



التحليل العقدي





منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل العقدي

الدكتور

محمد صبح

أستاذ في قسم الرياضيات

1432 - 1431 هـ

2011 - 2010 م

جامعة دمشق



الفهرس

7.....المقدمة

9.....الفصل الأول

- 11.....الأعداد العقدية و العمليات عليها
16.....التمثيل الهندسي للأعداد العقدية
19.....الشكل المثلثي للعدد العقدي
27.....جذور الأعداد العقدية

45.....الفصل الثاني

- 48.....نهاية تابع عقدي
55.....استمرار تابع عقدي
59.....اشتقاق تابع عقدي
61.....التابع التحليلي
69.....التوابع التوافقية
72.....بعض التوابع الشهيرة
48.....التوابع العقدية العكسية

101.....الفصل الثالث

- 105.....التكامل العقدي
111.....خواص التكاملات العقدية
116.....نظرية كوشي

151.....الفصل الرابع

- 153.....المتتاليات العقدية وتقاربها

140.....	المتسلسلات العقدية وتقاربها
168.....	متتالية ومتسلسلات التتابع العقدية
176.....	نظرية تايلور
186.....	متسلسلة لوران
205.....	الفصل الخامس
207.....	الأصفار والنقاط الشاذة للتتابع التحليلية
214.....	طرق حساب الرواسب
223.....	نظرية الرواسب
229.....	تطبيقات نظرية الرواسب
271.....	الفصل السادس
280.....	التحويل المحافظ على الزوايا
282.....	بعض التطبيقات العامة
317.....	دليل المصطلحات العلمية
329.....	المراجع

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

التحليل العقدي واحد من أكثر فروع الرياضيات الهامة، فنتأجه تساعد على إثبات نظريات هامة، و تفتح آفاقاً لعدة مفاهيم في مجالات أخرى للرياضيات، وتعتمد كثير من الطرق الفعالة المستخدمة في تطبيقات الرياضيات في الإحصاء و الهندسة و العلوم الأخرى على نظرية التوابع العقدية.

يتألف الكتاب من ستة فصول. تحدثنا في الفصل الأول عن الأعداد العقدية و العمليات عليها و عن التمثيل الهندسي للأعداد العقدية.

و تحدثنا في الفصل الثاني عن مفاهيم النهايات و الاستمرار و المشتقات و التوابع التحليلية و التوافقية.

و تطرقنا في الفصل الثالث إلى التكاملات العقدية و طرق حسابها باستخدام نظرية كوشي التكاملية.

و تطرقنا في الفصل الرابع إلى المتتاليات و المتسلسلات العقدية ثم انتقلنا إلى متسلسلات القوى و متسلسلات تايلور و ماك لوران و أخيراً إلى متسلسلة لوران.

كما تطرقنا في الفصل الخامس إلى نظرية الرواسب و الأقطاب ثم انتقلنا إلى حساب بعض التكاملات الحقيقية التي لا يمكن حسابها إلا باستخدام الرواسب و الأقطاب.

و يتعلق الفصل السادس و الأخير بالتمثيل المطابق ثم انتقلنا إلى التحويل بواسطة التوابع الخطية المختلفة و الكسرية و بقية التوابع البسيطة و أغنيا هذا الفصل كما الفصول السابقة بعدد كبير من المسائل المحلولة.

و ختاماً أمل أن أكون قد وفقت في وضع مادة فيها من الفائدة و الوضوح للقارئ و الله ولي التوفيق.

المؤلف

الفصل الأول

الأعداد العقدية

Complex Numbers

1. الأعداد العقدية و العمليات عليها.
2. التمثيل الهندسي للأعداد العقدية.
3. الشكل المثلثي للعدد العقدي.
4. جذور الأعداد العقدية.



نعلم أنَّ كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بنقطة واحدة على خط مستقيم، و كل نقطة على خط مستقيم تمثل عدداً حقيقياً واحداً، كذلك يمكن تعيين الجذور الحقيقية للمعادلة $x^2 = 1$ و لكن المعادلة $x^2 = -1$ ليس لها جذور حقيقية حيث لا يوجد عدد حقيقي مربعه كمية سالبة لذلك تمَّ إيجاد فكرة العدد العقدي.

1-1 الأعداد العقدية:

تعريف: وحدة العدد التخيلي (Imaginary Unit)

هي العدد الذي مربعه -1 و يرمز لها بالرمز i أي:

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

و بشكلٍ عام $i^{2n} = (-1)^n, i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$ حيث n عدد صحيح،

فمثلاً:

$$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$$

تعريف:

العدد العقدي هو العدد الذي يمكن وضعه بالشكل $x + iy$ حيث x, y عددان

حقيقيان و يرمز له عادة بالرمز $z = x + iy$ نسمي العدد x الجزء الحقيقي

(Real Part) و العدد الحقيقي y الجزء التخيلي (Imaginary Part) للعدد

العقدي z و نكتب:

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z \\ y = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

و إذا كانت $y = 0$ فالعدد يكون حقيقياً و إذا كانت $x = 0$ فالعدد يكون تخيلياً
بختاً أي (Pure Imaginary).

تعريف: مرافق عدد عقدي (Complex Conjugate):

إذا كان $z = x + iy$ فإن مرافق هذا العدد العقدي و الذي نرمز له بالرمز $\bar{z}$ يعطى بالعلاقة التالية: $\bar{z} = x - iy$ ، من هذا التعريف نجد أن:

$$Re\ z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad Im\ z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

1-1-1 حاصل جمع و طرح و ضرب و قسمة الأعداد العقدية:

الأعداد العقدية تخضع لقوانين الجبر العادية بالإضافة إلى أن: $i^2 = -1$ و العدد العقدي $z = x + iy$ يكون مساوياً للصفر إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي $x = 0$ و جزؤه التخيلي $y = 0$.

فإذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن:

$$1) \ z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

$$2) \ z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$$

أي إذا تساوى عددان عقديان فإن جزأيهما الحقيقيين يتساويان و جزأيهما التخيليين يتساويان أيضاً.

$$3) \ z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$4) \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

تعريف: طولية عدد عقدي:

نسمي العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ طولية العدد العقدي

$z = x + iy$ و نرمز له بالرمز $|z|$ و نلاحظ أن:

• $|z| \geq 0$ و ذلك أيًا كان العدد العقدي.

• $|z| = 0$ إذا و فقط إذا كان $z = 0$.

• $|-z| = |\bar{z}| = |z|$

• $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

مثال (1):

اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل $z = x + iy$ و الذي يسمى الشكل الجبري:

1. $z = (1 - i)^3$

2. $z = \frac{1}{i}$

3. $z = \frac{-5+i}{3+11i}$

الحل:

$z = (1 - i)^3 = (1 - i)^2(1 - i)$ (1)

$= (1 - 2i + i^2)(1 - i)$

$= -2i(1 - i) = -2i + 2i^2$

$= -2i - 2 = -2 - 2i$

$z = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$ (2)

$$z = \frac{-5+i}{3+11i} = \frac{-5+i}{3+11i} \cdot \frac{3-11i}{3-11i} \quad (3)$$

$$= \frac{-15+55i+3i+11}{(3)^2+(11)^2} = \frac{-4+58i}{130} = \frac{-2}{65} + \frac{29}{65}i$$

مثال (2):

أوجد طويـلة كل من الأعداد التالية:

$$z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2} \quad (1)$$

$$z_2 = (3 + 2i)^5 \quad (2)$$

$$z_3 = \frac{7}{(2-i)^2} \quad (3)$$

الحل:

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2} = \sqrt{5} \quad (1)$$

$$|3 + 2i| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \quad (2)$$

$$|z_2| = |(3 + 2i)^5| = |3 + 2i|^5 = (\sqrt{13})^5 = 169\sqrt{13}$$

$$|z_3| = \left| \frac{7}{(2-i)^2} \right| = \frac{|7|}{|(2-i)^2|} = \frac{7}{|4-4i-1|} \quad (3)$$

$$= \frac{7}{|3-4i|} = \frac{7}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

مثال (3):

أوجد حل المعادلتين التاليتين:

$$2z + i = 3 - iz \quad (أ)$$

$$2z + |z| = 11 - 8i \quad (ب)$$

الحل:

$$2(x + iy) + i = 3 - i(x + iy) \quad (أ)$$

$$2x + 2yi + i = 3 - ix + y$$

$$2x + (2y + 1)i = 3 + y - xi$$

$$\begin{cases} 2x = 3 + y \\ 2y + 1 = -x \end{cases} \quad \text{و منه:}$$

بحل المعادلتين نجد $x = 1$ و $y = -1$ و منه حل المعادلة هو:

$$z = x + iy = 1 - i$$

$$2(x + iy) + \sqrt{x^2 + y^2} = 11 - 8i \quad (ب)$$

$$2x + \sqrt{x^2 + y^2} + 2yi = 11 - 8i$$

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{x^2 + y^2} = 11 \\ 2y = -8 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

من المعادلة الثانية نجد $y = -4$ ، بالتعويض في المعادلة الأولى نجد:

$$2x + \sqrt{x^2 + 16} = 11$$

و منه يكون:

$$\sqrt{x^2 + 16} = 11 - 2x$$

حيث يجب أن يكون:

$$11 - 2x \geq 0 \quad \text{أي} \quad x \leq \frac{11}{2}$$

نربع طرفي المعادلة:

$$\sqrt{x^2 + 16} = 11 - 2x$$

فنجد:

$$x^2 + 16 = 121 - 44x + 4x^2$$

$$3x^2 - 44x + 105 = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{44+\sqrt{(-44)^2-4(3)(105)}}{2(3)}$$

$$= \frac{44+\sqrt{1936-1260}}{6} = \frac{44+\sqrt{676}}{6} = \frac{44+26}{6} = \frac{35}{3}$$

و هذه القيمة مرفوضة لأنها لا تحقق $x \leq \frac{11}{2}$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{44-26}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

و منه حل المعادلة المطلوب هو:

$$z = x + iy = 3 - 4i$$

مثال (3):

بفرض $z = \frac{13-9i}{(1+2i)^2}$ ، أوجد $|z|$ و $\bar{z}$.

الحل:

$$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$$

$$|z| = \left| \frac{13-9i}{-3+4i} \right| = \frac{|13-9i|}{|-3+4i|} = \frac{\sqrt{169+81}}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{\sqrt{250}}{5} = \frac{\sqrt{(25)(10)}}{5} = \frac{5\sqrt{10}}{5} = \sqrt{10}$$

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{13-9i}{-3+4i} \right)} = \frac{\overline{13-9i}}{\overline{-3+4i}} = \frac{13+9i}{-3-4i}$$

$$= \frac{13+9i}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i}$$

$$= \frac{-39-36+25i}{9+16} = \frac{-75+25i}{25} = -3 + i$$

مثال (4):

حل المعادلة التالية: $z^2 = -16$.

الحل:

بفرض $z = x + iy$ ، عندها يكون:

$$(x + iy)^2 = -16$$

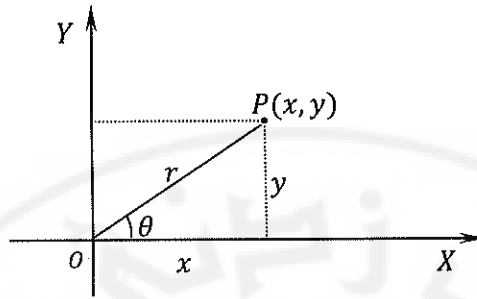
$$x^2 - y^2 + 2xy.i = -16 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية لدينا: إما $x = 0$ أو $y = 0$ ، فإذا كان $y = 0$ فإن $x^2 = -16$ وهذا مستحيل لأن x عدد حقيقي و بالتالي فإن $x = 0$ و هذا يعني أن $-y^2 = -16$ ومنه يكون $y^2 = 16$ إذن: $y = 4$ أو $y = -4$ ، و منه حل المعادلة المطلوب هو:

$$\begin{cases} z = x + iy = 0 + 4i = 4i \\ z = x + iy = 0 + i(-4) = -4i \end{cases}$$

2-1 التمثيل الهندسي للأعداد العقدية:

يمكن تمثيل العدد العقدي $z = x + iy$ في المستوي OXY و الذي يسمى بالمستوي العقدي (Complex Plane) بنقطة P التي إحداثياتها الديكارتية هي x, y بالنسبة للمحورين X, Y على الترتيب حيث المحور X يُعرف بالمحور الحقيقي، و المحور Y يعرف بالمحور التخيلي كما في الشكل (1-1).



الشكل (1-1)

يمكن اعتبار شعاع الموضع $\overrightarrow{OP}$ للنقطة P أنه يمثل العدد العقدي $z = x + iy$ و مما سبق يتضح أن:

1- أي عدد عقدي يمكن تمثيله بنقطة واحدة فقط في المستوي العقدي، كما

أن أي نقطة في هذا المستوي تمثل عدداً عقدياً واحداً فقط.

2- العدد الحقيقي يمثل نقطة على المحور الحقيقي OX و العدد التخيلي

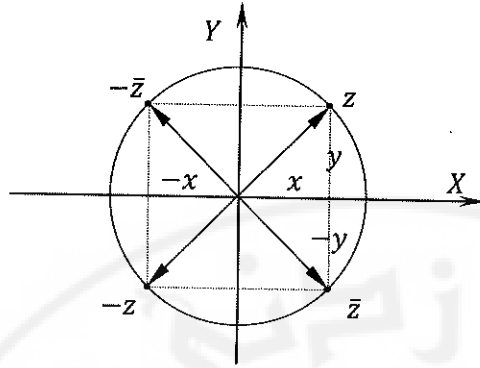
يمثل نقطة على المحور OY .

3- كل من المقادير:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy, -z = -x - iy, -\bar{z} = -x + iy$$

يمثل نقطة في المستوي العقدي كما في الشكل (1-2) و جميعها تقع

على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها $\sqrt{x^2 + y^2}$.



الشكل (1-2)

3-1 الشكل المثلثي (القطبي) للعدد العقدي:

رأينا فيما سبق أن العدد العقدي $z = x + iy$ يمكن تمثيله هندسياً بالشعاع $\overrightarrow{OP}$ الذي طوله $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و الذي يصنع مع المحور OX زاوية θ و يكون:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

و بذلك يتعين العدد العقدي z بدلالة r, θ حيث:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

و يمكن أن نكتب:

$$z = x + iy = r \cdot \cos \theta + i \cdot r \cdot \sin \theta$$

و منه:

$$z = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

و الذي نسميه الشكل المثلثي للعدد العقدي z .

تسمى الزاوية θ سعة العدد العقدي z و نكتب:

$$\arg z = \theta$$

و إذا أخذنا θ بحيث تكون: $-\pi < \theta \leq \pi$ فإن θ في هذه الحالة تسمى السعة الأساسية أو القيمة الأساسية للسعة.

مثال (5):

اكتب الأعداد التالية بالشكل المثلثي:

$$z = i \quad (1)$$

$$z = 1 - i \quad (2)$$

$$z = 2\sqrt{3} - 2i \quad (3)$$

الحل:

$$(1) \text{ لدينا } x = 0 \text{ و } y = 1 \text{ و منه: } r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(2) \text{ لدينا: } x = 1 \text{ و } y = -1 \text{ و منه:}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

هذا يعني أن θ تقع في الربع الرابع و منه: $\theta = \frac{7\pi}{4}$ أي أن:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2})$$

(3) لدينا: $x = 2\sqrt{3}$ و $y = -2$ و منه:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

هذا يعني أن θ تقع في الربع الرابع و منه: $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ أي أن:

$$2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$$

نتيجة:

إذا كان: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ فإن:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

الإثبات:

$$\begin{aligned} z^{-1} = \frac{1}{z} &= \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r} \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

لدينا:

نظرية:

إذا كان z_1, z_2 عددين عقديين بحيث:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

فإن:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)); z_2 \neq 0 \quad (2)$$

البرهان:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad (1)$$

$$= r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$+ i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

و منه نجد:

$$\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \quad (2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos \theta_1 + i \sin \theta_1] [\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

و منه نجد:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

يمكن تعميم حاصل الضرب في النظرية السابقة على أكثر من عددين أي أن:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 \cdots + \theta_n)]$$

و عند وضع:

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

يكون لدينا:

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

و إذا أخذنا $r = 1$ فإن:

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

و هذه العلاقة تسمى بنظرية دو موافر.

مثال (6):

إذا كان: $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ أوجد باستخدام الشكل المثلثي

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ و } z_1 \cdot z_2$$

الحل:

$$z_1 = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad r_1 = 4, \theta_1 = \frac{11\pi}{6}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad r_2 = 2, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

و نعلم أن:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (4)(2) \left[\cos \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 8 \left[\cos \left(\frac{15\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{15\pi}{6} \right) \right] \\ &= 8 \left[\cos \left(2\pi + \frac{3\pi}{6} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{3\pi}{6} \right) \right] \\ &= 8 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = 8i \end{aligned}$$

بالتعويض في العلاقة:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

نجد:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2 \left[\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2 \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

مثال (7):

اكتب العدد العقدي $z = \frac{(1+i)^3}{1+\sqrt{3}i}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل المثلثي و استنتج قيم $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$ كل من

الحل:

لدينا:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^3}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+3i+3i^2+i^3}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+3i-3-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i} \\ z &= \frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2+2\sqrt{3}i+2i-2i^2\sqrt{3}}{1+3} = \frac{-2+2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3})i}{4} = \frac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot i$$

و هو الشكل الجبري، و لإيجاد الشكل المثلثي:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2+2i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]}{\sqrt{4} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]} \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] \end{aligned}$$

و هو الشكل المثلثي للعدد العقدي المفروض و من الشكلين الجبري و المثلثي
يمكن أن نكتب:

$$\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot i$$

ومنه:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \Leftarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

مثال (8):

باستخدام نظرية دو موافر أوجد: $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ و $\cos 3\theta, \sin 3\theta$
بدلالة قوى كل من: $\cos \theta, \sin \theta$.

الحل:

بالتعويض في نظرية دو موافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

نجد من أجل $n = 2$ أن:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

و بالتالي:

$$\cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta + i^2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

و منه نجد:

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

أما من أجل $n = 3$ نجد:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

و بالتالي:

$$\cos^3 \theta + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + 3 \cos^2 \theta i \sin \theta$$

$$+ i^3 \sin^3 \theta = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$+ i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

و منه نجد:

$$\begin{cases} \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \\ \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \end{cases}$$

4-1 جذور الأعداد العقدية:

بفرض $z = r(\cos \theta + i. \sin \theta)$ الشكل المثلثي للعدد العقدي z ، لإيجاد $\sqrt[n]{z}$ أي لإيجاد جميع قيم المقدار $[r(\cos \theta + i. \sin \theta)]^{\frac{1}{n}}$ حيث n هو عدد صحيح موجب نضع:

$$[r(\cos \theta + i. \sin \theta)]^{\frac{1}{n}} = R[\cos \phi + i. \sin \phi]$$

برفع طرفي المعادلة للأس n و تطبيق نظرية دو موافر نجد:

$$r(\cos \theta + i. \sin \theta) = R^n[\cos n\phi + i. \sin n\phi]$$

و نعلم أنه إذا تساوى عدداً عقديان فإن طوليهما يكونان متساويين و سعتيهما تتساويان أو تختلفان عن بعضهما بمضاعفات 2π و منه:

$$\begin{cases} R^n = r \\ n\phi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = r^{\frac{1}{n}} \\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}; k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

و نلاحظ أن قيم ϕ الناتجة تكون مختلفة و عددها n و هي بالتالي تعطي n من

الجذور للقيم $z^{\frac{1}{n}}$ التي هي: $z_k = R \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i. \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$ حيث: $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

إن هذه الجذور تقع على محيط دائرة نصف قطرها $R = r^{\frac{1}{n}}$ و مركزها نقطة الأصل و تشكل رؤوس مضلع نظامي له n ضلع.

مثال (9):

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $z = 4i$.

الحل:

لدينا: $r = \sqrt{16} = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$z_k = 4^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right]; k = 0, 1$$

من أجل $k = 0$ نجد:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

من أجل $k = 1$ نجد:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= -(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \end{aligned}$$

مثال (10):

أوجد الجذور الخمسة للعدد 1.

الحل:

لدينا $z = 1; r = 1; \theta = 0$ ومنه:

$$z_k = 1^{\frac{1}{5}} \left[\cos \frac{0+2k\pi}{5} + i \sin \frac{0+2k\pi}{5} \right]; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$z_0 = 1^{\frac{1}{5}} (\cos 0 + i \sin 0) = 1$$

من أجل $k = 0$ نجد:

من أجل $k = 1$ نجد:

$$z_1 = 1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

من أجل $k = 2$ نجد:

$$z_2 = 1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right) = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

من أجل $k = 3$ نجد:

$$z_3 = 1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} \right) = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$$

من أجل $k = 4$ نجد:

$$z_4 = 1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \right) = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

مثال (11):

أوجد الجذور الأربعة لـ $z = -16i$ و مثلها في المستوي.

الحل:

لدينا: $z = -16i; r = 16; \theta = \frac{3\pi}{2}$ ومنه:

$$z_k = (16)^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{3\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi + 2k\pi}{4} \right) \right]; k = 0, 1, 2, 3$$

من أجل $k = 0$ نجد:

$$z_0 = (16)^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

من أجل $k = 1$ نجد:

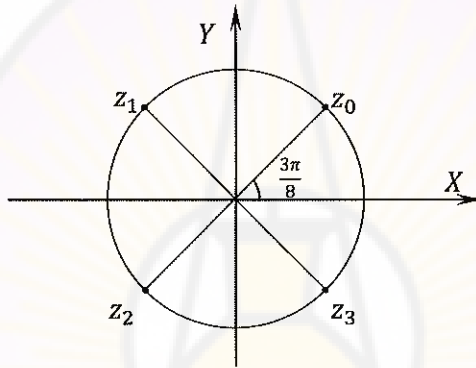
$$\begin{aligned} z_1 &= (16)^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

من أجل $k = 2$ نجد:

$$\begin{aligned} z_2 &= (16)^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{8} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{8} + \pi \right) \right] \\ &= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

من أجل $k = 3$ نجد:

$$\begin{aligned} z_3 &= (16)^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2 \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right) \end{aligned}$$



مثال (12):

أوجد جميع جذور المعادلة: $z^7 - z^4 + z^3 - 1 = 0$.

الحل:

لدينا:

$$\begin{aligned} z^7 - z^4 + z^3 - 1 &= z^4(z^3 - 1) + z^3 - 1 \\ &= (z^4 + 1)(z^3 - 1) \end{aligned}$$

و منه يصبح شكل المعادلة المفروضة: $(z^4 + 1)(z^3 - 1) = 0$ أي:

إما $z^4 + 1 = 0$ أو $z^3 - 1 = 0$ ، وهذا يكافئ: إما $z = \sqrt[4]{-1}$ أو $z = \sqrt[3]{1}$.

من أجل $z = \sqrt[4]{-1}$: لدينا: $r = 1; \theta = \pi$ و منه:

$$z_k = 1^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right]; k = 0, 1, 2, 3$$

من أجل $k = 0$ نجد:

$$z_0 = 1^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

من أجل $k = 1$ فإن:

$$z_1 = 1^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

من أجل $k = 2$ فإن:

$$z_2 = 1^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

من أجل $k = 3$ فإن:

$$z_3 = 1^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

أما من أجل $z = \sqrt[3]{1}$ نجد $r = 1; \theta = 0$ و منه:

$$z_k = 1^{\frac{1}{3}} \left[\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) \right]; k = 0, 1, 2$$

من أجل $k = 0$ فإن:

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

من أجل $k = 1$ فإن:

$$z_1 = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

من أجل $k = 2$ فإن:

$$z_2 = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي فإن جذور المعادلة هي:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$
$$1, \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

5-1 الشكل الأساسي للأعداد العقدية:

إن نشر ماك لوران للتتابع: $e^x, \cos x, \sin x$ هو:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

و بالاعتماد على نشر هذه التتابع يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{و منه:}$$

و هذه العلاقة تسمى علاقة أولر.

ونعلم أنَّ الشكل المثلثي للعدد العقدي z يعطى بالعلاقة:

$$z = r(\cos \theta + i. \sin \theta)$$

ومنه:

$$z = r. e^{i\theta}$$

و هذا الشكل نسميه الشكل الأسّي للعدد العقدي z .

مثال (13):

أثبت صحة العلاقة التالية: $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$.

الإثبات:

الشكل الأسّي للعدد $-1 + i$ هو: $\sqrt{2}. e^{\frac{3\pi}{4}i}$ و $-1 + i = \sqrt{2}. e^{\frac{3\pi}{4}i}$ ومنه:

$$\begin{aligned} (-1 + i)^7 &= (\sqrt{2})^7 \left(e^{\frac{3\pi}{4}i} \right)^7 \\ &= 8\sqrt{2} \left[\cos \frac{21\pi}{4} + i. \sin \frac{21\pi}{4} \right] = 8\sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i. \sin \frac{5\pi}{4} \right] \\ &= 8\sqrt{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i. \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 8\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -8(1 + i) \end{aligned}$$

و هو المطلوب.

6-1 بعض المنحنيات و المجموعات في المستوى العقدي:

تعريف الدائرة و القرص:

بما أن $|z - a|$ هو البعد بين النقطتين z و a في المستوى العقدي فإن المجموعة:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$$

هي دائرة مركزها a و نصف قطرها هو r .

و في حال: $a = 0$ و $r = 1$ فإن $|z| = 1$ والتي نسميها دائرة الوحدة.

و المتباينة: $|z - a| < r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل D و تسمى هذه المجموعة قرصاً دائرياً مفتوحاً.

أما إذا كانت $|z - a| \leq r$ فإن مجموعة النقاط تسمى قرصاً دائرياً مغلقاً و مجموعة النقاط هذه هي عبارة عن مجموعة النقاط الواقعة داخل D و المنحني نفسه.

تعريف:

- نسمي مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة $|z - a| < r$ بجوار النقطة a .
- نقول عن مجموعة النقاط S في المستوى العقدي إنها مجموعة مفتوحة إذا وجد لكل نقطة من S جوار تنتمي كل نقاطه إلى S .
- نقول عن مجموعة النقاط S إنها مترابطة إذا وجد من أجل أي نقطتين من S خط مُصلّعي مؤلف من عدد منتهٍ من القطع المستقيمة يصل بين هاتين النقطتين و يقع بأكمله داخل S .

- نقول عن مجموعة النقاط S إنها منطقة مفتوحة إذا كانت هذه المجموعة مفتوحة و مترابطة. فمثلاً المجموعة: $S = \{z : |z| < 6\}$ هي مجموعة مفتوحة و مترابطة و بالتالي هي منطقة.
- نقول عن مجموعة النقاط S إنها مغلقة إذا كانت متممتها في المستوي العقدي مفتوحة.

مثال (14):

عين في المستوي العقدي المجموعات النقطية التالية:

$$z = \bar{z} \quad (1)$$

$$|z - (1 - 2i)| = 5 \quad (2)$$

الحل:

بفرض $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ يكون:

$$x + iy = x - iy \Rightarrow 2iy = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (1)$$

و هي مجموعة نقاط المحور الحقيقي.

$$|x + iy - (1 - 2i)| = 5 \quad (2)$$

$$|(x - 1) + i(y + 2)| = 5$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

وهي معادلة دائرة في المستوي العقدي مركزها $(1, -2)$ و نصف

قطرها $r = 5$.

مثال (15):

عين مجموعة النقاط في المستوى العقدي الممثلة بالمعادلات التالية:

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$(z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 = 4 \quad (2)$$

$$|z - 1 - i| = |z - 5 - 3i| \quad (3)$$

الحل:

$$(1) \text{ لدينا: } \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \sqrt{3} \text{ و منه:}$$

$$\frac{|z+1|^2}{|z-1|^2} = 3 \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 2y^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 1 = 0 \text{ بالإتمام إلى مربع كامل نجد:}$$

و منه يكون:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 3$$

و مجموعة النقاط هي معادلة دائرة مركزها (2,0) و نصف قطرها

$$r = \sqrt{3}.$$

(2) نعلم أن: $z + \bar{z} = 2x$ و $z - \bar{z} = 2yi$ بالتعويض نجد:

$$(2x)^2 + (2iy)^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 + 4i^2y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 4$$

و مجموعة النقاط تحقق معادلة قطع زائد.

$$|x + iy - 1 - i| = |x + iy - 5 - 3i| \quad \text{لدينا: (3)}$$

$$|(x - 1) + (y - 1)i|^2 = |(x - 5) + (y - 3)i|^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 5)^2 + (y - 3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 1 = x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 + 9$$

$$8x + 4y - 32 = 0$$

$$2x + y - 8 = 0$$

و مجموعة النقاط هي معادلة مستقيم.

مثال (16):

بفرض $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ عدداً عقدياً أوجد الجذور الثلاثة للعدد العقدي z ، ثم احسب z^5 .

الحل:

$$\text{لدينا: } r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1; \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ و منه:}$$

$$z_k = 1^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) \right]; k = 0, 1, 2$$

من أجل $k = 0$ فإن:

$$z_0 = 1^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right) = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$$

من أجل $k = 1$ فإن:

$$z_1 = 1^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{3}\right) \right]$$

$$= \cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9}$$

من أجل $k = 2$ فإن:

$$z_2 = 1^{\frac{1}{3}} \left[\cos \left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9}$$

و الشكل الأسّي للعدد العقدي z هو: $z = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ و منه:

$$z^5 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i} \right)^5 = e^{\frac{10\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال (17):

أثبت صحة العلاقات التالية:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (1)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; z_2 \neq 0 \quad (2)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (3)$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \quad (4)$$

الحل:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) \quad (1)$$

$$= (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\text{و منه: } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ و منه: } |z_1| = \left| z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_2| \cdot \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \quad (2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \quad (3)$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

و بما أن $\operatorname{Re} z \leq |z|$ فإن:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$

و منه:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{إذا} \quad |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

(4) لدينا: $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ و منه:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

من جهة أخرى: $|z_2| = |z_2 + z_1 - z_1| \leq |z_2 + z_1| + |z_1|$ و

منه:

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 + z_1|$$

$$\text{إذا نجد: } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\text{و بشكل مشابه فإن: } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

مثال (18):

$$\text{حل جملة المعادلتين التاليتين: } \left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}; \quad \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$$

الحل:

$$\text{المعادلة الأولى نكتبها بالشكل: } \frac{(x-4)^2 + y^2}{(x-8)^2 + y^2} = 1 \text{ و منه}$$

$$\text{إذا: } (x-4)^2 = (x-8)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 16x + 64 \Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6$$

و المعادلة الثانية نكتبها بالشكل: $\frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2} = \frac{25}{9}$ ومنه:

$$9(x^2 - 24x + 144 + y^2) = 25(x^2 + y^2 - 16y + 64)$$

$$16x^2 + 16y^2 + 216x - 400y + 304 = 0$$

$$16y^2 - 400y + 2176 = 0 \quad \text{نبدل } x = 6 \text{ فنجد:}$$

$$y^2 - 25y + 136 = 0$$

$$(y-8)(y-17) = 0$$

و منه: $y_1 = 8, y_2 = 17$

و بالتالي حل جملة المعادلتين هو: $z_1 = 6 + 8i, z_2 = 6 + 17i$

مثال (19):

أثبت صحة العلاقة التالية: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \quad z_2 \neq 0$

الحل:

لدينا:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - i \cdot \frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \quad \text{و منه:}$$

كذلك نجد أن:

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2} = \frac{(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2-iy_1x_2+ix_1y_2-i^2y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - i \cdot \frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

إذاً العلاقة صحيحة.



تمارين الفصل الأول

س 1- أوجد قيمة كل من x, y إذا كان: $(x + iy)^2 = \frac{1+7i}{1-i}$.

س 2- حل المعادلة: $z^2 = -9$.

س 3- اكتب الأعداد التالية بالشكل المثلثي:

$$2\sqrt{3} - 2i, -i, 1 - i, -5, \frac{2}{1-i}$$

س 4- بالاعتماد على الشكل المثلثي أوجد $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$ إذا كانت:

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, z_2 = -1 + \sqrt{3}.i$$

س 5- أوجد بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{\sqrt{2}-3i}{i-\sqrt{3}}$.

س 6- أوجد قيمة كل من: $(1+i)^{100}, (\sqrt{3}-i)^{20}$.

س 7- حل المعادلة: $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

س 8- أوجد الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد العقدي: $z = -1 + \sqrt{3}.i$.

س 9- ليكن العدد العقدي: $z = \frac{1-3i}{1+i} + 2i + \frac{3}{2}\sqrt{3}.i - \frac{1}{2}$ ، اكتب z بالشكل

الجبري ثم بالشكل المثلثي و احسب z^3 .

س10- لدينا z_1, z_2 عدنان عقديان حيث:

$$|z_1| = |z_2| = 1, z_1 z_2 + 1 \neq 0$$

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \text{ عدد حقيقي.}$$



الفصل الثاني

التوابع العقدية

Complex Functions

1. نهاية تابع عقدي
2. استمرار تابع عقدي
3. اشتقاق تابع عقدي
4. التابع التحليلي
5. التوابع التوافقية
6. بعض التوابع الشهيرة
7. التوابع العقدية العكسية



1-2 التابع العقدي

تعريف:

لتكن A, B مجموعتين جزئيتين من المستوي العقدي، إذا قابلنا كل عنصر z من A بعنصر واحد فقط $w = f(z)$ من B ، عندئذ نقول إننا عرفنا تابعاً عقدياً، ونكتب:

$$f: A \rightarrow B$$

$$z \rightarrow f(z) = w$$

نسمي A مجموعة تعريف التابع $w = f(z)$ ، و B مجموعة القيم. وبفرض $z = x + iy$ فإن

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

نسمي $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ الجزء الحقيقي، في حين $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ الجزء التخيلي.

مثال (1)

أوجد مجموعة تعريف التابع $w = f(z) = z^3$.

الحل

بفرض أن $z = x + iy$ فإن

$$w = f(z) = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

ومنه $u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ، $v = v(x + iy) = 3x^2y - y^3$

وبما أن u, v تابعتان حقيقيتان معرفتان من أجل كل نقطة (x, y) من المستوي

فإن $f(z) = z^3$ معرف من أجل كل نقطة من المستوي العقدي.

مثال (2)

أوجد مجموعة تعريف التابع العقدي

$$w = f(z) = \frac{1}{x-1} + i \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

الحل

$$u = u(x, y) = \frac{1}{x-1}$$
$$v = v(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

إن u تابع للمتحول x فقط، وهو تابع كسري معرف من أجل جميع النقاط (x, y) في المستوي ما عدا $x = 1$ ، وهذه معادلة مستقيم يوازي المحور oy ويمر من النقطة $(1, 0)$.

أما التابع v فهو أيضاً تابع كسري معرف من أجل كل النقط (x, y) ما عدا النقط التي تحقق المعادلة $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ، وهذه معادلة دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها الواحد، ومنه $f(z) = u + iv$ معرف من أجل جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء مجموعة النقاط المكونة من نقاط المستقيم $x = 1$ ، ونقاط الدائرة $x^2 + y^2 = 1$.

2-2 نهاية تابع عقدي

تعريف

بفرض $w = f(z)$ تابع عقدي معرف في جوار النقطة z_0 (عدا ذاتها)، نقول إن التابع $w = f(z)$ يتقارب من العدد العقدي w_0 عندما z يتقارب من z_0 ، إذا وُجد لكل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ (تابع لـ ε)

بحيث أنه إذا كان $|z - z_0| < \delta$ فإن $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ ، نسمي w_0 نهاية التابع $f(z)$ عندما $z \rightarrow z_0$ ، ونكتب

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

إنّ هذا التعريف يماثل تعريف تقارب تابع حقيقي من متحول حقيقي، لذلك فإنّ كثيراً من خواص النهايات والمبرهنات المتعلقة بها في التحليل الحقيقي صحيحة أيضاً في التحليل العقدي.

ملاحظة

إنّ العلاقة $|z - z_0| < \delta$ تمثل قرصاً مركزه z_0 ونصف قطره δ ، بينما العلاقة $|x - x_0| < \delta$ في التابع الحقيقي تمثل مجاًلاً مركزه x_0 ونصف قطره δ ، و منه نستنتج أنّ مفهوم النهاية في حالة المجال الحقيقي الذي يعبر عن اقتراب المتغير x من مركز المجال x_0 الذي نصف قطره δ من خلال أحد مسارين، إما من اليمين أو من اليسار، سيُعمم في حالة القرص في المستوي العقدي إلى اقتراب المتغير z من مركز القرص z_0 الذي نصف قطره δ بعددٍ لا نهائي من المسارات.

مثال (3)

بفرض $f(z) = x + i(x + 2y)$:

أثبت باستخدام التعريف أنّ $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = 2i$.

الحل

بفرض $\varepsilon > 0$ ولنوجد علاقة بين ε و δ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

لذلك وبفرض $|z - i| < \delta$ ولنكتب

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |x + (x + 2y)i - 2i| \\ &= |x + (x + 2y - 2)i| \end{aligned}$$

ومن الفرض يمكن أن نكتب

$$|z - i| = |x + (y - 1)i| < \delta$$

ومنه $|x| < \delta$, $|y - 1| < \delta$ وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |x + (x + 2y - 2)i| \\ &\leq 2|x| + 2|y - 1| < 4\delta \end{aligned}$$

فإذا اخترنا قيمة δ كما يلي $4\delta \leq \varepsilon$ ، فإن $\delta \leq \frac{1}{4}\varepsilon$. وهذا يعني أنه من أجل

كل $\varepsilon > 0$ صغير موجب وجدنا العلاقة $\delta \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ بحيث

$$|z - i| < \delta \Rightarrow |f(z) - 2i| < \varepsilon$$

وهو المطلوب.

مثال (4)

بفرض $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$ ، أثبت أن $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ غير موجودة.

الحل

نبحث عن قيمة النهاية بفرض أن z تقترب من $z_0 = 0$ بمسارين مختلفين، فإذا حصلنا على قيمتين مختلفتين للنهاية فهذا يعني أنها غير موجودة (النهاية إن وجدت فهي وحيدة).

ليكن المسار الأول هو عن طريق المحور التخيلي أي بفرض $x = 0$ فنجد

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2} &= \lim_{x+iy \rightarrow 0} \frac{(x^2 - y^2) + 2xyi}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{iy \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{iy \rightarrow 0} -1 = -1 \end{aligned}$$

وليكن المسار الثاني هو عن طريق $y = x$ فنجد

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+i)^2 x^2}{2x^2} = i$$

نلاحظ أننا حصلنا على قيمتين مختلفتين إذن $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$ غير موجودة وهو المطلوب.

تعريف

إذا كان $f(z)$ تابعاً عقدياً فإن $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $k > 0$ بحيث يكون

$$|z| > k \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

وأيضاً $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

من أجل أي عدد حقيقي $k > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يتحقق

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > k$$

علماً أن التابع $f(z)$ معرف في جوار النقطة z_0 ما عدا z_0 نفسها.

إن المتراجحة $|z| > k$ تعني جوار ∞ ، أو جميع النقط الخارجية للقرص

المغلق $|z| \leq k$.

مثال (5)

أثبت باستخدام التعريف أن

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} = 0$$

الحل:

بفرض أن $z > k > 1$ فإن $z^n > k^n$ ، ومنه $\frac{1}{z^n} < \frac{1}{k^n} < \frac{1}{k}$ ، وبفرض أن $\frac{1}{k} < \varepsilon$ و $k \geq \max\{1, \frac{1}{\varepsilon}\}$ فإن هذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ وجدنا $k \geq \max\{1, \frac{1}{\varepsilon}\}$ بحيث

$$|z| > k \Rightarrow |f(z) - 0| = \left| \frac{1}{z^n} \right| = \frac{1}{|z|^n} < \frac{1}{k^n} < \frac{1}{k} < \varepsilon$$

وهو المطلوب

نظرية (1-2)

ليكن $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تابعاً عقدياً، وبفرض أن $w = f(z)$ معرف في جوار النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ما عدا z_0 نفسها، و $w_0 = u_0 + iv_0$ ، عندئذٍ $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ إذا وإذا فقط

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \text{ و } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$$

البرهان

($\Leftarrow$) لنفرض أن $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ، هذا يعني حسب التعريف أنه من أجل

كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0|$$

وحسب تعريف القيمة المطلقة للعدد العقدي يمكننا أن نكتب

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

وبما أن

$$|u(x, y) - u_0| = |Re(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0|$$

$$|v(x, y) - v_0| = |Im(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0|$$

فإنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |u(x, y) - u_0| < \varepsilon$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |v(x, y) - v_0| < \varepsilon$$

وهذا يعني أنّ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

($\Rightarrow$) لنفرض أنّ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

وهذا يعني أنّه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه يمكن أن نكتب

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0|$$

$$= |(u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0)|$$

$$\leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0| < \varepsilon$$

وهذا يعني أنّ $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ وهو المطلوب.

