وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الرياضيات (4)

السنة: الثانية

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: جميع الاختصاصات

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الرياضيات (4)

الدكتور
قصي كنفاني
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

الدكتور
إسماعيل إدريس
مدرس في قسم العلوم الأساسية

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرست

الباب الأوّل: التحليل العقدي

الفصل الأول: الأعداد العقدية

1- الأعداد والتوابع العقدية 17

1-1 الأعداد العقدية Complex numbers: 17

1-1-1 تعريفات Definitions: 17

1-1-2 خواص الأعداد العقدية: 17

1-1-3 التمثيل الهندسي للعدد العقدي Geometric representation: 19

1-1-4 التمثيل الهندسي لـ $z1 + z2$: 21

1-1-5 التمثيل الهندسي لـ $z1 - z2$: 22

1-1-6 التمثيل الهندسي لـ $z1 \cdot z2$: 25

1-1-7 التمثيل الهندسي لـ $z1/z2$: 26

1-1-8 نظرية دوموافر : 29

1-1-9 جذور عدد عقدي: 32

1-1-10 نشر $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ و $\tan n\theta$ لقوى الجيب والتجيب والظل: 36

1-2 التابع العقدي: 39

1-2-1 التابع الأسي العقدي: 40

1-2-2 التوابع المثلثية العقدية: 40

1-2-3 التوابع القطعية العقدية: 42

1-2-4 التوابع القطعية العقدية العكسية: 45

1-2-5 القسمان الحقيقي والتخيلي للتوابع المثلثية والقطعية العقدية: 46

1-2-6 التابع اللوغاريتمي للمتحول العقدي: 49

1-3 مجموع المتسلسلات Summation of series 52

1-4 التقريبات Approxim 55

تمارين غير محلولة 56

الفصل الثاني: التحليل العقدي

2- التحليل العقدي 65
2-1 تحليل التوابع العقدية 65
2-1-1 مقدمة 65
2-1-2 نهاية تابع عقدي 65
2-1-3 استمرار تابع عقدي 66
2-1-4 اشتقاق تابع عقدي $f(z)$ 66
2-1-5 التوابع التحليلية 68
2-1-6 التوابع التوافقية 72
2-1-7 تطبيقات لمسائل التدفق 73
2-2 التمثيل الهندسي للتابع $w = f(z)$ 79
2-2-1 بعض التحويلات الأساسية 80
1- تحويل الانسحاب: 80
2- تحويل التحاكي والدوران: 80
3- تحويل العكس أو العكوس: 80
4- تحويل ثنائي الخطية: 81
2-2-2 التحويلات المحافظة 84
2-2-3 بعض التحويلات المحافظة 87
1- التحويل $w = z2$: 87
2- تحويل جوكوفسكي $w = z + 1/z$: 88
3- التحويل الأسي $w = e^z$: 90
4- التحويل التجيبي القطعي $w = \cosh z$: 90
2-2-4 تحويل شوارتز – كريستوفل 92
2-3 تمارين محلولة 93
2-4 التكامل العقدي 96

2-4-1 التكامل الخطي العقدي 96
2-4-2 نظرية كوشي 99
2-4-3 علاقة كوشي التكاملية 101
2-4-4 تقارب نظرية كوشي: نظرية موريرا 106
2-4-5 متراجحة كوشي 106
2-4-6 نظرية ليوفيل 107
2-4-7 علاقة يواسون التكاملية 107
2-5 المتسلسلات العقدية 108
2-5-1 متسلسلة تايلور 109
2-5-2 متسلسلة لورانت 110
2-5-3 أصفار (جذور) تابع تحليلي 115
2-6 الرواسب 118
2-6-1 نظرية الرواسب 118
2-6-2 حساب الرواسب 119
2-7 حساب تكاملات حقيقية معتلة 124
2-7-1 تكاملات حول الدائرة الواحدية 125
2-7-2 تكاملات حول نصف دائرة 126
2-7-3 تكاملات حول محيط مستطيل 128
2-7-4 تكاملات تملك على محيط المنحني المكامل عليه أقطاباً على المحور الحقيقي 131
تمارين غير محلولة 136

الباب الثاني: تحليل فوريه

الفصل الأول: التوابع الخاصة

1- التوابع الخاصة 153
1-1 تابع بيتا $\beta(a,b)$ 153
1-1-1 تعريف التابع بيتا: 153

1-1-2 بعض خواص التابع بيتا:..... 153
2-1 تابع غاما: 156
1-2-1 بعض خواص التابع غاما: 156
2-2-1 مشتق التابع غاما: 158
3-2-1 العلاقة بين التابعين بيتا وغاما: 159
3-1 التابع دلتا:..... 168
4-1 المجداءات اللانهائية..... 169
5-1 علاقة (أويلر – غاوص):..... 170
6-1 علاقة (وايرشتراس) – المشتق اللوغاريتمي للتابع غاما: 173
7-1 تطبيقات التابع غاما: 175
1-7-1 التكاملات المثلثية الأسية 175
2-7-1 استنتاج علاقة ستيرلينج Stirling Formula..... 176
3-7-1 حساب $\Gamma(a+1)$ باستخدام اللوغاريتم 178
تمارين محلولة 178
8-1 التابع الأسي التكاملي واللوغاريتمي التكاملي..... 183
1-8-1 تعريف التابع الأسي التكاملي 183
9-1 تابعا الجيب التكاملي والتجيب التكاملي 184
1-9-1 تعريف تابعي الجيب والتجيب التكاملين..... 184
2-9-1 النشر في متسلسلة صحيحة..... 185
3-9-1 النشر المقارب 187
4-9-1 العلاقات المتبادلة 187
5-9-1 الاستمرار التحليلي..... 187
10-1 تابع الخطأ..... 188
1-10-1 تعريف تابع الخطأ 188
2-10-1 نشر التابع $\phi(x)$ في متسلسلة قوى صحيحة..... 189
3-10-1 النشر المقارب التابع $1-\phi(x)$..... 189

1-11 تكاملات فرينيل 190
1-11-1 تعريف تكاملات فرينيل Fresnel 190
2-11-1 النشر لتكاملي فرينيل في متسلسلة قوى صحيحة 192
3-11-1 النشر المقارب لتكاملي فرينيل 192
12-1 كثيرات حدود ليجندر 193
13-1 التوابع الأسطوانية: توابع بيسل 196
1-13-1 توابع بيسل من النوع الأول 196
2-13-1 توابع بيسل من النوع الثاني 199
3-13-1 العلاقات التدريجية لتوابع بيسل 202
4-13-1 التابع المولد 208
5-13-1 المعادلات التفاضلية التي ترد لمعادلة بيسل التفاضلية 212
تمارين غير محلولة 215

الفصل الثاني: تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

2- تحويلات لابلاس 221
1-2 تمهيد 221
1-1-2 تعريف تحويل لابلاس 221
2-1-2 شروط وجود تحويل لابلاس 222
3-1-2 تابع هيفيسايد وتحويل لابلاس له 222
4-1-2 تحويل لابلاس لبعض التوابع الأساسية 225
2-2 خواص تحويلات لابلاس 226
1-2-2 الخاصة الخطية 226
2-2-2 خاصة الإزاحة الأولى 227
3-2-2 خاصة الإزاحة الثانية 232
4-2-2 خاصة التحاكي 236
5-2-2 تحويل لابلاس للتوابع الدورية 236
6-2-2 تحويلات لابلاس للمشتقات 238

2-2-7 تحويل لابلاس للتكاملات 239
2-2-8 تحويل لابلاس للتوابع المضروبة بـ "t 240
2-2-9 تحويل لابلاس للتوابع المقسومة على t 241
2-2-10 مبرهنة القيمة الابتدائية 243
2-2-11 مبرهنة القيمة النهائية 344
2-2-12 مبرهنة الطيّ (جداء تابعين) 346
2-3 تحويل لابلاس لبعض التوابع الخاصّة 247
2-3-1 تحويل لابلاس لتابع دلتا–ديراك 247
2-3-2 تحويل لابلاس لتابع hut 249
2-3-3 تحويل لابلاس لتابع الجيب التكاملي وجيب التمام التكاملي 249
2-3-4 تحويل لابلاس لتابع الأسي التكاملي 250
2-3-5 تحويل لابلاس لتوابع بيسل 250
2-3-6 تحويل لابلاس لتابع الخطأ 251
2-3-7 تحويل لابلاس لكثيرة حدود لاجير 251
2-4 ملخص الخواص المهمّة لتحويلات لابلاس 252
2-5 جدول تحويلات لابلاس ولابلاس المعاكس 253
2-6 تحويلات لابلاس المعاكس 256
2-6-1 طريقة تفريق الكسور الجبرية 258
2-6-2 طريقة دستور نشر هيفيسايد 263
2-6-3 طريقة استخدام نظرية الرواسب 264
2-6-4 طرق أخرى باستخدام خواص تحويلات لابلاس العكسية 266
2-6-5 طريقة استخدام مبرهنة الطيّ 272
2-7 تطبيقات تحويلات لابلاس ولابلاس المعاكس 274
2-7-1 حساب بعض التكاملات المعتلة 274
2-7-2 حل بعض المعادلات التفاضلية الخطية 275
2-7-3 حل جملة معادلات تفاضلية خطية 280

2-7-4 حل بعض المعادلات التفاضلية التكاملية 284
2-7-5 حل بعض المسائل في الكهرباء والميكانيك والكترون 286
تمارين غير محلولة 305

الفصل الثالث: سلاسل فوريه وتحويلات فوريه

3- سلاسل فوريه وتحويلات فوريه 313
3-1 مقدمة 313
3-2 متسلسلة فوريه (للإشارات الدورية المستمرة) 314
3-2-1 التابع الدوري 314
3-2-2 خواص التوابع الدورية 315
3-2-3 تكاملات شهيرة 316
3-2-4 النشر في متسلسلة فوريه 316
3-2-5 شروط ديريخليه 321
3-2-6 النشر لتابع يمتلك نقاط انقطاع 326
3-2-7 النشر عند تغير مجال الدور 332
3-2-8 نشر التوابع الزوجية والفردية 340
3-2-9 النشر ذو نصف المدى 346
3-3 أشكال الموجات المثالية Typical Waveforms: 354
3-4 صيغة بارسيفال الأولى Parseval's Formula: 355
3-5 الشكل المعقدي لمتسلسلة فوريه Complex Form: 358
3-6 التحليل التوافقي Harmonic Analysis: 360
3-7 الشكل العام لمتسلسله فوريه (نشر التابع في متسلسله توابع متعامدة) 362
3-7-1 تعريف التوابع المتعامدة: 362
3-7-2 تعميم النشر: 364
3-8 تكامل فوريه Fourier Integral 364
3-8-1 تكامل فوريه كنهاية لمتسلسلة فوريه: 365

2-8-3 تكامل فوريه الجيبي وتكامله التجيبي: 368
9-3 تحويلات فوريه Fourier Transforms: 373
1-9-3 العلاقة بين تحويلي فوريه ولابلاس: 376
2-9-3 خواص تحويلات فوريه: 376
3-9-3 التّرشيح (أو الفلترة) وتابع دلتا ديراك: 385
4-9-3 تحويل فوريه ذو النّوافذ: 386
5-9-3 تحويلا فوريه التجيبي والجيبي: 390
6-9-3 تحويلات فوريه الجيبية والتّجيبية المنتهية: 393
7-9-3 أمثلة إضافية: 394
10-3 تحويلات زد Z-Transforms 403
1-10-3 تعريف تحويل Z 403
2-10-3 مبرهنة الكفاية 404
3-10-3 خواص منطقة التقارب ROC 405
4-10-3 خواص تحويل Z 406
5-10-3 قواعد أساسية 409
6-10-3 طريقة الفروق المنتهية لحساب مجموع متسلسلة قوى 410
7-10-3 تحويل Z للفروق 411
8-10-3 العلاقة بين تحويل Z وتحويل لابلاس: 411
9-10-3 العلاقة بين تحويل Z وتحويل فوريه: 414
11-3 تحويل Z العكسي (مقلوب تحويل Z) 414
1-11-3 الصيغة العقدية لمقلوب تحويل Z 414
2-11-3 تطبيق تحويل Z في حل معادلات الفروق 415
12-3 تحويل فوريه المتقطع DFT: 417
13-3 تحويل هلبرت Hilbert Transform: 420
1-13-3 العلاقة بين تحويل هلبرت وتحويل فوريه: 423

3-10-2 خواص تحويل هلموتز..... 424
تمارين غير محلولة..... 428

الباب الثالث: المعادلات التفاضلية الجزئية

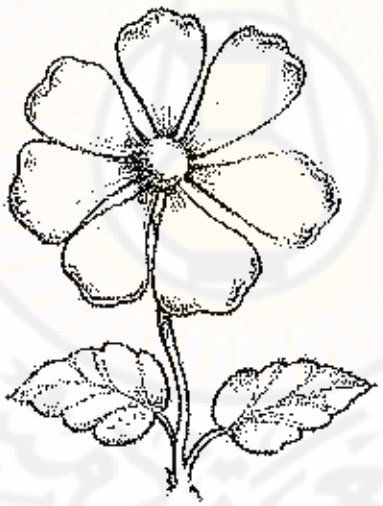
الفصل الأول: المعادلات التفاضلية الجزئية وتطبيقاتها

1- المعادلات التفاضلية الجزئية..... 445
1-1 مقدمة:..... 445
1-1-1 بعض التعريفات والمفاهيم الأساسية Basic concepts and definitions..... 446
1-1-2 المعادلات الموجية Wave equations..... 453
1-1-3 معادلات التوصيل الحراري Heat conduction equations..... 456
1-1-4 معادلات خط النقل Transmisston line equations..... 458
1-1-5 معادلة لابلاس Laplace's equation..... 459
1-1-6 بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الأخرى والمهمّة في العلوم والهندسة..... 460
1-2 معادلات تفاضلية جزئية تُكامل مباشرة Direct integration method..... 462
1-3 معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى First order partial differerntial equations
465
1-4 المعادلات التفاضلية الجزئية من مراتب عليا لتابع بمتحولين مستقلين ذات الأمثال الثابتة 472
1-4-1 طريقة فصل المتغيرات Method of separation of vartables..... 474
1-4-2 استخدام سلاسل فوريه Use of Fourier series..... 482
1-4-3 الغشاء الدائري ومعادلة بيسل Circular membrane and Bessel's equation
487
1-4-4 حل معادلة بيسل Solution of Bessel's equation..... 490
1-4-5 طريقة تحويل لابلاس Laplace transform method..... 498
1-5 مسائل محلولة..... 501
تمارين غير محلولة..... 520

الجداول والملحقات

A- جداول التحويلات..... 523

A-1 جدول تحويلات لابلاس 523
A-2 جدول تحويلات زد Z 525
A-3 جدول تحويلات فوريه 527
A-4 جدول تحويلات فوريه التجيبي 530
A-5 جدول تحويلات فوريه الجيبي 531
A-6 جدول تحويل هلبرت 533
جدول المصطلحات العلمية 537
المراجع References 545
اللجنة العلمية 547



Damascus University

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

عزيزي الطالب

إن هذا الكتاب الرياضيات (4)، موجه لطلاب السنة الثانية الذين درسوا كتب الرياضيات السابقة (1) و(2) و(3)، لجميع الاختصاصات، فقد جاء هذا الكتاب تكملة للمفاهيم والموضوعات التي درسها الطلاب.

أُعِدَّ كتاب الرياضيات (4) وفق المفردات المقترحة في مجلس التعليم العالي، وذلك لطلاب السنة الثّانية في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، ومرجعاً مهمّاً لهم.

ويقع هذا الكتاب في ثلاثة أبواب، ويتناول الموضوعات الآتية:

الباب الأول: التّحليل العقدي، وينقسم فصلين، ففي الفصل الأول تُطرَق لمفهوم الأعداد العقدية وتعريفها، وتعريف حقل الأعداد العقدية، وخواص العدد العقدي، والعمليات الجبرية على الأعداد العقدية، ونساوي عددين عقديين، وخواص الجمع والضرب في الأعداد العقدية، وتمثيل الجمع والطرح بالأشعة على محاور إحداثية، والتمثيل الهندسي للعدد العقدي، والعنصر الحيادي والعنصر النظير بالنسبة إلى الجمع والضرب، ومقلوب العدد العقدي، ومرافق العدد العقدي، وخواص مرافق العدد العقدي، وطويلة العدد العقدي، والشكل المثلثي العدد العقدي، والعمليات الجبرية في الشكل المثلثي العدد العقدي، ودستور دوموافر، وإيجاد جذور العدد العقدي، ومن ثمّ الشكل الأسي للعدد العقدي، والتحويل من الشكل الأسي إلى المثلثي وإلى الجبري للعدد العقدي والعكس، والعمليات الجبرية في الشكل الأسي للعدد العقدي، والتوابع العقدية، من كثيرات الحدود العقدية، والتوابع المنتلية العقدية، والتوابع الأسية، والتوابع اللوغاريتمية.

وفي الفصل الثاني دُرست التوابع العقدية، ونهاياتها واستمرارها واشتقاقها، وتَعرُّف التوابع التحليلية، والتوابع التوافقية، وشرطي كوشي ريمان، ومعادلة لابلاس وتطبيقاتها، والتحويلات الأساسية في المستوي العقدي، والتحويلات المحافظة، وتحويل جوكوفسكي، وتحويل شوارتز كريستوفل، وغيرها، ثم دُخِلَ في مفهوم التكامل العقدي، ونظرية كوشي التكاملية، وعلاقة بواسون التكاملية، ومن ثمّ درسنا المتسلسلات

العقدية، مثل النّشر في متسلسلة تايلور، والنّشر في متسلسلة لورانت، وأصفار التّوابع التحليلية، ونظرية الرّواسب، وكيفية حساب التّكاملات الحقيقية المُعتلة بالاستعانة بالتّكاملات العقدية.

الباب الثاني: تحليل فوريه ويقع في ثلاثة فصول، ففي الفصل الأول نتكلم عن التّوابع الخاصة، مثل تابع بيتا وخواصه، وتابع غاما والعلاقة بينهما، وتابع دلتا، والجداءات اللانهائية، وعلاقة أويلر–غاوص، وعلاقة وايرشتراس، وتطبيقات تابع غاما، والتّابع الأسي اللوغاريتمي، والتّابع اللوغاريتمي التكاملي، وتابع الجيب التكاملي، وتابع التجيب التكاملي، وتابع الخطأ، وتكاملات فريسنل، والنّشر المقارب لتكاملي فريسنل، والتّوابع فوق الهندسة وخواصها، وكثيرات حدود ليجندر، وتوابع بسل من النّوعين الأوّل والثّاني.

وفي الفصل الثاني ألقينا الضوء على تحويل لابلاس وتعريفه، وخواصه، ومبرهنة القيمة الابتدائية ومبرهنة القيمة النّهائية، ومبرهنة الطّي، وتحويل لابلاس للتّوابع الشّهيرة الأسية والمثلثية واللوغاريتمية، وتحويل لابلاس المعاكس، وتطبيقات تحويل لابلاس ولابلاس العكسي، وحل المعادلات التكاملية، وتحويل لابلاس المتقطع أي تحويل زد، وتحويل زد المعاكس، وخواصه مع قواعده، وتطبيقات هذا التحويل.

وفي الفصل الثالث نطرقنا إلى سلاسل وتحويلات فوريه، وتعريف متسلسلة فوريه للتوابع الدّورية، وشروط النّشر في متسلسلة فوريه، ونشر التّوابع الفردية والزّوجية، وصيغة بارسيفال، والتحليل التوافقي، وتعميم النّشر في متسلسلة فوريه، وتكامل فوريه، ثم تكامل فوريه الجيبي والتجيبي، وتعريف تحويلات فوريه، والعلاقة بين تحويلي لابلاس وفوريه، وخواص تحويل فوريه، وحل الكثير من التمارين، وتحويل فوريه المتقطع، ثم تطرقنا إلى تحويل هلبرت وخواصه.

الباب الثالث: حل المعادلات التفاضلية الجزئية، ويتألف من فصل واحد، نبدأ بمقدمة لتعريف المعادلات التفاضلية الجزئية، وأنواعها وتطبيقاتها في مجالات الهندسة، وحل المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى، ومن المراتب العليا.

روعي في هذا الكتاب دعم كلّ فكرة نظرية بتطبيق عملي مباشر، وذلك بهدف إغناء الفكرة النظرية وتوضيحها من جهة وتطويرها وترسيخها في ذهن الطالب من جهة أخرى، إذ أوردنا عدداً من الأمثلة خلال عرضنا للمفاهيم النظرية، وأتبعنا كل فصل بتطبيقات وتمارين عدّة يتجلى فيها فهم الطالب للقسم النظري ليرتقي إلى المستوى المنشود.

آملين في الختام أن يكون هذا الكتاب واضحاً وسهلاً، وأن يؤدّي الغاية المرجوة من تأليفه، والله ولي التوفيق.

المؤلفان

الباب الأول

الفصل الأول

1- الأعداد والتوابع العقدية

Complex numbers and complex functions

1-1 الأعداد العقدية Complex numbers:

1-1-1 تعريفات Definitions:

إن كل عدد من الشكل $x+iy$، حيث إن x و y أعداد حقيقية و $i=\sqrt{-1}$ يدعى عدداً عقدياً.

ويدعى x القسم الحقيقي للعدد العقدي $x+iy$ ويرمز له بـ $Re(x+iy)$، ويدعى y القسم التخيلي للعدد العقدي $x+iy$ ويرمز له بـ $Im(x+iy)$.

يدعى زوج الأعداد العقدية $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ مرافق أحدهما للآخر.

1-1-2 خواص الأعداد العقدية:

أ- إذا كان $x_1+iy_1=x_2+iy_2$ فإن: $x_1-iy_1=x_2-iy_2$.

ب- نقول عن العددين العقديين x_1+iy_1 و x_2+iy_2 إنهما متساويان عندما:

$$Re(x_1+iy_1)=Re(x_2+iy_2)\Rightarrow x_1=x_2$$
$$Im(x_1+iy_1)=Im(x_2+iy_2)\Rightarrow y_1=y_2$$

ت مجموع عددين عقديين وفرقهما وجداؤهما وقسمتهما هو عدد عقدي.

فإذا كان $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ عددين عقديين فإن:

$$(i)\ z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$
$$(ii)\ z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$
$$(iii)\ z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$$
$$(iv)\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

ث- كل عدد عقدي $x+iy$ يمكن دائماً التعبير عنه بالشكل $r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

$$(i)\ Re(x+iy)=x=r\cos\theta,\qquad (ii)\ Im(x+iy)=y=r\sin\theta$$

بالتربيع والجمع نجد: $x^2+y^2=r^2\Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$ (بأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط).

وبقسمة (ii) على (i) نجد: $y/x=\tan\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}(y/x)$.

إذن يمكن كتابة العدد العقدي بالشكل:

$$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \wedge \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

يدعى التمثيل السابق بالشكل المثلثي للعدد العقدي.

تعريف: ندعو العدد $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$ طويلة العدد العقدي $x + iy$ modulus ويرمز لها بالرمز: $\mathrm{mod}(x + iy)$ أو $|x + iy|$.

وندعو θ مضمون أو زاوية أو عمدة العدد العقدي $x + iy$ amplitude or argument ويرمز لها بالرمز: $\mathrm{amp}(x + iy)$ أو $\arg(x + iy)$. واضح أن الزاوية θ لها عدد غير منته من القيم. إن قيمة θ التي تقع بين $-\pi$ و π تدعى القيمة الأساسية للزاوية. بإهمال القيم الأخرى سوف نعدُّ أن قيمة $\mathrm{amp}(z)$ تعني القيمة الأساسية. يرمز للمقدار $\cos\theta + i\sin\theta$ اختصاراً $\mathrm{cis}\,\theta$ ونلفظ (سيس ثيتا).

ج- إذا كان مرافق العدد العقدي $z = x + iy$ هو $\bar{z} = x - iy$ عندها:

$$(i)\ Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$(ii)\ |z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2} = |\bar{z}|$$

$$(iii)\ z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$(iv)\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(v)\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$(vi)\ \overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2\ , \qquad \bar{z}_2 \neq 0.$$

مثال (1-1): حوّل العدد العقدي $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$ إلى شكله المثلثي.

الحل:

$$1 - \cos\alpha = r\cos\theta\ ,\ \sin\alpha = r\sin\theta \Longrightarrow$$

$$r^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2(\alpha/2) \Longrightarrow r = 2\sin(\alpha/2)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\sin^2(\alpha/2)} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \theta = (\pi - \alpha)/2 \Longrightarrow$$

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = r\,\mathrm{cis}(\theta) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{cis}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)$$

مثال (2-1): أوجد قيمة العدد العقدي z إذا كان $\arg(z + 1) = \pi/6$ و $\arg(z - 1) = 2\pi/3$.

الحل:

$$z = x + iy \Longrightarrow z + 1 = (x + 1) + iy,\ z - 1 = (x - 1) + iy \Longrightarrow$$

$$\arg(z + 1) = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x + 1}\right) = 30^\circ \Longrightarrow \frac{y}{x + 1} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow x + 1 = \sqrt{3}\,y \qquad (i)$$

$$\arg(z - 1) = \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x - 1}\right) = 120^\circ \Longrightarrow \frac{y}{x - 1} = \tan 120^\circ =$$

$$= -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = -3x + 3 \qquad (ii)$$

بطرح العلاقتين $(ii) - (i)$ نجد أنّ:

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow \sqrt{3}\,y = 1/2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}/2 \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال (3-1): أوجد قيمة الأعداد الحقيقية x, y التي تحقق أن $-3 + ix^2y$ و $x^2 + y + 4i$ هما عددان عقديان مترافقان.

الحل: إذا كان $z = -3 + ix^2y \Rightarrow \bar{z} = x^2 + y + 4i \Rightarrow z = (x^2 + y) - 4i \Rightarrow$

$$-3 + ix^2y = x^2 + y - 4i$$

بمساواة القسم الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي:

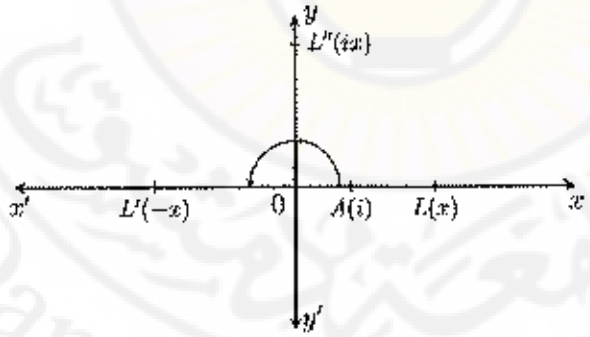
$$-3 = x^2 + y \Rightarrow x^2 = -3 - y, \qquad x^2y = -4 \Rightarrow -y(3 + y) = -4$$
$$\Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y + 4) = 0 \Rightarrow y_1 = 1, \; y_2 = -4$$

$$y = 1 \Rightarrow x^2 = -3 - 1 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i \notin \mathbb{R} \text{ مرفوض}$$

$$y = -4 \Rightarrow x^2 = -3 - (-4) = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow z_1 = -1 - 4i \quad \vee \quad z_2 = 1 - 4i$$

3-1-1 التمثيل الهندسي للعدد العقدي Geometric representation:

إن جميع الأعداد الحقيقية تمثل على طول المحور $x'ox$، والأعداد الحقيقية الموجبة تقع على طول المحور ox، والسالبة تقع على طول المحور ox'. ليكن oA يساوي شعاع واحدة القياس على محور السينات، انظر الشكل (1-1).



الشكل (1-1): تمثيل العدد العقدي.

لنأخذ نقطة L على المحور ox بحيث يكون: $oL = x(oA)$. تمثل L على المحور ox العدد الحقيقي الموجب x وتمثل العدد $i \cdot ix = i^2x = -x$ بنقطة L' على ox' تبعد مسافة oL عن o.

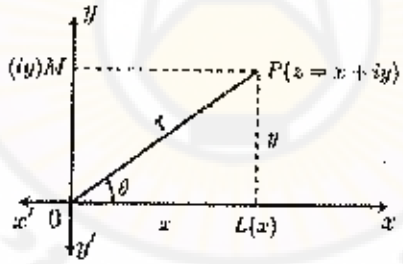
من ذلك نستنتج أن ضرب العدد الحقيقي x بالعدد التخيلي i^2 يؤدي إلى دوران oL بزاويتين قائمتين إلى الوضع oL'. وهذا يدل بشكل طبيعي على أن ضرب عدد حقيقي بالعدد التخيلي i يكافئ تدوير oL بزاوية قائمة إلى الوضع oL''.

لذلك إذا كان $y'oy$ خطاً مستقيماً متعامداً مع المحور الحقيقي $x'ox$ عندئذ يمكن تمثيل جميع الأعداد التخيلية بنقاط على المحور $y'oy$، الذي يدعى المحور التخيلي imaginary axis، الأعداد التخيلية الموجبة على طول المحور oy، والأعداد التخيلية السالبة على طول المحور oy'.

ملاحظة (التفسير الهندسي للعدد i)(*):

مما سبق نجد أنه من الواضح أن i هو عملية ضرب لأي عدد حقيقي لتحويله إلى عدد تخيلي وتقوم بتدويره بزاوية قائمة في المستوي العقدي بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة).

أما بالنسبة إلى التمثيل الهندسي للعدد العقدي $z = x + iy$(**) لنفرض أنه لدينا محوران متعامدان $x'ox$ و $y'oy$. حيث يمثل $x'ox$ الأعداد الحقيقية و $y'oy$ يمثل الأعداد التخيلية، لأن ضرب أي عدد حقيقي بالواحدة التخيلية i هو تدوير لاتجاهه بزاوية قائمة. لتكن النقطة M على المحور oy تمثل القسم التخيلي iy، إن النقطة التي إحداثياتها (x, y) تمثل العدد العقدي $z = x + iy$ بشكل وحيد في المستوي العقدي Z.



الشكل (2-1): تمثيل العدد العقدي $z = x + iy$.

إن المخطط الذي يقودنا لهذا التمثل للعدد العقدي يدعى مخطط أرجاند Argand's diagram.

(*) إن أول عالم رياضيات اقترح التمثيل الهندسي للعدد التخيلي i هو العالم متريك كوهن Heinrich Kühn في مدينة دنزيك Danzig (1750/51) صديق العالم ليونارد أولر.

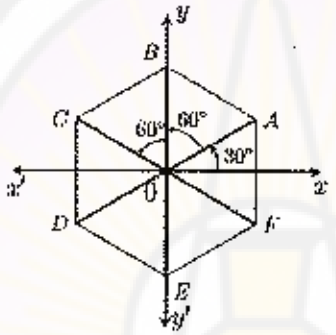
(**) التمثيل الهندسي للعدد العقدي أُدخل إلى الرياضيات من خلال مذكرات العالم الفرنسي جان روبرت آرجاند Jean-Robert Argand باريس Paris (1806).

إذا كانت (r,θ) الإحداثيات القطبية للنقطة P، عندها تكون r هي طويلة العدد z و θ زاويته مع محور السينات.

ملاحظة: بما أن للعدد العقدي طويلة واتجاهاً، لذلك، يمكن تمثيله شعاعاً. فيما بعد سنعبر عن العدد العقدي $z = x + iy$ بـ: 1- نقطة z إحداثياتها (x,y). أو 2- شعاع z من o إلى $P(x,y)$.

مثال (1-4): إذا كان مركز المسدس المنتظم في مبدأ الإحداثيات وأحد رؤوسه معطى بالعدد $\sqrt{3}+i$ على مخطط آرجاند. حدد الرؤوس الباقية لهذا المسدس.

الحل: ليكن $\overrightarrow{oA} = \sqrt{3}+i$ وبالتالي فإنّ: $oA = 2$، و $4xoA = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = 30°$، انظر الشكل (1-3).



الشكل (1-3): المسدس الذي أحد رؤوسه $\sqrt{3}+i$.

وبما أنّ المسدس منتظم فإنّ: $oB = oC = 2$، وإن:

$$4xoB = 30° + 60° = 90°, \quad 4xoC = 30° + 120° = 150° \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{oB} = 2(\cos 90° + i \sin 90°) = 2i$$

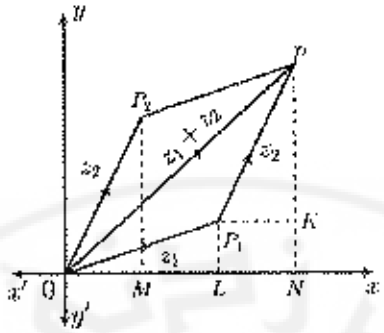
$$\overrightarrow{oC} = 2(\cos 150° + i \sin 150°) = -\sqrt{3} + i$$

وبما أنّ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CF}$ متناصفة في المبدأ o فإنّ:

$$\overrightarrow{oD} = -\overrightarrow{oA} = -\sqrt{3} - i, \quad \overrightarrow{oE} = -\overrightarrow{oB} = -2i, \quad \overrightarrow{oF} = -\overrightarrow{oC} = \sqrt{3} - i$$

1-1-1 التمثيل الهندسي لـ $z_1 + z_2$:

لتكن P_1 و P_2 ممثلان العددين العقديين $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ على الترتيب (الشكل 1-4). بإكمال رسم متوازي الأضلاع oP_1PP_2، نرسم P_1L و P_2M و PN متعامدة مع ox، أيضاً نرسم P_1K متعامد مع PN، أي: $P_1K \perp PN$.



الشكل (1-4): التمثيل الهندسي لمجموع العددين العقديين $z_1 + z_2$.

بما أنّ: $oN = oL + LN = oL + oM = x_1 + x_2$ لأنّ: $LN = P_1K = oM$.

$$NP = NK + KP + LP_1 + MP_2 = y_1 + y_2$$

وبالتالي تكون إحداثيات النقطة P، هي $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$، التي تمثل العدد:

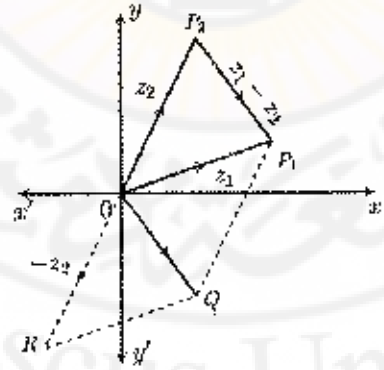
$$z = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2$$

هذا يعني أن النقطة P التي هي نهاية القطر الرئيسي لمتوازي الأضلاع المنشأ على oP_1 و oP_2 تمثل مجموع العددين العقديين $P_1(z_1)$ و $P_2(z_2)$ حيث إنّ: $\arg(z_1 + z_2) = 4xoP$، $|z_1 + z_2| = oP$.

ملاحظة: في جبر الأشعة، نجد أنّ: $\overrightarrow{oP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{oP}$.

5-1-1 التمثيل الهندسي لـ $z_1 - z_2$:

لتكن P_1 و P_2 تمثلان العددين العقديين $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ على الترتيب (الشكل 5-1). عندما يكون طرح العدد z_2 من العدد z_1، هو بجمع z_1 و $-z_2$.



الشكل (1-5): التمثيل الهندسي لطرح العددين العقديين $z_1 - z_2$.

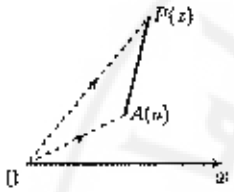
بتمديد P_2o إلى النقطة R بحيث يكون $oR = oP_2$. فتكون إحداثيات النقطة R هي: $(-x_2, -y_2)$ التي توافق العدد العقدي: $-x_2 - iy_2 = -z_2$. وبإتمام متوازي الأضلاع $oRQP_1$، يكون مجموع z_1 و$(-z_2)$، ممثل بـ oQ أي: $z_1 - z_2 = \overrightarrow{oQ} = \overrightarrow{P_2P_1}$. أي أن $z_1 - z_2$ يمثل بالشعاع $\overrightarrow{P_2P_1}$.

ملاحظة: مما سبق نستنتج أنّ: $\overrightarrow{P_2P_1} = \overrightarrow{oP_1} - \overrightarrow{oP_2}$، أي أنّ أيّ شعاع $\overrightarrow{P_2P_1}$ يمكن أن يكتب بالإشارة إلى مبدأ الإحداثيات.

مثال (5-1): أوجد المحل الهندسي للنقطة $P(z)$ $(a, k, \alpha$ ثوابت) عندما:

(i) إذا كان: $|z - a| = k$.

(ii) إذا كان: $\arg(z - a) = \alpha$.



الحل: لتكن النقطتان A وP، ممثلين للأعداد a وz على الترتيب في المستوي العقدي Z الذي مبدؤه o. لدينا:

$$z - a = \overrightarrow{oP} - \overrightarrow{oA} = \overrightarrow{AP} \Longrightarrow$$

(i) إنّ $|z - a| = k$ يعني أنّ $AP = k$، أي أنّ المحل الهندسي للنقطة $P(z)$ هو دائرة مركزها النقطة $A(a)$ ونصف قطرها k.

(ii) إنّ $\arg(z - a)$ يعني أنّ: $\arg(\overrightarrow{AP}) = \alpha$ وهذا يعني أن AP يشكل زاوية ثابتة مع محور السينات. وبالتالي إن المحل الهندسي للنقطة $P(z)$ هو مستقيم مار من النقطة $A(a)$ ويصنع زاوية α مع محور السينات ox.

مثال (6-1): حدد المنطقة من المستوي Z التي تتمثل بالعلاقات:

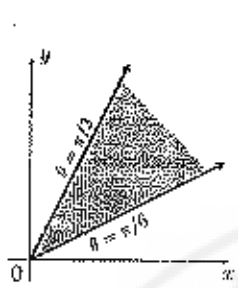
$$(i)\ 1 \le |z - 2i| \le 3, \qquad (ii)\ Re(z) > 3, \qquad (iii)\ \pi/6 \le \arg(z) \le \pi/3$$

الحل: (i) إنّ المعادلة $|z + 2i| = 1$ تمثل معادلة دائرة مركزها $(-2i)$ ونصف قطرها 1، والمعادلة $|z + 2i| = 3$ تمثل معادلة دائرة لها المركز نفسه $(-2i)$ ونصف قطرها 3.

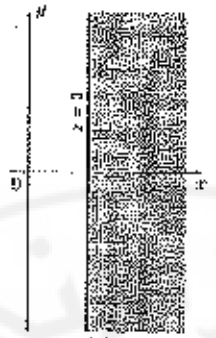
وبالتالي تكون المنطقة $1 < |z + 2i| \le 3$ تمثل حلقة دائرية، خارج الدائرة $|z + 2i| = 1$ وداخل الدائرة $|z + 2i| = 3$ مع محيطها.

(ii) إنّ المنطقة $Re(z) > 3$ تمثل جميع النقاط (z) التي قسمها الحقيقي أكبر تماماً من 3؛ فهي تمثل جميع النقاط في المستوي العقدي Z التي تقع على يمين المستقيم $x = 3$.

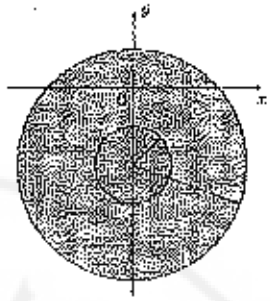
(iii) إذا كان: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ فإنّ: $\arg(z) = \theta$. وتكون مجموعة النقاط التي تحقق $\pi/6 \le \theta \le \pi/3$ تمثل المنطقة المحصورة بين الزاويتين $\pi/6$ و$\pi/3$ مع المستقيمين $\theta = \pi/6$ و$\theta = \pi/3$.



$\pi/6 \le \theta \le \pi/3$



$Re(z) > 3$



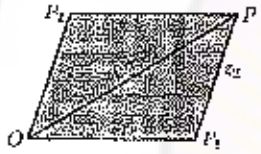
$1 < |z + 2i| \le 3$

مثال (7-1): إذا كان z_1, z_2 أي عددين عقديين برهن أنّ: (i) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

أي أن طويلة مجموع عددين عقديين أصغر من مجموع طويلتيهما أو تساويهما.

(ii) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

أي أن طويلة فرق عددين عقديين أكبر من فرق طويلتيهما أو تساويهما.



الحل: لتكن النقطتان P_1, P_2 تمثلان العددين العقديين z_1, z_2. لنكمل رسم متوازي الأضلاع OP_1PP_2، وبالتالي فإنّ: $|z_1| = OP_1$ و $|z_2| = P_1P$ و $OP_2 = P_1P$. الآن من المثلث: $|z_1 + z_2| = OP$، $OP \le OP_1 + P_1P$، وهذه المتراجحة تتضمن حالة O و P_1 و P على استقامة واحدة.

(i) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

وأيضاً لدينا من أجل (ii):

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$$

ملاحظة: يمكن تعميم ذلك فيكون: $|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$ وبشكل عام:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

مثال (8-1): إذا كان $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$، أثبت أن زاوية فرق العددين z_1 و z_2 هي $\pi/2$.

الحل: بما أن طويلة جمع العددين z_1 و z_2 تساوي طويلة فرقهما فلذلك نكتب:

$$z_1 + z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z_1 - z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$2z_1 = r[\cos\theta + \cos\varphi + i(\sin\theta + \sin\varphi)] =$$

$$= r\left\{2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$z_1 = r\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2} + i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right) \Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\theta+\varphi}{2}$$

$$2z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) - r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r[\cos\theta - \cos\varphi + i(\sin\theta - \sin\varphi)]$$

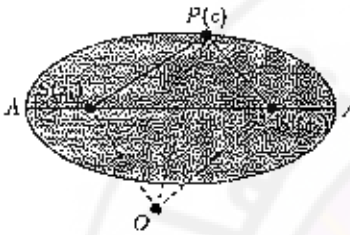
$$= r\left\{-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2} + 2i\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$z_2 = r\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\left(-\sin\frac{\theta+\varphi}{2}+i\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right)=$$
$$= r\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\right\}$$
$$\Longrightarrow \arg(z_2)=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\varphi}{2} \Longrightarrow \arg(z_2)-\arg(z_1)=\pi/2$$

مثال (1-9): أثبت أنّ معادلة قطع الناقص الذي محرقاه في z_1 وz_2 ومحوره الأكبر $2a$ هي:

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$$

ثم أوجد الاختلاف المركزية (اللامركزية) له eccentricity.



الحل: لتكن $P(z)$ نقطة ما على القطع الناقص المعطى بمحرقيه $S(z_1)$ و$S'(z_2)$، فيكون: $SP=|z-z_1|$ و$S'P=|z-z_2|$. نعلم أنّ: $SP+S'P=AA'=2a$ أي:

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$$

التي هي معادلة القطع الناقص. لدينا أيضاً: $SS'=2ae$، حيث e هي اللامركزية.

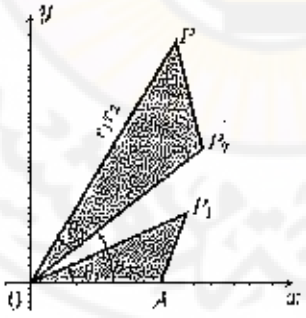
$$\left|\overrightarrow{OS'}-\overrightarrow{OS}\right|=2ae \Longrightarrow |z_2-z_1|=|z_1-z_2|=2ae \Longrightarrow$$
$$e=|z_2-z_1|/2a=|z_1-z_2|/2a$$

6-1-1 التمثيل الهندسي لـ z_1z_2:

ليكن P_1 وP_2 تمثلان العددين العقديين z_1 وz_2 على الترتيب. لدينا:

$$z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), \qquad z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

لتكن $OA=1$ على طول المحور ox، لنشكل المثلث OP_2P على OP_2 المشابه للمثلث OAP_1 فيكون:



الشكل (1-6): التمثيل الهندسي لجداء العددين العقديين z_1z_2.

$$\frac{OP}{OP_1}=\frac{OP_2}{OA} \Longrightarrow OP=OP_1\cdot OP_2=r_1r_2$$
$$\measuredangle AOP=\measuredangle AOP_2+\measuredangle P_2OP=\measuredangle AOP_2+\measuredangle AOP_1=\theta_2+\theta_1$$

وبالتالي فإن النقطة P تمثل العدد العقدي: $r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

وهذا يدل أن جداء العددين z_1 و z_2 يمثل بالنقطة P ويكون:

$$(i)\quad |z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad (ii)\quad \arg(z_1z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2)$$

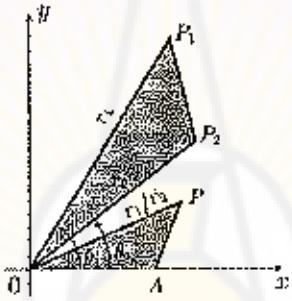
ملاحظة: إن ضرب أي عدد عقدي z بـ $\cos\theta + i\sin\theta$ يقوم بتدوير العدد بزاوية θ ويبقى بالطويلة نفسها، لأن طويلة العدد $\cos\theta + i\sin\theta$ تساوي الواحد.

7-1-1 التمثيل الهندسي لـ z_1/z_2:

ليكن P_1 و P_2 تمثلان العددين العقديين z_1 و z_2 على الترتيب. لدينا:

$$z_1 = x_1+iy_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), \qquad z_2 = x_2+iy_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

لتكن $OA=1$ على طول المحور ox، لنشكل المثلث OAP على OA المشابه للمثلث OP_2P_1 فيكون:



الشكل (7-1): التمثيل الهندسي لقسمة العددين العقديين z_1/z_2.

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OP_1}{OP_2} \Rightarrow OP = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

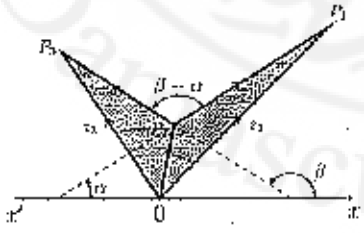
$$\measuredangle XOP = \measuredangle P_2OP_1 = \measuredangle AOP_1 - \measuredangle AOP_2 = \theta_1-\theta_2$$

وبالتالي فإن النقطة P تمثل العدد العقدي: $(r_1/r_2)[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

هذا يدل أن العدد z_1/z_2 يمثل بالنقطة P، مع العلم أن:

$$(i)\ |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \qquad (ii)\ \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1)-\arg(z_2)$$

ملاحظة: إذا كانت $P_1(z_1)$ و $P_2(z_2)$ و $P_3(z_3)$، أي ثلاث نقاط، فإنّ:



$$\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\right) = \measuredangle P_1P_2P_3$$

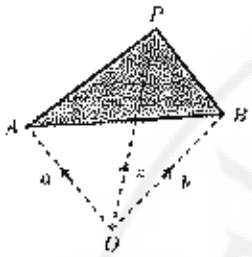
لتصل المبدأ O إلى P_1 و P_2 و P_3، فمن الشكل المجاور نجد أنّ:

$$\overrightarrow{P_2P_1} = z_1 - z_2, \qquad \overrightarrow{P_2P_3} = z_3 - z_2 \Longrightarrow$$

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) = \arg\left(\frac{\overrightarrow{P_2P_3}}{\overrightarrow{P_2P_1}}\right) = \arg\left(\overrightarrow{P_2P_3}\right) - \arg\left(\overrightarrow{P_2P_1}\right) = \beta - \alpha = \angle P_1P_2P_3$$

مثال (1-10): أوجد المحل الهندسي للنقاط z التي تحقق:

$$(i) \quad \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k, \qquad (ii) \quad \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \alpha\,; \qquad k, \alpha = \text{constant}$$



الحل: لتكن $A(a)$ و $B(b)$ أي نقطتين ثابتتين في المستوي العقدي Z، ولتكن $P(z)$ أي نقطة متغيرة.

(i) بما أنّ $|z-a| = AP$ و $|z-b| = BP$. إن النقطة P تتحرك وتحقق الشرط:

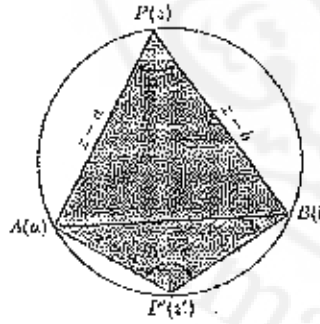
$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{AP}{BP} = k$$

أي أن P تتحرك مع الحفاظ على نسبة ثابتة لبعديها عن نقطتين ثابتتين، وهو يمثل دائرة أبولونيوس Apollonius.

عندما يكون $k = 1$ أي $AP = BP$ وبالتالي P مسافتها متساوية عن النقطتين الثابتتين دوماً، أي أن P تقع على محور القطعة المستقيمة AB. وبالتالي نستنتج أن المحل الهندسي للنقطة $P(z)$ هو دائرة عندما $(k \neq 1)$ وهو محور القطعة المستقيمة AB عندما $k = 1$.

ملاحظة: من أجل القيم المختلفة لـ k فإن المعادلة تمثل مجموعة من الدوائر غير المتقاطعة والمتحدة المحور وتكون فيه A و B نقطتي طرفي هذا المحور.

(ii) من الشكل المجاور، لدينا:



$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \measuredangle APB = \alpha$$

بما أن المحل الهندسي للنقطة $P(z)$ هو القوس APB من الدائرة المارة من النقطتين الثابتتين A و B.

إذا كانت $P'(z')$ نقطة من القوس الآخر AB من هذه الدائرة، فيكون:

$$\arg\left(\frac{z'-a}{z'-b}\right) = \measuredangle BP'A = \alpha - \pi$$

أي أن المحل الهندسي للنقطة P' هو القوس $AP'B$ من الدائرة نفسها.

ملاحظة: من أجل القيم المختلفة لـ α من $-\pi$ إلى π، فالمعادلة تمثل مجموعة من الدوائر المتقاطعة والمتحدة المحور، ويكون AB محورها الأساسي المشترك.

مثال (1-11): إذا كان z_1 وz_2، عددين عقديين أثبت أن:

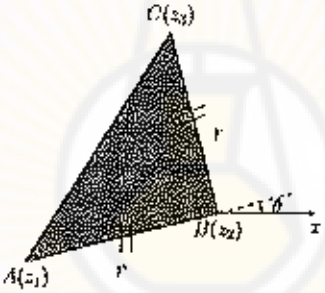
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

الحل: ليكن $z_1=r_1\operatorname{cis}\theta_1$ و$z_2=r_2\operatorname{cis}\theta_2$ وبالتالي:

$$|z_1+z_2|^2=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2=$$
$$=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$|z_1-z_2|^2=(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2=$$
$$=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(r_1^2+r_2^2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

مثال (1-12): إذا كانت z_1 وz_2 وz_3، أعداداً عقدية ورؤوساً لمثلث متساوي الساقين وقائماً في z_2، انظر الشكل أدناه (1-8)، أثبت أن: $z_1^2+z_3^2+2z_2^2=2z_2(z_1+z_3)$

الحل: لتكن $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$ رؤوس المثلث ABC وبالتالي: $AB=BC,\ \measuredangle ABC=\pi/2$



الشكل (1-8): المثلث ABC القائم في B ومتساوي الساقين.

$$|z_1-z_2|=|z_3-z_2|=r$$

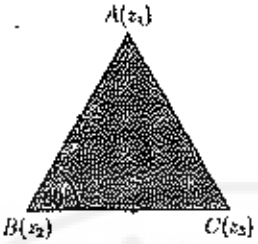
إذا كانت زاوية العدد z_1-z_2 تساوي θ، فإن زاوية z_3-z_2 تساوي $\theta+\pi/2$ أي:

$$\arg(z_1-z_2)=\theta\Longrightarrow\arg(z_3-z_2)=\pi/2+\theta$$
$$z_1-z_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$z_3-z_2=r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]=r(-\sin\theta+i\cos\theta)$$
$$\Longrightarrow z_3-z_2=ir(\cos\theta+i\sin\theta)=i(z_1-z_2)\Longrightarrow$$
$$(z_3-z_2)^2=-(z_1-z_2)^2\Longrightarrow z_1^2+z_3^2+2z_2^2=2z_2(z_1+z_3).$$

مثال (1-13): إذا كانت z_1 وz_2 وz_3، أعداداً عقدية ورؤوساً لمثلث متساوي الأضلاع أثبت أن:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

الحل:



الشكل (1-9): مثلث متساوي الأضلاع ABC.

بما أن المثلث ABC متساوي الأضلاع فيشكل الضلع BC مع الضلع BA زاوية قياسها 60°، الشكل (1-9)، ولكن في العقدية لتدوير ضلع بزاوية θ نجب ضربه بـ $\operatorname{cis}\theta$ أي:

$$\overrightarrow{BC}(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = \overrightarrow{BA} \Longrightarrow$$

$$(z_3 - z_2)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = z_1 - z_2 \Longrightarrow i\sqrt{3}(z_3 - z_2) = 2z_1 - z_2 - z_3$$

$$\Longrightarrow -3(z_3 - z_2)^2 = (2z_1 - z_2 - z_3)^2 \Longrightarrow 4(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1) = 0$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

8-1-1 نظرية دوموافر [*]:

(i) إذا كان (n) عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً فإنّ: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(ii) إذا كان (n) عدداً كسرياً موجباً أو سالباً فإنّ أحد القيم هي:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

البرهان: الحالة الأولى: عندما تكون n عدداً صحيحاً موجباً.

حسب قاعدة جداء عددين عقديين فإنّ:

$$\operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) =$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

بشكل مشابه نجد أنّ:

$$\operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 \operatorname{cis}\theta_3 = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)\operatorname{cis}\theta_3 = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

بإجراء ذلك n مرة نجد أنّ:

$$\operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 \operatorname{cis}\theta_3 \cdots \operatorname{cis}\theta_n = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)$$

بوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \cdots = \theta_n = \theta$، نحصل على: $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$.

الحالة الثانية: عندما تكون n عدداً صحيحاً سالباً.

---

[*] إحدى النظريات المهمة في الرياضيات، سميت باسم مكتشفها العالم الفرنسي أبراهام دوموافر (1667–1754).

لنضع $n = -m$، فيكون m عدداً صحيحاً موجباً. وبالتالي يكون:

$$(\operatorname{cis}\theta)^n = (\operatorname{cis}\theta)^{-m} = \frac{1}{(\operatorname{cis}\theta)^m} = \frac{1}{\operatorname{cis} m\theta} =$$
$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)} =$$
$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta} = \cos m\theta - i\sin m\theta =$$
$$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) = \operatorname{cis}(-m\theta) = \operatorname{cis} n\theta \quad ; \quad \because -m = n$$

الحالة الثالثة: عندما تكون n عدداً كسرياً موجباً أو سالباً.

لتكن $n = p/q$، حيث إن q هو عدد صحيح موجب و p أي عدد صحيح موجب أو سالب، لدينا:

$$(\operatorname{cis}\theta/q)^q = \operatorname{cis}(q\cdot\theta/q) = \operatorname{cis}\theta$$

لنأخذ الجذر من المرتبة q للطرفين نجد أنّ (يأخذ أحد القيم من q قيمة للجذر):

$$\operatorname{cis}(\theta/q) = (\operatorname{cis}\theta)^{1/q}$$

الآن لنرفع الطرفين إلى القوة p فنجد أن إحدى القيم تصبح:

$$(\operatorname{cis}\theta/q)^p = (\operatorname{cis}\theta)^{p/q} = \operatorname{cis}[(p/q)\theta] \Rightarrow (\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$$

وبالتالي النظرية صحيحة من أجل أي عدد كسري.

ملاحظة:

1- $\operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2 \cdot \operatorname{cis}\theta_3 \cdots \operatorname{cis}\theta_n = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)$
2- $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}$
3- $(\operatorname{cis} n\theta)^m = \operatorname{cis} mn\theta = (\operatorname{cis} n\theta)^m$

مثال (14-1): بسط العبارة الآتية:

$$I = \frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^3(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^{-4}}$$

الحل:

$$(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4 = \cos 12\theta + i\sin 12\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{12}$$
$$(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^5 = \cos 20\theta - i\sin 20\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-20}$$
$$(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^3 = \cos 12\theta + i\sin 12\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{12}$$
$$(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^{-4} = \cos 20\theta - i\sin 20\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{20}$$
$$I = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-20}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-20}} = 1$$

مثال (15-1): برهن صحة العبارة الآتية:

$$(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^{n+1}\cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2)$$

الحل: لنضع $1 + \cos\theta = r\cos\varphi$ و $\sin\theta = r\cos\varphi$ فنجد أن:

$$r^2 = (1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2(\theta/2) \Rightarrow r = 2\cos(\theta/2)$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} = \tan(\theta/2) \Rightarrow \varphi = \theta/2$$

$$\Rightarrow L.H.S. = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n + [r(\cos\varphi - i\sin\varphi)]^n =$$

$$= r^n[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n] =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi + \cos n\varphi - i\sin n\varphi) = r^n \cdot 2\cos n\varphi =$$

$$= 2^{n+1}\cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2).$$

مثال (16-1): إذا كان: $2\cos\theta = x + 1/x$ برهن أن:

$$(i)\ 2\cos n\theta = x^n + \frac{1}{x^n} \qquad (ii)\ \frac{x^{2n}+1}{x^{2n-1}+x} = \frac{\cos n\theta}{\cos(n-1)\theta}$$

الحل:

$$2\cos\theta = x + 1/x \Rightarrow x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta \Rightarrow$$

بأخذ الإشارة الموجبة (الخطوات نفسها بالنسبة للإشارة السالبة) نجد أن:

$$x^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$x^{-n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$\Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} = x^n + x^{-n} = 2\cos n\theta$$

$$(ii)\ \frac{x^{2n}+1}{x^{2n-1}+x} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n}+1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n-1} + \cos\theta + i\sin\theta} =$$

$$= \frac{\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta + 1}{\cos(2n-1)\theta + i\sin(2n-1)\theta + \cos\theta + i\sin\theta} =$$

$$= \frac{(1+\cos 2n\theta) + i\sin 2n\theta}{[\cos(2n-1)\theta + \cos\theta] + i[\sin(2n-1)\theta + \sin\theta]} =$$

$$= \frac{\cos n\theta\,(2\cos n\theta + 2i\sin n\theta)}{\cos(n-1)\theta\,(2\cos n\theta + 2i\sin n\theta)} = \frac{\cos n\theta}{\cos(n-1)\theta}$$

مثال (17-1): إذا كان: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$ برهن أن:

$(i)\quad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$

$(ii)\quad \sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$(iii)\quad \sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sin 2(\alpha+\beta)$

$(iv)\quad \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0$

الحل:

$$a = \operatorname{cis}\alpha, \quad b = \operatorname{cis}\beta, \quad c = \operatorname{cis}\gamma \Rightarrow$$

$$a + b + c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0 \quad (*)$$

$$(i)\quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{\operatorname{cis}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{cis}\beta} + \frac{1}{\operatorname{cis}\gamma} =$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1} + (\cos\beta + i\sin\beta)^{-1} + (\cos\gamma + i\sin\gamma)^{-1} =$$

$$= (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) - i(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 0 \Rightarrow$$
$$bc + ac + ab = 0 \quad (**)$$

من (*) و(**) نجد أن:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(bc + ca + ab) = 0 \quad (***) \Rightarrow$$
$$(\text{cis}\,\alpha)^2 + (\text{cis}\,\beta)^2 + (\text{cis}\,\gamma)^2 = \text{cis}\,2\alpha + \text{cis}\,2\beta + \text{cis}\,2\gamma = 0$$

بأخذ القسم التخيلي في الطرفين نجد أن:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$$

(ii) $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow$

$$(\text{cis}\,\alpha)^3 + (\text{cis}\,\beta)^3 + (\text{cis}\,\gamma)^3 = 3\,\text{cis}\,\alpha\,\text{cis}\,\beta\,\text{cis}\,\gamma \Rightarrow$$
$$\text{cis}\,3\alpha\,\text{cis}\,3\beta\,\text{cis}\,3\gamma = 3\,\text{cis}(\alpha+\beta+\gamma)$$

بأخذ القسم التخيلي في الطرفين نجد أن:

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

(iii) من (*) $\Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a+b)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab \Rightarrow$ بالتربيع

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = 4a^2b^2 \Rightarrow$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Rightarrow$$
$$(\text{cis}\,\alpha)^4 + (\text{cis}\,\beta)^4 + (\text{cis}\,\gamma)^4 = 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma}(\text{cis}\,\alpha)^2(\text{cis}\,\beta)^2 \Rightarrow$$
$$\text{cis}\,4\alpha + \text{cis}\,4\beta + \text{cis}\,4\gamma = 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\text{cis}\,2\alpha\,\text{cis}\,2\beta = 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\text{cis}\,2(\alpha+\beta)$$

بأخذ القسم التخيلي في الطرفين نجد أن:

$$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sin 2(\alpha+\beta)$$

(iv) من (**) $\Rightarrow ab + bc + ca = 0 \Rightarrow$

$$\text{cis}\,\alpha\,\text{cis}\,\beta + \text{cis}\,\beta\,\text{cis}\,\gamma + \text{cis}\,\gamma\,\text{cis}\,\alpha = 0 \Rightarrow$$
$$\text{cis}(\alpha+\beta) + \text{cis}(\beta+\gamma) + \text{cis}(\gamma+\alpha) = 0 \Rightarrow$$

بأخذ القسم التخيلي في الطرفين نجد أن: $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = 0$

9-1-1 جذور عدد عقدي:

يوجد q وفقط q قيمة متميزة من بعضها للجذر $(\cos\theta + i\sin\theta)^{1/q}$، حيث إنّ q عدد صحيح. بما أن: $\cos\theta = \cos(2n\pi + \theta)$ و $\sin\theta = \sin(2n\pi + \theta)$، حيث إنّ n عدد صحيح. فإننا نكتب:

$$\text{cis}\,\theta = \text{cis}(2n\pi + \theta)$$

بتطبيق نظرية دوموافر لأعداد الكسرية نجد أنّ:

$$(\operatorname{cis}\theta)^{1/q} = [\operatorname{cis}(2n\pi+\theta)]^{1/q} = \operatorname{cis}[(2n\pi+\theta)/q] \quad (1)$$

بإعطاء n القيم $0, 1, 2, 3, \cdots, (q-1)$ على التوالي، فإننا نحصل على q قيمة لـ $(\operatorname{cis}\theta)^{1/q}$:

$$(\operatorname{cis}\theta)^{1/q} = \begin{cases} \operatorname{cis}[\theta/q] & ; \ n=0 \\ \operatorname{cis}[(2\pi+\theta)/q] & ; \ n=1 \\ \operatorname{cis}[(4\pi+\theta)/q] & ; \ n=2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \operatorname{cis}[(2(q-1)\pi+\theta)/q] & ; \ n=q-1 \end{cases} \quad (2)$$

بوضع $n = q$ في (1)، نحصل على $(\operatorname{cis}\theta)^{1/q} = \operatorname{cis}(2\pi+\theta/q) = \operatorname{cis}(\theta/q)$، والذي هو قيمة الجذر نفسها عندما $n = 0$.

بشكل مشابه عند وضع $n = q+1$ في (1)، نحصل على $(\operatorname{cis}\theta)^{1/q} = \operatorname{cis}[(2\pi+\theta)/q]$، الذي هو قيمة الجذر نفسها عندما $n = 1$.

أي أنّ قيم الجذر $(\operatorname{cis}\theta)^{1/q}$ من أجل $n = q, q+1, q+2, \cdots$، هي مجرد تكرار لقيم q التي حصلنا عليها في (2). وفضلاً عن ذلك إن قيم q التي في (2) هي قيم مختلفة ومتميزة من بعضها البعض، بحيث إن أي زاويتين غير متساويتين ولا مختلفتين عن بعضهما بمضاعفات العدد 2π.

إذن لـ $(\operatorname{cis}\theta)^{1/q}$، q وفقط q قيمة مختلفة معطاة حسب (2).

ملاحظة: إن العدد $(\operatorname{cis}\theta)^{p/q}$، حيث إن p/q عدد كسري في أبسط صيغة له (لا يمكن اختصار p مع q)، q وفقط q قيمة مختلفة يمكن الحصول عليها بوضع $n = 0, 1, 2, \cdots, q-1$، على التوالي في العلاقة: $\operatorname{cis}[p(2n\pi+\theta)/q]$.

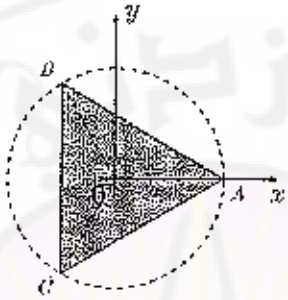
فللعدد $(\operatorname{cis}\theta)^{6/15}$، 5 وفقط 5 قيم مختلفة وليست 15، لأن $6/15$ تكتب $2/5$ بأبسط صيغة للكسر. لذلك لحساب القيم المختلفة لـ $(\operatorname{cis}\theta)^{p/q}$ دائماً نحوّل الكسر p/q إلى أبسط صيغة ممكنة للكسر.

ملاحظة: إن المناقشة السابقة يمكن أن تكون أداة فعالة لاستخدامها من أجل استخراج أي جذر لأي قيمة معطاة. علينا فقط تحويل العدد إلى الشكل المثلثي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ومن ثم نطبق ما سبق.

مثال (18-1): أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد 1، وبين أنها تشكل مثلثاً متساوي الأضلاع في مخطط آرجاند.

الحل: إذا كان x جذراً تكعيبياً للعدد 1، فإنّ:

$$x = (1)^{1/3} = (\cos 0 + i \sin 0)^{1/3} = (\operatorname{cis} 0)^{1/3} = (\operatorname{cis} 2n\pi)^{1/3} =$$
$$= \operatorname{cis}(2n\pi/3) \quad ; \quad n = 0, 1, 2 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow \operatorname{cis}(0) = 1,$$
$$n = 1 \Rightarrow \operatorname{cis}(2\pi/3) = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2,$$
$$n = 2 \Rightarrow \operatorname{cis}(4\pi/3) = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$



الشكل (1-10): الجذور التكعيبية للعدد 1.

هناك ثلاثة جذور تكعيبية ممثلة بالنقاط A و B و C في مخطط آرجاند، حيث إنّ: $OA = OB = OC$ و $\measuredangle AOB = 120^\circ$، $\measuredangle AOC = 240^\circ$، (الشكل 1-10).

هذه النقاط تقع على دائرة مركزها O، ونصف قطرها 1، فيها: $AB = BC = CA$ والزوايا $\measuredangle AOB = \measuredangle BOC = \measuredangle COA = 120^\circ$. أي أنّ النقاط A, B, C تشكل مثلثاً متساوي الأضلاع.

مثال (1-19): أوجد جميع قيم العدد $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{3/4}$ ثم برهن أن جداءها يساوي 1.

الحل: $\quad 1/2 = r\cos\theta, \quad \sqrt{3}/2 = r\sin\theta \Rightarrow r = 1, \quad \theta = \pi/3$

$$\left(1/2 + \sqrt{3}i/2\right)^{3/4} = [(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)^3]^{1/4} = (\operatorname{cis}\pi)^{1/4} =$$
$$= [\operatorname{cis}(2n+1)\pi]^{4/4} = \operatorname{cis}(2n+1)\pi/4 \ ; \ n = 0, 1, 2, 3. \Rightarrow$$
$$\operatorname{cis}\pi/4, \quad \operatorname{cis}3\pi/4, \quad \operatorname{cis}5\pi/4, \quad \operatorname{cis}7\pi/4$$

فيكون جداؤها يساوي:

$$\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) = \operatorname{cis} 4\pi = 1.$$

مثال (1-20): استخدم دستور دوموافر لحل المعادلة: $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

الحل: نلاحظ أن المقدار $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ يكتب بالشكل:

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \frac{1 + z^5}{1 + z} = \frac{1 - (-x)^5}{1 - (-x)} = 0 \Rightarrow z \neq -1, \quad z^5 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$z^5 = -1 = \operatorname{cis}\pi = \operatorname{cis}(2n+1)\pi \Rightarrow$$
$$z = [\operatorname{cis}(2n+1)\pi]^{1/5} = \operatorname{cis}(2n+1)\pi/5 \ ; \ n = 0, 1, 2, 3, 4$$

وبالتالي تكون الجذور هي:

$$\operatorname{cis}\pi/5,\quad \operatorname{cis}3\pi/5,\quad \operatorname{cis}5\pi/5,\quad \operatorname{cis}7\pi/5,\quad \operatorname{cis}9\pi/5$$

أو يمكن كتابتها بالشكل:

$$\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5},\quad \cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5},\quad -1,\quad \cos\frac{3\pi}{5}-i\sin\frac{3\pi}{5},\quad \cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$$

وبحذف القيمة -1 التي هي جذر العامل $z+1$، فتكون الجذور المطلوبة هي:

$$\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5},\qquad \cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}$$

مثال (21-1): أثبت أن جذور المعادلة $(z-1)^n=z^n$، حيث $n\in\mathbb{N}$ عدد صحيح موجب، هي $\frac{1}{2}[1+i\cot(r\pi/n)]$، حيث إن r تأخذ القيم $1,2,3,\cdots,n-1$.

الحل: يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$(z-1)^n=z^n\Longrightarrow\left(\frac{z-1}{z}\right)^n=1\Longrightarrow 1-\frac{1}{z}=(1)^{1/n}\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{z}=1-(1)^{1/n}=1-\operatorname{cis}\frac{2r\pi}{n}\ ;\ r=0,1,2,\cdots,(n-1)\quad [\because\ 1=\operatorname{cis}2\pi r]$$

$$\frac{1}{z}=\left(1-\cos\frac{2r\pi}{n}\right)-i\sin\frac{2r\pi}{n}=2\sin^2\frac{r\pi}{n}-2i\sin\frac{r\pi}{n}\cos\frac{r\pi}{n}\Longrightarrow$$

$$z=\frac{1}{2\sin\frac{r\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{r\pi}{n}-i\cos\frac{r\pi}{n}\right)}=\frac{\sin\frac{r\pi}{n}+i\cos\frac{r\pi}{n}}{2\sin\frac{r\pi}{n}}\Longrightarrow$$

$$z=\frac{1}{2}\left(1+i\cot\frac{r\pi}{n}\right)\ ;\ r=1,2,3,\cdots,(n-1).\quad [\because\ \cot 0\to\infty]$$

وهي الجذور المطلوبة للمعادلة المعطاة.

مثال (22-1): أوجد الجذور السبعة للعدد واحد 1 وبرهن أنّ مجموع قواها من المرتبة n دوماً يتقارب من الصفر ما لم تكن n من مضاعفات العدد 7، و n عدد صحيح موجب، وعندما يكون من مضاعفات العدد 7 فإن المجموع يساوي 7.

الحل:

$$(1)^{1/7}=(\cos 2r\pi+i\sin 2r\pi)^{1/7}=\operatorname{cis}\frac{2r\pi}{7}=\left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{7}\right)^r\ ;\ r=0,1,2,3,4,5,6$$

وبالتالي فإن الجذور السبعة هي: $1,\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5,\rho^6$ حيث: $\rho=\operatorname{cis}(2\pi/7)$.

إن مجموع قوى الجذور من المرتبة n:

$$S=1+\rho^n+\rho^{2n}+\cdots+\rho^{6n}=\frac{1-\rho^{7n}}{1-\rho^n}$$

في حالة كون n ليس من مضاعفات العدد 7، فإن:

$$\rho^{7n} = (\rho^7)^n = (\text{cis}\,2\pi)^n = 1 \Longrightarrow 1 - \rho^{7n} = 0 \quad \& \quad 1 - \rho^n \neq 0$$

وبالتالي يكون المجموع: $S = 0$.

في حالة كون n من مضاعفات العدد 7، فإن: $n = 7m$.

$$S = 1 + (\rho^7)^m + (\rho^7)^{2m} + \cdots + (\rho^7)^{6m} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

مثال (23-1): أوجد المعادلة التي جذورها: $2\cos(\pi/7),\ 2\cos(3\pi/7),\ 2\cos(5\pi/7)$.

الحل: لنفرض أن:

$$y = \cos\theta + i\sin\theta\ ;\ \theta = \pi/7, 3\pi/7, \cdots, 13\pi/7 \Longrightarrow$$
$$y^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta = -1 \Longrightarrow y^7 + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow (y+1)(y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) = 0$$

بحذف العامل $y + 1$ الذي يوافق $\theta = \pi$ فيكون:

$$y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0 \quad (*)$$

التي جذورها هي:

$$y = \text{cis}\,\theta\ ;\ \theta = \pi/7,\ 3\pi/7,\ 5\pi/7,\ 9\pi/7,\ 11\pi/7,\ 13\pi/7$$

بتقسيم (*) على y^3 نجد أن:

$$(y^3 + 1/y^3) - (y^2 + 1/y^2) + (y + 1/y) - 1 = 0 \Longrightarrow$$
$$\{(y + 1/y)^3 - 3(y + 1/y)\} - \{(y + 1/y)^2 - 2\} + (y + 1/y) - 1 = 0$$
$$\Longrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (**);\ x = y + 1/y = 2\cos\theta$$

وبما أن:

$$\cos(13\pi/7) = \cos(\pi/7),\ \ \cos(11\pi/7) = \cos(3\pi/7),\ \ \cos(9\pi/7) = \cos(5\pi/7)$$

فتكون جذور المعادلة (**) هي: $2\cos(\pi/7),\ 2\cos(3\pi/7),\ 2\cos(5\pi/7)$.

10-1-1 نشر $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ و $\tan n\theta$ لقوى الجيب والتجيب والظل:

لدينا من نظرية دوموافر وباستخدام نشر ثنائي الحد:

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$$
$$= C_n^0\cos^n\theta + C_n^1\cos^{n-1}\theta\,(i\sin\theta) + C_n^2\cos^{n-2}\theta\,(i\sin\theta)^2 + C_n^3\cos^{n-3}\theta\,(i\sin\theta)^3$$
$$+ \cdots + C_n^n(i\sin\theta)^n =$$
$$= (\cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots)$$
$$+ i(C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \cdots)$$

بمساواة القسمين الحقيقي والتخيلي مع القسمين الحقيقي والتخيلي في الطرفين:

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$$
$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \cdots$$

بإبدال كل $\sin^2\theta$ بـ $1-\cos^2\theta$ في المعادلة الأولى نحصل على نشر التجيبات المطلوب. وبإبدال كل $\cos^2\theta$ بـ $1-\sin^2\theta$ في المعادلة الثانية نحصل على نشر الجيوب المطلوب.

وبقسمة المعادلة الثانية على المعادلة الأولى نجد أنّ:

$$\tan n\theta=\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}=\frac{C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots}{\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos^n\theta$، نحصل على:

$$\tan n\theta=\frac{C_n^1\tan\theta-C_n^3\tan^3\theta+C_n^5\tan^5\theta-\cdots}{1-C_n^2\tan^2\theta+C_n^4\tan^4\theta-}$$

مثال (24-1): عبر عن $\cos 6\theta$ بحدود لقوى $\cos\theta$.

الحل: نعلم أنّ:

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$$

بوضع $n=6$ نجد أنّ:

$$\cos 6\theta=\cos^6\theta-C_6^2\cos^4\theta\sin^2\theta+C_6^4\cos^2\theta\sin^4\theta-C_6^6\sin^6\theta=$$
$$\cos^6\theta-15\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)+15\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)^2-(1-\cos^2\theta)^3$$
$$\Rightarrow\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1$$

(*) في حالة مجموع n زاوية مختلفة لدينا:

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=$$
$$=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

وبما أنّ: $\cos\theta_2+i\sin\theta_2=\cos\theta_2(1+i\tan\theta_2)$ و $\cos\theta_1+i\sin\theta_1=\cos\theta_1(1+i\tan\theta_1)$

وهكذا فإنّ:

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n[1+i(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n)$$
$$+i^2(\tan\theta_1\tan\theta_2+\tan\theta_2\tan\theta_3+\cdots)$$
$$+i^3(\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3+\cdots)+\cdots+\cdots]$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(1+is_1-s_2-is_3+s_4+\cdots)$$

حيث إنّ:

$$s_1=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n,\quad s_2=\sum_{(i,j,i\neq j)}\tan\theta_i\tan\theta_j,$$
$$s_3=\sum_{i,j,k,i\neq j\neq k}\tan\theta_i\tan\theta_j\tan\theta_k,\cdots$$

ومساواة القسمين الحقيقي والتخيلي مع مقابلاتها في الطرفين نجد أنّ:

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\,(1-s_2+s_4-\cdots)$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\,(s_1-s_3+s_5-\cdots)$$

وبالقسمة نجد أنّ:

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\frac{s_1-s_3+s_5-s_7+\cdots}{1-s_2+s_4-s_6+\cdots}$$

مثال (25-1): إذا كان $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi/2$، أثبت أنّ: $xy+yz+zx=1$.

الحل: ليكن $\tan^{-1}x=\alpha$ و $\tan^{-1}y=\beta$ و $\tan^{-1}z=\gamma$ فيكون: $x=\tan\alpha$ و $y=\tan\beta$ و $z=\tan\gamma$. ونعلم أنّ:

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}\Longrightarrow$$
$$\tan\frac{\pi}{2}=\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\Longrightarrow 1-xy-yz-zx=0\Longrightarrow xy+yz+zx=1$$

مثال (26-1): إذا كانت $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ ثلاث قيم لـ θ التي تحقق العلاقة $\tan 2\theta=\lambda\tan(\theta+\alpha)$ مع العلم أنه ليس لفرق بين زاويتين منهم من مضاعفات العدد π، أثبت أنّ المقدار: $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\alpha$ هو مضاعفات العدد π.

الحل: إذا كان: $t=\tan\theta$ فإن العلاقة السابقة تكتب بالشكل:

$$\frac{2t}{1-t^2}=\lambda\frac{t+\tan\alpha}{1-t\cdot\tan\alpha}\Longrightarrow\lambda t^3+(\lambda-2)\tan\alpha\cdot t^2+(2-\lambda)t-\lambda\tan\alpha=0$$

وبالتالي جذور هذه المعادلة هي: $\tan\theta_1$ و $\tan\theta_2$ و $\tan\theta_3$ فيكون:

$$s_1=\sum_{i=1,2,3}\tan\theta_i=-\frac{\lambda-2}{\lambda}\tan\alpha,\quad s_2=\sum_{i<j}\tan\theta_i\tan\theta_j=\frac{2-\lambda}{\lambda},\quad s_3=\tan\alpha\Longrightarrow$$
$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\frac{s_1-s_3}{1-s_2}=\frac{(-1+2/\lambda)\tan\alpha-\tan\alpha}{1-(2/\lambda-1)}=$$
$$=-\tan\alpha-\tan(n\pi-\alpha)\Longrightarrow\theta_1+\theta_2+\theta_3=n\pi-\alpha\Longrightarrow\theta_1+\theta_2+\theta_3+\alpha=n\pi$$

(*) نشر $\sin^n\theta\cos^n\theta$ أو $\sin^n\theta,\cos^n\theta$ في متسلسلات الجيب والتجيب لمضاعفات θ:

إذا كان: $z=\cos\theta+i\sin\theta$ فإن: $1/z=\cos\theta-i\sin\theta$. وبتطبيق نظرية دوموافر

$$z^p=\cos p\theta+i\sin p\theta\Longrightarrow 1/z^p=\cos p\theta-i\sin p\theta$$
$$z+1/z=2\cos\theta,\qquad z-1/z=2i\sin\theta$$
$$z^p+1/z^p=2\cos p\theta,\qquad z^p-1/z^p=2i\sin p\theta$$

تستخدم هذه العلاقات لنشر قوى $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ أو جدائها في متسلسلات الجيب والتجيب لمضاعفات θ.

مثال (27-1): انشر $\cos^8\theta$ في متسلسلة التجيبات لمضاعفات θ.

الحل:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow z + 1/z = 2\cos\theta \Rightarrow z^p + 1/z^p = 2\cos p\theta$$
$$(2\cos\theta)^8 = (z + 1/z)^8 =$$
$$= z^8 + C_8^1 z^7 \cdot \frac{1}{z} + C_8^2 z^6 \cdot \frac{1}{z^2} + C_8^3 z^5 \cdot \frac{1}{z^3} + C_8^4 z^4 \cdot \frac{1}{z^4} + C_8^5 z^3 \cdot \frac{1}{z^5} + C_8^6 z^2 \cdot \frac{1}{z^6} + C_8^7 z \cdot \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^8} =$$
$$= \left(z^8 + \frac{1}{z^8}\right) + C_8^1\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + C_8^2\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + C_8^3\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + C_8^4 =$$
$$= (2\cos 8\theta) + 8(2\cos 6\theta) + 28(2\cos 4\theta) + 56(2\cos 2\theta) + 70 \Rightarrow$$
$$\cos^8\theta = \frac{1}{128}[\cos 8\theta + 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta + 56\cos 2\theta + 35]$$

مثال (28-1): انشر $\sin^7\theta\cos^3\theta$ في متسلسلة الجيوب لمضاعفات θ.

الحل:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow z + 1/z = 2\cos\theta \Rightarrow z - 1/z = 2i\sin\theta$$
$$\Rightarrow z^p - 1/z^p = 2i\sin p\theta \Rightarrow$$
$$(2i\sin\theta)^7(2\cos\theta)^3 = (z - 1/z)^7(z + 1/z)^3 =$$
$$= (z - 1/z)^4[(z - 1/z)(z + 1/z)]^3 = (z - 1/z)^4(z^2 - 1/z^2)^3 =$$
$$= \left(z^4 - 4z^2 + 6 - \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right)\left(z^6 - 3z^2 + \frac{3}{z^2} - \frac{1}{z^6}\right) =$$
$$= \left(z^{10} - \frac{1}{z^{10}}\right) - 4\left(z^8 - \frac{1}{z^8}\right) + 3\left(z^6 - \frac{1}{z^6}\right) + 8\left(z^4 - \frac{1}{z^4}\right) - 14\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) =$$
$$= 2i\sin 10\theta - 4(2i\sin 8\theta) + 3(2i\sin 6\theta) + 8(2i\sin 4\theta) - 14(2i\sin 2\theta) =$$
$$[\because \quad i^7 = -i] \quad ;$$
$$\sin^7\theta\cos^3\theta = -\frac{1}{2^9}[\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 3\sin 6\theta + 8\sin 4\theta - 14\sin 2\theta]$$

ملاحظة: إن نشر $\sin^m\theta\cos^n\theta$ في متسلسلات الجيوب والتجيبات لمضاعفات θ تتوافق مع كون m عدداً فردياً أو زوجياً.

2-1 التابع العقدي:

تعريفه: إذا كان لكل قيمة للعدد العقدي $z = x + iy$ معطاة في المنطقة R، مقابل واحد أو أكثر $w = u + iv$، عندها نقول إن w هو تابع عقدي لـ z ونكتب:

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

حيث إن u و v توابع حقيقية لـ x و y.

إذا كان لكل قيمة لـ z قيمة وحيدة وفقط قيمة وحيدة مقابلة w، عندها نقول عن w إنه تابع وحيد القيمة لـ z، وإلا نقول إنه تابع متعدد القيم. فمثلاً: $w = 1/z$، تابع وحيد القيمة، بينما $w = \sqrt{z}$،

هو تابع متعدد القيم لـ z. هذا التابع معرف من أجل جميع المستوي Z، ويشكّل قيمتين لكل نقطة z ما عدا عند النقطة $z = 0$.

1-2-1 التابع الأسي العقدي:

تعريفه: إذا كان x عدداً حقيقياً، فإننا ألفنا التابع الأسي المعطى بالشكل:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

بشكل مشابه يمكن تعريف التابع الأسي للمتغير العقدي $z = x + iy$ بالشكل:

$$\exp(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (1)$$

خواصه: 1- إن الشكل الأسي للعدد العقدي $z = x + iy = re^{i\theta}$.

البرهان: لنضع $x = 0$ في (1) نجد أنّ:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= \cos y + i \sin y \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

أيضاً إنّ: $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ أي أنّ: $z = re^{i\theta}$.

2- إن التابع الأسي e^z تابع دوري، ويمتلك دوراً تخيلياً $2\pi i$، لأنّ:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$$

3- ليس للتابع الأسي e^z جذوراً من أجل أي قيمة لـ z، لأنّ:

$$e^z = e^{x+iy} = re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad e^x \cdot e^{iy} = re^{i\theta} \Rightarrow$$

$$r = e^x > 0, \qquad y = \theta, \qquad |e^{iy}| = 1 \Rightarrow |e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \neq 0$$

4- إنّ مرافق التابع الأسي هو التابع الأسي للمرافق أي: $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$، لأنّ:

$$e^z = e^{x-iy} = e^x \cdot e^{-iy} = e^x(\cos y - i \sin y) = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = \overline{e^z}$$

2-2-1 التوابع المثلثية العقدية:

تعريفها: بما أنّ: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ و $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$، فتكون النسب المثلثية للزاوية الحقيقية تكتب بالشكل:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \cdots$$

وبشكل مشابه نعرف النسب المثلثية للمتغير العقدي z، بالشكل:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

كذلك نجد أنّ: $\csc z$ و $\sec z$ و $\cot z$، هي نسب مقلوب النسب السابقة.

خواصها: 1- إن النسب المثلثية هي توابع دورية: $\sin z, \cos z$ هي توابع دورية دورها حقيقي مقداره 2π بينما $\tan z, \cot z$: توابع دورية دورها حقيقي مقداره π.

$$\sin(z + 2n\pi) = \sin z, \qquad \tan(z + n\pi) = \tan z, \qquad \cdots$$

2- إنّ التوابع: $\cos z$ و $\sec z$ توابع زوجية، بينما: $\sin z$ و $\csc z$ توابع فردية.

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos z, \qquad \sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

3- إنّ جذور التابع $\sin z$ تعطى بالعلاقة: $z = \pm 2n\pi$، وجذور التابع $\cos z$ تعطى بالعلاقة: $z = \pm(2n+1)\pi/2$ حيث إنّ: $n = 0, 1, 2, \cdots$.

4- كل العلاقات للنسب المثلثية الحقيقية صالحة للمتغيرات العقدية، مثلاً:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$


ليونارد أويلر
(1707-1783)

نظرية أويلر[*]: $e^z = \cos z + i \sin z$.

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}$$

حيث إنّ: $z = x + iy$، وأيضاً لقد رأينا أنّه إذا كان y حقيقياً

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

سواء أكانت θ عدداً حقيقياً أم عدداً عقدياً. تدعى العلاقة الأخيرة بعلاقة أويلر.

ملاحظة: من نظرية دوموافر للأعداد العقدية. إذا كانت θ عدداً حقيقياً أم عدداً عقدياً، لدينا:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

(*) ليونارد أويلر: عالم رياضيات سويسري مبدع جداً (1707-1783)، درس على يد جون بيرنولي وأصبح أستاذ الرياضيات في جامعة القديس بطرس بورغ، في روسيا، حتى أصبح أعمى كلياً في عام 1771، أسهم تقريباً في كل فروع الرياضيات.

وهذا يدل أن نظرية دوموافر صحيحة من جميع قيم θ (حقيقية أو عقدية).

مثال (29-1): أثبت أنّ: $(i)\quad [\sin(\alpha+\theta)-e^{i\alpha}\sin\theta]^n=\sin^n\alpha\, e^{-in\theta}$

$$(ii)\quad \sin(\alpha-n\theta)+e^{-i\alpha}\sin n\theta=e^{-in\theta}\sin\alpha$$

الحل:

$$(i)\ LHS=[\sin(\alpha+\theta)-e^{i\alpha}\sin\theta]^n=$$
$$=[\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\sin\theta]^n=$$
$$=(\sin\alpha\cos\theta-i\sin\alpha\sin\theta)^n=\sin^n\alpha\,(\cos\theta-i\sin\theta)^n=$$
$$=\sin^n\alpha\left(e^{-i\theta}\right)^n=\sin^n\alpha\,e^{-in\theta}=RHS$$
$$(ii)\ LHS=\sin\alpha\cos n\theta-\cos\alpha\sin n\theta+(\cos\alpha-i\sin\alpha)\sin n\theta=$$
$$=\sin\alpha\cos n\theta-i\sin\alpha\sin n\theta=\sin\alpha\,(\cos n\theta-i\sin n\theta)=\sin\alpha\cdot e^{-in\theta}$$

مثال (30-1): لنكن: $1/\rho=1/L\rho i+C\rho i+1/R$، حيث إنّ: L,C,R، أعداد حقيقية، عبّر عن ρ بالشكل $Ae^{i\theta}$ حيث إنّ: A,θ قيم معطاة.

الحل:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{L\rho i}+C\rho i+\frac{1}{R}=\frac{R+L\rho^2CR(-1)+L\rho i}{L\rho Ri}=\frac{(R-L\rho^2CR)+iL\rho}{L\rho Ri}$$
$$\rho=L\rho\frac{Ri}{(R-L\rho^2CR)+iL\rho}\times\frac{(R-L\rho^2CR)-iL\rho}{(R-L\rho^2CR)-iL\rho}=$$
$$=\frac{L^2\rho^2R+iL\rho R(R-L\rho^2CR)}{(R-L\rho^2CR)^2+(L\rho)^2}=A(\cos\theta+i\sin\theta);$$

بمساواة القسم الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي، نجد أنّ:

$$A\cos\theta=\frac{L^2\rho^2R}{(R-L\rho^2CR)^2+(L\rho)^2}\quad(i),\qquad A\sin\theta=\frac{L\rho R(R-L\rho^2CR)}{(R-L\rho^2CR)^2+(L\rho)^2}\quad(ii)$$

بتربيع (i) و(ii) والجمع نجد أنّ:

$$A^2=\frac{(L^2\rho^2R)^2+(L\rho R)^2(R-L\rho^2CR)^2}{[(R-L\rho^2CR)^2+(L\rho)^2]^2}\Rightarrow A=\frac{L\rho R}{(R-L\rho^2CR)^2+(L\rho)^2}\qquad(iii)$$

بقسمة (ii) على (i) نجد أنّ:

$$\tan\theta=\frac{R-L\rho^2CR}{L\rho}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left\{\frac{R(1-LC\rho^2)}{L\rho}\right\}\Rightarrow P=A(\cos\theta+i\sin\theta)=Ae^{i\theta}$$

حيث إنّ: A وθ معطاة بالعلاقتين (iii) و(iv).

3-2-1 التوابع القطعية العقدية:

تعريفها: إذا كان x عدداً حقيقياً أو تخيلياً فإنّ:

(i) إنّ الجيب القطعي لـ x، يرمز له بالرمز $\sinh x$ ويعطى بالعلاقة:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(ii) إنّ التجيب القطعي لـ x، يرمز له بالرمز $\cosh x$ ويعطى بالعلاقة:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

خواصها: 1- إنّ التابعين $\sinh z$ و $\cosh z$ دوريان ودورهما تخيلي قدره $2\pi i$.

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \qquad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$$

2- إنّ التابع $\cosh z$ تابع زوجي بينما التابع $\sinh z$ هو تابع فردي.

3- إنّ: $\sinh 0 = 0,\ \cosh 0 = 1,\ \tanh 0 = 0$.

4- علاقات بين التوابع القطعية والتوابع المثلثية (الدائرية). من أي قيمة لـ θ:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

لنضع $\theta = ix$ فنحصل على $\left[\because\ e^{i\theta} = e^{i\cdot ix} = e^{-x}\right]$:

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2i} = i^2\frac{e^{x} - e^{-x}}{2i} = i\cdot\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\sinh x$$

ونجد أنّ بشكل مشابه:

$$\cos ix = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x \Rightarrow$$

$$\sin ix = i\sinh x, \qquad \cos ix = \cosh x, \qquad \tan ix = i\tanh x$$
$$\sinh ix = i\sin x, \qquad \cosh ix = \cos x, \qquad \tanh ix = i\tan x$$

5- علاقات التوابع القطعية:

a) العلاقات الأساسية:

$$(1)\quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad (2)\quad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1,$$
$$(3)\quad \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

b) علاقات الجمع:

$$(4)\quad \sinh(x \pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y$$
$$(5)\quad \cosh(x \pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y$$
$$(6)\quad \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x\tanh y}$$

c) علاقات مضاعفات $2x$:

$$(7)\quad \sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$$

(8) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

(9) $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

d) علاقات مضاعفات $3x$:

(10) $\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$, (11) $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$

(12) $\tanh 3x = \dfrac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1+3\tanh^2 x}$

e) التحويل من الجمع إلى الجداء:

(13) $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$

(14) $\sinh x - \sinh y = 2\cosh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$

(15) $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$

(16) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$

الإثبات: (1) بما أنه من أجل كل قيم θ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. لنضع: $\theta = ix$، فيكون:

$$\cos^2 ix + \sin^2 ix = 1 \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

أو بطريقة أخرى لدينا:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}[e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2] = \frac{4}{4} = 1$$

بشكل مشابه يمكن إثبات العلاقتين (2) و(3).

(4) $\sinh(x+y) = (1/i)\sin i(x+y) = -i[\sin ix\cos iy + \cos ix\sin iy]$
$= -i[i\sinh x\cosh y + \cosh x \cdot i\sinh y] = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$

أو بطريقة أخرى يمكن أن نكتب:

$$\sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y =$$
$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$$

بشكل مشابه يمكن إثبات العلاقتين (5) و(6).

(12) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \Rightarrow A = ix \Rightarrow$

$$\tan 3ix = \frac{3\tan ix - \tan^3 ix}{1-3\tan^2 ix} \Rightarrow i\tanh 3x = \frac{3(i\tanh x) - (i\tanh x)^3}{1-3(i\tanh x)^2}$$
$$\Rightarrow \tanh 3x = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1+3\tanh^2 x}$$

بشكل مشابه يمكن إثبات العلاقات من (7) إلى (11).

$$(16)\quad \cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\Rightarrow C=ix, D=iy$$

$$\Rightarrow \cos ix-\cos iy=-2\sin i\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin i\left(\frac{x-y}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\cosh x-\cosh y=-2\left(i\sinh\frac{x+y}{2}\right)\left(i\sinh\frac{x-y}{2}\right)=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

بشكل مشابه يمكن إثبات العلاقات من (13) إلى (15).

4-2-1 التوابع القطعية العقدية العكسية:

تعريفها: إذا كان $\sinh u=z$، فإنّ u يدعى الجيب القطعي العكسي لـ z، ويكتب ذلك بالشكل: $u=\sinh^{-1}z$. وبشكل مشابه نعرف $\cosh^{-1}z$، و$\tanh^{-1}z$، إلخ...

إن التوابع القطعية العكسية كما في التوابع العكسية الأخرى قد تكون متعددة القيم، ولكن سوف نعدّ القيم الرئيسة لها فقط.

إن التوابع القطعية العكسية تكتب بدلالة اللوغاريتم بالشكل الآتي:

$$(i)\quad \sinh^{-1}z=\ln\left[z+\sqrt{z^2+1}\right],\qquad (ii)\quad \cosh^{-1}z=\ln\left[z+\sqrt{z^2-1}\right]$$

$$(iii)\quad \tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

الإثبات: $(i)\quad \sinh^{-1}z=u\Rightarrow z=\sinh u=(e^u-e^{-u})/2\Rightarrow 2z=e^u-1/e^u$

$$\Rightarrow e^{2u}-2ze^u-1=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة إلى e^u نوجد جذورها حسب المميز:

$$e^u=\frac{2z\pm\sqrt{4z^2+4}}{2}=z\pm\sqrt{z^2+1}$$

ونأخذ الإشارة الموجبة وترك الإشارة السالبة لأن الجذر مرفوض (سالب)؛ نجد أنّ:

$$e^u=z+\sqrt{z^2+1}\Rightarrow u=\ln\left[z+\sqrt{z^2+1}\right]$$

بشكل مشابه لما سبق يمكن إيجاد (ii).

$$(iii)\quad \tanh^{-1}z=u\Rightarrow z=\tanh u=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}\Rightarrow\frac{1+z}{1-z}=\frac{e^u}{e^{-u}}=$$

$$=e^{2u}\Rightarrow 2u=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Rightarrow u=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

مثال (31-1): إذا كان: $u=\ln\tan(\pi/4+\theta/2)$، برهن أنّ:

$$(i)\quad \tanh(u/2)=\tan(\theta/2),\qquad (ii)\quad \theta=-i\ln\tan(\pi/4+iu/2)$$

الحل:

$$(i)\quad u=\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow e^u=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow$$

$$e^{u/2}e^{u/2}=\frac{e^{u/2}}{e^{-u/2}}=\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\Rightarrow\frac{e^{u/2}-e^{-u/2}}{e^{u/2}+e^{-u/2}}=\tan(\theta/2)\Rightarrow$$
$$\tanh(u/2)=\tan(\theta/2)$$

$$(ii)\quad \tanh(u/2)=\tan(\theta/2)\Rightarrow\frac{1}{i}\tan\frac{iu}{2}=\frac{1}{i}\tanh\frac{i\theta}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{i\theta}{2}=\tanh^{-1}\left(\tan\frac{iu}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tan(iu/2)}{1-\tan(iu/2)}\Rightarrow$$
$$\theta=\frac{1}{i}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{iu}{2}\right)=-i\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{iu}{2}\right)$$

مثال (1-32): برهن أنّ: $\tanh^{-1}(\cos\theta)=\operatorname{csch}^{-1}(\csc\theta)$.

الحل:
$$\tanh^{-1}(\cos\theta)=\varphi\Rightarrow\cos\theta=\tanh\varphi\Rightarrow\cos^2\theta=\tanh^2\varphi\Rightarrow$$
$$\cos^2\theta=1-\operatorname{sech}^2\varphi\Rightarrow\operatorname{sech}^2\varphi=1-\cos^2\theta\Rightarrow\operatorname{sech}\varphi=\sin\theta$$
$$\Rightarrow\operatorname{csch}\varphi=\csc\theta\Rightarrow\varphi=\operatorname{csch}^{-1}(\csc\theta)$$

مثال (1-33): إذا كان: $5\sinh x-\cosh x=5$، أوجد: $\tanh x$.

الحل:
$$5\sinh x-\cosh x=5\Rightarrow5(\sinh x-1)=\cosh x\Rightarrow$$
$$25(\sinh x-1)^2=\cosh^2 x=1+\sinh^2 x\Rightarrow$$
$$24\sinh^2 x-50\sinh x+24=0\Rightarrow12\sinh^2 x-25\sinh x+12=0$$
$$\Rightarrow(3\sinh x-4)(4\sinh x-3)=0\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\sinh x=4/3\\ \sinh x=3/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}=\pm5/3\\ \cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}=\pm5/4\end{cases}$$

إنّ: $\cosh x=5/4$، و $\cosh x=-5/3$ مرفوضان لأنهما لا يحققان الفرض؛ وبالتالي:
$$\tanh x=4/5,\quad \text{or}\quad \tanh x=-3/5$$

5-2-1 القسمان الحقيقي والتخيلي للتوابع المثلثية والقطعية العقدية:

1- لإيجاد القسمين الحقيقي والتخيلي للتوابع الآتية:

$(i)\ \sin(x+iy),\quad (ii)\ \cos(x+iy),\quad (iii)\ \tan(x+iy)$
$(iv)\ \cot(x+iy),\quad (v)\ \sec(x+iy),\quad (vi)\ \csc(x+iy)$

الإثبات: $(i)\ \sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

وبشكل مشابه نجد أنّ: $(ii)\ \cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

(iii) ليكن: $\alpha+i\beta=\tan(x+iy)$ ومنه: $\alpha-i\beta=\tan(x-iy)$ وبالتالي:

بالجمع: $2\alpha=\tan(x+iy)+\tan(x-iy)$ وبالتالي:

$$\alpha=\frac{\sin(x+iy+x-iy)}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\cos 2iy}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\cosh 2y}$$

بالطرح: $2i\beta = \tan(x+iy) - \tan(x-iy)$ وبالتالي:

$$i\beta = \frac{\sin 2iy}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)} = \frac{i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \longrightarrow$$

$$\beta = \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \Longrightarrow \tan(x+iy) = \frac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

(iv) بشكل مشابه نجد أنّ:

$$\cot(x+iy) = \frac{\sin 2x - i\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x}$$

(v) ليكن: $\alpha + i\beta = \sec(x+iy)$ ومنه: $\alpha - i\beta = \sec(x-iy)$ وبالتالي:

بالجمع: $2\alpha = \sec(x+iy) + \sec(x-iy)$ وبالتالي يكون:

$$\alpha = \frac{\cos(x-iy) + \cos(x+iy)}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)} = \frac{2\cos x\cos iy}{\cos 2x + \cos 2iy} = \frac{2\cos x\cosh y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

بالطرح: $2i\beta = \sec(x+iy) - \sec(x-iy)$ وبالتالي يكون:

$$i\beta = \frac{\cos(x-iy) - \cos(x+iy)}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)} = \frac{2\sin x\sin iy}{\cos 2x + \cos 2iy} = \frac{2i\sin x\sinh y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

$$\Longrightarrow \beta = \frac{2\sin x\sinh y}{\cos 2x + \cosh 2y} \Longrightarrow \sec(x+iy) = 2\frac{\cos x\cosh y + i\sin x\sinh y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

(vi) بشكل مشابه نجد أنّ:

$$\csc(x+iy) = 2\frac{\sin x\cosh y - i\cos x\sinh y}{\cosh 2y - \cos 2x}$$

2- لإيجاد التقسيمين الحقيقي والتخيلي للتوابع الآتية:

$$(i)\ \sinh(x+iy), \qquad (ii)\ \cosh(x+iy), \qquad (iii)\ \tanh(x+iy)$$

الإثبات: $(i)\ \sinh(x+iy) = (1/i)\sin i(x+iy) = (1/i)\sin(ix-y) =$

$$= (1/i)[\sin ix\cos y - \cos ix\sin y] =$$

$$= (1/i)[i\sinh x\cos y - \cosh x\sin y] = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$$

وبشكل مشابه نجد أنّ: $(ii)\ \cosh(x+iy) = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$

(iii) إذا كان: $\alpha + i\beta = \tanh(x+iy) = (1/i)\tan(ix-y)$ فيكون:

$$\alpha - i\beta = \tanh(x-iy) = (1/i)\tan(ix+y)$$

بالجمع يكون: $2\alpha = (1/i)[\tan(ix-y) + \tan(ix+y)] \Leftrightarrow$

$$\alpha = \frac{\sin(ix-y+ix+y)}{2i\cos(ix-y)\cos(ix+y)} = \frac{(1/i)\sin 2ix}{\cos 2ix + \cos 2y} = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

وبالطرح يكون: $2i\beta = (1/i)[\tan(ix-y) - \tan(ix+y)] \Longrightarrow$

$$i\beta = -\frac{\sin[(ix+y)-(ix-y)]}{2i\cos(ix+y)\cos(ix-y)} \Longrightarrow$$

$$\beta = \frac{\sin 2y}{\cos 2ix + \cos 2y} = \frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y} \Longrightarrow \tanh(x+iy) = \frac{\sinh 2x + i\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

مثال (34-1): إذا كان: $\cosh(u+iv) = x+iy$ برهن أنّ:

$$(i)\ \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1, \qquad (ii)\ \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1$$

الحل: بما أنّ:

$$x+iy = \cosh(u+iv) = \cos(iu - v) =$$
$$= \cos iu \cos v + \sin iu \sin v = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v.$$

بمقارنة القسمين الحقيقي والتخيلي في الطرفين نجد أنّ:

$$x = \cosh u \cos v, \qquad y = \sinh u \sin v \Longrightarrow$$
$$\frac{x}{\cosh u} = \cos v, \qquad \frac{y}{\sinh u} = \sin v \Longrightarrow \frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1 \qquad (i)$$

أيضاً نجد أنّ:

$$\frac{x}{\cos v} = \cosh u, \qquad \frac{y}{\sin v} = \sinh u \Longrightarrow \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1 \qquad (ii)$$

مثال (35-1): إذا كان: $\tan(\theta + i\varphi) = e^{i\alpha}$ برهن أنّ:

$$\theta = (n + 1/2)(\pi/2), \qquad \varphi = (1/2)\ln\tan(\pi/4 + \alpha/2)$$

الحل: $\tan(\theta + i\varphi) = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \Longrightarrow \tan(\theta - i\varphi) = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$$\Longrightarrow \tan 2\theta = \tan[(\theta + i\varphi) + (\theta - i\varphi)] = \frac{\tan(\theta + i\varphi) + \tan(\theta - i\varphi)}{1 - \tan(\theta + i\varphi)\tan(\theta - i\varphi)}$$
$$= \frac{2\cos\alpha}{1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \frac{2\cos\alpha}{0} \longrightarrow \infty \Longrightarrow 2\theta = n\pi + \pi/2 \Longrightarrow$$
$$\theta = (n + 1/2)(\pi/2)$$

أيضاً لدينا:

$$\tan 2i\varphi = \tan[(\theta + i\varphi) - (\theta - i\varphi)] = \frac{\tan(\theta + i\varphi) - \tan(\theta - i\varphi)}{1 + \tan(\theta + i\varphi)\tan(\theta - i\varphi)}$$
$$\Longrightarrow i\tanh 2\varphi = \frac{2i\sin\alpha}{1 + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = i\sin\alpha \Longrightarrow$$
$$\frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}} = \frac{\sin\alpha}{1} \Longrightarrow e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = \sin\alpha\, e^{2\varphi} + \sin\alpha\, e^{-2\varphi} \Longrightarrow$$
$$e^{2\varphi} - \sin\alpha\, e^{2\varphi} = e^{-2\varphi} + \sin\alpha\, e^{-2\varphi} \Longrightarrow \frac{e^{2\varphi}}{e^{-2\varphi}} = \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} =$$
$$= \frac{\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) + 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) - 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \Longrightarrow$$
$$e^{4\varphi} = \frac{[\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)]^2}{[\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)]^2} = \left[\frac{1 + \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)}\right]^2 \Longrightarrow$$

$$e^{2\varphi} = \frac{1+\tan(\alpha/2)}{1-\tan(\alpha/2)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

مثال (36-1): أوجد القسمين الحقيقي والتخيلي لـ: $\tan^{-1}(x+iy)$.

الحل: ليكن لدينا: $\alpha+i\beta = \tan^{-1}(x+iy) \Rightarrow \alpha - i\beta = \tan^{-1}(x-iy)$

بالجمع نجد أنّ[*]:

$$2\alpha = \tan^{-1}(x+iy)+\tan^{-1}(x-iy) = \tan^{-1}\frac{(x+iy)+(x-iy)}{1-(x+iy)(x-iy)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2-y^2}$$

بالطرح نجد أنّ:

$$2i\beta = \tan^{-1}(x+iy)-\tan^{-1}(x-iy) = \tan^{-1}\frac{(x+iy)-(x-iy)}{1+(x+iy)(x-iy)} =$$

$$= \tan^{-1} i\frac{2y}{1+x^2+y^2} = i\tanh^{-1}\frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad [\because \tan^{-1} iz = i\tanh^{-1} z]$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

مثال (37-1): أوجد القسمين الحقيقي والتخيلي لـ: $\sin^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث إنّ: θ زاوية حادة موجبة.

الحل: $\sin^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta) = x+iy \Rightarrow \cos\theta+i\sin\theta = \sin(x+iy) =$

$$= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \sin x\cosh y \quad (i), \qquad \sin\theta = \cos x\sinh y \quad (ii)$$

بالتربيع والجمع نجد أنّ:

$$1 = \sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y = \sin^2 x(1+\sinh^2 y)+\cos^2 x\sinh^2 y =$$
$$= \sin^2 x+\sinh^2 y(\sin^2 x+\cos^2 x) \Rightarrow 1-\sin^2 x = \sinh^2 y \Rightarrow \cos^2 x = \sinh^2 y$$

وبالتالي بالتعويض في (ii) وبما أنّ θ زاوية حادة موجبة، نجد أن:

$$\sin^2\theta = \cos^4 x \Rightarrow \cos^2 x = \sin\theta \geq 0 \Rightarrow x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \cos x = +\sqrt{\sin\theta}$$
$$\Rightarrow x = \cos^{-1}\sqrt{\sin\theta} \Rightarrow \sinh y = \sqrt{\sin\theta} \rightarrow y = \ln\left[\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{1+\sin\theta}\right]$$

6-2-1 التابع اللوغاريتمي للمتحول العقدي:

تعريفه: إذا كان $z = x+iy$، و $w = u+iv$، مرتبطين بالعلاقة: $e^w = z$، فإنّ: w يدعى لوغاريتم العدد z للأساس e، ويكتب بالشكل: (i) $w = \log_e z = \ln z$. وأيضاً:

(*) $\tan^{-1}A \pm \tan^{-1}B = \tan^{-1}\frac{A\pm B}{1\mp AB}$.

$$e^{w+2in\pi} = e^{w}\cdot e^{2in\pi} = z \quad ; \quad [\because \ e^{2in\pi} = 1] \Rightarrow \ln z = w + 2in\pi \qquad (ii)$$

إنّ لوغاريتم العدد العقدي له عدد غير منته من القيم، إذاً فهو تابع متعدد القيم.

إنّ القيمة العامة لتابع اللوغاريتم للعدد z، تكتب بالشكل: $\mathrm{Log}\,z$ (يبدأ بأل كبيرة) للتمييز بينها وبين القيمة الرئيسة لتابع اللوغاريتم التي تكتب بالشكل: $\log z = \ln z$. هذه القيمة الرئيسة نحصل عليها بإعطاء n القيمة صفر $(n = 0)$ في $\mathrm{Log}\,z$. لذلك فإنّ (i) و(ii) نكتب بالشكل الآتي:

$$\mathrm{Log}(x+iy) = 2in\pi + \log(x+iy) = 2in\pi + \ln(x+iy)$$

ملاحظة: 1- إذا كان: $y = 0$، عندها: $\mathrm{Log}\,x = 2in\pi + \ln x$. وهذا يدل أنّ لوغاريتم العدد الحقيقي هو أيضاً متعدد القيم. إنّ القيمة الرئيسة هي قيمة حقيقية بينما القيم الأخرى كلها هي قيم تخيلية.

2- نعلم أنّ لوغاريتم العدد السالب ليس له قيمة حقيقية. ولكن يمكن حسابه عقدياً.

$$\ln(-2) = \ln 2(-1) = \ln 2 + \ln(-1) = \ln 2 + i\pi =$$
$$= 0.6931 + i(3,1416) \quad ; \quad [\because \ -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}]$$

لإيجاد القسمين الحقيقي والتخيلي للتابع: $\mathrm{Log}(x+iy)$، لدينا:

$$\mathrm{Log}(x+iy) = 2in\pi + \ln(x+iy) = 2in\pi + \ln[r(\cos\theta + i\sin\theta)] =$$
$$= 2in\pi + \ln\left(r\,e^{i\theta}\right) = 2in\pi + \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i[2n\pi + \tan^{-1}(y/x)]$$

حيث إنّ: $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و $r = \sqrt{x^2+y^2}$، $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

لإيجاد القسمين الحقيقي والتخيلي للعدد $(\alpha+i\beta)^{x+iy}$، لدينا:

$$(\alpha+i\beta)^{x+iy} = e^{(x+iy)\log(\alpha+i\beta)} = e^{(x+iy)[2in\pi+\ln(\alpha+i\beta)]} =$$
$$= e^{(x+iy)[2in\pi+\ln(re^{i\theta})]} = e^{(x+iy)[\ln r+i(2n\pi+\theta)]} = e^{A+iB} = e^{A}(\cos B + i\sin B)$$

حيث إنّ: $\alpha = r\cos\theta$ و $\beta = r\sin\theta$ و $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$، $\theta = \tan^{-1}(\beta/\alpha)$.

و $A = x\ln r - y(2n\pi+\theta)$ و $B = y\ln r + x(2n\pi+\theta)$. والقسم الحقيقي المطلوب $e^{A}\cos B$، والقسم التخيلي $e^{A}\sin B$.

مثال (38-1): أوجد القيمة العامة للعدد $\ln(-i)$.

الحل:
$$\mathrm{Log}(-i) = 2in\pi + \ln[0 + i(-1)] = 2in\pi + \ln[r(\cos\theta + i\sin\theta)] =$$
$$= 2in\pi + \ln\left(r\,e^{i\theta}\right) = 2in\pi + \ln r + i\theta = 2in\pi + \ln 1 + i(-\pi/2) = i(2n-1/2)\pi$$

حيث إنّ: $0 = r\cos\theta$ و $-1 = r\sin\theta$ و $r = 1$ و $\theta = -\pi/2$.

مثال (39-1): برهن أنّ: $\mathrm{Log}\,i^{i} = -(2n+1/2)\pi$ (i) $\quad i^{i} = e^{-(4n+1)(\pi/2)}$

$$(ii) \quad \left(\sqrt{i}\right)^{\sqrt{i}} = e^{-\alpha}\,\mathrm{cis}\,\alpha \quad ; \quad \alpha = \pi/4\sqrt{2}$$

الحل: $(i) \quad i^{i} = e^{i\log i} = e^{i(2in\pi+\ln i)} = e^{-2in\pi+i\ln[\exp(i\pi/2)]} \Longrightarrow$

حيث إنّ: $i = \operatorname{cis}(\pi/2) = \exp\{i\pi/2\}$ ∴

$$i^i = e^{-2n\pi+i(i\pi/2)} = e^{-(2n+1/2)\pi} \Longrightarrow \operatorname{Log} i^i = -(2n+1/2)\pi$$

$$(ii)\quad \left(\sqrt{i}\right)^{\sqrt{i}} = e^{\sqrt{i}\ln\sqrt{i}} \Longrightarrow \sqrt{i}\ln\sqrt{i} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\ln\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\ln\left(e^{i\pi/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{i\pi}{2} = \frac{i\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+i\frac{\pi}{4\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\left(\sqrt{i}\right)^{\sqrt{i}} = e^{-\alpha+i\alpha} = e^{-\alpha}\cdot e^{i\alpha} = e^{-\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ ;\ \alpha = \pi/4\sqrt{2}$$

مثال (40-1): إذا كان: $(a+ib)^p = m^{x+iy}$، برهن أنّ أحد قيم y/x هو:

$$2\tan^{-1}(b/a)+\ln(a^2+b^2)$$

الحل:

$$(a+ib)^p = m^{x+iy} \Longrightarrow p\left(\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)+i\tan^{-1}\frac{b}{a}\right) = x\ln m + iy\ln m$$

بمساواة القسمين الحقيقي والتخيلي في الطرفين نجد أنّ:

$$\frac{p}{2}\ln(a^2+b^2) = x\ln m \quad (i), \qquad p\tan^{-1}\frac{b}{a} = y\ln m \quad (ii)$$

بتقسيم (ii) على (i) نجد أنّ:

$$y/x = 2\tan^{-1}(b/a)/\ln(a^2+b^2)$$

مثال (41-1): إذا كان: $i^{i^{i^{\cdots\infty}}} = A+iB$، برهن أنّ: $\tan(\pi A/2) = B/A$ و $A^2+B^2 = e^{-\pi B}$.

الحل:

$$i^{i^{i^{\cdots\infty}}} = A+iB \Longrightarrow i^{A+iB} = A+iB \Longrightarrow$$

$$A+iB = e^{(A+iB)\ln i} = \exp\{(A+iB)\ln[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]\} =$$

$$= \exp[(A+iB)\ln(e^{i\pi/2})] = e^{(A+iB)(i\pi/2)} = e^{-B\pi/2}\cdot e^{i\pi A/2} =$$

$$= e^{-B\pi/2}\left(\cos\frac{\pi A}{2}+i\sin\frac{\pi A}{2}\right)$$

وبمساواة القسم الحقيقي مع القسم الحقيقي والقسم التخيلي مع القسم التخيلي نجد:

$$A = e^{-B\pi/2}\cos\frac{\pi A}{2} \quad (i), \qquad B = e^{-B\pi/2}\sin\frac{\pi A}{2} \quad (ii)$$

بقسمة (ii) على (i) نجد أن: $B/A = \tan(\pi A/2)$

بتربيع (i) و(ii) وجمعهما نجد أن: $A^2+B^2 = e^{-\pi B}$

مثال (42-1): برهن أنّ: $\ln\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$، ثم أوجد: $\cos\left[i\ln\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)\right]$.

الحل: لنضع $a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$ فيكون: $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ وبالتالي نجد:

$$\ln\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = \ln\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r(\cos\theta-i\sin\theta)} = \ln(e^{i\theta}\div e^{i\theta}) = \ln e^{2i\theta} = 2i\theta$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos\left[i\ln\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)\right] = \cos[i(2i\theta)] = \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-(b/a)^2}{1+(b/a)^2}$$

$$\cos\left[i\ln\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)\right] = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

مثال (1-43): أوجد القسمين الحقيقي والتخيلي للمقدار $\ln\sin(x+iy)$.

الحل:

$$\ln\sin(x+iy) = \ln(\sin x\cos iy + \cos x\sin iy) =$$

$$= \ln(\sin x\cosh y + i\cos x\sinh y) = \ln r(\cos\theta + i\sin\theta)\ ;$$

$$r\cos\theta = \sin x\cosh y, \qquad r\sin\theta = \cos x\sinh y \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cosh 2y}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{\cosh 2y-1}{2}} =$$

$$= \sqrt{(\cosh 2y - \cos 2x)/2}\ , \qquad \theta = \tan^{-1}(\cot x\tanh y)$$

$$\Rightarrow \ln\sin(x+iy) = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh 2y-\cos 2x}{2} + i\tan^{-1}(\cot x\tanh y)$$

مثال (1-44): أوجد جذور للمعادلتين: (i) $\sin z = \cosh 4$, (ii) $\sinh z = i$.

الحل:

(i) $\sin z = \cosh 4 = \cos 4i = \sin(\pi/2 - 4i) \Rightarrow$

$z = n\pi + (-1)^k(\pi/2 - 4i)\ ;\ [\because \sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha]$

(ii) $i = \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \Rightarrow e^{2z} - 2ie^z - 1 = 0 \Rightarrow (e^z - i)^2 = 0$

$$e^z = i \Rightarrow z = \operatorname{Log} i = 2in\pi + \ln i = 2in\pi + \ln e^{i\pi/2} =$$

$$= 2in\pi + i\pi/2 = i(\pi/2 + 2n\pi) = i(2n + 1/2)\pi$$

3-1 مجموع المتسلسلات Summation of series

طريقة $C + iS$ (تجيب + i جيب):

هذه الطريقة الأكثر عمومية وتطبق لمعرفة مجموع متسلسلات من الشكل:

$$a_0\sin\alpha + a_1\sin(\alpha+\beta) + a_2\sin(\alpha+2\beta) + \cdots$$

أو من الشكل:

$$a_0\cos\alpha + a_1\cos(\alpha+\beta) + a_2\cos(\alpha+2\beta) + \cdots$$

إجراء: ليكن لدينا متسلسلة الجيوب:

$$S = a_0\sin\alpha + a_1\sin(\alpha+\beta) + a_2\sin(\alpha+2\beta) + \cdots$$

وليكن لدينا متسلسلة التجيبات:

$$C = a_0\cos\alpha + a_1\cos(\alpha+\beta) + a_2\cos(\alpha+2\beta) + \cdots \Rightarrow$$
$$C + iS = a_0[\cos\alpha + i\sin\alpha] + a_1[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + \cdots$$
$$= a_0e^{i\alpha} + a_1e^{i(\alpha+\beta)} + a_2e^{i(\alpha+2\beta)} + a_3e^{i(\alpha+3\beta)} + \cdots$$

يستخدم المجموع الأخير في نشر المتسلسلات الشهيرة:

1- متسلسلة التابع الأسي:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

2- متسلسلات تابع الجيب، والتجيب، والجيب القطعي، والتجيب القطعي:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

3- متسلسلة التابع اللوغاريتمي:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad \ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

4- متسلسلة غريغوري:

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$
$$\tanh^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

5- متسلسلة ثنائي الحد:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$
$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$$

6- المتسلسلة الهندسية:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow$$
$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

وأخيراً يعبر عن مجموع المتسلسلة بالشكل: $A + iB$ وهذا يعني أنّ: $C = A,\ S = B$

مثال (1-45): أوجد مجموع المتسلسلة:

$$\sin\alpha + x\sin(\alpha+\beta) + \frac{x^2}{2!}\sin(\alpha+2\beta) + \cdots$$

الحل: ليكن لدينا:

$$S = \sin\alpha + x\sin(\alpha+\beta) + \frac{x^2}{2!}\sin(\alpha+2\beta) + \cdots$$

$$C = \cos\alpha + x\cos(\alpha+\beta) + \frac{x^2}{2!}\cos(\alpha+2\beta) + \cdots \Rightarrow$$

$$C + iS = [\cos\alpha + i\sin\alpha] + x[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] + \frac{x^2}{2!}[\cos(\alpha+2\beta) + i\sin(\alpha+2\beta)] + \cdots$$

$$= e^{i\alpha} + xe^{i(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{2!}e^{i(\alpha+2\beta)} + \cdots = e^{i\alpha}\left[1 + \frac{xe^{i\beta}}{1!} + \frac{x^2e^{i2\beta}}{2!} + \cdots\right]$$

$$= e^{i\alpha}\cdot e^{xe^{i\beta}} = e^{i\alpha}\cdot e^{x(\cos\beta+i\sin\beta)} = e^{x\cos\beta}e^{i(\alpha+x\sin\beta)} =$$

$$= e^{x\cos\beta}[\cos(\alpha+x\sin\beta) + i\sin(\alpha+x\sin\beta)] \Rightarrow S = e^{x\cos\beta}\sin(\alpha+x\sin\beta)$$

مثال (1-46): أوجد مجموع المتسلسلة:

$$\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\sin^2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta\sin^3\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\sin^4\theta + \cdots$$

الحل: ليكن لدينا:

$$S = \sin\theta\cdot\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\sin^2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta\sin^3\theta - \cdots$$

$$C = \cos\theta\cdot\sin\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\sin^2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\sin^3\theta - \cdots \Rightarrow$$

$$C + iS = e^{i\theta}\sin\theta - \frac{e^{2i\theta}\sin^2\theta}{2} + \frac{e^{3i\theta}\sin^3\theta}{3} - \cdots = \ln(1 + e^{i\theta}\sin\theta)$$

$$= \ln[1 + (\cos\theta + i\sin\theta)\sin\theta] = \ln[1 + \cos\theta\sin\theta + i\sin^2\theta]$$

نضع: (i) $\quad 1 + \cos\theta\sin\theta = r\cos\alpha;\ \ \sin^2\theta = r\sin\alpha$ وبالتالي:

$$C + iS = \ln r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \ln re^{i\alpha} = \ln r + i\alpha$$

بمساواة القسم الحقيقي بالقسم الحقيقي والقسم التخيلي بالقسم التخيلي نجد:

$$S = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sin^2\theta}{1 + \cos\theta\sin\theta}\right)$$

وذلك من الاستفادة من (i).

مثال (1-47): أوجد المجموع اللانهائي للمتسلسلة:

$$1 - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 2\theta - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 3\theta + \cdots \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$

الحل: ليكن لدينا:

$$C = 1 - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 2\theta - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 3\theta + \cdots$$

$$S = 0 - \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin 2\theta - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin 3\theta + \cdots \Rightarrow$$

$$C+iS=1-\frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^{2i\theta}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}e^{3i\theta}+\cdots=$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}e^{2i\theta}+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}e^{3i\theta}+\cdots$$

$$=\left(1+e^{i\theta}\right)^{-1/2}=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^{-1/2}=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}$$

$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{4}-i\sin\frac{\theta}{4}\right)\Longrightarrow$$

$$C=(2\cos(\theta/2))^{-1/2}\cos(\theta/4)$$

4-1 التقريبات Approximations

مثال (48-1): إذا كان $\sin\theta/\theta=599/600$، أوجد تقريباً لقيمة الزاوية θ بالراديان.

الحل:

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{599}{600}=1-\frac{1}{600}$$

بما أن المقدار قريب من الواحد فإن الزاوية θ يجب أن تكون صغيرة جداً. ولكن:

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\theta}=1-\frac{\theta^2}{3!}+\frac{\theta^4}{5!}-\frac{\theta^6}{7!}+\cdots$$

بإهمال قوى θ اعتباراً من θ^4 وما بعدها نجد:

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=1-\frac{\theta^2}{6}=1-\frac{1}{600}\Rightarrow\theta^2=\frac{1}{100}\Rightarrow\theta=0.1\text{ radians}$$

مثال (49-1): أوجد حل التقريب الآتي: $\sin(\pi/6+\theta)=0.51$.

الحل: بما أن 0.51 قريب من النصف وهو قيمة $\sin(\pi/6)$، فإن الزاوية θ يجب أن تكون صغيرة جداً.

ولدينا:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\cdots\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\theta$$

وذلك بإهمال قوى θ اعتباراً من θ^2 وما بعدها. وبالتالي:

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\theta=0.51\Rightarrow\theta=\frac{1}{50\sqrt{3}}\text{rad}=\frac{\sqrt{3}}{150}\times 57.29\text{ deg}=39.7'$$

تمارين غير محلولة

أ- مسائل عن الأعداد العقدية

1- عبر عن المقادير العقدية الآتية بالشكل المثلثي:

$(i)\ \ 1+\sin\alpha+i\cos\alpha$ $\qquad$ $(ii)\ \ \dfrac{1}{(z+1)^2}-\dfrac{1}{(z-1)^2}$

2- إذا كان: $\dfrac{1}{x+iy}+\dfrac{1}{u+iv}=1$ حيث x,y,u,v أعداد حقيقية، عبر عن v بدلالة x و y.

3- إذا كانت x و y أعداد حقيقية، أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{iy}{ix+1}-\frac{3y+4i}{3x+y}=0$$

4- إذا كان $\alpha-i\beta=1/(a-ib)$ برهن أن: $(\alpha^2+\beta^2)(a^2+b^2)=1$.

5- أوجد نوع المنحني: $z\bar{z}+(1+i)z+(1-i)\bar{z}=0$ ثم مثله بيانياً.

6- في مخطط آرجاند، أثبت أنّ $i+9$ و $13i+4$ و $8i-8$ و $-4i-3$ تشكل مربعاً.

7- إذا كان $|z_1|=|z_2|$ و $\arg(z_1)+\arg(z_2)=0$، عندها برهن أن z_1 و z_2 عددان عقديان مرافقان.

8- بفرض أننا أنشأنا مستطيلاً في المستوي العقدي، أضلاعه موازية للمحاور الإحداثية مركزه في المبدأ، وأحد رؤوسه $\sqrt{3}\,i+1$، أوجد الأعداد العقدية التي تمثل الرؤوس الثلاثة الباقية. أوجد مساحة هذا المستطيل.

9- بفرض أننا أنشأنا مثلثاً متساوي الأضلاع في المستوي العقدي، مركز ثقله في المبدأ وأحد رؤوسه $\sqrt{3}\,i+1$، أوجد الأعداد العقدية التي تمثل رأسيه الباقيين.

10- إذا مركز مسدس منتظم في مبدأ الإحداثيات، وأحد رؤوسه معطى بالعدد العقدي $i+1$ في مخطط آرجاند. أوجد إحداثيات الرؤوس الخمسة الباقية.

11- أوجد الحل الهندسي في المستوي العقدي الذي يمثل النقاط:

$(i)\ \ 2\le|z+3|<4$ $\qquad$ $(ii)\ \ Im(z)>2$

$(iii)\ \ \pi/3<\arg(z)<\pi/2$ $\qquad$ $(iv)\ \ |z+2|+|z-2|<4$

$(v)\ \ |z|=|z-2|$ $\qquad$ $(vi)\ \ |3z-1|=|z-3|$

12- إذا كان $|z^2-1|=|z|^2+1$، برهن أن z تقع على المحور التخيلي.

13- ما هو المحل الهندسي للمعطى بالعلاقة:

(i) $|z-1|+|z+1|=3$ (ii) $|z-3|=k|z+1|$; $k=1,\quad k=2$

14- أوجد المحل الهندسي للنقطة z إذا كان $(z+i)/(z+2)$ عدداً حقيقياً، ثم المحل الهندسي لها إذا كان $(z-i)/(z-2)$ عدداً تخيلياً بحتاً.

ب- مسائل عن نظرية دوموافر

15- برهن أن:

(i) $\dfrac{(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)^2(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)^{-3}}{(\cos 4\theta-i\sin 4\theta)^3(\cos\theta+i\sin\theta)^5}=1$

(ii) $\dfrac{(\cos\alpha-i\sin\alpha)^4}{(\cos\beta+i\sin\beta)^5}=\sin(4\alpha+5\beta)-i\cos(4\alpha+5\beta)$

(iii) $\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{\sin\theta+i\cos\theta}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$

16- إذا كان $p=\operatorname{cis}\theta$ و $q=\operatorname{cis}\varphi$، برهن أن:

(i) $\dfrac{p-q}{p+q}=i\tan\dfrac{\theta-\varphi}{2}$, (ii) $\dfrac{(p+q)(pq-1)}{(p-q)(pq+1)}=\dfrac{\sin\theta+\sin\varphi}{\sin\theta-\sin\varphi}$

17- في $a=\operatorname{cis}2\alpha$ و $b=\operatorname{cis}2\beta$ و $c=\operatorname{cis}2\gamma$ و $d=\operatorname{cis}2\delta$، برهن أن:

(i) $\sqrt{\dfrac{ab}{c}}+\sqrt{\dfrac{c}{ab}}=2\cos(\alpha+\beta-\gamma)$, (ii) $\sqrt{\dfrac{ab}{cd}}+\sqrt{\dfrac{cd}{ab}}=2\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

18- إذا كان $x_r=\operatorname{cis}(\pi/2^r)$، برهن أن: $\lim\limits_{n\to\infty}x_1x_2x_3\cdots x_n=-1$.

19- أوجد القيمة العامة لـ θ التي تحقق العلاقة:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\cdots(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$$

20- برهن أن:

(i) $(a+ib)^{m/n}+(a-ib)^{m/n}=2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\left(\dfrac{m}{n}\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$

(ii) $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{n/2+1}\cos(n\pi/4)$

21- بسط العبارة الآتية:

$$[\cos\alpha-\cos\beta+i(\sin\alpha-\sin\beta)]^n+[\cos\alpha-\cos\beta-i(\sin\alpha-\sin\beta)]^n$$

22- برهن أن:

$$(i)\ (1+\sin\theta+i\cos\theta)^n+(1+\sin\theta-i\cos\theta)^n=$$
$$=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$(ii)\ \left(\frac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}\right)^n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\alpha\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\alpha\right)$$

23- إذا كان $2\cos\theta=x+1/x$ و $2\cos\varphi=y+1/y$ برهن أن:

$$(i)\ x^m y^n+\frac{1}{x^m y^n}=2\cos(m\theta+n\varphi)\ ,\qquad (ii)\ \frac{x^m}{y^n}+\frac{y^n}{x^m}=2\cos(m\theta-n\varphi)$$

24- إذا كانت α,β جذور المعادلة $x^2-2x+4=0$ برهن أن: $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos(n\pi/3)$.

25- إذا كانت α,β جذور المعادلة $z^2\sin^2\theta-z\sin\theta+1=0$ ثم برهن أن:

$$(i)\ \alpha^n+\beta^n=2\cos n\theta\csc^n\theta\ ,\qquad (ii)\ \alpha^n\beta^n=\csc^{2n}\theta$$

26- إذا كان $x^2-2x\cos\theta+1=0$ برهن أن: $x^{2n}-2x^n\cos n\theta+1=0$.

27- إذا كان $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $y=\cos\beta+i\sin\beta$ و $z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ و $x+y+z=0$ عندئذ برهن أن: $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=0$.

28- إذا كان $\sin\theta+\sin\varphi+\sin\psi=0=\cos\theta+\cos\varphi+\cos\psi$ برهن أن:

$$(i)\ \cos2\theta+\cos2\varphi+\cos2\psi=0$$
$$(ii)\ \cos3\theta+\cos3\varphi+\cos3\psi=3\cos(\theta+\varphi+\psi)$$
$$(iii)\ \cos4\theta+\cos4\varphi+\cos4\psi=2\sum_{\theta,\varphi,\psi}\cos2(\varphi+\psi)$$

29- إذا كان $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ برهن أن:

$$(i)\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3/2$$
$$(ii)\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)=0$$

30- إذا كان $\sin\alpha+2\sin\beta+3\sin\gamma=0$ و $\cos\alpha+2\cos\beta+3\cos\gamma=0$ برهن أن:

$$\sin3\alpha+8\sin3\beta+27\sin3\gamma=18\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$ وأن:
$$\cos3\alpha+8\cos3\beta+27\cos3\gamma=18\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

جـ- مسائل عن جذور عدد عقدي

31- أوجد جميع قيم المقادير:

(i) $(1+i)^{1/4}$ (ii) $(-1+i)^{2/5}$

(iii) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{3/2}$ (iv) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{1/3}+\left(1-i\sqrt{3}\right)^{1/3}$

32- إذا كان ω جذراً تكعيبياً للعدد واحد 1، برهن أن: $1+\omega+\omega^2=0$.

33- أوجد جميع قيم المقدار: $(-1)^{1/6}$.

34- ارسم بيانياً جذور العدد $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{1/5}$ على مخطط آرجاند، ثم برهن أنها رؤوس لخمس منتظم.

35- استخدم نظرية دوموافر لبرهان المعادلات الآتية:

(i) $z^5+1=0$ (ii) $z^7+z^4+z^3+1=0$

(iii) $z^9+z^5-z^4-1=0$ (iv) $(z-1)^5+z^5=0$

36- أوجد الجذر المشترك للمعادلتين: $z^4+1=0$ و $z^6-i=0$.

37- حل المعادلة $z^{12}-1=0$ ثم أوجد أي من هذه الجذور يحقق المعادلة: $z^4+z^2+1=0$.

38- برهن أن جذور المعادلة: $(z+1)^7=(z-1)^7$ تعطى بالشكل الآتي $\pm i\cot(r\pi/7)$ حيث $r=1,2,3$.

39- برهن أن الجذور من المرتبة n للعدد 1 تشكل متتالية هندسية. أيضاً برهن أن مجموع هذه الـ n جذراً يساوي 0، وأنّ جداءها يساوي $(-1)^{n-1}$.

40- أوجد المعادلة التي جذورها: $2\cos(2\pi/7), 2\cos(4\pi/7), 2\cos(6\pi/7)$.

د- مسائل عن نشر $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$

41- عبّر عن: $\sin 6\theta/\sin\theta$ بوصفه كثير حدود لـ $\cos\theta$.

42- أثبت أنّ:

(i) $\dfrac{\sin 7\theta}{\sin\theta}=7-56\sin^2\theta+112\sin^4\theta-64\sin^6\theta$

(ii) $\dfrac{1+\cos 7\theta}{1+\cos\theta}=(x^3-x^2-2x+1)^2, \quad x=2\cos\theta$

(iii) $2(1+\cos 8\theta)=(x^4-4x^2+2)^2, \quad x=2\cos\theta$

(iv) $\tan 5\theta=\dfrac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}, \quad t=\tan\theta$

43- إذا كان: $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$، أثبت أنّ: $x+y+z=xyz$.

44- إذا كان: α,β,γ جذور المعادلة: $x^3+px^2+qx+p=0$، أثبت أنّ:

$$\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta+\tan^{-1}\gamma=n\pi \text{ rad.}$$

ما عدا في حالة استثنائية وحيدة.

45- أثبت أنّ:

$$(i)\ \cos^7\theta=\frac{1}{16}(\cos 7\theta+7\cos 5\theta+21\cos 3\theta+35\cos\theta)$$

$$(ii)\ \cos^6\theta-\sin^6\theta=\frac{1}{16}(\cos 6\theta+15\cos 2\theta)$$

$$(iii)\ \sin^8\theta=2^{-7}(\cos 8\theta-8\cos 6\theta+28\cos 4\theta-56\cos 2\theta+35)$$

$$(iv)\ 32\sin^4\theta\cos^2\theta=\cos 6\theta-2\cos 4\theta-\cos 2\theta+2$$

$$(v)\ \sin^5\theta\cos^2\theta=\frac{1}{64}(\sin 7\theta-3\sin 5\theta+\sin 3\theta+5\sin\theta)$$

46- عبّر عن $\cos^5\theta\sin^7\theta$ في متسلسلة جيوب مضاعفات θ.

47- إذا كان $\cos^5\theta=A\cos\theta+B\cos 3\theta+C\cos 5\theta$، أوجد $\sin^5\theta$ بدلالة A,B,C.

48- إذا كان: $\sin^4\theta\cos^3\theta=A_1\cos\theta+A_3\cos 3\theta+A_5\cos 5\theta+A_7\cos 7\theta$، أثبت أنّ:

$$A_1+9A_3+25A_5+49A_7=0.$$

هـ- مسائل عن التوابع العقدية

49- أوجد القسمين الحقيقي والتخيلي للتوابع الآتية:

$$(i)\ \exp(z^2)\ ;z=x+iy,\quad (ii)\ \exp(5+i\pi/2),\quad (iii)\ \exp(5+3i)^2$$

50- من تعريف $\sin z$ و$\cos z$ برهن أنّ:

$$(i)\ \cos 2z=2\cos^2 z-1,\quad (ii)\ \frac{\sin 2z}{1-\cos 2z}=\cot z$$

$$(iii)\ \sin 3z=3\sin z-4\sin^3 z$$

51- برهن أنّ:

$$[\sin(\alpha-\theta)+e^{-i\alpha}\sin\theta]^n=\sin^{n-1}\alpha\,[\sin(\alpha-n\theta)+e^{-i\alpha}\sin n\theta]$$

52- إذا كان: $z=e^{i\theta}$، برهن أنّ:

$$\frac{z^2-1}{z^2+1}=i\tan\theta$$

53- أزل z من المعادلتين:

$$p\operatorname{csch} z + q\operatorname{sech} z + r = 0, \qquad p'\operatorname{csch} z + q'\operatorname{sech} z + r' = 0$$

54- إذا كان: $y = \ln\tan x$، برهن أنّ: $\sinh ny = (\tan^n x - \cot^n x)/2$.

55- إذا كان: $\tan y = \tan\alpha\tanh\beta$ و $\tan z = \cot\alpha\tanh\beta$، برهن أنّ:

$$\tan(y+z) = \sinh 2\beta \csc 2\alpha$$

56- برهن أنّ:

$$(i)\quad \cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta) = 2\sinh\alpha\sinh\beta$$

$$(ii)\quad \cosh(\alpha+\beta)\cosh(\alpha-\beta) = (1/2)(\sinh 2\alpha + \sinh 2\beta)$$

$$(iii)\quad (\cosh\theta \pm \sinh\theta)^n = \cosh n\theta + \sinh n\theta$$

$$(iv)\quad \left(\frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta}\right)^3 = \cosh 6\theta + \sinh 6\theta$$

57- عبّر عن $\cosh^7\theta$ في كثير حدود للتجيبات القطعية لمضاعفات θ.

58- إذا كان: $\sin\theta = \tanh x$، برهن أنّ: $\tan\theta = \sinh x$.

59- إذا كان: $\tan(x/2) = \tanh(u/2)$، برهن أنّ:

$$(i)\quad \tan x = \sinh u, \qquad \cos x\cosh u = 1, \qquad (ii)\quad u = \ln\tan(\pi/4 + x/2)$$

60- إذا كان: $\cosh x = \sec\theta$، برهن أنّ:

$$(i)\quad \tanh^2(x/2) = \tan^2(\theta/2), \qquad (ii)\quad x = \ln\tan(\pi/4 + \theta/2)$$

61- برهن أنّ:

$$(i)\quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}, \qquad (ii)\quad \tanh^{-1} x = \sinh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(iii)\quad \sinh^{-1} x = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2} = \tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{csch}^{-1}\frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}}$$

$$(iv)\quad \sinh^{-1}(\tan\theta) = \ln\tan(\pi/4 + \theta/2), \qquad (v)\quad \operatorname{sech}^{-1}(\sin\theta) = \ln\cot(\theta/2)$$

62- حلّ المعادلة الآتية: $7\cosh x + 8\sinh x = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$

63- أوجد $\tanh x$ إذا كان: $\sinh x - \cosh x = 5$.

و- مسائل عن القسمين الحقيقي والتخيلي للتوابع الدائرية والقطعية

64- إذا كان: $\sin(A+iB) = x + iy$، برهن أنّ:

$$(i)\quad \frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1, \qquad (ii)\quad \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1$$

65- إذا كان: $\cos(\alpha + i\beta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، برهن أنّ:

$$(i)\quad e^{2\beta} = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)}, \qquad (ii)\quad \beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)}$$

66- إذا كان: $\cos(\theta + i\varphi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$، برهن أنّ:

$$(i)\ \sin^2\theta = \pm\sin\alpha\,, \qquad (ii)\ \cos 2\theta + \cosh 2\varphi = 2$$

67- إذا كان: $\tan(A + iB) = x + iy$، برهن أنّ:

$$(i)\quad x^2 + y^2 + 2x\cot 2A = 1, \qquad (ii)\quad x^2 + y^2 - 2y\coth 2B = -1$$
$$(iii)\quad x\sinh 2B = y\sin 2A$$

68- إذا كان: $\tan(\theta + i\varphi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$، برهن أنّ:

$$(i)\quad e^{2\varphi} = \pm\cot(\alpha/2), \qquad (ii)\quad 2\theta = (n + 1/2)\pi + \alpha$$

69- إذا كان: $\tan(x + iy) = \sin(u + iv)$، برهن أنّ:

$$\frac{\sin 2x}{\sinh 2y} = \frac{\tan u}{\tan v}$$

70- إذا كان: $\csc(\pi/4 + ix) = u + iv$، برهن أنّ: $u^2 + v^2 = 2(u^2 - v^2)$.

71- إذا كان: $x = 2\cos\alpha\cosh\beta\,,\ y = 2\sin\alpha\sinh\beta$، برهن أنّ:

$$\sec(\alpha + i\beta) + \sec(\alpha - i\beta) = \frac{4x}{x^2 + y^2}$$

72- إذا كان: $a + ib = \tanh(v + i\pi/4)$، برهن أنّ: $a^2 + b^2 = 1$.

73- بسط المقدار: $\tan^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ إلى الشكل: $a + ib$. لذلك برهن أنّ:

$$\tan^{-1}\left(e^{i\theta}\right) = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

74- أوجد القسمين الحقيقي والتخيلي للتابع الآتي: $\cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث إنّ: θ زاوية حادة موجبة.

75- إذا كان: $\sin^{-1}(u + iv) = \alpha + i\beta$، برهن أنّ: $\sin^2\alpha$ و $\cosh^2\beta$ جذور للمعادلة:

$$x^2 - x(1 + u^2 + v^2) + u^2 = 0$$

76- إذا كان: $\cos^{-1}(x + iy) = \alpha + i\beta$، برهن أنّ:

$$(i)\ \ x^2\sec^2\alpha - y^2\csc^2\alpha = 1, \qquad (ii)\ x^2\operatorname{sech}^2\beta + y^2\operatorname{csch}^2\beta = 1$$

77- برهن أنّ:

$$(i)\quad \sin^{-1}(ix) = 2n\pi + i\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$
$$(ii)\quad \sin^{-1}(\csc\theta) = \pi/2 + i\ln\cot(\theta/2)$$

ز- مسائل عن التابع اللوغاريتمي لمتغير عقدي

78- أوجد القيمة العامّة لكل مما يأتي: $(i)\ \ln(6+8i),\qquad (ii)\ \ln(-1)$

79- أثبت أنّ $(i)\ \ln(1+i\tan\alpha) = \ln(\sec\alpha) + i\alpha$ حيث إن α هي زاوية حادة.

$$(ii)\ \ln\frac{3-i}{3+i} = 2i\left(n\pi - \tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

80- إذا كان $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\cdots(a_n+ib_n) = A+iB$، برهن أنّ:

$$(i)\ (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\cdots(a_n^2+b_n^2) = A^2+B^2$$
$$(ii)\ \tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \cdots + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

81- أوجد طويلة العددين وزاويتهما: $(i)\ \ (1-i)^{1+i}$ و $(ii)\ \ i^{\ln(1+i)}$.

82- إذا كان: $i^{\alpha+i\beta} = \alpha+i\beta$ برهن أن: $\alpha^2+\beta^2 = e^{-(4n+1)\pi\beta}$.

83- برهن أنّ:

$$(i)\quad \ln\left\{\frac{\sin(x+iy)}{\sin(x-iy)}\right\} = 2i\tan^{-1}(\cot x\tanh y),\quad (ii)\quad \tan\left[i\ln\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right] = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

84- إذا كان: $\tan\ln(x+iy) = a+ib$، حيث $a^2+b^2\neq 1$، أثبت أنّ:

$$\tan\ln(x^2+y^2) = \frac{2a}{1-a^2-b^2}$$

85- إذا كان: $\sin^{-1}(x+iy) = \ln(A+iB)$، أثبت أنّ:

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1 \quad ; \quad A^2+B^2 = e^{2u}$$

86- أوجد القسم الحقيقي والقسم التخيلي للعدد: $\ln\cos(x+iy)$.

87- أوجد جميع جذور المعادلة الآتية: $(i)\ \cos z = 2$ و $(ii)\ \tanh z + 2 = 0$.

ح- مسائل عن المتسلسلات من الشكل $C+iS$

88- أوجد مجموع المتسلسلات الآتية:

(i) $\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta + \frac{\sin^2\theta}{1\cdot 2}\cos 3\theta + \cdots$

(ii) $\sin\alpha - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{2!} + \frac{\sin(\alpha+4\beta)}{4!} - \cdots$

(iii) $x\sin\theta - \frac{1}{2}x^2\sin 2\theta + \frac{1}{3}x^3\sin 3\theta - \cdots$

(iv) $\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - \cdots$

(v) $e^{\alpha}\cos\beta - \frac{e^{3\alpha}}{3}\cos 3\beta + \frac{e^{5\alpha}}{5}\cos 5\beta - \cdots$

(vi) $c\sin\alpha + \frac{c^3}{3}\sin 3\alpha + \frac{c^5}{5}\sin 5\alpha + \cdots$

(vii) $1 - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 4\theta - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cos 6\theta + \cdots$

(viii) $n\sin\alpha + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\sin 2\alpha + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin 3\alpha + \cdots$

(ix) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin[\alpha+(n-1)\beta]$

(x) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos[\alpha+(n-1)\beta]$

(xi) $\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos 2\alpha + \sin^3\alpha\cos 3\alpha + \cdots$

(xii) $1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \cdots + +x^{n-1}\cos(n-1)\theta$

89- إذا كان $\sin\theta/\theta = 5045/5046$، برهن أن θ تساوي تقريباً $1°58'$.

90- إذا كان $\sin\theta/\theta = 2165/2166$، أوجد تقريباً للزاوية θ بالراديان.

91- إذا كان $\cos\theta = 1681/1682$، أوجد تقريباً للزاوية θ بالراديان.

92- أوجد حل التقريب الآتي: $\cos(\pi/3+\theta) = 0.49$.

2- التحليل العقدي

Complex Analysis

2-1 تحليل التوابع العقدية

2-1-1 مقدمة

لقد درسنا في الفصل السابق بعض التوابع العقدية الأساسية مثل: التوابع الأسية، والتوابع اللوغاريتمية، والتوابع المثلثية والتوابع القطعية، حيث عيّنت عند قيم عقدية معينة. هذه التوابع هي أداة نافعة ومهمّة في دراسة ميكانيك السوائل. لذلك يبدو من الضروري معرفة سلوكها التحليلي ودراسته من النهايات والاستمرار والاشتقاق والتفاضل والتكامل.

2-1-2 نهاية تابع عقدي

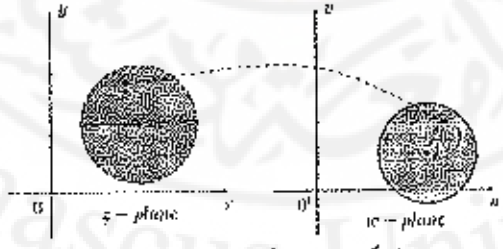
ليكن لدينا التابع $w = f(z)$ نقول إن له نهاية k عندما تسعى z إلى النقطة z_0، إذا كان من أجل أي عدد حقيقي ε، يمكن إيجاد عدد حقيقي δ يحقق:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - k| < \varepsilon$$

من أجل أي نقطة $z \neq z_0$ في القرص (المتقطع) الذي مركزه z_0 ونصف قطره δ في المستوي Z، يمتلك $f(z)$ قيمة في القرص الذي مركزه k ونصف قطره ε في المستوي W، في الشكل (2-1)، ويمكن أن نكتب:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = k$$

إن هذا التعريف مشابه للتعريف الموجود في التحليل الحقيقي العادي، ولكن الاختلاف فيه أن x تسعى عبر مستقيم إلى x_0، بينما في التحليل العقدي تسعى z إلى z_0 عبر أي طريق يصل بينهما في المستوي Z.



الشكل (2-1): نهاية تابع $w = f(z)$.

3-1-2 استمرار تابع عقدي

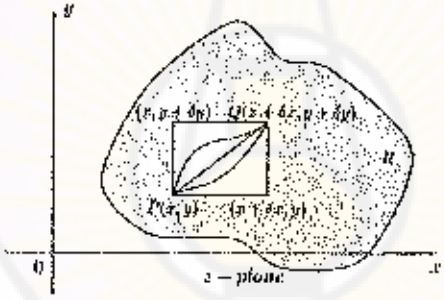
ليكن التابع $w = f(z)$ نقول إنه مستمر في النقطة $z = z_0$، إذا كان: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$، ونقول إن $f(z)$ مستمر على أي منطقة R في المستوي Z، إذا كان مستمراً في أي نقطة من نقاط المنطقة R. وأيضاً، نقول إن $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تابع مستمر في النقطة $z = z_0$، إذا كان مستمراً عند $x = x_0$ و $y = y_0$. أو بمعنى آخر إذا كان $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مستمرين في النقطة (x_0, y_0)، عندها يكون $f(z)$ مستمراً عند $z = z_0$.

4-1-2 اشتقاق تابع عقدي $f(z)$

ليكن التابع $w = f(z)$ وحيد القيمة للمتغير $z = x + iy$. عندئذٍ يكون مشتق التابع $w = f(z)$ معرفاً بالعلاقة:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

إذا كانت النهاية موجودة، وكانت النهاية نفسها من جميع الطرق المختلفة التي تجعل δz تسعى إلى الصفر.



الشكل (2-2): استمرار تابع $w = f(z)$.

لنفرض أنّ النقطة $P(z)$ ثابتة وأنّ النقطة $Q(z + \delta z)$ جارة لها (الشكل 2-2). إن النقطة Q يمكن أن تتقارب إلى النقطة P عبر أي مستقيم أو عبر أي منحن داخل المنطقة المعطاة، أي إن δz يمكن أن يسعى إلى الصفر بأي أسلوب و dw/dz يمكن أن يكون غير موجود. لذلك يصبح تحديد الشروط الكافية والضرورية مسألة أساسية من أجل إيجاد dw/dz. في الحقيقة المبرهنة الآتية تدلنا على ذلك.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لكي يكون للتابع $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ مشتق موجود من أجل كل قيم z في المنطقة R هو:

(i) المشتقات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ موجودة ومستمرة بالنسبة إلى x و y في المنطقة R.

