



أساسيات التحليل الرياضي





جامعة دمشق
مركز التعليم المفتوح
قسم المحاسبة

أساسيات التحليل الرياضي

تأليف

الدكتور
عبد الكريم حسين

الدكتور
عبد الرزاق الفاضل

جامعة دمشق



الفهرس

9

المقدمة .

الفصل الأول :

- 11 I- أساسيات في التحليل الرياضي .
- 11 I-1- الأحرف و الرموز و المصطلحات الرياضية المتداولة في علم الرياضيات .
- 14 I-2- مجموعات الأعداد .
- 16 I-3- في جبر المجموعات .
- 21 I-4- في القوى و الأسس .
- 22 I-5- في الجذور .
- 23 I-6- في اللوغاريتمات .
- 25 I-7- في المتواليات (المتتاليات) .
- 40 I-8- في التحليل التوافقي و ذي الحدين .
- 53 I-9- في علم الجبر .
- 54 I-10- التعابير الرياضية و تصنيفاتها .
- 63 I-11- القيمة المطلقة .
- 69 I-12- المجالات (الفترات العددية) .

الفصل الثاني :

- 85 II- المصفوفات .
- 87 II-1- المصفوفات و أشكالها .
- 87 II-1-1- تعريف المصفوفة .
- 88 II-1-2- أشكالها .

95	II-2- المحددات (المعيزات) .
95	II-2-1- تعريف المحدد .
95	II-2-2- طرق حساب المحددات .
113	II-3- العمليات على المصفوفات .
113	II-3-1- الجمع .
115	II-3-2- الضرب .
124	II-3-3- التكوين .
125	II-3-4- مقلوب مصفوفة .
133	II-4- حل جملة معادلات خطية .
133	II-4-1- تعريف المعادلة الخطية .
133	II-4-2- حل جملة m معادلة خطية .
145	II-5- التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات .
145	II-5-1- التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات (جدول التشابكات القطاعية).
163	II-5-2- حل المسائل الاقتصادية رياضياً .

الفصل الثالث :

175	III- التطبيقات الاقتصادية للاشتقاق و التكامل .
175	III-1- الدوال (التوابع) .
175	III-1-1- تعريف الدالة .
176	III-1-2- أنواع الدوال .
179	III-1-3- النهايات .
180	III-1-4- طرق حساب النهايات .
183	III-2- الاشتقاق .

183	III-2-1- تعريف المشتق .
185	III-2-2- قواعد الاشتقاق .
203	III-3- التطبيقات الاقتصادية للمشتقات .
204	III-3-1- مرونة تابع .
208	III-3-2- المرونيات الجزئية .
209	III-3-3- تابع الطلب .
214	III-3-4- تابع العرض .
215	III-3-5- توازن السوق .
218	III-3-6- تابع الدخل .
222	III-3-7- تابع المنفعة .
226	III-3-8- تابع الكلفة .
228	III-3-9- تابع الربح الكلي .
234	III-3-10- تابع الاستهلاك .
235	III-3-11- تابع الإنتاج .
244	تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق :
247	III-4- التكامل وطريقته الاقتصادية .
247	III-4-1- تعريف التكامل .
248	III-4-2- خواص التكامل .
249	III-4-3- التكاملات المتكررة .
250	III-4-4- تكامل تابع قطع .
250	III-4-5- التكامل الأصلي و عملية إيجانه .
251	III-4-6- كيفية إيجاد التوزيع الأصلية .

254	III-4-7- التكامل غير المحدود .
254	III-4-8- نظرية السطوح .
256	III-4-9- للتكامل المحدود .
259	III-4-10- خواص التكامل .
262	تطبيقات اقتصادية للتكامل .

الفصل الرابع :

268	IV - المتراجحات و تطبيقاتها الاقتصادية في البرمجة الخطية .
269	IV -1- المتراجحات و البرمجة الخطية .
269	IV -1-1- تعريف المتراجحات .
270	IV -2-1- خواص المتراجحات .
271	IV -3-1- حل المتراجحات .
271	IV -4-1- أشكال المتراجحات .
287	IV -2- نماذج البرمجة الخطية .
299	المصطلحات باللغة الإنكليزية .
307	المراجع الأجنبية .
308	المراجع العربية .

المقدمة

تزايد في السنوات الأخيرة التركيز على الأساليب والأدوات الرياضية في تدعيم شرح وتعميق المفاهيم والنظريات الاقتصادية وكيفية استخدامها لمعالجة جوانب أو مشاكل اقتصادية أكثر تعقيداً بعد أن لعبت دوراً هاماً في تلبية احتياجات الفروع العلمية المختلفة في حل غالبية المسائل الفيزيائية والكيميائية..

إننا لن ندعي أن للكتاب قد قام بتغطية جميع المواضيع الاقتصادية ذات الصلة القوية بالأساليب الرياضية بل هو محاولة السعري لشرح وعرض مختلف الأساليب والأدوات الرياضية التي توضح المفاهيم الاقتصادية ، لهذا لجأنا إلى شرح سهل وعرض سريع للأداة الرياضية دون العمل على برهنتها بغية تجنب التعقيدات الرياضية الكبيرة التي تنفر القارئ وتبعده عن مبتغاه ختمناه بالتطبيق الاقتصادي المتعدد وذلك بغية الإجابة على فائدة استخدام الأداة الرياضية في المجالات والمشاكل الاقتصادية .

عرضت مواضيع المؤلف من خلال أربعة فصول :

حوى الفصل الأول منها مفاهيم وأساسيات التحليل الرياضي التي فضلنا إدراجها من خلال الرموز والتعابير اللاتينية المتداولة في جميع المراجع الأجنبية وغالبية المؤلفات العربية . في حين تظهر حاجتنا في الفصل الثاني لتطوير الأداة والأسلوب الرياضي خلال انتقالنا إلى المصفوفات لنلامس أهم تطبيقاته في الاقتصاد والذي هو نموذج المدخلات والمخرجات . ثم لنلحظ وفي الفصل الثالث أهمية الاشتقاق والتفاضل والتكامل في التعرف على معدلات التغير للدول المتعددة المتغيرات وتطبيقاتها وأهم استخداماتها .

ونعرج أخيراً وفي الفصل الرابع على طبيعة المشاكل الاقتصادية والتي تتركز في ندرة الموارد البشرية والمادية وكيفية العمل على حل اختناقاتها من

خلال الوصول إلى الحل الأمثل عبر معالجة مشاكل تحديد النهايات الحديثة في نماذج أكثر تعقيداً من خلال الأسلوب البياني .

لقد قمنا وللحفاظ على الأمانة العلمية بسررد كل ما وقع في أيدينا من كتب ومؤلفات ومراجع استنبطنا منها الأفكار التي تم التطرق إليها والاستئناس بطريقة شرحها.

إننا لنسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا لما نصبوإليه في سد حاجة المكتبة العربية لمثل هذا المرجع راجين من أهل العلم تزويدنا بأية ملاحظة وانتقاد بناء للأخذ به وتلافي الهفوات والثغرات التي لم يتم إدراكها.

والله ولي التوفيق

الدكتور

عبد الرزاق الفاضل

الفصل الأول

I- أساسيات في التحليل الرياضي

سوف نتعرض في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم والمبادئ والأسس الرياضية الأساسية والقوانين والتعاريف الهامة في علوم الجبر . والتي يجب على كل طالب أن يلم بها إلماماً شاملاً وكاملاً وذلك لتسهيل تعامله وفهمه لهذا المقرر وبقية المقررات التي تتدخل فيها العلوم الرياضية .

I-1- الأحرف والرموز والمصطلحات الرياضية المتداولة في علم الرياضيات :

يمكن وضع الأحرف والرموز والمصطلحات المتداولة في مختلف مجتمعات العلوم وأسمائها والمأخوذة من الأحرف الأبجدية الإغريقية ضمن الجدول التالي :

1	I
2	II
3	III
4	IV
5	V
6	VI

7	VII
8	VIII
9	IX
10	X
50	<i>l</i>
100	C
500	D
1000	M

A	α	Alpha	ألفا
B	β	Bêta	بيتا
Γ	γ	Gamma	غاما
Δ	δ	Delta	دلتا
E	ε	Epsilon	أبسيلون
Z	ζ	Zêta	زيتا
H	η	Êta	ايتا
θ	φ	Theta	ثيتا
I	i	Iota	يوتا
K	k	Kappa	كابا

$\wedge$	λ	Lambda	لمدا
M	μ	Mû (Mew)	ميو
N	ν	Nû (New)	نيو
E	ξ	Xi	إكسي
O	o	Omicron	لوميكرون
Π	π	Pi	بي
P	ρ	Phô	فو
Σ	σ	Sigma	سيفما
T	τ	Taw	تيو
y	υ	Opsilon	أوبسيلون
Φ	ϕ	Phi	في
X	χ	Chi	تشى
ψ	ψ	Psi	يسى
Ω	ω	omega	لوميغا

حيث الرموز : β, α, θ وتستخدم في أكثر الأحيان للدلالة على الزاوية π وتستخدم Π عند حساب مضارب (جداء) حدود مثال :

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n$$

Σ وتستخدم عند حساب مجموع (حاصل جمع) حدود ، مثال :

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Φ غالباً ما يستخدم في جبر المجموعات للدلالة على المجموعة الفارغة .

Ω ويستخدم أيضاً في جبر المجموعات للدلالة على المجموعة الكلية أو فضاء العينة.

$\log_e$ (ln) اللوغاريتم الطبيعي (النبيري) الذي أساسه $e \approx 2.71828$

$\log_a$ اللوغاريتم العادي الذي أساسه a . $(0 < a \neq 1)$

lim نهاية مقدار ما

I-2- مجموعات الأعداد :

(a) مجموعة الأعداد الطبيعية : وتضم الأعداد الصحيحة ذات الإشارة الموجبة فقط ورمزها N

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

وهي مجموعة غير منتهية (غير محدودة من الأعلى) مرتبة تصاعدياً أوتنازلياً .

(b) مجموعة الأعداد الصحيحة : وتضم هذه المجموعة الأعداد الصحيحة ذات

الإشارة الموجبة والسالبة معاً (أي الأعداد N مع نظائرها) ورمزها Z .

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

وهي مجموعة غير منتهية (غير محدودة من الأعلى والأسفل) ومرتبة تصاعدياً أوتنازلياً .

(c) مجموعة الأعداد العادية (الكسرية) ^(*) : وتضم هذه المجموعة الأعداد

الصحيحة التي يمكن كتابتها بشكل كسر بسط p ومقامه q (أي الأعداد التي

يمكن التعبير عنها بكسر) ورمزها Q .

^(*) - يسمى البعض الصفر وجميع الأعداد الصحيحة والكسرية الموجبة والسالبة بالأعداد الناطقة .

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

حيث $\frac{p}{q}$: هو كسر أو عدد صحيح موجب أو عدد صحيح سالب وقد يسميها

البعض مجموعة الأعداد النسبية، وهي أيضاً مجموعة غير منتهية (غير محدودة من الأعلى والأسفل) ومرتبطة تصاعدياً أو تنازلياً .

(d) مجموعة الأعداد غير العالوية : وتشمل مجموعة أعداد الكسور العشرية غير المنتهية وغير الدورية في الوقت نفسه والتي لا يمكن كتابتها بشكل كسور عادية ونظائرها مثل :

$$\pi = 3,1415927\ldots, \quad e = 2.7182828$$

$$\sqrt{2} = 1.4142136, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \ldots, \quad \text{sm}, \quad 0, \quad \ldots$$

وهنا نلاحظ أنه لا يمكن كتابة أي من الأعداد السابقة على صورة عدد عادي $\frac{p}{q}$

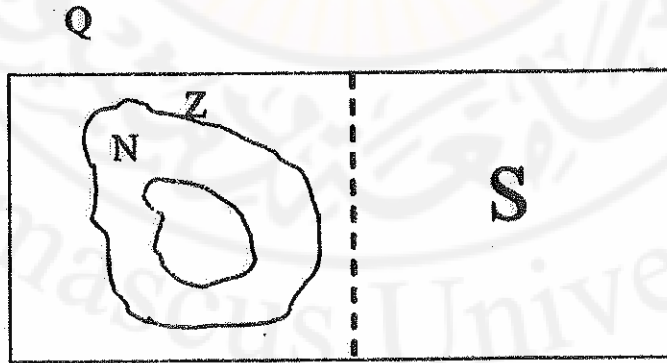
(e) مجموعة الأعداد الحقيقية: وتضم هذه المجموعة مجموعة الأعداد العالوية Q وغير العالوية S (والصحيحة والطبيعية أيضاً) ورمزها هو R .

$$R = Q \cup S$$

أي عدد حقيقي هو عدد عادي أو غير عادي ، ولا يمكن أن يكون الاثنين معاً

$$Q \cap S = \phi$$

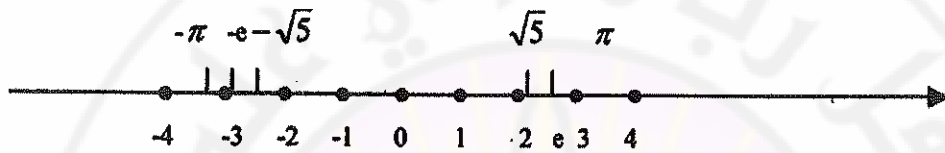
يمكن تمثيل مجموعة الأعداد السابقة من خلال المخطط التالي :



وإن مجموعة الأعداد الحقيقية تقسم إلى مجموعة أعداد حقيقية موجبة R^+ ومجموعة أعداد حقيقية سالبة R^- والمجموعة الأحادية $\{0\}$ ، أي أن :

$$R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$$

وباعتبار أن هناك تقابلاً بين مجموعة الأعداد R ونقاط أي خط مستقيم (إذا ما أخذنا عليه نقطة الصفر وجهتين موجبة وسالبة) لذا فيمكن تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية من خلال خط المستقيم الذي يرمز له بـ R .



I-3- في جبر المجموعات :

(a) الانتماء والمجموعة (*): المجموعة هي اجتماع في كل ، لعدد من الأشياء التي نجسها بحواسنا أو نتصورها بأذهاننا ، وهي كائنات معينة تمام التعيين ومختلف بعضها عن بعض.

نرمز للمجموعة يوماً بأحد الحروف اللاتينية الكبيرة مثل : $A, B, C, \dots$ أما الأشياء والتي تسمى بعناصر المجموعة فنرمز لها بأحد الأحرف اللاتينية الصغيرة مثل : a, b, c وإذا فرضنا أن A مجموعة غير خالية وأن a عنصراً من عناصرها فنقول إن هذا للعنصر a ينتمي إلى المجموعة A ونكتب $a \in A$ ، وإذا كان b ليس عنصراً من A فنقول إن b لا ينتمي إلى A ونكتب $b \notin A$.

يمكن كتابة المجموعة من خلال ذكر جميع عناصرها كأن نقول ، إن :

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

أو كان نكتب :

$$A = \{x \text{ هي إحدى ثانويات مدينة دمشق} : x\}$$

$$A = \{x : x^2 = 25\} \quad \text{أو:}$$

(b) المجموعة المنتهية وغير المنتهية : نفرض أن A مجموعة تحوي على الأقل عنصر أو واحداً ، فإذا كان عدد عناصر المجموعة A قابلاً للقسمة مهما كان كبيراً فنقول عن المجموعة A بأنها مجموعة منتهية .

مثال : $A = \{x : \text{عدد أعضاء هيئة التدريس في جامعة دمشق} : x\}$
وفي حال عدم معرفة عدد عناصر المجموعة فنقول عن المجموعة أنها غير منتهية ؟

$$\text{مثال : } A = \{x : \text{عدد حقيقي ما} : x\}$$

(c) الاحتواء والمجموعة الجزئية : نقول عن المجموعة A إنها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

ونعبر عن ذلك بقولنا إن المجموعة A هي محتواة في المجموعة B ونكتب $A \subseteq B$.

وعندما نعلم أن هناك عنصراً واحداً على الأقل من عناصر المجموعة B التي تحتوي A ليس موجوداً في المجموعة A فنكتب :

$$A \subset B \quad (\text{لأن : } A \subseteq B \text{ و } A \neq B)$$

(d) المجموعتان المتساويتان : نقول عن المجموعتين A, B إنهما متساويتان ، إذا كان للمجموعتين العناصر نفسها ، أي أن :

$$\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

أوبشكل آخر :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A)$$

ويكفي لعدم تساوي المجموعتين A, B أن يوجد عنصر واحد على الأقل في إحدهما غير منتم إلى الأخرى .

e) المجموعة الخالية والأصلية (الكلية) : المجموعة الخالية هي كل مجموعة لا تحتوي على أي عنصر ونرمز لها بالرمز Φ ، أما المجموعة الأصلية فهي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر ونرمز لها بالرمز Ω . وقد تكون Ω المجموعة الأصلية منتهية أو قد تكون غير منتهية .

f) مجموعة الأجزاء : لنفرض أن A مجموعة جزئية من E ، نسمي المجموعات الجزئية جميع الممكن تشكيلها من عناصر A بالإضافة إلى المجموعتين A و Φ مجموعة أجزاء المجموعة A ونرمز لها بالرمز $P(A)$.
 لنلاحظ أن عدد المجموعات الجزئية الممكن تشكيلها من المجموعة الكلية Ω ذات n عنصر يساوي 2^n مجموعة جزئية .

g) متممة مجموعة : إن لكل مجموعة جزئية A ($A \subseteq E$) من المجموعة الكلية E مجموعة جزئية أخرى نرمز لها بـ $\bar{A}$ أو $(C_E A)$ مؤلفة من جميع العناصر التي لا تنتمي إلى المجموعة A ونسمي المجموعة $\bar{A}$ بمتممة المجموعة A ، أي أن :

$$\bar{A} = \{x : x \in E \text{ و } x \notin A \subseteq E\}$$

h) العمليات على المجموعات :

1- التقاطع : بفرض أن كلا من A ، B مجموعة جزئية من E نعرف تقاطع هاتين المجموعتين ونرمز له بـ $C = A \cap B$ على أنه المجموعة الجزئية C التي كل عنصر من عناصرها ينتمي إلى المجموعتين A ، B معاً
 أي أن :

$$C = A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

2- الاجتماع : بفرض أن كلا من A و B مجموعة جزئية من E ، نعرف اجتماع هاتين المجموعتين ونرمز له بـ $C = A \cup B$ بأنه المجموعة

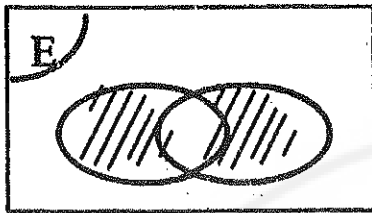
التي عناصرها مكونة من جميع عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B ، أي أن :

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

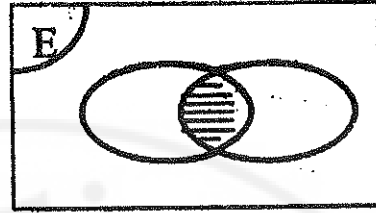
3- الفرق (الفضل) : لنفرض أن كلاً من A و B مجموعة جزئية من E نعرف فرق المجموعة A عن B (أو ناقص B) والذي نرمز له بـ $D_1 = A - B$ بأنه المجموعة D_1 التي عناصرها تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ، كما نعرف فرق المجموعة B عن A (أو ناقص A) والذي نرمز له بـ $D_2 = B - A$ بأن المجموعة D_2 التي عناصرها تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A .

4- الفرق التناظري : نفرض أن A و B مجموعتان جزئيتان من E ، نعرف للفرق التناظري لهاتين المجموعتين ونرمز له بـ $D = A \Delta B$ بأنه المجموعة المولدة من تلك العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B أو التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A ، أي أن :

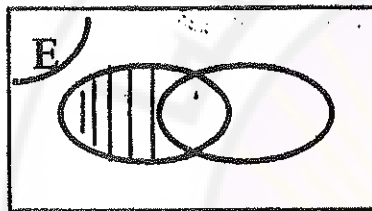
$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow [(x \in A \text{ و } x \notin B) \text{ أو } (x \notin A \text{ و } x \in B)]$$



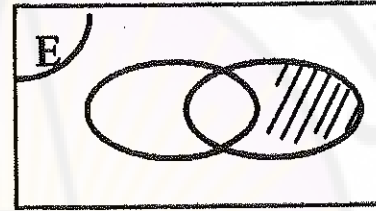
$$A \cup B$$



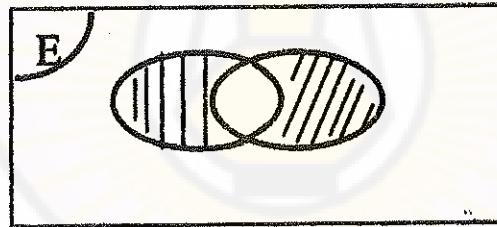
$$A \cap B$$



$$D_1 = A - B$$



$$D_2 = B - A$$



$$D = A \Delta B$$

(J) الجداء الديكارتي : نعرف الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B ونرمز له بالرمز $A * B$ بأنه المجموعة التي عناصرها جميع الأزواج المرتبة التي من الشكل (x, y) بحيث أن المركبة الأولى x تنتمي إلى المجموعة A والمركبة الثانية y تنتمي إلى B ، أي أن :

$$A * B = \{(x, y) : x \in A \text{ و } y \in B\}$$

ونستطيع التعميم ، حيث نكتب :

$$A_1 * A_2 * \dots * A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1 \text{ و } x_2 \in A_2 \text{ و } \dots \dots x_n \in A_n\}$$

ويكون الجداء الديكارتي في حالة المجموعات المتساوية والتي عددها n هو :

$$\underbrace{A * A * A * \dots * A}_{\text{مكرر } n \text{ مرة}} = A^n$$

I-4- في القوى (الأسس) :

نعلم أنه بالإمكان كتابة الجداء بالشكل المساوي له :

$$a * a * a * a = a^4$$

حيث نقول إن a مرفوعة للقوة 4 (أي أن a لها الأس 4)

إذا فالمقصود بالقوة n للعدد a والتي نرمز لها بالرمز a^n هو جداء a بنفسه n مرة .

يسمى n -الأس (القوة) والعدد a الأساس وعملية الضرب بعملية الرفع .

— وتتمتع القوى بالخواص التالية :

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = a^{n+m+k}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (m \neq n)$$

وفي حال $m = n$ نجد أن :

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \left(\frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$$

I-5- في الجذور :

I - الجذور الحسابية : الجذر الحسابي من المرتبة n للعدد الموجب x ونرمز

له بالرمز $\sqrt[n]{x}$ هو عدد موجب آخر y بحيث أن : $y^n = x$

نسمي العدد n دليل الجذر ونستغني عن كتابته إذا كان مساوياً للعدد 2 .

— هناك نوعان من الجذور :

(a) الجذور الناطقة : وهي الجذور التي يمكن الحصول على قيمتها بشكل دقيق.

مثال : $\sqrt{9} = 3$ ، $\sqrt[3]{32} = 2$

(b) الجذور الصماء : وهي التي لا يمكن الحصول على قيمتها بشكل دقيق .

مثال : $\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt[3]{7}$ ، $\sqrt[3]{3}$

— الجذور خواص عديدة منها :

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad x \geq 0, y > 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[m \cdot n]{x^m}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x^m}} = \sqrt[m]{x^{\frac{n}{m}}} = x^{\frac{n}{m}}$$

الخاصة السابقة تنقل الجذور إلى قوى وبالعكس .

II - الجذور الجبرية : وهي نفس الجذور الحسابية مع وجود الملاحظات التالية:

— إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً فالعدد الموجب جذران متناظران وليس للعدد

السالبة جذر حقيقي .

إذا كان دليل الجذر عدداً فردياً فالعدد الموجب جذر وحيد موجب والعدد السالب جذر وحيد سالب .

III - العمليات الأربع على الجذور الصم :

— جمع وطرح الجذور الصم المتشابهة : تكون الجذور متشابهة إذا كان لها جميعاً الدليل نفسه والعدد المجذور نفسه ونطبق عليها عمليتي الجمع أو الطرح بالشكل المتعارف عليه وذلك بعد كتابتها بأبسط الصور .

مثال :

$$x\sqrt[3]{y^3z^4} + y\sqrt[3]{x^3z^4} - z\sqrt[3]{x^3y^3z} = xyz\sqrt[3]{z} + xyz\sqrt[3]{z} - xyz\sqrt[3]{z} = xyz\sqrt[3]{z}$$

— ضرب الجذور الصم : تتم عملية ضرب الجذور الصم بعد توحيد أدلتها (إذا كانت غير موحدة) وذلك من خلال ضرب الكميات الموجودة تحت الجذور الموحدة ووضع الناتج تحت إشارة الجذر الموحد .

وتتم عملية ضرب الكميتين المترافقتين $(a-b)$ ، $(a+b)$ من خلال المطابقة المعروفة .

$$(\sqrt{13} + \sqrt{7})(\sqrt{13} - \sqrt{7}) = 13 - 7 = 6$$

مثال :

— قسمة الجذور الصم : تتم عملية قسمة الجذور الصماء بعد توحيد لدلي الجذرين (إذا كانا غير موحدين) من خلال تطبيق خاصية قسمة الجذور التي مرت سابقاً .

— أما التخلص من الجذور الموجودة في المقامات فيكون بضرب المقام والبسط بالجذور الموجودة في المقام (لإبصار المقام حين يكون المقام عبارة عن تركيباً جذرياً) .

I-6- في اللوغاريتمات : بفرض أن a, b أعداد حقيقية موجبة وإذا كانت

$$b = a^x$$

لدينا العلاقة :

(حيث $b > 0$ حتى تكون العمليات محققة في R)

فإن لوغاريتم العدد الحقيقي الموجب b بالنسبة للأساس a هو العدد x أي أن :

$$b = a^x \Leftrightarrow \log_a b = x \quad (a > 0 \text{ و } a \neq 1)$$

من هذا التعريف نستنتج أنه :

— لا يوجد للعدد السالب لوغاريتم .

$$\forall x \neq 0 : x^0 = 1 \Leftrightarrow \log_x 1 = 0$$

$$x^1 = x \Leftrightarrow \log_x x = 1$$

$$\forall b > 1 : b^\infty = \infty \Leftrightarrow \log_b \infty = \infty$$

$$b^{-\infty} = 0 \Leftrightarrow \log_b 0 = -\infty$$

يتمتع اللوغاريتم بخواص عديدة منها :

-1 لكل عدد موجب لوغاريتم وحيد .

$$\text{Log}_a (x.y.z) = \log_a x + \log_a y + \log_a z \quad -2$$

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad -3$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad -4$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \quad -5$$

$$\log_b x . \log_a b = \log_a x \quad a, b, x > 0 \quad -6$$

$$a \neq 1, b \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad a > 0, b > 0 \quad -7$$

$$a \neq 1, b \neq 1$$

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x \quad -8$$

ملاحظة : هناك تطبيقات عديدة ومتنوعة لاستخدام اللوغاريتمات من أهمها :

— أثناء العمليات الحسابية المعقدة والتي يدخل فيها أحياناً حساب قيم الجذور .

— أثناء حساب المساحات والحجوم .

— أثناء حساب الفائدة المركبة .

مثال (1) : حل المعادلة التالية : $15x^2 - 32x - 47 = 0$

$$x_1, x_2 = \frac{32 \pm \sqrt{3844}}{30} \quad \text{إن}$$

لنلاحظ أن : $\Delta = 3844$ لحساب $\sqrt{\Delta}$ نجد أن : $\log \sqrt{3844} = 1.7924$

$$\sqrt{3844} = 62 \quad \text{ومنه}$$

مثال (2) : إذا علمت أن سطح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه يعطى بالعلاقة

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2 \quad \text{فاحسب سطح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 37.25 سم .}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (37.25)^2 \quad \text{لنأخذ لوغاريتم الطرفين في حساب S :}$$

$$S = 600.6 \text{ cm}^2 \quad \text{حيث نجد أن :}$$

مثال (3) : وضع مبلغ 512 ل.س في مصرف بفائدة 3% سنوياً ، فبعد كم سنة

تصبح جملة هذا المبلغ 650 ل.س .

لنأخذ لوغاريتم الطرفين في قانون جملة للمبلغ S_n حيث $S_n = S(1+i)^n$ وذلك

لحساب n فنجد أن :

$$(1.03)^n = \frac{325}{256} \Rightarrow n = 8 \text{ years}$$

I-7- في المتواليات (المتتاليات) :

(1) المتوالية العددية (الحسابية) : هي تسلسل منته من الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$

بحيث أن كل عدد منها وليكن a_i ($i \geq 2$) ينتج من سابقه بإضافة عدد ثابت

نرمز له بـ r ونسميه أساس المتوالية العددية .

أي أن :

$$a_i = a_{i-1} + r \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

— نرسم للمتتالية العددية بـ ÷ ونضع بين حدودها (،) فواصل :

ونسمي $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحدود المتتالية و a_1 الحد الأول و a_n الحد الأخير (النوني ، العام).

نلاحظ أن :

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$$

(A) نميز نوعين من المتتاليات العددية :

I- متتالية عددية متزايدة ، إذا كان أساس المتتالية أكبر من الصفر (موجباً)

II- متتالية عددية متناقصة ، إذا كان أساس المتتالية أصغر من الصفر

(سالباً)

أمثلة :

(متزايدة) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

(متناقصة) $-3, -5, -7, -9, -11, -13, \dots$

خواص المتتالية العددية : للمتتاليات العددية خواص هامة نستخدمها في حل

كثير من المسائل ، هذه الخواص هي :

1- مجموع أي حدين متساويين البعد عن الطرفين ثابت ويساوي مجموع

الطرفين :

لنفرض أن لدينا للمتتالية العددية :

$$a \quad a+b \quad a+2b \quad a+3b \dots a+(n-4)b \quad a+(n-3)b \quad a+(n-2)b \quad a+(n-1)b$$



نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} a + a + (n-1)b &= a + b + a + (n-2)b = a + 2b + a + (n-3)b \\ &= a + 3b + a + (n-4)b = 2a + nb - b \end{aligned}$$

— فإذا فرضنا أن لدينا المتتالية العددية التالية :

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

— نلاحظ أن :

$$3 + 25 = 5 + 23 = 7 + 21 = 9 + 19 = \dots\dots\dots$$

2- إن أي حد في المتتالية العددية هو وسط حسابي بين مجاورين :

نفرض أن لدينا المتتالية العددية :

a a + b a + 2b a + 3b a + (n-3)b a + (n-2)b a + (n-1)b

نلاحظ أن :

$$a + (n-2)b = \frac{a + (n-3)b + a + (n-1)b}{2}$$

$$a + 2b = \frac{a + b + a + 3b}{2}$$

وهكذا.....

3- إضافة (طرح) أي ثابت عددي إلى حدود المتتالية العددية يعطينا متتالية

عددية جديدة أساسها هو أساس المتوالية الأولى نفسه .

بفرض أن لدينا المتتالية التالية :

1 3 5 9 11 13 15 17.....

لنضيف لكل حد من الحدود السابقة الثابت العددي الواحد ، فنحصل على المتتالية

العددية التالية :

2 4 6 8 10 12 14 16 18

4- ضرب (قسمة) كل حد من حدود متوالية ثابتة عددية يعطينا متتالية جديدة

أساسها مضروب (مقسوم) بتلك الثابتة .

مثال : إذا عدنا إلى المتتالية الواردة في الخاصة الأولى نجد أن الخاصة الثانية :

$$7 = \frac{5+9}{2} , 21 = \frac{19+23}{2} , 13 = \frac{11+15}{2} , \dots\dots\dots$$

الحد العام : يعطى للحد العام (النوني) الذي رتبته n بالدستور :

$$a_n = a + (n-1)r$$

لأنه اعتماداً على تعريف المتتالية وجدنا أن الحد الأول a أما الحد الثاني فهو $a + r$

والحد الثالث هو $a + 2r$ وهكذا الحد ما قبل الأخير $a + (n-2)r$

فالحد الذي ترتيبه n هو $a_n = a + (n-1)r$

نلاحظ ومن العلاقة الأخيرة أن عدد ما يدخل فيها من متغيرات هو أربعة متغيرات فيكفي لحساب هذه المجاهيل أن يكون لدينا معلوم باقي المجاهيل (أي 3 مجاهيل)

مثال: أوجد للمتتالية العددية التي حدها الأول 3 وأساسها 2 وعدد حدودها 10 .

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$$

الحل :

مثال : أوجد الحد العام لمتتالية عددية حدها الأول 2 وأساسها 3 وعدد حدودها 10

$$a_n = a + (n-1)r \quad \text{لدينا :}$$

$$a_n = 2 + (10 - 1) * 3 = 29$$

مثال : أوجد الحد الأول في المتتالية العددية التي حدها العاشر 27 وأساسها 3 .

$$a_n = a + (n-1)r \quad \text{لدينا :}$$

$$27 = a_1 + (10 - 1) * 3 \Rightarrow 27 = a_1 + 9 * 3$$

$$a_1 = 0$$

مجموع حدود المتتالية العددية :

لنفرض أن لدينا المتتالية العددية التالية :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

لنجمع هذه الحدود ولنرمز a_n للمجموع بـ S فنجد أن :

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

لنأخذ حاصل جمع الحدود بشكل آخر فنجد أن :

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

لنجمع العلاقتين السابقتين طرفاً لطرف :

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1)$$

وحسب الخاصة الأولى نجد أن :

$$2S = n(a_1 + a_n) \quad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

وبالتالي فإن القانون الذي يعطينا مجموع حدود المتتالية العددية S_n والتي عدد حدودها n وحدها الأول a وأساسها r هو :

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]$$

أوبشكل آخر :

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

ملاحظة (1) – يكون للمتتالية العددية حد وسط إذا كان عدد حدودها فردياً ، ويكون مجموع الحدين المتساويين البعد عن الطرفين مساوياً لضعف هذا الحد الأوسط .

مثال : لنكن لدينا المتتالية العددية التالية :

$$\div -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27$$

إن :

$$-3 + 27 = 2 + 22 = 7 + 17 = 2 * 12$$

ملاحظة (2) يتم تشكيل أية متتالية عددية من حدها الأول a_1 وحدها الأخير a_n وعدد حدودها n من خلال معرفة r بتطبيق العلاقة :

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

ملاحظة (3) : إن من أهم تطبيقات المتتالية العددية ما يمكن ملاحظته في الأعمال المصرفية حيث التعرف على الفائدة (أونمورأس المال) .

مثال : انخر أحد الأشخاص في نهاية الشهر مبلغاً قدره 50 ل.س. وقرر أن يضيف لهذا الانخر شهرياً مبلغاً قدره 2 ل.س. فبعد كم سنة سيصبح المبلغ المدخر الشهري معادلاً لـ 88 ؟

$$a_n = a_1 + (n-1)b \quad \text{لدينا}$$

$$88 = 50 + (n-1)2 \Rightarrow 40 = 2n \Rightarrow n = 20$$

مثال : متوالية عددية حدها الأول 5 وحدها الأخير 122 وعدد حدودها 40 حداً فما هو مجموعها ؟

$$S = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{40}{2} (5 + 122) = 20 + 127 = 2540$$

مثال : متوالية عددية مؤلفة من 30 حداً مجموعها 2325 وحدها الأخير 150 فما هو أساس هذه المتوالية ؟

$$S = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad \text{لدينا}$$

$$2325 = \frac{30}{2} (a_1 + 150)$$

$$2325 = 15 a_1 + 15 \cdot 150$$

$$a_1 = 5$$

ولدينا أيضاً :

$$a_n = a_1 + (n-1)b$$

$$150 = 5 + (30-1)b$$

$$145 = 29 \cdot b$$

$$b = \frac{145}{29} = 5$$

مثال : متوالية عددية متزايدة مؤلفة من أربعة حدود حدها الأول 5 وحاصل جداء طرفيها يقل 72 عن حاصل جداء الحد الثاني في الحد الثالث ، فما هو أساسها ومجموعها ؟

لنفرض أن أساس للمتوالية العددية هو b ، فتكون حدود المتوالية العددية هي:

$$5 \quad 5+b \quad 5+2b \quad 5+3b$$

لدينا فرضاً أن :

$$\begin{aligned} 5(5+3b) + 72 &= (5+b)(5+2b) \\ 25 + 25b + 72 &= 25 + 2b^2 + 15b \\ b^2 &= 36 \Rightarrow b = 6 \end{aligned}$$

إذا فالمجموع هو :

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)b]$$

$$S = \frac{4}{2} [2 * 5 + (4-1)6] = 56$$

مثال : مجموع 3 أعداد متتالية عددية متزايدة هو 21 ومربع الأول ينقص عن ثالثها بمقدار 2 فما هي هذه الأعداد ؟

لنفرض أن أساس المتوالية العددية هو b ، فتكون حدود المتوالية العددية هي :

$$a \quad a+b \quad a+2b$$

$$3a + 3b = 21 \quad \text{لدينا من الفرض :}$$

$$a + b = 7 \quad \text{أي أن :}$$

$$a^2 + 2 = a + 2b \quad \text{ولدينا أيضاً :}$$

$$a^2 + 2 = a + 2(7 - a) \quad \text{أي أن :}$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a - 3)(a + 4) = 0$$

$$\text{إما } a = -4 \text{ مقبول ومنه } b = 11$$

$$\text{أو } a = 3 \text{ مقبول ومنه } b = 4 \text{ إذاً لدينا متتاليتان :}$$

-4	7	18
3	7	11

مثال : مجموع 3 أعداد في متتالية عددية 36 ومجموع مربعاتها 450 فما هي هذه الأعداد ؟

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي : $a - b$ ، a ، $a + b$

من الفرض نجد أن : $a - b + a + a + b = 36$ أي أن : $a = 12$
ومن الفرض لدينا أيضاً :

$$(a - b)^2 + a^2 + (a + b)^2 = 450$$

$$3 + 144 + 2b^2 = 450 \quad \text{أي أن :}$$

$$2b^2 = 18 \quad \text{ومنه :}$$

$$b = \pm 3$$

وبالتالي فالأعداد هي :

$$\begin{array}{ccc} 9 & 12 & 15 \\ 5 & 12 & 9 \end{array}$$

حدود متوالية عددية

2- المتوالية الهندسية : هي كل تسلسل من الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحيث

أن كل عدد منها وليكن a_i ($i \geq 2$) ينتج من سابقه بضربه بعدد ثابت نرسم له r ونسميه أساس المتوالية الهندسية ، أي أن :

$$a_i = a_{i-1} * r \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

نرمز للمتتالية الهندسية : بـ $\{a_i\}$ ونضع بين حدودها (:

ونسمي $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحدود المتوالية الهندسية ، a_n الحد الأخير (العام، النوني)
ونلاحظ أن :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

ونجد نوعين للمتوالية الهندسية : متوالية هندسية متزايدة حينما يكون $r > 1$ ،

ومتوالية هندسية متناقصة حينما يكون أساسها $0 < r < 1$ ومتوالية هندسية

متناوبة الإشارة الجبرية حينما أساسها $r < 0$.

أمثلة :

(1) تشكل الأعداد التالية :

3 6 12 24 48

متتالية هندسية متزايدة حدها الأول 3 وأساسها 2 حيث نلاحظ أن : $2 > 1$
لما الأعداد التالية :

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$

فتشكل متتالية هندسية متناقصة حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$ حيث نلاحظ أن :

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

كما وتشكل الأعداد التالية :

1 -2 +4 -8 16 -32 +64

متتالية هندسية متناوبة حدها الأول 1 وأساسها -2 حيث نلاحظ أن : $-2 < 0$
نلاحظ مما سبق أن :

1- إذا كان الحد الأول معدوماً فإن جميع حدود المتتالية مهما كان أساسها مدومة وعندئذ تسمى بالمتوالية الصفرية .

2- إذا كان أساس المتوالية الهندسية مساوياً للواحد فإن جميع حدود المتتالية متساوية ومساوية للحد الأول .

3- إذا كان الحد الأول في المتتالية الهندسية سالباً وأساسها موجباً فإن جميع حدود المتتالية الهندسية سالبة .

فإذا فرضنا أن الحد الأول -3 والأساس هو 3 فالحدود هي :
-3 -9 -27 -81

الحد النوني :

يعطى الحد العام (النوني) الذي رتبته n بالمتصور التالي :

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

لأنه لو افترضنا أن الحد الأول هو a والأساس r نجد أن :

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4 \dots ar^{n-1}$$

مثال : أوجد الحد النوني لمتتالية هندسية حدها الأول 2 وأساسها 3

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

فإذا كانت $n = 15$ لوجدنا أن

$$a_{15} = 2 \cdot 3^{14}$$

مثال : أوجد الحد السابع والعشرين في المتتالية :

$$1 \quad 3 \quad 9$$

$$a_{27} = 1 \cdot 3^{26} = 3^{26}$$

مثال: ما هو ترتيب الحد 3486784401 في متتالية حدها الأول هو 1 وأساسها.

خواص المتتالية الهندسية :

1- إن كل حد من حدودها يساوي الحد الأول مضروباً بالأساس مرفوعاً إلى

القوة التي تساوي عدد الحدود الذي يسبق هذا الحد المعين .

نستطيع التحقق من هذه الخاصية بالعودة مباشرة إلى صيغة الحد النوني .

2- إن لوغاريتمات حدود المتتالية الهندسية هي حدود متوالية عددية .

لنفرض أن لدينا المتتالية الهندسية التالية :

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \dots ar^{n-1}$$

لنأخذ لوغاريتم كل حد من هذه الحدود

$$\ln a \quad \ln (ar) \quad \ln ar^2 \quad \ln ar^3 \quad \ln ar^{n-1}$$

بتطبيق خواص اللوغاريتمات نجد أن الحدود أصبحت بالشكل التالي :

$$\ln a \quad \ln a + \ln r \quad \ln a + 2 \ln r \quad \ln a + 3 \ln r \dots \ln a + (n-1) \ln r$$

وهي حدود متتالية عددية حدها الأول هو $\ln a$ وأساسها $\ln r$

3- أي حد في المتتالية الهندسية هو وسط هندسي بين مجاورين .

لنفرض أن حدود المتتالية هي :

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4 \dots ar^{n-1}$$

نجد أن :

$$ar = \sqrt{a * ar^2}$$

$$ar^2 = \sqrt{ar * ar^3}$$

$$ar^3 = \sqrt{ar^2 * ar^4}$$

مثال : إذا فرضنا أن لدينا المتتالية الهندسية التالية :

1 2 4 8 16 32 64 128.....

نجد أن :

$$4 = \sqrt{2 * 8}$$

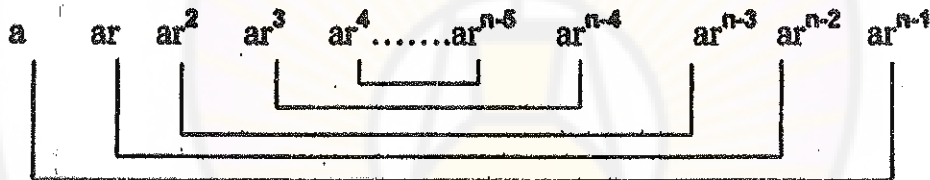
$$8 = \sqrt{4 * 16}$$

$$32 = \sqrt{16 * 64}$$

$$64 = \sqrt{32 * 128}$$

4- جداء أي حدين متساويي البعد عن الطرفين ثابت ويساوي جداء الطرفين ،

إذا فرضنا أن لدينا المتتالية التالية :



نجد أن :

$$ar^4 * ar^{n-5} = ar^3 * ar^{n-4} = ar^2 * ar^{n-3} = \dots\dots\dots$$

$$= a * ar^{n-1} = a^2 r^{n-1}$$

مثال : إذا فرضنا أن لدينا المتتالية الهندسية التالية :

1 2 4 8 16 32 64 128 256

نجد أن :

$$1 * 256 = 2 * 128 = 4 * 64 = 8 * 32 = \dots\dots\dots$$

مجموع حدود المتتالية الهندسية :

للقانون الذي يعطينا مجموع حدود متوالية هندسية S_n أساسها r وعدد حدودها n وحدها الأول a هو :

$$S_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{arn^r - a}{r - 1} \quad (r > 1)$$

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (0 < r < 1)$$

بالحقيقة لنفرض أن لدينا المتتالية الهندسية التالية :

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \dots \dots \dots$$

لنجمع هذه الحدود ، فنجد أن :

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \dots \dots + a_n$$

لنضرب طرفي العلاقة السابقة بالأساس r فنجد أن :

$$S.r = a_1.r + a_2.r + a_3.r + \dots \dots \dots + a_n.r$$

وباعتبار أن :

$$a_2 = a_1.r \quad \text{و} \quad a_3 = a_2.r \quad \text{و} \quad \dots \dots \dots$$

فب طرح العلاقتين السابقتين من بعضهما البعض طرفاً لطرف نجد أن :

$$S - S.r = a_1 - a_n . r = a_1 - a_1 . r^{n-1} . r = a_1 . r^n$$

$$S (1-r) = a_1 (1-r^n)$$

$$S = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad (0 < r < 1)$$

لما إذا بالطرح التالي :

$$S.r - S = a_n . r - a_1 = a_1 . r^n - a_1$$

$$S = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \geq 1)$$

وحيثما تكون المتتالية الهندسية متناقصة وعدد حدودها لا نهائي فنجد أن :

مجموع حدودها والذي نرمز له بـ $S - \infty$ يحسب من خلال العلاقة التالية :

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

مثال : متوالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي 62 ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع يساوي 310 ، فما هو حدها الأول وأساسها ؟

لدينا فرضاً :

$$a + ar + ar^2 = 62$$

$$ar + ar^2 + ar^3 = 310$$

$$(1+r+r^2) 310 = (r + r^2 + r^3) \quad \text{ومنه نجد أن}$$

$$(1+r+r^2) 310 = (1 + r + r^2) \cdot r \cdot 62$$

$$r = \frac{310}{62} = 5$$

وبالتالي فالحد الأول هو :

$$a = \frac{62}{1+5+25} = \frac{62}{31} = 2$$

مثال : ما عدد حدود المتتالية : 3 , 12 , التي مجموعها 255

$$255 = 3 \frac{1-4^n}{1-4} \Rightarrow 255 = -1-4^n$$

$$256 = 4^n \Rightarrow n = 4$$

مثال : ثلاثة أعداد تشكل فيما بينها متوالية هندسية فإذا علمت أن العدد الثاني

يزيد على الأول بمقدار 15 ويزيد الثالث على الأول بمقدار 75 ، فما هي هذه

الأعداد ؟

نفرض أن الأعداد الثلاثة هي : a ar ar^2

فحسب الفرض لدينا :

$$a + 15 = ar \Rightarrow a(r-1) = 15$$

$$a + 75 = ar^2$$

$$\frac{15}{r-1} = 75 = \frac{15r^2}{r-1}$$

$$15 + 75(r-1) = 15r^2$$

$$15r^2 - 75r + 60 = 0$$

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-4) = 0$$

$$\text{مرفوض} \quad r = 1$$

$$\text{مقبول} \quad r = 4 \Rightarrow a = 5$$

إذا حدود المتتالية هي :

5

20

80

مسئله : متتالية هندسية حدودها موجبة ، فإذا كان مجموع الحد الخامس وضعفا
الحد السادس يساوي عشرة أمثال الحد الرابع ، وإذا كان الحد التاسع يساوي
1536 فالمطلوب أوجد الحد السابع .

نفرض أن الحدود هي :

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4 \quad ar^5 \quad ar^6 \quad ar^7 \quad ar^8$$

$$ar^4 + 2ar^5 = 10 ar^3 \quad \text{لدينا فرضاً :}$$

$$ar^4 (1 + 2r) = 10 ar^3 \Rightarrow r(1 + 2r) = 10 = 2(1 + 2 * 2)$$

$$r = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$ar^8 = 1536 \quad \text{لدينا فرضاً :}$$

$$a = \frac{1536}{256} = 6$$

$$ar^6 = 6 * 2^6 = 384 \quad \text{إذا فالحد السابع هو :}$$

مسئله : متتالية هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الأول والثالث 20
ومجموع الحدين الثالث والخامس يساوي خمسة أمثال مربع الحد الثاني ، أوجد
الحد الأول والأساس .

لنفرض أن حدود المتتالية هي :

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4$$

لدينا فرضاً :

$$\begin{aligned} a + ar^2 &= 20 \Rightarrow a(1+r^2) = 20 \\ ar^2 + ar^4 &= 5a^2r^2 \Rightarrow ar^2(1+r^2) = 5a^2r^2 \Rightarrow (1+r^2) = 5a \\ a * 5a &= 20 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \quad \text{ومنه :} \end{aligned}$$

بما أن الحدود موجبة إذاً الحد الأول هو $a = 2$ والأساس هو $r = 3$

ملاحظة : نستطيع أيضاً حساب جداء حدود المتتالية الهندسية Π الذي عدد حدودها n ولأساسها r وجدها الأول a وجدها الأخير a_n من خلال المستور :

$$\Pi = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

$$\Pi = a_1^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{لو}$$

مثال (*) : أحسب مجموع مربعات الـ n عدداً الأولى من الأعداد الصحيحة من خلال التحقق التالي :

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لإيجاد هذا المجموع نطلق من المطابقة التالية :

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

حيث نغطي لـ K القيم $1, 2, 3, \dots, n$ ونحصل على n معادلة :

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$\vdots$$

$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

بجمع هذه المعادلات طرفاً لطرف ثم بإجراء الاختصارات نجد أن :

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3(1+2+3+\dots+n)}{3}$$

$$= \frac{n+1}{3} \left(n^2 + 2n - \frac{3n}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ملاحظة (1) :

إن من أهم تطبيقات المتتالية الهندسية هوكيفية حساب الكسر العادي المولد لكسر عشري دوري .

مثال: احسب الكسر العادي المولد للكسر العشري الدوري البسيط 0.373737 .
يمكن كتابة الكسر هذا من خلال مجموع متتالية هندسية .

$$0.373737 = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \frac{37}{100 \times 100^2} + \frac{37}{100 \times 100^3} + \dots$$

وهي متتالية هندسية متناقصة أساسها $\frac{1}{100}$ وغير متناهية ومجموع حدودها

يساوي الكسر العشري الدوري المعطى 0.373737

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-R} = \frac{0.37}{1-0.01} = \frac{0.37}{0.99} = \frac{37}{99}$$

I-8- : في التحليل التوافقي وذوي الحدين :

يبحث التحليل التوافقي في عدد الطرائق التي يمكن من خلالها تشكيل مجموعات جزئية مختلفة من مجموعة أساسية تحوي عناصر مختلفة ، ثم إيجاد عدد هذه المجموعات الجزئية.

(*) يمكن حساب ذلك عن طريق المطابقة $3(k-1)$ بإطباء k قيم 1 ، 2 ، 3 ، n ثم إجراء نفس الخطوات .

إذا أمكن إجراء عمل ما بـ n_1 طريقة مختلفة وبعد إنجازه بإحدى هذه الطرق أمكن للقيام بعمل ثان بـ n_2 طريقة مختلفة وبعد إنجازه بإحدى هذه الطرق أمكن للقيام بعمل ثالث بـ n_3 طريقة مختلفة وهكذا فإن الأعمال السابقة يمكن إجراؤها كلها معاً .