ملاحظة

إنّ النظرية السابقة تحوّل إيجاد نهاية تابع عقدي إلى إيجاد نهاية تابعين حقيقيين.

نظرية (2-2)

إذا كان $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = w_1$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_2$ فإنّ

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha f_1 + \beta f_2)(z) = \alpha w_1 + \beta w_2$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) \cdot f_2(z)) = w_1 \cdot w_2$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{w_1}{w_2} ; w_2 \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f_1(z)| = |w_1|$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f_1(z)} = \overline{w_1}$$

مثال (6)

$$f(z) = \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} \text{ حيث } \lim_{z \rightarrow -2i} f(z) \text{ أوجد}$$

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -2i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{(3-4i)(-2i-1)}{(-2i)^2-2(-2i)+4} \\ &= \frac{-6i-3+8i^2+4i}{4i^2+4i+4} = \frac{-2i-11}{4i} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i \end{aligned}$$

مثال (7)

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2x^2-yx}{y^2+1}i \text{ حيث } \lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) \text{ أوجد}$$

الحل

النقطة $z_0 = x_0 + iy_0 = 1 + i$ هي z_0 ومنه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} u(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} v(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x^2-yx}{y^2+1} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+i)$$

3-2 استمرار تابع عقدي

تعريف

ليكن $f(z)$ تابعاً معرفاً في المنطقة D التي تحوي النقطة z_0 ، نقول إنَّ التابع $f(z)$ مستمر في النقطة z_0 إذا كان

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

وهذا يعني أنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً موجباً يوجد $\delta > 0$ عدداً حقيقياً موجباً تابعاً للعدد ε و z_0 بحيث

$$\forall z \in D: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

ونقول إنَّ التابع $f(z)$ مستمر في المنطقة D إذا كان مستمراً في كل نقطة $z \in D$.

نظرية (3-2)

إذا كان $f_1(z), f_2(z)$ تابعين مستمرين في النقطة z_0 ، فإنَّ التابع $(\alpha f_1 + \beta f_2)(z)$ مستمر في النقطة z_0 ، والتابع $(f_1 \cdot f_2)(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ مستمر أيضاً في النقطة z_0 ، والتابع $\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ مستمر في النقطة z_0 ($f_2(z) \neq 0$)، والتابع $\overline{f_1(z)}$ مستمر في النقطة z_0 .

نظرية (4-2)

التابع $f(z)$ مستمر في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ، إذا وفقط إذا كان $u(x, y), v(x, y)$ مستمرين في (x_0, y_0) .

البرهان

($\Leftarrow$) نفرض أنّ $f(z)$ مستمر في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ، هذا يعني أنّه من

أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

ومنه

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| = |\operatorname{Re} f(z) - u(x_0, y_0)|$$

$$\leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0)| = |\operatorname{Im} f(z) - v(x_0, y_0)|$$

$$\leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

هذا يعني أنّ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

($\Rightarrow$) نفرض أنّ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

إذن

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

عندما $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$ ، ومنه:

$$|f(z) - f(z_0)| =$$

$$\sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2}$$

$$\leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |v(x, y) - v(x_0, y_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهو المطلوب.

مثال (8)

ادرس استمرار التتابع التالية

$$f(z) = z^2, f(z) = \bar{z}, f(z) = \frac{z}{|z|}$$

الحل

$f(z) = z^2$ مستمر في كل المستوي العقدي وذلك لأنه يمكن كتابة $f(z)$ كما

يلي: بفرض $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ فيكون

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

ومنه $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ ومنه يكون

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = x_0^2 - y_0^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = 2x_0y_0$$

هذا يعني أن $u(x, y), v(x, y)$ مستمرين في (x_0, y_0) إذن $f(z) = z^2$

مستمر من أجل أي نقطة (x_0, y_0) وبالتالي $f(z)$ مستمر في كل المستوي

العقدي.

وكذلك التابع $f(z) = \bar{z}$ مستمر في كل المستوي العقدي.

التابع $f(z) = \frac{z}{|z|}$ يكتب كما يلي:

$$f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ومنه $\lim_{x=y \rightarrow 0} f(z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، وكذلك $\lim_{x=0; y \rightarrow 0} f(z) = i$ ، وهذا يعني أننا

حصلنا على نهايتين مختلفتين وبالتالي التابع $f(z) = \frac{z}{|z|}$ غير مستمر في

النقطة $z = 0$.

تعريف

نقول إنَّ التابع $f(z)$ مستمر بانتظام في المنطقة D ، إذا وجد لكل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب δ تابع فقط للعدد ε ، بحيث إذا كان $|z_1 - z_2| < \delta$ حيث $z_1, z_2 \in D$ فإنَّ $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.
ينتج من هذا التعريف أنَّ كل تابع مستمر بانتظام هو تابع مستمر.

مثال (9)

أثبت أنَّ التابع $f(z) = z^3$ مستمر على أية مجموعة جزئية محدودة من المستوى العقدي.

الحل

لتكن A مجموعة جزئية محدودة من المستوى العقدي، عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث يكون $|z| \leq M$ أيًّا كان z من A ، إذا كانت z_1, z_2 نقطتين اختياريتين من A فإنَّ

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= z_1^3 - z_2^3 \\ &= (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2) \end{aligned}$$

ومنه

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2|(|z_1|^2 + |z_1||z_2| + |z_2|^2)$$

وبما أنَّ $|z_1| \leq M, |z_2| \leq M$ فإنَّ

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 3M^2|z_1 - z_2|$$

عندئذٍ يوجد لكل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\varepsilon}{3M^2}$ بحيث إذا كان

$$z_1, z_2 \in A, |z_1 - z_2| < \delta$$

$$\text{فإنَّ } |f(z_1) - f(z_2)| \leq 3M^2 \left(\frac{\varepsilon}{3M^2} \right) = \varepsilon \text{ وهو المطلوب.}$$

4-2 اشتقاق تابع عقدي

تعريف

ليكن $f(z)$ تابعاً معرفاً في جوار النقطة z_0 من المستوي العقدي نقول إن $f(z)$ قابل للاشتقاق في النقطة z_0 إذا وجدت النهاية

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نسمي هذه النهاية مشتق التابع $f(z)$ في النقطة z_0 ونرمز لهذا المشتق بالرمز $f'(z_0)$ أو $\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0}$.

نلاحظ أن تعريف مشتق التابع العقدي مشابه لتعريف مشتق التابع الحقيقي. إذا وجد للتابع $f'(z)$ مشتق فإننا نرمز له بالرمز $f''(z)$ ، ونسمي $f''(z_0)$ المشتق الثاني للتابع $f(z)$ في النقطة z_0 وهكذا نحصل على مشتقات التابع $f(z)$ من مراتب أعلى، ونرمز للمشتق من المرتبة n بالرمز $f^{(n)}(z_0) = \left(\frac{d^n f}{dz^n}\right)_{z=z_0}$.

نستنتج من تعريف المشتق أن مشتق التابع الثابت يساوي الصفر، ومشتق التابع $f(z) = z$ يساوي الواحد، وبشكل عام إذا كان $f(z) = z^n$ فإن $f'(z) = nz^{n-1}$ ، وذلك لأن

$$\begin{aligned} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} [z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} \Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\Delta z)^n - z^n] \\ &= nz^{n-1} + \Delta z [\binom{n}{2} z^{n-2} + \dots + (\Delta z)^{n-1}] \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} \text{ ومنه}$$

نظرية (5-2)

إذا كان التابع $f(z)$ قابلاً للاشتقاق في النقطة z_0 فهو مستمر في هذه النقطة.

البرهان

بفرض $z = z_0 + \Delta z$ عندئذ يكون

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

ومنه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = f'(z) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = 0$$

إذن $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ، وهو المطلوب.

ملاحظة

هناك عدد كبير من التوابع العقدية البسيطة التي لا تملك مشتقاً على الرغم من استمرارها.

مثال (10)

أثبت أن التابع $f(z) = \operatorname{Re} z$ غير قابل للاشتقاق في أية نقطة من المستوي العقدي.

الحل

التابع $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ حيث $z = x + iy$ هو تابع مستمر.

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{عندما } \Delta x = 0 \\ 1 & \text{عندما } \Delta y = 0 \end{cases}$$

وبما أننا حصلنا على قيمتين مختلفتين فإن النهاية $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ غير موجودة، وهذا يعني أن التابع $f(z) = \operatorname{Re} z$ غير قابل للاشتقاق في المستوى العقدي.

نظرية (6-2)

بفرض أن $f_1(z), f_2(z)$ تابعان قابلان للاشتقاق عندئذ

$$(f_1(z) \pm f_2(z))' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$$

$$(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$$

$$f_2(z) \neq 0; \left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)}{(f_2(z))^2}$$

5-2 التابع التحليلي

تعريف

نقول عن التابع $w = f(z)$ إنه تحليلي في المنطقة D من المستوى العقدي إذا كان قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من D .
ونقول إن التابع $w = f(z)$ تحليلي في النقطة z_0 إذا كان تحليلياً في جوار ما للنقطة z_0 .

نظرية (2-6)

إذا كان التابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحليلياً في منطقة D من المستوى العقدي عندئذٍ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

في كل نقطة من D ، حيث $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ترمز للمشتقات الجزئية للتابعين u, v بالنسبة للمتغيرين x, y على الترتيب.

البرهان

نفرض أن التابع $w = f(z)$ تحليلي في المنطقة D ، هذا يعني أنه قابل للاشتقاق في كل نقطة $z_0 \in D$ ، ومنه

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \end{aligned}$$

وبما أن $f'(z_0)$ موجودة من أجل كل مسارات اقتراب (x, y) من (x_0, y_0) ،

فإذا فرضنا أن $\Delta z = z - z_0$ حقيقية فإن $z - z_0 = x - x_0$ ومنه

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

وإذا فرضنا أن $\Delta z = z - z_0$ تخيلية فإن $z - z_0 = i(y - y_0)$ ، ومنه

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أنَّ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

واللتين تسميان معادلتَي كوشي - ريمان. وهو المطلوب

نظرية (7-2)

إذا كان التابعان $u(x, y), v(x, y)$ يملكان مشتقات جزئية مستمرة تحقق معادلتَي كوشي - ريمان فإنَّ التابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ قابل للاشتقاق ومشتقه يعطى بالعلاقة

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

البرهان

لنفرض أنَّ المشتقات الجزئية لـ u, v موجودة ومستمرة وتحقق معادلتَي كوشي - ريمان عندنَّ

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$$

$$\begin{aligned} &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) + u(x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &= \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \Delta y \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y;$$

وذلك عندما $\Delta z \rightarrow 0$.

وكذلك عندما $\Delta z \rightarrow 0$ فإنّ

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right)}{\Delta x + i \Delta y} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} (-\Delta y + i \Delta x)}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

وهذا يعني أنّ التابع $w = f(z)$ قابل للاشتقاق ومشتقه يعطى بالعلاقة

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

وهو المطلوب.

مثال (11)

أثبت بطريقتين مختلفتين أنّ التابع $w = f(z) = z^2 + z$ تحليلي في المستوي العقدي، وأوجد مشتقه.

الحل

بفرض $z = x + iy$ فإنّ

$$f(z) = (x + iy)^2 + (x + iy) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$$

ومنـه $u = u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $v = v(x, y) = 2xy + y$ والمشتقات الجزئية هي

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x + 1\end{aligned}$$

وهي موجودة ومستمرة وتحقق معادلتى كوشي _ ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

وهذا يعني أن التابع $w = f(z)$ قابل للاشتقاق ومشتقه هو

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 1 + i(2y) = 2(x + iy) + 1 \\ &= 2z + 1\end{aligned}$$

طريقة ثانية: بالاعتماد على تعريف المشتق يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 + (z + \Delta z) - (z^2 + z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 + \Delta z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z(2z + 1 + \Delta z)}{\Delta z} = 2z + 1\end{aligned}$$

وهذا يعني أن النهاية موجودة وبالتالي التابع $f(z) = z^2 + z$ قابل للاشتقاق ومشتقه $f'(z) = 2z + 1$.

مثال (12)

اختر فيما إذا كان التابع التالي تحليلياً $w = f(z) = \bar{z}^2$.

الحل

بفرض $z = x + iy$ فإنّ

$$f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$$

ومنه:

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = -2xy$$

والمشتقات الجزئية هي

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -2x \end{aligned}$$

وهذه المشتقات موجودة ومستمرة ولكن

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

إلا إذا كان $x = 0, y = 0$ وهذا يعني أنّ التابع $f(z) = \bar{z}^2$ قابل للاشتقاق فقط في النقطة $z = 0$.

مثال (13)

بيّن فيما إذا كان التابع التالي قابلاً للاشتقاق، وعيّن قيم z التي لا يكون من أجلها مستمراً

$$w = f(z) = \frac{(x+1)-iy}{x^2+y^2+2x+1}$$

الحل

يمكن كتابة التابع بالشكل

$$w = f(z) = u + iv = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - \frac{iy}{(x+1)^2+y^2}$$

$$u = u(x, y) = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}, \quad v = v(x, y) = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2} \quad \text{إذن}$$

المشتقات الجزئية هي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x+1)^2 + y^2 - 2(x+1)(x+1)}{[(x+1)^2 + y^2]^2} = \frac{y^2 - (x+1)^2}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y(x+1)}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2y(x+1)}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - (x+1)^2}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

نلاحظ أن معادلتني كوشي _ ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - (x+1)^2}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y(x+1)}{[(x+1)^2 + y^2]^2}$$

محققتان من أجل جميع قيم x, y ، إلا من أجل $x = -1, y = 0$ ، هذا يعني أن التابع $w = f(z)$ قابل للاشتقاق في كل نقطة من المستوي العقدي عدا النقطة $(-1, 0)$.

يمكن كتابة التابع $f(z)$ بالشكل

$$w = \frac{(x+1) - iy}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{(x+1) - iy}{(x+1+iy)(x+1-iy)}$$

$$= \frac{1}{x+1+iy} = \frac{1}{z+1}$$

وهذا يعني أن التابع $f(z)$ غير مستمر من أجل $z = -1$.

6-2 قاعدة أوبيتال

إذا كان التابعان $f_1(z), f_2(z)$ تحليليين عند النقطة z_0 من المنطقة D وكان

$$f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0 \text{، بحيث } f_2'(z) \neq 0 \text{ فإن}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)}$$

مثال (14)

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z - e^{\frac{\pi}{3}i}}{z^3 + 1} ; \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} ; \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2}$$

الحل

التابعان $f_1(z) = z - e^{\frac{\pi}{3}i}$; $f_2(z) = z^3 + 1$ وكذا فإن

$$f_1\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = 0 ; f_2\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z - e^{\frac{\pi}{3}i}}{z^3 + 1} = \frac{0}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين لذا نطبق قاعدة أوبیتال

$$\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z - e^{\frac{\pi}{3}i}}{z^3 + 1} = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{e^{\frac{4\pi}{3}i}}{3}$$

بالنسبة إلى النهاية الثانية

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين، نطبق قاعدة أوبیتال

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{10z^9}{6z^5} = \frac{10i}{6i} = \frac{5}{3}$$

بالنسبة للنهاية الثالثة

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} = \frac{0}{0}$$

نطبق قاعدة أوبیتال

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z \cos z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{2 \cos z^2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos z^2} = 1 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

7-2 التوابع التوافقية

تعريف

نقول إنَّ التابع $u = u(x, y)$ توافقي في المنطقة D من المستوي العقدي إذا كان قابلاً للاشتقاق في D ومشتقاته الجزئية مستمرة في D ، وتحقق معادلة لابلاس التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وذلك في كل نقطة من D .

مثال (15)

بين أنَّ التابع $u = 2x - 2xy$ توافقي في المستوي العقدي.

الحل

إنَّ التابع المعطى هو كثير حدود بمتحولين فهو معرف ومستمر وقابل للاشتقاق ومشتقاته الجزئية مستمرة في كل نقطة من المستوي العقدي، وكذلك نجد أنَّ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2 - 2y, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2x, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

ومنه $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ وبالتالي التابع u توافقي في المستوي العقدي.

نظرية (8-2)

إذا كان $f(z) = u + i.v$ تحليلياً في المنطقة D من المستوي العقدي، فإنَّ التابعين u, v توافقيان في المنطقة D .

البرهان

بما أن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة D فإن u, v يحققان معادلتَي كوشي _ ريمان، ومنه

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\end{aligned}$$

وبما أن المشتقات الجزئية مستمرة فرضاً، فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وبشكلٍ مماثل نجد أن

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

نسمي كلا من التابعين u, v مرافقاً توافقياً للآخر، وإذا أُعطينا أحدهما نستطيع أن نجد مرافقاً توافقياً له بحيث يكون التابع $f(z) = u + iv$ تحليلياً وذلك بالاعتماد على معادلتَي كوشي _ ريمان.

مثال (16)

بيّن أن التابع $u = u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 2xy - y$ توافق في المستوي العقدي، وأوجد مرافقاً توافقياً له v بحيث يكون التابع: $f(z) = u + iv$ تحليلياً ثم عبر عن $f(z)$ بدلالة z .

الحل

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 4x - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -4y - 2x - 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\end{aligned}$$

وهذه المشتقات مستمرة وتحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 + (-4) = 0$$

إذا كان $v(x, y)$ مرافقاً توافقياً لـ u بحيث يكون $f(z) = u + iv$ تحليلياً فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ومنه $\frac{\partial v}{\partial x} = 4y + 2x + 1$ ، $\frac{\partial v}{\partial y} = 4x - 2y$ وبالمكاملة نجد

$$v(x, y) = \int (4x - 2y) dy + g(x) = 4xy - y^2 + g(x)$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى x نجد $\frac{\partial v}{\partial x} = 4y + g'(x)$ ومنه

$$4y + 2x + 1 = 4y + g'(x) \quad \text{أي أن } g'(x) = 2x + 1 \text{ وبالمكاملة نجد}$$

$$g(x) = x^2 + x + c$$

إذن $v = v(x, y) = 4xy - y^2 + x^2 + x + c$ ، والتابع $f(z)$ هو

$$f(z) = u + iv = 2(x^2 - y^2) - 2xy - y + i(x^2 - y^2 + 4xy + x + c)$$

لنوجد $f(z)$ بدلالة z

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x^2 + 2xyi - y^2) + i(x^2 + 2xyi - y^2) \\ &\quad + i(x + iy) + ic \\ &= 2z^2 + iz^2 + iz + ic = (2 + i)z^2 + iz + ic \end{aligned}$$

مثال (17)

أوجد التابع التحليلي $f(z) = u + iv$ إذا علمت أن القسم التخيلي هو

$$v = v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$$

الحل

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4 - 4 = 0$$

لنعين المرافق التوافقي $u(x, y)$ من معادلتني كوشي _ ريمان نجد

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1$$

بالمكاملة نجد

$$u = \int -4y dx = -4xy + \varphi(y)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى y نجد

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1$$

ومنه

$$\varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + c$$

إذن

$$u = u(x, y) = -4xy - 4y + c$$

التابع التحليلي $f(z)$ هو

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = -4xy - 4y + c + i(2x^2 - 2y^2 + x) \\ &= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + c \\ &= 2iz^2 + iz + c \end{aligned}$$

8-2 بعض التوابع الشهيرة

التوابع التالية مع التوابع التي تنتج عنها بعدد محدد من العمليات الجبرية تسمى بالتوابع العقدية الشهيرة.

2-8-1 التابع الصحيح من الدرجة n

الشكل العام له هو

$$w = f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \neq 0$ ثوابت عقدية، و n عدد صحيح موجب يسمى درجة الحدودية.

التابع الصحيح $f(z)$ يعتبر من أبسط التوابع العقدية، وهو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوى العقدي، ومشتقه في كل نقطة من المستوى العقدي هو

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 a_2 z + a_1$$

والتابع الكسري الذي شكله العام هو

$$w = f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

حيث $f_1(z), f_2(z)$ تابعان صحيحان كذلك $f_2(z) \neq 0$. والتابع الكسري هو تابع تحليلي في المستوى العقدي باستثناء النقاط الشاذة المقابلة لقيم z التي تعدم المقام وعددها مساوٍ لدرجة التابع الصحيح $f_2(z)$.

2-8-2 التابع الأسّي

إذا كان $z = x + iy$ عدداً عقدياً فإننا نعرف التابع الأسّي والذي نرمز له بالرمز e^z بالعلاقة التالية

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

خواص التابع الأسّي e^z :

1. إذا كان z عدداً حقيقياً أي $z = x$ فإن $e^z = e^x$.

2. إذا كان $z = iy$ فإننا نحصل على علاقة أولر

$$e^{iy} = (\cos y + i \sin y)$$

وعندئذ فإن أي عدد عقدي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ يكتب بالشكل التالي
 $z = re^{i\theta}$ والذي يسمى بالشكل الأسّي للعدد العقدي.

3. بما أن

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) &= -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y)\end{aligned}$$

فإن معادلتني كوشي _ ريمان محقتان، والتابع الأسّي e^z تحليلي في
 المستوي العقدي، ومشتقه

$$\begin{aligned}(e^z)' &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^z\end{aligned}$$

4. إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ فإن

$$\begin{aligned}e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{z_1+z_2} \\ (e^{z_1})^n &= e^{nz_1} \\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1-z_2}\end{aligned}$$

5. إذا كان $z = x + iy$ فإن $|e^z| = e^x$ ، وذلك لأن

$$\begin{aligned}|e^z| &= |e^x(\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| \\ &= |e^x|(1) = e^x > 0\end{aligned}$$

هذا يعني أن التابع الأسّي e^z لا ينعدم

6. التابع الأسّي e^z دوري ودوره من مضاعفات $2\pi i$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$$

مثال (18)

أوجد قيم z التي تحقق المعادلتين:

$$e^z = 1 ; e^z = 1 + i\sqrt{3}$$

الحل

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ ومنه } |z| = 2, \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

$$y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وبالتالي

$$z = x + iy = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{للمعادلة الثانية } e^z = 1 \text{ يمكن أن نكتب } e^x \cdot e^{iy} = 1 \cdot e^{0i} \text{ ومنه}$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 0 + 2k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وبالتالي

$$z = x + iy = 2k\pi i ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3-8-2 التتابع المثلثية

بما أن

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z ; e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

فإن

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} , \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ومنه نعرف التابعين العقديين $\cos z, \sin z$ من أجل كل عدد عقدي z بدلالة

التابع الأسّي كالآتي

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} , \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ونعرّف التابعين $\tan z, \cot z$ كما يلي

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

خواص التوابع المثلثية

1. التابعان $\cos z, \sin z$ دوريان ودور كل منهما 2π ، لأنّ

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \frac{1}{2} [e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{iz} + e^{-iz}] = \cos z \end{aligned}$$

وكذلك $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

2. التابعان $\tan z, \cot z$ دوريان ودور كل منهما π ، لأنّ

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \tan(z + \pi) &= -i \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} \\ &= -i \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \tan z \end{aligned}$$

وكذلك $\cot(z + \pi) = \cot z$.

3. التابعان $\cos z, \sin z$ تحليليان من أجل جميع قيم z ، ويكون

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

لأنّ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \cos z &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \right] = \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}) \\ &= -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z \end{aligned}$$

و بالطريقة نفسها بالنسبة للتابع $\sin z$.

4. التابعان $\tan z, \cot z$ تحليليان من أجل جميع قيم z ما عدا قيم z التي

تعدم المقام، ويكون

$$\frac{d}{dz} \tan z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \frac{d}{dz} \cot z = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

مثال (19)

أثبت أن $(e^{az})' = \alpha e^{az}$ من أجل أي عدد عقدي α .

الحل

بفرض أن $z = x + iy$ فإن

$$w = f(z) = e^{az} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\alpha y} = e^{\alpha x} (\cos \alpha y + i \sin \alpha y) \\ = e^{\alpha x} \cos \alpha y + i e^{\alpha x} \sin \alpha y = u + iv$$

إذن $u = e^{\alpha x} \cos \alpha y$, $v = e^{\alpha x} \sin \alpha y$ وبما أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x} \cos \alpha y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x} \sin \alpha y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

هذا يعني أن معادلتني كوشي _ ريمان محققتان وبالتالي فالمشتق

$$\frac{dw}{dz} = (e^{az})' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ = \alpha e^{\alpha x} \cos \alpha y + i \alpha e^{\alpha x} \sin \alpha y \\ = \alpha e^{\alpha x} (\cos \alpha y + i \sin \alpha y) \\ = \alpha e^{\alpha x} e^{i\alpha y} = \alpha e^{\alpha(x+iy)} = \alpha e^{az}$$

وهو المطلوب

مثال (20)

أثبت أن $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ بطريقتين مختلفتين.

الحل

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz})] \\ &= \frac{1}{4} [2e^0 + 2e^0] = \frac{1}{4} (2 + 2) = 1\end{aligned}$$

طريقة ثانية: لنفرض أن $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ ، وبما أن كلاً من

التابعين $\cos z, \sin z$ تحليلي على جميع الأعداد العقدية فإنّ التابع $f(z)$

تحليلي، إذن التابع $f(z)$ قابل للاشتقاق ومشتقه هو

$$f'(z) = -2 \cos z \sin z + 2 \sin z \cos z = 0$$

من أجل جميع قيم z هذا يعني أنّ التابع $f(z)$ ثابت من أجل جميع قيم z أي

يوجد عدد حقيقي α بحيث يكون

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z = \alpha$$

من أجل جميع قيم z ، لنفرض أن $z = 0$ فنجد أن $\alpha = 1$ ، وبالتالي

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

وهو المطلوب.

مثال (21)

حل المعادلة $\sin z = 0$.

الحل

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

ومنه $e^{iz} = e^{-iz}$ أي أن $e^{2iz} = 1$ ، وهذا يكتب كما يلي من أجل

$$z = x + iy$$

$$e^{2iz} = e^{2i(x+iy)} = e^{-2y} e^{2ix} = 1e^{0i}$$

إذن

$$e^{-2y} = 1 \Rightarrow y = 0$$

$$2x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ومنه حل المعادلة المطلوب هو

$$z = x + iy = k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4-8-2 التوابع الزائدية (القطعية)

نعرف التوابع الزائدية في المستوي العقدي بالعلاقات التالية من أجل أي عدد عقدي z وبدلالة التابع الأسّي

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} ; \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} ; \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

خواص التوابع العقدية

1. التابعان $\sinh z, \cosh z$ دوريان ودور كل منهما $2\pi i$ لأن

$$\begin{aligned} \sinh(z + 2\pi i) &= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z \end{aligned}$$

وكذلك نجد $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$.

2. التابعان $\sinh z, \cosh z$ تحليليان ويكون

$$\frac{d}{dz} (\cosh z) = \sinh z ; \frac{d}{dz} (\sinh z) = \cosh z$$

لأن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\cosh z) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sinh z \end{aligned}$$

مثال (22)

أثبت أن $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

الحل

$$\begin{aligned}\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}[e^{2z} + 2 + e^{-2z} - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})] \\ &= \frac{1}{4}[2 - (-2)] = 1\end{aligned}$$

5-8-2 التوابع اللوغاريتمية

يعرّف التابع اللوغاريتمي بأنه معكوس التابع الأسّي، فالعدد w هو لوغاريتم

العدد z إذا كان $z = e^w$ ونكتب $w = \ln z$ ، وبفرض

$$z = x + iy, w = u + iv$$

$$e^w = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v) = z = |z| e^{iv}$$

ومنه

$$e^u = |z| \Rightarrow u = \ln |z|$$

$$v = \theta + 2k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وبالتالي

$$w = \ln z = u + iv = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

هذا يعني أن التابع اللوغاريتمي هو تابع متعدد القيم ولكل عدد عقدي عدد غير

منته من اللوغاريتمات، وعندما $k = 0$ نحصل على ما يسمى بالقيمة الرئيسية

للوغاريتم.

خواص التوابع اللوغاريتمية

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad 1.$$

وذلك لأنه إذا كان $z_1 = e^{w_1}, z_2 = e^{w_2}$ ، فإن $w_1 = \ln z_1, w_2 = \ln z_2$ ومنه

$$z_1 \cdot z_2 = e^{w_1 + w_2}$$

وبالتالي

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = w_1 + w_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

وكذلك

$$\ln z^n = n \ln z$$

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2 ; z_2 \neq 0$$

2. التابع اللوغاريتمي تابع تحليلي ويكون

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} ; z \neq 0$$

لأن $z = e^w \Leftrightarrow w = \ln z$ ومنه

$$\frac{dz}{dw} = e^w = z$$

وبالتالي

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} ; z \neq 0$$

مثال (23)

احسب $\ln i, \ln(1 - i), \ln(-2 - 2i)$.

الحل

$$\ln i = \ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

القيمة الرئيسية هي $\ln i = \frac{\pi}{2} i$.

لدينا $1 - i = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$ ومنه

$$\ln(1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\ln(-2 - 2i) = \ln \sqrt{8} + i \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

6-8-2 التوابع العقدية $w = z^a$

تعرف التوابع العقدية $w = z^a$ حيث $a = \alpha + i\beta$ عدد عقدي بالعلاقة التالية:

$$w = z^a = e^{a \ln z}$$

ومنه

$$w = e^{a[\ln|z| + i(\theta + 2k\pi)]}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

هذا يعني أن التابع $w = z^a$ متعدد القيم والقيمة الرئيسية هي

$$w = e^{a[\ln|z| + i\theta]}$$

مثال (24)

احسب $i^i, 2^{1+i}$.

الحل

لدينا $\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ، ومنه

$$i^i = e^{i\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وكذلك

$$\begin{aligned} 2^{1+i} &= e^{(1+i) \ln 2} = e^{(1+i)(\ln 2 + 2ik\pi)} \\ &= e^{i(\ln 2 + 2k\pi) + (\ln 2 - 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$= e^{\ln 2 - 2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

7-8-2 التوابع العقدية العكسية

التابع العكسي للتابع المثلثي $\cos z$ هو بالتعريف

$$w = \cos^{-1} z$$

وهذا يعني أن العدد العقدي w يساوي $\cos^{-1} z$ إذا وفقط إذا كان

$$\cos w = z$$

وبشكلٍ مشابه نعرف معكوسات التوابع المثلثية العقدية والزائدية العقدية كما يلي:

$$w = \cos^{-1} z \Leftrightarrow z = \cos w$$

$$w = \sin^{-1} z \Leftrightarrow z = \sin w$$

$$w = \sinh^{-1} z \Leftrightarrow z = \sinh w$$

$$w = \cosh^{-1} z \Leftrightarrow z = \cosh w$$

$$w = \tan^{-1} z \Leftrightarrow z = \tan w$$

مثال (25)

$$w = \cos^{-1} z = \frac{1}{i} \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

الحل

$$w = \cos^{-1} z \Leftrightarrow z = \cos w$$

ومنه

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

$$2z = e^{iw} + e^{-iw}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ e^{iw} فنجد

$$2ze^{iw} = e^{2iw} + 1 = (e^{iw})^2 + 1$$

إذن

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{iw} بحلها نجد

$$e^{iw} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = \frac{2z \pm 2\sqrt{z^2 - 1}}{2} \\ = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

ومنه

$$iw = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$w = \cos^{-1} z = \frac{1}{i} \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

وهو المطلوب.

مثال (26)

$$\sinh^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1})$$
 أثبت أن

الحل

$$w = \sinh^{-1} z \Leftrightarrow z = \sinh w$$

ومنه $z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$ أي $2z = e^w - e^{-w}$ ، نضرب طرفي

العلاقة بـ e^w فنجد

$$(e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بحلها نجد

$$e^w = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 + 4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

ومنه

$$w = \sinh^{-1} z = \ln z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

وهو المطلوب.

مثال (27)

$$\text{أثبت أن } \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

الحل

لدينا $w = \tan^{-1} z \Leftrightarrow z = \tan w$ ومنه

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

$$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw}$$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـ e^{iw} فنجد

$$(iz - 1)e^{2iw} = -1 - iz = -(1 + iz)$$

إذن

$$e^{2iw} = \frac{-(1+iz)}{-(1-iz)} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$2iw = \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

وبالتالي

$$w = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال (28)

$$\text{حل المعادلة } \tan z - 1 = 0$$

الحل

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = 1$$

ومنه

$$\frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = 1 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = i(e^{iz} + e^{-iz})$$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـ e^{iz} فنجد

$$e^{2iz} - 1 = i(e^{2iz} + 1)$$

إذن

$$e^{2iz} - ie^{2iz} = 1 + i \Rightarrow e^{2iz}(1 - i) = 1 + i$$

$$e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

وبالتالي

$$2iz = \ln i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

إذن حل المعادلة المطلوب هو

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

مثال (29)

إذا كان $Im f'(z) = 6x(2y - 1)$ و $f(0) = 3 - 2i$ ، احسب $f(1 + i)$.

الحل

إذا فرضنا $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، فإن مشتق هذا التابع يعطى

$$\text{بالعلاقة } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ ومنه}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6x(2y - 1)$$

نكامل بالنسبة للمتحول x مع اعتبار أن y مقدار ثابت نجد

$$v = 3x^2(2y - 1) + \varphi(y)$$

وبالاعتماد على معادلتني كوشي _ ريمان نكتب

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 6x(2y - 1)$$

نكامل بالنسبة للمتحول y مع اعتبار x مقدار ثابت نجد

$$u = -6xy^2 + 6xy + g(x)$$

ومن ناحية ثانية وبالاغتماد على هذه المعادلات نجد أيضاً

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6y^2 + 6y + g'(x) = \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 + \varphi'(y)$$

وبمقارنة طرفي هذه العلاقة نجد

$$g'(x) = 6x^2 ; \varphi'(y) = -6y^2 + 6y$$

ومنه $g(x) = 2x^3 + c_1 ; \varphi(y) = -2y^3 + 3y^2 + c_2$ وبالتالي

$$f(z) = u + iv = 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + c_1 \\ + i(6x^2y - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2 + c_2)$$

واستناداً إلى الفرض نجد:

$$f(0) = c_1 + i.c_2 = 3 - 2i$$

$$\text{إذاً } c_1 = 3, c_2 = -2$$

بالتعويض نجد:

$$f(z) = 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + 3 \\ + i(6x^2y - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2 - 2)$$

لحساب $f(1+i)$ نبذل في هذه العلاقة x بـ 1 و y بـ 1 أيضاً فنجد

$$f(1+i) = 5 + 2i$$

كما يمكننا أن نكتب $f(z)$ بدلالة z فنجد

$$f(z) = 2z^3 - 3iz^2 + 3 - 2i$$

وإذا عوضنا في هذه العلاقة $z = 1 + i$ نجد

$$f(1+i) = 5 + 2i$$

طريقة ثانية: يمكننا أن نفرض أن المشتق $f'(z)$ تابع تحليلي يحقق معادلتني كوشي _ ريمان فيكون

$$f'(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

حيث $v(x, y) = 6x(2y - 1)$ ولكن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 12x$ ومنه

و $u = 6x^2 + \varphi(y)$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -12y + 6$ ومنه

وبالتالي $\varphi = -6y^2 + 6y + c$ إذن $\varphi'(y) = -12y + 6$

$$u = u(x, y) = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c$$

وبفرض $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ فإن

$$f'(z) = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c + 6ix(2y - 1)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$

إذن $\frac{\partial P}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c$ بالمكاملة بالنسبة للمتحول x باعتبار y

مقدار ثابت نجد

$$P(x, y) = 2x^3 - 6y^2x + 6yx + cx + \psi(y)$$

ويكون

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -12yx + 6x + \psi'(y) = -12xy + 6x$$

إذن $\psi'(y) = 0$ ومنه $\psi(y) = c_1$ وبالتالي

$$P(x, y) = 2x^3 - 6y^2x + 6yx + cx + c_1$$

واستناداً إلى معادلتني كوشي _ ريمان نجد

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 6y + c$$

وبالمكاملة بالنسبة للمتحول y باعتبار x مقدار ثابت نجد

$$Q = 6x^2y - 2y^3 + 3y^2 + cy + g(x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy + g'(x) = -\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 6x$$

ومنه $g'(x) = -6x$ ، إذن $g(x) = -3x^2 + c_2$ ، وبالتالي

$$\begin{aligned} f(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) \\ &= 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + cx + c_1 \\ &\quad + i(6x^2y - 2y^3 + 3y^2 + cy - 3x^2 + c_2) \end{aligned}$$

واستناداً إلى الفرض نجد

$$f(0) = c_1 + ic_2 = 3 - 2i$$

ومنه $c_1 = 3$ ، $c_2 = -2$ ، ولحساب $f(1 + i)$ بدون ثابت اختياري يمكن

إعطاء c القيمة "صفر"، فنجد

$$\begin{aligned} f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + 6xy + 3 + \\ &\quad + i(6x^2y - 2y^3 + 3y^2 - 3x^2 - 2) \end{aligned}$$

ومنه

$$f(z) = 2z^3 - 3iz^2 + 3 - 2i$$

وبالتالي

$$f(1 + i) = 2(1 + i)^3 - 3i(1 + i)^2 + 3 - 2i = 5 + 2i$$

مثال (30)

أثبت صحة العلاقات التالية

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

الحل

نعلم أن $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ، $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ وذلك لأن

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{2e^{iz}}{2} = e^{iz}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \cos z - i \sin z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz} - e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{2e^{-iz}}{2} = e^{-iz} \end{aligned}$$

بضرب طرفي العلاقتين

$$e^{iz} \cdot e^{-iz} = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z)$$

$$\begin{aligned} e^0 &= \cos^2 z - i \cos z \sin z + i \sin z \cos z - i^2 \sin^2 z \\ 1 &= \cos^2 z + \sin^2 z \end{aligned}$$

بالنسبة للعلاقة الثانية يمكن أن نكتب

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} \\ 2 \cos(z_1 + z_2) &= e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2} \\ 2 \cos(z_1 + z_2) &= (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) \\ &\quad + (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2) \\ &= 2 \cos z_1 \cos z_2 - 2 \sin z_1 \sin z_2 \end{aligned}$$

ومنه

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

بالنسبة للعلاقة الثالثة نكتب

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos x \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} - \sin x \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \\ &= \cos x \frac{e^{-y} + e^y}{2} - \sin x \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \\ &= \cos x \cosh y - \sin x \left(i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

مثال (31)

أثبت صحة العلاقات الآتية

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(x - iy) = \sinh x \cos y - i \cosh x \sin y$$

الحل

$$\text{نعلم أن } \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ ومنه}$$

$$\sinh z + \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} + \frac{e^z + e^{-z}}{2} = e^z$$

$$\cosh z - \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} - \frac{e^z - e^{-z}}{2} = e^{-z}$$

وبضرب طرفي هاتين العلاقتين ببعضهما نجد

$$(\sinh z + \cosh z)(\cosh z - \sinh z) = e^z e^{-z}$$

ومنه

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = e^0 = 1$$

للعلاقة الثانية نكتب

$$\sinh(z_1 - z_2) = \frac{e^{(z_1 - z_2)} - e^{-(z_1 - z_2)}}{2} = \frac{e^{z_1} e^{-z_2} - e^{z_1} e^{-z_2}}{2}$$

ومنه

$$2 \sinh(z_1 - z_2) = (\sinh z_1 + \cosh z_1)(\cosh z_2 - \sinh z_2)$$

$$-(\cosh z_1 - \sinh z_1)(\cosh z_2 + \sinh z_2)$$

$$= \cosh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$+ \sinh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$-(\cosh z_2 \cosh z_1 + \cosh z_2 \sinh z_1 - \sinh z_2 \cosh z_1 - \sinh z_2 \sinh z_1)$$

$$= 2 \sinh z_1 \cosh z_2 - 2 \cosh z_1 \sinh z_2$$

إذن

$$\sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2$$

للعلاقة الثالثة نكتب

$$\begin{aligned} \sinh(x - iy) &= \sinh x \cosh iy - \cosh x \sinh iy \\ &= \sinh x \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \cosh x \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} \\ &= \sinh x \cos y - \cosh x \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} i \right) \\ &= \sinh x \cos y - \cosh x \sin y \end{aligned}$$

مثال (32)

أوجد حلول المعادلات التالية:

$$\sin z = \frac{4i}{3}, \tan z = \frac{5i}{3}, \sinh z = \frac{i}{2}$$

الحل

للمعادلة الأولى $\sin z = \frac{4i}{3}$ نكتب $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{4i}{3}$ ومنه

$$3(e^{iz} - e^{-iz}) = -8$$

نضرب طرفي العلاقة بـ e^{iz} فنجد

$$3(e^{iz})^2 + 8e^{iz} - 3 = 0$$

$$(e^{iz})^2 + \frac{8}{3}e^{iz} - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بحلها نجد

$$e^{iz} = \frac{-\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{6} = \frac{-4 \pm 5}{3}$$

إما $e^{iz_1} = -\frac{9}{3} \Rightarrow e^{iz_1} = -3 = 3e^{i(\pi + 2k\pi)}$ ومنه

$$z_1 = \ln 3 + \pi + 2k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{أو } e^{iz_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow iz_2 = \ln 1 - \ln 3 = -(\ln|3| + 2k\pi i) \text{ ومنه}$$

$$z_2 = i \ln 3 + 2k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

للمعادلة الثانية

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{5i}{3}$$

$$i(e^{2iz} + 1)5i = 3(e^{2iz} - 1)$$

$$3e^{2iz} + 5e^{2iz} = 5i^2 + 3 = -2$$

$$8e^{2iz} + 2 = 0 \Rightarrow (e^{iz})^2 = -\frac{1}{4} = \frac{i^2}{4}$$

$$e^{iz} = \pm \frac{i}{2} = e^{\pm \ln 2} e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\text{ومنه } z = \frac{\pi}{2} \pm i \ln 2$$

للمعادلة الثالثة

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{i}{2}$$

$$2(e^z - e^{-z}) = 2i \Rightarrow e^z - e^{-z} = i$$

نضرب طرفي العلاقة بـ e^z فنجد

$$(e^z)^2 - ie^z - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بحلها نجد

$$e^z = \frac{i \pm \sqrt{i^2 + 4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$$

ومنه

$$z = \ln \frac{i \pm \sqrt{3}}{2} + 2k\pi ; k = 0, \pm 1, \pm 2$$

مثال (33)

أثبت أن التابع $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ توافقي من أجل جميع الأعداد العقدية $z \neq 0$ ، ثم أوجد المرافق التوافقي $v(x, y)$

الحل

المشتقات الجزئية للتابع $u(x, y)$ هي:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

بالتعويض بمعادلة لابلاس نجد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

إذن التابع $u(x, y)$ توافقي على كل الأعداد العقدية $z \neq 0$ لنوجد المرافق

التوافقي بالاعتماد على معادلتني كوشي _ ريمان يمكننا أن نكتب

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y مع اعتبار x مقداراً ثابتاً نجد

$$v(x, y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2} dy = 2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + g(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x}\right) + g'(x) \\ &= \frac{-2y}{x^2+y^2} + g'(x)\end{aligned}\quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2+y^2}\quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$$

حيث c عدد ثابت، وبالتالي فإن مرافق التابع التوافقي u هو التابع

$$v = v(x, y) = 2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + c$$

تمارين الفصل الثاني

(1) احسب $\frac{dw}{dz}$ إذا كان

$$w = z^2 - 2z \quad (\text{أ})$$

$$w = \frac{1+z}{1-z} \quad (\text{ب})$$

(2) اختبر فيما إذا كانت التوابع التالية تحليلية:

$$w = 2z + \bar{z} \quad (\text{أ})$$

$$w = (x-1)^3 - 3xy^2 - 3y^2 \quad (\text{ب})$$

$$w = e^x \cdot x \cdot \cos y - e^2 \cdot y \cdot \sin y \quad (\text{ج})$$

(3) أثبت أن التابع التالي:

$$f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-i}$$

هو تابع مستمر في النقطة $z = i$.