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

إن العلاقات (ii) تعرف بمعادلتي كوشي–ريمان (Cauchy-Riemann)[٩] أو اختصاراً بمعادلتي C-R.

البرهان: (a) الشرط اللازم: إذا كان $f(z)$ يمتلك مشتقاً وحيداً في النقطة $P(x)$، فيكون:

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}} \frac{[u(x+\delta x, y+\delta y) + iv(x+\delta x, y+\delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\delta x + i\delta y}$$

وبما أن δz يمكن أن تسعى إلى الصفر من أي طريق، لنفرض أن δz أولاً تسعى على المحور الحقيقي وبعدها تسعى على المحور التخيلي.

عندما تسعى δz على المحور الحقيقي يكون $\delta y = 0$ ويكون $\delta z = \delta x$؛ وبالتالي:

$$f'(z) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\delta x, y) - u(x,y)}{\delta x} + i \frac{v(x+\delta x, y) - v(x,y)}{\delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

عندما تسعى δz على المحور التخيلي يكون $\delta x = 0$ ويكون $\delta z = i\delta y$؛ وبالتالي:

$$f'(z) = \lim_{\delta y \to 0} \left(\frac{u(x, y+\delta y) - u(x,y)}{i\delta y} + i \frac{v(x, y+\delta y) - v(x,y)}{i\delta y} \right) =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

وبما أن $f'(z)$ موجود فهذا يتطلب مساواة (1) و (2)؛ وبالتالي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

وهو الشرط اللازم لوجود مشتق للتابع $f(z)$ هو تحقق معادلتي كوشي–ريمان C-R.

(b) الشرط الكافي: لنفرض أن $f(z)$ يمتلك قيمة وحيدة للمشتقات الجزئية: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ في كل نقطة من المنطقة وتحقق شرطي كوشي–ريمان C-R.

---

[٩] نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي العظيم أوغستين-لويس كوشي Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) الذي يعدّ أبا التحليل الحديث ومنشأ التحليل العقدي، الذي نشر تقريباً 800 بحثاً أساسياً مهماً. كوشي معروف أيضاً بمساهماته في المعادلات التفاضلية، والمتسلسلات اللامتناهية، والبصريات، والمرونة. ونسبة أيضاً إلى عالم الرياضيات الألماني برناردلد ريمان Bernhard Riemann (1826-1866) الذي وضع مع العالم فايرشتراس Weierstrass أساسيات التحليل العقدي. ريمان أدخل مفهوم التكامل وجعل أساساً لمساهماته في نظرية الأعداد والتحليل الرياضي. ولقد طور ما يعرف بهندسة ريمان التي شكلت القاعدة الرياضية لنظرية أينشتاين النسبية.

فحسب نشر تايلور لتابع لمتغيرين نجد أنّ:

$$f(z+\delta z) = u(x+\delta x, y+\delta y) + iv(x+\delta x, y+\delta y) =$$
$$= u(x,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right)^2 + \cdots +$$
$$+ i\left[v(x,y) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right)^2 + \cdots\right] =$$
$$= f(z) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y + \cdots$$

بإهمال الحدود التي بعد القوى الأولى لـ δx وδy؛ نجد أنّ:

$$f(z+\delta z) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y$$

وباستخدام شرطي كوشي–ريمان C-R (3)، حيث نبدل $\frac{\partial u}{\partial y}$ بـ $-\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ بـ $\frac{\partial u}{\partial x}$ نجد:

$$f(z+\delta z) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)i\delta y = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\delta x + i\delta y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta z \Longrightarrow$$
$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0}\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{أو} \quad \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

التي هي (1) و(2) فتبرهن الشرط الكافي.

5-1-2 التوابع التحليلية

نقول عن التابع $f(z)$ إنه تابع تحليلي لـ z في المنطقة R، إذا كان وحيد القيمة ويمتلك مشتقاً وحيداً بالنسبة لـ z في جميع نقاط هذه المنطقة. ويدعى التابع التحليلي أيضاً تابعاً نظامياً أو هولومورفيك holomorphic function. إن التابع التحليلي في كل نقطة من نقاط المستوي العقدي، يعرف بتابع كامل entire function. وبما أن مشتق كثير الحدود موجود في كل نقطة، فإن كثير الحدود من أي درجة هو تابع كامل.

إن النقطة التي تجعل التابع التحليلي ينقطع فيها عن امتلاك مشتق تدعى نقطة معزولة.

وهكذا إذا كان u وv تابعين حقيقيين وحيدي القيمة لـ x وy وكانت $\partial u/\partial x$ و$\partial u/\partial y$ و$\partial v/\partial x$ و$\partial v/\partial y$ توابع مستمرة في منطقة R؛ فعندئذ معادلتا كوشي–ريمان C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

هما الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $f(z) = u + iv$ تحليلياً في المنطقة R. والمشتق للتابع $f(z)$ يعطى بالعلاقة: $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ أو بالعلاقة: $\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

يدعى القسمان الحقيقي والتخيلي لتابع تحليلي بتابعين توافقيين، والعلاقة بينهما تستنتج من معادلتي كوشي–ريمان C-R (4).

مثال (1-2): إذا كان $w = \ln z$. أوجد dw/dz وحدد أن w ليس تحليلياً.

الحل: لدينا:

$$w = u + iv = \ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\tan^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$
$$v = \tan^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نلاحظ أن معادلتي كوشي–ريمان C-R محققة والمشتقات الجزئية مستمرة ما عدا النقطة $(0,0)$؛ وبالتالي: w تابع تحليلي في كل النقاط ما عدا $z = 0$.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x+iy}$$
$$\Rightarrow w = 1/z \quad ; \quad (z \neq 0)$$

ملاحظة: إن تعريف مشتق التابع العقدي مشابه لتعريف المشتق لتابع حقيقي. لذلك قواعد الاشتقاق للتابع العقدي هي نفسها بالنسبة إلى التابع الحقيقي. وهكذا إذا عرف أن التابع العقدي تحليلياً، فيمكن أن نشتقه بالطرق العادية.

مثال (2-2): إذا كان $f(z)$ تحليلياً وطويلته ثابتة، برهن أنّ $f(z)$ تابع ثابت.

الحل: ليكن $f(z) = u + iv$ تابعاً تحليلياً، فيكون: $|f(z)| = \sqrt{u^2+v^2} = c = \text{const.}$؛ وبالتالي:

(i) $u^2 + v^2 = c^2$، باشتقاق (i) جزئياً بالنسبة إلى x وy، نجد أنّ:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (ii), \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (iii)$$

وبحسب معادلتي كوشي–ريمان C-R لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (iii) \Rightarrow -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (iv)$$

بتربيع وجمع (ii) و(iv) نجد أنّ:

$$u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + u^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$(u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad (v)$$

لأنّ: $u^2 + v^2 = c^2 \neq 0$، ولدينا:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$$

وذلك من (v) فيكون: $f'(z) = 0$ أو: $f(z) = \text{constant}$.

مثال (2-3): برهن أن التابع $f(z) = \sqrt{|xy|}$ ليس تحليلياً في نقطة المبدأ مع أنه يحقق معادلتي كوشي-ريمان C-R.

الحل: ليكن $f(z) = \sqrt{|xy|} = u(x,y) + iv(x,y)$، فيكون: $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ و $v(x,y) = 0$.

وعند المبدأ لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

أي إنّ معادلتي كوشي-ريمان محققتان عند المبدأ. بينما:

$$f'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{|xy|} - 0}{x + iy} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|mx^2|} - 0}{x(1 + im)}$$

عندما $z \to 0$ على طول المستقيم $y = mx$؛ وبالتالي:

$$f'(0) = \frac{\sqrt{|m|}}{1 + im}$$

وهذه النهاية ليست وحيدة؛ وبالتالي $f'(0)$ غير موجود، وبالتالي التابع $f(z)$ ليس تحليلياً في نقطة المبدأ.

مثال (2-4): برهن أنّ التابع $f(z)$ المعرف بالشكل:

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} \quad (z \neq 0), \qquad f(0) = 0$$

مستمر، ويحقق معادلتي كوشي-ريمان C-R عند المبدأ، بينما $f'(0)$ غير موجود.

الحل:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^3(1-i)}{y^2} = \lim_{y\to 0}[-y(1-i)] = 0$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+i)}{y^2} = \lim_{x\to 0}[x(1+i)] = 0$$

أيضاً لدينا: $f(0) = 0$، فرضاً.

نلاحظ أن $\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$ عندما $x \to 0$ أولاً ثم عندما $y \to 0$، وكذلك بالعكس. الآن لنوجد هذه النهاية عندما تسعى x وy إلى الصفر آنياً على طول المستقيم $y = mx$، فيكون لدينا:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{y\to mx\\ x\to 0}} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+i)-m^3x^3(1-i)}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x[1+i-m^3(1-i)]}{1+m^2} = 0$$

وهذا يدل أنّ: $\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$، مهما سعت $z \to 0$، أي إنّ: $f(z)$ مستمر في المبدأ. الآن لدينا:

$$f(z) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u(0,0) = 0, \qquad v(0,0) = 0, \qquad [\because \ f(0) = 0]$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{0,0} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{0,0} = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{0,0} = \lim_{x\to 0} \frac{v(x,0)-v(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{0,0} = \lim_{y\to 0} \frac{v(0,y)-v(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y-0}{y} = 1$$

وبالتالي في النقطة $(0,0)$ معادلتا كوشي–ريمان C-R محققتان، أي إن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن:

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

إذا سعت $z \to 0$ عبر المسار $y = mx$، عندها:

$$f'(0) = \frac{1-m^3+i(1+m^3)}{(1+m^2)(1+im)}$$

الذي له قيمٌ مختلفة بحسب قيم m المختلفة. إذن $f'(z)$ ليس وحيداً في $(0,0)$، أي أنّ $f'(0)$، غير موجود. وهذا يعني أن $f(z)$ ليس تحليلياً عند المبدأ مع أنه مستمر ويحقق معادلتي كوشي–ريمان C-R.

مثال (2-5): برهن أن الشكل القطبي لمعادلتي كوشي–ريمان C-R يعطى بالشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

واستنتج أنّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

الحل: لتكن (r,θ) الإحداثيات القطبية لنقطة ما حيث إحداثياتها الديكارتية (x,y)، فيكون:

$$z=x+iy=r\,e^{i\theta}\Longrightarrow u+iv=f(z)=f\left(r\,e^{i\theta}\right)$$

حيث يعبّر الآن عن u و v كتوابع لـ r و θ، بأخذ الاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ r و θ نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}=f'\left(re^{i\theta}\right)\cdot e^{i\theta},\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}=f'\left(re^{i\theta}\right)\cdot ire^{i\theta}=ir\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

بمساواة القسمين الحقيقي والتخيلي في الطرفين نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\quad (i),\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\quad (ii)$$

بأخذ الاشتقاق الجزئي بالنسبة إلى r للعلاقة (i) نجد أنّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta}\quad (iii)$$

بأخذ الاشتقاق الجزئي بالنسبة إلى θ للعلاقة (ii) نجد أنّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-r\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r}\quad (iv)\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=$$
$$=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2}\left(-r\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r}\right)=0$$

لأنّ المشتقات الجزئية المختلطة متساوية.

6-1-2 التوابع التوافقية

1- إذا كان: $f(z)=u+iv$ تابعاً تحليلياً في منطقة من المستوي العقدي، فإنه يحقق معادلتي كوشي-ريمان C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad (5),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad (6)$$

لنشتق العلاقة (1) جزئياً بالنسبة إلى x، ولنشتق العلاقة (2) جزئياً بالنسبة إلى y نجد أنّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\quad (7),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\quad (8)$$

بجمع العلاقتين (7) و(8) وبفرض أن المشتقات المختلطة متساوية نجد أنّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad (9)$$

لنشتق العلاقة (5) جزئياً بالنسبة إلى y، ولنشتق العلاقة (6) جزئياً بالنسبة إلى x نجد أنّ:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (10)$$

نلاحظ أنّ التابعين u وv يحققان معادلة لابلاس لمتغيرين. لهذا السبب يدعى كل من u وv توابع توافقية، وهذا ما يدعى بالنظرية الكمونية potential theory.

2- جملة المنحنيات المتعامدة: لتكن لدينا مجموعتان من المنحنيات:

$$u(x,y)=c_1 \qquad (11), \qquad v(x,y)=c_2 \qquad (12)$$

باشتقاق العلاقة (11) نجد أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0 \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}=\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial x}=m_1$$

بشكل مشابه باشتقاق العلاقة (12) نجد أنّ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0 \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}=m_2 \Longrightarrow m_1m_2=-1$$

أي إن المنحنيات في العلاقتين (11) و(12) تحقق جملة من المنحنيات المتعامدة.

وبالتالي: كل تابع تحليلي $f(z)=u+iv$ يعرف مجموعتين من التوابع $u(x,y)=c_1$ و$v(x,v)=c_2$ التي تشكل جملة من المنحنيات المتعامدة.

7-1-2 تطبيقات لمسائل التدفق

بما أنّ القسمين الحقيقي والتخيلي لتابع تحليلي حلول لمعادلة لابلاس لمتغيرين، فإنّ التوابع المترافقة تكون حلولاً لعدد من حقول التدفق ومسائله.

ولإيضاح ذلك، لتكن لدينا حركة غير دورانية لسائل غير قابل للضغط في مستوٍ ذي بعدين، لنفرض أنّ التدفق في مستوٍ موازٍ للمستوي xoy، إنّ سرعة جزيئة التدفق يمكن أن يعبّر عنها بالعلاقة:

$$V=v_x i+v_y j \qquad (13)$$

بما أنّ الحركة غير دورانية، فإنّه يوجد تابع سلمي $\varphi(x,y)$، بحيث يكون:

$$V=\nabla\varphi(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}j \qquad (14)$$

يدعى التابع $\varphi(x,y)$ السرعة الكمونية، والمنحنيات $\varphi(x,y)=c_1$ تدعى خطوط مكافئة الجهد (مكافئة الكمون) equipotential lines. من (13) و(14) نجد أنّ:

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (15)$$

وبما أنّ السائل غير قابل لضغط فإنّ: $\operatorname{div} V = 0$ فيكون:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

وهذا يدل أنّ السرعة الكمونية هي تابع توافقي، وهذا يعني أنه يوجد له مرافق كموني وليكن $\psi(x,y)$ بحيث يكون: (16) $w(x) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$، تابعاً تحليلياً.

كذلك فإنّ ميل المماس في أي نقطة من المنحني $\psi(x,y) = c_2$ يعطى بالعلاقة:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y} = \frac{\partial\varphi/\partial y}{\partial\varphi/\partial y} = \frac{v_y}{v_x}$$

نلاحظ أنّ السرعة لجزيئة السائل تسير على طول المماس للمنحني $\psi(x,y)$ أي إنّ الجزيئة تسير على طول هذا المنحني. والمنحنيات تدعى بمنحنيات المجرى و $\psi(x,y)$ تدعى بتابع المجرى (السير). وكذلك المنحنيات مكافئة الكمون $\varphi(x,y) = c_1$ ومنحنيات المجرى $\psi(x,y) = c_2$ تكون متعامدة.

من العلاقة (16) نجد أنّ:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_x - iv_y \Rightarrow$$

فتكون طويلة سرعة السائل: $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |dw/dz|$.

وهكذا فإنّ ظاهرة التدفق تمثل بشكل كامل بالتابع $w(z)$ الذي يعرف بالكمون العقدي.

وبالمثل فإن الكمون العقدي $w(z)$ يمكن أن يمثل أي ظاهرة لدراسة التدفق في الفضاء ثنائي الأبعاد. ففي علم الكهرباء الساكنة وحقول الجاذبية، فإنّ المنحنيات $\varphi(x,y) = c_1$ و $\psi(x,y) = c_2$، تمثل خطوطاً مكافئة الكمون وخطوط القوى. ففي مسائل تدفق الحرارة، فإنّ المنحنيات $\varphi(x,y) = c_1$ و $\psi(x,y) = c_2$، تمثل خطوط تيارات التحاور وتدفق الحرارة على التوالي.

إذا كان $\varphi(x,y)$ معطى فإنه يمكننا إيجاد $\psi(x,y)$ والعكس بالعكس.

مثال (6-2): إذا كان $w = \varphi + i\psi$ يمثل الكمون العقدي لحقل كهربائي وكان:

$$\psi(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

أوجد التابع $\varphi(x,y)$.

الحل: بسهولة يمكن التأكد من أنّ ψ تحقق معادلة لابلاس.

إنّ φ و ψ يجب أن تحقق معادلتي كوشي-ريمان C-R:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (i), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (ii) \Longrightarrow$$

$$(i) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right] = -2y - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

بالمكاملة بالنسبة إلى x، نجد أنّ:

$$\varphi = -2xy + \frac{y}{x^2+y^2} + \eta(y)$$

$$(ii) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2x + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \eta'(y) = -2x + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow$$

$$\eta'(y) = 0 \Rightarrow \eta(y) = c \Rightarrow \varphi = -2xy + \frac{y}{x^2+y^2} + c$$

من جهة أخرى باستخدام طريقة ميلن–تومسون[*] Milne-Thomson لدينا:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= \left[-2y - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] + i\left[2x + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \Longrightarrow \frac{dw}{dz} = i\left(2z - \frac{1}{z^2}\right)$$

وذلك بوضع $x = z$ و $y = 0$، تكامل بالنسبة لـ z:

$$w = i(z^2 + 1/z) + A \quad ; \quad A = \text{complex constant} \Longrightarrow$$

$$\varphi = Re\left[i\left(z^2 + \frac{1}{z}\right) + A\right] = -2xy + \frac{y}{x^2+y^2} + c$$

مثال (7-2): أوجد التابع التحليلي الذي قسمه الحقيقي $\sin 2x/(\cosh 2y - \cos 2x)$.

الحل: $f(z) = u + iv,\ u = \sin 2x/(\cosh 2y - \cos 2x) \Longrightarrow$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \frac{2\cos 2x\,(\cosh 2y - \cos 2x) - \sin 2x\,(2\sin 2x)}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2} - i\frac{\sin 2x\,(-2\sinh 2y)}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{2\cos 2x\cosh 2y - 2}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2} + i\frac{2\sin 2x\sinh 2y}{(\cosh 2y - \cos 2x)^2}$$

وباستخدام طريقة ميلن–تومسون، وذلك بوضع $x = z$ و $y = 0$ في $f'(z)$، نجد أنّ:

(*) بما أنّ $z = x + iy$ لدينا: $x = (z+\bar{z})/2$ و $y = (z-\bar{z})/2i$ وبالتالي:

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = \varphi\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\psi\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

وباعتبار هذه العلاقة صحيحة من أجل المتغيرين المستقلين $z, \bar{z}$، ولنضع $\bar{z} = z$ فنحصل على:

$$f(z) = \varphi(z,0) + i\psi(z,0)$$

ونحصل على ذلك بوضع $x = z$ و $y = 0$. لذلك نلجأ عن أي تابع بدلالة z نقوم بوضع $x = z$ و $y = 0$. وهي طريقة رائعة لمعرفة صيغة تابع عندي إذا علم قسماه الحقيقي والتخيلي. وهذه الطريقة بطريقة ميلن–تومسون.

$$f'(z)=\frac{2\cos 2z-2}{(1-\cos 2z)^2}+i(0)=-\frac{2}{1-\cos 2z}=-\frac{2}{2\sin^2 z}=-\csc^2 z$$

تكامل بالنسبة إلى z لنحصل على: $f(z)=\cot z+ic$ باعتبار ثابت التكامل للقسم التخيلي لأن u لا يحتاج إلى أي ثابت.

مثال (2-8): أوجد التابع التحليلي $f(z)=u+iv$ إذا كان:

$$u-v=\frac{\cos x+\sin x-e^{-y}}{2(\cos x-\cosh y)},\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

الحل:

$$u-v=\frac{\cos x+\sin x-e^{-y}}{2(\cos x-\cosh y)}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(\sin x-\cos x)\cosh y+1-e^{-y}\sin x}{2(\cos x-\cosh y)^2}\qquad (i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(\cos x-\cosh y)e^{-y}+(\cos x+\sin x-e^{-y})\sinh y}{2(\cos x-\cosh y)^2}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(\sin x+\cos x)\sinh y+e^{-y}(\cos x-\cosh y-\sinh y)}{2(\cos x-\cosh y)^2}\qquad (ii)$$

بطرح (ii) من (i) نجد أنّ:

$$2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(\sin x-\cos x)\cosh y-(\sin x+\cos x)\sinh y+1}{2(\cos x-\cosh y)^2}$$

$$\frac{-e^{-y}(\sin x+\cos x-\cosh y-\sinh y)}{}$$

بجمع (ii) و (i) نجد أنّ:

$$-2\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(\sin x-\cos x)\cosh y+(\sin x+\cos x)\sinh y+1}{2(\cos x-\cosh y)^2}$$

$$\frac{+e^{-y}(-\sin x+\cos x-\cosh y-\sinh y)}{}$$

وباستخدام طريقة ميلن-تومسون، وذلك بوضع $x=z$ و $y=0$ في $f'(z)$، نجد أنّ:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1-\cos z}{2(1-\cos z)^2}=\frac{1}{2(1-\cos z)}=\frac{1}{4\sin^2(z/2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\csc^2\frac{z}{2}\Rightarrow f(z)=-\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}+c\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow 0=-\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4}+c\Rightarrow c=\frac{1}{2}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\cot\frac{z}{2}\right)$$

مثال (2-9): أوجد المرافق التوافقي للتابع $v(r,\theta)=r^2\cos 2\theta-r\cos\theta+2$. برهن أن v توافقي.

الحل: ليكن $f(z)=u+iv$. باستخدام معادلتي كوشي-ريمان C-R بالإحداثيات القطبية نجد أن:

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial \theta}=-2r^2\sin 2\theta+r\sin\theta\qquad (i)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial r}=2r\cos 2\theta-\cos\theta \qquad (ii)$$

من (i) وبالمكاملة بالنسبة لـ r:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=-2r\sin 2\theta+\sin\theta \Rightarrow u=-r^2\sin 2\theta+r\sin\theta+\varphi(\theta)$$

حيث $\varphi(\theta)$ تابع كيفي، وبالاشتقاق بالنسبة إلى θ نجد أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-2r^2\cos 2\theta+r\cos\theta+\varphi'(\theta) \qquad (iii)$$

من (ii) و(iii) نجد أنّ:

$$-2r^2\cos 2\theta+r\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial \theta}=-2r^2\cos 2\theta+r\cos\theta+\varphi'(\theta)$$
$$\varphi'(\theta)=0\Rightarrow\varphi(\theta)=c\Rightarrow u=-r^2\sin 2\theta+r\sin\theta+c$$

وهو التابع التوافقي المرافق للتابع v.

الآن حتى يكون v تابعاً توافقياً يجب أن يحقق معادلة لابلاس القطبية:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0$$

من $(i)\Rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=-4r^2\cos 2\theta+r\cos\theta$, ومن $(ii)\Rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=2\cos 2\theta$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=$$
$$=2\cos 2\theta+\frac{1}{r}(2r\cos 2\theta-\cos\theta)+\frac{1}{r^2}(-4r^2\cos 2\theta+r\cos\theta)=$$
$$=4\cos 2\theta-\frac{1}{r}\cos\theta-4\cos 2\theta+\frac{1}{r}\cos\theta=0$$

وبالتالي v هو تابع توافقي.

مثال (2-10): (a) أوجد المسارات القائمة لمجموعة المنحنيات، حيث c ثابت:

$$x^4+y^4-6x^2y^2=c$$

(b) برهن أنّ المنحنيات: $r^n=\alpha\sec n\theta$ و $r^n=\beta\csc n\theta$ متعامدة عند تقاطعها.

الحل: (a) ليكن: $u(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2$ عندئذ مجموعة المنحنيات $u(x,y)=c^*$، حيث c^* ثابت، تتطلب المسارات المطلوبة المتعامدة إذا كان $f(z)=u+iv$ تابعاً تحليلياً.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-12xy^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-12x^2y$$
$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-12xy^2\Rightarrow v=4x^3y-4xy^3+c(x)$$

نشتق جزئياً بالنسبة إلى x:

$$12x^2y - 4y^3 + \frac{dc(x)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -4y^3 + 12x^2y \Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = 0 \Rightarrow c = \text{const}$$

وبالتالي تكون المسارات المطلوبة $v = c$ أو $x^3y - xy^3 = constant$.

(b) لنكتب $u(r,\theta) = r^n \cos n\theta = \alpha$ و $v(r,\theta) = r^n \sin n\theta = \beta$ فيكون:

$$u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \alpha + i\beta = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n \cdot e^{in\theta} = \left(r\,e^{i\theta}\right)^n = z^n$$

وهو تابع تحليلي. وبالتالي التابع $f(z) = u + iv$ يعطي مسارات متعامدة هي:

$$u(r,\theta) = \alpha, \qquad v(r,\theta) = \beta$$

مثال **(11-2)**: أسطوانتان دائريتان متحدتا المركز نصفا قطريهما r_1 و r_2 حيث $(r_1 < r_2)$ احتفظ كما عند الجهدين φ_1 و φ_2 على الترتيب. باستخدام التابع العقدي $w = a\log z + c$، برهن أنّ السّعة بواحدة الطول لكل مكثف من التي شكّلتها تساوي $2\pi\lambda/\log(r_2/r_1)$ حيث λ هو ثابت العزل للوسيط.

الحل: لدينا: $\varphi + i\psi = a\log\left(r\,e^{i\theta}\right) + c,\ z = x + iy = re^{i\theta} \Rightarrow$

$$\varphi = a\log r + c, \qquad \psi = a\theta \Rightarrow \varphi_1 = a\log r_1 + c, \qquad \varphi_2 = a\log r_2 + c$$

ويكون فرق الجهدين: $\varphi_2 - \varphi_1 = a(\log r_2 - \log r_1)$

وتكون القيمة الإجمالية أو (التدفق) تساوي:

$$= \int_0^{2\pi} d\psi = \int_0^{2\pi} a\,d\theta = 2\pi a$$

إنّ السعة المطلوبة بدون العزل تساوي التدفق مقسوماً على فرق الجهدين أي:

$$= \frac{2\pi a}{a(\log r_2 - \log r_1)} = \frac{2\pi}{\log(r_2/r_1)}$$

إنّ ثابت الوسيط العزل λ يتزايد فرق الجهد بمقدار λ مرة لنفس الشحنة. وبالتالي تكون السعة مع العزل تساوي: $2\pi\lambda/\log(r_1/r_2)$.

مثال **(12-2)**: إذا كان $f(z)$ تابعاً نظامياً لـ z، برهن أنّ:

$$\nabla^2|f(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

الحل: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow |f(z)|^2 = u^2 + v^2 = \varphi(x,y) \Rightarrow$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2\left\{u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2\left\{u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}$$

بجمع العلاقتين نجد أنّ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2\left\{u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right\}$$
$$+2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad (i)$$

حيث u و v تحقق معادلتي كوشي-ريمان وتحقق أيضاً معادلة لابلاس، أي إنّ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

وبالتالي العلاقة (i) تأخذ الشكل:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=4\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

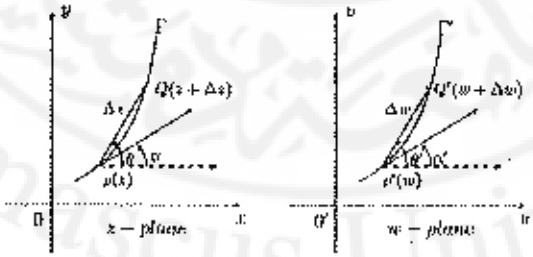
2-2 التمثيل الهندسي للتابع $w=f(z)$

لإيجاد التمثيل الهندسي لتابع ذي متغيرات عقدية، يتطلب الانطلاق من الممارسة المعتادة لرسم في المستوي الديكارتي عندما يكون المنحني معطى بتابع حقيقي $y=f(x)$.

في المستوي العقدي يكون التابع من الشكل:

$$w=f(z)=u+iv=f(x+iy), \qquad u=u(x,y), \qquad v=v(x,y) \qquad (17)$$

يحتوي على أربعة متغيرات حقيقية x,y,u,v. وبالتالي نحتاج إلى منطقة رباعية الأبعاد لرسم التابع (17)، حسب الإحداثيات الديكارتية. وبما أنّ من المستحيل وجود أوراق رباعية الأبعاد، يمكننا استخدام مستويين عقديين، أحدهما من المتغير $z=x+iy$، والآخر من المتغير $w=u+iv$. فإذا كانت النقطة z تصف منحنياً Γ في المستوي Z، بالمقابل فإن النقطة w تتحرك لترسم المنحني Γ' في المستوي W، لذلك كل نقطة (x,y) تقابل النقطة (u,v) (انظر الشكل 2-3). ومن ثم نقول إنّ المنحني Γ في المستوي Z، يرسم المنحني Γ' في المستوي W، بوساطة التابع $w=f(z)$، الذي يمثل تحويلاً من المستوي Z إلى المستوي W.



الشكل (2-3): التطبيق $w=f(z)$.

1-2-2 بعض التحويلات الأساسية

1- تحويل الانسحاب:

هو التطبيق $w = f(z) = z + c$ حيث c هو ثابت عقدي. إذا كان $z = x + iy$ و $c = c_1 + ic_2$ و $w = u + iv$ فإن التحويل يصبح:

$$u + iv = x + iy + c_1 + ic_2 \Rightarrow u = x + c_1, \qquad v = y + c_2 \quad (18)$$

أي أن النقطة $p(x, y)$ في المستوي Z تنسحب إلى النقطة $p'(x + c_1, y + c_2)$ في المستوي W. وكل نقطة في المستوي Z تنسحب بالطريقة نفسها. فإذا وضعنا المستوي W فوق المستوي Z فإن النقطة p تنسحب وفق الشعاع c. وفقاً لذلك، فإن هذا التحويل يحافظ على الأشكال والمسافات والمساحات. وبشكل أخص يحول هذا التطبيق الدوائر إلى دوائر.

2- تحويل التحاكي والدوران:

هو التطبيق $w = f(z) = cz$ حيث c هو ثابت عقدي. إذا كان:

$$c = \rho e^{i\alpha}, \qquad z = re^{i\theta}, \qquad w = Re^{i\varphi} \Rightarrow$$

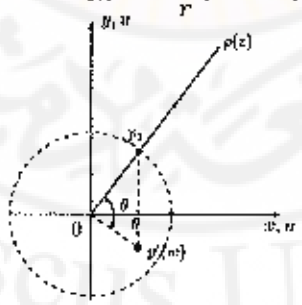
$$Re^{i\varphi} = \rho e^{i\alpha} \cdot re^{i\theta} = r\rho e^{i(\theta+\alpha)} \Rightarrow R = r\rho, \qquad \varphi = \theta + \alpha \quad (19)$$

إن النقطة $p(r, \theta)$ في المستوي Z تتحول إلى النقطة $p'(r\rho, \theta + \alpha)$ في المستوي W. إن هذا التحويل يقوم بالتكبير أو بالتصغير حسب نصف القطر $\rho = |c|$ وزاوية دورانه α. وفقاً لذلك فإن هذا التحويل يحول الأشكال الهندسية في المستوي Z إلى أشكال مشابهة لها في المستوي W. وبشكل أخص يحول هذا التطبيق الدوائر إلى دوائر.

3- تحويل العكس أو العكوس:

هو التطبيق $w = f(z) = 1/z$ حيث c هو ثابت عقدي. لنفترض أن المستوي W موضوع فوق المستوي Z، كما في الشكل (2-4). وإذا كان:

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = Re^{i\varphi} \Rightarrow Re^{i\varphi} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow R = \frac{1}{r}, \qquad \varphi = -\theta$$



الشكل (2-4): التطبيق المعاكس.

فإذا كانت $p(r,\theta)$ وكانت $p_1(1/r,-\theta)$ هي عكس[*] النقطة p حسب الدائرة الواحدية التي مركزها O فتكون p' هي انعكاس النقطة p_1 وفق المحور الحقيقي وتمثل العدد $w=1/z$. لذلك هذا التحويل يعكس العدد z حسب الدائرة الواحدية $|z|=1$ يتبعه انعكاس للعكس حسب المحور الحقيقي.

ملاحظات:

1- واضح أن التابع $w=1/z$ يطبق داخل الدائرة الواحدية $|z|=1$ إلى خارج الدائرة الواحدية $|w|=1$ وخارج الدائرة الواحدية $|z|=1$ إلى داخل الدائرة الواحدية $|w|=1$. وبالأخص ينقل المبدأ $z=0$ إلى نقطة شاذة $w=\infty$ تدعى نقطة اللانهاية، وكذلك يحول النقطة الشاذة $z=\infty$ إلى المبدأ $w=0$.

2- إن هذا التطبيق يحول الدائرة إلى دائرة أو إلى مستقيم إذا كان الشكل لم يمر من المبدأ. لبرهان ذلك نكتب $z=1/w$ بالشكل:

$$z=x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}\Rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2},\qquad y=\frac{-v}{u^2+v^2} \qquad (20)$$

والمعادلة العامة للدائرة في المستوي Z هي:

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \qquad (21)$$

بالتعويض للمعادلة (20) في المعادلة (21) نجد:

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}+2a\frac{u}{u^2+v^2}+2b\frac{-v}{u^2+v^2}+c=0 \qquad (22)$$

$$c(u^2+v^2)+2au-2bv+1=0 \qquad (23)$$

وهي معادلة دائرة في المستوي W. وإذا كانت $c=0$ تكون الدائرة (21) مارة من المبدأ وتكون صورتها (23) وفق التطبيق عبارة عن مستقيم. ويمكن اعتبار المستقيم عبارة عن دائرة نصف قطرها لانهاية، لذلك يمكننا اعتبار أن التابع $w=1/z$ يحول دوماً الدائرة إلى دائرة.

4- تحويل ثنائي الخطية:

هو التطبيق:

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (24)$$

---

[*] إن عكس النقطة A بالنسبة للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها k، هي نقطة B على المستقيم OA تحقق الشرط $OA\cdot OB=k^2$.

حيث a,b,c,d هي ثوابت عقدية، و$ad-bc\neq 0$. ويعرف أيضاً بتحويل موبيوس Möbius، إن الشرط $ad-bc\neq 0$ يؤكد أن $dw/dz\neq 0$، إن هذا التطبيق محافظ. إذا كان: $ad-bc=0$، فإن كل نقطة من المستوي Z هي نقطة حرجة.

إن التابع العكسي للتابع (24) هو:

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a} \qquad (25)$$

وهو أيضاً تحويل ثنائي الخطية.

ملاحظات:

1- من العلاقة (24) نجد أن كل نقطة من المستوي Z ما عدا النقطة $z=-d/c$، تقابل نقطة وحيدة في المستوي W. وبشكل مشابه من العلاقة (25) نرى أن كل نقطة من المستوي W ما عدا النقطة $w=a/c$، تقابل نقطة وحيدة في المستوي W. وأما النقاط المستثناة صورها نقاط لانهائية في كلا المستويين، وهذا يدل على أن التطبيق تقابل بين المستويين.

2- إن نقاط الثبات للتحويل ثنائي الخطية، نحصل عليها من تحويل z إلى نفسه في المستوي W، أي $(w=z)$ وبالتالي تصبح المعادلة (24):

$$z=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0 \qquad (26)$$

إن جذور هذه المعادلة (z_1,z_2) تعرف بأنها النقاط الثابتة لتحويل ثنائي الخطية (24)، وفي حال تساوي الجذرين فإن تحويل ثنائي الخطية يدعى متكافئاً.

3- بتقسيم البسط والمقام في الطرف الأيمن للعلاقة (24)، على أحد الثوابت الأربعة، فإنه من الواضح أن العلاقة (24)، تحتوي فقط على ثلاثة ثوابت أساسية. لذلك يتطلب ثلاثة شروط لتحديد تابع ثنائي الخطية. فعلى سبيل المثال ثلاث نقاط مختلفة z_1,z_2,z_3 ممكن أن تتحول إلى ثلاث نقاط محددة w_1,w_2,w_3.

خواص تحويل ثنائي الخطية

1- تطبيق ثنائي الخطية يحول الدوائر إلى دوائر.

بإجراء عملية التقسيم في العلاقة (24) يمكن أن نكتب:

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+d/c} \qquad (27)$$

التي هي مجموعة من التحويلات:

$$w_1 = z + d/c, \qquad w_2 = 1/w_1, \qquad w_3 = \frac{bc - ad}{c^2} w_2, \qquad w = \frac{a}{c} + w_3$$

بهذه التحويلات يمكننا بنجاح المرور من المستوي Z إلى المستوي W_1، ومن المستوي W_1 إلى المستوي W_2، ومن المستوي W_2 إلى المستوي W_3، وفي النهاية من المستوي W_3 إلى المستوي W. كل واحد من هذه التحويلات هو تحويل أساسي من الشكل $w = z + c$ أو $w = cz$ أو $w = 1/z$؛ وفي كل منها تتحول الدوائر إلى دوائر، لذلك تطبيق ثنائي الخطية يحول الدوائر إلى دوائر.

2- إن تطبيق ثنائي الخطية يحافظ على النسبة المتقاطعة(*) (التعارضية) لأربع نقاط.

لتكن z_1, z_2, z_3, z_4 أربع نقاط في المستوي Z صورها وفق تطبيق ثنائي الخطية (24) النقاط w_1, w_2, w_3, w_4 في المستوي W على الترتيب إذا كانت هذه النقاط متنهية، فيكون حسب العلاقة (24):

$$w_j - w_k = \frac{az_j + b}{cz_j + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{ad - bc}{(cz_j + d)(cz_k + d)}(z_j - z_k) \qquad (28)$$

باستخدام هذه العلاقة من أجل $j, k = 1, 2, 3, 4$ فإننا نحصل على:

$$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} \qquad (29)$$

أي أن نسبة تقاطع أربع نقاط تبقى ثابتة باستخدام تطبيق ثنائية الخطية. إذا كانت إحدى هذه النقاط مثلاً $z_1 \to \infty$، فإن النسبة التي تحتوي الفروق مع z_1 تستبدل بالواحد 1، أي أن:

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \qquad (30)$$

مثال (2-13): أوجد تطبيق ثنائي الخطية الذي يحول النقاط $z = 1, i, -1$ إلى النقاط $w = i, 0, -i$، وعندها (a) أوجد صورة القرص $|z| < 1$.

(b) أوجد النقاط الثابتة لهذا التطبيق.

الحل: لتكن لدينا النقاط $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = z$ في المستوي Z تتحول إلى النقاط $w_1 = i, w_2 = 0, w_3 = -i, w_4 = w$ في المستوي W. وبما أن نسبة التقاطع لا تتغير حسب تحويل ثنائي الخطية يكون:

$$\frac{(1 - i)(-1 - z)}{(1 - z)(-1 - i)} = \frac{(i - 0)(-i - w)}{(i - w)(-i - 0)} \Rightarrow \frac{w + i}{w - i} = \frac{(z + 1)(1 - i)}{(z - 1)(1 + i)}$$

(*) إذا كان لدينا أية أربعة أعداد t_1, t_2, t_3, t_4 فإن النسبة $(t_1 - t_4)(t_3 - t_2)/(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)$ تدعى نسبة متقاطعة ويرمز لها بالرمز (t_1, t_2, t_3, t_4).

وباستخدام خواص التناسب نجد أن:

$$\frac{2w}{2i}=\frac{(z+1)(1-i)+(z-1)(1+i)}{(z+1)(1-i)-(z-1)(1+i)}\Rightarrow w=\frac{1+iz}{1-iz}\qquad(31)$$

وهو تطبيق ثنائي الخطية المطلوب.

(a) يمكن كتابة العلاقة (31) بالشكل:

$$z=i\frac{1-w}{1+w}\Rightarrow\left|i\frac{1-w}{1+w}\right|=|z|<1\Rightarrow|i||1-w|<|1+w|\Rightarrow$$
$$|1-u-iv|<|1+u+iv|\Rightarrow(1-u)^2+v^2<(1+u)^2+v^2$$
$$\Rightarrow 1-2u+u^2+v^2<1+2u+u^2+v^2\Rightarrow u>0$$

هذا يعني أن داخل الدائرة $x^2+y^2=1$ في المستوي Z يتحول إلى كامل نصف المستوي الأيمن من المحور التخيلي في المستوي W.

(b) لإيجاد النقاط الثابتة للتطبيق ثنائي الخطية نضع $w=z$ في العلاقة (31).

$$z=\frac{1+iz}{1-iz}\Rightarrow iz^2+(i-1)z+1=0\Rightarrow$$
$$z=\frac{1-i\pm\sqrt{(i-1)^2-4i}}{2i}=-\frac{1}{2}\left\{1+i\pm\sqrt{6i}\right\}$$

وهي النقاط الثابتة المطلوبة.

مثال (14-2): أثبت أن $w=(i-z)/(i+z)$ يحول المحور الحقيقي في المستوي Z إلى الدائرة $|w|=1$ ونصف المستوي $y>0$ إلى داخل الدائرة $|w|=1$ في المستوي W.

الحل: بما أن:

$$w=\frac{i-z}{i+z}\Rightarrow|w|=1\Rightarrow\left|\frac{i-z}{i+z}\right|=1\Rightarrow|i-z|=|i+z|\Rightarrow$$
$$|i-x-iy|=|i+x+iy|\Rightarrow|x+i(1-y)|=|x+(1+y)|\Rightarrow$$
$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}=\sqrt{x^2+(1+y)^2}\Rightarrow(1-y)^2=(1+y)^2\Rightarrow 4y=0\Rightarrow y=0$$

الذي هو محور السينات. وبالتالي محور الحقيقي في المستوي Z يتحول إلى الدائرة الواحدية $|w|=1$.

الآن بالنسبة إلى داخل الدائرة $|w|<1$ لدينا:

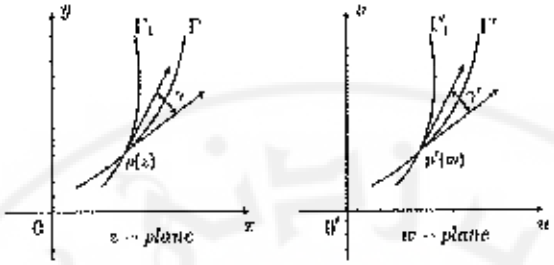
$$|i-z|<|i+z|\Rightarrow(1-y)^2<(1+y)^2\Rightarrow -4y<0\Rightarrow y>0$$

أي أن نصف المستوي $y>0$ يتحول إلى داخل الدائرة $|w|=1$.

2-2-2 التحويلات المحافظة

لنفرض أن لدينا منحنيين Γ_1,Γ_2 في المستوي Z متقاطعين في النقطة $p(z)$ وأن المنحنيين المتوافقين معهما في المستوي W هما Γ_1',Γ_2' ونقطة تقاطعهما $p'(w)$، فإذا كانت زاوية تقاطع المنحنيين في النقطة $p(z)$

هي زاوية تقاطع المنحنيين المتوافقين في النقطة $p'(w)$ نفسها في الاتجاه والقيمة قلنا إن التطبيق $w = f(z)$ محافظ.



الشكل (2-5): التطبيق المطابق.

مبرهنة: إن التحويل وفق التطبيق التحليلي $w = f(z)$ محافظ في أي نقطة من المستوي Z إذا كان $f'(z) \neq 0$.

الإثبات: لتكن النقطة $p(z)$ من المنطقة D في المستوي Z و$p'(w)$ النقطة المتوافقة لها من المنطقة D' في المستوي W كما في الشكل (2-3). لنفرض أن z تسير على المنحني Γ وw تسير على المنحني المتوافق Γ'. لتكن $Q(z+\Delta z)$ على المنحني Γ و$Q'(w+\Delta w)$ على المنحني المتوافق Γ'، ومنه $\overrightarrow{pQ} = \Delta z$ و $\overrightarrow{p'Q'} = \Delta w$، وبما أن Δz عدد عقدي طويلته r وهي طويلة pQ وزاويته θ وهي الزاوية التي يصنعها pQ مع محور السينات $\Delta z = re^{i\theta}$.

وبشكل مشابه Δw عدد عقدي طويلته r' وهي طويلة $p'Q'$ وزاويته θ' وهي الزاوية التي يصنعها $p'Q'$ مع محور السينات $\Delta w = r'e^{i\theta'}$. وبالتالي:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{r'}{r} e^{i(\theta'-\theta)} \qquad (32)$$

فإذا كان المماس للمنحني Γ في النقطة p يصنع زاوية α مع محور السينات ox والمماس للمنحني Γ' في النقطة p' يصنع زاوية α' مع محور السينات $o'u$ فإنه عندما $\Delta z \to 0$ فإن $\theta \to \alpha$ و$\theta' \to \alpha'$، ويكون:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{r'}{r} \cdot e^{i(\alpha'-\alpha)} \qquad (33)$$

فإذا كانت طويلة المشتق ρ وزاويته ϕ فيكون:

$$f'(z) = \rho e^{i\phi} \qquad (34)$$

نعن (33) و(34) نحصل على:

$$\rho = \lim_{\Delta z \to 0} (r'/r) \qquad (35) \qquad \& \qquad \phi = \alpha' - \alpha \qquad (36)$$

ولكن Γ_1' منحنياً آخر يمر من النقطة p في المستوي Z وΓ_1' المنحني المتوافق له في المستوي W الذي يمر من النقطة p'، فإذا كان المماس لـ Γ_1 في النقطة p يصنع زاوية β مع المحور ox والمماس لـ Γ_1' في النقطة p' يصنع زاوية β' مع المحور ou فيكون: $\psi = \beta' - \beta$ (37)

وبالتالي من (36) و(37) نجد (الشكل 2-5):

$$\alpha' - \alpha = \beta' - \beta \Rightarrow \beta - \alpha = \beta' - \alpha' = \gamma$$

أي أن الزاوية بين المنحنيين قبل التحويل وبعده لها القيمة نفسها والاتجاه نفسه، وبما أن التطبيق تحليلي و$f'(z) \neq 0$ فهو محافظ في كل نقطة.

ملاحظات:

1- إذا كانت A تحقق الشرط $f'(z) = 0$ عندها ندعى A نقطة حرجة لـ $f(z)$.

2- من العلاقة (36) نجد $\alpha' = \alpha + \phi$ أي أن المماس للمنحني Γ في النقطة p يدور بزاوية ϕ (زاوية $|f'(z)|$) وفق التطبيق المعطى f.

3- من العلاقة (35) يرى أن في التحويل عناصر القوس المار من النقطة p في أي اتجاه تتغير بالنسبة ρ حيث $\rho = |f'(z)|$، أي أن الطول اللامتناهي في الصغر في المستوي Z مكبر بمقدار $|f'(z)|$. وبالتالي فكل مساحة لامتناهية في الصغر تكبر بالمقدار $|f'(z)|^2$ في التطبيقات المحافظة. إذا كان $w = f(z)$ تحليلياً عندئذ فإن التابعين u وv يحققان شروط كوشي–ريمان.

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right| = |f'(z)|^2 \qquad (38)$$

حيث إنه في التطبيقات المحافظة تكون المساحة اللامتناهية في الصغر مساوية للجاكوبي (اليعقوبي) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$. وأيضاً يكون التطبيق محافظاً عندما: $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) \neq 0$.

4- إن خاصية الحفاظ على الزاوية في التطبيقات المحافظة لها العديد من التطبيقات الفيزيائية المهمة. على سبيل المثال، لنعتبر أن تدفق سائل غير مضغوط في المستوي بسرعة $\phi(x,y)$ وتابع الجريان $\psi(x,y)$. نعلم أن للتابعين ϕ وψ تسمياً حقيقياً وقسماً تخيلياً لبعض التوابع التحليلية $w = f(z)$. إذا كان ϕ ثابتاً وψ ثابتاً فإنهما يمثلان مجموعة من المنحنيات المتعامدة، فلذلك إن تحويلها وفق التابع $w = f(z)$ المحافظ هو مجموعة من المنحنيات المتعامدة في المستوي W والعكس صحيح.

إن التوابع التوافقية المتابعين ϕ وψ عندما تتحول في توابع محافظة هي حلول لمعادلة لابلاس، ويبقى حلول معادلة لابلاس بعد التحويل، وهذا هو السبب الرئيسي للأهمية الكبيرة لتطبيقات التوابع المحافظة.

3-2-2 بعض التحويلات المحافظة

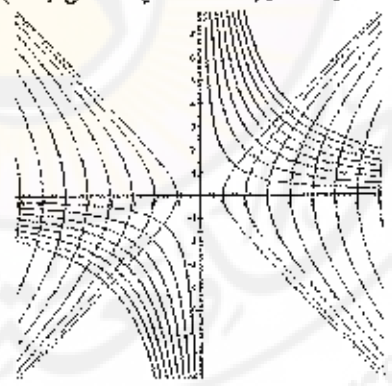
1- التحويل $w = z^2$:

لدينا: $$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow u = x^2 - y^2,\ v = 2xy \qquad (39)$$

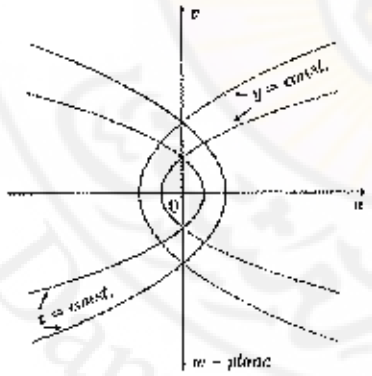
إذا كان u ثابتاً يساوي a مثلاً فيكون $x^2 - y^2 = a$ الذي هو قطع زائد متساوي الساقين. وبشكل مشابه، إذا كان v ثابتاً يساوي b مثلاً فيكون $xy = b/2$ الذي هو قطع زائد متساوي الساقين أيضاً. وبما أن $u = a, v = b$ مستقيمات توازي محاور الإحداثيات في المستوي W، تتحول إلى قطوع زائدة متعامدة في المستوي Z، كما في الشكل (2-6).

كذلك، إذا كان x ثابتاً يساوي c مثلاً فيكون $y = v/2c$ أي $y^2 = c^2 - u$ ويحذف y من هذه المعادلات نجد أن $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ الذي يمثل قطعاً مكافئاً. وبشكل مشابه، إذا كان y ثابتاً يساوي d مثلاً ويحذف x من المعادلات (39) فإننا نحصل على $v^2 = 4d^2(d^2 + u)$ الذي هو قطع مكافئ أيضاً.

إذن ثنائية الخطوط $x = c$ و$y = d$ الموازية للمحاور الإحداثية في المستوي Z تتحول إلى قطوع مكافئة متعامدة في المستوي W، كما في الشكل (2-7).



الشكل (2-6): القطوع الزائدة المتعامدة.



الشكل (2-7): القطوع المكافئة المتعامدة.

كذلك بما أن $dw/dz = 2z = 0$ من أجل $z = 0$، فتكون، نقطة حرجة للتطبيق. بوضع $z = re^{i\theta}$ و$Re^{i\varphi}$ في الإحداثيات القطبية يصبح $w = z^2$، $Re^{i\varphi} = r^2e^{2i\theta}$.

وهذا يدل أن نصف المستوي العلوي من المستوي Z، $0 < \theta < \pi$ يتحول إلى كامل المستوي W، $0 \le \varphi < 2\pi$. والأمر صحيح من أجل نصف المستوي السفلي.

ملاحظات:

1- باعتبار أن محاور الإحداثيات تمثل حائطين، يمكن استخدام ربع واحد لتدفق مماثل إلى زاوية الحائط. هذا التحويل يمكن أن يمثل أيضاً حقل استقرار كهربائي في مقربة من زاوية المنبع.

2- من أجل التحويل $w = z^n$، حيث n عدد صحيح موجب، نجد أن $dw/dz = 0$ من أجل $z = 0$، وكذلك: $Re^{i\varphi} = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow R = r^n,\ \varphi = n\theta$

حيث إن $0 < \theta < \pi/n$ توافق أن $0 < \varphi < \pi$.

لذلك $w = z^n$ يعطي تطبيقاً محافظاً للمستوي Z في كل نقطة ما عدا المبدأ ويحول القطاع الزاوي الذي زاويته المركزية π/n من المستوي Z إلى كامل نصف العلوي للمستوي W.

2- تحويل جوكوفسكي[*] $w = z + 1/z$:

إن مشتق هذا التطبيق:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

هذا التطبيق محافظ ما عدا النقطتين $z = 1$ و $z = -1$ اللتين توافقان $w = 2$ و $w = -2$ في المستوي W. وبالانتقال إلى الإحداثيات القطبية:

$$w = u + iv = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow$$

$$u = (r + 1/r)\cos\theta, \qquad v = (r - 1/r)\sin\theta \qquad (40)$$

بحذف θ من المعادلتين نجد:

$$\frac{u^2}{(r+1/r)^2} + \frac{v^2}{(r-1/r)^2} = 1 \qquad (41)$$

بينما بحذف r من المعادلتين نجد:

$$\frac{u^2}{4\cos^2\theta} + \frac{v^2}{4\sin^2\theta} = 1 \qquad (42)$$

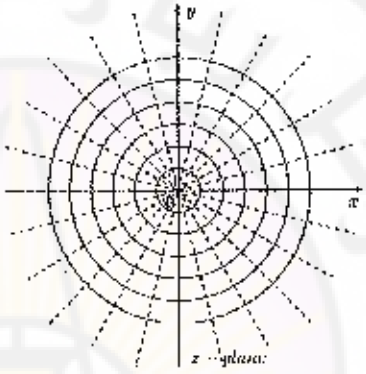
من العلاقة (41) تدل على أن الدوائر r = ثابت في المستوي Z، الشكل (2-8)، تتحول إلى أسرة من القطوع الناقصة في المستوي W، الشكل (2-9).

---

[*] نسبة لعالم الرياضيات الروسي نيقولاي ليكورونيش جوكوفسكي Nikolai Egorovitch Joukovski (1847-1921).

هذه القطوع متحدة المحارق وتتشكل من أجل المعادلة $(r+1/r)^2-(r-1/r)^2=4$ التي هي ثابت. بشكل خاص، الدائرة الواحدية $r=1$ في المستوي Z تتسطح لتصبح القطعة المستقيمة من $u=-2$ إلى $u=2$ من المحور الحقيقي في المستوي W، بينما خارج الدائرة الواحدية في المستوي Z يتحول إلى كامل المستوي W.

من العلاقة (42) توضح أن الخطوط $\theta=$ ثابت في المستوي Z، الشكل (2-8)، تتحول إلى أسرة من القطوع الزائدة التي أيضاً متحدة المحارق الشكل (2-9).

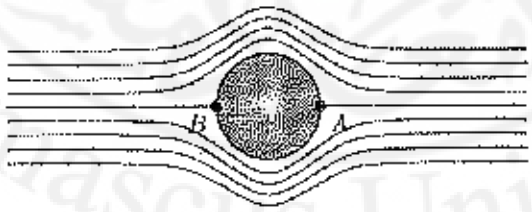


الشكل (2-9): القطوع المكافئة المتعامدة.

الشكل (2-8): القطوع الزائدة المتعامدة.

ملاحظات:

1- إن المعادلة $v=(r-1/r)\sin\theta=0$ تعطي $r=\pm1$ أو $\theta=0,\pi$، أي أن هذا التبسيط يحتوي على الدائرة الواحدية $r=1$، ومحور السينات (من $\theta=0$ إلى $\theta=\pi$)، من أجل قيم كبيرة لـ z، إن التدفق تقريباً منتظم ويوازي محور السينات. وهذا ما يفسر أن التدفق حول الأسطوانة الدوارنية ذات نصف القطر الواحدي تمتلك نقطتي ركود (تكون سرعة التدفق معدومة) عند $A(z=1)$ وعند $B(z=-1)$، ينعدم المشتق $dw/dz=0$ عند $z=\pm i$، الشكل (2-10).



الشكل (2-10): تدفق السائل بشكل مواز لمحور السينات.

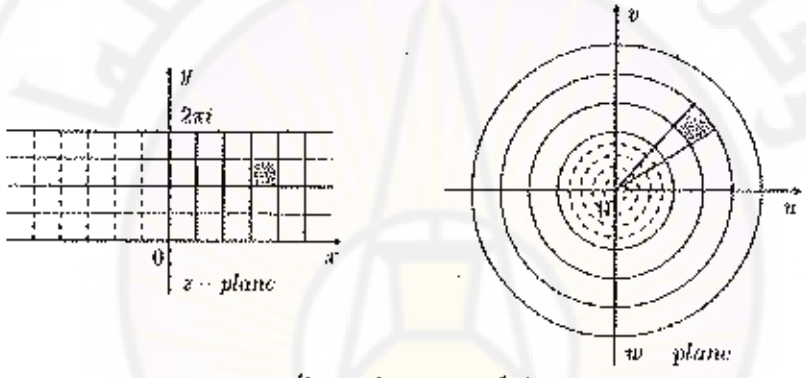
2- يستعمل هذا التطبيق أيضاً لتحويل خارج شكل جناح طائرة إلى شكل شبه دائري. هذا الانسياب يعرف بانسياب جوكوفسكي.

3- التحويل الأسي $w = e^z$:

لنكتب $z = x + iy$ و $w = \rho e^{i\varphi}$ فيكون $\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ أي أن:

$$\rho = e^x \quad (43) \qquad \varphi = y \quad (44)$$

من العلاقة (43) يتضح أن الخطوط الموازية لمحور العينات (x ثابت) تتحول إلى الدوائر (ρ ثابت) في المستوي W، أنصاف أقطارها أصغر أو تساوي الواحد، حيث إن x سالب (أصغر من الصفر) أو موجب (أكبر من الصفر) انظر الشكل (2-11).



الشكل (2-11): التحويل الأسي.

بشكل مشابه نحصل من المعادلة (44) أن المستقيمات الموازية لمحور العينات (y ثابت) تتحول إلى مستقيمات مركزية (φ ثابت) في المستوي W. فأي شريط أفقي ارتفاعه 2π في المستوي Z سيغطي لوحده المستوي W.

إن المنطقة المستطيلة $a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2$ في المستوي Z، (المنطقة المظللة) تتحول إلى المنطقة المحاطة بالدوائر والمستقيمات المركزية (المنطقة المظللة) $e^{a_1} \le \rho \le e^{a_2}, b_1 \le \varphi \le b_2$.

ملاحظة: هذا التحويل يمكن استخدامه للحصول على مسار سائل حول عقبة أسطوانية، وذلك بسبب تحديد استقرار الحقل الكهربائي عند شحن أسطوانة دائرية.

4- التحويل التجيبي القطعي $w = \cosh z$:

لدينا: $u + iv = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$u = \cosh x \cos y, \qquad v = \sinh x \sin y \qquad (45)$$

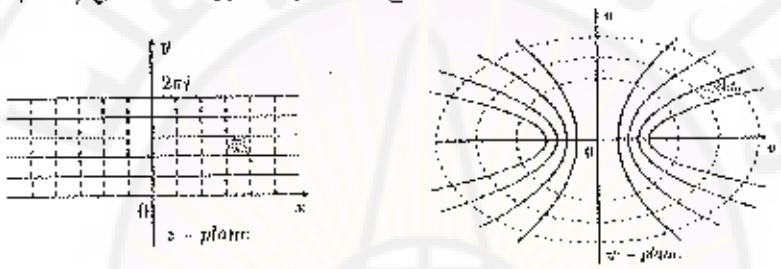
بحذف x من هذه المعادلات نجد:

$$\frac{u^2}{\cos^2 y} - \frac{v^2}{\sin^2 y} = 1 \qquad (46)$$

بحذف y من هذه المعادلات نجد:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 x} + \frac{v^2}{\sinh^2 x} = 1 \qquad (47)$$

من المعادلة (46) نجد أن المستقيمات الموازية لمحور السينات (y ثابت) في المستوي Z تتحول إلى أسرة من القطوع الزائدة في المستوي W. ومن المعادلة (47) نجد أن المستقيمات الموازية لمحور العينات (x ثابت) في المستوي Z تتحول إلى أسرة من القطوع الناقصة في المستوي W، الشكل (12-2).



الشكل (12-2): التحويل التجيبي القطعي.

إن المنطقة المستطيلة $a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2$ في المستوي Z، (المنطقة المظللة) تتحول إلى المنطقة المحاطة بالقطوع الزائدة والقطوع الناقصة (المنطقة المظللة).

ملاحظة: هذا التحويل قد يستخدم من أجل:

- الحصول على مسار سائل حول أسطوانة إهليليجية.
- لتحديد استقرار حقل كهربائي عند شحن أسطوانة.
- لتحديد كمون بين أسطوانات ناقصية أو زائدية ذات محارق واحدة.

مثال (15-2): أثبت أنه تحت التحويل $w = (z - i)/(z + i)$ يتنقل المحور الحقيقي في المستوي Z إلى الدائرة $|w| = 1$. وأي جزء من المستوي Z يوافق داخل هذه الدائرة؟

الحل: لدينا من نص المسألة:

$$|w| = \frac{|z - i|}{|z + i|} = \frac{|x + i(y - 1)|}{|x + i(y + 1)|} = \frac{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}}{\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}}$$

الآن المحور الحقيقي في المستوي Z، أي أن $y = 0$، فيتحول إلى:

$$|w| = \sqrt{x^2+1}/\sqrt{x^2+1} = 1$$

أي أن المحور الحقيقي في المستوي Z، يتحول إلى الدائرة $|w| = 1$.

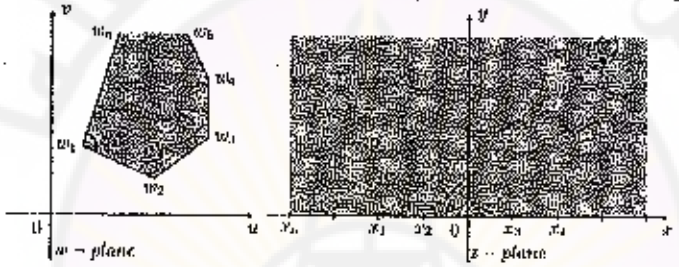
إن داخل هذه الدائرة هو $|w| < 1$ ويكون:

$$|w| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}/\sqrt{x^2+(y+1)^2} < 1 \Rightarrow -4y < 0 \Rightarrow y > 0.$$

أي أن النصف العلوي للمستوي Z، يتحول إلى داخل الدائرة $|w| = 1$.

4-2-2 تحويل شوارتز – كريستوفل

إن هذا التحويل ينقل داخل مضلع في المستوي W إلى النصف العلوي للمستوي Z ومحيط المضلع إلى المحور الحقيقي. إن معادلة هذا التحويل هي:



الشكل (2-13): تحويل شوارتز – كريستوفل.

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \qquad (48)$$

$$w = A\int (z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}dz + B \qquad (49)$$

حيث إن $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ هي الزوايا الداخلية للمضلع الذي رؤوسه النقاط $w_1, w_2, \cdots, w_n$ الذي يتحول للنقاط $x_1, x_2, \cdots, x_n$ على المحور الحقيقي في المستوي Z. كذلك A و B أعداد عقدية تحدد وضع المضلع وقياسه، الشكل (2-13).

الإثبات: لدينا من العلاقة (48):

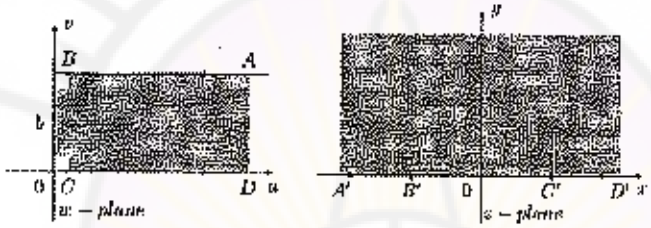
$$\Delta\left(\frac{dw}{dz}\right) = \Delta(A) + \left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\Delta(z-x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right)\Delta(z-x_2) + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\Delta(z-x_n) \qquad (50)$$

حيث إن z يتحرك على طول المحور الحقيقي من اليسار نحو x_1، بفرض أن w يتحرك على طول جانب $w_n w_1$ من المضلع إلى النقطة w_1. بما أن z تقطع x_1 من اليسار إلى اليمين بزاوية $\theta_1 = \Delta(z-x_1)$ تتحول من π إلى 0، بينما جميع حدود العلاقة (40) تبقى غير متأثرة. بينما يتناقص $(\alpha_1/\pi - 1)\Delta(z-x_1)$

فقط إلى $(\alpha_1/\pi - 1)\pi$ الذي يساوي $\pi - \alpha_1$ أي تتزايد بـ $\pi - \alpha_1$ في اتجاه عكس عقارب الساعة. بكلمة أخرى إن $\arg(dw/dz)$ يتزايد بـ $\pi - \alpha_1$. وهكذا يدور اتجاه w_1 بزاوية $\pi - \alpha_1$ و w تتحرك وفق الجانب w_1w_2 للمضلع.

بشكل مشابه عندما تمر z إلى x_2، $\theta_1 = \arg(z - x_1)$ و $\theta_2 = \arg(z - x_2)$ تتحول من π إلى 0 بينما الحدود الباقية لا تتغير. وهكذا الجانب w_1w_2 يدور بزاوية $\pi - \alpha_2$. وبالإجراء نفسه، نرى أن z تتحرك على طول المحور الحقيقي، w بالمقابل ترسم المضلع $w_1w_2w_3 \cdots w_n$.

مثال (2-16): أوجد التحويل الذي ينقل الشريط نصف النهائي للمستوي W ، الشكل (2-14)، إلى نصف الأعلى للمستوي Z.



الشكل (2-14): تحويل شريط نصف نهائي إلى نصف مستوي.

الحل: لنعدّ $ABCD$ حالة نهاية لمستطيل رأساه B و C عند المحور ov ورأساه A و D في اللانهاية. لتكن صورة B و C هما النقطتان $B'(-1)$ و $C'(1)$ في المستوي Z. بما أن الزوايا الداخلية لـ B و C هي $\pi/2$، لدينا بتطبيق تحويل شوارتز–كريستوفل:

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}(z+1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} = A/\sqrt{z^2-1} \Longrightarrow$$

$$w = A\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} + B = A\cosh^{-1} z + B$$

$$z = 1, w = 0 \Longrightarrow 0 = A\cosh^{-1}(1) + B \Longrightarrow B = 0.$$

$$z = -1, w = ib \Longrightarrow ib = A\cosh^{-1}(-1) + B \Longrightarrow \cosh(ib/A) = -1.$$

$$\Longrightarrow \cos(b/A) = -1 = \cos\pi \Longrightarrow A = b/\pi$$

$$\Longrightarrow w = (b/\pi)\cosh^{-1} z \Longrightarrow z = \cosh(\pi w/b)$$

3-2 تمارين محلولة

1- ليكن R المستطيل المعين في المستوي Z بالشكل: $x = y = 0,\ x = 2,\ y = 1$، أوجد النطاق R_1 المقابل لـ R وفق التطبيقات الآتية:

$$(i)\quad w_1 = z + 1 - 2i, \qquad (ii)\quad w_2 = \sqrt{2}\, ze^{i\pi/4},$$

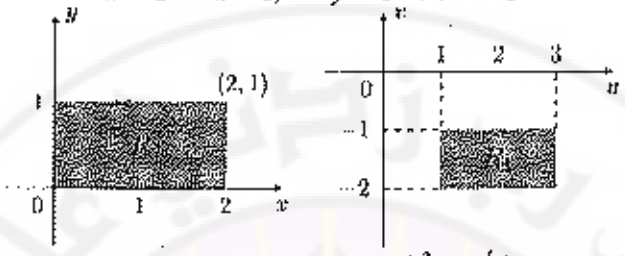
(iii) $w_3 = \sqrt{2}\, ze^{i\pi/4} + 1 - 2i$

الحل:

(i) $w_1 = z + 1 - 2i = x + iy + 1 - 2i = u + iv \Rightarrow u = x + 1, \quad v = y - 2$

$x = 0 \Rightarrow u = 1, \quad y = 0 \Rightarrow v = -2$

$x = 2 \Rightarrow u = 3, \quad y = 1 \Rightarrow v = -1$

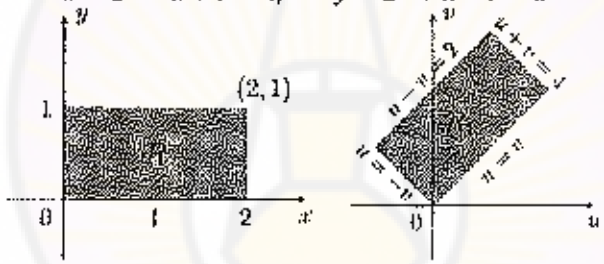


(ii) $w_2 = u + iv = \sqrt{2}\, ze^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)(x + iy) =$

$= x - y + i(x + y) \Rightarrow u = x - y, \quad v = x + y$

$x = 0 \Rightarrow u = -v, \quad y = 0 \Rightarrow u = v$

$x = 2 \Rightarrow u + v = 4, \quad y = 2 \Rightarrow u - v = 2$



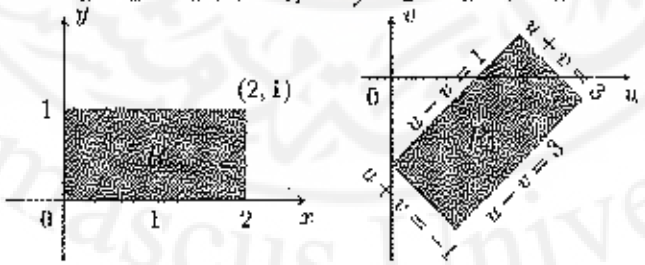
(iii) $w_3 = u + iv = \sqrt{2}\, ze^{i\pi/4} + 1 - 2i \Rightarrow$

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)(x + iy) + 1 - 2i = x - y + 1 + i(x + y - 2)$

$u = x - y + 1, \quad v = x + y - 2 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow u + v = -1, \quad y = 0 \Rightarrow u - v = 3$

$x = 2 \Rightarrow u + v = 3, \quad y = 1 \Rightarrow u - v = 1$



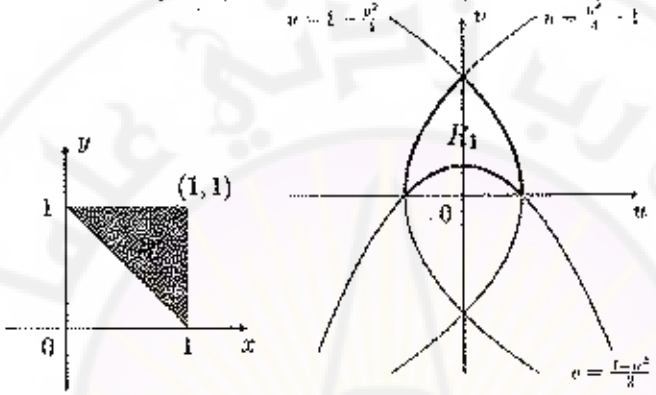
2- عين المنطقة المقابلة للمنطقة:

$$R:\quad x=1,\qquad y=1,\qquad x+y=1$$

وفق التطبيق $w=z^2$.

الحل: $w=u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy\Rightarrow u=x^2-y^2,\ v=2xy$

$$x=1\Rightarrow u=1-y^2,\qquad v=2y\Rightarrow u=1-v^2/4$$
$$y=1\Rightarrow u=x^2-1,\qquad v=2x\Rightarrow u=v^2/4-1$$
$$x+y=1\Rightarrow y=1-x\Rightarrow u=x^2-(1-x)^2=2x-1\Rightarrow$$
$$v=2x(1-x)=2x-2x^2\Rightarrow v=(1-u^2)/2$$



3- أوجد التطبيق الثنائي الخطية الذي ينقل النقاط: $z_1=0,\ z_2=-i,\ z_3=-1$ إلى النقاط:

$w_1=i,\ w_2=1,\ w_3=0$ على الترتيب.

الحل:

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow w_1=\frac{a(0)+b}{c(0)+d}=i\Rightarrow \boxed{b=id}$$
$$w_2=\frac{a(-i)+b}{c(-i)+d}=1\Rightarrow \boxed{-ic+d=-ia+b}$$
$$w_3=\frac{a(-1)+b}{c(-1)+d}=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow \boxed{a=b}$$

وبحل جملة المعادلات السابقة نجد أحد المجاهيل اختيارياً وليكن a عندها نجد أن:

$$b=a,\qquad d=-ia,\qquad c=ia\Rightarrow w=-i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

4- أوجد النقاط غير المتغيرة (الثابتة) في التطبيق الآتي: $w=(2z-5)/(z+4)$.

الحل: النقطة الثابتة تحقق $w=z$ أو $z\to z$ ، وبالتالي:

$$z=(2z-5)/(z+4)\Rightarrow 2z-z=z^2+4z\Rightarrow z^2+2z+5=0\Rightarrow$$
$$\Delta=4-20=-16=(4i)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=4i\Rightarrow z_1=-1-2i,\qquad z_2=-1+2i$$

النقاط الثابتة هي: z_1,z_2.

5- ليكن Γ منحنياً في المستوي Z معطى بشكل وسيطي: $x = f(t),\ y = g(t)$.

برهن أن هذا المنحني يمكن أن يطبق على محور السينات وفق التطبيق: $z = f(w) + ig(w)$.

الحل: لنفرض أن $z = x + iy$ و $w = u + iv$ عندها نجد: $x + iy = f(u + iv) + ig(u + iv)$

من أجل محور السينات يكون: $v = 0$

$$x + iy = f(u) + ig(u)$$

أي أن: $x = f(u),\ y = g(u)$ وهي تمثل معادلة المنحني Γ.

فمثلاً: لنفرض أن $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ قطعٌ ناقصٌ في المستوي Z عندها هناك تطبيق يطبق هذا القطع على محور السينات وهذا التطبيق هو التمثيل الوسيطي للقطع هو:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

إذاً التطبيق المطلوب: $z = a\cos w + ib\sin w$

4-2 التكامل العقدي

1-4-2 التكامل الخطي العقدي

لقد تحدثنا سابقاً عن مفهوم التكامل الخطي وتطبيقه في الحقول الشعاعية. والآن سنتكلم على التكامل الخطي لتابع عقدي.

ليكن لدينا التابع المستمر $f(z)$ للمتغير العقدي $z = x + iy$ معرف على جميع نقاط المنحني C الذي نهايتاه A و B. لنقسم المنحني C إلى n جزءًا بوساطة النقاط:

$$A = P_0(z_0), P_1(z_1), \cdots, P_i(z_i), \cdots, P_n = B$$



الشكل (2-15): التكامل الخطي لتابع عقدي.

لنضع $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ و ζ_i أية نقطة من القوس $P_{i-1}P_i$. إن نهاية المجموع:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$$

عندما $n \to \infty$ عبر أي طريق طول وتره Δz_i يسعى إلى الصفر، تدعى **التكامل الخطي للتابع $f(z)$** عبر مسار المنحني C أي أنّ:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i$$

لنكتب $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وبملاحظة أنّ: $dz = dx + idy$ فيكون:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

وهذا يدل على أنّ حساب التكامل الخطي لتابع عقدي يؤول إلى حساب تكاملين خطيين لتوابع حقيقية.

ملاحظة: إنّ قيمة التكامل الخطي مستقلة عن طبيعة المسار المكامل عليه عندما يكون التابع المكامل تحليلياً.

مثال (17-2): برهن أنّ:

$$(i)\ \int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \qquad (ii)\ \int_C (z-a)^n dz = 0\ ;\ n \in \mathbb{Z}\ \ \&\ n \neq -1$$

عندما يكون المنحني C الدائرة: $|z-a| = r$.

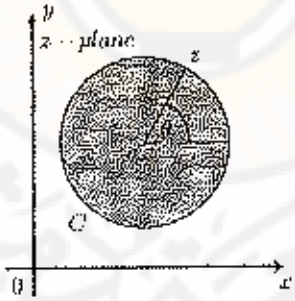
الحل: إن المعادلة البارامترية للمنحني C هي $z - a = re^{i\theta}$ حيث θ تأخذ القيم من 0 إلى 2π حيث z ترسم المنحني C مرة واحدة باتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة).

$$(i)\ \int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i\ ;\ \left[\because dz = ire^{i\theta}d\theta\right]$$

$$(ii)\ \int_C (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} \cdot ire^{i\theta}d\theta = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{(n+1)\theta i}d\theta =$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{(n+1)\theta i}\right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{2(n+1)\pi i} - 1\right] = 0\ ;\ \left[\because\ e^{2(n+1)\pi i} = 1\right]$$

وهذا التكامل موجود عندما لا ينعدم المقام أي: $n \neq -1$.



الشكل (16-2): منطقة التكامل الخطي (الدائرة).

مثال (18-2): أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^{2+i} (\bar{z})^2 dz$$

على طول المنحنيين: (i) المستقيم $y = x/2$. (ii) المحور الحقيقي من المبدأ إلى 2 ثم على المحور الشاقولي إلى النقطة $2 + i$.

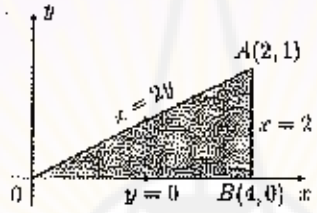
الحل: (i) على طول المستقيم OA، $x = 2y \Rightarrow z = (2 + i)y \Rightarrow \bar{z} = (2 - i)y$، وبالتالي: $dz = (2 + i)dy$، انظر الشكل (2-17).

$$\Rightarrow I = \int_0^{2+i} (\bar{z})^2 dz = \int_0^1 (2 - i)^2 y^2 \cdot (2 + i) dy = 5(2 - i) \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{3}(2 - i)$$

$$(ii) \quad \Rightarrow I = \int_{OB} (\bar{z})^2 dz + \int_{BA} (\bar{z})^2 dz$$

على طول OB، $z = x \Rightarrow \bar{z} = x \Rightarrow dz = dx$.

وعلى طول BA، $z = 2 + iy \Rightarrow \bar{z} = 2 - iy \Rightarrow dz = idy$.



الشكل (2-17): منطقة التكامل الخطي (محيط المثلث).

$$\Rightarrow I = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2 - iy)^2 \cdot i dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \int_0^1 \left[4y + (4 - y^2)i\right] dy$$

$$= \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(4 \cdot 1 - \frac{1}{3}\right) i = \frac{1}{3}(14 + 11i).$$

مثال (2-19): أوجد قيمة التكامل الآتي:

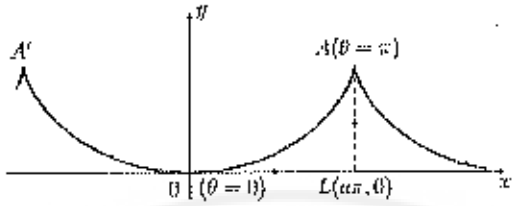
$$\int_C (z^2 + 3z + 2) dz$$

حيث إنّ المنحني C هو قوس السيكلويد $y = a(1 - \cos\theta)$، $x = a(\theta + \sin\theta)$. بين النقطتين $(0, 0)$ و $(\pi a, 2a)$.

الحل: إن التابع $f(z) = z^2 + 3z + 2$ تحليلي في المستوي Z لأنه كثير حدود. لذلك التكامل الخطي للتابع $f(z)$ بين النقطتين O و A مستقل عن المسار بينهما، (الشكل 2-18).

وبالتالي يمكن أن نأخذ المسار من O إلى L ومن L إلى A، فيكون:

$$\int_C f(z) dz = \int_{OL} f(z) dz + \int_{LA} f(z) dz \qquad (i)$$



الشكل (2-18): منطقة التكامل الخطي (قوس السيكلويد).

على طول OL، $z = x$ وعند O، $y = 0, x = 0$ وعند L، $x = \pi a$.

$$\int_{OL} f(z)dz = \int_0^{\pi a} (x^2 + 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^{\pi a} =$$

$$= \frac{\pi a}{6}(2\pi^2 a^2 + 9\pi a + 12) \qquad (ii)$$

على طول LA، $z = \pi a + iy \Rightarrow dz = idy$، $x = \pi a$، و y تتغير من 0 عند L، إلى $2a$، عند A.

$$\int_{LA} f(z)dz = \int_0^{2a} [(\pi a + iy)^2 + 3(\pi a + iy) + 2]\, i\, dy =$$

$$i\left[\frac{(\pi a + iy)^3}{3i} + 3\frac{(\pi a + iy)^2}{2i} + 2y\right]_0^{2a} = = \frac{a^3}{3}(\pi + 2i)^3 + \frac{3a^2}{2}(\pi + 2i)^2 + 4ia \quad (iii)$$

بتعويض (ii) و(iii) في (i) فنحصل على:

$$\int_C f(z)dz = \frac{\pi a}{6}(2\pi^2 a^2 + 9\pi a + 12) + \frac{a^3}{3}(\pi + 2i)^3 + \frac{3a^2}{2}(\pi + 2i)^2 + 4ia$$

2-4-2 نظرية كوشي

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً، وكان $f'(z)$ تابعاً مستمراً عند أية نقطة داخل المنحني المغلق C وعليه، عندها $\int_C f(z)dz = 0$.

لنكتب $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ولنلاحظ أنّ: $dz = dx + idy$، وبالتالي:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \qquad (51)$$

بما أنّ $f'(z)$ تابع مستمر فإنّ $\frac{\partial u}{\partial x}$ و$\frac{\partial u}{\partial y}$ و$\frac{\partial v}{\partial x}$ و$\frac{\partial v}{\partial y}$ أيضاً توابع مستمرة في المنطقة D المحاطة بالمنحني C.

وحسب نظرية غرين Green's theorem يمكننا تطبيقها على (51) فنجد:

$$\int_C f(z)dx = -\iint_D \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy + i\iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy \qquad (52)$$

وبما أنّ $f(z)$ تابع تحليلي، فإن u وv تحقق بالضرورة معادلتي كوشي–ريمان وبالتالي فإن كلا التكاملين الثنائيين في (52) معدومٌ. وبالتالي:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

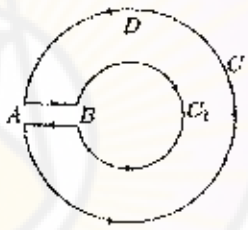
ملاحظات:

1- إنّ معادلتي كوشي-ريمان هي على وجه التحديد الشروط للتكاملين في (51) حتى يكونا مستقلين عن المسار المكامل عليه. وبما أنّ التكامل الخطي للتابع العقدي $f(z)$ تحليلي في المنطقة D، فهو مستقل عن المسار المكامل عليه الذي يضم أية نقطتين من نقاط المنطقة D.

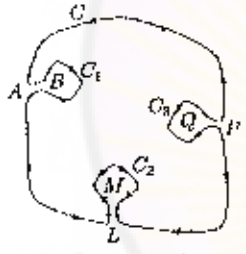
2- تمديد لنظرية كوشي. إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة D بين منحنيين بسيطين مغلقين C وC_1، عندئذٍ:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$

لبرهان ذلك، نحتاج لإدخال المقطع AB للعبور، عندئذٍ يكون $\oint f(z)dz$، على طول المسار الموضح بالأسهم في الشكل (2-19) (أ)، أي أنه يبدأ على طول AB ثم على طول C_1 باتجاه عكس عقارب الساعة وعلى طول BA ثم على طول C باتجاه عكس عقارب الساعة.



الشكل (2-19): (أ)



الشكل (2-19): (ب)

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz + \int_C f(z)dz = 0$$

لكن، بما أن التكامل عبر المسار AB، يحذف بالتكامل عبر المسار BA، فيكون:

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_C f(z)dz = 0$$

بأخذ الاتجاه المعاكس للتكامل على المنحني C_1، ونقله إلى الطرف الأيمن نجد أنّ:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

وكل تكامل على مسار باتجاه عكس عقارب الساعة.

إذا كان C_1 وC_2 وC_3 و... أية منحنيات مغلقة داخل المنحني C، الشكل (2-19) (ب)، عندئذٍ يكون:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \cdots$$

3-4-2 علاقة كوشي التكاملية

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل منحنٍ مغلق C وعليه وكانت a أية نقطة داخل المنحني المغلق C، عندئذٍ:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z-a}$$

لنعدّ التابع $f(z)/(z-a)$ الذي هو تحليلي في جميع النقاط داخل المنحني C ما عدا النقطة $z=a$. وباعتبار النقطة a مركزاً لدائرة C_1 نصف قطرها r، لترسم الدائرة الصغيرة C_1 المحاطة تماماً داخل المنحني C. وبالتالي إن التابع $f(z)/(z-a)$ تحليلي في جميع نقاط المنطقة المحصورة بين C وC_1، وحسب نظرية كوشي نجد:

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z-a} = \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{z-a}$$

من أجل أية نقطة على C_1، فإنّ: $z-a = re^{i\theta} \Rightarrow dz = ire^{i\theta}d\theta$. أي أنّ:

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z-a} = \oint_{C_1} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}d\theta = i\oint_{C_1} f(a+re^{i\theta})d\theta \qquad (53)$$

وعندما يتقارب المنحني C_1 إلى النقطة a عندما يسعى $r \to 0$، فإنّ التكامل (53) يصبح:

$$i\oint_{C_1} f(a)d\theta = if(a)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(a) \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) \Rightarrow$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z-a} \qquad (54)$$

والعلاقة الأخيرة تسمى بعلاقة كوشي التكاملية.

ملاحظة: باشتقاق طرفي العلاقة (54) بالنسبة إلى a، نجد أنّ:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{f(z)}{z-a}\right]dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz \qquad (55)$$

$$\Rightarrow f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz \quad (56)\cdots \Rightarrow f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad (57)$$

وبالتالي نستنتج من العلاقات (54) إلى (57)، أنه إذا كان التابع $f(z)$ معرّفاً لكي يكون تحليلياً على مسار منحنٍ بسيط مغلق C عندئذٍ فإن قيمة التابع وجميع مشتقاته يمكن أن تحسب عند أية نقطة من نقاط المنحني C. بالطبع، لقد قمنا بتأسيس حقيقة جديرة بالنظر إلى أنّ التابع التحليلي يمتلك مشتقات من جميع المراتب وأن هذه المشتقات كلها تحليلية.

مثال (2-20): أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz$$

حيث إنّ المنحني C هو الدائرة: $|z| = 1$ (i) و $|z| = 1/2$ (ii).

الحل: (i) لدينا: $f(z) = z^2 - z + 1$ و $a = 1$، بما أنّ $f(z)$ تحليلي داخل وعلى الدائرة $C: |z| = 1$ و $a = 1$ تقع على C. وبالتالي حسب علاقة كوشي التكاملية يكون:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) = 1 \Rightarrow \oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 2\pi i$$

(ii) في هذه الحالة: $a = 1$، تقع خارج الدائرة $C: |z| = 1/2$، واعتماداً على ذلك يكون التابع $(z^2 - z + 1)/(z - 1)$ تحليلياً في كل نقطة داخل وعلى C. وبالتالي يكون:

$$\oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} dz = 0$$

مثال (2-21): أوجد قيمة التكاملات الآتية مستخدماً علاقة كوشي التكاملية:

(i) $\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ حيث C، الدائرة $|z| = 3$

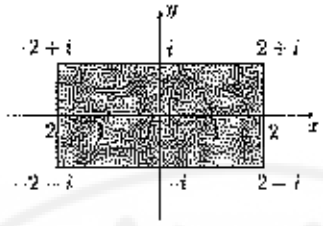
(ii) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$ حيث C، مستطيل رؤوسه $2 \pm i, -2 \pm i$

(iii) $\oint_C \frac{e^{tz}}{z^2 + 1} dz$ حيث C، الدائرة $|z| = 3$

الحل: (i) لدينا: $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$ تحليلي داخل الدائرة $|z| = 3$ وعليها، والنقطتان البسيطتان $z = 1$ و $z = 2$ تقعان داخل هذه الدائرة.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$
$$= \oint_C (\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2)\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right) dz =$$
$$= \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz - \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz =$$
$$= 2\pi i[\sin \pi(2)^2 + \cos \pi(2)^2] - 2\pi i[\sin \pi(1)^2 + \cos \pi(1)^2] =$$
$$= 2\pi i[0 + 1] - 2\pi i[0 - 1] = 4\pi i$$

(ii) لدينا: $f(z) = \cos \pi z$ تحليلي داخل المنطقة المحاطة بالمستطيل المعطى والنقطتان البسيطتان $z = 1$ و $z = -1$ تقعان داخل هذا المستطيل. انظر الشكل (2-20).



الشكل (2-20).

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\oint_C \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)\cos \pi z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}dz - \frac{1}{2}\oint_C \frac{\cos \pi z}{z+1}dz = \frac{1}{2}\{2\pi i \cos \pi(1) - 2\pi i \cos \pi(-1)\} = 0$$

(iii) لدينا: $f(z) = e^{tz}$ تحليلي داخل الدائرة $|z| = 3$ وعليها، والنقاط البسيطة نحصل عليها من المعادلة $z^2 + 1 = 0$ أي $z = i$ و $z = -i$ والتي هي داخل هذه الدائرة.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^{tz}}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)e^{tz}dz =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\oint_C \frac{e^{tz}}{z-i}dz - \oint_C \frac{e^{tz}}{z+i}dz\right\} = \frac{1}{2i}\{2\pi i e^{t(i)} - 2\pi i e^{t(-i)}\} = 2\pi i \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) =$$

$$= 2\pi i \sin t$$

مثال (2-22): أوجد قيمة التكاملات الآتية مستخدماً علاقة كوشي التكاملية:

(i) $\oint_C \frac{\sin^2 z}{(z-\pi/6)^3}dz$ حيث C، الدائرة $|z| = 1$

(ii) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ حيث C، الدائرة $|z| = 3$

(iii) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz$ حيث C، الدائرة $|z| = 4$

الحل: (i) لدينا: $f(z) = \sin^2 z$ تحليلي داخل الدائرة $C: |z| = 1$ وعليها، والنقطة $a = \pi/6$ تقريباً $(\pi/6 \approx 0.5)$ تقع داخل المنحني C. باستخدام علاقة كوشي التكاملية نجد:

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz \Longrightarrow \oint_C \frac{\sin^2 z}{(z-\pi/6)^3}dz = \pi i \left[\frac{d^2}{dz^2}(\sin^2 z)\right]_{z=\pi/6} =$$

$$= \pi i(2\cos 2z)_{z=\pi/6} = 2\pi i \cos(\pi/3) = \pi i$$

(ii) لدينا: $f(z) = e^{2z}$ تحليلي داخل الدائرة $C: |z| = 3$ وعليها، والنقطة $a = -1$ تقع داخل المنحني C. باستخدام علاقة كوشي التكاملية نجد:

$$f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^4}dz \Longrightarrow \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz = \frac{2\pi i}{6}\left[\frac{d^3(e^{2z})}{dz^3}\right]_{z=-1} =$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left[8e^{2z}\right]_{z=-1} = \frac{8\pi i}{3}e^{-2}$$

(iii) لدينا: $f(z) = e^z$ تحليلي داخل وعلى الدائرة $C: |z| = 4$ ولدينا:

$$(z^2+\pi^2)^2 = (z+\pi i)^2(z-\pi i)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm\pi i$$

$a = \mp\pi i$ تقع داخل المنحني C. باستخدام تفريق الكسور نجد:

$$\frac{1}{(z+\pi i)^2(z-\pi i)^2} = \frac{A}{z+\pi i} + \frac{B}{(z+\pi i)^2} + \frac{C}{z-\pi i} + \frac{D}{(z-\pi i)^2} \Rightarrow$$
$$A = 7/2\pi^3 i, \quad C = -7/2\pi^3 i, \quad B = D = -1/4\pi^2$$
$$\Rightarrow \oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz = \frac{7}{2\pi^3 i}\left\{\oint_C \frac{e^z}{z+\pi i}dz - \oint_C \frac{e^z}{z-\pi i}dz\right\}$$
$$-\frac{1}{4\pi^2}\underbrace{\left\{\oint_C \frac{e^z}{(z+\pi i)^2}dz + \oint_C \frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz\right\}}_{f(z)=e^z} =$$
$$= \frac{7}{2\pi^3 i}\left[2\pi i f(-\pi i) - 2\pi i f(\pi i)\right] - \frac{1}{4\pi^2}\left[2\pi i f'(-\pi i) + 2\pi i f'(\pi i)\right] =$$
$$= \frac{7}{\pi^2}\left(e^{-\pi i} - e^{\pi i}\right) - \frac{i}{2\pi}\left(e^{-\pi i} + e^{\pi i}\right) =$$
$$= -\frac{14i}{\pi^2}\left(\frac{e^{\pi i} - e^{-\pi i}}{2i}\right) - \frac{i}{\pi}\left(\frac{e^{\pi i} + e^{-\pi i}}{i}\right) = -\frac{14i}{\pi^2}\sin\pi - \frac{i}{\pi}\cos\pi = \frac{i}{\pi}$$

مثال (2-23): تحقق من نظرية كوشي لتكامل التابع e^{iz} على طول محيط المثلث الذي رؤوسه النقاط الآتية: $1+i, -1+i, -1-i$.

الحل: إنّ محيط المثلث يتألف من القطع المستقيمة الثلاث AB وBC وCA، الشكل (2-21).

$$\oint_{ABC} e^{iz}dz = \int_{AB} e^{iz}dz + \int_{BC} e^{iz}dz + \int_{CA} e^{iz}dz \qquad (i)$$

على طول AB: $y = 1 \Rightarrow z = x + i \Rightarrow dz = dx$.

$$\int_{AB} e^{iz}dz = \int_1^{-1} e^{i(x+i)}dx = \int_1^{-1} e^{ix-1}dx = \left[\frac{e^{ix-1}}{i}\right]_1^{-1} = \frac{e^{-i-1} - e^{i-1}}{i}$$

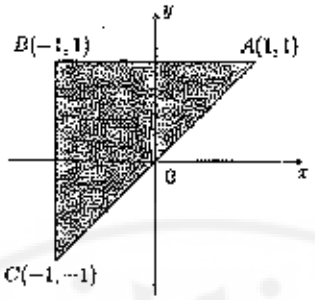
على طول BC: $x = -1 \Rightarrow z = -1 + iy \Rightarrow dz = idy$.

$$\int_{BC} e^{iz}dz = \int_1^{-1} e^{i(-1+iy)}idy = i\int_1^{-1} e^{-i-y}dy = i\left[\frac{e^{-i-y}}{-1}\right]_1^{-1} = \frac{e^{i+1} - e^{-i-1}}{i}$$

على طول CA: $y = x \Rightarrow z = (1+i)x \Rightarrow dz = (1+i)dx$.

$$\int_{CA} e^{iz}dz = \int_1^{-1} e^{i(1+i)x}(1+i)dx = (1+i)\frac{e^{i-1} - e^{-(i-1)}}{i(1+i)} = \frac{e^{i-1} - e^{-i+1}}{i}$$

$$(i) \Rightarrow \oint_{ABC} e^{iz}dz = \frac{e^{-i-1} - e^{i-1}}{i} + \frac{e^{-i+1} - e^{-i-1}}{i} + \frac{e^{i+1} - e^{-i-1}}{i} = 0 \quad (ii)$$



الشكل (2-21).

أيضاً وبما أنّ $f(z) = e^{iz}$ تابع تحليلي في أية نقطة وبالتالي حسب نظرية كوشي فإنّ:

$$\oint f(z) = 0 \qquad (iii)$$

وبالتالي من (ii) و(iii) فإنّ: $\oint_{ABC}$ يحقق نظرية كوشي التكاملية.

مثال (24-2): إذا كان:

$$F(\zeta) = \oint_C \frac{4z^2 + z + 5}{z - \zeta} dz$$

حيث إنّ C هو القطع الناقص $(x/2)^2 + (y/3)^2 = 1$، أوجد قيمة:

$$(a):\ F(3.5), \qquad (b):\ F(i),\ F''(-1),\ F''(-i).$$

الحل:

$$(a):\ F(3.5) = \oint_C \frac{4z^2 + z + 5}{z - 3.5} dz$$

إنّ $\zeta = 3.5$ هي النقطة البسيطة الوحيدة للتابع $(4z^2 + z + 5)/(z - 3.5)$ التي تقع خارج القطع الناقص C، وبالتالي $(4z^2 + z + 5)/(z - 3.5)$، تحليلي في أية نقطة داخل وعلى المنحني C. وحسب نظرية كوشي:

$$\oint_C \frac{4z^2 + z + 5}{z - 3.5} dz = 0 \Longrightarrow F(3.5) = 0.$$

(b): إنّ $f(z) = 4z^2 + z + 5$ تحليلي داخل المنحني C، والنقاط: $\zeta = i$ و$\zeta = -1$ و$\zeta = -i$ تقع داخل المنحني C، وبالتالي حسب علاقة كوشي التكاملية:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \Longrightarrow \oint_C \frac{4z^2 + z + 5}{z - \zeta} dz = 2\pi i(4\zeta^2 + \zeta + 5) \Longrightarrow$$
$$F(\zeta) = 2\pi i(4\zeta^2 + \zeta + 5) \Longrightarrow F'(\zeta) = 2\pi i(8\zeta + 1) \Longrightarrow F''(\zeta) = 16\pi i \Longrightarrow$$
$$F(i) = 2\pi i(-4 + i + 5) = 2\pi(i - 1)$$

$$F''(-1) = 2\pi i[8(-1)+1] = -14\pi i \Rightarrow F''(-i) = 16\pi i.$$

4-4-2 تقارب نظرية كوشي: نظرية موريرا(*)

إذا كان $f(z)$ تابعاً مستمراً في منطقة D وكان $\oint_C f(z)dz = 0$ على طول أي مسار بسيط مغلق C في المنطقة D، عندئذٍ يكون $f(z)$ تحليلياً في D.

الإثبات: بما أنّ: $\oint_C f(z)dz = 0$، عندئذٍ التكامل الخطي للتابع $f(z)$ من نقطة ثابتة z_0 إلى نقطة متغيرة z يجب أن يكون مستقلاً عن المسار، وبالتالي يجب أن يكون تابعاً لـ z فقط، أي:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \varphi(z)$$

لنضع $\varphi(z) = U + iV$ ، $f(z) = u + iv$ فيكون:

$$U + iV = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (u + iv)(dx + idv) =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v\,dx + u\,dy) \Rightarrow$$

$$U = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (u\,dx - v\,dy), \qquad V = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v\,dx + u\,dy)$$

لنشتق حسب إشارة التكامل:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = u \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

أي أنّ التابعين U و V يحققان معادلتي كوشي–ريمان C-R.

أيضاً، بما أن التابع $f(z)$ معطى على أنه مستمر، فإن: $\partial U/\partial x$ و $\partial U/\partial y$ و $\partial V/\partial x$ و $\partial V/\partial y$ هي أيضاً توابع مستمرة. وبالتالي $\varphi(z)$ تابع تحليلي ويكون:

$$\varphi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z)$$

أي أنّ $f(z)$ مشتق لتابع تحليلي $\varphi(z)$. وبالتالي $f(z)$ تابع تحليلي.

5-4-2 متراجحة كوشي

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل وعلى الدائرة $C: |z-a| = r$ وعندئذٍ:

$$|f^n(a)| \le \frac{Mn!}{r^n} \qquad (58)$$

(*) نسبة لعالم الرياضيات الإيطالي جياسينتو موريرا Giacinto Morera (1856-1909).

حيث M القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ على C، من العلاقة (57) نجد أنّ:

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\oint_C |dz| = \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\oint_C ds =$$
$$= \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}}2\pi r = \frac{Mn!}{r^n} \qquad [\because \ |f(z)| < M]$$

6-4-2 نظرية ليوفيل

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً ومحدوداً من أجل جميع قيم z في كامل المستوي العقدي عندئذٍ يكون $f(z)$ ثابتاً.

الإثبات: بأخذ $n = 1$ وتعويض a بـ z في العلاقة (58) نجد أنّ: $|f'(z)| \le M/r$.

وعندما $r \to \infty$، فهذا يعطي $f'(z) = 0$ أي أنّ $f(z)$ ثابت من أجل جميع قيم z.

7-4-2 علاقة بواسون التكاملية

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل الدائرة $C: |z| = \rho$ وعليها، و $z = re^{i\theta}$ أية نقطة داخل C، وعندئذٍ:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi) + r^2} f(\rho e^{i\varphi})d\varphi$$

باستخدام علاقة كوشي التكاملية لدينا:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (59)$$

وحسب معكوس النقطة z بالنسبة إلى المنحني C الذي يقع خارج المنحني C والمعطى بالعلاقة $\rho^2/\bar{z}$.

وحسب نظرية كوشي لدينا:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{w-\rho^2/\bar{z}}dw \qquad (60)$$

بطرح العلاقة (60) من (59) نجد أنّ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w - \rho^2/\bar{z}}\right)f(w)dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z\bar{z} - \rho^2}{\bar{z}w^2 - (z\bar{z}+\rho^2)w + z\rho^2}f(w)dw \qquad (61)$$

بوضع $w = \rho e^{i\varphi}$ ونلاحظ أنّ $\bar{z} = re^{-i\theta}$ وبالتالي تصبح العلاقة (61):

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-\rho^2)f(\rho e^{i\varphi})\cdot\rho\, i\, e^{i\varphi}d\varphi}{re^{-i\theta}\cdot\rho^2 e^{2i\varphi} - (r^2+\rho^2)\rho e^{i\varphi} + re^{i\theta}\rho^2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2-r^2)f(\rho e^{i\varphi})d\varphi}{\rho^2 + r^2 - r\rho\left[e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)}\right]} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2-r^2)f(\rho e^{i\varphi})d\varphi}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi) + r^2} \qquad (62)$$

والعلاقة الأخيرة تسمى علاقة بواسون(*) للتكاملية من أجل دائرة. وهي تعبّر عن قيم التوابع التوافقية داخل دائرة من خلال قيمها على المحيط.

لنكتب $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ و $f(\rho e^{i\varphi}) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$ ونعوضها في (62)، ومساواة القسمين الحقيقيين في الطرفين وأيضاً القسمين التخيليين، نجد أنّ:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2)u(\rho,\varphi)d\varphi}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi) + r^2} \qquad (63)$$

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - r^2)v(\rho,\varphi)d\varphi}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi) + r^2} \qquad (64)$$

5-2 المتسلسلات العقدية

لتكن:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \cdots + (a_n + ib_n) + \cdots \qquad (65)$$

متسلسلة (سلسلة) عقدية غير منتهية حيث a_k و b_k $(k \in \mathbb{N})$ أعداد حقيقية. إذا كانت المتسلسلات $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقاربة إلى المجموع A و B، عندها المتسلسلة (65)، نقول عنها إنها متقاربة ومجموعها $A + iB$. أيضاً إذا كانت متقاربة تكون نهاية الحد العام: $\lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = 0$.

ونقول عن المتسلسلة (65) إنها متقاربة بالإطلاق إذا كانت المتسلسلة:

$$|a_1 + ib_1| + |a_2 + ib_2| + \cdots + |a_n + ib_n| + \cdots$$

متقاربة. وبما أن $|a_n|$ و $|b_n|$ كليهما أصغر من $|a_n + ib_n|$، فهذا يدل أن المتسلسلة المتقاربة بالإطلاق متسلسلة متقاربة.

لنكن لدينا متسلسلة التوابع:

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots \qquad (66)$$

إن هذه المتسلسلة تتقارب من المجموع $S(z)$ و $S_n(z)$ هو مجموع n حداً الأوائل. عندئذٍ نقول إنّ المتسلسلة (66) متقاربة بانتظام في منطقة R، إذا كان من أجل أي عدد موجب ε، يوجد عدد موجب N، يتعلق بـ ε، لكن ليس بـ z، من أجل أي عدد ε في R بحيث:

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \qquad n > N$$

(*) سمي بذلك نسبة لعالم الرياضيات الفرنسي سيمون دونيس بواسون Simeon Denis Poisson (1781-1840) والذي كان بروفيسور في باريس، وله إسهامات في المعادلات التفاضلية الجزئية ونظرية الاحتمالات والكمون.

كما في حالة المتسلسلات الحقيقية يمكن استخدام اختبار فيرشتراس في حالة المتسلسلات العقدية. لذلك تكون المتسلسلة (66) تتقارب بانتظام في منطقة R إذا وجد متسلسلة ذات حدود موجبة متقاربة $\sum M_n$ بحيث $|u_n(z)| \le M_n$ من أجل كل z من R.

أيضاً المتسلسلات المتقاربة بانتظام لتوابع عقدية مستمرة هي أيضاً مجموعها تابع مستمر، كما ويمكن مكاملتها حداً حداً.

ملاحظة: إذا كانت متسلسلة القوى $\sum a_n z^n$ متقاربة من أجل $z = z_1$، عندها تتقارب بالإطلاق من أجل $|z| < |z_1|$.

بما أنّ $\sum a_n z_1^n$ متقاربة، فإنّ $\lim_{n\to\infty} a_n z_1^n = 0$ ولذلك يمكننا إيجاد عدد k بحيث يكون $|a_n z_1^n| < k$ من جميع قيم n. عندئذٍ:

$$\sum a_n z^n = \sum |a_n z_1^n| \cdot |z/z_1|^n < \sum k t^n , \qquad t = |z/z_1|.$$

لكن المتسلسلة $\sum t^n$ تتقارب عندما $t < 1$. لذلك المتسلسلة $\sum a_n z^n$ تتقارب بالإطلاق من أجل $|z| < |z_1|$، أي أنّه إذا رسمت دائرة مركزها في المبدأ ونصف قطرها $|z|$، عندها المتسلسلة المعطاة تتقارب بالإطلاق عند جميع النقاط داخل الدائرة. مثل ذلك إذا كانت $|z| = R$ ضمنها تتقارب المتسلسلة $\sum a_n z^n$، فإنها تدعى دائرة التقارب وR يدعى نصف قطر التقارب.

متسلسلة القوى تتقارب بانتظام في أية منطقة تقع فيها دائرة تقاربها وقوعاً كاملاً.

1-5-2 متسلسلة تايلور

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل الدائرة C ذات المركز a، عندها من أجل z داخل C:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(z)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \qquad (i)$$

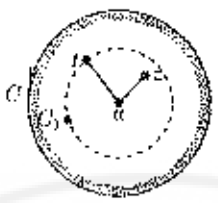
الإثبات: لتكن z أية نقطة داخل المنحني C. لنرسم دائرة C_1 مركزها في a وتحوي النقطة z، لتكن t نقطة على المنحني C_1، لدينا:

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a-(z-a)} = \frac{1}{t-a}\left(1 - \frac{z-a}{t-a}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{t-a}\left[1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n + \cdots\right] \qquad (ii)$$

حيث إن $|z-a| < |t-a|$ أي أن $|(z-a)/(t-a)| < 1$، هذه المتسلسلة تتقارب بانتظام.

لذلك، بضرب طرفي العلاقة (ii) بـ $f(t)$، ويمكننا التكامل على C_1، نجد أن:



الشكل (2-22).

$$\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt=\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-a}dt+(z-a)\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-a)^2}dt+\cdots+(z-a)^n\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt+\cdots \quad (iii)$$

وبما أن $f(t)$ تحليل على المنحني C_1 وداخله، فينتج بتطبيق صيغة كوشي التكاملية العلاقة (i) التي تعرف بمتسلسلة تايلور للتابع $f(z)$.

ملاحظة: الحقيقة الرائعة الأخرى هو أن التابع العقدي التحليلي يمكن نشره (تمثيله) دائماً في سلسلة قوى من الشكل (i).

2-5-2 متسلسلة لوران(*)

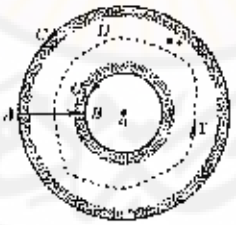
إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة على شكل حلقة R محاطة بدائرتين لهما المركز نفسه C_1 وC_2 ذات نصفي القطرين r_1 وr_2 حيث $r_2 > r_1$ ومركزهما المشترك في a، عندها من أجل كل النقاط z في R إنّ:

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_{-1}(z-a)^{-1}+a_{-2}(z-a)^{-2}+\cdots$$

حيث إنّ:

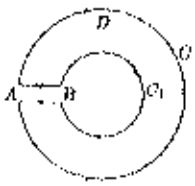
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$$

حيث إنّ Γ هو أي منحني يحيط بالدائرة C_1 وموجود في المنطقة R، (الشكل 2-23).



الشكل (2-23).

(*) سميت على اسم المهندس الفرنسي وعالم الرياضيات بيير ألفونس لوران Pierre Alphonse Laurent (1813-1854) الذي نشر مبرهنته في عام 1843.



الإثبات: لندخل القطعة AB الواصلة بين الدائرتين، إن $f(z)$ تحليلي في المنطقة D المحصورة بـ AB و C_1 باتجاه عقارب الساعة و BA و C باتجاه عكس عقارب الساعة كما في الشكل (2-19). فإذا كانت z أية نقطة من المنطقة D لدينا:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{AB}\frac{f(t)}{t-z}dt+\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt+\int_{BA}\frac{f(t)}{t-z}dt+\oint_{C}\frac{f(t)}{t-z}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C}\frac{f(t)}{t-z}dt-\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt\right] \qquad (i)$$

إذ عددنا المنحنيين C و C_1 باتجاه عكس عقارب الساعة (الاتجاه الموجب) في (i) وأن التكاملين عبر AB و BA متعاكسان فيحذفان.

من أجل التكامل الأول في (i) ننشر التابع $1/(t-z)$ وفق نشر تايلور نحصل على:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-a)^n \qquad (ii)$$

حيث إنّ:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$$

من أجل التكامل الثاني في (i) لتكن $t\in C_1$، عندها يمكن أن نكتب:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-a)-(z-a)}=-\frac{1}{z-a}\left(1-\frac{t-a}{z-a}\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{z-a}\left[1+\frac{t-a}{z-a}+\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n+\cdots\right]$$

حيث $|t-a|<|z-a|$، أي أنّ: $|t-a|/|z-a|<1$، هذه السلسلة متقاربة بانتظام، لذلك بضرب الطرفين بـ $f(t)$ والتكامل على C_1، نحصل على:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(t)}{t-z}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}(t-a)^{n-1}f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n} \qquad (iii)$$

حيث إنّ:

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-a)^{-n+1}}dt$$

وبتعويض (ii) و(iii) في (i) نحصل على:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n} \qquad (iv)$$

بما أن $f(t)/(t-a)^{n+1}$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين C وΓ، لذلك يمكننا أن نأخذ التكامل بحمل a_n على Γ. وتناظرياً يمكننا أن نأخذ التكامل بحمل a_{-n} على Γ. لذلك يمكن كتابة العلاقة (iv) بالشكل:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n \quad ; \quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$$

التي تعرف بمتسلسلة لورانت.

ملاحظات:

1- كما أن $f(z)$ ليس تحليلياً داخل المنحني Γ فإن:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\neq\frac{f^n(a)}{n!}$$

بينما، إذا كان $f(z)$ تحليلياً داخل المنحني Γ، عندئذ فإن:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=\frac{f^n(a)}{n!}, \qquad a_{-n}=0$$

وتتحول متسلسلة لورانت إلى متسلسلة تايلور.

2- للحصول على متسلسلة تايلور أو متسلسلة لورانت، يكفي ببساطة نشر التابع $f(z)$ وفق مبرهنة تنالي الحد بدلاً من إيجاد a_n باستخدام التكامل العقدي الذي أكثر تعقيداً.

3- إن متسلسلة لورانت لتابع تحليلي $f(z)$ معطى في حلقة تقاربه وحيدة. يمكن أن يكون للتابع $f(z)$ متسلسلتا لورانت مختلفتان في حلقتين متحدتي المركز.

مثال (2-25): أثبت أن المتسلسلة $z(1-z)+z^2(1-z)+z^3(1-z)+z^4(1-z)+\cdots$ تتقارب من أجل $|z|<1$. حدد فيما إذا كان التقارب تقارباً مطلقاً أم لا.

الحل: ليكن s_n مجموع n حداً الأوائل من المتسلسلة، فإنّ:

$$s_n=z-z^2+z^2-z^3+z^3-z^4+\cdots+z^n-z^{n+1}=z-z^{n+1}$$

من أجل $|z|<1$ فإنّ: $z^{n+1}\to 0$ عندما $n\to\infty$. وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}(s_n)=z$$

مما يعني أن المتسلسلة تتقارب من أجل $|z|<1$.

$$|s_n(z)|=|z(1-z)|+|z^2(1-z)|+|z^3(1-z)|+\cdots+|z^n(1-z)|=$$
$$=|1-z|(|z|+|z|^2+|z|^3+\cdots+|z|^n)\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}|s_n(z)|=|1-z|\frac{|z|}{1-|z|} \quad ; \quad |z|<1$$

وهذا يدل أن المتسلسلة تتقارب مطلقاً.

مثال (2-26): انشر التابع $\sin z$ في متسلسلة تايلور في جوار النقطة $z = 0$ وحدد منطقة التقارب.

الحل:

$$f(z) = \sin z, \quad f'(z) = \cos z, \quad f''(z) = -\sin z, \quad f'''(z) = -\cos z,$$
$$\cdots \Rightarrow f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \cdots$$

وبالتالي تكون متسلسلة تايلور في جوار $z = 0$ هي:

$$f(z) = f(0) + \frac{(z-0)}{1!}f'(0) + \frac{(z-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(z-0)^3}{3!}f'''(0) + \cdots \Rightarrow$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \Rightarrow$$
$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-0)^{2n-1} \quad ; \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$$

بما أنّ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right| = 0$$

يعني أن نصف قطر تقارب التابع $f(z)$ هو $1/\rho = \infty$، أي أن منطقة تقارب التابع $f(z)$ هي كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مثال (2-27): أوجد منشور تايلور للتابعين الآتيين في جوار النقطة التي بجانبه:

$$(i)\ f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \quad ; \quad z = -i, \qquad (ii)\ f(z) = \frac{2z^3+1}{z^2+z} \quad ; \quad z = i$$

الحل: (i) لنشر التابع $f(z)$ في جوار النقطة $z = -i$ أي وفق قوى $z + i$، نضع $t = z + i$. يكون لدينا (حسب نشر ثنائي الحد):

$$f(z) = \frac{1}{(t-i+1)^2} = (1-i)^{-2}\left[1 + \frac{t}{1-i}\right]^{-2} =$$
$$= \frac{i}{2}\left[1 - \frac{2t}{1-i} + \frac{3t^2}{(1-i)^2} - \frac{4t^3}{(1-i)^3} + \cdots\right] = \frac{i}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(z+i)^n}{(1-i)^n}\right]$$
$$(ii)\ f(z) = \frac{2z^3+1}{z(z+1)} = 2z - 2 + \frac{2z+1}{z(z+1)} =$$
$$= (2i-2) + 2(z-i) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} \qquad (*)$$

وذلك حسب باستخدام تفريق الكسور. ولنشر $1/z$ و$1/(z+1)$ في جوار $z = i$، لنضع $t = z - i$ فنجد:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{t+i}=\frac{1}{t}\left(1+\frac{i}{t}\right)^{-1}=\frac{1}{t}\left\{1-\frac{i}{t}+\frac{i^2}{t^2}-\frac{i^3}{t^3}+\frac{i^4}{t^4}-\cdots\right\}=$$

$$\frac{1}{t}+\frac{i}{1}+\frac{i^2}{t^3}-\frac{i^3}{t^4}+\frac{i^4}{t^5}-\cdots=-i+(z-i)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{i^{n+1}}\qquad(**)$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{t+i+1}=\frac{1}{1+i}\left(1+\frac{t}{1+i}\right)^{-1}=\text{حسب نشر ثنائي الحد}=$$

$$=\frac{1}{1+i}\left\{1-\frac{t}{1+i}+\frac{t^2}{(1+i)^2}-\frac{t^3}{(1+i)^3}+\frac{t^4}{(1+i)^4}-\cdots\right\}=$$

$$=\frac{1-i}{2}-\frac{t}{2i}+\left\{\frac{t^2}{(1+i)^3}-\frac{t^3}{(1+i)^4}+\frac{t^4}{(1+i)^5}-\cdots\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}-\frac{z-i}{2i}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}\qquad(***)$$

بتعويض (**) و(***) في (*) نجد أنّ:

$$f(z)=\left(2i-2-i+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)+\left(2+1-\frac{1}{2i}\right)(z-i)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{i^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right\}(z-i)^n$$

$$=\left(\frac{i}{2}-\frac{3}{2}\right)+\left(3+\frac{i}{2}\right)(z-i)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{i^{n+1}}+\frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right\}(z-i)^n$$

مثال (28-2): انشر التابع $f(z)=1/[(z-1)(z-2)]$ في المنطقة:

$$(a)\ |z|<1,\qquad (b)\ 1<|z|<2,\qquad (c)\ |z|>2,\qquad (d)\ 0<|z-1|<1$$

الحل: (a) باستخدام تفريق الكسور لدينا:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\qquad(i)\qquad=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}+(1-z)^{-1}\qquad(ii)$$

من $|z|<1$ فإن كلا $|z/2|$ و$|z|$ أقل من 1. لذلك نجد من نشر (ii) أن:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right)+(1+z+z^2+z^3+\cdots)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\frac{15}{16}z^3+\cdots\qquad\text{وهي متسلسلة تايلور}$$

(b) من أجل $1<|z|<2$ نكتب (i) بالشكل:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}-\frac{1}{z(1-z^{-1})}$$

نلاحظ أن كلا $|z/2|$ و$|z^{-1}|$ أقل من 1. لذلك نجد من نشر (iii) أن:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right)-\frac{1}{z}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots)=$$
$$=\cdots-z^{-4}-z^{-3}-z^{-2}-z^{-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3-\cdots$$

التي هي متسلسلة لوران.

(c) من أجل $2<|z|$ نكتب (i) بالشكل:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-2z^{-1})}-\frac{1}{z(1-z^{-1})}=$$
$$=z^{-1}(1+2z^{-1}+4z^{-2}+8z^{-3}+\cdots)-z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots)=$$
$$=\cdots+7z^{-4}+3z^{-3}+z^{-2}+\cdots$$

(d) من أجل $0<|z-1|<1$ نكتب (i) بالشكل:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)+1}-\frac{1}{z-1}=-(z-1)^{-1}-[1-(z-1)]^{-1}=$$
$$=-(z-1)^{-1}-[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots].$$

مثال (2-29): أوجد منشور متسلسلة لوران للتابع $f(z)=(7z-2)/[(z+1)z(z-2)]$ في المنطقة $1<|z+1|<3$.

الحل: لنكتب $u=z+1$ (ثم باستخدام تفريق الكسور) فيكون لدينا:

$$f(z)=\frac{7(u-1)-2}{u(u-1)(u-1-2)}=\frac{7u-9}{u(u-1)(u-3)}=-\frac{3}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{2}{u-3}=$$
$$=-\frac{3}{u}+\frac{1}{u(1-1/u)}-\frac{2}{3(1-u/3)}=-\frac{3}{u}+\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-1}-\frac{2}{3}\left(1-\frac{u}{3}\right)^{-1}$$

بما أنّ: $1<|u|<3$ أو $1/u<1$ و $u/3<1$ وباستخدام نشر ثاني الحد نجد أنّ:

$$f(z)=-\frac{3}{u}+\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}+\cdots\right)-\frac{2}{3}\left(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{3^2}+\frac{u^3}{3^3}+\cdots\right)=$$
$$=-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}+\cdots-\frac{2}{3}\left(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{3^2}+\frac{u^3}{3^3}+\cdots\right)\Rightarrow$$
$$f(z)=-\frac{2}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^3}+\cdots$$
$$-\frac{2}{3}\left(1+\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^2}{3^2}+\frac{(z+1)^3}{3^3}+\cdots\right)$$

إن هذا النشر محقق في المنطقة $1<|z+1|<3$.

3-5-2 أصفار (جذور) تابع تحليلي

تعريف: إن صفر تابع تحليلي $f(z)$ هو القيمة z التي تعدمه أي: $f(z)=0$.

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في جوار النقطة $z = a$، وبالتالي حسب نشر تايلور إنّ:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \; ; \; a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

إذا كان $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$ ولكن $a_m \neq 0$ عندها نقول إن $f(z)$ يمتلك صفراً (جذراً) من المرتبة m عند النقطة $z = a$. عندما $m = 1$ فإن الجذر يسمى بسيطاً. في جوار الجذر ($z = a$) من المرتبة m يكون:

$$f(z) = a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots = (z-a)^m\varphi(z) \; ;$$
$$\varphi(z) = a_m + a_{m+1}(z-a) + \cdots$$

حيث إن $\varphi(z)$ تحليلي ولا يمتلك جذوراً في جوار $z = a$.

تعريف النقاط الفردية (الشاذة) لتابع تحليلي:

تعرف النقطة الفردية بأنها النقطة التي يكون فيها التابع غير معرف (غير تحليلي).

1- النقطة الفردية (الشاذة) المعزولة: إذا كانت $z = a$ نقطة فردية للتابع $f(z)$ وحيث إن التابع $f(z)$ تحليلي في جوار النقطة $z = a$ (توجد دائرة مركزها a التي لا تحوي نقطة فردية أخرى)، عندها تدعى النقطة $z = a$ نقطة فردية معزولة.

في هذه الحالة يمكن نشر التابع $f(z)$ في متسلسلة لورانت في جوار $z = a$، أي أن:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_{-2}(z-a)^{-2} + \cdots \quad (67)$$

فمثلاً، إن التابع $f(z) = \cot(\pi/z)$ غير تحليلي عندما $\tan(\pi/z) = 0$ أي أن عند النقاط $\pi/z = n\pi$ أو $z = 1/n \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$. وهكذا إن $z = 1, 1/2, 1/3, \cdots$ هي كلها نقاط فردية معزولة، حيث إنه لا يوجد نقاط أخرى فردية معزولة في جوارها.

ولكن عندما تكون n كبيرة جداً، فإن $z = 0$ التي هي نقطة فردية يحتوي جوارها على عدد غير منته من النقاط الفردية، لذلك تدعى $z = 0$ نقطة فردية غير معزولة للتابع $f(z)$.

2- النقطة الفردية (الشاذة) القابلة للحذف: إذا كانت جميع القوى السالبة لـ $(z-a)$ في (67) معدومة، عندها يكون:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

هنا يمكن حذف النقاط الفردية حسب تعريف التابع $f(z)$ في النقطة $z = a$ بحيث يصبح التابع تحليلياً عند $z = a$، لذلك تدعى النقطة الفردية نقطة فردية قابلة للحذف.

وهكذا إذا كانت $\lim_{z\to a} f(z)$ موجودة ومنتهية، يكافئ ذلك أن $z=a$ نقطة فردية قابلة للحذف.

3- القطب: إذا كانت جميع القوى السالبة لـ $(z-a)$ في (1) بعد فقد عدد n^{th} منها، لذلك إنّ النقطة الفردية عند $z=a$ تدعى قطباً من المرتبة n. إن القطب من المرتبة الأولى يدعى قطباً بسيطاً.

4- النقطة الفردية الأساسية: إذا كان عدد القوى السالبة لـ $(z-a)$ في (1) غير منته، عندها تدعى النقطة $z=a$ نقطة فردية أساسية. في هذه الحالة $\lim_{z\to a} f(z)$ غير موجودة.

مثال (2-30): أوجد النقاط الفردية وعين نوعها وموضعها للتوابع الآتية:

$$(i)\ \frac{z-\sin z}{z^2},\qquad (ii)\ (z+1)\sin\left(\frac{1}{z-2}\right),\qquad (iii)\ \frac{1}{\cos z-\sin z}$$

الحل: (i) هنا $z=0$ هي نقطة فردية، ولدينا أيضاً:

$$\frac{z-\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left\{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)\right\}=\frac{z}{3!}-\frac{z^3}{5!}+\frac{z^5}{7!}-\cdots$$

بما أنه لا يوجد قوى سالبة لـ z في النشر، فإن النقطة $z=0$ هي نقطة فردية قابلة للحذف.

(ii) نفرض $t=z-2$ فيكون لدينا:

$$(z+1)\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)=(t+2+1)\sin\frac{1}{t}=(t+3)\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{3!\,t^3}+\frac{1}{5!\,t^5}-\cdots\right\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{3!\,t^2}+\frac{1}{5!\,t^4}-\cdots\right)+\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{2t^3}+\frac{3}{5!\,t^5}-\cdots\right)=$$
$$=1+\frac{3}{t}-\frac{1}{6t^2}-\frac{1}{2t^3}+\frac{1}{120t^4}+\frac{1}{40t^5}-\cdots=$$
$$=1+\frac{3}{z-2}-\frac{1}{6(z-2)^2}-\frac{1}{2(z-2)^3}+\frac{1}{120(z-2)^4}+\frac{1}{40(z-2)^5}-\cdots$$

بما أنه يوجد عدد غير منته من الحدود ذات قوى سالبة لـ $(z-2)$ فإن $z=2$ هي نقطة فردية أساسية.

(iii) إن أقطاب التابع $f(z)=1/(\cos z-\sin z)$ تعطى من مساواة المقام بالعدد صفر أي أن: $\cos z-\sin z=0$ أو $\tan z=1$ أو $z=\pi/4$. نلاحظ بوضوح أن $z=\pi/4$ هو قطب بسيط للتابع $f(z)$.

مثال (2-31): ما نوع النقطة الفردية التي يمتلكها كل من التوابع الآتية:

$$(i)\ \frac{1}{1-e^z},\qquad (ii)\ \frac{e^{2z}}{(z-1)^4},\qquad (iii)\ \frac{e^{1/z}}{z^2}$$

الحل: (i) إن أقطاب التابع: $f(z)=1/(1-e^z)$ بعدم مقامه أي أن $1-e^z=0$ أو أن $e^z=1$ وبالتالي $e^{2n\pi i}$ $(0,\pm1,\pm2,\cdots)$، $z=2n\pi i$ من الواضح أن التابع $f(z)$ يمتلك قطباً بسيطاً عند $z=2\pi i$.

(ii) بوضع $t = z - 1$ نجد أنّ:

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^4} = \frac{e^{2(t+1)}}{t^4} = \frac{e^2}{t^4}\cdot e^{2t} = \frac{e^2}{t^4}\left\{1 + \frac{2t}{1!} + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^4}{4!} + \cdots\right\} =$$

$$= e^2\left\{\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^3} + \frac{2}{t^2} + \frac{4}{3t} + \frac{2}{3} + \frac{4t}{15} + \cdots\right\} =$$

$$= e^2\left\{\frac{1}{(z-1)^4} + \frac{2}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{3(z-1)} + \frac{2}{3} + \frac{4(z-1)}{15} + \cdots\right\}$$

بما أنه يوجد (4) أربعة حدود تحتوي على القوى السالبة لـ $(z-1)$، إذاً $z = 1$ هو قطب من المرتبة الرابعة.

$$(iii) \quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left\{1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right\} =$$

$$= z^{-2} + z^{-3} + \frac{z^{-4}}{2} + \frac{z^{-5}}{6} + \cdots$$

بما أن عدد الحدود ذات القوى السالبة لـ z غير منته، لذلك إن التابع $f(z)$ يمتلك نقطة فردية أساسية عند $z = 0$.

6-2 الرواسب

إنّ معامل (أمثال) الحد $(z-a)^{-1}$ في منشور التابع $f(z)$ حول نقطة شاذة معزولة يسمى راسب التابع $f(z)$ عند هذه النقطة. بما أنّ منشور في متسلسلة لورانت للتابع $f(z)$ حول $z = a$ هو:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_{-2}(z-a)^2 + \cdots$$

فإن الراسب لهذا التابع $f(z)$ عند $z = a$ هو a_{-1}.

$$Res\, f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i\, Res\, f(a) \qquad (68)$$

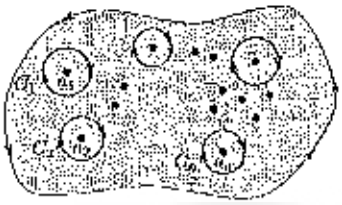
1-6-2 نظرية الرواسب

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنحني المغلق C ماعدا عدد منته من النقاط الشاذة داخل المنحني C، عندها يكون:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \times \left(\text{مجموع الرواسب للنقاط الشاذة في } C\right)$$

لنفرض أننا أحطنا كل نقطة شاذة $a_1, a_2, \cdots, a_n$ بدائرة صغيرة بحيث لا تحتوي على نقطة شاذة أخرى. (انظر الشكل 2-24).

عندئذٍ هذه الدوائر $C_1, C_2, \cdots, C_n$ مع بعضها في C، تشكل مناطق متصلة لأن $f(z)$ تابع تحليلي. وبتطبيق نظرية كوشي نجد أنّ:



الشكل (2-24).

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz \qquad (69)$$

وبالاستفادة من (68):

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[Res\, f(a_1) + Res\, f(a_2) + \cdots + Res\, f(a_n)]$$

التي هي النتيجة المرغوبة (المطلوبة).

2-6-2 حساب الرواسب

1- إذا كان $f(z)$ يملك قطباً بسيطاً عند النقطة $z = a$، يكون:

$$Res\, f(a) = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \qquad (70)$$

وتكون متسلسلة لورانت في هذه الحالة:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1}$$

نضرب الطرفين بـ $z-a$ نجد أن:

$$(z-a)f(z) = c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + c_2(z-a)^3 + \cdots + c_{-1}$$

نأخذ النهاية عندما $z \to a$، نحصل على:

$$\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] = c_{-1} = Res\, f(a).$$

2- هناك صيغة أخرى لحساب الراسب $Res\, f(a)$:

ليكن $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$، حيث إن $\psi(z) = (z-a)h(z)$، $F(a) \neq 0$. عندئذٍ:

$$\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)\{\varphi(a) + (z-a)\varphi'(a) + \cdots\}}{\psi(a) + (z-a)\psi'(a) + \cdots} =$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(a) + (z-a)\varphi'(a) + \cdots}{\psi'(a) + (z-a)\psi''(a) + \cdots}; \qquad \psi(a) = 0 \Rightarrow Res\, f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (71)$$

3- إذا كان $f(z)$ يملك قطباً من المرتبة n عند النقطة $z = a$، يكون:

$$Res\, f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}_{z=a} \qquad (72)$$

بما أن $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_{-3}(z-a)^{-3} + \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n}$$

نضرب الطرفين بـ $(z-a)^n$، نحصل على:

$$(z-a)^n f(z) = c_0(z-a)^n + c_1(z-a)^{n+1} + c_2(z-a)^{n+2} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots + c_{-n}$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى z، $n-1$ مرة ووضع $z=a$، نحصل على:

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]\right\}_{z=a} = (n-1)!\,c_{-1}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

ملاحظة: في عدة حالات، يمكن إيجاد الراسب للقطب $(z=a)$، وذلك بوضع $z=a+t$ في $f(z)$ ثم نشره وفق قوى t حيث إن $|t|$ صغيرة جداً.

مثال (2-32): أوجد مجموع الرواسب للتابع $f(z)=\sin z/(z\cos z)$ عند أقطابه الموجودة داخل الدائرة $|z|=2$.

الحل: إنّ التابع $f(z)$ يملك أقطاباً بسيطة عند: $z=0,\mp\pi/2,\mp 3\pi/2,\cdots$. إنّ الأقطاب $z=0$ و $z=\mp\pi/2$ تنتمي إلى داخل الدائرة $|z|=2$ فقط.

$$Res\,f(0) = \lim_{z\to 0}[z\cdot f(z)] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = 0$$

$$Res\,f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to \pi/2}\left[\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(z)\right] = \lim_{z\to \pi/2}\left\{\frac{(z-\pi/2)\sin z}{z\cos z}\right\} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{z\to \pi/2}\left\{\frac{(z-\pi/2)\cos z+\sin z}{\cos z - z\sin z}\right\} = \frac{1}{-\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$

$$Res\,f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to -\pi/2}\left[\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(z)\right] = \lim_{z\to -\pi/2}\left\{\frac{(z+\pi/2)\sin z}{z\cos z}\right\} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{z\to -\pi/2}\left\{\frac{(z+\pi/2)\cos z+\sin z}{\cos z - z\sin z}\right\} = \frac{-1}{-\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

وبالتالي فإنّ مجموع الرواسب:

$$\sum Res = 0 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = 0$$

مثال (2-33): حدد أقطاب التابع $f(z)=z^2/(z-1)^2(z+2)$ ثم أوجد الراسب عند كل قطب.

وبالتالي احسب التكامل $\oint_C f(z)dz$، عندما يكون C الدائرة $|z|=2.5$.

الحل:

$$\lim_{z\to -2}\{(z+2)f(z)\} = \lim_{z\to -2}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{4}{9}$$

التي هي نهاية منتهية وليست صفراً، وبالتالي يمتلك التابع قطباً بسيطاً عند $z=-2$ والراسب: $Res\, f(-2)=4/9$. أيضاً:

$$\lim_{z\to 1}\{(z-1)^2 f(z)\}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2}{z+2}=\frac{1}{3}$$

هي نهاية منتهية وليست صفراً، وبالتالي يمتلك التابع قطباً من المرتبة الثانية عند $z=1$ والراسب هو:

$$Res\, f(1)=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\{(z-1)^2 f(z)\}\right]_{z=1}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z+2}\right)\right]_{z=1}=\left[\frac{z^2+4z}{(z+2)^2}\right]_{z=1}=5/9$$

بطريقة أخرى بكتابة $z=1+t$:

$$f(z)=\frac{(1+t)^2}{t^2(3+t)}=\frac{1}{3t^2}(1+t)^2\left(1+\frac{t}{3}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{3t^2}(1+t)^2\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{9}-\frac{t^3}{27}+\cdots\right)=\frac{1}{3t^2}\left(1+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}t^2-\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{3t^2}+\frac{5}{9t}+\frac{4}{27}-\cdots\Longrightarrow Res\, f(1)=\text{coefficient of}\frac{1}{t}=\frac{5}{9}.$$

واضح أنّ $f(z)$ تابع تحليلي على الدائرة $|z|=2.5$ وعند جميع النقاط داخل الدائرة باستثناء القطبين $z=-2$ و $z=1$، وبالتالي حسب نظرية الرواسب:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i[Res\, f(-2)+Res\, f(1)]=2\pi i\left[\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right]=2\pi i$$

مثال (34-2): أوجد الراسب للتابع $f(z)=z^3/[(z-1)^4(z-2)(z-3)]$ عند أقطابه وبالتالي احسب التكامل $\oint_C f(z)dz$ حيث C هو الدائرة $|z|=2.5$.

الحل: إنّ الأقطاب للتابع $f(z)$ تعطى من $(z-1)^4(z-2)(z-3)=0$. فيكون $z=1$ قطباً من المرتبة الرابعة، بينما $z=2$ و $z=3$ أقطاب بسيطة.

$$Res\, f(1)=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left\{(z-1)^4\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}\right\}_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}\left\{\frac{z^3}{(z-2)(z-3)}\right\}_{z=1}=\frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}\left[z+5-\frac{8}{z-2}+\frac{27}{z-3}\right]_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{6}\left[-8\frac{(-1)^3\,3!}{(z-2)^4}+\frac{27\,(-1)^3\,3!}{(z-3)^4}\right]_{z=1}=-\left[-8+\frac{27}{16}\right]=\frac{101}{16}.$$

$$Res\, f(2)=\lim_{z\to 2}\left\{(z-2)\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}\right\}=\lim_{z\to 2}\left\{\frac{z^3}{(z-1)^4(z-3)}\right\}=$$

$$=\frac{8}{(1)^4(-1)}=-8$$

$$Res\, f(3) = \lim_{z\to 3}\left\{(z-3)\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)(z-3)}\right\} = \lim_{z\to 3}\left\{\frac{z^3}{(z-1)^4(z-2)}\right\} =$$
$$= \frac{27}{(2)^4\cdot 1} = \frac{27}{16}$$

إنّ القطب $z=3$ يقع خارج الدائرة C، وبالتالي:

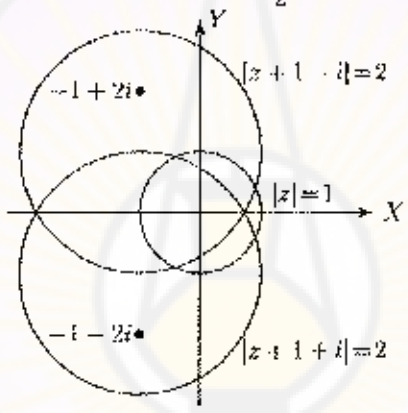
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[Res\, f(1) + Res\, f(2)] = 2\pi i\left\{\frac{101}{16} - 8\right\} = -\frac{27\pi i}{8}.$$

مثال (2-35): احسب التكامل الآتي: $\oint_C \frac{z-3}{z^2+2z+5}dz$

حيث إن C هو الدائرة: $(i)\ |z|=1, \quad (ii)\ |z+1-i|=2, \quad (iii)\ |z+1+i|=2$

الحل: إن أقطاب التابع $f(z) = (z-3)/(z^2+2z+5)$ تعطى بالمعادلة الآتية:

$$z^2+2z+5=0 \Rightarrow z = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = -1\pm 2i$$



الشكل (2-25).

(i) إنّ كلا القطبين $z=-1+2i$ و $z=-1-2i$ تنتمي لخارج الدائرة $|z|=1$. وبالتالي التابع $f(z)$ تحليلي في كل النقاط ضمن C، وبالتالي حسب نظرية كوشي نجد أنّ:

$$\oint_C \frac{z-3}{z^2+2z+5}dz = 0.$$

(ii) إنّ القطب $z=-1+2i$ ينتمي لداخل الدائرة $C: |z+1-i|=2$. وبالتالي التابع $f(z)$ تحليلي في كل النقاط ضمن C ما عدا هذا القطب، وبالتالي نجد أنّ:

$$Res\, f(-1+2i) = \lim_{z\to -1+2i}\{[(z-(-1+2i)]f(z)\} =$$
$$= \lim_{z\to -1+2i}\frac{(z+1-2i)(z-3)}{z^2+2z+5} = \lim_{z\to -1+2i}\frac{z-3}{z+1+2i} = \frac{-4+2i}{4i} = i+\frac{1}{2}$$

وبالتالي حسب نظرية كوشي نجد أنّ:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{z-3}{z^2+2z+5}dz = 2\pi i\left(i+\frac{1}{2}\right) = \pi(i-2).$$

(iii) إنّ القطب $z=-1-2i$ يقع داخل الدائرة $C:|z+1+i|=2$. وبالتالي التابع $f(z)$ تحليلي في كل النقاط ضمن C ما عدا هذا القطب، وبالتالي نجد أنّ:

$$Res\, f(-1-2i) = \lim_{z\to -1-2i}\{[z-(-1-2i)]f(z)\} =$$

$$= \lim_{z\to -1-2i}\frac{(z+1+2i)(z-3)}{z^2+2z+5} = \lim_{z\to -1-2i}\frac{z-3}{z+1-2i} = \frac{-4-2i}{-4i} = -i+\frac{1}{2}$$

وبالتالي حسب نظرية كوشي نجد أنّ:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{z-3}{z^2+2z+5}dz = 2\pi i\, Res\, f(-1-2i) = 2\pi i\left(-i+\frac{1}{2}\right) = \pi(2+i).$$

مثال (2-36):

أوجد قيمة التكامل $\oint_C \frac{e^z}{\cos \pi z}dz$ حيث إن C هو الدائرة الواحدية $|z|=1$.

الحل: إنّ $f(z)=e^z/\cos\pi z$ تملك أقطاباً بسيطة عند: $z=\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \cdots$.

من جميع هذه الأقطاب فقط القطبان $z=-1/2$، و$z=1/2$ يقعان إلى داخل الدائرة الواحدية $|z|=1$.

$$Res\, f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to 1/2}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)f(z)\right] = \lim_{z\to 1/2}\left\{\frac{(z-1/2)e^z}{\cos\pi z}\right\} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 1/2}\left\{\frac{(z-1/2)e^z+e^z}{-\pi\sin\pi z}\right\} = \frac{e^{1/2}}{-\pi}$$

$$Res\, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to -1/2}\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z)\right] = \lim_{z\to -1/2}\left\{\frac{(z+1/2)e^z}{\cos\pi z}\right\} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -1/2}\left\{\frac{(z+1/2)e^z+e^z}{-\pi\sin\pi z}\right\} = \frac{e^{-1/2}}{\pi}$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{e^z}{\cos\pi z}dz = 2\pi i\left\{Res\, f\left(\frac{1}{2}\right)+Res\, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = 2\pi i\left(\frac{e^{1/2}}{-\pi}+\frac{e^{-1/2}}{\pi}\right) =$$

$$= -4i\left(\frac{e^{1/2}-e^{-1/2}}{2}\right) = -4i\sinh\frac{1}{2}.$$

مثال (2-37): أوجد قيمة التكامل $\oint_C \tan z\,dz$ حيث إن C هو الدائرة $|z|=2$.

الحل: إنّ أقطاب التابع $f(z)=\sin z/\cos z$ تعطى بالعلاقة: $\cos z=0$ أي أنّ:

$$z = \pm\pi/2, \quad \pm 3\pi/2, \quad \pm 5\pi/2, \quad \cdots$$

من هذه الأقطاب $z = \pi/2$ و $z = -\pi/2$ فقط الموجودة في الدائرة المعطاة. باستخدام الصيغة (71) لحساب الراسب نجد أنّ:

$$Res\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to} \frac{\sin z}{\frac{d}{dz}(\cos z)} = \lim_{z\to\pi/2}\left(\frac{\sin z}{-\sin z}\right) = -1$$

$$Res\, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to-\pi/2} \frac{\sin z}{\frac{d}{dz}(\cos z)} = \lim_{z\to-\pi/2}\left(\frac{\sin z}{-\sin z}\right) = -1$$

وبالتالي حسب نظرية الرواسب نجد أنّ:

$$\oint_C \tan z\, dz = 2\pi i\{Res\, f(\pi/2) + Res\, f(-\pi/2)\} = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i.$$

مثال (2-38):

أوجد قيمة التكامل $\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)^2(z-2)}\, dz$ حيث إن C هو الدائرة $|z| = 3$.

الحل:

إنّ التابع $\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)^2(z-2)}$ تحليلي في الدائرة $|z| = 3$، باستثناء الأقطاب: $z = 1$ و $z = 2$. بما أنّ $z = 1$ قطب من المرتبة الثانية فإنّ:

$$Res\, f(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\{(z-1)^2 f(z)\}\right]_{z=1} = \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}\right)\right]_{z=1} =$$

$$= \left[\frac{(z-2)(2\pi z \cos \pi z^2 - 2\pi z \sin \pi z^2) - (\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2)}{(z-2)^2}\right]_{z=1} =$$

$$= (-1)(-2\pi) - (-1) = 2\pi + 1$$

$$Res\, f(1) = \lim_{z\to 2}\{(z-2)f(z)\} = \lim_{z\to 2} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)^2} = 1 \Rightarrow$$

وبالتالي حسب نظرية الرواسب:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\{Res\, f(1) + Res\, f(2)\} = 2\pi i(2\pi + 1 + 1) = 4\pi(\pi + 1)i.$$

7-2 حساب تكاملات حقيقية معتلة

هناك العديد من التكاملات الحقيقية المعتلة (غير المنتهية) يمكن حسابها باستخدام نظرية الرواسب لاختيار التكامل الصحيح. تتكون حواف المنطقة المختارة (محيط) من خطوط مستقيمة وأقواس دوائر.

1-7-2 تكاملات حول الدائرة الواحدية

لحساب تكامل من الشكل $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$، حيث إنّ التابع المكامل هو تابع كسري من التوابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ يمكن أن تحسب بتعويض $z=e^{i\theta}$. فيكون:

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

عندما يأخذ التكامل الشكل $\int_C g(z)dz$ ، حيث إنّ $g(z)$ تابع كسري لـ z والمنحني C هو الدائرة الواحدية $|z|=1$.

وبالتالي فإنّ التكامل يساوي جداء $2\pi i$ في مجموع الرواسب لأقطاب التابع $g(z)$ الموجودة ضمن المنحني C.

مثال (2-39): أثبت أن:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi a^2}{1-a^2},\qquad (a^2<1)$$

الحل: لنضع $z=e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=dz/iz, \cos\theta=(1/2)(z+1/z)$، ويكون:

$$\cos 2\theta=\frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\Rightarrow I=\int_C\frac{(1/2)(z^2+1/z^2)}{1-a(z+1/z)+a^2}\cdot\frac{dz}{iz}=$$

$$=\frac{1}{2i}\int_C\frac{(z^4+1)dz}{z^2(z-az^2-a+a^2z)}=\frac{1}{2i}\int_C\frac{(z^4+1)dz}{z^2(z-a)(1-az)}=\int_C f(z)dz$$

حيث إنّ C هو الدائرة الواحدية $|z|=1$.

إنّ التابع $f(z)$ يمتلك قطبين بسيطين $z=a$، و $z=1/a$ ويمتلك قطباً من المرتبة الثانية $z=0$، من هذه الأقطاب فقط $z=0$ و $z=a$ يقع ضمن الدائرة الواحدية.

$$Res\, f(a)=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]=\frac{1}{2i}\lim_{z\to a}\left[\frac{z^4+1}{z^2(1-az)}\right]=\frac{a^4+1}{2ia^2(1-a^2)},$$

$$Res\, f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2f(z)]=\frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+1}{z-az^2-a+a^2z}\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\frac{(z-az^2-a+a^2z)(4z^3)-(z^4+1)(1-2az+a^2)}{(z-az^2-a+a^2z)^2}=-\frac{1+a^2}{2ia^2}$$

$$I=2\pi i[Res\, f(a)+Res\, f(0)]=2\pi i\left[\frac{a^4+1}{2ia^2(1-a^2)}-\frac{1+a^2}{2ia^2}\right]=\frac{2\pi a^2}{1-a^2}.$$

مثال (2-40): باستخدام التكامل حول الدائرة الواحدية، أوجد التكامل الآتي:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$$

الحل:

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\Rightarrow$$

$$\cos 3\theta=\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\int_C\frac{z^3+1/z^3}{5-2(z+1/z)}\cdot\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{2i}\int_C\frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)}dz=$$

$$=-\frac{1}{2i}\int_C\frac{(z^6+1)dz}{z^3(2z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2i}\int_C f(z)dz\ ;\quad C:|z|=1$$

إنّ التابع $f(z)$ يمتلك قطباً من المرتبة الثالثة عند $z=0$، ويمتلك قطبين بسيطين $z=2$، و$z=1/2$.

من هذه الأقطاب فقط $z=0$ و$z=1/2$ يقع ضمن الدائرة الواحدية.

$$Res\,f(1/2)=\lim_{z\to 1/2}\frac{(z-1/2)(z^6+1)}{(2z-1)(z-2)}=\lim_{z\to 1/2}\left\{\frac{z^6+1}{2z^3(z-2)}\right\}=-\frac{65}{24}$$

$$Res\,f(0)=\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-0)^n f(z)]\right\}_{z=0}\ ;\quad n=3\Rightarrow$$

$$Res\,f(0)=\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^6+1}{2z^2-5z+2}\right)\right\}_{z=0}=$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{(2z^2-5z+2)6z^5-(z^6+1)(4z-5)}{2(2z^2-5z+2)^2}\right]_{z=0}=$$

$$=\frac{d}{dz}\left[\frac{8z^7-25z^6+12z^5-4z+5}{2(2z^2-5z+2)^2}\right]_{z=0}=$$

$$=\left[\frac{(2z^2-5z+2)^2(56z^6-150z^5+60z^4-4)-(8z^7-25z^6+12z^5-4z+5)(2)(2z^2-5z+2)(4z-5)}{2(2z^2-5z+2)^4}\right]_{z=0}$$

$$=\frac{4(-4)-5(-20)}{2\times 16}=\frac{84}{32}=\frac{21}{8}\Rightarrow$$

$$I=-\frac{1}{2i}\{2\pi i\,[Res\,f(1/2)+res\,f(0)]\}=-\pi\left[-\frac{65}{24}+\frac{21}{8}\right]=-\pi\left(-\frac{1}{12}\right)=\pi/12$$

2-7-2 تكاملات حول نصف دائرة

لإيجاد قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$، نعدّ التكامل من الشكل $\int_C f(z)dz$، حيث إنّ C هو المنحني المؤلف من نصف الدائرة $C_R:|z|=R$ مع القطر الذي يغلقها.

نفرض أن $f(z)$ لا يملك نقاطاً شاذة على المحور الحقيقي، نجد باستخدام نظرية الرواسب:

$$\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum Res\, f(a).$$

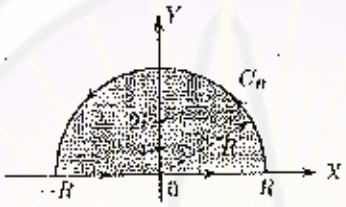
وفي النهاية، بجعل R تسعى إلى ∞، نجد قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$، وذلك بشرط أن يسعى التكامل $\int_{C_R} f(z)dz \to 0$ إلى الصفر عندما تسعى R إلى ∞.

مثال (41-2): أوجد قيمة التكامل: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

الحل: لنعدّ التكامل:

$$\int_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \int_C f(z)dz \qquad (i)$$

حيث إنّ C هو المنحني المؤلف من نصف الدائرة $C_R: |z| = R$ مع القطر الذي يغلقها من المحور الحقيقي من $-R$ إلى R، كما في الشكل (2-26).



الشكل (2-26).

إن التابع المكامل يملك أقطاباً بسيطة عند: $z = \pm i,\ z = \pm 2i$ منها قطبان فقط $z = i$ و $z = 2i$ يتمان إلى داخل C. وباستخدام نظرية الرواسب:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i[Res\, f(i) + Res\, f(2i)] = 2\pi i\left[\lim_{z\to i}(z-i)f(z) + \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{i^2}{2i(i^2+4)} + \frac{4i^2}{(4i^2+1)(4i)}\right] = 2\pi i\left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad (ii)$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \qquad (iii)$$

الآن لنجعل $R \to \infty$، حيث إن التكامل الثاني في (iii) يختفي (ينعدم). لذلك من أجل أية نقطة على C_R حيث $|z| \to \infty$ فإنّ التابع:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{(1+z^{-2})(1+4z^{-2})}$$

يتناقص لأن مثل $1/z^2$ ويسعى إلى الصفر، بينما طول C_R يزداد حسب z. نستنتج أنّ:

$$\lim_{|z|\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

وبالتالي من (i) و(ii) و(iii) نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\pi}{3}$$

مثال (42-2): أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx$

الحل: لنعدّ التكامل: $\int_C\frac{e^{laz}}{z^2+1}dz=\int_C f(z)dz$

حيث إنّ C هو المنحني المؤلف من نصف الدائرة C_R التي نصف قطرها R وجزء من المحور الحقيقي من $-R$ إلى R، كما في الشكل السابق (26-2).