بالتتالي بـ $n_1 * n_2 * n_3$ طريقة

فإذا أمكن اختيار أحد العناصر بـ n_1 طريقة ثم بعد هذا الاختيار كان للعنصر الثاني يختار بـ n_2 طريقة والعنصر الثالث يختار بـ n_3 طريقة بعد اختيار العنصرين الأوليين ... وهكذا فإن عدد المجموعات الممكنة تشكيلها يكون مساوياً :

$$n_1 * n_2 * n_3 * \dots\dots\dots$$

فإذا فرضنا أن لدينا المجموعة $A = \{a,b,c,d\}$ وطلب منا تشكيل المجموعات الجزئية التي كل منها يتألف من 3 عناصر مأخوذة من عناصر A ، لوجدنا أن العنصر الأول يمكن اختياره من بين أربعة عناصر المؤلفة للمجموعة A ، يبقى لدينا ثلاثة عناصر نختار منها العنصر الثاني ثم يبقى لدينا عنصران نختار منها العنصر الثالث ، إذا فعدد المجموعات الجزئية المؤلفة من ثلاثة عناصر هو:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

24 مجموعة جزئية ، وهذه المجموعات هي :

abe , abd , acd , acb , adb , adc
bac , bad , bdc , bca , bda , bcd
cab , cad , cbd , cba , cda , cdb
dab , dac , dbc , dba , dca , dcg

يتضمن التحليل التوافقي النقاط التالية :

الترتيب — التباديل "المتبادلات" — التوافيق

(a) الترتيب : نسمي بالمرتببات المجموعات المولفة من عدة عناصر عددها k والممكن تشكيلها من مجموعة أساسية تحوي عدداً من العناصر قدره n ($k \leq n$) إن القانون الذي يعطينا عدد مرتببات n عنصراً مأخوذة k و k والذي نرمز له بالومز A_n^k هو:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots [n-(k+1)]$$

ففي المثال السابق أوجدنا مرتببات أربعة عناصر مأخوذة ثلاثة فـ ثلاثة وقد وجدنا أن هناك 24 مرتبة من مجموعة تحوي أربعة عناصر مأخوذة ثلاثة فـ ثلاثة ، ونلاحظ أن هناك في المرتببات مجموعات (مرتبة) تحوي العناصر نفسها ولكن بترتيب مختلفة مثل :

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

إن A_3^3 عدد المرتببات الممكن تكوينها من 5 عناصر مأخوذة ثلاثة فـ ثلاثة ، أي :

$$A_3^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \quad \text{مرتبة}$$

(b) التبديل : وهي حالة خاصة من الترتيب نحصل عليها عندما نجعل $n = k$ إن عدد مرتببات n عنصراً مأخوذة n فـ n (أي مأخوذة كلها جميعاً) والذي نسميه بعدد المتبادلات ونرمز له بـ p_n ليس إلا $n!$ (n عاملي) ، أي أن :

$$P_n = A_n^n = n!$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 4, 3, 2, 1$$

حيث نسمي جداء العوامل في الطرف الأيمن بعاملي العدد n والذي رمزنا له بـ $n!$ إن عدد متبادلات 6 عناصر مأخوذة كلها جميعاً هو :

$$A_6^6 = P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \quad \text{مرتبة}$$

لنلاحظ أن هناك علاقة أساسية وهامة تربط بين التبديل والترتيب هي :

$$(n-k)! A_n^k = A_n^n P_n =$$

$$A_n^k = \frac{A_n^n}{(n-k)!} = \frac{P_n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

إذا جعلنا في هذا الدستور $n = k$ فنجد أن $0! = 1$ ونحن نكتب إصطلاحاً $0! = 1$

ويحسب عدد متبادلات مجموعة ما عدد عناصرها n عنصراً مكونة من k_1 عنصراً متشابهاً ، k_2 عنصراً متشابهاً آخر ، k_3 عنصراً متشابهاً آخر... وهكذا.

والذي نرمز له بالرمز $P_{n, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n}$ وفق الدستور التالي :

$$P_{n, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_n!}$$

(c) المتوافقات : نسمى المتوافقة كل مجموعة مؤلفة من سائر عناصر مجموعة معينة أو من بعض عناصر تلك المجموعة دون النظر إلى ترتيب عناصر هذه المجموعة .

فالمتوافقات هي المجموعات التي نحصل عليها باختيار كل أجزء من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى ترتيب العناصر المأخوذة .

فمثلاً : المتبادلات ab, ba يقابلها متوافقة وحيدة مؤلفة من العنصرين a, b ،

كما ومن عدداً من المتبادلات قدره $3!$ على النحو التالي :

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

يقابله من a, b, c واحدة وهي المجموعة المؤلفة من العناصر a, b, c .

إذا رمزنا بـ C_n^k لعدد متوافقات n عنصراً متبايناً مأخوذاً k فـ K فإن كل

متوافقة تولف $k!$ متبادلة ، ويكون عدد المرتبات مساوياً عدد المتوافقات مضروباً

بعدد المتبادلات .

أي أن :

$$A_n^k = C_n^k \cdot K!$$

أي أن عدد متوافقات n عنصر مأخوذ k فـ K هو :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

لنلاحظ أنه إذا جعلنا في العلاقة الأخيرة :

$$K = 0 \Rightarrow C_n^0 = 1$$

$$K = 1 \Rightarrow C_n^1 = n$$

$$K = n \Rightarrow C_n^n = 1$$

$$K = n-k \Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

تعد النتيجة الأخيرة من النتائج الهامة التي يمكن الاستفادة منها في أثناء التطبيقات وذلك حينما تكون k أصغر من نصف عدد عناصر المجموعة $(k < \frac{n}{2})$

(d) نظرية ثنائي الحد :

نسمي أي مقدار جبري مؤلف من حدين على النحو التالي $(x + a)$ (حيث a ثابتة عددية)

بثنائي الحد (ذي الحدين) ، كما ونسمي عملية ضرب ثنائي الحد $(x + a)$ بثنائي الحد $(x + b)$ بمفكوك الجداء (أوبمنشوره) .

لقد وجدنا في الثانوية أن هناك عدداً من العلاقات الجبرية الصحيحة دوماً والتي دعوناها بالمطابقات الشهيرة وهي:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cd$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ba^2 + 3b^2a \pm b^3$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = \dots\dots\dots$$

$$a^5 + b^5 = (a \pm b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^n \pm b^n = (a \pm b)(a^{n-1} \pm a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

تعطينا نظرية ذات الحدين القانون الذي من خلاله نستطيع فك (نشر) ذي الحدين $(x + a)$ المرفوع إلى القوة n (n صحيح موجب) دون المرور بالعمليات الحسابية متبعين الطريقة الاستنتاجية التالية :

$$(x + a)^1 = x + a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3ax^2 + a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

إذا أمعنا النظر في الأطراف اليمنى وماهية كل حد في كل طرف وكيفية استنتاج كل طرف من سابقه نجد أن بالإمكان كتابة :

$$(x + a)^n = x^n + Ax^{n-1} \cdot a + Bx^{n-2} \cdot a^2 + Cx^{n-3} \cdot a^3 + \dots + a^n$$

حيث تعد الثوابت $A, B, C, \dots$ مقادير تتبع قيم n تعيينها أيضاً بملاحظة الأطراف اليمنى السابقة ، فمثلاً يمكن ملاحظة كيفية التوصل إلى قيم A, B الموجودين في الحدود الثانية ، وفي الحدود الثالثة في الأطراف اليمنى من خلال الجدول التالي :

n	1	2	3	4	5
A	1	2	3	4	5
B	0	1	3	6	10
B	$n \cdot 0$	$n \cdot 1/2$	$n \cdot 1$	$n \cdot 3/2$	$n \cdot 2$
B	$n \cdot 0/2$	$n \cdot 1/2$	$n \cdot 2/2$	$n \cdot 3/2$	$n \cdot 4/2$
B	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$

لنلاحظ أن قيمة B (وذلك مهما تكن $n = 1, 2, \dots, s$) والواردة في السطر الرابع نكتب كما وردت في السطر الخامس وبالتالي نستنتج كتابتها في السطر السادس أي :

$$B = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} \quad (2! = 2 \cdot 1 = 2)$$

وبالطريقة نفسها نستطيع التوصل إلى حساب المقدار C كما يلي :

$$C = \frac{B(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

فإذا ما قمنا بتبديل قيم A, B, C في الشكل العام لنشر $(x + a)^n$ لوجدنا أن بالإمكان كتابته على النحو التالي :

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot a + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} a^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} x^{n-k} a^k + \dots + a^n$$

تسمى العلاقة السابقة بمنشور (بمفكوك) ذي الحدين (ثنائي الحد) ، حيث يسمى الحد :

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} x^{n-k} a^k$$

الحد ذي المرتبة $(k+1)$ في المفكوك بالحد العام (الحد المولد) والذي يكتب بالشكل التالي :

$$C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

وفق التمثيل السابق ، نستطيع كتابة منشور ذي الحدين وفق الصيغة التالية :

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

أوبالشكل التالي :

$$(x+a)^n = a^n \left(\frac{x}{a} + 1 \right)^n = a^n \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{a} \right)^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

ملاحظة : تكمن أهمية تطبيقات منشور ذي الحدين في :

— إيجاد القيمة التقريبية لعدد ما مثل $\sqrt{0.972}$ ،

— في إزالة بعض حالات عدم التعيين مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) = \infty - \infty$$

$$= x \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]$$

$$= x \left[\left(1 + \frac{1}{3x} + \dots \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \dots \dots \dots$$

$$\lim_{\pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) = \frac{1}{3}$$

— إيجاد المشتق من المرتبة النونية لجداء تابعين قابلين للاشتقاق .

(e) خواص مفكوك ذي الحدين :

— عدد حدود المفكوك $(x+a)^n$ هو $(n+1)$ حداً

— يظهر x في الحد الأول من لمفكوك بقوة n ثم تتناقص هذه القوة بمقدار

واحد في كل حد حتى تصل إلى للصفر في الحد الأخير ، بينما تبدأ قوة a

بالصفر (بنفس الوقت) متزايدة بمقدار واحد وحتى تصل إلى الأخير حيث تكون

قوة a هي n .

— مجموع قوتي x ، a في أي حد من حدود المفكوك هي n .

— إن كل حد من حدود المفكوك يتألف من ثلاثة عناصر هي :

— أمثال (معامل) الحد في المفكوك ، وهي :

$$C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^k, \dots$$

الحد الأول x — الحد الثاني a

— إذا كانت n هي زوجية فيوجد في مفكوك ذي الحدين حد أوسط واحد نحصل

على رتبته k بأن نجعل $k = \frac{n}{2}$ في الحد العام للمفكوك .

— إذا كانت n فردية فيوجد مع مفكوك ذي الحدين حدان أوسطان نحصل على

رتبتهما k_2, k_1 بأن نجعل :

$$K_1 = \frac{n-1}{2} \quad \text{و} \quad K_2 = \frac{n+1}{2}$$

— رتبة الحد العام $a^k \cdot x^{n-k} \cdot C_n^k$ في المفكوك هي $(k+1)$.

— إن أمثال (معاملات) حدود مفكوك ذي الحدين هي (على الترتيب) :

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots$$

كما أن أمثال أي حدين متساويين البعد عن طرفي المفكوك تكون متساوية ،

وهذا يأتي من الخاصية الأساسية للمتوالفات والتي هي :

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

فمثلاً : إن أمثال الحد الثاني يساوي أمثال الحد الذي يسبق الحد الأخير ،

كما وأن أمثال الحد الذي يأتي بعد k حداً هو C_n^k وهو يساوي أمثال الحد

الذي يسبق k حداً والذي هو C_n^{n-k} .

يمكن التوصل لأمثال (معاملات) حدود المفكوك استناداً إلى الخاصية التالية :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	1	C_{n-1}^1	C_{n-1}^2	C_{n-1}^3	C_{n-1}^4	C_{n-1}^5	C_{n-1}^6	C_{n-1}^7	C_{n-1}^8	C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
n	1	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	C_n^7	C_n^8	C_n^{p-1}	C_n^p

إن كلاً من حدود هذا الجدول كما نلاحظ نحصل عليه بجمع الحد الذي فوقه مباشرة مع الحد الذي يقع على يساره مباشرة وبالمسطر نفسه .

إن كلاً من حدود هذا الجدول كما نلاحظ نحصل عليه بجمع الحد الذي فوقه مباشرة مع الحد الذي يقع على يساره مباشرة وبالمسطر نفسه .

حالة خاصة : مفكوك ذو الحدين المرفوع لقوة سالبة أوكسرية : في هذه الحالة نفرض أن n هي صحيحة أوكسر موجب أو سالب ، فحتى نتمكن من تطبيق دستور مفكوك ذي الحدين في هذه الحالة نشترط دوماً أن تكون القيمة العددية للحد الثاني في ثنائي الحد $(x+a)$ أي نشترط أن تكون قيمة a هي أصغر من القيمة العددية للحد الأول والذي هو x ، ونلاحظ أنه في هذه الحالة تكون حدود المفكوك لدينا غير منتهية .

فمثلاً : يمكن إيجاد منشور المقدار

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

شرطية أن تكون x أصغر من الواحد (أي $x < 1$) وأيضاً يمكن إيجاد منشور المقدار

$$(1+x)^{-1}$$

شرطية أن تكون x أصغر من الواحد (أي $x < 1$) تطبيقات محلولة :

$$1- \text{أوجد الحد السادس في مفكوك } (x+a)^7$$

إن قوة a هي 5 ، هذا يعني أن a^5 وبالتالي فإن قوة x هي 2 أي x^2 أمثال هذا الحد هو C_7^5 أي أن :

$$= 21 \frac{7!}{2!5!} = C_7^5$$

∴ الحد السادس هو :

$$21 x^2 \cdot a^5$$

$$2- \text{أوجد أمثال } x^4 \text{ في مفكوك } (x-a)^9$$

إن قوة x هي 4 قوة a هي 5 وهذا يتحقق عندما يكون لدينا الحد موحد سانس
في المفكوك ، إذاً أمثال x^4 هي :

$$C_9^5 = (-1)^5 \cdot \frac{9!}{5!4!} = -9.7.3$$

3- لوجد الحد الثاني عشر في مفكوك $(3x - \frac{6}{x})^{15}$

إن قوة $(-\frac{6}{x})$ هي 11 ، إذاً قوة $3x$ هي 4

للمعامل هو:

$$C_{15}^{11} = C_{15}^4 \\ = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = 15 \cdot 7 \cdot 3$$

فإذاً الحد الثاني عشر =

$$C_{15}^4 (3x)^4 \cdot \left(-\frac{6}{x}\right)^{11}$$

ويساوي أيضاً :

$$15 \cdot 7 \cdot 13 \cdot (3x)^4 \cdot \left(-\frac{6}{x}\right)^{11}$$

4- لوجد القيمة التقريبية للجذر $(0.927)^{\frac{1}{2}}$

$$(0.927)^{\frac{1}{2}} = (1 - 0.073)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}(-0.073) - 0.0006661 + \dots$$

فإذاً لكتفينا بدرجة معينة من التقريب بالشكل الذي يتجانس مع التقريب لوجدنا
أن :

$$\sqrt{0.927} = 1 - 0.0358339 = 0.9641661$$

5- لوجد قيمة $(1.02)^{12}$ مقرباً النتيجة إلى الرقم العشري الرابع
لنكتب $(1.02)^{12}$ بشكل آخر

$$\begin{aligned}
 (1.02)^{12} &= (1+0.02)^{12} = 1 + 12(0.02) + \frac{12 \cdot 11}{2!} (0.02)^2 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} (0.02)^3 + \dots \\
 &= 1 + 0.24 + 0.0264 + 0.00176 + 0.00008 + \dots \\
 &= 1.26823 \approx 1.2682
 \end{aligned}$$

6- أوجد رتبة الحد الذي يحوي x^6 في المفكوك $(\frac{1}{x} - x^2)^{12}$ ثم أوجد هذا الحد.
 إن رتبة الحد في $k + 1$ والحد العام هو:

$$C_n^k \cdot (-x^2)^k \cdot (\frac{1}{x})^{12-k} = (-1)^k C_{12}^k x^{2k} x^{3k-12} = (-1)^k C_{12}^k x^{3k-12}$$

وحسب الفرض $3k-12 = 6$ أي $k = 6$ أي أن $k = 6$ فالحد المطلوب هو السابع وقيمته هي :

$$(-1)^6 C_{12}^6 x^6 = 924x^2$$

7- أحسب الحد الخامس في المفكوك $(x^2 + \frac{y}{2})^6$

الحد العام هو:

$$\begin{aligned}
 C_n^k \cdot n^{n-k} a^k &\Rightarrow C_6^4 \cdot (+x^2)^4 \cdot (\frac{y}{2})^4 \\
 &= \frac{15}{16} y^4 \cdot x^8
 \end{aligned}$$

8- أوجد الحد الرابع في المنشور $(x - 2y)^6$

$$C_6^3 \cdot x^{n-k} (-2y)^k = C_6^3 x^3 (-1)^3 y^3 = -20 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot 2^3$$

9- أوجد أمثال x^4 في المنشور $(3x - 2y)^9$

$$C_9^3 (3x)^4 \cdot (-2y)^5 = C_9^3 \cdot 3^4 \cdot 2^5 \cdot (-1) \cdot x^4 \cdot y^5$$

I - 9 - في علم الجبر :

— المعادلة من الدرجة الأولى : شكلها العام : $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

لها جذر وحيد هو $x = -\frac{b}{a}$ إشارة الطرف الأيسر من ذي الحدين قبل الجذر

مخالفة لإشارة المتحول x وبعده موافقة لإشارة المتحول x .

— المعادلة من الدرجة الثانية : شكلها العام : $ax^2 + bx + c = 0$

لنفرض أن مميزها : $\Delta = b^2 - 4ac$ ، لعلها وإيجاد جذورها نميز الحالات

التالية :

(أ) $\Delta > 0$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان x_1, x_2 يتم حسابها من خلال

الدستور التالي :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حيث : مجموع الجذرين هو : $x_1 + x_2 = -b/a$

وجداء الجذرين هو $x_1 \cdot x_2 = c/a$

(ب) $\Delta = 0$ للمعادلة جذر مضاعف بحسب من خلال الدستور التالي :

$$x = -b/2a$$

(جـ) $\Delta < 0$ للمعادلة جذران تخيليان (عقديان) .

للتعرف على إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c$

نميز الحالات التالية وذلك حسب وضع مميزه .

(أ) $\Delta > 0$ وقد وجدنا أنه يكون لثلاثي الحدود جذران حقيقيان مختلفان x_1, x_2 فإذا

فرضنا أن x قيمة ما محصورة بين الجذرين فإن إشارة ثلاثي الحدود مخالفة

لإشارة a ، أما إذا أخذت x قيم خارج منطقة الجذرين فإن إشارة ثلاثي الحدود

موافقة لإشارة a وذلك مهما تكن x .

ب) $a = 0$ وقد وجدنا أن ثلاثي الحدود جذراً مضاعفاً x لهذا فإن إشارته قبل وبعد هذا الجذر موافقة لإشارة a وذلك مهما تكن x .

جـ) $\Delta < 0$ وهنا تكون إشارة ثلاثي الحدود من إشارة a وذلك مهما تكن x .
ولدينا بعض المتطابقات الشهيرة :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ba^2 + 3b^2a \pm b^3$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-1} + b^{n-1})$$

I - 10 - لتعابير الرياضية وتصنيفاتها

الهدف : غالباً وحين حل بعض المسائل تلجأ إلى القوانين ومساخر توسلنا إلى هذا الفن (مسألة حساب مساحات أشكال ، حجوم أشكال فراغية ، معادلات ،)
إلا أن هناك بعض المسائل والتمارين يتطلب حلها إيجاد الصيغة (العبرة) الرياضية التي يفرضها نستطيع التوصل إلى حلها ، ولناخذ أمثلة عديدة على ذلك :

- حساب التكلفة الكلية .
- حساب الاستثمار .
- حساب الاستهلاك اليومي .
- حساب مسألة التوازن النقدي .
- حساب الإنتاج الكلي .

مما سبق نستنتج أنه لا يمكن التوصل لحل هذا النوع من المسائل ما لم نلجأ إلى صياغة المسألة من خلال تركيب (عبارة) جبري يحوي مجهولاً أو عدة مجاهيل وإشارات جبرية ومساواة . هذا التركيب (العبارة) الجبري يقسم إلى قسمين :

1- تركيب جبري محقق دائماً مهما تكن قيمة المجهول الذي يدخل بتركيبه، مثال:

$$\frac{(x+1)+x^2}{x^2(1+x)} \equiv \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq 0 \text{ و } x \neq -1)$$

مثل هذا التركيب يسمى بالمطابقة .

2- تركيب جبري محقق من أجل قيم (قيمة) معينة للمجهول ، مثال :

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

وهذا التركيب محقق من أجل $x = 1$ و $x = 4$

مثل هذا التركيب يسمى للمعادلات وحلول التركيب الجبري هذا يسمى بجذور المعادلة ، ويمكن أن نجد للمعادلات أنواعاً عديدة منها :

(a) - المعادلات ذات المجهول الواحد : وهي معادلات تحتوي مجهولاً واحداً فقط ولهذه المعادلات درجات مختلفة بحسب أعلى أس (قوة) للمجهول في هذه المعادلة ويمكن التوصل إلى درجة المعادلة من خلال إجراء العمليات الحسابية والاختصارات عليها ، ولقد كنا قد تعرفنا سابقاً على المعادلة من الدرجة الأولى والمعادلة من الدرجة الثانية وكيفية إيجاد حلول كل منها ، إلا أننا لم نتعرف وبالشكل المنطقي والعلمي الصحيح على حلول المعادلات اعتباراً من الدرجة الثالثة فما فوق ، لهذا سوف نشرح طريقة إيجاد حلول هذا النوع من المعادلات بالشكل العام .

--- المعادلة من الدرجة n : الشكل العام لها هو :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

(وكما نلاحظ أن الطرف الأيسر ليس إلا كثير حدود بشكله العام) حيث $a_n \neq 0$ وإلا أصبحت من الدرجة $(n-1)$.

تنص نظرية بيزو Bezout على أنه إذا انعدم كثير الحدود $f(x)$ من أجل $x = A$ فهو يقبل القسمة على $(x - A)$.

بالحقيقة إذا رمزنا للطرف الأيسر للمعادلة من الدرجة n بـ $f(x)$ فنكون بذلك قد حصلنا على كثير حدود ، فإذا فرضنا أن حاصل قسمته على $(x - A)$ هو $h(x)$ وأن الباقي هو R مقدار ثابت درجته أقل من درجة $(x - A)$ فإن بالإمكان كتابة ذلك على النحو التالي :

$$f(x) \equiv h(x) \cdot (x - A) + R$$

فإذا جعلنا $x = A$ نجد أن :

$$f(A) \equiv 0 + R$$

هذا يعني أن باقي قسمة $f(x)$ على $(x - A)$ هو $f(A)$ ، وفي حال كان $f(A) = 0$ فإن $R = 0$ وبالتالي فإن $f(x)$ يقبل القسمة على $(x - A)$ بدون باقي . ويبرهن في التحليل الرياضي من خلال نظرية دالامبير D'alambert أن لكل معادلة مهما تكن درجتها n عدداً من الحلول يساوي درجتها n (يمكن أن تكون هذه الحلول حقيقية أو عقدية أو الاثنين معا أو مكررة).

بالحقيقة إذا رمزنا بـ $f(x)$ للطرف الأيسر للمعادلة من الدرجة n وجعلنا $= 0$ فإن له n جذراً مختلفاً $A, B, C, \dots, W$ ، (قد يكون بعضها واحداً) وبما أنه ينعدم من أجل أحدها وليكن A لذا فهو يقبل القسمة على $(x - A)$ ، أي أن :

$$f(x) \equiv (x - A) h_1(x)$$

$h_1(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n-1)$ فإذا جعلنا $x = B$ نجد أن :

$$f(B) \equiv (B - A) \cdot h_1(B)$$

$$(B - A) \cdot h_1(B) = 0 \quad \text{أي أن}$$

هذا يعني أن $h_1(B) = 0$ ، أي أن $h_1(x)$ يقبل القسمة على $(x - B)$ والذي يكتب كما يلي :

$$h_1(x) \equiv (x - B) \cdot h_2(x)$$

حيث $h_2(x)$ من الدرجة $(n - 2)$ وهكذا وبفس أسلوب المناقشة السابقة نصل إلى :

$$h_{n-1}(x) \equiv (x - w) \cdot h_n(x)$$

حيث $h_n(x)$ من الدرجة صفر ، أي ثابت عددي نفرضه L ، فبالنعويض عما سبق نجد أن :

$$f(x) \equiv (x - A)(x - B)(x - C) \dots (x - W)L$$

وتعني هذه الأخيرة أن كل كثير حدود من الدرجة n يمكن كتابته بشكل n من المضاريب (الجداءات) كل منها من الدرجة الأولى .

الجدير بالذكر أنه لا يمكن القول بأن هناك قاعدة ثابتة لحساب هذه الجذور وغالبية الطرق المتبعة لإيجاد جذور مثل هذه المعادلات تعتمد على الطريقة التجريبية في إيجاد أحد الجذور

ثم تخفيض درجة للمعادلة وإعادة الأسلوب من جديد، وهناك نظريتان (نورد هما دون برهان) يمكن الاعتماد عليهما في إيجاد أحد الجذور إن وجد ، وهما :

النظرية الأولى :

بفرض أن جميع الأمثال (المعاملات) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ هي صحيحة وكان لهذه المعادلة حل صحيح A ($A \neq 0$) فإن هذا الحل هو أحد قواسم الحد المطلق a_0 .

ملاحظة (1) :

إذا كانت الأمثال غير صحيحة فإننا نجري عليها العمليات الحسابية والاختصارات المتعارف عليها ، حيث نعتبر الحد المطلق هو الحد الناتج بنهاية العمليات .

ملاحظة (2) :

إذا كان أحد قواسم الحد المطلق ليس حلاً للمعادلة فهذا يعني أنه ليس للمعادلة حلول صحيحة (حلولاها غير صحيحة أوتخيلية) وإن نتطرق في هذا المؤلف إلى طريقة البحث عن حلول تقريبية .
النظرية الثنية :

إذا فرضنا أن A هو أحد حلول المعادلة النونية (صحيحاً أو غير صحيح) فإن كثير الحدود الموجود في الطرف الأيسر للمعادلة يقبل القسمة على $(x - A)$. (والعكس صحيح : أي إذا قبل كثير الحدود القسمة على $(x - A)$ فإن A هو أحد حلول المعادلة) .

وباعتبار أننا لم نتطرق إلى براهين هاتين النظريتين ولا إلى الأسلوب الذي تم من خلاله التحقق من صحتها ، لهذا سوف نورد وبشكل عملي الخطوات التي يمكن اتباعها في إيجاد الحلول الصحيحة لمعادلات الدرجة النونية على النحو التالي :

- 1- نكتب المعادلة النونية بشكل نجعل أحد الأطراف معلوماً .
- 2- نتحقق من كون أن جميع الثوابت أعداد صحيحة (إذا لم تكن صحيحة فإننا نجري عليها العمليات الحسابية والاختصارات المعروفة بالشكل الذي يتحول فيه إلى أعداد صحيحة) .
- و نبحث عن قواسم الحد المطلق a_0 (الجديد بعد الاختصارات) .

4- نفترض عن القاسم (أحد القواسم إن وجد أكثر من قاسم) للذي من أجله تتحقق المعادلة والذي يشكل أحد جذور هذه المعادلة .

5- لنفرض أن هذا القاسم المحقق للمعادلة هو A فعندما نقسم الطرف الأيسر للمعادلة على (x - A) حيث يكون ناتج القسمة بمثابة الطرف الأيسر للمعادلة من الدرجة (n-1)

6- نكرر الخطوات السابقة وذلك لتخفيض درجة المعادلة وبالتالي الحصول على جذورها .

مثال (1) : أوجد جذور المعادلة التالية :

$$-4x^3 + 5x^2 + 3x + 6 = 0$$

الحل : لنطبق الخطوات السابقة، إن الحد المطلق هو 6 وقواسمه هي :

$$3, 2, 1, -1, -2, -3$$

نفترض عن أحد القواسم الذي يحقق المعادلة فنجد أنه 2 ، لنقسم الطرف الأيسر

على (x - 2) فنجد أن ناتج القسمة هو:

$$-4x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$4x^2 + 3x + 3 = 0$$

باعتبار أنها معادلة من الدرجة الثانية لا داعي لتكرار الخطوات السابقة،

بل نلجأ لحلها بالطرق المعروفة لدينا سابقاً ، حيث نجد أن مميزها سالب

وبالتالي فلا حلول صحيحة لها .

مثال (2) : أوجد جذور المعادلة التالية :

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = 0$$

الحل : لنطبق الخطوات التالية ، إن الحد المطلق هو 24 وقواسمه هي :

$$12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4, -6, -8, -12$$

لنفترض عن أحد القواسم الذي يحقق المعادلة فنجد أن :

$$x = 2 \Rightarrow 16 - 64 + 68 + 4 - 24 = 0$$

أي أن $(x - 2)$ هو أحد حلول المعادلة لنجري عليه القسمة فنحصل على :

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$$

لنعيد الخطوات السابقة من جديد ، إن قواسم الحد المطلق هي :

$$-6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$$

لنفحص عن أحد القواسم الذي يحقق المعادلة فنجد أن :

$$x = -1 \Rightarrow -1 - 6 - 5 + 12 = 0$$

أي أن $(x + 1) = [x - (-1)]$ هو أيضاً أحد حلول المعادلة السابقة ، لنجري

عملية القسمة فنحصل على :

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

بالتحليل العادي نجد أن :

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$$

إن جذور المعادلة المعطاة هي :

$$2, -1, 4, 3$$

أي أن :

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x - 2)(x + 1)(x - 4)(x - 3)$$

المعادلات الكسرية : هي معادلات حدودها على شكل كسر كل من البسط

والمقام فيها كثير حدود لـ x من درجات مختلفة .

مثال : المعادلة الكسرية :

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x - 2} - \frac{4}{7} = \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 1}$$

لحل هذا النوع من المعادلات نعمل على تحويلها إلى إحدى المعادلات السابقة

وذلك من خلال إجراء العمليات الحسابية والاختصارات على طرفيها .

مثال : أوجد حل المعادلة السابقة :

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x - 2} - \frac{4}{7} = \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 - 4}$$

الحل : لنوحد المقامات :

$$7(x+2)(x^2+3x+4)-4(x^2-4)=7(x^3+4x-1)$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة ، نعمل على حلها كما وجدنا سابقاً .

— المعادلات الجذرية (الصماء) : هي معادلات بعض (أوكل) حدودها موضوعة تحت إشارة الجذر .

مثال : المعادلة الصماء التالية :

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-2}=\sqrt{x+1}$$

ولإيجاد حلولها نحاول التخلص من الجذور وذلك لإعانتها إلى أحد الأشكال السابقة من المعادلات .

مثال : أوجد جذور المعادلة الصماء التالية :

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-5}$$

الحل : نربع الطرفين فنجد أن :

$$x-2\sqrt{x(x+3)}+(x+3)=x-5$$

$$4x(x+3)=x^2+16x+64$$

$$3x^2-4x-64=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية يمكن إيجاد جذورها وهي $x=-4$ و $-\frac{16}{3}$

وهذه الجذور هي جذور للمعادلة الناتجة عن المعادلة الصماء فيمكن

لهذه الجذور أن تحقق المعادلة الصماء ويمكن لا .

ملاحظة هامة : ليست جميع الحلول الناتجة عن حل المعادلة الصماء هي حلول

للمعادلة الصماء ، (وهذا ناتج عن تربيع الطرفين الذي بموجبه يتم تغيير

الإشارات السالبة إن وجدت) ولتحديد حلول المعادلة الصماء يجب التحقق من

حلول المعادلة الناتجة عن المعادلة الصماء فإذا عدنا إلى المثال السابق وأرنا

معرفة حلول المعادلة الصماء لوجدنا أنه من أجل $x = \frac{16}{3}$ نجد وبالتبديل في المعادلة الصماء :

$$\sqrt{\frac{16}{3}} - \sqrt{\frac{16}{3} + 3} = \sqrt{\frac{16}{3} - 5}$$

وهذا الحل غير محقق للمعادلة الصماء .

من أجل $x = -4$ نجد وبالتبديل في المعادلة الصماء :

$$\sqrt{-4} - \sqrt{-4 + 3} = \sqrt{-4 - 5}$$

والحل أيضاً غير محقق .

مثال آخر : حل المعادلة التالية :

$$\sqrt{3x} - \sqrt{3x - 5} = 1$$

$$36x^2 + 36 - 72x = 36x^2 - 60x$$

$$12x = 36 \Rightarrow x = 3$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{9 - 5} = 1 \Rightarrow 3 - 2 = 1$$

وهي محققة

(b) المعادلات المتعددة المجهول :

وهي معادلات تحوي أكثر من مجهول ونجد لهذه المعادلات نوعين :

— المعادلات الخطية : نعرف المعادلة الخطية بأنها المعادلة التي تحوي

مجهولاً واحداً أو عدة مجاهيل بحيث أن قوة أي مجهول فيها يساوي الواحد

الموجب الصحيح .

أمثلة

$$3x + 10 = 0$$

$$2x + y + z = 5$$

$$7x - 3y + 5z + u + v = -1$$

وكما نلاحظ أن $ax + by = c$ هي معادلة خطية بمجهولين والمعادلة :

$ax - by + cz = d$ هي معادلة خطية بثلاثة مجاهيل ، وكما نعلم أن المعادلة الواحدة بأكثر من مجهولين ليس لها حل وحيد ولا حتى عدد محدد من الحلول ، لهذا فكمي نوجد حلاً وحيداً لعدة مجاهيل يجب أن يقابلهم عدد من المعادلات يساوي عدد المجاهيل ويجب أن تكون هذه المعادلات مستقلة. وسوف نتطرق إلى حل هذه المعادلات الخطية في فصل للمصفوفات بشكل مفصل .

— المعادلات غير الخطية : وهي المعادلات التي تنفذ عن صيغة المعادلات الخطية .

مثلاً : المعادلة $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ هي معادلة غير خطية بمجهولين من الدرجة الثانية ، حيث $a, b, c, \dots$ ثوابت . يتطلب حل هذا النوع من المعادلات وإيجاد حل وحيد لها أن تكون هذه المجاهيل مرتبطة من خلال معادلات مستقلة فيما بينها .

فمثلاً لإيجاد حل جملة للمعادلتين التاليتين :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 - 3x + y + 5 &= 0 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

باعتبار أن هناك معادلة خطية تربط بين المجهولين x, y ولذا نوجد أحد هذين المجهولين ونعوضه في الأخرى لنتمكن من الحل .

I-11 - القيمة المطلقة :

(a) تعريف : لנأخذ على محور الأعداد الحقيقية R النقطتين x_1, x_2 فإذا كان $x_1 < x_2$ فإن المسافة d بين هاتين النقطتين $d = x_2 - x_1$ هي قيمة موجبة ، وإذا كان $x_1 > x_2$ فإن المسافة بين هاتين النقطتين $d = x_1 - x_2$ وهي قيمة موجبة أيضاً .

إذا مهما كان وضع النقطتين x_1, x_2 على محور الأعداد الحقيقية فإن المسافة بينها هي القيمة الموجبة لفرق العددين x_1, x_2 حيث تسمى هذا القيمة بالقيمة المطلقة للفرق بين العددين x_1, x_2

وبالشكل المجرد يمكن تعريف القيمة المطلقة لعدد ما وليكن a ورمز لها بالرمز $|a|$ على أنها القيمة العددية لذلك العدد بغض النظر عن إشارته .
مثال :

$$9 = 9, \quad |-9| = -(-9) = 9$$

وبشكل عام : إن القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي :

$$x = \begin{cases} x, & "x \geq 0" \\ -x, & "x < 0" \end{cases}$$

من خلال التعريف نجد أن :

$$1) \quad |x| = \text{Max} (-x, x), \quad (|x| \leq x, \quad |-x| \leq x)$$

$$2) \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad (\sqrt{x^2} \text{ هي كمية موجبة دوماً})$$

أمثلة :

$$\sqrt{9^2} = 9, \quad \sqrt{(-9)^2} = 9$$

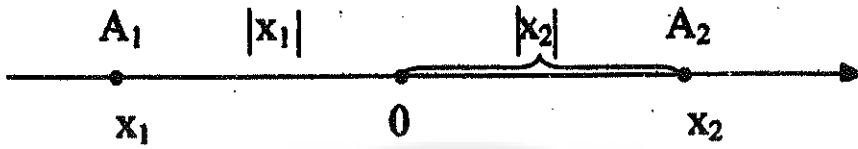
$$2x - 3 \neq |2x - 3| \quad (\text{If } x > \frac{3}{2})$$

$$2x - 3 = |3 - 2x| \quad (\text{If } x < \frac{3}{2})$$

$$2x - 3 = 0 \quad | \quad (\text{If } x = \frac{3}{2})$$

مما سبق نستنتج أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x ليست إلا المسافة من نقطة الأصل 0 وحتى النقطة A التي تمثل العدد الحقيقي x .

*- للتعرف على المترجمات يستطيع الجودة إلى بحث المترجمات وخواصها في آخر هذا المؤلف .



إذا يتكفل تعريف القيمة المطلقة في حساب المسافة بين نقطتين والتعكس على محور الأعداد الحقيقية .

وفي الشكل نلاحظ أن x_1 سالبة لذا فالنقطة A_1 التي تمثلها تقع على يسار نقطة الأصل 0 وبالتالي فالمسافة $0A_1$ تساوي $|x_1|$. أيضاً إن x_2 موجبة فالنقطة A_2 التي تمثلها تقع على يمين نقطة الأصل 0 وبالتالي فإن المسافة $0A_2$ تساوي $|x_2|$.

(b) نظريات القيمة المطلقة (*) :

نظرية (1) بفرض أن x عدد حقيقي ما ولن $a \in \mathbb{R}^+$ فإن :

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ أو } x \leq -a$$

$$|x| \geq 0, \quad |0| = 0$$

$$|x| > 0 \quad (x \neq 0 \text{ إذا وفقط إذا})$$

نظرية (2) بفرض أن x, y عدنان حقيقيان لا على التعيين (موجبان أو سالبان) فإن :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(*) - يطلق بعض الاختصاصيين على النظريتين (2) و(3) اسم قاعدتي المثلث وذلك لتشابههما مع بعض قواعد المثلث في الهندسة المستوية .

والتحقق من صحتها سوف نأخذ الحالات الممكنة :

— إذا كان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ عنئذ $x + y \geq 0$ وبالتالي المتراجحة تصبح مساواة :

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

— إذا كان $x \leq 0$ و $y \leq 0$ عنئذ $x + y \leq 0$ والمتراجحة تصبح أيضا

$$|x + y| = -x - y = -x + (-y) = |x| + |y|$$

— إذا كان $x \geq 0$ و $y \leq 0$ عنئذ $|x| = x$ و $|y| = -y$ فإذا كان $x + y \geq 0$ عنئذ :

$$|x + y| = x + y \leq x = |x| \leq |x| + |y|$$

لما إذا كان : $x + y \leq 0$ عنئذ :

$$|x + y| = -x - y = -x + |y| \leq |y| \leq |x| + |y|$$

— إذا كان $x \leq 0$ و $y \geq 0$ فلا اختلاف عما سبق :

$$\text{لمثلة : } | -8 + 3 | \leq | -8 | + | 3 | \quad \text{لأن } | 8 + 3 | = 11$$

$$| -8 | + | 3 | = 8 + 3 = 11$$

مبرهنة (3) بفرض أن x, y عددين حقيقيين لا على التحيين (موجبان أم سالبان) فإن :

$$|x - y| \geq |x| - |y| = |y| - |x|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

بالحقيقة إن :

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

مثال: $|12 - 7| \leq |12| + |7|$ ($|12 - 7| = |5| = 5$)

$$|12| + |7| = 12 + 7 = 19$$

نظرية (4) افرض أن x, y عدداً حقيقيين لا على التبيين (موجباً أم سالباً) فإن:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|x^n| = |x|^n \quad (n \text{ عدد صحيح موجب})$$

للتحقق من ذلك سوف نستخدم المترابطة الثلاثية على الأعداد $x, y, x - y$

ثم على الأعداد $x, y, x - y$:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

وبشكل مشابه:

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

وباعتبار أن $||x| - |y||$ هو مساو لأحد الأرقام $|x| - |y|$ أو $|y| - |x|$ لذا ينتج:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

مثال :

$$||-3| - |-5|| \leq |-3 - (-5)|$$

لأن :

$$||-3| - |-5|| = |3 - 5| = |-2| = 2$$

$$||-3| - (-5)| = |-3 + 5| = |-2| = 2$$

نظرية (5) بفرض أن x, y عدنان حقيقيان لا على التعيين (موجبان أم سالبان)

فإن :

$$|x| - |y| \leq |x + y|$$

للتحقق من صحة ذلك نسلوك الأسلوب السابق نفسه ، مطبقين للمترابطة

المثلثة أولاً على الأعداد $x + y$ و $-y$ ثم على الأعداد $y + x$ و $-x$.

$$||-3| - |-5|| \leq |-3 + (-5)|$$

مثال :

$$||-3| - |-5|| = 2$$

لأن :

$$|-3 + (-5)| = |-3 - 5| = |-8| = 8$$

نظرية (6) : بفرض أن x عدد حقيقي لا على التعيين و c ثابتة عددية

$$|x| < c \iff -c < x < c$$

لنفرض أولاً أن $x < c$: باعتبار أن $x \leq x$ ينتج أن $|x| < c$ ومن

جهة أخرى إذا كان $x < -c$ عندئذ $-x \geq c$ وباعتبار أن $-x \geq -x$

ينتج أن $|x| \geq c$ وهذا ما يناقض الفرضية لذا $-c < x$ يعني أن $-c < x$

وبالتالي $-c < x < c$

$$|x| < c \iff -c < x < c$$

وبالعكس لنفرض أن $-c < x < c$: بالضرب بـ (1-) نستنتج أن :
 $-c < -x < c$ فإذا كان x موجب عندئذ $x = x$ وبالتالي $x < c$ وإذا
 كان x سالب عندئذ $-x = x$ وبالتالي $x < c$.

مثال :

$$|x| < 7 \Leftrightarrow -7 < x < 7 \text{ و } -7 < 3 < 7$$

ملاحظة : في المتراجحة :

$$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$$

ويمكن استخدام الرمز $\leq$ ويكون :

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$$

12-I- المجالات (الفترات العددية)

(a) تعريف : لنفرض أن $a, b \in \mathbb{R}$ (حيث $a \leq b$) نسمي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين a, b بالمجال المفتوح ونرمز له بالرمز :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} :]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

— نسمي العددين a, b بطرفي المجال (حدي المجال) والفرق بين هذين العددين $(b - a)$ بسعة المجال ، وإذا حوى المجال المفتوح طرفيه a, b فعندها نسميه بالمجال المغلق ونرمز له بالرمز :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

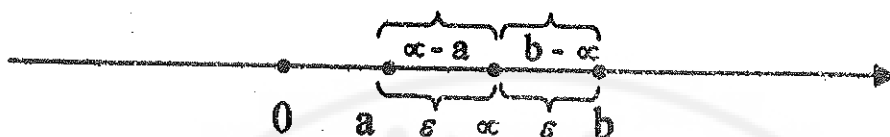
وإذا حوى المجال المفتوح فقط a ، فعندئذ نسميه بالمجال نصف المفتوح من اليمين ونرمز له بالرمز :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

لما إذا حوى المجال المفتوح فقط b ، فعندئذ نسميه بالمجال نصف المفتوح من اليسار ونرمز له بالرمز :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} :]a, b[= \{x : a < x \leq b : x \in \mathbb{R}\}$$

وإذا مثلنا مجموعة الأعداد الحقيقية من خلال محور الأعداد الحقيقية :



فيُسمى α مركز المجال المفتوح $]a, b[$ وتحسب قيمته من العلاقة :

$$\alpha = \frac{b+a}{2}$$

كما وندعو للعدد ϵ الذي يحقق العلاقة التالية :

$$\epsilon = \alpha - a = b - \alpha$$

بتتصيف قطر المجال المفتوح $]a, b[$ حيث نجد :

$$]a, b[=]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

ومن هذا نستطيع أن نبرهن أنه إذا كان α مركز المجال المفتوح $]a, b[$ ، ϵ ،

نصف قطره فإن :

$$\forall x \in]a, b[\Leftrightarrow |\alpha - x| < \epsilon$$

$$\begin{cases} (\alpha - x) < \epsilon \\ -(\alpha - x) < \epsilon \end{cases}$$

وقد يصادفنا أحياناً مجالات مختلفة ، نعرض هذه المجالات جميع في

الجدول التالي :

$]a, b[= \{x : a < x < b ; x \in \mathbb{R}\}$
$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b ; x \in \mathbb{R}\}$
$]a, b] = \{x : a < x \leq b ; x \in \mathbb{R}\}$
$[a, b[= \{x : a \leq x < b ; x \in \mathbb{R}\}$
$]a, b[= \{x : a < x < b ; x \in \mathbb{R}\}$
$] -\infty, b[= \{x : -\infty < x < b ; x \in \mathbb{R}\}$
$]a, \infty[= \{x : a < x < \infty ; x \in \mathbb{R}\}$
$] -\infty, b[= \{x : -\infty < x < b ; x \in \mathbb{R}\}$

(b) الجوار :

بفرض أن x_0 عدد مفروض، إن أي مجال مفتوح مركزه x_0 يدعى جوار العدد x_0 ونرمز له بالرمز Nx_0 ، وإذا فرضنا أن ε عدد موجب فإن للمجال :

$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ يدعى جوار العدد x_0 بالحقبة إذا كان $\varepsilon > 0$ وكان x_0 مركزاً للمجال المفتوح $[a, b]$ فإن :

$$Nx_0 = [a, b] = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

إذا حذفنا النقطة x_0 من جوار هذه النقطة فإن المجموعة المتبقية تدعى جواراً محذوفاً للنقطة x_0 ، بمعنى آخر إن أي جوار محذوف للنقطة x_0 هو من الشكل :

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

مثال : بفرض أن نصف قطر المجال هو $r=3$ فإن جوار العدد الحقيقي a هو :

$$N_a(3) =]a-3, a+3[$$

وإذا فرضنا أن نصف قطر المجال هو r فإن جوار العدد الحقيقي a هو :

$$N_a(r) =]a-r, a+r[$$

تمارين ومسائل

1- أوجد مجال حلول المتراجحات التالية :

$$\frac{(3x+1)(2x^2-2x+1)}{(x-2)(x^2+3x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{3x-5} - \frac{x-3}{2x-1} \geq \frac{7x}{3x+1}$$

$$\frac{2x-5}{2x+1} + \frac{x}{3x-7} < \frac{10x}{2x-3}$$

$$\frac{x-1}{3x-5} - \frac{3x+1}{2x-5} \geq \frac{5x-2}{x+1}$$

2- أوجد منطقة حلول كل من المتراجحات التالية :

$$3x - 4y > 7$$

$$x + y \leq 1$$

$$3x - 2y > -3$$

$$x - 5y \leq 1$$

$$x + 3y > -2$$

3- أوجد منطقة حلول كلاً من جملة المتراجحات التالية :

$$y + 2x < 5$$

$$3x + y \leq 1$$

$$7x - 3y > 1$$

$$x - y \geq 1$$

$$x + 2y > 1$$

$$2x + 5y \leq 1$$

$$Y = 3$$

$$Y > 1$$

$$Y = 2$$

$$x = 2y > 7$$

$$2x + 2y \leq 10$$

$$x > 1$$

4 - أوجد منطقة حلول كل من جملة المتراجحات التالية:

$$3x^2 - y + 5 > 0 \quad 5x^2 + y - 1 < 0 \quad y - x^2 + 3x + 2 < 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 < 0 \quad x^3 + 2x - y + 5 > 0 \quad 2y + x^2 + 5 > 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 < 0 \quad -x^2 - y^2 + 4 > 0 \quad x^2 + y^2 - 9 < 0$$

5- حل كلاً من المتراجحات التالية:

$$5x^2 - 6x - 7 < 0 \quad ; \quad 3x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$5x^2 - 3x + 4 < 0 \quad ; \quad x^2 - 4x + 4 > 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 3(x-3)(x-4)$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0$$

6- حل كلاً من المعادلات التالية "مستخدماً اللوغاريتمات لإيجاد الجذور":

$$2x^2 + 7x - 19 = 0$$

$$5x^2 - 7x - 11 = 0$$

$$x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$x(2x - 3) = 15$$

7- حل المعادلة التالية:

$$\log_a 3x^2 = \log_a \frac{3}{x} + \log_a 9x \quad (X=3)$$

8- أوجد قيمة المقدار:

$$(1.3795)^{17} * (0.3259)$$

$$(3.02958)^9 - \sqrt[3]{34.3275}$$

$$\sqrt{\frac{(3.14)^3}{25}}$$

9- أثبت أن:

$$\log_a \frac{10}{3} - \log_a \frac{2}{9} + \log_a \frac{1}{15} = 0$$

10- حل المعادلة التالية:

$$2x - \log(5^{2x} + 4x - 16) = \log 4^x$$

11- أدخل 5 أعداد بين العددين 2 و 28 بحيث تشكل هذه الأعداد متوالية عددية.

12- أوجد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 وحتى 100.

13- أحسب مجموع المائة عدداً صحيحاً فردياً (أزوجياً) ابتداءً من 100.

14- أوجد الحد التاسع والتسعين من المتوالية العددية التالية:

$$\div 13, 15, 17$$

15- أحسب مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية:

$$\div 3, 7, 11$$

16- أحسب مجموع الأعداد الزوجية المحصورة بين (1085) و (5351) :

17- ثلاثة أعداد يؤلف متتالية عددية مجموعها 32 ومجموع مربعاتها 395 فما هي هذه الأعداد؟

18- ما قيمة الدين الذي يؤدي خلال 10 سنوات على أن يدفع في السنة الأولى 1000 ل.س وفي السنة الثانية 1500 ل.س وفي السنة الثالثة 2000 وهكذا في كل سنة يزيد المبلغ المدفوع 500 ل.س عن السنة السابقة؟

19- اتفق موظف يعمل لدى مؤسسة مع مديرها على أن يكون دخله في أول كل سنة من أداء عمله 10000 ل.س ثم يضاف إليها إضافة ثلاثية في كل سنة عن السنة التي تسبقها.

ما هي الإضافة السنوية إذا كان دخله الموظف خلال 20 سنة 39000 ل.س؟

20- أحسب أساس وحدود متتالية عددية ذات ثلاثة حدود مجموعها 6- وجدلوها 64.

21- يعطى حجم كرة بالعلاقة $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ (حيث r نصف قطرها)

والمطلوب حساب حجم كرة نصف قطرها 30.82 cm سم ، ثم حساب نصف قطر كرة حجمها 825.5 cm^3 .

22 - احسب حجم مخروط قاعدته $r = 5.2 \text{ cm}$ وارتفاعه $L = 10.24 \text{ cm}$

إذا علمت أن حجمه يعطى من خلال العلاقة : $V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot l$

23- إذا علمت أن مساحة المثلث abc هي :

$$S = \sqrt{M(M-a')(M-b')(M-c')}$$

حيث a', b', c' أطوال أضلاعه المقابلة لزواياه و M نصف محيط المثلث

فاحسب مساحة المثلث إذا كان :

$$a' = 2.27 \text{ am} , b' = 3.52 \text{ cm} , c' = 5.21 \text{ cm}$$

24- ما عدد الذي يجب إضافته لكل من الأعداد 14 , 2 , 1- لتؤلف متتالية

هندسية

25- أوجد لكسور العادية المولدة لكسور العشرية الدورية :

$$0.25212121$$

$$0.12252525$$

$$0.1121212$$

$$0.09999$$

26- مجموع حدود متتالية هندسية متناقصة غير متناهية 20 والفرق بين حديها

الأول والثاني 11.25 فما هي هذه للمتتالية ؟

27- احسب الحد الأول والأخير من متتالية هندسية أساسها 0.25 وعدد حدودها

6 ومجموعها 2730.

28- احسب الحد الأول ومجموع حدود متتالية هندسية التي حدها الأخير 384

وأساسها 2 وعدد حدودها 8 .

29- ما هي حدود المتتالية الهندسية المؤلفة من 6 حدود مجموعها 7812 وأساسها 5 .

30 - احسب أساس المتوالية العددية التي حدها الخامس 8 وحدها التاسع 36 .

31- ادخل بين 5 و 19- خمسة حدود بحيث تشكل الأعداد متتالية حسابية .

32- ما هو ترتيب الحد الذي قيمته 87 في المتوالية :

$$\div -9 , -5 , \dots$$

33- أوجد (10) أعداد تشكل متوالية عددية مجموعها 465 وحدها الأخير 78.

34- احسب مضاعفات العدد 7 من 7 إلى 350 بما فيها الحد الأخير .

35- متوالية حسابية حدها الأول 9 ومجموع حدودها الأربعة الأولى يساوي

مجموع حدودها التسعة الأولى . أوجد أساسها ثم احسب حدها الثالث عشر .

36- إذا كان x هو الحد الذي ترتيبه a ، Y الحد الذي ترتيبه b ، z الحد الذي

ترتيبه c من متوالية عددية حدها الأول W وأساسها V ، فأثبت صحة العلاقة

التالية :

$$x(b - c) + y(c - a) + z(a - b) = 0$$

37- إذا كان $a_n = (5 - 18)$ الحد العام من متوالية ، فاحسب الحد الرابع

والحد الثاني عشر ثم أوجد عدد الحدود الموجبة في هذه المتوالية .

38- الحد العام للمتوالية هو $a_n = 3n - 25$ احسب الحد الرابع والحد الثالث

عشر ثم أوجد عدد الحدود السالبة .

39- ادخل 4 حدود بين $(a - b)$ ، $(6a + 4b)$ بحيث تشكل الأعداد الناتجة

متوالية عددية.

40- الحد الرابع في متوالية عددية هو (15) والحد التاسع هو (-5) فإذا كان

الحد الأخير (133) أوجد عدد حدود هذه المتتالية .

