



ميكانيك الإنشاءات (2)

السنة: الثالثة

القسم: الهندسة الإنشائية





ميكانيك الإنشاءات

(2)

تأليف

الدكتور المهندس
إبراهيم الجراد
أستاذ في كلية الهندسة المدنية
جامعة دمشق

الدكتور المهندس
محمد نزيه اليغشي ايلوش
أستاذ في كلية الهندسة المدنية
جامعة دمشق

الدكتور المهندس
محمد غريب
أستاذ في كلية الهندسة المدنية
جامعة دمشق

1431-1432 هـ

2010-2011 م

جامعة دمشق



الفهرس

5	الفهرس
11	مقدمة
13	الفصل الأول: أسس التحليل الإنشائي
13	1-1- مقدمة
14	2-1- أنواع المنشآت الهيكلية
14	1-2-1- المنشآت الجائزية
14	2-2-1- الشبكيات المستوية
15	3-2-1- الشبكيات الفراغية
16	4-2-1- الإطارات المستوية
16	5-2-1- الشبكات الصلدة
17	6-2-1- الإطارات الفراغية
18	3-3- مبدأ جمع الآثار
20	4-4- شروط التحليل الإنشائي
21	5-1- درجتا عدم التقرير السكوني والحركي في المنشأ
21	أ - درجة عدم التقرير السكوني
22	ب - درجة عدم التقرير الحركي
27	6-1- علاقة القوى والانتقالات في المنشأ
29	7-1- طرق التحليل الإنشائي
29	1-7-1- طرق الليونة (القوى)
30	2-7-1- طرق القساوة (الانتقالات)

31	الفصل الثاني: تحليل المنشآت باستخدام طريقة مصفوفة الليونة
31	1-2- مقدمة
32	2-2- أمثلة تمهيدية
44	3-2- خطوات الحل في طريقة مصفوفة الليونة
46	4-2- أمثلة عامة
65	الفصل الثالث: تحليل المنشآت باستخدام طريقة مصفوفة القساوة
65	1-3- مقدمة
66	2-3- أمثلة تمهيدية
79	3-3- خطوات الحل في طريقة مصفوفة القساوة
84	4-3- تحليل المنشآت الإطارية باستخدام طريقة مصفوفة القساوة
84	1-4-3- عوامل القساوة للعنصر الجانزي
115	5-3- تحليل الشبكيات المستوية باستخدام طريقة مصفوفة القساوة
115	1-5-3- عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي
140	6-3- تحليل الشبكات الصلدة باستخدام طريقة مصفوفة القساوة
140	1-6-3- عوامل القساوة للعنصر الشبكي الصلد
167	الفصل الرابع: التحليل الإنشائي بمعونة الحاسب
167	1-4: مقدمة
168	2-4- مراحل تحليل المنشآت بمعونة الحاسوب
168	1-2-4- مرحلة ما قبل المعالجة
168	2-2-4- مرحلة المعالجة
170	3-2-4- مرحلة ما بعد المعالجة

170	3-4- مصفوفات القساوة العنصرية
172	1-3-4- مصفوفة القساوة للعنصر الجائزي المستوي
183	2-3-4- مصفوفة القساوة للعنصر الشبكي المستوي
193	4-4- معالجة الأحمال المطبقة بين عقد العناصر
199	5-4- تجميع مصفوفات القساوة وأشعة الأحمال العنصرية
209	الفصل الخامس: التحليل اللدن للمنشآت
209	1-5- المقدمة
210	2-5- فرضيات التحليل اللدن
211	3-5- الخواص الميكانيكية لمادة الفولاذ
211	a- مرحلة المرونة
211	b- مرحلة اللدونة
211	c- مرحلة التصلب
212	d- مرحلة الانهيار
213	4-5- الإجهادات في المرحلة اللدنة
215	5-5- علاقات تعيين القوى الداخلية في المقطع
215	1-5-5- الحالة الحدية لمقطع يخضع للشد أو الضغط
215	2-5-5- الحالة الحدية لمقطع من جائز بسيط يخضع للانحناء الصافي
220	3-5-5- معامل اللدونة للمقاطع غير المتناظرة بشكل عام
223	6-5- طرق التحليل اللدن للمنشآت
223	1- شرط ميكانيكية (آلية) الانهيار
223	2- شرط التوازن
224	3- شرط العزم اللدن

225	1-6-5- طريقة الميكانيكية (الميكانيزم)
226	2-6-5- طريقة التوازن
227	7-5- سلوك الجائز البسيط
234	8-5- سلوك الجيزان الموثوقة
235	1- المرحلة المرنة
236	2- المرحلة اللدنة
237	3- مرحلة الانهيار (ميكانيزم)
250	9-5- الجيزان المستمرة وغير المقررة ستاتيكيًا
269	10-5- دراسة الإطارات بطريقة التحليل اللدن
269	1-10-5- سلوك الإطارات البسيطة
270	2-10-5- سلوك الإطار ثنائي المفاصل
277	3-10-5- معلومات عامة حول المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا
280	4-10-5- سلوك الإطار الموثوق أحادي المجاز
287	11-5- مخطط التأثير المتبادل
303	الفصل السادس: التحليل اللدن للمنشآت غير المقررة بطريقة تجميع الميكانيكيات...
303	1-6- المقدمة
306	2-6- أشكال الميكانيزمات وأنواعها
309	3-6- عدد الميكانيزمات البسيطة المستقلة
310	4-6- تجميع الميكانيزمات البسيطة
334	5-6- الإطارات السنمية أو الإطارات ذات العناصر المائلة
344	6-6- العوامل المؤثرة على عزم اللدونة
345	1-6-6- تأثير القوى النازمية على قيمة العزم اللدن

354	2-6-6- تأثير قوى القص على قيمة عزم اللدانة.....
357	3-6-6- حالة التلدن التام للجسد.....
359	4-6-6- العلاقة العامة لتقدير أثر قوة القص.....
361	المراجع.....
363	الملحق (أ) الجداول الخاصة بطريقة مصفوفة الليونة.....
371	الملحق (ب) الجداول الخاصة بطريقة مصفوفة القساوة.....
379	الملحق (ج) مبادئ جبر المصفوفات.....
379	ج-1- تعاريف.....
379	ج-1-1- المقدار السلمي.....
379	ج-1-2- المقدار الشعاعي.....
380	ج-1-3- المصفوفة.....
381	ج-1-4- منقول مصفوفة.....
382	ج-1-5- تجزئة المصفوفة.....
383	ج-1-6- المصفوفة الصفرية.....
383	ج-1-7- المصفوفة القطرية.....
383	ج-1-8- المصفوفة المثلثية العليا.....
384	ج-1-9- المصفوفة المثلثية السفلى.....
384	ج-1-10- المصفوفة الشريطية.....
385	ج-1-11- المصفوفة المتناظرة.....
385	ج-1-12- المصفوفة المتناظرة عكسياً.....
386	ج-1-13- أثر المصفوفة.....
387	ج-2- قوانين العمليات على المصفوفات.....

- ج-2-1- قوانين الجمع والطرح..... 387
- ج-2-2- قوانين الضرب 387
- ج-2-3- بعض القوانين في ضرب المصفوفات 388
- ج-3- المعينات 389
- ج-1-3- cofactor (العامل المرافق) 390
- ج-2-3- مصفوفة العوامل المرافقة 391
- ج-3-3- المصفوفة القرينة 391
- ج-4- معكوس المصفوفة 392
- ج-5- طرق إيجاد معكوس المصفوفة [A] 392
- ج-1-5- طريقة المصفوفة القرينة 392
- ج-2-5- طريقة تحويل الأسطر 395
- ج-6- المصفوفات المتعامدة 398
- ج-7- حل جملة المعادلات الخطية بطريقة حذف غوص 400

مقدمة

مع التقدم العلمي الذي يشهده القطر العربي السوري ومع انتشار استخدام الحواسيب الإلكترونية في العديد من النشاطات العلمية وغيرها، أصبح من الضروري تطوير مناهج الإنشاءات لتشمل الطرق الحديثة في التحليل الإنشائي والتي تعتمد بشكل أساسي على الصياغة المصفوفية لمعالجة كمية كبيرة من المعلومات بشكل منتظم ومتسلسل ووفق خطوات تكرارية ملائمة.

وضع هذا الكتاب كمقرر تدريسي لطلاب السنة الثالثة في كلية الهندسة المدنية بجامعة دمشق وكمراجع لزملائنا المهندسين للتعرف والتأقلم مع الطرق الحديثة في تحليل المنشآت.

يتألف الكتاب من ستة فصول وثلاثة ملاحق، ففي الفصل الأول نعرض بعض الأساسيات في التحليل الإنشائي والتي تعد مقدمة لا بد منها لفهم بقية الموضوعات في الفصول اللاحقة. أما الفصل الثاني فيحتوي على الصياغة المبسطة لطريقة مصفوفة الليونة والمناسبة لتحليل المنشآت البسيطة باستخدام الآلات الحاسبة المكتبية البسيطة. أما الفصل الثالث فيحتوي على الصياغة المبسطة لطريقة مصفوفة القساوة والملائمة لتحليل المنشآت الهيكلية البسيطة باستخدام الآلات الحاسبة البسيطة. ويحتوي الفصل الرابع على مبادئ الصياغة المصفوفية لطريقة القساوة وبشكل ملائم للبرمجة على الحواسيب الإلكترونية، ويتضمن الفصل الخامس من هذا الكتاب دراسة طرق التحليل اللدن للمنشآت مع

توضيح مفهوم العزم المقاوم للشد ونظريات الانهيار المحتملة. إضافة إلى تقديم المعلومات الأساسية التي يحتاجها المهندس المصمم، والطالب الدارس عند تعرضه لتصميم المنشآت الفولاذية بطريقة اللدونة كون هذه الطريقة تحقق توفيراً في وزن المنشأة يصل حتى 30% بالمقارنة مع التصميم بطريقة المرونة مع تحقيق المعايير الاقتصادية المثلى في شروط الاستخدام الأمثل للمادة دون إخلال بمعايير الأمان.

وفي الفصل السادس تم شرح التحليل اللدن للمنشآت غير المقررة بطريقة تجميع ميكانيكيات الانهيار المستقلة، كما تم دراسة العوامل المؤثرة على عزم اللدونة كتأثير القوى الناعمة وتأثير القوى القاسية. وقد روعي أن تكون هذه المعلومات مبسطة قدر الإمكان، وبعيدة عن التعمق في العرض الرياضي لنظرية اللدونة.

كما احتوى الملحق الأول الجداول الخاصة بمصفوفة الليونة والملحق الثاني الجداول الخاصة بمصفوفة القساوة، أما الجدول الثالث فقد تضمن مبادئ جبر المصفوفات اللازمة لفهم العمليات الأساسية على المصفوفات واللازمة لحل مصفوفتي الليونة والقساوة يدوياً.

والله ولي التوفيق

دمشق في 2011

المؤلفون

الفصل الأول

أسس التحليل الإنشائي

Fundamentals of Structural Analysis

1-1 مقدمة:

تستخدم طرق المصفوفات في التحليل الإنشائي لحل المنشآت الهيكلية بمساعدة الحاسوب الإلكتروني وتعرف المنشآت الهيكلية بأنها المنشآت المولدة من عناصر خطية تتصل فيما بينها بواسطة نقاط نسميها بالعقد (nodes) ويمكن أن يكون الاتصال صلباً كما هو الحال في المنشآت الإطارية أو متمفصلاً كما هو الحال في الجوائز الشبكية.

تقسم طرائق المصفوفات في التحليل الإنشائي إلى طريقتين هما:

1- طريقة مصفوفة الليونة (flexibility matrix).

2- طريقة مصفوفة القساوة (Stiffness matrix).

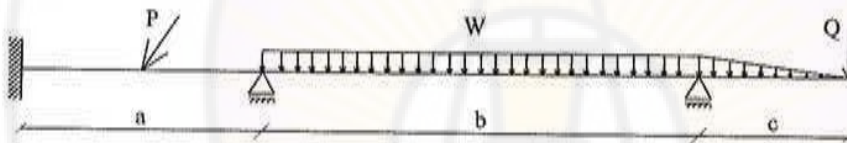
ونظراً لسهولة طريقة مصفوفة القساوة وملاءمتها للبرمجة على الحواسيب الإلكترونية فقد أصبحت هذه الطريقة الأسلوب المعياري لتحليل المنشآت الهيكلية بواسطة الحاسب الإلكتروني.

2-1- أنواع المنشآت الهيكلية Skeletal structures

تقسم المنشآت الهيكلية إلى ست مجموعات رئيسية وهي:

1-2-1 المنشآت الجانزية (Beams):

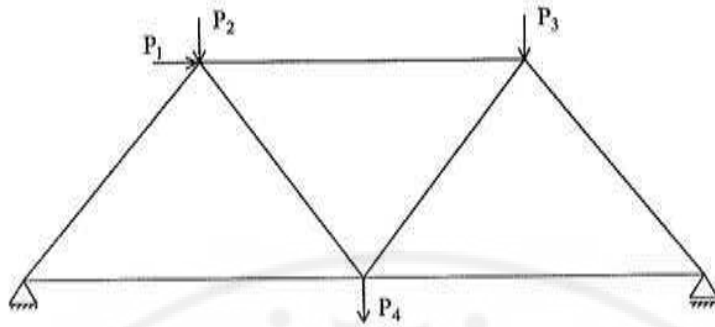
وهي عبارة عن منشآت تتألف من عناصر خطية كما هو مبين في الشكل (1-1) معرضة لمجموعة من القوى المطبقة في مستوى الجانز، والتي تسبب في المنشأ تشوه يكون العامل الأهم فيه هو قيمة عزوم الانعطاف المؤثرة على مختلف عناصره أما تأثير القوى النازمية على تشوه المنشأ فيكون عادة محدوداً ويمكن إهماله بشكل عام إلا في بعض الحالات الخاصة التي يتوجب عندها إدخال تأثير القوى المحورية عند التحليل الإنشائي للجانز.



الشكل (1-1) منشأ جانزي مستوي

2-2-1 الشبكيات المستوية (Plane trusses):

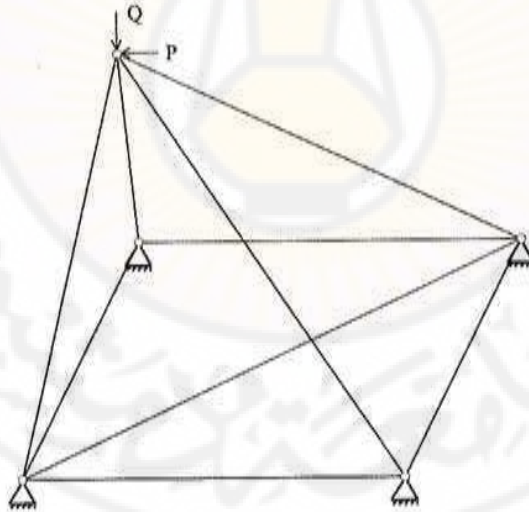
وهي عبارة عن منشآت مستوية تتألف من مجموعة من العناصر المتصلة فيما بينها بعقد مفصلية (الشكل 2-1) معرضة لقوى خارجية مركزة ومطبقة في العقد تسبب نشوء قوى محورية فقط (شادة أو ضاغطة) في عناصر المنشأ.



الشكل (2-1) منشأ شبكي مستوي

3-2-1- الشبكات الفراغية (Space trusses):

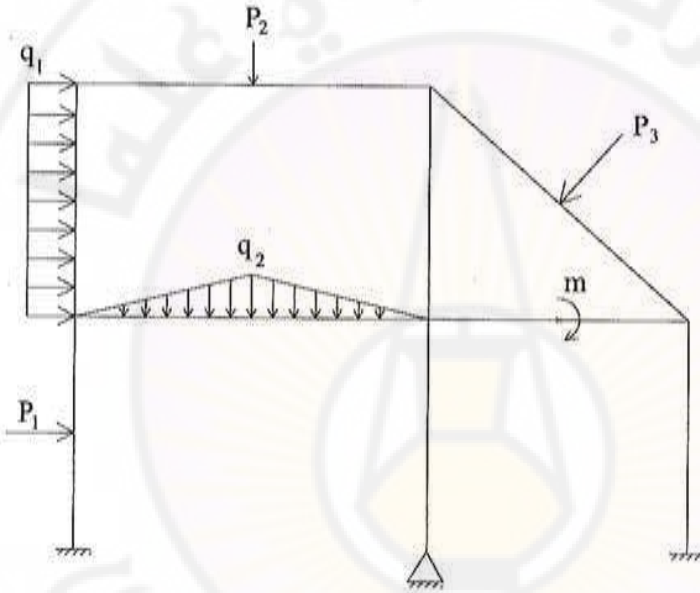
الشبكات الفراغية (الشكل 3-1) عبارة عن منشآت هيكلية فراغية تتألف من عناصر خطية تتصل فيما بينها بواسطة مفاصل عديمة الاحتكاك معرض لمجموعة من الأحمال الخارجية المطبقة في عقد المنشأ وتنتولد في مختلف عناصر المنشأ قوى محورية فقط (شدة أو ضاغطة).



الشكل (3-1) منشأ شبكي فراغي

4-2-1- الإطارات المستوية (Plane frames):

الإطارات المستوية عبارة عن منشآت مستوية (الشكل 4-1) تتألف من عناصر خطية ترتبط فيما بينها بواسطة عقد صلبة معرضة لمجموعة من القوى الخارجية المطبقة في مستوي الإطار والتي تسبب في عناصر الإطار قوى محورية وقوى قاصة وعزوم انعطاف وغالباً ما تكون التشوهات الناتجة عن الانعطاف هي الأكثر أهمية في التحليل الإنشائي لهذا النوع من المنشآت.

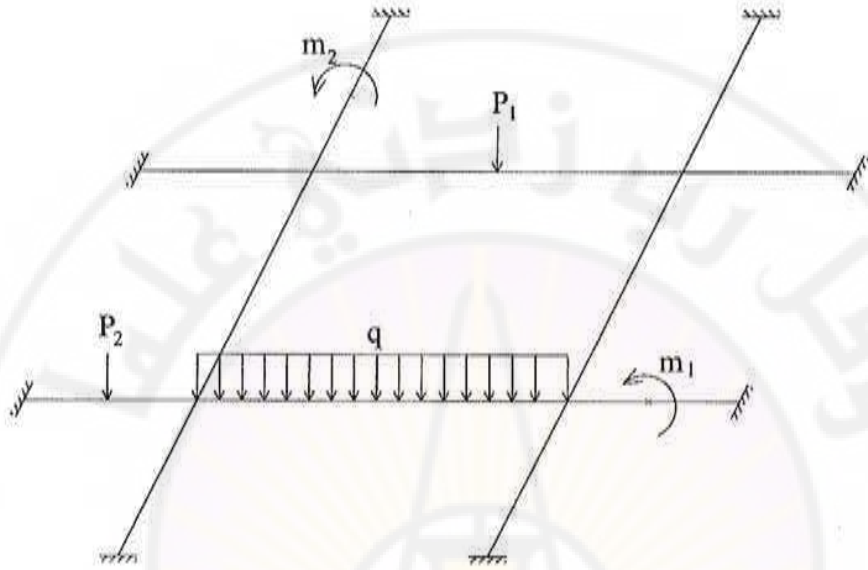


الشكل (4-1) إطار مستوي

5-2-1- الشبكات الصلبة (Grids):

يتألف المنشأ الشبكي الصلب من عناصر خطية تترايط بعضها مع بعض بعقد صلبة كما هو مبين في الشكل (5-1) ومعرض لمجموعة من القوى الخارجية في مستوي متعامد مع مستوي المنشأ وعزوم مزدوجات مطبقة بحيث

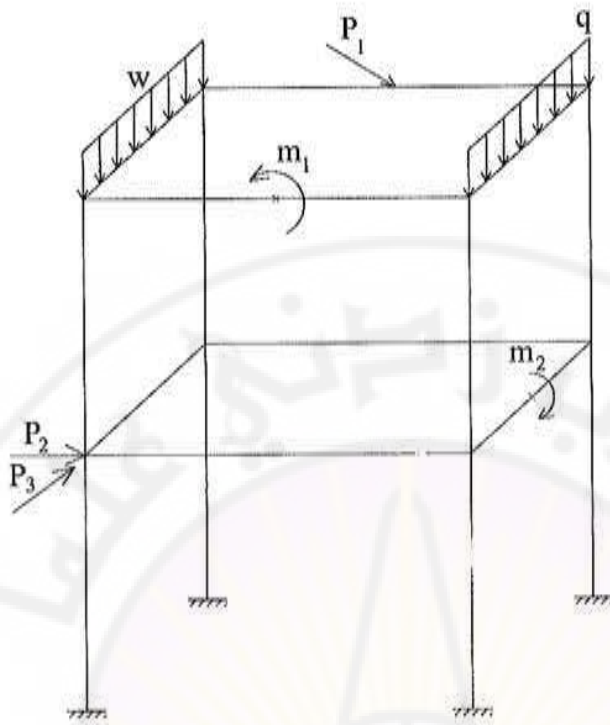
تكون أشعة عزومها واقعة في مستوى المنشأ. ويتشكل في عناصر المنشأ قوى محورية وقاصة وعزوم انعطاف وعزوم فتل وعادة يكون عمل عزوم الانعطاف مستقلاً عن عمل عزوم الفتل في مختلف عناصر المنشأ.



الشكل (5-1) منشأ شبكي صلد

6-2-1- الإطارات الفراغية (Space frames):

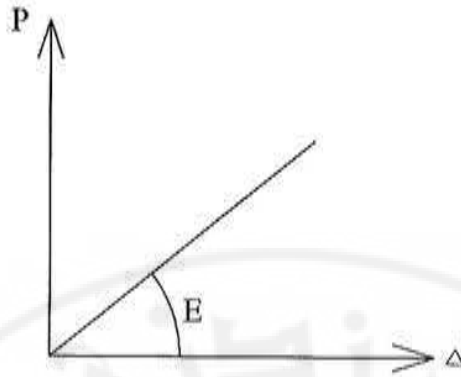
يمثل هذا النوع من الجمل الإنشائية الحالة العامة للمنشآت الإطارية (الشكل 6-1) والتي تتألف من عناصر خطية تتربط فيما بينها بعقد صلدة فراغية وتتعرض فيه عناصر الإطار لمجموعة من الأحمال المركزة أو الموزعة والمزدوجات المطبقة بشكل فراغي والتي تسبب فيه تشكل إجهادات داخلية ناظمية وقاصة على مختلف عناصر المنشأ وبشكل عام نفرض بأن عناصر الإطار مؤلفة من مقاطع منتظمة أما حالة العناصر ذات المقاطع غير المنتظمة فتعالج وفق طرق خاصة كما سنرى فيما بعد.



الشكل (6-1) إطار فراغي

3-1- مبدأ جمع الآثار Principle of superposition

عندما يتعرض المنشأ إلى الحمولات الخارجية تتولد تشوهات في مختلف عناصره، وإذا كانت هذه التشوهات صغيرة جداً بالمقارنة مع أبعاد المنشأ يمكننا كتابة معادلات التوازن بالنسبة للشكل الأساسي للمنشأ قبل التشوه، وعادة يمكننا تسوية هذه الحالة عملياً لمعظم المنشآت مما يسمح بتبسيط كبير في كتابة معادلات التوازن التابعة لها وعندما يكون المنشأ مرناً خطياً تكون العلاقة بين القوى الخارجية المطبقة والانتقالات المتولدة عنها في المنشأ علاقة مرنة خطية كما هو مبين في الشكل (7-1).

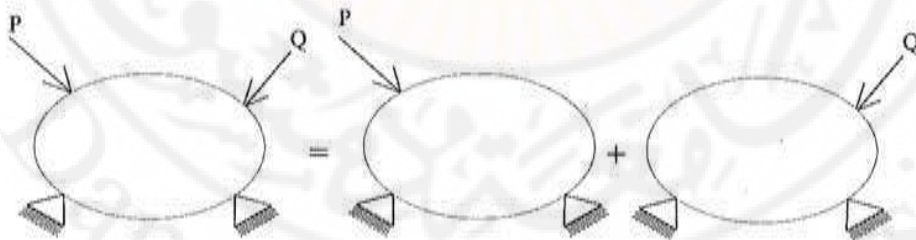


الشكل (7-1) علاقة القوى - الانتقالات في المنشآت المرنة الخطية

وفي هذه الحالة (حالة المنشآت المرنة الخطية) يمكننا تطبيق مبدأ جمع الآثار في حساب التشوهات والقوى المتولدة في المنشأ. وينص مبدأ جمع الآثار على ما يلي:

عندما تطبق على المنشأ جملة من القوى الخارجية فإن فعلها في المنشأ يكافئ مجموع أفعال القوى المشكلة لها في مختلف عناصر المنشأ.

ويبين الشكل (8-1) شرحاً لمبدأ جمع الآثار ويفيد هذا المبدأ في تبسيط الحسابات المتعلقة في التحليل الإنشائي المنشأ وخاصة عند إيجاد القوى العقدية المكافئة للقوى الخارجية المطبقة على مختلف عناصر المنشأ.



الشكل (8-1) مبدأ جمع الآثار

1-4- شروط التحليل الإنشائي Conditions for structural analysis

لكي يكون التحليل الإنشائي لأي جملة مدروسة سليماً يجب أن يحقق الشروط الإنشائية التالية:

أ - شرط التوازن (Conditions of Equilibrium):

يجب أن يحقق الحل الصحيح لأي جملة إنشائية التوازن السكوني الكلي للمنشأ تحت تأثير جملة القوى الخارجية المطبقة وجملة القوى الردية المتولدة في مختلف مساند المنشأ، كذلك يجب أن يكون أي جزء من المنشأ بحالة توازن سكوني تحت تأثير جملة القوى الخارجية المطبقة على ذلك الجزء وجملة القوى الداخلية المتولدة في مختلف عناصره ويمكن أن نعمم شرط التوازن السكوني على الحالة الحركية باستخدام مبدأ دالامبير حيث يتم الاستعاضة عن التسارعات الحاصلة في المنشأ بقوى عطالة معاكسة لها في الاتجاه.

ويتم تعميم شرط التوازن على المنشأ ليشمل القوى الفعلية وقوى العطالة المتولدة نتيجة التسارعات المطبقة على المنشأ.

ب - شرط توافق الانتقالات (Compatibility of displacements):

يجب أن تكون التشوهات الحاصلة في المنشأ نتيجة لتطبيق القوى الخارجية موافقة للقيود الخارجية المفروضة على المنشأ ومتوافقة فيما بينها في جميع أنحاء المنشأ.

ج - تحقيق علاقة التشوه - الإجهاد لمادة المنشأ:

((Conditions of constitutive equations (elasticity))

وهذا يعني أن التشوهات المتولدة في المنشأ يجب أن تكون محققة للعلاقة بين التشوهات والإجهادات لمادة المنشأ كما في حالة المواد المرنة - الخطية حيث تحقق التشوهات والإجهادات المتولدة في المنشأ قانون هوك للتشوهات المرنة الخطية (Hook's law).

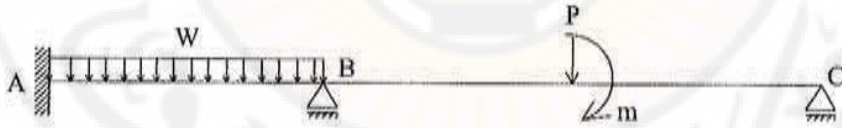
5-1- درجتا عدم التقرير السكوني والحركي في المنشأ:

Degree of static and kinematic indeterminacy

هنالك نوعان من درجة عدم التقرير في المنشأ هما درجة عدم التقرير السكوني ودرجة عدم التقرير الحركي، وذلك اعتماداً على كون المجاهيل المعتمدة في الحل هي جملة القوى الردية المجهولة الفائضة عن معادلات التوازن وذلك في طرق القوى (المرونة)، أو الانتقالات المجهولة في المنشأ نتيجة لتطبيق القوى الخارجية المعلومة في طرق الانتقالات (القساوة). ويمكننا شرح الفرق بين درجتى عدم التقرير السكوني والحركي في المنشأ كما يلي:

أ - درجة عدم التقرير السكوني (Static indeterminacy):

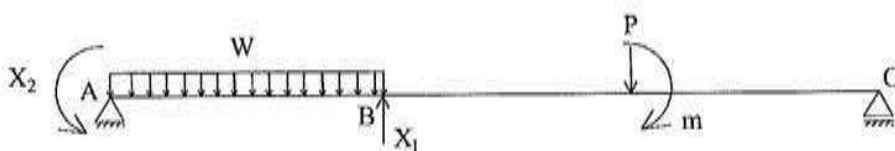
تمثل درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ عدد القوى المجهولة المطبقة على عناصر المنشأ والفائضة عن معادلات التوازن فمثلاً الجائز المستمر المبين في الشكل (9-1) هو منشأ غير مقرر سكونياً من الدرجة الثانية لأن عدد المجاهيل الزائدة عن معادلات التوازن هي اثنان وبالتالي تكون درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ هي درجتان.



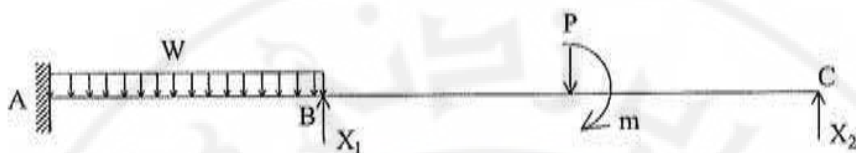
الشكل (9-1) منشأ غير مقرر سكونياً

ونلاحظ أنه يوجد أكثر من أسلوب واحد لاختيار جملة القوى المجهولة وتبين الأشكال (10-1) بعض الخيارات الممكنة لجملة القوى المجهولة في المنشأ

والتي تمثل في شعاع المجاهيل $\cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$



(10-1)



(10-1 ب)

الشكل (10-1) بعض الخيارات الممكنة لمجمل القوى الفائضة

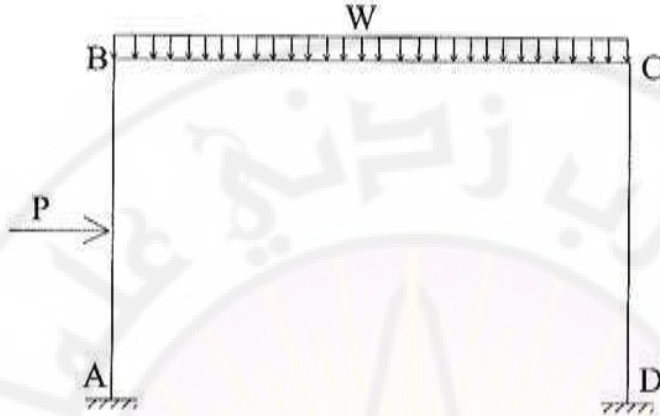
ب - درجة عدم التقرير الحركي (Kinematic indeterminacy):

ترمز درجة عدم التقرير الحركي في المنشأ إلى عدد الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ، ويسمى عدد الانتقالات المجهولة في كل عقدة من عقد المنشأ بعدد درجات الحرية للانتقالات في عقد المنشأ، فمثلاً العقدة A في المنشأ المبين في الشكل (9-1) موثوقة بشكل تام وبالتالي يكون عدد درجات الحرية فيها معدوماً أما العقدة B في الشكل نفسه فهي ممنوعة من الانتقال الشاقولي وتستطيع الدوران والانتقال أفقياً وبالتالي يكون عدد درجات الحرية فيها درجتين أو يقال إن للعقدة درجتين من درجات الحرية وكذلك بالنسبة للعقدة C ويكون المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الرابعة.

ويمكن تخفيض درجة عدم التقرير الحركي وذلك بإهمال التشوهات المحورية لعناصر المنشأ وإهمال المجاهيل المستقلة خطياً حيث يصبح المنشأ السابق غير مقرر من الدرجة الأولى.

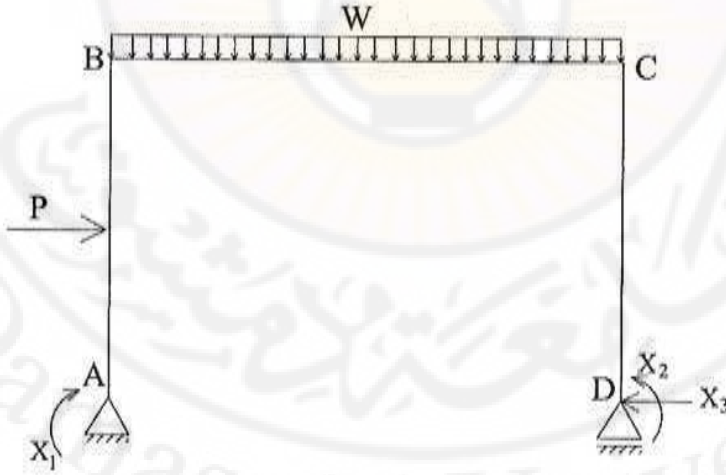
مثال (1):

لشرح الفرق بين مفهوم درجة عدم التقرير السكوني والحركي في المنشأ ندرس الإطار ABCD المبين في الشكل (11-1).

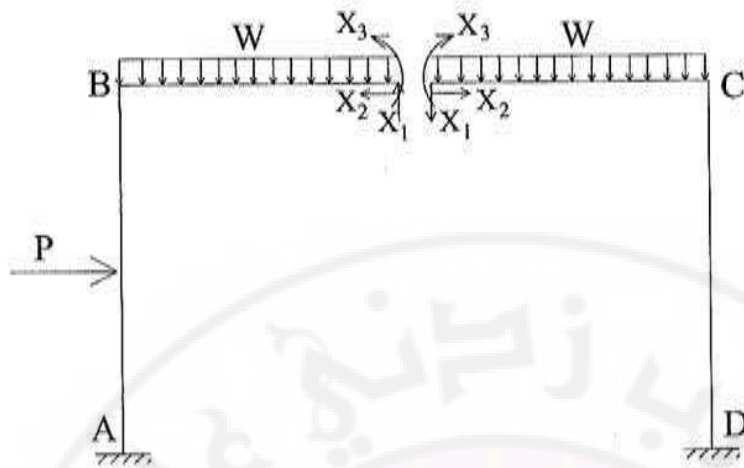


الشكل (11-1) المعطيات الهندسية للمثال (1)

نلاحظ بأن هنالك أكثر من طريقة يمكننا بواسطتها تقرير المنشأ سكونياً وبعض هذه الطرق مبين في الشكل (12-1).



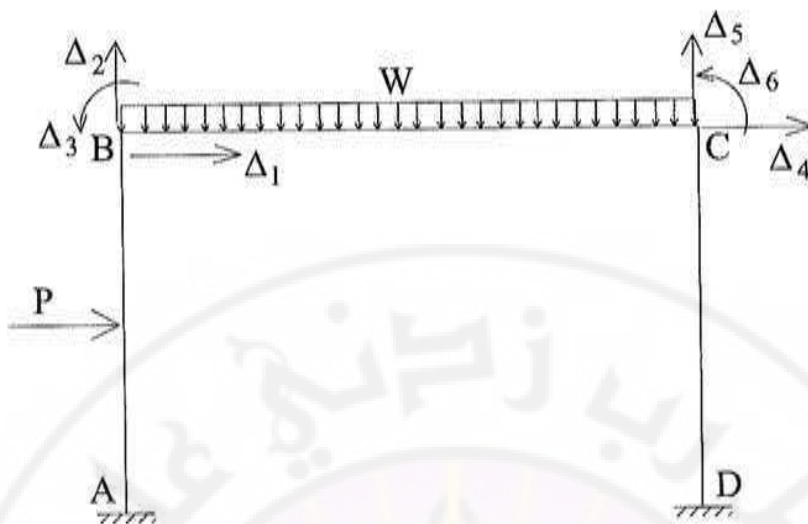
(12-1)



(12-1 ب)

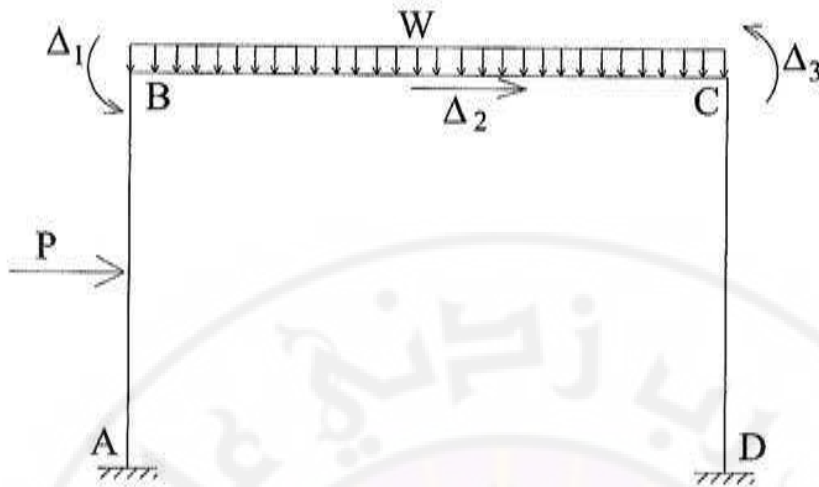
الشكل (12-1) بعض الحالات الممكنة لتقرير الإطار في المثال (1)

وبالتالي نلاحظ أن درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ هي ثلاث درجات أما بالنسبة لتعيين درجة عدم التقرير الحركي فنلاحظ أن عدد الانتقالات الممكنة في عقد المنشأ هي ثلاثة انتقالات مجهولة في العقدة C وثلاثة انتقالات مجهولة في العقدة B وذلك إذا أخذنا التشوهات المحورية في عناصر المنشأ بالحسبان وبالتالي نلاحظ بأن درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ هي (6) ست درجات ويبين الشكل (13-1) المجاهيل الحركية في مختلف عقد المنشأ.



الشكل (13-1) المجاهيل الحركية في حال اعتبار التشوهات المحورية

أما إذا أهملنا التشوهات المحورية في مختلف عناصر المنشأ فنلاحظ أن الاستطالة في العناصر الشاقولية AB و DC قد تم إلغاؤها وكذلك تصبح الانتقالات الأفقية في العقدتين B و C متساوية وعليه تصبح درجة عدم التقرير الحركي في المنشأ هي (3) درجات بدلاً من (6) كما هو الحال عندما تم أخذ التشوهات المحورية بالحسبان ويبين الشكل (14-1) المجاهيل الحركية للمنشأ ضمن شروط إهمال التشوهات المحورية.

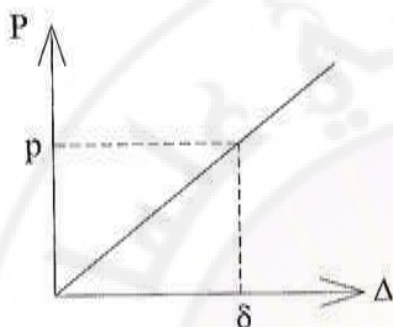


الشكل (14-1) المجاهيل الحركية في حال إهمال التشوهات المحورية

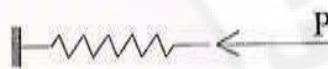
وفي كل الأحوال سواء أهملنا التشوهات المحورية في عناصر المنشأ أم أخذناها بالحسبان، فإن المنشأ يبقى غير مقرر سكونياً من الدرجة الثالثة. وعليه نلاحظ أن درجة عدم التقرير السكوني ثابتة في المنشأ ومستقلة عن تأثير التشوهات المحورية به ويمكن التعبير عنها بأكثر من مجموعة واحدة من القوى الفائضة عن معادلات التوازن بينما تتعلق درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ بطبيعة الانتقالات المدروسة وتزداد إذا أخذنا تأثير التشوهات المحورية خلال تحليل المنشأ وتبقى جملة المجاهيل الحركية للمنشأ جملة وحيدة تتعلق بطبيعة استناد المنشأ وطبيعة الانتقالات في مختلف عقد الاتصال بين عناصره وبعدهد عقد المنشأ.

6-1- علاقة القوى والانتقالات في المنشأ Force-displacement relationship

تؤدي العلاقة بين القوى الخارجية المطبقة على المنشأ والانتقالات الناتجة عنها دوراً أساسياً في طرق التحليل الإنشائي بواسطة المصفوفات ويمكننا شرح علاقة القوى والانتقالات في المنشأ بدراسة النابض المبين في الشكل (15-1).



(15-1 أ)



(15-1 ب)

الشكل (15-1): نابض مرن خطي

ونلاحظ من الشكل (15-1 أ) أن العلاقة بين القوة والانتقال في النابض يمكن أن تكتب بالشكل:

$$\delta = f * P \quad (1-1)$$

حيث تسمى f بمعامل ليونة النابض وهو يمثل الانتقال الناتج عن تطبيق واحدة القوى في النابض.

ويمكننا كتابة العلاقة (1-1) بالشكل التالي:

$$P = \frac{1}{f} \delta = K * \delta \quad (1-2)$$

حيث تعرف (K) بمعامل قساوة النابض والذي يمثل مقدار القوة اللازم لإحداث واحدة الانتقالات في النابض.

ونلاحظ من المعادلتين (1-1)، (1-2) أن العلاقة بين معامل ليونة النابض (f) ومعامل قساوته (K) هي من الشكل:

$$K = \frac{1}{f} = f^{-1} \quad (1-3)$$

وبشكل مماثل نجد:

$$f = \frac{1}{K} = K^{-1} \quad (1-4)$$

أي أن معامل قساوة النابض يساوي مقلوب معامل ليونته وبالعكس وهكذا نجد أن معامل ليونة النابض له واحدة طول مقسومة على واحدة قوة بينما معامل القساوة يملك واحدة قوة مقسومة على واحدة طول.

وبشكل عام يمكننا التعبير عن العلاقة بين القوى المطبقة على منشأ والانتقالات الناشئة عنها بواسطة معادلات مشابهة للمعادلات (1-1) و (1-2). فلو فرضنا أن جملة القوى المطبقة على منشأ ما هي {P} وأن جملة الانتقالات الناشئة عنها في المنشأ هي {δ} فيمكننا أن نعبر عن القوى الخارجية المطبقة على المنشأ والانتقالات في المنشأ الناشئة عنها بواسطة العلاقات:

$$\{\delta\} = [F]\{P\} \quad (1-5)$$

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (1-6)$$

حيث تسمى المصفوفة [F] بمصفوفة الليونة للمنشأ بينما تسمى المصفوفة [K] بمصفوفة القساوة للمنشأ وسوف ندرس إنشاء واستخدام المصفوفات [F]، [K] بشكل مفصل في الفصول المقبلة.

7-1 طرق التحليل الإنشائي Methods of structural Analysis

تقسم طرق التحليل الإنشائي إلى مجموعتين أساسيتين هما طرق الليونة (أو القوى) وطرق القساوة (أو طرق الانتقالات) ويمكن تبيان الفرق بين هذه الطرق من خلال الفقرات التالية:

1-7-1 طرق الليونة (القوى) (Flexibility methods):

يتم في طرق الليونة اعتماد القوى المجهولة الفائضة عن معادلات التوازن كمجاهيل أساسية في المسألة، ويتم كتابة معادلات التوازن للتعبير عن القوى الداخلية في المسألة كافة بدلالة المجاهيل الأساسية المختارة. ومن خلال تطبيق شرطي التوافق والمرونة في المنشأ يتم تحويل معادلات التوازن في المنشأ إلى مجموعة معادلات خطية تحتوي على المجاهيل الأساسية المختارة في المسألة (1-5). ومن خلال حل جملة المعادلات الخطية الناتجة يتم تحديد قيم المجاهيل الأساسية في المسألة. أما قيم الانتقالات والقوى الداخلية فيتم تحديدها من خلال العلاقات بين القوى والانتقالات في المنشأ.

ومن خلال العرض السابق لطرق الليونة نجد أنه يمكن التعبير عن جملة المجاهيل الأساسية المختارة بأكثر من مجموعة واحدة وهذا بدوره يجعل طرق الليونة وبشكل عام غير مناسبة للبرمجة على الحاسب الإلكتروني بالمقارنة مع طرق القساوة إلا أن هذا الضعف في طرق الليونة لا ينفي كون هذه الطرق

فعالة في كثير من المسائل البسيطة بالمقارنة مع طرق القساوة. وسوف ندرس مزايا طريقة الليونة بشكل مفصل في الفصل الثاني من هذا الكتاب.

2-7-1 طرق القساوة (الانتقالات) (Stiffness methods):

يتم في طرق القساوة استخدام الانتقالات المجهولة في مختلف عقد المنشأ كمجاهيل أساسية في المسألة. وبتطبيق شرطي توافق الانتقالات والمرونة على المنشأ يتم التعبير عن القوى الداخلية بدلالة الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ. وأخيراً يتم كتابة علاقات التوازن بين القوى الداخلية والقوى الخارجية المطبقة على المنشأ وذلك للحصول على جملة من المعادلات الخطية (6-1) والتي تحوي الانتقالات المجهولة في مختلف عناصر المنشأ وبعد حل جملة معادلات التوازن للمنشأ نحصل على قيم الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ. ومن خلال العلاقات بين القوى والانتقالات في العقد يتم تحديد قيم القوى الداخلية في مختلف عناصر المنشأ. وبما أن الانتقالات الممكنة في مختلف عقد المنشأ (والتي تشكل جملة المجاهيل المعتبرة في الحل) تتعلق بشكله الهندسي وطبيعة التشوهات المدروسة وهذه الصفات خاصة بالمنشأ المدروس، لذا نستنتج أن جملة المجاهيل الأساسية ثابتة في طريقة القساوة بعكس جملة المجاهيل في طرق الليونة والتي يمكن التعبير عنها عادة بأكثر من أسلوب وهذا ما يجعل طريقة القساوة أكثر ملاءمة للبرمجة على الحاسب الإلكتروني بالمقارنة مع طرق الليونة وسوف ندرس الأسلوب المبسط لطريقة القساوة والمناسب لحل المنشآت الإطارية والشبكية والشبكات الصلدة في الفصل الثالث ومن ثم تتم صياغة الطريقة بشكل مناسب للبرمجة على الحاسوب في الفصل الرابع.

الفصل الثاني تحليل المنشآت باستخدام طريقة مصفوفة الليونة

Principles of the Flexibility Method

1-2 - مقدمة:

تعد طريقة مصفوفة الليونة أسلوباً ملائماً لحل العديد من أنواع المنشآت وترجع أسس هذه الطريقة إلى العالم مكسويل (Maxwell) والذي وضع أسس هذه الطريقة في عام 1864 ويتم في هذه الطريقة كتابة معادلات توافق الانتقالات في المنشأ بدلالة عوامل نسميها عوامل الليونة (Flexibility Coefficients) وجملة من القوى المجهولة والفائضة عن معادلات التوازن (والتي تساوي درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ) ونظراً لأن معادلات التوافق تتطلب تحديد الانتقالات في المنشأ نتيجة تطبيق القوى الخارجية واختصاراً للحسابات فقد تم ترتيب الانتقالات الحاصلة في المنشأ نتيجة لبعض الأحمال الشهيرة كما هو مبين في الملحق (أ) حيث يمكن استخدام هذه القيم عند حل العديد من المسائل وفق طريقة مصفوفة الليونة، وقد تم التنويه في الفصل الأول بأنه نظراً لإمكانية التعبير عن جملة القوى الفائضة في طريقة الليونة بأكثر من أسلوب فإن طريقة الليونة تعد غير مناسبة للبرمجة على الحاسب الإلكتروني بالمقارنة مع طريقة مصفوفة القساوة إلا أن هذا لا ينبغي كون طريقة مصفوفة الليونة فعالة في حل العديد من المسائل البسيطة كما وأن فهم طريقة مصفوفة الليونة يساعد كثيراً في فهم خطوات طريقة مصفوفة القساوة والتي سندرسها في الفصول المقبلة نظراً لتشابه الطريقتين في العديد من مراحل الحل.

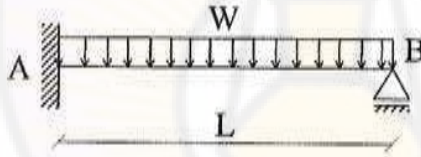
2-2- أمثلة تمهيدية Introductory Examples

لشرح مراحل طريقة مصفوفة الليونة نستعرض عدداً من الأمثلة التمهيدية والتي تفيدنا لتحديد خطوات الحل لهذه الطريقة بشكل مفصل لاحقاً.

مثال تمهيدي (1):

ندرس الظفر المسنود المبين في الشكل (1-2) والخاضع لتأثير الأحمال w الموزعة بانتظام على طول المجاز.

نلاحظ أن المنشأ غير مقرر سكونياً من الدرجة الأولى وأحد الخيارات الممكنة للجملة الأساسية (المقررة) هي حذف المسند المتخرج B كما هو مبين في الشكل (2-2 أ) واعتماد رد الفعل الشاقولي R_B كقوة مجهولة فائضة عن معادلات التوازن في المنشأ.

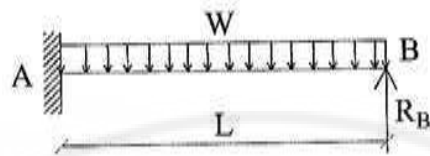


الشكل (1-2) معطيات المثال التمهيدي (1)

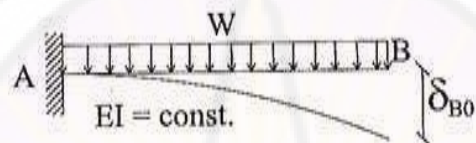
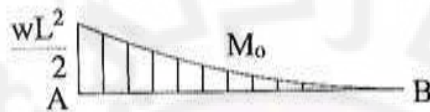
نتيجة لتطبيق الأحمال الخارجية على الجملة المقررة فسوف يحصل انتقال في العقد B مقداره δ_{B0} (الشكل 2-2 ب) ويمكن حساب مقدار هذا الانتقال بطريقة العمل الوهمي (أو أي أسلوب مناسب آخر) وفي حال استخدام طريقة العمل الوهمي نجد:

$$(\delta_{B0})_w = \frac{1}{EI} \int M_0 M_1 dx = \frac{L}{4EI} \left(L * \frac{wL^2}{2} \right)$$

$$= \frac{wL^4}{8EI} \text{ (إلى الأسفل)}$$



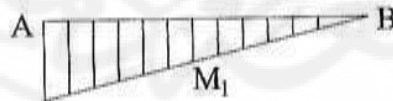
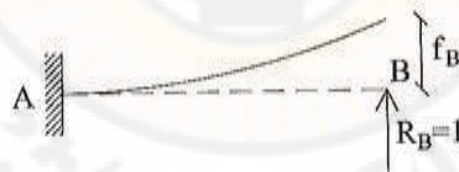
(أ 2-2)



(ب 2-2)



(ج 2-2)



(د 2-2)

الشكل (2-2) حل الظفر المسنود بطريقة الليونة

ويرمز الحرف δ_{Bo} إلى الحمولات الخارجية في المنشأ المقرر، أي δ_{Bo} هبوط النقطة B في المنشأ المقرر الناجم عن الأحمال الخارجية وبشكل مشابه يمكننا حساب الهبوط الحاصل نتيجة تطبيق القوة R_B .

$$(\delta_{Bo})_R = \frac{1}{EI} \frac{L}{3} (R_B * L)(L) = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad (\text{إلى الأعلى})$$

وبين الملحق (أ) الانتقالات الحاصلة في الجوائز نتيجة لبعض الأحمال الشهيرة. ونظراً لكون الانتقال في المسند B في المنشأ الأساسي (الشكل 2-2) معدوماً فإننا نجد أن الانتقال الناشئ في B نتيجة لتطبيق الأحمال الخارجية يجب أن يكون مساوياً ومعاكساً للانتقال في B الناشئ من تطبيق القوة المجهولة R_B وبالتالي:

$$(\delta_{Bo})_W = (\delta_{Bo})_R$$

$$\frac{w L^4}{8EI} = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad \text{أو:}$$

$$R_B = \frac{3wL}{8} \quad (a) \quad \text{ومنه:}$$

وبعد تحديد مقدار المجهول R_B تصبح بقية خطوات الحل سهلة تتضمن تطبيق معادلات التوازن على جملة مقررة سكونياً وخاضعة لمجموعة من الأحمال الخارجية المعلومة (الشكل 2-2 أ).

ويمكننا إعادة خطوات الحل السابقة نفسها بشكل أوضح باستخدام اصطلاح موحد للإشارة حيث نجد أن الانتقالات الموافقة لاتجاه المجاهيل الفائضة موجبة

والمخالفة لها سالبة وعليه يكون مقدار الانتقال الحاصل في المنشأ المقرر نتيجة تطبيق الأحمال الخارجية معطى بالعلاقة:

$$\delta_{B0} = -\frac{wL^4}{8EI}$$

كذلك نحسب مقدار الانتقال في B والناشئ عن واحدة القيم لرد الفعل R_B وهذا الانتقال بالتعريف معامل الليونة للعقدة B (flexibility coefficient) أي f_B واستناداً إلى معطيات الملحق (أ) نجد:

$$f_B = \frac{L^3}{3EI}$$

ويمكننا اعتماداً على مبدأ جمع الآثار كتابة شرط توافق الانتقالات في العقدة B بالشكل:

$$\delta_{B0} + f_B * R_B = 0$$

وبتعويض قيم δ_{B0} و f_B في المعادلة السابقة نجد:

$$-\frac{wL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_B = 0$$

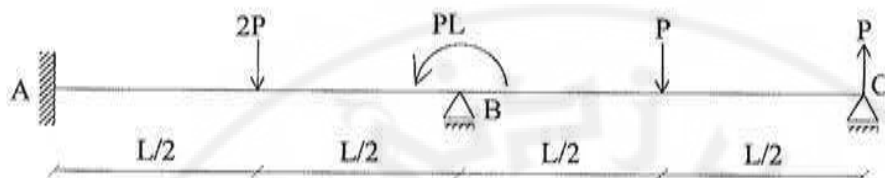
وعليه نجد بأن:

$$R_B = \frac{3wL}{8}$$

وهي النتيجة نفسها المستخرجة بالمعادلة (a).

2- مثال تمهيدي (2):

ندرس الجائز المستمر ABC المبين في الشكل (3-2) ونقوم بتحليله وفق طريقة مصفوفة الليونة.



الشكل (3-2) تحليل الجائز المستمر وفق طريقة الليونة

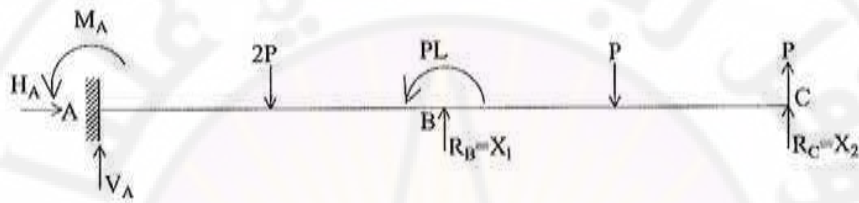
ونلاحظ من الشكل (3-2) أن المنشأ ABC غير مقرر سكونياً من الدرجة الثانية ويمكن التعبير عن جملة القوى الزائدة وتقرير المنشأ بأكثر من أسلوب، ويبين الشكل (4-2 أ) أحد الخيارات والذي تم فيه اعتماد ردي الفعل في C, B كمجاهيل فائضة في المسألة وذلك بسبب حذف المسندين المتدحرجين في B, C.

نتيجة لتطبيق الأحمال الخارجية على الجملة المقررة فسوف يحدث انتقال في كل من العقدتين B, C ونرمز لهذه الانتقالات بـ δ_{20}, δ_{10} ويبين الشكل (4-2 ب) القيم الموجبة لهذه الانتقالات.

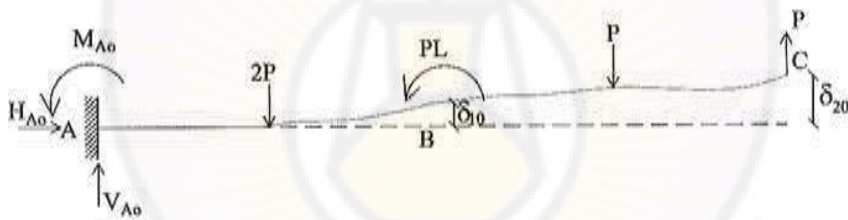
ويرمز الحرف (o) إلى الأحمال الخارجية في المنشأ المقرر (Determinate System) أما الأرقام 1, 2 فترمز إلى رقم القيد الإضافي والمعتمد في الحل حيث تم الرمز لرد الفعل R_B بـ x_1 و رد الفعل R_C بـ x_2 .

وللحصول على قيم عوامل الليونة للمنشأ فإننا نضع واحدة قوى في نقاط تطبيق واتجاهات القيود الإضافية ونرمز للانتقال الحاصل باتجاه x_1 في النقطة

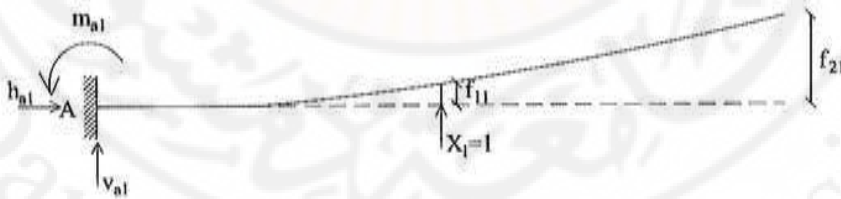
(B) من جراء تطبيق واحدة القوى باتجاه المجهول x_1 بالرمز f_{11} ، وأما الانتقال الحاصل في العقدة (C) باتجاه x_2 والناتج عن تطبيق واحدة القوى في اتجاه المجهول x_1 فنرمز له بـ f_{21} (الشكل 4-2 ج) وبأسلوب مماثل نضع واحدة القوى مكان القيد الإضافي x_2 ونحصل على عوامل اللبونة f_{12} ، f_{22} (الشكل 4-2 د) وبشكل عام نعرف عامل اللبونة f_{ij} بالانتقال الحاصل في مكان واتجاه القيد الإضافي x_j نتيجة تطبيق واحدة القوى في مكان واتجاه القيد الإضافي x_i .



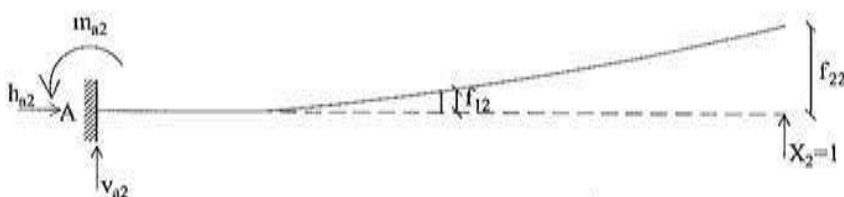
(4-2 أ) الجملة الأساسية



(4-2 ب) الانتقالات المقررة



(4-2 ج) عوامل اللبونة للمجهول x_1



(4-2 د) عوامل الليونة للمجهول x_2

الشكل (4-2) مراحل تحليل الجانز المستمر بطريقة الليونة

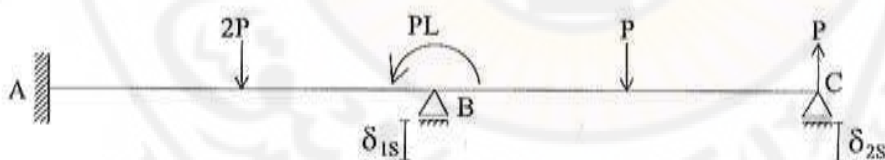
ولتعميم الحل فإننا نفترض وجود انزياحين في المسندين B, C مساويين إلى δ_{1s}, δ_{2s} كما هو مبين في الشكل (5-2). وباستخدام مبدأ جمع الآثار يمكننا التعبير عن معادلة توافق الانتقالات في المسندين B, C بواسطة المعادلات:

$$\delta_{1s} = \delta_{10} + f_{11} * x_1 + f_{12} * x_2$$

$$\delta_{2s} = \delta_{20} + f_{21} * x_1 + f_{22} * x_2$$

ويمكننا كتابة المعادلتين السابقتين بشكل مصفوفي كما يلي:

$$\{\delta_s\} = \{\delta_0\} + [F]\{x\} \quad (2-1)$$



الشكل (5-2) حالة وجود انزياح في المساند

ونسمي المصفوفة $[F]$ بمصفوفة الليونة للمنشأ أما الشعاع $\{\delta_s\}$ فيرمز إلى الانتقالات الفعلية في المنشأ الموافقة إلى القيود الإضافية وكذلك يرمز الشعاع

$\{\delta_0\}$ إلى شعاع الانتقالات في المنشأ المقرر (الجملة الأساسية) الموافق للقيود الإضافية. ولإيجاد قيم شعاع الانتقالات $\{\delta_0\}$ للمنشأ يمكننا استخدام أي طريقة مناسبة (كطريقة العمل الوهمي) لنحصل على القيم التالية:

$$\delta_{10} = \frac{13PL^3}{24EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{97PL^3}{48EI}$$

وتدل الإشارات الموجبة للانتقالات δ_{20}, δ_{10} على أن هذه الانتقالات بالاتجاه الموجب للقيود الإضافية وعليه يكون شعاع الانتقالات للمنشأ المقرر أي $\{\delta_0\}$:

$$\{\delta_0\} = \frac{PL^3}{48EI} \begin{Bmatrix} 26 \\ 97 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

ولتعيين مصفوفة الليونة $[F]$ للمنشأ نطبق أولاً واحدة القوى في العقدة (1) وبالاتجاه الموافق لـ x_1 (الشكل 4-2 ج) ونستخدم أي طريقة مناسبة (كطريقة العمل الوهمي) لحساب الانتقالات f_{11} و f_{21} فنحصل على القيم التالية:

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{5L^3}{6EI}$$

وبشكل مماثل نطبق واحدة القوى في العقدة (2) وباتجاه القيد الإضافي x_2 الشكل (2-4 د) ونستخدم أي طريقة مناسبة لحساب الانتقالات f_{12} و f_{22} فنحصل على القيم التالية:

$$f_{12} = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$f_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$$

ونلاحظ تساوي الانتقالات f_{12} ، f_{21} بسبب قانون الانتقالات المتبادلة المعروف للعالم (Maxwell).

كما ويمكن تحديد عناصر مصفوفة المرونة f_{11} ، f_{12} ، f_{21} ، f_{22} وكذلك الانتقالات δ_{10} ، δ_{20} بطريقة ضرب المخططات المعتمدة في طريقة العمل الوهمي واعتماداً على قيم f_{11} ، f_{12} ، f_{21} ، f_{22} يمكن الحصول على مصفوفة الليونة للمنشأ وفق العلاقة:

$$[F] = \frac{L^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

ولتبسيط الحل في هذه المرحلة سنفترض أن شعاع الانزياح للمساند δ_s معدوم وعليه وبتطبيق المعادلة (2-1) نجد:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{PL^3}{48EI} \begin{Bmatrix} 26 \\ 97 \end{Bmatrix} + \frac{L^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

وبالحل من أجل ($L = 10$) نجد:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{56} \begin{Bmatrix} 69 \\ -64 \end{Bmatrix}$$

ومنه نجد أن مقدار القيود الإضافية هو :

$$\left. \begin{aligned} R_B = x_1 &= \frac{69}{56} P \\ R_C = x_2 &= -\frac{64}{56} P \end{aligned} \right\} \quad (x)$$

وتدل الإشارة السالبة للمجهول x_2 على أن الاتجاه الفعلي له بعكس الاتجاه المفروض (أي نحو الأسفل).

وبتحديد قيم المجاهيل الإضافية تصبح المسألة الأساسية مسألة مقررة سكونياً وخاضعة لفعل حمولات معروفة ويمكننا إيجاد ردود الأفعال وكذلك الانتقالات الحاصلة في أي نقطة في المنشأ بواسطة إحدى الطرق المعروفة لتحليل المنشآت المقررة سكونياً. ويمكننا استخراج ردود الفعل في الوثيقة A باستخدام مبدأ جمع الآثار وفق ما يلي:

من الشكل (4-2 ب) وباستخدام معادلات التوازن نحدد ردود الفعل في الوثيقة:

$$\left. \begin{aligned} H_{A0} &= 0 \\ V_{A0} &= 2P \\ M_{A0} &= -\frac{PL}{2} \end{aligned} \right\} \quad (0)$$

ومن الشكل (4-2 ج) وباستخدام معادلات التوازن يمكننا الحصول على ردود الفعل في الوثيقة نتيجة القوة $(x_1 = 1)$:

$$\left. \begin{array}{l} h_{a1} = 0 \\ v_{a1} = -1 \\ m_{a1} = -1 * L = -L \end{array} \right\} \quad (1)$$

وتدل الإشارة السالبة على كون رد الفعل معاكساً للجهة المفروضة،
وبأسلوب مماثل يمكننا تحديد ردود الفعل في الوثيقة A نتيجة واحدة القيم
للمجهول x_2 (أي $x_2 = 1$) فنجد:

$$\left. \begin{array}{l} h_{a2} = 0 \\ v_{a2} = -1 \\ m_{a2} = -1 * 2L = -2L \end{array} \right\} \quad (2)$$

وباستخدام مبدأ جمع الآثار يمكننا كتابة ردود الأفعال في الوثيقة A
بدلالة ردود الأفعال في الجملة المقررة نتيجة القوى الخارجية المطبقة (الشكل
4-2 ب) وردود الأفعال في الجملة المقررة نتيجة واحدة القوى للمجهول x_1
(الشكل 4-2 ج) وكذلك نتيجة واحدة القوى للمجهول x_2 (الشكل 4-2 د) فنجد:

$$H_A = H_{A0} + h_{a1} * x_1 + h_{a2} * x_2$$

$$V_A = V_{A0} + v_{a1} * x_1 + v_{a2} * x_2$$

$$M_A = M_{A0} + m_{a1} * x_1 + m_{a2} * x_2$$

ويمكننا كتابة جملة المعادلات السابقة بشكل مصفوفة بالعلاقة:

$$\begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{A0} \\ V_{A0} \\ M_{A0} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} h_{a1} & h_{a2} \\ v_{a1} & v_{a2} \\ m_{a1} & m_{a2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

والتي يمكن حلها بإحدى طرق المصفوفات المعروفة، ويكون حلها:

$$\{x\} = [F]^{-1} \{\{\delta_s\} - \{\delta_0\}\} \quad (2-2)$$

وبشكل عام يمكننا كتابة المعادلة (2-2) بشكل مختصر كما يلي:

$$\{R\} = \{R_0\} + [r]\{x\} \quad (2-3)$$

حيث:

$\{R\}$: ردود الأفعال المجهولة في المنشأ الأصلي.

$\{R_0\}$: ردود الأفعال في الجملة المقررة نتيجة الأحمال الخارجية المطبقة.

$[r]$: ردود الأفعال في الجملة المقررة نتيجة واحدة القيم للقوى الفائضة في المسألة.

$\{x\}$: جملة القوى (الفائضة) المستخدمة في الحل.

وبتعويض القيم في (2-2) نجد:

$$\begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2P \\ -\frac{PL}{2} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -L & -2L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{69}{56}P \\ -\frac{64}{56}P \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{107}{56}P \\ \frac{31PL}{56} \end{Bmatrix}$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{107}{56} P$$

$$M_A = \frac{31PL}{56}$$

3-2- خطوات الحل في طريقة مصفوفة الليونة Solution steps in the flexibility method

من خلال الأمثلة التمهيدية السابقة والتي تم عرضها في الفقرة (2-2) يمكننا استخراج أن خطوات الحل وفق طريقة مصفوفة الليونة هي كما يلي:

1- تحديد درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ (عدد القيود الإضافية الفائضة عن معادلات التوازن).

2- تقرير المنشأ سكونياً وذلك باختيار جملة من المجاهيل الإضافية بتسلسل محدد x_1 و $x_2 \dots$ الخ بحيث يكون شعاع القوى المجهولة معطى بـ:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

3- للمنشأ المقرر سكونياً وتحت تأثير الأحمال الخارجية المعلومة نقوم بحساب الانتقالات الموافقة للمجاهيل ونرمز لهذه الانتقالات بـ δ_{10} و $\delta_{20} \dots$ الخ. ونرمز لشعاع الانتقالات في المنشأ المقرر والموافق للمجاهيل الفائضة المختارة بالرمز $\{\delta_0\}$ ، حيث:

$$\{\delta_0\} = \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

- 4- للمنشأ المقرر نقوم بتعيين عوامل الليونة f_{ij} بوضع واحدة القوى باتجاه المجهول z وتعيين الانتقال الناتج I وباتجاه المجهول x_i ويتكرر هذه العملية على كامل القوى الفائضة المجهولة نحصل على مصفوفة الليونة $[F]$ للمنشأ.
- 5- باستخدام مبدأ جمع الآثار يمكننا كتابة معادلات التوافق للمنشأ بالشكل:

$$\{\delta_s\} = \{\delta_0\} + [F]\{x\} \quad (2-1)$$

حيث يرمز الشعاع $\{\delta_s\}$ إلى الانتقالات المعلومة الموافقة للمجاهيل الفائضة المعتبرة في الحل. وعليه تكون قيمة شعاع القوى المجهولة معطاة بالعلاقة:

$$\{x\} = [F]^{-1} \{\{\delta_s\} - \{\delta_0\}\} \quad (2-2)$$

حيث ترمز المصفوفة $[F]^{-1}$ إلى مقلوب مصفوفة الليونة للمنشأ.

- 6- يمكننا تعيين ردود الأفعال المجهولة باستخدام المعادلة:

$$\{R\} = \{R_0\} + [r]\{x\} \quad (2-3)$$

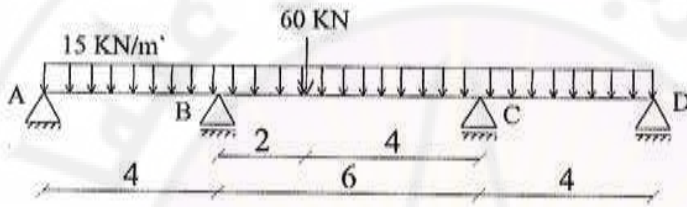
حيث ترمز:

- $\{R\}$: ردود الأفعال المجهولة في المنشأ الأصلي.
- $\{R_0\}$: ردود الأفعال في المنشأ المقرر نتيجة الأحمال الخارجية المطبقة.
- $[r]$: ردود الأفعال في المنشأ المقرر تحت تأثير واحدة القيم للقوى الفائضة.
- $\{x\}$: جملة القوى الفائضة المستخدمة في الحل.

4-2- أمثلة عامة General Examples

مثال (1):

يطلب تحليل المنشأ المبين بالشكل (6-2) باستخدام مصفوفة الليونة ورسم مخطط عزم الانعطاف وحساب رد الفعل في المسند C، وقيمة القص يمين المسند B. علماً أن $EI = \text{const}$.

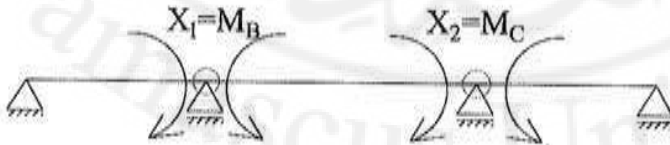


الشكل (6-2)

الحل:

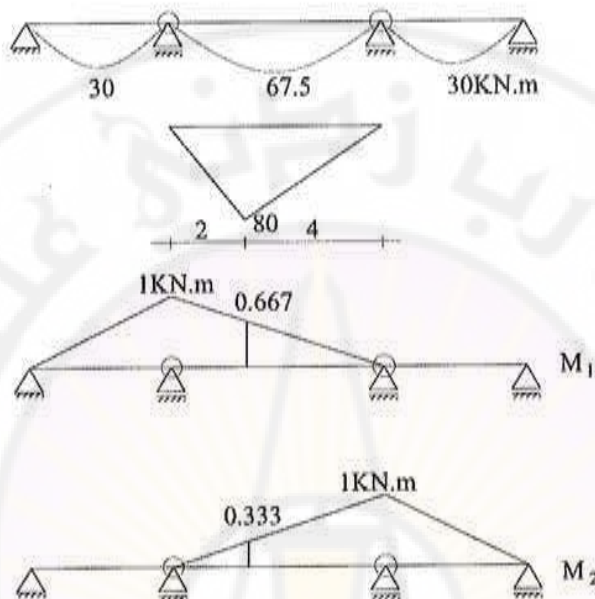
- 1- نلاحظ أن المنشأ غير مقرر سكونياً من الدرجة الثانية.
- 2- يمكننا تقرير المنشأ سكونياً بعدة طرق وسنختار التقرير بوضع مفاصل في المساند B, C كما في الشكل (7-2) وتكون مجاهيل المسألة هي العزوم في B, C.

$$\begin{aligned} x_1 &= M_B \\ x_2 &= M_C \end{aligned} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$



الشكل (7-2)

3- نرسم مخططات عزوم الانعطاف في الجملة المقررة وذلك نتيجة الأحمال الخارجية المطبقة M_0 ثم نتيجة واحدة الحمل باتجاه كل من المجاهيل السكونية المفروضة M_1, M_2 كما في الشكل (8-2).



الشكل (8-2)

4- نوجد الانتقالات باتجاه المجاهيل السكونية نتيجة الأحمال الخارجية باستخدام طريقة ضرب مخططات العزم.

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \left(+\frac{2}{3} * 30 * 4 * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * 67.5 * 6 * \frac{1}{2} + \frac{80 * 4}{2} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} + \frac{80 * 2}{2} * \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} \right) \right) \\ = -308.33 / EI$$

$$\delta_{20} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} * 30 * 4 * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * 67.5 * 6 * \frac{1}{2} + \frac{80 * 2}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{80 * 4}{2} * \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} \right) \right) \\ = -281.67 / EI$$

5- نوجد الانتقالات باتجاه المجاهيل السكونية نتيجة واحدة الحمل باتجاه المجاهيل:

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3} * 1 * 1 + \frac{6}{3} * 1 * 1 \right) = 3.33 / EI$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{6}{3} * 1 * 1 + \frac{4}{3} * 1 * 1 \right) = 3.33 / EI$$

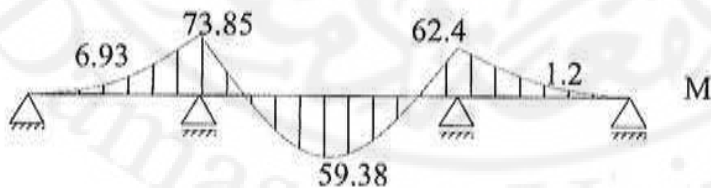
$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI} \left(\frac{6}{6} * 1 * 1 \right) = 1 / EI$$

6- نعوض في معادلة التوافق (2-1) لحساب المجاهيل:

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \end{Bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 308.33 \\ 281.67 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 3.33 & 1 \\ 1 & 3.33 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

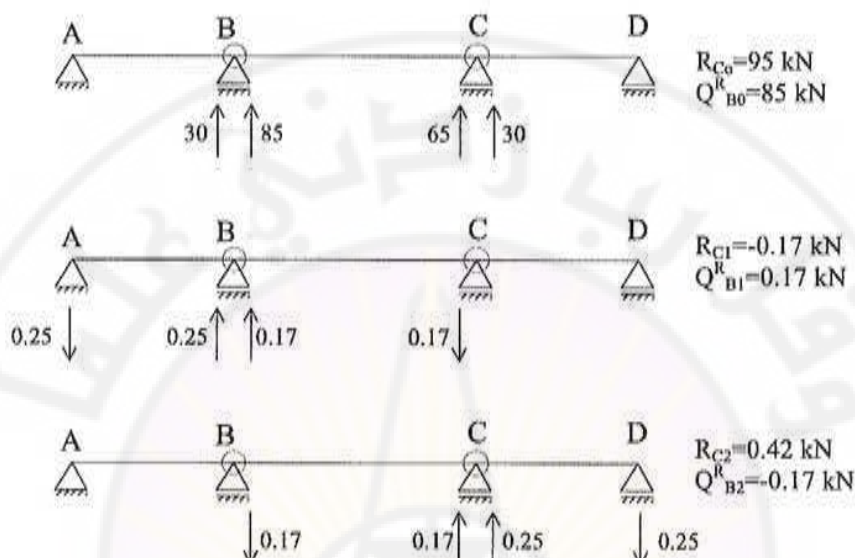
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 73.85 \\ 62.40 \end{Bmatrix} \text{ kN.m}$$

وهي العزوم عند المساند B, C، ويكون مخطط العزم النهائي للجائز كما في الشكل (٩-2-أ).



الشكل (٩-2-أ)

7- لحساب رد الفعل في C والقص يمين B نوجد قيمها في الجملة المقررة نتيجة الأحمال الخارجية ومن ثم نتيجة تطبيق القوى الواحدة باتجاه المجاهيل المفروضة حسب الشكل (8-2) وتكون قيمها كما في الشكل (9-2ب).



الشكل (9-2ب)

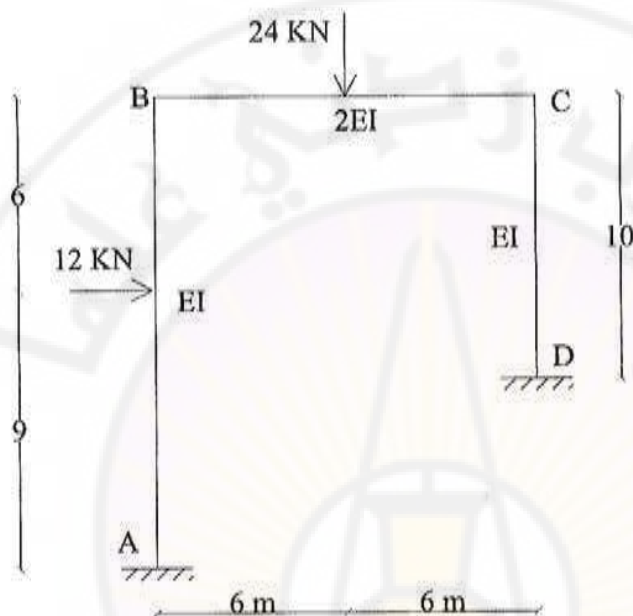
نطبق علاقة حساب ردود الأفعال (2-3):

$$\begin{Bmatrix} R_C \\ Q_B^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 95 \\ 85 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.17 & 0.42 \\ 0.17 & -0.17 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 73.85 \\ 62.40 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_C \\ Q_B^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 108.65 \\ 86.95 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

مثال (2):

يطلب تحليل الإطار المستوي المبين بالشكل (10-2) باستخدام مصفوفة المرونة ورسم مخطط عزم الانعطاف.