إنّ التابع المكامل يملك قطبين بسيطين عند $z=i$ و $z=-i$، حيث إنّ $z=i$ هو الوحيد الذي ينتمي للداخل C. وباستخدام نظرية الرواسب:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\,Res\,f(i)=2\pi i\lim_{z\to i}[(z-i)f(z)]=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iaz}}{z^2+1}=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{laz}}{z+i}=2\pi i\frac{e^{-a}}{2i}=\pi e^{-a}\qquad (i)\Rightarrow$$

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz\qquad (ii)$$

$$|z|=R\ \text{على}\ C_R\Rightarrow|z^2+1|\geq R^2-1,\quad \because\ |z_1+z_2|>|z_1|-|z_2|$$

$$|e^{laz}|=|e^{la(x+iy)}|=|e^{lax}\cdot e^{-ay}|=e^{-ay}<1;\qquad [\because\ y>0]$$

$$\therefore\quad\left|\frac{e^{laz}}{z^2+1}\right|=|e^{laz}|\cdot\frac{1}{|z^2+1|}<1\cdot\frac{1}{R^2-1}\Rightarrow$$

$$\int_{C_R}f(z)dz=\left|\int_{C_R}\frac{e^{laz}}{z^2+1}dz\right|<\int_{C_R}\frac{1}{R^2-1}|dz|<\frac{\pi R}{R^2-1}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\qquad (iii)$$

وبالتالي من (i) و (ii) و (iii) نحصل على:

$$\pi e^{-a}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx+0\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{lax}}{x^2+1}dx=\pi e^{-a}$$

وبمساواة القسم الحقيقي للطرفين نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx=\pi e^{-a}$$

وبما أنّ التابع $\cos ax/(x^2+1)$ هو تابع زوجي بالنسبة إلى x، نحصل على:

$$2\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx=\pi e^{-a}\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}dx=\frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

3-7-2 تكاملات حول محيط مستطيل

مثال (43-2): أوجد قيمة التكامل: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx\ ;\ a\in\mathbb{R}$

الحل: لنحدّ التكامل:

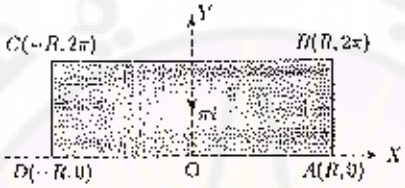
$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{e^z+1}dz = \int_C f(z)dz$$

حيث إنّ C هو المستطيل $ABCD$ الذي رؤوسه في النقاط $(R,0)$ و$(R,2\pi)$ و$(-R,2\pi)$ و$(-R,0)$ حيث R عدد حقيقي موجب، انظر الشكل (2-27).

إنّ التابع $f(z)$ يملك عدداً منتهياً من الأقطاب تعطى بالعلاقة:

$$e^z = -1 = e^{(2n+1)\pi i} \Rightarrow z = (2n+1)\pi i \ ; \ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

القطب الوحيد الموجود داخل المستطيل هو $z = \pi i$.



الشكل (2-27).

وحسب نظرية البواقي نجد أنّ:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \, Res\, f(\pi i) = 2\pi i \left[e^{\pi z}/\frac{d}{dz}(e^z+1)\right]_{z=\pi i} = 2\pi i \frac{e^{\pi^2 i}}{e^{\pi i}} = -2\pi i\, e^{\pi^2 i} \qquad (i)$$
$$[\because \ e^{\pi i} = -1]$$

أيضاً لدينا:

$$\int_C f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz + \int_{DA} f(z)dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} f(R+iy)idy + \int_R^{-R} f(x+2\pi i)dx + \int_{2\pi}^0 f(-R+iy)idy + \int_{-R}^R f(x)dx$$

لأنّ $z = R+iy$ على طول AB و$z = x+2\pi i$ على طول DC، و$z = -R+iy$ على طول CD، و$z = x$ على طول DA. وبالتالي:

$$\int_C f(z)dz = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{\pi(R+iy)}}{e^{R+iy}+1}dy - \int_{-R}^R \frac{e^{\pi(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i}+1}dx - i\int_0^{2\pi} \frac{e^{\pi(-R+iy)}}{e^{-R+iy}+1}dy$$
$$+ \int_{-R}^R \frac{e^{\pi x}}{e^x+1}dx \qquad (ii)$$

ونعلم من أجل أي عددين عقديين z_1, z_2 أنّه إذا كان:

$$|z_1| \geq |z_2| \Rightarrow |z_1+z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

لذلك فإنّ:

$$\left|e^{R+iy}+1\right| \geq e^R - 1, \qquad \left|e^{a(R+iy)}\right| = e^{aR}$$

من أجل حساب التكامل الأول في (ii) نجد أنّ:

$$\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy}+1}\right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad ; \quad [\because \quad a<1]$$

بشكل مشابه، من أجل حساب التكامل الثالث في (ii) نجد أنّ:

$$\left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{e^{-R+iy}+1}\right| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad ; \quad [\because \quad a>0]$$

بما أنّه عندما $R \to \infty$، فإنّ التكامل الأوّل والثالث في (ii) يتقاربان من الصفر، نجد أنّ:

$$\int_C f(z)dz = -e^{2a\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx =$$

$$= (1 - e^{2a\pi i})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx \qquad (iii)$$

من (i) و(iii) نحصل على:

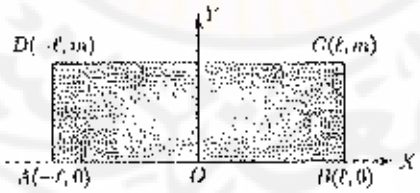
$$(1 - e^{2a\pi i})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = -2\pi i\, e^{a\pi i}$$

بأخذ الجزء الحقيقي للطرفين نجد أنّ:

$$(1-\cos 2a\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = 2\pi \sin a\pi \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

مثال (2-44): أثبت أنّ: $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2mx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-m^2}$

الحل: لتكامل التابع $f(z) = e^{-z^2}$ على محيط المستطيل $ABCD$ الذي رؤوسه في النقاط $A(-\ell,0)$ و$B(\ell,0)$ و$C(\ell,m)$ و$D(-\ell,m)$ حيث ℓ عدد حقيقي موجب، انظر الشكل (2-28). إنّ التابع $f(z)$ لا يملك أقطاباً داخل المستطيل، لذلك فإنّ:



الشكل (2-28).

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz + \int_{DA} f(z)dz = 0 \qquad (i)$$

حيث إنّ $z = x$ على طول AB و $z = \ell + iy$ على طول BC، و $z = x + im$ على طول CD، و $z = -\ell + iy$ على طول DA. وبالتالي (i) تصبح:

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{-x^2}dx + \int_0^m e^{-(\ell+iy)^2}\, i\, dy + \int_{\ell}^{-\ell} e^{-(x+im)^2}dx + \int_m^0 e^{-(-\ell+iy)^2}\, i\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\ell}^{\ell} e^{-x^2}dx = \int_{-\ell}^{\ell} e^{-x^2-2imx+m^2}dx + \int_0^m e^{-\ell^2-2i\ell y+y^2}\, i\, dy -$$

$$- \int_0^m e^{-\ell^2+2i\ell y+y^2}\, i\, dy = 0 \qquad (ii)$$

الآن عندما $\ell \to \infty$، عندئذٍ يصبح التكاملان الأخيران:

$$= ie^{-\ell^2}\int_0^m e^{y^2}\left(e^{-2i\ell y} - e^{2i\ell y}\right)dy = 2e^{-\ell^2}\int_0^m e^{y^2}\sin 2\ell y\, dy \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$$

لأنّه عندما $\ell \to \infty$ فإنّ $e^{-\ell^2} \to 0$ و $\sin 2\ell y$ محدود، وبالتالي (ii) تصبح:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - e^{m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\cos 2mx - i\sin 2mx)dx = 0$$

بأخذ الجزء الحقيقي للطرفين نجد أنّ:

$$e^{m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2mx\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2mx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\, e^{-m^2}$$

4-7-2 تكاملات تملك على محيط المنحني المكامل عليه أقطاباً على المحور الحقيقي

حتى الآن عددنا الحالات التي لا تملك أقطاباً على المحور الحقيقي. ففي حال امتلاك التابع المكامل قطباً بسيطاً على المحور الحقيقي؛ نحذفه من المنطقة المكامل عليها بتحويل المحيط عنها: (أي يمكن رسم نصف دائرة صغيرة مركزها عند القطب)، والمثال الآتي يوضّح ذلك.

مثال (45-2): أوجد قيمة التكامل: $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x}dx \quad ; \quad m > 0$

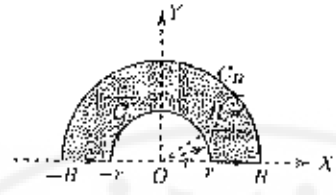
الحل: لنعتبر التكامل $\int_C (e^{miz}/z)dz = \int_C f(z)dz$ حيث إنّ C مؤلف من:

1- المحور الحقيقي من r إلى R.

2- نصف الكرة العلوي $C_R: |z| = R$.

3- المحور الحقيقي من $-R$ إلى $-r$.

4- نصف الكرة العلوي $C_r:|z|=r$. انظر الشكل (2-29).



الشكل (2-29)

بما أنّ $f(z)$ لا تملك نقاطاً شاذة داخل C (إنه يملك نقطة شاذة عند القطب البسيط $z=0$ الذي قد حذف برسم القنحي C_r)، وبالتّالي حسب نظرية كوشي:

$$\int_r^R f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-R}^{-r} f(x)dx+\int_{C_r} f(z)dz=0 \qquad (i)$$

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{imR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}\cdot Rie^{i\theta}d\theta \qquad \left[\because \quad z=Re^{i\theta}\right]$$

$$=i\int_0^{\pi} e^{imR(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta$$

وبما أنّ:

$$\left|e^{imR(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|=\left|e^{-mR\sin\theta+imR\cos\theta}\right|=e^{-mR\sin\theta}\Longrightarrow$$

$$\therefore \quad \left|\int_{C_R} f(z)dz\right|\le\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}d\theta=$$

$$=2\int_{\theta}^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}d\theta \quad \left[\because \quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\sin\theta}{\theta}\ge\frac{2}{\pi}\right]=\frac{\pi}{mR}(1-e^{-mR})\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

$$\int_{C_r} f(z)dz=i\int_{\pi}^{0} e^{imr(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta\xrightarrow[r\to 0]{}i\int_{\pi}^{0}d\theta=-i\pi$$

بما أنه عندما $r\to 0$ و $R\to\infty$ نحصل من (i) على:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx+0+\int_{-\infty}^{0} f(x)dx-i\pi=0\Longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=i\pi\Longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x}dx=i\pi \qquad (ii)$$

بمساواة الجزأين التخيليين لنطرفين نجد أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\pi\Longrightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

ملاحظة: بمساواة الجزأين الحقيقيين لطرفي (ii) نجد أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x} dx = 0$$

مثال (2-46): أثبت أنّ: $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad ; \quad 0 < p < 1$

الحل: لتكامل التّابع: $f(z) = z^{p-1}/(1+z)$، على المنحني المؤلف من الدائرتين α وγ اللتين نصفا قطريهما a وR ومن القطعتين المستقيمتين AB وFG على طول المحور الحقيقي OX، انظر الشكل (2-30). توجد نقطة شاذّة عند القطب البسيط $z = -1$ الّذي هو داخل المنحني السّابق.

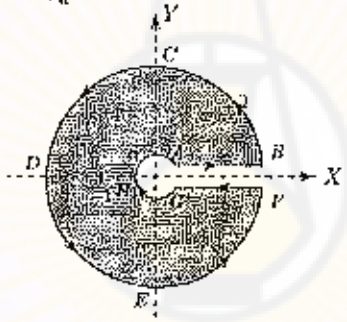
$$\therefore \quad Res\, f(-1) = \lim_{z \to -1} (1+z) \cdot \frac{z^{p-1}}{1+z} = \lim_{z \to -1} z^{p-1} = (-1)^{p-1} = e^{i\pi(p-1)}$$

$$\Rightarrow \int_{AB} f(z)dz + \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{FG} f(z)dz + \int_{\alpha} f(z)dz = 2\pi i\, e^{i\pi(p-1)} \quad (i)$$

على طول AB : $z = x$ وعلى طول FG : $z = xe^{2\pi i}$ وبالتّالي:

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{FG} f(z)dz = \int_a^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_R^a \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}} e^{2\pi i} dx =$$

$$= \int_a^R \frac{x^{p-1}}{1+x} \left[1 - e^{2\pi i(p-1)}\right] dx$$



الشكل (2-30).

على الدّائرة γ : $z = Re^{i\theta}$، لذلك:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}}{1+Re^{i\theta}} Re^{i\theta}\, i\, d\theta$$

من أجل قيمة كبيرة لـ R، فإنّ التّابع المكامل من المرتبة $R^{p-1} \cdot R/(1+R)$، وإنّ:

$$R^{p-1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \quad ; \quad [\because \quad 0 < p < 1]$$

على الدّائرة α : $z = ae^{i\theta}$، لذلك:

$$\int_{\alpha} f(z)dz = \int_{2\pi}^{0} \frac{(ae^{i\theta})^{p-1}}{1+ae^{i\theta}} ae^{i\theta}\, i\, d\theta$$

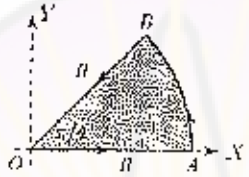
ومن أجل دائرة α صغيرة جداً، فإنّ التابع المكامل من المرتبة a^p، الذي يسعى إلى الصفر عندما $a \to 0$. $(\because \ p > 0)$، وعند أخذ النهاية عندما $a \to 0$ و $R \to \infty$ فإنّ (I) يعطي:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\left|1 - e^{2\pi i(p-1)}\right|dx = 2\pi i\, e^{i\pi(p-1)} \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i\, e^{i\pi(p-1)}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i\, e^{i\pi p}(-1)}{1 - e^{2\pi i p}(1)} = \frac{2i \cdot \pi}{e^{i p\pi} - e^{-ip\pi}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

مثال (47-2): أثبت أنّ: $\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$

الحل: لنعدّ التكامل $\int_C e^{-z^2}dz$ حيث C يتألف من المحور الحقيقي من المبدأ O إلى النقطة A، وجزء (قوس) الدائرة AB التي نصف قطرها R والمستقيم $\theta = \pi/4$، انظر الشكل (31-2).



الشكل (31-2).

إنّ التابع e^{-z^2} لا يملك نقاط شاذّة داخل المنحني C. وبالتالي:

$$\therefore \int_{OA} e^{-z^2}dz + \int_{AB} e^{-z^2}dz + \int_{BO} e^{-z^2}dz = 0 \qquad (I)$$

على طول OA: $z = x$، وعلى طول AB: $z = Re^{i\theta}$ و على طول BO: $z = re^{i\pi/4}$، و $z^2 = r^2 e^{i\pi/2} = ir^2$، فيكون:

$$\therefore \int_{OA} e^{-z^2}dz = \int_0^R e^{-x^2}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \int_{AB} e^{-z^2}dz = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} \cdot Re^{i\theta}\, i\, d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\left[\because \ e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\right]$$

$$\therefore \int_{BO} e^{-z^2}dz = \int_R^0 e^{-ir^2} \cdot e^{i\pi/4}dr =$$

$$= -\int_0^R e^{-ix^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} -\int_0^\infty (\cos x^2 - i\sin x^2)\frac{1+i}{\sqrt{2}}dx$$

بالتعويض في (I)، نجد أنّ:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 - \int_0^\infty (\cos x^2 - i\sin x^2)\frac{1+i}{\sqrt{2}}dx = 0$$

بمساواة القسمين الحقيقي والتخيلي في كلا الطرفين نحصل على:

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + \sin x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi/2}, \qquad \int_0^\infty (\cos x^2 - \sin x^2)dx = 0$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi/2}}{2}$$



تمارين غير محلولة

أ- مسائل عن تحليل التوابع العقدية

1- إذا كان: $f(z)=\begin{cases} x^3y(y-ix)/(x^6+y^2) & ; \ z\neq 0 \\ 0 & ; \ z=0 \end{cases}$ برهن أنّ:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=0$$

وذلك من خلال أي سهم توجيه ولكن ليس عندما $z\to 0$ عبر المنحني $y=ax^3$.

2- برهن أنّ: $f(z)=xy+iy$ (a) تابع مستمر في أي مكان لكنّه ليس تحليلياً.

(b) $f(z)=z+2\bar{z}$ ليس تحليلياً في أي مكان من المستوي العقدي.

3- إذا كان $f(z)=u+iv$ تحليلياً، فبرهن أنّ: $|f'(z)|^2=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$.

4- أوجد قيمة الثوابت a,b,c,d,e إذا كان التابع الآتي تحليلياً.

$$f(z)=(ax^4+bx^2y^2+cy^4+dx^2-2y^2)+i(4x^3y-exy^3+4xy)$$

5- برهن أنّ z^n تحليلي، ثمّ أوجد مشتقاته.

6- حدد أياً من التوابع الآتية توابع تحليلية:

$$(i)\ 2xy+i(x^2-y^2), \qquad (ii)\ (x-iy)/(x^2+y^2), \qquad (iii)\ \cosh z$$

7- (a) حدد قيمة p حتى يكون التابع $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\tan^{-1}(px/y)$ تحليلياً.

(b) برهن أنّ: $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ توافقياً، ثم أوجد مرافقه التوافقي.

8- برهن أنّ كلاً من التابعين الآتيين ليسا تحليليين في أية نقطة. $(i)\ \bar{z}, \qquad (ii)\ |z|^2$

9- برهن أنّ $u+iv=(x-iy)/(x-iy+a)$ عندما $a\neq 0$، ليس تابعاً تحليلياً من أجل $z=x+iy$، في حين أنّ $u-iv$ تابع.

10- برهن أنّ: $f(z)=\begin{cases} xy^2(x+iy)/(x^2+y^4) & ; \ z\neq 0 \\ 0 & ; \ z=0 \end{cases}$ ليس تحليلياً عند النقطة $z=0$، مع أنه يحقق معادلتي كوشي-ريمان عند المبدأ.

11- تحقق من أنّ $f(z)=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ عندما $z\neq 0$ و $f(0)=0$ تحليلي أم لا.

12- افحص طبيعة التابع: $f(z) = x^3y^5(x+iy)/(x^4+y^{10})$ عندما $z \neq 0$ و $f(0) = 0$.

13- من أجل التابع $f(z)$ المعرف بالشكل $f(0) = 0$; $[f(z)]^2 = (\bar{z})^2/z, z \neq 0$، أثبت أنه يحقق معادلتي C-R كوشي–ريمان عند النقطة $(0,0)$، لكنّ $f(z)$ غير قابل للاشتقاق عند النقطة $(0,0)$.

14- حدد التابع التحليلي الذي قسمه الحقيقي هو:

(i) $x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$
(ii) $\cos x \cosh y$
(iii) $y/(x^2+y^2)$
(iv) $y + e^x \cos y$
(v) $e^{2x}(x\cos 2y - y\sin 2y)$
(vi) $e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$
(vii) $x\sin x\cosh y - y\cos x\sinh y$
(viii) $e^x[(x^2-y^2)\cos y - 2xy\sin y]$

15- أوجد التابع التحليلي الذي قسمه التخيلي هو:

(i) $(x-y)/(x^2+y^2)$
(ii) $-\sin x \sinh y$
(iii) $e^x \sin y$
(iv) $e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$
(v) $e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$
(vi) $\dfrac{2\sin x \sin y}{\cos 2x + \cosh 2y}$

16- أوجد التابع التحليلي $f(z) = u + iv$ إذا كان:

(i) $u - v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$
(ii) $u - v = \dfrac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^y - e^{-y}}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
(iii) $u + v = \dfrac{2\sin 2x}{e^{2y} - e^{-2y} - 2\cos 2x}$

17- في حقل الكهرباء الساكنة في المستوي xoy يعطى تابع كمونه بالعلاقة الآتية: $\varphi = 3x^2y - y^3$، أوجد تابع التدفق.

18- إذا كان تابع الكمون $\log(x^2+y^2)$، أوجد تابع التدفق والصيغة العقدية لتابع الكمون.

19- برهن أنّ $u = x^2 - y^2$ و $v = y/(x^2+y^2)$ هما تابعان توافقيان في النقطة (x,y)، لكنّهما غير مترافقين.

20- أثبت أنّ $u = e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$ تابع توافقي. أوجد مرافقه التوافقي v وعبّر عن $u+iv$ باعتباره تابعاً تحليلياً لـ z.

21- من أجل $w = \exp(z^2)$، أوجد u و v، ثم برهن أنّ المنحنيات $u(x,y) = c_1$ و $v(x,y) = c_2$ حيث c_1 و c_2 ثابتان، تتقاطع متعامدة.

22- أوجد معادلة المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات الآتية:

$(i)\ x^3y - xy^3 = c$ $(ii)\ e^x \cos y - xy = c$ $(iii)\ r^2 \cos 2\theta = c$

23- في مستوي تدفق السائل ثنائي الأبعاد، إنّ تابع التدفق ψ معطى آتياً، أوجد السرعة الكمونية φ:

$(i)\ \psi = -y/(x^2 + y^2)$ $(ii)\ \psi = \tan^{-1}(y/x)$

24- أوجد التابع التحليلي $f(z) = u + iv$، إذا كان:

$(i)\ u = a(1 + \cos\theta)$ $(ii)\ v = (r - 1/r)\sin\theta, \quad r \neq 0$

25- إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً لـ z، برهن أنّ:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right\}^2 = |f'(z)|^2$$

26- إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً لـ z، برهن أنّ:

$(i)\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log|f(z)| = 0$ $(ii)\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|Re[f'(z)]|^2 = 2|f'(z)|^2$

$(iii)\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p = p^2\,|f'(z)|^2\,|f(z)|^{p-2}$

27- برهن أن $\psi = \log|(x-1)^2 + (y-2)^2|$ تابع توافقي في كامل المنطقة التي لا تحتوي على النقطة $(1,2)$. أوجد التابع φ بحيث يكون $\varphi + i\psi$ تابعاً تحليلياً من أجل المتغير العقدي $z = x + iy$. عبّر عن $\varphi + i\psi$ باعتباره تابعاً لـ z.

ب- مسائل عن التمثيل الهندسي للتابع $w = f(z)$

28- أوجد النقاط الثابتة للتحويل: $w = (z-1)/(z+1)$.

29- أوجد التحويل الذي ينقل النقاط $-1, i, 1$ من المستوي Z إلى $-1, i, 1$ من المستوي W على الترتيب. ثم أوجد نقاطه الثابتة.

30- أوجد تحويل ثنائي الخطية الذي ينقل النقاط $-1, i, 1$ من المستوي Z إلى $2, i, -2$ من المستوي W على الترتيب. ثم أوجد نقاطه الثابتة والحرجة.

31- أوجد تحويل ثنائي الخطية الذي ينقل النقاط $1 - 2i, 2 + i, 2 + 3i$ من المستوي Z إلى $2 + 2i, 1 + 3i, 4$ من المستوي W على الترتيب.

32- أوجد تحويل ثنائي الخطية الذي يحوّل:

(a) النقاط $z = 1, i, -1$ إلى النقاط $w = 0, 1, \infty$.

(b) النقاط $z = 0, 1, i$ إلى النقاط $w = 1 + i, -i, 2 - i$.

(c) $Re(z) > 0$ إلى داخل الدائرة الواحدية حيث إن النقاط $z = \infty, i, 0$ تتحول إلى النقاط $w = -1, -i, 1$.

33- وفق التطبيق $w = (z - 1)/(z + 1)$، أثبت أنه يتحول المستقيم $x = y$ إلى دائرة وأوجد مركزها ونصف قطرها.

34- أثبت أنه وفق تطبيق ثنائي الخطية $w = (2z + 3)/(z - 4)$، تكون صورة الدائرة $x^2 + y^2 - 4x = 0$ إلى المستقيم $4u + 3 = 0$.

35- أثبت أن الشرط لتحويل التطبيق $w = (az + b)/(cz + d)$ للدائرة $|w| = 1$ إلى خط مستقيم في المستوي Z هو أن يكون: $|a| = |c|$.

36- أثبت أن التحويل $w = i(1 - z)/(1 + z)$ يحول الدائرة $|z| = 1$ إلى المحور الحقيقي في المستوي W وداخل الدائرة $|z| < 1$ إلى النصف الأعلى للمستوي W.

37- إذا كانت z_0 تمثل نقاط النصف الأعلى للمستوي Z، أثبت أن تطبيق ثنائي الخطية $w = e^{i\alpha}\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right)$ يحول النصف الأعلى للمستوي Z إلى داخل الدائرة الواحدية التي مركزها مبدأ الإحداثيات في المستوي W.

جـ- مسائل عن التحويلات المحافظة

38- حدد المنطقة من المستوي W التي تتحول إليها كل من المناطق الآتية وفق التطبيق: $w = z^2$.

(i) الربع الأول من المستوي Z.

(ii) المنطقة المحاطة بالمستقيمات $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.

(iii) المنطقة $1 \le x \le 2$ و $1 \le y \le 2$.

(iv) الدائرة $|z - 1| = 2$.

39- أوجد معادلة التحويل الذي ينقل المنطقة المثلثية $0 \le \arg z \le \pi/3$ إلى الدائرة الواحدية $|w| \le 1$.

40- هل التحويل $w = \sqrt{z}$ محافظ في مبدأ الإحداثيات.

41- أوجد صور المناطق الآتية عند استخدام التحويل $w = 1/z$:

(a) الدائرة $|z - 2i| = 2$.

(b) خط المستقيم $y - x + 1 = 0$.

(c) القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$.

42- أثبت أنه تحت التحويل $w = 1/z$:

(a) تتحول الدائرة $x^2 + y^2 - 6x = 0$ إلى خط مستقيم في المستوي W.

(b) تتحول الدائرة $(x - 3)^2 + y^2 = 2$ إلى دائرة مركزها $(3/7, 0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}/17$.

43- أثبت أن التطبيق $w = 1/z$ يحول جميع الدوائر والخطوط المستقيمة إلى دوائر وخطوط مستقيمة في المستوي W. وأي دوائر في المستوي Z تصبح خطوطاً مستقيمة في المستوي W، وأي خطوط مستقيمة في المستوي Z تتحول تحت هذا التطبيق أيضاً إلى خطوط مستقيمة؟

44- أثبت أن التطبيق $w = z + 1/z$ يحول خط المستقيم $\arg z = \alpha$ $(|\alpha| < \alpha/2)$ إلى فرع قطع الزائد اللامركزي $\sec\alpha$.

45- أثبت أن التطبيق $w = z + (a^2 - b^2)/4z$ يحول الدائرة التي نصف قطرها $(a + b)/2$ مركزها في المبدأ، في المستوي Z إلى قطع الناقص ذي أنصاف المحاور a, b في المستوي W.

46- أثبت أن التطبيق $w = z + a^2/z$ يحول الدوائر التي مركزها المبدأ، في المستوي Z إلى محاور مركزية لقطوع ناقصية متحدة المحارق في المستوي W.

47- أثبت أن التطبيق $w = A(z + a^2/z)$ يمكن استخدامه لتمثيل تدفق سائل تام غير قابل للضغط عبر أسطوانة دورانية. أوجد أيضاً نقاط الركود.

48- أثبت أن العلاقة $u + iv = \cos(x + iy)$ تحول الشريط اللانهائي المحاط بالمستقيمات $x = c, x = d$ عندما تكون c و d بين 0 و $\pi/2$ إلى المنطقة بين فرعي القطع الزائد عندما $u > 0$.

49- برهن أن التطبيق $w = \sin z$ يحول أسرة المستقيمات $x = \text{const.}$ ثابت و$y = \text{const.}$ ثابت إلى أسرتين من قطوع زائدية متحدة المحارق.

50- ناقش أن التطبيق $w = e^z$ وأثبت أنه يحول المنطقة بين المحور الحقيقي والمستقيم الموازي له عند النقطة $y = \pi$ إلى نصف المستوي الأعلى في المستوي W.

51- ناقش بشكل كامل التطبيق $w = c\cosh z$ حيث إن c ثابت حقيقي. ما هي المسألة الفيزيائية التي يمكننا دراستها وتساعدنا لهذا التحويل.

د- مسائل عن تحويل شوارتز- كريستوفل

52- أوجد التحويل الذي ينقل الشريط نصف اللانهائي ذا العرض π والمحاط بالمستقيمين $u = 0$ و$v = \pi$ و$u = 0$ في المستوي W، إلى نصف الأعلى للمستوي Z.

53- أثبت كيفية استخدام تحويل شوارتز - كروستوفل لنقل الشريط نصف اللانهائي المحدد بالمحور الحقيقي والمستقيمين $u = \pm 1$ في المستوي W، إلى نصف الأعلى للمستوي Z.

54- أوجد معادلة التحويل الذي ينقل الشريط نصف اللانهائي في المستوي Z، حيث إن $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ و$y \ge 0$، إلى نصف المستوي W، حيث إن $v \ge 0$، وحيث إنه ينقل النقطتين $(-\pi/2, 0), (\pi/2, 0)$ من المستوي Z، إلى النقطتين $(1, 0), (-1, 0)$ على الترتيب من المستوي W.

55- أوجد معادلة التحويل الذي ينقل داخل الشريط اللانهائي المحاط بالمستقيمين $v = 0$ و$v = \pi$ في المستوي W، إلى نصف الأعلى للمستوي Z.

هـ- مسائل عن التكاملات العقدية

56- أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^{1+i} (x^2 - iy)\, dz$$

على طول المسارين: $(a)\ y = x$ و$(b)\ y = x^2$.

57- أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{1-i}^{2+i} (2x + iy + 1)\, dz$$

على طول المسارين: (i) $x = t + 1,\ y = 2t^2 - 1$ و(ii) على الخط المستقيم الواصل بين العددين العقديين: $2 + i$ ، و $1 - i$.

58- أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{1-i}^{2+3i} (z^2 + z)\, dz$$

على طول الخط الواصل بين النقطتين: $(1,-1)$ و $(2,3)$.

59- برهن أنه من أجل أي مسار واصل بين نهايتي التكامل أنّ:

$$\int_{-z}^{z+i} (z + z)^2\, dz = -\frac{i}{3}$$

60- برهن أنّ: $\int_C (z + 1)dz = 0$، حيث إنّ C محيط المربع الذي رؤوسه واقعة على النقاط: $z = 0$ و $z = 1$ و $z = 1 + i$ و $z = i$.

61- أوجد قيمة التكامل: $\int_C |z|\, dz$، حيث إنّ C محيط المنحنيات:

(i) الخط المستقيم من $z = -i$ إلى $z = i$.

(ii) النصف الأيسر للدائرة الواحدة $|z| = 1$ من $z = -i$ إلى $z = i$.

(iii) الدائرة المعطاة بالعلاقة $|z + 1| = 1$ الموصفة في اتجاه عكس عقارب الساعة.

62- أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^{1+i} (x - y + ix^2)\, dz$$

(i) على طول الخط المستقيم من $z = 0$ إلى $z = 1 + i$.

(ii) على طول المحور الحقيقي من $z = 0$ إلى $z = 1$ ومن ثم على طول الخط الموازي للمحور التخيلي من $z = 1$ إلى $z = 1 + i$.

63- برهن أنّ $\int_C dz/z = -\pi i$ أو πi: حيث إن C النصف العلوي للدائرة الواحدية $|z| = 1$ فوق المحور الحقيقي أو النصف السفلي.

64- أوجد قيمة التكامل: $\int_C (z - z^2)\, dz$، حيث إن C النصف العلوي للدائرة الواحدية $|z| = 1$ فوق المحور الحقيقي. ما قيمة هذا التكامل إذا كان C النصف السفلي للدائرة.

و – مسائل عن نظرية كوشي

65- أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\oint_C (z-a)^{-\frac{1}{2}} dz$$

حيث إنّ C، منحن بسيط مغلق والنقطة $z = a$، (i) خارج C، (ii) داخل C.

66- أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, \qquad n = 2, 3, 4, \cdots$$

حيث إنّ C، منحن مغلق يحوي النقطة $z = a$.

67- أوجد قيمة التكاملات الآتية:

(i) $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z| = 1/2$

(ii) $\oint_C \frac{e^{3z}}{(z+\pi)^3} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z-\pi| = 3$

68- استخدم علاقة كوشي التكاملية لحساب التكاملات الآتية:

(i) $\oint_C \frac{3z-5}{z^2+2z} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z| = 1$

(ii) $\oint_C \frac{z^2+1}{z(2z+1)} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z| = 1$

(iii) $\oint_C \frac{\sin \pi z + \cos \pi z}{(z-1)(z-2)} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z| = 4$

(iv) $\oint_C \frac{z^3 - 2z + 1}{(z-i)^3} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z| = 2$

(v) $\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)(z-2)^2} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z| = 3$

(vi) $\oint_C \frac{z}{z^2-3z+2} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z-2| = 1/2$

(vii) $\oint_C \frac{e^z}{(z+1)^2} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z-1| = 3$

$(viii)$ $\oint_C \frac{\log z}{(z-1)^3} dz$ حيث إنّ C، الدائرة $|z-1| = 1/2$

69- أوجد قيمة $f(2)$ و $f(3)$ إذا كان:

$$f(a)=\oint_C \frac{2z^2-z-2}{z-a}dz$$

حيث إنّ C، الدائرة $|z|=3/2$.

70- إذا كان:

$$\varphi(\zeta)=\oint_C \frac{3z^2+7z+1}{z-\zeta}dz$$

حيث إنّ C، الدائرة $|z|=2$. أوجد القيم الآتية:

$(i)\ \varphi(3)$ $(ii)\ \varphi'(1-i)$ $(iii)\ \varphi''(1-i)$

71- أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\oint_C \frac{z^3+z+1}{z^2-7z+2}dz$$

حيث إنّ C، القطع الناقص $4x^2+9y^2=1$.

ز- مسائل عن المتسلسلات العقدية

72- تحقق من نظرية كوشي من أجل تكامل z^3 المأخوذ على محيط:

(i) المستطيل الذي رؤوسه $1-$ و 1 و $1+i$ و $1+i-$.

(ii) المثلث الذي رؤوسه النقاط: $(1,2)$ و $(1,4)$ و $(3,2)$.

73- أوجد منشور التابع $(z-1)/z^2$ في متسلسلة تايلور وفق قوى $(z-1)$ وحدد منطقة التقارب.

74- أوجد الحدود الثلاثة من منشور متسلسلة تايلور للتابع $f(z)=1/(z^2+4)$، في جوار النقطة $z=-i$. ثم أوجد منطقة التقارب.

75- انشر في متسلسلة تايلور التوابع الآتية:

(i) $f(z)=(z-1)/(z+1)$ في جوار النقطة $z=1$.

(ii) $f(z)=\cos z$ في جوار النقطة $z=\pi/2$.

(iii) $f(z)=1/(z^2-z-6)$ في جوار النقطتين $z=-1$، و $z=1$.

76- انشر التوابع الآتية في متسلسلة لورانت:

(i) $f(z)=1/(z-z^2)$ من أجل $1<|z+1|<2$.

(ii) $f(z) = 1/[(z-1)(z+3)]$ من أجل $1 < |z| < 3$.

(iii) $f(z) = z/[(z-1)(z-3)]$ من أجل $|z-1| < 2$.

77- أوجد منشور التوابع الآتية في متسلسلة لوران:

(i) $f(z) = e^z/(z-1)^2$ في جوار $z = 1$.

(ii) $f(z) = e^{2z}/(z-1)^3$ في جوار النقطة الفردية (الشاذة) $z = 1$.

(iii) $f(z) = (z-1)/z^2$ من أجل $|z-1| > 1$.

(iv) $f(z) = (1-\cos z)/z^3$ في جوار $z = 0$.

78- أوجد منشور التوابع الآتية في متسلسلة لوران:

(i) $\dfrac{z^2-1}{z^2+5z+6}$ في جوار $z = 0$ في المنطقة $2 < |z| < 3$.

(ii) $\dfrac{z^2-6z-1}{(z-1)(z-3)(z+2)}$ في المنطقة $3 < |z+2| < 5$.

(iii) $\dfrac{7z^2-9z-18}{z^3-9z}$ في المنطقتين $|z| > 3$ و $0 < |z-3| < 3$.

(iv) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}$ من أجل: $0 < |z| < 1$ (a) و $1 < |z| < 2$ (b) و $1 < |z| < \sqrt{2}$ (c).

79- أوجد طبيعة النقاط الفردية (الشاذة) وموضعها للتوابع الآتية:

(i) $\dfrac{1}{z(2-z)}$ (ii) $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ (iii) $\tan\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(iv) $\dfrac{z^2-1}{(z-1)^3}$ (v) $\dfrac{e^z}{(z-1)^4}$ (vi) $\dfrac{\cot \pi z}{(z-a)^2}$

جـ- مسائل عن الرواسب

80- انشر التابع $f(z) = 1/[z^2(z-i)]$ وفق متسلسلة لوران في جوار $z = i$ ومن ثم أوجد الراسب هناك.

81- أوجد الراسب للتابع الآتي عند قطبه:

(i) $\dfrac{ze^z}{(z-1)^3}$ at $z = 1$, (ii) $\dfrac{z^2}{z^2+a^2}$ at $z = ai$

82- حدد أقطاب كلٍّ من التوابع الآتية وأوجد الراسب عند كل قطب:

$$(i)\ \frac{z^2+1}{z^2-2z}, \qquad (ii)\ \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+1)}, \qquad (iii)\ \frac{2z+4}{(z+1)(z^2+1)}$$

83- أوجد البواسب لكل من التوابع الآتية عند كل قطب:

$$(i)\ \frac{1-e^{2z}}{z^4}, \qquad (ii)\ \frac{ze^{iz}}{z^2+1}, \qquad (iii)\ \cot z$$

84- أوجد قيمة التكاملات الآتية:

(i) $\oint_C \frac{z^2+4}{(z-2)(z+3)}dz$ حيث إنّ المنحني C، (a) $|z+1|=2$، (b) $|z-2|=2$.

(ii) $\oint_C \frac{e^{2z}dz}{(z+2)(z+4)(z+7)}$ من أجل C، الدائرة $|z|=3$.

(iii) $\oint_C \frac{4z^2-4z+3}{(z-2)(z^2+4)}dz$ من أجل C، الدائرة $|z|=1$.

(iv) $\oint_C \frac{3z^2+z+1}{(z^2-1)(z+3)}dz$ من أجل C، الدائرة $|z|=2$.

(v) $\oint_C \frac{2z+1}{(2z-1)^2}dz$ من أجل C، الدائرة $|z|=1$.

(vi) $\oint_C \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$ من أجل C، الدائرة $|z+1-i|=2$.

(vii) $\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$ من أجل C، الدائرة $|z|=10$.

(viii) $\oint_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$ من أجل C، الدائرة $|z-2|=1/2$.

(ix) $\oint_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$ من أجل C، الدائرة $|z-2|=2$.

(x) $\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)^7}$ من أجل C، الدائرة $|z-i|=2$.

(xi) $\oint_C \frac{e^{-z}}{z^2}dz$ من أجل C، الدائرة $|z|=1$.

(xii) $\oint_C z^2e^{1/z}dz$ من أجل C، الدائرة $|z|=1$.

(xiii) $\oint_C \frac{e^z}{z^2+4}dz$ من أجل C، الدائرة $|z-i|=2$.

(xiv) $\oint_C \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4}$ من أجل C، الدائرة $|z|=2$.

(xvi) $\oint_C \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^3}dz$ من أجل C، الدائرة $|z| = 1$.

(xvi) $\oint_C \frac{z\sec z}{(1-z)^2}dz$ من أجل C، الدائرة $|z| = 3$.

(xvii) $\oint_C \frac{z\cos z}{(z-\pi/2)^3}dx$ من أجل C، الدائرة $|z-1| = 1$.

(xviii) $\oint_C \frac{dz}{\sinh 2z}$ من أجل C، الدائرة $|z| = 2$.

85- احصل على متسلسلة لوران للتابع $f(z) = (1/z^3)\sinh z$ ثم أوجد قيمة التكامل:

$$\oint_C \frac{z}{z^2\sinh z}dz$$

حيث إنّ: C هو الدائرة $|z-1| = 2$.

ط- مسائل عن حساب تكاملات حقيقية معتلة

86- طبّق نظرية الرواسب وخواصها لإثبات أنّ:

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\sin\theta+p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}$; $(0<p<1)$

(ii) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{\pi}{1-r^2}$

(iii) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; $(a>1)$

(iv) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{6}$

(v) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}\left[a-\sqrt{a^2-b^2}\right]$; $(0<b<a)$

(vi) $\int_0^{2\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$; $(a>0)$

(vii) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\cos\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$

(viii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a+b}$; $(a,b>0)$

(ix) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{5\pi}{12}$

(x) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(xi) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$

(xii) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$ $(xiii)$ $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{6}$

(xiv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sech}\frac{m\pi}{2}$

(xv) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (xvi) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$(xvii)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2+4x+5} = \frac{-\pi \sin 2}{e}$

$(xviii)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right);\ (a > b > 0)$

(xix) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$

اختر الجواب الصحيح أو املأ الفراغ في الأسئلة الآتية:

87- إنّ التّابع التّحليلي الوحيد من التّوابع الآتية هو:

$(i)\ f(z) = \sin z$ $(ii)\ f(z) = \bar{z}$
$(iii)\ f(z) = Im(z)$ $(iv)\ f(z) = Re(iz)$

88- إذا كان التّابع $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تحليلياً، عندئذٍ مشتقه $f'(z)$ هو:

$(i)\ \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}$ $(ii)\ \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ $(iii)\ \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial x}$

89- إذا $2x - x^2 + ay^2$ توافقي، عندئذٍ فإنّ قيمة a هي:

$(i)\ a = 1$ $(ii)\ a = 2$ $(iii)\ a = 3$ $(iv)\ a = 0$

90- إنّ التّابع التّحليلي الذي يحوّل القطاع الزّاوي $0 \le \theta \le \pi/4$ إلى النصف العلوي من المستوي العقدي هو:

$(i)\ z^4$ $(ii)\ 4z$ $(iii)\ z^8$ $(iv)\ 2\theta$

91- منطقة قطاع زاوي في المستوي العقدي معرّفة بالشّكل $0 \le \arg\theta \le \pi/4$. أي تطبيق يحوّل هذه المنطقة إلى النصف اليساري من المستوي العقدي:

$(i)\ w = z^4$ $(ii)\ w = iz^4$ $(iii)\ w = -z^4$ $(iv)\ w = -iz^4$

92- إنّ التّطبيق $w = z^3 - 2z - 3$:

(i) محافظ داخل الدّائرة $|z| = 1$. (ii) غير محافظ عند $z = 1$.

(iii) غير محافظ عند $z = -1$ و $z = 3$. (iv) محافظ على كامل المستوي العقدي.

93- إذا كان $z = re^{i\theta}$ عندئذٍ فإنّ صورة θ ثابت وفق التّطبيق $w = Re^{i\varphi} = iz^3$ هي:

$(i)\ \varphi = 3\theta$ $(ii)\ \varphi = 3\theta + \frac{\pi}{2}$ $(iii)\ \varphi = 3\theta - \frac{\pi}{2}$ $(iv)\ \varphi = \theta^3$

94- إنّ النّقاط الثّابتة للتّطبيق $w = (5z + 4)/(z + 5)$ هي:

$(i)\ 2,\ 2$ $(ii)\ 2,\ -2$ $(iii)\ -2,\ -2$ $(iv)\ -4/5,\ 5$

95- إنّ قيمة التّكامل $\int_C (4x^3dx + 3y^2z^2dy + 2y^3zdz)$ حيث C هو المسار الواصل من النّقطة $A(-1,1,0)$ إلى النّقطة $B(1,2,1)$ هو:

$(i)\ 0$ $(ii)\ 1$ $(iii)\ 8$ $(iv)\ -8$

96- إنّ قيمة التّكامل $\int_C [(3z^2 + 7z + 1)/(z + 1)]dz$ حيث C هو $|z| = 1/2$ هو:

$(i)\ 2\pi i$ $(ii)\ 0$ $(iii)\ \pi i$ $(iv)\ \pi i/2$

97- إنّ قيمة التّكامل $\int_C |(3z + 4)/z(2z + 1)]dz$ حيث C هو $|z| = 1$ هو:

$(i)\ 2\pi i$ $(ii)\ 3\pi i$ $(iii)\ 4$ $(iv)\ -4$

98- الرّاسب لتّابع عقدي ما يمكن إيجاده إذا كان القطب نقطة شاذّة معزولة:

(i) صح . (ii) خطأ (iii) خطأ جزئياً (iv) لا شيء مما سبق

99- إنّ قيمة التّكامل $\int_C (z\,dz)/\sin z$ حيث C هو $|z| = 4$ هو:

$(i)\ 2\pi i$ $(ii)\ 0$ $(iii)\ -2\pi i$ $(iv)\ 4\pi i$

100- إنّ قيمة التّكامل $\int_C \tanh z\,dz$ حيث C هو $|z| = 3$ هو:

$(i)\ 0$ $(ii)\ \pi i$ $(iii)\ 2\pi i$ $(iv)\ 4\pi i$

101- إنّ المرافق التّوافقي للتّابع $u(x,y) = 2x(1 - y)$ هو: .....

102- إنّ المرافق التّوافقي للتّابع $x^3 - 3xy^2$ هو: .....

103- المنحنيان $u(x,y) = c$ و $v(x,y) = c'$ متعامدان إذا: .....

104- إنّ قيمة التّكامل $\int_0^{1+i} z^2dz$ على طول المستقيم $y = x$ هي: .....

105- راسب التّابع $\cos z/z$ عند $z = 0$ هو: .....

106- النّقطة الحرجة للتّحويل: $w^2 = (z - a)(z - b)$ هي: .....

107- صورة الدّائرة $|z + 1| = 1$ وفق التّطبيق: $w = 1/z$ هي: .....

108- إنّ أقطاب التّابع $f(z) = (z^3 - 1)/(z^3 + 1)$ هي: $z =$ .....

109- إنّ التّابع $w = \log z$ تحليلي على كامل المستوي Z ما عدا: $z =$ .....

110- إذا كان: $f(z) = -1/(z - 1) - 2[1 + (z - 1) + (z - 1)^2 + \cdots]$ فإنّ الرّاسب للتّابع $f(z)$ عند $z = 1$ هو: .....

111- إذا كان $|z| < 1$ فإنّ نشر التّابع $\log(1 + z)$ وفق متسلسلة تايلور حول $z = 0$ هو: .....

112- إنّ قيمة التّكامل $\int_C (4z^2+z+5)/(z-4)\,dz$ حيث C المنحني المعطى بالعلاقة $9x^2+36=4y^2$ هي: .....

113- إنّ قيمة التّكامل $\int_C z^4 e^{1/z} dz$ حيث C الدّائرة $|z|=1$ هي:

$(i)\ \pi i$ $(ii)\ \pi i/12$ $(iii)\ \pi i/60$ $(iv)\ -\pi i/60$

114- إذا امتلك التّابع $f(z)$ قطباً من المرتبة الثّالثة عند النّقطة $z=a$ فإنّ: $Res[f(a)]=$ يساوي: .....

115- إنّ قيمة التّكامل $\int_C (e^z dz)/(z-3)^2$ حيث C الدّائرة $|z|=2$ هي: .....

116- إنّ شرطي كوشي-ريمان C-R للتّابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ليكون تحليلياً هما: .....

117- إذا كان $f(z)$ تحليلياً في منطقة متصلة وبسيطة D، وكان C أي منحني (مسار) مغلق فيها، عندئذٍ $\int_C f(z)dz=$ يساوي: .....

118- المرافق التوافقي للتّابع $e^x\cos y$ هو: .....

119- إنّ قيمة التّكامل $\int_C \cos z\,dz$ حيث C الدّائرة $|z|=1$ هي: .....

120- النّقاط الشّاذّة للتّابع $f(z)=z/(z-2)^3$ هي: .....

121- إنّ التّابع $f(z)=\bar{z}$ تحليلي عند: .....

122- إنّ شرطي كوشي-ريمان C-R لتابع عقدي ليكون تحليلياً بالإحداثيات القطبية هما: .....

123- إذا كان C الدائرة $|z-a|=r$ فإنّ: $(n\in\mathbb{Z}\wedge n\neq -1)$; $\int_C (z-a)^n dz=$ يساوي: .....

124- المنطقة المتصلة البسيطة هي: .....

125- التّابع الهولوموفياك هو: .....

126- إنّ أقطاب التّابع $f(x)=z^2/(z-1)^2(z+2)$ هي: $z=$ .....

127- إنّ قيمة التّكامل $\int_C |z|dz$ حيث C هو المنحني الممثل بالقطعة المستقيمة من النّقطة $z=-i$ إلى النّقطة $z=i$، هي: .....

128- إنّ نشر التّابع $\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)$ في متسلسلة تايلور في المنطقة $|z|<1$، هو: .....

129- إنّ النّقاط الثّابتة للتّحويل $w=(1+z)/(1-z)$، هي: $z=$ .....

130- إنّ الرّاسب عند $z=0$ للتّابع $\frac{1+e^z}{z\cos z+\sin z}$ هو: .....

131- إنّ التّحويل $w=Cz$ يتألف من: .....

132- إنّ الراسب للتّابع $f(z)$ عند قطب له هو: .....

133- إنّ قيمة التّكامل $\int_C dz/(z-1)$؛ حيث C هو الدّائرة $|z| = 2$، هي: .....

134- إذا كان C هو الدّائرة $|z| = 1/2$، فإنّ: $\int_C \frac{z^2-z+1}{z-1} dz =$ .....

135- النّقاط الشّاذّة للتّابع $\frac{\cos \pi z}{(z-3)(z-2)}$ هي: .....

136- إنّ نشر تايلور للتّابع $\frac{1}{z-2}$ في المنطقة $|z| < 1$ هو: .....

137- $\lim_{z\to 0}[(iz^3 + iz - 1)/(2z + 3)(z-1)^2] =$ .....

138- تنصّ نظرية كوشي التّكاملية على: .....

139- أقطاب التّابع $(z-1)^2/z(z-2)^2$ هي: $z =$ .....

140- النّقاط الحرجة للتّحويل $w = z + 1/z$ هي: .....

141- قيمة التّكامل $\int_C dz/(2z-3)$، حيث C الدّائرة: $|z| = 1$، هي: .....

142- جذور والنقاط الشّاذّة التّابع $(z^2+1)/(1-z^2)$ هي: .....

143- راسب التّابع $\tan z$ عند $z = \pi/2$، هو: .....

144- النّقاط الشّاذّة للتّابع $e^{z^{-1}}$ عند $z = 0$، هي من النّوع: .....

145- $Res[e^{1/z}]_{z=0} =$ .....

146- نشر تايلور للتّابع $\sin z$ حول $z = \pi/4$ هو: .....

147- صورة الدّائرة $|z| = 2$ وفق $w = z + 3 + 2i$ هي: .....

148- أقطاب التّابع $\cot z$ هي: .....

149- إذا كان a قطباً بسيطاً، عندئذٍ $Res[\varphi(z)/\psi(z)]_{z=a} =$ .....

150- تحويل ثنائي الخطية دائماً يحوّل الدّوائر إلى: .....

اكتب صح أو خطأ أمام العبارات الآتية:

151- إذا كان $f(z)$ و$\overline{f(z)}$ تابعين تحليليين، عندها $f(z)$ هو تابع ثابت.

152- إنّ التّابع $u(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$ هو تابع توافقي.

153- إنّ التّابع $e^x \cos y$ هو تابع توافقي.

154- إنّ $\int_C f(z)dz/(z-a) = 2\pi i f(a)$، إذا كانت $z = a$ نقطة داخل C.

155- إنّ التّحويل المتأثر بتابع تحليلي $w = f(z)$ هو تطبيق محافظ في كل نقطة من المستوي العقدي عندما $f'(z) = 0$.

156- إنّ التّابع $f(z) = \bar{z}$ ليس تحليلياً في أية نقطة.

157- وفق التّحويل $w = 1/z$، تتحوّل الدّائرة $x^2 + y^2 - 6x = 0$ إلى مستقيم في المستوي W.

158- إذا كان $w = f(z)$ تحليلياً، عندها: $dw/dz = -i\ \partial w/\partial y$.

159- التّابع التّحليلي ذو جزء تخيلي ثابت هو تابع ثابت.

160- إذا كان $u + iv$ تحليلياً، فإنّ $v - iu$ أيضاً تحليلي.

161- إنّ التّابع $f(z) = Im(z)$ ليس تحليلياً.

162- النّقطة $z = 0$ هي ليست نقطة حرجة للتّطبيق $w = z^2$.

163- $f(z) = Re(z^2)$ تابع تحليلي.

164- التّابع التّحليلي ذو طويلة ثابتة هو تابع ثابت.

165- التّابع $|z|^2$ ليس تحليلياً في أية نقطة.

166- إذا كان $f(z) = z^2$، عندئذٍ عائلة المنحنيات $x^2 - y^2 = c_1$ و $xy = c_2$ تكون متعامدة.



الفصل الأول

1- التوابع الخاصة

Special Functions

1-1 تابع بيتا $\beta(a,b)$



ليونارد أويلر
(1707-1783)

إن السبب الرئيسي في اكتشاف تابعي بيتا وغاما يعود إلى العالم أويلر عندما أراد توسيع مفهوم دالة العاملي لتشمل الأعداد المستمرة (الحقيقية والعقدية) في نهاية عشرينات القرن الثامن عشر الميلادي، وكان عمره آنذاك 22 سنة (1729) عبر رسالته إلى جولدباخ ودانيال برنولي. يوجد عدة أشكال (تمثيلات) لتابعي بيتا وغاما وسنورد معظمها.

1-1-1 تعريف التابع بيتا:

يعرف تابع بيتا بالعلاقة:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad ; \quad a>0, \quad b>0 \qquad (1)$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيمن لهذه العلاقة بتكامل أويلر من النوع الأول.

ويمكن أن يكون a,b عددين عقديين قسمهما الحقيقي موجباً، ويكون هذا التكامل متقارباً إذا كان $a>0, b>0$ ومتباعداً إذا كان $a\le 0$ أو $b\le 0$، في حالة $a=b=0$ فإن تابع بيتا يكون من الشكل:

$$\beta(0,0)=\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \qquad (2)$$

وهو تكامل شاذ.

1-1-2 بعض خواص التابع بيتا:

1- خاصة التناظر $\beta(a,b)=\beta(b,a)$: لنفرض أنّ: $x=1-t$ فيكون: $dx=-dt$ وبالتالي:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=-\int_1^0 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt=$$
$$=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt=\beta(b,a) \qquad (3)$$

هذا يعني أن التابع بيتا متناظر بالنسبة إلى وسيطيه a و b.

2- خاصة تغيير الوسيط: نطبق قاعدة التكامل بالتجزئة على تكامل أويلر (1) وذلك بفرض أنّ:

$$u=(1-x)^{b-1}\Rightarrow du=-(b-1)(1-x)^{b-2}dx,\quad dv=x^{a-1}dx\Rightarrow v=\frac{x^a}{a}$$

وبالاستفادة من المطابقة: $x^a=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$ نجد أنّ:

$$\beta(a,b)=\left[\frac{(1-x)^{b-1}x^a}{a}\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^a}{a}(b-1)(1-x)^{b-2}dx=$$

$$=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx\underbrace{=}_{x^a=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)}$$

$$=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$\Rightarrow\beta(a,b)=\frac{b-1}{a}\beta(a,b-1)-\frac{b-1}{a}\beta(a,b)$$

وبالتالي ينتج أنّ:

$$\beta(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\beta(a,b-1)\qquad(4)$$

واستناداً إلى علاقة التناظر (3) نجد أنّ:

$$\beta(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}\beta(a-1,b)\qquad(5)$$

ومن العلاقتين (4) و(5) نستنتج العلاقة:(*)

$$\beta(p,q+1)=\frac{q}{p}\beta(p+1,q);\quad p=a-1,\quad q=b-1\qquad(6)$$

لنفرض الآن أنّ: $b=n$ حيث n عدد صحيح، ولنطبق العلاقة (4) بشكل متتالٍ $(n-1)$ مرة نجد أنّ:

$$\beta(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a+1}\beta(a,1)\quad;\quad\text{حيث}$$

$$\beta(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1=\frac{1}{a}\qquad(7)$$

لنفرض إضافة لذلك أنّ $a=m$ حيث m عدد صحيح، فنجد أنّ:

$$\beta(m,n)=\beta(n,m)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}=$$

$$=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m-1)!\,m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}\Longrightarrow$$

(*) لنضع في تابع بيتا $p=a-1, q=b-1\Rightarrow\beta(a-1,b)=\frac{a+b-1}{a-1}\beta(a,b)\Rightarrow$ فيكون:

$$\beta(p,q+1)=\frac{p+q+1}{p}\beta(p+1,q+1)=\frac{p+q+1}{p}\cdots\frac{q}{p+q+1}\beta(p+1,q)=\frac{q}{p}\beta(p+1,q)$$

$$\beta(m,n) = \beta(n,m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!} \qquad (8)$$

لنفرض الآن أنّ: $a = b$ ولنعوض في العلاقة (7) فنجد أنّ:

$$\beta(a,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx =$$

$$= 2\int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$

حيث: $y = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ متناظرٌ بالنسبة للمستقيم $x = 1/2$ ولنجري التحويل:

$$\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{t}}{2} \longrightarrow dx = -\frac{dt}{4\sqrt{t}} \Longrightarrow$$

$$\beta(a,a) = \frac{2}{4^{a-1}}\int_1^0 (1-t)^{a-1}\left(-\frac{dt}{4\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{a-1}dt$$

$$\Longrightarrow \beta(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\beta\left(\frac{1}{2}, a\right) \qquad (9)$$

3- خاصة تغيير المتحول: لنجرِ في العلاقة (1) التحويل الآتي:

$$x = \frac{y}{y+1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{(y+1)^2}, \qquad 1 - x = \frac{1}{y+1}$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = 0, \qquad x = 1 \rightarrow y = \infty \Longrightarrow \beta(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(y+1)^{a+b}}dy \qquad (10)$$

والتكامل الأخير يمتلك قيمة عددية من أجل $b = 1 - a$ وهي:

$$\beta(a,1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{y+1}dy = \frac{\pi}{\sin a\pi} \;:\; 0 < a < 1 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1}{2} \Longrightarrow \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi \qquad (11)$$

والعلاقة الأخيرة (10) تفيدنا لاحقاً في كتابة العلاقة التي تربط بين تكاملي أويلر من النوعين الأول والثاني.

مثال (1-1): بين أن التابع بيتا $\beta(n,m)$ يكتب بالصيغة المثلثية (القطبية) الآتية:

$$\beta(n,m) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}\theta \cdot \sin^{2m-1}\theta\, d\theta \qquad (12)$$

الإثبات: لدينا:

$$\beta(n,m) = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$$

بفرض أنّ: $x = \sin^2\theta \Longrightarrow dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$; $\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \\ x = 1 \Longrightarrow \theta = \pi/2 \end{cases}$

وبالتالي:

$$\beta(n,m)=2\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta)^{n-1}(1-\sin^2\theta)^{m-1}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=$$

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n-2+1}(\cos\theta)^{2m-2+1}d\theta\Rightarrow\beta(n,m)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\,d\theta$$

مثال (2-1): احسب قيمة كلٍّ من التكاملين:

$$I=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx\;;\quad p,q,m>0,\qquad J=\int_0^2\sqrt{x-x^2}\,dx$$

الحل:

$$I=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx\;;\quad p,q,m>0$$

بفرض أنّ: $x^m=y,\ x=y^{1/m}\Rightarrow dx=\frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}dy\ ;\ \begin{cases}x=0\Rightarrow y=0\\ x=1\Rightarrow y=1\end{cases}$

ومنه ينتج أنّ:

$$I=\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p-1}{m}}(1-y)^{q-1}y^{\frac{1-m}{m}}dy=\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}dy=\frac{1}{m}\beta\left(\frac{p}{m},q\right)$$

$$J=\int_0^2\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx=\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

2-1 تابع غاما:

يعرف تابع غاما بالعلاقة:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt\;;\quad p>0\qquad(13)$$

ويسمى هذا التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة بتكامل أويلر من النوع الثاني، وهو متقارب (موجود) من أجل كل $p>0$.

1-2-1 بعض خواص التابع غاما:

يمتلك هذا التابع خواص كثيرة منها:

$(i)\quad \Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)\qquad(14)$

$(ii)\quad \Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n!\qquad(15)$

$(iii)\quad \Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\;;\quad 0<p<1,\quad p\in\mathbb{R}\qquad(16)$

$(iv)\quad \Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\qquad(17)$

الإثبات: (i) نعوض بالعلاقة (13) ثم نكامل بالتجزئة، فنجد:

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty t^p e^{-t}dt=[-t^p e^{-t}]_0^\infty+p\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt=p\Gamma(p)$$

نستنتج من العلاقة (14) ما يلي:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^\infty=1\Rightarrow\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=(1)\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=(2)\Gamma(2)=2,\qquad \Gamma(4)=(3)\Gamma(3)=6=3!,\qquad \Gamma(5)=(4)\Gamma(4)=4!,$$
$$\Gamma(6)=(5)\Gamma(5)=5!,\qquad \cdots$$

(ii) كما سبق نستنتج أنّ:

$$\Gamma(n+1)=(n)\Gamma(n)=n!=\int_0^\infty t^n e^{-t}dt\;;\qquad \forall n>0$$

ومنه، فإنّ:

$$0!=\Gamma(1)=\int_0^\infty t^0 e^{-t}dt=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

(iii) لإثبات الخاصة الثالثة نفرض أنّ $t=x^2$ ونعوض في العلاقة (13) نجد أنّ:

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx\Rightarrow\Gamma(1-p)=2\int_0^\infty x^{1-2p}e^{-x^2}dx=2\int_0^\infty y^{1-2p}e^{-y^2}dy$$
$$\Rightarrow\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{1-2p}e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy$$

بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية في الربع الأول من المستوي xoy، نجد أنّ:

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad r\in[0,\infty),\qquad \theta\in[0,\pi/2]$$
$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=4\int_{r=0}^\infty\int_{\theta=0}^{\pi/2}r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta\,r^{1-2p}\sin^{1-2p}\theta\,e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=$$
$$=4\left[\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\right]\left[\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{1-2p}\theta\,d\theta\right]=$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\tan^{1-2p}\theta\,d\theta\;;\;\; u=\tan^2\theta\Rightarrow du=2\tan\theta\,(1+\tan^2\theta)d\theta$$
$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\int_0^\infty\frac{u^{-p}}{1+u}du=\int_0^\infty\frac{u^{(1-p)-1}}{1+u}du\;;\;\; 0<1-p<1$$

بالمقارنة بالعلاقة (11)، نجد أنّ:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(1-p)\pi}=\frac{\pi}{\sin p\pi}\;;\qquad 0<p<1$$

في حالة $p=1/2$ نجد أنّ:

$$p=\frac{1}{2}\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin(\pi/2)}=\pi=\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

وإذا كان p حقيقياً بحيث $1\le p\le 2$ فإن قيم $\Gamma(p)$ تعطى بالجدول الآتي:

p	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\Gamma(p)$	1.00	0.95	0.91	0.89	0.887	0.886	0.893	0.908	0.93	0.96	1.00

الجدول (1-1): قيم للتابع غاما عندما $1 \le p \le 2$.

(ب) وإذا كان p عدداً حقيقياً أصغر من الواحد وليس عدداً صحيحاً فإن قيم التابع غاما تتعين من العلاقة (14) وتكتب بالشكل:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

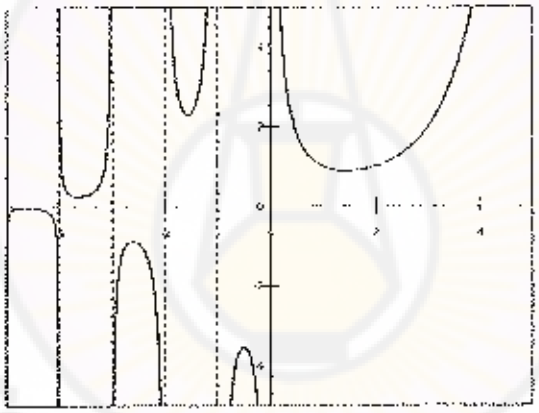
وبالتالي:

$$\Gamma(0.4) = \frac{\Gamma(1.4)}{0.4} = 2.21825$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) = -4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{16}{3}\Gamma(1.75) \approx -\frac{16}{3}(0.908) = -4.8458667$$

والشكل (1-1) يوضح سلوك منحني التابع غاما.



الشكل (1-1): منحني التابع غاما.

1-2-2 مشتق التابع غاما:

نعلم أنه إذا كان: $f(p) = x^p$ فإنّ: $f'(p) = x^p \ln x$ لأن x ثابت بالنسبة إلى p. لنقوم الآن باشتقاق التابع غاما بالنسبة إلى وسيطه p، لدينا:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \Rightarrow \Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)e^{-x}dx \Rightarrow$$

$$\Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^2 e^{-x}dx \Rightarrow$$

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}dx \; ; \quad n > 1 \qquad (18)$$

3-2-1 العلاقة بين التابعين بيتا وغاما:

نبدل في العلاقة (13) كل t بـ xy حيث $x = \text{constant} > 0$، نجد أنّ:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot y^{p-1}e^{-xy}\, x dy = \int_0^\infty x^p \cdot y^{p-1}e^{-xy}\, dy$$

بتبديل p بـ $(p+q)$ و x بـ $(x+1)$ نجد أنّ:

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty (x+1)^{p+q} \cdot y^{p+q-1}e^{-(x+1)y}dy$$

لدينا من العلاقة (10) للتابع بيتا بعد تبديل $(a = p, b = q)$ أنّ:

$$\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}}dx \Longrightarrow$$

$$\Gamma(p+q)\beta(p,q) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(x+1)y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1}\, y^p\, y^{q-1}\, e^{-xy}\, e^{-y}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^\infty (xy)^{p-1}e^{-xy}d(xy) \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}dy = \Gamma(p)\Gamma(q) \Longrightarrow$$

$$\Gamma(p+q)\beta(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

وهذا ما يثبت صحة العلاقة:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (19)$$

ويمكن إثبات العلاقة السابقة (19) بطريقة أخرى، لدينا:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \underset{x \to x^2}{=} \int_0^\infty x^{2p-2}e^{-x^2}(2x)dx \Longrightarrow$$

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx \Longrightarrow \Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy \Longrightarrow$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}y^{2q-1}x^{2p-1}dy\,dx$$

نقوم بالتحويل إلى الإحداثيات القطبية: $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ وبالتالي:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$\begin{cases} x: 0 \to \infty \\ y: 0 \to \infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r: 0 \to \infty \\ \theta: 0 \to \pi/2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2p+2q-2} dr \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta \, d\theta$$

$$\underbrace{=}_{u=r^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du\right)\left(2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta \, d\theta\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\beta(p,q)$$

إذا كان $0 < p < 1$ فإنّ:

$$\beta(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

وإذا كان $p = 1/2$ فإنّ:

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

وإذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإنّ:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2\times 2\times\cdots\times 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

وإذا كان $-1 < p < 0 \Rightarrow 0 < p+1$ هذا يعني حسب العلاقة (17) أنّ التابع $\Gamma(p+1)$ موجود وبالتالي التابع $\Gamma(p)$ موجود. أما من أجل $p = 0$ فإن العلاقة (17) تعطي:

$$\Gamma(0) = \lim_{p\to\pm 0} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \pm\infty \qquad (20)$$

أما إذا كان الوسيط p يحقق الشرط $-n < p < -(n-1)\,;\, n > 0$ فإنّ $\Gamma(p)$ يكتب بالشكل:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\cdots(p+n-1)} \qquad (21)$$

نجري في العلاقة (21) التحويل: $p = -n+\alpha\,;\, 0 < \alpha < 1$، فنجد أنّ:

$$\Gamma(-n+\alpha) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)(n-\alpha)} \qquad (22)$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أنه ضمن المجال $]-n, n-1[$ يكون $\Gamma(p) > 0$ من أجل n الزوجية، بينما تكون $\Gamma(p) < 0$ من أجل n الفردية. هذا يعني:

$$\Gamma(-n) = \lim_{\alpha\to 0}\Gamma(-n+\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}(-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = \pm\infty \qquad (23)$$

إذاً الإشارة $(+)$ من أجل n الزوجية، بينما الإشارة $(-)$ من أجل n الفردية. ومن جهة ثانية نجد أنّ:

$$\Gamma(-n) = \lim_{\alpha\to 1}\Gamma(\quad(n+1)+\alpha) =$$

$$= \lim_{\alpha \to 1}(-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n+1-\alpha)} = (-1)^{n+1}\frac{\Gamma(1)}{0} = \mp\infty \qquad (24)$$

حيث الإشارة $(-)$ من أجل n الزوجية، بينما الإشارة $(+)$ من أجل n الفردية.

مثال (3-1): احسب قيمة كلٍّ من التكاملين باستخدام تابعي بيتا وغاما:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

الحل: لدينا:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\,dx = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+1}{2}\right)}$$

وبحالة خاصة عندما $q = 0$ و $p = n$ نجد أنّ:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وبحالة خاصة عندما $q = n$ و $p = 0$ نجد أنّ:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال (4-1): احسب قيمة كلٍّ من التكاملات:

$$(i) \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx\,, \qquad (ii) \int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx\,, \qquad (iii) \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^3} dy$$

$$(iv) \int_0^\infty z^2 e^{-2z^2} dz\,, \qquad (v) \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6}$$

الحل: (i) بالموازنة مع تابع غاما نجد أنّ: $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ وبالتالي:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$$

(ii) بالمقارنة مع تابع غاما نجد اختلافاً لذلك نفرض أنّ: $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t} dt = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7}$$

(iii) نفرض أنّ: $z = y^2 \Rightarrow dz = 2ydy \Rightarrow dy = dz/2\sqrt{z}$ نعوض نجد:

$$\int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^3} dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{1/4} e^{-z} z^{-1/2} dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{-1/4} e^{-z} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2!\,\Gamma(1/4)} \frac{\pi}{\sin \pi/4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,\Gamma(1/4)}$$

(iv) لحل التكامل نفرض أنّ: $2z^2 = t \Rightarrow z = \left(\frac{t}{2}\right)^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} t^{-1/2} dt$

$$\Rightarrow \int_0^\infty z^2 e^{-2z^2} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{t^{1/2}}{2} e^{-t} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= (1/8)\left(\sqrt{\pi}/\sqrt{2}\right)$$

(v) لحل التكامل نفرض أنّ: $x^6 = u \Rightarrow x = u^{1/6} \Rightarrow dx = \frac{1}{6} u^{-5/6} du$

$$I = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{6} \int_0^\infty u^{1/6}\, u^{-5/6} (1+u)^{-1} du = \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{u^{-2/3}}{1+u} du$$

$$\begin{cases} a-1 = -2/3 \Rightarrow a = 1/3 \\ a+b = 1 \Rightarrow b = 2/3 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{6} \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{6} \Gamma(1/3)\Gamma(1-1/3) = \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/3)} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

مثال (5-1): احسب قيمة كلٍّ من التكاملات:

$$I_1 = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx; \qquad n > 0, \qquad m > -1,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^8 \theta\, d\theta, \qquad I_3 = \int_0^\infty e^{-z^2} dz$$

الحل: لحساب التكامل الأول نفرض أنّ: $\ln x = -t$ لأنّ x بين 0 و 1 فاللوغاريتم قيمته سالبة.

وبالتالي: $x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t} dt,\ x = 0 \Rightarrow t = \infty,\ x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$I_1 = \int_\infty^0 e^{-mt} (-t)^n (-e^{-t}) dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-(m+1)t} dt$$

لنفرض أنّ:

$$(m+1)t = r \Rightarrow t = \frac{r}{m+1} \Rightarrow$$

$$I_1 = (-1)^n \int_0^\infty \left(\frac{r}{m+1}\right)^n e^{-r} \frac{dr}{m+1} = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^8 \theta\, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta\, d\theta$$

لأنّ التابع زوجي وبالمقارنة مع تابع بيتا في الصيغة المثلثية نجد أنّ:

$$2n-1 = 8 \Rightarrow n = 9/2, \qquad 2m-1 = 0 \Rightarrow m = 1/2 \Rightarrow$$

$$I_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \beta\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \frac{\Gamma(9/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5)} = \frac{35\pi}{64}$$

لنحسب تكامل بواسون $I_3 = \int_0^\infty e^{-z^2} dz$، انطلاقاً من العلاقة التالية:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

لنفرض أنّ: $x = z^2 \Rightarrow dx = 2zdz$ نعوض نجد:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-z^2}dz = 2I_3 = \sqrt{\pi} \Rightarrow I_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال (6-1): أثبت أنّ:

$$(i)\ \Gamma(n) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy \qquad (n>0).$$

$$(ii)\ \beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx,$$

الحل:

$$(i) \qquad (n>0) \Rightarrow \Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

نفرض أنّ:

$$y = e^{-x} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\left(\frac{1}{y}\right)dy \Rightarrow$$

$$\Gamma(n) = \int_1^0 \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1} y\left(-\frac{1}{y}\right)dy = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$$

$$(ii) \qquad \beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

نفرض أنّ:

$$x = \frac{1}{1+y} \Rightarrow y = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow dx = \frac{-1}{(1+y)^2}dy$$

$$\beta(p,q) = \int_\infty^0 \frac{1}{(1+y)^{p-1}}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{q-1}\frac{-1}{(1+y)^2}dy = \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy + \int_1^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

نبدل في التكامل الثاني $y = 1/z$ فنجد:

$$\int_1^\infty \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy - \int_1^0 \frac{1}{z^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+1/z)^{p+q}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz = \int_0^1 \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$$

وبالتالي:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy + \int_0^1 \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$$

مثال (7-1): احسب قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية باستخدام تابع غاما:

$$(i)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad (ii)\ \int_0^{\pi/2}\sqrt{(\tan\theta)}\,d\theta, \qquad (iii)\ \int_0^\infty \frac{x^5}{e^x}dx$$

$$(iv)\ \int_0^\infty a^{-bx^2}dx\ ,\qquad (v)\ \int_0^1 x^5\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3 dx$$

الحل: $(i)\ x^2=\sin\theta\Rightarrow x=\sqrt{\sin\theta}\Rightarrow dx=1/2\sin^{-1/2}\theta\cos\theta\,d\theta$

$$(i)\quad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^{-1/2}\theta\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{-1/2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-1/2+2}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$(ii)\quad \int_0^{\pi/2}\sqrt{(\tan\theta)}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1/2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-1/2+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1/2-1/2+2}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$(iii)\quad c^x=e^{\ln c^x}=e^{x\ln c},\qquad x\ln c=t\Rightarrow dx=dt/\ln c$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\frac{x^c}{c^x}dx=\int_0^\infty\frac{x^c}{e^{x\ln c}}dx=\int_0^\infty e^{-x\ln c}x^c dx=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{\ln c}\right)^c\frac{dt}{\ln c}=$$

$$=\frac{1}{(\ln c)^{c+1}}\int_0^\infty t^c e^{-t}dt=\frac{\Gamma(c+1)}{(\ln c)^{c+1}}$$

$$(iv)\qquad t=(b\ln a)x^2\Rightarrow dx=\frac{dt}{2\sqrt{t(b\ln a)}}\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty a^{-bx^2}dx=\int_0^\infty e^{-bx^2\ln a}dx=\frac{1}{2\sqrt{b\ln a}}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt=\frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{b\ln a}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b\ln a}}$$

$$(v)\qquad x^5=e^{-t}\Rightarrow x=e^{-t/5}\Rightarrow t/5=\ln(1/x)\Rightarrow dx=-1/5\,e^{-t/5}dt$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 x^5\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3dx=\frac{1}{625}\int_0^\infty e^{-6t/5}\cdot t^3dt\Rightarrow\frac{6t}{5}=u\Rightarrow t=\frac{5u}{6}\Rightarrow$$

$$dt=\frac{5du}{6},t^3=\frac{5^3}{6^3}u^3\Rightarrow I=\frac{1}{6^4}\int_0^\infty u^3e^{-u}du=\frac{\Gamma(4)}{1296}=\frac{6}{1296},$$

مثال (1-8): احسب قيمة التكامل الآتي باستخدام تابع غاما:

$$I=\int_0^\infty e^{-ax}x^{m-1}\sin bx\,dx$$

الحل: نعلم أن $\sin bx$ هو القسم التخيلي من e^{ibx} وسنرمز له بـ $I.P.of\ e^{ibx}$:

$$\Gamma(m)=\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}dx\ ;\ \ (x=ay\Rightarrow dx=ady)\Rightarrow$$

$$\Gamma(m)=\int_0^\infty e^{-ay}a^m y^{m-1}\,dy\Rightarrow\int_0^\infty e^{-ay}y^{m-1}\,dy=\frac{\Gamma(m)}{a^m}\quad(*)$$

$$I=\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{m-1}\sin bx\,dx=\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{m-1}(I.P.\ of\ e^{ibx})dx=$$
$$=I.P.\ of\int_0^\infty e^{-(a-ib)x}\,x^{m-1}\,dx$$

من العلاقة (*) نجد:

$$I=I.P.\ of\ \frac{\Gamma(m)}{(a-ib)^m}\qquad (a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta)\Longrightarrow$$
$$I=I.P.\ of\ \frac{\Gamma(m)}{r^m(\cos\theta-i\sin\theta)^m}=I.P.\ of\ \frac{\Gamma(m)}{r^m(\cos m\theta-i\sin m\theta)}=$$
$$=I.P.\ of\left\{\frac{\Gamma(m)(\cos m\theta+i\sin m\theta)}{r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos m\theta-i\sin m\theta)}\right\}=$$
$$=\frac{\Gamma(m)}{r^m}\sin m\theta\ ;\quad r=\sqrt{a^2+b^2},\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

مثال (9-1): برهن أنّ: $\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}\times\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

الحل:

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}},\qquad x^2=\sin\theta\Longrightarrow dx=\frac{\cos\theta\,d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\Longrightarrow$$
$$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta=\frac{1}{4}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)}=\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)}$$
$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},\qquad x^2=\tan\theta\Longrightarrow dx=\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}\Longrightarrow$$
$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{2\sqrt{\tan\theta}\,(\sec\theta)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}=$$
$$=\left(2\theta=\phi,d\theta=\frac{d\phi}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\phi\,d\phi=\frac{1}{4\sqrt{2}}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)}\Longrightarrow\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}\times\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

مثال (10-1): برهن أنّ:

$$(i)\ \beta(m,1/2)=2^{2m-1}\beta(m,m),\qquad (ii)\ \Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$$

الحل:

$$(i)\qquad \beta(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta\ ;\ \left(n=\frac{1}{2}\right)\Longrightarrow$$

$$\beta\left(m,\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\,d\theta \qquad (*)$$

$$n=m\Longrightarrow\beta(m,m)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta\cos\theta)^{2m-1}d\theta$$

$$=\frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}2\theta\,d\theta\ ;\ \ 2\theta=\phi\Longrightarrow$$

$$=\frac{1}{2^{2m-1}}\int_0^{\pi}\sin^{2m-1}\phi\,d\phi=\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\phi\,d\phi$$

$$\Longrightarrow 2^{2m-1}\beta(m,m)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\,d\theta=\beta\left(m,\frac{1}{2}\right)$$

(ii) بكتابة العلاقة السابقة بدلالة تابع غاما:

$$2^{2m-1}\frac{\Gamma(m)\Gamma(m)}{\Gamma(m+m)}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+1/2)}\Longrightarrow\quad ;\ \ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m)}{2^{2m-1}}.$$

مثال **(11-1)**: برهن أنّ: $(i)\quad \iint_D x^{l-1}y^{m-1}dx\,dy=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m+1)}h^{l+m}$

حيث D هي مجموعة التعريف $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $x+y\leq h$.

$$(ii)\quad \iiint_V x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dx\,dy\,dz=\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$$

حيث V هي المنطقة $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $z\geq 0$ و $x+y+z\leq 1$. وهذا التكامل الأخير ذو أهمية


G.L.DIRICHLET
(1805–1859)

كبيرة ويعرف بتكامل ديرخليه Dirichlet's integral.

الحل: (i) بوضع $x/h=X$ و $y/h=Y$، نحصل على التكامل:

$$I=\iint_{D'}(hX)^{l-1}(hY)^{m-1}h^2dXdY\Longrightarrow$$

حيث: D' هي $X\geq 0$، و $Y\geq 0$، و $X+Y\leq 1$.

$$I=h^{l+m}\int_0^1\int_0^{1-X}X^{l-1}Y^{m-1}dY\,dX=$$

$$=h^{l+m}\int_0^1 X^{l-1}\left|\frac{Y^m}{m}\right|_0^{1-X}dX=\frac{h^{l+m}}{m}\int_0^1 X^{l-1}(1-X)^m dX=$$

$$=\frac{h^{l+m}}{m}\beta(l,m+1)=\frac{h^{l+m}}{m}\cdot\frac{\Gamma(l)\Gamma(m+1)}{\Gamma(l+m+1)}=h^{l+m}\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m+1)}$$

(ii) بفرض أنّ: $x+y+z\leq 1-x=h$. فيكون التكامل الثلاثي:

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dz\,dy\,dx=$$

$$= \int_0^1 x^{l-1}\left[\int_0^h \int_0^{h-y} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\right] dx = \int_0^1 x^{l-1} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} h^{m+n} dx$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} \int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n}\, dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} \beta(l, m+n+1)$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} \cdot \frac{\Gamma(l)\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(l+m+n+1)} = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}.$$

مثال (12-1): احسب قيمة التكامل:

$$\iiint_R x^{l-1}\, y^{m-1}\, z^{n-1} dx dy dz$$

حيث إن المتغيرات x, y, z موجبة، وتحقق الشرط: $(x/a)^p + (y/b)^q + (z/c)^r \le 1$.

الحل: لنفرض أنّ:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p = u \Longrightarrow x = a u^{1/p} \Longrightarrow dx = \frac{a}{p} u^{1/p-1} du$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^q = v \Longrightarrow y = b v^{1/q} \Longrightarrow dy = \frac{b}{q} v^{1/q-1} dv$$

$$\left(\frac{z}{c}\right)^r = w \Longrightarrow z = c w^{1/r} \Longrightarrow dz = \frac{c}{r} w^{1/r-1} dw$$

$$\iiint_R x^{l-1}\, y^{m-1}\, z^{n-1} dx dy dz =$$

$$\iiint (a u^{1/p})^{l-1} (b v^{1/q})^{m-1} (c w^{1/r})^{n-1} \left(\frac{a}{p}\right) u^{\frac{1}{p}-1} \left(\frac{b}{q}\right) v^{\frac{1}{q}-1} \left(\frac{c}{r}\right) w^{\frac{1}{r}-1} du dv dw$$

$$= \frac{a^l b^m c^n}{pqr} \iiint u^{\frac{l}{p}-1} v^{\frac{m}{q}-1} w^{\frac{n}{r}-1} du\, dv\, dw \quad ; \quad u+v+w \le 1$$

$$= \frac{a^l b^m c^n}{pqr} \cdot \frac{\Gamma(l/p)\Gamma(m/q)\Gamma(n/r)}{\Gamma(l/p+m/q+n/r+1)}.$$

مثال (13-1): إن المستوي $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ يقطع المحاور الإحداثية في: A و B و C. طبق دستور تكامل ديرخليه لإيجاد حجم رباعي الوجوه $OABC$. وأوجد ثقل (كتلة) هذا الحجم إذا كانت الكثافة في أية نقطة منه تساوي $kxyz$.

الحل: لنفرض أنّ:

$$\frac{x}{a} = u, \quad \frac{y}{b} = v, \quad \frac{z}{c} = w \Longrightarrow u \ge 0, \quad v \ge 0, \quad w \ge 0$$

داخل رباعي الوجوه $OABC$. ويكون $u + v + w \le 1$. وبالتالي حجمه هو:

$$= \iiint_D dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} abc\, du\, dv\, dw \quad ;$$

$$dx = a\, du, \quad dy = b\, dv, \quad dz = c\, dw$$

$$= abc \iiint_{D'} u^{1-1}\, v^{1-1}\, w^{1-1}\, du\, dv\, dw = abc \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1+1+1)} = \frac{abc}{6}$$

وذلك بالاعتماد على تكامل ديرخليه.

$$\text{Mass} = \iiint kxyz\, dx\, dy\, dz = \iiint k(au)(bv)(cw)\, abc\, du\, dv\, dw$$

$$= k\, a^2b^2c^2 \iiint u^{2-1}\, v^{2-1}\, w^{2-1}\, du\, dv\, dw =$$

$$= k\, a^2b^2c^2 \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(2+2+2+1)} = k\, a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{6!} = \frac{k}{720} a^2b^2c^2.$$

3-1 التابع دلتا:

ينشأ التابع دلتا (تابع النبضة) فيزيائياً نتيجة تأثر جسم بقوة كبيرة لمدّة زمنية قصيرة جداً (كالصدمة الكهربائية). ويبدأ هذا التابع بنبضة مستطيلة خلال زمن محدود وشدة ثابتة تساوي الواحد (مثل الشدة بمساحة النبضة)، فإذا حافظنا على الشدة الثابتة وهي الواحد وأنقصنا زمن استغراق (استمرار) النبضة، فنحصل على التابع دلتا المعرف بالعلاقة:

$$\delta(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & ; \quad t \neq \alpha \\ \infty & ; \quad t = \alpha \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (25)$$

وله الخاصة التالية:

$$\int_a^b \delta(t-\alpha)dt = 1 \quad ; \quad a < \alpha < b \qquad (26)$$

باستخدام العلاقة (26) يمكن استنتاج أن:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(\alpha) \quad ; \quad a < \alpha < b \qquad (27)$$

مثال (14-2):

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \delta(t-\pi)dt = 0,$$

$$\int_0^{3} 4 \cdot \delta(t-2)dt = 4, \qquad \int_0^{2} \delta(t-2)dt = 1, \qquad \int_0^{3} 4 \cdot \delta(t-5)dt = 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-4t} \cdot \delta(t-2)dt = e^{-8}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-4t} \cdot \delta(t-a)dt = e^{-4a},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot \delta(t-a)dt = e^{-as} \cdot f(a)$$

4-1 الجداءات اللانهائية

لتكن متتالية الأعداد الحقيقية اللانهائية $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ ولنشكل الجداء اللانهائي:

$$p_n(x) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdots \; ; \; (n = 1, 2, \cdots) \qquad (28)$$

ولنفرض أن:

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n(x) \qquad (29)$$

نسمي النهاية p قيمة الجداء اللانهائي لجميع الأعداد x_n أي إنّ:

$$p = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} x_n \qquad (30)$$

تعريف (1-1) يكون الجداء اللانهائي متقارباً إذا كان $p \neq 0$ وبنفس الوقت محدوداً، وإلا يكون هذا الجداء متباعداً في الحالات المغايرة. من الواضح أن:

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\prod_{n=1}^{m} x_n\right) \cdot \left(\prod_{n=m+1}^{\infty} x_n\right) \; ; \; 1 \leq m < \infty \qquad (31)$$

هذا يعني أن حذف عددٍ منتهٍ من المضاريب (المعاملات) ذات الترتيب الأسبق لا يؤثر في تقارب الجداء اللانهائي أو تباعده، وبمعنى آخر إن الحد الثاني من الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة هو الذي يحدد تقارب الجداء اللانهائي أو تباعده. ومن العلاقة الأخيرة (31):

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} x_n = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} x_n}{\prod_{n=1}^{m} x_n} \; ; \qquad \prod_{n=1}^{\infty} x_n = p, \qquad \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} x_n = p \qquad (32)$$

وفي حالة تقارب الجداء اللانهائي يكون:

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} x_n = 1 \qquad (33), \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_{n-1} = p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1 \qquad (34)$$

مبرهنة (1-1) الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} x_n \; ; \; x_n > 0$ هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln x_n$.

الإثبات: لنفرض أنّ:

$$x_n = 1 + U_n \; ; \; x_n > 0 \Rightarrow p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + U_n) \qquad (35)$$

من الواضح أنّ $-1 < U_n < \infty$، فإذا كان الجداء اللانهائي متقارباً فإن:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \qquad (36)$$

لنقارن الآن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+U_n)$ وذلك باستخدام اختبار المقارنة الثاني نجد أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+U_n)}{U_n} = 1 \neq 0$$

هذا يعني أن المتسلسلتين السابقتين إما متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً. ومن هنا ينتج أنّ: الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty}(1+U_n) = \prod_{n=1}^{\infty} x_n$ هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln x_n$ أي: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+U_n)$.

تعريف (2-1) نقول عن الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ إنه متقاربٌ إطلاقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln x_n$ متقاربة إطلاقاً.

ملاحظة: يمكن نشر التابعين المثلثيين $\sin x, \cos x$ في جداء لانهائي بالشكل:

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (37), \qquad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{\pi^2(2n-1)^2/4}\right] \quad (38)$$

5-1 علاقة (أويلر – غاوص):

لنجرِ في تكامل أويلر من النوع الثاني التحويل $z = e^{-t}$ فنجد أنّ:

$$t = \ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-z^{1/n}\right)\right] \; ; \quad dt = -\frac{dz}{z}$$

وبما أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-z^{1/n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{1/n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-z^{1/n}(-1/n^2)\ln z}{-1/n^2} = -\ln z = \ln(1/z)$$

فإنّ:

$$t = 0 \Rightarrow z = 1; \qquad t = \infty \Rightarrow z = 0$$

وبالتالي يكون:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}\, e^{-t}\, dt = -\int_1^0 \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-z^{1/n}\right)\right]^{p-1} z\frac{dz}{z} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^{p-1}\int_0^1 \left(1-z^{1/n}\right)^{p-1} dz\right]$$

إن تبديل موقعي التكامل والنهاية ممكن في هذه الحالة لأنه بتزايد n يتزايد التابع $n\left(1-z^{1/n}\right)$ وتسعى نحو نهايتها $\ln(1/z)$.

لنجرِ في العلاقة الأخيرة التحويل: $z = y^n \Rightarrow dz = n\, y^{n-1} dy$ ويكون:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty}\left[n^p\int_0^1 (1-y)^{n-1}\, y^{n-1}\, dy\right] = \lim_{n\to\infty} n^p\beta(n,p)$$

وبالاستفادة من العلاقة (21) نحصل على العلاقة:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} n^p \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)} \qquad (39)$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+p}\right) = 1$$

فإن العلاقة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} n^p \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} \qquad (40)$$

وتسمى هذه العلاقة بعلاقة (أويلر – غاوص).

ومن النتائج الأساسية لعلاقة (أويلر – غاوص) هو تمثيل التابع غاما على شكل جداء لانهائي:

$$1'(p) = \frac{1}{p}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^p}{(1+p/n)} \quad ; \quad p>0 \qquad (41)$$

لإثبات صحة العلاقة الأخيرة نشكل الجداء P_{n-1} وذلك بفرض $p=a$.

$$P_{n-1} = \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^a\left(1+\frac{1}{2}\right)^a\left(1+\frac{1}{3}\right)^a\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)} =$$

$$= \frac{2^a\cdot 3^a\cdot 4^a\cdots n^a\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{1^a\cdot 2^a\cdot 3^a\cdots(n-1)^a\, a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)} =$$

$$= \frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$$

بأخذ نهاية طرفي المساواة عندما $n\to\infty$ نحصل على الطرف الأيمن للعلاقة (40) حيث $p=a$.

وبذلك أثبتت العلاقة (41) واعتماداً عليها يمكن كتابة العلاقة:

$$\Gamma(1+a) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^a}{(1+a/n)} \quad ; \quad a>0 \qquad (42)$$

$$\Gamma(1-a) \underset{a\to -a}{=} \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^{-a}}{(1-a/n)} \quad ; \qquad (43)$$

وبضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $\Gamma(a)$ وذلك بفرض $p=a$ نحصل على العلاقة:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a\prod_{n=1}^{\infty}(1-a^2/n^2)} \qquad (44)$$

لكن:

$$\sin \pi a = \pi a \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right) \Longrightarrow \frac{\sin \pi a}{\pi} = a\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$$

وبالتالي تأخذ العلاقة (44) الشكل:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \qquad (45)$$

بفرض أنّ $a = 1/2$ وبالتالي: $\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \pi \Longrightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (46)

بتطبيق العلاقة (41) على التابعين $\Gamma(2a)$ و$\Gamma(a+1/2)$ مع إبدال n بـ $2n$ في تلك العلاقة من أجل التابع $\Gamma(2a)$ نجد أنّ:

$$\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{a+1}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{(a+1/2)(a+1/2+1)\cdots(a+1/2+n)}$$

$$\Gamma(2a) = \lim_{n\to\infty}(2n)^{2a}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(2n)}{2a(2a+1)(2a+2)\cdots(2a+2n)}$$

ومن جهة ثانية:

$$2^{2a-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(2a)} = \lim_{n\to\infty} 2^{2a-1}\times$$

$$\frac{n^{2a+1/2}(n!)^2(2a)(2a+1)(2a+2)(2a+3)\cdots(2a+2n)}{(2n)^{2a}(2n)!\,a(a+1)\cdots(a+n)(a+1/2)(a+1/2+1)\cdots(a+1/2+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{a-1}n^{2a+1/2}(n!)^2(a)(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n)\,2^{2n+2}}{n^{2a}(2n)!\,a(a+1)\cdots(a+n)(2a+1)(2a+3)\cdots(a+2n+1)2^{2a}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2\,n^{1/2}}{(2n)!\,(2a+2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2a+2n+1}$$

وبالتالي نجد أن:

$$2^{2a-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(2a)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \qquad (47)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن للعلاقة (47) لا يتعلق بـ a وبالتالي الطرف الأيسر لهذه العلاقة أيضاً لا يتعلق بـ a أي إنه يحافظ على قيمة معينة من أجل جميع قيم a وبوضع $\Gamma(1) = 1$ و $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$، نجد أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi} \qquad (48)$$

بتعويض القيمة الأخيرة في العلاقة (47)، نحصل على ما يسمى بعلاقة ليجندر التالية:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \qquad (49)$$

أو: $\Gamma(a)\Gamma(a+1/2) = (2\pi)^{1/2}\,2^{1/2-2a}\Gamma(2a)$ (50)

واعتماداً على علاقة (أويلر – غاوص) تنتج العلاقة:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,2^{(1/2)-na}\Gamma(na) \quad (51)$$

وتسمى العلاقة (51) بعلاقة الجداء للتابع غاما.

6-1 علاقة (وايرشتراس) – المشتق اللوغاريتمي للتابع غاما:

سنتعرض لاحقاً لما يسمى بثابت أويلر. ولمعرفة هذا الثابت نأخذ التابع $y=1/x$ ونرمز بـ s_n لمساحة السطح المحصور بين منحني التابع وقطعة المحور OX المحدودة بالنقطتين $x=1, x=n; n>0$ ولنرمز بـ Q_n لمساحة المستطيلات الخارجية التي قاعدة كل منها مساوية لواحدة الطول وارتفاعاتها على الترتيب $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n-1}$ ونرمز بـ q_n لمساحة المستطيلات الداخلية التي قاعدة كل منها مساوية لواحدة الطول وارتفاعاتها على الترتيب $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n-1},\frac{1}{n}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$S_n=\int_1^n\frac{dx}{x}=\ln n, \qquad Q_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

$$q_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

ومن أجل جميع قيم n تتحقق العلاقات:

$$q_n<S_n<Q_n, \qquad Q_n-S_n<Q_{n+1}-S_{n+1}, \qquad Q_n-S_n<Q_n-q_n=1-\frac{1}{n}<1$$

لنضع:

$$V_n=Q_n-S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n$$

نلاحظ أن V_n تزداد بازدياد n إلا أنها تبقى محدودة وأصغر من الواحد وبالتالي لها نهاية محدودة عندما $n\to\infty$. ومن ناحية ثانية إن نهاية V_n مساوية لنهاية المقدار:

$$U_n=V_n+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n$$

وهذه النهاية تسمى بثابت أويلر C المعرف بالشكل:

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.5772156 \quad (52)$$

لنبرهن الآن صحة العلاقة:

$$e^C=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+1/n} \quad (53)$$

-حيث C ثابت أويلر. ولذلك نشكل الجداء P_n:

$$P_n = \frac{e^{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}}{(1+1/1)(1+1/2)\cdots(1+1/n)} = \frac{e^{C+\ln n+\alpha_n}}{n+1} = e^C \frac{n}{n+1} e^{\alpha_n}$$

حيث إن: $\alpha_n = (1+1/2+\cdots+1/n-\ln n)-C\,; \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

وبالتالي نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(e^C \cdot \frac{n}{n+1}\cdot e^{\alpha_n}\right) = e^C$$

برفع طرفي العلاقة (53) إلى الأس a نجد أن:

$$e^{Ca} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a/n}}{(1+1/n)^a} \qquad (54)$$

بضرب طرفي العلاقة (54) بـ $\Gamma(a)$ ومن العلاقة (44) نجد أن:

$$e^{Ca}\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{a/n}}{(1+a/n)}$$

وبالتالي نستنتج العلاقة:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = e^{Ca}\cdot a\cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-a/n} \qquad (55)$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة (وايرشتراس).

لنحسب الآن المشتقة اللوغاريتمية للدالة غاما.

انطلاقاً من علاقة وايرشتراس الممثلة بالشكل:

$$\Gamma(a) = e^{-Ca}\cdot\frac{1}{a}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{a/n}}{(1+a/n)} \qquad (56)$$

نجد أنّ:

$$\ln\Gamma(a) = -Ca - \ln a + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a}{n} - \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى a نجد أنّ:

$$[\ln\Gamma(a)]' = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C - \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right) =$$

$$= -C - \frac{1}{a} + a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)} \qquad (57)$$

بالاشتقاق ثانيةً بالنسبة إلى a نجد أنّ:

$$[\ln\Gamma(a)]'' = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a) - na}{n^2(n+a)^2} = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+a)^2}\right] \qquad (58)$$

بوضع $a = 1$ في العلاقة (57) نتج العلاقة الآتية:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ولكن:

$$\Gamma(1) = 1 \;\; ; \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1(*) \Rightarrow \Gamma'(1) = -C \qquad (59)$$

لنأخذ الآن لوغاريتم طرفي العلاقة (14) بحيث $p = a$ فنجد أنّ: $\ln\Gamma(a+1) = \ln\Gamma(a) + \ln a$

بالاشتقاق بالنسبة إلى a نجد أنّ:

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{a} \qquad (60)$$

نعوض في العلاقة (60) على الترتيب a ، $1, 2, 3, \cdots, k$ فنحصل على:

$$\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{1} = -C + 1, \qquad \frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} + \frac{1}{2} = -C + 1 + \frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \frac{1}{k} = -C + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = -C + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{1}{\ell} \;\; ; \;\; (k = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (61)$$

1-7 تطبيقات التابع غاما:

حساب بعض التكاملات اعتماداً على التابع غاما.

1-7-1 التكاملات المثلثية الأسية

أي التكاملات المثلثية من الشكل:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx \;\; ; \;\; (n, m > 0)$$

(*) $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \cdots, S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

نفرض أنّ: $\sin^2 x = u\ ;\ \{ x = \pi/2 \Rightarrow u = 1,\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \}$

$$\sin^n x = (\sin^2 x)^{n/2} = u^{n/2}$$
$$\cos^m x = (\cos^2 x)^{m/2} = (1 - \sin^2 x)^{m/2} = (1-u)^{m/2}$$
$$du = 2\sin x \cos x\, dx - 2(\sin^2 x)^{1/2}(1 - \sin^2 x)^{1/2} dx \Rightarrow$$
$$du = 2u^{1/2}(1-u)^{1/2} dx \Rightarrow dx = (1/2)u^{-1/2}(1-u)^{-1/2} du$$

وعندئذٍ يكون:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cdot \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{(n-1)/2}(1-u)^{(m-1)/2} du =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}-1}(1-u)^{\frac{m+1}{2}-1} du = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)\right]$$

ومن العلاقة الأخيرة يمكن حساب المقادير $\Gamma(1), \Gamma(1/2)$ وذلك حسب ما تكون الأعداد: $\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n+m}{2}+1$ زوجية أم فردية.

2-7-1 استنتاج علاقة ستيرلينج Stirling Formula

تعطي علاقة ستيرلينج قيماً تقريبية للتابع العاملي $n!$ بواسطة التابع غاما. لذلك نأخذ التابع:

$$V = \varphi(u) = \begin{cases} +\sqrt{u - \ln(1+u)} & ;\quad u \geq 0 \\ -\sqrt{u - \ln(1+u)} & ;\quad -1 < u \leq 0 \end{cases} \qquad (62)$$

بسهولة نلاحظ أن التابع $V = \varphi(u)$ مستمر ومتزايد ضمن المجال $(-1, \infty)$ ومعدوم من أجل $(u = 0)$. كما نلاحظ أيضاً أنّه في حالة:

$$V = \varphi(u) = \sqrt{u - \ln(1+u)}\ ;\quad u > 0$$

وباشتقاق $V = \varphi(u)$ بالنسبة إلى u نجد أنّ:

$$\frac{dV}{du} = \varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u - \ln(1+u)}}\left(1 - \frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2(1+u)}\cdot\frac{u}{\sqrt{u - \ln(1+u)}} > 0$$

ومن جهة ثانية نلاحظ أنّه في حالة:

$$V = \varphi(u) = -\sqrt{u - \ln(1+u)}\ ;\quad -1 < u < 0$$

ومن أجل ذلك ينتج أيضاً $dV/du > 0\ ;\ u < 0$. من جهة أخرى لدينا:

$$\left(\frac{dV}{du}\right)^2 = \frac{1}{4(1+u)^2}\cdot\frac{u^2}{u - \ln(1+u)}$$

ومنه نجد أنّ:

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{dV}{du}\right)^2=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{4(1+u)^2}\cdot\frac{u^2}{u-\ln(1+u)}\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{1}{(1+u)^2}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{u-\ln(1+u)}=\frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{u-\ln(1+u)}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\left\{2u/\left[1-\left(\frac{1}{1+u}\right)\right]\right\}=\frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\left\{2/\left[\frac{1}{(1+u)^2}\right]\right\}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

وبذلك نجد أن المشتق $dV/du=\varphi'(u)$ موجب ومستمر في المجال $(-\infty,\infty)$ كما أنها تحقق الشرط:

$$\left.\frac{dV}{du}\right|_{u=0}=\varphi'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad(63)$$

هذا يعني أن التابع العكسي $u=\psi(V)$ موجود ومستمر ومتزايد في المجال $(-\infty,\infty)$ ويكون معدوماً من أجل $V=0$ ومشتق التابع العكسي يحقق الشرط:

$$\left.\frac{du}{dV}\right|_{V=0}=\psi'(0)=\frac{1}{\varphi'(0)}=\sqrt{2}\qquad(64)$$

بإجراء التحويل: $x=a(1+u)\Longrightarrow dx=a\,du\rightarrow\begin{cases}x=0\Longrightarrow u=-1\\ x=\infty\Longrightarrow u=\infty\end{cases}$ في العلاقة:

$$\Gamma(a+1)=\int_0^\infty x^a\,e^{-x}\,dx\qquad(65)$$

نجد أنّ:

$$\Gamma(a+1)=a^{a+1}\,e^{-a}\int_{-1}^{\infty}(1+u)^a\,e^{-u}\,du\qquad(66)$$

لنعوض في العلاقة الأخيرة:

$$u=\psi(V)\Longrightarrow du=\psi'(V)\,dV\Longrightarrow\begin{cases}u=-1\Longrightarrow V=-\infty\\ u=+\infty\Longrightarrow V=+\infty\end{cases}$$

وبملاحظة أنّ:

$$V^2=u-\ln(1+u)=\ln\frac{e^u}{1+u}$$

أو: $e^{-V^2}=(1+u)e^{-u}$ وبالتالي نجد أن العلاقة (66) تأخذ الشكل:

$$\Gamma(a+1)=a^{a+1}\,e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-aV^2}\,\psi'(V)\,dV\qquad(67)$$

ولنجري أخيراً التحويل التالي:

$$V=\frac{t}{\sqrt{a}}\Longrightarrow dV=\frac{dt}{\sqrt{a}}$$

فنجد أنّ:

$$\Gamma(a+1)=a^a\,\sqrt{a}\,e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,\psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)dt\qquad(68)$$

ونجد أنّ:

$$\frac{\Gamma(a+1)}{a^a \cdot e^{-a} \cdot \sqrt{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) dt$$

بأخذ نهاية الطرفين للعلاقة الأخيرة من أجل $a \to \infty \Rightarrow t/\sqrt{a} \to 0$ مع ملاحظة إمكانية إدخال النهاية تحت إشارة التكامل من الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة وذلك لكون قيمة التابع المستكمل تبقى محدودة، نجد أنّ:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{a^a \cdot e^{-a} \cdot \sqrt{a}} = \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \lim_{a\to\infty} \psi'\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \psi'(0) dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2}\sqrt{\pi} \Rightarrow \lim_{a\to\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{a^a \cdot e^{-a} \cdot \sqrt{a}} = \sqrt{2\pi} \qquad (69)$$

وتسمى العلاقة (69) بعلاقة ستيرلينج، التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\Gamma(a+1) = a^a \cdot e^{-a} \cdot \sqrt{2\pi a}\,(1+\varepsilon_a) \quad ; \quad \lim_{a\to\infty} \varepsilon_a = 0$$

بينما إذا كانت a كبيرة بشكل كافٍ فيمكن أن نضع $\varepsilon_a \approx 0$ واعتبار أنّ:

$$\Gamma(a+1) \approx a^a \cdot e^{-a} \cdot \sqrt{2\pi a} \qquad (70)$$

3-7-1 حساب $\Gamma(a+1)$ باستخدام اللوغاريتم

لنأخذ لوغاريتم طرفي علاقة ستيرلينج فنجد أنّ:

$$\log \Gamma(a+1) \approx a(\log a - \log e) + \frac{1}{2}(\log 2 + \log \pi + \log a) \qquad (71)$$

إذا كانت $a > 0$ وكبيرة بقدرٍ كافٍ فإن العلاقة (70) من أجل $a = n$ تأخذ الشكل:

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \qquad (72)$$

كما تأخذ العلاقة (71) الشكل:

$$\log n! \approx n(\log n - \log e) + (1/2)(\log 2 + \log \pi + \log n) \qquad (73)$$

تمارين محلولة

1) برهن أنّ:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)}$$

الحل:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} Re\left(e^{i\beta x}\right) dx = Re\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2 + i\beta x} dx\right] =$$

$$= Re\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\left[\left(x - \frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right]} dx\right] = e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha}} Re\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\left(x - \frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2} dx\right]$$

نفرض أنّ: $\alpha\left(x-\frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2=t$ فنجد بعد التعويض أنّ:

$$I=e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha}}Re\left[\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}t^{-1/2}dt\right]=e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha}}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{-\beta^2}{4\alpha}}$$

2) برهن أنّ:

$$I=\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx=\frac{a^{-(m+1)/n}}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right);\quad (a,m,n>0)$$

واستنتج قيم التكاملات:

$$I_1=\int_0^\infty\sqrt{y}\,e^{-y^3}dy,\qquad I_2=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}},\qquad I_3=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{\ln(a/x)}}$$

الحل: بفرض أنّ:

$$y=ax^n\Rightarrow dy=nax^{n-1}dx\Rightarrow dx=\frac{dy}{na}x^{1-n}=\frac{1}{na}\left(\frac{y}{a}\right)^{(1-n)/n}dy$$

$$\Rightarrow I=\int_0^\infty\left(\frac{y}{a}\right)^{m/n}e^{-y}\frac{1}{na}\left(\frac{y}{a}\right)^{(1-n)/n}dy=\frac{1}{na^{(m+1)/n}}\int_0^\infty y^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-y}dy=$$

$$=\frac{1}{n}a^{-\frac{m+1}{n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

بالمقارنة بين (I_1) و(I) نستنتج أنّ: $n=3,a=1,m=1/2$ وبالتالي:

$$I_1=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1/2+1}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

ولحساب (I_2) نضع $y=-\ln x$ وذلك لأنّ $0<x<1$ فيكون، $x=e^{-y}$ وبالتالي:

$$I_2=\int_\infty^0 y^{-1/2}(-e^{-y})dy=\int_0^\infty y^{-1/2}\,e^{-y}dy=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ولحساب (I_3) نضع $\ln(a/x)=y$ فيكون $x=ae^{-y}$ وبالتالي:

$$I_3=\int_\infty^0\frac{-ae^{-y}}{\sqrt{y}}dy=a\int_0^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy=a\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=a\sqrt{\pi}$$

3) احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$$

الحل: بوضع: $x=2t\Leftarrow dx=2dt$

$$I=2\int_0^1\frac{4t^2}{\sqrt{2-2t}}dt=4\sqrt{2}\int_0^1 t^2(1-t)^{-1/2}dt\Rightarrow$$

$$m-1=2\Rightarrow m=3,\qquad n-1=-1/2\Rightarrow n=1/2\Rightarrow$$

$$I = 4\sqrt{2}\,\beta\left(3,\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(7/2)} = 4\sqrt{2}\frac{2\sqrt{\pi}}{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \Longrightarrow I = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

4) إذا كان:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

برهن أنّ:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\ ; \quad (0 < p < 1)$$

واستنتج قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}\ , \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{y^p}{1+y^2}dy\ ; \quad (0 < p < 1)$$

الحل: بوضعنا $y = x/(1+x) \Longrightarrow x = y/(1-y)$ فنجد أنّ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{y}{1-y}\right)^{p-1}(1-y)\frac{dy}{(1-y)^2} = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}dy =$$

$$= \beta(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

وإذا وضعنا $x = y^4$ فإنّ:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x}\frac{x^{-3/4}}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{1/4-1}}{1+x}dx = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin \pi/4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

وإذا وضعنا $x = y^2$ فإنّ:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{p/2}}{1+x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{p+1}{2}-1}}{1+x}dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p+1}{2}\right)\pi} = \frac{\pi}{2\cos(p\pi/2)}$$

5) اكتب $\sin \pi x$ باعتباها حاصلَ ضرب لا نهائي، ثم احسب قيمة النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdots 4n^2}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdots(4n^2-1)}$$

الحل: باستخدام الصيغة:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}\ ; \quad 0 < x < 1$$

وحيث إنّ:

$$\Gamma(1-x) = \Gamma(-x+1) = -x\Gamma(-x) \Longrightarrow$$

$$-x\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi} \Longrightarrow \frac{1}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)} = \frac{\sin x\pi}{\pi}$$

وباستخدام صيغة وايرشتراس (أو فيرشتراس) لتابع غاما التالي:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{yx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \;;\; y = \text{constant}$$

نجد أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots 4n^2}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdots 4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$$

6) اكتب الدالة $f(x) = \sinh \pi x$ باعتبارها حاصل ضرب لا نهائي؟

الحل: بما أن:

$$\sin x\pi = \pi x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \;;\quad \sin ix = i\sinh x$$

فإن:

$$i\sinh \pi x = \sin i\pi x = \pi(ix)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(ix)^2}{n^2}\right) = (i\pi x)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\sinh \pi x = \pi x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$$

7) اكتب كلاً من الدالتين: $\cos \pi x\,,\cosh \pi x$ باعتبارهما حاصل ضرب لا نهائي؟

الحل: بما أن: $\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \cos x = \sin 2x/(2\sin x)$ فإن:

$$\cos \pi x = \frac{\sin 2\pi x}{2\sin \pi x} = \frac{2\pi x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-4x^2/n^2)}{2\pi x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^2/n^2)} =$$

$$= \frac{\prod_{n\text{ زوجي}}^{\infty}(1-4x^2/n^2)\prod_{n\text{ فردي}}^{\infty}(1-4x^2/n^2)}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^2/n^2)} =$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k)^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(k-1/2)^2}\right) \Rightarrow \cosh \pi x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{(k-1/2)^2}\right)$$

8) اكتب الدالة $f(x) = e^x - 1$ باعتبارها حاصل ضرب لا نهائي؟

الحل: نلاحظ أن:

$$e^x - 1 = e^{x/2}e^{x/2} - 1 = 2e^{x/2}\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2} = 2e^{x/2}\sinh\frac{x}{2} =$$

$$= 2u\left(\frac{x}{2\pi}\right)e^{x/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}\right) = xe^{x/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}\right)$$

9) احسب قيمة كلٍّ من التكاملين:

$$I = \int_0^{\infty}\sqrt[3]{x}\,e^{-x^3}dx \quad ; \quad J = \int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx$$

الحل:

$$I = \int_0^{\infty}\sqrt[3]{x}\,e^{-x^3}dx = \int_0^{\infty}x^{1/3}e^{-x^3}dx \Longrightarrow$$

$$y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}y^{-2/3}dy \Rightarrow \begin{cases} x=\infty \Rightarrow y=\infty \\ x=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}y^{1/3}e^{-y}y^{-2/3}dy = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}y^{\frac{4}{9}-1}e^{-y}dy = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{4}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{13}{9}\right) \approx \frac{(3)(0.8873)}{4} \approx 0.665$$

$$J = \int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx \Longrightarrow J = \int_0^1(1-x^4)^{1/2}dx \Longrightarrow$$

$$y = x^4 \Rightarrow x = y^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}y^{-3/4}dy \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{4}\int_0^1 y^{-3/4}(1-y)^{1/2}dy = \frac{1}{4}\int_0^1 y^{\frac{1}{4}-1}(1-y)^{\frac{3}{2}-1}dy =$$

$$= \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/2)}{4\Gamma(7/4)} = \frac{\Gamma(1/4)}{6\sqrt{2\pi}}$$

10) بفرض أن: $\Gamma(1/4) = \alpha$، فاحسب $\Gamma(3+1/4)$؟

الحل: بما أن: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \Rightarrow$

$$\Gamma\left(3+\frac{1}{4}\right) = \left(2+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{4}\right) = \left(2+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(2+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{45}{62}\alpha$$

11) احسب $(-1)!$ ؟

الحل: بما أن: $(-1)! = \Gamma(-1+1) = \Gamma(0)$

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$$

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1) \Rightarrow (-1)! = \Gamma(0) = (-1)\Gamma(-1) =$$
$$= 2\Gamma(-2) = 2(-3)\Gamma(-3) = 2(-3)(-4)\Gamma(-4) = \cdots \to \pm\infty$$

وبالمثل من أجل عدد طبيعي n سنجد أنّ:

$$(-n)! = (-n-1)\Gamma(-n-1) = (-n-1)(-n-2)\Gamma(-n-2) =$$
$$= (-n-1)(-n-2)(-n-3)\Gamma(-n-3)\cdots \to \pm\infty$$

12) احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_1^e \frac{1}{x}[\ln(\ln x)]dx$$

الحل: نفرض أنّ:

$$\ln(\ln x) = -y \Rightarrow \ln x = e^{-y} \Rightarrow x = e^{e^{-y}} \Rightarrow dx = -e^{-y}e^{e^{-y}}dy$$
$$x = 1 \Rightarrow y = \infty\ ;\ x = e \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$$
$$I = -\int_0^\infty y^{2-1}e^{-y}dy = -\Gamma(2) = -1\ ;\quad \Gamma(2) = (1)\Gamma(1) = 1$$

8-1 التابع الأسي التكاملي واللوغاريتمي التكاملي

1-8-1 تعريف التابع الأسي التكاملي

نعرّف القيمة الأساسية للتابع الأسي التكاملي $E_1(z)$ بالعلاقة:

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt \quad ;\quad z \neq 0 \qquad (74)$$

حيث إن المسار لا يقطع المحور الحقيقي السالب ولا يمر من المبدأ. كما يعطى بالعلاقة:

$$E_1(z) = e^{-z}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z}dt \quad ;\quad |\text{phase } z| < \pi \qquad (75)$$

وكذلك يعرف التابع الأسي المتمم بالعلاقة:

$$\text{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1-e^{-t}}{t}dt \qquad (76)$$

إن التابع $\text{Ein}(z)$ هو تابع تام entier.

ويحقق التابع الأسي التكاملي الأساسي العلاقة: $E_1(z) = \text{Ein}(z) - \ln z - \gamma \qquad (77)$

حيث ... $\gamma = 0.577215664901532$ هو ثابت أويلر.

ويعرف التابع الأسي التكاملي بالشكل:

$$\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t}dt \qquad (78)$$

$$z \to x \Rightarrow \text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt \qquad (x < 0) \qquad (79)$$

$$z \to -x \Rightarrow \text{Ei}(-x) = -\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du = -E_1(x)\ ;\ (x > 0) \qquad (80)$$

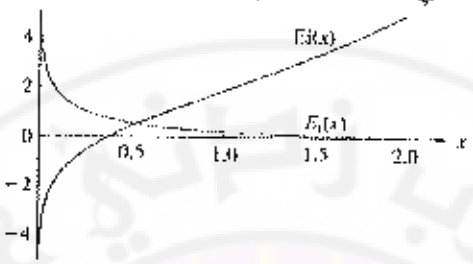
$$\text{Ei}(\pm x) = -\text{Ein}(\mp x) + \ln x + \gamma \qquad (81)$$

إن التابع $\text{Ei}(x)$ غير معرف عندما يكون $x = 0$ أو عندما يكون x غير حقيقي.

كما يعرف التابع اللوغارتمي التكاملي بالعلاقة:

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{Ei}(\ln x) \qquad (82)$$

ويوضح الشكل (1-2) منحنيي التابعين $\mathrm{Ei}(x)$ و $E_1(x)$.



الشكل (1-2): التوابع الأسية التكاملية $\mathrm{Ei}(x)$ و $\mathrm{E}_1(x)$ داخل المجال $0 < x \leq 2$.

وينشر تكامل التابع الأسي في متسلسلة ذات الشكل:

$$\mathrm{Ei}(z) = \gamma + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!} \qquad (83)$$

حيث إن: $\gamma = 0.577215664901532 \ldots$ هو ثابت أويلر.

وهذا النشر صحيح على كامل نقاط المستوي العقدي باستثناء الجزء الموجب لنصف المحور الحقيقي.

أو أيضاً يمكننا أن نكتب:

$$\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\, n} \quad ; \quad x > 0 \qquad (84)$$

$$\mathrm{E}_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!\, n} \qquad (85)$$

$$\mathrm{E}_1(z) = -\ln z + e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \psi(n+1) \qquad (86)$$

حيث إن $\psi(n+1)$ يدل على المشتق اللوغارتمي للتابع غاما. وأيضاً:

$$\mathrm{Ein}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n!\, n} \qquad (87)$$

1-9 تابعا الجيب التكاملي والتجيب التكاملي

1-9-1 تعريف تابعي الجيب والتجيب التكاملين

يعرف الجيب التكاملي بالعلاقة:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (88)$$

أما التجيب التكاملي فيعرف بالعلاقة:

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad (89)$$

حيث تأخذ x قيماً حقيقيةً موجبةً. وغالباً ماتعرف العلاقة (88) أيضاً بالشكل:

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (90)$$

وبما أن:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad (91)$$

فإن التابعين $\mathrm{Si}(x)$ و$\mathrm{si}(x)$ يرتبطان بالعلاقة:

$$\mathrm{Si}(x) = \mathrm{si}(x) + \frac{\pi}{2} \qquad (92)$$

وكذلك يعرف التابع التجيب التكاملي المنمم بالعلاقة:

$$\mathrm{Cin}(z) = \int_0^z \frac{1-\cos t}{t}\,dt \qquad (93)$$

إن التابع $\mathrm{Cin}(z)$ هو تابع زوجي تام entier. إنه يحقق العلاقة:

$$\mathrm{Ci}(x) = -\mathrm{Cin}(z) + \ln z + \gamma \qquad (94)$$

أما عندما نسعى $x \to \infty$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathrm{Ci}(x) = 0 \qquad (95)$$

كما تعرف التوابع الجيبية والتجيبية القطعية التكاملية بالعلاقتين:

$$\mathrm{Shi}(z) = \int_0^z \frac{\sinh t}{t}\,dt \qquad (96)$$

$$\mathrm{Chi}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cosh t - 1}{t}\,dt \qquad (97)$$

2-9-1 النشر في متسلسلة صحيحة

يمكن نشر تابع الجيب التكاملي بجوار الصفر وذلك من أجل جميع القيم الصغيرة لـ x، في متسلسلة صحيحة وذلك بنشر التابع $\sin t/t$ في متسلسلة ماكلوران بجوار الصفر أولاً، ثم مكاملة جميع حدود هذه المتسلسلة المتقاربة في المجال $(0,x)$:

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (98)$$

ومنه نجد:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} =$$

$$\frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} + \cdots \quad (99)$$

بالطريقة نفسها يمكن نشر تابع التجيب التكاملي في متسلسلة صحيحة بالشكل:

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt = \ln x + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\cdot(2n)!} =$$

$$= \ln x + \gamma - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n\cdot 2n!} + \cdots \quad (100)$$

حيث γ ثابت أويلر. ومن العلاقة:

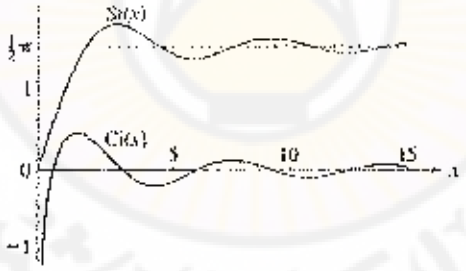
$$\mathrm{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n\cdot 2n!} + \cdots \quad (101)$$

يمكن كتابة العلاقة (100) بالشكل:

$$\mathrm{Ci}(x) = \ln x + \gamma - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt = \ln x + \gamma - \mathrm{Cin}(x) \quad (102)$$

يوضح الشكل (1-3) منحني التابعين $\mathrm{Si}(x)$ و$\mathrm{Ci}(x)$ حيث يأخذ المتحول x قيماً داخل المجال $[0, 15]$.



الشكل (1-3): يظهر منحني تابع الجيب التكاملي $\mathrm{Si}(x)$ ومنحني التجيب التكاملي $\mathrm{Ci}(x)$ داخل المجال $0 \le x \le 15$.

نلاحظ أنه من أجل جميع القيم الصغيرة للمتحول x يمكن نشر التابعين $\mathrm{Si}(x)$ و$\mathrm{Ci}(x)$ في متسلسلة قوى صحيحة، كما يمكن دراسة هاتين الدالتين في جوار تلك القيم، وواضحٌ أن هذين التابعين يتطابقان مع التابعين x و$\gamma + \ln x$ على الترتيب في جوار تلك القيم. بينما يدرس التابعان $\mathrm{Si}(x)$ و$\mathrm{Ci}(x)$ اعتماداً على النشر المقارب لهذين التابعين وذلك من أجل جميع القيم الكبيرة للمتحول x.

3-9-1 النشر المقارب

لدينا التركيب:

$$\mathrm{Ci}(x) + i\,\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt \qquad (103)$$

بمكاملة الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة بالتجزئة عدة مرات على التوالي والفصل بين الجزئين الحقيقي والتخيلي في هذه العلاقة نجد أنّ:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\sin x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \qquad (104)$$

$$\mathrm{Ci}(x) = \frac{\sin x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}} - \frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}} \qquad (105)$$

4-9-1 العلاقات المتبادلة

توجد علاقات متبادلة بين التوابع الأسية التكاملية والتوابع المثلثية والقطبية التكاملية، فعندما يكون $x > 0$ فإنّ:

$$\mathrm{E}_1(-x \pm i0) = -\mathrm{Ei}(x) \mp i\pi \qquad (106)$$

$$\mathrm{Bi}(x) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}_1(-x + i0) + \mathrm{E}_1(-x - i0)\right) \qquad (107)$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ei}(x) + \mathrm{E}_1(x)\right) = \mathrm{Shi}(x) = -i\,\mathrm{Si}(ix) \qquad (108)$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ei}(x) - \mathrm{E}_1(x)\right) = \mathrm{Chi}(x) = \mathrm{Ci}(ix) - \frac{\pi i}{2} \quad ; |\mathrm{phase}\ z| < \frac{\pi}{2} \qquad (109)$$

$$\mathrm{Si}(z) = \frac{i}{2}\left(\mathrm{E}_1(-iz) - \mathrm{E}_1(iz)\right) + \frac{\pi}{2} \qquad (110)$$

$$\mathrm{Ci}(z) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}_1(iz) + \mathrm{E}_1(-iz)\right) \qquad (111)$$

5-9-1 الاستمرار التحليلي

إنّ الاستمرار التحليلي للتابع الأسي الأساسي $\mathrm{E}_1(z)$ ينتج تابع متعدد القيم مع نقاط التفرع عند $z = 0$ وعند $z = \infty$. ونعطي القيمة العامة له بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_1(z) = \mathrm{Ein}(z) - \ln z - \gamma \qquad (112)$$

$$\mathrm{E}_1(ze^{2m\pi i}) = \mathrm{E}_1(z) - 2m\pi i \quad ; \quad m \in \mathbb{Z} \qquad (113)$$

$$\mathrm{E}_1(ze^{\pm\pi i}) = \mathrm{Ein}(-z) - \ln z - \gamma \mp \pi i \quad ; \quad |\mathrm{phase}\ z| \le \pi \qquad (114)$$

كذلك القيم العامة للتوابع الأخرى معرفة بطريقة مشابهة وهي:

$$\mathrm{Ci}(ze^{\pm\pi i}) = +\pi i + \mathrm{Ci}(z) \qquad (115)$$

$$\mathrm{Chi}(ze^{\pm\pi i}) = \pm\pi i + \mathrm{Chi}(z) \qquad (116)$$

10-1 تابع الخطأ

1-10-1 تعريف تابع الخطأ

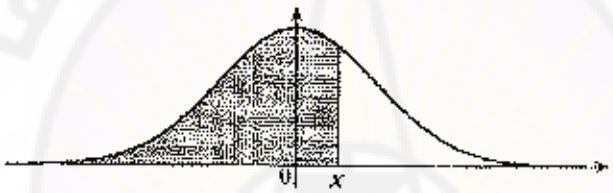
يعدّ تابع الخطأ أحد التوابع ذات التطبيقات الواسعة في علوم الرياضيات والفيزياء، وغالباً ما يستخدم في نظرية الاحتمالات لذلك سمي بتابع احتمال الخطأ. ويعرف بالعلاقة:

$$\operatorname{erf}(x) = \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (117)$$

لدراسة تابع الخطأ لابد من دراسة ما يسمى بتابع غاوص المعرف بالعلاقة:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (118)$$

الممثل بالشكل (1-4):



الشكل (1-4): تابع غاوص.

إن مساحة السطح المحصور بين منحني التابع $\psi(x)$ والمحور OX مساوية للواحد. بفرض $x^2 = 2u$ وبالتالي نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{-1/2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

أما مساحة السطح المحصور بين منحني الدالة $\psi(x)$ وجزء من المحور OX الواقع على يسار النقطة x فتعطى بالعلاقة:

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \qquad (119)$$

لإيجاد العلاقة الرابطة بين التابعين Π و ϕ نفرض $t\sqrt{2} = u$ فنجد أن:

$$\phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}du$$

وبما أن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{2}$$

فإن:

$$\phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du = 2\Pi(x) \qquad (120)$$

2-10-1 نشر التابع $\phi(x)$ في متسلسلة قوى صحيحة

لنشر هذا التابع في متسلسلة قوى صحيحة لا بدّ أولاً من نشر التابع e^{-t^2} في متسلسلة مكلوران، ومن ثم مكاملة الطرفين بين القيمتين x و0 وبذلك نحصل على المتسلسلة المتقاربة من أجل جميع قيم x:

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \cdots\right] \qquad (121)$$

3-10-1 النشر المقارب للتابع $1-\phi(x)$

يسمى هذا التابع بالتابع المتمم لتابع الخطأ ويعطى بالعلاقة:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}dt \qquad (122)$$

لنفرض الآن أنّ: $t^2 = u$ فنجد أنّ:

$$1 - \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-u}\,u^{-1/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x^2} u^{-1/2}\,d(e^{-u})$$

نكامل الآن بالتجزئة:

$$1 - \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-u}\,u^{-1/2}\right]_{\infty}^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x^2} u^{-3/2}\,d(e^{-u})$$

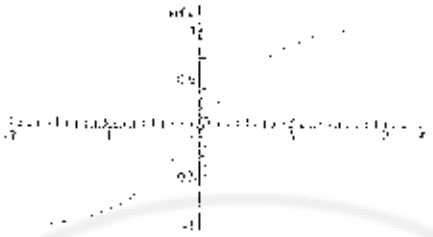
ثم نكامل بالتجزئة مرة ثانية:

$$1 - \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-x^2}x^{-1} - \frac{e^{-x^2}x^{-3}}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\int_{\infty}^{x^2} u^{-5/2}\,d(e^{-u})\right]$$

وهكذا ... فنجد أنّ:

$$1 - \phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\,x^{2n-2}} + \cdots\right]$$

منحني الدالة $\phi(x)$ موضح في الشكل (1-5):



الشكل (1-5): تابع الخطأ.

11-1 تكاملات فرينيل

1-11-1 تعريف تكاملات فرينيل Fresnel



تعرف تكاملات فرينيل بالعلاقتين الآتيتين:

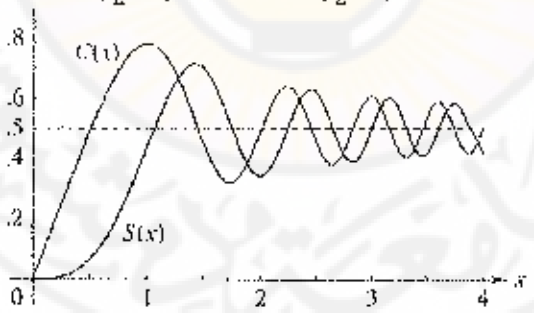
$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2\,dt \qquad (123)$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2\,dt \qquad (124)$$

ونمثلان بالمنحنيين الواردين في الشكل (1-6):

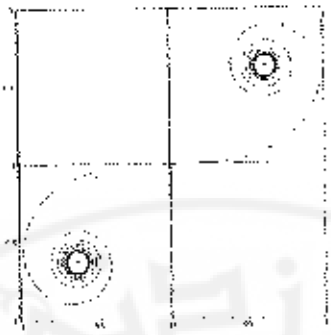
أما في مستوي الإحداثيات الديكارتية XOY (حيث OX محور الفواصل و OY محور الترانيب) فإن التمثيل الوسيطي لتكاملي فرينيل من الشكل:

$$x = C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right), \qquad y = S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) \qquad (125)$$



الشكل (1-6): تكاملات فرينيل $C(x)$ و $S(x)$ حيث $0 \le x \le 4$.

وهذا التمثيل الوسيطي يمثل حلزوناً مضاعفاً ومتناظراً بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات، يسمى بحلزون كورنو (Cornu's Spiral) الشكل (1-7).



الشكل (1-7): حلزون كورنو، المتشكل من تكاملات فرينيل، والمعرف بالعلاقات الوسيطية $x = C(t)$ و $y = S(t)$ حيث $t \in [0, \infty)$.

إن طول قوس ℓ من منحني التمثيل الوسيطي (125) المحدد بالنقطتين 0 و u يعطى بالعلاقة:

$$\ell = \int_0^u \sqrt{C'^2(x) + S'^2(x)}\, dx = \int_0^u \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)}\, dx = u$$

والتقوس لهذا الحلزون في نقطة ما منه الموافقة لقيمة الوسيط u يعطى بالعلاقة:

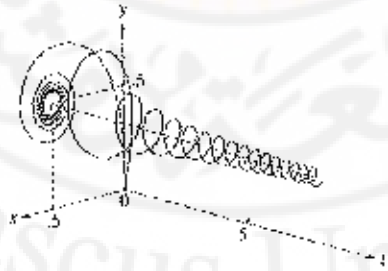
$$\rho = \frac{|C'S'' - S'C''|}{(C'^2 + S'^2)^{3/2}} = \pi u$$

هذا يعني أن التقوس متناسب مع طول القوس. من جهة أخرى يمكن التأكد من أن:

$$C(0) = S(0) = 0\,; \quad \lim_{x \to \infty} C(x) = \lim_{x \to \infty} S(x) = \frac{1}{2}$$

واعتماداً على ذلك نرقم الحلزون تبعاً لقيم الوسيط.

وإذا عددنا $t, x = C\left(\frac{\pi}{2}t^2\right), y = S\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$ ثلاثية مباشرة في الفضاء (T, X, Y) فإننا نحصل على حلزون فراغي، مسقطه على المستويات الإحداثية هي حلزون كورنو والمنحنيين $S\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$ و $C\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$ كما هو موضح في الشكل (1-8).



الشكل (1-8): حلزون كورنو ثلاثي الأبعاد، المتشكل من تكاملات فرينيل، والمعرف بالعلاقات الوسيطية $x = C(t)$ و $y = S(t)$ حيث $t \in [0, \infty)$.

2-11-1 النشر لتكاملي فرينيل في متسلسلة قوى صحيحة

بما أنّ:

$$\cos t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} t^{4n}, \qquad \sin t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{4n+2}$$

فإنّ:

$$C(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n}}{(2n)!\,(4n+1)} x^{4n+1} \qquad (126)$$

$$S(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)} x^{4n+3} \qquad (127)$$

3-11-1 النشر المقارب لتكاملي فرينيل

يمكن بسهولة كتابة:

$$C(x) + i\,S(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} (1+i) \int_0^{\sqrt{x}} e^{it^2} dt \qquad (128)$$

نكامل بالتجزئة على التوالي ومن ثم نفصل بين الجزئيين الحقيقي والتخيلي فنجد أنّ:

$$C(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{1 \cdot 3 \cdots (4n+1)} x^{4n+1} + \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (4n+3)} x^{4n+3} \qquad (129)$$

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{(2x)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2x)^4} - \cdots\right) - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2x)^5} - \cdots\right) \qquad (130)$$

$$S(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (4n+3)} x^{4n+3} + \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{1 \cdot 3 \cdots (4n+1)} x^{4n+1} \qquad (131)$$

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{(2x)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2x)^4} - \cdots\right) - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2x)^5} - \cdots\right) \qquad (132)$$

12-1 كثيرات حدود ليجندر

إنّ كثيرات حدود ليجندر هي حل للمعادلة التفاضلية:

$$x(x-1)y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' + \alpha\beta\, y = 0 \qquad (133)$$

التي تحتوي على الوسطاء α,β,γ علماً بأن α,β في هذه المعادلة متناظران، وهذه المعادلة تسمى بالمعادلة فوق الهندسية أو بمعادلة غاوص.

1- لنضع في المعادلة فوق الهندسية (133):

$$\alpha = n+1, \qquad \beta = -n, \qquad \gamma = 1, \qquad x = \frac{1-x_1}{2} \qquad (134)$$

فنجد أنّ:

$$\frac{1-x_1}{2}\left(\frac{1-x_1}{2}-1\right)\frac{d^2y}{dx_1^2}\cdot 4 + \left\{-(n+1-n+1)\frac{1-x_1}{2}+1\right\}\times \frac{dy}{dx_1}\cdot 2 - (n+1)\,n\,y = 0$$

أو:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \qquad (135)$$

وهذه المعادلة تسمى بمعادلة ليجندر التفاضلية. لنوجد حل هذه المعادلة بالاستناد إلى علاقة الاشتقاق، ومن أجل $\alpha = n+1, \beta = -n, \gamma = 1$ نجد أنّ:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(x-1)^n F^{(n)}(n+1,-n,1;x)\right] = (-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)(-n)\times(-n+1)\cdots(-n+n-1)F(n+1,-n,1;x)$$

لكن:

$$F(n+1,-n,1;x) = 1 + \frac{(n+1)(-n)}{1\cdot 1}x + \frac{(n+1)(n+2)(-n)(-n+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdots n}x^n$$

كما أن مشتقة هذا التابع من المرتبة n تختلف عن التابع ذاته بعامل هو $\frac{(-1)^n}{n!}$، وبالتالي فإنه يكون لدينا:

$$F(n+1,-n,1;x) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(x-1)^n\right]$$

وبتبديل x بـ $\frac{1-x}{2}$ و $x-1$ بـ $-\frac{x+1}{2}$ و dx^n بـ $\frac{(-1)^n}{n!}dx^n$ نجد أنّ:

$$F\left(n+1,-n,1;\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad (136)$$

لنرمز للطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة (136) بـ $P_n(x)$، أي إنّ:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad (137)$$

وتسمى هذه العلاقة بعلاقة رودريج وهي تعرف كثيرة حدود ليجندر من المرتبة n باعتباره حلاً للمعادلة التفاضلية فوق الهندسية (133) من أجل $\alpha = n+1, \beta = -n, \gamma = 1$ وبتبديل x بـ $\frac{1-x}{2}$ وبتبديل n في العلاقة (137) بـ $0, 1, 2, 3, \cdots$ نحصل على كثيرات حدود ليجندر:

$$\left.\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{1}{2^3\cdot 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3] = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \end{aligned}\right\} \qquad (138)$$

2- سنستعرض الآن بعض الخواص التي تتمتع بها كثيرات حدود ليجندر

لنحسب التكامل:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x)dx$$

من أجل ذلك نكامل بالتجزئة فنجد:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n\, n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n f(x)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2^n n!}f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f'(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2^n\, n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f'(x)dx$$

بتكرار هذه العملية n مرة نجد أنّ:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx \qquad (139)$$

بفرض أنّ $f(x) = P_m(x)$ حيث m عدد صحيح موجب و $m < n$ فيكون $f^{(n)}(x) = 0$ وبالتالي:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad ; \quad m < n \qquad (140)$$

أما إذا كان $f(x) = P_n(x)$ فعندئذ يكون:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx = 2\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^{+1}(1-x^2)^n dx$$

وبفرض أنّ:

$$x^2 = t \Rightarrow x = t^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt$$

نجد أنّ:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^1 (1-t)^n t^{-1/2}dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\beta\left(n+1,\frac{1}{2}\right) = 2/(2n+1)$$

أي إنّ:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (141)$$

مثال (15-1): لنحسب التكامل:

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx$$

الحل: من الواضح أنه إذا كانت $m < n$ فإن هذا التكامل يكون معدوماً (انظر العلاقة (140)).

لنفرض أن $m \geq n$ عندئذ وفقاً للعلاقة (139) يكون:

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\frac{m!}{(m-n)!}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n x^{m-n}\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(m+1)}{2^n\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n x^{m-n}\,dx$$

من الواضح أنه إذا كان $m-n \geq 0$ عدداً فردياً فإن التكامل يكون معدوماً، أما إذا كان $m-n \geq 0$ عدداً زوجياً فإن التكامل يكون مساوياً لـ:

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx = \frac{2\Gamma(m+1)}{2^n\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}\int_0^{+1}(1-x^2)^n x^{m-n}\,dx$$

بفرض أنّ:

$$x^2 = t \Rightarrow x = t^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt$$

نجد أنّ:

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx = \frac{\Gamma(m+1)}{2^n\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}\int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{m-n}{2}-\frac{1}{2}}dt =$$
$$= \frac{\Gamma(m+1)}{2^n\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}\beta\left(n+1,\frac{m-n+1}{2}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}{2^n\Gamma(m-n+1)\Gamma\left(\frac{m+n+3}{2}\right)}$$

وبالتالي فإنّ:

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ;m < n \\ \dfrac{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}{2^n\Gamma(m-n+1)\Gamma\left(\frac{m+n+3}{2}\right)} & ;m-n \geq 0 \text{ زوجي} \\ 0 & ;m-n \geq 0 \text{ فردي} \end{cases}$$



13-1 التوابع الأسطوانية: توابع بيسل

1-13-1 توابع بيسل من النوع الأول

تنسب هذه التوابع إلى العالم الألماني بيسل Bessel الذي استخدمها في بحثه عن حركة الكواكب في عام 1824م. إن أهمية هذه التوابع تعود لكثرة تطبيقاتها ولاسيما الفيزيائية.

إن توابع بيسل تعرف بأشكال مختلفة، فهي تعرف مثلاً بأنها حل للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (142)$$

حيث ν عدد حقيقي أو مركب قسمه الحقيقي موجب، وهذه المعادلة تسمى بمعادلة بيسل التفاضلية.

لنبحث عن حل للمعادلة التفاضلية (142) في شكل متسلسلة صحيحة معممة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\rho} \quad ; \quad C_0 \neq 0 \quad (143)$$

ولتعيين الثوابت C_n و ρ نبدل في المعادلة (142) بعد ضرب طرفيها بـ x^2 ونجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+\rho)x^{n+\rho} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\rho+2} = 0$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n[(n+\rho)^2 - \nu^2]x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\rho+2} = 0 \quad (144)$$

بمطابقة أمثال x^ρ في الطرفين نجد أنّ: $C_0(\rho^2 - \nu^2) = 0 \quad (145)$

ومنه نجد أنّ $\rho^2 = \nu^2$ وحلول هذه المعادلة هي:

$$\rho = +\nu, \qquad \rho = -\nu$$

بتبديل $p = v$ في العلاقة (144) نجد أنّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n[(n+v)^2 - v^2]x^{n+v} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+v+2} = 0 \quad (146)$$

بمطابقة أمثال x^{v+1} في الطرفين نجد أنّ: $C_1[(1+v)^2 - v^2] = 0$

ومنه نجد أنّ: $C_1 = 0 \quad (147)$

وبمطابقة أمثال x^{n+v} في الطرفين نجد أنّ: $C_n[(n+v)^2 - v^2] + C_{n-2} = 0$

أو: $C_n(n^2 + 2vn) + C_{n-2} = 0 \quad (148)$

بملاحظة العلاقة (147) نستنتج أنّ: $C_n = 0\,,\ n = 1,3,5,\cdots \quad (149)$

بتبديل كل n بـ $2r$ في العلاقة (148) يكون:

$$C_{2r} = -\frac{C_{2r-2}}{4(r+v)r} \quad ; \quad r = 1,2,3,\cdots \quad (150)$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$C_2 = -\frac{C_0}{4(1+v)}, \quad C_4 = -\frac{C_2}{4\cdot 2(2+v)}, \quad C_6 = -\frac{C_4}{4\cdot 3(3+v)}$$

$$,\cdots, \quad C_{2r} = -\frac{C_{2r-2}}{4\cdot r(r+v)}$$

ومنه نجد أنّ:

$$C_{2r} = (-1)^r \frac{C_0}{4^r\, r!\,(v+1)(v+2)\cdots(v+r)} \quad (151)$$

وباختيار:

$$C_0 = \frac{1}{2^v\,\Gamma(v+1)}$$

نحصل على الحل الخاص y_1 للمعادلة التفاضلية (142) المعرف بالعلاقة:

$$y_1 = \frac{x^v}{2^v\,\Gamma(v+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^r}{r!\,(v+1)(v+2)\cdots(v+r)}$$

أو:

$$J_v(x) = y_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\,\Gamma(r+v+1)} \quad (152)$$

وهذا التابع يسمى تابع بيسل من النوع الأول والمرتبة v.

بإعادة الخطوات السابقة نفسها ومن أجل $p = -v$ نحصل على تابع بيسل من النوع الأول والمرتبة $-v$.

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{r!\,\Gamma(r-\nu+1)} \qquad (153)$$

إذا كان ν عدداً مغايراً للصفر وليس صحيحاً فعندئذٍ يكون التابعان $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مستقلين خطياً ويكون الحل العام للمعادلة (142) معطى بالعلاقة:

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \qquad (154)$$

لنستعرض الآن الحالة التي يكون فيها ν معدوماً أو مساوياً لعدد صحيح n ولنبرهن أن الحلين $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مرتبطان في هذه الحالة، فمن أجل $\nu = 0$ نجد أنّ:

$$J_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{r!\,\Gamma(r+1)} \qquad (155)$$

أو:

$$J_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{(r!)^2}$$

أما من أجل $\nu = n$ حيث n عدد صحيح فيكون:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{r!\,\Gamma(r+n+1)} \qquad (156)$$

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{r!\,\Gamma(r-n+1)}, \quad J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{r!\,(r-n)!} \qquad (157)$$

من الواضح أنّه ليس للعلاقة الأخيرة معنى، إلّا من أجل $r - n \geq 0 \Rightarrow r \geq n$ لذا يكون:

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{2r}}{r!\,(r-n)!}$$

بفرض أنّ $r - n = q$ نجد أنّ:

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+q} (x/2)^{2(n+q)}}{(n+q)!\,q!}$$

أو:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (x/2)^{2q}}{(n+q)!\,q!} \qquad (158)$$

بمقارنة العلاقتين (156) و(158) نجد أنّ: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (159)

وبالتالي فإن الحلين مرتبطان خطياً. لإيجاد الحل العام للمعادلة (142) في هذه الحالة ($\nu = 0$) أو ($\nu = n$) لا بدّ من البحث عن حلّ آخر ومستقل خطياً عن $J_\nu(x)$ وهذا ما سنستعرضه في الفقرة اللاحقة.

2-13-1 توابع بيسل من النوع الثاني

لنأخذ معادلة بيسل التفاضلية:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left[1 - \frac{(n-\varepsilon)^2}{x^2}\right]y = 0 \qquad (160)$$

حيث إنّ $0 < \varepsilon < 1$ في هذه الحالة يكون التابع:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{(n-\varepsilon)}(x)}{\varepsilon} \qquad (161)$$

حلاً للمعادلة التفاضلية (160) من أجل جميع قيم ε المحققة للمتراجحة $0 < \varepsilon < 1$ وحيث إنّ $J_{-(n-\varepsilon)}(x)$ و $J_{(n-\varepsilon)}(x)$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة (160) إذا وجد التابع:

$$Y_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} Y_{n-\varepsilon}(x) \qquad (162)$$

فمن الواضح أنها تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية (160) من أجل $\nu = n$ وفقاً للعلاقتين (152)، (159) يكون:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left[(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(x) - J_{(n-\varepsilon)}(x)\right] =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k}$$

لنبدل في المجموع $\sum_{k=n}^{\infty}$ كل k بـ $n+l$ ويكون:

$$-n+\varepsilon+2k = n+\varepsilon+2l \qquad -n+\varepsilon+k+1 = \varepsilon+l+1 \Rightarrow k+1 = n+l+1,$$

وعندما $k = n$ يكون $l = 0$ بينما من أجل $k = \infty$ يكون $l = \infty$ ثم نعود ونبدل بعد ذلك كل l بـ k في الناتج الجديد، نجد أنّ:

$$Y_{n-\varepsilon}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+k}}{\varepsilon\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\varepsilon+2k} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k}=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon\Gamma(k+1)\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}\right]$$

لنضع في العلاقة المتممة: $a=n-\varepsilon-k$ فنجد أنّ:

$$\frac{1}{\varepsilon\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}=\frac{\Gamma(n-k-\varepsilon)\sin(n-k-\varepsilon)\pi}{\varepsilon\pi}$$

من الواضح أن الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة يشكل عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$، وذلك عندما ينتهي ε إلى الصفر. بتطبيق قاعدة أوبيتال نجد أنّ:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon\Gamma(-n+\varepsilon+k+1)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\Gamma(n-k-\varepsilon)\sin(n-k-\varepsilon)\pi}{\varepsilon\pi}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\Gamma(n-k-\varepsilon)\pi\cos(n-k-\varepsilon)\pi}{\pi}=$$

$$=-\Gamma(n-k)\cos(n-k)\pi=(-1)^{n-k+1}\Gamma(n-k)$$

وبتطبيق قاعدة أوبيتال أيضاً نجد أنّ:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}-\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\begin{array}{c}\frac{\Gamma'(\varepsilon+k+1)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma^2(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}+\\+\frac{1}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon}\ln\frac{x}{2}-\\-\frac{\Gamma'(n-\varepsilon+k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma^2(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}+\\+\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma^2(n-\varepsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}\ln\frac{x}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]$$

وبالتالي يكون:

$$Y_n(x)=\lim_{\varepsilon\to0}Y_{n-\varepsilon}(x)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n(-1)^{n-k+1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\times\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left[2\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

بما أنّ:

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}=-C+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}\Rightarrow\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}=-C+\sum_{\mu=1}^{n+k}\frac{1}{\mu}$$

فإننا نجد:

$$Y_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\left[2\ln\frac{x}{2}+2C-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}-\sum_{\mu=1}^{n+k}\frac{1}{\mu}\right]$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}\qquad(163)$$

أو:

$$Y_n(x)=2J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+n}\right]\qquad(164)$$

نسمي التابع $Y_n(x)$ المعرف بالعلاقة (163) أو (164) التي تمثل حلاً خاصّاً للمعادلة (142) من أجل $\nu=n$ بتابع بيسل من النوع الثاني والمرتبة n، وفقاً لذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (142) من أجل $\nu=n$ هو:

$$Y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)$$

وبتعويض $n=0$ في العلاقة (163) نجد أنّ:

$$Y_0(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[\ln\frac{x}{2}+C-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}\right]\qquad(165)$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار العلاقة (155) نجد أنّ (165) تكتب على الشكل:

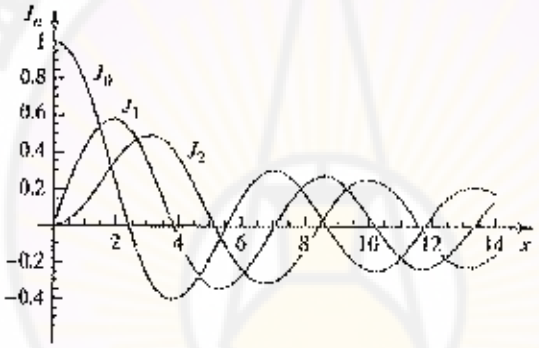
$$Y_0(x) = 2\left\{\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)J_0(x) - \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}\right]\right\} \qquad (166)$$

أو على الشكل:

$$Y_0(x) = 2\left[\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)J_0(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\right]$$

يسمى التابع $Y_0(x)$ تابع بيسل من النوع الثاني والمرتبة صفر، وفقاً لذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (142) ومن أجل $\nu = 0$ معرفاً بالعلاقة: $Y = C_1J_0(x) + C_2Y_0(x)$

أحياناً بدلاً من التابع $Y_n(x)$ يأخذ التابع $\frac{1}{\pi}Y_n(x)$ ويسمى عندها بتابع الاختبار من المرتبة n. يبين الشكل (1-9) المنحني البياني لتابع الاختبار من المرتبة 0 بالإضافة إلى منحني التابع $J_n(x)$:



الشكل (1-9): توابع بيسل J_0, J_1, J_2

1-13-3 العلاقات التدريجية لتوابع بيسل

1- لنأخذ العلاقة (152) ولنكتبها على الشكل:

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\frac{x^{2\nu}}{2^{\nu+2k}}$$

وبالاشتقاق طرفي هذه العلاقة بالنسبة إلى x نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k\,x^{2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)\,2^{\nu+2k}}$$

وبتبديل كل k بـ $l+1$ يكون:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}\,2(l+1)\,x^{2l+1}}{(l+1)\Gamma(l+1)\Gamma(\nu+l+2)\,2^{\nu+2l+2}} =$$

$$= -\frac{1}{x^{\nu}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma[(\nu+1)+l+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu+1)+2l}$$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right] = \frac{-J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}} \qquad (167)$$

في الحالة الخاصة $\nu = 0$ نجد أنّ: $J_0'(x) = -J_1(x)$ (168)

من العلاقة (167) نجد أنّ:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right] = \frac{-J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}} \qquad (169)$$

وأنّ:

$$\frac{1}{x}\frac{x^{\nu} J_{\nu}'(x) - \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x)}{x^{2\nu}} = \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$x J_{\nu}'(x) - \nu J_{\nu}(x) = -x J_{\nu+1}(x) \qquad (170)$$

وهي العلاقة التدرجية الأولى.

