢.

لتكن G زمرة و A, B زميرتين جزئيتين من الزمرة G . ولنفرض أن $O(A)$ مجموعة التطبيقات للزمرة الجزئية A . إذا وجد تطبيق $\varphi: B \rightarrow O(A)$ يحقق:

$$G = A.B \quad ١ -$$

$$A \cap B = \langle e \rangle \quad ٢ -$$

$$ba = \varphi(a).b \quad ٣ - \text{ وذلك أيًا كان } a \in A, b \in B.$$

عندئذ فإن التطبيق $\varphi: B \rightarrow \text{Aut}(A)$ هو تشاكل زمري، كما أن G تماثل الجداء نصف المباشر للزمير A, B بالنسبة إلى التشاكل φ .
 البرهان.

لنفرض وجود التطبيق $\varphi: B \rightarrow O(A)$ ولنفرض أن $\varphi(b) = \hat{b}$. $\forall b \in B$. للبرهن على أن $\varphi(b) = \hat{b} \in O(A)$ $\forall b \in B$ هو تماثل للزمرة A . لدينا $\hat{b}: A \rightarrow A$ هو

تطبيق للزمرة A وحسب الشرط (٣) فإن $ba = \hat{b}(a).b$. لنبرهن على أن $\hat{b}$ تشاكل للزمرة A . ليكن $a_1, a_2 \in A$ عندئذ

$$\begin{aligned}\hat{b}(a_1.a_2).b &= b(a_1.a_2) = (ba_1)a_2 = (\hat{b}(a_1).b)a_2 = \hat{b}(a_1)(ba_2) = \\ &= \hat{b}(a_1).\hat{b}(a_2).b\end{aligned}$$

ومنه نجد أن $\hat{b}(a_1.a_2).b = \hat{b}(a_1).\hat{b}(a_2).b$ وبالتالي فإن $\hat{b}(a_1.a_2) = \hat{b}(a_1).\hat{b}(a_2)$ وهذا يبين لنا أن التطبيق $\hat{b}$ هو تشاكل للزمرة A . لنبرهن على أن $\hat{b}$ متباين. ليكن $a_1, a_2 \in A$ بحيث $\hat{b}(a_1) = \hat{b}(a_2)$ ومنه $\hat{b}(a_1).b = \hat{b}(a_2).b$ وحسب الشرط (٣) فإن $ba_1 = ba_2$ وبالتالي $a_1 = a_2$ أي أن التشاكل $\hat{b}$ متباين.

بما أن $b \in B$ فإن $b^{-1} \in B$ وأن $b^{-1} : A \rightarrow A$ هو تشاكل للزمرة A . ليكن $a \in A$ عندئذ حسب (٣) $b^{-1}ab = \hat{b}^{-1}(a)$ ومنه $\hat{b}^{-1}(a).b^{-1} = b^{-1}.a$ وبالتالي فإن

$$\hat{b}(b^{-1}ab).b = b(b^{-1}.a.b) = a.b$$

ومنه $\hat{b}(b^{-1}ab) = a$ ، وهذا يبين لنا أن التشاكل $\hat{b}$ غامر. مما سبق نجد أن التطبيق $\hat{b}$ هو تماثل للزمرة A ، وبالتالي $\varphi(B) \subseteq \text{Aut}(A)$ ومنه $\varphi : B \rightarrow \text{Aut}(A)$ هو تطبيق لنبرهن على أن التطبيق $\varphi : B \rightarrow \text{Aut}(A)$ هو تشاكل زمري. ليكن $b_1, b_2 \in B$ عندئذ $b_1, b_2 \in B$ وأن $\varphi(b_1.b_2) = \hat{b}_1\hat{b}_2$ و أن $\hat{b}_1\hat{b}_2$ هو تماثل للزمرة A . ومنه أياً كان $a \in A$ فإن

$$\begin{aligned}\hat{b}_1\hat{b}_2(a).b_1b_2 &= (b_1b_2)a = b_1(b_2a) = b_1(\hat{b}_2(a).b_2) = (b_1.\hat{b}_2(a))b_2 = \\ &= (\hat{b}_1(\hat{b}_2(a)b_1)b_2 = \hat{b}_1(\hat{b}_2(a))b_1b_2 = \hat{b}_1 \circ \hat{b}_2(a)b_1b_2\end{aligned}$$

ومنه أياً كان $a \in A$ فإن

$$\hat{b}_1\hat{b}_2(a) = \hat{b}_1 \circ \hat{b}_2(a)$$

وهذا يبين لنا أن $\hat{b}_1\hat{b}_2 = \hat{b}_1 \circ \hat{b}_2$ أي أن $\varphi(b_1b_2) = \varphi(b_1) \circ \varphi(b_2)$ ومنه نجد أن التطبيق φ هو تشاكل.

تمارين محلولة (٨)

١- أوجد عدد جميع العناصر في الزمرة $Z_{25} \oplus Z_5$ والتي مرتبة كل منها تساوي 5.

الحل.

ليكن $(a, b) \in Z_{25} \oplus Z_5$ بالاعتماد على المبرهنة (٨-١) فإن
 $5 = o((a, b)) = \text{lcm}(o(a), o(b))$ وهذا يتحقق في الحالات التالية:

$$o(a) = 5, \quad o(b) = 1 \quad \text{و} \quad o(a) = o(b) = 5 \quad \text{و} \quad o(a) = 1, \quad o(b) = 5$$

- الحالة الأولى: إذا كان

$$o(a) = 1, \quad o(b) = 5$$

وهنا نجد أنه يوجد في Z_{25} عنصر واحد مرتبته 1، وأربعة عناصر في Z_5 مرتبة كل واحد منها تساوي 5. ومنه يوجد لدينا في هذه الحالة أربعة عناصر على الأكثر في $Z_{25} \oplus Z_5$ مرتبة كل منها 5.

- الحالة الثانية: إذا كان

$$o(a) = o(b) = 5$$

وهنا نجد أنه توجد في Z_{25} أربعة عناصر مرتبة كل واحد منها تساوي 5 وأربعة عناصر في Z_5 مرتبة كل واحد منها تساوي 5. ومنه يوجد لدينا في $Z_{25} \oplus Z_5$ 16 عنصر مرتبة كل منها 5.

- الحالة الثالثة: إذا كان

$$o(a) = 5, o(b) = 1$$

وهنا نجد أنه يوجد في Z_{25} أربعة عناصر مرتبة كل واحد منها تساوي 5، وعنصر واحد في Z_5 مرتبته 1. وفي هذه الحالة نجد أنه يوجد لدينا في $Z_{25} \oplus Z_5$ على الأكثر 4 عناصر مرتبة كل منها تساوي 5. مما سبق نجد أنه يوجد في $Z_{25} \oplus Z_5$ أربعة وعشرون عنصراً مرتبة كل منها تساوي 5.

٢- أوجد عدد جميع الزمر الجزئية الدوارة في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$ والتي مرتبة كل منها تساوي 10.

الحل.

لنوجد أولاً عدد جميع العناصر في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$ والتي مرتبة كل منها تساوي 10. ليكن $(a, b) \in Z_{100} \oplus Z_{25}$. لدينا حسب المبرهنة (٨-١-٤) فإن

$$10 = o((a, b)) = \text{lcm}(o(a), o(b))$$

وهذا يتحقق إذا كان

$$o(a) = 2, o(b) = 5, o(a) = 10, o(b) = 5, o(a) = 10, o(b) = 1$$

- الحالة الأولى: إذا كان $o(a) = 10, o(b) = 1$. بما أن الزمرة Z_{100} تحوي زمرة جزئية دوارة واحدة فقط مرتبتها 10 وأن أي زمرة دوارة مرتبتها 10 تملك أربع مولدات، وذلك حسب المبرهنة (٣-١-٩). وفي هذه الحالة نجد أنه توجد لدينا أربع احتمالات للعنصر (a, b) .

- الحالة الثانية: إذا كان $o(a) = 10, o(b) = 5$. كما وجدنا في الحالة الأولى فإن للعنصر a أربعة احتمالات. وبما أنه في Z_{25} يوجد أربعة عناصر مرتبة كل منها تساوي 5، نجد أنه في هذه الحالة يوجد لدينا 16 إمكانية للعنصر (a, b) .

- الحالة الثالثة: إذا كان $o(a) = 2, o(b) = 5$. بما أن أي زمرة دوارة مرتبتها عدد زوجي تحوي زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها 2، نجد أن للعنصر a إمكانية واحدة فقط، وللعنصر b أربعة إمكانيات. وفي هذه الحالة نجد أنه توجد لدينا 4 احتمالات للعنصر (a, b) . مما سبق نجد أنه يوجد 24 عنصر في الزمرة $Z_{100} \oplus Z_{25}$ مرتبة كل منها تساوي 10. وبما أن أية زمرة دوارة مرتبتها 10 تملك 4 مولدات يتبين

$$\text{لنا أنه توجد } \frac{24}{4} = 6 \text{ زمرة جزئية مختلفة في الزمرة } Z_{100} \oplus Z_{25}.$$

٣- الزمرة $Z \oplus Z$ ليست دوارة.

الحل.

لنفرض جذاً أن الزمرة $Z \oplus Z$ دوارة مولدة بالعنصر (a, b) حيث $a, b \in Z$. أي

$Z \oplus Z = \langle (a, b) \rangle$. نميز حالتين:

- الحالة الأولى: إذا كان $a = b$ عندئذ نجد أن $\langle (a, b) \rangle \notin (1, 2)$ وهذا غير ممكن.
 - الحالة الثانية: إذا كان $a \neq b$ عندئذ نجد أن $\langle (a, b) \rangle \notin (1, 1)$ وهذا غير ممكن.
- مما سبق نجد أن الزمرة $Z \oplus Z$ ليست دوارة. ◊

٤ - من أجل أي زمرتين A, B أثبت أن $\frac{A \oplus B}{A} \approx B$.

الحل.

لنعرف التطبيق $\varphi: A \oplus B \rightarrow B$ بالشكل التالي: أيأ كان $(a, b) \in A \oplus B$ فإن

$\varphi(a, b) = b$. فلنجد أن φ تشاكل، لأنه أيأ كان $(a, b), (a_1, b_1) \in A \oplus B$ فإن

$$\varphi[(a, b) \cdot (a_1, b_1)] = \varphi(aa_1, bb_1) = bb_1 = \varphi(a, b)\varphi(a_1, b_1)$$

كما أن φ غامر، لأنه أيأ كان $b \in B$ فإن $(e, b) \in A \oplus B$ وأن $\varphi(e, b) = b$ ومنه

$\frac{A \oplus B}{\text{Ker } \varphi} \approx B$. من الواضح أن $\text{Ker } \varphi = A \oplus \langle e \rangle$. وحسب المبرهنة (٨-١-٢) فإن

$$\frac{A \oplus B}{A} \approx B \text{ وبالتالي } A \approx A \oplus \langle e \rangle$$

تمارين (٨)

- ١- أوجد مرتبة كل عنصر من الزمرة $Z_2 \oplus Z_4$.
- ٢- لتكن G زمرة. أثبت أن المجموعة $H = \{(g, g) : g \in G\}$ زمرة جزئية من الزمرة $G \oplus G$.
- ٣- هل الزمرتان $Z_3 \oplus Z_9$, Z_{27} متماثلتان؟
- ٤- هل الزمرتان $Z_3 \oplus Z_5$, Z_{15} متماثلتان؟
- ٥- أوجد جميع الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 3 في الزمرة $Z_9 \oplus Z_3$.
- ٦- أوجد جميع الزمر الجزئية التي مرتبة كل منها 4 في الزمرة $Z_4 \oplus Z_4$.
- ٧- عين في الزمرة $Z_{12} \oplus Z_4 \oplus Z_{15}$ زمرة جزئية مرتبتها 9.
- ٨- لتكن G زمرة تبديلية جمعية، و n عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن المجموعة $H = \{(g, ng) : g \in G\}$ هي زمرة جزئية من الزمرة $G \oplus G$.
- ٩- أثبت أن الزمرة $Z_{12} \oplus Z_{20}$ تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_4 \oplus Z_{25}$.
- ١٠- أثبت أن الزمرة $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تحوي سبع زمر جزئية مرتبة كل منها 2.
- ١١- في زمرة الأعداد الصحيحة Z لنفرض أن $K = \langle 7 \rangle$, $H = \langle 5 \rangle$. أثبت أن $Z = K.H$ وهل $Z = K \times H$ ؟
- ١٢- أثبت أن الزمرة $U(117)$ تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_3 \oplus Z_3$.
- ١٣- أثبت أن الزمرة $U(65)$ تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_4 \oplus Z_4$.
- ١٤- أثبت أن الزمرتين $U(75)$, $U(55)$ متماثلتان.
- ١٥- أثبت أن الزمرتين $U(140)$, $U(144)$ متماثلتان.
- ١٦- هل الزمرتان $Z_6 \oplus Z_{10}$, $Z_4 \oplus Z_{15}$ متماثلتان؟
- ١٧- أوجد عدد جميع الزمر الجزئية الدوارة من المرتبة 15 في الزمرة $Z_{90} \oplus Z_{36}$.

١٨- لتكن H, K زمير تبديلية و n عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن
حيث $(H \oplus K)'' = H'' \oplus K''$

$$H'' = \{h'', h \in H\}, \quad K'' = \{k'', k \in K\}$$

١٩- أوجد عدد جميع العناصر من المرتبة 15 في الزمرة $Z_{20} \oplus Z_{30}$ ، ثم عين جميع الزمر الجزئية الدوارة من المرتبة 15 في الزمرة $Z_{20} \oplus Z_{30}$.

٢٠- أي من الزمر التالية $Z_8, Z_4 \oplus Z_2, Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تماثل الزمرة $Z_4 \oplus Z_{12} / \langle (2, 2) \rangle$.

٢١- لتكن $G = U(32)$ و $H = \{1, 31\}$. أي من الزمر التالية $Z_8, Z_4 \oplus Z_2, Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تماثل الزمرة G/H .

٢٢- لتكن $G = U(16)$ و $H = \{1, 15\}, K = \{1, 9\}$. هل الزمرتان H, K متماثلتان؟ وهل الزمرتان $G/H, G/K$ متماثلتان؟

٢٣- لتكن $G = Z_4 \oplus Z_4$ و $H = \{(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)\}, K = \langle (1, 2) \rangle$. أي من الزمر التالية $Z_2 \oplus Z_2, Z_4$ تماثل الزمرة G/H . وأي من الزمر التالية $Z_2 \oplus Z_2, Z_4$ تماثل الزمرة G/K .

٢٤- لتكن G زمرة و H, K زمراً جزئيتين ناظميتين في G بحيث $G = K \times H$ ولتكن L زمرة جزئية من G . بفرض أن $(H : 1) = n, (K : 1) = m$ وأن $\gcd(n, m) = 1$ فإن $L = (K \cap L) \times (H \cap L)$.



الفصل التاسع

النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية

والمنتهية التوليد

في هذا الفصل سوف ندرس الزمر التبديلية المنتهية والمنتهية التوليد وخواصها وتمثيلها، وسوف نبدأ من المبرهنة التالية التي تبين لنا مدى روعة التقنيات التي يمكن استخدامها في نظرية الزمر بالاعتماد على زمرة الخارج.

٩-١. الزمر التبديلية المنتهية.

مبرهنة ٩-١-١.

ليكن p عدداً أولياً و G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد p .
عندئذ يوجد في G عنصر مرتبته p .
البرهان.

لنفرض أن $(G:1) = n$ عندئذ $n = mp$ حيث $m \in \mathbb{Z}$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب m . إذا كان $m = 1$ عندئذ $n = p > 1$ وبالتالي تكون الزمرة G دوارة ويوجد فيها عنصر x مرتبته p . لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G . وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. يوجد في G زمرة جزئية $H \neq G$ تلويها لا يقبل القسمة على p ،
عندئذ وحسب مبرهنة لاغرالج فإن $(G:1) = (G:H)(H:1)$ وبالتالي فإن $(H:1)$ تقبل القسمة على p وحسب الفرض الاستقرائي يوجد في H عنصر مرتبته p وبالتالي فإن G تحوي عنصر مرتبته p .

- الحالة التالية. جميع الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G أدلتها تقبل القسمة على p . لدرمز لمجموعة كل الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G بالرمز $\mathcal{Z}$ ولنختار من $\mathcal{Z}$ العنصر ذا الرتبة الأكبر، وليكن K . إن K عنصر أعظمي في $\mathcal{Z}$ (علل ذلك) وبالتالي فإن K أكبر زمرة جزئية محتواة تماماً في G . لنفرض أن $(K:1) = s$. إذا كان العدد s يقبل القسمة على p فإن K تحوي عنصراً مرتبته p . لنفرض أن s لا يقبل القسمة على p ، وليكن $x \in G$ بحيث $x \notin K$ ولناخذ الزمرة $\langle x \rangle = T$. ولنفرض أن $(T:1) = t$ علئذ $G = KT$ (أثبت ذلك) ومنه $T/(K \cap T) \approx KT/K = G/K$ وهكذا فإن

$$mp = (KT:K)(K:1) = (T:T \cap K)(K:1)$$

وبما أن العدد s لا يقبل القسمة على p نجد أن $(T:T \cap K)$ يقبل القسمة على p وبما أن

$$(T:1) = (T:T \cap K)(T \cap K:1)$$

فإن $(T:1) = t$ تقبل القسمة على p وهكذا فإن $x^t \in G$ عنصر مرتبته p .

بالاعتماد على المبرهنة السابقة نحصل على النتيجة التالية:

نتيجة.

كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p تحوي زمرة جزئية مرتبتها p .

نأتي الآن لإثبات صحة المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية التي تنص على أن كل زمرة تبديلية منتهية هي مجموع مباشر لعدد منته من الزمر الدوارة المنتهية التي مرتبة كل منها قوة لعدد أولي، وهذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب المضاريب في هذا المجموع. وبسبب كون البرهان طويلاً ومعقداً فإننا سوف لجزئه إلى عدد من المبرهنات التي تعد كل واحدة منها نتيجة هامة بحد ذاتها. وسوف نبدأ من المبرهنة التالية:

مبرهنة ٢-١-٩.

لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها mp^n حيث p عدد أولي و n, m أعداد صحيحة موجبة وأن p لا يقسم m . عندئذ $G = K \times H$ حيث

$$K = \{x : x \in G; \quad x^m = e\} \text{ و } H = \{x : x \in G; \quad x^{p^n} = e\}$$

بالإضافة لذلك فإن $(H:1) = p^n$.

البرهان.

بالعودة إلى التمرين المحلول (٥-٢) نجد أن كلا من K, H زمرة جزئية من G . وبما أن الزمرة G تبديلية فإن $KH = HK$ وحسب المبرهنة (٣-١-٥) فإن الجداء KH هو زمرة جزئية من G . وبما أن العدد p أولي وأن m لا يقبل القسمة على p فإن $\gcd(p, m) = 1$ ومنه $\gcd(p^n, m) = 1$ وبالتالي يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = sm + tp^n$ ومنه أياً كان $x \in G$ فإن $x = x^1 = x^{sm+tp^n} = x^{sm} x^{tp^n}$ وبما أن $x^{sm} \in H$ و $x^{tp^n} \in K$ نجد أن $x \in KH$ أي أن $KH = G$ وهكذا فإن $G \subseteq KH$ وهذا يبين لنا أن $G = KH$. ليكن $y \in K \cap H$ ولنفرض أن مرتبة العنصر y تساوي λ عندئذ $y^\lambda = e$ وبما أن $y \in H$ فإن $y^{p^n} = e$ كذلك بما أن $y \in K$ فإن $y^m = e$ وهكذا نجد أن λ يقسم كلا من p^n, m وبما أن $\gcd(p^n, m) = 1$ نجد أن $\lambda = 1$. ومنه $y = e$ أي أن $K \cap H = \langle e \rangle$. مما سبق نجد أن $G = K \times H$. للبرهن الآن على أن $(H:1) = p^n$. حسب التمرين المحلول (٦-٥) لدينا

$$(KH:1) = \frac{(H:1)(K:1)}{(K \cap H:1)} = (H:1)(K:1) = p^n m$$

إن $(K:1)$ لا تقبل القسمة على p ، لأنه إذا كانت $(K:1)$ تقبل القسمة على p فإن $(K:1) = ap$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ وحسب المبرهنة (١-١-٩) فإن الزمرة K تحوي عنصراً مرتبته p . ل نرمز لهذا العنصر بالرمز z . بما أن $z \in K$ فإن $z^m = e$ ومنه نجد أن m يقبل القسمة على p ، وهذا يناقض الفرض. إذن $(K:1)$ لا تقبل القسمة

على p . ومنه فإن $(H:1)$ تقبل القسمة على p وبالتالي $(H:1)$ تقبل القسمة على p^n .
وهذا يبين لنا أن $(H:1) = p^n$.

يمكن تعميم المبرهنة السابقة على الشكل التالي:

نتيجة.

لتكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث $(G:1) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة. ولتكن $G(p_i) = \{x : x \in G; x^{p_i} = e\}$. عندئذ

$$G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_k)$$

$$\text{وأن } (G(p_i):1) = p_i^{n_i}$$

نأتي الآن إلى الخطوة التالية وهي المبرهنة الهامة التالية:

مبرهنة ٣-١-٩.

لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة للعدد الأولي p وليكن $a \in G$ العنصر ذا المرتبة الأعظمية في G . عندئذ يمكن نشر الزمرة G على الشكل $G = \langle a \rangle \times K$ ، حيث K زمرة جزئية مناسبة من G .

البرهان.

لنفرض أن $(G:1) = p^n$. البرهان سوف نورده بالاستقراء حسب n . إذا كان $n=1$ عندئذ الزمرة G هي زمرة دوارة وأن $G = \langle a \rangle$ حيث $a \in G$ مرتبته أعظمية، وبالتالي $G = \langle a \rangle \times \langle e \rangle$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل كل زمرة مرتبتها من الشكل p^k حيث $k < n$. ولنختار من G العنصر a ذا المرتبة الأعظمية، ولنفرض أن $o(a) = p^m$. لنبرهن أنه أياً كان $x \in G$ فإن $x^{p^m} = e$. ليكن $x \in G$ عنصراً مرتبته p^r . بما أن $a \in G$ عنصر مرتبته أعظمية، فإن $s < m$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in \mathbb{Z}$ بحيث $m = qs + r$ وأن $0 \leq r < s$. للفرض جدلاً أن $r \neq 0$ عندئذ يكون $m-r < m$ وأن $x^{p^r} = x^{p^{m-r}} = (x^{p^s})^q \cdot x^{p^r} = x^{p^r}$ وبالتالي $x^{p^{m-r}} = e$. وذلك أياً كان $x \in G$ ، وبما أن $a \in G$ فإن $a^{p^{m-r}} = e$ وهذا يناقض كون $o(a) = p^m$. إذن $r=0$ وبالتالي أياً كان $x \in G$ فإن $x^{p^m} = e$. إذا كان $G = \langle a \rangle$

عندئذ $G = \langle a \rangle \times \langle e \rangle$ ويتم المطلوب. لنفرض أن $G \neq \langle a \rangle$ ولنختر من G العنصر b ذا المرتبة الأصغر والذي من أجله $b \notin \langle a \rangle$. لدينا $b^{p^m} \in G$ وأن $o(b^{p^m}) < o(b)$ وبالتالي فإن $b^{p^m} \in \langle a \rangle$. بهذا الشكل نجد أن $b^{p^m} \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ ومنه $b^{p^m} = a'^{p^{m-1}}$ وأن $e = b^{p^m} = (b^{p^m})^{p^{m-1}} = (a')^{p^{m-1}}$ وهكذا فإن $o(a') \leq p^{m-1}$ أي أن العنصر a' ليس مولداً للزمرة $\langle a \rangle$ وذلك لأن $o(a) = (\langle a \rangle : 1) = p^m$ وحسب المبرهنة (٣-١-٨) فإن $\gcd(p^m, i) \neq 1$ أي يوجد قاسم مشترك لكل من p^m, i وهذا يبين لنا أن p يقسم i وبالتالي يوجد $j \in \mathbb{Z}$ بحيث $i = pj$ ومنه $b^{p^m} = a' = a^{pj}$ لنأخذ العنصر $c = a^{-j}b$ فنجد أن $c \notin \langle a \rangle$ لأنه إذا كان $c \in \langle a \rangle$ فإن $c \in \langle a \rangle$ ، وهذا غير ممكن. كما أن

$$c^{p^m} = a^{-jp^m} b^{p^m} = a^{-j} b^{p^m} = b^{-p} b^{p^m} = e$$

وهكذا نجد أنه يوجد في G عنصر c مرتبته p وأن $c \notin \langle a \rangle$ وهذا يبين لنا أن $o(b) = p$ وبالتالي $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$. لنأخذ الزمرة $\bar{G} = G / \langle b \rangle$. وليكن $x \in G$ ولنفرض أن $\bar{x} = x \langle b \rangle \in G / \langle b \rangle = \bar{G}$. نلاحظ أن $o(\bar{a}) = o(a) = p^m$ لأنه إذا كان $o(\bar{a}) < o(a) = p^m$ فإن $o(\bar{a}) = \bar{e}$ وبالتالي $(\bar{a})^{p^{m-1}} = \bar{e}$ ومنه $a^{p^{m-1}} \in \langle b \rangle$ مما سبق نجد أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ أي أن $a^{p^{m-1}} = e$ وهذا يناقض كون $o(a) = p^m$. إذن $o(\bar{a}) = o(a) = p^m$ وهكذا نجد أن العنصر $\bar{a}$ هو العنصر من $\bar{G}$ ذو المرتبة الأكبر. وحسب الفرض الاستقرائي نجد أن $\bar{G} = \langle \bar{a} \rangle \times \bar{K}$ حيث $\bar{K}$ زمرة جزئية مناسبة من $\bar{G}$. لنأخذ الصورة العكسية للزمرة الجزئية $\bar{K}$ وفق التشاكل القانوني الغامر. أي لنأخذ المجموعة

$$K = \{x : x \in G; \bar{x} \in \bar{K}\}$$

إن K زمرة جزئية من G وأن $\langle a \rangle \cap K = \langle e \rangle$ لأنه إذا كان $x \in \langle a \rangle \cap K$ فإن $\bar{x} \in \langle \bar{a} \rangle \cap \bar{K} = \langle \bar{e} \rangle$ وبالتالي $x \in \langle b \rangle$ أي أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$ ومنه $\langle a \rangle \cap K = \langle e \rangle$. كما أن $G = \langle a \rangle . K$ وهكذا نجد أن $G = \langle a \rangle \times K$.
بالاعتماد على المبرهنة (٩-١-٣) نتوصل إلى الحقيقة الهامة التالية:

مبرهنة ١-٩-٤.

كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي هي مجموع مباشر لزمرة دوارة.

البرهان.

لنكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث $(G:1) = p^n$ حيث p عدد أولي و $n \in \mathbb{Z}$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب n . من أجل $n=1$ فإن $(G:1) = p$ وبالتالي الزمرة G دوارة، ومنه $G = \langle a \rangle \times \langle e \rangle$ حيث $a \in G$. لنفرض الآن أن المبرهنة صحيحة من أجل كل زمرة جزئية محتواة تماما في G . أي لأجل كل زمرة جزئية مرتبتها من الشكل p^s حيث $s < n$. بما أن $(G:1) = p^n$ وبالاغتماد على المبرهنة (١-٩-٣) فإن $G = \langle a \rangle \times K$ حيث $a \in G$ العنصر ذو المرتبة الأعظمية في G و K زمرة جزئية مناسبة من G . وبما أن $a \notin K$ فإن $(K:1) = p^s$ حيث $1 \leq s < n$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن

$$K = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_t$$

حيث كل من H_i هي زمرة جزئية دوارة من K . ومنه

$$G = \langle a \rangle \times H_1 \times H_2 \times \dots \times H_t$$

بالاعتماد على المبرهنتين (١-٩-٢) و (١-٩-٣) نصل إلى المبرهنة الهامة التالية:

مبرهنة ١-٩-٥.

كل زمرة تبديلية منتهية هي مجموع مباشر لزمرة دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد

أولي.

البرهان.

لنكن G زمرة تبديلية منتهية. ولنفرض أن $(G:1) = n$. بما أن n عدد صحيح موجب فإنه بالإمكان كتابته على الشكل $n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة من أجل كل $1 \leq i \leq t$. ومنه حسب نتيجة المبرهنة (١-٩-٢) نجد أن

$$G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_t)$$

حيث كل من $G(p_i)$ هي زمرة دوارة مرتبتها $p_i^{n_i}$ وهي قوة للعدد الأولي p_i . وحسب المبرهنة (٩-١-٤) فإن كل زمرة من الزمر $G(p_i)$ هي مجموع مباشر لزمرة دوارة. مما سبق نستنتج أن G هي مجموع مباشر لزمرة دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي.

لإثبات صحة المبرهنة الأساسية للزمر التبادلية المنتهية بقي لنا إثبات الحقيقة التالية:

مبرهنة ٩-١-٦.

لتكن G زمرة تبادلية منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي. إذا كان

$$G = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_m, \quad G = K_1 \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_n$$

حيث كل من H_j, K_i زمرة جزئية دوارة مغايرة للزمرة $\langle e \rangle$ أيًا كان $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$ وأن

$$(K_j : 1) \geq (K_{j+1} : 1), \quad (H_i : 1) \geq (H_{i+1} : 1)$$

عندئذ $n = m$ وأن $(H_i : 1) = (K_i : 1)$ وذلك أيًا كان $1 \leq i \leq n$.

البرهان.

سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب مرتبة الزمرة G . لنفرض أن $(G : 1) = p'$. من أجل $i = 1$ نجد أن $(G : 1) = p$ والمبرهنة صحيحة. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر التبادلية التي مراتبها أصغر من مرتبة الزمرة G . بما أنه من أجل أية زمرة تبادلية L فإن المجموعة $L^p = \{x^p : x \in L\}$ هي زمرة جزئية من L نجد أن

$$G^p = K_1^p \times K_2^p \times \dots \times K_m^p \quad \text{وأن} \quad G^p = H_1^p \times H_2^p \times \dots \times H_n^p$$

حيث m' هو أكبر عدد صحيح بين الأعداد i التي من أجلها $(H_i : 1) > p$ وأن n' هو أكبر عدد صحيح بين الأعداد j التي من أجلها $(K_j : 1) > p$. وهذا يبين لنا أن كلا الجدائين المباشرين السابقين للزمرة G^p لا يحوي مضارب تساوي $\langle e \rangle$. وبما أن $(G : 1) < (G^p : 1)$ فإنه حسب الفرض الاستقرائي نستنتج أن $m' = n'$

وأن $(H_i : 1) = p(H_i^p : 1) = (K_i^p : 1)$ حيث $i = 1, 2, \dots, m'$ وبما أن $(H_i : 1) = p(H_i^p : 1)$ نجد أن $(K_i : 1) = p(K_i^p : 1)$ حيث $i = 1, 2, \dots, m'$ بقي لنا أن نبرهن أن عدد الزمر H_i التي مراتبها تساوي p يساوي عدد الزمر K_i التي مراتبها تساوي p . بمعلًى آخر يجب أن نبرهن أن $m - m' = n - n'$ بما أن $(H_i : 1) = (K_i : 1)$ حيث $i = 1, 2, \dots, m'$ وأن $m' = n'$ ولكون

$$(H_1 : 1)(H_2 : 1) \cdots (H_m : 1)p^{m-m'} = (G : 1) = (K_1 : 1)(K_2 : 1) \cdots (K_{n'} : 1)p^{n-n'}$$

نجد أن $p^{m-m'} = p^{n-n'}$ أي أن $m - m' = n - n'$ وبالتالي $n = m$.
نأتي الآن لإثبات المبرهنة الأساسية للزمر التبادلية المنتهية.

مبرهنة ٩-١-٧. (المبرهنة الأساسية للزمر التبادلية المنتهية).

كل زمرة تبادلية منتهية عبارة عن مجموع مباشر لزمرة دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي. علاوة على ذلك فإن هذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب المضارب. البرهان.

لتكن G زمرة تبادلية منتهية. حسب المبرهنة (٩-١-٥) فإن G هي مجموع مباشر لزمرة دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي. وحسب المبرهنة (٩-١-٦) فإن هذا التمثيل وحيد.

لنورد بعض الأمثلة على النظرية الأساسية للزمر التبادلية المنتهية.

مثال ١.

لتكن G زمرة تبادلية منتهية و p عدد أولي.

١- إذا كانت $(G : 1) = p$ عندئذ فإن $G \approx Z_p$.

٢- إذا كانت $(G : 1) = p^2$ عندئذ إما $G \approx Z_{p^2}$ أو $G \approx Z_p \oplus Z_p$.

٣- إذا كانت $(G : 1) = p^3$ عندئذ فإن G تمثل بأحد الجداءات المباشرة التالية:

$$G \approx Z_{p^3}$$

$$G \approx Z_{p^2} \oplus Z_p$$

$$G \approx Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$$

٤- إذا كانت $(G:1) = p^4$ علئذا فإن G تمثل بأحد الجدءاءء المباشرة التالية:

$$G \approx Z_{p^4}$$

$$G \approx Z_{p^3} \oplus Z_p$$

$$G \approx Z_{p^2} \oplus Z_{p^2}$$

$$G \approx Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p \oplus Z_p$$

مثال ٢.

لئكن G زمرة تبدللة منتهلة مرتبئها 1176. بما أن $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 = (G:1)$ فإن G تماثل واحداً من الجدءاءء المباشرة التالية:

$$Z_8 \oplus Z_3 \oplus Z_{49}$$

$$Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_{49}$$

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_{49}$$

$$Z_8 \oplus Z_3 \oplus Z_7 \oplus Z_7$$

$$Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_7 \oplus Z_7$$

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_7 \oplus Z_7$$

خوارزمية نشر الزمرة التبدللة المنتهلة ذات المرتبة p^n في مجموع مباشر.

لئكن G زمرة تبدللة منتهلة مرتبئها p^n . لنشر الزمرة G في مجموع مباشر نتبع الخطوات التالية:

١ - نقوم بعمللة حساب مراتب جميع عناصر الزمرة G .

٢ - لئتار من الزمرة G العئصر ذا الرتبة الأكبر وليكن a_1 . ثم نأخذ

الزمرة $G_1 = \langle a_1 \rangle$. لنضع $i = 1$.

٣ - إذا كانت $(G:1) = (G_i:1)$ نتوقف. والا نستبدل الدللل i بالدللل $i+1$.

٤ - لئتار العئصر a_i ذا المرتبة الأكبر. ولئكن $o(a_i) = p^k$ وئجب أن تءقق

$p^k \leq (G:1)/(G_{i-1}:1)$. وئءث جميع العناصر $a_1^{p^k}, a_1^{p^{k-1}}, \dots, a_1^{p^2}, a_1^{p^1}, a_1$ لا تتلئم

للزمرة G_{i-1} ثم نأخذ الزمرة $G_i = G_{i-1} \times \langle a_i \rangle$.

٥ - نعود إلى الخطوة رقم ٣.

كتطبيق على الخوارزمية السابقة لندرس المثال التالي:

مثال ٣.

لنكن G زمرة تبديلية مرتبتها 2^n .

١- نقوم بحساب مراتب جميع عناصر الزمرة G .

٢- لنفرض أن العنصر a_1 هو العنصر ذو المرتبة الأكبر في G ولنفرض أن

$o(a_1) = 2^r$ حيث $r < n$. عندئذ نجد أن الزمرة $\langle a_1 \rangle$ هي أحد معاملات

المجموع المباشر للزمرة G .

٣- إذا كانت $G \neq \langle a_1 \rangle$ نختار العنصر a_2 ذا المرتبة الأعظمية، ونفرض أن

$o(a_2) = 2^r$ وبحيث

$$2^r \leq (G:1)/(G_1:1) = 2^n/2^r = 2^{n-r}$$

حيث $G_1 = \langle a_1 \rangle$. ومنه $s \leq n-r$ وأن جميع العناصر $a_2, a_2^2, a_2^4, \dots, a_2^{2^{s-1}}$ لا

تتنتمي إلى الزمرة $G_1 = \langle a_1 \rangle$. عندئذ تكون الزمرة $G_2 = \langle a_2 \rangle$ هي الحد الثاني في

المجموع المباشر. إذا كان $n = r + s$ نختار العنصر a_3 ذا المرتبة الأكبر

ولنكن $o(a_3) = 2^t$ بحيث تحقق $t \leq n-r-s$ وأن أيضاً من العناصر

$a_3, a_3^2, a_3^4, \dots, a_3^{2^{t-1}}$ لا تنتمي إلى الزمرة

$$\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle = \{a_1^i a_2^j, \quad 0 \leq i < 2^r, \quad 0 \leq j < 2^s\}$$

عندئذ نجد أن $\langle a_3 \rangle$ هو المعامل الآخر في النشر المطلوب. نتابع بهذا الشكل إلى أن

نحصل على مجموع مباشر مرتبته تساوي مرتبة الزمرة G .

٩-٢. الزمر التبديلية منتهية التوليد.

وجدنا في الفقرة (٩-١) أن كل زمرة تبديلية ومنتهية تنشر في مجموع مباشر لعدد

منته من الزمر الدوارة. يوجد صف آخر من الزمر ينشر في مجموع منته لزمر

دوارة هو صف الزمر التبديلية منتهية التوليد والذي سوف ندرسه في هذه الفقرة

ولأجل ذلك لابد لنا من التعريف التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة إن المجموعة

$$\zeta(G) = \{x : x \in G; o(x) \in N^*\}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة G تسمى زمرة الفتل الجزئية (انظر التبرين المحلول (٣-٥)).

- إذا كان $\zeta(G) = G$ نقول عن الزمرة G إنها زمرة فتل.

- إذا كان $\zeta(G) = \langle e \rangle$ نقول عن الزمرة G إنها زمرة فتل حرة.

ينتج من التعريف أنه إذا كانت $\zeta(G) = G$ فإن جميع عناصر الزمرة G ذو مرتبة منتهية. أما في حالة $\zeta(G) = \langle e \rangle$ فإن العنصر الوحيد في الزمرة G الذي مرتبته منتهية هو العنصر المحايد. بمعنى آخر أيًا كان $x \in G$ بحيث $x \neq e$ فإن $o(x) = \infty$ وهذا يبين لنا أن الزمرة G في هذه الحالة تكون غير منتهية.

أما في الحالة التي من أجلها $\zeta(G) = G$ فإن الزمرة G تكون منتهية، وهذا ما سوف نبينه لاحقاً، ولنبدأ بدراسة الزمر الجزئية للزمر التبديلية منتهية التوليد، وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١-٢-٩.

لتكن G زمرة تبديلية منتهية التوليد ومولدة بـ n عنصر. عندئذ كل زمرة جزئية من الزمرة G تكون أيضاً منتهية التوليد ومولدة بـ n عنصر. البرهان.

لنفرض أن الزمرة G تبديلية وأن $G = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ حيث $x_i \in G$ $1 \leq i \leq n$. ولتكن H زمرة جزئية من الزمرة G . لنورد البرهان بالاستقراء حسب n . من أجل $n=1$ عندئذ تكون الزمرة G دوارة وحسب المبرهنة (٣-١-٩) تكون الزمرة الجزئية H دوارة، والمبرهنة صحيحة في هذه الحالة.

من أجل $n > 1$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل أية زمرة تبديلية منتهية التوليد ومولدة بـ $(n-1)$ عنصر. ولنفرض أن $N = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1} \rangle$ وبما أن الزمرة

G تبديلية فإن الزمرة الجزئية N تكون ناظرية في G وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة الجزئية $H \cap N$ تكون منتهية التوليد ومولدة بـ $(n-1)$ عنصر وحسب مبرهنة التماثل الثانية فإن

$$\frac{H}{H \cap N} \approx \frac{NH}{N} \subseteq \frac{G}{N}$$

ليكن $\bar{g} \in G/N$ عندها $\bar{g} = gN$ وحيث $g \in G$ وبما أن $G = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ وحسب المبرهنة (١٢-١-٣) فإن $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}$ حيث

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n \text{ وبما أن } x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, \dots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in N \text{ نجد أن}$$

$$\bar{g} = gN = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n})N = x_n^{\alpha_n} N = (x_n N)^{\alpha_n}$$

وذلك أيضاً كان $\bar{g} \in G/N$ وهذا يبين لنا أن الزمرة G/N دوارة وأن $G/N = \langle x_n N \rangle$. وبما أن الزمرة $\frac{HN}{N}$ هي زمرة جزئية من الزمرة $\frac{G}{N}$ فإن الزمرة

$\frac{HN}{N}$ حسب المبرهنة (٩-١-٣) تكون دوارة وبالتالي الزمرة $\frac{H}{H \cap N}$ تكون أيضاً

دوارة ومنه $\frac{H}{H \cap N} = \langle y(H \cap N) \rangle$ حيث $y \in H$. وبالتالي أياً كان $h \in H$ فإن

$$\bar{h} = h(H \cap N) = (y(H \cap N))^m = y^m(H \cap N)$$

حيث $m \in \mathbb{Z}$. ومنه يوجد $z \in H \cap N$ بحيث $h = y^m z$. وبما أن الزمرة $H \cap N$

مولدة بـ $(n-1)$ عنصر من الزمرة H تكون مولدة أيضاً بـ $(n-1)$ عنصر

بالإضافة إلى العنصر y . وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية H مولدة بـ n عنصر.

لنبرهن الآن أنه إذا كانت G زمرة منتهية التوليد وتحقق $\zeta(G) = G$ فإن الزمرة

G تكون منتهية وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٩-٢-٢.

كل زمرة فتل منتهية التوليد و تبديلية تكون منتهية.

البرهان.

لكن G زمرة فتل منتهية التوليد و تبديلية. أي $\zeta(G) = G$ وللغرض أن

$$G = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$$

حيث $x_i \in G$ و $1 \leq i \leq n$. البرهان سلورده بالاستقراء حسب n .
 - من أجل $n=1$ نجد أن $G = \langle x_1 \rangle$ أي أن الزمرة G دوارة وبما أن $x_1 \in \zeta(G)$ فإن $o(x_1) \in N^*$. لنفرض أن $o(x_1) = \alpha$ ومنه $o(x_1) = \alpha$ و $(G:1) = o(x_1) = \alpha$ وبالتالي فإن الزمرة G منتهية.

- $n > 1$. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل $(n-1)$ ولنفرض أن

$$N = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1} \rangle$$

وبما أن $N \subseteq G = \zeta(G)$ فإن كل عنصر من N مرتبته منتهية أي أن $N = \zeta(N)$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة N تكون منتهية. لنفرض أن $(N:1) = m$. من جهة أخرى بما أن الزمرة G تبديلية فإن الزمرة G ناظمية في G ، ومنه أياً كان $\bar{g} \in G/N$ فإن $\bar{g} = gN$ حيث $g \in G$ ومنه $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}$ حيث

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n \text{ وبما أن } x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, x_3^{\alpha_3}, \dots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in N \text{ نجد أن}$$

$$\bar{g} = gN = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n})N = x_n^{\alpha_n} N = (x_n N)^{\alpha_n}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة G/N دوارة ومولدة بالعنصر $x_n N$ أي أن $G/N = \langle x_n N \rangle$.

من جهة أخرى وبما أن $x_n \in G = \zeta(G)$ فإن العنصر x_n مرتبته منتهية. لنفرض أن $o(x_n) = \alpha$ علئذ يكون لدينا $o(x_n N) = \alpha$ و $(G/N:1) = o(x_n N) = \alpha$ وبما أن $(G:1) = (G/N:1)$ وحسب مبرهنة لاغرانج نجد أن

$$(G:1) = (G/N:1)(N:1) = \alpha m$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة G منتهية. هـ

حقيقة هامة أخرى حول هذا الموضوع نوردتها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ٩-٢-٣.

إذا كانت الزمرة G تبديلية منتهية التوليد فإن الزمرة $G/\zeta(G)$ هي زمرة فتل حرة منتهية التوليد.
 البرهان.

بما أن الزمرة G تبديلية فإن الزمرة $\zeta(G)$ ناظرية وبالتالي فإن الزمرة $G/\zeta(G)$ تبديلية. لنفرض أن $G = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ حيث $1 \leq i \leq n, x_i \in G$ وليكن $\bar{g} \in G/\zeta(G)$ عندهذا $\bar{g} = g\zeta(G)$ حيث $g \in G$. وبما أن $g = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$

$$\bar{g} = (x_1\zeta(G))^{a_1} (x_2\zeta(G))^{a_2} \dots (x_n\zeta(G))^{a_n}$$

ومن هنا فإن الزمرة $G/\zeta(G)$ منتهية التوليد ومولدة بالمجموعة

$$\{x_1\zeta(G), x_2\zeta(G), \dots, x_n\zeta(G)\}$$

ليكن $\bar{g} \in G/\zeta(G)$ عنصراً ذا مرتبة منتهية وأن $o(\bar{g}) = m$ عندهذا

$$\zeta(G) = \bar{g}^m = (g\zeta(G))^m = g^m\zeta(G)$$

ومن هنا $g^m \in \zeta(G)$ أي أن العنصر g^m ذو مرتبة منتهية. لنفرض أن $o(g^m) = t$ عندهذا

$$\bar{g} = g\zeta(G) = \zeta(G) \text{ وبالتالي } g \in \zeta(G) \text{ وهذا يبين لنا أن } g^m = (g^m)' = e$$

وهذا يبين لنا أن $\zeta(G/\zeta(G)) = \zeta(G)$. مما سبق نجد أن الزمرة $G/\zeta(G)$ هي زمرة فتل حرة.

لندرس الآن مبرهنة التمثيل للزمر التبديلية منتهية التوليد.

مبرهنة ٩-٢-٤.

لتكن G زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية. عندهذا

١ - G تماثل مجموع مباشر لزمر نواة غير منتهية.

٢ - إذا كانت H زمرة جزئية من G تحقق أن $(G:H)$ منتهية فإن $G \approx H$.

البرهان.

١ - لنفرض أن الزمرة G هي زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية. من

المعلوم أنه في هذه الحالة يوجد أكثر من مجموعة منتهية من G تكون مولدة للزمرة

G . لنأخذ أصغر مجموعة مولدة للزمرة G ولتكن هذه المجموعة

$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. أي أن $G = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ وبما أن $\zeta(G) = \langle e \rangle$ فإنه

لياً كان $1 \leq i \leq n$ فإن $o(x_i) = \infty$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب n .

من أجل $n=1$ نجد أن $G = \langle x_1 \rangle$ أي أن الزمرة G دوارة وغير منتهية لأن $o(x_1) = \infty$ والمبرهنة صحيحة.

من أجل $n > 1$ لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل $(n-1)$.

ولنفرض (لأجل الحصول على تناقض) أنه في الزمرة G تتحقق العلاقة

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = e \text{ حيث } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Z \text{ وأن } \alpha_n \neq 0. \text{ ولنضع}$$

$$K = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle$$

فلنجد أن زمرة جزئية من G ومنتهية التوليد عدد مولداتها $(n-1)$ ولا توجد في K مجموعات منتهية تولد K قدرتها أصغر من $(n-1)$ لأنه في الحالة المعاكسة يوجد في G مجموعة منتهية قدرتها أصغر من n وتولد الزمرة G وهذا مرفوض فرضيا. من جهة أخرى، بما أن $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = e$ فإن $x_n^{\alpha_n} \in K = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle$ وبما أن الزمرة G تبديلية فإن الزمرة الجزئية K تكون ناظمية في G ومنه الزمرة G/K تبديلية. ليكن $\bar{g} \in G/K$ عندئذ $\bar{g} = gK$ حيث $g \in G$ ومنه $g = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ حيث $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in Z$ وبما أن $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \in K$ نجد أن

$$\bar{g} = gK = (x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_{n-1}^{\beta_{n-1}})K = x_n^{\beta_n} K = (x_n K)^{\beta_n}$$

وهذا يبين لنا أن $G/K = \langle x_n K \rangle$ أي أن الزمرة G/K دوارة. وبما أن $x_n^{\alpha_n} \in K$ فإن

$$x_n^{\alpha_n} \in K = (x_n K)^{\alpha_n} = K$$

ومنه فإن $o(x_n K) \leq |\alpha_n|$ وهذا يبين لنا أن

$$(G/K : 1) = o(x_n K) \leq |\alpha_n| < \infty$$

لنفرض أن $(G/K : 1) = k$ عندئذ $(G : K) = k$ كما أن $k > 1$ لأن $G \neq K$ ومنه $1 < k \leq |\alpha_n| < \infty$.

لنعرف العلاقة $\varphi : G \rightarrow K$ بالشكل التالي: أيا كان $g \in G$ فإن $\varphi(g) = g^k$. واضح

أن $g^k \in K$ لأن $\bar{g} = gK \in G/K$ وبما أن $(G/K : 1) = k$ فإن

$$K = \bar{g}^k = (gK)^k = g^k K$$

أي أن $g^k \in K$. كما أن φ تطبيق لأنه أيًا كان $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\varphi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^k = g_1^k g_2^k = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

وذلك لأن الزمرة G تبديلية. كما أن $\text{Ker } \varphi = \langle e \rangle$ لأنه إذا كان $g \in \text{Ker } \varphi$ عندئذ $g \in G$ وأن $\varphi(g) = g^k$ كذلك $\varphi(g) = K$ وبالتالي $g^k = e$ أي أن $g \in \zeta(G) = \langle e \rangle$ ومنه $g = e$. لنفرض أن $\text{Im } \varphi = M$ عندئذ $M \approx K$ وحسب مبرهنة التشاكل الزمري فإن $G / \text{Ker } \varphi \approx \text{Im } \varphi$ أي أن $G / \langle e \rangle \approx M \subseteq K \subseteq G$ وبما أن الزمرة G منتهية التوليد فإن الزمرة $G / \text{Im } \varphi$ منتهية التوليد وتحقق $\bar{x}^k = \bar{e}$ وذلك أيًا كان $\bar{x} \in G / \text{Im } \varphi$. وهذا يبين لنا أن $(G : \text{Im } \varphi)$ منته لجد أن $(K : \text{Im } \varphi)$ منته وذلك لأن

$$(G : M) = (G : K)(K : \text{Im } \varphi)$$

وحسب الفرض الاستقرائي نجد أن $G \approx \text{Im } \varphi \approx K$ وهذا يبين لنا أن الزمرة G مولدة بـ $(n-1)$ عنصر مما يناقض الفرض. مما سبق نجد أنه لا توجد علاقة $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = e$ من أجل $1 \leq i \leq n$ $a_i \neq 0$. وهكذا نجد أن الزمرة G تماثل مجموعاً مباشراً لعدد منته من الزمر الدوارة المنتهية.