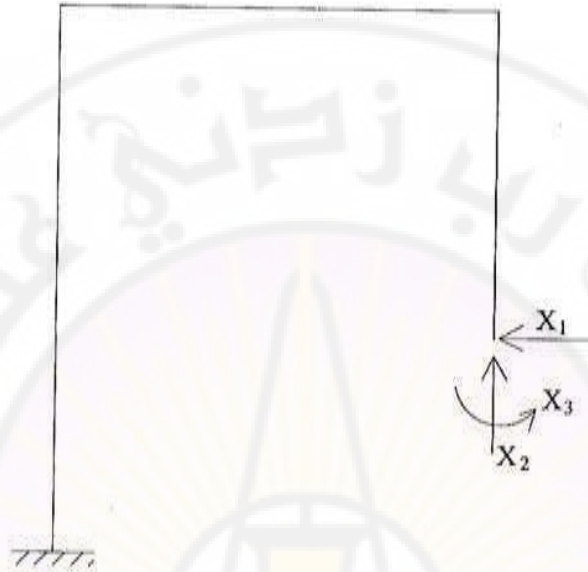


الشكل (10-2)

الحل:

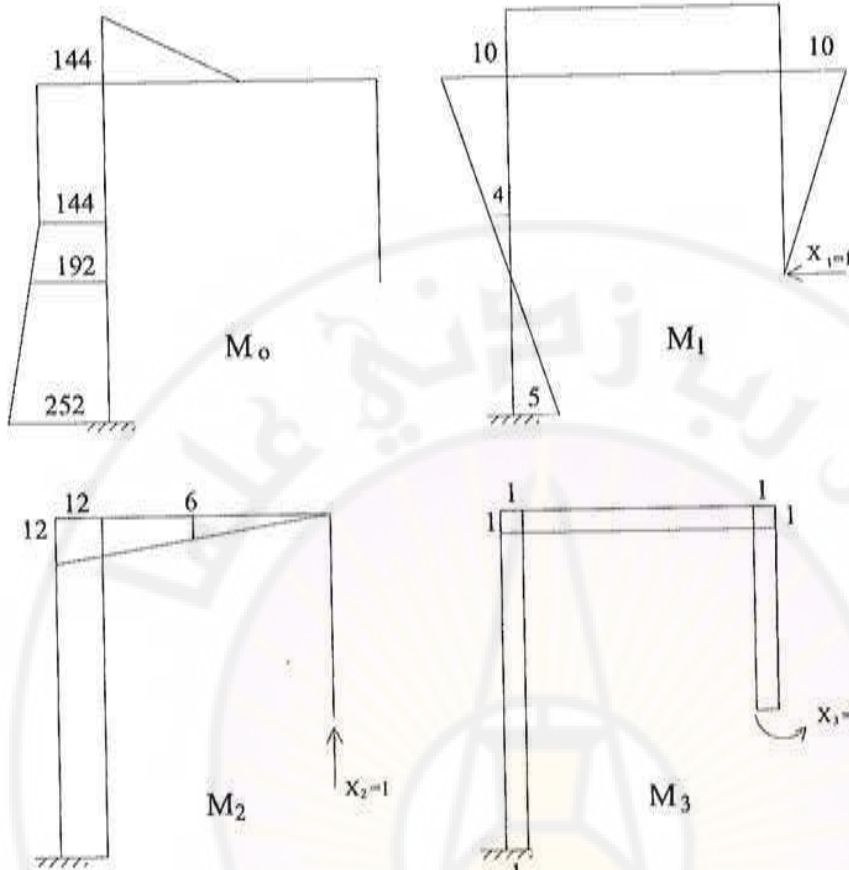
- 1- نلاحظ أن الإطار غير مقرر سكونياً من الدرجة الثالثة.
- 2- يمكننا تقريره بعدة طرق نختار التقرير بحذف الوثاقة (D) كما في الشكل (11-2) وتكون المجاهيل هي ردود الأفعال في (D):

$$\begin{aligned} x_1 &= H_D \\ x_2 &= V_D \\ x_3 &= M_D \end{aligned} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$



الشكل (11-2)

3- نرسم مخططات عزوم الانعطاف للجملة المقررة نتيجة الأحمال الخارجية M_0 ونتيجة واحدة القوى باتجاه المجاهيل M_1, M_2, M_3 كما في الشكل (12-2).



الشكل (12-2)

4- نوجد الانتقالات باتجاه المجاهيل السكونية والناجمة عن الأحمال الخارجية مع الانتباه إلى اختلاف عطالات العناصر:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} * \frac{144 * 6}{2} * 10 + \frac{4 + 10}{2} * 6 * 144 + \frac{9}{3} * (2 * 4 * 144 - 2 * 5 * 252 + 4 * 252 - 5 * 144) \right] = 4968 / EI$$

$$\delta_{20} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} * \frac{6}{3} * (2 * 12 * 144 + 6 * 144) + 12 * \left(144 * 6 + 9 * \frac{144 + 252}{2} \right) \right] = -36072 / EI$$

$$\delta_{30} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} * \frac{144 * 6}{2} + 144 * 6 + \frac{144 + 252}{2} * 9 \right] = -\frac{2862}{EI}$$

5- نوجد الانتقالات باتجاه المجاهيل السكونية والناجمة عن تطبيق واحدة الأحمال:

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{10}{3} * 10 * 10 * 2 + \frac{5}{3} * 5 * 5 + 10 * 12 * 10 * 0.5 \right) = 1308.33 / EI$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left(0.5 * \frac{12}{3} * 12^2 + 12 * 15 * 12 \right) = 2448 / EI$$

$$f_{33} = \frac{1}{EI} (0.5 * 1 * 12 + 1 * 10 + 1 * 15) = 31 / EI$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{EI} \left(0.5 * \frac{12 * 12}{2} * 10 + 12 (10 * 10 / 2 - 5 * 5 / 2) \right) = -810 / EI$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{-1}{EI} (0.5 * 10 * 12 + 2 * 10 * 10 / 2 - 5 * 5 / 2) = -147.5 / EI$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{1}{EI} \left(0.5 * \frac{12 * 12}{2} + 12 * 15 \right) = 216 / EI$$

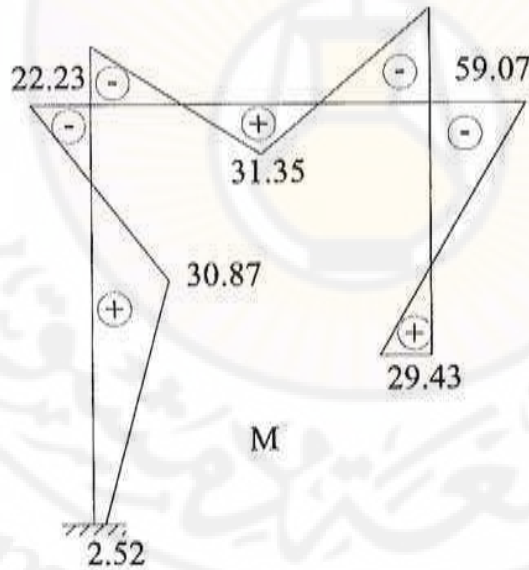
6- نعوض في معادلة التوافق (2-1):

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4968 \\ -36072 \\ -2862 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1308.3 & -810 & -147.5 \\ -810 & 2448 & 216 \\ -147.5 & 216 & 31 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.85 \text{ kN} \\ 15.07 \text{ kN} \\ 29.43 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

وهي ردود الأفعال في الوثيقة D.

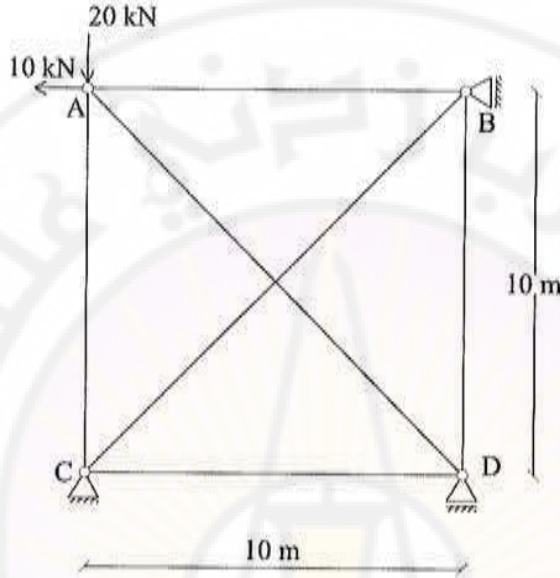
7- لرسم مخطط عزم الانعطاف النهائي نعوض في العلاقة (2-3) نجد أن مخطط العزم كما في الشكل (13-2).



الشكل (13-2)

مثال (3):

يطلب تحليل الجائز الشبكي المبين في الشكل (14-2) وإيجاد رد الفعل في المسند D علماً بأن (ثابت EA) لجميع عناصر المنشأ.

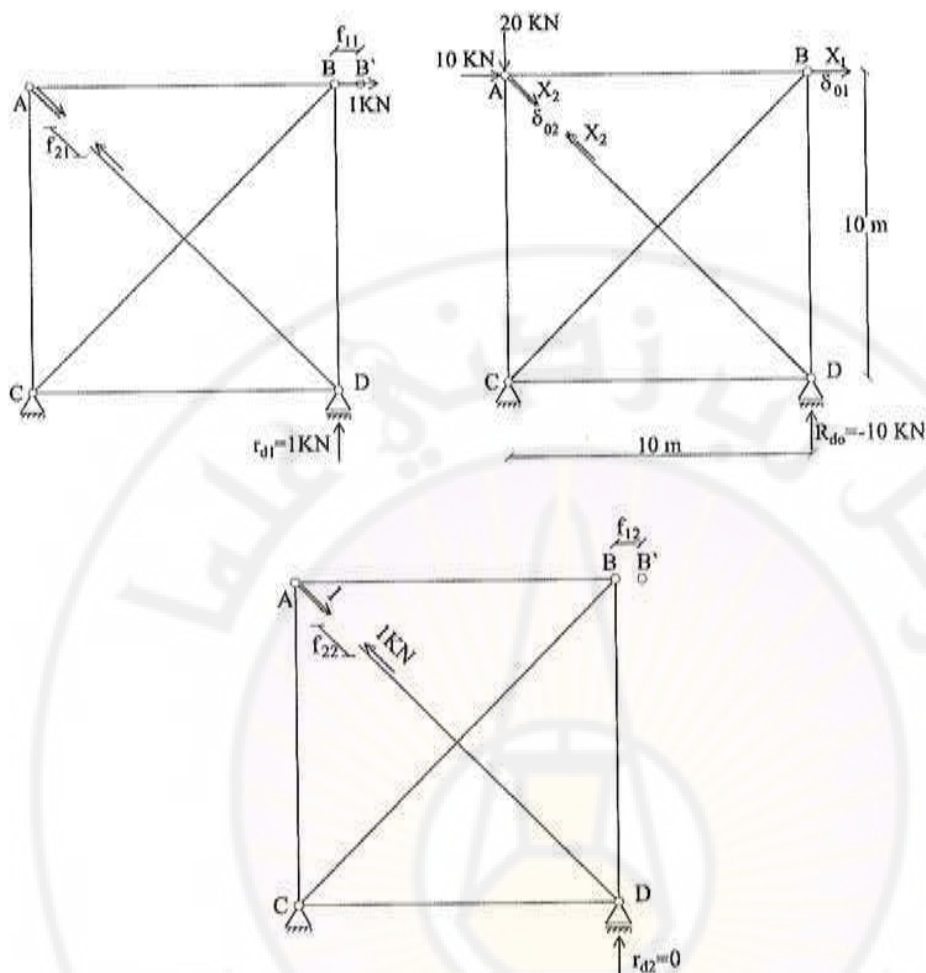


الشكل (14-2) معطيات المثال (3)

الحل:

1- نلاحظ أن المنشأ غير مقرر سكونياً من الدرجة الثانية (قيد إضافي داخلي وقيد إضافي خارجي).

2- يمكن اختيار جملة القوى الفائضة بعدد من الأساليب ويبين الشكل (15-2) الجملة الأساسية المستخدمة في الحل وذلك بحذف المسند B وقطع العنصر AD.



الشكل (15-2) جملة القوى والفائضة والانتقالات الموافقة لها

4- لتعيين مصفوفة الليونة للمنشأ نعين عوامل الليونة والتي تساوي الانتقالات الموافقة للقوى المجهولة نتيجة واحدة القيم لهذه القوى كما هو مبين في الأشكال (15-2 ب) و (15-2 ج) وبالإستعانة بالجدول (1-2) نجد:

$$f_{11} = \sum \frac{N_i N_i L}{EA} = \frac{38.27}{EA}$$

$$f_{21} = \sum \frac{N_2 N_1 L}{EA} = \frac{27.06}{EA}$$

$$f_{22} = \sum \frac{N_2 N_2 L}{EA} = \frac{48.27}{EA}$$

$$f_{12} = \frac{N_2 N_1 L}{EA} = \frac{27.06}{EA}$$

وبالتالي تكون مصفوفة الليونة للمنشأ معطاة بالعلاقة:

$$[F] = \frac{1}{EA} \begin{pmatrix} 38.27 & 27.06 \\ 27.06 & 48.27 \end{pmatrix}$$

5- باستخدام المعادلة (2-2) نجد أن جملة القوى الفائضة المجهولة تعطى بالعلاقة:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38.27}{EA} & \frac{27.06}{EA} \\ \frac{27.06}{EA} & \frac{48.27}{EA} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{-382.71}{EA} \\ \frac{-200}{EA} \end{Bmatrix} \right\}$$

وبالحل نجد:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.714 \\ -2.423 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

ومنه:

$$H_B = x_1 = 11.714 \text{ kN}$$

$$N_{AD} = x_2 = -2.423 \text{ kN} \quad (\text{ضغط})$$

6- لتحديد رد الفعل في المسند D نستخدم المعادلة (2-3):

$$R_D = R_{D0} + [r_{d1} \quad r_{d2}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

وباستخدام الأشكال (15-2 أ) و (15-2 ب) و (15-2 ج) والتعويض بالمعادلة (2-3) نجد:

$$R_D = -10 + [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} 11.714 \\ -2.432 \end{Bmatrix} = 1.714 \text{ kN}$$

وتدل الإشارة الموجبة لرد الفعل R_D بأن جهته الفعلية توافق الجهة المفروضة.

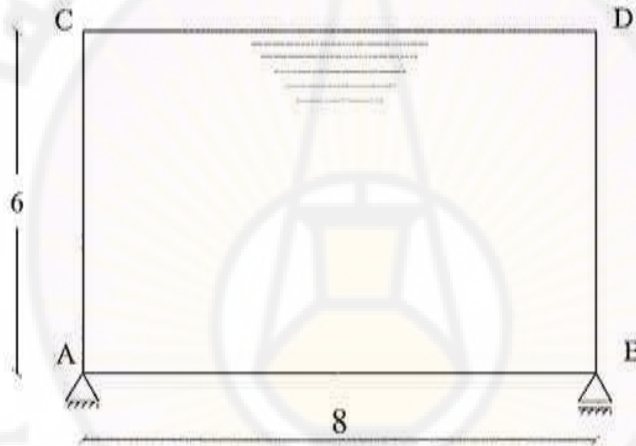
مثال (4):

للخزان المغلق المملوء بالماء المبين جانباً بالشكل (16-2) وباستخدام طريقة مصفوفة الليونة، وبإهمال المسافة بين سقف الخزان ومنسوب سطح الماء كونها صغيرة جداً، وبإهمال التشوهات المحورية يطلب:

1- رسم مخطط عزم الانعطاف النهائي.

2- إيجاد ردود الأفعال في المسند A.

- الوزن النوعي للماء $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$ و $EI = \text{Const}$ لعناصر الخزان.



الشكل (16-2) معطيات المثال (4)

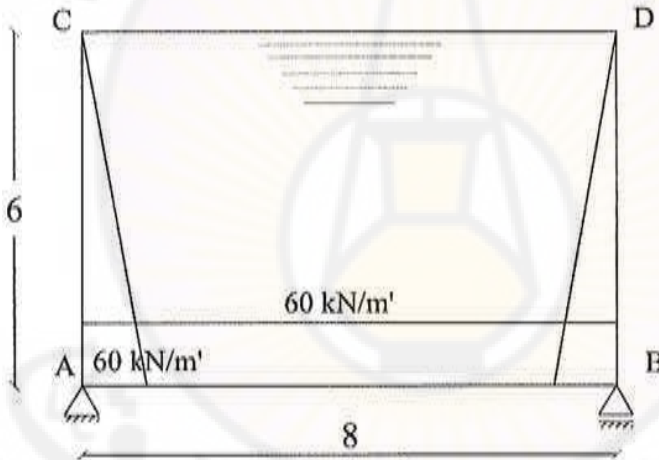
الحل:

1- المنشأ غير مقرر من الدرجة الثالثة وبسبب التناظر يصبح غير مقرر من الدرجة الثانية.

$$D_s = 2$$

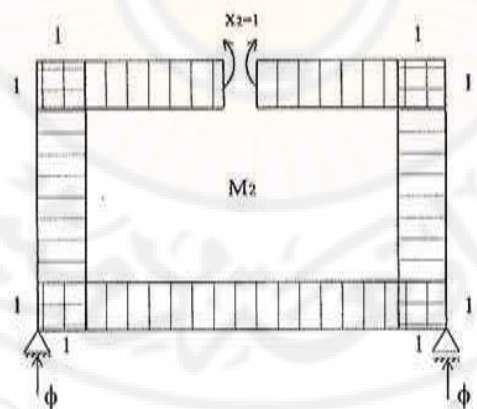
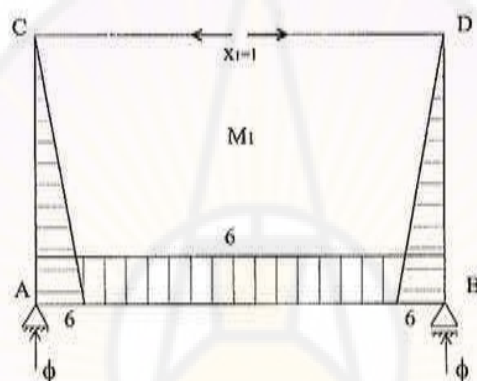
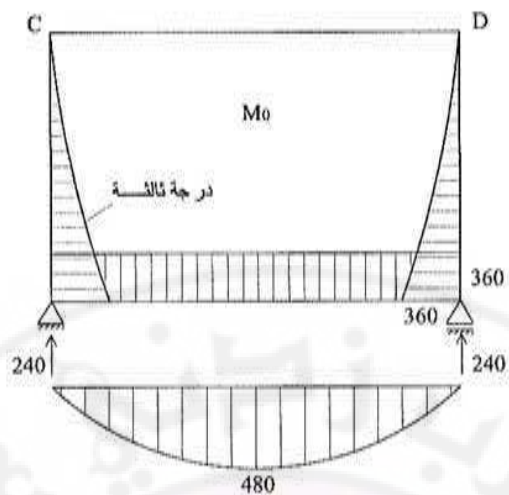
2- وشعاع المجاهيل $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$

والحمولات المطبقة على الخزان والنتيجة عن ضغط الماء على جدران الخزان وقاعدته مبينة بالشكل (17-2).



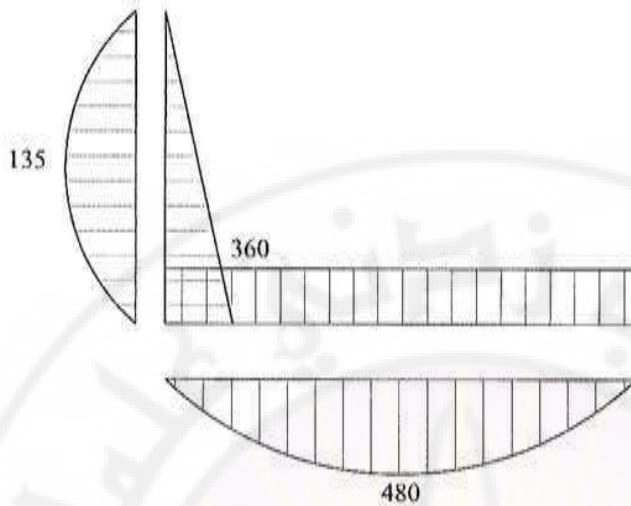
الشكل (17-2)

3- نرسم مخططات عزوم الانعطاف في الجملة المقررة وذلك نتيجة الأحمال المطبقة M_0 ثم نتيجة واحدة الحمل باتجاه كل من المجاهيل السكونية المفروضة M_1, M_2 كما في الشكل (18-2).



الشكل (18-2) مخططات العزوم

ويمكن رسم مخطط M_0 بطريقة أخرى كما في الشكل (19-2).



الشكل (19-2)

4- نوجد الانتقالات باتجاه المجاهيل السكونية نتيجة الأحمال الخارجية بطريقة ضرب مخططات العزم.

$$\delta_{10} = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{4} * 360 * 6 * \frac{4}{5} * 6 + 360 * 4 * 6 - \frac{2}{3} * 4 * 480 * 6 \right] = 7104/EI$$

$$\delta_{20} = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{4} * 360 * 6 * 1 + 360 * 4 - \frac{2}{3} * 4 * 480 \right] = 1400/EI$$

5- نوجد الانتقالات باتجاه المجاهيل السكونية نتيجة واحدة الحمل باتجاه المجاهيل:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left[\frac{6}{3} * 6^2 + 6 * 4 * 6 \right] = 432/EI$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI} [1 * 4 * 1 + 1 * 6 * 1 + 1 * 4 * 1] = 28/EI$$

$$\delta_{12} = \frac{2}{EI} \left[\frac{6 * 6}{2} * 1 + 6 * 4 * 1 \right] = 84/EI$$

6- نعوض في معادلة التوافق لحساب المجاهيل:

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 7104 \\ 1400 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 432 & 84 \\ 84 & 28 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16.133 \\ -1.6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kN.m} \end{matrix}$$

7- نرسم مخطط العزم النهائي بالتعويض في المعادلة:

$$\{M\} = \{M_0\} + [m] * \{x\}$$

ويكون مخطط العزم النهائي كما في الشكل (20-2)

الفصل الثالث

تحليل المنشآت باستخدام طريقة مصفوفة القساوة

1-3- مقدمة:

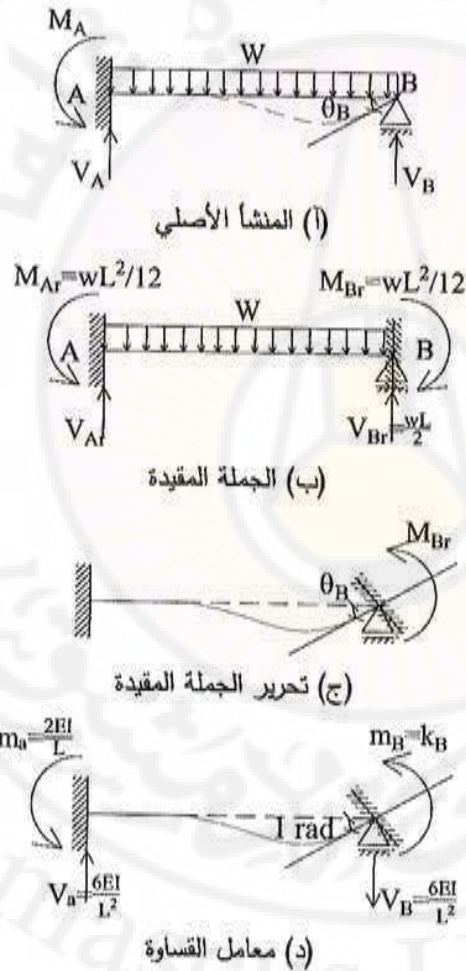
تعد طريقة مصفوفة القساوة الطريقة الأكثر استخداماً لتحليل الإنشائي للمنشآت الإطارية نظراً لملائمتها للبرمجة على الحاسبات الإلكترونية، حيث إن المجاهيل المستخدمة في الحل لهذه الطريقة هي الانتقالات العقدية لمختلف عناصر المنشأ والتي تكون محددة بشكل واضح وصريح لكل نوع من المنشآت بعكس المجاهيل المستخدمة في طريقة مصفوفة الليونة (وهي القوى المجهولة الفائضة عن معادلات التوازن في المنشأ) والتي يمكن اختيارها عادة بأكثر من أسلوب واحد بحسب درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ المدروس وحسب الجملة المقررة المختارة، وقد مر معنا في الفقرة (1-5) من الفصل الأول بأن درجة عدم التقرير الحركي لمنشأ هي عدد الانتقالات المجهولة في المنشأ والتي تتعلق بالشكل الهندسي للمنشأ وشكل الاستناد وطبيعة التشوهات المعتبرة في الحل (تشوهات محورية، تشوهات انعطاف.. الخ) وعليه نلاحظ أن عدد المجاهيل المعتبرة في الحل بطريقة مصفوفة القساوة يساوي درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ.

2-3- أمثلة تمهيدية Introductory Examples

لشرح مراحل طريقة مصفوفة القساوة نستعرض عدداً من الأمثلة التمهيدية والتي نفيدنا في استنتاج خطوات الحل لهذه الطريقة في مرحلة لاحقة من هذا الفصل.

مثال تمهيدي (1):

ندرس الظفر المسنود AB الخاضع إلى الأحمال الموزعة w كما هو مبين في الشكل (1-3 أ).



الشكل (1-3): مراحل حل الظفر المسنود بطريقة القساوة

للسهولة في الحل نهمل تأثير التشوهات المحورية في الحسابات مما يبقي إمكانية واحدة للانتقالات في المنشأ وهي الدوران في العقدة B (الشكل 1-3 أ) وبالتالي نجد أن المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الأولى.

في طريقة مصفوفة الليونة كانت الخطوة الأولى في الحل هي اختيار جملة أساسية مقررّة سكونياً بحيث تكون المجاهيل الفائضة معدومة ويقابل هذه الخطوة في طريقة مصفوفة القساوة تقرير المنشأ حركياً وذلك باستخدام قيود وهمية إضافية بحيث تصبح جميع المجاهيل الحركية في المنشأ معدومة ونسمي الجملة الناتجة عن إضافة القيود الإضافية بالجملة المقيدة (Restrained System) كما هو مبين في الشكل (1-3 ب). ينشأ في الوثيقة الوهمية في B مزدوجة M_{Br} تعطى بالعلاقة:

$$M_{Br} = \frac{w L^2}{12} \quad (a)$$

وبما أنه لا يوجد عزم وثيقة M_{Br} في الجانز الأصلي AB لذا ندرس الجملة المقيدة (1-3 ب) تحت تأثير مزدوجة مساوية ومعاكسة لـ M_{Br} ومطبقة في القيد الوهمي في B كما هو مبين في الشكل (1-3 ج). ويحدث تحت تأثير هذه المزدوجة زاوية دوران في الجانز θ_B ترتبط مع المزدوجة M_{Br} بالعلاقة:

$$M_{BrL} = \frac{4EI}{L} \theta_B \quad (b)$$

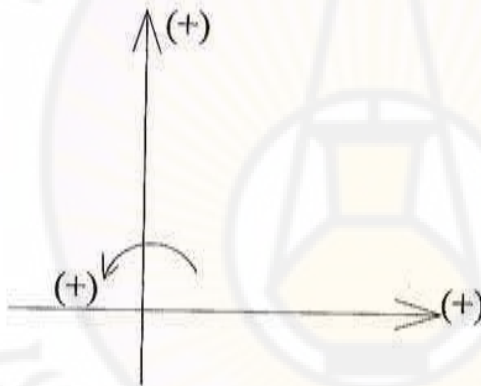
حيث I هو عزم عطالة مقطع الجانز حول محور الانعطاف و E معامل يونغ للجانز. وبمساواة قيمة العزم M_{Br} من العلاقة (a) و (b) نجد:

$$\frac{wL^2}{12} = \frac{4EI}{L} \theta_B \quad (c)$$

ومنه نجد:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

ويمكننا إعادة الخطوات السابقة بوضوح أكثر باستخدام اصطلاح موحد للإشارة كما هو مبين في الشكل (2-3) حيث نفرض جهة الانتقال والقوى الموجبة بالاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية وجهة العزم وزاوية الدوران الموجبة بعكس اتجاه عقارب الساعة.



الشكل (2-3) اصطلاح الإشارة

نرمز للعزم في B واللازم لإحداث زاوية دوران مقدارها 1 راديان $(\theta_B = 1 \text{ radian})$ بـ m_B ويعطى بالعلاقة:

$$m_B = \frac{4EI}{L} \quad (c)$$

ونعرف العزم m_B واللازم لإحداث زاوية دوران θ_B مقدارها 1 راديان بمعامل القساوة (flexibility coefficient) للعقدة B ونرمز له بالرمز k_B ويعطى بالعلاقة:

$$k_B = m_B = \frac{4EI}{L} \quad (f)$$

وباستخدام مبدأ جمع الآثار يمكن التعبير عن توازن العقدة B في المنشأ الأصلي AB بالعلاقة:

$$M_{Br} + k_B \theta_B = 0 \quad (g)$$

وباستخدام اصطلاح الإشارة المبين في الشكل (2-3) نجد أن قيمة عزم الوثاقة M_{Br} في المسند الوهمي معطى بالعلاقة:

$$M_{Br} = -\frac{wL^2}{12} \quad (h)$$

وبالتعويض بقيم المعادلات (f) و (h) في العلاقة (g) نجد:

$$-\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \theta_B = 0$$

ومنه:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

وهي قيمة مطابقة لتلك المستخرجة بالمعادلة (d).

ويمكننا استخدام مبدأ جمع الآثار لتعيين قيم ردود الأفعال في الوثاقة A حيث نجد:

$$V_B = V_{Br} + v_b * \theta_B \quad (i)$$

$$M_A = M_{Ar} + m_a * \theta_B \quad (j)$$

حيث:

V_{Br} : رد الفعل الشاقولي في الوثاقة B للجملة المقيدة.

M_{Ar} : عزم الوثاقة في A للجملة المقيدة.

V_b : رد الفعل في B والناتج عن دوران الوثاقة في B بمقدار 1 راديان.

M_a : عزم الوثاقة في A والناتج عن دوران الوثاقة في B بمقدار 1 راديان.

وباستخدام قيم ردود الأفعال المبينة في الشكل (1-3) وقيمة زاوية الدوران θ_B المعطاة بالعلاقة (d) نجد:

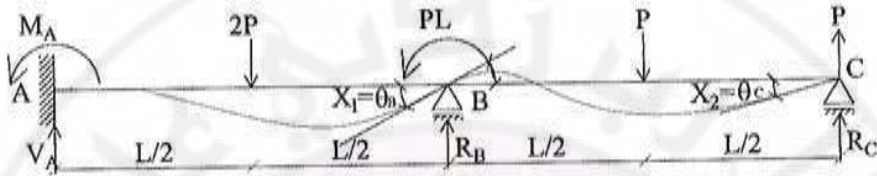
$$V_B = \frac{wL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{wL^3}{48EI} \right) = \frac{3wL}{8} \quad (k)$$

$$M_A = \frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \left(\frac{wL^3}{48EI} \right) = \frac{wL^2}{8} \quad (l)$$

ونلاحظ أن قيمة رد الفعل في B توافق تلك التي تم استخراجها في الفصل الثاني بطريقة مصفوفة الليونة.

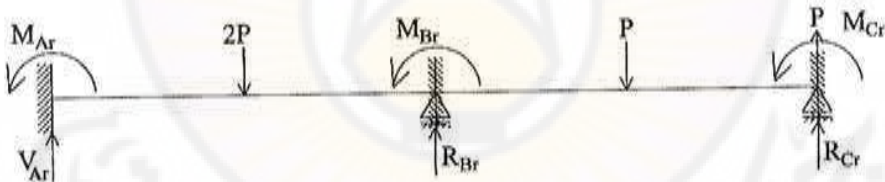
مثال تمهيدي (2):

ندرس الجانز المستمر ABC المبين في الشكل (3-3) ونقوم بتحليله وفق طريقة مصفوفة القساوة علماً بأننا سبق وحللنا الجانز نفسه وفق طريقة مصفوفة الليونة في الفصل الثاني.

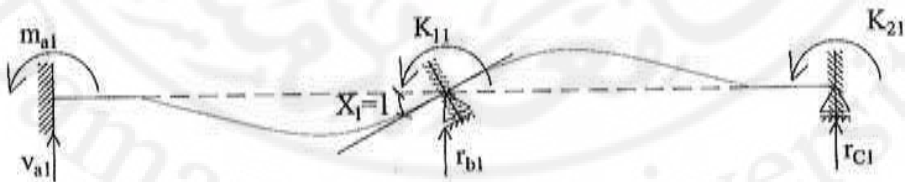


الشكل (3-3): تحليل الجانز المستمر وفق طريقة القساوة

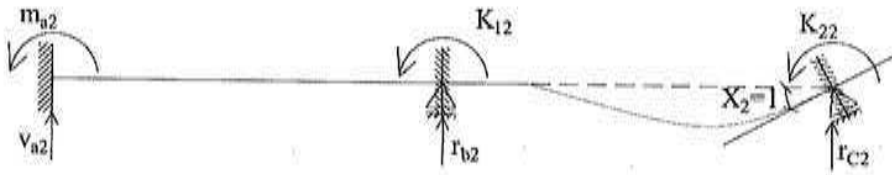
بإهمال تأثير التشوهات المحورية نلاحظ أن المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الثانية وأن المجاهيل الحركية المجهولة هي قيم زاويتي الدوران في العقدتين B, C ويظهر الشكل (2-3) الاتجاهات الموجبة لهذه المجاهيل.



(4-3 أ): الجملة المقيدة



(4-3 ب): عوامل القساوة للمجهول x_1



(4-3 ج): عوامل القساوة للمجهول x_2

الشكل (4-3) مراحل تحليل الجانز المستمر بطريقة القساوة

لتقرير المنشأ حركياً نستخدم وثائق وهمية مانعة لزوايا الدوران المجهولة في العقدتين B, C ونسمي الجملة الناتجة بالجملة المقيدة كما هو مبين في الشكل (4-3 أ) وينشأ في مساند المنشأ المقيد ردود أفعال مختلفة نميزها بإضافة الحرف (r) إلى دليل الرمز لمختلف القوى.

لتحديد عوامل القساوة الموافقة للمجاهيل الحركية نعطي المجهول الحركي الأول x_1 (وهو في هذه الحالة زاوية الدوران θ_b) قيمة واحدة ونرمز لقيمة العزم في B واللازم لإحداث زاوية دوران $(x_1 = \theta_b = 1)$ بـ k_{11} كذلك نرمز للعزم المتولد في الوثيقة الوهمية في c والمتولد عن $(x_1 = \theta_b = 1)$ بـ k_{21} (الشكل 4-3 ب) أما قيم ردود الأفعال المتولدة في مختلف وثائق الجملة المقيدة فنرمز لها بأحرف صغيرة $(m_{a1}, r_{c1}, r_{b1} \dots \text{الخ})$.

وبشكل مماثل يمكن تعيين مقادير عوامل القساوة وردود الأفعال المختلفة للمنشأ المقيد والناتجة عن واحدة القيم المجهول $(x_2 = \theta_c = 1)$ كما هو مبين في الشكل (4-3 ج).

باستخدام مبدأ جمع الآثار يمكن التعبير عن توازن العقدتين B, C كما يلي:

$$M_B = P * L = M_{Br} + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 \quad (a)$$

$$M_C = 0 = M_{Cr} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 \quad (b)$$

ويمكننا كتابة المعادلات (a)، (b) بشكل مصفوفي كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Br} \\ M_{Cr} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

وبشكل مختصر يمكن كتابة المعادلة (c) كما يلي:

$$\{P\} = \{P_r\} + [K]\{x\} \quad (d)$$

حيث نسمي المصفوفة $[K]$ مصفوفة القساوة للمنشأ أما الشعاع $\{P\}$ فيرمز إلى جملة القوى الخارجية الموافقة للمجاهيل الحركية. وبشكل مماثل يرمز الشعاع $\{P_r\}$ إلى ردود الأفعال الموافقة للمجاهيل الحركية والمتولدة في الجملة المقيدة.

وبشكل مماثل يمكننا تعيين ردود الأفعال في الجانز المستمر ABC باستخدام مبدأ جمع الآثار كما يلي:

$$R_B = R_{Br} + r_{b1} * x_1 + r_{b2} * x_2 \quad (e)$$

$$R_C = R_{Cr} + r_{c1} * x_1 + r_{c2} * x_2 \quad (f)$$

ويمكننا كتابة المعادلات (e) و (f) بشكل مصفوفي بالعلاقة:

$$\begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Br} \\ R_{Cr} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} r_{b1} & r_{b2} \\ r_{c1} & r_{c2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

وبشكل عام تأخذ المعادلة (g) الشكل التالي:

$$\{R\} = \{R_r\} + [r]\{x\} \quad (h)$$

حيث:

$\{R\}$: ردود الأفعال في المنشأ الأصلي تحت تأثير الأحمال المطبقة.

$\{R_r\}$: ردود الأفعال في المنشأ المقيد تحت تأثير الأحمال المطبقة.

$[r]$: ردود الأفعال في المنشأ المقيد تحت تأثير وحدات القيم للمجاهيل

الحركية المختلفة.

$\{x\}$: قيم المجاهيل الحركية.

ونلاحظ من الشكل (4-3) أن حساب قيم عوامل القساوة وردود الأفعال المختلفة في الجملة المقيدة يتطلب تحديد ردود أفعال الجوائز الموثوقة تحت تأثير القوى المطبقة، وبين الملحق (ب) قيم ردود أفعال الجوائز الموثوقة تحت تأثير بعض الأحمال الشهيرة.

وبالعودة إلى الشكل (4-3) واستخدام النتائج المعطاة بالملحق (ب) يمكن أن نبين عوامل القساوة وردود أفعال الجملة المقيدة كما يلي:

$$M_{Br} = (M_{Br})_{BA} + (M_{Br})_{BC}$$

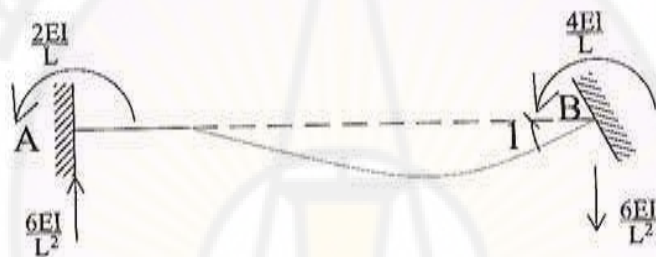
$$= -(2P)\frac{L}{8} + P\frac{L}{8} = -\frac{PL}{8}$$

$$R_{Br} = (R_{Br})_{BA} + (R_{Br})_{BC}$$

$$= \frac{2P}{2} + \frac{P}{2} = \frac{3P}{2}$$

$$M_{Cr} = (M_{Cr})_{CB} = -\frac{PL}{8}$$

$$R_{Cr} = (R_{Cr})_{CB} = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$$



$$k_{11} = (k_{11})_{BA} + (k_{11})_{BC}$$

$$= \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L}$$

$$k_{21} = (k_{21})_{CB} = \frac{2EI}{L}$$

$$k_{12} = (k_{12})_{BC} = \frac{2EI}{L}$$

$$k_{22} = (k_{22})_{CB} = \frac{4EI}{L}$$

$$r_{b1} = (r_{b1})_{BA} + (r_{b1})_{BC}$$

$$= -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} = 0$$

$$r_{c1} = (r_{c1})_{CB} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$r_{b2} = (r_{b2})_{BC} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$r_{c2} = (r_{c2})_{CB} = -\frac{6EI}{L^2}$$

ومنه نجد:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} M_{Br} \\ M_{Cr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} \quad (j)$$

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \quad (k)$$

$$[r] = \begin{pmatrix} r_{b1} & r_{b2} \\ r_{c1} & r_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -6\frac{EI}{L^2} \end{pmatrix} \quad (l)$$

$$\{R_r\} = \begin{Bmatrix} R_{Br} \\ R_{Cr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3P}{2} \\ -\frac{P}{2} \end{Bmatrix} \quad (m)$$

وبتعويض قيم المعادلات (i) و (j) و (b) في المعادلة (d) نجد:

$$PL \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{PL}{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2EI}{L} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \frac{L}{14EI} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \left\{ PL \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{PL}{8} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right\} \\ &= \frac{L}{14EI} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} * \frac{PL}{8} \begin{Bmatrix} 9 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{112EI} \begin{Bmatrix} 17 \\ -15 \end{Bmatrix} \quad (n) \end{aligned}$$

ومنه:

$$x_1 = \theta_B = \frac{17 PL^2}{112 EI}$$

$$x_2 = \theta_C = \frac{-5 PL^2}{112 EI}$$

ومن أجل الحصول على قيم ردود الأفعال نعوض قيم المعادلات (l)، (m)، (n) بالمعادلة (g) فنجد:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} &= \frac{P}{2} \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{6EI}{L^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} * \frac{PL^2}{112EI} \begin{Bmatrix} 17 \\ -15 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{P}{2} \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix} + \frac{3P}{56} \begin{Bmatrix} -5 \\ -12 \end{Bmatrix} = \frac{P}{56} \begin{Bmatrix} 69 \\ -64 \end{Bmatrix} \quad (p) \end{aligned}$$

ومنه:

$$R_B = \frac{69}{56} P$$

$$R_C = -\frac{64}{56} P$$

وهذه القيم ردود الأفعال في B, C موافقة للقيم المستخرجة لردود الأفعال نفسها عند حل المثال بطريقة مصفوفة الليونة والتي درست في الفصل الثاني.

3-3- خطوات الحل في طريقة مصفوفة القساوة Solution Steps in the Stiffness Method

من خلال الأمثلة التمهيدية والتي تمت دراستها في الفقرة (2-3) يمكن استنتاج الخطوات التالية للتحليل الإنشائي وفق طريقة مصفوفة القساوة:

1- تحديد درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ (والتي تساوي عدد الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ).

2- تحديد الانتقالات المجهولة وفق تسلسل محدد ($x_1, x_2, \dots$ الخ) ونقوم بتقرير المنشأ حركياً باستخدام قيود إضافية مانعة للانتقالات المجهولة في عقد المنشأ ونرمز للجملة المؤلفة من المنشأ الأصلي ومجموعة القيود الإضافية المانعة للحركة في عقد المنشأ بالجملة المقيدة (restrained system) وتحديد

$$\text{شعاع المجاهيل} \cdot \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

3- تحديد شعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$ المطبقة مباشرة باتجاهات المجاهيل الحركية المدروسة.

4- تحديد شعاع ردود الأفعال $\{P_r\}$ المتولدة في القيود المضافة باتجاه المجاهيل الحركية نتيجة تطبيق الأحمال الخارجية (باستثناء الحمولات المطبقة باتجاه المجاهيل الواردة في المرحلة 3 السابقة).

ويمكن الاستعانة بالجدول المعطاة في الملحق (ب) لبعض الأحمال الشهيرة. كذلك نقوم بتحديد ردود الأفعال المطلوبة للجملة المقيدة والناجمة عن الأحمال الخارجية (باستثناء الأحمال المطبقة بشكل مباشر) ونرمز لردود الأفعال هذه بالشعاع $\{R_r\}$.

وبأسلوب مشابه نحدد القوى الداخلية المطلوبة $\{Q_r\}$.

5- تحديد عوامل القساوة k_{ij} للمنشأ المقيدة والتي تساوي رد الفعل المتولد في القيد الإضافي باتجاه المجهول الحركي (x_i) نتيجة واحدة الانتقالات باتجاه المجهولة x_j . وبتكرار هذه العملية على كامل المجاهيل الحركية المعتبرة نحصل على مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ.

كذلك نحدد ردود الأفعال المطلوبة r_i والنااتجة عن واحدة الانتقالات للمجهول الحركي x_i فنحصل على مصفوفة ردود الأفعال $[r]$ للجملة المقيدة والنااتجة عن تأثير واحدة الانتقالات لمختلف المجاهيل الحركية المدروسة في المنشأ.

6- باستخدام مبدأ جمع الآثار يمكن التعبير عن معادلات التوازن في عقد المنشأ بالعلاقة:

$$\{P\} = \{P_r\} + [K]\{x\} \quad (3-1)$$

حيث ترمز:

$\{P\}$: شعاع الأحمال الخارجية المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية المدروسة.

$\{P_r\}$: شعاع ردود الأفعال المتولدة في القيود المضافة باتجاه المجاهيل الحركية المدروسة نتيجة لتطبيق الأحمال الخارجية (باستثناء الأحمال المطبقة بشكل مباشر باتجاه المجاهيل الحركية).

$[K]$: مصفوفة القساوة للمنشأ.

$\{x\}$: شعاع المجاهيل الحركية (الانتقالات العقدية المجهولة) للمنشأ المدروس.

7- من أجل تعيين المجاهيل الحركية في المنشأ المدروس نستخدم المعادلة (3-1) لنحصل على:

$$\{x\} = [K]^{-1} \{ \{P\} - \{P_r\} \} \quad (3-2)$$

حيث ترمز المصفوفة $[K]^{-1}$ إلى مقلوب مصفوفة القساوة $[K]$ ويمكن في كثير من الحالات تعيين المجاهيل الحركية $\{x\}$ بشكل مباشر بحل جملة المعادلات الخطية (3-1) بإحدى طرق حل المصفوفات المعروفة أو الحل باستخدام الآلة الحاسبة.

8- تعيين ردود الأفعال في المنشأ المدروس حسب مبدأ جمع الآثار وفق العلاقة:

$$\{R\} = \{R_r\} + [r]\{x\} \quad (3-3)$$

حيث:

$\{R\}$: ردود الأفعال المطلوبة في المنشأ الأصلي.

$\{R_r\}$: ردود الأفعال المطلوبة في الجملة المقيدة نتيجة تطبيق الأحمال الخارجية (باستثناء الأحمال المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية).
 $[r]$: ردود الأفعال في الجملة المقيدة نتيجة واحدة الانتقالات باتجاه المجاهيل الحركية.

$\{x\}$: قيمة المجاهيل الحركية المستخرجة من الخطوة السابقة في الحل.

9- تعيين القوى الداخلية في أي نقطة من نقاط المنشأ الأصلي باستخدام مبدأ جمع الآثار بتطبيق العلاقة:

$$\{Q\} = \{Q_r\} + [q]\{x\} \quad (3-4)$$

حيث:

$\{Q\}$: القوى الداخلية المطلوبة في المنشأ الأصلي.

$\{Q_r\}$: القوى الداخلية المطلوبة المتولدة في الجملة المقيدة نتيجة تطبيق الأحمال الخارجية باستثناء تلك المطبقة بشكل مباشر باتجاه المجاهيل الحركية.

$[q]$: القوى الداخلية المتولدة في الجملة المقيدة والناجمة عن واحدة الانتقالات باتجاه المجاهيل الحركية.

$[x]$: قيم المجاهيل الحركية المستخرجة من الخطوة (7) في الحل.

يلاحظ أن القوى الداخلية المطلوبة قد تكون قوى قص أو قوى محورية أو عزوم فتل... الخ.

مما سبق نلاحظ أن خطوات الحل وفق طريقة مصفوفة القساوة متشابهة مع خطوات طريقة مصفوفة الليونة والتي سبق ودرسناها في الفصل الثاني. ويبين الجدول (1-3) أوجه التشابه في خطوات الحل وفق طريقتي مصفوفة الليونة ومصفوفة القساوة.

الجدول (1-3) مقارنة خطوات الحل في كل من طريقتي مصفوفة الليونة ومصفوفة القساوة

خطوات الحل	طريقة مصفوفة الليونة	طريقة مصفوفة القساوة
1	تحديد درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ	تحديد درجة عدم التقرير الحركي للمنشأ
2	تقرير المنشأ مكونياً بإزالة القيود الفائضة عن معادلات التوازن	تقرير المنشأ حركياً باستخدام قيود إضافية لمنع الانتقالات المجهولة (تقييد المنشأ)
3	تحديد القوى الفائضة المجهولة $\{x\}$	تحديد الانتقالات المجهولة $\{\delta\}$
4	تعيين الانتقالات المقررة الموافقة للقوى الفائضة المجهولة: $\{\delta_0\}$	تعيين ردود أفعال القيود المضافة نتيجة الأحمال المطبقة بين العقد: $\{P_r\}$
5	استخراج مصفوفة الليونة $[F]$ للمنشأ وشعاع الانتقالات المفروضة $\{\delta_s\}$	استخراج مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ وشعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$
6	تعيين القوى الفائضة من خلال تطبيق معادلات التوافق للمنشأ: $\{\delta_s\} = \{\delta_0\} + [F]\{x\}$	تعيين الانتقالات المجهولة من خلال تطبيق معادلات التوازن في المنشأ: $\{\delta\} = \{P_r\} + [K]\{\delta\}$
7	تعيين ردود الأفعال المجهولة: $\{R\} = \{R_0\} + [r]\{x\}$	تعيين ردود الأفعال المجهولة: $\{R\} = \{R_r\} + [r]\{\delta\}$
8	تعيين القوى الداخلية المجهولة: $\{Q\} = \{Q_0\} + [q]\{x\}$	تعيين القوى الداخلية المجهولة: $\{Q\} = \{Q_r\} + [q]\{\delta\}$

4-3- تحليل المنشآت الإطارية باستخدام طريقة مصفوفة القساوة:

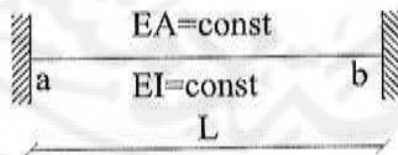
Analysis of plane frames by the stiffness method

تتألف المنشآت الإطارية المستوية من عناصر خطية ندعوها بالعناصر الجائزية وهذه العناصر تتصل فيما بينها بعقد صلبة قادرة على مقاومة العزوم المتولدة فيها نتيجة للأحمال الخارجية المطبقة في مستوى الإطار كما هو مبين في الشكل (4-1).

من أجل تحليل المنشآت الإطارية باستخدام طريقة القساوة لا بد من دراسة الجمل المقيدة لهذه المنشآت تحت تأثير الأحمال الخارجية وتحت تأثير واحدات القيم لمختلف الانتقالات الممكنة لعقد هذه المنشآت ومن أجل تسهيل هذه الخطوة نركز اهتمامنا على دراسة العنصر الأساسي لهذه المنشآت (العنصر الجائزي) وردود الأفعال المتولدة به نتيجة لواحدات القيم لمختلف الانتقالات الممكنة في العقد التابعة له كما هو موضح في الفقرة التالية:

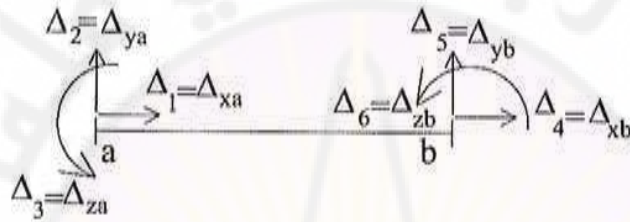
4-3-1- عوامل القساوة للعنصر الجائزي Stifness coefficients of a beam element

ندرس العنصر الجائزي ab المقيد في العقدتين a, b بوثوقات لمنع الانتقالات الممكنة لهذه العقد كما هو مبين في الشكل (5-3).



الشكل (5-3): الجملة المقيدة للعنصر الجائزي

ونلاحظ أن كل عقدة من عقدتي العنصر تملك ثلاثة إمكانيات للحركة في المستوى قبل التقييد وهذه الإمكانيات هي الانتقال باتجاه المحورين الإحداثيين x و y والدوران حول المحور z المتعامد مع مستوي العنصر، وبذلك يملك العنصر ست درجات للحركة في الانتقالات ونرمز لهذه الانتقالات $\Delta_i = (i = 1, 2, \dots, 6)$ كما هو مبين في الشكل (6-3) مع ضرورة اعتبار الاتجاه الموجب للانتقالات.

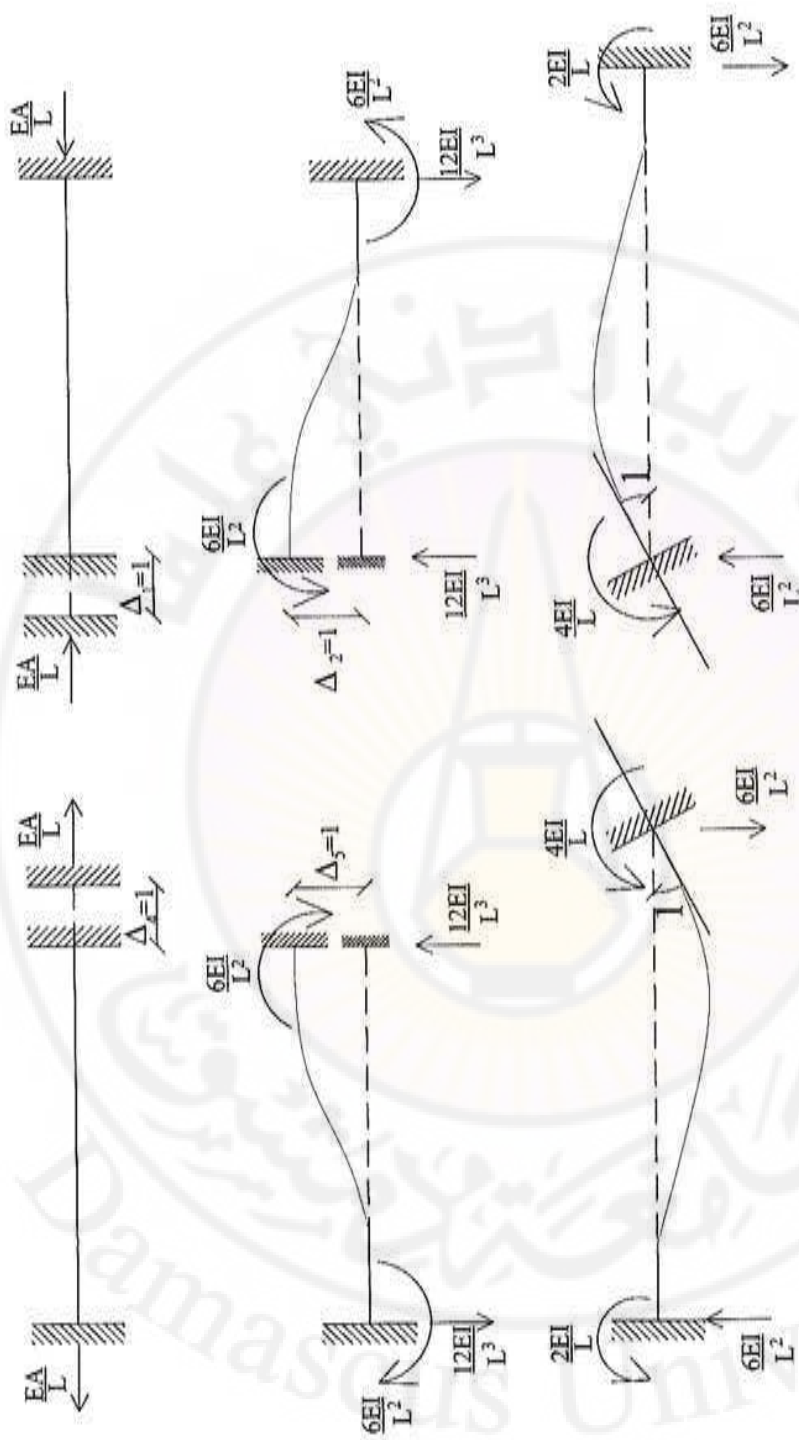


الشكل (6-3): درجات الحرية الحركية للعنصر الجانزي

نعرف عامل القساوة k_{ij} بمقدار رد الفعل المتولد في الاتجاه (j) نتيجة لوحدة الانتقالات في الاتجاه (i) مع بقاء بقية الانتقالات بالاتجاهات الأخرى معدومة.

وللحصول على عوامل القساوة للعنصر الجانزي نطبق على العقد a و b وبالترتيب واحدة القيم لكل انتقال ممكن (مع بقاء الانتقالات الأخرى كافة معدومة) كما هو مبين في الأشكال (7-3) ونقوم بتحديد ردود الأفعال المتولدة في وثائق العنصر والمساوية بالتعريف لعوامل القساوة المطلوبة.

وبتحديد مقدار عوامل القساوة للعنصر الجانزي والموافقة لمختلف الانتقالات الممكنة في عقده يمكننا تحديد مصفوفة القساوة لأي منشأ إطراري وذلك بتجميع عوامل القساوة للعناصر الجانزية المشكلة لهذا المنشأ.



الشكل (7-3) عوامل القساوة للعنصر الجانبي المستوي

3-4-2 أمثلة (Examples):

مثال (1):

يطلب تحليل الإطار المبين في الشكل (8-3) باستخدام طريقة مصفوفة القساوة وإيجاد رد الفعل في A وذلك في الحالات التالية:

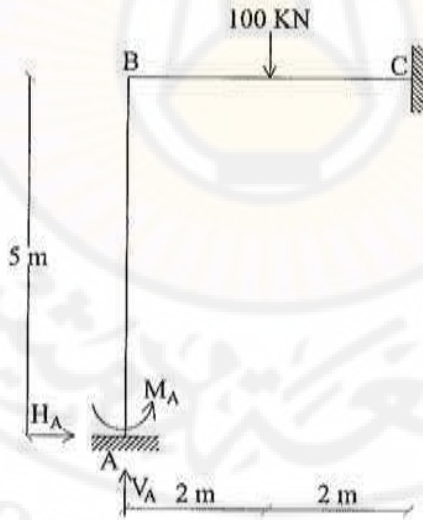
أ- أخذ تأثير التشوهات المحورية بالحسبان.

ب- إهمال تأثير التشوهات المحورية.

يؤخذ:

$$AE = 500 \text{ MN} = 500000 \text{ kN}$$

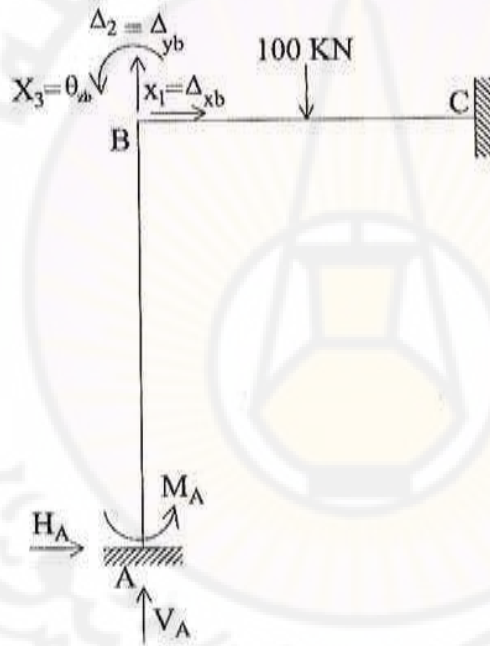
$$EI = 3 \text{ MN.m}^2 = 3000 \text{ kN.m}^2$$



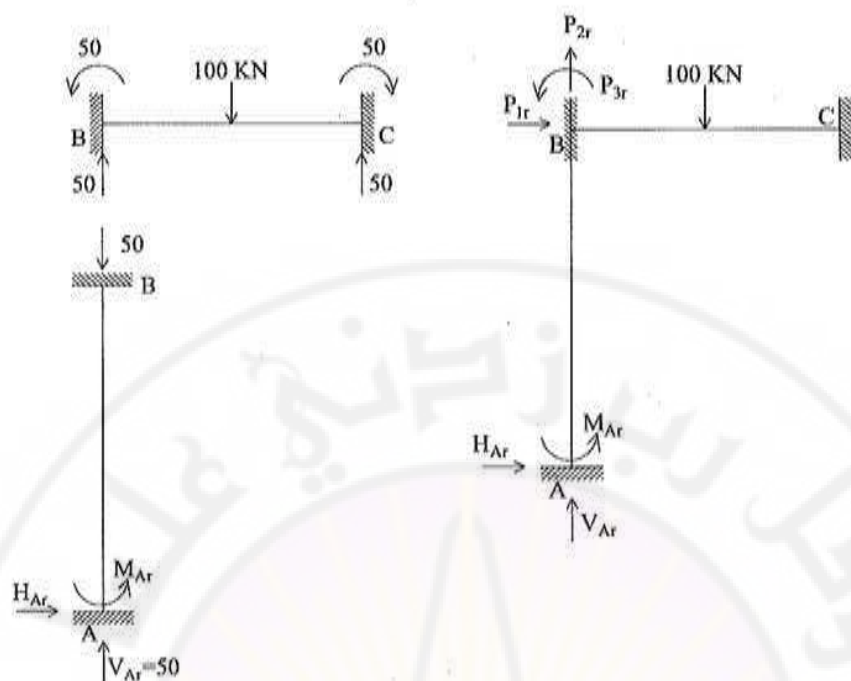
الشكل (8-3) معطيات المثال (2)

آ- التحليل مع أخذ التشوهات المحورية بالحسبان:

1- نلاحظ أن الانتقالات الممكنة في عقد المنشأ في حالة أخذ التشوهات المحورية بالحسبان هي ثلاثة في العقدة B وهي الانتقال وفق المحورين الإحداثيين x و y والدوران حول المحور z المتعامد مع مستوي الإطار. كما هو مبين في الشكل (9-3 آ) ولتقرير المنشأ حركياً يلزمنا مسند وهمي (3 قيود وهمية) في العقدة B لمنع الانتقالات الممكنة في هذه العقدة (الشكل 9-3 ب).



(9-3 آ)



(9-3 ب)

الشكل (9-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

$$2- \text{تحديد المجاهيل الحركية في المنشأ وفق الترتيب} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

3- من الشكل (8-3) والشكل (9-3 أ) نلاحظ أن الأحمال الخارجية المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية معدومة وبالتالي:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

4- لتحديد الشعاعين $\{P_r\}$ و $\{R_r\}$ ندرس الجملة المقيدة للمنشأ الموضحة بالشكل (9-3 ب) فنجد بالاستعانة بالعلاقات المعطاة في الملحق (ب).

$$P_{1r} = (P_{1r})_{AB} + (P_{1r})_{BC}$$

$$0 + 0 = 0$$

$$P_{2r} = (P_{2r})_{AB} + (P_{2r})_{BC}$$

$$0 + 50 = 50 \text{ kN}$$

$$P_{3r} = (P_{3r})_{AB} + (P_{3r})_{BC}$$

$$0 + \frac{100 * 4}{8} = 50 \text{ kN.m}$$

$$H_{Ar} = 0$$

$$V_{Ar} = 0$$

$$M_{Ar} = 0$$

ومنه:

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \\ P_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 50 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$\{R_r\} = \begin{Bmatrix} H_{Ar} \\ V_{Ar} \\ M_{Ar} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتعيين مصفوفة القساوة [K] للمنشأ وكذلك مصفوفة ردود الأفعال [r] نطبق على الجملة المقيدة واحداثات انتقال باتجاه المجاهيل الحركية وبالترتيب، ونوجد عوامل القساوة المختلفة وردود الأفعال [r] وذلك كما هو موضح في الشكل (10-3).

بالعودة إلى الشكل (10-3) نجد:

$$k_{11} = (k_{11})_{BC} + (k_{11})_{BA}$$

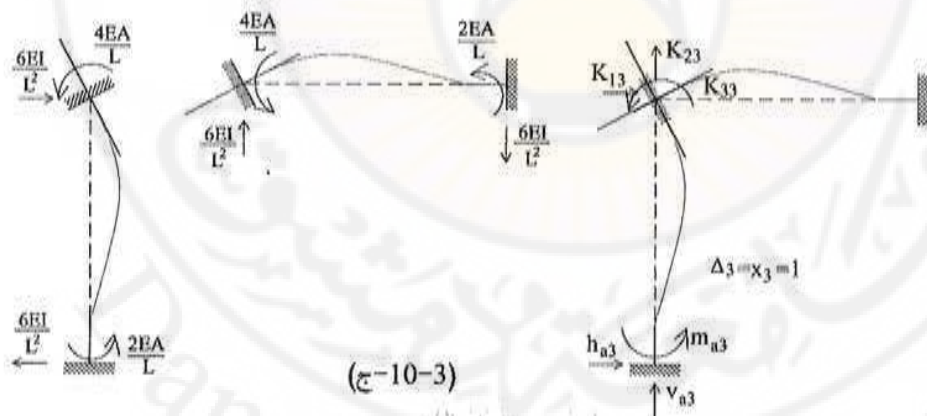
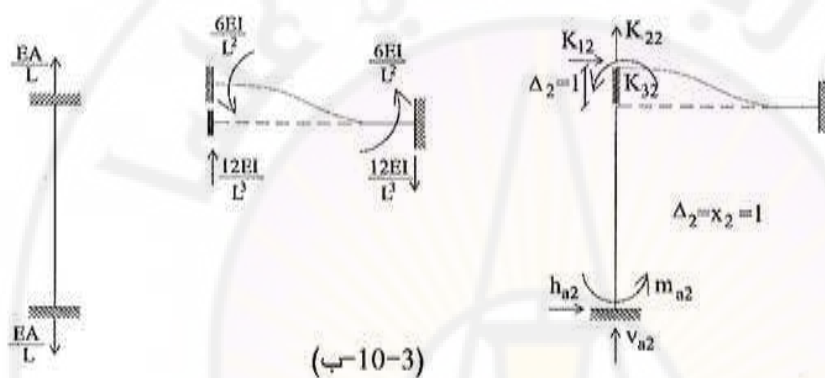
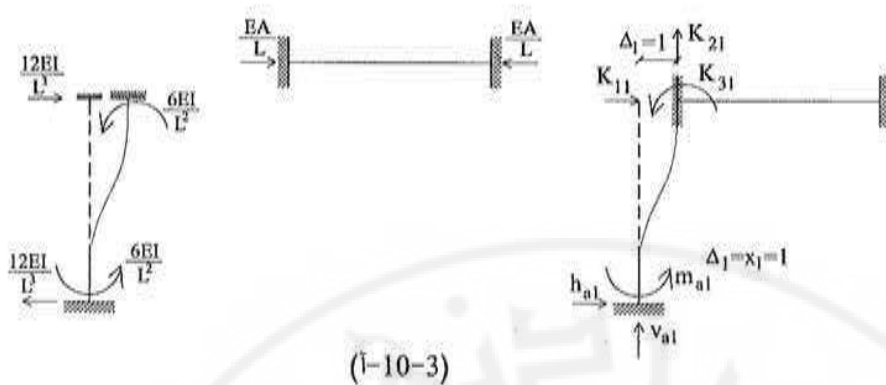
$$k_{11} = \frac{EA}{4} + \frac{12EI}{(5)^3} = \frac{500000}{4} + \frac{12(2000)}{(5)^3} = 125288$$

$$k_{21} = 0$$

$$k_{31} = (k_{31})_{BC} + (K_{31})_{BA}$$

$$= 0 + \frac{6EI}{(5)^2} = \frac{6(3000)}{(5)^2} = 720$$

$$h_{a1} = -\frac{12EI}{(5)^3} = -\frac{12(3000)}{(5)^3} = -288$$



الشكل (10-3): مراحل تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ

L: طول العنصر

وبالعودة إلى الشكل (10-3 ب) نجد:

$$k_{12} = (k_{12})_{BC} + (k_{12})_{BA}$$

$$0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned} k_{22} &= (k_{22})_{BC} + (k_{22})_{BA} \\ &= \frac{12EI}{(4)^3} + \frac{EA}{5} = \frac{12(3000)}{(4)^3} + \frac{500000}{5} = 100563 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{32} &= (k_{32})_{BC} + (k_{32})_{BA} \\ &= \frac{6EI}{(4)^2} + 0 = \frac{6(3000)}{(4)^2} = 1125 \end{aligned}$$

$$h_{a2} = 0$$

$$v_{a2} = -\frac{EA}{5} = \frac{500000}{5} = -100000$$

$$m_{a2} = 0$$

وبالعودة إلى الشكل (10-3 ج) نجد:

$$k_{13} = (k_{13})_{BC} + (k_{13})_{BA}$$

$$= 0 + \frac{6EI}{(5)^2} = \frac{6(3000)}{(5)^2} = 720$$

$$k_{23} = (k_{23})_{BC} + (k_{23})_{BA}$$

$$= \frac{6EI}{(4)^2} + 0 = \frac{6(3000)}{(4)^2} = 1125$$

$$k_{33} = (k_{33})_{BC} + (k_{33})_{BA}$$

$$= \frac{4EI}{4} + \frac{4EI}{5} = \frac{4(3000)}{4} + \frac{4(3000)}{5} = 5400$$

$$h_{a3} = -\frac{6EI}{(5)^2} = -\frac{6(3000)}{(5)^2} = -720$$

$$v_{a3} = 0$$

$$m_{a3} = \frac{2EI}{5} = \frac{2(3000)}{5} = 1200$$

وبالتالي نجد:

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125288 & \phi & 720 \\ \phi & 100563 & 1125 \\ 720 & 1125 & 5400 \end{pmatrix} \quad (d)$$

$$[r] = \begin{pmatrix} h_{a1} & h_{a2} & h_{a3} \\ v_{a1} & v_{a2} & v_{a3} \\ m_{a1} & m_{a1} & m_{a3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -288 & 0 & -720 \\ 0 & -100000 & 0 \\ 720 & 0 & 1200 \end{pmatrix} \quad (e)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a) و (b) و (d) في العلاقة (3-1) نجد:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 50 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 125288 & 0 & 720 \\ 0 & 100563 & 1.125 \\ 720 & 1.125 & 5.400 \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

7- بحل المعادلات السابقة نجد أن:

$$x_1 = \Delta_{xb} = 6 * 10^{-5} \text{ m}$$

$$x_2 = \Delta_{yb} = -4 * 10^{-4} \text{ m}$$

$$x_3 = \theta_{zb} = -92 * 10^{-4} \text{ rad}$$

8- لتحديد قيم ردود الأفعال في الوثيقة A نعوض قيم العلاقات (c) و (e) في

المعادلة (3-3) فنجد:

$$\begin{aligned} \{R\} = \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} + 10^6 \begin{pmatrix} -288 & 0 & -720 \\ 0 & -100000 & 0 \\ 720 & 0 & 1200 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 6 * 10^{-5} \\ -4 * 10^{-4} \\ -92 * 10^{-4} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 6.607 \text{ kN} \\ 90 \text{ kN} \\ -10.997 \text{ kN.m} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

ومنه:

$$H_A = 6.607 \text{ kN}$$

$$V_A = 90 \text{ kN}$$

$$M_A = -10.997 \text{ kN.m}$$

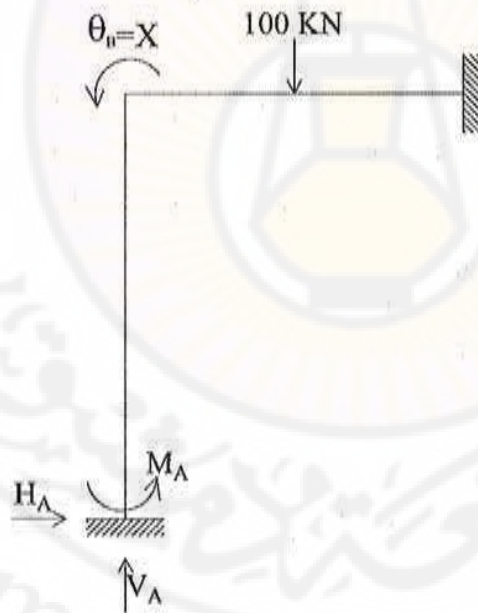
ب- التحليل مع إهمال تأثير التشوهات المحورية:

1- بإهمال تأثير التشوهات المحورية نجد أن الانتقالات الممكنة في عقد المنشأ هي دوران العقدة B فقط وعليه يكون المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الأولى (الشكل 11-3 أ).

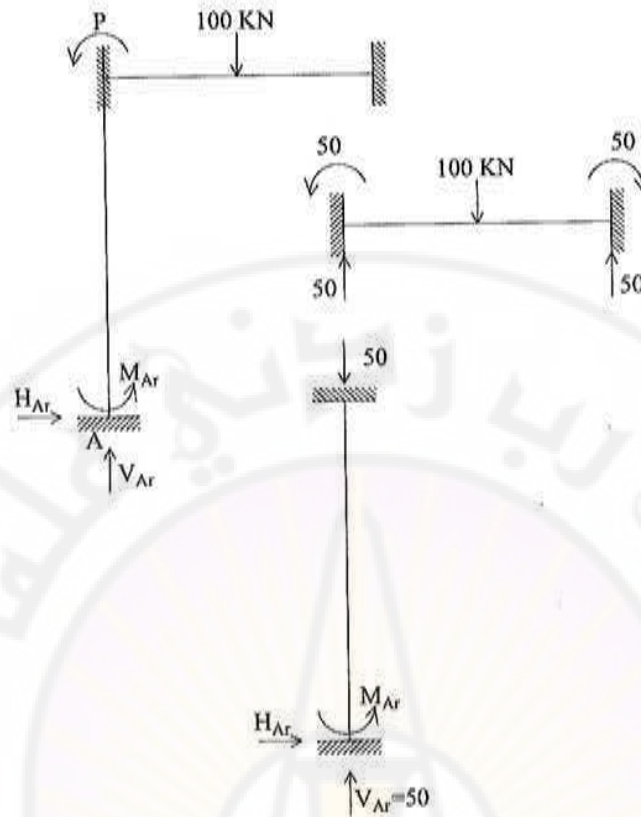
2- لتقرير المنشأ حركياً نضع مسنداً وهمياً (من قيد واحد) في العقدة B كما هو مبين في الشكل (11-3 ب).

3- بما أنه لا يوجد أي عزوم خارجية مطبقة بشكل موافق للمجاهيل الحركية لذلك نلاحظ أن شعاع الأحمال الخارجية معطى بالعلاقة:

$$\{P\} = \{M_B\} = \{0\} \quad (a)$$



الشكل (11-3 أ)



الشكل (11-3 ب)

الشكل (11-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

4- لتحديد الأشعة $\{P_r\}$ و $\{R_r\}$ ندرس الجملة المقيدة للمنشأ والموضحة بالشكل (11-3 ب) فنجد بالاستعانة بالعلاقات المعطاة في الملحق (ب).

$$P_r = M_{Br} = 50 \text{ kN.m}$$

$$H_{Ar} = 0$$

$$V_{Ar} = 50 \text{ kN}$$

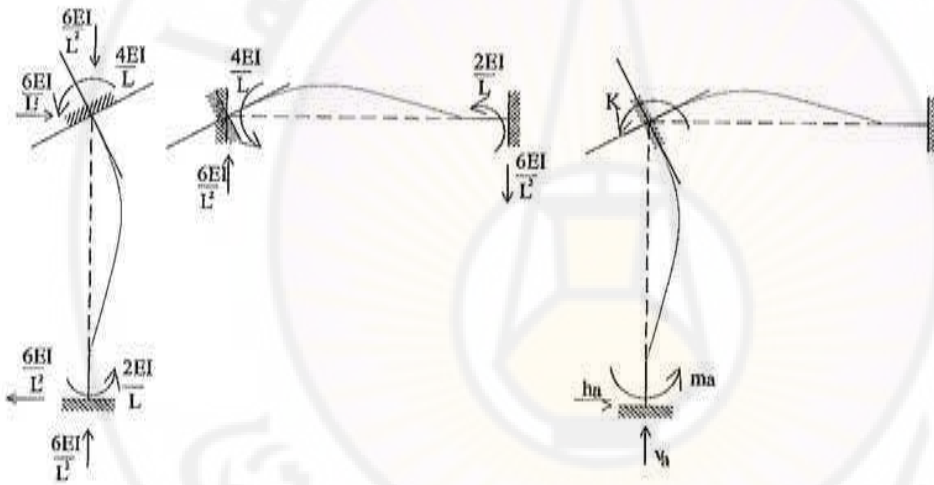
$$M_{Ar} = 0$$

ومنه:

$$\{P_r\} = \{50\} \quad (b)$$

$$\{R_r\} = \begin{Bmatrix} H_{Ar} \\ V_{Ar} \\ M_{Ar} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتعيين مصفوفة القساوة $[K]$ ومصفوفة ردود الأفعال $[r]$ نطبق على الجملة المقيدة واحدة الانتقال باتجاه المجهول x (الشكل 12-3).



الشكل (12-3) مراحل تحديد مصفوفة القساوة

$$k = (k)_{BA} + (k)_{BC}$$

$$= \frac{4EI}{5} + \frac{4EI}{4} = \frac{4(3000)}{6} + \frac{4(3000)}{4} = 5400$$

$$h_a = -\frac{6EI}{(5)^2} = -\frac{6(3000)}{(5)^2} = -720$$

$$v_a = \frac{6EI}{(4)^2} = \frac{6(3000)}{(4)^2} = 1125$$

$$m_a = \frac{2EI}{5} = \frac{2(3000)}{5} = 1200$$

ومنه:

$$[K] = [5400] \quad (d)$$

$$[r] = \begin{pmatrix} h_a \\ v_a \\ m_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -720 \\ 1125 \\ 1200 \end{pmatrix} \quad (e)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a)، (b) و (d) في العلاقة (3-1) نجد:

$$\{0\} = \{50\} + [5400]\{x\}$$

7- وبالتالي تعطى قيمة المجهول الحركي x بالعلاقة:

$$x = \theta_B = -0.00926$$

$$= -92.6 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

وهذه القيمة قريبة جداً من القيمة لزاوية الدوران والمستخرجة مع أخذ تأثير التشوهات المحورية في التحليل.

8- لتحديد قيم ردود الأفعال نجد بتعويض (c) و (e) في العلاقة (3-3):

$$\begin{aligned}\{R\} &= \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -720 \\ 1125 \\ 1200 \end{Bmatrix} * \{-92.6 * 10^{-4}\} \\ &= \begin{Bmatrix} 6.667 \\ 39.58 \\ -11.11 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

ومنه:

$$H_A \cong 6.67 \text{ kN}$$

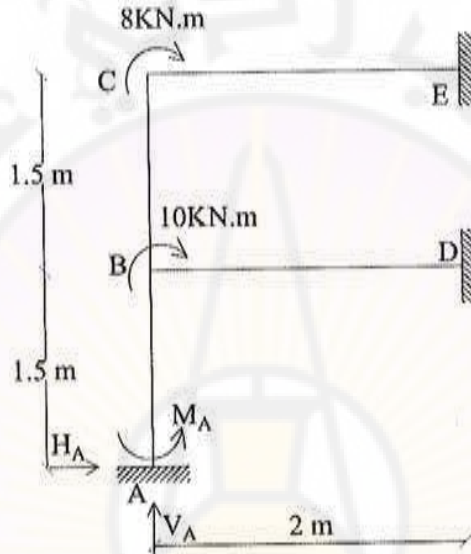
$$V_A = 39.6 \text{ kN}$$

$$M_A = -11.11 \text{ kN.m}$$

ونلاحظ من الحالة (ب) أن إهمال تأثير التشوهات المحورية في المنشآت الإطارية لا يؤدي إلى أخطاء كبيرة ويمكن قبوله في معظم مسائل التحليل الإنشائي المتعلقة بتحليل هذه المنشآت.

مثال (2):

باستخدام طريقة مصفوفة القساوة يطلب إيجاد قيم المجاهيل الحركية ورد الفعل في الوثاقة A والمتولدة عن الأحمال المطبقة على المنشأ المبين في الشكل (13-3) مع إهمال تأثير التشوهات المحورية على عناصر المنشأ تؤخذ (ثابت EI) لجميع العناصر.



