التحليل العددي (2)

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل العددي (2)

الدكتور

محمد صبح

أستاذ في قسم الرياضيات

1432-1433هـ

2011-2012م

جامعة دمشق

الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

Introduction

يكتسب التحليل العددي جاذبية خاصة لدى العاملين في مجال البحث العلمي ومن أسباب ذلك أنه في بعض الحالات وبعد التطور المهول الذي حصل في مجال المعلوماتية يصبح من السهل استخدام الطرق العددية ثم استخدام برامج وخوارزميات للحصول على الحلول المطلوبة لأي مسائل تواجههم بدقة وسرعة.

نعلم أن طلابنا يعانون من مشقة في دراسة العلوم بلغة غير اللغة العربية ونحن إذ نضع هذا الكتاب باللغة العربية بين يدي طلابنا نهدف إلى تزويد المكتبة العربية بكتب أكثر تعمقاً وأكثر تخصصاً، ثم نهدف أيضاً إلى أن يكون هذا الكتاب مرجعاً في التحليلي العددي للطلاب.

انطلاقاً من ذلك تم وضع هذا الكتاب ليتناول مقرر التحليل العددي، وقدمنا فيه عرضاً متماسكاً وشاملاً للمفاهيم الأساسية وحاولنا تقديم أسهل الطرق وأقصرها في إثبات النظريات وتتويجاً لذلك وزيادة في فهم التحليل العددي اعتنينا بكثرة الأمثلة وتنويعها.

يتكون هذا الكتاب من ستة فصول: في الفصل الأول تم التعرف على الطرق العددية لحل جملة معادلات خطية وعلى مسألة القيم الذاتية، وفي الفصل الثاني

تم التعرف على معادلات الفروق الخطية بأمثال ثابتة وعلى طريقة الـــ K خطوة الخطية وعلى طرق رانج-كاتا لحل المعادلات التفاضلية العادية، وتم التعرف في الفصل الثالث على الطرق الظاهرية والطرق الضمنية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، والفصل الرابع يبحث في الحلول المثلى (طرق خط البحث - طرق مرافقة للتدرج - طرق نيوتن) وفي الفصل الخامس تم التعرف على تقريب التوابع - الاستيفاء التقريب بكثيرات حدود ليجندر - طريقة المربعات الصغرى.

أما الفصل السادس والأخير فيعالج الحلول العددية للمعادلات التكاملية، فيعرض حل معادلات (فريد هولم) ومعادلات (فولتيرا) وبعض الطرق العددية الأخرى.

في كل فصل من فصول هذا الكتاب عدد كبير من الأمثلة المحلولة لترسيخ الأفكار الأساسية، وكذلك ثمّة عددٌ من التمارين على كل فصل من أجل التدريب واكتساب المهارات.

في الختام أتمنى لو أنّ القارئ العزيز يزودني باقتراحاته المفيدة، وآمل أن أكون قد قدمت لمكتبتنا العربية ولقارئنا العربي مرجعاً آخر مفيداً، وأشكر جميع من أسهموا في إنجازه.

والله ولي التوفيق

المؤلف

الفصل الأول

حل المعادلات الخطية

Solving Linear equations

حل جملة معادلات خطية باستخدام المصفوفات الأولية

طرائق التكرار في حل جملة معادلات خطية

مسألة القيم الذاتية

1-1 تمهيد: لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

حيث a_{ij} $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$ مقادير معلومة وتسمى الأمثال أو المعاملات

b_i مقادير معلومة $i = 1, 2, ..., m$

x_j مقادير غير معلومة (مجهولة) $j = 1, 2, ..., n$

وهذه الجملة تسمى جملة معادلات خطية مؤلفة من m معادلة بـــ n مجهول.

يمكن كتابة الجملة السابقة باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$AX = B$$

وهذا يكافئ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

حيث
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$$

وتسمى مصفوفة الأمثال

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
وتسمى مصفوفة الثوابت

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
وتسمى مصفوفة المجاهيل

لحل جملة المعادلات الخطية نميز ثلاثة أنواع من الجمل:

1- إذا كانت $m = n$ فالجملة نظامية ويكون الحل وحيداً إذا كانت المصفوفة A غير شاذة أي لها مقلوب

2- إذا كانت $m > n$ أي أن عدد أسطر A أكبر من عدد أعمدتها نسمي الجملة في هذه الحالة بالجملة فوق النظامية، ويمكن في هذه الحالة إيجاد الحل الأمثل أو الأفضل لهذه الجملة

3- إذا كانت $m < n$ نسمي الجملة في هذه الحالة بالجملة تحت النظامية ولهذه الجملة عدد غير منته من الحلول ولها $n - m$ درجة من الحرية

وفي حال كون جملة المعادلات الخطية نظامية فإن طرق حل هذه الجملة تنقسم إلى نوعين رئيسين: الطرق المباشرة وطرق التقريب المتتالي أو الطرق غير المباشرة.

2-1 الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية:

1- طريقة مقلوب مصفوفة

إذا كانت المصفوفة A غير شاذة أي $|A| \neq 0$ فإنه يمكن إيجاد مقلوبها A^{-1} . نضرب طرفي $AX = B$ من اليسار بـ A^{-1} فنجد:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

وبما أن $A^{-1}A = I$ فإن $X = A^{-1}B$

مثال (1) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

بطريقة مقلوب مصفوفة

الحل:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

ثم نوجد المصفوفة المساعدة

$$adjA = \Gamma(A) = \left[(-1)^{i+j} \right] \det A_{ij} \Big]^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2- طريقة كرامر

نعلم أن طريقة كرامر لحل جملة معادلات خطية تُعطى بالعلاقات التالية:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; i = 1, 2, ..., n$$

حيث
$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$
والذي يسمى معين الأمثال

و Δ_i ينتج من Δ بتبديل عمود الثوابت B بالعمود i

مثال (2) حل بطريقة كرامر جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1+x_2+x_3=6$$
$$2x_1-x_2+x_3=3$$
$$x_1-x_2+2x_3=5$$

الحل:

$$\Delta=\det A=|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

$$\Delta_1=\begin{bmatrix}6 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 2\end{bmatrix}=-5$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}=-10$$

$$\Delta_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}=-15$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1 \qquad x_2\frac{\Delta_2}{\Delta}=2 \qquad x_2\frac{\Delta_3}{\Delta}=3$$

3- طريقة غاوس

تتلخص هذه الطريقة بتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية وذلك باستخدام التحويلات الأولية، ثم نوجد حل جملة المعادلات بالتعويض التراجعي أو بالتعويض التقدمي.

مثال(3) حل بطريقة غاوس جملة المعادلات الخطية في المثال السابق.

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات أولية لتحويل مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية عليا كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 1 & -1 & 2 & : & 5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-2R_1+R_2}{\underset{-R_1+R_3}{}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -3 & -1 & : & -9 \\ 0 & -2 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & : & 3 \\ 0 & -2 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{2R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & : & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & : & 5 \end{pmatrix}$$

ثم نكتب جملة المعادلات المقابلة التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 3$$
$$\frac{5}{3}x_3 = 5$$

ومنه $\quad x_3 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_1 = 1$

مثال (4) ناقش حسب قيم λ في جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 2$$
$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2$$
$$x_1 - 5x_2 + 2\lambda x_3 - x_4 = 7$$
$$x_1 + (\lambda - 3)x_2 + 2x_3 + 8x_4 = \lambda^2 + 1$$

متى يكون لهذه الجملة :

1- حل وحيد

2- ليس لها حل

3- عدد لا نهائي من الحلول

الحل :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2\lambda & -1 & 7 \\ 1 & \lambda-3 & 2 & 8 & \lambda^2+1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} -2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ -R_1+R_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & -2 \\ 0 & -1 & 2\lambda-2 & -9 & 5 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2\lambda-2 & -9 & 5 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} R_2+R_3 \\ -(\lambda+1)R_2+R_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2\lambda-2 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5(\lambda+1) & \lambda^2+\lambda \end{array}\right)$$

1 – عندما $\lambda \neq 1$ و $\lambda \neq -1$ يكون عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل ولجملة المعادلات الخطية حل وحيد

2 – عندما $\lambda = 1$ فإن

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{10}{14}R_3 + R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{7} \end{array}\right)$$

وجملة المعادلات الخطية ليس لها حل

3 – عندما $\lambda = -1$ فإن

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

وجملة المعادلات الخطية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال (5) أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

نأخذ المصفوفة A ونضيف إلى يمين هذه المصفوفة المصفوفة الواحدية I ونجري تحويلات أولية وذلك كما يلي :

$$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

فنحصل على مقلوب المصفوفة A لذلك يمكن أن نكتب :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_1+R_3 \\ -R_1+R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{3}R_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2R_2+R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\frac{5}{3}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} -\frac{1}{3}R_3+R_2 \\ -R_3+R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \sim \left(I \mid A^{-1}\right)$$

أي

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

تعريف (1) إذا كان

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

و α عدداً حقيقياً , I مصفوفة الوحدة , فإن المصفوفة التالية والتي نرمز لها بالرمز $E(\alpha;u,v) = I - \alpha u v^T$

تدعى مصفوفة أولية وهي تمثل فعلياً المصفوفة التالية :

$$E(\alpha;u,v) = I - \alpha u v^T = I - \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & & & \\ u_n v 1 & u_n v_2 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha u_1 v_1 & -\alpha u_1 v_2 & \cdots & -\alpha u_1 v_n \\ -\alpha u_2 v_1 & 1-\alpha u_2 v_2 & \cdots & -\alpha u_2 v_n \\ \vdots & & & \\ -\alpha u_n v_1 & -\alpha u_n v_2 & \cdots & 1-\alpha u_n v_n \end{pmatrix}$$

مثال (6) اكتب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

على شكل مصفوفة أولية

الحل :

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$A = I - (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= I - \alpha u v^T$$

حيث $\alpha = -1$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad\qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة (1) إن مصفوفة الوحدة هي مصفوفة أولية لأن $I = E(o;u,v)$
مهما يكن الشعاعان u و v

وكذلك فإن جداء مصفوفتين أوليتين مصفوفة أولية

أي أن $E(\alpha;u,v).E(\beta;u,v) = E(\gamma;u,v)$

ويتعين هذا الجداء إذا تمّ تعيين γ من أجل ذلك نكتب

$$\begin{aligned}
&E(\alpha;u,v).E(\beta;u,v) = (I - \alpha uv^T)(I - \beta uv^T) \\
&= I - \alpha uv^T - \beta uv^T + \alpha\beta uv^T uv^T \\
&= I - (\alpha + \beta)uv^T + (\alpha\beta v^T u)uv^T \\
&= I - (\alpha + \beta - \alpha\beta v^T u)uv^T \\
&= I - \gamma uv^T = E(\gamma;u,v)
\end{aligned}$$

حيث $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta v^T u$

و $v^T u$ عدد

مقلوب مصفوفة أولية

لإيجاد مقلوب المصفوفة الأولية $E(\alpha;u,v)$ نفرض أن هذا المقلوب $E(\beta;u,v)$

وإذا سمينا $E^{-1}(\alpha;u,v)=E(\beta;u,v)$ ونعلم أن $E.E^{-1}=I$

ومنه

$$E(\alpha;u,v).E(\beta;u,v)=E(o;u,v)$$

بالاعتماد على جداء مصفوفتين أوليتين يمكن أن نكتب

$$E.E^{-1}=I-(\alpha+\beta-\alpha\beta v^{T}u)uv^{T}=E(o;u,v)=I-ouv^{T}$$
$$I-\gamma uv^{T}=I-ouv^{T}$$

أي أن $\gamma=0$ وبالتالي

$$\alpha+\beta-\alpha\beta v^{T}u=0$$
$$\beta(1-\alpha v^{T}u)=-\alpha$$

ومنه $$\beta=\frac{\alpha}{\alpha v^{T}u-1}$$

ونميز حالتين :

1 – إذا كان $\alpha v^{T}u=1$ فالمصفوفة الأولية شاذة ولا يوجد لها مقلوب

2 – إذا كان $\alpha v^T u \neq 1$ فالمصفوفة نظامية ويوجد لها مقلوب ومقلوبها يعطى بالعلاقة التالية :

$$E^{-1}(\alpha;u,v) = I - \frac{\alpha}{\alpha v^T u - 1} u v^T$$

تعريف (2) شعاع الوحدة وفق المركبة i والذي نرمز له بالرمز e_i يعطى بالتعريف بالعلاقة التالية :

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

مثال (7) أوجد المصفوفة $M_i = E(1;m_i;e_i)$

حيث e_i شعاع الوحدة وفق المركبة i و

$$m_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{i+1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{pmatrix}$$

الحل :

$$M_i = E(1, m_i, e_i) = I - m_i e_i^T$$

$$= I - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_i + 1_i \\ \vdots \\ m_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \mid 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & m_{i+1i} & & \vdots \\ & & \vdots & & \\ 0 & & & & 0 \\ & & m_{ni} & & \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{i+1i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ O & & -m_{ni} & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \boxed{} & \ddots & \\ 0 & & -m_i & & 1 \end{pmatrix}
$$

مثال (8) أوجد $M_1 M_2 \ldots\ldots\ldots M_{n-1}$

الحل : نوجد أولا $M_i M_j$ حيث $i < j$

$$
\begin{aligned}
M_i M_j &= (I - m_i e_i^T)(I - m_j e_j^T) \\
&= I - m_j e_j^T - m_i e_i^T + m_i e_i^T m_j e_j^T
\end{aligned}
$$

وبما أن

$$e_i^T m_j = \left(0 \;\cdots\; 0 \mid 0 \;\cdots\; 0\right)\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ m_{j+1j}\\ \vdots\\ m_{nj}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array} = 0$$

ومنه $$M_i M_j = I - m_i e_i^T - m_j e_j^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & O\\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ O & & -m_i & & -m_j & & 1\end{pmatrix}$$

واعتماداً على ذلك يمكن أن نكتب

$$M_1 M_2 M_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & O & 1 \end{pmatrix}$$

و عموماً يمكن أن نكتب

$$M_1 M_2 \ldots M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & O \\ -m_{21} & 1 & & & & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & & \\ -m_{41} & -m_{42} & -m_{43} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & -m_{n3} & & -m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة سفلية واحدية يمكن أن إيجاد مقلوب هذه المصفوفة كما يلي :

بفرض $L = M_1 M_2 \ldots\ldots M_{n-1}$ فإن

$$L^{-1} = M_{n-1}^{-1} M_{n-2}^{-1} \ldots\ldots\ldots M_2^{-1} M_1^{-1}$$

حيث

$$M_i^{-1} = (I - m_i e_i^T)^{-1} = I - \frac{1}{e_i^T m_i - 1} m_i e_i^T$$
$$= I + m_i e_i^T$$

وذلك لأن $e_i^T m_i = 0$

تعريف (3) مصفوفة التباديل والتي نرمز لها بالرمز P_{ij} تعطى بالتعريف بالعلاقة التالية :

$$P_{ij} = E(1; e_i - e_j, e_i - e_j)$$
$$= I - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T$$
$$= I - e_i e_i^T + e_i e_j^T + e_j e_i^T - e_j e_j^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن P_{ij} هي مصفوفة الوحدة بعد استبدال السطر i بالسطر j ولهذا السبب سميت مصفوفة التباديل .

تعريف (4) نقول أن المصفوفة w متعامدة منتظمة إذا تحقق ما يلي:

$$WW^T = W^TW = I$$

مثال (9) بفرض $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ شعاعاً يحقق العلاقة

$$v^Tv = \| v \|_2^2 = 1 \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 + \dots\dots + v_n^2 = 1$$

أثبت أن المصفوفة $W = E(2; v, v)$ متعامدة منظمة

الحل :

$$\begin{aligned}
&W = I - 2vv^T \\
&ww^T = (I - 2vv^T)(I - 2vv^T)^T \\
&= (I - vv^T)(I - 2(v^T)^T v^T) \\
&= I - 2vv^T - 2vv^T + 4vv^T = I
\end{aligned}$$

مثال (10) بفرض V شعاعا يعطى كما يلي

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

و α عدد حقيقي

أوجد المصفوفة المتعامدة المنظمة $W = (2; v, v)$

الحل:

$$v^T v = \| v \|_2^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sin\alpha & 0 & \cdots & 0 & \cos\alpha & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$W = I - 2vv^T = I - 2\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sin\alpha & 0 & \cdots & 0 & \cos\alpha & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= I - \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 2\sin^2\alpha & & 2\sin\alpha\cos\alpha & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & 2\sin\alpha\cos\alpha & & \cos^2\alpha & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
= \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & 2\sin^2\alpha & \cdots & \cdots & \cdots & \sin 2\alpha & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & -\sin 2\alpha & \cdots & \cdots & \cdots & \cos 2\alpha & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

4 – طريقة المصفوفات الأولية

لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـــ M_1 حيث

$$
M_1 = E(1; m_1, e_1) = \begin{pmatrix}
1 & & & 0 \\
-m_{21} & 1 & & \\
-m_{31} & & \ddots & \\
\vdots & & & \ddots \\
-m_{n1} & & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

فنحصل على $M_1AX = M_1B$

حيث

$$M_1A = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -m_{n1} & & O & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - m_{21}a_{11} & a'_{22} & \cdots & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} - m_{n1}a_{11} & a'_{n2} & \cdots & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

نختار الأمثال بالشكل التالي

$$m_{ji} = \frac{a_{i1}}{a_{i1}}; i = 2,3,......,n$$

$$a_{i1} \neq 0$$

فنحصل على الجملة المكافئة التالية :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ O & a'_{n2} & \cdots & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

ثم نضرب هذه الجملة بـــ M_2 فنجد :

$$M_2 M_1 A X = M_2 M_1 B$$

حيث

$$M_2 = E(1; m_2, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ & 1 & & & \\ & -m_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & \vdots & & & \ddots \\ & -m_{n2} & O & & 1 \end{pmatrix}$$

ونختار الأمثال كما يلي

$$m_{i2} = \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} \quad ; \quad i = 3, 4, \dots\dots, n$$

$$a'_{22} \neq 0$$

فنحصل على الجملة التالية :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

وهكذا نتابع نضرب بـــ M_3 ثم بـــ M_4 .... حتى M_{n-1}

فنجد :

$$M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1 A X = M_{n-1} M_{n-2} \dots\dots M_2 M_1 B$$

حيث $U = M_{n-1} M_{n-2} \dots\dots\dots M_1 M_1 A$ مصفوفة مثلثية علوية

إذا رمزنا لـــ $M_{n-1} M_{n-2} \dots\dots\dots M_1 M_1$ بـــ M

أي $M = M_{n-1} M_{n-2} \dots\dots\dots M_2 M_1$

نحصل على $MAX = MB$

حيث $U = MA$ مصفوفة مثلثية علوية

وبالتالي نحصل على جملة معادلات خطية متكافئة

$$UX = MB$$

والتي تحل بطريقة التعويض التراجعي والحل الذي نحصل عليه هو حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ المطلوب

نظرية (1) إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n ونظامية فإن التحليل $A = LU$ موجود ووحيد حيث L مصفوفة سفلية واحدية و U مصفوفة مثلثية علوية .

البرهان : وجدنا بالاعتماد على طريقة المصفوفات الأولية أن

$$M_{n-1}M_{n-2}\ldots\ldots\ldots M_2M_1A = U$$

أي $MA = U$

وبما أن M مصفوفة نظامية فإن $A = M^{-1}U$

حيث $M = M_{n-1}M_{n-2}\ldots\ldots\ldots\ldots M_2M_1$

ومنه $M^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}$

ونعلم أن

$$M_i^{-1} = (I - m_i e_i^T)^{-1}$$
$$= I - \frac{1}{1e_i^T m_i - 1} m_i e_i^T = I + m_i e_i^T$$

وبالتالي أن

$$M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots\ldots\ldots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & O & & \ddots \\ m_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & m_{32} & 1 & \\ & & & \ddots \\ & m_{n2} & O & & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ O & & & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & O & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & & \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة سفلية واحدية نسميها L أي $M^{-1} = L$ ومنه $A = LU$

هذا يعني أن التحليل موجود حيث L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية و U مصفوفة مثلثية علوية

ولنبرهن أن التحليل $A = LU$ وحيد

من أجل ذلك نفرض جدلا أن $A = L_1 U_1$

حيث L_1 مصفوفة مثلثية سفلية واحدية U_1 مصفوفة مثلثية علوية

ومنه $$A = LU = L_1 U_1$$

نضرب المساواة من اليسار بــ L_1^{-1} ومن اليمين بــ U^{-1}

حيث $\det u \neq 0$ و $\det L_1 \neq 0$ لأن A نظامية

فنجد : $$L_1^{-1} L U U^{-1} = L_1^{-1} L_1 U_1 U^{-1}$$

ومنه $$L_1^{-1} L = U_1 U^{-1}$$

ولكن ضرب مصفوفتين مثلثتين علويتين هو مصفوفة مثلثية علوية وأيضاً ضرب مصفوفتين مثلثتين سفليتين هو مصفوفة سفلية

ومنه ينتج أن العلاقة $L_1^{-1} L = U_1 U^{-1}$ تكون صحيحة عندما تكون المصفوفة $L_1^{-1} L$ مصفوفة قطرية ولكن قطر المصفوفة $L_1^{-1} L$ يساوي الواحد لأن كلا من L و L_1^{-1} مصفوفة مثلثية سفلية واحدية وبالتالي فإن

$$L_1^{-1}L = I = U_1U^{-1}$$

ومنه $\quad U_1 = U$ و $L_1 = L$

وعليه فإن الفرض الجدلي غير صحيح وبالتالي فإن التحليل وحيد .

مثال (11) باستخدام طريقة المصفوفات الأولية أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$-x_1 + 8x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 2$$
$$5x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$$
$$10x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6$$

الحل : نكتب المصفوفة الموسعة

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 11 & 2 \\ 5 & -9 & -2 & 4 & 7 \\ 10 & -7 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

نضرب المصفوفة الموسعة بـــ M_1 حيث

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-m_{21}&1&0&0\\-m_{31}&0&1&0\\-m_{41}&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\5&0&1&0\\10&0&0&1\end{pmatrix};m_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

فنجد :

$$M_1(A\,|\,B)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\5&0&1&0\\10&0&0&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c}-1&8&-1&-4&5\\3&1&4&11&2\\5&-9&-2&4&7\\10&-7&3&5&6\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}-1&8&-1&-4&5\\0&25&1&-1&17\\0&31&-7&-16&32\\0&73&-7&-35&56\end{array}\right)$$

نضرب هذه المصفوفة بـــ M_2 حيث

$$M_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-m_{32}&1&0\\0&-m_{42}&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-\frac{31}{25}&1&0\\0&-\frac{73}{25}&0&1\end{pmatrix}$$

فنجد :

$$M_2\left[M_1\left(A \mid B\right)\right]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{31}{25} & 1 & 0\\ 0 & -\dfrac{73}{25} & 0 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 8 & -1 & -4 & 5\\ 0 & 25 & 1 & -1 & 17\\ 0 & 31 & -7 & -16 & 32\\ 0 & 73 & -7 & -35 & 56\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 8 & -1 & -4 & 5\\ 0 & 25 & -1 & -1 & 17\\ 0 & 0 & -\dfrac{206}{25} & -\dfrac{369}{25} & \dfrac{273}{25}\\ 0 & 0 & -\dfrac{248}{25} & -\dfrac{802}{25} & \dfrac{159}{25}\end{array}\right)$$

ثم نضرب هذه المصفوفة بـــ M_3 حيث

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{43} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-248}{206} & 1 \end{pmatrix}$$

فنجد :

$$M_3\left[M_2\left[M_1(A \mid B)\right]\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-248}{206} & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 25 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -\frac{206}{25} & -\frac{369}{25} & \frac{273}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{248}{25} & -\frac{802}{25} & \frac{159}{25} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 25 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{206}{25} & -\frac{369}{25} & \frac{273}{25} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{73700}{5150} & \frac{-34950}{5150} \end{array}\right)$$

نكتب جملة المعادلات الخطية المقابلة للمصفوفة الموسعة الأخيرة

$$\frac{73700}{5150}x_4 = -\frac{34950}{5150} \Rightarrow x_4 = -0.4742$$

$$\frac{-206}{25}x_3 - \frac{369}{25}x_4 = \frac{273}{25} \Rightarrow x_3 = -0.4758$$

$$25x_2 + x_3 - x_4 = 17 \Rightarrow x_2 = 0.6801$$

$$-x_1 + 8x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \Rightarrow x_1 = 2.8134$$

فحل جملة المعادلات الخطية المطلوب هو

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8134 \\ 0.6801 \\ -0.4758 \\ -0.4742 \end{pmatrix}$$

تعريف (5) كلفة العمليات هي عدد عمليات الضرب والقسمة في عملية حسابية ما . فمثلا كلفة العمليات الحسابية X^TY

هي n عملية ضرب لأن

$$X^TY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots\ldots + x_ny_n$$

وكلفة حساب المصفوفة M_i هي $(n-i)$ عملية قسمة وذلك لأنه نعلم أن :

$$M_i = I - m_i e_i^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \boxed{} & \ddots & \\ & & -m_i & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1i} & \ddots & & \\ & & -m_{i+2i} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & -m_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{i+1i} = \frac{a_{i+1i}}{a_{ii}}, m_{i+2i} = \frac{a_{i+2i}}{a_{ii}}, \ldots\ldots\ldots, m_{ni} = \frac{a_{ni}}{a_{ii}}, a_{ii} \neq 0$$

مثال (12) أوجد كلفة العمليات لحل جملة المعادلات الخطية $LX = B$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلية

الحل :

$$LX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

وتحل هذه الجملة بطريقة التعويض التقدمي كما يلي :

$$l_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 l_{33}x_3 = x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}}$$

وبشكل عام

$$i = 2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,n \quad ; \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}$$

وكلفة العمليات تحسب كما يلي لإيجاد x_1 نحتاج إلى عملية قسمة واحدة فقط ولإيجاد x_2 نحتاج إلى عملية ضرب واحدة وإلى عملية قسمة واحدة ولإيجاد x_3 نحتاج إلى عمليتي ضرب وعملية قسمة واحدة وهكذا لإيجاد x_n نحتاج إلى $(n-1)$ عملية ضرب وعملية قسمة واحدة وبالتالي فإن عدد عمليات الضرب هي :

$$0 + 1 + 2 + \cdots \ldots \ldots . + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

وعدد عمليات القسمة هي $1 + 1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + 1 = n$

وبالتالي فإن كلفة العمليات هي

$$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

5 – طريقة LU

تتلخص هذه الطريقة بكتابة التحليل $A = LU$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية و U مصفوفة مثلثية علوية كما يلي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nj} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ l_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots l_{i,i-1} & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots u_{1j} & \cdots u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots u_{2j} & \cdots u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & u_{jj} & \cdots u_{jn} \\ & & & \ddots \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد :

$$a_{1j} = u_{1j}\,;\, j = 1,2,\ldots\ldots,n$$
$$a_{i1} = l_{i1}u_{11};\, i = 2,3,\ldots\ldots\ldots n$$

ومنه $$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

وبشكل عام نميز حالتين :

1 – عندما $i \le j$ فإن

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \ldots + l_{ij-1}u_{j-1j} + u_{ij}$$

ومنه
$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

$$i = 2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n \qquad ;$$

$$j = i, i+1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n$$

2 – عندما $i > j$ فإن

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \ldots\ldots + l_{ij-1}u_{j-1j} + l_{ij}u_{jj}$$

ومنه
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

$$j = 2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n \qquad ;$$

$$i = j+1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n$$

مثال (13) استخدم طريقة LU لحل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 - 3x_2 = 2$$

الحل :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} = 1 \quad u_{12} = a_{12} = 2 \quad u_{13} = a_{13} = 1$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2 \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = -1$$

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j} \qquad j = 2,3$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 2(2) = -2$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 3 - 2(1) = 1$$

$$u_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{1}{2}$$

$$u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}u_{k3} = a_{33} - (l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}) = \frac{1}{2}$$

ومنه

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نكتب الجملة كما يلي $AX = B \quad \Leftrightarrow \quad LUX = B$

نفرض $Y = UX$ ومنه $LY = B$ وهذا يكافئ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$y_1 = 0$$
$$2y_1 + y_2 = 3$$
$$-y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 2$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$UX = Y$ يكافئ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}$$
$$-2x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

وبالتالي حل جملة المعادلات المطلوب هو:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة (2) يمكن بالاعتماد على طريقة المصفوفات الأولية إيجاد مقلوب مصفوفة نظامية وذلك كما يلي :

نعلم أن $A.A^{-1} = I$ فإذا فرضنا أن $A^{-1} = [X_1X_2 \dots \dots . X_n]$

حيث $i = 1, 2, \dots \dots , n$; X_i هو شعاع رقم i للمصفوفة A^{-1}

فإن $A.A^{-1} = A.[X_1X_2 \dots \dots . X_n] = I$

أو $[AX_1AX_2 \dots \dots \dots AX_n] = [e_1e_2 \dots \dots e_n]$

حيث $i = 1, 2, \dots \dots , n$; e_i يمثل شعاع الوحدة الذي جميع عناصره تساوي الصفر ما عدا العنصر i الذي يساوي الواحد .

ولكي تكون العلاقة السابقة صحيحة يجب أن يكون :

$$AX_i = e_i \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n$$

وبحل هذه الجملة n مرة نحصل منها على $X_i \;\; ; \;\; i = 1, 2, ..., n$

التي هي أعمدة المصفوفة A^{-1} وبالتالي لإيجاد A^{-1} يكفي تحليل المصفوفة A بالاعتماد على المصفوفات الأولية إلى الشكل $A = LU$ ثم حساب

$$LUX_2 = e_2 \;\; LUX_2 = e_2 \;\; .... \;\; LUX_n = e_n$$

مثال (14) أوجد باستخدام المصفوفات الأولية مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضرب المصفوفة A بـــ M_{-1} فنجد :

$$M_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ثم نضرب المصفوفة M_1A بـــ M_2 فنجد :

$$M_2(M_1A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

نوجد حل الجمل $LY = e_1$ وهذا يكافئ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ونوجد حل الجملة $LY = e_2$ وهذا يكافئ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ونوجد حل الجملة $LY = e_3$ وهذا يكافئ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ثم نوجد حل الجمل $UX = Y$ والذي يكافئ

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

ومنه

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

6 – طريقة المرتكز الجزئي :

لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بطريقة المصفوفات الأولية يمكن تعديل هذه الطريقة وذلك تجنبا للتقسيم على عدد صغير حيث إنّ التقسيم على عدد صغير يعد من الأسباب المولدة للأخطاء وتتلخص هذه الطريقة والتي تسمى طريقة المرتكز الجزئي بأن نختار a_{11} بالشكل التالي :

$$a_{11} = \max_{1 \le i \le n} |a_{i1}|$$

كي يصبح التقسيم دوماً على العدد الأكبر

و عموماً نختار العنصر a_{ik} كما يلي

$$a_{kk} = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}|$$

أكبر عنصر بالقيمة المطلقة لعناصر العمود k والواقعة تحت العنصر a_{kk} ومن أجل تحقيق هذه العلاقات يمكن باستخدام مصفوفات التباديل .

مثال (15) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة المركز الجزئي

$$0.03x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 25$$
$$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31$$

الحل : نأخذ المصفوفة الموسعة ونضربها بمصفوفة التباديل P_{31} فنجد :

$$\rho_{13}\left[A \mid B\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.03 & 2 & 3 & 13 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 3 & 5 & 6 & 31 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 31 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 0.03 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right)$$

نوجد M_1 حيث

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-m_{21}&1&0\\-m_{31}&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&1&0\\-0.01&0&1\end{pmatrix}$$

ونضرب M_1 بالمصفوفة $\rho_{31}\left[A \mid B\right]$ فنجد :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&1&0\\-0.01&0&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&6&31\\2&4&5&25\\0.03&2&3&13\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&6&31\\0&\frac{2}{3}&2&\frac{13}{3}\\0&1.95&2.94&12.69\end{array}\right)$$

نضرب هذه المصفوفة بمصفوفة التباديل

$$P_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

فنجد:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&6&31\\0&1.95&2.94&12.69\\0&\frac{2}{3}&2&\frac{13}{3}\end{array}\right)$$

ثم نضرب هذه المصفوفة بالمصفوفة M_2 حيث

$$M_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -0.3419 & 1\end{pmatrix}$$

فنجد :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -0.3419 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & 6 & 31\\ 0 & 1.95 & 2.94 & 12.94\\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{13}{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & 6 & 31\\ 0 & 1.95 & 2.94 & 12.69\\ 0 & 0 & 0.9948 & -0.0054\end{array}\right)$$

ومنه

$$\begin{aligned}3x_1+5x_2+6x_3&=31\\ 1.95x_2+2.94x_3&=12.69\\ 0.9948x_3&=-0.0054\end{aligned}$$

باستخدام طريقة التعويض التراجعي نجد :

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5156\\ 6.5158\\ -0.0054\end{pmatrix}$$

تعريف (6) نقول عن المصفوفة A بأنها مصفوفة ثلاثية الأقطار إذا كانت جميع عناصر هذه المصفوفة أصفاراً باستثناء عناصر القطر الرئيسي والقطرين السفلي والعلوي الموازين له أي أن لها الشكل :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

يمكن تحليل المصفوفة A لجداء مصفوفتين إحداهما مصفوفة مثلثية علوية والأخرى مصفوفة مثلثية سفلية واحدية كما يلي :

$$\begin{pmatrix} P_1 & \gamma_1 & & & & O \\ q_2 & P_2 & \gamma_2 & & & \\ & q_3 & P_3 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ O & & & & q_n & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ \alpha_2 & 1 & & & \\ & \alpha_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & O \\ & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \beta_3 & \gamma_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ O & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

بإجراء عملية الضرب والمطابقة نجد :

$$P_1 = \beta_1 \quad , \quad \gamma_1 = \gamma_1$$
$$\rho = \alpha_i \gamma_{i-1} + \beta_i$$
$$q_i = \alpha_i \beta_{i-1} \quad ; \quad \gamma_i = \gamma_i$$
$$i = 2, 3, \dots\dots\dots, n$$

ومنه

$$\beta_1 = P_1$$
$$\alpha_i = \frac{q_i}{\beta_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots\dots, n$$
$$\beta_i = P_i - \alpha_i \gamma_{i-1}; i = 2, 3, \dots\dots, n$$

ولحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ حيث A مصفوفة ثلاثية الأقطار نحلل المصفوفة A إلى الشكل $A = LU$ فتصبح الجملة كما يلي :

$$LUX = B$$

نفرض $UX = Y$ فنحصل على الجملة $LY = B$ نحل أولا هذه الجملة بطريقة التعويض التقدمي كما يلي :

$$LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ \alpha_2 & 1 & & & \\ & \alpha_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = b_1$$

$$\alpha_i y_{i-1} + y_i = b_i \quad ; \quad i = 2,3,.....,n$$

ومنه
$$i = 2,3,........,n \quad ; \quad y_i = b_i - \alpha_i y_{i-1}$$

ثم نحل الجملة $UX = Y$ بطريقة التعويض التراجعي كما يلي :

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & O \\ & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ O & & & & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta_n x_n = y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\beta_n}$$

$$\beta_i x_i + \gamma_i x_i = y_i \Rightarrow x_i = \frac{y_i - \gamma_i x_{i+1}}{\beta_i}$$

$$i = n-1, n-2, ..., 2, 1$$

مثال (16) احسب كلفة العمليات كل جملة معادلات خطية حيث مصفوفة الأمثال A مصفوفة ثلاثية الأقطار .

الحل :

$$\beta_1 = P_1$$ لا تكلف شيئا

$$\alpha_i \;;\; i = 2,3,\ldots,n$$ تكلف عملية واحدة

$$\beta_i \;;\; i = 2,3,\ldots,n$$ تكلف عملية واحدة

ومنه كلفة تحليل المصفوفة $A = LU$ هي

$$(n-1) + (n-1) = 2n - 2$$

وكلفة حل الجملة $LY = B$ هي $(n-1)$ عملية

حيث : $i = 2,3,\ldots\ldots,n;\, y_i = b_i - \alpha_i y_{i-1}$

وكلفة حل الجملة $UX = Y$ هي :

لإيجاد x_n نحتاج إلى عملية واحدة

ولإيجاد x_i ; $i = n-1, n-2, \ldots\ldots\ldots, 2,1$

فإن كلا منها يحتاج إلى عمليتين وبالتالي فالكلفة هي :

$$2(n-1) + 1 = 2n - 1$$

وبالتالي فإن كلفة حل جملة معادلات خطية حيث مصفوفة الأمثال A مصفوفة ثلاثية الأقطار هي :

$$(2n-2)+(n-1)+(2n-1)=5n-4$$

مثال (17) أوجد حل جملة معادلات خطية التالية :

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = 1\\
&2x_1 + x_2 + x_3 = 2\\
&-3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1\\
&-4x_3 + 5x_4 = 4
\end{aligned}$$

الحل : نلاحظ أن مصفوفة الأمثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة ثلاثية الأقطار وبالتالي يمكن تحليل هذه المصفوفة كما يلي :

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نحل الجملة $LY = B$ أي نحل الجملة التالية :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

فنجد :

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ثم نحل الجملة $UX = Y$ أي نحل الجملة التالية :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

فنجد :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تعريف (7) نقول عن مصفوفة A إنها موجبة محددة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall X \neq 0 \Rightarrow X^{T} A X > 0$$

حيث
$$X^{T} A X = \sum_{i} \sum_{j} a_{ij} x_{i} x_{j}$$

ونقول عن مصفوفة A إنها موجبة شبه محددة إذا تحقق ما يلي :

$$\forall X \neq 0 \Rightarrow X^{T} A X \geq 0$$

تعريف (8) نقول عن مصفوفة A أنها موجبة مجددة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\left|A_{i}\right| = dotA_{i} > 0 \qquad \forall \ \text{i}=1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$$

حيث:

$$A_{i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

فمثلاً

$$A_1 = a_{i1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} = A$$

مثال (18) أثبت أن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ --1 & 3 \end{pmatrix}$ موجبة محددة .

الحل :

$$|A_1| = a_{11} = 2 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

إذن المصفوفة A موجبة محددة

بطريقة ثانية : لنفرض

$$o \neq X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X^T A X = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 3x_2^2$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$$

إذن المصفوفة A موجبة محددة .

نظرية (2) D مصفوفة قطرية موجبة محددة

$$\forall i = 1,2,...,n; d_i > 0 \Leftrightarrow$$

البرهان : بفرض

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & O \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_n \end{pmatrix} = diag\,(d_1 d_2 \ldots\ldots.. d_n)$$

مصفوفة قطرية موجبة محددة, ولنفرض أنه يوجد i على الأقل بحيث إنّ

$d_i \leq 0$ عندئذ

$$e_i^T D e_i = \left(0 \cdots 010 \cdots 0\right) \begin{pmatrix} d_1 & & & O \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0 \cdots 010 \cdots 0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \leq 0$$

ومنه $e_i^T De_i \leq 0$ وهذا يناقض أن المصفوفة D موجبة محددة . إذن عناصر القطر الرئيسي

$$\forall i = 1, 2, \ldots\ldots, n \quad ; \quad d_i > 0$$

$(\Rightarrow)$ بفرض $\forall i = 1, 2, \ldots\ldots, n \quad ; \quad d_i > 0$ وبفرض $X \neq 0$

حيث: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ عندئذ :

$$X^T \Delta X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & O \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ d_2 x_2 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix} = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \ldots\ldots + d_n x_n^2 > 0$$

إذن $X^T DX > 0$ أي أن المصفوفة D موجبة محددة

نظرية (3) إذا كانت A مصفوفة تناظرية وغير شاذة . عندئذ توجد مصفوفة سفلية واحدية L ومصفوفة قطرية

نظامية D بحيث يكون $A = LDL^T$

البرهان : بما أن A مصفوفة غير شاذة فحسب النظرية (1) يمكن كتابتها بالشكل $A = LU$

حيث L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية

U مصفوفة مثلثية علوية

ومنه يمكن أن نكتب $A = LDD^{-1}U = LDM^T$

حيث $M^T = D^T U$ و D مصفوفة قطرية نظامية من الشكل :

$$D = diag\,(u_{11} u_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots u_{nn})$$

$$D^{-1} = diag\,(\frac{1}{u_{11}} \frac{1}{u_{22}} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{u_{nn}})$$

وبالتالي فإن $M^T = D^{-1}U$ هي مصفوفة مثلثية علوية واحدية ومنه فإن M مصفوفة مثلثية سفلية واحدية

وبما أن A تناظرية فرضا فإن :

$$A = A^T \Rightarrow A = LDM^T = MDL^T$$

حيث $D = D^T$

ومنه نحصل على المصفوفة التناظرية التالية :

$$M^{-1}A(M^T)^{-1} = M^{-1}LD = DL^T(M^T)^{-1}$$

حيث A تناظرية فإن $(M^{-1}AM^{-T})^T = M^{-1}AM^{-T}$ وحيث

$M^{-T} = (M^T)^{-1}$ وبالتالي نحصل على العلاقة التالية :

$$M^{-1}LD = DL^T M^{-T}$$

لدينا الطرف الأيسر من هذه العلاقة M مصفوفة مثلثية سفلية واحدية ومنه M^{-1} مصفوفة مثلثية سفلية واحدية

L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية

D مصفوفة قطرية نظامية

ومنه فإن $M^{-1}LD$ مصفوفة مثلثية سفلية عناصر قطرها هي عناصر D

وفي الطرف الأيمن للعلاقة السابقة لدينا :

D مصفوفة قطرية نظامية

L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية ومنه L^T مصفوفة مثلثية علوية واحدية

M^{-1} مصفوفة مثلثية سفلية واحدية ومنه M^{-T} مصفوفة مثلثية علوية واحدية

وبالتالي $DL^T M^{-T}$ مصفوفة مثلثية علوية عناصر قطرها هي عناصر D

هذا يعني أننا حصلنا على مصفوفة مثلثية علوية مساوية مصفوفة مثلثية سفلية ومنه يب أن تكون المصفوفتان قطريتين وكل منهما مساوية D أي أن :

$$M^{-1}LD = D \Rightarrow M^{-1}L = I \Rightarrow L = M$$

ومنه $A = LDL^T$ حيث $A = LDM^T$

نظرية (4) إذا كانت A مصفوفة موجبة محددة غير شاذة عندئذ توجد مصفوفة مثلثية سفلية واحدية L ومصفوفة مثلية علوية واحدية M^T ومصفوفة قطرية موجبة محددة ونظامية D بجيث يكون

$$A = LDM^T$$

البرهان : بما أن A غير شاذة فحسب نظرية (3) وجدنا أن

$$A = LDM^T$$

حيث D قطرية نظامية

L مثلثية سفلية واحدية

M^T مثلثية علوية واحدية

بقي أن نبرهن أن D موجبة محددة

من أجل ذلك وبما أن A مصفوفة موجبة محددة فإن

$$\forall X \neq 0 \Rightarrow X^T A X > 0$$

أو
$$X^T LDL^T X > 0$$

نفرض أن $X^T = Y^T L^{-1}$ (حيث أن $X^T \neq 0$ إذن $Y^T \neq 0$)

ومنه
$$X = (X^T)^T = (Y^T L^{-1})^T = L^{-T} Y$$

بالتعويض نجد :

$$Y^T L^{-1} LDL^T L^{-T} Y > 0$$

ومنه
$$\forall Y \neq 0 \Rightarrow Y^T DY > 0$$

هذا يعني أن المصفوفة القطرية D موجبة محددة .