(4) أثبت أن التابع

$$f(z) = \frac{z}{z^4+1}$$

مستمر على محيط الدائرة $|z| = 1$ وداخلها عدا أربع نقاط يطلب تعيينها.

(5) احسب النهايات التالية:

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z+1}{z^2-2i} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3+z}{2z^3-2iz^2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} \quad (\text{ج})$$

(6) أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكلٍ من التوابع العقدية التالية:

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \quad (\text{أ})$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \quad (\text{ب})$$

$$f(z) = \frac{(z^2 + 4)(z - 2)}{z + 2i} \quad (\text{ج})$$

$$f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} \quad (\text{د})$$

(7) أثبت أن الشكل القطبي لمعادلتني كوشي _ ريمان بفرض $z = re^{i\theta}$ هو

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

(8) بين أن التابع $f(z) = e^{(1+i)z}$ قابل للاشتقاق في كل نقطة من المستوي العقدي واحسب مشتقه $f'(z)$.

(9) أوجد المجموعة الجزئية من المستوي العقدي التي تكون فيها التوابع التالية قابلة للاشتقاق، وأوجد المشتق لكلٍ منها:

$$\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \quad (\text{أ})$$

$$\frac{e^z}{z} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{z \cos z}{1 + z^2} \quad (\text{ج})$$

(10) أثبت صحة العلاقات التالية

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}$$

(11) أثبت أن التابع $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ توافقي، ثم أوجد

التابع v الذي يجعل التابع $f(z) = u + iv$ تحليلياً، وأوجد $f(z)$ بدلالة z .

(12) إذا كان $v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$ أوجد التابع التحليلي

$$f(z) = u + iv$$

(13) إذا كان $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ أوجد التابع التحليلي

$$f(z) = u + iv$$

(14) أوجد قيم z التي تحقق المعادلات التالية:

$$e^{2z-1} = -1 \quad (\text{أ})$$

$$e^z = 1 - i \quad (\text{ب})$$

$$\tanh z = 3 + 4i \quad (\text{ج})$$

$$\cos z = \frac{3+i}{4} \quad (\text{د})$$

$$\sin z = \frac{1+i}{2} \quad (5)$$

(15) احسب الوغاريتمات التالية

$$\ln(3i), \ln(1 - \sqrt{3}i), \ln(-16)$$

ثم احسب قيمها الرئيسية.

(16) احسب القيم الرئيسية لما يلي:

$$(1-i)^{1+i}, 2^{1-i}, (1+i)^{2i+4}$$

(17) أثبت أن

$$\cosh^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

(18) إذا فرضنا $z = x + iy$ احسب بدلالة المتغيرين x, y ما يلي:

$$|e^{i+3z}|, |e^{z^2}|, |e^{(i+z)(i-z)}|$$

(19) أثبت صحة ما يلي:

$$\overline{\tan z} = \tan \bar{z} ; \overline{\cos iz} = \cos i\bar{z}$$

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z} ; \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$



الفصل الثالث

التكاملات العقدية

Complex Integrations

1. التكامل العقدي.
2. خواص التكاملات العقدية.
3. نظرية كوشي.



1-3 المنحنيات في المستوى العقدي:

تعريف:

نسمي منحنياً مستمراً في المستوى العقدي، و نرمز له بالرمز C ، كل تابع عقدي مستمر بمتحول حقيقي:

$$z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto z(t)$$

إذا كان

$$z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$$

فإن المنحني المستمر يتعين بالتابعين الحقيقيين المستمرين:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

و يسمى المتحول t وسيطاً.

نقول إن المنحني C يمر بالنقطة z_0 إذا وجدت قيمة t_0 للوسيط t (ليست وحيدة بالضرورة) يكون من أجلها $z_0 = z(t_0)$.

نسمي النقطة $z(a)$ بداية المنحني و النقطة $z(b)$ نهايته، و إذا تحقق $z(t) \in D$ من أجل كل t من المجال $[a, b]$ فإن المنحني C يقع في المنطقة D .

نقول عن المنحني

$$C: z = z(t), a \leq t \leq b$$

إنه بسيط إذا كان التابع z متبايناً أي إذا كان الشرط التالي محققاً:

$$z(t_1) = z(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

و ذلك أياً كانت t_1, t_2 من $[a, b]$ (ليس لـ C نقاط مضاعفة).

نقول عن المنحني C إنه مغلق إذا انطبقت بدايته على نهايته أي إذا كان $z(a) = z(b)$.

نقول عن المنحني C إنه منحنٍ أملس إذا كان التابع العقدي $z = z(t)$ قابلاً للاشتقاق على المجال $[a, b]$ و كان التابع المشتق $z' = z'(t)$ مستمراً و لا يساوي الصفر، فمثلاً الدائرة التي مركزها z_0 و نصف قطرها r أي:

$$z = z_0 + r \cdot e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

هي منحنٍ بسيط مغلق أملس.

2-3 التكامل العقدي:

ليكن $f(z)$ تابعاً عقدياً مستمراً في منطقة D من المستوي العقدي على المنحني البسيط الأملس C . نقسم المنحني C إلى n قسماً بواسطة النقاط:

$$z_k = z(t_k); \quad k = 0, 1, \dots, n$$

حيث:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

ثم نأخذ على كل قوس جزئي $\widehat{z_k z_{k+1}}$ نقطة اختيارية γ_k و لنشكل المجموع:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)(z_{k+1} - z_k)$$

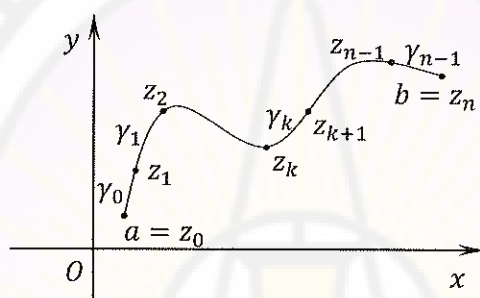
إذا كانت نهاية المتتالية s_n موجودة عندما تسعى n إلى اللانهاية (تساوي s مثلاً) و وجودها لا يتعلق بالطريقة التي قسم بها المنحني و في الوقت نفسه يسعى

طول كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ نحو الصفر فإننا نسمي النهاية s بتكامل التابع العقدي $f(z)$ على المنحني C و نكتب:

$$s = \int_C f(z).dz$$

أي:

$$\int_C f(z).dz = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)(z_{k+1} - z_k))$$



الشكل (1-3)

من أجل إثبات أن التكامل $\int_C f(z).dz$ موجود نفرض أن:

$$f(z) = u(x, y) + i.v(x, y); \quad z = x + i.y$$

$$z_k = x_k + i.y_k, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

عندئذ:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)(z_{k+1} - z_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \cdot \Delta x_k - v_k \cdot \Delta y_k) \\ &+ i \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \cdot \Delta y_k + v_k \cdot \Delta x_k) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} v_k = v(\alpha_k, \beta_k) \\ u_k = u(\alpha_k, \beta_k) \end{cases}$$

إنَّ الطرف الأيمن للمساواة الأخيرة هو أربعة مجاميع تكاملية للتابعين الحقيقيين المستمرين u_k و v_k على المنحني C . و بما أنَّ نهاية هذه المجاميع التكاملية موجودة حسب النظرية الأساسية في التكامل الحقيقي إذاً النهاية s_n موجودة عندما تنتهي n إلى اللانهاية بحيث يكون:

$$\max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0 ; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

و بأخذ نهاية الطرفين في المساواة الأخيرة نجد:

$$\begin{aligned} \int_C f(z).dz &= \int_C (u(x, y).dx - v(x, y).dy) \\ &+ i. \int_C (v(x, y).dx + u(x, y).dy) \end{aligned}$$

و بفرض أنَّ معادلة المنحني C هي:

$$z = z(t) = \alpha(t) + i\beta(t); a \leq t \leq b$$

فإنَّ:

$$\begin{cases} dy = \beta'(t).dt \\ dx = \alpha'(t).dt \end{cases}$$

و بالتعويض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\begin{aligned} \int_C f(z).dz &= \int_a^b (u\alpha' - v\beta').dt + i. \int_a^b (v\alpha' + u\beta').dt \\ &= \int_a^b (u + iv)(\alpha' + i\beta').dt \\ &= \int_a^b f(z(t)).z'(t).dt \end{aligned}$$

مثال (1):

احسب التكامل: $\int_C f(z).dz$ حيث $f(z) = 1$

الحل:

$$\begin{aligned}\int_C f(z).dz &= \int_C 1.dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [z_n - z_0] = b - a\end{aligned}$$

حيث a بداية المنحني C و b نهايته و منه:

$$\int_C f(z).dz = \int_C 1.dz = b - a$$

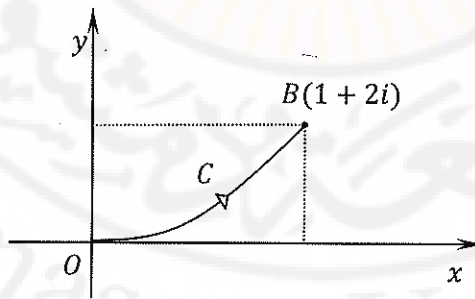
مثال (2):

1. احسب التكامل $\int_C z^2.dz$ حيث C هو جزء القطع المكافئ المبين على

الشكل (2-3) و بالاتجاه من O إلى B .

2. احسب التكامل السابق على المنحني C الممثل وسيطياً بالمعادلتين

$x = t^2, y = t$ من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(4,2)$.



الشكل (2-3)

الحل:

1. نوجد معادلة المنحني C و يتم ذلك بفرض أن معادلة المنحني هي من الشكل $y = ax^2$ و لحساب a نلاحظ أن النقطة $B(1,2)$ واقعة على القطع و منه: $a = 2$ و معادلة المنحني C (معادلة القطع المكافئ) هي $y = 2x^2$ نعوض بالتكامل:

$$\begin{aligned} I &= \int_C z^2 \cdot dz = \int_C (x^2 - y^2 + 2xy \cdot i)(dx + i \cdot dy) \\ &= \int_C ((x^2 - y^2)dx - 2xy \cdot dy) \\ &\quad + i \cdot \int_C (2xy \cdot dx + (x^2 - y^2)dy) \\ &= \int_0^1 ((x^2 - 4x^4)dx - 2x(2x^2)4x \cdot dx) \\ &\quad + i \cdot \int_0^1 2x(2x^2) \cdot dx + i \cdot \int_0^2 \left(\frac{y}{2} - y^2\right) dy \\ &= \int_0^1 (x^2 - 20x^4)dx + 4i \cdot \int_0^1 x^3 \cdot dx + i \cdot \int_0^2 \left(\frac{y}{2} - y^2\right) \cdot dy \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{20}{5}x^5\right]_0^1 + 4i \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + i \cdot \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} - 4 + i + i \left(1 - \frac{8}{3}\right) = -\frac{11}{3} - \frac{2i}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_C [(x^2 - y^2)dx - 2xy \cdot dy] \\ &\quad + i \int_C [2xy \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy] \\ &= \int_C [(t^4 - t^2)2t \cdot dt - 2t^2 \cdot t \cdot dt] \\ &\quad + i \int_C [2t^2 \cdot t \cdot 2t \cdot dt + (t^4 - t^2)dt] \end{aligned} \quad 2.$$

و بملاحظة أنَّ قيم t الموافقة للبداية و النهاية هي $t = 0$ و $t = 2$ نجد:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (t^4 - 2t^3) dt + i. \int_0^2 (5t^4 - t^2) dt \\ &= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} \right]_0^2 + i. \left[t^5 - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{32}{5} - 8 + i \left(32 - \frac{8}{3} \right) = -\frac{8}{5} + \frac{88}{3} i \end{aligned}$$

مثال (3):

$$\text{احسب التكامل } \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{ti} . dt$$

الحل:

نعلم أنَّ: $e^{ti} = \cos t + i. \sin t$ و منه:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{it} . dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t . dt + i. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t . dt \\ &= [\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}} + i. [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 + i \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

مثال (4):

$$\text{احسب التكامل: } \int_C (1 + i - 2\bar{z}). dz \text{ و ذلك:}$$

1. على القطعة المستقيمة من النقطة $z_1 = 0$ إلى النقطة $z_2 = 1 + i$.

2. على القطع المكافئ ذي المعادلة $y = x^2$ من النقطة $z_1 = 0$ إلى النقطة

$$z_2 = 1 + i$$

الحل:

1. معادلة القطعة المستقيمة من النقطة $z_1 = 0$ إلى النقطة $z_2 = 1 + i$ هي

$y = x$ حيث $0 \leq x \leq 1$ و $dy = dx$ و منه:

$$\begin{aligned}\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_C (1 + i - 2(x - iy))(dx + i dy) \\ &= \int_C [1 - 2x + (1 + 2y)i](dx + i dy) \\ &= \int_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)] dx \\ &\quad + i \int_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)] dx \\ &= \int_0^1 -4x dx + i \int_0^1 2 dx \\ &= \left[-\frac{4x^2}{2} \right]_0^1 + i [2x]_0^1 \\ &= -2 + 2i = 2(i - 1)\end{aligned}$$

2. لدينا $y = x^2$ و منه $dy = 2x dx$:

$$\begin{aligned}\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [1 - 2x + (1 + 2y)i](dx + i dy) \\ &= \int_0^1 [1 - 2x - (1 + 2x^2)2x] dx \\ &\quad + i \int_0^1 [1 + 2x^2 - (1 - 2x)2x] dx \\ &= \int_0^1 (1 - 4x - 4x^3) dx \\ &\quad + i \int_0^1 (1 + 2x - 2x^2) dx \\ &= [x - 2x^2 - x^4]_0^1 + i \left[x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -2 + \frac{4}{3}i\end{aligned}$$

مثال (5):

احسب التكامل: $\int_C \bar{z}.dz$ حيث C معطى بالعلاقة $z(t) = t^2 - it$ و $0 \leq t \leq 1$.

الحل:

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}.dz &= \int_C (x - iy)(dx + i.dy) \\ &= \int_0^1 (t^2 + it)(2t - i)dt \\ &= \int_0^1 [(2t^3 + t) + it^2]dt \\ &= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + i \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i = 1 + \frac{i}{3}\end{aligned}$$

3-3 خواص التكاملات العقدية:

$$\int_C (f \pm g)dz = \int_C f.dz \pm \int_C g.dz \quad (1)$$

$$\int_C (\alpha f) dz = \alpha \int_C f.dz \quad (2) \text{ حيث } \alpha \text{ ثابت عقدي.}$$

$$\int_C f.dz = \int_{-C} f.dz \quad (3) \text{ حيث } -C \text{ هو معكوس } C.$$

(4) إذا كانت d نقطة ما على المنحني C و كانت a نقطة البداية و b نقطة النهاية له فإن:

$$\int_a^b f(z).dz = \int_a^d f(z).dz + \int_d^b f(z).dz$$

(5) إذا كان L طول المنحني C و $|f(z)| \leq M$ على C فإن:

$$\left| \int_C f(z).dz \right| \leq ML$$

مثال (6):

احسب التكامل $\int_C f(z).dz$ حيث $f(z) = e^{iz}$ و C هو المنحني المكون من الخططين المستقيمين اللذين يصلان بين النقاط $2 + \pi i$, 2 على الترتيب.

الحل:

المستقيم الأول C_1 يعطى بالعلاقة:

$$C_1: y = \frac{\pi}{2}x, 0 \leq x \leq 2$$

كما في الشكل (3-3)، و المستقيم C_2 يعطى بالعلاقة:

$$C_2: x = 2 \text{ (حيث } y \text{ تتحول من } \pi \text{ إلى صفر)}$$

و اعتماداً على الخاصة الرابعة يمكن أن نكتب:

$$\int_C f(z).dz = \int_{C_1} f(z).dz + \int_{C_2} f(z).dz$$

لنوجد أولاً:

$$\int_{C_1} f(z).dz = \int_0^2 e^{i(x+\frac{\pi}{2}xi)} \left(1 + \frac{\pi}{2}i\right) dx$$

حيث:

$$dz = dx + i.dy = dx + i\frac{\pi}{2}dx = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)dx$$

ومنه:

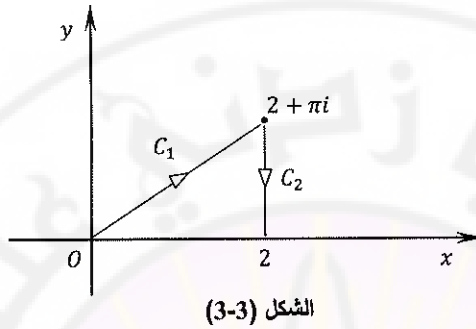
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^2 e^{i(-\frac{\pi}{2}+i)} \left(1 + \frac{\pi}{2}i\right) dx$$

$$= \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) \left[\frac{e^{(-\frac{\pi}{2}+i)x}}{-\frac{\pi}{2}+i} \right]_0^2$$

$$= \frac{1+i\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}+i} [e^{-\pi+2i} - 1] = \frac{i(-i+\frac{\pi}{2})}{-\frac{\pi}{2}+i} [e^{-\pi+2i} - 1]$$

$$= -\frac{i(-i+\frac{\pi}{2})}{-i+\frac{\pi}{2}} [e^{-\pi+2i} - 1] = -i[e^{-\pi+2i} - 1]$$

$$= i(1 - e^{-\pi}e^{2i})$$



الآن لنوجد:

$$\int_{C_2} f(z) dz$$

و كون x مقداراً ثابتاً عندها:

$$dz = dx + i \cdot dy = i \cdot dy$$

و منه:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) \cdot dz &= \int_{\pi}^0 e^{i(2+yi)} \cdot i \cdot dy \\ &= i \cdot e^{2i} \int_{\pi}^0 e^{-y} dy \\ &= i \cdot e^{2i} [e^{-\pi} - 1] \end{aligned}$$

و بالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= i(1 - e^{-\pi}e^{2i}) + i(e^{2i}e^{-\pi} - e^{2i}) \\ &= i(1 - e^{2i}) \end{aligned}$$

مثال (7):

احسب التكامل: $\int_C f(z).dz$ حيث:

1. $f(z) = z$ و C هو دائرة الوحدة.

2. $f(z) = \bar{z}$ و C هو دائرة الوحدة.

الحل:

1. المنحني C يعطى بالمعادلتين الوسيطيتين:

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$$

و منه:

$$dz = dx + i.dy = (-\sin t + i.\cos t)dt$$

و عليه يكون:

$$\begin{aligned} \int_C f(z).dz &= \int_C z.dz \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t + i.\sin t)(-\sin t + i.\cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-2\cos t \sin t + i(\cos^2 t - \sin^2 t)]dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin 2t .dt + i.\int_0^{2\pi} \cos 2t .dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi} + i.\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z).dz &= \int_C \bar{z}.dz & 2. \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t - i.\sin t)(-\sin t + i.\cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} i(\sin^2 t + \cos^2 t).dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i \end{aligned}$$

مثال (8):

أثبت أن $\left| \int_C \frac{e^{iz}}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{12}{5} \pi e^2$ حيث C هو المنحني $|z| = \frac{3}{2}$.

الحل:

إن $|z| = \frac{3}{2}$ هي معادلة دائرة مركزها المبدأ و نصف قطرها $\frac{3}{2}$ و نعلم أن محيط الدائرة هو $2\pi r$ حيث r نصف القطر و منه فإن طول المنحني C هو $L = 3\pi$.

الآن لنوجد العدد الحقيقي الموجب M بحيث يكون $|f(z)| \leq M$ من أجل كل قيم z في مجالها.

بالاعتماد على مترابحة المثلث نجد:

$$|z^2 - i| \geq |z|^2 - |i| = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

ومنه:

$$\frac{1}{|z^2 - i|} \leq \frac{4}{5}$$

من جهة أخرى:

$$|e^{iz}| = |e^{(x+iy)i}| = |e^{-y+xi}| = e^{-y} \leq e^2$$

إذا قيمة M هي:

$$|f(z)| \leq \frac{4}{5} e^2 = M$$

و بالتالي فإن:

$$\left| \int_C \frac{e^{iz}}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{4}{5} e^2 (3\pi) = \frac{12}{5} \pi e^2$$

نظرية غرين:

بفرض $u(x, y), v(x, y)$ تابعين مستمرين و لهما مشتقات جزئية مستمرة في منطقة بسيطة الترابط D حدودها المنحني C الموجه بالاتجاه الموجب (عكس اتجاه عقارب الساعة) فإن:

$$\int_C [u \cdot dx + v \cdot dy] = \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \cdot dy$$

حيث R هي اجتماع المنطقة D و محيطها C .

نظرية كوشي:

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة بسيطة الترابط D و محيطها C فإن:

$$\int_C f(z) \cdot dz = 0$$

حيث C منحنى بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب.

البرهان:

ليكن $f(z) = u + i \cdot v$ تابعاً تحليلياً في المنطقة D و بفرض C منحنى بسيط مغلقاً عندئذٍ فإن معادلات كوشي - ريمان محققة أي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

و يمكن كتابة التكامل $\int_C f(z) \cdot dz$ بالشكل التالي:

$$\int_C f(z) \cdot dz = \int_C (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \cdot \int_C (v \cdot dx + u \cdot dy)$$

بالاعتماد على نظرية غرين يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) \cdot dz &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \cdot dy \\ &+ i \cdot \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \cdot dy \end{aligned}$$

و بالاعتماد على معادلات كوشي - ريمان نجد أنَّ التكاملين في الطرف الأيمن معدومان أي:

$$\int_C f(z).dz = 0$$

و هو المطلوب.

مثال (9):

أوجد التكامل $\int_C \cos z . dz$ حيث C منحنٍ بسيط مغلق.

الحل:

إنَّ التابع:

$$f(z) = \cos z$$

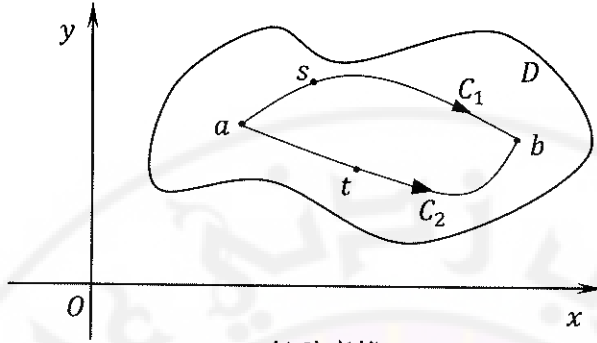
هو تابع تحليلي في كل المستوي العقدي و له مشتقات جزئية مستمرة و بالتالي حسب نظرية كوشي فإنَّ:

$$\int_C \cos z . dz = 0$$

نظرية (1-3):

ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً ضمن منطقة بسيطة الترابط D عندئذٍ فإنَّ التكامل $\int_a^b f(z).dz$ مستقل عن الطريق الواقع ضمن D و الذي يصل بين أي نقطتين a و b من D .

البرهان:



الشكل (4-3)

من الشكل (4-3) نجد أن $\int_{atbsa} f(z).dz = 0$ وذلك حسب نظرية كوشي
و منه:

$$\int_{atb} f(z).dz + \int_{bsa} f(z).dz = 0$$

و لكن:

$$\int_{C_1} f(z).dz = - \int_{bsa} f(z).dz$$

و منه:

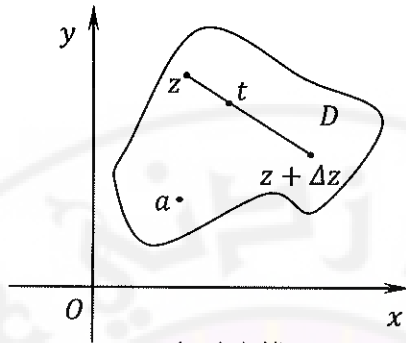
$$\int_{C_2} f(z).dz = \int_{C_1} f(z).dz$$

و هو المطلوب.

نظرية (2-3):

ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الترابط D و كل من a, z نقطتان من D عندئذ فإن التابع: $F(z) = \int_a^z f(z).dz$ تحليلي ضمن D و يحقق العلاقة:
 $F'(z) = f(z)$

الإثبات:



الشكل (5-3)

بفرض a, z نقطتين من المنطقة D و $z + \Delta z$ نقطة قريبة من z بحيث تكون القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين z و $z + \Delta z$ واقعة بأكملها في D كما في الشكل (5-3).

و منه يكون:

$$F(z + \Delta z) = \int_z^{z+\Delta z} f(z). dz$$

$$\Delta F = F(z + \Delta z) - F(z)$$

$$= \int_a^{z+\Delta z} f(z). dz - \int_a^z f(z). dz$$

$$= \int_z^{z+\Delta z} f(z). dz = \int_a^{z+\Delta z} f(t). dt$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(t) - f(z)] dt$$

إنَّ التكامل الأخير مستقل عن الطريق الذي يصل بين النقطتين z و $z + \Delta z$

حسب النظرية السابقة، و بما أنَّ $f(z)$ مستمر فإنَّ:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |\Delta z| < \delta \Rightarrow |\Delta f| < \varepsilon$$

و عندما تكون t نقطة ما من القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين z و $z + \Delta z$ نجد أن:

$$|f(z) - f(t)| < \varepsilon \text{ و } |t - z| < \delta$$

إذاً:

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} [f(t) - f(z)] dt < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon$$

و منه نجد أن:

$$F'(z) = f(z) \text{ أو } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z)$$

هذا يعني أن $F(z)$ تحليلي في D و مشتقه $F'(z) = f(z)$ ، نسمي التابع $F(z)$ التابع الأصلي للتابع $f(z)$ و يكون:

$$\int_a^b f(z).dz = F(b) - F(a)$$

مثال (10):

$$\text{احسب التكامل: } \int_i^{1+4i} z^2 . dz$$

الحل:

التابع $f(z) = z^2$ تحليلي في المستوي العقدي و قيمة التكامل لا تتوقف إلا على البداية i و النهاية $1 + 4i$ و منه:

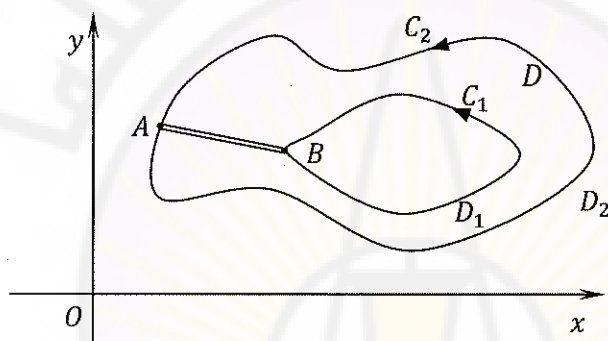
$$\begin{aligned} \int_i^{1+4i} z^2 . dz &= \left[\frac{z^3}{3} \right]_i^{1+4i} \\ &= \frac{1}{3} [(1 + 4i)^3 - i^3] = -\frac{47}{3} - 17i \end{aligned}$$

نظرية (3-3):

ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة محصورة بين منحنيين بسيطين مغلقين C_1 و C_2 يقع أحدهما ضمن الآخر (مثلاً C_1 ضمن C_2) و $f(z)$ تحليلي على المنحنيين C_1 و C_2 عندئذ:

$$\int_{C_1} f(z).dz = \int_{C_2} f(z).dz$$

البرهان:



الشكل (6-3)

لنحدث شقاً في المنطقة المفروضة و ليكن AB كما في الشكل (6-3):
بما أن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة D و على محيطها فإن:

$$\int_{ABD_1BAD_2A} f(z).dz = 0$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(z).dz + \int_{BD_1B} f(z).dz \\ + \int_{BA} f(z).dz + \int_{AD_2A} f(z).dz = 0 \end{aligned}$$

و بما أن:

$$\int_{AB} f(z).dz = - \int_{BA} f(z).dz$$

فإن:

$$-\int_{C_1} f(z).dz + \int_{C_2} f(z).dz = 0$$

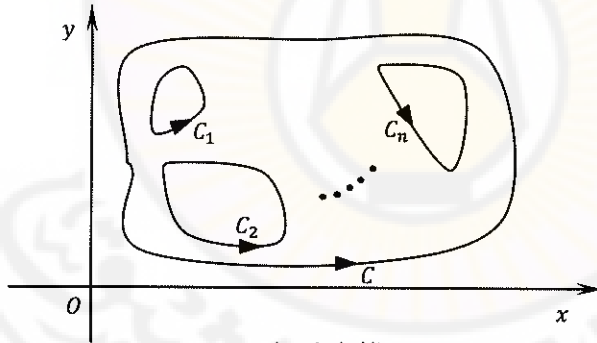
و منه فإن:

$$\int_{C_1} f(z).dz = \int_{C_2} f(z).dz$$

و هو المطلوب.

يمكن تعميم النظرية السابقة كما يلي:

ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً ضمن المنطقة المحصورة بين المنحني C و المنحنيات التالية: $C_1, C_2, \dots, C_n$ حيث إن المنحنيات المفروضة تقع جميعاً ضمن المنحني C و لا تتقاطع مع بعضها و هي منحنيات بسيطة مغلقة كما في الشكل الموضح أدناه (7-3):



الشكل (7-3)

و ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً أيضاً على المنحنيات جميعها عندئذ:

$$\int_C f(z).dz = \int_{C_1} f(z).dz + \int_{C_2} f(z).dz + \dots + \int_{C_n} f(z).dz$$

ملاحظة:

تبين لنا النظرية السابقة أنَّ قيمة التكامل $\int_C f(z).dz$ ثابتة و لا تعتمد على شكل المنحني ما دام هذا المنحني مغلقاً و بسيطاً و التابع $f(z)$ تحليلياً، و هذا يمكننا من التخلص من المنحني المعقّد أو الذي لا نستطيع تمثيله بمعادلات وسيطية و استبداله بمنحنٍ مغلق بسيط يمكن تمثيله بمعادلات وسيطية كما في المثال التالي:

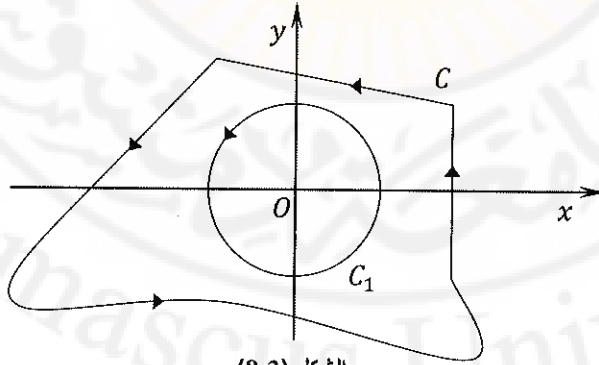
مثال (11):

احسب قيمة التكامل $\int_C \frac{1}{z} dz$ حيث C منحني مغلق كما في الشكل (8-3).

الحل:

للسهولة نستبدل المنحني C بالمنحني C_1 الذي هو دائرة الوحدة.
و بما أنَّ التابع $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين المنحنيين C_1 و C و المنحني C_1 يقع ضمن المنحني C فإن:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz$$



الشكل (8-3)

و بما أن المنحني C_1 يُمثل دائرة الوحدة فإنّ النقاط z على C_1 تحقق العلاقة:

$$z(t) = e^{ti}; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

و منه:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i \cdot e^{ti}}{e^{ti}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

4-3 صيغ كوشي التكاملية:

نظرية (4-3):

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة D التي يحيط بها المنحني البسيط المغلق C و إذا كانت a نقطة داخل C فإن:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (1)$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (2)$$

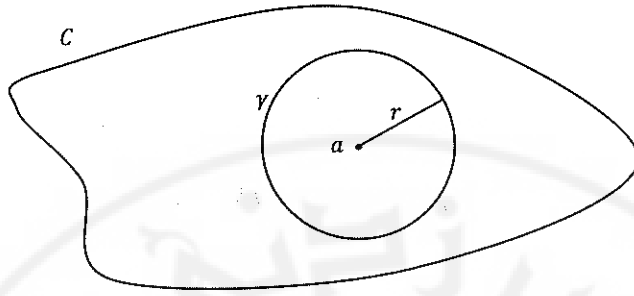
حيث تعطي العلاقة (1) قيمة التابع $f(z)$ في نقطة مفروضة داخل C ، بينما تعطي العلاقة (2) قيمة المشتق النوني للتابع $f(z)$ في النقطة المفروضة.

البرهان:

(1) إنّ التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلي باستثناء النقطة الشاذة $z = a$ نحيط النقطة الشاذة

بالدائرة γ فيكون التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلياً في المنطقة المحصورة بين المنحنيين C

و γ كما في الشكل (9-3):



الشكل (3-3)

و منه حسب النظرية (3-3) يكون:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

و بفرض:

$$|z - a| = r$$

معادلة الدائرة γ فإن:

$$z - a = r \cdot e^{i\theta}$$

و منه ينتج لدينا:

$$dz = i \cdot r \cdot e^{i\theta} d\theta$$

أي يكون لدينا:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

يمكن أن نجعل الدائرة صغيرة بقدر ما نشاء، و بالتالي بجعل $r \rightarrow 0$ علماً

أن التابع $f(z)$ مستمر على D فإن:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = i \cdot f(a) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \cdot f(a)$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \text{و منه:}$$

(2) باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة للوسيط a نجد:

$$f'(a) = \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

و بالاشتقاق مرة ثانية نجد:

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

و هكذا نصل إلى المشتق النوني:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

و هو المطلوب.

مثال (12):

احسب التكامل $\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right) dz$ حيث C يمثل الدائرة $|z| = 1$.

الحل:

لدينا:

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right) dz = \int_C \frac{z^2+1}{z} dz$$

و النقطة $z = 0$ تقع ضمن الدائرة $|z| = 1$ و التابع $f(z) = z^2 + 1$

تحليلي داخل و على محيط الدائرة المفروضة و منه حسب صيغة كوشي الأولى

نجد:

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z} \right) dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) \\ = 2\pi i [(0)^2 + 1] = 2\pi i$$

مثال (13):

احسب التكامل $\int_C \frac{z}{(z-2)^4} dz$ حيث C يمثل الدائرة $|z| = 1$.

الحل:

إنَّ النقطة الشاذة $z = 2$ لا تقع ضمن الدائرة $|z| = 1$ كما أنَّ التابع $f(z) = \frac{z}{(z-2)^4}$ تحليلي داخل و على محيط الدائرة المفروضة و منه حسب

صيغة كوشي نجد:

$$\int_C \frac{z}{(z-2)^4} dz = 0$$

مثال (14):

احسب التكامل: $\int_C \frac{e^z}{z+3} dz$ في الحالتين التاليتين:

(1) إذا كان C يمثل الدائرة $|z| = 1$.

(2) إذا كان C يمثل الدائرة $|z| = 5$.

الحل:

(1) التابع $f(z) = \frac{e^z}{z+3}$ تحليلي داخل و على محيط الدائرة C و منه حسب

نظرية كوشي فإن:

$$\int_C \frac{e^z}{z+3} dz = 0$$

(2) النقطة الشاذة $z = -3$ تقع داخل المنحني C و التابع $f(z) = e^z$ تحليلي

داخل و على محيط الدائرة C و منه حسب صيغة كوشي الأولى نجد:

$$\int_C \frac{e^z}{z+3} dz = 2\pi i \cdot e^{-3} = \frac{2\pi i}{e^3}$$

مثال (15):

احسب التكامل $\int_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ حيث C هو محيط الدائرة في الحالات التالية:

$$(1) |z - 1 - 2i| = 2$$

$$(2) |z - 2 - i| = 2$$

$$(3) |z| = 1$$

الحل:

(1) إن النقاط الشاذة هي حلول المعادلة:

$$z^3 - 2z^2 = 0 \Rightarrow z^2(z - 2) = 0$$

و منه: إما $z = 0$ أو $z = 2$.

في هذه الحالة يكون $|z - 1 - 2i| = 2$ فإن التابع تحليلي

$f(z) = \frac{z+1}{z^3-2z^2}$ داخل و على المنحني و بالتالي حسب نظرية كوشي فإن:

$$\int_{|z-2-i|=2} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz = 0$$

(2) في هذه الحالة النقطة $z = 2$ تقع داخل المنحني $|z - 2 - i| = 2$ و منه

حسب صيغة كوشي الأولى فإن:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz &= \int_{|z-2-i|=2} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz \\
&= \int_{|z-2-i|=2} \frac{\frac{z+1}{z^2}}{z-2} dz \\
&= 2\pi i \left[\frac{z+1}{z^2} \right]_{z=2} = 2\pi i \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{2} \pi i
\end{aligned}$$

حيث التابع $f(z) = \frac{z+1}{z^2}$ تحليلي داخل و على المنحني:

$$|z - 2 - i| = 2$$

(3) في هذه الحالة النقطة $z = 0$ تقع داخل الدائرة $|z| = 1$ و منه حسب

صيغة كوشي الثانية نجد:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{z+1}{z-2}}{z^2} dz = 2\pi i \left[\frac{z+1}{z-2} \right]'_{z=0} \\
&= 2\pi i \left[-\frac{3}{(z-2)^2} \right]_{z=0} = -\frac{3}{2} \pi i
\end{aligned}$$

حيث التابع $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$ تحليلي داخل و على المنحني $|z| = 1$.