٢ - لنكن H زمرة جزئية من الزمرة G تحقق $(G : H)$ منته وحسب المبرهنة (٣-١-١٣) فإن الزمرة H تكون منتهية التوليد، وحسب المبرهنة (٩-٢-١) الزمرتين G, H تملكان العدد نفسه من المولدات. لنفرض أن عدد المولدات لكل من G, H هو n . عندئذ حسب (١) فإن

$$H \approx H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_n \quad \text{وأن} \quad G \approx G_1 \times G_2 \times G_3 \times \dots \times G_n$$

حيث كل من H_i, G_i $1 \leq i \leq n$ زمر دوارة غير منتهية. وبما أن $H_i \approx G_i$ أيًا كان $1 \leq i \leq n$ نجد أن $H \approx G$.

لندرس الآن تمثيل الزمر التبديلية، ولأجل ذلك لابد لنا من التعريف التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة تبديلية و X مجموعة جزئية وغير خالية من G . نقول عن الزمرة G إنها زمرة تبديلية حرة على X إذا تحقق الشرط التالي: من أجل أي زمرة تبديلية B ومن أجل أي تطبيق $\Theta: X \rightarrow B$ يوجد تشاكل زمري وحيد $\bar{\Theta}: G \rightarrow B$ من أجله $\bar{\Theta}(x) = \Theta(x)$ وذلك أيًا كان $x \in X$.

مبرهنة ٩-٢-٥.

لتكن G زمرة تبديلية حرة على المجموعة غير الخالية X . ولتكن A زمرة تبديلية و $f: A \rightarrow G$ تشاكلاً زمرياً عامراً. عندئذ توجد زمرة جزئية H من A تماثل G وتحقق $A = \text{Ker } f \times H$.

البرهان.

بما أن $X \subseteq G$ وأن التشاكل f عامر فإنه أيًا كان $x \in X$ يوجد $g_x \in A$ بحيث $f(g_x) = x$. لنتخذ المجموعة

$$S = \{g_x; x \in X\}$$

ف نجد أن $S \subseteq A$. لنفرض أن $H = \langle S \rangle$ ومنه فإن H زمرة جزئية من A . لنعرف العلاقة $\varphi: X \rightarrow H$ بالشكل $\varphi(x) = g_x$ وذلك أيًا كان $x \in X$. واضح أن العلاقة φ تطبيق. من جهة أخرى، بما أن الزمرة A تبديلية فإن الزمرة H تبديلية. وبما أن الزمرة G هي زمرة تبديلية حرة على X وأن $\varphi: X \rightarrow H$ تطبيق فإنه حسب تعريف الزمرة التبديلية الحرة على X يوجد تشاكل زمري وحيد $\bar{\varphi}: G \rightarrow H$ يحقق $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$ وذلك أيًا كان $x \in X$. كما أن التشاكل $\bar{\varphi}$ عامر لأنه أيًا كان $y \in H$ فإن

$$y = g_{x_1}^{\alpha_1} \cdot g_{x_2}^{\alpha_2} \cdot g_{x_3}^{\alpha_3} \cdots g_{x_k}^{\alpha_k}$$

حيث $g_{x_j} \in S, \alpha_j \in \mathbb{Z}$ وذلك أيًا كان $1 \leq j \leq k$. وبما أن

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k \in X \subseteq G$$

فإن $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdots x_k^{\alpha_k} \in G$ وأن

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x_{i_1}^{a_1} \cdot x_{i_2}^{a_2} \cdot x_{i_3}^{a_3} \cdot \dots \cdot x_{i_n}^{a_n}) &= (\bar{\varphi}(x_{i_1}))^{a_1} \cdot (\bar{\varphi}(x_{i_2}))^{a_2} \cdot \dots \cdot (\bar{\varphi}(x_{i_n}))^{a_n} = \\ &= (\varphi(x_{i_1}))^{a_1} \cdot (\varphi(x_{i_2}))^{a_2} \cdot \dots \cdot (\varphi(x_{i_n}))^{a_n} = g_{x_{i_1}}^{a_1} \cdot g_{x_{i_2}}^{a_2} \cdot \dots \cdot g_{x_{i_n}}^{a_n} = y\end{aligned}$$

لنفرض أن $\bar{f}: H \rightarrow G$ فنجد أن f تشاكل H على G يحقق $\bar{f}(h) = f(h)$ وذلك أياً كان $h \in H$ ومنه فإن $\bar{f} \circ \bar{\varphi}: G \rightarrow G$ تشاكل زمري يحقق $\forall x \in X$ فإن

$$\bar{f} \circ \bar{\varphi}(x) = \bar{f}(\bar{\varphi}(x)) = \bar{f}(\varphi(x)) = \bar{f}(g_x) = f(g_x) = x$$

وبما أن الزمرة G هي زمرة تبديلية حرة على X فإنه من أجل أي تطبيق $\tau: X \rightarrow G$ المعرف بالشكل $\tau(x) = x$ وذلك أياً كان $x \in G$ يوجد تشاكل زمري وحيد $\bar{\tau}: G \rightarrow G$ من أجله $\bar{\tau}(x) = \tau(x) = x$ وذلك أياً كان $x \in X$ وبما أن التشاكل المطابق $I_G: G \rightarrow G$ يحقق $I_G(x) = x$ وذلك $\forall x \in X$ نجد أن $\bar{\tau} = I_G$ أي أن التشاكل الزمري الوحيد الذي من أجله $I_G(x) = x$ وذلك $\forall x \in X$. وبما أن $\bar{f} \circ \bar{\varphi}: G \rightarrow G$ تشاكل زمري يحقق $\forall x \in X$ فإن $\bar{f} \circ \bar{\varphi}(x) = x$ نجد أن $\bar{f} \circ \bar{\varphi} = I_G$ ومنه نجد أن التشاكل $\bar{\varphi}$ متباين لأنه إذا كان $y \in \text{Ker } \bar{\varphi}$ فإن

$$y = I_G(y) = \bar{f} \circ \bar{\varphi}(y) = \bar{f}(\bar{\varphi}(y)) = \bar{f}(e) = e$$

مما سبق نجد أن التشاكل $\bar{\varphi}: G \rightarrow H$ هو تماثل أي أن $H \approx G$ وأن H زمرة جزئية من A . من جهة أخرى، إن $\bar{f} \circ \bar{\varphi}: G \rightarrow G$ هو التشاكل المطابق على H أي أن $\bar{f} \circ \bar{\varphi} = I_H$ لأنه أياً كان $y \in H$ فإن

$$y = g_{x_{i_1}}^{a_1} \cdot g_{x_{i_2}}^{a_2} \cdot g_{x_{i_3}}^{a_3} \cdot \dots \cdot g_{x_{i_k}}^{a_k}$$

حيث $g_{x_{i_j}} \in S, \alpha_j \in Z$ وذلك أياً كان $1 \leq j \leq k$. كما أن

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} \circ \bar{f}(y) &= \bar{\varphi}(\bar{f}(y)) = \bar{\varphi}(\bar{f}(g_{x_{i_1}}^{a_1} \cdot g_{x_{i_2}}^{a_2} \cdot g_{x_{i_3}}^{a_3} \cdot \dots \cdot g_{x_{i_k}}^{a_k})) = \\ &= \bar{\varphi}[(\bar{f}(g_{x_{i_1}}))^{a_1} \cdot (\bar{f}(g_{x_{i_2}}))^{a_2} \cdot \dots \cdot (\bar{f}(g_{x_{i_k}}))^{a_k}]\end{aligned}$$

وبما أن $g_{x_{i_k}}^{a_k} \in H$ فإن

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} \circ \bar{f}(y) &= \bar{\varphi}[(\bar{f}(g_{x_{i_1}}))^{a_1} \cdot (\bar{f}(g_{x_{i_2}}))^{a_2} \cdot \dots \cdot (\bar{f}(g_{x_{i_k}}))^{a_k}] = \\ &= \bar{\varphi}(x_{i_1}^{a_1} \cdot x_{i_2}^{a_2} \cdot \dots \cdot x_{i_k}^{a_k}) = (\bar{\varphi}(x_{i_1}))^{a_1} \cdot (\bar{\varphi}(x_{i_2}))^{a_2} \cdot \dots \cdot (\bar{\varphi}(x_{i_k}))^{a_k}\end{aligned}$$

وبما أن $x_{i_k} \in X$ نجد أن

$$\bar{\varphi} \circ \bar{f}(y) = (\varphi(x_{i_1}))^{\alpha_1} \cdot (\varphi(x_{i_2}))^{\alpha_2} \cdots (\varphi(x_{i_k}))^{\alpha_k} = g_{x_{i_1}}^{\alpha_1} \cdot g_{x_{i_2}}^{\alpha_2} \cdots g_{x_{i_k}}^{\alpha_k} = y$$

ومنه نجد أن $\bar{\varphi} \circ \bar{f} = I_H$.

لنبرهن على أن $\text{Kerf} \cap H = \langle e \rangle$. ليكن $z \in \text{Kerf} \cap H$ عندئذ $z \in H$ ومنه

$$z = I_H(z) = \bar{\varphi} \circ \bar{f}(z) = \bar{\varphi}(\bar{f}(z)) = \bar{\varphi}(f(z)) = \bar{\varphi}(e) = e$$

أي أن $\text{Kerf} \cap H = \langle e \rangle$. من جهة أخرى، بما أن Kerf, H زمر جزئية من الزمرة

التبديلية A فإن $\text{Kerf} \cdot H \subseteq A$ ومنه $\text{Kerf} \cdot H \subseteq A$. ليكن $a \in A$

عندئذ $\bar{\varphi}(f(a)) \in H$ وبالتالي فإن $a \cdot [\bar{\varphi}(f(a))]^{-1} \in A$ ومنه يوجد $b \in A$ بحيث

$$a \cdot [\bar{\varphi}(f(a))]^{-1} = b \quad \text{ومنه فإن} \quad a = b \cdot [\bar{\varphi}(f(a))] \quad \text{من جهة أخرى فإن}$$

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b \cdot \varphi(f(a))) = f(b) \cdot f(\varphi(f(a))) = f(b) \cdot \bar{f}(\bar{\varphi}(f(a))) = \\ &= f(b) \cdot \bar{f} \circ \bar{\varphi}(f(a)) \end{aligned}$$

وبما أن $f(a) \in G$ وأن $\bar{f} \circ \bar{\varphi} = I_G$ نجد أن $f(a) = f(b)f(a)$ وبالتالي $f(b) = e$

أي أن $b \in \text{Kerf}$. مما سبق نجد أن

$$a = b \cdot \bar{\varphi}(f(a)) \in \text{Kerf} \cdot H$$

أي أن $A \subseteq \text{Kerf} \cdot H$ وهذا يبين لنا أن $A = \text{Kerf} \cdot H$ وبما أن $\text{Kerf} \cap H = \langle e \rangle$

نجد أن $A = \text{Kerf} \times H$ وذلك لأن كلا من Kerf, H زمر جزئية ناظمية في الزمرة

التبديلية A .

لندرس الآن متى تكون زمرة الفتل الحرة زمرة حرة وذلك من خلال المبرهنة

التالية:

مبرهنة ٩-٢-٦.

كل زمرة فتل حرة و تبديلية هي زمرة حرة و تبديلية.

البرهان.

لنكن G زمرة فتل حرة منتهية التوليد و تبديلية، عندئذ حسب المبرهنة (٩-٢-٤)

فإن G تماثل مجموع مباشر ملته لزمرة دوارة غير منتهية. لنفرض أن

$$G \approx K_1 \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_n$$

حيث K_i زمرة دوارة وغير منتهية $1 \leq i \leq n$.

لنأخذ المجموعة $X = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ ولنبهرن على أن الزمرة G هي زمرة حرة. لتكن B زمرة تبديلية و $\Theta : X \rightarrow B$ تطبيق ما. وليكن $x \in G$ عندهذا العنصر x يكتب بصورة وحيدة على الشكل

$$x = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

حيث $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ولنعرّف العلاقة $\bar{\Theta} : G \rightarrow B$ بالشكل

$$\bar{\Theta}(x) = (\Theta(x_1))^{\alpha_1} \cdot (\Theta(x_2))^{\alpha_2} \cdot (\Theta(x_3))^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot (\Theta(x_n))^{\alpha_n}$$

وبما أن العنصر x يمثل بصورة وحيدة فإن العلاقة $\bar{\Theta}$ تطبيق وهي أيضا تشاكل لأنه

إذا كان $y \in G$ فإن $y = x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot x_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}$ ومنه

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(xy) &= \bar{\Theta}(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \cdot x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot x_3^{\beta_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}) = \\ &= \bar{\Theta}(x_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot x_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot x_3^{\alpha_3 + \beta_3} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n + \beta_n}) = \\ &= (\Theta(x_1))^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot (\Theta(x_2))^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot (\Theta(x_3))^{\alpha_3 + \beta_3} \cdot \dots \cdot (\Theta(x_n))^{\alpha_n + \beta_n} = \\ &= [(\Theta(x_1))^{\alpha_1} \cdot (\Theta(x_2))^{\alpha_2} \cdot (\Theta(x_3))^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot (\Theta(x_n))^{\alpha_n}] \cdot \\ &\quad [(\Theta(x_1))^{\beta_1} \cdot (\Theta(x_2))^{\beta_2} \cdot (\Theta(x_3))^{\beta_3} \cdot \dots \cdot (\Theta(x_n))^{\beta_n}] = \bar{\Theta}(x) \cdot \bar{\Theta}(y) \end{aligned}$$

أي أن التطبيق $\bar{\Theta}$ هو تشاكل. كما أنه أيا كان $x_i \in X$ فإن $\bar{\Theta}(x_i) = \Theta(x_i)$. مما سبق نجد أن الزمرة G هي زمرة تبديلية حرة على X .

نأتي الآن لإثبات صحة المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية منتهية التوليد والتي تلص

على أن كل زمرة تبديلية ومنتهية التوليد هي مجموع مباشر لزمرة دوارة.

مبرهنة ٧-٢-٩.

إذا كانت G زمرة تبديلية منتهية التوليد عندهذا G يمكن تمثيلها بالشكل

$$G \approx Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times Z_{n_3} \times \dots \times Z_{n_r} \times H$$

حيث H زمرة جزئية مناسبة من G .

البرهان.

بما أن الزمرة G تبديلية ومنتهاية التوليد فإنه حسب المبرهنة (١-٢-٩) تكون $\zeta(G)$ زمرة منتهاية التوليد (عدد مولداتها يساوي عدد مولدات الزمرة G) ومنه $\zeta(G)$ هي زمرة فتل حرة منتهاية التوليد و تبديلية وحسب المبرهنة (٢-٢-٩) فإن الزمرة $\zeta(G)$ منتهاية. أصبح لدينا $\zeta(G)$ زمرة تبديلية منتهاية وحسب المبرهنة (٧-١-٩) فإن $\zeta(G)$ عبارة عن مجموع مباشر منته لزمر دوارة منتهاية مرتبة كل منها قوة لعدد أولي وهذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب الحدود في هذا المجموع. نفرض أن

$$G \approx Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times Z_{n_3} \times \dots \times Z_{n_r}$$

من جهة أخرى، بما أن الزمرة G تبديلية ومنتهاية التوليد فإنه حسب المبرهنة (٢-٩-٢-٣) تكون الزمرة $G/\zeta(G)$ زمرة فتل حرة منتهاية التوليد وحسب التمهيدية (٦-٢-٩) نجد أن G هي زمرة تبديلية حرة وحسب المبرهنة (٥-٢-٩) وبما أن $\pi: G \rightarrow G/\zeta(G)$ التشاكل الزمري القالوني الغامر فإنه توجد زمرة جزئية H من G وتمثل $G/\zeta(G)$ تحقق $G = \text{Ker } \pi \times H$ وبما أن $\text{Ker } \pi = \zeta(G)$ نجد أن $G = \zeta(G) \times H$ ومنه

$$G \approx Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times Z_{n_3} \times \dots \times Z_{n_r} \times H$$

تمارين محلولة (٩)

١ - لتكن $G = \{1, 8, 12, 14, 18, 21, 27, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 53, 57, 64\}$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقياس 65. أوجد الزمر التي تماثل G ثم انشر الزمرة G في مجموع مباشر.
الحل.

بما أن $(G:1) = 16$ فإن G تماثل واحدة من الزمر التالية:

$$\begin{aligned} Z_{16} \\ Z_8 \oplus Z_2 \\ Z_4 \oplus Z_4 \\ Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \\ Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \end{aligned}$$

ولمعرفة أي من الزمر السابقة تماثل الزمرة G نقوم بحساب مراتب جميع عناصر الزمرة G . فنجد أن

$$\begin{aligned} o(1) &= 1, \quad o(14) = o(51) = o(64) = 2 \\ o(8) &= o(12) = o(18) = o(21) = o(27) = o(31) = o(34) = \\ &= o(38) = o(44) = o(47) = o(53) = o(57) = 4 \end{aligned}$$

نلاحظ أن الزمرة G ليست دوارة (تأكد من ذلك) وبالتالي فإن $G \not\cong Z_{16}$. وبما أن الزمرة G لا تحوي سوى 3 عناصر مرتبة كل منها تساوي 2 فإن $G \not\cong Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ (علل ذلك). كذلك بما أن G لا تحوي عنصر مرتبته 8 فإن $G \not\cong Z_8 \oplus Z_2$ (علل ذلك). وبما أن الزمرة $Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ تحوي فقط 8 عناصر مرتبة كل منها تساوي 4 نجد أن $G \not\cong Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ (تأكد من ذلك). مما سبق نجد أن $G \cong Z_4 \oplus Z_4$.

أما كيفية نشر الزمرة G في مجموع مباشر فإننا نأخذ العنصر ذا المرتبة الأكبر، لنأخذ على سبيل المثال العنصر 8، ومنه فإن الزمرة $\langle 8 \rangle = \{1, 8, 57, 64\}$ تكون أحد معاملات النشر للزمرة G . ثم نختار العنصر الثاني ذا المرتبة الأكبر. وليكن a فنجد أن

$a, a^2 \notin \langle 8 \rangle$ ويجب أن يحقق $o(a) = 4$ أي $o(a) \leq (G:1)/(\langle 8 \rangle:1) = 16/4 = 4$
 فلنجد أن العنصر $a = 12$ يحقق هذه الخاصية. حيث $\langle 12 \rangle = \{1, 14, 38, 51\}$ ومنه نجد أن
 $G = \langle 8 \rangle \times \langle 12 \rangle$.

٢ - لتكن

$$G = \{1, 8, 17, 19, 26, 28, 37, 44, 46, 53, 62, 64, 71, 73, 82, 89, 91, 98, \\ 107, 109, 116, 118, 127, 134\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 135. أوجد الزمر التي تماثل G ، ثم انشر
 الزمرة G في مجموع مباشر.
 الحل.

بما أن $(G:1) = 24$ فإن الزمرة G تماثل واحدة من الزمر التالية:

$$Z_8 \oplus Z_3 \approx Z_{24} \\ Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_4 \oplus Z_6 \approx Z_{12} \oplus Z_2 \\ Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \approx Z_6 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$

لنوجد مراتب جميع عناصر الزمرة G ، فلنجد أن

$$o(1) = 1, \quad o(26) = o(109) = o(134) = 2, \quad o(46) = o(91) = 3$$

$$o(28) = o(53) = o(82) = o(107) = 4$$

$$o(19) = o(44) = o(64) = o(71) = o(89) = o(116) = 6$$

$$o(8) = o(17) = o(37) = o(62) = o(73) = o(98) = o(118) = o(127) = 12$$

بما أن الزمرة G ليست دواراً فإن $G \not\approx Z_{24}$ ، وذلك لأن $o(109) = 2 = o(134)$. كذلك

فإن $G \not\approx Z_6 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ (علل ذلك). مما سبق نجد أن $G \approx Z_{12} \oplus Z_2$. أما كيفية نشر

الزمرة G في مجموع مباشر فإننا نأخذ العنصر ذا المرتبة الأكبر وليكن العنصر 8.

فلنجد أن $\langle 8 \rangle = \{1, 8, 17, 19, 46, 53, 62, 64, 91, 107, 109, 118\}$ وهذه الزمرة تمثل أحد

معاملات النشر للزمرة G . ثم نختار العنصر الثاني a ذا المرتبة 4 والذي يحقق

$t \leq (G:1)/(\langle 8 \rangle:1) = 24/12 = 2$ من أجله $a \notin \langle 8 \rangle$ فلنجد أن $a = 134$. ومنه تكون

الزمرة $\langle 134 \rangle = \{1, 134\}$ هي الحد الثاني في النشر، ومنه $G = \langle 8 \rangle \times \langle 134 \rangle$.

تمارين (٩)

١ - لتكن $G = \{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 91. أوجد الزمر التي تماثل الزمرة G ، ثم أنشر الزمرة G في مجموع مباشر.

٢ - لتكن $G = \{1, 7, 17, 23, 49, 55, 65, 71\}$ زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 96. أوجد الزمر التي تماثل الزمرة G ، ثم أنشر الزمرة G في مجموع مباشر.

٣ - لتكن

$$G = \{1, 7, 43, 49, 51, 57, 93, 99, 101, 107, 143, 149, 151, 157, 193, 199\}$$

زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب بالمقاس 200. أوجد الزمر التي تماثل الزمرة G ، ثم أنشر الزمرة G في مجموع مباشر.

٤ - أثبت أن أي زمرة تبديلية منتهية مرتبتها 45 تحوي عنصر مرتبته 15. وهل كل زمرة تبديلية مرتبتها 45 تحوي عنصر مرتبته ٩9.

٥ - لتكن G زمرة تبديلية منتهية تحقق أنه من أجل أي قاسم لمرتبة الزمرة G توجد زمرة جزئية واحدة فقط في G . أثبت في هذه الحالة أن الزمرة G دوارة.

٦ - لتكن G زمرة تبديلية منتهية وليكن p عدد أولي. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون $(G:1) = p^n$ هو أن تكون مرتبة كل عنصر من G قوة للعدد الأولي p .

٧ - لتكن G زمرة و A, B زمر جزئية ناظمية و تبديلية في G . ولنفرض أن $A \cap B = \langle e \rangle$. أثبت أن الجداء $A.B$ زمرة تبديلية.

٨ - لنفرض أن الزمرة $G = K \times H$. ولتكن N زمرة جزئية ناظمية في H . أثبت أن الزمرة N ناظمية في G .

الفصل العاشر

الـ P-زمر ومبرهنات سيلوف

في هذا الفصل سوف نورد عدداً من الطرائق التي تبين لنا العلاقة الهامة الموجودة بين بعض الزمر الجزئية لزمرة ما والزمرة الأصلية. وجدنا من خلال دراستنا للمرافقات اليسارية لزمرة جزئية في زمرة ما أن هذه المرافقات تشكل تجزئة للزمرة الأصلية. توجد طريقة أخرى للحصول على تجزئة لزمرة ما بالاعتماد على العناصر نوردها من خلال المفهوم التالي:

١-١٠. الـ P-زمر.

تعريف.

لتكن G زمرة و $a, b \in G$. نقول عن العنصرين a, b إنهما مترافقان إذا وجد $x \in G$ يحقق $b = xax^{-1}$. ونقول في هذه الحالة إن العنصر b هو مرافق للعنصر a . سوف نرمز لمجموعة العناصر من G المرافقة للعنصر a بالرمز $cl(a)$ ونسميه صف ترافق العنصر a . ومنه $cl(a) = \{xax^{-1} : x \in G\}$. من خلال التمهيدية التالية سوف نبين كيفية الحصول على تجزئة لزمرة ما من خلال مفهوم الترافق.

١-١-١٠. تمهيدية

لتكن G زمرة. لنعرف على G العلاقة $\sim$ بالشكل التالي:

$$\forall a, b \in G; \quad a \sim b \Leftrightarrow \exists x \in G, \quad b = xax^{-1}$$

علتذ: ١ - العلاقة $\sim$ المعرفة على G هي علاقة تكافؤ.

٢ - صفوف تكافؤ العلاقة $\sim$ هي $cl(a)$ حيث $a \in G$.

٣ - المجموعة $\{cl(a) : a \in G\}$ تشكل تجزئة للزمرة G .

البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ. ◊

التمهيدية التالية تعطينا خواص صفوف الترافق (التكافؤ).

تمهيدية ١٠-١-٢.

لتكن G زمرة و $a \in G$. القضايا التالية متكافئة:

١ - المجموعة $C(a) = \{x : x \in G, ax = xa\}$ زمرة جزئية في G .

٢ - بفرض أن $M_L(C(a))$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $C(a)$ في G .

عندئذ: $Cardcl(a) = CardM_L(C(a))$

٣ - $Cardcl(a) = (G : C(a))$.

البرهان.

١ - واضح أن $e \in C(a)$. ليكن $x, y \in C(a)$ عندئذ $ax = xa, ay = ya$ ومنه

$$ay^{-1} = y^{-1}a$$

$$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$$

أي أن $xy^{-1} \in C(a)$ ، وهذا يبين لنا أن $C(a)$ زمرة جزئية في G .

٢ - لنعرف العلاقة $f : cl(a) \rightarrow M_L(C(a))$ بالشكل التالي:

$$f(b = xax^{-1}) = x.C(a)$$

وذلك أياً كان $b \in cl(a)$. فنجد أن f تطابق متباين، لأنه أياً كان $b, b_1 \in cl(a)$ بحيث

$$b = b_1 \text{ يوجد } x, x_1 \in G \text{ بحيث } b = xax^{-1}, \quad b_1 = x_1ax_1^{-1} \text{ وبالتالي}$$

$$xax^{-1} = x_1ax_1^{-1} \Leftrightarrow xax^{-1}x_1 = x_1a \Leftrightarrow x_1^{-1}xax^{-1}x = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1^{-1}x)a(x_1^{-1}x)^{-1} = a \Leftrightarrow x_1^{-1}x \in C(a) \Leftrightarrow (x_1^{-1}x).C(a) = C(a)$$

$$\Leftrightarrow x.C(a) = x_1.C(a) \Leftrightarrow f(b) = f(b_1)$$

كما أن f غامر، لأنه إذا كان $\bar{y} \in M_L(C(a))$ فإن $\bar{y} = y.C(a)$ حيث $y \in G$ ومنه

$$yay^{-1} \in cl(a) \text{ وأن } yay^{-1} = y.C(a) = \bar{y}. \text{ مما سبق نجد أن}$$

$$Cardcl(a) = CardM_L(C(a))$$

٣ - ينتج من (٢) ومن أن $CardM_L(C(a)) = (G : C(a))$ ◊

بالاعتماد على التمهيدتين السابقتين نحصل على العلاقة الهامة التالية التي تسمى علاقة الصفوف وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٠-١-٣.

من أجل أي زمرة منتهية G العلاقة التالية $(G:1) = \sum (G:C(a))$ محققة، حيث أن المجموع في الطرف الأيمن مأخوذ على الممثلين لصفوف التكافؤ $cl(a)$. البرهان.

وجدنا حسب التمهيدية (١٠-١-١) أن المجموعة $\{cl(a), a \in G\}$ تشكل تجزئة للزمرة G ومنه $(G:1) = \sum Card cl(a)$ حيث إن المجموع في الطرف الأيمن مأخوذ على الممثلين لصفوف التكافؤ $cl(a)$. وحسب التمهيدية (١٠-١-٢) نجد أن

$$\sum (G:C(a)) = (G:1)$$

خاصة أخرى من خواص صفوف الترافق (التكافؤ) نوردها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١٠-١-٤.

ليكن G زمرة و $a \in G$. الشروط التالية متكافئة:

$$1- a \in Z(G)$$

$$2- Card cl(a) = 1$$

$$3- cl(a) = \{a\}$$

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). ليكن $a \in Z(G)$ و $x \in cl(a)$ عندئذ يوجد $g \in G$ بحيث $x = gag^{-1}$ ومنه $x = agg^{-1} = a$ أي أن $cl(a) = \{a\}$ ، وبالتالي $Card cl(a) = 1$. (٢) $\Leftrightarrow$ (١). ليكن $g \in G$ عندئذ $cl(a) = \{a\}$ ومنه $gag^{-1} = a$ أي أن $ga = ag$ وبالتالي $a \in Z(G)$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). ينتج وبشكل مباشر من كون $a \in cl(a)$.

بعد مبدأ العد أو تعداد العناصر أحد التقنيات المستخدمة في دراسة الزمر المنتهية وبالاعتماد على هذا المبدأ ندخل المفهوم التالي:
تعريف.

ليكن p عدداً أولياً. نقول عن الزمرة المنتهية G إنها p -زمرة إذا كانت مرتبتها قوة للعدد p . أي إذا كانت $(G:1) = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$.
بالاعتماد على التعريف السابق نحصل على المبرهنة التالية:
مبرهنة ١٠-١-٥.

إذا كانت G عبارة عن p -زمرة، عندئذ $Z(G) \neq \{e\}$.
البرهان.

نفرض أن $(G:1) = p^n$. بالاعتماد على علاقة الصفوف نجد أن

$$(G:1) = \sum_{a \in Z(G)} (G:C(a)) = \sum_{a \in Z(G)} (G:C(a)) + \sum_{a \notin Z(G)} (G:C(a))$$
وحسب التمهيدية (١٠-١-٤) نجد

$$(G:1) = (Z(G):1) + \sum_{a \notin Z(G)} (G:C(a))$$

وبما أن

$$(G:C(a)) = \frac{(G:1)}{(C(a):1)}$$

فإن $(G:C(a)) = p^k$ حيث $k \geq 1$ من جهة أخرى، بما أن

$$(Z(G):1) = (G:1) - \sum_{a \notin Z(G)} (G:C(a))$$

وأن كل حد في الطرف الأيمن يقبل القسمة على p فإن $(Z(G):1)$ تقبل القسمة على p . ولكون $Z(G)$ زمرة تبديلية فإنه حسب المبرهنة (٩-١) فإن الزمرة $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته p وبالتالي $(Z(G):1) > 1$.

المبرهنة التالية تبين لنا متى تكون الزمرة تبديلية، وذلك من خلال معرفة عدد عناصرها.

مبرهنة ١٠-١-٦.

إذا كانت G عبارة عن p -زمرة بحيث $(G:1) = p^2$ فإن الزمرة G تكون تبديلية.
البرهان.

بما أن G عبارة عن p -زمرة عندئذ حسب المبرهنة (١٠-١-٥) فإن $(Z(G):1) > 1$ وحسب مبرهنة لاغرانج إما $(Z(G):1) = p$ أو $(Z(G):1) = p^2$.
إذا كانت $(Z(G):1) = p^2$ فإن $G = Z(G)$ ، وبالتالي فإن الزمرة G تبديلية. إذا كانت $(Z(G):1) = p$ عندئذ $(G:Z(G)) = p$ وبالتالي $(G/Z(G):1) = p$ أي أن الزمرة $G/Z(G)$ دوارة. وحسب المبرهنة (٥-٢-٢) تكون الزمرة G تبديلية. هـ

هدفنا التالي هو دراسة خواص الـ p -زمر حيث إن هذه الزمر تملك العديد من الخواص الممتعة والمهمة وأولى هذه الخواص نوردتها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١٠-١-٧.

لتكن G عبارة عن p -زمرة عندئذ:

- ١ - كل زمرة جزئية من G عبارة عن p -زمرة.
- ٢ - إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G فإن الزمرة $\frac{G}{K}$ هي أيضاً عبارة عن p -زمرة.

البرهان.

لنفرض أن $(G:1) = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

- ١ - لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G عندئذ حسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$p^n = (G:1) = (G:H)(H:1)$$

وهذا يبين لنا أن $(H:1)$ تقسم المقدار p^n ومنه $(H:1) = p^r$ حيث $0 \leq r \leq n$ ومنه الزمرة الجزئية H هي p -زمرة.

- ٢ - لتكن K زمرة جزئية ناظمية في G حسب (١) فإن K عبارة عن p -زمرة. لنفرض أن $(K:1) = p^r$ حيث $0 \leq r \leq n$ وحسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$\left(\frac{G}{K}:1\right) = (G:K) = \frac{(G:1)}{(K:1)} = \frac{p^n}{p^r} = p^{n-r}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{G}{K}$ هي أيضاً p -زمرة. ◊

مبرهنة ١٠-١-٨.

لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً ولتكن K زمرة جزئية ناظمية في G .
الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة G هي p -زمرة.

٢ - كل من الزمر $K, \frac{G}{K}$ هي عبارة عن p -زمر.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). ينتج من التمهيدية (١٠-١-٧).

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن $\left(\frac{G}{K}:1\right) = p^r$ وأن $(K:1) = p^s$ حيث. عندئذ $n \in N^*$

$$(G:K) = \left(\frac{G}{K}:1\right) = p^r$$

ومنه حسب مبرهنة لاغرانج فإن

$$(G:1) = (G:K)(K:1) = p^r \cdot p^s = p^{r+s}$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة G عبارة عن p -زمرة. ◊

١٠-٢. مبرهنات سيلوف.

ذكرنا سابقاً أن عكس مبرهنة لاغرانج غير صحيح، أي إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها n وكان m عدداً صحيحاً موجباً يقسم n فإنه ليس بالضرورة وجود زمرة جزئية في G مرتبتها m . المبرهنة التالية هي واحدة من الحالات الخاصة التي يكون فيها عكس مبرهنة لاغرانج صحيح. وأول من أثبت هذه المبرهنة هو الرياضي اللويجي (1832-1918) *Ludwing - Sylow*. وتعد كل من مبرهنتي سيلوف ولاغرانج اثنتين من أكثر النتائج أهمية في الزمر المنتهية، حيث إن المبرهنة الأولى

تعطي الشرط اللازم لوجود زمرة جزئية و الثانية تعطي الشرط الكافي لوجود تلك الزمرة الجزئية.

مبرهنة ١٠-٢-١. (مبرهنة سيلوف الأولى ١٨٧٢).

لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً. إذا كان p^k يقسم مرتبة الزمرة G ، عندئذ فإن الزمرة G تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها p^k . البرهان.

سوف نورده بالاستقراء حسب مرتبة G . لنفرض أن $(G:1) = p^k n$. إذا كانت $(G:1) = 1$ فإن المبرهنة صحيحة. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر التي مراتبها أقل من مرتبة G . وهنا نميز حالتين: الحالة الأولى. يوجد في G زمرة جزئية واحدة فقط $H \subset G$ تحقق أن p^k يقسم مرتبة الزمرة H . عندئذ فإن الزمرة H تحوي زمرة جزئية مرتبتها p^k وبالتالي الزمرة تحوي زمرة جزئية مرتبتها p^k . الحالة الثانية. جميع الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G مراتبها لا تقبل القسمة على p^k ، عندئذ حسب علاقة الصفوف فإن

$$(G:1) = (Z(G):1) + \sum (G:C(a))$$

حيث إن المجموع في الطرف الأيمن (الحد الثاني) مأخوذ من أجل العناصر $a \notin Z(G)$ وبما أن p^k يقسم مرتبة الزمرة G وأن

$$(G:1) = (G:C(a)) \cdot (C(a):1)$$

وأن p^k لا يقسم $(C(a):1)$ فإن $(G:C(a))$ يقبل القسمة على p^k . وذلك لأجل جميع العناصر $a \notin Z(G)$ ومنه فإن p يقسم $(G:C(a))$. وبما أن

$$(Z(G):1) = (G:1) - \sum (G:C(a))$$

نجد أن $(Z(G):1)$ تقبل القسمة على p . ولكون $Z(G)$ زمرة تبادلية، فإنه حسب المبرهنة (٩-١) فإن الزمرة $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته p . للرمز لهذا العنصر بالرمز x . بما أن $x \in Z(G)$ فإن الزمرة $\langle x \rangle$ ناظمية في G (أثبت ذلك). لنأخذ زمرة الخارج $G/\langle x \rangle$. بما أن

$$p^{k-1}.n = \frac{p^k n}{p} = (G/\langle x \rangle : 1) = (G : \langle x \rangle) = \frac{(G : 1)}{(\langle x \rangle : 1)}$$

فإن p^{k-1} يقسم مرتبة الزمرة $G/\langle x \rangle$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة $G/\langle x \rangle$ تحتوي زمرة جزئية مرتبتها p^{k-1} وهذه الزمرة من الشكل $H/\langle x \rangle$ حيث H زمرة جزئية من G تحوي $\langle x \rangle$. وأن $(H:\langle x \rangle) = (H:\langle x \rangle) = p^{k-1}$ وهكذا فإن $(H:1) = (H:\langle x \rangle)(\langle x \rangle:1) = p^{k-1}p = p^k$

لنبيين كيفية فهم مبرهنة سيلوف الأولى.

لكن G زمرة مرتبتها $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7$ علئذ فإن مبرهنة سيلوف الأولى تخبرنا أن الزمرة G تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها $5, 9, 3, 8, 4, 2, 25, 125, 625, 7$ بينما لا تخبرنا أي شيء عن إمكانية وجود زمرة جزئية مرتبتها $30, 15, 10, 6$ أو أي قاسم آخر لمرتبة الزمرة G مساو لجداء عددين أوليين مختلفين. ولأن الزمر الجزئية التي تضمن وجودها مبرهنة سيلوف الأولى تلعب دوراً محدداً في نظرية الزمر المنتهية فإننا سوف نعطيهها تسمية خاصة وذلك من خلال التعريف التالي:

تعريف.

لكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p . إذا كان p^k حيث $k \geq 1$ يقسم مرتبة الزمرة G و p^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذ أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^k تسمى p -زمرة جزئية سيلوفية من G .

ينتج مباشرة من التعريف أن الزمرة الجزئية H من G تكون p -زمرة جزئية سيلوفية في G إذا وفقط إذا كانت مرتبتها أكبر قوة للعدد الأولي تقسم مرتبة الزمرة G .

بالعودة إلى الزمرة G التي مرتبتها $2^3.3^5.5^4.7$ نجد أن أي زمرة جزئية مرتبتها 8 تسمى 2-زمرة جزئية سيلوفية من G . كذلك الزمرة الجزئية التي مرتبتها 625 تسمى 5-زمرة جزئية سيلوفية من G ، والزمرة الجزئية التي مرتبتها 7 تسمى 7-زمرة جزئية سيلوفية من G وهكذا.

كنتيجة لمبرهنة سيلوف الأولى نورد المبرهنة التالية والتي أول من أثبتها كوشي عام ١٨٤٥ وكان برهانه مؤلف من تسع صفحات.

مبرهنة ١٠-٢-٢. (مبرهنة كوشي ١٨٤٥).

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p . علنذ G تحوي عنصراً مرتبته p .
البرهان.

ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة (١٠-٢-١). هـ

أيضاً بالاعتماد على مبرهنة سيلوف الأولى نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٠-٢-٣.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p . علنذ G تحوي p - زمرة جزئية سيلوفية.
البرهان.

بما أن p يقسم مرتبة الزمرة G ، لنفرض أن p^n (حيث $n \geq 1$) أكبر قوة للعدد p يقسم مرتبة الزمرة G . علنذ فإن G تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها p^n وهذه الزمرة الجزئية هي p - زمرة جزئية سيلوفية من G . هـ

لأجل متابعة دراستنا للزمر المنتهية نحن بحاجة إلى بعض المفاهيم الإضافية وبعض النتائج التي سوف نوردها من خلال المبرهنة التالية:
مبرهنة ١٠-٢-٤.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . علنذ:

١ - من أجل أي عنصر $a \in G$ المجموعة aHa^{-1} هي زمرة جزئية من G تسمى الزمرة المترافقة مع H في G .

٢ - المجموعة $N(H) = \{a : a \in G; aHa^{-1} = H\}$ زمرة جزئية من G تسمى مركز الزمرة H في G .

٣ - الزمرة الجزئية H ناظمية في $N(H)$.

٤ - الزمرة $N(H)$ أعظمية في مجموعة الزمر الجزئية من G التي تكون فيها H ناظمية.

البرهان.

١ - لدينا $e = aea^{-1} \in aHa^{-1}$ ومنه aHa^{-1} مجموعة جزئية من G وغير خالية. ليكن $x, y \in aHa^{-1}$ عندهذاً $x = aha^{-1}$, $y = aka^{-1}$ حيث $h, k \in H$ ومنه $xy^{-1} = (aha^{-1})(aka^{-1}) \in aHa^{-1}$ وهذا يبين لنا أن aHa^{-1} زمرة جزئية من G .

٢ - لدينا $eHe^{-1} = H$ ومنه $e \in N(H)$ أي أن $N(H)$ مجموعة جزئية من G وغير خالية. ليكن $a, b \in N(H)$ عندهذاً $aHa^{-1} = bHb^{-1} = H$ ومنه

$$(ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} = a(b^{-1}Hb)a^{-1} = aHa^{-1} = H$$

أي أن $ab^{-1} \in N(H)$ وهذا يبين لنا أن $N(H)$ هي زمرة جزئية من G .

٣ - واضح.

٤ - حسب (٣) فإن H زمرة جزئية ناظمية في $N(H)$. لتكن K زمرة جزئية من G بحيث $H \subseteq K$ و H ناظمية في K . ولنفرض أن $N(H) \subseteq K \subset G$. ولنبرهن أن $K = N(H)$. ليكن $k \in K$ عندهذاً $kHk^{-1} = H$ ومنه فإن $k \in N(H)$ أي أن $K \subseteq N(H)$ وهكذا فإن $K = N(H)$. وهذا يبين لنا أن الزمرة $N(H)$ أعظمية في مجموعة الزمر الجزئية من G والتي تكون فيها H ناظمية. هـ

لمتابعة دراستنا لمبرهنات سيلوف التي تعد أدوات قيمة في دراسة نظرية الزمر المنتهية، لابد لنا من بعض النتائج الإضافية والمفاهيم الجديدة نوردتها من خلال المبرهنات التالية:

مبرهنة ١٠-٢-٥.

لتكن G زمرة منتهية و K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية من G مرتبتها p^n (حيث $n \geq 1$). عندهذاً القضايا التالية صحيحة:

١ - إذا كانت H عبارة عن p -زمرة جزئية من G فإن $H \cap H(K) = H \cap K$

٢ - أي زمرة جزئية من G ومتراكفة مع K هي عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في G .

٣ - عدد جميع الزمر الجزئية من G والمتراكفة مع K يساوي $(G : N(K))$.

٤ - العددان $(G : N(K))$ و p أوليان فيما بينهما.

البرهان.

١ - لدينا $K \subseteq N(K)$ ومثل $H \cap K \subseteq H \cap N(K)$. لنضع

$H_1 = H \cap N(K)$. بما أن H عبارة عن p -زمرة و $H_1 \subseteq H$ فإن H_1 هي أيضا

p -زمرة جزئية من H . من جهة أخرى، بما أن الزمرة K هي زمرة جزئية ناظرية في $N(K)$ وأن $H_1 \subseteq N(K)$ فإن

$$H_1 K / K \cong H_1 / (K \cap H_1)$$

وبالتالي $(H_1 K : K) = (H_1 : K \cap H_1)$ وبما أن

$$(H_1 : 1) = (H_1 : K \cap H_1)(K \cap H_1 : 1)$$

فإن $(H_1 : K \cap H_1) = p^r$ ومنه

$$(H_1 K : 1) = (H_1 K : K)(K : 1) = p^r p^n = p^{r+n}$$

وهذا يبين لنا أن $H_1 K$ عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية من G تحوي K ، وبما

أن K هي p -زمرة جزئية أعظمية في G فإن $H_1 K = K$ وبالتالي $H_1 \subseteq H_1 K$ وبما

أن $H_1 \subseteq H$ نستنتج أن $H_1 \subseteq H \cap K$ وهذا يبين لنا أن $H \cap H(K) = H \cap K$.

٢ - لتكن xKx^{-1} زمرة متراكفة مع K في G حيث $x \in G$. واضح أن التطبيق

$f : K \rightarrow xKx^{-1}$ المعرف بالشكل

$$\forall y \in K, \quad f(y) = xyx^{-1}$$

هو تقابل، ومنه $(K : 1) = (xKx^{-1} : 1)$ وهكذا نجد أن الزمرة xKx^{-1} عبارة عن

p -زمرة جزئية سيلوفية من G .

٣ - للرمز لمجموعة جميع الزمر الجزئية من G والمتراكفة مع K بالرمز M ،

علتدنا وحسب المبرهنة (١٠-٢-٤) فإن $M = \{xKx^{-1} : x \in G\}$. أيضا للرمز

لمجموعة جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $N(K)$ في G بالرمز M_L ، فنجد أن $M_L = \{x.N(K) : x \in G\}$. لنعرف العلاقة $\varphi : M_L \rightarrow M$ بالشكل التالي:

$$\forall x.N(K) \in M_L; \quad \varphi(x.N(K)) = xKx^{-1}$$

فنجد أن العلاقة φ تطابق متباين، لأنه أيًا كان $x_1.N(K), x_2.N(K) \in M_L$ فإن $x_1.N(K) = x_2.N(K) \Leftrightarrow x_1^{-1}x_2 \in N(K) \Leftrightarrow (x_1^{-1}x_2)K(x_1^{-1}x_2)^{-1} = K \Leftrightarrow x_1Kx_1^{-1} = x_2Kx_2^{-1} \Leftrightarrow \varphi(x_1.N(K)) = \varphi(x_2.N(K))$

واضح أن φ غامر، ومنه فإن φ تقابل. وهذا يبين لنا أن

$$Card M = Card M_L = (G : N(K))$$

أي أن عدد جميع الزمر المترافقة مع K في G يساوي $(G : N(K))$.

٤ - بما أن K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في G بحيث $(K : 1) = p^n$ حيث $n \geq 1$ فإن $(G : 1) = p^m$ وحيث m لا يقبل القسمة على p وبما أن $(G : 1) = (G : K)(K : 1)$ نجد أن $(G : K) = m$. من جهة أخرى، بما أن

$$(G : K) = (G : N(K))(N(K) : K) = m$$

فإن $(G : N(K))$ لا يقبل القسمة على p ، وهذا يبين لنا أن العددين p و $(G : N(K))$ أوليين فيما بينهما.

تعريف.

لنكن G زمرة و H, K زمراً جزئياً من G . نقول عن الزمرة hKh^{-1} حيث $h \in H$ أنها H -زمرة مترافقة مع K .

تمهيدية ١٠-٢-٦.

لنكن G زمرة منتهية و H, K زمراً جزئياً من G . إن عدد جميع الزمر الجزئية المختلفة التي كل منها H -مترافقة مع K يساوي $(H : H \cap N(K))$. البرهان.

لنفرض أن $M = \{hKh^{-1} : h \in H\}$ مجموعة جميع الزمر الجزئية المختلفة والتي كل منها H -مترافقة مع K . ولنفرض أيضاً أن

$$M_L = \{h.(H \cap N(K)) : h \in H\}$$

مجموعة جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة $H \cap N(K)$ في H . ولنعرّف العلاقة $\varphi: M_L \rightarrow M$ بالشكل التالي: أيّا كان $h.(H \cap N(K)) \in M_L$ فإن

$$\varphi(h.(H \cap N(K))) = hKh^{-1}$$

فلنجد أن العلاقة φ تطابق متباين، لأنه أيّا كان

$$\text{فإن } h_1.(H \cap N(K)), h_2.(H \cap N(K)) \in M_L$$

$$h_1.(H \cap N(K)) = h_2.(H \cap N(K)) \Leftrightarrow h_1^{-1}h_2 \in H \cap N(K) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_1^{-1}h_2 \in H, N(K) \Leftrightarrow (h_1^{-1}h_2)K(h_1^{-1}h_2)^{-1} = K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_1Kh_1^{-1} = h_2Kh_2^{-1} \Leftrightarrow \varphi(h_1.(H \cap N(K))) = \varphi(h_2.(H \cap N(K)))$$

من الواضح أن التطبيق φ غامر. بهذا الشكل نجد أن φ تقابل ومنه

$$\text{Card} M = \text{Card} M_L = (H : H \cap N(K))$$

نأتي الآن لإثبات مبرهنة سيلوف الثانية.

مبرهنة ١٠-٢-٧. (مبرهنة سيلوف الثانية).

لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً يقسم مرتبة الزمرة G . عندئذ كل p -زمرة جزئية من G تكون محتواة في p -زمرة جزئية سيلوفية من G . البرهان.

لتكن H عبارة عن p -زمرة جزئية من G . ولنفرض أن $(H : 1) = p^n$ حيث $n \geq 1$. إذا كان p^{n+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G فإن H في هذه الحالة هي p -زمرة جزئية سيلوفية من G . وبذلك يتم المطلوب. لنفرض أن p^{n+1} يقسم مرتبة الزمرة G . ولنفرض أن p^n أكبر قوة للعدد p يقسم مرتبة الزمرة G . عندئذ $m > n$ وحسب مبرهنة سيلوف الأولى توجد في G زمرة جزئية K مرتبتها p^m وهذه الزمرة هي p -زمرة جزئية سيلوفية من G . لنفرض أن $M = \{K_x = xKx^{-1} : x \in G\}$ مجموعة جميع الزمر الجزئية من G والمترافقة مع K . وحسب المبرهنة (١٠-٢-٥) فإن كل زمرة K_x هي p -زمرة جزئية سيلوفية من G بالإضافة لذلك فإن $\text{Card} M = (G : N(K))$ والعدين $(G : N(K))$ و p أوليان فيما بينهما. وبما أنه

فإن $\forall h \in H$

$$hK_x h^{-1} = hxKx^{-1}h^{-1} = (hx)K(hx)^{-1}$$

هي زمرة جزئية من G ومتراقة مع K وبالتالي $\forall h \in H$ فإن $hK_x h^{-1} \in M$.
لنوجد تجزئة للمجموعة M بواسطة الزمرة الجزئية H بالشكل التالي: $\forall h \in H$
لنأخذ المجموعة

$$M_h = \{h_0 K_x h_0^{-1} = hK_x h^{-1} : h_0 \in H\}$$

فنجد أن M_h غير خالية، لأن $hK_x h^{-1} \in M_h$ كما أن $M_h \subseteq M$. كذلك، إذا
كان $M_h \cap M_{h'} \neq \emptyset$ حيث $h, h' \in H$ فإنه يوجد عنصر $A \in M_h \cap M_{h'}$ وهذا يبين
لنا أن $A = hK_x h^{-1} = h'K_x h'^{-1} \in M$ لأن كلا من $hK_x h^{-1}, h'K_x h'^{-1}$ عبارة عن
زمرة جزئية من G ومتراقة مع K . وبما أن M تتألف فقط من الزمر الجزئية
المتراقة مع K والمختلفة ولكون $hK_x h^{-1} = h'K_x h'^{-1}$ فإن

$$(hx)K(hx)^{-1} = (h'x)K(h'x)^{-1}$$

وهذا يبين لنا أن $hx = h'x$ وبالتالي $h = h'$ أي أن $M_h = M_{h'}$. واضح أن
 $M = \bigcup_{h \in H} M_h$. أي أن المجموعة $\{M_h : h \in H\}$ تشكل تجزئة للمجموعة M وهذه
التجزئة تسمى تجزئة M إلى صفوف ترافق بالنسبة إلى الزمرة الجزئية H . وحسب
التمهيدية (١٠-٢-٦) فإن عدد جميع الزمر الجزئية H - المتراقة مع K_x يساوي

$$(H : H \cap N(K_x)) = (H : H \cap K_x)$$

ومله

$$(G : N(K)) = \sum_x (H : H \cap K_x)$$

وبما أن الطرف الأيسر من المساواة الأخيرة لا يقبل القسمة على p وأن كل حد في
الطرف الأيمن يقبل القسمة على p ، نجد أنه توجد زمرة جزئية K_x واحدة على الأقل
من أجلها $(H : H \cap K_x) = 1$ وبالتالي يكون $H = H \cap K_x$ وهكذا نجد
أن $H \subseteq K_x$. مما سبق نجد أن الزمرة الجزئية H محتواة في p - زمرة جزئية
سيلوفية من G .