7 – طريقة تشولسكي

تتخلص هذه الطريقة بأنه إذا كانت A مصفوفة تناظرية موجبة محددة فإنه يمكن إيجاد مصفوفة مثلثية سفلية بجيث يكون $A = LL^T$ وذلك ما يلي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & O \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 \\ a_{21} &= l_{21} l_{11} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n1} &= l_{n1} l_{11} \end{aligned}$$

عندما $j = i$ فإن

$$\begin{aligned} a_{ii} &= l_{i1} l_{i1} + l_{i2} l_{i2} + + \ldots\ldots + l_{ii} l_{ii} \\ &= l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots\ldots\ldots + l_{ii}^2 \end{aligned}$$

وعندما $j > i$ فإن

$$a_{ij} = l_{i1} l_{j1} + l_{i2} l_{j2} + + \ldots\ldots + l_{ij} l_{jj}$$

ومنه

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \quad ; \quad i = 2,3,......n$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2}\,; i = 2,3,.....,n$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}\,; j = 2,3,..,i-1$$

$$i = j+1, j+2,.........., n$$

عندئذ لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ في حال كون A مصفوفة تناظرية نحلل $A = LL^T$

ثم نحل الجملتين $L^T X = Y \quad ; \quad LY = B$

نحل الجملة $LY = B$ بطريقة التعويض التقدمي لإيجاد الشعاع Y ثم نحل الجملة $L^T X = Y$ بطريقة التعويض التراجعي لإيجاد الشعاع X والذي هو حل جملة المعادلات الخطية $AX = B$

مثال (19) أوجد بطريقة تشولسكي حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$9x_1+6x_2+3x_3+6x_4=12$$
$$6x_1+20x_2+14x_3+12x_4=12$$
$$3x_1+14x_2+35x_3+13x_4=37$$
$$6x_1+12x_2+13x_3+45x_4=52$$

الحل : مصفوفة الأمثال

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 20 & 14 & 12 \\ 3 & 14 & 35 & 13 \\ 6 & 12 & 13 & 45 \end{pmatrix}$$

متناظرة وموجبة محددة لأن $A = A^T$ وكذلك

$$|A_1| = 9 > 0$$
$$|A_2| = 144 > 0$$
$$|A_3| = 3600 > 0$$
$$|A_4| = 129600 > 0$$

وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 20 & 14 & 12 \\ 3 & 14 & 35 & 13 \\ 6 & 12 & 13 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}$$

$$= LL^T$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

نحل أولا الجملة $LY = B$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 37 \\ 52 \end{pmatrix}$$

فنجد:

$$Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ثم نحل الجملة $L^T X = Y$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

فنجد :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 – 3 الطرق غير المباشرة (طرق التكرار) لحل جملة المعادلات الخطية :

تستخدم هذه الطرق في حل الجمل الكبيرة أي عندما يكون عدد المعادلات كبيرا ومثل هذه الجمل تواجهنا بخاصة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية .

تعريف (9) نظيم مصفوفة A والذي نرمز له بالرمز $\|A\|$ هو بالتعريف عدد حقيقي موجب ومن النظم المعروفة بالنسبة للمصفوفات

- القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة أي :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأسطر أي :

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- النظم الإقليدي:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

وكحالة خاصة نظيم الشعاع: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ هو $\|X\|$

ومن النظم المعروفة بالنسبة للأشعة:

- مجموع القيم المطلقة أي

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

- نظيم القيمة المطلقة العظمى أي

$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i \le n} |x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$$

- النظم الإقليدي

$$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

مثال (20) احسب $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$

للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

ثم احسب $\|X\|_1$, $\|X\|_\infty$, $\|X\|_2$

للشعاع $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

الحل :

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max(3,3,6) = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max(2,3,7) = 7$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^{\ 2}} = \sqrt{1+1+1+4+4+1+16} = \sqrt{28} = 5.2915$$

$$\|X\|_1 = |1| + |0| + |2| + |-1| = 4$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} |x_i| = \max(1,0,2,1) = 2$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1+0+4+1} = \sqrt{6} = 2.4495$$

ومن خواص التنظيم

$$\|A\| \geq 0 \quad \text{و} \quad \|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$$

$\|KA\| = |K|\|A\|$ حيث k عدد ومنه نجد : $\|-A\| = \|A\|$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$ ومنه نجد $\|A^{p}\| \leq \|A\|^{p}$ و P عدد طبيعي

لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$

نكتب هذه الجملة بالشكل المكافئ التالي $X = \alpha X + \beta$

ثم نطبق العلاقة التكرارية:

$$(1) \qquad X^{K+1} = \alpha X^{K} + \beta \quad ; \quad K = 1, 2, \ldots$$

حيث α مصفوفة وتسمى مصفوفة التكرار و β شعاع ثابت و X^{1} معلوم

ويسمى الحل التقريبي الأول ;فنحصل على متتالية من الحلول:

$$X^{1}, X^{2}, \ldots\ldots\ldots, X^{K}, \ldots..$$

ونتوقف عن التكرار عندما يصبح $\|X^{K+1} - X^{K}\|$ صغير بقدر كاف.

لنبحث عن تقارب طريقة التكرار .

نقول عن الطريقة أنها متقاربة إذا تحقق الشرط

أو $\quad X^K \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} X$

$$\lim_{k\to\infty} X^K = X$$

فإذا كانت متتالية الحلول متقاربة وبالتعويض بعلاقة التكرار نجد :

$$X = \alpha X + \beta \qquad (2)$$

وإذا عرفنا الخطأ المرتكب من أجل X^K بالعلاقة التالية :

$$h^K = X^K - X \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

وبطرح (2) من (1) نجد :

$$h^{K+1} = X^{K+1} - X = \alpha(X^K - X)$$
$$\Rightarrow h^{K+1} = \alpha h^K$$

ومنه

$$h^{K+1} = \alpha h^K = \alpha(\alpha h^{k-1}) = \alpha^2 h^{k-1}$$

وهكذا ....

$$h^{K+1} = \alpha h^K = \alpha^2 h^{K-1} = \ldots\ldots\ldots = \alpha^K h^1$$

وبالتالي نحصل على العلاقة التالية :

$$h^{K+1} = \alpha^K h^1$$

نأخذ نظيم لطرفين فنجد :

$$\left\|h^{K+1}\right\| = \left\|\alpha^K h^1\right\| \le \left\|\alpha^K\right\| \left\|h^1\right\|$$
$$\le \left(\|\alpha\|\right)^K \left\|h^1\right\|$$

إذا كان $\|\alpha\| < 1$ فإن $\left(\|\alpha\|\right)^K \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0$

وبالتالي فإن $h^{K+1} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0$

هذا يعني أن $X^K \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} X$ أي أن طريقة التكرار تتقارب للحل X من أجل أي شعاع X^1 بشرط أن يكون $\|\alpha\| < 1$

بفرض أن القيمة الذاتية الراجحة للمصفوفة α هي $\rho(\alpha)$ أي $\rho(\alpha) = \max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ أكبر القيم الذاتية بالقيمة المطلقة حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة α عندئذ إذا كانت $\rho(\alpha) < 1$ فإن طريقة التكرار متقاربة أما إذا كانت $\rho(\alpha) \ge 1$ فإن طريقة التكرار متباعدة، وذلك لأنه إذا كان $\|\propto\| < 1$ أي $P(\propto) < 1$ فطريقة التكرار متقاربة فإذا فرضنا أن V الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية الراجحة $\rho(\alpha)$ أي أن $\alpha V = \rho V$

وبفرض أن $h^1 = X^1 - X = V$ فإن

$$h^{K+1} = \alpha^K h^1 = \alpha^K V = \alpha^{K-1}\alpha V = \alpha^{K-1}\rho V$$
$$= \rho\alpha^{K-1}V = \rho\alpha^{K-2}\alpha V = \rho\alpha^{K-2}\rho V = \rho^2\alpha^{K-2}V$$

وهكذا ....

$$h^{K+1} = \alpha^K h^1 = \rho\alpha^{K-1}V = \rho^2\alpha^{K-2}V = ... = \rho^K V$$

ومنه: $h^{K+1} = \rho^K V$

فإذا كان $\rho(\alpha) < 1$ فإن $\rho^K \underset{K\to\infty}{\to} 0$ أي أن $\rho^{K+1} \underset{K\to\infty}{\to} 0$

وبالتالي $X^K \underset{K\to\infty}{\to} X$ والطريقة متقاربة

أما إذا كان $\rho(\alpha) \geq 1$ فإن h^{K+1} لا يسعى للصفر عندما $k \to \infty$

وبالتالي الطريقة متباعدة

1 – طريقة جاكوبي

لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ نكتب هذه الجملة بالشكل المكافئ

$$X = \alpha X + \beta$$

حيث

$$\alpha=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \beta=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

و $\alpha_{ij}=-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} ; i \neq j$ و $\beta_i=\dfrac{b_i}{a_{ii}}$ و $i=1,2,.....,n$ ، $j=1,2,......,n$

وبفرض أن المصفوفة القطرية D نظامية عندئذ يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بالشكل المكافئ:

$$(L+D+U)X=B$$
$$DX=-(L+U)X+B$$
$$X^{K+1}=-D^{-1}(L+U)X^{K}+D^{-1}B$$

وتكون هذه الطريقة متقاربة إذا تحقق الشرط:

$$\rho\left[D^{-1}(L+U)\right]<1$$

والعلاقة السابقة تكتب كما يلي :

$$x_i^{K+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i ; i = 1, 2, ..., n$$

$$x_i^{K+1} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^K + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\mathrm{i} \neq \mathrm{j} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة جاكوبي

ولضمان وجود الحل يجب أن تكون $a_{ii} \neq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n$

و $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$ أو $\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$

ونتوقف عن التكرار إذا تحقق الشرط:

$$\left|x_i^{K+1} - x_i^K\right| < \varepsilon \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n$$

مثال (21) أوجد حل الجملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي :

$$
\begin{aligned}
&10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\
&-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\
&2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\
&3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}
$$

الحل :

$$
\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}
$$

نختار $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ونطبق طريقة جاكوبي فنجد :

$$X^{1} = \alpha X^{0} + \beta = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 2.2727 \\ -1.1000 \\ 1.8750 \end{pmatrix}$$

$$X^{2} = \alpha X^{1} + \beta = \begin{pmatrix} 1.0473 \\ 1.7159 \\ -0.8050 \\ 0.8852 \end{pmatrix}$$

وهكذا.................

$$X^{10} = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 1.9998 \\ 0.9998 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$$

2 – طريقة غاوس – سيدل

بفرض أن المصفوفة القطرية D نظامية عندئذ يمكن كتابة جملة

المعادلات الخطية $AX = B$ كما يلي :

$$(L + D + U) = X$$

$$(L + D)X = -UX + B$$

وهذه العلاقة تكتب بالشكل التالي :

$$(L + D)X^{K+1} = -UX^{K} + B$$
$$DX^{K+1} = -UX^{K} - LX^{K+1} + B$$
$$X^{K+1} = D^{-1}\left[-UX^{K} - LX^{K+1} + B\right]$$

ومنه:

$$x_i^{K+1} = -\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{K+1} - \sum_{j=i}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{K} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$
$$i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$$
$$K = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة غاوس – سيدل

وتكون هذه الطريقة متقاربة إذا تحقق الشرط

$$\rho\left[(D + L)^{-1}U\right] < 1$$

ونتوقف عن التكرار إذا تحقق الشرط

$$\left|x_i^{K+1} - x_i^{K}\right| < \varepsilon \qquad , \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

مثال (22) أوجد حل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق بطريقة غاوس – سيدل :

الحل : نكتب جملة المعادلان الخطية بالشكل الآتي :

$$x_1 = \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 + \frac{6}{10}$$
$$x_2 = \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11}$$
$$x_3 = -\frac{2}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10}$$
$$x_4 = -\frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}$$

وتكتب هذه الجملة حسب طريقة غاوس – سيدل كما يلي :

$$x_1^{K+1} = \frac{1}{10}x_2^{K} - \frac{2}{10}x_3^{K} + \frac{6}{10}$$
$$x_2^{K+1} = \frac{1}{11}x_1^{K+1} + \frac{1}{11}x_3^{K} - \frac{3}{11}x_4^{K} + \frac{25}{11}$$
$$x_3^{K+1} = -\frac{2}{10}x_1^{K+1} + \frac{1}{10}x_2^{K+1} + \frac{1}{10}x_4^{K} - \frac{11}{10}$$
$$x_4^{K+1} = -\frac{3}{8}x_1^{K+1} + \frac{1}{8}x_3^{K+1} + \frac{15}{8}$$

حيث $k = 0,1,2, \ldots \ldots \ldots ..$

نختار $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ونطبق طريقة غاوس – سيدل فنجد :

من أجل $k = 0$

$$x_1^1 = \frac{1}{10}x_2^0 - \frac{2}{10}x_3^0 + \frac{6}{10} = 0.6000$$
$$x_2^1 = \frac{1}{11}x_1^1 + \frac{1}{11}x_3^0 + \frac{3}{11}x_4^0 + \frac{25}{11} = 2.3272$$

$$x_3^1 = -\frac{2}{10}x_1^1 + \frac{1}{10}x_2^1 + \frac{1}{10}x_4^0 - \frac{11}{10} = -0.9873$$
$$x_4^1 = -\frac{3}{8}x_2^1 + \frac{1}{8}x_3^1 + \frac{15}{8} = 0.8789$$

ومنه

$$X^{1} = \begin{pmatrix} 0.6000 \\ 2.3272 \\ -0.9873 \\ 0.8789 \end{pmatrix}$$

من أجل $k = 1$ نجد :

$$X^{2} = \begin{pmatrix} 1.0300 \\ 2.0370 \\ -1.0140 \\ 0.9844 \end{pmatrix}$$

وهكذا ....

$$X^{5} = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 2.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن طريقة غاوس – سيدل أسرع تقارباً من طريقة جاكوبي .

3 – طريقة SOR (Successive Over Relation)

نضرب طرفي جملة المعادلات الخطية $AX = B$ بالعدد الحقيقي الموجب w والذي يسمى معامل التسارع

$$wAX = wB$$

$$w(L + D + U)X = wB$$

$$wLX = (-wD - wU)X + wB$$

نضيف للطرفين DX فنجد :

$$(D + wL)X = (1 - w)DX - wUX + wB$$

$$= [(1 - w)D - wU]X + wB$$

وهذه العلاقة تكتب بالشكل التالي :

$$(D + wL)X^{K+1} = [(1 - w)D - wU]x^K + wB$$

وبفرض

$$B_w = (D + wL)^{-1}[(1 - w)D - wU]$$

$$c = w\,(D + wL)^{-1}B$$

فإن العلاقة السابقة تكتب كما يلي :

$$X^{K+1} = B_w X^K + c \quad ; \quad K = 1, 2, ...$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة SOR

وشرط التقارب هو $\rho(B_w) < 1$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل الآتي :

$$DX^{K+1} = (1-w)DX^K - wUX^K - wLX^{K+1} + wB$$
$$X^{K+1} = D^{-1}DX^K - D^{-1}w\left[DX^K + UX^K + LX^{K+1} - B\right]$$
$$= X^K + D^{-1}wR$$

حيث $R = -DX^K - UX^K - LX^{K+1} + B$

أو بالشكل التالي :

$$x_P^{K+1} = x_P^K + w\frac{r_P}{a_{PP}}; P = 1, 2, ..., n$$

حيث $r_P = b_P - \sum_{j \ge P} a_{Pj} x_j^K - \sum_{j < P} a_{Pj} x_j^{K+1}$

نظرية (5) إذا عرفنا طريقة SOR بالشكل

$$X^{K+1} = B_w X^K + c$$

عندئذ $\rho(Bw) \ge |1-w|$

البرهان : لتكن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ قيما ذاتية للمصفوفة B_W عندئذ

$$\varphi(\lambda) = \det(B_w - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)......(\lambda - \lambda_n)$$

حيث $\varphi(\lambda)$ حدودية من الدرجة n

ومنه

$$\varphi(0) = \det B_w = \pm \lambda_1 \lambda_2 ....\lambda_n$$

ولكن

$$\det B_w = \det\left[(D + wL)^{-1}((1-w)D - wU)\right]$$
$$= \det(D + wL)^{-1} \det\left[(1-w)D - wU\right]$$

المصفوفة $D + wL$ مصفوفة مثلثية سفلية عناصر قطرها هي عناصر D

وبالتالي فإن $(D + wL)^{-1}$ مصفوفة مثلثية سفلية عناصر قطرها هي عناصر D^{-1}

وبما أنها مثلثية سفلية فإن معينها هو جداء عناصر القطر أي

$$\det(D + wL)^{-1} = \det D^{-1}$$

كما أن المصفوفة $[(1-w)D-wU]$ مصفوفة مثلثية علوية عناصر قطرها هي عناصر قطر المصفوفة $(1-w)D$ نفسها وبالتالي معينها يساوي معين هذه المصفوفة أي

$$\det\left[(1-w)D-wU\right]=\det\left[(1-w)D\right]=(1-w)^n\det D$$

بالتعويض نجد :

$$\det B_w=\det(D^{-1})(1-w)^n\det D=(1-w)^n$$

ولدينا $\varphi(o)=\det B_w=\pm\lambda_1\lambda_2........\lambda_n$

ومنه يمكن أن نكتب $\left|(1-w)^n\right|=\left|\lambda_1\lambda_2........\lambda_n\right|=\left|\lambda_1\right|\left|\lambda_2\right|......\left|\lambda_n\right|$

وبما أن $\rho(B_w)=\max\limits_{1\le i\le n}\left|\lambda_i\right|$

فإن $\rho(B_w)\ge\left|\lambda_i\right| \quad ; \quad i=1,2,.....,n$

ومنه

$$\left|(1-w)^n\right|\le\left[\rho(B_w)\right]^n$$
$$\left|1-w\right|\le\rho(B_w)$$

نعلم أن شرط التقارب هو $\rho(B_w)<1$

ومنه بالاعتماد على النظرية السابقة يمكن أن نكتب

$$|1-w| \le \rho(B_w) < 1$$
$$-1 < 1-w < 1$$

أي $o < w < 2$ ويسمى مجال التقارب

وعندما $w = 1$ فإن الطريقة السابقة تعطي طريقة غاوس – سيدل

مثال (23) استخدم طريقة SOR لحل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 + 3x_3 = 4$$

حيث $w = \frac{1}{5}$

الحل : نختار $X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P=1 \qquad r_1=b_1-(a_{11}x_1^1+a_{12}x_2^1+a_{13}x_3^1)=2$$

$$x_1^2=x_1^1+w\ \frac{r_1}{a_{11}}$$

$$=0+\frac{1}{4}(\frac{2}{1})=\frac{2}{5}$$

$$P=2 \qquad r_2=b_2-(a_{22}x_2^1+a_{23}x_3^1)-a_{21}x_1^2=-\frac{2}{5}$$

$$x_2^2=x_2^1+w\ \frac{r_2}{a_{22}}$$

$$=0+\frac{1}{5}\left[\frac{-2}{5(2)}\right]=-\frac{1}{25}$$

$$P=3 \qquad r_3=b_3-a_{33}x_3^1-a_{31}x_1^2-a_{32}x_2^2=\frac{18}{5}$$

$$x_3^2=x_3^1+w\ \frac{r_3}{a_{33}}$$

$$=0+\frac{1}{5}\left[\frac{18}{5(3)}\right]=\frac{18}{75}=\frac{6}{25}$$

ومنه $$X^2=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{25}\\ \frac{6}{25}\end{pmatrix}$$

$$P=1 \qquad r_1 = b_1 - (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2) = \frac{34}{25}$$

$$x_1^3 = x_1^2 + w\ \frac{r_1}{a_{11}} = \frac{84}{125}$$

$$P=2 \qquad r_2 = b_2 - (a_{22}x_2^2 + a_{23}x_3^2) - a_{33}x_1^3 = -\frac{75}{125}$$

$$x_2^3 = x_2^2 + w\ \frac{r_2}{a_{22}} = -\frac{62}{625}$$

$$P=3 \qquad r_3 = b_3 - a_{31}x_1^3 - a_{32}x_2^3 - a_{32}x_3^2 = \frac{326}{125}$$

$$x_3^3 = x_3^2 + w\ \frac{r_3}{a_{33}} = \frac{776}{1875}$$

ومنه
$$X^3 = \begin{pmatrix} \frac{84}{125} \\ -\frac{62}{625} \\ \frac{776}{1875} \end{pmatrix}$$

وهكذا .... نجد $X^4, X^5 .....$

1 – 4 القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تعريف (10) القيمة الذاتية لمصفوفة مربعة A هي تلك القيمة العددية $\lambda \in R$ والتي تحقق العلاقة $AX = \lambda X$

حيث $X \neq 0$ ويسمى بالشعاع الذاتي الموافق لتلك القيمة والقيم الذاتية لمصفوفة A تعطى بحل المعادلة :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

وذلك بالنسبة إلى λ

مثال (23) أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

الحل : بحل المعادلة التالية و تسمى بالمعادلة المميزة نجد :

$$\det(A-\lambda I)=|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 3-\lambda & 4\\ -1 & -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-3)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=3$$

القيم الذاتية للمصفوفة A

نوجد الأشعة الذاتية وذلك بحل جمل المعادلات الخطية :

$$(2-\lambda)x_1+x_2+x_3=0$$
$$2x_1+(3-\lambda)x_2+4x_3=0$$
$$-x_1-x_2-(2+\lambda)x_3=0$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1=1$ فإن

$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$2x_1+2x_2+4x_3=0$$
$$-x_1-x_2-3x_3=0$$

نأخذ مصفوفة الأمثال ونجري عليها تحويلات أولية كما يلي :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{-2R_1+R_2}{R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_2+R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$2x_3=0$$
$$x_1=-x_2 \qquad x_3=0$$

بفرض $x_2 = 1$ نجد :

$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$

من أجل $\lambda_2 = -1$ وبالتعويض نجد :

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

بحل هذه الجملة وبفرض $x_3 = 1$ نجد :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$

ومن أجل $\lambda_3 = 3$ وبالتعويض نجد :

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$$

بحل هذه الجملة وبفرض $x_3 = -1$ نجد :

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$

طريقة التكرار لتعيين القيمة الذاتية الراجحة والشعاع الذاتي المقابل لها

في كثير من الحالات نحتاج لتعيين أكبر قيمة ذاتية أو أصغر قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة A من أجل تعيين هذه القيمة نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots\dots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A والأشعة الذاتية المقابلة $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$

ونفرض أن Y_0 شعاعاً اختيارياً ولنكتب هذا الشعاع كتركيب خطي للأشعة $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ أي:

$$Y_0 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n X_n$$

نحسب $Y_1 = AY_0$ أي:

$$Y_1 = AY_0 = c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n AX_n$$

وبما أن $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ هي الأشعة الذاتية للمصفوفة A وحسب تعريف القيمة الذاتية فإن:

$$AX_i = \lambda X_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots\dots\dots, n$$

ومنه:

$$Y_1 = c_1 \lambda_1 X_1 + c_2 \lambda_2 X_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n \lambda_n X_n$$

ثم نحسب:

$$Y_2 = AY_1 = c_1\lambda_1 AX_1 + c_2\lambda_2 AX_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n\lambda_n AX_n$$

$$= c_1\lambda_1^2 X_1 + c_2\lambda_2^2 X_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n\lambda_n^2 X_n$$

$$Y_3 = AY_2 = c_1\lambda_1^2 AX_1 + c_2\lambda_2^2 AX_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n\lambda_n^2 AX_n$$

$$= c_1\lambda_1^3 X_1 + c_2\lambda_2^3 X_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n\lambda_n^3 X_n$$

وهكذا ....

$$Y_i = AY_{i-1} = c_1\lambda_1^i X_1 + c_2\lambda_2^i X_2 + \dots\dots\dots\dots + c_n\lambda_n^i X_n$$

وبفرض أن القيم الذاتية للمصفوفة A مرتبة حسب قيمها المطلقة كما يلي :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots\dots\dots\dots \geq |\lambda_n|$$

يمكن أن نكتب

$$Y_i = \lambda_i^j \left[c_1 X_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^i X_2 + \dots\dots + c_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^i X_n \right]$$

ومن أجل i كبيرة فإن

$$Y_i = c_1 \lambda_1^i X_1$$

وكذلك

$$Y_{i+1} = c_1 \lambda_1^{i+1} X_1$$

نستنتج عندئذ أن مركبات الشعاعين Y_i و Y_{i+1} أصبحت تقريبا متناسبة ونسبتها تساوي تقريبا λ_1 أي القيمة الذاتية للمصفوفة A وذات أكبر قيمة مطلقة

وبالتالي انطلاقا من شعاع Y_0 اختياري نحسب على التوالي :

$$\begin{aligned} Y_1 &= A Y_0 \\ Y_2 &= A Y_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Y_{i+1} &= A Y_i \end{aligned}$$

حتى الحصول على شعاعين Y_i و Y_{i+1} بحيث تصبح مركباتهما متناسبة عنها تكون النسبة هي أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A وبتقسيم هذه النسبة على مركبات الشعاع Y_{i+1} نحصل على الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية التي وجدناها .

مثال (25) أوجد أكبر قيمة ذاتية والشعاع الذاتي المقابل لها بطريقة التكرار للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

الحل : نأخذ الشعاع الاختياري $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ونحسب الأشعة $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots\ldots$ فنجد :

$$Y_1 = AY_0 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{pmatrix}$$

نفرض الشعاع $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{pmatrix}$ شعاعاً تقريبياً جديد لحساب Y_2 أي :

$$Y_2 = AY_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{16}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ \frac{113}{3} \end{pmatrix} = \frac{38}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{113}{38} \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = AY_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{113}{38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{264}{19} \\ \frac{1538}{38} \end{pmatrix} = 13.8947 \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9129 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = AY_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5616 \\ 40.8677 \end{pmatrix} = 13.5616 \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9936 \end{pmatrix}$$

$$Y_5 = AY_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9936 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.9744 \\ 41.9168 \end{pmatrix} = 13.9744 \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9995 \end{pmatrix}$$

$$Y_6 = AY_5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9995 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.998 \\ 41.9935 \end{pmatrix} = 13.998 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 13.998$ والشعاع الذاتي المقابل لها هو $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ملاحظة (3) يمكن بالاعتماد على طريقة التكرار تعيين أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A والشعاع الذاتي المقابل لها وذلك كما يلي :

بفرض X شعاع ذاتي مقابل للقيمة الذاتية λ للمصفوفة A عندئذ

$$AX = \lambda X$$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـــ A^{-1} أي $A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X$ أو

$$X = A^{-1}\lambda X \quad \text{ومنه} \quad A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$$

ينتج من هذه العلاقة أن $\frac{1}{\lambda}$ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A^{-1} وبالتالي إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $\frac{1}{\lambda}$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} ومنه إذا استخدمنا طريقة التكرار السابقة لإيجاد أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} والشعاع الذاتي المقابل لهذه القيمة الذاتية فإننا نحصل على قيمة ذاتية λ' للمصفوفةA^{-1} حيث λ' أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1}

وبالتالي فإن $\frac{1}{\lambda'}$أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A .

مثال (26) أوجد أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

والشعاع الذاتي المقابل لهذه القيمة الذاتية .

الحل :

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}13 & -4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

نختار $Y_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ونحسب الأشعة .... $Y_1, Y_2,$

$$Y_1=A^{-1}Y_0=\begin{pmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1428\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0.6429\\ -0.0715\end{pmatrix}$$

$$=(0.6429)\begin{pmatrix}1\\ -0.1112\end{pmatrix}$$

$$Y_2=A^{-1}Y_1=\begin{pmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1428\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -0.1112\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.9604\\ -0.2302\end{pmatrix}=(0.9604)\begin{pmatrix}1\\ -0.2398\end{pmatrix}$$

$$Y_3=A^{-1}Y_2=\begin{pmatrix}0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1428\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -0.2398\end{pmatrix}$$

$$=(0.9971)\begin{pmatrix}1\\ -0.2308\end{pmatrix}$$

$$Y_4=A^{-1}Y_3=\begin{pmatrix}.0.9286 & -0.2857\\ -0.2143 & 0.1428\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -0.2308\end{pmatrix}$$

$$= (0.9945)\begin{pmatrix} 1 \\ -0.2486 \end{pmatrix}$$

$$Y_5 = A^{-1}Y_4 = 0.9996\begin{pmatrix} 1 \\ -0.2499 \end{pmatrix}$$

$$Y_6 = A^{-1}Y_5 = 0.9996\begin{pmatrix} 1 \\ -0.249987 \end{pmatrix}$$

ومنه فإن أصغر قيمة ذاتية للمصفوفة A هي

$$\frac{1}{0.99996} = 1.000004$$

والشعاع الذاتي المقابل هو $\begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \end{pmatrix}$

1 – 5 حل جملة المعادلات الخطية فوق النظامية

لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$

حيث A مصفوفة من المرتبة mXn أي $A = \left[a_{ij} \right]_{mXn}$

و $m > n$ أي عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
و

بما أن عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل هذا يعني أنه يمكن اقتراح عدد كبير من الحلول لهذه الجملة، وبالطبع يجب أن نختار الحل الأفضل أو الأمثل , من أجل هذا الاختيار نحتاج لمعيار يحدد لنا الحل الأمثل . ليكن هذا المعيار هو النظيم الإقليدي $\|\ \|_2$ والحل الأمثل هو الحل الذي يجعل النظيم $\|AX - B\|_2$ أصغر ما يمكن:

من أجل هذا نتعرف على الطرق التالية لإيجاد الحل الأمثل

(آ) طريقة هاوس – هولدر:

تعريف (11) إذا حقق الشعاع w الشرط التالي

$$w^T w = \|w\|_2^2 = 1$$

فإن المصفوفة الأولية التالية $H = I - 2ww^T$ تسمى بمصفوفة هاوس – هولدر

مثال (27) أوجد مصفوفة هاوس – هولدر الموافقة للشعاع $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

وماذا نستنتج ؟

الحل :

$$w^T w = \|w\|_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$H = I - 2w w^T = I - 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= I - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&-4&-4\\-4&1&-8\\-4&-8&1\end{pmatrix}$$

نستنتج أن مصفوفة H متناظرة ومتعامدة منظمة لأن

$$H^T H=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&-4&-4\\-4&1&-8\\-4&-8&1\end{pmatrix}(\frac{1}{9})\begin{pmatrix}7&-4&-4\\-4&1&-8\\-4&-8&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}81&0&0\\0&81&0\\0&0&81\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

من أجل تعيين مصفوفة هاوس – هولدر يجب تعيين الشعاع w وعموماً نعين مصفوفة هاوس – هولدر H كما يلي :

من $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ نعين H بحيث يكون

$$HX = \begin{pmatrix} \pm\|X\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha e_1$$

حيث e_1 هو شعاع الوحدة وفق المركبة الأولى

$$\alpha e_1 = HX = (I - 2ww^T)X = X - 2(w^T X)w$$
$$\Rightarrow \quad (2w^T X)w = X - \alpha e_1$$

بفرض $X - \alpha e_1 = U$ فإننا

نلاحظ أن الشعاع w يساوي شعاعا U مضروبا بقيمة معينة ولتكن $\frac{1}{\mu}$ أي

$$w = \frac{1}{2w^T X} U = \frac{U}{\mu}; \mu = 2w^T X$$

من الفرض $w^T w = 1 \Leftarrow$

$$w^T w = \frac{U^T}{\mu} \cdot \frac{U}{\mu} = \frac{U^T U}{\mu} = 1$$

ومنه $\mu = U^T U \Leftarrow$

$$\mu = \sqrt{U^T U} = \|U\|_2$$

من جهة ثانية يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} U^T U &= (X - \alpha e_1)^T (X - \alpha e_1) \\ &= (X^T - \alpha e_1^T)(X - \alpha e_1) \\ &= X^T X - \alpha X^T e_1 - \alpha e_1^T X - \alpha^2 e_1^T e_1 \\ &= X^T X - 2\alpha X^T e_1 + \alpha^2 \\ &= X^T X - 2\alpha x_1 + \alpha^2 \end{aligned}$$

ومن العلاقة $HX = \alpha\, e_1$ نجد :

$$X^T H^T HX = (\alpha e_1)^T (\alpha e_1) = e_1^T \alpha^2 e_1 = \alpha^2 e_1^T e_1 = \alpha^2$$
$$\Rightarrow X^T X = \alpha^2 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{X^T X} = \pm\|X\|_2$$

بالتعويض نجد :

$$U^T U = X^T X - 2\alpha x_1 + X^T X = 2X^T X - 2\alpha x_1$$
$$= 2(X^T X - \alpha x_1)$$

ولكن $U^T U = \mu^2$ ومنه

أي
$$\mu^2 = 2(X^T X - \alpha x_1)$$
$$\mu = \sqrt{2(X^T X - \alpha x_1)}$$

نختار إشارة α بما يلي:

$sign(\alpha) = -sign(x_1)$ وذلك لجعل الجذر موجبا دوما

بالتعويض نجد :

$$w = \frac{U}{\mu} = \frac{X - \alpha e_1}{\sqrt{2(X^T X - \alpha x_1)}}$$

وبالتالي لإيجاد الشعاع w نقوم بالخطوات التالية :

1 - $\alpha^2 = X^T X$

2 - $\alpha = -sign(x_1)\sqrt{X^T X}$ حيث $sign(x_1) = \begin{cases} 1 & x_1 > 0 \\ 0 & x_1 = 0 \\ -1 & x_1 < 0 \end{cases}$

3 - $\mu = \sqrt{2(X^T X - \alpha x_1)}$

4 - $w = \dfrac{X - \alpha e_1}{\mu}$

مثال (28) ليكن الشعاع $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

أثبت أن $HX = \propto e_1$ حيث H مصفوفة هاوس – هولدر

الحل :

$$X^T X = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$$

$$\alpha = -sign(x_1)\sqrt{X^T X} = -\sqrt{4} = -2$$

$$\mu = \sqrt{2(X^T X - \alpha x_1)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$w = \frac{X - \alpha e_1}{\mu} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$HX = (I - 2ww^T)X = X - 2w^T X w$$

$$w^T X = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$$

بالتعويض نجد :

$$HX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\left(\frac{6}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2e_1 = \alpha e_1$$

تتلخص طريقة هاوس – هولدر لحل جملة المعادلات الخطية فوق النظامية بإيجاد مصفوفة هاوس – هولدر H_1 بحيث يكون $H_1X_1 = \alpha_1 e_1$ حيث X_1 هو العمود الأول للمصفوفة A ونكرر العملية عددا مناسبا من المرات بشكل متشابه لطريقة المصفوفات الأولية فنجد :

$$H_n H_{n-1} \ldots\ldots H_2 H_1 A X = H_n H_{n-1} \ldots\ldots\ldots H_2 H_1 B$$

بفرض أن

$$Q^T = H_n H_{n-1} \ldots\ldots H_2 H_1$$

نجد :

$$Q^T AX = Q^T B \quad \Leftrightarrow \quad AX = B$$

بفرض أن $\quad Q^T A = R \quad$ نجد $\quad RX = Q^T B$

حيث R مصفوفة مثلثية علوية و Q مصفوفة متعامدة تناظرية ذلك لأن

$$Q^T Q = H_n H_{n-1} \ldots\ldots. H_2 H_1 \;\; H_1 H_2 \ldots\ldots\ldots H_{n-1} H_n$$

حيث إن مصفوفات هاوس – هولدر $H_i \;\; ; \;\; i = 1,2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, n$ تعامدية تناظرية

$$H_i = H_i^T \quad ; \quad H_i H_i = I$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} Q^T Q &= H_n H_{n-1} \ldots\ldots\ldots H_2 \; I \; H_2 \ldots\ldots\ldots\ldots H_{n-1} H_n \\ &= H_n H_{n-1} \ldots\ldots\ldots H_3 \; I \; H_3 \ldots\ldots\ldots\ldots H_{n-1} H_n \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &= H_n \; I \; H_n = I \end{aligned}$$

كما أن

$$Q^T Q = H_1 H_2 \ldots\ldots\ldots H_{n-1} H_n H_n H_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots H_2 H_1 = I$$

بما أن Q مصفوفة متعامدة منظمة ولدينا R $Q^T A =$ فإن $A = QR$ ونستنتج أنه لحل الجملة فوق نظامية $AX = B$ نوجد المصفوفة

$$Q^T = H_n H_{n-1} \ldots\ldots\ldots H_2 H_1$$

ثم نوجد المصفوفة $R = Q^T A$ ونحل جملة المعادلات الخطية النظامية $RX = Q^T B_1$

حيث $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$

و B_1 شعاع من المرتبة n و B_2 شعاع من المرتبة $(m-n)$

مثال (29) استخدم طريقة هاوس – هولدر لحل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

الحل : نعين مصفوفة هاوس – هولدر H_1 بحيث يكون

$$H_1X_1 = \alpha e_1$$

حيث $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو العمود الأول لمصفوفة الأمثال $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_1^T X_1 = 4$$

$$\alpha = -sign(x_1)\sqrt{X_1^T X_1} = -\sqrt{4} = -2$$

$$\mu = \sqrt{2(X_1^T X_1 - \alpha x_1)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$w = \frac{1}{\mu}[X_1 - \alpha e_1] = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1X_1 = (I - 2ww^T)X_1 = X_1 - 2w^T X_1 w$$

$$w^T X_1 = \frac{6}{2\sqrt{3}}$$

ومنه

$$H_1X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-2\left(\frac{6}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

نحسب H_1X_2 حيث $X_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}$ العمود الثاني لمصفوفة الأمثال A

$$H_1X_2=(I-2ww^T)X_2=X_2-2w^TX_2w$$

$$w^TX_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(6+3-2+1)=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

ومنه

$$H_1X_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\1\end{pmatrix}-2\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{-10}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

وبالتالي

$$H_1A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{-10}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

ثم نحسب H_1B

$$H_1B = B - 2w^T B w$$

$$w^T B = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

بالتعويض نجد :

$$H_1B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-2\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

ومنه فإن الجملة المفروضة تكافئ الجملة

$$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & \frac{5}{3}\\ 0 & \frac{-10}{3}\\ 0 & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

نأخذ الشعاع

$$X_2=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{10}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

ونعين مصفوفة هاوس – هولدر H_2 بحيث يكون:

$$H_2X_2 = \alpha e_1$$

$$X_2^T X_2 = \frac{1}{3}(5 - 10 - 1)\left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}(25 + 100 + 1) = \frac{126}{9} = 14$$

$$\alpha = -sign(x_1)\sqrt{X_2^T X_2} = -\sqrt{14} = -\sqrt{3.7416}$$

$$\mu = \sqrt{2(\alpha^2 - \alpha x_1)} = 6.3617$$

$$w = \frac{1}{\mu}(X_2 - \alpha e_1) = \frac{1}{6.3617}\left(\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \sqrt{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8501 \\ -0.5239 \\ -0.0523 \end{pmatrix}$$

$$H_2X_2=(I-2ww^T)X_2=X_2-2w^TX_2w$$

$$w^TX_2=\begin{pmatrix}0.8501 & -0.5239 & -0.0523\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{10}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=3.1808$$

ومنه:

$$H_2X_2=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{10}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}-2(3.1808)\begin{pmatrix}0.8501\\ -0.5239\\ -0.0523\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3.7416\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

ثم نحسب H_2B حيث $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

$$H_2B = (I - 2ww^T)B = B - 2w^T Bw$$

$$w^T B = \begin{pmatrix} 0.8501 & -0.5239 & -0.0523 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -0.6278$$

$$H_2B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2(-0.6278) \begin{pmatrix} 0.8501 \\ -0.5239 \\ -0.0523 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0690 \\ 0.3411 \\ 1.9341 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على الجملة المكافئة التالية :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -3.7416 \\ 0 & - \\ 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1.0690 \\ 0.3411 \\ 1.9341 \end{pmatrix}$$

نحل الجملة النظامية:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -3.7416 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1.0690 \end{pmatrix}$$

فنجد :
$$X=\begin{pmatrix}\frac{39}{14}\\ -\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

(ب) طريقة المربعات الصغرى الخطية

نوجد النهاية الدنيا للتابع $f(X)=\|AX-B\|_2^2$

نعلم أن $\|A\|_2^2=A^TA$ ومنه فإن

$$f(X)=(AX-B)^T(AX-B)=(X^TA^T-B^T)(AX-B)$$
$$=X^TA^TAX-X^TA^TB-B^TAX+B^TB$$

بفرض أن $A^TB=Y$ وبما أن $X^TY=Y^TX=\alpha;\alpha\in R$

نجد

$$f(X)=X^TA^TAX-2X^TA^TB+B^TB$$

إيجاد النهاية الدنيا للتابع $f(X)$ يعني حل الجملة التالية :

$$\nabla f(X)=grad\ f(X)=0$$

حيث:

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ومنه نجد :

$$\nabla f(X) = 2A^T AX - 2A^T B = 0$$

من هذه العلاقة نجد :

$$A^T AX = A^T B$$

وبملاحظة أن $A^T A$ مصفوفة مربعة من المرتبة nXn

وبما أن $A^T B$ شعاع من المرتبة $nX1$ فإن جملة المعادلات الخطية $A^T AX = A^T B$ نظامية نسميها الجملة النظامية الموافقة.