الآن باشتقاق العلاقة (169) بالنسبة إلى x نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right]\right\} = \frac{J_{\nu+1}'(x)\, x^{\nu+1} - (\nu+1)x^{\nu} J_{\nu+1}(x)}{x^{2\nu+2}}$$

وبملاحظة العلاقة التدرجية الأولى (170) يكون:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right]\right\} =$$

$$= (-1)\frac{(\nu+1) J_{\nu+1}(x) - x J_{\nu+2}(x) - (\nu+1) J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+3}}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right]\right\} = (-1)^2 \frac{J_{\nu+2}(x)}{x^{\nu+2}} \qquad (171)$$

أو:

$$\frac{d^2}{(x\,dx)^2}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right] = (-1)^2 \frac{J_{\nu+2}(x)}{x^{\nu+2}} \qquad (172)$$

وهذه العلاقة تعني صحة العلاقة (169) ليس فقط بالنسبة إلى المشتق من المرتبة الأولى، وإنما للمشتق من المرتبة الثانية. بتكرار هذه العملية $m-2$ مرة نحصل على العلاقة:

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}} \qquad (173)$$

بكتابة العلاقة (152) على الشكل:

$$x^{\nu} J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \cdot \frac{x^{2\nu+2k}}{2^{\nu+2k}}$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma[(\nu-1)+k+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu-1)+2k}$$

أي إنّ:

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \qquad (174)$$

أو:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x) \qquad (175)$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$\nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{\nu} J'_{\nu}(x) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

وبعد الاختصار على $x^{\nu-1}$ نحصل على العلاقة:

$$\nu J_{\nu}(x) + x J'_{\nu}(x) = x J_{\nu-1}(x) \qquad (176)$$

وهي العلاقة التدرجية الثانية.

الآن باشتقاق العلاقة (175) نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)]\right\} = (\nu-1)\, x^{\nu-2} J_{\nu-1}(x) + x^{\nu-1} J'_{\nu-1}(x)$$

ومنه نجد أنّ:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)]\right\} = (\nu-1)\, x^{\nu-3} J_{\nu-1}(x) + x^{\nu-2} J'_{\nu-1}(x)$$

وبملاحظة العلاقة التدرجية الثانية (176) يكون:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)]\right\} = -x^{\nu-2} J'_{\nu-1}(x) + x^{\nu-2} J_{\nu-2}(x) + x^{\nu-2} J'_{\nu-1}(x)$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{\nu} J_{\nu}(x)]\right\} = x^{\nu-2} J_{\nu-2}(x) \qquad (177)$$

أو:

$$\frac{d^2}{(x\,dx)^2}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu-2} J_{\nu-2}(x) \qquad (178)$$

وهذه العلاقة تعني صحة العلاقة (175) بالنسبة إلى المشتق من المرتبة الثانية، وبتكرار هذه العملية $m-2$ مرة نحصل على العلاقة:

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}[x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x) \qquad (179)$$

بجمع العلاقتين (170) و(176) نجد العلاقة التدرجية الثالثة:

$$\frac{2\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \qquad (180)$$

وبطرح العلاقتين السابقتين نجد العلاقة التدرجية الرابعة:

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \qquad (181)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن العلاقات التدرجية المستنتجة أعلاه صحيحة بالنسبة إلى تابع بيسل من النوع الثاني Y_n.

2- سنبين الآن كيفية الاستفادة من العلاقات التدرجية في حساب بعض التكاملات.

❁ ليكن لدينا التكامل:

$$\int_{x_0}^{x} x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx$$

بحساب مشتق الجداء $x^\nu J_\nu(x)$ نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J'_\nu(x) + \nu x^{\nu-1}J_\nu(x)$$

وبالاستفادة من العلاقة التدرجية الثانية (176) نجد أنّ:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

وبالمكاملة يكون:

$$\int_{x_0}^{x} x^\nu J_{\nu-1}(x)dx = [x^\nu J_{\nu-1}(x)]_{x_0}^{x} \qquad (182)$$

بالطريقة نفسها وبالاستفادة من العلاقة (170) نجد أنّ:

$$\int_{x_0}^{x} x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)dx = -[x^{-\nu}J_\nu(x)]_{x_0}^{x} \qquad (183)$$

❁ ليكن لدينا التكامل:

$$\int_0^x J_\nu(x)\,dx$$

بتبديل كل ν بـ $\nu+1$ في العلاقة (181) ومكاملة طرفي العلاقة الناتجة بين النقطتين 0 و x نجد أنّ:

$$2J_{\nu+1}(x) = \int_0^x J_\nu(x)\,dx - \int_0^x J_{\nu+2}(x)\,dx$$

وبالمثل وبتبديل ν بـ $\nu+2$ نجد أنّ:

$$2J_{\nu+3}(x) = \int_0^x J_{\nu+2}(x)\,dx - \int_0^x J_{\nu+4}(x)\,dx$$

وهكذا ...، ونجمع هذه العلاقات نجد التكامل:

$$\int_0^x J_\nu(x)\,dx = 2[J_{\nu+1}(x) + J_{\nu+3}(x) + \cdots] \quad (184)$$

❁ لنكن لدينا التكامل:

$$\int_0^x x^m J_n(x)\,dx$$

حيث m وn أعداد صحيحة موجبة و$m > n$. إن التكامل المذكور يمكن كتابته على الشكل الآتي:

$$\int_0^x x^{m-n-1} \cdot x^{n+1} J_n(x)\,dx$$

نكامل بالتجزئة ونأخذ بعين الاعتبار العلاقة (182):

$$\int_0^x x^m J_n(x)\,dx = [x^{m-n-1}\, x^{n+1} J_{n+1}(x)]_0^x -$$
$$-(m-n-1)\int_0^x x^{m-n-1}\, x^{n+1} J_{n+1}(x)\,dx =$$
$$= x^m J_{n+1}(x) - (m \quad n-1)\int_0^x x^{m-1} J_{n+1}(x)\,dx$$

وبالمثل نجد:

$$\int_0^x x^{m-1} J_{n+1}(x)dx = x^{m-1} J_{n+2}(x) - (m-n-3)\int_0^x x^{m-2} J_{n+2}(x)dx$$
$$\int_0^x x^{m-2} J_{n+2}(x)dx = x^{m-2} J_{n+3}(x) - (m-n-5)\int_0^x x^{m-3} J_{n+3}(x)dx$$

.....

$$\int_0^x x^{m-k+1} J_{n+k-1}(x)dx =$$
$$= x^{m-k+1} J_{n+k}(x) - (m-n-2k+1)\int_0^x x^{m-k} J_{n+k}(x)dx$$

أي إنه أمكن إيجاد عدد صحيح k محقق للمساواة:

$$m - k = n + k + 1$$

وبالتالي إذا كان $(m-k)$ فردياً فإن التكامل المذكور يؤول لحساب تكامل من النوع الأول (182)، أما إذا كان $(m-k)$ زوجياً فإننا نستمر بعملية المكاملة حتى يصبح $m-k=0$ وبذلك يؤول التكامل المذكور لحساب تكامل من النوع الثاني (184).

3- نأتي الآن لإيجاد توابع بيسل من النوعين الأول والثاني من أجل بعض القيم الخاصة للمرتبة ν. ليكن:

$$\nu = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

حيث n عدد صحيح. إن معادلة بيسل التفاضلية (142) من أجل القيمة $\nu = 1/2$ تأخذ الشكل:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0 \qquad (185)$$

نجري التحويل: $y = Ux^{-1/2}$ فنجد أنّ:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + U = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة حلها العام يعطى بالعلاقة:

$$U(x) = A\cos x + B\sin x$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (185) معطى بالعلاقة:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x + B\sin x)$$

لتعيين الثابتين A و B بحيث يتطابق التابع y مع تابع بيسل $J_{1/2}(x)$ أو $J_{-1/2}(x)$ وبما أنّ:

$$J_{1/2}(0) = 0$$

فإن الثابت A يكون معدوماً، ولتعيين الثابت B ننشر التابع y في متسلسلة صحيحة معممة، ومن ثم نقارن هذه المتسلسلة مع متسلسلة التابع $J_{1/2}(x)$:

$$y = \frac{B}{\sqrt{x}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 + \cdots)$$

وبالتالي فإن:

$$B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

ويكون:

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x\,\pi}} \cdot \sin x \qquad (186)$$

بالطريقة نفسها تماماً نجد أن:

$$J_{-1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x\,\pi}} \cdot \cos x \qquad (187)$$

نذكر هنا أن توابع بيسل من النوع الثاني تعرف بالعلاقة:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos\pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \qquad (188)$$

من هذه العلاقة نجد أنّ:

$$Y_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \cos x$$

$$Y_{-1/2}(x) = -J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \sin x$$

بتعويض $\nu = \pm 1/2$ في العلاقة التدرجية (180) نجد أنّ:

$$J_{3/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \qquad J_{-3/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}\left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right)$$

وباستخدام العلاقة نفسها وبتطبيقها مرات متتالية يمكننا حساب:

$$J_{5/2}(x), \qquad J_{-5/2}(x), \qquad J_{7/2}(x), \qquad J_{-7/2}(x), \qquad \cdots$$

وباستخدام العلاقتين (173) و(178) نجد العلاقات:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(x\,dx)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \qquad (189)$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(x\,dx)^n}\left(\frac{\cos x}{x}\right) \qquad (190)$$

أما باستخدام العلاقة (188) فنجد أنّ:

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) \qquad (191), \qquad Y_{-n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad (192)$$

4-13-1 التابع المولد

– لنأخذ المتسلسلة الصحيحة لتابع e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

لنبدل أولاً كل x بـ $\frac{xt}{2}$ ومن ثم كل x بـ $\frac{-xt^{-1}}{2}$.

$$e^{\frac{1}{2}xt} = 1 + \frac{xt}{2 \cdot 1!} + \frac{x^2t^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^3t^3}{2^3 \cdot 3!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r t^r}{2^r \cdot r!}$$

$$e^{-\frac{1}{2}xt^{-1}} = 1 - \frac{xt^{-1}}{2 \cdot 1!} + \frac{x^2t^{-2}}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3t^{-3}}{2^3 \cdot 3!} + \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^s t^{-s}}{2^s \cdot s!}$$

إن المتسلسلتين الأخيرتين متقاربتان من أجل قيم x ومن أجل جميع قيم t باستثناء $t = 0$ (من أجل المتسلسلة الثانية) لنشكل جداء المتسلسلتين مع اعتبار $t \neq 0$ فنجد أنّ:

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r t^r}{2^r \cdot r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^s t^{-s}}{2^s \cdot s!}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{r+s} t^{r-s}}{2^{r+s} \cdot r! \cdot s!}$$

لنوجد الآن أمثال t من مختلف الأسس، لنفرض أنّ:

$$0 < r - s = n \Rightarrow r = n + s \Rightarrow r + s = n + 2s$$

أما إذا كان:

$$r - s = -n < 0 \Rightarrow r = -n + s \Rightarrow r + s = -n + 2s$$

وبالتالي فإن أمثال t^n و t^{-n} تعطى بالعلاقات:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{n+2s}}{(n+s)!\,s!\,2^{n+2s}}=J_n(x),\qquad \sum_{\substack{s=0\\ s\geq n}}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{-n+2s}}{(-n+s)!\,s!\,2^{-n+2s}}=J_{-n}(x)$$

نلاحظ أيضاً أننا نحصل على أمثال t^0 من أجل $r\ s=0$ وتكون معرفة بالعلاقة:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{s!\,s!\,2^{2s}}=J_0(x)$$

وفقاً لما ذكرنا في العلاقة أعلاه:

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_0(x)\,t^n \qquad (193)$$

حيث إن المتسلسلة في الطرف الأيمن من هذه العلاقة متقاربة إطلاقاً من أجل جميع قيم x ومن أجل جميع قيم t باستثناء $t=0$، يسمى التابع:

$$\Phi(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_0(x)\,t^n \qquad (194)$$

بالتابع المولد لتوابع بيسل من النوع الأول ذي المراتب الصحيحة.

- لنجر في العلاقة (193) التحويل الآتي:

$$t=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (195)$$

وبالاستناد إلى العلاقة (159) ومن أجل قيم n الفردية يكون:

$$\begin{aligned}&J_{-n}(x)t^{-n}+J_n(x)t^n=\\&=J_{-n}(x)\cos n\varphi-J_{-n}(x)\,i\sin n\varphi+J_n(x)\cos n\varphi+J_n(x)\,i\sin n\varphi\\&=-J_n(x)\cos n\varphi+J_n(x)\,i\sin n\varphi+J_n(x)\cos n\varphi+J_n(x)\,i\sin n\varphi\\&=2i\,J_n(x)\sin n\varphi\end{aligned}$$

أما من أجل قيم n الزوجية فيكون:

$$\begin{aligned}&J_{-n}(x)t^{-n}+J_n(x)t^n=\\&-J_{-n}(x)\cos n\varphi-J_{-n}(x)\,i\sin n\varphi+J_n(x)\cos n\varphi+J_n(x)\,i\sin n\varphi\\&=J_n(x)\cos n\varphi-J_n(x)\,i\sin n\varphi+J_n(x)\cos n\varphi+J_n(x)\,i\sin n\varphi\\&=2\,J_n(x)\cos n\varphi\end{aligned}$$

وبالتالي فإن العلاقة (193) تأخذ الشكل:

$$\begin{aligned}&e^{ix\sin\varphi}=\cos(x\sin\varphi)+i\,\sin(x\sin\varphi)=J_0(x)+2i\,J_1(x)\sin\varphi+\\&+2\,J_2(x)\cos2\varphi+2i\,J_3(x)\sin3\varphi+2J_4(x)\cos4\varphi+\cdots \qquad (196)\end{aligned}$$

بفصل الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في العلاقة (196) نجد أنّ:

$$\cos(x\sin\varphi)=J_0(x)+2\,J_2(x)\cos2\varphi+2\,J_4(x)\cos4\varphi+\cdots=$$

$$= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi \qquad (197)$$

$$\sin(x\sin\varphi) = 2J_1(x)\sin\varphi + 2J_3(x)\sin 3\varphi + 2J_5(x)\sin 5\varphi + \cdots =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin[(2n-1)\varphi] \qquad (198)$$

بتبديل φ بـ $\varphi - \frac{\pi}{2}$ في العلاقة (196) نجد أنّ:

$$e^{ix\cos\varphi} = \cos(x\cos\varphi) + i\,\sin(x\cos\varphi) = J_0(x) + 2iJ_1(x)\cos\varphi - 2J_2(x)\cos 2\varphi - 2iJ_3(x)\cos 3\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi + \cdots \qquad (199)$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$\cos(x\cos\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)\cos 2n\varphi \qquad (200)$$

$$\sin(x\cos\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n-1}(x)\cos[(2n-1)\varphi] \qquad (201)$$

من الواضح أن العلاقات السابقة تتحقق من أجل جميع قيم x و φ.

لنضرب العلاقة (200) بـ $\cos m\varphi$ والعلاقة (201) بـ $\sin m\varphi$ حيث m عدد صحيح، ولنكامل العلاقات الناتجة من 0 حتى π فنجد أنّ:

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi = J_0(x)\int_0^{\pi}\cos m\varphi\,d\varphi + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos 2n\varphi\,d\varphi \qquad (202)$$

$$\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin(x\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin[(2n-1)\varphi]\,d\varphi \qquad (203)$$

لكن:

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\,d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos 2n\varphi\,d\varphi = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq 2n \\ \dfrac{\pi}{2} & ; \quad m = 2n \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin[(2n-1)\varphi]\,d\varphi = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq 2n-1 \\ \dfrac{\pi}{2} & ; \quad m = 2n-1 \end{cases}$$

وفقاً لذلك نجد أنّ:

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}[1+(-1)^m]\,J_m(x) \qquad (204)$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}[1-(-1)^m]\,J_m(x) \qquad (205)$$

بجمع العلاقتين (204) و(205) نجد العلاقة:

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = \pi J_m(x) \qquad (206)$$

ويمكن الطرف الأيسر من هذه العلاقة بتكامل بيسل،

بما أنّ التابع $\cos(m\varphi - x\sin\varphi)$ زوجي، بينما التابع $\sin(m\varphi - x\sin\varphi)$ فردي فإنه باستطاعتنا بدلاً من العلاقة (206) أخذ العلاقة:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi \qquad (207)$$

أو:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\varphi - x\sin\varphi)}\,d\varphi \qquad (208)$$

- سنبين الآن أنه يمكن تمثيل تابع بيسل $J_\nu(x)$ (ν لا يساوي عدداً صحيحاً) بتكامل محدد. بما أنّ:

$$\frac{1}{\Gamma(r+\nu+1)} = \frac{2}{\Gamma(\nu+1/2)\cdot\Gamma(r+1/2)}\int_0^{\pi/2} \cos^{2r}\theta \sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

لدينا العلاقة:

$$\Gamma(r+\nu+1) = (r+\nu)(r+\nu-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

$$\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(2r-1)}{2^r}\sqrt{\pi}$$

فإنه يكون:

$$J_\nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{2r}}{1\cdot 3\cdots(2r-1)\cdot 2\cdot 4\cdots 2r}\times\int_0^{\pi/2}\cos^{2r}\theta\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

ومنه نجد أنّ:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi/2}\left[\sin^{2\nu}\theta\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{2r}\cos^{2r}\theta}{(2r)!}\right]d\theta$$

لكن:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{2r}\cos^{2r}\theta}{(2r)!} = \cos(x\cos\theta)$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos(x\cos\theta)\,d\theta \qquad (209)$$

بإجراء التحويل $u = \cos\theta$ نجد أنّ العلاقة (209) تأخذ الشكل:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xu\, du \qquad (210)$$

وهي العلاقة التي تمثل تابع بيسل بتكامل محدد.

5-13-1 المعادلات التفاضلية التي ترد لمعادلة بيسل التفاضلية

إن معادلة بيسل التفاضلية في شكلها النظامي (142) قليلاً ما تصادفنا في حل مختلف المسائل، لذلك يكون من المفيد، إن أمكن بالطبع، رد هذه المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والصعبة الحل إلى معادلة بيسل التفاضلية ولاسيما بعد أن درسنا حلول هذه المعادلة والخصائص التي تتمتع بها في الحالات المغايرة التي لا يمكن فيها رد تلك المعادلات إلى معادلة بيسل نلجأ إلى الطريقة العامة في الحل والمبينة في فقرة سابقة.

سنستعرض الآن بعض النماذج من المعادلات التفاضلية التي يمكن ردها إلى معادلة بيسل، بغية الاختصار نرمز للحل العام لمعادلة بيسل التفاضلية بـ:

$$Z_\nu(x) = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$

1) الشكل الأول: المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (211)$$

إنّ هذه المعادلة تختلف عن معادلة بيسل بوجود العامل k^2، إلا أنه يمكن إرجاعها إلى معادلة بيسل بواسطة التحويل $kx = t$ وحلها العام يكون $Z_\nu(kx)$.

2) الشكل الثاني: المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y'' + \frac{a}{x}y' + by = 0 \qquad (212)$$

هذه المعادلة يمكن إرجاعها إلى الشكل الأول (211) بواسطة التحويل: $y = x^\nu u$ وعليه يكون:

$$x^\nu u'' + (a+2\nu)x^{\nu-1} + \{[(a-1)\nu + \nu^2]x^{\nu-2} + bx^\nu\}u = 0$$

وباختيار ν بحيث يكون $a + 2\nu = 1$ أي إنّ $\nu = (1-a)/2$ نجد المعادلة التفاضلية:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(b - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0$$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى بالعلاقة: $u = Z_\nu(x\sqrt{b})$ ويكون الحل العام للمعادلة (212) هو:

$$y = x^{(1-a)/2} Z_{(1-a)/2}(x\sqrt{b})$$

3) الشكل الثالث:

نستعرض الآن أنماطاً مختلفة من المعادلات التفاضلية التي يعبر عن حلها العام بواسطة توابع بيسل. بإجراء تحويل في التابع المجهول والمتحول المستقل يمكن إرجاع هذه المعادلات إلى الشكل النظامي (211). فالمعادلة:

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \left(bx^m + \frac{c}{x^2}\right)y = 0 \quad (213)$$

حلها العام هو:

$$y = x^{(1-a)/2} Z_v\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right) \quad ; \quad v = \frac{[(1-a)^2 - 4C]^{1/2}}{m+2}$$

أولاً: نلاحظ أن المعادلة التفاضلية (212) تنتج من المعادلة (213) بفرض $m = 0$ و $c = 0$، بوضع $a = 0$ في المعادلة (213) نجد المعادلة:

$$y'' + \left(bx^m + \frac{c}{x^2}\right)y = 0 \quad (214)$$

ويكون حلها العام معطياً بالعلاقة:

$$y = \sqrt{x}\, Z_v\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right) \quad ; \quad v = \frac{[1-4C]^{1/2}}{m+2}$$

ثانياً: بوضع $m = 0$ و $c = -p(p+1)$ بالإضافة إلى $a = 0$ نجد المعادلة التفاضلية:

$$y'' + \left[b - \frac{p(p+1)}{x^2}\right]y = 0 \quad (215)$$

وحلها العام هو: $y = \sqrt{x}\, Z_{p+1/2}(x\sqrt{b})$

ثالثاً: بوضع $c = 0$ و $a = 0$ نجد أنّ: $y'' + b\,x^m y = 0$ (216) والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$y = \sqrt{x}\, Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

رابعاً: بفرض أنّ $m = 1$ و $c = 0$ و $a = 0$ نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$y'' + b\,x\,y = 0 \quad (217)$$

وحل هذه المعادلة هو:

$$y = \sqrt{x}\, Z_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{b}}{3}x^{3/2}\right)$$

خامساً: لنضع في المعادلة (213)، $c = 0$ فنجد المعادلة:

$$y'' + \frac{a}{x}y' + b\,x^m y = 0 \quad (218)$$

وحلها العام يكون:

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\frac{1\pm a}{m+a}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

نلاحظ أن الحالات المستعرضة في الشكل الثالث صحيحة من أجل $m+2 \neq 0$ إذ أنه في الحالة التي يكون فيها $m+2=0$ تأخذ المعادلة التفاضلية (213) الشكل:

$$x^2 y'' + a x y' + k y = 0$$

وهذه معادلة أويلر التفاضلية التي يمكن ردها بواسطة التحويل $x = e^t$ إلى معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة.

4): الشكل الرابع:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\frac{dy}{dx}\right) + b x^{\beta} y = 0 \qquad (219)$$

وهذه هي المعادلة (218) من أجل $a = \alpha, m = \beta - \alpha$.

5): الشكل الخامس: المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y'' - \left(2a + \frac{1}{x}\right)y' + \left(b + \frac{a}{x} - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (220)$$

من أجل $b \neq a^2$ حلها العام هو: $y = e^{ax} Z_{\nu}[(b-a^2)^{1/2} x]$ وفي الحالة التي يكون فيها $b = a^2$ فإن هذه المعادلة تقبل الحلين الخاصين:

$$y_1 = x^{\nu} e^{-ax}, \qquad y_2 = x^{-\nu} e^{-ax}$$

فإذا كان $\nu \neq 0$ فإن هذين الحلين مستقلان خطياً، وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة:

$$y = (c_1 x^{\nu} + c_2 x^{-\nu}) e^{-ax}$$

أما إذا كان $\nu = 0$ فبسهولة يمكن التأكد من أن المعادلة في هذه الحالة تقبل الحلين الخاصين المستقلين خطياً:

$$y_1 = e^{-ax}, \qquad y_2 = e^{-ax} \ln x$$

ويكون الحل العام معطياً بالعلاقة: $y = e^{-ax}(c_1 + c_2 \ln x)$.

مثال (16-1): أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + \frac{5}{x} y' - 16 x^4 y = 0$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (213) نجد أن: $a = 5, \quad c = 0, \quad b = -16, \quad m = 4$ وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة:

$$y = x^{-2} Z_{2/3}\left(\frac{4}{3} i x^3\right)$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد كلاً مما يلي:

(i) $\Gamma(3.5)$ (ii) $\Gamma(4.5)$ (iii) $\Gamma(0.25)\Gamma(0.75)$

(iv) $\beta(2.5, 1.5)$ (v) $\beta(4.5, 3.5)$

2- أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام تابع غاما:

(i) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (ii) $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-kx} dx \ ; (k > 0)$

(iii) $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3} dx$ (iv) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{p+1} \cdot (x-1)^q} \quad (-p < q < 1)$

3- برهن أنّ:

(i) $\int_0^\infty \frac{x^4}{4^x} dx = \frac{\Gamma(5)}{(\ln 4)^5}$, (ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

(iii) $\int_0^{\pi/2} [\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\sec\theta}] d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \sqrt{\pi}/\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$

4- ليكن لدينا:

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

برهن أنّ:

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

ثم أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$$

5- برهن أنّ:

(i) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5}\beta\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\beta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(iii) $\int_0^1 x^3(1-\sqrt{x})^5 dx = 2\beta(8, 6)$

6- أثبت أنَّ:

$$(i)\ \int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}dx = (b-a)^{m+n+1}\beta(m,n)$$

$$(ii)\ \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{m+n}}dx = \frac{1}{a^n\cdot b^m}\beta(m,n)\,, \qquad (iii)\ \int_0^\infty \frac{x^{10}-x^{18}}{(1+x)^{30}}dx = 0$$

$$(iv)\ \int_0^1 \frac{(1-x^4)^{3/4}}{(1+x^4)^2}dx = \frac{1}{2^{9/2}}\beta\left(\frac{7}{4},\frac{1}{4}\right)$$

7- برهن أنَّ:

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}$$

من أجل n عدد صحيح موجب و $m > -1$. ثم احسب التكامل:

$$\int_0^1 x\,(\ln x)^3\, dx$$

8- برهن أنه من أجل $p > 0, q > 0$ فإنَّ:

$$\int_0^1 y^{q-1}\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy = \frac{\Gamma(p)}{q^p}$$

9- بالاستعانة بتابع غاما احسب:

$$\int_0^1 x^m\,(1-x^n)^p\, dx$$

وبالتالي احسب كلا من التكاملين:

$$(i)\ \int_0^1 x\,(1-x^3)^{10}\,dx\,, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

10- برهن أنَّ:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(e^x+e^{-x})^n} = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$$

ثم احسب قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^3 x\, dx$$

11- برهن أنَّ:

$$\beta\left(n+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(n+1/2)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,\Gamma(n+1)}$$

ثم برهن أنّ:

$$2^n\,\Gamma(n+1/2)=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}$$

12- برهن أنّ:

$$(i)\ \frac{\beta(m+1,n)}{m}=\frac{\beta(m,n+1)}{n}=\frac{\beta(m,n)}{m+n},\qquad (ii)\ \beta(n,n)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{2^{2n-1}\,\Gamma(n+1/2)}$$

$$(iii)\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\cdot\Gamma(n+1)},\qquad (iv)\ \beta(m+1,n)+\beta(m,n+1)=\beta(m,n)$$

13- برهن أنّ التكامل:

$$\iint x^{m-1}\,y^{n-1}\,dx\,dy=\frac{a^m b^n}{2n}\,\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}+1\right)$$

على ربع القطع الناقص الموجود في الجزء الموجب من المستوي (الربع الأول)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

14- برهن أن مساحة المنطقة من الربع الأول من المستوي والمحاطة بالمنحني:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}=1,\qquad \alpha>0,\qquad \beta>0,$$

تعطى بالعلاقة:

$$\frac{ab}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\alpha+1/\beta)}$$

15- أوجد كتلة المنطقة من الثمن الأول والمحاطة بالجسم القطع الناقصي:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

حيث إن الكثافة في أية نقطة منه هي: $\rho=kxyz$.

16- احسب التكاملات الآتية:

$$(i)\ \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ ;\ a>0 \qquad (ii)\ \int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x^2)}\,dx$$

$$(iii)\ \int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^4)}\,dx \qquad (iv)\ \int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\,dx$$

$$(v)\ \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\ ;\ n>0 \qquad (vi)\ \int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$$

$$(vii)\ \int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\ ;\ |k|<1 \qquad (viii)\ \int_0^1 \ln(\Gamma(x))\,dx\ ;\ n>0$$

$$(ix)\ \int_0^{\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx\ ;\quad a>0\ \ \&\ \ p>-1$$

الأجوبة:

$$(i)\ \frac{\pi a^2}{16},\quad (ii)\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad (iii)\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad (iv)\ \frac{3\pi}{512},\quad (v)\ \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)},$$
$$(vi)\ \Gamma(p+1),\quad (vii)\ \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}},\quad (viii)\ \ln(\sqrt{2\pi}),\quad (ix)\ \frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$$

17- أثبت صحة العلاقات الآتية:

$$(i)\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4},\qquad (ii)\ \int_0^{\infty}e^{-x^4}dx\cdot\int_0^{\infty}x^2\,e^{-x^4}dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$(iii)\ \prod_{m=1}^{n}\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-x^n}dx=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},\qquad (iv)\ \Gamma'(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}\ln x\,dx$$

$$(v)\ \Gamma''(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}\,e^{-x}\ln^2 x\,dx$$

18- أحسب التكاملات الآتية وفق التحويل بجانب كلٍ منها:

$$(i)\ \int_0^1\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}dx\quad ;\quad y=\frac{x(1+p)}{x+p}$$

$$(ii)\ \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}\quad ;\quad \cos\theta=1-2\sqrt{x}$$

الأجوبة:

$$(i)\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\frac{1}{(1+p)^a p^b},\qquad (ii)\ \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4\sqrt{\pi}}$$

19- أثبت صحة ما يلي:

$$(i)\ C(x)+iS(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\phi\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{x}\right),\quad (ii)\ C(x)-iS(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\phi\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{x}\right)$$

$$(iii)\ C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)=\int_0^x\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt,\qquad (iv)\ S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)=\int_0^x\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

20- أثبت أنّ طول قوس منحني الخلزون: $C=\mathrm{Ci}(x)$, $S=\mathrm{si}(x)$ الواصل بين النقطتين:

$\big(\mathrm{Ci}(0),\mathrm{si}(0)\big),\big(\mathrm{Ci}(x),\mathrm{si}(x)\big)$ يساوي $\ln x$ وأن القوس في ذلك النقطة يساوي x.

21- أوجد حلاً خاصاً للمعادلات الآتية، في شكل متسلسلة صحيحة والمحقق للشروط الابتدائية المذكورة بجانب المعادلة، ومن ثم أوجد حلاً خاصاً ثانياً، وبعد ذلك اكتب الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$(i)\ y'' - 2xy' + 2y = 0;$ $\quad y_1 = 0,\ y_1' = 2,\ x = 0$
$(ii)\ (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0;$ $\quad y_1 = 0,\ y_1' = 1,\ x = 0$
$(iii)\ (1 - x^2)y'' - xy' = 0;$ $\quad y_1 = 1,\ y_1' = 0,\ x = 0$

الأجوبة:

$(i)\ y_1 = 2x, \quad y_2 = x\int \frac{e^{x^2}}{x^2}dx, \quad y = x\left(c_1 + c_2\int \frac{e^{x^2}}{x^2}dx\right)$
$(ii)\ y_1 = x, \quad y_2 = 1 + \frac{1}{2}x\ln\frac{x-1}{x+1}, \quad y = c_1y_1 + c_2y_2$
$(iii)\ y_1 = 1, \quad y_2 = \arcsin x, \quad y = c_1 + c_2\arcsin x$

22- أوجد حلين مستقلين خطياً لكل معادلة من المعادلات التفاضلية الآتية في شكل متسلسلات صحيحة معممة وفي جوار النقطة الشاذة $x = 0$.

$$(i)\ y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \quad (ii)\ x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$
$$(iii)\ x(x-1)y'' + (1+x)y' - y = 0$$

الأجوبة:

$(i)\ y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}, \quad (ii)\ y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

23- برهن صحة العلاقات الآتية:

$(i)\ F(\alpha,\beta,\beta;x) = (1-x)^{-\alpha}, \quad (ii)\ F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2\right) = \frac{\arcsin x}{x}$

$(iii)\ F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2};x^2\right) = \frac{1}{2}[(1-x)^{-\alpha} + (1+x)^{-\alpha}]$

24- برهن صحة ما يلي:

$(i)\ (\alpha-\beta)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma;x) =$
$= (\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1,\gamma;x) - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma;x)$
$(ii)\ (\gamma-\beta-1)F(\alpha,\beta,\gamma;x) =$
$= (\gamma-\alpha-\beta-1)F(\alpha,\beta+1,\gamma;x) + \alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma;x)$

25- حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(i)\ y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{k^2}{x}y = 0, \quad (ii)\ x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + k^2x^2y = 0$$

26- برهن أن التابع $y = x^n J_n(x)$ حل للمعادلة التفاضلية: $x\,y'' + (1-2n)\,y' + x\,y = 0$ وأنّ التابع:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos n\theta - x\sin\theta)d\theta$$

حل للمعادلة: $\forall n \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = \frac{\sin n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{n}{x^2}\right)$

27- برهن صحة العلاقات الآتية: $(i)\ \ J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$

$(ii)\ \ J_0''(x) = J_2(x) - J_0(x), \qquad (iii)\ \ 4J_0''(x) + 3J_0'(x) + J_3(x) = 0$

28- أثبت أنّ: $J_0'(x)J_{-\nu}(x) - J_\nu(x)J_{-\nu}'(x) \equiv A/x$ حيث A ثابت.

29- برهن أنه من أجل جميع قيم n تتحقق العلاقة:

$$J_{-n}(x)J_{n-1}(x) + J_{-n+1}(x)J_n(x) \equiv \frac{2\sin nx}{\pi x}$$

30- برهن صحة العلاقات الآتية حيث n عدد صحيح:

$(i)\ \ 8J_n'''(x) = J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)$

$(ii)\ \ 16J_n^{(4)}(x) = J_{n-4}(x) - 4J_{n-2}(x) + 6J_n(x) - 4J_{n+2}(x) + J_{n+4}(x)$

$(iii)\ \ J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_{n-m}(y)$

$(iv)\ \ J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + 2J_3^2(x) + 2J_4^2(x) \cdots = 1$

31- إذا كانت α هي أحد جذور المعادلة $J_0(x) = 0$ فبرهن أنّ:

$$(i)\ \int_0^1 J_1(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (ii)\ \int_0^{\alpha} J_1(x)dx = 1$$

32- إذا كانت α هي أحد جذور المعادلة $J_1(x) = 0$ فبرهن أنّ: $\int_0^1 x\,J_0(\alpha x)dx = 0$

33- أثبت صحة العلاقة: $n > 0 \quad ; \quad \int_0^a r^n J_{n-1}(\xi r)dr = \frac{a^n}{\xi}J_n(\xi a)$

34- بفرض أن n عدد صحيح، أثبت أنّ: $|J_n(x)| \le 1$.

35- برهن أنّ:

$(i)\ \ C(x) = J_{1/2}(x) + J_{5/2}(x) + J_{9/2}(x) + \cdots$

$(ii)\ \ S(x) = J_{3/2}(x) + J_{7/2}(x) + J_{11/2}(x) + \cdots$

2- تحويلات لابلاس

Laplace Transforms



P. S. Laplace
(1749-1827)



O. Heaviside
1850-1925

2-1 تمهيد

أصبحت معرفة تحويلات لابلاس[*] في السنوات الأخيرة من المتطلبات المهمة التي يحتاجها المهندسون والعلماء، وذلك لأن طرائق التحويل تزودنا بوسائل سهلة وفعّالة لحل العديد من المشاكل التي تظهر في علوم الهندسة.

نشأ هذا الموضوع من الطرائق العملية المطبّقة من قبل المهندس الإنكليزي أوليفر هيفيساید O. Heaviside (1850-1925) لحل مسائل في الهندسة الكهربائية. لسوء الحظ، كانت معالجة هيفيساید غير منتظمة ومفتقرة إلى الصرامة، ولقد وضعت هذه التحويلات في الموضع الرياضي الصحيح من قبل العالمين برومويتش وكارسُن (Bromwich and Carson) خلال العامين 1916-1917. أوجدَ الحساب التفاضلي والتكاملي الذي قام به هيفيساید في حلوله للمسائل، أنه من الأفضل إدخال تكاملات من نوع خاص تدعى بتحويلات لابلاس.

إن طريقة تحويلات لابلاس لها فائدة مباشرة لأنها تعطي حلولاً للمعادلات التفاضلية بمعرفة قيم حدّية ابتدائية، دون الضرورة لمعرفة الحل العام لها أولاً، ثم الحصول على الحل المطلوب بإعطاء الثوابت قيماً عددية ثانياً. علاوة على ذلك تساعد جداول تحويلات لابلاس إلى اختصار الجهد في حل مسائل المعادلات التفاضلية دون اللجوء إلى الإجراءات الجبرية.

2-1-1 تعريف تحويل لابلاس

ليكن لدينا التابع $f(t)$ المعرف من أجل جميع القيم الموجبة لـ t، يعرّف تحويل لابلاس للتابع $f(t)$، ونرمز له بـ $\mathcal{L}\{f(t)\}$، بالعلاقة الآتية:

(*) سمّيت بهذا الاسم نسبة للعالم الرياضي الفرنسي العظيم بيير سيمون ماركيز دو لابلاس (1749-1827). ساهم إسهاماً هاماً في نظرية الاحتمالات، والتوابع الخاصة، ونظرية الكمون، والفلك. كان معلماً في باريس، وحرّس نابليون بونابرت فترة ستة.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

بشرط تقارب (وجود) التكامل السابق، والوسيط s يمكن أن يكون حقيقياً أو عقدياً.

من الواضح أن تحويل لابلاس هو تابع للوسيط s، ويكتب اختصاراً $\mathcal{L}\{f(t)\}$ أو $\mathcal{L}[f(t)]$ أو $L\{f(t)\}$ أو $\mathcal{L}(f)$ أو $L(f)$ أو $\overline{f}(s)$ أو $F(s)$، كما أنّ بعض الكتب تفضل الوسيط p بدل s، والمصطلح المتبع هنا هو $\mathcal{L}\{f(t)\}$. كما يمكن أن نكتب:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\overline{f}(s)\} \qquad (2)$$

يدعى $f(t)$ تحويل لابلاس المعاكس للتابع $\overline{f}(s)$. إن الرمز $\mathcal{L}$ الذي يحوّل $f(t)$ إلى $\overline{f}(s)$ يدعى عامل تحويل لابلاس.

2-1-2 شروط وجود تحويل لابلاس

إن تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ أي $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ يكون موجوداً من أجل $s > a$ إذا تحقق الشرطان:

1- $f(t)$ تابع مستمر أو مستمر جزئياً.

2- النهاية $\lim_{t\to\infty}\{e^{-at} f(t)\}$ موجودة ومنتهية.

يكون التابع مستمراً جزئياً إذا كان منقطعاً في عدد منتهٍ من النقاط كما هو موضح في الشكل (2-1) أدناه.



الشكل (2-1): مثال على تابع مستمر جزئياً

يمكن تبديل الشرط الثاني بما يعرف بالنمو البطيء (شرط تقييد النمو) وهو أنه من أجل $\forall t \geq 0$، يوجد عددان k, M يحققان الشرط: $|f(t)| \leq Me^{kt}$.

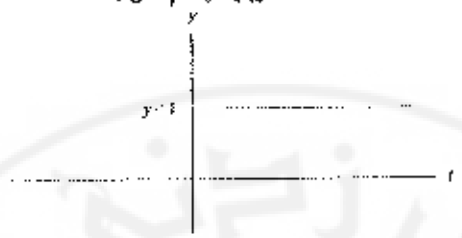
يجب التنبيه على أن الشروط أعلاه كافية وليست لازمة، فمثلاً $\mathcal{L}\{1/\sqrt{t}\}$ موجود، مع أن $1/\sqrt{t}$ غير معرف عندما $t = 0$.

2-1-3 تابع هيفيسايد وتحويل لابلاس له

في حالة التوابع التي تمتلك قفزات متقطعة تعالج بشكل كفؤ باستخدام تابع الخطوة الواحدية أو تابع هيفيسايد، يعطى تابع الهيفيسايد بالعلاقة:

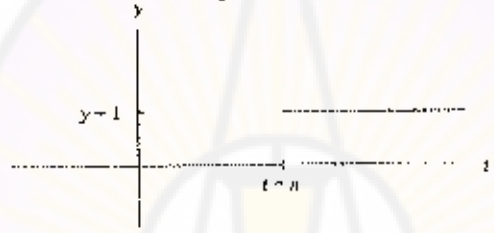
$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

انظر الشكل (2-2). وتستعمل أحياناً تابع هيفيساید المزاح بـ a واحدة نحو اليمين $H(t-a)$، انظر الشكل (2-3) الذي يعطى بالعلاقة: (4) $H(t-a)=u(t-a)=\begin{cases}1 & ; \quad t\geq a\\ 0 & ; \quad t<a\end{cases}$.



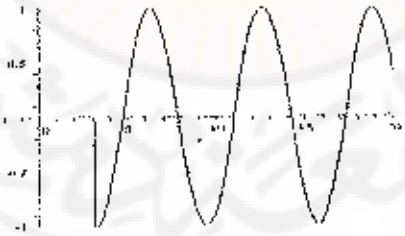
الشكل (2-2): تابع هيفيساید $H(t)$.

يستخدم عادة التابع $H(t-a)$ لحذف جزء من تابع ما حتى اللحظة $t=a$، وبعد ذلك يبقى الجزء الآخر على حاله: (5) $H(t-a)g(t)=\begin{cases}0 & ; \quad t<a\\ g(t) & ; \quad t\geq a\end{cases}$



الشكل (2-3): تابع هيفيساید المزاح $H(t-a)$.

يوضح الشكل (2-4) التابع $H(t-\pi)\cos t$ الذي هو تابع مشابه للتابع $\cos t$ من أجل $t\geq\pi$ ويساوي 0 من أجل $t<\pi$، فإن جداء تابع ما $f(t)$ بالتابع $H(t-a)$ يبقي منحني التابع $f(t)$ لا يتغير من أجل $t\geq a$، ويعوضه بـ 0 من أجل $t<a$.

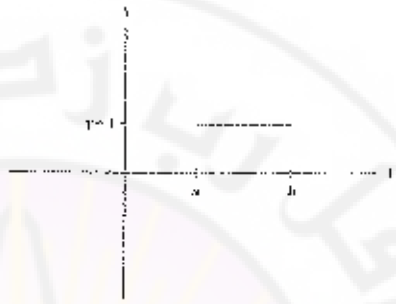


الشكل (2-4): التابع $H(t-\pi)\cos t$.

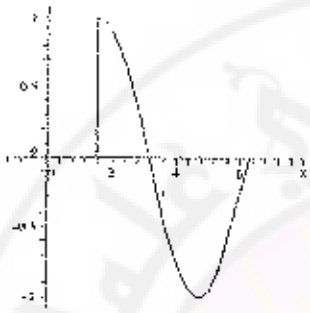
ويمكن استخدام تابع هيفيساید لتعريف نبضة ما، فإذا كان $a<b$ فإنّ:

$$H(t-a)-H(t-b)=\begin{cases}0 & ; \quad t<a\\ 1 & ; \quad a\leq t<b\\ 0 & ; \quad t\geq b\end{cases} \qquad (6)$$

يوضح الشكل (2-5) تابع النبضة $H(t-a)-H(t-b)$ عندما $a<b$. تستخدم النبضات لتغيير منحني الإشارة من اللحظة $t=a$ حتى اللحظة $t=b$ بينما تبقى على حالها فيما عدا ذلك. ويوضح الشكل (2-6) تأثير تابع النبضة من أجل التابع $[H(t-\pi/2)-H(t-2\pi)]\sin(t)$ الذي قيمته 0 قبل اللحظة $t=\pi/2$ وبعد اللحظة $t=2\pi$، بينما يساوي $\sin(t)$ بين هاتين الحظتين.



الشكل (2-5): تابع النبضة
$H(t-a)-H(t-b)$.



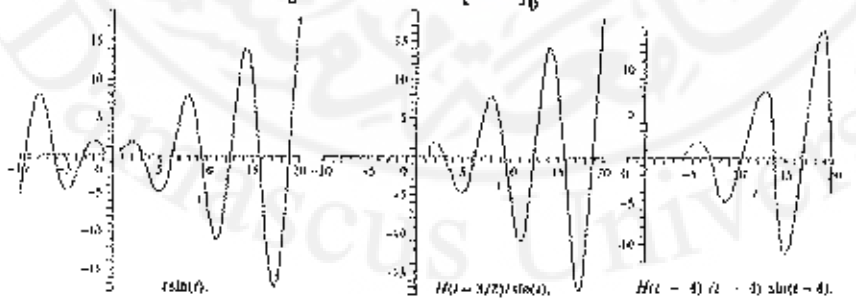
الشكل (2-6): التابع
$\left[H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-H(t-2\pi)\right]\sin(t)$.

من المهمّ جداً معرفة الفرق بين التابع $g(t)$ و $H(t-a)g(t)$ و $H(t-a)g(t-a)$.

يوضح الشكل (2-7) منحني التابع $t\sin(t)$ والتابع $H(t-3/2)\,t\sin(t)$ والتابع $H(t-4)\,(t-4)\sin(t-4)$. إنّ قيمة $H(t-3/2)\,t\sin(t)$ تساوي 0 حتى اللحظة $t=3/2$ وبعدها يساوي $t\sin(t)$، بينما $H(t-4)\,(t-4)\sin(t-4)$ قيمته 0 حتى اللحظة 4، ومن ثمّ يزاح منحني التابع $t\sin(t)$ بمقدار 4 إلى اليمين.

لنوجد تحويل لابلاس لتابع هيفيساید:

$$\mathcal{L}\{H(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot 1\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s}. \qquad (7)$$



الشكل (2-7): تابع هيفيساید وتأثيره في تابع الجيب $t\sin t$.

4-1-2 تحويل لابلاس لبعض التوابع الأساسية

يعطي التطبيق المباشر للتعريف الصيغ الآتية:

$$(i)\ \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\ ;\ s>0 \qquad (ii)\ \mathcal{L}\{t^n\} = \begin{cases} \dfrac{n!}{s^{n+1}} & ;\ n = 0,1,2,3,\cdots \\ \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} & ;\ \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}\ ;\ s>a$$

$$(iv)\ \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}\ ;\ s>0 \qquad (v)\ \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}\ ;\ s>0$$

$$(vi)\ \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}\ ;\ s>|a| \qquad (vii)\ \mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}\ ;\ s>|a|$$

الإثبات:

$$(i)\quad \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\ ;\quad s>0$$

$$(ii)\quad \mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t^n\,dt \underbrace{=}_{st=p} \int_0^\infty e^{-p}\left(\frac{p}{s}\right)^n \frac{dp}{s} =$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-p}p^n dp = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad ;\quad n>-1\ \ \&\ \ s>0$$

وبشكل خاص:

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \qquad \mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

وإذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن $\Gamma(n+1) = n!$ ويكون عندئذٍ:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$(iii)\quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}\ ;\quad s>a$$

$$(iv)\ \mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at + a\cos at)\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}\ ;\quad s>0$$

وبشكل مشابه تبرهن العلاقة (v) تترك تمريناً للقارئ.

$$(vi)\quad \mathcal{L}\{\sinh at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sinh at\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}\ ;\quad s>|a|$$

وبشكل مشابه تبرهن العلاقة (vii) تترك تمريناً للقارئ.

2-2 خواص تحويلات لابلاس

2-2-1 الخاصّة الخطيّة

إذا كانت a,b,c أيّة ثوابت وكانت f,g,h أيّة توابع لـ t، عندئذٍ:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)-ch(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}-c\mathcal{L}\{h(t)\} \qquad (8)$$

الإثبات:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)-ch(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)-ch(t)]dt=$$
$$=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt-c\int_0^\infty e^{-st}h(t)dt=$$
$$=a\,\mathcal{L}\{f(t)\}+b\,\mathcal{L}\{g(t)\}-c\,\mathcal{L}\{h(t)\}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة بسهولة.

مثال (2-1): مستخدماً قائمة تحويلات لابلاس لبعض التوابع الأساسية أوجد ما يلي:

$$(a)\ \mathcal{L}\left\{1+2t-\frac{1}{3}t^4\right\},\qquad (b)\ \mathcal{L}\{5e^{2t}-3e^{-t}\}$$

الحل:

$$(a)\ \mathcal{L}\left\{1+2t-\frac{1}{3}t^4\right\}=\mathcal{L}\{1\}+2\mathcal{L}\{t\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}\{t^4\}=\frac{1}{s}+2\left(\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{3}\frac{4!}{s^{4+1}}=$$
$$=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{8}{s^5}$$

$$(b)\ \mathcal{L}\{5e^{2t}-3e^{-t}\}=5\mathcal{L}\{e^{2t}\}-3\mathcal{L}\{e^{-t}\}=5\left(\frac{1}{s-2}\right)-3\left(\frac{1}{s+1}\right)=$$
$$=\frac{5(s+1)-3(s-2)}{(s-2)(s+1)}=\frac{2s+11}{s^2-s-2}$$

مثال (2-2): أوجد تحويلات لابلاس لكلّ من التّوابع الآتية:

$$(a)\ 6\sin 3t-4\cos 5t,\qquad (b)\ 2\cosh 2\theta-\sinh 3\theta$$

الحل:

$$(a)\ \mathcal{L}\{6\sin 3t-4\cos 5t\}=6\mathcal{L}\{\sin 3t\}-4\mathcal{L}\{\cos 5t\}=$$
$$=6\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)-4\left(\frac{s}{s^2+5^2}\right)=\frac{18}{s^2+9}-\frac{4s}{s^2+25}$$

$$(b)\ \mathcal{L}\{2\cosh 2\theta-\sinh 3\theta\}=2\mathcal{L}\{\cosh 2\theta\}-\mathcal{L}\{\sinh 3\theta\}=$$
$$=2\left(\frac{s}{s^2-2^2}\right)-\left(\frac{3}{s^2-3^2}\right)=\frac{2s}{s^2-4}-\frac{3}{s^2-9}$$

مثال (2-3): أوجد تحويلات لابلاس لكلّ من التّوابع الآتية:

$$(a)\ \sin^2 t,\qquad (b)\ \cosh^2 3t$$

الحل:

$$(a)\ \mathcal{L}\{\sin^2 t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2t\} =$$
$$= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right) = \frac{s^2+4-s^2}{2s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s^3+4s}$$

$$(b)\ \cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 \Rightarrow \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \Rightarrow$$
$$\cosh^2 3t = \frac{1}{2}(\cosh 6t + 1) \Rightarrow \mathcal{L}\{\cosh^2 3t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(\cosh 6t + 1)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cosh 6t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2-6^2}\right) = \frac{s^2-36+s^2}{2s(s^2-36)} =$$
$$= \frac{2s^2-36}{2s(s^2-36)} = \frac{s^2-18}{s(s^2-36)} = \frac{s^2-18}{s^3-36s}$$

مثال (2-4): أوجد تحويلات لابلاس للتابع $3\sin(\omega t+\alpha)$ حيث إنّ ω, α ثابتان عدديان.

الحل:

$$\sin(\omega t+\alpha) = \sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}\{3\sin(\omega t+\alpha)\} = 3\mathcal{L}\{\sin(\omega t+\alpha)\} = 3\mathcal{L}\{\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha\} =$$
$$= 3\cos\alpha\,\mathcal{L}\{\sin\omega t\} + 3\sin\alpha\,\mathcal{L}\{\cos\omega t\} =$$
$$= 3\cos\alpha\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) + 3\sin\alpha\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{3}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\alpha + s\sin\alpha)$$

مثال (2-5): أوجد تحويلات لابلاس للتوابع الآتية:

$(i)\ \sin 2t\sin 3t$, $(ii)\ \cos^2 2t$, $(iii)\ \sin^3 2t$

الحل:

$$(i)\ \sin 2t\sin 3t = \frac{1}{2}[\cos t - \cos 5t] \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}\{\sin 2t\sin 3t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}[\cos t - \cos 5t]\right\} = \frac{1}{2}[\mathcal{L}\{\cos t\} - \mathcal{L}\{\cos 5t\}] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+1^2} - \frac{s}{s^2+5^2}\right] = \frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)}$$
$$(ii)\ \cos^2 2t = \frac{1}{2}[1+\cos 4t] \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos^2 2t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}[1+\cos 4t]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}[\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos 4t\}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4^2}\right] = \frac{s^2+8}{s(s^2+16)}$$
$$(iii)\ \sin 6t = 3\sin 2t - 4\sin^3 2t \Rightarrow \sin^3 2t = \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 6t$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin^3 2t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 6t\right\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}\{\sin 2t\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\sin 6t\} =$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{6}{s^2+6^2}\right) = \frac{48}{(s^2+4)(s^2+36)}$$

2-2-2 خاصّة الإزاحة الأولى

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ فإن: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \overline{f}(s-a)\ ;\quad s > a$.

الإثبات:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \underbrace{=}_{\tau=s-a} \overline{f}(\tau) = \overline{f}(s-a) \qquad (9)$$

هذا يعني، إذا علمنا تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ أي $\overline{f}(s)$ فإننا نستطيع معرفة تحويل لابلاس للتابع $e^{at}f(t)$، وذلك بتعويض كل s بـ $s-a$؛ فنحصل على $\overline{f}(s-a)$.

وتطبيقاً لهذه الخاصّة فإنّ ذلك يؤدي إلى نتائج نافعة ومفيدة منها:

(1 $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$:لأنّ $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

(2 $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$:لأنّ $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

(3 $\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$:لأنّ $\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$

(4 $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$:لأنّ $\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$

(5 $\mathcal{L}\{e^{at}\sinh bt\} = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}$:لأنّ $\mathcal{L}\{\sinh bt\} = \frac{b}{s^2-b^2}$

(6 $\mathcal{L}\{e^{at}\cosh bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$:لأنّ $\mathcal{L}\{\cosh bt\} = \frac{s}{s^2-b^2}$

وفي كل هذه الحالات يجب أن يكون $s > a$.

مثال (2-6): أوجد تحويل لابلاس للتابعين الآتيين:

$(a)\ 2t^4e^{3t}, \quad (b)\ 4e^{3t}\cos 5t, \quad (c)\ e^{-2t}\sin 3t, \quad (d)\ 3e^t\cosh 4t,$
$(e)\ 5e^{-3t}\sinh 2t, \quad (f)\ 2e^{3t}(4\cos 2t - 5\sin 2t)$

الحل:

$$(a)\ \mathcal{L}\{2t^4e^{3t}\} = 2\mathcal{L}\{t^4e^{3t}\} = 2\frac{4!}{(s-3)^{4+1}} = \frac{48}{(s-3)^5}$$

$$(b)\ \mathcal{L}\{4e^{3t}\cos 5t\} = 4\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 5t\} = 4\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}\right)$$

$$= \frac{4(s-3)}{s^2-6s+9+25} = \frac{4s-12}{s^2-6s+34}$$

$$(c)\ \mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 3t\} = \frac{3}{(s+2)^2+3^2} = \frac{3}{s^2+4s+13}$$

$$(d)\ \mathcal{L}\{3e^t\cosh 4t\} = 3\mathcal{L}\{e^t\cosh 4t\} = 3\left[\frac{s-1}{(s-1)^2-4^2}\right] =$$

$$= \frac{3(s-1)}{s^2-2s+1-16} = \frac{3s-3}{s^2-2s-15}$$

(e) $\mathcal{L}\{5e^{-3t}\sinh 2t\} = 5\mathcal{L}\{e^{-3t}\sinh 2t\} = 5\left[\frac{2}{(s+3)^2-2^2}\right] =$

$$= \frac{10}{s^2+6s+9-4} = \frac{10}{s^2+6s+5}$$

(f) $\mathcal{L}\{2e^{3t}(4\cos 2t - 5\sin 2t)\} = 8\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 2t\} - 10\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 2t\} =$

$$= 8\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right] - 10\left[\frac{2}{(s-3)^2+4}\right] = \frac{8s-24-20}{(s-3)^2+4} = \frac{8s-44}{s^2-6s+13}$$

مثال (2-7): أثبت أنّ:

$$\mathcal{L}\{3e^{-t/2}\sin^2 t\} = \frac{48}{(2s+1)(4s^2+4s+17)}$$

الحل:

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{3e^{-t/2}\sin^2 t\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}\{e^{-t/2}(1-\cos 2t)\} =$$

$$= \frac{3}{2}\mathcal{L}\{e^{-t/2}\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}\{e^{-t/2}\cos 2t\} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1/2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+4}\right)$$

$$= \frac{3}{2s+1} - \frac{3s+3/2}{2(s^2+s+1/4+4)} = \frac{3}{2s+1} - \frac{6s+3}{4(s^2+s+17/4)} =$$

$$= \frac{3}{2s+1} - \frac{6s+3}{4s^2+4s+17} = \frac{3(4s^2+4s+17)-(6s+3)(2s+1)}{(2s+1)(4s^2+4s+17)} =$$

$$= \frac{12s^2+12s+51-12s^2-12s-3}{(2s+1)(4s^2+4s+17)} = \frac{48}{(2s+1)(4s^2+4s+17)}$$

مثال (2-8): أوجد تحويل لابلاس للتوابع الآتية:

$$(i)\ e^{-3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t), \qquad (ii)\ e^{2t}\cos^2 t, \qquad (iii)\ \sqrt{t}\,e^{3t}$$

الحل:

(i) $\mathcal{L}\{e^{-3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)\} = 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos 5t\} - 3\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin 5t\} =$

$$= 2\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+5^2}\right] - 3\left[\frac{5}{(s+3)^2+5^2}\right] = \frac{2s-9}{s^2+6s+34}$$

(ii) $\mathcal{L}\{\cos^2 t\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1+\cos 2t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right] \Rightarrow$ بالإزاحة

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos^2 t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{s-2}{(s-2)^2+4}\right]$$

(iii) $\sqrt{t}\,e^{3t} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{3/2}} = \frac{(1/2)\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$

$$\Rightarrow \text{بالإزاحة } \mathcal{L}\{\sqrt{t}\,e^{3t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{(s-3)^{3/2}}$$

مثال (2-9): إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ فأثبت أنّ:

$$\mathcal{L}\{(\sinh at)\,f(t)\} = \frac{1}{2}\left[\overline{f}(s-a) - \overline{f}(s+a)\right]$$

$$\mathcal{L}\{(\cosh at)\,f(t)\} = \frac{1}{2}\left[\bar{f}(s-a) + \bar{f}(s+a)\right]$$

مستفيداً مما سبق أوجد تحويل لابلاس للتابعين: $(i)\ \sinh 2t \sin 3t, \quad (ii)\ \cosh 3t \cos 2t$

الحل:

$$\mathcal{L}\{(\sinh at)\,f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})f(t)\right\} =$$

$$\frac{1}{2}[\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} - \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}] = \frac{1}{2}[\bar{f}(s-a) - \bar{f}(s+a)]$$

بالمثل نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{(\cosh at)\,f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})f(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}[\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}] = \frac{1}{2}[\bar{f}(s-a) + \bar{f}(s+a)]$$

$$(i)\ \mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+3^2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{\sinh 2t \sin 3t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{(s-2)^2+3^2} - \frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] = \frac{12s}{s^4+10s^2+169}$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+2^2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{\cosh 3t \cos 2t\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2} + \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right] = \frac{2s(s^2-5)}{s^4-10s^2+169}$$

مثال (10-2): اثبت أنّ:

$$(i)\ \mathcal{L}\{t\sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \qquad (ii)\ \mathcal{L}\{t\cos at\} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

الحل:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{te^{iat}\} = \frac{1}{(s-ia)^2} \underset{\text{نضرب بالمرافق}}{=} \frac{(s+ia)^2}{(s-ia)^2(s+ia)^2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{t(\cos t + i\sin t)\} = \frac{s^2+2ias+(ia)^2}{[(s-ia)(s+ia)]^2} = \frac{s^2-a^2+2ias}{(s^2+a^2)^2}$$

وبمقارنة القسم التخيّلي بالقسم التخيّلي في الطرفين نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{t\sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

وبمقارنة القسم 1 الحقيقي بالقسم الحقيقي في الطرفين نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{t\cos at\} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال (11-2): أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ المعرّف بالشكل:

$$(i)\ f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\tau} & ;\ 0<t<\tau\\ 1 & ;\ t\geq\tau\end{cases},\qquad (ii)\ f(t)=\begin{cases}1 & ;\ 0<t\leq 1\\ t & ;\ 1<t<2\\ 0 & ;\ t>2\end{cases}$$

الحل:

$$(i)\ \mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\tau e^{-st}\frac{t}{\tau}dt+\int_\tau^\infty e^{-st}dt=$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[t\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\tau-\int_0^\tau 1\cdot\frac{e^{-st}}{-s}dt\right]+\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_\tau^\infty=$$

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{\tau e^{-s\tau}-0}{-s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^\tau\right]+\frac{0-e^{-s\tau}}{-s}=\frac{-e^{-s\tau}}{s}-\frac{e^{-s\tau}-1}{\tau s^2}+\frac{e^{-s\tau}}{s}=\frac{1-e^{-s\tau}}{\tau s^2}$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^1 e^{-st}(1)dt+\int_1^2 e^{-st}(t)dt+\int_2^\infty e^{-st}(0)dt=$$

$$=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1+\left[t\cdot\frac{e^{-st}}{-s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_1^2=\frac{e^{-s}-1}{-s}+\frac{2e^{-2s}-e^{-s}}{-s}-\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s^2}=$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2}$$

مثال (12-2): أوجد تحويل لابلاس للتابعين:

$$(i)\ \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3,\qquad (ii)\ \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$$

الحل:

$$(i)\ \left(\sqrt{t}-1/\sqrt{t}\right)^3=t^{3/2}-3t^{1/2}+3t^{-1/2}-t^{-3/2}\Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\left(\sqrt{t}-1/\sqrt{t}\right)^3\right\}=\mathcal{L}\{t^{3/2}\}-3\mathcal{L}\{t^{1/2}\}+3\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}-\mathcal{L}\{t^{-3/2}\}$$

$$=\frac{\Gamma(3/2+1)}{s^{3/2+1}}-3\frac{\Gamma(1/2+1)}{s^{1/2+1}}+3\frac{\Gamma(-1/2+1)}{s^{-1/2+1}}-\frac{\Gamma(-3/2+1)}{s^{-3/2+1}}=$$

$$=\frac{(3/2)\Gamma(3/2)}{s^{5/2}}-3\frac{(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{3/2}}+3\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}-\frac{\Gamma(-1/2)}{s^{-1/2}}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{5/2}}-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}+3\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}+2\frac{\sqrt{\pi}}{s^{-1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{3}{s^{5/2}}-\frac{6}{s^{3/2}}+\frac{12}{s^{1/2}}+\frac{8}{s^{-1/2}}\right)$$

حيث إن: $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\ \Gamma(-1/2)=-2\sqrt{\pi}$

$$(ii)\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\Longrightarrow\cos\sqrt{t}=1-\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{4!}-\frac{t^3}{6!}+\cdots$$

$$\Longrightarrow\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=t^{-1/2}-\frac{t^{1/2}}{2!}+\frac{t^{3/2}}{4!}-\frac{t^{5/2}}{6!}+\cdots\Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}-\frac{1}{2!}\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}+\frac{1}{4!}\frac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}}-\frac{1}{6!}\frac{\Gamma(7/2)}{s^{7/2}}+\cdots=$$

$$=\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}-\frac{1}{2!}\frac{(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{3/2}}+\frac{1}{4!}\frac{(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{5/2}}-\frac{1}{6!}\frac{(5/2)(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{7/2}}$$

$$+\cdots=$$

$$= \frac{1!(1/2)}{s^{1/2}}\left(1 - \frac{1}{(4s)} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(4s)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(4s)^3} + \cdots\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-1/4s}.$$

مثال (2-13): أوجد تحويل لابلاس للتابعين:

$$(i)\ f(t) = |t-1| + |t+1| \quad ; \quad t \geq 0, \qquad (ii)\ f(t) = \lfloor t \rfloor$$

حيث إن الرمز $\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$ يعني أكبر عدد صحيح أصغر من x (أرضية العدد x).

الحل: (i) يمكن كتابة $f(t)$ بشكل مكافئ كما يلي: $\Rightarrow$ $f(t) = \begin{cases} 2 & ; \ 0 \leq t < 1 \\ 2t & ; \ t \geq 1 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^1 e^{-st}(2)dt + \int_1^\infty e^{-st}(2t)dt =$$

$$= 2\left\{\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 + \left[t\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^\infty - \left[\frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right]_1^\infty\right\} = 2\left\{\frac{e^{-s}-1}{-s} + \frac{0-e^{-s}}{-s} - \frac{0-e^{-s}}{s^2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{s}\left(1 + \frac{e^{-s}}{s}\right)$$

(ii) يمكن كتابة $f(t)$ بشكل مكافئ كما يلي: $f(t) = |t| = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq t < 1 \\ 1 & ; \ 1 \leq t < 2 \\ 2 & ; \ 2 \leq t < 3 \\ 3 & ; \ 3 \leq t < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}|t|dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-st}(0)dt + \int_1^2 e^{-st}(1)dt + \int_2^3 e^{-st}(2)dt + \int_3^4 e^{-st}(3)dt + \cdots =$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^2 + 2\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^3 + 3\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_3^4 + \cdots =$$

$$= -\frac{1}{s}\left[(e^{-2s} - e^{-s}) + 2(e^{-3s} - e^{-2s}) + 3(e^{-4s} - e^{-3s}) + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \cdots) = \frac{1}{s}\left(\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}\right) \underset{\times e^s}{=} \frac{1}{s(e^s - 1)}$$

3-2-2 خاصّة الإزاحة الثانية

إذا كان $\bar{f}(s)$ تحويل لابلاس التابع $f(t)$ فإنّ:

$$\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}\bar{f}(s) \quad (10)$$

الإثبات:

$$\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt =$$

$$\underset{\substack{\text{بفرض} \\ \tau = t-a}}{=} \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = e^{-as}\bar{f}(s)$$

مثال (14-2): لنفرض أننا نريد حساب تحويل لابلاس للتابع $H(t-a)$.

الحل: يمكننا كتابة التابع $H(t-a)$ على الصورة $H(t-a)=H(t-a)f(t-a)$ حيث إنّ $f(t)=1$. ونعلم أنّ: $\mathcal{L}\{1\}=1/s$ وبالتالي:

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{1\}=\frac{e^{-as}}{s}$$

مثال (15-2): أوجد تحويل لابلاس للتابع $g(t)$ المعطى بالعلاقة: $g(t)=\begin{cases}0 & ; \ t<2\\ t^2+1 & ; \ t\geq 2\end{cases}$

الحل: لتطبيق خاصة الإزاحة الثانية يجب كتابة $g(t)$ كتابع أو مجموع توابع من الشكل $f(t-2)H(t-2)$، لذلك نكتب أولاً t^2+1 كتابع لـ $(t-2)$.

$$t^2+1=(t-2+2)^2+1=(t-2)^2+4(t-2)+5 \Longrightarrow$$
$$g(t)=H(t-2)(t^2+1)=(t-2)^2H(t-2)+4(t-2)H(t-2)+5H(t-2)$$

الآن بتطبيق خاصة الإزاحة الثانية لتحويل لابلاس نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\{(t-2)^2H(t-2)\}+4\mathcal{L}\{(t-2)H(t-2)\}+5\mathcal{L}\{H(t-2)\}$$
$$=e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2\}+4e^{-2s}\mathcal{L}\{t\}+5e^{-2s}\mathcal{L}\{1\}=e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{5}{s}\right]$$

نتيجة: إذا كان التبديل من $f(t)$ إلى $f(t-a)$ غير مناسب، يمكن أن نستبدله بـ:

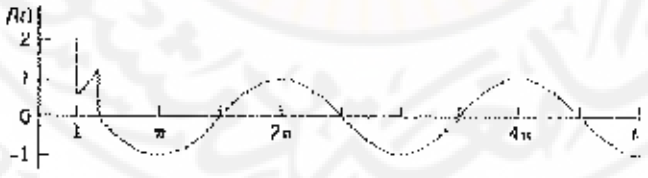
$$\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\} \quad (11)$$

يمكن إثبات ذلك من خاصة الإزاحة الثانية وذلك بكتابة $f(t-a)=g(t)$ فيكون: $f(t)=g(t+a)$ وبعدها نبدل g بـ f.

مثال (16-2): اكتب التابع الآتي بدلالة توابع وحدة الخطوة (هيفيسايد) ثم أوجد تحويل لابلاس لها.

$$f(t)=\begin{cases}2 & ; \ 0<t<1\\ t^2/2 & ; \ 1<t<\pi/2\\ \cos t & ; \ t>\pi/2\end{cases}$$

الحل:



الشكل (2-8): المنحنى البياني للتابع $f(t)$

يمكن كتابة التابع السابق بدلالة توابع هيفيسايد كما يلي:

$$f(t)=2[H(t)-H(t-1)]+\frac{t^2}{2}\left[H(t-1)-H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]+(\cos t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

يجب كتابة كل حدّ في $f(t)$ بالشكل $f(t-a)H(t-a)$. لدينا:

$$\mathcal{L}\{2[H(t)-H(t-1)]\}=2\mathcal{L}\{H(t)\}-2\mathcal{L}\{H(t-1)\}=\frac{2(1-e^{-s})}{s}$$

$$\frac{t^2}{2}\left[H(t-1)-H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{t^2}{2}H(t-1)-\frac{t^2}{2}H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}H(t-1)\right\}=\mathcal{L}\left\{\left[\frac{1}{2}(t-1)^2+(t-1)+\frac{1}{2}\right]H(t-1)\right\}=\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2s}\right)e^{-s}$$

أو بتطبيق العلاقة $\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$ نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}H(t-1)\right\}=e^{-s}\mathcal{L}\left\{\frac{(t+1)^2}{2}\right\}=\left(\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}+\mathcal{L}\{t\}+\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)e^{-s}=$$

$$=\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2s}\right)e^{-s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi^2}{4}\right]H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=$$

$$=\left(\frac{1}{s^3}+\frac{\pi}{2s^2}+\frac{\pi^2}{8s}\right)e^{-\pi s/2}$$

أو بتطبيق العلاقة $\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$ نجد النتيجة نفسها.

$$\mathcal{L}\left\{(\cos t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{-\left[\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=-\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$$

أو بتطبيق العلاقة $\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$ نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\left\{(\cos t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=e^{-\pi s/2}\mathcal{L}\left\{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=e^{-\pi s/2}\mathcal{L}\{-\sin t\}=-\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$$

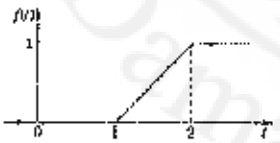
ومنه مع جمعها مع بعضها نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s}e^{-s}+\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2s}\right)e^{-s}-\left(\frac{1}{s^3}+\frac{\pi}{2s^2}+\frac{\pi^2}{8s}\right)e^{-\pi s/2}$$

$$-\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s/2},$$

مثال (2-17): عبّر عن التابع الآتي بدلالة تابع هيفيساید ثمّ أوجد تحويلات لابلاس له:

$$f(t)=\begin{cases}0 & ; \quad 0<t<1\\ t-1 & ; \quad 1<t<2\\ 1 & ; \quad t>2\end{cases}$$



الحل:

$$f(t)=(t-1)[H(t-1)-H(t-2)]+H(t-2)$$

$$=(t-1)H(t-1)-(t-2)H(t-2)$$

باستخدام خاصة الإزاحة الثانية نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},\qquad \mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}\Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1)\}=e^{-s}\frac{1}{s^2},\qquad \mathcal{L}\{(t-2)H(t-2)\}=e^{-2s}\frac{1}{s^2}\Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t-1)H(t-1) - (t-2)H(t-2)\} = e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s^2}$$

مثال (18-2): عبّر عن التابع الآتي بدلالة تابع هيفيساید ثمّ أوجد تحويلات لابلاس له:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & ; \quad 0 < t < \pi \\ \sin 2t & ; \quad \pi < t < 2\pi \\ \sin 3t & ; \quad t > 2\pi \end{cases}$$

الحل:

$$f(t) = \sin t\,[H(t-0) - H(t-\pi)] + \sin 2t\,[H(t-\pi) - H(t-2\pi)] + \sin 3t\,H(t-2\pi) =$$
$$= \sin t\,H(t) + (\sin 2t - \sin t)H(t-\pi) + (\sin 3t - \sin 2t)H(t-2\pi)$$

باستخدام خاصة الإزاحة الثانية نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \Longrightarrow$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{(\sin 2t - \sin t)H(t-\pi)\} + \mathcal{L}\{(\sin 3t - \sin 2t)H(t-2\pi)\}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(\frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+1}\right) + e^{-2\pi s}\left(\frac{3}{s^2+9} - \frac{2}{s^2+4}\right)$$

مثال (19-2): عبّر عن التابع الآتي بدلالة تابع هيفيساید ثمّ أوجد تحويلات لابلاس له:



$$(i)\ f(t) = \begin{cases} t-1 & ; \quad 1 < t < 2 \\ 3-t & ; \quad 2 < t < 3 \end{cases}$$

(ii) ثمّ أوجد تحويل لابلاس للتابع: $e^{-t}\big(1 - H(t-2)\big)$

الحل:

$$(i)\ f(t) = (t-1)[H(t-1) - H(t-2)] + (3-t)[H(t-2) - H(t-3)] =$$
$$= (t-1)H(t-1) - 2(t-2)H(t-2) + (t-3)H(t-3)$$

باستخدام خاصة الإزاحة الثانية نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Longrightarrow$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2} - 2e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2} + e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{e^{-s}(1-2e^{-s}+e^{-2s})}{s^2} =$$
$$= \frac{e^{-s}(1-e^{-s})^2}{s^2}$$
$$\mathcal{L}\{e^{-t}\big(1 - H(t-2)\big)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} - \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-2)\} =$$
$$= \frac{1}{s+1} - e^{-2}\mathcal{L}\{e^{-(t-2)}H(t-2)\}$$

باستخدام خاصة الإزاحة الثانية نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow$$
$$\mathcal{L}\{e^{-t}\big(1 - H(t-2)\big)\} = \frac{1}{s+1} - e^{-2}e^{-2s}\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1 - e^{-2(s+1)}}{s+1}.$$

مثال (20-2): مستخدماً تحويلات لابلاس أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}(1+2t-t^2+t^3)H(t-1)dt$$

الحل: لدينا:

$$\mathcal{L}\{(1+2t-t^2+t^3)H(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{1+2(t+1)-(t+1)^2+(t+1)^3\} =$$
$$= e^{-s}\mathcal{L}\{3+3t+2t^2+t^3\} = e^{-s}\left(\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^4}\right)$$

4-2-2 خاصّة التحاكي

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ فإن:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right) \;;\; a>0 \qquad (12)$$

الإثبات:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(at)dt$$

نفرض أن $at = u$ فيكون $adt = du$ (حدود التكامل لا تتغيّر) وبالتالي:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-su/a}f(u)\,du/a = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-su/a}f(u)du = \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

مثال (21-2): أوجد تحويل لابلاس للتابع $(\sin at)/t$ علماً أنّ: $\mathcal{L}\{(\sin at)/t\} = \arctan(1/s)$.

الحل: باستخدام خاصة التحاكي أعلاه نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{1}{s/a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{a}{s}\right) \underset{\times a}{\Rightarrow} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

5-2-2 تحويل لابلاس للتوابع الدورية

إذا كان $f(t)$ تابعاً دورياً دوره T أي أنّ: $f(t+T) = f(t)$ عندئذٍ يكون:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}} \qquad (13)$$

الإثبات: لدينا:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}f(t)dt + \cdots$$

في التكامل الثاني، نفرض أنّ: $t = u+T$، وفي التكامل الثالث، $t = u+2T$ وهكذا... فنجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{T} e^{-st}f(t)dt + \int_0^{T} e^{-s(u+T)}f(u+T)du + \int_0^{T} e^{-s(u+2T)}f(u+2T)du$$
$$+\cdots$$

$$= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-su} f(u)du + e^{-2sT}\int_0^T e^{-su} f(u)du + \cdots$$

وذلك لأنّ: $\cdots = f(u+nT) = \cdots = f(u+2T) = f(u+T) = f(u)$، وبالتالي:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-2sT}\int_0^T e^{-st} f(t)dt + \cdots$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots)\int_0^T e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

مثال (22-2): أوجد تحويل لابلاس للتابع: $f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & ; \quad 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & ; \quad \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$

الحل: إن التابع $f(t)$ دوريّ ودوره $2\pi/\omega$ وبالتالي:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\int_0^{2\pi/\omega} e^{-st} f(t)dt =$$

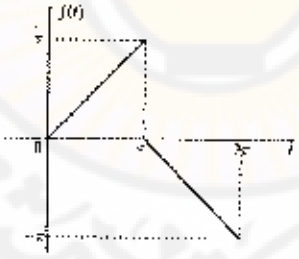
$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\left[\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\sin \omega t\, dt + \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} e^{-st}(0)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\left[\frac{e^{-st}(-s\sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{s^2+\omega^2}\right]_0^{\pi/\omega} =$$

$$= \frac{\omega e^{-\pi s/\omega} + \omega}{(1-e^{-2\pi s/\omega})(s^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{(1-e^{-\pi s/\omega})(s^2+\omega^2)}$$

مثال (23-2): ارسم الخط البياني للتابع الدوريّ الآتي: $f(t) = \begin{cases} t & ; \quad 0 < t < \pi \\ \pi - t & ; \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ ثم أوجد تحويل لابلاس لهذا التابع.

الحل: إنّ التابع $f(t)$ دوريّ ودوره 2π وخطه البياني هو:



الشكل (2-9): الخط البياني للتابع الدوريّ $f(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\int_0^{\pi} e^{-st}\, t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}(\pi - t)dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\left[t\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - 1\cdot\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right]_0^{\pi} + \left[(\pi - t)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - (-1)\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{-\pi e^{\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{\pi}{s}(e^{-2\pi s}-e^{-\pi s})+\frac{1}{s^2}(1+e^{-2\pi s}-2e^{-\pi s})\right\}.$$

6-2-2 تحويلات لابلاس للمشتقات

1-6-2-2 حالة المشتق من المرتبة الأولى

ليكن $f'(t)$ مشتق التابع $f(t)$ مستمراً فيكون:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \qquad (14)$$

وباستخدام علاقة التكامل بالتجزئة الآتية:

$$\int_{t_1}^{t_2} u\frac{dv}{dt}dt = [u\,v]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v\frac{du}{dt}dt$$

وباعتبار أنّ $u = e^{-st}$ و $\frac{dv}{dt} = f'(t)$ نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = [e^{-st}f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})dt =$$

$$= [0 - f(0)] + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

وذلك لأنّ: $\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0$ وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad \text{أو} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = s\,\mathcal{L}\{y\} - y(0)$$

2-6-2-2 حالة المشتق من المرتبة الثانية

ليكن $f''(t)$ مشتق التابع $f(t)$ من المرتبة الثانية مستمراً مع المشتق الأول فيكون:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f''(t)dt = [e^{-st}f'(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt =$$

$$= [0 - f'(0)] + s\,\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f'(0) + s[s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad \text{أو}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0) \qquad (15)$$

3-6-2-2 حالة المشتق من مراتب عليا $(n > 2)$

إذا كان $f'(t)$ مشتق التابع $f(t)$ وجميع مشتقاته حتى المرتبة $(n-1)$ مستمرة، يكون:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (16)$$

الإثبات: باستخدام تعريف تحويل لابلاس وطريقة التكامل بالتجزئة عدة مرات نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f^{(n)}(t)dt =$$

$$= \left[\begin{matrix} e^{-st}f^{(n-1)}(t) - (-s)e^{-st}f^{(n-2)}(t) + (-s)^2e^{-st}f^{(n-3)}(t) - \cdots + \\ +(-1)^{n-2}(-s)^{n-1}e^{-st}f(t) \end{matrix} \right]_0^\infty +$$

$$+(-1)^n(-s)^n \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt =$$

$$= -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - s^2f^{(n-3)}(0) - \cdots - s^{n-1}f(0) + s^n \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

وذلك لأنّ: $\lim_{t\to\infty} e^{-st}f^{(m)}(t) = 0\ ;\ m = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ وبالتالي نكون قد حصلنا على المطلوب.

مثال (2-24): استخدم تحويل لابلاس للمشتق الأول لحساب ما يلي:

$$(i)\ \mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}, \qquad (ii)\ \mathcal{L}\{2t\} = \frac{2}{s^2}, \qquad (iii)\ \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

الحل: إن تحويل لابلاس للمشتق الأول هو: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ وبالتالي:

$(i)\ f(t) = k \Rightarrow f'(t) = 0, \quad \& \quad f(0) = k \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{0\} = s\,\mathcal{L}\{k\} - k \Rightarrow 0 = s\,\mathcal{L}\{k\} - k \Rightarrow k = s\,\mathcal{L}\{k\} \Rightarrow \mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$$

$(ii)\ f(t) = 2t \Rightarrow f'(t) = 2, \quad \& \quad f(0) = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{2\} = s\,\mathcal{L}\{2t\} - 0 \Rightarrow \frac{2}{s} = s\,\mathcal{L}\{2t\} \Rightarrow \mathcal{L}\{2t\} = \frac{2}{s^2}$$

$(iii)\ f(t) = e^{-at} \Rightarrow f'(t) = -ae^{-at}, \quad \& \quad f(0) = 1 \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{-ae^{-at}\} = s\,\mathcal{L}\{e^{-at}\} - 1 \Rightarrow -a\,\mathcal{L}\{e^{-at}\} = s\,\mathcal{L}\{e^{-at}\} - 1 \Rightarrow$$

$$1 = s\,\mathcal{L}\{e^{-at}\} + a\,\mathcal{L}\{e^{-at}\} = (s+a)\mathcal{L}\{e^{-at}\} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

مثال (2-25): استخدم تحويل لابلاس للمشتق الثاني لحساب ما يلي:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

الحل: إن تحويل لابلاس للمشتق من المرتبة الثانية هو:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

وبالتالي: $f(t) = \cos at \Rightarrow f'(t) = -a\sin at \Rightarrow f''(t) = -a^2\cos at \Rightarrow$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{-a^2\cos at\} = s^2\mathcal{L}\{\cos at\} - s(1) - 0 \Rightarrow$$

$$-a^2\mathcal{L}\{\cos at\} = s^2\mathcal{L}\{\cos at\} - s \Rightarrow s = (s^2 + a^2)\,\mathcal{L}\{\cos at\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

7-2-2 تحويل لابلاس للتكاملات

إذا كان تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ هو $\bar{f}(s)$ فإنّ:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s) = \frac{1}{s}F(s) \qquad (17)$$

الإثبات: لنفرض أن: $\phi(t) = \int_0^t f(u)du$ عندها يكون: $\phi'(t) = f(t)$ و $\phi(0) = 0$.

وباستخدام خاصّة تحويل لابلاس للمشتقات نجد:

$$\mathcal{L}\{\phi'(t)\} = s\,\bar{\phi}(s) - \phi(0) \Rightarrow \bar{\phi}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi'(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s) \qquad (18)$$

ويمكن تعميم ذلك فنكتب:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cdots \int_0^t f(u)du^n\right\} = \frac{1}{s^n}\bar{f}(s) \qquad (19)$$

8-2-2 تحويل لابلاس للتوابع المضروبة بـ t^n

إذا كان تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ هو $\bar{f}(s)$ فإنّ:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[\bar{f}(s)\right];\ n = 1, 2, 3, 4, \cdots \qquad (20)$$

الإثبات: سنتبع مبدأ الاستقراء الرياضي. لدينا من تعريف تحويل لابلاس:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \bar{f}(s)$$

نشتق الطرفين وفق المتحول s فنحصل على:

$$\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right\} = \frac{d}{ds}\{\bar{f}(s)\}$$

وحسب قاعدة ليبنتز من أجل الاشتقاق تحت إشارة التكامل نجد:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})f(t)dt = \frac{d}{ds}\{\bar{f}(s)\} \Rightarrow \int_0^\infty [-te^{-st}f(t)]dt = \frac{d}{ds}\{f(s)\}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}[t\,f(t)]dt = -\frac{d}{ds}\{\bar{f}(s)\}$$

وهذا برهان المبرهنة من أجل $n = 1$.

الآن لنفرض أنّ العلاقة صحيحة من أجل $n = m$، أي أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-st}[t^m f(t)]dt = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\left[\bar{f}(s)\right]$$

ولنبرهن على صحتها من أجل $n = m + 1$ لذلك نشتق العلاقة السابقة:

$$\frac{d}{ds}\left|\int_0^\infty e^{-st}t^m f(t)dt\right| = (-1)^m \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}}\left[\bar{f}(s)\right] \Rightarrow \text{حسب قاعدة ليبنتز}$$

$$\int_0^\infty (-te^{-st})t^m f(t)dt = (-1)^m \frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}}\left[\bar{f}(s)\right] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-st}[t^{m+1}f(t)]dt = (-1)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}}\left[\bar{f}(s)\right]$$

وهذا يعني أن المبرهنة صحيحة من أجل أي عدد صحيح n.

مثال (26-2): أوجد تحويل لابلاس للتوابع الآتية:

$$(i)\ t\cos at\ ,\qquad (ii)\ t^2\sin at\ ,\qquad (iii)\ t^3e^{-3t},\qquad (iv)\ te^{-t}\sin 3t$$

الحل:

$$(i)\ \mathcal{L}\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}\Rightarrow \mathcal{L}\{t\cos at\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=$$
$$=-\frac{s^2+a^2-s\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}\Rightarrow \mathcal{L}\{t^2\sin at\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)=$$
$$=\frac{d}{ds}\left\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{2a(3s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}\{e^{-3t}\}=\frac{1}{s+3}\Rightarrow \mathcal{L}\{t^3e^{-3t}\}=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+3}\right)=-\frac{(-1)^3\cdot 3!}{(s+3)^{3+1}}=\frac{6}{(s+3)^4}$$

$$(iv)\ \mathcal{L}\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+3^2}\Rightarrow \mathcal{L}\{t\sin 3t\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

وباستخدام خاصة الإزاحة الأولى نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{e^{-t}t\sin 3t\}=\frac{6(s+1)}{[(s+1)^2+9]^2}=\frac{6(s+1)}{(s^2+2s+10)^2}$$

9-2-2 تحويل لابلاس للتوابع المقسومة على t

إذا كان تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ هو $\bar{f}(s)$، عندئذٍ:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty \bar{f}(s)ds\qquad ;\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\ \text{موجودة}\qquad (21)$$

وفي حالة وجود التكامل في الطرف الأيمن.

الإثبات: لدينا من تعريف تحويل لابلاس:

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

لتكامل الطرفين بالنسبة للمتحول s من s إلى ∞

$$\int_s^\infty \bar{f}(s)\,ds=\int_s^\infty\left[\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right]ds=\int_0^\infty\int_s^\infty f(t)\,e^{-st}\,ds\,dt=$$
$$=\int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-st}\,ds\right]dt=\int_0^\infty f(t)\left[\frac{e^{-st}}{-t}\right]_s^\infty dt=\int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{f(t)}{t}dt=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}$$

نتيجة: إذا كان تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ هو $\bar{f}(s)$، عندئذٍ:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty \bar{f}(s)ds \qquad (22)$$

الإثبات: نعلم من الخاصّة السابقة أنّ:

$$\int_s^\infty \bar{f}(s)ds = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt$$

بأخذ نهاية الطرفين من أجل $s \to 0$ ومنه $e^{-st} \to 1$ وبالتالي نجد أنّ:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty \bar{f}(s)ds = \int_0^\infty F(s)ds$$

نتيجة: إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ فإنّ:

$$\mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{f(u)}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\int_0^s \bar{f}(p)dp \;\; ; \;\; s > 0 \qquad (23)$$

الإثبات: بتطبيق خاصة التحاكي على التابع $f(t/a)$ حيث $a > 0$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = \bar{f}(a\,s) = \int_0^\infty \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st}dt$$

نكامل الطرفين بالنسبة إلى a، بين القيمتين $a = 0$ و $a = 1$ فنجد:

$$\int_0^1 \bar{f}(a\,s)da = \int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^1 f\left(\frac{t}{a}\right)\frac{da}{a} \Rightarrow \int_0^1 \bar{f}(a\,s)da = \mathcal{L}\left\{\int_0^1 f\left(\frac{t}{a}\right)\frac{da}{a}\right\}$$

وبإجراء التحويل $\frac{t}{a} = u \Rightarrow da = -\frac{tdu}{u^2} = -\frac{uadu}{u^2} \Rightarrow \frac{da}{a} = -\frac{du}{u}$، في الطرف الأيمن، و $as = p \Rightarrow da = \frac{dp}{s}$ في الطرف الأيسر نجد أنّ:

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{f(u)}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\int_0^s \bar{f}(p)dp$$

مثال (2-27): أوجد تحويل لابلاس لكل من التوابع الآتية:

$$(i)\ \frac{1-e^t}{t}, \qquad (ii)\ \frac{\cos at - \cos bt}{t} + t\sin at$$

الحل:

$$(i)\ \mathcal{L}\{1-e^t\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right)ds = [\ln s - \ln(s-1)]_s^\infty = \left[\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right]_s^\infty =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{1-1/s}\right) = \ln\left(\frac{s-1}{s}\right)$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\{\cos at - \cos bt\} = \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} + \mathcal{L}\{t\sin at\} = \int_s^\infty \left(\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}\right)ds - \frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(s^2+a^2) - \frac{1}{2}\ln(s^2+b^2)\right]_s^{\infty} - a\frac{-2s}{(s^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2} + \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right) + \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} =$$

$$= \ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)^{1/2} + \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \quad ; \quad \ln(1) = 0$$

مثال (28-2): أوجد ناتج تحويلات لابلاس الآتية:

$$(i)\ \mathcal{L}\left\{e^{-t}\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt\right\}, \qquad (ii)\ \mathcal{L}\left\{t\cdot\int_0^t \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt\right\},$$

$$(iii)\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t\int_0^t\int_0^t (t\sin t)\,dt\,dt\,dt\right\}$$

الحل: نعلم أنّ:

$$(i)\ \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \cot^{-1}s$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt\right\} = \frac{1}{s}\cot^{-1}s$$

وباستخدام خاصة الإزاحة نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt\right\} = \frac{1}{s+1}\cot^{-1}(s+1).$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \cot^{-1}s \Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{-t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right\} = \cot^{-1}(s+1) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt\right\} = \frac{1}{s}\cot^{-1}(s+1) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{t\cdot\int_0^t e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt\right\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{\cot^{-1}(s+1)}{s}\right\}$$

$$= -\frac{s\cdot\left[\frac{-1}{1+(s+1)^2}\right] - \cot^{-1}(s+1)}{s^2} = \frac{s+(s^2+2s+2)\cot^{-1}(s+1)}{s^2(s^2+2s+2)}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{t\sin t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t\int_0^t\int_0^t (t\sin t)\,dt\,dt\,dt\right\} = \frac{1}{s^3}\mathcal{L}\{t\sin t\} = \frac{1}{s^3}\cdot\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{s^2(s^2+1)^2}$$

10-2-2 مبرهنة القيمة الابتدائية

إذا كان $\bar{f}(s)$ تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ فإنّ:

$$\lim_{t\to 0}[f(t)] = \lim_{s\to\infty}[s\,\mathcal{L}\{f(t)\}] = \lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s)] \qquad (24)$$

الإثبات: وجدنا من خاصة الاشتقاق أنّ:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\bar{f}(s) - f(0) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = s\,\bar{f}(s) - f(0)$$

بأخذ نهاية الطرفين من أجل $s \to \infty$ نجد أنّ:

$$\lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s) - f(0)] = \lim_{s\to\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt\right] = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s)] = f(0) = \lim_{t\to 0}[f(t)]$$

وهو المطلوب.

مثال (2-29): تحقق من مبرهنة القيمة الابتدائية من أجل التابع: $f(t) = 3e^{4t}$.

الحل: لدينا:

$$\mathcal{L}\{3e^{4t}\} = \frac{3}{s-4} \Rightarrow \lim_{t\to 0} 3e^{4t} = 3\,(1) = 3, \qquad \lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s)] = \lim_{s\to\infty}\frac{3s}{s-4} = 3.$$

وبالتالي المبرهنة محققة، لأن: $\lim_{t\to 0}[f(t)] = \lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s)]$.

مثال (2-30): تحقق من مبرهنة القيمة الابتدائية من أجل التابع: $f(t) = 5 + 2\cos 3t$.

الحل: لدينا:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{5 + 2\cos 3t\} = \frac{5}{s} + \frac{2s}{s^2+9} \Rightarrow \lim_{t\to 0}(5 + 2\cos 3t) = 5 + 2 = 7.$$

$$\lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[s\left(\frac{5}{s} + \frac{2s}{s^2+9}\right)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[5 + \frac{2s^2}{s^2+9}\right] = 5 + 2 = 7.$$

وبالتالي المبرهنة محققة، لأن: $\lim_{t\to 0}[f(t)] = \lim_{s\to\infty}[s\,\bar{f}(s)]$.

مثال (2-31): تحقق من مبرهنة القيمة الابتدائية من أجل التابع: $f(t) = (2t-3)^2$.

الحل: لدينا:

$$f(t) = (2t-3)^2 = 4t^2 - 12t + 9 \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{4t^2 - 12t + 9\} = 4\left(\frac{2}{s^3}\right) - \frac{12}{s^2} + \frac{9}{s} \Rightarrow$$
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0}(2t-3)^2 = (-3)^2 = 9$$
$$\lim_{s\to\infty}\left[s\left(4\left(\frac{2}{s^3}\right) - \frac{12}{s^2} + \frac{9}{s}\right)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{8}{s^2} - \frac{12}{s} + 9\right] = 9$$

وبالتالي المبرهنة محققة، لأن: $\lim_{t\to 0}[f(t)] = \lim_{s\to\infty}[s\,f(s)]$.

11-2-2 مبرهنة القيمة النهائية

إذا كان $\bar{f}(s)$ تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ فإنّ:

$$\lim_{t\to\infty}[f(t)] = \lim_{s\to 0}[s\,\mathcal{L}\{f(t)\}] = \lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s)] \qquad (25)$$

الإثبات: وجدنا من خاصة الاشتقاق أنّ:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\bar{f}(s) - f(0) \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = s\,\bar{f}(s) - f(0)$$

بأخذ نهاية الطرفين من أجل $s \to 0$ نجد أنّ:

$$\lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0}\left[\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt\right] = \int_0^\infty f'(t)dt \Rightarrow$$
$$\lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s) - f(0)] = [f(t)]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) \Rightarrow$$
$$\lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s)] - f(0) = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) \Rightarrow \lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s)] = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

وهو المطلوب.

مثال (2-32): تحقق من مبرهنة القيمة النهائية من أجل التابع: $f(t) = 2 + 3e^{-2t}\sin 4t$.

الحل: لدينا:

$$f(t) = 2 + 3e^{-2t}\sin 4t \Rightarrow \mathcal{L}\{2 + 3e^{-2t}\sin 4t\} = \frac{2}{s} + 3\left(\frac{4}{(s+2)^2 + 4^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{s} + \frac{12}{(s+2)^2 + 16}$$
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}(2 + 3e^{-2t}\sin 4t) = 2 + 3(0) = 2$$
$$\lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s\left(\frac{2}{s} + \frac{12}{(s+2)^2 + 16}\right)\right] = \lim_{s\to 0}\left[2 + \frac{12s}{(s+2)^2 + 16}\right] = 2 + 0 = 2$$

وبالتالي المبرهنة محققة، لأن $\lim_{t\to\infty}[f(t)] = \lim_{s\to 0}[s\,\bar{f}(s)]$.

مثال (2-33): أوجد ناتج ما يلي باستخدام تحولات لابلاس:

$$(i)\ \int_0^\infty t\,e^{-3t}\sin t\,dt\,, \qquad (ii)\ \int_0^\infty \frac{\sin mt}{t}dt$$
$$(iii)\ \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right)dt\,, \qquad (iv)\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt\right\}$$

الحل:

$(i)\ \int_0^\infty t\,e^{-3t}\sin t\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(t\sin t)dt$ عندما $(s = 3)$

ولكن التكامل السابق حسب تحويل لابلاس هو $\mathcal{L}\{t\sin t\}$. وبالتالي:

$$\int_0^\infty t\,e^{-3t}\sin t\,dt = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\Big|_{s=3} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=3} = \frac{2\times 3}{(3^2+1)^2} = \frac{3}{50}$$

$(ii)\ \mathcal{L}\{\sin mt\} = \frac{m}{s^2 + m^2} = f(s) \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin mt}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)ds = \int_s^\infty \frac{m\,ds}{s^2+m^2} = \left[\tan^{-1}\frac{s}{m}\right]_s^\infty$$

أو من التعريف:

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin mt}{t}dt = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{m} \Rightarrow \lim_{s\to 0}\tan^{-1}\left(\frac{s}{m}\right) = \begin{cases} 0 & ; \quad m>0 \\ \pi & ; \quad m<0 \end{cases} \Rightarrow$$

وبأخذ النهاية عندما $s \to 0$ نجد أنّ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin mt}{t}dt = \begin{cases} \pi/2 & ; \quad m>0 \\ -\pi/2 & ; \quad m<0 \end{cases}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}\right)ds = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right]_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$

وهذا يعني أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$

وعندما $s=1$ نحصل على:

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)$$

$$(iv)\ \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = [\tan^{-1}s]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \cot^{-1}s$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^t\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right\} = \cot^{-1}(s-1) \quad \text{خاصة الإزاحة}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t\left[e^t\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right]dt\right\} = \frac{1}{s}\cot^{-1}(s-1)$$

12-2-2 مبرهنة الطيّ (جداء تابعين)

إذا كان $F(s) = \bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ وكان $G(s) = \bar{g}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ فإنّ:

$$\bar{f}(s)\,\bar{g}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} \quad (26)$$

الإثبات: لدينا حسب تعريف تحويل لابلاس:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$

نضرب الطرفين بـ $\bar{g}(s)$ فنجد:

$$\bar{f}(s)\,\bar{g}(s) = \bar{g}(s)\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = \int_0^\infty e^{-su}\,g(s)\,f(u)\,du$$

ومن حسب خاصّة الإزاحة وفق محور الزمن نعلم أنّ:

$$e^{-su}\,\bar{g}(s) = \mathcal{L}[g(t-u)] = \int_0^\infty e^{-st} g(t-u)dt \Rightarrow$$

$$\bar{f}(s)\,\bar{g}(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} g(t-u)\,f(u)\,dt\,du = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty g(t-u)f(u)du\,dt$$

ولكن $g(t-u)=0$ عندما $t<u$، فالتكامل معدوم عندما $u\in(t,\infty)$ وموجود من أجل $u\in[0,t]$، لذلك يمكن كتابة ما سبق بالشكل:

$$\bar{f}(s)\,\bar{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t g(t-u)f(u)du\right]dt \Rightarrow$$

$$\bar{f}(s)\,\bar{g}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t-u)f(u)du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-u)g(u)du\right\}.$$

3-2 تحويل لابلاس لبعض التوابع الخاصّة

1-3-2 تحويل لابلاس لتابع دلتا–ديراك



من الظواهر الطبيعية وجود تأثير قوي لقوى ميكانيكية أو كهربائية خلال مدّة زمنية قصيرة، وهذا ما يعرف بمسألة تابع دلتا–ديراك(*).

لنعرف أولاً تابع النبضة القصيرة الذي يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & ;\quad a \le t \le a+\varepsilon \\ 0 & ;\quad \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \qquad (27)$$

نلاحظ أنّ المساحة التي يحصرها هذا التابع مع محور الزمن هي:

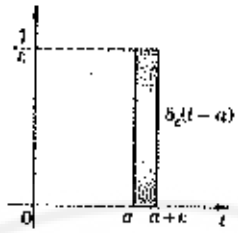
$$S_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(t-a)dt = \int_a^{a+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt = \left[\frac{t}{\varepsilon}\right]_a^{a+\varepsilon} = 1.$$

لنرى ماذا يحدث عندما تصبح قيمة ε صغيرة جداً، لذلك نأخذ نهاية التابع δ_ε من أجل $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon>0)$. يرمز لهذه النهاية بـ $\delta(t-a)$، أي أنّ:

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-a) \qquad (28)$$

ويدعى هذا التابع بتابع دلتا–ديراك أو تابع النبضة الوحدية. وبالتالي:

(*) نسبة للعالم الفيزيائي الإنكليزي بول ديراك (1902-1984) والحائز على جائزة نوبل في عام 1933 لقاء عمله في الميكانيك الكوانتي.



الشكل (2-10): تابع النبضة الوحدية عندما $\varepsilon \to 0$.

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & ; \quad t = a \\ 0 & ; \quad \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \quad \& \quad \int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1 \quad (a \geq 0)$$

ويستخدم هذا التابع باعتباره عملية فيزيائية حدية ذات قيمة متناهية في الكبر عندما تطبق على مدّة زمنية متناهية في الصغر بشكل نبضة واحدة.

من أجل أي تابع مستمر $g(t)$ فإنّ:

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)dt = g(a) \quad (29)$$

لنوجد الآن تحويل لابلاس لتابع دلتا-ديراك، لذلك نكتب:

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{\varepsilon}\left[H(t-a) - H\big(t-(a+\varepsilon)\big)\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\} = \frac{1}{\varepsilon s}\left[e^{-as} - e^{-(a+\varepsilon)s}\right] = e^{-as}\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

وبأخذ النهاية من أجل $\varepsilon \to 0$ وبتطبيق قاعدة أوبيتال:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}\right) = e^{-as}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{se^{-\varepsilon s}}{s}\right) = e^{-as}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad ; \quad (a=0)$$

مثال (2-34): أوجد ناتج ما يلي:

$$(i)\ \int_0^\infty \sin 2t\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt\,, \qquad (ii)\ \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\delta(t-a)\right\}$$

الحل: نعلم أنّ:

$$(i)\ \int_0^\infty f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \Rightarrow \int_0^\infty \sin 2t\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\delta(t-a)\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}ds = \int_s^\infty e^{-as}ds =$$

$$= \left[\frac{e^{-as}}{-s}\right]_s^\infty = \frac{1}{a}e^{-as}.$$

2-3-2 تحويل لابلاس للتابع $\ln t$

لندرس تحويل لابلاس للتابع اللوغاريتمي $\ln t$ حيث $t > 0$. لنبرهن أولاً أنّ:

$$\lim_{t\to 0}(t\ln t - t) = 0 \qquad (30)$$

الإثبات:

$$\lim_{t\to 0}(t\ln t - t) \underset{0\cdot\infty}{=} \lim_{t\to 0} t\,(\ln t - 1) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln t - 1}{1/t} = \frac{\infty}{\infty}$$

نطبق قاعدة أوبيتال فنجد:

$$\lim_{t\to 0}(t\ln t - t) = \lim_{t\to 0}\frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0} -\frac{t^2}{t} = \lim_{t\to 0}(-t) = 0$$

بفرض أنّ: $\mathcal{L}\{\ln t\} = \bar{f}(s)$، لنوجد الآن تحويل لابلاس للتابع $t\ln t$:

$$\mathcal{L}\{t\ln t\} = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}\{\ln t\}] = -\bar{f}'(s) = -F'(s) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\{t\ln t - t\} = \mathcal{L}\{t\ln t\} - \mathcal{L}\{t\} = -F'(s) - \frac{1}{s^2}$$

ولكن نعلم من خاصة الاشتقاق أنّ:

$$\mathcal{L}\{(t\ln t - t)'\} = s\,\mathcal{L}\{t\ln t - t\} - [t\ln t - t]_{t=0} = s\left[-F'(s) - \frac{1}{s^2}\right] - 0 =$$

$$= -sF'(s) - \frac{1}{s} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\ln t + t\cdot\frac{1}{t} - 1\right\} = \mathcal{L}\{\ln t\} = -sF'(s) - \frac{1}{s} \Longrightarrow$$

$$F(s) = -sF'(s) - \frac{1}{s} \Longrightarrow F(s) + sF'(s) = -\frac{1}{s} \rightarrow$$

$$\frac{d}{ds}[sF(s)] = -\frac{1}{s} \xrightarrow[\text{تكامل}]{} sF(s) + C = -\ln s \Rightarrow F(s) = -\frac{\ln s + C}{s}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\{\ln t\} = -\frac{\ln s + C}{s}$$

من أجل $s = 1$ نجد أنّ: $\bar{f}(1) = -C$، وبالتالي:

$$C = -\bar{f}(1) = -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = \cdots = 0.5772 \Longrightarrow \mathcal{L}\{\ln t\} = -\frac{\ln s + 0.5772}{s} \qquad (31)$$

2-3-3 تحويل لابلاس لتابع الجيب التكاملي وجيب التمام التكاملي

يعطى تابع الجيب التكاملي بالعلاقة:

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt\,, \qquad \mathrm{si}(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ولنوجد تحويل لابلاس له، لدينا:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\{\sin t/t\}}{s} = \frac{1}{s}\int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \left[\frac{\tan^{-1} s}{s}\right]_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s\right) = \frac{\cot^{-1} s}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} = \boxed{\frac{\cot^{-1} s}{s}}$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{-\int_t^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\right\} = -\frac{1}{s}\int_0^s \frac{dp}{p^2+1} = -\frac{1}{s}\tan^{-1} s$$

يعطى تابع جيب التمام التكاملي بالعلاقة:

$$\mathrm{Ci}(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$$

ولنوجد تحويل لابلاس له، لدينا:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Ci}(t)\} = \mathcal{L}\left\{-\int_t^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right\} = -\frac{1}{s}\int_0^s \frac{p}{p^2+1}\,dp = -\frac{\ln(s^2+1)}{2s}$$

4-3-2 تحويل لابلاس لتابع الأسي التكاملي

يعطى التابع الأسّي التكاملي بالعلاقة:

$$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

ولنوجد تحويل لابلاس له، لدينا:

$$-\mathrm{Ei}(-t) = \int_t^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \Rightarrow \mathcal{L}\{-\mathrm{Ei}(-t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\} = \frac{1}{s}\int_0^s \frac{dp}{p+1} =$$

$$= \left[\frac{\ln(p+1)}{s}\right]_0^s = \frac{1}{s}\ln(s+1)$$

5-3-2 تحويل لابلاس لتوابع بيسل

سنقوم الآن بإيجاد تحويل لابلاس لتوابع بيسل $J_0(x)$ و $J_1(x)$. نعلم أنّ:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{4!}{s^5} - \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{6!}{s^7} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{s^4}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{s^6}\right) + \cdots\right\} = \frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (32)$$

وبما أنّ: $J_0'(x) = -J_1(x)$ فإنّ:

$$\mathcal{L}\{J_1(x)\} = -\mathcal{L}\{J_0'(x)\} = -[s\mathcal{L}\{J_0(x)\} - 1] = 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (33)$$

مثال (35-2): أوجد تحويل لابلاس للتوابع الآتية: $(i)\ t\,J_0(at), \qquad (ii)\ t\,J_1(t)$

الحل: (i) لدينا:

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \Rightarrow \mathcal{L}\{t\,J_0(at)\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} = \frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

(ii) لدينا:

$$\mathcal{L}\{J_1(t)\} = 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \Rightarrow \mathcal{L}\{t\,J_1(t)\} = -\frac{d}{ds}[\mathcal{L}\{J_1(t)\}] = -\frac{d}{ds}\left\{1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right\} =$$

$$-\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}} \qquad (34)$$

6-3-2 تحويل لابلاس لتابع الخطأ

نعلم أنّ تابع الخطأ يعطى بالعلاقة:

$$\operatorname{erf}(\sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3} + \frac{x^{5/2}}{5\cdot 2!} - \frac{x^{7/2}}{7\cdot 3!} + \cdots\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(\sqrt{x})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3\,s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5\cdot 2!\,s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7\cdot 3!\,s^{9/2}} + \cdots\right\} =$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{s^{7/2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{s^{9/2}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{s^3} + \cdots\right\} = \frac{1}{s^{3/2}}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \qquad (35)$$

7-3-2 تحويل لابلاس لكثيرة حدود لاجير

نعلم أنّ كثيرة حدود لاجير تعطى بالعلاقة:

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{L_n(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})dt = \int_0^\infty e^{-(s-1)t}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)dt$$

وبتطبيق طريقة التكامل بالتجزئة نجد أنّ التحويل يساوي:

$$= \left[e^{-(s-1)t}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t}t^n)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-(s-1)t}(s-1)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t}t^n)dt =$$

$$= (s-1)\int_0^\infty e^{-(s-1)t}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t}t^n)dt$$

وبتطبيق طريقة التكامل بالتجزئة $n-1$ مرة نجد أنّ التحويل يساوي:

$$= (s-1)^n\int_0^\infty e^{-(s-1)t}\cdot e^{-t}\cdot t^n\,dt = (s-1)^n\int_0^\infty e^{-st}\cdot t^n dt =$$

$$= (s-1)^n\,\mathcal{L}\{t^n\} = (s-1)^n\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}\{L_n(t)\} = \frac{n!\,(s-1)^n}{s^{n+1}}\quad (s>1) \qquad (36)$$

مثال (36-2): أوجد ما يلي:

$$(i)\ \mathcal{L}\{e^{-at}J_0(at)\} \quad (ii)\ \mathcal{L}\{\operatorname{erf}(2\sqrt{t})\} \quad (iii)\ \mathcal{L}\{t\operatorname{erf}(2\sqrt{t})\}$$

الحل: نعلم أنّ:

$$(i)\ \mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

وبتطبيق خاصّة الإزاحة:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{(s+a)^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2+2sa+2a^2}}$$

ونعلم أنّ:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s\sqrt{(s+1)}} \Rightarrow$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\{\operatorname{erf}(2\sqrt{t})\} = \mathcal{L}\{\operatorname{erf}(\sqrt{4t})\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s/4)\sqrt{(s/4+1)}} = \frac{2}{s\sqrt{s+4}}$$

وبالتالي فإن:

$$(iii)\ \mathcal{L}\{t\operatorname{erf}(2\sqrt{t})\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s\sqrt{s+4}}\right\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{\sqrt{s^3+4s^2}}\right\} = \frac{3s+8}{s^2(s+4)^{3/2}}$$

2-4 ملخص الخواص الهامّة لتحويلات لابلاس

1- الخاصة الخطية: $\mathcal{L}\{af(t)\pm bg(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\}\pm b\,\mathcal{L}\{g(t)\} = a\,F(s)\pm b\,G(s)$

2- الإزاحة حسب s (التلاشي): $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$

3- الإزاحة بالنسبة إلى t: $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{f(t+a)\} = e^{as}F(s)$

4- التحاكي حسب t:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

5- الاشتقاق حسب s:

$$\mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} F(s) = F^{(n)}(s)\,;\quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

6- الاشتقاق حسب t: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

7- لابلاس التكامل:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}, \qquad \mathcal{L}\left\{\int_0^t \overset{n}{\cdots} \int_0^t f(t)dt^n\right\} = \frac{F(s)}{s^n}\,;n \in \mathbb{N}$$

8- لابلاس التابع الدوري:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

9- مبرهنة القيمة الابتدائية: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$

10- مبرهنة القيمة النهائية: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$

11- لابلاس القسمة على t:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(q)dq \quad \& \quad \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(q)dq$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{f(u)}{u}du\right\} = \frac{1}{s}\int_0^s F(p)dp \;;\; s > 0$$

12- لابلاس t^n, t^α:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad \mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\;; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

13- لابلاس دلتا-ديراك: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & ; \quad t = 0 \\ 0 & ; \quad t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

5-2 جدول تحويلات لابلاس ولابلاس المعاكس

نعرض فيما يلي جدول لتحويلات لابلاس للتوابع الشهيرة. كما سنعتمد على هذا الجدول من أجل تحويل لابلاس المعاكس.

الجدول (2-1): تحويلات لابلاس وتحويلات لابلاس المعاكس.

No.	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$f(s) = F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$1 = H(t) = u_0(t)$	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$

3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
5	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}$
6	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
7	$\delta(t)$	1
8	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
9	$t\,e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
10	$t^n\,e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
11	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
14	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
15	$\sin^2\omega t$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
16	$\cos^2\omega t$	$\frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
17	$\sinh^2\omega t$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}$
18	$\cosh^2\omega t$	$\frac{s^2-2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}$
19	$H(t-a)=u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
20	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
21	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

22	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
23	$e^{at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
24	$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
25	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
26	$f(t-a)\,H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
27	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
28	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)\,G(s)$
29	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
30	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
31	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
32	$t\sinh\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$
33	$t\cosh\omega t$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
34	$\sin\omega t+\omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
35	$\sin\omega t-\omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
36	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
37	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
38	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
39	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$

40	$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
41	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan(a/s)$
42	$f(t+T)=f(t)\ ;\ \forall t$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
43	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
44	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

وفي حالة المشتق من المرتبة n أي: $f^{(n)}(t)$ فإن تحويل لابلاس له هو:

$$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

حيث إن: $H(t)=u_0(t)$ تابع الهيفيسايد، و$\delta(t)$ هو تابع دلتا-ديراك النبضي.

6-2 تحويلات لابلاس المعاكس

يعطى معكوس تحويل لابلاس $f(t)$ للتابع $\bar{f}(s)$ بالعلاقة الآتية:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{k-iT}^{k+iT}e^{st}\bar{f}(s)ds \qquad (37)$$


Th. J. Bromwich
(1875-1929)

حيث إن k هو عدد حقيقي يمثل الرتبة الأسية للتابع $f(t)$.

تسمى الصيغة (37)، بصيغة ميلين Mellin العكسية، كما وتدعى بتكامل بروميتش نسبة للعالم الإنكليزي توماس جون لانسون بروميتش (1875-1929). تزودنا هذه الصيغة للحصول على عكس تحويل لابلاس لتابع معطى $\bar{f}(s)$.

مبرهنة ليرش:

إذا كان $f(t)$ تابعاً مستمراً بالتجزئة على كل المجال $0\le t\le N$ ومن قوى أسية من أجل $t>N$ عندئذٍ، فإن تحويل لابلاس المعاكس لـ $\bar{f}(s)$ أي: $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}=f(t)$ (38) يكون وحيداً.

يمكن معرفة تحويلات لابلاس العكسية لبعض التوابع الشهيرة مباشرة من الجدول (1-2) ويمكن الاستفادة من خواص تحويلات لابلاس أيضاً، فمثلاً:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at},\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}=\frac{e^{at}t^{n-1}}{(n-1)!},\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{1}{a}\sin at,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\}=\frac{1}{a}\sinh at,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}=\cosh at,\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{2a}t\sin at$$

مثال (2-37): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتوابع الآتية:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3s-1}\right\}$ (iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^3}\right\}$

(iv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\}$ (v) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s}{s^2+4}\right\}$ (vi) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2-16}\right\}$

(vii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-7}\right\}$ (viii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\}$ (ix) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+2s-3}\right\}$

(x) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2-4s-5}\right\}$ (xi) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-4s+13}\right\}$ (xii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+2}{s^2+2s+10}\right\}$

الحل: من الجدول (1-2) لدينا:

$$(i)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\}=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3t$$

$$(ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3s-1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3(s-1/3)}\right\}=\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1/3}\right\}=\frac{5}{3}e^{t/3}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^3}\right\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}=3t^2$$

$$(iv)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}=\frac{1}{2}t^3$$

$$(v)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s}{s^2+4}\right\}=7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}=7\cos 2t$$

$$(vi)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2-16}\right\}=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4^2}\right\}=4\cosh 4t$$

$$(vii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-7}\right\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-(\sqrt{7})^2}\right\}=\frac{3}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2-(\sqrt{7})^2}\right\}=\frac{3}{\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}\,t$$

$$(viii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\}=\frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}=\frac{1}{12}e^{3t}t^4$$

حيث: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}=e^{at}t^n$

$$(ix)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+2s-3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)^2-2^2}\right\}=\frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right\}=$$

$$=\frac{5}{2}e^{-t}\sinh 2t$$

$$(x)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{s^2-4s-5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-3}{(s-2)^2-3^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(s-2)+5}{(s-2)^2-3^2}\right\}=$$

$$=4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2-3^2}\right\}+\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2-3^2}\right\}=$$

$$= 4e^{2t}\cosh 3t + \frac{5}{3}e^{2t}\sinh 3t$$

$$(xi)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-4s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+3^2}\right\} = e^{2t}\sin 3t$$

$$(xii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)}{s^2+2s+10}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\} = 2e^{-t}\cos 3t$$

مثال (2-38): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابعين الآتيين:

$$(i)\ \frac{s^2-3s+4}{s^3}, \qquad (ii)\ \frac{s+2}{s^2-4s+13}$$

الحل:

$$(i)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3s+4}{s^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = 1 - 3t + 4\cdot\frac{t^2}{2!} =$$

$$= 1 - 3t + 2t^2$$

$$(ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-4s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-2)^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2+4}{(s-2)^2+3^2}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+3^2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+3^2}\right\} = e^{2t}\cos 3t + \frac{4}{3}e^{2t}\sin 3t$$

وهناك طرائق عامة لحساب تحويلات لابلاس العكسية نذكر منها:

2-6-4 طريقة تفريق الكسور الجبرية

نفرض أنّ $g_1(s)$ و$g_2(s)$ كثيرتا حدود ذات أمثال حقيقية وليس بينهما عوامل مشتركة وليكن $F(s) = g_1(s)/g_2(s)$ كسراً جبرياً بسيطاً. لإيجاد تحويل لابلاس العكسي للتابع $F(s)$ نميز عدة حالات:

أولاً: لـ $g_2(s)$، m جذراً بسيطاً $a_1, a_2, \cdots, a_m$ علماً أن درجة البسط أقل تماماً من درجة المقام وبالتالي يكتب $F(s)$ على النحو الآتي:

$$F(s) = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_m}{s-a_m}$$

لنوجد تحويل لابلاس المعاكس له:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = A_1e^{a_1t} + A_2e^{a_2t} + \cdots + A_me^{a_mt} = \sum_{i=1}^{m} A_ie^{a_it} \quad (39)$$

مثال (2-39): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

الحل:

$$F(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}\Rightarrow$$

$$A=\lim_{s\to -2}(s+2)F(s)=\lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{s+3}\right)=1,$$

$$B=\lim_{s\to -3}(s+3)F(s)=\lim_{s\to -3}\left(\frac{1}{s+2}\right)=-1\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\Rightarrow f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=e^{-2t}-e^{-3t}.$$

ثانياً: لـ $g_2(s)$ جذوراً مضاعفة (مكررة)، لنفرض أنّ $s=a$ جذر مكرر m مرة عندها يمكن أن نكتب: $g_2(s)=(s-a)^m h(s)\ ;\ h(a)\neq 0$ وبالتالي:

$$F(s)=\frac{g_1(s)}{g_2(s)}=\frac{g_1(s)}{(s-a)^m h(s)}$$

$$=\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_1}{s-a}+E(s)\qquad(40)$$

نحسب الثوابت A_k عن طريق الاشتقاق والضرب بـ $(s-a)^k$، ثمّ نوجد تحويل لابلاس العكسي للناتج.

ثالثاً: يحوي $g_2(s)$ مضاريب من الدرجة الثانية مميزها سالب (غير مكررة)، عندها يمكن أن نكتب: $g_2(s)=(as^2+bs+c)h(s)\ ;\ b^2-4ac<0$ وبالتالي يعوض عن المضروب (as^2+bs+c) بالكسر $(As+B)/(as^2+bs+c)$ ثمّ نوجد الثوابت A,B مع بقية الثوابت المطلوبة.

رابعاً: يحوي $g_2(s)$ مضاريب من الدرجة الثانية مميزها سالب (مكررة m مرة)، عندها يمكن أن نكتب: $g_2(s)=(as^2+bs+c)^m h(s)\ ;\ b^2-4ac<0$ وبالتالي يعوض عن المضروب $(as^2+bs+c)^m$ بمجموع m كسراً من الشكل:

$$\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c}+\frac{A_2s+B_2}{(as^2+bs+c)^2}+\cdots+\frac{A_ms+B_m}{(as^2+bs+c)^m}\qquad(41)$$

ثمّ نوجد الثوابت المطلوبة.

مثال (40-2): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)^2}$$

الحل:

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-2}$$

$$A=\lim_{s\to 1}(s-1)F(s)=1,\qquad B=\lim_{s\to 2}(s-2)^2F(s)=1$$

$$C=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 2}\{(s-2)^2F(s)\}'=\lim_{s\to 2}\left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right)=-1\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{s-2}\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^t+te^{2t}-e^{2t}$$

مثال (41-2): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابعين:

$$(i)\ \frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6},\qquad (ii)\ \frac{4s+5}{(s-1)^2(s+2)}$$

الحل: (i) نلاحظ أنّ المقام يكتب بالشكل: $(s-1)(s-2)(s-3)$، وبالتالي:

$$\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}\Rightarrow$$

$$A=\frac{2\cdot1^2-6\cdot1+5}{(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2},\qquad B=\frac{2\cdot2^2-6\cdot2+5}{(2-1)(2-3)}=-1,$$

$$C=\frac{2\cdot3^2-6\cdot3+5}{(3-1)(3-2)}=\frac{5}{2}\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}=\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$$

$$(ii)\ \frac{4s+5}{(s-1)^2(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{4(-2)+5}{(-2-1)^2(s+2)}$$

نضرب الطرفين بالمقام المشترك $(s-1)^2(s+2)$ ونطابق:

$$4s+5\equiv A(s-1)(s+2)+B(s+2)-\frac{1}{3}(s-1)^2\Rightarrow$$

$$A-\frac{1}{3}=0\Rightarrow A=\frac{1}{3},\qquad (s=1)\Rightarrow 9=3B\Rightarrow B=3$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+5}{(s-1)^2(s+2)}\right\}=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}e^t+3te^t-\frac{1}{3}e^{-2t}$$

مثال (42-2): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتوابع:

$$(i)\ \frac{4s-5}{s^2-s-2},\qquad (ii)\ \frac{3s^3+s^2+12s+2}{(s-3)(s+1)^3},\qquad (iii)\ \frac{7s+13}{s(s^2+4s+13)},$$

$$(iv)\ \frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}$$

الحل:

$$(i)\ \frac{4s-5}{s^2-s-2}=\frac{4s-5}{(s-2)(s+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}=\frac{A(s+1)+B(s-2)}{(s-2)(s+1)}$$

$$\Rightarrow 4s-5\equiv A(s+1)+B(s-2)\Rightarrow$$

$$(s=2)\Rightarrow 3=3A\Rightarrow A=1,\qquad (s=-1)\Rightarrow -9=-3B\Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-5}{s^2-s-2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}+\frac{3}{s+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=$$

$$= e^{2t} + 3e^{-t}$$

(ii) $$\frac{3s^3 + s^2 + 12s + 2}{(s-3)(s+1)^3} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

نضرب الطرفين بالمقام المشترك ونطابق:

$$3s^3 + s^2 + 12s + 2 \equiv$$
$$\equiv A(s+1)^3 + B(s-3)(s+1)^2 + C(s-3)(s+1) + D(s-3)$$
$$(s=3) \Rightarrow 128 = 64A \Rightarrow A = 2, \qquad (s=-1) \Rightarrow -12 = -4D \Rightarrow D = 3$$
$$s^3 \text{ بمقارنة أمثال} \Rightarrow 3 = A + B \Rightarrow B = 1$$
$$s^0 \text{ بمقارنة الحد الثابت} \Rightarrow 2 = A - 3B - 3C - 3D \Rightarrow$$
$$2 = 2 - 3 - 3C - 9 \Rightarrow 3C = -12 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3 + s^2 + 12s + 2}{(s-3)(s+1)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} + \frac{1}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^3}\right\} =$$
$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} =$$
$$= 2e^{3t} + e^{-t} - 4te^{-t} + \frac{3}{2}t^2e^{-t}$$

(iii) $$\frac{7s+13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13} \Rightarrow$$

نضرب الطرفين بالمقام المشترك ونطابق:

$$7s + 13 \equiv A(s^2 + 4s + 13) + (Bs + C)(s) \Rightarrow (s = 0) \Rightarrow 13 = 13A \Rightarrow A = 1$$
$$s^2 \text{ بمقارنة أمثال} \Rightarrow 0 = A + B \Rightarrow B = -1, \quad s \text{ بمقارنة أمثال} \Rightarrow 7 = 4A + C \Rightarrow C = 3 \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s+13}{s(s^2+4s+13)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-s+3}{s^2+4s+13}\right\} =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s+3}{(s+2)^2+3^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-(s+2)+5}{(s+2)^2+3^2}\right\} =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^2+3^2}\right\} =$$
$$= 1 - e^{-2t}\cos 3t + \frac{5}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

(iv) $$\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \Rightarrow$$

نضرب الطرفين بالمقام المشترك ونطابق:

$$5s^2 + 8s - 1 \equiv A(s^2+1) + (Bs+C)(s+3) \Rightarrow (s=-3) \Rightarrow 20 = 10A \Rightarrow A = 2$$
$$s^2 \text{ بمقارنة أمثال} \Rightarrow 5 = A + B \Rightarrow B = 3, \quad s \text{ بمقارنة أمثال} \Rightarrow 8 = 3B + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} + \frac{3s-1}{s^2+1}\right\} =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 2e^{-3t} + 3\cos t - \sin t$$

مثال (2-43): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابعين:

$$(i)\ \frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}, \qquad (ii)\ \frac{s}{s^4+4a^4}$$

الحل:

$$(i)\ \frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{5(1)+3}{(s-1)(1^2+2\cdot 1+5)} + \frac{As+B}{s^2+2s+5}$$

بضرب الطرفين بـ $(s-1)(s^2+2s+5)$ والمطابقة نجد أنّ:

$$5s+3 \equiv 1\cdot(s^2+2s+5)+(As+B)(s-1)$$

بمقارنة أمثال s^2 في الطرفين $\Rightarrow 0 = 1+A \Rightarrow A=-1.$

$$(s=0) \Rightarrow 3 = 5-B \Rightarrow B=2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s+2}{s^2+2s+5}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-(s+1)+3}{(s+1)^2+4}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right\} =$$

$$= e^{t}\cdot e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

$$(ii)\ s^4+4a^4 = (s^2+2a^2)^2 - (2as)^2 = (s^2+2as+2a^2)(s^2-2as+2a^2) \Rightarrow$$

$$\frac{s}{s^4+4a^4} = \frac{As+B}{s^2+2as+2a^2} + \frac{Cs+D}{s^2-2as+2a^2}$$

نضرب الطرفين بالمقام المشترك s^4+4a^4 والمطابقة نجد:

$$s \equiv (As+B)(s^2-2as+2a^2)+(Cs+D)(s^2+2as+2a^2) \Rightarrow$$

بمقارنة أمثال $s^3 \Rightarrow 0 = A+C$ $\quad (i)$

بمقارنة أمثال $s^2 \Rightarrow 0 = -2aA+B+2aC+D$ $\quad (ii)$

بمقارنة أمثال $s \Rightarrow 1 = 2a^2A-2aB+2a^2C+2aD$ $\quad (iii)$

$$(s=0) \Rightarrow 0 = 2a^2B+2a^2D \Rightarrow B+D=0 \quad (iv)$$

من (i) نجد $A=C=0 \Rightarrow$ بتعويض (iii) في (ii) نجد $A+C=0, \Rightarrow B=\frac{1}{2a}$

$$(iv)\ \text{ومنه} \Rightarrow B=-\frac{1}{4a}, \qquad D=\frac{1}{4a} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = -\frac{1}{4a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2as+2a^2}\right\} + \frac{1}{4a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2as+2a^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2+a^2}\right\} + \frac{1}{4a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2+a^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{a}e^{-at}\sin at + \frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{a}e^{at}\sin at =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\sin at\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2a^2}\sin at\sinh at.$$

2-6-2 طريقة دستور نشر هيفيسايد

لتكن $P(s), Q(s)$ كثيرتي حدود حيث درجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$ ونفرض أنّ: $Q(s)$ من الدرجة n، ونفرض أيضاً أنّ لـ $Q(s)$ يوجد n جذراً (أو صفراً) مختلفاً a_k حيث $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ عندئذٍ، فإنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t} \qquad (42)$$

الإثبات:

نفرض أن لـ $Q(s)$، n صفراً مختلفاً $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ عندئذٍ باستخدام طريقة تفريق الكسور يمكن أن نكتب $P(s)/Q(s)$ على الشكل الآتي:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-a_k} + \cdots + \frac{A_n}{s-a_n} \qquad (43)$$

لنضرب طرفي العلاقة السابقة (43) بـ $s - a_k$ ونجعل $s \to a_k$، عندئذٍ نجد أنّ:

$$A_k = \lim_{s\to a_k}\frac{P(s)}{Q(s)}(s-a_k) = \lim_{s\to a_k}P(s)\frac{(s-a_k)}{Q(s)} =$$

$$= \lim_{s\to a_k}P(s)\times\lim_{s\to a_k}\frac{(s-a_k)}{Q(s)} = P(a_k)\lim_{s\to a_k}\frac{1}{Q'(s)} = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

وبالتالي تكتب العلاقة (43) مرة أخرى على الشكل:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}\cdot\frac{1}{s-a_1} + \cdots + \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}\cdot\frac{1}{s-a_k} + \cdots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}\cdot\frac{1}{s-a_n} \qquad (44)$$

نطبق تحويل لابلاس المعاكس على العلاقة الأخيرة (44) وبالاستفادة من الخاصة الخطية والجدول نجد أنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}e^{a_1 t} + \cdots + \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t} + \cdots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}e^{a_n t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t} \qquad (45)$$

مثال (2-44): أوجد تحويل لابلاس المعاكس للتابع باستخدام نشر هيفيسايد:

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$$

الحل: لدينا: $P(s) = 2s^2 - 4, \quad Q(s) = (s+1)(s-2)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6$

واضح أن درجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$ وكذلك: $Q'(s) = 3s^2 - 8s + 1$

من جهة أخرى واضح أن لـ $Q(s)$ ثلاثة أصفار هي: $a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ وبالتالي نجد أنّ:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} =$$

$$= \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \cdot \frac{1}{s - a_1} + \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)} \cdot \frac{1}{s - a_2} + \frac{P(a_3)}{Q'(a_3)} \cdot \frac{1}{s - a_3} =$$

$$= \frac{P(-1)}{Q'(-1)} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{P(2)}{Q'(2)} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{P(3)}{Q'(3)} \cdot \frac{1}{s-3}$$

وباستخدام تحويل لابلاس المعاكس على الطرفين نجد:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} =$$

$$= \frac{P(-1)}{Q'(-1)} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{P(2)}{Q'(2)} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{P(3)}{Q'(3)} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$f(t) = -\frac{2}{12}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{14}{4}e^{3t} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

3-6-2 طريقة استخدام نظرية الرواسب

من أهم الطرائق لإيجاد تحويل لابلاس العكسي يكمن باستخدام نظرية الرواسب أي أنّ:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-iT}^{k+iT} e^{st}\bar{f}(s)ds = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{Res}_{s=a_i}\left[e^{st}F(s)\right]$$

حيث a_i الأقطاب الموجودة داخل محيط تكامل بروموفيتش.

تذكرة: فإذا كان التابع $f(x)$ تحليلياً عند جميع النقاط الواقعة داخل المنحني C البسيط المغلق وعليه ما عدا $x = a$ الذي هو قطب من رتبة n بحيث يكون:

$$f(x) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(x-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \quad (46)$$

نضرب متسلسلة تايلور بـ $(x-a)^n$ فنجد:

$$(x-a)^n f(x) = \cdots + a_{-n} + a_{-n+1}(x-a) + \cdots + a_{-1}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

نشتق حتى المرتبة $(n-1)$ لكلا الطرفين ثمّ نجعل $x \to a$ نجد أنّ:

$$(n-1)!\, a_{-1} = \lim_{x \to a} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-a)^n f(x)\right] \Rightarrow$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x \to a} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-a)^n f(x)\right] \quad (47)$$

مثال (2-45): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \tilde{f}(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$$

الحل:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}ds$$

نلاحظ أنّ هذا التابع قطبين هما: $s = 2$ & $s = -1$. لنوجد رواسبه:

$$(i)\ s = -1 \Rightarrow \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{1}{9}e^{-t}$$

$$(ii)\ s = 2 \Rightarrow \lim_{s\to 2}\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{ds}\left\{(s-2)^2\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s+1}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 2}\frac{(s+1)e^{st}(t) - (1)e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

وبالتالي يكون التابع:

$$f(t) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

مثال (2-46): أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$F(s) = \tilde{f}(s) = \frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}$$

الحل:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{s\,e^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}ds$$

نلاحظ أنّ هذا التابع قطبين هما: $s = 1$ من المرتبة الثانية و $s = -1$ من المرتبة الثالثة.

لنوجد رواسب هذا التابع:

$$(i)\ s = -1 \Rightarrow \lim_{s\to -1}\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s+1)^3\frac{s\,e^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\} = \lim_{s\to -1}\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left\{\frac{s\,e^{st}}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= \lim_{s\to -1}\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\left\{\frac{(e^{st} + ste^{st})(s-1)^2 - 2s(s-1)e^{st}}{(s-1)^4}\right\} = \cdots = \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2)$$

$$(ii)\ s = 1 \Rightarrow \lim_{s\to 1}\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{ds}\left\{(s-1)^2\frac{s\,e^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\} = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left\{\frac{s\,e^{st}}{(s+1)^3}\right\} = \cdots =$$

$$= \frac{1}{16}e^{t}(2t-1)$$

وبالتالي يكون التابع:

$$f(t) = \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2) + \frac{1}{16}e^{t}(2t-1)$$

4-6-2 طريقة أخرى باستخدام خواص تحويلات لابلاس العكسية

هناك طرائق أخرى تساعد في إيجاد تحويلات لابلاس العكسية منها:

أ- (خاصة الإزاحة) إذا كان $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$، فإنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s-a)\} = e^{at}f(t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} \quad (48)$$

ب- إذا كان $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = f(t)$، وكان $f(0) = 0$ فإنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,\bar{f}(s)\} = \frac{d}{dt}\{f(t)\} \quad (49)$$

وكحالة عامة عندما $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ فإنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^n\,\bar{f}(s)\} = \frac{d^n}{dt^n}\{f(t)\} \quad (50)$$

ت- إذا كان $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$، فإنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(t)dt \quad (51)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \left\{\int_0^t f(t)dt\right\}dt \quad (52)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s^3}\right\} = \int_0^t \left\{\int_0^t \left[\int_0^t f(t)dt\right]dt\right\}dt, \cdots \quad (53)$$

ث- إذا كان $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$، فإنّ:

$$t\,f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}[f(s)]\right\} \quad (54)$$

ج- إذا كان $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$، فإنّ:

$$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \bar{f}(s)ds\right\} \quad (55)$$

مثال (2-47): أوجد مقلوب تحويل لابلاس للتوابع:

$$(i)\ \frac{s^2}{(s-2)^3},\quad (ii)\ \frac{s+3}{s^2-4s+13},\quad (iii)\ \frac{(s+2)^7}{(s^2+4s+8)^2}$$

$$(iv)\ \frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4},\quad (v)\ \frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9}$$

الحل: $(i)\ s^2 = (s-2)^2 + 4(s-2) + 4 \Rightarrow$

$$\frac{s^2}{(s-2)^3} = \frac{1}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{4}{(s-2)^3} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s-2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\} =$$

$$= e^{2t} + 4t\,e^{2t} + 2t^2e^{2t}$$

(ii) $\dfrac{s+3}{s^2-4s+13}=\dfrac{s-2}{(s-2)^2+3^2}+\dfrac{5}{(s-2)^2+3^2}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-4s+13}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+3^2}\right\}+\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+3^2}\right\}=$$

$$=e^{2t}\cos 3t+\frac{5}{3}e^{2t}\sin 3t$$

(iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+2)^2}{(s^2+4s+8)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+2)^2}{(s^2+4s+4+4)^2}\right\}=$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{[(s+2)^2+4]^2}\right\}=e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}=e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+4-4}{(s^2+4)^2}\right\}=$$

$$=e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}-\frac{4}{(s^2+4)^2}\right\}=\frac{e^{-2t}\sin 2t}{2}-4e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\}=$$

$$=\frac{e^{-2t}\sin 2t}{2}-4e^{-2t}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2}\right)\right\}=$$

$$=e^{-2t}\left(\frac{\sin 2t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t\cos 2t}{2}\right)=e^{-2t}\left(\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t\cos 2t}{2}\right).$$

or $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\}=f'(t)\,;f(0)=0\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{s\frac{s}{(s^2+2^2)^2}\right\}=\left[\frac{1}{4}t\sin 2t\right]'=\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t\cos 2t}{2}$$

(iv) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+4}{s^3}-\dfrac{2s-18}{s^2+9}+\dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}=$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-18}{s^2+9}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}=$$

$$=5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^3}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}-18\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}+24\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$-30\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s}}{s^4}\right\}\Rightarrow$$

$$f(t)=5t+2t^2-2\cos 3t+6\sin 3t+4t^3-\frac{16t^{5/2}}{\sqrt{\pi}}$$

(v) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3}-\dfrac{3+4s}{9s^2-16}+\dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}=$

$$=6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-3}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9s^2-16}\right\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{9s^2-16}\right\}+8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{16s^2+9}\right\}$$

$$-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{16s^2+9}\right\}$$

$$=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3/2}\right\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-16/9}\right\}-\frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16/9}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9/16}\right\}-\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9/16}\right\}$$

$$f(t)=3e^{3t/2}-\frac{1}{4}\sinh\frac{4t}{3}-\frac{4}{9}\cosh\frac{4t}{3}+\frac{2}{3}\sin\frac{3t}{4}-\frac{3}{8}\cos\frac{3t}{4}.$$

مثال (2-48): أوجد مقلوب تحويل لابلاس للتابعين:

$$(i)\ \frac{1}{s\,(s^2+a^2)}, \qquad (ii)\ \frac{1}{s\,(s+a)^3},$$

الحل:

(i) لدينا $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{1}{a}\sin at \Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+a^2)}\right\}=\int_0^t \frac{1}{a}\sin at\,dt=\left[\frac{1}{a^2}(-\cos at)\right]_0^t=\frac{1-\cos at}{a^2}$$

(ii) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s+a)^3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+a)-a](s+a)^3}\right\}=e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)\,s^3}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)s}\right\}=\int_0^t e^{at}dt=\frac{e^{at}}{a}-\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)s^2}\right\}=\frac{1}{a}\int_0^t(e^{at}-1)dt=\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)s^3}\right\}=\frac{1}{a^2}\int_0^t(e^{at}-at-1)dt=\frac{1}{a^3}\left(e^{at}-\frac{a^2t^2}{2}-at-1\right)$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)^3}\right\}=e^{-at}\cdot\frac{1}{a^3}\left(e^{at}-\frac{a^2t^2}{2}-at-1\right)=$$

$$=\frac{1}{a^3}\left(1-e^{-at}-at\,e^{-at}-\frac{a^2}{2}t^2e^{-at}\right)$$

مثال (2-49): أوجد مقلوب تحويل لابلاس للتوابع:

$$(i)\ \frac{s}{(s^2+a^2)^2}, \qquad (ii)\ \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}, \qquad (iii)\ \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$$

الحل: سنقوم باستخدام الخاصة (55) فإذا كان:

(i) $$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}\Rightarrow\frac{f(t)}{t}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\frac{s}{(s^2+a^2)^2}ds\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\frac{2s}{(s^2+a^2)^2}ds\right\}=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]_s^\infty\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{\sin at}{2a}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2a}t\sin at.$$

(أو) $$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{\sin at}{a}\Rightarrow\bar{f}(s)=\frac{1}{s^2+a^2}\Rightarrow$$

$$t\,f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}[\bar{f}(s)]\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{t\sin at}{a}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+a^2)^2}\right\}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{2a}t\sin at$$

(ii) الآن لنفرض أنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{2a}t\sin at=f(t);\quad f(0)=0\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{d}{dt}[f(t)]=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2a}t\sin at\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at).$$

(iii) وجد أن:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{2a}t\sin at=f(t)\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\int_0^t f(t)dt=\int_0^t\frac{t\sin at}{2a}dt=$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\left[t\cdot\frac{-\cos at}{a}\right]_0^t-\int_0^t 1\cdot\left(\frac{-\cos at}{a}\right)dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\frac{-t\cos at}{a}+\frac{\sin at}{a^2}\right\}=\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at).$$

مثال (2-50): أوجد مقلوب تحويل لابلاس للتابعين:

$$(i)\ \frac{s+2}{s^2(s+1)(s-2)},\qquad (ii)\ \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2},$$

الحل:

$$(i)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s-2)}\right\}=\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s(s+1)(s-2)}\right\}=\int_0^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s-2)}\right\}dt=$$

$$=\int_0^t\left(\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}\right)dt=\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}-1\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+1)(s-2)}\right\}=\int_0^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s(s+1)(s-2)}\right\}dt=$$

$$=\int_0^t\left(\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}-1\right)dt=\frac{1}{3}(e^{2t}-e^{-t}-t).$$

$$(ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}=e^{-2t}\sin t\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)\right\}=(-1)^1t\cdot e^{-2t}\sin t\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-(2s+4)}{(s^2+4s+5)^2}\right\}=-t\cdot e^{-2t}\sin t\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\cdot e^{-2t}\sin t.$$

مثال (2-51): أوجد معكوس تحويل لابلاس للتوابع:

$$(i)\quad\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}},\qquad (ii)\quad\frac{1}{(s^2+2s+5)^{3/2}},$$

$$(iii)\quad \frac{e^{-1/s}}{s}, \qquad (iv)\quad e^{-\sqrt{s}}, \qquad (v)\quad \frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}$$

الحل: لدينا:

$$(i)\quad \mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \Rightarrow \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right] = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

وهذا يعني أنّ:

$$\mathcal{L}\{t\,J_0'(at)\} = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

ومنه نجد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}J_0'(at) = \frac{t\,J_1(at)}{a}$$

حيث $J_0(at)$ هو تابع يسمى من الدرجة صفر و$J_1(at)$ هو تابع يسمى من الدرجة الأولى.

$$(ii)\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+5)^{3/2}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+4]^{3/2}}\right\} =$$

$$= e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^{3/2}}\right\} = \frac{t\,e^{-t}}{2}J_1(2t)$$

$$(iii)\quad \frac{e^{-1/s}}{s} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^4} + \cdots$$

وبأخذ لابلاس المعاكس وبتطبيق الخاصة الخطية نجد أنّ:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s}\right\} = 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} - \frac{t^3}{(3!)^2} + \cdots =$$

$$= 1 - t + \frac{t^2}{1^2\cdot 2^2} - \frac{t^3}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{(2t^{1/2})^2}{1^2\cdot 2^2} + \frac{(2t^{1/2})^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{(2t^{1/2})^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots = J_0(2\sqrt{t})$$

حيث J_0 هو تابع يسمى من الدرجة صفر.

$$(iv)\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - s^{1/2} + \frac{s}{2!} - \frac{s^{3/2}}{3!} + \frac{s^2}{4!} - \frac{s^{5/2}}{5!} + \cdots\right\}$$

وبتطبيق الخاصة الخطية ومجموع السلسلة الهندسية نجد بعد كل الحساب أنّ:

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}}e^{-1/(4t)}$$

$$(v)\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot u^{3/2}}e^{-1/(4u)}du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

حيث erfc هو تابع الخطأ المتمم، وفرضنا في التكامل أنّ:

$$u = \frac{1}{4v^2} \Rightarrow du = -\frac{dv}{2v^3} = -\frac{dv}{2\left(1/2\sqrt{u}\right)^3} = -u^{3/2} dv$$

مثال (S2-2): أوجد معكوس تحويل لابلاس للتوابع:

$$(i)\ \ln\frac{s+1}{s-1},\ \ (ii)\ \ln\frac{s^2+1}{s(s+1)},\ \ (iii)\ \cot^{-1}\left(\frac{s}{2}\right),\ \ (iv)\ \tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)$$

الحل: (i) إذا كان:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s+1}{s-1}\right\} \Rightarrow t\,f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln\frac{s+1}{s-1}\right\} =$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln(s+1)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln(s-1)\right\} =$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = -e^{-t} + e^{t} = 2\sinh t \Rightarrow f(t) = \frac{2\sinh t}{t}.$$

(ii) إذا كان:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+1}{s(s+1)}\right\} \Rightarrow t\,f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln\frac{s^2+1}{s(s+1)}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\ln(s^2+1)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln s\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln(s+1)\right\} =$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = 2\cos t + 1 + e^{-t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{t}(2\cos t + 1 + e^{-t}).$$

(iii) إذا كان:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\cot^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\right\} \Rightarrow t\,f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\cot^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \sin 2t \Rightarrow f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$$

(iv) إذا كان:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)\right\} \Rightarrow t\,f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^4+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{(s^2+2)^2-(2s)^2}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{(s^2+2+2s)(s^2+2-2s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2} - \frac{1}{s^2+2s+2}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{t}\sin t - e^{-t}\sin t = 2\sinh t \sin t$$

5-6-2 طريقة استخدام مبرهنة الطي

يمكن أيضاً استخدام مبرهنة الطي لإيجاد تحويل لابلاس العكسي في حالة جداء تابعين. نعلم أنّ:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)\cdot G(s) \Longrightarrow$$

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} \quad (56)$$

مثال (2-53): أوجد معكوس تحويل لابلاس للتابع:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

الحل:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

من جدول تحويلات لابلاس لدينا:

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2+1} \Longrightarrow f_1(u) = \cos u\,, \qquad F_2(s) = \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow f_2(u) = \sin u\,,$$

نقوم بإزاحة t على أحدهما فنجد:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \int_0^t \sin(t-u)\cos u\,du = \left(s!\right) = \int_0^t \cos(t-u)\sin u\,du$$

وبتطبيق دستور تحويل الجداء إلى مجموع على التكامل الأول نجد:

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(t-2u)]du = \left[\frac{1}{2}u\sin t + \frac{1}{4}\cos(t-2u)\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\,t\sin t.$$

مثال (2-54): أوجد معكوس تحويل لابلاس للتابعين الآتيين مستخدماً مبرهنة الطي:

$$(i)\ \frac{s}{(s^2+a^2)^2}\,, \qquad (ii)\ \frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$$

الحل: لدينا التابعان:

$$(i)\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at\,,\ \ g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$$

وبتطبيق مبرهنة الطي نجد أنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \int_0^t \cos au\,\frac{\sin a(t-u)}{a}\,du$$

$$;\quad \begin{cases} f(u) = \cos au \\ g(t-u) = \dfrac{1}{a}\sin a(t-u) \end{cases}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a}\int_0^t [\sin at - \sin(2au - at)]du =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[u\sin at + \frac{1}{2a}\cos(2au - at)\right]_0^t = \frac{1}{2a}t\sin at$$

(ii) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\} = \cos bt$

وبتطبيق مبرهنة الطي نجد أنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+b^2}\right\} =$$

$$= \int_0^t \cos au \cos b(t-u)\,du \; ; \quad \begin{cases} f(u) = \cos au \\ g(t-u) = \cos b(t-u) \end{cases}$$

وبالتالي:

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\cos[(a-b)u + bt] + \cos[(a+b)u - bt]\}du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(a-b)u + bt]}{a-b} + \frac{\sin[(a+b)u - bt]}{a+b}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin at - \sin bt}{a-b} + \frac{\sin at - \sin bt}{a+b}\right\} = \frac{a\sin at - b\sin bt}{a^2-b^2}.$$

مثال (55-2): أوجد تحويل لابلاس العكسي:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right\}$, (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$

الحل:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{\sin 3t}{3}$

باستخدام مبرهنة الطيّ نجد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right\} = \int_0^t \sin u \cdot \frac{\sin 3(t-u)}{3}du =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^t [\cos(4u-3t) - \cos(3t-2u)]du = \frac{1}{6}\left[\frac{\sin(4u-3t)}{4} - \frac{\sin(3t-2u)}{-2}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}(\sin t + \sin 3t) + \frac{1}{2}(\sin t - \sin 3t)\right\} = \frac{1}{8}\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t, \Longrightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right\} = \frac{1}{8}\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$ وأيضاً

وباستخدام مبرهنة الطيّ نجد أنّ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right\} =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{8}\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin 3u\right)\cdot\cos 2(t-u)\,du =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^t \left[\sin u\cos 2(t-u) - \frac{1}{3}\sin 3u\cos 2(t-u)\right]du =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^t \frac{1}{2}[\sin(2t-u) - \sin(3u-2t)]du - \frac{1}{8}\int_0^t \frac{1}{6}[\sin(u+2t) - \sin(5u-2t)]du$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{-\cos(2t-u)}{-1} + \frac{\cos(3u-2t)}{3}\right]_0^t - \frac{1}{48}\left[-\cos(u+2t) + \frac{\cos(5u-2t)}{5}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{12}\cos t - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{60}\cos 3t.$$

7-2 تطبيقات تحويلات لابلاس ولابلاس المعاكس

إن تحويل لابلاس يؤدي دوراً مهماً في المجال التطبيقي ولا سيما في مجالات عديدة منها الكهرباء والميكانيك وتطبيقات أخرى على درجة كبيرة وعالية من التقانة الحديثة والصناعات المتقدمة. وإدخال هذا المفهوم في مثل هذه المجالات هو الهدف من أجل تسهيل حل المشاكل الهندسية والتوصل إلى حلول أفضل وبطرائق أسهل مع الدقة اللازمة، وقد تصادف في مجالي الكهرباء والميكانيك الكثير من المشاكل التي يعبر عنها بمعادلات تفاضلية على اختلاف أنواعها وكذلك المعادلات التفاضلية الجزئية، ولذلك يستخدم تحويل لابلاس وتحويل لابلاس المعاكس باعتباره تقانةً جديدة من أجل قلب المعادلات التفاضلية أو جمل المعادلات التفاضلية للجملة الآلية إلى جمل معادلات جبرية أو معادلة جبرية ضمن شروط ابتدائية معينة موضوعة على المسائل. وبعد القيام بحل جمل المعادلات الجبرية أو المعادلة الجبرية المطابقة للنظام الآلي أو الجملة الآلية المدروسة نعود باستخدام تحويل لابلاس المعاكس لنحصل على النتائج المطلوبة بالدقة اللازمة. في الكثير من المسائل المعقدة تتدخل هذه الطريقة (طريقة تحويل لابلاس وعكسه) بوصفها تقانة تدعى تقانة التحويل لتذليل الصعوبات الشائكة، ومن ثم الوصول إلى الهدف المنشود والنتيجة المرتقبة من المسألة المطروحة ولاسيما في التكنولوجيا المتطورة في مجالات الميكانيك والكهرباء وغيرها كما هو الحال في الميكانيك التطبيقي وميكانيك المواد التركيبية وتطبيقاته.