نأتي الآن إلى إثبات مبرهنة سيلوف الثالثة التي تعطينا عدد جميع الـ p -الزمر الجزئية السيلوفية في زمرة ما.

مبرهنة ١٠-٢-٨. (مبرهنة سيلوف الثالثة).

لتكن G زمرة منتهية. علنًا:

- ١ - كل p -زمرتين جزئيتين سيلوفيتين من G مترافقتان.
- ٢ - عدد جميع p -زمر الجزئية السيلوفية المختلفة في G يقسم مرتبة G ويساوي $1 + kp$ حيث $k \in N$.

البرهان.

- ١ - لتكن H, K عبارة عن p -زمرتين جزئيتين سيلوفيتين من G . علنًا تكون $H \subseteq K_x$ عبارة عن p -زمرة جزئية من G . وحسب المبرهنة (١٠-٢-٧) فإن $H \subseteq K_x$ حيث K_x زمرة جزئية من G . ومترافقة مع K وحسب المبرهنة (١٠-٢-٥) فإن $(K_x : 1) = (K : 1) = (H : 1)$

وهذا يبين لنا أن $H = K_x$.

- ٢ - لتكن K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية من G . وبما أن أي p -زمرة جزئية سيلوفية أخرى من G تكون مترافقة مع K وحسب المبرهنة (١٠-٢-٥) فإن عدد جميع p -الزمر الجزئية السيلوفية المختلفة في G يساوي $(G : N(K))$. لنفرض أن $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ هي جميع p -الزمر الجزئية السيلوفية المختلفة في G والمترافقة مع K . علنًا

$$(G : N(K)) = \sum_{x \in G} (K : K \cap K_x) = (K : K \cap K_e) + \sum_{x \neq e} (K : K \cap K_x)$$

وبما أن $K_e = eKe^{-1} = K$ فإن

$$(K : K \cap K_e) = (K : K) = 1$$

ولكون $(K : K \cap K_x)$ يقبل القسمة على p وذلك من أجل كل عنصر $e \neq x \in G$

فإن $\sum_{x \in G} (K : K \cap K_x)$ يقبل القسمة على p ومنه

$$(G : N(K)) = 1 + kp, \quad k \in N$$

من مبرهنة سيلوف الثالثة ننتج لدينا الحقيقة الهامة التالية:

مبرهنة ١٠-٢-٩.

لتكن G زمرة منتهية و K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية من G . القضايا التالية متكافئة:

١ - الزمرة الجزئية K ناظمية في G .

٢ - لا يوجد في G سوى p -زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K .
البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لتكن H عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية أخرى في G . وحسب المبرهنة (١١-٢-٨) فإن الزمرتين H, K مترافقتان، أي يوجد $x \in G$ بحيث $H = xKx^{-1}$ ولكون K ناظمية في G نجد أن $H = xKx^{-1} = K$. وهذا يبين لنا أنه في G توجد p -زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي K .
(٢) $\Leftrightarrow$ (١). ليكن $x \in G$ عليمًا أن xKx^{-1} هي p -زمرة جزئية سيلوفية في G وحسب الفرض فإن $K = xKx^{-1}$ وهذا يبين لنا أنه

$$\forall x \in G, \quad K = xKx^{-1}$$

وبالتالي الزمرة K ناظمية في G .

تمهيدية ١٠-٢-١٠.

لتكن G و K زمرة جزئية ناظمية منتهية في G ولتكن H عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في K حيث p عدد أولي. عندئذ $G = K.N_G(H)$.
البرهان.

ليكن $g \in G$ عندئذ $gKg^{-1} = K$ وبما أن $gHg^{-1} \subseteq gKg^{-1} = K$ نجد أن gHg^{-1} هي أيضا p -زمرة جزئية سيلوفية في K . وبما أن كل p -زمرتين سيلوفيتين مترافقتين يوجد $k \in K$ بحيث $gHg^{-1} = kHk^{-1}$ وبالتالي

$$H = k^{-1}gHg^{-1}k = (k^{-1}g)H(k^{-1}g)^{-1}$$

ومنه $k^{-1}g \in N_G(H)$ وبالتالي فإن $g \in K.N_G(H)$ وهذا يبين لنا أن $G = K.N_G(H)$.

تمهيدية ١٠-٢-١١.

لنكن G زمرة منتهية و K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في G حيث p عدد أولي. إذا كانت H زمرة جزئية من G تحقق $N_G(K) \subseteq H$ عندها $N_G(H) = H$.

البرهان.

لنفرض أن H زمرة جزئية من G تحقق $N_G(K) \subseteq H$. بما أن $K \subseteq N_G(K) \subseteq H$ فإن K هي أيضا p -زمرة جزئية سيلوفية في H . لنفرض أن $L = N_G(K)$ وحسب المبرهنة (١٠-٢-١٠) نجد أن $L = N_L(K)H$ وبما أن $N_L(K) \subseteq N_G(H) \subseteq H$ ينتج $L = H$ أي أن $N_G(H) = H$.

تمارين محلولة (١٠)

١- ادرس الزمرة التي مرتبتها 40.

الحل.

لتكن G زمرة مرتبتها 40. إن $(G:1) = 2^3 \cdot 5$. وحسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن G تحوي 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. كما أن G تحوي 2- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 8. إن عدد جميع الـ 5- زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1 + k5$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة G . نلاحظ أنه من أجل $k \neq 0$ فإن العدد $1 + k5$ لا يقسم مرتبة الزمرة G . ومنه توجد 5- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في G . لنرمز لهذه الزمرة بالرمز K . وحسب المبرهنة (١٠-٢-٩) فإن الزمرة K ناظمية في G . لنوجد عدد جميع الـ 2- زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 8. نلاحظ أنه من أجل $k = 0, k = 2$ فإن $1 + k2$ يقسم مرتبة الزمرة، وبالتالي يكون لدينا عدد جميع الـ 2- زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 8 إما 1 أو 5. لتكن H إحدى هذه الزمر الجزئية التي مرتبتها 8. بما أن K ناظمية في G فإن الجداء KH زمرة جزئية في G . وبما أن $K, H \subseteq KH$ فإن مرتبة الزمرة KH يجب أن تقبل القسمة على 5, 8 حسب مبرهنة لاغرانج. وهذا يبين لنا أن $(KH:1) = 40$ مما سبق نجد أن $G = KH$.

٢- لتكن G زمرة مرتبتها 15. أثبت أن الزمرة G دوارة.

الحل.

بما أن $(G:1) = 15 = 3 \cdot 5$ علئذ حسب المبرهنة (١٠-٢-٣) فإن الزمرة G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3- زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $1 + k3$ ويجب أن يقسم مرتبة G . وهنا نلاحظ أنه من أجل $k \neq 0$ فإن المقدار $1 + k3$ لا يقسم مرتبة الزمرة G . ومنه توجد 3- زمرة جزئية سيلوفية واحدة

فقط في G ولتكن H وحسب المبرهنة (١٠-٢-٩) فإن الزمرة H ناظمية في G ، وبما أن $(H:1) = 3$ فإن H دوارة. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$. كذلك إن عدد جميع الـ 5-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+k5$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة G . وهنا نلاحظ أنه من أجل $k \neq 0$ فإن العدد $1+k5$ لا يقسم مرتبة الزمرة G .

ومنه توجد 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط في G . للرمز لهذه الزمرة بالرمز K ، وهي ناظمية. ولكون $(K:1) = 5$ فإن K دوارة. لنفرض أن $K = \langle b \rangle$. بما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ (تأكد من ذلك) وأن $aba^{-1}b^{-1} \in K \cap H = \langle e \rangle$ وذلك لكون كل من K, H زمراً ناظمية في G فإن $ab = ba$. من جهة أخرى، بما أن $\gcd(3,5) = 1$ فإنه حسب التمرين المحلول (٣-١) فإن $o(ab) = o(a)o(b) = 3 \cdot 5 = 15$. مما سبق نجد أن $G = \langle ab \rangle$.

٣- لندرس الآن الزمرة التي مرتبتها 30.

لتكن G زمرة مرتبتها 30. علنئذ $(G:1) = 2,3,5$ وهنا نلاحظ أن مجموعة قواسم العدد 30 هي $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. وحسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن الزمرة G تحوي 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 وأخرى 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. إن عدد جميع الـ 3-زمرة الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 يعطى بالعلاقة $1+k3$ ويجب أن يقسم مرتبة G . وهنا نلاحظ أنه من أجل $k \neq 0, k \neq 3$ فإن المقدار $1+k3$ لا يقسم مرتبة الزمرة G . ومنه يوجد في G إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 10 زمر جزئية كل منها عبارة عن 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3. ل نرمز لإحدى هذه الزمر بالرمز H . من جهة أخرى فإن عدد جميع الـ 5-زمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+k5$ وهذا العدد يجب أن يقسم مرتبة الزمرة G . وهنا نلاحظ أنه من أجل $k \neq 0, k \neq 1$ فإن العدد $1+k5$ لا يقسم مرتبة الزمرة G . وهذا يبين لنا أنه توجد في G إما زمرة جزئية واحدة فقط أو 6 زمر جزئية كل منها عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية

مرتبتها 5. للرمز لإحدى هذه الزمر بالرمز K . وبما أن مرتبة كل من K, H أعداد أولية فيما بينها نجد أن $K \cap H = \langle e \rangle$. لتأكد من عدد الزمر الجزئية السيلوفية التي مرتبة كل منها 3 أو 5. لدينا الحالات التالية:

- الحالة الأولى. يوجد في G عشر زمر جزئية كل منها عبارة عن 3-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3، و 6 زمر جزئية كل منها عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5.

- الحالة الثانية. يوجد في G عشر زمر جزئية كل منها عبارة عن 3 زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3، و 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 5.

- الحالة الثالثة. يوجد 3-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 3 في G ، وست زمر جزئية كل منها عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5. - الحالة الرابعة. يوجد 3-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 3 في G ، وأخرى عبارة عن 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها 5.

وهنا نلاحظ أن الحالة الأولى تقودنا إلى أن الزمرة G تحوي أكثر من 30 عنصراً وبالتالي فإن هذه الحالة مرفوضة. وهذا يبين لنا أن إحدى هذه الزمر H أو K هي زمرة جزئية ناظمية في G وبالتالي فإن الجداء KH هو زمرة جزئية في G . وبما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ فإن $(K : 1)(H : 1) = 3 \cdot 5 = 15 = (KH : 1)$ ومنه

$$(G : KH) = (G : 1) / (KH : 1) = 30 / 15 = 2$$

وحسب المبرهنة (٥-١-٢) تكون الزمرة KH ناظمية في G ، وحسب التمرين (٢) فإن الزمرة KH دوارة. لنفرض أن $KH = \langle y \rangle$. من جهة أخرى، بما أن 2 يقسم مرتبة الزمرة G وحسب مبرهنة كوشي فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 2 وليكن D ، ومنه تكون الزمرة D دوارة. لنفرض أن $D = \langle x \rangle$. واضح أن $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle e \rangle$. وبما أن $xy = yx$ وحسب التمرين المحلول (٣-١) فإن $o(xy) = o(x)o(y) = 2 \cdot 15 = 30$ وهذا يبين لنا أن $G = \langle xy \rangle$ أي أن الزمرة G دوارة وبالتالي فهي تبديلية، كما أن $G = \{x^i y^j : 0 \leq i \leq 1; 0 \leq j \leq 14\}$.

تمارين (١٠)

- ١- لتكن G زمرة منتهية غير تبديلية مرتبتها 36. أثبت أن G تحوي أكثر من 2- زمرة جزئية سيلوفية واحدة أو أكثر من 3- زمرة جزئية سيلوفية واحدة.
- ٢- لتكن G زمرة منتهية مرتبتها 48. أثبت أن تقاطع أي 2- زمرة جزئية سيلوفيتين مختلفتين هو زمرة جزئية مرتبتها 8.
- ٣- لتكن G زمرة منتهية و K عبارة عن p - زمرة جزئية سيلوفية من G حيث p عدد أولي. أثبت أنه إذا كان $x \in N(K)$ عنصر مرتبته قوة للعدد p فإن $x \in K$.
- ٤- لتكن G زمرة منتهية و K عبارة عن p - زمرة جزئية سيلوفية من G . أثبت أن K هي الـ p - زمرة جزئية سيلوفية من G الوحيدة المحتواة في $N(K)$.
- ٥- لتكن G زمرة منتهية مرتبتها 168. أوجد عدد الـ 7- زمرة جزئية السيلوفية من G .
- ٦- لتكن G زمرة منتهية مرتبتها 56. أثبت أن G تحوي زمرة جزئية ناظمية K تحقق $\langle e \rangle \neq K \subset G$.
- ٧- لتكن G زمرة منتهية غير دوارة مرتبتها 21. أوجد عدد الـ 3- زمرة الجزئية السيلوفية في G . ثم أثبت أن G تحوي 14 عنصراً مرتبة كل منها 3.
- ٨- لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G . أثبت أن عدد كل المرافقات اليسارية للزمرة H في G يساوي $(G : N(H))$.
- ٩- لتكن G زمرة مرتبتها 375. أثبت أن الزمرة G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 15.
- ١٠- لتكن G زمرة مرتبتها 105. أثبت أن الزمرة G تحوي زمرة جزئية مرتبتها 35.
- ١١- لتكن G زمرة مرتبتها 595. أثبت أن الزمرة G تحوي 17 زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط.

١٢- لتكن G زمرة منتهية و H عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية داخلية من G حيث p عدد أولي. أثبت أن $\alpha(H) = H$ وذلك أيًا كان $\alpha \in \text{Aut}(H)$.

١٣- لتكن G زمرة منتهية و p عدد أولي. ولنفرض أن مرتبة كل عنصر من G قوة للعدد p . أثبت أن G عبارة عن p -زمرة.

١٤- لتكن G زمرة منتهية و H عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في G حيث p عدد أولي. أثبت أن H هي الـ p -زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في $N(H)$.

١٥- لتكن G زمرة تبديلية منتهية. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة G دوارة هو أن تكون كل زمرة جزئية سيلوفية في G دوارة.

١٦- لتكن G زمرة منتهية و p عدد أولي. أثبت أن

- تقاطع أي زمريتين جزئيتين من G مرتبة كل منها تساوي p هو $\langle e \rangle$.

- عدد جميع العناصر في G التي مرتبة كل منها يساوي p هو من

الشكل $\alpha(p-1)$.

الفصل الحادي عشر

تصنيف الزمر المنتهية

وجدنا سابقاً أنه من أجل أي عدد صحيح موجب n توجد زمرة واحدة على الأقل مرتبتها n ، ومن هنا نجد أن مجموعة الزمر ذات المرتبة n (في الحالة العامة) يمكن اعتبارها غير منتهية، وبالتالي ليس من المعقول لدراسة هذه الزمر أن ندرس كل زمرة على حدة. من هنا نجد أنه لتصنيف الزمر من حيث المرتبة له أهمية كبيرة. فعلى سبيل المثال، بما أن كل زمرة دوارة مرتبتها k تماثل Z_k نستنتج أنه لدراسة الزمر الدوارة ذات المرتبة k يكفي دراسة الزمرة Z_k . وبالاعتماد على خواص التماثل يمكننا تعميم هذه الدراسة على جميع الزمر الدوارة ذات المرتبة k . أي أنه يمكننا القول إنه توجد زمرة دوارة واحدة فقط مرتبتها k وهي Z_k . وبما أن كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي p هي زمرة دوارة، وبالتالي فهي تماثل Z_p . وهنا نستطيع القول إنه توجد لدينا زمرة واحدة فقط مرتبتها p وهي Z_p وذلك أي أن العدد الأولي p ، وبالتالي فإن نتائج دراستنا للزمرة Z_p يمكن تعميمها على جميع الزمر المنتهية ذات المرتبة p . بالاعتماد على ما سبق ذكره سابقاً نستطيع القول إنه من أجل أي عدد أولي p ، فإن كل زمرة منتهية مرتبتها p قد أصبحت معروفة لدينا. نأتي الآن لتصنيف الزمر المنتهية التي مراتبها ليست أعداداً أولية، وسوف نبدأ بالزمرة ذات المرتبة 4.

مبرهنة 11-1.

كل زمرة منتهية مرتبتها 4 إما تماثل Z_4 أو تماثل $Z_2 \oplus Z_2$.

البرهان.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها 4. إذا كانت الزمرة G دوارة عندئذ فإن الزمرة G تماثل Z_4 . لنفرض أن الزمرة G ليست دوارة. ليكن $a \in G$ بحيث $a \neq e$ عندئذ $K = \langle a \rangle$ زمرة جزئية من G مرتبتها 2 وبالتالي $K \approx Z_2$. بما أن $K \neq G$ يوجد $b \in G$ بحيث $b \notin K$ ومنه $H = \langle b \rangle$ زمرة جزئية من G مرتبتها 2 وتماثل Z_2 . وبما أن الزمرة G تبديلية بالاعتماد على المبرهنة (١٠-١-٦) فإن $KH = HK$ وبالتالي الجداء KH زمرة جزئية من G مرتبتها 4، لأن $K \cap H = \langle e \rangle$ (تأكد من ذلك). وهذا يبين لنا أن $G = KH$. مما سبق نجد أن $G = K \times H$ وحسب المبرهنة (٨-٢-٣) فإن

$$G = K \times H \approx K \oplus H \approx Z_2 \oplus Z_2$$

وفي هذه الحالة يكون $G = \{e, a, b, ab\}$.

المبرهنة السابقة تبين لنا أنه توجد زمرة فقط مرتبة كل منهما 4 هي Z_4 و $Z_2 \oplus Z_2$. المبرهنة التالية تعد تعميماً مباشراً للمبرهنة (١١-١) وتبين لنا أنه توجد فقط زمرة مختلفتان مرتبة كل منهما p^2 وهما Z_{p^2} و $Z_p \oplus Z_p$ حيث p عدد أولي. **مبرهنة ١١-٢.**

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها p^2 حيث p عدد أولي. عندئذ إما G تماثل Z_{p^2} أو $Z_p \oplus Z_p$. **البرهان.**

إذا كانت الزمرة G دوارة عندئذ $G \approx Z_{p^2}$.

لنفرض أن الزمرة G ليست دوارة. بما أن $p^2 = (G:1)$ فإنه بالاعتماد على المبرهنة (١٠-١-٦) تكون الزمرة G تبديلية. وحسب مبرهنة كوشي فإن G تحوي زمرة جزئية مرتبتها p ولتكن H ومنه $H \approx Z_p$. بما أن $H \neq G$ يوجد عنصر $b \in G$ بحيث $b \notin H$ ومنه فإن $K = \langle b \rangle$ زمرة جزئية من G وبما أن $K \neq \langle e \rangle$ وحسب لاغرانج نجد أن $(K:1) = p$. واضح أن $K \neq H$ وأن $K \approx Z_p$. كما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ ، لأنه إذا كان $K \cap H \neq \langle e \rangle$ يوجد $y \in K \cap H$ وأن $y \neq e$ ومنه

فإن $\langle y \rangle$ زمرة جزئية من K وحسب لاغرانج فإن $K = \langle y \rangle$. بشكل مشابه نجد أن $\langle y \rangle = H$ وهذا يبين لنا أن $K = H$ وهذا غير ممكن. وبما أن الزمرة G تبديلية فإن الجداء KH زمرة جزئية من G وأن

$$(KH : 1) = (K : 1)(H : 1) = p^2$$

ومنه $G = KH$. مما سبق نجد أن

$$G = K \times H \approx K \oplus H \approx Z_p \oplus Z_p$$

لندرس الآن الزمرة التي مرتبتها 6 وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١١-٣.

كل زمرة منتهية مرتبتها 6 إما تماثل Z_6 أو تماثل D_3 .

البرهان.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها 6. حسب مبرهنة كوشي، فإن الزمرة G تحوي زمرة جزئية H مرتبتها 2 وزمرة جزئية أخرى K مرتبتها 3. وبما أن كلا من 2, 3 أعداد أولية فإن كلا من K, H هي زمرة جزئية دوارة. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ وأن $K = \langle b \rangle$ وبما أن $(G : K) = (G : 1) / (K : 1) = 6/3 = 2$ فإنه حسب المبرهنة (٥-١-٢) تكون الزمرة K ناظمية في G وبالتالي يكون الجداء KH زمرة جزئية من G . وبما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ (تأكد من ذلك) فإن $(KH : 1) = 6$ وهذا يبين لنا أن $G = KH$. واضح أن $H = \{e, a\}$ وأن $K = \{e, b, b^2\}$ ومنه

$$G = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}$$

وبما أن الزمرة K ناظمية في G فإن $aba^{-1} \in K$ أي أن $aba^{-1} \in \{e, b, b^2\}$ ومنه إما $aba^{-1} = e$ أو $aba^{-1} = b$ أو $aba^{-1} = b^2$.

- إذا كان $aba^{-1} = e$ عندها $ab = a$ وبالتالي $b = e$ وهذا غير ممكن.

- إذا كان $aba^{-1} = b$ عندها $ab = ba$ وحسب التمرين المحلول (٣-١) نجد أن

$o(ab) = 6$ أي أن $\langle ab \rangle$ زمرة جزئية من G مرتبتها 6، وهذا يبين لنا أن $G = \langle ab \rangle$

وبالتالي الزمرة G دوارة، ومنه $G \approx Z_6$.

- إذا كان $aba^{-1} = b^2$ عندئذ $ab = b^2a$ وفي هذه الحالة نجد أن $G \cong D_3$ حيث

$$D_3 = \langle b, a; \quad b^3 = a^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

(راجع التمرين المحلول ٣-٩). وفي هذه الحالة نجد أن

$$G = \{e, a, b, b^2, ab, ba\}$$

مما سبق نجد أنه توجد زميرتان فقط مرتبة كل منهما 6 وهما D_3 و Z_6 .

نأتي الآن إلى تعميم المبرهنة الأخيرة، أي للدرس الزمرة ذات المرتبة $2p$ حيث p عدد أولي.

مبرهنة ١١-٤.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها $2p$ حيث $p > 2$ عدد أولي. عندئذ إما G تماثل Z_{2p} أو تماثل D_p .

البرهان.

حسب مبرهنة كوشي فإن الزمرة G تحوي زمرة جزئية H مرتبتها 2 وزمرة جزئية أخرى K مرتبتها p . وبما أن كلا من $2, p$ أعدادا أولية فإن كلا من K, H هي زمر جزئية دوارة. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ وأن $K = \langle b \rangle$ ومنه $o(a) = 2, o(b) = p$ وبما أن

$$(G : K) = (G : 1) / (K : 1) = 2p / p = 2$$

فإنه حسب المبرهنة (٥-١-٢) تكون الزمرة K ناظمية في G وبالتالي يكون الجداء KH زمرة جزئية من G . كما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ ، لأنه إذا كان $K \cap H \neq \langle e \rangle$ يوجد $y \in K \cap H$ وأن $y \neq e$ ولكون $y \in H$ فإن $y = a$ وبالتالي $o(y) = 2$. من جهة أخرى، بما أن $y \in K$ فإن $y^p = e$ وهذا يبين لنا أن 2 يقسم p وهذا مرفوض فرضا. ومنه

$$(KH : 1) = (K : 1)(H : 1) = 2p$$

وهكذا نجد أن $G = KH$. وبما أن الزمرة K ناظمية في G ، عندئذ $aba^{-1} = a^k$ حيث $0 \leq k \leq p$. إذا كان $k = 0$ عندئذ $aba^{-1} = e$ ومنه $ab = a$ ، وهذا يبين لنا

أن $a = a^2 = e$ وهذا مفروض فرضاً. كذلك الأمر إذا كان $k = p$. مما سبق نجد أن $1 \leq k < p$ ومنه

$$a^{k^2} = (b^k)^k = (aba^{-1})^k = ab^k a^{-1} = a^2 b (a^{-1})^2 = b$$

وبالتالي $b^{k^2-1} = e$ وهذا يبين لنا أن p يقسم المقدار $(k-1)(k+1) = k^2 - 1$ ، وبما أن $0 \leq k \leq p$ نستنتج أنه إما $p = k+1$ أو $k-1 = 0$. إذا كان $k-1 = 0$ عندئذ $k = 1$ ومنه $ab = ba$ ، وبما أن $\gcd(2, p) = 1$ فإنه حسب التمرين المحلول (٣-١) نجد

$$o(ab) = o(a)o(b) = 2p$$

وهذا يبين لنا أن لنا أن $G = \langle ab \rangle$ أي أن الزمرة G دوارة مرتبتها $2p$ وبالتالي فإن G تماثل Z_{2p} . لنفرض أن $p = k+1$ عندئذ $k = p-1$ ومنه $aba^{-1} = a^{p-1}$ من جهة أخرى، بما أن $G = KH$ فإن $G = \{e, a, b, ab, ab^2, ab^3, \dots, ab^{p-1}\}$ أي أن $G = \{a^i b^j : 0 \leq i < 2; 0 \leq j < p\}$ وهذا يبين لنا أن $G \cong D_p$.

المبرهنة الأخيرة بينت لنا أنه إذا كان p عدداً أولياً فإليه توجد زمرة p فقط من المرتبة $2p$ وهما $2p$ و D_p . نأتي الآن لدراسة الزمرة التي مرتبتها pq حيث p, q أعداد أولية. إن أول من درس هذه الزمرة E. Netto - 1882 حيث أثبت من خلال دراسته هذه أنه توجد على الأكثر زمرة pq مرتبة كل منهما p, q . من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس الحالة الخاصة التي من أجلها توجد زمرة واحدة فقط مرتبتها pq وهي Z_{pq} .

مبرهنة ١١-٥.

لنكن G زمرة مرتبتها pq حيث p, q أعداد أولية تحقق $p < q$ وأن p لا يقسم $q-1$. عندئذ تكون الزمرة G دوارة وبالتالي فهي تماثل Z_{pq} . البرهان.

بما أن p, q أعداد أولية تحقق $p < q$ وأن p لا يقسم $q-1$ فإن $2 < p < q$ وأن $\gcd(p, q) = 1$. كما أن مجموعة قواسم العدد pq هي $\{1, p, q, pq\}$. بما أن $pq = (G : 1)$ فإنه حسب المبرهنة (١٠-٢-٣) فإن G تحوي p -زمرة جزئية

سيلوفية مرتبتها p ولتكن H ، كذلك G تحوي q -زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها q ولتكن K . إن كلا من K, H هي زمرة جزئية دوارة. لنفرض أن $H = \langle x \rangle$ وأن $K = \langle y \rangle$. وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن عدد جميع الـ p -زمرة الجزئية السيلوفية في G يساوي $1 + pk$ ويقسم pq أي أن

$$1 + pk \in \{1, p, q, pq\}$$

وهذا يبين لنا أن $k = 0$ وبالتالي فإن G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط ومنه تكون الزمرة H ناظمية في G . بشكل مشابه نجد أن G تحوي q -زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط مرتبتها q وبالتالي تكون الزمرة K أيضا ناظمية في G وهذا يبين لنا أن الجداء KH زمرة جزئية من G . كما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ لأنه إذا كان $a \in K \cap H$ عنصر مرتبته s عندئذ، بما أن $a \in K, a \in H$ فإن s يكون قاسما مشتركا لكل من p, q وحسب الفرض نجد أن $a = e$. وبما أن كلا من K, H زمرة ناظمية في G فإن $K \cap H = \langle e \rangle$ أي أن $xyx^{-1}y^{-1} = e$ ومنه $xy = yx$ وحسب التمرين المحلول (٣-١) ينتج أن $o(xy) = o(x)o(y) = pq$ وهكذا نجد أن $\langle xy \rangle$ زمرة جزئية من G مرتبتها pq ، ومنه $G = \langle xy \rangle$ ، وهذا يبين لنا أن الزمرة G دوارة وبالتالي فهي تماثل Z_{pq} .

لندرس الآن الزمرة ذات المرتبة p^2q حيث p, q أعداد أولية مختلفة، والتي من خلالها نجد أنه توجد زمرة فقط مرتبة كل منها p^2q وهي $Z_{p^2q}, Z_p \oplus Z_{pq}$.
مبرهنة ٦-١١.

لتكن G زمرة مرتبتها p^2q حيث p, q أعداد أولية مختلفة تحقق أن p لا يقسم $q-1$ وأن q لا يقسم p^2-1 . عندئذ تكون الزمرة G تبديلية.
البرهان.

نلاحظ من شروط المبرهنة أن مجموعة قواسم العدد p^2q هي المجموعة $\{1, p, p^2, q, pq, p^2q\}$. وحسب المبرهنة (١٠-٢-٣) فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها p^2 ولتكن H إحدى هذه الزمر. وحسب

مبرهنة سيلوف الثالثة، فإن عدد جميع الـ p -زمرة الجزئية السيلوفية في G يساوي $1 + pk$ ويقسم p^2q أي أن

$$1 + pk \in \{1, p, p^2, q, pq, p^2q\}$$

وهذا يتحقق فقط من أجل $k = 0$ ومنه نجد أن H هي الـ p -زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في G وحسب المبرهنة (١٠-٢-٩) فإن الزمرة الجزئية H ناظمية في G . وبما أن $p^2 = (H:1)$ فإن الزمرة H تكون تبديلية. من جهة أخرى، فإن G تحوي q -زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها q ولتكن K إحدى هذه الزمر. وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن عدد جميع الـ q -زمرة الجزئية السيلوفية في G يساوي $1 + qk$ ويقسم p^2q أي أن

$$1 + pk \in \{1, p, p^2, q, pq, p^2q\}$$

وهذا محقق فقط من أجل $k = 0$ وهذا يبين لنا أن K هي الـ q -زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في G وبالتالي تكون الزمرة K ناظمية في G ، وبما أن $(K:1) = q$ فإن الزمرة K دوارة وبالتالي فهي تبديلية. كما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ (تأكد من ذلك). مما سبق نجد، أن الجداء KH زمرة جزئية من G وأن

$$(KH:1) = (H:1)(K:1) = p^2q$$

وهذا يبين لنا أن $G = KH$ وبالتالي $G = K \times H = K \oplus H$ وبما أن كلا من K, H تبديلية وحسب المبرهنة (٨-١-٢) فإن الزمرة G تكون تبديلية. وهنا نلاحظ ما يلي:

- إذا كانت الزمرة G دوارة فإن $G \approx Z_{p^2q}$.
- إذا لم تكن الزمرة G دوارة وبما أن الزمرة K دوارة مرتبتها q فإن $K \approx Z_q$. من جهة أخرى، بما أن الزمرة H تبديلية ومرتبها p^2 فإنه حسب المبرهنة (٩-٧) فإن $H \approx Z_p \oplus Z_p$. مما سبق نجد أن

$$G \approx Z_p \oplus Z_p \oplus Z_q \approx Z_p \oplus Z_{pq}$$

لندرس الآن الزمرة ذات المرتبة p^2q^2 حيث p, q أعداد أولية مختلفة وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١١-٧.

لتكن G زمرة مرتبتها p^2q^2 حيث p, q أعداد أولية مختلفة تحقق أن p لا يقسم $q^2 - 1$ وأن q لا يقسم $p^2 - 1$. علئذ تكون الزمرة G تبديلية. البرهان.

نلاحظ أولاً أنه ضمن شروط المبرهنة فإن مجموعة قواسم العدد p^2q^2 هي

$$\mathfrak{I} = \{1, p, p^2, q, q^2, pq, p^2q, pq^2, p^2q^2\}$$

وحسب المبرهنة (١٠-٢-٣) فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها p^2 ولتكن H إحدى هذه الزمر، وبما أن عدد جميع p -زمرة الجزئية السيلوفية في يساوي $1 + pk$ ، ويقسم p^2q^2 أي أن $1 + pk \in \mathfrak{I}$ وهذا يتحقق فقط من أجل $k = 0$ ومنه نجد أن الزمرة الجزئية H وحيدة في G . وحسب المبرهنة (١٠-٢-٩) فإن الزمرة الجزئية H ناظمية في G . وبما أن $(H:1) = p^2$ فإن الزمرة H تكون تبديلية، وحسب المبرهنة (١١-٢) إما $H \approx Z_p$ أو $H \approx Z_p \oplus Z_p$. كذلك، الزمرة G تحوي q -زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها q^2 ولتكن K إحدى هذه الزمر، وبما أن عدد جميع الـ q -زمرة الجزئية السيلوفية في يساوي $1 + qk$ ويقسم p^2q^2 أي أن $1 + qk \in \mathfrak{I}$ وهذا يتحقق فقط من أجل $k = 0$ ومنه نجد أن الزمرة الجزئية K وحيدة في G وبالتالي فهي ناظمية في G . وبما أن $(K:1) = q^2$ فإن الزمرة K تكون تبديلية، ومنه إما $K \approx Z_q$ أو $K \approx Z_q \oplus Z_q$. مما سبق نجد أن الجداء KH زمرة جزئية في G . وبما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ نجد أن $(KH:1) = (K:1)(H:1) = p^2q^2$ وبالتالي $G = KH = K \times H \approx K \oplus H$ وبالتالي (٨-١-٢) نجد أن الزمرة G تبديلية. وهنا نلاحظ مايلي:

- إذا كانت الزمرة G دوارة فإن $G \approx Z_{p^2q^2}$.
- إذا لم تكن الزمرة G دوارة فإن $G \approx Z_p \oplus Z_p \oplus Z_q \oplus Z_q$ ومنه $G \approx K \oplus H \approx Z_p \oplus Z_p \oplus Z_q \oplus Z_q \approx Z_{pq} \oplus Z_{pq}$.

تمارين محلولة (١١)

١- أثبت أنه توجد أربع زمر مرتبة كل منها 66.

الحل.

لتكن G زمرة مرتبتها 66 ولنعين الزمرة G . بما أن $66 = 2.3.11$ فإنه حسب مبرهنة كوشي G تحوي 3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 3 ولتكن H إحدى هذه الزمر. كذلك فإن الزمرة G تحوي 11- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 11 ولتكن K إحدى هذه الزمر. وبما أن عدد جميع الـ 11- زمر الجزئية السيلوفية يساوي $1+k.11$ ويقسم 66 نجد أن K هي الـ 11- زمر الجزئية السيلوفية الوحيدة في G ومنه تكون الزمرة K ناظمية في G وبالتالي يكون الجداء KH زمرة جزئية في G ، وبما أن $K \cap H = \langle e \rangle$ نجد أن

$$(KH : 1) = (K : 1)(H : 1) = 11.3 = 33$$

وحسب المبرهنة (١١-٥) فإن الزمرة KH دوارة. لنفرض أن $KH = \langle x \rangle$ حيث $x \in KH$. من جهة أخرى بما أن $(G : KH) = (G : 1) / (KH : 1) = 66/33 = 2$ وحسب المبرهنة (٥-١-٢) فإن الزمرة $\langle x \rangle$ تكون ناظمية في G . كذلك، بما أن 2 يقسم مرتبة الزمرة G وحسب مبرهنة كوشي، فإن الزمرة G تحوي عنصراً مرتبته 2 وليكن y ومنه $\langle x \rangle \in yxy^{-1}$ أي أن $yxy^{-1} = x'$ حيث $1 \leq i \leq 32$ وبالتالي $yx = x'y$. وبما أن $o(x') = o(yxy^{-1}) = o(x)$ (تأكد من ذلك) نجد أن العددين $33, i$ أوليان فيما بينهما ولكون $o(y) = 2$ نجد أن

$$x = y^{-1}(yxy^{-1})y = y^{-1}x'y = yx'y^{-1} = (yxy^{-1})' = (x')' = x'^2$$

ومنه $x'^2 = e$ وهذا يبين لنا أن 33 يقسم $i^2 - 1$. ومنه يوجد في $\alpha \in \mathbb{Z}$ بحيث $i^2 - 1 = (3\alpha)11$ أي أن $(i-1)(i+1) = (3\alpha)11$ ومنه إما 11 يقسم $i+1$ أو 11 يقسم $i-1$.

- إذا كان 11 يقسم $i+1$ عندئذ يوجد $t \in \mathbb{Z}$ بحيث $i+1=11t$ وبما أن $1 \leq i \leq 32$ فإن $2 \leq i+1 \leq 33$ ومنه فإن t يمكن أن يأخذ القيم التالية: $t=1,2,3$ أي أن $i+1=11,22,33$ ومنه $i=10,21,32$ وبما أن العددين $i, 33$ أوليان فيما بينهما نجد أن i يأخذ القيم $i=10,32$.

- إذا كان 11 يقسم $i-1$ فإنه يوجد $s \in \mathbb{Z}$ بحيث $i-1=11s$ وبما أن $0 \leq i-1 \leq 31$ نجد أن s يمكن أن يأخذ القيم التالية: $s=0,1,2$ أي أن $i-1=0,11,22$ وبالتالي $i=1,12,23$ ولكون العددين $i, 33$ أوليان فيما بينهما نجد أن $i=1,23$.

مما سبق نجد أن i يمكن أن يأخذ القيم التالية: $i=1,10,23,32$. لنناقش بحسب قيم i .

- من أجل $i=1$ نجد أن $x = yxy^{-1}$ ومنه $xy = yx$ وبما أن $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle e \rangle$ وأن $\gcd(33,2)=1$ فإنه حسب التمرين المحلول (٣-١) نجد أن

$$o(xy) = o(x)o(y) = 33 \cdot 2 = 66$$

أي أن $G = \langle xy \rangle$ وبالتالي تكون الزمرة G دوارة، ويكون $G \cong Z_{66}$.

- من أجل $i=32$ نجد أن $yxy^{-1} = x^{32}$ ومنه $yx = x^{32}y$ وهكذا فإن

$$(xy)^2 = x(yx)y = x(x^{32}y)y = x^{33}y^2 = e$$

وفي هذه الحالة نجد أن $G \cong D_{33}$ لأن

$$D_{33} = \langle x, y : x^{33} = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$$

ومنه

$$G = \{x^j y^k : 0 \leq j < 33, 0 \leq k < 2\}$$

بشكل مشابه نجد أنه من أجل $i=23, i=32$ فإن الزمرة تماثل كلاً من $D_{11} \oplus Z_3$ و

$D_3 \oplus Z_{11}$ وأن كلا من الزمر $D_3 \oplus Z_{11}$, $D_{11} \oplus Z_3$, D_{33} , Z_{11} مرتبتها

66 وأن أي اثنتين من هذه الزمر غير متماثلة.

٢ - كل زمرة مرتبتها 255 هي زمرة دوارة.

الحل.

لنكن G زمرة مرتبتها 255. إن $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ وحسب مبرهنة سيلوف الأولى
 في G يوجد 17-زمرة جزئية سيلوفية، ولنكن H وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة
 فإن H هي الـ 17-زمرة الجزئية الوحيدة في G ، وبالتالي الزمرة الجزئية H ناظرية
 في G ، أي أن $G = N(H)$. وحسب التمرين المحلول (٧-٢)، فإن الزمرة $\frac{N(H)}{C(H)}$
 تماثل زمرة جزئية من الزمرة $Aut(H)$. أي أن المقدار $(\frac{N(H)}{C(H)} : 1)$ يقسم

$(Aut(H) : 1)$ وبما أن $G = N(H)$ فإن

$$(\frac{N(H)}{C(H)} : 1) = (\frac{G}{C(H)} : 1) = (G : C(H))$$

ويقسم مرتبة الزمرة G . من جهة أخرى، بما أن $(H : 1) = 17$ فإن الزمرة H هي
 زمرة دوارة ومنه $H \cong Z_{17}$ وبالتالي حسب المبرهنة (٧-٥) فإن

$$Aut(H) \cong Aut(Z_{17}) \cong U(17)$$

وبما أن $(G : C(H))$ يقسم $(Aut(H) : 1)$ فإن $(G : C(H))$ يقسم $U(17) = 16$ وهكذا
 نجد أن $(G : C(H))$ يقسم 16,255 وبما أن $\gcd(16, 255) = 1$ نجد أن
 $(G : C(H)) = 1$ وهذا يبين لنا أن $G = C(H)$ أي أن

$$\forall h \in H; hg = gh, \quad \forall g \in G$$

ومنه $H \subseteq Z(G)$ وبالتالي فإن 17 يقسم $(Z(G) : 1)$. من جهة أخرى، إن $(Z(G) : 1)$
 تقسم $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ وهذا يبين لنا أن $(Z(G) : 1) \in \{1, 5, 17, 85, 255\}$ أي أن

$$(\frac{G}{Z(G)} : 1) \in \{1, 3, 5, 15\}$$

وبما أن كل زمرة مرتبتها تنتمي إلى المجموعة $\{1, 3, 5, 15\}$ هي زمرة دوارة نجد أن
 الزمرة $\frac{G}{Z(G)}$ هي زمرة دوارة وبالتالي فإن الزمرة G تبديلية. وحسب المبرهنة
 الأساسية للزمر التبديلية المنتهية فإن $G \cong Z_3 \oplus Z_5 \oplus Z_{17}$ وحسب المبرهنة (٨-١-١)
 (٥) نجد أن الزمرة G دوارة أي أن $G \cong Z_{255}$.

تمارين (١١)

- ١- أثبت أن الزمرة المنتهية التي مرتبتها 175 تكون تبديلية.
- ٢- لتكن G زمرة مرتبتها 60. أثبت أن G تحوي بالتحديد أربعة عناصر مرتبة كل منها 5 أو 24 عنصراً مرتبة كل منها 5.
- ٣- لتكن G زمرة مرتبتها 60. أثبت أن $4 \neq (Z(G):1)$.
- ٤- لتكن G زمرة مرتبتها 60 و N زمرة جزئية ناظرية في G مرتبتها 2. أثبت أن:
 - الزمرة G تحوي زمرة جزئية ناظرية مراتبها 6 و 10 و 30.
 - الزمرة G تحوي زمرة جزئية مراتبها 12 و 30.
 - الزمرة G تحوي زمرة جزئية دوارة مرتبتها 30.
- ٥- لتكن G زمرة مرتبتها 168. أثبت أنه إذا حوت الزمرة G زمرة جزئية ناظرية مرتبتها 4 فإن G تحوي زمرة جزئية ناظرية مرتبتها 28.
- ٦- لتكن G عبارة عن p -زمرة مرتبتها p . أثبت أنه من أجل كل $1 \leq k \leq n$ فإن G تحوي زمرة جزئية ناظرية مرتبتها p ، حيث p عدد أولي.
- ٧- لتكن G زمرة مرتبتها p حيث p عدد أولي وتحقق أنه من أجل كل عدد k يقسم p فإن G تحوي زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها k . أثبت أن الزمرة في هذه الحالة G تكون دوارة.
- ٨- لتكن G زمرة منتهية وتحقق أن جميع زمرة الجزئية السيلوفية ناظرية. أثبت أن G هي جداء مباشر لزمرة الجزئية السيلوفية.
- ٩- لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية ناظرية في G مرتبتها p حيث p عدد أولي. أثبت أن H محتواة في أي p -زمرة جزئية سيلوفية من G .
- ١٠- أثبت أن جميع الـ p -زمر الجزئية السيلوفية لزمرة منتهية تكون متماثلة.
- ١١- ما هو عدد التشاكلات الزمرية الغامرة من Z_n إلى الزمرة Z_m .

- ١٢ - أثبت أن التطبيق $f: Z \oplus Z \rightarrow Z$ المعرفة بالشكل $f(a,b) = a - b$ ، وذلك أي أن $(a,b) \in Z \oplus Z$ هو تشاكل زمري ثم عين نواة هذا التشاكل.
- ١٣ - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G بحيث $(G:H) = n$. وليكن $f: G \rightarrow \bar{G}$ تشاكلاً زمرياً. أثبت أنه إذا كان $\text{Ker } f \subseteq H$ فإن دليل الزمرة $f(H)$ في $\bar{G}$ يساوي n .
- ١٤ - أثبت أن الزمرة الجزئية $H = \{(1), (12)\}$ ناظمية في الزمرة S_3 وأن الزمرة الجزئية $H = \{(1), (12), (34)\}$ ناظمية في S_4 .

سوف نورد الآن جدولا يبين لنا عدد الزمر التي مراتبها أصغر أو تساوي 100.

المرتبة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1
2	14	13	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
3	2	1	14	1	5	1	5	2	2	1	15	2	2
4	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
5	5	4	1	4	1	52	1	2	1	14	1	2	2
6	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
7	14	1	6	1	4	2	2	1	52	2	5	1	5
8	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
9	1	15	2	13	2	2	1	13	1	2	4	267	1
10	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
11	4	1	5	1	4	1	50	1	2	3	4	1	6
12	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
13	1	52	15	2	1	15	1	2	1	12	1	10	1
14	92	93	94	95	96	97	98	99	100				
15	4	2	2	1	230	1	5	2	16				

الفصل الثاني عشر

الزمر القابلة للحل والزمر عديمة القوى

١٢-١. الزمر القابلة للحل.

في عام ١٨٩٨ لاحظ *G. A. Miller* أنه إذا كانت الزمرة G غير تبديلية فإنها تحوي عنصرين على الأقل x, y يحققان $xyx^{-1}y^{-1} \neq e$ ، وأن لهذه العناصر تطبيقات هامة. لأجل ذلك، في هذه الفقرة سوف ندرس بعض الخصائص لهذه العناصر.

تعريف.

لتكن G زمرة و $x, y \in G$. نسمي العنصر $xyx^{-1}y^{-1}$ مبادل العنصرين x, y في G . ونرمز له $[x, y]$. أي $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

تعريف.

لتكن G زمرة. ولنفرض أن $S = \{[x, y] : x, y \in G\}$. نسمي الزمرة $G' = \langle S \rangle$ المشتق الأول للزمرة G .

ينتج من التعريف السابق أن $G' \subseteq G$ وأنه إذا كانت الزمرة G تبديلية فإن $G' = \langle e \rangle$.

لتكن G زمرة ولنفرض أنه تم تعيين المشتق الأول G' . لنأخذ المجموعة

$$S' = \{[x, y] : x, y \in G'\}$$

إن الزمرة $G'' = \langle S' \rangle$ تسمى المشتق الثاني للزمرة G وأن $G'' \subseteq G' \subseteq G$. بشكل

مشابه نعين المشتق من المرتبة n وذلك $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ونرمز له $G^{(n)} = \langle S^{(n-1)} \rangle$ حيث

$$S^{(n-1)} = \{[x, y] : x, y \in G^{(n-1)}\}$$

نأتي الآن لدراسة بعض الخواص لمشتق الزمرة وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-١-١.

لتكن G زمرة. القضايا التالية صحيحة:

١- الزمرة الجزئية G' متميزة في G .

٢- الزمرة الجزئية G' ناظمية في G .

٣- الزمرة G/G' تبديلية.

البرهان.

١ - لنبرهن أولاً أن الصورة المباشرة لأي مبادل وفق أي تماثل للزمرة G هو

أيضاً مبادل للزمرة G . ليكن $f \in \text{Aut}(G)$ علئذ، أياً كان $x, y \in G$ فإن

$$f(xy)x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)(f(x))^{-1}(f(y))^{-1} \in S$$

وبالتالي $f(S) = S$. لنبرهن الآن أن $f(G') = G'$ وذلك أياً كان $f \in \text{Aut}(G)$. ليكن

$y \in f(G)$ ، علئذ $y = f(x)$ حيث $x \in G'$ وحسب المبرهنة (١٢-١-٣) فإن

$$x = a_1^{s_1} a_2^{s_2} a_3^{s_3} \dots a_n^{s_n}$$

حيث $a_i \in S$ من أجل $1 \leq i \leq n$ وأن $s_i \in Z$ من أجل $1 \leq i \leq n$. ومنه

$$y = f(x) = f(a_1^{s_1} a_2^{s_2} a_3^{s_3} \dots a_n^{s_n}) =$$

$$= (f(a_1))^{s_1} (f(a_2))^{s_2} (f(a_3))^{s_3} \dots (f(a_n))^{s_n}$$

وبما أن $f(a_i) \in S$ أياً كان $1 \leq i \leq n$ فإن $y = f(x) \in G'$ وهذا يبين لنا أن

$f(G') \subseteq G'$. ليكن $z \in G'$ علئذ وحسب المبرهنة (١٢-١-٣) فإن

$z = b_1^{t_1} b_2^{t_2} b_3^{t_3} \dots b_m^{t_m}$ حيث $b_i \in S$ و $t_i \in Z$ وذلك أياً كان $1 \leq i \leq m$. وبما أن

يوجد $d_j \in S$ بحيث $f(d_j) = b_j$ لأجل $1 \leq j \leq m$. وهكذا فإن

$$z = b_1^{t_1} b_2^{t_2} b_3^{t_3} \dots b_m^{t_m} = (f(d_1))^{t_1} (f(d_2))^{t_2} (f(d_3))^{t_3} \dots (f(d_m))^{t_m} =$$

$$= f(d_1^{t_1} d_2^{t_2} d_3^{t_3} \dots d_m^{t_m}) \in f(G')$$

مما سبق نجد أن $f(G') = G'$. وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية G' متميزة في

الزمرة G .

٢ - ينتج من المبرهنة (٨-٦).