نستنتج أنه لحل الجملة فوق النظامية $AX = B$ نضرب طرفي هذه الجملة بـــ A^T فنحصل على جملة نظامية، وبحل هذه الجملة نحصل على الحل الأمثل .

مثال (30) بطريقة المربعات الصغرى الخطية أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

الحل : نضرب طرفي الجملة $AX = B$ بـــ A^T فنجد :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 9x_3 = 3 \end{matrix}$$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد : $-7x_2 = 2$

ومنه $x_2 = -\frac{2}{7}$ و $x_1 = \frac{39}{7}$

تمارين

1 – أوجد حل المعادلات الخطية التالية بطريقة مقلوب مصفوفة :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \\
4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

2 – باستخدام طريقة ترامر أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\
x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\
2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\
x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

3 – باستخدام طريقة غاوس أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 23 \\
7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= 32 \\
6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 &= 33 \\
5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 31
\end{aligned}
$$

4 – ناقش حسب قيم λ في جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 2$$
$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

متى يكون لهذه الجملة 1– حل وحيد 2 – ليس لها حل 3 – عدد لا نهائي من الحلول

5 – باستخدام التحويلات الأولية أوجد مقلوب المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix}$$

6 – اكتب المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 12 \\ 6 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

على الشكل $I + \alpha UU^T$ ثم أوجد مقلوبها

هل A مصفوفة موجبة محددة ؟ وهل A^{-1} موجبة محددة ؟

7 – استخدم طريقة المصفوفات الأولية لحل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

ثم أوجد L و U وأوجد حل هذه الجملة بطريقة LU

8 – بفرض أن A مصفوفة نظامية وتناظرية

(آ) برهن أنه يمكن تحليل A على الشكل LDL^T حيث L مصفوفة مثلثية سفلية قطرية نظامية

(ب) هل يمكن أن يكون أحد عناصر المصفوفة D مساويا الصفر

(ج) إذا كان أحد عناصر المصفوفة D سالبا على الأقل فهل تكون المصفوفة A موجبة محددة

9 – أوجد كلفة العمليات لحل جملة المعادلات الخطية $AX = B$ حيث A مصفوفة مربعة من المرتبة nXn بطريقة المصفوفات الأولية

10 – أوجد مقلوب المصفوفة التالية باستخدام المصفوفات الأولية :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

11 – أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة المرتكز الجزئي :

$$\begin{aligned} 0.729x_1+0.81x_2+0.9x_3&=0.6862\\ x_1+x_2+x_3&=0.8338\\ 1.331x_1+1.21x_2+1.1x_3&=1\end{aligned}$$

12 – أوجد بطريقة تشولسكي حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=0\\ 3x_1+13x_2+13x_3&=-4\\ x_1+13x_2+27x_3&=-10\end{aligned}$$

13 – إذا كانت A مصفوفة ثلاثية الأقطار تناظرية ونظامية .

أوجد الطريقة التي تعين التحليل $A=LDL^T$

حيث L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية و D قطرية ثم طبق ذلك على المصفوفة التالية :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

14 – أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$4x_1+3x_2=24$$
$$3x_1+4x_2-x_3=30$$
$$-x_2+4x_3=-24$$

بطريقة جاكوبي ثم بطريقة غاوس – سيدل

حيث $X^0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

15 – أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1+2x_2+4x_3-x_4=6$$
$$x_1+3x_2+5x_3=9$$
$$x_1+2x_2+5x_3+x_4=9$$
$$-x_2+x_3=2$$

بطريقة SOR حيث $w=1$

16 – برهن أن طريقة جاكوبي لا تتقارب إلى الحل الذي يحقق جملة المعادلات الخطية التالية :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 12 \\
5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 12 \\
5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

17 – أوجد الحل الأمثل لجملة المعادلات الخطية فوق النظامية :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 1 \\
3x_1 + 4x_2 &= 1 \\
5x_1 + 6x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

بطريقة هاوس – هولدر ثم بطريقة المربعات الصغرى

18 – برهن أن للمصفوفة الأولية $E(\alpha; U, V)$ قيمة ذاتية مساوية $1 -$ $\alpha V^T U$ والشعاع الذاتي الموفق لهذه القيمة α

هو U هل تقبل هذه المصفوفة العدد واحد قيمة ذاتية لها .

19 – أوجد القيمة الذاتية الراجحة للمصفوفة A باستخدام طريقة التكرار حيث

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

20 – أوجد أكبر قيمة ذاتية وأصغر قيمة ذاتية والشعاعين الذاتيين المقابلين لهما للمصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

حيث
$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حل المعادلات التفاضلية

Solving differential equations

معادلات الفروق الخطية بأمثال ثابتة

طريقة الـــ K خطوة الخلية

طريقة رانج – كاتا

2- 1 تمهيد :

يوجد عدد كبير من المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها بالطرق التحليلية أي من الصعب إيجاد التابع $y(x)$ الذي يحقق المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ ويأخذ القيمة الابتدائية $y(x_0) = y_0$ ويمكن بالاعتماد على الطرق العددية التالية إيجاد حلول تقريبية لمثل هذه المعادلات .

2 – 2 طريقة التقريب المباشر :

لحل المعادلة $y' = f(x, y)$ $\qquad y(x_0) = y_0$

نأخذ تكامل طرفي المساواة $y' = f(x, y)$ أي

$$\int_{x_0}^{x} y'dx = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x_0}^{x} f\left(x, y(x)\right)dx$$

أو

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt$$

ونلاحظ وجود y في طرفي العلاقة الأخيرة وإيجادها مسألة ليست يسيرة عموماً، لذا نعدها معلومة في الطرف الأيمن ونشكل العلاقة التكرارية التالية :

$$y_{n+1}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right)dt ; n = 0, 1, 2, 3, ...$$

وهذه العلاقة تسمى بطريقة (بيكارد)

مثال (1) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y \qquad ; \qquad y(0) = 4$$

في النقاط $2\,,1\,,0.5$ باستخدام طريقة التقريب المباشر ومكتفيا بـ $y_4(x)$ ثم احسب الخطأ الحقيقي عند هذه النقاط .

الحل :

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f\,(t\,,y_0)dt$$

$$= 4 + \int_0^x \left(t^2 + 4t + -\frac{1}{2}(4) \right) dt$$

$$= 4 + \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 2x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 2x + 4$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x \left(t^2 + 4t - \frac{1}{2}y_1 \right) dt$$

$$= 4 + \int_0^x (t^2 + 4t - \frac{t^3}{6} - t^2 + t - 2)dt$$

$$= 4 + 5\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - 2x = \frac{-x^4}{24} + \frac{5x^2}{2} - 2x + 4$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x \left(t^2 + 4t - \frac{1}{2} y_2 \right) dt$$

$$= 4 + \int_0^x \left(t^2 + 4t + \frac{t^4}{48} - \frac{5}{4} t^2 + t - 2 \right) dt$$

$$= 4 + \frac{x^5}{240} - \frac{x^3}{12} + \frac{5x^2}{2} - 2x$$

$$y_4 = y_0 + \int_0^x (t^2 + 4t - \frac{1}{2} y_3) dt$$

$$= 4 + \int_0^x \left[t^2 + 4t - \frac{t^5}{480} + \frac{t^3}{24} - \frac{5t^2}{4} + t - 2 \right] dt$$

$$= -\frac{x^6}{2880} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^3}{12} + \frac{5x^2}{2} - 2x + 4$$

من أجل $x = 0.5$ نجد :

$$y_4(0.5) = 3.615$$

من أجل $x = 1$ نجد :

$$y_4(1) = 4.427$$

من أجل $x = 2$ نجد :

$$y_4(2) = 9.478$$

لحساب الخطأ الحقيقي نوجد الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية

$$y' + \frac{1}{2}y = x^2 + 4x$$

ونعلم أن عامل التكميل

$$\mu = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{1}{2} dx} = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = x^2 + 4x$$

$$e^{\frac{1}{2}x} dy + e^{\frac{1}{2}x} (\frac{1}{2}y) dy = e^{\frac{1}{2}x} (x^2 + 4x)$$

$$d\left(e^{\frac{1}{2}x} y\right) = e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 4x)$$

نكامل بالتجزئة فنجد :

$$e^{\frac{1}{2}x} y = 2x^2 e^{\frac{1}{2}x} + c$$

أو

$$y = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}\left[2x^2 e^{\frac{1}{2}x} + c\right] = 2x^2 + c e^{-\frac{1}{2}x}$$

ومنه $y = 2x^2 + 4e^{-\frac{1}{2}x}$ حل المعادلة التفاضلية

من أجل $x = 0.5$ فإن الخطأ الحقيقي

$$e(0.5) = y(0.5) - y_4(0.5) = 3.616 - 3.615 = 0.001$$

من أجل $x = 1$ فإن الخطأ الحقيقي

$$e(1) = y(1) - y_4(1) = 4.424 - 4.427 = -0.003$$

من أجل $x = 2$ فإن الخطأ الحقيقي

$$e(2) = y(2) - y_4(2) = 9.472 - 9.478 = -0.006$$

2 –3 طريقة تايلور

بفرض $y(x)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق n مرة فإن منشور تايلور

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y_n^{(4)} + \ldots\ldots$$

حيث $y_i = y(x_i), i = 0,1,2,\ldots\ldots; h = x_{i+1} - x_i$

مثال (2) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية مستخدماً خمسة حدود من منشور تايلور

$$y' = xy^{\frac{1}{3}}$$

حيث $y(1) = 1$, $h = 0.1$ مقرباً النتائج إلى خمسة أرقام عشرية ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل :

$$y'' = y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}xy^{-\frac{2}{3}}y'$$

$$y'' = y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^2y^{-\frac{1}{3}}$$

$$y''' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' + \frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{9}x^2y^{-\frac{4}{3}}y'$$

$$y''' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}(xy^{\frac{1}{3}}) + \frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{9}x^2y^{-\frac{4}{3}}(xy^{\frac{1}{3}})$$

$$y''' = xy^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{9}x^3y^{-1}$$

$$y^{(4)} = y^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}xy^{-\frac{4}{3}}y' - \frac{3}{9}x^2y^{-1} + \frac{1}{9}x^3y^{-2}y'$$

$$y^{(4)} = y^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}xy^{-\frac{4}{3}}(xy^{\frac{1}{3}}) - \frac{3}{9}x^2y^{-1} + \frac{1}{9}x^3y^{-2}(xy^{\frac{1}{3}})$$

$$y^{(4)} = y^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}x^4y^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}x^2y^{-1}$$

بالتعويض بالعلاقات السابقة نجد :

$$x_0 = 1 \qquad y'_0 = 1$$

$$y''_{(1)} = \frac{3}{4} \qquad\qquad y'''(1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$y^{(4)}_{(1)} = \frac{4}{9}$$

بالتعويض في منشور تايلور :

$$y_1 = y(x_1) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \frac{h^4}{4!}y_0^{(4)}$$

نجد :

$$y_1 = y(1.1) = 1.10682$$

ثم نحسب

$$y'_1 = y'(x_1) = y'(1.1) = (1.1)(1.10682)^{\frac{1}{3}} = 1.13785$$

$$y''_1 = y''(1.1) = (1.10682)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(1.1)(1.10682)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 1.42409$$

$$y'''_1 = y'''(1.1) = 0.92979$$

$$y_1^{(4)} = y^{(4)}(1.1) = 0.37529$$

بالتعويض في المنشور تايلور

$$y_2 = y(x_2) = y(1.2) = y_1 + hy'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + \frac{h^3}{3!}y'''_1 + \frac{h^4}{4!}!y_1^{(4)}$$

نجد :

$$y_2 = (1.2) = 1.22787$$

لحساب الخطأ الحقيقي نوجد الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية :

$$y' = xy^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-\frac{1}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} =$$

$$xdx$$

نأخذ التكامل الطرفين :

$$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int xdx$$

ومنه

$$\left[\frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}}\right]_1^y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^x$$

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{2} + 1$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{x^2 + 2}{3}$$

وبالتالي فإن الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية هو :

$$y = y(x) = \left(\frac{x^2+2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

الخطأ الحقيقي

$$e(1.1) = y(1.1) - y_1(1.1)$$

$$= 1.10683 - 1.10682 = 0.00001$$

$$e(1.2) = y(1.2) - y_1(1.2)$$

$$= 1.22788 - 1.22787 = 0.00001$$

2 – 4 معادلات الفرق الخطية بأمثال ثابتة :

لتكن معادلة الفروق الخطية ذات الأمثال الثابتة والخطوة k التالية :

$$\gamma_k y_{n+k} + \gamma_{k-1} y_{n+k-1} + \ \dots\dots + \gamma_1 y_{n+1} + \gamma_0 y_n = \varphi \qquad (1)$$

حيث φ ، $\gamma_0, \gamma_1, , \dots\dots . \gamma_k$ ثوابت مستقلة عن n ومعلومة وبفرض

$\gamma_0 \neq 0$ و $\gamma_k \neq 0$

إن استخدام معادلة الفروق (1) يتم بالتعويض القيم المعلومة

$y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots y_{k-1}$ حيث $n = 1$

لإيجاد y_k ثم بتعويض القيم

$y_0, y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots y_{k-1}, y_k$ حيث $n = 0$

لإيجاد y_{k+1} وهكذا باستخدام القيم الناتجة نحصل على القيم

$y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

مثال (3) أوجد y_6 إذا علمت أن $y_0 = 0$ $y_1 = 1$

حيث $y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = n$

الحل : من أجل $n = 0$ نجد :

$$y_2 - y_1 + 2y_0 = 0$$

ومنه $y_2 = y_1 - 2y_0 = 1$

ومن أجل $n = 1$ نجد :

$$y_3 - y_2 + 2y_1 = 1$$

ومنه $y_3 = 1 + y_2 - 2y_1 = 1 + 1 - 2 = 0$

من أجل $n = 2$ نجد :

$$y_4 - y_3 + 2y_2 = 2$$

ومنه $y_4 = 2 + y_3 - 2y_2 = 0$

من أجل $n = 3$

$$y_5 - y_4 + 2y_3 = 3$$

ومنه $y_5 = 3 + y_4 - 2y_3 = 3$

من أجل $n = 4$ نجد :

$$y_6 - y_5 + 2y_4 = 4$$

ومنه $$y_6 = 4 + y_5 - 2y_4 = 4 + 3 = 7$$

تعريف (1) الحل العام لمعادلة الفروق (1) هو إيجاد المتتالية $\{y_n\}$ بحيث يكون y_n محققا للمعادلة ويعطى الحل العام y_n بالتعريف بالعلاقة التالية :

$$y_n = y_n^c + y_n^p$$

حيث $\{y_n^c\}$ متتالية تمثل الحل العام لمعادلة الفروق (1) بدون طرف ثاني أي $\varphi = 0$ وفي هذه الحالة تسمى معالة الفر وق (1) بالمعادلة المتجانسة .

$\{y_n^p\}$ متتالية تمثل الحل الخاص لمعادلة الفروق (1)

لإيجاد الحل العام y_n^c نفرض أنه من الشكل $y_n = \lambda^n$

بالتعويض في المعادلة المتجانسة نجد:

$$\gamma_k \lambda^{n+k} + \gamma_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots\dots + \gamma_1\lambda^{n+1} + \gamma_0\lambda^n = 0$$

بالتقسيم على λ^n نجد :

$$\gamma_k \lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots\dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة لمعادلة الفروق المتجانسة

بفرض $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_k$ جذور المعادلة المميزة . فإذا كانت الجذور متباينة فإن $y_n^c = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots\ldots + c_k\lambda_k^n$

حيث $c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_n$ ثوابت اختيارية

أما إذا كان أحد جذور المعادلة المميزة مكررا m مرة وليكن λ_1 مثلا فإن:

$$y_n^c = \left(c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots\ldots + c_m n^{m-1}\right)\lambda_1^n + c_{m+1}\lambda_2^n + \ldots\ldots\ldots + c_k\lambda_k^n$$

والحل الخاص يعطى بالعلاقة التالية :

$$y_n^p = \frac{\varphi}{\sum_{j=0}^{k}\gamma_j}$$

عندما يكون $\sum_{j=0}^{k}\gamma_j \neq 0$ وفي خلاف ذلك نبحث عن y_n^p بالتجريب .

مثال (4) أوجد الحل العام لمعادلة الفروق التالية :

$$y_{n+3} + 3y_{n+2} + 2y_{n+1} = 1$$

الحل : نوجد الحل الخاص y_n^p فنجد :

$$y_n^p = \frac{2}{1+3+2} = \frac{1}{3}$$

المعادلة المميزة لمعادلة الفروق هي :

$$\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0$$
$$\lambda(\lambda^2+3\lambda+2)=0$$
$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

$$\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-1\ ,\quad \lambda_3=-2$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة :

$$y_n^c=c_1(0)^n+c_2(-1)^n+c_3(-2)^n=(-1)^n(c_2+c_3 2^n)$$

وبالتالي فإن الحل العام المطلوب هو

$$y_n=y_n^c+y_n^p=(-1)^n(c_2+c_3 2^n)+\frac{1}{3}$$

حيث c_2 و c_3 ثوابت تتعين وفق شروط ابتدائية معطاة

مثال (5) أوجد الحل العام لمعادلة الفروق التالية :

$$y_{n+4}-4y_{n+3}+5y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n=0$$

ويحقق شروط البدء التالية :

$$y_0=5\quad ,\quad y_1=0\quad ,\quad y_2=-4\quad ,\quad y_3=-12$$

الحل : $\varphi=4$ والحل الخاص هو :

$$y_n^p = \frac{4}{1-4+5-4+4} = \frac{4}{2} = 2$$

المعادلة المميزة $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

نلاحظ أن $\lambda = 2$ يحقق المعادلة وهو جذر مضاعف لأنه يحقق أيضا المعادلة

$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 10\lambda - 4 = 0$ وبالتالي

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

ومنه جذور المعادلة المميزة هي $\lambda_3 = \lambda_4 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = -i \quad , \quad \lambda_1 = i$

الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_n^c = c_1 (i)^n + c_2 (-i)^n + \left(c_3 + c_4 n\right) 2^n$$

والحل العام هو

$$\begin{aligned} y_n &= y_n^c + y_n^p \\ &= c_1 (i)^n + c_2 (-i)^n + \left(c_3 + c_4 n\right) 2^n + 2 \end{aligned}$$

بالاستفادة من الشروط الابتدائية نعين الثوابت c_1, c_2, c_3, c_4 وذلك كما يلي :

$$n=0\ ;\ c_1+c_2+c_3+2=5$$
$$n=1\ ;\ ic_1-ic_2+2c_3+2c_4+2=0$$
$$n=2\ ;\ -c_1-c_2+4c_3+8c_4+2=-4$$
$$n=3\ ;\ -ic_1+ic_2+8c_3+24c_4+2=-12$$

وهذه أربع معادلات خطية تحوي أربعة مجاهيل بحلها نجد :

$$c_1=1+i \qquad c_2=1-i \qquad c_3=1 \qquad c_4=-1$$

وبالتالي فإن الحل العام هو

$$y_n=y_n^c+y_n^p=(1+i)e^{n\frac{\pi}{2}i}+(1-i)e^{-n\frac{\pi}{2}i}+(1-n)2^n+2$$

$$=2\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)+(1-n)2^n+2$$

2- 5 طرق خطية ذات الـــ k خطوة :

تستخدم هذه الطرق لحل المعادلة التفاضلية

$$y'=f\big(x,y(x)\big) \qquad (1)$$

$$y(x_0)=y_0$$

وعندما يطلب حل المعادلة (1) في النقطة b حيث $a \neq b$ و f تابع معلوم فإننا نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالات جزئية متساوية الطول، طول كل منها h حيث $h = \frac{b-a}{n}$ وتسمى طول الخطوة ونستخدم معادلات الفروق ذات الـــ k خطوة الخطية التي من الشكل الآتي :

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

حيث β_j , α_j ثوابت معلومة و أحد العنصرين α_0 أو β_0 يختلف عن الصفر و $\alpha_k \neq 0$ نختار $\alpha_k = 1$

نستخدم y_n ليدل على القيمة التقريبية للحل الحقيقي $y(x_n)$ و n متحول طبيعي نختاره بشكل مناسب ومنه فإن :

$f_n = f(x_n, y_n)$ القيمة التقريبية لـــ $f(x_n, y(x_n))$

ونعرف $x_n = a + nh \;\; ; \;\; n=0,1,2,\ldots,\frac{b-a}{h}$ بالحد العام للمتتالية $\{x_n\}$

لاحظ أن $x_0 = a$ و $x_n = b$

إذا كانت الشروط الابتدائية $y_0, y_1, \ldots \ldots \ldots, y_{k-1}$ معلومة فنجد بالتعويض في (2) من أجل $n = 0$ قيمة y_k . باستخدام الناتج والتعويض مرة ثانية في (2) من أجل $n = 1$ نجد قيمة y_{k+1} وهكذا نتابع فنجد :

y_n حتى إيجاد $y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots$

ويمكن كتابة طريقة الـــ k خطوة (2) بالشكل التالي :

$$y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g_{n+k-1}$$

$$y_{n+k} = h\beta_k f_{n+k} + g \qquad (3)$$

حيث $$g = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}$$

إذا كانت $\beta_k = 0$ فإن حساب y_{n+k} ينتج مباشرة من (3) ونسمي طريقة الفروق الطريقة الظاهرية . أما إذا كانت $\beta_k \neq 0$ فنلاحظ أن حساب y_{n+k} لا ينتج مباشرة من (3) ونسمي طريقة الفروق (2) في هذه الحالة الطريقة الضمنية , فمثلا طريقة الخطوة الواحدة الخطية

$$y_{n+1} - y_n = h\, f_n$$

ظاهرية لأن $\beta_k = \beta_1 = 0$

أما الطريقة التالية $y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}$ فهي ضمنية لأن $\beta_k = \beta_1 \neq 0$

2- 6 معادلات الفروق الشهيرة :

إن استخدام طريقة الـــ k خطوة الخطية المعرفة بالعلاقة (2) لحل معادلة تفاضلية من الشكل (1) يتطلب معرفة الثوابت $\beta_j, \alpha_j \quad 0 \le j \le k$

ويمكن تعيين هذه الثوابت بالاعتماد على النشر وبالاعتماد على التحليل التكاملي

1- طريقة أولر

نعلم أن نشر تايلور للتابع $y(x)$ يُعطى بالعلاقة التالية :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots \quad (1)$$

إذا اكتفينا بأول حدين من منشور تايلور نجد :

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

ومن أجل $y_n \approx y(x_n)$ يمكن أن نكتب $y_{n+1} = y_n + h\, f_n$

وهذه العلاقة تسمى بطريقة تايلور من المرتبة الأولى وهي معروفة بطريقة أولر وهذه الطريقة ظاهرية وذلك لأن :

$$y_{n+1} - y_n = h\, f_n$$

$$\alpha_k = \alpha_1 = 1 \quad ; \quad \alpha_0 = -1$$
$$\beta_k = \beta_1 = 0 \quad ; \quad \beta_0 = 1$$

والخطأ المرتكب لطريقة أولر يعطى بالعلاقة التالية :

$$e_n = y(x_n + h) - y(x_n) - hy'(x_n) = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \dots..$$

ونسمي هذا الخطأ الخطأ الموضعي ونسمي الحد $\frac{h^2}{2!}y''(x_n)$ الجزء الرئيسي للخطأ الموضعي

مثال (6) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = 2xy \quad ; \quad y(0) = 1$$

بطريقة أولر في النقطة $x = 0.5$ و $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل :

$$x_n = x_0 + nh \quad \text{و} \quad x = 0.5 \quad \text{و} \quad h = 0.1$$

ومنه $0.5 = \frac{n}{10}$ هذا يعني أن $n = 5$

$$f_n = f(x_n, y_n) = 2x_n y_n$$

$$f_0 = 2x_0 y_0 = 2(0)(1) = 0$$

بالتعويض بطريقة أولر $y_{n+1} = y_n + hf_n$ نجد:

$$y_1 = y_0 + hf_0 = 1$$

$$f_1 = 2x_1 y_1 = 2(0.1)(1) = 0.2$$

$$y_2 = y_1 + hf_1$$

$$= 1 + (0.1)(0.2) = 1.02$$

$$f_2 = 2x_2 y_2 = 2(0.2)(1.02) = 0.408$$

$$y_3 = y_2 + hf_2 = 1.061$$

$$f_3 = 2x_3 y_3 = 2(0.3)(1.061) = 0.0636$$

$$y_4 = y_3 + hf_3 = 1.124$$

$$f_4 = 2x_4 y_4 = 0.09$$

$$y_5 = y_4 + hf_4 = 1.124$$

لإيجاد الخطأ الحقيقي نوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = 2xy$ وهذه المعادلة قابلة للفصل، ومنه يمكن أن نكتب:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

$$\ln \frac{y}{c} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = ce^{x^2}$$

وحسب الشرط الابتدائي نجد $c = 1$ ومنه $y = e^{x^2}$ والخطأ الحقيقي هو

$$e = y(x_5) - y_5$$

$$= e^{(0.5)^2} - 1.214 = 1.284 - 1.214 = 0.07$$

2- طريقة تايلور من المرتبة الثانية :

بالرجوع إلى منشور تايلور (1) واستخدام ثلاثة الحدود الأولى وإهمال باقي الحدود نجد :

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{1}{2}h^2 f\ '_n$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة تايلور من المرتبة الثانية والخطأ الموضعي يعطى بالعلاقة

$$e_n = y(x_{n+1}) - y\left(x_n\right) - hy\,'(x_n) - \frac{h}{2}y\,''(x_n) = \frac{1}{6}h^3 y\,'''(x_n) + \ldots$$

والجزء الرئيسي للخطأ الموضعي $\frac{h^3}{6}y\,'''(x_n)$

مثال (7) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = 2xy \quad ; \quad y(0) = 1$$

بطريقة تايلور من المرتبة الثانية في النقطة $x = 0.5$ و $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل : $n = 5$

$$y' = f'(x,y) \quad \Rightarrow \quad y'' = f'(x,y)$$

ومنه:

$$y'' = f(x,y) = 2y + 2xy'$$

$$= 2y + 2xy' \qquad 2y + 2xf$$

$$\Rightarrow f'_n = 2y_n + 2x_n f_n$$

$$f_0 = 2x_0 y_0 = 0$$

$$f'_0 = 2y_0 + 2x_0 f_0 = 2$$

بالتعويض بطريقة تايلور من المرتبة الثانية:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f'_n$$

نجد :

$$y_1 = y_0 + hf_0 + \frac{h^2}{2} f'_0$$
$$= 1 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(2) = 1.01$$
$$f_1 = 2x_1 y_1 = 2(0.1)(1.01) = 0.202$$
$$f'_1 = 2y_1 + 2x_1 y_1 = 2(1.01) + 2(0.1)(0.202)$$
$$= 2.06$$

بالتعويض نجد :

$$y_2 = y_1 + hf_1 + \frac{h^2}{2} f'_2 = 1.04$$

$$f_2 = 2x_2 y_2 = 0.416 \qquad f'_2 = 2y_2 + 2x_2 f_2 = 2.246$$

بالتعويض نجد :

$$y_3 = y_2 + hf_2 + \frac{h^2}{2} f'_2 = 1.093$$

$$f_3 = 0.656 \qquad f'_3 = 2.5796$$

$$y_4 = 1.1715$$

$$f_4 = 0.9372 \qquad f'_4 = 3.093$$

$$y_5 = 1.281$$

الخطأ الحقيقي:

$$e = y(x_5) - y_5$$

$$= 1.284 - 1.281 = 0.003$$

نلاحظ أن هذه الطريقة أفضل من طريقة أولر

3- طريقة النقطة الوسطى

بالاعتماد على نشر تايلور يمكن الحصول على طرق جديدة وذلك كما يلي :

$$y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y + hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \dots$$

$$y_{n-1} = y(x_{n-1}) = y(x_n - h) = y - hy' + \frac{h^2}{2!} y'' - \frac{h^3}{3!} y''' + \dots$$

بطرح العلاقة الثانية من الأولى نجد:

$$y(x_n + h) - y(x_2 - h) = 2hy' + \frac{h^3}{3} y''' + \frac{2h^5}{5!} y^{(5)} + \dots$$

إذا اكتفينا بالحد الأول من هذه العلاقة، وأهملنا بقية الحدود نجد :

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n$$

نلاحظ أنه يوجد في هذه العلاقة y_{n-1} ولكن في طريقة الـــ k خطوة القيم تعطى كما يلي :

$$y_0, y_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, y_{k-1}$$

لذلك نبدل كل n بـــ $n+1$ في طرفي هذه العلاقة فنجد :

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة النقطة الوسطى

الخطأ الموضعي هو من الشكل :

$$\frac{h^3}{3} y'''(x_n) + \frac{h^5}{60} y^{(5)}(x_n)$$

والجزء الرئيسي للخطأ الموضعي $\frac{h^3}{3} y'''(x_n)$

نلاحظ أن هذه الطريقة ظاهرية لأن

$$k = 2 \qquad \beta_k = \beta_2 = 0$$

مثال (8) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = 2xy \quad ; \quad y(0) = 1$$

بطريقة النقطة الوسطى في النقطة $x = 0.5$ و $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل : $n = 5$ ومن أجل $n = 0$ فإن طريقة النقطة الوسطى

$$y_2 - y_0 = 2hf_1$$

لحساب f_1 يجب معرفة y_1 من أجل ذلك نستخدم مثلا طريقة أولر $y_{n+1} = y_n + hf_n$ فنجد :

$$y_1 = y_0 + hf_0 = 1$$

ومنه $f_1 = 2x_1y_1 = 2(0.1)(1) = 0.2$

بالتعويض بطريقة النقطة الوسطى نجد :

$$y_2 = y_0 + 2hf_1 = 1 + 2(0.1)(0.2) = 1.04$$

$$f_2 = 2x_2 y_2 = 2(0.2)(1.04) = 0.416$$

$$y_3 = y_1 + 2hf_2$$

$$=1+2(0.1)(0.416)=1.0832$$

$$f_3 = 2x_3 y_3 = 2(0.3)(1.0832) = 0.650$$

$$y_4 = y_2 + 2hf_2 = 1.170$$

$$f_4 = 2x_4 y_4 = 0.936$$

$$y_5 = y_3 + 3hf_4 = 0.270$$

الخطأ الحقيقي

$$e = y(x_5) - y_5$$

$$= 1.284 - 1.270 = 0.014$$

4 – طريقة الخطوة الواحدة لأعلى دقة ممكنة (طريقة أشباه المنحرفات)

طريقة الخطوة الواحدة أي $k = 1$ ومنه $\alpha_k = \alpha_1 = 1$

بالتعويض بطريقة الـــ k خطوة نجد :

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1})$$

لتعيين الثوابت $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$

ننشر $y(x_n+h)$ و $y'(x_n+h)$ فنجد :

$$y(x_n+h)=y+hy'+\frac{h^2}{2!}y''+\frac{h^3}{3!}y'''+\ldots$$

$$y'(x_n+h)=y'+hy''+\frac{h^2}{2!}y'''+\frac{h^3}{3!}y^{(4)}+\ldots.$$

بالتعويض نجد :

$$y+hy'+\frac{h^2}{2!}y''+\frac{h^3}{3!}y'''+\ldots+\alpha_0 y=h\left[\beta_0 y'+\beta_1(y'+hy''+\frac{h^2}{2!}y'''+\ldots)\right]$$

نطابق أمثال $h^j y^{(j)}$ فنجد :

$$1+\alpha_0=0$$
$$1=\beta_0+\beta_1$$
$$\frac{1}{2}=\beta_1$$

ومنه $\alpha_0=-1\ ,\ \beta_0=\frac{1}{2}\ ,\ \beta_1=\frac{1}{2}$

بالتعويض نجد :

$$y_{n+1}-y_n=\frac{h}{2}(f_n+f_{n+1})$$

هذه العلاقة تسمى طريقة أشباه المنحرفات

الجزء الرئيسي للخطأ الموضعي هو أول حد من الخطأ الموضعي أي أن

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{\beta_1}{2}\right)h^3y''' = \frac{-1}{12}h^3y'''$$

الجزء الرئيسي للخطأ الموضعي

نلاحظ أن هذه الطريقة ضمنية لأن $\beta_k = \beta_1 = \frac{1}{2} \neq 0$ $\qquad k = 1$

مثال (9) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = 2xy \qquad ; \qquad y(0) = 1$$

بطريقة أشباه المنحرفات في النقطة $x = 0.5$, $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل : $n = 5$

$$y'_n = f_n = f(x_n, y_n) = 2x_n y_n$$

بالتعويض بطريقة أشباه المنحرفات نجد :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(2x_n y_n + 2x_{n+1} y_{n+1})$$

$$y_{n+1} - hx_{n+1} y_{n+1} = y_n + hx_n y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1 + hx_n}{1 - hx_{n+1}} y_n$$

ومنه:

$$y_1 = \frac{1 + hx_0}{1 - hx_1} y_0 = \frac{1 + (0.1)(0)}{1 - (0.1)(0.1)}(1) = 1.010$$

$$y_2 = \frac{1 + hx_1}{1 - hx_2} y_1 = \frac{1 + (0.1)(0)}{1 - (0.1)(0.2)}(1.010) = 1.041$$

$$y_3 = \frac{1 + hx_2}{1 - hx_3} y_2 = 1.095$$

$$y_4 = \frac{1 + hx_3}{1 - hx_4} y_3 = 1.175$$

$$y_5 = \frac{1 + hx_4}{1 - hx_5} y_4 = 1.286$$

الخطأ الحقيقي

$$e = y(x_5) - y_5$$
$$= 1.284 - 1.286 = -0.002$$

نلاحظ أنه أصغر خطأ حصلنا عليه بتطبيق الطرق السابقة

5 – طريقة أولر المحسنة :

حولنا في المثال السابق طريقة أشباه المنحرفات الضمنية إلى طريقة ظاهرية , ولكن عموماً لا يمكن إيجاد y_{n+1} بشكل ظاهري , لذلك نوجد y_{n+1} باستخدام طريقة أولر المحسنة $y_{n+1} = y_n + h\, f_n$

ثم نوجد بعد ذلك f_{n+1} كما يلي :

$$f_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$$

بالتعويض بطريقة أشباه المنحرفات نجد :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right) \\ &= \frac{h}{2}\left[f_n + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[f_n + f\left(x_n + h, y_n + hf_n\right)\right] \end{aligned}$$

ومنه

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$$

حيث

$$\begin{aligned} k_1 &= f_n = f\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 &= f\left(x_n + h, y_n + hk_1\right) \end{aligned}$$

وتسمه هذه العلاقة طريقة أولر المحسنة .

مثال (10) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = 2xy \qquad , \qquad y(0) = 1$$

بطريقة أولر المحسنة في النقطة $x = 0.5$ و $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل :

$$y_1 = y_0 + hf_0 = 1$$
$$k_1 = f_0 = f\left(x_0, y_0\right) = 2x_0 y_0 = 0$$
$$k_2 = f\left(x_0 + h, y_0 + hk_1\right)$$
$$= 2\left(x_0 + h\right)\left(y_0 + hk_1\right)$$
$$= 2(0.1)\left[1 + (0.1)(0)\right] = 0.2$$

بالتعويض بطريقة أولر المحسنة نجد :

$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$
$$= 1 + \frac{0.1}{2}\left[0 + 0.2\right] = 1.01$$

$$k_1 = f_1 = 2x_1y_1 = 2(0.1)(1.01) = 0.202$$
$$k_2 = f\ (x_1 + h, y_1 + hk_1)$$
$$= 2(0.2)\left[1.01 + (0.1)(0.202)\right] = 0.4121$$

ومنه

$$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$
$$= 1.01 + \frac{0.1}{2}\left[0.202 + 0.4121\right] = 1.0407$$
$$k_1 = f_2 = 2x_2y_2 = 2(0.2)(1.0407) = 0.4163$$
$$k_2 = f\ (x_2 + h, y_2 + hk_1)$$
$$= 2(0.3)\left[1.0407 + (0.1)(0.4163)\right] = 0.6494$$

ومنه

$$y_3 = y_2 + \frac{0.1}{2}\left[k_1 + k_2\right] = 1.09398$$
$$k_1 = f_3 = 0.6569$$
$$k_2 = f\ (x_3 + h, y_3 + hk_1) = 0.9277$$

ومنه

$$y_4 = y_3 + \frac{0.1}{2}[k_1 + k_2] = 1.1732$$
$$k_1 = f_4 = 0.9386$$
$$k_2 = f\ (x_4 + h, y_4 + hk_1) = 1.2671$$

ومنه

$$y_5 = y_4 + \frac{0.1}{2}[k_1 + k_2] = 1.2835$$

الخطأ الحقيقي :

$$e = y(x_5) - y_5$$
$$= 1.284 - 1.2835 = 0.0005$$

6 – طريقة سيمبسون :

في الطرق السابقة تم تعيين β_j, α_j بالاعتماد على نشر تايلور ويمكن تعيين هذه الثوابت بالاعتماد على التكامل وذلك كما يلي :

نعرف نوعاً خاصاً من معادلات الفروق الخطية ذات الـــ k خطوة من الشكل :

$$y_{n+k} - y_{n+l} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

حيث $0 \leq l < k$ وذلك بالاعتماد على المطابقة التالية :

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+l}) = \int_{x_{n+l}}^{x_{n+k}} y'(x)dx$$

حيث $y' = f(x, y)$

لمكاملة $f(x, y)$ نقترح تقريب التابع $f(x, y)$ بحدودية $P(x)$ وباستخدام صيغة نيوتن الأمامية في الاستيفاء فإن الحدودية تعطى بالشكل التالي :

$$P(x) = P(x_n + h\alpha) = f_n + \alpha\Delta f_n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_n + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_n + ...$$

حيث $\alpha = \frac{x-x_n}{h}$ و Δf_n الفروق الأمامية الأولى وبفرض $y' = f(x, y) \approx P(x)$ منحني يمر بالنقاط

$$(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2})$$

فإن

$$y_{n+2} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+2}} p(x)dx = \int_0^2 P(x_n + h\alpha)hd\alpha$$

$$= h\int_0^2 \left[f_n + \alpha\Delta f_n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_n \right] d\alpha$$

$$= h\left[f_n\alpha + \Delta f_n \frac{\alpha^2}{2} + \Delta^2 f_n \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4} \right) \right]_0^2$$

$$= h\left[2f_n + 2\Delta f_n + \frac{1}{3}\Delta^2 f_n \right]$$

$$= h\left[2f_n + 2(f_{n+1} - f_n) + \frac{1}{3}(f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n) \right]$$

$$= h\left[\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n+1} + \frac{1}{3}f_{n+2} \right]$$

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}\left[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2} \right]$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة سيمبسون ونلاحظ أن هذه الطريقة ضمنية لأن

$$k = 2 \quad ; \quad \beta_k = \beta_2 = \tfrac{1}{3} \neq 0$$

7 – طريقة آدم – مولتون

بالاعتماد على المطابقة التالية :

$$y(x_{n+2})-y(x_{n+1})=\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x)dx$$

يمكن أن نكتب:

$$y_{n+2}-y_{n+1}=\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} P(x)dx$$

$$=h\int_{1}^{2}\left[f_n+\alpha\Delta f_n+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_n\right]d\alpha$$

$$=h\left[f_n\alpha+\Delta f_n\frac{\alpha^2}{2}+\Delta^2 f_n\left(\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}\right)\right]_1^2$$

$$y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{12}\left[5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n\right]$$

وهذه العلاقة تسمى طريقة آدم – مولتون

2 – 7 المرتبة وثابت الخطأ :

إذا كان $y(x)$ تابعا مستمرا وقابلا للاشتقاق في المجال $[a,b]$ فنعرف الخطأ الموضعي لطريقة الـ k خطوة:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}$$

بالعلاقة التالية :

$$L\left[y(x);h\right] = \sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j y(x+jh) - h\beta_j y'(x+jh)\right]$$

وبنشر التابعين $y'(x+jh)$, $y(x+jh)$ نجد :

$$L\left[y(x);h\right] = \sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j\left(y + jhy' + \frac{(jh)^2}{2!}y'' + \dots\right) - h\beta_j\left(y' + jhy'' + \frac{(jh)^3}{3!}y''' + \dots\right]\right.$$

$$L\left[y(x);h\right] = c_0 y + c_1 hy' + c_2 h^2 y'' + \dots$$

حيث $c_0 = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j$ أمثال y

$h^m y^{(m)}$ أمثال $$c_m = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{k} j^m \alpha_j - \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=0}^{k} j^{m-1}\beta_j$$

$$m = 1,2, \dots \dots$$

تعريف (2) نقول أن المؤثر التفاضلي $L = L[y(x); h]$ المعرف أعلاه وطريقة الفروق الموافقة إنهما من المرتبة P إذا تحققت الشروط التالية :

$$c_{P+1} \neq 0 \qquad c_0 = c_1 = c_2 = \cdots \dots \dots . = c_P = 0$$

نسمي c_{P+1} ثابت الخطأ والجزء الرئيسي للخطأ الموضعي يساوي

$$c_{P+1} h^{P+1} y^{(P+1)}$$

فمثلا طريقة أولر هي من المرتبة الأولى والجزء الرئيسي للخطأ الموضعي يساوي $\frac{1}{2} h^2 y''$ وذلك لأن

$$y_{n+1} - y_n = hf_n$$

$$\beta_0 = 1 \quad , \quad \beta_0 = 0 \quad , \quad \alpha_0 = -1 \quad ; \quad \alpha_1 = 1$$

$$c_0 = \sum_{j=0}^{1} \alpha_j = \alpha_0 + \alpha_1 = -1 + 1 = 0$$

$$c_1 = \sum_{j=0}^{1} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{1} \beta_j = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{1} j^2 \alpha_j - \frac{1}{1!}\sum_{j=0}^{1} j\beta_j$$

$$= \frac{1}{2}(0+1) - (0) = \frac{1}{2} \neq 0$$

مثال (11) أوجد طريقة الخطوتين الضمنية بدلالة ثابت اختياري a وناقش المرتبة حسب قيم a

الحل : طريقة الخطوتين الخطية من الشكل:

$$y_{n+2}+\alpha_1 y_{n+1}+\alpha_0 y_n = h\left[\beta_2 f_{n+2}+\beta_1 f_{n+1}+\beta_0 f_n\right]$$

نختار $\alpha_0 = \alpha$ بالتعويض نجد :

$$y_{n+2}+\alpha_1 y_{n+1}+a y_n + h\left[\beta_2 f_{n+2}+\beta_1 f_{n+1}+\beta_0 f_n\right]$$

حيث $\alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ ثوابت يطلب تعيينها . لإيجاد المجاهيل الأربعة نحتاج لأربع معادلات وهذه المعادلات الأربع نحصل عليها بوضع $c_0 = c_1 =$ $c_2 = c_3 = 0$ وهذا يكافئ

$$c_0=\sum_{j=0}^{2}\alpha_j = 1+\alpha_1+a=0$$

$$c_1=\sum_{j=0}^{2} j\,\alpha_j-\sum_{j=0}^{2}\beta_j=\alpha_1+2-\left(\beta_0+\beta_1+\beta_2\right)=0$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2} j^2\alpha_j-\frac{1}{1!}\sum_{j=0}^{2} j\,\beta_j=\frac{1}{2}(\alpha_1+4)-\left(\beta_1+2\beta_2\right)=0$$

$$c_3=\frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{2} j^3\alpha_j-\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2} j^2\beta_j=\frac{1}{6}(\alpha_1+8)-\left(\beta_1+4\beta_2\right)=0$$

ومنه حصلنا على المعادلات الأربعة التالية :

$$1+\alpha_1+a=0$$
$$\alpha_1+2-(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=0$$
$$\frac{1}{2}(\alpha_1+4)-(\beta_1+2\beta_2)=0$$
$$\frac{1}{6}(\alpha_1+8)-\frac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2)=0$$

بحل هذه الجملة نجد :

$$\alpha_1=-1-a \qquad \beta_0=-\frac{1}{12}(1+5a)$$
$$\beta_1=\frac{2}{3}(1-a) \qquad \beta_2=\frac{1}{12}(5+a)$$

بالتعويض نجد طريقة الخطوتين التالية :

$$y_{n+2}-(1+a)y_{n+1}+ay_n=\frac{h}{12}[(5+a)f_{n+2}+8(1-a)f_{n+1}-(1+5a)f_n]$$

لمناقشة مرتبة هذه الطريقة . بما أن $c_0=c_1=c_2=c_3=0$ هذا يعني أن مرتبة هذه الطريقة هي ثلاثة على الأقل نحسب c_4 فنجد :

$$c_4 = \frac{1}{4!}\sum_{j=0}^{2} j^4 \alpha_j - \frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{2} j^3 \beta_j$$

$$= \frac{1}{4!}\left[\alpha_1 + 16 - 4(\beta_1 + 8\beta_2)\right] = -\frac{1}{4!}(1+a)$$

إذا كانت $a \neq -1$ فإن $c_4 \neq 0$ والطريقة من المرتبة الثالثة أما إذا كانت $a = -1$ فإن $c_4 = 0$ لذلك نحسب c_5

فنجد :

$$c_5 = \frac{1}{5!}\sum_{j=0}^{2} j^5 \alpha_j - \frac{1}{4!}\sum_{j=0}^{2} j^4 \beta_j$$

$$= \frac{1}{5!}\left[\alpha_1 + 32 - 5\left(\beta_1 + 16\beta_2\right)\right] = -\frac{1}{(3)(5!)}\left(17 + 13a\right)$$

ومنه فإن $c_5 \neq 0$ من أجل $a = -1$ والطريقة من المرتبة الرابعة إذا عوضنا $a = -1$ بطريقة الخطوتين نجد:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}\left[f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n\right]$$

وهي طريقة سيمبسون

وإذا عوضنا $a = 0$ بطريقة الخطوتين نجد :

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\left[5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n\right]$$

وهي طريقة آدم – مولتون

وإذا عوضنا $a = -5$ فإن طريقة الخطوتين الضمنية تتحول إلى طريقة ظاهرية .