الشكل (13-3): معطيات المثال (2)

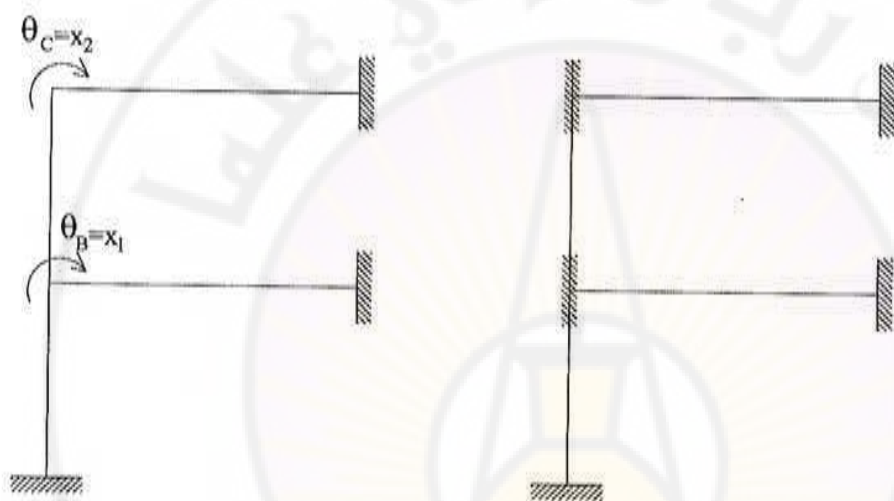
الحل:

1- نلاحظ أننا إذا أهملنا تأثير التشوهات المحورية فإنه يبقى للمنشأ درجتان من درجات الحرية الحركية وهما الدوران في العقدتين B و C، وهي المجاهيل الحركية المطلوبة.

2- نقوم بترقيم المجاهيل الحركية وفق التسلسل المبين في الشكل (14-3) ولتقرير المنشأ حركياً نستخدم قيوداً وهمية ممانعة للحركة وبما أن الحركة الممكنة في

عقد المنشأ (بعد إهمال تأثير التشوهات المحورية) هي دورانات فقط لذلك تكون القيود الوهمية المستخدمة للتقرير الحركي قادرة على إبداء ردود أفعال مؤلفة من عزوم فقط (وهي ردود الأفعال باتجاه المجاهيل الحركية الممنوعة).

3- بالعودة إلى معطيات المسألة (الشكل 13-3) وجملة المجاهيل الحركية (الشكل 14-3 آ) نلاحظ أن الأحمال الخارجية المطبقة باتجاه المجاهيل الخارجية والتي تشكل شعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$ هي:



جملة المجاهيل الحركية (14-3 آ)

الجملة المقررة حركياً (14-3 ب)

الشكل (14-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

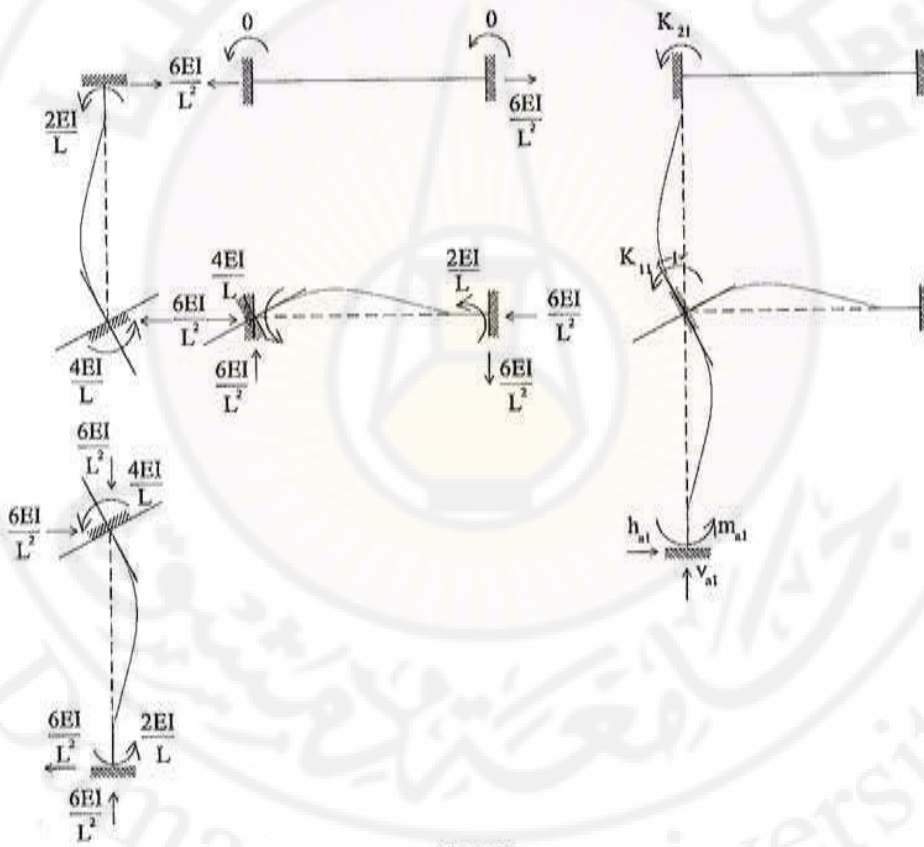
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -8 \end{Bmatrix} \text{ kN.m} \quad (a)$$

4- لتحديد الشعاعين $\{P_r\}$ و $\{R_r\}$ ندرس الجملة المقيدة تحت تأثير الأحمال الخارجية باستثناء تلك الموافقة لاتجاه المجاهيل الحركية ونلاحظ أن كل الأحمال الخارجية مطبقة باتجاه المجاهيل الحركية تكون:

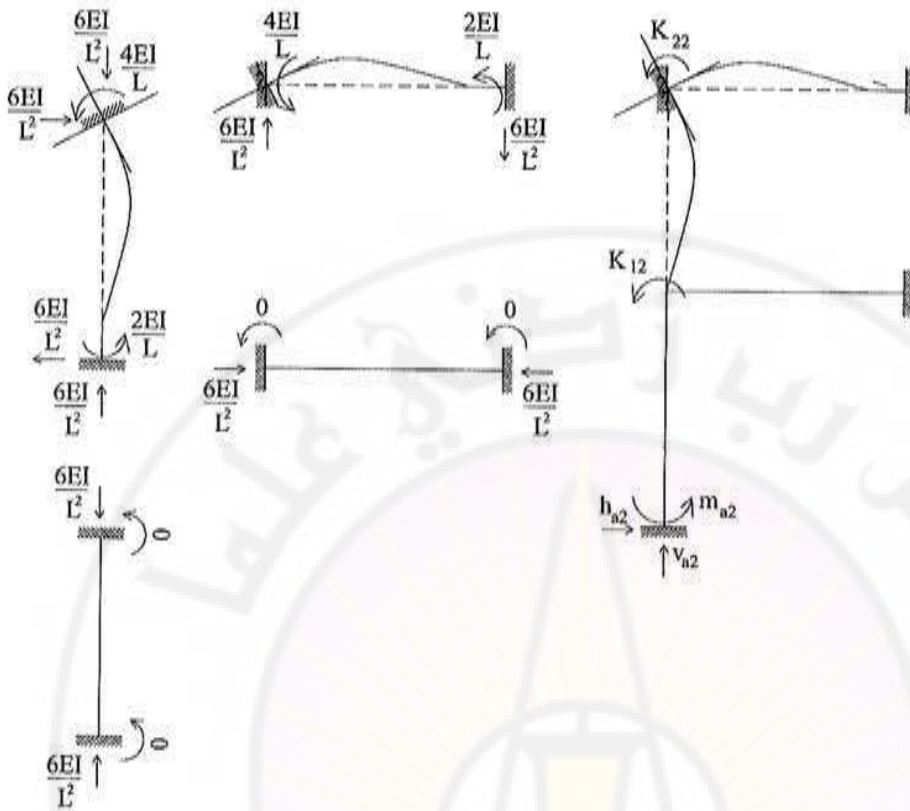
$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$\{R_r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتحديد مصفوفة القساوة للمنشأ نطبق واحدات قيم باتجاه المجاهيل الحركية وبالترتيب مع بقاء المجاهيل الممكنة معدومة كما هو مبين في الأشكال (15-3).



(15-3)



(15-3 ب)

L : طول العنصر

الشكل (15-3) مراحل تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ

ملاحظة هامة:

بما أن المساند الوهمية المضافة المستخدمة لتقرير المنشأ قادرة على إبداء ردود الأفعال باتجاه المجاهيل الحركية فقط (وهي في الحالة المدروسة عزوم انعطاف) لذلك يتوجب علينا نقل القوى الأفقية والشاقولية المتولدة في المساند المضافة خلال مراحل تحديد مصفوفة القساوة باتجاه المساند الحقيقية القادرة على مقاومة هذه القوى.

بالعودة إلى ردود الأفعال المتولدة في عقد المنشأ نتيجة لواحدات الانتقال
لمختلف المجاهيل الحركية في المنشأ الموضحة في الأشكال (15-3) يمكن
استنتاج ما يلي:

بالعودة إلى الشكل (15-3 أ) نجد:

$$k_{11} = (k_{11})_{BC} + (k_{11})_{BD} + (k_{11})_{BA}$$

$$= \frac{4EI}{1.5} + \frac{4EI}{2} + \frac{4EI}{1.5} = 7.33EI$$

$$k_{21} = (k_{21})_{CE} + (k_{21})_{CB}$$

$$= 0 + \frac{2EI}{1.5} = 1.33EI$$

$$h_{a1} = -\frac{6EI}{(1.5)^2} = -2.67EI \quad (\text{ناشئ في العنصر BA})$$

$$v_{a1} = \frac{6EI}{(2)^2} = 1.5EI \quad (\text{ناشئ في العنصر BD})$$

$$m_{a1} = \frac{2EI}{1.5} = 1.33EI \quad (\text{ناشئ في العنصر BA})$$

وبالعودة إلى الشكل (15-3 ب) نجد:

$$k_{22} = (k_{22})_{CB} + (k_{22})_{CB}$$

$$= \frac{4EI}{2} + \frac{4EI}{1.5} = 4.67 EI$$

$$k_{12} = (k_{12})_{BC} + (k_{12})_{BD} + (k_{12})_{BA}$$

$$= \frac{2EI}{1.5} + 0 + 0 = 1.33 EI$$

$$h_{a2} = 0$$

$$v_{a2} = \frac{6EI}{(2)^2} = 1.5 EI \quad (\text{ناشئ في العنصر CE})$$

$$m_{a2} = 0$$

وعليه نجد أن مصفوفة القساوة للمنشأ معطاة بالعلاقة:

$$[k] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 7.33 & 1.33 \\ 1.33 & 4.67 \end{pmatrix} \quad (d)$$

ونلاحظ كون مصفوفة القساوة متناظرة.

وبشكل مماثل نجد:

$$[r] = \begin{Bmatrix} h_{a1} & h_{a2} \\ v_{a1} & v_{a2} \\ m_{a1} & m_{a2} \end{Bmatrix} = EI \begin{pmatrix} -2.67 & 0 \\ 1.5 & 1.5 \\ 1.33 & 0 \end{pmatrix} \quad (e)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a) و (b) و (d) في المعادلة (1-3) نجد:

$$\begin{Bmatrix} -10 \\ -8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + EI \begin{Bmatrix} 7.33 & 1.33 \\ 1.33 & 4.67 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

7- بحل المعادلة السابقة نجد بأن قيم المجاهيل الحركية معطاة بالعلاقة:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -1.110 \\ -1.397 \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$\theta_B = x_1 = -\frac{1.110}{EI} \text{ (rad)}$$

$$\theta_C = x_2 = -\frac{1.397}{EI} \text{ (rad)}$$

ونلاحظ أن إشارة الدوران في B, C سالبة مما يدل على أن الدوران الحاصل في هاتين العقدتين مع عقارب الساعة (عكس الاصطلاح الموجب للدوران).

8- لتحديد قيم ردود الأفعال في الوثيقة (A) نعوض قيم العلاقات (c) و (c) في المعادلة (3-3) فنجد:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + EI \begin{Bmatrix} -2.67 & 0 \\ 1.5 & 1.5 \\ 1.33 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-1.110}{EI} \\ \frac{-1.397}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.964 \\ -3.761 \\ -1.478 \end{Bmatrix}$$

$$H_A = 2.964 \text{ kN}$$

ومنه:

$$V_A = -3.761 \text{ kN} \quad (\text{معاكس للاصطلاح الموجب للقوى الشاقولية})$$

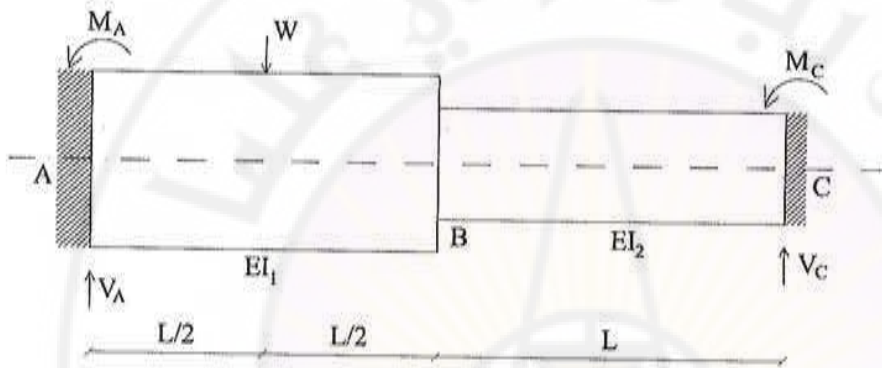
$$M_A = -1.478 \text{ kN.m} \quad (\text{معاكس للاصطلاح الموجب للعزوم})$$

مثال (3):

احسب ردود أفعال المسندين A و C للجائز المبين في الشكل (16-3) وذلك بإهمال تأثير التشوهات المحورية في عناصر المنشأ.

$$EI_1 = 2EI \quad \text{بؤخذ:}$$

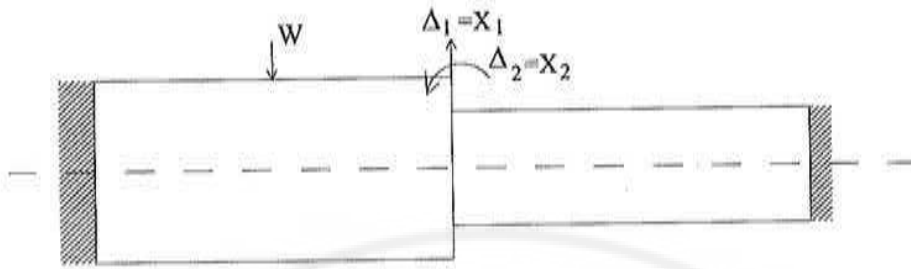
$$EI_2 = EI$$



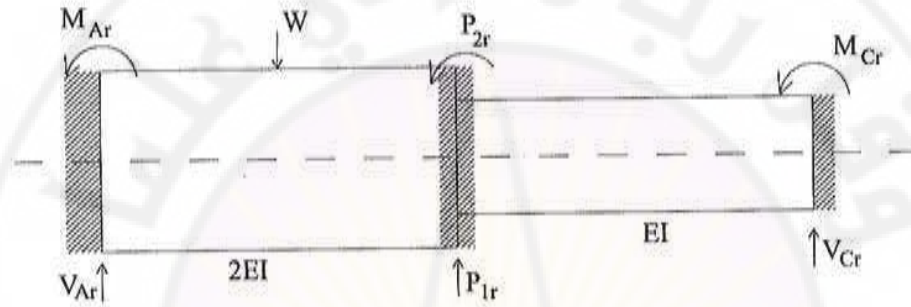
الشكل (16-3) معطيات المثال (3)

الحل:

- 1- بإهمال تأثير التشوهات المحورية يبقى للمنشأ درجتان من درجات الحرية الحركية وهما الانتقال الشاقولي والدوران في العقدة B.
- 2- نرقم المجاهيل الحركية بالترتيب المبين في الشكل (17-3 أ) ولتقرير المنشأ حركياً نستخدم قيدين وهميين مانعين للانتقال الشاقولي والدوران في العقدة B كما هو مبين في الشكل (15-3 ب).



(17-3 أ) جملة المجاهيل الحركية



(17-3 ب) الجملة المقيدة للمنشأ

الشكل (17-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

3- من الأشكال (16-3) و (17-3 أ) نلاحظ أن شعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$ والموافق للمجاهيل الحركية معطى بالعلاقة:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

4- لتحديد الأشعة $\{P_r\}$ و $\{R_r\}$ ندرس الجملة المقيدة (الشكل 17-3 ب) والخاضعة لتأثير الأحمال الخارجية باستثناء الأحمال الموافقة للمجاهيل الحركية وبالإستعانة بالجداول المعطاة في الملحق (ب) نجد:

$$P_{1r} = (P_{1r})_{BA} + (P_{1r})_{BC}$$

$$= \frac{W}{2} + 0 = \frac{W}{2}$$

$$P_{2r} = (P_{2r})_{BA} + (P_{2r})_{BC}$$

$$= -\frac{WL}{8} + 0 = -\frac{WL}{8}$$

$$M_{Ar} = (M_{Ar})_{AB} = \frac{WL}{8}$$

$$V_{Ar} = (V_{Ar})_{AB} = \frac{W}{2}$$

$$M_{Cr} = (M_{Cr})_{CB} = 0$$

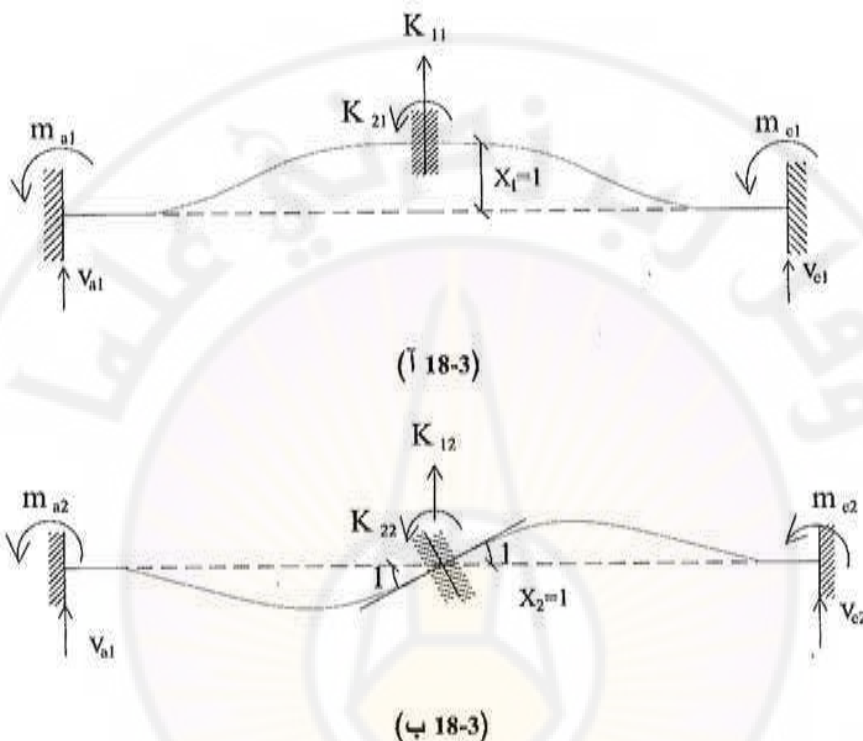
$$V_{Cr} = (V_{Cr})_{CB} = 0$$

ومنه:

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{W}{2} \\ -\frac{WL}{8} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$\{R_r\} = \begin{Bmatrix} V_{Ar} \\ M_{Ar} \\ V_{Cr} \\ M_{Cr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{W}{2} \\ \frac{WL}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتحديد مصفوفة القساوة [K] للمنشأ نطبق واحدة الانتقال باتجاه المجاهيل الحركية المختلفة وبالترتيب مع الإبقاء على كل المجاهيل الأخرى معدومة باستثناء المجهول الموافق لواحدة الانتقال كما هو مبين في الأشكال (18-3).



الشكل (18-3) مراحل تحديد مصفوفة القساوة

من الشكل (18-3 أ) وبالاستعانة بالجدول المعطاة في الملحق (ب) تجد:

$$k_{11} = (k_{11})_{BA} + (k_{11})_{BC}$$

$$= \frac{12EI_1}{L^3} + \frac{12EI_2}{L^3} = \frac{12}{L^3}(EI_1 + EI_2)$$

$$k_{21} = (k_{21})_{BA} + (k_{21})_{BC}$$

$$= -\frac{6EI_1}{L^2} + \frac{6EI_2}{L^2} = \frac{6}{L^2}(-EI_1 + EI_2)$$

$$v_{a1} = -\frac{12EI_1}{L^3} ; \quad v_{c1} = -\frac{12EI_2}{L^3}$$

$$m_{a1} = -\frac{6EI_1}{L^2} ; \quad m_{c1} = \frac{6EI_2}{L^2}$$

ومن الشكل (3-18 ب) نجد:

$$k_{12} = (k_{12})_{BA} + (k_{12})_{BC}$$

$$= -\frac{6EI_1}{L^2} + \frac{6EI_2}{L^2} = \frac{6}{L^2}(-EI_1 + EI_2)$$

$$k_{22} = (k_{22})_{BA} + (k_{22})_{BC}$$

$$= \frac{4EI_1}{L} + \frac{4EI_2}{L} = \frac{4}{L}(EI_1 + EI_2)$$

$$v_{a2} = \frac{6EI_1}{L^2} ; \quad v_{c2} = -\frac{6EI_2}{L^2}$$

$$m_{a2} = \frac{2EI_1}{L} ; \quad m_{c2} = \frac{2EI_2}{L}$$

وبالتالي ومن أجل ($EI_1 = 2EI_2 = 2EI$) نجد:

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{36EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} \end{pmatrix} \quad (d)$$

$$[r] = \begin{pmatrix} v_{a1} & v_{a2} \\ m_{a1} & m_{a2} \\ v_{c1} & v_{c2} \\ m_{c1} & m_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{24EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^2} \\ \frac{12EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{pmatrix} \quad (e)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a) و (b) و (d) في العلاقة (3-1) نجد:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{W}{2} \\ -\frac{WL}{8} \end{Bmatrix} + 6EI \begin{pmatrix} \frac{6}{L^3} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{2}{L} \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

7- ومن المعادلة (f) نجد بأن قيم المجاهيل الحركية معطاة بالعلاقة:

$$x_1 = \Delta_1 = \frac{-7WL^3}{528EI}$$

$$x_2 = \Delta_2 = \frac{2WL^2}{528EI}$$

8- لتحديد قيم ردود الأفعال في المساند A و C نعوض قيم المعادلات (c) و (c) في العلاقة (3-3) فنجد:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{W}{2} \\ \frac{WL}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{24EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^2} \\ \frac{12EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{Bmatrix} \frac{WL^2}{528EI} \begin{Bmatrix} -7L \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{19W}{22} \\ \frac{79WL}{264} \\ \frac{3W}{264} \\ -\frac{19WL}{264} \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$V_A = \frac{19W}{22} ; \quad V_C = \frac{3W}{264}$$

$$M_A = \frac{79WL}{264} ; \quad M_C = -\frac{19WL}{264}$$

5-3- تحليل الشبكات المستوية باستخدام طريقة مصفوفة القساوة:

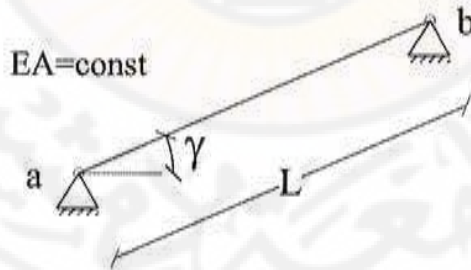
Analysis of plane trusses by the stiffness method

يمكن تحليل الشبكات المستوية باستخدام طريقة مصفوفة القساوة بشكل مشابه للمنشآت الإطارية وذلك باستخدام مصفوفة القساوة للمنشأ الشبكي ومن ثم تطبيق بقية المراحل التي مرت معنا في الفقرة (3-3) من هذا الفصل ولتسهيل عملية استخراج مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ الشبكي ندرس عوامل القساوة للعنصر الأساسي لهذه المنشآت والذي ندعوه بالعنصر الشبكي المستوي (Plane truss element) مما يمكننا من بناء مصفوفة القساوة للمنشأ اعتماداً على عوامل القساوة للعناصر المشكلة له.

5-3-1- عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي:

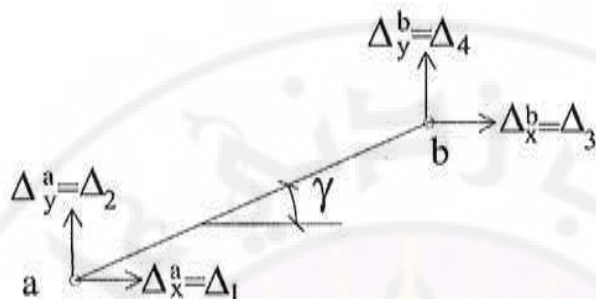
Stiffness coefficients of plane truss element

ندرس العنصر الشبكي المستوي ab المبين في الشكل (3-19) والمقيد في المفصلين (a) و (b) بقيود من الدرجة الثانية لمنع الانتقالات الممكنة في هذه المفاصل.



الشكل (3-19) الجملة المقيدة للعنصر الشبكي المستوي

باعتبار أن كل مفصل من مفاصل العنصر الشبكي يملك إمكانيتين للانتقال وفق المحاور الإحداثية، لذلك يملك هذا العنصر أربع درجات من الحرية الحركية كما هو مبين في الشكل (20-3).



الشكل (20-3) درجات الحرية الحركية للعنصر الشبكي المستوي

للحصول على عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي نطبق على العقدتين a , b وبالترتيب واحدة القيم لكل انتقال حركي مع الإبقاء على كل الانتقالات الأخرى معدومة كما هو مبين في الأشكال (21-3) ونقوم بتحديد ردود الأفعال المتولدة في قيود العنصر والمساوية بالتعريف لعوامل القساوة المطلوبة.

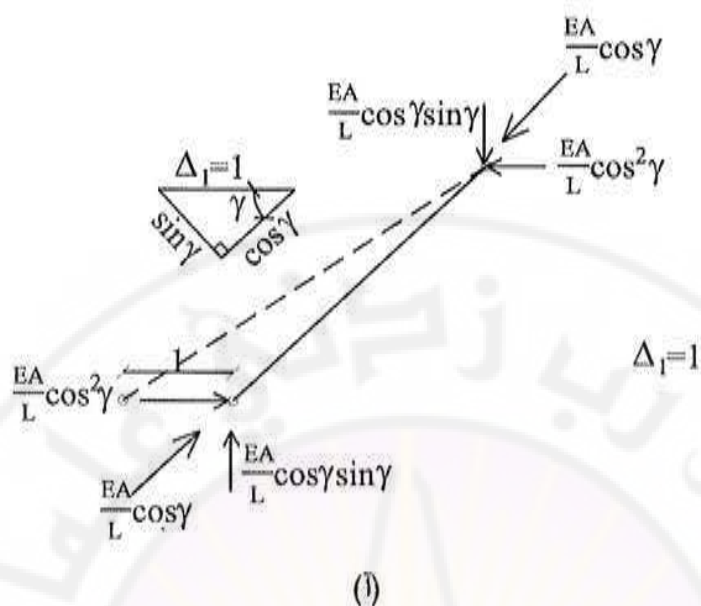
ومن خلال الأشكال (21-3) يمكننا تحديد عوامل القساوة لمختلف الانتقالات الممكنة في عقد العنصر الشبكي المستوي، وبالتالي تعيين مصفوفة القساوة لأي منشأ شبكي من خلال تجميع عوامل القساوة لمختلف العناصر الشبكية المشكلة لهذا المنشأ.

I: عزم عطالة مقطع العنصر حول محور الانعطاف.

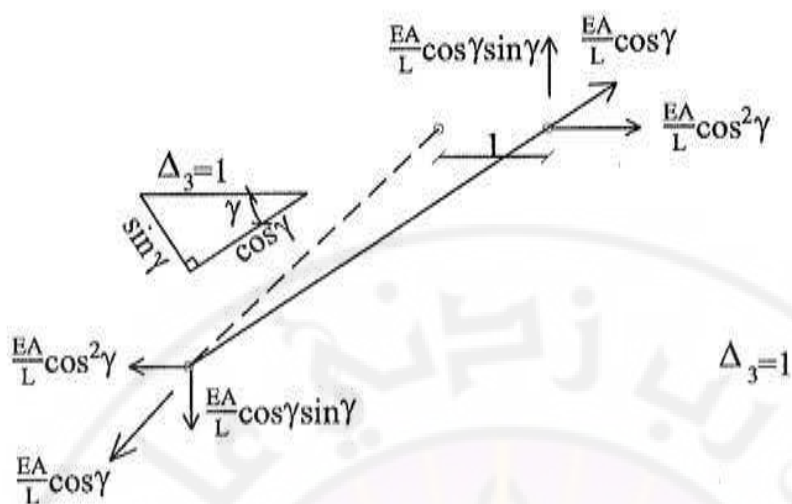
J: عزم العطالة القطبي لمقطع العنصر.

E: معامل المرونة للعنصر.

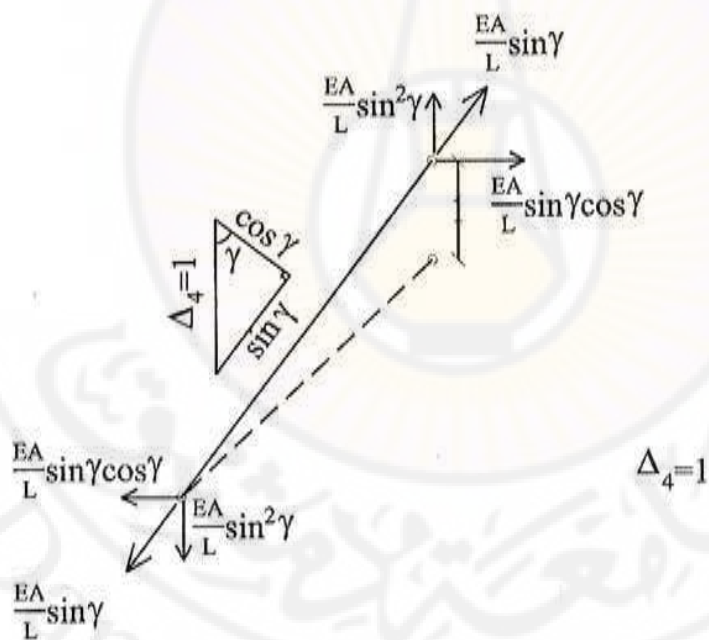
G: معامل القص للعنصر.



الشكل (21-3) عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي



(ج)



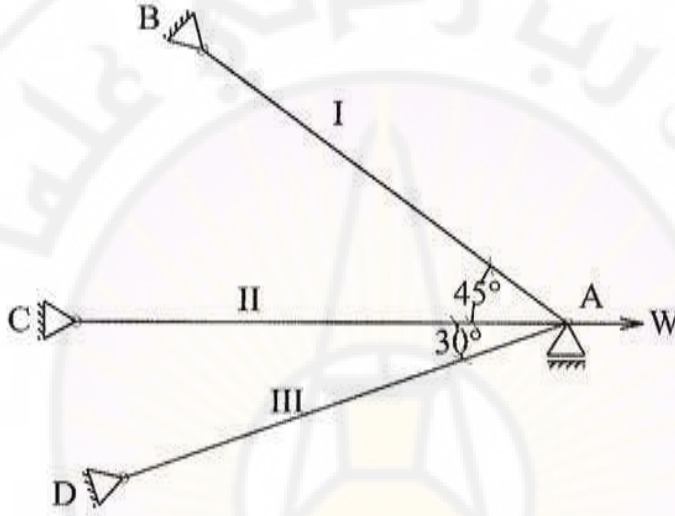
(د)

الشكل (21-3) عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي

مثال (4):

يطلب تحليل المنشأ الشبكي المبين في الشكل (22-3) وإيجاد القوى المحورية في مختلف العناصر .

تؤخذ أطوال الأضلاع متساوية وتساوي L كما يفرض أيضاً (ثابت EA) .



الشكل (22-3) معطيات المثال (4)

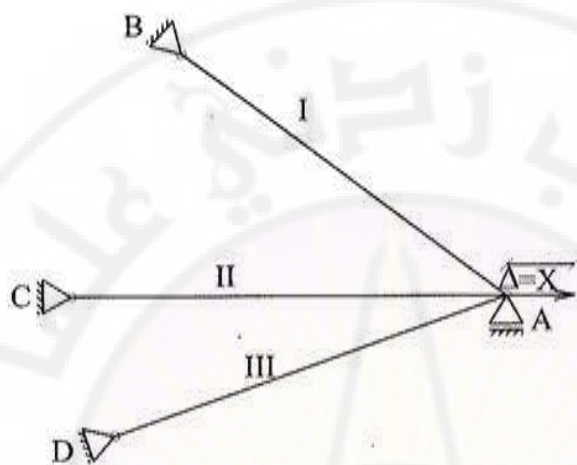
الحل:

1- نلاحظ أن الانتقالات الممكنة في عقد المنشأ هي الانتقال الأفقي للعقدة A وعليه يكون المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الأولى كما هو مبين في الشكل (23-3 أ).

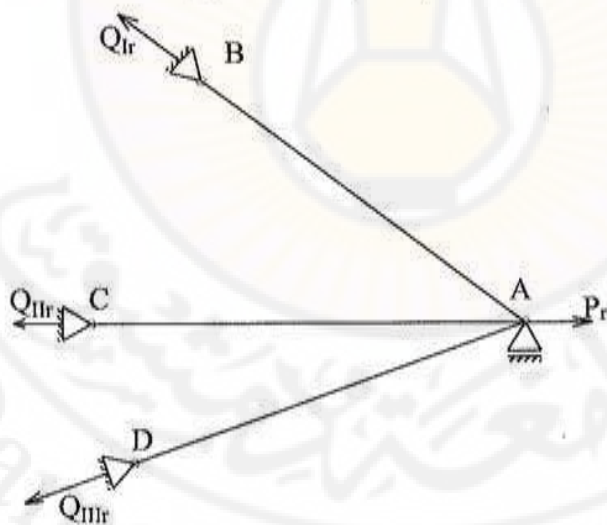
2- لتقرير المنشأ حركياً نستخدم قيداً وهمياً مانعاً للانتقال الأفقي في A كما هو مبين في الشكل (23-3 ب).

3- من خلال المجاهيل الحركية وجملة الأحمال المطبقة نجد أن شعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$ معطى بالعلاقة:

$$\{P\} = \{W\} = W$$



(أ 23-3) المجاهيل الحركية



(ب 23-3) الجملة المقيدة

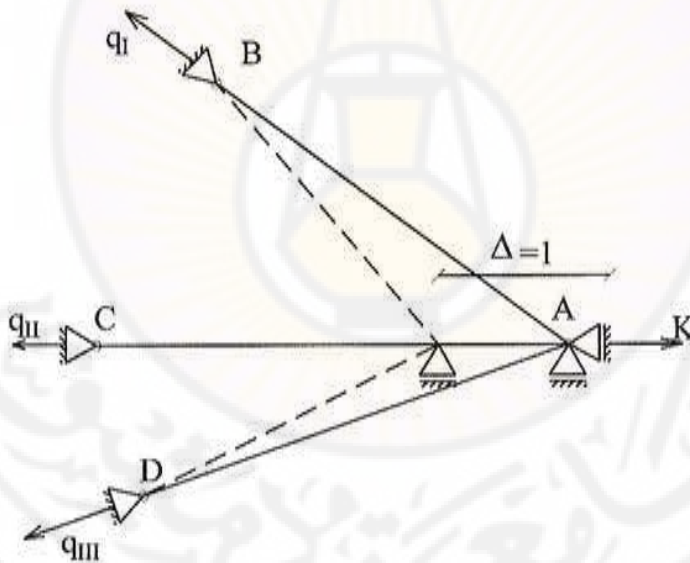
الشكل (23-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

4- من خلال دراسة الجملة المقيدة (الشكل 23-3 ب) نجد:

$$\{P_r\} = \{0\} = 0 \quad (b)$$

$$\{Q_r\} = \begin{Bmatrix} Q_{Ir} \\ Q_{IIr} \\ Q_{IIIr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لاستخراج مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ نعطي المجهول الحركي x قيمة واحدة الانتقال (الشكل 24-3) ونحدد ردود الأفعال المتولدة في القيود الوهمية والقيود الحقيقية في المنشأ اعتماداً على عوامل القساوة للعناصر المشكلة للمنشأ والمعطاة في (الشكل 21-3).



الشكل (24-3) تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ الشبكي

$$k = (k)_{AB} + (k)_{AC} + (k)_{AD}$$

$$= \frac{EA}{L} \cos^2 (45^\circ) + \frac{EA}{L} \cos^2 (0) + \frac{EA}{L} \cos^2 (30^\circ) = \frac{9EA}{4L} \quad (d)$$

$$q_I = \frac{EA}{L} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2} EA}{2L}$$

$$q_{II} = \frac{EA}{L} \cos 0 = \frac{EA}{L}$$

$$q_{III} = \frac{EA}{L} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} EA}{2L}$$

ومنه:

$$[q] = \frac{EA}{2L} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a) و (b) و (d) في العلاقة (3-1) نجد:

$$W = 0 + \frac{9EA}{4L} x \quad (f)$$

7- لتحديد قيمة المجهول الحركي x نقوم بحل المعادلة (f) فنجد:

$$x = \frac{4WL}{9EA} \quad (\text{الانتقال الأفقي للعقدة A}) \quad (g)$$

8- يمكننا تحديد قيم القوى المحورية في عناصر المنشأ بتعويض قيم المعادلات (c) و (e) و (g) في العلاقة (3-4) فنجد:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{2L} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{4WL}{9EA} = \begin{Bmatrix} \frac{2\sqrt{2}W}{9} \\ \frac{4W}{9} \\ \frac{2\sqrt{3}W}{9} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

ومنه:

$$Q_I = 0.31427 W \text{ (شد)}$$

$$Q_{II} = 0.44444 W \text{ (شد)}$$

$$Q_{III} = 0.38490 W \text{ (شد)}$$

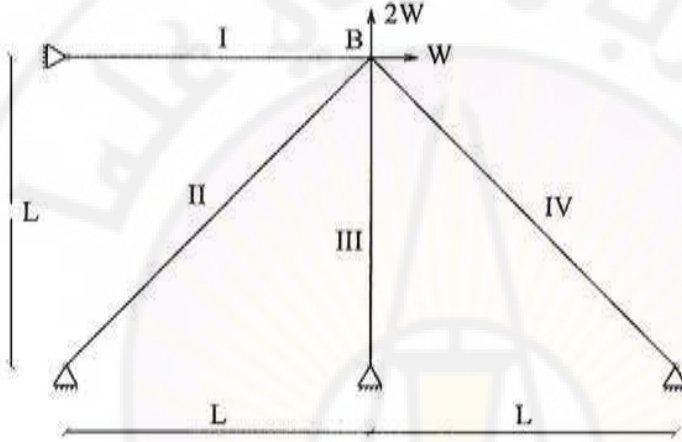
ونلاحظ أن جميع القوى المتولدة في عناصر المنشأ قوى شادة كما هو متوقع من شكل التحميل المطبق.

مثال (5):

أوجد مقدار الانتقالات الأفقية والشاقولية في العقدة B والقوى المحورية في مختلف العناصر للمنشأ الشبكي المبين في الشكل (25-3).

تؤخذ: $(A)_I = (A)_{III} = A$

$(A)_{II} = (A)_{IV} = \sqrt{2} A$ ، $E = \text{ثابت}$



الشكل (25-3) معطيات المثال (5)

الحل:

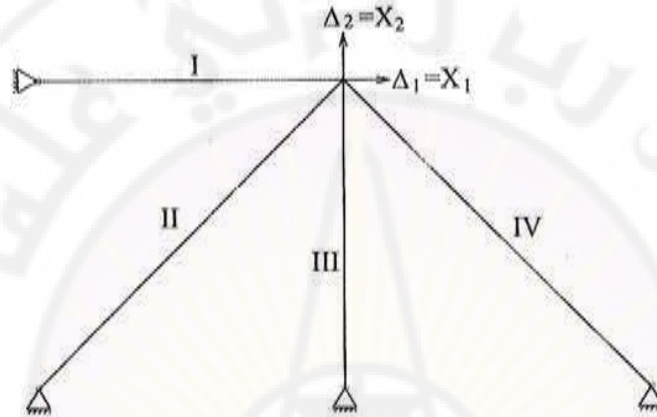
1- للمنشأ درجتان من درجات الحرية الحركية وهما الانتقال الأفقي والشاقولي في العقدة B (الشكل 26-3 أ)، وبالتالي يكون المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الثانية.

2- نرقم المجاهيل الحركية بالترتيب المبين في الشكل (26-3 أ) ونقوم بتقرير المنشأ حركياً باستخدام قيد وهمي من الدرجة الثانية لمنع الانتقالات الممكنة في العقدة B (الشكل 26-3 ب).

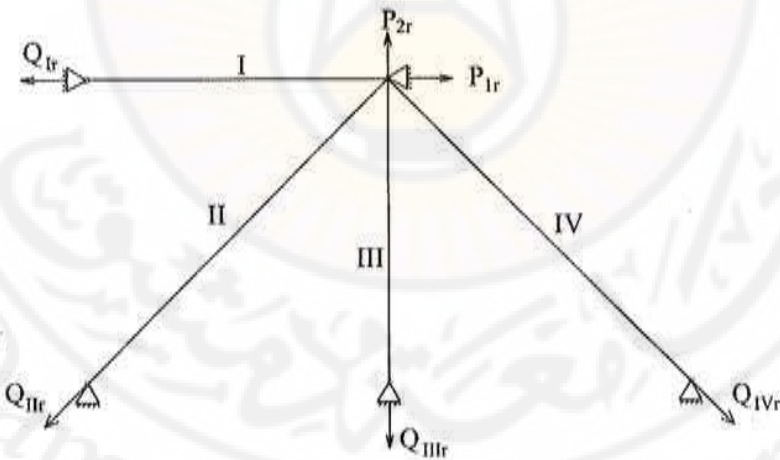
3- بالعودة إلى الأشكال (25-3) و (26-3) نجد بأن شعاع الأحمال الخارجية معطى بالعلاقة:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \\ 2W \end{Bmatrix} = W \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

4- لتحديد الأشعة $\{P_r\}$ و $\{Q_r\}$ للجملة المقيدة ندرس الشكل (26-3 ب).



(26-3 أ) جملة المجاهيلة الحركية



(26-3 ب) الجملة المقيدة

الشكل (26-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

فنجد:

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$\{Q_r\} = \begin{Bmatrix} Q_{1r} \\ Q_{2r} \\ Q_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتحديد مصفوفة القساوة نعطي للمجهول الحركي x_1 قيمة انتقال واحدة وكذلك بالنسبة للمجهول x_2 وبالترتيب وتعين عوامل القساوة والقوى العنصرية $[q]$ المتولدة في مختلف عناصر المنشأ كما هو مبين في الأشكال (27-3).
من دراسة الشكل (27-3 أ) وبالعودة إلى عوامل القساوة للعنصر الشبكي (الشكل 21-3) نجد:

$$\begin{aligned} k_{11} &= (k_{11})_I + (k_{11})_{II} + (k_{11})_{III} + (k_{11})_{IV} \\ &= \frac{EA}{L} \cos^2 0 + \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \cos^2 45^\circ + \frac{EA}{L} \cos^2 (90^\circ) + \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \cos^2 45^\circ \\ &= \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} \frac{1}{2} + 0 + \frac{EA}{L} \frac{1}{2} = \frac{2EA}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21} &= (k_{21})_I + (k_{21})_{II} + (k_{21})_{III} + (k_{21})_{IV} \\ &= \frac{EA}{L} \sin(0)\cos(0) + \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin 45 \cos 45 + \frac{EA}{L} \sin(90^\circ)\cos(90^\circ) \\ &\quad - \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin 45^\circ \cos 45^\circ \end{aligned}$$

$$= 0 + \frac{EA}{2L} + 0 - \frac{EA}{2L} = 0$$

$$q_{II} = \frac{EA}{L} \cos(0) = \frac{EA}{L}$$

$$q_{III} = \frac{E\sqrt{2}A}{\sqrt{2}L} \cos(45) = \frac{EA}{\sqrt{2}L}$$

$$q_{III} = \frac{EA}{L} \cos(90^\circ) = 0$$

$$q_{IV} = -\frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \cos 45 = -\frac{EA}{\sqrt{2}L}$$

ومن خلال دراسة الشكل (27-3) نجد:

$$k_{12} = (k_{12})_I + (k_{12})_{II} + (k_{12})_{III} + (k_{12})_{IV}$$

$$= \frac{EA}{L} \sin 0 \cos 0 + \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin 45 \cos 45 + \frac{EA}{L} \sin 90 \cos 90$$

$$- \frac{E\sqrt{2}A}{\sqrt{2}L} \sin 45 \cos 45$$

$$= 0 + \frac{EA}{2L} + 0 - \frac{EA}{2L} = 0$$

$$k_{22} = (k_{22})_I + (k_{22})_{II} + (k_{22})_{III} + (k_{22})_{IV}$$

$$= \frac{EA}{L} \sin^2(0) + \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin^2 45 + \frac{EA}{L} \sin^2 90 + \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin^2 45$$

$$= 0 + \frac{EA}{2L} + \frac{EA}{L} + \frac{EA}{2L} = \frac{2EA}{L}$$

$$q_{I2} = \frac{EA}{L} \sin(0) = 0$$

$$q_{II2} = \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin 45 = \frac{EA}{\sqrt{2}L}$$

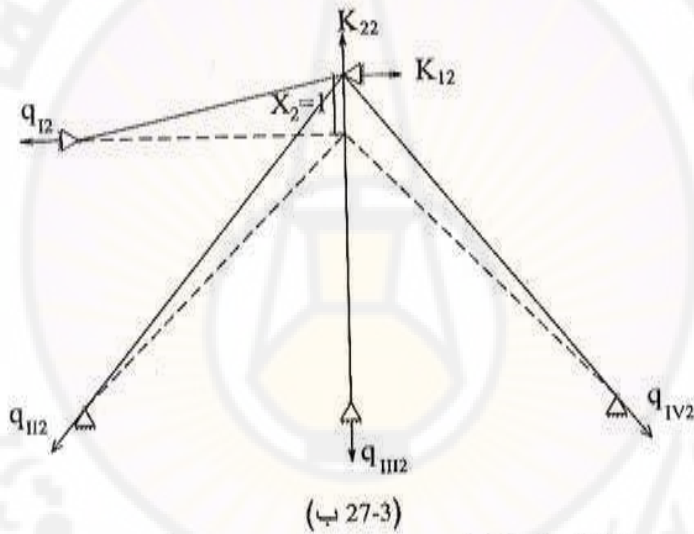
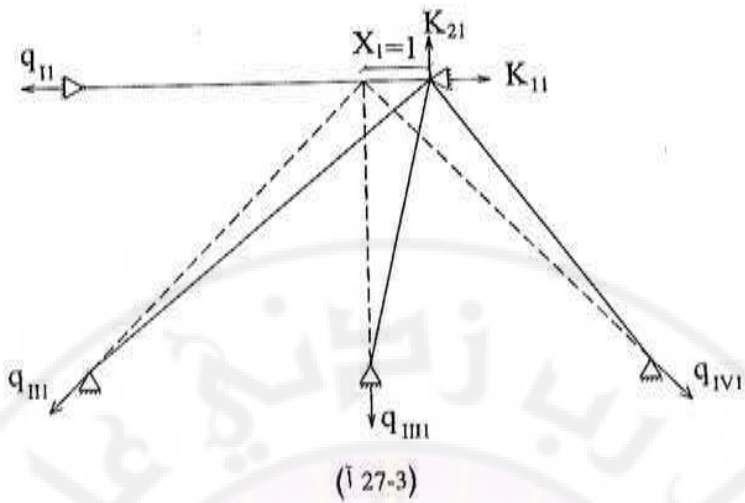
$$q_{III2} = \frac{EA}{L} \sin(90) = \frac{EA}{L}$$

$$q_{IV2} = \frac{E(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}L} \sin 45 = \frac{EA}{\sqrt{2}L}$$

ومنه:

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d)$$

$$[q] = \begin{pmatrix} q_{I1} & q_{I2} \\ q_{II1} & q_{II2} \\ q_{III1} & q_{III2} \\ q_{IV1} & q_{IV2} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (e)$$



الشكل (27-3) تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ الحركي

6- بتعويض قيم المعادلات (a) و (b) و (ي) في العلاقة (1-3) نجد:

$$W \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

7- بحل جملة المعادلات (f) نحصل على قيم المجاهيل الحركية كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{WL}{4EA} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

ومنه:

$$x_1 = \Delta_1 = \frac{WL}{2EA}$$

$$x_2 = \Delta_2 = \frac{WL}{EA}$$

8- لتحديد القوى العنصرية في المنشأ نعوض قيم المعادلات (c) و (e) و (g) في

العلاقة (3-4) فنجد:

$$\begin{Bmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \\ Q_{IV} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{WL}{EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = W \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

ومنه:

$$Q_I = \frac{W}{2} \quad ; \quad Q_{II} = \frac{3W}{2\sqrt{2}}$$

$$Q_{III} = W \quad ; \quad Q_{IV} = \frac{W}{2\sqrt{2}}$$

ونلاحظ بأن جميع القوى العنصرية موجبة (شادة).

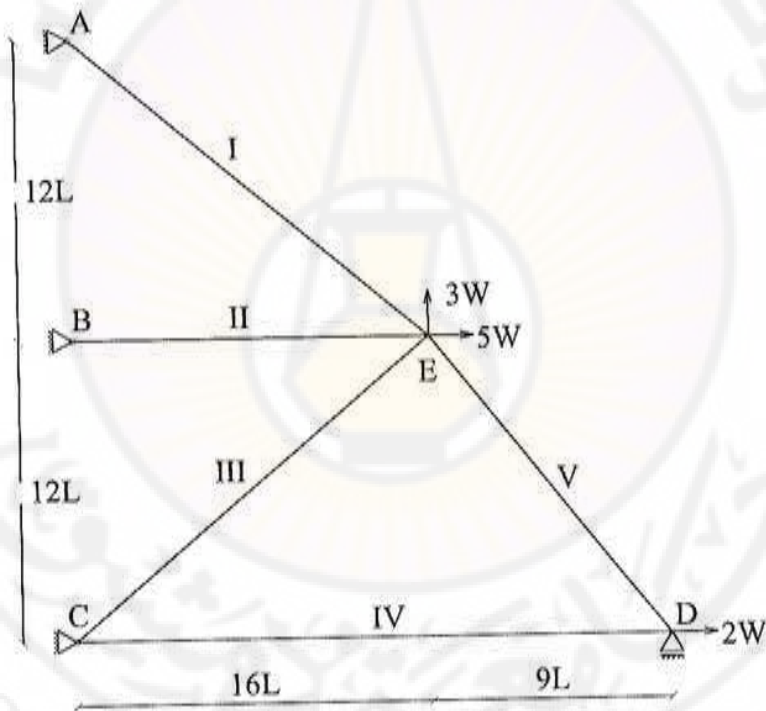
مثال (6):

أوجد الانتقالات العقدية والقوى المحورية في العنصرين I و V من المنشأ الشبكي المبين في الشكل (28-3).

تؤخذ:

$$(EA)_{III} = (EA)_{IV} = EA$$

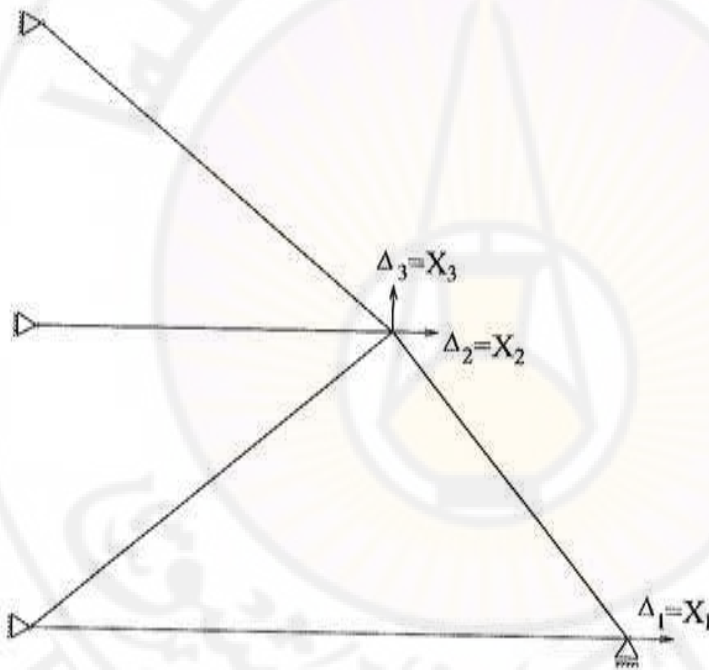
$$(EA)_I = (EA)_{II} = (EA)_V = 2EA$$



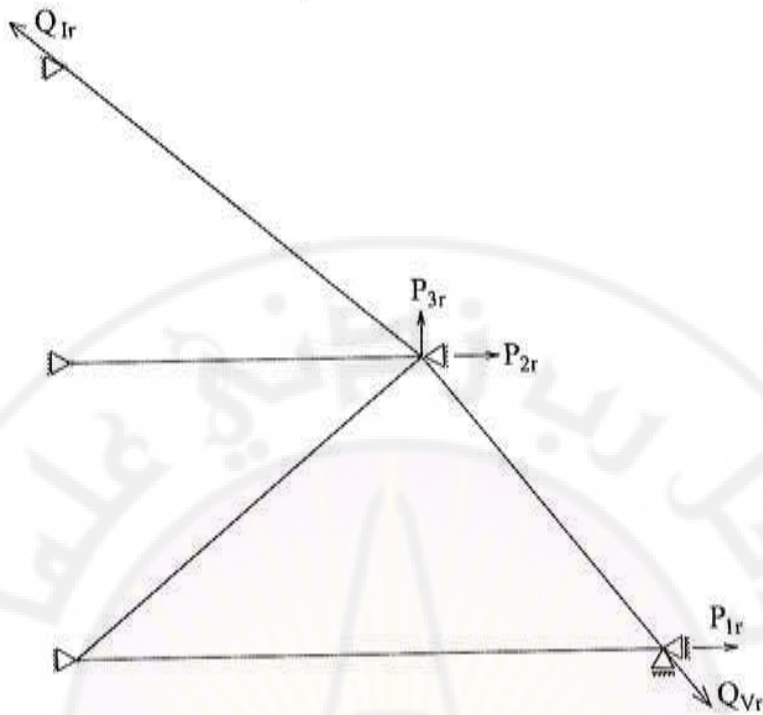
الشكل (28-3) معطيات المثال (6)

الحل:

- 1- للمنشأ ثلاث درجات من درجات الحرية الحركية وهي الانتقال الأفقي للعقدة D والانتقالين الأفقي والشاقولي في العقدة E وعليه يكون المنشأ غير مقرر حركياً من الدرجة الثالثة.
- 2- نرقم المجاهيل الحركية وفق الترتيب المبين في الشكل (29-3 أ) ونقوم بتقرير المنشأ حركياً باستخدام قيود وهمية مانعة للانتقالات الحركية المجهولة بالأسلوب المبين في الشكل (29-3 ب).



(29-3 أ) المجاهيل الحركية



الشكل (29-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً
الجملة المقيدة (ب 29-3)

3- من خلال معطيات المسألة (الشكل 28-3) نجد أن شعاع الأحمال الخارجية الموافقة للمجاهيل الحركية معطى بالعلاقة:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2W \\ 5W \\ -3W \end{Bmatrix} = W \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

4- بدراسة الجملة المقيدة (الشكل 29-3 ب) نجد أن الأشعة $\{P_r\}$ و $\{Q_r\}$ معطاة بالعلاقات:

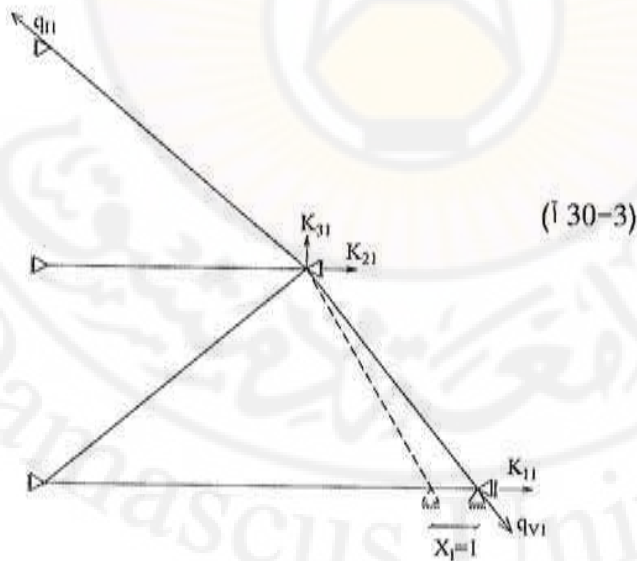
$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \\ P_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

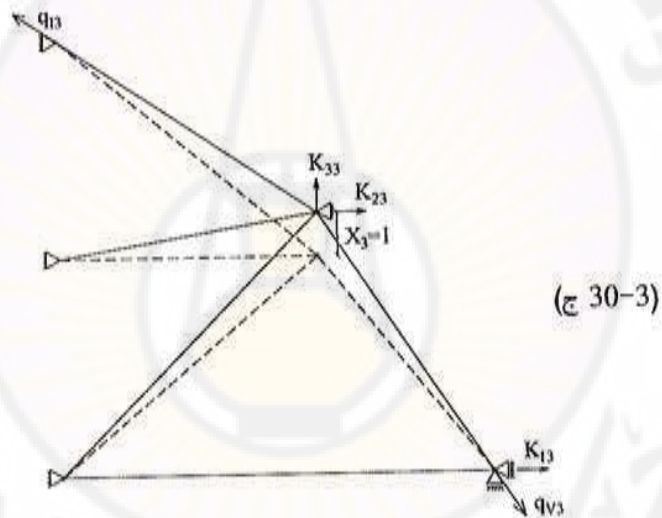
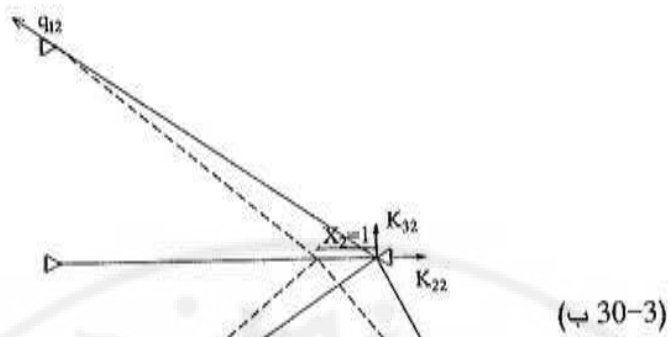
$$\{Q_r\} = \begin{Bmatrix} Q_{1r} \\ Q_{vr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لاستخراج قيم مصفوفة القساوة للمنشأ تعطي انتقالات واحدية للمجاهيل الحركية وبالترتيب مع الإبقاء على كل المجاهيل الحركية الأخرى معدومة في كل مرحلة كما هو مبين في الأشكال (30-3).
 بدراسة الشكل (30-3 أ) نجد:

$$k_{11} = (k_{11})_{IV} + (k_{11})_V$$

$$= \frac{EA}{25L} \cos^2(0) + \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15}\right)^2 = 0.088 \frac{EA}{L}$$





الشكل (30-3) مراحل تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ

$$k_{21} = (k_{21})_v = -\frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right)^2 = -0.048 \frac{EA}{L}$$

$$k_{31} = (k_{31})_v = \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right) \left(\frac{12}{15} \right) = 0.064 \frac{EA}{L}$$

$$q_{11} = 0$$

$$q_{v1} = \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right) = 0.08 \frac{EA}{L}$$

ومن دراسة الشكل (30-3 ب) نجد:

$$k_{12} = (k_{12})_v = -\frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right)^2 = -0.048 \frac{EA}{L}$$

$$\begin{aligned} k_{22} &= (k_{22})_I + (k_{22})_{II} + (k_{22})_{III} + (k_{22})_V \\ &= \frac{2EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right)^2 + \frac{2A}{16L} (1)^2 + \frac{EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right)^2 + \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right)^2 \\ &= 0.269 \frac{EA}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{32} &= (k_{32})_I + (k_{32})_{II} + (k_{32})_{III} + (k_{32})_V \\ &= -\frac{2EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right) \left(\frac{12}{20} \right) + \frac{2EA}{16L} (0)(1) + \frac{EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right) \left(\frac{12}{20} \right) - \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right) \left(\frac{12}{15} \right) \\ &= -0.088 \frac{EA}{L} \end{aligned}$$

$$q_{12} = \frac{2EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right) = 0.08 \frac{EA}{L}$$

$$q_{v2} = -\frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right) = -0.08 \frac{EA}{L}$$

وبشكل مشابه ندرس الشكل (30-3 ج) فنجد:

$$k_{13} = (k_{13})_v = \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right) \left(\frac{12}{15} \right) = 0.064 \frac{EA}{L}$$

$$\begin{aligned} k_{23} &= (k_{23})_I + (k_{23})_{II} + (k_{23})_{III} + (k_{23})_v \\ &= -\frac{2EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right) \left(\frac{12}{20} \right) + 0 + \frac{EA}{20L} \left(\frac{16}{20} \right) \left(\frac{12}{20} \right) - \frac{2EA}{15L} \left(\frac{9}{15} \right) \left(\frac{12}{15} \right) \\ &= -0.088 \frac{EA}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{33} &= (k_{33})_I + (k_{33})_{II} + (k_{33})_{III} + (k_{33})_v \\ &= \frac{2EA}{20L} \left(\frac{12}{20} \right)^2 + 0 + \frac{EA}{20L} \left(\frac{12}{20} \right)^2 + \frac{2EA}{15L} \left(\frac{12}{15} \right)^2 \\ &= 0.1393 \frac{EA}{L} \end{aligned}$$

$$q_{13} = -\frac{2EA}{20L} \left(\frac{12}{20} \right) = -0.06 \frac{EA}{L}$$

$$q_{v3} = \frac{2EA}{15L} \left(\frac{12}{15} \right) = 0.1067 \frac{EA}{L}$$

وبالتالي نجد:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0.088 & -0.048 & 0.064 \\ -0.048 & 0.269 & -0.088 \\ 0.064 & -0.088 & 0.1393 \end{pmatrix} \quad (d)$$

$$[q] = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{v1} & q_{v2} & q_{v3} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0.08 & -0.06 \\ 0.08 & -0.08 & 0.1067 \end{pmatrix} \quad (e)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a)، (b) و (d) في العلاقة (3-1) نجد:

$$W \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0.088 & -0.048 & 0.064 \\ -0.048 & 0.269 & -0.088 \\ 0.064 & -0.088 & 0.1393 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

7- بحل جملة المعادلات (f) نجد:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{WL}{EA} \begin{Bmatrix} 59.808 \\ 16.670 \\ -38.483 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

$$x_1 = \Delta_1 = 59.808 \frac{WL}{EA} \quad (\text{إلى اليمين})$$

$$x_2 = \Delta_2 = 16.670 \frac{WL}{EA} \quad (\text{إلى اليمين})$$

$$x_3 = \Delta_3 = -38.483 \frac{WL}{EA} \quad (\text{للأسفل})$$

8- للحصول على قيمة القوى العنصرية في العناصر I و V نعوض قيم المعادلات (c) و (e) و (g) في العلاقة (3-4) نجد:

$$\begin{Bmatrix} Q_I \\ Q_V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0.08 & -0.06 \\ 0.08 & -0.08 & 0.1067 \end{pmatrix} * \frac{WL}{EA} \begin{Bmatrix} 59.808 \\ 16.670 \\ -38.483 \end{Bmatrix} = W \begin{Bmatrix} 3.643 \\ -0.655 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

ومنه:

$$Q_I = 3.643 W \quad (\text{شد})$$

$$Q_V = -0.655 W \quad (\text{ضغط})$$

6-3- تحليل الشبكات الصلدة باستخدام طريقة مصفوفة القساوة:

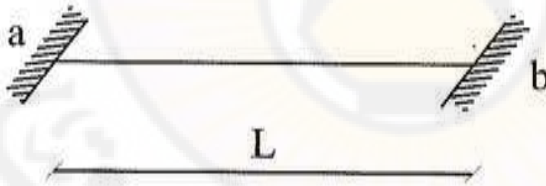
Analysis of Grids by the Stiffness method

عندما تتعرض الشبكات الصلدة إلى أحمال خارجية متعامدة مع مستويات هذه الشبكات تنشأ انتقالات في عناصر الشبكات بالاتجاه المتعامد مع مستوي المنشأ، وتتعرض عناصر هذه الشبكات إلى قوى قاسية وعزوم انعطاف وعزوم فتل فقط. ونظراً لطبيعة هذه المنشآت والأحمال المطبقة عليها فيمكن إهمال تأثير التشوهات النازمية في مختلف العناصر واعتماد تأثير التشوهات الناتجة عن عزوم الانعطاف وعزوم الفتل لدى تحليل هذه المنشآت.

6-3-1- عوامل القساوة للعنصر الشبكي الصلب:

Stiffness coefficients of a grid element

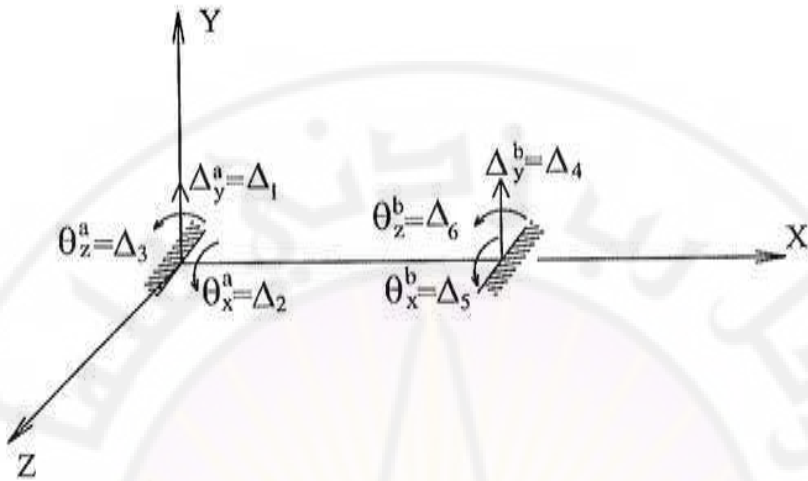
ندرس العنصر ab لمنشأ شبكي صلد والمبين في الشكل (31-3).



الشكل (31-3) الجملة المقيدة للعنصر الشبكي الصلب

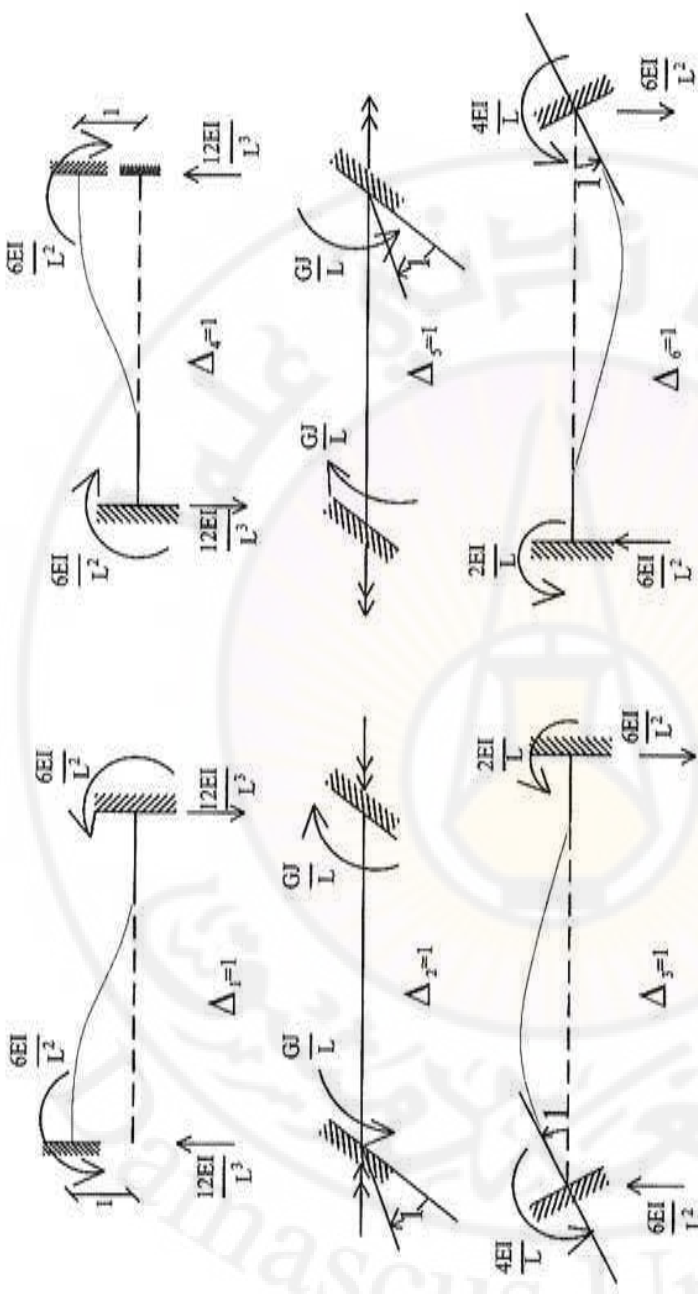
ونلاحظ أن كلاً من عقدتي العنصر تملك ثلاث درجات من درجات الحرية الحركية وهي الانتقال (عمودياً على مستوى العنصر) والدوران (في الاتجاه المتعامد مع مستوى العنصر) وزاوية الدوران (الفتل) حول محور العنصر وعليه

نلاحظ بأن هذا العنصر يملك ست درجات من درجات الحرية الحركية كما هو موضح في الشكل (32-3).



الشكل (32-3) درجات الحرية الحركية للعنصر الشبكي الصلب

للحصول على عوامل القساوة المطلوبة نطبق على العقدتين a و b وبالترتيب واحدة الانتقال لكل انتقال حركي مع الإبقاء على كل الانتقالات الأخرى معدومة كما هو مبين في الأشكال (33-3) ونقوم باستخراج ردود الأفعال المتولدة في القيود المضافة للعنصر والمساوية بالتعريف إلى عوامل القساوة للعنصر المدرس.



I: عزم عطالة مقطع العنصر حول محور الانحناء

E: معامل المرونة للعنصر

الشكل (33-3) عوامل القساوة للعنصر الشبكي الصلب

J: عزم العطالة القطبي لمقطع العنصر

G: معامل القص للعنصر

وبالاستعانة بالأشكال (33-3) يمكننا تعيين مصفوفة القساوة لأي منشأ شبكي صلد من خلال تجميع عوامل القساوة لمختلف العناصر المشكلة لهذا المنشأ كما سيتم شرحه من خلال الأمثلة التالية.

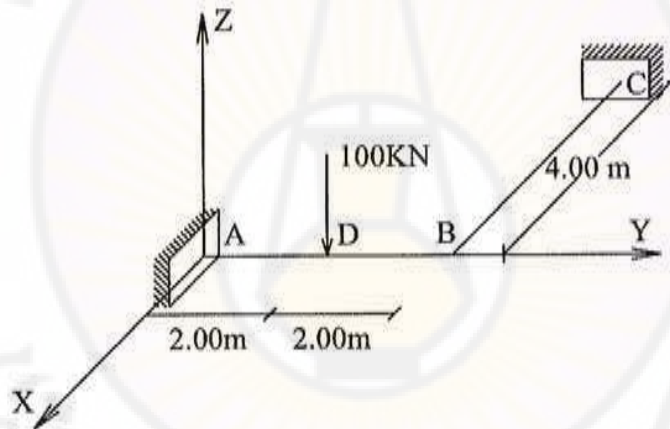
2-6-3 أمثلة Examples:

مثال (7):

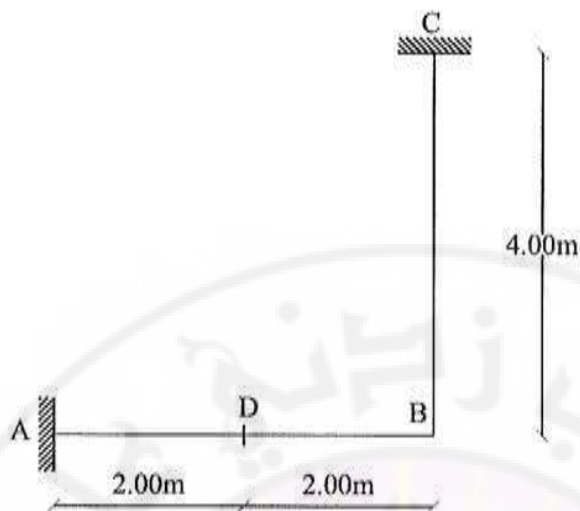
يطلب إيجاد انتقالات العقدة B وردود الفعل في الوثاقة A للمنشأ الشبكي الصلد والمبين في الشكل (34-3).

$$GJ = 10 \text{ MN.m}^2$$

$$EI = 12.5 \text{ MN.m}^2$$



(34-3 أ) الشكل الفراغي

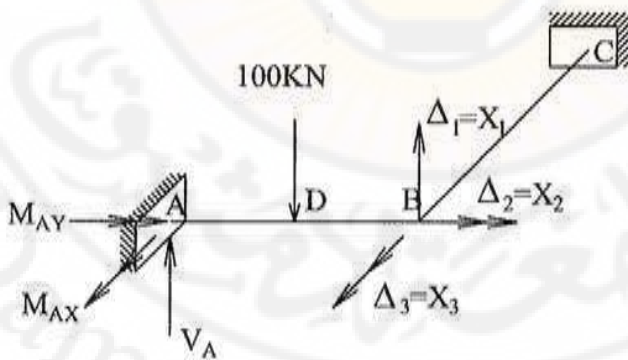


(34-3 ب) المسقط

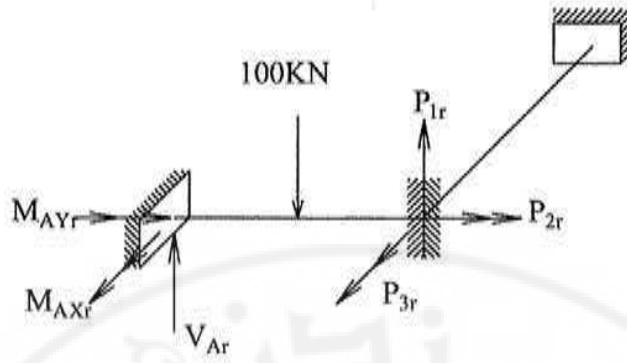
الشكل (34-3) معطيات المثال (7)

الحل:

1- نلاحظ بأن الانتقالات الممكنة في عقدة المنشأ هي الانتقال الشاقولي والدوران حول المحور x والدوران حول المحور y كما هو مبين في الشكل (35-3 أ).



(35-3 أ) المجاهيل الحركية



الجملة المقيدة (ب 35-3)

الشكل (35-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

- 2- لتقرير المنشأ حركياً نستخدم قيداً وهمياً للعقدة B لمنع الانتقالات الممكنة لهذه العقدة كما هو مبين في الشكل (ب 35-3).
- 3- بالاستعانة بالأشكال (34-3 آ) و (35-3 آ) نجد أن شعاع الأحمال الخارجية معطى بالعلاقة:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

- 4- ندرس الجملة المقيدة (الشكل 35-3 ب) ونجد بالاستعانة برودود أفعال الجوائز الموثوقة المعطاة في الملحق (ب) أن:

$$P_{1r} = \frac{100}{2} = 50 \text{ kN}$$

$$P_{2r} = 0$$

$$P_{3r} = -\frac{100(4)}{8} = -50 \text{ kN.m}$$

$$V_{Ar} = \frac{100}{2} = 50 \text{ kN.m}$$

$$M_{Ayr} = 0$$

$$M_{Axf} = \frac{100(4)}{8} = 50 \text{ kN.m}$$

ومنه:

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \\ P_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$\{R_r\} = \begin{Bmatrix} V_{Ar} \\ M_{Ayr} \\ M_{Axf} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتحديد مصفوفة القساوة [K] للمنشأ نعطي المجاهيل الحركية في العقدة B انتقالات واحدة وبالترتيب ونقوم بتحديد عوامل القساوة المطلوبة استناداً إلى عوامل القساوة العنصرية المبينة في الأشكال (36-3).