1-7-2 حساب بعض التكاملات المعتلة

يمكن استخدام تحويل لابلاس في حساب بعض التكاملات المعتلة، فإذا أردنا حساب تكامل من الشكل $\int_0^\infty e^{at}f(t)dt$ عندها نحسب تحويل لابلاس باعتبار $s=-a$. ونوضح ذلك من خلال بعض الأمثلة.

مثال (2-56): احسب قيمة التكامل الآتي:

$$(i)\ \int_0^\infty e^{3t}\sin 2t\,dt\ ,\qquad (ii)\ \int_0^\infty t\cdot e^{-5t}\cos t\,dt$$

الحل:

$$(i)\ \int_0^\infty e^{3t}\sin 2t\,dt = \mathcal{L}\{\sin 2t\}_{s=-3} = \left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=-3} = \frac{2}{9+4} = \frac{2}{13}$$

$$(ii)\ \int_0^\infty t\cdot e^{-5t}\cos t\,dt = \mathcal{L}\{t\cos t\}_{s=5} = \left|-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right|_{s=5} = -\left.\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right|_{s=5}$$

$$= -\frac{1-25}{676} = \frac{24}{676} = \frac{6}{169}$$

مثال (2-57): باستخدام تحويلات لابلاس أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty e^{-t}(1+2t-t^2+t^3)H(t-1)dt$$

الحل: لدينا:

$$\mathcal{L}\{(1+2t-t^2+t^3)H(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}[1+2(t+1)-(t+1)^2+(t+1)^3] =$$

$$= e^{-s}\mathcal{L}\{3+3t+2t^2+t^3\} = e^{-s}\left(\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}+2\cdot\frac{2!}{s^3}+\frac{3!}{s^4}\right) =$$

$$= e^{-s}\left(\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^4}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-st}(1+2t-t^2+t^3)H(t-1)dt = e^{-s}\left(\frac{3}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^4}\right)$$

بتعويض $s=1$ نجد:

$$\int_0^\infty e^{-t}(1+2t-t^2+t^3)H(t-1)dt = e^{-1}(3+3+4+6) = \frac{16}{e}$$

2-7-2 حل بعض المعادلات التفاضلية الخطية

من أهم التطبيقات لتحويلات لابلاس هي حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة مع الشروط الابتدائية المرافقة وذلك كما يلي:

1- نأخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية فتتحول إلى معادلة جبرية (للتابع Y).

2- نأخذ تحويل لابلاس المعاكس لإيجاد التابع $y(t)$ الذي هو حل المعادلة التفاضلية.

مثال (2-58): باستخدام تحويل لابلاس ولابلاس المعاكس حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y''(t)-3y'(t)+2y(t) = -4\ ;\qquad y'(0)=0,\qquad y(0)=1$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية:

$$\mathcal{L}\{y''(t)-3y'(t)+2y(t)\} = \mathcal{L}\{-4\} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)=-\frac{4}{s}\Longrightarrow$$

$$s^2Y(s)-s-3sY(s)+3+2Y(s)=-\frac{4}{s}\Longrightarrow$$

$$Y(s)[s^2-3s+2]=-\frac{4}{s}+\frac{s^2}{s}-\frac{3s}{s}=\frac{s^2-3s-4}{s}\Longrightarrow$$

$$Y(s)=\frac{s^2-3s-4}{s(s^2-3s+2)}=\frac{s^2-3s-4}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

$$(s=0)\Longrightarrow A=\left.\frac{s^2-3s-4}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=0}=-\frac{4}{2}=-2$$

$$(s=1)\Longrightarrow B=\left.\frac{s^2-3s-4}{s(s-2)}\right|_{s=1}=\frac{-6}{-1}=6$$

$$(s=2)\Longrightarrow A=\left.\frac{s^2-3s-4}{s(s-1)}\right|_{s=2}=-\frac{6}{2}=-3$$

$$\Longrightarrow Y(s)=-\frac{2}{s}+\frac{6}{s-1}-\frac{3}{s-2}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد أن حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s}+\frac{6}{s-1}-\frac{3}{s-2}\right\}=-2+6e^{t}-3e^{2t}$$

مثال (2-59): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$y'''-3y''+3y'-y=t^2e^t;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-2$$

الحل: نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة فنجد:

$$\mathcal{L}\{y'''-3y''+3y'-y\}=\mathcal{L}\{t^2e^t\}\Longrightarrow$$

وبأخذ تحويل لابلاس على المشتق نجد:

$$s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)-3[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+3[sY(s)-y(0)]-Y(s)=\frac{2}{(s-1)^3}$$

وبإصلاح هذه المعادلة وإدخال شروط البدء نجد:

$$Y(s)=\frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6}$$

فإذا فرقنا الكسر نحصل على:

$$Y(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s-1)^3}+\frac{D}{(s-1)^4}+\frac{E}{(s-1)^5}+\frac{F}{(s-1)^6}$$

$$\Longrightarrow A=1,\quad B=C=-1,\quad D=E=0,\quad F=2\Longrightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6}$$

وبأخذ لابلاس المعاكس نجد:

$$y(t) = e^t - t\,e^t - \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{60}t^5e^t$$

مثال (2-60): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0\,; \quad y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 6$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد:

$$[s^3\bar{y} - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)] + 2[s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0)] - [s\bar{y} - y(0)] - 2\bar{y} = 0$$

بأخذ الشروط الابتدائية بعين الاعتبار والإصلاح نجد:

$$(s^3 + 2s^2 - s - 2)\bar{y} = 6 \Rightarrow \bar{y} = \frac{6}{(s-1)(s+1)(s+2)} \Rightarrow$$

$$\bar{y} = \frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+2} \Rightarrow$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \Rightarrow y = e^t - 3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

مثال (2-61): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$x'' - 2x' + x = e^t\,; \quad x(0) = 2, \qquad x'(0) = -1,$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد:

$$[s^2\bar{x} - sx(0) - x'(0)] - 2[s\bar{x} - x(0)] + \bar{x} = \frac{1}{s-1}$$

بأخذ الشروط الابتدائية بعين الاعتبار والإصلاح نجد:

$$(s^2 - 2s + 1)\bar{x} = \frac{1}{s-1} + 2s - 5 = \frac{2s^2 - 7s + 6}{s-1} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{2s^2 - 7s + 6}{(s-1)^3} = \frac{2}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نجد:

$$x = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 2e^t - 3e^t \cdot \frac{t}{1!} + e^t \cdot \frac{t^2}{2!} = 2e^t - 3te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

مثال (2-62): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$(D^2 + n^2)x = a\sin(nt + \alpha)\ ; \quad x = Dx = 0, \qquad (t = 0)$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد:

$$[s^2\bar{x} - sx(0) - x'(0)] + n^2\bar{x} = a\mathcal{L}\{\sin nt \cdot \cos\alpha + \cos nt \cdot \sin\alpha\}$$

بأخذ الشروط الابتدائية بعين الاعتبار والإصلاح نجد:

$$(s^2+n^2)\bar{x} = a\cos\alpha\cdot\frac{n}{s^2+n^2} + a\sin\alpha\cdot\frac{s}{s^2+n^2} \Rightarrow$$
$$\bar{x} = an\cos\alpha\cdot\frac{1}{(s^2+n^2)^2} + a\sin\alpha\cdot\frac{s}{(s^2+n^2)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس للطرفين نجد:

$$x = an\cos\alpha\cdot\frac{1}{2n^3}(\sin nt - nt\cos nt) + a\sin\alpha\cdot\frac{t}{2n}\sin nt =$$
$$= \frac{a}{2n^2}[\sin nt\cos\alpha - nt\cos(nt+\alpha)]$$

مثال (2-63): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$(D^3-3D^2+3D-1)y = t^2e^t; \quad y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-2$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد:

$$[s^3\bar{y} - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)] - 3[s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0)] + 3[s\bar{y} - y(0)] - \bar{y} =$$
$$= \frac{2}{(s-1)^3}$$

بأخذ الشروط الابتدائية بعين الاعتبار والإصلاح نجد:

$$\bar{y} = \frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} = \frac{(s-1)^2-(s-1)-1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$
$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس للطرفين نجد:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^6}\right\} =$$
$$= e^t\left(1 - t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{60}t^5\right)$$

مثال (2-64): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \cos 2t; \quad x(0)=1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

الحل: بما أنّ الشرط الابتدائي للمشتق غير معطى لذلك نفرض أنّ: $x'(0)=a$. بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد:

$$\mathcal{L}\{x''\} + 9\mathcal{L}\{x\} - \mathcal{L}\{\cos 2t\} \Rightarrow [s^2\bar{x} - s\,x(0) - x'(0)] + 9\bar{x} = \frac{s}{s^2+4}$$
$$\Rightarrow (s^2+9)\bar{x} = s + a + \frac{s}{s^2+4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{s+a}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$$
$$\rightarrow \bar{x} = \frac{a}{s^2+9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+9}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس للطرفين نجد:

$$x = \frac{a}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{4}{5}\cos 3t$$

عندما $t = \pi/2$ فإنّ $x = -1$ وبالتالي فإنّ:

$$-1 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}(\cos 2t + 4\sin 3t + 4\cos 3t)$$

مثال (2-65): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$ty'' + 2y' + ty = \cos t\ ; \quad y(0) = 1$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين مع ملاحظة أنّ: $\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -\frac{d}{ds}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\}$ نجد:

$$-\frac{d}{ds}[s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0)] + 2[s\bar{y} - y(0)] - \frac{d}{ds}(\bar{y}) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$-\left(s^2\frac{d\bar{y}}{ds} + 2s\bar{y}\right) + y(0) + 0 + 2s\bar{y} - 2y(0) - \frac{d}{ds}(\bar{y}) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$(s^2+1)\frac{d\bar{y}}{ds} + 1 = -\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{ds} = -\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس للطرفين مع مراعاة أنّ $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}'(s)\} = -t\,f(t)$ نجد:

$$-ty = -\sin t - \frac{1}{2}t\sin t \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{t}\right)\sin t$$

مثال (2-66): حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0\ ; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{xy''\} + \mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{xy\} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0)] + [s\bar{y} - y(0)] - \frac{d}{ds}(\bar{y}) = 0 \Rightarrow$$

$$(s^2+1)\frac{d\bar{y}}{ds} + s\bar{y} = 0 \Rightarrow \text{بالفصل والمكاملة} \Rightarrow \int\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} + \int\frac{s\,ds}{s^2+1} = c$$

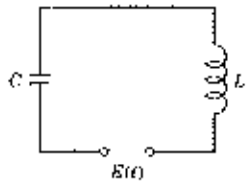
$$\Rightarrow \ln\bar{y} + \frac{1}{2}\ln(s^2+1) = \ln c' \Rightarrow \bar{y} = \frac{c'}{\sqrt{s^2+1}}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نجد: $y = c'J_0(x)$

لإيجاد الثابت c لدينا: $y(0) = c'J_0(0) \Rightarrow c' = 2 \Rightarrow y = 2J_0(x)$

مثال (2-67): تيار متناوب قوته الكهرحركية $E\sin\omega t$ يطبق على دارة حاوية على وشيعة L ومكثف C على التسلسل (كما في الشكل أدناه). أثبت باستخدام طريقة تحويلات لابلاس أن شدة التيار تعطى بالعلاقة:

$$i(t) = \frac{E\omega}{(p^2-\omega^2)L}(\cos\omega t - \cos pt) \quad ; \quad p^2 = \frac{1}{LC}$$



الشكل (2-11): دارة كهربائية بتيار متناوب.

الحل: لنفرض أنّ i شدة التيار و q مقدار الشحن خلال الزمن t، في الدارة، عندئذٍ:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=E\sin\omega t \qquad (R=0)\ \text{المقاومة معدومة}$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد أنّ:

$$L[s\,\bar{i}(s)-i(0)]+\frac{1}{C}\mathcal{L}\{q\}=E\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

وبما أنّ: $(t=0)$; $i=0,\ q=0$ يكون:

$$L\,s\,\bar{i}(s)+\frac{1}{C}\mathcal{L}\{q\}=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}$$

ولنأخذ تحويل لابلاس لشدة التيار $i=dq/dt$ نجد:

$$\bar{i}(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{dq}{dt}\right\}=s\mathcal{L}\{q\}-q(0)\Rightarrow\mathcal{L}\{q\}=\frac{\bar{i}(s)}{s}\Rightarrow$$

$$L\,s\,\bar{i}(s)+\frac{1}{C}\left[\frac{\bar{i}(s)}{s}\right]=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}\Rightarrow\left(L\,s+\frac{1}{Cs}\right)\bar{i}(s)=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}\Rightarrow$$

$$\bar{i}(s)=\frac{E\omega s}{L\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)(s^2+\omega^2)}=\frac{E\omega}{L}\cdot\frac{s}{(s^2+p^2)(s^2+\omega^2)}\Rightarrow$$

$$\bar{i}(s)=\frac{E\omega}{L(p^2-\omega^2)}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}-\frac{s}{s^2+p^2}\right\}\quad ;\quad p^2=\frac{1}{LC}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس للطرفين نجد:

$$i(t)=\frac{E\omega}{L(p^2-\omega^2)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}-\frac{s}{s^2+p^2}\right\}\Rightarrow i(t)=\frac{E\omega}{L(p^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos pt)$$

3-7-2 حل جملة معادلات تفاضلية خطية

حل مثل هذه الجمل يعتمد على الحالة السابقة وذلك باتباع الخوارزمية الآتية:

1- نطبق تحويل لابلاس على كل معادلة تفاضلية فنحصل على جملة معادلات جبرية بعدة مجاهيل.

2- نحل الجملة ثم نطبق تحويل لابلاس المعاكس على الحلول.

مثال (2-68): أوجد الحل الخاص لجملة المعادلات التفاضلية:

$$\begin{cases} y'-2y-4z=\cos t & (1)\\ z'+y+2z=\sin t & (2)\end{cases}$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية: $y(0) = z(0) = 0$.

الحل: بفرض أن $y(t), z(t)$ الحل الخاص المطلوب لجملة المعادلات.

لنأخذ تحويل لابلاس لجملة المعادلتين السابقتين فنجد أنّ:

$$\begin{cases} s\mathcal{L}\{y\} - y(0) - 2\mathcal{L}\{y\} - 4\mathcal{L}\{z\} = \mathcal{L}\{\cos t\} & (1) \\ s\mathcal{L}\{z\} - z(0) + \mathcal{L}\{y\} + 2\mathcal{L}\{z\} = \mathcal{L}\{\sin t\} & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (s-2)Y(s) - 4Z(s) = s/(s^2+1) & (1) \\ (s+2)Z(s) + Y(s) = 1/(s^2+1) & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

نحل جملة المعادلات حسب قاعدة كرامر فنحسب أولاً محدد الأمثال:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s-2 & -4 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 - 4 + 4 = s^2 \neq 0$$

ولنحسب المحددات $\Delta_1(s),\ \Delta_2(s)$ بالشكل:

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} \frac{s}{s^2+1} & -4 \\ \frac{1}{s^2+1} & s+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{s^2+1}(s^2+2s+4) = \frac{s^2+2s+4}{s^2+1}$$

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} s-2 & \frac{s}{s^2+1} \\ 1 & \frac{1}{s^2+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{s^2+1}(s-2-s) = -\frac{2}{s^2+1}$$

وحسب قاعدة كرامر ينتج أنّ:

$$Y(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}, \qquad Z(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{s^2(s^2+1)}$$

وبالتالي نأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد أنّ:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}\right\} \underbrace{=}_{\text{بتفريق الكسور}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2s+3}{s^2+1}\right\} =$$

$$= 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t$$

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2(s^2+1)}\right\} \underbrace{=}_{\text{بتفريق الكسور}} \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^2+1}\right\} = -2t + 2\sin t$$

وبالتالي يكون الحل الخاص المطلوب هو: $\begin{cases} y(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t \\ z(t) = -2t + 2\sin t \end{cases}$

مثال (2-69): باستخدام تحويل لابلاس ولابلاس المعاكس حل جملة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = t, \qquad \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0; \quad x(0) = y(0) = 0$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلتين نجد:

$$[s\,\bar{x} - x(0)] + 5\bar{x} - 2\bar{y} = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad (s+5)\bar{x} - 2\bar{y} = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow$$
$$[s\,\bar{y} - y(0)] + 2\bar{x} + \bar{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\bar{x} + (s+1)\bar{y} = 0$$
$$\bar{x} = \begin{vmatrix} 1/s^2 & -2 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} s+5 & -2 \\ 2 & s+1 \end{vmatrix} = \frac{s+1}{s^2(s+3)^2} =$$
$$= \frac{1}{27s} + \frac{1}{9s^2} - \frac{1}{27(s+3)} - \frac{2}{9(s+3)^2}$$

بطرح قيمة $\bar{x}$ من المعادلة الثانية نجد:

$$\bar{y} = -\frac{2}{s^2(s+3)^2} = \frac{4}{27s} - \frac{2}{9s^2} - \frac{4}{27(s+3)} - \frac{2}{9(s+3)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$x = \frac{1}{27} + \frac{t}{9} - \frac{1}{27}e^{-3t} - \frac{2}{9}te^{-3t}, \qquad y = \frac{4}{27} - \frac{2}{9}t - \frac{4}{27}e^{-3t} - \frac{2}{9}te^{-3t}.$$

مثال (2-70): باستخدام تحويل لابلاس ولابلاس المعاكس حل جملة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\frac{dx}{dt} - 2y = \cos 2t, \qquad \frac{dy}{dt} + 2x = \sin 2t\ ; \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

ثمّ أثبت أنّ الحلول الخاصة لجملة المعادلتين تقع على المنحني الفضائي: $4x^2 + 4xy + 5y^2 = 4$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلتين نجد:

$$[s\,\bar{y} - y(0)] + 2\,\bar{x} = \frac{2}{s^2+2^2} \Rightarrow 2\,\bar{x} + s\,\bar{y} = \frac{2}{s^2+4}$$
$$[s\,\bar{x} - x(0)] - 2\,y = \frac{s}{s^2+2^2} \rightarrow s\,\bar{x} - 2\,\bar{y} = \frac{s}{s^2+4} + 1$$

بضرب المعادلة الأولى بـ s والثانية بـ 2 والطرح نجد:

$$(s^2+4)\bar{y} = -2 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{2}{s^2+4}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نجد:

$$y = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = -\sin 2t$$

نعوض في المعادلة الأولى المعطاة:

$$2x = \sin 2t - \frac{dy}{dt} = \sin 2t - \frac{d}{dt}(-\sin 2t) \Rightarrow 2x = \sin 2t + 2\cos 2t \Rightarrow$$
$$4x^2 = (\sin 2t + 2\cos 2t)^2$$
$$4xy = (\sin 2t + 2\cos 2t)(-2\sin 2t) = -2(\sin^2 2t + 2\sin 2t\cos 2t)$$
$$5y^2 = 5\sin^2 2t \Rightarrow$$
$$4x^2 + 4xy + 5y^2 = \sin^2 2t + 4\sin 2t\cos 2t + 4\cos^2 2t - 2\sin^2 2t$$
$$-4\sin 2t\cos 2t + 5\sin^2 2t - 4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t = 4$$

مثال (2-71): باستخدام تحويل لابلاس ولابلاس المعاكس حل جملة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$D^2x + 3x - 2y = 0, \quad D^2x + D^2y - 3x + 5y = 0 \; ; \; D = \frac{d}{dt},$$
$$(t = 0), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = 3, \quad y' = 2$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلتين نجد:

$$[s^2\bar{x} - sx(0) - x'(0)] + 3\bar{x} - 2\bar{y} = 0 \Longrightarrow (s^2 + 3)\bar{x} - 2y = 3 \quad (i)$$
$$[s^2\bar{x} - sx(0) - x'(0)] + [s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0)] - 3\bar{x} + 5\bar{y} = 0 \Longrightarrow$$
$$(s^2 - 3)x + (s^2 + 5)\bar{y} - 5 \quad (ii) \Longrightarrow$$

بحل جملة المعادلتين (i) و(ii) من أجل $\bar{x}$ و$\bar{y}$ نجد:

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & s^2 + 5 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} s^2 + 3 & -2 \\ s^2 - 3 & s^2 + 5 \end{vmatrix} = \frac{3s^2 + 25}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2 + 9}$$
$$\bar{y} = \begin{vmatrix} s^2 + 3 & 3 \\ s^2 - 3 & 5 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} s^2 + 3 & -2 \\ s^2 - 3 & s^2 + 5 \end{vmatrix} = \frac{2s^2 + 24}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$$
$$\Longrightarrow \bar{y} = \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s^2 + 9}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$x = \frac{11}{4}\sin t + \frac{1}{12}\sin 3t, \qquad y = \frac{11}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

مثال (2-72): باستخدام تحويل لابلاس ولابلاس المعاكس حل جملة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\begin{cases} y''(t) + 10y(t) - 4z(t) = 0 \; ; & y'(0) = 1, \quad y(0) = 0 \quad (1) \\ z''(t) - 4y(t) + 4z(t) = 0 \; ; & z'(0) = -1, \quad z(0) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للجملة نجد أنّ:

$$\begin{cases} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 10Y(s) - 4Z(s) = 0 & (1) \\ s^2Z(s) - s\,z(0) - z'(0) - 4Y(s) + 4Z(s) = 0 & (2) \end{cases}$$
$$(1) \Longrightarrow (s^2 + 10)Y(s) - 4Z(s) = 1 \Longrightarrow Z = \frac{(s^2 + 10)Y - 1}{4} \quad (3)$$
$$(2) \Longrightarrow -4Y(s) + (s^2 + 4)Z(s) = -1 \Longrightarrow Z = \frac{4Y - 1}{s^2 + 4} \quad (4) \Longrightarrow$$
$$\frac{(s^2 + 10)Y - 1}{4} = \frac{4Y - 1}{s^2 + 4} \Longrightarrow$$
$$16Y - 4 = Y(s^2 + 10)(s^2 + 4) - (s^2 + 4) \Longrightarrow$$
$$Y[(s^2 + 10)(s^2 + 4) - 16] = (s^2 + 4) - 4 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$$
$$Y = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{-1/5}{s^2 + 2} + \frac{6/5}{s^2 + 12} \quad (*) \Longrightarrow$$
$$Y = -\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} + \frac{6}{5\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12} \Longrightarrow$$
$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\}$$

وبالتالي يكون الحل الأول:

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\sin(\sqrt{2}\,t) + \frac{\sqrt{3}}{5}\sin(2\sqrt{3}\,t) \qquad (1^*)$$

نعوض (*) في (4) نجد أنّ:

$$Z(s) = -\frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{2/5}{s^2+2} - \frac{3/5}{s^2+12} \Rightarrow$$
$$Z(s) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}$$

نأخذ تحويل لابلاس المعاكس:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = z(t) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t) - \frac{3}{5\sqrt{12}}\sin(2\sqrt{3}\,t)$$

وبالتالي يكون الحل الثاني:

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5}\sin(\sqrt{2}\,t) - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin(2\sqrt{3}\,t)$$

4-7-2 حل بعض المعادلات التفاضلية التكاملية

المعادلات التكاملية هي معادلات تحتوي على التابع وتكامله مع تغيره من a إلى t.

يستخدم تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية التكاملية التي هي من الشكل:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) + \sum_{m=0}^{n}\int_0^t k_m(t-u)y^{(m)}(t)du =$$
$$= f(t) \qquad (57)$$

حيث $a_0, a_1, \cdots, a_n$ أعداد و $y(t)$ دالة مجهولة و $f(t), k_m(t-u)$ دوال معطاة. بالاعتماد على تحويل لابلاس وعلى العلاقة:

$$\int_0^t k_m(t-u)y^{(m)}(f)du = \mathcal{L}[k_m(f)]\cdot\mathcal{L}[y^m(t)] \qquad (58)$$

ينتج:

$$a_0\mathcal{L}[y^{(n)}] + a_1\mathcal{L}[y^{(n-1)}] + \cdots + a_n\mathcal{L}[y] + \sum_{m=0}^{n}\mathcal{L}[k_m(t)\cdot\mathcal{L}[y^{(m)}] = \mathcal{L}[f(t)] \qquad (59)$$

ومنه نحصل بعد الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية على معادلة من الشكل:

$$\mathcal{L}[y] = \psi(s) \qquad (60)$$

وبالاعتماد على تحويل لابلاس المعاكس نحصل على الحل المطلوب.

مثال (2-73): أوجد حل المعادلتين التكاملتين الآتيتين:

$$(i)\ \cosh t = \int_0^t e^{3(t-v)} z(v)dv\ , \qquad (ii)\ z(t) - \int_0^t \sin(t-v)\, z(v)dv = \sin t$$

الحل: (i) لحل المعادلة الأولى نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\mathcal{L}\{\cosh t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{3(t-v)} z(v)dv\right\} \Rightarrow \frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{s-3}Z(s) \Rightarrow$$

$$Z(s) = \frac{s(s-3)}{s^2-1} = \frac{s^2}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1} = 1 + \frac{1}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد أنّ:

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 + \frac{1}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}\right\} = \delta(t) + \sinh t - 3\cosh t$$

(ii) لحل المعادلة الثانية نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$Z(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(t-v)\, z(v)dv\right\} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}Z(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+1-1)Z(s) = 1 \Rightarrow Z(s) = \frac{1}{s^2} \xrightarrow[\text{بأخذ لابلاس المعكوس}]{\Rightarrow} z(t) = t.$$

مثال (2-74): أوجد حل المعادلتين التكامليتين الآتيتين:

$$(i)\quad y - \frac{1}{2}\int_0^t (t-u)^2 y\, du = \sin t, \quad (ii)\quad \int_0^t \sinh(t-v)\, y\, du = 1 - \cos t$$

الحل: (i) لحل المعادلة الأولى نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$Y(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t^2\}\cdot Y(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} \Rightarrow$$

$$Y(s) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^3}\cdot Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y\left(1 - \frac{1}{s^3}\right) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^3-1)} = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^2+s+1)(s-1)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2s+1}{s^2+s+1} \quad \text{بتفريق الكسور}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد أنّ:

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 3\cos t + 3\sin t - 4e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right); \quad (t>0)$$

(ii) لحل المعادلة الثانية نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sinh(t-u)\, y\, du\right\} = \mathcal{L}\{1-\cos t\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y\}\cdot\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)} \Rightarrow$$

$$Y(s)\cdot\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{s(s^2+1)}\Rightarrow Y(s)=\frac{s^2+1}{s(s^2+1)}=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نجد:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=2\cos t-1\;;\;\;(t>0)$$

مثال (2-75): أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التكاملية الآتية:

$$y''+\int_0^t\sin(t-u)\,y''du+\int_0^t\sin(t-u)\,y\,du=2\cos t$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية: $y'(0)=y(0)=0$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نجد أنّ:

$$\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{y\}=2\,\mathcal{L}\{\cos t\}\;\;\longrightarrow$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\}-s\,y(0)-y'(0)+\frac{1}{s^2+1}[s^2\mathcal{L}\{y\}-s\,y(0)-y'(0)]+\frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\{y\}$$

$$=\frac{2s}{s^2+1}\rightarrow(s^2+1)\mathcal{L}\{y\}=\frac{2s}{s^2+1}\Rightarrow Y(s)=\mathcal{L}\{y\}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}=t\sin t\;\;;\;\;(t>0)$$

2-7-5 حل بعض المسائل في الكهرباء والميكانيك والكترون

المسألة (1): نقطة مادية تتحرك على مسارها وفق المعادلة التالية: $x''+x=t$ مع الشروط الابتدائية: $x(0)=1,\;x'(0)=-2$ المطلوب: أوجد القانون الزمني لحركة النقطة المادية.

الحل: بتطبيق قانون تحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية لحركة النقطة نجد:

$$\mathcal{L}\{x''+x\}=\mathcal{L}\{t\}\Rightarrow\mathcal{L}\{x''\}+\mathcal{L}\{x\}=\mathcal{L}\{t\}$$

وحسب قاعدة الاشتقاق في تحويل لابلاس نجد:

$$s^2X(s)-s\,x(0)-x'(0)+X(s)=\frac{1}{s^2}$$

بأخذ شروط البدء بعين الاعتبار نجد:

$$s^2\,X(s)-s+2+X(s)=\frac{1}{s^2}$$

وهكذا نجد أنه بتطبيق تحويل لابلاس، تحولت المعادلة التفاضلية لحركة النقطة المادية إلى المعادلة الجبرية التالية:

$$(s^2+1)\,X(s)=\frac{1}{s^2}+s-2$$

من هذه المعادلة الجبرية نحسب $X(s)$ صورة المسافة وفق تحويل لابلاس فنجد:

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

والآن من أجل الحصول على القانون الزمني للحركة، أي الحصول على حل المعادلة التفاضلية للحركة، يكفي أن نأخذ تحويل لابلاس العكسي لـ $X(s)$ أي نوجد الدالة الأصلية لـ $x(t)$ وفق تحويل لابلاس المعاكس وذلك بالطريقة التي نريد إما بتفريق الكسر أو بأخذ قاعدة هيفيسايد أو بأخذ النهايات.

لو فرقنا الكسر في الطرف الثاني من المعادلة الجبرية السابقة نجد:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

أو بالشكل المختزل:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

بأخذ لابلاس المعاكس نجد:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}\right\} \Rightarrow$$
$$x(t) = t + \cos t - 3\sin t$$

وهو القانون الزمني لحركة النقطة المادية.

المسألة (2): إنّ المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = 4e^{2t}$$

تُعدّ معادلة تفاضلية لدارة كهربائية بدلالة الشحنة Q، والمطلوب عين الشحنة Q، ثم شدة التيار المار بالدارة، إذا علمت أن الشروط الابتدائية المرفقة مع الدارة هي أنّه في اللحظة $t = 0$ الشحنة $Q(0) = 5$ و $Q'(0) = -3$، حيث إنّ: شدة التيار $I = dQ/dt$.

الحل: نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة السابقة فنجد:

$$\mathcal{L}\{Q'' - 3Q' + 2Q\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

وباستخدام تحويل لابلاس على المشتق نجد:

$$s^2\mathcal{L}\{Q\} - sQ(0) - Q'(0) - 3[s\mathcal{L}\{Q\} - Q(0)] + 2\mathcal{L}\{Q\} = \frac{4}{s-2}$$

باستخدام شروط البدء نجد:

$$(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}\{Q\} - 5s + 18 = \frac{4}{s-2}$$

وبالتالي نجد مع تفريق الكسور:

$$\mathcal{L}\{Q\} = \frac{5s^2 - 28s + 40}{(s-1)(s-2)} = \frac{17}{s-1} - \frac{12}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس المعاكس نحصل على $Q(t)$ فنجد:

$$Q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{17}{s-1} - \frac{12}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\}$$

وباستخدام الخاصة الخطية نجد:

$$Q(t) = 17e^{t} - 12e^{2t} + 4t\,e^{2t}$$

وهي شحنة التيار الكهربائي المار بالدارة.

لحساب شدة التيار I المار بالدارة نعلم أن:

$$I = \frac{dQ}{dt} = 17e^{t} - 24e^{2t} + 4e^{2t} + 4t\,e^{2t} = 17e^{t} - 20e^{2t} + 4t\,e^{2t}$$

وهي شدة التيار المار بالدارة المفروضة.

المسألة (3): نقطة مادية تتحرك وفق المعادلة التفاضلية للحركة التالية:

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = e^{-t}\sin t$$

حركة اهتزازية متخامدة حيث الشروط الابتدائية في اللحظة $t = 0$: $x(0) = 0,\ x'(0) = 1\ m/sec$

المطلوب عين القانون الزمني لحركة النقطة المادية.

الحل: نطبق تحويل لابلاس على المعادلة فنجد:

$$\mathcal{L}\{x''(t) + 2x'(t) + 5x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}$$

وبالتالي نجد المعادلة الجبرية التالية:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + sX(s) - x(0) + 5X(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

وبالتالي نجد:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 5} + \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + s + 5)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + s + 5)}$$

وباستخدام قانون تحويل لابلاس العكسي نحصل على:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + s + 5)}\right\} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{s^2 + 2s + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + s + 5}\right\}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد أنّ:

$$A = \frac{1}{17},\quad B = \frac{5}{17},\quad C = -\frac{1}{17},\quad D = \frac{13}{17} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{17}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^2 + 2s + 2} - \frac{s - 13}{s^2 + s + 5}\right\} \Rightarrow$$

إذاً القانون الزمني لحركة النقطة المادية:

$$x(t)=\frac{1}{17}\left[e^{-t}(\cos t+4\sin t)+\frac{1}{19}e^{-\frac{t}{2}}\left(27\sqrt{19}\sin\frac{\sqrt{19}\,t}{2}-19\cos\frac{\sqrt{19}\,t}{2}\right)\right]$$

ونلاحظ أن هذه الحركة قسرية تتخامد مع مرور الزمن، إذ أنّ $x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ وذلك بسبب المضروب e^{-t} في الطرف الثاني. هذه المسألة تؤدي دوراً مهماً في الصناعات الحربية.

المسألة (4): نقطة مادية تتحرك حركة اهتزازية وفق المعادلة: $x''(t)+9x(t)=\cos(2t)$ حيث في اللحظة $t=0$ يكون: $x(0)=1$.

الحل: بما أن سرعتها الابتدائية $x'(0)$ غير معروفة، لذلك نفرض أن $x'(0)=c$ نطبق قانون تحويل لابلاس فنجد:

$$\mathcal{L}\{x''(t)+9x(t)\}=\mathcal{L}\{\cos(2t)\}\Rightarrow$$

أو:

$$s^2X(s)-s\,x(0)-x'(0)+9X(s)=\frac{s}{s^2+4}\Rightarrow$$

وبالتالي نجد:

$$X(s)=\frac{s+c}{s^2+9}+\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

وبتفريق الكسر وأخذ تحويل لابلاس المعاكس نحصل على القانون الزمني للحركة:

$$x(t)=\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{c}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t$$

المسألة (5): أوجد القانون الزمني لكل من الحركات المعينة بالمعادلات التفاضلية للحركة مع الشروط الابتدائية المرفقة:

$$\begin{cases}x''(t)+a^2x(t)=f(t) & ;\quad x(0)=1,\ x'(0)=-2\\ x''(t)-a^2x(t)=f(t) & ;\quad x(0)=c_1,\ x'(0)=c_2\end{cases}$$

الحل: نطبق تحويل لابلاس على أطراف المعادلتين فنجد:

$$\begin{cases}\mathcal{L}\{x''+a^2x\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\\ \mathcal{L}\{x''-a^2x\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\end{cases}$$

ومنه نجد: $\begin{cases}s^2\bar{x}(s)-s+2+a^2\bar{x}(s)=\bar{f}(s)\\ s^2\bar{x}(s)-sc_1-c_2-a^2\bar{x}(s)=\bar{f}(s)\end{cases}$ أو:

$$\begin{cases}\bar{x}(s)=\dfrac{s-2}{s^2+a^2}+\dfrac{\bar{f}(s)}{s^2+a^2}\\ \bar{x}(s)=\dfrac{sc_1+c_2}{s^2-a^2}+\dfrac{\bar{f}(s)}{s^2-a^2}\end{cases}$$

بأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$\begin{cases}x(t)=\cos at-\dfrac{2}{a}\sin at+\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^t\bar{f}(u)\sin a(t-u)\,du\\ x(t)=A\cosh at+B\sinh at+\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^t\bar{f}(u)\sinh a(t-u)\,du\end{cases}$$

وهي القوانين الزمنية للحركة.

المسألة (6): لدينا المعادلة التفاضلية العادية ذات الأمثال المتحولة والمتجانسة:

$$t\,y''(t) + y'(t) + 4t\,y(t); \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 0$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس للطرفين فنجد:

$$\mathcal{L}\{ty''\} + \mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{4t\,y\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2\,\bar{y} - sy(0) - y'(0)] + [s\,\bar{y}(s) - y(0)] - 4\frac{d}{ds}\bar{y}(s) = 0$$

ومنه نجد:

$$(s^2+4)\frac{d}{ds}\bar{y}(s) + s\bar{y}(s) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{y}(s)}\cdot\frac{d}{ds}[\bar{y}(s)] + \frac{s}{s^2+4} = 0$$

وبالمكاملة نجد:

$$\ln[\bar{y}(s)] + \frac{1}{2}\ln(s^2+4) = \ln c \Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+4}}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c}{\sqrt{s^2+4}}\right\} = c\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+2^2}}\right\} = cJ_0(2t)$$

حيث J_0 دالة بيسل من الدرجة صفر.

من أجل تعيين الثابت c لدينا: $y(0) = cJ_0(0) = 3 = c \Rightarrow y(t) = 3J_0(2t)$

المسألة (7): بالطريقة نفسها الواردة في المسألة رقم (6) حل المعادلة:

$$t\,y''(t) + 2y'(t) + t\,y(t); \qquad y(0) = 1, \qquad y(\pi) = 0$$

الحل: بما أن $y'(0)$ غير معين نفرض أن $y'(0) = c$ وبتطبيق تحويل لابلاس نجد:

$$-\frac{d}{ds}[s^2\,\bar{y} - sy(0) - y'(0)] + 2[s\,\bar{y}(s) - y(0)] - \frac{d}{ds}\bar{y}(s) = 0$$

أو:

$$-(s^2+1)\frac{d\bar{y}(s)}{ds} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{y}(s)}{ds} = -\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \bar{y}(s) = -\tan^{-1}s + A$$

لكن نلاحظ أنّه عندما $\bar{y}(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$، نجد $A = \pi/2$، وبالتالي نحصل على $y(t)$ بأخذ تحويل لابلاس المعاكس، إذ نجد أنّ:

$$\pi/2 - \tan^{-1}s = \cot^{-1}s = \tan^{-1}(1/s);$$

$$\cot^{-1}s = \varphi \Rightarrow s = \cot\varphi \Rightarrow 1/s = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(1/s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\cot^{-1}s\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\sin t}{t}; \qquad A = \frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب.

المسألة (8): جملة آلية معينة بالمعادلات: $\begin{cases} x'(t) = 2x - 3y \\ y'(t) = y - 2x \end{cases}$; $x(0) = 8,\ y(0) = 3$

المطلوب ادرس استقرارية هذه الجملة حسب ليابونوف.

الحل: باستخدام تحويل لابلاس نجد: $\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\} = \mathcal{L}\{2x - 3y\} \\ \mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{y - 2x\} \end{cases}$ أو باستخدام الشروط الابتدائية

نجد أن: $\begin{cases} s\,\bar{x}(s) - 8 = 2\,\bar{x}(s) - 3\,\bar{y}(s) \\ s\,y(s) - 3 = \bar{y}(s) - 2\,\bar{x}(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)\bar{x}(s) + 3\,\bar{y}(s) = 8 \\ 2\,\bar{x}(s) + (s-1)\bar{y}(s) = 3 \end{cases}$

إن حل الجملة السابقة يعطي:

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = \dfrac{8s - 17}{(s+1)(s-4)} = \dfrac{5}{s+1} + \dfrac{3}{s-4} \\ \bar{y}(s) = \dfrac{3s - 22}{(s+1)(s-4)} = \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{2}{s-4} \end{cases}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$\begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}(s)\} = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

ونلاحظ أن: $t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} x(t) \to \infty \\ y(t) \to \infty \end{cases}$ والجملة غير مستقرة حسب ليابونوف.

المسألة (9): جملة آلية غير خطية تقوم باهتزازات غير خطية حول وضع الاستقرار. معادلة الاهتزازات غير الخطية يعبر عنها بالمعادلات: $\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{t} \\ y'' - 4x' + 3y = 15\sin 2t \end{cases}$ وشروط البدء:

$$x(0) = 35, \quad y(0) = 27, \quad x'(0) = -48, \quad y'(0) = -55$$

المطلوب: ادرس استقرارية هذه الجملة.

الحل: باستخدام تحويل لابلاس على طرفي المعادلة وباستخدام الشروط الابتدائية نجد:

$$\begin{cases} (s^2 + 2)\bar{x}(s) + s\bar{y}(s) = 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} \\ -4s\bar{x}(s) + (s^2 + 3)\bar{y}(s) = 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} \end{cases}$$

ومنه نجد بحل الجملة الجبرية السابقة وتطبيق المحاسير النتيجة أن:

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = \dfrac{30s}{s^4+1} - \dfrac{45}{s^2+9} + \dfrac{3}{s+1} + \dfrac{2s}{s^2+4} \\ \bar{y}(s) = \dfrac{30s}{s^2+9} - \dfrac{60}{s^2+1} - \dfrac{3}{s+1} + \dfrac{2}{s^2+4} \end{cases}$$

وبأخذ لابلاس المعاكس والاستفادة من الجدول نجد:

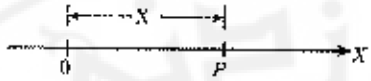
$$\begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}(s)\} = 30\cos 3t - 60\sin t - 3e^{-t} + \sin 2t \end{cases}$$

واضح أن الحل غير مستقر حسب لياپونوف، لأن:

$$t \to \infty \Rightarrow \text{لا يؤدي} \begin{cases} x(t) \xrightarrow{*} 0 \\ y(t) \xrightarrow{*} 0 \end{cases}$$

والحل غير مستقر حسب لیابونوف.

المسألة (10): نقطة مادية خاضعة لقوة مركزية جاذبة $F = -8x$ نعيد وضع النقطة إلى وضع التوازن، كلما حاولت النقطة الابتعاد عن مركز التوازن. كما في الشكل (12-2) الآتي:



الشكل: (12-2)

المطلوب: ادرس حركة هذه النقطة المادية وعين المسافة X على مسارها إذا علمت أن كتلة النقطة المادية $m = 2$ وأنه:

$$t = 0 \Rightarrow x(0) = 10,\ x'(0) = 0$$

أي إن النقطة في اللحظة $t = 0$ بدأت حركتها من الموضع $x(0) = 10$ ومن دون سرعة ابتدائية.

الحل: نطبق قانون التحريك الأساسي من أجل الحصول على معادلة الحركة فنجد: $m\vec{W} = \vec{F}$ حيث $\vec{F}$ قوة جذب و $\vec{W}$ تسارع أو شعاع التسارع وبما أن الحركة مستقيمة حيث نوجه المحور ox بالاتجاه الموجب وباسقاط العلاقة على محور الحركة نجد:

$$m\,x'' = -8x$$

عندما $m = 2$ عندئذ، نجد: $2x'' + 8x = 0 \Rightarrow x'' + 4x = 0$

والنقطة المادية من معادلتها يتضح أنها تقوم بحركة اهتزازية حرة أو اهتزازات حرة. حول وضع التوازن. حيث لا توجد قوى أخرى غير قوة الجذب تؤثر في حركتها.

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة فنجد:

$$\mathcal{L}\{x'' + 4x\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

وباستخدام شروط البدء بعد تطبيق لابلاس على المشتقة نجد:

$$s^2\bar{x}(s) - 10s + 4\bar{x}(s) = 0$$

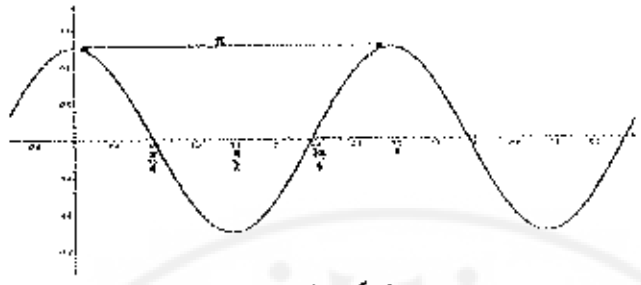
من هذه المعادلة الجبرية نجد:

$$\bar{x}(s) = \frac{10s}{s^2 + 4} = \frac{10s}{s^2 + 2^2}$$

بتطبيق تحويل لابلاس المعاكس نحصل على $x(t)$ فنجد:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = 10\cos 2t$$

وهو القانون الزمني لحركة النقطة المادية، أي إن النقطة المادية تقوم بحركة جيبية. ويكون مخططها البياني أثناء حركتها هو موضح على الشكل (13-2) الآتي:



الشكل: (13-2)

المسألة (11): لنفرض الآن النقطة المادية الواردة حركتها في المسألة **(10)**، تتعرض لمقاومة من الوسط الذي تتحرك فيه وأن هذه المقاومة تتناسب عكساً مع السرعة من الشكل $R = -yx'$ بالإضافة إلى قوة الجذب $F = -8x$ وأن كتلة النقطة $m = 2$.

المطلوب: ادرس حركة هذه النقطة إذا علمت أنه في اللحظة $t = 0$ تبدأ النقطة حركتها من الموضع $x(0) = 10$ ومن دون سرعة ابتدائية $x'(0) = 0$. ثم بين أن النقطة تستقر مع مرور الزمن، أي ادرس استقرارية الحل الناتج بجوار الصفر.

الحل: نشكل المعادلة التفاضلية لحركة النقطة المادية وذلك انطلاقاً من القانون الأساسي في التحريك:

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{R}$$

بما أن الحركة تتم على المحور $\overline{ox}$ لذلك باسقاط العلاقة الشعاعية السابقة على المحور الموجه $\overline{ox}$ نجد:

$$mx'' = -8x - yx' \quad ; \quad y = 8, \qquad m = 2$$

ومنه نجد: $$2x'' + 8x' + 8x = 0 \Rightarrow x'' + 4x' + 4x = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية لحركة النقطة بوجود مقاومة تتعلق بالوسط الذي تتحرك فيه النقطة المادية. وهذه المعادلة تعبر عن اهتزازات حرة لكن بوجود مقاومة.

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة ونستخدم الشروط الابتدائية نجد:

$$s^2\bar{x}(s) - 10s + 4[s\,\bar{x}(s) - 10] + 4\bar{x}(s) = 0$$

وحل المعادلة الجبرية هذه يعطي:

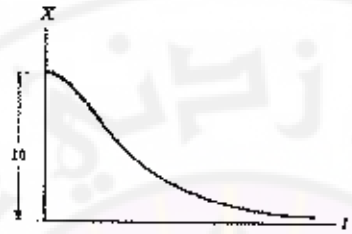
$$\bar{x}(s) = \frac{10s + 40}{s^2 + 4s + 4} = \frac{10s + 40}{(s+2)^2}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = 10e^{-2t} + 20t\,e^{-2t} = 10e^{-2t}(1 + 2t)$$

نلاحظ من قانون الحركة الناتج أنه عندما $t \to \infty$ فإنّ: $x(t) \to 0$ مع مرور الزمن أي أنّ الحركة مستقرة مع مرور الزمن، أي الحل مستقر حسب لياپونوف. ومثل هذه الحركة تدعى بالحركة التخامدية إذ أنها تتخامد وتنتهي إلى الصفر أي إلى الاستقرار مع مرور الزمن.

وشكل الحركة كما هو موضح على الشكل (2-14).



الشكل: (2-14)

المسألة (12): نقطة مادية خاضعة بالإضافة إلى قوة الجذب من مركز الجذب $F = -kx$ إلى قوة مقاومة الوسط الذي تتحرك فيه $R = -\beta x'$ المتناسبة عكساً مع السرعة من الدرجة الأولى. حيث $\beta > 0$ معامل يتعلق بطبيعة الوسط الذي تتحرك فيه النقطة المادية. فإذا علمت أن كتلة النقطة المادية m وأنه في اللحظة $t = 0$ كانت النقطة المادية على المسافة x_0 من مركز الجذب وبدأت حركتها بالسرعة الابتدائية $x'(0) = v_0$.

المطلوب: ناقش حركة النقطة المادية في أثناء حركتها، ثم بيّن فيما إذا كانت هذه الحركة مستقرة أم لا حسب لياپونوف.

الحل: الحركة مستقيمة لأنها تتم على المحور $\overrightarrow{ox}$ الموجه، لذلك نكتب القانون الأساسي في التحريك:

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{R}$$

بالإسقاط على المحور $\overrightarrow{ox}$، نجد:

$$mx'' = -kx - \beta x' \Rightarrow mx'' + kx + \beta x' = 0$$

نقسم على m، فنجد:

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

بفرض أن: $2\alpha = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$، فتصبح المعادلة بالشكل:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$$

حيث α, ω مقادير ذات مفهوم ميكانيكي.

فالمعادلة التفاضلية الأخيرة لحركة النقطة المادية تمثل حركة تخامدية كما شاهدنا سابقاً. بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي هذه المعادلة وأخذ الشروط الابتدائية بعين الاعتبار نحصل على المعادلة الجبرية التالية:

$$\mathcal{L}\{x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{0\}$$

ومنه المعادلة الجبرية بعد استخدام الشروط الابتدائية تكون:

$$s^2\bar{x}(s) - x_0 s - v_0 + 2\alpha[s\bar{x}(s) - x_0] + \omega^2\bar{x}(s) = 0$$

ومنه نحصل على:

$$\bar{x}(s) = \frac{s\,x_0 + (v_0 + 2\alpha x_0)}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2}$$

وباستخدام تفريق الكسور نحصل على:

$$\bar{x}(s) = \frac{(s+\alpha)x_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{v_0 + \alpha x_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$$

وطبيعة الحل تتعلق بمناقشة الحركة كما يلي:

مناقشة الحركة:

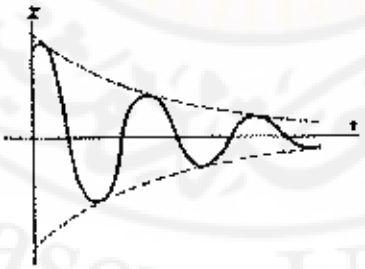
الحالة الأولى: $\omega^2 - \alpha^2 > 0$ (مقدار موجب) في هذه الحالة بأخذ لابلاس المعاكس نجد:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = x_0 e^{-\alpha t}\cos\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\,t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\,t$$

هذه الحركة هي حركة اهتزازية تخامدية وذلك بسبب وجود المضروب $e^{-\alpha t}$ الذي يسعى إلى الصفر مع مرور الزمن. ودور الحركة وتواترها في هذه الحالة هما:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}, \qquad V = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi}$$

عندما $\alpha = 0$ يكون $V = 1/T = \omega/2\pi$ (وهي حالة عدم وجود احتكاك أو مقاومة) تدعى بالتوتر أو التردد النظامي للحركة. وشكل الحركة موضح في الشكل (2-15).



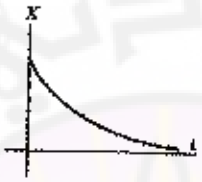
الشكل: (2-15)

الحالة الثانية: $\omega^2 - \alpha^2 = 0$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس لهذه الحالة، نجد:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x_0}{s+\alpha} + \frac{v_0 + \alpha x_0}{(s+\alpha)^2}\right\} = x_0 e^{-\alpha t} + (v_0 + \alpha x_0)\, t\, e^{-\alpha t}$$

نلاحظ في هذه الحالة أن النقطة المادية لا تهتز حول النقطة (0) ولكنها تقارب ومن دون أن تصل إليها مع مرور الزمن. وفي هذه الحالة نرى أن الحركة تكون حرجة جداً وتدعى بالحركة الاهتزازية الحرجة وشكل الحركة موضح في الشكل (2-16).



الشكل: (2-16).

الحالة الثالثة: $\omega^2 - \alpha^2 < 0$

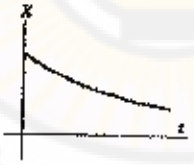
وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس لهذه الحالة، نجد:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)x_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)} + \frac{v_0 + \alpha x_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)}\right\} =$$

$$= x_0 \cosh\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \sinh\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t$$

والحركة في هذه الحالة غير دورية وغير اهتزازية وتتخامد بشكل بطيء مع مرور الزمن.

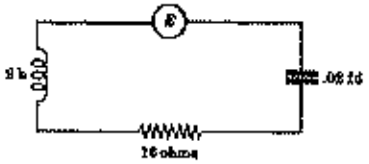
وشكل الحركة موضح في الشكل (2-17).



الشكل: (2-17).

إن لهذه المسألة دوراً كبيراً ومهماً في علم الراديو وأجهزة الاتصال والرادار وعلم السمعيات.

المسألة (13): دارة كهربائية كما في الشكل (2-18)، مؤلفة على التسلسل من مولد كهربائي E يغذي الدارة بتيار شدته I وكذلك من مكثف C سعته 0.02 فاراد، ومقاومته R 16 أوم، وشيعة عامل تحريضها الذاتي L يساوي 2 هنري.



الشكل: (2-18)

فإذا علمت أنه في اللحظة $t = 0$ الشحنة الناتجة عن التيار في الدارة $Q(0) = 0$ وأنّ التيار في هذه اللحظة لا يمر في الدارة (0) أي:

١- تعيين الشحنة $Q(t)$ وشدة التيار $I(t)$ في الزمن $t > 0$ إذا كانت القوة المحركة الكهربائية التي يغذي بها المولد الدارة هي $E(t) = 300$ volts (تيار مستمر).

٢- أعد السؤال نفسه عندما $E(t) = 100 \sin 3t$ volts أيضاً (تيار متناوب).

الحل: 1- بفرض أنّ $Q(t)$ و $I(t)$ هما الشحنة والتيار في الدّارة على الترتيب في الزمن t عندئذٍ من قانون كيرشوف في الكهرباء نستطيع أن نكتب معادلة الدارة الكهربائية بدلالة التيار بالشكل:

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0.02} = E\,; \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

وتكون هذه المعادلة بدلالة الشحنة من الشكل:

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E$$

باستخدام الشرط الأول $E(t) = 300$ volts نجد:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 150$$

وهي معادلة الدارة بدلالة الشحنة.

نطبق تحويل لابلاس على طرفي هذه المعادلة فنجد:

$$[s^2\bar{Q}(s) - sQ(0) - Q'(0)] + 8[s\bar{Q}(s) - Q(0)] + 25\bar{Q}(s) = \frac{150}{s}$$

وبأخذ شروط البدء السابقة بعين الاعتبار نجد:

$$\bar{Q}(s) = \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)} = \frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{s^2 + 8s + 25} =$$

$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4) + 24}{(s+4)^2 + 9} = \frac{6}{s} - 6\frac{s+4}{(s+4)^2 + 9} - 24\frac{1}{(s+4)^2 + 9}$$

نطبق تحويل لابلاس المعاكس وأخذ الجدول بعين الاعتبار نجد:

$$Q(t) = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t$$

وهي الشحنة في الدارة المفروضة. من أجل حساب شدة التيار المار في الدارة يكفي أن نستخدم العلاقة بين الشحنة Q والتيار I.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}[6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t] =$$
$$= 24e^{-4t}\cos 3t + 18e^{-4t}\sin 3t + 32e^{-4t}\sin 3t - 24e^{-4t}\cos 3t = 50e^{-4t}\sin 3t$$

2- إذا كان للمولد الكهربائي يغذي الدارة بقوة $E(t) = 100\sin 3t$ volts فالتيار متناوب وبالتالي نجد:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50\sin 3t$$

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة ونأخذ شروط البدء بعين الاعتبار نجد:

$$(s^2 + 8s + 25)\bar{Q}(s) = \frac{150}{s^2+9} \Rightarrow \bar{Q}(s) = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

وإذا فرقنا الكسر نحصل على أن $\bar{Q}(s)$ يأخذ الشكل الآتي:

$$Q(s) = \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

ونأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$Q(t) = \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\cos 3t - \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t$$

أو:

$$Q(t) = \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}(3\cos 3t - 2\sin 3t)e^{-4t}$$

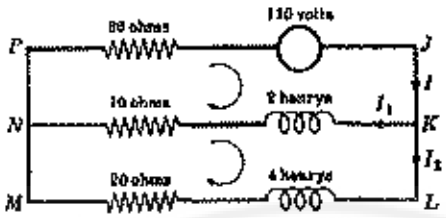
ولحصول على شدة التيار المتناوب في هذه الحالة نستخدم العلاقة: $I = dQ/dt$، فنجد بعد الإصلاح أنّ:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + \sin 3t) - \frac{75}{52}(17\sin 3t + 6\cos 3t)e^{-4t}$$

من أجل زمن كبير أي t كبيرة فإن الحدود في Q و I الموجود فيها e^{-4t} تكون مطابقة للحدود الخطية أو الآنية حيث إنّها تنعدم مع مرور الزمن بسبب المضروب e^{-4t} الذي يسعى إلى الصفر عندما $t \to \infty$ وتبقى الحدود الخالية من عنصر التخامد هي الحل الأكيد للدارة.

المسألة (14): شبكة كهربائية كما هو موضح بالشكل الآتي الوصل فيها على التسلسل والتفرع. المطلوب ضمن المعطيات المفروضة على الشكل **(19-2)** للشبكة عين شدة التيار I المار في الشبكة المفروضة إذا علمت أنه في اللحظة $t = 0$ كان فرعا التيار I_1 و I_2 في فرعي الشبكة معدومين أي إنّ:

$$I_1(0) = 0, \quad I_2(0) = 0 \quad ; \quad t = 0$$



الشكل: (19-2)

الحل: ليكن I التيار في الجزء $NPJK$ وبتطبيق القانون الأول في الكهرباء لكيرشوف في العقدة K التي تعطي: $I = I_1 + I_2$ وبتطبيق قانون كيرشوف على هذا الجزء من الشبكة نحصل على الترتيب:

$$\begin{cases} -10I_2 - 2\dfrac{dI_1}{dt} + 4\dfrac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0 \\ 20I - 110 + 2\dfrac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0 \end{cases}$$

وهي جملة المعادلات للتيارات الفرعية والتيار الكلي المارة بالشبكة وفرعيها، المختصرة على الشكل:

$$\begin{cases} -5I_1 - \dfrac{dI_1}{dt} + 2\dfrac{dI_2}{dt} + 10I_2 = 0 \\ \dfrac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55 \end{cases} ; \quad [I_1(0), \quad I_2(0)] = 0 \quad (*)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس على الجملة (*) وأخذ شروط البدء بعين الاعتبار نحصل على الجملة الجبرية:

$$\begin{cases} (s+5)\overline{I_1}(s) - (2s+10)\overline{I_2}(s) = 0 \\ (s+20)\overline{I_1}(s) + 15\overline{I_2}(s) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

المعادلة الأولى في (**) تعطي أن: $\overline{I_1} = 2\overline{I_2}$ فإذا عوضنا ذلك في المعادلة الثانية من الجملة نفسها نحصل على:

$$(2s+55)\overline{I_2} = \frac{55}{s} \Rightarrow \overline{I_2} = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

وبالتالي نجد بأخذ تحويل لابلاس المعاكس أنّ:

$$I_2(t) = 1 - e^{-\frac{55}{2}t}$$

لكن:

$$I_1(t) = 2I_2(t) \Rightarrow I_1(t) = 2 - 2e^{-\frac{55}{2}t}$$

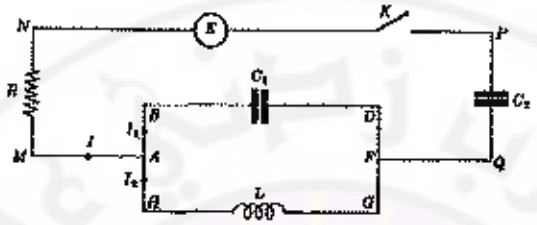
وهما التياران الفرعيان المارّان في فرعي الشبكة ويكون التيار الكلي أو شدة التيار الكلي هي:

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) \Rightarrow I(t) = 3 - 3e^{-\frac{55}{2}t}$$

وهو المطلوب.

المسألة (15): دارة كهربائية موضحة على الشكل (20-2) بمعطياتها الأساسية عند إغلاق الدارة بالمواصل K يمر التيار وتتولد هناك شحنة كهربائية Q. المطلوب عين الشحنة Q وشدة التيار المار بالدارة في الزمن t بعد إغلاق الفاصلة K. الشروط الابتدائية:

$$t = 0, \quad I(0) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 0$$



الشكل (20-2)

الحل: عند إغلاق الدارة في الفاصلة K يمر التيار وبالتالي تتولد الشحنة الكهربائية Q ونجد أنّه:

١- بالنسبة إلى المقاومة: $RI = R\frac{d}{dt}Q$

٢- بالنسبة إلى الوشيعة: $L\frac{d}{dt}I = L\frac{d^2}{dt^2}Q$

٣- بالنسبة إلى المكثف: Q/c

وبتطبيق قانون كيرشوف على الدارة نحصل على المعادلة التفاضلية التي تعين حركة مرور التيار بدلالة الشحنة:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = E$$

حيث E القوة المحركة الكهربائية التي تولد التيار في الدارة. (E) هو المولد الذي يغذي الدارة بالتيار.

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة فنجد:

$$L\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Q}{dt^2}\right\} + R\,\mathcal{L}\left\{\frac{dQ}{dt}\right\} + \frac{1}{c}\mathcal{L}\{Q\} = \mathcal{L}\{E\}$$

$$L[s^2\bar{Q}(s) - sQ(0) - Q'(0)] + R[s\bar{Q}(s) - Q(0)] + \frac{1}{c}\bar{Q}(s) = \frac{E}{s}$$

بفرض أنّ $E = 300$ volts نجد ضمن الشروط السابقة أنّ:

$$L[s^2\bar{Q}(s)] + R\,s\bar{Q}(s) + \frac{1}{c}\bar{Q}(s) = \frac{300}{s}$$

بفرض أنّ $c = 0.2$ فاراد و $L = 2$ هنري و $R = 16$ أوم نحصل على:

$$(2s^2 + 16s + 50)\bar{Q}(s) = \frac{300}{s}$$

ومنه نجد:

$$(s^2+8s+25)\bar{Q}(s)=\frac{150}{s}\Rightarrow \bar{Q}(s)=\frac{150}{s(s^2+8s+25)}=$$
$$=\frac{6}{s}-\frac{6s+48}{s^2+8s+25}=\frac{6s(s+4)}{(s+4)^2+9}-\frac{24}{(s+4)^2+9}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$Q(t)=6-6e^{-4t}\cos 3t-8e^{-4t}\sin 3t$$

وتكون شدة التيار المار بالدارة عند إغلاق الفاصلة K:

$$i(t)=\frac{dQ}{dt}=24e^{-4t}\cos 3t+18e^{-4t}\sin 3t+32e^{-4t}\sin 3t-24e^{-4t}\cos 3t$$

ومنه نجد:

$$i(t)=50e^{-4t}\sin 3t$$

بفرض أن: $E=100\sin 3t$ إن المعادلة تصبح:

$$(s^2+8s+25)\bar{Q}(s)=\frac{150}{s^2+9}\Rightarrow \bar{Q}(s)=\frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

وباستخدام تفريق الكسور نحصل على:

$$\bar{Q}(s)=\frac{75}{26}\cdot\frac{1}{s^2+9}-\frac{75}{52}\cdot\frac{s}{s^2+9}-\frac{75}{26}\cdot\frac{1}{(s+4)^2+9}+\frac{75}{52}\cdot\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

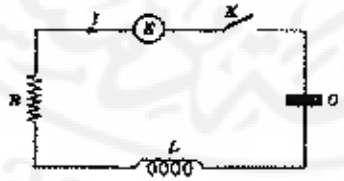
وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$Q(t)=\frac{25}{52}(2\sin 3t-3\cos 3t)+\frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t-2\sin 3t)$$

وتكون شدة التيار في هذه الحالة:

$$i(t)=\frac{dQ}{dt}=\frac{75}{52}(2\cos 3t-3\sin 3t)-\frac{25}{52}e^{-4t}(17\sin 3t+6\cos 3t)$$

المسألة (16): دارة كهربائية موضحة بمعطياتها على الشكل (21-2) التالي، وتتألف على التسلسل من مقاومة R، ومكثف سعته c ووشيعة عامل تحريضها L، ومولد كهربائي يغذي الدارة E بالفولت. عند إغلاق الدارة بالمفتاح K يمر التيار في الدارة تتولد شحنة كهربائية في الدارة مقدارها Q في الزمن $t>0$ فإذا علمت أنّ: $i=dQ/dt$. المطلوب: عين شدة التيار المار في الدارة في الزمن $t>0$ بعد إغلاق الدارة.



الشكل: (21-2)

الحل: بتطبيق قانون كيرشوف على الدارة بعد إغلاق الفاصل ومرور التيار نجد المعادلة التفاضلية:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{c}Q=E$$

بالتقسيم على L نجد:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{Lc}Q=\frac{E}{L}$$

بتطبيق تحويل لابلاس نجد:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2Q}{dt^2}\right\}+\left(\frac{R}{L}\right)\mathcal{L}\left\{\frac{dQ}{dt}\right\}+\left(\frac{1}{Lc}\right)\mathcal{L}\{Q\}=\mathcal{L}\left\{\frac{E}{L}\right\}$$

$$[s^2\bar{Q}(s)-sQ(0)-Q'(0)]-\frac{R}{L}[s\bar{Q}(s)-Q(0)]+\frac{1}{Lc}[\bar{Q}(s)]=\frac{E}{Ls}$$

بتطبيق الشروط الابتدائية، $t=0;[Q(0)=i(0)=1,Q'(0)=0]$ نجد:

$$s^2\bar{Q}(s)+\frac{R}{L}s\bar{Q}(s)+\frac{1}{Lc}\bar{Q}(s)=\frac{E}{sL}\Longrightarrow$$

$$\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{Lc}\right)\bar{Q}(s)=\frac{E}{sL}\Rightarrow\bar{Q}(s)=\frac{E}{sL\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{Lc}\right)}$$

بفرض أنّ: $E=100\ volts,\ R/L=4,\ 1/Lc=4$ نجد:

$$\bar{Q}(s)=\frac{100}{s(s^2+4s+4)}=\frac{100}{s(s+2)^2}=\frac{100}{s(s+2)(s+2)}$$

بتفريق الكسر وأخذ تحويل لابلاس المعاكس نحصل على:

$$Q(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\bar{Q}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s(s+2)(s+2)}\right\}$$

ولحساب شدة التيار المار بالدارة نأخذ العلاقة:

$$i(t)=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s(s+2)(s+2)}\right\}\right)$$

وهو المطلوب.

المسألة (17): جملة ميكانيكية تخضع فيها الكتلة m إلى قوة الجذب $F_1=-kx$ إضافة إلى قوة مقاومة الوسط الذي تتحرك فيه $R=-\beta x'$ المتناسبة عكساً مع السرعة، فإذا طبقنا عليها قوة خارجية $F(t)$. المطلوب أوجد القانون الزمني لحركة m حول وضع التوازن. والجملة موضحة بالشكل (2-22) الآتي:

الحل: بتطبيق قانون التحريك الأساسي نجد:

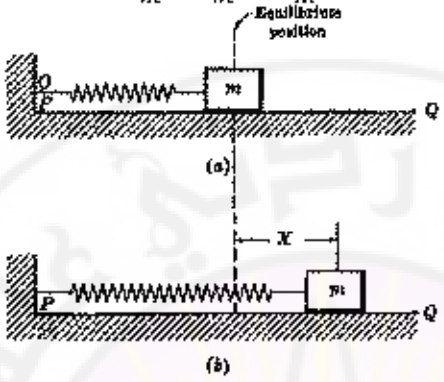
$$m\vec{W}=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i$$

حيث الطرف الثاني يشير إلى مجموعة القوى المؤثرة في الكتلة وشعاع تسارعها $\vec{W}$. الحركة كما هو موضح حركة مستقيمة لذلك نسقط العلاقة الشعاعية السابقة على المحور الموجه $\overrightarrow{ox}$ فنجد:

$$mx'' = -kx - \beta x' + F(t) \Rightarrow mx'' + kx + \beta x' = F(t)$$

وبالتقسيم على m نجد:

$$x'' + \frac{k}{m}x + \frac{\beta}{m}x' = \frac{1}{m}F(t)$$



الشكل: (22-2)

بفرض أنَ:

$$\frac{\beta}{m} = 2\alpha, \quad \frac{k}{m} = \omega^2, \quad \frac{f_0}{m} = \gamma$$

عندئذٍ: $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = \gamma\, G(t) \;\; ; \;\; F(t) = f_0 G(t)$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة نجد:

$$\mathcal{L}\{x''\} + 2\alpha\mathcal{L}\{x'\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \gamma\,\mathcal{L}\{G(t)\}$$

$$[s^2\bar{x}(s) - s\,x(0) - x'(0)] + 2\alpha[s\,\bar{x}(s) - x(0)] + \omega^2\bar{x}(s) = \gamma\frac{G}{s}$$

ضمن شروط ابتدائية معينة على سبيل المثال: $2\alpha = 4, \;\; \gamma = 1, \;\; x(0) = -2, \;\; x'(0) = 0$ نجد:

$$s^2\bar{x}(s) + 2s + 2\alpha[s\,\bar{x}(s) + 2] + \omega^2\bar{x}(s) = \gamma\frac{G}{s} \Rightarrow$$

$$(s^2 + 2\alpha s + \omega^2)\bar{x}(s) + (2s + 4\alpha) = \gamma\frac{G}{s} \Rightarrow$$

$$(s^2 + 2\alpha s + \omega^2)\bar{x}(s) = \gamma\frac{G}{s} - (2s + 4\alpha) \Rightarrow (s^2 + 4s + \omega^2)\bar{x}(s) = \frac{G - (2s^2 + 8s)}{s}$$

بفرض $G = 10\ tons$، نجد:

$$(s^2 + 4s + \omega^2)\bar{x}(s) = \frac{10 - 2s^2 - 8s}{s} \Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{10 - 2s^2 - 8s}{s(s^2 + 4s + \omega^2)}$$

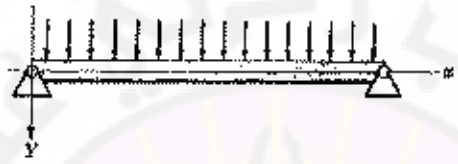
$$\Rightarrow \bar{x}(s) = \frac{10}{s(s^2 + 4s + \omega^2)} - \frac{2s}{(s^2 + 4s + \omega^2)} - \frac{8}{(s^2 + 4s + \omega^2)}$$

وبتفريق الكسر إلى كسور أبسط وأخذ لابلاس المعاكس نحصل على قانون حركة الكتلة m.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s(s^2+4s+\omega^2)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+4s+\omega^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+4s+\omega^2}\right\}$$

وهو المطلوب.

المسألة (18): جائز شبكي كما هو موضح في الشكل (23-2) مثبت في طرفيه A و B عند $x = 0$ و $x = \ell$ تطبق على الجائز قوة شاقولية w_0. أوجد الانتقالات الحاصلة في الجائز عند تطبيق القوة w_0 (انتقال ذرات الجائز).



الشكل: (23-2)

شروط البدء: $x = 0,\ y(0) = y''(0) = 0,\ y(\ell) = y''(\ell) = 0$

الحل: المعادلة التفاضلية لانتقال الجائز تحت تأثير القوة الشاقولية عليه هي:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w_0}{EI} \quad ; \quad 0 < x < \ell$$

بتطبيق تحويل لابلاس نجد:

$$s^4\bar{y}(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{1}{s}\frac{w_0}{EI}$$

الشرطان الحديان الأوليان والشرطان الإضافيان:

$$y'(0) = c_1, \quad y'''(0) = c_2 \implies \text{يعطيان } \bar{y}(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI\,s^5}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس نحصل على:

$$y(x) = c_1x + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{w_0}{24\,EI}x^4$$

وباستخدام الشرطين الآخرين من شروط البدء التي هي: $y(\ell) = y''(\ell) = 0$، نجد:

$$y = \frac{w_0\ell^3}{24EI}, \quad c_2 = -\frac{w_0\ell}{2EI}$$

وعليه نجد الانتقال:

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x(-x)(\ell^2) + I\,\ell\,x + x^2$$

وهو المطلوب.

تمارين غير محلولة

1- أوجد تحويل لابلاس لكل من التوابع الآتية:

(a) $2t-3$
(b) $6t^2+4t-3$
(c) $\frac{t^3}{24}-3t+2$
(d) $\frac{t^5}{15}-2t^4+\frac{t^2}{2}$
(e) $5e^{3t}$
(f) $2e^{-2t}$
(g) $4\sin 3t$
(h) $3\cos 2t$
(i) $7\cosh 2t$
(j) $\frac{1}{3}\sin 3t$
(k) $2\cos^2 t$
(l) $3\sin^2 2t$
(m) $\cosh^2 t$
(n) $2\sinh^2 2t$
(o) $4\sin(at+b)\ ;\ a,b\in\mathbb{R}$
(p) $3\cos(\omega t-\alpha)\ ;\ \alpha,\omega\in\mathbb{R}$
(q) $\cos^2 3t-\sin^2 3t$

الأجوبة:

(a) $\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$, (b) $\frac{12}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{3}{s}$, (c) $\frac{1}{4s^4}-\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$, (d) $\frac{8!}{s^9}-\frac{4!}{s^5}+\frac{1}{s^3}$,
(e) $\frac{5}{s-3}$, (f) $\frac{2}{s+2}$, (g) $\frac{12}{s^2+9}$, (h) $\frac{3s}{s^2+4}$, (i) $\frac{7s}{s^2-4}$, (j) $\frac{1}{s^2-9}$,
(k) $\frac{2(s^2+2)}{s(s^2+4)}$, (l) $\frac{24}{s(s^2+16)}$, (m) $\frac{s^2-2}{s(s^2-4)}$, (n) $\frac{16}{s(s^2-16)}$,
(o) $\frac{4}{s^2+a^2}(a\cos b+s\sin b)$, (p) $\frac{3}{s^2+\omega^2}(s\cos\alpha+\omega\sin\alpha)$, (q) $\frac{s}{s^2+36}$

2- أوجد تحويل لابلاس لكل من التوابع الآتية:

(a) $2te^{2t}$
(b) t^2e^t
(c) $4t^3e^{-2t}$
(d) $\frac{1}{2}t^4e^{-3t}$
(e) $e^t\cos t$
(f) $3e^{2t}\sin 2t$
(g) $5e^{-2t}\cos 3t$
(h) $4e^{-5t}\sin t$
(i) $2e^t\sin^2 t$
(j) $\frac{1}{2}e^{3t}\cos^2 t$
(k) $e^t\sinh t$
(l) $2e^{2t}\cosh 4t$
(m) $2e^{-t}\sinh 3t$
(n) $\frac{1}{4}e^{-8t}\cosh 2t$
(o) $2e^t(\cos 3t-3\sin 3t)$
(p) $3e^{-2t}(\sinh 2t-2\cosh 2t)$

الأجوبة:

(a) $\frac{2}{(s-2)^2}$, (b) $\frac{2}{(s-1)^3}$, (c) $\frac{24}{2(s+2)^4}$, (d) $\frac{12}{(s+3)^5}$, (e) $\frac{s-1}{s^2-2s+2}$,
(f) $\frac{6}{s^2-4s+8}$, (g) $\frac{5(s+2)}{s^2+4s+13}$, (h) $\frac{4}{s^2+10s+26}$, (i) $\frac{1}{s-1}-\frac{s-1}{s^2-2s+5}$,
(j) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-3}+\frac{s-3}{s^2-6s+13}\right)$, (k) $\frac{1}{s(s-2)}$, (l) $\frac{3(s-2)}{s^2-4s-12}$, (m) $\frac{6}{s^2+2s-8}$,
(n) $\frac{s+3}{4(s^2+6s+5)}$, (o) $\frac{2(s-10)}{s^2-2s+10}$, (p) $-\frac{6(s+1)}{s(s+4)}$.

3- أوجد تحويل لابلاس لكل من التوابع الآتية:

a) $e^{2t} + 4t^3 - 2\sin 3t + 3\cos 3t$
b) $1 + 2\sqrt{t} + 3\sqrt{t}$
c) $3\cosh 5t - 4\sinh 5t$
d) $\cos(at + b)$
e) $(\sin t - \cos t)^2$
f) $\sin 2t \cos 3t$
g) $\sin\sqrt{t}$
h) $\sin^5 t$
i) $\cos^3 2t$
j) $e^{-at}\sinh bt$
k) $e^{2t}(3t^5 - \cos 4t)$
l) $e^{-3t}\sin 5t \sin 3t$
m) $e^{-t}\sin^2 t$
n) $e^{2t}\sin^4 t$
o) $\cosh at \sin at$
p) $\sinh 3t \cos^2 t$
q) $t^2 e^{2t}$
r) $(1 + te^{-t})^3$
s) $t\sqrt{1 + \sin t}$
t) $f(t) = \begin{cases} 4 & ; \ 0 \le t \le 1 \\ 3 & ; \ t > 1 \end{cases}$
u) $f(t) = \begin{cases} \sin t & ; \ 0 < t < \pi \\ 0 & ; \ t > \pi \end{cases}$
v) $f(t) = \begin{cases} \sin(t - \pi/3) & ; \ t > \pi/3 \\ 0 & ; \ t < \pi/3 \end{cases}$
w) $f(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & ; \ t > 2\pi/3 \\ 0 & ; \ t < 2\pi/3 \end{cases}$
x) $f(t) = \begin{cases} t^2 & ; \ 0 < t < 2 \\ t - 1 & ; \ 2 < t < 3 \\ 7 & ; \ t > 3 \end{cases}$
y) إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)} \Rightarrow$ أوجد $\mathcal{L}\{e^{-t}f(2t)\}$

4- أوجد تحويل لابلاس لموجة أسنان المنشار ذات الدور T والمعطاة بالعلاقة:

$$f(t) = \frac{t}{T} \quad ; \quad 0 < t < T.$$

5- أوجد تحويل لابلاس لمعدل الموجة الكاملة ذات الدور π/ω والمعطاة بالعلاقة:

$$f(t) = E\sin\omega t \quad ; \quad 0 < t < \pi/\omega.$$

6- أوجد تحويل لابلاس للموجة المربعة (المتعرّجة) ذات الدور $2a$ والمعطاة بالعلاقة:

$$f(t) = \begin{cases} k & ; \ 0 < t < a \\ -k & ; \ a < t < 2a \end{cases}.$$

7- أوجد تحويل لابلاس للموجة المثلثية ذات الدور $2a$ والمعطاة بالعلاقة:

$$f(t) = \begin{cases} t & ; \ 0 < t < a \\ 2a - t & ; \ a < t < 2a \end{cases}.$$

8- أوجد تحويل لابلاس للتوابع الآتية:

$(i)\ J_0(ax)$, $\quad (ii)\ e^{-at}J_0(bt)$, $\quad (iii)\ a^{2t}\operatorname{erf}(\sqrt{t})$.

9- باستخدام خاصة تحويل لابلاس للمشتقات أثبت أنّ:

$$(i)\ \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (ii)\ \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad (iii)\ \mathcal{L}\{3t^2\} = \frac{6}{s^3}$$
$$(iv)\ \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad (v)\ \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

$$(vi)\ \mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

10- باستخدام خواص تحويلات لابلاس أوجد أنّ:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-t}\cos t\,dt\right\}$$

11- بفرض أنّ: $\mathcal{L}\{2\sqrt{t/\pi}\} = 1/s^{3/2}$ أثبت أنّ: $\mathcal{L}\{1/\sqrt{\pi t}\} = 1/\sqrt{s}$.

12- بفرض أنّ: $\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-1/4s}$ أثبت أنّ: $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}e^{-1/4s}$.

13- أوجد تحويل لابلاس للتوابع الآتية:

$a)\ t\sin^2 t$
$b)\ \sin 2t - 2t\cos 2t$
$c)\ t^2\cos at$
$d)\ t\sinh at$
$e)\ te^{2t}\sin 3t$
$f)\ te^{-2t}\sin 4t$
$g)\ t^2e^{-3t}\sin 2t$
$h)\ (e^{-at} - e^{-bt})/t$
$i)\ (\sin t)/t$
$j)\ (\sin t\sin 5t)/t$
$k)\ (e^{at} - \cos bt)/t$
$l)\ (e^{-t}\sin t)/t$
$m)\ (1 - \cos 3t)/t$
$n)\ (1 - \cos t)/t$
$o)\ 2t + (\cos 2t - \cos 3t)/t + t\sin t$

14- باستخدام خواص تحويلات لابلاس أوجد أنّ:

$$(i)\ \int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}dt \qquad (ii)\ \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{2}t}\sinh t\sin t}{t}dt$$

$$(iii)\ \int_0^\infty te^{-2t}\sin 3t\,dt \qquad (iv)\ \int_0^\infty te^{-t}\sin^4 t\,dt$$

15- باستخدام خواص تحويلات لابلاس أثبت أنّ:

$$(i)\ \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a} \qquad (ii)\ \int_0^\infty \frac{e^{-2t}\sinh t}{t}dt = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$(iii)\ \int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{4} \qquad (iv)\ \int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\ln 5$$

16- باستخدام خواص تحويلات لابلاس أوجد أنّ:

$$(i)\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt\right\}, \qquad (ii)\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-t}\cos t\,dt\right\}, \qquad (iii)\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^t\sin t}{t}dt\right\}$$

17- باستخدام خواص تحويلات لابلاس أثبت أنّ:

$$(i)\ \mathcal{L}\{tJ_0(at)\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}} \qquad (ii)\ \int_0^\infty te^{-3t}J_0(4t)dt = \frac{3}{125}$$

18- تحقق من مبرهنة القيمة الابتدائية من أجل التوابع:

$(i)\ 3-4\sin t\ ,\quad (ii)\ (t-4)^2\ ,\quad (iii)\ 4+2\cos t\ ,\quad (iv)\ t-\cos 3t$

19- تحقق من مبرهنة القيمة النهائية من أجل التابعين:

$(i)\ 4+e^{-2t}(\sin t+\cos t)\ ,\quad (ii)\ 3t^2e^{-4t}$

20- أوجد تحويلات لابلاس للتوابع الآتية:

$(i)\ 7H(t-5)$
$(ii)\ H(t-\pi/4)\cdot\cos t$
$(iii)\ 3H(t-\pi/2)\cdot\cos(t-\pi/6)$
$(iv)\ H(t-1)\cdot t^2$
$(v)\ H(t-2)\,e^{-t/2}$
$(vi)\ [H(t-2)-H(t-5)]e^{-t/4}$
$(vii)\ 5H(t-\pi/3)\cdot\sin(t+\pi/4)$
$(viii)\ H(t-2)\cdot(t-2)^2$
$(ix)\ H(t-3)\cdot\sin(t-3)$
$(x)\ H(t-5)\cdot\sin 3(t-5)$
$(xi)\ H(t-4)\cdot e^{t-4}$
$(xii)\ H(t-1)\cdot(t-1)^3$
$(xiii)\ H(t-6)\cdot\cos 3(t-6)$
$(xiv)\ 5H(t-5)\cdot\sinh 2(t-5)$
$(xv)\ H(t-\pi/3)\cdot\cos 2(t-\pi/3)$
$(xvi)\ 2H(t-3)\cdot e^{t-3}$
$(xvii)\ 3H(t-2)\cdot\cosh(t-2)$
$(xviii)\ 7H(t-5)\cdot\cos 3(t-2)$

21- أوجد تحويلات لابلاس العكسية للتوابع الآتية:

$(i)\ \dfrac{7}{s}$
$(ii)\ \dfrac{2}{s-5}$
$(iii)\ \dfrac{3}{2s+1}$
$(iv)\ \dfrac{2s}{s^2+4}$
$(v)\ \dfrac{1}{s^2+25}$
$(vi)\ \dfrac{4}{s^2+9}$
$(vii)\ \dfrac{5s}{2s^2+18}$
$(viii)\ \dfrac{6}{s^2}$
$(ix)\ \dfrac{5}{s^3}$
$(x)\ \dfrac{8}{s^8}$
$(xi)\ \dfrac{3s}{0.5\,s^2-8}$
$(xii)\ \dfrac{7}{s^2-16}$
$(xiii)\ \dfrac{15}{3s^2-27}$
$(xiv)\ \dfrac{4}{(s-1)^3}$
$(xv)\ \dfrac{1}{(s+2)^4}$
$(xvi)\ \dfrac{3}{(s-3)^5}$
$(xvii)\ \dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$
$(xviii)\ \dfrac{3}{s^2+6s+13}$
$(xix)\ \dfrac{2(s-3)}{s^2-6s+13}$
$(xx)\ \dfrac{7}{s^2-8s+12}$
$(xxi)\ \dfrac{2s+5}{s^2+4s-5}$
$(xxii)\ \dfrac{3s+2}{s^2-8s+25}$
$(xxiii)\ \dfrac{10}{s^2+4s+5}$
$(xxiv)\ \dfrac{17}{s^2-2s+10}$

22- أوجد تحويلات لابلاس العكسية بطريقة تفريق الكسور للتوابع الآتية:

$(i)\ \dfrac{11-3s}{s^2+2s-3}$
$(ii)\ \dfrac{2s^2-9s-35}{(s+1)(s-2)(s+3)}$
$(iii)\ \dfrac{5s^2-2s-19}{(s+3)(s-1)^2}$
$(iv)\ \dfrac{3s^2+16s+15}{(s+3)^3}$
$(v)\ \dfrac{7s^2+5s+13}{(s^2+2)(s+1)}$
$(vi)\ \dfrac{3+6s+4s^2-2s^3}{s^2(s^2+3)}$

(vii) $\frac{26-s^2}{s(s^2+4s+13)}$ (viii) $\frac{s+3}{(s+1)^2(2s+5)}$

23- أوجد تحويلات لابلاس العكسية بطريقة تفريق الكسور للتوابع الآتية:

(i) $\frac{2s-5}{4s^2+25}+\frac{4s-18}{9-s^2}$ (ii) $\frac{1}{s^2-5s+6}$

(iii) $\frac{s}{(2s-1)(3s-1)}$ (iv) $\frac{3s}{s^2+2s-8}$

(v) $\frac{3s+2}{s^2-s-2}$ (vi) $\frac{1}{s(s^2-1)}$

(vii) $\frac{1-7s}{(s-3)(s-1)(s+2)}$ (viii) $\frac{s^2-10s+13}{(s-7)(s^2-5s+6)}$

(ix) $\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}$ (x) $\frac{s}{(s^2-1)^2}$

(xi) $\frac{1+2s}{(s+2)^2(s-1)^2}$ (xii) $\frac{s}{(s-3)(s^2+4)}$

(xiii) $\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$ (xiv) $\frac{s^3}{s^4-a^4}$

(xv) $\frac{1}{s^3-a^3}$ (xvi) $\frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$

(xvii) $\frac{2s-3}{s^2+4s+13}$ (xviii) $\frac{s^2+s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$

(xix) $\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$

(xx) $\frac{s}{s^4+s^2+1}$ (xxi) $\frac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

24- أوجد تحويلات لابلاس العكسية بطريقة حساب الرواسب للتوابع الآتية:

(i) $\frac{50(s+4)}{s(s+2)(s^2-8s+25)}$ (ii) $\frac{(s+3)(s-2)}{(s+4)(s^2+2s+2)}$

(iii) $\frac{(s-1)(s+2)}{(s+3)(s^2-2s+5)}$ (iv) $\frac{s-1}{(s+2)(s^2+2s+5)}$

(v) $\frac{s^2-5s-6}{s(s^2+4)}$ (vi) $\frac{400(s+10)}{s(s+25)(s^2+10s+125)}$

25- أوجد تحويلات لابلاس العكسية للتوابع الآتية بالطريقة التي تراها مناسبة:

(i) $\frac{1}{s^2(s+5)}$ (ii) $\frac{1}{s(s+2)^3}$ (iii) $\frac{s}{a^2s^2+b^2}$

(iv) $\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$ (v) $\frac{1}{s^3(s^2+1)}$ (vi) $\frac{s+2}{(s^2+4s+8)^2}$

(vii) $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ (viii) $\frac{s^2}{(s+a)^3}$ (ix) $\ln\left(\frac{1+s}{s}\right)$

$(x)\ \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$ $(xi)\ \ln\left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right]$ $(xii)\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$

$(xiii)\ \ln\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)$ $(xiv)\ \ln\left[\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right]$ $(xv)\ \tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)$

26- أوجد تحويلات لابلاس العكسية للتوابع الآتية بطريقة مبرهنة الطي:

$(i)\ \frac{1}{(s+a)(s+b)}$ $(ii)\ \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$

$(iii)\ \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$ $(iv)\ \frac{1}{s^2(s+1)^2}$

$(v)\ \frac{1}{(s+2)^2(s-2)}$ $(vi)\ \frac{s}{(s^2+9)(s+2)}$

$(vii)\ \frac{1}{s^3(s^2+1)}$ $(viii)\ \frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$

27- أوجد ما يلي:

$(i)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$

$(ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)(s^2+2s-2)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$

$(iii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$

$(iv)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)(s^2+1)^2}\right\}$

$(v)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+1)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^3-47s^2+56s+41}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$

$(vi)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)(s^2+1)^3}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^4+5s^3+6s^2+8s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)^2}\right\}$

$(vii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3+16}{(s^2-s-6)^2}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$

$(viii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

$(ix)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$

$(x)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s-1)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-1)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

$(xi)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)^3}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+4}}\right\}$

$(xii)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s^2+a^2}}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\},\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$

(xiii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s^2+1}-s^n}{\sqrt{s^2+1}}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$

(xiv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{\sqrt{s^2+9}}\right\}$

(xv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s+1)}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{c\ln\left(\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right)\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\}$

(xvi) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s+1)}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$

(xvii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^5}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^{3/2}}\right\}$

(xviii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{s^2-4s+8}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-2}{3s^2+4s+8}\right\}$

(xix) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-14}{\sqrt{8s-27}}\right\}$

(xx) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{3s}}{s^2-2s+5}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+a}}\right\}$; $a>0$

(xxi) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s^2-1)^2}{2s^3}+\frac{4s-18}{9-s^2}+\frac{(s+1)(2-\sqrt{s})}{s^{3/2}}\right\}$,

(xxii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2+18}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^{3/2}}-\frac{7}{s^3+2}\right\}$

(xxiii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+4}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+16}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\}$

(xxiv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{4-3s}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-5}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4}\right\}$

28- أثبت أن:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}\right\}=t-\frac{t^3}{(3!)^2}+\frac{t^5}{(5!)^2}-\frac{t^7}{(7!)^2}+\cdots$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cos\frac{1}{s}\right\}=1-\frac{t^2}{(2!)^2}+\frac{t^4}{(4!)^2}-\frac{t^6}{(6!)^2}+\cdots$

29- أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية باستخدام طريقة تحويلات لابلاس:

(i) $y''+4y'+3y=e^{-t}$; $y(0)=y'(0)=1$

(ii) $(D^2-1)x=a\cosh t$; $x(0)=x'(0)=0$

(iii) $y''+y=t$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(iv) $y''-3y'+2y=e^{3t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(v) $(D^2-3D+2)y=4e^{2t}$; $y(0)=-3$, $y'(0)=5$

(vi) $y''+25y=10\cos 5t$; $y(0)=2$, $y'(0)=0$

(vii) $(D^2+\omega^2)y=\cos\omega t$; $y(0)=0, Dy(0)=0$

(viii) $y''+2y'-3y=\sin t$; $y(0)=y'(0)=0$

(ix) $\frac{d^4y}{dt^4} - k^4y = 0;\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(x) $y''''(t) + 2y''(t) + y(t) = \sin t;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(xi) $y'' + 5y' + 5y = e^{-t}\sin t\ ;\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(xii) $y'' + 2y' + 5y = 5(t-2)\ ;\ y(0) = y'(0) = 0$

(xiii) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^{2t}\ ;\ y(0) = 1, y'(0) = 0,\ y''(0) = -2$

(xiv) $(D^2 + 1)x = t\cos 2t\ ;\ x(0) = Dx(0) = 0$

(xv) $ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0\ ;\ y(0) = 1, y'(0) = 2$

(xvi) $ty'' + 2y' + ty = \sin t\ ;\ y(0) = 1$

(xvii) $y'' + 2ty' - y = t\ ;\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(xviii) $ty'' + y' + 4ty = 0\ ;\ y(0) = 3, y'(0) = 0$

30- أوجد حل جملة المعادلات التفاضلية الآتية باستخدام طريقة تحويلات لابلاس:

(i) $\frac{dx}{dt} - y = e^t, \quad \frac{dy}{dt} + x = \sin t,\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$

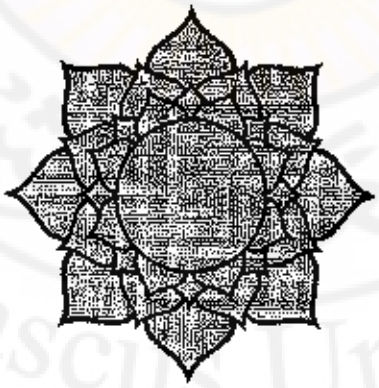
(ii) $\frac{dx}{dt} + y = \sin t, \quad \frac{dy}{dt} + x = \cos t,\ x(0) = 2,\ y(0) = 0$

(iii) $\frac{d^2x}{dt^2} - x = y,\ \frac{d^2y}{dt^2} + y = -x,\ x(0) = 2,\ y(0) = -1,\ x'(0) = 0,$
$y'(0) = 0$

(iv) $3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x = 1,\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0,\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$

(v) $(D-2)x - (D+1)y = 6e^{3t}, (2D-3)x + (D-3)y = 6e^{3t}\ ;$
$x(0) = 3,\ y(0) = 0$

(vi) $\frac{di_1}{dt} - \omega i_2 = a\cos pt,\ \frac{di_1}{dt} + \omega i_1 = a\sin pt,\ i_1(0) = i_2(0) = 0$





الفصل الثالث

3- سلاسل فوريه وتحويلات فوريه

Fourier Series and Fourier Transforms

3-1 مقدمة


Jean Baptiste Joseph Fourier
(21 March 1768-16 May 1830)

تتطلب كثير من المسائل الهندسية معرفة التوافقيات الممثلة لتابع ما، أي تمثيل التابع بدلالة مجموع توابع دورية. وقد استطاع فوريه في أبحاثه الخاصة بانتشار الحرارة تمثيل تابع دوري بدلالة مجموع توابع جيبية بسيطة، وسمّي هذا التمثيل بمتسلسلة فوريه.

ثم استخدمت هذه المتسلسلة لتمثيل التوابع الدورية وغير الدورية، وتتحول عندها المتسلسلة إلى تكامل فوريه. كما أمكن تمثيل أي تابع على شكل متسلسلة تتألف حدودها من توابع ليست جيبية لكن لها صفة محددة، سميت بالشكل العام لمتسلسلة فوريه.

إن تحويل فوريه عبارة عن عائلة من التقنيات الرياضية المبنية على تحليل الإشارات إلى مركبات جيبية. ويقسم تحويل فوريه إلى أربع فئات ناتجة عن الأنواع الأربعة للإشارات.

١- إشارات مستمرة دورية: مثل الإشارات الجيبية والإشارات المربعة وأية موجة تكرر نفسها بشكل منتظم. يسمى تحويل فوريه لمثل هذه الإشارات بمتسلسل فوريه.

٢- إشارات مستمرة غير دورية: تشمل المنحنيات الأسية المتناقصة ومنحنيات غاوص، يسمى تحويل فوريه لمثل هذه الإشارات بتحويل فوريه أو تكامل فوريه.

٣- إشارات متقطعة دورية: وهي الإشارات المتقطعة التي تكرر نفسها بشكل منتظم، يسمى تحويل فوريه لمثل هذه الإشارات بمتسلسلات فوريه المتقطعة.

٤- إشارات متقطعة غير دورية: وهذه الإشارات معرفة فقط عند نقاط منفصلة ولا تكرر نفسها بشكل دوري، يسمى تحويل فوريه لمثل هذه الإشارات بتحويل فوريه للإشارات المتقطعة.

إن هذه الفئات الأربع من الإشارات تمتد على كامل المحور الحقيقي. والسؤال المطروح: هل توجد نسخة من تحويل فوريه من أجل الإشارات المحدودة؟ الجواب: لا يوجد.

للتخلص من هذه الحالة سنجعل الإشارة المحدودة تبدو كأنها إشارة لانهائية الطول، بتخيل وجود عدد لانهائي من اليسار ومن اليمين لعينات صفرية، وهكذا تبدو الإشارة كأنها متقطعة وغير دورية. وسيكون بالإمكان استخدام تحويل فوريه للإشارات المتقطعة. وبطريقة أخرى يمكن تخيل العينات التخيلية المضافة هي نسخة أخرى من العينات الحقيقية، وستبدو الإشارة هنا إشارةً متقطعة دورية. وهذا يسمح باستخدام تحويل فوريه المتقطع (DFT). وهذا يعني أنه لتركيب إشارة غير دورية نحتاج لعدد لا نهائي من المركبات الجيبية، وبالتالي استخدام تحويل فوريه المتقطع. إن كل نوع من أنواع تحويل فوريه يمكن تقسيمه قسمين: حقيقي وعقدي.

- ما المقصود بمصطلح تحويل Transform؟

إن مصطلح تابع Function هو خوارزمية أو إجراء ما يقوم بتغيير قيمة إلى أخرى، فمثلاً التابع $y = x + 1$ يُقابل كل قيمة لـ x بقيمة وحيدة y. ويمكن أن يُغيّر التابع عدة قيم إلى قيمة وحيدة مثل: $f(x, y) = xy + \cos 2y$. إن التحويل هو امتداد لهذا المفهوم، فهو يسمح لكل من الدخل والخرج بأن يأخذ قيماً عديدة، أي هو إجراء ثابت يقوم بتغيير كتلة من المعلومات إلى كتلة معلومات أخرى.

2-3 متسلسلة فوريه (للإشارات الدورية المستمرة)

كثير من الظواهر الطبيعية حولنا دورية، كالضوء والصوت والموجات الراديوية وغيرها.

تعطي متسلسلات تايلور (أو متسلسلات القوى) تقريباً لتابع بجوار نقطة x_0 (تسمى مركز نشر تايلور)، وعندما تبتعد x قليلاً عن مركز نشر تايلور x_0 يكبر الفرق بين التابع ومتسلسلة تايلور له، لذلك يسمى نشر تايلور تقريباً محلياً للتابع في جوار x_0.

لذلك نبحث عن تقريب لتوابع دورية مهما تكن قيمة x، ويسمى هذا التقريب متسلسلة فوريه.

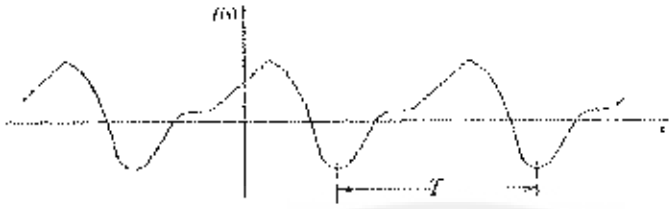
تمتاز متسلسلة فوريه بسهولة تطبيقاتها العملية على الرغم من صعوبة الدراسة النظرية لها، إذ يمكن نشر عدد من التوابع اللا مستمرة وفق متسلسلة فوريه، بينما لا يمكن النشر بالطرائق الأخرى كنشر تايلور مثلاً.

1-2-3 التابع الدوري

تعريف (3-1): نقول إن $f(x)$ تابع دوري دوره $T > 0$ إذا كان:

$$f(x + T) = f(x) \quad ; \quad \forall x, \quad x + T \in D(f) \qquad (1)$$

نسمي أصغر عدد T يحقق العلاقة السابقة الدور الأساسي لـ f.



الشكل (3-1): مثال لتابع دوري دوره T.

فمثلاً، التابعان المثلثيان $\cos$ و$\sin$ دوريان دورهما 2π:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

بينما $\tan$ و$\cot$ تابعان دوريان دورهما π.

3-2-2 خواص التوابع الدورية

١) إذا كان f دورياً دوره T، فإن: $f(x) = f(x + nT)\ ;\ n \in \mathbb{Z}$ (2)

البرهان: نبرهن بالتدريج:

$$f(x + 2T) = f\big((x + T) + T\big) = f(x + T) = f(x)$$
$$f(x + 3T) = f\big((x + 2T) + T\big) = f(x + 2T) = f(x)$$

وهكذا ...

٢) التابع الثابت $f(x) = c$ دوري دوره أي عدد حقيقي، لأن:

$$f(x + T) = c = f(x) \quad \forall T \in \mathbb{R}$$

٣) $f(x)$ دوري دوره T فإن التابع $f(\alpha x)$ دوري دوره T/α.

البرهان:

$$f(\alpha x) = f(y) = f(y + T) = f(\alpha x + T) = f\left[\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right]$$

فمثلاً التابع $\cos 3x$ دوري دوره $T = 2\pi/3$. والتابع $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ دوري دوره $T = 2L/n$.

٤) إذا كان التابع f دورياً دوره T_1 والتابع g دورياً دوره T_2، فإنّ التابعين $(\alpha f + \beta g)$ و$f.g$ دوريان دورهما T وهو المضاعف المشترك الأصغر للعددين T_1, T_2.

فمثلاً، التابع $f(x) = \cos 3x \cos 5x$ دوري دوره $T = 2\pi$. لأن التابع $\cos 3x$ دوري دوره $T_1 = 2\pi/3$ والتابع $\cos 5x$ دوري دوره $T_2 = 2\pi/5$ والمضاعف المشترك الأصغر للعددين T_1, T_2 هو $T = 2\pi$. (نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2/3 و2/5 وهو أصغر عدد صحيح يقبل القسمة عليهما من دون باق وهو 2 ومنه فإنّ المضاعف المشترك الأصغر للعددين T_1, T_2 هو $T = 2\pi$)

٥) إذا كان التابع f دورياً دوره T فإن:

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \int_c^{c+T} f(x)\,dx \qquad (3)$$

3-2-3 تكاملات شهيرة

التكاملات من الشكل: $I = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

التابع $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ دوري دوره $T_1 = 2L/m$ والتابع $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ دوري دوره $T_2 = 2L/n$ والمضاعف المشترك الأصغر للعددين T_1, T_2 هو $T = 2L$ في حالة كونهما أوليان فيما بينهما.

نميز حالتين: أولهما عندما $m = n$ فيكون:

$$I = \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{L}{4n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} = L$$

ثانيهما عندما $m \neq n$ فيكون:

$$I = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L} + \frac{L}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} = 0$$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} L & ; \quad m = n \\ 0 & ; \quad m \neq n \end{cases} \quad ; \quad m, n \in \mathbb{N}$$

أي أنّ:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} L & ; \quad m = n \\ 0 & ; \quad m \neq n \end{cases} \qquad (4)$$

وبشكل مشابه:

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} L & ; \quad m = n \\ 0 & ; \quad m \neq n \end{cases} \qquad (5)$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad ; \quad \forall m, n \qquad (6)$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad ; \quad n \neq 0 \qquad (7)$$

3-2-4 النشر في متسلسلة فوريه

تعريف (3-2): متسلسلة فوريه هي المتسلسلة المثلثية الآتية:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \qquad (8)$$

حيث a_0, a_n, b_n أعداد حقيقة تسمى أمثال المتسلسلة (ثوابت أويلر).

إنّ التوابع المثلثية الواردة في متسلسلة فوريه هي توابع دورية دورها $T = 2L$.

إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام في مجال ما ومجموعها التابع $f(x)$ فإن هذا التابع دوري دوره $T = 2L$. ونكتب:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left[a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cdots\right] \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \quad (10)$$

تعطى ثوابت أويلر بالعلاقات الآتية:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots \\ a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

ملاحظة: عندما تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام فإن تكامل المجموع غير المنتهي يساوي مجموع التكاملات.

الإثبات: تكامل طرفي العلاقة السابقة (10) في المجال $[-L, L]$:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{-L}^{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$\int_{-L}^{L} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = a_n\left(\frac{L}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{L} = a_n\left(\frac{L}{n\pi}\right)[\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)] = 0$$

وإنّ:

$$\int_{-L}^{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = b_n\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

(تابع فردي تكامله 0 على مجال متناظر). إذن:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx = \frac{a_0}{2}\,2L = a_0 L \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

لإيجاد a_n نضرب طرفي (10) بـ $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ونكامل في المجال $[-L, L]$:

$$A = \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{-L}^{L} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right|$$

$$A=\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx+b_m\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx\right]$$

التكامل الأول مساوٍ الصفر، كما مرّ في الحالة السابقة. ومن التكاملات الشهيرة نجد أنّ كل تكامل من تكاملات المجموع الثاني في المتسلسة أيضاً يساوي الصفر. إذن:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

من التكاملات الشهيرة نجد أنّ جميع حدود هذه المتسلسلة تساوي الصفر إلا عندما يكون $m=n$ عندها يكون الناتج a_nL:

$$A=\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=a_nL\ \Rightarrow\ a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

ويستنتج b_n بالطريقة نفسها، وذلك بضرب طرفي العلاقة (10) بـ $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ونكامل في المجال $[-L,L]$.

نتيجة: نسمي العلاقة (10) متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ ويسمى f مجموع متسلسلة فوريه، وهو تابع دوري دوره $T=2L$ و f تابع مستمر على أي مجال طوله $2L$.

مبرهنة الكفاية: إذا كان f تابعاً دورياً دوره $T=2L$ وكان f و f' مستمرين قطعياً (أ f و f' نقاط انقطاع من النوع الأول) فإن متسلسلة فوريه متقاربة بانتظام على أي مجال جزئي مغلق يكون فيه f مستمراً، ومجموعها يساوي التابع $f(x)$ في هذه الحالات المغلقة، أما عند نقاط الانقطاع من الأول فإن مجموع متسلسلة فوريه يساوي:

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\quad(12)$$

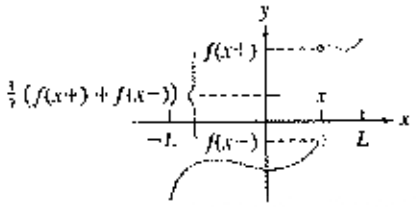
حيث نرمز بـ $f(x_0^+)$ للنهاية من اليمين:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+):\left(x\to x_0+0\ \text{ أو }\ x>x_0\right)$$

وحيث نرمز بـ $f(x_0^-)$ للنهاية من اليسار:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-):\left(x\to x_0-0\ \text{ أو }\ x<x_0\right)$$

إنّ الشكل (2-3) يوضح تقارب متسلسلة فوريه من أجل النقاط التي يكون فيها التابع منقطعاً ويوجد فيها قفزة من طرف لآخر.



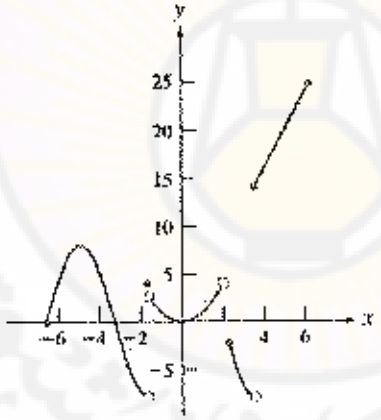
الشكل (2-3): تقارب متسلسلة فوريه في حال القفزات.

مثال (1-3): ليكن لدينا التابع: $f(x)=\begin{cases}5\sin x & ; \quad -2\pi \le x < -\pi/2 \\ 4 & ; \quad x=-\pi/2 \\ x^2 & ; \quad -\pi/2 < x < 2 \\ 8\cos x & ; \quad 2 \le x < \pi \\ 4x & ; \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ حدد نقاط انقطاع هذا التابع وكيفية تقارب متسلسلة فوريه عندها.

الحل: لتحديد نقاط الانقطاع نرسم أولاً منحني التابع كما في الشكل (3-3).

من أجل $-2\pi \le x < -\pi/2$، فإنّ $f(x)$ مستمر، ومتسلسلة فوريه تتقارب إلى التابع $f(x)=5\sin x$.

من أجل $x=-\pi/2$، فإنّ $f(x)$ يمتلك قفزة انقطاع ومتسلسلة فوريه سوف تتقارب إلى المتوسط الحسابي للنهايتين من اليسار ومن اليمين للتابع $f(x)$ في النقطة $x=-\pi/2$. لنحسب النهايتين:



الشكل (3-3): منحني التابع وبيان القفزات.

$$f(-\pi/2^-)=\lim_{x\to-\pi/2^-} f(x)=\lim_{x\to-\pi/2^-} 5\sin x=5\sin(-\pi/2)=-5$$

وكذلك:

$$f(-\pi/2^+)=\lim_{x\to-\pi/2^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi/2^+} x^2=\frac{\pi^2}{4}$$

إذن: فإن متسلسلة فوريه في النقطة $x=-\pi/2$ تتقارب إلى:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-5\right)$$

في المجال $]-\pi/2,2[$ إن التابع مستمر، لذلك فإن متسلسلة فوريه تتقارب إلى التابع x^2 من أجل $-\pi/2 < x < 2$.

من أجل $x = 2$، فإنّ $f(x)$ يمتلك قفزة انقطاع أخرى ومتسلسلة فوريه سوف تتقارب إلى المتوسط الحسابي للنهايتين من اليسار ومن اليمين للتابع $f(x)$ في النقطة $x = 2$. لنحسب النهايتين:

$$f(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

وكذلك:
$$f(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 8\cos x = 8\cos 2$$

إذن: فإن متسلسلة فوريه في النقطة $x = 2$ تتقارب إلى: $(4 + 8\cos 2)/2$.

في المجال $]2,\pi[$ إن التابع f مستمر، لذلك من أجل كل x مع $2 < x < \pi$ فإن متسلسلة فوريه تتقارب إلى التابع $8\cos x$.

من أجل $x = \pi$، فإنّ $f(x)$ يمتلك قفزة انقطاع ثالثة ومتسلسلة فوريه سوف تتقارب إلى المتوسط الحسابي للنهايتين من اليسار ومن اليمين للتابع $f(x)$ في النقطة $x = \pi$.

لنحسب النهايتين:

$$f(\pi^-) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} 8\cos x = 8\cos\pi = -8$$

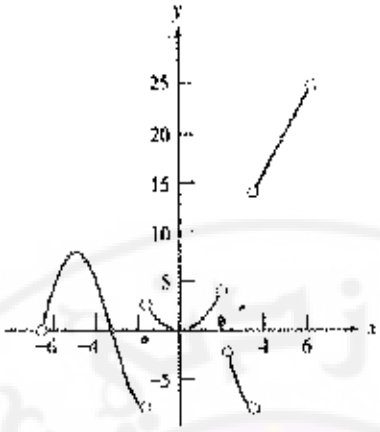
وكذلك:
$$f(\pi^+) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} 4x = 4\pi$$

إذن: فإن متسلسلة فوريه في النقطة $x = \pi$ تتقارب إلى: $(4\pi - 8)/2$.

أخيراً، في المجال $]\pi, 2\pi[$ إن التابع f مستمر، لذلك من أجل كل x مع $\pi < x < 2\pi$ فإن متسلسلة فوريه تتقارب إلى التابع $f(x) = 4x$. فيكون بالنتيجة:

$$f \text{ تقارب متسلسلة فوريه} = \begin{cases} 5\sin x & ; \quad -2\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{4}-5\right) & ; \quad x = -\dfrac{\pi}{2} \\ x^2 & ; \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < 2 \\ 2+4\cos 2 & ; \quad x = 2 \\ 8\cos x & ; \quad 2 < x < \pi \\ 2\pi - 4 & ; \quad x = \pi \\ 4x & ; \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

إنّ الشكل (3-4) يوضح منحني تقارب متسلسلة فوريه للتابع السابق مع اختلاف عند نقاط الانقطاع.



الشكل (4-3): تقارب متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$.

5-2-3 شروط ديرخليه

تسمى المبرهنة السابقة بمبرهنة ديرخليه الذي وضع شروط لتقارب متسلسلة فوريه.


P. G. L. Dirichlet
(1805-1859)
German mathematician

إن أي تابع $f(x)$ يمكن أن ينشر في متسلسلة فوريه إذا حقق الشروط الآتية:

1- $f(x)$ تابع دوري، وحيد القيمة ومحدود.

2- $f(x)$ يمتلك عدداً منتهياً من نقاط الانقطاع في أي دور.

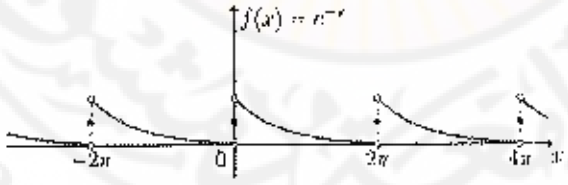
3- $f(x)$ يمتلك عدداً منتهياً من النهايات العظمى ومن النهايات الصغرى.

على أية حال، سنعدّ في معظم التطبيقات الهندسية أنّ هذه الشروط محققة.

مثال (2-3): أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x) = e^{-x}$، في المجال $0 < x < 2\pi$.

الحل:

$$T = 2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi \Rightarrow$$



الشكل (5-3): منحني التابع $f(x) = e^{-x}$ في المجال $0 < x < 2\pi$.

$$e^{-x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}dx = -\left[\frac{1}{\pi}e^{-x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos nx\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi(n^2+1)}e^{-x}(-\cos nx + n\sin nx)\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\cdot\frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right), \qquad a_2 = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right), \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin nx\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi(n^2+1)}e^{-x}(-\sin nx - n\cos nx)\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\cdot\frac{n}{n^2+1} \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right), \qquad b_2 = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right), \cdots$$

بتعويض a_0, a_n, b_n بقيمها نجد أنّ:

$$e^{-x} = \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\cos 3x + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{3}{10}\sin 3x + \cdots\right)\right\}.$$

مثال (3-3): أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x) = x - x^2$ من $x = -\pi$ إلى $x = \pi$. ثم استنتج مجموع المتسلسلة:

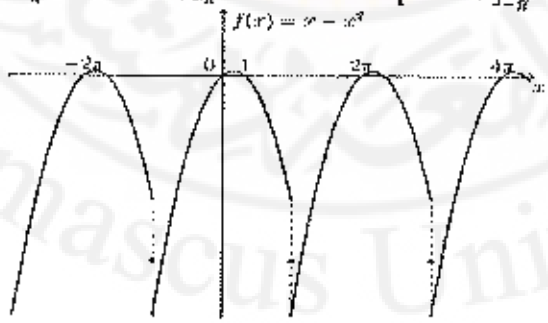
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

الحل:

$$T = 2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi \Rightarrow$$

$$x - x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x - x^2)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2\pi^2}{3}$$



الشكل (3-6): منحني التابع $f(x) = x - x^2$ في المجال $-\pi \le x \le \pi$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\cos nx\,dx\ (*) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(x-x^2)\frac{\sin nx}{n} - (1-2x)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right) + (-2)\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{-4(-1)^n}{n^2} \quad ; \quad \because \cos n\pi = (-1)^n \Longrightarrow$$

$$a_1 = 4/1^2, \qquad a_2 = -4/2^2, \qquad a_3 = 4/3^2, \qquad a_4 = -4/4^2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(x-x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (1-2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (-2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$\Longrightarrow b_1 = 2/1, \qquad b_2 = -2/2, \qquad b_3 = 2/3, \qquad b_4 = -2/4, \cdots$$

بتعويض a_0, a_n, b_n بقيمها نجد أنّ:

$$x - x^2 = -\frac{\pi^2}{3} + 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right] + 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right]$$

وبالتالي بتعويض $x = 0$ في المتسلسلة السابقة نجد أنّ:

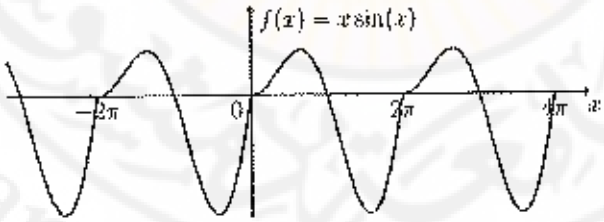
$$0 = -\frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

ملاحظة:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n, \quad \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = 0 \qquad (13)$$

مثال (4-3): أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x) = x\sin x$ داخل المجال $0 \le x \le 2\pi$.



الشكل (7-3): منحني التابع $f(x) = x\sin x$ في المجال $0 \le x \le 2\pi$.

(*) تطبيق الصيغة العامة للتكامل بالتجزئة الذي هو تكامل جداء تابعين u, v ويعطى بالعلاقة:

$$\int uv\,dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - u'''v_4 + \cdots$$

الحل:

$$T = 2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi \Rightarrow$$

$$f(x) = x\sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \left[\frac{1}{\pi}x(-\cos x) - \frac{1}{\pi}(-\sin x)\right]_0^{2\pi} = -2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(2\cos nx\sin x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\left\{\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\} - \left\{-\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right\}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\left\{-\frac{\cos 2(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos 2(n-1)\pi}{n-1}\right\}\right] = \frac{2}{n^2-1} \Rightarrow$$

وذلك عندما $n \neq 1$ أما إذا كانت $n = 1$ فإنه يكون:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - 1\left(-\frac{\sin 2x}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\left\{\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right\} - 1\left\{-\frac{\cos(n-1)x}{(n-1)^2} + \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}\right\}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos 2(n-1)\pi}{(n-1)^2} - \frac{\cos 2(n+1)\pi}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 0$$

وذلك عندما $n \neq 1$ أما إذا كانت $n = 1$ فإنه يكون:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - 1\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \pi$$

بتعويض a_0, a_n, b_n بقيمها نجد أنّ:

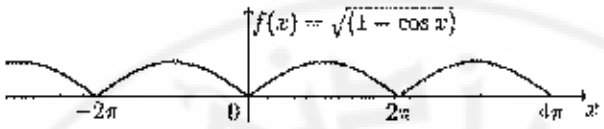
$$x\sin x = -1 + \pi\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{2^2-1}\cos 2x + \frac{2}{3^2-1}\cos 3x + \cdots.$$

مثال (5-3): انشر في متسلسلة فوريه التابع $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$، داخل المجال $0 \le x \le 2\pi$.

واستنتج مجموع المتسلسلة:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$$

الحل:



الشكل (3-8): منحني التابع $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ في المجال $0 \le x \le 2\pi$.

$$f(x)=\sqrt{(1-\cos x)}=\sqrt{2}\sin(x/2) \Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\cos nx\sin\frac{x}{2}\,dx-$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\left[-\frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x+\frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{2n+1}[\cos(2n+1)\pi-1]+\frac{1}{2n-1}[\cos(2n-1)\pi-1]\right\}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n-1}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{(4n^2-1)}$$

حيث إن: $\cos(2n+1)\pi=\cos(2n-1)\pi=-1$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\sin nx\sin\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\left[\frac{2}{2n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x-\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{\frac{1}{2n-1}[\sin(2n-1)\pi-0]-\frac{1}{2n+1}[\sin(2n+1)\pi-0]\right\}=0$$

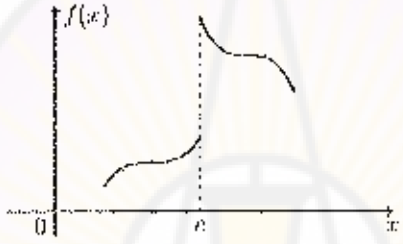
$$\Rightarrow \sqrt{1-\cos x}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{2}}{(4n^2-1)\pi}\cos nx$$

فعندما تكون $x = 0$ نجد أنّ:

$$0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots = \frac{1}{2}$$

6-2-3 النشر لتابع يمتلك نقاط انقطاع

عند إيجاد صيغة ثوابت أويلر من أجل a_0, a_n, b_n، فرضنا أنّ $f(x)$ تابع مستمر. بالإضافة إلى ذلك فإنّ التّابع $f(x)$ يمكن أن يمتلك عدداً منتهياً من نقاط الانقطاع (أي يمكن أن يكون منحنى التابع مؤلفاً من عدة أجزاء من منحنيات مختلفة). فمثلاً إذا كان للتابع $f(x)$ نقطة انقطاع عند النقطة $x = c$ من المجال $a < x < a + 2L$. كما هو موضح في الشكل (3-9).



الشكل (3-9): منحنى التابع $f(x)$ له نقطة انقطاع في المجال $a < c < a + 2L$.

ولنفرض أن هذا التابع ذا الفرعين معرف كما يلي: (14)

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x) & ; \quad a < x < c \\ \psi(x) & ; \quad c < x < a + 2L \end{cases}$$

عندها تكون ثوابت أويلر:

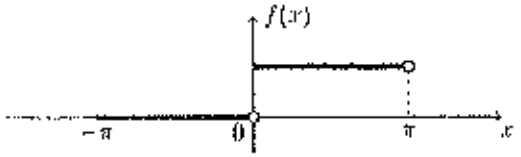
$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\left[\int_a^c \phi(x)dx + \int_c^{a+2L} \psi(x)dx\right] \\ a_n &= \frac{1}{L}\left[\int_a^c \phi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_c^{a+2L} \psi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \\ b_n &= \frac{1}{L}\left[\int_a^c \phi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_c^{a+2L} \psi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

أما عند نقطة الانقطاع $x = c$ فإننا نحسب المتوسط الحسابي للنهايتين من اليسار واليمين.

مثال (6-3): أوجد متسلسلة فوريه للتابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi \le x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 \le x < \pi \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = f(x + 2\pi).$$

الحل: إنّ التابع f دوري دوره 2π ومستمر قطعياً (له نقطة انقطاع واحدة في مجال الدور وهي $x = 0$).



الشكل (3-10): منحني التابع $f(x)$ في المجال $-\pi \le x \le \pi$.

نوجد أمثال (ثوابت أويلر) المتسلسلة:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right] = \frac{1}{\pi}(\pi) = \boxed{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \left[\frac{1}{n\pi}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}[\sin\pi - \sin 0] = \boxed{0}$$

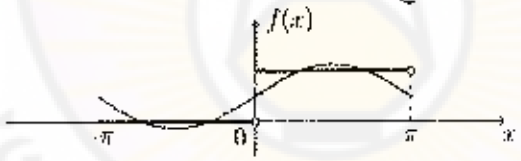
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$b_n = -\left[\frac{1}{n\pi}\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi - 1] = \begin{cases} \boxed{0} & ; \ n \text{ زوجي} \\ \boxed{2/(n\pi)} & ; \ n \text{ فردي} \end{cases}$$

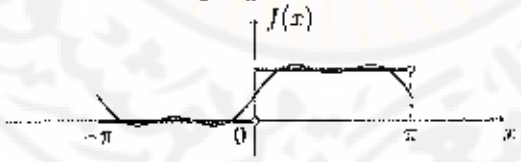
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x\right]$$

تنويه: استُبْدِلَ n بـ $2k-1$ لأن n فردي.

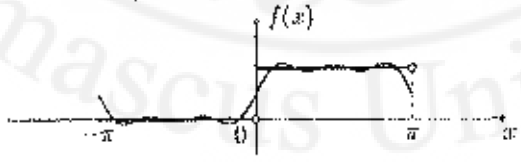
نرسم فيما يلي بعض تقريبات التابع f حسب متسلسلة فوريه:



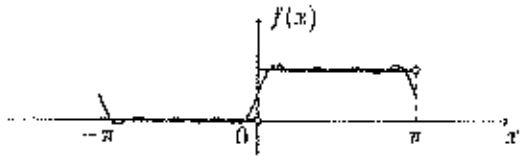
الشكل (3-11): $y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(x)$; $k = 1$.



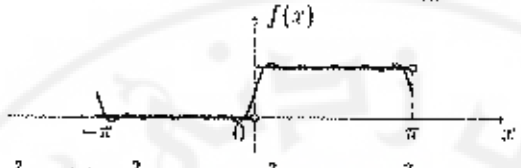
الشكل (3-12): $y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3x)$; $k = 2$.



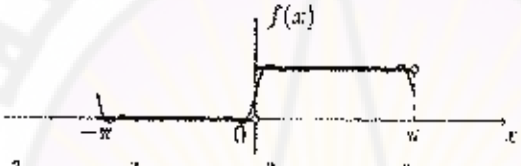
الشكل (3-13): $y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5x)$; $k = 3$.



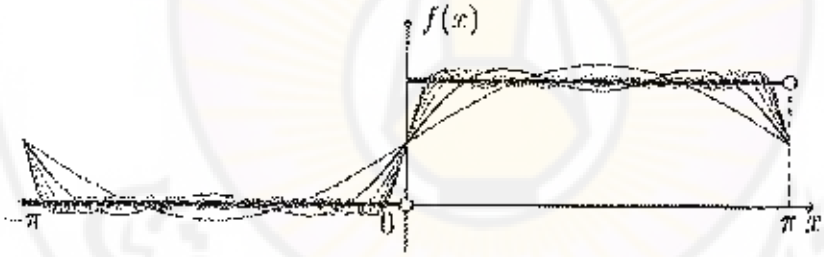
الشكل (14-3): $k=4\ ;\ y=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(x)+\frac{2}{3\pi}\sin(3x)+\frac{2}{5\pi}\sin(5x)+\frac{2}{7\pi}\sin(7x)$.



الشكل (15-3): $k=5; y=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(x)+\frac{2}{3\pi}\sin(3x)+\frac{2}{5\pi}\sin(5x)+\frac{2}{7\pi}\sin(7x)+\frac{2}{9\pi}\sin(9x)$.



الشكل (16-3): $k=6; y=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin(x)+\frac{2}{3\pi}\sin(3x)+\frac{2}{5\pi}\sin(5x)+\frac{2}{7\pi}\sin(7x)+\frac{2}{9\pi}\sin(9x)+\frac{2}{11\pi}\sin(11x)$.



الشكل (17-3): النشر في متسلسلة فوريه عندما $k=1,2,\cdots,5$.

مثال (7-3): أوجد منشور التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه إذا كان:

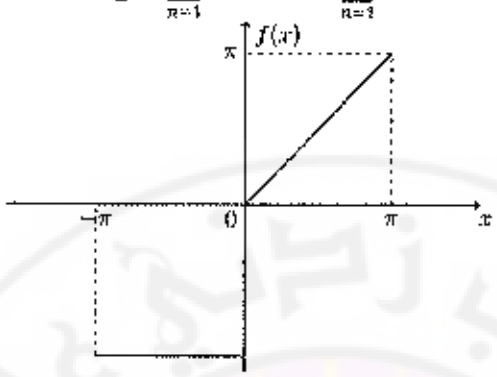
$$f(x)=\begin{cases}-\pi & ;\ -\pi<x<0\\ x & ;\ 0<x<\pi\end{cases}$$

ثم استنتج أنّ:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

الحل: إنّ التابع f دوري دوره $2\pi=2L$ ومستمر قطعياً (له نقطة انقطاع واحدة في مجال الدور وهي $x=0$). لدينا متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$



الشكل (18-3): منحني التابع $f(x)$ في المجال $-\pi\le x\le\pi$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left(-\pi[x]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left[0+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)$$

$$a_1=\frac{-2}{\pi\cdot 1^2},\qquad a_2=0,\qquad a_3=\frac{-2}{\pi\cdot 3^2},\qquad a_4=0,\qquad a_5=\frac{-2}{\pi\cdot 5^2},\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\pi\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}(1-\cos n\pi)-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right]=$$

$$=\frac{1}{n}(1-2\cos n\pi)$$

$$b_1=3,\qquad b_2=-\frac{1}{2},\qquad b_3=1,\qquad b_4=-\frac{1}{4},\qquad b_5=\frac{3}{5},\cdots$$

الآن بتعويض قيم a_0, a_n, b_n في متسلسلة فوريه نجد أنّ:

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)+3\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{3\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots$$

فإذا كانت $x=0$ نحصل على:

$$f(0)=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

وبما أن التابع $f(x)$ منقطع عند $x=0$ وبالتالي:

$$f(0)=\frac{1}{2}[f(0-0)+f(0+0)]=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\rightarrow\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال (3-8): أوجد منشور التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;\quad -\pi\le x\le 0\\ \sin x & ;\quad 0\le x\le\pi\end{cases}$$

ثم برهن أنّ:

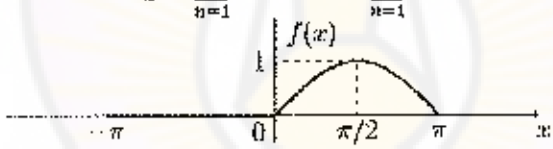
$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

ثم استنتج أنّ:

$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\cdots=\frac{1}{4}(\pi-2)$$

الحل: إنّ التابع f دوري دوره $2L=2\pi$ ومستمر لدينا متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$



الشكل (3-19): منحنى التابع $f(x)$ في المجال $-\pi\le x\le\pi$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx\right]=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}=\quad;\quad(n\neq 1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]=\quad;\quad(n\neq 1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right\} = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi(n^2-1)} & ; \quad n \quad \text{زوجي} \\ 0 & ; \quad n \quad \text{فردي} \end{cases}$$

من أجل $n = 1$ لدينا:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\cos x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_{0}^{\pi} = 0 \quad ; \quad (n \neq 1)$$

من أجل $n = 1$ لدينا:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\sin x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right] + \frac{1}{2}\sin x$$

بوضع $x = \pi/2$ نجد أنّ:

$$1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

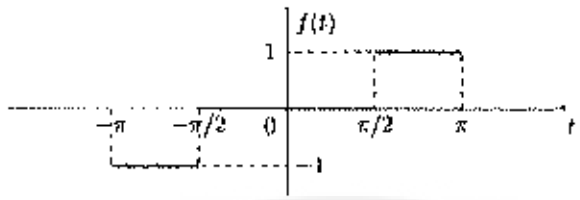
$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \cdots = \frac{1}{4}(\pi - 2)$$

مثال (3-9): أوجد منشور التابع $f(t)$ في متسلسلة فوريه إذا كان:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < t < -\pi/2 \\ 0 & ; \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 1 & ; \quad \pi/2 < t < \pi \end{cases}$$

الحل: إنّ التابع f دوري دوره $2L = 2\pi$ ومستمر جزئياً (له نقطتا انقطاع في الدور الواحد) لدينا متسلسلة فوريه للتابع $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$



الشكل (3-20): منحنى التابع $f(t)$ في المجال $-\pi \le t \le \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-1)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 1\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{[-t]_{-\pi}^{-\pi/2} + [t]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}(\pi/2 - \pi + \pi - \pi/2) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-1)\cos nt\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(0)\cos nt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(1)\cos nt\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}(-1)\sin nt\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(0)\sin nt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(1)\sin nt\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{1}{n\pi}(-\cos n\pi - \cos n\pi) \Longrightarrow$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}, \qquad b_2 = -\frac{1}{\pi}, \qquad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \qquad b_4 = -\frac{2}{4\pi}, \qquad \cdots$$

بتعويض قيم ثوابت أويلر a_0, a_n, b_n نجد أنّ:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(\sin t - \sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \cdots\right)$$

3-2-7 النشر عند تغيير مجال الدور

في جميع الأمثلة السابقة قد دُرِسَ النشر في متسلسلة فوريه للتوابع الدورية التي دورها 2π، ولكن في عدد من المسائل (المشاكل) الهندسية، يكون الدور مغايراً لـ 2π مثلاً $2L$، عندها نطبق العلاقة العامة (10) والعلاقات (11) لحساب ثوابت أويلر.

أما إذا كانت بداية مجال الدور من النقطة c فتكون نهايته النقطة $c + 2L$، وتعطى متسلسلة فوريه وثوابت أويلر بالعلاقات الآتية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots \\ a_0 &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)dx \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

فإذا كانت $c = 0$ فإن مجال الدراسة هو $(0, 2L)$، وإذا كانت $c = -L$ فإن مجال الدراسة هو $(-L, L)$.

مثال (3-10): الموجة المثلثية (Triangular Wave)

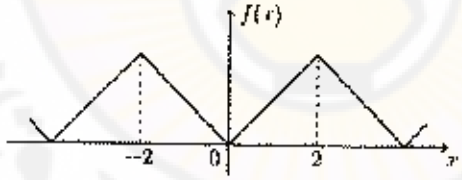
انشر وفق متسلسلة فوريه التابع: $f(x+4) = f(x)$; $-2 \le x \le 2$; $f(x) = |x|$ ثم احسب مجموع المتسلسلة العددية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

الحل: $T = 2L = 4 \Rightarrow L = 2$ $\qquad f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ -x & ; \quad -2 \le x \le 0 \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x|dx = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

تذكير: تكامل تابع زوجي على مجال متناظر $[-a, a]$ يساوي ضعفي تكامله على المجال $[0, a]$، وتكامل تابع فردي على مجال متناظر $[-a, a]$ يساوي الصفر (معدوم).



الشكل (3-21): الموجة المثلثية على المجال $[-2,2]$.

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx \ , \ \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = dv \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$a_n = \left[x\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = \cos(n\pi) - 1 = [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ زوجي} \\ -2 & ; \ n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & ; \text{ زوجي } n \\ -\dfrac{8}{\pi^2 n^2} & ; \text{ فردي } n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x|\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = 0$$

فردي × زوجي = فردي وبالتالي تكاملة على مجال متناظر يساوي الصفر.

نعوض في متسلسلة فوريه، حيث نستبدل n الفردي بـ $n = 2m - 1$:

$$f(x) = |x| = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2(2m-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2m-1)x}{2}\right)$$

لحساب مجموع المتسلسلة العددية $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$ نضع: $x = 2$.

$$x = 2 \Rightarrow |2| = 2 = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\pi$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$$

مثال (11-3): انشر التابع $f(x) = (x-1)^2$ في متسلسلة فوريه داخل المجال المفتوح $(-2, 2)$.

الحل: إنّ هذا التابع دوري ودوره $T = 2L = 4$، وكذلك $L = 2$. لنحسب ثوابت أويلر:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x-1)^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-2}^{2} = \frac{14}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x-1)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{2(x-1)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(0 + \frac{2(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} - 0\right) - \left(0 + \frac{2(-3)(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} - 0\right)\right] = \frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x-1)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$

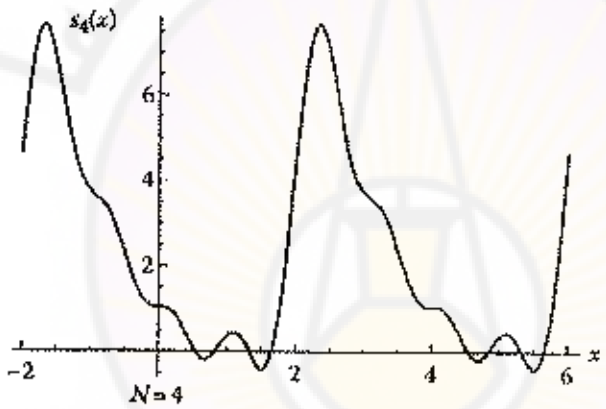
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}} + \frac{2(x-1)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} + \frac{2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{(-1)^n}{-\frac{n\pi}{2}} + 0 + \frac{2(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}\right) - \left(\frac{9(-1)^n}{-\frac{n\pi}{2}} + 0 + \frac{2(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^3}\right)\right] = \frac{8}{n\pi}(-1)^n \Longrightarrow$$

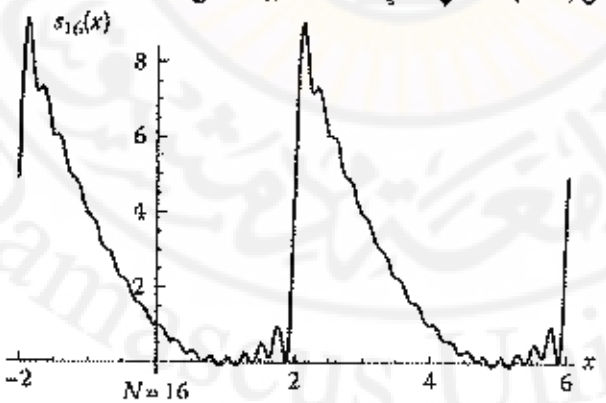
$$(x-1)^2 = f(x) = S_N(x) \Longrightarrow$$

$$f(x) = \frac{7}{3} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2}{n^2\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

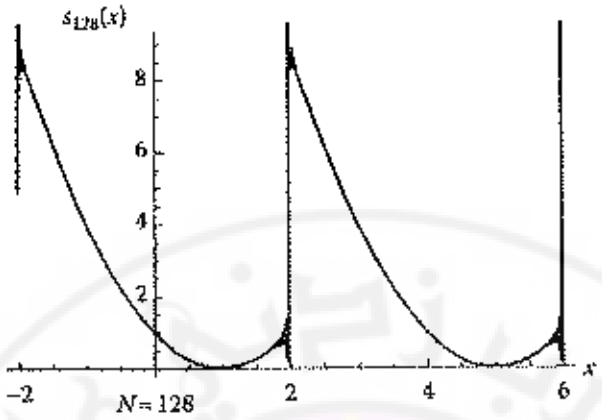
سنستعمل المجموع $S_N(x)$ لإثبات تقارب متسلسلة فوريه من التّابع $f(x)$ وذلك بإعطاء قيم لعدد N هي: $N = 4, 16, 128, 8192$، مع ملاحظة أنّ المنحني البياني على المجال $-2 < x < 2$ يتقارب شيئاً فشيئاً من منحني التّابع $f(x) = (x-1)^2$ وذلك كلما زادت قيمة N وأصبحت أكبر، أمّا عند النقاط $x = \pm 2$ فإنّ المنحني البياني يتقارب من الخط الشاقولي. رسمت هذه المنحنيات باستخدام بيئة ماثيماتيكا $Mathematica^{TM}$.



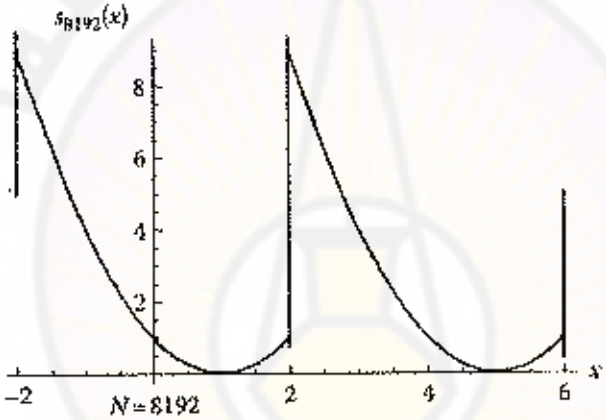
الشكل (3-22): المنحني البياني لمتسلسلة فوريه للتّابع $(x-1)^2$ عندما $N = 4$.



الشكل (3-23): المنحني البياني لمتسلسلة فوريه للتّابع $(x-1)^2$ عندما $N = 16$.



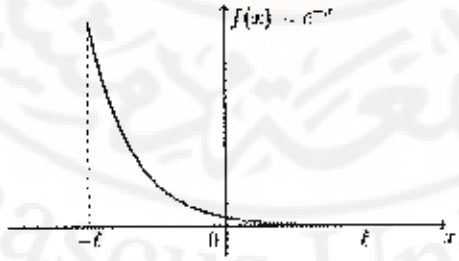
الشكل (3-24): المنحني البياني لمتسلسلة فوريه للتابع $(x-1)^2$ عندما $N = 128$.



الشكل (3-25): المنحني البياني لمتسلسلة فوريه للتابع $(x-1)^2$ عندما $N = 8192$.

مثال (3-12): انشر التابع $f(x) = e^{-x}$ في متسلسلة فوريه داخل المجال المفتوح $(-\ell, \ell)$.

الحل:



الشكل (3-26): منحني التابع $f(x) = e^{-x}$ في المجال $-\ell \le x \le \ell$.

إن المتسلسلة المطلوبة تأخذ الشكل:

$$e^{-x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{-x}dx = \frac{1}{\ell}\left[-e^{-x}\right]_{-\ell}^{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(e^{\ell} - e^{-\ell}\right) = \frac{2\sinh\ell}{\ell}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{-x}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$\left[\because \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)\right] \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\left[\frac{e^{-x}}{1+(n\pi/\ell)^2}\left(-\cos\frac{n\pi x}{\ell} + \frac{n\pi}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= \frac{2\ell(-1)^n\sinh\ell}{\ell^2+(n\pi)^2} \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0]$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{-2\ell\sinh\ell}{\ell^2+\pi^2}, \qquad a_2 = \frac{2\ell\sinh\ell}{\ell^2+2^2\pi^2}, \qquad a_3 = \frac{-2\ell\sinh\ell}{\ell^2+3^2\pi^2}, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{-x}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$\left[\because \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)\right] \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\left[\frac{e^{-x}}{1+(n\pi/\ell)^2}\left(-\sin\frac{n\pi x}{\ell} - \frac{n\pi}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right]_{-\ell}^{\ell} =$$

$$= \frac{2n\pi(-1)^n\sinh\ell}{\ell^2+(n\pi)^2} \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0]$$

$$\therefore \quad b_1 = \frac{-2\pi\sinh\ell}{\ell^2+\pi^2}, \qquad b_2 = \frac{4\pi\sinh\ell}{\ell^2+2^2\pi^2}, \qquad b_3 = \frac{-6\pi\sinh\ell}{\ell^2+3^2\pi^2}, \cdots$$

الآن نحصل على متسلسلة فوريه بعد تعويض a_1, a_n, b_n بقيمها فنجد:

$$e^{-x} = \sinh\ell\left\{\frac{1}{\ell} - 2\ell\left(\frac{1}{\ell^2+\pi^2}\cos\frac{\pi x}{\ell} - \frac{1}{\ell^2+2^2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{\ell} + \frac{1}{\ell^2+3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{\ell} - \cdots\right)\right.$$
$$\left. - 2\pi\left(\frac{1}{\ell^2+\pi^2}\sin\frac{\pi x}{\ell} - \frac{2}{\ell^2+2^2\pi^2}\sin\frac{2\pi x}{\ell} + \frac{3}{\ell^2+3^2\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{\ell} - \cdots\right)\right\}$$

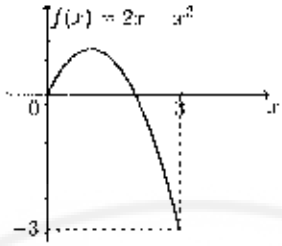
مثال (13-3): أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x) = 2x - x^2$ داخل المجال المفتوح $(0,3)$، ثم استنتج أنّ:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

الحل:

$$2x - x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad L = \frac{3}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 (2x - x^2)dx = \frac{2}{3}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(9-9) = 0$$



الشكل (3-27): منحنى التابع $f(x)=2x-x^2$ في المجال $0\le x\le 3$.

$$a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 (2x-x^2)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx=$$

$$\frac{2}{3}\left[(2x-x^2)\frac{\sin 2n\pi x/3}{2n\pi/3}-(2-2x)\frac{-\cos 2n\pi x/3}{(2n\pi/3)^2}+(-2)\frac{-\sin 2n\pi x/3}{(2n\pi/3)^3}\right]_0^3$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4n^2\pi^2}\{(2-6)\cos 2n\pi-2\}=-\frac{9}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 (2x-x^2)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx=$$

$$\frac{2}{3}\left[(2x-x^2)\frac{-\cos 2n\pi x/3}{2n\pi/3}-(2-2x)\frac{-\sin 2n\pi x/3}{(2n\pi/3)^2}+(-2)\frac{\cos 2n\pi x/3}{(2n\pi/3)^3}\right]_0^3$$

$$=\frac{2}{3}\left\{-\frac{6}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi-\frac{27}{4n^3\pi^3}(\cos 2n\pi-1)\right\}=\frac{3}{n\pi}$$

بتعويض قيم كل من a_0, a_n, b_n في علاقة فوريه نجد أنّ:

$$2x-x^2=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}$$

لنضع $x=3/2$ نجد أنّ:

$$3-\frac{9}{4}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}\cos n\pi\Rightarrow-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}=\frac{n^2}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{n^2}{12}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

مثال (3-14): أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x)=\begin{cases}nx & ;\ 0\le x\le 1\\ \pi(2-x) & ;\ 1\le x\le 2\end{cases}$، ثم استنتج أنّ:

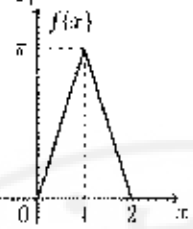
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

الحل:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\ ;\ L=\frac{2}{2}=1$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)dx=\int_0^1 nxdx+\int_1^2 n(2-x)dx=$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \pi\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2} + \pi\left\{(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right\} = \pi$$



الشكل (28-3): منحنى التابع $f(x)$ في المجال $0 \le x \le 2$.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^1 \pi x\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 \pi(2-x)\cos n\pi x\,dx$$

$$= \left[\pi x \cdot \frac{\sin n\pi x}{n\pi} - \pi\left(-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_0^1 + \left[\pi(2-x)\frac{\sin n\pi x}{n\pi} - (-\pi)\left(-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{\cos n\pi}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) - \left(\frac{\cos 2n\pi}{n^2\pi} - \frac{\cos n\pi}{n^2\pi}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & ; \quad n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^1 \pi x\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 \pi(2-x)\sin n\pi x\,dx$$

$$\left[\pi x\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) - \pi\left(-\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_0^1 + \left[\pi(2-x)\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) - (-\pi)\left(-\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right) + \left(\frac{\cos n\pi}{n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \cdots\right)$$

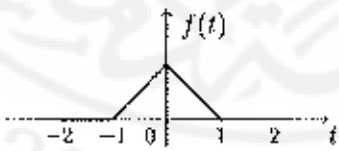
بوضع $x = 2$ نجد أنّ:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2\pi}{1^2} + \frac{\cos 6\pi}{3^2} + \frac{\cos 10\pi}{5^2} + \cdots\right) \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال (15-3): أوجد متسلسلة فوريه للتابع:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < t < -1 \\ 1+t & ; \quad -1 < t < 0 \\ 1-t & ; \quad 0 < t < 1 \\ 0 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

الحل:



الشكل (29-3): منحنى التابع $f(t)$ في المجال $-2 \le t \le 2$.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi t}{L} \quad ; \quad L = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)dt = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{-1}(0)dt + \int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_0^1(1-t)dt + \int_1^2(0)dt\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left|t + \frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left|t - \frac{t^2}{2}\right|_0^1\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\left(-1+\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{-1}(0)dt + \int_{-1}^{0}(1+t)\cos\frac{n\pi t}{2}dt + \int_0^1(1-t)\cos\frac{n\pi t}{2}dt + \int_1^2(0)dt\right\}$$
$$= \left(\text{تكامل بالتجزئة}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left|(1+t)\left(\sin\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{2}{n\pi} - (1)\left(-\cos\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{4}{n^2\pi^2}\right|_{-1}^{0}\right.$$
$$\left. + \left|(1-t)\left(\sin\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{2}{n\pi} - (-1)\left(-\cos\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{4}{n^2\pi^2}\right|_0^1\right\} =$$
$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

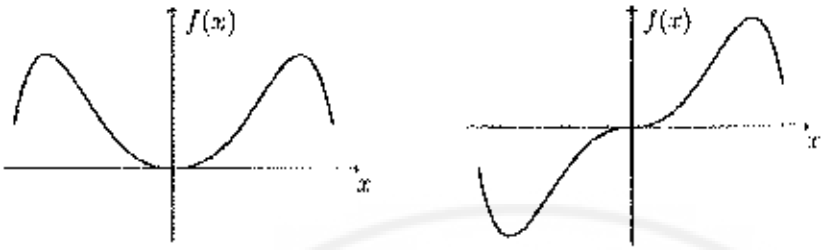
$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{-1}(0)dt + \int_{-1}^{0}(1+t)\sin\frac{n\pi t}{2}dt + \int_0^1(1-t)\sin\frac{n\pi t}{2}dt + \int_1^2(0)dt\right\}$$
$$= \left(\text{تكامل بالتجزئة}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left|(1+t)\left(-\cos\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{2}{n\pi} - (1)\left(-\sin\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{4}{n^2\pi^2}\right|_{-1}^{0}\right.$$
$$\left. + \left|(1-t)\left(-\cos\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{2}{n\pi} - (-1)\left(\sin\frac{n\pi t}{2}\right)\frac{4}{n^2\pi^2}\right|_0^1\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = 0$$

بتبديل a_0, a_n, b_n بقيمها نجد أنّ:

$$f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi t}{2}$$

8-2-3 نشر التوابع الزوجية والفردية

تذكرة: نقول عن التابع $f(x)$ إنه زوجي إذا كان $f(-x) = f(x)$، مثلاً $\cos x, \sec x, x^2$ هي توابع زوجية، ويكون منحني التابع الزوجي متناظراً بالنسبة إلى محور التراتيب. ونقول عن التابع $f(x)$ إنه فردي إذا كان $f(-x) = -f(x)$، مثلاً $\sin x, \csc x, \tan x, x^5$ هي توابع فردية، ويكون منحني التابع الفردي متناظراً بالنسبة إلى المبدأ. والشكل (3-30) يوضح هذا المفهوم.



التابع الزوجي التابع الفردي

الشكل (3-30): منحني التابعين الزوجي والفردي.

ملاحظة: نشر التابع الزوجي وفق فورييه يُعبّر عنه بمجموع توابع زوجية (دورية). وبالمثل يُعبّر عن التابع الفردي بتوابع فردية (دورية).

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{L} f(x)dx & ; \quad f(x) \text{ تابع زوجي} \\ 0 & ; \quad f(x) \text{ تابع فردي} \end{cases} \qquad (18)$$

لنشر تابع زوجي دوري أو تابع فردي دوري، نعلم أن التابع الدوري $f(x)$ المعرف على المجال $(-L, L)$ يمكن أن يمثّل بمتسلسلة فورييه بالشكل:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

حيث a_0, a_n, b_n هي ثوابت أويلر، ونميز حالتين:

حالة 1: $f(x)$ تابع زوجي:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

وبما أنّ $\cos\frac{n\pi x}{L}$ هو تابع زوجي، فيكون $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ تابعاً زوجياً ويكون:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

وبما أنّ $\sin\frac{n\pi x}{L}$ هو تابع فردي، فيكون $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ تابعاً فردياً ويكون:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

وبالتالي إذا كان التابع الدوري $f(x)$ زوجياً، فإن متسلسلة فورييه تحوي على حدود التجيب فقط ويكون:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (19)$$

حالة 2: $f(x)$ تابع فردي:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

وبما أن $\cos\frac{n\pi x}{L}$ هو تابع زوجي، فيكون $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ تابعاً فردياً ويكون:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

وبما أن $\sin\frac{n\pi x}{L}$ هو تابع فردي فيكون $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ تابعاً زوجياً ويكون:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

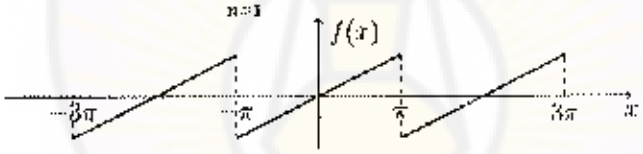
وبالتالي إذا كان التابع الدوري $f(x)$ فردياً فإن متسلسلة فوريه تحتوي على حدود الجيب فقط وبالتالي يكون:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad (20)$$

مثال (3-16): عبر عن التابع $f(x) = x/2$ كمتسلسلة فوريه داخل المجال $-\pi < x < \pi$.