مثال (12) أوجد مرتبة طريقة النقطة الوسطى

الحل : طريقة النقطة الوسطى هي

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$$

$$\alpha_k = \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_0 = -1$$

$$\beta_2 = 0 \qquad \beta_1 = 2 \qquad \beta_0 = 0$$

ومنه

$$c_0=\sum_{j=0}^{2}\alpha_j=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0$$

$$c_1=\sum_{j=0}^{2}j\,\alpha_j-\sum_{j=0}^{2}\beta_j$$

$$=\alpha_1+2\alpha_2-(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=0$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2}j^2\alpha_j-\sum_{j=0}^{2}j\,\beta_j$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha_1+4\alpha_2)-(\beta_1+2\beta_2)$$

$$=\frac{1}{2}(4)-2=0$$

$$c_3=\frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{2}j^3\alpha_j-\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2}j^2\beta_j$$

$$=\frac{1}{6}(\alpha_1+8\alpha_2)-\frac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2)$$

$$=\frac{1}{6}(8)-\frac{1}{2}(2)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}\neq 0$$

هذا يعني أن طريقة النقطة الوسطى هي من المرتبة الثانية

2 – 8 وجود واستقرار الطريقة :

تعريف (3) نقول أن طريقة الـــ k خطوة الخطية

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

موجودة عندما تكون من المرتبة الأولى على الأقل أي $p \geq 1$ وهذا يكافئ حسب التعريف (2) أن $c_0 = c_1 = 0$ على الأقل .

تعريف (4) نعرف المعادلة المميزة الأولى للطريقة الخطية ذات الـ k خطوة والتي نرمز لها اختصارا بالرمز (م م1) بالعلاقة التالية :

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j$$

ونعرف، المعادلة المميزة الثانية للطريقة الخطية ذات الـ k خطوة والتي نرمز لها اختصار (م م2) بالعلاقة التالية :

$$\sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j$$

من التعريفين السابقين يمكن أن نكتب :

$$\rho(1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0$$

$$\rho'(1) = \sigma(1) \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \Leftrightarrow c_1 = 0$$

حيث

$$\rho'(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j \lambda^{j-1}$$

ومنه فإن شرطي الوجود $c_0 = c_1 = 0$ يكافئان الشرطين التاليين :

$$\rho(1) = 0$$

$$\rho'(1) = \sigma(1)$$

بفرض $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda_k$ جذور المعادلة $\rho(\lambda) = 0$

وملاحظة أن $\rho(1) = 0$ فإننا نفرض $\lambda_1 = 1$ ونسميه الجذر الأساسي

مثال (13) أثبت أن طريقة سيمبسون موجودة

الحل : طريقة سيمبسون هي

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}\left[f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n\right]$$

لإثبات أن هذه الطريقة موجودة يجب أن نثبت تحقق شرطي الوجود من أجل ذلك . لدينا:

$$k = 2 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_0 = -1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3} \qquad \beta_1 = \frac{4}{3} \qquad \beta_0 = \frac{1}{3}$$

$$\rho(1) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$$

$$\rho'(1) = \sum_{j=0}^{2} j\,\alpha_j = 2$$

$$\sigma(1) = \sum_{j=0}^{2} \beta_j = 2$$

ومنه $\rho'(1) = \sigma(1)$

هذا يعني ان طريقة سيمبسون موجودة

تعريف (5) نقول أن طريقة الـــ k خطوة الخطية مستقرة عندما تحقق جذور المعادلة المميزة $\rho(\lambda) = 0$ الشروط التالية :

$$\lambda_1 = 1$$

$|\lambda_j| \le 1$ إذا كان λ_j جذر بسيط

$|\lambda_j| < 1$ إذا كان λ_j جذر مكرر

حيث $j = 2,3,\dots\dots\dots,k$

مثال (14) أثبت أن طريقة النقطة الوسطى مستقرة

الحل : طريقة النقطة الوسطى هي

$$y_{n+2} - y_n = 2hf_n$$

المعادلة المميزة لهذه الطريقة

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -1$$

ومنه $\lambda_1 = 1$ محقق

و $|\lambda_2| = |-1| = 1 \le 1$ محقق حيث λ_2 جذر بسيط وبالتالي طريقة النقطة الوسطى مستقرة

بالاستناد إلى التعريفين أعلاه يمكننا ان نكتب نظرية دالكويست التي نقبلها دون برهان كما يلي :

نظرية (2 – 1) الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة الـــ k خطوة الخطية متقاربة هو أن تحقق شرط الوجودية، وأن تكون مستقرة.

مثال (15) أثبت أن الطريقة التالية :

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = \frac{h}{2}[8f_{n+1} + 4f_n]$$

غير متقاربة وما هي مرتبة هذه الطريقة .

الحل : المعادلة المميزة لهذه الطريقة :

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$$

ومنه

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -5$$
$$|\lambda_2| = |-5| = 5 > 1$$

وبالتالي الطريقة غير مستقرة هذا يعني أنها غير متقاربة

حسب النظرية السابقة على الرغم من أن الطريقة السابقة موجودة وذلك لأن :

$$\rho'(\lambda) = 2\lambda + 4 \Rightarrow \rho'(1) = 6$$
$$\sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{2} \beta_j \lambda^j = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2$$
$$= 2 + 4\lambda + 0 = 2 + 4\lambda$$

ومنه $\sigma(1) = 2 + 4 = 6$

وبالتالي $\rho'(1) = \sigma(1)$

لمعرفة مرتبة هذه الطريقة

$$c_0 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -5 + 4 + 1 = 0$$

$$c_1 = \sum_{j=0}^{2} j\,\alpha_j - \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$$

$$= 4 + 2 - (2 + 4) = 6 - 6 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2} j^2 \alpha_j - \sum_{j=0}^{2} j\,\beta_j$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left[\alpha_1 + 4\alpha_2\right] - \left(\beta_1 + 2\beta_2\right) = 4 - 4 = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^{2} j^3 \alpha_j - \frac{1}{2!} \sum_{j=0}^{2} j^2 \beta_j$$

$$= \frac{1}{6}\left[\alpha_1 + 8\alpha_2\right] - \frac{1}{2}\left[\beta_1 + 4\beta_2\right] = \frac{12}{6} - \frac{4}{2} = 0$$

$$c_4 = \frac{1}{4!} \sum_{j=0}^{2} j^4 \alpha_j - \frac{1}{3i} \sum_{j=0}^{2} j^3 \beta_j$$

$$= \frac{1}{24}\left[\alpha_1 + 16\alpha_2\right] - \frac{1}{6}\left(\beta_1 + 8\beta_2\right]$$

$$= \frac{20}{24} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6} \neq 0$$

هذا يعني أن الطريقة هي من المرتبة الثالثة.

مثال (16) ناقش حسب قيم b المرتبة والاستقرار لطريقة الفروق التالية:

$$y_{n+2}+(b-1)y_{n+1}-by_n=\frac{h}{4}\left[(b+3)f_{n+2}+(3b+1)f_n\right]$$

وضح التباعد بتطبيق الطريقة من أجل $b=-1$ على المعادلة التفاضلية

$y'=y$ حيث $y(0)=1$; $y_1=y(0)$; $h=0.2$

الحل :

$$\alpha_2=1 \qquad \alpha_1=b-1 \qquad \alpha_2=-b$$

$$\beta_2=\frac{b+3}{4} \qquad \beta_1=0 \qquad \beta_0=\frac{3b+1}{4}$$

$$c_0=\sum_{j=0}^{2}\alpha_j=1+b-1-b=0$$

$$c_1=\sum_{j=0}^{2}j\,\alpha_j-\sum_{j=0}^{2}\beta_j=(b-1)+2-\left(\frac{b+3+3b+1}{4}\right)$$

$$=b+1-(b+1)=0$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2} j^2\alpha_j-\sum_{j=0}^{2} j\,\beta_j$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b-1)+4(1)\right]-\frac{2(b+3)}{4}$$

$$=\frac{b+3}{2}-\frac{b+3}{2}=0$$

$$c_3=\frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{2} j^3\alpha_j-\frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2} j^2\beta_j$$

$$=\frac{1}{6}\left[(b-1)+8\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{4(b+3)}{4}\right]$$

$$=\frac{b+7}{6}-\frac{b+3}{2}=\frac{-2(b+1)}{6}=-\frac{1}{3}(b+1)$$

نناقش حسب قيم b

إذا كانت $b=-1$ فإن $c_3=0$ وبالتالي نحسب c_4

$$c_4=\frac{1}{4!}\sum_{j=0}^{2} j^4\alpha_j-\frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{2} j^3\beta_j$$

$$=\frac{1}{24}\left[(b-1)+16\right]-\frac{1}{6}\left[\frac{8(b+3)}{4}\right]$$

$$=\frac{-7b-9}{24}$$

ومن أجل $b=-1$ فإن $c_4=\frac{-1}{12}\neq 0$ والطريقة من المرتبة الثالثة

أما إذا كانت $b \neq -1$ فإن $c_3 \neq 0$ والطريقة من المرتبة الثانية لدراسة استقرار الطريقة نأخذ المعادلة المميزة

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 + (b-1)\lambda - b = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda + b) = 0$$

ومنه

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -b$$

وتكون الطريقة مستقرة إذا تحقق الشرط

$$|\lambda_2| = |-b| \leq 1 \Rightarrow |b| \leq 1$$

من أجل $b = -1$ نحصل على الطريقة التالية :

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h}{4}[2f_{n+2} - 2f_n]$$
$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h}{2}[f_{n+2} - f_n]$$

من أجل حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = y \quad ; \quad y_0 = 1 \qquad y_1 = 1$$

$$h = 0.2$$

من أجل $n = 0$ فإن

$$y_2 - 2y_1 + y_0 = \frac{h}{2}[f_2 - f_0]$$
$$f_0 = f(x_0, y_0) = y_0 = 1 = y_1$$
$$f_2 = y_2$$

ومنه

$$y_2 - 2(1) + 1 = \frac{h}{2}[y_2 - 1]$$
$$y_2 - 1 = \frac{0.2}{2}(y_2 - 1)$$
$$y_2(1 - 0.1) = -0.1 + 1 \Rightarrow 0.9y_2 = 0.9$$
$$y_2 = 1$$

من أجل $n = 1$ فإن

$$y_3 - 2y_2 + y_1 = \frac{h}{2}[f_3 - f_1]$$
$$y_3 - 1 = \frac{0.2}{2}[y_3 - 1]$$

ومنه $y_3 = 1$

ومنه فإن الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = y$ باستخدام الطريقة السابقة
ومن أجل $b = -1$

هو $y_n = 1$

إما الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية $y' = y$ هو $y = e^x$ حيث $y' = y$ معادلة تفاضلية قابلة للفصل

أي $$y' = \frac{dy}{dx} = y$$

ومنه $$\frac{dy}{y} = x$$

$$\ln y = x + c$$

وحسب شروط البدء $y(0) = 1$ نجد $c = 0$ ومنه $y = e^x$

نلاحظ أن $y_n = 1$ عندما $n \to \infty$ لا تتقارب من $y = e^x$ وبالتالي الطريقة متباعدة

وسبب تباعد الطريقة $$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h}{2}\left[f_{n+2} - f_n\right]$$

هو أن الطريقة غير مستقرة وذلك لأنه إذا أخذنا المعادلة المميزة

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

جذر مكرر ,نعلم أن الجذر المكرر يجب أن يحقق $|\lambda| < 1$ وهذ غير محقق في هذه الحالة وبالتالي الطريقة ليست متقاربة

2 – 9 طرق رانج – كاتا :

لإيجاد الحل العددي للمعادلة التفاضلية

$$y' = f(x,y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

في المجال نستخدم طريقة الفروق التالية :

$$y_{n+1} - y_n = h\varphi(x_n, y_n, h) \qquad (1)$$

حيث h طول الخطوة φتابع

نلاحظ أن طريقة الفروق هي طريقة ظاهرية وأنها ذات خطوة واحدة وأيضا هذه الطريقة مستقرة لأن

المعادلة المميزة لهذه الطريقة هي :

$$\rho(\lambda) = \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$$

نفرض أن $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$

تعريف (6) نقول إن الطريقة (1)من المرتبة P إذا تحقق ما يلي :

$$y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y, h) = O(h^{P+1}) \qquad (2)$$

من أجل أكبر عدد طبيعي P

حيث الطرف الأيمن يدل على وجود ثابت موجب k بحيث

$$\left|O\left(h^{P+1}\right)\right| \leq k h^{P+1}$$

ننشر التابع (x, y, h) فنجد :

$$\varphi(x, y, h)=\varphi(x, y, o)+\frac{h}{1!} \varphi'(x, y, o)+\frac{h^{2}}{2!} \varphi''(x, y, o)+\ldots..$$

و ننشر التابع $y(x+h)$ فنجد :

$$y(x+h)=y+h y'+\frac{h^{2}}{2i} y''+\ \ldots\ldots\ldots.$$

بالتعويض في (2) نجد :

$$y+\frac{h}{1!} y'+\frac{h^{2}}{2!} y''+\ldots.-y-h\left[\varphi(x, y, o)+\frac{h}{1!} \varphi'(x, y, o)+\frac{h^{2}}{2i}!\varphi''(x, y, o+..\right]$$

$$=h^{2}\left[\frac{y''}{2}+h \frac{y'''}{3!}+\ldots.-\varphi'(x, y, o)-\frac{h}{2} \varphi''(x, y, o)+\ldots\right]$$

$$=O h^{2}$$

ومنه نجد أن $P+1=2 \quad \Leftarrow \quad P=1$

أي أن المرتبة للطريقة (1) هي الأولى على الأقل $P \geq 1$ وبالتالي الطريقة (1) موجودة ومستقرة فهي متقاربة

تعريف (7) طرق رانج – كاتا لحل المعادلة التفاضلية هي طرق ذات خطوة واحدة وتعطى بالتعريف كما يلي :

$$y_{n+1} - y_n = h\sum_{r=1}^{R} c_r k_r$$

$$k_1 = f\,(x_n, y_n)$$

$$k_r = f\,(x_n + ha_r, y_n + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s)$$

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} = b_{r1} + b_{r2} + \ldots. + b_{rr-1}$$

حيث $r = 2,3, \ldots \ldots, R$

وتسمى طرق رانج – كاتا ذات القاعدة R

c_r, a_r, b_{rs} ثوابت معلومة

بالمقارنة مع معادلة الفروق (1) يمكن أن نكتب

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \sum_{r=1}^{R} c_r k_r$$

$$= \sum_{r=1}^{R} c_r f\ (x_n + h a_r, y_n + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_r)$$

ومن أجل $h = 0$ نجد :

$$f\ (x_n, y_n) = \varphi(x_n, y_n, o) = \sum_{r=1}^{R} c_r f\ (x_n, y_n)$$

$$= f\ (x_n, y_n) \sum_{r=1}^{R} c_r$$

ومنه نستنتج أن $\sum_{r=1}^{R} c_r = 1$ والذي يُسمى شرط التقارب.

لسهولة الكتابة نستخدم مصفوفة بوتشر المعرفة كما يلي :

$$\begin{array}{c|cccccc}
a_2 & b_{21} & & & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{31} & & & & \\
a_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & & & \\
\vdots & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
a_R & b_{R1} & b_{R2} & b_{R3} & \cdots\cdots\cdots & b_{RR-1} & \\
\hline
1 & c_1 & c_2 & c_3 & & c_{R-1} & c_R
\end{array}$$

وبمقارنة عناصر مصفوفة بوتشر مع العلاقة $a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}$ نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من يمين الخط الشاقولي يساوي العنصر الذي على يسار ذلك الخط .

تعريف (8) نعرف الخطأ الموضعي لطرق رانج – كاتا ذات القاعدة R بالعلاقة التالية :

$$L = y(x+h) - y(x) - h\sum_{r=1}^{R} c_r k_r = O(h^{P+1})$$

حيث P مرتبة الطريقة

مثال (17) عين الثوابت a, b, c كي تكون الطريقة المرافقة الممثلة في الشكل التالي :

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
a & b & \frac{1}{2} & & \\
1 & b & 0 & 1 & \\
\hline
1 & c & 2c & 2c & c
\end{array}$$

مقبولة

الحل : كي تكون الطريقة مقبولة يجب أن يكون مجموع عناصر أي سطر من يمين الخط الشاقولي مساويا العنصر الذي على يسار ذلك الخط هذا يعني يجب تحقق العلاقات التالية :

$$a = b + \tfrac{1}{2}$$

$$1 = b + 1$$

$$1 = c + 2c + 2c + c$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad \text{b=0} \qquad \text{c=}\frac{1}{6}$$

ونحصل على معادلة الفروق التالية

$$y_{n+1} - y_n = h\left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4\right)$$
$$= \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

تتعين طرق رانج – كاتا إذا تعينت الثوابت c_r, a_r, b_{rs}

من أجل تعيين هذه الثوابت نميز عدة حالات

1 – طرق رانج – كاتا من الدرجة الأولى $(R = 1)$

في هذه الحالة طرق رانج – كاتا ذات القاعدة $R = 1$ هي من الشكل :

$$y_{n+1} - y_n = hc_1k_1$$
$$= h\varphi(x_n, y_n, h)$$

حيث $k_1 = f\left(x_n, y_n\right)$

من أجل $h = 0$ نجد :

$$f\left(x_n, y_n\right) = \varphi(x_n, y_n, o) = c_1k_1 = c_1f\,(x_n, y_n)$$

ومنه $c_1 = 1$ بالتعويض نحصل على العلاقة التالية :

$$y_{n+1} - y_n = hk_1 = hf_n$$

وهي طريقة أولر

لدينا $y' = f(x, y) = f$ ومنه

$$\frac{df}{dx}=f'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=f_x+f_y y'$$

$$\frac{df}{dx}=f_x+ff_y$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=f''=f_{xx}+f_{xy}f+(f_x+ff_y)f_y+f(f_{yy}f+f_{xy})$$

$$=f_{xx}+f^2f_{yy}+f_xf_y+2f_{xy}+ff_y^2$$

$$y_{n+1}=y+hf+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_y)+\frac{h^3}{6}(f_{xx}+f^2f_{yy}+f_xf_y+2ff_{xy}+ff_y^2)$$

الخطأ الموضعي

$$L=y_{n+1}-y_n-hc_1k_1=y_n+hf+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_y)+\ldots-y_n-hc_1f$$

$$=h(1-c_1)f+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_y)+\ldots..$$

أمثال h^2 هي $1-c_1$ وبجعل $1-c_1=0$ نجد $c_1=1$

ولكن أمثال h^2 هي $\frac{1}{2}(f_x+ff_y)$ لا يمكن جعلها تساوي الصفر لأنها لا تحوي أي ثابت وبالتالي فإن أعلى مرتبة للطريقة هي $P=1$ وهذا محقق عندما $c_1=1$ وهي طريقة أولر الوحيدة ذات القاعدة الأولى

2 – طرق رانج – كاتا من الدرجة الثانية $(R=2)$

في هذه الحالة طرق رانج – كاتا ذات القاعدة الثانية هي من الشكل :

$$y_{n+1} - y_n = h(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

حيث:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1)$$

$$= f(x_n + a_2 h, y_n + a_2 h k_1)$$

$$k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + a_2 h k_1) = f_1 + a_2 h f_x + a_2 h f f_y$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(a_2 h)^2 f_{xx} + 2 a_2 h a_2 h f f_{xy} + (a_2 h f)^2 f_{yy}\right] + \ldots$$

$$= f + h a_2 (f_x + f f_y) + \frac{a_2^2 h^2}{2}\left[f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy}\right] + \ldots$$

الخطأ الموضعي:

$$L = y_{n+1} - y_n - h(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

$$= y + hf + \frac{h^2}{2!}(f_x + ff_y) +$$

$$+ \frac{h^3}{6}(f_{xx} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + 2ff_{xy} + ff_y^2) + \ldots$$

$$- y - hc_1 f - hc_2\left[f + ha_2(f_x + ff_y) + \frac{a_2^2 h^2}{2}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})\right] + \ldots.$$

$$= (1 - c_1 - c_2)hf + h^2(\frac{1}{2} - a_2 c_2)(f_x + ff_y) +$$

$$+ h^3\left[(\frac{1}{6} - \frac{c_2 a_2^2}{2})(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + \frac{1}{6}(f_{xy} + f_y^2)\right]$$

بجعل أمثال h تساوي الصفر نجد :

$$1 - c_1 - c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1$$

وبجعل أمثال h^2 تساوي الصفر نجد:

$$\frac{1}{2} - a_2 c_2 = 0 \Rightarrow a_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

أمثال h^3 هي :

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{c_2a_2^2}{2}\right)\left(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy}\right)+\frac{2}{6}\left(f_{xy}+ff_y^{\,2}\right)$$

هذا المقدار لا يساوي الصفر مهما تكن قيم الثوابت a_2 و c_2 وبالتالي أعلى مرتبة للطريقة هي $P = 2$ وهذا محقق عندما

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$a_2c_2 = \frac{1}{2}$$

إي حصلنا على معادلتين بثلاثة مجاهيل وبالتالي نحصل على عدد كبير من الحلول هذا يعني أنه يمكن الحصول على عدد كبير من طرق رانج – كاتا ذات القاعدة الثانية $R = 2$

فمثلاً إذا اخترنا $c_1 = 0$ فإن $c_2 = 1$ و $a_2 = \frac{1}{2}$

بالتعويض نجد :

$$y_{n+1}-y_n=hk_2$$

حيث:

$$k_1=f_n=f(x_n,y_n)$$

$$k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1\right)$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة أولر المعدلة

ومصفوفة بونشر لهذه الطريقة هي من الشكل

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

وكمثال آخر إذا اخترنا

$c_1 = \frac{1}{2}$ فإن $c_2 = \frac{1}{2}$ و $a_2 = 1$

بالتعويض نجد :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

حيث

$$k_1 = f\ (x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\ (x_n + h, y_n + hk_1)$$

وهي طريقة أولر المحسنة

ومصفوفة بوتشر لهذه الطريقة هي من الشكل

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

مثال (18) أوجد بطريقة أولر المعدلة حل المعادلة التفاضلية :

$h = 0.2$ $[0,1]$ في المجال $y(0) = 2$ حيث $y' = -xy^2$

ثم احسب الخطأ الحقيقي

الحل :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,2) = -x_0 y_0^2 = 0$$
$$k_2 = f\left(x + 0.1, y_0 + (0.1)k_1\right)$$
$$= f(0.1, 2) = -(0.1)(2)^2 = -0.4$$

بالتعويض نجد :

$$y_1 = y_0 + hk_2$$
$$= 2 + (0.2)(-0.4) = 1.92$$
$$k_1 = f(x_1, y_1) = -x_1 y_1^2 = -(0.2)(1.92)^2$$
$$= -0.73728$$
$$k_2 = f\left(x_1 + 0.1, y_1 + (0.1)(-0.73728)\right)$$
$$= f(0.3, 1.8463) = (-0.3)(1.8463)^2 = -1.0226$$

بالتعويض نجد :

$$y_2 = y_1 + hk_2$$
$$= 1.92 + (0.2)(-1.0226) = 1.7155$$
$$k_1 = f\ (x_2, y_2) = -x_2 y_2^2 = -1.1771$$
$$k_2 = f\ \left(x_2 + 0.1, y_2 + (0.1)(-1.1771)\right) = -1.2764$$

بالتعويض نجد :

$$y_3 = y_2 + hk_2$$
$$= 1.7155 + (0.2)(-1.2769) = 1.4602$$
$$k_1 = -1.2793$$
$$k_2 = -1.2424$$

بالتعويض نجد :

$$y_4 = y_3 + hk_2 = 1.2117$$
$$k_1 = -1.1746$$
$$k_2 = -1.0776$$

بالتعويض نجد :

$$y_5 = y_4 + hk_2 = 0.9962$$

لحساب الخطأ الحقيقي نوجد الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية:

$$y' = -xy^2$$

$$y^{-2}dy = -x\,dx$$

$$-y^{-1} = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} = c$$

بالتعويض نجد :

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{x^2+1}{2}$$

ومنه:

$$y = \frac{2}{x^2+1}$$

الخطأ الحقيقي:

$$e = y(x_5) - y_5$$

$$= 1 - 0.9962 = 0.0038$$

3 – طرق رانج – كاتا من الدرجة الثالثة $R = 3$

من أجل $R = 3$ فإن طرق رانج كاتا ذات القاعدة الثالثة هي من الشكل :

$$y_{n+1} - y_n = h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3)$$

حيث:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + a_2 h k_1)$$
$$k_3 = f\left(x_n + a_3 h, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)\right)$$

ومصفوفة بوتشر من أجل $R = 3$ هي:

$$\begin{array}{c|ccc} a_2 & a_2 = b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

$$k_3 = f\left(x_n + a_3 h, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)\right)$$
$$= f + h a_3 f_x + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2) fy +$$
$$\frac{1}{2}\Big[(h a_3)^2 f_{xx} + 2(h a_3) h (b_{31}k_1 + b_{32}k_2) fxy +$$
$$+ h_2 (b_{31}k_1 + b_{32}k_2) f_{yy} + \ldots \Big]$$

الخطأ الموضعي

$$L = y_{n+1} - y_n - h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3)$$
$$= (1 - c_1 - c_2 - c_3) hf + h^2 \Big[\frac{1}{2}(f_x + ff_y) - c_2 a_2 (f_x + ff_y)$$
$$- c_3 (a_3 f_x + b_{31} ff_y + b_{32} k_2 f_y) \Big] + \ldots.$$

بجعل أمثال h تساوي الصفر نجد :

$$1 - c_1 - c_2 - c_3 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

وبجعل أمثال h^2 تساوي الصفر نجد :

$$c_2 a_2 + c_3 a_3 = \frac{1}{2}$$

وبجعل أمثال h^3 تساوي الصفر نجد:

$$c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 = \frac{1}{2}$$

$$c_3 b_{32} a_2 = \frac{1}{6}$$

لكن أمثال h^4 لا تساوي الصفر مهما تكن قيم الثوابت وبالتالي أعلى مرتبة للطريقة $P = 3$ وهذا محقق عندما:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$c_2 a_2 + c_3 a_3 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 = \frac{1}{3}$$

$$c_3 b_{32} a_2 = \frac{1}{6}$$

حصلنا على أربع معادلات بستة مجاهيل وبالتالي نحصل على عدد كبير من طرق رانج – كاتا ذات القاعدة الثالثة $R = 3$ والمرتبة الثالثة $P = 3$

فمثلا إذا اخترنا $c_1 = \frac{1}{4}$ و $c_2 = 0$ نجد :

$$c_3 = \frac{3}{4} \qquad a_2 = b_{21} = \frac{1}{3} \qquad b_{32} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} \qquad b_{31} = 0$$

بالتعويض نجد :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$$

حيث

$$k_1 = f\,(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\,(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_2 = f\,(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2)$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة هيون

ومصفوفة بوتشر لهذه العلاقة هي من الشكل

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

وإذا اخترنا $c_1 = \frac{1}{6}$ و $c_2 = \frac{2}{3}$ نجد :

$$c_3 = \frac{1}{6} \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = 1$$

$$b_{32} = 2 \qquad b_{31} = -1 \qquad b_{21} = \frac{1}{2}$$

بالتعويض نجد :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f\ (x_n, y_n)$$

حيث

$$k_2 = f\ (x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_2 = f\ (x_n + h, y_n + h\,[-k_1 + 2k_2])$$

وتسمى هذه العلاقة بطريقة رانج – كاتا مرتبة ثالثة

ومصفوفة بوتشر لهذه الطريقة هي من الشكل :

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

مثال (19) أوجد بطريقة هيون حل المعادلة التفاضلية

$y' = -xy^2$ حيث $y(0) = 2$ في المجال $[0,1]$ $h = 0.2$ ثم أوجد حل

هذه المعادلة بطريقة رانج – كاتا مرتبة ثالثة

الحل :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = -x_0 y_0^2 = 0$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{h}{3} k_1)$$

$$= f(0.0667, 2) = -0.2667$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{2h}{3}, y_0 + \frac{2}{3} h k_2)$$

$$= f(0.133, 1.6944) = -0.5145$$

بالتعويض نجد :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$$

$$= 2 + \frac{0.2}{4}\left[0 + 3(-0.5145)\right] = 1.9228$$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2, 1.9228) = -0.7394$$

$$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{3}, y_1 + \frac{h}{3} k_1) = -0.93602$$

$$k_3 = f(x_1 + \frac{2}{3} h, y_1 + \frac{2}{3} h k_2) = -1.077$$

$$y_2 = y_1 + 0.05(k_1 + 3k_3) = 1.7240$$

$$k_1 = f(x_2, y_2) = -1.1892$$

$$k_2 = f(x_2 + \frac{h}{3}, y_2 + \frac{h}{3} k_1) = -1.26727$$

$$k_3 = f(x_2 + \frac{2}{3} h, y_2 + \frac{2}{3} h k_2) = -1.2910$$

$$y_3 = y_2 + 0.05(k_1 + 3k_3) = 1.4711$$
$$k_1 = -1.2985$$
$$k_2 = -1.2779$$
$$k_3 = -1.2407$$
$$y_4 = y_3 + 0.05(k_1 + 3k_3) = 1.12201$$
$$y_5 = 1.0003$$

ثم نوجد حل المعادلة التفاضلية بطريقة رانج – كاتا مرتبة ثالثة

$$k_1 = 0$$
$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\frac{0.2}{2}, 2\right) = -0.4$$
$$k_3 = f\left(x_0 + h, y_0 + h(-k_1 + 2k_2)\right)$$
$$= f(0.2, 1.84) = -0.6771$$

بالتعويض نجد :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$= 2 + \frac{0.2}{6}\left[0 + 4(-0.4) - 0.6771\right] = 1.9241$$

$$k_1 = f\,(x_1, y_1) = -0.7404$$

$$k_2 = f\,(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1) = -1.0268$$

$$k_3 = f\,\left(x_1 + h, y_1 + (-k_1 + 2k_2)\right) = -0.1104$$

بالتعويض نجد :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$= 1.7257$$

$$y_3 = 1.4720$$

$$y_4 = 1.2204$$

$$y_5 = 1.000317$$

4 – طرق رانج – كاتا من الدرجة الرابعة $(R = 4)$

من أجل $R = 4$ فإن طرق رانج – كاتا ذات القاعدة الرابعة هي من الشكل :

$$y_{n+1} - y_n = h\left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4\right)$$

حيث

$$k_1 = f\ (x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\ (x_n + a_2 h, y_n + a_2 h k_1)$$
$$k_3 = f\ \left(x_n + a_3 h, y_n + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)\right)$$
$$k_4 = f\ \left(x_n + a_4 h, y_n + h(b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + 6b_{43} k_3)\right)$$

ومصفوفة بوتشر من أجل $R = 4$ هي

$$\begin{array}{c|cccc}
a_2 & a_{21} & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & \\
a_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & \\
\hline
1 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4
\end{array}$$

بالإضافة إلى نشر k_2, k_3, y_{n+1}

ننشر k_4 وبجعل أمثال h تساوي الصفر في الخطأ الموضعي نجد :

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

ثم نجعل أمثال h^2 تساوي الصفر نجد :

$$c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 = \frac{1}{2}$$

وبجعل أمثال h^3 تساوي الصفر نجد :

$$c_2a_2^2 + c_3a_3^2 + c_4a_4^2 = \frac{1}{3}$$

$$c_2b_{32}a_2 + c_4(b_{42}a_2 + b_{43}a_3) = \frac{1}{3}$$

وبجعل أمثال h^4 تساوي الصفر نجد :

$$c_2a_2^3 + c_3a_3^3 + c_4a_4^3 = \frac{1}{4}$$

$$c_3b_{32}a_2^2 + c_4(b_{42}a_2^2 + b_{43}a_3^2) = \frac{1}{12}$$

$$c_3a_3b_{32}a_2 + c_4a_4(b_{42}a_2 + b_{43}a_3) = \frac{1}{8}$$

$$c_4b_{43}b_{32}a_2 = \frac{1}{24}$$

لكن أمثال h^5 لا تساوي الصفر مهما كانت قيم الثوابت

حصلنا على ثمان معادلات بعشرة مجاهيل وبالتالي نحصل على عدد كبير من طرق رانج – كاتا ذات القاعدة الرابعة $R = 4$ والمرتبة الرابعة $P = 4$

ومن أشهر طرق رانج – كاتا ذات المرتبة الرابعة الطريقة التالية :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

والتي تسمى طريقة رانج – كاتا الشهيرة ومصفوفة بوتشر لهذه الطريقة هي من الشكل

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

وكذلك الطريقة التالية :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

والتي تسمى طريقة كوتا ومصفوفة بوتشر لهذه الطريقة هي من الشكل :

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}$$

ملاحظة : وجدنا سابقا أنه يمكن إيجاد مرتبة أي طريقة P بالاعتماد على نشر تايلور ويمكن بالاعتماد على الشروط الثمانية السابقة إيجاد المرتبة P لأي طريقة .

مثال (20) أوجد مرتبة طريقة أولر المعدلة :

طريقة أولر المعدلة هي $y_{n+1} - y_n = hk_2$

حيث

$$k_1 = f_n = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$R = 2 \qquad c_1 = 0 \qquad c_2 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2} = b_{21}$$

بالتعويض في الشروط السابقة نجد :

$$\sum_{i=1}^{2} c_i = c_1 + c_2 = 1 \quad ; \quad P \geq 1$$

$$\sum_{i} c_i a_i = c_2 a_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad P \geq 2$$

$$\sum_{i} c_i a_i^{\,2} = c_2 a_2^{\,2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$$

بما أن هذا الشرط غير محقق هذا يعني أن $P \neq 3$ $(P < 3)$ وبالتالي طريقة أولر المعدلة هي من الرتبة الثانية أي $P = 2$

مثال (21) أوجد مرتبة الطريقة التالية

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

الحل :

الطريقة هي من الشكل :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{4}(c_1 k_1 + 2c_2 k_2 + c_3 k_3)$$

حيث

$$k_1 = f\ (x_n , y_n)$$

$$k_2 = f\ (x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f\ (x_n + h , y_n + h k_2)$$

$$R = 3 \quad c_1 = \frac{1}{4} \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = 1$$

$$b_{21} = \frac{1}{2} \quad b_{31} = 0 \quad b_{32} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad ; \quad P \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i a_i = c_2 a_2 + c_3 a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P \geq 2$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i a_i^{\ 2} = c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{3}$$

وبالتالي الطريقة هي من المرتبة الثانية

مثال (22) عين قيمة الثابتين a و b كي تملك طريقة رانج – كاتا التالية :

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & & & \\
2 & 0 & 2 & & \\
a & b & 0 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & -1
\end{array}
$$

أعلى مرتبة ممكنة

الحل : كي تكون طريقة رانج – كاتا مقبولة يجب أن يكون

$$a = b + 1$$

لدينا :

$$a_2 = 1\,,\ a_3 = 2\,,\ a_4 = a\,,\ c_1 = 1\,,\ c_2 = 1\,,\ c_3 = 0\,,\ c_4 = -1$$

لإيجاد المرتبة نتحقق من الشروط التالية :

$$\sum_i c_i = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1; P \ge 1$$

$$\sum_i c_i a_i = c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 = 1 - a$$

ولكي يكون هذا الشرط محققا يجب أن يكون $1 - a = \frac{1}{2}$ ولدينا $a = b + 1$

ومنه نجد :

$$b = -\frac{1}{2} \quad , \quad a = \frac{1}{2}$$

وتكون مرتبة الطريقة هي $P \geq 2$

$$\sum_i c_i a_i^{\,2} = c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 + c_4 a_4^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{3}$$

وبالتالي الطريقة هي من المرتبة الثانية

مثال (23) أوجد بطريقة رانج – كاتا حل المعادلة التفاضلية : $y' = -xy^2$
حيث $y(0) = 2$ في المجال $[0,1]$, $h = 0.2$

الحل : طريقة رانج – كاتا الشهيرة هي :

$$y_{n+1} = y_n - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f\ (x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\ (x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f\ (x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2)$$

$$k_4 = f\ (x_n + h, y_n + h k_3)$$

$$k_1 = f\ (x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(0.1, 2) = -0.4$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(0.1, 1.96) = -0.3842$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0.2, 1.923768) = -0.7397$$

بالتعويض نجد :

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = -1.0258$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = -0.9942$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = -1.1892$$

بالتعويض نجد :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.9231$$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2, 1.9231) = -0.7396$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.7241$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.4706$$

$$y_4 = 1.2195$$

$$y_5 = 1.00001368$$

تمارين

1 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = x + y \quad , \quad y(0) = 1$$

في النقطة $x = 0.5$ باستخدام طريقة التقريب المباشر ثم احسب الخطأ الحقيقي

2 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0$$

في النقطة $x = 0.4$ باستخدام طريقة التقريب المباشر

3 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = -xy^2 \quad ; \quad y(0) = 2 \ ; \ h = 0.2$$

مستخدما خمسة حدود من منشور تايلور مقربا النتائج إلى أربعة أرقام عشرية ثم احسب الخطأ الحقيقي

4 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = y(x-1) \ ; \ y(0) = 1 \ ; \ h = 0.1$$

في النقطة $x = 0.2$ مستخدما أربعة حدود من منشور تايلور

5 – أوجد y_8 باستخدام طريقة الفروق المحددة بالمعادلة :

$$y_{n+4} - y_{n+2} + y_n = 2$$

حيث $\quad y_r = r \quad ; \quad r = 0,1,2,3$

6 – أوجد الحل العام لمعادلات الفروق التالية :

$$y_{n+1} - y_n = 0$$
$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$$
$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 4$$

7 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = 3x + y^2 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.2$$

في المجال $0 \le x \le 1$

بطريقة أولر ثم بطريقة النقطة الوسطى

8 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = y - \frac{2x}{y} \quad ; \quad y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.2$$

بطريقة أولر وبطريقة أشباه المنحرفات ثم بطريقة أولر المحسنة في المجال $0 \le x \le 1$

9 – أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = xy^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad y(1) = 1$$

بطريقة تايلور من المرتبة الثانية في النقطة $x = 1.3 \quad , \quad h = 0.1$

10 – أوجد المرتبة والجزء الرئيسي للخطأ الموضعي لطريقة كودي التالية :

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6}{19}h(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+1} + f_n)$$

وهل هذه الطريقة مستقرة ؟

11 – برهن أن طريقة الفروق التالية لا تحقق شروط الوجودية :

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(4f_{n+2} + f_{n+1} - f_n)$$

طبق الطريقة الخطية لإيجاد y_n الذي يمثل الحد العددي للمعادلة التفاضلية

$$y' = 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

ثم برهن أن y_n لا يسعى إلى الحل الحقيقي حتى في الحالة $h \to 0$ بفرض $y_1 = 0$

12 – أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y' = y + e^x \quad ; \quad y(-1) = -\frac{1}{e}$$

بطريقة أولر المعدلة في المجال $-1 \le x \le 1$ حيث $h = 0.2$

13 – استخدم طريقة رانج – كاتا مرتبة ثالثة لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = xy^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad y(1) = 1 \;\; , \quad h = 0.2$$

في المجال $[1,1.3]$ ثم أوجد حل هذه المعادلة بطريقة هيون

14 – استخدم طريقتين مختلفتين في المرتبة لإيجاد القيمة y في النقطة $x = 0.8$ وبفرض $h = 0.2$ حيث

$$y' = 1 - \frac{5}{8}\ln(1+y) \qquad ; \qquad y(0) = 0$$

15 – أوجد مرتبة كل من الطرق التالية :

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

وتحقق من ذلك باستخدام النشر ، ثم عين الجزء الرئيسي من الخطأ الموضعي .