بإعطاء المجهول الحركي x_1 قيمة واحدة الانتقال ($x_1 = 1$) نحصل على عوامل القساوة المبينة في الشكل (36-3 أ) ونجد:

$$k_{11} = (k'_{11})_{AB} + (k''_{11})_{BC} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} = \frac{24EI}{L^3}$$

$$k_{21} = (k'_{21})_{AB} + (k''_{21})_{BC} = 0 + \frac{6EI}{L^2} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{31} = (k'_{31})_{AB} + (k''_{31})_{BC} = -\frac{6EI}{L^2} + 0 = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$v_{a1} = -\frac{12EI}{L^3} \quad ; \quad m_{ax1} = -\frac{6EI}{L^2} \quad ; \quad m_{ay1} = 0$$

بشكل مشابه نعطي المجهول الحركي x_2 قيمة واحدة الانتقال ($x_2 = 1$)
فنحصل على عوامل القساوة الموافقة لاتجاه المجهول x_2 والمبينة في الشكل
(36-3 ب) ونجد:

$$k_{12} = (k'_{12})_{AB} + (k''_{12})_{BC} = 0 + \frac{6EI}{L^2} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{22} = (k'_{22})_{AB} + (k''_{22})_{BC} = \frac{GJ}{L} + \frac{4EI}{L}$$

$$k_{32} = (k'_{32})_{AB} + (k''_{32})_{BC} = 0 + 0 = 0$$

$$v_{a2} = 0 \quad ; \quad m_{ax2} = 0 \quad ; \quad m_{ay2} = -\frac{GJ}{L}$$

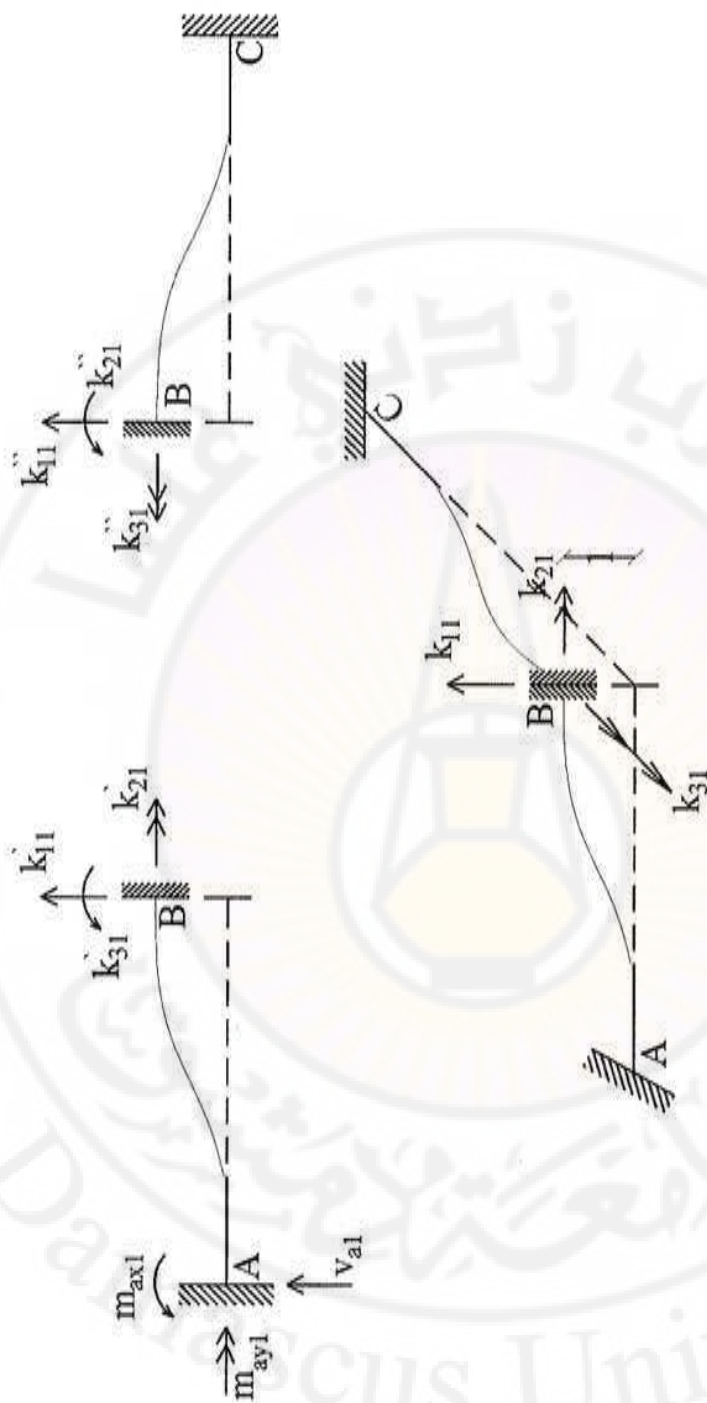
بإعطاء المجهول الحركي x_3 قيمة واحدة الانتقال ($x_3 = 1$) نحصل على
عوامل القساوة المبينة في الشكل (36-3 ج) وجمع هذه العوامل نحصل على
عوامل القساوة الموافقة لاتجاه المجهول x_3 كما يلي:

$$k_{13} = (k'_{13})_{AB} + (k''_{13})_{BC} = -\frac{6EI}{L^2} + 0 = -\frac{6EI}{L^2}$$

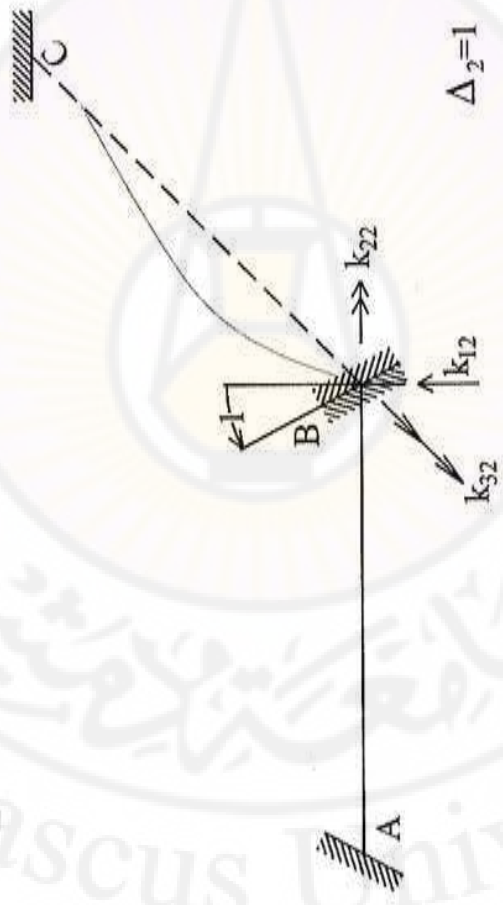
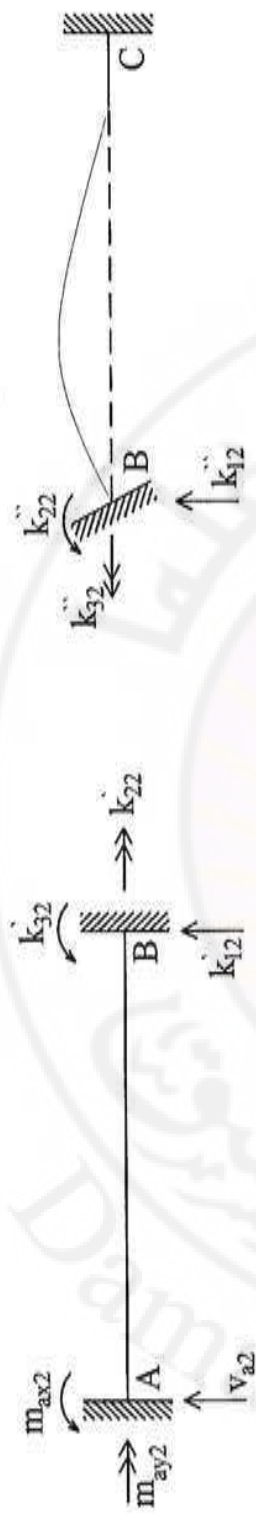
$$k_{23} = (k'_{23})_{AB} + (k''_{23})_{BC} = 0 + 0 = 0$$

$$k_{33} = (k'_{33})_{AB} + (k''_{33})_{BC} = \frac{4EI}{L} + \frac{GJ}{L}$$

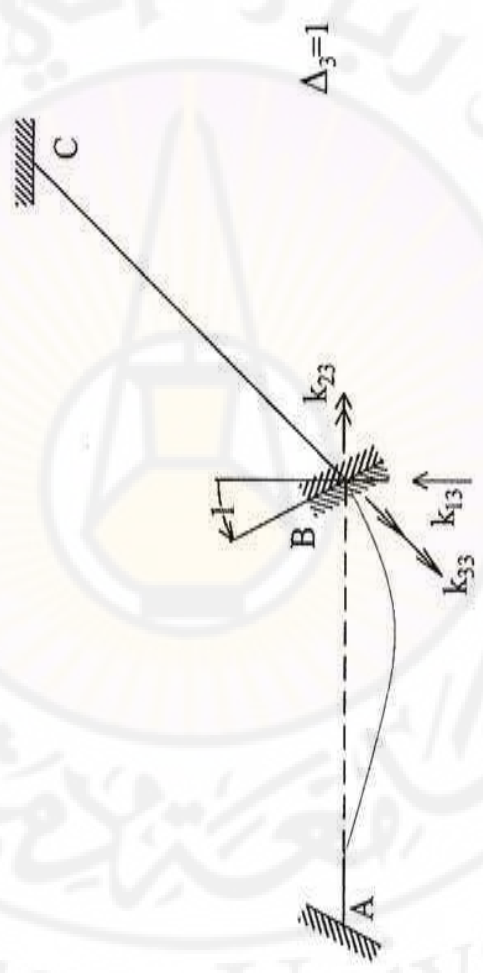
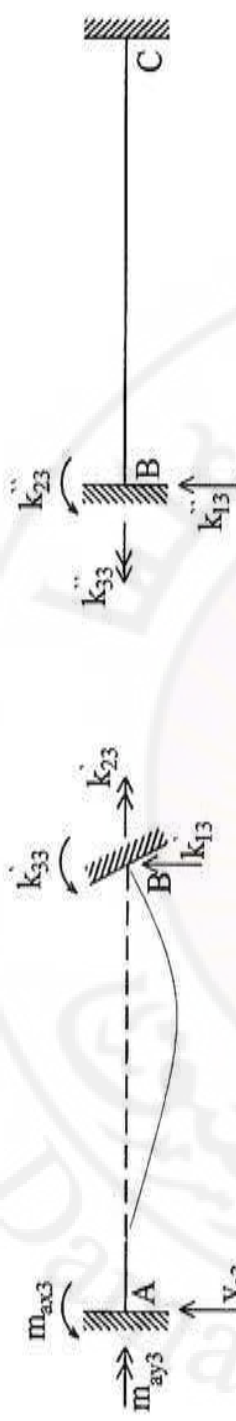
$$v_{a3} = \frac{6EI}{L^2} \quad ; \quad m_{bx3} = \frac{2EI}{L} \quad ; \quad m_{by3} = 0$$



الشكل (36-3) $\Delta_1=1$



الشكل (36-3) ب



الشكل (36-3 ج)
تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ

وبالتالي نجد:

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 24 & 6L & -6L \\ 6L & (4+\gamma)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & (4+\gamma)L^2 \end{pmatrix} \quad (d)$$

$$[r] = \begin{pmatrix} v_{a1} & v_{a2} & v_{a3} \\ m_{ay1} & m_{ay2} & m_{ay3} \\ m_{ax1} & m_{ax2} & m_{ax3} \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6L \\ 0 & -\gamma L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 \end{pmatrix} \quad (e)$$

$$\gamma = \frac{GJ}{EI} \quad \text{حيث:}$$

وبتعويض قيم المعطيات العددية للمسألة مع اعتماد الواحدات m, kN للقوى والأطوال نجد:

$$[K] = 195.313 \begin{pmatrix} 24 & 24 & -24 \\ 24 & 76.8 & 0 \\ -24 & 0 & 76.8 \end{pmatrix} \quad (f)$$

$$[r] = 195.313 \begin{pmatrix} -12 & 0 & 24 \\ 0 & -12.8 & 0 \\ -24 & 0 & 32 \end{pmatrix} \quad (g)$$

6- بتعويض قيم المعادلات (a) و (b) و (g) في العلاقة (3-1) نجد:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix} + 195.313 \begin{Bmatrix} 24 & 24 & -24 \\ 24 & 76.8 & 0 \\ -24 & 0 & 76.8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

7- بحل جملة المعادلات الخطية (h) نحصل على قيم المجاهيل الحركية المطلوبة:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0196 \\ 0.0061 \\ -0.0028 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

ومنه:

$$x_1 = -0.0196 \text{ m}$$

$$x_2 = 0.0061 \text{ rad}$$

$$x_3 = -0.0028 \text{ rad}$$

8- لتحديد قيم ردود الأفعال في الوثاقة A نعوض قيم المعادلات و (g) و (i) في العلاقة (3-4) فنجد:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} V_A \\ M_{Ay} \\ M_{Ax} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} + 195.313 \begin{pmatrix} -12 & 0 & 24 \\ 0 & -12.8 & 0 \\ -24 & 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0196 \\ 0.0061 \\ -0.0028 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82.813 \\ -15.250 \\ 124.375 \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$V_A = 82.813 \text{ kN}$$

$$M_{Ay} = -15.250 \text{ kN.m}$$

$$M_{Ax} = 124.375 \text{ kN.m}$$

ونلاحظ أن عزم الانعطاف حول المحور y والمتولد في المسند A معاكس للجهة الموجبة المفروضة.

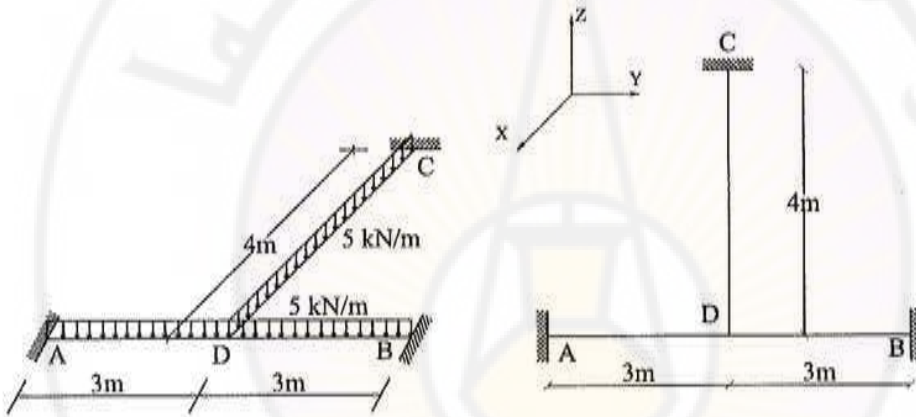
مثال (8):

يطلب إيجاد مقدار الانتقالات في العقدة D للمنشأ الشبكي الصلب المبين في الشكل (37-3) نتيجة لحمولة موزعة مقدارها 5 kN/m وكذلك تحديد ردود الأفعال في المسند C.

يؤخذ:

$$EI = 15 \text{ MN.m}^2 = 15 \times 10^3 \text{ kN.m}^2$$

$$GJ = 10 \text{ MN.m}^2 = 10^4 \text{ kN.m}^2$$



الشكل الفراغي (37-3 أ)

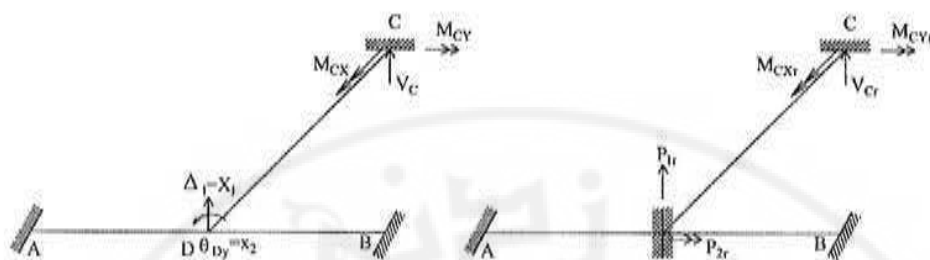
المسقط الأفقي (37-3 ب)

الشكل (37-3): معطيات المثال (8)

الحل:

1- نلاحظ أن شكل المنشأ والأحمال المطبقة متناظران حول المحور CD يجعل الانتقالات الممكنة في العقدة D هي الانتقال وفق المحور z والدوران حول المحور y كما هو مبين في الشكل (38-3 أ)، أما الدوران حول المحور x فهو معدوم.

2- لتقرير المنشأ حركياً نستخدم قيداً وهمياً في العقدة D لمنع الانتقالات الممكنة لهذه العقدة كما هو مبين في الشكل (38-3 ب).



(38-3 أ) المجاهيل الحركية

(38-3 ب) الجملة المقيدة

الشكل (38-3) مراحل تقرير المنشأ حركياً

3- نلاحظ من خلال دراسة الأشكال (37-3) و (38-3) أن شعاع الأحمال الخارجية المطبقة مباشرة باتجاه المجاهيل الحركية معدوم أي:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

4- ندرس الجملة المقيدة (الشكل 38-3 ب) فنجد بالاستعانة برودود أفعال الجوائز الموثوقة المعطاة في الملحق (ب) بأن شعاع الأحمال في الجملة المقيدة كما يلي:

$$P_{1r} = \frac{5 \times 3}{2} + \frac{5 \times 3}{2} + \frac{5 \times 4}{2} = 25 \text{ kN}$$

$$P_{2r} = \frac{5 \times (4)^2}{12} = 6.667 \text{ kN.m}$$

$$V_{Cr} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ kN}$$

$$N_{Cyr} = -\frac{5 * (4)^2}{12} = -6.6667 \text{ kN.m}$$

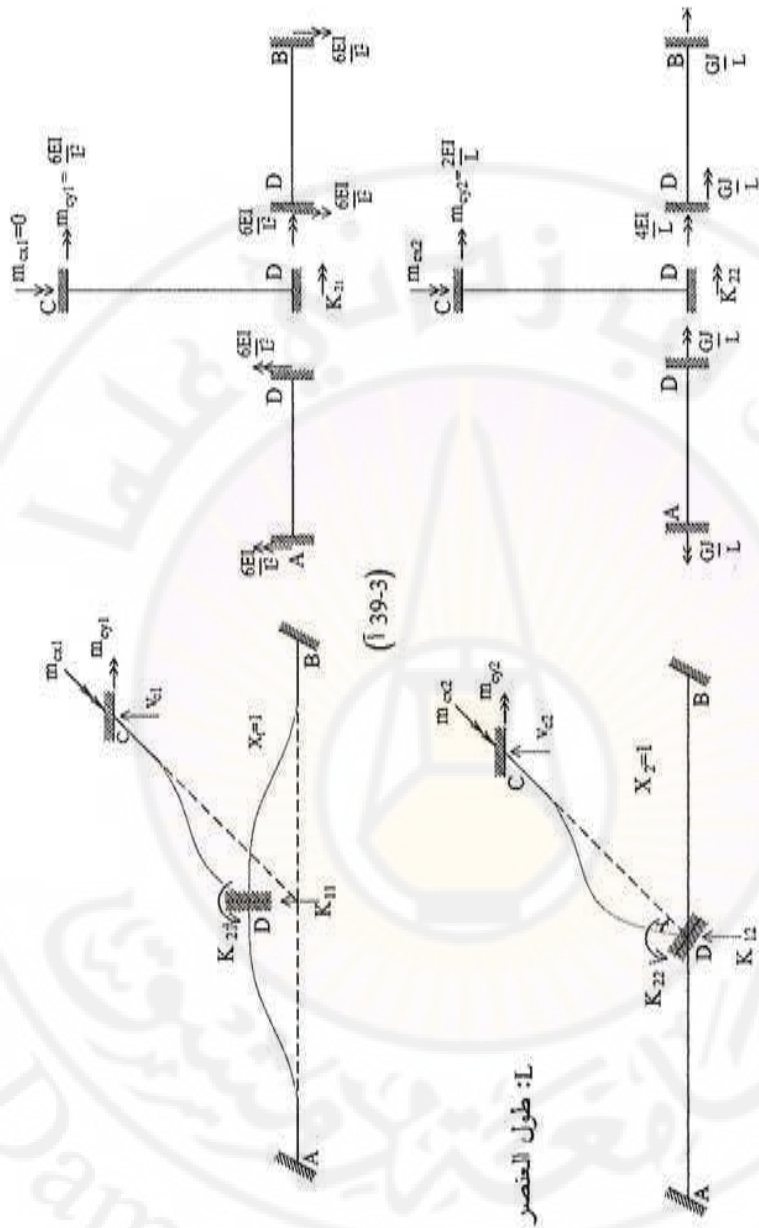
$$M_{Cxr} = 0$$

ومنه:

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} P_{1r} \\ P_{2r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 6.6667 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

$$\{R_{Cr}\} = \begin{Bmatrix} V_{Cr} \\ M_{Cyr} \\ M_{Cxr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -6.6667 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

5- لتحديد مصفوفة القساوة للمنشأ نعطي المجاهيل الحركية في العقدة D قيم واحدة الانتقال وبالترتيب ونقوم بتحديد عوامل القساوة المطلوبة والقوى الردية في المسند C استناداً إلى عوامل القساوة العنصرية المبينة في الأشكال (39-3) وذلك كما يلي:



الشكل (39-3) تحديد مصفوفة القساوة للمنشأ

(ب 39-3)

طول العنصر: L

من خلال دراسة الشكل (39-3 أ) من أجل $(x_1 = 1)$ نجد:

$$\begin{aligned} k_{11} &= (k_{11})_{DA} + (k_{11})_{DB} + (k_{11})_{DC} \\ &= \frac{12(15 \times 10^3)}{(3)^3} + \frac{12(15 \times 10^3)}{(3)^3} + \frac{12(15 \times 10^3)}{(4)^3} \\ &= 16.1458 \times 10^3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21} &= (k_{21})_{DA} + (k_{21})_{DB} + (k_{21})_{DC} \\ &= 0 + 0 + \frac{6(15 \times 10^3)}{(4)^2} = 5.625 \times 10^3 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

$$v_{c1} = (v_{c1})_{CD} = -\frac{12(15 \times 10^3)}{(4)^3} = -2.8125 \times 10^3 \text{ kN}$$

$$m_{cy1} = (m_{cy1})_{CD} = \frac{6(15 \times 10^3)}{(4)^2} = 5.625 \times 10^3 \text{ kN.m}$$

$$m_{cx1} = (m_{cx1})_{CD} = 0$$

وبشكل مشابه ندرس الشكل (39-3 ب) من أجل $(x_2 = 1)$ فنجد:

$$\begin{aligned} k_{12} &= (k_{12})_{DA} + (k_{12})_{DB} + (k_{12})_{DC} \\ &= 0 + 0 + \frac{6(15 \times 10^3)}{(4)^2} = 5.625 \times 10^3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$k_{22} = (k_{22})_{DA} + (k_{22})_{DB} + (k_{22})_{DC}$$

$$= \frac{10^4}{3} + \frac{10^4}{3} + \frac{4(15 * 10^3)}{4} = 21.6667 * 10^3 \text{ kN.m}$$

$$v_{c2} = (v_{c2})_{CD} = -\frac{6(15 * 10^3)}{4} = -5.625 * 10^3 \text{ kN}$$

$$m_{Cy2} = (m_{Cy2})_{CD} = \frac{2(15 * 10^3)}{4} = 7.5 * 10^3 \text{ kN.m}$$

$$m_{Cx2} = 0$$

ومنه:

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} 16.1458 & 5.625 \\ 5.625 & 21.6667 \end{pmatrix} \quad (d)$$

$$[r] = \begin{pmatrix} v_{c1} & v_{c2} \\ m_{Cy1} & m_{Cy2} \\ m_{Cx1} & m_{Cx2} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{pmatrix} -2.8125 & -5.625 \\ 5.625 & 7.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (e)$$

6- لتحديد قيم المجاهيل الحركية نعوض قيم العلاقات (a) و (b) و (d) في العلاقة (3-1) فنجد:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 6.6667 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{pmatrix} 16.1458 & 5.625 \\ 5.625 & 21.6667 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

7- من خلال حل جملة المعادلات (f) نحصل على قيم المجاهيل الحركية كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = -10^{-3} \begin{Bmatrix} 1.5845 \\ 0.1037 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

$$x_1 = -1.5845 * 10^{-3} \text{ (m)} \quad \text{ومنه:}$$

$$x_2 = 0.1037 * 10^{-3} \text{ (rad)}$$

8- للحصول على قيم ردود الأفعال في المسند C نعوض قيم المعادلات (c) و (e) و (g) في العلاقة (3-4) فنحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} \{R_c\} = \begin{Bmatrix} V_c \\ M_{cy} \\ M_{cx} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 10 \\ -6.6667 \\ 0 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{pmatrix} -2.8125 & -5.625 \\ 5.625 & 7.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \begin{Bmatrix} -1.5845 \\ 0.1037 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 13.8731 \\ -14.8018 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (h) \end{aligned}$$

ومنه:

$$V_c = 13.8731 \text{ kN}$$

$$M_{cy} = -14.8018 \text{ kN.m}$$

$$M_{cx} = 0$$

ونلاحظ أن عزم الانعطاف M_{cy} مخالف للجهة الموجبة المفروضة وكذلك نجد أن عزم القتل M_{cx} معدوم في العنصر CD وهذا متوقع من خلال شكل المنشأ والأحمال المطبقة.

مثال (9):

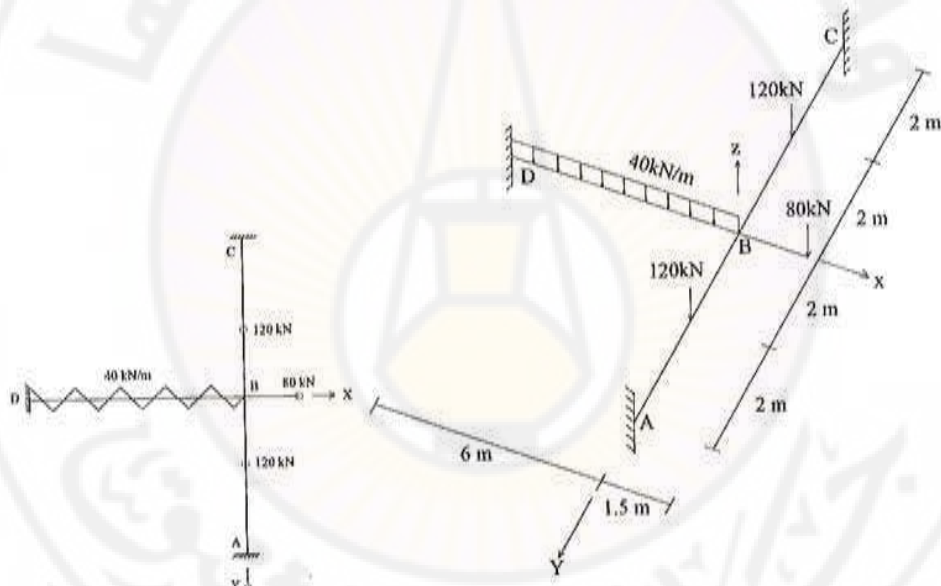
للشبكة الصلد المبين جانباً وباستخدام طريقة مصفوفة القساوة وبالإستفادة من تناظر المنشأ يطلب:

1- إيجاد المجاهيل الحركية في العقدة B.

2- إيجاد ردود الأفعال في الوثاقة A.

$$GJ = 0.2 EI$$

$$EI = \text{Const}$$



الشكل (3-40) معطيات المثال

الحل:

1- نلاحظ أن شكل المنشأ والأحمال المطبقة متناظران حول المحور x وبالتالي

فدوران النقطة الواقعة عليه حوله معدوم أي: صفر $\theta_{xB} = 0$

2- نستعويض عن الظفر بقوة شاقولية قيمتها 80 kN وعزم دوران حول المحور y

قيمته 120 kN.m

3- للمنشأ ثلاث إمكانيات للحركة وللنقطة B منه وبسبب وقوع النقطة B على

المحور x فيكون دورانها حوله معدوم وتبقى المجاهيل الحركية هي:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \theta_{yB} \\ \Delta_{zB} \end{Bmatrix}$$

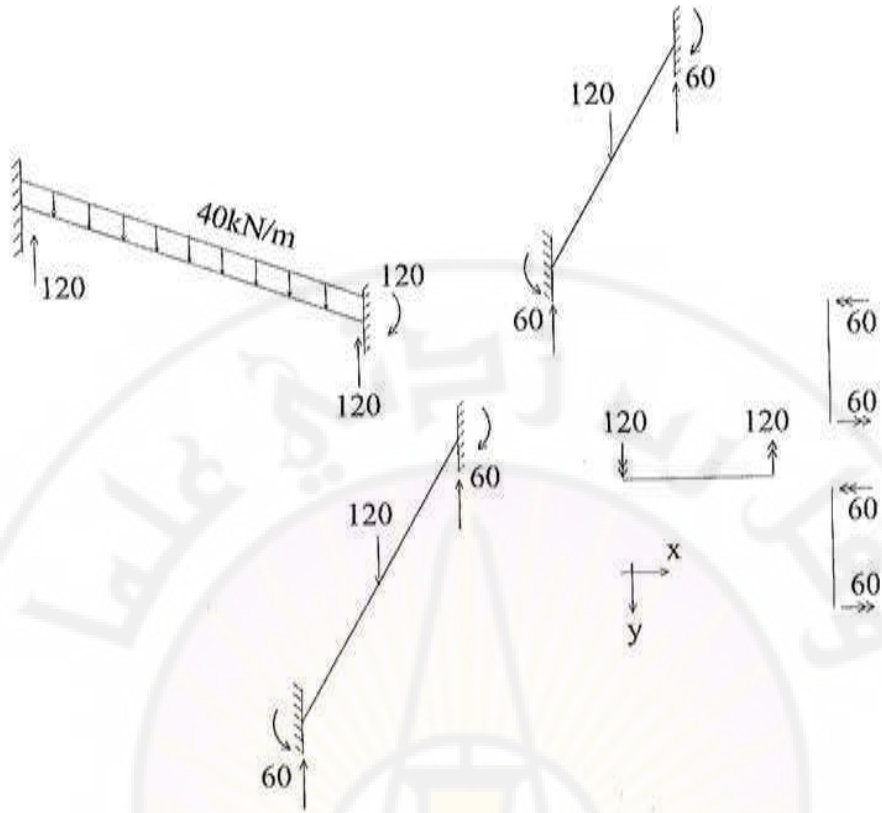
4- نلاحظ من دراسة شكل المنظور (3-4) ومن المرحلة (2) السابقة أن شعاع

الأحمال المطبقة مباشرة في العقدة B وباتجاه المجاهيل الحركية هو:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} -120 \\ -80 \end{Bmatrix}$$

5- بدراسة الجملة المقيدة نجد أن شعاع الأحمال في العقدة B الناتج عن

الحمولات بين العقد هو كما في الشكل (3-41).



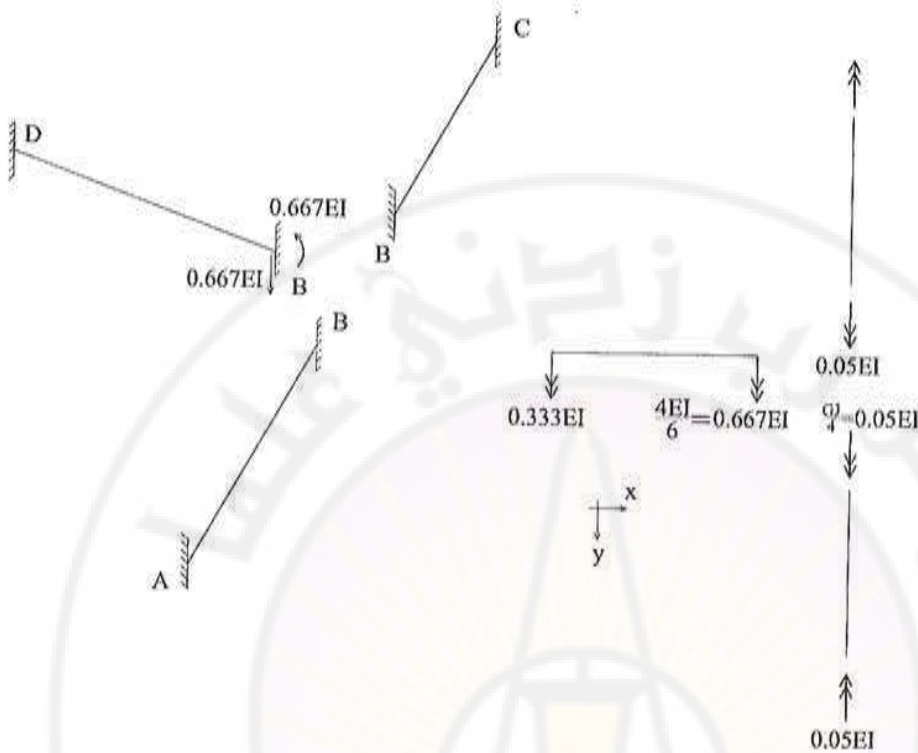
الشكل (41-3)

ومنه نجد أن:

$$\{P_r\} = \begin{Bmatrix} -120 \\ 240 \end{Bmatrix}$$

5- لتحديد مصفوفة القساوة للمنشأ نعطي المجاهيل الحركية في العقدة B قيم واحدة الانتقال وبالترتيب ونقوم بتحديد عوامل القساوة المطلوبة استناداً إلى عوامل القساوة العنصرية المبينة في الأشكال (42-3) وذلك كما يلي:

من أجل $\theta_{yB} = 1$ نجد:



الشكل (آ-42-3)

من المسقط الأفقي (آ-42-3) نجد:

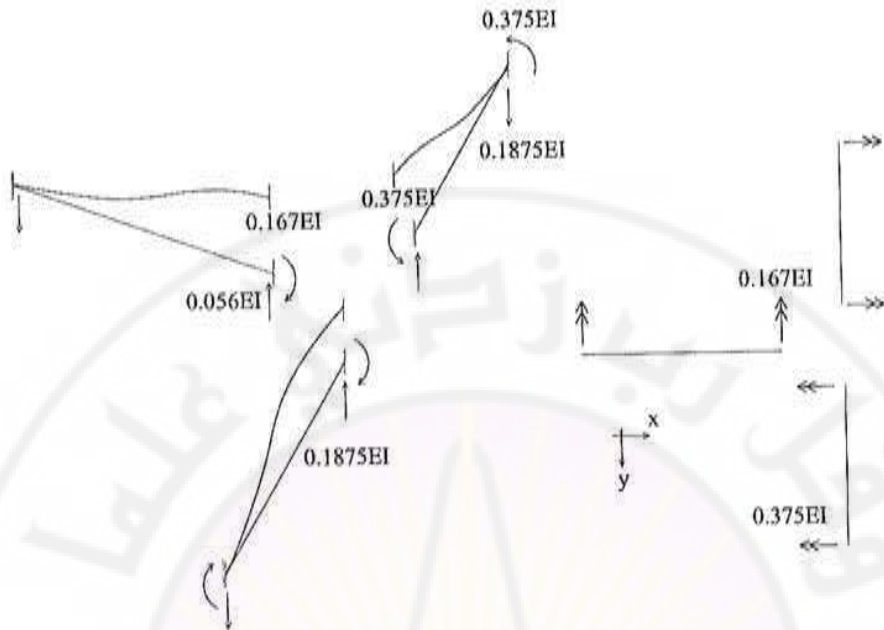
$$k_{11} = 0.05 EI + 0.05 EI + 0.667 EI$$

$$k_{11} = 0.767 EI$$

من المنظور (آ-42-3) نجد:

$$k_{21} = -0.167 EI$$

ومن أجل $\Delta_{zB} = 1$ نجد:



الشكل (3-42-ب)

ومن المسقط الأفقي (3-42-ب) نجد:

$$k_{12} = -0.167 EI$$

ومن المنظور (3-42-ب) نجد:

$$k_{22} = 0.1875 EI + 0.1875 EI + 0.056 EI = 0.431 EI$$

6- بالتعويض في معادلة التوافق (3-1) نجد:

$$\begin{Bmatrix} -120 \\ -80 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -120 \\ 240 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 0.767 & -0.167 \\ -0.167 & 0.431 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \Delta_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_y \\ \Delta_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -176.551 \\ -810.868 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{rad} \\ \text{m} \end{matrix}$$

وهي الانتقالات المطلوبة في العقدة B والإشارة السالبة تعني أن الانتقالات الفعلية بعكس الاتجاه الموجب لجهة الدوران والانتقال المفروض.

7- ولحساب ردود الأفعال في الوثاقة A، نطبق المعادلة (3-3) ونجد:

$$\begin{matrix} \text{عزم انعطاف} \\ \text{عزم فتل} \\ \text{رد فعل شاقولي} \end{matrix} \begin{Bmatrix} M = M_{x_A} \\ M_t = M_{y_A} \\ R = Z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ \phi \\ 60 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi & -0.375 EI \\ -0.05 EI & \phi \\ \phi & -0.1875 EI \end{bmatrix} * \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 176.551 \\ -810.868 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{x_A} \\ M_{y_A} \\ Z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 364.08 \\ 8.83 \\ 212.04 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN.m} \\ \text{kN.m} \\ \text{kN} \end{matrix}$$

الفصل الرابع

التحليل الإنشائي بمعونة الحاسب

1-4 : مقدمة:

درسنا في الفصل الثالث الأسلوب المبسط لتطبيق طريقة مصفوفة القساوة ووجدنا بأن تحديد مصفوفة القساوة وأشعة الأحمال المختلفة يدوياً يتطلب منا التفريق بين العقد الداخلية ونقاط الاستناد في المنشأ وكذلك دراسة الجملة المقيدة للمنشأ تحت تأثير واحدة الانتقالات للمجاهيل الحركية المختلفة، وتعد الخطوات السابقة أسلوباً مناسباً لتحليل العديد من المنشآت البسيطة باستخدام الآلات الحاسبة الصغيرة إلا أنه لدى تحليل المنشآت المعقدة الكبيرة بالأسلوب المبسط السابق يمكن أن يكون عدد المجاهيل الحركية (الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ) كبيراً مما يجعل حل معادلات توازن المنشأ يدوياً أمراً شبه مستحيل ولا بد لنا عندئذ من الاستعانة بالحواسب الإلكترونية للحصول على المجاهيل المطلوبة في المنشأ. ومن أجل تبسيط تحليل المنشآت بطريقة مصفوفة القساوة وبمعونة الحاسوب يفضل صياغة خطوات الحل بشكل متسلسل بحيث يستفاد في كل خطوة من خطوات الحل في حساب الخطوات التالية مما يسهل برمجة الطريقة على الحواسب الإلكترونية والحصول على الحلول الإنشائية للعديد من المنشآت المعقدة والتي يعد تحليلها يدوياً في غاية الصعوبة أو مستحيلاً في كثير من الأحيان.

2-4- مراحل تحليل المنشآت بمعونة الحاسوب:

Procedures for Computer-Aided analysis of structures

تتكون خطوات تحليل المنشآت بطريقة مصفوفة القساوة وبمعونة الحاسوب من ثلاث مراحل رئيسية يمكن تلخيصها كما يلي:

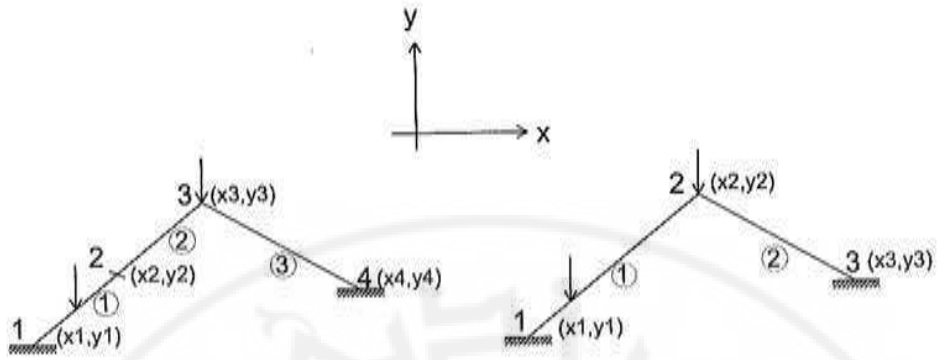
1-2-4- مرحلة ما قبل المعالجة (Pre-processing stage):

ويتم في هذه المرحلة تجزئة المنشأ المدروس إلى عدد من العناصر (elements) كما هو مبين في الشكل (1-4) ويتم تعريف كل عنصر من خلال تحديد إحداثيات نهايتيه والتي نسميها بالنقاط العقدية (nodes) للعنصر كذلك تحديد الخواص الهندسية (المساحة، عزم العطالة، ... الخ). وتحديد خواص المواد المشكلة للعنصر (معامل المرونة، معامل القص...) وكلما كان عدد العناصر المستخدمة في الحل كبيراً زاد عدد المجاهيل الحركية وأبعاد مختلف المصفوفات والأشعة المستخدمة في الحل.

2-2-4- مرحلة المعالجة (Processing stage):

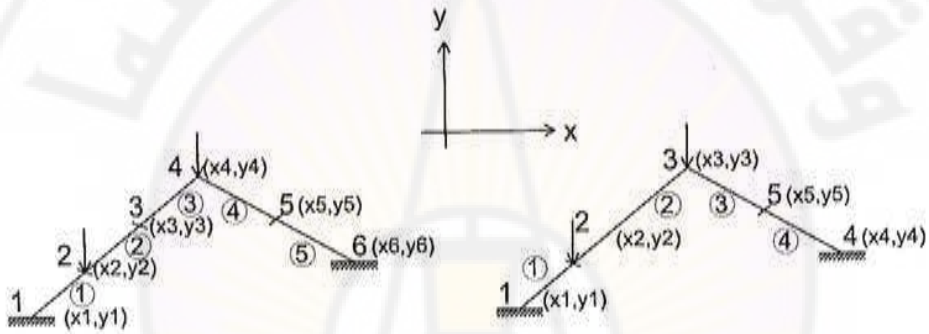
وفي هذه المرحلة يتم استخراج مصفوفة القساوة $[K]$ للمنشأ وذلك بتجميع مصفوفات القساوة العنصرية $[K]_e$ للعناصر المشكلة للمنشأ. وإذا فرضنا بأن عدد العناصر المشكلة للمنشأ هو m ، فيمكننا أن نرمز لعملية استخراج مصفوفة القساوة للمنشأ بالعلاقة:

$$[K] = \sum_{e=1}^m [K]_e \quad (4-1)$$



(ب) التجزئة إلى ثلاثة عناصر

(أ) التجزئة إلى عنصرين



(د) التجزئة إلى خمسة عناصر

(ج) التجزئة إلى أربعة عناصر

الشكل (1-4) تجزئة المنشأ إلى عدد من العناصر

وبشكل مشابه يمكننا استخراج شعاع الأحمال للمنشأ بواسطة العلاقة:

$$\{P\} = \sum_{e=1}^m \{P\}_e \quad (4-2)$$

حيث يرمز الشعاع $\{P\}_e$ إلى شعاع الأحمال العنصرية للعنصر (c). كذلك يتم الحل لاستخراج الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ.

3-2-4- مرحلة ما بعد المعالجة (Post-Processing Stage):

وفي هذه المرحلة نقوم بإخراج قيم المجاهيل الحركية للمنشأ والقوى العنصرية لمختلف العناصر المشكلة للمنشأ وكذلك إيجاد ردود الأفعال في مختلف عناصر المنشأ.

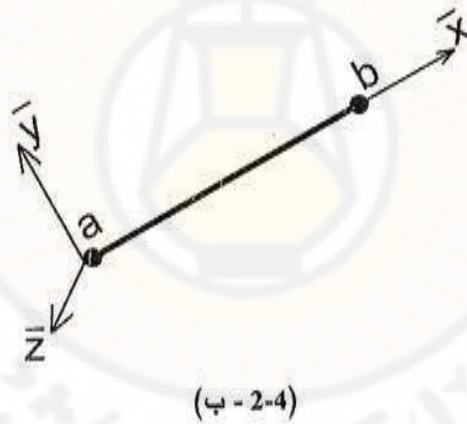
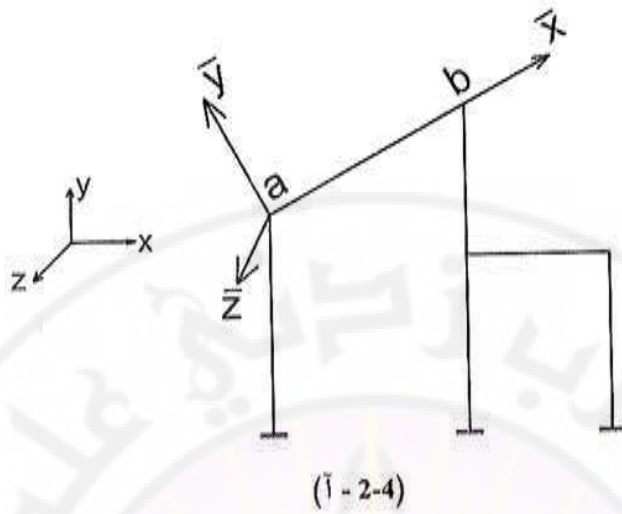
وسوف ندرس مراحل التحليل السابقة بشكل مفصل لاحقاً في الفقرات المقبلة.

3-4- مصفوفات القساوة العنصرية (Element stiffness matrices):

كما ذكرنا في الفقرة (1-2-4) فإننا يمكن أن نقسم أي منشأ إلى عدد من العناصر (الأشكال 1-4)، وبالتالي يمكن أن نحدد خواص المنشأ (مصفوفة القساوة العامة وشعاع الأحمال العام) من خلال تجميع الخواص العنصرية لمختلف عناصر المنشأ. ولتسهيل عملية التجميع هذه نعتمد نوعين من المحاور الإحداثية كالتالي:

أ- جملة محاور عامة (Global axes) لعناصر المنشأ كافة X, Y, Z (الشكل 2-4 - أ).

ب- جملة محاور محلية (Local axes) ترتبط بكل عنصر من عناصر المنشأ (الشكل 2-4 - ب).



الشكل (2-4) جملة المحاور المحلية والمحاور العامة

ونجد وبوضوح من خلال دراسة الشكل (2-4) أن المحور المحلي $\bar{z}$ يوازي المحور العام z .

كذلك نستخدم الرموز التالية:

$[k]_e$: مصفوفة القساوة العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية.

$\{P\}_e$: شعاع الأحمال العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية.

$[k]_0$: مصفوفة القساوة العنصرية بالنسبة للمحاور العامة.

$\{P\}_0$: شعاع الأحمال العنصرية بالنسبة للمحاور العامة.

4-3-1- مصفوفة القساوة للعنصر الجانزي المستوي:

Two-dimensional Beam Element

1- مصفوفة القساوة العنصرية $[k]_e$ بالنسبة للمحاور المحلية:

ندرس العنصر الجانزي المستوي (ab) والذي يملك ستة انتقالات عقدية (ثلاثة انتقالات في كل عقدة) وتوافق هذه الانتقالات العنصرية ستة مركبات للقوى العنصرية، وتبين الأشكال (3-4) اتجاهات القوى والانتقالات العقدية بالنسبة للمحاور المحلية والمحاور العامة.

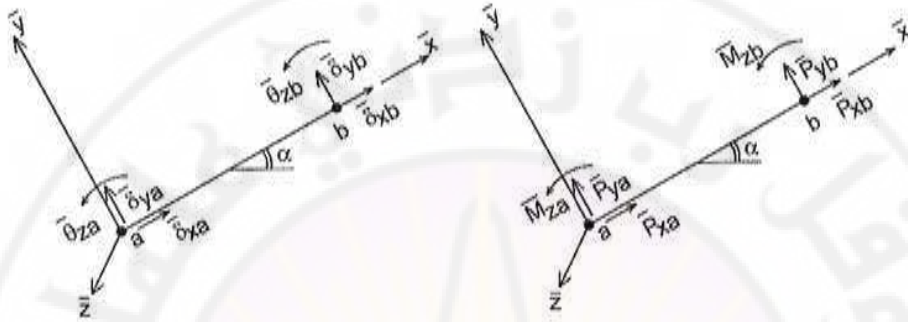
ترتبط القوى العقدية العنصرية مع الانتقالات العقدية العنصرية وفق العلاقة:

$$\{P\}_e = [k]_e \{\delta\}_e \quad (4-3)$$

حيث: $[k]_e$ مصفوفة القساوة العنصرية منسوبة للمحاور المحلية.



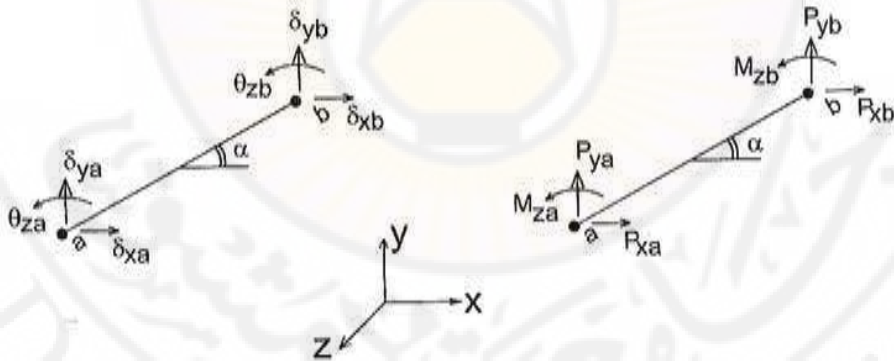
الشكل (3-4) الأرقام المحلية



الانتقالات العنصرية

القوى العقدية العنصرية

(3-4) ب) الخواص العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية



الانتقالات العنصرية

القوى العقدية العنصرية

(3-4) ج) الخواص العنصرية بالنسبة للمحاور العامة

الشكل (3-4) الخواص العنصرية للعنصر الجانزي المستوي

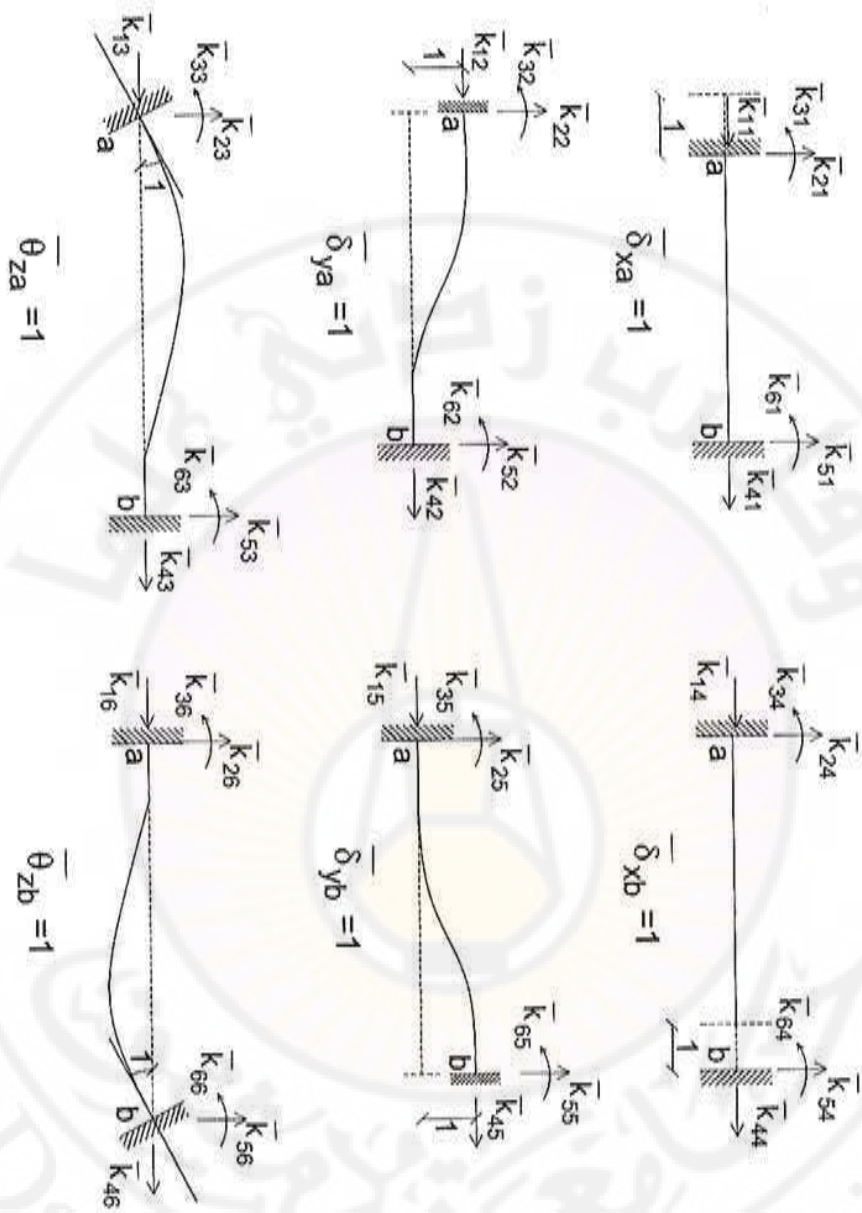
والحصول على عناصر مصفوفة القساوة العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية $[k]$ ، نعتمد على جملة الترقيم المبينة في الشكل (4-3) ونعطي لمختلف الانتقالات العقدية العنصرية قيماً واحدة وبالترتيب فنحصل على قيم عوامل القساوة العنصرية الموضحة في الأشكال (4-4).

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_{xa} \\ \bar{P}_{ya} \\ \bar{M}_{za} \\ \bar{P}_{xb} \\ \bar{P}_{yb} \\ \bar{M}_{zb} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} & \bar{k}_{15} & \bar{k}_{16} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} & \bar{k}_{25} & \bar{k}_{26} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} & \bar{k}_{36} \\ \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{45} & \bar{k}_{46} \\ \bar{k}_{51} & \bar{k}_{52} & \bar{k}_{53} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{55} & \bar{k}_{56} \\ \bar{k}_{61} & \bar{k}_{62} & \bar{k}_{63} & \bar{k}_{64} & \bar{k}_{65} & \bar{k}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{xa} \\ \bar{\delta}_{ya} \\ \bar{\theta}_{za} \\ \bar{\delta}_{xb} \\ \bar{\delta}_{yb} \\ \bar{\theta}_{zb} \end{Bmatrix} \quad (4-4)$$

بالعودة إلى عوامل القساوة المبينة في الأشكال (4-4) ونظيرتها المبينة في الأشكال (7-3) نستنتج أن الشكل الصريح للعلاقة (4-4) كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_{xa} \\ \bar{P}_{ya} \\ \bar{M}_{za} \\ \bar{P}_{xb} \\ \bar{P}_{yb} \\ \bar{M}_{zb} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hdashline & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{xa} \\ \bar{\delta}_{ya} \\ \bar{\theta}_{za} \\ \bar{\delta}_{xb} \\ \bar{\delta}_{yb} \\ \bar{\theta}_{zb} \end{Bmatrix} \quad (4-5)$$

symm



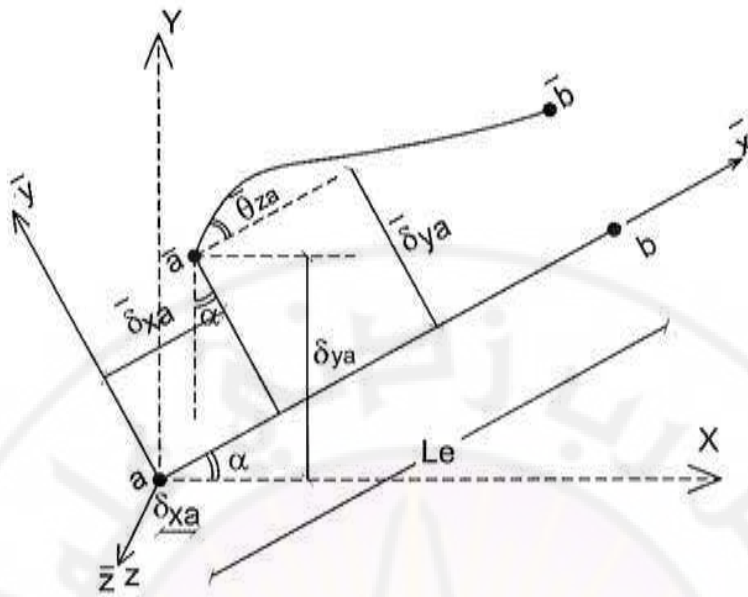
الشكل (4-4) عوامل القساوة العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية

وبالتالي تكون قيمة مصفوفة القساوة للعنصر الجانزي المستوي (ab) منسوبة إلى المحاور المحلية كما يلي:

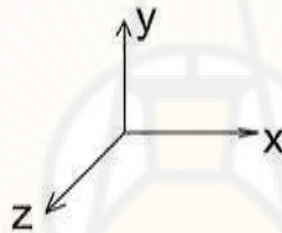
$$[k] = \begin{pmatrix} \bar{k}_{aa} & \bar{k}_{ab} \\ \bar{k}_{ba} & \bar{k}_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \text{symm} & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

2- مصفوفة القساوة العنصرية $[k]$ بالنسبة للمحاور العامة:

ندرس العنصر (ab) المبين في الشكل (4-5) ونفترض بأن العقدة (a) قد انتقلت إلى المكان (a') والعقدة (b) قد انتقلت إلى المكان (b') وذلك بعد حصول التشوه في المنشأ بفعل الأحمال المطبقة.



جملة المحاور المحلية : $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$



جملة المحاور العامة

الشكل (5-4) تحويل الانتقالات العقدية من المحاور المحلية إلى المحاور العامة

من الشكل (5-4) يمكننا تحويل انتقالات العقدة (a) من المحاور المحلية إلى المحاور العامة (أو بالعكس) كما يلي:

$$\delta_{xa} = \bar{\delta}_{xa} \cos \alpha - \bar{\delta}_{ya} \sin \alpha$$

$$\delta_{ya} = \bar{\delta}_{ya} \sin \alpha + \bar{\delta}_{xa} \cos \alpha$$

$$\theta_{za} = \bar{\theta}_{za}$$

وبشكل مصفوفي يمكن تحويل الانتقالات العقدية من المحاور المحلية إلى المحاور العامة بالعلاقة:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{xa} \\ \delta_{ya} \\ \theta_{za} \end{Bmatrix}_e = \begin{pmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{xa} \\ \bar{\delta}_{ya} \\ \bar{\theta}_{za} \end{Bmatrix}_e \quad (4-7)$$

حيث:

$$C_x = \cos \alpha$$

$$C_y = \sin \alpha$$

α : ميل العنصر ab بالنسبة للمحور العام x.

وبالتالي تكون العلاقة بين الانتقالات العقدية منسوبة إلى المحاور العامة إلى مثلثتها منسوبة للمحاور المحلية:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{xa} \\ \bar{\delta}_{ya} \\ \bar{\theta}_{za} \end{Bmatrix}_e = \begin{pmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{xa} \\ \delta_{ya} \\ \theta_{za} \end{Bmatrix}_e$$

$$= \begin{pmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{xa} \\ \delta_{ya} \\ \theta_{za} \end{Bmatrix}_e$$

أو بشكل مختصر :

$$\{\bar{\delta}\}_e = [\lambda] \{\delta\}_e \quad (4-8)$$

حيث نلاحظ أن $[\lambda]$ مصفوفة متعامدة (مقلوبها يساوي منقولها).

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} C_x &= \cos \alpha \\ C_y &= \sin \alpha \end{aligned}$$

$\{\bar{\delta}_a\}$: انتقالات العقدة (a) من العنصر منسوبة إلى المحاور المحلية.

$\{\delta_a\}$: انتقالات العقدة (a) من العنصر منسوبة إلى المحاور العامة.

وبشكل مماثل يمكن ربط انتقالات العقدة (b) بالنسبة إلى المحاور العامة إلى مثيلاتها بالنسبة للمحاور المحلية، وبالتالي تكون العلاقة بين انتقالات عقد العنصر ab المنسوبة إلى المحاور العامة إلى مثيلاتها المنسوبة إلى المحاور المحلية بالشكل:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_a \\ \bar{\delta}_b \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

وبشكل مختصر :

$$\{\bar{\delta}\}_e = [\Gamma]_e \{\delta\}_e \quad (4-10)$$

حيث:

$$[\Gamma]_e = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

تسمى المصفوفة $[\Gamma]_e$ بمصفوفة تحويل الانتقالات (Displacement Transformation Matrix)، ويمكن البرهان على أن المصفوفة $[\Gamma]_e$ مصفوفة متعامدة (Orthogonal Matrix) أي أن:

$$[\Gamma]_e^T [\Gamma]_e = [\Gamma]_e^{-1} [\Gamma]_e = [I] \quad (4-12)$$

أي أن:

$$[\Gamma]_e^T = [\Gamma]_e^{-1} \quad (4-13)$$

حيث يرمز:

$[\Gamma]^T$: منقول (transpose) المصفوفة $[\Gamma]$.

$[\Gamma]^{-1}$: مقلوب (inverse) المصفوفة $[\Gamma]$.

$[I]$: مصفوفة واحدة من الدرجة السادسة.

بما أن القوى العقدية العنصرية متوافقة مع الانتقالات العقدية العنصرية (أي لها نفس المناحي والاتجاهات) لذا يمكن تحويل هذه القوى من المحاور العامة إلى المحاور المحلية (أو بالعكس) وفق علاقة مشابهة للمعادلة (4-10) وفق الشكل التالي:

$$\{\bar{P}\}_e = [\Gamma]_e \{P\}_e \quad (4-14)$$

حيث:

$\{\bar{P}\}_e$: القوى العقدية العنصرية منسوبة للمحاور المحلية.

$\{P\}_e$: القوى العقدية العنصرية منسوبة للمحاور العامة.

ومن المعادلة (4-14) وبلاستفادة من خواص مصفوفة تحويل الانتقالات $[\Gamma]$ يمكن أن نكتب:

$$\{P\}_e = [\Gamma]^T \{\bar{P}\}_e \quad (4-15)$$

وبالتعويض بقيمة شعاع القوى العنصرية $\{\bar{P}\}_e$ بالنسبة للمحاور المحلية من المعادلة (4-3) في العلاقة (4-15) نجد:

$$\{P\}_e = [\Gamma]^T [\bar{k}]_e \{\bar{\delta}\}_e \quad (4-16)$$

وبالتبديل بقيمة شعاع الانتقالات العقدية العنصرية منسوباً إلى المحاور المحلية $\{\bar{\delta}\}_e$ إلى مثيله منسوباً بالنسبة للمحاور العامة (4-10) في العلاقة (4-16) نجد:

$$\{P\}_e = [\Gamma]^T [\bar{k}]_e [\Gamma]_e \{\delta\}_e \quad (4-17)$$

ومن جهة أخرى ترتبط القوى العقدية العنصرية مع الانتقالات العقدية العنصرية (بالنسبة للمحاور العامة) وفق العلاقة:

$$\{P\}_e = [k]_e \{\delta\}_e \quad (4-18)$$

حيث:

$[k]_e$: مصفوفة القساوة العنصرية بالنسبة للمحاور العامة.

وبمقارنة المعادلات (4-17) و (4-18) نجد أن العلاقة التي تعطي تحويل مصفوفة القساوة العنصرية من المحاور المحلية إلى المحاور العامة تأخذ الشكل:

$$[k]_e = [\Gamma]_e^T [\bar{k}]_e [\Gamma]_e \quad (4-19)$$

وعادة يتم إنجاز عملية ضرب المصفوفات العنصرية المبينة في العلاقة (4-19) بواسطة الحاسوب إلا أنه يمكن لبعض الحالات البسيطة كحالة العنصر الجانزي المستوي موضع الدراسة يمكن أن نحصل على الشكل الصريح للمصفوفة $[k]_e$ بتعويض قيمة مصفوفة القساوة العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية (4-6) وكذلك قيمة مصفوفة تحويل الانتقالات العنصرية من المحاور المحلية إلى المحاور العامة (العلاقة 4-11) في العلاقة (4-19) لنحصل على العلاقة (4-20) المبينة في الصفحة التالية.

2-3-4- مصفوفة القساوة للعنصر الشبكي المستوي Two-dimensional truss element:

1- مصفوفة القساوة العنصرية $[k]$ بالنسبة للمحاور المحلية:

ندرس العنصر الشبكي المستوي (ab) (الشكل 6-4) والذي يملك أربعة انتقالات عقدية (انتقالين في كل عقدة) توافق مركبات القوى العقدية والتي يمكن تطبيقها في عقد العنصر. وتبين الأشكال (6-4) الاتجاهات الموجبة للانتقالات العقدية والقوى العقدية العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية وكذلك مركبات هذه الانتقالات والقوى العقدية العنصرية بالنسبة للمحاور العامة.

ولتعيين عناصر مصفوفة القساوة بالنسبة للمحاور المحلية نقوم بإعطاء الانتقالات العقدية العنصرية قيماً واحدة منسوبة للمحاور المحلية وبالترتيب فنحصل على عوامل القساوة المبينة في الأشكال (7-4).

مصفوفة القساوة للعنصر الجانبي المستوي

Plane Frame Member Stiffness Matrix for Structure Axes

$$\begin{pmatrix}
 \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & -\left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\
 \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x \\
 \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} \\
 -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & -\left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\
 \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x \\
 -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L}
 \end{pmatrix} \quad (4-20)$$

$$C_y = \sin \alpha ; C_x = \cos \alpha$$

الزاوية بين العنصر والمحور العام x.

مساحة مقطع العنصر: A_x

عزم عطالة مقطع العنصر حول المحور المحلي $\bar{z}$.

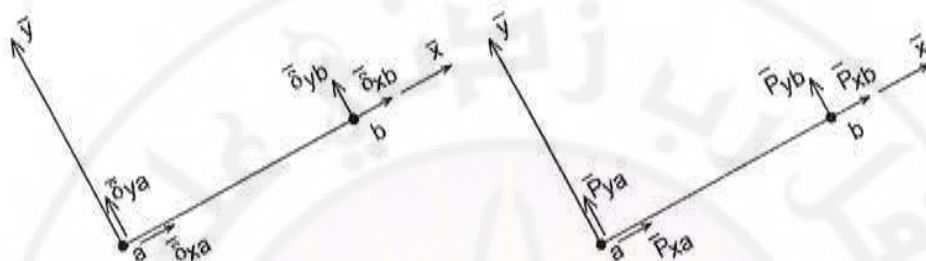
طول العنصر: L

معامل يونغ للعنصر: E

A_e : مساحة مقطع العنصر. L_e : طول العنصر. E_e : معامل يونغ للعنصر.



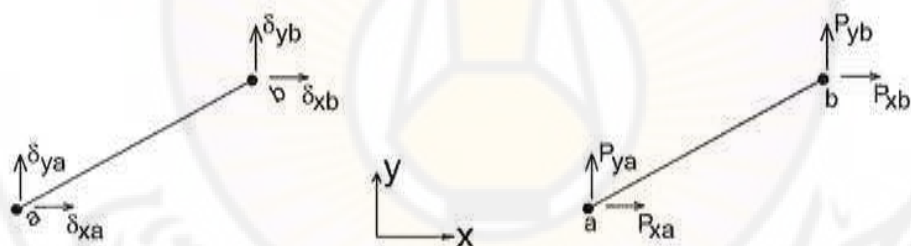
(أ-6-4) الأرقام المحلية



الانتقالات العقدية

القوى العقدية العنصرية

(ب-6-4) الخواص العنصرية بالنسبة للمحاور المحلية



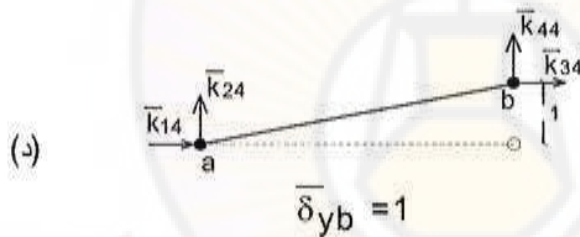
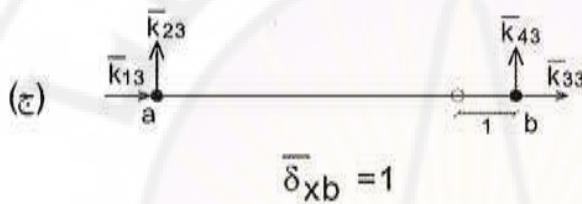
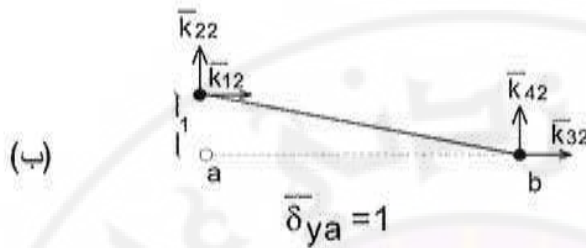
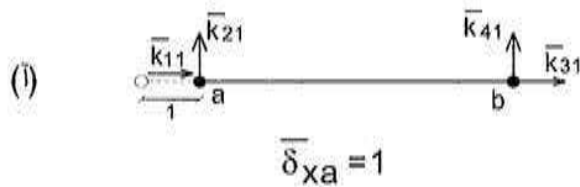
الانتقالات العقدية

جملة المحاور العامة

القوى العقدية العنصرية

(ج-6-4) الخواص العنصرية بالنسبة للمحاور العامة

الشكل (6-4) الخواص العنصرية للعنصر الشبكي المستوي



الشكل (7-4) عوامل القساوة العنصرية للعنصر الشبكي المستوي بالنسبة للمحاور المحلية

وبالعودة إلى الملحق (ب) يمكن استنتاج قيم عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي كما يلي:

أ- بالنسبة للمجهول الأول $\bar{\delta}_{xa} = 1$ نجد:

$$\bar{k}_{11} = \frac{E_e A_e}{L_e}; \quad \bar{k}_{21} = 0; \quad \bar{k}_{31} = -\frac{E_e A_e}{L_e}; \quad \bar{k}_{41} = 0$$

ب- ولحساب عوامل القساوة الموافقة للمجهول الثاني نعطي هذا المجهول قيمة واحدة (أي $\bar{\delta}_{ya} = 1$) وباعتبار أن الانتقال $\bar{\delta}_{ya}$ صغير جداً بالنسبة لطول العنصر لذا يمكن إهمال التغيرات في طول العنصر تحت هذا الانتقال واعتماد القيم التالية لعوامل القساوة الموافقة للمجهول الثاني:

$$\bar{k}_{12} = 0, \quad \bar{k}_{22} = 0, \quad \bar{k}_{32} = 0, \quad \bar{k}_{42} = 0$$

ج- نعطي المجهول الحركي $\bar{\delta}_{xb}$ قيمة انتقال واحدة (الشكل 7-4 ج) فنحصل على القيم التالية لعوامل القساوة:

$$\bar{k}_{13} = -\frac{E_e A_e}{L_e}, \quad \bar{k}_{23} = 0, \quad \bar{k}_{33} = \frac{E_e A_e}{L_e}, \quad \bar{k}_{43} = 0$$

د- وللحصول على عوامل القساوة الموافقة للمجهول الحركي الرابع $\bar{\delta}_{yb}$ ، نعطي هذا المجهول قيمة واحدة $\bar{\delta}_{yb} = 1$ ونحسب عوامل القساوة الموافقة له وحيث إن الانتقال $\bar{\delta}_{yb} = 1$ ونحسب عوامل القساوة الموافقة له وحيث إن الانتقال $\bar{\delta}_{yb}$ صغير جداً بالنسبة لطول العنصر، لذا يمكن إهمال التغير في طول العنصر نتيجة لهذا الانتقال وبالتالي تكون عوامل القساوة الموافقة لهذا الانتقال معدومة، أي:

$$\bar{k}_{14} = 0, \quad \bar{k}_{24} = 0, \quad \bar{k}_{34} = 0, \quad \bar{k}_{44} = 0$$

ويمكن جمع النتائج السابقة بشكل مصفوفي كما يلي:

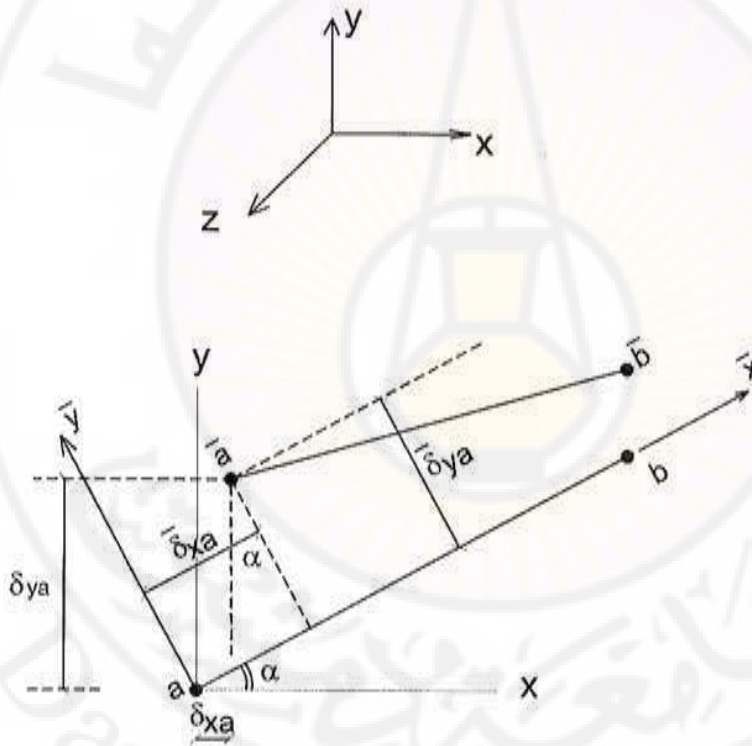
$$[\bar{k}]_e = \begin{pmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} \\ \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \bar{k}_{aa} & \bar{k}_{ab} \\ \bar{k}_{ba} & \bar{k}_{bb} \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$[\bar{k}]_e = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-21)$$

2- مصفوفة القساوة العنصرية $[k]_e$ بالنسبة للمحاور العامة:

ندرس العنصر (ab) المبين في الشكل (8-4) ونفترض أن عقد العنصر قد انتقلت إلى (a'b') بعد حصول التشوهات في المنشأ بفعل الأحمال المطبقة.



الشكل (8-4) تحويل الانتقالات العقدية من المحاور المحلية إلى المحاور العامة

من الشكل (8-4) يمكننا كتابة علاقات تحويل الانتقالات العقدية للعقدة (a) من جملة المحاور المحلية إلى جملة المحاور العامة كما يلي:

$$\delta_{xa} = \bar{\delta}_{xa} \cos \alpha - \bar{\delta}_{ya} \sin \alpha$$

$$\delta_{ya} = \bar{\delta}_{ya} \sin \alpha + \bar{\delta}_{xa} \cos \alpha$$

وبشكل مصفوفي يمكننا كتابة العلاقات السابقة وفق العلاقة التالية:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{xa} \\ \delta_{ya} \end{Bmatrix}_e = \begin{pmatrix} C_x & -C_y \\ C_y & C_x \end{pmatrix}_e \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{xa} \\ \bar{\delta}_{ya} \end{Bmatrix}_e \quad (4-22)$$

حيث يرمز:

$$C_x = \cos \alpha$$

$$C_y = \sin \alpha$$

اعتماداً على العلاقة (4-22) يمكننا كتابة العلاقة العكسية لتحويل الانتقالات العقدية من المحاور العامة إلى المحاور المحلية كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{xa} \\ \bar{\delta}_{ya} \end{Bmatrix}_e = \begin{pmatrix} C_x & -C_y \\ C_y & C_x \end{pmatrix}_e^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{xa} \\ \delta_{ya} \end{Bmatrix}_e = \begin{pmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{pmatrix}_e \begin{Bmatrix} \delta_{xa} \\ \delta_{ya} \end{Bmatrix}_e$$

أو بشكل مختصر:

$$\{\bar{\delta}_a\} = [\lambda] \{\delta_a\} \quad (4-23)$$

حيث:

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{pmatrix}$$

$\{\bar{\delta}_a\}$: الانتقالات العقدية للعقدة (a) بالنسبة للمحاور المحلية.

$\{\delta_a\}$: الانتقالات العقدية للعقدة (a) بالنسبة للمحاور العامة.

وبالتالي تكون علاقة تحويل الانتقالات للعقد (a) و (b) بين المحاور العامة والمحاور المحلية (وبالعكس) كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_a \\ \bar{\delta}_b \end{Bmatrix}_e = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}_e \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix}_e \quad (4-24)$$

وبشكل مختصر يمكننا كتابة المعادلة (3-24) كما يلي:

$$\{\bar{\delta}\}_e = [\Gamma]_e \{\delta\}_e \quad (4-25)$$

حيث تسمى المصفوفة $[\Gamma]_e$ بمصفوفة تحويل الانتقالات العقدية العنصرية وتعطى هذه المصفوفة بالنسبة للعنصر الشبكي المستوي وفق العلاقة:

$$[\Gamma]_e = \begin{pmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{pmatrix}_e \quad (4-26)$$

ويمكن البرهان على أن المصفوفة $[\Gamma]_e$ مصفوفة متعامدة تحقق العلاقات (4-12) و (4-13).

وبشكل مشابه لاستخراج علاقة تحويل مصفوفة القساوة من المحاور المحلية إلى المحاور العامة في حالة العنصر الجانزي المستوي يمكننا الوصول إلى العلاقة (4-19) نفسها لحالة العنصري الشبكي المستوي، وبالتالي تكون مصفوفة القساوة للعنصر الشبكي منسوبة إلى المحاور العامة كما يلي:

$$[k]_e = [\Gamma]_e^T [\bar{k}]_e [\Gamma]_e \quad (4-27)$$

وبتعويض قيمة المعادلة (4-21) و (4-26) في العلاقة (4-27) نحصل على ما يلي:

$$[k]_e = \begin{pmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & -C_y \\ 0 & 0 & C_y & C_x \end{pmatrix} * \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{pmatrix} C_x^2 & C_x C_y & -C_x^2 & -C_x C_y \\ & C_y^2 & -C_x C_y & -C_y^2 \\ \text{symm} & & C_x^2 & C_x C_y \\ & & & C_y^2 \end{pmatrix}_e \quad (4-28)$$

$$= \begin{pmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{pmatrix}_e \quad (4-29)$$

حيث:

$[k_{aa}]$: مصفوفة فرعية تربط القوى العقدية في العقدة (a) مع الانتقالات العقدية في العقدة (a).

$[k_{ab}]$: مصفوفة فرعية تربط القوى العقدية في العقدة (a) مع الانتقالات العقدية في العقدة (b).

$[k_{ba}]$: مصفوفة فرعية تربط القوى العقدية في العقدة (b) مع الانتقالات العقدية في العقدة (a).

$[k_{bb}]$: مصفوفة فرعية تربط القوى العقدية في العقدة (b) مع الانتقالات العقدية في العقدة (b).

وبمقارنة قيم عوامل القساوة وفق العلاقة (4-28) مع قيم عوامل القساوة للعنصر الشبكي المستوي والتي تم استخراجها يدوياً في الفصل الثالث (الشكل 3-19) نلاحظ تطابقاً تاماً بين هذه القيم مع ملاحظة الاتجاهات الموجبة المعتمدة في استخراج المعادلة (4-28).

4-4- معالجة الأحمال المطبقة بين عقد العناصر:

Treatments of Loading between joints

عندما تكون الأحمال الخارجية مطبقة مباشرة في عقد المنشأ يتم أخذها مباشرة في شعاع الأحمال الخارجية $\{P\}$ وذلك كما رأينا في الفصل الثالث من خلال العديد من الأمثلة المحولة في ذلك الفصل.

إلا أنه يمكن أن يتعرض المنشأ وفي العديد من الحالات إلى أحمال خارجية مطبقة ضمن عقد مختلف عناصر المنشأ وفي هذه الحالات يمكن معالجة هذه الأحمال باستخدام مبدأ جمع الآثار وفق الأسلوب التالي:

يمكن اعتبار فعل الأحمال الخارجية على المنشأ (الحالة آ) حاصل جمع الحالتين (ب) و (ج) كما هو موضح في الشكل (4-12).

نأخذ تأثير الأحمال في عناصر المنشأ وفق مرحلتين حيث تمثل المرحلة (ب) تأثير الأحمال بعناصر المنشأ باعتبار هذه العناصر موثوقة من أطرافها وأما المرحلة الثانية (ج) فتمثل أفعال الأحمال الخارجية في عقد المنشأ والتي تمثل قوى معاكسة لردود أفعال الوثاقات في المرحلة (ب). وعليه يعطى شعاع الأحمال العنصرية للعنصر (c) وفق العلاقة التالية:

$$\{P\}_e = \{\{P\}_L - \{P_r\}_L\}_e \quad (4-34)$$

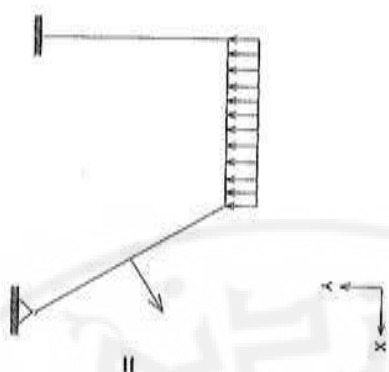
حيث:

$\{P\}_e$: شعاع الأحمال العنصري.

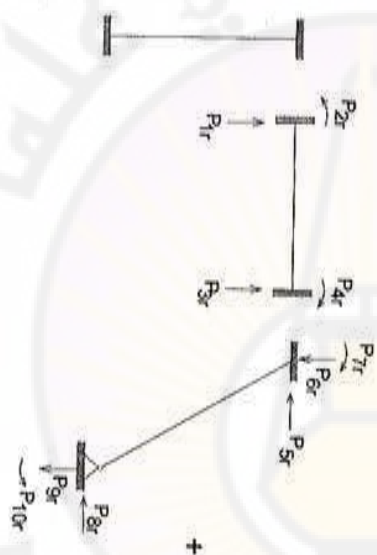
$\{P\}_L$: شعاع الأحمال العنصري للقوى المطبقة مباشرة في عقد العنصر.