٣ - ليسكن $xG', yG' \in G/G'$ حيث $x, y \in G$. وبما أن $xyx^{-1}y^{-1} \in G'$ فإن $(xyx^{-1}y^{-1})G' = G'$ وهذا يبين لنا أن $(xG')(yG') = (yG')(xG')$. وبالتالي الزمرة G/G' تبديلية. ◊

علاقة الزمرة الجزئية G' مع بعض الزمر الجزئية الناعمة نجد في المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-١-٢.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . القضايا التالية متكافئة:

١- الزمرة الجزئية H ناعمة في الزمرة G والزمرة G/H تبديلية.

٢- $G' \subseteq H$.

البرهان. (١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنبرهن أولاً أن

$$S = \{[x, y] : x, y \in G\} \subseteq H$$

ليكن $[x, y] \in S$ حيث $x, y \in G$ ، وحسب الفرض فإن $(xH)(yH) = (yH)(xH)$ وبالتالي

$$(xH)(yH)(x^{-1}H)(y^{-1}H) = H$$

أي أن $(xyx^{-1}y^{-1})H = H$ وهذا يبين لنا أن $xyx^{-1}y^{-1} \in H$. مما سبق نجد أن $S \subseteq H$ وبالتالي $G' = \langle S \rangle \subseteq H$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنبرهن في البداية على أن الزمرة الجزئية H ناعمة في G . أي لنبرهن أن $gHg^{-1} \subseteq H$ وذلك أي كان $g \in G$. ليكن $h \in H$ عندئذ أي كان $g \in G$ فإن

$$ghg^{-1}(ghg^{-1}h^{-1})h = [g, h]h \in G'H \subseteq HH = H$$

مما سبق نجد أن $gHg^{-1} \subseteq H$ وبالتالي الزمرة الجزئية H ناعمة في G . ليكن $xH, yH \in G/H$ حيث $x, y \in G$ عندئذ

$$xyx^{-1}y^{-1} = [x, y]H \in G' \subseteq H$$

وبالتالي $(xyx^{-1}y^{-1})H = H$ أي أن $(xH)(yH) = (yH)(xH)$. وهكذا نجد أن الزمرة G/H تبديلية. ◊

من الآن فصاعداً سوف نرمز للزمرة $\langle e \rangle$ بالرمز E . نأتي الآن إلى تعريف ودراسة الزمرة القابلة للحل.

تعريف.

نقول عن الزمرة G إنها قابلة للحل إذا ملكت سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق: ١ - الزمرة الجزئية G_{i+1} ناظمية في الزمرة G_i حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

٢ - الزمرة G_i / G_{i+1} تبديلية من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل زمرة تبديلية تكون قابلة للحل، لأنها تملك السلسلة $G = \langle e \rangle$. وهذا يبين لنا أن صف الزمر التبديلية محتوئ في صف الزمر القابلة للحل، ولذلك بعد صف الزمر القابلة للحل أعم من صف الزمر التبديلية، ويأتي في المرتبة الثانية من حيث أهميته ودراسته بعد صف الزمر التبديلية. نأتي الآن إلى دراسة الزمر القابلة للحل وزمرة الخارج لها.

مبرهنة ١٢-١-٣.

لتكن G زمرة قابلة للحل. عندئذ

١ - أي زمرة جزئية من G تكون قابلة للحل.

٢ - إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ الزمرة G/N تكون أيضاً قابلة للحل.

البرهان.

بما أن الزمرة G قابلة للحل عندئذ فإن الزمرة G تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق أن الزمرة الجزئية G_{i+1} ناظمية في الزمرة G_i وأن الزمرة G_i / G_{i+1} تبديلية من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

١ - لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ولنضع $H_i = H \cap G_i$ حيث $i = 0, 1, 2, \dots, n$. عندئذ نحصل على سلسلة منتهية من الزمر الجزئية H_i من الزمرة H وهي

$$E = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \dots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = H$$

لنبرهن على أن الزمرة الجزئية H_{i+1} ناظمية في الزمرة H_i حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. ليكن $y \in g_i H_{i+1} g_i^{-1}$ وذلك أيأ كان $g_i \in H_i$ ، عندئذ يوجد $h_{i+1} \in H_{i+1}$ بحيث $y = g_i h_{i+1} g_i^{-1}$ وبما أن $H_i \subseteq G_i$ من أجل $1 \leq i \leq n$ وأن الزمرة G_{i+1} ناظمية في الزمرة G_i نجد أن $y \in G_{i+1}$ كذلك $y \in H$ مما سبق نجد أن $y \in H \cap G_{i+1} = H_{i+1}$. بهذا الشكل نجد أن $g_i H_{i+1} g_i^{-1} \subseteq H_{i+1}$ وذلك أيأ كان $g_i \in H_i$. وبالتالي تكون الزمرة H_{i+1} ناظمية في الزمرة H_i حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ من جهة أخرى، وبالاعتماد على نظرية التماثل الثانية نجد أن

$$\frac{H_i}{H_{i+1}} = \frac{G_i \cap H}{G_{i+1} \cap H} = \frac{G_i \cap H}{G_{i+1} \cap (G_i \cap H)} \approx \frac{G_{i+1} (G_i \cap H)}{G_{i+1}} \subseteq \frac{G_i}{G_{i+1}}$$

وبما أن زمرة الخارج G_i / G_{i+1} تبديلية فرضاً، فإن زمرة الخارج H_i / H_{i+1} تكون أيضاً تبديلية، وذلك أيأ كان $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. مما سبق نجد أن الزمرة H قابلة للحل.

٢ - لتكن N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G . عندئذ فإن الجداء G/N زمرة جزئية في G ، وبما أن $N \subseteq G/N$ وأن N ناظمية في G نجد أن الزمرة N ناظمية في G/N وبالتالي $\frac{G/N}{N}$ زمرة، وذلك أيأ كان $i = 0, 1, 2, \dots, n$. وبما أن $G_{i+1}N \subseteq G_iN$ فإننا نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من الزمرة G/N وهي

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_n N}{N} \subseteq \frac{G_{n-1} N}{N} \subseteq \frac{G_{n-2} N}{N} \subseteq \dots \subseteq \frac{G_2 N}{N} \subseteq \frac{G_1 N}{N} \subseteq \frac{G_0 N}{N} = \frac{G}{N}$$

لنبرهن الآن على أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{N}$ ناظمية في $\frac{G_i N}{N}$. ليكن $\bar{y} \in \bar{g}_i \cdot \frac{G_{i+1}N}{N} \cdot \bar{g}_i^{-1}$. وذلك أياً كان $\bar{g}_i \in \frac{G_i N}{N}$. ومنه يوجد $\bar{g}_{i+1} \in \frac{G_{i+1}N}{N}$ يحقق $\bar{y} = \bar{g}_i \bar{g}_{i+1} \bar{g}_i^{-1}$ وبالتالي

$$\bar{y} = (g_i N)(g_{i+1} N)(g_i N)^{-1} = (g_i g_{i+1} g_i^{-1})N$$

وبما أن الزمرة G_{i+1} ناظمية في الزمرة G_i نجد أن $g_i g_{i+1} g_i^{-1} \in G_{i+1}$ وبالتالي

$$\bar{y} = (g_i g_{i+1} g_i^{-1})N \in \frac{G_{i+1}N}{N} \subseteq \frac{G_{i+1}N}{N}$$

وبالاعتماد على نظريتي التماثل الثانية والثالثة، نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{(G_i N)/N}{(G_{i+1} N)/N} &\approx \frac{G_i N}{G_{i+1} N} = \frac{G_i (G_{i+1} N)}{G_{i+1} N} \approx \frac{G_i}{G_i \cap (G_{i+1} N)} \approx \\ &\approx \frac{G_i / G_{i+1}}{(G_i \cap (G_{i+1} N)) / G_{i+1}} \end{aligned}$$

وبما أن الزمرة G_i / G_{i+1} تبديلية فرضاً نجد أن الزمرة

$$\frac{G_i / G_{i+1}}{(G_i \cap (G_{i+1} N)) / G_{i+1}}$$

أيضاً تبديلية. وبالتالي تكون الزمرة $\frac{G_i N / N}{G_{i+1} N / N}$ تبديلية. مما سبق نجد أن الزمرة G/N

قابلة للحل. ◊

لنورد الآن الشرط اللازم والكافي كي تكون زمرة ما قابلة للحل وذلك من خلال

للمبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-١-٤.

لتكن G زمرة و N زمرة جزئية ناظمية في G . الشروط التالية متكافئة:

١- الزمرة G قابلة للحل.

٢- الزمرتين N و G/N قابلتين للحل.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة (١٢-١-٣).

(٢) $\Leftarrow$ (١). بما أن كلا من الزمرتين $G/N, N$ قابلتان للحل فإنه توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من N على الشكل

$$E = N_n \subseteq N_{n-1} \subseteq \dots \subseteq N_1 \subseteq N_0 = N$$

تحقق أن الزمرة N_{i+1} ناظمية في الزمرة N_i وأن الزمرة N_i/N_{i+1} تبديلية، حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. وتوجد أيضا سلسلة منتهية أخرى من الزمر الجزئية من الزمرة G/N على الشكل

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_r}{N} \subseteq \frac{G_{r-1}}{N} \subseteq \frac{G_{r-2}}{N} \subseteq \dots \subseteq \frac{G_2}{N} \subseteq \frac{G_1}{N} \subseteq \frac{G_0}{N} = \frac{G}{N}$$

تحقق أن الزمرة G_{i+1}/N ناظمية في الزمرة G_i/N وأن الزمرة G_i/N_{i+1} تبديلية، حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (r-1)$. لنشكل السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من الزمرة G التالية:

$$E = N_n \subseteq N_{n-1} \subseteq \dots \subseteq N_1 \subseteq N_0 = G_r \subseteq G_{r-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

واضح أن السلسلة السابقة تحقق شروط قابلية الحل. (تأكد من ذلك).
من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس العلاقة بين مشتقات زمرة ما، وقابلية هذه الزمرة للحل.

مبرهنة ١٢-١-٥.

من أجل أي زمرة G ، القضايا التالية متكافئة:

١- الزمرة G قابلة للحل.

٢- يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $G^{(n)} = E$.

البرهان.

(١) $\Leftarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة G قابلة للحل، علئذ فإن الزمرة G تملك سلسلة

منتهية من الزمر الجزئية من G على الشكل

$$E = G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق أن الزمرة الجزئية G_{i+1} ناظمية في G_i وأن الزمرة G_i / G_{i+1} تبديلية، حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$. لنبرهن بالاستقراء على أن $G^{(i)} \subseteq G_{i+1}$ وذلك أيأ كان i . من أجل $i=1$ ، لدينا $G_2 \subseteq G_1 = G'$ وبما أن الزمرة G_2 ناظمية في G_1 وأن الزمرة G_1 / G_2 تبديلية فإنه حسب المبرهنة (١٢-١-٢) نجد أن $G'_1 = G'_2 \subseteq G_2$ لنفرض أن العلاقة $G^{(i)} \subseteq G_{i+1}$ صحيحة من أجل $(i-1)$ ولنبرهن على صحتها من أجل i . أصبح لدينا $G^{(i-1)} \subseteq G_i$ وبما أن $G_{i+1} \subseteq G_i$ وأن الزمرة G_{i+1} ناظمية في G_i وأن الزمرة G_i / G_{i+1} تبديلية فإنه حسب المبرهنة (١٢-١-٢) فإن $G'_i \subseteq G_{i+1}$ ومنه

$$G^{(i)} = (G^{(i-1)})' \subseteq G'_i \subseteq G_{i+1}$$

وهذا يبين لنا أن العلاقة $G^{(i)} \subseteq G_{i+1}$ وذلك أيأ كان i . مما سبق نجد أن $G^{(m-1)} = \langle e \rangle \subseteq G_m = \langle e \rangle$.

(٢) $\Leftarrow$ (١). لنأخذ سلسلة المشتقات التالية

$$E = G^{(n)} \subset G^{(n-1)} \subset \dots \subset G'' \subset G' \subset G$$

والتي تمثل سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من G وحسب المبرهنة (١٢-١-١) فإن هذه السلسلة تحقق أن الزمرة $G^{(i+1)}$ ناظمية في $G^{(i)}$ وأن الزمرة $G^{(i)} / G^{(i+1)}$ تبديلية، حيث $i = 1, 2, \dots, (n-1)$. ومنه تكون الزمرة G قابلة للحل.
مبرهنة ١٢-١-٦.

لتكن G زمرة و H, K زمراً جزئية ناظمية قابلة للحل في G . علئذ الزمرة $H.K$ قابلة للحل.
البرهان.

لنفرض أن H, K زمر جزئية ناظمية قابلة للحل في G علئذ الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظمية في G وحسب مبرهنة التماثل الزمري الثانية فإن

$$\frac{H.K}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}$$

وبما أن الزمرة H قابلة للحل فإنه حسب المبرهنة (١٢-١-٣) تكون الزمرة $\frac{H}{H \cap K}$ قابلة للحل، وبالتالي فإن الزمرة $\frac{H.K}{K}$ قابلة للحل. وبما أن كلاً من الزمرتين $\frac{H.K}{K}$ ، H القابلة للحل فإنه حسب المبرهنة (١٢-١-٤) تكون الزمرة $H.K$ قابلة للحل. $\square$

مبرهنة ١٢-١-٧.

كل زمرة منتهية تحوي زمرة جزئية ناظرية قابلة للحل أعظمية.
البرهان.

لتكن G زمرة منتهية وأن K الزمرة الجزئية الناظرية القابلة للحل في G ذات المرتبة الأكبر. ولتكن H زمرة جزئية ناظرية قابلة للحل في G عندئذ حسب المبرهنة (١٢-١-٦) فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظرية قابلة للحل في G . وبما أن $K \subseteq H.K$ وحسب اختيارنا للزمرة K نجد أن $K = H.K$ وهذا يبين لنا أن $H \subseteq K$. مما سبق نجد أن الزمرة K هي الزمرة الجزئية الناظرية الأعظمية القابلة للحل في G . $\square$

١٢-٢. الزمر عديمة القوى.

في هذه الفقرة سوف ندرس صفات من الزمر يقع بين صف الزمر التبادلية وصف الزمر القابلة للحل. لأجل ذلك سوف ندخل بعض المفاهيم الضرورية لذلك. لتكن G زمرة و A, B زمراً جزئيتين من الزمرة G . ولنضع

$$[A, B] = \{[a, b] = aba^{-1}b^{-1} : a \in A, b \in B\}$$

إن المجموعة $[A, B]$ لا تشكل (في الحالة العامة) زمرة جزئية في G . للرمز $\langle [A, B] \rangle$ للزمرة الجزئية من الزمرة G المولدة بالمجموعة $[A, B]$.

تمهيدية ١٢-٢-١.

لتكن G زمرة و A, A_1, B, B_1 زمراً جزئيتين من الزمرة G . عندئذ:

١ - إذا كانت $A \subseteq A_1, B \subseteq B_1$ فإن $\langle [A, B] \rangle \subseteq \langle [A_1, B_1] \rangle$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). بما أن الزمرة G_i ناظمية في G عندئذ تكون الزمرة G_i ناظمية في G_{i-1} وذلك أياً كان $1 \leq i \leq n$. يبقى علينا لإثبات أن الزمرة G عديمة القوى، أن نبرهن أن $G_{i-1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ حيث $1 \leq i \leq n$. ليكن $zG_i \in G_{i-1}/G_i$ عندئذ $z \in G_{i-1}$ ومعه أياً كان $xG_i \in G/G_i$ فإن $[z, x] \in [G_{i-1}, G] \subseteq G_i$ أي أن $zxz^{-1}x^{-1} \in G_i$ وبالتالي $(zxz^{-1}x^{-1})G_i = G_i$ وهذا يبين لنا أن

$$(zG_i)(xG_i) = (xG_i)(zG_i)$$

أي أن $zG_i \in Z(G/G_i)$. مما سبق نجد أن $G_{i-1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ وبالتالي الزمرة G عديمة القوى. $\square$

المبرهنة التالية نخبرنا عن طبيعة الزمر الجزئية وزمر الخارج للزمر عديمة القوى.

مبرهنة ١٢-٢-٣.

لتكن G زمرة عديمة القوى. عندئذ:

- ١- أي زمرة جزئية من الزمرة G هي زمرة عديمة القوى.
- ٢- إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية في G فإن زمرة الخارج G/N عديمة القوى. البرهان.

لنفرض أن المرة G عديمة القوى، عندئذ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الزمرة G على الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق أن الزمرة G_i ناظمية في G حيث $0 \leq i \leq n$ وأن $1 \leq i \leq n, \langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$.

- ١- لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G . ولنضع $H_i = H \cap G_i$ وذلك أياً كان $0 \leq i \leq n$. فلنجد أن H_i زمرة جزئية من الزمرة H وأن

$$H_i = H \cap G_i \subseteq H \cap G_{i-1} = H_{i-1}$$

حيث $0 \leq i \leq n$. بهذا الشكل نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من H على الشكل

$$E = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \dots \subseteq H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0 = H$$

لنبرهن أن الزمرة H_i ناظمية في H . ليكن $x \in hH_ih^{-1}$ ، وذلك أيًا كان $h \in H$ علنئذ يوجد $h_i \in H_i$ بحيث $x = hh_ih^{-1}$. واضح أن $x \in H$ من جهة أخرى، بما أن $h \in H \subseteq G$ وأن $h_i \in H_i \subseteq G_i$ ولكون G_i ناظمية في G ينتج أن $x = hh_ih^{-1} \in G_i$ ومنه $x \in H \cap G_i = H_i$ ، أي أن الزمرة H_i ناظمية في H وذلك أيًا كان $0 \leq i \leq n$. لنبرهن الآن أن $\langle [H_{i-1}, H] \rangle \subseteq H_i$ وذلك أيًا كان $1 \leq i \leq n$. بما أن $H_{i-1} \subseteq G_{i-1}$ وأن $H \subseteq G$ فإنه حسب التمهيدية (١٢-٢-١) يكون

$$\langle [H_{i-1}, H] \rangle \subseteq \langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$$

كذلك بما أن $H_i \subseteq H$ فإن $\langle [H_{i-1}, H] \rangle \subseteq H$ مما سبق نجد أن $\langle [H_{i-1}, H] \rangle \subseteq H \cap G_i = H_i$ حيث $1 \leq i \leq n$. وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) نجد أن الزمرة H عديمة القوى.

٢- لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G ، علنئذ الجداء G_iN زمرة جزئية من الزمرة G ، وبالتالي فإن G_iN/N زمرة جزئية من الزمرة G/N ، وذلك أيًا كان $0 \leq i \leq n$. وبما أن $G_iN \subseteq G_{i-1}N$ فإن $G_iN/N \subseteq G_{i-1}N/N$ بهذا الشكل نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من G/N وهي

$$N = \frac{G_nN}{N} \subseteq \frac{G_{n-1}N}{N} \subseteq \dots \subseteq \frac{G_2N}{N} \subseteq \frac{G_1N}{N} \subseteq \frac{G_0N}{N} = \frac{G}{N}$$

لنبرهن أن الزمرة G_iN/N ناظمية في الزمرة G/N وذلك أيًا كان $0 \leq i \leq n$. ليكن $\bar{y} \in \bar{g}(\frac{G_iN}{N})\bar{g}^{-1}$ ، وذلك أيًا كان $\bar{g} \in G/N$ ومنه يوجد $\bar{g}_i \in G_iN/N$ يحقق $\bar{y} = \bar{g}\bar{g}_i\bar{g}^{-1}$ ومنه

$$\bar{y} = (gN)(g_iN)(g^{-1}N) = (gg_i g^{-1})N$$

وبما أن الزمرة G_i ناظمية في G فإن $gg_i g^{-1} \in G_i$ وبالتالي

$$\bar{y} = (gg_1g^{-1})N \in G_i/N \subseteq G_iN/N$$

لنبرهن الآن على أن $\langle [G_{i-1}N/N, G/N] \rangle \subseteq G_iN/N$. لنكن

عندئذ $xN \in G_{i-1}N/N$ ، $yN \in G/N$ ومنه

$$[xN, yN] = (xN)(yN)(xN)^{-1}(yN)^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})N \in G_i/N \subseteq G_iN/N$$

مما سبق وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) نجد أن الزمرة G/N عديمة القوى .

لندرس الآن خاصية أخرى من خواص الزمر الجزئية للزمر عديمة القوى، وذلك

من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-٢-٤.

لنكن G زمرة عديمة القوى و $H \neq G$ زمرة جزئية من G . عندئذ $N(H) \neq H$.

البرهان.

لنكن G زمرة عديمة القوى، عندئذ فإن G تملك سلسلة ناظرية منتهية من الزمر

الجزئية من G على الشكل

$$E = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

تحقق $\langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$ حيث $1 \leq i \leq n$. ولنكن $H \neq G$ زمرة جزئية من G . بما أن

$G_n = \langle e \rangle \subseteq H$ وأن $H \subset G = G_0$ ، لنفرض أن k أول دليل من أجله

$G_k \subseteq H$ ، وبما أن

$$[G_{k-1}, H] \subseteq [G_{k-1}, G] \subseteq G_k \subseteq H$$

فإنه أياً كان $z \in N(H)$ و أياً كان $h \in H$ نجد أن

$$zhz^{-1} = (zhz^{-1}h^{-1})h = [z, h]h \in [G_{k-1}, H]h \subseteq Hh = H$$

أي أن $zHz^{-1} \subseteq H$. بشكل مشابه نجد أن $z^{-1}Hz \subseteq H$ وهذا يبين لنا

أن $H \subseteq zHz^{-1}$ أي أن $zHz^{-1} = H$. مما سبق نجد أن $G_{k-1} \subseteq N(H)$. وهكذا نجد

أن $N(H) \neq H$ ، لأنه إذا كان $N(H) = H$ وكما وجدنا أعلاه

يكون $G_{k-1} \subseteq N(H) = H$ وهذا يناقض اختيارنا للدليل k . أي أن $G_{k-1} \subseteq N(H)$.

بالاعتماد على المبرهنة السابقة نحصل على النتيجة الهامة التالية والتي نوردها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-٢-٥.

كل زمرة جزئية أعظمية من زمرة عديمة القوى تكون ناظمية.
البرهان.

لتكن G زمرة عديمة القوى و K زمرة جزئية أعظمية في G ، بما أن $G \neq K$ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٤) فإن $K \subset N(K) \subseteq G$ ولكون الزمرة K أعظمية في G نجد أن $N(K) = G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة K ناظمية في G .
نأتي الآن لإثبات المبرهنة الهامة التالية:
مبرهنة ١٢-٢-٦.

كل زمرة منتهية مرتبتها قوة لعدد أولي هي زمرة عديمة القوى.
البرهان.

لتكن G زمرة منتهية ولنفرض أن $(G:1) = p^n$ حيث p عدد أولي. البرهان سوف نورده بالاستقراء حسب n . نلاحظ أنه من أجل $n = 0$ المبرهنة صحيحة. كذلك الأمر إذا كان $n = 1$ فإن الزمرة G تكون تبديلية، وبالتالي فهي عديمة القوى. من أجل $n > 1$ لنفرض الآن أن المبرهنة صحيحة من أجل أي زمرة منتهية مرتبتها p^m حيث $m < n$. بما أن $(G:1) = p^n$ فإن $(Z(G):1) > 1$ حسب المبرهنة (١٠-٥) وحسب مبرهنة لاغرانج فإن $(Z(G):1) = p^r$ حيث $0 < r < n$ ، ومنه

$$(G/Z(G):1) = p^n / p^r = p^{n-r}$$

ولكون $n - r < n$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن الزمرة $G/Z(G)$ عديمة القوى وحسب المبرهنة (١٢-٢-٧) فإن الزمرة $G/Z(G)$ تملك السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية التالية

$$Z(G) = G_1 / Z(G) \subseteq G_{1+1} / Z(G) \subseteq \dots \subseteq G_1 / Z(G) \subseteq G_0 / Z(G) = G / Z(G)$$

تتحقق أن الزمرة $G_1 / Z(G)$ ناظمية في $G / Z(G)$ وأن

$$\langle [G_{i-1}/Z(G), G/Z(G)] \rangle \subseteq G_i/Z(G)$$

وذلك أيضاً كان $0 \leq i \leq t$. ليكن $y \in gG, g^{-1}$ وذلك أيضاً كان $g \in G$. عندئذ

يوجد $g_i \in G_i$ يحقق $y = gg_i g^{-1}$ ومنه

$$yZ(G) = (gZ(G))(g_iZ(G))[gZ(G)]^{-1} \in$$

$$\in gZ(G)(G_i/Z(G))[gZ(G)]^{-1} \subseteq G_i/Z(G)$$

وذلك لأن الزمرة $G_i/Z(G)$ ناظمية في الزمرة $G/Z(G)$. وهذا يبين لنا أن

$y = gg_i g^{-1} \in G_i$ وبالتالي الزمرة G_i ناظمية في G أي أن $0 \leq i \leq t+1$. لنبرهن

على أن $\langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$ حيث $1 \leq i \leq t+1$. ليكن $z \in G$, $x \in G_{i-1}$. عندئذ

$$x.Z(G) \in G_{i-1}/Z(G), \quad z.Z(G) \in G/Z(G)$$

$$[x.Z(G), z.Z(G)] \in [G_{i-1}/Z(G), G/Z(G)] \subseteq G_i/Z(G)$$

وهذا يبين لنا أن

$$(x.Z(G))(y.Z(G))(x^{-1}.Z(G))(y^{-1}.Z(G)) \in G_i/Z(G)$$

أي أن $(xyx^{-1}y^{-1})Z(G) \in G_i/Z(G)$ وبالتالي $(xyx^{-1}y^{-1}) \in G_i$. وهكذا

نجد أن $[G_{i-1}, G] \subseteq G_i$ أي أن $\langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$ حيث $1 \leq i \leq t+1$. وبما

أن $\langle [G_t, G] \rangle \subseteq G_{t+1}$ وأن $G_t = Z(G)$ نجد أن $G_{t+1} = E$. مما سبق وحسب المبرهنة

(١٢-٢-٢) نجد أن الزمرة G عديمة القوى.

مبرهنة ١٢-٢-٧.

الجداء المباشر لأي عدد منته من الزمر عديمة القوى هو زمرة عديمة القوى.

البرهان.

يكفي لإثبات صحة المبرهنة أن نثبت أن الجداء المباشر لزمريتين عديمتي القوى هو

زمرة عديمة القوى. لنكن H, K زمر عديمة القوى عندئذ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢)

(٢) فإنه لأجل الزمرة H توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من H على الشكل

$$E = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq H_{n-2} \subseteq \dots \subseteq H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0 = H$$

تحقق أن الزمرة H_i ناظمية في H حيث $0 \leq i \leq n$ وأن $\langle [H_{i-1}, H] \rangle \subseteq H_i$ حيث $1 \leq i \leq n$. كذلك لأجل الزمرة K توجد سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من K على الشكل

$$(*) \quad E = K_m \subseteq K_{m-1} \subseteq K_{m-2} \subseteq \dots \subseteq K_2 \subseteq K_1 \subseteq K_0 = K$$

تحقق أن الزمرة K_i ناظمية في K حيث $0 \leq i \leq m$ وأن $\langle [K_{i-1}, K] \rangle \subseteq K_i$ حيث $1 \leq i \leq m$. إذا كان $n \neq m$ لنفرض أن $n > m$ عندئذ بالإمكان إضافة حدود جديدة إلى السلسلة $(*)$ للحصول على سلسلة جديدة على الشكل

$$E = K_n = K_{n-1} = \dots = K_m \subseteq K_{m-2} \subseteq \dots \subseteq K_2 \subseteq K_1 \subseteq K_0 = K$$

حيث $K_j = E$ لأجل $m \leq j \leq n$. لنفرض أن $G = K \oplus H$ ولنبين أن الزمرة G عديمة القوى. لنضع $G_i = K_i \oplus H_i$ حيث $0 \leq i \leq n$ فنجد أن $G_i = K_i \oplus H_i \subseteq K_{i-1} \oplus H_{i-1} = G_{i-1}$ عندئذ نحصل على السلسلة التالية

$$E_G = E_K \oplus E_H = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq G_{n-2} \subseteq \dots \subseteq G_2 \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

من الزمر الجزئية من الزمرة G وحسب التمهيدية (٨-١-٨) وبما أن الزمرة H_i ناظمية في H وأن K_i ناظمية في K فإن الزمرة $G_i = K_i \oplus H_i$ تكون ناظمية في $G = K \oplus H$ حيث $0 \leq i \leq n$. لنبرهن على أن $\langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$ ، بما أن $[G_{i-1}, G] = [H_{i-1} \oplus K_{i-1}, H \oplus K] = [H_{i-1}, H] \oplus [K_{i-1}, K] \subseteq H_i \oplus K_i = G_i$ فإن $\langle [G_{i-1}, G] \rangle \subseteq G_i$. مما سبق وحسب المبرهنة (٩-٢-٢) نجد أن الزمرة $G = K \oplus H$ عديمة القوى.

لمتابعة دراستنا للزمر عديمة القوى، لابد لنا من بعض المفاهيم الجديدة والتي هي بحد ذاتها تعد بنى جزئية ذات خواص هامة والبدائية ستكون من التعريف التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة ونعرف الزمر الجزئية $Z_n(G), \Gamma_n(G)$ من الزمرة G بالشكل التالي:

١ - $\Gamma_1(G) = G$ ومن أجل أي عدد صحيح $n > 1$ فإن

$$\Gamma_n(G) = \langle [\Gamma_{n-1}, G] \rangle$$

٢ - $Z_0(G) = E$ و أيًا كان $n \in N^*$ فإن

$$\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_{n-1}(G)}\right)$$

كما هو واضح من التعريف فإن كلاً من $\Gamma_1(G), Z_0(G)$ هي زمر جزئية من الزمرة G وقبل البدء في دراسة تأثير البنى الجزئية $\Gamma_i(G), Z_i(G)$ لنتعرف على طبيعة هذه البنى الجزئية وخواصها وذلك من خلال التمهيدية التالية:
تمهيدية ١٢-٢-٨.

لأجل أي زمرة G القضايا التالية صحيحة:

١ - كل من

$$\forall n \in N^*; \quad \Gamma_n(G)$$

$$\forall n \in N; \quad Z_n(G)$$

زمر جزئية من الزمرة G .

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \Gamma_3(G) \supseteq \Gamma_4(G) \supseteq \dots \quad - ٢$$

$$E = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq Z_3(G) \subseteq \dots \quad - ٣$$

البرهان.

١ - ينتج مباشرة من التعريف.

٢ - البرهان بالاستقراء على n . حسب التعريف لدينا $\Gamma_1(G) = G$.

من أجل $n = 2$ فإن $\Gamma_2(G) \subseteq \Gamma_1(G) = G$.

من أجل $n = 3$ فإن $\Gamma_3(G) = \langle [\Gamma_2(G), G] \rangle \subseteq \langle [\Gamma_1(G), G] \rangle = \Gamma_2(G)$. لنفرض أن

$$\Gamma_n(G) \subseteq \Gamma_{n-1}(G) \text{ عندئذ}$$

$$\Gamma_{n+1}(G) = \langle [\Gamma_n(G), G] \rangle \subseteq \langle [\Gamma_{n-1}(G), G] \rangle = \Gamma_n(G)$$

٣ - البرهان بالاستقراء على n . حسب التعريف لدينا $Z_0(G) = E$. ومنه

$$E = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \text{ وبالتالي فإن } Z\left(\frac{G}{Z_1(G)}\right) = \frac{Z_2(G)}{Z_1(G)}$$

$$Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \text{ . لنفرض أن } Z_{n-1}(G) \subseteq Z_n(G) \text{ عندئذ } Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right) = \frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}$$

$$\text{ومنه } Z_n(G) \subseteq Z_{n+1}(G) .$$

من خلال المبرهنة التالية سوف ندرس طبيعة الزمر الجزئية $\Gamma_n(G), Z_n(G)$.

مبرهنة ١٢-٢-٩.

لتكن G زمرة. عندئذ القضايا التالية صحيحة:

١ - أيًا كان $n \in N^*$ فإن $\Gamma_n(G)$ زمرة جزئية متميزة في G .

٢ - أيًا كان $n \in N$ فإن $Z_n(G)$ زمرة جزئية متميزة في G .

البرهان.

١ - بالاستقراء على n .

من أجل $n=1$ فإن $\Gamma_1(G) = G$ وبالتالي الزمرة $\Gamma_1(G)$ متميزة في G .

من أجل $n=2$ فإن $\Gamma_2(G) = \langle [\Gamma_1(G), G] \rangle = \langle [G, G] \rangle = G'$ وحسب المبرهنة (١٢-١-١٢) فإن الزمرة G' متميزة في G وبالتالي الزمرة $\Gamma_2(G)$ متميزة في G . من

أجل $n > 1$ لنفرض أن الزمرة $\Gamma_n(G)$ متميزة في G . ليكن $\alpha \in \text{Aut}(G)$ بما أن

$$\Gamma_{n+1}(G) = \langle [\Gamma_n(G), G] \rangle \text{ عندئذ أيًا كان } [h, k] \in [\Gamma_n(G), G]$$

$$\alpha([h, k]) = \alpha(hkhk^{-1}) = \alpha(h)\alpha(k)(\alpha(h))^{-1}(\alpha(k))^{-1}$$

وبما أن الزمرة $\Gamma_n(G)$ متميزة في G فإنه أيًا كان $x \in \Gamma_n(G)$ فإن

$$\alpha(x) \in \alpha(\Gamma_n(G)) = \Gamma_n(G)$$

ومنه بما أن $h \in \Gamma_n(G)$ فإن $\alpha(h) \in \Gamma_n(G)$ وبالتالي

$$\alpha([h, k]) = [\alpha(h), \alpha(k)] \in [\Gamma_n(G), G]$$

أي أن

$$\alpha([\Gamma_n(G), G]) \subseteq [\Gamma_n(G), G] \subseteq \langle [\Gamma_n(G), G] \rangle$$

وهذا يبين لنا أن

$$\alpha(\Gamma_{n+1}(G)) = \alpha([\Gamma_n(G), G]) \subseteq \langle [\Gamma_n(G), G] \rangle = \Gamma_{n+1}(G)$$

وذلك أياً كان $\alpha \in \text{Aut}(G)$ وبما أن $\alpha^{-1} \in \text{Aut}(G)$ فإن $\alpha^{-1}(\Gamma_{n+1}(G)) \subseteq \Gamma_{n+1}(G)$ ومنه $\alpha(\Gamma_{n+1}(G)) = \Gamma_{n+1}(G)$ مما سبق نجد أن $\Gamma_{n+1}(G) \subseteq \alpha(\Gamma_{n+1}(G))$ أي أن الزمرة $\Gamma_{n+1}(G)$ متميزة في G . وهكذا نجد أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن الزمرة $\Gamma_n(G)$ متميزة في G .

٢ - بالاستقراء على n . من أجل $n=0$ فإن $Z_0(G) = E$ ومنه الزمرة $Z_0(G)$ متميزة في G . من أجل $n=1$ نجد أن

$$Z_1(G) = \frac{Z_1(G)}{Z_0(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_0(G)}\right) = Z(G)$$

وحسب التمرين المحلول (٧-١) بما أن الزمرة $Z(G)$ متميزة في G فإن الزمرة $Z_1(G)$ متميزة في G . من أجل $n > 1$ لنفرض أن الزمرة $Z_n(G)$ متميزة في G وبما أن الزمرة $Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right)$ متميزة في $\frac{G}{Z_n(G)}$ وذلك حسب التمرين المحلول (٧-١) وبما أن

$$Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right) = \frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}$$

نجد أن الزمرة $\frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}$ متميزة في الزمرة $\frac{G}{Z_n(G)}$. وبما أن $Z_n(G) \subseteq Z_{n+1}(G) \subseteq G$ وحسب المبرهنة (٧-٨) فإن الزمرة $Z_{n+1}(G)$ تكون متميزة في G . مما سبق نجد أنه $\forall n \in N$ فإن الزمرة $Z_n(G)$ تكون متميزة في G .

في G .

نتيجة.

لتكن G زمرة. علند القضايا التالية صحيحة:

١ - أياً كان $n \in N^*$ فإن زمرة جزئية ناظرية في G .

٢ - أياً كان $n \in N$ فإن زمرة جزئية ناظرية في G .

البرهان.

ينتج من المبرهنة (١٢-٢-٩) وذلك لأن كل زمرة متميزة تكون ناظمية. هـ
لندرس الآن العلاقة الجديرة بالملاحظة بين الزمرتين الجزئيتين $\Gamma_n(G), Z_n(G)$
وبين الزمرة G وذلك عندما تكون الزمرة G عديمة القوى.
مبرهنة ١٢-٢-١٠.

الشروط التالية متكافئة لأجل أي زمرة G :

- ١ - الزمرة G عديمة القوى.
- ٢ - يوجد $n \in N^*$ بحيث $\Gamma_n(G) = E$.
- ٣ - يوجد $n \in N$ بحيث $Z_n(G) = G$.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة G عديمة القوى عندئذ وحسب المبرهنة (٩-٢-٢)
فإن الزمرة G تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الشكل

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_r = G$$

تحقق أن الزمرة G_i ناظمية في G حيث $0 \leq i \leq r$ وأن $G_{i+1} \subseteq G_i$ تحقق
 $0 \leq i \leq r-1$. لبرهن بالاستقراء على أن $\Gamma_{j+1}(G) \subseteq G_{r-j}$ ، $j = 0, 1, 2, 3, \dots$
من أجل $j = 0$ فإن $\Gamma_1(G) \subseteq G = G_r$ والفضية صحيحة.

من أجل $j > 0$ لنفرض أن $\Gamma_j(G) \subseteq G_{r-(j-1)} = G_{r-j+1}$ وبمما أن
 $\langle \Gamma_{r-j+1}(G), G \rangle \subseteq G_{r-j}$ عندئذ

$$\Gamma_{j+1}(G) = \langle \Gamma_j(G), G \rangle \subseteq \langle G_{r-j+1}, G \rangle \subseteq G_{r-j}$$

وذلك لأن الزمرة G_{r-j} ناظمية في الزمرة G . ومنه $\Gamma_{r+1}(G) \subseteq G_{r-r} = G_0 = E$
وبالتالي $\Gamma_{r+1}(G) = E$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لديها

$$E = \Gamma_n(G) \subseteq \Gamma_{n-1}(G) \subseteq \Gamma_{n-2}(G) \subseteq \dots \subseteq \Gamma_2(G) \subseteq \Gamma_1(G) = G$$

سلسلة من الزمر الجزئية من الزمرة G تحقق أن الزمرة $\Gamma_i(G)$ ناظمية في G حيث $1 \leq i \leq n$. وأن $\langle \Gamma_i(G), G \rangle = \Gamma_{i+1}(G)$ حيث $1 \leq i \leq n-1$ وحسب المبرهنة (١٢-٢-٢) فإن الزمرة G عديمة القوى.

(١) $\Leftarrow$ (٣). لنفرض أن الزمرة G عديمة القوى وحسب التعريف فإن الزمرة G تملك سلسلة ناظمية منتهية من الزمر الجزئية من G على الشكل

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_r = G$$

تحقق أن الزمرة G_i ناظمية في G حيث $0 \leq i \leq r$ وأن $\frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$ حيث

$0 \leq i \leq r$. ولبرهن بالاستقراء على أن $G_i \subseteq Z_i(G)$ حيث $0 \leq i \leq r$.

من أجل $i=0$ فإن $G_0 = E = Z_0(G)$ والفرضية صحيحة في هذه الحالة.

من أجل $i > 0$ لنفرض أن $G_{i-1} \subseteq Z_{i-1}(G)$ عندئذ $G_{i-1} \subseteq Z_{i-1}(G)$ وبما

أن $\frac{G_i}{G_{i-1}} \subseteq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$ وحسب التمرين المحلول (٥-٩) نجد أن

$$\frac{G_i \cdot Z_{i-1}(G)}{Z_{i-1}(G)} \subseteq Z(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}) = \frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)}$$

ومنه $G_i \subseteq Z_i(G)$. وهكذا نجد أن $G = G_r \subseteq Z_r(G)$ أي أن $Z_r(G) = G$.

(٣) $\Leftarrow$ (١). لنفرض أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $Z_n(G) = G$ عندئذ

$$E = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \dots \subseteq Z_n(G) = G$$

سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الزمرة G والتي تحقق أن الزمرة $Z_i(G)$

ناظمية في G . وبالتالي تكون السلسلة السابقة سلسلة ناظمية $0 \leq i \leq n$. من جهة

أخرى بما أن $\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z(\frac{G}{Z_i(G)})$ حيث $0 \leq i \leq n-1$ نجد أن الزمرة G

عديمة القوى. $\square$

تمهيدية ١٢-٢-١١.

لنكن G زمرة. عندئذ:

$$[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z] \quad \forall x, y, z \in G - 1$$

٢ - إذا كانت H, M, K زمرة جزئية ناظمية في G فإن

$$\langle [H.M, K] \rangle = \langle [H, K] \rangle \cdot \langle [M, K] \rangle$$

البرهان.

١ - ليكن $x, y, z \in G$ عندها

$$\begin{aligned} [xy, z] &= (xy)z(xy)^{-1}z^{-1} = xyzzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = x(yzy^{-1})(z^{-1}z)x^{-1}z^{-1} = \\ &= x[y, z]zx^{-1}z^{-1} = x[y, z]x^{-1}(xzx^{-1}z^{-1}) = x[y, z]x^{-1}[x, z] \end{aligned}$$

٢ - لتكن H, M, K زمرة جزئية ناظمية في G عندها الجداء $H.M$ زمرة جزئية

في G وبما أن $H, M \subseteq H.M$ فإنه حسب التمهيدية (١٢-٢-١) نجد أن

$$\langle [H, K] \rangle, \langle [M, K] \rangle \subseteq \langle [H.M, K] \rangle$$

وبما أن الزمر H, M, K ناظمية في G فإن الزمر الجزئية $\langle [H, K] \rangle, \langle [M, K] \rangle$

تكون ناظمية في G (راجع التمرين ١٢-٦). ومنه فإن

$$\langle [H, K] \rangle \cdot \langle [M, K] \rangle \subseteq \langle [H.M, K] \rangle$$

ليكن $a \in [H.M, K]$ عندها $a = [hm, k]$ حيث $h \in H, m \in M, k \in K$ وحسب (١)

فإن

$$a^{-1} = [hm, k]^{-1} = (h[m, k]h^{-1}[h, k])^{-1} = [h, k]^{-1}h[m, k]^{-1}h^{-1}$$

وبما أن $[h, k] \in [H, K] \subseteq \langle [H, K] \rangle$ فإن $[h, k]^{-1} \in \langle [H, K] \rangle$. من جهة أخرى بما

أن الزمرة $\langle [M, K] \rangle$ ناظمية في G وأن $[m, k] \in [M, K] \subseteq \langle [M, K] \rangle$ نجد أن

$[m, k]^{-1} \in \langle [M, K] \rangle$ وبالتالي $h[m, k]^{-1}h^{-1} \in \langle [M, K] \rangle$ مما سبق نجد أن

$a^{-1} \in \langle [H, K] \rangle \cdot \langle [M, K] \rangle$ وبما أن الجداء في الطرف الأيمن يشكل زمرة جزئية

في G فإن $a \in \langle [H, K] \rangle \cdot \langle [M, K] \rangle$ ومنه $\langle [H.M, K] \rangle \subseteq \langle [H, K] \rangle \cdot \langle [M, K] \rangle$.

وهكذا نجد أن $\langle [H.M, K] \rangle = \langle [H, K] \rangle \cdot \langle [M, K] \rangle$.

تعريف.

لتكن G و n عددين صحيحين موجبيين ولتكن $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ زمراً جزئية من

الزمرة G . نعرف المبادل للزمر $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ بالشكل التالي:

$$[G_1, G_2, G_3, \dots, G_n] = \begin{cases} G_1 & \text{if } n=1 \\ \langle [G_1, G_2] \rangle & \text{if } n=2 \\ \langle \langle [G_1, G_2], G_3 \rangle \rangle & \text{if } n=3 \\ \langle \langle \dots \langle \langle \langle [G_1, G_2], G_3 \rangle, G_4 \rangle, \dots \rangle, G_{n-1} \rangle, G_n \rangle & \text{if } n > 3 \end{cases}$$

تمهيدية ١٢-٢-١٢.

لتكن G زمرة و n عدداً صحيحاً موجباً، عندئذ

$$\underbrace{[G, G, G, \dots, G]}_{n\text{-once}} = \Gamma_n(G)$$

البرهان.

بالاستقراء حسب n . من أجل $n=1$ فإن $\Gamma_1(G) = G$.

من أجل $n=2$ فإن $\Gamma_2(G) = \langle [G, G] \rangle = \langle [G, G] \rangle = \Gamma_2(G)$.

لنفرض أن القضية صحيحة من أجل $(n-1)$ عندئذ

$$\underbrace{[G, G, G, \dots, G]}_{n\text{-once}} = \langle \underbrace{[\langle [\langle [\langle [G, G], G \rangle, G \rangle, \dots] \rangle, G \rangle, G \rangle]}_{n\text{-once}} \rangle, G \rangle = \langle [\Gamma_{n-1}(G), G] \rangle = \Gamma_n(G)$$

تمهيدية ١٣-٢-١٢.

لتكن r, s أعداداً صحيحة موجبة وأن $r \leq s$ ولتكن $G_1, G_2, G_3, \dots, G_r, H, K$ زمراً جزئية ناظرية من الزمرة G . عندئذ

$$\begin{aligned} [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H, K, G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s] &= \\ = [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H, G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s] &= \\ [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, K, G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s] &= \end{aligned}$$

البرهان.

من أجل $r=s=1$ عندئذ حسب التمهيدية (١٢-٢-١٢) فإن

$$[G_1, HK] = [G_1, H] \cdot [G_2, G]$$

من أجل $r=s>1$ لنفرض أن $M = [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}]$ عندئذ

$$[G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H, K] = [M, H, K] = [M, H] \cdot [M, K] =$$

$$= [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H] \cdot [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, K]$$

وذلك حسب التمهيدية (١٢-٢-١١).

من أجل $r = 1 < s$ عندئذ حسب التعريف نجد أن

$$[H, K, G_2, G_3, \dots, G_s] = [[H, K, G_2], G_3, \dots, G_s] =$$

$$= [[H, G_2], [K, G_2], G_3, \dots, G_s]$$

$$= [[H, G_2, G_3], [K, G_2, G_3], \dots, G_s]$$

= ...

$$= [H, G_2, G_3, \dots, G_s], [K, G_2, G_3, \dots, G_s]$$

من أجل $1 < r < s$ عندئذ

$$[G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H, K, G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s] =$$

$$= [[G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H, K], G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s] =$$

$$= [[G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H] [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, K], G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s].$$

$$[[G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, K], G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s]$$

$$= [G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, H, G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s].$$

$$[G_1, G_2, G_3, \dots, G_{r-1}, K, G_{r+1}, G_{r+2}, \dots, G_s]$$

نأتي الآن لإثبات مبرهنة 1938 - *H.Fitting* التي تتلاق بجداء الزمر عديمة

القوى.

مبرهنة ١٢-٢-١٤.

لنكن H, K زمراً جزئية ناظرية عديمة القوى من الزمرة G ، عندئذ الجداء $H.K$

زمرة جزئية ناظرية عديمة القوى في G .

البرهان.

بما أن الزمر الجزئية H, K ناظرية في G فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناظرية

في G . من جهة أخرى، بما أن الزمر H, K عديمة القوى فإنه حسب المبرهنة (١٢-١٢-١٢)

(١٠-٢) يوجد $\alpha+1, \beta+1 \in N^*$ بحيث $\Gamma_{\alpha+1}(H) = E, \Gamma_{\beta+1}(K) = E$ لنبرهن على أن $\Gamma_{\alpha+\beta+1}(H.K) = E$ لدينا حسب التمهيدية (١٢-٢-١٢) أن

$$\begin{aligned}\Gamma_n(H.K) &= [\underbrace{H.K, H.K, \dots, H.K}_{n\text{-once}}] = [\underbrace{H, H.K, H.K, \dots, H.K}_{n-1\text{-once}}] \\ &= [K, \underbrace{H.K, H.K, \dots, H.K}_{n-1\text{-once}}] \\ &= \dots \\ &= [L_1, L_2, L_3, \dots, L_n]\end{aligned}$$

حيث عدد المضارب في الطرف الأيمن هو 2^n وأن $L_i = H, \text{ or } L_i = K$ من أجل $i=1, 2, \dots, n$. ليكن r عدداً صحيحاً موجباً، بما أن الزمرة H ناظمية في G وأن الزمرة $\Gamma_r(H)$ متميزة في H وذلك حسب المبرهنة (٩-٢-١٢) وأن $\Gamma_r(H) \subseteq H \subseteq G$ فإن الزمرة $\Gamma_r(H)$ ناظمية في G وذلك حسب المبرهنة (٧-٧). وحسب التمهيدية (١٢-٢-١٢) فإن $[\Gamma_r(H), K] \subseteq \Gamma_r(H)$. لنفرض أن عدد الحدود في الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة التي من أجلها $L_i = H$ يساوي r وأن عدد الحدود التي من أجلها $L_i = K$ يساوي $n-r$ عندها $[L_1, L_2, L_3, \dots, L_n] \subseteq \Gamma_r(H)$ وأنه من أجل $r < n$ فإن $[L_1, L_2, L_3, \dots, L_n] \subseteq \Gamma_{n-r}(K)$.

من أجل $n = \alpha + \beta + 1$ فإنه عندما $r \geq n+1$ أو $n-r \geq \beta+1$ فإن $\Gamma_r(H) = E$ وأن $\Gamma_{n-r}(K) = E$ وهذا يبين لنا أن $[L_1, L_2, L_3, \dots, L_n] = E$ وهذا صحيح من أجل جميع المضارب في العلاقة الأخيرة والتي عدد حدودها 2^n . ومنه

$$\Gamma_n(H.K) = \Gamma_{\alpha+\beta+1}(H.K) = E$$

أي أن $\Gamma_{\alpha+\beta+1}(H.K) = E$ وحسب المبرهنة (١٢-٢-١٠) نجد أن الزمرة $H.K$ عديمة القوى. ◻

مبرهنة ١٢-٢-١٥.

كل زمرة منتهية تحوي زمرة جزئية ناظمية عديمة القوى أعظمية.

البرهان.

لتكن G زمرة منتهية وأن K الزمرة الجزئية الناعمية عديمة القوى في G ذات المراتبة الأكبر. ولتكن H زمرة جزئية ناعمية عديمة القوى في G عندئذ حسب المبرهنة (١٢-٢-١٤) فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية ناعمية عديمة القوى في G . وبما أن $K \subseteq H.K$ وحسب اختيارنا للزمرة K نجد أن $K = H.K$ ، وهذا يبين لنا أن $H \subseteq K$. مما سبق نجد أن الزمرة K هي الزمرة الجزئية الناعمية الأعظمية عديمة القوى في G .