16 – أوجد قيمة الثابتين a و b كي تملك الطريقة المرافقة أعلى مرتبة ممكنة بطريقتين أولا باستخدام الشروط ثانيا باستخدام النشر

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & & & \\ 2 & 0 & 2 & & \\ a & b & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

ثم عين الجزء الرئيسي للخطأ الموضعي في هذه الحالة .

17 – استخدم طريقة رانج – كاتا الشهيرة لحل المعادلة $y' = \alpha y$ حيث α ثابت و تحقق أن:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = e^{\alpha h} + o(h^{P+1})$$

وعين قيمة p

18 – استخدم طريقة أولر لإيجاد الحل العددي لجملة المعادلتين التاليتين في النقطة $x = 5 \quad ; \quad h = 1$

$$y' = -y + 0.01yz \qquad y(0) = 30$$

$$z' = \frac{1}{4}z - 0.01yz \qquad z(0) = 80$$

أوجد الجواب مقرباً لرقمين عشريين

19 – أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' = y^2 + 1$ حيث $y(0) = 0$, $h = 0.1$ في النقطة $x = 0.2$ بطريقة

رانج – كاتا مرتبة ثالثة ثم بطريقة رانج – كاتا الشهيرة

الفصل الثالث

حل المعادلات التفاضلية الجزئية

Solving partial differential equations

حل المعادلات التفاضلية الجزئية بالطريقة الظاهرية

حل المعادلات التفاضلية بالطريقة الضمنية

3-1 تمهيد

لقد تعرفنا في الفصل الثاني على الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية بمتحول مستقل واحد، أما المعادلة التي تستخدم أكثر من متحول مستقل تسمى معادلة تفاضلية جزئية.

إن المعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر في مجال الفيزياء تكون معظمها من المرتبة الثانية، الأمر الذي حدا بالعلماء إلى تسميتها المعادلات التفاضلية الفيزيائية، فعلى سبيل المثال فإن مسائل الاهتزازات وانتشار الأمواج على اختلاف أنواعها ومسائل النقل الحراري وغيرها الكثير تُرد إلى معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية.

تعريف (1)

إذا كان التابع $u = u(x, y)$ تابعاً لمتحولين مستقلين x, y أو أكثر فإننا نسمي مشتقات التابع u بالنسبة إلى xأو y بالمشتقات الجزئية ونكتب

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

والمعادلة التفاضلية الجزئية هي المعادلة التي تربط بين التابع u ومتحولاته المستقلة ومشتقاته الجزئية ويكون لها الشكل

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}, \dots \dots) = 0$$

نسمي مرتبة المعادلة التفاضلية الجزئية هي أعلى مرتبة مشتق جزئي تحويه المعادلة التفاضلية الجزئية، فإذا حوت المعادلة المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى فقط فإننا نقول عنها إنها معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى ويكون لها الشكل العام:

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0$$

ونقول عن معادلة تفاضلية جزئية إنها من المرتبة الثانية إذا كان أعلى مشتق فيها من المرتبة الثانية ويكون لها الشكل العام:

$$F\left(x, y, u, u_x u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0$$

وعلى سبيل المثال:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية:

$$x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial u} = f(x, y)$$

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثالثة:

$$y^3 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى والدرجة الرابعة

تعريف (2)

نقول عن التابع $u = u(x, y)$ إنه حل للمعادلة التفاضلية الجزئية إذا حقق المعادلة التفاضلية وحولها إلى مطابقة.

3-2 المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية

سوف ندرس المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية ذات الشكل العام التالي:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$

حيث إن a, b, c, d, e, f, g يمكن ان تكون توابعاً للمتحولات المستقلة x, y

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية تبعاً لـــ

a و b و c ونسمي $\Delta = b^2 - ac$ مميز المعادلة كما يلي:

إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية تسمى المعادلة الزائدية وإذا كان $\Delta = 0$ نقول عن هذه المعادلة أنها مكافئية

أما إذا كان $\Delta < 0$ نقول عن هذه المعادلة أنها ناقصية

مثال (1) عين نوع المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

هذه المعادلة هي معادلة زائدية لأن

$$\Delta = b^2 - ac = (\tfrac{3}{2})^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

$$sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \, sin \, x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

هذه المعادلة هي معادلة مكافئية لأن

$$\Delta = b^2 - ac = y^2 sin^2 x - y^2 sin^2 x = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

هذه المعادلة معادلة ناقصية لأن

$$\Delta = 1 - 3 = -2 < 0$$

3-3 تقريب المشتقات بدلالة الفروق المحدودة:

إذا كان لدينا التابع u حيث $u = u(x)$ فإن الفروق من المرتبة الأولى تُعطى كما يلي:

$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ ويدعى بالفرق التقدمي

$\nabla u_n = u_n - u_{n-1}$ ويدعى بالفرق التراجعي

ويدعى بالفرق المركزي $\delta u_n = u_{n+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}}$

حيث $u_{n+\frac{1}{2}} = u(x_n + \frac{1}{2}h)$

وبشكل عام $u_n = u(x_n); n = 1,2, \ldots..$

والفروق من المرتبة الثانية تُعطى كما يلي:

$$\Delta^2 u_n = \Delta(u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

$$\nabla^2 u_n = \nabla(u_n - u_{n-1}) = u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

$$\delta^2 u_n = \delta\left(u_{n+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}}\right) = (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_n - 1)$$

$$= u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$$

باستخدام نشر تايلور يمكن أن نكتب:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + \ldots \quad (1)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^2}{6}u'''(x) + \ldots \quad (2)$$

في المعادلة (1) وبإهمال الحدود التي تحوي قوى من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة لـــ h وحل هذه المعادلة بالنسبة للمشتق الأول $u'(x)$ نحصل على العلاقة التقريبية التالية:

$$u' = u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

وهذه العلاقة تكافئ اعتماداً على الفروق من المرتبة الأولى

$$u' = \frac{u_{n+1}-u_n}{h} = \frac{\Delta u_n}{h}$$

كذلك في المعادلة (2) بإهمال الحدود التي تحوي قوى من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة لـــ h وحل هذه المعادلة بالنسبة للمشتق الأول $u'(x)$ نحصل على العلاقة التقريبية التالية:

$$u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

وهذه العلاقة تكافئ:

$$u' = \frac{u_n-u_{n-1}}{h} = \frac{\nabla u_n}{h}$$

نبدل في كل من المعادلتين (1)و (2) بكل h ، $\frac{h}{2}$ ونهمل الحدود التي تحوي قوى من الدرجة الثانية فما فوق بالنسبة لـــ h نجد:

$$u\left(x+\frac{h}{2}\right) = u(x) + \frac{h}{2}u'(x)$$

$$u\left(x-\frac{h}{2}\right) = u(x) - \frac{h}{2}u'(x)$$

وبطرح العلاقة الثانية من الأولى نجد:

$$u\left(x+\frac{h}{2}\right)-u\left(x-\frac{h}{2}\right)=h\,u'(x)$$

ومنه

$$u'(x)=\frac{u\left(x+\frac{h}{2}\right)-u\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

وهذه العلاقة تكافئ

$$u'=\frac{u_{n}+\frac{1}{2}-u_{n}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{\delta u_n}{h}$$

بفرض u تابع للمتحولين x و t أي $u=u(x,t)$

عندئذٍ بالاعتماد على العلاقات السابقة يمكن أن تكتب

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}=\frac{\Delta_x\,u_{n,m}}{h};\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}=\frac{\Delta_t\,u_{n,m}}{k}$$

حيث h هو طول الخطوة لـــ x و k طول الخطوة لـــ t

وحيث

$$\Delta_x\,u_{n,m}=u_{n+1,m}-u_{n,m}$$

$$\Delta_t\,u_{n,m}=u_{n,m+1}-u_{n,m}$$

ملاحظة (1) لاحظنا انه عند حل معادلة تفاضلية عادية نحتاج إلى شروط ابتدائية، بينما عند حل معادلة تفاضلية جزئية سوف نحتاج إلى شروط ابتدائية

وأخرى حدية، وحل المعادلة التفاضلية الجزئية على المنطقة D يتم عن طريق تقسيمها إلى عناصر هذه العناصر هي مستطيلات متساوية، طول كل منها هو طول الخطوة على x أي h وعرضه هو طول الخطوة على t أي k ثم إيجاد الحل عند النقاط التالية:

$$(x_n, t_m) = (nh, mk)$$

$$(x_n, t_{m-1}) = (nh, (m-1)k)$$

$$(x_{n+1}, t_m) = ((n+1)h, mk)$$

$$(x_n, t_{m+1}) = (nh, (m+1)k)$$

$$(x_{n-1}, t_m) = ((n-1)h, mk)$$

4-3 الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية:

1- الطرق الظاهرية:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

بالاعتماد على تعريف الفروق أعلاه يمكن اقتراح الطريقة التالية لحل هذه المعادلة:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m}}{k} = \frac{\delta_x^2 \, x_{n,m}}{h^2}$$

وهذا يكافئ

$$\frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{k}=\frac{u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}}{h^2}$$

ومنه
$$u_{n,m+1}=u_{n,m}+r(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})$$

حيث $r=\frac{k}{h^2}$

أو

$$u_{n,m+1}=(1-2r)+r(u_{n+1,m}+u_{n-1,m})$$

نلاحظ أنه إذا عُلم $u_{n,m}$ ، $u_{n+1,m}$ ، $u_{n-1,m}$ في المستوي m فيمكن بالاعتماد على الطريقة السابقة إيجاد $u_{n,m+1}$ في المستوي $m+1$

حيث $n=0,1,2,\dots\dots \quad ; \quad m=0,1,2,\dots\dots$

مثال (2) حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

بفرض أن الشروط الابتدائية هي:

$$t=0 \quad ; \quad u=\begin{cases} 2x & , \quad 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & ; \quad \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

والشروط الحدية هي:

$$t>0 \quad ; \quad u=0 \quad , \quad x=0 \quad x=1$$

الحل: نختار $h = 0.1$ و $k = 0.001$ فنجد:

$$r = \frac{k}{h^2} = \frac{0.001}{0.01} = \frac{1}{10} = 0.1$$

نلاحظ أنه يوجد تناظر أي

$$u\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) = u\left(\frac{1}{2} - \alpha\right); \; \alpha > 0$$

هذا يعني أن التابع u متناظر بالنسبة لـ $\frac{1}{2}$ وحسب الطريقة الظاهرية

$$u_{n,m+1} = (1 - 2r)u_{n,m} + r(u_{n+1,m} + u_{n-1,m})$$

$$u_{n,m+1} = (1 - \frac{2}{10})u_{n,m} + \frac{1}{10}(u_{n+1,m} + u_{n-1,m})$$

$$= \frac{1}{10}(u_{n+1,m} + 8u_{n,m} + u_{n-1,m})$$

ومن الشروط الابتدائية نكتب:

$$u_{0,0} = 0 \;,\; u_{1,0} = 2(0.1) = 0.2 \;,\; u_{2,0} = 2(0.2) = 0.4$$

$$u_{3,0} = 0.6 \;,\; u_{4,0} = 0.8 \;,\; u_{5,0} = 1$$

$$u_{6,0} = 2(1 - 0.6) = 2(0.4) = 0.8 = u_{4,0}$$

$$u_{7,0} = 0.6 \;,\; u_{8,0} = 0.4 \;,\; u_{9,0} = 0.2 \quad u_{10,0} = 0$$

ومن الشروط الحدية

$$m = 0, 1, 2 \ldots\ldots \quad ; \quad u_{0,m} = 0 \quad ; \quad u_{10,m} = 0$$

من أجل $m = 0$ فإن

$$u_{n,1} = \frac{1}{10}(u_{n+1,0} + 8u_{n,0} + u_{n-1,0})$$

ومنه

$$u_{1,1} = \frac{1}{10}(u_{2,0} + 8u_{1,0} + u_{0,0})$$

$$= \frac{1}{10}(0.4 + 8(0.2) + 0) = \frac{0.4+1.6}{10} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{10}(u_{3,0} + 8u_{2,0} + u_{1,0})$$

$$= \frac{1}{10}(0.6 + 8(0.4) + 0.2) = \frac{0.6+3.2+0.2}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{10}(u_{4,0} + 8u_{3,0} + u_{2,0})$$

$$= \frac{1}{10}(0.8 + 8(0.6) + 0.4) = \frac{0.8+4.8+0.4}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$u_{4,1} = \frac{1}{10}(u_{5,0} + 8u_{4,0} + u_{3,0})$$

$$= \frac{1}{10}(1 + 8(0.8) + 0.6) = \frac{1+6.4+0.6}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$u_{5,1} = \frac{1}{10}\left(u_{6,0} + 8u_{5,0} + u_{4,0}\right) = \frac{0.8+8+0.8}{10} = \frac{9.6}{10} = 0.96$$

$$u_{6,1} = \frac{1}{10}(u_{7,0} + 8u_{6,0} + u_{5,0})$$

$$= \frac{1}{10}(0.6 + 8(0.8) + 1) = \frac{0.6+6.4+1}{10} = \frac{8}{10} = 0.8 = u_{4,1}$$

$$u_{7,1} = u_{3,1} = 0.6$$

$$u_{8,1} = u_{2,1} = 0.4$$

$$u_{9,1} = u_{1,1} = 0.2$$

$$u_{10,1} = u_{0,1} = 0$$

من أجل $m = 2$ فإن

$$u_{n,2} = \frac{1}{10}(u_{n+1,1} + 8u_{n,1} + u_{n-1,1})$$

ومنه

$$u_{1,2} = \frac{1}{10}(u_{2,1} + 8u_{1,1} + u_{0,1})$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{10}(0.4 + 8(0.2) + 0) = \frac{0.4+1.6}{10} = 0.2$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{10}(u_{3,1} + 8u_{2,1} + u_{1,1})$$

$$= \frac{1}{10}(0.6 + 8(0.4) + 0.2) = 0.4$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{10}\left(u_{4+1,1} + 8u_{3,1} + u_{2,1}\right) = 0.6$$

$$u_{4,2} = \frac{1}{10}\left(u_{5,1} + 8u_{4,1} + u_{3,1}\right)$$

$$= \frac{0.96+8(0.8)+0.6}{10} = \frac{0.6+6.4+0.6}{10}$$

$$= \frac{6.96}{10} = 0.796$$

$$u_{5,2} = \frac{1}{10}(u_{6,1} + 8u_{5,1} + u_{4,1})$$

$$= \frac{0.8+8(0.96)+0.8}{10} = \frac{1.6+7.68}{10} = \frac{9.28}{10} = 0.928$$

$$u_{6,2} = u_{4,2} = 0.796$$

$$u_{7,2} = u_{3,2} = 0.6$$

$$u_{8,2} = u_{2,2} = 0.4$$

$$u_{9,2} = u_{1,2} = 0.2$$

$$u_{10,2} = u_{0,2} = 0$$

وهكذا نتابع من أجل $m = 3 , 4 , \dots \dots ..$

2- طريقة كرانك نيكلسون:

إن للطريقة الظاهرية بعض العيوب، حيث إنها مقبولة عندما يكون $0 < r \leq \frac{1}{2}$ وهذا يعني أنه يجب أن نختار k صغيرة جداً فمثلاً إذا كانت $h = \frac{1}{10}$ عندئذٍ يجب أن نختار k بحيث يكون $0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ أي $k < \frac{1}{200}$

لذلك اقترحت بعض الطرق الضمنية للتغلب على مشكلة أن $0 < r \leq \frac{1}{2}$ من هذه الطرق طريقة كرانك نيكلسون الضمنية التي هي مقبولة من أجل جميع قيم $r > 0$.

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

بالاعتماد على تعريف الفروق أعلاه يمكن اقتراح الطريقة التالية لحل هذه المعادلة:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m}}{k} = \frac{1}{h^2}\delta_x^2\left(\frac{u_{n,m} + u_{n,m+1}}{2}\right)$$

وهذا يكافئ

$$\frac{u_{n,m+1} - u_{n,m}}{\mathrm{k}} = \frac{1}{2\mathrm{h}^2}\left[\left(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}\right) + \right.$$

$$\left. u_{n+1,m+1} - 2u_{n,m+1} + u_{n-1,m-1} \quad \right]$$

ومنه

$$u_{n,m+1} - u_{n,m} = \frac{r}{2}\left[u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}\right] +$$

$$\frac{r}{2}\left[u_{n+1,m+1} - 2u_{n,m+1} + u_{n-1,m-1}\right]$$

حيث $r = \frac{k}{h^2}$

$$(1 + r)u_{n,m+1} - \frac{r}{2}\left(u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m+1}\right) =$$

$$(1 - r)u_{n,m} + \frac{r}{2}(u_{n+1,m} + u_{n-1,m})$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن من هذه العلاقة يحوي ثلاث قيم معلومة والطرف الأيسر يحوي ثلاث قيم غير معلومة.

من أجل شبكة مؤلفة من $(N + 1)$ سطراً و $(N + 1)$ عموداً وبإعطاء $m = 0$ من أجل $n = 1, 2, \dots\dots\dots, N$ نحصل على N معادلة تحوي N مجهولاً تحسب بدلالة شروط البدء والشروط الحدية ومن ثم نكرر العمل من أجل $m = 1$ وهكذا ....

مثال (3)حل المعادلة التفاضلية الجزئية في المثال (2) بطريقة كرانك نيكلسون.

الحل: لحل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نجد أن طريقة كرانك نيكلسون لهذه المعادلة هي:

$$(1+r)u_{n,m+1}-\frac{r}{2}\left(u_{n+1,m+1}+u_{n-1,m+1}\right)=$$
$$(1-r)u_{n,m}+\frac{r}{2}\left(u_{n+1,m}+u_{n-1,m}\right)$$

نختار $h=0.1$ و $k=0.01$ نجد $r=1$

ومنه

$$2u_{n,m+1}-\frac{1}{2}\left(u_{n+1,m+1}+u_{n-1,m+1}\right)=\frac{1}{2}\left(u_{n-1,m}+u_{n+1,m}\right)$$

نضرب الطرفين بـــ 2 فنجد:

$$-u_{n-1,m+1}+4u_{n,m+1}-u_{n+1,m+1}=u_{n-1,m}+u_{n+1,m}$$

وبما أن u متناظر بالنسبة للمستقيم $x=\frac{1}{2}$ يكفي إيجاد الحلول في المجال $0\le x\le\frac{1}{2}$

واستنتاج الحلول في المجال $\frac{1}{2}\le x\le 1$ وكذلك لدينا

$$u_{0,0}=0\ ,\ u_{1,0}=0.2\ ,\ u_{2,0}=0.4\ ,$$

$$u_{3,0} = 0.6 \quad , \quad u_{4,0} = 0.8 \quad , \quad u_{5,0} = 1$$

من أجل $m = 0$ نحصل على

$$-u_{n-1,1} + 4u_{n,1} - u_{n+1,1} = u_{n-1,0} + u_{n+1,0}$$

$$-u_{0,1} + 4u_{1,1} - u_{2,1} = u_{0,0} + u_{2,0} \ ; \ u_{0,1} = u_{10,1} = 0$$
$$n = 1$$

$$n = 2 \qquad -u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} = u_{1,0} + u_{30}$$

$$n = 3 \qquad -u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} = u_{2,0} + u_{4,0}$$

$$n = 4 \qquad - u_{3,1} + 4u_{4,1} - u_{5,1} = u_{3,0} + u_{5,0}$$

$$n = 5 \qquad - u_{4,1} + 4u_{5,1} - u_{6,1} = u_{4,0} + u_{6,0}$$

ومنه

$$4u_{1,1} + u_{2,1} = 0.4$$

$$-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} = 0.8$$

$$-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} = 1.2$$

$$-u_{3,1} + 4u_{4,1} - u_{5,1} = 1.6$$

$$-2u_{4,1} + 4u_{5,1} = 1.6$$

حصلنا على خمس معالات بخمسة مجاهيل وباستخدام المصفوفات نكتب:

$$
\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}
$$

نلاحظ أن مصفوفة الأمثال هي مصفوفة ثلاثية الأقطار بتحليل هذه المصفوفة نجد:

$$
\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{56} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{112}{209} & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{56} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{724}{209} \end{bmatrix}
$$

نوجد أولاً حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{56} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{112}{209} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

فنجد:

$$y_1 = 0.4 \qquad y_2 = 0.9 \qquad y_3 = 1.44$$

$$y_4 = 1.98 \qquad y_5 = 2.66$$

ثم نوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{209}{56} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{724}{209} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.9 \\ 1.44 \\ 1.98 \\ 2.66 \end{bmatrix}$$

فنجد:

$$u_{1,1} = 0.199 \qquad u_{2,1} = 0.395 \qquad u_{3,1} = 0.583$$

$$u_{4,1} = 0.736 \qquad u_{5,1} = 0.768$$

ولحساب $u_{n,2}$ نلاحظ أن مصفوفة الأمثال ثلاثية الأقطار لا تتغير والذي يتغير فقط هو الطرف الثاني وبالتالي يمكن مباشرة اعتماداً على التحليل السابق LU إيجاد

$$u_{1,2} \quad , \; u_{2,2} \;\; , \; u_{3,2} \;\; , \; u_{4,2} \;\; , \; u_{5,2}$$

وهكذا نتابع الحل ....

مثال (4) حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ; \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

بفرض شرط البدء $u = 0$ من أجل $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $t = 0$

والشروط الحدية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{في النقطة} \quad x = 0 \ , \ t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{في النقطة} \quad x = 0.5 \ , \ t > 0$$

(أ) باستخدام الطريقة الظاهرية حيث $h = 0.1$, $k = 0.0025$

(ب) باستخدام طريقة كرانك نيكلسون حيث$h = 0.1$, $k = 0.01$

الحل: (أ) $r = \frac{k}{h^2} = \frac{0.0025}{0.01} = 0.25 \le 0.5$

لنقرب المعادلة $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ كما يلي:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m}}{k} = \frac{\delta_x^2 u_{n,m}}{h^2}$$

$$\frac{u_{n,m+1 - u_{n,m}}}{k} = \frac{u_{n+1,m - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}}}{h^2}$$

$$u_{n,m+1} = u_{n,m} + r(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m})$$

$$u_{n,m+1} = \frac{1}{4}(u_{n+1,m} + 2u_{n,m} + u_{n-1,m})$$

شروط البدء $u = 0$ من أجل $t = 0$ و $0 \le x \le \frac{1}{2}$

$$u_{0,0} = u_{1,0} = u_{2,0} = u_{3,0} = u_{4,0} = u_{5,0} = 0$$

عند النقطة $x = 0$ الشرط الحدي $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ نقربه كما يلي:

$$\frac{\nabla_x u_{n,m}}{h} = 0$$

ومنه

$$\frac{u_{n,m} - u_{n-1,m}}{h} = 0$$

$$u_{n,m} = u_{n-1,m}$$

من أجل $n = 0$ نجد: $u_{0,m} = u_{-1,m}$

$$u_{0,m+1} = \frac{1}{4}(u_{1,m} + 2u_{0,m} + u_{-1,m})$$

$$u_{0,m+1} = \frac{1}{4}(u_{1,m} + 3u_{0,m})$$

عند النقطة $x = 0.5$ الشرط الحدي $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ نقربه كما يلي:

$$\frac{\Delta_x u_{n,m}}{h} = 1$$

ومنه

$$u_{n+1,m} - u_{n,m} = h$$

من اجل $h = 0.1$ و $n = 5$ نجد : $u_{6,m} = u_{5,m} + 0.1$

$$u_{5,m+1} = \frac{1}{4}(u_{6,m} + 2u_{5,m} + u_{4,m})$$

$$u_{5,m+1} = \frac{1}{4}(3u_{5,m} + u_{4,m} + 0.1)$$

عند المستوي الأول $t = 0.0025$ نأخذ $m = 0$

$$u_{0,1} = \frac{1}{4}\left(u_{1,0} + 3u_{0,0}\right) = 0$$

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}\left(u_{2,0} + 2u_{1,0} + u_{0,0}\right) = 0$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{4}\left(u_{3,0} + 2u_{2,0} + u_{1,0}\right) = 0$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{4}\left(u_{4,0} + 2u_{3,0} + u_{2,0}\right) = 0$$

$$u_{4,1} = \frac{1}{4}\left(u_{5,0} + 2u_{4,0} + u_{3,0}\right) = 0$$

$$u_{5,1} = \frac{1}{4}\left(3u_{5,0} + u_{4,0} + 0.1\right) = 0.025$$

عند المستوي الثاني $t = 0.005$ نأخذ $m = 1$

$$u_{0,2} = \frac{1}{4}\left(u_{1,1} + 3u_{0,1}\right) = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}\left(u_{2,1} + 2u_{1,1} + u_{0,1}\right) = 0$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}\left(u_{3,1} + 2u_{2,1} + u_{1,1}\right) = 0$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{4}\left(u_{4,1} + 2u_{3,1} + u_{2,1}\right) = 0$$

$$u_{4,2} = \frac{1}{4}\left(u_{5,1} + 2u_{4,1} + u_{3,1}\right) = \frac{0.025}{4} = 0.00625$$

$$u_{5,2} = \frac{1}{4}\left(3u_{5,1} + u_{4,1} + 0.1\right) = \frac{1}{4}(3(0.025) + 0.1) = 0.0438$$

عند المستوي الثالث $t = 0.0075$ نأخذ $m = 2$

$$u_{0,3}=\frac{1}{4}\left(u_{1,2}+3u_{0,2}\right)=0$$

$$u_{1,3}=\frac{1}{4}\left(u_{2,2}+2u_{1,2}+u_{0,2}\right)=0$$

$$u_{2,3}=\frac{1}{4}\left(u_{3,2}+2u_{2,2}+u_{1,2}\right)=0$$

$$u_{3,3}=\frac{1}{4}\left(u_{4,2}+2u_{3,2}+u_{2,2}\right)=\frac{1}{4}(0.00625)=0.0016$$

$$u_{4,3}=\frac{1}{4}\left(u_{5,2}+2u_{4,2}+u_{3,2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(0.0438+2(0.00625)+0)=0.0141$$

$$u_{5,3}=\frac{1}{4}\left(3u_{5,2}+u_{4,2}+0.1\right)$$

$$=\frac{1}{4}[3(0.0438)+0.00625+0.1]=\frac{0.23765}{4}$$

$$=0.05941$$

(ب) $$r=\frac{k}{h^2}=\frac{0.01}{0.01}=1$$

نقرب المعادلة $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ كما يلي:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m}}{k}=\frac{\delta_x^2 u_{n,m}+\delta_x^2 u_{n,m}+1}{2h^2}$$

$$\frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{k}=\frac{1}{2h^2}\left[u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}+\right.$$
$$\left.u_{n+1,m+1}-2u_{n,m+1}+u_{n-1,m-1}\right]$$

$$2u_{n,m+1}-2u_{n,m}=r\left[u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}+u_{n+1,m+1}-\right.$$

$$-r\,u_{n-1,m+1} + 2(1+r)u_{n,m+1} - \quad 2u_{n,m+1} + u_{n-1,m-1}]$$
$$r\,u_{n+1,m+1} = r\,u_{n-1,m} + 2(1-r)u_{n,m} + r\,u_{n+1,m}$$

ولدينا $r = 1$ ومنه

$$-u_{n-1,m-1} + 4u_{n,m+1} - u_{n+1,m+1} = u_{n-1,m} + u_{n+1,m}$$

عند النقطة $x = 0$ لدينا $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ نقربه كما يلي:

$$\frac{\nabla_x u_{n,m}}{h} = 0$$

ومنه
$$u_{n,m} - u_{n-1,m} = 0$$

$$u_{n-1,m} = u_{n,m}$$

من أجل $n = 0$ نجد: $u_{-1,m} = u_{0,m}$

عند النقطة $x = 0.5$ لدينا $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ نقربه كما يلي:

$$\frac{\Delta_x u_{n,m}}{h} = 1$$

ومنه
$$u_{n+1,m} - u_{n,m} = h$$

$$u_{n+1,m} = u_{n,m} + h$$

من أجل $n = 5$ و $h = 0.1$ نجد:

$$u_{6,m} = u_{5,m} + 0.1$$

عند المستوي الأول$t = 0.01$ نأخذ $m = 0$ $n = 0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5$

فنجد:

$$-u_{-1,1} + 4u_{0,1} - u_{1,1} = u_{-1,0} + u_{1,0}$$

$$-u_{0,1} + 4u_{1,1} - u_{2,1} = u_{0,0} + u_{2,0}$$

$$-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} = u_{1,0} + u_{3,0}$$

$$-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} = u_{2,0} + u_{4,0}$$

$$-u_{3,1} + 4u_{4,1} - u_{5,1} = u_{3,0} + u_{5,0}$$

$$-u_{4,1} + 4u_{5,1} - u_{6,1} = u_{4,0} + u_{6,0}$$

مع ملاحظة

$$u_{6,1} = u_{5,1} + 0.1 \quad , \quad u_{-1,1} = u_{0,1}$$

$$u_{6,0} = u_{5,0} + 0.1 \quad , \quad u_{-1,0} = u_{0,0}$$

نعوض فنجد:

$$3u_{0,1} - u_{1,1} = 0$$

$$-u_{0,1} + 4u_{1,1} - u_{2,1} = 0$$

$$-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} = 0$$

$$-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} = 0$$

$$-u_{3,1} + 4u_{4,1} - u_{5,1} = 0$$

$$u_{4,1} + 3u_{5,1} = 0.2$$

حصلنا على ست معادلات بستة مجاهيل وباستخدام المصفوفات يمكن أن نكتب

$$
\begin{bmatrix}
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2
\end{bmatrix}
$$

نلاحظ أن مصفوفة الأمثال هي مصفوفة ثلاثية الأقطار بتحليل هذه المصفوفة نجد:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-3}{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-4}{41} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-41}{153} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-153}{517} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{11}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{41}{11} & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{153}{41} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{571}{153} & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1560}{571}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2
\end{bmatrix}
$$

نوجد أولاً حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{41} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-41}{153} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-153}{517} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

فنجد: $y_6 = 0.2$ $\qquad$ $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$

ثم نوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{11} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{153}{41} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{571}{153} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1560}{571} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

فنجد: $u_{5,1} = \frac{0.2}{\frac{1560}{571}} = 0.0732$

$$u_{4,1} = 0.0196 \quad u_{3,1} = 0.0053 \quad u_{2,1} = 0.0014$$

$$u_{1,1} = 0.0004 \quad u_{0,1} = 0.00013$$

وبشكل مشابه نوجد $u_{n,2} \quad ; \quad n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5$

ثم $u_{n,3} \quad ; \quad n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5$

وهكذا.........

3- الطريقة المتناوبة:

هذه الطريقة هي لموازنة التقريب وتقرب المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئية $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ كما يلي:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m}}{k} = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 \left[\theta u_{n,m+1} + (1-\theta) u_{n,m} \right] \;\; ; \; 0 \leq \theta \leq 1$$

وهذه الطريقة مقبولة عندما يكون $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$

ولكن عندما يكون $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ يجب أن يتحقق الشرط التالي:

$$0 < r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

من أجل $\theta = 0$ نحصل على الطريقةالظاهرية

ومن اجل $\theta = \frac{1}{2}$ نحصل على طريقة كرانك نيكلسون

3-5 التقارب والاستقرار

تعريف (3) نقول عن طريقة الفروق التي تستخدم في حل معادلة تفاضلية جزئية إنها متقاربة إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{h,k \to 0} u_{n,m} = u(x_n, t_m)$$

وذلك حيث $u_{n,m}$ هو الحل الناتج عن استخدام طريقة الفروق و $u(x_n, t_m)$ هو الحل النظري في النقطة (x_n, t_m)

تعريف (4) نقول عن طريقة الفروق التي تستخدم في حل معادلة تفاضلية جزئية أنها موجودة عندما يتحقق الشرط التالي:

$$\overline{L} = \frac{L}{k} \xrightarrow[h,k \to 0]{} 0$$

حيث L الجزء الرئيسي للخطأ الموضعي.

مثال (5) برهن أن الطريقة الظاهرية موجودة

الحل: نعلم أن الطريقة الظاهرية هي:

$$u_{n,m+1} = (1-2r)u_{n,m} + r(u_{n-1,m} + u_{n+1,m})$$

نستخدم نشر تايلور ونعين الجزء الرئيسي للخطأ الموضعي:

$$u_{n,m+1} = u(x_n , t_m + k) = u(x_n, t_m) + k\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots$$

$$u_{n-1,m} = u(x_n - h, t_m) = u(x_n, t_m) -$$

$$h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots$$

$$u_{n+1,m} = u(x_n + h, t_m) = u(x_n, t_m) +$$

$$\mathrm{h}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots$$

$$u_{n,m} = u(x_n, t_m)$$

بالتعويض بالطريقة الظاهرية نجد:

الخطأ الموضعي $$= L = \left[u(x_n, t_m) + k\frac{\partial u}{tu} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots\ldots \right] - u(x_n, t_m) + \frac{2k}{h^2}u(x_n, t_m)$$

$$-\frac{k}{h^2}\left[2u(x_n, t_m) + \frac{2h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots\ldots \right]$$

$$= \left[k\frac{\partial u}{tu} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots\ldots \right] - k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{kh^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots\ldots$$

وبملاحظة أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

نجد:

$$L=\frac{k^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{kh^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+....=\left(\frac{k^2}{2}-\frac{kh^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+....$$

ومنه

$$\overline{L}=\frac{L}{k}=\left(\frac{\frac{k^2}{2}-\frac{kh^2}{12}}{k}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{k\left(\frac{k}{2}-\frac{h^2}{12}\right)}{k}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$=\left(\frac{k}{2}-\frac{h^2}{12}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\xrightarrow[h,k\to 0]{}0$$

هذا يعني أن الطريقة الظاهرية تحقق شرط الوجود وبالتالي الطريقة الظاهرية موجودة.

تعريف (6) نقول عن طريقة الفروق المستخدمة لحل معادلة تفاضلية جزئية أنها مستقرة عندما يتحقق الشرط التالي

$(e^{\alpha k}) \leq 1$ هذا الشرط يسمى شرط فان نيومان

حيث تحقق $e^{\alpha k}$ المعادلة الجبرية (المعادلة المميزة) التي تنتج عن معادلة الفروق بإبدال $u_{n,m}$ بالمقدار $e^{\alpha km}e^{i\beta hn}$

مثال (6) برهن أن الطريقة الظاهرية مستقرة في المجال $0 < r \leq \frac{1}{2}$

الحل: نبدل كل $u_{n,m}$ بـــ $e^{\alpha km}e^{i\beta hn}$ بالطريقة الظاهرية

$$u_{n,m+1} = (1-2r)u_{n,m} + r(u_{n-1,m} + u_{n+1,m})$$

فنجد

$$e^{\alpha k(m+1)}e^{i\beta hn} = (1-2\mathrm{r})e^{\alpha km}e^{i\beta hn} + \mathrm{r}(e^{\alpha km}e^{i\beta h(n+1)} + e^{\alpha km}e^{i\beta h(n-1)})$$

$$e^{\alpha k}e^{\alpha km}e^{i\beta hn} = e^{\alpha km}e^{i\beta hn}\left[(1-2\mathrm{r}) + \mathrm{r}(e^{i\beta h}+e^{-i\beta h})\right]$$

بالتقسيم على $e^{\alpha km}e^{i\beta hn}$ نجد:

$$e^{\alpha k} = (1-2\mathrm{r}) + \mathrm{r}(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h})$$

$$= (1-2\mathrm{r}) + \mathrm{r}(2\cos\beta h) = 1 - 2\mathrm{r}\,(1-\cos\beta h)$$

$$= (1-2\mathrm{r}) + \mathrm{r}\left(2\sin^2\frac{\beta h}{2}\right) = 1 - 4\mathrm{r}\ \sin^2\frac{\beta h}{2})$$

حسب التعريف كي تكون الطريقة مستقرة يجب أن يكون

$$-1 \leq e^{\alpha k} \leq 1 \iff \left|e^{\alpha k}\right| \leq 1$$

من أجل $e^{\alpha k} \leq 1$ فإن $1-4r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \leq 1$

وبما أن $4\,sin^2\frac{\beta h}{2} \geq 0$ يجب أن يكون $r > 0$

ومن أجل $e^{\alpha k} \geq -1$ فإن $1-4r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \geq -1$

$$4r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \leq 2$$

$$2r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \leq 1$$

وبما أن $sin^2\frac{\beta h}{2} \geq 0$ فإن

$$r \leq \frac{1}{2sin^2\frac{\beta h}{2}}$$

$$r \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{sin^2\frac{\beta h}{2}}\right) \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي الطريقة الظاهرية مستقرة في المجال $0 < r \leq \frac{1}{2}$

مثال (7) عين المجال الذي يجب أن تنتمي إليه r كي تكون طريقة كرانك نيكلسون مستقرة.

الحل: إن معادلة الفروق في طريقة كرانك نيكلسون هي

$$(1-2\mathrm{r})\mathrm{u}_{\mathrm{n,m+1}} - \frac{1}{2}\mathrm{r}\left(\mathrm{u}_{\mathrm{n+1,m+1}} + \mathrm{u}_{\mathrm{n-1,m+1}}\right) = (1-2\mathrm{r})\mathrm{u}_{\mathrm{n,m}} + \frac{1}{2}\mathrm{r}\left(\mathrm{u}_{\mathrm{n+1,m}} + \mathrm{u}_{\mathrm{n-1,m}}\right)$$

نبدل كل $u_{n,m}$ بـــ $e^{\alpha km}e^{i\beta hn}$ ونختصر على هذا المقدار فنجد:

$$(1+\mathrm{r})e^{\alpha k}-\frac{1}{2}\mathrm{r}\left(e^{\alpha k}e^{i\beta h}+e^{\alpha k}e^{-i\beta h}\right)=(1-\mathrm{r})+\frac{1}{2}\mathrm{r}\left(e^{i\beta h}+e^{\alpha k}e^{-i\beta h}\right)$$

$$e^{\alpha k}(1+r-\frac{1}{2}\mathrm{r}(2\cos\beta h))=1-\mathrm{r}+\frac{1}{2}\mathrm{r}(2\cos\beta h)$$

$$e^{\alpha k}(1+r-\mathrm{r}\cos\beta h)=1-\mathrm{r}+\mathrm{r}\cos\beta h$$

$$e^{\alpha k}(1+r(1-\cos\beta h))=1-\mathrm{r}(1-\cos\beta h)$$

$$e^{\alpha k}(1+2r\,sin^2\frac{\beta h}{2})=1-2\mathrm{r}\,sin^2\frac{\beta h}{2}$$

ومنه $e^{\alpha k}=\frac{1-2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}}{1+2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}}$

حتى تكون طريقة كرانك نيكلسون مستقرة يجب أن يكون $\left|e^{\alpha k}\right| \leq 1$

وهذا يكافئ $-1 \leq e^{\alpha k} \leq 1$

من أجل $e^{\alpha k} \leq 1$ فإن $\frac{1-2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}}{1+2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}} \leq 1$

بفرض $r>0$ فإن $1-2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \leq 1+2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}$

ومنه $4r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \geq 0$

وهذا محقق دوماً من أجل $r>0$

ومن أجل $-1 \leq e^{\alpha k}$ فإن $\frac{1-2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}}{1+2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}} \geq -1$

ومنه $$1-2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2} \geq -1-2\,r\,sin^2\frac{\beta h}{2}$$

أو $2 \geq 0$ وهذا محقق دوماً مهما تكن r وبالتالي فإن طريقة كرانك نيكلسون مستقرة من أجل $r > 0$

مثال (8) حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

وفق الشروط التالية:

$u = 0$ وذلك من أجل $x = 0$ و $x = 1$ و $t \geq 0$

$u = \frac{1}{8}\sin \pi x$ من أجل $0 < x < 1$ و $t = 0$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ من أجل $0 < x < 1$ و $t = 0$

وذلك باختيار $h = 0.1$, $k = 0.01$ باستخدام الطريقة الظاهرية وذلك حتى $t = 0.5$

الحل: نقرب المعادلة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ كما يلي:

$$\frac{\delta_t^2 u_{n,m}}{k^2} - \frac{\delta_x^2 u_{n,m}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{k^2}=\frac{u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}}{h^2}$$

$$u_{n,m+1}=2u_{n,m}+\frac{k^2}{h^2}\left(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}\right)-u_{n,m-1}$$

ولكن $\frac{k^2}{h^2}=\frac{0.0001}{0.01}=0.01$

ومنه $u_{n,m+1}=0.01\left(u_{n+1,m}-198u_{n,m}+u_{n-1,m}\right)$

$-u_{n,m-1}$

$$u_{n,m+1}=\frac{1}{100}\left(u_{n+1,m}-198u_{n,m}+u_{n-1,m}\right)-u_{n,m-1}$$

الشروط الابتدائية $u_{0,m}=u_{10,m}=0 \quad \forall\ t\geq 0$

عند المستوى الابتدائي $t=0$ يكون $u_{0,0}=u_{10,0}=0$

$$u_{1,0}=u_{9,0}=\frac{1}{8}\sin\pi\,(0.1)=0.0386$$

$$u_{2,0}=u_{8,0}=\frac{1}{8}\sin\pi\,(0.2)=0.0735$$

$$u_{3,0}=u_{7,0}=\frac{1}{8}\sin\pi\,(0.3)=0.1011$$

$$u_{4,0}=u_{6,0}=\frac{1}{8}\sin\pi\,(0.4)=0.1189$$

$$u_{5,0}=\frac{1}{8}\sin\pi\,(0.5)=0.125$$

حيث u متناظر بالنسبة لـــ $x=0.5$

نقرب $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ كما يلي:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m}}{k} = 0$$

ومنه

$$u_{n+1,m} - u_{n,m} = 0$$

$$u_{n+1,m} = u_{n,m} \quad ; \quad m = 0 \;, \quad 0 < x < 1$$

$$u_{n,1} = u_{n,0} \quad ; \quad 0 < m < 10$$

عند المستوي الأول $t = 0.01$

$$u_{0,1} = u_{10,1} = 0$$

$$u_{9,1} = u_{1,1} = u_{1,0} = 0.0386$$

$$u_{8,1} = u_{2,1} = u_{2,0} = 0.0745$$

$$u_{7,1} = u_{3,1} = u_{3,0} = 0.1011$$

$$u_{6,1} = u_{4,1} = u_{4,0} = 0.1189$$

$$u_{5,1} = u_{5,0} = 0.125$$

عند المستوي الأول $t = 0.02 \quad m = 1$

$$u_{n,2} = \frac{1}{100}\left(u_{n+1,1} - 198u_{n,1} + u_{n-1,1}\right) - u_{n,0}$$

$$u_{0,2} = u_{10,2} = 0$$

$$u_{9,2} = u_{1,2} = \frac{1}{100}\left(u_{2,1} - 198u_{1,1} + u_{0,1}\right) - u_{1,0}$$

$$= \frac{1}{100}(0.0735 - 198(0.0386) + 0) - 0.0386$$

$$= -0.1143$$

$$u_{8,2} = u_{2,2} = \frac{1}{100}\left(u_{3,1} - 198u_{2,1} + u_{1,1}\right) - u_{2,0}$$

$$= \frac{1}{100}(0.1011 - 198(0.07351) + 0.0386) - 0.0735$$

$$= -0.2176$$

$$u_{7,2} = u_{3,2} = \frac{1}{100}\left(u_{4,1} - 198u_{3,1} + u_{2,1}\right) - u_{3,0}$$

$$= \frac{1}{100}(0.1189 - 198(0.1011) + 0.0735) - 0.1011$$

$$= -0.2994$$

$$u_{6,2} = u_{4,2} = \frac{1}{100}\left(u_{5,1} - 198u_{4,1} + u_{3,1}\right) - u_{4,0}$$

$$= \frac{1}{100}(0.125 - 198(0.1189) + 0.1011) - 0.1189$$

$$= -0.3521$$

$$u_{5,2} = \frac{1}{100}\left(u_{6,1} - 198u_{5,1} + u_{4,1}\right) - u_{5,0}$$

$$= \frac{1}{100}(0.1189 - 198(0.125) + 0.1189) - 0.125$$

$$= -0.3701$$

عند المستوي الثالث $t = 0.03$ $\quad m = 2$

$$u_{n,3} = \frac{1}{100}\left(u_{n+1,2} - 198u_{n,2} + u_{n-1,2}\right) - u_{n,1}$$

$$u_{0,3} = u_{10,3} = 0$$

$$u_{9,3} = u_{1,3} = \frac{1}{100}\left(u_{2,2} - 198u_{1,2} + u_{0,2}\right) - u_{1,1}$$

$$= \frac{1}{100}(-0.2176 - 198(0.1143) + 0) - 0.0386$$

$$= -0.1855$$

$$u_{8,3} = u_{2,3} = \frac{1}{100}\left(u_{3,2} - 198u_{2,2} + u_{1,2}\right) - u_{2,1}$$

$$= \frac{1}{100}(-0.2944 - 198(-0.2176) - 0.1143) - 0.0735$$

$$= 0.3532$$

$$u_{7,3} = u_{3,3} = \frac{1}{100}\left(u_{4,2} - 198u_{3,2} + u_{2,2}\right) - u_{3,1}$$

$$= \frac{1}{100}(-0.3521 - 198(0.2994) - 0.2176) - 0.1011$$

$$= 0.4860$$

$$u_{6,3} = u_{4,3} = \frac{1}{100}\left(u_{5,2} - 198u_{4,2} + u_{3,2}\right) - u_{4,1}$$

$$= \frac{1}{100}(-0.3701 - 198(-0.3521) - 0.2994) - 0.1189$$

$$= 0.5716$$

$$u_{5,3} = \frac{1}{100}\left(u_{6,2} - 198u_{5,2} + u_{4,2}\right) - u_{5,1}$$

$$= \frac{1}{100}(-0.3521 - 198(-0.3701) - 0.4521) - 0.0125$$

$$= 0.6008$$

وبشكل مشابه نوجد الحل عند المستويين الرابع والخامس.......