مثال (16):

احسب التكامل $\int_C \frac{\cosh i.z}{z^2+4z+3} dz$ حيث C هو الدائرة $|z| = 2$.

الحل:

إنَّ النقاط الشاذة هي حلول المعادلة $z^2 + 4z + 3 = 0$ و منه:

$$z^2 + 4z + 3 = (z + 3)(z + 1) = 0$$

إذاً:

$$z = -3, z = -1$$

و النقطة الشاذة $z = -1$ تقع داخل المنحني C و التابع:

$$f(z) = \frac{\cosh iz}{z+3}$$

تحليلي داخل و على المنحني C و منه حسب صيغة كوشي الأولى نجد:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\cosh i.z}{z^2+4z+3} dz &= \int_C \frac{\cosh i.z}{(z+1)(z+3)} dz \\ &= \int_{|z|=2} \frac{\frac{\cosh iz}{z+3}}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{\cosh iz}{z+3} \right]_{z=-1} \\ &= 2\pi i \left(\frac{\cosh(-i)}{2} \right) \\ &= \pi i \cdot \cosh(-i) = \pi i \cdot \cos 1 \end{aligned}$$

مثال (17):

احسب التكامل $\int_C \frac{\cos z}{z^3+z} dz$ حيث C هو محيط الدائرة في الحالات التالية:

$$(1) |z| = 2$$

$$(2) |z| = \frac{1}{2}$$

$$(3) \left| z - \frac{i}{2} \right| = 1$$

الحل:

(1) النقاط الشاذة هي حلول المعادلة $z^3 + z = 0$ و منه:

$$z = 0, z = -i, z = i$$

و جميع هذه النقاط تقع داخل المنحني $|z| = 2$ لذلك نفرق التابع

الكسري المكامل كما يلي:

$$\frac{1}{z^3+z} = \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}$$

نوجد المقامات و نطابق فنجد:

$$1 = A(z^2 + 1) + Bz(z + i) + Cz(z - i)$$

$$1 = (A + B + C)z^2 + z(Bi - Ci) + A$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - C = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \quad \text{و منه:}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أي أن:}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{1}{z^3+z} = \frac{1}{z} + \frac{-\frac{1}{2}}{z-i} + \frac{-\frac{1}{2}}{z+i}$$

$$\frac{\cos z}{z^3+z} = \frac{\cos z}{z} - \frac{1}{2} \frac{\cos z}{z-i} - \frac{1}{2} \frac{\cos z}{z+i}$$

و بالتالي:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\cos z}{z^3+z} &= \int_C \frac{\cos z}{z} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos z}{z-i} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos z}{z+i} \\ &= 2\pi i [\cos z]_{z=0} - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i [\cos z]_{z=i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i [\cos z]_{z=-i} \\ &= 2\pi i \left[\cos 0 - \frac{1}{2} \cos i - \frac{1}{2} \cos(-i) \right] \\ &= 2\pi i [i - \cosh 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos z}{z^3+z} &= \int_C \frac{\cos z}{z} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos z}{z-i} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos z}{z+i} \\ &= 2\pi i [\cos z]_{z=0} - \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0) = 2\pi i\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos z}{z^3+z} &= \int_C \frac{\cos z}{z} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos z}{z-i} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\cos z}{z+i} \\ &= 2\pi i [\cos z]_{z=0} - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i [\cos z]_{z=i} - \frac{1}{2}(0) \\ &= 2\pi i \cos 0 - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cos i \\ &= 2\pi i \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \cos i\right] \\ &= 2\pi i \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \cosh 1\right]\end{aligned}\quad (3)$$

مثال (18):

احسب التكامل: $\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ حيث C هو محيط الدائرة $|z| = 2$.

الحل:

النقطة الشاذة $z = -1$ تقع داخل المنحني C و التابع:

$$f(z) = e^{2z}$$

تحليلي داخل و على المنحني C و منه حسب صيغة كوشي الثانية فإن:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} [e^{2z}]'''_{z=-1} = \frac{2\pi i}{3!} [2^3 \cdot e^{2z}]_{z=-1} \\ &= \frac{2\pi i}{6} 8e^{-2} = \frac{8}{3} \pi i \cdot e^{-2} = \frac{8\pi i}{3e^2}\end{aligned}$$

5-3 مبدأ النهاية العظمى للتوابع التحليلية:

نظرية (5-3):

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل الدائرة $|z - z_0| < r$ و مستمراً داخل
و على محيط C عندئذٍ من أجل جميع مشتقات التابع $f(z)$ في النقطة z_0 فإنَّ
المتراجحة التالية محققة:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} ; n = 1, 2, \dots$$

حيث: $M = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$ القيمة العظمى لطويلة التابع
 $f(z)$ على الدائرة $|z - z_0| = r$.

البرهان:

نعلم أنَّ:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

حيث المنحني C هو الدائرة $|z - z_0| = r$ و منه:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_{|z-z_0|=r} dz \\ &= \frac{n! M 2\pi r}{2\pi r^{n+1}} = \frac{n! M}{r^n} ; n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

نظرية (3-6) [نظرية ليوفيل]:

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً و محدوداً على المستوى العقدي (أي يوجد M بحيث يكون $|f(z)| \leq M$ من أجل كل عدد عقدي z) فإن $f(z)$ تابع ثابت القيمة أي:

$$f(z) = \text{const}$$

البرهان:

بما أن الثابت M في النظرية السابقة مرتبط بقيم التابع $f(z)$ على المنحني C وأن:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n} ; n = 1, 2, \dots$$

و بما أن $|f(z)| \leq M$ لكل عدد عقدي z فمن أجل $n = 1$ نجد:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

و بما أن البسط في الطرف الأيمن لا يعتمد على r وكذلك الطرف الأيسر فإذا أخذنا نهاية الطرفين عندما r تسعى إلى اللانهاية فإن

$$f'(z) = 0$$

و ذلك لأجل كل عدد عقدي z و منه $f(z) = \text{const.}$ قيمة ثابتة في كل نقطة من المستوى العقدي.

نظرية (3-7) [النظرية الأساسية في الجبر]:

لكل كثيرة حدود من الدرجة $n \geq 1$ جذر واحد على الأقل.

البرهان:

لنفرض أن:

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

كثيرة حدود من الدرجة n لا تساوي الصفر من أجل أي قيمة لـ z إذا:

$$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$$

هو تابع تحليلي في كل المستوي العقدي و نلاحظ أن $|f(z)|$ تقترب من الصفر كلما اقتربت $|z|$ من اللانهاية و السبب هو أن:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}$$

و بالتالي $|f(z)|$ محدودة من أجل جميع قيم z .

و منه حسب نظرية ليوفيل فإن $f(z)$ تابع ثابت و بالتالي $p_n(z)$ ثابتة أيضاً و هذا يناقض الفرض بأن $n > 0$ إذا $p_n(z)$ لها على الأقل جذر واحد و بذلك يتم المطلوب.

لبرهان أن $p_n(z)$ لها n من الجذور، نلاحظ من النظرية الأساسية في الجبر أن $p_n(z)$ لها على الأقل جذر واحد و ليكن z_0 و منه:

$$p_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z)$$

حيث $q_{n-1}(z)$ كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ ، الآن إذا كان $n-1 > 0$ فإن $q_{n-1}(z)$ لها جذر واحد على الأقل و بالاستمرار على هذا المنوال نحصل

على n من العوامل لـ $p_n(z)$ و هذا يعني أن لـ $p_n(z)$ بالضبط n من الجذور.

مثال (19):

بفرض أن: $f(z) = \sin z$ أوجد القيمة العظمى للتابع $|f(z)|$ في المنطقة المغلقة:

$$D = \left\{ z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \right\}$$

الحل:

التابع $f(z) = \sin z$ تحليلي و قيمته تتغير بتغير الزاوية و منه فإن التابع:

$$|f(z)| = |\sin z|$$

لا يأخذ أي قيمة عظمى على النقاط الداخلية للمنطقة D و لكنه يأخذ قيمة عظمى على إحدى النقاط الحدودية للمنطقة D ، و نعلم أن:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + i.y) \\ &= \sin x \cdot \cos iy + \cos x \cdot \sin iy \\ &= \sin x \cdot \cosh y + i \cdot \cos x \cdot \sinh y \end{aligned}$$

و منه:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cdot \cosh^2 y + \sinh^2 y \cdot \cos^2 x$$

بإضافة و طرح المقدار $\sin^2 x \cdot \sinh^2 y$ نجد:

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) \\ &\quad + (\cos^2 x + \sin^2 x) \sinh^2 y \end{aligned}$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$\leq 1 + \sinh^2 1 = \cosh^2 1$$

و منه فإنّ التابع $|f(z)| = |\sin z|$ يأخذ قيمته العظمى عند النقطة $z = \frac{\pi}{2} + i$ وهذه القيمة هي: $\cosh 1$.

مثال (20):

$$\text{احسب التكامل } \int_C \frac{9z^2 - iz + 4}{z^3 + z} dz \text{ حيث } C \text{ هو الدائرة } |z| = 4.$$

الحل:

إنّ النقاط الشاذة هي حلول المعادلة $z^3 + z = 0$ و منه:

$$z = 0, \quad z = i, \quad z = -i$$

و جميع هذه النقاط تقع داخل المنحني $|z| = 4$ ، لذلك نفرق التابع الكسري

المكامل كما يلي:

$$\frac{9z^2 - iz + 4}{z^3 + z} = \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$

بتوحيد المقامات و المطابقة نجد:

$$9z^2 - iz + 4 = A(z^2 + 1) + Bz(z - i) + Cz(z + i)$$

$$9z^2 - iz + 4 = (A + B + C)z^2 + (C - B)iz + A$$

و منه:

$$\begin{cases} A = 4 \\ C - B = -1 \\ A + B + C = 9 \end{cases}$$

أي أن:

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{9z^2 - iz + 4}{z^3 + z} = \frac{4}{z} + \frac{3}{z+i} + \frac{2}{z-i}$$

نأخذ تكامل الطرفين فنجد:

$$\int_C \frac{9z^2 - iz + 4}{z^3 + z} dz = \int_C \frac{4}{z} dz + \int_C \frac{3}{z+i} dz + \int_C \frac{2}{z-i} dz$$

و بتطبيق صيغة كوشي الأولى نجد:

$$\int_C \frac{9z^2 - iz + 4}{z^3 + z} dz = 4(2\pi i) + 3(2\pi i) + 2(2\pi i) = 18\pi i$$

مثال (21):

احسب التكامل: $\int_C \frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)(z+2)^3} dz$ حيث C هو الدائرة $|z| = 3$.

الحل:

نفرق التابع الكسري المكامل كما يلي:

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)(z+2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2} + \frac{D}{(z+2)^3}$$

بتوحيد المقامات و المطابقة نجد:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 3 &= A(z+2)^3 + B(z-1)(z+2)^2 \\ &+ C(z-1)(z+2) + D(z-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(z^3 + 6z^2 + 12z + 8) + B(z - 1)(z^2 + 4z + 4) \\
&\quad + C(z^2 + z - 2) + D(z - 1) \\
&= A(z^3 + 6z^2 + 12z + 8) \\
&\quad + B(z^3 + 4z^2 + 4z - z^2 - 4z - 4) \\
&\quad + C(z^2 + z - 2) + D(z - 1) \\
&= (A + B)z^3 + (6A + 3B + C)z^2 + (12A + C + D)z \\
&\quad + (8A - 4B - 2C - D)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 6A+3B+C=1 \\ 12A+C+D=-2 \\ 8A-4B-2C-D=3 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

و بحل هذه الجملة يكون لدينا:

$$\begin{cases} A=\frac{2}{27} \\ B=-\frac{2}{27} \\ C=\frac{7}{9} \\ D=-\frac{11}{3} \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)(z+2)^3} dz &= \int_C \frac{\frac{2}{27}}{z-1} dz + \int_C \frac{\frac{2}{27}}{z+2} dz \\
&\quad + \int_C \frac{\frac{7}{9}}{(z+2)^2} dz + \int_C \frac{\frac{-11}{3}}{(z+2)^3} dz
\end{aligned}$$

الآن بتطبيق صيغة كوشي الأولى على التكاملين الأول و الثاني، و صيغة

كوشي الثانية على التكاملين الثالث و الرابع نجد:

$$\int_C \frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)(z+2)^3} dz = 2\pi i \left(\frac{2}{27} - \frac{2}{27} \right) + 0 + 0 = 0$$

مثال (22):

احسب التكامل $\int_C \frac{z \cdot \cos \pi z}{(z-1)(z+2)^2} dz$ حيث C هو الدائرة $|z| = 4$.

الحل:

نفرق التابع الكسري المكامل كما يلي:

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}$$

بتوحيد المقامات و المطابقة نجد:

$$1 = A(z+2)^2 + B(z-1)(z+2) + C(z-1)$$

$$= A(z^2 + 4z + 4) + B(z^2 + z - 2) + C(z - 1)$$

و منه:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + B + C = 0 \\ 4A - 2B - C = 1 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد:

$$A = -B, \quad \begin{cases} -4B + B + C = 0 \\ -4B - 2B - C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3B + C = 0 \\ -6B - C = 1 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين نجد: $-9B = 1$ و منه: $B = -\frac{1}{9}$.

إذاً $A = \frac{1}{9}$ و بالتعويض بالمعادلة $-6B - C = 1$ نجد:

$$-6B - 1 = C$$

$$-6\left(-\frac{1}{9}\right) - 1 = C$$

$$\frac{6}{9} - 1 = C$$

و منه:

$$C = -\frac{1}{3}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{9} \frac{1}{z+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(z+2)^2}$$

نأخذ تكامل الطرفين كما يلي:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z \cos \pi z}{(z-1)(z+2)^2} dz &= \int_C \frac{\frac{1}{9} z \cos \pi z}{z-1} dz + \int_C \frac{-\frac{1}{9} z \cos \pi z}{z+2} dz \\ &\quad + \int_C \frac{-\frac{1}{3} z \cos \pi z}{(z+2)^2} dz \\ &= \frac{1}{9} 2\pi i (\cos \pi) - \frac{1}{9} 2\pi i (-2 \cos(-2\pi)) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi i}{1!} \right) [(z \cdot \cos \pi z)']_{z=-2} \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} \pi i [\cos \pi z - \pi z \cdot \sin \pi z]_{z=-2} \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right) - \frac{2}{3} \pi i (1 + 2\pi) \\ &= 2 \frac{\pi i}{9} - 2 \frac{\pi i}{3} - \frac{4}{3} \pi^2 i = -\frac{4\pi i}{9} - \frac{4}{3} \pi^2 i \end{aligned}$$

مثال (23):

احسب التكاملات التالية:

• $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$ حيث C هو الدائرة $|z-z_0|=r$.

• $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$ حيث C هو الدائرة $|z-z_0|=r$.

• $\int_C \frac{z.dz}{z-3}$ حيث C هو الدائرة $|z|=1$.

الحل:

• لدينا: $z-z_0 = re^{i\theta}$, $|z-z_0|=r$ و منه:

$$z = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow dz = i.re^{i\theta}d\theta$$

بالتعويض نجد:

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

• لدينا: $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^n e^{in\theta}}$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

و ذلك لأنّ التابع e^z تابع دوري له الدور $2\pi i$.

• من أجل $|z|=1$ فإنّ $z = e^{i\theta}$ و منه: $dz = i.e^{i\theta}d\theta$ ، بالتعويض

نجد:

$$\int_C \frac{z.dz}{z-3} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}(ie^{i\theta}d\theta)}{e^{i\theta}-3}$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{e^{i\theta}-3} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{i\theta}}{e^{i\theta}-3} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta + 3i \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-3} d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z \cdot dz}{z-3} &= [e^{i\theta}]_0^{2\pi} + 3i \cdot \ln[|e^{i\theta} - 3|]_0^{2\pi} \\
&= (e^{2\pi i} - e^0) + 3i[\ln|e^{2\pi i} - 3| - \ln|e^0 - 3|] \\
&= 0 + 3i(0) = 0
\end{aligned}$$

و هذه النتيجة تتسجم مع نظرية كوشي و ذلك لأن التابع $f(z) = \frac{z}{z-3}$ تحليلي داخل $|z| = 1$ و مستمر على هذه الدائرة و محيطها.

مثال (24):

$$\text{احسب التكامل: } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

الحل:

لنأخذ التكامل العقدي: $\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ حيث C هو المنحني المبين بالشكل (10-3) و المؤلف من نصفي الدائرتين Γ و γ و القطعتين المستقيمتين $B'A'$ و AB . و لنفرض أننا نرسم هذا المنحني بالاتجاه الموجب كما هو مبين على الشكل، و هكذا تكون قيمة هذا التكامل مساوية للصفر انطلاقاً من نظرية كوشي. لنفرض الآن أن نصف قطر الدائرة الكبيرة Γ هو R و نصف قطر الدائرة الصغيرة γ هو r فيكون:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

حيث بدلنا z بـ x على القطعة المستقيمة المحمولة على $x'ox$.

بفرض $z = re^{i\theta}$ فإن:

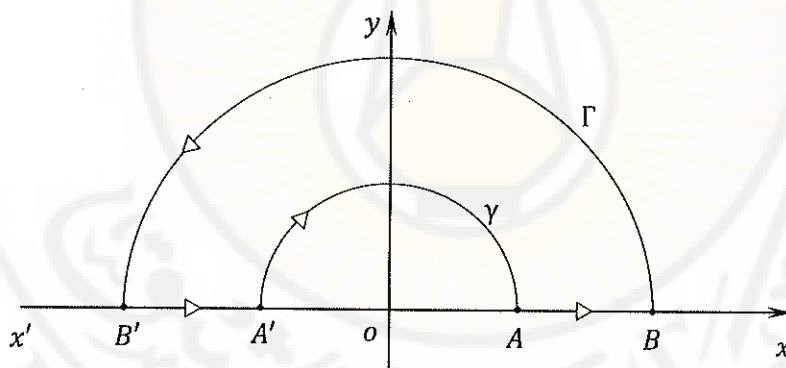
$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz &= i \int_{\pi}^0 e^{ir(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta \\ &= -i \int_0^{\pi} e^{-r \sin \theta + ir \cos \theta} d\theta\end{aligned}$$

و بفرض $z = Re^{iw}$ فإن:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_0^{\pi} e^{-R \sin w + iR \cos w} dw$$

أما إذا بدلنا في التكامل $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx$ كل $x \rightarrow -x$ فإن:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_R^r \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx\end{aligned}$$



الشكل (10-3)

و بالتالي:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-r \sin \theta + i r \cos \theta} d\theta \\
&\quad - \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-R \sin w + i R \cos w} dw
\end{aligned}$$

لنحسب الآن كلاً من التكاملين الأخيرين:

$$\int_0^\pi e^{-R \sin w + i R \cos w} dw < \int_0^\pi e^{-R \sin w} dw = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin w} dw$$

و ذلك لأن:

$$|\int f(z).dz| \leq \int |f(z)|.dz$$

و لأن:

$$|e^{-R \sin w + i R \cos w}| = e^{-R \sin w}$$

و لنثبت أن: $\sin w \geq \frac{2w}{\pi}$ عندما $0 \leq w \leq \frac{\pi}{2}$ و ذلك كما يلي:

لنفرض أن $v = \sin w - \frac{2w}{\pi}$ تابع مشتقه:

$$v' = \cos w - \frac{2}{\pi}$$

و هذا التابع يعدم مرة واحدة في المجال $(0, \frac{\pi}{2})$ من أجل $w = \alpha$ حيث $\cos \alpha = \frac{2}{\pi}$.

يكون $v' > 0$ من أجل $0 < w < \alpha$ و $v' < 0$ من أجل $\alpha < w < \frac{\pi}{2}$.

ينعدم v من أجل $w = 0$ و $w = \frac{\pi}{2}$ فقط فهو إذاً يزداد من الصفر حتى القيمة

الموجبة $\sin \alpha - \frac{2\alpha}{\pi}$ ثم يتناقص محافظاً على قيمته الموجبة من هذه القيمة

حتى الصفر فهو موجب دوماً و هذا يثبت صحة المتراجحة $\sin w \geq \frac{2w}{\pi}$ و

منه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin w} dw \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rw}{\pi}} dw = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})$$

و نلاحظ أن الطرف الأيمن من هذه العلاقة ينتهي إلى الصفر عندما $R \rightarrow \infty$.

أما بالنسبة للتكامل الثاني:

$$\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{-r \sin \theta + ir \cos \theta} d\theta = g(r)$$

فهو تابع مستمر لـ r و يكون:

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = g(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

تمارين الفصل الثالث

1. احسب: $\int_C x \cdot dx$

حيث المنحني C هو:

أ. الشعاع من المبدأ حتى النقطة $z = 2 + i$.

ب. نصف الدائرة العلوي: $|z| = 1; 0 \leq \theta \leq \pi$.

ت. $|z - a| = r$.

2. احسب قيمة التكامل: $\int_C z^3 \cdot dz$

حيث C هو القطعة المستقيمة الواصلة من النقطة $A(0,0)$ إلى النقطة $B(1,2)$.

3. احسب التكامل: $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) \cdot dz$.

4. احسب التكامل: $\int_C \frac{z \cdot dz}{(z-2)^4}$ حيث C هو الدائرة $|z| = 1$.

5. احسب التكامل: $\int_0^i z \cdot \cos z \cdot dz$.

6. احسب التكامل: $\int_C \frac{\cosh^2 z + \sinh^2 z}{(z+3i)(z^2+16)} dz$ حيث C هو الدائرة:

$|z| = 2$

7. احسب التكامل: $\int_C \bar{z} \cdot dz$ إذا كان C معطى بالعلاقة:

$$z(t) = t - it \quad \text{حيث: } 0 \leq t \leq 1.$$

8. برهن أن: $\left| \int_i^{2+i} \frac{dz}{2} \right| \leq 2$

9. احسب قيمة التكامل: $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$

حيث C هو:

أ. $|z - 2| = 1$

ب. $|z - 2| = 3$

ت. $|z - 2| = 6$

10. احسب التكامل: $\int_C \frac{\cosh z}{(z-1)(z+2)^3} dz$ حيث C هو الدائرة

$$|z| = 2$$

11. احسب التكامل: $\int_{z_0}^z z \cdot e^{az} \cdot dz$

12. احسب التكامل: $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$

حيث C هو:

أ. $|z| = 5$

ب. $|z| = 2$

13. احسب التكاملات التالية:

• $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10}-1}$

• $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$

• $\int_{|z|=2} \frac{z}{z^4-1} dz$

• $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$

• $\int_{|z|=5} \frac{z^3}{z^2-16} dz$

14. برهن صحة ما يلي:

• $\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} dz = -4\pi i$

• $\int_{|z|=1} \frac{\cos^4 z}{z-\frac{\pi}{6}} dz = \frac{9\pi}{8} i$

• $\int_{|z+1-i|=2} \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz = \frac{\pi}{2} (3+2i)$

15. احسب التكامل: $\int_C \frac{e^z}{z^2(z+2)} dz$ حيث C هو الدائرة:

$|z| = 1$

16. احسب التكامل: $\int_C \frac{dz}{z^2(z-1)}$ حيث C هو الدائرة $|z| = 2$.

17. احسب التكامل: $\int_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz$ حيث C هو الدائرة في المستوى العقدي المعرفة بالشكل $|z-1| = 4$.

18. احسب التكامل: $\int_C (3x + 2iy). dz$ على المثلث C المعروف بأضلاعه الثلاثة C_1, C_2, C_3 كما يلي:

$C_1: y = 2x + 3 ; 0 \leq x \leq 1$

$C_2: x = 1 ; 3 \leq y \leq 5$

$C_3: y = 3 ; 0 \leq x \leq 1$

الفصل الرابع

المتتاليات والمتسلسلات العقدية

Complex Sequences and Series

- (1) المتتاليات العقدية وتقاربها.
- (2) المتسلسلات العقدية وتقاربها.
- (3) متتالية ومتسلسلات التوابع العقدية.
- (4) نظرية تايلور.
- (5) متسلسلة لوران.



1-4 المتتاليات العقدية وتقاربها

تعريف

كل تطبيق

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$n \rightarrow f(n) = z_n$$

لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (أو لأي مجموعة غير منتهية من $\mathbb{N}$) في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ يسمى متتالية عقدية نرمز لها بالرمز (z_n) أو $\{z_n\}$ ، وهي مجموعة غير منتهية من الأعداد العقدية $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. نسمي كل عدد من المتتالية حداً لها، كما نسمي z_n الحد العام للمتتالية أو الحد النوني، وعادةً تعرف المتتالية بحددها العام.

مثال (1)

الحد العام للمتتالية

$$\{i, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{i}{5}, \dots\}$$

$$z_n = \frac{i^n}{n}$$

والحد العام للمتتالية

$$\{i, -1, -i, 1, i, -1, \dots\}$$

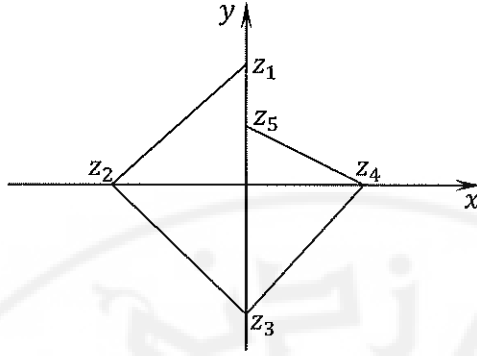
$$z_n = (i)^n$$

مثال (2)

$$z_n = \frac{(i)^n}{n}$$

الحل

الشكل (1-4) يوضح التمثيل الهندسي لحدود المتتالية z_n



الشكل (1-4)

تعريف

نقول إنَّ المتتالية العقدية (z_n) متقاربة من العدد العقدي a ، والذي نسميه نهاية المتتالية ونكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ، إذا وُجد من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N = N(\varepsilon)$ بحيث إذا كان $n \geq N$ فإن $|z_n - a| < \varepsilon$.

وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فإننا نقول إنها متباعدة، وبشكل خاص نقول إنَّ المتتالية (z_n) متباعدة إلى اللانهاية ونكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ، إذا وُجد من أجل كل عدد حقيقي موجب k عدد طبيعي N بحيث إذا كان $n \geq N$ فإن $|z_n| > k$.

مثال (3)

ادرس تقارب المتتاليات التالية:

$$|z| > 1 \text{ حيث } z_n = z^n; \quad z_n = \frac{i^n}{n}; \quad z_n = \frac{n-i}{n+i}$$

الحل

$z_n = z^n$ متباعدة إلى اللانهاية عندما $|z| > 1$.

المتتالية $z_n = \frac{i^n}{n}$ متقاربة من الصفر، وذلك بفرض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي

$N = N(\varepsilon)$ بحيث إذا كان $n \geq N$ فإن $|z_n| < \varepsilon$

$$|z_n| = \left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ومنه $n > \frac{1}{\varepsilon}$ نأخذ العدد الطبيعي

$$N = N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

فينتج أن المتتالية $z_n = \frac{i^n}{n}$ متقاربة من الصفر، هي المتتالية التي تم توضيحها هندسياً في المثال (2).

المتتالية $z_n = \frac{n-i}{n+1}$ متقاربة من الواحد، وذلك بفرض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد

طبيعي $N = N(\varepsilon)$ بحيث إذا كان $n \geq N$ فإن $|z_n - 1| < \varepsilon$

$$|z_n - 1| = \left| \frac{n-i}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1-i}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

ومنه $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$ إذن $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$ نأخذ العدد الطبيعي

$z_n = \frac{n-i}{n+1}$ المتتالية $N = N(\varepsilon) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1 \right) + 1$ فنحصل على أن المتتالية متقاربة من الواحد.

2-4 خواص المتتاليات العقدية

نلاحظ أن تعريف المتتالية العقدية المتقاربة يماثل تعريف المتتالية الحقيقية المتقاربة، وبالتالي فإن الخواص المعروفة للمتتاليات الحقيقية المتقاربة هي أيضاً صحيحة بالنسبة للمتتاليات العقدية المتقاربة ويتم برهانها بشكل مشابه وعلى سبيل المثال من هذه الخواص:

(1) تتقارب المتتالية العقدية (z_n) من العدد العقدي a إذا وفقط إذا حوى كل جوار لـ a جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها.

(2) كل متتالية مقاربة تكون محدودة.

(3) إذا كانت المتتالية مقاربة فإن نهايتها وحيدة.

(4) إذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} , b \neq 0$$

(5) الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية العقدية (z_n) هو أن تكون متتالية كوشي وهذا يعني أن يتحقق الشرط التالي: من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N = N(\varepsilon)$ بحيث:

$$m > n > N(\varepsilon) \text{ عندما } |z_m - z_n| < \varepsilon$$

(6) إذا كانت المتتالية (a_n) مقاربة من الصفر و (b_n) متتالية محدودة فإن المتتالية $(a_n \cdot b_n)$ مقاربة من الصفر.

(7) المتتالية $c_n = a_n + ib_n$ مقاربة من العدد العقدي $c = a + ib$ إذا

وفقط إذا كانت المتتالية (a_n) مقاربة من a والمتتالية (b_n) مقاربة من b

$$a_n = \operatorname{Re} c_n ; b_n = \operatorname{Im} c_n ; a = \operatorname{Re} c ; b = \operatorname{Im} c$$

لنبرهن الخاصة السابعة:

($\Leftarrow$) لنفرض أن $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ عندئذٍ من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد

طبيعي $N = N(\varepsilon)$ بحيث $|c_n - c| < \varepsilon$ عندما $n > N$ ، ولكن

$$|a_n - a| = |Re(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon$$

وكذلك

$$|b_n - b| = |Im(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon$$

وهذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N = N(\varepsilon)$ بحيث $|a_n - a| < \varepsilon$

عندما $n > N$ و $|b_n - b| < \varepsilon$ عندما $n > N$ أي أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

($\Rightarrow$) بفرض $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ عندئذٍ من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$

يوجد عدد طبيعي $N_1 = N_1(\varepsilon)$ بحيث $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n > N_1$ ،

كذلك يوجد عدد طبيعي $N_2 = N_2(\varepsilon)$ بحيث $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $n > N_2$.

وبفرض $N = \max(N_1, N_2)$ عندها لأي $n > N$ فإن

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه

$$|c_n - c| = |a_n + ib_n - (a + ib)|$$

$$= |a_n - a + i(b_n - b)|$$

$$< |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وبالتالي $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ وهو المطلوب.

مثال (4)

ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام

$$z_n = x_n + iy_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{n^2}{2n-1} i$$

الحل

نلاحظ أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ = \ln e = 1$$

وكذلك

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n-1} = \infty$$

ومنه المتتالية (z_n) متباعدة إلى ∞ .

مثال (5)

ادرس تقارب المتتالية التي حددها العام

$$z_n = \frac{2n+i(n+2)}{n+1}$$

الحل

$$z_n = x_n + iy_n = \frac{2n}{n+1} + i \frac{n+2}{n+1}$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

وكذلك

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

ومنه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2 + i$$

إذن المتتالية (z_n) متقاربة ونهايتها هي $2 + i$.

أي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+i(n+2)}{n+1} = 2 + i$$

مثال (6)

ادرس تقارب المتتاليات التالية:

(a) (a^n)

(b) $\left(\frac{a^n}{n}\right)$

(c) (na^n)

(d) $\left(\frac{a^n}{1+a^n}\right)$

حسب قيم العدد العقدي a .

الحل

(a) من أجل $|a| < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

والمتتالية (a^n) متقاربة.

ومن أجل $|a| = 1$ وبفرض $a = \cos \theta + i \sin \theta$ فإن

$$a^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

وتتقارب فقط عندما $\theta = 0$ أي عندما $a = 1$ ، ولا توجد نهاية عندما $\theta \neq 0$

والمتتالية (a_n) متباعدة.

أما من أجل $|a| > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = \infty$ والمتتالية (a_n) متباعدة.

(b) نلاحظ أنه من أجل $|a| \leq 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = 0$ والمتتالية $\left(\frac{a^n}{n}\right)$

متقاربة.

أما من أجل $|a| > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \infty$ والمتتالية متباعدة.

(c) نلاحظ أنه من أجل $|a| < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |na^n| = 0$ ومنه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0 \text{ والمتتالية } (na^n) \text{ متقاربة.}$$

أما من أجل $|a| \geq 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = \infty$ والمتتالية متباعدة.

(d) نلاحظ أنه من أجل $|a| > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = \infty$ وأن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^n}} = 1$$

والمتتالية $\left(\frac{a^n}{1+a^n}\right)$ متقاربة.

ومن أجل $|a| < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = 0$ وأن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = 0$ والمتتالية متقاربة.

أما من أجل $|a| = 1$ وبفرض $a = \cos \theta + i \sin \theta$ فإن

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{1+a^n} &= \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{1 + \cos n\theta + i \sin n\theta} \\ &= \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{1 + \cos n\theta + i \sin n\theta} \cdot \frac{1 + \cos n\theta - i \sin n\theta}{1 + \cos n\theta - i \sin n\theta} \\ &= \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{(1 + \cos n\theta)^2 + \sin^2 n\theta} \\ &= \frac{\cos n\theta}{2(1 + \cos n\theta)} + i \frac{\sin n\theta}{2(1 + \cos n\theta)} \end{aligned}$$

وهذه النهاية غير موجودة عندما $\theta \neq 0$ ، والمتتالية متباعدة.

3-4 المتسلسلات العقدية وتقاربها

تعريف

إذا كانت (z_n) متتالية عقدية فإننا نسمي المجموع

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

متسلسلة عقدية لانهاية ونرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ أو $\sum z_n$.

ونقول إن المتسلسلة متقاربة ومجموعها يساوي a ونكتب

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a$$

إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية (S_n) (حيث

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$$

متباعدة فإننا نقول إن المتسلسلة متباعدة.

مثال (7)

ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

الحل

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية (S_n)

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

ولندرس تقارب هذه المتتالية:

$$\text{لنضرب } S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} \text{ فنجد}$$

$$zS_n = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$$

بطرح zS_n من S_n نجد:

$$S_n(1 - z) = 1 - z^n$$

ومنه

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

وبالتالي فالمتسلسلة الهندسية تكون متقاربة ومجموعها $\frac{1}{1-z}$ أي

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

عندما $|z| < 1$ ، ومتباعدة عندما $|z| \geq 1$.

4-4 خواص المتسلسلات العقدية

إن الكثير من خواص المتسلسلات الحقيقية المتقاربة هي أيضاً صحيحة من أجل المتسلسلات العقدية المتقاربة، ونذكر منها ما يلي:

$$(1) \text{ إذا كانت } \sum z_n \text{ متقاربة فإن } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

$$(2) \text{ إذا كانت المتسلسلة } \sum z_n \text{ متقاربة ومجموعها يساوي } a \text{ فإن المتسلسلة } \sum \alpha z_n \text{ متقاربة ومجموعها يساوي } \alpha a.$$

$$(3) \text{ إذا كان } \sum b_n = b, \sum a_n = a \text{ فإن } \sum (a_n + b_n) = a + b$$

$$\sum (a_n - b_n) = a - b$$

$$(4) \text{ إذا كان } z_n = x_n + iy_n \text{ فإن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة } \sum z_n \text{ هو أن تتقارب المتسلسلتان } \sum x_n, \sum y_n$$

تعريف

نسمي المتسلسلة $\sum |z_n|$ متسلسلة القيم المطلقة للمتسلسلة $\sum z_n$ ، ونقول بأن هذه المتسلسلة متقاربة إطلاقاً إذا تقاربت متسلسلة قيمها المطلقة.

$$(5) \text{ إذا كانت المتسلسلة } \sum z_n \text{ متقاربة مطلقاً فهي متقاربة.}$$

$$(6) \text{ إذا كانت المتسلسلة } \sum z_n \text{ متقاربة وغير متقاربة مطلقاً فإننا نسميها متقاربة شرطياً.}$$

ملاحظة

نلاحظ أنّ دراسة تقارب المتسلسلات العقدية يؤول إلى دراسة تقارب المتسلسلات الحقيقية. ولذا من المفيد أن نذكر بأهم اختبارات المتسلسلات الحقيقية.

اختبار النسبة (اختبار دالامبير)

لتكن المتسلسلة $\sum a_n$ حيث $a_n \geq 0$ ولنفرض أنّ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$$

فإنّ المتسلسلة متقاربة إذا كان $p < 1$ ، ومتباعدة إذا كان $p > 1$ ، ويفشل الاختبار عندما $p = 1$.

مثال (8)

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(e-i)^{n+1}} \frac{n!(e-i)^n}{n^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e-i} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{e^2+1} |e+i| \\ &= \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1 \end{aligned}$$

والمسلسلة $\sum \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$ متقاربة.

اختبار الجذر (اختبار كوشي)

لتكن المتسلسلة $\sum a_n$ حيث $a_n \geq 0$ ولنفرض أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$$

عندئذ فإن المتسلسلة متقاربة إذا كان $p < 1$ ، ومتباعدة إذا كان $p > 1$ ، وبفشل

الاختبار عندما $p = 1$.

مثال (9)

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n(2+i)^n}{2^n} \right|} \\ &= \frac{|2+i|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1 \end{aligned}$$

ومنه المتسلسلة $\sum \frac{n(2+i)^n}{2^n}$ متباعدة.

مثال (10)

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$.

الحل

هذه المتسلسلة هندسية وذلك بفرض أن $z = \frac{1+i}{2}$ ، ومنه

$$|z| = \frac{1}{2} |1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

ومنه المتسلسلة متقاربة ومجموعها

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

اختبار المقارنة

لتكن المتسلسلات

$$\sum a_n ; \sum b_n ; \sum c_n$$

ذات الحدود الحقيقية غير السالبة.

فإذا كان $a_n \geq b_n$ من أجل جميع قيم n ابتداءً من قيمة ما N فإن المتسلسلة

$\sum a_n$ تتباعد إذا تباعدت المتسلسلة $\sum b_n$.

وإذا كان $a_n \leq c_n$ من أجل جميع قيم n ابتداءً من قيمة ما N فإن المتسلسلة

$\sum a_n$ تتقارب إذا تقاربت المتسلسلة $\sum c_n$.

وإذا كان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = p \neq 0$$

فإن المتسلسلتين $\sum a_n$, $\sum b_n$ من نوع واحد.

اختبار المتسلسلات المتناوبة (اختبار ليبنيز)

لتكن المتسلسلة $\sum (-1)^n a_n$ ، حيث $a_n \geq 0$ فإذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ وكان

$a_{n+1} \leq a_n$ من أجل جميع قيم n ابتداءً من قيمة ما N فإن المتسلسلة

$\sum (-1)^n a_n$ متقاربة.

مثال (11)

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$.

الحل

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

القسم الحقيقي $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متسلسلة متناوبة، حسب اختبار ليبنز فإن الحد العام يسعى إلى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ ، والحد العام متناقص بالقيمة المطلقة، هذا يعني أن المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة.

القسم التخيلي $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ نقارن هذه المتسلسلة مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (حيث هذه المتسلسلة هي متسلسلة توافقية فيها $\alpha = \frac{1}{2}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 > 0$$

وبالتالي المتسلسلتان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ من النوع نفسه، وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متباعدة. وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+i\sqrt{n}}}{n+1}$ متباعدة.

مثال (12)

ادرس التقارب والتقارب المطلق لكل من المتسلسلات الآتية:

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \quad (a)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \quad (b)$$

$$\cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n} \quad (c)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} \quad (d)$$

الحل

(a) يمكن كتابة الحد العام للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}$ كما يلي:

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} = \frac{2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}{5^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}\right)$$

نلاحظ أن القسم الحقيقي من هذه المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \cos \frac{n\pi}{6} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$$

والمتسلسلة الواقعة في يمين هذه المتراجحة هي متسلسلة هندسية أساسها

$$\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

هذا يعني أنها متسلسلة مقاربة.

ونبرهن بالطريقة ذاتها أن القسم التخيلي هو متسلسلة مقاربة أيضاً.

$$\text{ومنه المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \text{ مقاربة.}$$

طريقة ثانية:

يمكننا أن نستعمل اختبار كوشي فنجد:

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

كما أنه يمكن استعمال اختبار دالامبير فنجد:

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{5}} \right| = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

$$\text{وبالتالي فإن المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \text{ مقاربة مطلقاً.}$$

(b) لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i^n|}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

وهذه المتسلسلة مقاربة، هذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ مقاربة مطلقاً.