١٢-٣. الـ M - زمرة.

في هذه الفقرة سوف ندرس الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمر الجزئية لزمرة ما منتهية التوليد وسوف نتعرف أيضا إلى صف معين من الزمر الذي يحقق هذا الشرط والبدائية ستكون مع التعريف التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة ولتكن

$$E = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n = G$$

سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من الزمرة G .

١- نقول عن السلسلة السابقة إنها سلسلة ناعمية إذا كانت الزمرة A_i ناعمية في A_{i+1} حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

٢- نقول عن السلسلة السابقة إنها M -سلسلة ناعمية إذا كانت سلسلة ناعمية (أي

الزمرة A_i ناعمية في A_{i+1} حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ وأن الزمرة $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ إما

دائرة غير منتهية أو منتهية.

تعريف.

نقول عن الزمرة G إنها M -زمرة إذا ملكت M -سلسلة ناعمية.

نتيجة.

كل زمرة فتل هي M - زمرة.

لنتعرف الآن إلى الزمر الجزئية وزمر الخارج للـ M - زمر وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-٣-١.

لتكن G عبارة عن M - زمرة. عللنا:

١ - كل زمرة جزئية من G هي M - زمرة.

٢ - إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية في G عللنا G/N عبارة عن M - زمرة. البرهان.

بما أن الزمرة G عبارة عن M - زمرة فإن الزمرة G تملك سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من G على الشكل

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$

تحقق أن الزمرة G_i ناظمية في G_{i+1} وأن الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ إما دارة غير منتهية أو

منتهية حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

١ - لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ، ولضع

$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ عللنا لحصل على سلسلة منتهية من الزمر

الجزئية من H وهي

$$E = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n = H$$

لنبرهن على أن الزمرة H_i ناظمية في H_{i+1} $i = 0, 1, 2, \dots, n$. ليكن $y \in h_{i+1} H_i h_{i+1}^{-1}$

وذلك $\forall h_{i+1} \in H_{i+1}$ عللنا يوجد $h_i \in H_i$ بحيث $y = h_{i+1} h_i h_{i+1}^{-1}$ وبما أن $h_i \in G_i$

وأن $h_{i+1} \in G_{i+1}$ ولكون الزمرة G_i ناظمية في G_{i+1} نجد أن $y \in G_i$ وبما أن

$y \in H$ نجد أن $y \in H \cap G_i = H_i$ أي أن $h_{i+1} h_i h_{i+1}^{-1} \in H_i$ ومنه نجد أن

الزمرة H_i ناظمية في H_{i+1} $i = 0, 1, 2, \dots, n$. من جهة أخرى لدينا

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{G_{i+1} \cap H}{G_i \cap H} = \frac{G_{i+1} \cap H}{G_i \cap (G_{i+1} \cap H)} \approx \frac{G_i(G_{i+1} \cap H)}{G_i} \subseteq \frac{G_{i+1}}{G_i}$$

إذا كانت الزمرة $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ منتهية يتم المطلوب. إذا كانت الزمرة $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ غير منتهية فإن

الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ تكون غير منتهية وبالتالي تكون دارة وحسب المبرهنة (٣-١-٩)

تكون الزمرة $\frac{H_{i+1}}{H_i}$ دارة وغير منتهية. مما سبق نجد أن الزمرة H هي M - زمرة.

٢ - لنكن N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G عندئذ الجداء $G_i N$ زمرة جزئية من الزمرة G وبما أن $N \subseteq G_i N$ وأن N ناظمية في الزمرة G فإن الزمرة N تكون ناظمية في الزمرة $G_i N$ وبالتالي فإن $G_i N / N$ هي زمرة جزئية من الزمرة G / N حيث $i = 0, 1, 2, \dots, n$. وبما أن $G_i N \subseteq G_{i+1} N$ فإننا نحصل على السلسلة المنتهية من الزمر الجزئية من G / N على الشكل

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_0 N}{N} \subseteq \frac{G_1 N}{N} \subseteq \frac{G_2 N}{N} \subseteq \dots \subseteq \frac{G_n N}{N} = \frac{G}{N}$$

لنبرهن الآن على أن الزمرة $\frac{G_i N}{N}$ ناظمية في $\frac{G_{i+1} N}{N}$. ليكن $\frac{G_i N}{N} \cdot \bar{g}_{i+1}^{-1} \cdot \bar{g}_{i+1} \in \frac{G_{i+1} N}{N}$

وذلك أيًا كان $\bar{g}_{i+1} \in \frac{G_{i+1} N}{N}$. ومنه يوجد $\bar{g}_i \in \frac{G_i N}{N}$ يحقق $\bar{y} = \bar{g}_{i+1} \bar{g}_i \bar{g}_{i+1}^{-1}$

وبالتالي

$$\bar{y} = (g_{i+1} N)(g_i N)(g_{i+1} N)^{-1} = (g_{i+1} g_i g_{i+1}^{-1}) N$$

وبما أن الزمرة G_i ناظمية في الزمرة G_{i+1} نجد أن $g_{i+1} g_i g_{i+1}^{-1} \in G_i$ وبالتالي

$$\bar{y} = (g_{i+1} g_i g_{i+1}^{-1}) N \in \frac{G_i}{N} \subseteq \frac{G_i N}{N}$$

مما سبق نجد أن الزمرة $\frac{G_i N}{N}$ ناظمية في $\frac{G_{i+1} N}{N}$ حيث $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

إذا كانت الزمرة $\frac{G_{i+1} N}{N} / \frac{G_i N}{N}$ منتهية يتم المطلوب.

لنفرض أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{N} / \frac{G_i N}{N}$ غير منتهية وبما أن $\frac{G_{i+1}N}{N} \approx \frac{G_{i+1}N}{G_i N}$ نجد
 أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{G_i N}$ غير منتهية وبالتالي تكون الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ غير منتهية وحسب
 الفرض فإن الزمرة $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ دوارة أي أن الزمرة $\frac{G_{i+1}N}{G_i N}$ دوارة. مما سبق نجد أن
 الزمرة G/N هي M - زمرة.

لندرس الآن الشرط اللازم والكافي كي تكون زمرة ما عبارة عن M - زمرة.
 مبرهنة ١٢-٣-٢.

لتكن G زمرة و N زمرة جزئية ناظمية في G . الشروط التالية متكافئة:

- ١ - الزمرة G هي M - زمرة.
 - ٢ - كل من الزمرتين N و G/N عبارة عن M - زمرة.
- البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). ينتج وبشكل مباشر من المبرهنة (١٢-٣-١).

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). بما أن كلا من الزمرتين G/N و N عبارة عن M - زمرة فإنه توجد
 سلسلة منتهية من الزمر الجزئية من N على الشكل

$$E = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_{n-1} \subseteq N_n = N$$

تحقق أن الزمرة N_i ناظمية في الزمرة N_{i+1} وأن الزمرة $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ إما منتهية أو دوارة
 غير منتهية، حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. كذلك توجد أيضا سلسلة منتهية أخرى من
 الزمر الجزئية من الزمرة G/N على الشكل

$$N = \frac{N}{N} = \frac{G_0}{N} \subseteq \frac{G_1}{N} \subseteq \frac{G_2}{N} \subseteq \dots \subseteq \frac{G_{m-1}}{N} \subseteq \frac{G_m}{N} = \frac{G}{N}$$

تحقق أن الزمرة $\frac{G_i}{N}$ ناظمية في الزمرة $\frac{G_{i+1}}{N}$ وأن الزمرة $\frac{G_{i+1}/N}{G_i/N}$ إما منتهية أو
 دوارة غير منتهية، حيث $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$. لنشكل السلسلة المنتهية من الزمر
 الجزئية من الزمرة G التالية:

$$E = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_n \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_{m-1} \subseteq G_m = G$$

وهذه السلسلة هي سلسلة ناظرية وأن زمر الخارج لهذه السلسلة إما منتهية أو دوارة غير منتهية. وهذا يبين لنا أن الزمرة G هي M -زمرة.

تعريف.

نقول عن الزمرة G إنها تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية إذا كانت كل مجموعة جزئية وغير خالية من الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا يساوي G تحوي عنصراً أعظماً.

مبرهنة ١٢-٣-٣.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظرية في الزمرة G . إذا كانت كل من الزمرتين H و G/H تحققان الشرط الأعظمي للزمر الجزئية عندئذ الزمرة G تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

البرهان.

نفرض أن كلا من الزمرتين H و G/H تحققان الشرط الأعظمي للزمر الجزئية. ولتكن S مجموعة غير خالية من الزمر الجزئية من G . ولنأخذ المجموعة

$$S_H = \{N \cap H; \quad N \in S\}$$

فلنجد أن المجموعة S_H هي مجموعة جزئية من الزمر الجزئية من H وحسب الفرض فإن المجموعة S_H تحوي عنصراً أعظماً وليكن A .

من جهة أخرى بما أن الزمرة H ناظرية في G فإن الجداء LH زمرة جزئية من G وذلك $\forall L \in S$ وبما أن $H \subseteq LH$ فإن الزمرة H تكون ناظرية في LH ومنه فإن LH/H زمرة جزئية من G/H وذلك $\forall L \in S$. لنأخذ المجموعة

$$S^* = \left\{ \frac{LH}{H}; \quad L \in S : L \cap H = A \right\}$$

فلنجد أن S^* هي مجموعة غير خالية من الزمر الجزئية من الزمرة G/H وحسب الفرض فإن المجموعة S^* تحوي عنصراً أعظماً وليكن B ومنه يوجد $K \in S$ بحيث $B = K \cap H$ وأن $B = \frac{KH}{H}$. للبرهن على أن العنصر K هو عنصر أعظمي

في S . لنفرض جدلاً أن العنصر K ليس أعظمياً في S علئذ يوجد $K' \in S$ بحيث $K \subset K'$ ومنه $K' \cap H \in S_H$ وبما أن $A = K \cap H \subseteq K' \cap H$ نجد أن $K' \cap H = A$ وذلك لأن العنصر A هو عنصر أعظمي في S_H . من جهة أخرى، بما أن $K' \cap H = A$ فإن $\frac{K'H}{H} \in S^*$ كذلك بما أن $K \subset K'$ فإن $KH \subset K'H$ وبالتالي $B = \frac{KH}{H} \subset \frac{K'H}{H}$ وبما أن العنصر B أعظمي في S^* نجد أن $\frac{K'H}{H} = B$. من جهة أخرى، بما أن $K \subset K'$ يوجد عنصر $x \in K'$ بحيث $x \notin K$ ومنه $xH \in \frac{K'H}{H} = B$ وبما أن $B = \frac{KH}{H}$ يوجد $y \in K$ بحيث $xH = yH$ ولكون $x \in xH = yH$ يوجد $h \in H$ بحيث $x = yh$ ومنه

$$h = y^{-1}x \in H \cap K' = A = H \cap K$$

نجد أن $x = yh \in K$ وهذا يناقض كون $x \notin K$. مما سبق نجد أن $K = K'$ أي أن العنصر K هو عنصر أعظمي في S وبالتالي تكون الزمرة G محقق للشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

تعريف.

لنكن G زمرة و

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \dots$$

سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من الزمرة G نقول عن السلسلة السابقة أنها تنقطع إذا وجد دليل $k \in \mathbb{N}^*$ يحقق $K_k = K_n$ وذلك أياً كان $n \geq k$.
لندرس الآن العلاقة بين الزمر المحققة لشرط انقطاع السلاسل المتزايدة و الزمر المحقق للشرط الأعظمي وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة ١٢-٣-٤.

لأجل أي زمرة G الشروط التالية متكافئة:

- ١ - الزمرة G تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.
- ٢ - كل سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من الزمرة G تنقطع.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لتكن

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_r \subset \dots$$

سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من G . عندئذ المجموعة

$$\mathfrak{I} = \{A_i; \quad i=1,2,3,\dots\}$$

حسب الفرض تحوي عنصراً أعظماً وليكن A_n . ليكن $k \in N^*$ بحيث $k > n$ عندئذ $A_k = A_n$ لأن $A_k \in \mathfrak{I}$ وأن $A_n \subseteq A_k$ وبما أن العنصر A_n أعظمي في $\mathfrak{I}$ نجد أن $A_k = A_n$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لتكن $\mathfrak{I}$ مجموعة جزئية وغير خالية من الزمرة الجزئية من G . ولنفرض أن المجموعة $\mathfrak{I}$ لا تحوي عنصراً أعظماً عندئذ أيًا كان $A_1 \in \mathfrak{I}$ فإنه يوجد $A_2 \in \mathfrak{I}$ بحيث $A_1 \subset A_2$ وبما أن العنصر A_2 ليس أعظمياً في $\mathfrak{I}$ فإنه يوجد $A_3 \in \mathfrak{I}$ بحيث $A_2 \subset A_3$ وهكذا. لنفرض أنه تم الحصول على العنصر $A_n \in \mathfrak{I}$ الذي يحقق $A_{n-1} \subset A_n$ ولكون العنصر A_n ليس أعظمياً في $\mathfrak{I}$ فإنه يوجد $A_{n+1} \in \mathfrak{I}$ بحيث $A_n \subset A_{n+1}$. نتابع بهذا الشكل فنحصل على السلسلة

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$$

وهذه السلسلة هي سلسلة متزايدة من الزمر الجزئية من الزمرة G وغير منقطعة وهذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن المجموعة $\mathfrak{I}$ تحوي عنصراً أعظماً وبالتالي الزمرة G تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية. $\square$

بعد السؤال التالي: متى تكون كل زمرة جزئية من زمرة ما منتهية التوليد، واحداً من الأسئلة الهامة في نظرية الزمر. المبرهنة التالية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي تكون كل زمرة جزئية من زمرة ما زمرة منتهية التوليد.
مبرهنة ١٢-٣-٥.

لتكن G زمرة. الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة G تحقق الشرط الأعظمي للزمر الجزئية.

تمارين محلولة (١٢)

١ - لتكن G زمرة و A, B زمراً جزئية من الزمرة G عندئذ:

$$\langle [A, B] \rangle = \langle [B, A] \rangle$$

الحل.

ليكن $[a, b] \in [A, B]$ عندئذ $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = (bab^{-1}a^{-1})^{-1} = [b, a]^{-1}$ وبما أن $[b, a] \in [B, A]$ فإن $[a, b] = [b, a]^{-1} \in \langle [B, A] \rangle$ ومنه $\langle [A, B] \rangle \subseteq \langle [B, A] \rangle$. بشكل مشابه نجد أن $\langle [B, A] \rangle \subseteq \langle [A, B] \rangle$. ومنه $\langle [A, B] \rangle = \langle [B, A] \rangle$.

٢ - لتكن A, B زمراً جزئية ناظرية من الزمرة G عندئذ:

$$\langle [A, B] \rangle \subseteq A \cap B$$

الحل.

بما أن الزمرة A ناظرية في G فإنه حسب التمهيدية (١٢-٢-١) نجد $\langle [A, B] \rangle \subseteq A$. من جهة أخرى وحسب التمرين (١) فإن $\langle [A, B] \rangle = \langle [B, A] \rangle \subseteq B$ ومنه نجد $\langle [A, B] \rangle \subseteq A \cap B$.

٣ - لتكن H, K زمراً جزئية من الزمرة G بحيث $H \subseteq K$ وأن الزمرة K ناظرية في G . عندئذ:

١- الزمرة H ناظرية في G عندما وفقط عندما $\langle [H, G] \rangle \subseteq H$.

٢ - $\frac{H}{K} \subseteq Z(\frac{G}{K})$ عندما وفقط عندما $\langle [H, G] \rangle \subseteq K$.

الحل.

١ - لنفرض أن الزمرة H ناظرية في G عندئذ وحسب التمهيدية (١٢-٢-١) فإن

$$\langle [H, G] \rangle \subseteq H$$

لنفرض أن $\langle [H, G] \rangle \subseteq H$ عندئذ أيأ كان $g \in G, h \in H$ فإن

$$ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in [H, G].H \subseteq \langle [H, G] \rangle H \subseteq H$$

ومنه نجد أن الزمرة H ناظرية في G .

٢ - لنفرض أن $\frac{H}{K} \subseteq Z(\frac{G}{K})$ علئذ أيا كان $g \in G, h \in H$ فإن

$$[h, g]K = (hgh^{-1}g^{-1})K = (hK)(gK)(h^{-1}K)(g^{-1}K)$$

وبما أن $hK \in \frac{H}{K} \subseteq Z(\frac{G}{K})$ فإن

$$\begin{aligned} [h, g]K &= (hK)(gK)(h^{-1}K)(g^{-1}K) = (gK)(hK)(h^{-1}K)(g^{-1}K) = \\ &= (gK)(g^{-1}K) = K \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $[h, g] \in K$ وبالتالي $\langle [H, G] \rangle \subseteq K$.

لنفرض أن $\langle [H, G] \rangle \subseteq K$ وليكن $gK \in \frac{G}{K}, hK \in \frac{H}{K}$ ولنبـرهن أن

$$(hK)(gK) = (gK)(hK) \text{ لدينا}$$

$$(hgh^{-1}g^{-1})K = [h, g]K \subseteq [H, G]K \subseteq \langle [H, G] \rangle \subseteq K$$

ومنه $hgh^{-1}g^{-1} \in K$ وبالتالي $(hK)(gK) = (gK)(hK)$ مما سبق نجد أن

$$\frac{H}{K} \subseteq Z(\frac{G}{K})$$

٤ - لتكن H, K زمراً جزئية ناظمية في الزمرة G ولنـفرض أن $G = H \times K$.

ولتكن M زمرة جزئية من G بحيث $H \subseteq M$ علئذ

$$M = H \times (M \cap K) \quad ١$$

٢ - الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية M ناظمية في G هو أن تكون

الزمرة الجزئية $M \cap K$ ناظمية في K .

الحل.

١ - بما أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G وأن $H \subseteq M$ ، فإن الزمرة H تكون

ناظمية في M . للبرهن على أن الزمرة $M \cap K$ ناظمية في M ، أي للبرهن على أنه

$$\text{أيا كان } g \in M \text{ فإن } g(M \cap K)g^{-1} \subseteq M \cap K$$

ليكن $x \in g(M \cap K)g^{-1}$ علئذ يوجد $y \in M \cap K$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وبما أن

$g, y \in M$ فإن $x = gyg^{-1} \in M$ من جهة أخرى، بما أن الزمرة K ناظمية في G

وأن $y \in K$ فإن $x = gyg^{-1} \in K$ ومنه $x \in M \cap K$ وهذا يبين لنا أن

الزمرة $M \cap K$ ناظرية في M . وبما أن $M \cap K, H \subseteq M$ فإن $H(M \cap K) \subseteq M$ ليكن $z \in M$ علنئذ $z \in G = H \times K$ ومنه $z = hk$ بحيث $h \in H, k \in K$ وأيضا $h^{-1}z = k \in M$ ومنه $h^{-1}z = k \in K$ كذلك فإن $z = hk \in H.(M \cap K)$ أن

$$H \cap (K \cap M) = (H \cap K) \cap M = E$$

مما سبق نجد أن $M = H \times (M \cap K)$.

٢ - لزوم الشرط. لنفرض أن الزمرة M ناظرية في G وليكن $k \in K$ ولنبرهن على أن $k(M \cap K)k^{-1} \subseteq M \cap K$. ليكن $y \in k(M \cap K)k^{-1}$ علنئذ يوجد $x \in M \cap K$ بحيث $y = kxk^{-1} \in M$ وبما أن $x \in M$ فإن $y = kxk^{-1} \in K$ ولكون الزمرة K ناظرية في G وأن $x \in K$ فإن $y = kxk^{-1} \in K$ ومنه $y \in M \cap K$ أي أن الزمرة $M \cap K$ ناظرية في K .

كفاية الشرط. لنفرض أن الزمرة $M \cap K$ ناظرية في K ولنبرهن على أن $gMg^{-1} \subseteq M$ وذلك أيا كان $g \in G$. ليكن $x \in gMg^{-1}$ علنئذ يوجد $y \in M$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وحسب (١) وبما أن $M = H \times (M \cap K)$ يوجد $h \in H, k \in K$ بحيث $y = hk$ ومنه $x = gyg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1})$ وبما أن الزمرة H ناظرية في G وأن $h \in H$ نجد أن $ghg^{-1} \in H$ من جهة أخرى، بما أن K ناظرية في G وأن $x \in K$ فإن $gkg^{-1} \in K$. كذلك بما أن $g \in G = H \times K$ ومنه يوجد $z = h_0k_0$ بحيث $h_0 \in H, k_0 \in K$ ومنه

$$gkg^{-1} = h_0k_0k_0^{-1}h_0^{-1} = h_0(k_0k_0^{-1})h_0^{-1}$$

وبما أن $k \in K \cap M$ وأن $M \cap K$ ناظرية في K نجد أن

$$y = gkg^{-1} \in h_0(K \cap M)h_0^{-1} \subseteq (h_0Kh_0^{-1}) \cap (h_0Mh_0^{-1}) \subseteq K \cap M$$

مما سبق نجد أن الزمرة $M \cap K$ ناظرية في K .

تمارين (١٢)

١ - لتكن G زمرة و $x, y, z \in G$. أثبت أن

$$[xy, z] = [x, z][x, y, z][y, z] -$$

$$[z, xy][y, zx][x, yz] = 1 -$$

$$y^{-1}[x, y^{-1}, z]yz^{-1}[y, z^{-1}, x]zx^{-1}[z, x^{-1}, y]x = 1 -$$

٢ - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة H ناظرية في G هو أن يتحقق $[h, g] \in H$ وذلك أيضاً كان $g \in G, h \in H$.

٣ - لتكن G زمرة و K زمرة جزئية ناظرية في G . أثبت أن

$$\left(\frac{G}{K}\right)' = \frac{G'K}{K}$$

٤ - لتكن G زمرة و A زمرة تبديلية. إذا كان $\varphi: G \rightarrow A$ تشاكلاً زمرياً أثبت أن $G' \subseteq \text{Ker } \varphi -$

$$\text{Hom}(G, A) \approx \text{Hom}(G/G', A) -$$

٥ - لتكن G زمرة و H, K زمرة جزئية من G . أثبت أن $\langle [H, K] \rangle$ زمرة جزئية ناظرية في $\langle H, K \rangle$.

٦ - لتكن G زمرة و H, K زمرة جزئية ناظرية في G . أثبت أن $\langle [H, K] \rangle$ زمرة جزئية ناظرية في G .



الفصل الثالث عشر

الزمر البسيطة

تعد الزمرة البسيطة واحدة من الأنواع الهامة في نظرية الزمر وأهميتها تعادل أهمية الأعداد الأولية بالنسبة إلى نظرية الأعداد وبعد *Calois* أول من درس الزمرة البسيطة وذلك قبل حوالي ١٧٠ عاماً.

وقبل البدء بدراسة الزمر البسيطة سوف نبدأ بشيء من التفصيل بدراسة الزمر الجزئية الأعظمية، والتعرف إلى زمرة فراتيلي $Fr(G)$ وأثرها في دراسة الزمرة. ومن ثم نلقي الضوء بإيجاز على الزمر الجزئية الأصغرية والتعرف إلى $Soc(G)$.

١٣-١. الزمر الجزئية الأعظمية.

تمهيد.

لتكن $G \neq E$ زمرة و $\mathfrak{I}$ مجموعة الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا يساوي G . وبما أن E زمرة جزئية من G وأن $G \neq E$ فإن $E \in \mathfrak{I}$ ومنه $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ وهي مرتبة جزئياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. بالاعتماد على ذلك يمكننا التحدث عن العناصر الأعظمية في المجموعة $\mathfrak{I}$. لأجل ذلك سوف ندخل المفهوم التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة و $\mathfrak{I}$ مجموعة الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا يساوي G . نقول عن الزمرة الجزئية $H \in \mathfrak{I}$ إنها أعظمية في G إذا كانت H عنصراً أعظمية في $\mathfrak{I}$.

بعض الشروط المكافئة لمفهوم الزمر الجزئية الأعظمية نوردتها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١٣-١-١.

لنكن G زمرة و $H \neq G$ زمرة جزئية من G . الشروط التالية متكافئة:

- ١ - الزمرة الجزئية H أعظمية في G .
 - ٢ - من أجل أي زمرة جزئية D من G تحقق $H \subseteq D \subset G$ فإن $H = D$.
 - ٣ - لا توجد في G زمرة جزئية B تحقق $H \subset B \subset G$.
 - ٤ - من أجل أي زمرة جزئية K من G تحقق $H \subset K$ فإن $K = G$.
- البرهان.

لنكن $\mathcal{D}$ مجموعة الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا يساوي G .

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية H أعظمية في G ولنكن D زمرة جزئية من G تحقق $H \subseteq D \subset G$ علئذ $D \in \mathcal{D}$ وبما أن H عنصر أعظمي في $\mathcal{D}$ وأن $H \subseteq D$ فإن $H = D$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). لنفرض جدلاً أنه توجد في G زمرة جزئية B تحقق $H \subset B \subset G$ وحسب (٢) فإن $H = B$ وهذا غير ممكن. وبالتالي لا توجد في G زمرة جزئية B تحقق $H \subset B \subset G$.

(٣) $\Leftrightarrow$ (٤). لنكن K زمرة جزئية من G تحقق $H \subset K$ وحسب (٢) فإن $K = G$ لأنه لا توجد في G زمرة جزئية K تحقق $H \subset K \subset G$.

(٤) $\Leftrightarrow$ (١). لنكن F زمرة جزئية من G بحيث $F \neq G$ وأن $H \subseteq F$. إذا كان $H \neq F$ نحصل على تناقض مع الفرض ومنه $H = F$ ، أي أن الزمرة H أعظمية في G .

ملاحظة.

إذا كانت الزمرة G غير منتهية فليس من الضروري أن تحوي زمرة جزئية أعظمية.

تمهيدية ١٣-١-٢.

توجد في كل زمرة منتهية $E \neq G$ زمرة جزئية أعظمية.

البرهان.

بما أن الزمرة G منتهية فإن مجموعة الزمر الجزئية من G والتي كل منها لا يساوي G تكون منتهية وبالتالي فهي تحوي عنصراً أكبر وهذا العنصر هو زمرة جزئية أعظمية.

نتيجة.

إذا كانت الزمرة G منتهية فإن كل زمرة جزئية $H \subset G$ تكون محتواة في زمرة جزئية أعظمية من G .

مبرهنة ١٣-١-٣.

لتكن G زمرة و K زمرة جزئية ناظمية في G ولتكن M زمرة جزئية من G بحيث $K \subseteq M$. الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة الجزئية M أعظمية في G .

٢ - الزمرة الجزئية $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية M أعظمية في G . ولتكن $\bar{D} \neq \frac{G}{K}$

زمرة جزئية من الزمرة $\frac{G}{K}$ بحيث $\frac{M}{K} \subseteq \bar{D}$. وحسب المبرهنة (٥-٢-٣) فإن

$\frac{M}{K} \subseteq \frac{H}{K}$ حيث H زمرة جزئية من G تحقق $K \subseteq H \neq G$. وبما أن

فإن $M \subseteq H$ ولكون الزمرة M أعظمية في G فإن $M = H$ وبالتالي فإن $\bar{D} = \frac{M}{K}$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن الزمرة $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$. عندئذ $M \neq G$. لتكن $F \neq G$

زمرة جزئية من G بحيث $M \subseteq F$ ولنبرهن على أن $M = F$. بما أن

$K \subseteq M \subseteq F$ وأن الزمرة K ناظمية في G فإن الزمرة K ناظمية في F ومنه

فإن $\frac{F}{K}$ زمرة جزئية في $\frac{G}{K}$ وأن $\frac{M}{K} \subseteq \frac{F}{K}$ لأن $M \subseteq F$. ولكون الزمرة $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$ عندئذ إما $\frac{F}{K} = \frac{G}{K}$ أو $\frac{M}{K} = \frac{F}{K}$.
 إذا كانت $\frac{F}{K} = \frac{G}{K}$ عندئذ أيضاً كان $g \in G$ فإن $gK \in \frac{G}{K} = \frac{F}{K}$ أي أن $g \in F$ ومنه $G = F$ وهذا غير ممكن، وبالتالي $\frac{M}{K} = \frac{F}{K}$. وهكذا نجد أنه أيضاً كان $x \in F$ فإن $xK \in \frac{F}{K} = \frac{M}{K}$ أي أن $x \in M$ وبالتالي $M = F$. مما سبق نجد أن الزمرة M أعظمية في G .

نأتي الآن إلى دراسة تقاطع الزمر الجزئية الأعظمية لزمرة ما وذلك في حال وجودها.
 تعريف.

لتكن G زمرة. نسمي تقاطع جميع الزمر الجزئية الأعظمية في G زمرة فراتيني $Fr(G)$ ونرمز لها $Fr(G)$.

إذا لم تحو الزمرة G زمراً جزئية أعظمية نعتبر $Fr(G) = G$.
 أولى خواص الزمرة $Fr(G)$ سنوردها من خلال التمهيدية التالية:
 تمهيدية ١-١-٤.

لتكن G زمرة. عندئذ:

- ١ - إذا كانت M زمرة جزئية أعظمية في G عندئذ $\alpha(M)$ زمرة جزئية أعظمية في G وذلك أيضاً كان $\alpha \in Aut(G)$.
 - ٢ - الزمرة $Fr(G)$ متميزة في G .
 - ٣ - الزمرة $Fr(G)$ ناظمية في G .
- البرهان.

١ - ليكن $\alpha \in Aut(G)$ ولنفرض أن M زمرة جزئية أعظمية في G عندئذ $\alpha(M)$ زمرة جزئية من G وأن $\alpha(M) \neq G$. لتكن B زمرة جزئية من G بحيث

$\alpha(M) \subset B$ ولنفرض أن $A = \alpha^{-1}(B)$ عندئذ A زمرة جزئية من G . كما أن $M \subset A$ لأنه أياً كان $m \in M$ فإن $\alpha(m) \in B$ ومنه $\alpha(m) \in \alpha^{-1}(B) = A$ أي أن $M \subseteq A$. لنفرض أن $M = A$ عندئذ $\alpha(M) = \alpha(A) = B$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $M \subset A$ وبما أن الزمرة M أعظمية في G نجد أن $A = G$ وبالتالي

$$G = \alpha(G) = \alpha(A) = B$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $\alpha(M)$ أعظمية في G .

٢ - لبرهن على أن $\alpha(Fr(G)) \subseteq Fr(G)$ وذلك أياً كان $\alpha \in Aut(G)$.

ليكن $\alpha \in Aut(G)$ و $x \in Fr(G)$ ولنفرض أن $\alpha(x) \notin Fr(G)$ عندئذ توجد زمرة جزئية أعظمية M في G بحيث $\alpha(x) \notin M$ ومنه $\alpha(x) \notin \alpha^{-1}(M)$ وهذا غير ممكن حسب (١) لأن الزمرة $\alpha^{-1}(M)$ أعظمية في G . وهذا يبين لنا أن $\alpha(x) \in Fr(G)$ وبالتالي $\alpha(Fr(G)) \subseteq Fr(G)$ وحسب التمهيدية (٩-٧) نجد أن الزمرة $Fr(G)$ متميزة في G .

٣ - بما أن الزمرة $Fr(G)$ متميزة في G وحسب المبرهنة (٧-٧) تكون الزمرة $Fr(G)$ ناظمية في G .

لأجل معرفة العناصر التي تتكون منها الزمرة $Fr(G)$ ، لابد لنا من مفهوم جديد سنورده من خلال التعريف التالي:

تعريف.

لتكن G زمرة و $x \in G$. نقول عن العنصر x ، إنه ليس مولداً للزمرة G إذا تحقق الشرط: من أجل أي مجموعة جزئية وغير خالية S من G تحقق $G = \langle S, x \rangle$ ينتج أن $G = \langle S \rangle$.

المبرهنة التالية تبين لنا طبيعة عناصر الزمرة $Fr(G)$.

مبرهنة ١٣-١-٥.

لتكن G زمرة و $g \in G$. الشروط التالية متكافئة:

١ - العنصر g ليس مولداً للزمرة G .

$$g \in Fr(G) - \gamma$$

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن العنصر g ليس مولداً للزمرة G . وأن $g \notin Fr(G)$

عندئذ توجد زمرة جزئية أعظمية M من G بحيث $g \notin M$. ومنه فإن $M \subset \langle M, g \rangle$

ولكون الزمرة M أعظمية نجد أن $G = \langle M, g \rangle$ وبما أن العنصر g ليس مولداً

للزمرة G نجد أن $G = \langle M \rangle = M$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $g \in Fr(G)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن $g \in Fr(G)$ ولتكن S مجموعة جزئية وغير خالية من G

تحقق $G = \langle S, g \rangle$. لنفرض جذاً أن $G \neq \langle S \rangle$ عندئذ $g \notin \langle S \rangle$ لأنه إذا كان $g \in \langle S \rangle$

نجد أن $G = \langle S, g \rangle = \langle S \rangle$ وهذا مرفوض. لذاخذ المجموعة

$$\mathfrak{I} = \{K : K \text{ زمرة جزئية من } G, \langle S \rangle \subseteq K, g \notin K\}$$

فنجد أن المجموعة $\mathfrak{I}$ غير خالية لأن $\langle S \rangle \in \mathfrak{I}$ كما أن المجموعة $\mathfrak{I}$ مرتبة جزئياً

بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. لتكن $\mathfrak{I}_0$ مجموعة جزئية من $\mathfrak{I}$ ومرتبة كلياً ولنفرض أن

$$N = \bigcup_{A \in \mathfrak{I}_0} A$$

فإن N زمرة جزئية من G كما أن $g \notin N$ لأنه إذا كان $g \in N$ فإنه يوجد $A \in \mathfrak{I}_0$

بحيث $g \in A$ وهذا غير ممكن. وهكذا نجد أن $N \in \mathfrak{I}$ كما أن $A \subseteq N$ وذلك أيأ

كان $A \in \mathfrak{I}_0$. مما سبق نجد أن N هو حد أعلى للمجموعة $\mathfrak{I}_0$ في $\mathfrak{I}$ وحسب تمهيدية

زورن يوجد في $\mathfrak{I}$ عنصر أعظمي وليكن M . بما أن $M \in \mathfrak{I}$ فإن $\langle S \rangle \subseteq M$

وأن $g \notin M$. لنبرهن على أن الزمرة M أعظمية في G . لتكن H زمرة جزئية

من G بحيث $M \subset H \subseteq G$ عندئذ $H \notin \mathfrak{I}$ ومنه $g \in H$

وبالتالي $G = \langle S, g \rangle \subseteq H \subseteq G$ أي أن $H = G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة M أعظمية

في G . وأن $g \notin M$ وهذا يناقض كون $g \in Fr(G)$. مما سبق نجد أن $G = \langle S \rangle$

وبالتالي العنصر g ليس مولداً للزمرة G .

خواص أخرى لزمرة فراتيني وخاصة علاقتها بالمشتق الأول للزمرة تخبرنا عنها

المبرهنة التالية:

مبرهنة ٦-١-١٣.

لتكن G زمرة. الشروط التالية متكافئة:

١ - كل زمرة جزئية أعظمية في G تكون ناظمية.

$$٢ - G' \subseteq Fr(G).$$

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لتكن M زمرة جزئية أعظمية في G وحسب الفرض فإن الزمرة M

ناظمية وبالتالي تكون الزمرة $\frac{G}{M}$ بسيطة ومنه $(\frac{G}{M} : 1) = p$ حيث p عدد أولي، أي

أن الزمرة $\frac{G}{M}$ دوارة وبالتالي فهي تبديلية وحسب المبرهنة (١٢-١-٢) يكون

$$G' \subseteq M.$$

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن $G' \subseteq Fr(G)$ ولتكن M زمرة جزئية أعظمية في G ،

عندئذ $G' \subseteq M$ وحسب المبرهنة (١٢-١-٢) تكون الزمرة M ناظمية في G .

نتيجة.

إذا كانت الزمرة G عديمة القوى فإن $G' \subseteq Fr(G)$.

البرهان.

بما أن الزمرة G عديمة القوى فإنه حسب المبرهنة (١٢-٢-٥) تكون كل زمرة

جزئية أعظمية في G ناظمية وبالعتماد على المبرهنة (١٢-١-٦) نجد

$$G' \subseteq Fr(G).$$

المبرهنة التالية تبين لنا أنه إذا كانت الزمرة الجزئية $Fr(G)$ منتهية التوليد فإن

الزمرة $Fr(G)$ تلعب دور العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية ضرب الزمر الجزئية

المساوي للزمرة G .

مبرهنة ٧-١-١٣.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G . إذا كانت الزمرة $Fr(G)$ منتهية التوليد

$$\text{وأن } G = Fr(G).H \text{ فإن } G = H.$$

البرهان.

لنفرض أن $Fr(G) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ وبما أن $G = Fr(G).H$ نجد أن $G = \langle H, x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ وبما أن العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n \in Fr(G)$ فإن العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي عناصر ليست مولدة للزمرة G وحسب المبرهنة (٥-١-١٣) نجد أن $G = \langle H \rangle = H$.
مبرهنة ٨-١-١٣.

لتكن G زمرة و $F = Fr(G)$ ولتكن S مجموعة جزئية من G وغير خالية. إذا كانت الزمرة F منتهية التوليد وأن $\frac{G}{F} = \langle F.x : x \in S \rangle$ عندئذ $\frac{G}{F} = \langle S \rangle$.
البرهان.

لنفرض أن $H = \langle S \rangle$ وبما أن الزمرة F ناظمية في G فإن الجداء HF هو زمرة جزئية من G وبما أن $\frac{G}{F} = \langle F.x : x \in S \rangle$ نجد أن $\frac{G}{F} = HF$ وحسب المبرهنة (٧-١-١٣) نجد أن $G = H = \langle S \rangle$.
مبرهنة ٩-١-١٣.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G و K زمرة جزئية تحقق $H \subseteq Fr(K)$. إذا كانت الزمرة $Fr(K)$ منتهية التوليد فإن $H \subseteq Fr(G)$.
البرهان.

لنفرض جدلاً أن $H \not\subseteq Fr(G)$ عندئذ توجد زمرة جزئية أعظمية M في G بحيث $H \not\subseteq M$ عندئذ $K \not\subseteq M$ ، لأنه إذا كان $K \subseteq M$ فإن $H \subseteq Fr(G) \subseteq K \subseteq M$

وهذا غير ممكن. وبما أن الزمرة H ناظمية في G يكون الجداء HM زمرة جزئية من G وأن $M \subset HM$ ولكون الزمرة M أعظمية في G نجد أن $G = HM$.
من جهة أخرى، وبما أن $H \subseteq K$ وحسب التمهيدية (٦-١-٥) فإن $H(K \cap M) = HK \cap HM = K \cap G = K$

كذلك بما أن $H \subseteq Fr(G) \subseteq K$ فإن $K = Fr(G) \cdot (K \cap M)$ وذلك حسب التمهيدية (٦-١-٥). وحسب المبرهنة (٧-١-١٣) نجد أن $K = K \cap M$ أي أن $K \subseteq M$ وهذا غير مقبول فرضاً، مما سبق نجد أن $H \subseteq Fr(G)$.
مبرهنة ١٠-١-١٣.

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G إذا كانت الزمرة $Fr(H)$ منتهية التوليد عندئذ $Fr(H) \subseteq Fr(G)$.
البرهان.

لدينا حسب التمهيدية (٤-١-١٣) الزمرة $Fr(H)$ هي زمرة جزئية متميزة في H وبما أن الزمرة H ناظمية في G وأن $Fr(H) \subseteq H$ وحسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة $Fr(H)$ تكون ناظمية في G . وحسب المبرهنة (٩-١-١٣) وبما أن الزمرة $Fr(H)$ منتهية التوليد نجد أن $Fr(H) \subseteq Fr(G)$.
تمهيدية ١١-١-١٣.

ليكن $f: G \rightarrow G'$ تشاكلاً زمرياً و $g \in G$. عندئذ:

١ - إذا كان العنصر g ليس مولداً للزمرة G فإن العنصر $f(g)$ ليس مولداً للزمرة $f(G)$.

٢ - $f(Fr(G)) \subseteq Fr(f(G))$.

البرهان.

١ - لنفرض أن العنصر g ليس مولداً للزمرة G ولتكن S مجموعة جزئية وغير خالية من الزمرة $f(G)$ بحيث $f(G) = \langle S, f(g) \rangle$ عندئذ توجد مجموعة جزئية $S_0 \subseteq G$ وغير خالية بحيث $f(S_0) = S$ وتحقق أن $f(G) = \langle S_0, g \rangle$ وذلك لأن العنصر g ليس مولداً للزمرة G ومنه فإن $f(G) = \langle f(S_0) \rangle = \langle S \rangle$. مما سبق نجد أن العنصر $f(g)$ ليس مولداً للزمرة $f(G)$.

٢ - نيكّن $g \in Fr(G)$ عندئذ يكون العنصر g ليس مولداً للزمرة G وحسب (١) يكون العنصر $f(g)$ ليس مولداً للزمرة $f(G)$ أي أن $f(g) \in Fr(f(G))$ وهذا يبين

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). ينتج من المبرهنة (12-2-4).

(2) $\Leftrightarrow$ (3). لتكن M زمرة جزئية أعظمية في G ، عندئذ حسب الفرض $M \subset N(M)$ ولكون الزمرة M أعظمية ينتج $M = N(M)$ وبالتالي تكون الزمرة M ناظمية في G .

(3) $\Leftrightarrow$ (4). ينتج من المبرهنة (13-1-6).

(3) $\Leftrightarrow$ (5). لتكن K عبارة عن p - زمرة جزئية سيلوفية في G ولنفرض أن $N(K) \neq G$ وبما أن الزمرة G منتهية، فإنه توجد في G زمرة جزئية أعظمية M بحيث $N(K) \subseteq M$ وحسب المبرهنة (10-17) نجد أن $N(M) = M \neq G$ وهذا يبين لنا أن الزمرة M ليست ناظمية في G .

(5) $\Leftrightarrow$ (6). لتكن $p_1, p_2, p_3, \dots, p_s$ هي جميع الأعداد الأولية المختلفة والتي كل منها يقسم مرتبة الزمرة G . عندئذ

$$(G:1) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

حيث $1 \leq i \leq s, \alpha_i \in \mathbb{N}^*$ وحسب مبرهنة سيلوف الأولى يوجد في G P_i - زمرة جزئية سيلوفية H_i مرتبتها $P_i^{\alpha_i}$ لأجل كل $1 \leq i \leq s$. وحسب الفرض فإن الزمر الجزئية H_i ناظمية في G لأجل كل $1 \leq i \leq s$. لنبرهن على أن $G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_s$.

نفرض أن $M = H_1 \cdot H_2 \cdots H_s$ واضح أن M هي زمرة جزئية ناظمية في G . لنبرهن بالاستقراء حسب s أن $(M:1) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_s^{\alpha_s}$.
- من أجل $s=1$ عندئذ $M = H_1$ ومنه $(M:1) = p_1^{\alpha_1}$.

لنفرض أن الفرضية صحيحة من أجل $s-1$ ولنفرض أن $N = H_1 \cdot H_2 \cdots H_{s-1}$ وأن $(N:1) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_{s-1}^{\alpha_{s-1}}$ عندئذ $N \cap H_s = E$ كما أن

$$(M:1) = \frac{(N:1)(H_s:1)}{(N \cap H_s:1)} = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

وبما أن $(M:1) = (G:1)$ نجد أن $M = G$ وبالتالي تكون

$$G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$$

(٦) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ حيث H_i زمرة جزئية ناظرية في G وأن $(H_i : 1) = p_i^{a_i}$ ، $1 \leq i \leq n$. وبما أن الزمر H_i منتهية ومراتبها قوة لعدد أولي فإنه حسب المبرهنة (١٢-٢-٦) تكون الزمر H_i عديمة القوى $1 \leq i \leq n$. وبما أن

$$G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \approx H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$$

فإنه حسب المبرهنة (١٢-٢-٧) تكون الزمرة G عديمة القوى.
 بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة لحصل للحقيقة الهامة التالية:

مبرهنة ١٥-١-١٣.

إذا كانت الزمرة G منتهية فإن الزمرة $Fr(G)$ تكون عديمة القوى.
 البرهان.

لتكن K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في $Fr(G)$ ، وبما أن الزمرة $Fr(G)$ ناظرية في G وأن الزمرة $Fr(G)$ منتهية وحسب التمهيدية (١٠-٦) نجد أن $G = N(K).Fr(G)$. وحسب التمهيدية (١٣-١-١٣) فإن $N(K) = G$ ومنه نجد أن الزمرة K ناظرية في G ، وبما أن $K \subseteq Fr(G)$ فإن الزمرة K تكون ناظرية في $Fr(G)$ وحسب المبرهنة (١٥-١-١٣) نجد أن الزمرة $Fr(G)$ عديمة القوى.
 مبرهنة ١٦-١-١٣.

لتكن G زمرة منتهية و K, H زمرة جزئية في G . إذا كانت الزمرة K ناظرية في G علنذا:

$$١ - \text{ إذا كانت } K \subseteq Fr(H) \text{ فإن } K \subseteq Fr(G).$$

$$٢ - Fr(K) \subseteq Fr(G).$$

$$٣ - \frac{Fr(G).K}{K} \subseteq Fr\left(\frac{G}{K}\right).$$

$$٤ - \text{ إذا كان } K \subseteq Fr(G) \text{ فإن } \frac{Fr(G)}{K} = Fr\left(\frac{G}{K}\right).$$

البرهان.

١ - لنفرض أن $K \subseteq Fr(H)$ وأن $K \not\subseteq Fr(G)$ عندئذ حسب المبرهنة (١٣-١) -
(١٣) فإنه توجد زمرة جزئية M في G بحيث $G = MK$ وبما أن $K \subseteq Fr(H)$ نجد
أن

$$K \subseteq H \subseteq G = MK$$

وبالتالي $H = (H \cap M)K$ ومنه $H = H \cap M$ وبالتالي يكون $K \subseteq H \subseteq M$. بهذا
الشكل نجد أن $G = MK = M \subset G$ أي أن $G \neq G$ وهذا غير ممكن، مما سبق نجد
أن $K \subseteq Fr(G)$.

٢ - بما أن الزمرة $Fr(K)$ متميزة في K وأن الزمرة K ناظمية في G فإنه حسب
المبرهنة (٧-٧) تكون الزمرة $Fr(K)$ ناظمية في G وحسب (١) بما
أن $Fr(K) \subseteq K$ نجد أن $Fr(K) \subseteq Fr(G)$.

٣ - لتكن $\bar{M}$ زمرة جزئية أعظمية في $\frac{G}{K}$ عندئذ $\bar{M} = \frac{M}{K}$ حيث M زمرة جزئية
من G تحوي K وبما أن الزمرة $\frac{M}{K}$ أعظمية في $\frac{G}{K}$ وحسب المبرهنة (١٣-١-٣)
فإن الزمرة M تكون أعظمية في G ومنه $K \subseteq Fr(G) \cdot K \subseteq MK \subset M$ وبالتالي

$$\frac{Fr(G) \cdot K}{K} \subseteq \frac{MK}{K} \subseteq \frac{M}{K} = \bar{M}$$

وذلك من أجل أي زمرة جزئية أعظمية $\bar{M}$ من $\frac{G}{K}$. مما سبق نجد أن
 $\frac{Fr(G) \cdot K}{K} \subseteq Fr(\frac{G}{K})$.

٤ - بما أن $K \subseteq Fr(G)$ فإنه حسب (٣)

$$\frac{Fr(G)}{K} = \frac{Fr(G) \cdot K}{K} \subseteq Fr(\frac{G}{K})$$

وبما أن كل زمرة جزئية أعظمية في الزمرة $\frac{G}{K}$ هي من الشكل $\frac{M}{K}$ حيث M زمرة
جزئية أعظمية في G ، نجد أن $\frac{Fr(G)}{K} = Fr(\frac{G}{K})$.

لتكن A, B زمراً جزئية ناظمية من الزمرة G بحيث $G = A \times B$ عندئذ:
١ - إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G بحيث $A \subset H \subset G$ فإن

$$H = A \times (B \cap H)$$

$$Fr(G) \subseteq Fr(A) \times Fr(B) \quad ٢ -$$

البرهان.

١ - بما أن الزمرة A ناظمية في G فإن A ناظمية في H . من جهة أخرى الزمرة $B \cap H$ ناظمية في H لأنه إذا أياً كان $h \in H$ فإن

$$h(B \cap H)h^{-1} \subseteq B \cap H$$

ليكن $y \in h(B \cap H)h^{-1}$ عندئذ يوجد $b \in B \cap H$ بحيث $y = h b h^{-1} \in B$ وذلك لأن الزمرة B ناظمية في G . وبما أن $b, h \in H$ فإن $y = h b h^{-1} \in H$ ومنه $y \in B \cap H$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $B \cap H$ ناظمية في H . كما أن

$$A \cap (B \cap H) = (A \cap B) \cap H = E \cap H = E$$

كذلك الجداء $A(B \cap H)$ هو زمرة جزئية من H أي أن $A(B \cap H) \subseteq H$. ليكن $h \in H$ عندئذ $h \in G$ ومنه $h = ab$ حيث $a \in A, b \in B$ وبالتالي $a^{-1}h = b$ ومنه $b = a^{-1}h \in AH \subseteq H$ وهكذا نجد أن $b \in B \cap H$. كما أن $h = ab \in A(B \cap H)$. أي أن $H \subseteq A(B \cap H)$ وبالتالي $H = A(B \cap H)$. مما سبق نجد أن

$$H = A \times (B \cap H)$$

٢ - لتكن M زمرة جزئية أعظمية في A عندئذ تكون الزمرة MB زمرة جزئية أعظمية في G لأنه إذا كانت K زمرة جزئية من G تحقق $MB \subseteq K \subset G$ فإن $MB = K$ ومنه نجد أن $K = MB(B \cap K) \subseteq (MB)B \subseteq MB$ الزمرة MB أعظمية في G ومنه $Fr(G) \subseteq MB$ وبما أن $M \cap B \subset A \cap B = E$ فإن $Fr(G) \subseteq M \times B$. لنفرض أن $\mathfrak{I} = \{M_\alpha : \alpha \in I\}$ مجموعة الزمر الجزئية الأعظمية في A وبما أن $Fr(G) \subseteq MB$ فإن

$$Fr(G) \subseteq \bigcap_{a \in I} (M_a B) \subseteq (\bigcap_{a \in I} M_a) B = Fr(A).B = Fr(A) \times B$$

بشكل مشابه نجد $Fr(G) \subseteq A \times Fr(B)$ مما سبق نجد أن

$$\circ . Fr(G) \subseteq Fr(A) \times Fr(B)$$

١٣-٢. الزمر الجزئية الأصغرية وزمرة Fitting.