مثال (9) عين معادلة الفروق الظاهرية من أجل حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

الحل:

$$\frac{\Delta_t u_{n,m,l}}{k} = \frac{\delta_x^2 u_{n,m,l}}{h^2} + \frac{\delta_y^2 u_{n,m,l}}{h^2}$$

حيث للسهولة أخذنا طول الخطوة نفسها h

$$u_{n,m+1,l} = u_{n,m,l} + r\left(u_{n+1,m,l} - 2u_{n,m,l} + u_{n-1,m,l}\right) + r\left(u_{n,m,l+1} - 2u_{n,m,l} + u_{n,m,l-1}\right)$$

$$= (1-4r)u_{n,m,l} + r(u_{n+1,m,l} + u_{n-1,m,l}) + r(u_{n,m,l+1} + u_{n,m,l-1})$$

$$r = \frac{k}{h^2}$$

تمارين

1- حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

وذلك من أجل الشروط الحدية التالية:

$u = 0$ من أجل $x = 0$ و $x = 1$ و $t > 0$

وحيث شرط البدء

$u = \sin \pi x$ من أجل $0 \leq x \leq 1$ و $t = 0$

وذلك باختيار $h = 0.1$ و $k = 0.001$

باستخدام الطريقة الظاهرية وذلك حتى $t = 0.5$

2- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

حيث شرط البدء $u = 2$ من أجل $0 \leq x \leq 1$ و $t = 0$

و الشروط الحدية هي

$\frac{\partial u}{\partial t} = -u$ في النقطة $x = 0$ من أجل جميع قيم t

$\frac{\partial u}{\partial x} = u$ في النقطة $x = 1$ من أجل جميع قيم t

باستخدام الطريقة الظاهرية وبأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.0025$

3- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

حيث شرط البدء $u = \sin \pi x$ من أجل $0 \leq x \leq 1$ و $t = 0$

و الشروط الحدية هي

$u = 0$ من أجل $x = 0$ و $x = 1$ و $t > 0$

باستخدام طريقة كرانك نيكلسون وبأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$

4- عين معادلة الفروق التي تعطي حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5- استخدم الطريقة الظاهرية لحل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

حيث شرط البدء $u = 1$ من أجل $0 \leq x \leq 1$ و $t = 0$

و الشروط الحدية هي

$\frac{\partial u}{\partial x} = u$ في النقطة $x = 0$ من أجل جميع قيم t

$\frac{\partial u}{\partial x} = u$ في النقطة $x = 1$ من أجل جميع قيم t

الفصل الرابع

الحلول المثلى

SOLUTION OPTIMIZATION

طرق خطة البحث

طرق مرافقة التدرج

طرق نيوتن

4-1 تهميد:

الحلول المثلى أو الأمثليات هي علم تحديد أفضل الحلول لمسألة ما، فهي تعني إيجاد أكبر ربح في عمل ما أو إيجاد أقل كلفة لسلعة مصنعة ما أو الحصول على أصغر خطأ عند إجراء عملية حسابية معينة.

للأمثليات تطبيقات كثيرة في العلوم والطب والهندسة والاقتصاد وغيرها.

تقسم الأمثليات إلى قسمين. القسم الأول الأمثليات المحددة (المقيدة)والقسم الثاني الأمثليات غير المحددة وسوف نهتم بدراسة الأمثليات غير المحددة.

4-2 النهاية الدنيا:

نرمز للحل الأمثل لمسألة الأمثليات غير المحددة الآتية:

$$\min f(x) \qquad (1)$$

بالرمز $\bar{X}$ حيث
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

إيجاد النهاية الدنيا للتابع $f(X)$ أي إيجاد $\min f(X)$ نسميه بمسألة الأمثليات

لإيجاد أكبر قيمة للربح مثلاً يمكن أن نكتب

$min\, f(X)$ وغالباً نوجد $max\, f(X) = -min(-f(X))$

تعريف (1) نقول أن $\bar{X}$ يمثل نهاية دنيا موضعية للتابع $f(X)$ إذا تحقق الشرط

$f(\bar{X}) < f(X)$ من اجل جميع قيم X في جوار النقطة $\bar{X}$ و $X \neq \bar{X}$

لإيجاد النهاية الدنيا الحقيقية يجب تحقق الشرط التالي:

$$f(\bar{X}) < f(X)\,; \quad \forall \;\; X$$

إن تحقق هذا الشرط لإيجاد النهاية الدنيا للتابع $f(X)$ ليس بالأمر السهل، لذلك سوف نبحث عن طرق أخرى لإيجاد النقطة $\bar{X}$

تعريف (2) ليكن التابع $f(X)$ حيث $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

نرمز لتدرج هذا التابع بالرمز

$$\nabla f(X) = g(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

وهو المشتق الأول للتابع $f(X)$ بالنسبة للمتحولات

$$x_1 \;, x_2 \,, \;\ldots\ldots, x_n$$

ونرمز للمشتق الثاني بالرمز $\nabla^2 f(X) = G(X)$ ويعطى كما يلي:

$$\nabla^2 f(X) = G(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

نسمي هذه المصفوفة بمصفوفة هسيان

وإذا كان التابع $f(X)$ مستمراً بالنسبة لجميع المتحولات

$x_1 \ , x_2 \ , \ \ldots \ldots , x_n$ فإن مصفوف هسيان $G(X)$ تكون متناظرة لأن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

مثال (1) أوجد التدرج ومصفوفة هسيان للتابع:

$$f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

الحل:

$$g(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-400x_1(x_2-x_1^2)-2(1-x_1)\\ 200(x_2-x_1^2)\end{bmatrix}$$

التدرج

ومصفوفة هسيان

$$G(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-400x_1(x_2-x_1^2)+2 & -400x_1\\ -400x_1 & 200\end{bmatrix}$$

تعريف (3) إذا كان التدرج للتابع $f(X)$ ثابتاً فإننا نسمي التابع $f(X)$ تابع خطي ونكتبه بالشكل التالي:

$$f(X)=c^T X+\varepsilon$$

حيث c شعاع و ε عدد ثابت ; $C^T X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

$$\nabla f(X) = g(X) = c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

وإذا كانت مصفوفة هسيان ثابتة فإننا نقول عن التابع $f(X)$ إنه تابع تربيعي (تابع من الدرجة الثانية) ونكتبه بالشكل بالتالي:

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T H X + C^T X + z$$

حيث $$X^t H X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_i x_j$$

$$\nabla f(X) = HX + c$$

مقدار ثابت $$G(X) = \nabla^2 f(X) = H$$

مثال (2) برهن أن التابع التالي تربيعي

$$f(X) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 + 1)^2 + (x_3 - x_2)^2$$

الحل:

$$\nabla f(X)=g(X)=c=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(x_1-x_2)+4(x_1-3)\\ -2(x_1-x_2)+4(x_2+1)-2(x_3-x_2)\\ 2(x_3-x_2)\end{bmatrix}$$

$$G(X)=\nabla^2 f(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2 & 0\\ -2 & 8 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة هسيان $G(X)$ ثابتة وبالتالي التابع $f(X)$ تابع تربيعي

نظرية (1)إذاكانت $\bar{X}$ حلاً لمسألة الأمثليات غير المحددة $\min f(X)$

فإن الشرطين التاليين محققان (آ) $\bar{g}=g(\bar{X})=0$

(ب) $\bar{G}=G(\bar{X})$ مصفوفة موجبة شبه

محددة

البرهان: (آ) بنشر التابع$f(X)$ حسب تايلور بجوار النقطة $\bar{X}$ نجد:

$$f(\overline{X}+\delta)=f(\overline{X})+\delta^T\overline{g}+\frac{1}{2}\delta^T\overline{G}\delta$$

من اجل أي شعاع δ

نفرض جدلاً أن $\bar{g} \neq 0$ فإذا اخترنا δ صغير بقدر كافٍ فيمكن أن يتحقق

$$\delta^T\overline{g}+\frac{1}{2}\delta^T\overline{G}\delta<0$$

بالتعويض بمنشور تايلور نجد:

$$f(\overline{X}+\delta)<f(\overline{X})$$

وهذا يناقض $\bar{X}$ حل لمسألة الأمثليات وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ و
$\bar{g}=0$

(ب) إذا لم تكن $\bar{G}$ موجبة شبه محددة فإنه يمكن إيجاد شعاع δ صغير بقدرٍ كافٍ بحيث يكون $\frac{1}{2}\delta^T\overline{G}\delta<0$

بالتعويض بمنشور تايلور نجد:

$$f(\overline{X}+\delta)=f(\overline{X})+0+\frac{1}{2}\delta^T\overline{G}\delta$$

ومنه $f(\overline{X}+\delta)<f(\overline{X})$

وهذا يناقض أن $\bar{X}$ حلاً لمسألة الأمثليات

وبالتالي المصفوفة $\bar{G}$ مصفوفة موجبة شبه محدودة

نظرية (2) إذا كان $\bar{X}$ حلاً لمسألة الأمثليات

الشرطان الكافيان كي يكون $\bar{X}$ حلاً لمسألة الأمثليات

$\min f(x)$ هما: (آ) $\bar{g} = 0$

(ب) $\bar{G}$ موجبة محددة

البرهان: بما أن $\bar{G}$ موجبة محددة فإن

$$\forall \delta \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \delta^T \bar{G} \delta > 0$$

بالتعويض بمنشور تايلور نجد:

$$f(\overline{X} + \delta) = f(\overline{X}) + 0 + \frac{1}{2} \delta^T \overline{G} \delta < f(\overline{X})$$

ومنه $f(\overline{X} + \delta) < f(\overline{X})$

هذا يعني أن $\bar{X}$ هو حل لمسألة الأمثليات

نستنتج أنه بالاعتماد على النظريتين السابقتين لحل المسألة $\min f(X)$ نوجد التدرج للتابع $f(X)$

ثم نحل جملة المعادلات غير الخطية في الحالة العامة اي نحل جملة المعالات $g(X) = 0$

ثم نوجد مصفوفة هسيان $G(x)$ فإذا كانت هذه المصفوفة موجبة محددة فإن حل جملة المعادلات هو حل مسألة الأمثليات.

نسمي النقاط الناتجة عن حل جملة المعادلات $g(X) = 0$ بالنقاط الحرجة. أما إذا لم تكن مصفوفة هسيان موجبة محددة فإن النقاط الحرجة لا تمثل نهاية دنيا وإنما تمثل نهاية عليا أو نقطة سرجية.

مثال (3) أوجد النهاية الدنيا للتابع:

$$f(x, y, z) = (x-y)^2 + 2(x-3)^2 + 2(y+1)^2 + (z-y)^2$$

الحل: المطلوب هو إيجاد $\min f(x, y, z)$

نوجد أولاً التدرج $g(X)$

$$g(X) = \begin{bmatrix} 2(x-y)+4(x-3) \\ -2(x-y)+4(y+1)-2(z-y) \\ 2(z-y) \end{bmatrix}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 6x - 2y - 12 \\ -2x + 8y - 2z + 4 = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{matrix}$$

بحل جملة المعادلات الخطية نجد:

$$\begin{aligned} X &= 2 \\ Y &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

ومنه $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ النقطة الحرجة

$G(X) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة هسيان

$$|G_1| = |6| = 6 > 0$$

$$|G_2| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 6 > 0 \to 48 - 4 = 44 > 0$$

$$|G_3| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 96 + 0 - 0 = (0 + 8 + 24)$$

$$= 96 - 32 = 64 > 0$$

وبالتالي المصفوفة G موجبة محددة ومنه $(2,0,0)$ حل للمسألة

$\min f(x)$

$$f\ (2,0,0)=(2)^2+2(2-3)^2+2(1)^2$$

$$=4+2+2=8$$

النهاية الدنيا

مثال (4) أوجد حل المسألة التالية:

$$\min f\ (x,y,z)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y+z^2$$

الحل:

$$g(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2x-2y \\ -2x+y^2-3 \\ 2z \end{bmatrix}$$ [93]

$$g(x,y,z)=0 \Rightarrow \begin{matrix} 2x-2y=0 \\ -2x+y^2-3=0 \\ 2z=0 \end{matrix}$$

حصلنا على جملة معادلات ليست خطية بحل هذه الجملة نجد:

$$z=0$$

$$x=y$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$x=y=z$, z=0

$x=y=-1$, z=0

حصلنا على نقطتين حرجتين $(0,3,3),(0,1-,1-)$

$$g(x,y,z)=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2y & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$g(x,y,z)=\begin{matrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}$$

وهذه المصفوفة موجبة محددة ومنه النقطة (3,3,0) تمثل

نهاية دنيا للتابع $f(x,y,z)$

$$G(-1,-1,0)=\begin{matrix}2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}$$

وهذه المصفوفة ليست موجبة محددة وبالتالي النقطة:

(-1,-1,0) لا تمثل نهاية دنيا للتابع$f(x,y,z)$

4 – 3 طريقة نيوتن:

تعتمد طريقة نيوتن لحل مسألة الأمثليات على اختيار نقطة بداية x^1 وبالاعتماد على هذه النقطة وبمعرفة قيمة التابع $f(x)$ومشتقاته عند هذه النقطة يمكن إيجاد نقطة جديدة x^2 تكون أقرب إلى الحل المطلوب $\bar{x}$ من x^1 ثم نكرر العمليات لإيجاد x^3 وهكذا.. نحصل على المتتالية $\{x^k\}$ المتقاربة من الحل $\overline{\mathrm{X}}$ والذي يحقق الشرط $g(\bar{x})=0$ أو يحقق الشرط $|g(\bar{x})| < \varepsilon$ حيث ε مقدار صغير موجب، وفي بعض الحالات يمكن استبدال هذا الشرط بالشرط التالي:

$$\left|f(x^{k+1}) - f(x^k)\right| < \varepsilon$$

يمكن تلخيص طريقة نيوتن بالخطوات التالية:

1- لتكن X^1 نقطة ابتدائية معلومة ولنضع k=1

2- نوجد δ^k التي تحقق العلاقة التالية $G^k\delta^k = -g^k$

3- نعين النقطة الجديدة X^{k+1} من العلاقة $X^{k+1} = X^k + \delta^k$

4- إذا لم يتحقق الشرط $\left|g(X^k)\right| < \varepsilon$ نكرر العمل بدءاً من (2)

مثال (5) استخدم طريقة نيوتن لحل المسألة

$$\min f(x) = x^2 + 3(x-y)^2$$

بدءاً من الشعاع $X^1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

الحل: نحسب التدرج ومصفوفة هسيان فنجد:

$$g(x) = \begin{bmatrix}4x^3 + 6(x-y)\\ -6(x-y)\end{bmatrix} \Rightarrow g^1 = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

$$G(x)=\begin{bmatrix}12x^2+6 & -6\\ -6 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow G^1=\begin{bmatrix}18 & -6\\ -6 & 6\end{bmatrix}$$

G^1 موجبة محددة.

$$\delta^1=-[G^1]^{-1}\quad g^1=\frac{-1}{72}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.33\\ -0.33\end{bmatrix}$$

$$X^2=X^1+\delta^1+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.33\\ -0.33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.67\\ 0.67\end{bmatrix}$$

$$g^2=\begin{bmatrix}1.203\\ 0\end{bmatrix}\qquad G^2=\begin{bmatrix}11.38 & -6\\ -6 & 6\end{bmatrix}$$

$$\delta^2=\frac{-1}{32.28}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & 11.38\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.203\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.22\\ -0.22\end{bmatrix}$$

$$X^3=X^2+\delta^2=\begin{bmatrix}0.45\\ 0.45\end{bmatrix}$$

$$g^3=\begin{bmatrix}0.36\\ 0\end{bmatrix}\qquad G^3=\begin{bmatrix}8.43 & -6\\ -6 & 6\end{bmatrix}$$

$$\delta^3=\frac{-1}{14.58}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & 8.43\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.36\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.15\\ -0.15\end{bmatrix}$$

$$X^4=X^3+\delta^3=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.3\end{bmatrix}$$

$$g^{(4)}=\begin{bmatrix}0.108\\ 0\end{bmatrix}\qquad G^4=\begin{bmatrix}7.08 & -6\\ -6 & 6\end{bmatrix}$$

$$\delta^4=\frac{-1}{6.48}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & 7.08\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.108\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1\\ -0.1\end{bmatrix}$$

$$X^5 = X^4 + \delta^4 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$g^5 = \begin{bmatrix} 0.032 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G^5 = \begin{bmatrix} 6.48 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\delta^5 = \frac{-1}{2.88}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6.48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.032 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -0.06 \end{bmatrix}$$

$$X^6 = X^5 + \delta^5 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

$$g^6 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G^6 = \begin{bmatrix} 6.23 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\delta^6 = \frac{-1}{1.38}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6.23 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.04 \end{bmatrix}$$

$$X^7 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \qquad g^7 = \begin{bmatrix} 0.004 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G^7 = \begin{bmatrix} 6.12 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\delta^7 = \frac{-1}{0.72}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6.12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.004 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.03 \end{bmatrix}$$

$$X^8 = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.07 \end{bmatrix} \qquad g^8 = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\varepsilon > |g^8|$ ومنه يمكن اعتبار X^8 النهاية الدنيا من أجل تطبيق

طريقة نيوتن يجب أن تكون مصفوفة هسيان G^K

حيث K = 1,2,..... موجبة محددة كذلك يجب أن تكون المتتالية X^K التي نحصل عليها متقاربة من الحل $\bar{X}$ من أجل تحقق الشرطين السابقين نستخدم طريقة نيوتن السابقة مع خطة البحث .

4 – 4 طريقة نيوتن مع خطة البحث: تتلخص هذه الطريقة بما يلي:

1- لتكن X^1 نقطة ابتدائية معلومة ولنضع k=1

2- نعرف شعاع البحث s^k بالعلاقة التالية: $s^k = -[G^K]^{-1}g^k$

3- نعين العدد الموجب α^k الذي يمثل حلاً للمسألة التالية:

$$\min_{\alpha} h(\alpha) = f(x^k + \alpha s^k)$$

4- نوجد النقطة الجديدة من العلاقة

$$X^{k+1} = X^k + \alpha^k s^k$$

5- إذا لم يتحقق الشرط $|g(X^{k+1})| < \varepsilon$ نعيد الخطوات السابقة بدءاً من(2)

نسمي α^k بطول الخطوة.

مثال (6) استخدم طريقة نيوتن مع خط البحث التام كل المسألة:

$$\min f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$$

بدءاً من الشعاع $x^1 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1.25 \end{bmatrix}$

الحل : نوجد التدرج ومصفوفة هسيان

$$g(X) = \begin{bmatrix} 4x_1^3 & + & x_2 \\ x_1 & + & 2x_1 + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow g^1 = \begin{bmatrix} 0.4375 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$G(X) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} => G^1 = \begin{bmatrix} 6.75 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة هسيان G^1 موجبة محددة.

$$S^{-1} =-[G^1]^{-1}\, g^1 = \frac{-1}{12.5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4375 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.10 \end{bmatrix}$$

$$X = x^1 + \alpha s^1 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1.75 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.05\alpha \\ -1.25 & -0.1\alpha \end{bmatrix}$$

بالتعويض نجد:

$$h(\alpha) = f(x) = (0.75 - 0.05\alpha)^4 + (0.75 - 0.05\alpha)(-1.25 - 0.1\alpha) + (1 - 1.25 - 0.1\alpha)^2$$

لإيجاد النهاية الدنيا للتابع $h(\alpha)$ نشتق هذا التابع بالنسبة لـــ α ونجعل المشتق

مساوياً الصفر هذا يعني نوجد حل المعادلة $h'(\alpha) = 0$

والتي تمثل معادلة من الدرجة الثالثة لحلها نستخدم طريقة نيوتن

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{h'(\alpha_n)}{h''(\alpha_n)} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

نختار مثلاً $\alpha_1 = 1$ نجد : $\alpha_2 = 1.0246$

بالتعويض نجد $h' \cong 10^{-7} \cong 0$

هذا يعني أن α_2 تمثل أحد حلول المعادلة $h'(\alpha) = 0$

نأخذ نعوض $x^1 = 1.0246$ في العلاقة

$X^2 = X^1 + \alpha^1 s^1$ فنجد:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1.75 \end{bmatrix} + 1.0246 \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6988 \\ -1.3525 \end{bmatrix}$$

نحسب g^2 فنجد:

$$g^2 = \begin{bmatrix} 0.01231 \\ -0.006156 \end{bmatrix}$$

وبملاحظة أنع $|g^2| < \varepsilon$ فإن X^2 تمثل حل للمسألة ويكون

$$f^2 = f(x^2) = -0.5824$$

إن إيجاد α^{k} كما لاحظنا في المثال السابق ليس بالأمر السهل، ويمكن تعيين α^{k} كما يلي:

$$h'(\alpha) = \frac{dh}{d\alpha} = \frac{df(y)}{d\alpha}$$

حيث $y = x^k + \alpha s^k$

ومنه $$h'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{dy_i}{d\alpha}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} s^k = (s_1^k, s_2^k, \ldots . s_n^k) \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

$$= (s^k)^{\mathrm{T}} \nabla f(y) = (s^k)^{\mathrm{T}} \mathrm{g} \, (x^k + \alpha s^k)$$

ونجد أن إيجاد $\min\limits_{\alpha} h(\alpha)$ يؤول لإيجاد α التي تحقق العلاقة $h'(\alpha) = 0$

أي $(s^{\mathrm{k}})^{\mathrm{t}} g \, (x^k + \alpha s^k) = 0$

ولدينا $h(\alpha) = f(x^k + s s^k)$

ومنه $h(o) = f^k = f(x^k)$

$$h'(o) = (s^k)^{\top} g^k$$

إذا كان $h'(o) < o$ أي إذا كان $(s^k)^{\top} g^k < o$

فيوجد حل للمسألة $h'(\alpha) = 0$

نسمي المتراجحة $(s^k)^{\top} g^k < o$ خاصية الانحدار.

إن حل المعادلة $h'(\alpha) = 0$ وتعيين قيمة α يسمى بطريقة نيوتن مع خط البحث التام. ولكن حل المعادلة $h'(\alpha) = 0$ قد يحتاج إلى عدد كبير من التكرارات لذا يمكن أن نختار قيمة تقريبية α^k وفي هذه الحالة تسمى طريقة نيوتن مع خط البحث التقريبي ونختار $\alpha = 1$

فإذا تحققت المتراجحة $h(\alpha) \equiv f(x^k + \alpha s^k) < f(x^k) = f^k$

فإننا نفرض $\alpha^k = \alpha$ وإذا لم تتحقق المتراجحة نأخذ .... $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4},$

حتى تتحقق المتراجحة

يمكن استخدام الشرطين التاليين بدلاً من تحقق المتراجحة

(أ) $f(x^k + \alpha s^k) \le f^k + \rho\alpha \, (s^k)^{\top} g^k$

(ب) $(s^k)^{\top} g(x^k + \alpha s^k) \ge \sigma (s^k)^{\top} g^k$

حيث $o < \rho < \frac{1}{2}$ و $f \le \sigma < 1$

نسمي هذين الشرطين شروط وولف ــ باول

نلاحظ أنه إذا كانت مصفوفة هسيان G^{K} موجبة محددة فإن شرط الانحدار محقق وذلك لأن

$$(S^{K})^{T} g^{k} = -\left([G^{K}]^{-1} G^{K}\right)^{T} g^{k}$$
$$= -(g^{k})^{T} (G^{k})^{-T} g^{k} < 0$$

وإذا لم تكن (g^{k}) موجبة محددة يمكن تعديل طريقة نيوتن وذلك بتعريف شعاع البحث (s^{k}) كما يلي:

$$\left(G^{k}\ \gamma I\ \ \right) S^{k} = -g^{k}$$

بدلاً من $G^{k} s^{k} = -g^{k}$

حيث I المصفوفة الواحدية و γ عد صحيح موجب.

مثال (7) استخدم طريقة نيوتن مع خط البحث التقريبي لحل المسألة التالية:

$$\min f(x) = x_1^4 - 3x_1 x_2 + (x_2 + 2)^2$$

الحل: نختار $X^1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ونحسب التدرج ومصفوفة هسيان:

$$g(x) = \begin{bmatrix}4x_1^3 & -3x_2\\ -3x & +2x_2 + 4\end{bmatrix} \Rightarrow \quad g^1 = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

$$G(x) = \begin{bmatrix}12x_1^3 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow G^1 = \begin{bmatrix}0 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة هسيان ليست موجبة محددة لذلك نستخدم طريقة نيوتن المعدلة.

ليست موجبة محددة $G^1 + I = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

أيضاً ليست موجبة محددة $G^1 + 2I = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

موجبة محددة $G^1 + 3I = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

نرمز لهذه المصفوفة بالمركز $\bar{G}$ أي $\bar{G} = G^1 + 3I$

ثم نحسب شعاع البحث S

$$S^1 = -(\bar{G})^{-1} g^1 = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = x^1 + \alpha s^1 = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix}$$

بالتعويض نجد:

$h(\alpha) = f(x)= (-2\alpha)^{4} - 3(-2\alpha) + (-2\alpha + 2)^{2}$

$= 16\alpha 4 - 12\alpha^2 + 4(1-\alpha)^{2}$

نلاحظ أن إيجاد جذر للمعادلة $h'(\alpha) = 0$ ليس بالأمر السهل لذلك نأخذ خط البحث التقريبي

نختار $\alpha = 1$ فنجد $h(1) = 4$

ولدينا $h(1) = f^1 = f(X^1) = 4$

ومنه المتراجحة $h(\alpha) \equiv f(x^k + \alpha s^k) < f^k$ غير محققة

لذلك نختار $\alpha = \frac{1}{2}$ فنجد:

$$h\left|\frac{1}{2}\right| = 16\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{16}{16} - \frac{12}{4} + \frac{4}{4} = \frac{16-4\delta+16}{16} = -1$$

ومنه $h\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 4 = f^1$

هذا يعني أن المتراجحة $h(\alpha) \equiv f(x^k + xs^k) < f^k$ محققة من أجل $\alpha = \frac{1}{2}$

لذلك نعرف $\alpha^1 = \frac{1}{2}$ فنجد:

$$X^2 = X^1 + \alpha^1 s^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$g^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad G^2 = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة هسيان موجبة محددة ومنه

$$S^2 = -[G^2]^{-1} g^2 = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.8667 \\ -4.4 \end{bmatrix}$$

$$x = x^2 + \alpha s^2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.8667\alpha \\ -1 & -4.4\alpha \end{bmatrix}$$

$$h(\alpha) = (-1 - 0.8667\alpha)^4 - 3(-1 - 0.8667\alpha)(-1 - 4.4\alpha)$$
$$+ (1 - 4.4\alpha)^2$$

نأخذ $\alpha = 1$ إذا لم تتحقق المتراجحة $h(1) < f^2$

نأخذ $\alpha = \frac{1}{2}$ أو $\alpha = \frac{1}{4}$ حتى تتحقق المتراجحة $h(\alpha) < f^2$

ونكتب $x^3 = x^2 + \alpha^2 s^2$

وهكذا نتابع التكرار حتى نحصل على المطلوبة $(|g^k| < \varepsilon)$

5-4 – طريقة التدرج: تتلخص هذه الطريقة بما يلي:

1- لتكن X^1 نقطة ابتدائية ومن أجل k=1,2,3,... نعرف شعاع البحث s^k

كما يلي:

2- $s^k = -g^k$

3- نحسب α^k التي تمثل تقريب للنهاية الدنيا التالية:

$$\min_{\alpha} f(x^k + \alpha s^k)$$

4- نحسب $x^{k+1} = x^k + \alpha^k s^k$

5- نضع $k=k+1$ ثم نعود للخطوة الثالثة:

ونلاحظ أن اختيارنا لـــ g^k يحقق شرط الانحدار أي

$$(s^k)^T g^k = -(g^k)^T \, g^k = -\|g^k\|_2^2 < 0$$

مثال (8) استخدم طريقة التدرج مع خط البحث التام لإيجاد النهاية الدنيا للتابع التالي:

$$f(x) - \; 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1$$

الحل:

$$g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2x_2 + 1 \\ -2x_1 & +2x_2 \end{bmatrix}$$

نختار $X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$s^1 = -g^1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g(x+\alpha s)=\begin{bmatrix}6(x_1+\alpha s_1)-2 & (x_2+\alpha s_2)+1\\ -2(x_1+\alpha s_1)+2 & (x_2+\alpha s_2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6x_1 & -2x_2+ & 2\alpha(3s_1-s_2)\\ \\ -2x_1 & +2x_2+ & 2\alpha(s_2-s_1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & -30\alpha\\ & 10\,\alpha\end{bmatrix}$$

$$\frac{df}{d\alpha}\,(x^k+\alpha s^k)=g\quad (x^k+\alpha s^k)^T S^K=0$$

ومنه

$$\begin{bmatrix}5-30\alpha\\ 10\alpha\end{bmatrix}^T\quad\begin{bmatrix}-5\\ 0\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow[5-30\alpha\quad 10\alpha]\begin{bmatrix}-5\\ 0\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -5(5-30\alpha)=0\quad => \ \alpha\ =\frac{5}{30}=\frac{1}{6}>0$$

$$X^2=\ X^1+\alpha^1 S^1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-5\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ 1\end{bmatrix}$$

نحسب f^2 فنجد:

$$f^2 = \frac{11}{12} < f^1 = 3$$

ثم نعيد نفس الخطوات السابقة فنجد:

$$g^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ \overline{3} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$s^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 => \frac{1}{9}(-5)(5 - 10\alpha) = 0 \overset{=}{\Rightarrow}> \alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$x^3 = x^2 + \alpha^2 s^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{6} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$f^3 = \frac{1}{36}(3 - 2 + 1 + 6) = \frac{2}{9} < f^2 = \frac{11}{12}$$

وهنا نتابع بإعادة نفس الخطوات حتى الحصول على الدقة المطلوبة.

6-4 طريقة فليتشر ريفز تتلخص هذه الطريقة بما يلي:

1- لتكن X^{1} نقطة ابتدائية ونضع $k = 1$

2- $s^{1} = -g^{1}$

3- $s^{k+1} = -g^{k+1} + \beta s^{k}$

حيث $$\beta = \frac{(g^{k+1})^{T} g^{k+1}}{(g^{k})^{T} g^{k}} = \frac{\left\|g^{k+1}\right\|_{2}^{2}}{\left\|g^{k}\right\|_{2}^{2}}$$

وطريقة فليتشر- ريفز تحقق شرط الانحدار وذلك لأن:

$$g(x^{k} + \alpha^{k})^{T} s^{k} = (g^{k+1})^{T} s^{k} = 0$$
$$(g^{1})^{T} s^{1} = -(g^{1})^{T} g^{1} < 0$$

أي أن شرط الانحدار محقق من أجل الخطوة الأولى

كذلك

$$(g^{k+1})^{T} s^{k+1} = -(g^{k+1})^{T} g^{k+1} + \beta (g^{k+1})^{T} s^{k}$$

$$= -(g^{k+1})^{T} g^{k+1} < 0$$

هذا يعني أن طريقة فليتشر- ريفز تحقق شرط الانحدار باستخدام خط البحث التام من أل جميع قيم k

مثال (9) استخدم طريقة فليتشر- ريفز لحل المثال السابق

الحل: وجدنا

$$s^{1}=-g^{1}=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}$$

$$x^{2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\1\end{bmatrix}\qquad \mathrm{g}^{2}=\begin{bmatrix}0\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

$$s^{2}=-g^{2}+\beta s^{1}$$

لنحسب β

$$\beta=\frac{(g^{2})^{T}g^{2}}{(g^{1})^{T}g^{1}}=\frac{\left\|g^{2}\right\|_{2}^{2}}{\left\|g^{1}\right\|_{2}^{2}}=\frac{\frac{25}{9}}{25}=\frac{1}{9}$$

ومنه

$$s^{2}=\begin{bmatrix}0\\\frac{-5}{3}\end{bmatrix}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=\frac{5}{9}\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

لنحسب α^2

$$g(X^{2}+\alpha s^{2})^{T}s^{2}=g(\begin{bmatrix}0\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}+2\alpha(\frac{5}{9})\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix})^{T}s^{2}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} - \frac{20}{9}\alpha \end{bmatrix}\right)^T \left(\frac{-5}{9}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{20}{9}\alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{3}{4}$$

$$X^3 = X^2 + \alpha^2 s^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{4}\left(\frac{5}{9}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{12}\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{5}{12} \\ 1 - \frac{15}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-5}{12} \\ \frac{12-15}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-13}{12} \\ \frac{-3}{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه $g^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

وبالتالي فإن $\overline{X} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$ تمثل حل للمسألة

مثال (10) أوجد النهاية الدنيا للتابع $f(X)$ باستخدام طريقة فلينتشر – ريفز (FR) مع خط البحث التقريبي وقبول α^k عندما يتحقق الشرط التالي $f^{k+1} < f^k$

حيث أن $f(X) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1$ و $X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

الحل: $$g(X) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 1 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$s^1 = -g^1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بما أننا نتعامل مع خط البحث التقريبي نختار $\alpha = 1$ فنجد:

$$X^2 = X^1 + \alpha s^1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(X^2) = f^2 = 53 > f^1 = 3 = f(X^1)$$

هذا يعني أن $\alpha = 1$ مرفوضة لذلك نختار $\alpha = \frac{1}{2}$ فنجد:

$$X^{2} = X^{1} + \alpha s^{1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه $f^{2} = \frac{37}{4} > f^{1}$

أيضاً نجد $\alpha = \frac{1}{2}$ مرفوضة لذلك نختار $\alpha = \frac{1}{4}$ فنجد:

$$X^{2} = X^{1} + \alpha s^{1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f^{2} = \frac{23}{16} < 3 = f^{1}$$

هذا يعني أن $\alpha = \frac{1}{4}$ مقبولة ومنه:

$$g^{2} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

نحسب β فنجد:

$$\beta = \frac{(g^{2})^{T} g^{2}}{(g^{1})^{T} g^{1}} = \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}}{25+0} = \frac{1}{2}$$

ومنه: $$s^2 = -g^2 + \beta s^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

ثم نأخذ من جديد $\alpha = 1$ فنجد:

$$X^3 = X^2 + \alpha s^2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

ومنه: $$f^3 = f(X^3) = \frac{23}{16} = f^2$$

هذا يعني أن $\alpha = 1$ غير مقبولة لذلك نختار $\alpha = \frac{1}{2}$ فنجد:

$$X^3 = X^2 + \alpha s^2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

$$f^3 = -\frac{1}{8} < f^2 = \frac{23}{16}$$

ومنه $\alpha = \frac{1}{2}$ مقبولة وبالتالي $g^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

والنهاية الدنيا للتابع هي $X^{3} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$

7-4 طرق شبيهة بطريقة نيوتن:

توجد طرق تشبه طريقة نيوتن حيث نستبدل في هذه الطرق مصفوفة هسيان $\left[G^{k}\right]^{-1}$ بالمصفوفة H^{k+1} للتخلص من حساب المشتق الثاني G في كل تكرار وهذا الأمر قد يكون صعباً في بعض الأحيان ويمكن تعيين H^{k+1} كما يلي:

ننشر التابع g^{k+1} في جوار النقطة X^{k} حسب تايلور فنجد:

$$g^{k+1} = g(X^{k} + \delta^{k}) = g^{k} + G^{k}\delta^{k} + \frac{(\delta^{k})^{T} G^{k} \delta^{k}}{2} + \ldots..$$

وإذا أهملنا الحدود ذات المراتب الدنيا نجد:

$$g^{k+1} - g^{k} = G^{k}\delta^{k}$$

ومنه

$$\delta^{k} = \alpha^{k} s^{k} = x^{k+1} - x^{k}$$

$$\delta^{k} = \left[G^{k}\right]^{-1}\gamma^{k} = \left[G^{k}\right]^{-1}(g^{k+1} - g^{k})$$

فإذا كان H^{k+1} تقريب لـــ $\left[G^k\right]^{-1}$ فإنه يتحقق الشرط التالي:

$$H^{k+1}\gamma^k = \delta^k$$

والذي يسمى شرط كوزاي نيوتن

وبما أن H تشبه G فإننا نختار H^{k+1} موجبة محددة ومتناظرة ونختار H^1 موجبة محددة $H^1 = I$

إن فكرة الطرق الشبيهة بطريقة نيوتن تعتمد على معرفة المصفوفة H^1 ومن ثم تعديلها على نحو مناسب للحصول على مصفوفة جديدة H^{k+1} نحقق شرط كوزاي نيوتن ونذكر فيما يلي بعض الطرق الشهيرة.