41- ابتدأ موظفان العمل في وقت واحد بمرتبتين مختلفتين ، فكان الأول يأخذ مرتباً شهرياً يبدأ بـ 4000 ل.س ، ويزداد 200 ل.س كل شهر ، بينما يأخذ الثاني مرتباً شهرياً يبدأ بـ 5000 ل.س ويزداد 100 ل.س ، فبعد كم شهر يصبح راتباهما متساويين؟ ، وبعد كم شهر يصبح مجموع ما قبض الأول مساوياً مجموع ما قبضه الثاني؟.

42- لوجد أربعة أعداد تشكل متوالية حسابية مع العلم أن جداء الطرفين يساوي $\frac{91}{9}$ وجداء الوسطين يساوي 11 .

43- إذا كانت الكميات $\frac{1}{a+b}$ ، $\frac{1}{b+c}$ ، $\frac{1}{c+a}$ تشكل متوالية حسابية . تحقق من أن الكميات b^2 ، a^2 ، c^2 تشكل بدورها متوالية حسابية .

44- أوجد المجموع النوني لمتوالية الأعداد الزوجية ابتداءً من 2 . ثم استنتج مجموع الأعداد الزوجية : $2 + 4 + + 232$

45- لتكن لدينا المتوالية للحسابية التي حدها الأول (19) وأساسها x .

1- احسب الأساس لتكون مجموع حدودها المئة الأولى يساوي 34 .

2- احسب الأساس لتكون نسبة الحد العاشر إلى العشرين مساوية $\frac{3}{2}$.

3- يشكل جداء الحدين الثاني والثالث من المتوالية وجداء الحدين الأول والرابع مفروضاً c ، ثم عين c ليكون للمعادلة الناتجة جذران حقيقيان مختلفا الإشارة .

46- احسب الد الذي ترتيبه n واحسب المجموع في المتوالية العددية الآتية :

$$\frac{n^2-1}{n} , n , \frac{n^2+1}{n} , \frac{n^2+2}{n} , \frac{n^2+3}{n} , ,$$

- 47- لدينا متواليتان حسابيتان عدد حدود كل منها n فإذا كانت نسبة مجموعيهما تساوي $\frac{2n+1}{n+2}$ مهما كان عدد الحدود n فأثبت أن الحد الأول من المتوالية الأولى يساوي الحد الأول من المتوالية الثانية ، ثم أوجد النسبة بين الحد الرابع من المتوالية الأولى والحد الرابع من المتوالية الثانية .
- 48- في متوالية عددية مجموع الحد الثالث مع الحد العاشر 43 ومجموع الحد السابع مع الحد الثاني عشر 61 فما هي هذه الأعداد ؟
- 49- مجموع ثلاثة أعداد مشكلة لمتوالية عددية 27 وحاصل ضرب هذه الأعداد الثلاثة 693 فما هي الأعداد ؟
- 50- ثلاثة أعداد تشكل متوالية عددية أصغر هذه الأعداد 10 وجداءها 2080 فما هي الأعداد ؟
- 51- ما هو عدد الحدود التي يجب إدخالها ما بين العددين 1 , 2 لنحصل على متوالية عددية الفرق ما بين كل حدين متتابعين فيها أقل من 0.01 .
- 52- احسب أضلاع المثلث القائم abc بعد معرفة أطوال أضلاعه تشكل متوالية عددية — ما هو الشرط اللازم كي تكون هذه الأطوال أعداداً صحيحة ، ما هي أطوال الأضلاع ليكون محيط المثلث مساوياً 36 سم .
- 53- عين قيم الوسيط c المذكور في المعادلة الآتية :

$$x^4 - (3c + 4)x^2 + (c + 1)^2 = 1$$
- 54- احسب الحد الأول a والأساس B لمتوالية عددية عدد حدودها n بعد العلم أن مجموع حدودها $= (3n + 1)n$ وذلك مهما تكن n .
- 55- متوالية عددها حدودها n ومجموعها يساوي $4n^2$ مهما كانت قيمة n ما هو حدها الأول وما هو أساسها .
- 56- أوجد مجموع الأعداد الصحيحة والقابلة للقسمة على 3 والمحصورة بين 200 ، 1000 .

57- ما هو ترتيب الحد الذي قيمته 486 في المتوالية الهندسية :

$$\frac{\ddot{\cdot}}{\ddot{\cdot}} 2, 6, \dots\dots\dots$$

58- ما هو ترتيب الحد الذي قيمته $\frac{1}{243}$ في المتوالية الهندسية :

$$\frac{\ddot{\cdot}}{\ddot{\cdot}} 1, \frac{1}{3}, \dots\dots\dots$$

59- أوجد متوالية هندسية مجموع حديها الأول والثاني 4 ومجموع حديها الثاني والثالث 12 .

60- احسب x إذا كانت $x + 6, x, x - 4$ الحدود الثلاثة الأولى من متوالية هندسية ، أوجد الحد الرابع .

61- احسب x, y في المتوالية الهندسية :
 $\frac{\ddot{\cdot}}{\ddot{\cdot}} 64, x, y, 27$

62- أدخل أربع حدود بين العددين 243 و 1

63- ثلاث أعداد تكون متوالية هندسية مجموعها 19 وإذا أضيفت إليها على الترتيب 3, 5, 6 كونت النواتج متوالية عددية أوجد الأعداد .

64- متوالية هندسية لا نهائية متناقصة مجموعها $7\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{3}$ ومتوالية

عددية حديها الأول يساوي الحد الأول للمتوالية السابقة فإذا كان الحدان السابع والأول من المتوالية العددية متساويين في المقدار ومختلفين بالإشارة فأوجد

المتوالية العددية ومجموع حدودها العشرة الأولى .

65- برهن أن :

$$1 + r + r^2 + \dots\dots\dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

64- متوالية هندسية حدودها موجبة فإذا كان $a_5 + 2a_6 = 10$ وكان $a_9 = 1536$

فأوجد a_7 .

65- أوجد مجموع المتوالية اللانهائية $\frac{1}{2}, 2, 8, \dots$.

66- أوجد الكسر العادي المولد للكسر العشري الدوري 1.3 .

67- أوجد أساس متوالية هندسية لا نهائية مجموعها 3 وحدها الأول 2 .

68- أوجد أساس متوالية هندسية لا نهائية حدها الأول يساوي مجموع جميع الحدود التي تليه .

69- أحسب a, r إذا كان :

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + \dots \infty &= 14 \\ a^3 + a^3r^3 + a^3r^6 + \dots \infty &= 392 \end{aligned}$$

70- بفرض أن $x < 1$ برهن أن :

$$S = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \dots + \dots \infty = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}$$

71- كم حداً يجب أخذه من المتوالية الهندسية $1, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots$ حتى يكون الفرق بين مجموع هذه الحدود وبين 2 أقل 10^{-6} .

72- إذا كونت الأعداد a, b, c متوالية هندسية ، فاثبت أن :

$$\frac{ab - cd}{b^2 - c^2} = \frac{a + c}{b}$$

73- ثلاثة أعداد تكون متوالية هندسية مجموعها = 70 وإذا ضرب العدد الأولي في 4 ، العدد الثاني في 5 ، العدد الثالث في 4 كونت نواتج الضرب متوالية عددية .

74- إذا كانت $4c, 3b, 2a$ متوالية عددية وكانت $2a, 3b - 2a, 4c - 2a$ متوالية هندسية فأوجد نسبة c إلى b .

75- متوالية هندسية لا نهائية كل حد من حدودها يساوي ضعف مجموع

الحدود التالية له فإذا كان الحد الرابع منها 3 ، فما المتوالية ؟

76- متوالية هندسية لا نهائية كل حد من حدودها يساوي 7 أمثال مجموع

الحدود التالية له فإذا كان مجموع المتوالية إلى ∞ ابتداءً من الحد الأول = 4

فما هي للمتوالية .

77- متوالية هندسية حدودها موجبة ، فإذا كان مجموع الحدين الأول والثالث

يساوي 20 وكان مجموع الحدين الثالث والخامس يساوي خمسة أمثال مربع

الحد الثاني فأوجد الحد الأول والسادس .

78- ثلاثة أعداد موجبة تكون متوالية هندسية مجموعها 14 ، ومجموع مقلوب

هذه الأعداد يساوي $\frac{7}{8}$ أوجد هذه الأعداد .

79- ثلاثة حدود تشكل متوالية هندسية مجموعها 224 وحاصل طرح مقلوب

هذه الأعداد يساوي 96 ، ما هي هذه الحدود ؟

80- أزيحت كرة نواس إلى جانب شاقول نقطة التعليق إزاحة طول قوسها 10

سم وعند تركها تجاوزت الشاقول إلى الجبهة الثانية بقوس مربع طوله $\frac{9}{10}$ طول

القوس السابقة ثم تابعت على هذا المنوال حتى استقرت فما هو طول المسافة التي

قطعتها الكرة أثناء تخامد حركتها .

81- مربع طول ضلعه 1 ، وصلنا بين منتصفات أضلاعه فحصلنا على مربع

ثان ثم وصلنا بين منتصفات أضلاع المربع الثاني فحصلنا على مربع ثالث

وهكذا .. احسب بدلالة الرابع بمقدار $\frac{3}{4}$. أوجد هذه المتوالية ثم أثبت أنه إذا

أخذ منها أي عدد زوجي من الحدود المتتالية مبتدئاً بالحد الأول فإن مجموع

الحدود الفردية الرتبة يساوي ضعف مجموع الحدود للزوجية الرتبة.

83- احسب المقادير التالية :

$$\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} , \quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

84- كم لفظاً يمكن تكوينه من جميع حروف كلمة (متبادلة) بشرط أن يشغل الحرف n دائماً وسط الكلمة.

85- برهن أن :

$$\frac{(n-k+1)! (k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k}$$

86- فك المقدار : $(x^2 - x - 2)^3$

باستخدام دستور ثنائي الحد نيوتن.

87- احسب الحد السابع من مفكوك $(1 - \frac{1}{x})^{10}$

88- احسب الحد الذي يحوي x^2 في مفكوك $(x^3 + \frac{a}{x})^{10}$

89- احسب أمثال x في مفكوك $(x^2 + \frac{a}{2x})^{14}$

90- أوجد الحد الذي لا يحوي x في مفكوك $(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2})^{15}$

91- أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(2x^3 + \frac{1}{2x})^{14}$

92- احسب النسبة بين الحدين الرابع والخامس في مفكوك $(2x - \frac{1}{4x^3})^5$

93- احسب $(1.03)^{10}$ لأربعة أرقام عشرية.

94- احسب $(0.97)^5$ لخمس أرقام عشرية.

95- أثبت أنه لا يوجد حد لا يحوي x في مفكوك $(\frac{x}{2} - \frac{2}{x})^5$

96- إذا كان الحد الخامس في مفكوك $(1+x)^{10} = \frac{13}{8}$ فما هي قيمة x .

97- إذا كانت النسبة بين الحدين السادس والثامن من مفكوك $(5x - 3)^n$ تساوي $\frac{24}{35}$ وذلك عندما $x = \frac{1}{2}$ ثم أوجد قيمة n .

98- أوجد النسبة بين حدين متتاليين في مفكوك ثنائي الحد لنيوتن ثم أوجد النسبة بين الحد السابع والسادس في مفكوك $(2x - 5)^{10}$.

99- أوجد قيمة النسبة $\frac{a_{n+2}}{a_n}$ ثم $\frac{a_2}{a_3}$ (a ترمز للحد) في مفكوك $(2x - 5)^{10}$.

100- إذا كونت أمثال الحدود الخامس والسادس والسابع في مفكوك $(1+x)^n$ متوالية عددية فما قيمة n ؟



الفصل الثاني

II- المصفوفات

مقدمة :

يرتكز التخطيط العلمي السليم والتنظيم الصحيح في مختلف الأنظمة الإنتاجية لقطاعات الاقتصاد الوطني على كم هائل وكبير من المعطيات والبيانات يتم تمثيله وفق شكل جدولي مما يسهل التعرف على مدخلات نظامه . وإن أفضل توضيح لهذا الشكل الجدولي هو المصفوفات التي تعد إحدى الأدوات الرياضية الأساسية المستخدمة في وضع الخطط الاقتصادية لمختلف الدول كما وتكمن أهمية المصفوفات في أنها تفتح لنا أبواب معالجة مختلف الظواهر والمشاكل الاقتصادية على مصراعها . لهذا يجمع الاقتصاديون والاحصائيون ونوو الخبرة والعاملون في المجالات التطبيقية للرياضيات الحديثة وأدواتها المختلفة على أهمية المصفوفات وتطبيقاتها في الأبحاث الحياتية .

يدخل مفهوم المصفوفة وتطبيقاتها الواسعة والعديدة في أبحاث ومسائل

كثيرة ، والتي يتطلب حلها المعطيات والعمليات الحسابية الكبيرة منها :

- الدراسات المتعلقة بالنواحي الاقتصادية والإحصائية والسكانية والتي تستخدم في نماذج جدول المدخلات والمخرجات التي تصانف لها العديد من التطبيقات المفيدة في مقررات : الرياضيات الاقتصادية والإدارية - الاقتصاد الرياضي - التخطيط والتنمية إلخ .

- نظرية القرارات والألعاب :

بحوث العمليات والبرمجة الخطية ، حيث تعد المصفوفة أساساً رئيسياً في هذه الأبحاث، إضافة إلى ذلك فإن الشكل الذي تأخذه المصفوفة يمكن الاستفادة منه بوضع البيانات والمعطيات بصورة مبسطة وسهلة يمكن من

خلالها استخلص النتائج المطلوبة وبشكل سريع ، ومما لا شك فيه فإن المصفوفة تلعب دوراً بارزاً في إيجاد العمليات الحسابية وذلك باستخدامها عن طريق الحاسب الإلكتروني .

- للمسائل التطبيقية الهامة المطلوب التعرف عليها لما لها من فوائد جمة تكمن في عملية الحصول على النتائج الصحيحة للعديد من الأبحاث الاقتصادية .

II - 1 - المصفوفات وأشكالها

II-1-1- تعريف للمصفوفة : هي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية متوضعة ضمن جدول مستطيل أو مربع وفق أسطر وأعمدة بجانب بعضها البعض ، وشكلها العام هو :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13}..... & a_{1j}..... & a_{1n}..... \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23}..... & a_{2j}..... & a_{2n}..... \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}..... & a_{mj}..... & a_{mn}.....
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \text{عدد الأسطر} \\
 \downarrow \\
 A_{(m,n)} = \\
 \uparrow \\
 \text{عدد الأعمدة}
 \end{array}
 \end{array}$$

حيث : m هو الدليل الأول للمصفوفة (أولاي عنصر من عناصرها) وبين عدد الأسطر .

n : هو الدليل الثاني للمصفوفة (أولاي عنصر من عناصرها) وبين عدد الأعمدة.

a_{ij} : هو أحد عناصرها ويقع في السطر الذي ترتيبه i وفي العمود الذي ترتيبه

$i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$

عادة نرسم للمصفوفة بأحد الأحرف اللاتينية الكبيرة وبجانبها داخل قوسين

(بعض المؤلفين لا يضمن القوسين) عدد الأسطر المؤلفة منها ونرمز له بـ m

وعدد الأعمدة المؤلفة منها ونرمز له بـ n ونرمز للعناصر بحروف صغيرة

مشتقة من الحرف الكبير للمصفوفة .

II - 1 - 2 : أشكالها :

المصفوفة المستطيلة : وهي مصفوفة يكون فيها عدد الأسطر لا يساوي عدد الأعمدة (أي $m \neq n$) فإذا كان $m > n$ فتسمى m بطول المصفوفة و n عرضها :

أمثلة :

$$A_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B_{(4,3)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

— المصفوفة المربعة : وهي مصفوفة يكون فيها عدد الأسطر مساوياً لعدد الأعمدة (أي $m = n$) ، نسمي العناصر التي تقع على الخط الواصل بين العنصرين الأول والأخير a_{11}, a_{nn} بالقطر الرئيسي ومجموع هذه العناصر بالأكثر الرئيسي ونرمز له بـ $\text{tr}(A)$ ونسمي العناصر التي تقع على الخط القاطع للقطر الرئيسي الذي يصل بين a_{1n} و a_{m1} بالقطر الثانوي ، وحاصل جمعها هو الأكثر الثانوي .

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

— إن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة $A(3,3)$ هي : (2 5 4)
وعناصر القطر الثانوي في المصفوفة $A(3,3)$ هي (0 5 9)
أما الأكثر الرئيسي في المصفوفة $A(3,3)$ فهو $2 + 5 + 4 = 11$

والأثر الثانوي في المصفوفة $A(3,3)$ فهو $0 + 5 + 9 = 14$
 - المصفوفة ذات السطر (الشعاع الأفقي) : وهي مصفوفة عناصرها تقع على
 سطر واحد فقط :
 أمثلة :

$$A(1,3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A(1,5) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة ذات العمود (الشعاع الشاقولي) : وهي مصفوفة عناصرها تقع
 على عمود واحد فقط .
 أمثلة :

$$A_{(5,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$B_{(4,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{(3,1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة الصفرية (المعدومة) : وهي مصفوفة جميع عناصرها معدومة
 وشكلها العام هو :

$$O_{(m,n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0..... & 0 \\ 0 & 0..... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0..... & 0 \end{bmatrix}$$

— المصفوفة الأحادية (الواحدة) : وهي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها جميع معدومة باستثناء عناصر القطر الرئيسي فيها التي كل منها يساوي الواحد .
وشكلها العام هو:

$$I_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$I_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— المصفوفة القطرية : هي مصفوفة مربعة الشكل جميع عناصرها معدومة باستثناء عناصر القطر الرئيسي فيها ، شكلها العام هو:

$$Q_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$Q_{(2,2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطبية: هي مصفوفة مربعة للشكل جميع عناصرها معدومة باستثناء عناصر القطر الرئيسي فيها فهي متساوية ، شكلها العام هو:

$$D_{(n,n)} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{11} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$D_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة: هي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي تساوي مقابلاتها والواقعة تحت القطر الرئيسي . شكلها العام هو:

$$S_{(n,n)} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$S_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad S_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

— المصفوفة المتقابلة : هي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيس تساوي نظائرها مقابلاتها والواقعة تحت القطر الرئيس كما وأن عناصر قطرها الرئيس معدومة ، شكلها العام هو :

$$A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 0 & +a_{12} & a_{13}..... & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & A_{23}..... & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & & 0 \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 8 \\ -7 & 3 & 0 & 5 \\ +1 & -8 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

— المصفوفة المثلثية العليا : هي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيس معدومة ، شكلها العام هو :

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \cdots t_{1n} \\ 0 & t_{22} & T_{23} \cdots t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} \cdots t_{3n} \\ 0 & 0 & 0 \cdots t_{nn} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$T_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad T_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

— المصفوفة المثلثية الدنيا : هي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة، شكلها العام هو :

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & t_{nn} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$T_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad T_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

— المصفوفتان المتساويتان: تتساوى المصفوفتان إذا كان لهما نفس عدد الأعمدة والأسطر و قيم العناصر المتقابلة متساوية .

أمثلة :

$$A_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & -8 \\ 7 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & -8 \\ 7 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفتين $A_{(4,4)}$ و $B_{(4,4)}$ متساويتان

II - 2 - المحددات (المعينات)

II-2-1- تعريف المحدد (المعين) : هو قيمة عددية ترفق بكل مصفوفة مربعة الشكل ، فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفة التالية :

$$A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

— فإن المحدد (المعين) الموافق لهذه المصفوفة والذي نرسم له Δ أو $|A_{(n,n)}|$ هو :

$$\Delta = |A_{(n,n)}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مما سبق نلاحظ أن لكل مصفوفة مربعة الشكل هناك محدداً (معيناً) يرافقها ، كما وأن له مرتبة تأتي من عدد أسطر (أعمدة) المصفوفة .

II-2-2- طرق حساب المحددات (المعينات) :

حساب المعين من المرتبة الثانية (*) : نعرف المحدد من المرتبة الثانية والذي يرافق المصفوفة المربعة الشكل من المرتبة (2×2) بأنه :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

أي : جداء عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه جداء عناصر القطر الثانوي .
أمثلة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 * 5 - (-2) * 1 = 17$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-4) * (-5) - (-3) (1) = 23$$

هناك طريقة أخرى لحساب المعين من المرتبة الثانية وتدعى طريقة المرافق (طريقة بيزوت)

— لنفرض أن لدينا المصفوفة المربعة الشكل من المرتبة $(2 * 2)$:

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فلإيجاد المحدد (المعين) المرفق بها نتبع الخطوات التالية :

الخطوة الأولى : نحسب مصفوفة الصغائر (المصفورات) والتي هي بالتعريف مصفوفة عناصرها محددات (معينات) تنتج من حذف السطر والعمود الذي يقع فيه العنصر المراد حساب معينه (محدده) .
مثلاً :

نحصل على المحدد الموافق للعنصر a وذلك بحذف السطر والعمود الذي يقع فيه العنصر a فنحصل على المحدد $|d|$.
نحصل على المحدد الموافق للعنصر b وذلك بحذف السطر والعمود الذي يقع فيه العنصر b فنحصل على المحدد $|c|$.

*— إن محدد (معين) المصفوفة ذات السطر الواحد والعمود الواحد هو العنصر نفسه الذي يكون المصفوفة .

فحصل على المحدد الموافق للعنصر c وذلك بحذف السطر والعمود الذي يقع فيه العنصر c فحصل على المحدد |b| .

فحصل على المحدد الموافق للعنصر d وذلك بحذف السطر والعمود الذي يقع فيه العنصر d فحصل على المحدد a .

وبالتالي فإن مصفوفة الصفائر (المصفورات) الموافقة للمصفوفة المربعة الشكل $A_{(2,2)}$ والتي يرمز لها بـ A_{Δ} هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية : تغير إشارات عناصر مصفوفة الصفائر ابتداءً من العنصر الأول الذي يأخذ الإشارة الموجبة فالعنصر الثاني الذي يأخذ الإشارة السالبة (شريطة أن لا تقع على نفس السطر (أو نفس العمود) لعنصرين متجاورين نفس الإشارة) .

بمعنى آخر أن يتم تحديد الإشارات كما يلي :

+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	لو	-	+	-	لو	-
		+	-	+	-	+	-

— فحصل على مصفوفة الموافقات (العوامل المشاركة) والتي ترمز لها بـ A_C حيث نجد أن :

$$A_C = \begin{bmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{bmatrix}$$

الآن ولحساب محددة (معين) المصفوفة نضرب عناصر (أي سطر) أي عمود من المصفوفة الأصلية $A_{(2,2)}$ بعناصر (السطر المقابل) العمود المقابل في مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) ثم نجمع نواتج الضرب فنحصل على قيمة المحددة ، أي أن :

$$|\Delta| = a*d + (-c)*b = ad - cb \quad (\text{حاصل جمع عناصر السطر الأول بعناصر السطر الأول})$$

$$|\Delta| = a*d + c*(-b) = ad - cd \quad (\text{حاصل جمع عناصر العمود الأول بعناصر العمود الأول})$$

$$|\Delta| = b*(-c) + d*a = -cd + ad$$

$$|\Delta| = c*(-b) + d*a = -cb + ad$$

لاحظ أن النتائج كلها واحدة .

أمثلة : لنعد إلى الأمثلة السابقة الواردة بالطريقة الأولى :

لدينا :

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المصفرات (الصفائف) هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

أما مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) فهي :

$$A_c = \begin{bmatrix} +5 & -1 \\ -(-2) & +3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وتكون قيمة محددة المصفوفة مساوية لـ :

$$\Delta = 3 * 5 + (-2) * (-1) = 17$$

$$\Delta = 1 * 2 + 5 * 3 = 17$$

$$\Delta = 3 * 5 + 1 * 2 = 17$$

$$\Delta = (-2) * (-1) + 5 * 3 = 17$$

— حساب المعين من المرتبة الثالثة : هذا المعين (المحدد) يوافق قيمة

المصفوفة المربعة الشكل من المرتبة $(3*3)$ أي $A_{(3,3)}$

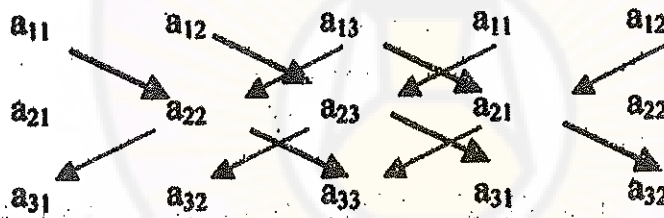
إن قيمة هذا المعين هي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

— يمكن التوصل إلى قيمة المعين من المرتبة الثالثة بطريقتين :

— الطريقة الأولى (طريقة سيروس) : حيث نكتب عناصر المصفوفة بالشكل

التالي :



حيث أضفنا وإلى اليمين مباشرة عناصر العمود الأول وعناصر العمود الثاني على الترتيب :

نأخذ ومن الزاوية اليسرى العلوية مجموع جداء كل ثلاثة عناصر حسب الأسهم فنجد أن :

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

ثم نطرح منها مجموع جداء كل ثلاثة عناصر حسب الأسهم انطلاقاً من الزاوية اليمنى العلوية أي :

$$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

فتكون قيمة المعين (المحدد) من المرتبة الثالثة هي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

أمثلة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - (2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 \cdot 3) = -1 - (-8) = -9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 - (3 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \cdot 1) = -13 - (13) = -26$$

— الطريقة الثانية (طريقة بيضوت) (**): طريقة المرافق أو طريقة النشر وفق

أحد الأسطر (الأعمدة) : لنفرض أن لدينا المصفوفة من الرتبة (3,3)

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(*) نفس طريقة سيروس فقط للمعينات (المحددات) من المرتبة الثالثة فقط .

— إن مصفوفة المصفورات (الصغائر) المرافقة لهذه المصفوفة هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

حيث أن أي عنصر من عناصر مصفوفة المصفورات هو قيمة المحدد (المعين) الناتج عن حذف السطر والعمود الواقع فيه ذلك العنصر .
فمثلاً إن :

$$\Delta_{11} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$\Delta_{32} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}$$

$$\Delta_{23} = a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}$$

— أما مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) فهي مصفوفة المصفورات بعد تغيير إشارات عناصرها بالتناوب بدءاً من الإشارة الموجبة فالإشارة السالبة ...
أي أن :

$$A_C = \begin{bmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & +\Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ +\Delta_{31} & -\Delta_{32} & +\Delta_{33} \end{bmatrix}$$

أما قيمة محددة المصفوفة فتكون بضرب أي سطر (أي عمود) من المصفوفة الأصلية بمقابلاتها بأي سطر (أي عمود) من مصفوفة المرافقات ثم جمع نواتج الضرب . أي أن :

$$\Delta = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot (-\Delta_{12}) + a_{13} \cdot \Delta_{13}$$

(**) تعتبر طريقة بيلوت الطريقة العلمية لحساب قيمة المحدد (المعين) مهما كانت مرتبته .

$$\Delta = a_{21} \cdot (-\Delta_{21}) + a_{22} \cdot \Delta_{22} + a_{23} \cdot (-\Delta_{23})$$

$$\Delta = a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{32} \cdot (\Delta_{32}) + a_{33} \cdot \Delta_{33}$$

مثال : لنفرض أن لدينا المصفوفة التالية :

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المصفورات (المصفائر) هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 \\ -1 & -11 & 7 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

لذا مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) فهي :

$$A_c = \begin{bmatrix} +(-3) & -(-6) & +3 \\ -(-1) & +(-11) & -7 \\ +(-2) & -(-4) & +5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & -11 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن قيمة المحددة هي :

بالنشر حسب السطر الأول :

$$\Delta = 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 = -9$$

حسب السطر الثاني :

$$\Delta = 2 \cdot (1) + 1 \cdot (-11) + 0 \cdot (-7) = -9$$

حسب السطر الثالث :

$$\Delta = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = -9$$

مثال : لنفرض أن لدينا المصفوفة التالية :

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ +2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المصفوفات (الصغائر) هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -3 \\ 9 & -6 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

أما مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) فهي :

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -(-8) & -3 \\ -9 & -6 & -1 \\ -7 & -(-4) & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ -9 & -6 & -1 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

وتكون قيمته المحددة هي :

$$\Delta = 1 * (-1) + (-2) * 8 + 3 * (-3) = -26$$

$$\Delta = 2 * (-9) + 1 * (-6) + 2 * (-1) = -26$$

$$\Delta = 1 * (-7) + (-1) * 4 + (-3) * 5 = -26$$

حساب المعين من المرتبة n : يتم حساب المعين من المرتبة n المرفق

بالمصفوفة $A_{(n,n)}$ بطريقة بيزوت (طريقة المرافق) أو طريقة النشر وفق أحد

الأسطر (أحد الأعمدة) كما و توجد طريقة أخرى غيرها (°).

لنفرض أن لدينا المصفوفة المربعة الشكل من المرتبة $(n * n)$ أي :

$$A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}..... & a_{2n} \\ | & & \\ a_{n1} & a_{n2}..... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(°) توجد طريقة أخرى هي النشر حسب سطرين (أو عمودين أو أكثر) حيث تدعى بطريقة لابلاس .

— إن مصفوفة المصفورات (الصغائر) هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} & & & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ & & & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

لما مصفوفة المرافقات (العوامل المشتركة) فهي :

$$A_c = \begin{bmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & \dots & (-1)^{n+1} \Delta_{1n} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & \dots & (-1)^{n+2} \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} \Delta_{n1} & (-1)^{n+2} \Delta_{n2} & \dots & (-1)^{n+n} \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

وتكون قيمة المعين (المحدد) وفق نشره حسب الأسطر هي :

$$\Delta = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot (-\Delta_{12}) + \dots + a_{1n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \Delta_{1n}$$

$$\Delta = a_{21} \cdot (-\Delta_{21}) + a_{22} \cdot (\Delta_{22}) + \dots + a_{2n} \cdot (-1)^{n+2} \cdot \Delta_{2n}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \Delta_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \text{ : إن قيمة المعين من المرتبة } n \text{ وذلك بنشره وفق المسطر } i \text{ هو :}$$

$$\Delta = a_{31} \cdot (-1)^n \cdot \Delta_{n1} + a_{n2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \Delta_{n2} + \dots + a_{nn} \cdot (-1)^n \cdot \Delta_{nn}$$

مثال : أوجد قيمة معين المصفوفة التالية :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المصفرات (الصغائر) هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -3 & -17 & -4 & 5 \\ 15 & 9 & -18 & 13 \\ -11 & 1 & -2 & -7 \\ 8 & 20 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة المرافقات (الموامل المشاركة) هي :

$$A_c = \begin{bmatrix} -3 & 17 & -4 & -5 \\ -15 & 9 & 18 & 13 \\ -11 & -1 & -2 & -7 \\ -8 & +20 & 2 & +12 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن قيمة المحددة (المعين) حسب نشره وفق أحد الأسطر :

$$\Delta = 2 * (-3) + (-1) * 17 + 0 * (-4) + 3 * (-5) = -38$$

$$\Delta = 1 * (-15) + 0 * 9 + (-2) * 18 + 1 * 13 = -38$$

$$\Delta = 3 * (-11) + 1 * (-1) + 2 * (-2) + 0 * 7 = -38$$

$$\Delta = (-2) * (-8) + (-1) * 20 + 1 * 2 + (-3) * 12 = -38$$

— خواص المعينات من المرتبة n : تتمتع المعينات من المرتبة n بخواص

عديدة ومهمة ، نستطيع الاستفادة منها في حساب قيمة أي منها :

1- تبديل الأعمدة بالأسطر ، مع المحافظة على الترتيب ، لا يغير من قيمة

المعين .

أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

نستطيع التحقق من صحة المساواة وذلك بنشر كل طرف من الأطراف .

مثال : إن :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إذا حسبنا قيمة المعين في الطرف الأيسر لوجدنا أن $\Delta = -11$

وإذا حسبنا قيمة المعين في الطرف الأيمن لوجدنا أن $\Delta = -11$

2- ضرب جميع عناصر أحد أسطر (أحد أعمدة) معين ما بعدد ما يعطينا قيمة المعين نفسه بعد ضربه بذلك العدد ، أي أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

3- تبديل مواقع سطرين (عمودين) يغير من إشارة المعين ، أي أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

أي أن : $11 = -(-11)$

4- تطابق سطرين (عمودين) يعطى قيمة للمعين ، أي أن :

$$\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أيضاً إذا تناسب عناصر سطرين (عمودين) تنعدم قيمة المعين . مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2.0$$

و ذلك للتناسب بين السطر الأول و الثالث.

5- إذا أمكن كتابة عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) على شكل مجموع حدود

عدها n حداً ، فإن بالإمكان كتابة المعين بشكل مجموع n مهيناً جديداً ،

نحصل عليها من تفريق عناصر السطر (العمود) أي أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha_1 + \beta_1 & a_{12} + \alpha_2 + \beta_2 & a_{1n} + \alpha_n + \beta_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$31 = 12 + 10 + 9$$

- إضافة مضاعفات سطر ما (عمود ما) إلى عناصر سطر آخر (عمود آخر) لا يغير

ن قيمة للمعين ، أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \alpha a_{11} & a_{n2} + \alpha a_{12} & \dots & a_{nn} + \alpha a_{1n} \end{vmatrix}$$

حيث ضربنا عناصر السطر الأول بـ α و أضفنا الناتج إلى السطر الأخير

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \cdot 0$$

مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1+2 \cdot 2 & 3+6 & -1+1 \cdot 2 \end{vmatrix} = -10$$

7- إذا وجدنا في المعين سطراً (عموداً) عناصره كله أصفار فإن قيمة المعين تساوي للصفر، أي إن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

مثال : إن :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

II-3- العمليات على المصفوفات

نقصد بالعمليات على المصفوفات تلك العمليات التي يمكن تطبيقها على المصفوفات وهذه العمليات هي : الجمع - الطرح - الضرب - التقوير - المقلوب .

III-3-1- الجمع : يشترط لجمع المصفوفات أن يكون لها نفس عدد الأسطر والأعمدة وتتم عملية الجمع بجمع كل عنصر من المصفوفة الأولى مع ما يقابله من المصفوفة الثانية فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفتين $A_{(m,n)}$ ، $B_{(m,n)}$ فإن ناتج الجمع $C_{(m,n)}$ وهو :

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B_{(m,n)} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

إن :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 9 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & -6 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

تتصف عملية جمع المصفوفات بالخواص التالية :

1- عملية الجمع تبديلية ، أي أن :

$$A_{(m,n)} + B_{(m,n)} = B_{(m,n)} + A_{(m,n)}$$

2- تتمتع عملية الجمع بالخاصة التجميعية ، أي أن :

$$[A_{(m,n)} + B_{(m,n)}] + C_{(m,n)} = A_{(m,n)} + [B_{(m,n)} + C_{(m,n)}]$$

3- لعملية الجمع عنصر حيادي يتمثل في المصفوفة الصفرية $O_{(m,n)}$ ، أي أن

$$A_{(m,n)} + O_{(m,n)} = O_{(m,n)} + A_{(m,n)} = A_{(m,n)}$$

4- لعملية الجمع نظير يتمثل في المصفوفة الأحادية (الواحدة) أي أن :

$$A_{(m,n)} + A_{(m,n)} = A_{(m,n)} + A_{(m,n)} = O_{(m,n)}$$

حيث $A_{(m,n)}$ هي نظير المصفوفة $A_{(m,n)}$ (أي المصفوفة الأصلية بعد تغيير جميع إشارات عناصرها).

تكتب هذه الخاصة بشكل آخر :

$$A_{(m,n)} - A_{(m,n)} = O_{(m,n)}$$

الطرح : إن ما ورد سابقاً في عملية الجمع ينطبق تماماً على عملية الطرح في

أي تغيير شريطة الأخذ بعين الاعتبار إشارة الطرح أثناء إجراء هذه العملية .

أمثلة :

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

II-3-2- الضرب : وهنا نميز عدة حالات لعملية الضرب :

- ضرب مصفوفة بثابتة عددية غير معنومة .
- ضرب شعاع أفقي بشعاع شاقولي .
- ضرب مصفوفة بشعاع أفقي (لوشعاع شاقولي) .
- ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى .

أولاً : ضرب مصفوفة بثابتة عددية غير معنومة :

تتم عملية الضرب وذلك بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالثابتة العددية فإذا فرضنا أن لدينا الثابتة العددية $K \neq 0$ فإن :

$$K * \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot a_{11} & \dots & K \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ K \cdot a_{m1} & \dots & K \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{حيث : } K \in \mathbb{R} \\ K \neq 0 \end{array}$$

أمثلة :

$$3 * \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$-4 * \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad -2 * \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & +2 & 0 \\ -10 & 6 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

بفرض أن لدينا المصفوفتين $A_{(m,n)}$ و $B_{(m,n)}$ و $\alpha, \beta \in R$ وكلاهما غير معدوم فإن عملية ضرب المصفوفة بالثابت العددية تحقق الخواص التالية :

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A_{(m,n)}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A_{(m,n)}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot A_{(m,n)} = \alpha \cdot A_{(m,n)} + \beta \cdot A_{(m,n)}$$

$$\alpha \cdot (A_{(m,n)} + B_{(m,n)}) = \alpha \cdot A_{(m,n)} + \alpha \cdot B_{(m,n)}$$

نتج مصفوفة النظير الواردة سابقاً $A_{(m,n)}$ وذلك من ضرب المصفوفة الأصلية $A_{(m,n)}$ بالثابت العددية $\alpha = -1$

ثانياً : ضرب شعاع أفقي بشعاع شاقولي :

بفضل لإجراء عملية الضرب هذه أن نكتب المصفوفات من خلال الرموز المعروفة .

لنفرض أن المصفوفة ذات السطر هي $A_{(1,n)}$ وأن المصفوفة ذات العمود

هي $B_{(n,1)}$. لنكتب الجداء وفق للشكل التالي :

$$A_{(1,n)} * B_{(n,1)} = C_{(1,1)}$$

يشترط لإجراء عملية الضرب أن يكون الدليلان المتجاوران متساويين

ونائج عملية الضرب له الدليلين المتباعدين وهنا نلاحظ أن ناتج عملية الضرب

هو مصفوفة بسطر واحد وعمود واحد تتم عملية الضرب وفق الطريقة التالية :

$$A_{(1,n)} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n], \quad B_{(n,1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_{(1,n)} * B_{(n,1)} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + \dots + a_n * b_n]$$

مثال :

$$[3 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = [3 * 2 + 2 * (-1) + (-1) * (-4)] = [8]$$

$$[2 \quad 4 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = [2 * 1 + 4 * 2 + (-1) * 0 + 1 * (-3)] = [7]$$

لنلاحظ أنه فيما لو أردنا حساب الضرب بشكل آخر كما يلي :

$$B_{(n,1)} * A_{(1,n)} = C_{(n,n)}$$

الدليان المتجهوران
الدليان المتباعدان

فإن بالإمكان إجراء عملية الضرب لأن الدليان المتجاورين متساويان وباتج
عملية الضرب هو مصفوفة مربعة الشكل لها الدليان المتباعدان .
تتم عملية الضرب وفق الطريقة التالية :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} * [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] = \begin{bmatrix} b_1 * a_1 & b_1 * a_2 & \dots & b_1 * a_n \\ b_2 * a_1 & b_2 * a_2 & \dots & b_2 * a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n * a_1 & b_n * a_2 & \dots & b_n * a_n \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} * [3 \ -2 \ 1] = \begin{bmatrix} 2*3 & 2*-2 & 2*1 \\ -1*3 & -1*-2 & -1*1 \\ 3*3 & 3*-2 & 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : لنلاحظ أننا لو أخذنا المصفوفتين على النحو التالي $A_{(1,m)}$ و $B_{(n,1)}$
فإن :

$$A_{(1,m)} * B_{(n,1)}$$

وهنا نلاحظ أن عملية الضرب مستحيلة لأن الدلييلين المتجاورين ليسا متساويين
لما لو كتبنا:

$$B_{(n,1)} * A_{(1,m)}$$

فإن عملية الضرب مقبولة لأن الدلييلين المتجاورين متساويان وناتج عملية
الضرب هي مصفوفة مستطيلة الشكل أدلتها الأدلة المتباعدة .

ثالثاً : ضرب مصفوفة بشعاع شاقولي (لوشعاع أفقي) :

لنفرض أن لدينا المصفوفة التالية $A_{(m,n)}$ ولدينا المصفوفة ذات السطر $B_{(1,n)}$
إن جداء هاتين المصفوفتين هو:

$$A_{(m,n)} * B_{(1,n)} \quad (\text{العملية مستحيلة})$$

وهنا نلاحظ أن عملية الضرب مستحيلة لأن الدلييلين المتجاورين ليسا متساويين
لنكتب الجداء بشكل آخر.

$$B_{(1,n)} * A_{(m,n)} \quad (\text{العملية مستحيلة})$$

ليضاً هنا نلاحظ أن عملية الضرب مستحيلة لأن الدلييلين المتجاورين ليسا
متساويين إلا أنه إذا أخذنا المصفوفة ذات السطر بالشكل التالي $B_{(1,m)}$ فإن
بالإمكان إجراء عملية الضرب لأن:

$$B_{(1,m)} * A_{(m,n)} = C_{(1,n)}$$

للدلييلان المتجاوران متساويان وناتج الضرب هو مصفوفة ذات سطر أدلتها هي
الأدلة المتباعدة .

تم عملية الضرب وفق الطريقة التالية :

$$[b_1 \quad b_2 \dots b_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \dots c_n]$$

حيث :

$$C_1 = b_1 * a_{11} + b_2 * a_{21} + \dots + b_m * a_{m1}$$

$$C_2 = b_1 * a_{12} + b_2 * a_{22} + \dots + b_m * a_{m2}$$

$$C_n = b_1 * a_{1n} + b_2 * a_{2n} + \dots + b_m * a_{mn}$$

أمثلة :

$$[3 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [7 \quad 0 \quad -4]$$

لأن :

$$[3*2+(-1)*(-1)+2*0 \quad 3*0+(-1)*2+2*1 \quad 3*1+(-1)*3+2*(-2)]$$

$$[3 \quad -2] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -7 & 5 & -1 \end{bmatrix} = [5 \quad 17 \quad -10 \quad -4]$$

لأن :

$$[3*3+(-2)+2 \quad 3*1+(-2)(-7) \quad 3*0+(-2)*5 \quad 3*(-2)+(-2)*(-1)]$$

لنأخذ من جديد المصفوفة $A_{(m,n)}$ والمصفوفة ذات العمود $B_{(m,1)}$ إن

جداء هاتين المصفوفتين هو :

$$B_{(m,1)} \cdot A_{(m,n)}$$

ونلاحظ أن عملية ضرب هاتين المصفوفتين مستحيلة لأن الدليلين

المتجاورين ليسا متساويين .

لنكتب الجداء بشكل آخر .

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(m,1)}$$

نلاحظ أيضاً أن عملية ضرب هاتين المصفوفتين مستحيلة لأن الدليلين

المتجاورين ليسا متساويين .

لنلاحظ أننا لو أخذنا المصفوفة ذات العمود على النحو التالي $B_{(n,1)}$ فإن جداء هاتين

المصفوفتين :

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,1)}$$

أصبح ممكناً لأن الدليلين المتجاورين متساويين وناتج الجداء هو مصفوفة ذات

عمود لها الأدلة المتباعدة.

ونتم عملية الضرب على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + \dots & + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots & + a_{2n} b_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} b_1 + a_{m2} b_2 + \dots & + a_{mn} b_n \end{bmatrix}$$

$$c_{1p} = a_{11} \cdot b_{1p} + a_{12} \cdot b_{2p} + \dots + a_{1n} \cdot b_{np}$$

$$c_{2p} = a_{21} \cdot b_{1p} + a_{22} \cdot b_{2p} + \dots + a_{2n} \cdot b_{np}$$

$$c_{m1} = a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1}$$

$$c_{m2} = a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n2}$$

$$C_{mp} = a_{m1} \cdot b_{1p} + a_{m2} \cdot b_{2p} + \dots + a_{mn} \cdot b_{np}$$

مثال ٢ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*2+(-1)*1+1*3 & 2*(-1)+(-1)*0+1*1 \\ 1*2+3*1+(-1)*3 & 1*(-1)+3*0+(-1)*1 \\ 2*2+1*1+(-1)*3 & 2*(-1)+1*0+(-1)*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

حیث :

$$c_{11} = 3 * 2 + (-2) * 3 + 1 * (-1) = -1$$

$$c_{12} = 3 * 0 + (-2) * 1 + 1 * 2 = 0$$

$$c_{13} = 3 * 2 + (-2) * (-2) + 1 * 1 = 11$$

$$c_{14} = 3 * (-1) + (-2) * 0 + 1 * (-3) = -6$$

$$c_{21} = 1 * 2 + (-2) * 3 + 3 * (-1) = -7$$

$$c_{22} = 1 * 0 + (-2) * 1 + 3 * 2 = +4$$

$$c_{23} = 1 * 2 + (-2) * (-2) + 3 * 1 = 9$$

$$c_{24} = 1 * (-1) + (-2) * 0 + 3 * (-3) = -10$$

$$c_{31} = 2 * 2 + (-1) * 3 + (-2) * (-1) = 3$$

$$c_{32} = 2 * 0 + (-1) * 1 + (-2) * 2 = -5$$

$$c_{33} = 2 * 2 + (-1) * (-2) + (-2) * 1 = 4$$

$$c_{34} = 2 * (-1) + (-1) * 0 + (-2) * (-3) = 4$$

تتمتع عملية ضرب المصفوفات بمجموعة من الخواص أهمها :
1- عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية ، أي أن :

$A_{(m,n)} * B_{(n,p)} \neq B_{(n,p)} * A_{(m,n)}$
نتيجة استحالة عملية الضرب و (أو) نتيجة عدم تساوي جدائي الضرب في الطرفين فإذا فرضنا أنه لدينا:

$$A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن :

$A_{(3,2)} * B_{(2,3)} \neq B_{(2,3)} * A_{(3,2)}$
نتيجة عدم تساوي ناتج الضرب في الطرفين (علماً بأن هناك إمكانية للضرب بالطرفين)

لكن إذا كان لدينا مصفوفتان قطريتان، فإن عملية الضرب تتمتع بالخاصة التبديلية.
2- عملية ضرب المصفوفات تجميعية ، أي أن :

$$\begin{aligned} [A_{(m,n)} * B_{(n,p)}] C_{(p,q)} &= A_{(m,n)} * [B_{(n,p)} * C_{(p,q)}] \\ &= A_{(m,n)} * B_{(n,p)} * C_{(p,q)} \end{aligned}$$

3- عملية ضرب المصفوفات توزيعية :

$$A_{(m,n)} * [\alpha \cdot B_{(n,p)} + \beta \cdot C_{(n,p)}] = \alpha \cdot A_{(m,n)} * B_{(n,p)} + \beta \cdot A_{(m,n)} * C_{(n,p)}$$

$$A_{(m,n)} * C_{(p,q)}$$

أيضاً إن :

$$[\alpha \cdot A_{(m,n)} + \beta \cdot B_{(m,n)}] * C_{(n,p)} = \alpha \cdot A_{(m,n)} * C_{(n,p)} + \beta \cdot B_{(m,n)} * C_{(n,p)}$$

$$B_{(m,n)} * C_{(n,p)}$$

حيث $\alpha, \beta \in R$ ، تبقى الخاصة صحيحة حينما $1 = \alpha = \beta$

4- جداء أية مصفوفة (ليست بالمصفوفة الصفرية) بالمصفوفة الصفرية هو مصفوفة صفرية.

$$O_{(m,n)} * A_{(n,p)} = O_{(m,p)}$$

$$A_{(m,n)} * O_{(n,p)} = O_{(m,p)}$$

يمكن أن يصادفنا جداء مصفوفتين ليس كل منها بالمصفوفة الصفرية مساوياً للمصفوفة الصفرية .

5- جداء أية مصفوفة بالمصفوفة الأحادية (الواحدة) هو المصفوفة نفسها .

$$A_{(m,m)} * I_{(m,m)} = I_{(m,m)} \cdot A_{(m,m)} = A_{(m,m)}$$

6 - إن الاختصارات التي نجريها أثناء العمليات الحاسوبية غير مسموح بها في المصفوفات ، لاحظ أن :

$$A_{(m,n)} * B_{(n,p)} = A_{(m,n)} \cdot C_{(n,p)} \Rightarrow B_{(n,p)} = C_{(n,p)}$$

II- 3-3- التدوير : نعرف مدور المصفوفة $A_{(m,n)}$ ونرمز له بالرمز $A^t_{(m,n)}$ بأنه المصفوفة الناتجة عن $A_{(m,n)}$ وذلك بعد جعل أعمدتها أسطراً وأسطرها أعمدة مع المحافظة على مواقع وترتيب العناصر فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفة $A_{(m,n)}$ فإن مدورها هو :

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t_{(n,m)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أمثلة :

$$A_{(2,5)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t_{(5,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t_{(4,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

لنلاحظ أن :

$$[A^t_{(m,n)}]^t = A_{(m,n)}$$

أي أن مدور مدور المصفوفة هو المصفوفة الأصلية نفسها .
II-3-4- مقلوب (معكوس) مصفوفة : يلعب مقلوب المصفوفة دوراً هاماً وبارزاً في حل جملة معادلات خطية بطريقة المصفوفات .
 لإيجاد مقلوب (معكوس) أية مصفوفة مربعة (*) الشكل هناك خطوات عديدة نوردتها كما يلي:

الخطوة الأولى : نشكل مصفوفة المصفرات (الصغائر) وهي مصفوفة مربعة عناصر معينات ناتجة عن المصفوفة الأصلية بعد حذف السطر والعنصر الموافق لذلك العنصر وحساب معين بقية العناصر المصفوفة الأصلية .
 فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفة التالية :

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن مصفوفة المصفرات (الصغائر) هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

حيث أي عنصر من عناصر مصفوفة المصفرات هو المحدد (المعين) الناتج عن حذف السطر والعمود الموافق لذلك العنصر في المصفوفة الأصلية .

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

حيث :

$$\Delta_{11} = (-3) * (-2) - 5 * 3 = -9$$

$$\Delta_{12} = 2 * (-2) - 5 * 7 = -39$$

$$\Delta_{13} = 2 * 3 - (-3) * 7 = 27$$

$$\Delta_{21} = (-1) * (-2) - 4 * 3 = -10$$

$$\Delta_{22} = 3 * (-2) - 4 * 7 = -34$$

$$\Delta_{23} = 3 * 3 - (-1) * 7 = 16$$

$$\Delta_{31} = (-1) * 5 - 4 * (-3) = 7$$

$$\Delta_{32} = 3 * 5 - 2 * 4 = 7$$

$$\Delta_{33} = 3 * (-3) - (-1) * 2 = -4$$

$$\Rightarrow A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -9 & -39 & 27 \\ -10 & -34 & 16 \\ 7 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

(*) لا يوجد مقلوب (معكوس) للمصفوفة غير المربعة الشكل .

$$B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{13} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

حيث :

$$\Delta_{11} = (-2) * (-2) - 3 * (-1) = 7 ; \quad \Delta_{12} = 1 * (-2) - 3 * 0 = -2$$

$$\Delta_{13} = 1 * (-1) - (-2) * 0 = -1 ; \quad \Delta_{21} = 2 * (-2) - (-1) * (-1) = -5$$

$$\Delta_{22} = 3 * (-2) - (-1) * 0 = -6 ; \quad \Delta_{23} = 3 * (-1) - 2 * 0 = -3$$

$$\Delta_{31} = 2 * 3 - (-1) * (-2) = 4 ; \quad \Delta_{32} = 3 * 3 - (-1) * 1 = 10$$

$$\Delta_{33} = 3 * (-2) - 2 * 1 = -8$$

$$\Rightarrow B_{\Delta} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية : نوجد مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) وهي مصفوفة ناتجة عن مصفوفة المصفرات (الصغائر) وذلك بعد تبديل إشارات عناصرها بالترتيب اعتباراً من + - بالتناوب شريطة أن لا تقع إشارتين متجاورتين (سواء في السطر أو في العمود) متجانستين ونرمز لها بالرمز A_c .