تعريف.

لتكن G زمرة و $\mathfrak{F}$ مجموعة الزمر الجزئية الناعمية في G والتي كل منها لا يساوي E . نقول عن الزمرة الجزئية $H \in \mathfrak{F}$ إنها أصغرية في G إذا كانت H عنصراً أصغرياً في $\mathfrak{F}$.

بعض الشروط المكافئة لمفهوم الزمر الجزئية الأصغرية نوردتها من خلال التمهيدية التالية:

تمهيدية ١٣-٢-١.

لتكن G زمرة و $H \neq E$ زمرة جزئية ناعمية في G . الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة الجزئية H أصغرية في G .

٢ - من أجل أي زمرة جزئية ناعمية D من G تحقق $D \subset H$ فإن $H = E$.

٣ - لا توجد في G زمر جزئية ناعمية B تحقق $E \neq B \subset H$.

٤ - من أجل أي زمرة جزئية ناعمية K من G تحقق $E \neq K \subseteq H$ فإن $K = H$.

البرهان.

لتكن $\mathfrak{F}$ مجموعة الزمر الجزئية الناعمية في G والتي كل منها لا يساوي E .

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة الجزئية الناعمية H أصغرية في G ولتكن D زمرة

جزئية ناعمية في G تحقق $D \subset H$. لنفرض أن $E \neq D$ علئذ $D \in \mathfrak{F}$ وهذا يناقض

كون H عنصراً أصغرياً في $\mathfrak{F}$ ومله $H = E$.

(٢) $\Leftrightarrow$ (٣). لنفرض جدلاً أنه توجد في G زمرة جزئية ناعمية B تحقق

$E \neq B \subset H$ وحسب (٢) فإن $B = E$ وهذا غير ممكن. وبالتالي لا توجد في G

زمرة جزئية ناظرية B تحقق $E \neq B \subset H$.

(٣) $\Leftrightarrow$ (٤). لنكن K زمرة جزئية ناظرية في G تحقق $E \neq K \subseteq H$ وحسب (٣)

فإن $K = H$ لأنه لا توجد في G زمرة جزئية ناظرية K تحقق $E \neq K \subset H$.

(٤) $\Leftrightarrow$ (١). لنكن F زمرة جزئية ناظرية في G بحيث $F \neq E$ وأن $F \subseteq H$. إذا

كان $H \neq F$ نحصل على تناقض مع الفرض ومنه $H = F$ ، أي أن الزمرة H

أصغرية في G .

تمهيدية ١٣-٧-٢.

لنكن G زمرة و $H \neq K$ زمرة جزئية ناظرية أصغرية في G . علل:

$$H.K = H \times K$$

البرهان.

بما أن الزمر الجزئية H, K ناظرية في G فإن الجداء $H.K$ زمرة جزئية في G

وأن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظرية في G . إن $H \cap K \subset H$ لأنه إذا

كان $H \cap K = H$ نجد أن $H \subseteq K$ ولكون الزمرة K أصغرية في G فإن $H = K$

وهذا مخالف للفرض، ومنه $H \cap K = E$ وهذا يبين لنا أن $H.K = H \times K$.

تمهيدية ١٣-٢-٣.

لنكن G زمرة و $H \neq G$ زمرة جزئية ناظرية في G و K زمرة جزئية ناظرية

أصغرية و تبديلية في G وأن $G = H.K$. علل:

١ - الزمرة H أعظمية في G .

$$K \cap H = E \quad ٢ -$$

٣ - إذا كانت الزمرة $K \subseteq Z(G)$ فإن الزمرة H تكون ناظرية في G

$$G = H \times K \quad \text{وأن}$$

البرهان.

١ - لنفرض أن $H \neq G$. لنكن M زمرة جزئية من G بحيث $H \subseteq M$ ، لنبرهن

على أن $M = H.(K \cap M)$. واضح أن $H.(K \cap M) \subseteq M$ ، ليكن $x \in M$ علل:

$x \in G = H.K$ ومنه $x = hk$ حيث $h \in H, k \in K$ وبما أن $h \in H \subseteq M$ فإن
 $h^{-1}x = k \in M, K$ ومنه $h^{-1}x \in M \cap K$ وبالتالي $x \in H.(K \cap M)$. وهكذا نجد
 أن $M = H.(K \cap M)$ أي أن $M \subseteq H.(K \cap M)$.

لنبرهن على أن الزمرة الجزئية $K \cap M$ ناظمية في G . ليكن $g \in G$ ولنبرهن على
 أن $g(K \cap M)g^{-1} \subseteq K \cap M$. ليكن $x \in g(K \cap M)g^{-1}$ عندئذ يوجد
 $y \in K \cap M$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وبما أن الزمرة K ناظمية في G وأن $y \in K$ نجد
 أن $x = gyg^{-1} \in K$ من جهة أخرى، لدينا $g \in G = H.K$ ومنه $g = h_1k_1$ حيث
 $h_1 \in H, k_1 \in K$ ومنه $x = h_1k_1gyg^{-1}k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1yh_1^{-1}$ لأن $k_1, y \in K$ وأن
 الزمرة K تبديلية. وبما أن $h \in H \subseteq M$ وأن $y \in M$ فإن $x = gyg^{-1} \in M$ وبالتالي
 وبالتالي $x \in K \cap M$. أي أن الزمرة الجزئية $K \cap M$ ناظمية في G وبالتالي
 الجداء $H.(K \cap M)$ زمرة جزئية في G ، وبما أن الزمرة K ناظمية أصغرية في G
 وأن $K \cap M \subseteq K$ عندئذ إما $K \cap M = K$ أو $K \cap M = E$. إذا كان
 $K \cap M = K$ نجد أن $K \subseteq M \subseteq G$ ومنه $G = H.K \subseteq M$ وبالتالي $M = G$. إذا
 كان $K \cap M = E$ نجد أن $M = H$. مما سبق نجد أن الزمرة M أعظمية في G .

٢ - لنفرض أن $K \cap H \neq E$ عندئذ $K \cap H \subseteq K$ من جهة أخرى،
 الزمرة $K \cap H$ ناظمية في G ، لأنه $\forall g \in G$ و $\forall x \in g(H \cap K)g^{-1}$ يوجد
 $y \in H \cap K$ بحيث $x = gyg^{-1}$ وبما أن $y \in K$ وأن K ناظمية في G
 فإن $x \in K$ من جهة أخرى، بما أن $G = H.K$ فإن $g = h_2k_2$ حيث
 $h_2 \in H, k_2 \in K$ وبما أن الزمرة K تبديلية فإن

$$x = hkyk^{-1}h^{-1} = hyh^{-1} \in H$$

ومنه $x \in H \cap K$ أي أن الزمرة $H \cap K$ ناظمية في G وبما أن $H \cap K \subseteq K$ وأن
 الزمرة K أصغرية فإنه إما $H \cap K = K$ أو $H \cap K = E$. وبما أن $H \cap K \neq E$
 نجد أن $H \cap K = K$ أي أن $K \subseteq H$ ومنه $G = H.K \subseteq H$ وبالتالي $G = H$
 وهذا غير ممكن فرضاً ومنه $H \cap K = E$.

٣ - لنفرض أن $K \subseteq Z(G)$ علنذ الزمرة H ناظمية في G لأنه $\forall g \in G$ و $\forall x \in gHg^{-1}$ يوجد $h \in H$ بحيث $x = ghg^{-1}$ وأن $g = h_3 k_3$ حيث $h_3 \in H, k_3 \in K$ ومنه

$$g = h_3 k_3 h k_3^{-1} h_3^{-1} = h_3 h h_3^{-1} = h \in H$$

أي أن الزمرة H ناظمية في G ومنه $G = H.K = H \times K$.
تعريف.

لكن $G \neq E$ زمرة منتهية. لرمز لجداء جميع الزمر الجزئية الناظمية الأصغرية في G بالرمز $Soc(G)$ وتسمى ($socket^1$ of G).
ينتج من التعريف مباشرة أن $Soc(G)$ زمرة جزئية في G .
تمهيدية ١٣-٢-٤.

لكن $G \neq E$ زمرة. ولتكن K زمرة جزئية ناظمية أصغرية في G . علنذ:

١ - $\forall f \in Aut(G)$ الزمرة الجزئية $f(K)$ ناظمية أصغرية في G .

٢ - الزمرة الجزئية $Soc(G)$ متميزة في G .

٣ - الزمرة الجزئية $Soc(G)$ ناظمية في G .

البرهان.

١ - ليكن $f \in Aut(G)$ علنذ حسب المبرهنة (٦-١) فإن $f(K)$ زمرة جزئية ناظمية في G . وبما أن $K \neq E$ فإن $f(K) \neq E$. لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G بحيث $H \subseteq f(K)$ علنذ فإن $f^{-1}(H)$ زمرة جزئية ناظمية في G وأن $f^{-1}(H) \subseteq K$ وبما أن K أصغرية في G علنذ إما $f^{-1}(H) = K$ أو $f^{-1}(H) = E$.

- إذا كان $f^{-1}(H) = E$ نجد أن $H = E$.

- إذا كان $f^{-1}(H) = K$ نجد أن $H = f(K)$.

مما سبق نجد أن الزمرة $f(K)$ أصغرية في G .

^١ كلمة ألمانية اصطلح على عدم ترجمتها.

مبرهنة ١٣-٢-٧.

لتكن G زمرة وأن M زمرة جزئية ناظمية في G . عندئذ

$$FII(G) \subseteq C(M)$$

البرهان.

لنفرض أن $F = FII(G)$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $F \cap M = E$ عندئذ بما أن كلا من الزمرتين F, M ناظمية في G فإن الجداء $F.M$ زمرة جزئية في G ومنه $M.F = M \times F$ وبالتالي حسب التمهيدية (٨-٢-١) فإنه أي x كان $x \in F$ وأنه أي y كان $y \in M$ فإن $xy = yx$ ومنه $F \subseteq C(M)$.

- الحالة الثانية. إذا كان $F \cap M \neq E$ وبما أن الزمرة $F \cap M$ ناظمية في G وأن $F \cap M \subseteq M$ وبما أن الزمرة M أصغرية في G نجد أن $F \cap M = M$ ومنه $M \subseteq F$ وبما أن الزمرة F ناظمية في G وأن الزمرة $Z(F)$ متميزة في F فإنه حسب المبرهنة (٧-٧) فإن الزمرة $Z(F)$ ناظمية في G ومنه فإن الزمرة $M \cap Z(F)$ ناظمية في G وبما أن $M \cap Z(F) \neq E$ وذلك حسب التمهيدية (١٣-٢-٦) وأن الزمرة M أصغرية في G فإن $M \cap Z(F) = M$ ومنه $M \subseteq Z(F)$ وبالتالي $F \subseteq C(M)$.

مبرهنة ١٢-٢-٨.

لتكن G زمرة منتهية. عندئذ الزمرة $C(FI(G))$ تحوي جميع الزمر الجزئية الناظمية الأصغرية في G .
البرهان.

لنفرض أن $K = FI(G)$ وأن $H = C(FI(G))$ ولتكن L زمرة جزئية ناظمية أصغرية في G . سوف نميز حالتين:

- الحالة الأولى. لنفرض أن $L \not\subseteq K$ وبما أن $L \cap K$ زمرة جزئية ناظمية في G كما أن $L \cap K \neq L$ لأنه إذا كان $L \cap K = L$ فإن $L \subseteq K$ وهذا مرفوض. وبما أن

مبرهنة ١٣-٣-٣.

لتكن G زمرة و $K \neq G$ زمرة جزئية ناظرية في G . الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة K أعظمية في G .

٢ - الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة.

البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لتكن D زمرة جزئية ناظرية في G وحسب المبرهنة (٥-٢-٣) فإن

$\bar{D} = \frac{H}{K}$ حيث H زمرة جزئية من G وأن $K \subseteq H$ وبما أن الزمرة الجزئية K

أعظمية في G فإنه إما $H = G$ أو $H = K$ وبالتالي إما $\bar{D} = \frac{G}{K}$ أو $\bar{D} = K$ وهذا

يبين لنا أن الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة ولتكن H زمرة جزئية من G تحقق

$K \subseteq H \subseteq G$ وبما أن الزمرة K ناظرية في G فإن الزمرة K تكون ناظرية

في H وبالتالي فإن $\frac{H}{K}$ زمرة جزئية من $\frac{G}{K}$. ولكون الزمرة $\frac{G}{K}$ بسيطة عندئذ إما

$\frac{H}{K} = K$ أو $\frac{H}{K} = \frac{G}{K}$ وهذا يبين لنا أنه إما $H = K$ أو $H = G$. ومنه نجد أن

الزمرة K أعظمية في G .

مبرهنة ١٣-٣-٤.

لتكن G زمرة و A, B زمرة جزئية ناظرية أعظمية في G بحيث $A \neq B$. عندئذ

$A \cap B$ زمرة جزئية أعظمية في A وأيضاً في B .

البرهان.

بما أن كلا من A, B زمرة جزئية ناظرية فإن الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية ناظرية

في G وبما أن $A \subseteq A.B$ وأن الزمرة A أعظمية عندئذ إما $A = AB$ أو $G = AB$.

إذا كان $A = AB$ عندئذ $B \subseteq AB = A$ وبما أن $A \neq B$ فإن $A \not\subseteq B \not\subseteq G$ وهذا يناقض كون الزمرة A أعظمية. ومنه $G = AB$ وبالتالي

$$\frac{G}{B} = \frac{AB}{B} \approx \frac{A}{A \cap B}$$

وبما أن الزمرة B أعظمية في G فإنه حسب المبرهنة (٣-٣-١٣) فإن الزمرة $\frac{G}{B}$ بسيطة وبالتالي فإن الزمرة $\frac{A}{A \cap B}$ بسيطة وأيضا حسب المبرهنة (٣-٣-١٣) تكون الزمرة $A \cap B$ ناظرية و أعظمية في A . بشكل مشابه نبرهن أن الزمرة $A \cap B$ ناظرية و أعظمية في B .
مبرهنة ١٢-٣-٥.

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً غير أولي. إذا كان 1 هو القاسم الوحيد للعدد n الذي يحقق $1 \equiv 1 \pmod{-p}$ فإنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها n .
البرهان.

لتكن G زمرة مرتبتها n . وهنا نميز حالتين:

- $n = p'$ حيث $t \in N^*$ عندئذ حسب المبرهنة (٥-١٠) فإن $Z(G) \neq E$ وبما أن الزمرة $Z(G)$ ناظرية في G فإن الزمرة G غير بسيطة.

- $n \neq p'$ وذلك $\forall t \in N^*$ عندئذ $n = ap$ وأن $\alpha \neq p^*$ ومنه فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية، وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن عدد هذه الزمر يساوي $1 + kp$ ويقسم n . وحسب الفرض فإن $1 + kp = 1$ أي أن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط ولتكن K . إن $K \neq G$ لأن $n \neq p'$ وهذه الزمرة ناظرية وهذا يبين لنا أن الزمرة G ليست بسيطة.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نجد أن الزمر غير البسيطة والتي مراتبها بين

200-1 هي

12, 24, 30, 36, 48, 56, 60, 72, 80, 90, 96, 105, 108, 112, 120, 132,

144, 150, 160, 168, 180, 192

مبرهنة ١٢-٣-٦.

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها pq حيث p, q أعداد أولية مختلفة وأن $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ عندئذ الزمرة G ليست بسيطة.
البرهان.

لنفرض أن $(G:1) = pq$ وحسب مبرهنة سيلوف الأولى، فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية، وعدد هذه الزمر يساوي $1+kp$ ويقسم pq وذلك حسب مبرهنة سيلوف الثالثة. أي أن $\{1, p, q, pq\}$ وحسب الفرض نجد أن هذا محقق فقط عندما $k=0$ أي أن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط وحسب المبرهنة (١٠-١٥) فإن هذه الزمرة تكون ناظرية في G وهذا يبين لنا أن الزمرة G ليست بسيطة. ◊

نتيجة.

إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها pq حيث p, q أعداد أولية مختلفة عندئذ الزمرة G ليست بسيطة.
البرهان.

بما أن $p \neq q$ لنفرض أن $p > q$ عندئذ $q-1$ لا يقسم p وحسب المبرهنة (١٢-٦) فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية ناظرية ولستكن K وأن $E \neq K \neq G$ ومنه فإن الزمرة G ليست بسيطة. ◊

تمهيدية ١٢-٣-٧.

لتكن G زمرة منتهية بسيطة وغير تبديلية و p عدداً أولياً يقسم مرتبة الزمرة G . عندئذ فإن عدد جميع الـ p -زمر الجزئية السيلوفية في G أكبر من الواحد.
البرهان.

بما أن p يقسم مرتبة الزمرة G فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية واحدة على الأقل ولتكن K . وبما أن الزمرة G بسيطة وغير تبديلية، فإنه حسب المبرهنة (١٠-٥) أيأ كان $n \in N^*$ فإن $(G:1) = p^n$ وحسب المبرهنة الأساسية في

الحساب يوجد عدد أولي $q \neq p$ يقسم مرتبة الزمرة G . ومنه فإن $E \neq K \neq G$. إذا كانت الزمرة K هي الـ p -زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في G فإن الزمرة K تكون ناظمية في G وهذا يناقض كون الزمرة G بسيطة. مما سبق نجد أن عدد جميع الـ p -زمر الجزئية السيلوفية في G أكبر من الواحد. ◊

مبرهنة ١٢-٣-٨.

لتكن G زمرة منتهية. إذا كانت $(G:1) = p^2 q$ حيث p, q أعداد أولية مختلفة، عندئذ الزمرة G ليست بسيطة.

البرهان.

حسب مبرهنة سيلوف الأولى فإن الزمرة G تحوي p -زمرة جزئية سيلوفية وأيضاً تحوي q -زمرة جزئية سيلوفية. لنفرض أن n_p, n_q عدد جميع الـ p -زمر الجزئية السيلوفية وعدد جميع الـ q -زمر الجزئية السيلوفية على الترتيب. وحسب مبرهنة سيلوف الثالثة فإن $n_p, n_q \in \{1, p, q, p^2, pq, p^2q\}$. لنفرض أن $n_p > 1, n_q > 1$ عندئذ n_p يقسم q ومنه $n_p = q$ وبما أن $n_p = 1 + kp$ نجد أن $q > p$. من جهة أخرى، إن n_q يقسم p^2 ومنه إما $n_q = p^2$ أو $n_q = q$. وبما أن كل عنصر من G مرتبته q يولد زمرة جزئية مرتبتها q والتي تشكل q -زمرة جزئية سيلوفية في G . وبما أن أي زمريتين جزئيتين مختلفتين مرتبة q يساوي E نجد أن الزمرة G تحوي $n_q(q-1)$ عنصراً مرتبته q . إذا كان $n_p = p^2$ عندئذ فإن الزمرة G تحوي $p^2(q-1) = p^2$ عنصراً مرتبته لا تساوي q . لتكن K عبارة عن p -زمرة جزئية سيلوفية في G . عندئذ فإن K لا تحوي عناصر مرتبتها q وبما أن $(K:1) = p^2$ نجد أن K هي الـ p -زمرة الجزئية السيلوفية الوحيدة في G وهذا يناقض كون $n_p > 1$. ومنه نجد أن $n_p = q$ أي أن $1 + kp = q$ والذي يبين لنا أن $p > q$ وهذا يناقض كون $q > p$. مما سبق نجد أن الزمرة G ليست بسيطة. ◊

مبرهنة ١٢-٣-٩.

لتكن G زمرة منتهية. إذا كانت $pqr = (G:1)$ حيث p, q, r أعداد أولية مختلفة،
عندئذ الزمرة G ليست بسيطة.

البرهان.

لنفرض أن $p > q > r$ ولنفرض جدلاً أن الزمرة G بسيطة. ولنفرض أيضاً أن

n_p هو عدد جميع الـ p -زمر الجزئية السيلوفية في G .

n_q هو عدد جميع الـ q -زمر الجزئية السيلوفية في G .

n_r هو عدد جميع الـ r -زمر الجزئية السيلوفية في G .

وحسب التمهيدية (١٢-٣-٧) فإن $n_p > 1, n_q > 1, n_r > 1$ وبما أن تقاطع أي

p -زمرتين جزئيتين سيلوفيتين مختلفتين مختلفتين من G يساوي E نجد أن الزمرة G

تحتوي $n_p(p-1)$ عنصراً مرتبته p ، وتحتوي $n_q(q-1)$ عنصراً مرتبته q وتحتوي

$n_r(r-1)$ عنصراً مرتبته r . ومنه نجد أن

$$(G:1) = pqr \geq 1 + n_p(p-1) + n_q(q-1) + n_r(r-1)$$

وحسب مبرهنة سيلوف الثلاثة نجد أن

$n_p = 1 + kp$ ويقسم qr وبما أن $n_p > 1$ و $p > q, p > r$ نجد أن $n_p = qr$.

$n_q = 1 + kq$ ويقسم pr وبما أن $q > r$ فإن $n_q \geq p$.

$n_r \geq q$.

وهذا يبين لنا أن

$$pqr \geq 1 + qr(p-1) + p(q-1) + q(r-1)$$

ومنه $0 \leq (p-1)(q-1)$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الزمرة G ليست

بسيطة. $\square$

١٣-٤. العلاقات والمولدات.

في هذه الفقرة سنقدم طريقة مناسبة لتعريف زمرة باستخدام ميزات خاصة بها. ببساطة سنبدأ بمجموعة من العناصر والعلاقات التي نريد من خلالها توليد زمرة، ومن بين كل الزمر الممكنة سنختار أكبر واحدة من هذه الزمر.

تعريف ومصطلحات.

لنكن $S = \{a, b, c, \dots\}$ مجموعة من الرموز المختلفة ولنعرف مجموعة جديدة $S^{-1} = \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \dots\}$ وذلك باستبدال كل عنصر x من S بعنصر جديد هو x^{-1} . ولنعرف المجموعة $W(S)$ المؤلف من جميع العلاقات المنتهية $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ حيث $x_i \in S \cup S^{-1}$ لأجل كل دليل i . عناصر المجموعة $W(S)$ سندعوها كلمات من S وسنعتبر أن العلاقة التي لا تحوي أي عنصر من S أو S^{-1} هي كلمة من $W(S)$ وسندعوها الكلمة الخالية ونرمز لها بالرمز e . لنعرف على المجموعة $W(S)$ علاقة ثنائية (قانون تشكيل داخلي) بالشكل أيا كان $x_1 x_2 x_3 \dots x_r, y_1 y_2 y_3 \dots y_s \in W(S)$ فإن

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_r y_1 y_2 y_3 \dots y_s \in W(S)$$

واضح أن هذه العملية تجميعية وأن الكلمة الخالية في $W(S)$ هي عنصر حيادي. من الملاحظ أن الكلمة aa^{-1} ليست هي العنصر الحيادي، لأنه حسب تعريف عناصر المجموعة $W(S)$ فإن هذه العناصر هي صف لرموز من S و S^{-1} بجانب بعضها بعضاً ولا تعني أي شيء آخر. إلى هنا نجد أنه كي تكون المجموعة $W(S)$ زمرة هو أن يوجد لكل عنصر من $W(S)$ مقلوب. وهنا تبرز الصعوبة لأنه منطقياً يجب أن يكون مقلوب الكلمة ab هو الكلمة $b^{-1}a^{-1}$ ولكن حسب تعريفنا للعملية على $W(S)$ فإن الكلمة $abb^{-1}a^{-1}$ هي ليست الكلمة الخالية. لنورد الآن الطريقة التي تضمن لنا وجود مقلوب لعناصر المجموعة $W(S)$ وهذه الطريقة تبدأ من خلال تعريف علاقة تكافؤ على المجموعة $W(S)$.

تعريف.

من أجل أي عنصرين $u, v \in W(S)$ سوف نقول إن العنصر u مرتبط بالعنصر v إذا كان بالامكان الحصول على العنصر v من العنصر u عن طريق إجراء عدد منته من الاختصارات من الشكل xx^{-1} أو $x^{-1}x$ حيث $x \in S$.
تمهيدية ١٣-٤-١.

إن علاقة الارتباط على عناصر المجموعة $W(S)$ الواردة في التعريف السابق هي علاقة تكافؤ على المجموعة $W(S)$.
البرهان.

سنتركه تمريناً للقارئ. ◊

مثال.

لنأخذ المجموعة $S = \{a, b, c\}$. إن العنصر $acc^{-1}b$ مكافئ للعنصر ab . والعنصر $a^{-1}aabbb^{-1}a^{-1}$ مكافئ للعنصر $aabac$. كذلك فإن الكلمة $a^{-1}aabbb^{-1}a^{-1}$ تكافئ الكلمة الخالية. وكذلك الكلمة $ca^{-1}b$ مكافئة للكلمة $a^{-1}bbca^{-1}ac^{-1}b^{-1}$.
بينما الكلمة $cac^{-1}b$ لا تكافئ الكلمة ab .
مبرهنة ١٣-٤-٢.

لنكن S مجموعة و $u \in W(S)$. ل نرمز لصف التكافؤ المولد بالكلمة u بالرمز $\bar{u}$.
عندئذ مجموعة كل صفوف التكافؤ لعناصر المجموعة $W(S)$ تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية $\bar{u} \cdot \bar{v} = \overline{uv}$ وذلك أيأ كان $u, v \in W(S)$.
البرهان.

لنفرض أن

$$G = \{\bar{u} : u \in W(S)\}$$

مجموعة صفوف التكافؤ ولبرهن على المجموعة G زمرة. واضح من التعريف أن العملية $\bar{u} \cdot \bar{v} = \overline{uv}$ داخلية على G وذلك أيأ كان $\bar{u}, \bar{v} \in G$. لبرهن على أن هذه العملية معرفة جيداً. ليكن $\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{v}, \bar{v}_1 \in G$ بحيث $\bar{u} = \bar{u}_1, \bar{v} = \bar{v}_1$ ولبرهن على أن

$$\overline{uv} = \overline{u_1 v_1}$$

بما أن $\bar{u} = \bar{u}_1$ فإن الكلمتين u, u_1 متكافئتان ومنه تكون الكلمتان u, v و u_1, v_1 متكافئتين ومنه $\overline{uv} = \overline{u_1 v_1}$. كذلك بما أن $\bar{v} = \bar{v}_1$ فإن الكلمتين $u_1 v_1, u_1 v$ متكافئتان وبالتالي $\overline{u_1 v} = \overline{u_1 v_1}$. مما سبق نجد أن $\overline{u \cdot v} = \overline{uv}$.

كما أن العملية (.) تجميعية لأنه أياً كان $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in G$ فإن

$$(\overline{u \cdot v}) \cdot \bar{w} = \overline{(uv) \cdot w} = \overline{(uv)w} = \overline{u(vw)} = \overline{u(vw)} = \overline{u(vw)}$$

وأن صف التكافؤ المولد بالكلمة الخالية هو حيادي بالنسبة إلى هذه العملية وللرمز له e . كما أنه يوجد لكل عنصر من G مقلوب لأنه إذا كان $\bar{u} \in G$ حيث $u \in W(S)$ ولنفرض أن $u = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ عندها

$$v = x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} \dots x_n^{-1} \in W(S)$$

ويحقق أن $uv = e$ هو الكلمة الخالية ومنه $\bar{u} \cdot \bar{v} = e$. مما سبق نجد أن G زمرة.
 تعريف.

نسمي الزمرة المعرفة في المبرهنة السابقة بالزمرة الحرة على S .

مبرهنة ١٣-٤-٣.

كل زمرة هي صورة مباشرة لزمرة حرة وفق تشاكل زمري غامر.

البرهان.

لنكن G زمرة و S مجموعة مولدات الزمرة G . (المجموعة S دوماً موجودة لأنه بالإمكان أخذ G بمثابة S). ولنكن F الزمرة الحرة على (مجموعة مولداتها S). وبما أن كل كلمة من $W(S)$ هي عبارة عن جداء منته لعناصر من G (عنصر من G) ولأجل ذلك سوف ندخل الرموز التالية:

سنرمز للكلمة $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ في $W(S)$ بالرمز $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)_F$ وللجداء $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ في G بالرمز $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)_G$. بناءً على ذلك فإن العنصر $\overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$ يرمز إلى صف التكافؤ في F الممثل بالكلمة $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)_F$. نلاحظ أن كلا من $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)_G$ و $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)_F$ يمكن أن يكونا عنصرين

مختلفين، لأن العمليات في $W(S)$ و G مختلفة. لنعرف العلاقة $\Phi : F \rightarrow G$ بالشكل التالي

$$\Phi((x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_F) = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_G$$

واضح أن Φ تطبيق لأن الاختصارات من الشكل xx^{-1} أو $x^{-1}x$ لعناصر $W(S)$ توافق ذات الاختصارات في G . وأن

$$\begin{aligned} \Phi[(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_F \cdot (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_F] &= \Phi((x_1 x_2 x_3 \cdots x_n y_1 y_2 y_3 \cdots y_n)_F) = \\ &= (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n y_1 y_2 y_3 \cdots y_n)_G = (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_G (y_1 y_2 y_3 \cdots y_n)_G = \\ &= \Phi((x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_F) \cdot \Phi((y_1 y_2 y_3 \cdots y_n)_F) \end{aligned}$$

أي أن Φ تشاكل وهو غامر لأن المجموعة S مولدة للزمرة G .
مبرهنة ١٣-٤-٤.

كل زمرة تماثل زمرة الخارج لزمرة حرة.

البرهان.

لنكن G زمرة بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة توجد زمرة حرة F وتشاكل زمري غامر $\Phi : F \rightarrow G$ ومنه $G \cong F / \text{Ker} \Phi$.
تعريف.

نقول عن الكلمة $w \in W(S)$ إنها غير قابلة للاختصار إذا كانت من الشكل

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} x_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots x_{i_l}^{\epsilon_l}$$

حيث $\epsilon_i = \pm 1$ وأن $x_{i_{i+1}}^{\epsilon_{i+1}} \neq x_{i_i}^{-\epsilon_i}$ $i = 1, 2, 3, \dots, l$.

مبرهنة ١٣-٤-٥.

لنكن S مجموعة ما. إن كل صف تكافؤ لعناصر من $W(S)$ يحوي كلمة واحدة فقط غير قابلة للاختصار.

البرهان.

لنكن $w \in W(S)$ ولنفرض أن $w = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ حيث $a_i \in W(S)$ من أجل $1 \leq i \leq n$. ولنفرض أن $w_0 = e$ وأن $w_i = a_i$. لنفرض أنه تم تعيين الكلمة w_i

ولتعيين الكلمة w_{i+1} لميز حالتين:

- إذا كان آخر عنصر في الكلمة w_i لا يساوي a_{i+1}^{-1} لنضع $w_{i+1} = w_i a_{i+1}$.
- إذا انتهت الكلمة w_i بالعنصر a_{i+1}^{-1} أي إذا كان $w_i = z a_{i+1}^{-1}$ عندئذ فإن العنصر z يتعين بشكل وحيد، لأنه إذا كان $z_1 a_{i+1}^{-1} = z_2 a_{i+1}^{-1}$ فإن $z_1 = z_2$ وذلك حسب التعريف، وفي هذه الحالة نفرض أن $w_i = z$.

وهكذا نجد أنه بالاستقراء تم تعيين الكلمات $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$ من الواضح أنه إذا كان $n=0$ فإن $w_n = e$ كما أن الكلمات w_i هي كلمات غير قابلة للاختصار $0 \leq i \leq n$. بالإضافة لذلك فإن الكلمة w_i تكافئ الكلمة $a_1 a_2 a_3 \dots a_i$ لأجل كل $0 \leq i \leq n$ ومنه فإن $\bar{w}_n = \bar{w}$. وهنا نجد أنه إذا كانت الكلمة w غير قابلة للاختصار فإن $w = w_n$.

لنبرهن الآن أن أي كلمتين متكافئتين تكونان متطابقتين. لنكن

$$u = a_1 a_2 a_3 \dots a_r a_{r+1} \dots a_n$$

$$v = a_1 a_2 a_3 \dots a_r x x^{-1} a_{r+1} \dots a_n$$

حيث $x \in W(S)$ ولنفرض أنه تم تعيين الكلمات

$$u_0 = e, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$$

$$v_0 = e, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+2}$$

وذلك بحسب طريقة البناء الموضحة أعلاه فنجد أن

$$u_0 = v_0, u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_r = v_r$$

ولنبرهن الآن أن $u_r = v_{r+2}$ لميز حالتين:

- إذا كانت نهاية الكلمة u_r لا تساوي x^{-1} عندئذ $u_r = v_r$ وأن $v_{r+1} = v_r x$ ومنه

$$u_r = v_{r+2} \text{ وبالتالي يكون } v_{r+2} = v_r$$

- إذا انتهت الكلمة u_r بالعنصر x^{-1} فإن $u_r = z x^{-1}$ ومنه فإن $z = x_0 x$ وبالتالي

$$u_r = z_0 x x^{-1} = z_0 \text{ ولذلك يكون } v_r = u_r \text{ و } v_{r+1} = z \text{ وأن } v_{r+2} = z x^{-1} = u_r$$

وفي كلا الحالتين نجد أن $u_r = v_{r+2}$ ومنه نجد أن $u_{r+1} = v_{r+2+1}$ حيث

$$i = 0, 1, 2, \dots, (n-r)$$

العلاقات والمولدات.

لقد وضعنا أساساً لتعريف زمرة عن طريق المولدات والعلاقات، وقبل ذلك سنوضح خطوات العمل عن طريق المثال التالي:

مثال ١.

لتكن F الزمرة الحرة على المجموعة $\{a, b\}$ ولتكن N أصغر زمرة جزئية ناظرية في F والتي تحتوي على المجموعة $\{a^4, b^2, (ab)^2\}$ والتي يمكن دوماً إيجادها. لنبرهن على أن الزمرة $\frac{F}{N}$ تماثل D_4 .

نلاحظ أن التطبيق $\phi: F \rightarrow D_4$ المعرف بالشكل $\phi(a) = L$ و $\phi(b) = H$ حيث L يمثل الدوران بزاوية 90° وأن H هو الانعكاس بالنسبة إلى المحور الأفقي، هو تشاكل ولوائه تحوي N ولكونه غامراً فإن $F / \text{Ker } \phi \approx H$. من ناحية أخرى، إن المجموعة

$$K = \{N, aN, a^2N, a^3N, bN, abN, a^2bN, a^3bN\}$$

والتي عناصرها هي المرافقات اليسارية للزمرة N . إن $\frac{F}{N} = K$ ، لإثبات ذلك يكفي أن نبرهن أن المجموعة K مغلقة بالنسبة إلى الضرب من اليسار بـ a أو b . واضح أن أي عنصر من $\frac{F}{N}$ يمكن أن يولد من N و جداء مناسب من اليسار لقوى

العناصر a, b . بهذا الشكل نجد أنه لا توجد عناصر في $\frac{F}{N}$ مختلفة عن عناصر K .

واضح أن K مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب من اليسار بـ a .

لنبرهن على أن K مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب من اليمين بـ b وسنكتفي بحالة واحدة فقط من الحالات الثماني. لنأخذ العنصر الثاني $aN \in K$ ولنوجد $b(aN)$. بما أن $(ab)^2N = N$ وأن $a^4N = N$ نجد أن $a^3N = a^{-1}N = babN$ وبما أن الزمرة N ناظرية فإن $babN = baNb$ ومنه $babN = a^3Nb$ أي أن $baNb^2 = a^3Nb$ وبالتالي بما أن $b^2N = N$ وأن الزمرة N ناظرية فإن $b(aN) = a^3bN \in K$. بشكل مشابه

يبرهن على الحالات المثبتة، بهذا الشكل نجد أن الزمرة $\frac{F}{N}$ تملك على الأكثر ثمانية

عناصر. من جهة أخرى، نعلم أن $\frac{F}{\text{Ker } \varphi}$ تملك ثمانية عناصر فقط، وبما أن $\frac{F}{\text{Ker } \varphi}$

هي زمرة الخارج للزمرة $\frac{F}{N}$ لأن $\frac{F}{\text{Ker } \varphi} \approx \frac{F}{N} / \frac{\text{Ker } \varphi}{N}$ وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{F}{N}$

تحتوي ثمانية عناصر ومنه $D_4 \approx \frac{F}{\text{Ker } \varphi} \approx \frac{F}{N}$.

تعريف.

لتكن G زمرة مولدة بالمجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ولتكن F الزمرة الحرة

على A ولتكن $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_l\}$ مجموعة جزئية من F وأن N أصغر

زمرة جزئية ناظمية من F تحوي W . نقول إن الزمرة G معينة بالمولدات

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ والعلاقات $w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_l = e$ إذا وجد تشاكل زمري

غامر $f: \frac{F}{N} \rightarrow G$ يحقق $f(a_i N) = a_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$. نعبّر عن

الزمرة G في هذه الحالة بالشكل

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \mid w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_l = e \rangle$$

ملاحظة.

يجب التنويه إلى أننا في التعريف افترضنا أن مجموعة المولدات والعلاقات هي

مجموعات منتهية وهذا شرط غير ضروري. بالإضافة لذلك في معظم الأحيان من

الأنسب كتابة العلاقات بشكل ضمني، فعلى سبيل المثال العلاقة $a^{-1}b^{-3}ab = e$ نكتب

بالشكل $ab = b^3a$.

بالعودة إلى المثال (١) فإن للزمرة D_4 يمكن التعبير عنها بالشكل

$$D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

مبرهنة ١٣-٤-٦. (Dyck, 1882).

لتكن

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \mid w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_l = e \rangle$$

ولتكن

$$H = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \mid w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_i = w_{i+1} = \dots = w_{i+k} = e \rangle$$

علندئذ الزمرة H تماثل زمرة خارج للزمرة G .

البرهان.

نلاحظ أن مجموعة مولدات كل من الزمرتين G, H هي ذاتها المجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. لنفرض أن F هي الزمرة الحرة على المجموعة A وأن K_1 هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في F تحوي المجموعة $W_1 = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_i\}$ وأن K_2 هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في F تحوي المجموعة $W_2 = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_i, w_{i+1}, \dots, w_{i+k}\}$. وحسب التعريف فإن

$$G \approx \frac{F}{K_1}, H \approx \frac{F}{K_2}$$

وبما أن $W_1 \subseteq W_2$ فإن $K_1 \subseteq K_2$ وبالتالي فإن زمرة جزئية ناظمية في K_2 ومنه حسب مبرهنة التماثل الثالثة فإن

$$H \approx \frac{F}{K_2} \approx \frac{F/K_1}{K_2/K_1} \approx \frac{G}{N}$$

حيث $N = \frac{K_2}{K_1}$. وهذا يبين لنا أن الزمرة H تماثل زمرة خارج للزمرة G .

مثال ٢.

لتكن G زمرة ممثلة بالشكل

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$$

لندرس تكوين الزمرة G .

بفرض أن F هي الزمرة الحرة على المجموعة $A = \{a, b\}$ وأن N هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في F تحوي المجموعة $\{(ab)^{-2}a^2, b^{-2}a^2\}$. لنحاول دراسة الزمرة G من دون استخدام الزمرة N . لنفرض أن $H = \langle b \rangle$ وأن $S = \{H, aH\}$ فلجدد كما في المثال (١) أن المجموعة S مغلقة بالنسبة إلى الضرب بالعناصر a, b من اليسار

وأن $G = H \cup aH$ وهكذا نجد أنه لتحديد عناصر الزمرة G يكفي معرفة عدد عناصر الزمرة H . من خلال العلاقات التي تحققها الزمرة G نلاحظ أن $b^2 = (ab)^2 = abab$ ومنه $b = aba$. كما أن

$$a^2 = b^2 = (aba)(aba) = aba^2ba = ab^4a$$

أي أن $b^4 = e$. وهكذا نجد أن الزمرة H تملك على الأكثر أربعة عناصر وبالتالي فإن الزمرة G تملك على الأكثر ثمانية عناصر وهي بالتحديد

$$e, b, b^2, b^3, a, ab, ab^2, ab^3$$

ومن الممكن أن تكون هذه العناصر غير مختلفة.

مثال ٣.

لتكن G زمرة ممثلة بالشكل

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^9 = e, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

لندرس تكوين الزمرة G .

لنأخذ الزمرة $H = \langle b \rangle$ فنجد أن $G = H \cup aH \cup a^2H$. وهكذا نجد أن

$$G = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 8\}$$

ومنه فإن الزمرة G تملك على الأكثر 27 عنصراً. وبملاحظة أن $b^{-1} = a^{-1}ba$ نجد

$$b = (a^{-1}ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}a$$

$$b = ebe = a^{-3}ba^3 = a^{-2}(a^{-1}ba)a^2 = a^{-2}b^{-1}a^2 =$$

$$= a^{-1}(a^{-1}b^{-1}a)a = a^{-1}ba = b^{-1}$$

ومنه فإن $b^2 = e$ وبما أن $b^2 = e = b^9$ نجد أن $b = e$ وهذا يبين لنا أن الزمرة تحوي

ثلاثة عناصر مختلفة وهي e, a, a^2 .

مبرهنة ١٣-٤-٧. (Cayley, 1859).

توجد فقط خمس زممر مرتبة كل منها تساوي 8.

البرهان.

لتكن G زمرة مرتبتها تساوي 8.

- إذا كانت الزمرة G تبديلية فإنه حسب النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية تبين لنا أن الزمرة G تماثل واحدة من الزمر التالية

$$Z_8$$

$$Z_4 \oplus Z_2$$

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$$

- لنناقش الحالة التي تكون فيها الزمرة G غير تبديلية.

لنأخذ الزمرة G_1 الممثلة بالشكل

$$G_1 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

ولنأخذ أيضا الزمرة G_2 الممثلة بالشكل

$$G_2 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 \rangle$$

وبالاعتماد على المثال (١) نجد أن $G_1 \approx D_4$ وحسب المثال (٢) فإن $G_2 \approx D_2$.

لهذا السبب يكفي أن نثبت أن الزمرة G تحقق العلاقات المعينة للزمرة G_1 أو العلاقات

المعينة للزمرة G_2 . وأضح أن الزمرة G تحوي عنصراً مرتبته 4 وليكن a .

ليكن $b \in G$ بحيث $b \notin \langle a \rangle$ وهذا يبين لنا أن

$$G = \langle a \rangle \cup \langle a \rangle b = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

بما أن $b \notin \langle a \rangle$ فإن $b \neq e, b \neq a, b \neq a^2, b \neq a^3$. من جهة أخرى، بما أن G زمرة

و $b \in G$ فإن

$$b^2 \in G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

وبما أن $b \neq e, b \neq a, b \neq a^2, b \neq a^3$ نجد أن

$$b^2 \neq b, b^2 \neq ab, b^2 \neq a^2b, b^2 \neq a^3b$$

ومنه فإن $b^2 \in \{e, a, a^2, a^3\}$. كما أن $b^2 \neq a$ لأنه في الحالة المعاكسة نجد

أن $ab = ba$ وهذا غير ممكن. أيضا نلاحظ أن $b^2 \neq a^3$ لأنه في هذه الحالة نجد

أن $ab^2 = b^2a$ وهذا أيضا غير ممكن. مما سبق نجد أنه إما $b^2 = a^2$ أو $b^2 = e$.

- إذا كان $b^2 = e$ وبما أن الزمرة $\langle a \rangle$ ناظرية في G نجد أن $bab^{-1} \in \langle a \rangle$ ومنه $o(bab^{-1}) = o(a)$ وهذا يبين لنا أنه إما $bab^{-1} = a$ أو $bab^{-1} = a^{-1}$. إذا كان $bab^{-1} = a$ نجد أن الزمرة G تبادلية وهذا غير محقق. مما سبق نجد أن $bab^{-1} = a^{-1}$ وبما أن $b^2 = e$ نجد أن $(ab)^2 = e$ وبالتالي تكون الزمرة G محققة للعلاقات المعينة للزمرة G_1 .

- إذا كان $b^2 = a^2$ وبمناقشة مشابهة نجد أن $(ab)^2 = a^2$ وبالتالي تكون الزمرة G محققة للعلاقات المعينة للزمرة G_2 .

تطبيق آخر ممتع للعلاقات والمولدات سوف نستخدمه لأجل تصنيف الزمر الثنائية. من أجل $n \geq 3$ سوف نرمز للزمرة التناظرية للمضلع المنتظم ذي n - رأس بالرمز D_n حيث

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$$

سوف نعرف الزمرة الثنائية غير المنتهية D_∞ بالشكل

$$D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e \rangle$$

إن عناصر هذه الزمرة هي

$$e, a, b, ab, ba, (ab)a, (ba)b, (ab)^2, (ba)^2, (ab)^2a, (ba)^2b, (ab)^3, (ba)^3, \dots$$

مبرهنة ١٣-٤-٨.

كل زمرة مولدة بزوج من العناصر مرتبة كل منها تساوي 2 هي زمرة ثنائية.

البرهان.

لنكن G زمرة مولدة بعنصرين a, b مرتبة كل منها تساوي 2. سوف نورد البرهان

لحسب مرتبة الجداء ab .

- إذا كان $o(ab) = \infty$ علئذ الزمرة G غير منتهية وتحقق العلاقات المعينة

للزمرة D_∞ . لنبرهن على أن $G \approx D_\infty$. لدينا حسب المبرهنة (١٣-٤-٧) فإن

الزمرة G تماثل زمرة خارج للزمرة D_∞ لنفرض أن $D_\infty \approx \frac{D_\infty}{H}$ حيث H زمرة جزئية

ناظرية في D_∞ . ليكن $x \in H$ بحيث $x \neq e$ وبما أن كل عنصر من D_∞ يأخذ أحد

الأشكال التالية $(ab)'a, (ba)'b, (ab)', (ba)'$ وبسبب التناظر سوف نفرض أنه إما $x = (ab)'$ أو $x = (ab)'a$.
- إذا كان $x = (ab)'$ عندئذ

$$H = (ab)' H = (abH)'$$

ومنه $(abH)^{-1} = (abH)'^{-1}$ وبما أن

$$(abH)^{-1} H = (abH)^{-1} = b^{-1} a^{-1} H = baH$$

وهذا يبين لنا أن $aHaH = baH = (abH)^{-1}$ وهكذا فإن

$$\frac{D_\infty}{H} = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle$$

وبما أن الزمرة $\frac{D_\infty}{H}$ تحقق العلاقات المعينة للزمرة D_1 (وذلك بفرض

أن $x = aH, y = abH$) وهذا يبين لنا أن الزمرة G منتهية وهذا غير ممكن.

- إذا كان $x = (ab)'a$ عندئذ $H = (ab)' aH = (ab)' HaH$ ومنه

$$(abH)' = (ab)' H = (aH)' = a^{-1} H = aH$$

ومنه نجد أن $\langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle \subseteq \langle abH \rangle$ بالإضافة لذلك فإن

$$(abH)^{2i} = (aH)^{2i} = a^2 H = H$$

وهذا يبين لنا أيضا أن الزمرة $\frac{D_\infty}{H}$ منتهية مما يناقض الفرض. مما سبق نجد أن

الزمرة $H = \langle e \rangle$ أي أن الزمرة $D_\infty \approx G$.

- إذا كان $o(ab) = n$ عندئذ وبما أن $G = \langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$ عندئذ فإن

الزمرة $D_n \approx G$ وذلك لأن $b(ab)b = (ab)^{-1}$ والذي يكافئ $ba = (ab)^{-1}$ وهذا يلتج

من كون $ba = b^{-1} a^{-1} = (ab)^{-1}$ وذلك لأن مرتبة كل من a, b تساوي 2.

تمارين محلولة (١٣)

١ - تعريف.

نقول عن الزمرة التبديلية G إنها أساسية إذا وجد عدد أولي p يحقق

$$\forall g \in G; \quad g^p = e$$

لتكن G عبارة عن p -زمرة. إذا كان $Fr(G) = E$ عندئذ الزمرة G هي زمرة تبديلية أساسية.

الحل.

لنفرض أن $(G:1) = p^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ وأن $Fr(G) = E$. حسب المبرهنة (١٢-١٢-٦) تكون الزمرة G عديمة القوى وحسب المبرهنة (١٣-١-١٤) يكون $G' \subseteq Fr(G) = E$ ومنه $G' = E$ أي أن الزمرة G تبديلية. لتكن M زمرة جزئية أعظمية في G وحسب المبرهنة (١٣-١-١٤) تكون الزمرة M ناظمية في G ومنه فإن مرتبة الزمرة $\frac{G}{M}$ تساوي q حيث q عدد أولي، وبما أن $(G:1) = p^n$ نجد أن $(\frac{G}{M}:1) = p$ وبالتالي $\forall g \in G; \quad g^p \in M$ وهذا محقق لأجل كل زمرة جزئية أعظمية في G ومنه

$$\forall g \in G; \quad g^p \in Fr(G) = E$$

وبالتالي $\forall g \in G; \quad g^p = e$ أي أن الزمرة G أساسية. ◊

٢ - لتكن G زمرة و $G \neq M$ زمرة جزئية في G و p عدداً أولياً. إذا كان $(G:M) = p$ عندئذ الزمرة الجزئية M أعظمية في G .
الحل.

لتكن K زمرة جزئية في G تحوي M وحسب المبرهنة (٢-٣-٣) فإن

$$p = (G:M) = (G:K)(K:M)$$

ومنه إما $(G:K) = p$ أو $(G:K) = 1$. إذا كان $(G:K) = p$ عندئذ $(G:M) = 1$ وبالتالي $K = M$. إذا كان $(G:K) = 1$ فإن $G = K$ وهذا يبين لنا أن الزمرة الجزئية M أعظمية في G .

٣ - أثبت أن للزمرة

$$G = \langle a, b \mid a^5 = b^2 = e, ba = a^2b \rangle$$

تمثّل الزمرة Z_2 .

الحل.