$\{P_r\}_L$: ردود أفعال الوثاقة في العنصر نتيجة القوى المطبقة بين العقد.

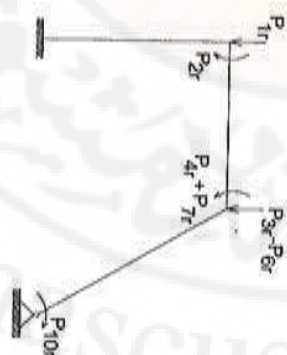
(أ) الأحمال المطبقة بين عقد المنشأ



(ب) ردود أفعال الوصلات



(ج) الأحمال العنقبة المكافئة

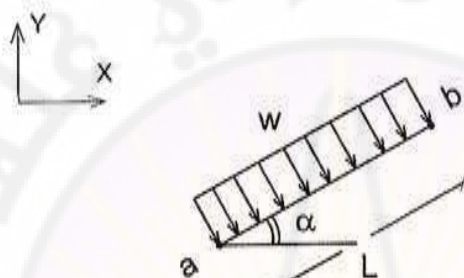


الشكل (12-4) معالجة الأحمال المطبقة بين عقد المنشأ

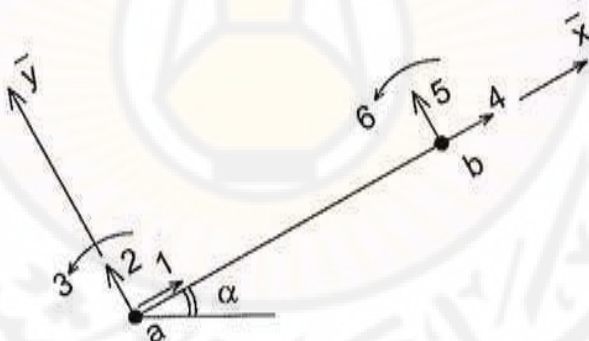
ويمكن استخدام الجداول المعطاة في الملحق (ب) من أجل حساب ردود
أفعال الجوائز الموثوقة الناتجة عن بعض حالات الأحمال الشهيرة.

مثال (1):

أوجد شعاع الأحمال العنصري للعنصر الجانزي المستوي (ab) الخاضع
لفعل حمولات موزعة بانتظام شدتها w كما هو مبين في الشكل (13-4 أ).



(أ) الأحمال الخارجية

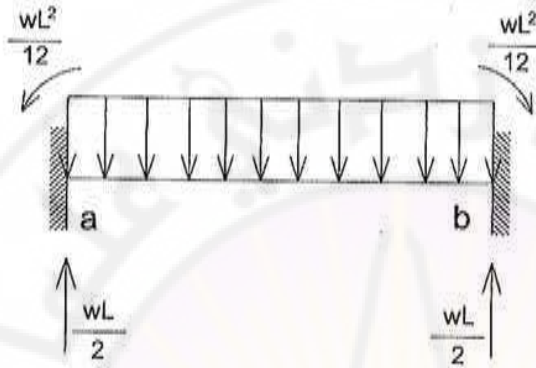


(ب) جملة الترقيم والمحاور المحلية

الشكل (13-4) معطيات المثال (1)

الحل:

نحدد ردود أفعال الوثاقفة (وفق المحاور المحلية) باستخدام الجداول المعطاة في الملحق (ب) ونجد أن ردود الأفعال هذه كما هو مبين في الشكل (14-4).



الشكل (14-4) ردود أفعال الوثاقفة

وبالتالي باعتماد الترقيم والاتجاهات الموجبة العنصرية والمبينة في الشكل (7-4 ب) نجد:

$$\bar{P}_{1r} = 0$$

$$\bar{P}_{2r} = \frac{wL}{2}$$

$$\bar{P}_{3r} = \frac{wL^2}{12}$$

$$\bar{P}_{4r} = 0$$

$$\bar{P}_{5r} = \frac{wL}{2}$$

$$\bar{P}_{6r} = -\frac{wL^2}{12}$$

ومنه يكون شعاع ردود أفعال الوثاقفة وفق ما يلي:

$$\{\bar{P}_r\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wL}{2} \\ \frac{2}{12}wL^2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

وبالتالي تكون القوى العقدية المكافئة معاكسة لشعاع ردود أفعال الوثاقات
المضافة والمعطى في العلاقة (a) أي:

$$\{\bar{P}\}_e = -\{\bar{P}_r\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ -\frac{2}{12}wL^2 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

حيث:

$$\{P\}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

لتحويل شعاع الأحمال العنصرية المكافئ من المحاور المحلية إلى المحاور العامة نستخدم علاقة التحويل المعطاة بالمعادلة (4-15) كما يلي:

$$\{P\}_e = [\Gamma]^T \{\bar{P}\}_e = \begin{pmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{wL}{2} C_y \\ -\frac{wL}{2} C_x \\ \frac{wL^2}{12} \\ \frac{wL}{2} C_y \\ -\frac{wL}{2} C_x \\ \frac{wL^2}{12} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{matrix} C_x = \cos \alpha \\ C_y = \sin \alpha \end{matrix} \quad (c)$$

5-4- تجميع مصفوفات القساوة وأشعة الأحمال العنصرية

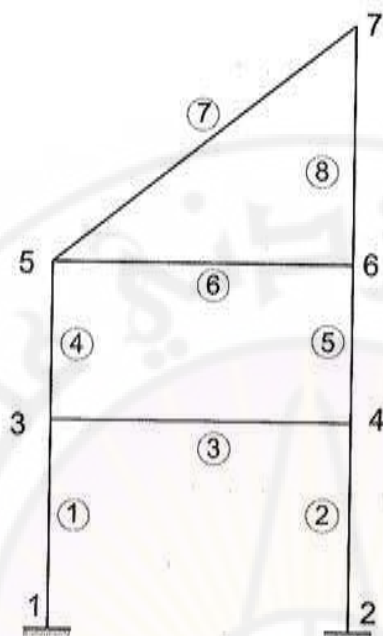
Assembly of element matrices and load vectors

بعد تحديد قيم مصفوفة القساوة العنصرية وأشعة الأحمال العنصرية بالنسبة للمحاور العامة لمختلف عناصر المنشأ نستطيع تكوين مصفوفة القساوة العامة وشعاع الأحمال العام للمنشأ من خلال تطبيق شروط توافق الانتقالات وتوازن القوى في عقد المنشأ كما يلي:

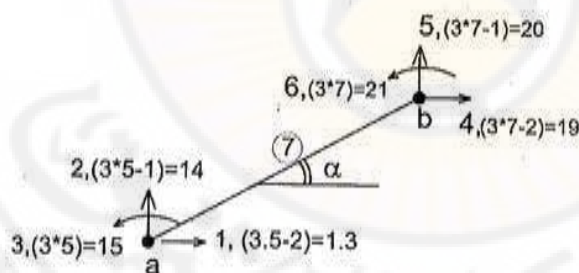
للمنشأ الإطاري المبين في الشكل (4-15) نستخدم جملة ترقيم عامة لعناصر المنشأ (الشكل 4-15 أ) وكذلك نقوم بترقيم مختلف عقد المنشأ بشكل متسلسل حيث نرمز لكل عنصر من عناصر المنشأ برقمين عامين (J, I) للدلالة على النهايات المحلية (a, b) لهذا العنصر كما هو مبين في الشكل (4-15 ب) وبالتالي يكون لكل عنصر من عناصر المنشأ جملتان للترقيم واحدة محلية والأخرى عامة تفيدنا الأولى في التعبير عن خواص المنشأ بالنسبة للمحاور المحلية وأما جملة الأرقام العامة للعنصر فتحدد أماكن مساهمة العنصر في مصفوفة القساوة وشعاع الأحمال العامين للمنشأ.

I, J: أرقام عنصرية عامة

a, b: أرقام عنصرية محلية



(I) جملة الترقيم العقدية العامة



(B) جملة الترقيم العنصرية المحلية والعامة

الشكل (4-15) جملة الترقيم العقدية العنصرية والعامة

يمكننا للعنصر (c) كتابة العلاقة بين مصفوفة القساوة العنصرية وشعاع الاحمال العنصري منسوبة للمحاور العامة بالشكل:

$$\{P\}_e = [k]_e \{\delta\}_e \quad (4-35)$$

ويمكننا كتابة العلاقة (4-21) بشكل أكثر تفصيلاً بتجزئة مصفوفة القساوة العنصرية إلى مصفوفات فرعية كما يلي:

$$\begin{Bmatrix} P_a^e \\ P_b^e \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{aa}^e & k_{ab}^e \\ k_{ba}^e & k_{bb}^e \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a^e \\ \delta_b^e \end{Bmatrix} \quad (4-36)$$

حيث ترمز المصفوفات الفرعية وأشعة الاحمال والانتقالات الفرعية كما يلي:

$\{P_a^e\}$: شعاع الاحمال العقدية في العقدة (a) من العنصر (c).

$\{P_b^e\}$: شعاع الاحمال العقدية في العقدة (b) من العنصر (c).

$\{\delta_a^e\}$: شعاع الانتقالات العقدية في العقدة (a) من العنصر (c).

$\{\delta_b^e\}$: شعاع الانتقالات العقدية في العقدة (b) من العنصر (c).

$[k_{aa}^e]$: مصفوفة عنصرية فرعية تربط بين شعاع الاحمال في العقدة (a) وشعاع الانتقالات في العقدة (a) من العنصر (c).

$[k_{ab}^e]$: مصفوفة عنصرية فرعية تربط بين شعاع الاحمال في العقدة (a) وشعاع الانتقالات في العقدة (b) من العنصر (c).

$[k_{ba}^e]$: مصفوفة عنصرية فرعية تربط بين شعاع الاحمال في العقدة (b) وشعاع الانتقالات في العقدة (a) من العنصر (c).

$[k_{bb}^e]$: مصفوفة عنصرية فرعية تربط بين شعاع الأحمال في العقدة (b) وشعاع الانتقالات في العقدة (b) من العنصر (c).
ونلاحظ بأن أبعاد المصفوفات الفرعية هي (2×2) لحالة العنصر الشبكي المستوي و (3×3) لحالة العنصر الجانزي المستوي.
تمثل العلاقة (4-36) معادلتين للتوازن في العقدة (a, b) في العنصر (c) كما يلي:

$$\{P_a^e\} = [k_{aa}^e]\{\delta_a^e\} + [k_{ab}^e]\{\delta_b^e\} \quad (4-37 a)$$

$$\{P_b^e\} = [k_{ba}^e]\{\delta_a^e\} + [k_{bb}^e]\{\delta_b^e\} \quad (4-37 b)$$

وبنص شرط توافق الانتقالات في عقد المنشأ (a و b) على أن الانتقالات العنصرية يجب أن تكون مساوية للانتقالات العامة في هذه العقد، أي:

$$\{\delta_a^e\} = \{\delta_I\} \quad (4-38 a)$$

$$\{\delta_b^e\} = \{\delta_J\} \quad (4-38 b)$$

وبتعويض قيم المعادلة (4-39) في المعادلات (4-37) نحصل على ما يلي:

$$\{P_a^e\} = [k_{aa}^e]\{\delta_I\} + [k_{ab}^e]\{\delta_J\} \quad (4-39 a)$$

$$\{P_b^e\} = [k_{ba}^e]\{\delta_I\} + [k_{bb}^e]\{\delta_J\} \quad (4-39 b)$$

وأما شرط التوازن في أي عقدة من عقد المنشأ فيقتضي بأن يكون شعاع الأحمال الخارجية بحالة توازن مع جميع القوى العنصرية المتلاقية في تلك العقدة، ومنه يكون شرط التوازن في العقدتين I و J هو:

$$\{P_I\} = \{P_a^e\} + \text{(المشاركة من بقية العناصر المتلاقية في I)} \quad (4-40 \text{ a})$$

$$\{P_J\} = \{P_b^e\} + \text{(المشاركة من بقية العناصر المتلاقية في J)} \quad (4-40 \text{ b})$$

وبتبديل قيم أشعة القوى العنصرية من المعادلات (4-39) في العلاقات (4-40) نحصل على معادلات التوازن العامة التالية للمنشأ في العقدتين I و J:

$$\{P_I\} = [k_{aa}^e]\{\delta_I\} + [k_{ab}^e]\{\delta_J\} + \text{(المشاركة من بقية العناصر المتلاقية في I)} \quad (4-41 \text{ a})$$

$$\{P_J\} = [k_{ba}^e]\{\delta_I\} + [k_{bb}^e]\{\delta_J\} + \text{(المشاركة من بقية العناصر المتلاقية في J)} \quad (4-41 \text{ b})$$

من خلال المعادلات (4-41) يمكننا ملاحظة أن مساهمة العنصر (e) ذي الأرقام العقدية العامة (I و J) في مصفوفة القساوة العامة وشعاع الأحمال العام للمنشأ كما هو مبين في العلاقة التالية:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ P_I \\ \vdots \\ P_J \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{aa}^e & \dots & k_{ab}^e & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{ba}^e & \dots & k_{bb}^e & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_J \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4-42)$$

إعطاء قيمة بدائية صفرية لمصفوفة القساوة وشعاع الأحمال العامين للمنشأ

$$[k] = [0]$$

$$\{P\} = \{0\}$$

ضع مؤشر الرقم العنصري على الرقم 1
e = 1

حساب مصفوفة القساوة العنصرية $[k]_e$ وشعاع الأحمال العنصرية $\{P\}_e$
المكافئة بالنسبة للمحاور المحلية للعنصر مع استثناء الأحمال المطبقة مباشرة
في عقد العنصر.

تحويل مصفوفة القساوة العنصرية $[k]_e$ وشعاع الأحمال العنصري $\{P\}_e$
المكافئ من المحاور المحلية للعنصر إلى المحاور العامة للمنشأ.

$$[k]_e = [\Gamma]_e^T [k]_e [\Gamma]_e$$

$$\{P\}_e = [\Gamma]_e^T \{P\}_e$$

إضافة مصفوفة القساوة العنصرية وشعاع الأحمال العنصري إلى القيم
المتراكمة من بقية العناصر وفق المكان المحدد في مصفوفة القساوة وشعاع
الأحمال العامين للمنشأ وذلك وفق رقم السطر T والعمود J كما يلي:

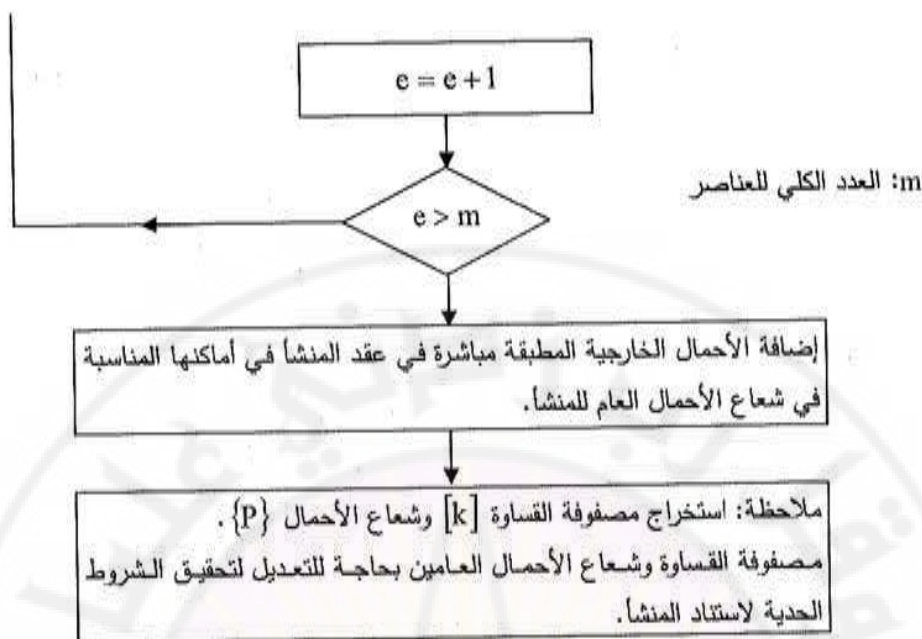
$$[k_{aa}] \rightarrow (I, I)$$

$$[k_{ab}] \rightarrow (I, J)$$

$$[k_{ba}] \rightarrow (J, I)$$

$$[k_{bb}] \rightarrow (J, J)$$

$$\{P_a\} \rightarrow (I, 1) \quad ; \quad \{P_b\} \rightarrow (J, 1)$$



الشكل (15-4): المخطط المنطقي لتجميع مصفوفة القساوة العامة

وشعاع الأحمال العام لمنشأ يتألف من m عنصر

يبين الشكل (15-4) المخطط المنطقي لتجميع مصفوفات القساوة وأشعة الأحمال العنصرية لمختلف عناصر المنشأ.

يمكننا كتابة الملاحظات التالية على عملية تجميع مصفوفات القساوة وأشعة الأحمال العنصرية:

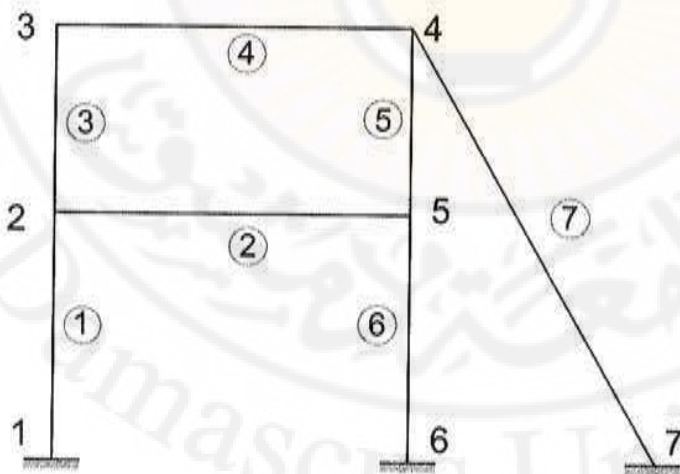
- 1- تمثل مصفوفة القساوة العامة المجمعة مصفوفة منفردة (Singular) ولا يمكن حلها قبل تعديلها لتأخذ الشروط الحدية الخاصة باستناد المنشأ.
- 2- العناصر القطرية لمصفوفة القساوة العامة هي حاصل تجميع المصفوفات الفرعية العنصرية k_{bb}^e أو k_{nn}^e للعناصر المتلاقية في العقدة المدروسة.

- 3- العناصر غير القطرية لمصفوفة القساوة العامة والموافقة للأرقام العامة K و L معدومة إلا إذا كان هنالك ترابط (Connectivity) بين العقدتين K و L وفي الحالة الأخيرة تكون عناصر مصفوفة القساوة العامة مساوية إلى المصفوفات الفرعية العنصرية (k_{aa}^0 أو k_{bb}^0) للعناصر المتلاقية في العقدة المدروسة.
- 4- تخزين مصفوفة القساوة العامة بحجمها الكامل غير فعال لأنه يتضمن تخزين عناصر كثيرة صفرية في المصفوفة كما وأنه يهمل الاستفادة من خاصية التناظر في مصفوفة القساوة العامة للمنشأ.

مثال (2):

للإطار المبين في الشكل (4-16) يطلب:

- 1- استخراج مصفوفة القساوة العامة بدلالة مصفوفة القساوة العنصرية $[k]_e$ المنسوبة للمحاور العامة.
- 2- استنتاج مصفوفة القساوة العامة المعدلة وفقاً للشروط المحلية.



الشكل (4-16)

الحل:

إن مصفوفة القساوة العامة بدلالة مصفوفة القساوة العنصرية المنسوبة للمحاور العامة تعطى بالشكل:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{aa}^1 & k_{ab}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ba}^1 & k_{bb}^1 + k_{aa}^2 + k_{aa}^3 & k_{ab}^3 & 0 & k_{ab}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ba}^3 & k_{bb}^3 + k_{aa}^4 & k_{ab}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ba}^4 & k_{bb}^4 + k_{aa}^5 + k_{aa}^7 & k_{ab}^5 & 0 & k_{ab}^7 \\ 0 & k_{ba}^2 & 0 & k_{ba}^5 & k_{bb}^2 + k_{aa}^5 + k_{aa}^6 & k_{ab}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ba}^6 & k_{bb}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ba}^7 & 0 & 0 & k_{bb}^7 \end{bmatrix}$$

ولإيجاد مصفوفة القساوة المعدلة وباعتبار العقد 1, 6, 7 وثافات، فجميع الانتقالات فيها معدومة.

إذاً نلغي من المصفوفة العامة السابقة الأعمدة والأسطر ذات الرقم 1, 6, 7 ونحصل على المصفوفة المعدلة وفقاً للشروط المحلية.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{bb}^1 + k_{aa}^2 + k_{aa}^3 & k_{ab}^3 & 0 & k_{ab}^2 \\ k_{ba}^3 & k_{bb}^3 + k_{aa}^4 & k_{ab}^4 & 0 \\ 0 & k_{ba}^4 & k_{bb}^4 + k_{aa}^5 + k_{aa}^7 & k_{ab}^5 \\ k_{ba}^2 & 0 & k_{ba}^5 & k_{bb}^2 + k_{aa}^5 + k_{aa}^6 \end{bmatrix}$$



الفصل الخامس

التحليل اللدن للمنشآت

Plastic Analysis of Structures

1-5 - المقدمة:

يستند تصميم المنشآت الهندسية بشكل عام على دراستها وتحليلها في المرحلة المرنة (Elastic Range) عندما تكون الإجهادات الداخلية أقل من إجهاد المرونة. حيث نفترض دائماً أن مادة المنشآت المدروسة تكون مرنة وخاضعة لقانون هوك. كما كنا نفترض عند إيجاد مخططات عزوم الانعطاف للمنشآت غير المقررة أن معادلة الخط المرن مستمرة وعدم وجود أية انكسارات فيها، لذا فإن جميع الطرق المستخدمة لحل المنشآت غير المقررة والمدروسة سابقاً كانت تعتمد على مرونة مادة هذا المنشأ ولا تدخل في حسابان التصرف اللدن لهذه المادة، وبالتالي عند تطبيق نظرية المرونة في تحليل المنشآت غير المقررة كان يجب التأكد من أن الإجهادات المطبقة في جميع نقاط هذا المنشأ لا تزيد عن قيم معينة داخل مجال المرونة تسمى بالإجهادات المسموحة $[\sigma]$ (Permissible Stresses) وتدعى النسبة بين إجهاد الخضوع للمادة (السيلان) (σ_T) والإجهادات المسموحة $[\sigma]$ بعامل الأمان (Safty Factor).

وفي السنوات الأخيرة لقد ظهر اتجاهاً جديداً يعتمد على تصرف المنشأ في المرحلة اللدنة (Plastic Rang) وذلك كأساس لتصميم المنشآت لأسباب عديدة نذكر منها سهولة تحليل المنشآت غير المقررة في المرحلة اللدنة والحصول على

عامل أمان أقرب إلى الواقع بالإضافة إلى التوفير الناتج في المواد ومعرفة شكل الانهيار الحقيقي للمنشأ. إن تحليل المنشأ الهندسي في المرحلة اللدنة أصبح أمر ضرورياً لمعرفة وفهم ميكانيكية الانهيار الممكنة (Collapse Mechanism). كما أن التحليل في المرحلة المرنة أمر ضروري أيضاً وذلك لمعرفة سلوك المنشأ تحت تأثير الأحمال الاعتيادية. لذا نرى أن التحليل اللدن متمم للتحليل المرن إذ أن كلا منهما يعطي جانباً واحداً من الصورة فقط. إن الطريقة اللدنة تصلح للمنشآت الفولاذية فقط ولا يمكن تطبيقها على غير الفولاذ من المواد الإنشائية.

2-5- فرضيات التحليل اللدن Assumptions of plastic analysis

تعتمد طرق التحليل اللدن للمنشآت المستوية على عدد من الفرضيات المتعلقة بطبيعة المنشأ ونوعية المواد المستخدمة بالإضافة لعدد من العوامل الأخرى وهذه الفرضيات هي:

أ- إن إجهاد الشد يعادل إجهاد الضغط في الفولاذ والعلاقة بين الإجهاد والتشوه في المنشأ تتبع سلوك مادة مرنة لدنة مثالية.

ب- فرضية المقاطع المستوية والتي تنص على أن المستويات العمودية على المحور الطولي للعنصر الإنشائي قبل التشوه تبقى مستويات عمودية على نفس المحور بعد التشوه.

ج- المنشأ مع الحمولات المطبقة عليه تقع في مستو واحد.

د- التشوهات الحاصلة في المنشأ صغيرة بالمقارنة مع أبعاده الحقيقية مما مكننا من كتابة معادلات التوازن والعمل الوهمي بالنسبة للشكل الأساسي للمنشأ قبل التشوه.

هـ- التحنيب الموضعي والكلي في المنشأ لن يحدث قبل وصول الحملات المطبقة إلى القيمة الحرجة الموافقة للانهييار.

3-5- الخواص الميكانيكية لمادة الفولاذ:

إن الدراسة النظرية للحالة الحدية للمقاطع الفولاذية تعتمد على دراسة الحالة الإجهادية وحيدة المحور والنتيجة عن اختبار عينات من الفولاذ على الشد البسيط للحصول على العلاقة بين الإجهاد والتشوه (الانفعال). وإن مخطط الإجهاد - التشوه لعينة مشدودة من مقطع من الفولاذ الإنشائي الطري يمكن تقسيمه إلى أربعة مجالات كما هو مبين بالشكل (1-5).

a- مرحلة المرونة (Elastic Range):

تكون العلاقة فيها بين الإجهاد والتشوه علاقة خطية تخضع لقانون هوك وتستمر هذه المرحلة حتى نصل إلى حدود المرونة أو إجهاد الخضوع σ_p .

b- مرحلة اللدونة (Plastic Range):

تكون المادة فيها لدنة تماماً وتزداد التشوهات بشكل كبير دون الحاجة إلى تطبيق المزيد من الإجهاد ويزيد التشوه اللدن ϵ_T أو ϵ_p بأكثر من خمسة عشر مرة التشوه المرن ϵ_y .

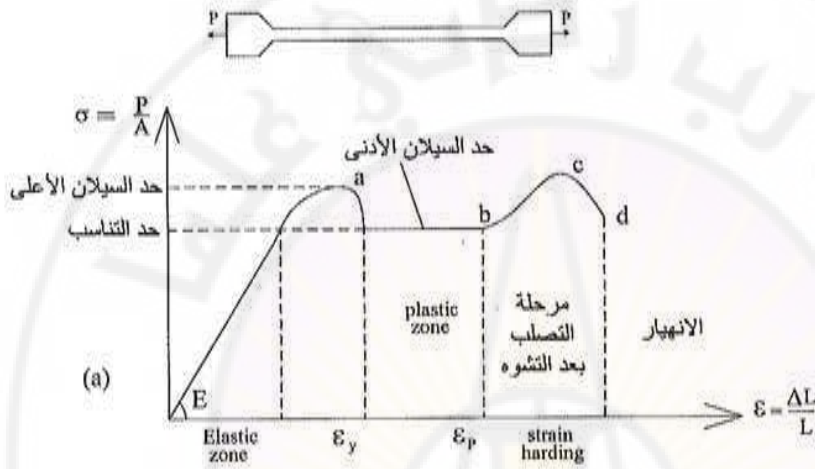
c- مرحلة التصلب (Strain hardening):

تبدأ المادة فيها بالمقاومة مرة أخرى مع زيادة كبيرة في قيمة التشوه وليس لهذه المرحلة أية أهمية عملية لأن التشوهات التي تحدث قبل الوصول إليها تجعل المنشأ في حكم المنهار.

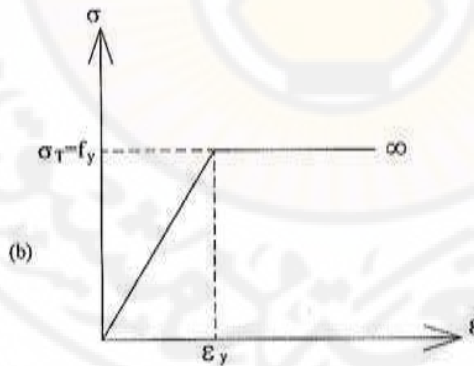
d- مرحلة الانهيار (Necking and Failure):

تبدأ المادة فيها بالانهيار حتى الانقطاع والتحطم.

ويمكن أن يختصر مخطط الإجهاد - التشوه (a1-5) إلى الشكل المبسط المعتمد (اللدن المثالي) والمبين بالشكل (b 1-5).



منحنى الإجهاد - التشوه



المخطط المبسط المثالي

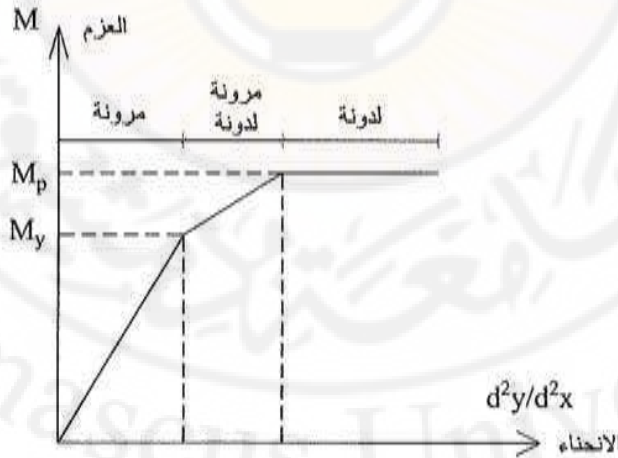
الشكل (1-5) منحنى الإجهاد - التشوه

4-5- الإجهادات في المرحلة اللدنة:

يمكن أن تمثل مادة المنشآت أيضاً بالمخطط البياني الموضح بالشكل (2-5) حيث رسمت علاقة العزم M بالانحناء d^2y/d^2x (Moment-Curvature Diagram).

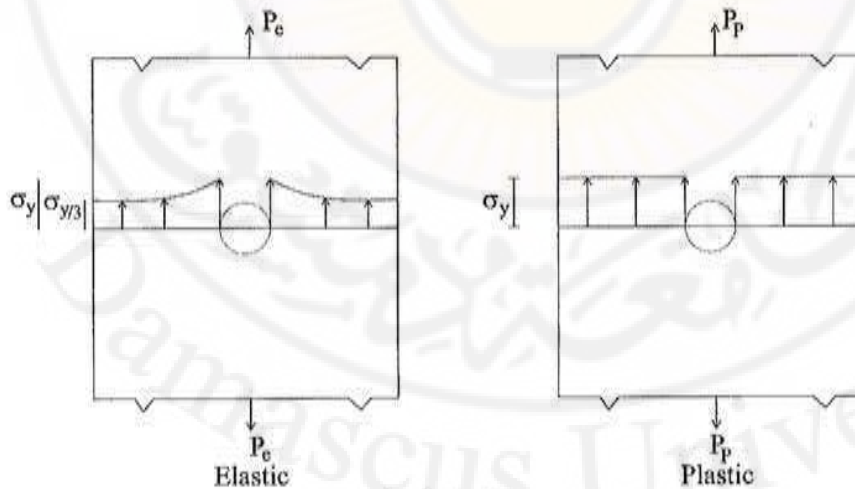
ومنه يمكن أن نلاحظ عندما تكون قيمة العزم أصغر من M_y تكون العلاقة خطية بين العزم والانحناء، ولكنه عندما تصل قيمة العزم على مقطع ما من هذه المادة إلى M_p فإن دوران المقطع يأخذ بالازدياد دونما حاجة إلى تطبيق المزيد من العزم فهو قد دخل كلياً في مرحلة اللدنة ويدعى العزم M_p بعزم اللدنة. ونرى أن قيمة الدوران في المرحلة اللدنة هي أكبر بكثير من مجموع الدوران في المرحلة المرنة. أما عندما يكون العزم المطبق M أكبر من M_y وأصغر من M_p يكون جزء من المقطع في حالة مرونة والجزء الآخر في حالة لدنة.

إن وصول بعض الأقسام في المنشأ إلى مرحلة اللدنة ليس دليلاً على انهيار المنشأ. لكنه عندما تمتد المطاوعة إلى قسم كبير في المنشأ يزداد التشوه ازدياداً كبيراً ويحدث الانهيار إما على شكل تشوه متزايد أو انهيار كلي.



الشكل (2-5)

إن الإجهادات في المنشآت تحسب عادة بنظرية المرونة لكن الحمولة الأعظمية تعتمد على عملية غير مرنة ولا ترتبط بالإجهادات المحسوبة بالتصرف المرن. وأبسط مثال لإظهار الفرق بين تأثير الإجهادات المرنة وبين الحمولة الأعظمية التي يتحملها المنشأ هو مقاومة صفيحة في وسطها ثقب صغير. إن نظرية المرونة من أجل حمولة ما P_e تكون الإجهادات عند طرفي الثقب أكبر بثلاث مرات من الإجهادات الحاصلة في الصفيحة نفسها دون وجود هذا الثقب. وإذا تصرفت الصفيحة تصرفاً مرناً حتى الانقطاع تكون مقاومة الصفيحة مع وجود الثقب مساوية لثلث مقاومة الصفيحة دون وجود الثقب، الشكل (3-5). لكن التجربة تدل على أن مقاومة الصفيحة المثقوبة أقل بصورة صغيرة فقط عن مقاومتها وهي مليئة. وهذا التعارض بين نظرية المرونة وبين التجربة عائد إلى التصرف اللدن في منطقة الثقب. فعندما تصل الحمولة إلى ثلث حمولة المطاوعة للصفيحة المليئة تحدث مطاوعة محلية في منطقة الثقب، ثم تزداد منطقة المطاوعة بازدياد الحمولة وتنتشر تدريجياً إلى بقية المقطع حتى تصل الحمولة إلى الحمولة العظمى P_p ويكون كامل مقطع الصفيحة معرضاً لإجهاد ثابت قيمته مساوية (σ_y) لإجهاد الخضوع.



الشكل (3-5)

5-5- علاقات تعيين القوى الداخلية في المقطع:

5-5-1- الحالة الحديدية لمقطع يخضع للشد أو الضغط:

لنزيد الحمولة المطبقة على العنصر تدريجياً فتكون قيمة هذه الحمولة:

$$N_p = f_y * A = \sigma_T * A$$

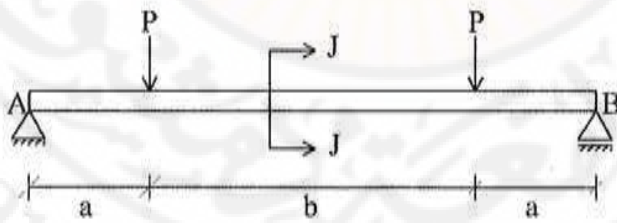
حيث:

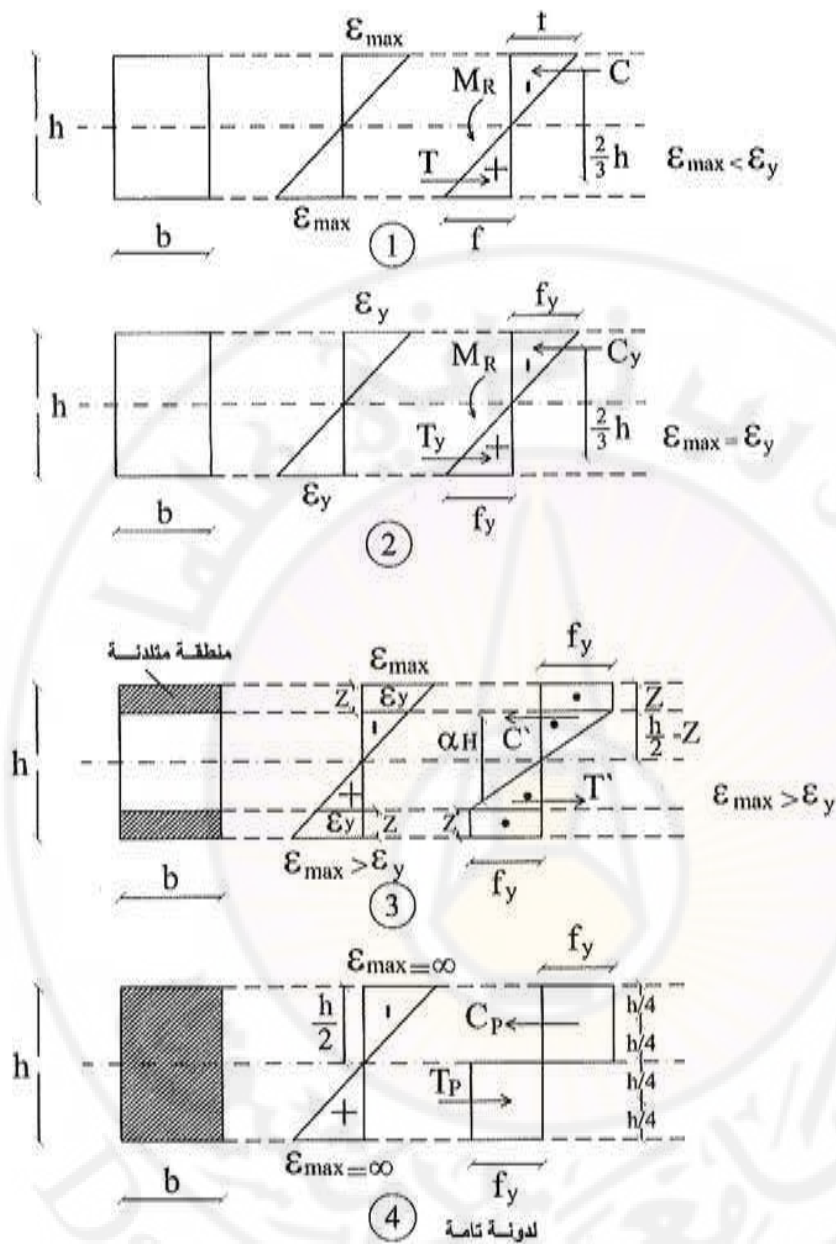
f_y : إجهاد الخضوع (حد السيالان).

A : مساحة المقطع العرضي للعنصر.

5-5-2- الحالة الحديدية لمقطع من جانز بسيط يخضع للانعطاف الصافي:

بفرض أن الجانز المحمل والمبين بالشكل (5-4) مقطعه مستطيل $b.h$ ولناخذ المقطع J-J الخاضع لعزم انعطاف فقط، ولنفرض أن الحمولة P تزداد تدريجياً من الصفر وحتى القيمة الأعظمية P_p فيلاحظ أن هذا المقطع يمر بالمراحل التالية:





المقطع J-J

الشكل (4-5) توزيع الإجهادات الناعمية على المقطع J-J.

المرحلة الأولى:

لنفرض أن الحمولة $P = 0$ عندئذ تكون قيمة التشوهات معدومة. وعندما تزداد قيمة هذه الحمولة P لتأخذ القيمة $P < P_y$ فيرافقها تشوهات $\varepsilon_{\max} < \varepsilon_y$ ويتصرف الجانز بهذه الحالة تصرفاً مرناً. وتعين قيمة العزم المقاوم للمقطع حول المحور المحايد بالعلاقة:

$$M_R = C * \frac{2}{3} * h = T * \frac{2}{3} * h$$

$$M_R = \frac{F * \frac{h}{2}}{2} * b * \frac{2}{3} h = \frac{bh^2}{6} f = W * F = Z_e * f$$

حيث:

$$W = \frac{I}{y} : \text{العزم المقاوم المرن أو عامل المقطع المرن.}$$

المرحلة الثانية:

بازدياد الحمولة P تزداد قيمة العزوم المطبقة لتصل القيمة $P = P_y$ وينتشر التشوه تدريجياً في المقطع حتى تصل $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_y$ وتحسب قيمة العزم بالعلاقة:

$$M_R = C_y * \left(\frac{2}{3} \frac{h}{2} + \frac{2}{3} \frac{h}{2} \right) = C_y * \frac{2}{3} h = T_y * \frac{2}{3} h$$

$$= \frac{b \frac{h}{2}}{2} * f_y * \frac{2}{3} h = \frac{bh^2}{6} f_y = W * f_y$$

إلى هذه المرحلة لا يزال المقطع يسلك سلوكاً مرناً وعند إزالة الحمولات
تزال التشوهات ويعود المنشأ إلى شكله الأصلي.

المرحلة الثالثة (المرنة - اللدنة):

عندما تزداد التشوهات وتصبح $\epsilon_{max} > \epsilon_y$ نكون قد تجاوزنا مرحلة المرونة
ودخلنا بمرحلة اللدنة، وتبقى هنا التشوهات في الجزء الأسفل من المقطع
(المشدود) مساوية للتشوهات في الجزء الأعلى من المقطع (المضغوط) حسب
الفرضيات الأساسية ولكن قيمها العلوية والسفلية أكبر من ϵ_y . ويمكن أن تحدد
قيمة ϵ_y من مخطط التشوه على بعد إحداث ما z ، حيث يلاحظ أن المقطع في
هذه الحالة يسلك سلوكاً مرناً لدناً.

$$M_R = C' \alpha h = T' \alpha h$$

$$= f_y b z \left(\frac{h}{2} - \frac{z}{2} \right) * 2 + \frac{f_y}{2} \left(\frac{h}{2} - z \right) * \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2} - z \right) * 2 b$$

المرحلة الرابعة (اللدنة):

في هذه الحالة يصبح المقطع بالكامل بالحالة اللدنة (السيلان) وأصبحت
الحمولة $P = P_p$ ثابتة في حين تزداد التشوهات بشكل كبير حيث يمكن افتراض
أن:

$$\epsilon_{max} = \infty$$

$$M_R = f_y * b \frac{h}{2} \frac{h}{4} * 2 = f_y \frac{b h^2}{4} = f_y z_p = M_p$$

حيث:

M_p : العزم اللدن Plastic moment.

Z_p : عامل المقطع اللدن Plastic moduls.

ومنه نلاحظ أن مقاومة المقطع المستطيل حسب نظرية المرونة وحسب نظرية اللدونة تكون:

$$M_y = f_y * w = f_y \frac{bh^2}{6}$$

$$M_p = f_y * Z_p = f_y \frac{bh^2}{4}$$

إن النسبة بين العزم اللدن M_p والعزم المرن M_y تعطينا فكرة عن الزيادة في العزوم التي يمكن أن يتحملها المنشأ نتيجة لسماحتنا بلدونة المقطع ويرمز لهذه النسبة بـ α عامل الشكل (Shape Factor):

$$\alpha = \frac{M_p}{M_y} = \frac{b \frac{h^2}{4}}{b \frac{h^2}{6}} = 1.5$$

ومنه فإن طاقة المقطع حسب نظرية اللدونة أكبر بمرة ونصف منه حسب نظرية المرونة، وبالتالي فإن معامل اللدونة الذي يعتمد على شكل المقطع فقط يساوي:

$$Z_p = \frac{bh^2}{4} = 1.5 W$$

$$Z_p \approx (1.15 - 1.17) * W \text{ لمقطع على شكل I}$$

$$Z_p \approx 1.7 W \text{ للمقطع الدائري}$$

$$Z_p \approx 1.27 W \text{ للمقطع الأنبوبي}$$

حيث:

$$W = \frac{I}{y} : \text{عزم المقاومة المرن}$$

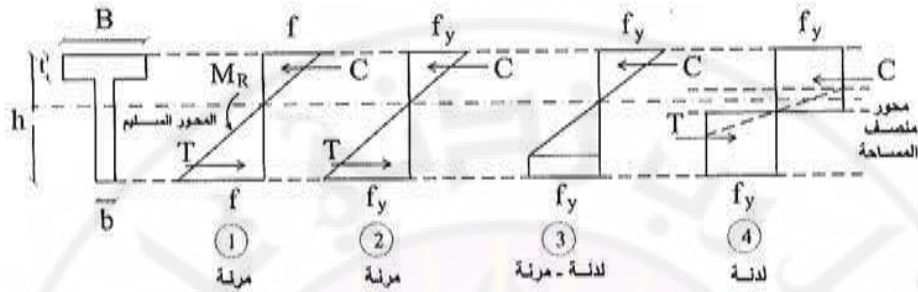
ومعامل اللدونة (أو عامل الشكل) يعتبر مقياساً للزيادة في المقاومة العزمية للمقطع التي يمكن الحصول عليها بعد أن تصل الإجهادات في أليافه القصوى إلى إجهاد الخضوع σ_T ؛ ولذلك نرى أن هذا العامل كبير بالنسبة للمقطع الدائري نظراً لأن معظم مساحة المقطع مركزة قرب المحور الحيادي بينما يكون هذا العامل صغير بالنسبة للمقطع I لأن معظم مساحة المقطع مركزة قرب أليافه الأكبر بعداً عن مركز ثقله.

3-5-5- معامل اللدونة للمقاطع غير المتناظرة بشكل عام:

إن المحور المحايد في الحالة اللدنة هو المحور الذي يقسم مساحة المقطع إلى مساحتين متساويتين وتكون حاصلة إجهاد الشد مساوية لإجهاد الضغط في المقطع (ومنه الإجهادات النازمية معدومة في المقطع الخاضع للانعطاف الصافي)، وتبدأ اللدونة بالجزء الأضعف من المقطع.

أما في حالة المقاطع غير المتناظرة حول محور الانعطاف، فإنه لا ينطبق المحور السليم المرن مع المحور السليم اللدن. ولهذا فيحدد موقع المحور السليم

اللدن من تساوي مجموع الإجهادات في حالتي الشد والضغط ولما كان الإجهاد ثابتاً فإن موقع المحور السليم اللدن يتحدد من تساوي مساحتي منطقة الضغط ومنطقة الشد.



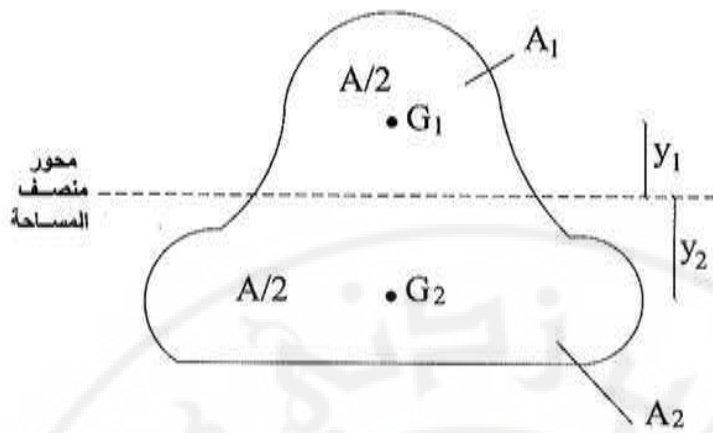
الشكل (5-5)

وإذا كان لدينا شكل ما للمقطع العرضي كما هو مبين في الشكل (6-5) عندئذ نأخذ المحور المنصف للمساحة:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

$$M_p = f_y (A_1 y_1 + A_2 y_2) = f_y \frac{A}{2} (y_1 + y_2)$$

$$Z_p = \frac{A}{2} (y_1 + y_2)$$



الشكل (6-5)

حيث:

y_1, y_2 : بعدي مراكز ثقل المساحات الجزئية عن المحور السليم اللدن.

A : مساحة المقطع العرضي.

G_1, G_2 : مركزي ثقل المساحة العلوية والسفلية للمقطع على التوالي.

Z_p : المعامل اللدن للمقطع وهو خاصة هندسية للمقطع وليس له

علاقة بطبيعة المادة المشكلة للمقطع.

من الجدير بالذكر أن توزع الإجهادات الناعمية على المقطع في الحالة اللدنة بشكل مستطيلين عملياً غير واقعي لأنه دائماً يكون لدينا في حالة الانعطاف نواة مركزية مرنة حول المحور المحايد. هذه النواة تهمل في أثناء الحساب وذلك لأن تأثيرها قليل الأهمية من جهة وإن أخذها بالحسبان سيؤدي إلى صعوبة الحل من جهة أخرى. كما تهمل عادة مرحلة التصلب للمادة. وإذا أخذنا بالحسبان المخطط الحقيقي للتشوه فإن الإجهادات الناعمية المؤثرة على

مقاطع العناصر تتوزع بشكلٍ منحني وليس مستطيلاً. وأخيراً نلاحظ أنه في المنشآت المقررة ستاتيكيًا يتم الانهيار عندما تصبح نقطة تطبيق العزوم الأعظمية بمثابة مفصل يسمى بالمفصل اللدن (Plastic Chinge)، وإن هذه المنشآت تنهار لدى تشكل مفصل لدن واحد فقط، فهو كافٍ لجعلها على شكل آلية انهيار (ميكانيزم Mechanism)، وبالتالي فإن المنشأ يصبح على شكل مضلع تشوهي غير مستقر بسبب تشكل المفاصل اللدنة.

6-5- طرق التحليل اللدن للمنشآت:

لقد درسنا في الفقرات السابقة تصرف المنشآت الهندسية عند زيادة الحملات المطبقة وحتى الانهيار، إلا أنه ومن أجل التصميم نحتاج كثيراً لمعرفة حمولة الانهيار فقط دون التطرق إلى الحساب المطول لكامل التحليل والمتدرج من الصفر وحتى حمولة الانهيار. ولذلك فقد عمدت بعض الطرق إلى استنباط وسائل مباشرة لتحليل مرحلة الانهيار النهائية فقط ومعرفة حمولة الانهيار مباشرة. ومثل هذه الطرق يجب أن تحقق شروط مشتقة من التحليل الكامل للتصرف اللدن:

1- شرط ميكانيكية (آلية) الانهيار (Mechanism Condition):

نصل إلى حمولة الانهيار عندما تتشكل لدينا ميكانيكية للانهيار، وهي تحقق أولاً شرطي الميكانيكية والتوازن ثم تحقق أخيراً شرط العزم اللدن.

2- شرط التوازن (Equilibrium Condition):

يجب أن يحقق توزع العزوم شرط التوازن الكامل للمنشأ. وهي تحقق أولاً شرطي التوازن والعزم اللدن ثم تحقق أخيراً شرط الآلية. عند الحساب بطريقة

الآلية نفترض آلية معينة للانهييار ثم نحسب حمولة الانهييار لتلك الآلية من شرط التوازن، وتكون هذه القيمة المحسوبة صحيحة إذا حققت شرط العزم اللدن. أما عند الحساب بطريقة التوازن فيرسم مخطط العزم المتوازن وتحسب حمولة الانهييار من شرط العزم اللدن، وتكون القيمة المحسوبة صحيحة إذا تشكل عدد كاف من المفاصل اللدنة لتحقيق شرط الآلية.

3- شرط العزم اللدن (Plastic Moment Condition):

يجب أن لا يزيد العزم في أية نقطة من المنشأ عن القيمة M_p . إن هذه الشروط الثلاثة للتحليل اللدن تشابه الشروط الموجودة في التحليل المرن، والتي تتطلب أن تأخذ بالحسبان الشروط الآتية:

أ- الاستمرارية في الخط المرن.

ب- التوازن.

ج- الإجهاد المقبول.

في الواقع يصعب تحقيق الشروط الثلاثة السابقة مباشرة. لذلك فإن طرق التحليل اللدن تبدأ بتحقيق شرطين من الشروط الثلاثة، ثم نتأكد في النهاية أن الشرط الأخير محقق وذلك للتأكد من صحة القيمة المحسوبة لحمولة الانهييار.

مما سبق نستنتج أن هناك طريقتين رئيسيتين للتحليل اللدن يطلق على كل واحدة منهما الاسم الذي أملتة عليها الشروط التي تحققها هذه الطريقة وهما: طريقة الميكانيزم (الآلية) وطريقة التوازن.

5-6-1- طريقة الميكانيكية (الميكانيزم):

ويمكن تقسيم العمل المتبع في طريقة الميكانيكية إلى عدة نقاط متتالية هي:

1- نعين مواقع المفاصل اللدنة المحتملة (نقاط تطبيق الحملات، الوثاقات، المساند، ونقاط تقريبية يكون فيها قوة القص = الصفر وذلك للحمولة الموزعة).

2- ننتقي أنواع محتملة الحدوث من آليات الانهيار، أي نفرض أية ميكانيكية انهيار.

3- نحلل الآلية المختارة بواسطة معادلات التوازن للحصول على حمولة الانهيار (ويمكن الحصول عليها بسهولة باستعمال مبدأ العمل الوهمي). وهي تعتمد على تطبيق مبدأ الانتقالات الافتراضية على الجملة غير المستقرة هندسياً (ميكانيزم) الناتجة من الجملة المعطاة بعد تشكل عدد كافٍ من المفاصل اللدنة فيها. وهذه الجملة تخضع لتأثير العزوم الحدية (M_P) في المفاصل اللدنة بالإضافة إلى الحمولة الحدية، وبالتالي فإن العمل الناتج عن القوى الخارجية يكون مكافئاً للعمل الناتج عن القوى الداخلية، أو أن يكون مجموعهما مساوياً للصفر أي:

$$W_E + W_I = 0$$

$$\sum P_{Pi} \cdot \Delta_i - \sum P_{Pi} \cdot \theta_i = 0$$

حيث:

$$W_E = \sum P_i \cdot \Delta_i : \text{العمل الخارجي.}$$

$W_i = \sum M_{pi} \cdot \theta_i$: العمل الداخلي.

Δ_i : الانتقالات الخطية لنقاط تطبيق الحملات الخارجية.

θ_i : زوايا دوران مقاطع العناصر التي تشكلت عندها المفاصل اللدنة.

M_{pi} : العزم اللدن (الحدّي).

P_p : الحمولة الخارجية الحدية.

وبمعنى آخر يمكن تلخيص مبدأ العمل الوهمي (الافتراضي) كما يلي:

إذا كانت مجموعة قوى في حالة توازن وتعرضت إلى انتقال افتراضي يكون العمل الناتج عن القوى الخارجية مساوياً إلى العمل المبذول نتيجة للقوى الداخلية أي الطاقة الممتصة نتيجة لدوران المفاصل اللدنة.

4- نتأكد من أن العزم في جميع نقاط المنشأ أصغر أو تساوي العزم اللدن أي $M \leq M_p$. وإذا لم يتحقق هذا الشرط نختار آلية جديدة للانهياب ونعيد الحساب على ميكانيكية أخرى.

5-2-6- طريقة التوازن (Equilibrium Method):

إن الهدف هو إيجاد توزيع متوازن للعزوم على المنشأ وبحيث لا يزيد العزم في أية نقطة عن العزم اللدن $M \leq M_p$. وبحيث تتشكل لدينا آلية حقيقية للانهياب وللتأكد من شرط التوازن فإنه من المفيد أن نستبدل المنشأ الحقيقي بآخر مقرر توازنيًا مع تعويض أثر القوى المجهولة لعدم التقرير. وبالتالي فإن مجموع العزوم الناتجة عن الأحمال المطبقة على المنشأ والعزوم الناتجة عن قوى عدم التقرير يجب أن تشكل مخططاً متوازناً. يمكن تلخيص خطوات العمل بطريقة التوازن كما يلي:

1- نختار شكلاً مناسباً لتقرير المنشأ (مع التعويض عن قوى عدم التقرير بقوى مناسبة مجهولة).

2- نرسم مخطط العزوم للمنشأ المقرر تحت تأثير الحمولات المطبقة عليه.

3- نرسم مخططات العزوم للمنشأ المقرر تحت تأثير قوى عدم التقرير المجهولة.

4- نرسم مخطط العزوم المركب من المخططين السابقين بحيث نحصل ما استطعنا على العزوم الأعظمية الموجبة والسالبة متناسبة مع العزوم اللدنة M_p .

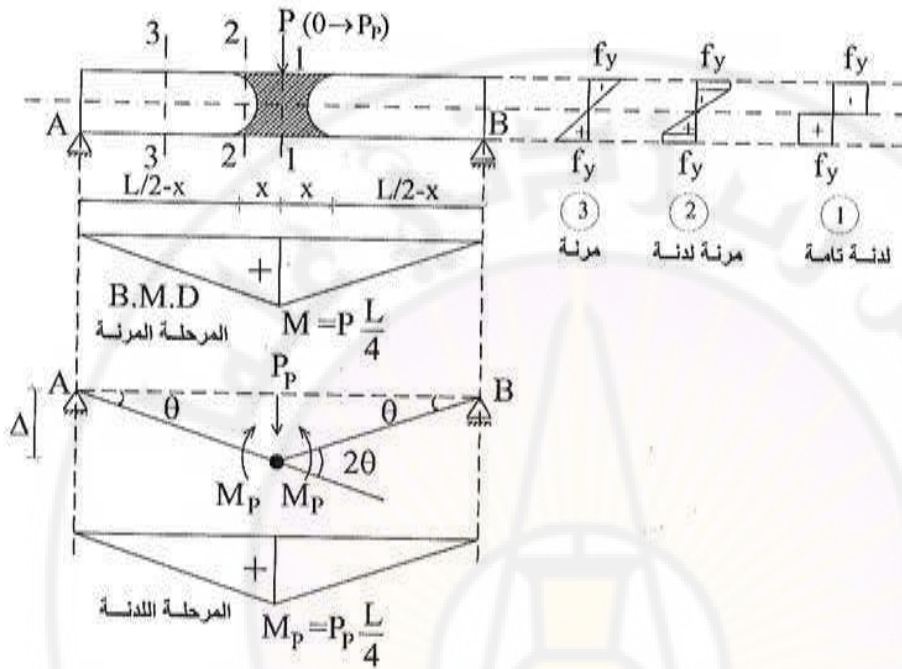
5- نفترض أن قيم العزوم الأعظمية التي حصلنا عليها مساوية للعزم اللدن M_p للمقاطع المقابلة ونحسب باستعمال شروط التوازن قيمة حمولة الانهيار المفترضة.

6- نتحقق من تشكل ميكانيكية للانهيار مسموح بها (إشارات العزوم في المفاصل اللدنة يجب أن توافق حركة الميكانيكية المحتملة) وإذا لم تتحقق نعود إلى الخطوة (4) وهكذا.

7-5 سلوك الجانز البسيط: Behavior of Simple Beam

لندرس الجانز AB الموضح على الشكل (7-4) والخاضع إلى الحمولة المركزة المطبقة في منتصف المجاز L ونفترض أن الحمولة تتزايد من القيمة صفر وحتى P_p . عند تزايد الحمولة يسلك الجانز سلوكاً مرناً طالما بقيت قيمة الحمولة المركزة أقل من القيمة الحدية المسببة للانهيار اللدن للجانز وتكون علاقة الإجهادات بالتشوهات علاقة خطية موافقة لقانون هوك وتعين قيمة العزم الأعظمي في منتصف المجاز بالمقدار $(PL/4)$. ومع زيادة الحمولة يزداد العزم

الأعظمي في منتصف المجاز وتزداد الإجهادات المطبقة على المقطع حيث تدخل في مرحلة اللدونة ومع استمرار ازدياد الحمولة يزداد انتشار اللدانة في المقطع حتى تصل إلى مرحلة اللدونة الكاملة.



الشكل (7-5) انتشار اللدانة في الجانز

عندما يصبح توزع الإجهادات في المقطع المعرض للعزم الأعظمي موافق لتوزع إجهادات اللدونة شكل (7-5) يصبح مقدار العزم الداخلي الأعظمي مساوياً لعزم اللدانة للمقطع فهذا يؤدي لدوران العناصر على طرفي المقطع وكأنه يوجد مفصلاً في منطقة اللدانة. ونسمي هذا المفصل بالمفصل اللدن لنميزه عن المفصل الحقيقي حيث إن المفصل اللدن يبدي مقاومة ثابتة تساوي عزم اللدانة الكاملة للمقطع بينما لا يبدي المفصل الحقيقي أية مقاومة للعزم الخارجية المطبقة. وبما أن الألياف المعرضة إلى إجهادات عظمى في المقطع

تصل إلى مرحلة اللدونة قبل غيرها في المقطع فنجد توزع الإجهادات في المقطع الخاضع إلى العزم الأعظمي المقطع 1 يصل إلى إجهادات لدونة كاملة بينما يقل انتشار اللدونة كلما ابتعدنا عن المقطع اللدن كما في المقطع 2 ولمرحلة المرونة المقطع 3 حيث تكون به الإجهادات العظمى في المقطع مساوية لإجهاد الخضوع للمادة f_y ويسمى مقطع بدء اللدونة.

ولتحديد المسافة $(2x)$ المحددة لانتشار إجهادات اللدونة في العنصر على طرفي المفصل اللدن نجد:

$$M_y = \frac{P_p}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

ومنه:

$$2x = L - \frac{4M_y}{P_p}$$

وبعد معرفة المقدار $(2x)$ يمكن تحديد مدى انتشار إجهادات اللدونة في المنطقة القريبة من المقطع اللدن، وغالباً ما نهمل ظاهرة انتشار إجهادات اللدونة في العنصر من أجل تبسيط الحسابات ولصغر الأخطاء المرتكبة المتعلقة بذلك نعتد بتوزيع إجهادات اللدونة في المقطع الخاضع لعزم الانعطاف الأعظمي في العنصر.

وتحسب قيمة عزم الانعطاف في منطقة المفصل اللدن والتي تساوي قيمة عزم اللدانة للمقطع M_p كما هو موضح على الشكل (5-7).

أ- وفق طريقة التوازن:

من توازن القوى الداخلية مع القوى الخارجية المطبقة يمكن تعيين قيمة عزم الانعطاف عندما تصل قيمة الحمولة P إلى حمولة الانهيار P_p :

$$M_p = \frac{P_p * L}{4}$$

ومنه حمولة الانهيار تساوي:

$$P_p = \frac{4M_p}{L}$$

ب- طريقة آلية الانهيار (ميكانيزم):

عندما يتشكل المفصل اللدن في منطقة العزم الأعظمي (منتصف الجانز) يتحول شكل المنشأ إلى هيئة غير متوازنة (منشأ غير مستقر هندسياً) ونسمي هيئة المنشأ في هذه الحالة ميكانيكية الانهيار (ميكانيزم) وتكون قيمة عزم الانعطاف في منطقة المفصل اللدن مساوية عزم اللدانة للمقطع M_p . ويمكن باستخدام مبدأ العمل الوهمي الحصول على قيمة حمولة الانهيار P_p من شرط تساوي العمل الخارجي الذي تقوم به القوى المطبقة مع العمل الداخلي الذي تقوم به عزوم اللدانة خلال مرحلة الانهيار اللدن.

قيمة العمل الخارجي W_e الناتج عن انتقال نقطة تطبيق الحمولة الخارجية:

$$W_e = P_p * \Delta = P_p * \frac{L}{2} \theta \quad (1-5)$$

وأما العمل الداخلي W_i الناتج عن دوران المفصل اللدن:

$$W_i = M_p * 2\theta \quad (2-5)$$

ومن تساوي العلاقتين (1-5) و (2-5) نجد:

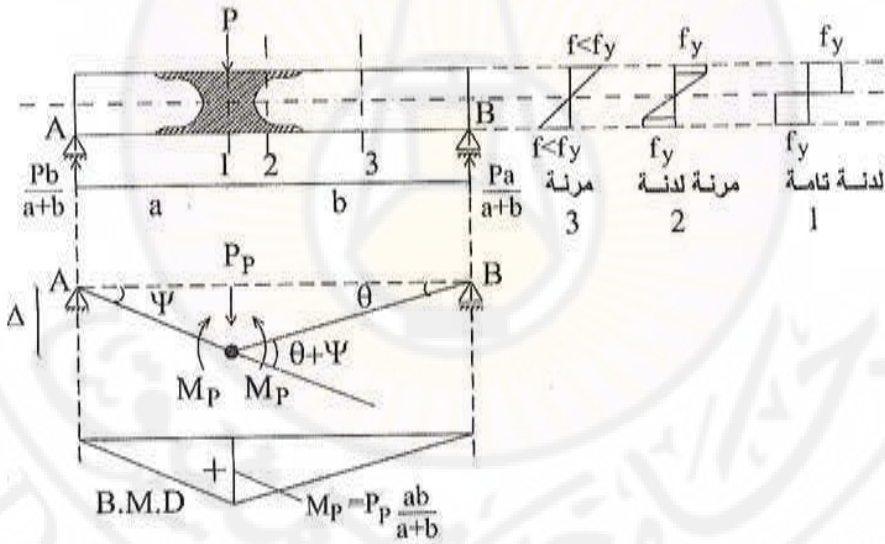
$$M_p * 2\theta = P_p * \frac{L}{2} \theta$$

ومنه حمولة الانهيار تكون:

$$P_p = \frac{4M_p}{L}$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها بمعادلات التوازن.

أما في حالة الحمولة المركزة مطبقة على مسافة a و b عن المسندين كما هو مبين في الشكل (8-5):



الشكل (8-5) انتشار اللدانة على الجانز البسيط

باستخدام طريقة التوازن تحسب قيمة عزم اللدانة M_p بالعلاقة:

$$M_p = \frac{P_p * a b}{a + b}$$

وأما باستخدام طريقة آلية الانهيار (ميكانيزم) نكتب معادلة العمل الوهمي:

$$\sum P_{ip} * \Delta_i - \sum M_{pi} * \theta_i = 0$$

حيث:

Δ_i : الانتقالات الخطية لنقاط تطبيق الحملات الخارجية.

θ_i : زوايا دوران مقاطع العناصر التي تشكلت عندها المفاصل اللدنة.

M_p : العزم اللدن (الحدّي).

تعتبر إشارة عزم الانعطاف موجبة إذا تسبب في شد الليف الداخلي، وحفاظاً على الانسجام في اصطلاح الإشارات سيعتبر الدوران الوهمي موجباً أيضاً إذا نشأ عنه شد في الليف الداخلي.

ومن العلاقة السابقة نكتب:

$$M_p(\theta + \psi) = P_p * \Delta$$

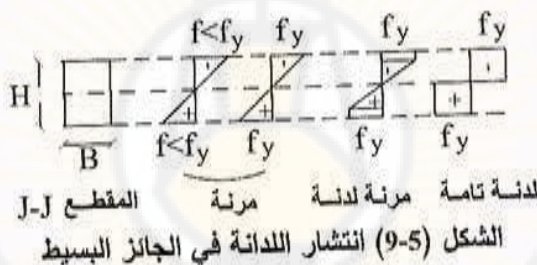
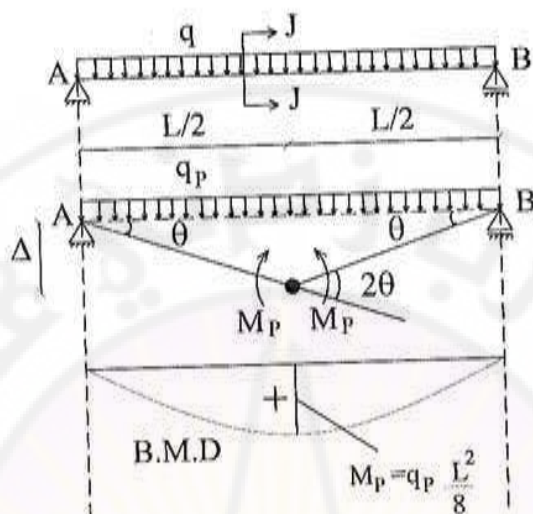
حيث:

$$\Delta = a \psi = b \theta \quad ; \quad \psi = \frac{b}{a} \theta$$

ومنه نجد:

$$M_p = \frac{P_p * a b}{a + b}$$

وكذلك الحال عندما يخضع الجائز البسيط لحمل موزع بانتظام q كما هو مبين في الشكل (9-5).



عندما تزداد الحمولة الموزعة q من الصفر وحتى القيمة q_p يحدث الانهيار في منتصف الجائز وعندئذ يتشكل المفصل اللدن ويحصل انقطاع بالخط المرن، وتعين قيمة عزم اللدانة باستخدام معادلات التوازن بالعلاقة:

$$M_p = \frac{q_p * L^2}{8}$$

ومنه حمولة الانهيار الموزعة تساوي: $q_p = \frac{8M_p}{L^2}$

8-5 سلوك الجيزان الموثوقة: Behavior of built in beams

لقد رأينا في المنشآت المقررة أنه يكفي تشكل مفصل واحد لدن حتى تتشكل الآلية (Mechanism) وينهار المنشأ. كما رأينا أن التصرف اللدن لا يغير من توزيع القوى والعزوم في عناصر المنشأ والشيء الوحيد الذي يتغير هو الحمولة العظمى الناتجة عن توزيع الإجهادات اللدنة في المقطع ذي العزم الأعظمي. لكنه في المنشآت غير المقررة لا يكفي تشكل مفصل لدن واحد لتشكل الآلية وإنما يؤدي ذلك إلى تقليل درجة عدم التقرير. كما أن التصرف اللدن سيؤدي إلى إعادة توزيع للقوى والعزوم في عناصر المنشأ.

لا يؤثر السلوك اللدن للمنشآت المقررة في عملية إعادة توزيع العزوم والقوى في العناصر، ولذلك فإن السعة الاحتياطية المحسوبة في السلوك اللدن تتمثل فقط بإمكانية توزيع الإجهادات اللدنة في المقطع ذي العزم الأعظمي أما في حالة المنشآت غير المقررة المحملة إلى ما فوق حد المرونة فيوجد لدينا عامل ثان يسهم في زيادة احتياطي المقاومة للمقدرة العزمية وهو إعادة توزيع العزوم الناتجة عن فعل المفاصل اللدنة. وعند تطبيق الأحمال على المنشأ نحصل على العزم اللدن في المقطع الحرج - المقطع المعرض لأقصى إجهاد ضمن حدود المرونة. وبمتابعة زيادة الأحمال على المنشأ نحصل على عزم لدنة ثابت بينما يدور المقطع، وأما المقاطع المعرضة لإجهادات أقل فتحافظ على توازنها ويتناسب ازدياد العزم مع ازدياد الحمولة. وتستمر عمليات نقل العزوم نتيجة للتشكلات المتتالية للمفاصل اللدنة حتى وصول المنشأ إلى الحمل الأقصى.

لنعتبر مثلاً جائزاً موثقاً AB من الطرفين ومحمل بحمولة موزعة بانتظام شدتها q كما هو مبين في الشكل (10-5). عندما تزداد الحمولة q تدريجياً يخضع الجائز للمراحل التالية:

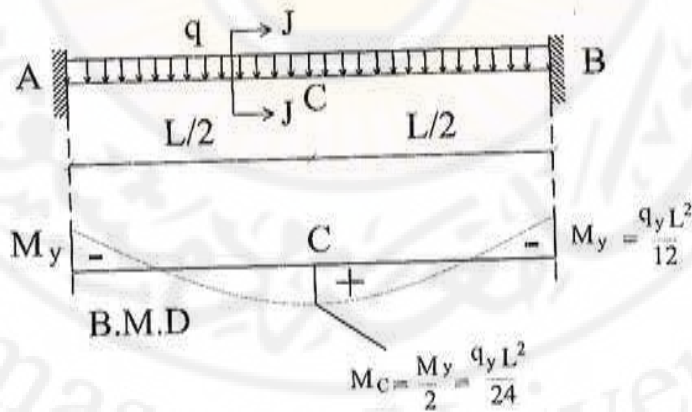
1- المرحلة المرنة:

ويكون توزع العزوم على كامل الجائز مرناً الشكل (10-5)، ويستمر هذا التوزيع حتى نصل إلى أكبر حمولة مرنة $q = q_y$ ويكون العزم في الوثاقتين مساوياً إلى العزم المرن الأعظمي الذي وصل إلى بداية الخضوع:

$$M_A = M_B = \frac{q_y L^2}{12} = M_y$$

وعليه يكون مقدار العزم في منتصف الجائز C:

$$M_C = \frac{q_y L^2}{8} - \frac{q_y L^2}{12} = \frac{q_y L^2}{24} = \frac{M_y}{2}$$



الشكل (10-5) انتشار اللدانة في الوثاقات الطرفية

2- المرحلة اللدنة:

عندما تزداد الحمولة q وتصل القيمة $q = q_p$ يتشكل مفصلان لدنان في الوثاقتين A و B الشكل (11-5)، وتصل قيمهما القصوى إلى $(-M_p)$ ويبقى التحليل المرن صالحاً لحساب توزيع العزوم، ويكون العزم في الوثاقتين مساوياً إلى:

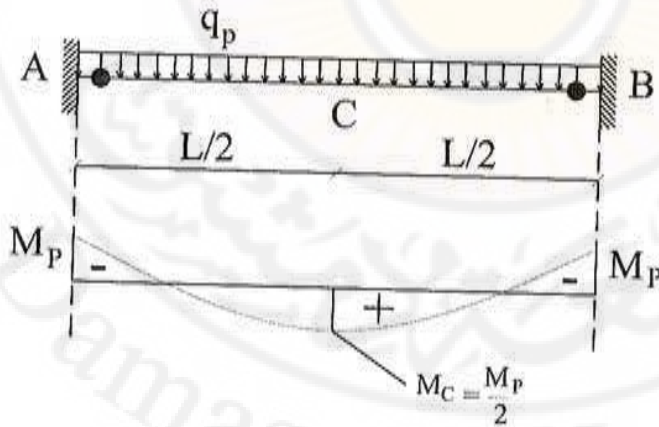
$$M_A = M_B = \frac{q_p L^2}{12} = M_p$$

وقيمة العزم M_C في منتصف المجاز تساوي:

$$M_C = \frac{M_p}{2} = \frac{q_p L^2}{24}$$

ومن شرط المرونة تعين قيمة شدة الحمولة الموزعة بالعلاقة:

$$q_p = \frac{12 M_p}{L^2}$$



الشكل (11-5) تشكل مفصلين لدنين في الجانز الموثوق

3- مرحلة الانهيار (ميكانيزم):

لا يمكن لعزوم الوثاقة الآن أن تزداد، ولذلك فإن الجائز وعند زيادة الحمل q بمقدار صغير سيتصرف كجائز بسيط لأن المفصلين اللدنيين عند نهايتي الجائز يدوران بينما يبقى العزم المطبق عند هذين المفصلين ثابتاً عند القيمة M_p والتغير في العزم عند هاتين النقطتين صفر الشكل (5-12).

وبحيث يزداد العزم الموجب حتى يتشكل المفصل اللدن الثالث في C عندما تكون الحمل $q = q_p$ ، ويتحول الجائز عند هذه المرحلة إلى ميكانيكية نتيجة لتحوله إلى شكل غير متوازن وتحسب قيمة العزم اللدن M_p .

أ- وفق طريقة التوازن:

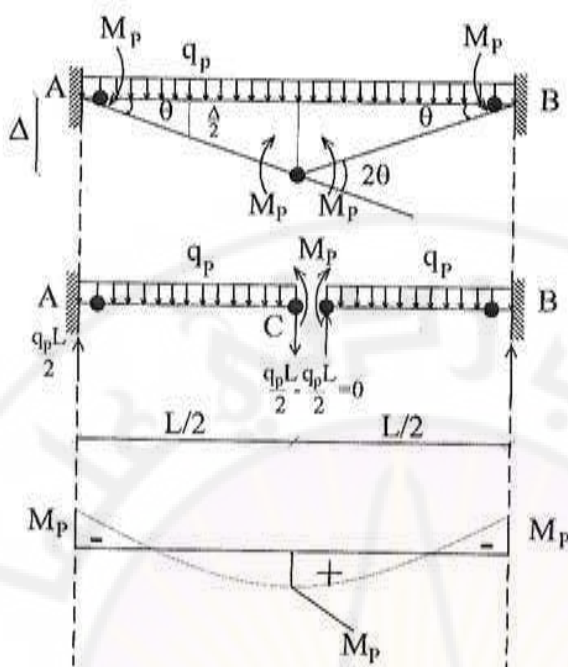
نجزأ الجائز كما هو مبين في الشكل (5-12) ومن توازن الجزء الأيسر نجد:

$$\sum M_C^L = 0$$

$$2M_p = \frac{q_p * L}{2} * \frac{L}{2} - q_p \frac{L}{2} * \frac{L}{4} = \frac{q_p * L^2}{8}$$

ومنه نحسب قيمة العزم اللدن:

$$M_p = \frac{q_p L^2}{16}$$



الشكل (12-5) الانهيار اللدن للجائز الموثوق من الطرفين

ب- الحساب بطريقة الميكانيكية (الميكانيزم):

نعين قيمة العمل الداخلي W_i الناتج عن دوران المفاصل بالعلاقة:

$$W_i = M_p * \theta + M_p * 2\theta + M_p * \theta = 4M_p * \theta$$

وهذا العمل يساوي العمل الخارجي W_e الذي يمثل الحمولات الموزعة في

أثناء هبوطها:

$$W_e = q_p * \frac{L}{2} * \frac{\Delta}{2} * 2 = q_p * \frac{L}{2} * \frac{L}{2} \theta$$

ومنه:

$$M_p = q_p * \frac{L^2}{16}$$

حيث:

$$\Delta = \frac{L}{2} * \theta$$

ومنه نلاحظ أن قيم عزوم الانعطاف في الوثاقات ومنتصف الجانز متساوية وتساوي عزم اللدانة M_p ومن شرط اللدانة يمكن أن تعين شدة الحمولات الموزعة بالعلاقة:

$$q_p = \frac{16 M_p}{L^2}$$

مما سبق نلاحظ أن العلاقة $M_p = \frac{q L^2}{12}$ تحقق شرط التوازن ولكن لا تحقق شرط تشكل عدد كافٍ من المفاصل اللدنة لحدوث الانهيار اللدن (لأنه يلزمنا ثلاثة مفاصل لدنة بدلاً من مفصلين لدنيين لحدوث الانهيار اللدن) وبالمقارنة بين قيمتي q المستخرجة لعزم الانعطاف فإن q (للحالة المرنة) أقل من الحمولات الحرجة المحققة q_p لجميع شروط التحليل اللدن. وبالتالي فإنه عند تصميم أو تحقيق الجوائز الموثوقة والخاضعة لحمولات موزعة بانتظام يمكن أن يؤخذ شكل الجانز كما هو مبين في الشكل (5-13).



شكل الجانز وفق طريقة اللدونة

شكل الجانز وفق طريقة المرونة

الشكل (5-13)

والنقطة التي يجب ملاحظتها هنا هي أنه عندما تكون الحمولة $q < q_y$ يكون الجائز غير مقرر وعندما تصبح الحمولة q مساوية لـ (q_y) أو أكبر منها يصبح الجائز مقررًا لأن العزم عند النهايتين يصبح معروفًا ويساوي لـ $(-M_p)$.

مثال (1-5):

يطلب تحليل ميكانيكية الانهيار للجائز المبين بالشكل (14-5).

الحل:

الجائز غير مقرر مرة واحدة لذا يلزم تشكل مفصلين لدنيتين لحصول الانهيار اللدن واحد في الوثاقة والآخر في منطقة العزم الأعظمي في المجاز غير واقع في منتصف المجاز. لذا نفرض أن المفصل اللدن في المجاز واقع على بعد x من المسند B.