(c) المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$ غير متقاربة مطلقاً، وذلك لأن

$$\left| \frac{i^n}{\log n} \right| = \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

ومن المعروف أن المتسلسلة التي حدها العام $\frac{1}{n}$ متباعدة، فالمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$ غير متقاربة مطلقاً، بل هي متقاربة وذلك لأن متسلسلة القسم الحقيقي والقسم التخيلي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(2n)}$$

هما متسلسلتان متناوبتان، والقيم المطلقة لحدودهما متناقصة، ويسعى في كل منهما الحد العام إلى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ فهما متسلسلتان متقاربتان، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$ متقاربة.

(d) المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ متباعدة لأن

$$\left| \frac{(1+i)^n}{n} \right| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

أي أن قياس الحد العام للمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$ لا يسعى إلى الصفر.

5-4 متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدية

تعريف

إذا كانت حدود متسلسلة عقدية هي توابع عقدية فإننا نسمي هذه المتسلسلة بالمتسلسلة العقدية التابعة، ونكتب

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \dots$$

أو $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

وإذا رمزنا لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة بالرمز $(s_n(z))$ فإن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية يكتب كما يلي:

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \dots + f_n(z)$$

وبالتالي يمكن كتابة المتسلسلة العقدية التابعة بالشكل

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) &= \sum_{k=1}^n f_k(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \\ &= s_n(z) + R_n(z) \end{aligned}$$

تعريف

تكون المتسلسلة التابعة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D إلى التابع $s(z)$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(s_n(z))$ متقاربة في D ، هذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N = N(\varepsilon)$ ، بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|s_n(z) - s(z)| = |R_n(z)| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, z \in D$$

اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم

تكون المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ متقاربة مطلقاً وبانتظام في المنطقة D إذا كان $|f_n(z)| \leq M_n$ حيث $(n = 1, 2, \dots)$ و M_n هي أعداد حقيقية موجبة ومستقلة عن النقاط z من D وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة.

6-4 خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام

(1) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D وإذا كانت حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة في D فإن المجموع $s(z)$ لهذه المتسلسلة هو أيضاً تابع مستمر على D .

(2) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D وإذا كانت حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة في المنطقة D وكان $s(z)$ مجموع هذه المتسلسلة و c منحنيًا ما في D ، فإن

$$\int_c s(z) dz = \int_c \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c f_n(z) dz$$

(3) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ متقاربة في المنطقة D من التابع $s(z)$ ، وكانت حدود هذه المتسلسلة قابلة للاشتقاق ومستمرة في D ، وإذا كانت

المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z)$ متقاربة بانتظام من أجل كل قيمة لـ z من D فإن

$$s'(z) = \frac{d}{dz} s(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z)$$

هذا يعني أنه نستطيع في دائرة تقارب المتسلسلة مكاملتها واشتقاقها حدًا حدًا.

مثال (13)

ادرس التقارب المنتظم للمتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} \quad (a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2} \quad (b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!} \quad (c) \text{ وذلك لأجل كل عدد عقدي } z \text{ يحقق المتراجحة } |z| \leq 4.$$

الحل

(a) لدينا

$$\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z^n|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} ; |z| \leq 1$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة $(M_n = \frac{1}{n^2})$ فحسب معيار اختبار فايرشتراس فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ متقاربة بانتظام.

(b) بتطبيق اختبار فايرشتراس نجد:

$$\left| \frac{\cos n|z|}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2}$ متقاربة تقارباً منتظماً.

(c) بما أن $|z| \leq 4$ فإن

$$\left| \frac{2^n z^n}{n!} \right| \leq \frac{8^n}{n!} = M_n$$

ولنثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ متقاربة، من أجل ذلك نطبق اختبار دالامبير فنجد:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{8^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{8^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ متقاربة.

وبالتالي حسب معيار اختبار فايرشتراس فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$ متقاربة بانتظام لأجل كل $|Z| \leq 4$.

7-4 تمثيل التوابع التحليلية بمتسلسلات قوى

تعريف

متسلسلة القوى هي المتسلسلة العقدية غير المنتهية من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots$$

حيث a عدد عقدي و $c_n, n = 0, 1, 2, \dots$ أعداد عقدية تسمى معاملات متسلسلة القوى، وتحدد منطقة تقارب متسلسلات القوى بالاعتماد على المعاملات c_n .

مثال (14)

عين منطقة تقارب كل من المتسلسلتين التاليتين:

$$\sum n! (z-a)^n \quad (a)$$

$$\sum \frac{(z-a)^n}{n!} \quad (b)$$

الحل

(a) متسلسلة القوى $\sum n! (z-a)^n$ لا تتقارب إلا في النقطة a وذلك لأن

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| &= \left| \frac{(n+1)!(z-a)^{n+1}}{n!(z-a)^n} \right| \\ &= (n+1)|z-a| > 1 \end{aligned}$$

من أجل أي نقطة ثابتة z تحقق $z \neq a$ وابتداءً من عدد طبيعي $N(\epsilon)$.

(b) متسلسلة القوى $\sum \frac{(z-a)^n}{n!}$ متقاربة من أجل جميع قيم z وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(z-a)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z-a|}{n+1} = 0 < 1\end{aligned}$$

وذلك أيّاً كان z من المستوي العقدي.

ملاحظة

يوجد لكل متسلسلة قوى عدد حقيقي موجب r بحيث تكون متسلسلة القوى متقاربة من أجل $|z - a| < r$ ومتباعدة من أجل $|z - a| > r$ ، أما من أجل $|z - a| = r$ فقد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة. نسمي المنطقة $|z - a| < r$ دائرة تقارب متسلسلة القوى، ونسمي r نصف قطر التقارب.

إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في كل نقطة من المستوي العقدي فإننا نقول إن نصف قطر تقاربها يساوي ∞ . وإذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في النقطة a فقط فإننا نقول إن نصف قطر تقاربها يساوي الصفر. إن نصف قطر تقارب متسلسلة القوى يعطى بالعلاقة التالية:

$$r = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{حيث } k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \text{ أو } k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

ويكون مجموع متسلسلة القوى هو تابعاً تحليلياً في دائرة التقارب، ونستطيع في دائرة تقارب متسلسلة القوى مكاملتها واشتقاقها حدّاً حدّاً.

مثال (15)

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلات التالية:

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} n! (z+i)^n \quad (a)$$

$$\cdot \alpha > 0 ; \sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n\alpha} z^n \quad (b)$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n \quad (c)$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n \quad (d)$$

الحل

(a) لدينا $a = -i, c_n = n!$ ومنه

$$\begin{aligned} k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \end{aligned}$$

ومنه نصف قطر التقارب

$$r = \frac{1}{k} = \frac{1}{\infty} = 0$$

هذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n! (z+i)^n$ متقاربة فقط عندما $z = -i$

ومتباعدة من أجل باقي قيم z في المستوى العقدي.

(b) لدينا

$$\begin{aligned} k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! e^{-(n+1)\alpha}}{n! e^{-n\alpha}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) e^{-\alpha} = \infty ; \alpha > 0 \end{aligned}$$

ومنه نصف قطر التقارب هو

$$r = \frac{1}{k} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(c) لدينا

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1+i)^n|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$$

ومنه نصف قطر تقارب المتسلسلة هو

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(d) لدينا

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{[2(n+1)!] (n!)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

ومنه نصف قطر التقارب هو $r = 4$.

مثال (16)

اكتب التابع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ على شكل متسلسلة قوى.

الحل

بالاعتماد على المتسلسلة الهندسية المتقاربة

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

يمكن أن نكتب

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

حيث $|z| < 1$ أي $|z^2| < 1$.

مثال (17)

اكتب التابع $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ على شكل متسلسلة قوى.

الحل

باشتقاق التابع $\frac{1}{1-z}$ نجد

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

ومنه

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \end{aligned}$$

حيث $|z| < 1$.

8-4 متسلسلة تايلور

وجدنا في الفقرة السابقة أن كل متسلسلة قوى تعرف داخل دائرة تقاربها تابعاً تحليلياً، والنظرية التالية تبين أن كل تابع تحليلي يمكن تمثيله (نشره) على شكل متسلسلة قوى.

نظرية تايلور

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل الدائرة C التي مركزها a ونصف قطرها r (في المنطقة $|z - a| < r$) فإنه يمكن نشر التابع $f(z)$ في هذه المنطقة كما يلي:

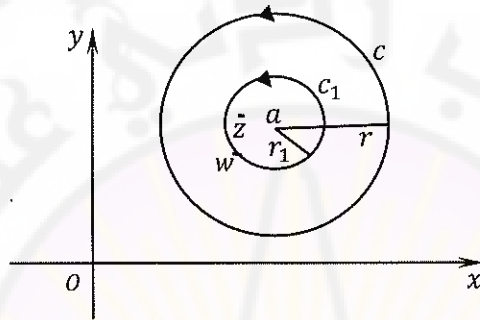
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

حيث $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

وبالعكس إذا كان $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ في المنطقة $|z - a| < r$ فإن التابع $f(z)$ تحليلي في هذه المنطقة.

البرهان

في الشكل (2-4) المنحني c هو $|z - a| = r$ ، وليكن c_1 هو المنحني
حيث $|z - a| = r_1 < r$ موجبان والنقطة z تقع داخل c_1 ، أما النقطة
 w فتقع على c_1 .



الشكل (2-4)

نعلم أن صيغة كوشي الأولى هي

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (1)$$

ولكن

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

ونعلم أن

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots + q^n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

أو

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

وبالتالي

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = 1 + \frac{z-a}{w-a} + \dots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$$

ومنه

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} + \left(\frac{z-a}\right)^{n+1} \frac{1}{[(w-a)-(z-a)]}$$

بضرب كل الحدود بالتابع $\frac{1}{2\pi i} f(w)$ والمكاملة على c_1 ينتج

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + \frac{(z-a)}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \\ &+ \dots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + R_{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

حيث

$$R_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1} \frac{f(w)}{[(w-a)-(z-a)]} dw$$

بتعويض (1) في (2) نجد

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + R_{n+1}$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وهي صيغة كوشي الثانية.

وأخيراً لنبرهن أن $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1} = 0$ على المنحني c_1 الذي طوله $2\pi r_1$ لدينا

من الشكل (2-4) أن

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = k < 1$$

وأنّ

$$\frac{1}{|(w-a)-(z-a)|} \leq \frac{1}{r_1-|z-a|}$$

كما أنّ $|f(w)| \leq M$ حيث M ثابت موجب (لأنّ $f(w)$ مستمر)، ومنه

$$|R_{n+1}| < \frac{1}{2\pi} k^{n+1} \frac{M}{r_1-|z-a|} 2\pi r_1 = k^{n+1} \frac{Mr_1}{r_1-|z-a|}$$

بما أنّ $\frac{Mr_1}{r_1-|z-a|}$ مقدار ثابت و $\lim_{n \rightarrow \infty} k^{n+1} = 0$ ، فإنّ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}| = 0 \quad \text{أي أنّ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1} = 0$$

برهان العكس:

إذا كان $|z-a| < r$ ؛ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ فإنّه يمكن اشتقاق المتسلسلة حدّاً حدّاً للحصول على مشتق التابع $f(z)$ التحليلي في منطقة التقارب $|z-a| < r$ ، هذا يعني أنّ التابع $f(z)$ تحليلي في هذه المنطقة.

تعريف

نسمي المتسلسلة

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

بمتسلسلة تايلور للتابع $f(z)$ حول النقطة a .

وإذا كانت $a = 0$ فإننا نسمي المتسلسلة السابقة بمتسلسلة ماك لوران، وتصبح

المتسلسلة كما يلي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n ; |z| < r$$

مثال (18)

أوجد منشور ماك لوران للتتابع التالية:

$$f(z) = e^z \quad (أ)$$

$$f(z) = \sin z \quad (ب)$$

$$f(z) = \cosh z \quad (ج)$$

الحل

$$f(z) = e^z \text{ ومنه } f^{(n)}(z) = e^z \text{ أي أن } (أ)$$

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 ; n = 0, 1, 2, \dots$$

بالتعويض في العلاقة

$$f(z) = f(0) = \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} f(z) = e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ; |z| < \infty \end{aligned}$$

$$f(z) = \sin z \quad (ب) \text{ بالاشتقاق المتكرر نجد:}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(z) = \cos z \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(z) = -\sin z \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(z) = -\cos z \rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(z) = \sin z \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

وهكذا...

بالتعويض نجد

$$f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ; |z| < \infty$$

$$f(z) = \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} ; |z| < \infty \text{ (ج)}$$

مثال (19)

أوجد نشر ماك لوران للتابع $f(z) = \ln(1+z)$

الحل

$$f(0) = 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2} \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = \frac{(-1)(-2)}{(1+z)^3} \rightarrow f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(1+z)^4} \rightarrow f^{(4)}(0) = (-1)^3 3!$$

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}} \rightarrow f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!$$

بالتعويض نجد

$$f(z) = \ln(1+z) = 0 + \frac{1}{1!} z + \frac{-1}{2!} z^2 + \frac{2!}{3!} z^3 + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^3 3!}{4!} z^4 + \dots + \frac{(-1)^n (n-1)!}{n!} z^n + \dots$$

$$f(z) = \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

طريقة ثانية:

إذا كان $|z| < 1$ فإن

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

بمكاملة الطرفين من 0 إلى z نجد:

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \end{aligned}$$

مثال (20)

أوجد نشر تايلور للتتابع التالية:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (a) \text{ حول النقطة } z = -i$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} \quad (b) \text{ حول النقطة } z = -1$$

$$f(z) = \ln z \quad (c) \text{ حول النقطة } z = 1$$

الحل

(a) لدينا

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2!}{(1-z)^3}$$

⋮

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

ومنه

$$f^{(n)}(i) = \frac{n!}{(1+i)^{n+1}}$$

بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+i} + \frac{z+i}{(1+i)^2} + \frac{(z+i)^2}{(1+i)^3} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}} \end{aligned}$$

(b) لدينا

$$f(-1) = 1$$

$$f'(z) = -2(z+2)^{-3} \rightarrow f'(-1) = -2$$

$$f''(z) = (-2)(-3)(z+2)^{-4} \rightarrow f''(-1) = 3!$$

$$f'''(z) = (-2)(-3)(-4)(z+2)^{-5} \rightarrow f'''(-1) = -4!$$

⋮

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)!(z+2)^{-n-2} \rightarrow$$

$$f^{(n)}(-1) = (-1)^n(n+1)!$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+2)^2} \\ &= 1 - 2(z+1) + 3(z+1)^2 - 4(z+1)^3 + \dots + \\ &\quad + (-1)^n(n+1)(z+1)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)(z+1)^n \end{aligned}$$

(c) لدينا

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{z} \rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(z) = -\frac{1}{z^2} \rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(z) = \frac{2}{z^3} \rightarrow f'''(1) = 2!$$

$$f^{(4)}(z) = -\frac{6}{z^4} = -\frac{3!}{z^4} \rightarrow f^{(4)}(1) = -3!$$

.

.

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n} \rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

بالتعويض نجد:

$$f(z) = \ln z = \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!}(-1) + \frac{(z-1)^3}{3!}(2) + \frac{(z-1)^4}{4!}(-3!) + \dots$$

$$f(z) = \ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{n}$$

مثال (21)

أوجد منشور التابع $f(z) = \frac{1}{3-z}$ حول النقطة $z = 2i$.

الحل

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3-z} = \frac{1}{(3-2i)-(z-2i)} \\ &= \frac{1}{3-2i} \frac{1}{1-\frac{z-2i}{3-2i}} \\ &= \frac{1}{3-2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)^n ; \left|\frac{z-2i}{3-2i}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(3-2i)^{n+1}} \end{aligned}$$

مثال (22)

أوجد التابع التحليلي عند $z = 0$ الذي يحقق الشرط

$$f' = -2if(z)$$

ويأخذ القيمة واحد عند $z = 0$.

الحل

بما أن التابع تحليلي عند $z = 0$ هذا يعني أنه يوجد له تمثيل بمتسلسلة مالا

لوران ولدينا $f(0) = 1$ وكذلك

$$f'(0) = -2if(0) = -2i$$

وبتكرار الاشتقاق نجد:

$$f''(z) = -2if'(z) = (-2i)^2 f(z) \rightarrow f''(0) = (-2i)^2$$

$$f'''(z) = -2if''(z) = (-2i)^3 f(z) \rightarrow f'''(0) = (-2i)^3$$

.

.

$$f^{(n)}(z) = -2if^{(n-1)}(z) = (-2i)^n f(z) \rightarrow f^{(n)}(0) = (-2i)^n$$

وبالتالي فإن التابع هو

$$f(z) = 1 - 2iz + \frac{(-2i)^2}{2!} z^2 + \frac{(-2i)^3}{3!} z^3 + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{n!} z^n \quad (1)$$

ونعلم أن

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

فإذا عوضنا $-2iz$ بدلاً من z نجد:

$$e^{-2iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n z^n}{n!} \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن:

$$f(z) = e^{-2iz}$$

هو التابع المطلوب.

مثال (23)

أوجد متسلسلة ماك لوران للتابع

$$f(z) = \frac{1}{2+4z}$$

الحل

نعلم أن

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n ; |z| < 1$$

ومنه

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2+4z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+2z} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2z)^n ; |2z| < 1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^n ; |z| < 1 \end{aligned}$$

هذا يعني أن متسلسلة ماك لوران للتابع $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{2+4z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n-1} z^n$$

9-4 متسلسلة لوران

تعريف

كل متسلسلة توابع من الشكل

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

حيث c_n أعداد عقدية و a نقطة ثابتة من المستوي العقدي، تسمى متسلسلة لوران.

ويمكن كتابة هذه المتسلسلة كما يلي

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

نظرية لوران

ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً في الحلقة الدائرة كما في الشكل (3-4)

$$r_2 \leq |z-a| \leq r_1$$

المحاطة بالدائرتين c_1, c_2 . في نقطة z داخل الحلقة الدائرية يمكن نشر هذا

التابع وفق القانون

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n ; r_2 \leq |z-a| \leq r_1$$

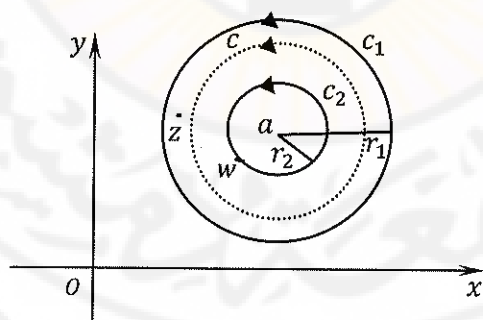
وأمثال النشر c_n, c_{-n} تعطى من العلاقتين

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw$$

حيث c هي الدائرة الواقعة داخل الحلقة الدائرية

$$r_2 \leq |z-a| \leq r_1$$



الشكل (3-4)

يسمى الجزء $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ بالجزء التحليلي لنشر لوران.
 يسمى الجزء $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ بالجزء الرئيسي لهذا النشر، وإن لم يكن الجزء
 الرئيسي لهذا النشر موجود فإن $f(z)$ تابع تحليلي في المنطقة الدائرية
 $|z-a| \leq r_1$ وبالعكس.

البرهان

نفرض أن Z مركز الدائرة γ التي يكون نصف قطرها صغيراً بقدر كافٍ
 بحيث تقع γ بأكملها داخل c_1 وخارج c_2 ، بما أن التابع $\frac{f(w)}{w-z}$ تحليلي من أجل
 جميع النقاط الواقعة داخل c_1 و عليها وخارج كل من الدائرتين γ, c_2 وعليهما
 وبحسب صيغة كوشي فإن:

$$\int_{c_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{c_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

ومنه نجد

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (1)$$

إن التكامل على المنحني c_1 يحسب كما رأينا في برهان نظرية تايلور ونكتب

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (2)$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw ; n = 0, 1, 2, \dots$$

وبما أن التابع $\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين الدائرتين c, c_1

وعليهما ومنه يكون حسب نظرية كوشي

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

أما التكامل على المنحني c_2 فيمكن حسابه كما يلي:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{(z-a)\left[1-\frac{w-a}{z-a}\right]} \\ &= \frac{1}{z-a} + \frac{w-a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \\ &\quad + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{1}{[(z-a)-(w-a)]} \end{aligned}$$

وبضرب كل حد من الحدود بالتابع $\frac{1}{2\pi i} f(w)$ والمكاملة على c_2 نجد:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i(z-a)} \int_{c_2} f(w) dw + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i(z-a)^2} \int_{c_2} (w-a)f(w) dw + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i(z-a)^n} \int_{c_2} (w-a)^{n-1} f(w) dw + R_n \end{aligned}$$

حيث

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{[(z-a)-(w-a)]} dw$$

بما أن $1 > k = \frac{|w-a|}{|z-a|}$ على c_2 الشكل (3-4) فينتج بالطريقة نفسها التي

استخدمناها في برهان نظرية تايلور أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

وبما أن التابع $(w-a)^{n-1} f(w)$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين c, c_2

وعليهما فإنه حسب نظرية كوشي يمكن أن نكتب

$$\int_{c_2} (w-a)^{n-1} f(w) dw = \int_c (w-a)^{n-1} f(w) dw$$

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

حيث

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw ; n = 0, 1, 2, \dots$$

بتعويض (2) و (3) في (1) نحصل على المطلوب.

مثال (24)

أوجد نشر لوران للتابع

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

في المنطقة $1 < |z| < 2$.

الحل

متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ هي

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

حيث

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} dz ; n > 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{n+1}} ; n \geq 0$$

و C دائرة مركزها 0 ونصف قطرها r ($1 < r < 2$)

نفرق الكسر $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ كما يلي:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد:

$$1 = A(z-2) + B(z-1) = (A+B)z - 2A - B$$

ومنه

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A - B &= 1 \end{aligned}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1, B = 1$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

عندئذ:

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{-1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z-2} dz \\ &= -1 + 0 = -1; n > 0 \end{aligned}$$

من ناحية أخرى إذا كانت c_0 و c_1 دائرتين غير متقاطعتين مركز الأولى $a_0 = 0$ ومركز الثانية $a_1 = 1$ وتقعان داخل الدائرة c فحسب نظرية كوشي يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{n+1}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{n+1}} \end{aligned}$$

وباستخدام صيغة كوشي نجد

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{1}{(z-1)(z-2)z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{1}{(z-2)z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{(z-1)(z-2)} \right]_{z=0}^{(n)} + \left[\frac{1}{(z-2)z^{n+1}} \right]_{z=1} \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} \right]_{z=0}^{(n)} - 1 \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{n!}{(1-z)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-z)^{n+1}} \right]_{z=0} - 1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2^{n+1}} ; n \geq 0$$

وبالتالي فإنّ متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

طريقة ثانية:

التابع $\frac{-1}{z-1}$ تحليلي من أجل $|z| > 1$ وبالتالي يمكن نشره حسب القوى غير

السالبة لـ $\frac{1}{z}$ كما يلي:

$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

وكذلك التابع $\frac{1}{z-2}$ تحليلي من أجل $|z| < 2$ ، وبالتالي يمكن نشره حسب القوى

غير السالبة لـ z

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

هذا يعني أنّ متسلسلة لوران للتابع $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ هي:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

مثال (25)

أوجد متسلسلة لوران للتابع

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

في المناطق التالية:

$$.2 < |z| < 3 \quad (1)$$

$$.1 < |z+1| < 2 \quad (2)$$

$$.0 < |z + 2| < 1(3)$$

$$.|z| > 3(4)$$

$$.|z| < 2(5)$$

الحل

بالاعتماد على تفريق الكسور نجد:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$$

1- التابع $f_1(z) = \frac{1}{z+2}$ تحليلي من أجل $|z| > 2$ وبالتالي يمكن نشره حسب القوى غير السالبة لـ $\frac{1}{z}$

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}$$

التابع $f_2(z) = -\frac{1}{z+3}$ تحليلي من أجل $|z| < 3$ وبالتالي يمكن نشره حسب القوى غير السالبة لـ z

$$\begin{aligned} f_2(z) &= -\frac{1}{z+3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $2 < |z| < 3$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{3^{n+1}}$$

2- التابع $f_1(z)$ تحليلي من أجل $|z + 1| > 1$ وبالتالي يمكن نشره حسب القوى غير السالبة لـ $\frac{1}{z+1}$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+1} \frac{1}{1+\frac{1}{z+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

التابع $f_2(z)$ تحليلي من أجل $|z+1| < 2$ وبالتالي يمكن نشره حسب القوى غير السالبة لـ $z + 1$

$$f_2(z) = -\frac{1}{z+3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $1 < |z+1| < 2$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

3- التابع $\frac{1}{z+3}$ تحليلي من أجل $|z+2| < 1$ وبالتالي:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{1+z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+2)^n$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $0 < |z+2| < 1$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$$

$$= \frac{1}{z+2} - 1 + (z+2) - (z+2)^3 + \dots$$

4- التابعان $f_1(z), f_2(z)$ تحليليان من أجل $|z| > 3$ وبالتالي يمكن نشرهما

حسب القوى غير السالبة لـ $\frac{1}{z}$

$$f_1(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{z+3} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{z^{n+1}}$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $|z| > 3$ هي:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+2)(z+3)} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} - \frac{2^3}{z^4} + \dots + \left[-\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{3^2}{z^3} + \dots \right] \\
&= (3-2) \frac{1}{z^2} - (3^2-2^2) \frac{1}{z^3} + (3^3-2^3) \frac{1}{z^4} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (3^n - 2^n) \frac{1}{z^{n+1}}
\end{aligned}$$

5- التابعان $f_1(z), f_2(z)$ تحليليان من أجل $|z| < 2$ وبالتالي يمكن نشرهما

حسب القوى غير السالبة لـ z

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} \\
f_2(z) &= -\frac{1}{z+3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $|z| < 2$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n$$

مثال (26)

أوجد متسلسلة لوران للتابع

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$$

في المناطق التالية:

- (1) $|z| < 1$
- (2) $1 < |z| < 2$
- (3) $|z| > 2$

الحل

بالاعتماد على تفريق الكسور نجد:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{Bz+C}{z^2+1}$$

نوجد المقامات ونطابق فنجد

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= A(z^2 + 1) + (z - 2)(Bz + C) \\ &= Az^2 + A + Bz^2 + Cz - 2Bz - 2C \\ &= (A + B)z^2 + (C - 2B)z + A - 2C \end{aligned}$$

ومنه

$$A + B = 1$$

$$C - 2B = -2$$

$$A - 2C = 5$$

بحل هذه الجملة نجد

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = -2$$

وبالتالي

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1}$$

1- لدينا

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n ; |z| < 1$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{z^2+1} &= -2 \frac{1}{1+z^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2)^n \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n} ; |z| < 1 \end{aligned}$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $|z| < 1$ هي:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n}$$

-2 لدينا

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n ; |z| < 2$$

$$-\frac{2}{z^2+1} = -\frac{2}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-2n-2} ; |z| > 1$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $1 < |z| < 2$ هي:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-2n-2}$$

-3 لدينا

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n ; |z| > 2$$

$$-\frac{2}{z^2+1} = -\frac{2}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-2n-2} ; |z| > 2$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $|z| > 2$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-2n-2}$$

مثال (27)

أوجد متسلسلة لوران للتابع

$$f(z) = \frac{5z+2i}{z(z+i)}$$

في المنطقة $1 < |z-i| < 2$

الحل

نفرق التابع إلى تابعين كسريين كما يلي:

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+i}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد

$$\frac{5z+2i}{z(z+i)} = \frac{A(z+i)+Bz}{z(z+i)} = \frac{(A+B)z+Ai}{z(z+i)}$$

ومنه

$$A + B = 5$$

$$A = 2$$

$$B = 3$$

وبالتالي

$$f(z) = \frac{5z+2i}{z(z+i)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z+i}$$

ويكون

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{z-i+i} = \frac{2}{z-i} \frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}$$

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{z-i}\right)^n$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} ; |z-i| > 2$$

$$\frac{3}{z+i} = \frac{3}{z-i+2i} = \frac{3}{2i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$

$$= \frac{3}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}} ; |z-i| < 2$$

ومنه متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $1 < |z-i| < 2$ هي:

$$f(z) = \frac{5z+2i}{z(z+i)} =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$$





تمارين

1- ادرس تقارب المتتاليات التالية:

$$a. \left(\frac{5n-i(n-10)}{3n+1} \right)$$

$$b. \left(\left(\frac{1+i}{2} \right)^n \right)$$

$$c. ((-1)^n + i)$$

2- ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$$

$$c. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i \frac{1}{3^n} \right)$$

3- أوجد منطقة تقارب كل متسلسلة من المتسلسلات التالية:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi inz}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} (z^2 - 1)^n$$

$$c. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^n}$$

4- ادرس التقارب المنتظم للمتسلسلات التالية:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \text{ في المنطقة } |z| \leq r < \infty$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n} n^2} \text{ في المنطقة } |z| > 1$$

5- أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلات التالية:

$$\begin{aligned} a. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n \\ b. \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n \\ c. \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n+2)^k z^n \end{aligned}$$

6- اكتب التوابع التالية على شكل متسلسلات قوى

$$\begin{aligned} a. f(z) = \frac{e^z}{1-z} \\ b. f(z) = \sin z^2 \\ c. f(z) = \frac{1}{(1-z)^3} \end{aligned}$$

7- انشر التابع

$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{z}$$

وفق متسلسلة تايلور حول النقطة $z = 1$.

8- أوجد متسلسلة تايلور لكل من التوابع التالية:

$$\begin{aligned} a. \frac{z}{z+2} \text{ حول النقطة } z = 1 \\ b. \frac{z^2}{(1+z)^2} \text{ حول النقطة } z = 1 \\ c. e^{\frac{z}{1-z}} \text{ حول النقطة } z = 0 \end{aligned}$$

9- أوجد متسلسلة لوران لكل من التوابع التالية:

$$a. f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+2)} \text{ في المناطق التالية}$$

$$.i \quad |z| > 2$$

$$.ii \quad 1 < |z| < 2$$

$$.iii \quad |z| < 1$$

$$.b \quad f(z) = \frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)} \text{ في المناطق التالية:}$$

$$.i \quad |z| > 2$$

$$.ii \quad 1 < |z| < 2$$

$$.iii \quad |z| < 1$$

$$.c \quad f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z+2)} \text{ في المناطق التالية:}$$

$$.i \quad |z| > 2$$

$$.ii \quad 1 < |z| < 2$$

$$.iii \quad 0 < |z| < 1$$

10- أوجد نشر لوران للتابع

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

في المناطق التالية:

$$.a \quad 2 < |z| < 3$$

$$.b \quad |z| < 2$$

$$.c \quad |z| > 3$$

11- أوجد متسلسلة لوران للتابع

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)(z+3)}$$

في المنطقة $0 < |z| < 2$.



الفصل الخامس

نظرية الرواسب

The Residue Theorem

(1) الأصفار والنقاط الشاذة للتتابع التحليلية

(2) طرق حساب الرواسب

(3) نظرية الرواسب

(4) تطبيقات نظرية الرواسب



1-5 الأصفار والنقاط الشاذة للتوابع التحليلية

تعريف

نقول إن النقطة $z = a$ من المستوي العقدي هي نقطة شاذة (منفردة) للتابع $w = f(z)$ إذا كان التابع $f(z)$ غير تحليلي في هذه النقطة.

تعريف

نقول إن النقطة الشاذة $z = a$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ في المنطقة D إذا أمكن إيجاد $r > 0$ بحيث لا تحوي الدائرة $|z - a| = r$ الواقعة في D على أي نقطة شاذة أخرى، وإذا لم نستطع إيجاد $r > 0$ فنقول إن $z = a$ نقطة شاذة غير معزولة. سوف نقتصر في دراستنا على النقاط الشاذة المعزولة.

مثال (1)

النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة لكل من التوابع

$$f(z) = e^{1/z} .a$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} .b$$

$$f(z) = \frac{1}{z} .c$$

والنقطة $z = 0$ بالنسبة للتابع

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

هي نقطة شاذة غير معزولة. لأنّ التابع $f(z)$ يملك عدداً غير منته من النقاط

الشاذة من الشكل

$$z = \frac{1}{k\pi} ; k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

وبما أن هذه النقاط الشاذة تشكل متتالية متقاربة من الصفر، فإن أي دائرة مركزها المبدأ سوف تحتوي على نقاط شاذة أخرى من المتتالية تختلف عن $z = 0$.

2-5 أنواع النقاط الشاذة

تعريف

إذا لم يكن التابع $f(z)$ معرفاً في النقطة $z = a$ وإذا كانت النهاية $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ موجودة فنقول إن $z = a$ هي نقطة شاذة يمكن إزالتها (حذفها) ونعرف قيمة التابع عندئذ بأنها $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. وبحسب معاملات لوران الموافقة للتابع $f(z)$ فإننا نميز ثلاثة أنواع من النقاط الشاذة:

1- إذا انعدمت جميع أمثال القوى السالبة في نشر لوران للتابع $f(z)$ أي:

$$c_{-n} = 0 ; n = 1, 2, \dots$$

فإن $z = a$ تسمى نقطة شاذة قابلة للإزالة.

مثال (2)

للتابع

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

نقطة شاذة قابلة للإزالة هي $z = 0$ وذلك لأن نشر لوران لهذا التابع في

المنطقة $0 < |z| < \infty$ يأخذ الشكل:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

ويبدو واضحاً أن متسلسلة لوران معرفة تماماً عندما $z = 0$ ، ولذا فإننا نعيد تعريف التابع $f(z)$ عندما $z = 0$ ونكتب $f(0) = 1$ ونكون بذلك قد أزلنا النقطة الشاذة $z = 0$.

2- إذا كان الجزء الرئيسي لنشر لوران مؤلفاً من عدد محدود n من الحدود أي إذا كان الجزء الرئيسي هو كما يلي:

$$\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a}$$

فإن النقطة $z = a$ هي قطب من المرتبة n .

إذا كان $n = 1$ فالقطب من المرتبة الأولى ويسمى قطباً بسيطاً.

وإذا كان $n = 2$ فالقطب من المرتبة الثانية ويسمى قطب مضاعف، وهكذا... وبشكل عام نقول إن النقطة الشاذة $z = a$ هي قطب من المرتبة n إذا كانت النهاية

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z)$$

موجودة ولا تساوي الصفر، وفي الحالة $n = 1$ نقول إن $z = a$ قطب بسيط للتابع.

مثال (3)

للتابع

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^6}$$

قطب بسيط $z = 0$ وذلك لأن

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-0) f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{1}{z(z-2)^6} = \frac{1}{64} \neq 0$$

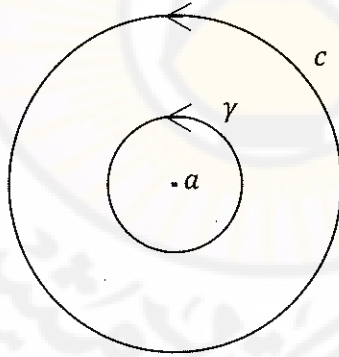
وقطب من المرتبة السادسة $z = 2$ وذلك لأن

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z - 0)^6 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 0)^6 \frac{1}{z(z-2)^6}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \neq 0$$

3-5 تصنيف النقاط الشاذة

نفرض أن $z = a$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ ، وإذا كانت c دائرة مركزها a ونصف قطرها r و γ دائرة ثانية مركزها a ونصف قطرها ϵ مقدار صغير جداً ينتهي إلى الصفر بحيث $r > \epsilon$ كما في الشكل (1-5)، وإذا فرضنا أن الدائرة γ لا تحوي على أية نقطة شاذة غير النقطة $z = a$ للتابع $f(z)$ فيكون هذا التابع تحليلياً في كل نقطة z تقع في المنطقة المحصورة بين الدائرتين c و γ وبالتالي يمكن نشر هذا التابع بمتسلسلة لوران في كل نقطة z من نقاط المنطقة المحصورة بين الدائرتين c و γ .



الشكل (1-5)

وبالنظر إلى متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ نميز الحالات التالية:

- 1- إذا كان الجزء الرئيسي لمتسلسلة لوران للتابع $f(z)$ معدوماً فإن النقطة الشاذة $z = a$ قابلة للإزالة.

2- إذا كان الجزء الرئيسي لمتسلسلة لوران للتابع $f(z)$ يتألف من عدد منتهٍ من الحدود فإنّ النقطة الشاذة $z = a$ تكون قطباً من المرتبة n .

3- إذا كان الجزء الرئيسي لمتسلسلة لوران يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود فإنّ النقطة الشاذة $z = a$ تكون نقطة شاذة أساسية.

مثال (4)

عين وصنّف النقاط الشاذة للتتابع التالية:

$$a. f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

$$b. f(z) = \frac{1 - e^z}{z^2}$$

$$c. f(z) = \frac{e^z}{z^3}$$

$$d. f(z) = \cos \frac{1}{z}$$

الحل

a. للتابع $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ نقطة شاذة وحيدة $z = 0$ ، يمكن إزالتها وذلك

بتطبيق قاعدة أوبيتال نجد:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}$$

b. للتابع $f(z) = \frac{1 - e^z}{z^2}$ نقطة شاذة وحيدة $z = 0$ لا يمكن إزالتها وذلك

لأنه لو طبقنا قاعدة أوبيتال سنجد:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-e^z}{2z} = \infty$$

ولتعيين نوع هذه النقطة الشاذة نستخدم نشر ماك لوران للتابع e^z فنجد:

$$\frac{1 - e^z}{z^2} = \frac{1 - (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)}{z^2}$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}z - \dots$$

أي أن نشر لوران التابع $f(z) = \frac{1-e^z}{z^2}$ يحوي على القوة السالبة الأولى فقط للتركيب $(z-0)$ فالنقطة $z=0$ هي قطب من المرتبة الأولى أي قطب بسيط.

c. للتابع $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ نقطة شاذة وحيدة $z=0$ وهي قطب من المرتبة الثالثة وذلك لأنه إذا استخدمنا نشر ماك لوران للتابع e^z نجد:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4}z + \dots \end{aligned}$$

إذن $z=0$ قطب من المرتبة الثالثة.

d. للتابع $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ نقطة شاذة أساسية هي $z=0$ وذلك لأنه إذا

استخدمنا نشر ماك لوران للتابع $f(z)$ نجد:

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos \frac{1}{z} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6!} \frac{1}{z^6} + \dots \end{aligned}$$

وبما أن عدد حدود الجزء الرئيسي من متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ غير منتهٍ

فإن $z=0$ نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z) = \cos \frac{1}{z}$.

تعريف

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة D وينعدم في النقطة $z=a \in D$

عندئذ نقول إن لهذا التابع صفراً في النقطة $z=a$ ونقول إن هذا الصفر من

المرتبة n إذا تحقق ما يلي:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 ; f^{(n)}(a) \neq 0$$

كما نقول إنَّ للتابع $f(z)$ صفراً في اللانهاية إذا كان للتابع $f(\frac{1}{z})$ صفراً في النقطة $z = 0$.

4-5 حساب راسب التابع التحليلي عند النقطة الشاذة

لتكن $z = a$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب

r_1 بحيث يكون $f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة

$$0 < |z - a| < r_1$$

وله متسلسلة لوران

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

و c منحنٍ مغلق يقع في المنطقة $0 < |z - a| < r_1$ ويحوي النقطة a داخله.

تعريف

نسمي العدد العقدي

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz$$

راسب التابع التحليلي $f(z)$ في النقطة الشاذة المعزولة a ونرمز له بالرمز

$$\text{Res}[f(z), a]$$

أي أنَّ

$$\text{Res}[f(z), a] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz$$

5-5 طرق حساب الرواسب

أولاً: طريقة النشر المباشر:

يمكن إيجاد c_{-1} بالاعتماد على نشر التابع $f(z)$ حسب متسلسلة لوران كما في

المثال التالي

مثال (5)

احسب رواسب التوابع التالية عند الأقطاب:

$$a. f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$$

$$b. f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

$$c. f(z) = \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}}$$

الحل

a. $z = 0$ قطب من المرتبة الثالثة وذلك لأن:

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$$

لحساب راسب التابع $f(z)$ في القطب $z = 0$ ننشر التابع $f(z)$ في جوار هذا

القطب فنجد:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

b. النقطة $z = 1$ هي القطب للتابع $f(z)$ من المرتبة الثانية لإيجاد الراسب عند هذه النقطة ننشر التابع e^z فنجد

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-1)^2} = e \frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} \\ &= \frac{e}{(z-1)^2} \left(1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \dots \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{Res}[f(z), 1] = c_{-1} = e$$

c. النقطة $z = \frac{\pi}{4}$ قطب للتابع $f(z)$ من المرتبة الأولى (قطب بسيط) ننشر التابع $\cos z$ بجوار هذه النقطة فنجد:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} + \dots \right) \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{Res} \left[f(z), \frac{\pi}{4} \right] = c_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ثانياً: طريقة النهايات:

لاحظنا أنّ حساب الراسب يعتمد على نشر لوران لهذا التابع، إلا أنّ عملية نشر التوابع ليست أمراً بسيطاً دوماً ولذلك نستخدم طريقة النهايات والاشتقاق وهذه الطريقة نستخدمها عندما يكون للتابع قطب قد علمت مرتبته سلفاً.