الحل: بما أنّ $f(-x) = -x/2 = -f(x)$ فإن التابع $f(x)$ تابع فردي وبالتالي:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad ; \quad L = \pi$$



الشكل (3-31): منحني التابع $y = x$ الدوري ودوره 2π ويدعى أسنان المنشار، ويتمثل هذا التابع عدداً منتهياً من نقاط الانقطاع $\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \cdots$ داخل دوره.

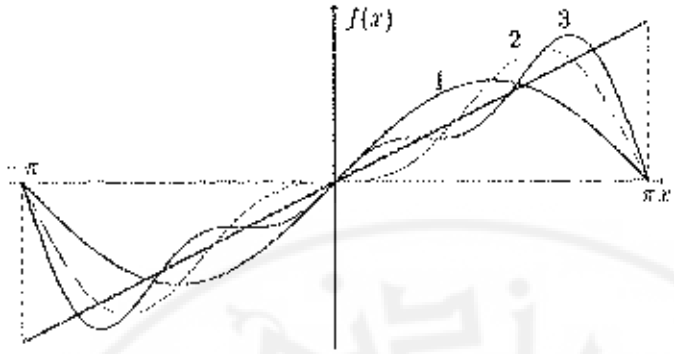
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - \left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n}$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{1}{1}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = -\frac{1}{4}, \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$$

إن الشكل (3-32) يظهر منحني التابع $y = f(x) = x$ وتقاربات متسلسلة فوريه لهذا التابع من أجل: $n = 1, 2, 3$ داخل المجال: $x \in]-\pi, +\pi[$.

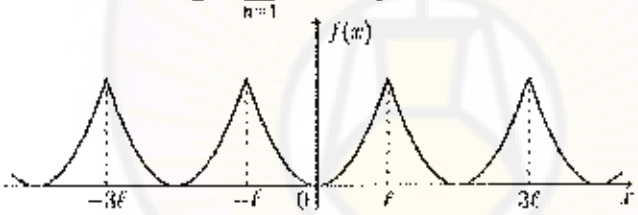


الشكل (32-3): منحني التوابع $y = 2\sin x$ و $y = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$ و $y = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$ والمرقمة بالأعداد 1 و2 و3 على الترتيب. وهذا يوضح الأساليب التقريبية المتعاقبة لمتسلسلة فوريه لتتقارب أكثر فأكثر من التابع $y = x$ من أجل جميع قيم x داخل المجال $-\pi < x < \pi$.

مثال (17-3): أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع $f(x) = x^2$ داخل المجال $(-\ell, \ell)$.

الحل: بما أنّ $f(-x) = x^2 = f(x)$ فإن التابع $f(x)$ تابع زوجي داخل المجال $(-\ell, \ell)$ وبالتالي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} \quad ; \quad L = \ell$$



الشكل (33-3): منحني التابع $y = x^2$ الدوري ودوره 2ℓ.

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{2}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{2\ell^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2 \cos\frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[x^2\left(\sin\frac{n\pi x/\ell}{n\pi/\ell}\right) - 2x\left(-\cos\frac{n\pi x/\ell}{n^2\pi^2/\ell^2}\right) + 2\left(-\sin\frac{n\pi x/\ell}{n^3\pi^3/\ell^3}\right)\right]_0^{\ell} =$$

$$= \frac{4\ell^2(-1)^n}{n^2\pi^2} \quad ; \quad [\because \quad \cos n\pi = (-1)^n] \Longrightarrow$$

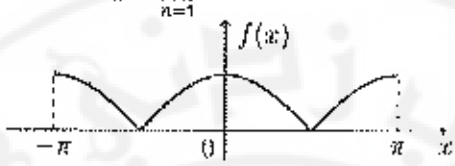
$$a_1 = -\frac{4\ell^2}{\pi^2}, \quad a_2 = \frac{4\ell^2}{2^2\pi^2}, \quad a_3 = -\frac{4\ell^2}{3^2\pi^2}, \quad a_4 = \frac{4\ell^2}{4^2\pi^2}, \cdots$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{\ell^2}{3} - \frac{4\ell^2}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x/\ell}{1^2} - \cos\frac{2\pi x/\ell}{2^2} + \cos\frac{3\pi x/\ell}{3^2} - \cdots\right)$$

مثال (18-3): أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع $f(x) = |\cos x|$ داخل المجال $(-\pi, \pi)$.

الحل: بما أنّ $f(-x) = |\cos(-x)| = f(x)$ فإن التابع $f(x) = |\cos x|$ تابع زوجي داخل المجال $(-\pi, \pi)$ وبالتالي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad ; \quad L = \pi$$



الشكل (34-3): منحنى التابع $y = |\cos x|$ الدوري ودوره 2π.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx\right\} =$$

لأنّ التابع $\cos x$ سالب عندما $\pi/2 < x < \pi$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\{[\sin x]_0^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^{\pi}\} = \frac{2}{\pi}\{(1-0) - (0-1)\} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\cos nx\, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} [\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]\, dx \right.$$

$$\left. - \int_{\pi/2}^{\pi} [\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]\, dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(n+1)\,\pi/2}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\,\pi/2}{n-1}\right] + \left[\frac{\sin(n+1)\,\pi/2}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\,\pi/2}{n-1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi/2}{n+1} - \frac{\cos n\pi/2}{n-1}\right) = \frac{-4\cos n\pi/2}{\pi(n^2-1)} \quad ; \quad (n \neq 1)$$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x\, dx\right] = 0 \Rightarrow$$

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{15}\cos 4x + \cdots\right\}$$

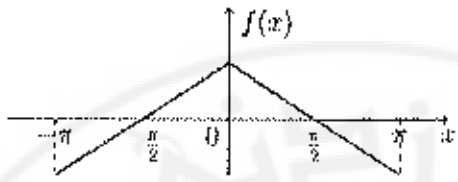
مثال (19-3): أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع $f(x)$ المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x/\pi & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ 1 - 2x/\pi & ; \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ثم برهن أنّ:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

الحل:



الشكل (3-35): منحنى التابع $y=f(x)$ الدوري ودوره 2π.

$f(x)$ بطابق $f(-x)=1-\frac{2x}{\pi}\ ;\ x\in[-\pi,0]$ في المجال $[0,\pi]$

$f(x)$ بطابق $f(-x)=1+\frac{2x}{\pi}\ ;\ x\in[0,\pi]$ في المجال $[-\pi,0]$

وبالتالي فإن التابع $f(x)$ هو تابع زوجي على المجال $[-\pi,\pi]$، كما هو واضح أيضاً من رسم منحنى التابع في الشكل أعلاه بسبب تناظره بالنسبة إلى محور الترانيب.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\quad ;\quad L=\pi$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)dx=\frac{2}{\pi}\left[x-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi}=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin nx}{n}-\left(-\frac{2}{\pi}\right)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\cos n\pi}{\pi n^2}+\frac{2}{\pi n^2}\right)=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\Rightarrow$$

$$a_1=\frac{8}{\pi^2},\quad a_3=\frac{8}{3^2\pi^2},\quad a_5=\frac{8}{5^2\pi^2},\quad \cdots,$$

$$a_2=a_4=a_6=\cdots=0$$

وبتعويض ثوابت أويلر بقيمها نجد أنّ:

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right]$$

وبوضع $x=0$ نجد أنّ:

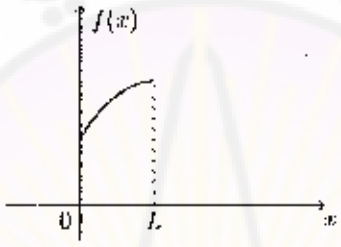
$$1=f(0)=\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\Rightarrow\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

9-2-3 النشر ذو نصف المدى

(النشر في متسلسلات جيوب فقط أو متسلسلات تجيبات فقط)

في بعض الحالات يتطلب منّا النشر في متسلسلة فوريه لتابع $f(x)$ على المجال $[0,L]$ الذي يعدّ نصف دور لمتسلسلة فوريه، لذلك نلجأ إلى تمديد التابع ليغطي كامل المجال $[-L,L]$ بحيث نحصل على تابع جديد فردي أو زوجي. إنّ متسلسلة فوريه لتابع كهذا هي متسلسلة فوريه لنصف الدّور، وبالتالي تتألف من حدود الجيوب أو حدود التجيبات فقط.

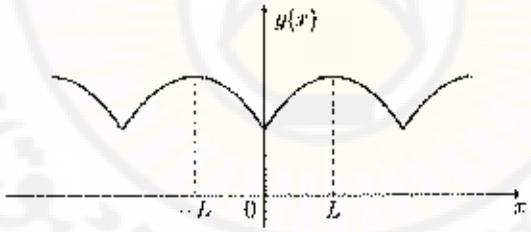
ليكن التابع $f(x)$ معرف على المجال $[0,L]$،



الشكل (3-36): منحنى التابع $y=f(x)$ على المجال $[0,L]$.

نميز الحالتين:

- نمدد f ليصبح تابعاً زوجياً على المجال $[-L,L]$ ثم ليصبح دورياً على $\mathbb{R}$.



الشكل (3-37): تمديد التابع $f(x)$ ليصبح تابعاً زوجياً.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\ ; & x\in[0,L] \\ f(-x)\ ; & x\in[-L,0] \end{cases} \qquad g(x+2L)=g(x) \quad (21)$$

ننشر التابع $g(x)$ وفق فوريه في متسلسلة تجيبات:

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\,dx \quad ; \quad (\text{تابع زوجي}) \quad T=2L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad T = 2L \ , \ n \in \mathbb{N}$$

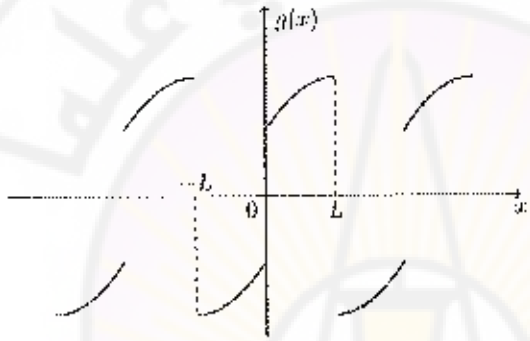
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad \text{(تابع زوجي)}$$

بما أن النشر صحيح على $\mathbb{R}$ فالنشر صحيح على $[0, L]$.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad x \in [0, L]$$

- نمدد f ليصبح تابعاً فردياً على المجال $[-L, L]$ ثم ليصبح دورياً على $\mathbb{R}$.



الشكل (3-38): تمديد التابع $f(x)$ ليصبح تابعاً فردياً.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in [0, L] \\ -f(-x) & ; \ x \in [-L, 0] \end{cases} \qquad g(x + 2L) = g(x) \qquad (22)$$

ننشر التابع $g(x)$; $T = 2L$ وفق فوريه في متسلسلة جيوب، ونتابع كالسابق فنجد:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad T = 2L \ , \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; \quad \text{(تابع زوجي)}$$

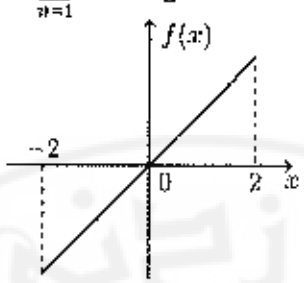
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ; \ x \in [0, L]$$

مثال (3-20): عبّر عن التابع $f(x) = x$ باعتباره متسلسلة جيوب ذات نصف المدى في المجال $[0, 2]$.

الحل: نمدد التابع $f(x)$ في المجال $[-2, 0]$ ليصبح تابعاً فردياً كما في الشكل (3-39):

إذاً فإنّ متسلسلة فوريه من أجل التابع $f(x)$ على كامل الدّور $(-2, 2)$ ستحتوي على الجيوب فقط وتعطى بالشكل:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2} \quad ; \quad L=2$$



الشكل (3-39): تمديد التابع $f(x)$ ليصبح تابعاً فردياً.

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=-\frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

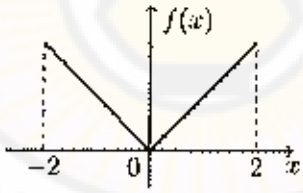
$$b_1=\frac{4}{\pi},\qquad b_2=-\frac{4}{2\pi},\qquad b_3=\frac{4}{3\pi},\qquad b_4=-\frac{4}{4\pi},\cdots$$

وبالتالي تكون متسلسلة فوريه على نصف المدى $(0,2)$:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{2}+\cdots\right)$$

مثال (3-21): عبّر عن التابع $f(x)=x$ باعتباره متسلسلة تجيبات ذات نصف المدى في المجال $[0,2]$.

الحل: نمدد التابع $f(x)$ في المجال $[-2,0]$ ليصبح تابعاً زوجياً كما في الشكل (3-40):



الشكل (3-40): تمديد التابع $f(x)$ ليصبح تابعاً زوجياً.

إذاً فإنّ متسلسلة فوريه من أجل التابع $f(x)$ على كامل الدّور $(-2,2)$ ستحتوي على التجيبات فقط وتعطى بالشكل:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2} \quad ; \quad L=2$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x\,dx=2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

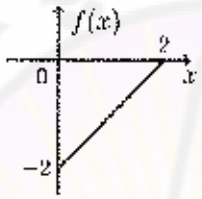
$$= \left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\{(-1)^n - 1\}$$

$$a_1 = -\frac{8}{\pi^2},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{8}{3^2\pi^2},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{8}{5^2\pi^2},\ a_6 = 0, \cdots \Longrightarrow$$

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\cos\pi x/2}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x/2}{3} + \frac{\cos 5\pi x/2}{5^2} + \cdots\right]$$

مثال (22-3): انشر في متسلسلة جيوب فقط، ثم في متسلسلة تجيبات فقط التابع الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & ;\ 0 < x < 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$



الشكل (3-41): منحني التابع $f(x)$ داخل المجال $(0, 2)$.

واستنتج مجموع كل من المتسلسلات العددية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \quad , \quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m-1}$$

الحل: **أولاً:** نمدد f ليصبح تابعاً فردياً، نفرض التابع: $g(x) = \begin{cases} x-2 & ;\ 0 < x < 2 \\ x+2 & ;\ -2 < x < 0 \end{cases}$

$$g(x+4) = g(x)\ ;\ T = 4\ ,\ L = 2$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^2 (x-2)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{-4}{n\pi}$$

$$f(x) = (x-2) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ ;\quad 0 < x < 2$$

نفرض $x = 1$ في هذه المتسلسلة

$$1 - 2 = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \Longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m-1} = -\frac{\pi}{4}$$

حيث إنّ:

$$\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, 0, \cdots = \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\ ;\ m = 1, 2, 3, \cdots$$

ثانياً: نمدد f ليصبح تابعاً زوجياً، نفرض التابع:

$$g(x)=\begin{cases} x-2 & ; \quad 0<x<2 \\ -x-2 & ; \quad -2<x<0 \end{cases}, \qquad g(x+4)=g(x) \qquad ; \; T=4 \; , \; L=2$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\int_{0}^{2}(x-2)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-8}{n^2\pi^2} & ; \quad n=2m-1 \\ 0 & ; \quad n=2m\end{cases}$$

$$f(x)=(x-2)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2m-1)x\right] \; ; \; 0<x<2$$

بفرض $x=2$ في هذه المتسلسلة، وهي نقطة انقطاع للتابع، نجد أنّ:

$$\frac{1}{2}(0+0)=0=-1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2}\Rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

حيث إنّ $\cos[\pi(2m-1)]=-1,1,-1,1,\cdots=(-1)^m \; ; \quad m=1,2,3,\cdots$

مثال (23-3): انشر وفق فوريه في متسلسلة تجيبات فقط، ثم وفق فوريه في متسلسلة جيوب فقط التابع $f(x)=x^2$ المعرف في المجال $[0,L]$.

الحل: أولاً: نبدأ بالنشر في متسلسلة تجيبات فقط.

نمدد f ليصبح تابعاً زوجياً على المجال $[-L,L]$ ثم ليصبح دورياً على $\mathbb{R}$.

$$g(x)=\begin{cases} x^2 \; ; \; x\in[0,L] \\ x^2 \; ; \; x\in[-L,0]\end{cases} \Leftrightarrow g(x)=x^2 \; ; \quad g(x+2L)=g(x)$$

ننشر التابع g وفق فوريه في متسلسلة تجيبات على $\mathbb{R}$، ويكون هو نشر فوريه في المجال $[0,L]$:

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{2L^3}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$=\frac{L^2}{3}-\frac{4L^2}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)+\cdots\right]$$

ثانياً: النشر في متسلسلة جيوب فقط:

نمدد f ليصبح تابعاً فردياً على المجال $[-L,L]$ ثم ليصبح دورياً على $\mathbb{R}$.

$$g(x)=\begin{cases} x^2 \; ; \; x\in[0,L] \\ -x^2 \; ; \; x\in[-L,0]\end{cases} \quad ; \quad g(x+2L)=g(x)$$

ننشر التابع g وفق فوريه في متسلسلة جيوب على $\mathbb{R}$، ويكون هو نشر فوريه في المجال $[0,L]$:

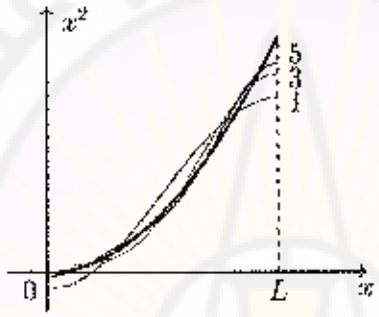
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \cdots =$$

$$= \frac{2L^2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{2}{\pi^2 n^3}[1-(-1)^n]\right]$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{2}{\pi^2 n^3}[1-(-1)^n]\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Rightarrow$$

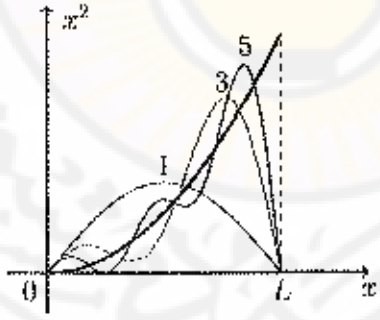
$$x^2 = \frac{2L^2}{\pi}\left\{\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2 3^3}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \cdots\right\}$$

يبين الشكل (42-3) المجاميع الجزئية لمتسلسلة التجيبات من أجل: $n=1,\ n=3,\ n=5$



الشكل (42-3): متسلسلة التجيبات من أجل: $n = 1,3,5$.

ويبين الشكل (43-3) المجاميع الجزئية لمتسلسلة الجيوب من أجل: $n=1,\ n=3,\ n=5$



الشكل (43-3): متسلسلة الجيوب من أجل: $n = 1,3,5$.

مثال (24-3): انشر وفق فوريه في متسلسلة تجيبات فقط التابع $f(x) = x\sin x$ المعرف في المجال $[0,\pi]$. ثم استنتج أنّ:

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots = \frac{\pi-2}{4}$$

الحل: يكتب التابع $f(x)=x\sin x$ وفق فوريه في متسلسلة تجيبات فقط بالشكل:

$$x\sin x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}[x(-\cos x)-1(-\sin x)]_0^{\pi}=2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)-1\cdot\left(\frac{-\sin(n+1)x}{(n+1)^2}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right)\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\pi\left\{\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}\right\}\quad;\quad(n\neq1)$$

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)-1\cdot\left(\frac{-\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos 2\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left\{\frac{\cos 2x}{1\cdot3}-\frac{\cos 3x}{3\cdot5}+\frac{\cos 4x}{5\cdot7}-\cdots\right\}$$

لنضع $x=\pi/2$ نجد أنّ:

$$\frac{\pi}{2}=1+2\left\{\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}-\cdots\right\}\Rightarrow\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}-\cdots=\frac{\pi-2}{4}$$

مثال (3-25): احصل وفق فوريه على متسلسلة تجيبات فقط للتابع $f(x)$ المعرف في المجال $[0,\ell]$.

$$f(x)=\begin{cases}kx & ;\ 0\le x\le \ell/2\\ k(\ell-x) & ;\ \ell/2\le x\le\ell\end{cases}$$

ثم استنتج قيمة المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

الحل: إن متسلسلة فوريه للتجيبات فقط تعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$a_0=\frac{2}{\ell}\left\{\int_0^{\ell/2}kx\,dx+\int_{\ell/2}^{\ell}k(\ell-x)dx\right\}=$$

$$=\frac{2k}{\ell}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ell/2}-\left[\frac{(\ell-x)^2}{2}\right]_{\ell/2}^{\ell}\right\}=\frac{2k}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{\ell^2}{4}-\left(0-\frac{\ell^2}{4}\right)\right\}=\frac{k\ell}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\left\{\int_0^{\ell/2}kx\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx+\int_{\ell/2}^{\ell}k(\ell-x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\right\}=$$

$$= \frac{2k}{\ell}\left[x\left(\frac{\sin n\pi x/\ell}{n\pi/\ell}\right) - 1\cdot\left(-\frac{\cos n\pi x/\ell}{(n\pi/\ell)^2}\right)\right]_0^{\ell/2}$$

$$+ \frac{2k}{\ell}\left[\frac{(\ell - x)\sin n\pi x/\ell}{n\pi/\ell} - (-1)\left(\frac{-\cos n\pi x/\ell}{(n\pi/\ell)^2}\right)\right]_{\ell/2}^{\ell} =$$

$$= \frac{2k}{\ell}\left[\left(\frac{\ell^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos 0\right)\right]$$

$$+ \frac{2k}{\ell}\left[\frac{\ell}{n\pi}\left(-\frac{\ell}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2k}{\ell}\cdot\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right] = \frac{2k\ell}{n^2\pi^2}\left\{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right\}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{k\ell}{4} - \frac{8k\ell}{\pi^2}\left[\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{\ell} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{\ell} + \frac{1}{10^2}\cos\frac{10\pi x}{\ell} + \cdots\right]$$

بوضع $x = \ell$ نجد أنّ:

$$0 = \frac{k\ell}{4} - \frac{8k\ell}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{k\ell}{4} - \frac{8\ell}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \Longrightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال (26-3): احصل وفق فوريه على متسلسلة الجيوب فقط للتابع $f(x)$ المعرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - x & ; \quad 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{3}{4} & ; \quad \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

الحل: نتمدد التابع $f(x)$ ليصبح تابعاً فردياً في المجال $(-1, 1)$ فيكون:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad ; \quad 2L = 2 \Longrightarrow L = 1$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\, dx =$$

$$= 2\left\{\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4} - x\right)\sin n\pi x\, dx + \int_{1/2}^{1}\left(x - \frac{3}{4}\right)\sin n\pi x\, dx\right\} =$$

$$= 2\left[-\left(\frac{1}{4} - x\right)\frac{\cos n\pi x}{n\pi} - \sin\frac{n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^{1/2} + 2\left[-\left(x - \frac{3}{4}\right)\frac{\cos n\pi x}{n\pi} + \sin\frac{n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_{1/2}^{1} =$$

$$= 2\left[\frac{1}{4n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{4n\pi} - \frac{\sin n\pi/2}{n^2\pi^2}\right] + 2\left[-\frac{1}{4n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{4n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\sin n\pi/2}{n^2\pi^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] - \frac{4\sin n\pi/2}{n^2\pi^2} \Longrightarrow$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{1}{3\pi} + \frac{4}{3^2\pi^2}, \qquad b_4 = 0,$$

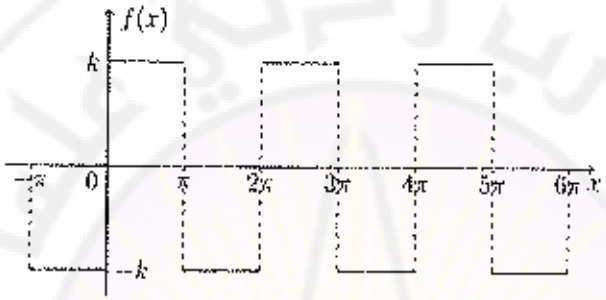
$$b_5 = \frac{1}{5\pi} - \frac{4}{5^2\pi^2}, \qquad b_6 = 0, \qquad \cdots \Rightarrow$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right)\sin \pi x + \left(\frac{1}{3\pi} + \frac{4}{3^2\pi^2}\right)\sin 3\pi x + \left(\frac{1}{5\pi} - \frac{4}{5^2\pi^2}\right)\sin 5\pi x + \cdots$$

3-3 أشكال الموجات المثالية Typical Waveforms:

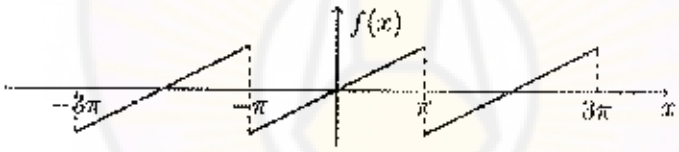
يوجد ستة أنواع شهيرة ومثالية عادة تستخدم في هندسة الاتصالات:

(١) الموجة المثالية المربعة وتأخذ الشكل:



الشكل (3-44): الموجة المثالية المربعة.

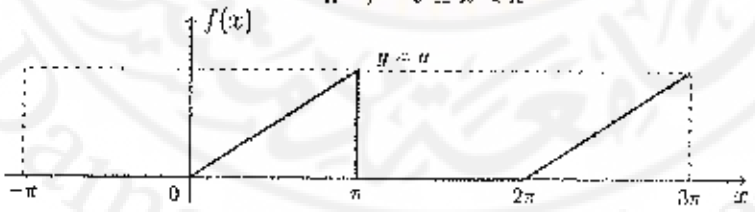
(٢) موجة أسنان المنشار المثالية وتأخذ الشكل:



الشكل (3-45): موجة أسنان المنشار المثالية.

(٣) موجة أسنان المنشار المثالية المعدّلة وهي توسيع للتابع المعطى بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi < x \le 0 \\ x & ; \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

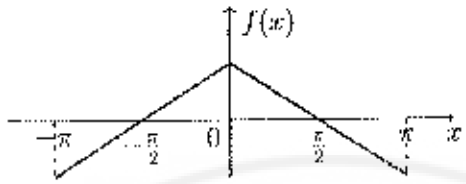


الشكل (3-46): موجة أسنان المنشار المثالية المعدّلة.

الذي يعطى نشره في متسلسلة فوريه بالشكل:

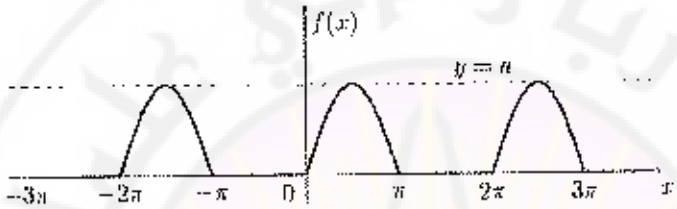
$$f(x) = \frac{a}{4} - \frac{2a}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) + \frac{a}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

(٤) الموجة المثلثية المثانية وتأخذ الشكل:



الشكل (3-47): الموجة المثلثية المثانية.

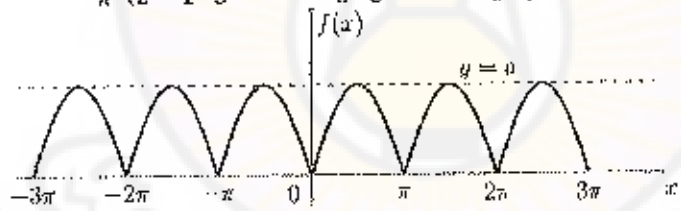
(٥) منظم نصف الموجة الذي يأخذ الشكل:



الشكل (3-48): منظم نصف الموجة.

(٦) منظم الموجة الكاملة الذي هو توسيع للتابع $f(x) = a\sin x \; ; 0 \le x \le \pi$ و يأخذ الشكل أدناه ومتسلسلة فوريه له:

$$f(x) = \frac{4a}{\pi}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x - \cdots\right\}$$



الشكل (3-49): منظم الموجة الكاملة.

4-3 صيغة بارسيفال الأولى Parseval's Formula:

تعطى صيغة بارسيفال[*] الأولى بالشكل:

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right\} \quad (23)$$

[*] مارك أنطوان بارسفال دي شانين Marc-Antoine Parseval des Chênes عالم رياضيات فرنسي (24/04/1755-16/08/1836).

حيث إن نشر التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه متقارب بانتظام في المجال $(-L, L)$.

البرهان: إن نشر التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه في المجال $(-L, L)$. يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (24)$$

لنضرب طرفي العلاقة (24) بـ $f(x)$ ونكامل حدّاً حدّاً من $-L$ إلى L وذلك محقق لأن المتسلسلة متقاربة بانتظام. فنجد أنّ:

$$\int_{-L}^{L}|f(x)|^2 dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\} \quad (25)$$

ومن ثوابت أويلر نعلم أنّ:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = La_0\,, \qquad \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = La_n\,, \qquad \int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = Lb_n$$

فإنّ العلاقة (25) تأخذ الشكل:

$$\int_{-L}^{L}|f(x)|^2 dx = L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right\}$$

التي تسمى بعلاقة بارسيفال.

نتيجة 1: إذا كان:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

على المجال $(0, 2L)$ عندها يكون:

$$\int_{0}^{2L}|f(x)|^2 dx = L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right\} \quad (26)$$

نتيجة 2: إذا كان نشر نصف المدى للتابع $f(x)$ في متسلسلة التجيبات فقط على المجال $(0, L)$ عندها يكون:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow$$
$$\int_{0}^{L}[f(x)]^2 dx = \frac{L}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + \cdots\right\} = \frac{L}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2)\right\} \quad (27)$$

نتيجة 3: إذا كان نشر نصف المدى للتابع $f(x)$ في متسلسلة الجيوب فقط على المجال $(0, L)$ عندها يكون:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \rightarrow$$

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots) = \frac{L}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n^2)\right\} \quad (28)$$

نتيجة 4: (قيمة الجذر التربيعي المتوسط) Root mean square value (rms):

إنّ قيمة الجذر التربيعي المتوسط للتابع $y = f(x)$ على المجال (a, b) تعطى بالعلاقة:

$$\bar{y} = [f(x)]_{rms} = \left\{\frac{\int_a^b |f(x)|^2 dx}{b-a}\right\}^{1/2} \quad (29)$$

إن قيمة الجذر التربيعي المتوسط للتابع الدوري تستعمل بشكل واسع في نظرية الميكانيك الاهتزازي وفي نظرية الدارات الالكترونية. إن القيمة (rms) تدعى أيضاً بالقيمة الفعّالة للتابع.

مثال (27-3): احصل على متسلسلة فوريه للتابع $y = f(x) = x^2$ في المجال $-\pi < x < \pi$.

احسب $\bar{y}$ مستخدماً مبرهنة القيمة الوسطى والقيمة الفعّالة للتابع. ثم أثبت أنّ:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

وحسب تمرين سابق وجدنا أنّ:

$$a_0 = 2\frac{\pi^2}{3}, \qquad a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \qquad b_n = 0 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

إذا كانت $\bar{y}$ هي القيمة الفعّالة rms للتابع y في المجال $(-\pi, \pi)$ فإننا نجد:

$$(\bar{y})^2 = \frac{\pi}{2\pi}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4}(-1)^{2n} + 0\right) = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

وحسب مبرهنة القيمة الوسطى:

$$(\bar{y})^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}$$

بمساواة القيمتين 1 و نجد أنّ:

$$\frac{\pi^4}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{5}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

5-3 الشكل العقدي لمتسلسلة فوريه Complex Form:

ويطلق عليه أيضاً الشكل الأسي لمتسلسلة فوريه:

ليكن f تابعاً دورياً دوره $T=2L$ عندئذ يمكن تمثيل هذا التابع بمتسلسلة فوريه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

وبما أنّ (علاقات أويلر):

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right),\qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}+e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}-e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}\right)\right\}=$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}+C_{-n}e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}\right\}\quad(30)$$

حيث إنّ:

$$C_0=\frac{a_0}{2},\qquad C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\qquad C_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\quad(31)$$

$$a_0=2C_0,\qquad a_n=C_n+C_{-n},\qquad b_n=i(C_n-C_{-n})\quad(32)$$

وتعطى هذه الثوابت بالعلاقات:

$$C_n=\frac{1}{2L}\left\{\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx-i\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{nx}{L}dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L}-i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx$$

$$C_{-n}=\frac{1}{2L}\left\{\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx+i\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L}+i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx$$

يمكن جمع العلاقات الثلاث السابقة (C_0,C_n,C_{-n}) بعلاقة واحدة:

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx\quad;\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

ويمكن كتابة المتسلسلة السابقة بالشكل:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i\left(\frac{\pi m x}{L}\right)} \qquad (33)$$

حيث إنّ:

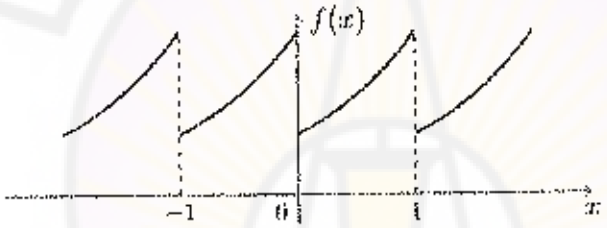
$$C_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{\pi m x}{L}\right)}dx \qquad (34)$$

وندعى المتسلسلة (33) بالشكل العقدي لمتسلسلة فوريه للتابع $f(x)$.

إنّ النشر العقدي لمتسلسلة فوريه أداة نافعة وخاصة في حل المسائل في الدارات الإلكترونية ذات طابع الفولط الدّوري.

مثال (3-28): أوجد النشر العقدي للتابع: $f(x) = e^x \; ; \; 0 \le x \le 1$ و $f(x+1) = f(x)$، ثم انتقل منه إلى النشر الحقيقي.

الحل:



الشكل (3-50): منحني التابع $f(x) = e^x$ في المجال $x \in [0,1]$.

الدّور $T = 2L = 1$ وبالتالي:

$$C_m = \int_0^1 e^x e^{-i\left(\frac{\pi m x}{1/2}\right)}dx = \int_0^1 e^{x(1-2\pi m i)}dx \Longrightarrow$$

$$C_m = \left[\frac{e^{x(1-2\pi m i)}}{1-2\pi m i}\right]_0^1 = \frac{e^{1-2\pi m i}-1}{1-2\pi m i} = \frac{e-1}{1-2\pi m i} \Longrightarrow e^x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e-1}{1-2\pi m i} e^{i2\pi m x}$$

الانتقال إلى النشر الحقيقي:

$$a_0 = 2C_0 = 2(e-1)$$

$$a_m = C_m + C_{-m} = \frac{e-1}{1-2\pi i m} + \frac{e-1}{1+2\pi i m} = \frac{2(e-1)}{1+4\pi^2 m^2}$$

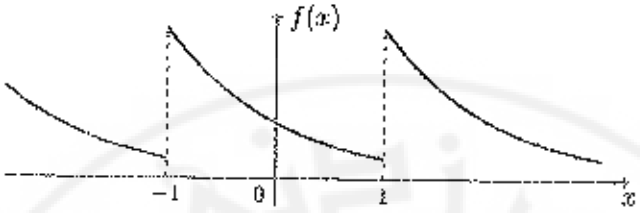
$$b_m = i(C_m - C_{-m}) = i\left(\frac{e-1}{1-2\pi i m} - \frac{-1}{1+2\pi i m}\right) = \frac{-4\pi m(e-1)}{1+4\pi^2 m^2}$$

ومنه:

$$e^x = (e-1) + 2(e-1)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 m^2}[\cos(2\pi m x) - 2\pi m \sin(2\pi m x)]$$

مثال (3-29): أوجد النشر العقدي لمتسلسلة فوريه للتابع: $f(x) = e^{-x}$ في المجال $-1 \le x \le 1$.

الحل:



الشكل (3-51): منحى التابع $f(x) = e^{x}$ في المجال $x \in [-1, 1]$.

الدور $T = 2, L = 1$ وبالتالي:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i(mnx)}$$

$$C_m = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x} \cdot e^{-i(mnx)}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+imn)x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1+imn)x}}{-(1+imn)}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{1+imn} - e^{-(1+imn)}}{2(1+imn)} =$$

$$= \frac{e(\cos mn + i\sin mn) - e^{-1}(\cos mn - i\sin mn)}{2(1+imn)} =$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2}(-1)^m \cdot \frac{1 - imn}{1 + m^2n^2} = \frac{(-1)^m(1-imn)}{1+m^2n^2}\sinh 1$$

$$\Rightarrow e^{-x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m(1-imn)}{1+m^2n^2}\sinh 1 \cdot e^{i(mn)x}$$

6-3 التحليل التوافقي Harmonic Analysis:

كما نعلم فإن الكثير من الظواهر الفيزيائية تمثّل وفق توابع دوريّة، ومثل هذه التوابع كما رأينا يمكن تمثيلها بمتسلسلة فوريه، ومن جهة أخرى يمكن التعبير عن التوابع الدّورية بدلالة اهتزازات مختلفة التّواتر، إذ تختلف هذه التواترات بأمثال صحيحة لتواتر إحداها مثل هذا التمثيل الأخير يسمى تحليلاً توافقياً للدّالة الدّورية، سنرى أن هناك توافقاً بين التحليل التوافقي وسلسلة فوريه.

إنّ التحليل التوافقي هو تمثيل أي تابع دوري دوره $T = 2L$ بالمتسلسلة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T} + \varphi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega x + \varphi_n) \quad (35)$$

ويمكن أن يكتب بشكل آخر:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega x - \varphi_n) \quad (36)$$

يسمى الحد العام لهذه المتسلسلة توافقية من المرتبة n، وتسمى A_n سعة التوافقية و n/T تردد التوافقية (تواترها) و φ_n فرق الصفحة (فرق الطّور).

إنّ هذه المتسلسلة (35) هي فعلياً متسلسلة فوريه للتّابع f، نتحقق من ذلك:

$$f(x) = A_0 \sin\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos\omega x \sin\varphi_n + A_n \cos\varphi_n \sin\omega x]$$

حيث إنّ:

$$\omega = \frac{2\pi n}{T}, \quad \frac{a_0}{2} = A_0 \sin\varphi_0, \quad a_n = A_n \sin\varphi_n, \quad b_n = A_n \cos\varphi_n \quad (37)$$

ونجد أنّ:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \frac{a_n}{b_n} = \tan\varphi_n \Rightarrow \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad (38)$$

وفي الشكل الثاني (36) نجد أنّ:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\omega \cos\varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\omega \sin\varphi_n$$

فيكون عندئذٍ:

$$2A_0 = a_0, \qquad a_n = A_n \cos\varphi_n, \qquad b_n = A_n \sin\varphi_n \quad (39)$$

وأيضاً:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (40)$$

مثال (3-30): حلّل توافقياً التّابع الدّوري $f(x) = x^2$ ذا الدّور 2π على المجال $(0, 2\pi)$ وارسمه في المجال $(-\pi, 3\pi)$.

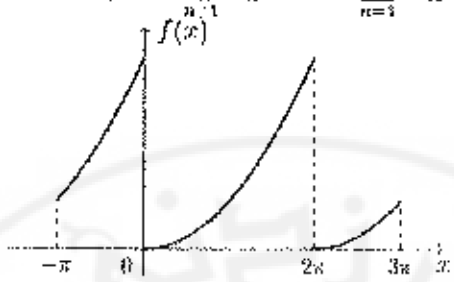
الحل: يمكن نشر هذا التّابع ذي الدّور $T = 2\pi = 2L$ وفق متسلسلة فوريه فنجد أنّ:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}x^2 + \frac{\cos nx}{n^2}(2x) - \frac{\sin nx}{n^3}(2)\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}x^2 + \frac{\sin nx}{n^2}(2x) + \frac{\cos nx}{n^3}(2)\right]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$



الشكل (3-52): منحى التابع $f(x) = x^2$ في المجال $(-\pi, 3\pi)$.

وحسب علاقات التحويل إلى التحليل التوافقي (40) نجد أنّ:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{n^2}\right)^2 + \left(-\frac{4\pi}{n}\right)^2} = \frac{4}{n^2}\sqrt{1+\pi^2 n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{4\pi}{n}\Big/\frac{4}{n^2}\right) = \tan^{-1}(-n\pi) = 0$$

$$x^2 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\omega x - \varphi_n) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\sqrt{1+\pi^2 n^2}\cos(nx)$$

فالاهتزاز الأساسي $A_1\cos(x-\varphi_1)$ سعته A_1 وفرق طوره φ_1 وتردده $1/2\pi$ أما التوافقية النونية فهي $A_n\cos(nx-\varphi_n)$ سعتها A_n وفرق طورها φ_n وترددها $n/2\pi$.

7-3 الشكل العام لمتسلسلة فوريه (نشر التّابع في متسلسلة توابع متعامدة)

1-7-3 تعريف التوابع المتعامدة:

لتكن $\{g_1(t), g_2(t), \cdots\}$ جملة توابع حقيقية معرفة على المجال $[a,b]$. نقول إنّ هذه الجملة متعامدة في $[a,b]$ إذا حققت الشّرط التّالي:

$$(g_n, g_m) = \int_a^b g_n(t)g_m(t)dt = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \alpha_n^2 & ; \quad m = n \end{cases} \qquad (41)$$

تسمى هذه التكامل الجداء الداخلي ونرمز له بالرمز (g_n, g_m) ونسمي α_n نظيم التابع g_n حيث إنّ:

$$\alpha_n = \sqrt{(g_n, g_m)} = \|g_n\| = \sqrt{\int_a^b g_n^2(t)dt} \qquad (42)$$

إذا كان $a_n = 1$ سُمّيت الجملة منظّمة.

ملاحظة: إذا كان $a_n \neq 1$ نقسم كل تابع على نظيره ليصبح منظّماً.

مثال (31-3): بين أنّ الجملة: $\{\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \sin 4t, \cdots\}$ متعامدة في المجال $]-\pi, \pi[$.

الحل:

$$\|g_n\|^2 = \int_{\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)t - \cos(n+m)t]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)t}{n-m} - \frac{\sin(n+m)t}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad ; \quad (n \neq m)$$

$$n = m \Longrightarrow \|g_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2nt}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\Longrightarrow \|g_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\, dt = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \pi & ; \quad m = n \end{cases}$$

إذن الجملة متعامدة. تصبح منظّمة بتقسيم كل تابع على نظيره.

$$\left\{\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots, \quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots\right\}$$

مثال (32-3): بيّن أنّ الجملة: $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cdots\}$ متعامدة في المجال $]-\pi, \pi[$.

الحل: نبدأ بتعامد التّابع 1 مع بقيّة توابع الجملة:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1)(1)dt = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (1)\cos nt\, dt = \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1)\sin nt\, dt = -\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

أي أنّ التّابع الأوّل 1 يعامد البقيّة.

نتأكد من أنّ التّوابع $\cos nt$ تعامد البقيّة:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nt}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2nt}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot \sin mt\, dt = 0 \quad ; \quad \forall m, n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot \cos mt\, dt = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \pi & ; \quad m = n \end{cases}$$

وذلك باستخدام دساتير التّحويل من جداء إلى مجموع.

بذات الأسلوب نتأكد من أنّ التّوابع $\sin nt$ تعامد البقيّة.

إذن الجملة متعامدة. تصبح منظّمة بتقسيم كل تابع على نظيره:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \dots\right\}$$

نتيجة: التوابع الموجودة في متسلسلة فوريه هي توابع منظّمة.

2-7-3 تعميم النشر:

يمكن نشر التابع $f(t)$ المعرف على المجال $[a,b]$ في متسلسلة توابع متعامدة $\{g_n(t)\}$ معرفة على المجال $[a,b]$ كما يلي:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m g_m(t) \quad (43)$$

C_m ثوابت وتعطى بالعلاقة التالية:

$$C_m = \frac{1}{\|g_m(t)\|^2}\int_a^b f(t)g_m(t)dt \quad ; \quad m \in \mathbb{N} \quad (44)$$

مثال (33-3): أوجد متسلسلة فوريه الممثلة التابع: $f(t) = t \quad ; \quad t \in]-\pi,\pi[$ بدلالة التوابع المتعامدة: $\{\sin mt \quad ; \quad m \in \mathbb{N}\}$

الحل:

$$\|g_m(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mt\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2mt}{2}dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2mt}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\pi}$$

$$C_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t\cos mt}{m}+\frac{\sin mt}{m^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^m\frac{2}{m}$$

$$f(t) = t = \sum_{m=1}^{\infty} C_m g_m(t) = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin mt}{m}$$

8-3 تكامل فوريه Fourier Integral

(تحويل فوريه للإشارات المستمرة وغير الدّورية)

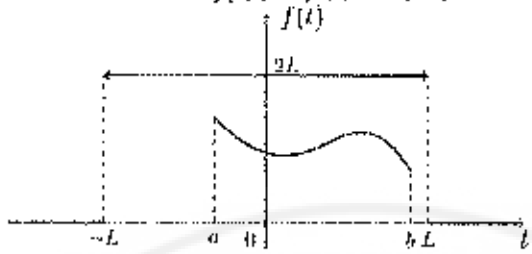
هو التحويل من متسلسلة إلى تكامل. وهو تعميم لمتسلسلة فوريه لتشمل التوابع غير الدّورية، ويعتمد مبدأ التعميم على اعتبار التابع $f(t)$ غير الدّوري على أنّه نهاية لتابع دوري $f_T(t)$ عندما يسعى دوره T إلى الـ ∞.

ليكن $f(t)$ تابع غير دوري، معرف على المجال $[a,b]$، نأخذ مجالاً متناظراً $[-L,L]$، نعرّف عليه تابعاً جديداً ندعوه $g(t)$.

التّابع الجديد $g(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & ; \ |t| \le L \\ 0 & ; \ |t| > L \end{cases} \quad ; \quad g(t+T) = g(t) = f_T(t) \quad (45)$$

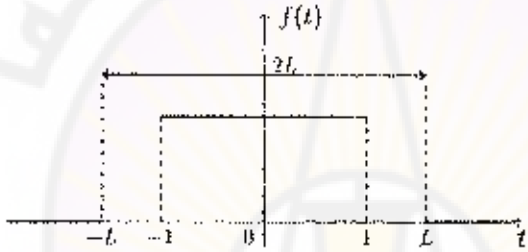
$$T \to \infty \implies f_T(t) \to f(t) \qquad (46)$$



الشكل (3-53): منحني التابع $f(t)$ في المجال $[a, b]$.

فمثلاً، إذا كان: $f(t) = \begin{cases} 1 & ; \ |t| < 1 \\ 0 & ; \ |t| > 1 \end{cases}$. نختار L أي عدد أكبر من الواحد، وعندئذ نعرف التابع الدّوري ذا الدّور $T = 2L$ كما يلي: $f_T(t) = \begin{cases} 1 & ; \ |t| \le 1 \\ 0 & ; \ 1 < |t| < L \end{cases}$ إنّ: $f_T(T + t) = f_T(t)$

حيث $T = 2L > 2$ و $\lim_{T \to \infty} f_T(t) = f(t)$، أو: $\lim_{L \to \infty} f_T(t) = f(t) \qquad (47)$



الشكل (3-54): منحني التابع $f(t) = 1$ في المجال $[-1, 1]$.

3-8-1 تكامل فوريه كنهاية لمتسلسلة فوريه:

تعطى متسلسلة فوريه للتّابع $f_T(t)$ كما يلي:

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] \qquad (48)$$

ونفرض أنّ: $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ فنأخذ أمثال المتسلسلة (ثوابت أويلر) الشّكل:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_T(v)\, dv, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_T(v) \cos(\omega_n v)\, dv, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_T(v) \sin(\omega_n v)\, dv, \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

نعوض في متسلسلة فوريه (48) نجد أنّ:

$$f_T(t) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_T(v)dv + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\omega_n t)\int_{-L}^{L} f_T(v)\cos(\omega_n v)\,dv + \sin(\omega_n t)\int_{-L}^{L} f_T(v)\sin(\omega_n v)\,dv\right] \quad (50)$$

نفرض أنّ:

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi(n+1)}{L} - \frac{\pi n}{L} = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\Delta\omega_n}{\pi} \quad (51)$$

نعوض في العلاقة (50) الأخيرة نجد أنّ:

$$f_T(t) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_T(v)dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\omega_n t)\,\Delta\omega_n\int_{-L}^{L} f_T(v)\cos(\omega_n v)\,dv + \sin(\omega_n t)\,\Delta\omega_n\int_{-L}^{L} f_T(v)\sin(\omega_n v)\,dv\right] \quad (52)$$

نجعل الآن $T \to \infty$، ولما كانت $\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t)$، ونفرض أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$$

فإنّ الحدّ الأوّل من العلاقة السّابقة (52) يسعى إلى الصّفر أي أنّ:

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_T(v)dv = 0 \quad (53)$$

ولمّا كان $\Delta\omega_n = \pi/n$ يسعى إلى الصّفر عندما $T \to \infty$ $(\Delta\omega_n \to d\omega)$ فإنّ العلاقة السّابقة (52) تصبح كما يلي:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos(\omega t)\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(\omega v)\,dv + \sin(\omega t)\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v)\,dv\right]d\omega \quad (54)$$

ونفرض أنّ:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt, \qquad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt \quad (55)$$

أي أنّ العلاقة الأخيرة (54) تكتب بالشّكل:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)]d\omega \quad (56)$$

وتسمّى هذه العلاقة بتكامل فوريه للتّابع اللادوري (غير الدوري) $f(t)$.

إذن، لإيجاد تكامل فوريه للتّابع اللادوري $f(t)$ (أي لتمثيل أي تابع $f(t)$ بتكامل فوريه) يجب أنْ تتحقق الشّروط:

1- التّابع $f(t)$ ومشتقه $f'(t)$ مستمرّان قطعيّاً (جزئياً).

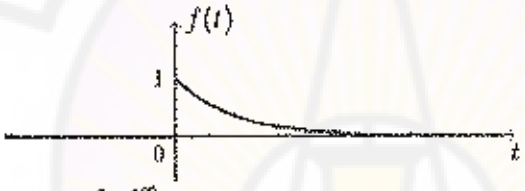
2- وكون التّكامل: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt < \infty$، أي محدوداً.

3- وتكون قيمة $f(t)$ عند كل نقطة من نقاط انقطاعه من النّوع الأوّل مساوية متوسط قيمتي $f(t)$ عند طرفي هذه النّقطة، أي: $\frac{1}{2}\left(\text{النهاية من اليمين} + \text{النهاية من اليسار}\right)$، أي في نقاط الانقطاع:

$$f(t) = \frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

مثال (3-34): أوجد نشر التّابع: $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; \ t \geq 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases}$ وفق تكامل فوريه.

الحل:



$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t]d\omega\ ;$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\cos(\omega t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{(0)\cos(\omega t)\,dt}_{=0} + \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u}\,\underbrace{\cos(\omega t)\,dt}_{dv} =$$

$$= \left[\frac{e^{-t}\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\omega}\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u}\,\underbrace{\sin(\omega t)\,d\omega}_{dv} = 0 + \frac{1}{\omega}\left\{\left[\frac{-e^{-t}\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{\infty} - \frac{A}{\omega}\right\}$$

$$\Rightarrow A + \frac{A}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\sin(\omega t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{(0)\sin(\omega t)\,dt}_{=0} + \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u}\,\underbrace{\sin(\omega t)\,dt}_{dv} =$$

$$= \left[\frac{-e^{-t}\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{\omega}\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u}\,\underbrace{\cos(\omega t)\,d\omega}_{dv} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}\left\{\left[\frac{e^{-t}\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^{\infty} + \frac{B}{\omega}\right\}$$

$$\Rightarrow B + \frac{B}{\omega^2} = \frac{1}{\omega} \Rightarrow B(\omega) = \frac{\omega}{\omega^2+1}$$

$$\Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{1+\omega^2}\, d\omega$$

2-8-3 تكامل فوريه الجيبي وتكامله التجيبي:

إذا كان التابع $f(t)$ زوجياً فإنّ:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt \quad (57)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt = 0 \quad (58)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t)\, d\omega \quad (59)$$

وهذا التكامل الأخير يدعى بتكامل فوريه التجيبي.

إذا كان التابع $f(t)$ فردياً فإنّ:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = 0 \quad (60)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt \quad (61)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega t)\, d\omega \quad (62)$$

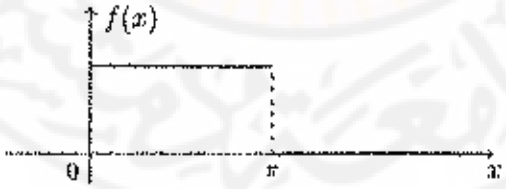
وهذا التكامل الأخير يدعى بتكامل فوريه الجيبي.

ملاحظة: يمكن تمديد مجال تعريف أي تابع بحيث يصبح زوجياً أو فردياً كما فعلنا في النشر في متسلسلة فوريه.

مثال (35-3): عبّر عن التابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \ x > \pi \end{cases}$ بتكامل فوريه الجيبي. ثمّ استنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(\pi\omega)}{\omega}\sin(x\omega)\, d\omega$$

الحل:



الشكل (3-55): المنحني البياني للتابع $f(x)$.

إن تكامل فوريه الجيبي للتابع $f(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega x)\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(\omega x)\, d\omega \int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(\omega x)\, d\omega \int_0^{\pi} (1)\sin(\omega t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(\omega x)\, d\omega \left[\frac{-\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(\omega\pi)}{\omega}\sin(\omega x)\, d\omega \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(\omega\pi)}{\omega}\sin(\omega x)\, d\omega = \frac{\pi}{2} f(x) = \begin{cases} \pi/2 & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \quad x > \pi \end{cases}$$

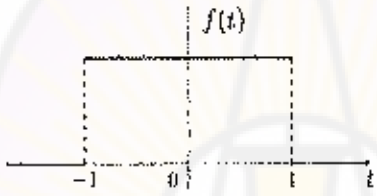
في النقطة $x = \pi$ والتي هي نقطة انقطاع للتابع $f(x)$، فإنّ قيمة تكامل فوريه هي:

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

مثال (3-36): أوجد تكامل فوريه للتابع: $f(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad |t| < 1 \\ 0 & ; \quad |t| > 1 \end{cases}$. ثم استنتج قيمة التكامل:

$$(a)\ \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega t \sin\omega}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} \pi/2 & ; \quad |t| < 1 \\ \pi/4 & ; \quad |t| = 1 \\ 0 & ; \quad |t| > 1 \end{cases}, \qquad (b)\quad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

الحل:



الشكل (3-56): المنحى البياني للتابع $f(t)$.

لمّا كان هذا التابع زوجياً في $\mathbb{R}$، فإنّ $B(\omega) = 0$. نوجد $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = \int_{-1}^{1} (1)\cos(\omega t)\, dt = 2\int_0^1 \cos(\omega t)\, dt = 2\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^1$$

$$= 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

ومنه فإنّ تكامل فوريه:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & ; \quad |t| < 1 \\ 0 & ; \quad |t| > 1 \\ 1/2 & ; \quad t = \pm 1 \end{cases}$$

أي أنّ:

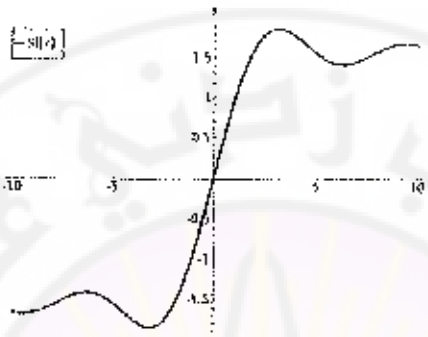
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} \pi/2 & ; \quad |t| < 1 \\ 0 & ; \quad |t| > 1 \\ \pi/4 & ; \quad t = \pm 1 \end{cases}$$

لحساب التكامل I نعوض في العلاقة الأخيرة $t = 0$ فنجد أنّ:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega \implies I = \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

أي إنّ:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

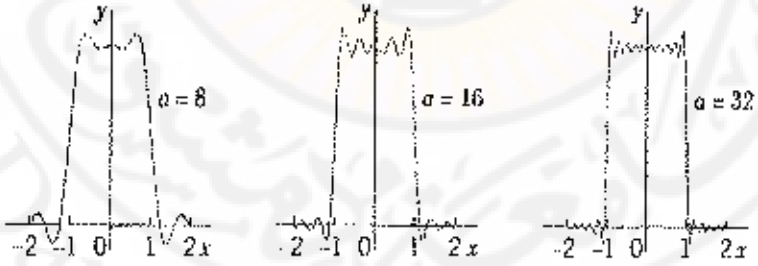


الشكل (3-57): المنحي البياني للتابع الجيب التكاملي $\mathrm{Si}(x)$.

كما هو الحال في متسلسلة فوريه إنّ المنحني البياني للمجموع الجزئي يعطي تقريباً للمنحني البياني للتابع، وكلّما كبر العدد n كان التقريب أدقّ، والتمثيل بمتسلسلة فوريه كان أفضل. لذلك يمكن فعل شيء مماثل مع تكامل فوريه، وذلك بوضع العدد n مكان ∞ في صيغة تكامل فوريه وإعطاء قيم لـ a لرؤية تقريبات التكامل للمنحني البياني للتابع.

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi}\int_0^{a} \frac{\cos\omega x \sin\omega}{\omega}\, d\omega$$

وبإعطاء القيم $a = 8, 16, 32$ نجد أنّ:



الشكل (3-58): تقريبات تكامل فوريه للتابع $f(x)$ من أجل: $a = 8, 16, 32$، ونلاحظ بوضوح تطور ظاهرة جيبس.

يوضح الشكل (3-58) السّابق الاهتزازات قرب نقاط الانقطاع للتّابع $f(x)$. إنّ هذه الاهتزازات تختفي عندما تسعى a إلى ∞. ولكن هذا غير صحيح لأنّه بتزايد a، تتحول إلى قفزات عند النقاط $x = \pm 1$، كما هو الحال أيضاً في متسلسلات فوريه.

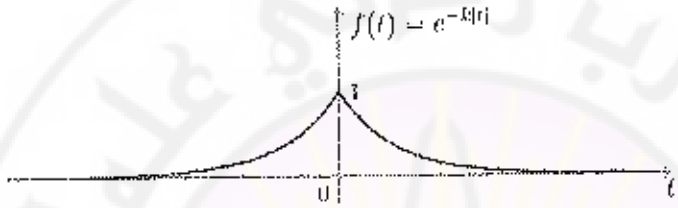

Josiah Willard Gibbs
(Feb 11, 1839-Apr 28, 1903)

تسمّى هذه الظّاهرة بظاهرة جيبس[*] Gibbs phenomenon.

مثال (37-3): أوجد تكامل فوريه للتابع $f(t) = e^{-k|t|}\ ;\ k > 0$، ثم استنتج قيمة التكامل:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2 + k^2}\, d\omega$$

الحل: لما كان هذا التابع زوجيّاً في $\mathbb{R}$ (لأن $f(-t) = e^{-k|-t|} = e^{-k|t|} = f(t)$)، فإن $B(\omega) = 0$.



الشكل (59-3): المنحنى البياني للتابع $f(t) = e^{-k|t|}$.

نوجد $A(\omega)$:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = 2\int_0^{\infty} e^{-kt}\cos(\omega t)\, dt$$

(يمكن حل هذا التكامل عن طريق تحويل لابلاس) نقوم بتحويل $\cos(\omega t)$ إلى الشكل الأسي:

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-kt}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)dt = \int_0^{\infty}\left(e^{t(i\omega - k)} + e^{-t(k+i\omega)}\right)dt =$$

$$= \left[\frac{e^{t(i\omega-k)}}{i\omega - k} - \frac{e^{-t(k+i\omega)}}{i\omega + k}\right]_0^{\infty} = \frac{2k}{\omega^2 + k^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-k|t|} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2k}{\omega^2 + k^2}\cos(\omega t)\, d\omega$$

وهو تكامل فوريه للتابع $f(t)$. لحساب التكامل I نعوض $t = 1$:

$$f(1) = e^{-k} = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2 + k^2}\, d\omega \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2ke^{k}}$$

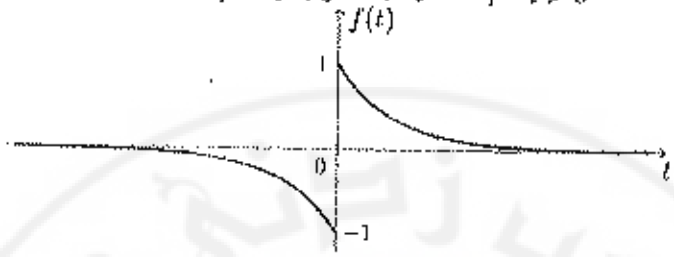
مثال (38-3): أوجد تكامل فوريه للتابع $f(t) = \begin{cases} e^{-kt} & ;\ t > 0 \\ -e^{kt} & ;\ t < 0 \end{cases}\ ;\ k > 0$، ثم استنتج قيمة التكامل:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin\omega}{\omega^2 + k^2}\, d\omega$$

(*) ظاهرة جيبس: في الموجات المربعة والموجات المثلثية والموجات التي قد تمتلك منحنيات غير ناعمة فإنّ ثمّة ظاهرة أخرى زيادة عدد التوافقيات وفي توليد تبتعد عمودية حادة في مواقع الميل العمودي وذلك بسبب نقاط عدم الاتصال والتي تؤدي لانتقال مفاجئ في التابع. تعرف هذه الظاهرة بظاهره جيبس وهو عالم أمريكي.

الحل: لمّا كان هذا التّابع فرديّاً في $\mathbb{R}$، لأنّ:

$$f(-t)=\begin{cases} e^{-k(-t)} & ; \quad -t>0 \\ -e^{k(-t)} & ; \quad -t<0 \end{cases}=\begin{cases} e^{kt} & ; \quad t<0 \\ -e^{-kt} & ; \quad t>0 \end{cases}=-f(t)$$



الشكل (3-60): الملحق البياني للتابع $f(t)$.

فإنّ: $A(\omega)=0$، لنوجد $B(\omega)$:

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt=2\int_{0}^{\infty} e^{-kt}\sin(\omega t)\,dt$$

(يمكن حل هذا التّكامل عن طريق تحويل لابلاس) نقوم بتحويل $\sin(\omega t)$ إلى الشّكل الأسيّ:

$$B(\omega)=-i\int_{0}^{\infty} e^{-kt}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})dt=$$

$$=-i\int_{0}^{\infty}\left(e^{t(i\omega-k)}-e^{-t(k+i\omega)}\right)dt=-i\left[\frac{e^{t(i\omega-k)}}{i\omega-k}+\frac{e^{-t(k+i\omega)}}{i\omega+k}\right]_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{2\omega}{\omega^2+k^2}\Longrightarrow f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\sin(\omega t)\,d\omega$$

وهو تكامل فوريه.

لحساب التّكامل I، نعوض في تكامل فوريه $t=1$:

$$f(1)=e^{-k}=\frac{2k}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega}{\omega^2+k^2}d\omega \quad \Longrightarrow \quad I=\frac{\pi}{2ke^{k}}$$

مثال (3-39): أوجد معادلة التّابع $f(t)$، إذا كان $f(t)$ تابعاً زوجيّاً ويحقق العلاقة:

$$\int_{0}^{\infty} f(t)\cos at\,dt=\begin{cases} 1-a & ; \quad 0\le a\le 1 \\ 0 & ; \quad a>1 \end{cases}$$

الحل: يمكننا استعمال تكامل فوريه التّجيبي لحل معادلة التّكامل السّابق، ليكن:

$$A(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\begin{cases} 2(1-\omega) & ; \quad 0\le a\le 1 \\ 0 & ; \quad a>1 \end{cases}\Longrightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\int_{0}^{1}\frac{2}{\pi}(1-\omega)\cos\omega t\,d\omega\Longrightarrow$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi t^2}(1-\cos t).$$

9-3 تحويلات فوريه Fourier Transforms:

من تكامل فوريه للتابع $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t]d\omega$$

نعوض قيمة كلٍّ من $A(\omega)$ و$B(\omega)$ في هذا التكامل فيكون:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\cos(\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(\omega v)\,dv + \sin(\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin(\omega v)\,dv\right]d\omega$$

لمّا كان التّابعان $\cos(\omega t)$ و$\sin(\omega t)$ غير متعلقين بـ v فيمكن إدخالهما إلى داخل التّكامل الّذي يخصّ v ونجمع:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(v)[\cos(\omega t)\cos(\omega v) + \sin(\omega t)\sin(\omega v)]dv\right\}d\omega$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega(t\quad v)\,dv\right]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega(t-v)\,dv\right]d\omega \qquad (63)$$

وهو شكل آخر لتكامل فوريه للتابع f، حيث إنّ $\cos\omega(t-v)$ تابع زوجيّ بالنسبة إلى ω وكذلك فإنّ $\sin\omega(t-v)$ هو تابع فرديّ أي أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega(t-v)\,dv\right]d\omega = 0 \qquad (64)$$

نضيف للتّكامل:

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega(t-v)\,dv\right]d\omega = 0 \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(v)[\cos\omega(t-v) + i\sin\omega(t-v)]dv\right\}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{i\omega(t-v)}dv\right]d\omega \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-i\omega v}dv\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_{\omega}e^{i\omega t}d\omega \qquad (65)$$

نسمّي العلاقة (65) بتكامل فوريه بالشكل العقدي حيث:

$$C_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (66)$$

ونسمّي تحويل فوريه للتّابع $f(t)$ التّابع $F(\omega)$ ويعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\omega v}dv = F(\omega) = \hat{f}(\omega) \qquad (67)$$

ونسمّي التّابع:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (68)$$

أصل التّحويل أو تحويل فوريه العكسي، ونكتب:

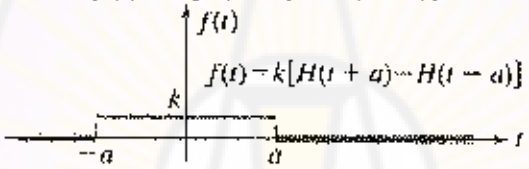
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \qquad (69)$$

ملاحظة: إنّ تحويل فوريه للتّابع $f(t)$ بالمعاملات C_ω هو الشكل العقدي لتكامل فوريه الذي يمثّل التّابع $f(t)$.

مثال (3-40): ليكن a وb عددين موجبين، وليكن التّابع: $f(t) = \begin{cases} k & ; \quad -a \le t < a \\ 0 & ; \quad t > -a,\ t \ge a \end{cases}$، أوجد تحويل فوريه لهذا التّابع النّبضي.

الحل: إنّ هذا التّابع النّبضي يمكن كتابته باستخدام تابع الهيفيسايد بالشكل:

$$f(t) = k[H(t+a) - H(t-a)]$$

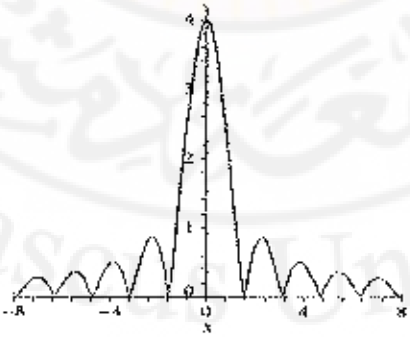


الشكل (3-61): المنحني البياني للتّابع $f(t)$.

إنّ تكامل فوريه لهذا التّابع يعطى بالعلاقة:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-a}^{a} ke^{-i\omega t}dt = \left[\frac{ke^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{k}{i\omega}\left[e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right] = \frac{2k}{\omega}\sin(a\omega) \Rightarrow |\hat{f}(\omega)| = 2k\left|\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\right|$$



الشكل (3-62): المنحني البياني لتحويل فوريه المطلق $|\hat{f}(\omega)|$، من أجل $k = 1, a = 2$.

مثال (41-3): أوجد تحويل فوريه للتابع $f(t)=e^{-c|t|}$، حيث c عدد موجب.

الحل: يمكن كتابة التابع بالشكل: $f(t)=\begin{cases} e^{-ct} & ; \quad t\geq 0 \\ e^{ct} & ; \quad t<0 \end{cases}$. وبالتالي:

$$\mathcal{F}[f(t)]=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c|t|}e^{-i\omega t}dt=$$

$$\int_{-\infty}^{0}e^{ct}e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-ct}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(c-i\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(c+i\omega)t}dt$$

$$=\left[\frac{e^{(c-i\omega)t}}{c-i\omega}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-(c+i\omega)t}}{-(c+i\omega)}\right]_{0}^{\infty}=\left(\frac{1}{c-i\omega}+\frac{1}{c+i\omega}\right)=\frac{2c}{c^2+\omega^2}$$

مثال (42-3): أوجد تحويل فوريه للتابع $f(t)=H(t)e^{-5t}$، حيث $H(t)$ هو تابع الهيفيساید.

الحل: يمكن كتابة التابع بالشكل: $f(t)=\begin{cases} e^{-5t} & ; \quad t\geq 0 \\ 0 & ; \quad t<0 \end{cases}$. وبالتالي:

$$\mathcal{F}[f(t)]=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}H(t)e^{-5t}e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-5t}e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(5+i\omega)t}dt=\left[\frac{e^{-(5+i\omega)t}}{-(5+i\omega)}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{5+i\omega}$$

مثال (43-3): أوجد تحويل فوريه للتابع $f(t)=\begin{cases} 1-|t| & ; \quad -1\leq t\leq 1 \\ 0 & ; \quad |t|>1 \end{cases}$، حيث $f(t)$ هو تابع مستمر و $f'(t)$ مستمر قطعياً.

الحل:

$$\mathcal{F}[f(t)]=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\int_{-1}^{0}\underbrace{(1+t)}_{u}\underbrace{e^{-i\omega t}dt}_{dv}+\int_{0}^{1}\underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{e^{-i\omega t}dt}_{dv}=$$

$$\left[\frac{(1+t)e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{0}e^{-i\omega t}dt+\left[\frac{(1-t)e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{0}^{1}-\frac{1}{i\omega}\int_{0}^{1}e^{-i\omega t}dt=$$

$$=-\frac{1}{i\omega}+\frac{0}{i\omega}-\left[\frac{e^{-i\omega t}}{i^2\omega^2}\right]_{-1}^{0}+\frac{0}{i\omega}+\frac{1}{i\omega}+\left[\frac{e^{-i\omega t}}{i^2\omega^2}\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{i^2\omega^2}+\frac{e^{i\omega}}{i^2\omega^2}+\frac{e^{-i\omega}}{i^2\omega^2}-\frac{1}{i^2\omega^2}=\frac{2-2\cos\omega}{\omega^2}=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

مثال (44-3): أوجد تحويل فوريه المعاكس للتابع الذي حصلت عليه في المثال السابق أي للتابع: $2(1-\cos\omega)/\omega^2$.

الحل:

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \pi(t+1)\mathrm{sgn}(t+1) + \pi(t-1)\mathrm{sgn}(t-1) - 2\mathrm{sgn}(t)$$

الذي حصلنا عليه باستخدام بيئة مابل **Maple 17** حيث sgn هو تابع الإشارة:

$$\mathrm{sgn}(t) = \mathrm{signum}(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t > 0 \\ -1 & ; \quad t < 0 \\ 0 & ; \quad t = 0 \end{cases} \qquad (70)$$

فإذا عددنا الحالات $t < -1$ و $-1 < t < 1$ و $t > 1$، فإننا نحصل على التّابع $f(t)$ نفسه، وهذا يبرهن أنّ: $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

3-9-1 العلاقة بين تحويلي فوريه ولابلاس:

ليكن التّابع: $$f(t) = \begin{cases} e^{-xt}\varphi(t) & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases} \qquad (71)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-xt}\varphi(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)e^{-t(x+i\omega)}dt = \mathcal{L}[\varphi(t)]$$

ليكن $s = x + i\omega$ عدد عقدي حيث: $x = Re(s)$, $\omega = Im(s)$، نعرّف تحويل لابلاس للتّابع φ بالتكامل:

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)e^{-st}dt = \mathcal{F}[f(t)] \qquad (72)$$

أي أنّ تحويل فوريه للتّابع $f(t)$ هو تحويل لابلاس للتّابع $\varphi(t)$.

3-9-2 خواص تحويلات فوريه:

1- الخاصّة الخطيّة:

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ و $\mathcal{F}[g(t)]$ تحويلي فوريه للتّابعين $f(t)$ و $g(t)$ على التّرتيب، فإنّ:

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{F}[f(t)] + \beta\mathcal{F}[g(t)] \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad (73)$$

الإثبات: لدينا حسب تعريف تحويل فوريه:

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)dt \ , \qquad F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}g(t)dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt =$$

$$= \alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)dt + \beta\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}g(t)dt = \alpha\mathcal{F}[f(t)] + \beta\mathcal{F}[g(t)]$$

2- الانزياح (الانسحاب على محور الزمن):

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ تحويل فوريه للتّابع $f(t)$، فإنّ: $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]$ (74)

الإثبات:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \Rightarrow \mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t-t_0)dt$$

نفرض أنّ: $t - t_0 = u$ فيكون: $dt = du$ وبالتالي:

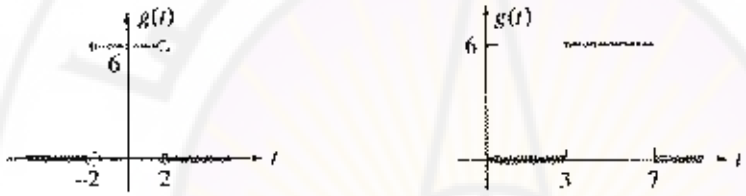
$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(u+t_0)} f(u)du = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u)du = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]$$

نتيجة: إنّ تحويل فوريه العكسي لخاصة الانزياح على محور الزمن يكون:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\omega t_0} f(\omega)\right] = f(t-t_0) \quad (75)$$

مثال (3-45): أوجد تحويل فوريه للتابع $g(t) = \begin{cases} 6 & ; \quad 3 \le t < 7 \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$.

الحل:



(a) منحني التابع قبل الإزاحة. (b) منحني التابع بعد الإزاحة بـ 5 نحو اليسار.

الشكل (3-63): المنحني البياني للتابع $g(t)$، قبل الإزاحة (a) وبعد الإزاحة (b).

طبعاً يمكننا حساب $\hat{g}(\omega)$ باستخدام التكامل مباشرة. ولكن يمكننا أيضاً استخدام خاصة الانزياح، نلاحظ أنّ مركز النبضة ليس الصفر لذلك نبحث عن انسحاب زمني يجعل مركز النبضة هو الصفر فنجد أنّ $t = 5$ هو الانزياح المطلوب نحو اليسار، كما هو موضح في الشكل أعلاه لنرمز للتابع المزاح بـ $f(t)$.

$$f(t) = g(t+5) = \begin{cases} 6 & ; \quad -2 \le t < 2 \\ 0 & ; \quad \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \Rightarrow g(t) = f(t-5)$$

ووجدنا أنّ تحويل فوريه للتابع $f(t) = \begin{cases} k & ; \quad -a \le t < a \\ 0 & ; \quad \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$ هو $\hat{f}(\omega) = \frac{2k}{\omega}\sin(a\omega)$ وبالتالي

$\hat{f}(\omega) = \frac{12}{\omega}\sin(2\omega)$ وبتطبيق الخاصة السابقة نجد أنّ:

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[f(t-5)] = e^{-5i\omega}\mathcal{F}[f(t)] = 12e^{-5i\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$$

مثال (3-46): أوجد تحويل فوريه العكسي للتابع $\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}$، أي أوجد: $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5+i\omega}\right]$

الحل: بملاحظة التابع الأسي $e^{2i\omega}$ نجد أنّ: $t_0 = -2$، وبالتالي بتطبيق العلاقة (73) نجد:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{5+i\omega} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[e^{2i\omega}\hat{f}(\omega)\right] = f\left(t-(-2)\right) = f(t+2) \Rightarrow$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{5 + i\omega}\right] = H(t)e^{-5t}$$

حسب ما وجدنا في المثال أعلاه فيكون:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega}\right] = f(t+2) = H(t+2)e^{-5(t+2)}$$

3- الانزياح (الانسحاب على محور التردد):

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega)$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، وكان ω_0 عدداً حقيقياً ما فإنّ:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = \hat{f}(\omega - \omega_0) \quad (76)$$

الإثبات:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} f(t) dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

نتيجة: إنّ تحويل فوريه العكسي لخاصة الانزياح على محور التردد يكون:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega - \omega_0)] = e^{i\omega_0 t} f(t) \quad (77)$$

4- التحاكي (تحويل فوريه لـ $f(t/\alpha)$):

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، و α عدداً غير معدوم فإنّ:

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha\omega) = \alpha \mathcal{F}[f(t)]_{\omega \to \omega_0} \quad (78)$$

الإثبات:

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt$$

نفرض أنّ: $t/\alpha = u$ فيكون: $dt = \alpha du$ وبالتّالي:

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha \int_{\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\omega u} f(u) du = \alpha F(\alpha\omega)$$

5- التحاكي (تحويل فوريه لـ $f(\alpha t)$):

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، و α عدداً غير معدوم فإنّ:

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad ; \quad \alpha \neq 0 \quad (79)$$

الإثبات:

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(\alpha t) dt$$

نفرض أنّ: $\alpha t = u$ فيكون: $\alpha dt = du$ وبالتّالي:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\omega u}{a}} f(u)du = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

نتيجة: إنّ تحويل فوريه العكسي لخاصة التحاكي يكون:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f\left(\frac{\omega}{a}\right)\right] = |a|\,f(at) \quad (80)$$

مثال (47-3): أوجد تحويل فوريه للتابع $g(t) = \begin{cases} 1-|7t| & ; \ -1/7 \le t \le 1/7 \\ 0 & ; \ \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$.

الحل: وجدنا أنّ تحويل فوريه للتابع: $f(t) = \begin{cases} 1-|t| & ; \ -1 \le t \le 1 \\ 0 & ; \ \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$ هو:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

ونلاحظ أنّ التابع $g(t)$ يمكن كتابته بدلالة التابع $f(t)$ بالشكل:

$$g(t) = f(7t) = \begin{cases} 1-|7t| & ; \ -1/7 \le t \le 1/7 \\ 0 & ; \ \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[f(7t)] = \frac{1}{7}\hat{f}\left(\frac{\omega}{7}\right) = \frac{2}{7}\frac{1-\cos(\omega/7)}{(\omega/7)^2} = 14\frac{1-\cos(\omega/7)}{\omega^2}$$

نتيجة (الزمن المعاكس): إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، فإنّ:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \hat{f}(-\omega) \quad (81) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(-\omega)] = f(-t) \quad (82)$$

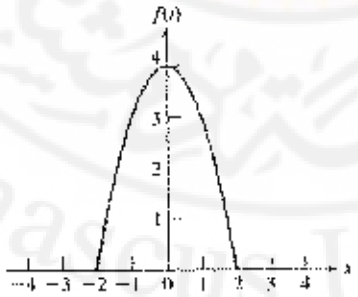
ونُحصّل على هذه النتيجة بتبديل $a=-1$ في خاصية التحاكي.

مثال (48-3): أوجد تحويل فوريه للتابع: $f(t) = \begin{cases} 4-t^2 & ; \ |t| \le 2 \\ 0 & ; \ |t| > 2 \end{cases}$.

الحل:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-2}^{2}(4-t^2)e^{-i\omega t}dt = 4\frac{\sin(2\omega)-2\omega\cos(2\omega)}{\omega^3}$$

نلاحظ أنّ $f(-t) = f(t)$ لذلك لو بدلنا كل $-\omega$ بـ ω، في التّابع الذي حصلنا عليه $\hat{f}(\omega)$ نلاحظ أنّه لا يتغيّر.



الشكل (64-3): المنحني البياني للتابع $f(t)$.

6- تحويل فوريه لمشتق تابع بالنسبة إلى الزمن $f'(t)$:

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، فإنّ: $$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega\mathcal{F}[f(t)] \quad (83)$$

الإثبات:

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{u} \underbrace{f'(t)dt}_{dv} = [e^{-i\omega t}f(t)]_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)dt =$$
$$= 0 + i\omega\mathcal{F}[f(t)] = i\omega\mathcal{F}[f(t)]$$

نتيجة: إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، فإنّه بتطبيق الخاصيّة السابقة مرتين نجد:
$$\mathcal{F}[f''(t)] = i\omega\mathcal{F}[f'(t)] = -\omega^2\mathcal{F}[f(t)] \quad (84)$$

مثال (3-49): إذا كان تحويل للتابع $f(t) = e^{-t^2}$ هو $\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$ فأوجد تحويلاً للتابع te^{-t^2}.

الحل:

$$\mathcal{F}[te^{-t^2}] = \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2}(e^{-t^2})'\right] = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[(e^{-t^2})'\right] = -\frac{1}{2}i\omega\mathcal{F}[(e^{-t^2})] =$$
$$= -\frac{1}{2}i\omega[\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}] = -\frac{i\omega\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2/4}$$

7- مبرهنة التناظر (Symmetry theorem) أو تحويل التحويل:

إذا كان $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$، تحويل فوريه للتابع $f(t)$، فإن: $$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (85)$$

الإثبات: لفهم هذه المبرهنة، نبدأ بأخذ تحويل فوريه للتابع $f(t)$ فنحصل على التابع $F(\omega)$. ثم نبدل كل ω بـ t ثم نأخذ تحويل فوريه للتابع $F(t)$. وتبين خاصية التناظر أن تحويل فوريه للتابع $F(t)$ هو تماماً التابع الأصلي $f(t)$ بعد تبديل t بـ $-\omega$ ونضرب التابع الجديد الحاصل بالعدد 2π.

8- الجداء ومبرهنة الطي (دمج إشارتين مع بعض) Convolution theorem:

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)]$ و$\mathcal{F}[g(t)]$ تحويلي فوريه للتابعين $f(t)$ و$g(t)$ على الترتيب، فإنّ:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad , \quad G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$$
$$F(\omega)\cdot G(\omega) = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{F}[(f*g)(t)] \quad (86)$$

الإثبات:

$$\mathcal{F}[(f*g)(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\, e^{-i\omega t}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega t}dt\,d\tau \;;\; t-\tau = \sigma \Rightarrow t = \tau+\sigma \Rightarrow$$
$$\mathcal{F}[(f*g)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\sigma)e^{-i\omega(\tau+\sigma)}d\sigma\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)e^{-i\omega\sigma}d\sigma = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)] = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

نتيجة 1: إذا كان $\hat{f}(\omega)$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، و$\hat{g}(\omega)$ تحويل فوريه للتابع $g(t)$، فإنّ:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega) \cdot G(\omega)] = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (87)$$

نتيجة 2: 1- إذا كان التّابعان $f(t)$، و$g(t)$، يحققان مبرهنة الطّيّ فإنّ:

(الخاصة التبديلية): $f * g = g * f$.

2- إذا كان التّابعان $f(t)$، و$g(t)$، كلاهما يحققان مبرهنة الطّيّ مع التّابع $h(t)$، وكان α و β عددين حقيقيين. فإنّ: (الخاصة الخطيّة): $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$.

الإثبات: من أجل (1) لنفرض أنّ: $x = t - \tau$ ونكتب:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{-\infty} f(z)g(t-z)(-1)dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-z)f(z)dz = (g * f)(t)$$

بالنسبة للطلب (2) يبرهن باستخدام الخواص الأساسية للتّكامل.

نتيجة 3: إذا كان التّابعان $f(t)$، و$g(t)$، مستمرين ومحدودين على المحور الحقيقي، والتكاملان $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ و $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt$ كلاهما متقارب، فإنّ:

1- (الطّيّ على المحور الحقيقي)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f * g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \qquad (88)$$

أي أنّ مبرهنة الطي للتابعين f و g على المحور الحقيقي تساوي جداء التكاملين.

2- (الطّيّ على محور الزّمن) $\mathcal{F}[f * g] = (\hat{f} * \hat{g})(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ (89)

أو يمكن كتابتها بالشكل: $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)] = (f * g)(t)$ (90)

3- (الطّيّ على محور التّردد)

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = [f(t)\overline{g(t)}](\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega) \qquad (91)$$

أو يمكن كتابتها بالشكل: $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)] = 2\pi f(t)g(t)$ (92)

الإثبات: من أجل الطلب (1) نكتب:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f * g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)dt\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)dt\right)g(\tau)d\tau \Longrightarrow$$

ولكن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \Longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$$

من أجل الطلب (2) نفرض أنّ $F(t) = e^{-i\omega t}f(t)$ و $G(t) = e^{-i\omega t}g(t)$ من الأعداد الحقيقية t و ω وعندئذٍ:

$$(\widehat{f*g})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}f(t-\tau)e^{-i\omega\tau}g(\tau)d\tau\right)dt \Longrightarrow \text{(1) من الطلب الأول}$$

$$(\widehat{f*g})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(F*G)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}G(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

ونترك الطلب (3) تمريناً للقارئ.

مثال (3-50): أوجد تحويل فوريه العكسي للتابع $\frac{1}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$ أي أوجد:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}\right]$$

الحل:

$$\frac{1}{4+\omega^2} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{4}e^{-2|t|}\right) = \hat{f}(\omega) \text{ حيث } f(t) = \frac{1}{4}e^{-2|t|}$$

$$\frac{1}{9+\omega^2} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{6}e^{-3|t|}\right) = \hat{g}(\omega) \text{ حيث } g(t) = \frac{1}{6}e^{-3|t|}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\right] = (f*g)(t) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-2|t|} * \frac{1}{6}e^{-3|t|} = \frac{1}{24}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}d\tau \Longrightarrow$$

في حالة $t > 0$:

$$24(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}d\tau + \int_{0}^{t} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}e^{-3|\tau|}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-2(t-\tau)} e^{-3\tau} d\tau + \int_{0}^{t} e^{-2(t-\tau)} e^{-3\tau} d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{-2(\tau-t)} e^{-3\tau} d\tau = \frac{6}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-3t}$$

في حالة $t < 0$:

$$24(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2|t-\tau|} e^{-3|\tau|} d\tau + \int_{t}^{0} e^{-2|t-\tau|} e^{-3|\tau|} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-2|t-\tau|} e^{-3|\tau|} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} e^{3\tau} d\tau + \int_{t}^{0} e^{2(t-\tau)} e^{3\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{2(\tau-t)} e^{-3\tau} d\tau = \frac{6}{5} e^{2t} - \frac{4}{5} e^{3t}$$

في حالة $t = 0$:

$$24(f * g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|} e^{-3|\tau|} d\tau = \frac{2}{5} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(4+\omega^2)(9+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{24}\left(\frac{6}{5} e^{-2|t|} - \frac{4}{5} e^{-3|t|}\right) = \frac{1}{20} e^{-2|t|} - \frac{1}{30} e^{-3|t|}$$

9- مبرهنة التحوير Modulation theorem:

إذا كان $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ تحويل فوريه للتابع $f(t)$، فإنّ:

$$\mathcal{F}[f(t)\cos at] = \frac{1}{2}[F(\omega + a) + F(\omega - a)] \quad (93)$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin at] = \frac{i}{2}[F(\omega + a) - F(\omega - a)] \quad (94)$$

الإثبات:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \Longrightarrow \mathcal{F}[f(t)\cos at] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\cos at \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} dt = \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+a)t} f(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-a)t} f(t) dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}[F(\omega + a) + F(\omega - a)]$$

وتبرهن العلاقة الثانية بأسلوب مشابه باستخدام العلاقة $\sin(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$.

ملاحظة: إنّ للمبرهنة السابقة أهمية كبيرة في مجال الراديو والتلفاز حيث إنّ الموجة التوافقية المحمولة تكون محوّرة بغلاف.

10- مبرهنة اشتقاق التّردد Frequency Differentiation:

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. وليكن التّابع $f(t)$ مستمر جزئياً على أي مجال $[-L, L]$ من أجل أي عدد موجب L، والتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)| dt$ متقارب عندئذٍ:

$$\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega) \quad (95)$$

وبشكل خاص تحت شروط المبرهنة:

$$\mathcal{F}[tf(t)] = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) \quad (96), \qquad \mathcal{F}[t^2 f(t)] = -\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{f}(\omega) \quad (97)$$

الإثبات: سنبرهن من أجل $n = 1$. ويبرهن من أجل الأعداد التي تزيد عن n بطريقة مشابهة. بتطبيق قاعدة ليبنتز للاشتقاق التكاملي نجد أنّ:

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}[f(t)e^{-i\omega t}]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-i\omega t}dt = -i\int_{-\infty}^{\infty}[t\,f(t)]e^{-i\omega t}dt = -i\,\mathcal{F}[tf(t)]$$

مثال (51-3): أوجد تحويل فوريه للتابع $f(t) = t^2e^{-5|t|}$.

الحل: لنوجد أولاً تحويل فوريه للتابع: $e^{-5|t|} = \begin{cases} e^{5t} & ; \quad t \geq 0 \\ e^{5t} & ; \quad t < 0 \end{cases}$ فنجد:

$$\mathcal{F}\left[e^{-5|t|}\right] = \int_{-\infty}^{0} e^{5t}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-5t}e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \left[\frac{e^{(5-i\omega)t}}{5-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(5+i\omega)t}}{5+i\omega}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{5-i\omega} + \frac{1}{5+i\omega} = \frac{10}{25+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[t^2e^{-5|t|}\right] = i^2\frac{d^2}{d\omega^2}\left[\frac{10}{25+\omega^2}\right] = 20\frac{25-3\omega^2}{(25+\omega^2)^3}$$

11- تحويل فوريه للتكامل:

أي أنّ التابع الذي نريد إيجاد تحويل فوريه له عبارة عن تكامل. ليكن التابع $f(t)$ مستمراً جزئياً على أي مجال $[-L, L]$ من أجل أي عدد موجب L، والتكامل $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ متقارب ولنفرض أنّ $\hat{f}(0) = 0$ عندئذٍ:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega) \qquad (98)$$

الإثبات: ليكن $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. عندئذٍ: $g'(t) = f(t)$ من أجل أي t يكون فيها التابع $f(t)$ مستمراً، وكذلك $g(t) \to 0;\ t \to -\infty$، فنجد أنّ:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \int_{\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = \hat{f}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[g'(t)] = i\omega\mathcal{F}[g(t)] = i\omega\cdot\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]$$

3-9-3 التّرشيح (أو الفلترة) وتابع دلتا ديراك:

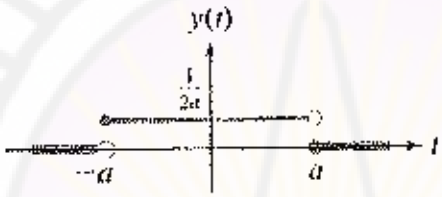
إنّ تابع دلتا ديراك هو نبضة ذات قيمة عظمى لا نهائية في فترة قصيرة جداً. وأحد الطّرق الرّياضيّة لوصف هذا التّابع هو من شكل النبضة القصوى كما في الشكل (3-65).

$$\frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)]$$

وبالتالي يكون تابع دلتا ديراك هو نهاية هذه النبضة عندما يسعى مجالها إلى الصفر:

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)] \qquad (99)$$

إنّ تابع دلتا ديراك ليس تابعاً بالمفهوم الأساسي (المعياري) ولكن أقرب ما يدعى بالتّوزيع. فالتّوزيعات هي تعميم لمفهوم التّابع.



الشكل (3-65): تابع النبضة القصوى $\frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)]$.

على أية حال، توجد بعض الإجراءات التي تعطي نتائج نافعة. أولاً لنأخذ تحويل فوريه لتابع النبضة القصيرة فنجد:

$$\mathcal{F}[H(t+a) - H(t-a)] = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt = \left[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{i\omega}(e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}) =$$
$$= 2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$$

الآن بأخذ النهاية عندما $a \to 0$ للتحويل السابق نجد أنّ:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \mathcal{F}\left\{\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}[H(t+a) - H(t-a)]\right\} =$$
$$= \lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\mathcal{F}[H(t+a) - H(t-a)] = \lim_{a\to 0}\frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = 1.$$

وهذا يعني أنّ تحويل فوريه لتابع دلتا ديراك هو مطابق للواحد 1. وأيضاً، لنضع التّابع $\delta(t)$ لتشكيل الطي مع تابع آخر نجد أنّ:

$$\mathcal{F}[\delta * f] = \mathcal{F}[\delta]\,\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f], \qquad \mathcal{F}[f * \delta] = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[\delta] = \mathcal{F}[f]$$
$$\Rightarrow \delta * f = f * \delta = f \qquad (100)$$

يسلك تابع دلتا ديراك سلوك العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية الطي.

مبرهنة (الفلترة Piltering): (تقبل دون برهان)

إذا كان لتابع f تحويل فوريه، وكان مستمراً عند النقطة t_0، فإنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \qquad (101)$$

هذه النتيجة يمكن أن تتغير لتسمح لنا بحساب قيمة التابع f في حالة انقطاعه عند t_0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \frac{1}{2}[f(t_0+0)+f(t_0-0)] \qquad (102)$$

4-9-3 تحويل فوريه ذو التوافذ:

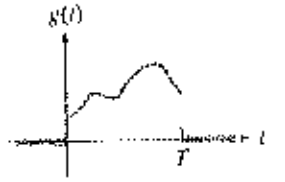
لنفرض أنّ f تابع لإشارة ما. هذا يعني أنّ f معرف على كامل المحور الحقيقي، وعندك طاقة منتهية أي: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt$.

عند تحليل $f(t)$، نريد أحياناً تحديد تردداته في مكان محدد فيما يتعلق بمتغير الزمن. وكما نعلم أنّ $\hat{f}(\omega)$ يحمل معلومات عن ترددات الإشارة. على أية حال، إنّ $\hat{f}(\omega)$ لن يعطي معلومات في مجال محدد من الزمن، لأنّ:

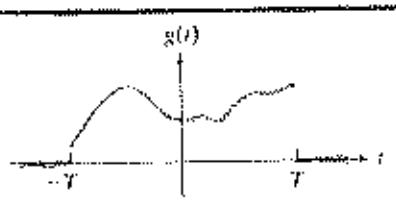
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

يعطي معلومات على كامل محور الزمن، أي لا يعطي صورة عن معلومات مخصصة بل يعطي حساب لغزارة الطيف الكلي $|\hat{f}(\omega)|$. فإذا عددنا $f(t)$ هو قطعة موسيقية يراد عزفها عبر الزمن، فيجب الانتظار حتى تنتهي القطعة الموسيقية كاملة لحساب غزارة طيفها. لذلك، يمكننا الحصول على صورة الترددات التي يحتوي على $f(t)$ داخل مجال زمني محدد بأخذ نافذة للتابع قبل حساب تحويل فوريه له.

لإجراء ذلك، نحتاج أولاً إلى تابع النافذة (window function) g، الذي هو تابع غير معدوم على مجالات غالباً ما تكون من الشكل $[0,T]$ أو $[-T,T]$. يوضح الشكلان (3-66) و(3-67) أحد التوابع النافذة على المجال $[0,T]$ وآخر على المجال $[-T,T]$. يدعى المجال داعماً للتابع g، وفي هذه الحالة نتعامل مع مجالات مغلقة، لذلك نقول إنّ g تمتلك داعماً مضغوطاً. إنّ التابع g يأخذ القيمة الصفر خارج المجال الداعم. نضع التابع f في نافذة التابع g بتشكيل الجداء $g(t)f(t)$، الذي يختفي (ينعدم) خارج المجال $[-T,T]$.

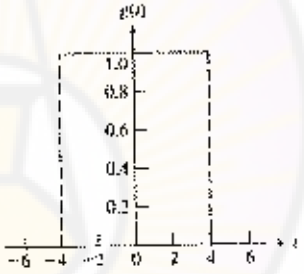


الشكل (3-66): تابع نافذة خاص مع داعم مضغوط $[0,T]$.

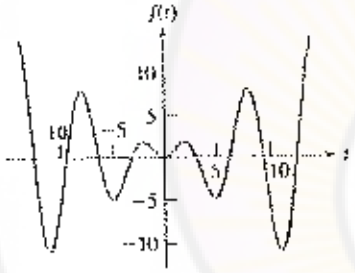


الشكل (3-67): تابع نافذة خاص مع داعم مضغوط $[-T,T]$.

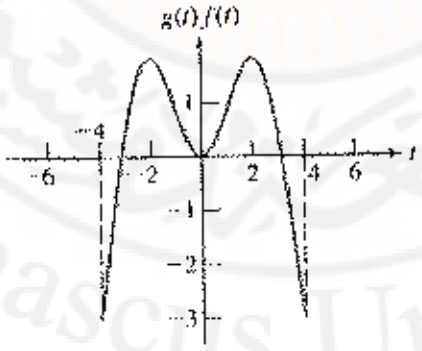
مثال (3-52): لنعدّ تابع النافذة: $g(t)=\begin{cases}1 & ; \ -4\le t\le 4\\ 0 & ; \ |t|>4\end{cases}$ إن هذا التابع يمتلك داعماً مضغوطاً هو المجال $[-4,4]$، ويمثل قطعة مستقيمة أفقية كما هو موضح في الشكل (3-68)(أ). ليكن التابع $f(t)=t\sin t$ كما هو موضح في الشكل (3-68)(ب). لوضع التابع f في نافذة التابع g، نشكل الجداء $g(t)f(t)$ كما هو موضح في الشكل (3-68)(جـ). إن هذا التابع الموضوع في نافذة ينعدم خارج داعم التابع g. من أجل هذا الاختبار لتابع g فإن تأثير تابع الإشارة $f(t)$ يبدأ في الزمن $t=-4$ وينتهي في الزمن $t=4$ ويصبح داخل المجال $[-4,4]$.



الشكل (3-68)(أ): تابع نافذة خاص مع داعم مضغوط $[-4,4]$.



الشكل (3-68)(ب): منحنى التابع: $f(t)=t\sin(t)$.



الشكل (3-68)(جـ): التابع f مأخوذ بالنافذة g.

إنّ تحويل فوريه ذا النوافذ وفق التابع g هو:

$$\mathcal{F}_{win}[f(t)] = \widetilde{f_{win}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-T}^{T} f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt$$

مثال (53-3): أوجد تحويل فوريه ذا النوافذ للتابع $f(t) = 6e^{-|t|}$ مستخدماً تابع النافذة:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad -2 \le t \le 2 \\ 0 & ; \quad |t| > 2 \end{cases}$$

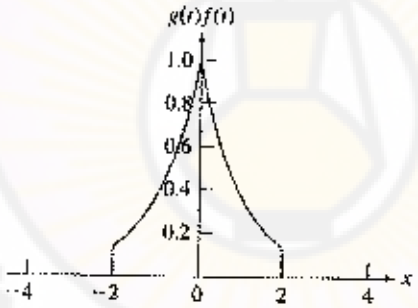
الحل: إن تحويل فوريه للتابع $f(t)$ هو:

$$\widetilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 6e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt = \frac{12}{1+\omega^2}.$$

يوضح الشكل (69-3) المنحني البياني للتابع $f(t)g(t)$ مأخوذاً بتابع النافذة g. فيكون تحويل فوريه ذو النوافذ للتابع f هو:

$$\widetilde{f_{win}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 6e^{-|t|}g(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-2}^{2} 6e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt =$$
$$= 12\frac{-2e^{-2}\cos^2(\omega) + e^{-2} + e^{-2}\omega\sin(2\omega) + 1}{1+\omega^2}$$

وهذا يعطي التردد للإشارة f داخل مجال الزمن $[-2,2]$.



الشكل (69-3): التابع $f(t) = 6e^{-|t|}$ مأخوذ بالنافذة $g(t)$.

غالباً ما نستخدم تابع نافذة ذا انزياح. لنفرض أنّ داعم التابع g هو $[-T,T]$. إذا كان $t_0 > 0$، عندها يكون المنحني البياني للتابع $g(t-t_0)$ هو المنحني البياني للتابع $g(t)$ مزاحاً بمقدار t_0 نحو اليمين. وبالتالي:

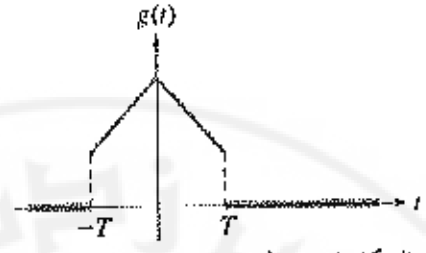
$$f(t)g(t-t_0) = \begin{cases} f(t)g(t-t_0) & ; \quad t_0 - T \le t \le t_0 + T \\ 0 & ; \quad |t-t_0| > T \end{cases}$$

إنّ الأشكال (70-3)(أ) و(70-3)(ب) و(70-3)(جـ) و(70-3)(د) توضح هذا الإجراء.

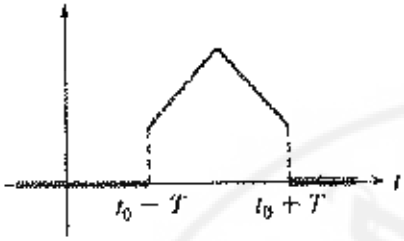
وبالتالي يكون تحويل فوريه للتابع السابق (المزاح ذي النافذة).

$$\widehat{f_{wb,t_0}}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)g(t-t_0)] = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t)g(t-t_0)e^{-i\omega t}dt \quad (103)$$

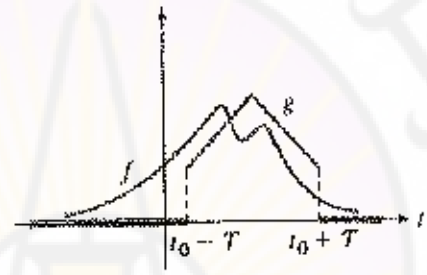
وهذا يعطي التردد لتابع الإشارة f داخل مجال الزمن $[t_0 - T, t_0 + T]$.



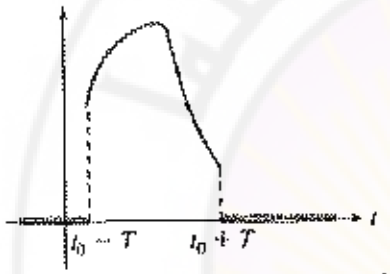
الشكل (3-70)(أ): تابع نافذة خاص مع داعم مضغوط $[-T, T]$.



الشكل (3-70)(ب): منحني تابع النافذة المزاح: $g(t-t_0)$.



الشكل (3-70)(جـ): تابع إشارة خاص $f(t)$.



الشكل (3-70)(د): منحني التابع: $g(t-t_0)f(t)$.

يشير المهندسون إلى عملية الوضع في نافذة عادة بموضع زمن التردد time-frequency localization.

إذا كان g تابع نافذة، فإنّ مركز النافذة g يعطى بالعلاقة:

$$t_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,|g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt} \quad (104)$$

ويعطى نصف قطر تابع النافذة radius بالعلاقة:

$$t_R = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_C)^2\,|g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}\right)^{1/2} \quad (105)$$

إنّ طول تابع النافذة يساوي $2t_R$، التي تدعى الجذر التربيعي المتوسط للمدة (Root Mean Square) RMS duration.

وعندما نتعامل مع تحويل فوريه لتابع النافذة، نطبق المفهوم نفسه فيكون مركز $\hat{g}$:

$$\text{center of } \hat{g} = \omega_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega\,|\hat{g}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega} \quad (106)$$

ويعطى نصف قطر $\hat{g}$ بالعلاقة:

$$\text{radius of } \hat{g} = \omega_R = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_C)^2 \, |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega} \right)^{1/2} \qquad (107)$$

إنّ طول التابع $\hat{g}$ يساوي $2\omega_R$، الذي يدعى الجذر التربيعي المتوسط لعرض الموجة RMS bandwidth.

5-9-3 تحويلا فوريه التجيبي والجيبي:

إذا كان التابع $f(t)$ زوجياً، فإننا رأيناه يكتب حسب تكامل فوريه بالشكل:

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega \,, \qquad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

نعرّف التابع $\hat{f}_c(\omega)$ الذي يدعى تحويل فوريه التجيبي بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_c\{f(t)\} = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \qquad (108)$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \hat{f}_c(\omega) \Rightarrow$$

نعوض في علاقة التابع $f(t)$ فنحصل على تحويل فوريه التجيبي العكسي:

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{\hat{f}_c(\omega)\} = f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega \qquad (109)$$

مثال (3-54): ليكن K عدداً موجباً، وليكن $f(t) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le t \le K \\ 0 & ; \ t > K \end{cases}$ أوجد تحويل فوريه التجيبي له.

الحل:

$$\mathcal{F}_c\{f(t)\} = \hat{f}_c(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{K} \cos \omega t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(K\omega)}{\omega}$$

وبشكل مماثل إذا كان التابع $f(t)$ فردياً، فإننا نعرّف تحويل فوريه الجيبي وتحويل فوريه الجيبي المعاكس:

$$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \hat{f}_s(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \qquad (110)$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{\hat{f}_s(\omega)\} = f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega \qquad (111)$$

مثال (3-55): ليكن K عدداً موجباً، وليكن $f(t) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le t \le K \\ 0 & ; \ t > K \end{cases}$ أوجد تحويل فوريه الجيبي له.

الحل:

$$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \hat{f}_s(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{K} \sin \omega t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - \cos(K\omega)}{\omega}$$

لا شك أنّ تكامل فوريه وتحويل فوريه جوهرياً هما الشيء نفسه، ولكن الاختلاف البسيط هو أحدهما ينتج من الآخر بضربه بثابت. لذلك يمكن أن نعرف تحويل فوريه بالشكل:

$$\hat{f}_c(\omega) = \alpha \int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt \qquad (112)$$

$$f(t) = \beta \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega t\, d\omega \;;\quad \alpha\beta = 2/\pi \qquad (113)$$

مبرهنة: إذا كان $\hat{f}_s(\omega)$ و$\hat{f}_c(\omega)$ تحويلا فوريه الجيبي والتجيبي للتابع $f(t)$ على الترتيب فإنّ:

$$(i)\ \mathcal{F}_c\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}_c\{f(t)\}+\beta\mathcal{F}_c\{g(t)\} \qquad (114)$$

$$(ii)\ \mathcal{F}_s\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}_s\{f(t)\}+\beta\mathcal{F}_s\{g(t)\} \qquad (115)$$

$$(iii)\ \mathcal{F}_s\{f(t)\cos at\} = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_s(\omega+a)+\hat{f}_s(\omega-a)\right] \qquad (116)$$

$$(iv)\ \mathcal{F}_s\{f(t)\sin at\} = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_c(\omega-a)-\hat{f}_c(\omega+a)\right] \qquad (117)$$

$$(v)\ \mathcal{F}_c\{f(t)\sin at\} = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_s(\omega+a)-\hat{f}_s(\omega-a)\right] \qquad (118)$$

مثال (3-56): أثبت أنّ:

$$\mathcal{F}_c\{f'(t)\} = \omega\mathcal{F}_s\{f(t)\}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f(0) \qquad (119)$$

$$\mathcal{F}_s\{f'(t)\} = -\omega\mathcal{F}_c\{f(t)\} \qquad (120)$$

$$\mathcal{F}_c\{f''(t)\} = -\omega^2\mathcal{F}_c\{f(t)\}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f'(0) \qquad (121)$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(t)\} = -\omega^2\mathcal{F}_s\{f(t)\}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\omega f(0) \qquad (122)$$

الحل: بما أنّ التابع قابل للمكاملة مطلقاً فإنه يحقق الشرط: $f(t)\to 0 \;;\; t\to\infty$ لحساب تحويل فوريه للمشتقات نطبق دستور التكامل بالتجزئة:

$$\mathcal{F}_c\{f'(t)\} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{df}{dt}\cos\omega t\, dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{f(t)\cos\omega t\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\cos\omega t\, dt\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{-f(0)+\omega\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt\right\} = \omega\mathcal{F}_s\{f(t)\}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f(0).$$

$$\mathcal{F}_s\{f'(t)\} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{df}{dt}\sin\omega t\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{f(t)\sin\omega t\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\sin\omega t\, dt\right\} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{-\omega\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt\right\} =$$

$$= -\omega\mathcal{F}_c\{f(t)\}$$

$$\mathcal{F}_c\{f''(t)\} = \mathcal{F}_c\{[f'(t)]'\} = \omega\mathcal{F}_s\{f'(t)\}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f'(0) =$$

$$= \omega[-\omega\mathcal{F}_c\{f(t)\}] - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f'(0) = -\omega^2\mathcal{F}_c\{f(t)\} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f'(0).$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(t)\} = \mathcal{F}_s\{[f'(t)]'\} = -\omega\mathcal{F}_c\{f'(t)\} =$$

$$= -\omega\left[\omega\mathcal{F}_s\{f(t)\} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f(0)\right] = -\omega^2\mathcal{F}_s\{f(t)\} + \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f(0).$$

مثال (3-57): استخدم تحويل فوريه الجيبي للمشتقات لإثبات أنّ:

$$\mathcal{F}_s\{e^{-at}\} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

الحل: $f(t) = e^{-at} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1,\ f'(t) = -ae^{-at},\ f''(t) = a^2 f(t) \Rightarrow$

$$\mathcal{F}_s\{f''(t)\} = \mathcal{F}_s\{a^2 f(t)\} = a^2\mathcal{F}_s\{f(t)\},$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(t)\} = -\omega^2\mathcal{F}_s\{f(t)\} + \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}f(0) = -\omega^2\mathcal{F}_s\{f(t)\} + \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow$$

$$a^2\mathcal{F}_s\{f(t)\} = -\omega^2\mathcal{F}_s\{f(t)\} + \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow (a^2+\omega^2)\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \mathcal{F}_s\{e^{-at}\} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

مثال (3-58): استخدم تحويل فوريه الجيبي لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التّفاضلية الآتية:

$$y''(t) - 9y(t) = 50e^{-2t}, \qquad y(0) = y_0$$

الحل: يمكن أن نمدد التّابع $y(t)$ ليصبح تابعاً فردياً ثم نأخذ تحويل فوريه لطرفي المعادلة، وبالاستفادة من الخاصة الخطية نجد أنّ:

$$\mathcal{F}_s\{y''(t) - 9\mathcal{F}_s\{y(t)\}\} = 50\mathcal{F}_s\{e^{-2t}\} \Rightarrow$$

$$-\omega^2\mathcal{F}_s\{y(t)\} + \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}y_0 - 9\mathcal{F}_s\{y(t)\} = 50\mathcal{F}_s\{e^{-2t}\} \Rightarrow$$

$$(\omega^2+9)\mathcal{F}_s\{y(t)\} = -50\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4} + \omega\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}y_0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}_s\{y(t)\} = -50\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4}\cdot\frac{1}{\omega^2+9} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}y_0\cdot\frac{1}{\omega^2+9}$$

وباستخدام تفريق الكسور نجد أنّ:

$$\frac{1}{(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = \frac{1}{5}\frac{1}{\omega^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{\omega^2+9} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}_s\{y(t)\} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}10\frac{\omega}{\omega^2+9} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}10\frac{\omega}{\omega^2+4} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}y_0\frac{\omega}{\omega^2+9} =$$

$$= (10+y_0)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+9} - 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4} = (10+y_0)\mathcal{F}_s\{e^{-3t}\} - 10\mathcal{F}_s\{e^{-2t}\}$$

بأخذ تحويل فوريه الجيبي العكسي نجد أنّ: $y(t) = (10 + y_0)e^{-3t} - 10e^{-2t}$

6-9-3 تحويلات فوريه الجيبية والتجيبية المنتهية:

إنّ هذه التحويلات نافعة جدّاً من أجل مسألة القيمة الحدّيّة في الحالات التي يكون فيها على الأقل حدّان متوازيان ومنفصلان بمسافة منتهية.

إنّ تحويل فوريه الجيبي المنتهي للتّابع $f(t)$ في المجال $0 < t < L$ يعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_s(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \qquad (123)$$

حيث إنّ: n عدد صحيح.

يدعى التّابع $f(t)$ عندئذٍ بتحويل فوريه الجيبي المنتهي العكسي للتّابع $\mathcal{F}_s(n)$ الذي يعطى بالعلاقة:

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_s(n)\sin\frac{n\pi t}{L} \qquad (124)$$

وإنّ تحويل فوريه التّجيبي المنتهي للتّابع $f(t)$ في المجال $0 < t < L$ يعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_c(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \qquad (125)$$

حيث إنّ: n عدد صحيح.

يدعى التّابع $f(t)$ عندئذٍ بتحويل فوريه التّجيبي المنتهي العكسي للتّابع $\mathcal{F}_c(n)$ الذي يعطى بالعلاقة:

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_c(n)\cos\frac{n\pi t}{L} \qquad (126)$$

مثال (3-59): أوجد تحويل فوريه التجيبي المنتهي وتحويل فوريه الجيبي المنتهي للتّابع الآتي:

$$f(t) = t^2; \quad 0 \le t \le \pi$$

الحل: من أجل تحويل فوريه التجيبي المنتهي عندما $(n = 0)$:

$$\mathcal{F}_c(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\pi}\cdot\pi^2$$

ومن أجل $(n = 1, 2, 3, \cdots)$:

$$\mathcal{F}_c(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt \to \cdots = 2\sqrt{2\pi}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

أمّا من أجل تحويل فوريه الجيبي المنتهي:

$$\mathcal{F}_s(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^n[2 - n^2\pi^2] - 2}{n^3}$$

7-9-3 أمثلة إضافية:

مثال (60-3): أوجد تحويل فوريه للإشارة: $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & ; \quad t\geq 0\,,\alpha>0 \\ 0 & ; \quad t<0 \end{cases}$.

الحل:

$$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-\alpha t}dt$$

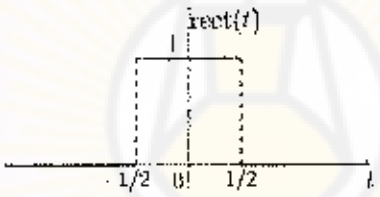
$$F(\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-t(i\omega+\alpha)}dt=\left[-\frac{1}{i\omega+\alpha}e^{-t(i\omega+\alpha)}\right]_{0}^{\infty}$$

ولمّا كان: $\lim_{t\to\infty}e^{-t(\alpha+i\omega)}=\lim_{t\to\infty}[e^{-t\alpha}e^{-i\omega}]=0$ لأنّ $\lim_{t\to\infty}e^{-t}=0$، والتّابع العقدي $e^{-i\omega t}=\cos t\omega-i\sin t\omega$ محدود (كل من التّابعين cos, sin محدودان) وبالتّالي محدود × صفر = صفر. فإنّ:

$$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{i\omega+\alpha}$$

مثال (61-3): أوجد تحويل فوريه للتّابع: $f(t)=\mathrm{rect}(t)=\begin{cases} 1 & ; \quad -1/2<t<1/2 \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$.

الحل:



الشكل (71-3): منحني تابع المستطيل.

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1/2}^{1/2}e^{-i\omega t}\,dt=-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\Big|_{-1/2}^{1/2}\;;\quad \omega\neq 0$$

$$F(\omega)=-\frac{1}{i\omega}\left[e^{-\frac{i\omega}{2}}-e^{\frac{i\omega}{2}}\right]=\frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{\frac{i\omega}{2}}-e^{-\frac{i\omega}{2}}}{2i}\right]=\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\;;\quad \omega\neq 0$$

نناقش الحالة $\omega=0$ نعوض في تعريف التحويل:

$$F(0)=\int_{-1/2}^{1/2}dv=1$$

وبالعودة إلى العلاقة السابقة:

$$F(0)=\lim_{\omega\to 0}2\frac{\sin\omega/2}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}=1$$

وهي النتيجة نفسها، أي:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 2\frac{\sin \omega/2}{\omega} = \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2} \quad ; \quad \forall \omega$$

مثال (3-62): أوجد تحويل فوريه للإشارة:

$$f(t) = H\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-C}{W}\right) = T_{HWC}$$

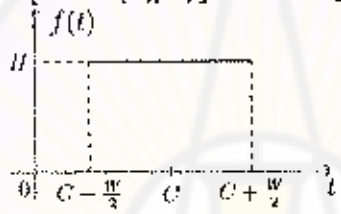
حيث قاعدة ربط التابع rect من المثال السابق، و $H, W, C \in \mathbb{R}$.

الحل: حسب المثال السابق :

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)] = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2} = \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}$$

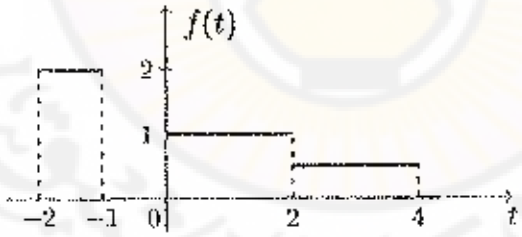
$$\mathcal{F}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{W}\right)\right] = W\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)]_{(\omega \to \omega W)} = \frac{2W}{\omega W}\sin\left(\frac{\omega W}{2}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega W}{2}\right)$$

(انسحاب) $$\mathcal{F}\left[H\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-C}{W}\right)\right] = H\,e^{-i\omega C}\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega W}{2}\right)$$



الشكل (3-72): منحني تابع المستطيل $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{W}\right)$.

مثال (3-63): أوجد تحويل فوريه (للإشارة) للتابع المبين بالرسم:



الشكل (3-73): إشارة متعددة لتوابع المستطيل.

الحل: (نجزئ الإشارة لثلاثة أجزاء مجالات)

$$S_1:\ H = 2,\quad W = 1,\quad C = -3/2$$
$$S_2:\ H = 1,\quad W = 2,\quad C = 1$$
$$S_3:\ H = 1/2,\quad W = 2,\quad C = 3$$

$$f(t) = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[S_1] + \mathcal{F}[S_2] + \mathcal{F}[S_3]$$

$$= \frac{4}{\omega}e^{+i\omega\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{\omega}e^{-i\omega}\sin(\omega) + \frac{1}{\omega}e^{-3i\omega}\sin\omega$$

مثال (3-64): أوجد تحويل فوريه للتابع: $f(x)=\begin{cases}1 & ; \ |x|<1\\ 0 & ; \ |x|\geq 1\end{cases}$ ثم استنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

الحل:

$$\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-1}^{1}(1)e^{-i\omega x}dx=\left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{i\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}\ ;\ \omega\neq 0$$

عندما $\omega=0$ يكون:

$$\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-1}^{1}(1)e^{0}dx=[x]_{-1}^{1}=2=F(\omega)$$

باستخدام علاقة تحويل فوريه المعاكس نجد أنّ:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega=\begin{cases}1 & ; \ |x|<1\\ 0 & ; \ |x|\geq 1\end{cases}$$

لنضع $x=0$ فنجد أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\pi\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

لأنّه تكامل لتابع زوجي.

مثال (3-65): أوجد تحويل فوريه للتابع: $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & ; \ |x|\leq 1\\ 0 & ; \ |x|>1\end{cases}$ ثم استنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx$$

الحل:

$$\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{-1}(0)e^{-i\omega x}dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-i\omega x}dx+\int_{-1}^{\infty}(0)e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\left[(1-x^2)\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}-(-2x)\frac{e^{-i\omega x}}{(-i\omega)^2}+(-2)\frac{e^{-i\omega x}}{(-i\omega)^3}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=2\left(\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{-\omega^2}\right)-2\left(\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{-i\omega^3}\right)=-\frac{4}{\omega^3}(\omega\cos\omega-\sin\omega)$$

باستخدام علاقة تحويل فوريه المعاكس نجد أنّ:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\omega^3}(\omega\cos\omega-\sin\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\omega^3}(\omega\cos\omega-\sin\omega)e^{i\omega x}d\omega=\begin{cases}1-x^2 & ;\ |x|\le 1\\ 0 & ;\ |x|>1\end{cases}$$

لنضع $x=1/2$ فنجد أنّ:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\omega^3}(\omega\cos\omega-\sin\omega)e^{i\omega/2}d\omega=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\right)\left(\cos\frac{\omega}{2}+i\sin\frac{\omega}{2}\right)d\omega=-\frac{3\pi}{8}\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cdot\cos\frac{\omega}{2}d\omega=-\frac{3\pi}{8}$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\cos\frac{x}{2}dx=-\frac{3\pi}{16}$$

لأنّه تكامل لتابع زوجي.

مثال (3-66): (a) أوجد تحويل فوريه للتّابع: $f(x)=e^{-a^2x^2}\ ;\ a\neq 0$ ثم استنتج تحويل فوريه للتّابع: $e^{-x^2/2}$.

(b) أوجد تحويل فوريه لـ (i) $e^{-2(x-3)^2}$ و (ii) $e^{-x^2}\cos 3x$.

الحل:

$$(a)\qquad \mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2x^2}e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2(x^2+i\omega x/a^2)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2(x+i\omega/2a^2)^2}e^{-\omega^2/4a^2}dx$$

بفرض أن $t=a(x+i\omega/2a^2)$ فيكون: $dt=a\,dx$ وبالتالي:

$$\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\cdot e^{-\omega^2/4a^2}dt=\frac{e^{-\omega^2/4a^2}}{a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=\frac{e^{-\omega^2/4a^2}}{a}\sqrt{\pi}\qquad\left[\because\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\right]\Rightarrow\mathcal{F}\left[e^{-a^2x^2}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\omega^2/4a^2}$$

لنضع $a^2=1/2$ فنجد:

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{(1/\sqrt{2})}e^{-\omega^2/2}=\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$$

ونستنتج أن تحويل فوريه للتّابع $e^{-x^2/2}$ هو ثابت في $e^{-\omega^2/2}$، فهو يتبادل مع التّابع الأصل (متبادل ذاتي self-reciprocal)، لأنّ التّابع $e^{-x^2/2}$ هو التّابع $e^{-\omega^2/2}$ نفسه.

(b) بما أنّ $e^{-2x^2}=e^{-(2x)^2/2}=f(2x)$ حيث $f(x)=e^{-x^2/2}$ وباستخدام خاصة التحاكي $\mathcal{F}[f(2x)]=\frac{1}{2}\mathcal{F}(\omega/2)$ فيكون:

$$\mathcal{F}\left[e^{-2x^2}\right]=\mathcal{F}\left[e^{-(2x)^2/2}\right]=\sqrt{2\pi}\,e^{-(\omega/2)^2/2}=\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/8}$$

وباستخدام خاصة الإزاحة $\mathcal{F}[f(x-3)]=e^{-i3\omega}\mathcal{F}[f(x)]$ يكون:

$$\mathcal{F}\left[e^{-2(x-3)^2}\right]=\sqrt{2\pi}\,e^{-3i\omega-\omega^2/8}$$

أيضاً باستخدام مبرهنة التحوير:

$$\mathcal{F}[f(x)\cos ax]=\frac{1}{2}\{\mathcal{F}[f(\omega+a)]+\mathcal{F}[f(\omega-a)]\}\Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\cos 3x\right]=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left[e^{-(\omega+3)^2/2}+e^{-(\omega-3)^2/2}\right].$$

مثال (3-67): أوجد تحويل فوريه التجيبي للتابع: $f(x)=e^{-x^2}$.

الحل:

$$\mathcal{F}_c\left[e^{-x^2}\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos\omega x\,dx=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot I$$

لنشتق هذا التكامل بالنسبة إلى ω فنجد أنّ:

$$\frac{dI}{d\omega}=-\int_0^{\infty}xe^{-x^2}\sin\omega x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(-2xe^{-x^2})(\sin\omega x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[e^{-x^2}\sin\omega x\right]_0^{\infty}-\omega\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos\omega x\,dx\right\}=$$

$$=-\frac{\omega}{2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos\omega x\,dx=-\frac{\omega}{2}I\Longrightarrow\frac{dI}{d\omega}=-\frac{\omega}{2}I\Longrightarrow\frac{dI}{I}=-\frac{\omega}{2}d\omega$$

$$\Longrightarrow\ln I=-\frac{\omega^2}{4}+\ln c=\ln Ce^{-\omega^2/4}\Longrightarrow I=ce^{-\omega^2/4}\Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}_c\left[e^{-x^2}\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos\omega x\,dx=\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\omega^2/4}$$

لنضع $\omega=0$ فنجد أنّ:

$$c=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Longrightarrow\mathcal{F}_c\left[e^{-x^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}.$$

مثال (3-68): أوجد تحويل فوريه الجيبي للتابع $f(x)=e^{-|x|}$. ثم برهن أنّ:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{1+x^2}dx=\frac{\pi e^{-m}}{2}\ ;\ \ m>0.$$

الحل: إنّ $x\in(0,\infty)$ هذا يعني أنّ $e^{-|x|}=e^{-x}$ وبالتالي فإن تحويل فوريه الجيبي:

$$\mathcal{F}_S[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{e^{-x}}{1+\omega^2}(-\sin\omega x - \omega\cos\omega x)\right\}_0^\infty = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

باستخدام تحويل فوريه الجيبي المعاكس نجد أنّ:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(\omega)\sin\omega x\,d\omega \Rightarrow e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega \Rightarrow$$
$$e^{-m} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega m}{1+\omega^2}d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx = \frac{\pi e^{-m}}{2}$$

مثال (3-69): أوجد تحويل فوريه التجيبي للتابع: $f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < 1 \\ 2-x & ; \ 1 < x < 2 \\ 0 & ; \ x > 2 \end{cases}$.

الحل:

$$\mathcal{F}_C[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^1 x\cos\omega x\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos\omega x\,dx + \int_2^\infty 0\cdot dx\right\} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[x\frac{\sin\omega x}{\omega} - \left(\frac{-\cos\omega x}{\omega^2}\right)\right]_0^1 + \left[(2-x)\frac{\sin\omega x}{\omega} + \frac{-\cos\omega x}{\omega^2}\right]_1^2\right\} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\left(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(-\frac{\cos 2\omega}{\omega^2} - \frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega}{\omega^2}\right)\right\} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{2\frac{\cos\omega}{\omega^2} - \frac{\cos 2\omega}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\right\}.$$

مثال (3-70): أوجد تحويل فوريه الجيبي للتابع: $f(t) = e^{-ax}/x$.

الحل:

$$\mathcal{F}_S[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\sin\omega x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot I$$

نشتق التكامل I بالنسبة لـ ω فنجد أنّ:

$$\frac{dI}{d\omega} = \int_0^\infty \frac{x\,e^{-ax}\cos\omega x}{x}dx = \int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x\,dx = \frac{a}{\omega^2+a^2} \Rightarrow$$
$$I = \int_0^\infty \frac{a}{\omega^2+a^2}d\omega = \tan^{-1}\frac{\omega}{a} + c \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow I = 0 \Rightarrow c = 0$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}_S[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

مثال (3-71): أوجد تحويل فوريه التجيبي للتّابع $f(x) = 1/(1+x^2)$. ثم استنتج تحويل فوريه الجيبي للتابع $g(x) = x/(1+x^2)$.

الحل:

$$\mathcal{F}_C[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot I \quad (i)$$

نشتق التكامل I بالنسبة إلى ω فنجد أنّ:

$$\frac{dI}{d\omega} = \int_0^\infty \frac{-x\sin\omega x}{1+x^2}dx = -\int_0^\infty \frac{x^2\sin\omega x}{x(1+x^2)}dx = \quad (ii)$$

$$= -\int_0^\infty \frac{(x^2+1-1)\sin\omega x}{x(1+x^2)}dx =$$

$$-\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{x}dx + \int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{x(1+x^2)}dx = -\frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{x(1+x^2)}dx \quad (iii)$$

نشتق التكامل I بالنسبة إلى ω مرة ثانية فنجد أنّ:

$$\frac{d^2I}{d\omega^2} = \int_0^\infty \frac{x\cos\omega x}{x(1+x^2)}dx = I \Rightarrow \frac{d^2I}{d\omega^2} - I = 0 \rightarrow (D^2-1)I = 0 \Longrightarrow$$

$$I = c_1e^{\omega} + c_2e^{-\omega} \quad (iv) \Longrightarrow \frac{dI}{d\omega} = c_1e^{\omega} - c_2e^{-\omega} \quad (v)$$

عندما $\omega = 0$ فإن (i) و(iv) تعطيان:

$$c_1 + c_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

أيضاً عندما $\omega = 0$ فإن (iii) و(v) تعطيان:

$$c_1 - c_2 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{\pi}{2}$$

نعوض في (iv) نجد أنّ:

$$I = \frac{\pi}{2}e^{-\omega} \Rightarrow \mathcal{F}_C[f(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\omega}$$

$$\mathcal{F}_S[g(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x\sin\omega x}{1+x^2}dx = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{dI}{d\omega} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\omega}$$

وذلك من العلاقتين (ii) و(v).

مثال (3-72): أوجد تحويل فوريه الجيبي والتجيبي للتّابع: $n > 0$; $f(x) = x^{n-1}$.

الحل:

$$\mathcal{F}_S[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{n-1}\sin\omega x\,dx$$

$$\mathcal{F}_C[f(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{n-1}\cos\omega x\,dx$$

$$\mathcal{F}_C[x^{n-1}] + i\mathcal{F}_S[x^{n-1}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (\cos\omega x + i\sin\omega x)x^{n-1}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{i\omega x}x^{n-1}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\left(-\frac{t}{i\omega}\right)^{n-1}\left(-\frac{dt}{i\omega}\right) \quad ; \quad i\omega x = -t$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{i\omega}\right)^n\int_0^\infty e^{-t}\,t^{n-1}dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{i^{2n}}{i^n\omega^n}\Gamma(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{i^n}{\omega^n}\Gamma(n) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n\frac{\Gamma(n)}{\omega^n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\Gamma(n)}{\omega^n}$$

بمقارنة الطرفين (القسم الحقيقي والقسم التخيلي) نجد أنّ:

$$\mathcal{F}_C[x^{n-1}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n)}{\omega^n}\cos\frac{n\pi}{2}, \qquad \mathcal{F}_S[x^{n-1}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n)}{\omega^n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

مثال (3-73): (i) أثبت أنّ:

$$\mathcal{F}_S[x\,f(x)] = -\frac{d}{d\omega}\{\mathcal{F}_C(\omega)\}, \qquad \mathcal{F}_C[x\,f(x)] = \frac{d}{d\omega}\{\mathcal{F}_S(\omega)\}$$

(ii) أوجد تحويل فوريه الجيبي والتجيبي للتابع $x\,e^{-ax}$; $a > 0$.

الحل:

$$(i) \quad \frac{d}{d\omega}\{\mathcal{F}_C(\omega)\} = \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)(-x\sin\omega x)dx = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty [x\,f(x)]\sin\omega x\,dx = -\mathcal{F}_S[x\,f(x)]$$

$$\frac{d}{d\omega}\{\mathcal{F}_S(\omega)\} = \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)(x\cos\omega x)dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty [x\,f(x)]\cos\omega x\,dx = \mathcal{F}_C[x\,f(x)]$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}_S[e^{-ax}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\sin\omega x\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{-ax}}{a^2+\omega^2}(-a\sin\omega x - \omega\cos\omega x)\right]_0^\infty = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}_C[e^{-ax}] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{-ax}}{a^2+\omega^2}(-a\cos\omega x + \omega\sin\omega x)\right]_0^\infty = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}_S[x\,e^{-ax}] = -\frac{d}{d\omega}[\mathcal{F}_C[e^{-ax}]] = -\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$$

$$\mathcal{F}_C[x\,e^{-ax}] = \frac{d}{d\omega}[\mathcal{F}_S[e^{-ax}]] = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{a^2+\omega^2-2\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$$

مثال (3-74): إذا كان تحويل فوريه الجيبي المنتهي للتابع $f(x)$ هو $(1-\cos n\pi)/n^2\pi^2$ أوجد $f(x)$، حيث إنّ: $0 \le x \le \pi$.

الحل:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_S(n)\sin\frac{n\pi x}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}\sin nx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\sin nx$$

مثال (3-75): أوجد حل المعادلة التكامليّة:

$$\int_0^{\infty} f(\theta)\cos\alpha\theta\,d\theta = \begin{cases} 1-\alpha & ; \quad 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 & ; \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

واستنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$$

الحل:

$$\int_0^{\infty} f(\theta)\cos\alpha\theta\,d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}_C(\alpha) \Rightarrow \mathcal{F}_C(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\begin{cases} 1-\alpha & ; \quad 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 & ; \quad \alpha > 1 \end{cases} \quad (i)$$

لدينا بأخذ العلاقة العكسية لتحويل فوريه التجيبي أنّ:

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathcal{F}_C(\alpha)\cos\alpha\theta\,d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-\alpha)\cos\alpha\theta\,d\alpha =$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\left[(1-\alpha)\frac{\sin\alpha\theta}{\theta}\right]_0^1 - \int_0^1(-1)\frac{\sin\alpha\theta}{\theta}d\alpha\right\} = \frac{2}{\pi\theta}\left[-\frac{\cos\alpha\theta}{\theta}\right]_0^1 = \frac{2(1-\cos\theta)}{\pi\theta^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_C(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f(\theta)\cos\alpha\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{2(1-\cos\theta)}{\pi\theta^2}\cos\alpha\theta\,d\theta$$

من هذه المعادلة والمعادلة (i) نجد أنّ:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\begin{cases} 1-\alpha & ; \quad 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 & ; \quad \alpha > 1 \end{cases} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{2(1-\cos\theta)}{\pi\theta^2}\cos\alpha\theta\,d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cos\alpha\theta\,d\theta=\begin{cases}1-\alpha & ;\quad 0\le\alpha\le 1\\ 0 & ;\quad \alpha>1\end{cases}$$

نجعل الآن $\alpha \to 0$ فنجد أنّ:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cos\alpha\theta\,d\theta=1\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}d\theta=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow$$
$$\int_0^{\infty}\frac{2\sin^2\theta/2}{\theta^2}d\theta;\quad t=\frac{\theta}{2}\Longrightarrow dt=\frac{d\theta}{2}\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

10-3 تحويلات زد Z-Transforms

درسنا في تحويل لابلاس وتحويل فوريه توابع $f(t)$ مستمرة، تنتج عادة من إشارات مستمرة في منطقة الزمن (time-domain)، تكون فيها قيم المتحول t حقيقية ويتحول التابع f إلى تابع المتغير فيه هو التردد (frequency-domain). ندرس الآن الحالات التي تكون فيها الإشارات متقطعة، وتكون فيها قيم متحول التابع أعداداً صحيحة أو طبيعية، أي أن التابع عبارة عن متتالية عددية (حقيقية أو عقدية)، وتتحول المتتالية إلى تابع المتغير فيه هو التردد المركب. ويستخدم هذا التحويل في معالجة الإشارات.

1-10-3 تعريف تحويل Z

مثل كثير من التحويلات التكاملية، يمكن تعريف تحويل Z بصيغتين: أحادية الجانب أو ثنائية الجانب، لكن يبقى تحويل Z أحادي الجانب هو المستخدم في معالجة الإشارة.

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية، حيث $n\in\mathbb{N}$. نعرّف تحويل Z أحادي الجانب (واختصاراً تحويل Z) لهذه المتتالية بأنه المتسلسلة:

$$Z[x_n]=\sum_{n=0}^{\infty}x_n z^{-n}=X(z)\qquad(127)$$

حيث z بصورة عامة متحول عقدي يُعين قسمه الحقيقي بحيث تكون المتسلسلة متقاربة.

نسمي $\{x_n\}$ أصل التحويل ونسمي $Z[x_n]=X(z)$ الصورة. ونسمي المنطقة التي يكون من أجلها المتسلسلة متقاربة، أي التحويل موجود، منطقة تقارب التحويل:

$$ROC_x=\{z\in\mathbb{C};\ Z[x_n]<\infty\}\qquad(128)$$

وإذا لم يكن هناك التباس سنرمز لها بالرمز ROC.

ملاحظة: يمكن تمديد هذا التعريف ليشمل المتتاليات المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة، ويسمى التحويل في هذه الحالة تحويل Z ثنائي الجانب (ذو الاتجاهين Double-sided)، ويعرف كالتالي:

$$Z[x_n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} = X(z) \qquad (129)$$

2-10-3 مبرهنة الكفاية

يكفي ليكون تحويل Z للمتتالية $\{x_n\}$ موجوداً (أي أن المتسلسلة متقاربة) هو تحقق الشرط:

إذا وجد العددان الحقيقيان α و $M > 0$ بحيث إنه من أجل عدد ما $n_0 \geq 0$:

$$|x_n| < Me^{\alpha n} \quad ; \quad \forall n \geq n_0 \qquad (130)$$

عندئذ يكون تحويل Z للمتتالية $\{x_n\}$ موجوداً (أي أن المتسلسلة متقاربة) من أجل $|x_n| > e^{\alpha}$.

البرهان: نضرب طرفي المتراجحة (130) بـ $|z^{-n}|$:

$$|x_n z^{-n}| < M\frac{e^{\alpha n}}{|z^n|} = M\left(\frac{e^{\alpha}}{|z|}\right)^n \quad ; \quad \forall n \geq n_0 \qquad (131)$$

ولما كانت المتسلسلة الهندسية $\sum\left(\frac{e^{\alpha}}{|z|}\right)^n$ متقاربة من أجل $\frac{e^{\alpha}}{|z|} < 1$ أي من أجل $|z| > e^{\alpha}$. وعليه، من (131) وحسب اختبار المقارنة نجد أن المتسلسلة $\sum|x_n z^{-n}|$ متقاربة، أي أن المتسلسلة (129) متقاربة بالإطلاق من أجل $|z| > e^{\alpha}$. ومنه، فإن تحويل Z موجود.

ملاحظة: إن التابع $X(z)$ تابع تحليلي في المنطقة $|z| > e^{\alpha}$، وتمثل المتسلسلة (129) نشر لورانت للتابع $X(z)$ في هذه المنطقة.

إن هذا الشرط كافٍ وليس لازماً، إذ قد يوجد تحويل Z لمتتالية لا تحقق الشرط السابق.

مثال (2-76): أوجد تحويل Z للمتتالية التي حدها العام $x_n = a^n$، حيث $n \in \mathbb{N}$.

الحل:

$$Z[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-a/z} = \frac{z}{z-a}; \quad |z| > |a|$$

وفي الحالة الخاصة فإن تحويل Z للمتتالية التي حدها العام تابع الخطوة الأحادية (step) $u_n = 1 = 1^n$:

$$Z[u_n] = Z[1^n] = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1-1/z} = \frac{z}{z-1}; \quad |z| > 1$$

وعندما $a^n = e^{n\alpha} = (e^{\alpha})^n$ يكون:

$$Z[x_n] = \frac{z}{z-e^{\alpha}} \quad ; \quad |z| > e^{\alpha}$$

مثال (2-77): أوجد تحويل Z للمتتالية التي حدها العام $x_n = a^n$، حيث a عدد حقيقي و $0 \leq n \leq N-1$.

الحل:

$$Z[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1-(a/z)^N}{1-a/z} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a} \quad ; \quad z \neq a$$

مثال (2-78): أوجد تحويل Z للمتتالية التي حدها العام تابع دلتا-ديراك (أو النبضة impulse):

$$x_n = \delta_n = \begin{cases} 1 & ; \ n = 0 \\ 0 & ; \ n > 0 \end{cases}$$

الحل:

$$Z[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} = 1 \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

مثال (2-79): أوجد تحويل Z للمتتالية التي حدها العام $x_n = na^n$، حيث $n \in \mathbb{N}$.

الحل:

$$Z[na^n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} na^n z^{-n} = \frac{a}{z} + 2\left(\frac{a}{z}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{z}\right)^3 + \cdots$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ (a/z)، ثم نطرح الناتج من العلاقة السابقة:

$$\left(\frac{a}{z}\right) Z[na^n] = \left(\frac{a}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{z}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{z}\right)^4 + \cdots \Rightarrow$$

$$Z[na^n] - \left(\frac{a}{z}\right) Z[na^n] = \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \left(\frac{a}{z}\right)^4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$\left(1 - \frac{a}{z}\right) Z[na^n] = \frac{a/z}{1-a/z} = \frac{a}{z-a} \quad ; \quad |z| > |a| \Rightarrow$$

$$Z[na^n] = \frac{az}{(z-a)^2} \quad ; \quad |z| > |a|$$

مثال (2-80): أوجد تحويل Z للمتتالية التي حدها العام $x_n = 1/n!$، حيث $n \in \mathbb{N}$.

الحل:

$$Z[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = e^{1/z} \quad ; \quad |z| > 0$$

3-10-3 خواص منطقة التقارب ROC

1- منطقة تقارب التحويل هي مجموعة مترابطة.

2- إن منطقة تقارب التحويل هي حلقة (أو قرص) مركزها نقطة الأصل:

أ- إذا كان $n \geq 0$، فإن منطقة تقارب التحويل هي القرص الخارجي $|z| > |a|$.

ب- إذا كان $n < 0$، فإن منطقة تقارب التحويل هي القرص $|z| < |b|$.

جـ- إذا كان $-\infty < n < \infty$، فإن منطقة تقارب التحويل هي الحلقة $|a| < |z| < |b|$.

3- إن تحويل Z متقارب بالإطلاق إذا وفقط إذا كانت منطقة التقارب تحوي دائرة الواحدة.

4- إن منطقة تقارب التحويل لا تحوي داخلها أقطاباً للتابع $X(z)$ وإنما فقط على محيطها.

4-10-3 خواص تحويل Z

1- التحويل خطي linearity: مهما يكن الثابتان α و β، فإن:

$$Z[\alpha x_n + \beta y_n] = \alpha Z[x_n] + \beta Z[y_n] \; ; \quad ROC = ROC_x \cap ROC_y \quad (132)$$

حيث إن ROC_x منطقة تقارب $Z[x_n]$، و ROC_y منطقة تقارب $Z[y_n]$.

مثال (2-81): أوجد $Z[\cos n\theta]$.

الحل:

$$Z[\cos n\theta] = Z\left[\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}\right] = \frac{1}{2}Z[e^{in\theta}] + \frac{1}{2}Z[e^{-in\theta}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{i\theta}} + \frac{z}{z - e^{-i\theta}}\right) = \frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

من أجل $|z| > 1$، حيث إن:

$$Z[e^{in\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\theta}}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{z}} = \frac{z}{z - e^{i\theta}} \; ; \; |z| > |e^{i\theta}| = 1$$

$$Z[e^{-in\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\theta}}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-i\theta}/z} = \frac{z}{z - e^{-i\theta}} \; ;$$

$$|z| > |e^{-i\theta}| = 1$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$$

وبشكل مشابه نجد أنّ:

$$Z[\sin n\theta] = \frac{z\sin\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

2- مبرهنة التأخر الزمني time delay، تحويل Z للمتتالية $\{x_{n-k}\}$

$$Z[x_{n-k}] = z^{-k}Z[x_n] \; , \; \forall k \in \mathbb{N} \; ; \quad ROC = ROC_x \quad (133)$$

البرهان:

$$Z[x_{n-k}] = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-(n-k)} = z^{-k} Z[x_n]$$

مثال (2-82): أوجد $Z[x_{n-6}]$ انطلاقاً من: $Z[a^n] = z/(z-a) \; ; \; |z| > |a|$.

الحل:

$$k=6 \Rightarrow Z[x_{n-6}] = z^{-6}Z[a^n] = z^{-6}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z^6-az^5} \quad ; \quad |z|>|a|$$

3- مبرهنة السبق الزمني time advance، تحويل Z للمتتالية $\{x_{n+k}\}$:

$$Z[x_{n+k}] = z^k Z[x_n] - \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-j}x_j \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} \; ; \quad ROC = ROC_x \qquad (134)$$

البرهان:

$$Z[x_{n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}z^{-n} = x_1 + x_2z^{-1} + x_3z^{-2} + \cdots =$$
$$= z[x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + \cdots] = z[(x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + \cdots) - x_0] = zZ[x_n] - zx_0$$
$$Z[x_{n+2}] = Z[x_{(n+1)+1}] = zZ[x_{n+1}] - zx_1 = z(zZ[x_n] - zx_0) - zx_1 =$$
$$= z^2Z[x_n] - z^2x_0 - zx_1$$

نتابع هكذا لنجد صحة القاعدة.

$$Z[x_{n+k}] = z^kZ[x_n] - z^kx_0 - z^{k-1}x_1 - z^{k-2}x_2 - \cdots - zx_{k-1}$$

مثال (2-83): أوجد $Z[x_{n+3}]$ انطلاقاً من: $Z[na^n] = az/(z-a)^2$; $|z|>|a|$.

الحل:

$$k=3 \Rightarrow Z[x_{n+3}] = z^3Z[x_n] - \sum_{j=0}^{2} z^{3-j}x_j = z^3\frac{az}{(z-a)^2} - z^3x_0 - z^2x_1 - zx_2 =$$
$$= \frac{az^4}{(z-a)^2} - z^2a - 2za^2 = \frac{za^3(4z-2a-1)}{(z-a)^2} \quad ; \quad |z|>|a|$$

4- مبرهنة التلاشي (scaling in the z-domain)، تحويل Z للمتتالية $\{z_0^n x_n\}$:

$$Z[z_0^n x_n] = X(z/z_0) = Z[x_n]_{(z\to z/z_0)} \qquad (135)$$

وإذا كانت منطقة التقارب لتحويل Z للمتتالية $\{x_n\}$ هي $|z|>a$، فإن منطقة التقارب هنا هي: $|z|>|z_0|a$، حيث z_0 عدد ثابت.

مثال (2-84): أوجد $Z[n]$ ثم استنتج $Z[na^n]$.

الحل:

$$Z[n] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{1}{z} + 2\frac{1}{z^2} + 3\frac{1}{z^3} + \cdots$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $(1/z)$، ثم نطرح الناتج من العلاقة السابقة:

$$\left(\frac{1}{z}\right)Z[n] = \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} + 3\frac{1}{z^4} + \cdots$$
$$Z[n] - \left(\frac{1}{z}\right)Z[n] = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)Z[n]=\frac{1/z}{1-1/z}=\frac{1}{z-1}\ ;\ |z|>1\Rightarrow Z[n]=\frac{z}{(z-1)^2}\ ;\ |z|>1$$

$$Z[na^n]=Z[n]_{(z\to z/a)}=\frac{z}{(z-1)^2}\Big|_{(z\to z/a)}=\frac{z/a}{(z/a-1)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}\ ;\ |z|>|a|$$

5- **اشتقاق الصورة** (differentiation in the z-domain)، تحويل Z للمتتالية $\{nx_n\}$:

$$Z[nx_n]=-z\frac{d}{dz}Z[x_n]=-zX'(z)\ ;\quad ROC=ROC_x \qquad (136)$$

البرهان:

$$\frac{d}{dz}Z[x_n]=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^{-n}=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}nx_nz^{-n-1}\right)=-z^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}nx_nz^{-n}\right)=$$
$$=-z^{-1}Z[nx_n]$$

تعميم: المشتق من المرتبة k: $\quad Z[n^kx_n]=(-z)^kX^{(k)}(Z)$

مثال (2-85): أوجد $Z[na^n]$ انطلاقاً من: $Z[u^n]=\frac{z}{z-a}\ ;\ |z|>|a|$.

الحل:

$$Z[na^n]=-z\frac{d}{dz}Z[a^n]=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{z-a}\right)=\frac{az}{(z-a)^2}\ ;\ |z|>|a|$$

6- **تكامل الصورة** (Integration in the z-domain)، تحويل Z للمتتالية $\{x_n/n\}$، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

$$Z\left[\frac{x_n}{n}\right]=-\int_0^z\frac{Z[x_n]}{z}dz=-\int_0^z\frac{X(z)}{z}dz\ ;\quad ROC=ROC_x \qquad (137)$$

البرهان والتعميم يتم بأسلوب مشابه للخاصة السابقة.

مثال (2-86): أوجد $Z\left[\frac{e^{-n}}{n}\right]$ انطلاقاً من التحويل: $Z[e^{-n}]=\frac{ze}{ze-1}\ ;\ |z|>1/e$.

الحل:

$$Z\left[\frac{e^{-n}}{n}\right]=-\int_0^z\frac{1}{z}\left(\frac{ze}{ze-1}\right)dz=-\{\ln(ze-1)\}_0^z=\frac{1}{\ln(ze-1)};\ |z|>\frac{1}{e}$$

7- **تحويل Z للمتتالية** (modulation) $\{e^{nT}x_n\}$:

$$Z[e^{nT}x_n]=X(e^{-T}z)=Z[x_n]|_{z\to ze^{-T}}\ ;\quad ROC=ROC_x \qquad (138)$$

البرهان والتعميم يتم بأسلوب مشابه للخاصة السابقة.

8- **تحويل Z للجداء** (multiplication): تحويل Z للمتتالية $\{x_n\cdot y_n\}$:

بفرض $Z[x_n]=X(z)$ و $Z[y_n]=Y(z)$ عندئذ:

$$Z[x_n\cdot y_n]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1}{s}X(s)Y\left(\frac{z}{s}\right)ds\ ;\quad ROC=ROC_x\cap ROC_y \qquad (139)$$

حيث C أي دائرة تقع بالكامل داخل ROC.

9- تحويل Z لمرافق متتالية عقدية (conjugation):

$$Z[\overline{x_n}] = \overline{X}(\overline{z}) = \overline{Z}[x_n]\big|_{z\to\overline{z}} \quad ; \quad ROC = ROC_x \qquad (140)$$

ومنه يمكن بسهولة التحقق من أنه إذا كان $X(z) = Z[x_n]$، فإن:

$$Re(x_n) = \frac{1}{2}\left[X(z) + \overline{X}(\overline{z})\right] \quad , \quad Im(x_n) = \frac{1}{2i}\left[X(z) - \overline{X}(\overline{z})\right] ; \; z \in ROC_x$$

مثال (2-87): أوجد $Z[(-i)^n]$ انطلاقاً من التحويل: $Z[i^n] = z/(z-i)$; $|z| > 1$.

الحل: واضح أن $\overline{x_n} = (-i)^n$، حيث $x_n = i^n$.

$$Z[(-i)^n] = \overline{Z}[x_n]\big|_{z\to\overline{z}} = \overline{\left(\frac{z}{z-i}\right)}\Big|_{z\to\overline{z}} = \left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}+i}\right)\Big|_{z\to\overline{z}} = \frac{z}{z+i} \; ; \; |\overline{z}| = |z| > 1$$

10- مبرهنة الطي Convolution Theorem:

نعرف طي متتاليتين $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$ بالعلاقة:

$$x_n * y_n = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k \cdot y_{n-k}) \qquad (141)$$

واضح أن هذه العملية تبديلية.

المبرهنة: إذا كان $Z[x_n] = X(z)$ و $Z[y_n] = Y(z)$ عندئذ:

$$Z[x_n * y_n] = X(z)Y(z) \quad ; \quad z \in ROC_x \cap ROC_y$$

البرهان: بما أنّ:

$$Z[x_n * y_n] = Z\left[\sum_{k=0}^{\infty}(x_k \cdot y_{n-k})\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(x_k \cdot y_{n-k})\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k x^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_{n-k}\, z^{-(n-k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k z^{-k} \cdot Y(z)\right) = Y(z)\sum_{k=0}^{\infty}(x_k z^{-k})$$

$$= Y(z)X(z)$$

وهو المطلوب.