1- طريقة الرتبة الواحدة: في هذه الطريقة لتصحيح H^k نضيف إلى هذه المصفوفة مصفوفة ذات رتبة واحدة كما يلي:

$$H^{k+1} = H^k + \alpha uu^T$$

ومنه باستخدام شرط كوزاي نيوتن نجد:

$$\delta^k = H^k\gamma^k + (au^T\gamma^k)u$$

ومنه $\delta^k - H^k\gamma^k = (au^T\gamma^k)u$

بمطابقة الطرفين نجد:

$$u = \delta^k - H^k \gamma^k \quad \text{و} \quad a u^T \gamma^k = 1$$

ومنه $a = \dfrac{1}{u^T \gamma^k}$

بالتعويض نجد:

$$H^{k+1} = H^k + \frac{(\delta^k - H^k \gamma^k)(\delta^k - H^k \gamma^k)^T}{(\delta^k - H^k \gamma^k)^T \gamma^k}$$

مثال (11) استخدم طريقة الرتبة الواحدة مع خط البحث التام لحل المسألة التالية:

$$\min f(X) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 + x_3 + 1$$

حيث: $X^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

الحل: بفرض $H^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ نحسب s^1 حيث $s^1 = -H^1 g^1$

$$g(X) = \begin{bmatrix} 6x_1 - x_2 \\ 4x_2 - x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_2 + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$s^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نعين α بحيث $\min h(\alpha) f\ (X^1 + \alpha S^1)$

$$X^1 + \alpha S^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

$$f\ (X^1 + \alpha S^1) = 0 + 0 + \alpha^2 - 0 - 0 - \alpha + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1$$

$$h'(\alpha) = 2\alpha - 1$$

$$h'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$g^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta^1 = X^2 - X^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^1 = g^2 - g^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$H^1\gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^1 - H^1\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(\delta^1 - H^1\gamma^1)^T = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(\delta^1 - H^1\gamma^1)^T \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = -0.75$$

بتطبيق طريقة الرتبة الواحدة نجد:

$$H^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\frac{\begin{bmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-0.5&0.5\end{bmatrix}}{-0.75}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.7&0.3\\0&0.3&0.7\end{bmatrix}$$

$$s^2=-H^2g^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-0.7&-0.3\\0&-0.3&-0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0.5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-0.35\\-0.15\end{bmatrix}$$

لنعين α

$$X^2+\alpha s^2=\begin{bmatrix}0\\0\\-0.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-0.35\alpha\\-0.15\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-0.35\alpha\\-0.5-0.15\alpha\end{bmatrix}$$

$$f(X^2+\alpha s^2)=0+2(0.12)\alpha^2+(-0.5-0.15\alpha)^2-0+$$
$$0.35\alpha(-0.5-0.15\alpha)-0.5-0.15\alpha+1$$
$$=0.21\alpha^2-0.18\alpha+0.75$$

$$h'(\alpha) = 0.42\alpha - 0.18$$
$$h'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.43$$

$$X^3 = X^2 + (0.43)s^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.15 \\ -0.56 \end{bmatrix}$$

$$g^3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.04 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

وهكذا نتابع للحصول على الدقة المطلوبة.

2- طريقة DFP (دافيدون – فليتشر – باول)

في هذه الطريقة لتصحيح H^k نضيف إلى هذه المصفوفة مصفوفتين ذواتي رتبة واحدة كما يلي:

$$H^{k+1} = H^k + auu^t + bvv^t$$

نجد a و b و كما في الطريقة السابقة نستخدم شرط كوزاي نيوتن فنجد:

$$\delta^k = H^k\gamma^k + (au^T\gamma^k)u + (bv^T\gamma^k)v$$

ومنه
$$\delta^k - H^k\gamma^k = (au^T\gamma^k)u + (bv^T\gamma^k)v$$

وهذه العلاقة صحيحة من أجل الاختيار التالي:

$$au^T \gamma^k = 1, u = \delta^k, bv^T \gamma^k = -1, v = H^k \gamma^k$$

بالتعويض نجد:

$$H_{DFP}^{k+1} = H^k - \frac{H^k \gamma^k (\gamma^k)^T H^k}{(\gamma^k)^T H^k \gamma^k} + \frac{\delta^k (\delta^k)^T}{(\sigma^k)^T \delta^k}$$

وهذه العلاقة تسمى بطريقة DFP

مثال (12) استخدم طريقة DFP مع خط البحث التام لحل المسألة التالية:

$$\min f(X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2$$

حيث $X^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

الحل: بفرض $H^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ نحسب s^1 حيث $s^1 = -H^1 g^1$

$$g(X) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ومنه $s^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

نعين α

$$X^1 + \alpha s^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= f(X^1 + \alpha s^1) = f(-\alpha, \alpha) \\ &= 2\alpha^2 + \alpha^2 - 2X^2 + (-\alpha) - \alpha \ = \alpha^2 - 2\alpha \end{aligned}$$

$$h'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - 2 = 0$$

ومنه $\alpha = 1$

$$X^2 = X^1 + \alpha^1 s^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^1 = X^2 - X^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^1 = g^2 - g^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\delta^1)^T \gamma^1 = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} = 2$$

$$(\gamma^1)^T H^1 \gamma^1 = 4 \qquad\qquad H^1\gamma^1 = I\gamma^1 = \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$$

بالتعويض بطريقة DFP نجد:

$$H^2_{DFP} = I - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\-0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة موجبة محددة.

$$s^2 = -H^2 g^2 = -\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\-0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

لنعين α

$$h(\alpha) = f(X^2 + \alpha s^2) = f(-1, 1+\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1$$

$$h'(\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\alpha - 1 = 0$$

ومنه $\alpha = \frac{1}{2}$

$$X^{3} = X^{2} + \alpha^{2} s^{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$g^{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن النهاية $X^{3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ هي النهاية الدنيا للتابع $f(X)$

تمارين

1- أوجد التدرج ومصفوفة هسيان للتابع

$$f(X)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)e^{x_1-x_2}$$

2- أوجد القيمة الصغرى لكل من التوابع التالية:

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-6xy+y^2+200$$

$$f(x,y)=x^2-e^{y^2}$$

$$f(x,y,y)=x^2-y^2-2yz-2z^2+6y-10z+1$$

3- بين أن $g(\overline{X})=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و $G(\overline{X})$ موجبة محددة للتابع

$$f(X)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$$

حيث $\overline{X}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

4- عين $g(\overline{X})$ وبين أن $G(\overline{X})$ ليست موجبة محددة للتابع

$$f(X)=x_1^4+x_1x_2+(1+x_2)^2$$

حيث $\overline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ثم تحقق أن $\overline{X} = \begin{bmatrix} 0.6959 \\ -1.3479 \end{bmatrix}$ تمثل نهاية دنيا

5- استخدم طريقة نيوتن لحل المسألة التالية:

$$\min f(X) = x_1^4 + 3(x_1 - x_2)^2$$

حيث $X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6- أوجد القيم الدنيا للتابع $f(X)$ ثم حدد نوعه حيث

$$f(X) = x_1^3 - x_2^3 + 9x_1x_2$$

7- استخدم طريقة نيوتن المعدلة مع خط البحث التام لإيجاد النهاية الدنيا للتابع

$$f(X) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)e^{x_1 - x_2}$$

حيث $X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

8- استخدم طريقة نيوتن مع خط البحث التقريبي لحل المسألة التالية:

$$\min f(X) = 100(x_1^2 - x_2^2) + (1 - x_1)^2$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

9- برهن أن التابع التالي تربيعي

$$f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_1$$

10- استخدم طريقة الرتبة الواحدة مع خط البحث التقريبي لحل المسألة

$$\min f(X) = x_1^2 + 3\left(x_1 - x_2\right)^2$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

11 – استخدم طريقة DFP لحل المسألة التالية:

$$\min f(X) = 100(x_1^2 - x_2^2) + \left(1 - x_1\right)^2$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

12 – استخدم طريقة DFP لحل المسألة التالية:

$$\min f(X) = e^{x_1 - 1} + e^{-x_2 - 1} + \left(x_1 - x_2\right)^2$$

حيث $X^{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

الفصل الخامس

تقريب التوابع

Function approximation

تقريب التوابع بحدوديات

الاستيفاء

القريب بواسطة كثيرات حدود ليجندر

طريقة المربعات الصغرى

1-5 تمهيد:

إذا كان التابع $y = (x)$ مُعطى بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	$y_i = f(x_i)$	$\cdots$	y_n

أي أننا نعرف قيم التابع من أجل عدة قيم للمتحول x في مجالٍ ما وإذا أردنا معرفة قيمة التابع عند نقطة واقعة بين قيم x الموجودة في الجدول وبشكل عام إذا كانت لدينا مجموعة النقاط

$$(x_i, y_i) : i = 0,1,2,.....n$$

في المستوي xoy فكيف يمكن استخدام هذه النقط من أجل معرفة نقط جديدة، لحل هذه المشكلة نفترض وجود منحنٍ ممثل لتابع $y = f(x)$ مُعطى بشكل تحليلي وأن هذا المنحني يمر من النقط المعطاة. وهذا يعني أننا نبحث عن منحنٍ فُقدت جميع نقاطه ما عدا بعض النقط، ونريد استخدام هذه النقط لإيجاد تصور تقريبي عن هذا المنحني المفقود أي إيجاد معادلة هذا المنحني أو إيجاد صيغة تحليلية للتابع المفقود الذي يمثله المنحني مثل $y = f(x) = x^2$

أو $y = f(x) = 3x^2 + e^2$ وبالتالي يمكن إيجاد قيمة التابع

من أجل أي قيمة للمتحول x واقعة في المجال $[x_0, x_1, \ldots. x_n]$

ثمّة الكثير من الطرق التي تستخدم النقط المعطاة لإيجاد منحنٍ أو لتمريره من هذه النقط نتوقع أنه قريب من المنحني المفقود.

ولقد درسنا في مقرر التحليل العددي (1) الكثير من الطرق لإيجاد الحدودية $p_n(x)$ التي تأخذ قيم التابع $y = (x)$ نفسها في النقط

$$x_i : i = 0, 1, 2, \ldots., n$$

من هذه الطرق: الطريقة العامة، طريقة لاغرانج، طريقة نيوتن الأمامية وغيرها....

5-2 الحدوديات (كثيرة الحدود) تستخدم الحدوديات بشكل كبير في التحليل العددي وبخاصة في مجال البحث عن قيمة الحدودية عند قيمة معينة للمتحول x والحدودية من الدرجة n تُعطى بالشكل التالي:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

حيث $a_i \ : i = 0,1,2,\dots,n$ تسمى بالأمثال أو المعادلات الثابتة وعددها $n+1$

نظرية (1) إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد n_ε وحدودية $p_n(x)$ بحيث يتحقق $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ وذلك من أجل جميع قيم x في المجال $[a,b]$

نلاحظ أنه من اجل استكمال قيم التابع غير الموجودة في الجدول المعطى نقرب التابع $y = f(x)$ بحدودية من الدرجة n بحيث

$$p_n(x_i) = f(x_i) = y_i \qquad : i = 0,1,2,\dots\dots,n$$

إن مسألة تعيين الحدودية $p_n(x)$ التي تمكننا من تعيين قيم التابع $f(x)$ عند نقط واقعة بين النقط $x_0, x_1, \dots\dots, x_n$ تسمى بالاستيفاء أو الاستكمال وتسمى الحدودية $p_n(x)$ بحدودية الاستيفاء كما تسمى النقط $x_0, x_1, \dots\dots, x_n$ بنقط الارتكاز

3-5 الاستيفاء الشرائحي: نعلم أنه كلما زدنا عدد النقاط فإننا نتوقع أن نحصل على كثير حدود ذي درجة أعلى أقرب إلى التابع المعطى ، ولكن هذا التوقع غير صحيح عامةً، إذ إنه يوجد بعض التوابع التي لا يتحقق من أجلها هذا التوقع فمثلاً إذا أخذنا التابع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ في المجال $[-5,5]$ وشكلنا

جدولاً لقيمه بدءاً من النقطة 5- حتى 5 وبخطوة مقدارها $h = 2$ ولو كتبنا كثير الحدود التقريبي الموافق وفق طريقة نيوتن الأمامية مثلاً، ثم نظمنا جدولاً لقيم التابع بخطوة $h = 1$ لحصلنا على كثير حدود ذي درجة أعلى. إلا أن كثير الحدود الأخير سيتذبذب بين النقط المأخوذة أخيراً بسعة أكبر من سعة تذبذبه من أجل كثير الحدود ذي الدرجة الأقل. وهكذا كلما زدنا عدد النقط المأخوذة من أجل الاستكمال لهذا التابع فإن سعة الذبذبة تزداد وتبتعد عن التابع الحقيقي. نلجأ في هذه الحالة إلى الاستيفاء الشرائحي والذي نلخصه كما يلي:

نقرب التابع $y = f(x)$ المعرف في المجال $[a,b]$ بوساطة تابع $g(x)$ نحصل عليه كما يلي:

نجزء المجال $[a,b]$ إلى مجالات جزئية بالنقط $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ بحيث $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b \,; x_{i+1} - x_i = h$

ويتم تعريف $g(x)$ بالشكل

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & , \quad a \le x \le x_1 \\ g_2(x) & , \quad x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \\ g_n(x) & , \quad x_{n-1} \le x \le b \end{cases}$$

حيث $g_1(x), g_2(x), \ldots\ldots\ldots\ldots, g_n(x)$ كثيرات حدود من الدرجة n

إن أشهر كثيرات الحدود المستخدمة هي كثيرات حدود من الدرجة الثالثة.

هذا يعني أنه يتم اختيار $g_1(x), g_2(x), \ldots\ldots\ldots\ldots, g_n(x)$ على أنها كثيرات حدود من الدرجة الثالثة ويتم تعيين أمثال كل كثير حدود كما يلي:

نفرض $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b$

والتابع $g(x)$ يُعطى بوساطة كثير حدود من الدرجة الثالثة ويكون $g(x) = f(x)$

حيث أن $g(x)$ يحقق الشروط التالية:

1- $g(x)$ مستمر وقابل للاشتقاق مرتين متتاليتين في المجال $[a, b]$

2- $g(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة، وذلك بين كل نقطتين متتاليتين أي في كل المجالات $[x_i, x_{i+1}]$ وليكن

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

3- إن $g(x)$ يحقق خواص الاستيفاء

$$g(x_i) = y_i = f(x_i) : i = 0, 1, 2, \ldots., n$$

4- إن $g(x)$ يحقق المعادلة $g''(x_0) = g''(x_n) = 0$ لحساب التابع $g(x)$ المعرف سابقاً فإننا نحتاج لحساب:

$$a_i, b_i, c_i, d_i : i = 0, 1, 2, \ldots., n - 1$$

والتي هي عوامل كثير الحدود $p_i(x)$

من (3) في تعريف $g(x)$ نحصل على جملة الشروط التالية:

$$y_i = p_i(x_i) = a_i$$
$$y_{i+1}(x) = p_i(x_{i+1}) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3$$

حيث $i = 0,1,2,\ldots\ldots,n-1 : h_i = h_{i+1} - x_i$

إن مجموعة هذه الشروط تمثل جملة معادلات عددها $2n$ وتحتوي على مجاهيل عددها $4n$ هذه المجاهيل هي العوامل المذكورة أعلاه ، لذلك نحتاج إلى $2n$ معادلة أخرى، سنحصل عليها من (1) و(2) و(4) في تعريف التابع $g(x)$

من (1) لدينا:

$$p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i), = p_i''(x_i) = p_{i-1}''(x) : i = 1,2,\ldots\ldots,n-1$$

وهذا يؤدي إلى جملة الشروط

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$$
$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}$$
$$i = 0,1,2,\ldots\ldots,n-2$$

ومن (4) نحصل على الشرطين المتبقيين

$$c_0 = 0$$
$$c_{n-1} + 3d_{n-1} h_{n-1} = 0$$

وبحل جملة المعادلات نجد:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} : i = 0,1,2,\ldots\ldots, n-2$$

$$d_{n-1} = \frac{-c_{n-1}}{3h_{n-1}}$$

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i)$$

$$i = 0,1,2,\ldots\ldots, n-2$$

$$b_{n-1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{2}{3}h_{n-1}c_{n-1}$$

بالتعويض نجد:

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2}$$

$$= \frac{3}{h_{i+1}}(a_{i+2} - a_{i+1}) - \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i)$$

$$i\ 0-,1,2,\ldots\ldots, n-2$$

مثال (1) قرب التابع $f(x) = x^4$ في المجال $[-1,1]$

باستخدام الاستيفاء الشرائحي

الحل:

نقسم المجال $[-1,1]$ إلى جزأين متساويين بالنقطة $x = 0$ فنجد:

$$x_0 = -1 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , x_2 = 1$$

ونقترح $g(x)$ بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, -1 \le x < 0 \\ p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ومن الشروط $p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$

نجد: $a_0 = b_0 = 0$

كما نحصل من الشرط $p_0'(0) = p_1'(0)$

على أن $a_1 = b_1$

ومن الشرط $p_0''(0) = p_1''(0)$ على أن $a_2 = b_2$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x \\ p_1(x) &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x \end{aligned}$$

ويتم تعيين الأمثال الأربعة الباقية من الشروط:

$$p_0(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 = f\ (-1) = 1$$
$$p_1(1) = b_3 + a_2 + a_1 = f\ (1) = 1$$
$$p_0'(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f\ '(-1) = -4$$
$$p_1'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = f\ '(1) = 4$$

بحل هذه الجملة من المعادلات نجد:

$$a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = -2, b_3 = 2$$

ومنه فإن التابع $g(x)$ يأخذ الشكل التالي:

$$g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2, -1 \le x \le 0 \\ 2x^3 - x^2, 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

4-5 التقريب بكثيرات حدود تشيبتشيف

نعرف كثيرات حدود تشيبتشيف بالعلاقة التالية:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

حيث إن $T_n(x)$ يحقق الشرط $T_n(x) = T_{-n}(x)$

و $T_n(x)$ معرف ضمن المجال $[-1,1]$

في حال $n = 0$ نجد $T_0(x) = 1$

في حال $n = 1$ نجد $T_1(x) = x$

إذا فرضنا $x = \cos a$ فإن $a = \cos^{-1} x$

و $T_n(x) = \cos(na)$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$T_2(x) = \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a = 4x^3 - 3x$$

بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\cos(n+1)a + \cos(n-1)a = 2\cos a \cos na$$

نحصل على العلاقة التالية:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

وهي علاقة تدريجية تعطي أي تابع من توابع تشيبتشيف بدلالة التابعين السابقين فمثلاً من أجل $n = 3$ نجد:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) \\ &= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

ومن أجل $n = 4$ نجد:

$$T_4(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

ومنه فإن $T_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n وأن الحد الأكبر قوة x^n أمثاله هو 2^{n-1}

مثال (2) أثبت أن التابع $T_n(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

الحل: بفرض $\theta=\cos^{-1}x$ فإن

$$y=T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)=\cos n\theta$$

ومنه: $x=\cos\theta$ و $x^2=1-\sin^2\theta$ و

$$1=-\sin\theta\theta'$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=-n\sin n\theta\theta'=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$y''=\frac{x^2\sin\theta\cos\theta\theta'-n\cos\theta\sin n\theta\theta'}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-n^2\cos n\theta}{\sin^2\theta}+\frac{y'\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-n^2y}{1-x^2}+\frac{xy'}{1-x^2}$$

وهذه المعادلة تكتب كما يلي:

$$(1-x^2)y''-xy'+x^2y=0$$

تعريف (1) نقول عن التابعين الحقيقيين $g(x)$, $h(x)$ المعرفين على المجال $[a,b]$ إنهما متعامدان في ذلك المجال إذا كان:

$$\int_a^b g(x)h(x) = 0$$

لتكن لدينا جملة التوابع الحقيقية

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\ldots, \varphi_n(x), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

المعرفة والمستمرة في المجال $[a,b]$ وأن أياً منها لا يطابق الصفر في ذلك المجال.

نقول عن جملة التوابع السابقة أنها متعامدة في المجال $[a,b]$ إذا كان

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) = 0 \quad , \quad m \neq n$$

مثال (3) أثبت أن توابع تشيبتشيف أو كثيرات حدوده متعامدة وتحقق مما يلي:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} o & , \quad i \neq j \\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad i = j \neq 0 \\ \pi & , \quad i = j = 0 \end{cases}$$

الحل : نفرض $x = cos\,\theta$ فنجد :

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\pi}(\cos i\theta)(\cos j\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(i+j)\theta+\cos(i-j)\theta\right]d\theta$$

إذا كان $i \neq j$ فإن

$$I=\left[\frac{\sin(i+j)\theta}{2(i+j)}+\frac{\sin(i-j)\theta}{2(i-j)}\right]_0^{\pi}=0$$

وإذا كان $i = j \neq 0$ فإن

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos 2i\theta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2i\theta}{2i}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}[\theta]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

بينما إذا كان $i = j = 0$ فإن

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}d\theta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

مثال (4) أثبت أن توابع تشيبتشيف لها n جذرا ضمن المجال $[-1,1]$

الحل : نفرض $x = cos\,\theta$ ومنه $\theta = cos^{-1}x$

$$T_n(x) = cos\, n\,\theta$$

وبما أن $-1 \le x \le 1$ فإن $0 \le \theta \le \pi$ وبالتالي فإن جذور التابع $T_n(x) = cos\, n\,\theta$ تقع ضمن المجال $0 \le \theta \le \pi$ فإذا وضعنا $T_n(x) =$ $cos\, n\theta = 0$ ينتج لدينا

$$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k = 0,1,2,\dots\dots,n-1$$

$$\theta = \frac{2k+1}{2n}\pi \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots\dots,n-1$$

وهذه الجذور والتي عددها n واقعة في المجال $[-1,1]$

يمكن حساب قوى x بدلالة التوابع $T_n(x)$ وذلك كما يلي :

نعلم أن $T_0 = 1 \quad , \quad T_1 = x$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

ومنه

$$T_2(x) = 2x^2 - T_0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2)$$

وهكذا نحصل على

$$x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3)$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(T_0 + 4T_2 + T_4)$$

5 – 5 التقريب بكثيرات حدود ليجندر

نعرف كثيرات حدود ليجندر بالعلاقة التالية :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

في حال $n = 0$ نجد : $P_0(x) = 1$

في حال $n = 1$ نجد : $p_1(x) = \frac{1}{2.1!} \frac{d}{d\pi} (x^2 - 1) = x$

في حال $n = 2$ نجد: $p_2(x) = \frac{1}{2^2.2!} \frac{d^2}{dx_2} (x^2 - 1)^2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

وفي حال $n = 3$ نجد:

$$p_3(x) = \frac{1}{2^3.3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^2 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

إن توابع ليجندر تحقق العلاقة التدريجية التالية:

$$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)\, x p_n(x) - n p_{n-1}(x)$$

التي تعطي أية كثيرة حدود من كثيرات حدود ليجندر بدلالة كثيري الحدود السابقتين وبالتالي يمكن حساب كثيرات حدود ليجندر من مراتب أعلى فمثلاً:

$$p_4(x) = \frac{7}{4}\, x\, p_3(x) - \frac{3}{4}\, p_2(x)$$

$$= \frac{7}{4}x\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(35n^4 - 30n^2 + 3)$$

مثال (5) أثبت أن $\int_{-1}^{1} x^k p_n(x)\,dx = 0$

حيث $k=0,1,2,....n-1$

الحل: نكامل بالتجزئة فنجد:

$$\int_{-1}^{1} x^k pn(n)dn = \frac{1}{2^n.n!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{dn}{dx^n}(x^2-1)^n dx =$$

$$= \frac{1}{2^n.n!}\left(\left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} kx^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2^n.n!}\int_{-1}^{1} kx^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx$$

$$= \cdots = \frac{1}{2^n.n!}(-1^k)k!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n \quad dx = 0$$

المثال (6): أثبت أن

$$\int_{-1}^{1} x^n p_n(x)dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

الحل: نأخذ $k=n$ وبالاعتماد على المثال (5) نجد:

$$I = \int_{-1}^{1} x^n\, p_n(n)\, dx$$

$$= \frac{1}{2^n.n!}(-1)^n\ n!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-n}}{dx^{n-n}}(x^2 1)^n \quad dx$$

$$= \frac{(-1)^{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^{n} \quad dx$$

$$= \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} \frac{d^{(n-n)}}{dx^{n-n}} (1 - x^2)^{n} \quad dx$$

$$= \frac{(-1)^{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^{n} \quad dx = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{n} \quad dx$$

$$= \frac{2}{2^n} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\alpha)^{2n+1} + dt$$

$$= \frac{2}{2^n} \left(\left[\frac{cos^{2n} t \sin t}{2n+1} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{2n+1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1} t dt \right)$$

$$= \frac{2}{2^n} \left(\frac{2n}{2n+1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-1} t dt \right)$$

$$= \cdots = \frac{2}{2^n} \left(\frac{2n(2n-2) \ldots \ldots .2}{(2n+1)(2n-1) \ldots \ldots .3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \right)$$

$$= \frac{2}{2^n} \frac{(2^n)^{2} \quad (n!)^{2}}{(2n+1)(2n-1) \ldots \ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{2(2^n)(n!)^{2}}{(2n+1)!} = \frac{2^{n+1}(n!)^{2}}{(2n+)!}$$

مثال (7) أثبت أن $\int_{-1}^{1}\left(p_n(x)\right)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$

الحل:

$$\int_{-1}^{1}\left(p_n(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} p_n(x) p_n(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^n . n!}\frac{(2n)!}{n!}x^n + \dots\dots\right) p_n(x)\, dx$$

وبما أن أعلى حد في نشر $p_n(x)$ هو x^n فإن جميع الحدود التي درجتها أقل من x^n سوف يكون تكامل جدائها بـــ $p_n(x)$ معدوماً وذلك حسب المثال (5)

ويبقى لدينا فقط:

$$\int_{-1}^{1}\left(p_n(x)\right)^2 \quad dx = \frac{(2n)!}{2^n .(n!)^{2}}\int_{-1}^{1} x^n p_n(x) dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n .(n!)^{2}} \frac{2^{m+1}(n!)^{2}}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

مثال (8) أثبت أن

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n$$

الحل: سوف نميز عدة حالات:

1- إذا كانت $m < n$ وبنشر $p_m(x)$ بدلالة قوى x فإن العلاقة السابقة محققة دوماً.

2- إذا كانت $m > n$ وبنشر $\mathrm{p_m}(x)$ بدلالة قوى x فإن العلاقة السابقة محققة أيضاً.

3- إذا كانت $m = 0$ و $n \neq 0$ فنجد $\int_{-1}^{1} p_n(n)dx = 0$

وهذه العلاقة تبين أن كثيرات حدود ليجندر متعامدة.

5 – 6 التقريب بالمربعات الصغرى: لقد درسنا سابقاً كيف نحرر منحنياً بمثل كثيرة حدود الاستيفاء من النفط المعطاة، ولكن تلك النقط قد تكون غير مضبوطة تماماً بل قد ارتكب فيها أخطاء.

إن المنحني الذي يمر من تلك النقط التي ارتكب خطأ فيها ليس بالمنحني المثالي والمنحني المثالي لا يمر من أية نقطة من تلك النقط بل يمر بجوارها قدر الإمكان.

لنفرض أنه أعطينا النقط: $(x_i , y_i) :$ $= 0,1,2,........,n,$

التي عددها $n+1$ و $i= 0,1,2,........,n$: y_i مرتكب فيها أخطاء ولتحاول تقريب تلك النفط بكثيرة حدود من الدرجة m حيث $m < n$ من الشكل التالي:

$$p(x) = a_m x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \dots\dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث $P\, p(n_i) \cong y(x_i) : i = 0,1,2, \dots, n$

والخطأ المرتكب أو الانحراف معطى بالعلاقة التالية:

$$\delta_i = p(x_i) - y(x_i) = 0,1,2, \dots \dots, n$$

حتى يكون المنحني الممثل لكثيرة الحدود *p(n)* أفضل ما يمكن ليمر من النقط *(xi, yi)* هو أن نجعل δ_i صفراً وهذا يتطلب أن يمر المنحني من جميع النقط التي عددها *n*+1 نقطة. لذلك يمكن جعل $\sum_{i=0}^{n} \delta_i = 0$ وهذا فيه صعوبة كبيرة لذلك نأخذ العلاقة التالية:

$$\sum_{i=0}^{n} (\delta_i)^2 = \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots \dots \dots + \delta_n^2$$

وبما أن هذا المجموع الموجب لا يمكن أن يكون معدوماً إلا إذا كانت جميع المركبات δ_i *: i=0,1,2,3,.....,n* معدومة ومن ثم يمر المنحني من جميع النقط المعطاة، وهي حالة الاستيفاء لذلك نحاول جعله صغيراً بقدر ما نريد. وهذا ما يسمى طريقة المربعات الصغرى.

وهكذا لتعيين الأمثال في كثيرة الحدود $p(x)$ نحاول تصغير الحدود.

$$\delta = \sum \left(a_0 + a_1 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right)^2$$

لذلك نحسب

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^{m} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right) x_i^j = 0$$

$$j = 0,1,2,\ldots\ldots m$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^j + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+1}$$

$$+ a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+2} + \cdots + \alpha_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j y_i$$

بفرض أن

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \quad , \quad V_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \, y_i$$

نحصل على مجموعة المعادلات:

$$S_o\alpha_0 + S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 + \ \dots + \ S_m\alpha_m = V_0$$

$$S_1\alpha_0 + S_2\alpha_1 + S_3\alpha_2 + \ \dots + \ S_m + 1\ \alpha_m = \begin{matrix} V_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

$$S_m\alpha_0 + S_{m+1}\alpha_1 + S_{m+2}\alpha_2 + \ \dots + \ S_{m+m}\alpha_m = V_m$$

وبحل هذه الجملة من المعادلات وإيجاد المجاهيل $a_i : i=0,1,2,....,m$ وتبديلها

في كثيرة الحدود $p(x)$ تحصل على التابع التقريبي المطلوب فإذا أخذنا مثلاً

كثيرة الحدود الخطية $p(x) = a_0 + a_1 x$

فإن $m=1$ ومن أجل $n+1$ نقطة نحصل على المعادلتين بمجهولين هما

$$S_o a_0 + S_1 a_1 = \sum_{i=0}^{m} y(x_i) = \ V_0$$

$$S_1 a_0 + S_2 a_1 = \sum_{i=0}^{n} y(x_i) x_I = \ V_1$$

ومن ثم نحسب:

$$S_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i^0 = n + 1$$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ومنه نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=0}^{n} y(n_i)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i)\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_{1=} \sum_{i=0}^{n} y(x_i) x_i$$

وإذا أخذنا مثلاً كثيرة الحدود $p(n) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$

فإن $m=2$ ومن أجل $n+1$ نقطة نحصل على جملة ثلاث معادلات خطية كما يلي:

$$(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_2 = \sum_{i=0}^{n} y(x_i)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_2 = \sum_{i=0}^{n} y(x_i)\, x_i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right) a_2 = \sum_{i=0}^{m} y(x_i)\, x_i^2$$

مثال (9) ليكن لدينا التابع *y=f(n)* معطى بالجدول التالي:

x	-1	-0.1	0.2	1
Y=f(x)	1	1.099	0.808	1

والمطلوب تقريب هذا التابع بحدودية خطية

الحل: نفرض $p(x) = a_0 + a_1 x$

ولدينا *m=1* و *n=3*

ولنحسب s_0 , s_1 , s_2 , v_0 , v_1

$$S_0 = \sum_{i=0}^{3} x_i^0 = 4 \qquad S_1 = \sum_{i=0}^{3} x_i = 0.1$$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 2.05 \qquad V_0 = \sum_{i=0}^{3} y(x_i) = 3.907$$

ومنه نحصل على جملة المعادلتين التاليتين:

$$4a_0 + 0.1a_1 = 3.9070$$

$$0.1a_0 + 2.05a_1 = 0.0517$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$a_1 =$$

وكثيرة الحدود الخطية المطلوبة هي:

P(x) = 0.9773 – 0.0224 x

مثال (10) ليكن لدينا التابع $y = f(x) = \sin x^2$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	0.5	3	5
f(x)	0	0.247404	0.412118	-0.132352

والمطلوب أوجد تقريبات المربعات الصغرى للتابع $f(x)$ بكثيرات حدود خطية

تربيعية ــ تكعيبية، ثم أحسب قيمة تقريبية للتابع عند النقطة $x=4$ ماذا تستنتج؟

الحل: نفرض $p(x) = a_0 + a_1 x$

ولدينا $m=1$ و $n=3$

ومنه

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i = \sum_{i=0}^{3} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i$$

بالتعويض نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$4a_0 + 8.5a_1 = 0.527171$$

$$8.5a_0 + 34.25a_1 = 0.698299$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$a_0 = 0.187182 \qquad\qquad a_1 = 0.0260657$$

والحدودية الخطية المطلوبة هي:

$$P(x) = 0.187182 - 0.0260657x$$

قيمة التابع التقريبية عند النقطة $x=4$ هي $f(4) \cong p(4) = 0.0829192$

والخطأ المطلق:

$$|f(4) - g(4)| = |0.0829192 - \sin 4^2|$$

$$= |0.0829192 - (-0.287903)| = 0.370823$$

ثم نفرض $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$

بالتعويض بالمعادلات:

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = \sum_{i=0}^{3} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{3} x_i^3 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{3} x_i^4 = \sum_{i=0}^{3} y_i x_i^2$$

نجد:

$$4a_0 + 8.5a_1 + 34.25a_2 = 0.527171$$

$$8.5a_0 + 34.25a_1 + 152.125a_2 = 0.698299$$

$$34.25a_2 + 152.125a_2 + 706.063a_2 = 0.462124$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$a_0 = 0.0333013 \qquad a_1 = 0.380918 \qquad a_2 = 0.0830316$$

والحدودية التربيعية المطلوبة هي:

$$p(x) = 0.0333013 + 0.380918\,x - 0.0830316x^2$$

قيمة التابع التقريبية عند النقطة *x=4* هي $f(4) \cong p(4) = 0.228468$

والخطأ المطلق:

$$|p(4) - f(4)| = |0.228468 + 0.287903| = 0.516371$$

وأخيراً نفرض أن $p(x) = a_0 + a_1x + a_1u^2 + a_3c^3$

بالتعويض بالمعادلات

$$a_0\sum_{i=0}^{3} n_i^0 + a_1\sum_{i=0}^{3} n_i + a_2\sum_{i=0}^{3} n_i^2 + a_3\sum_{i=0}^{3} n_i^3 = \sum_{i=0}^{3} y_i$$

$$a_0\sum_{i=0}^{3} n_i + a_1\sum_{i=0}^{3} n_i^2 + a_2\sum_{i=0}^{3} n_i^3 + a_2\sum_{i=0}^{3} n_i^4 = \sum_{i=0}^{3} y_i n_i$$

$$a_0\sum_{i=0}^{3} n_i^2 + a_1\sum_{i=0}^{3} n_i^3 + a_2\sum_{i=0}^{3} n_i^4 + a_3\sum_{i=0}^{3} n_i^5 = \sum_{i=0}^{3} y_i n_i^2$$

$$a_0\sum_{i=0}^{3} n_i^3 + a_1\sum_{i=0}^{3} n_i^4 + a_2\sum_{i=0}^{3} n_i^5 + a_4\sum_{i=0}^{3} n_i^6 = \sum_{i=0}^{3} y_i n_i^3$$

نجد:

$$4\alpha_0 + 8.5\alpha_1 + 34.25\alpha_2 + 152.125\alpha_3 = 0.527171$$

$$8.5a_0 + 34.25a_1 + 152.125a_2 + 706.063a_3 = 0.698299$$

$$34.25a_0 + 152.125a_1 + 706.063a_2 + 3368.03a_3$$
$$= 0.462124$$

$$152.125a_0 + 706.063a_1 + 3368.03a_2 + 16354a_3$$
$$= -5.38584$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 0.586646 \quad a_2 = 0.190459 \quad a_3 = 0.013567$$

والحدودية التكعيبية المطلوبة هي:

$$P(x) = 0.586646x - 0.190459x^2 + 0.013567x^3$$

والخطأ المطلق:

$$|P(4) - f(4)| = |0.167528 + 0.287903| = 0.45531$$

نستنتج أن الخطأ في التقريب التكعيبي أصغر من الخطأ في التقريب التربيعي ،

ولكن الخطأ في التقريب الخطي هو أصغر الجميع.

تمارين

1- شكل كثيرة حدود الاستيفاء للتابع $y = f(x) = x$ المعرف بالجدول التالي:

x	0	2.5069	5.0154	75227
y	0.3989	0.3988	0.3984	0.3878

2- أوجد كثيرة حدود التقريب من الدرجة الثالثة بدلالة كثيرات حدود تشيبتشيف وذلك للتابع $y = f(x) = \sin x$

3- أوجد كثيرة المربعات الصغرى الخطية للتابع $y = f(x) = x^2$ وذلك ضمن المجال $[0,1]$ (استخدم كثيرات حدود ليجندر).

4- ليكن التابع $y=f(x)$ معرف بالجدول التالي:

x	0	1	2	3	4
y	1100	1084	1036	956	844

والمطلوب تعيين $p(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2$ الموافقة لهذا التابع باستخدام

طريقة المربعات الصغرى

5- عين التابع $p(x) = Ae^{MX}$ وبحيث يكون ممثلاً أفضل ما يكن

للمعطيات التالية:

x	1	2	3	4
$p(x)$	7	11	17	27

6- احسب الأمثال $a_0a_1a_2$ في كثيرة الحدود

$$P(x) = a_0 + a_1 n + a_2n^2$$

بطريقة المربعات الصغرى لكي تكون كثيرة الحدود $p(x)$ ممثلة بشكل

أفضل ما يمكن للقيم التالية:

x_i	8	10	12	16	20	30	40	60	100
y_i	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	7.66	11.96	21.56	43.16

7- أوجد كثير حدود $p(x)$ من الدرجة الثالثة يقرب التابع

$f(x) = \cos \pi x$ في المجال $[-1,1]$

بحيث:

$$p(o) = f(o) \qquad p(1) = f(1) \qquad p'(0)$$
$$= f'(0) \qquad p'(1) = f'(1)$$

8- أوجد تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات تشيبتشيف من

الدرجات الثانية والثالثة والرابعة للتابع $f(x) = x^3 e^x$ في المجال

$[-1,1]$

9- أوجد تقريبات المربعات الصغرى باستخدام حدوديات ليجندر من الدرجة

الخطية للتابع $f(x) = 2^x$ في المجال $[-1,1]$

الفصل السادس

حل المعادلات التكاملية

Solving integral equations

معادلات فولتيرا التكاملية

طريقة التقريبات المتتالية

معادلات فريد هولم التكاملية

طريقة النواة الحالة

6-1 تمهيد تسهم المعادلات التكاملية إسهاماً هاماً في العديد من الأبحاث النظرية والتطبيقية. فهي ذات أثر أساسي في النمذجة الرياضية ذات المؤثرات التكاملية وكذلك في الميكانيك وفي مسائل المرونة وفي الأوساط اللزجة ولها أيضاً تطبيقات في الإنشاءات المعمارية.

6-2معادلات فولتيرا التكاملية

سوف نعالج معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوعين الأول والثاني وطرق حلها، مثل طريقة النواة الحالة وطريقة التقريبات المتتالية، كما سنعالج معادلات فولتيرا التكاملية اللاخطية.

يمكن تصنيف معادلات فولتيرا التكاملية كما يلي:

1- معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول والتي تأخذ الشكل التالي

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

حيث $f(x)$ و $k(x,t)$ تابعان معلومان، $\varphi(x)$ هو التابع المجهول.

نلاحظ ورود التابع المجهول تحت رمز التكامل في المعادلة التكاملية، وهذا هو سبب تسميتها بمعادلة تكاملية.

2- معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني والتي تأخذ الشكل

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث $f(x)$ و $k(x,t)$ تابعان معلومان، $\varphi(x)$ هو التابع المجهول، λ وسيط عددي.

يسمى $k(x,t)$ بنواة المعادلة التكاملية.

إذا كان $f(x) \equiv 0$ فإن معادلة التكامل تأخذ الشكل التالي:

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة تكاملية متجانسة من النوع الثاني.

تعريف(1) نقول عن التابع $\varphi(x)$ أنه حل للمعادلة التكاملية إذا حوّل تلك المعادلة إلى مطابقة عند تعويضه فيها.