(أ) القطب بسيط:

نفرض أن للتابع $f(z)$ قطباً بسيطاً في النقطة $z = a$ عندئذ فإن متسلسلة لوران الموافقة تأخذ الشكل

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

وبالتالي

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = c_{-1}$$

أي

$$\text{Res}[f(z), -1] = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

مثال (6)

احسب الراسب للتابع

$$f(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z^2+16)}$$

عند القطب البسيط $z = -1$.

الحل

$$\text{Res}[f(z), a] = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z+2}{(z+1)(z^2+16)}$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+2}{z^2+16} = \frac{1}{17}$$

توجد طريقة ثانية لحساب راسب التابع $f(z)$ عند القطب البسيط $z = a$ حيث

يمكننا كتابة هذا التابع بالشكل

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

بحيث يكون التابعان $p(z), q(z)$ تحليليين في $z = a$ و $p(a) \neq 0$ ويكون

للتابع $q(z)$ صفر بسيط في النقطة $z = a$ وبالتالي يمكن نشر التابع $q(z)$

وفق متسلسلة تايلور كما يلي:

$$q(z) = (z-a)q'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} q''(a) + \dots$$

وبالتالي نجد أن

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), a] &= \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)p(z)}{(z-a) \left[q'(a) + (z-a) \frac{q''(a)}{2!} + \dots \right]} \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{Res}[f(z), a] = \text{Res} \left[\frac{p(z)}{q'(z)}, a \right] = \frac{p(z)}{q'(z)}$$

مثال (7)

احسب راسب التابع

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-3z+2}$$

الحل

نلاحظ أن $z = 1$ قطب بسيط للتابع وكذلك $z = 2$ ، ومنه

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), 1] &= c_{-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2+1}{z^2-3z+2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2+1}{z-2} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), 2] &= c_{-1} = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{z^2+1}{z^2-3z+2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2+1}{z-1} = 5 \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

حيث

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$p(z) = z^2 + 1$$

$$q(z) = z^2 - 3z + 2, q'(z) = 2z - 3$$

يمكن أن نكتب

$$\text{Res}[f(z), 1] = c_{-1}$$

$$= \text{Res} \left[\frac{z^2+1}{z^2-3z+2}, 1 \right] = \frac{p(1)}{q'(1)}$$

$$= \frac{(1)^2+1}{2(1)-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

وكذلك

$$\text{Res}[f(z), 2] = c_{-1}$$

$$= \text{Res} \left[\frac{z^2+1}{z^2-3z+2}, 2 \right] = \frac{p(2)}{q'(2)}$$

$$= \frac{(2)^2+1}{2(2)-3} = \frac{5}{1} = 5$$

ب) القطب من المرتبة n :

نظرية (1-5)

إذا كان للتابع $f(z)$ قطب من المرتبة $n > 1$ في النقطة $z = a$ فإن الراسب

لهذا التابع في هذا القطب يعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right)$$

البرهان

بما أن للتابع $f(z)$ قطباً من المرتبة n في النقطة $z=a$ فإن نشر لوران لهذا التابع في جوار تلك النقطة من الشكل:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

حيث $c_{-n} \neq 0$

فإذا ضربنا طرفي النشر السابق بـ $(z-a)^n$ نجد

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + c_1(z-a)^{n+1} + \dots$$

نشتق طرفي هذه العلاقة $(n-1)$ مرة فنجد:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) = (n-1)! c_{-1} + c_0 n(n-1) \dots 2(z-a) + \dots$$

ومنه

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right) = c_{-1} = \text{Res}[f(z), a]$$

وهو المطلوب.

مثال (8)

احسب رواسب التوابع التالية:

$$. f(z) = \frac{z}{(z+1)^2} \quad (a)$$

$$. f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3} \quad (b)$$

$$. f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2} \quad (c)$$

$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z} \quad (d)$$

الحل

(a) للتابع $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$ قطب من المرتبة الثانية هو $z = -1$ ، ومنه

$$\text{Res}[f(z), -1] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} (z) = 1$$

(b) للتابع $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ قطبان هما $z = i, z = -i$ ، وكل قطب هو من

المرتبة الثالثة، ومنه

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), i] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} [(z-i)^3 f(z)] \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z+i)^3} \\ &= 6 \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)^5} = \frac{-3i}{16} \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), -i] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} [(z+i)^3 f(z)] \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z-i)^3} = \frac{3i}{16} \end{aligned}$$

(c) للتابع $f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$ قطب بسيط $z = -4$ وقطب من المرتبة

الثانية $z = 1$ ، ومنه

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), -4] &= \lim_{z \rightarrow -4} (z+4)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -4} (z+4) \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow -4} \frac{2z}{(z-1)^2} = -\frac{8}{(-5)^2} = -\frac{8}{25} \end{aligned}$$

وكذلك

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 f(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{2z}{z+4} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z+4) - 2z}{(z+4)^2} = \frac{8}{25}
\end{aligned}$$

(d) بدون النشر لا نستطيع معرفة ما إذا كانت النقطة الشاذة الوحيدة $z = 0$ قطباً أو نقطة شاذة أساسية، لذلك نستخدم نشر ماك لوران للتابع $\sin z$ فنجد ما يلي:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z - \sin z} = \frac{1}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right)} \\
&= \frac{1}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots} \\
&= \frac{1}{\frac{z^3}{3!} \left(1 - \frac{z^2}{20} + \frac{z^4}{840} - \dots \right)} \\
&= \frac{6}{z^3} \left[1 - \left(\frac{z^2}{20} - \frac{z^4}{840} + \dots \right) \right]^{-1} \\
&= \frac{6}{z^3} \left[1 + \left(\frac{z^2}{20} - \frac{z^4}{840} \right) + \left(\frac{z^2}{20} - \frac{z^4}{840} \right)^2 + \dots \right] \\
&= \frac{6}{z^3} + \frac{3}{z} + \dots
\end{aligned}$$

فالنقطة الشاذة $z = 0$ هي قطب من المرتبة الثالثة وقيمة الراسب هي

$$Res[f(z), 0] = \frac{3}{10}$$

6-5 الراسب في ∞

تعريف

إذا كان $f(z)$ تابعاً قابلاً للنشر حسب متسلسلة لوران في المنطقة $z > R$ فإن الراسب في $z = \infty$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$Res[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz$$

حيث c منحني بسيط مغلق واقع في المنطقة $z > R$ شريطة أن لا يوجد خارجه نقاط شاذة عدا النقطة $z = \infty$.

وبشكل آخر يمكن أن نوجد الراسب في اللانهاية للتابع $f(z)$ من خلال إيجاد الراسب في النقطة $u = 0$ للتابع

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

أي راسب التابع $f(z)$ في اللانهاية هو أمثال u .

مثال (9)

احسب الراسب في اللانهاية للتوابع التالية:

$$.f(z) = z^2 + 2z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots (a)$$

$$.f(z) = e^z (b)$$

$$.f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} (c)$$

$$.f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} (d)$$

الحل

(a) لإيجاد الراسب في اللانهاية نبدل كل z بـ $\frac{1}{u}$ فنجد:

$$g(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} + u + u^2$$

ومنه

$$Res[f(z), \infty] = -1$$

(b) لدينا

$$g(u) = e^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{2!u^2} + \frac{1}{3!u^3} + \dots$$

ومنه

$$\text{Res}[e^z, \infty] = 0$$

(c) لدينا

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1 - z^2)}$$

ومنه

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{u^3}{1 - u^2} = -\frac{u^5}{1 - u^2} \\ &= -u^5(1 + u^2 + u^4 + \dots) \\ &= -u^5 - u^7 - \dots \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\text{Res}[f(z), \infty] = 0$$

(d) لإيجاد الراسب في اللانهاية نبدل كل z بـ $\frac{1}{u}$ فنجد:

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots} \\ &= \frac{1}{u} + \frac{u}{6} + \frac{7}{360}u^3 + \dots \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{6}$$

7-5 نظرية الرواسب

نظرية (2-5)

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل وعلى منحنٍ بسيط مغلق C باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة $a_1, a_2, \dots, a_n$ تقع جميعها داخل المنحني C عندئذٍ يكون لدينا:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), a_i]$$

حيث

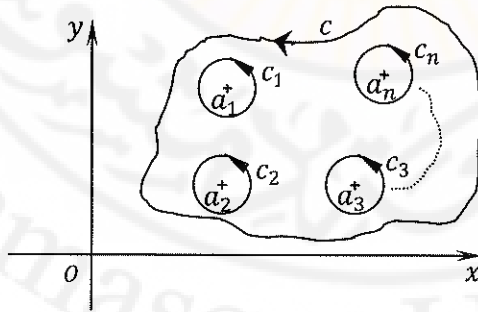
$$\text{Res}[f(z), a_i]; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

هو راسب التابع $f(z)$ في النقطة a_i .

البرهان

لتكن $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي النقاط الشاذة الواقعة داخل المنحني C الذي نكامل عليه كما في الشكل (2-5) فإذا أحطنا كل نقطة a_i بدائرة c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) محتواة مع داخلها في C وبحيث تكون خارج الدائرة c_j ($i \neq j$) كما في الشكل (2-5) فإننا نجد

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \dots + \\ &+ \int_{c_n} f(z) dz \end{aligned}$$



الشكل (2-5)

وبما أنَّ

$$i = 1, 2, \dots, n ; \int_{c_i} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), a_i]$$

فإنّ

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), a_i]$$

وهو المطلوب.

مثال (10)

احسب التكاملات التالية

$$a) \int_c \frac{\cosh z}{z^3} dz \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z| = 1.$$

$$b) \int_c \frac{2+3 \sin \pi z}{z(z-1)^2} dz \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z| = 2.$$

$$c) \int_c \frac{\cosh z}{z^2(1+z^2)} dz \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z-1| = 2.$$

الحل

a) للتابع $f(z) = \frac{\cosh z}{z^3}$ قطبٌ $z = 0$ من المرتبة الثالثة لأنّ

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^3 \frac{\cosh z}{z^3} = 1 \neq 0$$

وهذا القطب يقع ضمن الدائرة $|z| = 1$ ومنه

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), 0] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} (\cosh z) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} (\cosh z) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \int_c \frac{\cosh z}{z^3} dz &= 2\pi i \text{Res}[f(z), 0] \\ &= \pi i \end{aligned}$$

b) إنّ للتابع المكامل $f(z) = \frac{2+3 \sin \pi z}{z(z-1)^2}$ قطباً بسيطاً $z = 0$ وقطباً من

المرتبة الثانية $z = 1$ والقطبان يقعان داخل الدائرة c ومنه

$$\begin{aligned}
\text{Res}[f(z), 0] &= \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2+3 \sin \pi z}{(z-1)^2} = 2 \\
\text{Res}[f(z), 1] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{2+3 \sin \pi z}{z} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{3\pi \cos \pi z - (2+3 \sin \pi z)}{z^2} \\
&= -3\pi - 2
\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{2+3 \sin \pi z}{z(z-1)^2} dz &= 2\pi i (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), 1]) \\
&= 2\pi i (2 - 3\pi - 2) = -6\pi^2 i \\
c \text{ التابع } f(z) &= \frac{\cosh z}{z^2(1+z^2)} \text{ ثلاثة أقطاب هي:}
\end{aligned}$$

- $z = 0$ قطب من المرتبة الثانية.
- $z = i$ قطب من المرتبة الأولى.
- $z = -i$ قطب من المرتبة الأولى.

وجميع هذه الأقطاب تقع داخل الدائرة c وبالتالي:

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{\cosh z}{z^2(1+z^2)} dz &= 2\pi i (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), i] \\
&\quad + \text{Res}[f(z), -i])
\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}
\text{Res}[f(z), 0] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{\cosh z}{z^2(1+z^2)} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sinh z(1+z^2) - 2z \cosh z}{(1+z^2)^2} = 0 \\
\text{Res}[f(z), i] &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{\cosh z}{z^2(z-i)(z+i)} \\
&= \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cosh z}{z^2(z+i)} = \frac{\cosh i}{-2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i \cos 1}{2} \\
\text{Res}[f(z), -i] &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{\cosh z}{z^2(z-i)(z+i)} \\
&= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\cosh z}{z^2(z-i)} = \frac{\cosh(-i)}{2i} \\
&= \frac{i \cos 1}{2}
\end{aligned}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{\cosh z}{z^2(1+z^2)} dz &= 2\pi i \left(0 + \frac{i \cos 1}{2} + \frac{i \cos 1}{2} \right) \\
&= -2\pi \cos 1
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نظرية (3-5)

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة المعزولة فإن

$$\begin{aligned}
&\text{Res}[f(z), a_1] + \text{Res}[f(z), a_2] + \dots + \text{Res}[f(z), a_n] \\
&+ \text{Res}[f(z), \infty] = 0
\end{aligned}$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي النقاط الشاذة المعزولة.

تبين هذه النظرية أنه إذا أردنا مكاملة التابع $f(z)$ على منحني بسيط مغلق

يحتوي بداخله جميع النقاط الشاذة $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، فإن قيمة التكامل

$$\int_c f(z) dz = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty]$$

ولذلك لحساب هذا التكامل يكفي أن نحسب راسب التابع $f(z)$ في اللانهاية.

وهذا يعني أننا نحسب راسباً واحداً للتابع $f(z)$ في اللانهاية بدلاً من حساب n

راسباً للتابع $f(z)$ في n نقطة.

مثال (11)

احسب التكامل

$$\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)} dz$$

حيث c هو الدائرة $|z| = 2$.

الحل

لحساب هذا التكامل نلاحظ أن للتابع

$$f(z) = \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}$$

خمسة جذور هي $z = 0$ وهو قطب من المرتبة الثانية و z_0, z_1, z_2, z_3 والتي تمثل الجذور من المرتبة الرابعة للواحد، والجذور الخمسة تقع جميعها داخل الدائرة $|z| = 2$ ، وباعتماد على النظرية السابقة فإن

$$\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)} dz = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty]$$

لنحسب الراسب في اللانهاية

$$\text{Res}[f(z), \infty] = \text{Res}\left[\frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}, \infty\right]$$

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{\frac{1}{u^5} + \frac{1}{u} + 1}{\left(\frac{1}{u}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{u}\right)^4 - 1\right]} = \frac{\frac{1+u^4+u^5}{u^5}}{\frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{u^4} - 1\right)} \\ &= \frac{\frac{1+u^4+u^5}{u^5}}{\frac{1-u^4}{u^6}} \\ &= \frac{1+u^4+u^5}{u^5} \frac{u^6}{1-u^4} \\ &= \frac{u+u^5+u^6}{1-u^4} \\ &= u - u^4 - \dots \end{aligned}$$

ومنه

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -1$$

وبالتالي

$$\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)} dz = -2\pi i(-1) = 2\pi i$$

8-5 تطبيقات نظرية الرواسب

إن حساب التكاملات الحقيقية البسيطة المحدودة التي من الصعب حسابها بطرق المكاملة المعروفة في التحليل الرياضي يمكن حسابها أحياناً باستخدام نظرية الرواسب. وندرس بعض الحالات التي يتم فيها حساب مثل هذه التكاملات.

الحالة الأولى:

تكاملات التتابع الكسرية المثلثية، أي حساب التكاملات من الشكل

$$I = \int_0^{2\pi} G(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

نظرية (4-5)

إذا كان $G(\cos \theta, \sin \theta)$ تابعاً كسرياً في $\cos \theta, \sin \theta$ وله قيمة محدودة من أجل جميع قيم الزاوية في المجال $[0, 2\pi]$ ، وإذا كان $f(z)$ هو التابع العقدي الذي نحصل عليه بتعويض $z = e^{i\theta}$ فإن:

$$I = \int_0^{2\pi} G(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب التابع $f(z)$ في أقطابه $a_1, a_2, \dots, a_n$ الواقعة داخل الدائرة $|z| = 1$.

البرهان

إن المنحني c الذي اخترناه هنا هو الدائرة $|z| = 1$ وعلى هذه الدائرة يكون

$$z = e^{i\theta} \text{ حيث } \theta \text{ تتحول من } 0 \text{ إلى } 2\pi, \text{ ومنه}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

$$= \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$= \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

والتابع G يصبح التابع الكسري $F(z)$ المحدود على c أي

$$I = \int_0^{2\pi} G(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} F(z) \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_{|z|=1} f(z) dz$$

حيث $f(z) = \frac{F(z)}{iz}$ تابع كسري محدود على c ، ونقاطه الشاذة هي أقطاب فقط. بتطبيق نظرية الرواسب نحصل على المطلوب.

مثال (12)

احسب التكاملات التالية:

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta \quad (a)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} \quad (b)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \quad (c)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3} + \cos \theta} \quad (d)$$

الحل

(a) نفرض أن $z = e^{i\theta}$ ومنه

$$\cos \theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\cos 3\theta = \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

بالتعويض بالتكامل نجد:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^6+1}{2z^3}}{5-4\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^6+1}{2z^3}}{\frac{10z-4(z^2+1)}{2z}} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{2z^3} \frac{2z}{10z-4z^2-4} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(10z-4z^2-4)i} dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{-2iz^3(2z^2-5z+2)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz \end{aligned}$$

نلاحظ أن:

- $z = 0$ قطب من المرتبة الثالثة يقع داخل الدائرة $|z| = 1$.
- $z = \frac{1}{2}$ قطب بسيط يقع داخل الدائرة $|z| = 1$.
- $z = 2$ قطب بسيط يقع خارج الدائرة $|z| = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), 0] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{6z^5(2z^2-5z+2) - (4z-5)(z^6+1)}{(2z^2-5z+2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{8z^7-25z^6+12z^5-4z+5}{(2z^2-5z+2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(56z^6-150z^5+60z^4-4)(2z^2-5z+2)-2(4z-5)(8z^7-25z^6+12z^5-4z+5)}{(2z^2-5z+2)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-8+50}{2 \cdot 8} = \frac{21}{8}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[f(z), \frac{1}{2} \right] &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{z^6+1}{2z^3(z-2)} = \frac{\frac{1}{64}+1}{2\left(\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} \\ &= \frac{-65}{24} \end{aligned}$$

ومنه حسب نظرية الرواسب نجد:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4 \cos \theta} d\theta = -\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(2-1)(z-2)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} (2\pi i) \left(\frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right) \\ &= -\pi \left(\frac{63-65}{24} \right) = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

(b) لدينا

$$\sin \theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

ومنه

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3 \sin \theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{5+3\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{5+3\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2+10iz-3} \end{aligned}$$

نوجد أقطاب التابع الكسري

ومنه

$$z = -\frac{i}{3}, \quad z = -3i$$

نلاحظ أن القطب $z = -\frac{i}{3}$ يقع داخل الدائرة $|z| = 1$ ، لنحسب الراسب عند هذا القطب

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[f(z), -\frac{i}{3} \right] &= \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{3}} \left(z + \frac{i}{3} \right) \left(\frac{2}{3(z + \frac{i}{3})(z + 3i)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{3}} \left(\frac{2}{3(z + 3i)} \right) = \frac{2}{3 \left(\frac{-i + 9i}{3} \right)} \\ &= \frac{2}{8i} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

ومنه

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} = 2\pi i \left(\frac{1}{4i} \right) = \frac{\pi}{2}$$

(c) لدينا

$$\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

ومنه

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z^2 + 1}{2z}} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{4z + z^2 + 1}{2z}} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{i(z^2 + 4z + 1)} \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4z + 1} \end{aligned}$$

نوجد أقطاب التابع الكسري $\frac{2}{z^2 + 4z + 1}$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{3}$$

نلاحظ أن القطب $-2 + \sqrt{3}$ يقع داخل الدائرة $|z| = 1$ ، لنحسب الراسب عند

هذا القطب

$$\text{Res}[f(z), -2 + \sqrt{3}]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} (z - (-2 + \sqrt{3})) \left(\frac{2}{[z - (-2 + \sqrt{3})][z - (-2 - \sqrt{3})]} \right)$$

$$= \frac{2}{-2 + \sqrt{3} + z + \sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومنه

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \frac{1}{i} (2\pi i) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(d) لدينا

$$\sqrt{3} + \cos \theta = \sqrt{3} + \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^2 + 2\sqrt{3}z + 1}{2z}$$

ومنه

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3} + \cos \theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2 + 2\sqrt{3}z + 1}{2z}}$$

$$= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{3}z + 1}$$

نوجد أقطاب التابع الكسري $\frac{1}{z^2 + 2\sqrt{3}z + 1}$

$$z = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-4}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

نلاحظ أن القطب $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$ يقع داخل الدائرة $|z| = 1$ ، لنحسب الراسب

عند هذا القطب

$$\text{Res}[f(z), -\sqrt{3} + \sqrt{2}]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -\sqrt{3} + \sqrt{2}} (z + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{(z + \sqrt{3} - \sqrt{2})(z + \sqrt{3} + \sqrt{2})} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ومنه

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{3} + \cos \theta} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{3}z + 1}$$

$$= \frac{2}{i} (2\pi i) \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$$

الحالة الثانية:

تكاملات التوابع الكسرية من الشكل

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

نظرية (5-5)

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد

محدود من الأقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي، وإذا كان

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

في المجال $0 \leq \arg z \leq \pi$ فإن

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب التابع $f(z)$ في أقطابه $a_1, a_2, \dots, a_n$

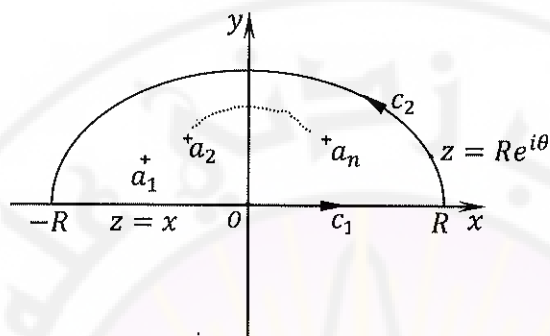
الواقعة بالنصف العلوي من المستوي العقدي.

البرهان

$f(z)$ هنا هو التابع الذي نحصل عليه من استبدال x المتحول العقدي z .

نختار المنحني $c = c_1 + c_2$ المبين في الشكل (3-5)، بحيث يحوي داخله

جميع أقطاب التابع $f(z)$ الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي. إن c_2 هو نصف دائرة مركزها النقطة $z = 0$ ونصف قطرها R ، و c_1 هو القطعة المستقيمة المنطبقة على محور السينات والممتدة من $-R$ إلى R .



الشكل (3-5)

إذا كانت $R_1, R_2, \dots, R_n$ روااسب التابع $f(z)$ في أقطابه $a_1, a_2, \dots, a_n$ الواقعة داخل c فحسب نظرية الرواسب يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

أي أن

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^\pi R e^{i\theta} f(R e^{i\theta}) d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

وبجعل $R \rightarrow \infty$ يكون

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi R e^{i\theta} f(R e^{i\theta}) d\theta &= \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

من الفرض

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

في المجال $0 \leq \arg z = \theta \leq \pi$ ، أي أن

$$\lim_{R \rightarrow \infty} Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) = 0$$

ففي هذا المجال من قيم θ يكون $|Re^{i\theta} f(Re^{i\theta})| \leq \epsilon$ حيث ϵ هو عدد

موجب ينتهي إلى الصفر عندما $R \rightarrow \infty$ ومنه

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) id\theta \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi |Re^{i\theta} f(Re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} (\epsilon\pi) = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

لأن التكامل

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) id\theta$$

ينعدم لانعدام طويلته.

نتيجة

إذا حقق التابع الكسري $f(x)$ الشرطين التاليين:

1. درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجتين على الأقل (بحيث يكون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} zf(x) = 0.$$

2. المقام لا ينعدم (لكي لا توجد أقطاب للتابع العقدي $f(z)$ على المحاور

الحقيقي).

فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب التابع العقدي $f(z)$ في أقطابه

$a_1, a_2, \dots, a_n$ الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

مثال (13)

احسب التكاملات التالية:

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx \quad (a)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx \quad (b)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} \quad (c)$$

الحل

(a) إنّ التابع $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}$ يحقق الشرطين الواردين في النتيجة السابقة وهما أنّ درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجتين، كما أنّ المقام لا ينعدم ولذا فإننا نوجد رواسب التابع العقدي $f(z) = \frac{2z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}$ في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

للتابع $f(z)$ الأقطاب التالية $-3i, -2i, 2i, 3i$ والأقطاب الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي هي $z_1 = 2i, z_2 = 3i$ ، وهي أقطاب بسيطة نحسب الراسبين لهما فنجد:

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), 2i] &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{2z+1}{(z-2i)(z+2i)(z^2+9)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z+1}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{4i+1}{4i(5)} = \frac{1}{5} - \frac{i}{20} \end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), 3i] &= \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i) \frac{2z+1}{(z^2+4)(z-3i)(z+3i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{2z+1}{(z^2+4)(z+3i)} = \frac{6i+1}{6i(-5)} = \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{i}{30} \end{aligned}$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = 2\pi i(R_1 + R_2)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx &= 2\pi i \left(\frac{1}{5} - \frac{i}{20} - \frac{1}{5} + \frac{i}{30} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{-30i+20i}{600} \right) = 2\pi i \left(-\frac{i}{60} \right) = \frac{\pi}{30} \end{aligned}$$

(b) نلاحظ أن التابع $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$ يحقق الشرطين الواردين في

النتيجة السابقة ولذا نوجد رواسب التابع العقدي $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

للتابع $f(z)$ الأقطاب:

$$z_1 = -1 - i, z_2 = -1 + i, z_3 = -i, z_4 = i$$

الأقطاب الواقعة في النصف العلوي هي:

$$\bullet z_2 = -1 + i \text{ وهو قطب بسيط.}$$

$$\bullet z_4 = i \text{ وهو قطب من المرتبة الثانية.}$$

لنحسب الراسبين لهما

$$\text{Res}[f(z), -1 + i] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1+i} (z + 1 - i) \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)(z+1-i)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)}$$

$$= \frac{(-1+i)^2}{((-1+i)^2+1)^2(-1+i+1+i)} = \frac{-2i}{2i(1-2i)^2}$$

$$= \frac{-1}{1-4i+4i^2} = \frac{-1}{-3-4i} = \frac{3-4i}{25}$$

وكذلك

$$\text{Res}[f(z), i] =$$

$$= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+2z+2)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)} = \frac{9i-12}{100}$$

ومنه:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx = 2\pi i \left(\frac{3-4i}{25} + \frac{9i-12}{100} \right)$$

$$= 2\pi \left(-\frac{7i}{100} \right) = \frac{7\pi}{50}$$

(c) التابع الحقيقي $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$ يحقق الشرطين الواردين في النتيجة السابقة ولذا نوجد رواسب التابع العقدي $f(z) = \frac{1}{z^4+z^2+1}$ في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

أقطاب التابع $f(z)$ هي جذور المعادلة $z^4 + z^2 + 1 = 0$ ولحل هذه المعادلة نلاحظ أنّ

$$z^6 - 1 = (z^2 - 1)(z^4 + z^2 + 1)$$

هذا يعني أنّ جذور المعادلة $z^4 + z^2 + 1 = 0$ هي بعض جذور المعادلة $z^6 - 1 = 0$ وهذه المعادلة تكتب $z^6 = 1 = e^{2\pi i}$ ، ومنه

$$z_k = e^{\frac{2\pi i + 2k\pi i}{6}}$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

من أجل $k = 0$ نجد $z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}}$ وهذا الجذر يقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

من أجل $k = 1$ نجد $z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ وهذا الجذر يقع أيضاً في النصف العلوي من المستوي العقدي.

من أجل $k = 2$ نجد $z_3 = e^{\frac{6\pi i}{6}} = e^{\pi i} = -1$ وهو ليس جذراً للمعادلة $z^6 - 1 = 0$ وهو جذر للمعادلة $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

من أجل $k = 3$ نجد $z_4 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ وهذا الجذر يقع في النصف السفلي.

من أجل $k = 4$ نجد $z_5 = e^{\frac{5\pi i}{3}}$ وهذا الجذر يقع أيضاً في النصف السفلي.

ومن أجل $k = 5$ نجد $z_6 = 1$ وهو ليس جذراً للمعادلة $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

هذا يعني أنه يوجد جذران z_1, z_2 يقعان في النصف العلوي من المستوي العقدي، لنحسب الراسبين فيهما فنجد:

$$\text{Res} \left[f(z), e^{\frac{\pi i}{3}} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \left(z - e^{\frac{\pi i}{3}} \right) \frac{1}{z^4 + z^2 + 1} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين لذا نطبق قاعدة أوبيتال فنجد:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[f(z), e^{\frac{\pi i}{3}} \right] &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{1}{4z^3 + 2z} = \frac{1}{4e^{\pi i} + 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \\ &= \frac{1}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[f(z), e^{\frac{2\pi i}{3}} \right] &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{\left(z - e^{\frac{2\pi i}{3}} \right)}{z^4 + z^2 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{1}{4z^3 + 2z} = \frac{1}{4e^{2\pi i} + 2e^{\frac{2\pi i}{3}}} \\ &= \frac{1}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = 2\pi i \left(\frac{-3 - i\sqrt{3}}{12} + \frac{3 - i\sqrt{3}}{12} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-2i\sqrt{3}}{12} \right) = \pi \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

الحالة الثالثة:

حساب التكاملات من الشكل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos mx f(x) dx \quad \bullet$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin mx f(x) dx \quad \bullet$$

حيث $f(x)$ تابع كسري و $m > 0$.

نظرية (6-5)

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في النصف العلوي من المستوى العقدي باستثناء عدد محدود من الأقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي، وإذا كان $m > 0$ وكان

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad \text{في المجال } 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ فإن التكامل}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos mx f(x) dx$$

هو الجزء الحقيقي من ناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب التابع $e^{imz} f(z)$

في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من المستوى العقدي، بينما التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin mx f(x) dx$$

فهو الجزء التخيلي لهذا الناتج.

البرهان

$f(z)$ هو التابع الذي نحصل عليه من استبدال x المتحول العقدي z .

نختار المنحني $c = c_1 + c_2$ حيث c_2 هو نصف دائرة مركزها $z = 0$

ونصف قطرها R ، و c_1 هو القطعة المستقيمة المنطبقة على محور السينات

والممتدة من $-R$ إلى R .

وإذا كانت $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب التابع $e^{imz} f(z)$ في أقطابه الواقعة ضمن c فإن:

$$\begin{aligned}\int_c e^{imz} f(z) &= \int_{c_1} e^{imz} f(z) + \int_{c_2} e^{imz} f(z) \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)\end{aligned}$$

أي أن

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R e^{imx} f(x) + \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta &= \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)\end{aligned}$$

وبجعل $R \rightarrow \infty$ نجد:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{imx} f(x) + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta &= \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)\end{aligned} \quad (1)$$

ولكن

$$|e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}| = Re^{-mR \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| \quad (2)$$

ومن الشكل (4-5) نرى أن $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ عندما $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، ومنه

$$Re^{-mR \sin \theta} \leq Re^{-mR \frac{2\theta}{\pi}} \quad (3)$$

وبما أن $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ فإن $\lim_{R \rightarrow \infty} |f(Re^{i\theta})| = 0$ أي أن

$$|f(Re^{i\theta})| \leq \epsilon \quad (4)$$

حيث $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $R \rightarrow \infty$ في المجال $0 \leq \theta \leq \pi$ باستخدام (2) ثم (4) نجد:

$$\begin{aligned}I &= \left| \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi Re^{-mR \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta\end{aligned}$$

$$\leq R\epsilon \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta$$

$$= 2R\epsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \theta} d\theta$$

وباستخدام (3) فإن

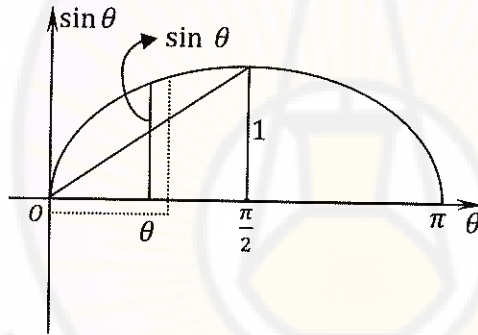
$$I \leq 2R\epsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \theta} d\theta \leq 2R\epsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta$$

$$= \frac{\pi\epsilon}{m} [1 - e^{-mR}]$$

ومنه

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi\epsilon}{m} [1 - e^{-mR}] = 0$$

حيث أن $m > 0$ فرضاً كما أن $\epsilon > 0$.



الشكل (4-5)

وهكذا نرى أن التكامل الثاني من العلاقة (1) ينعدم لانعدام طويلته.

بمطابقة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية من ناتج العلاقة (1) نحصل على

المطلوب.

نتيجة

إذا حقق التابع الكسري $f(x)$ الشرطين التاليين:

1. درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجة واحدة على الأقل (بحيث يكون

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0).$$

2. المقام لا ينعدم (لكي لا توجد أقطاب للتابع العقدي $e^{imz} f(z)$ على

المحور الحقيقي).

وإذا كان $m > 0$ فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos mx f(x) dx = \operatorname{Re}[2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin mx f(x) dx = \operatorname{Im}[2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n)]$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب التابع العقدي $e^{imz} f(z)$ في أقطابه

$a_1, a_2, \dots, a_n$ الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

مثال (14)

احسب التكاملات التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx \quad (a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \sin x}{x^2-2x+2} dx \quad (b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{1+x^2} dx \quad (c)$$

الحل

(a) إن التابع $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ يحقق الشرطين الواردين في النتيجة السابقة

لنوجد رواسب التابع العقدي $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من

المستوي العقدي.

للتابع $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ قطبان مضاعفان هما $z_1 = i, z_2 = -i$ ، ولكن z_1 فقط يقع

في النصف العلوي ولنحسب الراسب عند هذا القطب

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}, i \right] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4} \\ &= \frac{ie^{-1}(-4) - 4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \text{Re} \left[2\pi i \left(-\frac{i}{2e} \right) \right] = \frac{\pi}{e}$$

(b) التابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$ يحقق الشرطين الواردين في النتيجة السابقة.

لنوجد رواسب التابع $\frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$ في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من

المستوي العقدي. للتابع $\frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$ قطبان بسيطان هما

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i$$

ولكن $z_1 = 1+i$ فقط يقع في النصف العلوي ولنحسب الراسب عند هذا

القطب

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}, 1+i \right] &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{(z-1-i)(z-1)e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{(z-1)e^{iz}}{(z-1+i)} \\ &= \frac{ie^{i(1+i)}}{2i} = \frac{1}{2} e^{-1+i} \\ &= \frac{1}{2} e^{-1} (\cos 1 + i \sin 1) \end{aligned}$$

ومنه حسب النتيجة السابقة فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \sin x}{x^2-2x+2} dx = \text{Im} \left[2\pi i \left(\frac{1}{2} e^{-1} (\cos 1 + i \sin 1) \right) \right]$$

$$= \text{Im}[i\pi e^{-1} \cos 1 - \pi e^{-1} \sin 1] \\ = \pi e^{-1} \cos 1$$

(c) التابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يحقق الشرطين الواردين في النتيجة السابقة.
لنوجد رواسب التابع العقدي $\frac{e^{i3z}}{1+z^2}$ في أقطابه الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

للتابع $\frac{e^{i3z}}{1+z^2}$ قطبان هما

$$z_1 = -i, \quad z_2 = i$$

لنحسب راسب التابع $\frac{e^{i3z}}{1+z^2}$ عند القطب الوحيد $z_2 = i$ الواقع في النصف العلوي

$$\text{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{1+z^2}, i \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{i3z}}{(z-i)(z+i)} \\ = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i3z}}{(z+i)} = \frac{e^{-3}}{2i} = -\frac{i}{2e^3}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{1+x^2} dx = \text{Im} \left[2\pi i \left(-\frac{i}{2e^3} \right) \right] = 0$$

الحالة الرابعة:

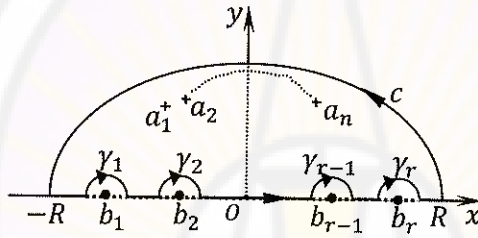
وجود أقطاب بسيطة على المحور الحقيقي للتابع $f(z)$ الوارد في الحالتين الثانية والثالثة.

إذا وجدت للتابع $f(z)$ الوارد في الحالتين الثانية والثالثة أقطاب $a_1, a_2, \dots, a_n$ واقعة فوق المحور الحقيقي وكذلك أقطاب بسيطة $b_1, b_2, \dots, b_r$ واقعة على المحور الحقيقي فإننا نضع في المنحني C أنصاف دوائر $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ بحيث نتجنب الأقطاب على المحور الحقيقي وذلك كما في

الشكل (5-5) ويجعل أقطار أنصاف الدوائر $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ تنتهي إلى الصفر
 ويجعل $R \rightarrow \infty$ وإذا كان التابع $f(x)$ كسرياً تقل درجة بسطه عن درجة
 مقامه بدرجتين على الأقل فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \\ + \pi i(R'_1 + R'_2 + \dots + R'_n)$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب التابع العقدي $f(z)$ في أقطابه العلوية،
 بينما $R'_1, R'_2, \dots, R'_n$ فهي رواسب هذا التابع في أقطابه الواقعة على المحور
 الحقيقي.



الشكل (5-5)

كذلك إذا كان التابع $f(x)$ كسرياً تقل درجة بسطه عن درجة مقامه بدرجة
 واحدة على الأقل فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos mx f(x) dx = \text{Re}[2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \\ + \pi i(R'_1 + R'_2 + \dots + R'_n)] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin mx f(x) dx = \text{Im}[2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \\ + \pi i(R'_1 + R'_2 + \dots + R'_n)]$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي روااسب التابع العقدي $e^{imz}f(z)$ في أقطابه العلوية، بينما $R'_1, R'_2, \dots, R'_n$ فهي روااسب هذا التابع في أقطابه الواقعة على المحور الحقيقي.

مثال (15)

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x(1+x^2)} dx$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

الحل

(a) إن التابع $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ يحقق الشرطين الواردين في النتيجة السابقة.

لنوجد روااسب التابع العقدي $\frac{e^{i3z}}{z(1+z^2)}$ قطبه البسيط $z = i$ الواقع في النصف

العلوي و في قطبه البسيط $z = 0$ الواقع على المحور ونهمل القطب $z = -i$

الواقع في النصف السفلي من المستوي العقدي

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z(1+z^2)}, i \right] &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{i3z}}{z(z-i)(z+i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i3z}}{z(z+i)} = \frac{e^{-3}}{i(2i)} = -\frac{1}{2e^3} \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z(1+z^2)}, 0 \right] &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{i3z}}{z(1+z^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{i3z}}{(1+z^2)} = 1 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x(1+x^2)} dx = \text{Im} \left[2\pi i \left(-\frac{1}{2e^3} \right) + \pi i(1) \right]$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

(b) إن التابع $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بثلاث درجات

كما أن مقامه ينعدم في جذر بسيط $x = -1$.

نحسب رواسب التابع العقدي:

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)}$$

في قطبه العلوي البسيط $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$ وفي قطبه البسيط $z = -1$ الواقع على

المحور الحقيقي ونهمل القطب $z = e^{\frac{5\pi}{3}i}$ لوقوعه في النصف السفلي من

المستوي العقدي

$$\text{Res} \left[\frac{1}{z^3+1}, e^{\frac{\pi}{3}i} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}} (z - e^{\frac{\pi}{3}i}) \frac{1}{z^3+1} = \frac{0}{0}$$

عدم تعيين لذا نطبق قاعدة أوبیتال

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{z^3+1}, e^{\frac{\pi}{3}i} \right] &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3e^{\frac{2\pi}{3}i}} \\ &= \frac{1}{3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{6} \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{z^3+1}, -1 \right] &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(z^2-z+1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} = 2\pi i \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{6} \right) + \pi i \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(c) نلاحظ أن $\frac{\sin x}{x}$ تابع زوجي في المجال $-\infty \leq x \leq \infty$ ، ومنه

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

التابع $\frac{1}{x}$ تقل درجة بسطه عن درجة مقامه درجة واحدة، كما أن مقامه ينعلم في جذر بسيط $x = 0$.