أمثلة :

$$+ \quad - \quad +$$

$$- \quad + \quad -$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$- \quad + \quad - \quad +$$

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$- \quad + \quad - \quad +$$

فإذا عدنا إلى مصفوفة المصفرات الواردة في الخطوة الأولى والتي هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

فإن مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) التي نوافقها هي :

$$A_C = \begin{bmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & +\Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ +\Delta_{31} & -\Delta_{32} & +\Delta_{33} \end{bmatrix}$$

أمثلة : بالعودة إلى الأمثلة الواردة في الخطوة الأولى نجد أن :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -9 & -39 & 27 \\ -10 & -34 & 16 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow A_C = \begin{bmatrix} -9 & 39 & 27 \\ 10 & -34 & -16 \\ 7 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$B_{\Delta} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow B_C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & -8 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة : نوجد المصفوفة المساعدة المرتبطة وهي بالتعريف مدور مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) ونرمز لها بالرمز $\text{Adj}(A)$.

$$\text{Adj}(A) = (A_C)^t = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

أمثلة : بالعودة إلى الأمثلة الواردة في الخطوة الأولى ، نجد أن المصفوفة المساعدة لكل منها هي كما يلي:

$$\text{Adj}(A) = (A_c)' = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 7 \\ 39 & -34 & -7 \\ 27 & -16 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}(B) = (B_c)' = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & -10 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة : نعرف مقلوب أية مصفوفة مربعة الشكل بأنه حاصل جداء المصفوفة المساعدة بمقلوب محددة المصفوفة المربعة .
فإذا فرضنا أن المصفوفة المربعة الشكل هي $A_{(n,n)}$ فإننا نرمز لمقلوبها (معكوسها) بالرمز $A^{-1}_{(n,n)}$ ويساوي :

$$A^{-1}_{(n,n)} = \frac{1}{\Delta} * (A_c)' = \frac{\text{Adj}(A)}{\Delta}$$

أمثلة : بالعودة إلى الأمثلة الواردة في الخطوة الأولى نجد أن :

$$\Delta_A = 42$$

وبالتالي فإن :

$$A^{-1}_{(3,3)} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} -9 & 10 & 7 \\ 39 & -34 & -7 \\ 27 & -16 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_B = 26 \quad \text{كما وأن :}$$

وبالتالي فإن :

$$B^{-1}_{(3,3)} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & -10 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

مثال : أوجد مقلوب (معكوس) المصفوفة التالية :

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المصفوفات (الصفائف) هي :

$$A_A = \begin{bmatrix} |-4| & |-1| \\ |2| & |-3| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

أما مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) هي :

$$A_C = \begin{bmatrix} +(-4) & -(-1) \\ -(-2) & +(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

ومحدد المصفوفة $A_{(2,2)}$ هي : $\Delta_A = (-3) * (-4) - 2 * (-1) = 14$ فالمقلوب هو :

$$A^{-1}_{(2,2)} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(*) للتحقق من صحة المقلوب يكفي أن نضرب المقلوب بالمصفوفة الأصلية فنحصل على مصفوفة الوحدة .

مثال : أوجد مقلوب (معكوس) المصفوفة التالية :

$$A_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة المصفوفات (الصفائف) هي :

$$A_{\Delta} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

إذا حسبنا كل مصغر (معين) من المصفورات السابقة حصلنا على مصفوفة المصفورات :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 10 & 17 & -8 & -13 \\ -8 & -34 & 20 & -10 \\ 14 & -17 & 16 & 9 \\ -6 & -17 & 32 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة العوامل المشاركة (المرافقات) هي :

$$A_c = \begin{bmatrix} +10 & -17 & +(-8) & -(-13) \\ -(-8) & +(-34) & -20 & +(-10) \\ +14 & -(-17) & +16 & -9 \\ -(-6) & +(-17) & -32 & +1 \end{bmatrix}$$

أما محددة المصفوفة فهي :

$$A_{\Delta} = 0 * \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} - (-1) * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 * (-34) - 20 - 2 * (-10) = 68$$

ويكون مقلوب (معكوس) المصفوفة هو :

$$A^{-1}_{(4,4)} = \frac{1}{\Delta} * Adj(A) = \frac{1}{\Delta} * (A_c)'$$

$$= \frac{1}{68} \begin{bmatrix} 10 & 8 & 14 & 6 \\ -17 & -34 & 17 & -17 \\ -8 & -20 & 16 & -32 \\ 13 & -10 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

II-4- حل جملة معادلات خطية

II-4-1- تعريف المعادلة الخطية : هي معادلة تحوي مجهولاً واحداً أو أكثر قوة كل منه يساوي الواحد الصحيح .

للشكل العام للمعادلة الخطية ذات n مجهول هو :

حيث a, b, c, d ثوابت عددية $ax_1 + bx_2 + \dots + cx_n + d = 0$ إن كلا من المعادلات التالية :

$$3x + 4y = 0$$

$$2x - 3y + 5z = 10$$

$$x - y + z + 7u - 8w = -7$$

هي معادلة خطية (إما بمجهولين ، أو بثلاثة مجاهيل أو لخمس مجاهيل) :
II-4-2- حل جملة n معادلة خطية :

إن الشكل العام لجملة n معادلة خطية بـ n بمجهول هو :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = d_n$$

لحل هذه الجملة لدينا طرق عديدة :

- 1- طريقة التعويض (الحذف) وهي معروفة سابقاً .
- 2- طريقة المعينات و تسمى أيضاً طريقة كرامر kramer's rule
- 3- طريقة مقلوب المصفوفة .

أولاً : طريقة المعينات : تأتي هذه الطريقة مباشرة من طريقة التعويض التي مرت معنا في المرحلة الثانوية ومن خلال ملاحظتنا للنتيجة الحل .

إن حل هذه الجملة وفق طريقة المعينات هو :
بفرض أن قيمة معين الأمثال لا تساوي الصفر ، أي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

(وهذا شرط أساسي كي يكون لجملة المعادلات الخطية حل وحيد) فإن :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ d_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & d_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & d_n \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

مثال : حل جملة المعادلتين الخطيتين بطريقة المعينات :

$$3x + 4y = 1$$

$$x + 2y = -3$$

الحل : إن :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & +4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14}{2} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{2} = -5$$

مثال : حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة المعينات :

$$x + y - z = 2$$

$$2x - y + z = -1$$

$$3x - 2y - z = 3$$

الحل : إن :

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}, y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}, z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{3}{9} = 0.3, y = \frac{-17}{9} = -1.8, z = \frac{-12}{9} = -1.3$$

مثال : حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة المعينات :

$$2x + y + 3z = 0$$

$$x + y + z = -3$$

$$x - 2y - z = -1$$

الحل : إن :

$$x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{17}{-9} = -1.8, \quad y = \frac{14}{-9} = -1.5, \quad z = \frac{-12}{-9} = 1.3$$

ثانياً : طريقة مقلوب المصفوفة :
نفرض أن لدينا جملة المعادلات الخطية التي عددها n معادلة خطية ذات n مجهولاً

هي: $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

لنكتب هذه الجملة باستخدام المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

وإذا استخدمنا الرموز السابقة في المصفوفات فإننا نجد أن :

$$A_{(n,n)} * X_{(n,1)} = B_{(n,1)}$$

وهي معادلة شعاعية المجهول فيها $X_{(n,1)}$ والذي يحسب من العلاقة :

$$X_{(n,1)} = A^{-1}_{(n,n)} * B_{(n,1)}$$

حيث يتطلب الأمر حساب مقلوب (معكوس) للمصفوفة $A_{(n,n)}$ ، وقد كنا قد تعرفنا سابقاً على كيفية حساب مقلوب مصفوفة مربعة الشكل بشكل عام .

مثال : حل جملة المعادلتين التاليتين بطريقة مقلوب المصفوفة :

$$3x - 2y = -1$$

$$x + y = 3$$

انكتب الجملة بشكل مصفوفي :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أو بشكل مصفوفي :

$$A_{(2,2)} * X_{(2,1)} = B_{(2,1)}$$

وحل هذه المعادلة الشعاعية هو :

$$X_{(2,1)} = A^{-1}_{(2,2)} * B_{(2,1)}$$

وهنا يتطلب الأمر حساب مقلوب المصفوفة $A_{(2,2)}$

لحساب مقلوب المصفوفة $A_{(2,2)}$ نتبع الخطوات التالية :

1- لنحسب مصفوفة المصغرات (الصغائر) :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2- أما مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) فهي :

$$A_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3- محدة المصفوفة هي :

$$\Delta = 3 * 1 - (-2) * 1 = 5$$

4- المصفوفة المساعدة هي مدور مصفوفة المرافقات :

$$\text{Adj}(A) = (A_C)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

5- المقلوب هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

إذا بتعويض A^{-1} و $B_{(2,1)}$ بقيمهم نجد أن حل جملة المعادلتين هو :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أي أن : $x=1$ ، $y=2$

ملاحظة : نستطيع التحقق من صحة الحل وذلك بالتعويض بإحدى معادلتى الجملة. مثال : أء حل جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين بطريقة مقلوب المصفوفة .

$$3x - y = 5$$

$$2x + 3y = -1$$

لنكتب الجملة بشكل مصفوفي فنجد أن :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

لوشكل مصفوفي نجد أن :

$$A_{(2,2)} * X_{(2,1)} = B_{(2,1)}$$

وحل هذه المعادلة الشعاعية هو:

$$X_{(2,1)} = A^{-1}_{(2,2)} * B_{(2,1)}$$

وهنا يتطلب منا حساب مقلوب المصفوفة $A_{(2,2)}$
لحساب مقلوب المصفوفة $A_{(2,2)}$ نتبع الخطوات التالية :
1- لنحسب مصفوفة المصغرات (الصغائر)

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2- أن مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) هي :

$$A_c = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & +3 \end{bmatrix}$$

3- محدد المصفوفة A هي :

$$\Delta = 3 * 3 - (-1) * 2 = 11$$

4- المصفوفة المبادعة (المرتبطة) :

$$A'_c = \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5- مقلوب المصفوفة هو:

$$A^{-1}_{(2,2)} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

بتعويض قيم المصفوفات في الحل نجد أن :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$x = \frac{14}{11}, \quad y = \frac{-13}{11}$$

مثال : حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة مقلوب المصفوفة :

$$3x + y - z = -2$$

$$x + y - z = 5$$

$$2x - y + 2z = -3$$

الحل : لنكتب الجملة بشكل مصفوفي فنجد أن :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وإذا استخدمنا رموز المصفوفات فنحصل على للمعادلة الشعاعية التالية :

$$A_{(3,3)} * X_{(3,1)} = B_{(3,1)}$$

وحل هذه المعادلة الشعاعية هو :

$$X_{(3,1)} = A^{-1}_{(3,3)} * B_{(3,1)}$$

إذا يؤول هذا الحل إلى إيجاد مقلوب المصفوفة $A_{(3,3)}$

لإيجاد مقلوب المصفوفة نوجد المصفوفات التالية :

- نوجد مصفوفة المصفورات (المصفائر)

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

— نوجد مصفوفة (العوامل للمشاركة) المرافقات :

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

نوجد المحددة :

$$\Delta = 1 * 3 + 1 * (-4) + (-1) * (-3) = 2$$

نوجد المصفوفة المساعدة (المرتبطة)

$$A_c^t = \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

إذاً المقلوب

$$A^{-1}_{(3,3)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

وبتعويض A^{-1} بقيمتها نجد أن :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7 \\ 42 \\ 25 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$x = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 42 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 25 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال : أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة مقلوب المصفوفة :

$$3x + 2y + z = -1$$

$$x - 2y - 3z = 2$$

$$2x - y + 2z = -3$$

الحل : لنكتب الجملة بشكل مصفوفي فلجد أن :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وإذا ما استخدمنا رموز المصفوفات ، حصلنا على المعادلة الشعاعية الآتية :

$$A_{(3,3)} * X_{(3,1)} = B_{(3,1)}$$

حيث حل هذه المعادلة هو :

$$X_{(3,1)} = A^{-1}_{(3,3)} * B_{(3,1)}$$

إذا الأمر يؤول إلى حساب مقلوب المصفوفة $A_{(3,3)}$ والذي يتم وفق

الخطوات التالية :

— نحسب مصفوفة المصفورات (الصغائر) :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -3 \\ 5 & 4 & -7 \\ -4 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

— نوجد مصفوفة (العوامل المشاركة) المرافقات :

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -8 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \\ -4 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

محددة المصفوفة هي :

$$\Delta = 3 * (-7) + 2 * (-8) + 1 * 3 = -34$$

المصفوفة المساعدة هي :

$$A_c^t = \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & -5 & -4 \\ -8 & 4 & 10 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{-34} \begin{bmatrix} -7 & -5 & -4 \\ -8 & 4 & 10 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

بتعويض قيمة مقلوب المصفوفة نجد أن حل الجملة هو:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{34} \begin{bmatrix} -7 & -5 & -4 \\ -8 & 4 & 10 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{34} \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ 35 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$x = \begin{bmatrix} -9 \\ 34 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} -35 \\ 34 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : لنلاحظ و من تعريف مقلوب المصفوفة الذي هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} * [Adj(A)]$$

أنه إذا كان $\Delta = 0$ فليس لمقلوب المصفوفة أي معنى وبالتالي فجملة المعادلات تكون مستحيلة الحل.

II - 5 - التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات

II-5-1- التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات (جدول التشابكات القطاعية)^(*) :

تعتمد للقطاعات الإنتاجية في التوصل إلى إنتاجها بعضها على بعض ، فالقطاعات الإنتاجية ليست مستقلة بعضها عن بعض ، بل هي متعاونة في إنتاجها ، ولا يمكن لقطاع إنتاجي أن ينفرد بنفسه عن بقية القطاعات الإنتاجية الأخرى ، وغاية عملية تحديد إنتاج القطاعات هذه هي سد حاجات الأسواق ، فعملية الإنتاج يجب أن يرافقها التنسيق بين غايات الخطط الإنتاجية . مثل : تخطيط الإنتاج - تخطيط التنمية الاقتصادية - التجارة الخارجية

إذ من خلال هذه الخطط يتجنب الاقتصاديون الوقوع في اختناقات لأي نقص في المواد الأولية التي تدخل في العملية الإنتاجية لصناعة واحدة أو صناعات مختلفة متعددة .

وليس جداول التشابكات القطاعية إلا إحدى الوسائل التي تعكس العمليات الإنتاجية بين مختلف القطاعات الإنتاجية شريطة أن يقوم كل قطاع بإنتاج نوع معين من المنتجات حيث يكون عدد هذه الأنواع مطابقاً لعدد القطاعات المنتجة .

إذا فأي قطاع إنتاجي يمكن أن يكون قطاعاً منتجاً وقطاعاً مستهلكاً في الوقت نفسه .

إن جدول التشابكات القطاعية ليس إلا جدولاً يبين المبادلات التي تحدث بين القطاعات الاقتصادية المختلفة بعضها مع بعض ، حيث من خلال هذا الجدول نستطيع أن نتوصل إلى:

(*) نجد تسميات أخرى لجدول التشابكات القطاعية منها : جداول المدخلات والمخرجات ، جدول ليونتيوف - جدول المنتج - المستخدم .

I - حساب المعاملات الفنية للإنتاج (المعاملات التقنية للإنتاج - المعاملات التكنولوجية) (التي يفترض ثباتها في العملية الإنتاجية) حيث توضع هذه المعاملات ضمن مصفوفة مربعة الشكل يتركز عليها تشكيل جملة من المعادلات الخطية الأينية التي تشرح لنا شروط التوازن الاقتصادي التي حددها الفرنسي ليون فالراس .

تبين لنا هذه المعاملات للكمية اللازمة للوحدة المنتجة من قبل قطاع معين من منتجات القطاعات الأخرى. فمثلاً : المعامل الفني لقطاع الصناعة من قطاع الزراعة ، ليس إلا مقدار ما يقدمه قطاع الزراعة إلى قطاع لصناعة لتصنيع وحدة واحدة .

والمعامل الفني لقطاع الصناعة من قطاع الخدمات ، ليس إلا مقدار ما يقدمه قطاع الخدمات إلى قطاع الصناعة لتصنيع وحدة واحدة وهكذا . واعتماداً على مستلزمات القطاعات المختلفة نستطيع استخدام المعاملات الفنية للإنتاج وتحديد الكميات اللازمة من قطاع لقطاع آخر للوصول إلى إنتاج وحدة واحدة .

II - للكميات المنتجة من قبل كل قطاع من القطاعات حينما يكون لدينا معلوماً الطلب الذاتي ^(*) المخطط له لكل قطاع من هذه القطاعات .

III - جدول التشابكات القطاعية في سنة الهدف .

سوف نوضح هذه النقاط من خلال الأمثلة التالية :

مسئال (1) : لنفرض أن اقتصاد دولة ما يتألف من ثلاثة قطاعات إنتاجية : صناعة - زراعة - خدمات وأن جدول التشابكات القطاعية لهذه الدولة معطى وفق الجدول التالي (19 - I) .

^(*) - يقصد بالطلب الذاتي استهلاك القطاع المعطى والحكومي وما يوضع للتصدير ولزيادة في المخزون .

وأنه خطط ليكون الطلب النهائي لهذه القطاعات (على الترتيب) 70 - 200 - 250 فالمطلوب حساب حجم الإنتاج لكل قطاع من القطاعات ، ثم تشكيل جدول المدخلات والمخرجات لهذه الدولة في سنة الهدف .

مخرجات \ مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	110	150	60	30	350
صناعة	40	10	70	105	225
خدمات	50	10	40	175	275
القيمة المضافة (***)	150	55	105	310	
المدخلات	350	225	275		850

الجدول (19 - I)

تبين أسطر هذا الجدول أن مخرجات قطاع الزراعة هي 350 وحدة يحتفظ بـ 110 وحدات لنفسه ويبيع (يعطي) قطاع الصناعة 150 وحدة وقطاع الخدمات 60 وحدة ويترك للطلب النهائي 30 وحدة .

ليضاً إن مخرجات قطاع الصناعة هي 255 وحدة يحتفظ بـ 10 وحدات لنفسه ويبيع (يقدم) لقطاع الزراعة 40 وحدة ولقطاع الخدمات 70 وحدة ويترك للطلب النهائي 105 وحدات . كما أن مخرجات قطاع الخدمات هي 275

(***) - القيمة المضافة وتمثل أجور العاملين والضرائب حيث تختلف هذه القيمة إلى تكلفة الإنتاج .

وحدة يحتفظ بـ 40 وحدة لنفسه ويقدم (ويبيع) لقطاع الزراعة 50 و لقطاع الصناعة 10 وحدات ويترك للطلاب النهائي 175 وحدة .

لما أعدده هذا الجدول فتبين أن مدخلات قطاع الزراعة هي 350 وحدة يحصل عليها كما يلي:

يكون لديه من إنتاج سابق 110 وحدات ويحتاج لـ 40 وحدة من قطاع الصناعة و 50 وحدة من قطاع الخدمات و 150 وحدة قيمة مضافة .

وأن مدخلات قطاع الصناعة هي 225 وحدة يحصل عليها ما يلي :

يكون لديه من إنتاج سابق 10 وحدات ويحتاج لـ 150 وحدة من قطاع الزراعة و 10 وحدات من قطاع الخدمات و 55 وحدة قيمة مضافة .

وأخيراً فإن مدخلات قطاع الخدمات هي 275 وحدة يحصل عليها كما

يلي : يكون لديه 40 وحدة من إنتاج سابق ويحتاج لـ 60 وحدة من قطاع

للزراعة و 70 وحدة من قطاع الصناعة و 105 وحدات قيمة مضافة . إذاً

فالكميات التي يقدمها كل قطاع من هذه القطاعات إلى قطاع آخر حتى يستطيع

هذا الأخير أن يصنع وحدة واحدة يمكن وضعها ضمن المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{110}{350} & \frac{150}{225} & \frac{60}{275} \\ \frac{40}{350} & \frac{10}{225} & \frac{70}{275} \\ \frac{50}{350} & \frac{10}{225} & \frac{40}{275} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.04 & 0.3 \\ 0.1 & 0.04 & 0.1 \end{bmatrix}$$

والتي نسميها مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج (المصفوفة التقانية

للإنتاج) أما المعاملات الفنية للقيمة المضافة فهي :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{150}{350} & \frac{55}{225} & \frac{105}{275} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

وإذا ما أخذنا مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج بشكلها العام وفق النحو

التالي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ورمزنا لمنتجات القطاعات الثلاثة السابقة (زراعة - صناعة - خدمات) بـ :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

ولكميات الطلب النهائي لهذه القطاعات بـ

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

لوجدنا وبالعودة إلى جدول التشابكات القطاعية أن بالإمكان التوصل إلى المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} \frac{110}{350} \end{bmatrix} \cdot 350 + \begin{bmatrix} \frac{150}{225} \end{bmatrix} \cdot 225 + \begin{bmatrix} \frac{60}{275} \end{bmatrix} \cdot 275 + 30 = 350$$

$$\left[\frac{40}{350} \right] \cdot 350 + \left[\frac{10}{225} \right] \cdot 225 + \left[\frac{70}{275} \right] \cdot 275 + 105 = 225$$

$$\left[\frac{50}{350} \right] \cdot 350 + \left[\frac{10}{225} \right] \cdot 225 + \left[\frac{40}{275} \right] \cdot 275 + 175 = 275$$

وباستخدام الرموز السابقة نحصل على جملة المعادلات الآتية والتي تحقق شروط التوازن الاقتصادي .

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 + D_1 = P_1$$

$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + D_2 = P_2$$

$$a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 + D_3 = P_3$$

يمكن كتابة هذه الجملة بالشكل المصفوفي التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

حيث يكتب هذا الشكل وفق المعادلة الشعاعية التالية :

$$A \cdot P + D = P \Rightarrow P - A \cdot P = D$$

$$(I - A)P = D$$

فإذا ما علم لدينا شعاع الطلب النهائي لوجدنا أن بالإمكان التوصل إلى حجم

لإنتاج كل قطاع من القطاعات وذلك بحل المعادلة الشعاعية السابقة حيث نجد أن

هذا الإنتاج هو:

$$P = (I - A)^{-1} \cdot D \quad (I - 12)$$

وبالعودة إلى مثالنا وتطبيق هذه المعادلة نجد أن :

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.04 & 0.3 \\ 0.1 & 0.04 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.7 & -0.2 \\ -0.1 & 0.96 & -0.3 \\ -0.1 & -0.04 & 0.9 \end{bmatrix}$$

وهنا علينا إيجاد مقلوب المصفوفة $(I - A)$ أي $(I - A)^{-1}$:

إن مصفوفة المصفورات $(I - A)$ هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0.88 & -0.12 & 0.1 \\ -0.64 & 0.6 & -0.1 \\ 0.4 & -0.2 & 0.74 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) هي :

$$\begin{bmatrix} 0.88 & -0.12 & 0.1 \\ 0.64 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.74 \end{bmatrix}$$

أما المحددة فهي :

$$\Delta = 0.88 \cdot 0.7 - 0.7 \cdot 0.12 - 0.2 \cdot 0.1 = 0.5$$

أما المصفوفة المساعدة فهي :

$$\begin{bmatrix} 0.88 & 0.64 & 0.4 \\ 0.12 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.74 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $(I - A)^{-1}$ هي :

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.5} \begin{bmatrix} 0.88 & 0.64 & 0.4 \\ 0.12 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.74 \end{bmatrix}$$

وبالتبديل في المعادلة الشعاعية (I - 12) نجد أن حجم الناتج لكل قطاع من القطاعات هو:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.5} \begin{bmatrix} 0.88 & 0.64 & 0.4 \\ 0.12 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 200 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 579.2 \\ 356.8 \\ 424 \end{bmatrix}$$

أما لتشكيل جدول التشابكات القطاعية في سنة الهدف ، أي التعرف على عناصر الجدول التالي (I - 20):

مخرجات مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	x_{11}	x_{12}	x_{13}	D_1	p_1
صناعة	x_{21}	x_{22}	x_{23}	D_2	p_2
خدمات	a_{31}	x_{32}	x_{33}	D_3	p_3
القيمة المضافة	v_1	v_2	v_3	$\sum_{j=1}^3 D_j = \sum_{j=1}^3 v_j$	
المدخلات	p_1	p_2	p_3		$\sum_{i=1}^3 p_i$

الجدول (I - 20)

نلاحظ أننا قد قمنا بحساب حجم الناتج المخطط أي p_1, p_2, p_3 وأنه لدينا معلوم D_1, D_2, D_3 . أما x_{ij} فتعطى من خلال العلاقة التالية :

(I - 13)

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot p_j$$

(حيث : a_{ij} أحد عناصر مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج) .

فمثلاً :

$$x_{11} = a_{11} \cdot p_1 = 0,3 \cdot 579,2 = 173,76$$

$$x_{23} = a_{23} \cdot p_2 = 0,3 \cdot 424 = 127,2$$

$$x_{32} = a_{32} \cdot p_2 = 0,04 \cdot 356,8 = 14,272$$

نستطيع الآن التوصل لوضع القيم العددية جميع التي توصلنا إليها في جدول التشابكات القطاعية في سنة الهدف ، الجدول (I - 21) ، حيث نجد أن :

مخرجات مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	173,76	249,76	84,8	70	579,2
صناعة	57,92	14,272	127,2	200	356,8
خدمات	57,92	14,272	42,4	250	424
القيمة المضافة	289,6	78.496	169,6	250	
المدخلات	579,2	356,8	424		1360

الجدول (I - 21)

وكما نلاحظ فيما يخص القيم المضافة أن :

$$V_1 = P_1 - \sum_{i=1}^3 x_{i1}$$

$$V_2 = P_2 - \sum_{i=1}^3 x_{i2}$$

$$V_3 = P_3 - \sum_{i=1}^3 x_{i3}$$

مثال (2) (*) : بفرض أن جدول المدخلات والمخرجات هو كما في الجدول (I - 22) والمطلوب :

- 1- ملء فراغات الجدول (I - 22) بالمعطيات المناسبة .
- 2- بفرض أن A مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج وأن B مصفوفة المصغرات التابعة للمصفوفة (I - A) وأن شعاع الطلب النهائي D هو :

مخرجات مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	30	30	30	D_1	100
صناعة	30	60	x_{23}	100	P_2
خدمات	30	x_{32}	x_{33}	60	200
القيمة المضافة	v_1	v_2	60	$\sum_{j=1}^3 D_j = \sum_{j=1}^3 V_j$	
المدخلات	p_1	200	p_3		500

الجدول (I - 22)

$$D = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.35 & -0.17 & 0.23 \\ -0.08 & 0.31 & -0.08 \\ 0.11 & -0.08 & 0.45 \end{bmatrix}$$

فاحسب شعاع الناتج ثم شكل جدول المدخلات والمخرجات في سنة الهدف .

الحل : 1- قيم الفراغات هي :

$$D_1 = x_{23} = x_{32} = v_1 = 10$$

$$p_1 = v_2 = x_{33} = 100$$

2- لنحسب $(I - A)^{-1}$.

إن مصفوفة مصغرات المصفوفة $(I - A)$ هي :

$$\begin{bmatrix} 0.35 & -0.17 & 0.23 \\ -0.08 & 0.31 & -0.08 \\ 0.11 & -0.08 & 0.45 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة (العوامل المشاركة) للمرافقات هي :

$$\begin{bmatrix} 0.35 & 0.17 & 0.23 \\ 0.08 & 0.31 & 0.08 \\ 0.11 & 0.08 & 0.45 \end{bmatrix}$$

المحددة هي $\Delta = 0.188$

والمساعدة هي :

$$\begin{bmatrix} 0.35 & 0.8 & 0.11 \\ 0.17 & 0.31 & 0.08 \\ 0.23 & 0.08 & 0.45 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن حجم الناتج لسائر القطاعات هو:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,188} \begin{bmatrix} 0,35 & 0,08 & 0,11 \\ 0,17 & 0,31 & 0,08 \\ 0,23 & 0,08 & 0,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 446,808 \\ 547,87 \\ 925,53 \end{bmatrix}$$

إذا إن : $P_1 = 446,808$, $P_2 = 547,87$, $P_3 = 925,53$

وبالتالي فإن جدول المدخلات والمخرجات في سنة الهدف هو كما في الجدول (I - 23) .

المخرجات الطلب النهائي	المخرجات	خدمات	صناعة	زراعة	مخرجات مدخلات
100	446,808	138,83	82,81	134,04	زراعة
200	547,87	46,28	164,36	134,04	صناعة
300	925,53	462,77	27,39	134,04	خدمات
600		277,65	273,94	44,688	القيمة المضافة
	1920,208	925,53	547,87	446,808	المدخلات

الجدول (I - 23)

مثال (3) (•) : يقسم اقتصاد فرضي لثلاثة قطاعات : زراعة — صناعة — خدمات . فإذا علمت أن A مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج و B مصفوفة مصفورات المصفوفة (I - A) وحجم الطلب النهائي D معطاة كالتالي :

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.41 & 0.12 \\ -0.29 & 0.61 & -0.1 \\ 0.31 & -0.43 & 0.44 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 18 \\ 21 \\ 14 \end{bmatrix}$$

فالمطلوب تشكيل جدول المدخلات والمخرجات في سنة الهدف .

الحل : بما أن مصفوفة المصفورات (I - A) هي :

$$\begin{bmatrix} 0.67 & -0.41 & 0.12 \\ -0.29 & 0.61 & -0.1 \\ 0.31 & -0.43 & 0.44 \end{bmatrix}$$

فتكون مصفوفة (العوامل المشاركة) المرافقات هي :

$$\begin{bmatrix} 0.67 & 0.41 & 0.12 \\ 0.29 & 0.61 & 0.1 \\ 0.31 & 0.43 & 0.44 \end{bmatrix}$$

والمحددة هي : $\Delta = 1.18$

والمصفوفة المساعدة هي :

$$\begin{bmatrix} 0.67 & 0.29 & 0.31 \\ 0.41 & 0.61 & 0.43 \\ 0.12 & 0.1 & 0.44 \end{bmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة (I - A) هو :

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{1.18} \begin{bmatrix} 0.67 & 0.29 & 0.31 \\ 0.41 & 0.61 & 0.43 \\ 0.12 & 0.1 & 0.44 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن حجم الناتج الإجمالي هو :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1,18} \begin{bmatrix} 0.67 & 0.29 & 0.31 \\ 0.41 & 0.61 & 0.43 \\ 0.12 & 0.1 & 0.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68.84 \\ 81.4 \\ 32.36 \end{bmatrix}$$

إذاً إن جدول التشابكات القطاعية في سنة الهدف هو كما في الجدول (I - 24) :

مخرجات مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	20,652	24,42	6,452	18	68,84
صناعة	27,536	16,28	16,18	21	81,4
خدمات	6,884	8,14	3,236	14	32,36
القيمة المضافة	13,768	32,65	6,492	53	
المدخلات	68,84	1,4	32,36		182,6

جدول (I - 24)

مثال (4) (*) : يطلب تكوين جدول التشابكات القطاعية لإحدى الدول في سنة الهدف ، بفرض أن المصفوفة (I - A) ومصفوفة مصفوفاتها B وشعاع الطلب النهائي D هي:

$$(I - A) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

158

$$B = \begin{bmatrix} \frac{13}{30} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{-4}{15} & \frac{16}{25} & \frac{-4}{25} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{5} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الحل : بما أن مصفوفة مصفريات المصفوفة (I - A) هي :

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{30} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{-4}{15} & \frac{16}{25} & \frac{-4}{25} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{5} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

فتكون مصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) هي :

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{30} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{4}{5} & \frac{16}{25} & \frac{-4}{25} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{5} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

والمحدد هي $\Delta = \frac{7}{25} = 0.28$

والمصفوفة المساعدة هي :

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{30} & \frac{4}{15} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{16}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{25} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

ويكون حجم الإنتاج الكلي هو:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.28} \begin{bmatrix} \frac{13}{30} & \frac{4}{15} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{16}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{25} & \frac{9}{20} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 9 \\ 45 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 45 \\ 15 \end{bmatrix}$$

وبالتالي إن جدول التشابكات القطاعية في سنة الهدف هو كما في الجدول (I-25):

مخرجات مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	6	15	0	9	30
صناعة	7.5	15	7.5	15	45
خدمات	0	9	3	3	15
القيمة المضافة	16.5	6	4.5	27	
المدخلات	30	45	15		90

الجدول (I-25)

مثال (5) (٥): يقسم اقتصاد فرضي إلى ثلاثة قطاعات : زراعة — صناعة — خدمات ، فإذا علمت أن مصفوفة المعاملات الفنية A ، B ، المصفوفة المساعدة للمصفوفة $(I - A)$ و D حجم الطلب النهائي كلها هي :

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix}$$

فالمطلوب : تشكيل جدول المدخلات والمخرجات في سنة الهدف .

الحل : بما أن A مصفوفة المعاملات الفنية مطومة لدينا إذاً :

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$$

لحساب محددة المصفوفة $(I - A)$. نعلم أن B هي المصفوفة المساعدة لها إذاً بتكويرها نحصل على المرافقات (العوامل المشاركة) وهي :

$$\begin{bmatrix} 0.57 & 0.41 & 0.47 \\ 0.34 & 0.58 & 0.49 \\ 0.27 & 0.32 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وقيمة المحددة مساوية :

$$\Delta = 0.57 * 0.8 - 0.3 * 0.41 - 0.2 * 0.47 = 0.239$$

ويكون مقلوب المصفوفة $(I - A)^{-1}$ أي $(I - A)^{-1}$ هو:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.239} \begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.6 \end{bmatrix}$$

ويكون حجم الناتج الكلي مساوياً :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.239} \begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 879.5 \\ 1023.85 \\ 1232.22 \end{bmatrix}$$

أي أن : $P_1 = 879.5$, $P_2 = 1023.85$, $P_3 = 1232.22$

وبالتالي فإن جدول التشابكات القطاعية في سنة الهدف هو كما في

الجدول (I - 26) التالي:

مخرجات مدخلات	زراعة	صناعة	خدمات	الطلب النهائي	المخرجات
زراعة	175,9	307,16	246,44	150	879,5
صناعة	351,8	102,16	369,67	200	1023,85
خدمات	263,85	511,93	246,44	210	1232,22
القيمة المضافة	87,95	102,37	369,67	560	
المدخلات	879,5	1023,85	1232,22		3135,57

الجدول (I - 26)

III-5-2- : حل المسائل الاقتصادية رياضياً :

هناك مسائل اقتصادية عديدة يمكن حلها اعتماداً على المصفوفات والعمليات المطبقة عليها من هذه المسائل ما يمكن أن نلاحظه وفق المواضيع التالية :

مثال : لدى المؤسسة العامة للمطاحن والحبوب مطحنتان للحبوب كل منهما تشغل ضمن خطي إنتاج الأول ينتج طحيناً سياحياً والثاني شعبياً . فإذا علمت أن عدد ساعات عمل المطحنة الواحدة هو 6 أيام $\times$ 20 ساعة يومياً = 120 ساعة أسبوعياً تنتج فيها عدداً من أكياس الطحين وفق الجدول التالي :

المطاحن الطحين	المطحنة الأولى	المطحنة الثانية
طحين سياحي	350	280
طحين شعبي	140	70

فإذا وضعت المؤسسة خطة لإنتاج 2590 كيس طحين سياحي و 910 أكياس طحين شعبي فكم عدد ساعات عمل المطحنتين يلزم لذلك ؟

الحل : لنفرض أن عدد ساعات عمل المطحنة الأولى هو x (أسبوع عمل)

لنفرض أن عدد ساعات عمل المطحنة الثانية هو y (أسبوع عمل)

فلنكون أمام جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين :

$$350x + 280y = 2590$$

$$140x + 70y = 910$$

و هما تحددان عدد ساعات عمل المطحنتين لتنفيذ الخطة ، بحل هاتين المعادلتين بطريقة المعينات نجد أن:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2590 & 280 \\ 910 & 70 \\ 350 & 280 \\ 140 & 70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24500 & 39200 \end{vmatrix}} = \frac{181300 - 254800}{24500 - 39200} = \frac{73500}{14700} = 5$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 350 & 2590 \\ 140 & 910 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 24500 & 39200 \end{vmatrix}} = \frac{318500 - 362600}{24500 - 39200} = \frac{44100}{14700} = 3$$

إن عدد ساعات عمل المطحنة الأولى هو

$$x * 120 = 5 * 120 = 600 \text{ ساعة عمل}$$

وعدد ساعات عمل المطحنة الثانية هو:

$$y * 120 = 3 * 120 = 360 \text{ ساعة عمل}$$

مثال : تعمل المؤسسة العامة للإسكان على بناء نموذجين من وحدات سكنية شهابية من خلال ورشتي عمل A و B فإذا علمت أن عدد الوحدات التي تبنيها هاتان الورشتان هو موضح بالجدول التالي :

ورشات العمل نماذج الوحدة	الورشة الأولى	الورشة الثانية
وحدات سكنية نموذج (1)	3	2
وحدات سكنية نموذج (2)	8	1

ولدى دراسة الزيادة المتوقعة لنمو السكان وفق الخطة الخمسية الثالثة تبين أن لدى المؤسسة خطة لبناء 22 وحدة سكنية نموذج (1) و 37 وحدة سكنية نموذج (2) فإن المطلوب تحديد عدد الورش لتحقيق هذه الخطة .

الحل : لنفرض عدد الورش المطلوب تجهيزها لتحقيق الخطة هو x ورشة (A) و y ورشة (B) .

لن تحديد عدد هذه الورش لتحقيق خطة هذه المؤسسة يتم من خلال حل جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين:

$$3x + 2y = 22$$

$$8x + y = 37$$

بحل هذه الجملة عن طريق مقلوب المصفوفة نجد أن :

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الأصلية هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المصفورات (المصفائر)

مصفوفة (العوامل المشاركة) المرافقات :

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المساعدة (المرتبطة)

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

إذا المقلوب هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \text{adj}(A)$$

وبالتالي فالحل هو:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 37 \end{bmatrix} = \frac{-1}{13} \begin{bmatrix} -52 \\ -65 \end{bmatrix}$$

إذاً يتطلب لتنفيذ الخطوة تجهيز 4 ورشات (A) و 5 ورشات (B) .

مثال : تعمل الشركة العامة لحليج وتسويق الأقطان في حماه وفق ثلاث أقسام ،

بحوي كل قسم 3 خطوط إنتاج يتم من خلالها حليج ثلاث أصناف من القطن (1)

و(2) و(3) فإذا علمت أن عدد الأطنان المطلوبة يومياً كما هو مبيناً في الجدول

التالي :

ورشات العمل نماذج الوحدة	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث
نوع القطن (1)	2	3	1
نوع القطن (2)	1	1	2
نوع القطن (3)	3	2	2

وأن لدى الشركة العامة لحليج وتسويق الأقطان خطة لتنفيذ 33 طن من النوع (1) و 32 طن من النوع (2) و 43 طن من النوع (3) ، فكم يوماً تحتاج لتنفيذ هذه الخطة ؟

للحل : إذا رمزنا بـ X لعدد أيام العمل في القسم الأول .

إذا رمزنا بـ Y لعدد أيام العمل في القسم الثاني .

إذا رمزنا بـ Z لعدد أيام العمل في القسم الثالث .

فإن تحديد عدد الأيام لتنفيذ الخطة يتم من خلال حل جملة المعادلات التالية :

$$2x + 3y + z = 33$$

$$x + y + 2z = 32$$

$$3x + 2y + 2z = 43$$

ولحل هذه الجملة نستخدم طريقة مقلوب المصفوفة :

إن المصفوفة الأصلية هي :

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المصغرلات هي :

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة المرافقات (العوامل المشاركة) هي :

$$A_C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

وقيمة المحددة هي :

$$\Delta = 7$$

أما المصفوفة المساعدة (المرتبطة) فهي :

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة هو :

$$A^{-1}_{(3,3)} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

وحل هذه الجملة هو:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 43 \end{bmatrix}$$

$$x = 3 \quad y = 5 \quad z = 12$$

مثال :

تنتج شركة الوسيم للألبسة الجاهزة ثلاثة أصناف ، وكل صنف من هذه الأصناف يحتاج إلى أربع مواد أولية تدخل في إنتاج هذه الأصناف ، فإذا علمت أن إنتاج الشركة من الأصناف وحاجتها للمواد الأولية هو كما ورد في الجدول التالي :

المواد الأولية بالوحدة الإنتاج بالوحدة	قطن	صوف	بطانة	عمل
يحتاج الصنف (1) لـ	15	6	5	3
يحتاج الصنف (2) لـ	7	10	2	9
يحتاج الصنف (3) لـ	3	12	10	8

فكم تحتاج الشركة من هذه المواد الأولية لتصنيع 100 وحدة من الصنف (1) و 70 وحدة من الصنف (2) و 150 وحدة من الصنف (3) ؟ .

بمعنى آخر : يطلب تحديد مستلزمات شركة الوسيم من المواد الأولية التي تدخل في عملية التصنيع هذه لتحقيق خطتها في تصنيع ما قرره . ثم ما هي التكلفة الكلية للإنتاج علماً بأن تكلفة الوحدة الواحدة من القطن 10 وحدات نقدية ومن الصوف 8 وحدات نقدية ومن البطانة 12 وحدة نقدية ، ومن الصوف 8 وحدات نقدية ، ومن العمل 6 وحدات نقدية ، ثم أوجد تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل صنف على حدٍ .

الحل :

سنلاحظ أن بالإمكان وضع معطيات المسألة من خلال شعاع أفقي يمثل كميات الأصناف المطلوبة للتصنيع ومصنوفة كما هي واردة في الجدول السابق .

$$\begin{bmatrix} 100 & 70 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & 9 \\ 3 & 12 & 10 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2440 & 3100 & 2140 & 2130 \end{bmatrix}$$

إذاً لتحقيق الخطة نحتاج إلى 2440 وحدة من القطن و 3100 وحدة من الصوف و 2140 وحدة من البطانة و 2130 وحدة عمل .

أما لإيجاد التكلفة الكلية فيمكن أيضاً كتابة المعطيات من خلال شعاع أفقي يمثل الكميات التي تدخل في تصنيع الأصناف الثلاثة وشعاع شاقولي يمثل تكاليف كل وحدة من وحدات المواد التي تدخل في عملية التصنيع هذه :

$$\begin{bmatrix} 2440 & 3100 & 2140 & 2130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2440 & 3100 & 2140 & 2130 \end{bmatrix}$$

ولإيجاد تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل صنف وحدة ، فإننا نلجأ أيضاً إلى وضع المعطيات من خلال مصفوفة وشعاع .

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & 9 \\ 3 & 12 & 10 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 276 \\ 228 \\ 294 \end{bmatrix}$$

مثال : لدى المؤسسة العامة لصناعة السجاد 3 أقسام للبيع ، يبيع القسم الأول أسبوعياً 50 قطعة ، ثمن للقطعة الواحدة 320 وحدة نقدية وتكلفتها 298 وحدة نقدية . ويبيع القسم الثاني أسبوعياً 70 قطعة ، ثمن القطعة الواحدة 270 وحدة نقدية . ثمنها 250 وحدة نقدية ، ويبيع القسم الثالث أسبوعياً 110 قطع ثمن القطعة الواحدة 120 وحدة نقدية وتكلفتها 103 وحدات نقدية .

والمطلوب : حساب ربح هذه المؤسسة في الأسبوع .

الحل : يمكن حساب الدخل الكلي للمؤسسة على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} 320 & 270 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46230 \end{bmatrix} \text{ M.u}$$

أما التكلفة الكلية فهي :

$$\begin{bmatrix} 298 & 250 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43730 \end{bmatrix} \text{ M.u}$$

ويكون الربح الكلي :

$$46230 - 43730 = 2500 \cdot \text{M.u}$$

إن ربح الوحدة الواحدة من كل قطعة هو :

$$\begin{bmatrix} 320 \\ 270 \\ 120 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 298 \\ 250 \\ 103 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 20 \\ 17 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الربح الكلي هو :

$$\begin{bmatrix} 22 & 20 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1870 \end{bmatrix} \text{ M.u}$$

مثال : تصنع شركة سيرونكس للأجهزة الإلكترونية أربعة أصناف من التلفزيونات ، يدخل في إنتاجها أربعة مستلزمات إنتاجية لهذه الأصناف . فإذا علمت أن عدد الوحدات من مستلزمات الإنتاج التي تدخل في تصنيع الوحدة الواحدة من هذه الأصناف وسعر الوحدة الواحدة من مستلزمات الإنتاج هو كما في الجدول التالي :

الأصناف المستلزمات	الصنف الأول	الصنف الثاني	الصنف الثالث	الصنف الرابع	سعر الوحدة الواحدة
المستلزم (1)	8 units	3	10	4	7 M.u
المستلزم (2)	3 units	7	5	10	5 M.u
المستلزم (3)	5 units	5	2	3	9 M.u
المستلزم (4)	10 units	2	13	12	15 M.u

المطلوب : حساب التكاليف الكلية للوحدة الواحدة من الإنتاج ، وإذا عملت أن
لدى الشركة خطة في تصنيع 500 قطعة من الصنف الأول و 300 قطعة من
الصنف الثاني و 600 قطعة من الصنف الثالث و 250 قطعة من الصنف الرابع ،
فكم تكون التكاليف الكلية وفق هذه الخطة ؟
الحل : نستطيع حساب التكاليف الكلية للوحدة الواحدة من الإنتاج من حاصل
ضرب المصفوفتين .

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 10 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 13 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 266 & 131 & 308 & 285 \end{bmatrix}$$

إذا إن تكلفة الوحدة الواحدة من الصنف الأول هو 266 وحدة نقدية ومن الصنف الثاني هو 131 وحدة نقدية ومن الصنف الثالث 308 وحدة نقدية ومن الصنف الرابع 285 وحدة نقدية .

ولحساب التكاليف الكلية وفقاً للخطة نجد أن :

$$\begin{bmatrix} 500 & 300 & 600 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 266 \\ 131 \\ 308 \\ 285 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 428350 \end{bmatrix} \text{ M.u}$$

الفصل الثالث

III-التطبيقات الاقتصادية للاشتقاق والتكامل

III-1- الدوال (التوابع):

نتعرض في هذا الفصل وبشكل موجز لتطبيقات اقتصادية للاشتقاق و التكامل مستثنين بذلك على نظريات اقتصادية معروفة وتعريف أساسية ومبادئ أولية لتوابع اقتصادية متعددة منها :

توابع العرض والطلب - تابع الدخل (الإيراد) الكلي - تابع التكلفة الكلية - تابع الاستهلاك - تابع الربح ثم مروّنات هذه التوابع مثل : مرونة الطلب السعرية - مرونة العرض السعرية - مرونة الطلب بالنسبة للدخل - مرونة الدخل للمنشأة .. إلخ .

II-1-1-تعريف التابع : تبين النظرية الاقتصادية أن هناك علاقة وطيدة بين دخل الفرد (الأسرة) والكمية التي يستهلكها (تستهلكها) هذا الفرد لنوعية معينة من سلعة ما ، وأقرب مثال على ذلك مادة اللحوم التي يتعلق استهلاكها وبشكل رئيسي بدخل الفرد ، فإذا رمزنا لكمية استهلاك الفرد لمادة اللحوم بـ y ولدخل الفرد بـ x نجد أن بالإمكان تمثيل ذلك رياضياً من خلال علاقة تابعة تأخذ الشكل التالي :

$$y = f(x)$$

حيث نسمى x بالمتحول المستقل والذي يمثل دخل الفرد و y المتحول التابع والذي يمثل كمية استهلاك اللحوم ، إن الأمثلة على التوابع عديدة جداً ، حيث نجدها في : التطبيقات الاقتصادية - التطبيقات الفيزيائية - التطبيقات الكيميائية وبصافنا العديد من التوابع التي يكون لها متغيرات عديدة تتأثر بها ، فمثلاً : تبين للنظرية الاقتصادية أن كمية الطلب على سلعة معينة i (D_i) تخضع لعوامل متعددة منها :

سعر السلعة ذاتها $p - p_r$ أسعار السلع البديلة (حيث تأخذ J قيمة مختلفة باختلاف السلع) P_K أسعار السلع المكملة (حيث تأخذ K قيمة مختلفة باختلاف السلع) - Y دخل الفرد (الأسرة) - A السن - S الجنس - L عدد السكان - D توزيع الدخل بين المستهلكين ومستواه NE المستوى التعليمي فإذا ترجمنا هذا المنطق رياضياً نجد أن بالإمكان كتابة ذلك من خلال علاقة رياضية ممثلة بتابع يتبع عدة متحولات على النحو التالي :

$D_i = D_i(P, P_j, p_k, Y, A, S, L, D, NE, \dots)$
 كما ويمكن النظر إلى الإنتاج Y الذي يتأثر بعدة عوامل منها : x_1 رأس المال ، x_2 العمل ، x_3 المواد التي تدخل بالتصنيع - x_4 نوعية هذه المواد - x_5 منشأ هذه المواد - x_6 أسعار هذه المواد وتكلفتها - x_7 حاجة السوق لهذا الانتاج - إلخ ،
 أيضا يمكن تمثيل ذلك من خلال علاقة رياضية ممثلة بالتابع التالي :

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

II-1-2- أنواع الدوال : يمكن النظر إلى الدوال من خلال صيغتها الرياضية :
 - الدوال الضمنية (المستترة) : وهي الدوال التي لا يمكن معرفتها (حلها) ويكون فيها التابع والمتغير المستقل بنفس الطرف في حين يكون في الطرف الأيمن القيمة صفر في شكلها العام وهو :

$$F(x, y) = 0$$

وللتعرف عليها يتطلب إجراء بعض الحسابات عليها (نتيجة تحويلها إلى تابع صريح (ظاهر)) في بعض الأحيان وقد يكون غير ممكن في أحيان أخرى .
 أمثلة :

$$2x^2y + y^2x - 5x^2y^2 - 10 = 0$$

$$\sqrt{x^2 - yx^2 + x^2y^2 - 5} = 0$$

II - الدوال الصريحة (الظاهرة) : وهي الدوال التي يمكن التعرف عليها (حلها) ويكون فيها التابع بطرف والمتحول المستقل بطرف آخر ، و شكلها العام هو :

$$y = f(x)$$

أمثلة (*) :

$$y = 2x - 3$$

$$y = x^2 - 3x + 4$$

لهذا النوع من الدوال (أنوع عديدة) :

1- تابع القوى : شكله العام هو $y = f(x) = x^n$ (n صحيح موجب)
 مثال :

$$y = f(x) = x^2$$

$$y = f(x) = x^3$$

2- التابع الأسّي : شكله العام هو : $y = f(x) = a^x$ حيث $0 < a \neq 1$

$$y = f(x) = 2^{x-1}$$

$$y = f(x) = 5^x$$

3- التابع اللوغاريتمي : شكله العام هو

$$y = \log_a x \quad (1 \neq 0 < a)$$

وحيثما يكون $a = e$ يكتب بالشكل $y = \ln x$

4- تابع كثير الحدود : شكله العام هو:

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

حيث : $a_1, a_2, \dots, a_n$ فهي ثوابت حقيقية ، أما a_0 فهو ثابت يدعى الحد المطلق .

5- التابع الكسري : شكله العام هو:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

حيث كل من $f(x)$ ، $g(x)$ كثير حدود .

III - التوابع الخطية وغير الخطية : يكون التابع خطيا إذا كانت قوة المتغير فيه مساوية الواحد الموجب أما غير ذلك فيكون غير خطي .
أمثلة : إن التوابع التالية هي خطية :

$$y = f(x) = ax + b$$

$$y = f(x, z) = ax + by + c$$

$$y = f(x, z, u) = ax + bz + cu + d$$

لما التوابع التالية فهي غير خطية :

$$y = f(x) = ax^2 + 3$$

$$y = f(x, z) = ax^2 + bz^3 + c$$

II - التوابع العكسية : إذا وجدت العلاقة التالية :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

فَعندها نقول إن أحدهما هو تابع عكسي للآخر .

مثال : إن التابع العكسي للتابع $y = f(x) = 7x - 3$ هو $x = g(y) = \frac{y+3}{7}$

$$y = f(x) = 7x - 3$$

V- التوابيع المستمرة (المتصلة) والمنقطعة (المتصلة و المنفصلة) : نعرفها بأنها التوابيع التي يكون فيها المتغير المستقل (أو المتغيرات المتعددة) متصلاً (لا يوجد به أي انقطاع) وفي حال وجد أي انقطاع في متغيرها (أو في متغيراتها المتعددة) فعندها يكون التابع غير متصل (غير مستمر) .
- إن هناك ظواهر عديدة نلاحظها في حياتنا تشرح لنا اتصال وانقطاعها التوابيع منها:

- تمدد (تقلص) الأجسام فهذه العملية تأخذ شكلاً تدريجياً في التمدد (التقلص).
- كمية تدفق الماء من الصنبور تأخذ شكلاً متزايداً تدريجياً كلما أتحنا لعملية فتح الصنبور طريقاً أوسع ، فلا يمكن أن تتدفق المياه من الصنبور دفعة واحدة .
- إن نمو النباتات تتم بالتدرج ، فلا يمكن للنبات أن ينمو من طول 55 cm إلى طول 60 cm دون المرور بالأطوال المحصورة بين 55 - 60 .
- أما إذا أخذنا النمو السكاني فيزداد عدد السكان فرداً فرداً ولا يمكن القول إن هذه الزيادة تأتي نتيجة زيادة فرد ونصف أو فرد وثلاثة أرباع الفرد ، فلا وجود لأي عدد ما بين الفرد والفردين . فإذا رمزنا لعدد السكان بالرمز x فإن x تأخذ القيم :
 $1, 2, 3, 4, \dots, n$

وما بين كل قيمتين لا يمكن وجود قيم أخرى ويكون التابع الذي متغيره عدد السكان غير معرف عند تلك القيم .
فإذا فرضنا أن لدينا التابع

$$y = f(x) = \frac{5x - x^2}{2x}$$

فمن أجل $x = 0$ نجد أن $y = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والتابع غير مستمر عند تلك النقطة .
ذلك لأن ليس له قيمة معرفة .