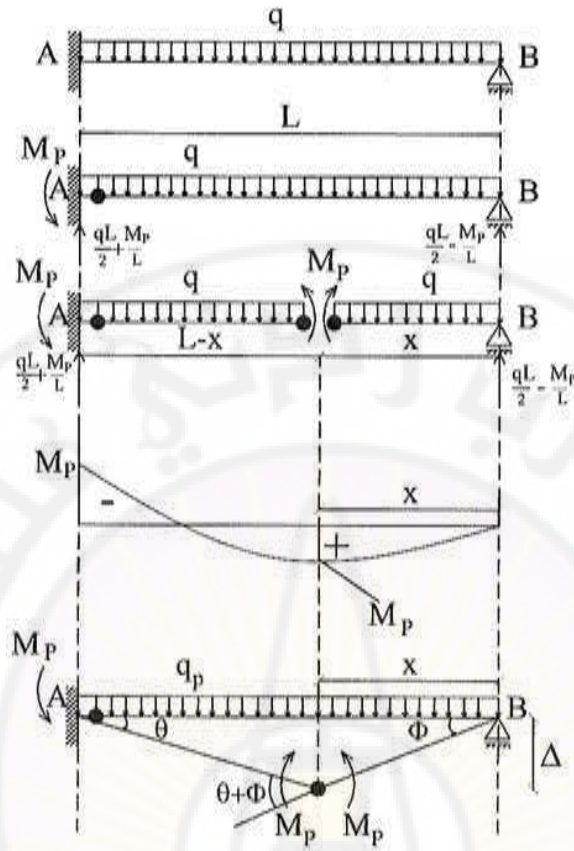
ونعين العزم اللدن M_p كالآتي:

أ- بطريقة التوازن:

نجزأ الجائز عند المفصل اللدن الداخلي وندرس توازن الجزء الأيمن فنجد:

$$\sum M_x^r = 0$$

$$M_p = \left(\frac{qL}{2} - \frac{M_p}{L} \right) * x - \frac{q * x^2}{2}$$



الشكل (14-5)

ومنه نجد:

$$M_p \left(1 + \frac{x}{L} \right) = \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2} (Lx - x^2)$$

لإيجاد قيمة عزم الانعطاف الأعظمية M_p في فتحة الجائز نأخذ مشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ x ونساويه بالصفر:

$$\frac{\partial M_p}{\partial x} = \frac{q}{2} \left[(L - 2x) \left(1 + \frac{x}{L} \right) - \frac{1}{L} (Lx - x^2) \right] = 0$$

$$L + x - 2x - \frac{2x^2}{L} - x + \frac{x^2}{L} = 0$$

وبإصلاح هذه العلاقة تصبح من الشكل:

$$x^2 + 2Lx - L^2 = 0$$

ومنه:

$$x = -L + \sqrt{L^2 + L^2}$$

$$x = -L + \sqrt{2} L = 0.412 L$$

وبتعويض هذه القيمة في علاقة عزم الانعطاف M_p نجد:

$$M_p = 0.086 q L^2$$

ب- بطريقة ميكانيكية الانهيار (ميكانيزم):

نعين العمل الداخلي أي عمل دوران المفاصل اللدنة من الميكانيزم الشكل

(14-5):

$$W_i = M_p * \theta + M_p (\theta + \phi) + \phi * 0 = M_p (2\theta + \phi)$$

العمل الخارجي الناتج عن انتقال حمولة الانهيار q :

$$W_e = q * L \frac{\Delta}{2}$$

ولإيجاد العلاقة التي تربط بين زوايا الدوران θ و ϕ نجد:

$$\Delta = (L - x) * \theta = x * \phi$$

ومنه:

$$\phi = \frac{L - x}{x} * \theta$$

ومن تساوي قيمتي العمل الداخلي والخارجي نجد أن:

$$M_p (2\theta + \phi) = q \frac{L * \Delta}{2}$$

وبالتبديل بالعلاقة بين الزوايا تأخذ العلاقة الشكل:

$$M_p * \theta * \left(2 + \frac{L - x}{x} \right) = q \frac{L}{2} (L - x) \theta$$

ومنه:

$$M_p = \frac{q \frac{L}{2} * (Lx - x^2)}{L + x}$$

وباشتقاق M_p بالنسبة لـ x ومساواة الناتج بالصفر نحصل على قيمة

$x = 0.412 L$ موقع المفصل اللدن عن المسند B وهي نفس القيمة التي حصلنا

عليها بطريقة التوازن.

مثال (5-2):

أوجد شكل ميكانيكية الانهيار للجائر المبين في الشكل (5-15)، عندما تكون هذه الحملات هي القصوى ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف.

الحل:

إن شرط الانهيار هو تشكل مفصلين لدنين عند الوثاقتين وكذلك مفصل لدن تحت نقطة تطبيق إحدى القوتين المركزيتين B أو C ولهذا السبب ندرس المحاولتين والتي ينتج عنها عزم لدانة أكبر يكون هو الحل الصحيح، وتسمى هذه الطريقة بطريقة نفي الخطأ.

المحاولة الأولى:

نفرض أن ميكانيكية الانهيار كما هو مبين في الشكل (5-15، a)، ونحسب قيمة عزم الانعطاف عند النقطة C المجهول فيها العزم، فإذا كانت القيمة أقل أو تساوي العزم اللدن M_p ، عندئذ الحل المفروض هو الحل الصحيح وإذا كانت أكبر من العزم اللدن فهذا الحل خطأ (أي مرفوض) والاحتمال الآخر هو الصح.

وبفرض أن الحل باستخدام طريقة آلية الانهيار ومن تساوي العمل الداخلي والخارجي لحالة المحاولة الأولى نكتب:

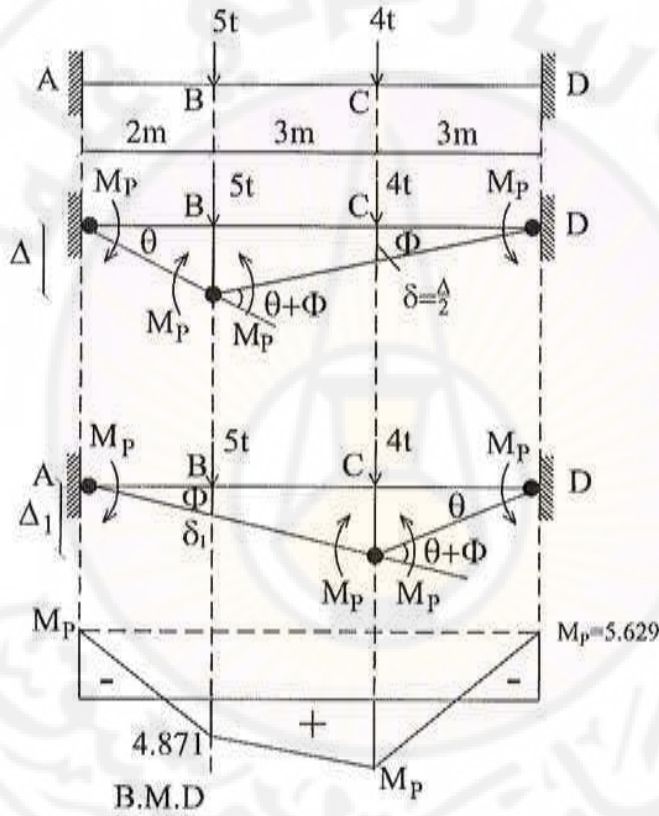
$$W_i = M_p * \theta + M_p * (\theta + \phi) + M_p * \phi = 2 M_p \theta + 2 M_p \phi$$

$$W_e = 5 \Delta + 4 \delta$$

حيث:

$$\Delta = 2\theta = 6\phi \quad ; \quad \theta = 3\phi$$

$$\delta = 3\phi = \frac{\Delta}{2} \quad ; \quad \Delta = 6\phi$$



الشكل (15-5) ميكانيكية الانهيار

ومن تساوي قيمتي العمل الداخلي والخارجي وتبديل قيمتي θ و Δ بما يكافئهما نجد:

$$2M_p * 3\phi + 2M_p * \phi = 5 * 6\phi + 4 * 3\phi$$

ومنه:

$$M_p = 5.25 \text{ t.m}$$

ولنتحقق الآن من قيمة عزم الانعطاف عند النقطة الثانية C والتي يحتمل أن يتشكل فيها مفصل لدن. ولهذا نحسب ردي الفعل عند الوثاقتين A و D نتيجة الحمولة الخارجية على اعتبار أن الجانز AD جانز بسيط فينتج:

$$R_A = \frac{4 * 3 + 5 * 6}{8} = \frac{42}{8}$$

$$R_D = \frac{4 * 5 + 5 * 2}{8} = \frac{30}{8}$$

وتحسب قيمة عزم الانعطاف عن النقطة C بالعلاقة:

$$M_C = M_p - \frac{30}{8} * 3 = 5.25 - 11.25 = -6 \text{ t.m} > M_p = 5.25 \text{ t.m}$$

وبما أن قيمة عزم الانعطاف في المقطع C أكبر من قيمة عزم اللدانة نستنتج أن الميكانيكية المفروضة غير صحيحة. لذا ندرس الاحتمال الثاني بفرض أن ميكانيكية الانهيار كما هو مبين في الشكل (5-15, b) ونتأكد من قيمة عزم الانعطاف في النقطة B. واعتماداً على هذا الفرض وبمساواة قيمة العمل الوهمي الداخلي مع العمل الوهمي الخارجي نجد:

$$2M_p * \theta + 2M_p * \phi = 4 * \Delta_1 + 5 * \delta_1 \quad (1)$$

حيث:

$$\delta_1 = 2\phi \quad ; \quad \Delta_1 = 3\theta = 5\phi$$

ومنه:

$$\phi = 0.6\theta$$

وبالتعويض بالعلاقة (1) نجد:

$$2M_p(1+0.6)\theta = 12\theta + 10 \cdot 0.6\theta$$

ومنه:

$$M_p = 5.629 \text{ t.m}$$

نتحقق الآن من قيمة عزم الانعطاف في B بأخذ مجموع العزوم على يمين

المقطع B:

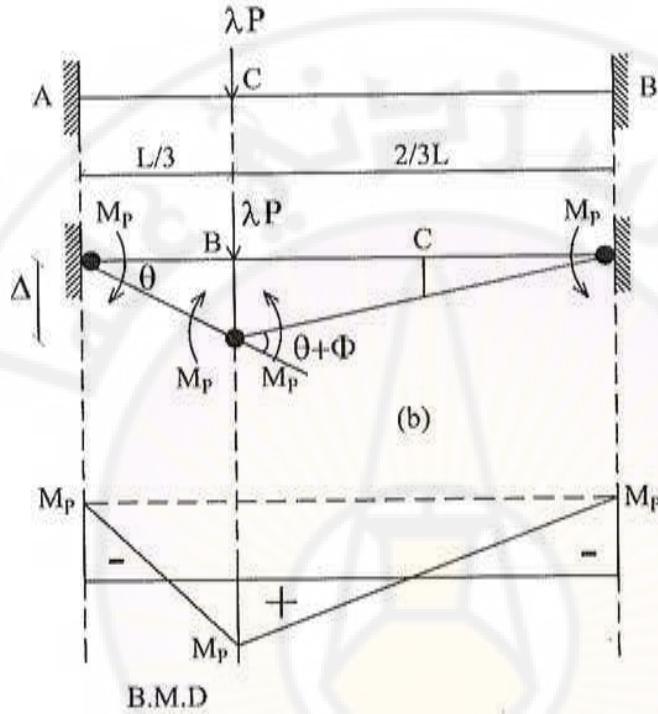
$$M'_B = M_p - \frac{42}{8} \cdot 2 = 5.629 - \frac{84}{8} = 4.871 \text{ t.m} < M_p$$

وبما أن قيمة عزم الانعطاف في B أقل من قيمة عزم اللدانة للجائز

$M_p = 5.629 \text{ t.m}$ نستنتج أن الميكانيكية هذه المفروضة صحيحة.

مثال (3-5):

أوجد قيمة عامل الحمولة λ للجائز المبين في الشكل (16-5).



الشكل (16-5)

الحل:

هذا الجائز غير مقرر من الدرجة الثانية، لذا نحتاج إلى ثلاثة مفاصل لدنة حتى نحصل على ميكانيكية الانهيار، ومواقع هذه المفاصل هي بالطبع مواقع العزوم الأعظمية، أي A, B, C.

بتطبيق نظرية العمل الوهمي على الميكانيزم شكل (16-5، ب) نجد:

$$\lambda P * \Delta = M_p \theta + M_p \phi + M_p (\theta + \phi)$$

$$\Delta = \frac{L}{3} \theta = \frac{2}{3} L \phi \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{2}$$

وبالتعويض في العلاقة نجد:

$$\lambda P \cdot \frac{1}{3} \theta = M_p \theta + M_p \frac{\theta}{2} + M_p \left(\theta + \frac{\theta}{2} \right)$$

ومنه تكون قيمة عامل الحمولة:

$$\lambda = \frac{9M_p}{PL}$$

9-5- الجيزان المستمرة وغير المقررة ستاتيكيًا: Indeterminate Continuouse Beams

إن ميكانيكيات الانهيار المستقلة للجائز المستمر هي ميكانيكيات مقرونة بتشكيل ثلاثة مفاصل لدنة في كل مجاز من مجازاته الداخلية، اثنان فوق المساند والثالث في الفتحة ويتشكل مفصلان لدنان في الفتحات الطرفية.

وفي حال الفتحات المتجاورة مختلفة المقطع سيتشكل المفصل اللدن في المقطع الأقل صلابة. إن عدد ميكانيكيات الانهيار المستقلة للجائز المستمر يساوي عدد مجازاته بغض النظر عن آلية استناد نهايتيه، ويمكن تركيب ميكانيكيات الانهيار المستقلة بعضها مع بعض (ميكانيكية مركبة) عندما يتحول في آن واحد أكثر من مجاز على شكل ميكانيكية انهيار. وإن مراحل حساب الجائز المستمر تتوقف على نوع المسألة إما في إيجاد الحمولة الحدية أو في اختيار المقطع العرضي للجائز. إن الأحمال المطبقة على الجيزان تكون متناسبة فيما بينها بدلالة عامل واحد (عامل زيادة التحميل) ذي القيمة المجهولة في بداية الحل.

في تطبيق التحليل اللدن للجيزان المستمرة، يفترض أن مقاطع العزوم الأعظمية تشكل مفاصل لدنة. تتصل هذه المفاصل اللدنة مع بعضها بقطع من الجائز يفترض أنها صلبة بحيث إن تشوه الجائز ينجم عن الدوران في نقاط المفاصل اللدنة فقط.

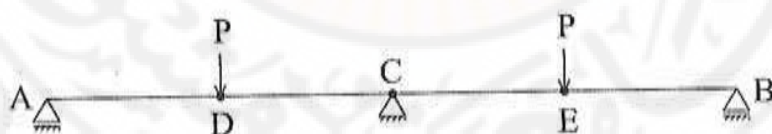
يتطلب تطبيق التحليل اللدن إذًا، التأكد من قدرة مقاطع المفاصل اللدنة المتشكلة أولاً على الدوران بمقدار يكفي لتشكيل المفاصل اللدنة كافة المرافقة لقيمة الحمولة القصوى.

ولكي يتحول منشأ ما إلى ميكانيكية انهيار يجب أن تصل الحمولات المطبقة عليه إلى القيمة الحرجة (الحدية) الموافقة للانهيار، ويلزم أن يتشكل في هذا المنشأ عدد من المفاصل اللدنة عددها أكثر بواحد من عدد المفاصل اللازمة لتحويله إلى منشأ مقرر سكونياً. وبشكل عام إذا كانت درجة عدم التفرير السكوني لمنشأ ما هي f فيكون عدد المفاصل اللدنة (Plastic Hinges) n اللازم لتحويل المنشأ إلى ميكانيكية انهيار هو:

$$n = f + 1$$

وتكون قيم العزوم عند نقاط المفاصل اللدنة مساوية عزم لدانة المقاطع في هذه النقاط ولا يمكن أن تزيد عليها أما في باقي نقاط المنشأ فتكون قيمة العزوم أقل من قيم عزم اللدانة لمختلف العناصر المشكلة للمنشأ.

إلا أن هناك في بعض المنشآت المتناظرة التي يتكون فيها عدد من المفاصل اللدنة يفوق المقدار $(n+1)$. وهذا ما يحصل فعلاً للجائز المستمر المبين في الشكل (5-17) حيث يتكون أولاً مفصل في النقطة C ، ومن ثم يتكون بسبب التناظر مفصلان في D و E مما يرفع عدد المفاصل اللدنة إلى ثلاثة بينما لا يملك الجائز سوى قيد زائد واحد وهذا الانهيار يسمى بالانهيار فوق الكامل.



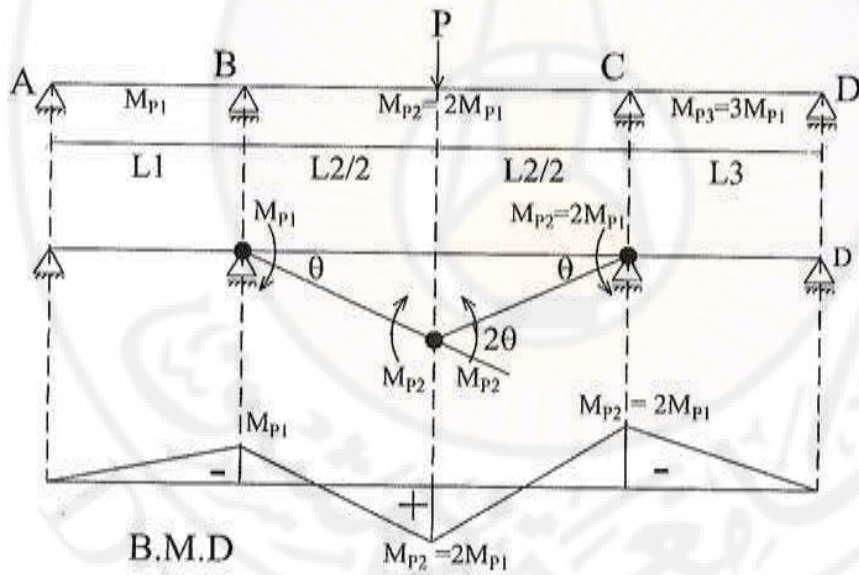
الشكل (5-17)

مثال (4-5):

ليكن الجائز المستمر المبين في الشكل (18-5) وذو مقاطع مختلفة لكل مجاز والمطلوب أوجد حمولة الانهيار.

الحل:

إن انهيار المنشأ ينتج عن انهيار المجاز الوسطي كونه المجاز الوحيد المحمل بالحمولة المركزة. إن المفاصل اللدنة والتي ستتشكل عند المساند ستتحمل عزوماً لدنة قيمتها أصغر العزمين اللذين يمكن أن يقاومهما المجازان المجاوران، وبالتالي فالعزم اللدن الذي سينقله المفصل اللدن في المسند B يساوي M_{p1} والعزم الذي سينقله المفصل اللدن في المسند C يساوي $M_{p2} = 2M_{p1}$. وبالتالي يكون:



الشكل (18-5)

$$W_e = P_p * \frac{L_2}{2} * \theta$$

$$W_i = M_{p1} * \theta + 2M_{p2} * \theta + M_{p2} * \theta$$

$$W_i = -M_{p1} * \theta - 4M_{p1} * \theta - 2M_{p1} * \theta = 7M_{p1} * \theta$$

ومن تساوي العمل الوهمي الداخلي مع الخارجي يكون:

$$P_p * \frac{L}{2} \theta = 7M_{p1} * \theta \quad ; \quad M_{p1} = \frac{P_p * L_2}{14}$$

ومنه قيمة حمولة الانهيار تكون:

$$P_p = 14 \frac{M_{p1}}{L_2}$$

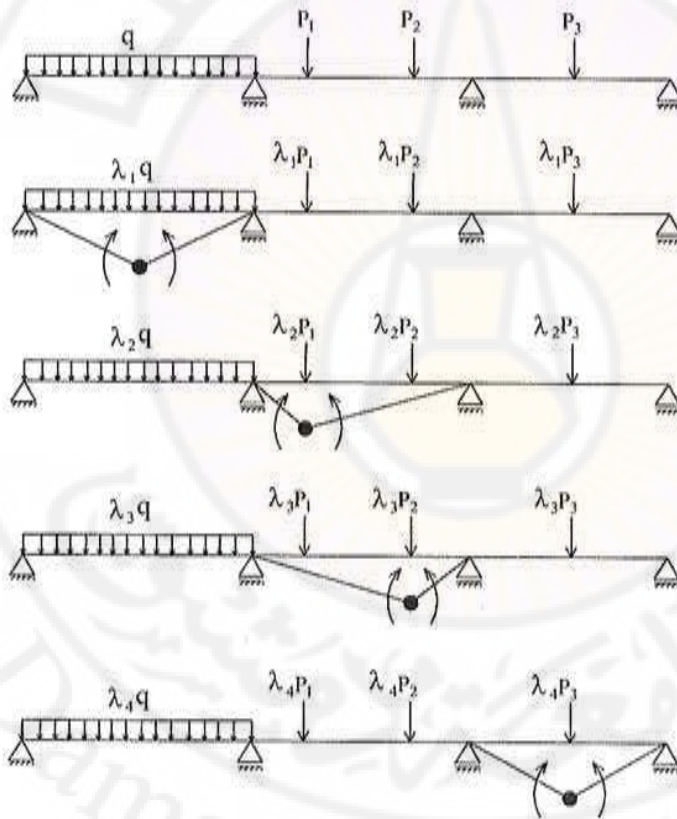
وبالتالي نرسم مخطط العزم للبدن لهذا الجائر كما هو مبين في الشكل (18-5).

اعتماداً على المسألة السابقة فإنه يمكن القول إن التحليل البدن للجيزان المستمرة مسألة سهلة، حيث إن انهيار الجائر ككل يحدث عند انهيار أحد مجازاته، ويمكن أن تتشكل المفاصل البدنة عند كل المساند المتوسطة وعند نقاط تطبيق الأحمال المركزة وفي منتصف المجاز المحمل بالحمولة الموزعة بانتظام. وهكذا يمكن اعتبار ميكانيكات الانهيار لهذا الجائر المستمر كميكانيكات مبسطة للمجازات المختلفة مأخوذة كجوائز مستقلة غير مقررة، الشكل (19-5)، وليس هناك داع حين نختار الميكانيكية الصحيحة ونتحقق من شرط العزم البدن أن نرسم جميع مخططات العزوم الموافقة، يكفي طالما أننا أخذنا جميع



ميكانيكيات الانهيار الممكنة أن نعتبر الحل الصحيح هو الميكانيكية التي تعطينا أقل حمولة للانهيار، ولسهولة المقارنة فإننا نضرب الحمولة المعطاة بعامل زيادة التحميل المجهول (λ_i) الذي يختلف باختلاف ميكانيكية الانهيار (i)، الشكل (19-5). وبدلاً من مقارنة أحمال الانهيار نقارن عوامل زيادة التحميل المختلفة. ومن الواضح أن قيمة عامل زيادة التحميل الحقيقية تساوي أصغر قيمة من هذه القيم أي:

$$\lambda_p = \min \lambda_i$$



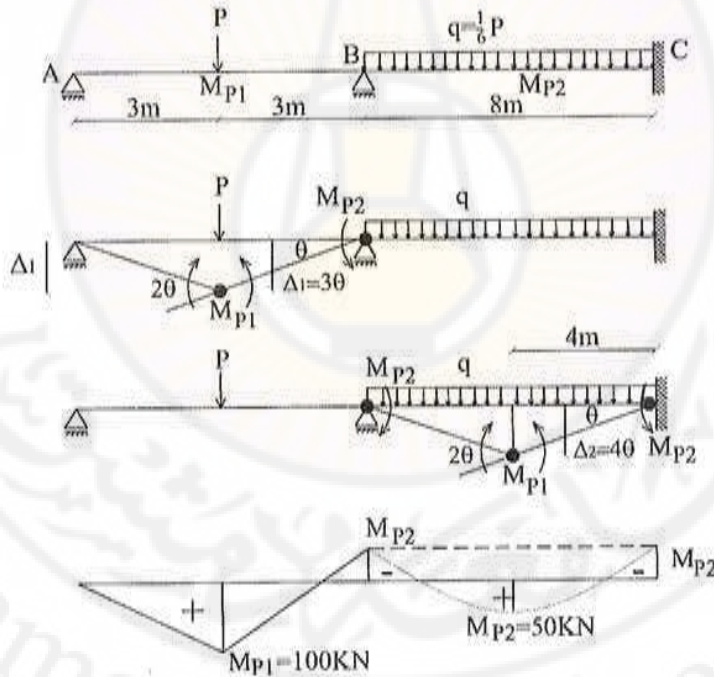
الشكل (19-5) الميكانيزمات الممكنة للانهيار

مثال (5-5):

احسب الحمولة الحدية للجائز المستمر المبين في الشكل (20-5) إذا فرضنا أن عزوم الانعطاف الحدية في الفتحة AB هو $M_{P1} = 100 \text{ kN.m}$ وفي الفتحة BC هو $M_{P2} = 50 \text{ kN.m}$.

الحل:

تتألف الفتحة الأولى عند تشكل مفصلين لدنيين في الفتحة عند نقطة تطبيق الحمولة المركزة P والآخر فوق المسند B والآخر فوق المسند B الوسطي، أما الفتحة الثانية فتتألف عند تشكل ثلاثة مفاصل لدنة وهي على التوالي: في الوثافة C وفوق المسند الوسطي وفي الفتحة BC.



الشكل (20-5) الانهيار اللدن للجائز المستمر

آ- ميكانيكة انهيار الفتحة الأولى:

من تساوي العمل الوهمي الداخلي الناتج عن دوران المفاصل مع العمل الوهمي الحاصل عن انتقال نقاط تطبيق الحمولات الخارجية نكتب:

$$\sum P_{ip} * \Delta_i = \sum M_{ip} * \theta$$

$$P_p * 3\theta = M_{p1} * (\theta + \theta) + M_{p2} * \theta$$

حيث:

$$\Delta_i = 3\theta$$

$$3P_p = 100 * 2 + 50 \quad ; \quad P_p = 83.33 \text{ kN}$$

ب- ميكانيكة انهيار الفتحة الثانية:

من مساواة قيمتي العمل الخارجي W_e والعمل الداخلي W_i وفق مبدأ العمل الوهمي نجد أن:

$$q_p * 8 * \frac{1}{2} * 4\theta = M_{p2} * (\theta + 2\theta + \theta)$$

حيث:

$$\Delta_2 = 4\theta$$

ومنه:

$$\frac{1}{6} P_p \frac{64}{4} = 50 * 4 \quad ; \quad P_p = 75 \text{ kN}$$

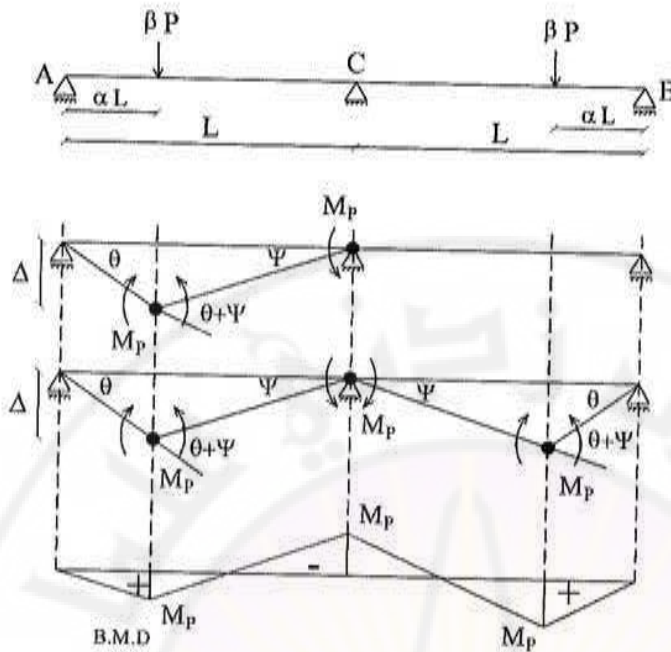
وهي القيمة الحدية المطلوبة لأنها الأصغر من القيمتين السابقتين.

مثال (5-6):

ما هو عامل الحمولة للجائز المستمر غير المقرر سكونياً المبين في الشكل (5-21).

الحل:

إن الجائز المستمر غير مقرر من الدرجة الأولى ويكفي تشكل اثنين من المفاصل اللدنة كي يتم الانهيار. وفي كل الحالات سيتكون مفصل لدن عند المسند الوسطي، أما المفصل الثاني فيتكون عند إحدى نقطتي تطبيق الحملتين المركزيتين βP في الفتحة اليسرى أو اليمنى حيث لا يوجد أفضلية معينة بينهما بسبب تناظر الجائز حول المحور الشاقولي المار من المسند C.



الشكل (21-5) الانهيار اللدن للجائز المستمر

نفرض بشكل مبدئي أن المفصل الثاني يتشكل عند نقطة تطبيق الحمولة المركزة اليسرى، فتكون ميكانيكية الانهيار الحاصلة المرافقة لها مبينة في الشكل (21-5). وتعطى معادلة العمل الوهمي لهذه الحالة من الشكل:

$$\beta P * \Delta = M_p * \psi + M_p (\theta + \psi)$$

حيث:

$$\Delta = \alpha L * \theta = \psi * (L - \alpha L)$$

ومنه:

$$\psi = \frac{\theta * \alpha L}{L - \alpha L} = \frac{\theta \alpha L}{L(1 - \alpha)} = \frac{\alpha \theta}{(1 - \alpha)}$$

وبالتعويض تأخذ معادلة العمل الوهمي الشكل:

$$\beta P * \alpha L \theta = M_p \theta \frac{\alpha}{(1-\alpha)} + M_p \theta \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

وبالإصلاح نجد:

$$\beta P * \alpha L = M_p \left(1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)$$

ومنه:

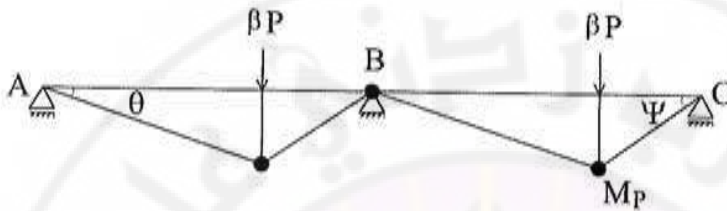
$$\beta = \frac{M_p}{P * \alpha L} \left(1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)$$

وبما أن المجاز الأيمن مناظر تماماً للمجاز الأيسر من حيث الشكل والحمل فإن مخطط عزم الانعطاف متناظر بالضرورة بالنسبة للمقطع الوسطي C (محور التناظر الشاقولي)، لذا فإن مخطط العزم النهائي مقبول سكونياً والقيمة السابقة لعامل الحمولة β هي القيمة الصحيحة.

وفي الحقيقة إن المفصلين اللذين يقعان عند نقطتي تطبيق الحملتين المركزيتين يتكونان في الزمن ذاته مما يقود المنشأ إلى الانهيار وفقاً لميكانيزم فوق الكامل كما هو مبين في الشكل (5-21, d) وتكتب معادلة العمل الوهمي لآلية الانهيار هذه من الشكل:

$$2\beta P \alpha L \theta = M_p \left(2 \frac{\theta}{1-\alpha} + \frac{2\alpha \theta}{1-\alpha}\right)$$

وهذه العلاقة تعطي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها سابقاً لقيمة عامل الحمولة β ، ويمكن التحقق من أي ميكانيزم غير متناظر كالميكانيكية الممثلة في الشكل (22-5) ستقود إلى قيمة عامل الحمولة β نفسها التي حصلنا عليها سابقاً.



الشكل (22-5)

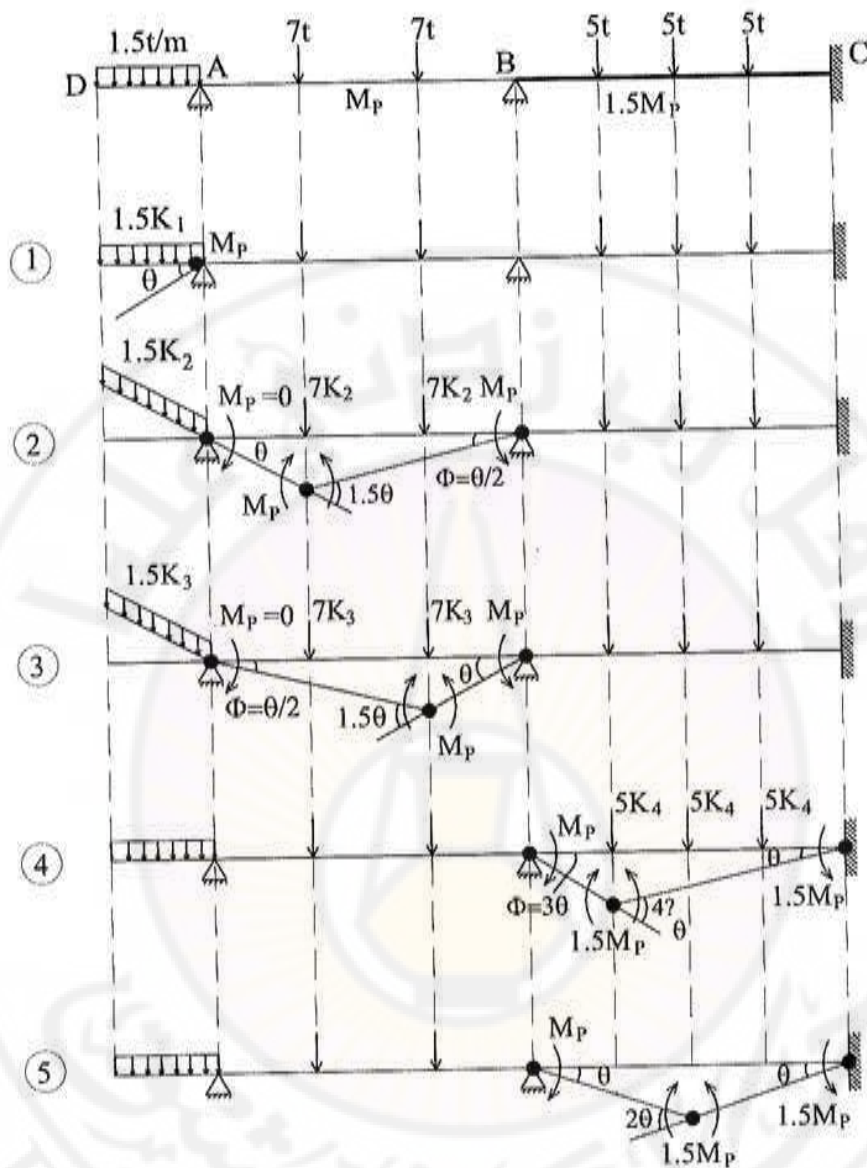
وبناءً على ما سبق يتضح أنه يوجد عدد غير محدود من طرق الانهيار وهي كلها متعلقة بميكانيكيات فوق الكاملة المتكافئة.

مثال (7-5):

احسب عامل زيادة التحميل للجائز المستمر المبين بالشكل (23-5) مستعملاً طريقة العمل الوهمي علماً بأن العزم اللدن الأعظمي $M_p = 70 \text{ t.m}$.

الحل:

يمكن أن تتشكل المفاصل اللدنة عند الوثاقة والمسندين وتحت نقاط تطبيق القوى، وبين الشكل (23-5) ميكانيكيات الانهيار الممكنة.



الشكل (23-5) ميكانيكيات الانهيار المستقلة المحتملة للجوائز

ميكانيكية الانهيار (1):

$$W_e = 1.5K_1 * 5 * 2.5\theta = 18.75K_1 * \theta$$

$$W_i = -M_p * \theta = -70 * \theta$$

$$18.75 * K_1 * \theta = 70 * \theta$$

$$K_1 = \frac{70}{18.75} = 3.74$$

ميكانيكية الانهيار (2):

$$W_e = 7K_2 * 6\theta + 7K_2 * \frac{6\theta}{2} - 1.5K_2 * 5 * 2.5\theta = 44.25K_2 * \theta$$

حيث:

$$\phi = \frac{\theta}{2}$$

$$W_i = -\left(M_p * \theta + 2M_p * \frac{\theta}{2}\right) = -2M_p * \theta = -140\theta$$

$$44.25K_2 * \theta = 140\theta$$

ومنه نجد:

$$K_2 = \frac{140}{44.25} = 23.16$$

ميكانيكية الانهيار (3):

$$W_e = 7K_3 * 6\theta + 7K_3 * 6\frac{\theta}{2} - 1.5K_3 * 5 * 2.5\frac{\theta}{2} = 53.625K_3\theta$$

$$W_i = -\left(2M_p * \theta + M_p \frac{\theta}{2}\right) = -2.5M_p * \theta = -175 * \theta$$

$$53.625K_3 * \theta = 175 * \theta$$

ومنه:

$$K_3 = \frac{175}{53.625} = 3.27$$

ميكانيكية الانهيار (4):

$$W_e = 5K_4 * 5 * 3\theta + 5K_4 * 10\theta + 5K_4 * 5\theta = 150K_4 * \theta$$

$$W_i = -M_p * 3\theta - 1.5M_p * 3\theta - 1.5M_p * \theta * 2 = -10.5M_p * \theta = -735\theta$$

$$150K_4 * \theta = 735\theta$$

ومنه:

$$K_4 = \frac{735}{150} = 4.8$$

ميكانيكية الانهيار (5):

$$W_e = 5K_s * 5\theta + 5K_s * 10\theta + 5K_s * 5\theta = 100K_s * \theta$$

$$W_i = -M_p * \theta - 3 * 1.5M_p * \theta = -5.5M_p \theta = -385 * \theta$$

$$100K_s * \theta = 385\theta$$

ومنه:

$$K_s = \frac{385}{100} = 3.85$$

إن أصغر قيمة عامل تحميل هو العامل العائد لميكانيكية الانهيار (2) وبالتالي يكون:

$$K_c = K_2 = 3.16$$

وتكون ميكانيكية الانهيار الحقيقية هي الميكانيكية الثانية.

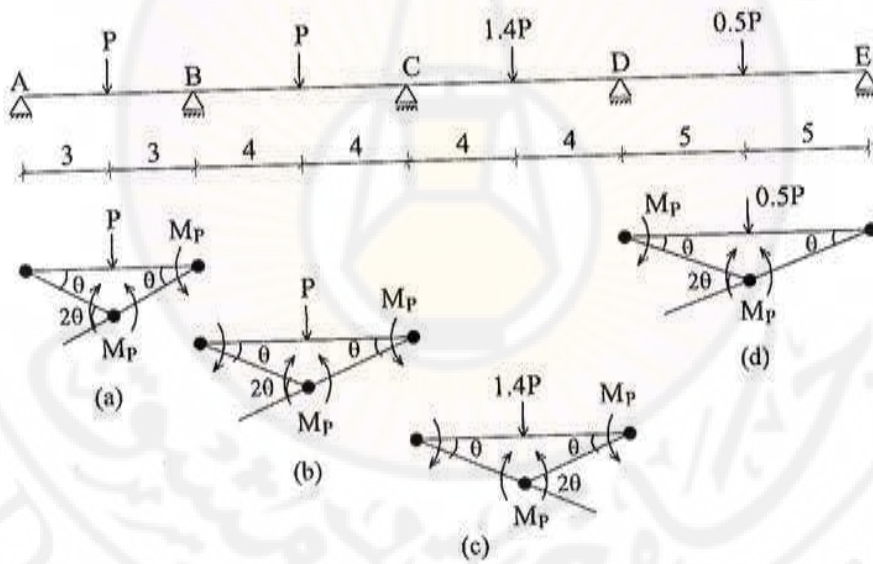
مثال (8-5):

أوجد باستخدام طريقة التحليل اللدن قيمة حمولة الانهيار P للجائر المبين في الشكل (24-5). ثم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للمجال الذي ينحصر ضمنه رد الفعل R_A . علماً بأن قيمة عزم لدونة الجائر ثابتة ومقدارها

$$M_p = 7 \text{ t.m}$$

الحل:

من أجل حساب حمولة الانهيار P ندرس الإمكانات المحتملة لانهيار كل فتحة على حدة.



الشكل (24-5)

الميكانيكية (أ):

$$\frac{1}{2} 6 P \theta = 3 M_p \theta$$

ومنه:

$$P = 7 t$$

الميكانيكية (ب):

$$\frac{1}{2} 8 P \theta = 4 M_p \theta$$

ومنه:

$$P = 7 t$$

الميكانيكية (ج):

$$\frac{1}{2} 8 (1.4 P) * \theta = 4 M_p * \theta$$

$$P = 5 t$$

الميكانيكية (د):

$$\frac{1}{2} 10 (0.5 P) \theta = 3 M_p \theta$$

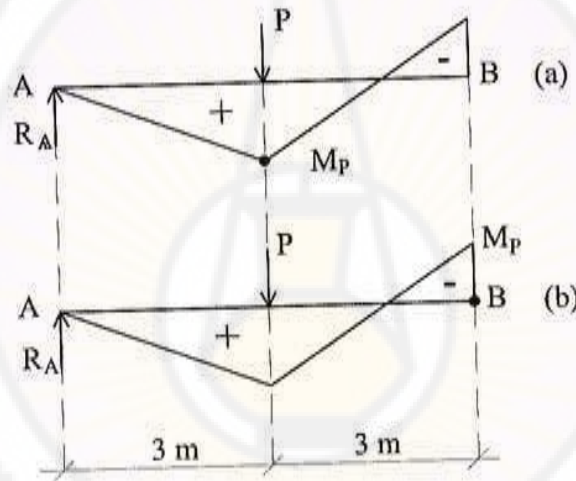
ومنه:

$$P = 8.4 t$$

وكحمولة انهيار للجائز نختار أصغر القيم من الحمولات السابقة وهي $P_p = 5t$.

ويتم تحديد المجال الذي تتراوح ضمنه قيمة رد الفعل R_A كالآتي:
يمكن التعرف على المجال الذي ينحصر ضمنه رد الفعل R_A بدراسة إمكانيات التلدن المحتملة التي يكون للقوة P معها علاقة ما على ألا تتجاوز القيمة السابقة $P_p = 5t$.

يوجد إمكانيتان من هذا النمط يظهرهما الشكل (25-5):



الشكل (25-5)

آ- حالة تشكل مفصل لدن تحت نقطة تطبيق الحمولة المركزة P ، ونحصل في هذه الحالة على:

$$R_{A \max} = M_p / 0.5L$$

ومنه:

$$\max R_A = 2.33 t$$

ب- حالة تشكل مفصل لدن فوق المسند B وفي هذه الحالة نكتب المعادلة التوازنية من الشكل:

$$\begin{aligned}\min R_A &= \frac{1}{L}(M_P - 0.5LP) \\ &= \frac{1}{6}(7 - 0.5 * 6 * 5) = 1.33 t\end{aligned}$$

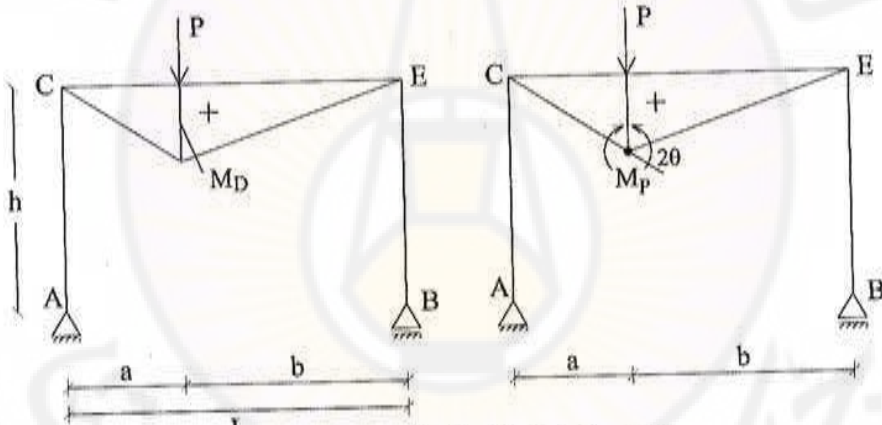
ومنه نجد أن قيمة رد الفعل R_A محصورة ضمن المجال:

$$1.33 t \leq R_A \leq 2.33 t$$

10-5 - دراسة الإطارات بطريقة التحليل اللدن:

1-10-5 - سلوك الإطارات البسيطة Behaviour of built-in frames

ندرس في هذه الفقرة الإطار البسيط المفرد المبين في الشكل (5-26)، ونعتبر أن مقطعه العرضي ثابت وأن الحمولة المركزة P تزداد باطراد من الصفر حتى تصل إلى قيمتها الحدية P ومع تزايد قيمة الحمولة تزداد قيمة عزم الانعطاف الأعظمي M_D إلى أن تصل إلى القيمة العظمى في مرحلة المرونة والتي تساوي قيمة عزم الخضوع M_y وبناءً على ذلك يمكن أن تعين قيمة الحمولة العظمى في مرحلة المرونة بالعلاقة:



الشكل (5-26) الانهيار اللدن للإطار البسيط

$$M_D = m_y = P_y \frac{a * b}{L}$$

ومنه:

$$P_y = \frac{M_y * L}{a * b}$$

وعند تزايد قيمة الحمولة P تبدأ إجهادات الخضوع بالانتشار في المقطع D إلى أن تصل إلى مرحلة اللدونة الكاملة وتكون قيمة الحمولة الموافقة هي الحمولة الحرجة P_{cr} (أو P_p) وكذلك عزم الانعطاف M_D يكون مساوياً عزم اللدانة للمقطع M_p ويتشكل المفصل اللدن عند النقطة D كما في الشكل (5-26) وباستخدام معادلات التوازن نجد أن:

$$M_p = P_{cr} \frac{a * b}{L}$$

ومنه:

$$P_{cr} = \frac{M_p L}{a * b}$$

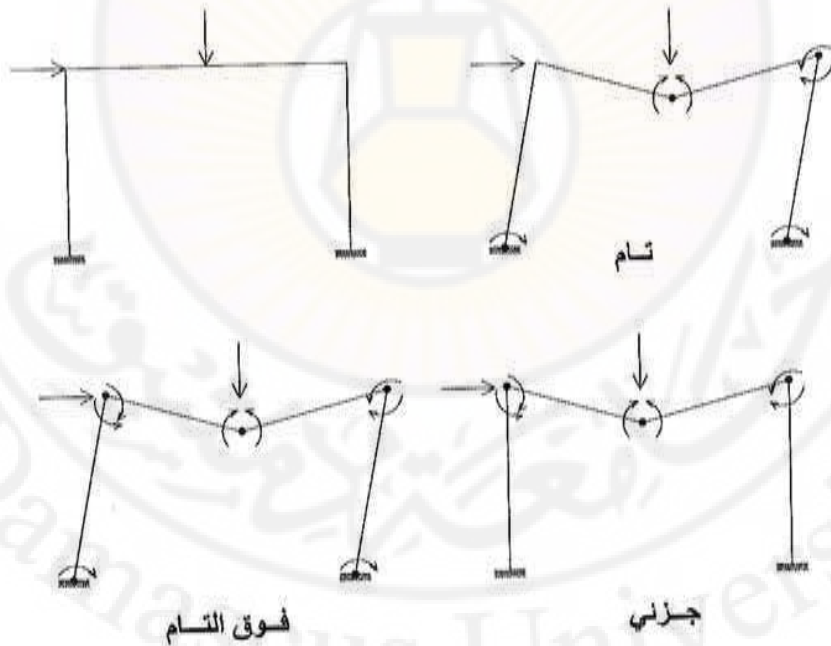
مما سبق نلاحظ أنه عندما تشكل المفصل اللدن في D انهيار المنشأ كونه تحول إلى شكل هندسي غير مستقر ويسمى هذا الشكل بميكانيكية الانهيار للإطار البسيط.

5-10-2- سلوك الإطار ثنائي المفاصل:

يتوقف انهيار المنشآت غير المقررة ستاتيكية كما هو الحال بالنسبة للمنشآت المقررة على خصائص المادة المكونة لها ويتعلق بتعرض جزء منها لظاهرة عدم الاستقرار. إن بلوغ الإجهادات في بعض العناصر قيمها الحدية قد لا يساهم في انهيار هذه المنشآت بشكل تام إذا حافظت بعناصرها الأخرى على التوازن، وبالتالي ستكون قادرة على تلقي حمولات إضافية ناجمة عن توزيع للإجهادات على هذه العناصر وبنتيجة ذلك ستزداد طاقة المنشأة على التحمل.

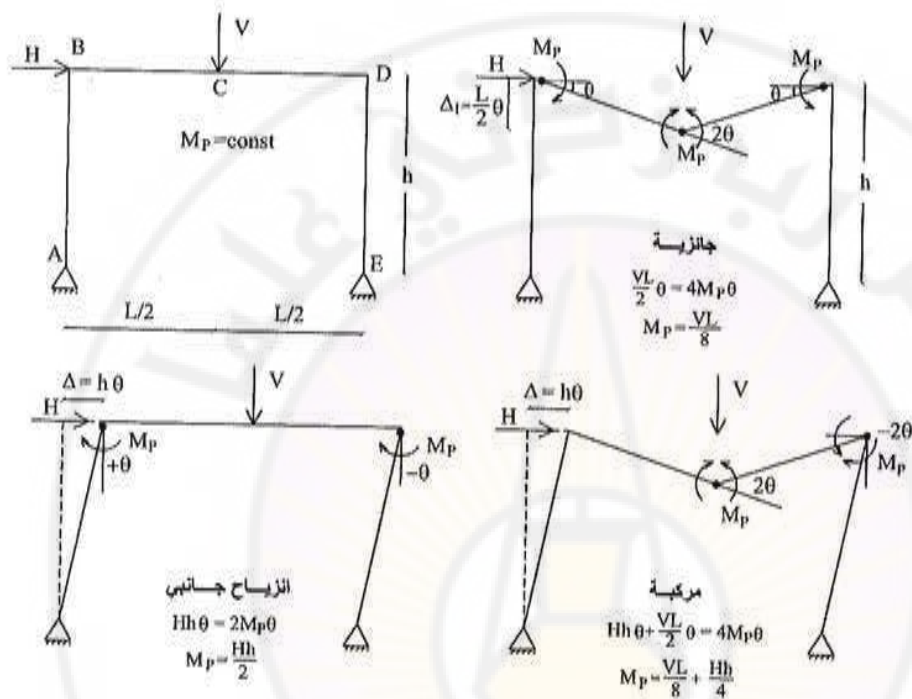
وفي الحقيقة إن انهيار أي منشأة لا يحصل إلا عندما يتكون فيها عدد من المفاصل اللدنة يكفي لتحويلها (أو تحويل جزء منها) إلى ميكانيزم، ويمكن القول عامة إن هذا العدد من المفاصل يزيد بمقدار واحد على درجة عدم تقرير المنشأة. فإذا أمكن بوسيلة ما تحديد مواقع المفاصل اللدنة يصبح من السهولة بمكان حساب حمولة الانهيار ومعرفة طريقة توزع القوى الداخلية من معادلات التوازن للجمل المستوية.

كي يتم الانهيار التام لمنشأ غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة n يجب إقصاء $n+1$ رابط منها بحيث يصبح هذا المنشأ بكافة أجزائه غير مستقر هندسيًا. إذا تم انهيار منشأ بتشكيل عدد من المفاصل اللدنة أقل أو أكثر من عدد روابطها الفائضة، يسمى الانهيار جزئيًا أو فوق التام على الترتيب. كمثال على ذلك الإطار المبين بالشكل (27-5).



الشكل (27-5)

لندرس الإطار ثنائي المفاصل ثابت المقطع حيث $M_p = \text{const}$ المبين في الشكل (28-5).



الشكل (28-5) ميكانيكات الانهيار للإطار ثنائي المفاصل

يتم انهيار الإطار ثنائي المفاصل عند تشكل مفصلين لدنيين على الأقل علماً بأنه يوجد احتمالات عدة لتشكل المفاصل اللدنة ويجب تعيين كافة الاحتمالات لتعيين الحمولة الحدية الموافقة لكل احتمال من أجل اختيار القيمة الصغرى الحاصلة من تلك آليات الانهيار (الميكانيكيات)، في حال علمنا قيم عزوم الانعطاف الحدية أو الموافقة لأكبر عزم انعطاف حدي عندما تعطى قيم الحمولات الحدية.

وبفرض أن الحملات V و H هي الحملات الحدية فيمكن تعيين قيم عزوم اللدانة M_p لحالات الانهيار المختلفة الموضحة في الشكل (5-28). نلاحظ أن قيمة العزم اللدن الحاصلة $M_p = \frac{VL}{8}$ من ميكانيكية الانهيار الجائزية في حين تساوي $M_p = \frac{Hh}{2}$ من ميكانيكية انهيار الانزياح الجانبي. أما قيمة عزم اللدانة الناتجة عن جمع الميكانيكيتين السابقتين ينتج عنها عزم لدانة قيمته تساوي:

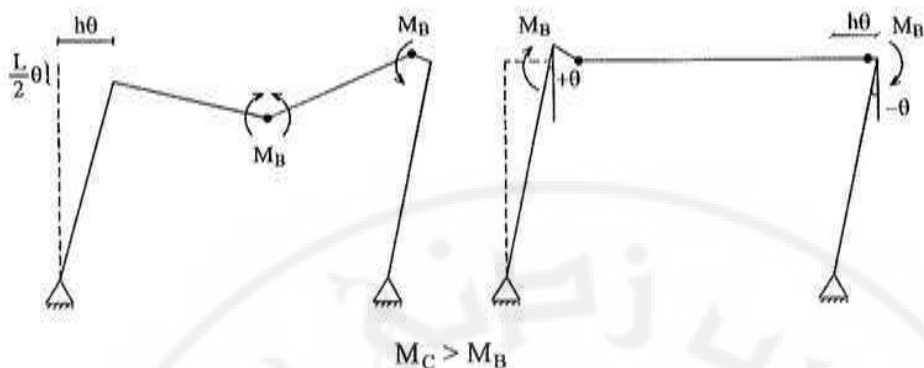
$$M_p = \frac{VL}{8} + \frac{Hh}{4}$$

مما سبق نلاحظ أن دراسة حمولة الانهيار للإطارات هو أكثر تعقيداً بشكل عام منه في الجوائز المستمرة، كما أنه أكثر صعوبة في اختيار ميكانيكيات الانهيار المحتملة، وقد تتطلب أحياناً حركة هذه الميكانيكيات دراسة خاصة.

أما حالة الإطار ثنائي المفاصل متغير المقطع نلاحظ:

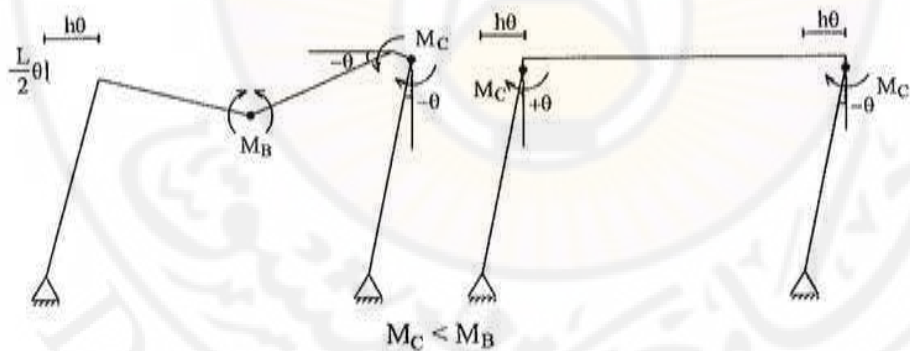
إذا ما اختلف مقطعا العنصر الشاقولي والعنصر الأفقي في الإطار، فإن تشكل ميكانيكيتي الانهيار يعتمد على القيم النسبية لعزم اللدانة للمقطعين، عزم لدونة العمود M_C وعزم لدونة الجائر M_B .

أ- إذا تجاوز عزم لدونة مقطع العمود M_C عزم اللدونة لمقطع الجائر M_B فإن ميكانيكيات الانهيار تأخذ الشكل (5-29).



الشكل (29-5)

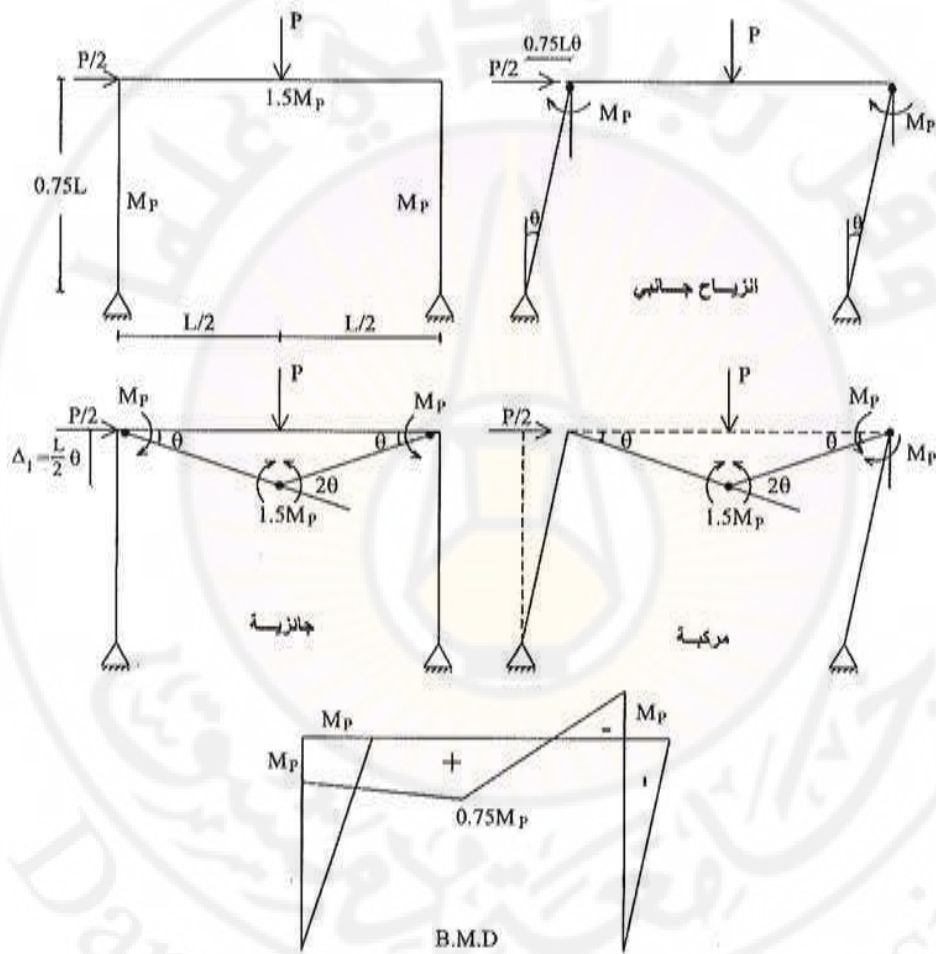
ب- أما إذا تجاوز عزم اللدونة لمقطع الجائر M_B عزم اللدونة لمقطع العمود M_C عندئذ ينهار الإطار وفق آليات الانهيار المبينة في الشكل (30-5).



الشكل (30-5)

مثال (9-5):

أوجد حمولة الانهيار وميكانيكيتها الحقيقية للإطار ثنائي المفاصل والمحمل كما هو مبين في الشكل (13-5).



الشكل (31-5) الانهيار اللدن للإطار ثنائي المفاصل

الحل:

الإطار المدروس غير مقرر مرة واحدة وهو ينهار عند تشكل مفصلين لدنيين على الأقل وهناك ثلاثة احتمالات متوقعة لحالات الانهيار المختلفة لتشكل المفاصل اللدنة ينتج عن كل حالة حمولة حدية حيث تؤخذ القيمة الصغرى من تلك القيم كحمولة انهيار حقيقية للإطار المدروس وباستخدام طريقة العمل الوهمي نجد:

أ- حالة الانهيار الناتج عن الانزياح الجانبي:

$$\frac{P}{2} * 0.75L * \theta = 2M_p * \theta$$

ومنه:

$$P = \frac{16 M_p}{3 L}$$

ب- حالة الانهيار الناتج عن انهيار الجانز:

$$P \frac{L}{2} \theta = 2M_p \theta + 2\theta * 1.5M_p$$

ومنه:

$$P = \frac{10M_p}{L}$$

ج- حالة الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع الحالتين السابقتين:

$$\frac{P}{2} * 0.75 L * \theta + P \frac{L}{2} * \theta = 2 * 1.5 M_p \theta + 2 M_p * \theta$$

ومنه:

$$P = \frac{40 M_p}{7 L}$$

ومن الحالات الثلاث السابقة ينتج أن حمولة الانهيار الحقيقية تساوي:

$$P = \frac{16 M_p}{3 L}$$

وهي عائدة لميكانيكية الانزياح الجانبي. وبالتالي نرسم مخطط عزم اللدونة كما هو مبين في الشكل (5-31).

5-10-3- معلومات عامة حول المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا:

إذا كان منشأ غير مقرر من الدرجة n يخضع إلى مجموعة من الحمولات المتزايدة مع بعضها آنياً. يتشكل في مختلف مقاطع المنشأ الخاضع إلى عزوم أعظمية مجموعة من المفاصل اللدنة المتعاقبة حالما تتزايد تلك الحمولات المطبقة. فإذا كان المنشأ خاضعاً إلى حمولات مركزة فإن المقاطع الوحيدة المؤهلة للتلدن هي مواقع تطبيق الحمولات وأطراف العناصر الإنشائية. بينما يمكن أن يحصل بعض التلدن في أواسط العناصر الخاضعة لحمولات موزعة بانتظام وهذا ما رأيناه سابقاً في حالات انهيار الجوائز.

وتكون قيم العزوم عند نقاط المفاصل اللدنة مساوية إلى عزم اللدونة M_p لهذه المقاطع ولا يمكن أن تزيد عنها أية قيمة عزم انعطاف في المقاطع الأخرى للمنشأ. إن المفاصل اللدنة تتشكل أولاً في المقاطع المعرضة إلى أكبر قيمة لعزم الانعطاف مما يسمح بإعادة توزيع العزوم حتى تصل كل المقاطع الحرجة إلى عزم اللدونة M_p .

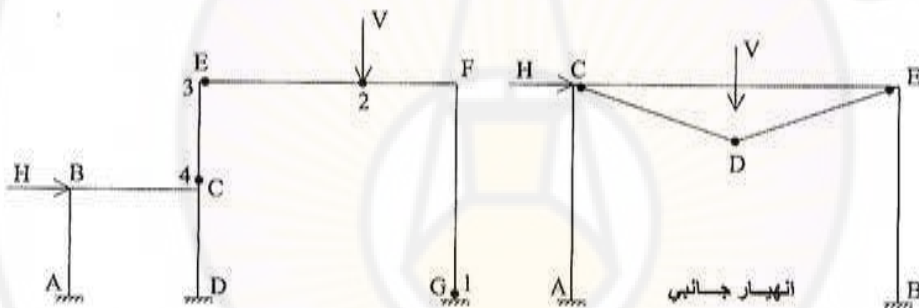
وكلما تشكل مفصل لدن جديد عند وصول العزم فيه إلى القيمة الحدية الثابتة:

$$M_p = f_y * Z_p$$

عندئذ ينخفض عدد القيود الزائدة في المنشأ بمقدار قيد واحد. وعندما يصل عدد المفاصل اللدنة في المنشأ غير المقرر ستاتيكيًا من الدرجة n إلى المقدار n مفصلاً يصبح المنشأ مقرراً سكونياً. وإذا تشكل في المنشأ $(n+1)$ مفصلاً لدناً يتحول المنشأ إلى ميكانيكية للانهيار تدعى ميكانيزم (Mechanism) ويصبح المنشأ بكافة أجزائه غير مستقر سكونياً لأنه يعاني من انتقالات كبيرة أي تشوهات مستمرة تحت تأثير حمل خارجي ثابت دون أية زيادة، وبذلك يخرج المنشأ من طور الخدمة. يدعى الحمل الخارجي الموافق لظهور $(n+1)$ مفصلاً لدناً الحمل الحدي للمنشأ Charge Limit وهو الحمل الحقيقي للانهيار. وإنه لمن المنطقي أن نقسم قيمته على عامل مناسب K ندعوه عامل الحمولة (Coefficient de Charge). ومع أن هذا العامل يعبر في حقيقة الأمر عن احتياطي الأمان في المنشأ، إلا أنه يدعى غالباً عامل الحمولة لكي لا يقع التباس بينه وبين عامل الأمان على الإجهادات المتعارف عليه في مفاهيم مقاومة المواد التقليدية. إن تقدم سير انهيار المنشأ الموضح أعلاه يمكن أن يعثره العيب في الحالتين التاليتين:

أ- الانهيار الجزئي (Partial Mechanism):

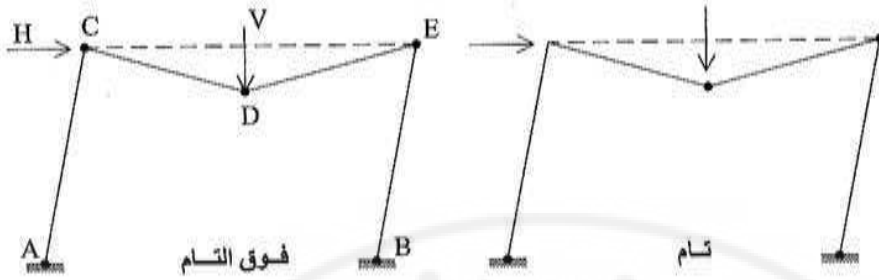
يمكن أن تخرج بعض المنشآت عن طور الخدمة بسبب تلدن جزء أو بعض أجزائها فقط، مما يجعل عدد المفاصل اللدنة اللازمة للانهيار أقل من $(n+1)$ ، وبالتالي هذا الجزء من المنشأ فقط يصبح مقرراً ومن ثم يحدث الانهيار، أما بقية المنشأ الإطاري فيبقى غير مقرر. وعلى سبيل المثال يمكن أن ينهار الإطار غير المقرر من الدرجة السادسة والمبين في الشكل (32-5) إذا تكونت فيه المفاصل اللدنة الأربعة (1, 2, 3, 4) - التي تمنح الجزء ABCD إمكانية للتشوهات غير محدودة - في الوقت الذي يبقى فيه البناء الكلي غير مقرر من الدرجة الثانية.



الشكل (32-5) الانهيار الجزئي للمنشآت

ب- الانهيار فوق التام (Complete mechanism):

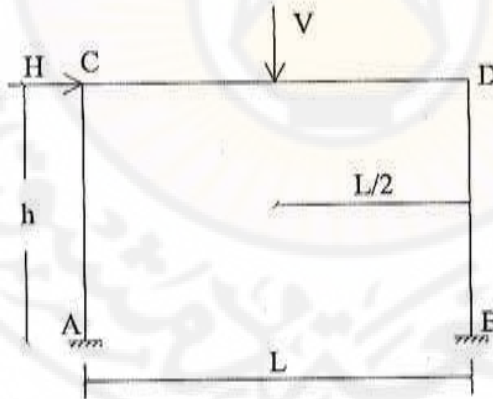
على العكس من الحالة السابقة، يمكن أن يتكون في بعض المنشآت المتناظرة عدد من المفاصل اللدنة يفوق المقدار $(n+1)$ ، وذلك في حالات خاصة للحمولات المطبقة وأبعاد المنشأ كما هو مبين في الشكل (33-5) ونسمي ميكانيكية الانهيار في هذه الحالة الميكانيكية فوق التامة (over mechanism).



الشكل (33-5) انهيار فوق التام والتام

4-10-5- سلوك الإطار الموثوق أحادي المجاز : Behaviour of fixed frames

يتم انهيار هذا النوع من الإطارات الشكل (35-5) عند تشكل ثلاثة مفاصل لدنة على الأقل، أو بتشكيل أربعة مفاصل لدنة أو أكثر، وبناءً على ذلك يجب اختيار الحمولة الحدية الصغرى من تلك القيم الحاصلة لميكانيكيات الانهيار المستقلة والتي توافق ميكانيكية الانهيار الحقيقية.



الشكل (35-5) إطار متناظر بالشكل عديم المفاصل

إن أي حالة انهيار تحول الإطار إلى جملة غير مستقرة سكونياً. ويلاحظ أن عدد ميكانيكيات الانهيار للإطارات كبير ويصعب مسبقاً تعيين ميكانيكة الانهيار الحقيقية لذلك نوجد ميكانيكيات الانهيار البسيطة المستقلة ثم نعلم طريقة تركيب هذه الميكانيكية بحيث تضم الآلية المركبة أصغر عدد من الميكانيكيات البسيطة المستقلة. يمكن التمييز بين ميكانيكيات الانهيار المستقلة الآتية:

أ- الانهيار الجانبي Beam Mechanism:

يتشكل ثلاثة مفاصل لدنة عند نهايتي الجانز وتحت الحمولة المركزة (الموزعة) المطبقة عليه.

ب- انهيار الانزياح الجانبي Sideway Mechanism:

يحدث عند تشكل مفاصل لدنة عند نهايات الأعمدة السفلية والعلوية مع وجود الانزياح الجانبي.

ج- دوران العقد Joint Mechanism:

عند تشكل ثلاثة مفاصل لدنة عند أطراف عقدة داخلية مثلاً والنتيجة عن التقاء أكثر من عنصرين.

د- الإطارية السنمية (Gable Mechanism).

هـ- المركبة Composite Mechanism:

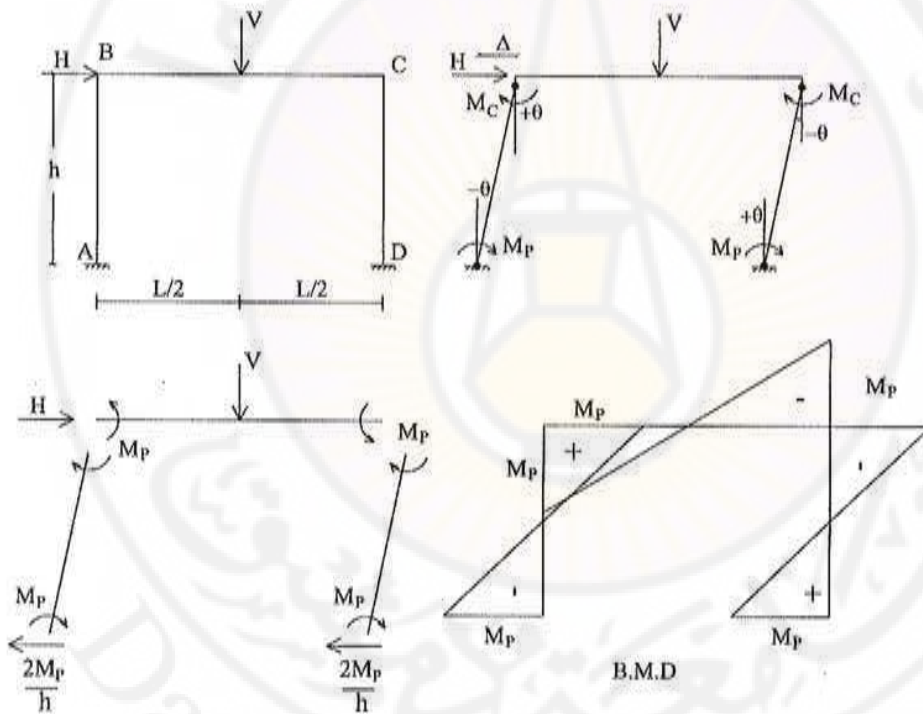
النتيجة عن جمع أكثر من ميكانيكيتين مستقلتين بحيث ينتج عنهما إلغاء مفصل لدن وعند الجمع تؤخذ حالات M_p الكبيرة.

وسندرس السلوك اللدن لهذا الإطار أحادي المجاز حسب قيمتي القوتين

المؤثرتين عليه H و V :

I- حالة الحمولة $V \ll H$:

في هذه الحالة يمكن فرض أن الحمولة الشاقولية V قريبة من الصفر والحمولة الأفقية H ذات قيمة كبيرة وعندها يحدث الانهيار الجانبي نظراً لوجود أولوية في هذه الحالة لتشكل مفاصل لدنة عند نهايات الأعمدة بدلاً من الجائز وتسمى ميكانيكية جانبية (Sway Mechanism).



الشكل (36-5)

إن إشارة الدوران تكون بشكل متبادل على التوالي ولا يؤخذ تأثيرها، حيث دوران المفاصل يساوي دوران ضلع واحد. تتفق في التحليل إشارة دوران المفصل اللدن مع إشارة عزم الانعطاف بحيث تبقى إشارة العمل اللدن موجبة. وفي هذه الحالة الأعمدة تدور بزوايا دوران θ في حين الجائز ينزلق انزلاقاً بالمقدار $\Delta = h * \theta$ فقط.

من شرط تطبيق طريقة التوازن نكتب:

$$\sum x_i = 0 \quad , \quad 2 * \frac{2M_p}{h} = H$$

ومنه قيمة العزم اللدن:

$$M_p = \frac{Hh}{4}$$

وأما باستخدام طريقة العمل الوهمي للميكانيزم الجانبي الشكل (5-36) نجد:

$$M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta = H * h * \theta$$

$$M_p = \frac{Hh}{4} \quad \text{ومنه:}$$

وهي نفس القيمة التي حصلنا عليها بطريقة التوازن.

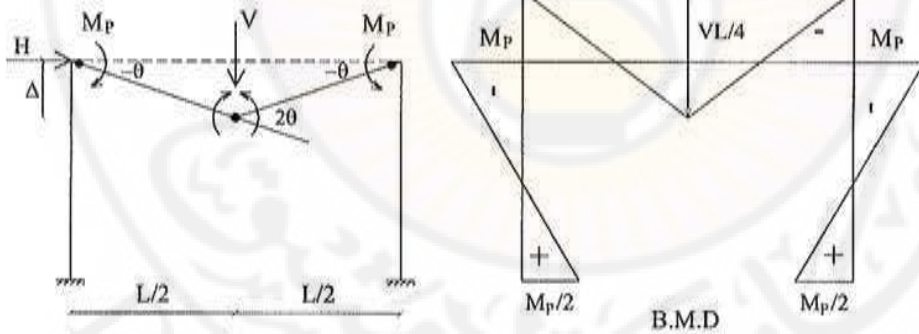
2- حالة الحمولة $V \gg H$:

عندما يتشكل مفصل لدن في رأس العمود فإن العزم يبقى ثابتاً ولا يتكون مفصل عندئذ في أسفل العمود وينهار الإطار بفعل تشكل ميكانيزم جزئي فيه هو الميكانيزم الجائزي المبين في الشكل (37-5). وباستخدام طريقة العمل الوهمي نجد:

$$M_p \theta + M_p * 2\theta + M_p * \theta = V * \frac{L}{2} \theta$$

$$M_p = \frac{V * L}{8} \quad \text{ومنه:}$$

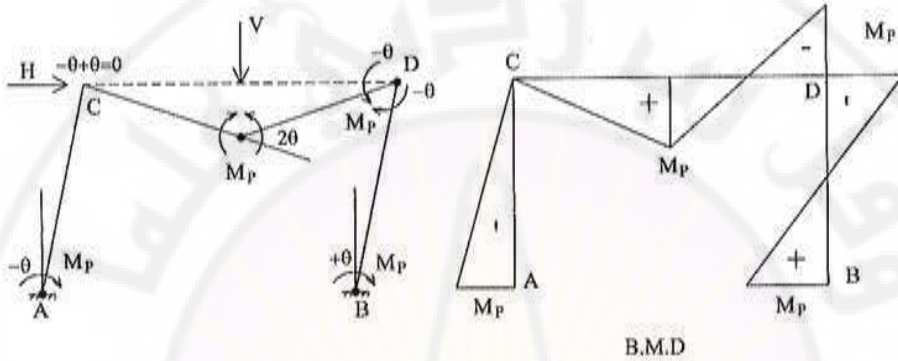
$$\Delta = \frac{L}{2} \theta \quad \text{حيث:}$$



الشكل (37-5)

3- حالة تساوي الحملات $V \approx H$:

في هذه الحالة يمكن أن يتم حدوث الميكانيكيتين السابقتين معاً، فيمكن أيضاً أن ينهار الإطار وتسمى هذه الآلية بالميكانيزم المركب (Combined Mechanism) كما هو مبين في الشكل (38-5).



الشكل (38-5)

ينتج عن جمع الميكانيكيتين المستقلتين معاً إلغاء المفصل اللدن عند C لأن العزوم اللدنة في الميكانيكيتين (1) و (2) تعمل باتجاهين متعاكسين. لنكتب معادلة العمل للميكانيزم المركب:

$$M_p \theta + M_p * 2\theta + M_p * 2\theta + M_p \theta = H * h \theta + V * \frac{1}{2} \theta$$

ومنه:

$$M_p = \frac{Hh}{6} + \frac{VL}{12}$$

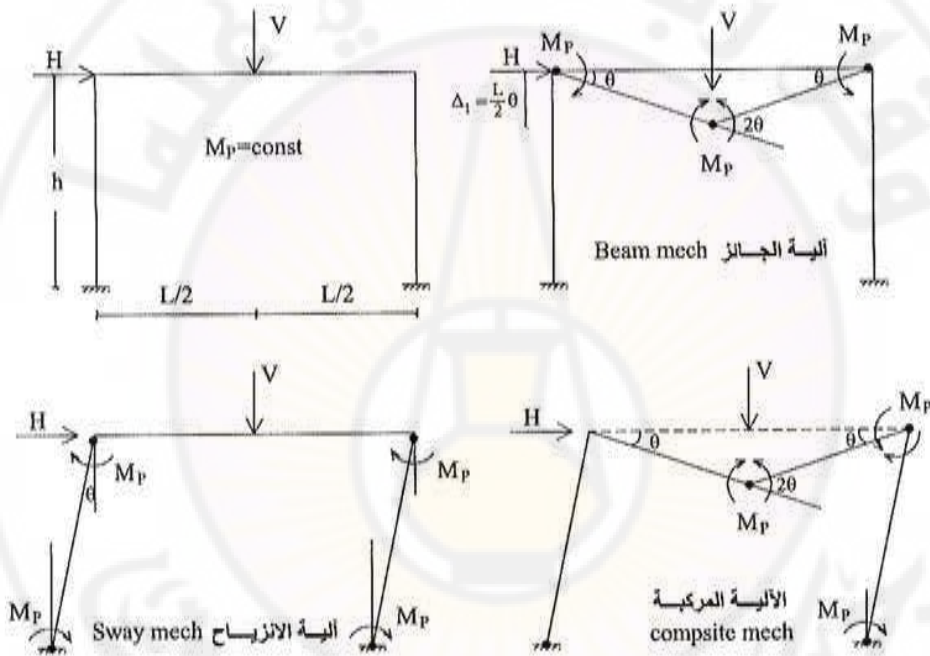
وبالتالي فإن:

$$M_c \leq \left| \frac{Hh}{6} + \frac{VL}{12} \right|$$

أحياناً نلجأ إلى تركيب الميكانيزمات المستقلة الممكنة الحدوث للحصول على حمولة الانهيار الحقيقية للمنشأ، ويجب انتقاء هذه التركيبات (تجميع الميكانيزمات) لتجعل العمل الخارجي أعظماً أو العمل الداخلي أقل ما يمكن وبهذه الطريقة نحصل على حمل الانهيار الأدنى. والإجراءات المتبعة بشكل عام هي القيام بتجميع الميكانيزمات المستقلة ذات الحمولات الأكبر وبعدها نحذف المفاصل اللدنة الممكنة. وسنتكلم بشكل مفصل فيما بعد عن طريقة تركيب الميكانيزمات.