نحسب راسب التابع العقدي $\frac{e^{iz}}{z}$ في قطبه البسيط $z = 0$ الواقع على المحور الحقيقي

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right] &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \text{Im}[\pi i(1)] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

الحالة الخامسة:

حساب التكامل من الشكل:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx$$

حيث $f(x)$ تابع كسري و p عدد كسري.

نظرية (5-7)

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في المستوي العقدي باستثناء عدد منته من الأقطاب

غير الواقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي، وإذا كان

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^p f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^p f(z) = 0$$

حيث $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ فإن

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx = -\frac{\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi} [R_1 + R_2 + \dots + R_n]$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي روااسب التابع $z^{p-1}f(z)$ في جميع أقطابه $a_1, a_2, \dots, a_n$.

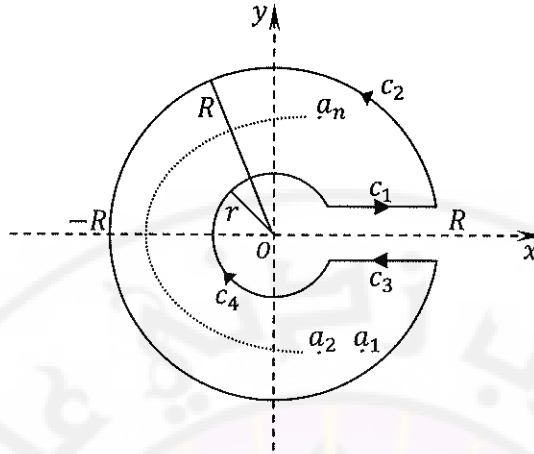
البرهان

نختار المنحني c كما في الشكل (5-6)

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

حيث

- c_2 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها R .
 - c_4 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها r .
 - c_1 قطعة مستقيمة منطبقة على محور السينات الموجب و $z = x$ عليها.
 - c_3 قطعة مستقيمة منطبقة أيضاً على محور السينات ولكن $z = xe^{2\pi i}$ عليها.
- وهاتان القطعتان المستقيمتان منطقتان على مستقيم الفرع ox للتابع $z^{p-1}f(z)$ وقد رسمتا متباعدتين للتوضيح فقط.



الشكل (6-5)

للتابع $z^{p-1}f(z)$ نقطة تفرع $z = 0$ وله فرضاً أقطاب $a_1, a_2, \dots, a_n$ غير واقعة على الجزء الموجب للمحور الحقيقي.

ولتكن $R_1, R_2, \dots, R_n$ روااسب التابع $z^{p-1}f(z)$ في أقطابه. فحسب نظرية الرواسب يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} \int_c z^{p-1}f(z)dz &= \int_{c_1} z^{p-1}f(z)dz + \int_{c_2} z^{p-1}f(z)dz \\ &+ \int_{c_3} z^{p-1}f(z)dz + \int_{c_4} z^{p-1}f(z)dz \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

أي أن

$$\begin{aligned} \int_r^R x^{p-1}f(x)dx + I_1 + \int_R^r (xe^{2\pi i})^{p-1}f(xe^{2\pi i})dxe^{2\pi i} + I_2 &= \\ &= 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

حيث

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^p f(Re^{i\theta})id\theta$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^p f(re^{i\theta})id\theta$$

لدينا فرضاً أنّ

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^p f(z)] = 0$$

أي أنّ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |(Re^{i\theta})^p f(Re^{i\theta})| = 0$$

ومنه فإنّ $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = 0$ لانعدام طويلته.

ولدينا فرضاً أنّ

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^p f(z)] = 0$$

أي أنّ

$$\lim_{r \rightarrow 0} |(re^{i\theta})^p f(re^{i\theta})| = 0$$

ومنه فإنّ $\lim_{r \rightarrow 0} I_2 = 0$ لانعدام طويلته.

بجعل $R \rightarrow \infty$ و $r \rightarrow 0$ وبما أنّ $I_1 \rightarrow 0$ و $I_2 \rightarrow 0$ فإنّ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{p-1} f(x) dx - e^{2ip\pi} \int_0^\infty x^{p-1} f(x) dx \\ = 2\pi i (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{p-1} f(x) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2ip\pi}} (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \\ &= \frac{-\pi}{e^{ip\pi}} \left(\frac{2i}{e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}} \right) (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \\ &= \frac{-\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi} (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نتيجة

إذا كان p عدداً حقيقياً كسرياً، وكان $f(x)$ تابعاً كسرياً يحقق الشروط التالية:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} [x^p f(x)] = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} [x^p f(x)] = 0$$

3. مقامه لا ينعدم لأجل أية قيمة موجبة للمتحول x فإن:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx = \frac{-\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi} (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

حيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي روااسب التابع العقدي $z^{p-1} f(z)$ في جميع أقطابه.

مثال (16)

احسب التكاملات التالية:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1} dx$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{x^2+1} dx \text{ حيث } 0 < p < 2$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1} dx \text{ حيث } 0 < p < 1$$

الحل

(a) لدينا $p - 1 = -\frac{1}{4}$ أي $p = \frac{3}{4}$ ، والتابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ يحقق شروط

النتيجة السابقة أي أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x+1} = 0$$

كما أن الشرط الثالث محقق لأنّ المقام لا ينعدم عند أي قيمة موجبة للمتحول x .

نحسب راسب التابع العقدي $\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z+1}$ في قطبه البسيط $z = -1$:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z+1}, -1 \right] &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z+1} = (-1)^{-\frac{1}{4}} \\ &= (e^{\pi i})^{-\frac{1}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}i} \end{aligned}$$

ومنه حسب النتيجة السابقة نجد:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1} dx &= -\frac{\pi}{\sin \frac{3}{4}\pi} e^{-\frac{3}{4}i\pi} \left(e^{-\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{\sin \frac{3}{4}\pi} e^{-i\pi} = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

(b) التابع الكسري $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ يحقق شروط النتيجة السابقة، إذ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p}{x^2+1} = 0 \quad \text{عندما } p > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{x^2+1} = 0 \quad \text{عندما } p < 2$$

أي أن هذين الشرطين محققان معاً لأن $0 < p < 2$ فرضاً، كذلك فإن الشرط

الثالث محقق وهو عدم انعدام المقام لأجل أية قيمة موجبة للمتحول x .

نحسب رواسب التابع العقدي $\frac{z^{p-1}}{z^2+1}$ في قطبيه البسيطين $z = \pm i$:

$$\begin{aligned}Res \left[\frac{z^{p-1}}{z^2+1}, i \right] &= \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{z^{p-1}}{(z-i)(z+i)} = \frac{(i)^{p-1}}{2i} \\ &= -\frac{(i)^p}{2} = -\frac{\left(e^{\frac{\pi}{2}i} \right)^p}{2} = \frac{-e^{p\frac{\pi}{2}i}}{2}\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}Res \left[\frac{z^{p-1}}{z^2+1}, -i \right] &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{z^{p-1}}{(z-i)(z+i)} = \frac{(i)^{p-1}}{-2i} \\ &= -\frac{(-i)^p}{2} = -\frac{\left(e^{\frac{3\pi}{2}i} \right)^p}{2} = \frac{-e^{\frac{3p}{2}\pi i}}{2}\end{aligned}$$

ومنه حسب النتيجة السابقة نجد:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x^2+1} dx &= -\frac{\pi}{\sin p\pi} e^{-p\pi i} \left(\frac{-e^{p\frac{\pi}{2}i}}{2} - \frac{e^{\frac{3p}{2}\pi i}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sin p\pi} \left(e^{-p\frac{\pi}{2}i} + e^{p\frac{\pi}{2}i} \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin p\pi} \left(2 \cos \frac{p\pi}{2} \right) = \frac{\pi \cos \frac{p\pi}{2}}{2 \sin \frac{p\pi}{2} \cos \frac{p\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin \frac{p\pi}{2}}$$

(c) التابع الكسري $f(x) = \frac{1}{x+1}$ يحقق شروط النتيجة السابقة، أي أنّ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{p-1}}{x+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{p-1}}{x+1} = 0$$

حيث $0 < p < 1$.

كما أنّ الشرط الثالث محقق لأنّ المقام لا ينعدم عند أية قيمة موجبة للمتحول x .

نحسب راسب التابع العقدي $f(z) = \frac{z^{p-1}}{z+1}$ في قطبه البسيط $z = -1$:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{z^{p-1}}{z+1}, -1 \right] &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{p-1}}{z+1} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} z^{p-1} = \lim_{z \rightarrow -1} e^{(p-1) \ln z} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} e^{(p-1)[\ln|z| + i \arg z]} = e^{i\pi(p-1)} \end{aligned}$$

ومنه حسب النتيجة السابقة يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1} dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2ip\pi}} (e^{i\pi(p-1)}) \\ &= \frac{-2\pi i e^{ip\pi}}{1-e^{2ip\pi}} = \frac{-2\pi i}{e^{-ip\pi} - e^{ip\pi}} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \end{aligned}$$

مثال (17)

احسب التكاملات التالية:

(a) $\int_c \frac{1+z}{1-\cos z} dz$ حيث c هو الدائرة $|z| = 7$.

(b) $\int_c \frac{dz}{z^6+1}$ حيث c هو الدائرة $|z-1| = 1$.

(c) $\int_c \frac{dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}}$ حيث c هو مربع رؤوسه $2 \pm 2i, -2 \pm 2i$.

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2} dx$ حيث a, b عدنان موجبان.

الحل

(a) النقاط الشاذة للتابع $\frac{1+z}{1-\cos z}$ تعطى بالعلاقة

$$1 - \cos z = 0$$

ومنه

$$1 - \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$$

أو

$$(e^{iz})^2 - 2(e^{iz}) + 1 = 0$$

ومنه $e^{iz} = 1$ ، والنقاط الشاذة هي

$$z = 2k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

والنقاط التي تقع داخل الدائرة $|z| = 7$ هي الأقطاب

$$z_1 = 0, z_2 = 2\pi, z_3 = -2\pi$$

وهذه الأقطاب هي من المرتبة الثانية، وذلك لأن

$$(1 - \cos z)' = \sin z$$

حيث $\sin z = 0$ من أجل $0, 2\pi, -2\pi$.

بينما

$$(1 - \cos z)'' = \cos z$$

و $\cos z \neq 0$ من أجل $0, 2\pi, -2\pi$.

وبالتالي حسب نظرية الرواسب يمكن أن نكتب

$$\int_c \frac{1+z}{1-\cos z} dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + R_3)$$

حيث

$$R_1 = \text{Res}[f(z), 0], R_2 = \text{Res}[f(z), 2\pi], \\ R_3 = \text{Res}[f(z), -2\pi]$$

هي الرواسب في الأقطاب من المرتبة الثانية.

لحساب هذه الرواسب ننشر التابع $1 - \cos z$ حسب تايلور بجوار النقطة a

التي هي قطب مضاعف من المرتبة الثانية فنجد:

$$1 - \cos z = (1 - \cos a) + \frac{z-a}{1!} (1 - \cos z)' + \\ + (1 - \cos z)'' \frac{(z-a)^2}{2!} + \frac{(z-a)^3}{3!} (1 - \cos z)''' + \dots \\ 1 - \cos a = 0; (1 - \cos z)'_{z=a} = 0; (1 - \cos z)''_{z=a} = 1 \text{ ولكن}$$

وبالتالي

$$1 - \cos z = \frac{(z-a)^2}{2} \left[1 + \frac{(z-a)^2}{4.3} + \dots \right]$$

ومنه يمكن أن نكتب

$$(z-a)^2 \frac{1+z}{1-\cos z} = (z-a)^2 \frac{2(1+z)}{(z-a)^2 \left[1 + \frac{(z-a)^2}{4.3} + \dots \right]}$$

وهكذا فإن

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} \frac{2(1+z)}{1 + \frac{(z-a)^2}{4.3} + \dots} \\ = \lim_{z \rightarrow a} \left[\frac{2}{1 + \frac{(z-a)^2}{4.3} + \dots} - \frac{(1+z) \left(\frac{z-a}{3} + \dots \right)}{\left(1 + \frac{(z-a)^2}{4.3} + \dots \right)^2} \right] \\ = 2$$

من أجل جميع النقاط $0, 2\pi, -2\pi$.

وبالتالي

$$\int_c \frac{1+z}{1-\cos z} dz = 2\pi i (2 + 2 + 2) = 12\pi i$$

(b) للتابع $\frac{1}{z^6+1}$ النقاط الشاذة التي تعطى بالمعادلة

$$z^6 + 1 = 0$$

وهذه المعادلة تكتب

$$z^6 = -1 = e^{\pi i}$$

ومنه

$$z_k = e^{\frac{\pi i + 2k\pi i}{6}}$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

وبالتالي نحصل على الأقطاب البسيطة التالية:

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}} \bullet$$

$$z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}} \bullet$$

$$z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}} \bullet$$

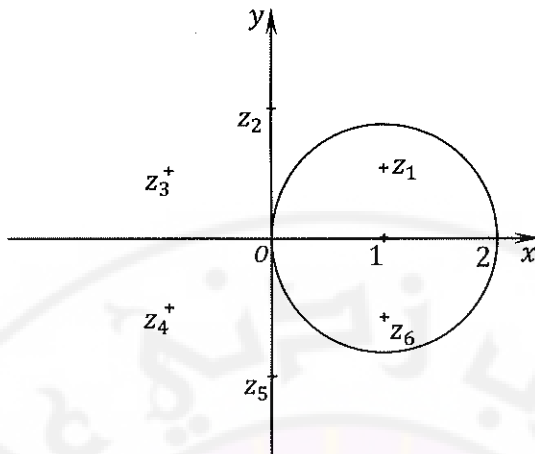
$$z_4 = e^{\frac{7\pi i}{6}} \bullet$$

$$z_5 = e^{\frac{9\pi i}{6}} \bullet$$

$$z_6 = e^{\frac{11\pi i}{6}} \bullet$$

ولكن القطبين z_1, z_6 فقط يقعان داخل الدائرة $|z - 1| = 1$ كما هو مبين في

الشكل (5-7) أما الأقطاب الأخرى فتقع خارج الدائرة وتهمل.



الشكل (7-5)

لنحسب الرواسب عند القطبين z_1, z_6 وباستخدام قاعدة أوبیتال نجد:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{z^6+1}, e^{\frac{\pi i}{6}} \right] &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{6}}}{z^6 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6e^{\frac{5\pi i}{6}}} \\ &= \frac{e^{\frac{7\pi i}{6}}}{6} \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{z^6+1}, e^{\frac{11\pi i}{6}} \right] &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{11\pi i}{6}}} \frac{z - e^{\frac{11\pi i}{6}}}{z^6 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\frac{11\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6e^{\frac{55\pi i}{6}}} \\ &= \frac{1}{6e^{\frac{7\pi i}{6}}} = \frac{e^{\frac{5\pi i}{6}}}{6} \end{aligned}$$

ومنه حسب نظرية الرواسب يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{dz}{z^6+1} &= 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{7\pi i}{6}} + e^{\frac{5\pi i}{6}}}{6} \right) \\
&= \frac{2\pi i}{6} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\pi i}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\pi i}{3} \left(-2\cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi i}{3} \left(-2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi i}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(c) للتابع

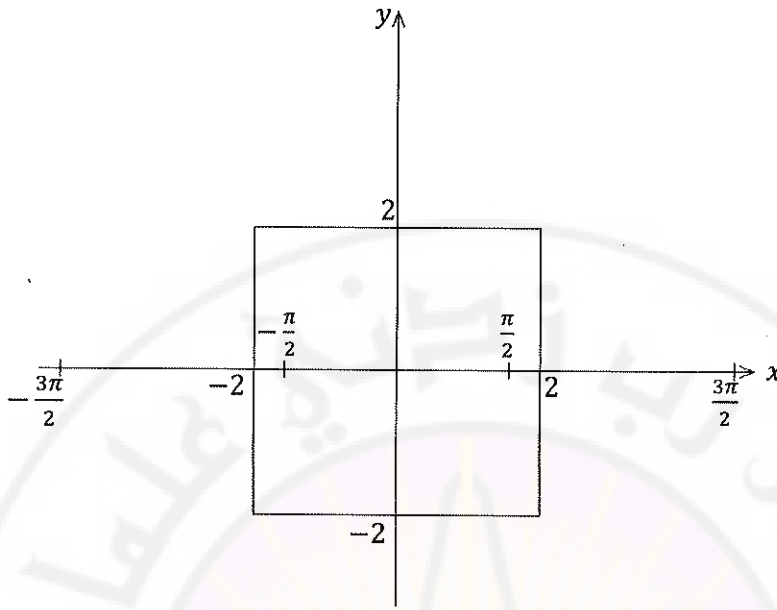
$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1 - \cos z}{2} \right)} = \frac{2}{\cos z}$$

النقاط الشاذة

$$z = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ولكن توجد اثنتان فقط داخل المربع هما $z = \pm \frac{\pi}{2}$ ، أما النقاط الشاذة الأخرى

فتهمل لوقوعها خارج المربع كما هو مبين في الشكل (5-8)



الشكل (8-5)

لحساب الراسب في $z = \frac{\pi}{2}$ ننشر المقام وفق تايلور لنحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\cos z} &= \frac{2}{-\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{120}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots} \\ \frac{2}{\cos z} &= -\frac{2}{z - \frac{\pi}{2}} \left(1 - \left[\frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4}{120} + \dots \right] \right)^{-1} \\ &= -\frac{2}{z - \frac{\pi}{2}} \left(1 + \left[\frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4}{120} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \dots \right]^2 + \dots \right) \\ &= -\frac{2}{z - \frac{\pi}{2}} + \text{جزء تحليلي} \\ &\quad \text{أي أن قيمة الراسب في القطب البسيط } z = \frac{\pi}{2} \text{ هي } -2. \end{aligned}$$

ولحساب الراسب في $z = -\frac{\pi}{2}$ ننشر وفق تايلور فنحصل على

$$\begin{aligned}\frac{2}{\cos z} &= \frac{2}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^5 - \dots} \\ &= \frac{2}{z+\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left[\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^4}{120} + \dots \right] \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{z+\frac{\pi}{2}} \left(1 + \left[\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^4}{120} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \dots \right]^2 + \dots \right) \\ &= \frac{2}{z+\frac{\pi}{2}} + \text{جزء تخيلي}\end{aligned}$$

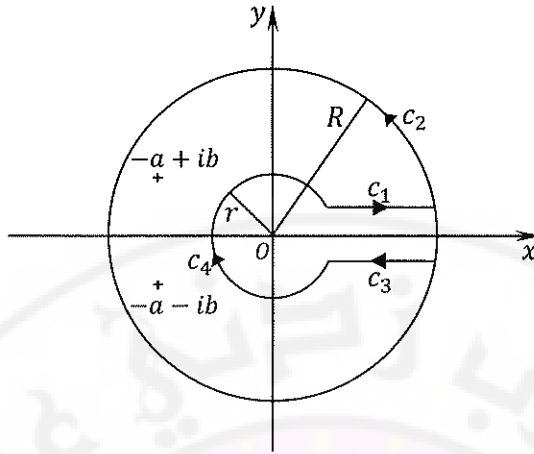
أي أن قيمة الراسب في القطب $z = -\frac{\pi}{2}$ هي 2.

ومنه حسب نظرية الرواسب يمكن أن نكتب

$$\int_c \frac{dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}} = 2\pi i(-2 + 2) = 0$$

(d) نأخذ التابع $f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2}$ ونختار المنحني c كما في الشكل (5-9)

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$



الشكل (9-5)

التابع $\ln z$ يمكن أن يكتب بالشكل

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$$

حيث

$$\theta = \arg z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

والتابع $f(z)$ له قطبان بسيطان $-a + ib, -a - ib$ ، وحسب نظرية الرواسب يمكن أن نكتب

$$\int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \int_{c_3} f(z)dz + \int_{c_4} f(z)dz = 2\pi i[R_1 + R_2]$$

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_r^R \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2+b^2} dx$$

$$\int_{c_3} f(z)dz = \int_R^r \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2} dx$$

التكاملان

$$\int_{c_2} f(z)dz, \quad \int_{c_4} f(z)dz$$

يسعيان إلى الصفر وذلك لأنه على c_2 يكون (بفرض $0 < \theta < 2\pi$)

$$|zf(z)| = R \frac{(\ln R + i\theta)^2}{(z+a)^2 + b^2} \leq R \frac{\ln^2 R + 4\pi^2}{(R-a)^2 - b^2}$$

كما أنه على c_4 يكون

$$|zf(z)| = r \frac{(\ln r + i\theta)^2}{(z+a)^2 + b^2} \leq r \frac{\ln^2 r + 4\pi^2}{|(z+a)^2 + b^2|}$$

ومنه

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\ln^2 R + 4\pi^2}{(R-a)^2 - b^2} = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\ln^2 r + 4\pi^2}{|(z+a)^2 + b^2|} = \frac{\lim_{r \rightarrow 0} [r(\ln^2 r + 4\pi^2)]}{a^2 + b^2} = 0$$

$$\text{Res}[f(z), -a + ib] = \frac{1}{2bi} [\ln \sqrt{a^2 + b^2} + i(\pi - \varphi)]^2$$

$$\text{Res}[f(z), -a - ib] = -\frac{1}{2bi} [\ln \sqrt{a^2 + b^2} + i(\pi + \varphi)]^2$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2 + b^2} dx + 0 + \int_R^r \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2 + b^2} dx + 0 = \\ = \frac{\pi}{b} 4\varphi (\pi - i \ln \sqrt{a^2 + b^2}) \end{aligned}$$

وبجعل $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ يمكن أن تكتب

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx = \\ = \frac{4\pi\varphi}{b} (\pi - i \ln \sqrt{a^2 + b^2}) \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx &= \frac{\varphi \ln \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \\ &= \frac{\ln \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned}$$



تمارين

1- عيّن وصنّف النقاط الشاذة للتابع

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 2z + 1)(z^2 - 2z + 2)^2}$$

2- عيّن وصنّف النقاط الشاذة للتوابع التالية:

a. $f(z) = \frac{e^{i2z}}{(z-1)(z^2+4)}$

b. $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z+1}$

c. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

d. $f(z) = \frac{1-e^z}{z^2 \sin z}$

3- احسب راسب التابع

$$f(z) = \frac{z^2+2}{(z+1)(z+16)}$$

عند القطب البسيط $z = -1$.

4- احسب رواسب التابع

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

5- احسب رواسب التوابع التالية:

a. $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+1)}$

$$.f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} .b$$

$$.f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} .c$$

$$.f(z) = \frac{1}{(z-2)z^6} .d$$

6- احسب الراسب في اللانهاية للتتابع التالية:

$$.f(z) = \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)} .a$$

$$.f(z) = \frac{1}{e^z-2} .b$$

$$.f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)} .c$$

$$.f(z) = \frac{\sin z}{z} .d$$

7- احسب التكاملات التالية:

$$.a \int_c \frac{dz}{z^4+1} \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z-1|=1$$

$$.b \int_c \frac{z^2+4}{z^2+1} dz \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z|=2$$

$$.c \int_c \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z-2|=\frac{1}{2}$$

$$.d \int_c \frac{dz}{(z^3-1)^2} \text{ حيث } c \text{ هو الدائرة } |z-1|=1$$

8- ليكن p عدداً حقيقياً ثابتاً يحقق $0 < p < 1$ ، احسب التكامل التالي:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p \cos \theta + p^2}$$

9- احسب التكاملات التالية:

$$\begin{aligned} & a. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2} ; a > b > 0 \\ & b. \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{5+3 \cos \theta} \\ & c. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{5+4 \cos \theta} \end{aligned}$$

10- احسب التكاملات التالية:

$$\begin{aligned} & a. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx \\ & b. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \\ & c. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+25)} dx \end{aligned}$$

11- احسب التكاملات التالية:

$$\begin{aligned} & a. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \\ & b. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+10} dx \\ & c. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx ; a, b > 0 \end{aligned}$$

12- إذا كان $a > b > 0$ ، احسب قيمة التكاملين التاليين:

$$\begin{aligned} & a. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \\ & b. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \end{aligned}$$

13- احسب التكامل

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

14- احسب التكامل

$$a > 0 ; \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$$

15- احسب التكامل

$$-\pi < a < \pi ; \int_0^{\infty} \frac{\sin hax}{\sin h\pi x} dx$$

16- احسب التكامل

$$a > 0 ; \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\sin h\pi x} dx$$



الفصل السادس

التمثيل المطابق

Conformal Mapping

1. التحويل المحافظ على الزوايا.
2. بعض التطبيقات العامة.

نعلم أنه يمكن تمثيل التابع $y = f(x)$ في المستوى xoy بمنحنٍ يسمى عادةً المنحني البياني للتابع و يمكن من خلال هذا المنحني معرفة خواص هذا التابع و لكن الأمر في التوابع العقدية مختلف، فنحن نحتاج لتمثيل المتحول z فقط إلى المستوى xoy بكامله و لذلك فنحن بحاجة إلى مستوي آخر لتمثيل التابع:

$$w = f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$$

$$z = x + i.y$$

و هكذا فإننا بحاجة إلى مستويين منفصلين لتمثيل التابع العقدي $w = f(z)$ و معرفة خواصه: المستوي الأول هو المستوى xoy و المستوي الثاني هو المستوى uov .

التابع $w = f(z)$ يصور (ينقل) كل نقطة من منطقة تعريف التابع في المستوى xoy إلى نقطة تقع في المستوى uov ، نسمي النقطة $w_0 = f(z_0)$ بصورة النقطة z_0 عبر التابع f . إذا تحركت z_0 على منحني ما C في المستوى xoy فإن صورته في المستوى uov تتحرك في الحالة العامة على منحنى Γ ونقول إنَّ المنحني Γ هو صورة المنحني C و على الرغم من استخدامنا مستويين منفصلين فإننا أحياناً نستخدم المستوى xoy نفسه للتعرف على التابع. إنَّ التابع $w = f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)$ يعني أنَّ النقطة

$z = x + i.y$ تنتقل إلى النقطة $w = u + i.v$ وفق العلاقتين:

$$\begin{cases} v = v(x, y) \\ u = u(x, y) \end{cases}$$

فإذا تحركت النقطة z على منحنٍ C المعروف بالعلاقتين:

$$y = y(t) \text{ و } x = x(t)$$

فإنَّ النقطة w تتحرك على المنحني Γ المعرف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} u = u[x(t), y(t)] \\ v = v[x(t), y(t)] \end{cases}$$

و بحذف t (إن أمكن ذلك) من هاتين المعادلتين نحصل على المعادلة

الديكارتية للمنحني Γ في المستوي uov بالشكل:

$$v = g(u)$$

مثال (1):

ماهي معادلة صورة المنحني المعرف بالمعادلتين:

$$x = t^2 ; y = 3t + 1$$

وفق التطبيق: $w = z^2$.

الحل:

$$w = z^2 = (x + i.y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy.i$$

و منه:

$$v = 2xy \text{ و } u = x^2 - y^2$$

و بتعويض x, y بدلالة t نحصل على المعادلتين الوسيطيتين للمنحني C

بالشكل:

$$\begin{cases} u = t^4 - (3t + 1)^2 \\ v = 2t^2(3t + 1) \end{cases}$$

مثال (2):

ما هي صورة المستقيم $x = 3$ عبر التابع: $W = \frac{1}{z}$.

الحل:

$$W = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

ومنه:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

و بالتالي:

$$\begin{cases} u = \frac{3}{9+y^2} \\ v = -\frac{y}{9+y^2} \end{cases}$$

بحذف الوسيط y نجد:

$$\frac{v}{u} = -\frac{y}{3} \Rightarrow y = -\frac{3v}{u}$$

ومنه:

$$u = \frac{3}{9+\frac{9v^2}{u^2}} \Rightarrow u = \frac{u^2}{3(u^2+v^2)}$$

و بما أن: $u \neq 0$ فإن:

$$3(u^2 + v^2) = u$$

أو:

$$u^2 + v^2 - \frac{u}{3} = 0$$

$$u^2 - \frac{u}{3} + v^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

$$\left(u - \frac{1}{6}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{36}$$

و هي معادلة دائرة مركزها $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{6}$.

مثال (3):

برهن أن التابع: $w = \frac{1}{z+i}$ ينقل نصف المستوي $y \geq 0$ إلى الدائرة:

$$u^2 + v^2 + v \leq 0$$

الحل:

نبحث عن صورة المستقيم $y = 0$ وفق التابع المعطى

من أجل ذلك نضع $z = x$ فنجد:

$$w = u + i.v = \frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+1}$$

و منه نجد:

$$u = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{و} \quad v = -\frac{1}{x^2+1}$$

و بحذف x نجد الدائرة:

$$u^2 + v^2 + v = 0$$

نلاحظ أنه عندما تتحول x من $-\infty$ إلى 0 إلى ∞ فإن w تتحرك على الدائرة $u^2 + v^2 + v = 0$ من 0 إلى $-i$ إلى 0 وفق الاتجاه الموجب أي عندما ترسم النقطة z محور السينات بالاتجاه الموجب فإن النقطة w ترسم الدائرة بالاتجاه الموجب و بالتالي نلاحظ أن نصف المستوي العلوي من المستوي z و الذي يقع على يسار المتحرك على محور السينات بالاتجاه الموجب ينتقل إلى

داخل الدائرة $u^2 + v^2 + v = 0$ الذي يقع على يسار المتحرك على هذه الدائرة بالاتجاه الموجب و هو المطلوب.

مثال (4):

برهن أن التابع $w = \cos z$ ينقل الشريط $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ إلى نصف المستوي

$$u \geq 0$$

الحل:

$$\begin{aligned} w &= u + i.v \\ &= \cos(x + i.y) \\ &= \cos x \cosh y - i. \sin x \sinh y \end{aligned}$$

و منه:

$$\begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ v = -\sin x \sinh y \end{cases}$$

و من أجل $x = x_1$ نجد:

$$\begin{cases} u = \cos x_1 \cosh y \\ v = -\sin x_1 \sinh y \end{cases}$$

و بحذف y نجد:

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_1} - \frac{v^2}{\sin^2 x_1} = 1$$

و تمثل هذه المعادلة مجموعة قطوع زائدة متحدة المحارف و بما أن x_1 تتحول من $-\frac{\pi}{2}$ إلى 0 في الشريط المذكور فإن u تبقى موجبة و نكتفي لذلك بالفروع اليمنى من القطوع الزائدة.

و إذا كان $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ فإنّ القطع الزائد يؤول إلى المستقيم $u = 0$ و عندما تزداد x_1 بدءاً من هذه القيمة حتى $x_1 = 0$ فإنّ الفرع الأيمن من القطع الزائد يسمح نصف المستوي الأيمن كله و يؤول أخيراً من أجل $x_1 = 0$ إلى نصف المستوي $u \geq 0$.

مثال (5):

أو جد صورة المثلث المحدد بالمستقيمات:

$$x = 1 ; y = 1 ; x + y = 1$$

وفق التابع: $w = f(z) = z^2$.

الحل:

$$\begin{aligned} w = f(z) &= u + i.v \\ &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i.xy \end{aligned}$$

و منه:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

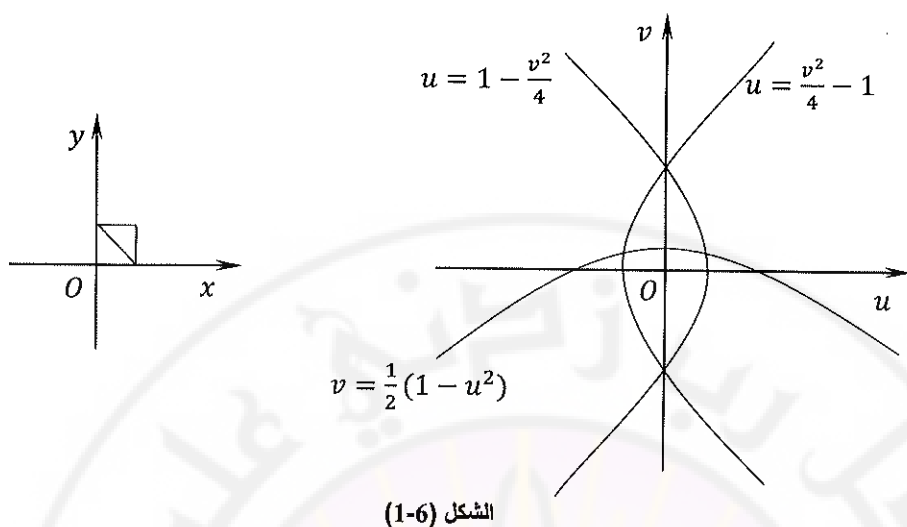
و بالتالي فإنّ:

صورة المستقيم $x = 1$ هي القطع المكافئ $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.

صورة المستقيم $y = 1$ هي القطع المكافئ $u = \frac{v^2}{4} - 1$.

صورة المستقيم $x + y = 1$ هي القطع المكافئ $v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$ كما في

الشكل (1-6).



1-6 الشكل القطبي:

يمكن استخدام الشكل القطبي لتسهيل عملية التعرف على صور المنحنيات المختلفة و هكذا فإنه يمكن التعبير عن التابع $w = f(z)$ كما يلي:

$$w = u(r, \theta) + i. v(r, \theta)$$

و هذا يعني أنَّ النقطة $z = (r, \theta)$ من المستوي xoy تنتقل إلى النقطة $w = (u, v)$ من المستوي uov و يمكن أن نعبر عن هذه النقطة قطبياً بالشكل (ρ, ϕ) حيث:

$$\rho = \sqrt{u^2(r, \theta) + v^2(r, \theta)} = \rho(r, \theta)$$

$$\phi = \arg w = \tan^{-1} \frac{v(r, \theta)}{u(r, \theta)} = \phi(r, \theta); \quad 0 < \phi \leq 2\pi$$

و يكتب التابع $w = f(z)$ عندئذٍ بالشكل:

$$w = \rho(r, \theta)[\cos \phi(r, \theta) + i. \sin \phi(r, \theta)]$$

فإذا كان المنحني C الواقع في المستوى xoy معرفاً بالمعادلة:

$$r = r(\theta)$$

فإنَّ معادلة المنحني الصورة Γ عبر التابع $w = f(z)$ تعطى قطبياً في المستوى uov بالمعادلتين الوسيطيتين:

$$\begin{cases} \rho = \rho(r(\theta), \theta) \\ \phi = \phi(r(\theta), \theta) \end{cases}$$

و بحذف θ نحصل على المعادلة القطبية للمنحني Γ :

$$\rho = \rho(\phi)$$

مثال (6):

أوجد معادلة صورة المستقيم: $r = \frac{2}{\cos \theta}$ عبر التابع: $w = \frac{1}{z^4}$.

الحل:

نعلم أنَّ: $z = r \cdot e^{i\theta}$ و منه:

$$w = \frac{1}{r^4 e^{4\theta i}} = \frac{1}{2^4} e^{-4\theta i}$$

و بالتالي:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{r^4} \\ \phi = -4\theta \end{cases}$$

و بتعويض معادلة المستقيم في ρ نحصل على المعادلتين الوسيطيتين لصورته:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{16} \cos^4 \theta \\ \phi = -4\theta \end{cases}$$

و بحذف θ من المعادلتين نحصل على المعادلة القطبية صورة $r = \frac{2}{\cos \theta}$
التالية:

$$\rho = \frac{1}{16} \cos^4 \frac{\phi}{4}$$

تعريف الزاوية بين منحنيين:

إذا تقاطع منحنيان C_1 و C_2 في نقطة z_0 من المستوي xoy فإن الزاوية بينهما هي الزاوية الكائنة بين المماسين الموجهين (الموجبين) للمنحنين في النقطة z_0 .

2-6 التحويل (التطبيق) المحافظ على الزوايا:

تعريف:

بفرض Γ_1 و Γ_2 و w_0 صور C_1 و C_2 و z_0 عبر تابع ما: $w = f(z)$ فإذا كانت الزاوية بين Γ_1 و Γ_2 هي نفسها بين C_1 و C_2 فإننا نقول إن التابع $w = f(z)$ يحافظ على الزوايا.

نظرية (1-6):

إذا كان $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في كل نقطة z من المنطقة D و كان $f'(z) \neq 0$ في تلك المنطقة فإن $w = f(z)$ هو تابع يحافظ على الزوايا.

البرهان:

إذا كانت z_0 نقطة ما من D فإن:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

ومنه:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = f'(z_0)$$

و بالتالي:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

و

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg \left(\frac{w - w_0}{z - z_0} \right) = \arg(f'(z_0))$$

و بما أن:

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

فإن:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) - \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0) = \arg(f'(z_0))$$

و إذا جعلنا z تتقارب من z_0 على المنحني C_1 فإن w تتقارب من w_0 على المنحني Γ_1 صورة C_1 و منه:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0) = \theta_1$$

حيث θ_1 زاوية ميل مماس المنحني C_1 في النقطة z_0 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) = \phi_1$$

حيث ϕ_1 زاوية ميل مماس المنحني Γ_1 في النقطة w_0 صورة النقطة z_0 .

و منه نجد:

$$\phi_1 - \theta_1 = \arg(f'(z_0))$$

و كذلك إذا جعلنا z تتقارب من z_0 على المنحني C_2 فإننا نجد بشكل مماثل أن:

$$\phi_2 - \theta_2 = \arg(f'(z_0))$$

حيث θ_2 زاوية ميل المماس للمنحني C_2 في النقطة z_0 .

و ϕ_2 زاوية ميل مماس المنحني Γ_2 في النقطة w_0 .

و منه:

$$\phi_1 - \theta_1 = \phi_2 - \theta_2$$

و بالتالي:

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$$

و هو المطلوب.

3-6 بعض التطبيقات العامة:

نظراً لكثرة التطبيقات فإننا نورد فيما يلي بعض التطبيقات العامة:

1. التطبيق المطابق:

إنّ التطبيق (التابع) $w = z$ هو الذي ينقل كل نقطة من المستوي

العقدي xoy إلى نفس تلك النقطة في المستوي uov .

2. التطبيق الإزاحي (الانسحاب):

إنَّ التطبيق $w = z + a$ حيث a عدد عقدي هو الذي يسحب كل نقطة z بقدر الشعاع الممثل لـ a أي أنه إذا كان:

$$w = u + i.v; \quad z = x + i.y; \quad a = a_1 + i.a_2$$

فإنَّ صورة أي نقطة (x, y) من المستوي xoy هي النقطة $(x + a_1, y + a_2)$ من المستوي uov .

و هذا يعني أنَّ أي منطقة D في المستوي xoy تتسحب فقط و بالمقدار $|a|$ و يبقى لها نفس الشكل و الحجم.

3. التطبيق التدويري (الدوران):

ليكن التطبيق $w = az$ حيث a هو عدد عقدي، للتعرف على الطريقة التي ينقل فيها هذا التابع نقاط المستوي xoy إلى نقاط المستوي uov نكتب كلاً من a و z بالشكل القطبي كما يلي:

$$z = r.e^{i\theta}; \quad a = b.e^{i\alpha}$$

و يأخذ التابع الصورة:

$$w = az = br.e^{i(\theta+\alpha)}$$

و هكذا نرى أنَّ النقطة (r, θ) في المستوي xoy تنتقل إلى النقطة $(br, \theta + \alpha)$ في المستوي uov و هذا يعني دوران النقطة (r, θ) بمقدار α و تكبيراً للشعاع الممثل للنقطة (r, θ) بمقدار b .

فإذا كان $|a| = b = 1$ فإنّ التابع يمثل دوراناً فقط للنقاط. و إذا كان $|a| = b < 1$ فإنّ الشعاع الممثل للعدد z ينقلص (يصغر) بمقدار b أما إذا كان $|a| = b > 1$ فإنّ الشعاع الممثل للعدد z يزداد (يكبر) بمقدار b .

مثال (7):

أوجد صورة المستطيل R المحدد بالمستقيمات:

$$x = 0; y = 0; x = 2; y = 1$$

و ذلك وفق التطبيقات التالية:

$$I. w = z + 1 - 2i$$

$$II. w = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} z$$

$$III. w = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} z + 1 - 2i$$

الحل:

$$I. \text{ بفرض } z = x + i.y \text{ و } w = u + i.v \text{ فإن:}$$

$$w = u + i.v = x + 1 + i(y - 2)$$

و منه:

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$$

و بالتالي فإن:

صورة المستقيم $x = 0$ هي المستقيم $u = 1$.