VI- التوابيع الزوجية والفردية : التوابيع الزوجية وهي التوابيع التي يكون لها قيمة واحدة من أجل قيمتين متعاكستين للمتحول x شكلها العام هو:

$$\forall x \in R : f(x) = f(-x)$$

١ (*) يجب التنويه إلى أن هناك فرقاً بين المعادلة $y = x$ والتابع $y = f(x)$ فالمعادلة قانون جبري يحدد لنا شكل العلاقة التي نستطيع من خلالها إيجاد قيم المتغير ، أما الدالة فهي شكل رياضي يوضح ارتباط المتغير المستقل x مع المتغير التابع y من خلال علاقة بين x و y قد تكون هذه العلاقة دون تحديد لشكل جبري لهذا التابع خطي أم غير خطي ، ظاهر أو ضمني ، منقطع أو مستمر .

أمثلة : $y = f(x) = x^2$ ، $y = f(x) = x^4 + 4$
 أما التوابع الفردية فهي التي يكون لها قيمتان متعاكستان من أجل قيمتين متعاكستين للمتحول x شكلها العام هو:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$$

أمثلة : $y = f(x) = x + 3$ ، $y = f(x) = x^3$

VII - التابع المركب (تابع التابع) : لنفرض أن لدينا التابعين التاليين:

$$Y = f(x) \quad z = g(y)$$

حيث x هو المتحول التابع الأول y و y هو المتحول التابع الثاني z ، وهنا نلاحظ من العلاقتين أن التابع y يتبع المتحول x والتابع z يتبع المتحول y إذا فالعلاقة :

$$Z = g(f(x))$$

تعرف لنا تابعا جديدا ندعوه بالتابع المركب ونرمز له بـ $g \circ f$.

III-1-3- النهايات : نعرف نهاية التابع y ونرمز لها بالرمز $\lim y$ وذلك

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b \quad \text{حيث نكتب :}$$

إذا اقتربت y من قيمة نهائية لها ولتكن b عندما تقترب x من قيمة معينة ولتكن a .

$$\text{مثال : لنفرض أن : } y = f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}$$

إذا جعلنا $x = \infty$ فنجد أنه $y = f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ وهذا يعني أن y حالة عدم

تعيين وإذا فرضنا أن :

$$y = f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x^2 - 3x}$$

فإن $y = f(x) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عندما نجعل $x = 0$ وهذا يعني أن y حالة عدم

$$\text{تعيين وإذا فرضنا أن : } y = f(x) = 3x^2 - x$$

فإن $y = f(x) = \infty - \infty$ عندما نجعل $x = \infty$ هذا يعني أن y كذلك هي حالة عدم تعيين نلاحظ من المثال السابق أننا في كل مرة نجد للتابع y قيمة

معينة ومحددة . إن بالإمكان حساب قيمة قريبة للتابع $y = f(x)$ وذلك عندما تقترب x من قيمة ما دون أن تساويها حيث يكتب ذلك رياضياً :

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b$$

أمثلة : لنفرض أن لدينا التابع :

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

إذا جعلنا $x = 3$ نجد أن :

$$y = f(x) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

وهي حالة عدم تعيين . لنحاول الآن إعطاء x قيم قريبة جداً من 3 (بزيادة أو نقصان) فنجد أن $y = f(x)$ قد أخذت قيمة قريبة جداً من القيمة 2 ونكتب ذلك :

$$\lim_{x \rightarrow 3} y = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$$

III-1-4- طرق حساب النهايات : هناك طريقتان للتعرف على كيفية حساب نهايات تابع ما وذلك بعد اللجوء إلى الطريقة الأساسية التي يتم من خلالها تعويض x بقيمتها في التابع فإذا كان للتابع قيمة معينة ومحدودة فنلك هي النتيجة ، أما إذا كان للتابع قيمة غير معينة (حالة عدم تعيين) فعندها نلجأ إلى إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : وفيها نفش فيما إذا كان هناك علاقة بين البسط والمقام من خلال التحليل حيث نقوم بعملية الاختصار ثم بعدها نلجأ إلى الطريقة المباشرة وهي التعويض .

الطريقة الثانية : وهي الطريقة العامة لحساب نهاية دالة ما حيث نعطي قيمة تقريبية لـ x ونعوضها في التابع فإذا فرضنا أن $x = a$ فعندها نأخذ قيمة تقريبية لـ x ولتكن $x + \Delta x$ (بزيادة أو نقصان Δx) ونحسب قيمة التابع عندما Δx تصبح قريبة جداً من الصفر .

مثال : لوجد نهاية التابع : $y = f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}$ عندما تنتهي x إلى $-\frac{2}{3}$

إن :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{2x - 1}{3x + 2} = \frac{-7}{0} = \infty \quad (\infty \text{ قيمة معينة})$$

مثال : أوجد نهاية التابع $y = f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ عندما x تنتهي إلى 5

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{حالة عدم تعيين (*)} \quad \text{إن :}$$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين هذه إذا طبقنا الطريقة الأولى ، حيث نجد أن :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$$

مثال : أوجد نهاية التابع : $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ عندما x تنتهي إلى 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{حالة عدم تعيين} \quad \text{إن :}$$

لإزالة حالة عدم التعيين هذه نطبق الطريقة الأولى :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1$$

ملاحظة هامة : إن هناك بعض النظريات التي تغنينا عن تطبيق الطرق السابقة للتعرف على نهاية دالة كسرية ما ، وذلك حينما ينتهي متحولها المستقل إلى $\pm \infty$ ونستطيع تطبيقها بشكل دائم .

نورد هذه النظريات دون التطرق لبراهينها .

1- إذا كانت درجة بسط الدالة الكسرية أكبر من درجة مقامها فعندها تكون النهاية دائماً هي اللانهاية الموجبة أو السالبة حسب إشارة المتغير x .
مثال : إن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 5}{x + 3} = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x - 2} = +\infty$$

2- إذا كانت درجتا البسط والمقام واحدة ، فعندها تكون النهاية مساوية لـ أمثال أعلى درجة في البسط على أمثال أعلى درجة في المقام .

مثال : إن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 + 3} = \frac{3}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 7}{7x^2 - 1} = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{5x^2 - 3} = \frac{2}{5} , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 3}{2x^2 - 5} = \frac{1}{2}$$

3- إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فعندها تكون نهاية الدالة الكسرية مساوية للصفر .
2

مثال : إن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+7}{x^2+3} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+7}{x^2+3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-x+1}{x^3-1} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2+3x-2}{x^3+1} = 0$$

اضف إلى ذلك هناك القواعد التي يمكن تطبيقها على التوابع لإيجاد نهاياتها وهي :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} B = B$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} Bf(x) = B \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) * f_2(x) * \dots * f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) * \dots * \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

أمثلة : لوجد نهاية كلا من التوابع التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 9) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 9 = -11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 3x^2 + 4x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{3x + x^3 - x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 4x^3 + x} = -\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 \sqrt{x+1}}{x+3} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}}{\lim_{x \rightarrow 3} x + 3} = \frac{54}{6} = 9$$

(*) يجب دائما تطبيق طريقة التحويل ثم حينما ارى أن النتيجة حالة عدم تعيين، عندها ألجأ إلى إحدى الطريقتين لحساب نهاية الدالة.

III-2- الاشتقاق

III-2-1- تعريف المشتق : لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ لنعطي x القيمتين x_1 و x_2 فيأخذ التابع $y = f(x)$ قيمتين تقابلهما هما $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ وإذا رمزنا لفرق $x_2 - x_1$ بالرمز Δx فعندها نسمي الفرق Δx بتغير المتحول x وكما نلاحظ أنه يمكن أن يكون هذا التغير موجباً أو سالباً، أي $\Delta x > 0$ أو $\Delta x < 0$ ، كما ونعرف الفرق $y_2 - y_1$ والذي نرمز له بالرمز Δy بتغير التابع $y = f(x)$ الذي يمكن أن يكون موجباً $\Delta y > 0$ أو يكون سالباً $\Delta y < 0$.
لنأخذ الآن النسبة بين هذين التغيرين ، فنجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

حيث نميز الحالات التالية :

- 1- إذا كان $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ هذا يعني أن لتغيرات y و x الاتجاه نفسه .
بمعنى آخر أن التابع $y = f(x)$ هو تابع متزايد .
 - 2- إذا كان $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ فهذا يعني أن تغييري y , x متعاكسان ، وبالتالي فالتابع $y = f(x)$ هو تابع متناقص .
 - 3- إذا كان $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ فهذا يعني أن التابع هو تابع ثابت .
- لنكتب الآن النسبة السابقة بالشكل التالي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولنأخذ نهايتي طرفيها وذلك عندما Δx تسعى نحو الصفر .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ولنرمز لها بالرمز y'_x أو f'_x أو $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{df(x)}{dx}$ أو $f'(x)$.
حيث نطلق عليها اسم المشتق عند النقطة x .

إذا يمكن أن نعرف مشتق التابع $y = f(x)$ عند النقطة x بأنه نهاية لنسبة
تغيري التابع والمتحول وذلك عندما ينتهي Δx نحو الصفر .

مثال : احسب مشتق التابع : $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$
لنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فياخذ التابع y مقابل ذلك تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$
ويصبح التابع بعد التغير كما يلي :

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \\ \Delta y &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 \\ \Delta y &= \Delta x (2x - 3 + \Delta x) \end{aligned}$$

$$y = x(2x - 3)$$

أي أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 3 + \Delta x$$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x - 3 + \Delta x) = 2x - 3$$

مثال : لوجد مشتق التابع التالي :

$$y = \frac{5}{2x - 3}$$

لنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فياخذ التابع y تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$
ويصبح التابع بعد التغير كما يلي :

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \frac{5}{2(x + \Delta x) - 3} \\ \Delta y &= \frac{5}{2(x + \Delta x) - 3} - \frac{5}{2x - 3} \\ \Delta y &= \frac{10x - 15 - 10(x + \Delta x) + 15}{(2x - 3) \cdot [2(x + \Delta x) - 3]} \\ \Delta y &= \frac{-10\Delta x}{(2x - 3) \cdot [2(x + \Delta x) - 3]} \end{aligned}$$

و بالتقسيم على Δx نجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10}{(2x-3)[2(x+\Delta x)-3]}$$

و بأخذ نهاية الطرفين عندما Δx تنتهي نحو الصفر ، نجد أن :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-10}{(2x-3)[2(x+\Delta x)-3]} = \frac{-10}{(2x-3)^2}$$

II-2-2- قواعد الاشتقاق

- مشتقات التوابع الصحيحة :

1- مشتق التابع الثابت : لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x) = c$ حيث c ثابتة عددية لا تساوي الصفر ، إن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

أي أن :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

هذا يعني أن مشتق التابع الثابت معدوم .

2- مشتق المتحول : لنفرض أن لدينا التابع :

$$y = f(x) = x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

هذا يعني أن :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

أي أن مشتق المتحول يساوي الواحد .

3- مشتق تابع القوى : لنفرض أن لدينا التابع

$$y = f(x) = x^n \quad (n \text{ صحيح موجب})$$

لنميز الحالات التي يمكن أن تأخذها n :
 $n = 1$ يصبح التابع :

$$y = f(x) = x$$

وقد وجدنا أن :

$$y'_x = 1$$

$n = 2$ يصبح التابع :

$$y = f(x) = x^2$$

لنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فياخذ التابع y تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$
ويصبح التابع بعد التغير :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \overline{\Delta x}^2 - x^2$$

$$\Delta y = \Delta x (2x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

وبأخذ نهاية الطرفين نجد أن :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$$

أي أن :

$$y'_x = 2x$$

وبشكل عام لنفرض أن n أخذت قيمة كبيرة ، عندها نجد أن :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}$$

إذاً إن :

$$y = f(x) = x^n \Rightarrow y'_x = n \cdot x^{n-1}$$

مشتق مجموع عدد محدود من التوابيع : لنفرض أن لدينا التوابيع التالية :

$$y_1 = f_1(x) , y_2 = f_2(x) , \dots , y_n = f_n(x)$$

ولنفرض أن :

$$z = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$$

ولنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فياخذ كلاً من $y_1, y_2, \dots, y_n, z$ تغيراً قدره

$\Delta z \neq 0$, $\Delta y_n \neq 0$ $\Delta y_3 \neq 0$, $\Delta y_2 \neq 0$, $\Delta y_1 \neq 0$
ويصبح المجموع z بعد التغيير كما يلي :

$$z + \Delta z = y_1 + \Delta y_1 + y_2 + \Delta y_2 + \dots + y_n + \Delta y_n$$

$$\Delta z = y_1 + \Delta y_1 + y_2 + \Delta y_2 + \dots + y_n + \Delta y_n - y_1 - y_2 -$$

$$y_3 \dots - y_n$$

$$\Delta z = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_n$$

نقسم الطرفين على $\Delta x \neq 0$ نجد أن :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta y_n}{\Delta x}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما Δx تنتهي نحو الصفر نجد أن :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \dots + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_n}{\Delta x}$$

وحسب تعريف الاشتقاق نجد أن :

$$z'_x = y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n$$

وهذا يعني أن مشتق مجموع عدد محدد من التوابع يساوي مجموع مشتقات هذه التوابع

مثال : احسب مشتق التابع التالي :

$$y = x^2 - 3x + 5$$

لن :

$$y'_x = 2x - 3$$

.. مشتق جداء تابعين :

نفرض أنه لدينا التابعين التاليين :

$$u = f(x) , \quad v = g(x)$$

ونفرض أن :

$$y = u.v = f(x) . g(x)$$

لنعطى x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فياخذ كل من التابعين u , v تغيراً قدره $\Delta u \neq 0$,

$\Delta v \neq 0$ أيضاً $\Delta y \neq 0$ ويصبح التابع y بعد التغيير كما يلي :

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) . (v + \Delta v)$$

$$= u.v + v.\Delta u + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v$$

$$\Delta y = u.v + v.\Delta u + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v - u.v$$

وبتقسيم الطرفين على $\Delta x \neq 0$ نجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

نجعل $\Delta x \rightarrow 0$ ثم نأخذ نهاية الطرفين فنجد أن :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

أي أن :

$$y'_x = v \cdot u'_x + u \cdot v'_x + u'_x \cdot v'_x \cdot 0$$

إذا :

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v'$$

مثال : أوجد مشتق التابع التالي :

$$y = 5x^2 - 3x(x-2) + 4x^3$$

$$y'_x = 10x - 3(x-2) - 3x \cdot 1 + 12x^2$$

مثال : أوجد مشتق التابع التالي :

$$y = (x^2 - 3x) \cdot (2x + x^3)$$

$$y'_x = (2x - 3) \cdot (2x + x^3) + (x^2 - 3x) \cdot (2 + 3x^2)$$

ملاحظة : إن بالإمكان تعميم قاعدة مشتق جداء عدد محدود من التوابع كما يلي :
لنفرض أن :

$$y = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots f_n$$

$$y' = f'_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots f_n + f_1 \cdot f'_2 \cdot f_3 \dots f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots f'_n$$

وإذا فرضنا أن :

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = f$$

عندها نجد أن : $y = f^n$

$$y'_x = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$$

وبالتالي نجد أن :

مثال : أوجد مشتق التابع التالي :

$$y = (2x+1).(x^2-2).(x^3+2x^2+5)$$

$$y'_x = 2(x^2-2).(x^3+2x^2+5) + (2x+1).(2x).(x^3+2x^2+5) +$$

$$(2x+1).(x^2-2).(3x^2+4x)$$

مشتق التابع الكسري : لنفرض أن لدينا التابعين التاليين :

$$u = f(x), \quad v = g(x) \neq 0$$

$$y = u/v$$

ولنفرض أن :

لنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فيأخذ كل من u, v تغيراً قدره $\Delta u \neq 0$ و $\Delta v \neq 0$ كما ويأخذ y تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$ ويصبح التابع y بعد التغير كما يلي :

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

وبالتالي فإن :

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

وبقسمة الطرفين على $\Delta x \neq 0$ وبأخذ نهاية الطرفين نجد أن :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot u'_x - u \cdot v'_x}{v^2}$$

ملاحظة : كان بالإمكان التوصل إلى القاعدة السابقة وذلك بتحويل القسمة $y = u/v$ إلى جداء $u = y \cdot v$ ثم بتطبيق قاعدة مشتق جداء تابعين .

$$u'_x = y'_x \cdot v + y \cdot v'_x$$

$$u'_x = y'_x \cdot v + \frac{u}{v} \cdot v'_x$$

اي ان :

$$y'_x = \frac{u'_x \cdot v - u \cdot v'_x}{v^2}$$

أمثلة : أوجد مشتقات التوابع التالية :

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow y'_x = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 3}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$$

$$y = \frac{5x^2 - 1}{x} \Rightarrow y'_x = \frac{10x \cdot x - 1 \cdot (5x^2 - 1)}{x^2} = \frac{10x^2 - 5x^2 + 1}{x^2} = \frac{5x^2 + 1}{x^2}$$

$$y = \frac{3x}{x^2 + 3} \Rightarrow y'_x = \frac{3 \cdot (x^2 + 3) - 2x \cdot 3x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3x} \Rightarrow y'_x = \frac{(4x + 1)(x^2 - 3x) - (2x - 3)(2x^2 + x)}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{-7x^2}{(x^2 - 3x)^2}$$

مشتق التابع المركب ((تابع التابع)):

لنفرض أن لدينا التابع $z = f(y)$ (حيث $y = g(x)$)

لنعطى تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فيأخذ التابع z, y تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$ و $\Delta z \neq 0$ تحقق هذه التغيرات العلاقة التالية:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لنجعل $\Delta x \rightarrow 0$ ولناخذ نهاية الطرفين، فلجد أن:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x$$

مثال : أوجد مشتق التابع التالي:

$$y = 5z^3 \quad (z = x^2 - 3x + 1)$$

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_z \cdot z'_x = 15z^2 \cdot (2x - 3) \\ &= 15(x^2 - 3x + 1)^2 \cdot (2x - 3) \end{aligned}$$

مثال : أوجد مشتق التابع التالي:

$$z = 2y^2 + 7y - 5 \quad (y = 2x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_y \cdot y'_x = (4y + 7) \cdot (4x - 3) \\ &= [4(2x^2 - 3x + 2) + 7] \cdot (4x - 3) \end{aligned}$$

مشتق التابع العكسي:

نفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ إن تابعه العكسي (حين وجوده) هو $x = g(y)$ ولإيجاد x'_y نعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فيأخذ y تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$ ولكن لدينا :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

وإذا ما جعلنا $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta x \neq 0$ نجد أن :

$$y'_x \cdot x'_y = 1$$

أي أن :

$$x'_y = 1 / y'_x \quad \text{وذلك من أجل } \Delta x \rightarrow 0$$

مثال : أوجد مشتق التابع التالي: $y = \frac{5x-1}{2x+3}$ ثم مشتقه العكسي ثم قارن

المشتقين.

$$y'_x = \frac{17}{(2x+3)^2}$$

إن التابع العكسي هو:

$$x = g(y) = \frac{3y+1}{5-2y}$$

$$x'_y = \frac{3(5-2y) - 2(3y+1)}{(5-2y)^2} = \frac{17}{(5-2y)^2} = \frac{17}{\left(\frac{17}{2x+3}\right)^2} = \frac{(2x+3)^2}{17}$$

لنبدل كلا من y'_x , x'_y بقيمتها فنجد أن:

$$\frac{17}{(2x+3)^2} \cdot \frac{(2x+3)^2}{17} = 1$$

مثال : أوجد مشتق التابع التالي:

$$y = 4x^2 + 5 \quad \text{ثم مشتقه العكسي}$$

$$y'_x = 8x \Rightarrow x'_y = \frac{1}{8x} = \frac{1}{8\sqrt{\frac{y-5}{4}}}$$

مشتق التابع اللوغاريتمي:

لنفرض أن لدينا التابع اللوغاريتمي :

$$y = \ln x$$

لنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فياخذ التابع $y = \ln x$ تغيراً قدره $\Delta y \neq 0$ ويصبح التابع بعد التغير على النحو التالي:

$$y + \Delta y = \ln (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \ln (x + \Delta x) - \ln x$$

لنطبق بعضاً من خواص اللوغاريتمات:

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$$

لنقسم الطرفين على $\Delta x \neq 0$ ولنكتب :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln \frac{x + \Delta x}{x}$$

لنضرب الطرف الأيمن بالكسر $\frac{x}{x}$ فتصبح العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{x + \Delta x}{x}$$

أي و باستخدام خواص اللوغاريتمات لدينا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

لنأخذ نهاية الطرفين من أجل $\Delta x \rightarrow 0$ فنجد أن :

$$y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

ملاحظة : يمكن تعميم هذه القاعدة فإذا فرضنا أن لدينا التابع :

$$y = \ln f(x)$$

عندها نجد أن :

$$y'_x = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

نفرض من جديد أن التابع اللوغاريتمي أخذ الصيغة التالية:

$$y = \log_a x$$

فلإيجاد مشتقه y'_x نتبع الطريقة السابقة حرفياً حيث نجد أن :

$$y'_x = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

وإذا أخذ التابع اللوغاريتمي الصيغة التالية:

$$y = \log_a f(x)$$

فإن :

$$y'_x = \frac{f'(x)}{x} \log_a e = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$$

ملاحظة : كان بالإمكان إيجاد المشتق y'_x (دون تطبيق الطريقة السابقة) على

النحو التالي:

نعلم أن :

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_e x \cdot \log_a e \\ &= \ln x \cdot \log_a e \end{aligned}$$

لنشتق الطرفين فنجد أن :

$$(\log_a x)'_x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e + \ln x \cdot 0$$

أي أن :

$$(\log_a x)'_x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

وهي النتيجة السابقة نفسها .

أمثلة : أوجد مشتقات التوابع التالية:

$$1) y = \ln(3x) \Rightarrow y'_x = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

$$2) y = \ln(5x-3) \Rightarrow y'_x = \frac{5}{5x-3}$$

$$3) y = \ln(3x^2-2x+1) \Rightarrow y'_x = \frac{6x-2}{3x^2-2x+1}$$

$$4) y = \log_3(x^2-1) \Rightarrow y'_x = \frac{2x}{(x^2-1) \cdot \ln 3}$$

$$5) y = \log_4(7x^2+2x-5) \Rightarrow y'_x = \frac{14x+2}{(7x^2+2x-5) \cdot \ln 4}$$

مشتق التابع الأسّي :

لنفرض أنه لدينا التابع الأسّي التالي:

$$y = e^x$$

لإيجاد مشتقه نستعين بطريقة الاشتقاق اللوغاريتمي المكونة من المرحلتين

التاليتين:

1- نأخذ لوغاريتم الطرفين (ويفضل اللوغاريتم الطبيعي).

2- نطبق عليه خواص اللوغاريتمات ثم نشق .

فإذا عدنا للتابع : $y = e^x$

وأخذنا اللوغاريتم الطبيعي للطرفين لوجدنا أن :

$$\ln y = \ln e^x$$

وحسب خواص اللوغاريتمات نجد أن :

$$\ln y = x \ln e = x$$

نشق الطرفين فنجد أن :

$$\frac{y'_x}{y} = 1 \Rightarrow y'_x = y = e^x$$

لنفرض أنه لدينا التابع:

$$y = e^{f(x)}$$

عندها نجد أن :

$$y'_x = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

وإذا أخذنا التابع الأسّي بشكل عام :

$$y = a^x \quad 1 \neq a > 0$$

وطبقنا عليه طريقة الاشتقاق اللوغاريتمي لوجدنا أن :

$$\ln y = \ln a^x$$

$$\ln y = x \ln a$$

$$\frac{y'_x}{y} = 1 * \ln a + x * 0$$

أي أن :

$$y'_x = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة ، فإذا فرضنا أن لدينا التابع :

$$y = a^{f(x)}$$

لوجدنا أن :

$$y'_x = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$$

أمثلة : أوجد مشتق كل من التوابع التالية:

$$1) y = e^{5x-1}$$

$$\Rightarrow y'_x = 5 \cdot e^{5x-1}$$

$$2) y = e^{x^2-3x}$$

$$\Rightarrow y'_x = (2x-3) \cdot e^{x^2-3x}$$

$$3) y = e^{5x^2-3x+2}$$

$$\Rightarrow y'_x = (10x-3) \cdot e^{5x^2-3x+2}$$

$$4) y = 2^{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y'_x = 2x \cdot 2^{x^2-1} \cdot \ln 2$$

$$5) y = 3^{2x^2-3x+5}$$

$$\Rightarrow y'_x = (4x-3) \cdot 3^{2x^2-3x+5} \cdot \ln 3$$

$$6) y = 5^{\ln x}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x} \cdot 5^{\ln x} \cdot \ln 5$$

$$7) y = e^{x^2+3} \cdot \ln x^2$$

$$\Rightarrow y'_x = 2x \cdot e^{x^2+3} \cdot \ln x^2 + \frac{2x}{x^2} e^{x^2+3}$$

مشتق التابع الأصم :
نفرض أنه لدينا التابع التالي:

$$z = f(y) = f(g(x)) = \sqrt{y}$$

لنعطي x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فيأخذ التابع $y = g(x)$ تغيراً قدره Δy
 $\neq 0$ كما ويأخذ التابع z تغيراً قدره $\Delta z \neq 0$ ويصبح التابع بعد التغير على
النحو التالي:

$$z + \Delta z = \sqrt{y + \Delta y}$$

$$\Delta z = \sqrt{y + \Delta y} - \sqrt{y}$$

لضرب بمرافق الطرف الأيمن وهو $(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y})$ فنجد أن :

$$\Delta z = \frac{(\sqrt{y + \Delta y} - \sqrt{y})(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y})}{(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y})}$$

$$\Delta z = \frac{(y + \Delta y - y)}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}} = \frac{\Delta y}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}}$$

وبتقسيم الطرفين على $\Delta x \neq 0$ ثم بأخذ نهاية الطرفين وجعل $\Delta x \rightarrow 0$ نجد أن :

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x(\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y})}$$

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta x}{\sqrt{y + \Delta y} + \sqrt{y}} = \frac{y'_x}{2\sqrt{y}}$$

ملاحظة : كان بالإمكان التوصل إلى النتيجة السابقة وذلك من خلال ملاحظة أن
 $z = \sqrt{y}$ بتربيع الطرفين نجد أن :

$$z^2 = y$$

وبأخذ مشتق الطرفين :

$$2z \cdot z'_x = y'_x$$

اي ان :

$$z'_x = \frac{y'_x}{2z} = \frac{y'_x}{2\sqrt{y}}$$

لمثلة : لوجد مشتق كل من التوابع التالية:

$$1) y = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) y = \sqrt{2x+3}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$

$$3) y = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 1}}$$

$$4) y = \sqrt{x^5}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

$$5) y = \sqrt[3]{(3x-2)^5} = (3x-2)^{\frac{5}{3}} \Rightarrow y'_x = \frac{5}{3}(3x-2)^{\frac{5}{3}-1} \cdot 3$$

$$= 5(3x-2)^{\frac{2}{3}} =$$

$$5\sqrt[3]{(3x-2)^2}$$

$$6) y = \sqrt{e^{5x+1}}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{5e^{5x+1}}{2\sqrt{e^{5x+1}}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{e^{5x+1}}$$

$$7) y = \sqrt{\ln x}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}$$

$$8) y = \sqrt{3^{x^2-3}}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{2x \cdot 3^{x^2-3} \cdot \ln 3}{2\sqrt{3^{x^2-3}}}$$

$$= x \cdot \sqrt{3^{x^2-3}} \cdot \ln 3$$

$$9) y = \sqrt{\ln^3 x^2}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{3 \ln^2 x^2 \cdot \frac{2x}{x^2}}{2\sqrt{\ln^3 x^2}}$$

$$= \frac{3 \cdot \ln^2 x^2}{x \cdot \sqrt{\ln^3 x^2}}$$

$$10) y = \sqrt[5]{\ln x^3} = (\ln x^3)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{5} (\ln x^3)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (\ln x^3)'$$

$$= \frac{1}{5} (\ln x^3)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{3x^2}{x^3}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot (\ln x^3)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{x}$$

المشتقات المتتالية :

نفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ المعرف والمستمر ضمن مجال ما
والقابل للاشتقاق حتى المرتبة n على الأقل.

إن :

$$y''_x = f'(x)$$

وهذا الأخير قابل للاشتقاق أيضاً فمشتقه هو :

$$y''_x = f''(x)$$

وبالمناقشة نفسها نجد أن المشتق الثالث أو المشتق من المرتبة الثالثة هو :

$$y'''_x = f'''(x)$$

وهكذا المشتق من المرتبة n (المشتق النوني) هو :

$$y^{(n)}_x = f^{(n)}(x)$$

وإذا أمكن إيجاد مثل هذه المشتقات :

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

فنسميها بالمشتقات المتتالية للتابع $y = f(x)$

مثال : أوجد المشتقات المتتالية للتابع :

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 17$$

$$y' = 3x^2 - 8x + 5$$

$$y'' = 6x - 8$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

مثال : أوجد المشتق النوني للسبع .

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \dots\dots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

المشتقات الجزئية : هناك العديد من التوابع التي تتبع أكثر من متحول مستقل

إن التابع $y = f(x)$ يتبع متحولاً واحداً هو x

أما التابع $g = f(x, y)$ فإنه يتبع متحولين اثنين هما x, y

والتابع $y = f(x_1, x_2, x_3)$ يتبع ثلاثة متحولات هي x_1, x_2, x_3

والتابع $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ يتبع n متحول هم $x_1, x_2, \dots, x_n$

وقد يتطلب الأمر أحياناً إيجاد أحد مشتقات هذه التوابع ، فلقد كنا قد تعرفنا على كيفية إيجاد مشتق التابع $y = f(x)$ ، أما إيجاد مشتقات التوابع الباقية فهذا يزول إلى المشتقات الجزئية بالنسبة لكل متحول من متحولاتها أما كيفية اشتقاق هذه المشتقات الجزئية فيكون بالأسلوب نفس إلا أننا وفي هذا الاشتقاق نتعامل مع بقية المتحولات كنوابت باستثناء المتحول الذي من خلاله نوجد المشتق .

فإذا فرضنا أن لدينا التابع $z = f(x, y)$ تابع لمتحولين هما x, y ولرنا التعرف على عملية الاشتقاق ، فإننا نجد أن هناك مشتقاً جزئياً أولاً بالنسبة لـ x ونرمز له بالرمز :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ أو } z'_x \text{ أو } \frac{\partial z}{\partial x}$$

وهناك أيضا مشتق جزئي أول بالنسبة لـ y ونرمز له بالرمز :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ أو } z'_y \text{ أو } \frac{\partial z}{\partial y}$$

أما لإيجاد أحدهما وليكن المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ x فإننا نعطي لـ x تغيراً قدره $\Delta x \neq 0$ فيأخذ التابع z تغيراً قدره $\Delta z \neq 0$ (طبعاً المتحول الآخر y هو بمثابة ثابت لا يأخذ أي تغير وبالتالي فمشتقه معدوم) ويصبح التابع بعد التغير كما يلي:

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x, y)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

وبقسمة الطرفين على $\Delta x \neq 0$ وأخذ نهاية الطرفين عندما Δx تسعى نحو الصفر نجد أن :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وبالأسلوب نفسه نتعامل مع المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ y :

مثال : لنفرض أن لدينا التابع :

$$z = f(x, y) = x^2 y - 3xy^3 + x^3 y - 5$$

لوجد المشتق الجزئي الأول بالنسبة لكل من x, y

إن :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 3y^3 + 3x^2 y$$

أما المشتق الجزئي الأول بالنسبة لـ y فهو :

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 9xy^2 + x^3$$

عادة حين التعرف على المشتقات الجزئية يكون ضرورياً التعرف على المشتقات الجزئية المتتالية لتابع ما حيث نرمز للمشتق الجزئي الثاني (من المرتبة الثانية) بالنسبة لمتحول (وليكن x أو y أو) ما وفق الشكل التالي :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

ومكذا بالنسبة لبقية المشتقات الجزئية المتتالية:

ملاحظة : إن هناك نظرية تبرهن على أن المشتق الجزئي من المرتبة الثانية بالنسبة لمتحولين لا يتأثر بترتيب الاشتقاق لهذين المتحولين أي أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

مثال : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع :

$$z = f(x, y, v) = x^2 y v^3 - 2 x y^3 v^2 + 4 x^2 y^2 v^3$$

إن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى هي :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xyv^3 - 2y^3v^2 + 8xy^2v^3$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2v^3 - 6xy^2v^2 + 8x^2yv^3$$

$$z'_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} = 3x^2yv^2 - 4xy^3v + 12x^2y^2v^2$$

أما المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فهي :

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12xyv^2 + 8x^2v^3$$

$$z''_{vv} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 6x^2yv - 4xy^3 + 24x^2y^2v$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xv^3 - 6y^2v^2 + 16xyv^3$$

$$z''_{xv} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} = 6xyv^2 - 4y^3v + 24xy^2v^2$$

$$z''_{yv} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v} = 3x^2v^2 - 12xy^2v + 24x^2yv^2$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xv^3 - 6y^2v^2 + 16xyv^3$$

$$z''_{vy} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial y} = 3x^2v^2 - 12xy^2v + 24x^2yv^2$$

$$z''_{vx} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x} = 6xyv^2 - 4y^3v + 24xy^2v^2$$

لاحظ من خلال هذا المثال أن :

$$z''_{vx} = z''_{xv} , \quad z''_{xy} = z''_{yx} , \quad z''_{vx} = z''_{xv}$$

III-3. التطبيقات الاقتصادية للمشتقات

تمهيد :

تسمح لنا الوسيلة الرياضية للتعبير عن أية ظاهرة اقتصادية ، كظاهرة الإنتاج ، الاستثمار ، الانحار ، الاستهلاك ، التكلفة ، الدخل ، بالتعرف على هذه الظاهرة بشكل جيد ، وكثيراً ما نلجأ إلى التعبير عن هذه الظاهرة من خلال علاقة رياضية ، وذلك حينما يكون بالإمكان إيجاد العلاقات التابعة التي تربط عوامل الظاهرة ببعضها ببعض ، حيث من خلال هذه العلاقات التابعة نستطيع دراسة الظاهرة بشكل واسع .
فمثلاً :

إن الدارس لعلم الاقتصاد يستطيع أن يتوصل وبسهولة إلى ما نصت عليه النظرية الاقتصادية من أن هناك علاقة تربط بين الكمية المستهلكة من سلعة ما (سواء من قبل الأسرة أو من قبل الفرد) وبين دخل هذه الأسرة (أو دخل الفرد) الأمر الذي يستنتج منه أن أي تغيير في هذا الدخل سوف يؤدي حتماً إلى تغيير في الكمية المستهلكة ، بمعنى آخر أن الكمية المستهلكة هي متأثرة بالدخل .
سوف نتطرق في هذه الفقرة إلى أهم التطبيقات الاقتصادية للمشتقات من خلال التعرف على أهم التوابع الاقتصادية التي هي : مرونة تابع ما - تابع الطلب والعرض - تابع الدخل - تابع الكلفة - تابع الربح - تابع المنفعة - تابع الإنتاج .
كثيراً ما نحتاج حين دراستنا للتوابع الاقتصادية أن نتعرف على تغيراتها نتيجة التغيرات الطفيفة التي تطرأ على متحولاتها . إن هذه التغيرات والتي سوف ندعوها بالتغيرات الحدية (الهامشية) لهذه التوابع الاقتصادية يمكن التعرف عليها من خلال عملية الاشتقاق ، فمثلاً قد يتطلب منا التعرف على :

- التغير الأني الذي يطرأ على تابع الطلب على سلعة ما وذلك عند أية نقطة من نقاطه ، والذي ليس إلا المشتق الأول لتابع الطلب .
- التغير الأني الذي يطرأ على تابع العرض من سلعة وذلك عند أية نقطة من نقاطه ، والذي ليس إلا المشتق الأول لتابع العرض .
- التكلفة الحدية (الهامشية) والتي ليست إلا معدل التغير الأني الذي يطرأ على تابع التكلفة الكلية وذلك عند أية نقطة من نقاطه .
- الدخل (الإيراد) الحدي (الهامشي) والذي هو معدل التغير الأني الذي يطرأ على تابع الدخل الكلي عند أية نقطة من نقاطه .
- المنفعة الحدية (الهامشية) لسلعة ما وهي معدل التغير الأني الذي يطرأ على تابع المنفعة بالنسبة لهذه السلعة نتيجة استهلاك وحدة إضافية .
- الإنتاج الحدي لأحد عوامل الإنتاج والذي هو معدل التغير الأني الذي يطرأ على تابع الإنتاج الكلي بالنسبة لأحد عوامل هذا الإنتاج .
- الاستهلاك الحدي والاستثمار الحدي .. وغيرها من التوابع الاقتصادية .

لا يقف بحث الاشتقاق ومزاياه عند هذه النقاط السابقة بل يتعداه ليتدخل في مرونة التابع الاقتصادي (مرونة تابع الطلب - مرونة تابع العرض - مرونة التكلفة ...).

III-3-1 مرونة تابع ما : نعرف مرونة تابع ما على أن مقداراً ما يطرأ على حساسية هذا التابع نتيجة التغيرات التي من الممكن أن تطرأ على متحوله x ، وتعد هذه المرونة تعبيراً واضحاً لدرجة حساسية هذا التابع مقدرة بنسبة مئوية وذلك حينما يطرأ تغيير على المتحول بمقدار 1% يمكن تفسير ذلك رياضياً بأنها النسبة بين التغيرات النسبية للتابع $y = f(x)$ بالنسبة لمتحوله x والتغيرات النسبية لمتحوله والناتجة عن تغير x بمقدار Δx فإذا رمزنا لمرونة التابع $y = f(x)$ بالرمز E_x (y) فعندها نجد أن :

$$E_x (y) = \frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

وتحسب مرونة التابع عند نقطة ما من نقاطه بالعلاقة التالية :

$$E_x (y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = y'_x \cdot \frac{x}{y}$$

نلاحظ أن بالإمكان كتابة مرونة التابع $y = f(x)$ مستخدمين التفاضل اللوغاريتمي حيث نجد أن :

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

نلاحظ أن المرونة ليس لها وحدة قياس خاصة بها ، إنما هي عدد ثابت محدد لا يتأثر بوحدات القياس ولأن المرونة نسبة فهي تعبير عن زيادة أو نقصان التابع الاقتصادي بنسبة مئوية وذلك حينما يتغير المتحول بمقدار 1% ويجب أن نضع في حسابنا الإشارة الجبرية ، فإذا كانت الإشارة الجبرية موجبة فهذا يعني أن العلاقة بين التابع والمتحول علاقة طردية وإذا كانت الإشارة سالبة فهذا يعني أن العلاقة بين التابع والمتحول علاقة عكسية .
نستطيع أن نميز للمرونة الحالات التالية .

- إذا كانت المرونة $E_x(y) > 0$ (المرونة موجبة) فهذا يعني أن العلاقة بين y و x هي علاقة طردية ، فإذا طرأ على المتحول x أية زيادة (نقصان) بمقدار 1% فسوف يطرأ على التابع y زيادة (نقصان) بمقدار $E_x(y)$ % .
- إذا كانت المرونة $E_x(y) < 0$ (المرونة سالبة) فهذا يعني أن العلاقة بين y و x علاقة عكسية ، فإذا طرأ على المتحول x أية زيادة (نقصان) بمقدار 1% فسوف يطرأ على التابع y نقصان (زيادة) بمقدار أقل من 1% .

وبشكل أشمل :

- إذا كانت المرونة $E_x(y) = 0$ فهذا يعني أنه إذا طرأ تغير على قيمة المتحول x فهذا التغير لن يغير من قيمة التابع y ونسمي المرونة هذه المرونة المعدومة أو المرونة الصفرية .

- إذا كانت المرونة $E_x(y)$ مساوية الواحد ($E_x(y) = 1$) فهذا يعني أن أي تغير (زيادة أو نقصان) يطرأ على المتحول x بنسبة 1% فسوف يقابله تغير نفسه للتابع y مقداره أيضاً 1% ونقول إن التابع هوحيادي ونسمي المرونة هذه المرونة المتكافئة .

- إذا كانت المرونة $E_x(y)$ أكبر من الواحد ($E_x(y) > 1$) فهذا يعني أن أي تغير (زيادة أو نقصان) يطرأ على المتحول x بمقدار 1% فسوف يقابله تغير للتابع y أكبر من 1% مقداره $E_x(y)$ % ونقول في هذه الحالة إن التابع الاقتصادي هو مرن .

- إذا كانت المرونة $E_x(y)$ أصغر من الواحد ($E_x(y) < 1$) فهذا يعني أن أي تغير (زيادة أو نقصان) يطرأ على المتحول x بمقدار 1% فسوف يقابله تغير

للتابع مقداره $E_x(y)$ أقل من 1% ونقول في هذه الحالة إن التابع الاقتصادي غير مرن .

مثال : لنفرض أن لدينا التابع : $y = 2x - 5$
ولنفرض أن متحوله x تغير بمقدار 1% فعندها نجد أن :

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{x}{2x-5}$$

فإذا فرضنا أن $x = 5$ فعندها نجد أن :
 $E_x(y) = 10/5 = 2$

هذا يعني أنه عندما يطرأ تزايد على المتحول x بدءاً من $x = 5$ وبمقدار 1% فإن التابع y سوف يزداد بمقدار 2% .

مثال : لنفرض أن لدينا التابع $y = 5x^3 - 3x + 4$ احسب مرونة هذا التابع من أجل $x = 2$

نلاحظ أن : $y(2) = 5 * 8 - 3 * 2 + 4 = 38$
لحساب مرونة هذا التابع نجد أن :

$$y'_x = 15x^2 - 3$$

$$y'_x(2) = 15 * 4 - 3 = 57$$

$$E_x(y) = y'_x \cdot \frac{x}{y} = 57 * \frac{2}{38} = \frac{57}{19} = 3$$

هذا يعني أنه إذا طرأ تغير على المتحول x بمقدار 1% فإن التابع سوف يتغير بمقدار 3% .

تتمتع مرونة تابع ما بخاصيتين أساسيتين هما :

1- مرونة جداء تابعين = مرونة التابع الأول مضافاً إليها مرونة التابع الثاني (بالنسبة للمتحول ذاته) :

$$E_x(y \cdot z) = E_x(y) + E_x(z)$$

بالحقيقة إن :

$$\begin{aligned}
 E_x(yz) &= \frac{d(yz)}{dx} \cdot \frac{x}{yz} \\
 &= \frac{ydz + zdy}{dx} \cdot \frac{x}{yz} \\
 &= \frac{yx}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{zx}{yz} \frac{dy}{dx} \\
 &= \frac{x}{z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \\
 &= E_x(z) + E_x(y)
 \end{aligned}$$

2- مرونة تابع كسري = مرونة تابع البسط مطروحاً منها مرونة تابع المقام

بالحقيقة إن :

$$\begin{aligned}
 E_x(z/y) &= \frac{d(z/y)}{dx} \cdot \frac{x}{z/y} \\
 E_x(z/y) &= \frac{ydz - zdy}{y^2 \cdot dx} \cdot \frac{x}{z/y} \\
 E_x(z/y) &= \frac{xy^2}{zy^2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{zxy}{zy^2} \frac{dy}{dx} \\
 E_x(z/y) &= \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{z} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\
 &= E_x(z) - E_x(y)
 \end{aligned}$$

مثال : لنفرض أن لدينا التابع التالي :

$$y = (2x^2 - 3x + 5) \cdot e^{3x}$$

والمطلوب إيجاد مرونة التابع y .

$$v = (2x^2 - 3x + 5)^x \quad z = e^{3x}$$

$$y = v \cdot z$$

لنطبق الخاصة (1) لمرونة جداء تابعين فنجد أن :

$$E_x(y) = E_x(v.z) = E_x(v) + E_x(z)$$

$$E_x(v) = v'_x \cdot \frac{x}{v} = (4x - 3) \cdot \frac{x}{2x^2 - 3x + 5}$$

$$E_x(z) = z'_x \cdot \frac{x}{z} = 3e^{3x} \cdot \frac{x}{e^{3x}} = 3x$$

إذاً مرونة التابع y هي :

$$E_x(y) = E_x(v.z) = \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 3x + 5} + 3x$$

III-3-2- المرونات الجزئية : غالباً تكون التوابع الاقتصادية تابعة لعدة متحولات، إلا أننا ولتبسيط فهمها والتعرف عليها نأخذها بصيغتها البسيطة كتابع لمتحول واحد نعتبره المتحول الرئيسي.

إن التعرف على التوابع الاقتصادية المتعددة المتحولات يحتاج للتعرف على الاشتقاق الجزئي لها ولمروناتها الجزئية بالنسبة لأحد متحولاتها . فإذا فرضنا أن لدينا التابع الاقتصادي التالي :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

فإننا نعرف مرونة هذا التابع بالنسبة لأحد متحولاته وليكن x_i ($i=1, 2, \dots, n$) على النحو التالي :

$$\begin{aligned} E_{xi}(y) &= \lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_i}{y} \\ &= \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} \end{aligned}$$

ونعرف المرونة الكلية للتابع الاقتصادي بأنها حاصل جمع مروناته الجزئية بالنسبة لمتحولاته جميع ، أي أن :

$$E(y) = E_{x_1}(y) + E_{x_2}(y) + \dots + E_{x_n}(y)$$

ملاحظة (1) : وفق تعريف المرونة نلاحظ أنه ليس للمرونة أية علاقة بوحدة القياس إذ إنها تقاس من خلال نسبة مئوية لقيمتها المطلقة .
ملاحظة (2) : تتغير مرونة تابع ما بتغير متحوله ، بالرغم من أن التابع الاقتصادي لا يتغير شكله .

III-3-3- تابع الطلب : وجدنا أن الشكل العام للكمية المطلوبة من سلعة معينة ولتكن I والتي نرمز لها بالرمز D_i هو :

$$D_i = D_i(p, p_j, p_k, y, A, S, L, D, NE, \dots)$$

حيث : p, p_j, p_k, y متحولات هذا التابع ، P سعر السلعة المطلوبة i, j, k ، أسعار السلع البدلية ، p_k أسعار السلع الكمالية ، y دخل الأسرة ، حجم الأسرة ، إذا نحن أمام تابع له عدة متحولات يصعب علينا التعرف عليه بهذه الصيغة لأنه خارج نطاق دراستنا ، لهذا سوف نتعرف على هذا التابع من خلال صيغته المبسطة .

$$D_i = D_i(P) = ap + b$$

حيث D_i الكمية المطلوبة من السلعة (1) و p سعر السلعة ، a, b ثوابت عددية تخضع لشروط النظرية الاقتصادية وإذا أخضعنا هذه الثوابت لشروط النظرية الاقتصادية فإن تابع الطلب على السلعة (1) يأخذ الشكل العام التالي :

$$D_i = D_i(P) = f(p) = a - bp$$

حيث a, b ثوابت عددية موجبة .
إذا حسبنا مشتق هذا التابع فإننا نجد :

$$D'_i = f'(p) = -b$$

هذا يعني أن تغيرات الكمية المطلوبة من السلعة (1) هي عكس اتجاه تغيرات p سعر السلعة فإذا ما طرأ تغير على P سعر السلعة مقدار واحدة فإن مقدار تغيرات الكمية المطلوبة هو b وحدة .

- تعد مرونة تابع الطلب ، أو ما نسميها مرونة الطلب السعرية معياراً من المعايير الهامة الاقتصادية التي تتدخل أثناء دراستنا لسلوك المستهلكين والتي تقيس درجة تغير الكميات المطلوبة حينما يتغير السعر نتبع فكرة المرونة هذه من الفرق بين إجمالي الإنفاق قبل زيادة السعر وبعده .

لنفرض أن الطلب D على سلعة معينة تغير من D إلى $(D + \Delta D)$ (قد تكون ΔD موجبة وقد تكون سالبة) وذلك حينما تغير السعر من p إلى $(P + \Delta P)$ ، فتكون مرونة الطلب السعرية الواقعة بين مستويي السعر p و $P + \Delta P$ هي

النسبة بين التغير النسبي في الكمية المطلوبة لسلعة (التغير النسبي للتابع) والذي هو $\frac{\Delta D}{D}$ والتغير النسبي في السعر (التغير النسبي للمتحول) والذي هو $\frac{\Delta P}{P}$ ، أي أن مرونة الطلب السعرية والتي نرمز لها بالرمز $E_p(D)$ هي :

$$E_p(D) = \frac{\Delta D / \Delta P}{\frac{D}{P}} = \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D}$$

حيث D هي الكمية المستهلكة والمطلوبة من السلعة .
نلاحظ من خلال التعريف أنه يجب التمييز بين مرونة التابع عند نقطة ما x ومرونته عند نقطتين x و $x + \Delta x$ (أي مرونته من أجل السعر p ومرونته من أجل السعر $p + \Delta p$) وقد وجدنا أن المرونة ليس لها علاقة بوحدات القياس ، بل تعتمد على تغير السعر p بين المستويين p و $p + \Delta p$. ونحصل على مرونة الطلب السعرية من أجل السعر p (من أجل نقطة ما) والتي نرمز لها بـ $E(D)$ وذلك حينما يكون التغير متناهياً في الصغر من خلال العلاقة التالية :

$$E(D) = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{D} \cdot \frac{P}{\Delta P} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D} = D' \cdot \frac{P}{D}$$

$$E(D) = \frac{dD}{dp} \cdot \frac{P}{D} \quad \text{أي أن}$$

ونحن نعلم أن العلاقة بين الطلب والسعر هي علاقة عكسية ، فإذا زاد سعر الوحدة المنتجة فسوف يقابله نقصان على طلبها (والعكس صحيح) ، إذا إن D ، p اتجاهين متعاكسين والنسبة بين تغيراتهما هي نسبة عكسية (إشارة سالبة) ، وحتى يكون لعلاقة المرونة السابقة $E(D)$ مدلول اقتصادي (أي حتى تكون $E(D) > 0$) وجب علينا كتابة مرونة الطلب السعرية على النحو التالي :

$$E(D) = -\frac{dD}{dp} \cdot \frac{P}{D}$$

وذلك بفرض أن النسبة $\frac{dD}{dp}$ هي موجبة دوماً . إذا إن $E_p(D)$ هي سالبة دوماً وتبين

قيمتها المطلقة النسبة المئوية لمدى التناقص الذي يطرأ على الكمية المطلوبة D وذلك حينما يزداد سعر السلعة بمقدار 1%

مثال : لنفرض أن تابع الطلب له الشكل التالي : $D = 15 - 3P$ فمن أجل $p = 2$ تكون مرونة الطلب السعرية هي :

$$E_p(D) = -\frac{dD}{dp} \cdot \frac{p}{D} = +3 \cdot \frac{+2}{9} = +\frac{2}{3}$$

ومن أجل $P = 1$ تكون مرونة الطلب السعرية هي :

$$E_p(D) = +3 \cdot \frac{+1}{12} = +\frac{1}{4}$$

ملاحظة (1) : يجب التمييز بين مرونة التابع عند نقطة ما ولتكن x ومرونته عند النقطتين x و $x + \Delta x$ ، فمثلاً من أجل تابع الطلب ، يجب التمييز بين مرونة التابع من أجل السعر P ومرونته من أجل السعر $p + \Delta p$.