11-5 - مخطط التأثير المتبادل : Interaction-Diagram

أحياناً قد تؤثر على المنشأ مجموعتا قوى لا تناسب بينهما ولهذا يطلب من المصمم أن يحدد النسبة بين هذه القوى والتي يمكن أن ينتج عنها أسوأ حالة تحميل على المنشأ كحالة إطار أحادي يخضع لقوتين H و V كما هو مبين في الشكل (39-5)، حيث مقطعه منتظم وذو عزم لدن M_p ، والمطلوب حساب حمولة الانهيار وشكل آلية الانهيار الحقيقية.



الشكل (39-5)

إن المواقع المحتملة لتشكيل المفاصل اللدنة هي أطراف الإطار وتحت نقطة تطبيق الحمل المركز V . وبينما شاهدنا أن ميكانيكيات الانهيار المحتملة في الأمثلة السابقة واضحة، نرى أنها لهذا الإطار مبهمة. يري الشكل (39-5) ميكانيكيتي انهيار مستقلتين تنهار فيها جوائز وأعمدة الإطار كل على حدة. بينما

يُري الشكل (d) ميكانيكية مركبة من الميكانيكيتين السابقتين مع حذف المفصل اللدن في الزاوية اليسرى (حيث إن العزوم اللدنة في الميكانيكيتين الجائزية والانزياح الجانبي تعمل باتجاهين متعاكسين). ويمكن بسهولة أن نحلل الميكانيكيات الثلاث المختلفة كما يلي:

1- ميكانيكية انهيار الجانز Beam Mechanism:

من تساوي العمل الوهمي الداخلي والخارجي ينتج:

$$M_p \theta + M_p * 2\theta + M_p * \theta = V * \frac{L}{2} \theta$$

ومنه:

$$M_p = \frac{V * L}{8} \quad , \quad V = \frac{8 M_p}{L}$$

2- ميكانيكية الانزياح الجانبي Sway Mechanism:

$$W_E = H * h \theta$$

$$W_i = M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta = 4 M_p \theta$$

$$H h \theta = 4 M_p \theta \quad , \quad M_p = \frac{H * h}{4}$$

ومنه:

$$H = 4 \frac{M_p}{h}$$

3- الميكانيكية المركبة Composite Mechanism :

$$W_E = V * \frac{L}{2} \theta + H * h \theta$$

$$W_i = 4M_p \theta + 4M_p \theta - 2M_p \theta = 6M_p \theta$$

وذلك بسبب إلغاء مفصل من الميكانيزم الجانزي $(-M_p \theta)$ وكذلك إلغاء مفصل من الميكانيزم الجانبي $(-M_p \theta)$ نتيجة جمع المركبتين:

$$H * h \theta + V * \frac{1}{2} \theta = 6M_p \theta$$

ومنه:

$$M_p = \frac{Hh}{6} + \frac{VL}{12}$$

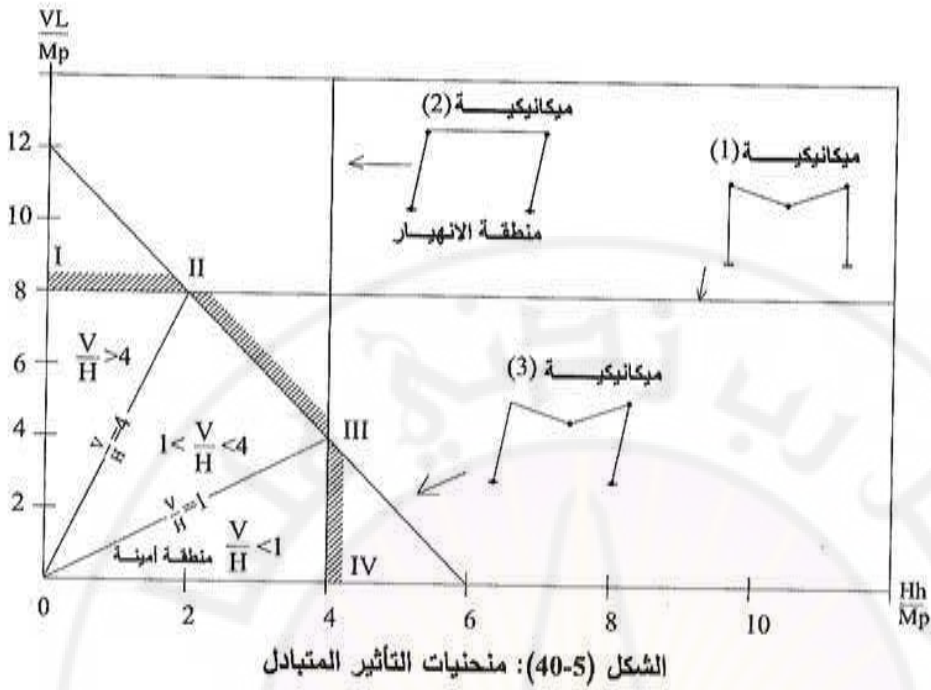
إن حمولة الانهيار الحقيقية هي القيمة الدنيا لحمولات الانهيار للميكانيكيات الثلاث. ولرسم المعادلات الثلاث الممثلة للميكانيكيات الجانزية والميل الجانبي والمركبة نحصل على المنحنيات المبينة في الشكل (40-5).

يمكن والمقارنة بين حمولات الانهيار الثلاث أن نكتبها على الشكل:

$$\frac{VL}{M_p} = 8 \quad \text{من الميكانيكية (1)}$$

$$\frac{HL}{M_p} = 4 \quad \text{من الميكانيكية (2)}$$

$$\frac{Hh}{M_p} + \frac{VL}{2M_p} = 6 \quad \text{من الميكانيكية (3)}$$



من المخطط نلاحظ أن القيم الواقعة خارج خطوط المعادلات تمثل قيماً للحمولات أكبر من حمولات الانهيار (المنطقة المهدشة) في حين تمثل القيم الواقعة داخل الخطوط حمولات أقل من حمولات الانهيار (المنطقة الأمانة).

وكذلك يلاحظ أن أي مستقيم ما من المبدأ (0) يمثل نسبة القوتين V و H . والميكانيكية الحاصلة هي تلك التي يتقاطع مستقيم النسبة مع خط معادلتها.

وفي المجال (II-I) يحدث الانهيار وفق الميكانيكية الجائزية (1).

وفي المجال (III-II) يحدث الانهيار وفق الميكانيكية المركبة (3).

وأما في المجال (IV-III) فيحدث الانهيار وفق الميكانيكية الجانبية (2).

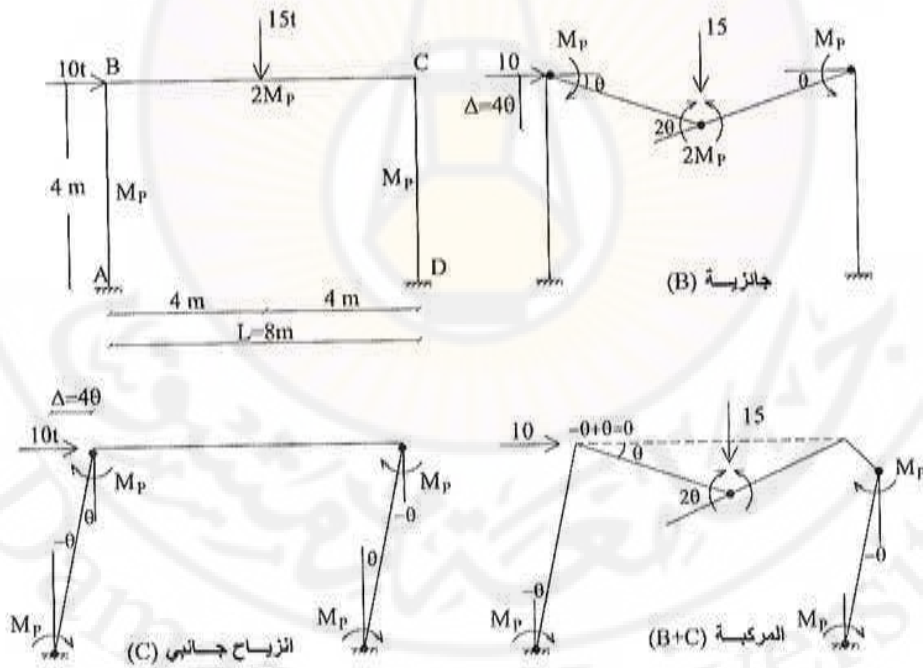
ويسمى الشكل (40-5) بمخطط التأثير المتبادل للقوتين (H و V) والذي يعين بواسطته الهيئة الموافقة للانهييار (الميكانيزم) بحسب نسبة القوى المطبقة على المنشأ.

مثال (10-5):

أوجد قيمة عزم اللدانة M_p وآليتها الحقيقية وذلك للإطار المبين بالشكل (41-5)، علماً بأن الحمولات المطبقة عليه هي حمولات الانهييار.

الحل:

ميكانيكيات الانهييار المحتملة للإطار هي: جائزية (B) وانزياح جانبي (C) وميكانيكية مركبة (B+C) كما هو مبين في الشكل (41-5).



الشكل (41-5)

استناداً إلى نظرية العمل الوهمي نشكل لكل ميكانيزم علاقة توازن حدية تتضمن عمل القوى الخارجية والداخلية.

ميكانيكية الجانز (B):

إن الكسر في المنشأ يحصل أولاً في العمود ويبقى جزء منه مع الجانز لأن عزم لدانة الجانز أكبر بمرتين من عزم لدانة العمود كما هو مبين بالشكل المدروس:

$$M_p \theta + 2M_p * 2\theta + M_p \theta = 15 * 4\theta$$

ومنه:

$$M_p = 10 \text{ t.m}$$

الميكانيكية المركبة (B+C):

$$6M_p * \theta = 15 * 4\theta \quad \text{من الميكانيكية (B)}$$

$$4M_p * \theta = 10 * 4\theta \quad \text{من الميكانيكية (C)}$$

$$-2M_p \theta$$

إلغاء مفصلين نتيجة الجمع

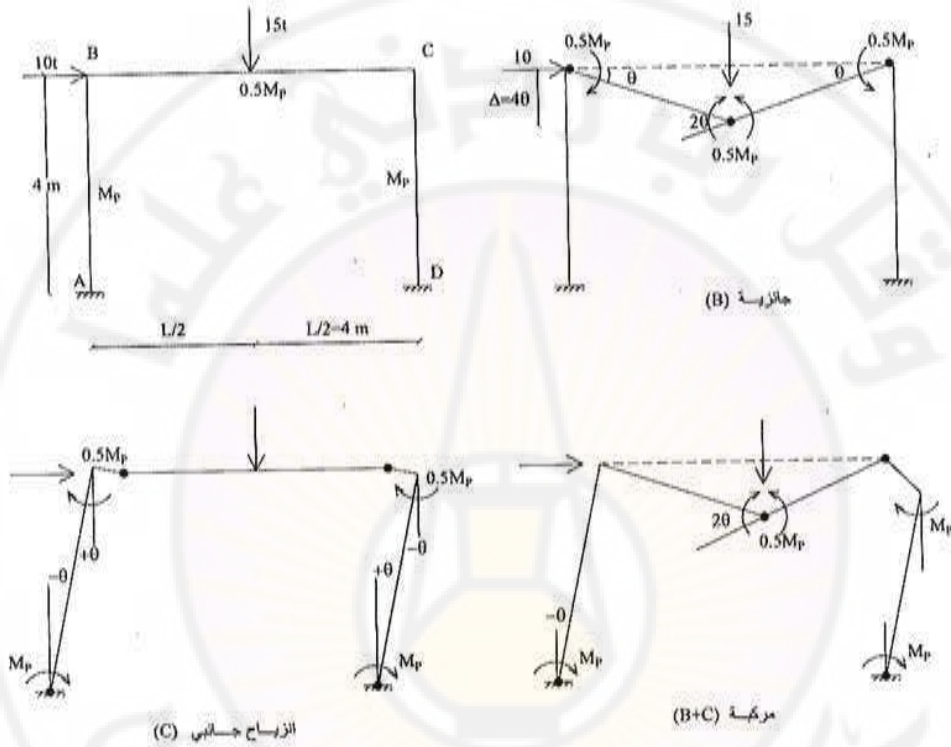
$$8M_p * \theta = 60\theta + 40\theta$$

ومنه:

$$M_p = \frac{100}{8} = 12.5 \text{ t.m}$$

ونلاحظ أن العقدة B لا تمتص أي قدرة عمل لعدم وجود مفصل لدن فيها.

ونختار أكبر قيمة من القيم السابقة وهي $M_p = 12.5 \text{ t.m}$ والتي تمثل قيمة العزم اللدن الحقيقية وهي عائدة لآلية الانهيار المركبة.
أما في حالة أخذ عزم لدن للجائز $0.5M_p$ بدلاً من $2M_p$ كما هو مبين بالشكل (42-4).



الشكل (42-4)

الحل:

في هذه الحالة يحدث الكسر في الجائز أولاً في الميكانيكيتين الجائزيتين والانزياح الجانبي.

ميكانيكية الجانز (B):

$$0.5 M_p (\theta + \theta) + 0.5 M_p * 2\theta = 15 * 4\theta$$

$$M_p = \frac{60}{2} = 30 \text{ t.m} \quad \text{ومنه:}$$

ميكانيكية الانزياح الجانبي (C):

$$M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta = 10 * 4\theta$$

من هذه العلاقة نجد أن:

$$M_p = 10 \text{ t.m}$$

ميكانيكية الانزياح الجانبي (C):

$$M_p (\theta + \theta) + 0.5 M_p (\theta + \theta) = 10 * 4\theta$$

$$M_p = \frac{40}{3} = 13.33 \text{ t.m}$$

الميكانيكية المركبة (B+C):

$$M_p * 4\theta = 10 * 4\theta + 15 * 4\theta$$

ومنه:

$$M_p = \frac{100}{4} = 25 \text{ t.m}$$

تؤخذ القيمة الأكبر من القيم السابقة وهي $M_p = 30 \text{ t.m}$ عزم اللدانة الحقيقي وهي موافقة لميكانيكية الجائز (B).

ملاحظة:

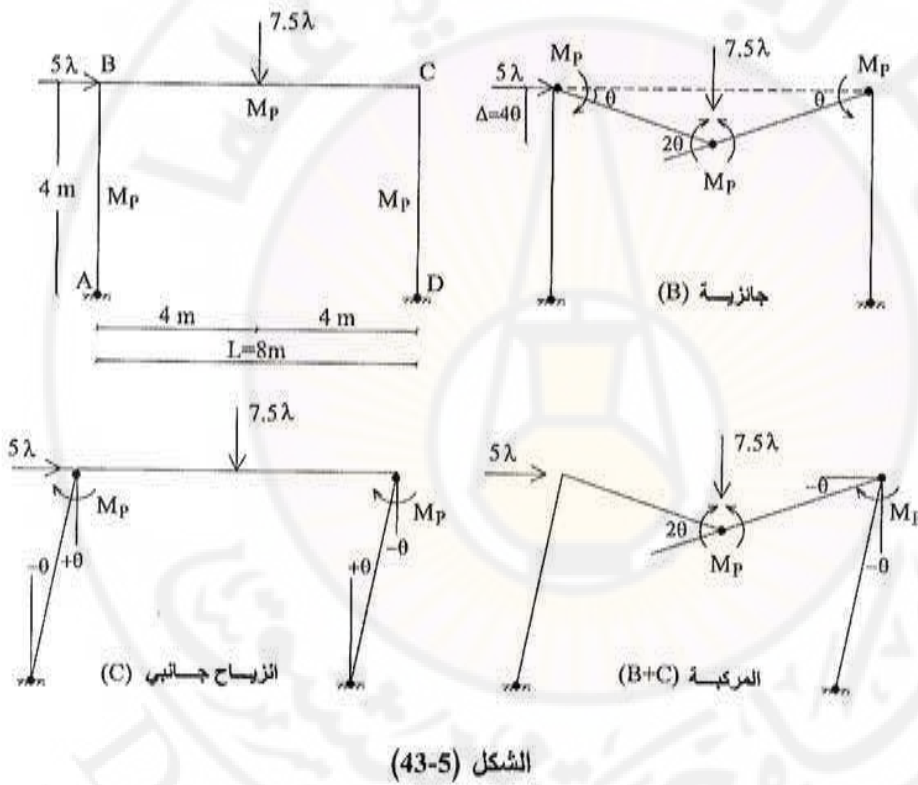
يؤخذ عزم لدانة العنصر الذي يحدث فيه الانكسار (أي عند المقطع الذي يحصل فيه المفصل اللدن إما في نهاية العمود أو في بداية الجائز).



مثال (11-5):

لنعتبر الإطار المبين في الشكل (5-43) والمحمل بحمولة مركزة شاقولية وأخرى أفقية وأن مقطع العناصر الإنشائية موحد ويملك عزمًا مقاومًا لدينا مقداره $M_p = 10 \text{ t.m}$ والمطلوب أوجد قيمة عامل الحمولة λ .

الحل:



ميكانيكية الجانز (B):

$$M_p * 40 = 7.5 \lambda * 40$$

ومنه:

$$\lambda = \frac{10 * 4}{4 * 7.5} = 1.33$$

ميكانيكية الانزياح الجانبي (C):

$$M_p * 20 = 5 \lambda * 40$$

ومنه:

$$\lambda = \frac{20}{20} = 1$$

الميكانيكية المركبة (C+B):

$$M_p * 40 = 20 \lambda \theta + 30 \lambda \theta$$

$$\lambda = \frac{4 * 10}{50} = 0.8$$

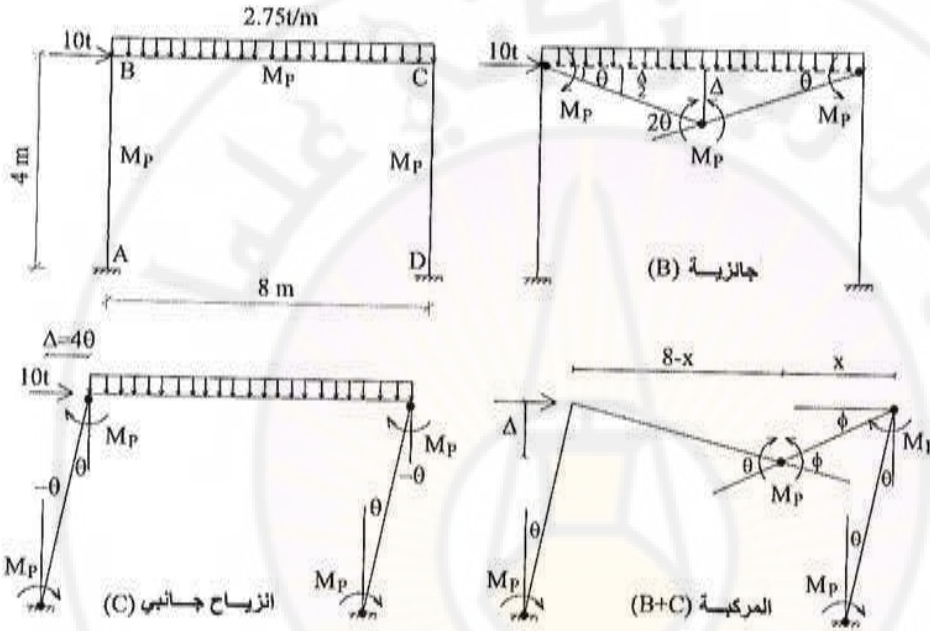
تؤخذ أصغر قيمة حدية من القيم السابقة لعامل الحمولة وهي $\lambda = 0.8$ وبالتالي فإن حمولات الانهيار هي:

$$V = 0.8 * 7.5 = 6 \text{ t}$$

$$H = 0.8 * 5 = 4 \text{ t}$$

مثال (12-5):

ليكن الإطار أحادي المجاز والمحمل كما هو مبين في الشكل (44-5)، مقطعه منتظم وذو عزم لدن M_p ، والمطلوب حساب قيمة العزم اللدن وشكل ميكانيكية الانهيار الحقيقية.



الشكل (44-5)

الحل:

عدد ميكانيكيات الانهيار المستقلة المحتملة للإطار هي اثنتان جاذبية (B) وانزياح جانبي (C) بالإضافة إلى ميكانيكية مركبة كما هو موضح بالشكل (44-5). نشكل علاقة العمل الوهمي لكل ميكانيكية من الميكانيكيات المذكورة كالتالي:

ميكانيكية الجائز (B):

$$4M_p * \theta = qL * \frac{\Delta}{2} = 2.75 * 8 * \frac{4\theta}{2}$$

ومنه:

$$M_p = 11 \text{ t.m}$$

ميكانيكية الانزياح الجانبي (C):

$$4M_p * \theta = 10 * 4\theta$$

ومنه:

$$M_p = 10 \text{ t.m}$$

الميكانيكية المركبة (C+B) الناتجة عن جميع الحالتين المستقلتين السابقتين مع ملاحظة إلغاء مفصلين:

$$6M_p * \theta = 40\theta + 16 * 2.75\theta$$

$$M_p = \frac{40 + 44}{6} = 14 \text{ t.m}$$

لقد فرضنا أن موقع المفصل اللدن في الفتحة BC في المنتصف فهذا غير صحيح لأن قيمتي العزم في العقدتين B و C غير متساويتين بسبب عدم تناظر الإطار بالحمل ولتصحيح هذا الخطأ من أجل رسم مخطط عزم اللدونة النهائي للإطار نتبع الآتي:

أ- نفرض أن المفصل اللدن يقع على بعد x من العقدة C كما هو مبين بالشكل (44-5).

$$M_p (4\theta + 2\phi) = 10 * 4\theta + 2.75 * 8 \frac{(8-x)}{2} * \theta$$

ولكن لدينا من شكل انهيار الفتحة BC نلاحظ أن:

$$x * \phi = (8-x) * \theta = \Delta$$

ومنه:

$$\phi = \frac{8-x}{x} * \theta$$

وبالتبديل في العلاقة السابقة فنحصل على قيمة العزم اللدن M_p :

$$M_p = \frac{[40 + 11 * (8-x)] * x}{2x + 16}$$

ولإيجاد قيمة M_p الأعظمية نشق عبارة M_p بالنسبة للمتغير x ونساوي الناتج بالصفر فنجد:

$$\frac{\partial M_p}{\partial x} = (40 - 22x + 88) * (2x + 16) - 2x(40 + 88 - 11x) = 0$$

وبالإصلاح توول العلاقة إلى الشكل:

$$x^2 + 15.6x - 93.1 = 0$$

وبالحل نجد:

$$x = -7.8 + \sqrt{78^2 + 93.1} = 4.6 \text{ m}$$

وبتعويض قيمة x في عبارة M_p نحصل على قيمة العزم اللدن:

$$M_p = \frac{[40 + 11(8 - x)] * x}{2x + 16} = \frac{40 + 11(8 - 4.6)}{2 * 4.6 + 16} * 4.6 = 14.13 \text{ t.m}$$





الفصل السادس
التحليل اللدن للمنشآت غير المقررة
بطريقة تجميع الميكانيكيات

Plastic Analysis of Indeterminate Structures
By Combined Mechanisms

1-6- المقدمة:

تعتبر طريقة تجميع الميكانيكيات إحدى الطرق الأساسية المستخدمة في التحليل اللدن وتعتمد هذه الطريقة على الافتراض بأن ميكانيكية الانهيار الحقيقية هي ميكانيكية مركبة لمجموعة من الميكانيكيات الأساسية (المستقلة) وتعرف الميكانيكية الأساسية Fundamental Mechanisms أنها الميكانيكية الناتجة عن نوع واحد من الحملات المطبقة على المنشأ (شاقولية كانت أم أفقية) دون أي تأثير للحملات الأخرى بفرض أنها ميكانيكية انهيار، ثم تكتب معادلة العمل الوهمي الموافقة لكل واحدة منهم. وتكون قيمة الحملات الناتجة عنها مساوية تماماً لحملات الانهيار إذا تحققت الشروط التالية:

- أ- تحقق شرط التوازن التحريكى والسكونى للمنشأ.
- ب- تشكيل عدد كافٍ من المفاصل اللدنة لحدوث ميكانيكية (منشأ غير مستقر سكونياً) وهذا ما يدعى شرط تشكل اللدونة.

ج- تعطي أكبر قيمة لعزم اللدانة M_p (أو أصغر قيمة لحمولة الانهيار).

د- أن لا تزيد قيمة عزم الانعطاف في جميع مقاطع المنشأ على قيمة عزم اللدانة لهذه المقاطع وهذا ما يسمى بشرط اللدونة.

وكما رأينا سابقاً أن الميكانيزم الحقيقي لأي منشأ هو الميكانيزم الذي يعطي أكبر قيمة للعزم M_p أو أقل قيمة لعامل الحمولة λ . لذا فإن التكتيك الذي سيتبع هو جدولة الميكانيزمات البسيطة التي تعطي قيمة كبيرة للعزم M_p ، ومن ثم يعتمد إلى إضافة عدد من الميكانيزمات الأخرى البسيطة إليها لتشكيل ميكانيزم مركب (Composite Mechanism) يأخذ العزم M_p بموجبه قيمة تفوق القيم الحاصلة من الميكانيزمات البسيطة.

وهكذا يجب فحص التشكيلات الممكنة التي يبدو للوهلة الأولى أنها ستساعد في اكتشاف الحل الصحيح أو على الأقل ستساعد في الوصول إلى حل قريب جداً من الحل الصحيح. وحتى يتحقق الدارس من مصداقية الحل الذي حصل عليه ينبغي عليه أن يرسم مخطط عزم الانعطاف بالاعتماد على طرق التوازن. فإذا كان هذا المخطط محققاً لشرط اللدونة أي $|M| \leq M_p$ (قيمة العزم في أي مقطع من المنشأة) فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو بلا شك الحل الصحيح وإذا كان شرط اللدونة غير محقق فكثيراً ما يكون إجراء تعديل بسيط على مواقع بعض المفاصل اللدنة كافياً للوصول إلى الحل الصحيح.

وبشكل عام يمكن أن تنشأ المفاصل اللدنة خلال مرحلة الانهيار اللدن في الأماكن التالية:

1- الوثائق.

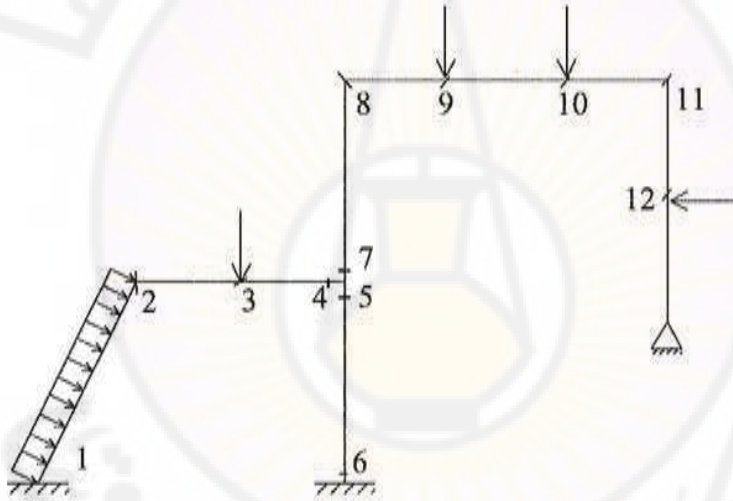
2- نقاط تطبيق الحملات المركزة.

3- أماكن توضع عزم الانعطاف الأعظمي (في حالة القوى الموزعة).

4- في الزوايا والعقد.

5- أماكن التغير المفاجئ للمقطع العرضي لعناصر المنشأ.

ويبين الشكل (6-1) بعض الأماكن التي يمكن أن تكون نقاطاً صالحة كمواقع لمفاصل لدنة.



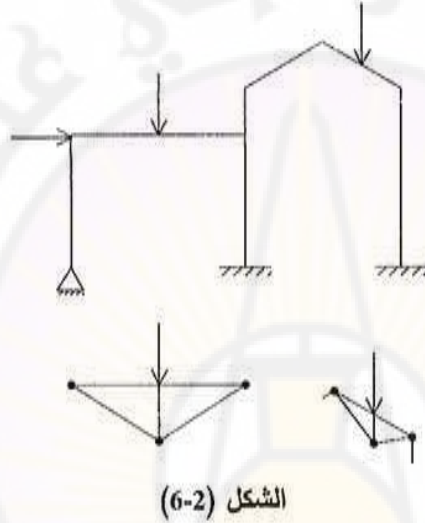
الشكل (6-1): نقاط صالحة كمواقع لمفاصل لدنة

2-6- أشكال الميكانيزمات وأنواعها:

سنوضح أشكال الميكانيزمات (الميكانيكيات) وفقاً لحالات الانهيار المختلفة، وذلك كما هو مبين في الشكل (6-2). التصنيف:

- ميكانيزم الجانز (Beam Mechanism):

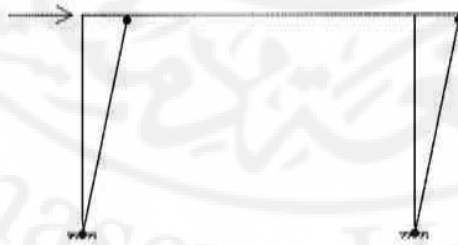
يبين الشكل (6-2) انتقالات المجازات المفردة تحت تأثير الحمولات المطبقة.



الشكل (6-2)

- ميكانيزم الانزياح الجانبي (الميل الجانبي) (Sway Mechanism):

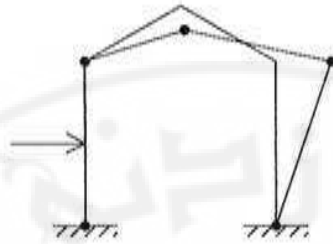
يبين الشكل (6-3) أن حركة المنشأ ناجمة عن الانزياح الجانبي.



الشكل (6-3)

- ميكانيزم الإطار ذي السقف المائل (المسنم):

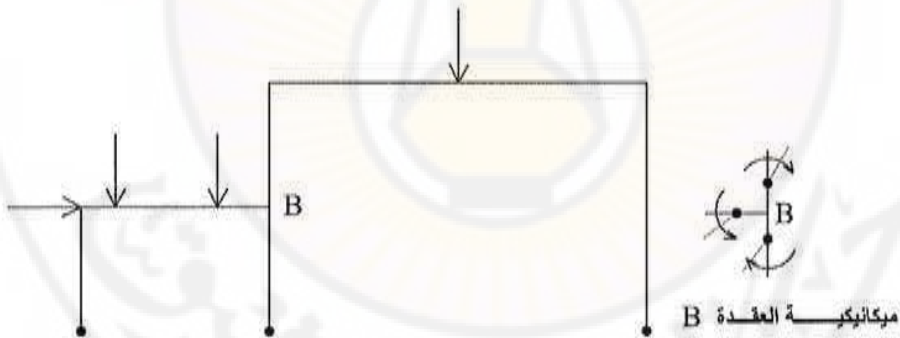
يبين الشكل (6-4) حركة الإطار ذي السقف المائل.



الشكل (6-4)

- ميكانيزم العقدة (Joint Mechanism):

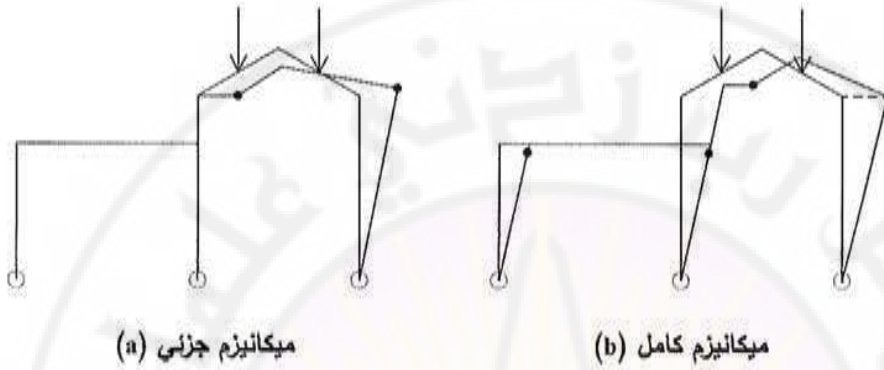
يتشكل هذا الميكانيزم في نقطة اتصال ثلاثة عناصر أو أكثر ويمثل حركة دورانية ناتجة عن تأثير عزم مطبق، ويبين الشكل (6-5) ميكانيزم العقدة B.



الشكل (6-5)

- الميكانيزم المركب Composite Mechanism :

يؤدي تركيب عدد من الميكانيزمات المستقلة أو تجميعها إلى توليد ما يسمى بالميكانيزم المركب وقد يؤدي إلى إلغاء مفصلين لدنين أو أكثر.



الشكل (6-6)

قد يكون الميكانيزم المركب جزئياً كما في الشكل (a,6-6) وعندها يبقى الإطار غير مقرر عند الانهيار أو يمكن أن يكون الميكانيزم المركب كاملاً فيكون مقررًا عند الانهيار.

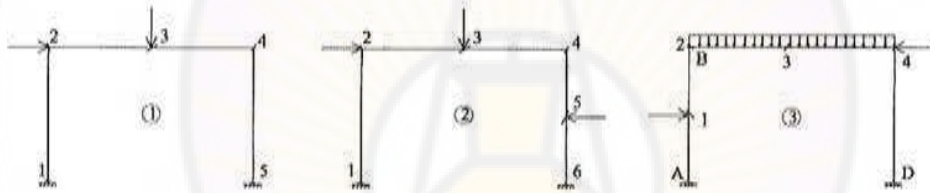
وقد بينا سابقاً الميكانيزمات التامة (الكاملة) وغير التامة وأشكالها موضحين ذلك بالرسومات التخطيطية.

3-6- عدد الميكانيزمات البسيطة المستقلة:

إذا كان عدد المفاصل اللدنة التي يمكن أن تتولد في المنشأ هو H ودرجة عدم التقرير السكوني (عدد القيود الزائدة) هي J في هيكل إنشائي يعمل على الانعطاف فإن عدد الميكانيزمات الأساسية M الممكنة في المنشأ تعطى بالعلاقة:

$$M = H - J \quad (6-1)$$

ولتوضيح تطبيق هذه العلاقة يمكن أن ندرس الإطارات المبينة في الشكل (6-7).



الشكل (6-7)

الإطار (1): حيث:

عدد درجات عدم التقرير $J = 3$

عدد النقاط الصالحة كمواقع لمفاصل لدنة $H = 5$

ويكون عدد الميكانيزمات المستقلة $M = 5 - 3 = 2$

الإطار (2): حيث:

عدد درجات عدم التقرير $J = 3$

عدد النقاط الصالحة كمواقع لمفاصل لدنة $H = 6$

ويكون عدد الميكانيزمات المستقلة $M = 6 - 3 = 3$

الإطار (3): حيث:

عدد درجات عدم التقرير $J = 1$

عدد النقاط الصالحة كمواقع لمفاصل لدنة $H = 4$

ويكون عدد الميكانيزمات المستقلة $M = 4 - 1 = 3$

4-6- تجميع الميكانيزمات البسيطة:

تتضمن الدراسة في هذه الحالة البحث عن ميكانيزم مركب قادر على إعطاء عزم مقاوم M_p يفوق العزوم اللدنة التي تنتج عن الميكانيزمات البسيطة المستقلة.

إن معادلة العمل الوهمي التي تأخذ شكلها العام:

$$\sum_{i=1}^K P_i \cdot \Delta_i = \sum_{j=1}^m M_{pj} \cdot \theta_j$$

تشير إلى أن الحصول على الهدف المنشود، يتطلب السعي إلى زيادة عمل القوى الخارجية في الوقت الذي ينبغي فيه تخفيض العمل الداخلي إلى أقصى حد ممكن.

ويمكن تلخيص خطوات الحل في طريقة تجميع الميكانيزمات كما يلي:

1- تحديد عدد الميكانيزمات المستقلة الأساسية للمنشأ M ($M = H - J$) حيث:

H يمثل عدد المفاصل اللدنة الممكنة و J عدد درجات عدم التقرير السكوني للمنشأ. إن الميكانيزم المستقل ينشأ عن نوع واحد من الحمولات (ذات منحنى واحد) دون أي تأثير للحمولات الأخرى.

2- حساب قيمة العمل الوهمي الخارجي W_e والعمل الوهمي الداخلي W_i لكل ميكانيزم مستقل وحساب عزم اللدانة M_p الموافق لكل ميكانيزم باستخدام معادلة الطاقة.

3- يجب دائماً حذف بعض المفاصل اللدنة الممكنة عند جمع ميكانيزمين ذات (M_p) العالية القيمة بشكل يمكن فيه تخفيض العمل الداخلي وفي الوقت نفسه نزيد العمل الخارجي الناتج عن القوى الخارجية والحصول على قيمة M_p تفوق القيم الناتجة من الميكانيزمات الجزئية كل على حدة، ويكون هذا الميكانيزم المركب الناتج عن ميكانيزم الانهيار الفعلي، وإلا فنعيد العملية حتى نحصل على أكبر قيمة ممكنة لـ (M_p) وبهذه الطريقة نحصل على حمل الانهيار الأدنى.

4- يمكن عند الضرورة تدوير العقدة التي تحوي أكثر من عنصرين متلاقين من المنشأ وذلك بهدف تخفيض العمل الداخلي في هذه العقدة وتسمى هذه الميكانيكية ميكانيزم العقدة.

5- ميكانيكية الانهيار هي الميكانيكية التي تعطي القيمة العظمى لعزم اللدانة M_p (أو الصغرى للحمولة الحرجة P_{cr}) فيما إذا تحققت الشروط التالية:

أ- توازن المنشأ تحريكاً وسكونياً.

ب- عدم تجاوز قيمة عزوم الانعطاف في جميع مقاطع المنشأ لقيمة عزوم اللدانة لهذه المقاطع.

ولا بد من الإشارة هنا على أن جمع ميكانيزمين بسيطين في ميكانيزم مركب لا يؤدي إلى قيمة محسنة لعزم اللدانة إلا عندما يملك الميكانيزمان البسيطان مفاصل لدنة مشتركة، وبشرط أن تكون هذه المفاصل المشتركة متساوية في القيمة ومتعاكسة في الإشارة.

وبناءً على ذلك يمكن القول عموماً إنه من المناسب أن يجري تحري الميكانيزمات البسيطة التي تعطي أعلى القيم لـ M_p ، وأن تجمع بأسلوب يحصل فيه حذف مفصل لدن مشترك واحد على الأقل.

أمثلة:

مثال (1-6):

يطلب تحديد قيمة عزم اللدانة M_p وميكانيكية الانهيار الحقيقية للإطار المبين في الشكل (6-8).

الحل:

نلاحظ أن درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ (J) هي (6) وكذلك عدد النقاط الصالحة لكي تكون مفاصل لدنة هو (10) وهذه النقاط موضحة على الشكل (6-8) ومنه يكون عدد الميكانيكيات الأساسية المستقلة (M) هو:

$$M = H - J$$

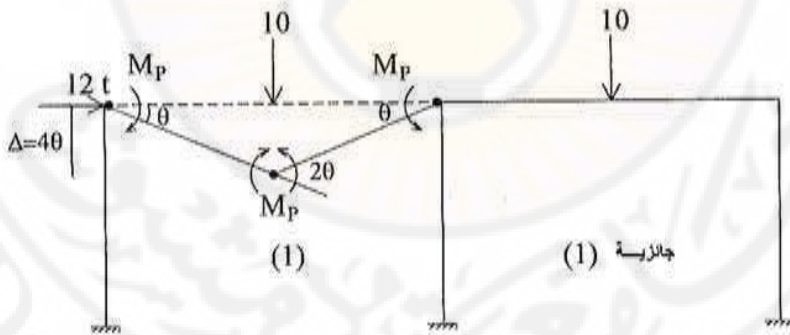
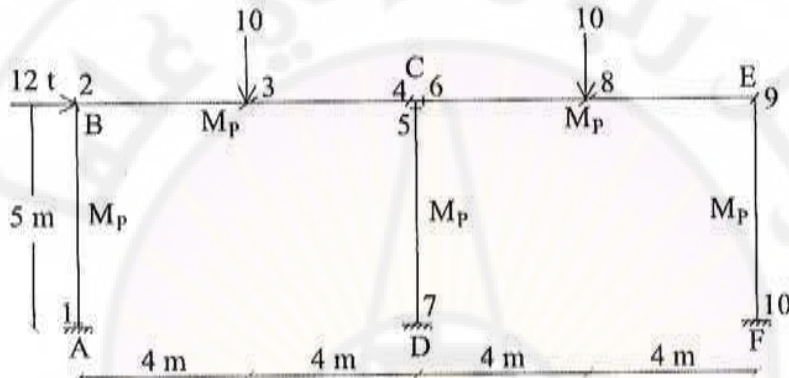
$$= 10 - 6 = 4$$

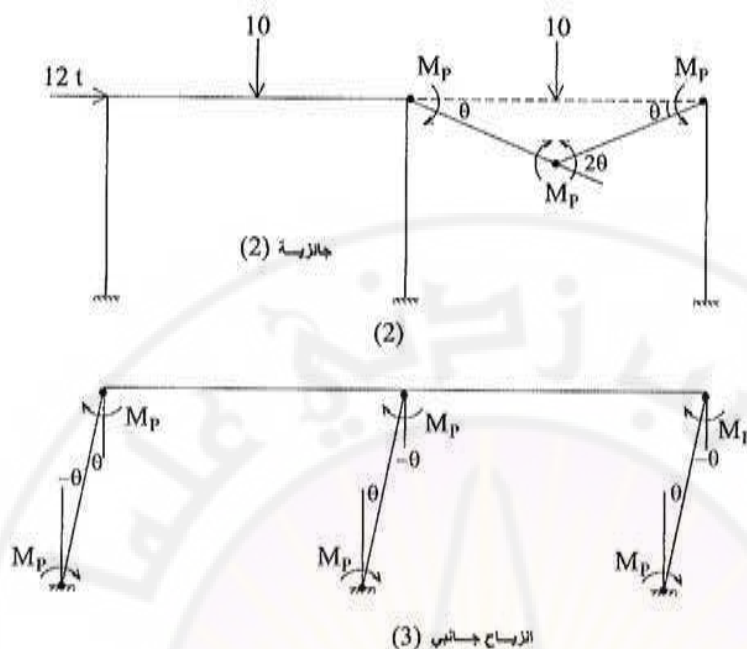
ومن شكل المنشأ والحمولات نلاحظ أن الميكانيزمات المستقلة أربع ترتبط كل واحدة منها بمعادلة توازنية تتألف من:

ميكانيكية جانز عدد (2)

ميكانيكية انزياح جانبي عدد (1)

ميكانيكية عقدة عدد (1)





الشكل (6-8) آليات الانهيار الأساسية للإطار

حتى نحصل على ميكانيزم الانهيار الصحيح يكفي أن نعتبر العزوم المتولدة ضمن النقاط العشر، ونحصل على معادلات التوازن الموافقة لهذه الميكانيكيات بتطبيق طريقة العمل الوهمي التي تقدم شرحها أعلاه، وهكذا نجد:

1- ميكانيكية الجائر الأول:

$$4M_p \theta = 10 \cdot 4\theta$$

$$M_p = 10 \text{ t.m}$$

ومنه

2- ميكانيكية الجائر الثاني:

$$4M_p \theta = 10 \cdot 4\theta$$

$$M_p = 10 \text{ t.m}$$

ومنه

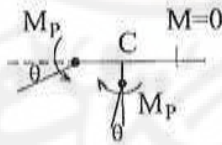
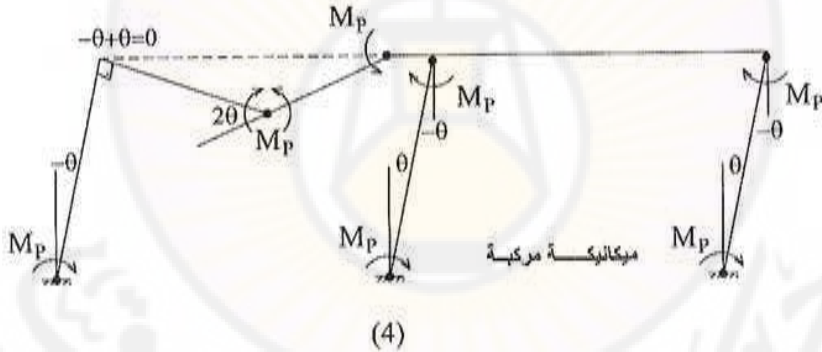
3- ميكانيكية الانزياح الجانبي:

$$6 M_p \theta = 12 \cdot 5 \theta$$

$$M_p = 10 \text{ t.m}$$

ومنه

4- الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع ميكانيكيات بسيطة بحيث ينتج ميكانيزم مركب قادر على إعطاء عزم مقاوم M_p يفوق العزوم اللدنة السابقة وللحصول على هذه الميكانيكية المركبة ننتقي أكبر قيمتين للعزم اللدن من الميكانيكيات المستقلة بحيث تلغي مفصل لدن أو أكثر من جمع (1) مع (3) تنتج الميكانيكية (4) كما هو مبين في الشكل (6-9).



الشكل (6-9)

$$4 M_p \theta = 40 \theta \quad (1) \text{ من الميكانيكية}$$

$$6 M_p \theta = 60 \theta \quad (3) \text{ من الميكانيكية}$$

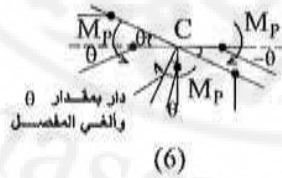
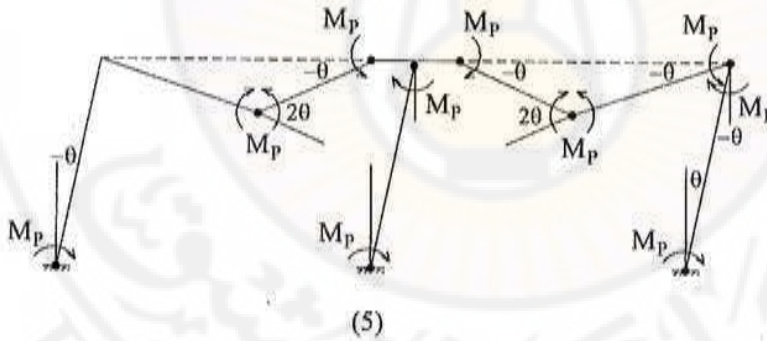
$$\frac{-2 M_p \theta}{8 M_p \theta = 100 \theta} \quad \text{إلغاء مفصلين عند الجمع}$$

$$M_p = 12.5 \text{ t.m} \quad \text{ومنه}$$

ويمكن أخذ ميكانيكية العقدة C كميكانيكية مستقلة كما في الشكل (6-9) وذلك الميكانيكية (4) ونلاحظ أن هذه العقدة متوازنة إذا كانت قيمة العزم $M = 0$ على الطرف الآخر ويختل توازنها في حال $M \neq 0$.

5- الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع (4) مع (2):

في هذه الميكانيكية الجديدة لا يوجد إلغاء مفاصل لدنة ولكن يختل توازن العقدة C كما هو موضح في الشكل (6-10):



الشكل (6-10)

من الميكانيكية المركبة (5) ينتج:

$$8M_p \theta = 100\theta$$

$$\frac{4M_p \theta}{12M_p} = \frac{400}{1400}$$

$$M_p = \frac{140}{12} = 11.67 \text{ t.m} < 12.5 \text{ t.m}$$

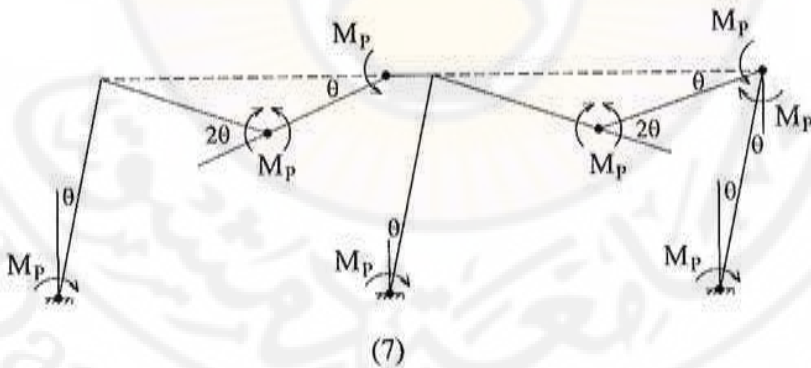
ومنه:

ومن الميكانيكية (5) ندرس توازن العقدة C فنحصل على ميكانيكية جديدة (6).

إن العقدة غير متوازنة لذلك ندورها وذلك بفرض أنها دارت بالزاوية θ بحيث نلغي مفصل لدن منها فيكون:

$$-M_p \theta + M_p \theta - M_p \theta = -M_p \theta$$

6- الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع (5) مع (6) فنحصل على الميكانيكية رقم (7).



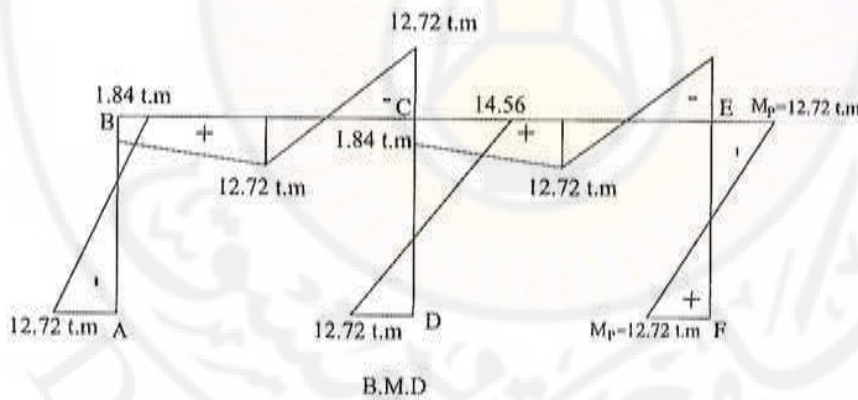
الشكل (6-11)

نلاحظ من تشكّل هذه الميكانيكية المركبة أنه تم إلغاء مفصل كما هو مبين بالشكل (6-11).

$$12 M_p \cdot \theta - M_p \cdot \theta = 140 \theta$$

$$M_p = \frac{140}{11} = 12.72 \text{ t.m} \quad \text{ومنه:}$$

نختار من القيم السابقة أكبر قيمة عزم لدن وهي $M_p = 12.72 \text{ t.m}$ الموافقة للميكانيكية المركبة (7) وهي التي تمثل ميكانيكية الانهيار الحقيقية للإطار. ولكي نتأكد من أن هذه الآلية المركبة هي الآلية الحقيقية للانهيار. لنعلم مخطط العزوم ونتأكد من عدم ازدياد قيمة العزم في كل النقاط عن العزم اللدن. ويبين الشكل (6-12) مخطط هذه العزوم حيث يبدو أن شرط العزم اللدن محقق وبالتالي فإن هذه الميكانيكية الحقيقية للانهيار.



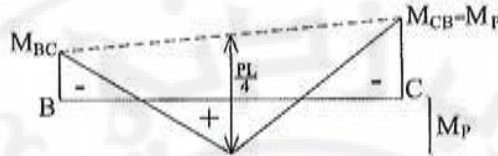
الشكل (6-12)

ولرسم مخطط عزوم الانعطاف الحدية شكل (6-12) الموافقة لميكانيكية انهيار الإطار (7) ننطلق من اعتبار أن القيمة الحدية التي بلغت العزوم التالية:

$$M_{P,A} = M_{P,D} = M_{P,CB} = M_{P,3} = M_{P,8} = M_{P,EC} = M_{P,EF}$$

$$M_{P,F} = 12.73 \text{ t.m}$$

ونجد عزوم الانعطاف في العقد التي لم تبلغ القيمة الحدية مباشرة من شروط التوازن.



الشكل (6-13)

من أجل فتحة الإطار الأولى الشكل (6-13) لدينا:

$$\frac{PL}{4} - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{2} = M_{P,3}$$

بالتعويض في هذه العلاقة نجد:

$$\frac{10 \cdot 8}{4} - \frac{M_{BC} + 12.72}{2} = 12.72$$

$$M_{BC} = 1.84 \text{ t.m} \quad \text{ومنه:}$$

بطريقة مماثلة ندرس الفتحة الثانية فنجد أن:

$$M_{CE} = 1.84 \text{ t.m}$$

نكتب شرط توازن العزوم في العقدة C:

$$\sum M_i = 12.72 + 1.84 - M_{CD} = 0 ; M_{CD} = 14.56 \text{ t.m}$$

مثال (2-6):

المطلوب تعيين قيمة عزم اللدانة M_p وآلية الانهيار الحقيقية للإطار ذي الطابقين وفتحة واحدة ومقطعه ثابت والمحمل كما هو مبين في الشكل (6-14).

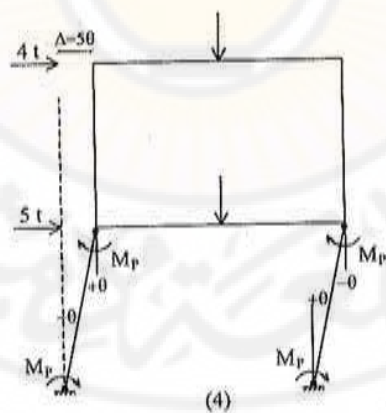
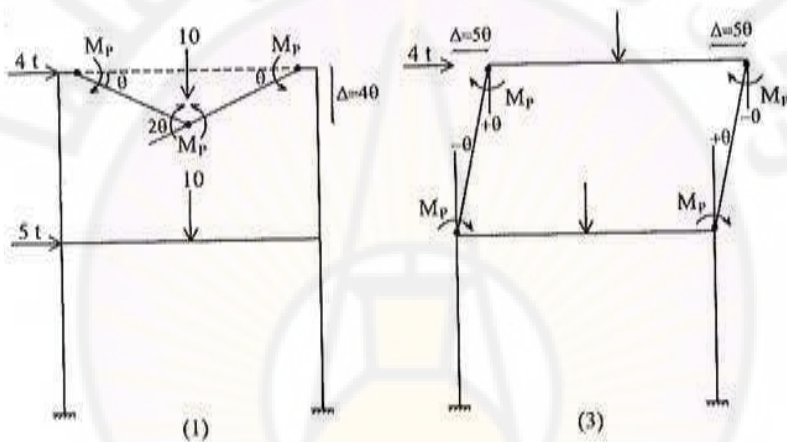
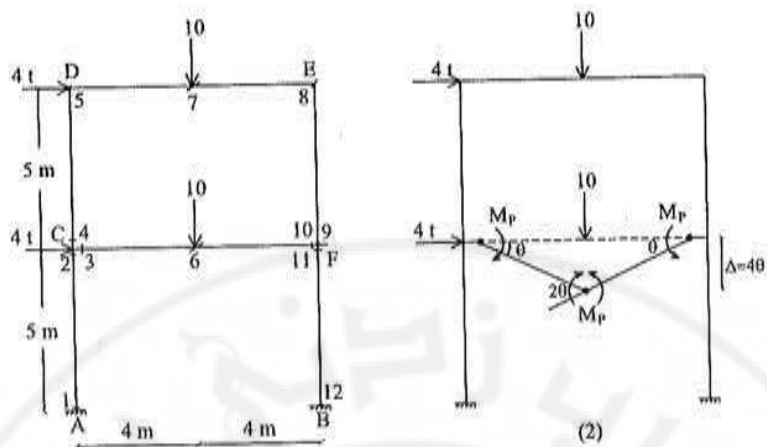
الحل:

من شكل الإطار نلاحظ أن درجة عدم التقرير السكوني هي $J=6$ وعدد النقاط الصالحة لكي تكون مفاصل لدنة هو $H=12$ ومركمة كما في الشكل. وبالتالي نجد أن عدد الميكانيكيات المستقلة الأساسية هو:

$$M = H - J = 12 - 6 = 6$$

يمكن تحديد الميكانيكيات المستقلة بما يلي: هناك ميكانيزم جانزي عدد (2)، ونلاحظ أيضاً وجود ميكانيزمين مستقلين جانبيين يخص كل منهما طابقاً من الطوابق، وهناك ميكانيزمان عقديان يخص أحدهما العقدة C والآخر العقدة F الشكل (6-14). وبذلك نحصل على ست ميكانيزمات هي:

2	ميكانيزمات جانزية
2	ميكانيزمات جانبية
2	ميكانيزمات عقدية
6	مجموع الميكانيزمات المستقلة



الشكل (6-14) آليات الانهيار المستقلة للإطار

1- ميكانيكية الجائز الأول (1):

$$4 M_p \theta = 10 \cdot 4 \theta$$

$$M_p = 10 \text{ t.m} \quad \text{ومنه}$$

2- ميكانيكية الجائز الثاني (2):

$$4 M_p \theta = 10 \cdot 4 \theta$$

$$M_p = 10 \text{ t.m} \quad \text{ومنه}$$

3- ميكانيكية الانزياح الجانبي للطابق العلوي (3):

$$4 M_p \theta = 4 \cdot 5 \theta$$

$$M_p = 5 \text{ t.m} \quad \text{ومنه}$$

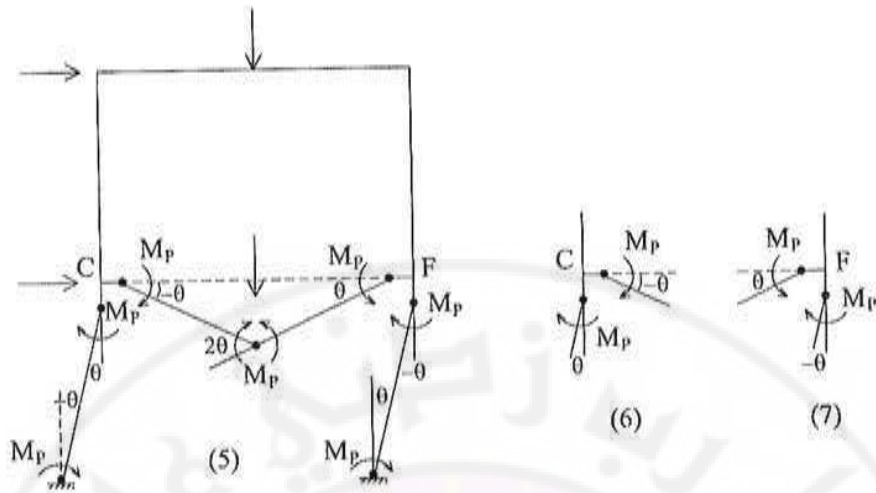
4- ميكانيكية الانزياح الجانبي للطابق السفلي (4):

$$4 M_p \cdot \theta = 5 \cdot 5 \theta + 4 \cdot 5 \theta$$

$$M_p = \frac{45}{4} = 11.25 \text{ t.m} \quad \text{ومنه:}$$

5- الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع الميكانيكيتين (2) و (4) وتسمى

بالميكانيكية (5) كما هو مبين بالشكل (15-6):



الشكل (6-15)

من الميكانيكية (5) نجد:

$$8 M_p \theta = 85 \theta$$

$$M_p = 10.625 \text{ t.m}$$

ومنه:

من الميكانيكية (5) ندرس توازن العقدتين C و F فنلاحظ أن:

الميكانيكية (7) للعقدة F لا تعطي أية نتيجة لأن العقدة متوازنة:

$$-M_p + M_p = 0$$

أما من الميكانيكية (6) للعقدة C نلاحظ أن هذه العقدة غير متوازنة لذلك ندورها بزاوية دوران مقدارها θ بحيث نلغي مفصلاً لدناً فنجد من توازنها:

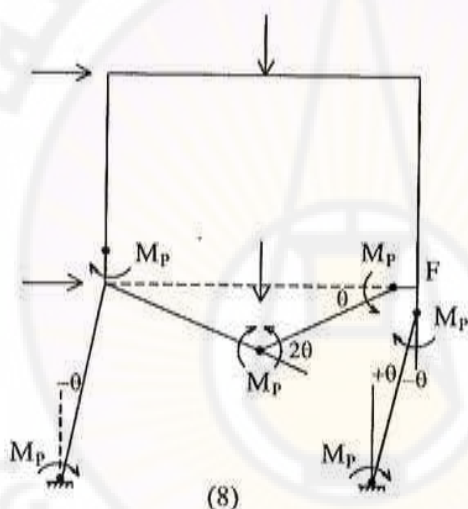
$$-M_p - M_p + M_p = -M_p$$

6- الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع الميكانيكيتين (5) و (6) فنحصل على الميكانيكية (8) الموضحة في الشكل (6-16).

$$8M_p \theta = 85\theta \quad \text{من الميكانيكية (5)}$$

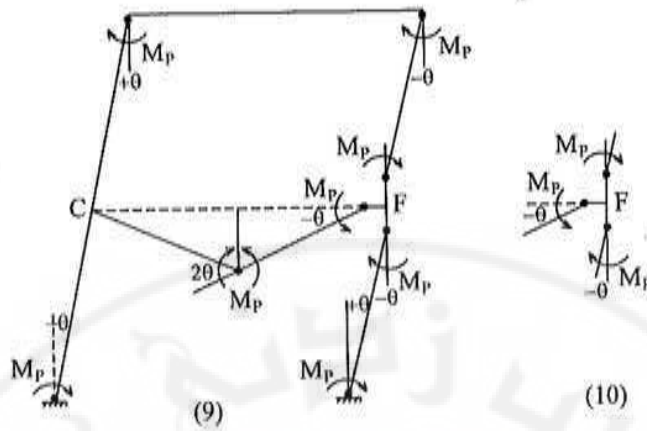
$$\frac{-M_p \theta}{7M_p \theta} = \frac{85\theta}{85\theta} \quad \text{من ميكانيكية العقدة (6)}$$

$$M_p = \frac{85}{7} = 12.143 \text{ t.M} \quad \text{ومنه:}$$



الشكل (6-16)

7- الميكانيكية المركبة الناتجة عن جمع الميكانيكيتين (8) و (3) فنحصل على الميكانيكية (9) الموضحة في الشكل (6-17).



الشكل (6-17)

$$7 M_p \theta = 850 \quad \text{من الميكانيكية (8)}$$

$$4 M_p \theta = 200 \quad \text{من الميكانيكية (3)}$$

$$\frac{-2 M_p \theta}{9 M_p \theta} = \frac{1050}{1050} \quad \text{إلغاء مفصلين نتيجة الجمع}$$

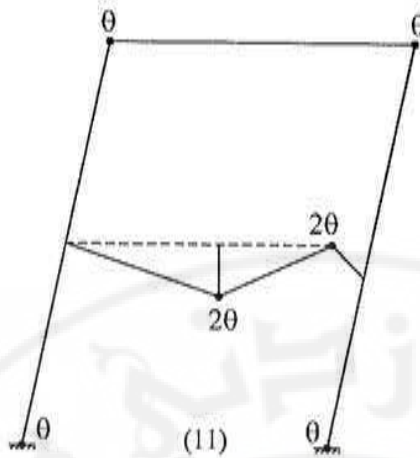
$$-M_p = \frac{105}{9} = 11.67 \text{ t.m}$$

ومن ميكانيكية العقدة F (10) نجد من دراسة توازن هذه العقدة:

$$-M_p \theta + M_p \theta - M_p \theta = -M_p \theta$$

8- الميكانيكية المركبة الناتجة عن الميكانيكيتين (9) و (10) نحصل على

ميكانيكية مركبة جديدة (11) كما هي موضحة في الشكل (6-18):



الشكل (6-18)

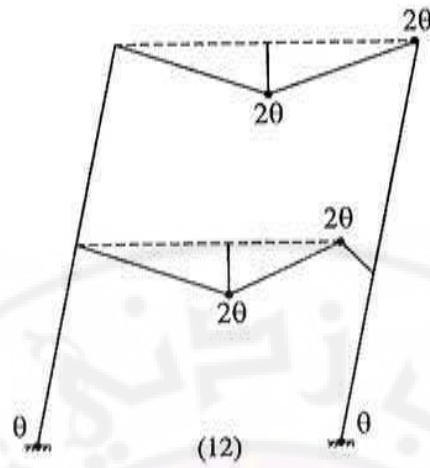
$$\begin{array}{rcl}
 9 M_p \theta & = & 105 \theta \quad \text{من الميكانيكية (9)} \\
 - M_p \theta & & \text{إلغاء مفصل} \\
 \hline
 8 M_p \theta & & 105 \theta
 \end{array}$$

$$M_p = \frac{105}{8} = 13.125 \text{ t.m} \quad \text{ومنه:}$$

9- آخر احتمال لتشكيل ميكانيكية انهيار مركبة ناتجة عن جمع (11) و (1) كما هو مبين في الشكل (6-19):

$$\begin{array}{rcl}
 8 M_p \theta & = & 105 \theta \quad \text{من الميكانيكية (11)} \\
 4 M_p \theta & & 40 \theta \quad \text{من الميكانيكية (1)} \\
 - 2 M_p \theta & & \text{إلغاء مفصلين لدنين نتيجة الجمع} \\
 \hline
 10 M_p \theta & & 145 \theta
 \end{array}$$

$$M_p = \frac{145}{10} = 14.5 \text{ t.m} \quad \text{ومنه:}$$



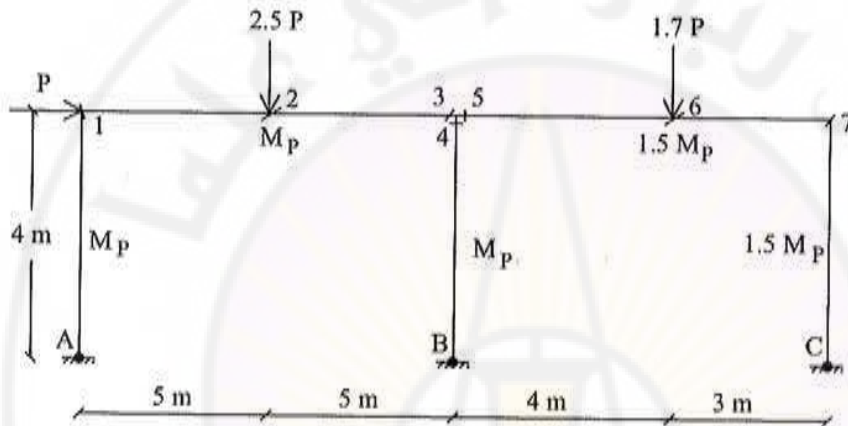
الشكل (6-19)

وتؤخذ قيمة العزم اللدن المطلوب أكبر عزم تم الحصول عليه من القيم السابقة وهو $M_p = 14.5 \text{ t.m}$ ونترك للقارئ محاولة لرسم مخطط عزوم الانعطاف اللدنة (الحدية) حسب ميكانيكية الانهيار الحقيقية (الميكانيكية الأخيرة).

مثال (3-6):

يطلب باستخدام طريقة التحليل اللدن إيجاد الحمولة الحدية P الموافقة لميكانيكية انهيار الإطار المبين في الشكل (20-6)، علماً بأن قيمة العزم اللدن لعناصر الإطار $M_p = 10 \text{ t.m}$.

الحل:



الشكل (6-20)

نلاحظ أن درجة عدم التقرير السكوني للمنشأ (J) هي (3) وكذلك عدد النقاط الصالحة لكي تكون مفاصل لدنة هو (7) ومنه يكون عدد الميكانيكيات الأساسية (M) هو:

$$M = H - J = 7 - 3 = 4$$

ومن شكل المنشأ والحمولات التي يخضع لها نلاحظ أن الميكانيكيات الأساسية تتألف من:

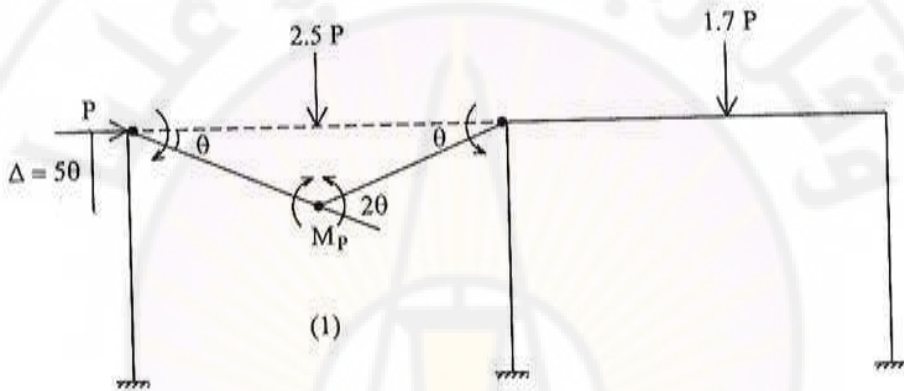
ميكانيكية جاذز عدد (2)

ميكانيكية انزياح جانبي عدد (1)

ميكانيكية العقدة الداخلية عدد (1)

1- تحليل ميكانيكية الجاذز الأيسر:

باتباع طريقة العمل الوهمي نكتب:



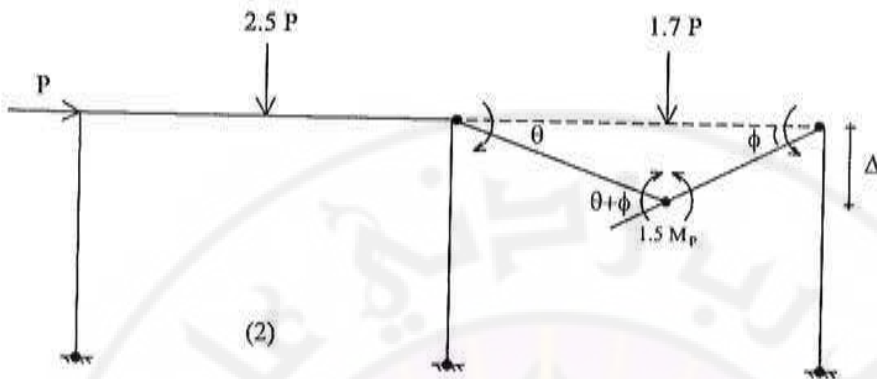
$$W_i = W_e$$

$$M_p (\theta + 2\theta + \theta) = 2.5P * 50$$

$$P = 3.2 t$$

ومنه

2- تحليل ميكانيكية الجانز الأيمن:



$$1.5 M_p * 2\theta + 1.5 M_p * 2\phi = 1.7 P * 4\theta$$

$$\Delta = 4\theta = 3\phi$$

$$\phi = \frac{4}{3}\theta$$

ومنه

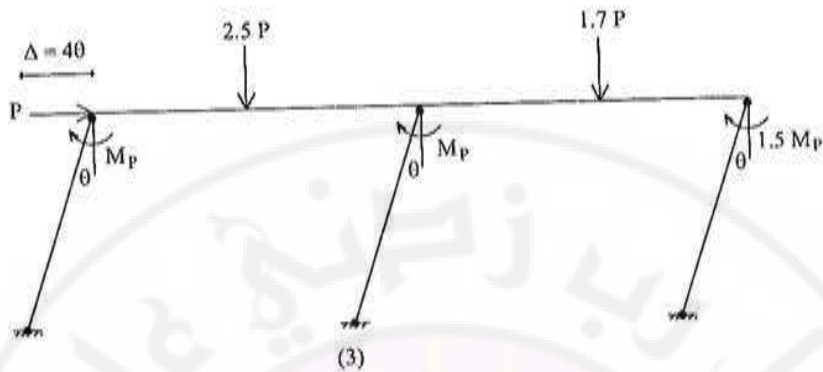
وبالتبديل تأخذ العلاقة السابقة الشكل:

$$M_p \left(3\theta + \frac{12}{3}\theta \right) = 1.7 P * 4\theta$$

$$P = 10.29 t$$

ومنه:

3- تحليل ميكانيكية الميل الجانبي:



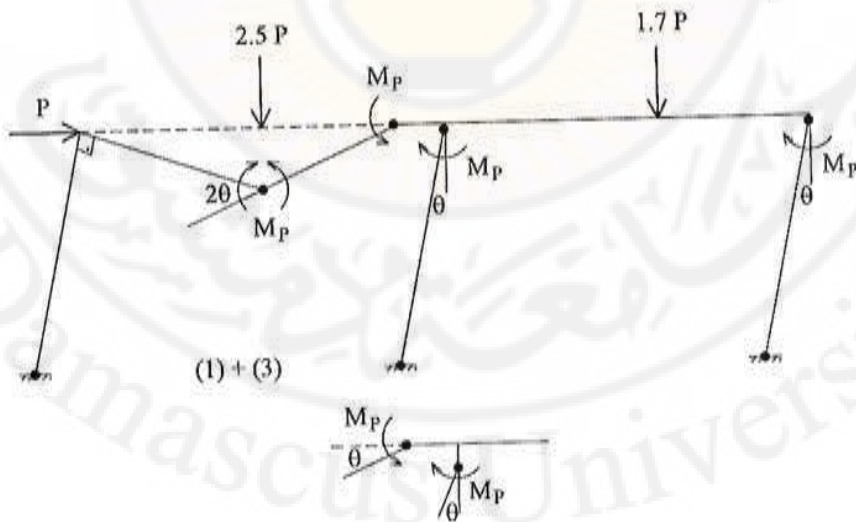
$$w_i = w_o$$

$$M_p \theta + M_p \theta + 1.5 M_p \theta = P * 40$$

$$P = 8.75 t$$

ومنه:

نقوم بتركيب الميكانيكيتين (1) و (3) فنحصل على ميكانيكية مركبة مبينة في الشكل التالي:



$$4M_p \theta = 12.5P\theta \quad \text{من الميكانيكية (1)}$$

$$3.5M_p \theta = 4P\theta \quad \text{من الميكانيكية (3)}$$

$$\frac{-2M_p \theta}{5.5M_p \theta} = \frac{4P\theta}{16.5P\theta} \quad \text{إلغاء مفصلين}$$

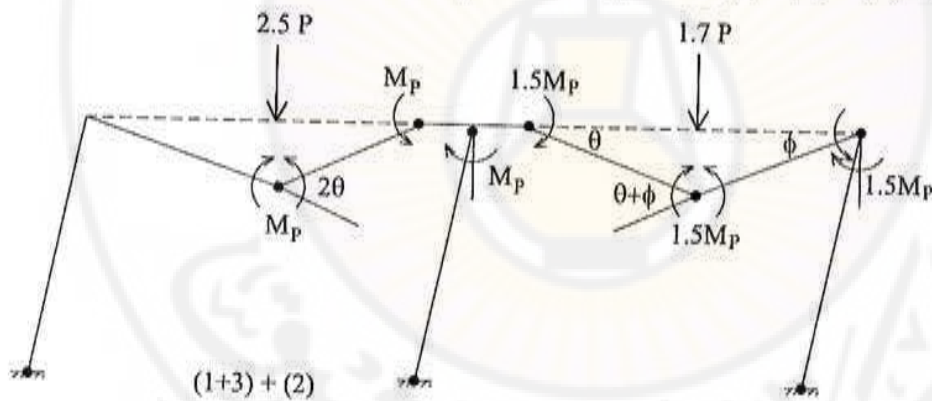
$$5.5M_p \theta = 16.5P\theta \quad \text{المجموع}$$

$$P = 3.33t \quad \text{ومنه:}$$

من دراسة توازن العقدة المتوسطة في الميكانيكية السابقة نجد أن العقدة متوازنة لأن:

$$\sum M_i = -M_p + M_p = 0$$

إذا أجرينا إضافة الميكانيكية (2) إلى الميكانيكية المركبة السابقة نحصل على ميكانيكية مركبة جديدة كما في الشكل التالي:



$$5.5M_p \theta = 16.5P\theta \quad \text{من الميكانيكية (3+1)}$$

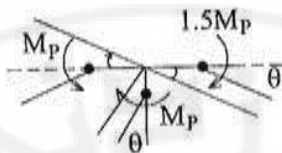
$$\frac{7M_p \theta}{12.5M_p \theta} = \frac{6.8P\theta}{23.3P\theta} \quad \text{من الميكانيكية (2)}$$

$$12.5M_p \theta = 23.3P\theta \quad \text{المجموع}$$

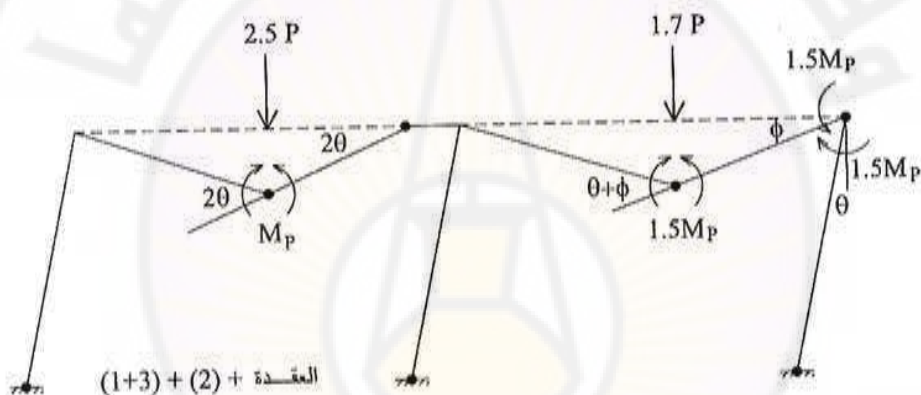
$$P = 5.36t \quad \text{ومنه:}$$

إذا درسنا العقدة المتوسطة في الميكانيكية السابقة نجد أن العقدة غير متوازنة
لذا يمكن دراستها كميكانيكية مستقلة:

$$\sum M_i = -M_p + M_p - 1.5 M_p = -1.5 M_p$$



وعليه يمكن تشكيل ميكانيكية مركبة جديدة من الميكانيكية السابقة (2) +
(1+3) وميكانيكية العقدة لتصبح كما في الشكل التالي:



من الميكانيكية المركبة (2) + (3+1) لدينا:

$$12.5 M_p \theta = 23.3 P \theta$$

من ميكانيكية العقدة لدينا:

$$-1.5 M_p \theta$$

$$11 M_p \theta$$

$$23.3 P \theta$$

المجموع

$$P = 4.72 t$$

ومنه نجد:

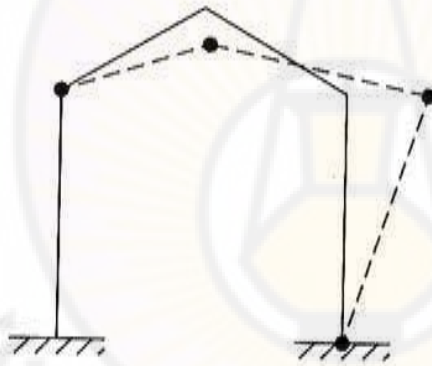
أخيراً نختار أصغر قيمة للحمولة الحدية P من القيم السابقة وهي $P = 3.2 t$
وهي تمثل ميكانيكية الجائز الأيسر والتي تعطي عم لادن لعناصر الإطار

$$M_p = 10 t.m$$

5-6- الإطارات السنمية أو الإطارات ذات العناصر المائلة:

من دراسة الإطارات بطريقة التحليل اللدن تبين وجود ثلاثة نماذج من الميكانيكيات المستقلة وهي الجائزي، الانزياح الجانبي والعقدي. أما في حالة الإطارات السنمية يظهر نموذج رابع من الميكانيزمات المستقلة وهو نموذج مميز لهذا النوع من الإطارات ويدعي الميكانيزم الإطاري. يوافق هذا الميكانيزم تباعد قمم القوائم الرأسية بالنسبة لنقاط استنادها السفلية، شكل (21-6).