3-10-5 قواعد أساسية

١) مبرهنة القيمة الابتدائية (نهاية الصورة):

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0 \qquad (142)$$

$$\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \lim_{z\to\infty}(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots) = x_0$$

٢) مبرهنة القيمة النهائية (نهاية المتتالية):

$$\lim_{z\to 1}(z-1)Z[x_n] = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad (143)$$

إذا كان التحويل $Z[x_n]$ موجوداً من أجل $|z| > 1$.

ملاحظة: تفيد هذه المبرهنة في حساب بعض النهايات، ولكن يجب التأكد من وجود الطرف الأيمن أولاً، فمثلاً النهاية $\lim_{n\to\infty}(\sin n\theta)$ غير موجودة، بينما لو طبقنا المبرهنة نحصل على نتيجة خاطئة، فمثلاً:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\,Z[\sin n\theta] = \lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{z\sin\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}\right) = 0 \neq \lim_{n\to\infty}(\sin n\theta)$$

مثال (2-88): احسب النهاية: $\lim_{n\to\infty}(\sin n)/n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = \lim_{z\to 1}(z-1)Z[x_n] = -\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\int_0^z \frac{Z[x_n]}{z}dz\right] =$$

$$= -\frac{1}{2i}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\int_0^z\left(\frac{1}{z-e^i}-\frac{1}{z-e^{-i}}\right)dz\right] =$$

$$= -\frac{1}{2i}\lim_{z\to 1}\{(z-1)[\ln(z-e^i)-\ln(z-e^{-i})]\} = -\frac{1}{2i}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\ln\left(\frac{z-e^i}{z-e^{-i}}\right)\right] = 0$$

6-10-3 طريقة الفروق المنتهية لحساب مجموع متسلسلة قوى

إذا كان x_n الحد العام للمتتالية عبارة عن حدودية في n من الدرجة m، فإن طريقة الفروق المنتهية لحساب مجموع متسلسلة قوى تكون مناسبة.

تعريف (3-3) الفروق المنتهية: ليكن $f(t)$ تابع ما وتزايد المتحول $h = \Delta t$، حيث h ثابت يسمى الخطوة. نسمي المقدار $\Delta f(t) = f(t+h) - f(t)$ الفروق الأمامية الأولى للتابع f. والفروق الأمامية الثانية هي:

$$\Delta^2 f = \Delta[\Delta f(t)] = \Delta[f(t+h) - f(t)] = \Delta f(t+h) - \Delta f(t) =$$
$$= f(t+h+h) - f(t+h) - [f(t+h) - f(t)] = f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)$$

وهكذا نوجد بقية الفروق:

$$\Delta^k f = \Delta^{k-1}[f(t+h) - f(t)] = \Delta^{k-1}f(t+h) - \Delta^{k-1}f(t) \qquad (144)$$

وعليه:

$$Z[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{k=0}^{m}\Delta^k x_n(0)\frac{z^{-k}}{(1-z^{-1})^{k+1}} \quad ; \quad |z| > 1$$

حيث $\Delta^0 x_n = x_n$. كما هو واضح فإننا سنكتفي بالفروق من المرتبة m، لأن الفروق من المرتبة أكبر من m للحدودية من الدرجة m ستكون معلومة.

مثال (2-89): أوجد $Z[n^2+2n+1]$.

الحل: ننظم جدول الفروق الأمامية للمتتالية التي حدها العام $x_n = n^2 + 2n + 1$:

n	x_n	$\Delta^1 x_n$	$\Delta^2 x_n$	$\Delta^3 x_n$
0	1	3	2	0
1	4	5	2	
2	9	7		
3	16			

$$Z[x_n] = 1\frac{1}{1-z^{-1}} + 3\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + 2\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^3};\ |z| > 1$$

7-10-3 تحويل Z للفروق

$$Z[\Delta x_n] = (z-1)X(z) - zx_0 \quad (145)$$

البرهان: لما كان $Z[x_{n+1}] = zX(z) - zx_0$، فإن:

$$Z[\Delta x_n] = Z[x_{n+1} - x_n] = Z[x_{n+1}] - Z[x_n] = zX(z) - zx_0 - X(z) = \\ = (z-1)X(z) - zx_0$$

وبالأسلوب ذاته نجد:

$$Z[\Delta^2 x_n] = (z-1)^2 X(z) - z(z-1)x_0 - z\Delta x_0$$

وهكذا يمكن استنتاج علاقة تحويل Z للفروق من أي مرتبة.

8-10-3 العلاقة بين تحويل Z وتحويل لابلاس:

نعرّف التابع $x(t) = x_n$، حيث t متحول حقيقي يحقق $n \le t < n+1$. عندئذ يكون:

$$Z[x_n] = \left\{\frac{s}{1-e^{-s}}\mathcal{L}[x(t)]\right\}_{e^{sT}\to z} \quad (146)$$

أو:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1-e^{-s}}{s}\{Z[x_n]\}_{z\to e^{sT}} \quad (147)$$

حيث $|z| > 1 \Leftrightarrow Re(s) > 0$.

البرهان: نكتب التابع $x(t)$ بدلالة تابع هيفيساید:

$$x(t) = x_0[u(t) - u(t-1)] + x_1[u(t-1) - u(t-2)] + \cdots + \\ + x_n[u(t-n) - u(t-n-1)] + \cdots$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n[u(t-n) - u(t-n-1)]$$

نأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x_n[u(t-n) - u(t-n-1)]\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L[x_n[u(t-n)-u(t-n-1)]]$$

$$= x_0\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right)+x_1\left(\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\right)+\cdots+x_n\left(\frac{e^{-ns}}{s}-\frac{e^{-(n+1)s}}{s}\right)+\cdots=$$

$$=\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right)(x_0+x_1e^{-s}+\cdots+x_ne^{-ns}+\cdots)=\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}x_ne^{-ns}$$

وبفرض $e^s = z$ أو $s = \ln z$ نجد أنّ:

$$L[x(t)] = \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^{-n} = \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)Z[x_n]$$

تعريف (3-4): نسمي التابع:

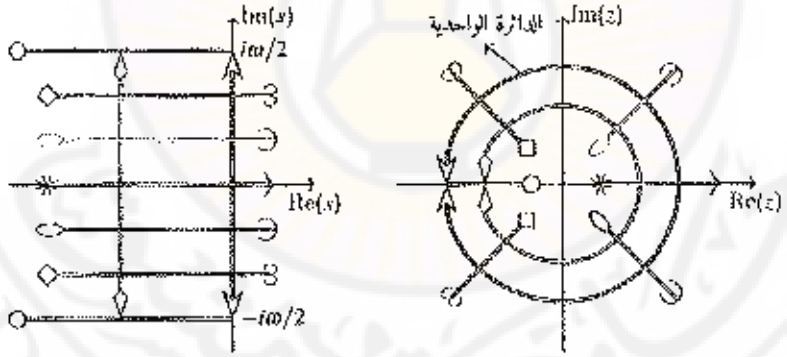
$$X^*(s) = \mathcal{D}[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty}x_ne^{-ns} \qquad (148)$$

تحويل لابلاس المنقطع للمتتالية $\{x_n\}$.

واضح إنه تحويل Z للمتتالية $\{x_n\}$ نفسه بعد تبديل z بـ e^s، أي أن:

$$X^*(s) = \mathcal{D}[x_n] = \{Z[x_n]\}_{z=e^s} = X(e^s)$$

فإذا كانت: $s = \sigma + i\omega$ فإنّ: $z = e^s = e^{\sigma}\,e^{i\omega}$، وإنّ التطبيق وفق العلاقتين السابقتين من المستوي S إلى المستوي Z موضح بالشكل الآتي:



الشكل (Z-74): التحويل بين المستويين S و Z.

إنّ الخطوط أو الأسهم من شكل معين في المستوي S تتحول إلى الخطوط من الشكل نفسه في المستوي Z. توفق العلاقتين السابقتين نلاحظ أنّ:

1- المحور التخيلي في المستوي S (التردد) بين $-\omega/2$ و $\omega/2$ يتحول إلى الدائرة الواحدية $|z| = 1$ في المستوي Z (الزمن).

2- قسم المستوي S الواقع على يسار المحور التخيلي يتحول إلى داخل الدائرة الواحدية في المستوي Z.

3- قسم المستوي S الواقع على يمين المحور التخيلي يتحول إلى خارج الدائرة الواحدية في المستوي Z.

4- الخط الشاقولي الواقع على يسار المحور التخيلي والموازي له (σ ثابت) في المستوي S يتحول إلى دائرة داخل الدائرة الواحدية في المستوي Z.

5- الخطوط الأفقية الواقع على يسار المحور التخيلي والموازية للمحور الحقيقي (ω ثابت) في المستوي S تتحول إلى خطوط متجهة للمبدأ داخل الدائرة الواحدية في المستوي Z.

6- الخطوط الأفقية الواقع على يمين المحور التخيلي والموازية للمحور الحقيقي (ω ثابت) في المستوي S تتحول إلى خطوط متجهة من المبدأ إلى خارج الدائرة الواحدية في المستوي Z.

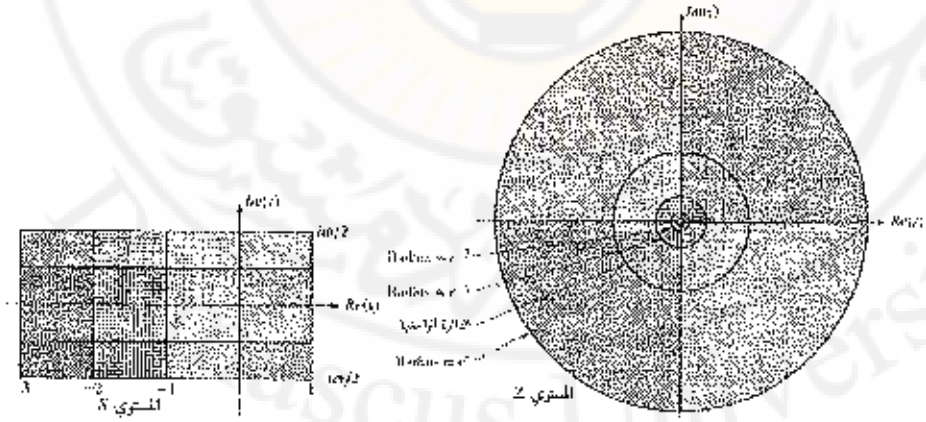
7- المبدأ في المستوي S يتحول إلى النقطة $z = 1$ في المستوي Z.

8- القسم السالب من المحور الحقيقي في المستوي S يتحول إلى المجال من 1 (الواحد) إلى 0 (الصفر) في المستوي Z.

ملاحظة: يمكن تقسيم المستوي S إلى شرائط أفقية بعرض يساوي تردد إحدى العينات المأخوذة. كل شريط يتحول إلى سطح ريمان مختلف Riemann surface من المستوي Z.

يوضح الشكل أدناه خريطة لمناطق مختلفة من المستوي S والموافقة لها من المستوي Z.

ملاحظة: إن العلاقة بين المستوي Z والمستوي S (المعرفة بالعلاقة $z = e^s$) ليست وحيدة التعيين، لأن جميع النقاط $s + 2\pi ki$ تقابل نقطة وحيدة من نقاط المستوي Z. وهذا يعني أن التابع $D[x_n]$ دوري دوره $2\pi i$، أي أن: $X^*(s) = X^*(s + 2\pi ki)$ $(\omega = \omega + 2\pi k)$ لذا نختار شريطاً أفقياً من المستوي s عرضه 2π وليكن $[-\pi, \pi]$، لمقابلة نقاط المستوي Z.



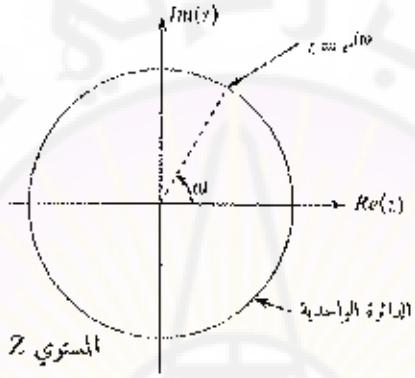
الشكل (2-75): تحويل المناطق بين الشريط $[-\pi, \pi]$ من المستوي S إلى المستوي Z.

9-10-3 العلاقة بين تحويل Z وتحويل فوريه:

بأسلوب مشابه لإيجاد العلاقة بين تحويل Z وتحويل لابلاس، يمكن استنتاج العلاقة بين تحويل Z وتحويل فوريه. فإذا وضعنا $z = e^{i\omega}$ في تحويل Z، فإننا نحصل على تحويل فوريه المتقطع:

$$\mathcal{F}[x_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-i\omega n} \qquad (149)$$

أي أن تحويل فوريه المتقطع هو تحويل Z على الدائرة الواحدية:



الشكل (2-76): الدائرة الواحدية.

11-3 تحويل Z العكسي (مقلوب تحويل Z)

هو أصل تحويل Z أي هو المتتالية $\{x_n\}$. ونرمز له بالرمز: $Z^{-1}[X(z)] = x_n$ (150)

أي أن: $X(Z) = Z[x_n] \Leftrightarrow Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}[Z[x_n]] = x_n$

واضح من التعريف أن التحويل العكسي خطي:

$$Z^{-1}[aX(z) + bY(z)] = aZ^{-1}[X(z)] + bZ^{-1}[Y(z)]$$

ويوجد بعدة طرائق. منها استخدام خواص التحويل وبعض التحويلات المعروفة، أو باستخدام مبرهنة الطي، حيث: $x_n * y_n = Z^{-1}[X(z).Y(z)]$ (151)

كما يمكن إيجاد التحويل العكسي باستخدام الصيغة العقدية (مبرهنة الرواسب).

1-11-3 الصيغة العقدية لمقلوب تحويل Z

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum res[X(z)z^{n-1}, z_k] \qquad (152)$$

حيث z_k أقطاب التابع $X(z)$ و C أي دائرة تقع بالكامل داخل ROC وتحوي جميع الأقطاب z_k.

مثال (2-90): أوجد التحويل العكسي للصورة (أوجد الأصل)

$$X(z) = Z[x_n] = \frac{z}{z-2} \quad ; \quad |z| > 2$$

الحل: باستخدام مفهوم المتسلسلة الهندسية نجد:

$$\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} \quad ; \quad \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$$

بالمقارنة مع تعريف التحويل نجد: $x_n = 2^n$.

مثال (2-91): أوجد التحويل العكسي للصورة (أوجد الأصل)

$$X(z) = Z[x_n] = \frac{z}{z^2 - z - 2} \quad ; \quad |z| > 2$$

الحل: نفرق الكسر:

$$\frac{1}{z}X(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1} = \frac{1/3}{z-2} - \frac{1/3}{z+1}$$

$$X(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{1+1/z}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$$

$$; \ |2/z| < 1 \text{ and } |-1/z| < 1$$

$$X(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[2^n - (-1)^n]z^{-n} \quad ; \quad |z| > 2$$

إذاً $x_n = 2^n - (-1)^n$.

ممكن حله باستخدام الرواسب:

$$x_n = Res[X(z)z^{n-1}, z = 1] + Res[X(z)z^{n-1}, z = 2]$$

$$Res[X(z)z^{n-1}, z = 1] = \frac{z}{z^2 - z - 2}z^{n-1}(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{z^n}{z-2}\Big|_{z=1} = -(1)^n$$

$$Res[X(z)z^{n-1}, z = 2] = \frac{z}{z^2 - z - 2}z^{n-1}(z-2)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{z^n}{z-1}\Big|_{z=2} = 2^n$$

إذاً $x_n = 2^n - (-1)^n$.

2-11-3 تطبيق تحويل Z في حل معادلات الفروق

تسمى المعادلة من الشكل: $f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0$ (152)

أو من الشكل: $f(n, x_n, \Delta x_n, \dots, \Delta^k x_n) = 0$ (153)

معادلة فروق من المرتبة k حيث x_n حد عام لمتتالية يجب تعيينها.

سنفرض دائما أن الخطوة في المعادلة (153) تساوي الواحد.

لما كانت الفروق يعبر عنها بدلالة قيم المتتالية x_n في النقاط الموافقة $(n+k)$، حيث $k=0,1,\cdots$ بدلالة القيم $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}$، لذا فإن المعادلة (153) ترد إلى (152) وبالعكس.

سنقتصر في دراستنا على معادلات الفروق الخطية من المرتبة k ذات الأمثال الثابتة:

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \cdots + a_k x_n = \varphi(n) \qquad (154)$$

حيث $\varphi(n)$ تابع ما في n و $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ثوابت عددية.

إذا كان $\varphi(n) = 0$، فإن المعادلة (154) تسمى متجانسة.

إذا كان $a_k = 0$ فإنه يمكن تخفيض مرتبة المعادلة مرتبة واحدة وذلك بفرض أن $m = n+1$:

$$x_{m+k} + a_1 x_{m+k-1} + \cdots + a_k x_m = \Phi(n) \qquad (155)$$

وهي معادلة فروق من المرتبة $k-1$. وبالمثل إذا كان $a_k = a_{k-1} = 0$ فإنه يمكن تخفيض مرتبة المعادلة مرتبتين وذلك بفرض أن $m = n+2$، وهكذا...

إن الحل العام للمعادلة (154) عبارة عن مجموع حلين، أحدهما عام للمعادلة بدون طرف ثان والآخر خاص للمعادلة مع طرف ثان، إلا أن البحث عن حل عام للمعادلة (154) ليس موضع دراستنا.

نبحث عن حل خاص للمعادلة (154) محققاً للشروط الابتدائية $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ وهي قيم معطاة.

طريقة الحل: نطبق تحويل Z على طرفي المعادلة (154) فنحصل على معادلة جبرية خطية تابعها المجهول $X(z) = Z[x_n]$. نحلها ثم نطبق تحويل Z العكسي على الحل $X(z)$.

$$X(z) = Z[x_n] \Leftrightarrow x_n = Z^{-1}[X(z)]$$

ملاحظة: يمكن تطبيق الخوارزمية نفسها لحل جملة معادلات فروق خطية ذات أمثال ثابتة.

مثال (2-92): حل المعادلة: $x_{n+1} - x_n = 0$، حيث $x_0 = 1$.

الحل: المعادلة هي معادلة فروق خطية من المرتبة الاولى ذات أمثال ثابتة.

يمكن حلها حسب تعريف المتتالية $x_{n+1} = x_n \Rightarrow x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = 1$ أي أن الحل هو المتتالية $\{x_n\} = \{1,1,\cdots,1,\cdots\}$.

نطبق تحويل Z على الطرفين:

$$Z[x_{n+1} - x_n] = 0 \Rightarrow Z[x_{n+1}] - Z[x_n] = 0$$
$$[zX(z) - zx_0] - X(z) = 0 \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$$

نطبق مقلوب تحويل Z على الطرفين:

$$X(x)=\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}1^n z^{-n}\quad ;\ \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

إذاً $x_n=(1)^n$.

مثال (2-93): حل المعادلة: $x_{n+1}-x_n=n$، حيث $x_0=1$.

الحل: المعادلة هي معادلة فروق خطية من المرتبة الأولى ذات أمثال ثابتة. نطبق تحويل Z على الطرفين:

$$Z[x_{n+1}-x_n]=Z[n]\ \Rightarrow\ Z[x_{n+1}]-Z[x_n]=Z[n]$$

$$Z[n]=Z[n\cdot 1^n]=-z\frac{d}{dz}Z[1^n]=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$[zX(z)-zx_0]=\frac{z}{(z-1)^2}\Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{(z-1)^3}$$

نطبق مقلوب تحويل Z على الطرفين:

$$x_n=Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}+\frac{z}{(z-1)^3}\right\}=Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]+Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^3}\right]\Rightarrow$$

$$x_n=Res\left[\frac{z}{z-1}z^{n-1},z=1\right]+Res\left[\frac{z}{(z-1)^3}z^{n-1},z=1\right]$$

$$Res\left[\frac{z}{z-1}z^{n-1},z=1\right]=\frac{z}{z-1}z^{n-1}(z-1)\Big|_{z=1}=(1)^n$$

$$Res\left[\frac{z}{(z-1)^3}z^{n-1},z=1\right]=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z}{(z-1)^3}z^{n-1}(z-1)^3\right]\Big|_{z=1}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}z^n\Big|_{z=1}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

إذاً $x_n=(1)^n+n(n-1)/2$.

12-3 تحويل فوريه المتقطع DFT:

عند استخدام متسلسلات فوريه وتحويلات فوريه وتقريباتها المثلثية وجب علينا فرض أن التابع $f(t)$ المراد تحويله معطى على مجال يكون مستمراً جزئياً ويتحقق فيه حساب ثوابت أويلر. ولكن كثيراً ما يعطى التابع $f(t)$ يقيم عند عدد منته من النقاط، فكيف يمكننا حساب متسلسلات فوريه وكذلك تحويلات فوريه له. إن المجال التطبيقي الذي يدعى «تحليل فوريه المتقطع» هو الذي يهتم بالبيانات الكمية والمتباعدة، كما يحدث في الاتصالات وتحليل السلاسل الزمنية، والعديد من مسائل المحاكاة. في هذه الحالات، نتعامل مع القيم المختارة بدلاً من التوابع، ويمكننا استبدال تحويل فوريه بما يدعى تحويل فوريه المتقطع Discrete Fourier Transform (DFT).

لتكن الإشارة معطاة $f(t)$ معرفة على مجال طوله $T = 2L$ مثلاً $[0, 2L]$ نقسم هذا المجال إلى N مجالاً جزئياً $\left[\frac{nT}{N}, \frac{(n+1)T}{N}\right]$ حيث $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ طول كلٍّ منها T/N، نأخذ من كلّ مجال جزئي القيمة $x(n) = f(t_n)$، حيث $t_n \in \left[\frac{nT}{N}, \frac{(n+1)T}{N}\right]$، ونعرف تحويل فوريه المتقطع للمتتالية $x(n)$:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} = X(e^{i\omega}); \quad \omega = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi t}{L} \qquad (156)$$

$$x(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{i\omega n}dt \approx \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{i\omega n}\frac{T}{N} \qquad (157)$$

حسب مجموع ريمان.

كما أنّ تحويل Z (لابلاس المتقطع):

$$Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z) \qquad (158)$$

أي أنّ العلاقة بين **DFT** وتحويل Z:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = X(e^{i\omega}) \qquad (159)$$

ملاحظة: عادة ما يكون الدور (طول المجال) في تحويل فوريه المتقطع هو $T = 2\pi$ لذلك قد لا يذكر ويعرف بالضرورة أنه 2π. فإذا كان دور التابع 2π فيكتب تحويل فوريه المتقطع للمتتالية $x(n)$ بالشكل:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} x(n)e^{-(2\pi kn/N} \qquad (160)$$

$$\omega = \frac{2\pi t}{T} = t = \frac{kT}{N} = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow N\omega = 2\pi k; \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

باختيار t بداية كلّ مجال جزئي.

مثال (3-94): لتكن $x(n) = \{c\}_{n=0}^{N-1}$ متتالية ثابتة حيث إن c هو عدد عقدي. أوجد تحويل فوريه المتقطع لهذه المتتالية في المجال $[0, 2\pi]$.

الحل:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} ce^{-i\omega n} = c\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-i\omega})^n$$

وبما أن مجموع N حدّاً الأوائل لمتسلسلة هندسية حيث $|r| < 1$ هو:

$$\sum_{j=0}^{N-1} r^j = \frac{1-r^N}{1-r} \Rightarrow$$

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = c\left(\frac{1-e^{-i\omega N}}{1-e^{-i\omega}}\right) = c\left(\frac{1-e^{-i2\pi k}}{1-e^{-i\omega}}\right) = 0\,; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

لأنّ n عدد صحيح وأنّ $e^{-i2\pi n} = \cos(2\pi n) - i\sin(2\pi n) = 1$.

أي أنّ تحويل فوريه المتقطع DFT لمتتالية ثابتة هو متتالية غير منتهية من الأصفار.

مثال (95-3): أوجد تحويل فوريه المتقطع للمتتالية $x(n) = \{\sin(na)\}_{n=0}^{N-1}$ حيث إنّ N عدد صحيح موجب و a هو عدد عشوائي وليس صحيحاً من مضاعفات العدد π.

الحل:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(na)\, e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(na)\, e^{-i2\pi nk/N}$$

وبما أنّ:

$$\sin(na) = \frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1} e^{ina}e^{-i2\pi nk/N} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-ina}e^{-i2\pi nk/N} =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{ia-i2\pi k/N}\right)^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-ia-i2\pi nk/N}\right)^n$$

نطبق مجموع المتسلسلة الهندسية للمتسلسلتين نجد أنّ:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \frac{1}{2i}\frac{1-\left(e^{ia-i2\pi k/N}\right)^N}{1-e^{ia-i2\pi k/N}} - \frac{1}{2i}\frac{1-\left(e^{-ia-i2\pi nk/N}\right)^N}{1-e^{-ia-i2\pi nk/N}} =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{1-e^{iaN}e^{-2\pi ik}}{1-e^{ia-i2\pi k/N}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-iaN}e^{-2\pi ik}}{1-e^{-ia-i2\pi k/N}} = \frac{1}{2i}\frac{1-e^{iaN}}{1-e^{ia-i2\pi k/N}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-iaN}}{1-e^{-ia-i2\pi k/N}}$$

حيث إنّ $e^{-2\pi ik} = 1$.

فإذا كان $N = 5$ و $a = \sqrt{2}$، عندئذٍ:

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \sin(\sqrt{2}), \quad x(2) = \sin(2\sqrt{2}),$$
$$x(3) = \sin(3\sqrt{2}), \quad x(4) = \sin(4\sqrt{2})$$

فيكون تحويل فوريه المتقطع:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \frac{1}{2i}\frac{1-e^{5i\sqrt{2}}}{1-e^{i\sqrt{2}-i2\pi k/5}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-5i\sqrt{2}}}{1-e^{-i\sqrt{2}-i2\pi k/5}} = X(k)$$

$$\Longrightarrow X(0) = \frac{1}{2i}\frac{1-e^{5i\sqrt{2}}}{1-e^{i\sqrt{2}}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-5i\sqrt{2}}}{1-e^{-i\sqrt{2}}} = \frac{\sin(4\sqrt{2}) + \sin(\sqrt{2}) - \sin(5\sqrt{2})}{2-2\cos(\sqrt{2})} \approx$$

$$\approx -0.1820207591$$

$$\Rightarrow X(1) = \frac{1}{2i}\frac{1 - e^{5i\sqrt{2}}}{1 - e^{i\sqrt{2}-2\pi i/5}} - \frac{1}{2i}\frac{1 - e^{-5i\sqrt{2}}}{1 - e^{-i\sqrt{2}-2\pi i/5}} \approx$$
$$\approx 0.416248825 - 2.202105642\,i$$

13-3 تحويل هلبرت Hilbert Transform:



يعدّ تحويل هلبرت في الرياضيات، وفي مجال معالجة الإشارة من أهم التحويلات التي تحوّل التابع $u(t)$ وفق عامل خطي إلى التابع $\mathcal{H}[u(t)]$ في مجموعة التعريف نفسها، ويمكن أن يكون التابع دورياً، فهو مثلاً يحول التابع $u(t)$ من محور الزمن إلى محور الزمن أو ينقل التابع $u(t)$ في المستوي العقدي من قسمه الحقيقي إلى قسمه التخيلي أو العكس من القسم التخيلي إلى الحقيقي، على عكس التحويلات الأخرى مثل تحويل لابلاس وتحويل فوريه فإنها تحول التوابع من محور الزمن إلى محور التردد. وسمّي التحويل بهذا الاسم نسبة إلى عالم الرياضيات الألماني دافيد هلبرت الذي يعدّ من أكثر العلماء المؤثرين في القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين.

ويعطى تحويل هلبرت للتابع $u(t)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t-\tau)}{\tau} d\tau \qquad (161)$$

حيث إنّ $P.V.$ = Cauchy Principal Value هي القيمة الرئيسية لكوشي للتكامل المعتل، لأنّ التكامل غير معرّف عند القطب $t = \tau$ وغير موجود لذلك نأخذ القيمة الرئيسية لكوشي له.

تعريف (5-3): ليكن $[\alpha,\beta]$ مجالاً حقيقياً وليكن f تابع عقدي معرف على هذا المجال، بحيث يأخذ قيمة غير محدودة عند $\xi \in [\alpha,\beta]$. إنّ التكامل على هذا المجال ليس موجوداً دائماً، لذلك نحسب النهايتين:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha}^{\xi-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\xi+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx \qquad (162)$$

فيبقى وجوه ممكناً، ومجموع هاتين النهايتين هو التكامل المعتل ويكتب بالصيغة العادية:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (163)$$

فإذا كانت النهايتان غير موجودتين فيمكن أخذ النهاية التناظرية:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\alpha}^{\xi-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\xi+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx\right) = P.V. \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (164)$$

فإذا كانت هذه النهاية موجودة فإنها تدعى القيمة الرئيسية لكوشي لهذا التكامل المعتل.

ويمكن كتابة تحويل هلبرت للتابع $u(t)$ بالشكل:

$$\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)}{t-\tau}d\tau=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{|t-\tau|\geq\varepsilon}\frac{u(\tau)}{t-\tau}d\tau=$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{u(t+\tau)-u(t-\tau)}{\tau}d\tau \qquad (165)$$

أو يمكن كتابته بالشكل:

$$\mathcal{H}[u(t)]=u(t)*\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{t-1/\varepsilon}^{t-\varepsilon}\frac{u(t)}{t-\tau}d\tau+\int_{t+\varepsilon}^{t+1/\varepsilon}\frac{u(t)}{t-\tau}d\tau\right) \qquad (166)$$

ملاحظة: إذا كان التابع $u(t)=f(t)-ig(t)$ فإننا نجد:

$$f(t)=-\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{t-\tau}d\tau=-\mathcal{H}[g(t)] \qquad (167)$$

$$g(t)=\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau=\mathcal{H}[f(t)] \qquad (168)$$

وهنا نلاحظ أنّ التابع $y(t)$ هو تحويل هلبرت للتابع $f(t)$، بينما أنّ التابع $f(t)$ هو التحويل المعاكس للتابع $g(t)$، أي أنّ: $f(t)=\mathcal{H}^{-1}[g(t)]=-\mathcal{H}[g(t)]$. أو بمعنى آخر:

$$\mathcal{H}[Re\,u(t)]=Im\,u(t) \qquad (169)$$

مثال (3-96): أوجد تحويل هلبرت للتابع الثابت $u(t)=c$.

الحل: باستخدام تعريف تحويل هلبرت نجد أنّ:

$$\mathcal{H}(c)=\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{t-\tau}d\tau=\frac{c}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\tau}d\tau=0$$

وبما أنّ التابع المكامل هو تابع فردي بالنسبة إلى τ على مجال متناظر حول النقطة $t=\tau$. فإنّ التكامل معدومٌ، أي أنّ: $\mathcal{H}(c)=0$.

طريقة ثانية:

$$\mathcal{H}(c)=\hat{c}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t-\tau)}{\tau}d\tau=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1/\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{u(t-\tau)}{\tau}d\tau+\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{u(t-\tau)}{\tau}d\tau\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{c}{\tau}d\tau+\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\frac{c}{\tau}d\tau\right)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\left(\frac{c}{\tau}-\frac{c}{\tau}\right)d\tau\right)=0$$

مثال (3-97): أوجد تحويل هلبرت لتابع الموجة المستطيلة $rect(t)$.

الحل: ليكن لدينا التابع: $g(t)=\pi\,rect(t)$. عندئذ:

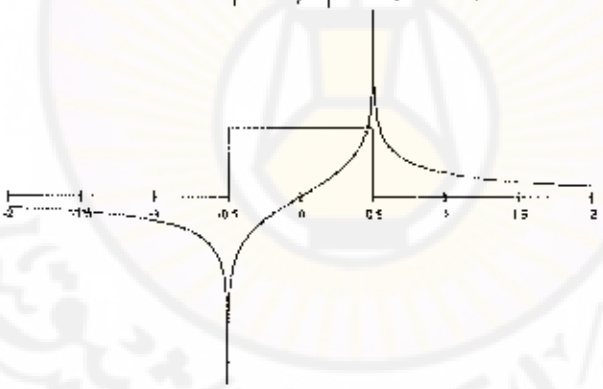
$$g(t)=\mathcal{H}[\pi\,rect(t)]=\int_{t-1/2}^{t+1/2}\frac{1}{\tau}d\tau$$

نميز أربعة حالات:

- في حالة $t > 1/2$، فالتكامل يساوي $\ln((t+1/2)/(t-1/2))$.
- بالتناظر، في $t < -1/2$، فالتكامل يساوي $-\ln((t-1/2)/(t+1/2))$، والذي يكتب بالشكل $\ln((t+1/2)/(t-1/2))$.
- في حالة $0 < t < 1/2$، نمدد مجال التكامل ليشمل النقطة $\tau = 0$، فإن القيمة الرئيسية لكوشي للتكامل على المجال $[t-1/2, -t+1/2]$، تساوي الصفر 0، هذا يؤدي أن التكامل على المجال $[-t+1/2, t+1/2]$، يساوي القيمة $\ln((t+1/2)/(-t+1/2))$.
- بالتناظر، في حالة $-1/2 < t < 0$، نجد أنّ التكامل معدوم $(=0)$ على المجال $[-t-1/2, t+1/2]$، بينما أنّه على المجال $[t-1/2, -t-1/2]$، يساوي القيمة $-\ln((-t+1/2)/(t+1/2)) = \ln((t+1/2)/(-t+1/2))$.

في الحالات الأربع نجد أنّ التكامل يساوي:

$$\tilde{g}(t) = \ln\left|\frac{t+1/2}{t-1/2}\right| = \ln\left|\frac{2t+1}{2t-1}\right|$$



الشكل (3-77): تحويل هلبرت للموجة المستطيلة.

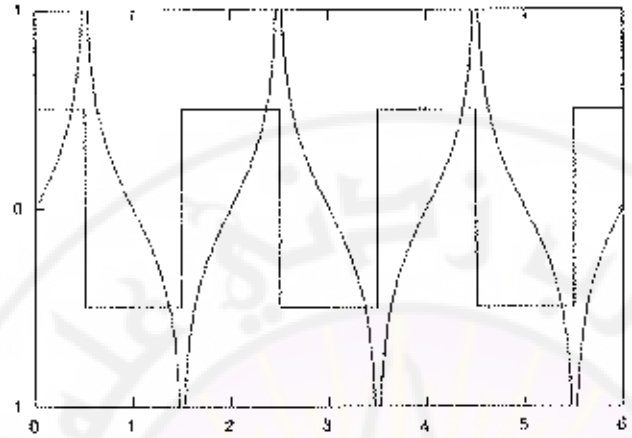
مثال (3-98): أوجد تحويل هلبرت للتابع الدوري $u(t) = \begin{cases} 1/2 ; & -1/2 < t < 1/2 \\ -1/2 ; & 1/2 < t < 3/2 \end{cases}$. (الموجة المربعة)

الحل:

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\tau}{t-\tau} - \frac{1}{2\pi}\int_{1/2}^{3/2} \frac{d\tau}{t-\tau} =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi}\ln|t-\tau|\right]_{1/2}^{3/2} - \left[\frac{1}{2\pi}\ln|t-\tau|\right]_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\left|t-\frac{3}{2}\right| - 2\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| + \ln\left|t+\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{t^2-t-3/4}{(t-1/2)^2}\right|$$



الشكل (3-78): تحويل هلبرت للموجة المربعة.

مثال (3-99): أوجد تحويل هلبرت للتابع $u(t) = \cos(t)$.

الحل:

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\pi} P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t-\xi)}{\xi} d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi)\cos(t) + \sin(\xi)\sin(t)}{\xi} d\xi$$
$$= \frac{\cos(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi)}{\xi} d\xi + \frac{\sin(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \sin(t) \quad (*)$$

3-13-1 العلاقة بين تحويل هلبرت وتحويل فوريه:

إذا كان تحويل هلبرت للتابع $u(t)$ هو $\mathcal{H}[u(t)]$ وتحويل فوريه له هو $\mathcal{F}[u(t)]$ ضمن الشروط المحققة لهما، فإن تحويل العلاقة بين تحويل فوريه وتحويل هلبرت هي:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[u(t)]\} = -i\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}[u(t)] \qquad (170)$$

(*) إن قيمة التكاملين هي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi)}{\xi} d\xi = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \pi$$

$$\int_0^{\infty} \sin(x)\, e^{-sx} dx = \left[-e^{-sx}\cos(x) - se^{-sx}\sin(x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} s^2 e^{-sx}\sin(x)\, dx \Rightarrow$$

$$(1+s^2)\int_0^{\infty} \sin(x)\, e^{-sx} dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \sin(x)\, e^{-sx} dx = \frac{1}{1+s^2} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} ds = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx}\sin(x)\, dx\, ds = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+s^2} dx = \left[2\tan^{-1}(s)\right]_0^{\infty} =$$
$$= (2)(\pi/2) = \pi$$

الإثبات: نعلم أنّ تحويل هلبرت للتابع $u(t)$ يعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{H}[u(t)] = u(t) * \frac{1}{\pi t} \Rightarrow \mathcal{F}\{\mathcal{H}[u(t)]\} = \mathcal{F}\left\{u(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = \mathcal{F}\{u(t)\}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi}\right\}$$

حسب خاصيّة الطّي ولنحسب تحويل فوريه للتّابع $1/\pi t$:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t - i\sin\omega t}{t}dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sin\omega t}{t}dt = -i\,\mathrm{sgn}(\omega) \Rightarrow$$

وذلك بتطبيق تكامل لوباشيفسكي Lobachevski:

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{t}dt = \mathrm{sgn}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \pi\,\mathrm{sgn}(\omega) \Rightarrow$$
$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[u(t)]\} = -i\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}[u(t)] \Rightarrow$$
$$\mathcal{H}[u(t)] = \mathcal{F}^{-1}\{-i\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}[u(t)]\} \qquad (171)$$

في الحقيقة أيضاً (تقبل دون برهان):

$$\mathcal{F}_S[u(t)] = \mathcal{H}\{\mathcal{F}_C[u(t)]\} \quad (172), \qquad \mathcal{F}_C[u(t)] = -\mathcal{H}\{\mathcal{F}_S[u(t)]\} \quad (173)$$

حيث $\mathcal{F}_S$ تحويل فوريه الجيبي و$\mathcal{F}_C$ تحويل فوريه التجيبي.

2-10-3 خواص تحويل هلبرت:

1- الخاصة الخطية: إذا كان لدينا التابعين $u_1(t), u_2(t)$، وكان $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ فإنّ:

$$\mathcal{H}[a_1u_1(t) + a_2u_2(t)] = a_1\mathcal{H}[u_1(t)] + a_2\mathcal{H}[u_2(t)] \quad (174)$$

الإثبات:

$$\mathcal{H}[a_1u_1(t) + a_2u_2(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t-\tau|\geq\varepsilon}\frac{a_1u_1(\tau) + a_2u_2(\tau)}{t-\tau}d\tau =$$
$$= a_1\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t-\tau|\geq\varepsilon}\frac{u_1(\tau)}{t-\tau}d\tau + a_2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t-\tau|\geq\varepsilon}\frac{u_2(\tau)}{t-\tau}d\tau = a_1\mathcal{H}[u_1(t)] + a_2\mathcal{H}[u_2(t)]$$

2- خاصة الإزاحة: ليكن لدينا التّابع $u(t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ فإنّ:

$$\mathcal{H}[u(t-a)] = \hat{u}(t-a) \quad (175)$$

الإثبات:

$$\mathcal{H}[u(t-a)] = \frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau-a)}{t-\tau}d\tau \underbrace{=}_{\xi=\tau-a}\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{(t-a)-\xi}d\xi =$$
$$= \hat{u}(t-a)$$

3- خاصة التّحاكي: ليكن لدينا التّابع $u(t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ فإنّ:

$$\mathcal{H}[u(at)] = \hat{u}(at) \quad ; \quad a > 0 \quad (176)$$

الإثبات:

$$\mathcal{H}[u(at)] = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(a\tau)}{t-\tau} d\tau \underbrace{=}_{\xi = a\tau} \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{t-\xi/a} \frac{d\xi}{a} =$$

$$= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{at-\xi} d\xi = \hat{u}(at)$$

4- خاصة معاكس الزمن: ليكن لدينا التابع $u(t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ فإنّ:

$$\mathcal{H}[u(-at)] = -\hat{u}(-at) \quad ; \quad a > 0 \quad (177)$$

الإثبات:

$$\mathcal{H}[u(-at)] = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(-a\tau)}{t-\tau} d\tau \underbrace{=}_{\xi = -a\tau} \frac{-1}{\pi} P.V. \int_{\infty}^{-\infty} \frac{u(\xi)}{t+\xi/a} \frac{d\xi}{a}$$

$$= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{\infty}^{-\infty} \frac{u(\xi)}{-at-\xi} d\xi = \frac{-1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{-at-\xi} d\xi = -\hat{u}(-at)$$

5- خاصة الاشتقاق: إذا كان التابع $u(t)$ قابلاً للاشتقاق فإنّ:

$$\mathcal{H}[u'(t)] = \hat{u}'(t) = \mathcal{H}'[u(t)] \quad (178)$$

الإثبات: باستخدام تحويل فوريه وخاصة الاشتقاق فيه نجد أنّ:

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}[u'(t)]] = (-i\,\mathrm{sgn}(\omega))\mathcal{F}[u'(t)] = (-i\,\mathrm{sgn}(\omega))(i\omega\mathcal{F}[u(t)]) =$$

$$= i\omega(-i\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}[u(t)]) = i\omega\mathcal{F}\{\mathcal{H}[u(t)]\} = \mathcal{F}\{\mathcal{H}'[u(t)]\} \Rightarrow \mathcal{H}[u'(t)] = \mathcal{H}'[u(t)]$$

وبالتالي نستنتج أنّ:

$$\mathcal{H}\left[\frac{d^n}{dt^n}u(t)\right] = \frac{d^n\mathcal{H}}{dt^n}[u(t)] \quad (179)$$

مثال (3-100): أوجد تحويل هلبرت للتابع دلتا ديراك $\delta(t)$ ومشتقاته.

الحل:

$$\mathcal{H}[\delta(t)] = 1/\pi t \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}[\delta'(t)] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\pi t}\right) = -\frac{1}{\pi t^2} \Rightarrow \delta'(t) = \mathcal{H}\left[\frac{1}{\pi t^2}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}[\delta''(t)] = \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{\pi t^2}\right) = \frac{2}{\pi t^3} \Rightarrow \delta''(t) = \mathcal{H}\left[-\frac{2}{\pi t^3}\right]$$

6- خاصة تكرار التحويل: إذا طبقنا تحويل هلبرت على التابع $u(t)$ عدة مرات متتابعة فإننا نجد:

$$\mathcal{H}[\mathcal{H}[u(t)]] = \mathcal{H}^2[u(t)] = -u(t) \quad (180)$$

$$\mathcal{H}\left[\mathcal{H}[\mathcal{H}[u(t)]]\right] = \mathcal{H}^3[u(t)] = -\hat{u}(t) = -\mathcal{H}[u(t)] \quad (181)$$

$$\mathcal{H}\left[\mathcal{H}\left[\mathcal{H}[\mathcal{H}[u(t)]]\right]\right] = \mathcal{H}^4[u(t)] = u(t) \quad (182)$$

وبالتالي نستنتج أنّ: (183)

$$\mathcal{H}^n[u(t)] = \begin{cases} (-1)^{n/2}u(t) & ; \ n \text{ زوجي} \\ (-1)^{(n-1)/2}\mathcal{H}[u(t)] & ; \ n \text{ فردي} \end{cases}$$

الإثبات: سنثبت العلاقة الأولى والباقي يثبت بالطريقة نفسها. (يترك للقارئ)

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{H}\left[\mathcal{H}[u(t)]\right]\right] = (-i\,\mathrm{sgn}(\omega))\mathcal{F}\left[\mathcal{H}[u(t)]\right] =$$

$$= (-i\,\mathrm{sgn}(\omega))(-i\,\mathrm{sgn}(\omega))\mathcal{F}[u(t)] = i^2(\mathrm{sgn}(\omega))^2\mathcal{F}[u(t)] =$$

$$\therefore -\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}[-(t)] \Rightarrow \mathcal{H}\left[\mathcal{H}[u(t)]\right] = -u(t)$$

7- **خاصة الطي:** إذا كان تحويل هلبرت للتابع $u_1(t)$ هو $\hat{u}_1(t) = \mathcal{H}[u_1(t)]$، وكان تحويل هلبرت للتابع $u_2(t)$ هو $\hat{u}_2(t) = \mathcal{H}[u_2(t)]$ فإنّ:

$$\mathcal{H}[u_1(t) * u_2(t)] = \mathcal{H}[u_1(t)] * u_2(t) = u_1(t) * \mathcal{H}[u_2(t)] \qquad (184)$$

الإثبات: يتمّ ذلك بملاحظة أن خاصة الطي تتمتع بالخاصة التجميعية والتبديلية أي أنّ:

$$[u_1(t) * u_2(t)] * \frac{1}{\pi t} = \left[u_1(t) * \frac{1}{\pi t}\right] * u_2(t) = u_1(t) * \left[u_2(t) * \frac{1}{\pi t}\right]$$

8- **خاصة التعامد:** إذا كان تحويل هلبرت للتابع $u(t)$ هو $\hat{u}(t) = \mathcal{H}[u(t)]$، فإنّ $u(t)$ و $\hat{u}(t)$ متعامدان:

$$\langle u(t), \hat{u}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\hat{u}(t)dt = 0 \qquad (185)$$

الإثبات:

$$\langle u(t), \hat{u}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\hat{u}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)\left(-i\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}(\omega)\right)^* d\omega$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}(\omega)\mathcal{F}^*(\omega)d\omega = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\omega)|\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega = 0$$

لأنّ التابع $|\mathcal{F}(\omega)|^2$ تابع زوجي، والتابع $\mathrm{sgn}(\omega)$ تابع فردي، وجداؤهما تابع فردي فتكون قيمة التكامل صفر، وبالتالي فإنّ التابع $u(t)$ وتحويله وفق هلبرت متعامدان.

9- تحويل هلبرت للتوابع الفردية والزوجية:

إذا كان التّابع $u(t)$ فردياً أم زوجياً فإنّ تحويل هلبرت يحقق العلاقتين:

1- إذا كان $u(t)$ تابعاً فردياً فإنّ تحويل هلبرت له تابعٌ زوجيٌّ.

2- إذا كان $u(t)$ تابعاً زوجياً فإنّ تحويل هلبرت له تابعٌ فرديٌّ.

الإثبات:

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi} P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{t-s}ds = \frac{1}{\pi} P.V.\int_{0}^{\infty}\left(\frac{u(s)}{t-s} + \frac{u(-s)}{t+s}\right)ds$$

1- فإذا كان $u(t)$ فردياً فإن $u(-t) = -u(t)$ وبالتالي:

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi} P.V.\int_{0}^{\infty}\left(\frac{u(s)}{t-s} - \frac{u(s)}{t+s}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \left(\frac{(t+s)u(s) - (t-s)u(s)}{t^2 - s^2} \right) ds = \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \frac{s\, u(s)}{t^2 - s^2} ds$$

وهو تابع زوجي بالنسبة للمتحول t.

2- فإذا كان $u(t)$ زوجياً فإن $u(-t) = u(t)$ وبالتالي:

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \left(\frac{u(s)}{t-s} + \frac{u(s)}{t+s} \right) ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \left(\frac{(t+s)u(s) + (t-s)u(s)}{t^2 - s^2} \right) ds = \frac{2t}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} \frac{u(s)}{t^2 - s^2} ds$$

وهو تابع فردي بالنسبة إلى المتحول t.

مثال (3-101): أوجد تحويل هلبرت للتابع $e^{i\omega t}$، ثم احسب كلاً من $\mathcal{H}[\cos(\omega t)]$ و $\mathcal{H}[\sin(\omega t)]$.

الحل: نميز ثلاث حالات، أولها عندما $\omega < 0$، وبالتالي:

$$\mathcal{H}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega \tau}}{t - \tau} d\tau = \cdots = -i\, e^{i\omega t}$$

وثانيهما عندما $\omega > 0$، وبالتالي:

$$\mathcal{H}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega \tau}}{t - \tau} d\tau = \cdots = i\, e^{i\omega t}$$

وثالثها عندما $\omega = 0$، وبالتالي التابع ثابت والتكامل معدوم، إذن:

$$\mathcal{H}(e^{i\omega t}) = -i\, \mathrm{sgn}(\omega) e^{i\omega t}$$

في حالة $\omega > 0$:

$$\mathcal{H}[\cos(\omega t)] = \mathcal{H}\left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right] = \frac{\mathcal{H}(e^{i\omega t}) + \mathcal{H}(e^{-i\omega t})}{2} =$$

$$\frac{-i\, \mathrm{sgn}(\omega) e^{i\omega t} - i\, \mathrm{sgn}(-\omega) e^{i(-\omega)t}}{2} = \frac{-i\, e^{i\omega t} + i\, e^{-i\omega t}}{2} = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{H}[\sin(\omega t)] = \mathcal{H}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos(\omega t)$$

في حالة $\omega < 0$:

$$\mathcal{H}[\cos(\omega t)] = -\sin(\omega t), \qquad \mathcal{H}[\sin(\omega t)] = -(-\cos(\omega t)) = \cos(\omega t)$$

وفي الحالة العامة عندما $\omega \in \mathbb{R}$ فإن:

$$\mathcal{H}[\cos(\omega t)] = \mathrm{sgn}(\omega) \sin(\omega t), \qquad \mathcal{H}[\sin(\omega t)] = -\mathrm{sgn}(\omega) \cos(\omega t)$$

تمارين غير محلولة

1- أوجد متسلسلة فوريه للتوابع الدورية الآتية:

(i) $f(x)=\begin{cases}1 & ; \ -\pi<x<0\\ x & ; \ 0<x<\pi\end{cases}$; $T=2\pi$

(ii) $f(x)=\begin{cases}x & ; \ 0<x<1\\ 1-x & ; \ 1<x<2\end{cases}$; $T=2$

(iii) $f(x)=\begin{cases}1 & ; \ -1<x<1\\ 0 & ; \ 1<x<3\end{cases}$; $T=4$

(iv) $f(x)=\begin{cases}x-\pi & ; \ 0<x<\pi\\ -x & ; \ \pi<x<2\pi\end{cases}$; $T=2\pi$

(v) $f(x)=x^2$; $-1\le x\le 1$; $T=2$

(vi) $f(x)=x$; $-1\le x\le 1$; $T=2$

(vii) $f(x)=x^2$; $0<x<2\pi$; $T=2\pi$

(viii) $f(x)=x^2$; $-\pi\le x\le\pi$; $T=2\pi$

(ix) $f(x)=|\sin x|$; $0<x<2\pi$; $T=2\pi$

(x) $f(x)=\cosh x$; $-\pi\le x\le\pi$; $T=2\pi$

(xi) $f(x)=\sin x$; $-\pi/2<x<\pi/2$; $T=\pi$

(xii) $f(x)=e^x$; $-\pi\le x\le\pi$; $T=2\pi$

2- أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع $f(x)=e^{-ax}$ من النقطة $x=-\pi$ إلى النقطة $x=\pi$. ثم استنتج مجموع متسلسلة فوريه من أجل $\pi/\sinh\pi$.

3- برهن أنّ متسلسلة فوريه للتابع $f(x)=x^2$ هي:

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \quad ; \quad -\pi<x<\pi$$

ثم برهن أنّ:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$,

(v) $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$

4- إذا كان $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ داخل المجال $[0,2\pi]$ أثبت أنّ:

$$f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

5- أثبت أنه داخل المجال $-\pi < x < \pi$ أنّ:

$$\cosh ax = \frac{2a^2}{\pi}\sinh a\pi\left[\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\cos nx\right]$$

6- إذا كان $f(x) = x + x^2$ من أجل $-\pi < x < \pi$ وكان $f(x) = \pi^2$ من أجل $x = \pm\pi$ أوجد منشور هذا التابع $f(x)$ في متسلسلة فوريه. وأثبت أنّ:

$$x + x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n}\sin nx\right\}$$

وأنّ:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

7- بين فيما إذا كانت التوابع الآتية تحقق شروط ديرخليه للنشر في متسلسلة فوريه في المجال $-\pi \le x \le \pi$:

(*i*) $\csc x$ (*ii*) $\sin 1/x$

(*iii*) $f(x) = \dfrac{m+1}{m}$; $\dfrac{\pi}{m+1} < |x| \le \dfrac{\pi}{m}$; $m = 1, 2, 3, \cdots$

8- أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع $f(x)$ المعطى بالعلاقة الآتية:

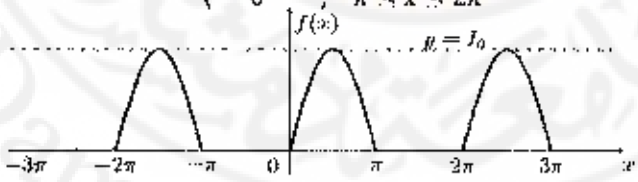
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & ; \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

ثم برهن أنّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

9- يمتلك تيار متناوب بعد مروره من خلال منظم الشكل الآتي:

$$I = \begin{cases} I_0 \sin x & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$



حيث إن I_0 هو شدة التيار العظمى والدور مساوٍ لـ $T = 2\pi$ (الشكل أعلاه). عبر عن I في متسلسلة فوريه ثم أوجد مجموع المتسلسلة:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$$

10- ارسم المنحنى البياني للتابع: $f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi<x<0\\ x^2 & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$ إذا كان $f(2\pi+x)=f(x)$،
أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$.

11- أوجد متسلسلة فوريه للتابع الآتي: $f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; \quad -\pi\le x\le 0\\ x^2 & ; \quad 0\le x\le\pi\end{cases}$

12- أوجد متسلسلة فوريه للتابع المعرف بالشكل الآتي: $f(x)=\begin{cases}-1 & ; \quad -\pi<x<0\\ 0 & ; \quad x=0\\ 1 & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$ ثم

برهن أنّ:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

13- أوجد متسلسلة فوريه من أجل التابع $f(x)=\pi x$ في المجال $0\le x\le 2$.

14- (i) أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع x^2 في المجال المفتوح $(0,a)$.

(ii) أوجد متسلسلة فوريه لتمثيل التابع $f(t)=1-t^2$ عندما $-1\le t\le 1$.

15- إذا كان $f(x)=2x-x^2$ في المجال $0<x<2$، أثبت أن:

$$f(x)=\frac{2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

16- أوجد متسلسلة فوريه من أجل التابع: $f(x)=\begin{cases}x & ; \quad 0\le x\le 3\\ 6-x & ; \quad 3\le x\le 6\end{cases}$.

17- يمر تيار فولطي جيبي $E\sin\omega t$ من خلال منظم نصف موجي الذي يقص القسم السالب من
الموجة. طوّر التابع الدوري الناتج باستخدام متسلسلة فوريه:

$$U(t)=\begin{cases}0 & ; \quad -T/2<t<0\\ E\sin\omega t & ; \quad 0<t<T/2\end{cases}$$

والدور $T=2\pi/\omega$ في متسلسلة فوريه.

18- أوجد متسلسلة فوريه من أجل التابع: $f(x)=\begin{cases}\pi x & ; \quad 0<x<1\\ 0 & ; \quad x=1\\ \pi(x-2) & ; \quad 1<x<2\end{cases}$. ثم أثبت أن:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

19- أوجد النشر في متسلسلة فوريه للتابع $f(x)=x^2$ في المجال $(0,a)$، وأثبت أنّ:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

20- أثبت أنّه في المجال $-\pi<x<\pi$:

$$\sin ax=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2-a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}-\frac{4\sin 4x}{4^2-a^2}+\cdots\right)$$

21- أوجد منشور التابع $f(x)=x\sin x$ في متسلسلة فوريه في المجال $-\pi<x<\pi$، ثمّ أثبت أنّه:

$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots=\frac{1}{4}(\pi-2)$$

22- أثبت أنّ منشور التابع $f(x)=x\cos x$ في متسلسلة فوريه في المجال المفتوح $(-\pi,\pi)$ يعطى بالعلاقة الآتية:

$$x\cos x=-\frac{1}{2}\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$$

23- من أجل التابع $f(x)$ المعرف بالشكل $f(x)=|x|\ ;\ -\pi<x<\pi$ أوجد متسلسلة فوريه له وأثبت أنّ:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

24- أوجد متسلسلة فوريه للتوابع الممثلة بالشكل:

(i) $f(x)=|\sin x|\ \ ;\ \ -\pi<x<\pi$,

(ii) $f(x)=\left|\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right|\ \ ;\ x\in(-1,1)$

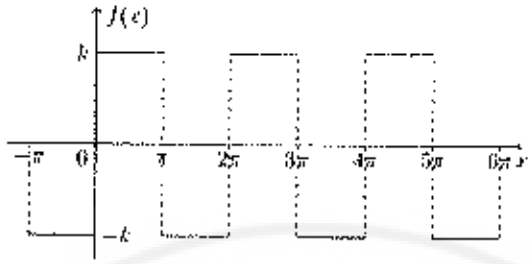
25- ليكن لدينا التابع: $f(x)=\begin{cases}-x+1 & ;\ -\pi\le x\le 0\\ x+1 & ;\ 0\le x\le\pi\end{cases}$ هل هذا التابع زوجي أم فردي؟

أوجد متسلسلة فوريه للتابع $f(x)$ واستنتج قيمة المجموع:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

26- أوجد متسلسلة فوريه للتّابع الدّوري $f(x)$ حيث إنّ $f(x)=-k$ عندما تكون $-\pi<x<0$ و $f(x)=k$ عندما تكون $0<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ كما هو موضح في الشكل أدناه، ثمّ استنتج أنّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$



27- ليكن التابع $f(x)$ المعرّف بالشكل الآتي: $f(x)=\begin{cases}-x & ; \quad -\pi<x<0\\ x & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$ اثبت أنّ:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{1^2}\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right\}$$

واستنتج أنّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

28- أوجد متسلسلة الجيوب لفوريه للتوابع الدّورية الآتية:

$$(i)\quad f(x)=\begin{cases}\pi-x & ; \quad \pi/2\le x\le\pi\\ x & ; \quad 0\le x\le\pi/2\\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

$$(ii)\quad f(x)=\begin{cases}x-2 & ; \quad 0\le x\le 2\\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك}\end{cases},\qquad (iii)\quad f(x)=\begin{cases}\cos 2x & ; \quad 0<x<\pi/2\\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

29- أوجد متسلسلة التّجيبات لفوريه للتّوابع الدّورية الآتيّة:

$$(i)\quad f(x)=\begin{cases}\sin x & ; \quad 0<x<\pi\\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك}\end{cases},\qquad (ii)\quad f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0<x<\pi\\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

30- أثبت أنّ التابع الثابت $f(x)=c$ يمكن نشره في متسلسلة لا نهائية من الشكل:

$$\frac{4c}{\pi}\left\{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right\}$$

داخل المجال $0<x<\pi$.

31- أوجد متسلسلة التجيبات ومتسلسلة الجيوب للتابع $f(x)=x$ داخل المجال المغلق $0\le x\le\pi$.

ثم استنتج أنّ:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

32- أوجد متسلسلة التجيبات ذات نصف المدى من أجل التابع $f(x)=x^2$ في المجال $0\le x\le\pi$.

33- أوجد وفق فوريه متسلسلة التجيبات للتابع $f(x) = \pi - x$ في المجال $0 < x < \pi$ ثم برهن أنّ:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

34- أوجد متسلسلة التجيبات ذات نصف المدى من أجل التابع $f(x) = (x-1)^2$ في المجال $0 < x < 1$. ثمّ أثبت أنّ:

$$\pi^2 = 8\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

35- أوجد متسلسلة الجيوب ذات نصف المدى من أجل التابع $f(t) = t - t^2$ في المجال $0 < t < 1$.

36- مثّل التابع $f(x) = \sin(\sin \pi x/\ell)$ داخل المجال $0 < x < \ell$ بمتسلسلة التجيبات ذات نصف المدى.

37- أوجد متسلسلة الجيوب ذات نصف المدى من أجل التابع $f(x) = x\cos x$ في المجال $0 < x < \pi$.

38- أوجد متسلسلة الجيوب ذات نصف المدى من أجل التابع $f(x) = e^x$ في المجال $0 < x < 1$.

39- أوجد وفق متسلسلة فوريه متسلسلة الجيوب ذات نصف المدى من أجل التابع $f(x) = x(\pi - x)$ في المجال $0 \le x \le \pi$. ثم برهن أنّ:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

40- إذا كان لدينا التابع: $f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & ; \ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ فأثبت أنّ هذا التابع يكتب بالشكل:

$$(i)\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \cdots\right]$$

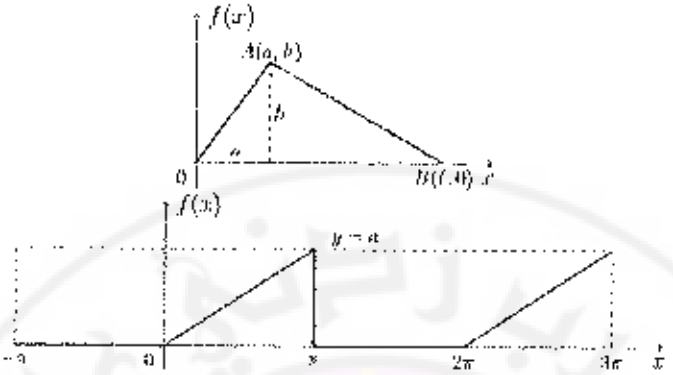
$$(ii)\ f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 6x + \frac{1}{5^2}\cos 10x + \cdots\right]$$

41- أوجد متسلسلة التجيبات ذات نصف المدى من أجل التابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le x \le \ell/2 \\ \ell - x & ; \ \ell/2 \le x \le \ell \end{cases}$$

42- إذا كان لدينا التابع: $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \ 0 \le x \le \pi/4 \\ \cos x & ; \ \pi/4 \le x \le \pi/2 \end{cases}$ فانشر هذا التابع وفق متسلسلة الجيوب فقط.

43- أوجد متسلسلة الجيوب ذات نصف المدى من أجل التابعين في الشكلين الآتيين:



44- باستخدام متسلسلة الجيوب من أجل التابع $f(x)=1$ في المجال $0<x<\pi$، أثبت أنّ:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

45- أثبت أنّه في المجال $0<x<\ell$ يكون:

$$x=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{\ell}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{\ell}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{\ell}+\cdots\right)$$

واستنتج أنّ:

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

46- إذا كان $\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$ نشر نصف المدى في متسلسلة التّجيبات للتّابع $f(x)$ الدّوري الذي دوره 2ℓ في المجال $(0,\ell)$، عندها أثبت أن القيمة الفعّالة (الجذر التربيعي المتوسط) للتّابع $f(x)$ في المجال $(0,\ell)$ هي:

$$\frac{\ell}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right\}$$

استخدم هذه النتيجة لتحسب المجموع $1^{-4}+3^{-4}+5^{-4}+\cdots$ من نشر نصف المدى في متسلسلة التّجيبات للتّابع الدّوري ودوره 4 والمعرّف في المجال $(0,2)$ بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\pi x & ;\ 0<x<1\\ \pi(2-x) & ;\ 1<x<2\end{cases}$$

47- أوجد نشر فوريه العقدي للتوابع الدّورية الآتية:

(i) $f(x)=e^{ax}\ ;\ -\ell<x<\ell\ ;\ T=2\ell.$

(*ii*) $f(x) = \cos ax \ ; \ -\pi < x < \pi \ ; \ T = 2\pi.$

(*iii*) $f(x) = \cosh 3x + \sinh 3x \ ; \ -3 < x < 3 \ ; \ T = 6.$

(*iv*) $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 < x < \ell \\ a & ; \ \ell < x < 2\ell \end{cases} \ ; \ T = 2\ell$

48- أوجد نشر فوريه العقدي للتوابع الدورية الآتية، ثم انتقل منه إلى النشر الحقيقي:

(*i*) $f(x) = \sin x \ ; \ 0 \le x \le \pi \ ; \ T = \pi.$

(*ii*) $f(x) = x \ ; \ 0 < x < 1 \ ; \ T = 1.$

(*iii*) $f(x) = \cos x \ ; \ -\pi/2 \le x \le \pi/2 \ ; \ T = \pi.$

(*iv*) $f(x) = \begin{cases} \cos 2\pi x & ; \ 0 < x < 1/2 \\ 0 & ; \ 1/2 < x < 1 \end{cases} \ ; \ T = 1$

ثم أوجد التحليل التوافقي لكل التوابع السابقة.

49- بين أنّ مجموعة التوابع المعطاة متعامدة في المجال المعين بجانبها، ثم عين المجموعة المتعامدة المنظّمة في كل حالة:

(*i*) $1, \ \cos 2x, \ \cos 4x, \ \cos 6x, \cdots \ ; \ 0 \le x \le \pi$

(*ii*) $\sin \pi x, \ \sin 2\pi x, \ \sin 3\pi x, \cdots \ ; -1 \le x \le 1$

(*iii*) $1, \ \cos \pi x, \ \sin \pi x, \ \cos 2\pi x, \ \sin 2\pi x, \cdots \ ; \ 0 \le x \le 2$

(*iv*) $1, \ x, \ \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \ \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \cdots \ ; -1 \le x \le 1$

50- أوجد متسلسلة فوريه المعممة للتابع f في الحالات التالية:

أ- $f(x) = x \ ; \ -1 < x < 1$، وذلك بدلالة التوابع 2 ثم 4 من التمرين السابق.

ب- $f(x) = \sin x \ ; \ 0 < x < \pi$، وذلك بدلالة التوابع 1 من التمرين السابق.

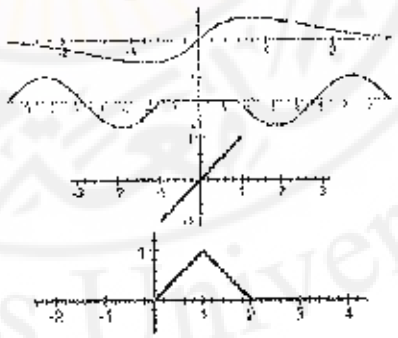
51- أوجد تكامل فوريه للتوابع الآتية:

(*i*) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin t & ; \ t > 0 \\ e^{t} \sin t & ; \ t < 0 \end{cases}$

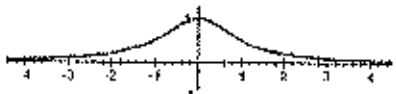
(*ii*) $f(t) = \begin{cases} \cos t & ; \ |t| > \pi/2 \\ 0 & ; \ |t| < \pi/2 \end{cases}$

(*iii*) $f(t) = \begin{cases} t & ; \ |t| < 1 \\ 0 & ; \ |t| > 1 \end{cases}$

(*iv*) $f(t) = \begin{cases} t & ; \ 0 \le x \le 1 \\ 2 - t & ; \ 1 \le x \le 2 \\ 0 & ; \ \text{عدا ذلك} \end{cases}$



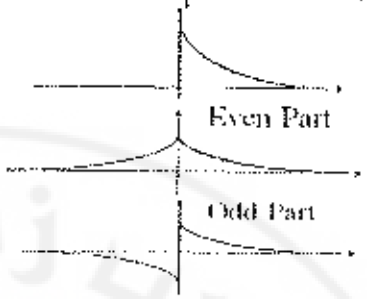
(v) $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$



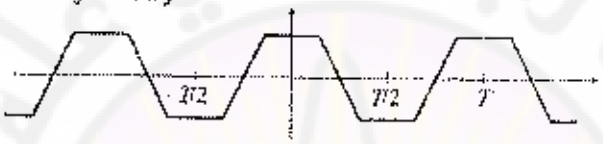
(vi) $f(t)=\begin{cases} e^{-t} & ; \quad t>0 \\ 0 & ; \quad t<0 \end{cases}$

(vii) $f_e(t)=\begin{cases} e^{-t}/2 & ; \quad t>0 \\ e^{t}/2 & ; \quad t<0 \end{cases}$

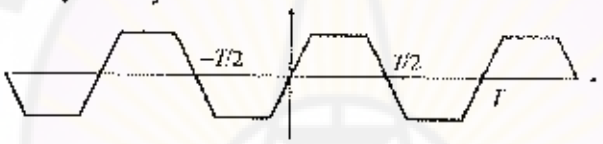
(viii) $f_o(t)=\begin{cases} e^{-t}/2 & ; \quad t>0 \\ -e^{t}/2 & ; \quad t<0 \end{cases}$



Even quarter-wave symmetry



Odd quarter-wave symmetry



52- أوجد تكامل فوريه للتوابع الآتية:

(i) $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad -\pi \le x \le \pi \\ 0 & ; \quad |x|>\pi \end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases} k & ; \quad -10 \le x \le 10 \\ 0 & ; \quad |x|>10 \end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases} -1 & ; \quad -\pi \le x \le 0 \\ 1 & ; \quad 0<x\le \pi \\ 0 & ; \quad |x|>\pi \end{cases}$

(iv) $f(x)=\begin{cases} \sin(x) & ; \quad -4 \le x \le 0 \\ \cos(x) & ; \quad 0<x\le 4 \\ 0 & ; \quad |x|>4 \end{cases}$

(v) $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad -100 \le x \le 100 \\ 0 & ; \quad |x|>100 \end{cases}$

(vi) $f(x)=\begin{cases} |x| & ; \quad -\pi \le x \le 2\pi \\ 0 & ; \quad x<-\pi \ , \ x>2\pi \end{cases}$

(vii) $f(x)=\begin{cases} \sin(x) & ; \quad -3\pi \le x \le \pi \\ 0 & ; \quad x<-3\pi \ , \ x>\pi \end{cases}$

(viii) $f(x)=\begin{cases} 1/2 & ; \quad -5 \le x < 1 \\ 1 & ; \quad 1 \le x \le 5 \\ 0 & ; \quad |x|>5 \end{cases}$

(ix) $f(x) = e^{-|x|}$

(x) $f(x) = x\, e^{-a|x|}$

53- مستعيناً بتمثيل تكامل فوريه للتوابع، أثبت أنّ:

(i) $\int_0^\infty \frac{\cos x\omega + \omega \sin x\omega}{1+\omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & ; \ x < 0 \\ \pi/2 & ; \ x = 0 \\ \pi e^{-x} & ; \ x > 0 \end{cases}$

(ii) $\int_0^\infty \frac{\sin \pi\omega \sin x\omega}{1-\omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & ; \ 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \ x > \pi \end{cases}$

(iii) $\int_0^\infty \frac{1-\cos \pi\omega}{\omega} \sin x\omega \, dx - \begin{cases} \pi/2 & ; \ 0 < x < \pi \\ 0 & ; \ x > \pi \end{cases}$

(iv) $\int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2} \cos x\omega \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & ; \ 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \ |x| \ge \pi/2 \end{cases}$

(v) $\int_0^\infty \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^2} \sin x\omega \, d\omega = \begin{cases} \pi x/2 & ; \ 0 < x < 1 \\ \pi/4 & ; \ x = 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases}$

(vi) $\int_0^\infty \frac{\omega^3 \sin x\omega}{4+\omega^4} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \ ; \ x > 0.$

54- مثّل التّابع $f(x)$ كتكامل فوريه التجيبي.

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases}$, (ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \ ; \ x > 0$, (iv) $f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2 & ; \ 0 < x < a \\ 0 & ; \ x > a \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \ 0 < x < \pi \\ 0 & ; \ x > \pi \end{cases}$, (vi) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \ 0 < x < a \\ 0 & ; \ x > a \end{cases}$

55- مثّل التّابع $f(x)$ كتكامل فوريه الجيبي.

(i) $f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < a \\ 0 & ; \ x > a \end{cases}$, (ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \cos x & ; \ 0 < x < \pi \\ 0 & ; \ x > \pi \end{cases}$, (iv) $f(x) = \begin{cases} e^x & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x > 1 \end{cases}$

56- أوجد تكامل فوريه التّجيبي وتكامل فوريه الجيبي لكلّ من التّوابع الآتية:

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ 0 \le x \le 10 \\ 0 & ; \ x > 10 \end{cases}$, (ii) $f(x) = \begin{cases} \cosh x & ; \ 0 \le x \le 5 \\ 0 & ; \ x > 5 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \ 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & ; \ x > 2\pi \end{cases}$, (iv) $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le x \le 1 \\ 2 & ; \ 1 < x \le 4 \\ 0 & ; \ x > 4 \end{cases}$

(v) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad 0\le x\le \pi\\ 2 & ; \quad \pi<x\le 3\pi\\ 0 & ; \quad x>3\pi\end{cases}$, (vi) $f(x)=\begin{cases}x & ; \quad 0\le x\le 1\\ x+1 & ; \quad 1<x\le 2\\ 0 & ; \quad x>2\end{cases}$

(vii) $f(x)=e^{-x}\cos x \;;\; x\ge 0$, (viii) $f(x)=xe^{-3x} \;;\; x\ge 0$.

(ix) $f(x)=\begin{cases}k & ; \quad 0\le x\le c\\ 0 & ; \quad x>c\end{cases}$, (x) $f(x)=e^{-2x}\cos x \;;\; x\ge 0$.

57- اثبت أن تكامل فوريه للتابع $f(x)$ يمكن أن يكتب بالشكل التالي:

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin[\omega(t-x)]}{t-x}dt$$

58- استخدم تكامل لابلاس لحساب تكامل فوريه التجيبي من أجل التابع $f(x)=1/(1+x^2)$ وتكامل فوريه الجيبي من أجل التابع $g(x)=x/(1+x^2)$.

59- أوجد تكامل فوريه العقدي للتوابع الآتية:

(i) $f(x)=xe^{-|x|}$, (ii) $f(x)=\begin{cases}1-x & ; \quad -1\le x\le 1\\ 0 & ; \quad |x|>1\end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & ; \quad -5\le x\le 5\\ 0 & ; \quad |x|>5\end{cases}$, (iv) $f(x)=\begin{cases}|x| & ; \quad -2\le x\le 2\\ 0 & ; \quad |x|>2\end{cases}$

(v) $f(x)=\begin{cases}x & ; \quad -1\le x\le 1\\ e^{-|x|} & ; \quad |x|>1\end{cases}$, (vi) $f(x)=\begin{cases}\cos x & ; \quad 0\le x\le \pi/2\\ \sin x & ; \quad -\pi/2\le x<0\\ 0 & ; \quad |x|>\pi/2\end{cases}$

(vii) $f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le x\le k\\ -1 & ; \quad -k\le x<0\\ 0 & ; \quad |x|>k\end{cases}$ $(k>0)$, (viii) $f(x)=x^2e^{-3|x|}$

60- أوجد تحويل فوريه للتوابع الآتية وارسم المنحني البياني لغازة طيفها. وأينما يوجد الثابت k فهو عدد موجب. ويمكنك الاستعانة بالتحويلات:

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right]=\frac{2a}{a^2+\omega^2},\quad \mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\omega^2/4a},\quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

(i) $f(t)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le t\le 1\\ -1 & ; \quad -1\le t<0\\ 0 & ; \quad |t|>1\end{cases}$

(ii) $f(t)=\begin{cases}\sin t & ; \quad -k\le t\le k\\ 0 & ; \quad |t|>k\end{cases}$

(iii) $f(t)=5[H(t-3)-H(t-11)]$

(iv) $f(t)=5e^{-3(t-5)^2}$

(v) $f(t)=H(t-k)\,e^{-t/4}$

(vi) $f(t)=H(t-k)\,t^2$

(vii) $f(t) = 1/(1+t^2)$

(viii) $f(t) = 3H(t-2)\,e^{-3t}$

(ix) $f(t) = 3\,e^{-4|t+2|}$

(x) $f(t) = H(t-3)\,e^{-2t}$

(xi) $f(t) = \dfrac{t}{9+t^2}$

(xii) $f(t) = 3t\,e^{-9t^2}$

(xiii) $f(t) = 26H(t)\,te^{-2t}$

(xiv) $f(t) = H(t-3)\,(t-3)e^{-4t}$

(xv) $f(t) = \dfrac{d}{dt}[H(t)\,e^{-3t}]$

(xvi) $f(t) = t\,[H(t+1) - H(t-1)]$

(xvii) $f(t) = \dfrac{5e^{3it}}{t^2-4t+13}$

61- أوجد تحويل فوريه العكسي للتوابع الآتية:

(i) $9e^{-(\omega+4)^2/32}$

(ii) $\dfrac{e^{(20-4\omega)i}}{3-(5-\omega)i}$

(iii) $\dfrac{e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}$

(iv) $\dfrac{10\sin(3\omega)}{\omega+\pi}$

(v) $\dfrac{1+i\omega}{6-\omega^2+5i\omega}$

(vi) $\dfrac{10(4+i\omega)}{9-\omega^2+8i\omega}$

(vii) $\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$

(viii) $\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}$

(ix) $\dfrac{\sin(3\omega)}{\omega(2+i\omega)}$

(x) $\dfrac{6e^{4i\omega}\sin(2\omega)}{9+\omega^2}$

(xi) $e^{-3|\omega+4|}\cos(2\omega+8)$

(xii) $e^{-\omega^2/9}\sin(8\omega)$

62- أثبت مبرهنة بارسيفال Parseval's theorem ذات الشكل الآتي:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2d\omega$$

63- إن المحتوى الكهربائي power content لإشارة ما $f(t)$ يعرّف بالتكامل $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt$، بفرض تقارب هذا التكامل، أوجد المحتوى الكهربائي للتابع $H(t)e^{-2t}$.

64- أوجد المحتوى الكهربائي للتابع $(1/t)\sin(3t)$، مستعيناً بمبرهنة بارسيفال السابقة.

65- استخدم تحويل فوريه لإيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$y'' + 6y' + 5y = \delta(t-3)$$

66- أوجد تحويل فوريه ذا النوافذ للتوابع f الآتية مستخدماً توابع النافذة g المعطاة معها. ثم احسب مركز ونصف القطر لتابع النافذة.

(i) $f(t) = t^2$ $\quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; \ -5 \le t \le 5 \\ 0 & ; \ |t| > 5 \end{cases}$

(ii) $f(t) = \cos(at)$ $\quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; \ -4\pi \le t \le 4\pi \\ 0 & ; \ |t| > 4\pi \end{cases}$

(iii) $f(t) = e^{-t}$ $\quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le t \le 4 \\ 0 & ; \ t > 4, \quad t < 0 \end{cases}$

(iv) $f(t) = e^t \sin(\pi t)$ $\quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; \ -1 \le t \le 1 \\ 0 & ; \ |t| > 1 \end{cases}$

(v) $f(t) = (t+2)^2$ $\quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; \ -2 \le t \le 2 \\ 0 & ; \ |t| > 2 \end{cases}$

(vi) $f(t) = H(t-\pi)$ $\quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; \ 3\pi \le t \le 5\pi \\ 0 & ; \ t > 5\pi, \quad t < 3\pi \end{cases}$

67- أوجد تحويل فوريه التجيبي وتحويل فوريه الجيبي للتوابع الآتية:

(i) $f(t) = e^{-t}$

(ii) $f(t) = te^{-at} \ ; \ a > 0$

(iii) $f(t) = \begin{cases} \cos t & ; \ 0 \le t \le K \\ 0 & ; \ t > K \end{cases} \ ; \ K > 0$

(iv) $f(t) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \le t \le K \\ -1 & ; \ K \le t \le 2K \\ 0 & ; \ t > 2K \end{cases} \ ; \ K > 0$

(v) $f(t) = e^{-t}\cos t$

(vi) $f(t) = \begin{cases} \sinh t & ; \ K \le t < 2K \\ 0 & ; \ 0 \le t < K, \quad t \ge 2K \end{cases} \ ; \ K > 0$

68- أثبت أنّه ضمن الشروط الملائمة على f ومشتقاته أنّ:

$$\mathcal{F}_s\left[f^{(4)}(t)\right] = \omega^4 \widehat{f}_s(\omega) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\omega^3 f(0) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\omega f''(0).$$

$$\mathcal{F}_c\left[f^{(4)}(t)\right] = \omega^4 \widehat{f}_c(\omega) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\omega^2 f'(0) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} f^{(3)}(0).$$

69- أوجد تحويل فوريه الجيبي المنتهي للتوابع:

(i) K ثابت $\quad (ii)$ $t \quad (iii)$ t^5

(iv) $\sin(at) \quad (v)$ $\cos(at) \quad (vi)$ e^{-t}

70- أوجد تحويل فوريه التجيبي المنتهي للتوابع:

(i) K ثابت (ii) t (iii) t^3

(iv) $\sin(at)$ (v) $\cosh(at)$ (vi) e^{-t}

(vii) $f(t)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le t<1/2\\ -1 & ; \ 1/2\le t\le \pi\end{cases}$

71- أوجد تحويل فوريه المتقطع للمتتاليات الآتية:

(i) $\{\cos(n)\}_{n=0}^{5}$ (ii) $\{e^{in}\}_{n=0}^{5}$ (iii) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{5}$

(iv) $\left\{\frac{1}{(1+n)^2}\right\}_{n=0}^{5}$ (v) $\{n^2\}_{n=0}^{5}$ (vi) $\{\cos n-\sin n\}_{n=0}^{5}$

72- عبّر عن التابع $f(x)=\begin{cases}1 & ; \ |x|\le 1\\ 0 & ; \ |x|>1\end{cases}$ بتكامل فوريه، ثم احسب قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda$$

73- أوجد تمثيل تكامل فوريه للتابعين:

(i) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & ; \ |x|\le 1\\ 0 & ; \ |x|>1\end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}e^{ax} & ; \ x\le 0, \quad a>0\\ e^{-ax} & ; \ x\ge 0, \quad a<0\end{cases}$

74- باستخدام تمثيل تكامل فوريه، أثبت أنّ:

(i) $\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad ; \quad (x>0)$

(ii) $\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad ; \quad (x\ge 0)$

(iii) $\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega=\frac{\pi}{2} \quad ; \quad 0\le x<1$

(iv) $\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\alpha\sin\alpha\theta}{1-\alpha^2}\,d\alpha=\begin{cases}(\pi/2)\sin\theta & ; \ 0\le\theta\le\pi\\ 0 & ; \ \theta>\pi\end{cases}$

75- أوجد تحويل فوريه للتابع: $f(x)=\begin{cases}1 & ; \ |x|\le a\\ 0 & ; \ |x|>a\end{cases}$، ثم احسب قيمة التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx$$

76- أوجد تحويل فوريه للتابع: $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \ |x|\le a\\ 0 & ; \ |x|>a\end{cases}$

77- أوجد تحويل فوريه للتابع: $f(x)=\begin{cases} a^2-x^2 & ; \ |x|\le a \\ 0 & ; \ |x|>a \end{cases}$، ثم برهن أنّ:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t - t\cos t}{t^3}dt=\frac{\pi}{4}$$

78- إذا كان $\mathcal{F}(e^{-x^2})=\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$ أوجد تحويل فوريه للتابعين:

$$(i)\quad e^{-x^2/3} \qquad\qquad (ii)\quad e^{-4(x-3)^2}$$

79- أوجد تحويل فوريه الجيبي والتجيبي للتابع: $f(x)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le x<2\\ 0 & ; \ x>2\end{cases}$.

80- باستخدام تحويل فوريه الجيبي للتابع $f(x)=e^{-ax}\ \ (a>0)$، أثبت أنّ:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin kx}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ak}\quad ;\quad (k>0)$$

وبذلك تحصل على تحويل فوريه الجيبي للتابع: $x/(a^2+x^2)$.

81- أوجد تحويل فوريه التجيبي للتابع $f(x)=e^{-ax}$، ثمّ احسب قيمة التكامل:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{a^2+x^2}dx$$

82- إذا كان تحويل فوريه الجيبي للتابع $f(x)$ هو $e^{-a\omega}/\omega$، أوجد $f(x)$، بحيث تحصل على تحويل فوريه الجيبي المعاكس للتابع $1/\omega$.

83- أوجد تحويل فوريه التجيبي للتابع e^{-x^2} واستنتج تحويل فوريه الجيبي للتابع xe^{-x^2}.

84- أوجد تحويل فوريه الجيبي للتابعين:

$$(i)\ f(x)=\begin{cases}\sin x & ; \ 0\le x<a\\ 0 & ; \ x>a\end{cases}, \qquad (ii)\ f(x)=\begin{cases}4x & ; \ 0<x<1\\ 4-x & ; \ 1<x<4\\ 0 & ; \ x>4\end{cases}$$

85- أوجد تحويل فوريه التجيبي للتابع $(1-x/\pi)^2$.

86- أوجد تحويل فوريه الجيبي المنتهي وتحويل فوريه التجيبي المنتهي للتابع:

$$f(x)=2x\quad ;\quad 0<x<4$$

87- أوجد تحويل فوريه الجيبي المنتهي للتابع: $f(x)=\begin{cases}x & ; \ x<c\\ \pi-x & ; \ x>c\end{cases}$، حيث إنّ $0\le c\le\pi$.

88- أثبت أنّ تحويل فوريه الجيبي المنتهي المعاكس للتابع:

$$F_S(n) = \frac{1}{\pi}\left\{1 + \cos n\pi - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

هو التابع: $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < \pi/2 \\ -1 & ; \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$.

89- أوجد حل المعادلتين التكامليتين الآتيتين:

$$(i) \quad \int_0^\infty f(x)\sin tx\,dx = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t < 1 \\ 2 & ; \quad 1 \le t < 2 \\ 0 & ; \quad t \ge 2 \end{cases}, \qquad (ii) \quad \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = e^{-\alpha}$$

90- أوجد تحويل Z للمتتاليات:

$x_n = (-1)^n$,
$x_n = \{1,0,1,0,1,0,\dots\}$,
$x_n = (n^3 + 5n)3^n$,
$x_n = \cosh an$,
$x_n = (1/3)^n$,
$x_n = \{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\dots\}$,
$x_n = (n^2 + 3n - 1)e^{-n}$,
$x_n = ne^{2n}$

91- أوجد مقلوب تحويل Z:

$Z[x_n] = \dfrac{z+4}{z^2-5z+1}$,
$Z[x_n] = \dfrac{az}{(z-a)^2}$; $|z| > a$,
$Z[x_n] = \dfrac{z^2+z-1}{z^3+2z+4}$,
$Z[x_n] = \dfrac{z^2+2z+1}{z^2-3z/2+1/2}$; $|z| > 1$

92- حل كل من معادلات الفروق مع الشروط المرفقة بجانبها:

- $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = \delta_n$ ، حيث $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$.
- $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 6x_n = 5$ ، حيث $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$.
- $x_{n+2} + 7x_{n+1} - 18x_n = 2n + 1$ ، حيث $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$.
- $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 20x_n = 2^n$ ، حيث $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$.
- $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = u_n$ ، حيث $x_1 = 1$ و $x_0 = 0$.
- $2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 2(4)^{-n}$ ، حيث $x_1 = 4$ و $x_0 = 10$.
- $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ (متتالية فيبوناتشي)، حيث $x_1 = x_0 = 1$.

93- أوجد تحويل هلبرت للتوابع الآتية:

(i) $\sin(at + b)$; $a, b \in \mathbb{R}$
(ii) $\cos(at + b)$; $a, b \in \mathbb{R}$
(iii) $\sin^2(at)$; $a \in \mathbb{R}$
(iv) $\cos^2(at)$; $a \in \mathbb{R}$

(v) $\frac{\sin(at)}{x}$; $a \in \mathbb{R}$ (vi) $\frac{\cos(at)}{x}$; $a \in \mathbb{R}$

(vii) $\begin{cases} 0 & ; \ x < 0 \\ e^{-ax} & ; \ x > 0 \end{cases}$; $a > 0$ (viii) $\begin{cases} 0 & ; \ |x| > 1 \\ 1 & ; \ |x| \leq 1 \end{cases}$

94- من أجل $a > 0$ هل إنّ تحويل هلبرت للتابع $x^2(a^2 + x^2)^{-1}$ هو التابع $-ax(a^2 + x^2)^{-1}$.

95- أوجد تحويل هلبرت للتابعين:

(i) $\frac{1}{a^2 + t^2}$ (ii) $\frac{at}{a^2 + t^2}$



الفصل الأول



1- المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

1-1 مقدمة Introduction:

لقد رأينا أن حل المعادلة التفاضلية العادية يَكْمُن في البحث عن تابع y مرتبط بمتحول واحد x، كما استعرضنا نماذج رياضية عدّة في العلوم والهندسة تُمثّل مظاهر نظام ما قيد الدراسة وأوجهه بمعادلة تفاضلية عادية تتضمن متحولاً مستقلاً وحيداً x ومتحولاً آخر غير مستقل y. ومن الأمثلة البديهية على ذلك لاحظنا أنه في الكثير من الدارات الكهربائية تكون شدة التيار الكهربائي i مرتبطة فقط بالزمن t، وهي غير مرتبطة بموضع ما في الدارة، بالمقابل هناك الكثير من الأنظمة الميكانيكية يتضح فيها أن مقدار الإزاحة لجسيم متحرك يتعلق فقط بالزمن، وذلك كما هو الحال في اهتزاز نواس بحركة توافقية بسيطة.

أما إذا كانت إحدى المسائل تنطوي على متحول واحد، أي u، مرتبط بأكثر من متحول مستقل، مَثَلاً x وt، بالتالي أي مشتق لِـ u سَوْفَ يكون مشتقاً جزئياً على النَحْو $\partial u/\partial x$ أو $\partial^2 u/\partial t^2$، وعلى هذا فإن المعادلة التي تتضمن مشتقات جزئية من هذا النوع تُعرف **بالمعادلة التفاضلية الجزئية**. بالإضافة لما سبق إذا أُعْطينا مسألة أحادية البعد ومرتبطة بالزمن، أي u يرتبط هنا بإحداثيّ الموضع x والزمن t، ومسألة أخرى ثنائية البعد ومستقلة عن الزمن، حَيْثُ u تابع يُعْطى بدلالة إحداثيّ الموضع فقط x وy، فنجد في الحالتين أن المسألة تؤول إلى معادلة تفاضلية جزئية بمتحولين مستقلين، حيث سنتناول هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية بالتفصيل لاحقاً. وعلى هذا يتضح أن أية مسألة ثنائية البعد مرتبطة بالزمن سوف تحتوي على ثلاثة متحولات مستقلة x وy وt، كما هو الحال في مسألة ثلاثية الأبعاد ومستقلة عن الزمن، حيث نرى عندئذٍ إن x وy وz هي المتحولات المستقلة.

وهكذا إن المقصود هنا بالمعادلة التفاضلية الجزئية هي تلك العلاقة التي تربط بين التابع لعدة متحولات مستقلة ومشتقاته الجزئية، حيث إن أكثر المتحولات المستقلة شيوعاً هي تلك التي تُعَبّر عن الموضع والزمن. ولذلك على خلاف المعادلة التفاضلية العادية نرى أن التوابع المطلوب إيجادها في المعادلات

التفاضلية الجزئية هي توابع لعدة متحولات مستقلة. لقد واجهنا سابقاً بعض نماذج المعادلات التفاضلية الجزئية لدى دراسة مؤثرات التحليل التلعاعي كما هو عليه الحال في معادلة نافييه-ستوكس Navier-Stokes equation ومعادلة الاستمرار في الكهرطيسية. وعلاوة على ذلك تبرز أهمية المعادلات التفاضلية الجزئية في أنها تمكننا من توصيف عدد كبير من الظواهر الفيزيائية وتطبيقاتها في مجالات الهندسة الميكانيكية والكهربائية. فعلى سبيل الذكر وصف حركة اهتزازية لصفيحة ما، اتزان أجنحة الطائرة، تحديد الكثافة لتيار ما، وصف انتشار الأمواج والحرارة في وسط ما، وغيرها. وعلى أية حال يبقى من الصعب في مضمار هذا الفصل عرض دراسة تامة أو عددية لموضوع المعادلات التفاضلية الجزئية بشكل تفصيلي، وذلك لكون الموضوع مازال مرتبطاً بشكل مباشر بتحليل النظم على اختلافها، وهذا يتطلب استخدام طرائق عددة ووسائل علمية تلائم الحالة أو طبيعة النظام قيد الدراسة، ولكن غالباً ما تكون الطرائق والوسائل المتاحة غير قابلة للتطبيق بشكل مباشر، ولهذا فقد تخضع لضرورات التعديل والتطوير بغية جعل المنهج في شكله النهائي كاملاً، ويمكن الاعتماد عليه لفهم طبيعة النظام وخصائصه. ولكن أياً كانت الحالة أو طبيعة النظام قيد الدراسة، فلا بد هنا من معرفة الأنماط المألوفة للمعادلات التفاضلية الجزئية وطرائق حلها المناسبة باعتبارها نماذج رياضية مهمة لدراسة العديد من النظم الميكانيكية والكهربائية المختلفة.

ولهذا سنتناول في هذا الفصل بعض التعريفات والمفاهيم الأساسية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية الجزئية ومن ثمّ سنناقش أهم الطرائق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية. نستخدم لاحقاً طريقة فصل المتحولات لمعالجة مجموعة متنوعة من المسائل العلمية التي يمكن أن نصادفها عادةً عند دراسة الظواهر الفيزيائية والتطبيقات الهندسية المرتبطة بأكثر من متحول واحد. كما سنبين كيفية الاستفادة من سلاسل فوريه وبعض التوابع الخاصة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. وأخيراً سنحاول التركيز على بعض الأمثلة المناسبة، كما سنعرض بعض المسائل والتمارين الإضافية للدلالة على تفاصيل ضرورية متعلقة بموضوع المعادلات التفاضلية الجزئية.

1-1-1 بعض التعاريفات والمفاهيم الأساسية Basic concepts and definitions

ذكرنا أن المعادلة التفاضلية الجزئية تحتوي بالإضافة إلى المتحولات المستقلة وغير المستقلة على مشتق جزئي أو أكثر لمتحولات غير مستقلة، وبصورة عامة نُعبّر عن المعادلة التفاضلية الجزئية كما يلي:

$$f\left(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots\right) = 0 \qquad (1)$$

حيث إن $u = u(x, y, \cdots)$ تابع لعدة متحولات مستقلة $x, y, \cdots$ ومشتقاته الجزئية هي: $u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$ التي يمكن أن نرمز لها أيضاً كما يلي:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \cdots$$

الهدف من دراسة للمعادلة التفاضلية الجزئية (1) هو إيجاد التوابع $u = u(x, y, \cdots)$ التي تحقق مشتقاتها الجزئية المعادلة (1) في منطقة ما D موجودة في الفضاء $\mathbb{R}^n$. ففي حال وجود تلك التوابع فإنها تسمى **حلول** المعادلة التفاضلية الجزئية. إلا أنه لا توجد طريقة عامة لإيجاد تلك الحلول، كما يمكن الحصول على عدة حلول مختلفة فيما بينها لمعادلة تفاضلية جزئية واحدة، ولهذا ينبغي وضع بعض الشروط الإضافية المناسبة لتحديد حلاً بذاته. فعلى سبيل المثال تَقْبَل كلٌ من المعادلات التفاضلية الجزئية الآتية أكثر من حل:

$$u\,u_{xy} + u_y = y, \qquad u_{xx} + 2y\,u_{xy} + 3x\,u_{yy} = 4\sin x$$
$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1, \qquad u_{xx} - u_{yy} = 0$$

كما نرى بالمقابل أن كلا التابعين:

$$u(x, y) = (x + y)^3, \qquad u(x, y) = \sin(x - y)$$

هما حلان لكلٍ من المعادلات التفاضلية الجزئية السابقة، حيث يمكن التأكد بسهولة من صحة ذلك بالتعويض عن التوابع ومشتقاتها في هذه المعادلات. وعلى هذا يبقى من الصعب هنا إيجاد معادلة تفاضلية جزئية بذاتها وتحقق جميع التوابع المفروضة دون ذكر أية مَعْلُومات إضافية أخرى، ولإيضاح ذلك نأخذ على سبيل المثال التوابع الثلاثة التالية:

$$u_1(x, y) = x^4 + 4(x^2y + y^2 + 1),$$
$$u_2(x, y) = \sin x^2 \cos 2y + \cos x^2 \sin 2y$$
$$u_3(x, y) = \frac{x^2 + 2y + 2}{3x^2 + 6y + 5}$$

فنلاحظ أن كلاً منها مرتبط بالمتحولين x و y. والآن إذا أدركنا أنه يمكن أن نعبر عن كل تابع من التوابع السابقة بدلالة تابع وحيد مرتبط بالوسيط $p = x^2 + 2y$، فيمكن عندئذٍ استنتاج صيغة المعادلة التفاضلية الجزئية التي تُمَثِّل كُلاً من التوابع الثلاثة السابقة حلاً لها. ولهذا نكتب هذه التوابع على النحو الآتي:

$$u_1(x, y) = (x^2 + 2y)^2 + 4 = p^2 + 4 = f_1(p)$$
$$u_2(x, y) = \sin(x^2 + 2y) = \sin p = f_2(p)$$
$$u_3(x, y) = \frac{(x^2 + 2y) + 2}{3(x^2 + 2y) + 5} = \frac{p + 2}{3p + 5} = f_3(p)$$

لنأخذ هنا المشتقات الجزئية $\partial u_i/\partial x$ و $\partial u_i/\partial y$ للتوابع u_i بالنسبة للمتحولين x و y مع مراعاة أن $p = x^2 + 2y$ فنجد:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{df_i(p)}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = 2xf_i' \Rightarrow f_i' = \frac{1}{2x}\frac{\partial u_i}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{df_i(p)}{dp}\frac{\partial p}{\partial y} = 2f_i' \Rightarrow f_i' = \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial y}$$

وذلك من أجل $i = 1, 2, 3$ فمن العلاقتين السابقتين نجد أن:

$$\frac{1}{2x}\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial y} \Rightarrow 2\frac{\partial u_i}{\partial x} = 2x\frac{\partial u_i}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial y}$$

وبذلك يتضح أن المعادلة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial u_i}{\partial x} = x\frac{\partial u_i}{\partial y}$ تَقْبَل كل من التوابع u_1, u_2, u_3 حلولاً لها مع الأخذ بعين الاعتبار أنّ $f(p)$ تابع اختياري الوسيط $p = x^2 + 2y$.

وعلى هذا غالباً ما نرى أن المعادلة التفاضلية الجزئية مُقْتَرِنةٌ بمعلومات إضافية مُعَيّنة تُسمى عادةً **بالشروط الحدية** حَيْثُمَا يمكن تحديد قيمة الحل أو مشتقاته على طول حدود منطقة ما، إلا أنها تُدعى **بالشروط الابتدائية** أيْنَما يكن الحل أو مشتقاته مُعْطَى عند لحظة زمنية أولية. كما تَبْرز أحياناً هناك بعض المسائل التي تنطوي على شروط مختلطة، أي بمعنى ابتدائية وحدّيه معاً، فإننا نشير إلى هذه الشروط عندئذ ببساطة بأنها **شروط جانبيّة**، كما تُسَمّى المسألة المُتَضَمّنة لِمثل هذه الشروط عادةً بمسألة القيم الحدية أو مسألة القيم الابتدائية أو مسألة ذات قيم ابتدائية وحدّيّة، وذلك تبعاً للشروط المرفقة بالمعادلة. وبذلك يتضح أنه يمكن الاستفادة من الشروط الابتدائية أو الحدية في تعيين حل خاص للمعادلة التفاضلية الجزئية، حيث يَتَم تحديد قيم معينة للثوابت الكيفية في الحل العام من خلال التعويض عن هذه الشروط في الحل العام.

فعلى سبيل المثال معادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$، حيث إن التابع $u(x, y)$ مُعَرّف هنا من أجل $0 < x < 1$ و $0 < y < \infty$، ففي حال الشروط الحدية:

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \qquad u(x, 0) = \sin \pi x$$

يتضح أن $u = e^{-\pi y}\sin \pi x$ هو حل لمعادلة لابلاس، وذلك لكون:

$$u_{xx} = -\pi^2 e^{-\pi y}\sin \pi x, \qquad u_{yy} = \pi^2 e^{-\pi y}\sin \pi x \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

وهكذا لإثبات صحة الحل لمعادلة تفاضلية جزئية نتبع الإجراء المألوف نفسه في المعادلات التفاضلية العادية، وذلك من خلال التعويض عن التابع ومشتقاته الجزئية في المعادلة المعطاة، وعلى هذا نوضح بعض المفاهيم الأخرى المرتبطة بحل المعادلة التفاضلية الجزئية من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (1-1): أثبت أن التابع $u = \sin x \cosh y$ يُحقق المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

هذه المعادلة تُسمى عادةً بمعادلة لابلاس ذات البعدين، وتصادفنا في الكثير من التطبيقات، مثل تلك الموجودة في الكهرباء الساكنة وجريان السوائل وانتشار الحرارة وغيرها.

الحل: لدينا $u=\sin x\cosh y$. بالاشتقاق جزئياً بالنسبة إلى المتحولين x و y فنحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cosh y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\sinh y,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin x\cosh y,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\cosh y,$$

بالتالي فإن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\sin x\cosh y+\sin x\cosh y=0$$

وهكذا فإن التابع المعطى $u(x,y)$ هو حل لمعادلة لابلاس.

مثال (2-1): بيّن أن التابع $u=e^{-2\pi^2 t}\sin \pi x$ هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

الحل: لنحدد مبدئياً $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial t$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\pi e^{-2\pi^2 t}\cos \pi x,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-2\pi^2 e^{-2\pi^2 t}\sin \pi x$$

ومن ثَمّ نحصل على:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\pi^2 e^{-2\pi^2 t}\sin \pi x$$

وعلى هذا يتضح أن $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$، وهو المطلوب.

من الجدير بالإشارة أن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الواردة في هذا المثال هو:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

حيث k هو ثابت عددي موجب، وتُسمى هذه المعادلة عادةً بمعادلة التوصيل الحراري ذات البعد الواحد أو قد يطلق عليها أحياناً اسم معادلة الانتشار، كما أن المتحول $u(x,t)$ يُعبّر هنا عن درجة الحرارة.

بالإضافة إلى معادلة لابلاس ومعادلة التوصيل الحراري توجد أيضاً معادلة تفاضلية جزئية مهمة تتضمن متحولين مستقلين، وتسمى بالمعادلة الموجية ذات البعد الواحد، ولها الشكل العام الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

وبذلك يتضح أن كلا المشتقين الجزئيين في المعادلة الموجية من المرتبة الثانية، بينما المشتق الجزئي بالنسبة إلى الزمن في معادلة التوصيل الحراري هو من المرتبة الأولى.

مثال (3-1): a) أثبت أن التابع $u(x,t)=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)$، حيث إن u_0 وℓ وc ثوابت عددية، يُمثل حلاً للمعادلة الموجية أحادية البعد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

b) تأكد من صحة العلاقة: $u(0,t)=u(\ell,t)=0$.

c) تحقق من أن: $u(x,0)=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$، $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$.

d) اعط تفسيراً فيزيائياً لهذه المسألة.

الحل: a) باشتقاق التابع المعطى لدينا جزئياً، نحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_0\frac{\pi}{\ell}\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-u_0\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u_0\left(\frac{\pi c}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-u_0\left(\frac{\pi c}{\ell}\right)^2\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)$$

والآن بالتعويض في المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$، فنلاحظ أن المعادلة محققة.

b) إذا وضعنا $x=0$ وفرضنا أن t اختيارياً، فيكون الحل المعطى $u=u(x,t)$ على الشكل الآتي:

$$u(0,t)=u_0\sin 0\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)=0$$

وبشكل مشابه لنضع $x=\ell$ ولنفرض أن t اختياريّ، فنحصل على:

$$u(\ell,t)=u_0\sin\pi\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)=0$$

c) لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u_0\left(\frac{\pi c}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)$$

لنضع الآن مبدئياً $t=0$ ولنفرض أن x اختياريّ، فنحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-u_0\left(\frac{\pi c}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\sin 0=0$$

كما أنه لدى التعويض عن $t=0$ في الحل المعطى $u(x,0)$ فنحصل على:

$$u(x,0)=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos 0=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

d) الآن رياضياً أن التابع المعطى $u(x,t)$ يُمثل حلاً للمعادلة الموجية أحادية البعد ويُحقق كُلاً من الشروط الحدية المعطاة في b) والشروط الابتدائية المعطاة في c). وعليه إن أحد التفسيرات الفيزيائية الممكنة هنا هي أن

التابع $u(x,t)$ يصف الحركة الاهتزازية لخيط مرن مشدود بين النقطتين $x=0$ و $x=\ell$. فمن الواضح أن موضع أي نقطة من نقاط الخيط المهتز مُرتبط من جهة أولى بالبُعد x الذي يفصل النقطة عن نهاية الخيط، ومن جهة أخرى بالزمن t. فالشروط الحدية في b) تُوضّح أن الخيط مُثبت عند نقطتي النهاية.

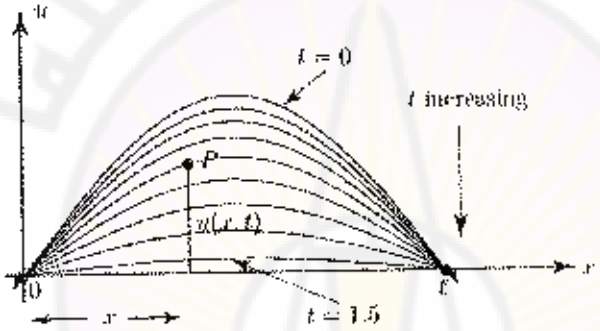
أما الشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

فيمثّل الإزاحة الحاصلة للخيط عندما $t=0$، والشرط الابتدائي الآخر:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

يَدُل على أن الخيط كان في حالة ساكنة في اللحظة الزمنية $t=0$.



الشكل (1-1): مسألة الخيط المرن.

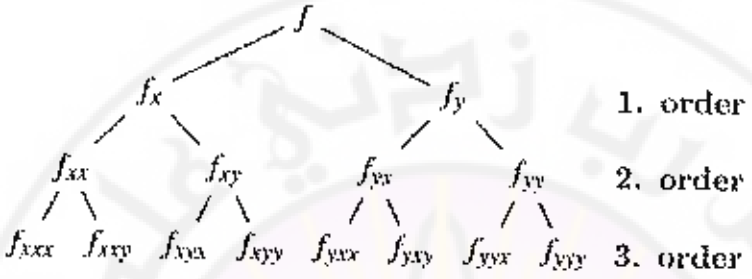
وأخيراً من الجدير بالملاحظة هنا أنه في حال أُعطينا T شدة التوتر في الخيط المرن و ρ كتلة الخيط بوحدة الطول، فعندئذٍ يمكن التأكد من أن التابع u يحقق بمُقتضى شروط معينة المعادلة الموجية ذات البعد الواحد وذلك عندما $c^2=T/\rho$.

وهكذا عموماً نبدأ الخطوة الأولى في حل المعادلة التفاضلية الجزئية بتحديد نوعها، ولهذا لا بدّ من معرفة أهم خصائص المعادلة ومن ثم تحديد الطريقة المناسبة للحل. ومن أهم الخصائص التي نعتمد عليها مبدئياً في تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية هي:

1- عدد المتحولات المستقلة.

2- مرتبة المعادلة: تُعرّف مرتبة المعادلة التفاضلية الجزئية على أنها مرتبة أعلى مشتق جزئي موجود في هذه المعادلة، فإذا احتوت المعادلة على مشتق جزئي من المرتبة الأولى ومشتق جزئي آخر من المرتبة الثانية، فإننا نعدّ المعادلة عندئذٍ من المرتبة الثانية. وعليه فإننا نقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية من

المرتبة الأولى عندما تحتوي على مشتقات من المرتبة الأولى فقط. فعلى سبيل المثال إذا أُعطينا تابعاً لمتحولين مستقلين $u = f(x, y)$ فإننا نحصل وفق المخطط البياني الآتي على متتالية عناصرها موزعة تدريجياً من الأعلى نحو الأسفل بمشتقين جزئيين للمرتبة الأولى وأربعة مشتقات جزئية للمرتبة الثانية وثمانية مشتقات جزئية للمرتبة الثالثة وهكذا:



الشكل (1-2): المشتقات الجزئية من مستويات مختلفة.

ففي حالة التابع $u(x, y) = \sin(4x)\cos(3y)$ مثلاً، نرى أن جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية هي:

$$u_x = 4\cos(4x)\cos(3y), \qquad u_y = -3\sin(4x)\sin(3y),$$
$$u_{xx} = -16\sin(4x)\cos(3y), \qquad u_{yy} = -9\sin(4x)\cos(3y),$$
$$u_{xy} = -12\cos(4x)\sin(3y), \qquad u_{yx} = -12\cos(4x)\sin(3y)$$

كما يمكن التأكد أن التابع u يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{xx} - \frac{16}{9}u_{yy} = 0$$

وذلك من خلال التعويض عن مشتقات التابع في هذه المعادلة. وكما نلاحظ أيضاً أن $u_{xy} = u_{yx}$ وهذا يُذكّرنا بدوره بنظرية كليروت Clairaut's Theorem التي تنص: لنفرض أن u تابعاً معرفاً على الساحة D التي تحتوي ضمنها على النقطة $(x, y) = (a, b)$، فإذا كان التابعان u_{xy} و u_{yx} مستمرين على D، فإن: $u_{xy} = u_{yx}$. أي تتساوى المشتقات الجزئية المختلطة في حال استمرارها على D.

3- **الخطية**: نقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية (1) إنها **خطية**، إذا كان كل من u ومشتقاته الجزئية خطياً، أي من الدرجة الأولى، وما عدا ذلك فإننا نقول عن المعادلة إنها **لاخطية**. فعلى سبيل المثال نرى أن المعادلة $u_x + u\,u_y = \sin x$ لاخطية ومن المرتبة الأولى، أما المعادلة $u_t = u_{xx}$ فهي خطية ومن المرتبة الثانية.

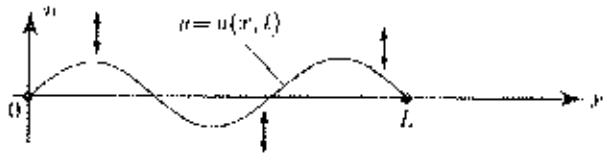
4- التَّجَانُس: تُسمى المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية **متجانسة** إذا احتوى كل حد من حدود المعادلة التفاضلية الجزئية على التابع المجهول ومشتقاته فقط، وما عدا ذلك فإن المعادلة **غير متجانسة**.

5- نوعية الأمثال: تُسمى المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية بأنها ذات أمثال ثابتة عندما تكون جميع أمثال u ومشتقاته أعداداً ثابتة.

والآن بعد اسْتَعْرَاض أهم المعايير التي نعتمد عليها في تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية سنناقش هنا بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المهمة التي يمكن أن تصادفنا عند دراسة الكثير من التطبيقات في شتى فروع الهندسة والعلوم. كما أننا سَنولي الاهتمام على وجه الخصوص لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية التي يمكن الاستفادة منها لتوصيف مجموعة متنوعة من الحالات المختلفة. ولكن من الجدير بالذكر مبدئياً أنه لا توجد بأية حال طريقة معينة تُعنى كلياً بمعالجة أنماط المعادلات التفاضلية الجزئية المختلفة التي يمكن أن تكون على جانبٍ كبير من الأهمية في التطبيقات. ولهذا سندرس بالتفصيل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية وسنعرض باختصار معادلات تفاضلية جزئية أخرى اخترت بدقة لكونها تمثل طيفاً واسعاً من التطبيقات. إلا أننا سنهمل في العموم الجانب التفصيلي لاستنتاج هذه المعادلات.

2-1-1 المعادلات الموجية Wave equations

إن أبسط الحالات التي يمكن أن تؤول إلى معادلة موجية أحادية البعد هي الحركة الاهتزازية لخيط مرن مشدود بين نقطتين وبخاصّة معادلة الحركة التي تُمثل الاهتزازات العَرْضِيَّة للخيط المرن التي تنشأ عند حدوث أي اضطراب على الخيط وذلك كما هو عليه الحال عند التأثير بقوة ما على وتر آلة موسيقية. فإذا فرضنا أنه لدينا خيط مرن تمتدُّ على طول محور الإحداثيات ox، كما أنه مشدود ومثبت عند نهايتيه $x = 0$ و $x = L$. والآن لِنزيح الخيط شاقولياً بمقدار ما عن وضع استقراره ومن ثَمَّ لِنتركه يهتز بدءاً من لحظة زمنية معينة $t = 0$، فمن الواضح عندئذ بأن موضع أي نقطة من نقاط الخيط المهتز مُرتبط من جهة أولى بالبُعد x الذي يفصل النقطة عن نهاية الخيط ومن جهة أخرى بالزمن t. ولهذا من الضروري معرفة مقدار التغيّر الحاصل في موضع كل نقطة من نقاط الخيط x، $0 \leq x \leq L$ بالنسبة إلى الزمن t، وعلى هذا يتضح أنه يمكن أن نمثل التغير بتابع $u(x,t)$، والشكل الآتي يبين الإزاحة الممكنة لنقاط الخيط في لحظة ما t.



الشكل (1-3): إزاحة الخيط.

ولكن لدراسة حركة الخيط ينبغي مراعاة افتراضات متعددة:

a) إهمال القوى الخارجية المؤثرة في الخيط كمقاومة الهواء وغيرها.

b) إهمال وزن الخيط.

c) إن شدة التوتر في الخيط تُمس منحني الخيط في كل نقطة من نقاطه.

d) إن الخيط يتأرجح بشكل عرضي طفيف، بمعنى أن كل جُسَيْم يتحرك بشكل عمودي فعلياً بحيث إن مقدار كلٍ من انعطافه وميله يبقى صغيراً مِثْل أي نقطة من نقاط الخيط.

كما أنه من المعلوم عند التأثير بقوة معينة على خيط ما فإن تسارع الحركة الناتجة يتناسب طرداً مع القوة المؤثرة وعكساً مع كتلة الخيط، وهكذا من خلال تطبيق قانون نيوتن للحركة على جزء بسيط من الخيط نرى أن $u(x,t)$ يُحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

حيث إن $c^2 = T/\rho$، ويُشير ρ إلى كُتلة الخيط بوحدة الأطوال كما أن الثابت T مُعطى بدلالة شدة توتر الخيط. والآن لتحديد $u(x,t)$ بشكل استثنائي، نحتاج لمعرفة وضع الخيط عند بدء حركة اهتزازه بالإضافة إلى السرعة الابتدائية للخيط أيضاً.

وهذا تُعطى مبدئياً الشروط الابتدائية التي تصف الموضع والسرعة على الترتيب، كما يلي:

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le L$$

حيث إن كُلاً من $f(x)$ و $g(x)$ مَعْلُوم. ومن ناحية ثانية يوجد هنا شرطان حدّيان آخران أيضاً بالإضافة إلى الشرطين الابتدائيين السابقين، وهما:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \ge 0$$

وهذان الشرطان يوضّحان أن الخيط مُثبت عند نقطتي النهاية. وقد وجدنا في المثال السابق أن:

$$f(x) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \qquad g(x) = 0$$

إن المعادلة التفاضلية الجزئية (2) تُمثّل معادلة موجة غَيرَ مُتجانسة، وسنبيّن لاحقاً حلول هذه المعادلة مع مراعاة شروط ابتدائية مختلفة. كما أنه تبرز إلى الوجود أشكالاً إضافية معقدة للمعادلة الموجية فيما إذا عُدِّلت الافتراضات المذكورة أعلاه، فعلى سبيل المثال في حال عدم إهمال وزن الخيط فإن المعادلة الموجية تبدو على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g$$

أما في حال عدم إهمال القوى الخارجية المؤثرة، وكانت هذه القوى متناسبة مع سرعة حركة الخيط، فتأخذ عندئذٍ المعادلة الموجية الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

حيث إن α ثابت الاحتكاك المرتبط بالقوى الخارجية المؤثرة في مضاءلة الاهتزاز أو إخماده. ومن جهة أخرى يُشار إلى المعادلة (2) بأنها معادلة موجية أحادية البعد، وذلك لكونها تحتوي على متحول وحيد x لتحديد موضع أية نقطة من نقاط الخيط، أما المعادلة الموجية ثنائية البعد فتعطى في الإحداثيات الديكارتية كما يلي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

حيث تَمّ هنا إهمال القوى التي يمكن أن تؤثر في اهتزاز الخيط وتُثبطه، وقد تصادفنا المعادلة السابقة كثيراً وبخاصة لدى نَمْذَجة الاهتزازات العَرْضِيّة لغشاء نسيجي ما، كما هو مبين في الرسم التوضيحي أدناه.



الشكل (4-1): اهتزاز غشاء نسيجي.

وبذلك نرى أن $u(x,y,t)$ تُمثل موضع النقطة (x,y) على سطح الغشاء في اللحظة t، ومن المفروض تحديداً أن يكون الشرط الحدي مَعْلُوماً، ويمكن عندئذٍ أن نكتب بإيجاز:

$$u(x,y,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

بالإضافة إلى ذلك تُعطى أيضاً الشروط الابتدائية التي تصف مبدئياً موضع كل نقطة من نقاط الغشاء وسرعتها على الترتيب، كما يلي:

$$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y)$$

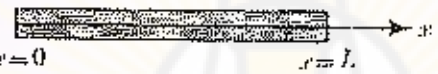
وعلى أية حال يبقى استخدام الإحداثيات القطبية أكثر ملائمة من الإحداثيات الديكارتية عند دراسة اهتزاز نقاط غشاء دائري كما هو الحال عندما تؤثر بقوة ما على جِلْدَة الطَّبْل مَثَلاً ومن ثَمّ نتركه ليهتز بدءاً من لحظة زمنية معينة $t = 0$. وبالنّظَرِ إلى أن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، يتضح أنه من الأفضل استخدام الإحداثيات القطبية لتحديد موضع كل نقطة من نقاط الغشاء الدائري المهتز في لحظة زمنية ما، فمن خلال التعويض عن الإحداثيات الديكارتية في المعادلة الموجية ثنائية البعد نحصل عندئذٍ على:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right), \qquad 0 \le r \le R, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

حيث إن R هو نصف قطر الغشاء الدائري.

3-1-1 معادلات التوصيل الحراري Heat conduction equations

لنأخذ بعين الاعتبار هنا قضيباً معدنياً طويلاً ورفيعاً ذا مقطع عرضي ثابت ومصنوعاً من مادة متجانسة ومُوَجّهاً باتجاه محور التفاصيل ox، وكما هو مُبيّن بالشكل أدناه:



الشكل (1-5): قضيب معدني.

لنفرض الآن أن القضيب معزول حرارياً بشكل جانبي، كما أننا نعدّ أن القضيب رفيع بما فيه الكفاية بحيث تنتقل الحرارة بالتوصيل وفي اتجاه واحد، أي باتجاه محور الفواصل ox. بالتّالي فإن درجة الحرارة u في كل نقطة من نقاط القضيب مُرتبطة من جهة أولى بإحداثيات النقطة على محور الفواصل ox ومن جهة أخرى بالزمن t. ومن ثَمّ بتطبيق مبدأ حفظ الطاقة يتضح أن $u(x,t)$ يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3)$$

حيث إن k عدد ثابت موجب، وفي الواقع يُسمى أحياناً الثابت k بثابت الانتشارية الحرارية للقضيب، ويُعطى عادةً بالعلاقة:

$$k = \frac{\kappa}{s\,\rho}$$

وهنا تدل κ على عامل الانتشار الحراري لمادة القضيب، كما أن s تُشير إلى سعة الحرارة النوعية لمادة القضيب التي كثافتها ρ. إن المعادلة التفاضلية الجزئية (3) تُدعى عادةً معادلة التوصيل الحراري ذات البعد الواحد، إلا أنها تذكر أيضاً باسم معادلة الانتشار في سياق آخر. وهنا يبدو الاختلاف وأضحاً

بين المعادلة الموجية (2) ومعادلة التوصيل الحراري (3)، فمن الجدير بالملاحظة أنّ كُلّ من المعادلتين تحتوي على مشتق جزئي من المرتبة الثانية بالنسبة إلى المتحول x، بَيْنَما المعادلة الموجية تتضمن مشتقاً جزئياً من المرتبة الثانية بالنسبة إلى المتحول t، فإن معادلة التوصيل الحراري تنطوي على مشتق جزئي من المرتبة الأولى بالنسبة إلى المتحول t. وهذا يعني أن حلول المعادلة (3) تختلف إلى حد بعيد شكْلِيّاً عن تلكَ الحلول الناتجة عن المعادلة (2)، وسنبين ذلك بالتفصيل لاحقاً.

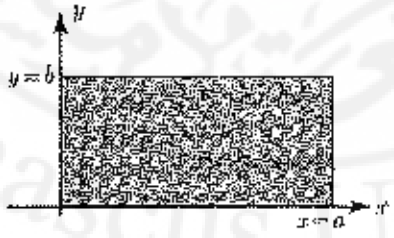
وهكذا بما أن معادلة التوصيل الحراري تملك مشتقاً جزئياً من المرتبة الأولى بالنسبة إلى المتحول t، فمن الضروري عندئذٍ معرفة شرط ابتدائي واحد فقط، بالإضافة إلى شرطين حديين آخرين، وذلك كي نستطيع تحديد حل خاص للمعادلة التوصيل الحراري (2). وغالباً ما يُحدّد الشرط الابتدائي عندئذٍ من خلال توزع درجة الحرارة مبدئياً في القضيب، بمعنى: $u(x,0) = f(x)$ حيث إن $f(x)$ معلوم. كما أنه في حال $x = 0$ و $x = L$، يتضح عندئذٍ أنه لدينا أنواع متعددة من الشروط الحدية. فعلى سبيل المثال إذا كانت كلٌّ من درجتي الحرارة عند طَرَفَيْ القضيب ثابتين T_1 و T_2، فإن الشرطين الحديين عندئذٍ هما: $u(0,t) = T_1$, $u(L,t) = T_2$ أما في حال عدم انتقال الحرارة داخل طَرَفَيْ القضيب، فنجد أنّ شرطيّ العزل الحراري:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

ويمكن التعبير عن معادلة التوصيل الحراري (3) بصيغ أخرى مختلفة، فإننا نرى أن معادلة التوصيل الحراري ثنائية البعد تأخذ الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (4)$$

حيث إن $u(x,y,t)$ تمثل هنا درجة الحرارة في صفيحة مُستطّحة. ومن المفترض أن تكون هذه الصفيحة رقيقة ومعزولة من جانبيها الأعلى والأسفل، وذلك بُغية وَضع حَدٍّ لجريان الحرارة خارج المستوي oxy. ومن الضروري كذلك وجود شروط حدية مُعْطَاة بالإضافة إلى الشرط الابتدائي كي نستطيع تحديد حلول المعادلة (4). فعلى سبيل المثال، إذا كانت الصفيحة مستطيلة الشكل بعداها a و b:



الشكل (1-6): صفيحة مستطيلة.

فإن الشروط الحدية المألوفة ينبغي عندئذٍ أن تكون على النحو الآتي:

درجة حرارة الوجه السفلي ثابتة:

$$u(x,0) = T_1, \qquad 0 \le x \le a$$

الوجه الأيمن معزول:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0, \qquad 0 \le y \le b$$

درجة حرارة الوجه الأعلى ثابتة:

$$u(x,b) = T_2, \qquad 0 \le x \le a$$

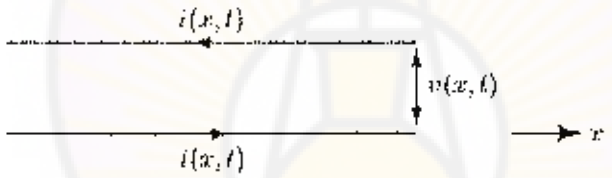
درجة حرارة الوجه الأيسر معدومة:

$$u(0,y) = 0, \qquad 0 \le y \le b$$

وعلى هذا يأخذ الشرط الابتدائي الشكل: $u(x,y,0) = f(x,y)$ حيث إن f معلوم مسبقاً.

4-1-1 معادلات خط النقل Transmission line equations

إن شدة التيار والجهد في كل نقطة من نقاط كابل كهربائي طويل أو سلك هاتف ترتبط ارتباطاً مباشراً بموضع النقطة على السلك بالإضافة إلى الزمن t.



الشكل (1-7): مسألة سلك ناقل.

وهكذا بالاعتماد على القوانين الأساسية في نظرية الدارات الكهربائية يتضح أن شدة التيار الكهربائي $i(x,t)$ تُحقّق المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + RG\,i \qquad (5)$$

حيث إن R وL وC وG ثوابت عددية معطاة بدلالة وحدة الطول للكابل، وتُمثل على التوالي: المقاومة، عامل التحريض، والسعة، وناقلية الوصلة. كما أن الجهد الكهربائي $v(x,t)$ يحقق المعادلة (5) أيضاً. إلا أن هناك بعض القضايا الخاصة التي يمكن أن تصادفنا في حالات محددة. فعلى سبيل الذكر، في حال الكابل البحري تكون G صغيرة جداً والترددات منخفضة، لذلك يمكن إهمال التأثيرات التحريضية وتصبح عندئذٍ المعادلة (5) على الشكل:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (6)$$

وتُسمى هذه المعادلة عادةً بمعادلة التلغراف telegraph equation. أما في حال التيارات المتناوبة ذات التردد العالي، فإن ضياع التيار بالتسرب يكون مهملاً أيضاً، وعندئذ يمكن إعطاء صيغة تقريبية للمعادلة (5) على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad (7)$$

وتُسمى هذه المعادلة بمعادلة خط عالي التوتر high frequency line equation. ومن الجدير بالملاحظة هنا بأن للمعادلة (6) الشكل ذاته كما هو في معادلة التوصيل الحراري أحادية البعد، بينما تملك المعادلة (7) صيغة مماثلة للمعادلة الموجية أحادية البعد.

5-1-1 معادلة لابلاس Laplace's equation

لنأخذ بعين الاعتبار مجدداً معادلة التوصيل الحراري ثنائية البعد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

رأينا أنه باستخدام المعادلة السابقة يمكن تحديد توزع وحيد لدرجات الحرارة في أي لحظة زمنية على سطح ما، وذلك في حال معرفة التوزع الابتدائي لدرجات الحرارة على هذا السطح. إلا أنه في حال سريان الحرارة بشكل منتظم، فيتضح أن توزع درجات الحرارة مستقل هنا عن الزمن، أي إن $\partial u/\partial t = 0$، وهكذا فإن معادلة التوصيل الحراري السابقة تؤول إلى:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (8)$$

وتُسمى هذه المعادلة عادةً بمعادلة لابلاس ثنائية البعد. وغالباً ما نصادف كلا المعادلتين السابقتين بالإضافة إلى معادلة لابلاس ثلاثية البعد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (9)$$

توجد معادلة لابلاس في طيف واسع من التطبيقات العملية، ولهذا فإنها تؤدي دوراً مهماً جداً في نظرية اتزان التوصيل الحراري التي تُعنى بدراسة الحالة التي توصل فيها الحرارة بحيث يبقى معدل التوصيل والتدفق الحراري من الطرف الساخن إلى الطرف البارد ثابتاً. كما أنه من الواضح هنا عدم ظهور متحول الزمن في كلٍ من المعادلتين (8) و(9)، ولهذا نرى دائماً أنه لدى دراسة حالة توازن ما، فإن المسألة تؤول

عندئذٍ إلى معادلة لابلاس، وعلى هذا من الضروري البحث فيما بعد عن حل مسألة مُتضمنةً لمعادلة لابلاس في مِنْطَقَة معينة R ومقترنةً بشروط حدية معطاة مسبقاً، حيث إنه من الممكن أن تأخذ الشروط الحدية أحد الأشكال الآتية:

a) التابع u مُعَرَّف على حدود منحني ثنائي البعد C أو على حدود سطح ثلاثي الأبعاد S من المنطقة R. إن الشروط من هذا النوع تُسمى شروط دريخليه Dirichlet conditions.

b) المشتق المُوَجه للتابع u بالنسبة إلى شعاع الناظم n على حدود C أو S، أي $\partial u/\partial n$، مُعَرَّف على C أو S وموجه في اتجاه شعاع الناظم n. يُشار إلى مثل هذه الشروط بأنها شروط نويمان الحدية Neumann boundary condition.

c) إذا كان التابعان h وu مُعَرَّفين من أجل جميع قيم x وy التي تنتمي إلى حدود المنحني C أو حدود السطح S من المنطقة R، فيمكن الجمع بين الشرطين a) وb) على النحو الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h\,u$$

مثل هذا الشرط يُسمى عادةً بالشرط المختلط mixed condition.

بالإضافة لما سبق، نرى أن لمعادلة لابلاس تطبيقات شتى في علوم الهندسة، فعلى سبيل الذكر نرى أن u في الكهرباء الساكنة يُمثل الطاقة الإلكتروستاتيكية في مجال ما خالٍ من الشحنات. أما عند دراسة الجاذبية الكونية عموماً فإن u يرمز عندئذٍ إلى وضع الجاذبية في الفضاء الخارجي. كما يُعَبِّر أيضاً عن الانسياب المنتظم للموائع غير اللزجة. وأخيراً لاحظنا أنه إذا كان انسياب الحرارة منتظماً، أي إنه مستقل عن الزمن، فإن معادلة التوصيل الحراري تأخذ شكل معادلة لابلاس.

6-1-1 بعض المعادلات التفاضلية الجزئية الأخرى والهامة في العلوم والهندسة:

Other important partial differential equations

1- معادلة بواسون Poisson's equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

حيث إن $f(x,y)$ معلوم مسبقاً. ومن الملاحظ هنا أن معادلة بواسون من الدرجة الثانية ولها تطبيقاتها في الكهرباء الساكنة ونظرية المرونة وغيرها.

2- معادلة هلمهولتز Helmholtz's equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0$$

نرى أن للمعادلة من الدرجة الثانية، كما أنها تصادفنا عادةً عند دراسة المعادلات الموجية بأشكالها المختلفة. وعلى هذا تعدّ معادلة لابلاس حالةً خاصة من معادلة هلمهولتز، حيث إن معادلة هلمهولتز تؤول إلى معادلة لابلاس عندما $k^2=0$.

3- معادلة شرودينغر Schrödinger's equation

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=E\psi$$

تصف هذه المعادلة كيفية تغير الحالة الكمية لنظام فيزيائي مع الزمن، وعلى هذا نرى أنها ذات أهمية خاصة في ميكانيكا الكم.

4- الاهتزازات العرضية في ذراع متجانس Transverse vibrations in a homogenous rod

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

حيث إن $u(x,t)$ تُمثّل هنا الإزاحة لمقطع عرضي من x في لحظة زمنية t.

وأخيراً من الجدير بالملاحظة أن جميع المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعرضنا لها هنا هي معادلات من المرتبة الثانية وذلك لكون أعلى مرتبة للمشتق تبدو فيها هي المرتبة الثانية، باستثناء المعادلة المذكورة في المثال الأخير فهي من المرتبة الرابعة.

والآن بعد استعراض بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية الجزئية المهمة سنُرَكّز اهتمامنا لتصنيف تلك المعادلات بُغْيَة معرفة نوع الصيغة العامة للمعادلة المعطاة وبيان صحة تمثيلها، وعليه يمكننا بعدئذٍ تحديد طريقة الحل المناسبة لهذا الصنف من المعادلات التي هي قيد الدراسة، مما يُظهر تلقائياً في النهاية خواص الحل الناتج وذلك من خلال التماس السُلُوك المُحْتَمَل والمستَوْحَى من اعتبارات رياضية أو فيزيائية بديهية. وعلى هذا نرى أن المعادلات التفاضلية الجزئية متنوعة جداً ولذلك إيجاد الحل يعتمد بالدرجة الأولى على تحديد نوع المعادلة التفاضلية الجزئية، كما تجدر الإشارة إلى أن للشروط الابتدائية والحدية أثراً واضحاً في وجود الحل ووحدانيته. بالتالي لإيضاح كيفية حل المعادلات التفاضلية الجزئية تحليلياً سنأخذ مبدئياً بعَيْن الاعْتِبار تلك المعادلات التي يمكن حلها مباشرةً بإجراء عملية المكاملة، ومن ثَمّ سنناقش لاحقاً المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية، أي تلك المعادلات التي متحولها المستقل من الدرجة الأولى. وعلاوةً على ذلك سنتناول مبدئياً المعادلات التفاضلية الجزئية من مراتب عليا، وعلى وجه الخصوص

المعادلات من المرتبة الثانية، وهذا يقتضي بالضرورة معرفة بعض الطرائق لحل المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى، التي يمكن استخدامها أيضاً فيما بعد لحل المعادلات من المراتب العليا. كما سنرى أن هناك الكثير من الأفكار البارزة لمعالجة المعادلات التفاضلية العادية يمكن الاستفادة منها في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية. وأخيراً تجدر الإشارة إلى أن التطبيقات العملية التي تؤول إلى معادلات تفاضلية جزئية يجب حلها باستخدام الطرائق العددية، ولكن هذه الطرائق ليست موضع دراستنا في هذا المقرر.

2-1 معادلات تفاضلية جزئية تُكامل مباشرة Direct integration method

سندرس الآن المعادلات التفاضلية الجزئية التي يمكن حلها بالمكاملة مباشرة حيث نكامل بالنسبة إلى أحد المتحولات عند إجراء عملية المكاملة وننظر إلى المتحول الآخر على أنه ثابت. ولذلك نجعل ثابت التكامل عندئذٍ تابعاً اختيارياً مرتبطاً بالمتحول الثابت. وبذلك يتضح أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى يتعلق بتابع كيفي واحد، أما الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية فيتعلق بتابعين كيفيين... وهكذا. وفيما يلي بعض الأمثلة التي تبين طرائق مكاملة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية البسيطة:

أولاً: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الشكل:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x + y$$

نكامل مباشرةً بالنسبة إلى المتحول x فنحصل على:

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$$

حيث إن $\varphi(y)$ ثابت اختياري مرتبط بالمتحول y.

ثانياً: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xy^2$$

نكامل مبدئياً بالنسبة إلى المتحول x فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{2} \cdot y^2 + f(y)$$

نكامل الآن مرة ثانية بالنسبة إلى المتحول x فنحصل على الحل:

$$u(x,y) = \frac{x^3}{6} \cdot y^2 + x\, f(y) + g(y)$$

حيث إن f و g تابعان اختياريان مرتبطان بالمتحول y.

ثالثاً: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الشكل:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 6x + 12y^2$$

نكامل مباشرةً بالنسبة إلى المتحول x فنحصل على:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 12xy^2 + f(y)$$

ومن ثَمّ نكامل مرة ثانية بالنسبة إلى المتحول y فنحصل على الحل:

$$u(x,y) = 3x^2y + 4xy^3 + \int f(y)dy + g(x)$$

حيث إن f و g تابعان اختياريان مرتبطان بالمتحولين x و y على التوالي.

رابعاً: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الشكل:

$$\frac{\partial^3 u(x,y,z)}{\partial x \partial x \partial z} = x^3 - y + z^2$$

نكامل مباشرةً بالنسبة إلى المتحول z فنحصل على:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} = x^3 z - yz + \frac{1}{3}z^3 + f_1(x,y)$$

ومن ثَمّ نكامل مرتين بالنسبة إلى المتحول x فنحصل على الحل:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{20}x^5 z + \frac{1}{2}yzx^2 + \frac{1}{6}z^3x^2 + f(x,y) + x\, g(y,z) + h(y,z)$$

حيث إن $f_{xxx}(x,y) = f_1(x,y)$ والتوابع f و g و h اختيارية.

خامساً: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin x \tan y$$

نكامل مبدئياً بالنسبة إلى المتحول x فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos x \tan y + f(y)$$

حيث f تابع اختياري مرتبط بالمتحول y. ومن ثَمّ نكامل جزئياً مرة ثانية بالنسبة إلى المتحول y، فنحصل على الحل:

$$u = -\cos x \cdot \ln \sec y + g(y) + h(x)$$

حيث إن $g(y) = \int f(y)dy$ و $h(x)$ تابعان اختياريان مرتبطان بالمتحولين y و x.

سادساً: لحل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2x\, e^y$$

نكامل مبدئياً بالنسبة إلى المتحول y فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\, e^y + f(x)$$

حيث إن f تابع اختياري مرتبط بالمتحول x. ومن ثَمّ نكامل مرة ثانية بالنسبة للمتحول x فنحصل على الحل:

$$u = x^2 e^y + h(x) + g(y)$$

حيث إن $h(x) = \int f(x)dx$ و $g(y)$ تابعان اختياريان مرتبطان بالمتحولين x و y.

سابعاً: لتحديد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \cos(2x + 3y)$$

نكامل مبدئياً بالنسبة إلى المتحول x فنجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\sin(2x + 3y) + f(y)$$

حيث $f(y)$ تابع اختياري مرتبط بالمتحول y. نكامل الآن مرة ثانية بالنسبة إلى المتحول x

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{4}\cos(2x + 3y) + xf(y) + g(y)$$

حيث g تابع اختياري مرتبط بالمتحول y. لنكامل الآن جزئياً بالنسبة إلى المتحول y:

$$u = -\frac{1}{12}\sin(2x + 3y) + \int xf(y)dy + \int g(y)dy + h(x)$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$u = f_1(x) + f_2(y) + xf_3(y) - \frac{1}{12}\sin(2x + 3y)$$

حيث $f_1(x)$ تابع اختياري مرتبط بالمتحول x، كما أن $f_2(y)$ و $f_3(y)$ تابعان اختياريان مرتبطان بالمتحول y.

ثامناً: لإيجاد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 u = 0$$

والمحققة للشرطين: $\frac{\partial u}{\partial x} = a \sin y$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$، في حال $x = 0$.

إذا عددنا مبدئياً u تابعاً للمتحول x فقط، فإن الحل عندئذٍ:

$$u = A \sinh x + B \cosh x$$

حيث A و B هما ثابتان. وبما أن u تابع للمتحول y أيضاً، يمكننا عندئذٍ التعبير عن u على النحو التالي:

$$u = A(y)\sinh x + B(y)\cosh x$$

هنا من الضروري مراعاة الشروط المعطاة $\frac{\partial u}{\partial x} = a\sin y$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$، عندما $x = 0$، وعلى هذا يكون لدينا:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = A(y)\cosh x + B(y)\sinh x\Big|_{x=0} = A\cdot 1 + B\cdot 0 \Rightarrow$$

$$A\cdot 1 + B\cdot 0 = a\sin y$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} = A'(y)\sinh x + B'(y)\cosh x\Big|_{x=0} = A'\cdot 0 + B'\cdot 1 \Rightarrow$$

$$A'\cdot 0 + B'\cdot 1 = 0$$

وهذا يعني بدوره أن:

$$A(y) = a\sin y, \qquad B(y) = \text{constant}$$

إذاً:

$$u = (a\sin y)\sinh x + b\cosh x$$

حيث إن b ثابت كيفي.

3-1 معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى First order partial differerntial equations

ذكرنا أن مرتبة المعادلة هي مرتبة أعلى مشتق يَرد فيها، وبالرغم من أن معظم المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصادفنا عند دراسة العديد من الحالات الفيزيائية تؤول إلى معادلات من المرتبة الثانية، سنناقش المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى لإيضاح الأفكار العامة اللازمة للحصول على الحل الذي يحقق شروطاً جانبية مقترنةً به. تُعطى المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى لتابع بمتحولين $u(x,y)$ عموماً على النحو الآتي:

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \qquad (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

هذه المعادلة تبقى باعتبارها صيغةً شاملة، ولكن إذا فرضنا بعض القيود عليها، نستطيع عندئذٍ تصْنيف المعادلات من المرتبة الأولى، كما يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى على الشكل التالي:

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = f(x,y)$$

حيث إن $f(x,y)$ و $c(x,y)$ و $b(x,y)$ و $a(x,y)$ توابع معطاة مسبقاً ومستقلة عن $u(x,y)$، وبذلك نلاحظ أيضاً أنّ u, u_x, u_y هي خطية. إلا أنه يمكن أن تُخفّف القيود المفروضة على أمثال المعادلة

السابقة قليلاً، أي بمعنى إذا فرضنا أن المعادلة خطية بالنظر إلى u_x وu_y فقط، فنحصل على معادلة تفاضلية جزئية شبه خطية من المرتبة الأولى:

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = f(x,y,u)$$

حيث نلاحظ أن الحد u موجود ضمن $f(x,y,u)$. ولكن نرى هناك صيغة وسطية بين الصيغتين السابقتين وتُسمى بالمعادلة التفاضلية الجزئية **نصف الخطية** من المرتبة الأولى:

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = f(x,y,u)$$

وما يميز هذه المعادلة من سابقتيها هو أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة يجب أن يكون خطياً بالنظر إلى u_x وu_y وu، ومن ناحية ثانية قد يكون الطرف الأيمن لاخطي بالنظر إلى u. وعلى هذا نعرض الآن بعض الأمثلة على المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى:

$$u_t + u_x = 0$$
$$u_t + u\,u_x = 0$$
$$u_t + u\,u_x = u$$
$$3u_x - 2u_y + u = x$$

لإيجاد حلول مثل هذه المعادلات نستخدم عادةً طريقة الخصائص Method of characteristics، ولكن قبل البدء بمناقشة هذه الطريقة وكيفية الاستفادة منها في حل المعادلات شبه الخطية سنمهد بدراسة أبسط حالات المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى وذات الأمثال الثابتة:

$$a\,u_x + b\,u_y + c\,u = f(x,y)$$

حيث إن a,b,c ثوابت عددية و$a^2+b^2>0$. وهكذا لإيجاد الحل لهذه المعادلة نراعي الحالتين $b=0$ و$b\neq 0$. ففي الحالة الأولى $b=0$ تصبح المعادلة على الشكل الآتي:

$$a\,u_x + c\,u = f(x,y)$$

تبدو هذه المعادلة معادلةً تفاضلية عادية خطية من المرتبة الأولى وذات متحول وحيد، ويمكن إيجاد حلها باستخدام عامل التكميل، ولهذا نكتب المعادلة أولاً على النحو الآتي:

$$u_x + \frac{c}{a}u = \frac{f}{a}$$

وعلى هذا نرى أن عامل التكميل هو:

$$\mu(x) = e^{\int (c/a)dx} = e^{cx/a}$$

كما يمكن كتابة المعادلة التفاضلية عندئذٍ كما يلي:

$$(\mu\,u)_x = \frac{f}{a}\mu$$

وبالمكاملة الآن نحصل على:

$$\mu(x)u(x,y) = \frac{1}{a}\int f(\xi,y)\mu(\xi)d\xi + g(y)$$

$$e^{\frac{c}{a}x}\,u(x,y) = \frac{1}{a}\int f(\xi,y)e^{\frac{c}{a}\xi}d\xi + g(y) \rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{1}{a}\int f(\xi,y)e^{\frac{c}{a}(\xi-x)}d\xi + g(y)e^{-\frac{c}{a}x}$$

حيث إن $g(y)$ تابع كيفي مرتبط بالمتحول y.

أما في الحالة الثانية عندما $b \neq 0$ فنحصل على:

$$a\,u_x + b\,u_y + c\,u = f(x,y)$$

لإيجاد الحل لهذه المعادلة يتضح أنه من الأفضل البحث عن تحويل ما يُمكِّننا من حذف أحد المشتقات الجزئية، فتؤول المعادلة عندئذٍ إلى شكلها المختزل كما عليه الأمر في الحالة السابقة. ولهذا نأخذ بعين الاعتبار التحويل الآتي:

$$w = bx - ay, \qquad y = z$$

نلاحظ مبدئيا أن هذا التحويل قابل للعكس، أي:

$$x = (w + az)/b, \qquad z = y$$

ولنرى الآن كيفية التعبير عن المشتقات الجزئية بدلالة هذا التحويل، ولهذا نفرض $u(x,y) = v(w,z)$ فيكون لدينا:

$$a\,u_x + b\,u_y = a\frac{\partial}{\partial x}v(w,z) + b\frac{\partial}{\partial y}v(w,z) =$$

$$= a\left[\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right] + b\left[\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right] =$$

$$= a[b\,v_w + 0\cdot v_z] + b[-a\,v_w + v_z] = b\,v_z$$

وعليه تصبح المعادلة التفاضلية الجزئية في هذه الحالة على النحو الآتي:

$$b\,v_z + c\,v = f((w+az)/b, z)$$

وبذلك يتضح أن للمعادلة الشكل ذاته للمعادلة التي حصلنا عليه في الحالة الأولى عندما $b = 0$ ولهذا يمكن حلها أيضاً باستخدام عامل التكميل كما رأينا مسبقاً.

مثال (1-4): أوجد الحل العام $u(x,y)$ للمعادلة التفاضلية الجزئية: $3\,u_x - 2\,u_y + u = x$

الحل: لِنكتب المعادلة المعطاة مبدئياً بدلالة الإحداثيات الجديدة:

$$w = bx - ay = -2x - 3y, \qquad z = y$$

ولنفرض أن $u(x,y) = v(w,z)$، فنحصل على:

$$3\,u_x - 2\,u_y = 3[-2\,v_w + 0\cdot v_z] - 2[-3\,v_w + v_z] = -2\,v_z$$

ويتضح أن المعادلة التفاضلية الجزئية تُكتَب عندئذٍ بدلالة $v(w,z)$ على النحو الآتي:

$$-2\frac{\partial v}{\partial z}+v=x=-\frac{w+3z}{2}$$

وبالإصلاح نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{1}{2}v=\frac{1}{4}(w+3z)$$

أي إن عامل التكميل هنا هو:

$$\mu(z)=e^{-\int\frac{1}{2}dz}=e^{-z/2}$$

والآن باستخدام عامل التكميل يمكن إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-z/2}v\right)=\frac{1}{4}(w+3z)\,e^{-z/2}\Rightarrow$$

$$e^{-z/2}v(w,z)=\frac{1}{4}\int(w+3z)e^{-z/2}dz=-\frac{1}{2}(w+6+3z)e^{-z/2}+c(w)$$

$$\Rightarrow v(w,z)=-\frac{1}{2}(w+6+3z)+c(w)e^{z/2}\Rightarrow$$

$$u(x,y)=x-3+c(-2x-3y)e^{y/2}$$

فضلاً عمّا سبق تُعدّ طريقة الخصائص باعتبارها أسلوباً مألوفاً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى وعلى وجه الخصوص شبه الخطية منها، أي المعادلات ذات الشكل:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)=0 \qquad (10)$$

فإذا فرضنا أن التابع $z=u(x,y)$ حلٌ لهذه المعادلة، نرى أن:

$$f(x,y,z)=u(x,y)-z=0$$

يُمثّل سطح الحل أو ما يسمى عادةً أيضاً بالسطح التكاملي. ولكن كما هو معلوم في التحليل الشعاعي بأن تنظيم السطح التكاملي يعطى بدلالة شعاع التدرج:

$$\nabla f=(u_x,u_y,-1)$$

إذا فرضنا الآن أن الشعاع v مُعطى بدلالة مُرَكّباته، $v=(a,b,c)$، فمن خلال الضرب داخلياً مع شعاع التدرج نحصل عندئذٍ على:

$$v\cdot\nabla f=a\,u_x+b\,u_y-c$$

وهذا في النتيجة هو الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية السابقة، وبالتالي فإن:

$$v\cdot\nabla f=0$$

وهذا يعني ضمنياً أن v مُتعامد مع ∇f. وبما أن ∇f نظيم السطح التكاملي، بالتالي فإن $v=(a,b,c)$ هو مماس للسطح، ويُمثّل هندسياً عندئذٍ حقلاً موجهاً يُدعى بالحقل المميز. وبالتالي لإيجاد حل المعادلة المعطاة (10)، يجب البحث عن السطح التكاملي الذي يكون فيه الشعاع $v=(a,b,c)$ واقعاً في المستوي المماسي لهذا السطح. ولتحديد هذا السطح نبدأ أولاً بالبحث عن منحني C ضمن هذا

السطح، بحيث يكون الشعاع $v = (a, b, c)$ مماساً لهذا المنحني في كل نقطة من نقاطه. ومن ثَمّ إذا أخذنا المنحني $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$ المعطى بدلالة الوسيط t، فيتضح أن المنحني C يُحقّق العلاقة:

$$v(t) = \frac{dC(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

لكن بما أن مُركبات الشعاع $v = (a, b, c)$ هي أمثال المعادلة التفاضلية الجزئية (10)؛ فنحصل من خلال المطابقة بينهما على جملة من المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dx}{dt} = a, \qquad \frac{dy}{dt} = b, \qquad \frac{dz}{dt} = c \qquad (11)$$

كما يمكن أن نُعبّر عن هذه المعادلات بدلالة dx, dy, dz وأمثال المعادلة المعطاة (10)، وذلك بالنظر إلى أن: $x = x(t)$ و$y = y(t)$، فنجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{b}{a}$$

وبشكل مشابه نرى أن:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{c}{b}$$

وعليه يمكن إيجاز العلاقات السابقة على النحو:

$$dt = dx/a = dy/b = dz/c$$

تُسمى عادةً المعادلات الثلاثة (11) بالمعادلات المميزة للمعادلة (10)، وبالحل المشترك لهذه المعادلات يمكن عندئذٍ تحديد المنحني التكاملي C للحقل المميز $v = (a, b, c)$ المرتبط بالمعادلة (10)، إلا أنه يمكن الحصول أيضاً على مجموعة من الحلول لجملة المعادلات المميزة وعليه يمكن إيجاد السطح التكاملي الذي يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (10) من خلال تَرابُط كافة المنحنيات التكاملية مع بعضها البعض. وفي النتيجة يتضح هنا أن طَرْح فكرة المعادلات المميزة أدى إلى استبدال المعادلة التفاضلية الجزئية بجملة من المعادلات التفاضلية العادية الموافقة ومن ثم بالاعتماد على حلول جملة المعادلات يمكننا تحديد السطح التكاملي والحصول على حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة. والآن سنتطرّق لمجموعة من الأمثلة لإيضاح كيفية استخدام طريقة الخصائص لحل المعادلات التفاضلية الجزئية شبه الخطية ومن المرتبة الأولى.

مثال (1-5): أوجد الحل العام $u(x, y)$ للمعادلة التفاضلية: $u_x + u_y - u = 0$.