ملاحظة (2) : من المثال السابق نلاحظ أن المرونة تتغير بتغير السعر P ، بمعنى آخر إن مرونة الطلب السعرية تابعة للسعر فقط ، بالرغم من أن تابع الطلب هو نفسه لم يتغير كما أن النسبة $\frac{dD}{dp}$ أيضاً لم تتغير

ملاحظة (3) : يمكن التعرف على المرونة الجزئية لتابع الطلب على السلعة (1) حينما يتبع تابع الطلب متحولين اثنين ، فإذا فرضنا أن تابع الطلب على السلعة (1) أخذ الشكل التالي :

$$D_1 = f(p_1, p_2)$$

حي D_1 الكمية المطلوبة من السلعة (1) و P_1 سعر بيع الوحدة الواحدة من السلعة (1) و p_2 سعر بيع الوحدة الواحدة من السلعة (2) ، فنستطيع اعتماداً على المرونة الجزئية تعريف المرونة الجزئية للكمية المطلوبة على السلعة (1) بالنسبة للسلعة نفسها بأنها :

$$EP_1(D_1) = -\frac{\partial D_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{D_1}$$

وطبعاً هذه المرونة سالبة لأنها يجب أن تحقق المعنى الاقتصادي من حيث إن ازدياد السعر يقابله نقصان الطلب وتكون المرونة الجزئية للكمية المطلوبة على السلعة (1) بالنسبة للسلعة (2) هي :

$$EP_2(D_1) = \frac{\partial D_1}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{D_1}$$

حيث تكون المرونة الجزئية للطلب على السلعة (1) بالنسبة للسلعة (2) هي موجبة حينما تؤدي كل زيادة في سعر السلعة (2) إلى زيادة الطلب على السلعة (1) ، أما حينما تؤدي كل زيادة في سعر السلعة (2) إلى نقصان الطلب على السلعة (1) فتكون النسبة سالبة .

مثال : لنفرض أن تابع الطلب له الشكل التالي :

$$D = f(p) = 50 - 4p$$

احسب مرونة هذا التابع من أجل $p = 3$ و $p = 5$
من أجل $p = 3$ تكون مرونة الطلب السعرية هي :

$$E_p(D) = -\frac{dD}{dp} \cdot \frac{P}{D} = \frac{+4P}{50-4P} = \frac{+4 \cdot 3}{50-12}$$

$$= \frac{+12}{38} = \frac{6}{19}$$

هذا يعني أنه إذا ازداد السعر بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة سوف

يزداد بمقدار $\frac{6}{19}\%$

ومن أجل $p = 5$ تكون مرونة الطلب السعرية هي :

$$E_p(D) = -\frac{dD}{dp} \cdot \frac{p}{D} = -\frac{-4P}{50-4P} = \frac{+20}{30} = \frac{2}{3}$$

هذا يعني أنه إذا ازداد السعر بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة سوف

يزداد بمقدار $\frac{2}{3}\%$

مثال : لنفرض أن لدينا تابع الطلب التالي :

$$D_1 = f_1(P_1, P_2) = 10 - 2P_1 + 3P_2$$

إن المرونات الجزئية هي :

$$E_{p_1}(D_1) = \frac{-2p_1}{10-2p_1+3p_2}$$

$$E_{p_2}(D_1) = \frac{+3p_2}{10-2p_1+3p_2}$$

لنفرض أن $p_1 = 0.2$ و $p_2 = 1$ فنجد أن :

$$E_{p_1}(D_1) = -0.03$$

هذا يعني أن تزايد p_1 بمقدار 1% (مع ثبات p_2) سيؤدي إلى تناقص الطلب على السلعة (1) مقدار 0.03% .

وإذا فرضنا أن $p_1 = 0.2$ ، $p_2 = 1$ فنجد أن : $E_{p_2}(D_1) = 0.05$

هذا يعني أن تزايد p_2 بمقدار 1% (مع ثبات p_1) سيؤدي إلى تزايد الطلب على السلعة

(1) بمقدار 0.05% .

ملاحظة :

نستطيع أن نتعرف على مرونة الطلب الإيرادية (مرونة الطلب بالنسبة للدخل) بالأسلوب السابق نفسه ، فإذا فرضنا أن الطلب D_1 على سلعة معينة (1) خلال فترة زمنية يتبع فقط الدخل R (الدخل المتاح للمستهلك) - دون النظر إلى المتحولات الباقية فإن :

$$D_1 = f(R)$$

نعرف مرونة الطلب بالنسبة للدخل (مرونة الطلب الدخلية) بأنها النسبة بين التغيرات النسبية للطلب على السلعة المعنية والتغيرات النسبية للدخل ، أي :

$$E_R(D) = \frac{\Delta D}{D} / \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{\Delta R} \cdot \frac{R}{D}$$

(حيث : $\frac{\Delta D}{\Delta R}$ التغيرات التي تطرأ على طلب السلعة المعنية نتيجة التغير الذي

طرأ على الدخل)

وإذا كانت هذه التغيرات متناهية في الصغر فنجد أن مرونة الطلب الدخلية تكتب بالشكل التالي :

$$E_R(D) = \frac{dD}{dR} \cdot \frac{R}{D} = D'_R \cdot \frac{R}{D}$$

وتبين مرونة الطلب بالنسبة للدخل درجة تأثير الكمية المطلوبة من سلعة معينة في ما يطرأ على تغيير الدخل ونلاحظ أن هذه المرونة تعبير واضح للعلاقة الكائنة بين الطلب والدخل.

مثال : لنفرض أن تابع الطلب على السلعة (1) معطى بالعلاقة التالية :

$$D_1 = -2P_1^2 \sqrt{P_2^3} + 5P_2^{-3} + 10$$

حيث : P_1 سعر السلعة (1) و P_2 سعر السلعة البديلة (2) . ولنفرض أن P_1 تزايد بمقدار 0.02 وأن P_2 تناقص بمقدار 0.03 فالمطلوب حساب قيمة التغير التي

تطرأ على تابع الطلب على السلعة (1) وذلك بدءاً من $P_1 = 2$ ، $P_2 = 1$ إن التغير الذي طرأ على تابع الطلب D بالنسبة للسلعة (1) يعطى بالتفاضل الكلي:

$$dD_1 = \frac{\partial D_1}{\partial P_1} \cdot dp_1 + \frac{\partial D_1}{\partial P_2} dp_2$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -4p_1 \cdot \sqrt{p_2^3} \quad \text{حيث :}$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = -3p_1^2 \cdot \sqrt{p_2} - 15p_2^{-4}$$

ومن أجل $p_1 = 2$ ، $p_2 = 1$ فإننا نجد :

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -8 \quad , \quad \frac{\partial D_1}{\partial p_2} = -27$$

فإن : $dD_1 = 0.65$

أي أن ازدياد السعر p_1 بمقدار 0.02 وانخفاض السعر p_2 بمقدار 0.03 أدى إلى تزايد الطلب على السلعة (1) بمقدار 0.65 .

III-3-4 تابع العرض : يأخذ تابع العرض العلاقة التابعية التي توضح الكمية المعروضة لسلعة ومتحولاتها العديدة ، والتي منها p سعر السلعة و p_j أسعار السلع الأخرى و F_k رأس المال و T التقنية و.....

$$S_i = S_i(p, p_j, F_k, T, \dots)$$

إننا لا نستطيع وفق الصيغة السابقة له التعرف عليه ، لهذا يمكن رده

إلى تابع بسيط وفق الصيغة التالية :

$$S = g(p) = c + dp$$

حيث d , c ثوابت عديدة تخضع لشروط النظرية الاقتصادية ولأن

الكمية المعروضة من سلعة معينة تزداد بازدياد سعرها وتنقص بنقصانه ،

وحيث أن الكمية المعروضة والسعر يجب أن يكونا موجبان لهذا فإن تابع

العرض يأخذ الشكل التالي :

$$S = g(p) = -c + dp$$

حيث d , c ثوابت عديدة موجبة .

إن مشتق تابع العرض هو :

$$S' = g'(p) = d$$

ويعني أن تغيرات الكمية المعروضة هي من الاتجاه نفسه لتغيرات السعر، فإذا ما طرأ تغير على السعر مقداره وحدة واحدة فإن التغير الناتج من جراء ذلك على الكمية المعروضة هو بمقدار d وحدة.

نعرف مرونة تابع العرض بالنسبة للسعر أو ما تعرف بمرونة العرض السعرية بأنها النسبة بين التغيرات النسبية للكمية المعروضة والغيرات النسبية للسعر، فإذا رمزنا لمرونة العرض السعرية بالرمز $E_p(s)$ فإن:

$$E_p(s) = \frac{\Delta s}{s} / \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta s}{\Delta p} \cdot \frac{p}{s}$$

وباعتبار أن العلاقة بين تغيرات تابع العرض والسعر هي علاقة طردية -

أي أن النسبة $\frac{\Delta s}{\Delta p}$ موجبة، فإذا فرضنا $\frac{p}{s} > 0$ فعندها تبقى مرونة العرض

السعرية $E_p(s)$ صحيحة دون تغيير إشارتها وحينما تكون تغيرات السعر هذه صغيرة جداً، عندها تصبح مرونة العرض السعرية على النحو التالي:

$$E_p(s) = \frac{ds}{dp} \cdot \frac{p}{s} = S'_p \cdot \frac{p}{s}$$

III-3-5- توازن السوق : إن الحديث عن تابعي الطلب والعرض يؤدي إلى التطرق لما يسمى توازن السوق، فالمقصود بتوازن السوق هو توازن (تساوي) تابعي الطلب والعرض، بمعنى آخر هو التفتيش عن الوضعية التي يتم بموجبها تساوي الكمية المطلوبة من سلعة معينة مع الكمية المعروضة لتلك السلعة. يدخل موضوع توازن سلعة معينة بسلوك المنتج وسلوك المستهلك دون أن نضع في حسابنا ما للمنتجين أو ما للمستهلكين من علاقة نتيجة أن الأسعار تكاد تكون مفروضة ومعينة ولا علاقة للمنتج أو للمستهلك في تحديدها. ففي حين يكون هدف سلوك المنتج هو تحقيق أعظم ربح ممكن وذلك عن طريق تقليل تكلفة إنتاجه وزيادة إنتاجه، نجد أن سلوك المستهلك هو على الغالب متجه نحو الحصول على كيفية تحقيق التوازن بين المنتج والمستهلك شريطة تحقيق غاية كل منهما، لهذا يكون الهدف من التوازن هو تحقيق غاية كل من المنتج والمستهلك بأن واحد دون أن يكون هذا التحقيق له تأثير مباشر أو غير مباشر من الآخر. إذا كيف يتم تحقيق هذا التوازن؟

يتحقق هذا التوازن عن طريق المساواة بين تابعي الطلب D والعرض S ، أي حينما يكون:

$$D = S$$

$$f(p) = g(p)$$

وحتى نستطيع التعرف على القيم D, S, P التي تحقق التوازن ، علينا القيام بحل النموذج التالي :

$$D = a - dp \quad (a, b > 0)$$

$$S = -c + dp \quad (c, d > 0)$$

إذاً بحل هذا النموذج نحصل على قيم $(D), (S), (P)$ حيث نجد أن :
سعر التوازن هو:

$$(p) = \frac{a+c}{b+d}$$

$$(D) = (S) = \frac{ad - cb}{b+d} : \text{ للكمية التوازنية (المعروضة أو المطلوبة) } :$$

ونلاحظ أنه حتى يكون للنموذج حل (مدلول اقتصادي) يجب أن يكون :

$$(P) > 0 \quad \text{و} \quad (S) = (D) > 0$$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كان :

$$ad > cb$$

(إضافة لـ a, b, c, d ثوابت عددية موجبة)

وإذا فرضنا أننا أمام سوق يحوي سلعتين أسعارهما p_1, p_2 وأن الكميات المطلوبة D_1 و D_2 لهاتين السلعتين هما :

$$D_1 = a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$$

$$D_2 = b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2$$

والكميات المعروضة S_1 و S_2 هما :

$$S_1 = a'_0 + a'_1 p_1 + a'_2 p_2$$

$$S_2 = b'_0 + b'_1 p_1 + b'_2 p_2$$

حيث :

$$b_0, b_1, b_2, b'_0, b'_1, b'_2, a'_0, a'_1, a'_2, a_0, a_1, a_2$$

(ثوابت عديدة تخضع للنظرية الاقتصادية)

إن توازن السوق في حالة السلعتين الأولى والثانية يتم حين تساوي الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة ، أي أن :

$$(a_0 - a'_0) + (a_1 - a'_1) p_1 + (a_2 - a'_2) p_2 = 0$$

$$(b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1) p_1 + (b_2 - b'_2) p_2 = 0$$

وبحل هاتين الجملتين نتوصل إلى معرفة الأسعار التوازنية في

السوق (p_1) و (p_2) وبالتالي التعرف على (D_1) و (D_2) أو (S_1) و (S_2)

ملاحظة : يمكن التعميم حينما نكون أمام n سلعة مختلفة أسعارها $p_1, p_2, \dots, p_n$ و n معادلة تمثل الكميات المطلوبة $D_1, D_2, \dots, D_n$ من n سلعة مختلفة في سوق ما وأيضاً n معادلة تمثل الكميات المعروضة $S_1, S_2, \dots, S_n$ من n سلعة مختلفة في سوق ما .

مثال : لنفرض أن لدينا النموذج التالي لتوازن السوق :

$$D = 21 - 5p$$

$$S = -2p + 15$$

$$D = S$$

أوجد القيم التوازنية لهذا النموذج .

الحل : إن السعر التوازني (p) هو :

$$21 - 5p = -2p + 15$$

$$(p) = 2 \text{ u.m}$$

لما الكمية التوازنية (D) أو (S) فهي :

$$(D) = (S) = 11 \text{ u.}$$

مثال : أوجد القيم التوازنية للنموذج التالي :

$$D_1 = 6 - 2p_1 + 3p_2, \quad S_1 = 5p_1 - 2$$

$$D_2 = 10 + 2p_1 - 2p_2, \quad S_2 = 2p_2 + 1$$

إن المعادلتين التوازنتين هما :

$$6 - 2p_1 + 3p_2 = 5p_1 - 2$$

$$10 + 2p_1 - 2p_2 = 2P_2 + 1$$

بحلها نحصل على القيم التوازنية (P_1) و (P_2) حيث نجد أن :

$$(P_1) = \frac{53}{22} \text{ u.m} \quad \text{أو} \quad (p_2) = \frac{152}{44} \text{ u.m}$$

أما الكميات التوازنية (D_1) أو (S_1) و (D_2) أو (S_2) فهي :

$$(D_1) = (S_1) = \frac{221}{22} \text{ U.}$$

$$(D_2) = (S_2) = \frac{348}{44} \text{ U.}$$

III-3-6- تابع الدخل (الإيراد) : يعرف الدخل الكلي لمنشأة بأنه كمية الأموال التي تحصل عليها هذه المنشأة من جراء بيع إنتاجها (أو تقديم خدماتها).

إذا فالدخل (الإيراد) الكلي لمنشأة ما هو مجموع الأموال التي تدخل إليها نتيجة بيع (تسويق) إنتاجها أو نتيجة تقديم خدمات معينة ويحسب هذا الدخل وفق القانون التالي :

الدخل (الإيراد) الكلي = الكمية المباعة (الوحدات المباعة من الإنتاج) * سعر الوحدة المباعة فإذا رمزنا للدخل (الإيراد) الكلي بـ R والكمية المباعة بـ X وسعر الوحدة للواحدة (الذي نعدّه ثابتاً بالنسبة للوحدات المباعة) بالرمز p ، فإن :

$$R = R(x) = p \cdot x$$

حيث اعتبرنا أن R تتبع فقط الكميات المباعة من الإنتاج .

نلاحظ أن الكميات المباعة من الإنتاج ، ليست إلا الكميات المطلوبة من سلعة معينة من أجل سعر الوحدة الواحدة ، ولأن هذه الكميات المطلوبة D تتبع فقط السعر ، إذاً

$$x = D = D(p)$$

بمعنى آخر نكتب معادلة الدخل السابقة ، وفق الصيغة التالية :

$$R = p \cdot D(p)$$

إذا نحن أمام معادلتين للدخل الكلي لمنشأة ما هما :

$$R = p \cdot D(p)$$

$$R = p \cdot x$$

الأمر الذي يجعلنا نتساءل فيما إذا كان هناك اختلافاً بينهما أم لا .
والجواب إن الاختلاف ليس إلا اختلافاً جوهرياً ، كون أن المعادلة :

$$R = p \cdot x$$

هي معادلة محاسبية صحيحة تبين أن ما تحصل عليه المنشأة من دخل يجب أن يساوي جداء الكميات المباعة من الإنتاج بسعر الوحدة الواحدة ، في حين أن المعادلة .

$$R = p \cdot D(p)$$

تضيف إلى سابقتها وجود علاقة تابعة بين الدخل والسعر .
يمكن تعريف الدخل المتوسط بأنه حاصل قسمة الدخل الكلي على الكمية المباعة X (أي السعر الذي يباع من كل وحدة من وحدات الإنتاج) ، فإذا ما رمزنا للدخل المتوسط بـ AR ، لوجدنا أن :

$$AR = \frac{R}{x} = \frac{R(x)}{x} = p$$

يمكن أن نتعرف على تابع آخر أيضاً هو الدخل الهامشي (الحدّي) (*)
للمنشأة ما والذي نرسم له بـ MR بأنه المشتق الأول ، أي النسبة بين الزيادة في الدخل الكلي إلى الزيادة في الكميات ، أي أن :

$$MR = \frac{dR}{dx} = R'(X)$$

إذا فالدخل الحدّي (الهامشي) لمنشأة ما ليس إلا معدل التغير اللحظي لتابع الدخل الكلي عند نقطة معينة .

إن هناك علاقة تربط بين الدخل الكلي لمنشأة ما وتابعها المتوسط والدخل الحدّي (الهامشي) ومرونة الطلب السعرية E(D) ، يمكن التوصل إليها على النحو التالي :

نعلم أن لتابع للطلب في نظرية المستهلك الشكل التالي :

$$D = D(p) = f(p)$$

إذ يكون الاهتمام في نظرية المستهلك على الكمية المطلوبة من خلال سعر معين ومحدد ، في حين يكون لتابع الطلب في نظرية المنشأة منحى آخر (كون أن الاهتمام على سعر الوحدة المنتجة والمبيعة الذي تجنيه المنشأة من جراء بيع إنتاجها) هو على النحو التالي :

$$p = g(D)$$

أو بشكل آخر :

$$p = g(x)$$

(حيث D تمثل الكمية المباعة أو المنتجة أو المطلوبة)
بتعويض السعر في تابع الدخل الكلي نجد أن :

$$R = g(D) \cdot D$$

إلا أننا نعلم أن :

$$MR = \frac{dR}{dD} = g'(D) \cdot D + g(D)$$

وبما أن :

$$g'(D) = \frac{dp}{dD}, \quad P = g(D)$$

3

فإن :

$$MR = \frac{dR}{dD} = D \cdot \frac{dP}{dD} + P$$

$$E(D) = - \frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D}$$

وليكن لدينا

$$\frac{P}{E(D)} = - \frac{dP}{dD} \cdot D$$

أي أن

وبالتعويض في علاقة MR السابقة نجد أن :

$$MR = - \frac{P}{E(D)} + P$$

أي أن :

$$MR = P \left(1 - \frac{1}{E(D)} \right)$$

(*) - الحدي (الهلمشي) : كثيراً ما نستخدمه في الاقتصاد حيث نجد المفاهيم التالية : الدخل الحدي ، الاستهلاك الحدي ، الإنتاج الحدي ، الكلفة الحدية... حيث يتم التعبير عن هذه المفاهيم رياضياً من خلال المشتق الأول لتابعها الكلية.

إن نظرة شمولية للعلاقة السابقة ، تعطينا النتائج التالية :

(a) إذا كانت $E(D) = 1$ فإن $MR = 0$ وهذا يعني أن الدخل (الإيراد) الكلي ثابت فهو لا يتغير بنقصان السعر وزيادة الكمية المطلوبة أو بزيادة السعر ونقصان الكمية المطلوبة .

(b) إذا كانت $E(D) < 1$ (الطلب غير مرّن) فإن $MR < 0$ وهذا يعني أن الدخل الكلي ينقص بنقصان السعر وزيادة الكمية المطلوبة ويزداد بزيادة السعر ونقصان الكمية المطلوبة .

(c) إذا كانت $E(D) > 1$ (كان الطلب مرّنا) وبالتالي $MR > 0$ ويقصد بذلك أن الدخل الكلي يزداد بنقصان السعر وزيادة الكمية المطلوبة وينقص بزيادة السعر ونقصان الكمية المطلوبة .

يمكن كتابة العلاقة بين مرونة الطلب السعرية والدخل الهامشي على النحو التالي :

$$E(D) = - \frac{P}{MR - P}$$

$$P - MR = \frac{P}{E(D)}$$

مثال : لنفرض أن لدينا تابع الطلب على سلعة معينة على النحو التالي :

$$P = f(x) = 35 - 7x$$

أوجد $R(x)$ تابع الدخل الكلي ثم $MR(x)$ تابع الدخل الهامشي (الحدّي) و $E_p(D)$ مرونة الطلب السعرية في النقطة $x = 2$.

الحل :

إن تابع الدخل الكلي هو :

$$\begin{aligned} P(x) &= p \cdot x = (35 - 7x) x \\ &= 35x - 7x^2 \end{aligned}$$

كما وأن تابع الدخل الهامشي هو :

$$\frac{dR}{dx} MR(x) = 35 - 14x$$

لما $E_p(D)$ مرونة الطلب السعرية في النقطة $x = 3$ فهي :

$$\begin{aligned} E_p(D) &= -D'_p \cdot \frac{P}{D} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{21}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

هذا يعني أنه إذا ازداد الطلب على السلعة المعينة بمقدار 1% فإن السعر سوف يزداد بمقدار $\frac{3}{2}\%$.

III-7-3- تابع المنفعة الكلية : تنص نظرية المستهلك بأن هناك علاقة بين المنفعة الكلية التي يحصل عليها المستهلك (فرد أو أسرة أو.....) والكمية المستهلكة من قبله للسلعة لأن المستهلك يحصل على هذه المنفعة نتيجة استهلاكه لهذه السلعة .
نفترض أن لدينا n سلعة معروضة في السوق بكميات على النحو التالي .

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_i \geq 0$$

عندها يكتب تابع المنفعة وفق علاقة تابعة من الشكل :

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

حيث $x_i \geq 0$ وهي الكميات المختلفة التي يستهلكها المستهلك من السلع المختلفة ، U تمثل المنفعة الكلية ، يتم وصول المستهلك إلى درجة معينة من الإشباع (لا تقاس بقيمة عددية) نتيجة استهلاكه لهذه الكميات من السلع وإن أية زيادة في استهلاكه لنوع ما من السلع سينجم عنه زيادة درجة الإشباع (شريطة بقاء الكميات الأخرى ثابتة الاستهلاك) الأمر الذي يضعنا أمام عدد من العلاقات التابعة :

$$U_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$U_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$U_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

وباعتبار أننا أمام تابع متحولاته عديدة ، لهذا يتطلب التعرف عليه أن نفترض جميع متحولاته ثابتة باستثناء متحول واحد فقط وليكن x_i (أو باستثناء متحولين أو باستثناء ثلاثة متحولات) وبالتالي فنكون أمام التوابع التالية :

$$U = U(x_i)$$

$$U = U(x_i, x_j)$$

$$U = U(x_i, x_j, x_k)$$

وإذا ما أخذنا المشتق الجزئي الأول (والذي نرمز له بـ MU) لتابع المنفعة الكلية فإننا نحصل على المنفعة الهامشية (الحدية) لسلعة ما ، والتي هي :

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial x_i} = U'_i \geq 0$$

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial x_j} = U'_j \geq 0 \quad \text{أو}$$

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial x_k} = U'_k \geq 0 \quad \text{أو}$$

أما للتعرف على مرونة المنفعة الكلية بالنسبة لسلعة معينة I والتي نرمز لها بـ $E_{xi}(u)$ بأنها النسبة بين التغيرات النسبية لتابع المنفعة الكلية والتغيرات النسبية للكمية المستهلكة x_i من السلعة i ، ونكتب :

$$E_{xi}(u) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_i}{u}$$

$$E_{xj}(u) = \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{x_j}{u} \quad \text{أو}$$

وإذا ما تذكرنا قاعدة الاشتقاق اللوغاريتمي لأمكن كتابتها بشكل آخر ، كما يلي :

$$E_{xi}(u) = \frac{\partial \ln u}{\partial \ln x_i}$$

مثال : لنفرض أن لدينا تابع المنفعة الكلية على النحو التالي :

$$U = U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[4]{x_3}$$

لوجد المنفعة الحدية لهذا التابع بالنسبة لكل من x_1, x_2, x_3 وذلك من أجل

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 7$$

الحل : تحسب المنفعة الحدية (الهامشية) عن طريق إيجاد المشتق الجزئي الأول لتابع المنفعة الكلي .

$$U'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[4]{x_3}$$

$$U'_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_2^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt[4]{x_3}$$

$$U'_{x_3} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{3}{4} x_3^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt[3]{x_2^2}$$

لنلاحظ أنه من أجل : $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ فإن :

$$U'_{x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{7}$$

$$U'_{x_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{7}$$

$$U'_{x_3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{7^3}} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{9}$$

مثال : لنفرض أن لدينا تابع المنفعة الكلية على النحو التالي :

$$U = U(x_1, x_2, x_3) = 6 \cdot \sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[4]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_3^2}$$

أوجد المنفعة الحدية لهذا التابع بالنسبة لكل من x_1 , x_2 , x_3 وذلك من أجل

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 4$$

الحل : تحسب المنفعة الحدية عن طريق إيجاد المشتق الجزئي الأول لتابع المنفعة الكلي :

$$U'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 6 \cdot \frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_3^2}$$

$$U'_{x_1} = \frac{\partial u(5,2,4)}{\partial x_1} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{16}$$

$$U'_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 6 \cdot \sqrt[3]{x_1} \cdot \frac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{x_3^2}$$

$$U'_{x_2} = \frac{\partial u(5,2,4)}{\partial x_2} = 6 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \sqrt[3]{16}$$

$$U'_{x_3} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 6 \cdot \sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[4]{x_2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x_3^{-\frac{1}{3}}$$

$$U'_{x_3} = \frac{\partial u(5,2,4)}{\partial x_3} = 6 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

مثال : لنفرض أن لدينا تابع المنفعة الكلية على النحو التالي :

$$U = U(x_1, x_2) = (x_1 + 5)^2 (x_2 + 3)^2$$

حيث : x_1, x_2 الكميات المستهلكة من السلعتين (1) و (2) :
إن المنفعة الحدية (الهامشية) للسلعة (1) هي :

$$U = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 2(x_1 + 5)(x_2 + 3)^2$$

ومن أجل $x_1 = 3, x_2 = 2$ نجد أن :

$$U = \frac{\partial u(3,2)}{\partial x_1} = 2 \cdot 8 \cdot 25 = 400 \text{ uu}$$

وتعني العلاقة السابقة أنه إذا ازدادت الكمية المستهلكة من السلعة

الأولى (مع ثبات الكمية المستهلكة للسلعة الثانية) بوحدة واحدة بدءاً من $x_2 = 2$ ،

$x_1 = 3$ فإنها ستؤدي إلى زيادة منفعة المستهلك بمقدار 400 وحدة منفعة .

لنحسب المنفعة الحدية (الهامشية) للسلعة (2) والتي هي :

$$U = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2(x_1 + 5)^2 (x_2 + 3)$$

ومن أجل $x_1 = 3, x_2 = 2$ نجد أن :

$$U = \frac{\partial u(3,2)}{\partial x_2} = 2 \cdot 64 \cdot 5 = 640 \text{ u.u}$$

وتعني العلاقة السابقة أن أية زيادة للكمية المستهلكة من السلعة الثانية (مع

بقاء الكمية المستهلكة من السلعة الثانية ثابتاً) بوحدة واحدة بدءاً من $x_1 = 3, x_2 = 2$

$= 3$ فإنها ستؤدي إلى زيادة منفعة المستهلك بمقدار 640 وحدة منفعة .

مثال : لنفرض أن لدينا تابع المنفعة الكلية التالي :

$$U = 3x_1 \cdot \sqrt{2 + 5x_2}$$

لوجد المنفعة الهامشية بالنسبة لكل سلعة وذلك من أجل $x_1 = 3, x_2 = 5$:
إن :

$$U'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 3 \sqrt{2 + 5x_2}$$

$$U'_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{3} \cdot (2 + 5x_2)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x_1 \cdot 5$$

ومن أجل $x_1 = 3$ ، $x_2 = 5$ فإن :

$$U'_{x_1} = \frac{\partial u(3,5)}{\partial x_1} = 3 \sqrt{2+25}$$

$$U'_{x_2} = \frac{\partial u(3,5)}{\partial x_2} = 5 \cdot 3 \cdot (2 + 25)^{\frac{1}{2}}$$

III-3-8- تابع الكلفة (التكلفة) الكلية :

تعرف التكلفة الكلية أو النفقات الكلية بأنها مجموع الأموال التي تنفق في منشأة ما بغية الحصول على إنتاج ما . ويعرف أيضاً بأنه مقدار ما يدفع من أموال للحصول على منتج ما. وكما نلاحظ أن هذه التكلفة تتغير بتغير حجم الإنتاج فهي تزداد بزيادة كمية الإنتاج والعكس تنقص بنقصانه .
للتعرف على هذا التابع نأخذه بصيغته المبسطة من خلال علاقة تابعة بمتحول واحد .

فإذا رمزنا لتابع التكلفة الكلية بـ c وللمتحول الذي هو حجم الإنتاج بـ x عندها يكون تابع التكلفة الكلية هو :

$$C = c(x)$$

حيث : x هي عدد الوحدات المنتجة .
وغالباً ما يكون في تابع التكلفة الكلية ثابت عددي ندعوه بالتكلفة الثابتة والتي ليس لها علاقة بحجم الإنتاج ونرمز لهذا الثابت العددي بـ d ، وبالتالي فتابع التكلفة الكلية هو :

$$C = c(x) + d$$

ونحن نعلم أن الإنتاج يرتبط بالعمل الذي نرمز له بـ L إذا فالإنتاج x يكتب :

$$X = g(L)$$

وهذا نكون أمام تابع مركب (تابع التابع) له الصيغة التالية :

$$C = C(x) = C(g(L))$$

حيث يصبح تابع التكلفة الكلية مرتبطاً بصورة غير مباشرة بالعمل .

نعرف الآن تابعاً جديداً هو تابع التكلفة الكلية المتوسطة (الكلفة المتوسطة) وهو عبارة عن حاصل قسمة الكلفة الكلية على حجم الإنتاج x فإذا رمزنا للكلفة المتوسطة بـ AC فإن :

$$ATC = AC = \frac{C(x)}{x}$$

كما ونعرف أيضاً تابع التكلفة الحدية (الهامشية) ونرمز له بـ MC بأنه المشتق الأول لتابع الكلفة الكلية ، أي أن :

$$MC = (TC)' = C'(x) = \frac{dc}{dx}$$

وهو ليس إلا التغير الذي يطرأ على الكلفة الكلية نتيجة تغير وحدة واحدة في الإنتاج .

أما مرونة تابع الكلفة الكلية و الذي نرمز له بـ $E(C)$ فهو النسبة بين التغيرات النسبية للكلفة الكلية والتغيرات النسبية لحجم الإنتاج ، أي أن :

$$E_x(c) = \frac{\Delta c}{c} / \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta c}{\Delta x} \cdot \frac{x}{c}$$

ونبين هذه المرونة درجة تغير الكلفة الكلية حينما يتغير الإنتاج ، وقد تكون هذه التغيرات صغيرة جداً وقريبة من الصفر وعندها نستطيع أن نكتب .

$$E_x(c) = c'(x) \cdot \frac{x}{c} = MC \cdot \frac{x}{c} = MC / AC$$

أي أن مرونة الكلفة الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج هي حاصل قسمة الكلفة الهامشية على الكلفة المتوسطة .

مثال : لنفرض أن تابع الكلفة الكلية قد أخذ الشكل التالي :

$$C = C(x) = 15x - 0.1x^2$$

فالمطلوب احسب الكلفة الحدية وذلك من أجل $x = 5$

تعطى الكلفة الحدية من خلال العلاقة :

$$Mc = c'(x) = 15 - 0.2x$$

وحينما $x = 5$ نجد أن :

$$MC = c'(5) = 15 - 0.2 * 5 = 14 \text{ وحدة}$$

III-3-9- تابع الربح الكلي:

الربح بالتعريف هو حاصل طرح الكلفة الكلية من الدخل الكلي فإذا رمزنا للربح بـ π فعندها نجد أن :

$$\pi = R - C$$

حيث : R الدخل الكلي ، C التكلفة الكلية ، فإذا فرضنا أن كلا من تابعي الدخل الكلي R والتكلفة الكلية C يتبع المتحول المستقل x (الذي هو مستوى الناتج) أي أن :

$$R = R(x)$$

$$C = C(x)$$

عندها نجد أن تابع الربح π يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$\pi = \pi(x)$$

أو بشكل آخر:

$$\pi(x) = R(x) - C(x) = p \cdot x - c$$

نستطيع التعرف على تابع الربح بصورة أشمل حينما نتعرف على سياسة المنشأة وبخاصة سياسة المنشأة في شروط السوق الاحتكارية والمنافسة الكاملة^(*).

أولاً : نعلم بأن سياسة المنشأة في السوق الاحتكارية هي في الوصول إلى تحقيق أعظم ما يمكن من الأرباح ، حيث تتحقق هذه الغاية عن طريق :
- تحديد كميات الإنتاج الواجب طرحها في السوق دون أن يحدد السعر ، حيث يتم تحديد السعر من خلال سياسية العرض والطلب .
- تحديد السعر ، الأمر الذي ينجم عنه تحديد الكميات المعروضة والمبيعة .

الجدير بالذكر أن المنشأة في السوق الاحتكارية لا تستطيع في الوقت نفسه أن تحدد هذين الطريقتين مطلقاً بمعنى آخر إن المنتج المحتكر ليس لديه القدرة على تحديد السعر الذي يختاره ، وتحديد الكميات التي يطرحها في السوق بالوقت نفسه لأن تابع الربح هو :

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

(*) تخضع المنافسة التامة للكميات المطلوبة والمعروضة في سوق سلع بالظروف المتعددة هي:
1- توفر السلعة الواحدة لدى عدد كبير من البائعين والمشتريين الموجودين في السوق وتكون لديهم المعرفة الجيدة بأوضاع السوق وظروفه.

2- جعل البائع والمشتري يتحكم بسعر السلعة الموجودة في السوق.

3- تجانس وحدات السلع المنتجة المعروضة في السوق وتشابهها .

4- الحرية التامة بالدخول والخروج من السوق وإليها .

فإن المنتج المحتكر يصل إلى تحقيق أعظم ربح ممكن ،حينما يكون المنحنى البياني لتابع الربح نهاية حدية عظمى ، بمعنى آخر حين يتحقق الشرطان التاليان:

الشرط الأول : المشتق الأول لتابع الربح :

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$$

وبجعل $\pi'(x) = 0$ نجد أن :

$$C'(x) = R'(x)$$

هذا يعني أن الشرط الأول لتابع الربح هو في أن يصل المحتكر لتحقيق أعظم ما يمكن من الأرباح حينما يتساوى الدخل الهامشي مع التكلفة الهامشية.

الشرط الثاني : المشتق الثاني لتابع الربح :

$$\pi''(x) = R''(x) - C''(x)$$

وحتى يبلغ تابع الربح ذروته يجب أن يكون $\pi''(x) < 0$ أي أن يكون :

$$R''(x) < C''(x)$$

أي أن يفوق معدل زيادة التكلفة الهامشية معدل زيادة الدخل الحدي . فإذا أردنا تطبيق هذين الشرطين بالطريقتين اللتين يمكننا المنتج المحتكر من تحقيقهما لوجدنا ما يلي :

(a) في حالة تحديد الكميات المعروضة والتخلي عن تحديد السعر في السوق : نفترض في هذه الحالة أن السعر يتبع الكمية ، بمعنى آخر :

$$P = \psi(x)$$

إذا فتابع الربح يصبح :

$$\pi = p \cdot x - c$$

ويصل المنتج المحتكر إلى تعظيم ربحه ،حينما يكون :

$$\pi' = p + x \frac{dp}{dx} - \frac{dc}{dx}$$

أي أن :

$$\frac{dc}{dx} = p + x \frac{dp}{dx}$$

(III-1)

(b) في حالة تحديد السعر والتخلي عن تحديد الكميات المبيعة : حيث نفترض في هذه الحالة أن الكميات تتبع السعر أي:

$$x = \varphi(p)$$

ويصبح تابع الربح كما يلي:

$$\pi = p \cdot x + c$$

ويصل المنتج المبتكر إلى تعظيم ربحه حينما يكون:

$$\pi' = x + p \frac{dx}{dp} - \frac{dc}{dp}$$

$$\pi' = 0 \Rightarrow \frac{dc}{dp} = x + p \frac{dx}{dp} \quad (\text{III} - 2)$$

ونلاحظ أن النتيجتين (III-1) و (III-2) السابقتين هي واحدة لأن التكلفة C تتبع حجم الإنتاج x والإنتاج x يتبع السعر p ، فإذا قمنا بعملية اشتقاق تابع التابع لوجدنا أن العلاقة الأخيرة نكتب بالشكل التالي :

$$\frac{dc}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = x + p \frac{dx}{dp}$$

بقسمة الطرفين على $\frac{dx}{dp}$ نجد أن :

$$\frac{dc}{dp} = x \cdot \frac{dp}{dx} + p$$

وهي العلاقة نفسها (III-1)

مثال : لنفرض أن لمنشأة في ظل السوق الاحتكارية التابعين التاليين :

$$c = 400 + 3x$$

$$x = 500 - 5p$$

ما هي الطريقة التي تتبعها المنشأة للوصول إلى أعظم ربح ممكن .
(a) تحديد السعر والتخلي عن تحديد الكمية المبيعة : في هذه الحالة تكون الكمية تابعة للسعر ويكون تابع الربح

$$\pi = R - c$$

$$= p \cdot x - c$$

$$= p (500 - 5p) - (400 + 3x)$$

$$= p (500 - 5p) - [(400 + 3(500 - 5p))]$$

$$\pi = 515p - 5p^2 - 1900$$

إن الشرط الأول هو

$$\pi' = 515 - 10p$$

ومنه:

$$P = 515/10 = 51.5 \text{ s.p.}$$

إن فالسعر الذي يحقق للمنتج المحتكر أقصى الأرباح هو 51.5 وحدة نقدية، حيث تكون الكميات المباعة وفق هذا السعر هي:

$$x = 500 - 5(51.5) = 242.5 \text{ وحدة}$$

لما الشرط الثاني فهو:

$$\pi'' = -10 < 0$$

وهو محقق طبعاً .

(b) - تحديد الكميات المعروضة والتخلي عن السعر في السوق : في هذه الحالة يكون السعر تابعاً للكمية ، أي أن :

$$P = \frac{500 - x}{5}$$

ويكون تابع الربح هو:

$$\pi = x \frac{500 - x}{5} - 400 - 3x$$

$$= -\frac{x^2}{5} + \frac{500x}{5} - 400 - 3x$$

$$= 97x - \frac{x^2}{5} - 400$$

وبيلغ تابع الربح أعظم ما يمكن حينما يكون :

$$\pi' = 97 - \frac{2x}{5}$$

$$\pi' = 0 \Rightarrow x = \frac{97 \cdot 5}{2} = 242.5 \text{ وحدة}$$

حيث تباع هذه الكمية بسعر قدره هو:

$$P = \frac{500 - 242.5}{5} = 51.5 \text{ s.p.}$$

أما الشرط الثاني فهو:

$$\pi'' = -\frac{2}{5} < 0$$

وهو أيضاً محقق

مثال : لنفرض أن للمنشأة في ظل السوق الاحتكارية للتابعين التاليين :

$$c = 100 + 5x$$

$$p = 95 - \frac{3x}{2}$$

عين حجم الإنتاج والسعر الذي يجعل ربح المنشأة أعظم ما يمكن .
إن تابع الربح هو:

$$\pi = p \cdot x - c$$

$$= 95x - \frac{3}{2}x^2 - 100 - 5x$$

$$= 90x - \frac{3}{2}x^2 - 100$$

وبيلغ الربح أعظم ما يمكن حينما يكون حجم الإنتاج.

$$\pi' = 90 - 3x$$

$$\pi' = 0 \Rightarrow x = 30$$

وحدة

والسعر هو:

$$P = 95 - \frac{3}{2} \cdot 30 = 50 \quad \text{s.p.}$$

ثانياً : أما إذا كانت المنشأة أمام سوق تتوفر فيها شروط المنافسة الكاملة ، فعندها يكون السعر ثابتاً ولا يخضع لتغير حجم الكميات المعروضة ، وعندها سوف تلجأ المنشأة لتحقيق أعظم ربح ممكن عن طريق تكيف حجم الإنتاج وحجم التكاليف حيث نجد:

$$\pi = R - C = Px - C$$

(p ثابتة)

إن الشرط الأول هو:

$$\pi' = 0 \Rightarrow p - c' = 0$$
$$c' = p$$

إن فالشرط الأول لتبلغ المنشأة أقصى ما يمكن من الأرباح هو أن تتساوى التكلفة الهامشية مع السعر، وهذا واضح لأنه في حالة المنافسة الكاملة نفترض الدخل الهامشي هو نفسه الدخل المتوسط أو السعر.
مثال : لنفرض أن للمنشأة في شروط المنافسة الكاملة التابعين التاليين:

$$C = 100 + 5x + 2x^2$$

$$P = 25$$

عين حجم الإنتاج الذي يحقق للمنشأة أعظم ما يمكن من الربح .

$$\pi = R - c \quad \text{إن تابع الربح هو:}$$

$$\pi = 25x - 100 - 5x - 2x^2$$

$$\pi = 20x - 100 - 2x^2$$

$$\pi' = 20 - 4x$$

$$\pi' = 0 \Rightarrow x = 5$$

وحدات

مثال : تقوم مؤسسة تجارية بتصنيع عدد من قطع الإنتاج لسلعة ما قدره قطعة ، فإذا فرضنا أن تابع التكلفة الكلية للإنتاج يأخذ الشكل التالي :

$$C = c(x) = 0.1x^2 + 2x + 100$$

وإن تابع السعر معطى بالعلاقة التالية :

$$P = 20 - 0.2x$$

فالمطلوب تحديد قيمة x التي تجعل الربح أعظماً ثم قيم الربح الذي تحققه

هذه المؤسسة .

$$R = p.x$$

نعلم أن :

$$R = x(20 - 0.2x)$$

فتابع الربح هو:

$$\pi(x) = R - C$$

$$= -0.3x^2 + 18x - 100$$

$$\pi'(x) = -0.6x + 18$$

$$\pi'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{0.6} = 30$$

وحدة

$$\pi''(x) = -0.6 < 0$$

إذا فقيمة x التي تجعل الربح أعظماً هي $x = 30$ وحدة وتكون قيمة الربح الأعظمي للمؤسسة هي:

$$\pi(30) = -0.3(30)^2 + 18(30) - 100 = 90$$

III-3-10- تابع الاستهلاك : تعد النظرية الكينزية السائدة أن حجم الاستهلاك يتوقف على حجم الدخل، بمعنى آخر ، إن أية زيادة تطرأ على الاستهلاك فهي نتيجة زيادة تطرأ على الدخل أو نقصان على الاستهلاك سببه نقصان في الدخل ، ويستخدم تابع الاستهلاك عادة في التحليل الاقتصادي ، ويمكن تعريفه بعلاقة تربط بين عوامل ومتغيرات متعددة :

Y مستوى الدخل القومي ، V حجم السكان ، D توزيع الدخل N مستوى الاستهلاك السابق ، Q عادات الاستهلاك ، I معدل الفائدة ، الخ.
إذا يأخذ تابع الاستهلاك الشكل التالي:

$$C = C(Y, V, D, N, Q, I, \dots)$$

إن التعرف على هذا التابع وفق متحولاته السابقة هو صعب ومعقد للغاية ، لهذا فالتعرف عليه وبشكل جيد سوف نأخذ العلاقة السابقة بشكل خطي ، حيث نستطيع التعبير عن تابع الاستهلاك بالشكل التالي:

$$C = C(y) = \alpha + \beta y$$

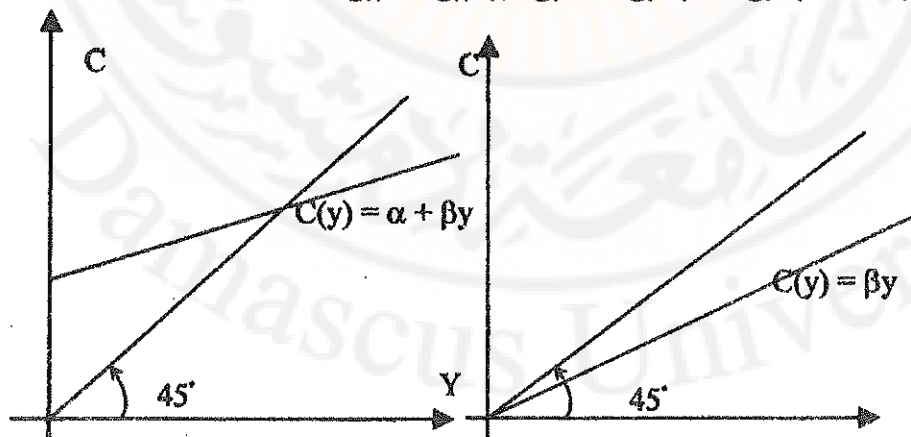
حيث: $0 < \beta < 1$ ، $\alpha > 0$

نلاحظ أن هذا التابع يربط بين C نفقات الاستهلاك الكلية (للقطاع الأسري أو للفرد) ومستوى الدخل القومي y . ويمكن أن نتعرف على المنحني البياني لهذا التابع من خلال الصيغتين التاليتين:

$$C = C(y) = \beta y \quad \text{حينما تكون} \quad \alpha = 0 \quad 0 < \beta < 1$$

$$C = C(y) = \alpha + \beta y \quad \text{حينما تكون} \quad \alpha > 0 \quad 0 < \beta < 1$$

حيث نجد لهاتين الصيغتين الشكلين البيانيين التاليين:



نتعرف من التابع السابق على تابع آخر هو النسبة بين تغير الاستهلاك وتغير الدخل ، ألا وهو تابع النزعة (الميل) الهامشية (الحدية) للاستهلاك والذي يتمثل في المشتق الأول لتابع الاستهلاك السابق ، وإذا رمزنا لتابع النزعة (الميل) الهامشية بالرمز MPC فإن :

$$MPC = \frac{dc}{dy} = c'(y)$$

ونلاحظ أن الميل الحدي للاستهلاك هو أقل من الواحد الصحيح ، بمعنى آخر ، إن أية زيادة في الدخل لن تذهب بكاملها إلى الاستهلاك بل يمكن انخار جزء منها على الأقل.

III-3-11- تابع الإنتاج : هو علاقة تابعة تربط حجم الإنتاج Q وحجم عوامل الإنتاج المختلفة التي تدخل في العملية الإنتاجية وعددها n عاملاً والتي هي :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$$

وباعتبار أن العملية الإنتاجية مركبة من كميات مختلفة من عوامل الإنتاج السابقة ، لهذا فإن التعرف على تابع الإنتاج بالشكل الجيد يكون من خلال صورته المبسطة وذلك حينما يكون الإنتاج مرتبطاً فقط بأحد عوامل الإنتاج والذي هو L ، عندها نحصل على التابع التالي :

$$Q = F(L)$$

ي تربط تابع الإنتاج بين مستوى الناتج Q وكمية العمل L اللازمة

لهذا الناتج

نعرف انطلاقاً من هذا التابع ، تابعاً جديداً وهو الناتج الهامشي ونرمز له بـ MP والذي هو المشتق الأول لتابع الناتج الكلي :

$$MP = \frac{dQ}{dL} = Q'_L = F'(L)$$

ونعرف أيضاً تابعاً آخر هو الناتج المتوسط أو الإنتاج الوسطي لواحدة عامل الإنتاج المستخدم ونرمز له بـ AP بأنه حاصل قسمة الإنتاج Q على العمل L ، أي أن :

$$AP = \frac{Q}{L} = \frac{F(L)}{L}$$

لنأخذ الآن تابع الإنتاج المتعلق بمنشأة منتجة لنوع واحد من السلع وذلك بشكله العام من خلال فرضية أن هناك n عاملاً يدخل في تكوين العملية الإنتاجية لهذه المنشأة ، حيث نجد :

$$Q = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

Q حجم الإنتاج ، $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ عوامل الإنتاج (مثل رأس المال ، العمل ، الأرض).

و $\alpha_i \geq 0$ (من أجل $i = 1, 2, 3, \dots, n$) وحينما يكون أحد عوامل الإنتاج α_i معدوماً فمعناه أنه لا يدخل في العملية الإنتاجية لهذه المنشأة .

لنفرض أن هذا التابع معرف ومستمر وقابل للاشتقاق مرتين على الأقل ، عندها نجد أن لتابع الإنتاج هذا أشكالاً عديدة (كما وجدنا في تابع المنفعة) يختلف كل منها عن الآخر من خلال اختلاف كميات عوامل الإنتاج الداخلة في العملية الإنتاجية لهذه المنشأة .

حتى نتعرف على تابع الإنتاج هذا بشكل جيد ، سوف نكتفي بأخذ هذا التابع بثلاثة عوامل فقط وهو الشكل المتعارف عليه عادة ، حيث يكون له الصيغة التالية:

$$Q = F(K, L, A)$$

Q حجم الإنتاج ، K رأس المال الثابت ، L حجم العمل أو عدد العمال ، A الأرض ، لنلاحظ أن أي تغير يطرأ على أي عامل من عوامل الإنتاج السابقة سيؤثر في حجم الإنتاج وكميته.

نعرف الناتج المتوسط (الإنتاج الوسطي) بالنسبة لرأس المال K بأنه النسبة بين حجم الإنتاج Q وحجم رأس المال K ، فإذا رمزنا لهذا الناتج المتوسط بالنسبة لرأس المال K بالرمز AP_K ، فعندها نجد أن :

$$AP_K = \frac{Q}{K}$$

وهو ليس إلا متوسط إنتاجية الوحدة الواحدة من عامل الإنتاج K في وحدة الزمن ويقاس الناتج المتوسط هذا بوحدة مركبة من وحدتي حجم الإنتاج وعامل الإنتاج ، أي :

وحدة الوزن

وحدة عامل الإنتاج

إن الإنتاج الوسطي بالنسبة للعمل والذي نرمز له بـ AP_L هو:

$$AP_L = \frac{Q}{L}$$

والإنتاج الوسطي بالنسبة للأرض والذي نرمز له بـ AP_A هو:

$$AP_A = \frac{Q}{A}$$

نعرف الناتج الحدي (الهامشي) - الإنتاجية الحدية - بالنسبة لرأس المال K بأنه النسبة بين تزايد حجم الإنتاج Q إلى تزايد رأس المال الثابت K وذلك عندما ينتهي هذا الأخير نحو الصفر ، شريطة افتراض المتحولات الأخرى جميع ثابتة لا تتغير ، فإذا رمزنا لهذا الناتج الحدي بالنسبة لرأس المال K بالرمز MP_K فإن :

$$MP_K = Q'_K = F'_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

حيث يقصد بـ MP_K مقدار تغير الإنتاج فيما لو تغير رأس المال بمقدار وحدة واحدة ، أيضاً تقاس الإنتاجية الهامشية بوحدة مركبة من وحدات الإنتاج وعوامل الإنتاج .

نعرف وبالأسلوب نفسه الإنتاجية الحدية (الهامشية) بالنسبة للعمل L ونرمز لها بـ MP_L بأنها نهاية النسبة بين تزايد حجم الإنتاج Q إلى تزايد العمل L وذلك عندما ينتهي هذا الأخير إلى الصفر ، شريطة عد المتحولات الأخرى جميع ثابتة لا تتغير ، أي أن :

$$MP_L = Q'_L = F'_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

وتمثل MP_K مقدار تغير الإنتاج فيما لو تغير عدد وحدات العمل بمقدار وحدة إضافية واحدة أيضاً وبالأسلوب نفسه تعرف الإنتاجية الهامشية (الحدية) بالنسبة للأرض ونرمز لها بـ MP_A بأنها نهاية النسبة بين تزايد حجم الإنتاج Q إلى تزايد الأرض A وذلك عندما ينتهي هذا الأخير إلى الصفر ، شريطة عد المتحولات الأخرى جميع ثابتة لا تتغير ، أي أن :

$$MP_A = Q'_A = F'_A = \frac{\partial Q}{\partial A}$$

وتمثل MP_A مقدار تغير الإنتاج فيما لو تغير عامل الأرض . إن الإنتاجية الحدية لأي عامل من عوامل الإنتاج في أي وضع من الأوضاع الإنتاجية تكون معينة وذات إشارة موجبة.