ويمكن ملاحظة أن اختيار هذه الميكانيزمات كفي تماماً، والشرط الوحيد الذي يجب احترامه في الاختيار هو كون هذه الميكانيزمات مستقلة عن بعضها البعض.



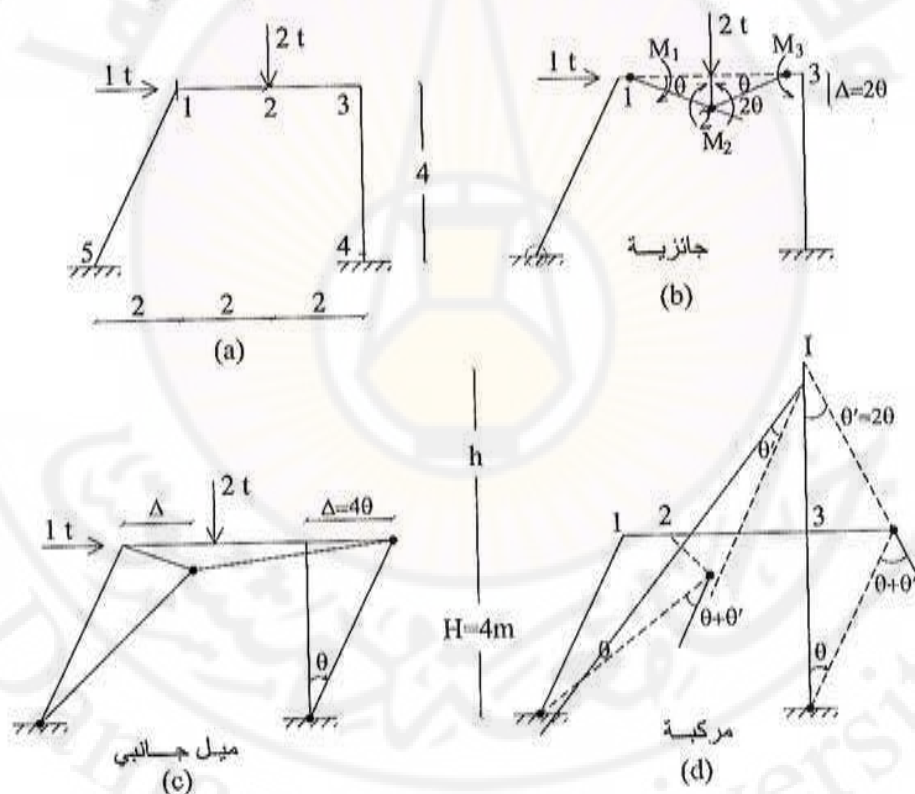
الشكل (21-6)

إنه لمن الواضح تماماً أن طريقة تجميع الميكانيزمات البسيطة ليست طريقة آلية، إذ إنها تتطلب بعض المهارة في اكتشاف التشكيلات المفضلة. ويبدو ممكناً اكتساب هذه المهارة بسرعة وذلك بفضل قليل من التدريب. ونعتقد أنه لا يمكن تعلم هذه الطريقة إلا بالتدريب الفعال على حل المسائل التطبيقية الحقيقية.

عند دراسة الإطارات ذات السطوح (الأسقف) المائلة كما في الشكل (6-21) فإن حساب العلاقة الهندسية للانتقالات باتجاه الحملات الناتجة عن حركة المنشأ خلال عمل وتحرك الميكانيزم قد تصبح أمراً صعباً ومملاً. في مثل هذه الحالات فإن حركة المنشأ وعناصره يمكن أن تعين باستعمال إحدى طرق الميكانيك الأساسية والتي تدعى «المراكز اللحظية أو الآنية».

مثال (4-6):

احسب العزم اللازم للإطار المبين في الشكل (a-6-22) بناءً على الميكانيزم الموضح في الشكل (d, 6-22)، واحسب العزم الحاصل في المقطع 1.



الشكل (6-22)

الحل: تحسب عدد الميكانيكيات المستقلة.

من العلاقة $M = H - K$ حيث:

$H = 4$ عدد النقاط الصالحة كمواقع لمفاصل لدنة، $k = 2$ عدد درجات عدم التقرير الستاتيكية وبالتالي فإن $M = 4 - 2 = 2$ (ميكانيكية جازية وميكانيكية انزياح جانبي).

يحسب موقع المركز الآني للإطار بالنسبة والتناسب حيث:

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{4 + h} \Rightarrow h = 2 \text{ m}$$

$$\Delta = 4\theta = 2\theta' \Rightarrow \theta' = 2\theta$$

الانتقال الأفقي لنقطة تطبيق القوة $1t$ يساوي 4θ .

الانتقال الشاقولي لنقطة تطبيق القوة $2t$ يساوي البعد الأفقي للنقطة 2 عن المركز الآني للإطار I مضروباً بـ $\theta' = 2\theta$ أي $2 \cdot 2\theta = 4\theta$.

عمل القوى الخارجية لميكانيكة الانهيار المركبة شكل (d, 6-22):

$$w_e = 1 \cdot 4\theta + 2 \cdot 4\theta = 12\theta$$

عمل القوى الداخلية لآلية الانهيار المركبة شكل (d, 6-22):

$$w_i = 2M_p(\theta + 2\theta) + M_p\theta = 7M_p\theta$$

ومن تساوي عملي القوى الخارجية مع الداخلية ينتج:

$$w_e = w_i \Rightarrow M_p = 1.714 \text{ t.m}$$

وللتحقق من شرط اللدونة في المقطع 1 نكتب معادلة العمل لميكانيزم وهمي يحوي المقطع المذكور وليكن الميكانيزم الجائزي المبين في الشكل (b, 6-22):

$$-M_1 \cdot \theta + 2M_2 \cdot \theta - M_3 \cdot \theta = 2 \cdot 2\theta$$

وبحذف θ من الطرفين نجد:

$$-M_1 + 2M_2 - M_3 = 4$$

ولكن لدينا:

$$M_2 = M_p = 1.714 \text{ t.m}, \quad M_3 = -M_p = -1.714 \text{ t.m}$$

وبالتعويض بالعلاقة الأخيرة نجد:

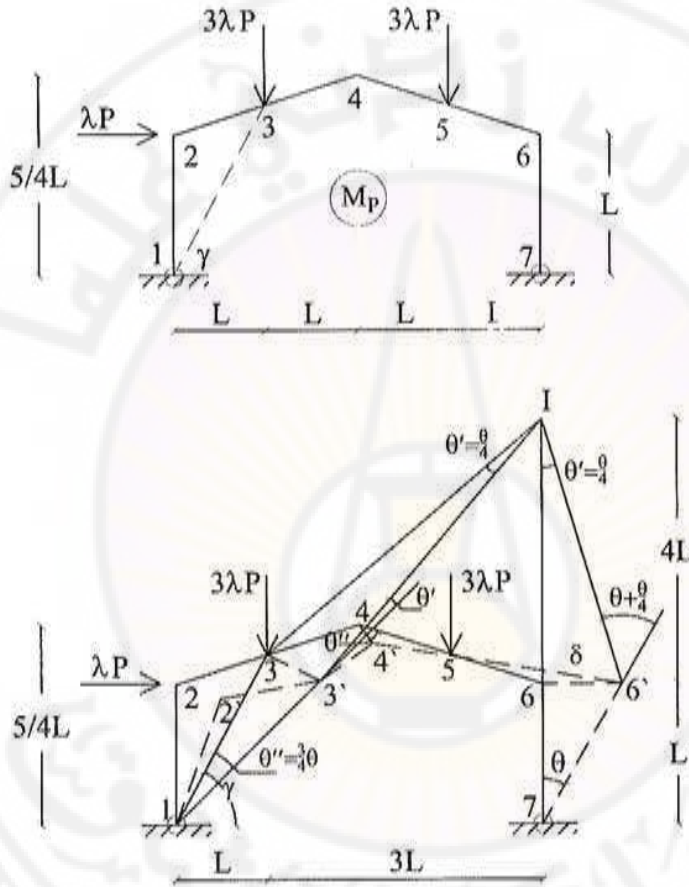
$$-M_1 = 4 - 3(1.714) = -1.142 \text{ t.m}$$

$$M_1 = 1.142 \text{ t.m} < M_p = 1.714 \text{ t.m}$$

فشرط اللدونة محقق والميكانيزم (d) هو الميكانيزم الحقيقي للانهييار.

مثال (5-6):

احسب عامل الحمولة للإطار السنمي المبين في الشكل (6-23) من أجل الميكانيزم شكل (6-23، ب) وتحقق من أنه ميكانيزم الانهيار الحقيقي.



الشكل (6-23)

الحل:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{5}{4}L}{L} = \frac{\overline{I_7}}{4L}$$

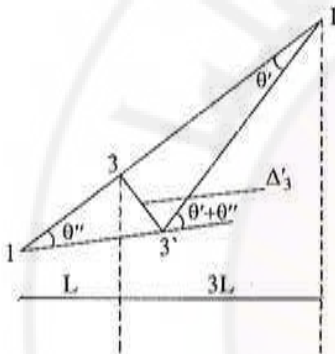
$$\overline{I_7} = 5L$$

نفرض أن النقطة 6 قد تحركت أفقياً بمقدار δ وأن المفصل 7 قد دار بزاوية قيمتها θ ، فيكون لدينا:

$$\delta = \theta \cdot L$$

الزاوية التي يدور بها الجزء 3456 هي:

$$\theta' = \frac{\delta}{4L} = \frac{\theta L}{4L} = \frac{\theta}{4}$$



- الانتقال الرأسي للنقطة 3 (محسوباً اعتباراً من I) هو:

$$\Delta'_3 = \theta' \cdot 3L = \frac{\theta}{4} \cdot 3L = \frac{3}{4}L\theta$$

حيث: $3L$ البعد الأفقي لـ 3 عن I.

- الانتقال الرأسي للنقطة 3 (محسوباً اعتباراً من 1) هو:

$$L \cdot \theta'' = \frac{4}{3}L\theta \Rightarrow \theta'' = \frac{4}{3}\theta$$

حيث: L بعد النقطة 3 الأفقي عن 1.

- الدوران ضمن المفصل 6:

$$\theta + \frac{\theta}{4} = \frac{5}{4}\theta$$

- الدوران ضمن المفصل 3:

$$\theta'' + \theta' = \frac{3}{4}\theta + \frac{1}{4}\theta = \theta$$

- الانتقال الرأسي للمفصل 3:

$$L\theta'' = 3L\theta'$$

$$L \cdot \frac{3}{4}\theta = 3L \cdot \frac{\theta}{4} = \frac{3}{4}\theta L$$

حيث:

$$L \cdot \frac{3}{4}\theta : \text{من دوران المفصل 1.}$$

$$3L \cdot \frac{\theta}{4} : \text{من دوران I.}$$

- الانتقال الرأسي للمقطع 2:

$$L(\theta'') = L \cdot \frac{3}{4}\theta$$

حيث: L البعد الشاقولي للنقطة 2 بالنسبة لـ 1.

عمل القوى الخارجية:

$$w_e = \lambda \left[\frac{3}{4}\theta L \cdot P + \frac{3}{4}\theta L \cdot (3P) + \frac{1}{4}\theta L \cdot (3P) \right]$$

حيث:

$$\Delta_2 = \frac{3}{4} \theta L \text{ الأفقية.}$$

$$\Delta_3 = \frac{3}{4} \theta L \text{ شاقولي.}$$

عمل القوى الداخلية:

$$w_i = M_p (\theta' + \theta'') + M_p (\theta + \theta') = M_p \left(\frac{5}{4} \theta + \theta \right)$$

حيث:

$$\theta = \theta' + \theta''$$

$$\frac{5}{4} \theta = \theta + \theta'$$

وبمساواة العاملين نجد:

$$M_p = \frac{5}{3} \lambda PL \Rightarrow \lambda = \frac{3 M_p}{5 PL}$$

وللتحقق من أن الميكانيزم السابق هو ميكانيزم الانهيار الحقيقي يجب أن نتأكد من أن قيم عزوم الانعطاف في أي مقطع من المنشأ هي أصغر من قيمة M_p لذا يجب رسم مخطط عزم الانعطاف للإطار.

نبدأ هذه الخطوة بحساب ردود الأفعال الطرفية بناءً على معرفة قيمة العزم في مقطعين هما المقطع 3 والمقطع 6 حيث: $M_6 = M_p$.

تحتسب قيمة رد الفعل H_7 من حساب العزوم حول المفصل اللدن 6 للجزء 67:

$$\sum M_6' = 0 ; H_7 \cdot L = M_p = \frac{5}{3} \lambda PL$$

$$H_7 = \frac{5}{3} \lambda P \quad \text{ومنّه:}$$

ومن توازن القوى الخارجية باتجاه المحور الأفقي نجد:

$$\sum x_i = 0 \quad ; \quad H_1 + \lambda P - H_7 = 0$$

$$H_1 = \frac{5}{3} \lambda P - \lambda P = \frac{2}{3} \lambda P \quad \text{ومنّه:}$$

حيث تكون H_1 متجهة من الشمال نحو اليمين شكل (24-6, ب):

ومن معادلة توازن القوى الخارجية باتجاه المحور الشاقولي نكتب:

$$\sum y_i = 0 \quad ; \quad v_1 + v_7 = 6 \lambda P$$

ومن معادلة توازن العزوم حول المفصل 1 نجد:

$$\lambda [PL + 3PL + 3P(3L)] - v_7 \cdot 4L = 0$$

ومن الحل المشترك للمعادلتين الأخيرتين نجد:

$$v_1 = \frac{11}{4} \lambda P \quad ; \quad v_7 = \frac{13}{4} \lambda P$$

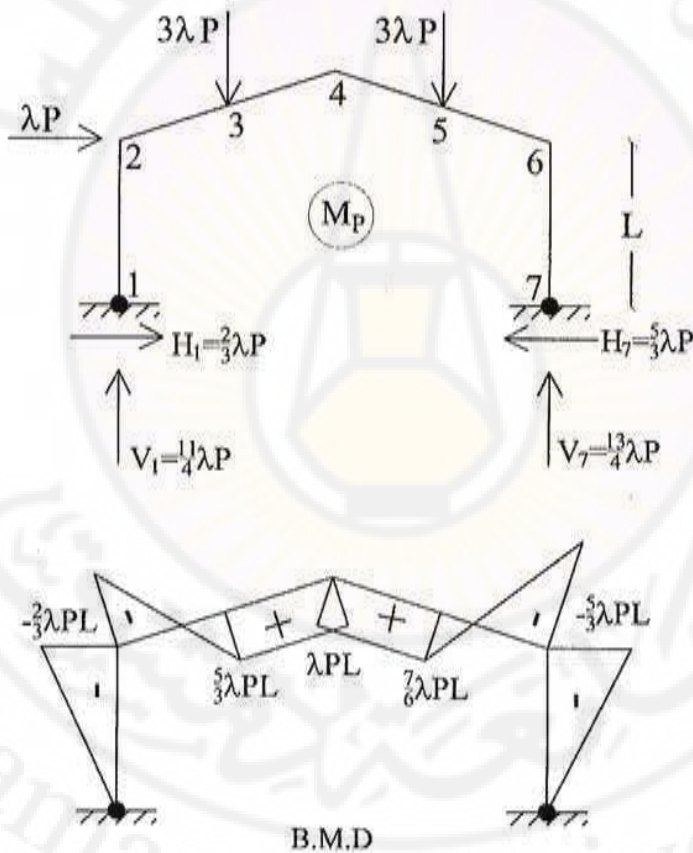
تحتسب بقية قيم العزوم المجهولة بأخذ معادلات توازن للعزوم كالاتي:

$$\sum M'_5 = 0 \quad ; \quad M_5 = \frac{13}{4} \lambda PL - \frac{5}{3} \lambda P \left(L + \frac{L}{4} \right)$$

$$\sum M'_4 = 0 ; M_4 = \frac{13}{4} \lambda P \cdot 2L - \frac{5}{3} \lambda P \left(L + \frac{L}{2} \right) - 3 \lambda PL$$

$$\sum M_2^L = 0 ; M_2 = -\frac{2}{3} \lambda PL$$

وهكذا نجد أن شرط العزم محقق في جميع مقاطع الإطار المختلفة. وبناء على القيم السابقة لعزوم الانعطاف نرسم المخطط النهائي لعزم الانعطاف كما هو مبين في الشكل (6-24 ب).



الشكل (6-24)

6-6- العوامل المؤثرة على عزم اللدونة:

إن نظرية اللدونة التي تم شرحها بشكل مبسط سابقاً مبنية على مفهوم المفصل اللدن الذي تعتبر بموجبه الدورانات النسبية غير متناهية في الكبر، وأنها تحصل لجزأين من عنصر إنشائي عندما يصل عزم الانعطاف في المقطع الذي يفصل هذين الجزأين إلى قيمة تدعى عزم اللدونة وتعطى بالعلاقة:

$$M_p = Z_p \cdot f_y \quad (6-2)$$

أي أن عزم لدونة أي مقطع ثابت يعتمد على عامل المقطع اللدن Z_p وعلى قيمة حد السيلائن الأدنى للفلواز $f_y = \sigma_T$.
حيث:

f_y : حد الخضوع للفلواز المطاوع (حد المرونة الظاهري الأدنى).

Z_p : معامل اللدونة الذي يعتمد على شكل المقطع فقط.

إن الشرط الأساسي الذي يصبح بموجبه مفهوم عزم اللدونة واقعياً هو أن يسلك المعدن بشكل مطاوع حتى لحظة حصول حمل الانهيار. فإن العلاقة (6-2) قد بنيت على فرض أن الجائز يخضع لعزم انعطاف صاف وهذا غير صحيح في الحياة العملية. وبما أن Z_p يعتمد فقط على الأبعاد الهندسية للمقطع وهذا ثابت، فتكون قيمة حد الخضوع هي التي يمكن أن تحدث أي تغييرات على قيمة عزم اللدانة M_p والعوامل التي تؤثر في قيمة حد الخضوع f_y هي:

أ- معدل سرعة التحميل.

ب- درجة الحرارة عند إجراء تجربة الشد.

ج- عمر التحميل.

د- سماكة المادة.

ولقد بيّنت الدراسات النظرية والتجريبية إن التغيرات على قيمة عزم اللدانة الناتجة عن العوامل المذكورة أعلاه تكون صغيرة نسبياً ويمكننا إهمالها.

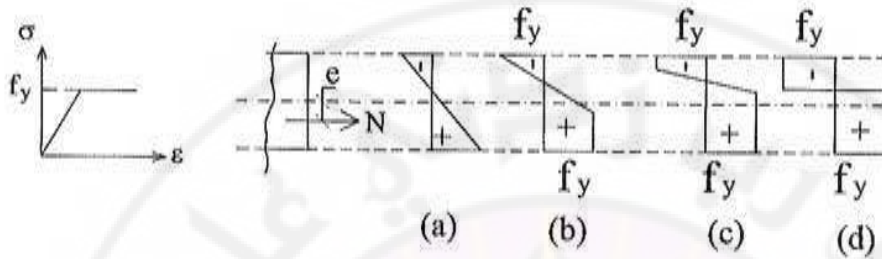
لقد تم تطبيق العلاقة (2-6) سابقاً على جيزان تخضع لعزوم انعطاف عند أي مقطع غالباً ما يرافقها قوى ناظمية N أو قوى قاصة Q أو كليهما. إن تأثير قوى القص (حتى مع قوى ناظمية صغيرة في الإطارات) على العزم اللدن M_p يمكن إهماله والتشوهات صغيرة بشكل كاف بحيث يمكن صياغة حالات ومعادلات التوازن على المنشأ غير المشوه. وعدم الاستقرار لن يحدث في المنشأ قبل الوصول إلى حمولة الانهيار. ونتيجة لوجود هذه القوى مع عزم الانعطاف يحدث انخفاض في قيمة عزم اللدونة M_p .

وبناءً على ذلك يجب أن نناقش آثار هذه القوى على قيمة عزم اللدونة. وعند وجود هذه القوى مع عزم الانعطاف فإن المحور السليم ينتقل في حالة اللدونة مما يؤدي إلى تخفيض قيمة عزم اللدانة نتيجة لذلك، وسندرس هنا تأثير كل قوة في قيمة عزم اللدانة على حدة.

6-6-1- تأثير القوى الناظمية على قيمة العزم اللدن : Effect of axial force

لنعتبر أن لدينا جائزاً ذا مستوي واحد على الأقل للتناظر في مقطعه، وأن مادته تتبع السلوك المرن - اللدن الذي يعبر عنه الشكل (25-6 أ). ولنفرض أنه يخضع لانهطاف مركب في مستوي تناظر مقطعه.

عند تزايد قيمة قوة الشد غير المحورية تدريجياً، فإن مخطط توزع الإجهادات
الناظرية على طول المقطع يمكن توضيحه وفق المراحل التالية على الشكل
(6-25 ب):



الشكل (6-25) توزع الإجهادات في مراحل الخضوع المتعددة
لعنصر معرض لعزم انعطاف وقوة محورية

أ- توزع مرن (شكل a, 6-25).

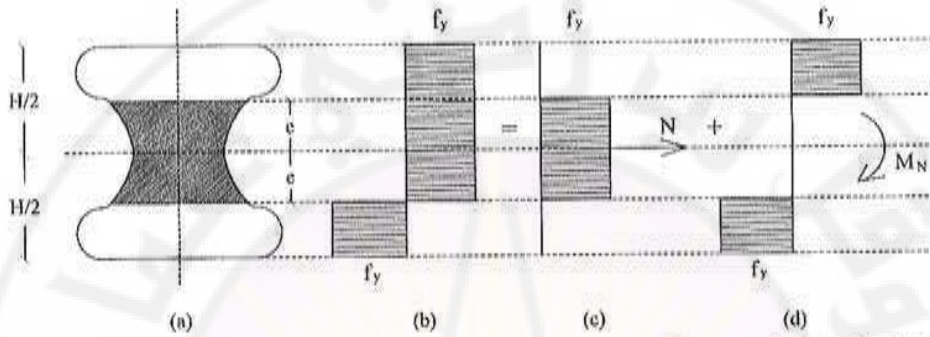
ب- توزع مرن - لدن حيث تتلدن إحدى جهتي المقطع بالنسبة للمحور المحايد
(شكل b, 6-25).

ج- توزع مرن - لدن مع وجود تلدن في جهتي المقطع كليهما (شكل c, 6-25).

د- وصول الإجهادات المستوى الحدي (شكل d, 6-25)، حيث يتألف مخطط
الإجهادات النازمية من مستطيلين غير متساويين يقع كل منهما في إحدى
جهتي المحور المحايد.

فمن أجل قيمة معينة للقوة النازمية N وانحراف مركزي e يمكن البرهان
على أن التقوس يسعى إلى اللانهاية في الوقت الذي يسعى فيه العزم إلى قيمة
حدية نرسم لها ب M وتشخص من المخطط (d, 6-25).

وسنناقش آنفاً أثر القوى الناعمية على قيمة هذا العزم الحدي مكتفين باعتبار أن لمقطع الجائز محوري تناظر ومعرضاً لعزم انعطاف M_N وقوة ناعمية N . فإذا فرضنا أن المقطع العرضي متلدن بكامله نحصل على توزع للإجهادات الناعمية ثنائي المستطيلات شكل (6-26)، حيث يقع المحور المحايد (السليم) على بعد e من مركز ثقل المقطع.



الشكل (6-26) تقسيم مخطط توزع الإجهادات إلى جزء يقاوم القوة المحورية وجزء يقاوم العزم

ولحساب القوة الناعمية وعزم الانعطاف يقسم مخطط الإجهادات إلى ثلاثة مناطق، المنطقة المركزية وترتبط بالقوة المحورية N ، والمنطقتان الخارجيتان وترتبطان بعزم الانعطاف M_N ، إن الجزء الأول يتوضع في المنطقة المركزية بشكل متناظر بالنسبة للمحور المحايد، ويبلغ عمقه $2e$ ، وتعمل محصلته على حفظ التوازن مع القوة الناعمية N . والجزء الثاني في خارج المنطقة المركزية له محصلة معدومة وهو يوازن العزم اللدن المعدل M_N ، وعليه فإن قيمة عزم اللدانة الكلي (M_P) قد انخفض بمقدار عزم لدانة الجزء المركزي من المقطع ذي الارتفاع $(2e)$.

وإذا رمزنا لقيمة مساحة المنطقة المركزية من المقطع بـ (A_c) فتكون:

$$N = A_c \cdot f_y \quad (6-3)$$

وعلى افتراض أن M_p هي عزم لدانة المقطع بغياب القوة N و $(M_p)_e$. فتكون قيمة عزم لدانة المنطقة المركزية من المقطع:

$$M_N = M_p - (M_p)_e \quad (6-4)$$

فإذا أعطيت قيمة القوة النازمية N أمكن حساب A_e من الصيغة (6-3) ومن ثم حساب $(M_p)_e$ الذي يمثل الفاقد في قيمة العزم المقاوم للشدن للمقطع. أما في حالة وجود قوة نازمية بحتة على المقطع أي في حال غياب عزم الانعطاف فإن قيمة (N_p) التي تجعل كل المقطع لدناً بشكل تام سواء كانت ضاغطة أم شادة وتسمى الدفع اللدن الكلي $fully\ plastic\ thrust$ هي:

$$N_p = A \cdot f_y \quad (6-5)$$

وبأخذ العلاقة (6-3) بالحسبان يمكن أن نكتب:

$$\frac{N}{N_p} = \frac{A_e}{A} \quad (6-6)$$

وإذا أشير بـ Z_p و $(Z_p)_e$ إلى معامل اللدونة للمقطع التام ومعامل اللدونة للجزء المركزي منه - أي المقطع ذي الارتفاع $2c$ - على التوالي، يكون لدينا:

$$M_p = Z_p \cdot F_y \quad ; \quad (M_p)_e = (Z_p)_e \cdot F_y \quad (6-7)$$

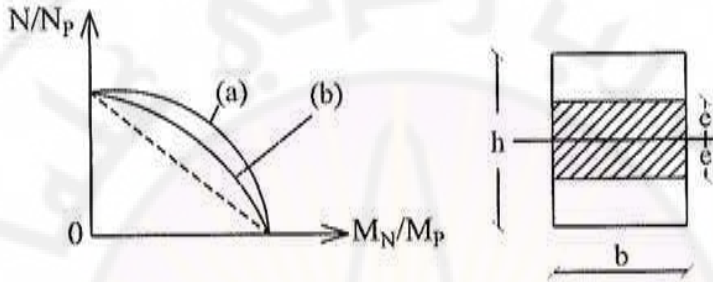
وبتقسيم المعادلة (6-4) على M_p مع اعتبار العلاقة (6-7) نحصل على:

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \frac{(Z_p)_e}{Z_p} \quad (6-8)$$

أ- حالة المقطع المستطيل:

على فرض أن للمقطع المستطيل شكل (6-27) ارتفاعاً مقداره h وعرضاً مقداره b وأن المقطع معطوفاً حول محور التناظر الموازي للعرض b ، حيث لدينا في هذه الحالة:

$$Z_p = \frac{b h^2}{4} \quad , \quad Z_e = b e^2$$



الشكل (6-26) التمثيل البياني لمعادلة التأثير المتبادل

وبالعودة إلى العلاقة (6-7) نجد:

$$\frac{N}{N_p} = \frac{2e \cdot b \cdot f_y}{b h \cdot f_y} = \frac{2e}{h}$$

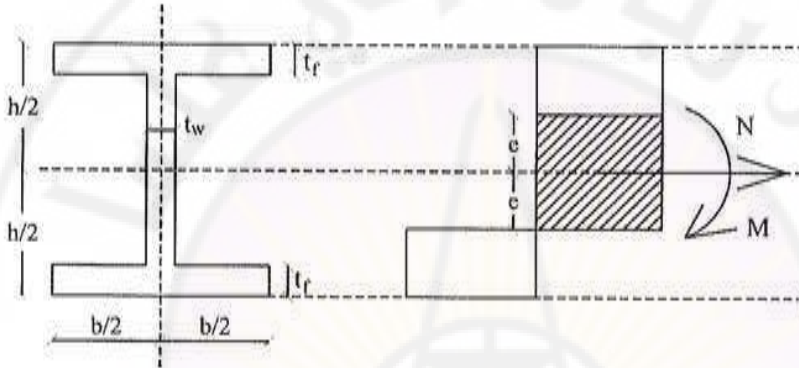
وكذلك من العلاقة (8-5) السابقة يمكن أن نحصل على الآتي:

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \frac{4e^2}{h^2} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \quad (6-9)$$

تم تمثيل المعادلة (6-9) في جملة إحداثيات نظامية محورها $\left(\frac{M}{M_p}, \frac{N}{N_p} \right)$ والمخطط الناتج هو المخطط الشكل (a, 6-28) الذي يمثل مقطعاً مكافئاً على المحور الأفقي.

ب- حالة المقطع بشكل (I):

لنعتبر المقطع I شكل (6-28) الذي تبلغ مساحة مقطعه العرضي الكلية A ، ولنعتبر أنه يتشكل من ثلاثة أجزاء مستطيلة، وعلى افتراض أن المقطع معرض لقوة ناظمية (N) وعزم انعطاف حول محور التناظر الأفقي الموازي للعرض (b) كما في الشكل (6-28) يمكن بسهولة تمييز حالتين عند إيجاد قيمة M_N لهذا المقطع وذلك حسب قيمة N :



الشكل (6-28)

1- المحور السليم للمقطع يقع ضمن الجسد كما هي موضحة في الشكل:
وبالتعويض بالمعادلة (6-5) نجد:

$$\frac{N}{N_p} = \frac{2et_w}{A} \quad (6-10)$$

حيث:

t_w - ثخانة الجسد.

A_w - مساحة الجسد.

إن العلاقة (6-10) محققة دائماً طالما أن: $\frac{N}{N_p} < \frac{A_w}{A}$

ويمكن بسهولة أن نجد قيمة كل من $(Z_p)_e$ و Z_p على التوالي:

$$(Z_p)_e = t_w \cdot e^2$$

$$Z_p = \frac{1}{2} A_f (h - t_f) + \frac{1}{4} A_w \cdot (h - 2t_f)$$

حيث:

t_f : ثخانة الجناح.

A_f : مساحة الجناحين.

وعليه بالتعويض في المعادلة (9-5) نجد أن:

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \frac{t_w \cdot e^2}{\frac{1}{2} A_f (h - t_f) + \frac{1}{4} A_w \cdot (h - 2t_f)} \quad (6-11)$$

وبالتعويض عن (c) بين المعادلتين (6-10) و (6-11) نحصل على التالي:

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{A_f}{A} \right)^2 \left(1 - \frac{t_w}{b} \right)} \right]$$

2- المحور السليم للمقطع يقع ضمن الجناح.

وبخطوات مشابهة للحالة السابقة نحصل على العلاقة:

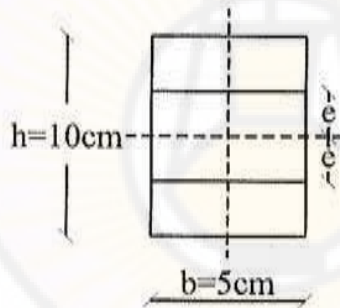
$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \left[\frac{\left(\frac{N}{N_p} \right)^2 - \left(1 - \frac{t_w}{b} \right) \left(\frac{N}{N_p} - \frac{A_w}{A} \right)^2}{1 - \left(\frac{A_f}{A} \right)^2 \left(1 - \frac{t_w}{b} \right)} \right]$$

وهذه العلاقة صحيحة إذا تحقق الشرط الموافق لها: $\frac{A_w}{A} \leq \frac{N}{N_p} \leq 1$

مثال (5-6):

أوجد للمقطع المستطيل المبين في الشكل (6-29) قيمة عزم اللدانة الحقيقية علماً بأن المقطع معرض لقوة ناظرية مقدارها $N = 40t$ وأن حد الخضوع لل فولاذ الإنشائي المكون منه المقطع هو $f_y = 2.4 t/cm^2$.

الحل:



الشكل (6-29)

$$N_p = b \cdot h \cdot f_y = 5 \cdot 10 \cdot 2.4 = 120t$$

$$\frac{N}{N_p} = \frac{2e}{h} = \frac{40}{12} = \frac{2e}{10}$$

$$e = \frac{5}{3} = 1.67 \text{ cm}$$

ومنه نجد أن:

$$\frac{M_N}{M_P} = 1 - \frac{4e^2}{h^2}$$

$$\frac{M_N}{M_P} = 1 - \frac{4 \cdot 1.67^2}{100} = \frac{8}{9}$$

ولكن قيمة عزم اللدانة لمقطع مستطيل.

$$M_P = \frac{bh^2}{4} \cdot f_y = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 100 \cdot 2.4 = 300 \text{ t.cm}$$

$$M_N = 300 \cdot \frac{8}{9} = 260 \text{ t.cm} \quad \text{ومنه:}$$

نلاحظ بشكل عام أن النقص الذي يحصل في قيمة عزم اللدانة M_P ينتج عن وجود للقوى الناعمية بشكل قليل وخاصة في المقاطع بشكل (I). ولا تكون قيمة هذا النقص ذات أهمية كبيرة إلا في بعض المنشآت وخاصة في الأقواس وفي مقاطع أعمدة الطوابق السفلية في المنشآت العالية.

5-6-2- تأثير قوى القص على قيمة عزم اللدانة :Effect of shear force

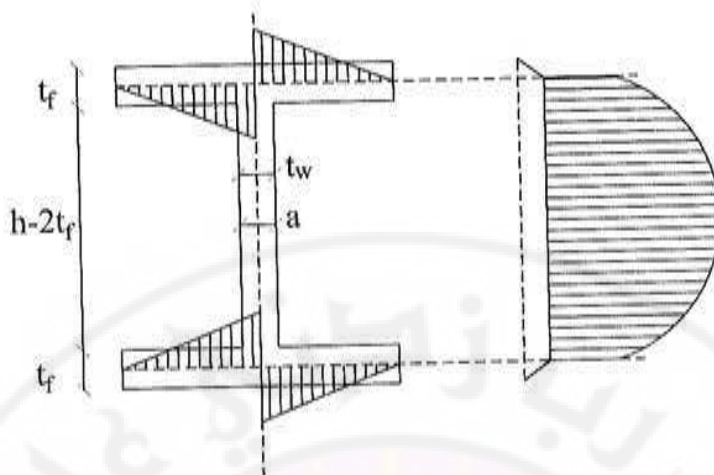
عندما يتعرض جائل ما للانعطاف البسيط فإن عزم الانعطاف يتغير من مقطع إلى آخر، ويرافق هذا العزم قوة قص عرضانية F تمثل مشتق العزم بالنسبة للمحور المنطبق على محور الجائل أي:

$$F = \frac{dM}{dx}$$

ومن المعلوم في نظرية المرونة أن اتجاه الإجهادات المماسية على طول الجسد يكون عامودياً، حيث يأخذ توزيعها شكل قطع مكافئ ذي تقوس ضعيف، وتكون الإجهادات المماسية في الأجنحة ذات اتجاه أفقي وموزعة بالطريقة المبينة في الشكل (6-30). وغالباً ما تكون الإجهادات المماسية العمودية المتولدة في الأجنحة ذات قيم صغيرة يمكن إهمالها دون ارتكاب خطأ يذكر، ولهذا يمكن اعتبار أن الجسد الذي يقاس ما بين مركزي ثقل الجناحين هو القادر على امتصاص كامل القوة المماسية. ويمكننا هذا التقريب من فرض أن الإجهادات المماسية الوسطية (F/A_w) تمثل بشكل مقبول الحالة الإجهادية ذات الطبيعة المماسية في المقطع. يمكن الحصول ضمن هذه الظروف على تقريب مناسب جداً للإجهادات المماسية العظمى باستخدام العلاقة:

$$A_w = t_w \cdot (h - 2t_f) \quad (6-12)$$

$$\tau_{max} = \frac{F}{t_w \cdot (h - 2t_f)}$$



الشكل (6-30)

ويعتبر خط التلدين بشكل عام أعظمية في منطقة اتصال جسد المقطع بجناحه، ويقاس هذا الخط بالاعتماد على الإجهادات المكافئة التي تحسب من معيار هنكس فون مينرس Lecritere de Hencky-Von Mises:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (6-13)$$

وقد سبقت الإشارة إلى أن فرضية برنولي - وهي الفرضية التي تعتبر أن المقاطع التي كانت عمودية على المحور الطولي للجائز قبل التشوه تبقى عمودية على ذلك المحور بعد التشوه - ما زالت معتمدة في التحليل المرن - اللدن، وبناء عليه فإن توزع الإجهادات الناعمية خلال المقطع يأخذ شكل شبه منحرف مع كون $\sigma = f_y$ في النقاط المتلدة.

ولقد أثبتت التجارب العملية بأن أثر القوة المماسية مهملاً تماماً في حالة الجيزان ذات المقاطع المستطيلة التي تبلغ نسبة طولها إلى عمقها قيمة عادية،

كما أن هذا الأثر مهملاً أيضاً في حالة الجيزان ذات المقاطع I ما دامت القوة المماسية F أصغر من المقدار $\frac{\sigma_T A_w}{\sqrt{3}}$ الذي يعبر عن التلدن التام للجسد بكامله.

لو فرضنا أن الجسد يتحمل بشكل رئيسي قوة القص العرضانية، وأن أجنحة المقطع تتحمل بشكل رئيسي عزم الانعطاف، فمن أجل الجسد يمكن أن نكتب:

$$\sigma_e = \sqrt{3} \tau^2 = \sqrt{3} \tau$$

وفي لحظة التلدن التام يكون لدينا من أجل الجسد:

$$\sigma_e = \sigma_T$$

ومنه:

$$\tau = \sigma_T / \sqrt{3}$$

وأقصى قوة مماسية يمكن للجسد تحملها: $\tau \cdot A_w$

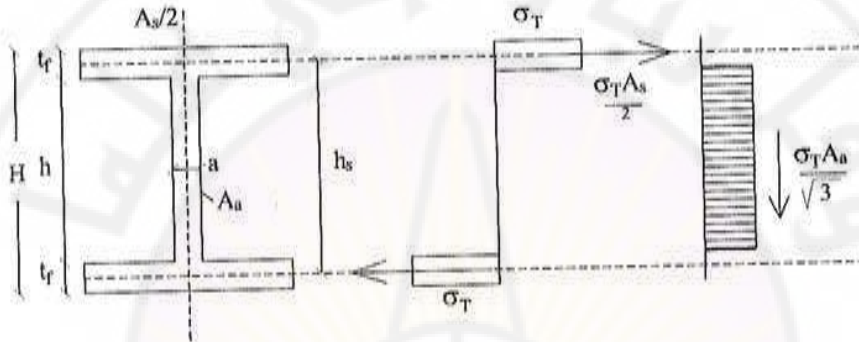
ويجب ألا تتجاوز القوة المماسية الحقيقية قيمة القوة المماسية القصوى التي حسبت أعلاه، أي:

$$F < \sigma_T \cdot A_w / \sqrt{3}$$

ويمكن توضيح أثر القص على عزم اللدونة المقاوم للمقطع من دراسة سلوك جائز ظفري من الشكل I عندما تؤثر عليه قوة مركزة عرضانية تتوضع في نهايته الطليقة.

3-6-5- حالة التلدين التام للجسد:

لنعتبر الجائز الظفري الذي طوله L ، وهو محمل في طرفه الحر بحمولة مركزة قدرها P . إذا كانت النسبة L/h صغيرة جداً يمكن عندئذ أن تمتص أجنحة المقطع عزم الانعطاف بتمامه، ويقع كامل الجسد بحالة اللدونة كما هو مبين في الشكل (6-31).



الشكل (6-31)

لدينا في هذه الحالة:

$$M = M_p - \frac{1}{4} \sigma_T \cdot a h^2 = P \cdot L$$

$$|F| = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} A_w = P$$

ويحذف P من هاتين العلاقتين نحصل على:

$$\frac{L}{h} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\frac{M_p}{M} - 1} \quad (6-14)$$

ولكن لدينا بشكل عام وحسب الرموز المعتمدة في الشكل (5-31):

$$M = \frac{1}{2} \sigma_T A_s \cdot h_s$$

$$M_p = \frac{1}{2} \sigma_T \cdot A_s h_s + \frac{1}{4} \sigma_T \cdot A_a \cdot h_a \quad (6-15)$$

ومنه نستنتج:

$$\frac{M}{M_p} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} A_a h_a / A_s h_s} \quad (6-16)$$

إن هذه النظرية المبسطة تشير إلى أن القوة المماسية لا يمكن أن تتجاوز
أبداً المقدار:

$$F_p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} A_a \quad (6-17)$$

وإذا وصلت قيمتها في مقطع ما من المنشأ إلى قيمة قريبة من القيمة التي
تعطيها العلاقة (6-17)، فإن قيمة عزم اللدونة المقاوم في المقطع تخفّض
بالنسبة التي تعطيها العلاقة (6-16).

5-6-4- العلاقة العامة لتقدير أثر قوة القص:

في الحالة العامة يمكن إعادة كتابة العلاقة (6-15) بشكل جديد:

$$M_p = M_w + M_f$$

حيث:

M_f : العزم المقاوم للشد للأجنحة.

M_w : العزم المقاوم للشد للجسد.

لقد أثبتت الدراسات النظرية والتجريبية التي أجريت على هذه المسألة إلى اعتبار أن قوة القص عند مقطع ما متوازنة مع الإجهادات المماسية الداخلية τ التي تعمل على الجسد فقط. فإذا كانت قوة القص العرضانية F حيث:

$$F = h_a \cdot a \cdot \tau$$

فإن عزم اللدونة المقاوم للمقطع يكتب بالشكل:

$$M_p = M_w \sqrt{1 - 3 \left(\frac{\tau}{\sigma_T} \right)^2} + M_f \quad (6-18)$$

فإذا بلغت τ أقصى قيمة لها وهي $\sigma_T / \sqrt{3}$ يكون الجسد عندئذ متلدناً بشكل كامل، ويكون عزم اللدونة المقاوم للمقطع حسب العلاقة السابقة.

$$M_p = M_f$$

وعلى العكس من ذلك إذا كان $\tau = 0$ فإن:

$$M_p = M_w + M_f$$

وهو عزم اللدونة الإجمالي للمقطع.



المراجع REFERENCES

- 1- التحليل الإنشائي بطرائق المصفوفات وبمعونة الحاسب - د.م. محمد نزيه ايلوش - د.م. أحمد حسن 1990-1991م.
- 2- التحليل الإنشائي للمنشآت - محاضرات أقيمت في كلية الهندسة المدنية بجامعة دمشق - الدكتور المهندس محمد غريب 1992-2011م.
- 3- التحليل اللدن للمنشآت المعدنية - محاضرات أقيمت في كلية الهندسة المدنية بجامعة دمشق - الدكتور المهندس إبراهيم أحمد الجراد 2006-2011م.
- 4- Matrix Analysis of Framed Structures, W. Weaver, Jr. and James M.Gere, D. Van Nostrand Company, 1980.
- 5- Matrix and finite element displacement analysis of Structures, D.J. Dawe, Clarendon Press. Oxford, 1984.
- 6- The Finite Element Method in Engineering, S.S.Rao, Pergamon Press, 1982.
- 7- Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Robert D.Cook, John Wiley & Sons, 1981.
- 8- Matrix analysis of Structures, CE 735 Class notes (Prof. R. S. Sandhu). The Ohio State University, 1985.
- 9- Plastic methods of structural analysis, chompan a Hell LTD, B.G. Neal, 1975.
- 10- Plastic Design of low-Rise Frames, M.R. Horne and L.J. Morris, Granda 1981.



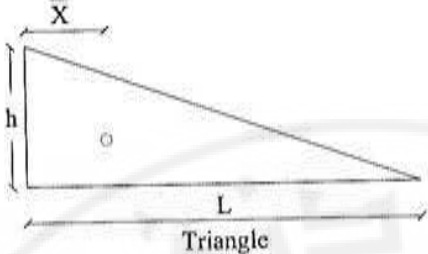
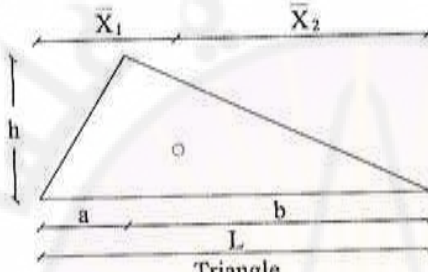
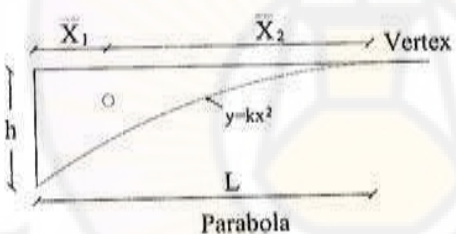
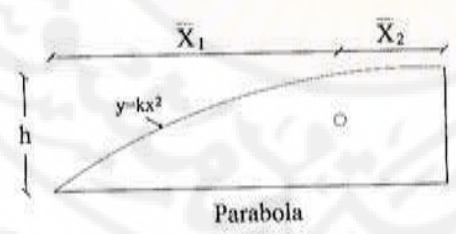
الملحق (أ)

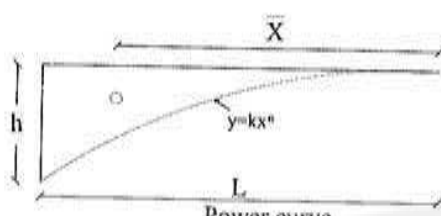
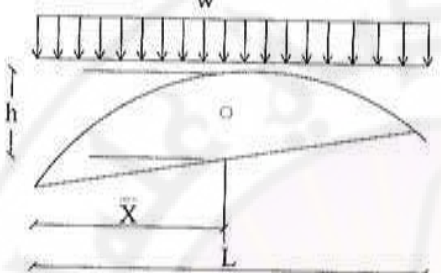
الجدول الخاصة بطريقة مصفوفة الليونة

جامعة دمشق
Damascus University

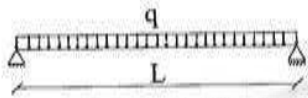
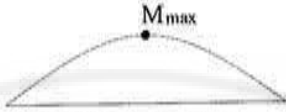
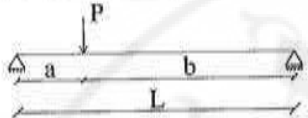
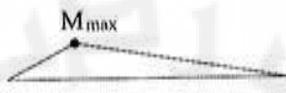
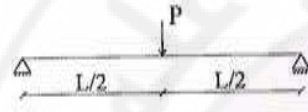
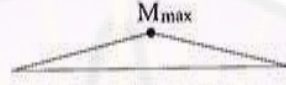
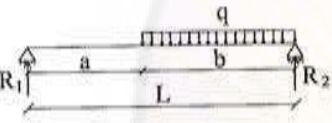
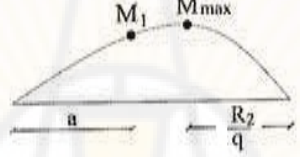
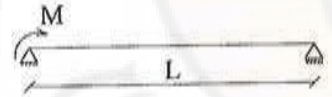
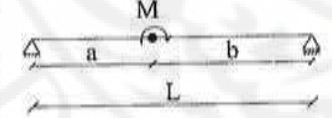
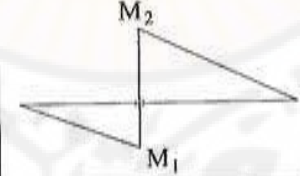


جدول (1-أ) المساحات ومراكز ثقل الأشكال الشهيرة

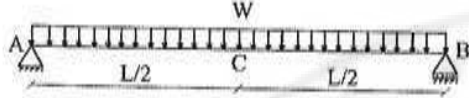
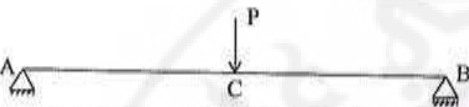
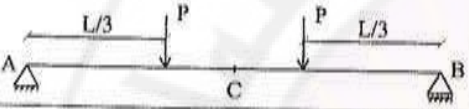
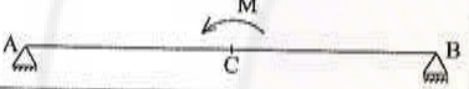
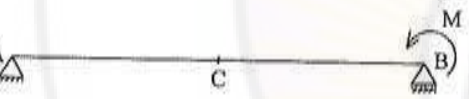
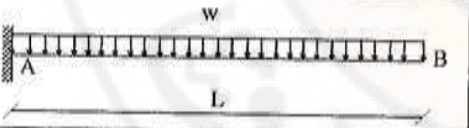
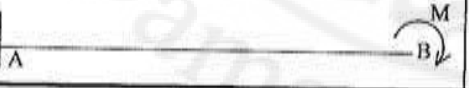
 Triangle	$A = \frac{1}{2} h L$ $\bar{X} = \frac{L}{3}$
 Triangle	$A = \frac{1}{2} h L$ $\bar{X}_1 = \frac{L + a}{3}$ $\bar{X}_2 = \frac{L + b}{3}$
 Parabola	$A = \frac{1}{3} h L$ $\bar{X}_1 = \frac{L}{4}$ $\bar{X}_2 = \frac{3}{4} L$
 Parabola	$A = \frac{2}{3} h L$ $\bar{X}_1 = \frac{5}{8} L$ $\bar{X}_2 = \frac{3}{8} L$

 Power curve	$A = \frac{1}{(n+1)} h L$ $\bar{X} = \frac{(n+1)}{(n+2)} L$
 Chord of Parabola	$h = \frac{1}{8} q L^2$ $A = \frac{2}{3} h L$ $\bar{X} = \frac{L}{2}$

جدول (2-آ) عزوم الانعطاف في الجوائز البسيطة

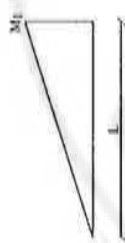
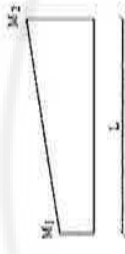
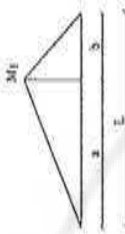
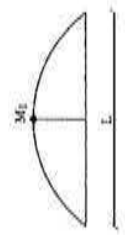
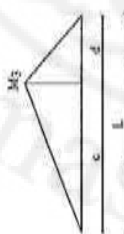
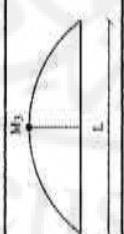
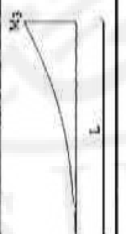
Loading	Moment Diagram	Moment Values
		$M_{\max} = \frac{1}{8} q L^2$
		$M_{\max} = \frac{Pab}{L}$
		$M_{\max} = \frac{PL}{4}$
		$R_2 = \frac{qb}{2L}(2L - b)$ $M_{\max} = \frac{R_2^2}{2q}$ $M_1 = \frac{qab^2}{2L}$
		$M_{\max} = M$
		$M_1 = -M \frac{a}{L}$ $M_2 = M \frac{b}{L}$

الجدول (3-أ) انتقالات الجوائز البسيطة
Displacements of Prismatic Beams

Beam	Translations (Positive Downward)	Rotations (Positive Clockwise)
	$\Delta_c = \frac{5 w L^4}{384 EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{w L^3}{24 EI}$
	$\Delta_c = \frac{P L^3}{48 EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{P L^2}{16 EI}$
	$\Delta_c = \frac{23 P L^3}{648 EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{P L^2}{9 EI}$
	$\Delta_c = 0$	$\theta_A = \theta_B = \frac{M L}{24 EI}$
	$\Delta_c = \frac{M L^2}{16 EI}$	$\theta_A = \frac{M L}{6 EI}$ $\theta_B = -\frac{M L}{3 EI}$
	$\Delta_B = \frac{w L^4}{8 EI}$	$\theta_B = \frac{w L^3}{6 EI}$
	$\Delta_B = \frac{P L^2}{3 EI}$	$\theta_B = \frac{P L^2}{2 EI}$
	$\Delta_B = \frac{M L^2}{2 EI}$	$\theta_B = \frac{M L}{EI}$

جدول (4-أ) التكاملات الشهيرة

M_L	M_1	M_2	M_3	M_4

M_L	M_u				
		$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{c}{L} \right) M_1 M_3$	$\frac{L}{6} \left(1 + \frac{d}{L} \right) M_1 M_3$ $+ \frac{L}{6} \left(1 + \frac{c}{L} \right) M_2 M_3$	For $c \leq a$: $\frac{L}{3} M_1 M_3$ $- \frac{L(a-c)^2}{6ad} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} \left(1 + \frac{cd}{L^2} \right) M_1 M_3$
		$\frac{L}{3} M_1 M_3$	$\frac{L}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{L}{3} \left(1 + \frac{ab}{L^2} \right) M_1 M_3$	$\frac{8L}{15} M_1 M_3$
		$\frac{L}{4} M_1 M_3$	$\frac{L}{12} (M_1 + 3M_2) M_3$	$\frac{L}{12} \left(1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2} \right) M_1 M_3$	$\frac{L}{5} M_1 M_3$

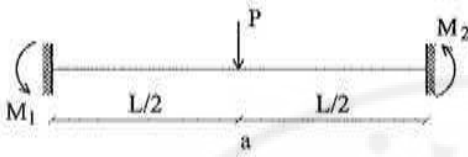
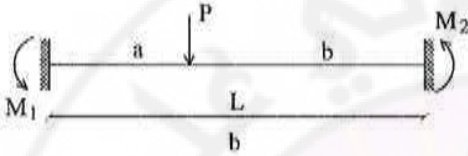
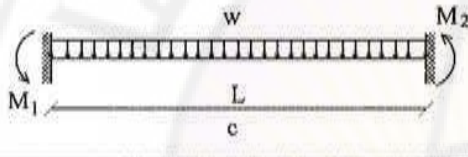
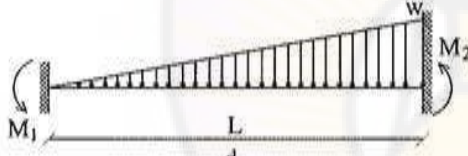
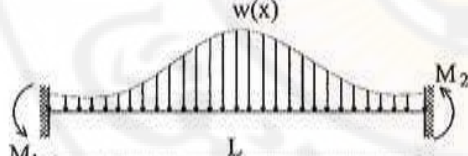
الملحق (ب)

الجدول الخاصة بطريقة مصفوفة القساوة

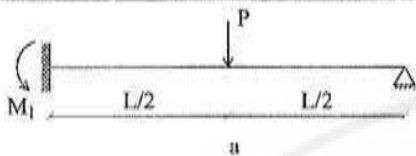
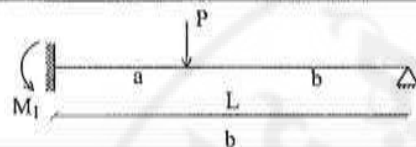
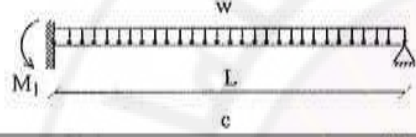
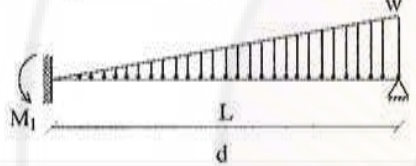
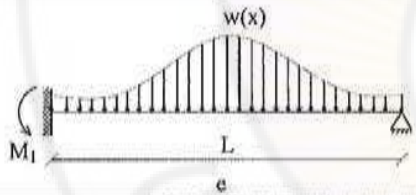
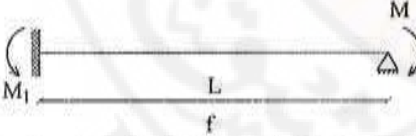




الجدول (ب-1): عزوم الانعطاف في الجوائز الموثوقة تحت تأثير الأحمال الشهيرة

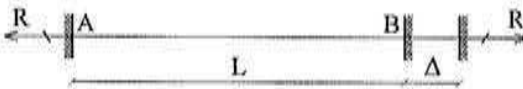
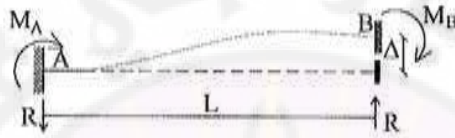
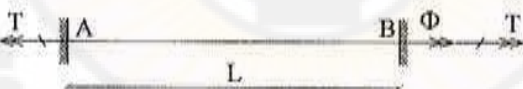
Loading	Fixed-End Moments
	$M_1 = +\frac{PL}{8}$ $M_2 = -\frac{PL}{8}$
	$M_1 = +\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_2 = -\frac{Pba^2}{L^2}$
	$M_1 = +\frac{1}{12}wL^2$ $M_2 = -\frac{1}{12}wL^2$
	$M_1 = +\frac{1}{30}wL^2$ $M_2 = -\frac{1}{20}wL^2$
	$M_1 = +\frac{1}{L^2} \int_0^L (L-x)^2 x w(x) dx$ $M_2 = -\frac{1}{L^2} \int_0^L (L-x) x^2 w(x) dx$

الجدول (ب-2): عزوم الانعطاف في الأظفار المسنودة تحت تأثير الأحمال الشهيرة

Loading	Fixed-End Moment
 a	$M_1 = +\frac{3}{16} PL$
 b	$M_1 = +\frac{Pab}{2L^2} (b + L)$
 c	$M_1 = +\frac{1}{8} w L^2$
 d	$M_1 = +\frac{7}{120} w L^2$
 e	$M_1 = +\frac{1}{2L^2} \int_0^L (L-x)(2L-x)x w(x) dx$
 f	$M_1 = -\frac{1}{2} M$

الجدول (ب-3): عزوم الانعطاف في الجوائز الموثوقة تحت تأثير الانتقالات المسندية

Fixed-End-Actions Caused by End-Displacements

 $R = \frac{EA\Delta}{L}$
 $M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$
 $M_A = \frac{2EI\theta}{L} \quad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \quad R = \frac{6EI\theta}{L^2}$
 $T = \frac{Gj\Phi}{L}$ G = shear modulus of elasticity J = torsion constant



الملحق (ج)
مبادئ جبر المصفوفات
(Matrix Algebra)

جامعة دمشق
Damascus University



المحق (ج) مبادئ جبر المصفوفات (Matrix Algebra)

ج-1- تعاريف:

يستخدم جبر المصفوفات بشكل أساسي في كثير من طرق التحليل الهندسي ولاسيما طرق العناصر المحدودة ومصفوفات التحليل الإنشائي لذا سنستعرض في هذا الفصل النواحي الهامة من قوانين جبر المصفوفات والتي تهمنا كمهندسين إنشائيين في تسهيل الحل وجعله متسلسلاً بشكل منطقي مما يسهل برمجة طرق العناصر المحدودة والمصفوفات على الحاسوب الإلكتروني.

ج-1-1- المقدار السلمي: (scalars)

المقدار السلمي عبارة عن كمية يمكن تعريفها بواسطة رقم واحد (موجب، سالب أو صفر) وكمثال على المقادير السلمية درجة الحرارة في مكان ما أو الرقم π أو الأعداد 1, 2, ..., etc، وبالتالي يتم التعريف عن المقادير السلمية بواسطة رقم واحد يحدد السعة لهذا المقدار السلمي.

ج-1-2- المقدار الشعاعي: (vectors)

المقدار الشعاعي عبارة عن كمية ما يتم تعريفها بتحديد مقدارها واتجاهها وكمثال عن المقادير الشعاعية: السرعة، الانتقالات، القوى وغير ذلك.

ج-1-3- المصفوفة (matrix):

المصفوفة عبارة عن جدول يتألف من عدد من السطور (m) وعدد من الأعمدة (n) كما هو مبين وغالباً ما تكون عناصر المصفوفة مقادير سلمية إلا أنه يمكن أن تكون هذه العناصر مقادير شعاعية أو حتى مصفوفات فرعية أقل درجة من المصفوفة الرئيسية.

$$[A] = \begin{matrix} \downarrow & \text{أعمدة} \\ & \text{Columns} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{matrix} \text{أسطر} \\ \text{Rows} \end{matrix} \end{matrix}$$

يعرف سطر المصفوفة بأنه الخط الأفقي الحاوي عناصر أفقية من المصفوفة أما العمود فهو الخط الشاقولي الحاوي عناصر شاقولية من المصفوفة وأما مرتبة المصفوفة فهي الأرقام الدالة على عدد الأسطر والأعمدة في المصفوفة ويكتب بالشكل:

$$\text{أعمدة} \rightarrow m \times n \leftarrow \text{أسطر}$$

وتسمى المصفوفة بمصفوفة مربعة فيما إذا تساوى عدد أسطرها وأعمدتها ويرمز لمرتبتها بدليل واحد يدل على عدد الأسطر والأعمدة:

مثال (1): المصفوفة المبينة في الشكل هي مصفوفة من مرتبة (3×4)

$$[A] = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 & 17 \\ 4 & 25 & -16 & 21 \\ 1 & 4 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال (2): بينما المصفوفة [B] هي عبارة عن مصفوفة مربعة من مرتبة (2).

$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

ج-1-4- منقول مصفوفة: (Transpose of a matrix)

يعرف منقول مصفوفة بأنه المصفوفة الجديدة الناتجة عن التبديل المشترك بين عناصر السطر الأول وعناصر العمود الأول ثم عناصر السطر الثاني وعناصر العمود الثاني وهكذا حتى يتم التبديل المشترك بين عناصر السطر الأخير وعناصر العمود الأخير ويرمز لمنقول المصفوفة عادة بالرمز $[A]^T$ وكمثال:

إذا كانت عناصر المصفوفة الأساسية [A] معطاة بالعلاقة:

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

فإن عناصر المصفوفة المنقولة $[A]^T$ هي:

$$[A]^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ج-1-5- تجزئة المصفوفة: (Partitioned of a matrix)

يمكن تجزئة أية مصفوفة إلى مصفوفات فرعية ويمكن اختيار مرتبة المصفوفات الفرعية حسب المتطلبات المفروضة لحل ما وعلى أن تتوافق المراتب الفرعية مع مرتبة المصفوفة الأساسية.

مثال:

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

حيث تعطى المصفوفات الفرعية بالعلاقات:

$$[a] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; [B] = \begin{pmatrix} A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{23} & \dots & A_{2n} \end{pmatrix}$$

$$[c] = \begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \\ \vdots & \\ A_{m1} & A_{m2} \end{pmatrix}; [d] = \begin{pmatrix} A_{33} & \dots & A_{3n} \\ A_{43} & \dots & A_{4n} \\ \vdots & & \\ A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

يفيدنا تجزئة المصفوفات لعزل جزء ما من المصفوفة حسبما تتطلب خطوات

الحل.

ج-1-6- المصفوفة الصفرية (null matrix):

المصفوفة الصفرية عبارة عن مصفوفة جميع عناصرها صفرية.

ج-1-7- المصفوفة القطرية (diagonal matrix)

المصفوفة القطرية عبارة عن مصفوفة مربعة جميع عناصرها صفرية ما عدا عناصر القطر الرئيسي.

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & A_{22} & \\ 0 & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

إذا كانت جميع العناصر القطرية للمصفوفة القطرية متساوية وتساوي الواحد فإننا نسمي المصفوفة في هذه الحالة بالمصفوفة الواحدية (unity matrix) ويرمز لها بالرمز [I] Identity matrix وكمثال المصفوفة الواحدية من المرتبة الثانية:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]$$

ج-1-8- المصفوفة المثلثية العليا (upper triangular matrix):

المصفوفة المثلثية العليا عبارة عن مصفوفة مربعة تحوي على عناصر جميعها معدومة أسفل القطر الرئيسي.

مثال:

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & O & & \\ & & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ج-1-9- المصفوفة المثلثية السفلى (lower traingular matrix)

المصفوفة المثلثية السفلى عبارة عن مصفوفة مربعة تحوي على عناصر جميعها معدوم أسفل القطر الرئيسي.

مثال:

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ O & & & \\ & & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ج-1-10- المصفوفة الشريطية (band matrix)

تعرف المصفوفة الشريطية بأنها مصفوفة تحتوي على عناصر غير معدومة ضمن شريط قطري ويسمى عرض الشريط بعرض الشريحة غير المعدومة (band width).

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & & & & & A_{n-1,n} \\ & & & & A_{n,n-1} & & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

وليس من الضروري أن تكون الشريحة غير الصفيرية متناظرة حول القطر الرئيسي.

ج-11-1- المصفوفة المتناظرة (Symmetric matrix)

تحتوي المصفوفة المتناظرة على عناصر متناظرة حول القطر الرئيسي ويمكننا أن نكتب شرط تناظر المصفوفة بأن تحقق عناصرها العلاقة $A_{ij} = A_{ji}$ مثال:

$$[A] = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

ج-12-1- المصفوفة المتناظرة عكسياً (Anti-symmetric matrix)

تكون عناصر المصفوفة المتناظرة عكسياً متساوية وبإشارة سالبة حول القطر الرئيسي أي: $A_{ij} = -A_{ji}$ وبالتالي نجد أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المتناظرة عكسياً يجب أن تكون معدومة.

مثال:

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

ج-1-13- أثر المصفوفة (Trace of a matrix)

أثر المصفوفة عبارة عن حاصل مجموع عناصر القطر الرئيسي أي:

$$\text{Tr}[A] = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

ج-2- قوانين العمليات على المصفوفات:

ج-2-1- قوانين الجمع والطرح (Addition and Subtraction of matrix)

لا يمكن أن يتم جمع أو طرح مصفوفتين إلا إذا كان عدد الأسطر والأعمدة متساوياً في كل منهما ويتم الجمع أو الطرح بين المصفوفات بجمع أو طرح العناصر المتشابهة في كل منهما.

مثال (1): لجمع المصفوفات

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال (2): لطرح المصفوفات

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$$

ج-2-2- قوانين الضرب (Matrix multiplication)

لا يمكن ضرب مصفوفتين [A]، [B] للحصول على مصفوفة [C] أي $[A][B] = [C]$ إلا إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة [A] مساوياً لعدد الأسطر في المصفوفة [B]. وإذا كانت المصفوفة [A] من مرتبة $(p \times n)$ والمصفوفة [B] من مرتبة $(n \times q)$ فتكون المصفوفة الناتجة [C] من مرتبة $(p \times q)$ أي:

$$\begin{matrix} [A] & [B] & = & [C] \\ (p \times n) & (n \times q) & & (p \times q) \end{matrix}$$

وللحصول على العنصر C_{ij} أي العنصر في السطر i والعمود j نجد:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \times B_{kj}$$

أي نقوم بضرب عناصر السطر i في المصفوفة A بمثيلاتها في العمود j في المصفوفة B ونقوم بجمع جداء الضرب الناتج من المصفوفتين.
مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$$

$(2 \times 3) \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 2)$

$$C_{11} = (1 \times 6) + (2 \times 3) + (4 \times -4) = -4$$

$$C_{12} = (1 \times -1) + (2 \times 4) + (4 \times 2) = 15$$

$$C_{21} = (2 \times 6) + (-1 \times 3) + (5 \times -4) = -11$$

$$C_{22} = (2 \times -1) + (-1 \times 4) + (5 \times 2) = 4$$

ج-2-3- بعض القوانين في ضرب المصفوفات:

$$([A][B])[C] = [A]([B][C])$$

$$[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$$

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T$$

IF $[A][B] = [C][D]$ then

$$[B]^T [A]^T = [D]^T [C]^T$$

ج-3- المعينات (Determinants):

توجد المعينات للمصفوفات المربعة فقط وتعرف معينة مصفوفة مربعة $[A]$ بالمقدار السلمي D ويعطى بالعلاقة:

$$D = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

وتعطى قاعدة نشر معينة من المرتبة الثانية بالشكل:

$$D = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}$$

مثال: معينة للمصفوفة المبينة يعطى بالعلاقة:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (2 \times 3) = 18$$

ويمكن استخدام قانون مماثل لنشر المعينات ذات المرتبة العليا كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11} (A_{22} A_{33} - A_{23} A_{32}) - A_{12} (A_{21} A_{33} - A_{23} A_{31}) + A_{13} (A_{21} A_{32} - A_{22} A_{31})$$

إذا كانت قيمة المعينة D غير مساوية للصفر سميت المصفوفة A بالمصفوفة غير المنفردة (non singular matrix) أما إذا كانت قيمة العین معدومة فعندها تسمى المصفوفة $[A]$ بمصفوفة منفردة (singular matrix) والمصفوفة المنفردة لا يمكن إيجاد معكوسها كما سنرى فيما بعد.

ج-3-1 cofactor (العامل المرافق)

يعرف المعامل المرافق لعنصر من عناصر المعین بأنه قيمة المعین الأدنى بدرجة واحدة والناتج من حذف السطر والعمود المماثلين لعنوان العنصر والمضروب بالإشارة المناسبة. مثال:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{11}^c = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12}^c = - \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

وبشكل عام يعطى العامل المرافق للعنصر A_{ij}^c بالعلاقة A_{ij}^c حيث:

$$A_{ij}^c = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1,j-1} & A_{1,j+1} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2,j-1} & A_{2,j+1} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

ج-3-2- مصفوفة العوامل المرافقة (cofactor matrix)

تعرف مصفوفة العوامل المرافقة لمصفوفة ما $[A]$ بالمصفوفة $[A]^c$

$$[A]^c = \begin{pmatrix} A_{11}^c & A_{12}^c & \dots & A_{1n}^c \\ A_{21}^c & A_{22}^c & \dots & A_{2n}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^c & A_{n2}^c & \dots & A_{nn}^c \end{pmatrix}$$

والناتجة عن تبديل عناصر المصفوفة المربعة الأولى $[A]$ بعناصرها المرافقة $[A]^c$.

ج-3-3- المصفوفة القرينة (adjoint matrix)

تعطى المصفوفة القرينة بمنقول مصفوفة العوامل المرافقة وذلك وفق العلاقة:

$$\text{adj}[A] = [A^c]^T$$

ج-4- معكوس المصفوفة (Matrix inverse)

يعرف معكوس مصفوفة $[A]$ بالرمز $[A]^{-1}$ ويجب أن يحقق العلاقة:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

حيث $[I]$ هي المصفوفة الواحدية (أي المصفوفة التجميع عناصر قطرها الرئيسي (1) أما بقية العناصر فمعدومة). ويجب أن يكون المعين لأية مصفوفة غير معدوم حتى نتمكن من عكسها.

ج-5- طرق إيجاد معكوس المصفوفة $[A]$ (Inversion methods)

يمكن إيجاد معكوس المصفوفات بعدد من الطرق منها:

ج-5-1- طريقة المصفوفة القرينة (adjoint matrix method)

يعطى معكوس المصفوفة $[A]$ بالعلاقة:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}[A]$$

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة $[A]$ بطريقة المصفوفة القرينة وتحقق من النتيجة.

تعطى المصفوفة $[A]$ بالعلاقة:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

آ- المعين للمصفوفة يمكن نشره وفق العمود الأول:

$$D = +1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 1 - 2 \times 1 = 2$$

وبما أن المعين D غير معدوم، لذا يمكن إيجاد معكوس المصفوفة [A].

ب- إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة (cofactor matrix)

$$A_{11}^c = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12}^c = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13}^c = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21}^c = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22}^c = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23}^c = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31}^c = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32}^c = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33}^c = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

وبالتالي تكون المصفوفة المرافقة للمصفوفة $[A]$ معطاة بالعلاقة:

$$[A^c] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ج- إيجاد المصفوفة القرينة:

$$\text{Adj}[A] = [A^c]^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

د- إيجاد معكوس المصفوفة: $[A]^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}[A]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[A]^{-1} [A] = [A][A]^{-1} = [I]$$

تحقيق

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ويترك للطالب التحقق من الأرقام، ويلاحظ أن الطريقة طويلة ويمكن أن تكون شاقة فيما إذا كانت أبعاد المصفوفة $[A]$ كبيرة، وعادة يزداد الزمن اللازم للحصول على معكوس المصفوفة بمقدار يتناسب مع مكعب درجتها.

ج-5-2- طريقة تحويل الأسطر (Row transformation method)

يمكننا أن نستخدم قوانين تحويل الأسطر للحصول على الشكل:

$$[A : I] \rightarrow [A : A^{-1}]$$

وتلخص العمليات المسموحة على الأسطر كالتالي:

- 1- إمكانية التبديل بين أي سطرين.
 - 2- ضرب أو تقسيم أي سطر بمقدار سلمي.
 - 3- إضافة أو طرح جداء سطر إلى سطر آخر.
- ويمكن أن نشرح العملية من خلال المثال التالي:

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة $[A]$ المبينة أدناه بواسطة قوانين تحويل الأسطر:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

تعطى المصفوفة الموسعة (Augmented matrix) بالعلاقة التالية:

$$[A:I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

آ- الخطوة الأولى استبدال كافة عناصر العمود الأول ما عدا العنصر القطري بصفر أي التخلص من العنصر A_{31}^{aug} وهذا يمكن أن يتم بضرب السطر الأول ب 2- وإضافته إلى السطر الثالث:

$-2 R_1$	-2	0	-2	-2	0	0
R_3	2	-1	1	0	0	1
new R_3	0	-1	-1	-2	0	1

والمصفوفة الموسعة تصبح بالشكل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ب- التخلص من العنصر A_{32}^{aug} وهذا يمكن أن يتم بإضافة السطر الثاني إلى الثالث:

R_2	0	1	2	0	1	0
R_3	0	-1	-1	-2	0	1
new R_3	0	0	1	-2	1	1

والمصفوفة الموسعة تصبح:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ج- التخلص من العنصر A_{13}^{aug} وهذا يمكن أن يتم بطرح السطر الثالث من الأول:

$-R_3$	0	0	-1	2	-1	-1
R_1	1	0	1	1	0	0
new R_1	1	0	0	3	-1	-1

والمصفوفة الموسعة تصبح:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

د- التخلص من العنصر A_{23}^{aug} وهذا يمكن أن يتم بطرح ضعفي السطر الثالث من الثاني:

$-R_3$	0	0	-2	4	-2	-2
R_2	0	1	2	0	1	0
new R_2	0	1	0	4	-1	-2

والمصفوفة الموسعة تصبح بالشكل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [I : A^{-1}]$$

وبالتالي يعطى معكوس المصفوفة A^{-1} بالعلاقة:

$$[A]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

تحقيق:

$$[A][A]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A]^{-1} [A] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

ج-6- المصفوفات المتعامدة (Orthogonal matrices)

نسمي المصفوفتين $[A]_{(m \times n)}$ و $[B]_{(m \times n)}$ بمصفوفتين متعامدتين إذا تحققت العلاقات:

$$[A]^T [B] = [B]^T [A] = [I]$$

مثال:

أثبت أن المصفوفتين $[A]$ ، $[B]$ متعامدتان مع بعضها حيث:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[B] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$[A]^T [B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[B]^T [A] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن المصفوفتان $[A]$ و $[B]$ متعامدتان مع بعضهما بعضاً.

ويطلق على المصفوفة المربعة $[\theta]$ اسم مصفوفة متعامدة مع نفسها إذا كان:

$$[\theta]^T [\theta] = [\theta][\theta]^T = [I]$$

مثال: المصفوفة θ مصفوفة متعامدة

$$[\theta] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$[\theta]^T [\theta] = [\theta][\theta]^T = [I] \quad \text{لأن:}$$

ويترك للطالب التأكد من ذلك.

وعليه نلاحظ بأن المصفوفة المتعامدة مع نفسها تحقق العلاقة:

$$[\theta]^T = [\theta]^{-1}$$

ج-7- حل جملة المعادلات الخطية بطريقة حذف غوص:

(The solution a system of linear equation using Gaus - elimination method) □

تتضمن مراحل التحليل وفق طريقة مصفوفة القساوة حل معادلات توازن المنشأ (والتي تمثل جملة من المعادلات الخطية) وذلك للحصول على قيم الانتقالات المجهولة في عقد المنشأ. ويمكن القيام بحل جملة المعادلات الخطية في المنشأ بعدد من الطرق أقلها فعالية يعتمد على استخراج معكوس مصفوفة القساوة للمنشأ وأكثر هذه الطرق استخداماً يعتمد على التخفيض المتتالي لجملة المعادلات الخطية للحصول على قيم المجاهيل المطلوبة. وسوف نشرح في هذه الفقرة طريقة حذف غوص.

لنفرض أننا بصدد حل جملة المعادلات الخطية المعطاة وفق العلاقة:

$$\begin{matrix} [A] & \{x\} & = & \{b\} \\ (n \times n) & (n \times 1) & & (n \times 1) \end{matrix} \quad (a)$$

حيث $\{b\}$ شعاع معلوم.

يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \quad (b)$$

نقوم بإلغاء المجهول x_2 من المعادلات $(2, 3, \dots, n)$ كما يلي:

أ- نوجد المعادلة k بحيث يكون العامل a_{k1} أعظمياً بالقيمة المطلقة لجميع

عوامل المجهول x_1 ونقوم بالتبديل بين السطر (1) والسطر (k) .

ب- نقوم بضرب المعادلات $(k > 1)$ بالعامل $m_{k1} = -a_{k1}/a_{11}$ ونضيف الناتج

إلى المعادلة E_k فنلغي العمود الأول من المعادلات $(2 \rightarrow n)$.

ج- نوجد المعادلة k بحيث يكون العامل a_{2k} أكبر ما يمكن ونبدل السطر k مع

السطر (2) ونكرر الخطوة (ب) من أجل $(k > 2)$.

د- نكرر الخطوات في (ج) من أجل المجهول x_{k-1} من المعاد (k) إلى أن

نحصل على شكل مثلثي علوي للمصفوفة $[A]$.

وبشكل خوارزمي، نعبر عن العمليات السابقة كما يلي:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \quad i, j = k+1, \dots, n \quad (c)$$

حيث $(k-1)$ مع $(k=1)$ يدل على الحدود الأساسية للمصفوفة $[A]$.

وبشكل مماثل، نجد أن شعاع الأحمال b_i يصبح:

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{a_i^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \quad i = k+1, \dots, n \quad (d)$$

وبتكرار العمليات في (c) و (d) عدداً من المرات بمقدار $(n+1)$ يتم تحويل

المصفوفة $[A]$ إلى مصفوفة مثلثية عليا.

ونحصل على قيمة المجهول x_n من المعادلة:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (c)$$

ومن ثم نستخدم المعادلة التالية للحصول على قيم بقية المجهول بواسطة التعويض الخلفي المتتالي:

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{a_{ki}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) x_i \quad (f)$$

وفي الحالة الخاصة عندما تكون المصفوفة شريطية ومتناظرة وذات عرض شريط فعال مقداره $(s = m)$ يتحول الحد الأعلى للمتحويل (i) في المعادلات (c) و (d) و (f) إلى $(k+m-1)$ بدلاً من (n) وتصبح المعادلة (c) كما يلي:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \left(\frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) \quad \begin{matrix} i = k+1, \dots, k+m-1 \\ j = i, \dots, k+m-1 \end{matrix} \quad (g)$$

وبشكل مماثل يمكن تحويل المعادلات (d) و (f) إلى الوضع المناسب للمصفوفة الشريطية المتناظرة.

المقومون العلميون:

- الأستاذ الدكتور المهندس: إدوارد شديد

- الدكتور المهندس: قاسم الزحيلي

- الدكتور المهندس: شاهين غلاييني

المدقق اللغوي:

- الأستاذ الدكتور: محمد موعد

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