لإثبات أن $G \approx Z_2$ يكفي إثبات أن الزمرة G دوارة ومرتبّتها تساوي 2. لدينا

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= a(ba)b = a(a^2b)b = a^3b^2 = a^3 = b^2a^3 = b(ba)a^2 = b(a^2b)a^2 = \\ &= (ba^2)(ba^2) = (ba^2)(ba)a = (ba^2)(a^2b)a = ba^4(ba) = ba^4(a^2b) = \\ &= bab = a^2b^2 = a^2 \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $bab = a$ أي أن $ab = ba$ من جهة أخرى، بما أن $a, b \in G$ فإن $\langle ab \rangle$ زمرة جزئية في G أي أن $\langle ab \rangle \subseteq G$. وبما أن $\gcd(2,5) = 1$ فإنه يوجد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = 2s + 5t$ ومنه

$$a = a^{2s+5t} = a^{2s}a^{5t} = a^{2s} = a^{2s}b^{2s} = (ab)^{2s} \in \langle ab \rangle$$

$$b = b^{2s+5t} = b^{2s}b^{5t} = b^{5t} = a^{5t}b^{5t} = (ab)^{5t} \in \langle ab \rangle$$

وهذا يبين لنا أن $a, b \in \langle ab \rangle$ أي أن $\langle ab \rangle \subseteq G$ ، مما سبق نجد أن $G = \langle ab \rangle$ وهكذا نجد أن الزمرة G دوارة. لنبرهن على أن $o(ab) = 2$. لدينا

$$\begin{aligned} (ab)^2 &= (ba)^2 = a(ba)b = a(a^2b)b = a^3b^2 = b^2a^3 = b(ba)a^2 = \\ &= b(a^2b)a^2 = (ba)(ba)a^2 = (a^2b)(ab)a^2 = a(ab)(ab)a^2 = a(ab)^2a^2 = \\ &= aa^2a^2 = a^5 = e \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن $(G:1) = o(ab) = 2$. مما سبق نجد أن $G \approx Z_2$.

٤ - لتكن G زمرة. أثبت أنه $\forall a, b \in G$ فإن

$$\langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$$

الحل.

ليكن $a, b \in G$ عندئذ فإن $a, b \in \langle a, b \rangle$ ومنه $a, b \in \langle a, b \rangle$ وهذا يبين لنا أن

$$\langle a, ab \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$$

لدينا $ab \in \langle a, ab \rangle$ ومنه $(a, b)^{-1} \in \langle a, ab \rangle$ وبالتالي $a \in \langle a, ab \rangle$ كما أن

$$(a, b)^{-1} \cdot a = b^{-1} a^{-1} a = b^{-1} \in \langle a, ab \rangle$$

ومنـه فإن $b \in \langle a, ab \rangle$ وبالتالي $\langle a, b \rangle \subseteq \langle a, ab \rangle$ ، مما سبق نجد

$$\langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$$

$$\circ \text{ -- لتكن } G = \langle a, b \mid a^2 = b^4 = e, ab = b^3a \rangle$$

-- عبر عن العنصر $a^3 b^2 abab^3$ بالشكل $b^i a^j$.

-- عبر عن العنصر $b^3 abab^3 a$ بالشكل $b^i a^j$.

الحل.

$$\circ a^3 b^2 abab^3 = a^3 b^2 (b^3 a) ab^3 = a^3 b^5 a^2 b^3 = a^3 b b^3 = a^3 = a$$

$$\circ b^3 abab^3 a = b^3 b^3 aab^3 a = b^2 a^2 b^3 a = b^3 a = ba$$

تمارين (١٣)

- ١ - لتكن G زمرة و $M \subset G$ زمرة جزئية من G . أثبت أنه إذا كان $(G:M) = p$ حيث p عدد أولي فإن الزمرة M تكون أعظمية في G .
- ٢ - لتكن G زمرة منتهية. الشروط التالية متكافئة:
 - يوجد في G زمرة جزئية أعظمية واحدة فقط.
 - $(G:1) = p^n$ حيث p عدد أولي و $n \in \mathbb{N}^*$.
- ٣ - اتكن G زمرة و M زمرة جزئية أعظمية في G . أثبت أنه أياً كان $g \in G$ فإن للزمرة gMg^{-1} هي زمرة جزئية أعظمية في G .
- ٤ - لتكن G زمرة. أثبت أن $G' \cap Z(G) \subset Fr(G)$.
- ٥ - لتكن G زمرة منتهية. الشروط التالية متكافئة:
 - الزمرة G دوارة.
 - الزمرة $\frac{G}{Fr(G)}$ دوارة.
- ٦ - لتكن G زمرة. الشروط التالية متكافئة:
 - الزمرة G قابلة للحل.
 - الزمرة $\frac{G}{Fr(G)}$ قابلة للحل.
- ٧ - ليكن $f: G \rightarrow G$ تشاكلاً زمرياً. أثبت أن $f(Fr(G)) \subset Fr(f(G))$.
- ٨ - أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $210 = 2.3.5.7$.
- ٩ - أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $280 = 2^3.5.7$.
- ١٠ - أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $216 = 2^3.3^3$.
- ١١ - أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $315 = 3^2.5.7$.
- ١٢ - أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة مرتبتها $240 = 2^2.3^3.5$.
- ١٣ - أثبت أن الزمرة $G = \langle x, y \mid x^2 = y^n = e, xyx = y^{-1} \rangle$ تماثل الزمرة D_n .

١٤ - لتكن G زمرة و $x, y, z \in G$ بحيث $x^2 = y^2 = e$ وأن $yz = zxy$. أثبت أن $xy = yx$.

١٥ - لتكن $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$.

- عبر عن العنصر $a^3b^2abab^3$ بالشكل $b'a'$.

- عبر عن العنصر b^3abab^3a بالشكل $b'a'$.

١٦ - لتكن $G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = e, yxyx^3 = e \rangle$.

أثبت أن $(G:1) \leq 16$. ثم أوجد مركز الزمرة G . بفرض أن $(G:1) = 16$ أوجد مرتبة العنصر xy .

١٧ - لتكن $G = \langle x, y \mid x^{2^n} = e, x^n = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$.

- أثبت أن $Z(G) = \{e, x^n\}$.

- بفرض أن $(G:1) = 4n$ أثبت أن الزمرة $\frac{G}{Z(G)}$ تماثل الزمرة D_n .

١٨ - لتكن $G = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = e, xyxy^{-1} = e \rangle$.

أثبت أن $(G:1) \leq 16$. ثم أوجد مركز الزمرة G . بفرض أن $(G:1) = 16$ أثبت أن

$\frac{G}{\langle y^2 \rangle}$ تماثل الزمرة D_4 .

١٩ - لتكن $G = \langle a, b, c, d \mid ab = c, bc = d, cd = a, da = b \rangle$.

أوجد مرتبة الزمرة G .

الفصل الرابع عشر

تمديدات الزمر

لنكن M, F زميرتين ما. هدفنا الآن في هذا الفصل هو إيجاد الزمرة G التي تحقق أن الزمرة H تكون ناظمية في G وأن $G/H \approx F$ لأجل ذلك، لابد لنا من بعض التعاريف والتمهيدات ولكن البداية مع هذا المفهوم.

١-١٤. المتتاليات التامة.

تعريف.

المتتالية هي مجموعة (منتهية أو غير منتهية) من الزمر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ و التشاكلات

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $f_n: A_n \rightarrow A_{n+1}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ ونرمز لها

$$\dots \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \rightarrow \dots$$

ولقول عن المتتالية السابقة إنها تامة إذا حققت الشرط التالي:

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Ker} f_{n+1} = \text{Im } f_n$$

تمهيدية ١-١-١٤.

لنكن A, B زميرتين و $f: A \rightarrow B$ تشاكل زمري. عندئذ:

١ - التشاكل f متباين $\Leftrightarrow$ المتتالية $E \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ تامة.

٢ - التشاكل f غامر $\Leftrightarrow$ المتتالية $A \rightarrow B \xrightarrow{f} E$ تامة.

٣ - التشاكل f تماثل $\Leftrightarrow$ المتتالية $E \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow E$ تامة.

البرهان.

١ - لنفرض أن التشاكل f متباين عندئذ $\text{Ker } f = E$ ومنه المتتالية

$E \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ تامة حيث التشاكل $(E \rightarrow A)$ هو التشاكل المطابق على E .

لنفرض أن المتتالية $E \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ تامة عندئذ $\text{Ker } f = E$ ومنه التشاكل f متباين.

٢ - لنفرض أن التشاكل f غامر عندئذ $B = \text{Im } f = \text{Ker}(B \rightarrow E)$ ومنه المتتالية $A \rightarrow B \xrightarrow{f} E$ تامة.

إذا كانت المتتالية $A \rightarrow B \xrightarrow{f} E$ تامة عندئذ $\text{Im } f = B$ ومنه التشاكل f غامر.

٣ - ينتج بشكل مباشر من (١) و (٢) .

١٤-٢. تمديدات الزمر.

تعريف.

نقول عن الزمرة F إنها تمديد للزمرة H إذا وجدت زمرة G تحقق أن المتتالية التالية

$$E \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E$$

تامة.

تمهيدية ١٤-٢-١.

إذا كانت المتتالية $E \rightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} F \rightarrow E$ من الزمر و التشاكلات الزمرية، تامة عندئذ $F \approx \frac{G}{\text{Im } f}$.

لبرهان.

بما أن المتتالية السابقة تامة فإن $\text{Ker } g = \text{Im } f$. من جهة أخرى وحسب مبرهنة التماثل الأولى وكون التشاكل f غامر نجد أن

$$F \approx \frac{G}{\text{Ker } g} = \frac{G}{\text{Im } f}$$

تعريف.

نقول عن المخطط التالي من الزمر و التشاكلات الزمرية

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v \downarrow & & \downarrow u \\ G & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

إنه تبديلي إذا كان $uf = gv$.

ونقول عن المخطط التالي من الزمر و التشاكلات الزمرية

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

إنه تبديلي في كل من الحالات التالية:

-- إذا وجد تشاكل $g: B \rightarrow G$ يحقق $g \circ f = v$.

-- إذا وجد تشاكل $u: G \rightarrow B$ يحقق $u \circ v = f$.

مبرهنة ١٤-٢-٢. (مبرهنة التمهديدات الخمسة).

لنفرض أن المخطط التالي من الزمر و التشاكلات الزمرية

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & F \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow u & & \downarrow v \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & G' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & F' \end{array}$$

تبديلي وأن سطره العلوي والسفلي متتاليات تامة. عندئذ:

١ - إذا كانت التشاكلات u, β متباينة و التشاكل α عامر فإن التشاكل γ يكون متبايناً.

٢ - إذا كانت التشاكلات u, β عامرة و التشاكل v متباين فإن التشاكل γ يكون عامراً.

٣ - إذا كانت التشاكلات u, β تماثلات و التشاكل α عامر و التشاكل v متباين فإن التشاكل γ يكون تماثلاً.

البرهان.

١- نبرهن على أن التشاكل γ متباين أي لنبرهن على أن $\text{Ker } \gamma = E$.

ليكن $x \in \text{Ker } \gamma$ علئذ $\gamma(x) = e$ وبما أن $h' \circ \gamma = u \circ h$ نجد أن

$$u \circ h(x) = h' \circ \gamma(x) = h'(e) = e$$

ومنه $h(x) \in \text{Ker } u$ وبما أن التشاكل u متباين نجد أن $h(x) = e$ أي أن $x \in \text{Ker } h = \text{Im } g$ وبالتالي يوجد $b \in B$ بحيث $x = g(b)$ وبما أن $g' \circ \beta(b) = \gamma(x) = e$ نجد أن $\gamma \circ g(b) = g' \circ \beta(b)$ أي أن $\beta(b) = f'(a')$ حيث $a' \in A'$ ومنه يوجد $\beta(b) \in \text{Ker } g' = \text{Im } f'$ وبالتالي التشاكل α غامراً يوجد $a \in A$ بحيث $a' = f(a)$ ومنه $\beta(b) = f'(\alpha(a))$ وبما أن $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ نجد أن $\beta(b) = \beta(f(a))$ ومنه $\beta(b^{-1} \cdot f(a)) = e$ ولكون التشاكل β متبايناً نجد أن $b^{-1} \cdot f(a) = e$ ومنه $b = f(a)$ وهكذا نجد أن $x = g(b) = g(f(a))$ وبما أن $\text{Ker } g = \text{Im } f$ وأن $f(a) \in \text{Ker } g$ نجد أن $x = g(f(a)) = e$ مما سبق نجد أن التشاكل γ متباين.

٢ - للبرهن على أن $\gamma(G) = G'$ ليكن $y' \in G'$ علئذ $h'(y') \in D'$ ولكون التشاكل u غامراً يوجد $d \in D$ بحيث $u(d) = h'(y')$ وبما أن $v \circ \lambda = \lambda' \circ u$ نجد أن $v \circ \lambda(d) = \lambda' \circ u(d) = \lambda' \circ h'(y')$ ولـ $\text{Ker } \lambda' = \text{Im } g'$ فإن $h'(y') \in \text{Ker } \lambda'$ ومنه $v \circ \lambda(d) = \lambda'(h'(y')) = e$ ولكون التشاكل v متبايناً نجد $\lambda(d) = e$ أي أن $d \in \text{Ker } \lambda = \text{Im } h$ وبالتالي يوجد $y \in G$ بحيث $d = h(y)$ وبما أن $u \circ h = h' \circ \gamma$ نجد أن

$$h' \circ \gamma(y) = u \circ h(y) = u(d) = h'(y')$$

ومنه $h'(\gamma(y).y'^{-1}) = e$ أي أن $h'(\gamma(y).y'^{-1}) \in \text{Ker } h' = \text{Im } g'$ ومنه يوجد $b' \in B'$ بحيث $\gamma(y).y'^{-1} = g'(b')$ وبما أن التشاكل β غامراً يوجد $b \in B$ بحيث $b' = \beta(b)$ ومنه $\gamma(y).y'^{-1} = g'(b') = g' \circ \beta(b) = \gamma \circ g(b)$ وبالتالي $\gamma(g(b).y^{-1}) = y'$ وبما أن $g(b).y^{-1} \in G$ فإن $g(b).y^{-1} \in G$ مما سبق نجد أن التشاكل γ هو غامر.

٣ - ينتج بشكل مباشر من (١) و (٢):

تعريف.

نقول عن التمديدين

$$E \rightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{k} F \rightarrow E$$

$$E \rightarrow H \xrightarrow{f'} G^* \xrightarrow{k'} F \rightarrow E$$

للزمرة H إنهما متكافئان إذا وجد تشاكل زمري $G \xrightarrow{\lambda} G^*$ من أجله يكون

المخطط التالي

$$H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{k} F$$

$$\lambda \downarrow$$

$$G^*$$

تبدلي لأجل f', g' أي إذا كان $f' \circ \lambda = g$ و $\lambda \circ f = f'$.

نسمي التشاكل λ بالتشاكل المكافئ للتمددين.

مبرهنة ١٤-٢-٣.

ليكن

$$E \rightarrow H \xrightarrow{k} G \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow E$$

$$E \rightarrow H \xrightarrow{k'} G^* \xrightarrow{\varphi'} F \rightarrow E$$

تمددين للزمرة H بواسطة الزمرة F . إذا وجد تشاكل زمري $f: G \rightarrow G^*$ من

أجله التمديدان السابقان متكافئان، عندئذ يكون التشاكل f تماثلاً.

البرهان.

بما أن

$$E \rightarrow H \xrightarrow{k} G \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow E$$

$$E \rightarrow H \xrightarrow{k'} G^* \xrightarrow{\varphi'} F \rightarrow E$$

تمديدان للزمرة H بواسطة الزمرة F عندئذ فإن المتتاليات السابقة هي متتاليات

تامة. ليكن $f: G \rightarrow G^*$ التشاكل الزمري الذي من أجله التمديدان السابقان متكافئان

، عندئذ يكون المخطط التالي

$$H \xrightarrow{g} G \xrightarrow{f} F$$

$$f \downarrow$$

$$G^*$$

تبدلي لأجل φ', g' أي إذا كان $\varphi' \circ f = \varphi$ و $f \circ g = g'$.

لنأخذ المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccccccc} E & \rightarrow & H & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{f} & F & \rightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow 1_H & & \downarrow f & & \downarrow 1_F & & \downarrow \\ E & \rightarrow & H & \xrightarrow{g'} & G^* & \xrightarrow{f'} & F & \rightarrow & E \end{array}$$

فلجد أنه تبدلي وأن سطره متتاليات تامة. وحسب المبرهنة (١٤-٢-٢) فإن التشاكل f' هو تماثل.

بالاعتماد على المبرهنة (١٤-٢-٣) نصل إلى الحقيقة التالية:

تمهيدية ١٤-٢-٤.

التمديدات المتكافئة للزمر تشكل علاقة تكافؤ.

البرهان.

نتركه تمريناً للقارئ.

تمهيدية ١٤-٢-٥.

لتكن H, K زميرتين ما. إن الزمرة $H \oplus K$ هي تمديد للزمرة H بواسطة الزمرة

K .

البرهان.

نلاحظ أن التطبيق $f: H \oplus K \rightarrow K$ المعرف بالشكل $f(h, k) = k$ وذلك أيضاً

كان $(h, k) = H \oplus K$ هو زمري حاسر وأن $\text{Ker } f = H$. كذلك التطبيق

$g: H \rightarrow H \oplus K$ المعرف بالشكل $g(h) = (h, k)$ وذلك $\forall h \in H$ هو تشاكل زمري

متباين وأن $\text{Im } g = H$. وهكذا نجد أن المتتالية

$$E \rightarrow H \xrightarrow{g} H \oplus K \xrightarrow{f} K \rightarrow E$$

تامة. ومنه الزمرة $H \oplus K$ هي تمديد للزمرة H بواسطة الزمرة K .

تمهيدية ٦-٢-١٤.

لنكن $G \xrightarrow{f} B \rightarrow E$ متتالية تامة من الزمر و التشاكلات الزمرية. عندئذ يوجد

تشاكل $\varphi: B \rightarrow G$ من أجله المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & B \\ & \downarrow I_B & \\ & B & \end{array}$$

تبديلي أي أن $f \circ \varphi = I_B$.

البرهان.

لنعرف العلاقة $\varphi: B \rightarrow G$ بالشكل: ليكن $b \in B$ وبما أن التشاكل f غامر

يوجد $g \in G$ بحيث $f(g) = b$. لنضع $\varphi(b) = g$. وبما أن f تشاكل فإن $f(e) = e$

ومنه نجد أن $\varphi(e) = e$. إن العلاقة φ تطبق لأنه إذا كان $b_1, b_2 \in B$ بحيث

$b_1 = b_2$. ومنه يوجد $g_1, g_2 \in G$ بحيث $f(g_1) = b_1, f(g_2) = b_2$ وبما أن

$b_1 = b_2$ فإن $f(g_1) = f(g_2)$ وبالتالي $f(g_1 g_2^{-1}) = e$ وحسب تعريف العلاقة φ

نجد أن $e = \varphi(e) = g_1 g_2^{-1}$. أي أن $g_1 = g_2$ ومنه $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$ وبالتالي φ

تطبق. كما أن φ تشاكل لأن $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = b_1 b_2$ ومنه

$$\varphi(b_1 b_2) = g_1 g_2 = \varphi(b_1) \varphi(b_2)$$

لنبرهن على أن $f \circ \varphi = I_B$. ليكن $b \in B$ عندئذ يوجد $g \in G$ بحيث $f(g) = b$ ومنه

$$f \circ \varphi(b) = f(\varphi(b)) = f(g) = b$$

أي أن $f \circ \varphi = I_B$.

تمهيدية ٧-٢-١٤.

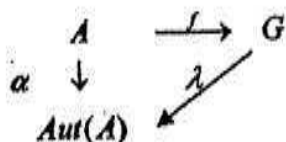
لنكن $E \rightarrow A \xrightarrow{f} G \rightarrow B$ متتالية تامة من الزمر و التشاكلات الزمرية

وليكن $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\text{Im } f)$ التشاكل الطبيعي المعرف بالشكل $\varphi(g) = T_g$ وذلك أيأ

كان $g \in G$. عندئذ العلاقة $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}(A)$ المعرفة بالشكل $\lambda(g) = f^{-1} \circ T_g \circ f$

وذلك $\forall g \in G$ هو تشاكل. بالإضافة لذلك إذا كان $\alpha: A \rightarrow \text{Aut}(A)$ التشاكل

الطبيعي المعرف بالشكل $\alpha(a) = T_a$ فإن المخطط التالي



تبديلي أي أن $\lambda \circ f = \alpha$.
البرهان.

لنبرهن في البداية على أن λ تطبيقي. ليكن $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ عندئذ
أيًا كان $x \in \text{Im } f$ فإن $g_1 x g_1^{-1} = g_2 x g_2^{-1}$ ومنه $T_{g_1}(x) = T_{g_2}(x)$ من جهة أخرى،

$\forall a \in A$ فإن $f(a) \in \text{Im } f$ وبالتالي فإن $T_{g_1}(f(a)) = T_{g_2}(f(a))$ ومنه

$$T_{g_1} \circ f(a) = T_{g_2} \circ f(a)$$

وبما أن $T_{g_i} \circ f(a) \in \text{Im } f$ فإن $f^{-1} \circ T_{g_i} \circ f(a) \in A$ وإن

$$\forall a \in A \quad f^{-1} \circ T_{g_1} \circ f(a) = f^{-1} \circ T_{g_2} \circ f(a)$$

ومنه $f^{-1} \circ T_{g_1} \circ f = f^{-1} \circ T_{g_2} \circ f$ أي أن $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$. كما أن λ تشاكي
لأنه أيًا كان $g_1, g_2 \in G$ فإن

$$\begin{aligned}
 \lambda(g_1, g_2) &= f^{-1} \circ T_{g_1 g_2} \circ f = f^{-1} \circ T_{g_1} \circ T_{g_2} \circ f = \\
 &= (f^{-1} \circ T_{g_1} \circ f)(f^{-1} \circ T_{g_2} \circ f) = \lambda(g_1) \circ \lambda(g_2)
 \end{aligned}$$

لنفرض أن $\alpha: A \rightarrow \text{Aut}(A)$ التشاكي الطبيعي. لدينا $\forall a \in A$ فإن $f(a) \in G$ ومنه

$$\lambda(f(a)) = f^{-1} \circ T_{f(a)} \circ f$$

$$(\lambda \circ f(a))(x) = (f^{-1} \circ T_{f(a)} \circ f)(x) = f^{-1} \circ T_{f(a)}(f(x)) =$$

$$= f^{-1} [f(a)]^{-1} f(x) f(a) = f^{-1} f(a^{-1} x a) = a^{-1} x a = T_a(x)$$

أي أن $(\lambda \circ f)(a) = T_a$ وذلك $\forall a \in A$ وبالتالي $\forall a \in A$ فإن

$$\lambda \circ f = \alpha \quad \text{مما سبق نجد أن } (\lambda \circ f)(a) = T_a = \alpha(a)$$

تمهيدية ٨-٢-١٤.

ليكن $E \rightarrow H \xrightarrow{f} G^* \xrightarrow{g} F \rightarrow E$ تمديد للزمرة H بواسطة الزمرة F ،

عندئذ يوجد تمديد مكافئ للتمديد السابق من الشكل

$$E \rightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow E$$

$$E \rightarrow A \xrightarrow{I_A} G \xrightarrow{\varphi^*} B \rightarrow E$$

علند

$$B = \varphi^*(G^*) = \varphi^*(A.K) = \varphi^*(I_A(A).K) = \varphi^* \circ I_A(A). \varphi^*(K) =$$

$$= E. \varphi^*(K) = \varphi^*(K)$$

وذلك لأن $\text{Ker } \varphi^* = \text{Im } I_A$ أي أن $\varphi^* \circ I_A(A) = E$. لنفرض أن $\varphi_0^* = \varphi_K^*$ مقصور
 $\varphi_0^*(K) = \varphi^*(K) = B$ لأن $\varphi_0^* : K \rightarrow B$ هو تشاكل غامر، لأن
 ليكن $u \in \text{Ker } \varphi_0^*$ علند $u \in K$ و $u \in I_A(A) = A$ وبالتالي $u \in K \cap A = E$
 وهذا يبين لنا أن التشاكل $\varphi_0^* : K \rightarrow B$ هو تماثل، ومنه نجد أن التشاكل

$$T = \lambda^{-1} \circ \varphi_0^{*-1} : B \rightarrow G$$

هو تشاكل متباين. وبما أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \lambda \downarrow & \nearrow \varphi_0^* & \\ K & & \end{array}$$

تبدلي نجد أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \lambda^{-1} \uparrow & \nearrow \varphi_0^* & \\ K & & \end{array}$$

أيضا تبدلي وذلك لأن التشاكل λ هو تماثل. ومنه

$$\varphi \circ T = \varphi \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_0^{*-1} = \varphi_0^* \circ \varphi_0^{*-1} = I$$

وهذا يبين لنا أن التمديد

$$E \rightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow E$$

هو تمديد منشطر.

مبرهنة ١٤-٣-٢.

ليكن

$$E \rightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow E$$

تمديد للزمرة A بواسطة الزمرة B . إذا كان التمديد السابق منشطراً عندئذ أي تمديد مكافئ للتمديد السابق هو أيضاً تمديد منشطراً.
البرهان.

ليكن $E \rightarrow A \xrightarrow{f^*} G^* \xrightarrow{\varphi^*} B \rightarrow E$ تمديد مكافئ للتمديد

$$E \rightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow E$$

عندئذ يوجد التشاكل المكافئ $\lambda: G \rightarrow G^*$ الذي من أجله المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow f^* & \downarrow \lambda & \nearrow \varphi^* & \\ & & G^* & & \end{array}$$

تبدلي. كما أن $\lambda: G \rightarrow G^*$ هو تماثل وذلك حسب المبرهنة (١٤-١-٣).

لنفرض أن التمديد $E \rightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow E$ منشطراً عندئذ يوجد تشاكل متباين $T: B \rightarrow G$ يحقق $T \circ \varphi = I_B$. لنضع $T^* = \lambda \circ T: B \rightarrow G^*$ فنجد أن T^* تشاكل متباين لأن كلا من T, λ متباين بالإضافة لذلك فإن

$$\varphi^* \circ T^* = \varphi^* \circ \lambda \circ T = \varphi \circ T = I_B$$

مما سبق نجد أن التمديد $E \rightarrow A \xrightarrow{f^*} G^* \xrightarrow{\varphi^*} B \rightarrow E$ هو تمديد منشطراً.
تعريف.

لتكن K زمرة جزئية ناظرية في الزمرة G . نقول عن الزمرة G إنها منشطرة فوق K إذا وجدت زمرة جزئية H من G تحقق $G = H.K$ وأن $K \cap H = E$.
مبرهنة ١٤-٣-٣.

لتكن K زمرة جزئية ناظرية في الزمرة G . الشروط التالية متكافئة:

١ - الزمرة G منشطرة K فوق .

٢ - التمديد $E \rightarrow K \xrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{K} \rightarrow E$ هو تمديد منشطر حيث π هو التشاكل القانوني الغامر و τ هو التشاكل الطبيعي. البرهان.

(١) $\Leftrightarrow$ (٢). لنفرض أن الزمرة G منشطرة فوق K علئذ توجد زمرة جزئية H من G بحيث $G = H.K$ وأن $K \cap H = E$. كما أن

$$\frac{G}{K} = \frac{HK}{K} \approx \frac{H}{H \cap K} \approx H$$

لنرمز للمتائل $\frac{G}{K} \approx H$ بالرمز $\frac{G}{K} \rightarrow H$ فنجد أن f تشاكل متباين وأن

$\pi \circ f = I_{\frac{G}{K}}$ وبما أن المتتالية $E \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{K} \rightarrow E$ تامة نجد أن

$$E \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{K} \rightarrow E$$
 هو تمديد منشطر.

(٢) $\Leftrightarrow$ (١). لنفرض أن التمديد $E \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow \frac{G}{K} \rightarrow E$ هو تمديد منشطر علئذ

حسب المبرهنة (١٤-٣-١) توجد في G زمرة جزئية H نحقق $G = H.K$ ومنه نجد أن الزمرة G منشطرة فوق K .
تمهيدية ١٤-٣-٤.

لنكن K زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G و H زمرة جزئية من G . علئذ إذا كانت الزمرة H متممة للزمرة K فإنه أياً كان $g \in G$ فإن الزمرة gHg^{-1} تكون متممة للزمرة K .
البرهان.

لنفرض أن الزمرة H متممة للزمرة K في G علئذ $G = H.K$ وأن $H \cap K = E$. ليكن $g \in G$ علئذ $gKg^{-1} = K$ لأن الزمرة K ناظمية في G ومنه

$$G = gGg^{-1} = gKHg^{-1} = (gHg^{-1})(gKg^{-1}) = (gHg^{-1})K$$

كما أن

$$gHg^{-1} \cap K = gHg^{-1} \cap gKg^{-1} = g(H \cap K)g^{-1} = geg^{-1} = e$$

مما سبق نجد أن الزمرة gHg^{-1} متممة للزمرة K .

مبرهنة ١٤-٣-٥.

لنكن G زمرة و K زمرة جزئية ناظمية في G ولنكن M زمرة جزئية من G بحيث $K \subseteq M$. عللئذ:

١ - إذا كانت الزمرة G منشطرة فوق K فإن الزمرة M تكون منشطرة فوق K .

٢ - إذا كانت الزمرة M ناظمية في G وكانت G منشطرة فوق M فإن الزمرة $\frac{G}{K}$

تكون منشطرة فوق $\frac{M}{K}$.

البرهان.

١ - لنفرض أن الزمرة G منشطرة فوق K عللئذ توجد في G زمرة جزئية H

تحقق $G = HK$ وأن $H \cap K = E$. من جهة أخرى بما أن $K \subseteq M$ وأن K ناظمية في G فإن K ناظمية في M ، كما أن $M = K(H \cap M)$ وأن

$$K \cap (H \cap M) = (K \cap H) \cap M = E \cap M = E$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $H \cap M$ متممة للزمرة K في M أي أن الزمرة M تكون منشطرة فوق K .

٢ - لنفرض أن الزمرة M ناظمية في G وأن G تكون منشطرة فوق M . عللئذ

توجد في G زمرة جزئية H بحيث $G = HM$ وأن $H \cap M = E$. وبما أن $K \subseteq M$

وأن K ناظمية في G فإنه حسب المبرهنة (٦-٥) تكون الزمرة $\frac{M}{K}$ ناظمية في $\frac{G}{K}$.

وبما أن K ناظمية في G فإن الجداء HK زمرة جزئية في G ومنه $\frac{HK}{K}$ زمرة

$$\text{جزئية في } \frac{G}{K} \text{ وأن } \frac{HK}{K} \cdot \frac{M}{K} = \frac{(HK)M}{K} = \frac{HM}{K} = \frac{G}{K} \text{ كما أن}$$

$$\frac{HK}{K} \cap \frac{M}{K} = \frac{HK \cap M}{K} = \frac{HK \cap MK}{K} = \frac{(H \cap M)K}{K} = K$$

وهذا يبين لنا أن الزمرة $\frac{G}{K}$ منشطرة فوق $\frac{M}{K}$.

تمارين محلولة (١٤)

١- لتكن G زمرة بسيطة منتهية مرتبتها عدد زوجي أكبر من 2. عللنا $(G:1)$ تقبل القسمة على 8 أو 12.

الحل.

للفرض أن $(G:1)$ لا تقبل القسمة على 8. بما أن $(G:1)$ تقبل القسمة على 2 فإن الزمرة G تحوي 2-زمرة جزئية سيلوفية ولتكن K . وبما أن $(G:1) \neq 2$ وتقبل القسمة على 2 فإن $E \neq K \subset G$ وحسب الفرض فإن $(K:1) \leq 4$ ومنه إما $K \approx Z_2$ أو $K \approx Z_2 \oplus Z_2$ أو $K \approx Z_4$ وهذا يبين لنا أن الزمرة K تبديلية كما أن $K \subset C(K)$ وأيضا الزمرة $C(K)$ ناظمية في $N(K)$. من جهة أخرى، بما أن الزمرة K عبارة عن 2-زمرة جزئية سيلوفية في G فإن مرتبة الزمرة $\frac{N(K)}{C(K)}$ تكون فردية.

إذا كان $C(K) = N(K)$ عللنا $K \subseteq Z(N(K))$ وهذا يبين لنا أن الزمرة K عديمة القوى مما ينافي كونها بسيطة ومنه $C(K) \subset N(K)$. وحسب التمرين المحلول (٧-٢) فإن الزمرة $\frac{N(K)}{C(K)}$ تماثل زمرة جزئية من الزمرة $Aut(K)$. وبما أنه إما $K \approx Z_2$ أو $K \approx Z_2 \oplus Z_2$ أو $K \approx Z_4$ وحسب المبرهنة (٧-٥) فإنه إما $Aut(K) \approx U(2)$ أو $Aut(K) \approx U(4)$ أو $Aut(K) \approx GL_2(Z_2)$ أي أنه إما $(Aut(K):1) = 1$ أو $(Aut(K):1) = 2$ أو $(Aut(K):1) = 6$ وبما أن مرتبة الزمرة $\frac{N(K)}{C(K)}$ هو عدد فردي نجد أن $(\frac{N(K)}{C(K)}:1) = 3$ وأن $K \approx Z_2 \oplus Z_2$. مما سبق نجد أن $(G:1)$ تقبل القسمة على 12.

٢- لتكن الزمرة G تمديد للزمرة K بواسطة الزمرة H . عللنا وجود تشاكل زمري

$$\psi: G \longrightarrow H \times Aut(K) \text{ يحقق أن } Ker \psi = Z(K).$$

الحل.

بما أن الزمرة G تمديد للزمرة K بواسطة الزمرة H . عندئذ يوجد تشاكل زمري عامر $\varphi: G \longrightarrow H$ يحقق أن $\text{Ker } \varphi = K$. وبما أن الزمرة K ناظمية في G فإن $gkg^{-1} \in K$ وذلك أيًا كان $g \in G, k \in K$. لنعرف العلاقة $\sigma: G \longrightarrow \text{Aut}(K)$ بالشكل

$$\forall g \in G, \sigma(g) = T_g$$

حيث

$$\forall k \in K; \quad T_g(k) = gkg^{-1} \in K$$

من الواضح أن العلاقة σ تشاكل. من جهة أخرى بما أن الزمر $H, \text{Aut}(K)$ هي زمر جزئية ناظمية في الزمرة $H \times \text{Aut}(K)$ لنعرف العلاقة

$$\psi: G \longrightarrow H \times \text{Aut}(K)$$

بالشكل

$$\forall g \in G; \quad \psi(g) = (\varphi(g), \sigma(g))$$

فنجد أن العلاقة ψ تطبيق لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ فإن $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ وأن $\sigma(g_1) = \sigma(g_2)$ ومنه $(\varphi(g_1), \psi(g_2)) = (\varphi(g_1), \psi(g_2))$ مما سبق نجد أن $\psi(g_1) = \psi(g_2)$. كما أن ψ تشاكل لأن

$$\begin{aligned} \psi(g_1 \cdot g_2) &= (\varphi(g_1 \cdot g_2), \sigma(g_1 \cdot g_2)) = (\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2), \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2)) = \\ &= (\varphi(g_1), \sigma(g_1))(\varphi(g_2), \sigma(g_2)) = \psi(g_1) \cdot \psi(g_2) \end{aligned}$$

كما أن $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi \cap \text{Ker } \sigma$ ، لأنه إذا كان $y \in \text{Ker } \psi$ عندئذ $\psi(y) = (\varphi(y), \sigma(y)) = (e, e)$ ومنه $\varphi(y) = \sigma(y) = e$ وبالتالي

$y \in \text{Ker } H, y \in \text{Ker } \sigma$ أي أن $y \in \text{Ker } H \cap \text{Ker } \sigma$ ومنه

$$\text{Ker } \psi \subseteq \text{Ker } H \cap \text{Ker } \sigma$$

بشكل مشابه نبرهن على الاحتواء المعاكس. وهذا يبين لنا أن

$$\text{Ker } \psi = \text{Ker } H \cap \text{Ker } \sigma = K \cap C(K) = Z(K)$$

تمارين (١٤)

- ١- لتكن G زمرة منتهية. أثبت أن الزمرة $\frac{Fitt(G)}{Fr(G)}$ هي زمرة تبديلية.
- ٢- لتكن G زمرة منتهية قابلة للحل. أثبت أن الزمرة $C(\frac{Fitt(G)}{Fr(G)}) = Fitt(G)$.
- ٣- لتكن G زمرة منتهية و A زمرة جزئية ناظمية و تبديلية في G تحقق $A \cap Fr(G) = E$. أثبت أن الزمرة G منشطرة فوق A .
- ٤- لتكن G زمرة و K, M زمراً جزئية ناظمية في G تحقق $K \subseteq M$. أثبت أنه إذا كانت الزمرة G منشطرة فوق K وأن متمم الزمرة K هي H عندئذ الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة G منشطرة فوق M هو أن تكون الزمرة H منشطرة فوق $H \cap M$.
- ٥- لتكن G زمرة و K, L زمراً جزئية ناظمية في G ولنفرض أن الجداء $M = K.L$ زمرة جزئية ناظمية في G . بفرض أن الزمرة $\frac{G}{L}$ منشطرة فوق $\frac{M}{L}$ وأن الزمرة $\frac{H}{L}$ متممة للزمرة $\frac{M}{L}$ في $\frac{G}{L}$. وبفرض أن الزمرة H منشطرة فوق $H \cap L$. أثبت أن الزمرة G منشطرة فوق K .
- ٦- لتكن زمرة G و K زمرة جزئية ناظمية في G . وليكن $v: G \longrightarrow \frac{G}{K}$ التشاكل القانوني الغامر. عندئذ:
 - أ - الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة G منشطرة فوق K هو أن يوجد تشاكل زمري $u: \frac{G}{K} \longrightarrow G$ يحقق أن $v.u = I_{\frac{G}{K}}$.
 - ب - إذا كانت الزمرة $\frac{G}{K}$ دارة غير منتهية فإن الزمرة G تكون منشطرة فوق K .



الفصل الخامس عشر

نظرية الفئات

بعد كل من $S.Eilenberg \& S.Maclane$ أول من أدخل مفهوم الفئة و الدالي وذلك عام 1944، وذلك لحل بعض المشاكل الناتجة عن نظرية الزمر والفضاءات الطوبولوجية. وقد وجدت هذه المفاهيم تطبيقات في مجالات أخرى من فروع الرياضيات.

١٥-١. الفئة و الفئة التثوية.

تعريف.

نقول إنه توجد لدينا فئة $\mathcal{R}$ إذا كان لدينا:

١ - صف $Ob(\mathcal{R})$ يمثل عناصر الفئة $\mathcal{R}$ والتي تسمى أشياء الفئة ورمز لها $A, B, D, \dots \in Ob(\mathcal{R})$.

٢ - صف $Mor(\mathcal{R})$ ويمثل مورفيزمات الفئة $\mathcal{R}$ ويحقق أيضاً كان $A, B \in Ob(\mathcal{R})$ فإن $\mathcal{R}(A, B)$ تشكل مجموعة وتمثل مجموعة الأسهم من A إلى B ويرمز لها $\mathcal{R}(A, B) = Hom_{\mathcal{R}}(A, B) \in Mor(\mathcal{R})$

بالإضافة إلى ذلك، إن عناصر الفئة و مورفيزمات هذه الفئة يجب أن تحقق:

١- أياً كانت العناصر $A, B, D \in Ob(\mathcal{R})$ يوجد تطبيق

$$\mu: \mathcal{R}(A, B) \times \mathcal{R}(B, D) \rightarrow \mathcal{R}(A, D)$$

معرف بالشكل $\mu(f, g) = g \cdot f$ وذلك أياً كان $f \in \mathcal{R}(A, B), g \in \mathcal{R}(B, D)$ لسمي هذه العملية بعملية تركيب المورفيزمات.

٢- أياً كان $f \in \mathcal{R}(A, B), g \in \mathcal{R}(B, D), \psi \in \mathcal{R}(D, C)$ فإن

$$(\psi \cdot g) \cdot f = \psi \cdot (g \cdot f)$$

أي أن عملية تركيب المورفيزمات تجميعية.

٣- أياً كان $A \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ يوجد $I_A : A \rightarrow A$ ويسمى المورفيزم المطابق وبحقق $I_A \cdot f = f$ و $g \cdot I_A = g$. وذلك أياً كان $f \in \mathcal{R}(B, A), g \in \mathcal{R}(A, D)$ و أياً كان $B, D \in \text{Ob}(\mathcal{R})$.

٤- أياً كان $A, B, A', B' \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ بحيث $(A, B) \neq (A', B')$ فإن

$$\mathcal{R}(A, B) \cap \mathcal{R}(A', B') = \emptyset$$

أمثلة.

١ - فئة المجموعات Set's .

أشياء هذه الفئة هي المجموعات.

من أجل أي مجموعتين $A, B \in \text{Ob}(\text{Set's})$ فإن $\text{Hom}_{\text{Set's}}(A, B)$ تمثل مجموعة كل التطبيقات من A إلى B .

أياً كان $A, B, D \in \text{Ob}(\text{Set's})$ يوجد تطبيق

$$\mu : \text{Hom}_{\text{Set's}}(A, B) \times \text{Hom}_{\text{Set's}}(B, D) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set's}}(A, D)$$

معرف بالشكل $\mu(f, g) = g \circ f$ وذلك أياً كان

$$f \in \text{Hom}_{\text{Set's}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\text{Set's}}(B, D)$$

حيث أن العملية $(\circ)$ تمثل عملية تركيب التطبيقات وهذه العملية تجميعية بالإضافة إلى

ذلك أياً كان $A \in \text{Ob}(\text{Set's})$ يوجد التطبيق المطابق $I_A : A \rightarrow A$ الذي يحقق

$$I_A \cdot f = f \text{ و } g \cdot I_A = g. \text{ وذلك أياً كان}$$

$$f \in \text{Hom}_{\text{Set's}}(B, A), g \in \text{Hom}_{\text{Set's}}(A, D)$$

و أياً كان $B, D \in \text{Ob}(\text{Set's})$. كما أنه أياً كان $A, B, A', B' \in \text{Ob}(\text{Set's})$ بحيث

$$(A, B) \neq (A', B') \text{ فإن } \text{Hom}_{\text{Set's}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\text{Set's}}(A', B') = \emptyset$$

٢ - فئة الزمر $\mathcal{G}$.

أشياء هذه الفئة هي زمر.

من أجل أي زميرتين $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ فإن $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B)$ تمثل مجموعة كل التشاكلات من الزمرة A إلى الزمرة B .

أياً كان $A, B, D \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ يوجد تطبيق

$$\mu: \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{G}}(B, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, D)$$

معرف بالشكل $\mu(f, g) = g \circ f$ وذلك أيّ كان

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(B, D)$$

حيث إن العملية $(\circ)$ تمثل عملية تركيب التطبيقات وهذه العملية تجميعية بالإضافة

لذلك أيّ كان $A \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ يوجد التطبيق للمطابق $I_A: A \rightarrow A$ الذي يحقق

$$I_A \circ f = f \text{ و } g \circ I_A = g \text{ وذلك أيّ كان } f \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(B, A), g \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, D)$$

أيّ كان $B, D \in \text{Ob}(\mathcal{G})$. كما أنه أيّ كان $A, B, A', B' \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ بحيث

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A', B') = \emptyset \text{ فإن } (A, B) \neq (A', B')$$

٣ - فئة الزمر التبادلية $\mathcal{A}\ell$.

أشياء هذه الفئة هي الزمر التبادلية. وتحقق جميع شروط الفئة كما هو الحال في المثال السابق.

الفئة الثنوية.

لتكن $\mathcal{R}$ فئة ما. الفئة الثنوية للفئة $\mathcal{R}$ يرمز لها $\mathcal{R}^{op}$ وتتألف من:

١ - صف $\text{Ob}(\mathcal{R}^{op}) = \text{Ob}(\mathcal{R})$ ويمثل عناصر الفئة $\mathcal{R}^{op}$.

٢ - صف $\text{Mor}(\mathcal{R}^{op})$ ويمثل مورفيزمات الفئة $\mathcal{R}^{op}$ ويحقق أيّ

كان $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ فإن

$$\mathcal{R}^{op}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{R}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(B, A) \in \text{Mor}(\mathcal{R})$$

بالإضافة لذلك، إن عناصر الفئة $\mathcal{R}^{op}$ و مورفيزماتها يجب أن تحقق:

١- أيّ كانت العناصر $A, B, D \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ يوجد تطبيق

تمهيدية ١٥-١-٢.

لتكن $\mathcal{R}$ فئة. عندئذ:

١ - إذا كان المورفيزم $u \in \text{Mor}(\mathcal{R})$ ايزومورفيزم عندئذ u مونومورفيزم وايضا ايبومورفيزم.

٢ - تركيب ايزومورفيزمين هو ايزومورفيزم.
البرهان.

١ - ليكن $u \in \mathcal{R}(A, B)$ ايزومورفيزم عندئذ يوجد $v \in \mathcal{R}(B, A)$ بحيث $uv = I_B, vu = I_A$. أن المورفيزم I_A مونومورفيزم لأنه أيا كان $X \in \text{Ob}(\mathcal{R})$ فإن التطبيق

$$\alpha: \mathcal{R}(X, A) \rightarrow \mathcal{R}(X, A)$$

المعرف بالشكل $\alpha(f) = I_A \cdot f$ وذلك أيا كان $f \in \mathcal{R}(X, A)$ هو تطبيق متباين.

لأنه أيا كان $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(X, A)$ بحيث $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ فإن

$$f_1 = I_A \cdot f_1 = \alpha(f_1) = \alpha(f_2) = I_A \cdot f_2 = f_2$$

ومنه فإن المورفيزم $vu = I_A$ مونومورفيزم وحسب التمهيدية (١٥-١-١) ينتج أن المورفيزم u مونومورفيزم.

بشكل مشابه نجد أن ايبومورفيزم I_B ايبومورفيزم ومنه المورفيزم $uv = I_B$ ايبومورفيزم وحسب التمهيدية (١٥-١-١) فإن المورفيزم u ايبومورفيزم.

٢ - ليكن $u \in \mathcal{R}(A, B), v \in \mathcal{R}(B, D)$ ايزومورفيزمين، ولنبين أن

$v \cdot u \in \mathcal{R}(A, D)$ ايزومورفيزم. بما أن u ايزومورفيزم يوجد $u_1 \in \mathcal{R}(B, A)$ بحيث

$uu_1 = I_B, u_1u = I_A$. كذلك بما أن v ايزومورفيزم يوجد $v_1 \in \mathcal{R}(D, B)$ بحيث

$vv_1 = I_D, v_1v = I_B$ ومنه $u_1 \cdot v_1 \in \mathcal{R}(D, A)$ ولن

$$(u_1 v_1)(vu) = u_1(v_1 v)u = u_1(I_B u) = u_1 u = I_A$$

$$(vu)(u_1 v_1) = v(uu_1)v_1 = (vI_B)v_1 = vv_1 = I_D$$

وهذا يبين لنا أن المورفيزم vu ايزومورفيزم. ٥

تعريف.

لتكن $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ فئتين. نقول إنه يوجد لدينا دالي F من الفئة $\mathfrak{M}$ إلى الفئة $\mathfrak{N}$ إذا وجد لدينا:

- ١ - تطبيق $F : Ob(\mathfrak{M}) \rightarrow Ob(\mathfrak{N})$ بحيث $\forall A \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن $F(A) \in Ob(\mathfrak{N})$.
- ٢ - تطبيق $F : \mathfrak{M}(A, B) \rightarrow \mathfrak{N}(F(A), F(B))$ وذلك $\forall A, B \in Ob(\mathfrak{M})$ بحيث $\forall f \in \mathfrak{M}(A, B)$ فإن $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ أي أن $F(f) \in \mathfrak{N}(F(A), F(B))$ وبحق

$$\forall A \in Ob(\mathfrak{M}); \quad F(I_A) = I_{F(A)}$$

$$\forall f, g \in Mor(\mathfrak{M}); \quad F(fg) = F(f)F(g)$$

نسمي الدالي F في هذه الحالة دالياً مباشراً (موافق للتغير).

نسمي الدالي F في هذه الحالة غير مباشر (مخالف للتغير) إذا كان

$$\forall f, g \in Mor(\mathfrak{M}); \quad F(fg) = F(g)F(f)$$

تعريف.

ليكن F, G دالين مباشرين (موافقين للتغير) من الفئة $\mathfrak{M}$ إلى الفئة $\mathfrak{N}$.

- نقول إنه لدينا مورفيزم دالي f من الدالي F إلى الدالي G إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كان $A \in Ob(\mathfrak{M})$ يوجد مورفيزم $f(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ يحقق $\forall u \in \mathfrak{M}(A, B)$ يكون المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

تبدلياً. أي أن $f(B)F(u) = G(u)f(A)$.

- نقول عن المورفيزم الدالي $f : F \rightarrow G$ إنه ايزومورفيزم دالي إذا

تحقق $\forall A \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن المورفيزم $f(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ هو ايزومورفيزم.

تعريف.

ليكن F, G دالين غير مباشرين (مخالفين للتغير) من الفئة $\mathfrak{M}$ إلى الفئة $\mathfrak{K}$.
 - نقول أنه لدينا مورفيزم دالي f من الدالي F إلى الدالي G إذا تحقق الشرط التالي:
 أيًا كان $A \in Ob(\mathfrak{M})$ يوجد مورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ يحقق $\forall u \in \mathfrak{M}(A, B)$ يكون المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \uparrow & & \uparrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

تبدلي. أي أن $f(A)F(u) = G(u)f(B)$.

- نقول عن المورفيزم الدالي $f: F \rightarrow G$ إنه ايزومورفيزم دالي إذا تحقق $\forall A \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن المورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ هو ايزومورفيزم.
 مبرهنة ١٥-٢-١.

ليكن F, G دالين مباشرين (موافقين للتغير) من الفئة $\mathfrak{M}$ إلى الفئة $\mathfrak{K}$. وليكن $f: F \rightarrow G$ مورفيزم دالي. إذا كان المورفيزم $f: F \rightarrow G$ ايزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g: G \rightarrow F$ يحقق $g \cdot f = I_F, f \cdot g = I_G$. البرهان.

نفرض أن المورفيزم $f: F \rightarrow G$ ايزومورفيزم دالي عندئذ $\forall A \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن المورفيزم $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ ايزومورفيزم وأنه $\forall u \in \mathfrak{M}(A, B)$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

تبدلي. أي أن $f(B)F(u) = G(u)f(A)$.