الحل: لدينا $a = 1, b = 1, c = u$ وعلى هذا نرى أن: $dx/1 = dy/1 = du/u$ أي إن:

$$\frac{dy}{dx} = 1, \qquad \frac{du}{dx} = u, \qquad \frac{du}{dy} = u$$

وهنا نلاحظ أن علاقتين فقط مستقلتان عن بعضهما البعض، ولهذا سنُرَكِّز على الثنائيّ الأخيرين، فمن المعادلة الأولى يتضح أن المنحني المميز واقعٌ في المستوي oxy، كما نجد أن الحل لهذه المعادلة هو:

$$y = x + c_1$$

أما المعادلة الثانية فنرى أن حلها هو $u = c_2 e^x$. ولكن نبقى في صَدَد إيجاد الحل العام للمعادلة المعطاة، ولهذا نلاحظ عندئذٍ أن الثابت $u = u(x, y)$ ليس بثابت عددي، إنما هو ثابت مرتبط بالمتحول x، كما أنه في الحقيقة تابع لثابت كيفي، ويمكن النظر إليه في واقع الأمر تابعاً للثابت c_1، بالتّالي لنأخذ $c_2 = G(c_1)$، حيث إن G هو تابع اختياري، وبما أن $c_1 = y - x$، فيمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية عندئذٍ على النحو الآتي:

$$u(x, y) = G(y - x)e^x$$

مثال (1-6): حل معادلة التدفق advection equation $u_t + c\,u_x = 0$ التي تُمثِّل حركة الزحف والانتقال بشكل أفقي، وذلك من أجل c ثابت و $u = u(x, t), |x| < \infty, t > 0$.

الحل: لدينا المعادلات المميزة: $dx = dt/1 = dx/c = du/0$ وعلى هذا نرى أن المعادلات الوسيطية عندئذٍ هي:

$$\frac{dt}{d\tau} = c, \qquad \frac{du}{d\tau} = 0$$

أي إن $x = ct + c_2$, $u = c_1$ وكما رأينا سابقاً أنه يمكن كتابة c_1 باعتباره تابعاً اختيارياً مُرتبطاً بـ c_2، ولهذا نَستبدل c_1 بالمتحول ζ ومن ثَمّ يتضح أن:

$$\zeta = x - ct, \qquad u(x, t) = f(\zeta) = f(x - ct)$$

حيث إن f أيضاً تابع اختياري.

وكما ذكرنا سابقاً أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية يُمثِّل عدداً غير منته من الحلول، ولهذا في حال أردنا تحديد حل خاص بذاته، نحتاج عندئذٍ لمعرفة بعض الشروط الجانبية، وهذا ما نوضحه في الأمثلة الآتية.

مثال (1-7): أوجد الحل العام $u(x, y)$ للمعادلة: $u_x + u_y - u = 0$ الذي يحقق الشرط: $u(x, 0) = 1$.

الحل: وجدنا سابقاً أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة هو $u(x, y) = G(y - x)e^x$، ولكن يَتَضح من الشرط الجانبي أن $u = 1$ وذلك من أجل $y = 0$، وهذا يقتضي بدوره أن:

$$1 = u(x, 0) = G(-x)e^x \Rightarrow G(-x) = e^{-x}$$

والآن بفرض أن $x = -z$ فنجد: $G(z) = e^z$.

وعليه نرى أنه باستخدام الشرط الجانبي يمكن تحديد تابع اختياري $G(y - x)$، وبذلك من خلال التعويض نحصل على:

$$u(x,y) = G(y-x)e^x = e^{y-x}e^x = e^y$$

كما تجدر الإشارة إلى أنه يمكن وضع شروط جانبية على منحنيات أخرى، ففي حال أُعطينا معادلة مستقيم $y = mx + d$ نرى أن $u(x, mx + d) = g(x)$ وفي حال $x = d$، $u(d,y) = g(x)$، إلا أنه يمكن أن تصادفنا شروط جانبية مُعطاة لا تحقق خواص الحل، وعندئذ نجد أنه من المفروض وضع شروط جانبية على منحنيات غير مميزة كي نستطيع الاستفادة منها في تحديد حل بذاته.

مثال (4-8): أوجد مجموعة حلول المعادلة: $3u_x - 2u_y + u = x$ وذلك في الحالتين:

- $u(x,y) = x$
- $u(x,y) = 0$ على طول المستقيم $3y + 2x = 1$.

الحل: قبل البدء باستخدام الشروط الجانبية المعطاة نحدد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية، ولهذا نكتبها بالشكل النموذجي، أي:

$$3u_x - 2u_y = x - u$$

لدينا المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{3} = \frac{dy}{-2} = \frac{du}{x-u}$$

وهكذا نجد أن: $2dx = 3dy$ وهذا يعني أن المنحني المميز هو المستقيم $2x + 3y = c_1$. وكما نرى أن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}(x-u)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى يمكن كتابتها على الشكل:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}x$$

كما يمكن إيجاد حلها بالاستفادة من عامل التكميل:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{3}dx} = e^{x/3}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(u\,e^{x/3}\right) = \frac{1}{3}e^{x/3} \Rightarrow u\,e^{x/3} = \frac{1}{3}\int x\,\xi e^{\xi/3}d\xi + c_2 \Rightarrow$$
$$u\,e^{x/3} = (x-3)e^{x/3} + c_2 \Rightarrow u(x,y) = x - 3 + c_2 e^{-x/3}$$

ويمكن أن نكتب c_2 باعتباره تابعاً كيفياً بدلالة $c_1 = 2x + 3y$، فنحصل على الحل العام:

$$u(x,y) = x - 3 + G(2x + 3y)e^{-x/3}$$

والآن لنأخذ بعين الاعتبار الشروط الجانبية المعطاة بغية تحديد حل خاص بذاته من خلال اختيار قيمة معينة للثابت G.

ففي حال $u(x,y) = x$ ينضح أن $u = x$ على طول المستقيم $y = x$. ومن ثمّ بالتعويض في معادلة الحل العام نجد أن:

$$x = x - 3 + G(5x)e^{-x/3}$$

أي إن:

$$G(5x) = 3e^{x/3}$$

لنفرض الآن أن $z = 5x$، فيكون لدينا: $G(z) = 3e^{z/15}$

وعليه نحصل على الحل الخاص الذي يحقق الشرط الجانبي المعطى.

$$u(x,y) = x - 3 + G(2x + 3y)\left(3e^{-x/3}\right) =$$
$$= x - 3 + 3e^{(2x+3y)/15}e^{-x/3} = x - 3 + 3e^{(y-x)/5}$$

أما في حال $u(x,y) = 0$ على طول المستقيم $3y + 2x = 1$، نرى أن:

$$0 = x - 3 + G(1)e^{-x/3}$$

وهكذا نلاحظ أن G هو ثابت ذو قيمة وحيدة وليس بتابع لأحد المتغيرات، ولهذا ليس من الضروري البحث عن حل لتحديد $G(x)$.

4-1 المعادلات التفاضلية الجزئية من مراتب عليا لتابع بمتحولين مستقلين ذات الأمثال الثابتة

Higher order partial differential equations

تؤول عملية النمذجة للعديد من الظواهر الفيزيائية في حقل سريان الموائع الكهربائية، الميكانيك، والبصريات، وسريان الحرارة، إلى معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية أو مراتب عليا، حيث ينضح غالباً أن تَعاظُم التَعْقيد للتعبير عن الحالة التي هي قيد الدراسة يؤول إلى معادلات تفاضلية جزئية من مراتب عليا، وكما في المعادلات التفاضلية العادية تُسمى المعادلة التفاضلية الجزئية خطية إذا كانت من الدرجة الأولى في التابع المجهول ومشتقاته الجزئية، حيث تُكتب المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة n بالشكل:

$$\left(a_0\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} + a_2\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \cdots + a_n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)$$
$$+ \left(b_0\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + b_1\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-2}\partial y} + \cdots + b_{n-1}\frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{n-1}}\right) + \cdots$$
$$+ \left(m_0\frac{\partial u}{\partial x} + m_1\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \cdots + n\,u = f(x,y)$$

كما أن الأمثال $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, m_0, m_1$ جميعاً ثوابت عددية. ولهذا نميز هنا نوعين من المعادلات أولهما الخطية المتجانسة وثانيهما الخطية غير المتجانسة. فعلى سبيل المثال:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

هي معادلة تفاضلية جزئية خطية غير متجانسة مشتقاتها من المرتبة نفسها وجميع أمثالها ثوابت عددية. سوف نركز في دراستنا على المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من مراتب عليا ذات الأمثال الثابتة، حيث تصادفنا في معظم الأحيان المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية لتابع بمتحولين يُعطى شكلها العام على النحو الآتي:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = G \qquad (12)$$

كما أن A, B, C, D, E, F, G توابع مرتبطة بالمتحولين x و y. ففي حال انعدام الطرف الأيمن من هذه المعادلة (12)، بمعنى $G = 0$، نصبح المعادلة عندئذٍ متجانسة. كما أن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة تَمتلك خاصة مميزة ومهمة جداً تُسمّى بمبدأ التَراكُب principle of superposition والمقصود فيه أنه إذا كان u و v حلّين لمعادلة من هذا النوع في الساحة R، فإن: $a\,u + b\,v$، حيث إن a و b ثابتان عدديان، هو أيضاً حل للمعادلة في الساحة R. ويمكننا التأكد من صحة ذلك بالتعويض عن u و v في المعادلة السابقة (12) فنحصل على:

$$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F\,u = 0$$
$$A\,v_{xx} + B\,v_{xy} + C\,v_{yy} + D\,v_x + E\,v_y + F\,v = 0$$

ومن ثَمّ بالضرب بـ a و b والجمع نحصل على المطلوب.

ومن جهة ثانية توجد كذلك خاصة مهمة أخرى للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية، سنبين ذلك مبدئياً في حال لدينا تابع بمتحولين $u(x,y)$ في المعادلة (12)، مع الأخذ بعين الاعتبار بأنه يمكن تعميم هذه الخاصة. ولهذا نُعرّف المميّز للمعادلة (12) على النحو $B^2 - 4AC$، وعليه نُميّز الحالات الثلاثة الآتية:

- إذا كان $B^2 - 4AC > 0$، تُسمّى المعادلة (12) عندئذٍ قطعية زائدية hyperbolic.
- أما من أجل $B^2 - 4AC = 0$، نقول إن المعادلة (12) قطعية مكافئة parabolic.
- وفي حال $B^2 - 4AC < 0$، فندعى المعادلة (12) حينئذٍ قطعية ناقصية elliptic.

وهكذا سندرس لاحقاً معادلة بسيطة من كل نمط، حيث إننا سنعتمد لحل معادلة قطعية ناقصية $u_{xx} + u_{yy} = 0$ والمعروفة أيضاً بمعادلة لابلاس، وسنتخذ معادلة انتشار الحرارة ذات البعد الواحد $u_t = a^2 u_{xx}$ نموذجاً للمعادلة القطعية المكافئة، وسنتناول بالإضافة إلى ذلك المعادلة الموجية $u_{tt} = b^2 u_{xx}$ باعتباره معادلة قطعية زائدية.

تعدّ طريقة فصل المتحولات من أبرز الطرق التحليلية المألوفة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية، وسنوضح كيفية استخدام هذه الطريقة لحل هذا النوع من المعادلات من خلال دراسة بعض الأمثلة النموذجية.

1-4-1 طريقة فصل المتغيرات Method of separation of variables

في هذه الطريقة نفرض أن الحل المطلوب هو جداء لتابعين، بمعنى $u(x,y) = X(x)Y(y)$، ومن ثم نعوض عن $u(x,y)$ ومشتقاته في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، فينتج لدينا معادلة من الشكل $f_1(X,X',\cdots) = f_2(Y,Y',\cdots)$ قابلة للفصل بالنظر للمتغيرات X و Y. وبما أن التابع $f_1(X,X',\cdots)$ مرتبط بالمتحول X، والتابع $f_2(Y,Y',\cdots)$ مرتبط بالمتحول Y فقط، فيمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي: $f_1(X,X',\cdots) = f_2(Y,Y',\cdots) = k$

وفيما يلي بعض الأمثلة التي تبين كيفية استخدام طريقة فصل المتحولات في حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية البسيطة:

مثال (9-1): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u$$

وذلك في حال أن $u(x,0) = 6e^{-3x}$.

الحل: نلاحظ أن u تابع لمتحولين x و y، إذا فرضنا $u = XT$ حلاً للمعادلة المعطاة، حيث X مرتبط بالمتحول x فقط و T مرتبط بالمتحول t، فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'T, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'$$

لنعوض الآن في المعادلة المعطاة، فيكون لدينا:

$$X'T = 2XT' + XT = (2T' + T)X$$

وبفصل المتحولات نجد أن:

$$\frac{X'}{X} = \frac{2T' + T}{T}$$

فنرى أن الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة تابع للمتحول x، كما أن الطرف الأيمن هو تابع للمتحول t. والآن بما أن x و t متحولان مستقلان، فإن x مختلف عن t، وعليه فإن الطرفين الأيسر والأيمن يختلفان عن بعضهما بمقدار ثابت ما k. وبالتالي فإن المعادلة الناتجة صحيحة في حال كان كلا طرفي المعادلة مساوياً المقدار الثابت نفسه k، بمعنى أن:

$$\frac{X'}{X} = k \Rightarrow \ln X = k\,x + \ln c_1 \Rightarrow \ln\left(\frac{X}{c_1}\right) = k\,x \Rightarrow X = c_1 e^{kx}$$

كما أن:

$$\frac{2T' + T}{T} = k \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{1}{2}(k-1) \Rightarrow \ln T = \frac{1}{2}(k-1)t + \ln c_2 \Rightarrow$$
$$T = c_2 e^{(k-1)t/2}$$

حيث إن c_1 و c_2 ثابتان اختياريان. وعليه نستنتج أن الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$u(x,t) = c_1 e^{kx} \cdot c_2 e^{(k-1)t/2}$$

لكن لدينا: $u(x,0) = 6e^{-3x}$، وبالتالي فإن:

$$c_1 c_2 e^{kx} = 6e^{-3x} \Rightarrow c_1 c_2 = 6 \quad \wedge \quad k = -3$$

إذاً الحل الوحيد للمعادلة المعطاة هو:

$$u = 6e^{-3x} \cdot e^{-2t} \Rightarrow u = 6e^{-(3x+2t)}$$

مثال (1-10): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\frac{\partial u}{\partial t}$$

وذلك في حال أن: $u(0,y) = 8e^{-3y}$.

الحل: إذا فرضنا أن $u = XY$ حلٌّ للمعادلة المعطاة، حيث X مرتبط بالمتحول x فقط و Y مرتبط بالمتحول y فقط، فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX}{dx}Y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = X\frac{dY}{dy}$$

لنعوض الآن في المعادلة المعادلة المعطاة، فيكون لدينا:

$$\frac{dX}{dx}Y = 4X\frac{dY}{dy} \Rightarrow \frac{1}{X}\cdot\frac{dX}{dx} = \frac{4}{Y}\cdot\frac{dY}{dy} = k$$

إذن:

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{dX}{dx} = k \Rightarrow \frac{dX}{X} = k\,dx \Rightarrow \ln|X| = k\,x + \ln|c_1| \Rightarrow X = c_1 e^{kx}$$

كما أن:

$$\frac{4}{Y}\cdot\frac{dY}{dy}=k \Rightarrow \frac{dY}{dy}=\frac{k}{4}dy \Rightarrow \ln|Y|=\frac{k}{4}y+\ln|c_2| \Rightarrow Y=c_2e^{ky/4}$$

وعليه نستنتج أن الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$u=c_1c_2e^{k(x+y/4)}$$

ولكن لدينا $u(0,y)=8e^{-3y}$، وبالتالي فمن أجل $x=0$ نحصل على:

$$8e^{-3y}=c_1c_2e^{ky/4}$$

بالمقارنة نستنتج أن:

$$c_1c_2=8, \qquad k/4=-3 \Rightarrow k=-12$$

إذاً الحل الوحيد للمعادلة المعطاة هو:

$$u=8e^{-(12x+3y)}$$

مثال (11-1): حل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial t}$$

الحل: إذا فرضنا $u=XY$ حلاً للمعادلة المعطاة، حيث X مرتبط بالمتحول x فقط و T مرتبط بالمتحول t فقط، فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=XT', \qquad \frac{\partial^2u}{\partial t^2}=XT'', \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=X'T$$

نعوض الآن في المعادلة المعادلة المعطاة، فيكون لدينا:

$$XT''+X'T=2XT'$$

الآن بقسمة طرفي المعادلة على XT، فنحصل على:

$$\frac{T''}{T}+\frac{X'}{X}=2\frac{T'}{T} \Rightarrow \frac{T''-2T'}{T}=-\frac{X'}{X}=k$$

وعليه يمكننا من العلاقة السابقة كتابة المعادلتين التفاضليتين:

$$T''-2T'-kT=0, \qquad X'=-kX$$

لحل المعادلة $T''-2T'-kT=0$، نكتب المعادلة المميزة:

$$\lambda^2-2\lambda-k=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{1+k}$$

إذن:

$$T=Ae^{(1+\sqrt{1+k})t}+Be^{(1-\sqrt{1+k})t}$$

كما أن حل المعادلة $X'=-kX$ هو: $X=ce^{-kx}$. وبذلك يكون حل للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة:

$$u=ce^{-kx}\left(Ae^{(1+\sqrt{1+k})t}+Be^{(1-\sqrt{1+k})t}\right)$$

مثال (12-1): حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

الحل: إذا فرضنا $u = XY$ حلاً للمعادلة المعطاة، حيث X مرتبط بالمتحول x فقط و Y مرتبط بالمتحول y فقط، فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

لنعوض في المعادلة المعطاة، فيكون لدينا:

$$X''Y + 4XY'' = 0$$

الآن نفصل المتحولات والإصلاح نحصل على:

$$\frac{X''}{X} = -4\frac{Y''}{Y}$$

وبما أن كل طرف من طرفي المعادلة الناتجة هو مقدار ثابت، يمكن أن نكتب عندئذٍ:

$$X'' - k^2 X = 0, \qquad Y'' + \frac{k^2}{4}Y = 0$$

وعليه بحل هاتين المعادلتين التفاضليتين نجد:

$$X = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, \qquad Y = A\cos\frac{ky}{2} + B\sin\frac{ky}{2}$$

أي إن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$u = \sum_k XY = \sum_k (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx})\left(A\cos\frac{ky}{2} + B\sin\frac{ky}{2}\right)$$

حيث وضعنا إشارة المجموع للإشارة إلى أن الحل العام هو مجموع كافة الحلول الممكنة لـ X و Y التي تحددها قيم k، ولهذا فإن المعادلة السابقة تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة عندما k^2 موجبة. كما يتضح لنا بأنه في حال أن k^2 سالبة، فإن قيمة X تعطى عندئذٍ بدلالة النسب المثلثية الجيب وجيب التمام وتعطى Y بدلالة تابع أسي. أما عندما $k^2 = 0$ فإن $X'' = 0$ و $Y'' = 0$، وعليه نجد:

$$X = ax + b, \qquad Y = cy + d$$

وبذلك يتضح لنا أنه يوجد ثلاثة حلول للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة والحل العام هو مجموع هذه الحلول.

مثال (13-1): تُعطى معادلة التوصيل الحراري على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > 0$$

الحل: لإيجاد الحل هنا نفرض $u = XY$ حلاً للمعادلة المعطاة، حيث X مرتبط بالمتحول x فقط و T مرتبط بالمتحول t فقط، فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'T, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'$$

لنعوض الآن في معادلة التوصيل الحراري المعطاة، فيكون لدينا:

$$X''T = \frac{1}{k}XT'$$

الآن بفصل المتحولات والإصلاح نحصل على:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T}$$

وبذلك يتّضح أن الطرف الأيسر يتضمن توابع مرتبطة بالمتحول x فقط، كما أن الطرف الأيمن يحتوي على توابع مرتبطة بالمتحول t فقط، وعليه فإن أي تغيّر بقيمة المتحول t لا تترك أي تأثير في قيمة المقدار في الطرف الأيمن، فهو إذن مقدار ثابت، وهذا نستنتج بأن $T(t)$ تابع يمكن كتابته على الشكل:

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = K$$

حيث إن K هو ثابت لا نزال إشارته غير معروفة. وبطريقة مشابهة نرى أن أي تغيّر بقيمة المتحول x لا تؤثر في الطرف الأيمن. وهكذا فمن المفروض عندئذ أن يبقى الطرف الأيسر مقداراً ثابتاً، أي إن:

$$\frac{X''}{X} = K$$

وعلى هذا نستنتج أنه باستخدام الحل المفترض $u = XY$ تؤول مسألة حل معادلة تفاضلية جزئية إلى حل معادلتين تفاضليتين عاديتين. هاتان المعادلتان يمكن حلهما بالطريقة نفسها الموضحة أعلاه، حيث إننا نسنا الآن بصدد حلهما مرة أخرى، ولكن تجدر الإشارة إلى أن الحل مرتبط بالثابت K وذلك على وجه التحديد فيما إذا كان الثابت موجباً أم سالباً.

لنفرض أن $u(x,t) = X(x)T(t)$ حل للمعادلة الموجية المعطاة على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

وباتباع الطريقة نفسها المذكورة أعلاه، يمكن أن نُعبر عن المعادلتين التفاضليتين بدلالة $X(x)$ و $T(t)$ على التوالي. بما أن $u(x,t) = X(x)T(t)$، عندئذ بالاشتقاق جزئياً نجد أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

بالتعويض في المعادلة الموجية المعطاة نحصل على:

$$X''T = \frac{1}{c^2}XT''$$

بفصل المتحولات والإصلاح نجد أنّ:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

وأخيراً بمساواة طرفي المعادلة السابقة للقيمة الثابتة نفسها K، يمكننا عندئذٍ كتابة المعادلتين التفاضليتين المطلوبتين على النحو الآتي:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = K, \qquad \frac{X''}{X} = K$$

كما يمكن أن نكتب:

$$\frac{d^2T}{dt^2} - Kc^2T = 0, \qquad \frac{d^2X}{dx^2} - KX = 0$$

كما نذكر مرةً أخرى بأن حل هاتين المعادلتين سيتم بالطريقة نفسها التي أوردناه سابقاً مع الأخذ بعين الاعتبار على وجه التحديد إشارة K.

مثال (1-14): حل معادلة بواسون المعطاة على الشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

الحل: نتبع طريقة فصل المتحولات للحصول على معادلتين تفاضليتين عاديتين، يمكن أن نُعبر عنهما بدلالة $X(x)$ و $Y(y)$ على التوالي.

لنفرض أن $u(x,t) = X(x)Y(y)$ حلٌ للمعادلة المعطاة، فيكون عندئذٍ لدينا:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

وعليه فإن معادلة بواسون المعطاة تكتب كما يلي:

$$X''Y + XY'' = 0$$

أي إن:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

والآن بمساواة طرفي المعادلة السابقة مع القيمة الثابتة K، نحصل على:

$$\frac{X''}{X} = K, \qquad \frac{Y''}{Y} = -K$$

كما يمكن أن نكتب:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - KX = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} + KY = 0$$

وهنا نلاحظ الاختلاف بالإشارة الجبرية الذي يبدو واضحاً في المعادلتين، ولكن في النهاية إشارة الثابت K ستحدد طبيعة الحل لكلٍ من هاتين المعادلتين.

مثال (1-15): حلّ المعادلة الموجية أحادية البعد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; ; \quad 0 < x < 2, \qquad t > 0$$

في كل نقطة من نقاط المنطقة المحدودة $0 < x < 2,\ t > 0$، التي تحقق الشرطين الحديين: $u(0,t) = 0$، $u(2,t) = 0$، والشرطين الابتدائيين:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad u(x,0) = 6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x$$

الحل: لنفرض أن $u(x,t) = X(x)T(t)$ حل للمعادلة الموجية المعطاة، عندئذٍ بتطبيق طريقة فصل المتحولات نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$\frac{T''}{16T} = K, \qquad \frac{X''}{X} = K$$

والآن لحلّ هاتين المعادلتين، نختار إشارة مناسبة للثابت K، لنأخذ K سالباً أولاً، وليكن $K = -\lambda^2$ فرضاً، فيكون عندئذٍ لدينا حلول جيبية مرتبطة بالمتحولين X و T.

ففي حال $X'' = -\lambda^2 X$ نرى أن: $X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ وبشكل مشابه للمعادلة الثانية $T'' = -16\lambda^2 T$ نجد: $T = C\cos 4\lambda t + D\sin 4\lambda t$ أي إن الحل العام $u(x,t) = X(x)T(t)$ يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$u(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(C\cos 4\lambda t + D\sin 4\lambda t)$$

بالإضافة إلى ذلك، يمكن أن نحدد الثوابت A, B, C, D بالاعتماد على الشروط الابتدائية والحدية المعطاة. فمن أجل $u(0,t) = 0$ يتّضح أن:

$$A(C\cos 4\lambda t + D\sin 4\lambda t) = 0$$

وهذا بدوره يقتضي أن $A = 0$. أما في حال $u(2,t) = 0$ فنجد:

$$B\sin 2\lambda\,(C\cos 4\lambda t + D\sin 4\lambda t) = 0$$

ومن هذا يتضح أنه من المفروض للحصول على حل نظامي أن يكون $\sin 2\lambda = 0$، أي إن $\lambda = n\pi/2$ حيث n عدد صحيح. والآن بالنظر إلى ماسبق، يمكن أن نكتب:

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)(E\cos 2n\pi t + D\sin 2n\pi t)$$

حيث إن $E = BC$ و $F = BD$. كما أنه يمكن تحديد قيمة F باستخدام الشرط الابتدائي

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2$$

وذلك باشتقاق $u(x,t)$ جزئياً بالنسبة إلى المتحول t فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)(-2n\pi E \sin 2n\pi t + 2n\pi F \cos 2n\pi t)$$

وهكذا في حال $t = 0$ نرى أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) 2n\pi F = 0$$

ومن هذا نستنتج أن $F = 0$. ومن ثمّ بالنظر إلى الشرط الابتدائي الآخر:

$$u(x,0) = 6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x$$

يتضح لنا الحل $u(x,t)$ الذي يُكتب عندئذٍ على الشكل:

$$u(x,t) = E \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos(2n\pi t)$$

ولكن الشرط $u(x,0) = 6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x$ مرفوض، ومن أجل $t = 0$، يكون الحل:

$$u(x,0) = E \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

وهذا غير منطقي، لأنه لايوجد عندئذٍ عدد صحيح وحيد n يمكن أن يحقق الشرط:

$$u(x,0) = 6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x$$

ونلاحظ أن $u(x,t)$ يبقى مقبولاً من أجل أي عدد صحيح موجب n، وعلى هذا يمكن كتابة حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة مجموعاً لعدة حلول، بمعنى:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos(2n\pi t)$$

ومنه نجد:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

وفي النتيجة يبدو الحل هو سلسلة فوريه تماماً. بالإضافة إلى ذلك ينبغي أن يكون الحل الناتج منسجماً مع الشروط الابتدائية المعطاة، ولمراعاة ذلك لا نحتاج كافة حدود سلسلة فوريه غير المنتهية، ولهذا يكفي حدان على الأقل: فعلى سبيل المثال يُمكن تحديد أولهما من خلال $n = 2$ وذلك عندما $E_2 = 6$ وثانيهما بدلالة $n = 8$ وذلك عندما $E_8 = -3$. وبناءً على ذلك يكون الحل بشكله النهائي هو:

$$u(x,t) = 6\sin \pi x \cos 4\pi t - 3\sin 4\pi x \cos 16\pi t$$

وهكذا حصلنا على الحل من خلال إجراء بعض خطوات المنطقية، وعلى هذا يمكن حل تطبيقات أخرى مشابهة باتباع الأسلوب نفسه.

2-4-1 استخدام سلاسل فوريه Use of Fourier series

سنبقى نعتمد طريقة فصل المتحولات لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، ولكن سنبيّن على وجه الخصوص كيفية ملاءمة هذه الطريقة مع شروط حدية معينة. ولهذا نستخدم سلاسل فوريه في حلّ بعض المعادلات التفاضليّة الجزئيّة بوجود شروط حديّة، كما سنرى لاحقاً أنّ الحل الناتج عندئذٍ على شكل سلسلة غير منتهية، وهذا ما نوضحه من خلال حل معادلة لابلاس ثنائية البعد، مع الأخذ بعين الاعتبار أن هناك الكثير من الأمثلة التطبيقية المشابهة تؤول إلى معادلات تفاضلية جزئية مهمة يمكن معالجتها بالطريقة نفسها، إلا أن سلاسل فوريه غير المنتهية تقتضي بالضرورة أيضاً وجود شروط ابتدائية محددة كي نستفيد منها في حلّ المعادلات الجزئية، وذلك كما هو عليه الحال عند حل معادلة التوصيل الحراري أو المعادلة الموجية.

فرضنا سابقاً أن حل معادلة لابلاس على شكل جداء $u(x,y) = X(x)Y(y)$، فنجد باستخدام طريقة فصل المتحولات أن الحل يؤول لحل معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$\frac{Y''}{Y} = K, \qquad \frac{X''}{X} = K$$

ومن المفروض عندئذٍ تحديد إشارة الثابت K، ولهذا لا بد من وجود شروط حدية مناسبة تُمكننا من ذلك. سنوضح ذلك في الأمثلة الآتية:

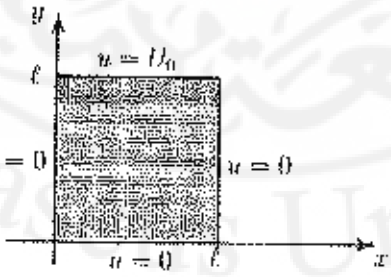
مثال (1-16): حل معادلة لابلاس ثنائية البعد المعطاة على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

في كل نقطة من نقاط المربع المحدد بـ $0 \le x \le \ell,\ 0 \le y \le \ell$ التي تحقق الشروط الحدية

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,y) = 0, \qquad u(\ell,y) = 0, \qquad u(x,\ell) = U_0$$

حيث إن U_0 هو ثابت عددي، وكما هو مبين في بالشكل:



الشكل (1-8): مربع طول ضلعه ℓ.

الحل: لنحدد مبدئياً بإشارة الثابت K، فإذا اخترنا الثابت موجباً، وليكن $K = \lambda^2$، عندئذ نرى أن المعادلة التفاضلية العادية المرتبطة بالمتحول X نكتب على النحو الآتي:

$$X'' = \lambda^2 X$$

ومن ثَمّ يكون حلها العام:

$$X = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

بينما تأخذ المعادلة التفاضلية العادية المرتبطة بالمتحول Y الشكل:

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0$$

وحلها العام هو:

$$Y = C\cos\lambda y + D\sin\lambda y$$

أما في حال أن الثابت K سالباً، أي $K = -\lambda^2$، فنجد عندئذٍ أن الحل المرتبط بالمتحول x هو تابع مثلثي، والحل المرتبط بالمتحول y يكون على شكل تابع أُسي. وعلى هذا يتضح وجود إمكانيتين فقط لحل معادلة لابلاس باستخدام طريقة فصل المتحولات، لذلك نأخذ بعين الاعتبار الشروط الحدية المعطاة ومن ثَمّ الإقرار أيهما ملائم لهذه الشروط. وهكذا بما أن: $u(0,y) = u(\ell,y)$، فنجد أن الحل المرتبط بالمتحول x هو تابعٌ دَوْرِيٌّ والحل المرتبط بالمتحول y يكون تابعاً غير دَوْرِيّ. وهذا يقتضي بالضرورة أن يكون الحل المرتبط بالمتحول x دَوْرِيّاً والحل المرتبط بالمتحول y غير دَوْرِيّ. ولهذا نختار $K = -\lambda^2$، وبالتالي فإن:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$
$$Y(y) = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}$$

وهكذا يكون عندئذٍ الحل العام المناسب لمعادلة لابلاس المعطاة هو:

$$u(x,y) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y})$$

لنعوض الشروط الابتدائية في الحل العام، فمن أجل $u(0,y) = 0$ نجد أنّ: $A = 0$. وفي حال $u(\ell,y) = 0$ يكون $\sin\lambda\ell = 0$، أي إن: $\lambda = n\pi/\ell$، حيث إن n عدد صحيح موجب $n = 1,2,3,4,\cdots$، كما أن المعادلة تُحقّقة من أجل $n = 0$، إلا أن الحل الناتج يبقى غير نظامي $u = 0$، ومن ثَمّ نرى من أجل $u(x,0) = 0$ أن $C + D = 0$، وبالتالي $D = -C$. وعلى هذا يمكن أن نكتب الحل عندئذٍ على النحو الآتي:

$$u(x,y) = BC\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left(e^{\frac{n\pi y}{\ell}} - e^{-\frac{n\pi y}{\ell}}\right)$$

أي إن:

$$u(x,y) = E\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right)$$

حيث إن $E = 2BC$. ولكن يوجد شرط حدّي آخر يمكن أن نعوض عنه في الحل الناتج لمعرفة قيمة الثابت E ومن ثَمّ تحديد العدد الصحيح n، وبذلك نجد أن:

$$u(x,\ell) = E\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\sinh(n\pi)$$

وهذا يتناقض مع الشرط المعطى لدينا: $u(x,\ell) = U_0$ حيث إن U_0 هو ثابت عددي، لذا يجب مراعاة جميع قيم n الموجبة ومن ثمّ يمكن الحصول على الحل من حساب مجموع كافة حلول المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة. ولهذا نكتب:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right)$$

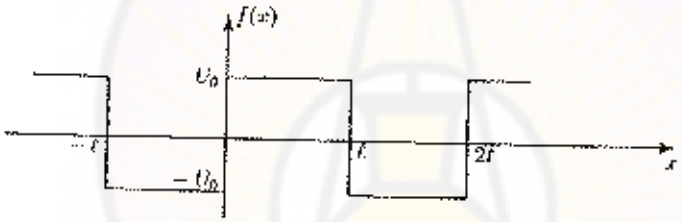
والآن بإعادة النظر إلى الشرط الحدي الأخير، فنحصل على:

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\sinh(n\pi), \qquad 0 < x < \ell \Rightarrow U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

أي إنه لدينا سلسلة فوريه بالصيغة المثلثية للتابع:

$$f(x) = U_0, \qquad 0 < x < \ell$$

وعلى هذا يُمكن من حيث المبدأ تجزئة المجال في سلسلة فوريه إلى قسمين كما هو مُبيّن أدناه:



الشكل (1-9): مسألة سلسلة فوريه.

ومن ثمّ نستطيع التعبير عن التابع $f(x)$ بدلالة تابع زوجي دَوْرِيّ دورته 2ℓ.

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & : \quad 0 < x < \ell \\ -U_0 & : \quad -\ell < x < 0 \end{cases}$$

أي إن: $f(x+\ell) = f(x)$.

ويمكننا الآن تحديد الأمثال b_n بالاعتماد على نظرية سلاسل فوريه المألوفة، فنرى أن:

$$b_n = E_n \sinh(n\pi) = \frac{4U_0}{2\ell}\int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$E_n \sinh(n\pi) = \frac{4U_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

أي إن:

$$E_n = \begin{cases} \dfrac{4U_0}{n\pi \sinh n\pi} & ; \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & ; \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

وأخيراً بالتعويض عن قيمة E_n في الحل العام، فينتج لدينا حل المسألة المعطاة على شكل سلسلة غير منتهية:

$$u(x,y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/\ell) \sinh(n\pi y/\ell)}{n \sinh n\pi}$$

حيث إن n عدد فردي. وفي النتيجة يتضح لنا أن سلسلة فوريه تحتوي على التوافقيات الفردية فقط، وذلك لكون التابع $f(x)$ يُمثّل موجة مربعة المقطع ذات توافق نصف دوري، كما هو واضح من الشكل أعلاه.

مثال (17-1): لنأخذ بعين الاعتبار مسألة القيم الحدية المعطاة على شكل معادلة التوصيل الحراري أحادية البعد التي تُعبّر عن تَبَدّل درجة الحرارة u في قضيب معدني طوله L مع العلم مسبقاً أن درجة الحرارة في طرفيه معدومة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u = u(x,t), \ t > 0, \ 0 < x < L$$

والمطلوب أوجد u عندما $u(x,0) = f(x)$ و $u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0, \ t \geq 0$ حيث إن $f(x) = 100 \sin \frac{\pi}{60} x$.

الحل: نستخدم سلاسل فوريه لتحديد الحل $u = u(x,t)$، ولهذا نفرض مبدئياً أنّ:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

وعندئذٍ نجد أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = FG', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

ومن ثَمّ بالتعويض في معادلة التوصيل الحراري المعطاة نحصل على:

$$FG' = c^2 F''G \implies \frac{G'}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

إذا عددنا الثابت k سالباً، بمعنى $k = -\lambda^2$، فينتج لدينا معادلتان تفاضليتان عاديتان:

$$G' + c^2\lambda^2 G = 0, \qquad F'' + \lambda^2 F = 0$$

وبالنظر إلى الشروط الحدية المعطاة، فيتضح أن:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \qquad u(L,t) = F(L)G(t) = 0, \qquad t \geq 0$$

أي أن $F(0) = 0, \ F(L) = 0$، وعليه فإن الحل العام للمعادلة المرتبطة بـ F عندئذٍ هو:

$$F = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

حيث إن $F(0) = 0$ عندما $A = 0$، كما أن $F(L) = 0$ في حال $B\sin\lambda L = 0$، إلا أن $\sin\lambda L = 0$، $(B \neq 0)$ من أجل:

$$\lambda L = n\pi, \qquad \lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}\,; \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

بالتالي فإن:

$$F = F_n = \sin\lambda_n x = \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

وعلى هذا يمكن أن نكتب المعادلة المرتبطة بـ G على النحو:

$$G' + \lambda_n G = 0\,; \qquad \lambda_n = \frac{c^2 n\pi}{L}$$

التي حلها العام هو:

$$G(t) = G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}\,; \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

وفي النتيجة فإن الحل العام للمعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L$$

التي تحقق الشروط الحدية $u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ t \geq 0$ هو:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}\,\sin\frac{n\pi}{L}x\,; \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

وهذه التوابع تُسمى عادةً بالتوابع الذاتية **eigenfunctions** كما يُشار إلى القيم $\lambda_n = \frac{c\pi n}{L}$ بأنها قيم ذاتية **eigenvalues**.

وهكذا يمكن الحصول على حل المسألة المطروحة من خلال حساب مجموع كافة حلول المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، أي أن:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 t}\,\sin\frac{n\pi}{L}x$$

ولكن لدينا الشرط الحدي:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x)$$

بالتالي فإنّ:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

كما نعلم أن درجة الحرارة الابتدائية هي $f(x) = 100\,\sin\frac{\pi}{80}x$، وعليه نرى أن:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x) = 100\,\sin\frac{n}{80}x$$

إذاً: $\lambda_n = \lambda_1 = \frac{c\pi}{80}$، وبذلك يتضح أن الحل هو:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=B_1e^{-\lambda_1^2t}\sin\frac{\pi}{80}x=100e^{-\lambda_1^2t}\sin\frac{\pi}{80}x$$

3-4-1 الغشاء الدائري ومعادلة بيسل Circular membrane and Bessel's equation

درسنا فيما سبق المعادلة الموجية أحادية البعد وحصلنا من خلال تطبيق طريقة فصل المتحولات لحل هذه المعادلة على معادلتين تفاضليتين عاديتين، تُمثّل كل منهما حركة اهتزازية توافقية بسيطة، كما رأينا عندئذٍ أن حلول المعادلات الناتجة سهلة وواضحة نسبياً. إلا أنه من الممكن الحصول أيضاً على معادلات أكثر تعقيداً وقد تأخذ شكلاً آخرَ مغايراً عن تلك المعادلات الناتجة، ويبدو ذلك واضحاً على وجه الخصوص عندما نستخدم نظام إحداثيات غيرَ الديكارتي. ولهذا يبقى من الضروري اختيار نظام إحداثي مناسب بغية جعل المنهج في شكله النهائي منسجماً، ويمكن الاعتماد عليه في تبسيط المعادلات الناتجة ومن ثَمّ حلها. فعلى سبيل المثال تُعدّ الإحداثيات الأسطوانية هي الأنسب لدراسة انسياب الحرارة ضمن أنبوب أسطواني الشكل، وذلك من خلال التعبير عن معادلة انتشار الحرارة بدلالة الإحداثيات الأسطوانية. كما يُفضّل استعمال الإحداثيات الكروية لمعالجة اهتزازات كُرة ما، وذلك من خلال كتابة المعادلة الموجية بواسطة الإحداثيات الكُروية، وتُعْطَى الأوْلَوِيّة لمعالجة حركة اهتزازية لغشاء طبلي دائري هو صِيَاغة معادلة موجية منسوبة لمستوٍ إحداثي قطبي. وهكذا نرى في الحالات الثلاثة المذكورة يمكن استخدام مؤثر لابلاس ∇^2 للتعبير عن الحركة بدلالة النظام الإحداثي المُفضّل.

لقد رأينا أن المعادلة الموجية ثنائية البعد تُمثّل الحركة الاهتزازية لغشاء طبلي وتُعْطَى في الإحداثيات الديكارتية المتعامدة على النحو الآتي:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)$$

كما يمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة مؤثر لابلاس كما يلي:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2u$$

فمن خلال المقارنة بين المعادلتين السابقتين يتضح الشكل العام لمؤثر لابلاس ∇^2 في نظام الإحداثيات الديكارتية المتعامدة. وعليه يمكن أن نعبر عن ∇^2 بدلالة الإحداثيات القطبية $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، على النحو:

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$

ومن ثمّ نأخذ المعادلة الموجية في مستوي الإحداثيات القطبية الشكلي التالي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

حيث إن u تابع مُعطى بدلالة إحداثيّ الموضع r و θ بالإضافة إلى الزمن t، بمعنى $u = u(r,\theta,t)$. إلاّ أن الغشاء الدائري متناظر محورياً ولهذا يجب البحث عن حلول ملائمة لشروط حدية معينة تأخذ حالة التناظر بعين الاعتبار. إذا فرضنا أن مقدار إزاحة الغشاء محدود، فإن حل المعادلة الموجية لغشاء دائري نصف قطره R يُعطَى عندئذٍ بدلالة تابع $u = u(r,t)$، أي إنه غير مرتبط بالزاوية القطبية θ وذلك نظراً إلى كون الغشاء متناظراً محورياً، وهذا يعني بدوره أن $u(r,t) = 0$ وذلك من أجل جميع قيم $t \geq 0$. لنفرض أيضاً أن الشرط الابتدائي الذي يُمثل مقدار الإزاحة الابتدائية هو $u(r,0) = f(r)$ والشرط الابتدائي الذي يعبر عن مقدار السرعة الابتدائية هو $u_t(r,0) = g(r)$، حيث إن كُلاً من $f(r)$ و $g(r)$ مَعلوم. وعلى هذا تأخذ المعادلة الموجية للغشاء الدائري عندئذٍ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

لنفرض حلها $u(r,t) = F(r)G(t)$، ومن ثمّ بالتعويض في المعادلة السابقة يتضح أن:

$$FG'' = c^2\left(F''G+\frac{1}{r}F'G\right)$$

والآن بفصل المتحولات، نرى أن:

$$\frac{G''}{G} = \frac{c^2(F''+F'/r)}{F} = K$$

إذا كان $K \geq 0$، فنلاحظ أنه لا توجد حلول غير شاذة ومحدودة من أجل $t \geq 0$. ولهذا نفرض أن $K = -k^2 < 0$ ولنضع $\lambda = ck$، فنحصل على:

$$\frac{d^2G}{dt^2}+\lambda^2 G = 0, \qquad \frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}+k^2F = 0$$

نلاحظ أن المعادلة الأولى تحتوي على التابع G المرتبط بمتحول الزمن t، وتُمثل حركة اهتزازية توافقية بسيطة، وحلها هو:

$$G(t) = a\cos\lambda t + b\sin\lambda t$$

حيث إن a و b ثابتان عدديان. أما المعادلة الثانية التي تنطوي على التابع F المرتبط بنصف القطر r فهي معادلة تفاضلية عادية خطية ذات أمثال غير ثابتة، وهذا ما يجعل حلها أصعب بالمقارنة مع المعادلة الأولى، ولهذا يمكن تبسيط شكل هذه المعادلة، وذلك بجعل $s = kr$، فنحصل على:

$$s^2\frac{d^2F}{ds^2}+s\frac{dF}{ds}+(s^2-0^2)F=0 \Rightarrow \frac{d^2F}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dF}{ds}+F=0$$

وهذه حالة خاصة من معادلة بيسل التي حلها العام:

$$F=c_1J_0(s)+c_2Y_0(s)$$

حيث إن c_1 وc_2 ثابتان عدديان، (سنوضح لاحقاً طريقة حل معادلة بيسل)، وبما أن Y_0 ليس محدوداً بجوار مركز الغشاء، لذلك نهمل الحلول التي هي من مضاعفات $F(r)=J_0(s)=J_0(kr)$، والآن بالنظر إلى الشرط الحدي المعطى يتضح أن $F(R)=0$، ومن ثمّ إذا جعلنا $k=\alpha_m/R$، فنحصل عندئذٍ على مجموعة من التوابع الذاتية المتعامدة:

$$R_m(r)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

حيث إن α_m هي أصفار تابع بيسل J_0 التي يبلغ عددها m. أما إذا فرضنا أن $\lambda_m=c\,\alpha_m/R$، فنجد عندئذٍ:

$$G_m(t)=a_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t$$

وعليه فإن الحل:

$$u_m(r,t)=(a_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t)\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

وهكذا فإن حل المعادلة الموجية لغشاء الدائري، الذي يحقق كافة الشروط الابتدائية المعطاة، يُكتب باعتباره تركيباً خطياً لجميع الحلول ويُعطى بدلالة سلسلة فوريه على النحو الآتي:

$$u_m(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t)\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

حيث إنه يمكن تحديد الأمثال a_m وb_m بمقتضى الشروط الابتدائية المعطاة:

$$u(r,0)=f(r), \qquad u_t(r,0)=g(r)$$

وذلك بالتعويض عن الحل العام أعلاه، فنجد أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=f(r), \qquad \sum_{m=1}^{\infty}b_m c\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=g(r)$$

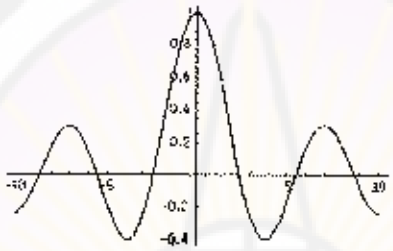
ونرى أن هاتين العلاقتين توضحان التابعين $f(r)$ و$g(r)$ بدلالة الأمثال a_m وb_m على التوالي. والآن لنرى الحالة العكسية، أي بمعنى لنعبر عن الأمثال a_m وb_m بدلالة التابعين $f(r)$ و$g(r)$، ولهذا نعتمد على خاصة تعامد التوابع، فينتج لدينا:

$$a_m=\frac{2}{R^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R f(r)\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}\right)r\,dr$$

$$b_m=\frac{2}{\lambda_m R^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R g(r)\,J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}\right)r\,dr$$

حيث إن r تابع اعتباري مُناسب لمسألة ستورم ليوفيل التي تحقق شروطها الحدية التوابع $F_m(r) = J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{R}\right)$ والمعرفة على المجال $[0, R]$. وعليه يمكننا الآن بعد الحصول على قيم الأمثال الناتجة الاعتماد على الحل العام أعلاه $u_{0m}(r,t)$ لمعرفة سلوك الغشاء الطبلي الدائري والمتناظر محورياً.

بالنتيجة وجدنا حتى الآن أن هناك حلّين مستقلين لمعادلة بيسل وذلك بالنظر إلى كونها معادلة من المرتبة الثانية. ومن ناحية ثانية أدركنا من خلال استعراض مسألة الغشاء الطبلي الدائري بأن التوابع Y_0 غير مقبولة عندما تسعى نحو ∞ في حال $r \to 0$، وبالتالي فإن التوابع المسموح بها فقط هي J_0، بحيث تبقى مَحْدُودة عندما $r \to 0$. وهنا نرى فيما يلي مقطعاً جانبياً ذا بعدين لإيضاح مدى الاضطراب عَبْر الغشاء الطبلي ومُعْطَى بدلالة تابع مِنْ الشكل J_0:



الشكل (1-10): مسألة غشاء الطبل.

4-4-1 حل معادلة بيسل Solution of Bessel's equation

عادة ما تصادفنا معادلة بيسل عند حل مسائل القيمة الحدية التي تتضمن مؤثر لابلاس ∇^2 المعْطَى بدلالة الإحداثيات القطبية أو الأسطوانية، وكما رأينا فيما سبق أن إجراء فصل المتحولات لحل المعادلة الموجية للغشاء الدائري أدى إلى معادلة تفاضلية عادية من الشكل:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (13)$$

وهي معادلة بيسل من المرتبة ν، حيث إن $\nu \geq 0$ مَعْلُوم. ونلاحظ أن معادلة بيسل هي أسرة متكاملة من المعادلات التفاضلية ونُعطي كُلٍ منها بدلالة $\nu \geq 0$. كما يمكن كتابتها أيضاً بدلالة صيغة ستورم-ليوفيل Sturm-Liouville form على النحو الآتي:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0 \qquad (14)$$

التي تحتوي على $p(x)=x, q(x)=-v^2/x, r(x)=x$ والقيمة الذاتية λ^2. بالإضافة إلى ذلك إذا فرضنا $r=\lambda x$، فيمكن الحصول على صيغة مألوفة لمعادلة بيسل:

$$r^2y''(r)+ry'(r)+(r^2-v^2)y(r)=0 \qquad (15)$$

وبما أن v يظهر على الشكل v^2 في المعادلة السابقة، فيمكن اعتبار v ليس سالباً بوجه عام. بالنتيجة لدينا معادلة تفاضلية عادية ذات أمثال غير ثابتة، ويمكن حلها غالباً باستخدام طريقة سلاسل القوى.

وعلى هذا لنفرض أن الحل يأخذ الشكل:

$$y=r^p\sum_{i=0}^{\infty}a_ir^i=\sum_{i=0}^{\infty}a_ir^{p+i}$$

حيث $a_0\neq 0$. لنعوض في المعادلة السابقة، فنجد:

$$\sum_{i=0}^{\infty}[r^2a_i(p+i)(p+i-1)r^{p+i-2}+ra_i(p+i)r^{p+i-1}+(r^2-v^2)a_ir^{p+i}]=0$$

وبذلك يتضح أن:

$$\sum_{i=0}^{\infty}[(p+i)(p+i-1)+(p+i)+(r^2-v^2)]a_ir^{p+i}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{\infty}[(p+i)^2-v^2]a_ir^{p+i}+\sum_{i=0}^{\infty}a_ir^{p+i+2}=0$$

إذا قسمنا كل حد من حدود السلسلة على r^p واستبدلنا i بـ $i-2$ في السلسلة الثانية، فينتج:

$$\sum_{i=0}^{\infty}[(p+i)^2-v^2]a_ir^i+\sum_{i=2}^{\infty}a_{i-2}r^i=0$$

وبما أن مجالي الجاميع مختلفين، نُخرج الحدين الواردين في البداية من المجموع الأول، ومن ثَم نضيف الباقي من المجموع الأول إلى المجموع الثاني، فنحصل على:

$$(p^2-v^2)a_0+[(p+1)^2-v^2]a_1r+\sum_{i=2}^{\infty}[[(p+i)^2-v^2]a_i+a_{i-2}]r^i=0$$

بالمطابقة بين طرفي المعادلة نجد:

$$(p^2-v^2)a_0=0$$
$$[(p+1)^2-v^2]a_1=0$$
$$[(p+i)^2-v^2]a_i+a_{i-2}=0$$

أي إن أمثال r معدومة. وعلى هذا يتضح أن أمثال الحد الصغري تتلاشى وهذا يقتضي ضمناً أن $p=\pm v$ أو $a_0=0$، كما أن انعدام أمثال الحد الأول ينطوي على $p+1=\pm v$ أو $a_1=0$، لنفرض الآن

جدلاً $a_0 \neq 0$، فنرى أن $p = \pm v$ و $a_1 = 0$، وبالتالي فإن $p + 1 \neq \pm v$ وذلك بالنظر إلى أن $p = \pm v$. وهكذا نُعطي a_i على النحو الآتي:

$$a_i = -\frac{a_{i-2}}{(p+i+v)(p+i-v)}$$

وبالتالي للإقرار فيما إذا $p = +v$ أو $p = -v$، فنرى في حال $p = +v$ أن:

$$a_i = -\frac{a_{i-2}}{i(2v+i)}, \qquad i = 2,3,\cdots \qquad (16)$$

أما في حال $p = -v$ فنجد:

$$a_i = -\frac{a_{i-2}}{i(-2v+i)}, \qquad i = 2,3,\cdots \qquad (17)$$

ونلاحظ أنّ مقام الكسر في المعادلة (17) ينعدم من أجل $i = 2v$، ولا ينعدم أبداً في المعادلة (16)، ولهذا نختار $p = +v, \ (v \geq 0)$، وعليه نُحدد الأمثال a_i بدلالة المعادلة (16)، حيث إن $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$ من أجل $a_0 = 0$. أما في حال $a_0 = 0$ و $p + 1 = v$، فتتلاشى الحدود الزوجية عوضاً عن الحدود الفردية، ولكن يجب عندئذٍ استبدال p بـ $p - 1$، ولذلك نحصل في كلتا الحالتين على السلسلة ذاتها. وبما أن الحدود الزوجية وَحدَها غير معدومة، نَجْعَل $(i = 2k, (k = 0,1,2,\cdots$، ويكون لدينا بالنتيجة الصيغة التكرارية المتعاقبة الآتية:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(v+k)}, \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

أي لدينا بالنتيجة صيغة تكرارية متعاقبة، بمعنى أن:

$$a_2 = -\frac{1}{4 \cdot 1(v+1)} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 2(v+2)} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 2!\,(v+1)(v+2)} a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{4 \cdot 3(v+3)} a_4 = \frac{-1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3!\,(v+1)(v+2)(v+3)} a_0$$

وعلى العموم:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k \cdot k!\,(v+1)(v+2)\cdots(v+k)} a_0$$

وبما أنّ معادلة بيسل متجانسة وجميع أمثال السلسلة متناسبة مع a_0، حيث إن a_0 اختياري، نجعل:

$$a_0 = \frac{1}{v!\,2^k}$$

فتبدو عندئذٍ أمثال السلسلة في شكلها النهائي أكثر انسجاماً وتكتب على النحو الآتي:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} \cdot k!\,(\nu+k)!}$$

ومن ثم بالتعويض عن الأمثال في سلسلة القوى التي تُمثل حلاً لمعادلة بيسل، فنجد:

$$y(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}\, k!\,(\nu+k)!}\, r^{\nu+2k}$$

ويُشار عادةً لهذا الحل بالرمز $J_\nu(r)$، أي إن:

$$J_\nu(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\,(\nu+i)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2i} \qquad (18)$$

وهذا ما يسمى بتابع بيسل من النوع الأول ذي المرتبة ν. وخاصّةً من أجل $\nu = 0$ و $\nu = 1$، نرى أن:

$$J_0(r) = 1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$J_1(r) = \frac{r}{2} - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{r}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{r}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{r}{2}\right)^7 + \cdots$$

حيث نلاحظ أن $J_0'(r) = -J_1(r)$، كما أننا استخدمنا الترميز $(\nu+1)!$ مع العلم أن ν عدد صحيح. وبالرغم من أن اهتمامنا فقط بالأعداد الصحيحة من ν، إلا أنه تجدر الإشارة إلى أن ν قد يكون عدداً غير صحيح، وعادةً ما يكتب $J_\nu(r)$ عندئذ على النحو الآتي:

$$J_\nu(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\,\Gamma(\nu+i+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2i}$$

حيث إن التابع غاما $\Gamma(x)$ مُعَرَّف كما يلي:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\,, \qquad (x > 0)$$

يمكن إجراء التكامل بطريقة التجزئة، فنرى أن $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),\ x > 0$، وهكذا يتضح أن:

$$[(1+\nu)(2+\nu)\cdots(i+\nu)]\Gamma(1+\nu) = [(2+\nu)\cdots(i+\nu)]\Gamma(2+\nu) = \\ = [(3+\nu)\cdots(i+\nu)]\Gamma(3+\nu) = \cdots = \Gamma(i+\nu+1)$$

وعَلَيْهِ نجد من أجل أي عدد صحيح موجب أن:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ولَمّا كان $J_\nu(r)$ حل للمعادلة (13)، فإن $J_\nu(\lambda x)$ هو حل للمعادلة (15). وبالتالي إذا كانت الشروط الحدية من نمط ستورم-ليوفيل مَعْلُومة عند $x = a$ و $x = b$، فإن علاقة التعامد للتابع $J_\nu(\lambda x)$ تأخذ الشكل:

$$\int_a^b x\, J_\nu(\lambda x)\, J_\nu(\bar{\lambda} x)\, dx = 0\,, \qquad \lambda \neq \bar{\lambda}$$

حيث إن λ وλ_1 قيمتان مميزتان مختلفتان للتابع $J_\nu(\lambda x)$ ذي المرتبة ν المعلومة مسبقاً. وهكذا بما أن معادلة بيسل من المرتبة الثانية، فيوجد بالتالي حلّان مستقلان خطياً للمعادلة؛ أولهما هو $J_\nu(\lambda x)$ المعطى بالمعادلة (18)، وثانيهما يمكن الحصول عليه كذلك من المعادلة (18) وفقاً لترتيب الأعداد الصحيحة، ونُشَيِّر لهذا الحل عندئذٍ بالرمز $Y_\nu(x)$، وهذا ما يُسمّى عادةً بتابع بيسل من النوع الثاني.

وعلى هذا فإن الحل العام لمعادلة بيسل هو:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

حيث إن c_1 وc_2 ثابتان عدديان.

مثال (18-1): أوجد حلاً على شكل السلسلة $x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لمعادلة بيسل ذات المرتبة $1/2$ والمعطاة على النحو الآتي:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

الحل: لنفرض أنّ:

$$y(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2}$$

ومن ثَمّ بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n x^{n-1/2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n x^{n-3/2}$$

نعوض الآن في معادلة بيسل المعطاة، فنجد أن:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n x^{n-3/2} + x\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n x^{n-1/2} + \left(x^2-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = 0$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+5/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}a_n x^{n+1/2} = 0$$

وهكذا يتضح من خلال تَغْيير الدليل في الحد الثالث $m + 1/2 = n + 5/2$ وبقية الحدود $m = n$، أن

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)a_m x^{m+\frac{1}{2}}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m x^{m+\frac{1}{2}}+\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}x^{m+\frac{1}{2}}$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4}a_m x^{m+\frac{1}{2}}=0$$

وبما أن مجال المجموع في الحد الثالث يبدأ مع $m=2$، نُجري الحسابات لكلٍ من $m=0$ و $m=1$ بشكل منفصل. فمن أجل $m=0$ نرى أن أمثال $x^{1/2}$ هي:

$$-\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{4}a_0=0\cdot a_0=0$$

وعليه فإن a_0 اختياري. كما يتضح أيضاً في حال $m=1$ أن:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{2}a_1-\frac{1}{4}a_1=2a_1=0$$

أي أن $a_1=0$. أما بالنسبة إلى $m\geq 2$، فنجد أن:

$$\left(m^2-\frac{1}{4}\right)a_m+\left(m+\frac{1}{2}\right)a_m+a_{m-2}-\frac{1}{4}a_m=0$$

وهذا يقتضي بدوره أن $(m^2+m)a_m=-a_{m-2}$، إذاً العلاقة التكرارية المتعاقبة التي يمكن الاعتماد عليها للحصول على أمثال السلسلة $a_2,a_3,\cdots$ هي:

$$a_m=-\frac{a_m}{m(m+1)}$$

وبالنظر إلى أن a_0 قيمة اختيارية و $a_1=0$، فيتضح أن جميع الأمثال الفردية في السلسلة $a_3,a_5,\cdots$ معدومة، كما أن:

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 3}=-\frac{a_0}{3!},\qquad a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 5}=\frac{a_0}{5!},\cdots$$

وهكذا في العموم $a_{2n}=\frac{a_0}{(2n+1)!}$. وعلى هذا نكتب الحل على النحو الآتي:

$$y(x)=x^{1/2}\left(a_0-\frac{a_0}{3!}x^2+\frac{a_0}{5!}x^4-\cdots\right)=a_0\frac{x^{1/2}}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)=a_0\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

وهذا يعني بأنه حل معادلة بيسل ذات المرتبة 1/2 يُعطَى بدلالة التوابع الأساسية، إلا أن هذا ليس بحالة عامة، حيث نرى في المثال التالي أنه يوجد حلٌ على شكل سلسلة قوى لمعادلة بيسل ذات المرتبة الصفرية ولكن ليس تابعاً أساسياً، ولهذا نعدّ توابع بيسل التي تُمثل حلاً لمعادلة بيسل ذات المرتبة $\nu\geq 0$، حيث إن ν عدد صحيح، هي توابع خاصة.

مثال (1-19): حل معادلة بيسل من المرتبة الصفرية والمعطاة على النحو الآتي:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+x^2y=0$$

الحل: من المفروض إيجاد تابعي بيسل J_0 وY_0 كي نستطيع تحديد حل معادلة بيسل في هذه الحالة. ولهذا يمكن مبدئياً كتابة المعادلة كما يلي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$$

ومن ثَمّ نعدّ هنا حل هذه المعادلة هو سلسلة قوى من الشكل:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

وبذلك يمكن أن نعوض الآن عن الحل في المعادلة، ولهذا من الضروري حساب المشتق الأول والثاني للحل، فنجد:

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

من ثَمّ بالاشتقاق نجد أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots=$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

ونرى في التعبير الحسابي السابق أنه غُيّرت حدود المجاميع في المشتق من المرتبة الثانية بحيث يبقى المجموع بصورته النهائية متضمناً x^n، وتركنا المشتق الأول كما هو عليه دون أي تغيير. وبما أن المعادلة التفاضلية هنا تنطوي على الحد $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$، فمن المفروض التعبير أيضاً عن هذا الحد بدلالة x^n، ولهذا نكتب:

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+2}(n+2)x^{n+1}\Rightarrow\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+2}(n+2)x^n$$

بالتعويض الآن في المعادلة التفاضلية، فنجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+2}(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

نلاحظ أن الحد $n=-1$ في المجموع الثاني مختلف عن حدود بقية المجاميع التي تتراوح بين الصفر واللانهاية، ولهذا نكتب المعادلة السابقة على النحو الآتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+2}(n+2)(n+1)+a_{n+2}(n+2)+a_n\}x^n+a_1x^{-1}=0$$

وهذه العبارة تبقى صحيحة من أجل جميع قيم المتحول المستقل x، بالتّالي تنعدم قيم x تدريجياً وذلك مهما تكن القوة n. لنأخذ الآن بعين الاعتبار الحد ذا الدليل $1-$ أولاً، فنرى أن شرط انعدام هذا الحد هو $a_1 = 0$. ولننظر الآن إلى الحالة العامة:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n+2}(n+2) + a_n = 0$$

بالإصلاح يمكن أن نكتب هذه العلاقة كما يلي:

$$a_{n+2}(n+2)^2 + a_n = 0$$

وما هذه إلاّ علاقة تكرارية متعاقبة يمكن الاعتماد عليها للحصول على أمثال السلسلة، ويمكن كتابتها على النحو:

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2}a_n$$

وعلى هذا نجد في حالة $n = 0$ أن:

$$a_n = -\frac{1}{2^2}a_0$$

كما نرى من أجل $n = 2$ أن:

$$a_4 = -\frac{1}{4^2}a_2 = \frac{-1}{4^2} \times \frac{-1}{2^2}a_0 = \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}a_0$$

وهكذا يتضح أن أمثال السلسلة تُعطى بدلالة a_0 وذلك من أجل جميع قوى x المزدوجة، وبالتالي يأخذ حل المعادلة التفاضلية الشكل الآتي:

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{4^2 \cdot 2^2} - \frac{x^6}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} + \cdots\right)$$

إلا أننا رأينا فيما سبق أن هذه السلسلة تُمثّل تابع بيسل J_0، أي إن:

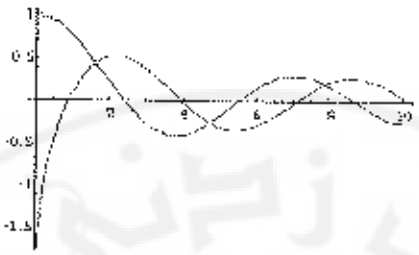
$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{4^2 \cdot 2^2} - \frac{x^6}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} + \cdots$$

إذاً حل المعادلة التفاضلية العادية المُعطاة لدينا هو تابع بيسل J_0 مضروباً بعدد ما. بمعنى:

$$y(x) = a_0 J_0(x)$$

بالنّتيجة وجدنا حتّى الآن تابعاً جديداً يُمثل حلاً للمعادلة التفاضلية العادية المعطاة، ولكن بما أن المعادلة من المرتبة الثانية، فمن المفروض وجود حلين مستقلين لها، ولهذا ينبثق السؤال عن ماهيّة الحل الآخر للمعادلة. للإجابة عن التساؤل المطروح، علينا أن نتذكر أنه لدى البحث عن حل المعادلة الموجية للغشاء الطبلي الدائري وجدنا معادلة متعلقة بنصف قطر الغشاء، وأخذت حينئذٍ بشكلها نمط معادلة بيسل ذات المرتبة الصفرية، كما لاحظنا عندئذٍ أن الحلين المستقلين للمعادلة هما تابعا بيسل من النوع

الأول $J_0(x)$ والثاني $Y_0(x)$. بالإضافة إلى ذلك توضح بيانياً سلوك توابع بيسل $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ بجوار النقطة $x = 0$ من خلال الشكل التالي:



الشكل (1-11): توابع بيسل.

فالرسم التوضيحي يزودنا بمعلومات مهمة عن كلا الحلين، فنرى أن التابع $J_0(x)$ يسعى إلى الواحد عندما تقترب x من الصفر، وهذا ما تُوضحه أيضاً السلسلة العددية التي تعدّ حلاً للمعادلة. بينما يبدو أن التابع $Y_0(x)$ متجهاً نحو $-\infty$ عندما ندنو x من الصفر.

وأخيراً تجدر الإشارة إلى أن هناك معادلات تفاضلية مُعيّنة على قدر كبير من الأهمية لكَوْنها تَبْرُز إلى الوُجود مِرَاراً عند دراسة الكثير من التطبيقات العملية المختلفة، وقد يكون من الضروري حساب حلولها بالسرعة الممكنة، حتى ولو كانت الحلول المطلوبة واقعة بجوار نقطة شاذة. مِثْل هذه الحلول يمكن أن تُعَرَّف بشكل مُجرّد باعتبارها سلسلة عددية، بل بالأحرى يمكن أن تُعْطى بدلالة تلك التوابع الأساسية المسماة بالتوابع الخاصة، حيث إننا درسنا سابقاً بعض التوابع الخاصة ومنها توابع بيسل وليجندر وغيرها. ولقد رأينا فيما سبق ضرورة التوابع الخاصة لحل معادلة تفاضلية جزئية مُعْطاة بدلالة الإحداثيات القطبية أو الأسطوانية، كما لاحظنا أن توابع بيسل هي الحلول المناسبة لمعادلة بيسل.

1-4-5 طريقة تحويل لابلاس Laplace transform method

لقد رأينا أنه يمكننا حل المعادلة التفاضلية العادية باستخدام تحويلات لابلاس، وذلك من خلال رد المعادلة التفاضلية العادية إلى معادلة جبرية يمكن حلها عندئذٍ غالباً بسهولة. كما يمكننا بالمِثْل الاستفادة من تحويلات لابلاس في حلّ المعادلات التفاضلية الجزئية، وخصوصاً في الحالة التي نكون فيها قيم أحد المتحولات المستقلة موجبة. وعلى هذا نرى أن طريقة تحويل لابلاس تعتمد على فكرة تخفيض درجة صُعُوبة حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة من خلال استبدالها بمعادلة تفاضلية عادية، حيث إننا نُحدد مبدئياً تحويلات لابلاس للمعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الجانبية المقترنة بها، وذلك بالنسبة

إلى أحد المتحولات المستقلة. ومن ثَمَّ نحل المعادلة الناتجة، وهكذا نحصل عندئذٍ على الحل المطلوب للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة من خلال حساب التحويل العكسي للحل الناتج.

وهكذا إذا أعطينا تابع $u(x,t)$ مُعَرَّف من أجل جميع قيم $t > 0$ وفرضنا أنه محدود، فيمكن استخدام تحويل لابلاس بالنسبة إلى المتحول t مع النظر عندئذٍ إلى x وسيطاً:

$$L(u(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}\, u(x,t)\, dt = U(x,s)$$

وعلى هذا لإيجاد حل معادلة تفاضلية جزئية مُعطاة نحتاج مبدئياً إلى:

$$L(u_t(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}\, u_t(x,t)\, dt = e^{-st}u(x,t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, u(x,t)\, dt =$$
$$= sU(x,s) - u(x,0)$$

وبالطريقة نفسها نحصل على:

$$L(u_{tt}(x,t)) = s^2U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

كما نحتاج أيضاً لتحويلات لابلاس للمشتقات الجزئية المرتبطة بالمتحول x:

$$L(u_x(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}\, u_x(x,t)\, dt = U_x(x,t)$$

$$L(u_{xx}(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}\, u_{xx}(x,t)\, dt = U_{xx}(x,t)$$

وهذا ما نوضحه فيما يلي في المثالين الآتيين.

مثال (1-20): حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة على النحو الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u, \qquad u(x,0) = 6e^{-3x}$$

حيث يكون الحل مَحْدُوداً من أجل: $0 < x, 0 < t$.

الحل: لنأخذ تحويلات لابلاس على طرفي المعادلة، فنرى أن:

$$\frac{dU}{dx} = 2\{sU - u(x,0)\} + U$$

حيث إن $U = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}\, u\, dt$ هو تحويل لابلاس للتابع $u(x,t)$. ومن ثم بالإصلاح والتعويض في الشرط الجانبي المعطى $u(x,0) = 6e^{-3x}$، فيتضح أن:

$$\frac{dU}{dx} = -(2s+1)U = -12e^{-3x}$$

وهكذا نلاحظ تَحَوُّل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة إلى معادلة تفاضلية عادية، وذلك من خلال تطبيق تحويلات لابلاس على طرفيها. والآن لإيجاد الحل للمعادلة الناتجة، نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل:

$$\mu(x) = e^{\int -(2s+1)dx} = e^{-(2s+1)x}$$

فينتج لدينا:

$$\frac{dU}{dx}e^{-(2s+1)x} - (2s+1)U\,e^{-(2s+1)x} = -12e^{-3x}e^{-(2s+1)x}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$\frac{d}{dx}\{U\,e^{-(2s+1)x}\} = -12e^{-(2s+4)x}$$

والآن بالمكاملة نجد:

$$Ue^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + c$$

أي إن:

$$U = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + c\,e^{(2s+1)x}$$

وبما أنه من المفروض أن يبقى الحل $U(x,t)$ محدوداً عندما $x \to \infty$، بالتالي فإن الحل الناتج $U(x,s)$ يجب أن يكون محدوداً أيضاً عندما $x \to \infty$، وهذا نجعل $c = 0$، فنحصل على:

$$U = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

والآن لنأخذ تحويل لابلاس العكسي، فنحصل على الحل المطلوب:

$$u(x,t) = 6e^{-2t-3x}$$

مثال (21-1): حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة على النحو الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

التي تحقق الشروط الحدية:

$$u(x,0) = 3\sin 2\pi x, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0$$

حيث إن: $0 < x < 1,\ t > 1$.

الحل: لنأخذ تحويلات لابلاس للمعادلة المعطاة بالنسبة إلى المتحول t، فنرى أن:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dt$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل:

$$s\int_0^\infty e^{-st}\,u\,dt - u(x,0) = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\,u\,dt$$

أو بالشكل:

$$sU - u(x,0) = \frac{d^2U}{dx^2}$$

حيث إن $U = U(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, u\, dt$ هو تحويل لابلاس للتابع $u(x,t)$. والآن لنأخذ الشروط الجانبية بعين الاعتبار، فنجد أن:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = -3\sin 2\pi x$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية يمكن إيجاد حلها العام بالطرائق المألوفة. لدينا:

$$U = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x$$

نحدد الثابتين c_1 و c_2 بالاستفادة من تحويلات لابلاس للشروط الجانبية المعطاة:

$$U(0,s) = 0, \qquad U(1,s) = 0$$

وبالتعويض عن $U(0,s) = 0$ في الحل العام فنحصل على:

$$c_1 + c_2 = 0$$

كما نرى أيضاً بالتعويض عن $U(1,s) = 0$ في الحل العام أن:

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0$$

وبالمقارنة بين هاتين المعادلتين يتضح أن $c_1 = c_2 = 0$، وعليه فإن:

$$U(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x$$

والآن لنأخذ تحويل لابلاس العكسي، فنحصل على الحل المطلوب:

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x$$

5-1 مسائل محلولة

مسألة 1: أثبت أن التابع ذا المتحولين $u(x,y) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\sin kx$، حيث إن k عدد صحيح موجب، هو حل لمعادلة التوصيل الحراري:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \qquad x \in [0,\pi]$$

والتي يحقق حلها العام الشرط:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

الحل: نشتق جزئياً بالنسبة إلى المتحولين t و x فنجد أن:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha^2 k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t}\sin kx$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\alpha^2 k^2 t}\cdot k\cos kx, \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\alpha^2 k^2 t}(-k^2)\sin kx$$

وهكذا فإن:

$$\alpha^2 u_{xx} = -\alpha^2 k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t}\sin kx = u_t$$

والآن نتأكد من صحة الشروط الحدية المعطاة، فيتضح من خلال التعويض في الحل العام:

$$u(0,t) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\sin k0 = 0, \qquad u(\pi,t) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\sin k\pi = 0\,; \quad t \geq 0$$

مسألة 2: حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2(t+1)$$

التي يحقق حلها العام الشرطين: $u = \cos 2t$ و $\partial u/\partial x = \sin t$ عندما $x = 0$.

الحل: نلاحظ أن الشروط الحدية معطاة على شكل توابع مرتبطة بالمتحول t. نكامل جزئياً بالنسبة إلى المتحول x فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3(t+1) + f(t)$$

حيث f تابع اختياري مرتبط بالمتحول t. نكامل الآن جزئياً مرة ثانية بالنسبة إلى المتحول x.

$$u = x^4(t+1) + x\,f(t) + g(t)$$

حيث إن g تابع اختياري مرتبط بالمتحول t. والآن لتحديد التابعين $f(t)$ و$g(t)$ نستفيد من الشروط الحدية المعطاة لهذا الغرض:

$$u = \cos 2t, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \sin t, \qquad x = 0$$

فيكون لدينا: $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos 2t$ وعليه فالحل العام هو:

$$u = x^4(t+1) + x\sin t + \cos 2t$$

مسألة 3: بين فيما إذا كان ممكناً كتابة كلٍ من التوابع التالية على الشكل $p = x^2 + 2y$ ومن ثمّ وضح فيما إذا كان كل تابع من هذه التوابع يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x\frac{\partial u}{\partial y}$$

a) $x^2(x^2-4) + 4y(x^2-2) + 4(y^2-1)$
b) $x^4 + 2x^2y + y$
c) $[x^4 + 4x^2y + 4y^2 + 1]/[2x^4 + x^2(8y+1) + 8y^2 + 2y]$

الحل: للتأكد من أن $p = x^2 + 2y$ يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، نشتق باستخدام قاعدة السلسلة نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = x\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial p}2x = x\frac{\partial u}{\partial p}2$$

وهذا يعني أن المعادلة محققة من أجل أي تابع $u(p)$ يمكن إثبات صحة المعادلة. وهذا يكفي لاختبار التوابع المعطاة لدينا بأن نعوض $x^2 - p - 2y$ أو $y = (p - x^2)/2$ في كل تابع، ومن ثم نتأكد فيما إذا كانت الصيغ الناتجة مستقلة عن x وy على التوالي.

$$a)\quad f(x,y)=x^2(x^2-4)+4y(x^2-2)+4(y^2-1)=$$
$$=x^2(x^2-4)+2(p-x^2)(x^2-2)+p^2-2px^2+x^4-4=$$
$$=x^4(1-2+1)+x^2(-4+2p+4-2p)-4p+p^2-4=$$
$$=p^2-4p-4=g(p)$$

ونلاحظ أن التابع مرتبط فقط بالمتحول p وعليه فإن التابع الأصلي $f(x,y)$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة. كما أنه يمكن الإجابة عن السؤال المطروح من خلال التعويض عن x بدلاً من y ونتأكد عندئذٍ من صحة العلاقة:

$$f(x,y)=x^2(x^2-4)+4y(x^2-2)+4(y^2-1)=$$
$$=(p-2y)(p-2y-4)+4y(p-2y-2)+4(y^2-1)=$$
$$=p^2-4py+4y^2-4p+8y+4yp-8y^2-8y+4y^2-4=$$
$$=p^2-4p-4=g(p)$$

أي إننا حصلنا مرة ثانية على النتيجة نفسها بأن $f(x,y)$ حل للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة. ويكفي التعويض عن y أو x للتأكد من صحة العلاقة.

$$b)\quad f(x,y)=x^4+2x^2y+y^2=(p-2y)^2+2y(p-2y)+y^2=$$
$$=p^2-4py+4y^2+2py-4y^2+y^2=(p-y)^2\neq g(p)$$

كما نرى في النتيجة لدينا تابع بمتحولين p و y، ولذلك فإن التابع $f(x,y)$ في هذه الحالة لا يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة.

$$c)\quad f(x,y)=\frac{x^4+4x^2y+4y^2+4}{2x^4+x^2(8y+1)+8y^2+2y}=$$
$$=\frac{p^2-4py+4y^2+4yp+4y^2+4}{2p^2-8py+8y^2+8yp+p-16y^2-2y+8y^2+2y}=\frac{p^2+4}{2p^2+p}=g(p)$$

وفي النتيجة نلاحظ أن التابع مرتبط فقط بالمتحول p ولهذا فإن $f(x,y)$ هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة.

مسألة 4: أوجد الحل العام لكلٍ من المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

a) $u_{yy}+2xu_y+(x^2-1)u=x^2y^2-y^2+4xy+2$
b) $u_{xy}=e^x+\cos y+1$
c) $(x^2-1)u_{xy}=2u_y$

الحل: a) لنعدّ هنا x وسيطاً، فيكون لدينا $v(y)=u(x,y)$ وعندئذٍ يمكن النظر إلى المعادلة التفاضلية الجزئية باعتبارها معادلة تفاضلية عادية من الشكل:

$$v''+2xv'+(x^2-1)v=x^2y^2-y^2+4xy+2$$

نحل المعادلة التفاضلية المتجانسة المواقفة:

$$v''+2xv'+(x^2-1)v=0$$

وذلك بفرض $v(y)=e^{\lambda y}$، حيث إن λ مرتبط ضمنياً بالمتحول x، فيكون لدينا:

$$p(\lambda)=\lambda^2+2x\lambda+x^2-1=(\lambda+x)^2-1\Rightarrow\lambda=-x\pm1$$
$$\Rightarrow v_h(x)=c_1(x)\,e^{(-x+1)y}+c_2(x)\,e^{(-x-1)y}$$

حيث إن $c_1(x)$ و $c_2(x)$ توابع اختيارية. والآن نحل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$v''+2xv'+(x^2-1)v=x^2y^2-y^2+4xy+2$$

وذلك بفرض $v_p(y)=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$، فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}v''+2xv'+(x^2-1)v&=2a+2x(2ay+b)+(x^2-1)(ay^2+by+c)=\\&=a(x^2-1)y^2+[4ax+b(x^2-1)]y+[2a+2bx+c(x^2-1)]=\\&=(x^2-1)y^2+4xy+2\\\Rightarrow a&=1,\quad b=0,\quad c=0\Rightarrow v_p(x)=y^2\end{aligned}$$

إذاً الحل العام:

$$u(x,y)=v_h(x)+v_p(x)=c_1(x)e^{(-x+1)y}+c_2(x)e^{(-x-1)y}+y^2$$

b) لدينا:

$$u_{xy}=(u_x)_y=e^x+\cos y+1\Rightarrow u_x=ye^x+\sin y+y+c(x)$$
$$\Rightarrow u(x,y)=ye^x+x\sin y+xy+f(x)+g(y)$$

حيث إن f و g تابعان قابلان للمفاضلة و $f'(x)=c(x)$.

c) لنضع $v(x,y)=u_y(x,y)$ فنحصل على:

$$(x^2-1)u_{xy}=2u_y\Rightarrow v_x=\frac{2v}{x^2-1}\Rightarrow\frac{v_x}{v}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}\Rightarrow\ln|v|=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+k(y)$$
$$\Rightarrow u_y=v=c(y)\cdot\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow u(x,y)=g(y)\cdot\frac{x-1}{x+1}+f(x)$$

حيث إن f و g تابعان قابلان للمفاضلة و $g'(y)=c(y)$.

مسألة 5: أوجد الحل العام $u(x,y)$ للمعادلة الخطية:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+3u=x^2$$

الحل: باستخدام عامل التكميل:

$$\mu=\exp\left(\int\frac{3}{x}dx\right)=\exp(3\ln x)=x^3$$

الآن لنضرب بعامل التكميل فنجد:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3u)=x^4$$

بالمكاملة نجد أنّ:

$$x^3u = \frac{x^5}{5} + f(y)$$

حيث إن $F(y)$ هو تابع اختياري مرتبط بالمتحول y. وأخيراً بالتقسيم على x^3 فنحصل على الحل:

$$u(x,y) = \frac{x^2}{5} + \frac{f(y)}{x^3}$$

مسألة 6: بيّن أن $u(x,y) = F(2x+5y) + G(2x-5y)$ هو حل عام للمعادلة:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ومن ثمّ حدد الحل الخاص الذي يحقق الشروط:

$$u(0,y) = u(0,\pi) = 0 \ , \quad u(x,0) = \sin 2x \ , \quad u_y(x,0) = 0$$

الحل: لنفرض أن $2x+5y = s, 2x-5y = t$، فيكون لدينا $u = F(s) + G(t)$، وعليه فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = F'(s)(5) + G'(t)(-5) = 5F'(s) - 5G'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\{5F'(s) - 5G'(t)\} = 5\frac{\partial F'}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} - 5\frac{\partial G'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 25F''(s) + 25G''(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = F'(s)(2) + G'(t)(2) = 2F'(s) + 2G'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{2F'(s) + 2G'(t)\} = 2\frac{\partial F'}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + 2\frac{\partial G'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 4F''(s) + 4G''(t)$$

وبالتعويض الآن عن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، فيتضح أن المعادلة محققة. وبما أن المعادلة المعطاة من المرتبة الثانية، كما نلاحظ أن الحل $u(x,y)$ يتضمن تابعين اختياريين، بالتالي فإن $u(x,y)$ حل عام. وهكذا لتحديد حل خاص نعوض عن الشروط الجانبية المعطاة في صيغة الحل العام، فنجد أن:

$$u(x,0) = F(2x) + G(2x) = \sin 2x \Rightarrow \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 2F'(2x) + 2G'(2x) = \\ = 2\cos 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5F'(2x+5y) - 5G'(2x-5y) \Rightarrow \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 5F'(2x) - 5G'(2x) = 0$$

وبالنظر إلى العلاقتين السابقتين ينتج أن:

$$F'(2x) = 5G'(2x) \Rightarrow F'(2x) = G'(2x) = \frac{1}{2}\cos 2x$$

وعلى هذا نرى أن:

$$F(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + c_1 \ , \quad G(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + c_2$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sin(2x+5y) + \frac{1}{2}\sin(2x-5y) + c_1 + c_2$$

نأخذ الآن بعين الاعتبار $u(0,y) = 0$ أو $c_1 + c_2 = 0$، فيكون لدينا:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sin(2x+5y) + \frac{1}{2}\sin(2x-5y) = \sin 2x \cos 5y$$

وهذا هو الحل الخاص المطلوب ويمكن التأكد من ذلك بسهولة.

مسألة 7: حوّل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

إلى شكلها المألوف مستخدماً التحويلات $u = x + ct,\ v = x - ct$، ومن ثمّ أوجد حلها العام، وبيّن أنه يمكن كتابة الحل على الشكل:

$$y = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

مع العلم أن $y = f(x)$ و $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ عندما $t = 0$.

الحل: لدينا $u = x + ct$ و $v = x - ct$ التحويلات التي تُمكّننا للانتقال من x و t إلى u و v، وعليه فإن:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\ ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

أي أن:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

وعلى هذا نرى أن:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

كما أن:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial y}{\partial u} - c\frac{\partial y}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\ , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c$$

أي أن:

$$\frac{\partial}{\partial t} = c\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

وهكذا فإن:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = c\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(c\frac{\partial y}{\partial u} - c\frac{\partial y}{\partial v}\right) =$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)$$

ومن ثَمّ بالتعويض الآن في المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)$$

وبذلك يتضح أن:

$$4c^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

بمكاملة هذه المعادلة مبدئياً بالنسبة إلى المتحول v، فنجد أن:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \varphi(u)$$

حيث إن $\varphi(u)$ هو ثابت مرتبط بالمتحول v. ومن ثَمّ بالمكاملة الآن ثانيةً بالنسبة إلى المتحول u، فيتضح أن:

$$y = \int \varphi(u)du + \varphi_2(v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$$

أي أن:

$$y(x,t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct)$$

هذا هو الحل المطلوب الذي يُسمى عادةً بحل **دالامبير D'Alembert's Solution** للمعادلة الموجية.

بالنظر الآن إلى الشروط الابتدائية المعطاة $y = f(x)$ و $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ عندما $t = 0$، فيمكن كتابة $u(x,t)$ عندئذٍ على النحو الآتي:

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

وعلى هذا نرى أن:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c\varphi_1'(x + ct) - c\varphi_2'(x - ct) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 = c\varphi_1'(x + 0) - c\varphi_2'(x - 0) \Rightarrow \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = 0$$

أي أن: $\varphi_1'(x) = \varphi_2'(x)$، ولذلك نجد بالمكاملة أن:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + c_1$$

وبذلك يتضح أن:

$$f(x) = \varphi_2(x) + c_1 + \varphi_2(x) = 2\varphi_2(x) + c_1 \Rightarrow$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - c_1] \Rightarrow \varphi_2(x - ct) = \frac{1}{2}[f(x - ct) - c_1]$$

كما أن:

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+c_1]\Rightarrow \varphi_1(x+ct)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+c_1]$$

ومن ثمّ بالتعويض الآن عن $\varphi_1(x+ct)$ و $\varphi_2(x-ct)$ في الحل $y(x,t)$ فنحصل على:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]$$

مسألة 8: لتكن لدينا:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

والمطلوب أوجد الحل الذي يأخذ القيمة $u=x^4$ على طول المستقيم $x=y$.

الحل: لدينا المعادلات المميزة:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y} \quad , \quad du=0$$

وهكذا نجد أن:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y}=c\Rightarrow \ln(xy)=c$$

أي أن المنحنيات المميزة هي أسرة من القطوع الزائدة $xy=c_1$. بالتالي فالحل العام هو:

$$u=f(xy)$$

ويمكن التأكد من صحة ذلك بكتابة $X=xy$ و $u=f(X)$ فيكون لدينا:

$$u_x=X_xf'(X)\,, \quad u_y=X_yf'(X)$$

حيث إن $X_x=y$ و $X_y=x$ ، وعليه فإن: $xu_x-yu_y=0$.

والآن لنأخذ بعين الاعتبار الشرط الجانبي أن $u=x^4$ على طول المستقيم $x=y$، فيمكن عندئذٍ تحديد f، وذلك بالنظر إلى كون $x=y$، فنرى أن:

$$x^4=f(x^2)$$

وعلى هذا ينضمّ أن $f(t)=t^2$، وذلك مهما يكن $f(t)$، فهو مُعرّف من أجل جميع قيم الوسيط $t\geq 0$. وهذا يعني بدوره أن:

$$u(x,y)=x^2y^2\,, \quad xy\geq 0$$

وهكذا يبقى الحل صحيحاً في كلٍ من الربع الأول والثالث من المستوي المميز.

مسألة 9: لتكن لدينا:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

والمطلوب أوجد الحل الذي يأخذ القيمة $2y+1$ على طول المستقيم $x=1$، ومن ثمّ أوجد الحل الذي يأخذ القيمة 4 في النقطة $(1,1)$.

الحل: لنحاول إيجاد الحل $u(x,y)=f(p)$ وذلك بحيث يبقى التابع $u(x,y)$ ثابتاً على طول المستقيم ويحقق العلاقة:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}$$

وبالمكاملة نجد $x=cy^{-1/2}$. كي نتجنب الحسابات مع الأس الكسري، نعرف ثابت التكامل c بالقيمة $p^{1/2}$ فنحصل على $p=x^2y$ ويكون لدينا عندئذٍ الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$u(x,y)=f(x^2y)$$

مسألة 10: استخدم طريقة فصل المتحولات لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial t}+u$$

التي يحقق حلها العام الشرط $u(x,0)=6e^{-3x}$.

الحل: لنفرض أن $u(x,t)=X(x)T(t)$ حل للمعادلة المعطاة، عندئذٍ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial x}T=\frac{dX}{dx}T,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=X\frac{\partial T}{\partial x}=X\frac{dT}{dt}$$

نعوض في المعادلة المعطاة، فنجد:

$$T\frac{dX}{dx}=2X\frac{dT}{dt}+XT\Rightarrow\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}=\frac{2}{T}\frac{dT}{dt}+1\Rightarrow\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}=\frac{2}{T}\frac{dT}{dt}+1=k$$

وعلى هذا نرى أن:

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}=k\Rightarrow\frac{dX}{X}=k\,dx$$

ومن ثم يتضح بالمكاملة أن:

$$\ln X=kx+\ln c_1\Rightarrow\ln\frac{X}{c_1}=kx\Rightarrow X=c_1e^{kx}$$

كما أنه لدينا:

$$\frac{2}{T}\frac{dT}{dt}+1=k\Rightarrow\frac{2}{T}\frac{dT}{dt}=k-1\Rightarrow\frac{dT}{T}=\frac{k-1}{2}dt$$

نكامل فنحصل على:

$$\ln T=\frac{k-1}{2}t+\ln c_2\Rightarrow\ln\frac{T}{c_2}=\frac{k-1}{2}t\Rightarrow T=c_2e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)t}$$

وبالتعويض عن X و T في العلاقة $u(x,y)=X(x)T(t)$ نرى أن:

$$u=c_1c_2e^{kx}\cdot e^{\left(\frac{k-1}{2}\right)t}\Rightarrow u=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,e^{k_nx+\frac{1}{2}(k_n-1)t}$$

حيث إن $h_n = c_1c_2$ و $k = k_n$.

لنأخذ الآن الشرط الجانبي المعطى بعين الاعتبار، فيتضح أن:

$$3e^{-5x} - 2e^{-3x} = h_1e^{k_1x} + h_2e^{k_2x} \Rightarrow h_1 = 3, k_1 = -5, h_2 = -2, k_2 = -3$$

وهكذا فإن الحل المطلوب للمعادلة المعطاة هو:

$$u = 3e^{-5x} \cdot e^{-3t} + (-2)e^{-3x} \cdot e^{-2t} \Rightarrow u = 3e^{-(5x+3t)} - 2e^{-(3x+2t)}$$

مسألة 11: حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية باستخدام طريقة فصل المتحولات:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

الحل: لنفرض أن $u(x,y) = X(x)T(t)$ حل للمعادلة المعطاة، عندئذٍ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX}{dx}T \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2X}{dx^2}T \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dT}{dt}X$$

لنعوض الآن في المعادلة المعطاة فنرى أن:

$$T\frac{d^2X}{dx^2} - 2T\frac{dX}{dx} + X\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2}{X}\frac{dX}{dx} + \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2}{X}\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = k$$

وهكذا لدينا:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2}{X}\frac{dX}{dx} = k \Rightarrow (D^2 - 2D - k)X = 0$$

ومن ثمّ لنضع $m^2 - 2m - k = 0$ فنجد أن:

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4k}}{2} \Rightarrow m = 1 \pm \sqrt{1 + k}$$

وعلى هذا يتضح أن:

$$X = c_1e^{(1+\sqrt{1+k})x} + c_2e^{(1-\sqrt{1+k})x}$$

بالإضافة إلى ذلك، لدينا:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -k \Rightarrow \frac{dT}{T} = -k\,dt$$

بالمكاملة نحصل على:

$$\ln T = -kt + \ln c_3 \Rightarrow \ln\frac{T}{c_3} = -kt \Rightarrow T = c_3e^{-kt}$$

وعليه فإن حل المعادلة المعطاة يُعطى على النحو الآتي:

$$u(x,t) = \left(c_1e^{(1+\sqrt{1+k})x} + c_2e^{(1-\sqrt{1+k})x}\right)(c_3e^{-kt})$$

مسألة 12: أوجد الحل لمعادلة التوصيل الحراري:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

في كل نقطة من نقاط المنطقة المحدودة $0 < x < 3,\ t > 0$ التي تحقق الشرطيّن الحديّن $u(0,t) = 0$ $u(3,t) = 0$ والشرط الابتدائي: $u(x,0) = 5\sin 4\pi x$.

الحل: لنفرض أن $u(x,t) = X(x)T(t)$ حل لمعادلة التوصيل الحراري المعطاة، عندئذٍ بتطبيق طريقة فصل المتحولات نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$\frac{dT}{dt} = 2KT, \qquad \frac{d^2X}{dx^2} = KX$$

حيث إن $K = 2$. والآن لدينا معادلة مرتبطة بالمتحول T حلها العام من الشكل:

$$T = Ae^{2Kt}$$

ومن الواضح أن المتحول T يتزايد أُسّياً بتزايد t وذلك في حال أن الثابت K موجباً، كما أنه يتناقص عندما يكون K سالباً. إذا كان K سالباً وليكن $K = -\lambda^2$ فرضاً، فعندئذٍ:

$$T = Ae^{-2\lambda^2 t}$$

ومن ثَمّ تصبح المعادلة التفاضلية العادية على الشكل:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$

ويكون حلها:

$$X(x) = B\cos\lambda x + C\sin\lambda x$$

وعلى هذا نرى أن الحل العام هو:

$$u(x,t) = X(x)T(t) = (B\cos\lambda x + C\sin\lambda x)(e^{-2\lambda^2 t})$$

حيث إن $D = AB$ و $E = AC$. ولتحديد الثوابت نستفيد من الشروط الابتدائية والحدية المعطاة. فمن خلال التعويض عن الشرط $u(0,t) = 0$ في الحل العام نجد:

$$(D\cos 0 + E\sin 0)\, e^{-2\lambda^2 t} = 0$$

بما أن $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$ فينتج أن: $D = 0$. ولكن لدينا شرط آخر $u(3,t) = 0$، بالتعويض نحصل على: $E\sin(3\lambda)\, e^{-2\lambda^2 t} = 0$.

ومن هذا يتضح أنه لا يمكن أن نقبل بأن الثابت E معدوماً، لأنه سيكون عندئذٍ الحل العام حلاً غير نظامي $u = 0$. ولهذا يبقى الاستنتاج الوحيد المعقول هو $\sin(3\lambda) = 0$، بمعنى $3\lambda = n\pi$، حيث إن

كما أن:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X \implies X(x) = B\cos\lambda x + C\sin\lambda x$$

وعلى هذا نرى أن الحل العام هو:

$$u(x,t) = X(x)T(t) = (B\cos\lambda x + C\sin\lambda x)(e^{-2\lambda^2 t})$$

حيث إن $D = AB$ و $E = AC$. والآن لتحديد الثوابت نستفيد من الشروط الابتدائية والحدية المعطاة.

فمن خلال التعويض عن الشرط $u(0,t) = 0$ في الحل العام نجد:

$$(D\cos 0 + E\sin 0)e^{-2\lambda^2 t} = 0$$

بما أن $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$ فينتج أن $D = 0$. ولكن بالتعويض عن $u(3,t) = 0$، فنحصل على $E\sin(3\lambda)\,e^{-4\lambda^2 t} = 0$. وعليه فإن $E \neq 0$، لأن الحل العام سيكون عندئذٍ حلاً غير نظامي $u = 0$. ولهذا فإن $\sin(3\lambda) = 0$، بمعنى $3\lambda = n\pi$، حيث إن n عدد صحيح. ولكن الحل العام يحقق الشرطين $u(0,t) = u(3,t) = 0$، أي أن:

$$u(x,t) = E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) e^{-\frac{2n^2\pi^2 t}{9}}$$

حيث كتبنا E_n عوضاً عن E للدلالة على أن الثابت يمكن أن يأخذ قيماً أخرى تبعاً لقيم n، وباستخدام الشرط $u(x,0) = 5\sin(4\pi x)$، يمكن الحصول على قيمة n، وذلك بجعل الحل العام منسجماً مع الشرط الابتدائي، بمعنى:

$$u(x,0) = E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = 5\sin(4\pi x)$$

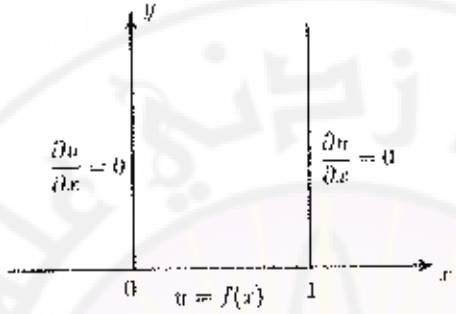
وهكذا فمن أجل $n = 12$ نجد أن $E_{12} = 5$. ويكون الحل بشكله النهائي عندئذٍ هو:

$$u(x,t) = 5\sin\left(\frac{12\pi x}{3}\right) e^{-\frac{2(12)^2\pi^2 t}{9}} = 5\sin(4\pi x)\,e^{-32\pi^2 t}$$

مسألة 15: حل معادلة لابلاس بغية تحديد درجة الحرارة الثابتة $u(x,y)$ في صفيحة شبه غير محدودة $0 \le x \le 1,\ y \ge 0$ ، وذلك إذا علمت أن الجانبين الأيمن والأيسر لهذه الصفيحة معزولان عن بعضهما، ودرجة الحرارة في الجانب الأسفل معطاة بدلالة التابع $f(x)$. بالإضافة إلى ذلك، يجب أخذ العلم أيضاً بأنه من المفروض أن يكون الحل محدوداً.

الحل: لنكتب مبدئياً المسألة على شكل مسألة قيم حدية مع مراعاة التمثيل الرياضي الدقيق للشروط الحدية المعطاة. بما أن جانبي الصفيحة $x = 0$ و $x = 1$ معزولان عن بعضهما، فإن نسبة تغيّر درجة الحرارة على طرفي جانبي الصفيحة تكون عندئذٍ معدومة، بمعنى أن $\partial u/\partial x = 0$ وذلك في حال $x =$

$0,0 < y < \infty$ وفي حال $x = 1, 0 < y < \infty$. كما أن هناك شرطاً حدياً آخر وهو أن الجانب الأسفل نعطى بدلالة التابع $f(x)$ ، أي إن $u(x,0) = f(x)$. أما فيما يتعلق بالشرط الأخير فيبدو هذا الشرط أقل وضوحاً، وذلك بما أنه من المفروض أن يكون الحل محدوداً، بالتالي فإنه لا يتزايد، وهذا بدوره يقتضي أن $u(x,y) \to 0$ عندما $y \to \infty$. انظر الشكل أدناه:



لنفرض أن $u(x,t) = X(x)T(t)$ حل للمعادلة لابلاس، فبتطبيق طريقة فصل المتحولات نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$X'' = -\lambda^2 X, \qquad Y'' = \lambda^2 Y$$

حيث إننا عددنا هنا ثابت الفصل $K = -\lambda^2$. وبحل هاتين المعادلتين نرى أن:

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \qquad Y = C\,e^{\lambda y} + D\,e^{-\lambda y}$$

وهكذا يكون عندئذٍ الحل العام:

$$u(x,y) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(C\,e^{\lambda y} + D\,e^{-\lambda y})$$

والآن لنعوض الشروط الابتدائية المعطاة في الحل العام، لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (-\lambda A\sin\lambda x + \lambda B\cos\lambda x)(C\,e^{\lambda y} + D\,e^{-\lambda y})$$

ولكن $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = 0$، أي إن $\lambda B(C\,e^{\lambda y} + D\,e^{-\lambda y}) = 0$ وذلك من أجل جميع قيم y، ومن هذا يتضح أن احتمال أن يكون $y = 0$ يبقى مرفوضاً، وذلك لأن الحل الناتج عندئذٍ $u = 0$، وهذا حل غير نظامي. ولهذا نفرض أن $B = 0$؛ ومن المعلوم أن $\frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0$، بالتالي نجد:

$$(-\lambda A\sin\lambda)(C\,e^{\lambda y} + D\,e^{-\lambda y}) = 0$$

كما أن اختيار $A = 0$ يؤدي إلى أن $u = 0$، لذلك من المفروض أن نجعل $\sin\lambda = 0$، ولهذا فإن $\lambda = n\pi$، حيث إن n عدد صحيح موجب. وهكذا إلى هذا الحد نرى أن:

$$u(x,y) = A\cos n\pi x\,(C\,e^{n\pi y} + D\,e^{-n\pi y}) = \cos n\pi x\,(E\,e^{n\pi y} + F\,e^{-n\pi y})$$

وبما أننا نبحث عن حل معادلة لابلاس في منطقة شبه غير محدودة، فهذا يعني أن قيمة y تتزايد لدرجة غير معروفة، وسوف يتزايد عندئذ الحل الناتج $u(x,y)$ أيضاً وفقاً لتزايد الحد $e^{n\pi y}$. ولكن لدينا بالفرض أن الحل يجب أن يكون محدوداً، ولهذا من المفروض أن نجعل الثابت E مساوياً الصفر كي يبقى هذا الشرط محققاً.

كما نستخدم طريقة سلاسل فوريه لدراسة الشرط الحدي الأخير:

$$u(x,0) = f(x)$$

لذلك نكتب الحل الناتج باعتباره مجموع حلول مع مراعاة أن $E = 0$، فنجد:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\pi x)\, e^{-n\pi y}$$

وبالمقارنة مع الشرط الحدي الأخير نحصل على:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\pi x)$$

وهذا تمثيل سلسلة فوريه بدلالة جيب التمام للتابع $f(x)$ المعرّف على المجال $0 < x < 1$، وبما أن التمثيل السابق نصف دوري، فيمكن التعبير عن التابع $f(x)$ بدلالة تابع زوجي دَوْرِيّ دورته 2 ومن ثَمّ بتطبيق نظرية سلسلة فوريه المألوفة، نرى أن:

$$F_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\, dx, \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

مع العلم أن:

$$\frac{F_0}{2} = \int_0^1 f(x)dx$$

وهكذا بإجراء التكاملين السابقين نحصل عندئذٍ على أمثال سلسلة فوريه F_n، ومن ثَمّ بالتعويض عن F_n في الحل الناتج $u(x,y)$، فنكون قد وجدنا الحل المطلوب لمسألة القيم الحدية المعطاة وحددنا درجة الحرارة الثابتة $u(x,y)$ في الصفيحة الموضحة أعلاه.

مسألة 16: لتكن لدينا صَفِيحة مَعْدِنِيّة نصف دائرية ونصف قطرها a. إذا علمت أن درجة الحرارة على طول قطرها الجانبي $0°C$ وعلى مُحيطها $100°C$، وأن $u(r,\theta)$ تُمَثِّل تَوَزُّع درجة الحرارة في حالة الاستقرار ضمن الصفيحة، فاحسب عندئذٍ $u\left(\frac{a}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

الحل: بما أن الصفيحة نصف دائرية الشكل، بالتالي فمن الأفضل أن نعبر عن معادلة انتشار الحرارة باستخدام الإحداثيات القطبية، بمعنى أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \Rightarrow r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

لنفرض أن $u(r,\theta)=R(r)\cdot\emptyset(\theta)$، وبالتعويض في المعادلة السابقة نرى أن:

$$r^2\emptyset\frac{d^2u}{dr^2}+r\emptyset\frac{du}{dr}+R\frac{d^2u}{d\theta^2}=0 \Rightarrow \left(r^2\frac{d^2u}{dr^2}+r\frac{du}{dr}\right)\cdot\emptyset+R\frac{d^2u}{d\theta^2}=0$$

أي أن:

$$\left(r^2\frac{d^2u}{dr^2}+r\frac{du}{dr}\right)/R=-\frac{1}{\emptyset}\frac{d^2u}{d\theta^2}=k \Rightarrow r^2\frac{d^2u}{dr^2}+r\frac{du}{dr}-Rk=0$$

حيث إن k ثابت. وهذه معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة ومن المرتبة الثانية. وهكذا لنضع $r=e^z$، فنحصل على حل المعادلة السابقة على النحو:

$$R=c_1r^{\sqrt{k}}+c_2e^{-\sqrt{k}}$$

ومن ثم لنأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+k\emptyset=0 \Rightarrow \emptyset=c_3\cos\sqrt{k}\,\theta+c_4\sin\sqrt{k}\,\theta$$

وبذلك يتضح أن:

$$u(r,\theta)=(c_1r^{\sqrt{k}}+c_2e^{-\sqrt{k}})(c_3\cos\sqrt{k}\,\theta+c_4\sin\sqrt{k}\,\theta)$$

وبالنظر إلى الشروط الحدية المعطاة:

$$u(r,0)=u(r,\pi)=0, \quad 0<r<a$$
$$u(a,\theta)=f(\theta)=100, \quad 0<\theta<2\pi$$

فيتضح في حال $\theta=0$ أن $u=0$، أي أن:

$$0=\left(c_1r^{\sqrt{k}}+c_2e^{-\sqrt{k}}\right)c_3 \Rightarrow c_3=0; \quad c_1r^{\sqrt{k}}+c_2e^{-\sqrt{k}}\neq 0$$
$$\Rightarrow u(r,\theta)=\left(c_1r^{\sqrt{k}}+c_2e^{-\sqrt{k}}\right)c_4\sin\sqrt{k}\,\theta$$

كما نرى أيضاً أن $u=0$ من أجل $\theta=\pi$، وهذا فإن:

$$0=\left(c_1r^{\sqrt{k}}+c_2e^{-\sqrt{k}}\right)c_4\sin\sqrt{k}\,\pi \Rightarrow \sin\sqrt{k}\,\pi=0=\sin n\pi$$

وبالتالي $\sqrt{k}=n$، وعلى هذا نجد أن:

$$u(r,\theta)=(c_1r^n+c_2e^{-n})c_4\sin n\theta$$

إلا أن $u(r,\theta)$ يبقى محدوداً عندما يسعى r نحو الصفر، ولذلك فإن $c_2=0$، إذاً:

$$u(r,\theta)=c_1c_4r^n\sin n\theta$$

كما يمكن أن نكتب:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot r^n \sin n\theta, \qquad (c_1c_1=b_n)$$

أما في حال أن $r=a$ و $u=100$ فيتضح أن:

$$100=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot a^n \sin n\theta$$

وهذا يعني بدوره أن:

$$b_n\cdot a^n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100\sin n\theta\, d\theta=\frac{200}{n\pi}[1-\cos n\pi]=\frac{200}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

أي أن:

$$b_n=\frac{200}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{200}{n\pi}, & \text{إذا كان } n \text{ عدد فردي}\\ 0, & \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي}\end{cases}$$

وبذلك نرى أن:

$$u(r,\theta)=\frac{400}{n\pi}\sum_{(n=1,3,\dots)}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\theta$$

لنضع $n=2m-1$، فنجد أن:

$$u(r,\theta)=\frac{400}{n\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2m-1}\sin(2m-1)\theta$$

وبالتالي فإن:

$$u\left(\frac{a}{4},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{400}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}$$

مسألة 17: استخدم طريقة تحويلات لابلاس لإيجاد حل المعادلة الموجية أحادية البعد:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\sin(\pi x), \quad 0<x<1, \quad t>0$$

التي يحقق حلها العام الشروط الجانبية:

$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0, \qquad u(0,t)=0, \qquad u(1,t)=0$$

الحل: لنأخذ تحويلات لابلاس للمعادلة المعطاة مع مراعاة الشروط الابتدائية، فنرى أن:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=s^2U(x,s)-s\,u(x,0)-u_t(x,s)-\frac{\sin\pi x}{s}=s^2U(x,s)-\frac{\sin\pi x}{s}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل:

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - s^2U(x,s) = -\frac{\sin \pi x}{s}$$

إذاً لدينا معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة ذات أمثال ثابتة، وحلها:

$$U(x,s) = U_h(x,s) + U_p(x,s)$$

حيث إن $U_h(x,s) = c_1e^{sx} + c_2e^{-sx}$ الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة، كما أن:

$$U_p(x,s) = A\cos \pi x + B\sin \pi x$$

هو حل خاص للمعادلة غير المتجانسة. ولتحديد الثابتين A و B نحسب المشتقات:

$$\frac{dU_p(x,s)}{dx} = -\pi A\sin \pi x + \pi B\cos \pi x\,, \quad \frac{d^2U_p(x,s)}{dx^2} = -\pi^2 A\cos \pi x + \pi^2 B\sin \pi x$$

وعليه فإن:

$$\frac{d^2U_p(x,s)}{dx^2} - s^2U_p(x,s) = (-s^2 - \pi^2)[A\cos \pi x + B\sin \pi x] = -\frac{\sin \pi x}{s}$$

وبالمطابقة الآن بين طرفي هذه المعادلة فنحصل أن:

$$-(s^2 + \pi^2)A = 0, \qquad -(s^2 + \pi^2)B = -\frac{1}{s} \Rightarrow A = 0, \qquad B = \frac{1}{s(s^2 + \pi^2)}$$

وهكذا نرى أن:

$$U_p(x,s) = \frac{\sin \pi x}{s(s^2 + \pi^2)}$$

وبالتالي فإن:

$$U(x,s) = c_1e^{sx} + c_2e^{-sx} + \frac{\sin \pi x}{s(s^2 + \pi^2)}$$

يمكن تعيين الثابتين c_1 و c_2 بالاستفادة من تحويلات لابلاس للشروط الجانبية المعطاة:

$$0 = U(0,s) = c_1 + c_2, \qquad 0 = U(1,s) = c_1e^s + c_2e^{-s}$$

وهذا يقتضي ضمناً أن $c_1 = c_2 = 0$، وعليه فإن:

$$U(x,s) = \frac{\sin \pi x}{s(s^2 + \pi^2)}$$

ولنأخذ الآن تحويل لابلاس العكسي، فنحصل على الحل المطلوب:

$$u(x,t) = L^{-1}(U(x,s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + \pi^2)}\right)\sin \pi x =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + \pi^2}\right)\sin \pi x = \frac{1}{\pi^2}(1 - \cos \pi t)\sin \pi x$$

حيث تم تفريق الكسر إلى عوامله على النحو الآتي:

$$\frac{1}{s(s^2 + \pi^2)} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + \pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \pi^2}\right)$$

تمارين غير محلولة

1- حدد فيما إذا كانت المعادلات التفاضلية الجزئية الآتية خطية أم غير خطية، ومن ثم عين مرتبة كل معادلة مع تسمية المتحولات المستقلة وغير المستقلة.

$$(i)\ \frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (ii)\ x^2\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=2y^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (iii)\ u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=xyz$$

$$(iv)\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (v)\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$$

2- بيّن فيما إذا كانت المعادلات التفاضلية الجزئية الآتية قطعية زائدية أو قطعية مكافئة أو قطعية ناقصية.

$$(i)\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=0 \qquad (ii)\ \frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(iii)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (iv)\ x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$(v)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+4u=2x-3y$$

3- أثبت أن التابع $u(x,t)=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right)$ يحقق للمعادلة الموجية أحادية البعد والشرطين:

$$u(x,t)=u_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$$

4- بيّن أن $u(x,y)=x^2+f(y^3-x^3)$، f تابع اختياري، هو الحل العام للمعادلة:

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^2\frac{\partial u}{\partial y}=2xy^2$$

ومن ثمّ أوضح أنه في حال $u(x,0)=x^2+e^{-x^3}$ ، $u(0,y)=e^{y^3}$ فإن: $u(x,y)=x^2+e^{y^3-x^3}$

5- أوجد الحل العام $u(x,t)$ للمعادلة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$

ومن ثمّ حدد الحل الخاص الذي يحقق الشرط $u(x,0)=x^2$.

6- حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy$

وذلك بالاعتماد على مفهوم طريقة الخصائص، حيث إن $z(x,y)$ يأخذ الشكل:

$z=f(s)$ عندما: $x=s$ و $x=1-s$.

7- استخدم طريقة فصل المتحولات لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial u}{\partial x}=4\frac{\partial u}{\partial y}$

التي يحقق حلها العام الشرط: $u(0,y)=8e^{-3y}$.

8- حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

باستخدام التحويلات $v=x+y$ و $z=2x-y$.

9- استخدم طريقة الخصائص لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية: $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2$

التي يحقق حلها العام مايلي: $u(x,y)=\begin{cases}1+x^2, & y=0\\ 1+y^2, & x=0\end{cases}$.

10- أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$

التي يأخذ حلها العام u القيمة y^2 على طول المستقيم $x=1$.

11- حل المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية: $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=1$

إذا علمت أن $u(x,y)=0$ على طول المستقيم $x+y=1$ وذلك من أجل $x>0$.

12- حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,\qquad 0\le r\le a,\qquad -\pi\le\theta\le\pi$$

والتي يحقق حلها العام الشروط:

$$|u(0,\theta)|=0,\ u(a,\theta)=f(\theta),\ u(r,-\pi)=u(r,\pi),\ \frac{\partial u(r,-\pi)}{\partial\theta}=\frac{\partial u(r,\pi)}{\partial\theta}$$

13- أوجد حلاً على شكل سلسلة قوى في جوار النقطة $x_0=0$ لمعادلة بيسل ذات المرتبة 1/3 والمعطاة على النحو الآتي:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$$

14- حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية باستخدام طريقة تحويلات لابلاس:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

التي يحقق حلها العام الشروط الحدية:

$$u(0,t)=0,\qquad u(3,t)=0,\qquad u(x,0)=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x$$

15- لدينا صفيحة معدنية مُربعة الشكل ومُحدّدة بـ $x=0, x=10, y=0, y=10$.

إذا علمت أن جانبيها معزولان حرارياً، وأن درجة حرارة طرفها العلوي يُعطى وفق العلاقة $u(x,10)=x(10-x)$، كما أن درجة الحرارة عند أطرافها الثلاثة الأخرى معدومة، فأوجد درجة حرارة الصفيحة في حالة الاستقرار.

16- حل المعادلة: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0\le x\le l, \quad 0\le y\le l$

التي تحقق الشروط:

$$u(x,0)=u(0,y)=u(l,y)=0, \quad u(x,a)=\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

17- لتكن معادلة التوصيل الحراري معطاة بشكلها العام على النحو الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu+g(x,t)$$

حيث إن b و c ثابتان عدديان، والمطلوب أثبت أنه إذا كان u حلاً للمعادلة السابقة، فإن:

$$v(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$$

يُحقّق معادلة التوصيل الحراري النموذجية:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h(x,t)$$

وذلك عند اختيار قيم مناسبة للثوابت α و β والتابع $h(x,t)$، حيث تجدر الإشارة إلى هذا الإجراء يُساعدنا في تبسيط الكثير من القضايا الصعبة المرتبطة بمفهوم التوصيل الحراري.

18- أوجد مقدار إزاحة نقطة من نقاط خيط مرن مشدود ومُثبت بنقطتين يبعدان عن بعضهما البعض $2l$. وذلك إذا علمت أن حَرَكَة الخيط أساسًا وفي البداية كانت مُتوقّفة وفي حالة ساكنة ومن ثَم بدأت نقاطه بالحَرَكَة بسرعة ابتدائية v، حيث إن: $v=\begin{cases} x/l & ; \quad 0<x<l \\ (2l-x)/l & ; \quad l<x<2l \end{cases}$ كما أن x يُمثل بُعد نقطة من نقاط الخيط عن نهاية الخيط.

19- قضيب معدني معزول حرارياً طوله l ويُحافظ في نهايتيه A و B على درجتي الحرارة 0°C و 100°C على التوالي، فإذا علمت أن انتقال الحرارة فيه بالتوصيل وفي اتجاه واحد وبمعدل ثابت، وأن درجة الحرارة في نهايته B تنخفض فُجأة إلى 0°C ، احسب عندئذٍ درجة الحرارة في نقطة تبعد بمقدار x عن نهايته A في لحظة زمنية ما t .

20- استخدم طريقة تحويلات لابلاس لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+u=0, \quad x>0, \quad t>0$$

التي تحقق الشروط: $u(0,t)=0, \quad t>0$ و $u(x,0)=\sin(x), \quad x>0$

21- استخدم طريقة تحويلات لابلاس لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+u=0, \quad x>0, \quad t>0$$

التي تحقق الشروط: $u(0,t)=0, \quad u(2,t)=0, \quad u(x,0)=3\sin(2\pi x)$

الملحق الأول (A)

A- جداول التحويلات

Tables of Transforms

1-A جدول تحويلات لابلاس

يعطى تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad (1)$$

كما يعطى تحويل لابلاس المعاكس للتابع $\bar{f}(s) = F(s)$ بالعلاقة:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-iT}^{k+iT} e^{st} \bar{f}(s)ds \quad (2)$$

No.	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$\bar{f}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$1 = H(t) = u_0(t)$	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
5	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
7	$\delta(t)$	1
8	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
9	$t\,e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
11	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

12	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
14	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
15	$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
16	$\cos^2 \omega t$	$\frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
17	$\sinh^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}$
18	$\cosh^2 \omega t$	$\frac{s^2-2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}$
19	$H(t-a)=u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
20	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
21	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
22	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
23	$e^{at}\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
24	$e^{at}\cosh \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
25	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
26	$f(t-a)\,H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
27	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
28	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)\,G(s)$
29	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
30	$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
31	$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

32	$t\sinh \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$
33	$t\cosh \omega t$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
34	$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
35	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
36	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
37	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
38	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
39	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
40	$1-\cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
41	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$
42	$f(t+T)=f(t)\ ;\ \forall t$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$
43	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
44	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

وفي حالة المشتق من المرتبة n أي: $f^{(n)}(t)$ فإن تحويل لابلاس له هو:

$$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

2-A جدول تحويلات زد Z

يعطى تحويل زد للمتتالية x_n بالعلاقة:

$$Z\{x_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^{-n}=X(z) \qquad (3)$$

ويعطى تحويل زد المعاكس للتابع $X(z)$ بالعلاقة:

$$Z^{-1}[X(z)]=x_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)z^{n-1}dz=\sum res[X(z)z^{n-1},z_k] \qquad (4)$$

No.	$Z^{-1}[X(z)] = x_n \ (n \geq 0)$	$Z[x_n] = X(z)$
1	k	$\frac{kz}{z-1}$
2	$-k$	$\frac{kz}{z+1}$
3	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	n^2	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$
5	n^3	$\frac{z^3+4z^2+z}{(z-1)^4}$
6	$n^p \ \ (p \in \mathbb{Z}^+)$	$-z\frac{d}{dz}[Z[n^{p-1}]]$
7	$\delta(n) = \begin{cases} 1 & ; \ n=0 \\ 0 & ; \ n \neq 0 \end{cases}$	1
8	$\delta(n-n_0)$	z^{-n_0}
9	$H(n) = \begin{cases} 1 & ; \ n \geq 0 \\ 0 & ; \ n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
10	e^{-an}	$\frac{z}{z-e^{-a}}$
11	a^n	$\frac{z}{z-a}$
12	$(-a)^n$	$\frac{z}{z+a}$
13	$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
14	$\frac{1}{2!}(n+1)(n+2)a^nH(n)$	$\frac{z^3}{(z-a)^3}$
15	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
16	n^2a^n	$\frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}$
17	a^{n-1}	$\frac{1}{z-a}$
18	$(-a)^{n-1}$	$\frac{1}{z+a}$
19	$(n-1)a^{n-2}$	$\frac{1}{(z-a)^2}$

20	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)a^{n-3}$	$\frac{1}{(z-a)^3}$
21	$\sin n\theta$	$\frac{z\sin\theta}{z^2-2z\cos\theta+1}$
22	$\cos n\theta$	$\frac{z(z-\cos\theta)}{z^2-2z\cos\theta+1}$
23	$a^n\sin n\theta$	$\frac{az\sin\theta}{z^2-2az\cos\theta+a^2}$
24	$a^n\cos n\theta$	$\frac{z(z-a\cos\theta)}{z^2-2az\cos\theta+a^2}$
25	$\sinh n\theta$	$\frac{z\sinh\theta}{z^2-2z\cosh\theta+1}$
26	$\cosh n\theta$	$\frac{z(z-\cosh\theta)}{z^2-2z\cosh\theta+1}$
27	$a^n\sinh n\theta$	$\frac{az\sinh\theta}{z^2-2az\cosh\theta+a^2}$
28	$a^n\cosh n\theta$	$\frac{z(z-a\cosh\theta)}{z^2-2az\cosh\theta+a^2}$
29	$a^n x_n$	$X(z/a)$
30	x_{n+1}	$z[X(z)-x_0]$
31	x_{n+2}	$z^2[X(z)-x_0-x_1z^{-1}]$
32	x_{n+3}	$z^3[X(z)-x_0-x_1z^{-1}-x_2z^{-2}]$
33	x_{N-k}	$z^{-k}X(z)$
34	nx_n	$-z\frac{d}{dz}[X(z)]$
35	x_0	$\lim_{z\to\infty}X(z)$
36	$\lim_{n\to\infty}(x_n)$	$\lim_{z\to1}[(z-1)X(z)]$
37	$\binom{n+m-1}{m-1}a^n$	$\frac{z^m}{(z-a)^m}$
38	$(-1)^m\binom{-n-1}{m-1}a^nH(-n-m)$	$\frac{z^m}{(z-a)^m}$

3-A جدول تحويلات فوريه

يعطى تحويل فوريه للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = F(\omega) = \hat{f}(\omega) \qquad (5)$$

وبعطي تحويل فوريه العاكس للتابع $F(\omega)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (6)$$

No.	$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$	$\hat{f}(\omega) = F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$
1	$\frac{1}{t^2+a^2} \quad (a>0)$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$
2	$H(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a+i\omega}$
3	$H(-t)e^{at}$	$\frac{1}{a-i\omega}$
4	$\begin{cases} e^{-at} & ; \ t>0 \\ 0 & ; \text{ما تبقى} \end{cases} \quad (a>0)$	$\frac{1}{a+i\omega}$
5	$\begin{cases} e^{it} & ; \ b<t<c \\ 0 & ; \text{ما تبقى} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-i\omega)c}-e^{(a-i\omega)b}}{a-i\omega}$
6	$\begin{cases} e^{i\omega t} & ; \ -b<t<b \\ 0 & ; \text{ما تبقى} \end{cases}$	$2\frac{e^{ib(a-\omega)}-e^{ib(a-(-\omega)}}{\omega-a}$
7	$\begin{cases} e^{i\omega t} & ; \ b<t<c \\ 0 & ; \text{ما تبقى} \end{cases}$	$t\frac{\sin b(\omega-a)}{a-\omega}$
8	$e^{-a\lvert t\rvert} \quad (a>0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
9	e^{-t^2}	$\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$
10	$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$
11	$e^{\ at^2}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2a}}\cdot e^{-\omega^2/(1a)}$
12	$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}e^{-t^2/(2a)^2} \quad (a>0)$	$e^{-a^2\omega^2}$
13	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
14	$H(t+a)-H(t-a)$ $=\begin{cases} 1 & ; \ -a<t<a \\ 0 & ; \ \lvert t\rvert>a \end{cases}$	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
15	$\begin{cases} 1 & ; \ b<t<c \\ 0 & ; \text{ما تبقى} \end{cases}$	$\frac{e^{-ib\omega}-e^{-ic\omega}}{i\omega}$

16	$\begin{cases} t & ; \quad 0 < t < b \\ 2t - b & ; \quad b < t < 2b \\ 0 & ; \quad \text{باقی جا} \end{cases}$	$\dfrac{-1 + 2e^{ib\omega} - e^{-2ib\omega}}{\omega^2}$
17	$\delta(t-a)$	$e^{-i\omega a}$
18	$e^{iat}f(t)$	$\hat{f}(\omega - a)$
19	$\dfrac{\sin t}{t} \quad (t \neq 0)$	$\begin{cases} \pi & ; \quad -1 < \omega < 1 \\ \pi/2 & ; \quad \omega = \pm 1 \\ 0 & ; \quad \lvert\omega\rvert > 1 \end{cases}$
20	$\dfrac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\begin{cases} \pi & ; \quad \lvert\omega\rvert < a \\ 0 & ; \quad \lvert\omega\rvert > a \end{cases}$
21	$f(at)$	$\dfrac{1}{a}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
22	$f(at + b) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}e^{ib\omega/a}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
23	$f(t - a)$	$e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$
24	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
25	$f'(t)$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
26	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
27	$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx$	$\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{i\omega}\hat{g}(\omega)$
28	$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
29	$f(t)g(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$
30	$f(t)\cos kt$	$\dfrac{1}{2}[\hat{f}(\omega - k) + \hat{f}(\omega + k)]$
31	$f(t)\sin kt$	$\dfrac{1}{2i}[\hat{f}(\omega - k) + \hat{f}(\omega + k)]$
32	$\begin{cases} \sin kt & ; \quad 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & ; \quad \text{باقی جا} \end{cases}$	$\dfrac{2}{k^2 - \omega^2}[e^{-i\omega\tau}(-i\omega\sin k\tau - k\cos k\tau) + k]$
33	$t^n f(t)$	$i^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega)$
34	$\text{rect}(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\cdot\text{sinc}\left(\dfrac{\omega}{2\pi a}\right)$
35	$\text{sinc}(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\cdot\text{rect}\left(\dfrac{\omega}{2\pi a}\right)$

36	$\operatorname{sech}(at)$	$\frac{\pi}{a}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2a}\right)$
37	1	$2\pi\delta(\omega)$
38	$\delta(t)$	1
39	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
40	$\cos(at)$	$\pi(\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a))$
41	$\sin(at)$	$i\pi(\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a))$
42	$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$
43	$\sin(at^2)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sin\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$
44	t^n	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
45	$\frac{1}{t}$	$-i\pi\operatorname{sgn}(\omega)$
46	$\frac{1}{t^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{da^n}\ln\lvert t\rvert$	$-i\pi\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(\omega)$
47	$\lvert t\rvert^a$	$\frac{2\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(a+1)}{\lvert\omega\rvert^{a+1}}$
48	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lvert\omega\rvert}}$
49	$\operatorname{sgn}(t)$	$2/i\omega$

4-A جدول تحويلات فوريه التجيبي

يعطى تحويل فوريه التجيبي للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_c[f(t)]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt=F_c(\omega)=\hat{f}_c(\omega) \qquad (7)$$

ويعطى تحويل فوريه العاكس للتابع $F(\omega)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_c^{-1}[F_c(\omega)]=f(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (8)$$

No.	$f(t)=\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\}$	$\hat{f}_c(\omega)=F_c(\omega)=\mathcal{F}_c\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{t^2+a^2}\quad(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a\omega}$

2	$\begin{cases} 1 & ; \quad 0 < t < a \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}\sin a\omega}{\sqrt{\pi}\ \omega}$
3	$t^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(a)}{\omega^a} \cos\frac{a\pi}{2}$
4	$e^{-at} \quad (a > 0)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\omega^2}$
5	$e^{-at^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
6	$e^{-t^2/2} \quad (a > 0)$	$e^{-\omega^2/2}$
7	$t^n e^{-at} \quad (a > 0)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{n!}{(a^2+\omega^2)^{n+1}} \times Re(a+i\omega)^{n+1}$
8	$\frac{e^{-t}\sin t}{t}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan\frac{2}{\omega^2}$
9	$J_0(at) \quad (a > 0)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-\omega^2}} H(a-\omega)$
10	$\begin{cases} \cos t & ; \quad 0 < t < a \\ 0 & ; \quad \text{عدا ذلك} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega} + \frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega}\right]$
11	$\cos at^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
12	$\sin at^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
13	$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ H(a-\omega)$
14	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}_c(\omega) + \beta \hat{g}_c(\omega)$
15	$f'(t)$	$\omega \hat{f}_s(\omega) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} f(0)$
16	$f''(t)$	$-\omega^2 \hat{f}_c(\omega) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} f'(0)$
17	$\frac{1}{2}\int_0^\infty [f(\lvert t-x\rvert) + f(\lvert t+x\rvert)] \cdot g(x)dx$	$\hat{f}_c(\omega)\hat{g}_c(\omega)$

5-A جدول تحويلات فوريه الجيبي

يعطى تحويل فوريه الجيبي للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt = F_s(\omega) = \hat{f}_s(\omega) \qquad (9)$$

ويعطى تحويل فوريه المعاكس للتابع $F(\omega)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] = f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (10)$$

No.	$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]$	$\hat{f}_s(\omega) = F_s(\omega) = \mathcal{F}_s[f(t)]$
1	$\frac{1}{t^2+a^2} \quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\omega}$
2	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
3	$\frac{1}{t^{3/2}}$	$2\sqrt{\omega}$
4	$\begin{cases}1 & ; \ 0<t<a \\ 0 & ; \ \text{باقي الحالات}\end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$
5	$t^{a-1} \quad (0<a<1)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\omega^a}\sin\frac{a\pi}{2}$
6	$e^{-at} \quad (a>0)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$
7	$\frac{e^{-at}}{t} \quad (a>0)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\arctan\frac{\omega}{a}$
8	$te^{-t^2/2} \quad (a>0)$	$\omega e^{-\omega^2/2}$
9	$te^{-at^2} \quad (a>0)$	$\frac{\omega}{(2a)^{3/2}}e^{-\omega^2/4a}$
10	$t^n e^{-at} \quad (a>0)$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n!}{(a^2+\omega^2)^{n+1}}\times Im(a+i\omega)^{n+1}$
11	$\begin{cases}\sin t & ; \ 0<t<a \\ 0 & ; \ \text{باقي الحالات}\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega}-\frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega}\right]$
12	$\frac{\cos at}{t} \quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}H(\omega-a)$
13	$\arctan\frac{2a}{t} \quad (a>0)$	$\sqrt{2\pi}\frac{\sin a\omega}{\omega}e^{-a\omega}$
14	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha\hat{f}_s(\omega)+\beta\hat{g}_s(\omega)$
15	$f'(t)$	$-\omega\hat{f}_c(\omega)$

16	$f''(t)$	$-\omega^2 \hat{f}_s(\omega) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\omega f(0)$
17	$\frac{1}{2}\int_0^\infty [f(\lvert t-x\rvert) + f(\lvert t+x\rvert)] \cdot g(x)dx$	$\hat{f}_s(\omega)\hat{g}_s(\omega)$

6-A جدول تحويل هلبرت

يعطى تحويل هلبرت للتابع $u(t)$ بالعلاقة:

$$\mathcal{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau = \hat{u}(t) \qquad (11)$$

No.	$u(t) = \mathcal{H}^{-1}[\hat{u}(t)]$	$\mathcal{H}[u(t)] = \hat{u}(t)$
1	$u(t) = -\frac{1}{\pi t} * \hat{u}(t)$	$\hat{u}(t) = \frac{1}{\pi t} * u(t)$
2	$a\,u_1(t) + b\,u_2(t)$	$a\mathcal{H}[u_1(t)] + b\mathcal{H}[u_2(t)]$
3	$u(at) \quad ; \quad a > 0$	$\hat{u}(at)$
4	$u(-at) \quad ; \quad a > 0$	$-\hat{u}(-at)$
5	$u(t-a)$	$\hat{u}(t-a)$
6	$u(bt-a)$	$\hat{u}(bt-a)$
7	$\sin(at)$	$-\cos(at)$
8	$\cos(at)$	$\sin(at)$
9	$e^{i\omega t}$	$-i\,\mathrm{sgn}(\omega)\, e^{i\omega t}$
10	e^{-it}	ie^{-it}
11	$\frac{1}{t^2+1}$	$\frac{t}{t^2+1}$
12	$\frac{a}{a^2+t^2}$	$\frac{t}{t^2+a^2}$
13	e^{-t^2}	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} D_+(t)$ دالة دوسون $= -e^{-t^2}\mathrm{erfi}(t)$
14	$e^{-\pi t^2} \quad ; \quad \omega = 2\pi\tau$	$2\int_0^\infty e^{-\pi\tau^2} \sin(\omega t)\, d\tau$
15	$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-\cos(t)}{t}$
16	تابع المستطيل $\Pi(t) = \mathrm{rect}(t)$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{t+1/2}{t-1/2}\right\rvert$

17	$\prod_{2a}(t)$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\|\frac{t+a}{t-a}\right\|$
18	$\prod_{2a}(t)\,\mathrm{sgn}(t)$	$-\frac{1}{\pi}\ln\left\|1-\left(\frac{a}{t}\right)^2\right\|$
19	$t\prod_{2a}(t)\,\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\|1-\left(\frac{a}{t}\right)^2\right\|$
20	$\begin{cases}1-\left\|\frac{t}{a}\right\| & ;\ \|t\|\le a\\ 0 & ;\ \|t\|>a\end{cases}$	$-\frac{1}{\pi}\left\{\ln\left\|\frac{t-a}{t+a}\right\|+\frac{t}{a}\ln\left\|\frac{t^2}{t^2-a^2}\right\|\right\}$
21	$1-\left(\frac{t}{a}\right)^2\ ;\ \|t\|\le a$	$\frac{-1}{\pi}\left\{\left[1-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right]\ln\left\|\frac{t-a}{t+a}\right\|-\frac{2t}{a}\right\}$
22	$e^{-a\|t\|}\ ;\ \omega=2\pi\tau$	$2\int_0^\infty \frac{2a}{a^2-\omega^2}\sin(\omega t)\,d\tau$
23	$\mathrm{sgn}(t)e^{-a\|t\|}\ ;\ \omega=2\pi\tau$	$2\int_0^\infty \frac{2a}{a^2-\omega^2}\cos(\omega t)\,d\tau$
24	$\frac{\sin(at)}{at}$	$\frac{\sin^2(at/2)}{at/2}=\frac{1-\cos(at)}{at}$
25	$a\ ;\ a=\mathrm{constant}$	$0=\mathrm{zero}$
26	$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
27	$\frac{1}{\pi t}$	$-\delta(t)$
28	$\delta'(t)$	$-\frac{1}{\pi t^2}$
30	$\frac{1}{\pi t^2}$	$\delta'(t)$
31	$\delta''(t)$	$\frac{2}{\pi t^3}$
32	$\frac{1}{\pi t^3}$	$-0.5\,\delta''(t)$
33	$\delta'''(t)$	$-\frac{6}{\pi t^4}$
34	$\frac{1}{\pi t^4}$	$\frac{1}{6}\delta'''(t)$
35	$u(t)\delta(t)$	$\frac{u(0)}{\pi t}$
36	$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}*\frac{1}{\pi t}=-\delta(t)$

37	$\delta'(t) * \delta(t) = \delta'(t)$	$\frac{1}{\pi t^2} * \frac{1}{\pi t} = -\delta'(t)$
38	$\delta'(t) * \delta'(t) = \delta''(t)$	$\frac{1}{\pi t^2} * \frac{1}{\pi t^2} = -\delta''(t)$
39	$\delta'''(t) * \delta(t) = \delta'''(t) = \delta''(t) * \delta'(t)$	$\frac{6}{\pi t^4} * \frac{1}{\pi t} = \delta'''(t) = \frac{2}{\pi t^3} * \frac{1}{\pi t^2}$
40	$X_{[a,b]}(t)$	$\frac{1}{\pi} \ln\left\lvert\frac{t-a}{t-b}\right\rvert$
41	$u'(t) = -\frac{1}{\pi t} * \hat{u}'(t)$	$\hat{u}'(t) = \frac{1}{\pi t} * u'(t)$
42	$u'(t) = \left[\frac{d}{dt}\frac{-1}{\pi t}\right] * \hat{u}(t)$	$\hat{u}'(t) = \left[\frac{d}{dt}\frac{1}{\pi t}\right] * u(t)$
43	$u_1(t) * u_2(t)$	$-\hat{u}_1(t) * \hat{u}_2(t)$
44	$u_1(t) * \hat{u}_2(t)$	$\hat{u}_1(t) * u_2(t)$
45	$\int u(\tau)\, u(t-\tau) d\tau$	$-\int \hat{u}(\tau)\, \hat{u}(t-\tau) d\tau$
46	$t\, u(t)$	$t\, \hat{u}(t) - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) d\tau$
47	$u(t) = x\left[\frac{c}{bt+a}\right]$	$\hat{u}\left[\frac{c}{bt+a}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t} dt$
48	$u(t) = x\left[a + \frac{b}{t}\right]$	$\frac{b}{a}\left\{\hat{u}\left[a + \frac{b}{t}\right] - \hat{u}(a)\right\}$
49	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\frac{1-\cos(at)}{t} = \frac{\sin^2(at/2)}{t/2}$
50	$\frac{\cos(at)}{t}$	$-\pi\delta(t) + \frac{\sin(at)}{t}$
51	$\frac{\sin(at)}{t^2}$	$-a\pi\delta(t) + \frac{1-\cos(at)}{t^2}$
52	$\frac{\cos(at)}{t^2}$	$a\delta'(t) - \frac{a}{t} + \frac{\sin(at)}{t^2}$
53	$\frac{\sin(at)}{t^3}$	$a\pi\delta'(t) - \frac{a^2}{2t} + \frac{1-\cos(at)}{t^3}$
54	$\frac{\cos(at)}{t^3}$	$-\frac{\pi}{2}\delta''(t) + \frac{\pi a^2}{2}\delta(t) - \frac{a}{t^2} + \frac{\sin(at)}{t^3}$
55	$\cos^2(\omega t)$	$0.5\sin(2\omega t)$
56	$\sin^2(\omega t)$	$-0.5\sin(2\omega t)$
57	$\cos^3(\omega t)$	$\frac{3}{4}\sin(\omega t) + \frac{1}{4}\sin(3\omega t)$

58	$\sin^3(\omega t)$	$-\frac{3}{4}\cos(\omega t)+\frac{1}{4}\cos(3\omega t)$
60	$\cos^4(\omega t)$	$\frac{1}{2}\sin(2\omega t)+\frac{1}{8}\sin(4\omega t)$
61	$\sin^4(\omega t)$	$-\frac{1}{2}\sin(2\omega t)+\frac{1}{8}\sin(4\omega t)$
62	$\cos^5(\omega t)$	$\frac{5}{8}\sin(2\omega t)+\frac{5}{16}\sin(3\omega t)+\frac{1}{16}\sin(5\omega t)$
63	$\cos^6(\omega t)$	$\frac{15}{32}\sin(2\omega t)+\frac{6}{32}\sin(4\omega t)+\frac{1}{32}\sin(6\omega t)$
64	$\cos(at+\phi)\cos(bt+\psi)$ $0<a<b\ ;\ \phi,\psi=\text{constant}$	$\cos(at+\phi)\sin(bt+\psi)$



جدول المصطلحات العلمية

English language	Langue Français	باللغة العربية
A		
Absolute convergence	Convergence absolue	تقارب مطلق
Analytic function	Fonction analytique	تابع تحليلي
Argand's diagram	Diagramme d'Argand	مخطط أرجاند
Argument of a complex number	Argument d'un nombre complexe	عمدة أو زاوية عدد عقدي
B		
Bessel functions	Fonctions de Bessel	تابع بسل
Bessel's equation	L'équation de Bessel	معادلة بيسل
Bessel's interpolation formula	La formule d'interpolation de Bessel	صيغة بيسل للاستقراء
Beta function	Fonction bêta	تابع بيتا
Bilinear transformation	Transformation bilinéaire	تحويل ثنائي الخطية
C		
Carteslan coordinates	Coordonnées cartésiennes	إحداثيات ديكارتية
Cauchy's convergence principle	Principe de convergence de Cauchy	مبدأ تقارب كوشي
Cauchy's Integral formula	La formule intégrale de Cauchy	صيغة كوشي التكاملية
Cauchy's Integral theorem	Théorème intégral de Cauchy	نظرية كوشي التكاملية
Cauchy-Reimann equations	Équations de Cauchy-Riemann	شرطا كوشي ـ ريمان
Circle of convergence	Cercle de convergence	دائرة التقارب
Clairaut's equation	Équation de Clairaut	معادلة كليروت
Complex analysis	Analyse complexe	تحليل عقدي
Comptex Fourier integral	Intégrale de Fourier complexe	تكامل فوريه العقدي

Fourier sine series	Série sinus de Fourier	متسلسلة فوريه الجيبية
Fourier sine transforms	Le sinus de Fourier transforme	تحويل فوريه الجيبي
Fourier transforms	Transformes de Fourier	تحويلات فوريه
Fresnel integrals	Intégrales de Fresnel	تكامل فرينيل
G		
Gamma function	Fonction gamma	تابع غاما
Generalized Fourier series	Série de Fourier généralisée	متسلسلة فوريه العامة
Generating function	Fonction génératrice	التابع المولد
Geometric series	Série géométrique	متسلسلة هندسية
Gibbs phenomenon	Phénomène Gibbs	ظاهرة جيبس
Green's theorem in the plane	Le théorème de Green dans le plan	نظرية غرين في المستوى
H		
Half-range expansions	Expansions de demi-intervalle	نشر نصف المدى
Harmonic analysis	Analyse harmonique	تحليل توافقي
Harmonic function	Fonction harmonique	تابع توافقي
Heaviside expansions	Expansions Heaviside	نشر هيفيسايد
Heaviside function	Fonction Heaviside	تابع هيفيسايد
Hilbert Transforms	Transformes of Hilbert	تحويلات هلبرت
Hyperbolic cosine	Cosinus hyperbolique	التجب القطعي
Hyperbolic functions	Fonctions hyperboliques	التوابع القطعية
Hyperbolic sine	Sinus hyperbolique	الجيب القطعي
I		
Image of a point	Image d'un point	صورة نقطة
Imaginary axis	Axe imaginaire	المحور التخيلي
Imaginary part	Partie imaginaire	الجزء التخيلي

Imaginary unit	Unité imaginaire	الواحدة التخيلية
Impulse function	Fonction d'impulsion	تابع النبضة (هيفيساید)
Inequality	Inégalité	متراجحة
Infinite series	Série infinie	متسلسلة غير منتهية
Initial value problems	Problèmes de valeur initiale	مسألة القيمة الابتدائية
Inverse cosine	Cosinus inverse	التجيب العكسي
Inverse cotangent	Cotangente inverse	التظل العكسي
Inverse Fourier cosine transform	Transformée en cosinus de Fourier inverse	تحويل فوريه التجيبي العكسي
Inverse Fourier sine transform	Transformée sinus de Fourier inverse	تحويل فوريه الجيبي العكسي
Inverse Fourier transform	Transformée de Fourier inverse	تحويل فوريه العكسي
Inverse hyperbolic function	Fonction hyperbolique inverse	التابع القطعي العكسي
Inverse hyperbolic sine	Sinus hyperbolique inverse	الجيب القطعي العكسي
Inverse Laplace transforms	Inverse Laplace transformes	تحويل لابلاس المعاكس
Inverse sine	Sinus inverse	الجيب العكسي
Inverse tangent	Tangente inverse	الظل العكسي
Inverse transform	Transformation inverse	التحويل العكسي
Inverse trigonometric function	Fonction trigonométrique inverse	التابع المثلثي العكسي
Isolated critical point	Point critique isolé	نقطة حرجة معزولة
Isolated essential singularity	Singularité essentielle isolée	نقطة شاذة معزولة
Joukowski transformation	Transformation de Joukowski	تحويل جوكوفسكي
Laplace integrals	Intégrales Laplace	تكاملات لابلاس
Laplace transforms	Transformes of Laplace	تحويلات لابلاس

Laplace transforms of derivatives	Laplace transforme des dérivés	تحويل لابلاس للمشتق
Laplace transforms of integral of a function	Laplace transforme l'intégrale d'une fonction	تحويل لابلاس لتكامل تابع
Laplace's equation	L'équation de Laplace	معادلة لابلاس
Laplacian	Laplacien	لابلاسي
Laurent's series	La série de Laurent	متسلسلة لوران
Legendre polynomials	Polynômes de Legendre	كثير حدود ليجندر
Leibnitiz rule	Règle de Leibniz	قاعدة ليبنتز
Linear integral	Intégrale linéaire	تكامل خطي
Linear transformation	Transformation linéaire	تحويل خطي
Linear transformations	Transformations linéaires	تحويلات خطية
Linearity	La linéarité	الخطية
Liouville's theorem	Le théorème de Liouville	نظرية ليوفيل
Logarithmic function	Fonction logarithmique	تابع لغاريتمي
Logarithmic integral formula	Formule intégrale logarithmique	صيغة اللغاريتم التكاملي
M		
Maclaurin's series	Série Maclaurin	متسلسلة ماكلوران
Matrix	Matrice	مصفوفة
Milne-Thomson method	Méthode Milne-Thomson	طريقة ميلن–تومسون
Modulus of a complex number	Module d'un nombre complexe	طويلة عدد عقدي
N		
Non-homogeneous linear partial differential equations	Equations aux dérivées partielles linéaires non homogènes	معادلات تفاضلية جزئية خطية غير متجانسة
Non linear partial differential equation	Equation différentielle partielle non linéaire	معادلات تفاضلية جزئية لا خطية
O		
Odd functions	Fonctions impaires	توابع فردية

Orthogonality	Orthogonalité	التعامد
P		
Parabolic PDEs	PDE paraboliques	معادلات تفاضلية قطعية مكافئة
Parseval's formula	La formule de Parseval	علاقة بارسيفال
Partial derivatives	Dérivées partielles	مشتقات جزئية
Partial differential equations	Équations aux dérivées partielles	معادلات تفاضلية جزئية
Periodic function	Fonction périodique	تابع دوري
Piecewise continuous functions	Fonctions continues par morceaux	توابع مستمرة جزئياً
Point isolated	Point isolé	نقطة معزولة
Poisson's integral formula	Formule intégrale de Poisson	صيغة بواسون التكاملية
Polar form of	Forme polaire de	الشكل القطبي لـ
Power series	Série de puissance	متسلسلة قوى
Power series representation of	Représentation en série de puissance de	التمثيل بـ متسلسلة قوى
Principal axes	Axes principaux	محاور أساسية
Pure imaginary complex numbers	Nombres complexes imaginaires purs	أعداد عقدية تخيلية بحتة
R		
Radius of convergence	Rayon de convergence	نصف قطر التقارب
Residue theorem	Théorème des résidus	نظرية الرواسب
Residues at simple poles	Résidus aux pôles simples	الراسب عند أقطاب بسيطة
Residues at m^{th}-order pole	Résidus au pôle d'ordre	الراسب عند قطب من المرتبة m
Rolle's theorem	Le théorème de Rolle	نظرية رول
Root mean square value	Valeur moyenne de la racine	القيمة المتوسطة للجذر
Roots of a complex number	Racines d'un nombre complexe	جذور العدد العقدي
S		
Scalar multiplication	Multiplication scalaire	الجداء السلمي

Schwarz-Christoffel transformation	Transformation de Schwarz-Christoffel	تحويل شوارتز - كريستوفل
Singular point	Point singulier	نقطة شاذة
Solution of partial differential equations	Solution d'équations aux dérivées partielles	حل معادلات تفاضلية جزئية
Step function	Fonction d'étape	تابع الخطوة (هيفيساید)
T		
Taylor's series	La série de Taylor	متسلسلة تايلور
Transformation	Transformation	تحويل
Triangle inequality	Inégalité de triangle	متراجحة المثلث
Trigonometric series	Série trigonométrique	متسلسلة مثلثية
U		
Uniform convergence	Convergence uniforme	تقارب منتظم
Uniqueness of Laplace transforms	Unicité de Laplace se transforme	وحدانية تحويل لابلاس
Uniqueness of Laurent series	Unicité de la série Laurent	وحدانية متسلسلة لورانت
Uniqueness of power series representation	Unicité de la représentation des séries de puissance	وحدانية التمثيل في متسلسلات القوى
Unit circle	Cercle unitaire	الدائرة الواحدية
Unit function	Fonction de l'unité	تابع الواحدة (هيفيساید)
V		
Validity of series solution	Validité de la solution en série	صلاحية حل المتسلسلة
W		
Wave equation	Équation d'onde	معادلة الموجة (موجة)
Z		
Zero of analytic function	Zéro de la fonction analytique	أصفار تابع تحليلي
Z-transform	Z-transforme	تحويل زد

References المراجع

المراجع العربية

1- د. ش. الأسدي ود. ف. جبور، الرياضيات (5)، كلية الهندسة الميكانيكية، منشورات جامعة حلب، ١٩٨٥.

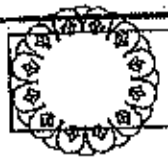
2- د. ح. سلّوطة، الرياضيات للسنة الثانية، الجزء الثاني، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة دمشق، ١٩٨٣.

3- د. م. ن. شقة ود. ع. الشايب ود. ش. أبو عرابي، التحليل (3)، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة دمشق، ٢٠١٤.

4- د. ع. ح. العبد الرزاق، الرياضيات (4)، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة البعث، ٢٠١٥.

المراجع الأجنبية

1. E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10th edition, John Wiley & Sons, INC, 2011.
2. B. S. Grewal, Higher Engineering Mathematics, 42nd edition, Khanna Publishers, 2012.
3. P. V. O'Neil, Advanced Engineering Mathematics, 7th edition, Cengage Learning, 2012.
4. J. Bird, Higher Engineering Mathematics, 7th edition, Routledge, 2014.
5. K. T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3, Springer, 2007.
6. F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 2010.
7. M. Klingspor, Hilbert transform: Mathematical theory and applications to signal processing, PHD, November 2015.
8. A. D. Poularikas, The Hilbert Transform, The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing, Ed., Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
9. L. C. Evans: Partial Differential Equations, 2nd edition. American Mathematical Society GMS 19, 2010.
10. K. F. Riley, M. P. Hobson and S. J. Bence: Mathematical Methods for the Physics and Engineering, 3rd edition, Cambridge University Press, 2006.
11. M. R. Spiegel: Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Theorie und Anwendung. McGraw-Hill Inc. 1991.
12. W. Strauss: Partial Differential Equations, An Introduction. John Wiley, 1992.



اللجنة العلمية

علمية:

أستاذ الدكتور: محمد نور سعد الدين شمة

أستاذ المساعد الدكتور: عماد صالح فتاش

أستاذ المساعد الدكتور: نظير شعبان هلال

فوي:

ستاذ الدكتور: علي كردي

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة
لمديرية الكتب والمطبوعات