نستطيع تعريف مرونة تابع الإنتاج بالنسبة لرأس المال K (أول العمل L أول الأرض A) بأنها النسبة بين التزايد النسبي لحجم الإنتاج Q على التزايد النسبي المقابل لرأس المال K (أو على التزايد النسبي المقابل للعمل L أو على التزايد النسبي المقابل للأرض A) وذلك عندما ينتهي هذا الأخير نحو الصفر شريطة عد المتحولات الأخرى جميع ثابتة لا تتغير ، فإذا رمزنا لمرونة تابع الإنتاج بالنسبة لرأس المال K بالرمز $E_K(Q)$ فإننا نجد أن :

$$E_K(Q) = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q}$$

$$E_L(Q) = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}$$

$$E_A(Q) = \frac{\partial Q}{\partial A} \cdot \frac{A}{Q}$$

وإذا كانت هذه التزايدات صغيرة جداً فإن مرونة تابع الإنتاج بالنسبة لرأس المال K يأخذ الصيغة التالية:

$$E_K(Q) = \frac{dQ}{dK} \cdot \frac{K}{Q} = Q'_K \cdot \frac{K}{Q} = Q'_K / \frac{Q}{K}$$

وإذا ما استعملنا بقاعدة الاشتقاق اللوغارتمي لوجدنا أن هذه المرونة تأخذ الشكل التالي:

$$E_K(Q) = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln K}$$

وبالأسلوب نفسه ، يمكن التعرف على مرونة تابع الإنتاج بالنسبة للعمل L وبالنسبة للأرض A ، حيث نجد أن :

$$E_L(Q) = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}$$

$$E_A(Q) = \frac{\partial Q}{\partial A} \cdot \frac{A}{Q}$$

وإذا كانت هذه التزايدات صغيرة جداً فإن مرونة تابع الإنتاج بالنسبة للعمل K ، (وبالنسبة للأرض A) تأخذ الشكل التالي :

$$E_L(Q) = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = Q'_L \cdot \frac{L}{Q} = Q'_L / \frac{Q}{L}$$

$$E_A(Q) = \frac{dQ}{dA} \cdot \frac{A}{Q} = Q'_A \cdot \frac{A}{Q} = Q'_A / \frac{Q}{A}$$

توليع الإنتاج المتجانسة :

نقول عن التابع $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

أنه تابع متجانس من الدرجة t بالنسبة للمتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث λ ثابت اختياري موجب (إذا حقق العلاقة التالية :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n) = \lambda^t f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

وذلك مهما تكن القيم الحقيقية لـ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ومهما تكن قيمة الثابتة λ .

إن لتتابع الإنتاج المتجانسة هذه معنى اقتصادياً فعالاً ، فإذا فرضنا أن تابع الإنتاج هو تابع متجانس من الدرجة t وقمنا بمضاعفة كل عامل من عوامل الإنتاج بمقدار λ مرة فإننا سوف نجد أن حجم الإنتاج Q سوف يتضاعف بمقدار λ^t مرة ، بمعنى آخر :

إذا ضاعفنا مثلاً قيمة كل عامل من عوامل الإنتاج بثلاث مرات $\lambda = 3$ وننتج معنا أن تابع الإنتاج قد تضاعف بمقدار $\lambda^2 = 3^2 = 9$ فإننا نقول إن التابع متجانس من الدرجة الثانية .
نستطيع التعرف وبشكل عام على مقدار هذا التضاعف حينما نعطي t القيم التالية :

- $t = 1$ عندها يصبح تابع الإنتاج كما يلي :

$$Q = F(K, L, A)$$

أي تابعاً متجانساً من الدرجة الأولى . وفي هذه الحالة فإن مضاعفة كل عامل من عوامل الإنتاج بمقدار λ يؤدي إلى مضاعفة حجم الإنتاج Q بمقدار λ مرة .

- $t > 1$ في هذه الحالة إن مضاعفة كل عامل من عوامل الإنتاج بمقدار λ مرة فسوف نحصل على مضاعفة حجم الإنتاج Q عدداً من المرات يزيد على العدد λ .
- $t < 1$ في هذه الحالة إن مضاعفة كل عامل من عوامل الإنتاج بمقدار λ مرة فسوف نحصل على مضاعفة حجم الإنتاج Q عدداً من المرات أقل من العدد λ .
مثال : عين درجة تجانس التابع التالي :

$$Q = F(k, L, A) = 3A^2L - 4KLA + K^2L + L^2A$$

لتضاعف كل من k, L, A بـ $\lambda k, \lambda L, \lambda A$ فنجد أن :

$$\begin{aligned} F(\lambda k, \lambda L, \lambda A) &= 3\lambda^2 A^2 \lambda L - 4\lambda K \lambda L \lambda A + \lambda^2 K \lambda L + \lambda^2 L^2 \lambda A \\ &= \lambda^3 (3A^2L - 4KLA + K^2L + L^2A) \end{aligned}$$

$$F(\lambda k, \lambda L, \lambda A) = \lambda^3 F(k, L, A)$$

هذا يعني أن التابع السابق هو متجانس من الدرجة الثالثة $t = 3$ ، بمعنى آخر إذا قمنا بمضاعفة قيمة كل عامل من عوامل الإنتاج بمقدار λ مرة فإن تابع الإنتاج سوف يتضاعف بمقدار λ^3 .

خاصة التابع المتجانس (نظرية أولر) :

لنفرض أن لتابع الإنتاج الشكل التالي :

$$Q = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

إذا كان هذا التابع متجانساً من الدرجة t فهو يحقق العلاقة التالية :

$$\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} + \dots + \alpha_n \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} = tF(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

أو بشكل آخر :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = tF(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

وتعني هذه العلاقة أن هناك علاقة تربط التابع المتجانس ومشتقاتها الجزئية، ندعو هذه العلاقة بعلاقة أولر.

يمكن التحقق من صحة علاقة أولر على النحو التالي:

بما أن التابع: $Q = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ تابع متجانس من الدرجة t فهذا يعني أن:

$$F(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3, \dots, \lambda \alpha_n) = \lambda^t F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

بإشتقاق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ λ نجد أن :

$$\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \lambda \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \lambda \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \lambda \alpha_3} + \dots + \alpha_n \frac{\partial F}{\partial \lambda \alpha_n} = t \cdot \lambda^{t-1} \cdot F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n).$$

وباعتبار أن λ اختيارية ، فإذا جعلنا $\lambda = 1$ لوجدنا أن:

$$\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} + \dots + \alpha_n \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} = tF(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

وهي علاقة أولر.

إذا كنا أمام تابع الإنتاج الكلي الذي له الصيغة التالية :

$$Q = F(k, L, A)$$

وكان هذا التابع متجانساً من الدرجة t ، فه يحقق العلاقة التالية :

$$K \cdot \frac{\partial F}{\partial K} + L \frac{\partial F}{\partial L} + A \frac{\partial F}{\partial A} = t \cdot F(k, L, A)$$

وذلك مهما تكن عوامل الإنتاج k, L, A نستطيع كتابة علاقة أولر في حالة تابع الإنتاج $Q = F(k, L, A)$ على النحو التالي:

$$K \cdot F'_K + L \cdot F'_L + A \cdot F'_A = t F(k, L, A)$$

أي أن :

$$F(k, L, A) = \frac{K}{t} F'_K + \frac{L}{t} F'_L + \frac{A}{t} F'_A$$

وحسب علاقات المرونة الجزئية فإن :

$$E_K(Q) = Q'_K / \frac{Q}{K}$$

$$E_L(Q) = Q'_L / \frac{Q}{L}$$

$$E_A(Q) = Q'_A / \frac{Q}{A}$$

أي أن :

$$E_K(Q) = F'_K / \frac{Q}{K} , \quad E_L(Q) = F'_L / \frac{Q}{L} , \quad E_A(Q) = F'_A / \frac{Q}{A}$$

ومنه :

$$E_K(Q).Q = F'_K.K$$

$$E_L(Q).Q = F'_L.L$$

$$E_A(Q).Q = F'_A.A$$

هذا يعني أن :

$$E_K(Q) + E_L(Q) + E_A(Q) = t$$

أوبشكل آخر : إذا كان التابع $Q = F(k, L, A)$ متجانساً من الدرجة t ، فإن مجموع سائر مروياته الجزئية يساوي درجة التجانس t .
مثال : لنفرض أن تابع الإنتاج لمنشأة ما هو :

$$F(k, L, A) = Q = LAK + 3L^2A + 2K^2L + 4KL^2 + A^3$$

حيث كل من k, L, A عوامل الإنتاج والمطلوب :

- (1) تحقق فيما إذا كان تابع الإنتاج السابق متجانساً أم لا وفي حال كان تابع الإنتاج السابق متجانساً حدد درجة تجانسه .
- (2) لوجد الإنتاجية الحدية بالنسبة لكل عامل من عوامل الإنتاج وذلك من أجل :

$$K=1 , \quad L=2 , \quad A=3$$

الحل : 1 - لنتحقق فيما إذا كان التابع متجانساً أم لا ؟

لنبدل كل $K \rightarrow \lambda K$ و $L \rightarrow \lambda L$ و $A \rightarrow \lambda A$ فنجد أن :

$$Q = F(k, L, A)$$

$$= \lambda L \lambda A \lambda K + 3 \lambda^2 L^2 \lambda A + 2 \lambda^2 L^2 K^2 \lambda L + 4 \lambda K \lambda^2 L^2 + \lambda^3 A^3$$

$$= \lambda^3 Q(k, L, A)$$

إذا إن تابع الإنتاج السابق هو متجانس من الدرجة الثالثة ، هذا يعني أن الإنتاج سيتضاعف بمقدار λ^3 حينما تضاعف كلا من k, L, A بمقدار λ مرة.
2 - لإيجاد الإنتاجية الحدية لكل عامل من عوامل الإنتاج ، فإننا نوجد المشتقات الجزئية لتابع الإنتاج بالنسبة لكل عامل من عوامله .
الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال k هي :

$$Q'_K (k, L, A) = \frac{\partial Q}{\partial K} = LA + 4KL + 4L^2$$

$$Q'_K (1, 2, 3) = 6 + 8 + 16 = 30$$

الإنتاجية الحدية بالنسبة للعمل L هي :

$$Q'_L (k, L, A) = AK + 6LA + 2K^2 + 8KL$$

$$Q'_L (1, 2, 3) = 3 + 36 + 2 + 16 = 55$$

الإنتاجية الحدية بالنسبة للأرض A هي :

$$Q'_A (k, L, A) = \frac{\partial Q}{\partial A} = LK + 3L^2 + 3A^2$$

$$Q'_A (1, 2, 3) = 2 + 12 + 27 = 41$$

مثال : يعطى حجم الإنتاج لدى منشأة صناعية من خلال التابع التالي :

$$Q(k, L) = \ln \sqrt{2K + 5L}$$

أوجد حجم الناتج الهامشي بالنسبة لكل من رأس المال والعمل وذلك من أجل

$$K = 0.3 \quad L = 0.4$$

الحل : يحسب حجم الناتج الهامشي بالنسبة لكل من رأس المال والعمل من العلاقة التالية :

$$Q'_K (k, L) = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2K + 5L} = \frac{1}{2K + 5L}$$

$$Q'_K (0.3, 0.4) = \frac{1}{2 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.4} = \frac{1}{2.6}$$

هذا يعني أن زيادة عامل المال بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة حجم الإنتاج بمقدار $\frac{1}{2.6}$ وحدة.

أما الإنتاج الهامشي بالنسبة للعمل فهو:

$$Q'_L(k, L) = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2K + 5L} = \frac{5}{4K + 10L}$$

$$Q'_L(0.3, 0.4) = \frac{5}{4 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.4} = \frac{5}{5.2}$$

هذا يعني أن زيادة عامل العمل بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة حجم

الإنتاج بمقدار $\frac{5}{5.2}$ وحدة.

مثال : نفرض أن لتابع الإنتاج الشكل التالي:

$$Q(k, L) = K^{0.25} \cdot L^{0.75}$$

والمطلوب أوجد الإنتاجية الحدية بالنسبة لكل عامل من عوامل الإنتاج وذلك من أجل

$$K = 1 \quad L = 1$$

الحل : الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال K هي :

$$Q'_K(k, L) = \frac{\partial Q}{\partial K} = 0.25 \cdot K^{-0.75} \cdot L^{0.75}$$

$$Q'_K(1, 1) = 0.25$$

هذا يعني أن زيادة عامل رأس المال بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة

حجم الإنتاج بمقدار 0.25 وحدة .

الإنتاجية الحدية بالنسبة لعامل العمل هي :

$$Q'_L(k, L) = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0.75 \cdot K^{0.25} \cdot L^{-0.25}$$

$$Q'_L(1, 1) = 0.75$$

هذا يعني أن زيادة عامل العمل بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة حجم

الإنتاج بمقدار 0.75 وحدة .

٢- تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق :

1 - نفرض أن تابع الطلب على السلعة (1) معطى بالعلاقة التالية :

$$D_1 = f(p) = 15 - 3p$$

والمطلوب : أوجد تابع الدخل الكلي ثم الدخل الهامشي حينما يزداد الطلب على هذه السلعة من وحدة واحدة وحتى وحدتين ، ثم من وحدتين إلى ثلاث وحدات .

الحل : يعطى تابع الدخل الكلي وفق العلاقة التالية :

$$R(x) = p \cdot x = p \cdot D_1 = 15p - 3p^2$$

أما الدخل الهامشي فهو :

$$MR(x) = \frac{dR}{dx} = 15 - 6p$$

$$MR(1) = 15 - 6 \cdot 1 = 9$$

هذا يعني أنه إذا ازداد الطلب على السلعة من وحدة واحدة إلى وحدتين فإن الدخل الكلي سوف يزداد بمقدار تسع وحدات .

$$MR(2) = 15 - 6 \cdot 2 = 3$$

هذا يعني أنه إذا ازداد الطلب على السلعة من وحدتين إلى ثلاث وحدات فإن الدخل الكلي سوف يزداد بمقدار ثلاث وحدات .

2 - أوجد مرونة التابع التالي :

$$y = 5x^2 - 4x + 3$$

في النقطة $x = 2$

الحل : من خلال التعريف نجد أن :

$$E_x(y) = (10x - 4) \cdot \frac{x}{y}$$

$$= (10x - 4) \cdot \frac{2}{15} \%$$

هذا يعني أنه إذا ازداد المتحول x بنسبة 1% فإن التابع y سوف يزداد

$$\text{بمقدار } \frac{20}{13} \%$$

3 - نفرض أن لدينا تابع الكلفة الكلية لمنشأة صناعية هو:

$$C = C(x) = 150x - \frac{4x^2}{80}$$

أوجد تابع الكلفة الهامشية من أجل عدد من الوحدات المنتجة قدره 30 وحدة
الحل : لدينا :

$$MC(x) = \frac{dc}{dx} = 150 - \frac{8x}{80}$$

$$MC(30) = 150 - \frac{30}{10} = 157 \quad u.$$

هذا يعني أنه من أجل عدد الوحدات المنتجة (30) وحدة فإن كلفة الوحدة المنتجة الحادية والثلاثين سوف تبلغ 157 وحدة .

4 - أوجد الناتج المتوسط والهامشي ومرونة التابع لتابع الإنتاج التالي :

$$Q = Q(L) = 8L - 16$$

وذلك من أجل $L = 4$

$$AQ(L) = \frac{Q}{L} = 8 - \frac{16}{L} \quad \text{الحل : إن :}$$

$$\Rightarrow AQ(4) = 8 - \frac{16}{4} = 4$$

هذا يعني أنه إذا ازداد العمل L ، بمقدار وحدة واحدة فإن الناتج المتوسط سيبذل 4 وحدات وذلك بدءاً من $L = 4$.

$$MQ(L) = \frac{dQ}{dL} = 8$$

هذا يعني أنه إذا ازداد العمل L ، بمقدار وحدة واحدة فإن Q سيزداد بمقدار 8 وحدات .

$$E_L(Q) = Q'_L \cdot \frac{L}{Q} = 8 * \frac{4}{16} = 2$$

هذا يعني أنه إذا ازداد العمل L ، بمقدار 1% فإن Q سوف يزداد بمقدار 2% وذلك من أجل $L = 4$.

5 - أوجد الناتج المتوسط والهامشي ومرونة التابع لتابع الإنتاج التالي :

$$Q = Q(L) = 5 + 3L - 2L^2$$

$$L = \frac{1}{2} \text{ وذلك من أجل}$$

$$AQ(L) = \frac{5}{L} + 3 - 4L \quad \text{الحل أن:}$$

$$AQ\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + 3 - 2 = 11$$

هذا يعني أنه إذا ازداد العمل L ، بمقدار وحدة واحدة فإن الناتج المتوسط سوف يزداد بمقدار 11 وحدة وذلك من أجل $L = \frac{1}{2}$.

$$MQ(L) = \frac{dQ}{dL} = 3 - 4L$$

$$MQ\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 2 = 1$$

هذا يعني أنه إذا ازداد العمل L ، بمقدار وحدة واحدة فإن Q سوف يزداد بمقدار وحدة واحدة من أجل $L = \frac{1}{2}$.

$$E_L(Q) = Q'_L \cdot \frac{L}{Q} = 1 \cdot \frac{1/2}{6} = \frac{1}{12}$$

هذا يعني أن التابع Q سوف يزداد بمقدار $1/12$ % عندما يزداد L بمقدار 1% وذلك من أجل $L = \frac{1}{2}$.

III-4- التكامل و تطبيقاته الاقتصادية:

III-4-1- تعريف التفاضل:

- 1- تمهيد : كثيراً ما يكون معلوماً لدينا التابع الاقتصادي الهامشي ونحتاج إلى إيجاد التابع الأصلي له ، فبتكامل هذا التابع الاقتصادي الهامشي ، نستطيع أن نتوصل إلى التابع الأصلي، فمثلاً : إن تكامل تابع التكلفة الهامشي يعطينا تابع التكلفة الكلية وبتكامل تابع الدخل الهامشي نحصل على تابع الدخل الكلي وبتكامل تابع المنفعة الهامشي نستطيع أن نتوصل إلى تابع المنفعة الكلية وهكذا .
- 2- تعريف التفاضل : بفرض أن $y = f(x)$ تابع معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على مجموعة تعريفه، وجدنا أن المشتق يعطى بالعلاقة التالية :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

إذا من العلاقة السابقة نجد أن $y' \neq \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، بل إن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من y'

وذلك عندما Δx تقترب من الصفر ، بمعنى آخر إن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تختلف عنه بمقدار صغير جداً وليكن ε ، أي أننا نستطيع كتابة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon \quad ((\varepsilon \text{ عدد حقيقي موجب صغير جداً بقدر ما نريد}))$$

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

حيث $\varepsilon \rightarrow 0$ حينما $\Delta x \rightarrow 0$.

نسمي المقدار $y' \cdot \Delta x$ (الذي هو الجزء الرئيس في Δy) تفاضل التابع $y = f(x)$ ونرمز له بالرمز dy ، أي أن $dy = y' \cdot \Delta x$.

$$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x \quad \text{ومنه :}$$

إذا نستنتج أن تغير التابع Δy لا يساوي تفاضله dy . والآن ما هي علاقة تغير المتحول Δx بتفاضله dx ؟

لنأخذ التابع $y = f(x) = x$ فإذا قمنا بالتبديل لوجدنا أن :

$$dy = y' \cdot \Delta x$$

$$dy = 1 \cdot \Delta x$$

ولأن $y = x$ إذا $dy = dx$ ، هذا يعني أن :

$$dx = \Delta x$$

ولأن $y=x$ إذا $dy = dx$ ، هذا يعني أن :

$$dx = \Delta x$$

الأمر الذي يبين أن تغير المتحول Δx يساوي تفاضله dx ، من هنا نستطيع أن نكتب :

$$dy = y' \cdot dx$$

ومنه :

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

حيث نستنتج من هذه العلاقة ، تعريفاً آخر للمشتق وهو أنه يساوي النسبة بين تفاضل التابع وتفاضل المتحول .

أمثلة : أوجد تفاضلات كل من التوابع التالية :

$$1) y = 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow dy = (6x - 2) dx$$

$$2) y = e^{5x+2} \Rightarrow dy = 5 \cdot e^{5x+2} \cdot dx$$

$$3) y = a^{x^2-2x+1} \Rightarrow dy = (2x - 2)a^{x^2-2x+1} \cdot \log_e a \cdot dx$$

$$4) y = \ln(2x^2 + 3) \Rightarrow dy = \frac{4x}{2x^2 + 3} dx$$

$$5) y = \log_a e^x \Rightarrow dy = \frac{1}{\log_e a} dx = \log_a e \cdot dx$$

III-4-2- خواص التفاضل : إن كل ما ينطبق على المشتقات من قواعد وخواص ينطبق أيضاً على التفاضل ، كون أن التفاضل هو جداء المشتق بتفاضل المتحول ، فمثلاً إذا فرضنا أن لدينا التوابع $y, u, v, w, \dots$ القابلة للاشتقاق على R ، وكان :

$$y = u + v + w + \dots$$

فإن :

$$dy = du + dv + dw + \dots$$

وليس أيضاً إذا كان :

$$y = u \cdot v \cdot w \dots$$

فإن :

$$dy = du \cdot v \cdot w + u \cdot dv \cdot w + u \cdot v \cdot dw \dots$$

وليس إذا كان:

$$y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0)$$

فإن:

$$dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

وهكذا....

III-4-3- التفاضلات المتتالية : تبقى القاعدة المطبقة في إيجاد المشتقات المتتالية

صحيحة من أجل التفاضلات المتتالية . فإذا فرضنا أن $y = f(x)$ فإن :

التفاضل الأول للتابع y هو : $dy = y' \cdot dx$

وبالمفاضلة مرة ثانية نحصل على التفاضل الثاني لـ y ، حيث نجد أن :

$$d^2y = (y' \cdot dx)' \cdot dx$$

((حيث نقرأ d^2y بالتفاضل الثاني لـ y أو d اثنين y)) نكتب العلاقة السابقة

بشكل آخر ، كمايلي :

$$d^2y = y'' \cdot dx^2$$

وهنا يجب التمييز بين dx^2 الذي هو جداء dx بـ dx وبين d^2y الذي هو التفاضل

الثاني لـ y ، كما نجد أن :

$$d^3y = (y'' \cdot dx^2)' \cdot dx \\ = y''' \cdot dx^3$$

حيث d^3y تلفظ d ثلاثة y و dx^3 تلفظ dx ثلاثة .

وهكذا نستطيع أن نجد :

$$d^4y = (y''' \cdot dx^3)' \cdot dx \\ d^4y = y^{(4)} \cdot dx^4$$

وبالتالي فإن التفاضل النوني (أو التفاضل ذا المرتبة n) هو :

$$d^n y = (y^{(n-1)} \cdot dx^{(n-1)})' \cdot dx$$

مثال : أحسب التفاضلات المتتالية للتابع التالي :

$$y = x^5$$

التفاضل الأول هو :

$$dy = 5x^4 \cdot dx$$

التفاضل الثاني هو :

$$d^2y = 20x^3 \cdot dx^2$$

التفاضل الثالث هو :

$$d^3y = 60x^2 \cdot dx^3$$

التفاضل الرابع هو :

$$d^4y = 120x \cdot dx^4$$

التفاضل الخامس هو :

$$d^5y = 120 dx^5$$

التفاضل السادس هو :

$$d^6y = 0 \cdot dx^6$$

III-4-4- تفاضل تابع التابع : لنفرض أن $y = f(x)$ ((حيث $x = g(u)$)) لإيجاد تفاضل التابع y نطبق قاعدة اشتقاق تابع التابع، إن :

$$y'_u = \frac{dy}{du} = y'_u \cdot x'_u$$

ومنه :

$$dy = y'_u \cdot du$$

$$dy = y'_x \cdot x'_u \cdot du$$

ولإيجاد التفاضل الثاني لـ $y = f(x)$ أي التفاضل الثاني لتابع التابع نجد أن :

$$dy = y'_u \cdot du$$

$$d^2y = y''_{xx} dx \cdot dx + y'_{xx} \cdot d^2x$$

$$= y''_{xx} dx^2 + y'_{xx} \cdot d^2x$$

نستطيع بالأسلوب نفسه إيجاد التفاضل الثالث لتابع التابع.... وهكذا.

مثال : أوجد تفاضل التابع التالي :

$$y = (5x^2 + 3x - 2) a^x$$

$$dy = [(10x+3)a^x + (5x^2 + 3x - 2) a^x \cdot \log_e a] dx$$

$$dy = a^x [(5x^2 + 3x - 2) \cdot \log_e a + (10x+3)] dx$$

III-4-5- التابع الأصلي وعملية إيجاداه : كثيراً ما نحتاج أثناء دراستنا لمشتق تابع أو تفاضل تابع ما أن نتعرف على التابع بالذات .

لقد أسمينا العملية التي نتقلنا من التابع إلى مشتقه عملية الاشتقاق ، ونسمي العملية المعاكسة لها إيجاد التابع الأصلي ، كما أن العملية التي نتقلنا من التابع إلى تفاضله عملية التفاضل ، ونسمي العملية المعاكسة لها عملية إيجاد التكامل فإذا كان لدينا التابع $y=f(x)$ المعروف والمستمر على المجموعة x (حيث $x \subseteq R$) فإننا نسمي $g(x)$ تابعاً أصلياً لـ $y = f(x)$ (في مجموعة التعريف x نفسها) إذا كان $g(x)$ معرفاً ومستمرأ وقابلأ للاشتقاق على x وكان :

$$g'(x) = f(x)$$

أيضاً إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$ فإن تفاضله هو $dy = y' \cdot dx$ وبالتالي فإن تكامله والذي نرمز له بالرمز $\int$ هو :

$$y = \int f(x) dx + c \quad (\text{حيث } c \text{ ثابتة عشوية})$$

فمثلاً : إذا كان لدينا التابع $y = 2x^3 + 10x$ وأردنا إيجاد مشتقه لوجدنا أن $y' = 6x + 10$ نستطيع استبدال هذا بقولنا إن التابع الذي مشتقه $y' = 6x + 10$ هو $y = 2x^3 + 10x + c$ (حيث c ثابتة عددية) إذا فالتابع $y = 2x^3 + 10x + c$ هو تابع أصلي للتابع $y = 6x + 10$:
لنأخذ الآن التتابع التالية :

$$y = x^2 + 2x \pm 3$$

$$y = \dots \pm 5$$

$$y = \dots \pm 10$$

$$y = \dots \pm c$$

(حيث c ثابتة عددية)
نلاحظ أن هذه المجموعة من التتابع السابقة لها المشتق $y' = 2x + 2$ ،
إذا فكل تابع من التتابع السابقة يصلح لأن يكون تابعا أصليا لهذا المشتق ، إذا
التتابع الأصلية لتابع ما يختلف بعضها عن بعض فقط بعدد جبري ثابت ، إن
بإمكان البرهان على هذا وفق الشكل التالي :

لنفرض أن $g(x)$ ، $h(x)$ ، تابعان أصليان للتابع $y = f(x)$ وأن :

$$g(x) - h(x) = \psi(x)$$

$$g'(x) - h'(x) = \psi'(x)$$

بالاشتقاق نجد أن :
ولكن $g'(x) = f(x)$ و $h'(x) = f(x)$ إذا $\psi'(x) = 0$ أي أن $\psi(x)$ هو مقدار ثابت

(كون مشتقه معدوماً) وليكن c وهو ما دعونا به ثابت التكامل.

III-4-6- كيفية إيجاد التتابع الأصلية : وجدنا أن عملية إيجاد التابع الأصلي هي
العملية المعاكسة لإيجاد المشتق ، فإذا فرضنا أن $y = x^2$ فإن مشتقه $y' = 2x$ أي
ضربنا المتحول بقوة ثم جعلنا للمتحول القوة السابقة بعد طرحها من الواحد ، فإذا
أردنا تطبيق العملية العكسية فإننا نأخذ المشتق $y' = 2x$ حيث تضيف لقوة
المتحول الواحد ثم نقسم المتحول على القوة الأصلية ، حيث نجد أن التابع الأصلي
 $y = x^2$. وفي هذه الخطوات نحصل على التابع الأول :

أمثلة :

$$Y = \frac{x^4}{4} + c \text{ فإن تابعه الأصلي } y = x^3$$

$$Y = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x + c \text{ فإن تابعه الأصلي } y = x^2 - 2x + 3$$

$$Y = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + c \text{ فإن تابعه الأصلي } y = 5x^3 - 3x^2$$

مثال (1) : أوجد التابع الأصلي للتابع $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$ وذلك من أجل $f(1) = 3$ إن التابع الأصلي هو :

$$Y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + c$$

أما لتعيين c نجعل $x = 1$ فنجد أن :

$$3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 5 + c \Rightarrow c = 5/6$$

$$Y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + 5/6 \quad \text{إذا}$$

مثال (2) : أوجد التابع الأصلي للتابع $y = 4x^2 + 3x - 6$ وذلك من أجل $f(2) = 4$ إن التابع الأصلي هو :

$$Y = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x + c$$

ولتعيين الثابتة c نجعل $x = 2$ فنجد أن :

$$4 = \frac{4}{3} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 - 12 + c \Rightarrow c = -2/3$$

$$Y = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x - 2/3 \quad \text{إذا}$$

نرفق الآن جدولاً بالتوابع الأصلية لبعض التوابع المتداولة:

الشكل العام للتابع	التابع الأصلي
$y = f(x) = x^n$	$Y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$y = \frac{1}{x^n} \quad (n \neq 1 \text{ صحيح})$	$Y = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c \quad (c \text{ ثابتة التكامل})$
$y = (x \pm a)^n \quad n \neq 1 \text{ و } a \text{ ثابتة عددية}$	$Y = \frac{(x \pm a)^{n+1}}{n+1} + c$
$y = \frac{1}{(x \pm a)^n} \quad n \neq 1$	$Y = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x \pm a)^{n-1}} + c$
$y = \frac{1}{\sqrt{ax \pm b}} \quad ax + b \text{ ثابتة عددية}$ $b > 0$	$Y = \frac{2}{a} \sqrt{ax \pm b} + c$
$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x > 0$	$Y = 2\sqrt{x} + c$
$y = \frac{1}{ax \pm b} \quad ax + b \neq 0$	$Y = \frac{1}{a} \ln ax \pm b + c$
$y = e^{ax}$	$Y = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
$y = a^{bx}$	$Y = \frac{1}{b \ln a} a^{bx} + c$

أمثلة : أوجد التوابع الأصلية لكل من التوابع التالية:

$$y = \frac{1}{2x} \Rightarrow Y = \frac{1}{2} \ln|2x| + c$$

$$y = \frac{1}{3x-1} \Rightarrow Y = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + c$$

$$y = e^{3x} \Rightarrow Y = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$y = e^{2x+3} \Rightarrow Y = \frac{1}{2} e^{2x+3} + c$$

$$y = 5^{2x} \Rightarrow Y = \frac{1}{2 \ln 5} 5^{2x} + c$$

$$y = 3^{2x+5} \Rightarrow Y = \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x+5} + c$$

III-4-7- التكامل غير المحدود : كنا قد سميننا العملية التي نتقلنا من التابع إلى تفاضله عملية إيجاد تفاضل التابع والعملية المعاكسة لها عملية إيجاد التكامل ، فإذا فرضنا أن $y = f(x)$ تابع معرف ومستمر فإن : $dy = f'(x)dx$ ويكون التكامل غير المحدود هو :

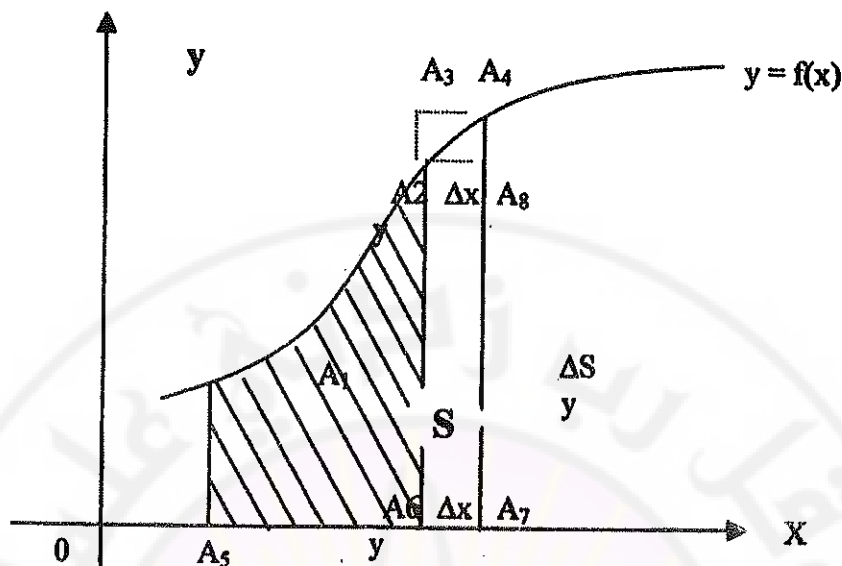
$$Y = \int dy = \int f'(x).dx + c$$

حيث نسمي $\int f'(x).dx$ التكامل غير المحدود للتفاضل dy والتابع $f'(x)$ هو التابع المكامل و c ثابتة التكامل والتي يتم تعيينها بإعطاء قيم معينة للمتحول x .

III-4-8- نظرية السطوح (التكاملات الأساسية) : لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ (المعرف والمستمر ضمن المجموعة $x \subseteq R$) ومن إشارة واحدة (موجب أو سالب).

إن مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ ومحور السينات ومستقيمين موازيين لمحور العرصات أحدهما ثابت فاصله x_1 والآخر متحولا فاصله x ($x_1 < x$) هي تابع أصلي لـ $y = f(x)$.

البرهان : لنرمز بـ s للسطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ ومحور السينات ox والمستقيمين الموازيين لـ OY الأول ثابت A_1, A_5 والثاني متحول A_2A_6 (الشكل III-1).



الشكل (III-1)

لنفرض أنه قد طرأ على المستقيم المتحول تغير A_2A_6 مقداره Δx فيقابلة تغير التابع $y = f(x)$ مقداره Δy ، كما ينتج عند ذلك تغير في السطح قدره ΔS .

فإذا عدنا إلى الشكل لوجدنا أن :

مساحة المستطيل $A_6A_3A_4A_7 < \Delta S < \text{مساحة المستطيل } A_6A_2A_8A_7$
أي أن :

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

لنقسم طرفي المتراجحة السابقة على Δx ($\Delta x \neq 0$) ولنميز الحالتين التاليتين:

(أ) إذا كان $\Delta x > 0$ فإن :

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

(ب) إذا كان $\Delta x < 0$ فإن :

$$y > \frac{\Delta S}{\Delta x} > y + \Delta y$$

كون أن التابع $y = f(x)$ معرف ومستمر على x فإذا جعلنا $\Delta x \rightarrow 0$ فإن $\Delta y \rightarrow 0$ وبالتالي فإن :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y + \Delta y) = y$$

كما وان :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = s'$$

هذا يعني أن :

$$s' = y = f(x)$$

اي أن :

$$s = g(x) + c$$

حيث $g(x)$ هو التابع الأصلي لـ $y = f(x)$ و c ثابتة عددية
إذا أردنا التعرف على قيمة c نجعل $x = x_1$ فنجد أن $s = 0$ ، أي أن :

$$G(x_1) = -c$$

$$s = g(x) - g(x_1) \quad \text{ومنه :}$$

لنفرض الآن أن المستقيم المتحول ، أخذ الوضعية $x = x_2$ هذا يعني أن
السطح المحصور بين المنحني البياني لـ $y = f(x)$ ومحور السينات ومستقيمين
موازيين لمحور السينات الأول ثابت $x = x_1$ والآخر متحول $x = x_2$ هو :

$$s = g(x_2) - g(x_1)$$

إذا رمزنا للمقدار $g(x_2) - g(x_1)$ بالرمز $[g(x)]_{x_1}^{x_2}$ عندها نستطيع أن نكتب :

$$s = g(x_2) - g(x_1) = [g(x)]$$

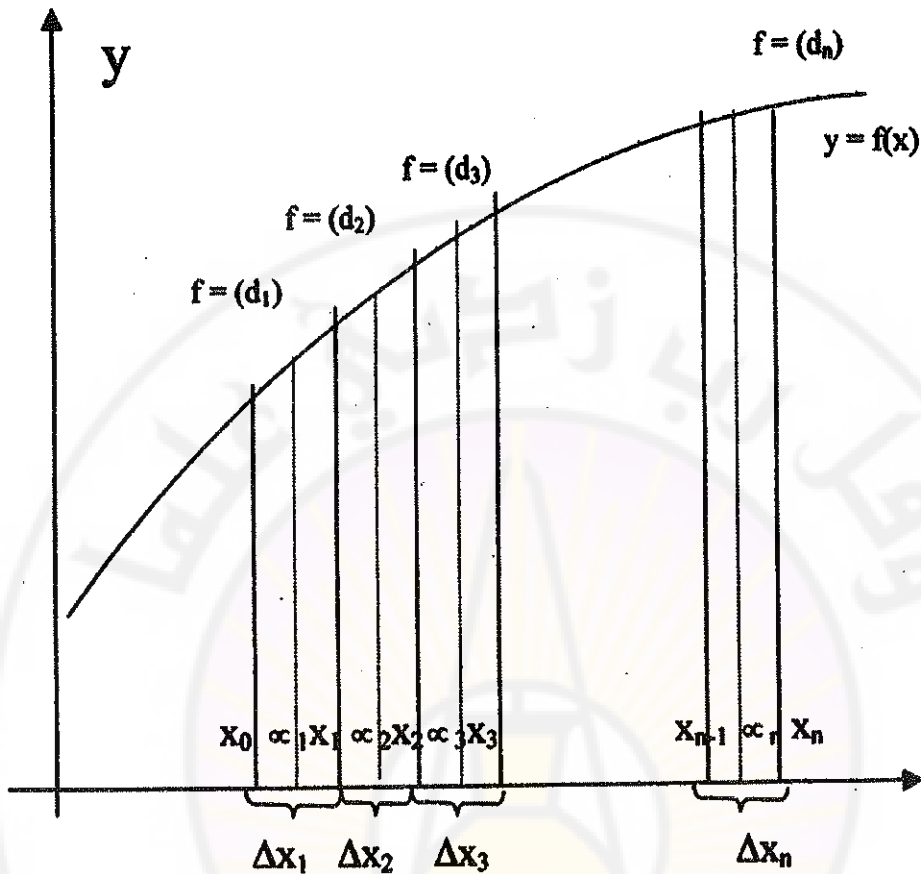
III-4-9- التكامل المحدود : يأخذ التكامل المحدود شكل نهاية مجموع ، حيث
نستطيع التحقق من وجود هذا التكامل على النحو التالي :

لنفرض أن لدينا التابع المتزايد $y = f(x)$ والمعرف والمستمر على المجال
المغلق $[a, b]$ ولنفرض أننا نود حساب s السطح المحصور بين منحني التابع $y = f(x)$
ومحور السينات والمستقيمين الموازيين لمحور السينات الأول $x = a$ والآخر
 $x = b$

من أجل هذا نجزي المجال $[a, b]$ إلى n مجالاً (متساوية أو مختلفة) مغلقاً
(الشكل III-2) على النحو التالي :

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad \text{حيث } ((i=1, 2, 3, \dots))$$

$$x_n = b \quad x_0 = a$$



الشكل (2 - III)

بحيث أن :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$$

أطوالها على الترتيب هي :

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2$$

$$\Delta x_4 = x_4 - x_3 \dots \dots \dots$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \dots \dots \dots$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

ولناخذ النقاط التالية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ المحققة للعلاقات التالية:

$$\alpha_1 \in [x_0, x_1], \quad \alpha_2 \in [x_1, x_2], \quad \alpha_3 \in [x_2, x_3],$$

$$\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \alpha_n \in [x_{n-1}, x_n],$$

ونفرض أن قيم التابع $y = f(x)$ من أجل النقاط $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ هي :

$f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \dots, f(\alpha_n)$
 لإيجاد حاصل ضرب قيمة التابع $y = f(\alpha_i)$ في طول المجال المرافق له Δx_i ، أي :
 $f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i$

ثم لنجمع نواتج الضرب والذي يشكل مساحة السطح s ، حيث نجد أن :
 $S = f(\alpha_1) \cdot \Delta x_1 + f(\alpha_2) \cdot \Delta x_2 + f(\alpha_3) \cdot \Delta x_3 + \dots + f(\alpha_n) \cdot \Delta x_n$

$$S = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i$$

نلاحظ أن قيمة s تتوقف حسب المعطيات التالية :

- عدد المجالات المغلقة .

- أطوال هذه المجالات .

- قيم α_i المختارة ضمن المجالات المغلقة .

فإذا جعلنا $\Delta x_i \neq 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ (وذلك مهما يكن $i = 1, 2, 3, \dots, n$) .

وكان للمجموع s نهاية معينة ومحدودة ولتكن V مستقلة عن Δx_i وعن كيفية اختيارنا للقيم α_i ، حيث نكتب :

$$V = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i$$

عندها نقول إن التابع $y = f(x)$ قابل للمكاملة على المجال المغلق $[a, b]$ وترمز للمكامل المحدود بالرمز

$$V = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

هذه النهاية v تساوي قيمة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ وحسب نظرية السطوح فإن :

$$V = \int_a^b f(x) \cdot dx = [g(x)]_a^b$$

أي أن :

$$V = \int_a^b f(x) \cdot dx = g(b) - g(a)$$

III-4-10- خواص التكامل : يمكن التوصل إلى هذه الخواص مباشرة من خواص التفاضل وذلك كون عملية التكامل هي العملية المعاكسة للتفاضل :
1 - مشتق تكامل غير محدود لتابع ما يعطينا التابع نفسه ، أي أن :

$$[\int f(x).dx]' = [F(x) + c]' = f(x)$$

تتطبق هذه الخاصية أيضاً على التفاضل ، أي أن :

$$d [\int f(x).dx] = d [F(x) + c] = f(x)$$

2 - يمكن إدخال الثابتة العددية (أو إخراجها) داخل (خارج) إشارة التكامل .

$$\int k.f(x).dx = k . \int f(x).dx$$

3 - بفرض أن f, g, h توابع لـ x معرفة ومستمرة على المجال $[a, b]$ ، فلدينا دوماً :

$$\int [f(x) + g(x) + h(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + \int h(x) dx$$

أي أن تكامل المجموع الجبري لعدة توابع يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه التوابع .

4 - بفرض أن $c \in [a, b]$ فيمكن تجزئة التكامل المحدود بين حدي المجال المذكور بالشكل التالي :

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$

5 - إن تبديل حدي التكامل المحدود يعطينا تكاملاً محدوداً آخر يساوي نظير الأول .

$$\int_a^b f(x).dx = - \int_b^a f(x).dx$$

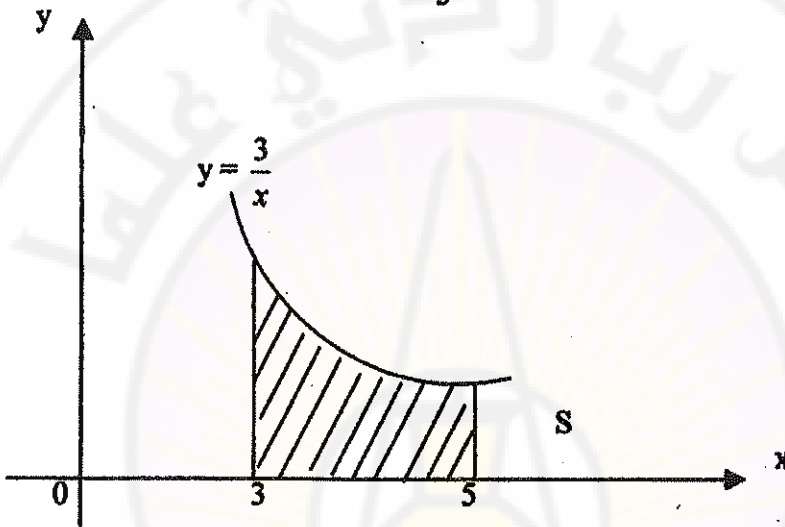
مثال (1) : احسب مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع :

$$y = f(x) = \frac{3}{x}$$

ومحور السينات والمستقيمين المتوازيين $x_1 = 3$, $x_2 = 5$

الحل : يمكن التعرف على هذا السطح من خلال الشكل (III-3) :

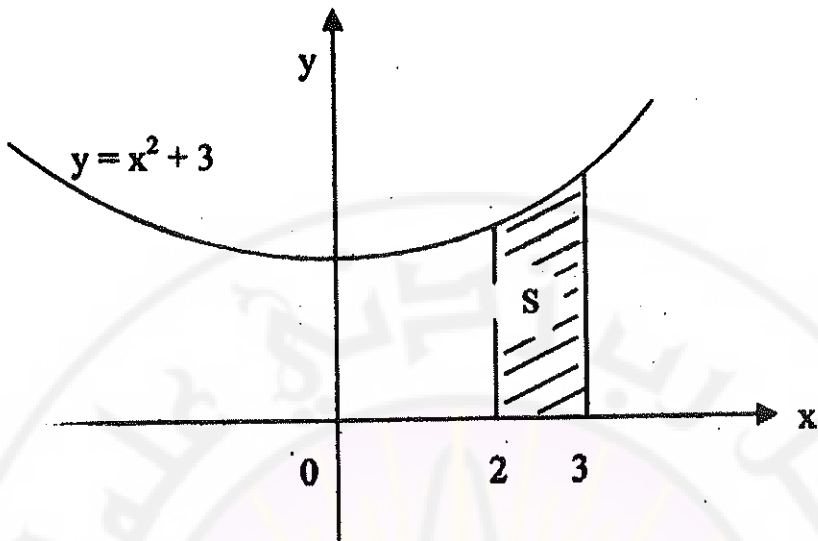
$$\begin{aligned} S &= \int_3^5 \frac{3}{x} dx \\ &= 3 [\ln x]_3^5 \\ &= 3 \cdot \ln \frac{5}{3} \quad \text{u.s} \end{aligned}$$



الشكل (III-3)

مثال (2) : احسب مساحة السطح المحصور بين المنحني البياني للتابع $y = f(x) = x^2 + 3$ ومحور السينات والمستقيمين $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
الحل : إن السطح المطلوب حساب مساحته هو كما في الشكل التالي :

$$\begin{aligned} S &= \int_2^3 (x^2 + 3) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_2^3 \\ &= \text{u.s.} \frac{28}{3} \end{aligned}$$



الشكل (III-4)

التطبيقات الاقتصادية للتكامل :

1 - لنفرض أن تابع التكلفة الهامشية للإنتاج معطى بالعلاقة التالية

$$MC = \frac{dc}{dx} = c'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

ما هو حجم التكلفة المتوسطة للإنتاج من أجل $x = 3$ وذلك حينما تكون التكلفة الثابتة مساوية 5 وحدات.

الحل : لإيجاد تابع التكلفة الكلية من خلال إيجاد التكامل

$$C(x) = \int (3x^2 - 4x - 3)dx$$

$$= x^3 - 2x^2 - 3x + c$$

$$C(0) = 5$$

$$C(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$$

إن تابع التكلفة المتوسطة هو:

$$AC = \frac{c(x)}{x} = x^2 - 2x - 3 + \frac{5}{x}$$

من أجل $x = 3$ نجد أن :

$$AC(3) = 27 - 6 - 3 + \frac{5}{3} = \frac{59}{3}$$

2 - لنفرض أن تابع الدخل الهامشي لمنشأة ما أخذ الشكل التالي :

$$MR = \frac{dR}{dx} = R'(x) = 50 - 0.05x$$

حيث رمزنا بـ x لعدد الوحدات المنتجة المباعة ، فالمطلوب :

(1) قيمة الدخل الكلي جراء بيع 100 وحدة منتجة .

(2) الدخل الصافي حينما يزداد حجم المبيعات من 100 وحدة إلى 150 وحدة منتجة.

الحل : لإيجاد الدخل الكلي نستعين بمكاملة تابع الدخل الهامشي ، حيث نجد :

$$R(x) = \int_0^{100} (50 - 0.05x) dx$$

$$= [50x - 0.025x^2]_0^{100}$$

$$= 50 * 100 - 0.025 * 10000$$

$$= 5700 \quad \text{u.s.}$$

لما لإيجاد الدخل الصافي وذلك حينما يزداد حجم المبيعات من 100 وحتى 150 وحدة منتجة فإتينا نجد :

$$R(x) = \int_{100}^{150} (50 - 0.06x) dx$$

$$= [50x - 0.03x^2]_{100}^{150}$$

3 - تبين لدى المنشأة الصناعية للجرارات أن التكاليف السنوية لصيانة آلاتها الصناعية C يتمثل في العلاقة التابعية التالية :

$$C(x) = 60 + 3x^2$$

حيث رمزنا بـ x العمر السنوي للآلة الصناعية والمطلوب :
ما هي تكاليف الصيانة خلال خمس سنوات ثم ماهي تكاليف الصيانة في السنة الخامسة.

الحل : تحسب تكاليف الصيانة خلال خمس سنوات وذلك عن طريق التكامل المحدود :

$$\int_0^5 (60 + 3x^2) dx = \int_0^5 c(x) dx$$

$$= [60x + x^3]_0^5$$

$$= 300 + 125 = 425 \text{ M.U}$$

أما تكاليف الصيانة خلال السنة الخامسة فهي :

$$\int_4^5 (60 + 3x^2) dx = \int_4^5 c(x) dx$$

$$= [60x + x^3]_4^5$$

$$= 300 + 125 - (240 + 64) = 121 \text{ M.U}$$

4 - لدى منشأة صناعية تابع تكلفة هامشية وفق الشكل التالي :

$$MC = C'(x) = \frac{dc}{dx} = 8 + 6x^2 + 4x$$

فإذا فرضنا أن التكلفة الثابتة لهذه المنشأة هي $C(0) = 80$ فأوجد تابع التكلفة الكلية والتكلفة المتوسطة لهذه المنشأة .

الحل : نحصل على تابع التكلفة الكلية من خلال تكامل تابع الكلفة الهامشي، أي أن:

$$C(x) = \int \frac{dc}{dx} . dx = \int (8 + 6x^2 + 4x) dx$$

$$= 8x + 3x^3 + 2x^2 + c$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار التكلفة الثابتة لوجدنا أن :

$$C(0) = 80$$

أي أن تابع التكلفة الكلية هو:

$$C(x) = 8x + 3x^3 + 2x^2 + 80$$

لما لإيجاد التكلفة المتوسطة فيكون على النحو التالي :

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = 8 + 3x^2 + 2x + \frac{80}{x}$$

5 - منشأة زراعية لها تابع تكلفة هامشية على النحو التالي:

$$MC(x) = C'(x) = \frac{dc}{dx} = 15 + 6e^x$$

والتكلفة الثابتة لها هي $C(0) = 200$ فالمطلوب حساب التكلفة الكلية والمتوسطة لهذه المنشأة .

الحل : إن تابع التكلفة الكلية هو:

$$C(x) = \int (15 + 6e^x) dx$$

$$= 15x + 6e^x + c$$

وباعتبار أن التكلفة الثابتة $C(0) = 200$ هي نجد أن :

$$C(0) = 15 \cdot 0 + 6e^0 + c = 200$$

$$C = 184$$

أي أن تابع التكلفة الكلي هو:

$$C(0) = 15x + 6e^x + 184$$

لما تابع التكلفة المتوسطة فيعطى من خلال العلاقة التالية :

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = 15 + \frac{6}{x}e^x + \frac{184}{x}$$

6 - لنفرض أن معدل تغير التكلفة يعطى من خلال العلاقة التالية :

$$MC(x) = C'(x) = 3x^2 + 8x + 3$$

لوجد تابع التكلفة الكلية وذلك من أجل

الحل : إن :

$$C = C(x) = \int (3x^2 + 8x + 3) dx$$

$$= x^3 + 4x^2 + 3x + c$$

وعندما $x = 5$ نجد أن :

$$C(5) = 125 + 100 + 15 + c = 300$$

أي أن :

$$C = 60$$

$$C(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 60 \text{ إذا :}$$

7 - تبين لشركة العامة للطرق بأن التكاليف السنوية C لصيانة ألياتها يمكن

أن يعطى من خلال العلاقة التابعية التالية:

$$C(x) = 40 + 12x^2$$

حيث رمزنا ب x للعمر السنوي للألية والمطلوب :

ما هي تكاليف الصيانة خلال 5 سنوات ثم ما هي تكاليف الصيانة خلال السنة الخامسة .

الحل : تحسب تكاليف الصيانة خلال 5 سنوات وذلك عن طريق التكامل المحدود:

$$\int_0^5 c(x).dx = [40x + 4x^3]_0^5$$

أما تكاليف الصيانة خلال السنة الخامسة فهي :

$$\int_4^5 c(x).dx = [40x + 4x^3]_4^5$$

$$= 700 - 660 = 40 \quad \text{m.u}$$

8 - لنفرض أن تابع الكلفة الهامشية لمؤسسة صناعية أخذ الشكل التالي:

$$MC = \frac{dc}{dx} = 45 - 0.06x$$

حيث رمزنا ب x لعدد الوحدات المنتجة والمطلوب :

(1) قيمة الكلفة الكلية جراء تصنيع 400 وحدة منتجة .