بما أن المورفيزم $f(A)$ ايزومورفيزم فإنه يوجد مورفيزم $g(A): G(A) \rightarrow F(A)$ يحقق $f(A).g(A) = I_{G(A)}$, $g(A).f(A) = I_{F(A)}$ لنضع $g: G \rightarrow F$ كي يكون g مورفيزماً دالياً يكفي إثبات أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) \\ G(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) \end{array}$$

تبدلي وذلك $\forall A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ و $\forall u \in \mathfrak{M}(A, B)$ أي أن $g(B)G(u) = F(u)g(A)$ لدينا

$$\begin{array}{ccccc} G(A) & \xrightarrow{g(A)} & F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ G(u) \downarrow & & \downarrow F(u) & & \downarrow G(u) \\ G(B) & \xrightarrow{g(B)} & F(B) & \xrightarrow{f(B)} & G(B) \end{array}$$

ومنه

$$\begin{aligned} G(u) &= G(u).I_{G(A)} = G(u).f(A).g(A) = f(B).F(u).g(A).g(B).G(u) = \\ &= g(B).f(B).F(u).g(A) = I_{F(B)}.F(u).g(A) = F(u)g(A) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $g: G \rightarrow F$ مورفيزم دالي.

لنبرهن على أن $f.g = I_G$, $g.f = I_F$. ليكن $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ عندئذ $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$ و $g(A): G(A) \rightarrow F(A)$ كما أن $f(A).g(A) = I_{G(A)}$ ومنه $g.f = I_F$. بشكل مشابه نجد أن $f.g = I_G$.

برهان الوحدة. ليكن $\xi: G \rightarrow F$ مورفيزم دالي آخر يحقق $\xi.f = I_G$, $f.\xi = I_F$ عندئذ $\forall A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ فإن $\xi(A).f(A) = I_{F(A)}$ وأن $f(A).\xi(A) = I_{G(A)}$ ومنه $\xi(A) = I_{F(A)}.\xi(A) = g(A).f(A).\xi(A) = g(A).I_{G(A)} = g(A)$

ملاحظة.

المبرهنة السابقة صحيحة لأجل الدوال غير المباشرة (المخالفة للتغير).

لتكن $\mathfrak{M}$ فئة ولتكن $Set's$ فئة المجموعات. عندئذ أياً كان $X \in Ob(\mathfrak{M})$:

١ - يوجد دالي مباشر (موافق للتغير) $h_X : \mathfrak{M} \rightarrow Set's$

٢ - يوجد دالي غير مباشر (مخالف للتغير) $\bar{h}_X : \mathfrak{M} \rightarrow Set's$

البرهان.

١ - لنبرهن على أن $h_X : \mathfrak{M} \rightarrow Set's$ دالي مباشر. لدينا

$$\forall Y \in Ob(\mathfrak{M}); \quad h_X(Y) = \mathfrak{M}(X, Y) \in Ob(Set's)$$

واضح أن h_X تطبيق. ليكن $u \in \mathfrak{M}(Y, Y')$ ولنعرف العلاقة

$$h_X(u) : h_X(Y) = \mathfrak{M}(X, Y) \rightarrow h_X(Y') = \mathfrak{M}(X, Y')$$

بالشكل $\forall v \in \mathfrak{M}(X, Y)$ فإن $h_X(u).v = u.v$. فنجد أن $h_X(u)$ تطبيق وأنه $\forall Y \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن

$$h_X(I_Y) : h_X(Y) = \mathfrak{M}(X, Y) \rightarrow h_X(Y) = \mathfrak{M}(X, Y)$$

ومنه $h_X(I_Y) = I_{h_X(Y)} = I_{\mathfrak{M}(X, Y)}$ وبالتالي $h_X(I_Y)v = I_Y.v = v$

كما أنه $\forall f, g \in Mor(\mathfrak{M})$ بحيث $f : Y \rightarrow Y', g : Y' \rightarrow Y''$ فإن

$$h_X(g.f) = h_X(g).h_Y(f)$$

$$h_X(g.f) : h_X(Y) = \mathfrak{M}(X, Y) \rightarrow h_X(Y'') = \mathfrak{M}(X, Y'')$$

$$\begin{aligned} h_X(g.f).(v) &= (g.f).v = g.(f.v) = h_X(g).(f.v) = h_X(g).(h_X(f).v) = \\ &= (h_X(g).h_X(f))(v) \end{aligned}$$

ومنه $h_X(g.f) = h_X(g).h_X(f)$ وهذا يبين لنا أن الدالي h_X هو دالي موافق للتغير.

٢ - لنبرهن على أن $\bar{h}_X : \mathfrak{M} \rightarrow Set's$ دالي غير مباشر.

لدينا

$$\bar{h}_X : Ob(\mathfrak{M}) \rightarrow Ob(Set's)$$

$$\forall Y \in Ob(\mathfrak{M}); \quad \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{M}(X, Y) \in Ob(Set's)$$

واضح أن $\bar{h}_X$ تطبيق. ليكن $u \in \mathfrak{R}(Y, Y')$ ولنعرف العلاقة

$$\bar{h}_X(u) : \bar{h}_X(Y') = \mathfrak{R}(Y', X) \rightarrow \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y, X)$$

بالشكل $\forall v \in \mathfrak{R}(Y', X)$ فإن $\bar{h}_X(u).v = v.u$ فنجد أن $\bar{h}_X(u)$ تطبيق وأنه
فإن $\forall Y \in Ob(\mathfrak{R})$

$$\bar{h}_X(I_Y) : \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y, X) \rightarrow \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y, X)$$

ومنه $\bar{h}_X(I_Y) = I_{\bar{h}_X(Y)} = I_{\mathfrak{R}(Y, X)}$ وبالتالي $\bar{h}_X(I_Y)v = v.I_Y = v$

كما أنه $\forall f, g \in Mor(\mathfrak{R})$ بحيث $f : Y \rightarrow Y', g : Y' \rightarrow Y''$ فإن

$$\bar{h}_X(g.f) : \bar{h}_X(Y'') = \mathfrak{R}(Y'', X) \rightarrow \bar{h}_X(Y) = \mathfrak{R}(Y, X)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_X(g.f).(v) &= v.(g.f) = (v.g).f = \bar{h}_X(f).(v.g) = \bar{h}_X(f).(\bar{h}_X(g)v) = \\ &= (\bar{h}_X(f).\bar{h}_X(g))(v) \end{aligned}$$

ومنه $\bar{h}_X(g.f) = \bar{h}_X(f).\bar{h}_X(g)$ وهذا يبين لنا أن الدالي $\bar{h}_X$ هو دالي موافق للتغيير.

تمهيد.

لنكن $\mathfrak{R}$ فئة ولنكن $Set's$ فئة المجموعات. و $F : \mathfrak{R} \rightarrow Set's$ دالي موافق للتغيير من الفئة $\mathfrak{R}$ إلى فئة المجموعات $Set's$ وليكن $X \in Ob(\mathfrak{R})$. وجدنا في التمهيدية (١٥-٢-٢) أنه يوجد دالي موافق للتغيير $h_X : \mathfrak{R} \rightarrow Set's$. ليكن $Hom(h_X, F)$ صف المورفيزمات الدالية من h_X إلى F .

مبرهنة ١٥-٢-٣.

ليكن $Hom(h_X, F)$ صف المورفيزمات الدالية من h_X إلى F . يوجد تطبيق

$$\alpha : Hom(h_X, F) \longrightarrow F(X)$$

متباين وهاضر.

البرهان.

ليكن $f \in \text{Hom}(h_X, F)$ مورفيزماً دالياً $f: h_X \longrightarrow F$ عندئذ أياً كان

$\forall u \in \mathfrak{M}(Y, Y')$ يوجد مورفيزم $f(Y): h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$ يحقق $f(Y) \circ h_X(u) = F(u) \circ f(Y')$

فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \\ h_X(u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{f(Y')} & F(Y') \end{array}$$

تبدلي. أي أن $F(u) \circ f(Y) = f(Y') \circ h_X(u)$ ومن أجل $X = Y$ فإن

$f(X): h_X(X) \longrightarrow F(X)$ مورفيزم وأن $f(X): \mathfrak{M}(X, X) \longrightarrow F(X)$

لنعرف التطبيق $\alpha: \text{Hom}(h_X, F) \longrightarrow F(X)$ بالشكل $\alpha(f) = f(X)(I_X)$ فإن

$$\alpha(f) = f(X)(I_X)$$

ولنعرف التطبيق $\beta: F(X) \longrightarrow \text{Hom}(h_X, F)$ بالشكل $\forall \xi \in F(X)$ فإن

$$\beta(\xi): h_X \rightarrow F$$

$$\beta(\xi)(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$$

أي أن $\beta(\xi)(Y): \mathfrak{M}(X, Y) \rightarrow F(Y)$ وأن $\forall u \in \mathfrak{M}(X, Y)$ فإن

$$F(u) \circ \beta(\xi)(Y') = \beta(\xi)(Y) \circ h_X(u)$$

$$\beta(\xi)(Y)(u) = F(u)(\xi)$$

كي نبرهن أنه يوجد لدينا مورفيزم دالي $\beta(\xi): h_X \rightarrow F$ يكفي أن نبرهن أنه

$\forall v \in \mathfrak{M}(Y, Y')$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) & \xrightarrow{\beta(\xi)(Y)} & F(Y) \\ h_X(v) \downarrow & & \downarrow F(v) \\ h_X(Y') & \xrightarrow{\beta(\xi)(Y')} & F(Y') \end{array}$$

أي أن $\beta(\xi)(Y)(v) = F(v) \circ \beta(\xi)(Y')$ ومنه $\beta(\xi)(Y) \circ h_X(v) = \beta(\xi)(Y')(v)$ فإن

$$(F(v)\beta(\xi)(Y))(w) = F(v)\beta(\xi)(Y)(w) = F(v)F(w)(\xi) = F(vw)(\xi)$$

$$(\beta(\xi)(Y')h_X(v))(w) = \beta(\xi)(Y')h_X(v)(w) = \beta(\xi)(Y')(vw) = F(vw)(\xi)$$

ومنه $F(v)\beta(\xi)(Y) = \beta(\xi)(Y')h_X(v)$

لنبرهن على أن $\alpha\beta = I_{F(X)}$ وأن $\beta\alpha = I_{\text{Hom}(h_X, F)}$

- لنبرهن على أنه $\forall f \in \text{Hom}(h_X, F)$ فإن $\beta(\alpha(f)) = f$ لدينا $\forall Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ فإيه لأجل كل $u \in h_X(Y)$

$$(\beta(\alpha(f))(Y))(u) = F(u)(\alpha(f)) = F(u)(f(X)I_X) = (F(u)f(X))(I_X)$$

وبما أن f مورفيزم دالي فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ h_X(u) & \downarrow & \downarrow F(u) \\ h_X(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & F(Y) \end{array}$$

أي أن $F(u)f(X) = f(Y)h_X(u)$ ومنه

$$(\beta(\alpha(f))(Y))(u) = (f(Y)h_X(u))(I_X) = f(Y)h_X(u)(I_X) =$$

$$= f(Y)(I_X u) = f(Y)(u)$$

ومنه $\beta(\alpha(f)) = f$ وذلك $\forall f \in \text{Hom}(h_X, F)$. كذلك $\alpha(\beta(\xi)) = \xi$ وذلك لأن $\forall \xi \in F(X)$

$$\alpha(\beta(\xi)) = (\beta(\xi)(X))(I_X) = F(I_X)(\xi) = I_{F(X)}(\xi) = \xi$$

أي أن $\alpha\beta = I_{F(X)}$

مبرهنة ١٥-٢-٤.

لنكن $\mathfrak{M}$ فئة، ولنكن Set's فئة المجموعات. و $h_X, h_{X'} : \mathfrak{M} \rightarrow \text{Set's}$

الدالان الموافقان للتغير. من أجل أي مورفيزم دالي $f : h_X \rightarrow h_{X'}$ يوجد مورفيزم وحيد $\mu \in \mathfrak{M}(X', X)$ يحقق $f(Y)(u) = u \cdot \mu$ وذلك أياً كان $Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$

و أياً كان $u \in \mathfrak{M}(X, Y)$ بالاضافة لذلك، المورفيزم الدالي f يكون ايزومورفيزم عندما فقط عندما المورفيزم μ ايزومورفيزم.
البرهان.

ليكن $f: h_X \longrightarrow h_{X'}$ مورفيزم دالي. وحسب المبرهنة (٣-٢-١٥) يوجد تطبيق

$$\alpha: \text{Hom}(h_X, h_{X'}) \longrightarrow h_{X'}(X)$$

أي $\alpha: \text{Hom}(h_X, h_{X'}) \longrightarrow \mathfrak{M}(X, X')$ لنضع $\alpha(f) = \mu$ فنجد أن $\mu: X \longrightarrow X'$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{M}$. كذلك حسب المبرهنة (٣-٢-١٥) يوجد

$$\beta: h_{X'}(X) \longrightarrow \text{Hom}(h_X, h_{X'})$$

أي $\beta: \mathfrak{M}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}(h_X, h_{X'})$ بحيث $\beta\alpha = I_{\text{Hom}(h_X, h_{X'})}$ ومنه $\beta\alpha(f) = \beta(\mu) = f$ وبالتالي $\forall Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ فإن

$$f(Y) = \beta(\mu)(Y): h_X(Y) \longrightarrow h_{X'}(Y)$$

أي أن $f(Y): \mathfrak{M}(X, Y) \longrightarrow \mathfrak{M}(X', Y)$ ومنه أياً كان $u \in \mathfrak{M}(X, Y)$ فإن

$$f(Y)(u) = (\beta(\mu)(Y))(u) = h_{X'}(u)(\mu) = u\mu$$

كما أن المورفيزم μ وحيد، لأنه إذا وجد مورفيزم آخر $\psi: X \rightarrow X'$ بحيث $f(Y)(u) = u\psi$ وذلك $\forall Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ و أياً كان $u \in \mathfrak{M}(X, Y)$ عندئذ من أجل $X = Y$ ومن أجل $\psi = I_X$ نجد أن

$$f(X)(I_X) = I_X\mu = \mu; \quad f(X)(I_X) = I_X\psi = \psi$$

مما سبق نجد أن $\psi = \mu$.

لنزم الشرط. لنفرض أن المورفيزم الدالي $f: h_X \longrightarrow h_{X'}$ ايزومورفيزم عندئذ يوجد مورفيزم دالي $g: h_{X'} \rightarrow h_X$ بحيث $gf = I_{h_X}$, $fg = I_{h_{X'}}$ وحسب المبرهنة (٣-٢-١٥) يوجد

$$\alpha: \text{Hom}(h_{X'}, h_X) \longrightarrow h_X(X') = \mathfrak{M}(X, X')$$

لنفرض أن $\alpha(g) = \mu'$ فنجد أن $\mu': X \rightarrow X'$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{M}$. وحسب ما تم إثباته أعلاه فإن $g(Y)(u) = u\mu'$ وذلك أياً كان $Y \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ و أياً

كان $u \in \mathfrak{R}(X', Y)$ وبما أن $gf = I_{h_X}$ وحسب المبرهنة (١٥-٢-٣) يوجد

$\alpha : \text{Hom}(h_X, h_X) \longrightarrow \mathfrak{R}(X, X)$ أي أن $\alpha : \text{Hom}(h_X, h_X) \longrightarrow h_X(X)$ وأن

$$\alpha(gf) = \alpha(I_{h_X}) = I_{h_X}(X)(I_X) = I_{\mathfrak{R}(X, X)}(I_X) = I_X$$

$$I_X = \alpha(gf) = (gf)(X)(I_X) = (g(X)f(X))(I_X) = g(X)(f(X)(I_X)) = \\ = g(X)(I_X \mu) = g(X)(\mu) = \mu \mu'$$

بهذا الشكل نجد أن $\mu \mu' = I_X$. للبرهن على أن $\mu' \mu = I_{X'}$ بما أن $fg = I_{h_{X'}}$ وحسب

المبرهنة (١٥-٢-٣) يوجد $\alpha : \text{Hom}(h_{X'}, h_{X'}) \longrightarrow \mathfrak{R}(X', X')$ بحيث $\alpha(fg) = I_{X'}$ ومنه

$$I_{X'} = \alpha(fg) = (fg)(X')(I_{X'}) = (f(X')g(X'))(I_{X'}) = f(X')(g(X')(I_{X'})) = \\ = f(X')(\mu') = \mu' \mu$$

أي أن $\mu' \mu = I_{X'}$. مما سبق نجد أن المورفيزم $f : X' \rightarrow X$ للفئة $\mathfrak{R}$ هو ايزومورفيزم للفئة $\mathfrak{R}$.

كفاية الشرط. لنفرض أن المورفيزم $\mu : X' \rightarrow X$ ايزومورفيزم للفئة $\mathfrak{R}$. علل ذلك

يوجد مورفيزم $\mu' : X \rightarrow X'$ للفئة $\mathfrak{R}$ يحقق $\mu' \mu = I_{X'}$ ، $\mu \mu' = I_X$. للتعريف

المورفيزم الدالي $f' : h_{X'} \rightarrow h_X$ وحسب المبرهنة (١٥-٢-٣) يوجد

$$\alpha : \text{Hom}(h_{X'}, h_X) \longrightarrow h_X(X')$$

$$\beta : h_X(X') = \mathfrak{R}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}(h_{X'}, h_X)$$

لنضع $f' = \beta(\mu')$ فنجد أن $f' : h_{X'} \rightarrow h_X$ مورفيزم دالي. وأنه أيضاً

كان $Y \in \text{Ob}(\mathfrak{R})$ فإن $f'(Y) = \beta(\mu')(Y)$ حيث

$$f'(Y) : \mathfrak{R}(X', Y) \rightarrow \mathfrak{R}(X, Y)$$

وأنه $\forall u \in \mathfrak{R}(X', Y)$ فإن

$$f'(Y)(u) = (\beta(\mu')(Y))(u) = h_X(u) \mu'$$

$$f'(Y)(u) = u \mu'$$

لنبرهن أن $ff' = I_{h_{X'}}$. أي أن $Y \in \text{Ob}(\mathfrak{R})$ فإن $ff'(Y) = f(Y)f'(Y)$ و أي أن كان

$u \in \mathfrak{R}(X', Y)$ فإن

$$(f(Y)f'(Y))(u) = f(Y)(f'(Y)(u)) = f'(Y)(u\mu') = (u\mu')\mu = \\ = u(\mu'\mu) = uI_{X'} = u$$

ومنه $f(Y)f'(Y) = I_{\mathfrak{N}(X',Y)}$. كذلك أيضاً كان $v \in \mathfrak{N}(X,Y)$ فإن

$$(f'(Y)f(Y))(v) = f'(Y)(f(Y)(v)) = f'(Y)(v\mu) = (v\mu)\mu' = \\ = v(\mu\mu') = vI_X = v$$

ومنه $f'(Y)f(Y) = I_{\mathfrak{N}(X,Y)}$. مما سبق نجد أن المورفيزم الدالي f ايزومورفيزم . هـ

١٥-٣. الجداء الديكارتي للفئات.

لنكن $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ فئتين. ولنضع $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$ التي تتألف من:

١ - الصف $Ob(\mathfrak{N})$ الذي يتألف من العناصر على الشكل $A = (A_1, A_2)$ حيث

$$A_1 \in Ob(\mathfrak{N}_1), A_2 \in Ob(\mathfrak{N}_2)$$

٢ - صف المورفيزمات $Mor(\mathfrak{N})$ ويتألف من العناصر $u \in Mor(\mathfrak{N})$ حيث

حيث $u = (u_1, u_2)$ وأن $A \in Ob(\mathfrak{N}_1), B \in Ob(\mathfrak{N}_2)$ كما أن $u = (u_1, u_2)$ وأن

$$u_2 : A_2 \rightarrow B_2 \quad u_1 : A_1 \rightarrow B_1$$

كما أنه يوجد تطبيق $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ يحقق $\forall A, B, D \in Ob(\mathfrak{N})$ وأن

حيث $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2), D = (D_1, D_2)$ وأن $A_1, B_1, D_1 \in Ob(\mathfrak{N}_1)$ وأن

$u = (u_1, u_2)$ فإنه $\forall u \in \mathfrak{N}(A, B), \forall v \in \mathfrak{N}(B, D)$ وأن $A_2, B_2, D_2 \in Ob(\mathfrak{N}_2)$

وأن $v = (v_1, v_2)$ حيث

$$u_1 \in \mathfrak{N}_1(A_1, B_1), u_2 \in \mathfrak{N}_2(A_2, B_2), v_1 \in \mathfrak{N}_1(B_1, D_1), v_2 \in \mathfrak{N}_2(B_2, D_2)$$

وأن

$$vu = (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2) = (v_1 u_1, v_2 u_2) \in \mathfrak{N}(A, D)$$

تمهيدية ١٥-٣-١.

لنكن $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ فئتين وليكن $F : \mathfrak{N}_1 \rightarrow \mathfrak{N}_2$ و $G : \mathfrak{N}_2 \rightarrow \mathfrak{N}_1$ دوالاً

موافقة للتغير ولنأخذ الفئة $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1^{op} \times \mathfrak{N}_2$. عندئذ توجد دوال موافق للتغير هي

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(G) : \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^{op} \times \mathfrak{M}_2 \longrightarrow Set's$$

$$Hom_{\mathfrak{M}_2}(F) : \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^{op} \times \mathfrak{M}_2 \longrightarrow Set's$$

البرهان.

١ - لندرس وجود الدالي $Hom_{\mathfrak{M}_1}(G) : \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^{op} \times \mathfrak{M}_2 \longrightarrow Set's$

لنعرف $Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)$ بالشكل

$$\forall A \in Ob(\mathfrak{M}); Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(A) = \mathfrak{M}_1(A_1, G(A_2))$$

حيث $A = (A_1, A_2)$ وأن $A_1 \in Ob(\mathfrak{M}_1), A_2 \in Ob(\mathfrak{M}_2)$ وأنه $\forall f \in \mathfrak{M}(A, B)$ فإن

$f = (f_1, f_2)$ حيث $A, B \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2)$ وأن

$f_1 \in \mathfrak{M}_1^{op}(A_1, B_1)$ وأن $A_2, B_2 \in Ob(\mathfrak{M}_2), A_1, B_1 \in Ob(\mathfrak{M}_1)$

و $f_2 \in \mathfrak{M}_2(A_2, B_2)$ كما أن

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(f) : Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(B)$$

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(f) : \mathfrak{M}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathfrak{M}_1(B_1, G(B_2))$$

وبالتالي $\forall u \in \mathfrak{M}_1(A_1, G(A_2))$ فإن

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(f)(u) = G(f_2)uf_1$$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{f_1} & A_1 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G(A_2) \\ & \searrow & \downarrow \\ G(f_2)uf_1 & & G(B_2) \end{array} \quad \begin{array}{c} u \\ \\ G(f_2) \end{array}$$

كما أنه أيًا كان $A \in Ob(\mathfrak{M})$ فإن $A = (A_1, A_2)$ وأن $I_A = (I_{A_1}, I_{A_2})$ ومنه

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(I_A)(u) = G(I_{A_2})uI_{A_1} = (I_{G(A_2)})I_{A_1} = uI_{A_1} = u$$

أي أن $Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(I_A) = I_{Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(A)}$ كما أنه أيًا كان $f, g \in Mor(\mathfrak{M})$ بحيث

$fg \in \mathfrak{M}(A, D)$ فإن $A, B, D \in Ob(\mathfrak{M})$ حيث $g : B \rightarrow D, g : A \rightarrow D$

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(fg) : Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)(D)$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(fg) : \mathfrak{M}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathfrak{M}_1(D_1, G(D_2))$$

وبالتالي أيضاً كان $u : A_1 \rightarrow G(A_2)$ وبما أن $g = (g_1, g_2)$ فإن $f = (f_1, f_2)$ ، ومثل $fg = (g_1 f_1, f_2 g_2)$

$$\begin{aligned} (\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(fg))u &= G(f_2 g_2)u(g_1 f_1) = G(f_2)G(g_2)u g_1 f_1 = \\ &= G(f_2)\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)f(u)g_1 = (\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(f))(\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(g))(u) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن

$$\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(fg) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(f) \cdot \text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)(g)$$

وهذا يبين لنا أن $\text{Hom}_{\mathfrak{M}_1}(G)$ دالي موافق للتغير.

بشكل مشابه نبرهن على أن $\text{Hom}_{\mathfrak{M}_2}(F)$ دالي موافق للتغير.

١٥-٤. تكافؤ الفئات.

تمهيدية ١٥-٤-١.

لتكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ ثلاث فئات وليكن $F : \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ و $G : \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ دوالاً موافقة للتغير. عندئذ $G \circ F : \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ هو دالي موافق للتغير. البرهان.

لدينا $G \circ F : \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ بحيث أيضاً كان $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M}_1)$ فإن $(G \circ F)(A) = G(F(A)) \in \mathfrak{M}_3$ وليكن $A, B \in \text{Ob}(\mathfrak{M}_1)$ وليكن $f \in \mathfrak{M}_1(A, B)$ عندئذ $(G \circ F)(f) = F(A) \longrightarrow F(B)$ وبالتالي

$$(G \circ F)(f) : (G \circ F)(A) \longrightarrow (G \circ F)(B)$$

أي أن $(G \circ F)(f) \in \mathfrak{M}_3(G \circ F(A), G \circ F(B))$ ويحقق: $\forall A \in \text{Ob}(\mathfrak{M}_1)$ فإن

$$(G \circ F)(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{(G \circ F)(A)}$$

كذلك $\forall f, g \in \text{Mor}(\mathfrak{M}_1)$ فإن

$$\begin{aligned} (G \circ F)(fg) &= G(F(fg)) = G(F(f), F(g)) = G(F(f)) \cdot G(F(g)) = \\ &= (G \circ F)(f) \cdot (G \circ F)(g) \end{aligned}$$

وهذا يبين لنا أن $G \circ F: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ هو دالي موافق للتغيير.
 تمهيدية ١٥-٤-٢.

لنكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ ثلاث فئات وليكن $F, G: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ و $H: \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ دوالاً موافقة للتغيير. وليكن $\varphi: F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي. عندئذ يوجد مورفيزم دالي $H\varphi: H \circ F \longrightarrow H \circ G$ معطى بالشكل
 فإن $\forall A \in Ob(\mathfrak{M}_1)$

$$(H\varphi)(A) = H(\varphi(A))$$

البرهان.

لدينا حسب التمهيدية (١٥-٤-١) أن $H \circ F, H \circ G: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ هي دوال موافقة للتغيير وأن $H\varphi: H \circ F \longrightarrow H \circ G$ معرف بالشكل
 فإن $\forall A \in Ob(\mathfrak{M}_1)$

$$(H\varphi)(A): (H \circ F)(A) \longrightarrow (H \circ G)(A)$$

حيث $\varphi(A): F(A) \rightarrow G(A)$. للبرهن أنه $\forall A, B \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ و $\forall u \in \mathfrak{M}_1(A, B)$
 فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} (H \circ F)(A) & \xrightarrow{H\varphi(A)} & (H \circ G)(A) & & \\ H \circ F(u) & \downarrow & \downarrow & & H \circ G(u) \\ (H \circ F)(B) & \xrightarrow{H\varphi(B)} & (H \circ G)(B) & & \end{array}$$

تبدلي. أي أن $(H \circ G)(u) \cdot H\varphi(A) = H\varphi(B) \cdot (H \circ F)(u)$.
 بما أن $\varphi: F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) & & \\ F(u) & \downarrow & \downarrow & & G(u) \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi(B)} & G(B) & & \end{array}$$

تبدلي. أي أن $G(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot F(u)$ ومثله

$$(H \circ G)(u) \cdot H\varphi(A) = H(G(u)) \cdot H(\varphi(A)) = H(G(u) \cdot \varphi(A)) =$$

$$= H(\varphi(B).F(u)) = H(\varphi(B)).H(F(u)) = (H\varphi)(B)(H \circ F)(u)$$

مما سبق نجد أن $H\varphi: H \circ F \longrightarrow H \circ G$ مورفيزم دالي. ◊

تمهيدية ١٥-٤-٣.

لنكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ ثلاث فئات وليكن $F_1, F_2: \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ و

$F_3: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ دوالاً موافقة للتغيير. وليكن $\psi: F_1 \longrightarrow F_2$ مورفيزم دالي.

علتذ يوجد مورفيزم دالي. علنذ

١ - كل من $F_1 \circ F_3, F_2 \circ F_3: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ دوال موافقة للتغيير.

٢ - يوجد مورفيزم دالي $\psi F_3: F_1 \circ F_3 \longrightarrow F_2 \circ F_3$ معرف بالشكل

$$(\psi F_3)(A) = \psi(F_3(A)) \quad \forall A \in Ob(\mathfrak{M}_1)$$

البرهان.

١ - ينتج مباشرة من التمهيدية (١٥-٤-١).

٢ - حسب (١) فإن كلاً من $F_1 \circ F_3, F_2 \circ F_3: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_3$ دوال موافقة للتغيير.

وأن $\forall A \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ معرف بالشكل $\psi F_3: F_1 \circ F_3 \longrightarrow F_2 \circ F_3$ فإن

$$\psi F_3(A): F_1 \circ F_3(A) \longrightarrow F_2 \circ F_3(A)$$

كما أنه $\forall A, B \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ و $\forall u \in \mathfrak{M}_1(A, B)$ أي $u: A \rightarrow B$ علنذ

وأن $F_3(A), F_3(B) \in Ob(\mathfrak{M}_2)$

$$F_3(u): F_3(A) \longrightarrow F_3(B)$$

أي أن $F_3(u) \in Mor(\mathfrak{M}_2)$ وأن $F_3(u) \in \mathfrak{M}_2(F_3(A), F_3(B))$ وبمما أن

$\psi: F_1 \rightarrow F_2$ مورفيزم دالي فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} F_1(F_3(A)) & \xrightarrow{\psi(F_3(A))} & F_2(F_3(A)) & & \\ F_1(F_3(u)) & \downarrow & & \downarrow & F_2(F_3(u)) \\ F_1(F_3(B)) & \xrightarrow{\psi(F_3(B))} & F_2(F_3(B)) & & \end{array}$$

تبدلي، أي أن $F_2(F_3(u)).\psi(F_3(A)) = \psi(F_3(B)).F_1(F_3(u))$ وبالتالي فإن

$$(F_1 \circ F_3)(u)(\psi F_3)(A) = (\psi F_3)(B).(F_1 \circ F_3)(u)$$

وهذا يبين لنا أن ψF_3 مورفيزم دالي. ٥

تعريف.

لتكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ فئتين وليكن $F: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ دالي موافق للتغيير. نقول عن

الدالي F إنه تكافؤ بين الفئتين $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ إذا وجد دالي موافق للتغيير

$G: \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1$ وايزومورفيزمات دالية $\psi: I_{\mathfrak{M}_1} \longrightarrow FG, \varphi: I_{\mathfrak{M}_1} \longrightarrow GF$

تحقق $F\varphi = \psi F$.

مبرهنة ١٥-٤-٤.

لتكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ فئتين وليكن $F: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ دالياً موافقاً للتغيير. إذا كان

الدالي F تكافؤاً بين الفئتين $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ فإنه:

١ - $\forall A, B \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ فإن التطبيق

$$F(A, B): \mathfrak{M}_1(A, B) \longrightarrow \mathfrak{M}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر.

٢ - $\forall M \in Ob(\mathfrak{M}_2)$ يوجد $N \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ بحيث $F(N) \approx M$.

البرهان.

١ - بما أن $F: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ تكافؤ فإنه يوجد $G: \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1$ ومنه أياً كان

$A \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ فإن $F(A) \in Ob(\mathfrak{M}_2)$ ومنه $GF(A) \in Ob(\mathfrak{M}_1)$. ليكن

$u, v \in \mathfrak{M}_1(A, B)$ بحيث $F(u) = F(v)$ وبما أن $\varphi: I_{\mathfrak{M}_1} \rightarrow GF$ ايزومورفيزم

عندئذ أياً كان $A \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ فإن $\varphi(A): A \rightarrow GF(A)$ ايزومورفيزم، أي أن المخطط

التالي

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow \varphi(A) & & \downarrow \varphi(B) \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(u)} & GF(B) \end{array}$$

تبديلي، أي أن $\varphi(B).u = GF(u).\varphi(A)$ وبما أن $\varphi(A)$ ايزومورفيزم يوجد
 $\varphi(A).\varphi(A)^{-1} = I_{GF(A)}$ وأن $\varphi(A)^{-1}.\varphi(A) = I_A$ بحيث $\varphi(A)^{-1}: GF(A) \rightarrow A$
 من جهة أخرى بما أن $F(u) = F(v)$ فإن $GF(u) = GF(v)$ ومنه $u = \varphi(B)^{-1}.GF(u).\varphi(A)$ كذلك $v \in \mathfrak{R}_1(A, B)$ فإن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(u)} & GF(B) \end{array}$$

تبديلي، أي أن $\varphi(B).v = GF(v).\varphi(A)$ ومنه $v = \varphi(B)^{-1}.GF(v).\varphi(A)$ مما سبق
 نجد أن $u = v$ وهذا يبين لنا أن التطبيق $F(A, B)$ متباين. لنبرهن على أنه عامر،
 ليكن $v: F(A) \rightarrow F(B)$ علنئذ $G(v): GF(A) \rightarrow GF(B)$ لنضع

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_*} & B \\ \varphi(A) \downarrow & & \downarrow \varphi(B) \\ GF(A) & \xrightarrow{G(v)} & GF(B) \end{array}$$

حيث $\varphi_*(G(v)) = \varphi(B)^{-1}.G(v).\varphi(A)$ فلنجد أن $\varphi_*(G(v)) \in \mathfrak{R}_1(A, B)$ علنئذ يكون
 $F(\varphi_*(G(v))) = F(\varphi(B)^{-1}.G(v).\varphi(A)) = F(\varphi(B)^{-1})F(G(v))F(\varphi(A)) =$
 $= F(\varphi(B)^{-1}).(FG)(v).(F\varphi)(A) = F(\varphi(B)^{-1}).(FG)(v).(\psi F)(A)$
 وبما أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{v} & F(B) \\ \psi(F(A)) \downarrow & & \downarrow \psi(F(B)) \\ (FG)(F(A)) & \xrightarrow{(FG)(v)} & (FG)(F(B)) \end{array}$$

تبديلي فإن $(\psi F)(B)v = (FG)(v).(\psi F)(A)$ ومنه

$$\begin{aligned} F(\varphi_*(G(v))) &= F(\varphi(B)^{-1})(\psi F)(B).v = F(\varphi(B)^{-1})\psi(F(B))v = \\ &= F(\varphi(B)^{-1}).F(\varphi(B))v = F(\varphi(B)^{-1}.\varphi(B))v = F(I_B)v = I_{F(B)}v = v \end{aligned}$$

٢ - ليكن $M \in Ob(\mathfrak{M}_2)$ عندئذ $G(M) \in Ob(\mathfrak{M}_1)$ ومنه $F(G(M)) \in Ob(\mathfrak{M}_2)$ وأن $\psi(M) = (FG)(M) \approx F(G(M))$.

تمارين محلولة (١٥)

١ - تعريف.

لتكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ فئتين و $G: \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1, F: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ داليتين موافقين للتغيير. نقول عن الدالي G إنه دالي مرافق للدالي F إذا وجد ايزومورفيزم دالي $\varphi: Hom_{\mathfrak{M}_2}(F) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{M}_1}(G)$.

لتكن $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ فئتين و $G, G_1: \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1, F, F_1: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_2$ دوال موافقة للتغيير. وليكن $f: F \longrightarrow F_1$ مورفيزماً دالياً ولنفرض أن الدالي G هو دالي مرافق للدالي F وأن الدالي G_1 هو دالي مرافق للدالي F_1 ، عندئذ يوجد مورفيزم دالي وحيد $g: G_1 \longrightarrow G$ من أجله المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{\mathfrak{M}_2}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi(A, B)} & Hom_{\mathfrak{M}_1}(A, G(B)) & & \\ \uparrow & & \uparrow & & Hom_{\mathfrak{M}_1}(A, g(B)) \\ Hom_{\mathfrak{M}_2}(f(A), B) & & Hom_{\mathfrak{M}_1}(A, G_1(B)) & & \\ & \xrightarrow{\varphi_1(A, B)} & & & \end{array}$$

تبدلي.

الحل.

بحسب التمهيدية (١٥-٣-١) فإنه توجد دوال موافقة للتغيير

$$Hom_{\mathfrak{M}_2}(G): \mathfrak{M}_1^{op} \times \mathfrak{M}_2 \longrightarrow Set^s$$

$$Hom_{\mathfrak{M}_1}(F): \mathfrak{M}_1^{op} \times \mathfrak{M}_2 \longrightarrow Set^s$$

وأيضاً حسب التمهيدية (١٥-٢-٢) فإنه توجد دوال موافقة للتغيير

$$h_{G(B)}: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow Set^s, h_{G_1(B)}: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow Set^s$$

وبما أن الدالي F مرافق للدالي F_1 وأن الدالي G مرافق للدالي G_1 فإنه توجد
إيزومورفيزمات دلالية

$$\varphi_1 : \text{Hom}_{\mathfrak{N}_2}(F_1) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{N}_1}(G_1) \text{ و } \varphi : \text{Hom}_{\mathfrak{N}_2}(F) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{N}_1}(G)$$

لنعرف $\forall A \in \text{Ob}(\mathfrak{N}_1)$ بالشكل $\psi(B) : h_{G_1(B)} \longrightarrow h_{G(B)}$ فإن

$$\psi(B)(A) = \psi(A, B) \text{ و } \psi(A, B) = \varphi(A, B) \cdot h_B(f(A)) [\varphi_1(A, B)]^{-1}$$

عندئذ من أجل أي مورفيزم $u : C \rightarrow A$ للفئة $\mathfrak{N}_1$ فإن

$$h_{G(B)}(u) \psi(A, B) = h_{G(B)}(u) \varphi(A, B) h_B(f(A)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} =$$

$$= \varphi(C, B) h_B(f(u)) h_B(f(A)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} =$$

$$= \varphi(C, B) h_B(f(C)) h_B(f_1(u)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} =$$

$$= \psi(C, B) \varphi_1(C, B) h_B(f_1(u)) [\varphi_1(A, B)]^{-1} =$$

$$= \psi(C, B) h_{G_1(B)}(u)$$

ومنه بحسب المبرهنة (١٥-٢-٤) يوجد مورفيزم وحيد $g(B) : G_1(B) \rightarrow G(B)$ يحقق
أن المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathfrak{N}_2}(F(A), B) & \xrightarrow{\varphi(A, B)} & \text{Hom}_{\mathfrak{N}_1}(A, G(B)) & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \text{Hom}_{\mathfrak{N}_1}(A, g(B)) \\ \text{Hom}_{\mathfrak{N}_2}(f(A), B) & & & & \\ \text{Hom}_{\mathfrak{N}_2}(F_1(A), B) & \xrightarrow{\varphi_1(A, B)} & \text{Hom}_{\mathfrak{N}_1}(A, G_1(B)) & & \end{array}$$

تبدلي.

لنبرهن على أن $g : G_1 \rightarrow G$ هو مورفيزم دالي. ليكن $u : B \rightarrow B_1$ مورفيزم للفئة $\mathfrak{N}_1$
عندئذ المخطط التالي

$$\begin{array}{ccccc} G(B) & \xrightarrow{G(u)} & G(B_1) & & \\ \uparrow & & \uparrow & & g(B) \\ g(B) & & & & \\ G_1(B) & \xrightarrow{G_1(u)} & G_1(B_1) & & \end{array}$$

تبدلي. وهذا يبين لنا أن $g : G_1 \rightarrow G$ مورفيزم دالي.

تمارين (١٥)

١- ليكن $B \in Ob(Set's)$ ولنعرف $F : Set's \longrightarrow Set's$ بالشكل التالي

$$\forall A \in Ob(Set's); F(A) = A \times B$$

أثبت أن F هو دالي موافق للتغيير لفئة المجموعات $Set's$.

٢- ليكن $B \in Ob(Set's)$ ولنعرف $G : Set's \longrightarrow Set's$ بالشكل التالي

$$\forall C \in Ob(Set's); G(A) = Hom_{Set's}(B, C)$$

أثبت أن G هو دالي موافق للتغيير لفئة المجموعات $Set's$.

٣- أثبت أن الدالي G المعرف في (٢) هو دالي مرافق للدالي F المعرف في (١).

٤- بالاعتماد على (١) و (٢) و (٣) أثبت أن

$$Hom_{Set's}(A \times B, C) \approx Hom_{Set's}(A, Hom_{Set's}(B, C))$$



(إنكليزي-عربي)

<i>Abelain group</i>	زمرة تبديلية
<i>elementary</i>	زمرة أساسية
<i>finite group</i>	زمرة تبديلية منتهية
<i>free</i>	زمرة حرة
<i>Addition modulo</i>	الجمع بالمقاس
<i>Addition group of integers modulo-n</i>	جمع الأعداد الصحيحة بالمقاس-n
<i>Algebra</i>	الجبر
<i>of sets</i>	جبر المجموعات
<i>Algebraic</i>	جبري
<i>of structure</i>	بنية جبرية
<i>Ascending chain condition</i>	شرط انقطاع السلاسل
<i>Associates</i>	تجميع
<i>Associativity</i>	تجميعي
<i>Automorphism</i>	تماثل
<i>of group</i>	تماثل زمري
<i>inner</i>	تماثل داخلي
<i>Axioms</i>	موضوعات
<i>Bijjective map</i>	تطبيق عامر
<i>Binary operation</i>	قانون تشكيل
<i>Cancellation</i>	اختصار
<i>law of groups</i>	قانون الاختصار في الزمرة
<i>Cartesian product of two sets</i>	الجداء الديكارتي لمجموعتين

Category	فئة
Cauchs Theorem	مبرهنة كوشي
Cayley digraph of a group	جدول كايلي للزمرة
Cayleys Theorem	مبرهنة كايلي
Center	مركز
of a group	مركز الزمرة
Centralizer	مركز
of an element	مركز عنصر
of a subgroup	مركز الزمرة الجزئية
Characteristic subgroup	زمرة جزئية متميزة
Commutative operation	عملية تبديلية
Commutator subgroup	مبادل الزمرة الجزئية
Conjugacy class	صف ترافق
Conjugate	ترافق
element	عنصر مترافق
subgroup	زمرة جزئية مترافقة
complement to subgroup	متكمم الزمرة الجزئية
Co- prime integers	أعداد أولية فيما بينها
Coset	مرافق
left	مرافق يساري
right	مرافق يميني
Cycle	دور
disjoint	طول الدور
-m	دور طوله m

Cyclic groups	دائري
subgroup	زمرة دوار
Dihedral groups	زمرة جزئية دوار
Direct product of groups	زمرة ثنائية
external	الجداء المباشر للزممر
Internal	الجداء المباشر الخارجي للزممر
Direct sum of groups	الجداء المباشر الداخلي للزممر
Derived group	مجموع مباشر
Division algorithm	المجموع المباشر للزممر
Divisor of zero	مشتق الزمرة
Element(s)	خوارزمية القسمة
Algebraic	قاسم
Conjugate	قاسم للصفر
fixed	عنصر
Elementary abelian group	عنصر جبري
identity	عنصر مرافق
inverse of	عنصر ثابت
order of	زمرة تبديلية أساسية
Equivalence class	عنصر وحدة (حيادي)
Equivalence relation	مقلوب عنصر
Extension of group	مرتبة عنصر
	صف تكافؤ
	علاقة تكافؤ
	تمديد للزمرة

<i>Fermat theorem</i>	مبرهنة فيرما
<i>Factor group</i>	زمرة الخارج
<i>Finitely generated group</i>	زمرة منتهية التوليد
<i>Finitely generated abelian group</i>	زمرة تبديلية منتهية التوليد
<i>First Isomorphism Theorem</i>	مبرهنة التماثل الأولى
<i>Frattni group</i>	زمرة فراتيني
<i>Function(s)</i>	تابع
<i>codomain</i>	مجموعة قيم (مستقر) تابع
<i>composition</i>	تركيب التوابع
<i>domain</i>	مجموعة تعريف (منطلق) تابع
<i>one-to-one</i>	تابع متباين
<i>onto</i>	تابع عامر
<i>Functor</i>	دالي
<i>Generator(s)</i>	مولد
<i>of a cyclic group</i>	مولد الزمرة الدوارة
<i>Greatest common divisor</i>	قاسم مشترك أعظم
<i>Group</i>	زمرة
<i>abelian</i>	زمرة تبديلية
<i>Automorphism</i>	تماثل للزمرة
<i>center of</i>	مركز الزمرة
<i>commutative</i>	زمرة تبديلية
<i>cyclic</i>	زمرة دوارة
<i>finite</i>	زمرة منتهية
<i>non-abelain</i>	زمرة غير تبديلية

<i>order of</i>	مرتبة الزمرة
<i>simple</i>	زمرة بسيطة
<i>solvable</i>	زمرة قابلة للحل
<i>symmetric</i>	زمرة متناظرة
<i>symmetry</i>	زمرة تناظرية
<i>of units</i>	حيادي الزمرة
<i>Homomorphism(s)</i>	تشاكل
<i>Fundamental Theorem of</i>	النظرية الأساسية للتشاكلات
<i>of a group</i>	تشاكل زمري
<i>kernel of</i>	نواة تشاكل
<i>Identity element</i>	عناصر وحدة
<i>Index of a subgroup</i>	دليل الزمرة الجزئية
<i>Index Theorem</i>	نظرية الدليل
<i>Isomorphism(s)</i>	تماثل
<i>first Theorem for groups</i>	نظرية التماثل الأولى
<i>of groups</i>	تماثل زمري
<i>second Theorem for groups</i>	نظرية التماثل الزمري الثانية
<i>third Theorem for groups</i>	نظرية التماثل الزمري الثالثة
<i>Kernel of a homomorphism</i>	نواة التشاكل
<i>Lagrangs Theorem</i>	نظرية لاغرانج
<i>Mapping</i>	تطبيق
<i>Matrix</i>	مصفوفة
<i>addition</i>	جمع المصفوفات
<i>determinant of</i>	معين مصفوفة

<i>multiplication</i>	جداء المصفوفات
<i>Odd permutation</i>	تبديل فردي
<i>Operation</i>	قانون تشكيل
<i>associative</i>	قانون تشكيل تجميعي
<i>binary</i>	قانون تشكيل داخلي
<i>table for</i>	جدول قانون التشكيل
<i>Orbit of a point</i>	مدار النقطة
<i>Order</i>	مرتبة
<i>of an element</i>	مرتبة عنصر
<i>of a group</i>	مرتبة الزمرة
<i>p-group</i>	p-زمرة
<i>Relation</i>	علاقة
<i>equivalent</i>	علاقة التكافؤ
<i>Subgroup(s)</i>	زمرة جزئية
<i>characteristic</i>	زمرة جزئية متميزة
<i>commutator</i>	مبادل زمرة جزئية
<i>conjugate</i>	زمرة جزئية مترافقة
<i>cyclic</i>	زمرة جزئية دوارة
<i>definition</i>	تعريف الزمرة الجزئية
<i>finite test</i>	اختبار الزمرة الجزئية المنتهية
<i>index</i>	دليل الزمرة الجزئية
<i>nontrivial</i>	زمرة جزئية غير تافهة
<i>normal</i>	زمرة جزئية ناظمية
<i>proper</i>	زمرة جزئية محتواة تماما

<i>Sylow p-torsion</i>	p -زمرة جزئية سيلوفية
<i>trivial</i>	زمرة تافهة
<i>Sylow p-subgroup</i>	p -زمرة جزئية سيلوفية
<i>Sylow Theorem</i>	مبرهنة سيلوف
<i>Well-defined function</i>	تابع معرف جيدا
<i>Zero</i>	صفر

المراجع العلمية

- 1- Baer R. Nilpotent Characteristic Subgroups of Finite groups. *Amer. J. Math.* 75(1953),633..
- 2- Bucur I. & Deleanu A. Introduction to the theory of Categories and Functors. *Pur Appl. Math.* V19.(1968).
- 3- Burnside. W On the Theory of Groups of Finite order. *Proc. London. Math. Soc* (2)7(1909),1-7.
- 4- Curtis C. W. & Reiner I. Representation Theory of finite Groups and Associative Algebra.- (1962).
- 5- Cavior S. R. The Subgroups of the Dihedral Group. *Math. Magazine* 48(1975);107.
- 6- Deborah L. Massari. The Propability of Generating a Cyclic Group. *Pi Mu Epsilon. J.* 7(1979);3-6.
- 7- Dieter J. On the Uniqueness of the Cyclic Group of Order n . *Amer. Math. Mont.* 99(1992): p.545-546.
- 8- Fraleigh J. A First Course in Abstract Algebra. 4th ed. Addison-wesley, 1989.
- 9- Gabriel P. & Zisman M. Calculus of Fractions and Homotopy Theory. Springer 1967.
- 10- Gallian J. A. Contemporary Abstract Algebra.-third edition. D.C. Hath and Company. 1994.
- 11- Gallian J. A. & Molton D. When is Z_n the Only Group of Order n ? *Elem. Math.* 48(1993): p.118-120.
- 12- Gallian J.A. & Rusin D. Factoring Groups of Integers Modulo n . *Math. Magazine.* 53(1980);33-36.
- 13- Geoff Smith & Olga Tabachnikova. Topics in Group Theory. Springer 2000.
- 14- Hall M. J. The Theory of Groups.- Macmillan. New York. 1959.

15 – Johnson D. L. *Topic in the Theory of Group Presentations*-
London Math.Soc. Lect. Note Ser.- 1980. – V.42 .

16 – John S. Rose. *A Course on Group Theory*. Cambridge
University press 1978.

17 – Kaplansky I. *Infinite Abelian Groups*.- Michigan, 1969.

18 – Lang S. *Algebra*.- 1965.

19 – Macdonald I.D. *The Theory of Groups*.-Oxford Univ. 1968.

20 – Robinson D. J. *Course in The Theory of Groups*.-New
York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1982.

21 – Rotman J. J. *The Theory of Groups: An Introduction*,
Boston: Allyn & Bacon 1965.

22 – Paley H. & Weichsel P. *A First Course in Abstract
Algebra*.-New York: Holt & Winston, 1966.

23 – Scott W.R. *Group Theory*. Prentice-Hall, 1964.

٢٤ – د. إلهام حمصي: الجبر (الجزء الأول)، منشورات جامعة دمشق، ١٩٨٢.

٢٥ – د. عبد الواحد أبو حمدة. الجبر (٣). منشورات جامعة دمشق، ١٩٨٢.

٢٦ – د. عبد الواحد أبو حمدة. الجبر المجرد. منشورات جامعة دمشق، ١٩٩٥.



اللجنة العلمية

الأستاذ الدكتور عبد الواحد أبو حمدة
الأستاذ المساعد الدكتور يوسف الوادي
الأستاذة المساعدة الدكتورة إيمان الخوجة

المدقق اللغوي
الأستاذ الدكتور فرح المطلق

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب و المطبوعات