مثال (1) برهن أن التابع $\varphi(x) = 1 - x$ هو حل لمعادلة فولتيرا التكاملية

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = x$$

الحل:

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = \int_0^x e^{x-t}(1-t)dt$$

$$= \int_0^x e^x e^{-t}(1-t)dt$$

$$= e^x\int_0^x e^{-t}(1-t)dt$$

$$= e^x\int_0^x e^{-t}dt - e^x\int_0^x te^{-t}dt$$

$$= e^{x}\left[-e^{-t}\right]_0^x - e^{x}\left(\left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt\right)$$

$$= e^{x}\left[-e^{-x}+1\right] = -e^{x}\left[-xe^{-x}\right] - e^{x}\left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= -e^{x}\left[-xe^{-x}\right] = x$$

مثال (2) برهن أن التابع $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6}$ هو حل لمعادلة فولتيرا التكاملية

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \sinh(x-t)\varphi(t)dt$$

الحل:

$$x = -\int_0^x \sinh(x-t)(t - \frac{t^3}{6})dt$$

$$= x - \int_0^x \left[\sinh x \cosh t - \sinh t \cosh x\right](t - \frac{t^3}{6})dt$$

$$= x - \int_0^x \sinh x \cosh t\,(t - \frac{t^3}{6})dt + \int_0^x \sinh t \cosh x\,(t - \frac{t^3}{6})dt$$

$$= x - \sinh x \int_0^x t \cosh t dt + \frac{\sinh x}{6}\int_0^x t^3 \cosh t dt$$

$$+ \cosh x \int_0^x t \sinh t dt - \frac{\cosh x}{6}\int_0^x t^3 \sinh t dt$$

نحسب هذه التكاملات بالتجزئة

$$\int_0^x t\cosh t\,dt = [t\sinh t]_0^x - \int_0^x \sinh t\,dt$$

$$= x\sinh - [\cosh t]_0^x = x\sinh x - \cosh x + \cosh 0$$

$$\int_0^x t^3\cosh t\,dt = \left[t^3\sinh t\right]_0^x - 3\int_0^x t^2\sinh t\,dt$$

$$= x^3\sinh x - 3(\left[t^2\cosh t\right]_0^x - 2\int_0^x t\cosh t\,dt)$$

$$= x^3\sinh x - 3x^2\cosh x + 6\int_0^x t\cosh t\,dt$$

$$= x^3\sinh x - 3x^2\cosh x + 6x\sinh x - 6\cosh x + 6\cosh 0$$

$$\int_0^x t\sinh t\,dt = [t\cosh t]_0^x - \int_0^x \cosh t\,dt$$

$$= x\cosh x - \sinh x + \sinh 0$$

$$\int_0^x t^3\sinh t\,dt = \left[t^3\cosh t\right]_0^x - 3\int_0^x t^2\cosh t\,dt$$

$$= x^3 \cosh x - 3\left(\left[t^2 \sinh t\right]_0^x - 2\int_0^x t \sinh t dt\right)$$

$$= x^3 \cosh x - 3x^2 \sinh x + 6\int_0^x t \sinh t dt$$

$$= x^3 \cosh x - 3x^2 \sinh x + 6\left(\left[t \cosh t\right]_0^x - \int_0^x t \cosh t dt\right)$$

$$= x^3 \cosh x - 3x^2 \sinh x + 6x \cosh x - 6\sinh x + 6\sinh 0$$

بالتعويض نجد:

$$x - \sinh x \left[x \sinh x - \cosh x + \cosh 0\right] + \frac{\sinh x}{6}$$

$$\left[x^3 \sinh x - 3x^2 \cosh x + 6\sinh x - 6\cosh 0\right] +$$

$$\cosh x \left[x \cosh x - \sinh x + \sinh 0\right] - \frac{\cosh x}{6}$$

$$\left[x^3 \cosh x - 3x^2 \sinh x + 6x \cosh x - 6\sinh x + 6\sinh 0\right]$$

$$=x-x\sinh^2 x+\sinh x\cosh x-\sinh x\cosh 0+$$

$$\frac{x^3}{6}\sinh^2 x-\frac{1}{2}x^2\sinh x\cosh x+x\sinh^2 x-\sinh x\cosh x+$$

$$\sinh x\cosh 0+x\cosh^2 x-\sinh x\cosh x+\cosh x\sinh 0-\frac{x^3}{6}\cosh^2 x+$$

$$\frac{1}{2}x^2\cosh x\sinh x-x\cosh^2 x+\sinh x\cosh x-\cosh x\sinh 0$$

$$=x+\frac{x^3}{6}\sinh^2 x-\frac{x^3}{6}\cosh^2 x$$

$$=x+\frac{x^3}{6}\left[\sinh x\sinh x-\cosh x\cosh x\right]$$

$$=x+\frac{x^3}{6}\left[-\cosh(x-x)\right]=x+\frac{x^3}{6}\left[-\cos i(x-x)\right]$$

$$=x+\frac{x^3}{6}\left[-\cos 0\right]=x+\frac{x^3}{6}(-1)=x-\frac{x^3}{6}=\varphi(x)$$

3-6 طريقة النواة الحالة

تعتمد هذه الطريقة على استبدال النواة k بالنواة R حيث يمكن بالاعتماد على النواة R إيجاد حل المعادلة التكاملية وذلك كما يلي:

لتكن معادلة فولتيرا التكاملية

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث:

$k(x,t)$ تابع مستمر عندما $0 \le x \le a$ و $0 \le t \le x$

ولنعرف التابع $R(x,t,\lambda)$ بوساطة المتسلسلة

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}k_{n+1}(x,t)$$

$$k_{n+1}(x,t)=\int_{t}^{x}k(x,u)k_{n}(u,t)du$$

وفي حال كون النواة $k(x,t)$ مستمرفإن المتسلسلة السابقة متقاربة بانتظام وباستخدام النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ يمكن حل المعادلة التكاملية بالشكل التالي:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x}R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

مثال (3) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x}e^{x^{2}-t^{2}}\varphi(t)dt$$ بطريقة النواة الحالة

$$k(x,t)=e^{x^{2}-t^{2}}$$

الحل: $k_{1}(x,t)=(x,t)=e^{x^{2}-t^{2}}$

$$k_{2}(x,t)=\int_{t}^{x}k(x,u)k_{1}(u,t)du$$

$$=\int_{t}^{x}e^{x^{2}-u^{2}}e^{x^{2}-t^{2}}du=(x,t)=\int_{t}^{x}e^{x^{2}-t^{2}}du$$

$$=e^{x^{2}-t^{2}}\int_{t}^{x}du=e^{x^{2}-t^{2}}(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x k(x,u)k_2(u,t)du=\int_t^x e^{x^2-u^2}e^{x^2-t^2}(u-t)du$$

$$=\int_t^x e^{x^2-t^2}(u,t)du=e^{x^2-t^2}\int_t^x (u-t)du$$

$$=e^{x^2-t^2}\left[\frac{u^2}{2}-tu\right]_t^x=e^{x^2-t^2}\left[\frac{x^2}{2}-xt-\frac{t^2}{2}+t^2\right]$$

$$=e^{x^2-t^2}\frac{1}{2}\left[x^2-2xt+t^2\right]=e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^2}{2}$$

$$k_4(x,t)=\int_t^x k(x,u)k_3(u,t)du=\int_t^x e^{x^2-u^2}e^{u^2-t^2}\frac{(u-t)^2}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_t^x e^{x^2-t^2}(u^2-2ut+t^2)du$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\left[\frac{u^3}{2}-u^2t+ut^2\right]_t^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\left[\frac{x^3}{3}-x^2t+xt^2-\frac{t^3}{3}+t^3-t^3\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\left(\frac{1}{3}\left[x^3-3x^2t+3xt^2-t^3\right]\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^3}{3!}$$

بالاستقراء نجد أن:

$$k_n = e^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

بالتعويض بالعلاقة

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t)$$

نجد:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{(x-t)^n}{n!} e^{x^2-t^2}$$

$$= e^{x^2-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (n-t)^n}{n!}$$

$$= e^{x^2-t^2} e^{\lambda(x-t)} = e^{(x-t)(x+t)} e^{\lambda(x-t)}$$

$$= e^{(x-t)(x+t+\lambda)}$$

وبالتالي فإن حل المعادلة التكاملية هو

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(x-t)(x+t+\lambda)} f(t)dt$$

مثال (4) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = x\,3^x - \int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)dt$$

بطريقة النواة الحالة

الحل:

$$k_1(x,t) = k(x,t) = 3^{x-t}$$

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,u)k_1(u,t)du = \int_t^x 3^{x-u}.3^{u-t}\,du$$

$$= \int_t^x 3^{x-t}du = 3^{x-t}\frac{(x-t)}{1!}$$

$$k_3(x,t) = \int_t^x k(x,u)k_2(u,t)du = \int_t^x 3^{x-u}.3^{u-t}(u-t)du$$

$$= 3^{x-t}\int_t^x (u-t)du = 3^{x-t}\frac{(x-t)^2}{2!}$$

وهكذا........

نجد :
$$k_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}3^{x-t}$$

ومنه فإن النواة الحالة

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n \frac{(x-t)^n}{n!}3^{n-t}$$

$$= 3^{n-t}e^{\lambda(x-t)}$$

وبما أنه في هذه المعادلة $\lambda = -1$ فإن

$$R(x,t,-1) = 3^{n-t}e^{-(x-t)}$$

بالتعويض نجد:

$$\varphi(x)=x.3^x-\int_0^x 3^{x-t}e^{-(x-t)}t\,3^t\,dt$$

$$=x.3^x-3^x e^{-x}\int_0^x te^t dt$$

$$=x.3^x-3^x e^{-x}\left(\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t dt\right)$$

$$=x.3^x-3^x e^{-x}\left[xe^x-e^x+1\right]$$

$$=x.3^x-3^x e^{-x}+3^x-3^x e^{-x}$$

$$=3^x(1-e^{-x})$$

4-6 طريقة التقريبات المتتالية

لتكن لدينا معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث $f(x)$ تابع مستمر في المجال $[0,a]$ والنواة $k(x,t)$ تابع مستمر في المجالات $0\le t\le x$ و $0\le x\le a$

بفرض $\varphi_0(x)$ تابع مستمر في المجال $[0,a]$ باستبدال $\varphi(x)$ بـ $\varphi_0(x)$ في الطرف الأيمن من المعادلة التكاملية نصحي على التقريب من المرتبة الأولى

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt$$

وبمتابعة العمل نفسه نحصل على متتالية من التوابع:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\ldots, \varphi_n(x), \ldots\ldots$$

حيث $\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt$

هو التقريب من المرتبة n

إن المتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ تتقارب نحو الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية وذلك عندما $n \to \infty$

مثال (5) استخدم طريقة التقريبات المتتالية لحل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$

حيث $\varphi_0(x) = 0$

الحل: بتطبيق طريقة التقريبات لمتتالية

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt$$

نجد:

$$\varphi_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t)(0)dt = 1$$

$$\varphi_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)dt = 1 - \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$= 1 - (x^2 - \frac{x^2}{2}) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_3(x) = 1 - \int_0^x (x-t)(1-\frac{t^2}{2})dt$$

$$=1 - x\int_0^x (1-\frac{t^2}{2})dt + t\int_0^x (1-\frac{t^2}{2})dt$$

$$=1 - x\left[t - \frac{t^3}{6}\right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8}\right]_0^x$$

$$=1 - x(x - \frac{x^3}{6}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8})$$

$$=1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\varphi_4(x) = 1 - \int_0^x (x-t)(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8})dt$$

$$= 1 - x\int_0^x (x - \frac{xt^2}{2} + \frac{xt^4}{24} - t + \frac{t^3}{2} - \frac{t^5}{24})dt$$

$$= 1 - \left[xt - \frac{xt^2}{2} + \frac{xt^3}{6} + \frac{xt^5}{(5)(24)} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{(6)(24)} \right]_0^x$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{5(24)} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{6(24)}$$

$$\varphi_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{5(6)(24)}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

وهكذا.......... نجد:

$$\varphi_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

حيث أن $\varphi_n(x)$ هو المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ وهذه المتسلسلة متقاربة والحل هو

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \cos x$$

مثال (6) باستخدام طريقة التقريبات المتتالية أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x - t)\varphi(t)dt$$

حيث $\varphi_0(x) = 0$

الحل: $$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt$$

$$f(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (x - t)dt = 1 + \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (x - t)(1 + \frac{t^2}{2})dt$$

$$\Rightarrow = 1\int_0^x (x + x\frac{t^2}{2} - t - \frac{t^3}{2})dt$$

$$= 1 + \left[xt + x\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8}\right]_0^x$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (x - t)(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24})dt$$

$$= 1 + \int_0^x \left[x + x\frac{t^2}{2} + x\frac{t^4}{24} - t - \frac{t^3}{2} - \frac{t^5}{24} \right] dt$$

$$= 1 + \left[xt + x\frac{t^3}{6} + x\frac{t^5}{5(24)} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{6(24)} \right]_0^x$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{5(24)} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{t^6}{6(24)}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}$$

وكذلك نجد أن

$$\varphi_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

وبالاستقراء نجد أن

$$\varphi_n(\mathrm{x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

وهو المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x$$

وهذه المتسلسلة متقاربة

وبالتالي فإن حل المعادلة التكاملية هو

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \cosh x$$

5-6 معادلات فريد هولم التكاملية

نسمي كل معادلة من الشكل

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

بمعادلة فريد هولم التكاملية الخطية من النوع الثاني، حيث $\varphi(x)$ هو التابع المجهول، $k(x,t)$ و $f(x)$ تابعان معلومان، x و t متحولان حقيقيان معرفان على المجال $[a,b]$ و λ ثابت عددي، التابع $k(x,t)$ يسمى نواة المعادلة التكاملية

إذا كان $f(x) \equiv 0$ فإن معادلة فريد هولم تسمى بالمعادلة المتجانسة ويمكن لحدود التكامل أن تكون محددة أو غير محدودة.

مثال (7) برهن أن التابع $\varphi(x) = e^x(2x - \frac{2}{3})$ هو حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) + 2\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt = 2xe^x$$

الحل:

$$e^x(2x - \frac{2}{3}) + 2\int_0^1 e^{x-t}e^t(2t - \frac{2}{3})dt =$$

$$= e^x(2x - \frac{2}{3}) + 2\int_0^1 e^x(2t - \frac{2}{3})dt$$

$$= e^x(2x - \frac{2}{3}) + 2e^x\int_0^1 e^x(2t - \frac{2}{3})dt$$

$$= e^x(2x - \frac{2}{3}) + 2e^x\left[t^2 - \frac{2}{3}\right]_0^1$$

$$= e^x(2x - \frac{2}{3}) + 2e^x(1 - \frac{2}{3})$$

$$= 2e^x(x - \frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3}) = 2xe^x$$

مثال (8) برهن أن التابع $\varphi(x) = \sqrt{x}$ هو حل للمعادلة التكاملية

$$\varphi(x) - \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt = \sqrt{x} + \frac{x}{15}(4x^{\frac{3}{2}} - 7)$$

حيث النواة $k(x,t)$ تعطى كما يلي:

$$k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}; 0 \le x \le t \\ \dfrac{t(2-x)}{2}; t \le x \le 1 \end{cases}$$

الحل:

$$\sqrt{x}-\int_0^1 k(x,t)\sqrt{t}\,dt=\sqrt{x}-\int_0^1\frac{t(2-x)}{2}\sqrt{t}\,dt-$$

$$-\int_x^1\frac{x(2-t)}{2}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\sqrt{x}-\frac{(2-x)}{2}\int_0^x t\sqrt{t}\,dt-\frac{x}{2}\int_x^1(2-t)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\sqrt{x}-\frac{(2-x)}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^x-\frac{x}{2}\left[2(\frac{2}{3})t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_x^1$$

$$=\sqrt{x}-\frac{(2-x)}{2}(\frac{2}{5})x^{\frac{5}{2}}-\frac{x}{2}\left[\frac{4}{3}(1-x^{\frac{3}{2}})-\frac{2}{5}(1-x^{\frac{5}{2}})\right]$$

$$=\sqrt{x}-\frac{(2-x)}{2}(\frac{2}{5})x^{\frac{5}{2}}-\frac{x}{2}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{14}{15})$$

$$=\sqrt{x}-\frac{(2-x)}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{5}+\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}-\frac{7}{15}x$$

$$=\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{5}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}-\frac{7}{15}x$$

$$=\sqrt{x}+\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{7}{15}x$$

$$=\sqrt{x}+\frac{4}{15}(4x^{\frac{3}{2}}-7)$$

تعريف (2) نقول عن نواة معادلة فريد هولم أنها متحللة إذا كانت مجموعاً لعددٍ منتهٍ من الجداءات لتوابع تابعة للمتحول x بتوابع تابعة للمتحول t

أي إذا كان لها الشكل

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)$$

والمعادلة التكاملية ذات النوى المتحللة لها الشكل التالي:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)dt=f(x)$$

مثال (9) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x)-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\varphi(t)dt=2x-\pi$$

الحل: نكتب المعادلة على النحو التالي:

$$\varphi(x)=(2x-\pi)+4\sin^2 x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$$

$$\varphi(x)=(2x-\pi)+4c_1\sin^2 x$$

$$c_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2t - \pi) + 4c_1 \sin^2 t \right] dt$$

$$= \left[t^2 - \pi t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4c_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 t}{2} dt$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2} + 2c_1 \left[t - \frac{1}{2}\sin^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi^2}{4} + 2c_1 \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right]$$

ومنه

$$(1 - \pi)c_1 = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$c_1 = \frac{\pi^2}{4(\pi - 1)} > 0$$

.وبالتالي حل المعادلة التكاملية هو

$$\varphi(x) = (2x - \pi) + \frac{\pi^2}{\pi - 1} \sin^2 x$$

مثال (10) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (x \ln t - t \ln x)\varphi(t)dt = \frac{6}{5}(1-4x)$$

الحل: نكتب المعادلة بالشكل

$$\varphi(x) = \frac{6}{5}(1-4x) + \lambda x\int_0^1 \ln t - \varphi(t)dt - \lambda \ln x\int_0^1 t\,\varphi(t)t \ln$$

$$\varphi(x) = \frac{6}{5}(1-4x) + \lambda c_1 x - \lambda c_2 \ln x$$

$$c_1 = \int_0^1 \ln t\,(t)dt = \int_0^1 \ln t\left[\frac{6}{5}(1-4t) + \lambda c_1 t - \lambda c_2 \ln t\right]dt$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 \ln t\,(1-4t) + \lambda c_1\int_0^1 t \ln t dt - \lambda c_2\int_0^1 \ln^2 t dt$$

لنحسب التكاملات

$$\int_0^1 \ln t\,(1-4t)dt = \int_0^1 \ln t dt - 4\int_0^1 t \ln t dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} ue^u du - 4\int_{-\infty}^{0} e^{2u} u du$$

$$= \left[ue^u - e^u\right]_{-\infty}^{0} - 4\left[\frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= -1 - 2(-\frac{1}{2}) = -1 + 1 = 0$$

حيث فرضنا $dt = e^u du \Leftarrow t = e^u$

$$\int_0^1 t \ln t dt = \int_{-\infty}^{0} ue^{2u} du = \left[\frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 t \ln^2 t dt = \int_{-\infty}^{0} u^2 e^u du = \left[u^2 e^u\right]_{-\infty}^{0} 2\int_{-\infty}^{0} ue^u du$$

$$=0-2\left[ue^u - e^u\right]_{-\infty}^{0} = -2(-1) = 2$$

ومنه

$$c_1 = -\frac{\lambda}{4}c_1 - 2\lambda c_2 \Rightarrow (1+\frac{\lambda}{4})c_1 + 2\lambda c_2 = 0$$

$$c_2 = \int_0^1 t\varphi(t)dt = \frac{6}{5}\int_0^1 (1-4t)tdt + \lambda c_1 \int_0^1 t^2 td -$$

$$\lambda c_2 \int_0^1 t \ln t dt$$

$$= \frac{6}{5}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}t^3\right]_0^1 + \frac{\lambda c_1}{3}\left[t^3\right]_0^1 + \lambda c_2 (\frac{1}{4})$$

$$= \frac{6}{5}(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}) + \frac{1}{3}\lambda c_1 + \frac{1}{4}\lambda c_2$$

$$=-1 + \frac{1}{3}\lambda c_1 + \frac{1}{4}\lambda c_2$$

ومنه

$$\frac{\lambda}{3}c_1 (\frac{\lambda}{4} - 1)c_2 = 1$$

وبالتالي نحصل على المعادلتين الخطيتين

$$(1+\frac{\lambda}{4})c_1 + 2\lambda c_2 = 0$$

$$\frac{\lambda}{3}c_1 + (\frac{\lambda}{4} - 1)c_2 = 1$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$c_1 = \frac{96\lambda}{29\lambda^2 + 48} \qquad c_2 = -\frac{48 + 12\lambda}{29\lambda^2 + 48}$$

وحل المعادلة التكاملية هو

$$\varphi(x) = \frac{6}{5}(1 - 4x) + \frac{96\lambda}{29\lambda^2 + 48}\text{x} + \frac{48\lambda + 12\lambda^2}{29\lambda^2 + 48}\ln x$$

مثال (11) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{1} (xt + x^2 t^2)\varphi^2(t)dt$$

الحل: نكتب المعادلة بالشكل

$$\varphi(x) = x\int_{-1}^{1} t\varphi^2(t)dt + x^2\int_{-1}^{1} t^2\varphi^2(t)dt$$

$$\varphi(x) = xc_1 + x^2 c_2$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1} t\varphi^2(t)dt = \int_{-1}^{1} t(c_1t + c_2t^2)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t(c_1^2t^3 + 2c_1c_2t^4 + c_2^2t^5)dt$$

$$= c_1^2\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} + 2c_1c_2\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} + c_2^2\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 0 + \frac{4}{5}c_1c_2 + 0$$

ومنه

$$c_1 = \frac{4}{5}c_1c_2 \Rightarrow (1 - \frac{4}{5}c_2)c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} t^2\varphi^2(t)dt = \int_{-1}^{1} (c_1^2t^4 + 2c_1c_2t^5 + c_2^2t^6)dt$$

$$= c_1^2\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} + 2c_1c_2\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{1} + c_2^2\left[\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1}$$

$$c_2 = \frac{2}{5}c_1^2 + \frac{2}{7}c_2^2 \Rightarrow (1 - \frac{2}{7}c_2)c_2 = \frac{2}{5}c_1^2 \qquad (2)$$

من (1) نجد $c_2 = \frac{5}{4}$ بالتعويض في (2) نجد:

$$\left[1-\frac{2}{7}(\frac{5}{4})\right](\frac{5}{4})=\frac{2}{5}c_1^2$$

ومنه
$$c_1^2=\frac{250}{112}\Rightarrow c_1=\sqrt{\frac{250}{112}}$$

بالتالي فإن حل المعادلة التكاملية هو

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{250}{112}}x+\frac{5}{4}x^2$$

6-6 طريقة النواة الحالة

إن حل معادلة فريد هولم التكاملية باستخدام النواة الحالة يُعطى بالعلاقة التالية:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

حيث أن

$$R(x,t,\lambda)=k(x,t)+\lambda k_2(x,t)+......+\lambda^{n-1}k_n(x,t)$$

$$k_n(x,t)=\int_a^b k(x,t)k_{n-1}(u,t)du$$

كما يمكن إيجاد النواة الحالة بالدستور

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$$

حيث إنّ

$$D(x,t,\lambda)=k(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n$$

$$B_n(x,t)=C_n k(x,t)-n\int_a^b k(x,t)B_{n-1}(u,t)du$$

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(u,u)du$$

وذلك بفرض أن

$$C_0=1, B_0(x,t)=k(x,t)$$

مثال (12) باستخدام النواة الحالة أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x,t)\varphi(t)dt=1$$

الحل:

$$k_1(x,t)=k(x,t)=\sin(x+t)$$

$$k_2(x,t)=\int_0^{2\pi}\sin(x+u)\sin(u+t)du$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(x+t+2u)-\cos(x-t)\right]du$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(x+t+2u)-u\cos(x-t)\right]_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(x+t)-2\pi\cos(x-t)-\frac{1}{2}\sin(x+t)\right]$$

$$=\pi\cos(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\pi\int_0^{2\pi}\sin(x+u)\cos(u-t)du$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin(x-t+2u)+\sin(x+t)\right]du$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(x-t+2u)+u\sin(x+t)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(x-t)+2\pi\sin(x+t)+\frac{1}{2}\cos(x-t)\right]$$

$$=\pi^2\sin(x+t)$$

$$k_4(x,t) = \pi^2 \int_0^{2\pi} \sin(x+u)\sin(u-t)du$$
$$= \pi^2 \left[\pi \cos(x-t)\right] = \pi^3 \cos(x-t)$$

ومنه

$$R(x,t,\lambda) = k_1 + \lambda k_2 + \lambda^3 k_4 + \dots\dots\dots\dots$$
$$= \sin(x+t) + \lambda\pi\cos(x-t) + \lambda^2\pi^2 \sin(x+t) +$$
$$\lambda^3\pi^3 \cos(x-t) + \dots\dots\dots\dots$$
$$= \sin(x+t)\left[1+\lambda^2\pi^2+\lambda^4\pi^4+\dots\dots\right]+$$
$$\lambda\pi\cos(x-t)\left[1+\lambda^2\pi^2+\dots\dots\dots\dots\right]$$

$$R(x,t,\lambda) = \left[\sin(x+t)+\lambda\pi\cos(x-t)\right](1+\lambda^2\pi^2+\lambda^4\pi^4+\dots\dots)$$
$$= \frac{\sin(x+t)+\lambda\pi\cos(x-t)}{1-\lambda^2\pi^2}; \left|\lambda^2\pi^2\right|<1$$
$$\Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{\pi}$$

وبالتالي حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t)dt$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda^2\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\sin(x+t) + \lambda\pi\cos(x-t)\right]dt$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda^2\pi^2}\left[-\cos(x+t) - \lambda\pi\cos(x-t)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda^2\pi^2}\left[-\cos x - \lambda\pi\sin(x-2\pi) + \cos x + \lambda\pi\sin x\right] +$$

$$= 1 + 0$$

ومنه $\varphi(x) = 1$ حل المعادلة التكاملية

مثال (13) باستخدام النواة الحالة أوجد حل المعالة التكاملية

$$\varphi(x) - \int_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt = \frac{x}{6}$$

الحل:

$$k_1(x,t) = k(x,t) = 2x - t$$

$$k_2(x,t) = \int_0^1 (4xu - 2xt - 2u^2 + tu)du$$

$$= \left[2xu^2 - 2xtu - \frac{2}{3}u^2 + \frac{t}{2}u^2\right]_0^1$$

$$= \left[2x - 2xt - \frac{2}{3} + \frac{t}{2}\right]$$

نلاحظ أن العمليات في هذه الحالة ستكون طويلة جداً، لذلك سوف نوجد النواة الحالة حسب العلاقة

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$$

$$D(x,t,\lambda)=k(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n$$

$$B_0(x,t,)=k(x,t)=2x-t$$

$$C_0=1$$

باستخدام العلاقتين

$$B(x,t)=C_n k(x,t)-n\int_a^b k(x,u)B_{n-1}(u,t)du$$

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(u,u)du$$

نجد أن:

$$C_1=\int_0^1 B_0(u,u)du=\int_0^1(2u-u)du$$

$$=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$B_1(x,t) = C_1 k(x,t) - \int_a^b k(x,u) B_0(u,t)\,du$$

$$= \frac{1}{2}(2x - t) - \int_0^1 (2x - u)(2u - t)\,du$$

$$= \frac{1}{2}(2x - t) - \int_0^1 (4xu - 2xt - 2u^2 + ut)\,du$$

$$= \frac{1}{2}(2x - t) - \left[4x\frac{u^2}{2} - 2xtu - \frac{2}{3}u^3 + t\frac{u^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(2x - t) - 2x + 2xt + \frac{2}{3} - \frac{t}{2}$$

$$= x - \frac{1}{2}t - 2x + 2xt + \frac{2}{3} - \frac{t}{2}$$

$$= 2xt - x - t + \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \int_a^b B_1(u,u)\,du = \int_0^1 (2u^2 - u - u + \frac{2}{3})\,du$$

$$= \left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{2}{3}u \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$B_2(x,t) = C_2 k(x,t) - 2\int_a^b k(x,u)B_1(u,t)du$$

$$= \frac{1}{3}(2x-t) - 2\int_0^1 (2x-u)(2u-u-t+\frac{2}{3})du$$

$$= \frac{1}{3}(2x-t) - 2\int_0^1 (4xut - 2xu - 2xt + \frac{4}{3}x$$

$$-2u^2t + u^2 + ut - \frac{2}{3}u)du$$

$$= \frac{1}{3}(2x-t) - 2\Big[4xtu^2 - xu^2 - 2xtu$$

$$+\frac{4}{3}xu - \frac{2}{3}tu^3 + \frac{u^3}{3} + t\frac{u^2}{2} - \frac{1}{3}u^2 \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(2x-t) - 2\left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}t\right]$$

$$= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t = 0$$

$$C_3 = \int_a^b B_2(u,u)du = \int_0^1 0du = 0$$

ومنه

$$C_3 = C_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots = C_n = 0$$

$$B_2 = B_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = B_n = 0$$

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\lambda^n$$

$$= (2x - t) + B_1 \lambda \frac{(-1)}{1!}$$

$$= (2x - t) - \lambda(2xt - x - t + \frac{2}{3})$$

$$= (2x - t) + \lambda(x + t - 2xt - \frac{2}{3})$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n$$

$$= 1 + \frac{(-1)}{1!} \lambda C_1 + 2 \frac{(-1)^2}{1!} \lambda^2 C_2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 (\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{6}\lambda^2$$

ومنه النواة الحالة

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{(2x - t) + \lambda(x + t - 2xt - \frac{2}{3})}{1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x,t,\lambda) f(t) dt$$

$$=\frac{x}{6}+\frac{\lambda}{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}\int_0^1\left[(2x-t)+\lambda(x+t-2xt-\frac{2}{3})\right]\frac{t}{6}dt$$

$$=\frac{x}{6}+\frac{\lambda}{6(1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6})}\int_0^1(2xt-t^2+\lambda xt+\lambda t^2-2x+t\lambda t^2-\frac{2}{3}\lambda t)dt$$

$$=\frac{x}{6}+\frac{\lambda}{\lambda^2-3\lambda+6}\left[xt^2-\frac{t^3}{3}+\lambda x\frac{t^2}{2}\lambda\frac{t^3}{3}-\frac{2}{3}x\lambda t^3-\frac{\lambda}{3}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{x}{6}+\frac{\lambda}{\lambda^2-3\lambda+6}\left[x-\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{2}x+\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}x\lambda-\frac{1}{3}\lambda\right]$$

$$=\frac{x}{6}+\frac{\lambda}{\lambda^2-3\lambda+6}\left[x+\frac{\lambda}{2}x-\frac{2}{3}x\lambda-\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{x}{6}+\frac{\lambda}{\lambda^2-3\lambda+6}\left(\frac{x(6-\lambda)}{6}-\frac{1}{3}\right)$$

6 – 7 القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمعادلات فريد هولم المتجانسة

لتكن معادلة فريد هولم التكاملية المتجانسة ومن النوع الثاني

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

تقبل هذه المعادلة دوما الحل الصفري $\varphi(x)=0$

تسمى قيم الوسيط λ والذي لأجله تقبل المعادلة التكاملية حلا غير صغري بالقيم الذاتية لهذه المعادلة أو النواة $k(x,t)$

ويسمى كل حل غير صفري للمعادلة التكاملية والموافق للقيمة الذاتية λ بالتابع الذاتي .

لتكن معادلة فريد هولم التكاملية ذات النواة المتحللة

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)dt=0$$

إن القيمة الذاتية لهذه المعادلة هي جذور المعادلة الجبرية

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda x_{11} & -\lambda x_{12} & \cdots & -\lambda x_{1n}\\ -\lambda x_{21} & 1-\lambda x_{22} & \cdots & -\lambda x_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ -\lambda x_{n1} & -\lambda x_{n2} & \cdots & 1-\lambda x_{nn}\end{vmatrix}=0$$

وهذا المحدد هو محدد مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة

$$\begin{aligned}&(1-\lambda x_{11})c_1-\lambda x_{12}c_2-\dots\dots\dots-\lambda x_{1n}c_n=0\\&-\lambda x_{21}c_1+(1-\lambda x_{22})c_2-\dots\dots\dots\dots-\lambda x_{2n}c_n=0\\&\vdots\\&\vdots\\&-\lambda x_{n1}c_1-\lambda x_{n2}c_2-\dots\dots\dots+(1-\lambda x_{nn})c_n=0\end{aligned}$$

حيث
$$x_{ij} = \int_a^b a_j(t) b_i(t) dt$$

إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$ عندئذ للمعادلة الجبرية الحل الوحيد الصفري

أما إذا كان λ قيمة ذاتية أي إذا كان $\Delta(\lambda) = 0$ عندئذ بالإضافة إلى الحل الصفري يوجد حلول غير صفرية , هذه الحلول تسمى التوابع الذاتية الموافقة للقيم الذاتية , ويكون الحل العام للمعادلة التكاملية المتجانسة ذات النواة المتحللة هو تركيب خطي لهذه التوابع الذاتية .

مثال (14) أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية لمعادلة فريد هولم التكاملية

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, \varphi(t) dt = 0$$

الحل :

$$\varphi(x) = \lambda \sin^2 x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(t)dt$$

$$= \lambda \sin^2 x . c$$

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lambda \sin^2 t . cdt$$

$$= \lambda c \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 tdt = \frac{1}{2}\lambda c \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\lambda c \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\lambda c \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

ومنه

$$c = \frac{\lambda\pi}{8}c - \frac{\lambda}{4}c$$

$$\left[1 - \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\lambda}{4} \right] c = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda(\frac{\pi-2}{8}) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{\pi-2}$$

بالتعويض نجد : $0.c = 0$ ومنه $c = const = c_1$

ومنه التابع الذاتي الموفق للقيمة الذاتية $\lambda = \frac{8}{\pi-2}$

هو $\varphi(x) = \lambda c_1 \sin^2 x$

مثال(15) أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\cos(x+t)\varphi(t)dt$$

الحل :

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t)\varphi(t)dt$$

$$= \lambda \cos x \int_0^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt - \lambda \sin x \int_0^{\pi} \sin t\, \varphi(t)dt$$

$$= \lambda \cos x c_1 - \lambda \sin x c_2$$

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos t\, \varphi(t)dt = \int_0^{\pi} \cos t \left[\lambda c_1 \cos t - \lambda c_2 \sin t\right]dt$$

$$= \lambda c_1 \int_0^{\pi} \cos^2 t dt - \lambda c_2 \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt$$

$$= \frac{\lambda c_1}{2} \int_0^{\pi} (1+\cos 2t)dt - \frac{\lambda c_2}{2} \int_0^{\pi} \sin 2t dt$$

$$= \frac{\lambda c_1}{2} \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} - \frac{\lambda c_2}{2} \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\lambda \pi}{2} c_1 + \frac{\lambda c_2}{4}[1-1] = \frac{\lambda \pi}{2} c_1$$

ومنه $$(1-\lambda\frac{\pi}{2})c_1=0$$

$$c_2=\int_0^{\pi}\sin t\,\varphi(t)dt=\int_0^{\pi}\sin t\left[\lambda c_1\cos t-\lambda c_2\sin t\right]dt$$

$$=\lambda c_1\int_0^{\pi}\sin t\cos t dt-\lambda c_2\int_0^{\pi}\sin^2 t dt$$

$$=\frac{\lambda c_1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2t dt-\frac{\lambda c_2}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt$$

$$c_1=\frac{\lambda c_1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi}-\frac{\lambda c_2}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\lambda c_1}{4}\left[1-1\right]-\frac{\lambda\pi}{2}c_2=-\frac{\lambda\pi}{2}c_2$$

ومنه $$(1+\frac{\lambda\pi}{2})c_2=0$$

وبالتالي حصلنا على جملة معادلتين

$$(1-\lambda\frac{\pi}{2})c_1=0$$

$$(1+\lambda\frac{\pi}{2})c_2=0$$

محدد الأمثال لهذه الجملة هو

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\dfrac{\lambda\pi}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\frac{\lambda\pi}{2})(1+\frac{\lambda\pi}{2}) = 0$$

$$1-\frac{\lambda^2\pi^2}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$$

من أجل $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ وبالتعويض في المعادلتين نجد :

$$(1-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2})c_1 = 0 \Rightarrow 0.c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c$$

$$(1+\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2})c_2 = 0 \Rightarrow 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

والتابع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ هو

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}c\cos x$$

ومن أجل $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ وبالتعويض نجد :

$$(1+\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2})c_1 = 0 \Rightarrow 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$(1-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2})c_2 = 0 \Rightarrow 0c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = c$$

والتابع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ هو

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} c \sin x$$

مثال (16) أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x)\varphi(t)dt$$

الحل :

$$\varphi(x) = 45\lambda x^2 \int_0^1 \ln t\, \varphi(t)dt - 9\lambda \ln x \int_0^1 t^2 \varphi(t)dt$$

$$\varphi(x) = 45\lambda x^2 c_1 - 9 \ln x c_2 \lambda$$

$$c_1 = \int_0^1 \ln t\, \varphi(t)dt = \int_0^1 \ln t \left[45\lambda c_1 t^2 - 9\lambda c_2 \ln t \right] dt$$

$$= 45\lambda c_1 \int_0^1 t^2 \ln t dt - 9\lambda c_2 \int_0^1 \ln^2 t dt$$

$$\int_0^1 t^2 \ln t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2u} u e^u du = \int_{-\infty}^0 u e^{3u} du$$

$$= \left[\frac{1}{3} u e^{3u} - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{3} e^{3u} du \right]_{-\infty}^0$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{e^{3u}}{3} \right]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{9}$$

حيث فرضنا لحساب هذا التكامل $t = e^u \Leftarrow dt = e^u du$

ثم كاملنا بالتجزئة

$$\int_0^1 \ln^2 t dt = \int_{-\infty}^0 u^2 e^u du = \left[u^2 e^u \right]_{-\infty}^0 - 2 \int_{-\infty}^0 u e^u du$$

$$= -2 \left(\left[u e^u \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^u du \right)$$

$$= -2 \left[u e^u - e^u \right]_{-\infty}^0 = -2(-1) = 2$$

بالتعويض نجد :

$$c_1 = 45c_1\lambda(-\frac{1}{9}) - 9\lambda c_2(2)$$

$$c_1 = -5c_1\lambda - 18c_2\lambda \Rightarrow (1+5\lambda)c_1 + 18\lambda c_2 = 0$$

$$c_2 = 45c_1\lambda\int_0^1 t^4 dt - 9c_2\lambda\int_0^1 t^2 \ln t dt$$

$$= 45c_1\lambda\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 - 9c_2\lambda\left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$= 45c_1\lambda\left(\frac{1}{5}\right) - 9c_2\lambda\left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$c_2 = 9c_1\lambda + c_2\lambda \Rightarrow (1-\lambda)c_2 - 9c_1\lambda = 0$$

وبالتالي حصلنا على جملة المعادلتين

$$(1+5\lambda)c_1 + 18\lambda c_2 = 0$$
$$-9\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0$$

محدد الأمثال لهذه الجملة هو

$$\begin{vmatrix} 1+5\lambda & 18\lambda \\ -9\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1+5\lambda)(1-\lambda)+9(18)\lambda^2$$

$$= 1-\lambda+5\lambda-5\lambda^2+162\lambda^2$$

$$= 157\lambda^2+4\lambda+1$$

نلاحظ أن المعادلة $157\lambda^2+4\lambda+1=0$

ليس لها جذور حقيقية هذا يعني أن $\Delta(\lambda)\neq 0$

وبالتالي لجملة المعادلتين السابقتين الحل الصفري أي $c_1=c_2=0$

ومنه فإن $\varphi(x)=0$

وبالتالي لا توجد قيم ذاتية ولا توابع ذاتية

تمارين

1 – تحقق من أن التوابع المعطاة هي حلول للمعادلات التكاملية المرافقة :

$$\varphi(x)=1-x \quad ; \quad \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt=x$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)dt$$

$$\varphi(x)=xe^x \quad ; \quad \varphi(x)=e^x\sin x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$$

2 – أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$$

بطريقة النواة الحالة .

3 – استخدم طريقة التقريبات المتتالية لحل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=1+\lambda\int_0^x \varphi(t)dt$$

حيث $\varphi_0(x) = 0$

4 – أوجد بطريقة التقريبات المتتالية حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = x + 1 - \int_0^x \varphi(t)dt$$

حيث $\varphi_0(x) = x + 1$

5 – برهن أن التابع $\varphi(x) = 1$ حل للمعادلة التكاملية

$$\varphi(x) + \int_0^1 x\,(e^{xt} - 1)\varphi(t)dt = e^x - x$$

6 – أوجد حل المعادلات التكاملية التالية :

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 e^{\sin^{-1}x}\,\varphi(t)dt = \tan x$$

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \cos(q\ln t)\varphi(t)dt = 1$$

حيث q ثابت عددي

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t)\varphi(t)dt=x$$

7 – باستخدام النواة الحالة أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)-4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\varphi(t)dt=2x-\pi$$

8 – أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية لمعادلات فريد هولم التكاملية التالية :

$$\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{\pi}\left(\cos^2 x\cos 2t+\cos 3x\cos^3 t\right)\varphi(t)dt=0$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\sin x\cos t\,\varphi(t)dt=0$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\sin x\sin t\,\varphi(t)dt=0$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(5xt^2+4x^2t\right)\varphi(t)dt$$

9 – أوجد النوى المكررة للنواة

$$k(x,t) = \sin(x-t)$$

من أجل $b = \frac{\pi}{2}$ $\quad a = 0 \quad$ $n = 2,3$

10 – ادرس إمكانية الحلول للمعادلة التكاملية التالية من أجل قيم مختلفة للوسيط λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x e^{t} \varphi(t) dt = x$$

الرموز والمصطلحات العلمية

اللغة العربية	اللغة الإنكليزية
خوارزمية	Algorithm
متقارب بشكل مطلق	Absolutely convergent
تحليل	Analysis
دقة	Accuracy
عبارة حسابية	Arcthmetic statement
حل تقريبي	Approximate solution
قاعدة	Basis
تابع محدود	Bounded function
شروط حدية	Boundary conditions
مسألة القيم الحدية	Boundary value problem
كثيرات حدود تشيبتشيف	Chebyshev Polynomials
شرط	Condition

Constant	ثابت
Coefficients	معاملات
Columns of matrix	أعمدة مصفوفة
Continuity	الاستمرارية
Continuous	مستمر
Data	معطيات (بيانات)
Discrete function	تابع منفصل
Definite	محدود
Define integral	تكامل محدود
Definition	تعريف
Degree	درجة
Derivatives	مشتقات
Determinant	معين (محدد)
Difference equation	معادلة فروق
Equivalence	التكافؤ

Expression	تعبير
Eigen value	القيمة الذاتية
Error	خطأ
Euloir method	طريقة أولر
Equality	مساواة
Explicit method	طريقة صريحة (ظاهرية)
Exact solution	حل دقيق (فعلي)
Format	صيغة
Factor	عامل
Function approximation	تقريب التابع
Graph	خط بياني
Grid	شبكة
Heat equation	معادلة الحرارة
Hyperbolic equation	معادلة القطع الزائد
Independent	مستقل

Index	دليل
Inequality	متراجحة (متباينة)
Infinite	غير محدد
Infinity	لا نهاية
Initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
Interpolation	استيفاء
Iteration	تكرار
Least – squares	المربعات الصغرى
Linear system	جملة خطية
Linear operator	مؤشر خطي
Legendre Polynomials	حدوديات ليجندر
Lemma	تمهيدية
Local error	خطأ موضعي
Matrix inversion	مقلوب مصفوفة
Numerical analysis	تحليل عددي

Numerical methods	طرق عددية
Order of approximation	مرتبة التقريب
Orthogonal	تعامد
Orthogonal function	توابع متعامدة
Orthogonal property	خاصة التعامد
Parabolic	قطع مكافئ
Proof	برهان
Partial differential equations	معادلات تفاضلية جزئية
Quadrature formulas	صيغة تربيعية
Quasilinear	شبه خطية
Roots	جذور
Region	منطقة
Relation	علاقة
Round off	تدوير
Statement	عبارة

Series	متسلسلة
Symbol	رمز
Symmetric	متناظر
Stability	استقرار
Step – size	طول الخطوة
Taylor series	متسلسلة تايلور
Theorem	نظرية (مبرهنة)
Transformation	تحويل
Unique solution	حل وحيد
Value	قيمة
Variable	متغير (متحول)
Vector	شعاع (متجه)
Weights	أوزان
Zero solutions	حل صغري

المراجع

1 – د. دعد الحسيني و د. محمد صبح : الأسس العامة للتحليل العددي جامعة دمشق 1992

2 – د. هاشم عبد اللي : التحليل العددي (2) جامعة حلب 1990

3 – د. فوزي دنان : الرياضيات العددية جامعة دمشق 1991

4 – د. موفق دعبول : نظرية المعادلات جامعة دمشق 1985

5 – د. محمد صبح و د. صالح الحربي : التحليل العددي وطرق حسابه العددية 2006

6 – د. فتحي قاضي : مبادئ أساسية في التحليل العددي 2005

7 – د. سليمان محمود : التحليل العددي (2) جامعة تشرين 2009

8 – د. محمد صبح : التحليل العددي والبرمجة جامعة دمشق 2009

9 – Maron M. numerical analysis 1982

10 – Rephale herbin. Cours d'analyse numerique 2004

المدقق اللغوي: د. عبد الكريم محمد حسين