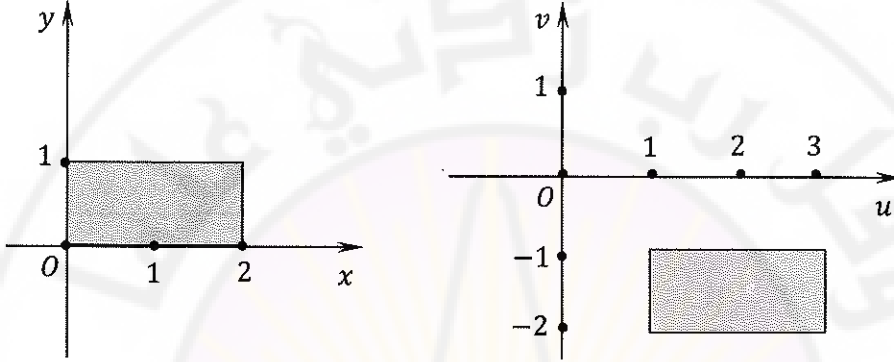
صورة المستقيم $y = 0$ هي المستقيم $v = -2$.

صورة المستقيم $x = 2$ هي المستقيم $u = 3$.

صورة المستقيم $y = 1$ هي المستقيم $v = -1$.

و لكل نقطة من R صورة وحيدة في R' كما في الشكل (2-6)

و نلاحظ أنَّ هذا التطبيق قد أحدث انسحاباً للمستطيل R .



الشكل (2-6)

$$w = u + i.v = \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}} z \quad .II$$

$$= (1 + i)(x + i.y)$$

$$= x - y + i(x + y)$$

و منه:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

و بالتالي فإن:

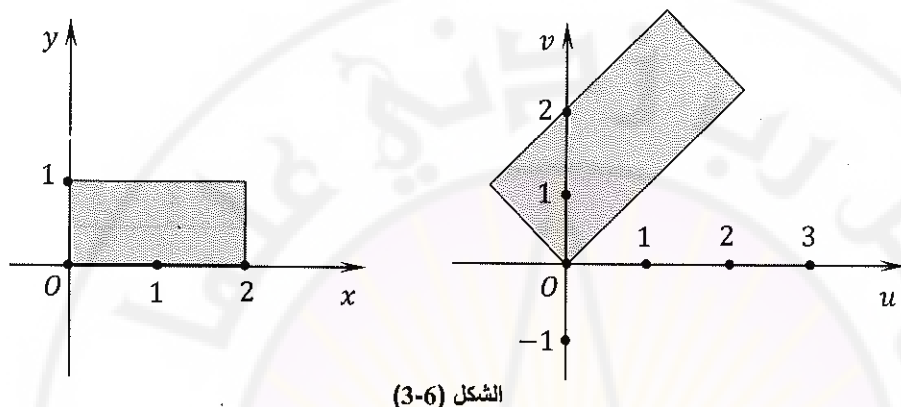
صورة المستقيم $x = 0$ هي المستقيم $u = -v$.

صورة المستقيم $y = 0$ هي المستقيم $u = v$.

صورة المستقيم $x = 2$ هي المستقيم $u + v = 4$.

صورة المستقيم $y = 1$ هي المستقيم $u - v = 2$.

و نلاحظ أنَّ هذا التطبيق قد أحدث دوراناً للمستطيل R حول المبدأ
 بزاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ كما كَبُرَ أضلاع المستطيل بنسبة $\sqrt{2}$ كما في
 الشكل (3-6).



الشكل (3-6)

$$\begin{aligned} w = u + i.v &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} z + (1 - 2i) \\ &= (1 + i)(x + i.y) + (1 - 2i) \\ &= x - y + 1 + i(x + y - 2) \end{aligned} \quad .III$$

و منه:

$$\begin{cases} u = x - y + 1 \\ v = x + y - 2 \end{cases}$$

و بالتالي فإنَّ:

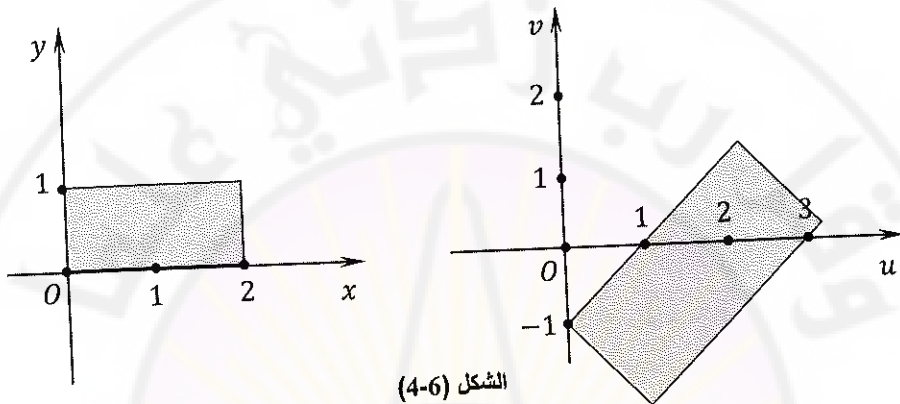
صورة المستقيم $x = 0$ هي المستقيم $u + v = -1$.

صورة المستقيم $y = 0$ هي المستقيم $u - v = 3$.

صورة المستقيم $x = 2$ هي المستقيم $u + v = 3$.

صورة المستقيم $y = 1$ هي المستقيم $u - v = 1$.

و نلاحظ هنا أنَّ هذا التطبيق قد أحدث دوراناً للمستطيل R بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ و تكبيراً لأضلاعه بنسبة $\sqrt{2}$ ثمَّ انسحاباً كما في الشكل (4-6).



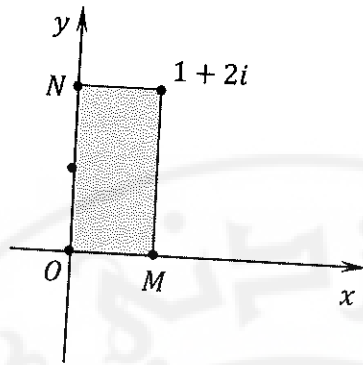
الشكل (4-6)

4. التطبيق $w = az + b$ حيث a, b عدنان عقديان:
يتألف هذا التطبيق من دوران و تصغير أو تكبير يليه انسحاب بمقدار b

مثال (8):

أوجد صورة المستطيل المبين في المستوي xoy - الشكل (5-6) - وفق التطبيق:

$$w = (1 + i)z + 2 - i$$



الشكل (5-6)

الحل:

نلاحظ أنَّ هذا التابع يدورّ الشكل بزواوية:

$$\theta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

و يكبرّ الشكل بمقدار:

$$|1 + i| = \sqrt{2}$$

ثمّ يسحب الشكل السابق و فوق العدد العقدي $2 - i$.

و يمكن الحصول على صورة كل من النقطتين N و M و النقطة $1 + 2i$ كما

يلي:

$$N' = (1 + i)N + 2 - i$$

$$= (1 + i)(2i) + 2 - i = i$$

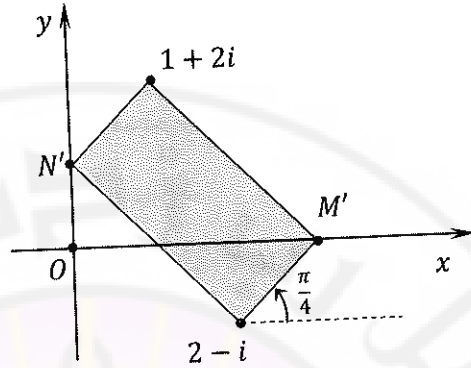
$$M' = (1 + i)M + 2 - i$$

$$= (1 + i)(1) + 2 - i = 3$$

كما في الشكل (6-6).

و نلاحظ بسهولة من الشكل أن النقطة $1 + 2i$ تنتقل إلى $1 + 2i$.

الشكل (5-6)



5. التطبيق $w = \frac{1}{z}$:

بما أن $w' = -\frac{1}{z^2}$ فإن هذا التطبيق يحافظ على الزوايا في كل منطقة من المستوي العقدي لا تحوي المبدأ.

$$w = u + i.v = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

و منه:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

و كذلك:

$$z = x + iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

و منه:

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

و نعلم أنَّ كل دائرة أو مستقيم يمكن أن يمثل بمعادلة من الشكل:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \dots (1)$$

و ذلك باختيار مناسب للأعداد الحقيقية a, b, c, d .

فإذا كان $a = 0$ فالمعادلة (1) تمثل مستقيماً.

و إذا كان $a \neq 0$ فالمعادلة (1) تمثل دائرة.

و تأخذ المعادلة (1) بعد تعويض x, y بدلالة u, v الشكل:

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

و بالتالي فإن:

- إنَّ صورة أي مستقيم لا يمر من المبدأ $(a = 0, d \neq 0)$ هي دائرة تمر من المبدأ.
- إنَّ صورة أي دائرة تمر من المبدأ $(a \neq 0, d = 0)$ هي مستقيم لا يمر من المبدأ.
- إنَّ صورة أية دائرة لا تمر من المبدأ $(a \neq 0, d \neq 0)$ هي دائرة لا تمر من المبدأ.

مثال (9):

أوجد صورة الدائرة:

$$|z - 2| = 4$$

و وفق التطبيق: $w = \frac{1}{z}$.

الحل:

بما أن $z = \frac{1}{w}$ فإننا نجد بالتعويض في معادلة الدائرة أن:

$$\left| \frac{1}{w} - z \right| = 4$$

و منه:

$$|1 - 2w| = 4 \cdot |w|$$

بما أن: $w = u + i \cdot v$ فإن:

$$|1 - 2u - 2i \cdot v| = 4 \cdot |u + i \cdot v|$$

$$(1 - 2u)^2 + (2v)^2 = 16(u^2 + v^2)$$

$$1 - 4u + 4u^2 + 4v^2 = 16u^2 + 16v^2$$

$$12(u^2 + v^2) + 4u - 1 = 0$$

$$12\left(u^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + 12v^2 = \frac{48}{36}$$

$$\left(u^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + v^2 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

و هي معادلة دائرة مركزها $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{3}$.

6. التطبيق الخطي الكسري:

و هو تطبيق من الشكل:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

حيث a, b, c, d أعداد عقدية تحقق: $ad - bc \neq 0$ و يسمى هذا التطبيق أحياناً تطبيق موبوس.

ملاحظة:

لو كان $ad - bc = 0$ لوجدنا أن:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$$

و لأصبح التابع بالشكل:

$$w = \frac{\lambda(cx+d)}{cx+d} = \lambda$$

و التابع (التطبيق) الثابت.

و بفرض أن $ad - bc \neq 0$ فإن:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

و بالتالي فالتطبيق الخطي الكسري يحافظ على الزوايا.

ملاحظة:

التطبيق الخطي الكسري هو تركيب لجميع التطبيقات السابقة و التي تمثل حالات خاصة من التطبيق الخطي الكسري، فإذا كان $c = 0$ فإننا نحصل على

التطبيق:

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

أما إذا كان $c \neq 0$ فإنه يمكن أن نكتب:

$$w = \frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + k \frac{1}{cz+d}$$

حيث:

$$k = \frac{bc-ad}{c}$$

و بوضع:

$$w_1 = cz; w_2 = w_1 + d; w_3 = \frac{1}{w_2}; w_4 = kw_3$$

نجد:

$$w = w_4 + \frac{a}{c}$$

مثال (10):

أوجد صورة الدائرة وفق التطبيق:

$$w = \frac{z+1}{2z-1}$$

الحل:

من العلاقة:

$$w = \frac{z+1}{2z-1}$$

نحسب Z:

$$z = \frac{w+1}{2w-1}$$

نعوض Z بما يساويها فنجد:

$$\left| \frac{w+1}{2w-1} \right| = 1$$

و منه:

$$|w+1| = |2w-1|$$

$$|u+iv+1| = |2u+2iv-1|$$

$$(u+1)^2 + v^2 = (2u-1)^2 + (2v)^2$$

$$3(u^2 + v^2) - 6u = 0$$

$$u^2 - 2u + v^2 = 0$$

$$(u - 1)^2 + v^2 = 1$$

و هي معادلة دائرة مركزها $(1,0)$ و نصف قطرها 1.

مثال (11):

1) أوجد صورة المحور الحقيقي وفق التطبيق:

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

ثم أوجد صورة النقطتين: $1 - i$ و $1 + i$.

2) أوجد صورة المحور التخيلي $z = iy$ وفق نفس التطبيق w .

الحل:

1) على المحور الحقيقي يكون $z = x$ و منه:

$$w = \frac{x+1}{x-1}$$

و بما أن $w = u + iv$ فإن:

$$u + i.v = \frac{x+1}{x-1}$$

و منه:

$$\begin{cases} u = \frac{x+1}{x-1} \\ v = 0 \end{cases}$$

و هي معادلة المحور الحقيقي في المستوي uov .

و صورة $x = 1$ هي $u = \infty$.

و صورة $z = x = \infty$ هي النقطة $u = 1$.

و صورة النقطة $1 + i$ هي النقطة:

$$w(1 + i) = \frac{1+i+1}{1+i-1} = -i(2 + i) = 1 - 2i$$

و صورة النقطة $1 - i$ هي النقطة:

$$w(1 - i) = \frac{1-i+1}{1-i-1} = \frac{2-i}{-i} = i(2 - i) = 1 + 2i$$

$$w = \frac{i.y+1}{i.y-1} = \frac{-1-2i.y+y^2}{1+y^2} \quad (2)$$

و منه:

$$\begin{cases} u = \frac{y^2-1}{1+y^2} \\ v = \frac{-2y}{1+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{(y^2-1)^2}{(1+y^2)^2} + \frac{(-2y)^2}{(1+y^2)^2} \\ &= \frac{y^4-2y^2+1+4y^2}{(1+y^2)^2} \\ &= \frac{y^4+2y^2+1}{(1+y^2)^2} \end{aligned}$$

و منه:

$$u^2 + v^2 = \frac{(1+y^2)^2}{(1+y^2)^2} = 1$$

و هي معادلة دائرة.

مثال (12):

أوجد صورة نصف المستوي العقدي:

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

و وفق التطبيق: $w = \frac{1}{z+i}$.

الحل:

من العلاقة $w = \frac{1}{z+i}$ نجد:

$$z = \frac{1-i.w}{w}$$

و منه:

$$z = \frac{\bar{w} - i.w\bar{w}}{w\bar{w}}$$

حيث $\bar{w}$ هو مرافق w ، و بوضع $w = u + i.v$ نجد:

$$z = \frac{u - i(u^2 + v^2 + v)}{u^2 + v^2}$$

و إذا كان $Im\ z > 0$ فإن:

$$-(u^2 + v^2 + v) > 0$$

و منه:

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 < -\frac{1}{4}$$

و هذا يعني أن صورة نصف المستوي العقدي:

$$\{z : Im\ z > 0\}$$

هي القرص: $|2w + i| < 1$.

مثال (13):

أوجد صورة النقاط $i, -2i, \infty$ وفق التطبيق:

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

و ما هي النقاط التي تكون صورها على الترتيب: $0, \infty$ ؟

الحل:

صورة النقطة i هي:

$$w = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{2i}{i} = i$$

و صورة النقطة $-2i$ هي:

$$w = \frac{-2i-1}{-2i+1} = \frac{(-2i-1)(+2i+1)}{4+1} = \frac{3-4i}{5}$$

و لإيجاد صورة ∞ نكتب التابع كما يلي:

$$w = \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}}$$

ف نجد أن صورة ∞ هي 1.

و لإيجاد النقط التي صورها $0, \infty$:

نلاحظ أن $z = 1$ صورتها الصفر و بالمثل $z = -1$ صورتها ∞ .

مثال (14):

أوجد التحويل الخطي الكسري الذي يصور الدائرة:

$$|z - i| = 1$$

إلى الدائرة:

$$|w + 1| = 2$$

الحل:

نفرض أن $z_1 = z - i$ و الذي يمثل انسحاباً ثم نفرض $z_2 = 2z_1$ و الذي

يمثل تكبيراً، و أخيراً نفرض $w = z_2 + 1$ و بالتالي:

$$w = z_2 + 1 = 2z_1 + 1 = 2(z - i) + 1$$

$$w = 2z + (1 - 2i)$$

و منه التحويل $w = 2z + (1 - 2i)$ يصور $|z - i| = 1$ إلى الدائرة:
 $|w + 1| = 2$.

تمرين:

أوجد التطبيق الخطي الكسري الذي تكون صور النقاط z_1, z_2, z_3 وفقه هي النقاط: w_1, w_2, w_3 على الترتيب.

الحل:

نعلم أن التطبيق الخطي الكسري يعطى بالعلاقة:

$$w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d} ; k = 1, 2, 3$$

و منه:

$$w - w_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}$$

$$w - w_3 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_3)}{(cz + d)(cz_3 + d)}$$

$$w_2 - w_1 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)}$$

$$w_2 - w_3 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}$$

و إذا كان $ad - bc \neq 0$ فإننا نجد أن التطبيق الخطي الكسري المطلوب هو:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

مثال (15):

أوجد التطبيق الخطي الكسري الذي يطبق النقاط $z = -1, 0, 1$ في النقاط $w = -1, -i, 1$.

الحل:

بالاعتماد على التمرين السابق يمكن أن نكتب:

$$\frac{(w-(-1))(-i-1)}{(w-1)(-i-(-1))} = \frac{(z-(-1))(0-1)}{(z-1)(0-(-1))}$$

و منه:

$$w = \frac{z-i}{-iz+1}$$

مثال (16):

أوجد التطبيق الخطي الكسري الذي يصور النقاط $z = -1, i, 1$ إلى النقاط $w = 4, 3, 2$.

الحل:

بالاعتماد على التمرين السابق يمكن أن نكتب:

$$\frac{(w-2)(3-4)}{(w-4)(3-2)} = \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)}$$

و بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ w نجد:

$$w = \frac{(2-4i)z+(2+4i)}{(1-i)z+(1+i)}$$

7. التابع z^n :

لنأخذ مثلاً $w = z^2$ و لنكتب z بالشكل المثلثي كما يلي:

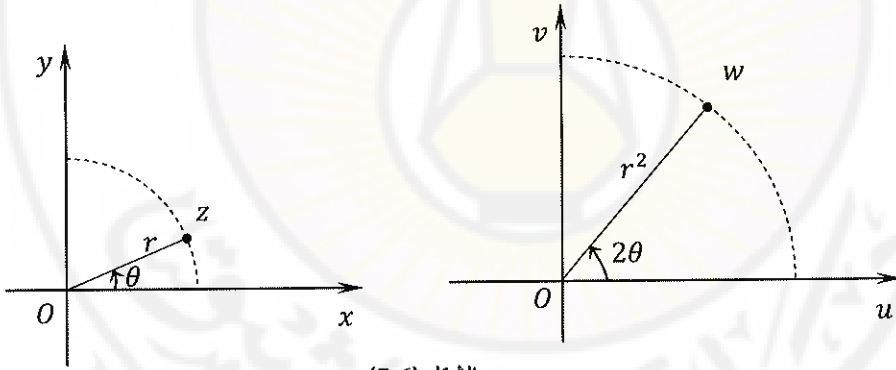
$$w = \rho e^{i\phi} = (r e^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

هذا يعني أن كل نقطة (r, θ) من المستوي xoy تنتقل إلى النقطة:

$$(\rho, \phi) = (r^2, 2\theta)$$

في المستوي uov أي أننا نحصل على صورة z وفق التابع $w = z^2$ بتدوير الشعاع الممثل لـ z بزاوية θ و بضرب r في نفسها.

و نجد بشكل خاص أن هذا التابع ينقل جميع نقاط الربع الأول للمستوي xoy إلى نصف المستوي العلوي للمستوي uov كما في الشكل (7-6):



الشكل (7-6)

و بشكل عام إذا أخذنا التابع $w = z^n$ أو:

$$\rho e^{i\phi} = r^n e^{in\theta}$$

فإن هذا التابع ينقل النقطة (r, θ) إلى $(\rho, \phi) = (r^n, n\theta)$

و ينقل المنطقة: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$, $r \geq 0$ إلى النصف العلوي للمستوي
 uov : $(\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi)$.

تعريف:

نقول إنَّ النقطة z_0 من المستوي العقدي xoy هي نقطة ثابتة إذا انتقلت عبر
 تابع ما $w(z)$ إلى نفسها أي:

$$z_0 = w(z_0)$$

مثال (17):

(1) أوجد النقطة الثابتة للتابع: $w = (1 + i)z + 2 - i$.

(2) أوجد النقطة الثابتة للتابع: $w = \frac{z+1}{z-1}$.

الحل:

(1) لدينا: $z_0 = (1 + i)z_0 + 2 - i$

$$i \cdot z_0 = i - 2 \quad \text{و منه:}$$

$$z_0 = \frac{i-2}{i} = 1 + 2i$$

$$z_0 = \frac{z_0+1}{z_0-1} \quad (2) \text{ لدينا:}$$

$$z_0(z_0 - 1) = z_0 + 1 \quad \text{و منه:}$$

$$z_0^2 - 2z_0 - 1 = 0$$

و بحل هذه المعادلة: نجد:

$$\begin{cases} z_0 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ z_0 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

و هما النقطتان اللتان تنتقلان إلى نفسيهما.

8. التحويل المطابق:

هذا التحويل له الشكل:

$$w = z$$

و كذلك له الشكل:

$$w = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

حيث θ عدد حقيقي ثابت و $|z_0| < 1$.

مثال (18):

أوجد التحويل الذي ينقل ربع المستوي:

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

إلى الدائرة $|w| > 1$ على أن ينقل النقطتين $z = 1 + i, 0$ إلى النقطتين:

$$w = 0, 1$$

الحل:

إنّ التابع:

$$t = z^2$$

ينقل ربع المستوى xoy إلى نصف المستوي t و ينقل النقطتين $z = 1 + i, 0$ إلى النقطتين: $t = 2i, 0$ و ينقل المحور التخيلي إلى النصف السالب من المحور الحقيقي.

نعلم أن التابع $w = \frac{t-i}{t+i}$ ينقل نصف المستوي العلوي إلى دائرة الوحدة و ينقل بشكل خاص النقطة $t = i$ إلى النقطة $w = 0$.

كذلك التابع $w = e^{i\alpha} \frac{t-\beta}{t+\beta}$ (حيث α عدد حقيقي و β عدد عقدي شريطة أن يكون القسم التخيلي له موجباً) ينقل نصف المستوي العلوي t إلى دائرة الوحدة و ينقل بشكل خاص النقطة $t = \beta$ إلى النقطة $w = 0$.

و بما أننا نريد أن تنتقل النقطة $t = 2i$ إلى النقطة $w = 0$ فإنه يمكن أن نضع $\beta = 2i$ فنحصل على التابع:

$$w = e^{i\alpha} \frac{t-2i}{t+2i}$$

و نعين α بحيث تنتقل فيه النقطة $t = 0$ إلى النقطة $w = 1$:

$$1 = e^{i\alpha} \frac{-2i}{2i}$$

و منه $e^{i\alpha} = -1$ وبالتعويض نحصل على التحويل المطلوب:

$$w = -\frac{t-2i}{t+2i} = \frac{2i-z^2}{2i+z^2} = \frac{2+iz^2}{2-iz^2}$$

9. التحويل $w = z^n$; $n = 2, 3, 4, \dots$

و هذا التحويل هو تابع الجذر و هو التابع المعاكس للتابع $w = z^n$

و كما هو معروف فإنّ تابع الجذر هو تابع متعدد (كثير) التعيين.

للتبسيط نأخذ التابع $w = z^{\frac{1}{3}}$ فإذا كتبنا z بالشكل المثلثي $z = r e^{i\theta}$ فإن صورته عبر التابع $w = z^{\frac{1}{3}}$ هي ثلاث نقاط مختلفة تعطى بالشكل التالي:

$$w_1 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta}{3}}, w_2 = \sqrt[3]{r} e^{i(\frac{\theta+2\pi}{3})}, w_3 = \sqrt[3]{r} e^{i(\frac{\theta+4\pi}{3})}$$

و نلاحظ أن:

$$|w_1| = |w_2| = |w_3| = \sqrt[3]{r}$$

$$\begin{cases} \arg w_1 = \frac{\theta}{3} \\ \arg w_2 = \frac{\theta+2\pi}{3} \\ \arg w_3 = \frac{\theta+4\pi}{3} \end{cases}$$

10. التابع الأسّي و التابع اللوغاريتمي:

نعلم أن التابع الأسّي له الشكل:

$$w = e^z$$

الذي يكتب بالشكل المثلثي:

$$w = \rho e^{i\phi} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

و منه:

$$\begin{cases} \rho = e^x \\ \phi = y \end{cases}$$

و نلاحظ أن المستقيمات $x = a$ الموازية لمحور العينات تنتقل إلى دوائر $\rho = e^a$ كما تنتقل المستقيمات $y = c$ الموازية لمحور السينات إلى أنصاف المستقيمات المنطلقة من المبدأ $\phi = c$ و بما أن التابع

$w = e^z$ تحليلي في كل المستوي و $w' = e^z \neq 0$ و ذلك مهما تكن z فإن هذا التابع يحافظ على الزوايا و تكون صورة المنطقة:

$$a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d$$

الواقعة في المستوي xoy هي المنطقة:

$$e^a \leq \rho \leq e^b ; c \leq \phi \leq d$$

و كما هو معروف أن التابع العكسي للتابع الأسّي هو التابع اللوغاريتمي و الذي يعطى كما يلي:

$$w = u + iv = \ln z$$

و هذا التابع كثير التعيين، فإذا أخذنا القيمة الرئيسية للتابع: $w = \ln z$ و عكسنا الدور الذي يلعبه z و w وجدنا أن التابع اللوغاريتمي ينقل المستوي xoy بأكمله إلى المنطقة:

$$-\pi \leq v \leq \pi$$

مثال (19):

أوجد التحويل الذي ينقل خارج الكارديوييد:

$$\begin{cases} x = 2a(1 - \cos t) \cos t \\ y = 2a(1 - \cos t) \sin t \end{cases} ; 0 \leq t < 2\pi , a > 0 \dots (1)$$

إلى دائرة الوحدة.

الحل:

نجري التحويل:

$$Z = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = X + i.Y$$

و منه:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{x^2+y^2} \\ Y = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \dots (2)$$

و بالتالي فإنَّ التمثيل الوسيطى لصورة الكارديوئيد فى المستوى Z نحصل عليه

كما يلى:

نعوض (1) فى (2) فنجد:

$$X = \frac{\cos t}{2a(1-\cos t)} = \frac{1}{4a} \cotan^2 \frac{t}{2} - \frac{1}{4a}$$

$$Y = \frac{\sin t}{2a(1-\cos t)} = -\frac{1}{2a} \cotan^2 \frac{t}{2}$$

و هذه ليست إلا المعادلات الوسيطية للقطع المكافئ:

$$Y^2 = \frac{1}{a} \left(X + \frac{1}{4a} \right) \dots (3)$$

و منطقة خارج الكارديوئيد تنتقل إلى داخل هذا القطع، و نجري بعد ذلك

التحويل:

$$\alpha = \sqrt{z} \dots (4)$$

و بفصل الجزء الحقيقى عن الجزء التخيلى نجد:

$$\begin{cases} X = \alpha^2 - \beta^2 \\ Y = 2\alpha\beta \end{cases}$$

و تنتقل المستقيمات $\beta = c$ بهذا التمثيل إلى المنحنيات:

$$\begin{cases} X = \alpha^2 - c^2 \\ Y = 2\alpha c \end{cases}$$

و بحذف α نجد:

$$Y^2 = 4c^2(X^2 + c^2) \dots (5)$$

بمقارنة (3) مع (5) نجد أن القطع المكافئ (3) ينتقل بالتمثيل (4) إلى المستقيم:

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

و أما منطقة داخل القطع فتنتقل إلى الشريط:

$$0 < \beta < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \dots (6)$$

و أما نقل الشريط (6) إلى داخل دائرة الوحدة فيتم بأشكال مختلفة، على سبيل المثال من هذه الأشكال إذا أجرينا التحويل:

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{i} z - \frac{\pi}{2}$$

الذي ينقل الشريط المذكور إلى شريط آخر في المستوي t :

$$-\frac{\pi}{2} < Rt < 0$$

فإن صورة $t = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (أي صورة الكارديوئيد) هي المحور التخيلي في هذا المستوي، و بواسطة التحويل:

$$r = \sin t$$

سينتقل الشريط إلى نصف المستوي الأيسر المقطوع من $r = -1$ إلى $r = -\infty$ على طول المحور الحقيقي و ينتقل المحور التخيلي من المستوى t إلى المحور التخيلي في المستوى r .

و أما التحويل:

$$w = \frac{1+r}{1-r}$$

فينقل نصف المستوي المذكور إلى داخل دائرة الوحدة و ينقل المحور التخيلي إلى محيط هذه الدائرة و هكذا نجد أن التحويل:

$$w = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) = \tan^2 \frac{\pi\sqrt{a}}{2i} \sqrt{\frac{1}{z}}$$

ينقل خارج الكارديويثيد إلى داخل دائرة الوحدة و أما الكارديويثيد نفسه فينتقل إلى محيط دائرة الوحدة.

مثال (20):

ليكن التحويل:

$$w = f(z) = \frac{4}{(1+z)^2}$$

الذي ينقل نصف الدائرة:

$$|z| = 1 ; -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$$

إلى المنحنى C ، و المطلوب: احسب طول هذا المنحنى.

الحل:

يعطى طول المنحنى المطلوب بالعلاقة:

$$S = \int_C ds = \int_C |f'(z)| ds$$

حيث المنحني C هو نصف الدائرة المذكورة.

و بما أن:

$$f'(z) = -\frac{8}{(1+z)^3}$$

فإنه يكون على محيط الدائرة $|z| = 1$

$$|f'(z)| = \frac{8}{|1+z|^3} = \frac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{2}}$$

حيث θ هي زاوية العدد z .

و هكذا نجد:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} = 2\sqrt{2} + 2 \ln(1 + \sqrt{2})$$

تمارين الفصل السادس

1. أوجد صورة المستطيل R المحدد بالمستقيمات:

$$x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 1$$

و وفق التطبيقات:

$$\bullet \quad w = z + 1 + i$$

$$\bullet \quad w = i \cdot z$$

$$\bullet \quad w = i \cdot z + 1 + i$$

2. أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه تقع في النقاط:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 3 + i, \quad z_3 = 3 + 2i$$

و وفق كل من التطبيقات:

$$\bullet \quad w = z + 1 + 2i$$

$$\bullet \quad w = -i \cdot z$$

$$\bullet \quad w = -i \cdot z + 1 + 2i$$

3. عيّن صورة المنطقة $1 \leq |z| \leq 2$ وفق التطبيق $w = z^2$.

4. ما هي المنحنيات الواقعة في المستوي xoy و التي صورتها المستقيم

$$v = 2u + 1 \quad \text{عبر التابع} \quad w = (z + 1)^2$$

5. ما هي صورة الشريط $0 < x < 1$ المحصور بين المستقيمين:

$$x = 0, \quad x = 1$$

عبر التابع $w = i.z$.

6. أوجد التحويل الذي ينقل المنطقة:

$$|z - 8| < 16 \quad ; \quad |z - 3| > 9$$

إلى الحلقة الدائرية $1 < |w| < \rho$ ، ثم أوجد قيمة ρ .

7. إذا كان $w = \tanh z$ فبرهن أن كلاً من:

$$y = \text{const.} \quad \text{و} \quad x = \text{const.}$$

ينتقل إلى دوائر تقع مراكزها على استقامة واحدة في المستوى uov

ثم برهن أن هذا التحويل ينقل الشريط:

$$0 < y < \frac{\pi}{2}$$

إلى نصف المستوى العلوي في المستوى uov .

8. أوجد تحويلاً ينقل داخل القطع الناقص:

$$4x^2 + 5y^2 = 20$$

المقطوع وفق القطعة المستقيمة الواصلة بين المحرقين إلى داخل

الحلقة $A < |w| < 1$ و ما هي قيمة A ؟

9. أوجد التطبيق الخطي الكسري الذي يطبق النقاط $z = 0, 1, \infty$ في النقاط $w = i, -1, i$.

10. أوجد التطبيق الخطي الكسري الذي يطبق النقاط:

$$z = -1, i, 1 + i$$

في النقاط: $w = 0, \infty, 2 + i$.

11. أوجد النقطة الثابتة للتابع: $w = z^2$.

12. أوجد التحويل الذي يطبق المنطقة:

$$-\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}$$

إلى الدائرة: $|w| \leq 1$.

13. أوجد النقطة الثابتة للتابع:

$$w = \frac{z^2 + i}{z^2 - i}$$

ثم أوجد صورة الشريط: $1 \leq x \leq 3$ عبر هذا التابع.

14. عين التحويل الذي ينقل نصف الدائرة:

$$0 \leq \arg z \leq \pi ; |z| < 1$$

إلى النصف العلوي من المستوي uov على أن تنتقل النقاط
إلى $z = 0, 1, -1$ إلى النقاط $w = 0, 1, -1$.





دليل المصطلحات العلمية

انكليزي - عربي

A

Absolute	مطلق
Absolute value	قيمة مطلقة
Amount	مقدار
Analysis	تحليل
Analytic	تحليلي
Analytic function	تابع تحليلي
Angle	زاوية
Approximation	تقريب
Arc	قوس
Area	مساحة
Axis	محور
Amplitude	سعة
Argument	عُدة (زاوية)
Addition	جمع
Adverse	معكوس

B

Base	قاعدة (أساس)
Belong to	ينتمي إلى
Bound	حد

Bounded	محدود
Branch	فرع
Branch point	نقطة تفرع
Binomial	ثنائي الحد

C

Cartesian coordinates	إحداثيات ديكارتية
Center	مركز
Circle	دائرة
Chain Rule	قاعدة السلسلة
Chance	تغيير
Closed curve	منحنٍ مغلق
Closed region	منطقة مغلقة
Complex number	عدد عقدي
Closure	إغلاق
Coefficient	معامل
Coincide	يتطابق
Coincidence	تطابق
Commutative	تبديلي
Comparison	مقارنة
Completely	تماماً
Complex plane	مستوى عقدي
Condition	شرط
Conjugate	مرافق

Constant	ثابت
Continuous	مستمر
Convergence	تقارب
Convergent sequence	متتالية متقاربة
Convergent series	متسلسلة متقاربة
Coordinate system	نظام إحداثي
Counter clockwise	عكس اتجاه دوران عقارب الساعة
Cube	مكعب
Curl	دوران
Curvilinear coordinates	إحداثيات منحنية
Cylindrical coordinates	إحداثيات اسطوانية
Cosine	جيب التمام

D

Degree	درجة
Differential Operator	مؤثر تفاضلي
Divergence	تباعد
Divergent	متباعد
Domain	منطقة (ساحة)
Double pole	قطب مضاعف
Derivative	مشتق
Differentiability	قابل للاشتقاق
Dimension	بُعد
Define	يُعرّف

Definite integral

تكامل محدد

Definition

تعريف

E

Element

عنصر

Element of area

عنصر مساحة

Ellipse

قطع ناقص

Equation

معادلة

Equality

مساواة

Equivalence

تكافؤ

Essential

أساسي

Essential singular point

نقطة شاذة أساسية

Expansion

نشر

Exponential

أسي

Exterior

خارج

External

خارجي

Exterior angle

زاوية خارجية

F

Finite

منتهي

Fixed

ثابت

Fixed point

نقطة ثابتة

Force

قوة

Formula

صيغة

Fraction

كسر

Function

تابع

Fundamental theorem

النظرية الأساسية

G

General

عام

General Term

حد عام

Geometry

هندسة

Graph

بيان

Group

زمرة

Gamma function

تابع غاما

Green's Theorem

نظرية غرين

H

Harmonic

توافقي

Harmonic function

تابع توافقي

Holomorphic function

تابع تحليلي

Hyberbola

قطع زائد

Hypothesis

فرض

I

If and only if

إذا و فقط إذا

Image

صورة

Imaginary axis

المحور التخيلي

Indefinite integral

تكامل غير محدد

Isolated singular point

نقطة شاذة معزولة

Index

دليل

Infinity	لانهاية
Inverse	معكوس
Interval	مجال
Imaginary	تخيلي
Independent	مستقل
Induction	استقراء
Injection	أحادي
Interior	داخلي
Inverse transformation	تحويل عكسي
Integer number	عدد صحيح
L	
Length	طول
Limit	نهاية
Limit of a sequence	نهاية متتالية
Line	خط (مستقيم)
Linear Integral	تكامل خطي
Line Segment	قطعة مستقيمة
Local	محلي
Logarithm	لوغاريتم
Laurent series	متسلسلة لوران
Laurent Theorem	نظرية لوران
Linear fractional Transformation	التحويل الكسري الخطي

M

Mapping	تطبيق
Multi-valued function	تابع متعدد القيم
Maclaurin series	متسلسلة ماك لوران
Maximum principle	مبدأ القيم العظمى
Mean value theorem	نظرية القيمة الوسطى
Modulus	مقياس
Multiple connected	متعدد الترابط
Multiplet	متعدد الأقطاب
Main	رئيسي

N

Natural	طبيعي
Necessary	لازم
Necessary condition	شرط لازم
Neighborhood	جوار
Norm	معيار
Null	صفري
Number	عدد

O

Origin	المبدأ (نقطة الأصل)
Open	مفتوح
Order	رتبة

Ordered tuple	مُرتبة
Ordinary	عادي
Orthogonal	متعامد
Orthogonal coordinates	إحداثيات متعامدة
Onto	فوق
Outside	خارجي
Ordinary point	نقطة عادية
P	
Parapola	قطع مكافئ
Parametric Equations	معادلات وسيطية
Power series	متسلسلة قوى
Principle part	القسم الرئيسي
Proof	برهان
Parallel	متوازٍ
Parameter	وسيط
Part	جزء
Perimeter	محيط
Periodic	دوري
Perpendicular	عمودي
Plane	مستوي
Point	نقطة
Pole	قطب
Polygon	مضلع

Power	قوة
Problem	مسألة
Product	جداء
Projection of	إسقاط (مسقط)

R

Radius	نصف قطر
Ratio	نسبة
Teal	حقيقي
Real axis	محور حقيقي
Rectangle	مستطيل
Region	منطقة
Relation	علاقة
Removable	قابل للإزالة
Residue	راسب
Right angle	زاوية قائمة
Root	جذر
Root of unity	جذر الوحدة
Rotation	دوران

S

Set	مجموعة
Sequence	متتالية
Simple closed curve	منحنٍ بسيط مغلق
Singular point	نقطة شاذة

Size	حجم
Smooth	أملس
Solution	حل
Space	فضاء
Spherical coordinates	إحداثيات كروية
Square	مربع
Straight	مستقيم
Symmetry principle	مبدأ التماثل
Step	خطوة
Straight line	خط مستقيم
Sum	مجموع
Surface	سطح
Symbol	رمز
Symmetrical	متناظر
System	نظام
T	
Tangent	مماس
Tangent plane	مستوى مماس
Tend to	يؤول إلى
Term	حد
Theory	نظرية
Transform	يحوّل
Transformation	تحويل

Translate	يسحب
Translation	انسحاب
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Taylor's theorem	نظرية تايلور
Transfer function	تابع التحويل

U

Uniform	منتظم
Uniformly convergent	تقارب منتظم
Union	اتحاد
Unique	وحيد
Unit	وحدة
Unbounded	غير محدود
Uniform continuity	استمرار منتظم

V

Variable	متغير (متحول)
Vector	شعاع (متجه)
Variation	تغير
Value	قيمة
Vanish	ينعدم
Vertex	رأس
Volume	حجم

W

Work

عمل

Wave

موجة

Weierstrass Theorem

نظرية فايرشتراس

Z

Zero

صفر

Zero of a function

صفر التابع

Zeroes

أصفار

المراجع

1. Complex Analysis and Applications: 1984
by: William R. Derrick
2. Introduction to Complex Variable: 1992
W B Saunders Company
3. الدكتور محمد صبح: الرياضيات للفيزياء و الكيمياء 1993 م
4. الدكتورة إلهام الحمصي: الرياضيات للفيزياء (1) 1988 م
5. الدكتور موفق دعبول: التحليل (7) 1982 م
6. الدكتور فوزي دنان: الرياضيات للمهندسين (8) 1988 م
7. الدكتور محي الدين بحبوح – الدكتور محمد صبح: التحليل العقدي و
السلاسل 2009 م

المدقق اللغوي: د. أحمد حاجي صفر

حقوق الطبع و النشر و الترجمة محفوظة لمديرية الكتب و المطبوعات