(2) الكلفة حينما يزداد حجم الإنتاج من 400 إلى 500 وحدة منتجة .

الحل : يتم التوصل لتابع الكلفة الكلية من خلال مكاملة تابع الكلفة الهامشية :

$$C(x) = \int \frac{dc}{dx} = \int (45 - 0.06x)dx$$

وحيث إن عدد القطع المنتجة هو 400 وحدة إذا فالتكلفة الكلية هي :

$$C(x) = [45x - 0.03x^2]_0^{400}$$

$$= 18000 - 0.03 * 160000$$

$$= 13200 \quad \text{m.u}$$

أما لإيجاد الكلفة حينما يزداد حجم الإنتاج من 400 إلى 500 وحدة منتجة :

$$C(x) = \int_{400}^{500} (45 - 0.06x) dx$$

$$= [45x - 0.03x^2]_{400}^{500}$$

$$= 15000 - 13200 = 1800 \quad \text{m.u.}$$

9 - لنفرض أن تابع الكلفة الهامشية لمنشأة صناعية أخذ الشكل التالي:

$$MC(x) = \frac{dc}{dx} = 7 + 3x^2 + 4x$$

فإذا فرضنا أن الكلفة الثابتة لهذه المنشأة هي $C(0) = 150$ فأوجد تابع الكلفة الكلية والكلفة المتوسطة لهذه المنشأة.

الحل : بمكاملة تابع الكلفة الهامشية نحصل على تابع الكلفة الكلية :

$$C(x) = \int (7 + 3x^2 + 4x) dx$$

$$= 7x + x^3 + 2x^2 + c$$

وإذا ما أخذنا بعين الاعتبار الكلفة الثابتة لوجدنا أن :

$$C(0) = 0 + 0 + 0 + c = 150$$

$$c = 150$$

وبالتالي فإن تابع الكلفة الهامشية هو :

$$C(x) = 7x + x^3 + 2x^2 + 150$$

أما الكلفة المتوسطة فتعطي من خلال العلاقة التالية :

$$\frac{c(x)}{x} = 7 + x^2 + 2x + \frac{150}{x}$$

10 - منشأة زراعية لها تابع كلفة هامشية على النحو التالي :

$$MC = \frac{dc}{dx} = 10 + 5e^{2x}$$

والكلفة الثابتة لها $C(0) = 170$ فالمطلوب احسب الكلفة الكلية والمتوسطة لهذه المنشأة.

الحل : بمكاملة تابع الكلفة الهامشية نجد أن :

$$C(x) = \int dc = \int (10 + 5e^{2x}) dx$$

$$= 10x + \frac{5}{2} e^{2x} + c$$

وبتبدل قيمة الكلفة الثابتة نجد أن :

$$C(0) = 0 + \frac{5}{2} e^0 + c = 170$$

$$c = 34$$

أي أن تابع الكلفة الكلية هو:

$$C(x) = 7x + 5e^x + 34$$

أما تابع الكلفة المتوسطة فيعطى من خلال العلاقة التالية :

$$AC = \frac{c(x)}{x} = 7 + \frac{5}{x}e^x + \frac{34}{x}$$



الفصل الرابع

IV- المتراجحات وتطبيقاتها الاقتصادية في البرمجة

الخطية

مقدمة:

إن أهم المشكلات ((الصناعية والمالية التي تدخل في عمليات الإنتاج والتسويق والتحويل والنقل والتخطيط والاستثمار...)) التي تعاني منها المؤسسات الحكومية وغير الحكومية مدنية أم عسكرية في غالبية دول العالم سواء كانت متقدمة أم نامية هي محدودية الموارد البشرية ((أطباء، مهندسين، فنيين، إداريين، ...)) والمادية ((رؤوس الأموال، الإنتاج، السدود،...)) حيث تتميز هذه المشكلات بوضوح أكثر لدى دول العالم النامي من الدول الصناعية المتقدمة. الأمر الذي جعل الباحثين والمفكرين الاقتصاديين يجدون في التفتيش عن أسس وأساليب علمية بغية الاستخدام الأفضل والأمتل لندرة هذه الموارد ومحدوديتها وذلك بالشكل المنطقي والعقلاني قصد تحقيق أقصى ربح مادي وأدنى تكلفة مادية.

تعد البرمجة الخطية حديثة العهد نسبياً وسميت بالبرمجة كونها تبحث في اختيار برنامج معين يحقق الهدف المطلوب من بين مجموعة من البرامج الممكنة، وأما الخطية فتعود إلى أن جميع العلاقات الرياضية التي تربط متغيرات المسألة المدروسة ((إما قيم موجبة أو قيم مساوية للصفر)) والتي تشكل النموذج الرياضي هي علاقات خطية.

تعرف البرمجة الخطية بأنها العملية المنتظمة التي نستطيع باستخدامها حل مسألة ما يوجد بين عناصرها علاقات ثابتة. هذه العملية المنتظمة ليست سوى أسلوب رياضي يبحث عن التوزيع الأفضل والأمتل لمجموعة من الموارد البشرية والمادية المتاحة على عدد من الحاجيات التي تتطلب تلك الموارد وذلك ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة. وبما أنها أسلوب رياضي، إذن فهي طريقة رياضية تتمثل في صورة معادلات أو مترجمات لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة بغية تحقيق هدف معين.

تكمن أهداف البرمجة الخطية عادة في شكلين اثنين:

الشكل الأول: تعظيم الربح.

الشكل الثاني: تخفيض ((تقليل)) الكلفة.

إن الغاية الأساسية في مسألة البرمجة الخطية تكمن في مشكلة البحث عن الحل الأمثل الذي قد يكون في صورة أعظم ((تعظيم العائد)) ربح أو أدنى ((تخفيض)) تكلفة حيث يمكن التعبير عن هذه الصورة من خلال تابع خطي يتكون من عدد من المتغيرات تتحدد قيمته ((سواء العظمى أو الصغرى)) في حدود بعض القيود التي تأخذ شكل معادلات أو مترجمات خطية ونسميه تابع الهدف.

يعد تابع الهدف مقياس المثالية في حل المسألة البرمجة الخطية إذ إن قيمة هذا التابع تدلنا على الاختيار الصحيح والناجح لحل المسألة، ويسمى الحل الذي يحقق هذا الهدف الحل المثالي ((الحل الأمثل)).

إن الإمكانيات المتوافرة من الموارد البشرية والمادية المتعلقة بالمشكلة والتي دعوناها بمحدودية الموارد البشرية والمادية المتاحة تأخذ شكل القيود متمثلة من خلال مجموعة من المعادلات أو المترجمات ((أو الاثنين معاً)) تبين الشروط الواجب توافرها في حل المشكلة المدروسة، يجب أن لا يغيب عن ذهننا أن المتغيرات الواجب التعرف عليها من خلال حل مسألة البرمجة يجب أن تكون موجبة، أي يجب أن تحقق شرط عدم السلبية وعلى سبيل المثال فالموارد المستخدمة لا يمكن أن تكون سالبة.

ولكي يتم التعرف على موضوع البرمجة الخطية يتطلب منا الإلمام قبل كل شيء ببحث:

- المترجمات ((تعريفها - خواصها - أشكالها - حلولها)) .
- نماذج البرمجة الخطية.
- حل مسائل البرمجة الخطية ((الطريقة البيانية - الطريقة الجبرية - طريقة السمبلكس)) .

IV-1- المترجمات والبرمجة الخطية :

IV-1-1- تعريفها : بفرض أن $a, b \in \mathbb{R}$ ، اعتماداً على خواص مجموعة الأعداد الحقيقية نجد:

- أن يكون a أصغر من b حيث نرمز لها بـ $a < b$ (أو أن يكون b أكبر من a ونرمز لهذا بـ $b > a$) هذا يعني :

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

- أن يكون a أكبر من b حيث نرمز لها بـ $a > b$ (أو أن يكون b أصغر من a ونرمز لهذا بـ $b < a$) ، هذا يعني أن :

$$a > b \Leftrightarrow b < a$$

وبشكل عام نستطيع أن نكتب :

$$a \leq b \Leftrightarrow (a < b \text{ أو } a = b)$$

$$a \geq b \Leftrightarrow (a > b \text{ أو } a = b)$$

نسمي التعابير التالية : $a < b$ ، $a > b$ ، $a \leq b$ ، $a \geq b$ بالمتراجحات
 IV-1-2- خواص المتراجحات : تتمتع المتراجحات بخواص عديدة ، يمكن الحصول
 عليها وذلك بالعودة إلى الخواص التي تتمتع بها مجموعة الأعداد الحقيقية ، حيث
 نجد :

$$1- a \text{ حقيقي موجب} \Leftrightarrow a > 0$$

$$\text{هذا يعني أن } a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$$

$$2- a \text{ حقيقي سالب} \Leftrightarrow a < 0$$

$$\text{أي أن } a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$$

3- بفرض أن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فإن :

$$أ- a > b \text{ و } a = b \text{ ، } a < b \text{ إحداها لا بد أن تتحقق .}$$

$$ب- -a < x < a \Leftrightarrow x < a$$

$$ج- a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$$د- a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

$$هـ- a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$$و- 0 < a < b, 0 < c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$$

$$ز- \forall c > 0 : ac < bc \Leftrightarrow a < b$$

$$ح- \forall c < 0 : ac < bc \Leftrightarrow a > b$$

$$ط- a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$$

$$ك- a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$ل- a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$$

$$م- إذا كان $a < b$ ، $a \cdot b > 0$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$$

$$ن- إذا كان $a \cdot b < 0$ وكان $a > b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$$

$$\forall 0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$\forall a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$

IV-1-3- حل المتراجحات : لا يختلف حل المتراجحات عن حل المعادلات ، سوى أن لبعض المعادلات حلولاً محددة ومعينة وذلك حسب طبيعة نوعها ، أما للمتراجحة فإن لها جملة حلول غير محدودة وغير معينة . ويمكن القول إن حل المتراجحة يدخل ضمن إيجاد مجموعة من الأعداد الحقيقية التي تحقق هذه المتراجحة .

IV-1-4- أشكال المتراجحات : تضم المتراجحات أشكالاً عديدة ، منها المتراجحات ذات الدرجة الأولى والتي يظهر فيها متحول واحد ، والمتراجحات الخطية أو غير الخطية حيث يكون في مثل هذه المتراجحات أكثر من متحول .

إن لكل شكل من أشكال هذه المتراجحات طرقاً معينة للتوصل لحلولها . سوف نتعرف على طرق الحل هذه من أشكال المتراجحات وفق الأمثلة التالية :

(1) المتراجحات ذات المجهول الواحد : وهي المتراجحات التي يدخل في تركيبها أحد رموزها ، ولها أحد الشكلين التاليين :

$f(x)$ تعبير جبري يحوي x أو $f(x) > 0$ أو $f(x) = a$
مثال : يطلب حل المتراجحة التالية :

$$2x + 3 < 9 - x$$

$$2x + x < 9 - 3$$

$$3x < 6$$

$$x < 2$$

إذاً $x < 2$ يعني أن $x \in]-\infty, +2[$ فالمتراجحة تقبل أي قيمة لـ x أصغر من القيمة 2 ولا تساويها (انظر الشكل) .



مثال : بفرض أن x عدد حقيقي موجب لا على التعيين ، أوجد حل المتراجحة التالية :

$$x^2 > 2x + 3$$

$$x^2 > 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \text{إن :}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow$$

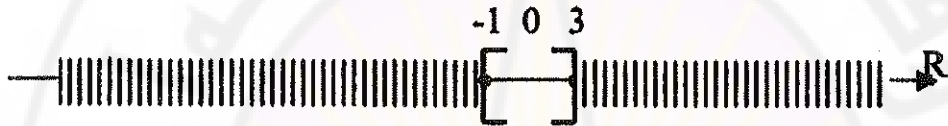
$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1) > 0 \text{ و } (x-3) > 0 \\ \text{أو} \\ (x+1) < 0 \text{ و } (x-3) < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > -1 \text{ و } x > 3 \\ \text{أو} \\ x < -1 \text{ و } x < 3 \end{array} \right.$$

أو من خلال الجدول التالي :

x	$-\infty$	-1	+3	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	0	+
$(x+1)(x-3)$	+	0	-	+

إذا إن جملة حلول المتراجحة السابقة يمكن تمثيلها من خلال المستقيم الموجه عبر المنطقة (أو القسم) المظللة .



وتعني أن :

$$\{x : x \in \mathbb{R}, x > 3 \text{ أو } x < -1\}$$

أي أن :

$$\{x : x \in \mathbb{R}, x > 3\} \cup \{x : x \in \mathbb{R}, x < -1\}$$

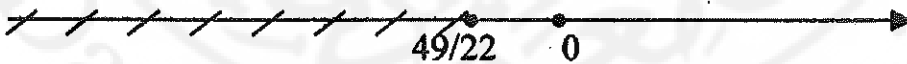
مثال : حل المتراجحة التالية :

$$\frac{x+3}{5} + 1 > \frac{2x-5}{3} + x$$

$$\text{الحل : } 3x + 9 + 15 > 10x - 25 + 15x$$

$$x < \frac{49}{22}$$

إذا يتمثل الحل في المجموعة $]-\infty, \frac{49}{22}[$ والشكل



المتراجحات المضاعفة (المثلثية - المزدوجة) : وهي المتراجحة التي يدخل في تركيبها رمزان للمتراجحات ولها أشكال عديدة أهمها :

$$(a < f(x) \text{ و } f(x) < b) \Leftrightarrow a < f(x) < b$$

فإذا رمزنا لمجال حلول المتراجحة الأولى بـ I_1 ولمجال حلول الأخرى بـ I_2 فلن
حل المتراجحة الأصلية يجب أن يحقق العلاقة : $I = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$
(إذا كان $I = I_1 \cap I_2 = \emptyset$ فليس للمتراجحة حلول وبالتالي فهي مستحيلة الحل).
مثال : حل للمتراجحة التالية :

$$5x + 1 < 2x - 3 < 7x + 2$$

الحل : لنكتب هذه المتراجحة من خلال المتراجحتين التاليتين :

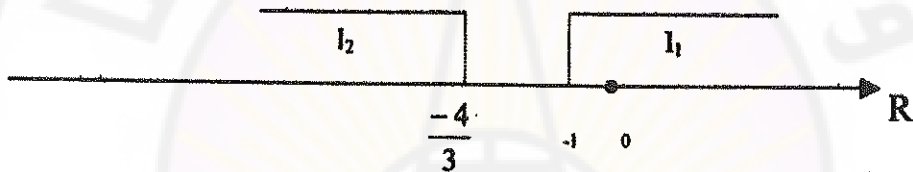
$$2x - 3 < 7x + 2 \quad \text{و} \quad 5x + 1 < 2x - 3$$

$$2x - 3 < 7x + 2 \Rightarrow 5x > -5 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in I_1 =]-1, \infty[$$

$$5x + 1 < 2x - 3 \Rightarrow 3x < -4 \Rightarrow x < -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in I_2 =]-\infty, -\frac{4}{3}[$$

وبالتالي فجملة حلول المتراجحة هذه هي :

$$x \in I_1 \cap I_2 =]-1, +\infty[\cap]-\infty, -\frac{4}{3}[$$



أي أن المتراجحة مستحيلة الحل .

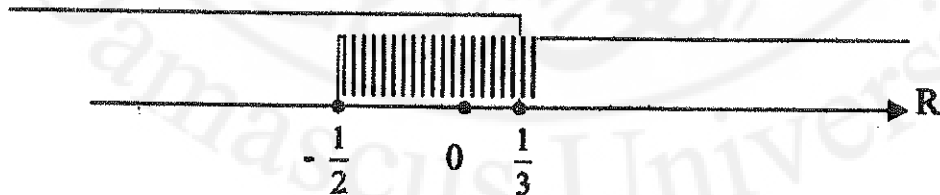
مثال : حل للمتراجحة التالية : $-2 + 3x < 7x < x + 2$
الحل :

$$-2 + 3x < 7x \Rightarrow 4x > -2 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \in]-\frac{1}{2}, \infty[= I_1$$

$$7x < x + 2 \Rightarrow 6x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{3}[= I_2$$

إذا فالحل هو :



$$x \in I_1 \cap I_2 =]-1/2, 1/3[$$

ملاحظة : كان بالإمكان حل المتراجحة هذه محتفظين برمزها أثناء الحل.
مثال : أثناء دراسة مردود إحدى الشركات بنهاية العام من مبيعات الإنتاج حدث خلاف بين مدير الإنتاج ومدير المبيعات حول الكمية المنتجة والكمية التي تم بيعها طوال عام (دون ادخار أي كمية في المخازن).

فقد ادعى مدير المبيعات أنه قد استلم الكمية المباعة طوال العام على ست أو سبع مراحل من خلال سيارات نقل تسع لـ 15 وحدة مصنعة ليتم توزيعها على مراكز البيع بمعدل 25 وحدة مصنعة لكل مركز وفي حين أشار أحد مراكز البيع أنه لم يستلم سوى 20 وحدة مصنعة ، فكيف يمكن التعرف على صحة هذه المشكلة وهل كان مدير الإنتاج على حق أم كان مدير المبيعات على حق ؟ وما هي عدد القطع المباعة ؟

الحل : إذا فرضنا أن عدد مراحل استلام الكمية هو 6 فإن عدد الوحدات المصنعة والمسلمة إلى مدير المبيعات هي :

$$15 \times 6 = 90 \quad \text{وحدة مصنعة}$$

وإذا فرضنا أن عدد مراحل استلام الكمية هو 7 فإن عدد الوحدات المصنعة والمسلمة إلى مدير المبيعات هي :

$$15 \times 7 = 105$$

بإفعداد الوحدات المصنعة والمسلمة إلى مدير المبيعات يتراوح بين 90 و 105 وحدة مصنعة ، وللتعرف على صحة القول ، نفرض أن عدد مراكز البيع والذي استلم كل منها 25 وحدة هو x ، فهذا يعني أن :

$$90 < 25x + 20 < 105$$

$$2\frac{20}{25} < x < 3\frac{10}{25} \quad \text{أي أن}$$

وباعتبار أن x هو عدد مراكز البيع والذي يجب أن يكون عدداً صحيحاً موجباً إذا $x = 3$ وبالتالي فعدد القطع المباعة والمسلمة إلى المركز هو :

$$25(3) + 20 = 95$$

(3) المتراجحات ذات الجداء: عبارة عن متراجحة أحد طرفيها عدد من المضارب (جداءات حدود في x)

والطرف الآخر هو الصفر وشكلها العام هو:

$$(a_1x \pm b_1)(a_2x \pm b_2)(a_3x \pm b_3) \dots (a_nx + b_nx + c_n) \dots > 0$$

تطلب إشارة المتراجحة $<$ أو $>$ دوراً هاماً وبارزاً في حل مثل هذه الأنواع من المتراجحات ، كون أن هذا الحل يجب أن يكون محققاً من خلال إشارة المتراجحة بالذات وسوف نتعرف على مثل هذا الدور من خلال الأمثلة التالية :

$$(x + 3)(2x^2 - 5x - 3) > 0$$

الحل : نحاول تحليل ثلاثي الحدود إلى مضاربيه :

$$(x + 3)(2x + 1)(x - 3) > 0$$

وهنا نكون أمام ثلاثة مضاريب (ثلاثة حدود) يجب أن يكون جداولها موجبا تماما ، أي هنا يجب الأخذ بعين الاعتبار إشارة كل مضروب (حد) من هذه المضاريب وبالتالي إشارة الجداء ككل . أي يجب أن نتعرف على المجال الذي تحقق فيه هذه المضاريب إشارة المتراجحة ، وهذا يتم من خلال تشكيل جدول نتعرف فيه على كل حد من هذه الحدود وبالتالي إشارة الجداء (أي قيم x المحققة للمتراجحة) :

x	$-\infty$	-3	$-1/2$	3	$+\infty$
$x + 3$	-	+	+	+	+
$2x + 1$	-	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+	+
$(x - 3)(2x^2 - 5x - 3)$	-	+	-	+	+

محققة في المجالين

$$I_1 =]-3, -1/2[$$

$$I_2 =]3, +\infty[$$

المتراجحات الكسرية (*) : تأخذ هذه المتراجحات شكل عبارة كسرية بسطها

$$0g(x) \neq f(x)$$

كثير حدود . طريقة حل هذا النوع من المتراجحات لا يختلف مطلقاً عن طريقة حل المتراجحات ذات المضاريب حيث نستعين هنا أيضاً وللتوصل إلى الحل بالجدول السالف الذكر .

مثال : أوجد مجال حلول المتراجحة التالية :

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} > 0 \quad (x \neq 1 \text{ و } x \neq -4)$$

الحل : انكتب للمتراجحة بشكل آخر :

$$\frac{(3x - 2)(x + 1)}{(x + 4)(x - 1)} > 0$$

انشكل الآن الجدول ولنتعرف على قيم x المحققة للمتراجحة :

x	$-\infty$	-4	-1	$2/3$	1	$+\infty$
$3x - 2$	-	-	-	-	+	+
$x + 1$	-	-	-	+	+	+
$3x^2 + x - 2$	+	+	-	-	+	+
$x + 4$	-	+	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	-	+
$x^2 - 3x - 4$	+	-	-	-	-	+
$(3x^2 + x - 2) / (x^2 - 3x - 4)$	+	-	+	+	-	+

إذا نتحقق المتراجحة في المجالات التالية :

$$I_1 =]-\infty, -4]$$

$$I_2 =]-1, \frac{2}{3}[$$

$$I_3 =]1, +\infty[$$

أمثال : أوجد حلول المتراجحة التالية :

$$\frac{x^2(2x^2 - x - 6)(x^2 + 15x + 10)}{(2x^2 + 3)(3x - 5)} > 5$$

$$(x \neq \frac{5}{3})$$

الحل : لنلاحظ أن كلا من المقدارين $x^2 + 1015 + 2x$ و $(3 + 2x^2)$ موجب ولا يتدخل في حلول المتراجحة .

لنضرب طرفي المتراجحة بـ $(3 + 2x^2)(3x - 5)$ فنحصل على المتراجحة :

$$x^2(2x^2 + 3)(3x - 5)(2x^2 - x - 6)(x^2 + 15x + 10) > 0$$

إذا إشارة المتراجحة من إشارة المقدار :

$$x^2(x^2 + 15x + 10)(3x - 5)(2x^2 - x - 6)$$

(*) يمكن حل هذا النوع من المتراجحات أيضاً في بعض الحالات من خلال التخلص من المقام وذلك بضرب طرفي المتراجحة بمربع المقام (وليس بالمقام) الذي هو موجب وبالتالي فلا تتغير إشارة المتراجحة وبعد عملية الضرب يتم التخلص من المقام وتحول هذه المتراجحة إلى متراجحة ذات مضارب .

أي علينا حل المتراجحة :

$$(3x - 5) x^2 (2x^2 - x - 6) > 0$$

أو :

$$x^2 (3x - 5) (x-2) (2x + 3) > 0$$

لنشكل الجدول :

x	$-\infty$	$-3/2$	0	$5/3$	2	∞
$3x - 5$	-	-	-	+	+	+
x^2	-	-	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	+	+
$2x + 3$	-	+	+	+	+	+
الطرف الأيسر من المتراجحة	+	-	+		-	+

إذا قيم x المحققة للمتراجحة متمثلة باجتماع المجالات التالية :

$$I_1 =]-\infty, -\frac{3}{2}[\quad I_2 =]0, \frac{5}{3}[\quad I_3 =]0, \infty[$$

(5) - المتراجحات ذات المجهولين : ويمكن التطرق إليها من خلال

المتراجحات الخطية بمجهولين والمتراجحات غير الخطية بمجهولين .
- المتراجحات الخطية بمجهولين : وهي المتراجحات التي يكون
لأحد أطرافها الشكل الخطي لمجهولين والطرف الآخر للصفر
وشكلها العام هو :

$$ax + by + c > 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

ولحلها علينا التفتيش عن النقاط (x,y) التي تحقق المتراجحة أي التي تجعل
المقدار $ax + by + c$ موجباً تماماً

لنكتب المقدار $ax + by + c$ بالشكل التالي :

$$b \left(\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} \right)$$

ولنجعله مساوياً للصفر :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

وهنا نكون قد حصلنا على معادلة مستقيم في المستوي ميله $-\frac{a}{b}$ ويمر

بالنقطة $(0, -\frac{c}{b})$ فالنقاط

(x, y) التي تقع على المستقيم $ax + by + c = 0$ تحقق معادلته دون أي شك أما ما يهمنا فهو البحث عن النقاط (x, y) التي تجعل المتراجحة :

$$ax + by + c > 0$$

محقة

تتم عملية البحث عن النقاط هذه من خلال إحدى الطريقتين التاليتين :

أولاً - طريقة القوى التحليلية لنقطة بالنسبة لمستقيم .

ثانياً - طريقة الشعاع العمودي على مستقيم .

أولاً : طريقة القوة التحليلية لنقطة بالنسبة لمستقيم .

الشكل العام لمعادلة مستقيم ما يمر من النقطة (x, y) هو :

$$ax + by + c = 0$$

$$a, b, c \neq 0$$

نفرض أن $M_0(x_0, y_0)$ نقطة ما تقع على المستوى XOY ، نسمي العدد (أو القيمة) A_0 المعطاة بالعلاقة :

$$c + a_0x + b_0y = A_0$$

بالقوة التحليلية للنقطة M_0 بالنسبة للمستقيم المذكور .

ثانياً : طريقة الشعاع العمودي على مستقيم :

إن الشكل العام لمعادلة أي مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات هو $ax + by = 0$ أو

$y = -\frac{a}{b}x$ حيث $m = -\frac{a}{b}$ ميل هذا المستقيم ، وكما نعلم من الهندسة التحليلية أن

العلاقة التي تربط ميلاً مستقيماً ما بميل مستقيم معامد له تعطى من خلال المعادلة التالية :

$$m \cdot m' = -1$$

(حيث m' هو ميل أي مستقيم يعامد المستقيم $y = -\frac{a}{b}x$ أي أن :

$$m' = \frac{b}{a}$$

إذا فمعادلة المستقيم المعامد للمستقيم المفروض هي : $y = \frac{a}{b}x$ أو $bx -$

$ay = 0$ أي أن النقطة (a, b) تقع على المستقيم المتعامد كون أنها تحقق معادلته .

فإذا أردنا حساب القوة التحليلية لنقطة ما $M(a,b)$ بالنسبة للمستقيم $by = +ax$ 0 لوجدنا أن :

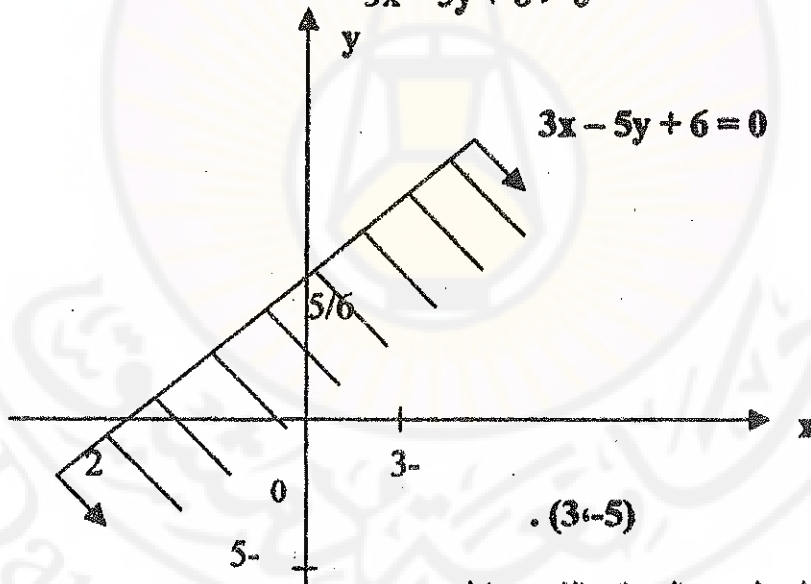
$$A_0 = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 > 0$$

هذا يعني أن القوة التحليلية للنقطة $M(a,b)$ موجبة ، تساعدنا على معرفة المنطقة التي تكون فيها إشارة القوة التحليلية لنقاطها موجبة بالنسبة للمستقيم $ax + by = 0$ بالمر من مبدأ الإحداثيات .

لهذا نرسم الشعاع OM الذي مبدؤه مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ ونهايته النقطة $M(a,b)$ فالاتجاه هذا الشعاع هو الاتجاه الذي يحدد لنا منطقة الحلول المقبولة للمتراجحة (المنطقة التي تكون فيها إشارة القوة التحليلية لنقاطها موجبة بالنسبة للمستقيم $ax + by = 0$). وأن عملية استبدال المستقيم بالمر بمبدأ الإحداثيات $ax + by = 0 + by = 0$ بمستقيم آخر معادلته $ax + by + c = 0$ لا يؤثر في معرفة تحديد المنطقة لأننا نحصل على المستقيم $ax + by + c = 0$ من معادلة المستقيم $ax + by = 0$ بعملية انسحاب للمستقيم المفروض ناتجة عن إضافة المقدار c .. ملاحظة : الطريقة الثانية لا تطبق إلا على المتراجحات الخطية فقط .

مثال : لوجد منطقة حلول المتراجحة التالية :

$$3x - 5y + 6 > 0$$



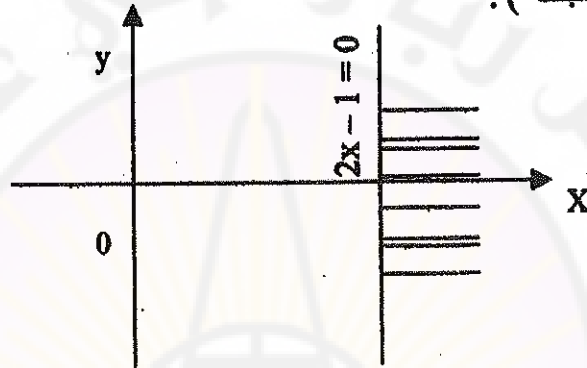
الحل : لنرسم المستقيم الذي معادلته :

$$3x - 5y + 6 = 0$$

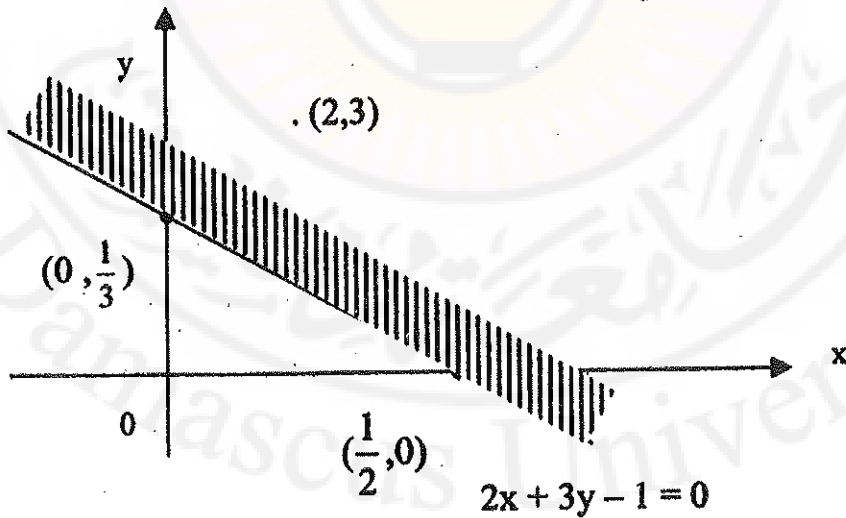
ولنرسم الشعاع OM الذي مبدؤه مبدأ الإحداثيات : ونهايته النقطة $O(0,0)$ ونهايته النقطة $M(3,-5)$

فيكون اتجاه الشعاع $\vec{OM}$ هو المؤشر على مكان المنطقة الموجبة التي تحقق المتراجحة المفروضة حيث نقوم بتظليل هذه المنطقة .

مثال : لوجد منطقة حلول المتراجحة $0 < x - 1$ إن المستقيم الذي معادلته $x - 1 = 0$ هو كما في الشكل فإذا أخذنا على أحد جانبي هذا المستقيم النقطة $(2,5)$ لوجدنا أن المتراجحة محققة إذا فالجانب الذي يحوي هذه النقطة هو منطقة حلول هذه المتراجحة (إن الجانب المظلل هو الجانب الذي يحوي أي حل لهذه المتراجحة) .



مثال : يطلب إيجاد منطقة حلول المتراجحة التالية : $2x + 3y - 1 > 0$
لنرسم المستقيم الذي معادلته $2x + 3y - 1 = 0$
كما في الشكل التالي :



لنلاحظ أنه وبعد رسم هذا المستقيم ، تم تقسيم المستوي إلى قسمين .
لنأخذ نقطة ما وليكن (2,3) وذلك للتعرف على القسم الذي يحقق المتراجحة بالتبديل في المتراجحة نجد أن :

$$2.2+3.3 - 1 > 0$$

$$12 > 0$$

إذا فالمتراجحة محققة ، وبالتالي فإن الجزء الذي يحقق هذه المتراجحة هو الجزء المظلل .

مثال : يطلب إيجاد منطقة حلول المتراجحة التالية :

$$X - 2y + 5 < 0$$

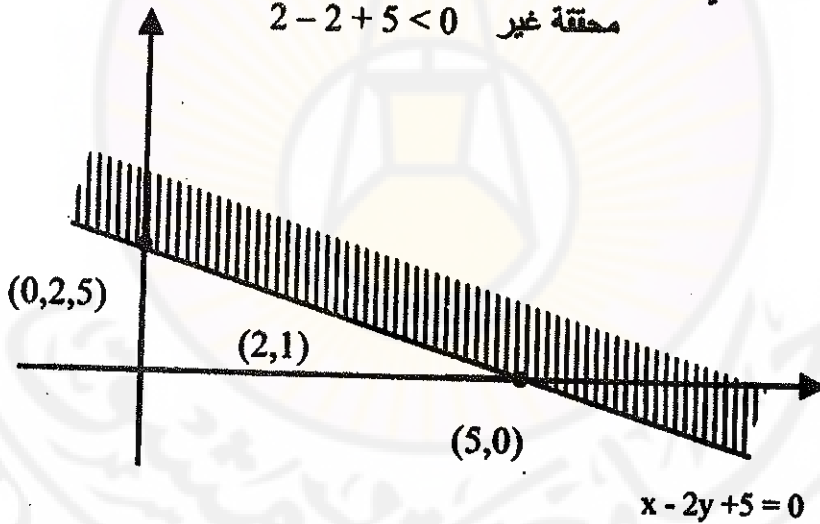
بأسلوب المثال السابق نفسه نجد أن المستقيم الذي معادلته $x - 2y + 5 = 0$

هو الوارد في الشكل

وإذا ما أخذنا نقطة وليكن النقطة (2,1) لوجدنا أن الجزء الذي يحوي هذه النقطة لا يحقق هذه المتراجحة ،

أي أن :

$$2 - 2 + 5 < 0 \text{ محققة غير}$$

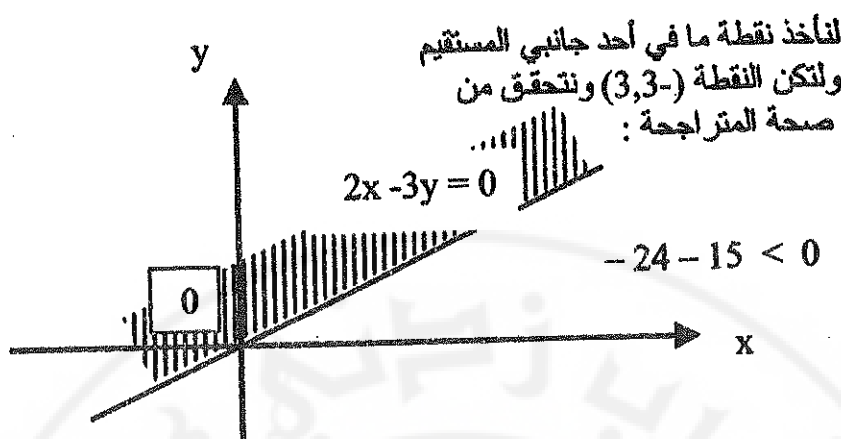


إذا فمجموعة النقاط المحققة للمتراجحة هي الواقعة في الجزء المظلل .

مثال : لوجد منطقة حلول المتراجحة التالية :

$$8x - 5y < 0$$

لنرسم المستقيم الذي معادلته $8x - 5y = 0$ كما في الشكل والذي هو مستقيم مار بمبدأ الإحداثيات (0,0)



إذا إن هذه النقطة تحقق المتراجحة ، و بالتالي فجميع نقاط المستوي الواقعة في الجزء الذي يحوي هذه النقطة يحقق المتراجحة (أي الجزء المظلل يحقق هذه المتراجحة) .

مثال : لنفرض أن لدينا معادلة المستقيم التالي :

$$5x - 4y + 3 = 0$$

إن القوة التحليلية للنقطة $M(7,3)$ بالنسبة للمستقيم هي :

$$0 < 26 = 3 + 3 \cdot 4 - 7 \cdot 5 = {}_0A$$

أما القوة التحليلية للنقطة $M(3-,3-)$ بالنسبة للمستقيم المفروض فهي :

$$0 = 3 + (3-)4 - (3-)5 = {}_0A$$

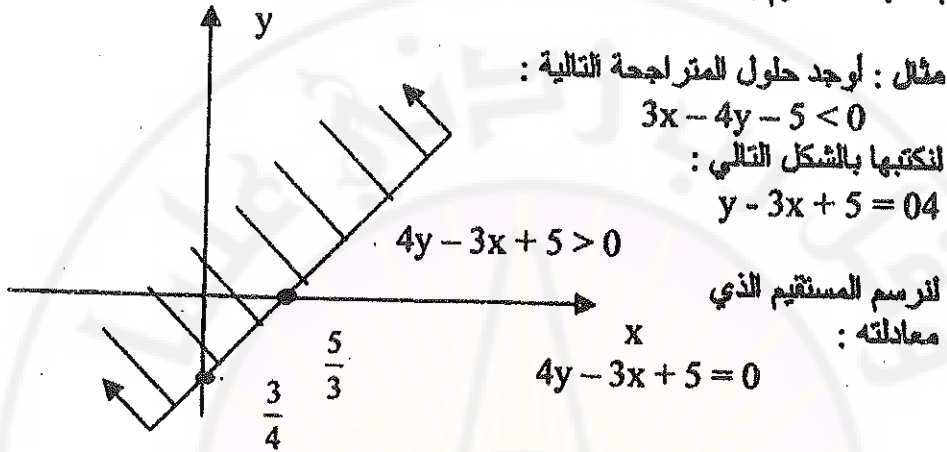
كما وأن النقطة $M(2,5)$ بالنسبة للمستقيم المفروض هي :

$$.4 - 2 \cdot 5 = {}_0A$$

$$0 > 7 - = 3 + 5$$

مما سبق نلاحظ أنه يمكن أن تكون القوة التحليلية إما موجبة أو معدومة أو سالبة وذلك حسب إحداثيات النقطة المتعلقة بها وحسب إشارة القيمة العددية فقط بالنسبة لهذه القوة والذي يكون عائداً لوضع النقطة في أحد نصفي المستوي المقسوم من خلال المستقيم المعطى لدينا . ويمكن القول إن إشارات القوة التحليلية في أحد نصفي المستوي تكون واحدة وذلك مهما تكن إحداثيات النقطة الواقعة في نصف المستوي المذكور .

وبالعودة إلى المتراجحة $ax + by + c > 0$ فنجد أنه تحققها تماماً يكون بالنسبة لجميع النقاط التي تكون فيها القوة التحليلية بالنسبة للمستقيم $ax + by + c = 0$ موجبة. والخلاصة : التعرف على المنطقة التي تكون فيها المتراجحة الخطية ذات المجهولين محققة ما علينا إلا تطبيق النقطة $M(0, 0)$ في معادلة المستقيم الممثل للطرف الأيسر لهذه المتراجحة والتعرف على القوة التحليلية لهذه النقطة بالنسبة للمستقيم .



وانأخذ النقطة $M(0, 0)$ عليه والتي لا تقع على المستقيم المعطى فنجد أن :

$$0 < 5 = 5 + 0 - 0 = A_0$$

وهي تحقق المتراجحة ، إذا فالمنطقة المظللة هي المنطقة التي تحقق المتراجحة المطلوبة .

حل جملة متراجحات خطية بمجهولين .

لا تختلف عملية إيجاد منطقة حل عدة متراجحات خطية بعدة مجاهيل عن حل المتراجحة الخطية بمجهولين وأن التوصل للحل يكون بالتعرف على منطقة حل كل متراجحة وحدها ، ثم إيجاد المنطقة المشتركة لجملة المتراجحات .

مثال : يطلب إيجاد منطقة حلول المتراجحتين التاليتين :

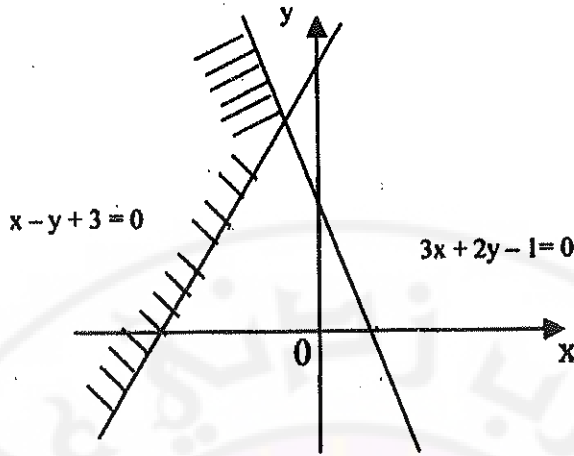
$$3x + 2y - 1 < 0$$

$$x - y + 3 < 0$$

لنرسم المستقيمين في مستوى الإحداثيات XOY :

$$3x + 2y - 1 = 0$$

$$x - y + 3 = 0$$



ولنحدد مناطق حلول كل من المتراجحتين ، ونقوم بتظليل الأجزاء التي تحقق كلا من المتراجحتين فنحصل على المنطقة المشتركة لجملة المتراجحتين .

مثال : أوجد منطقة حلول المتراجحتين التاليتين معاً:

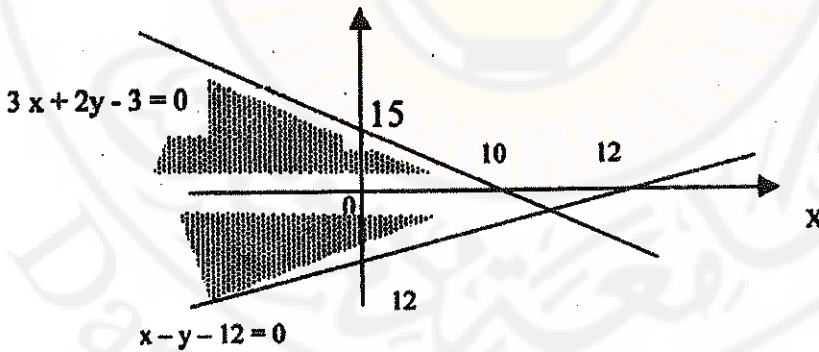
$$3x + 2y - 30 < 0$$

$$x - y - 12 < 0$$

لنرسم في مستوى الإحداثيات x, y المستقيمين:

$$3x + 2y - 30 = 0$$

$$x - y - 12 = 0$$



لنحدد منطقة الحل المشترك لكلا المتراجحتين :
حيث نظلل الأجزاء التي تحقق كلا من المتراجحتين فنحصل على المنطقة المشتركة لجملة المتراجحتين.

مثال : أوجد منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحتين التاليتين :

$$2x + 3y \leq 9$$

$$x + 2y \leq 6$$

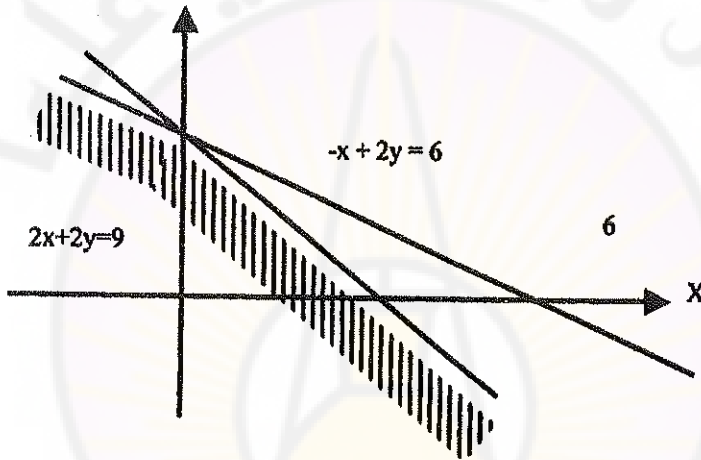
إن المستقيمين الموافقين للمعادلتين :

$$2x + 3y = 9$$

$$-x + 2y = 6$$

هما كما في الشكل :

أما المناطق التي تحقق هاتين المتراجحتين فهي كما في الشكل المذكور، حيث نجد أن منطقة الحل المشترك هي القسم المظلل .



مثال : أوجد منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحات التالية :

$$x \leq 4$$

$$y \leq 3$$

$$x + 2y \leq 8$$

انرسم في مستوى الإحداثيات xOy

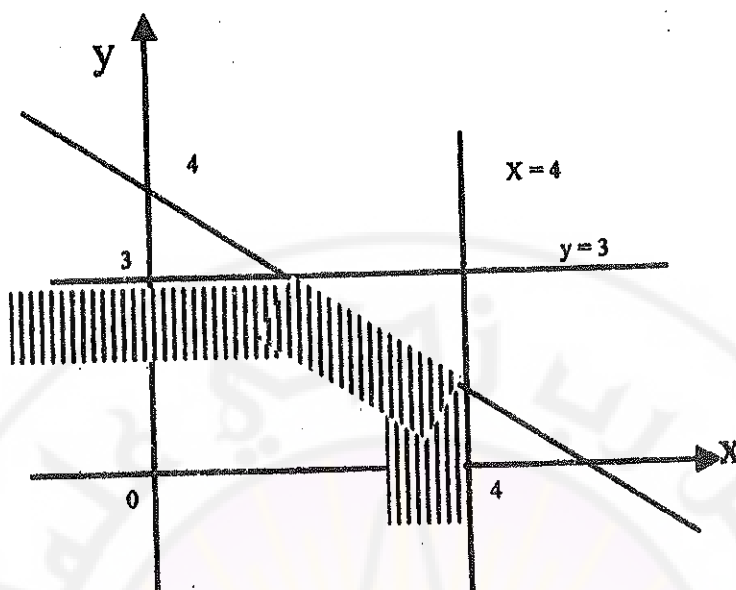
المستقيمات التالية :

$$x = 4$$

$$y = 3$$

$$x + 2y = 8$$

انحدد المناطق التي تحقق المتراجحات السابقة . بعدها نوجد منطقة الحل المشترك حيث نستبعد الجزء غير المظلل الذي لا يحقق هذه المتراجحات .



مثال : أوجد حل جملة المتراجحات الخطية التالية :

$$3x - 2y + 5 > 0$$

$$x + y + 7 > 0$$

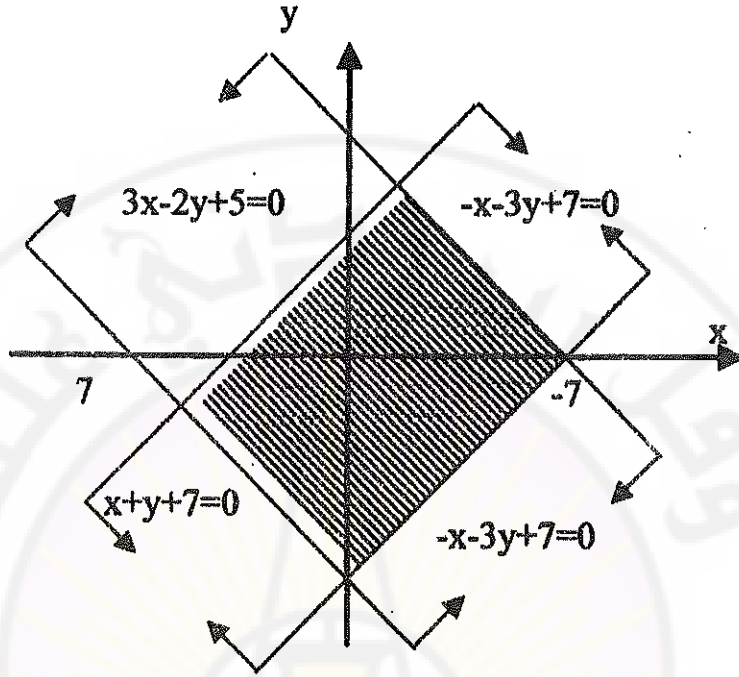
$$-x + y + 7 > 0$$

$$-x - 3y + 7 > 0$$

الحل : لنرسم في مستوي

الإحداثيات XOY المستقيم الموافق لكل معادلة من المعادلات التي تمثلها المتراجحات السابقة ثم لنحدد بالنسبة لكل متراجحة منطقة القبول (الموافقة) لتلك المتراجحة .

فنجد أن المنطقة المظللة المشتركة بالنسبة لجميع المتراجحات هي المنطقة المقبولة والتي تمثل حل جملة المتراجحات السابقة .



IV-2- نماذج البرمجة الخطية : تعمل هذه النماذج على مساعدة العاملين على اتخاذ القرارات التي تتدخل فيها البدائل العديدة المحققة لأعظم ربح ممكن أو لأقل تكلفة ممكنة.

يتطلب تطبيق نماذج البرمجة الخطية توفر عدة شروط هي:

- وجود هدف يسعى إليه متخذ القرار.
- وجود بدائل يسعى إليها متخذ القرار مستخدماً نماذج البرمجة الخطية لتحقيق الهدف.
- ترتبط متغيرات نموذج البرمجة الخطية من خلال علاقة خطية توضح المشكلة التي من أجلها يسعى متخذ القرار لحلها تكون على شكل مترادفات أو معادلات.

- توضع هذه الشروط وفق نموذج رياضي يتمثل في :

- تابع الهدف الذي يكون على شكل تعظيم Max أو تقليل Min
- مجموعة من المترادفات ((أو المعادلات أو الاثنين معاً)) التي تعبر عن قيود الإمكانيات والموارد المتاحة.
- قيود الإيجابية ((عدم السلبية)) .

سوف يتم التعرف على نماذج البرمجة الخطية من خلال التطبيقات التالية:

مثال رقم (1) : يتوافر لدى مصنع مادتان أوليتان R_1 و R_2 بكميات متاحة b_1 و b_2 (حيث $b_1 = 40$ وحدة و $b_2 = 60$ وحدة) تدخلان في تصنيع منتجين P_1 و P_2 بمردود على التوالي $C_1 = 10$ وحدات نقدية و $C_2 = 15$ وحدة نقدية فإذا علمت أن العوامل الفنية (الاستهلاكات الخاصة) هي كما في الجدول التالي (I - 13) والمطلوب تحديد الخطة المثلى لإنتاج هذا المصنع بحيث يحقق أعظم الأرباح (أي تحديد كمية إنتاج P_1 و P_2).

الكمية المتاحة	P_1	P_2	الإنتاج
المواد الأولية			
R_1	4	2	40
R_2	2	6	60
المردود	15	10	

الجدول (I - 13)

الحل: من خلال التعرف على المسألة نستطيع صياغة نموذجها وفق الشكل التالي:

$$\text{Max} z = 10x + 15y$$

$$40 > x + 4y \quad 2$$

$$60 > y + 2x \quad 6$$

$$0 < x \text{ و } 0 < y$$

((حيث رمزنا بـ x لكميات إنتاج P_1 وبـ y لكميات إنتاج P_2)).

إن العلاقة الأولى $\text{Max} z = 10x + 15y$ تمثل هدف المسألة وهي في تحقيق أعظم ما يمكن من الأرباح من خلال تحديد عدد الوحدات المنتجة التي يجب على المصنع تصنيعها.

أما المتراجحة الأولى $40 > x + 4y \quad 2$ فتبين أن الكميات المتاحة من المادة الأولية R_1 والتي تدخل في تركيب المنتجين هي 40 وحدة.

والمتراجحة الثانية $60 > y + 2x \quad 6$ فتبين أن الكميات المتوافرة من المادة الأولية R_2 والتي تدخل في تركيب المنتجين هي 60 وحدة.

وأما $0 < x$ ، $0 < y$ فتدل على أن الكميات المنتجة من P_1 و P_2 يجب أن تكون موجبة.

لنرسم المستقيمين :

$$y = 404x + 2$$

$$60 \quad y = 2x + 6$$

كما في الشكل (14 - I)

إن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة والممتلئة من خلال المضلع OABC نستطيع بخطوات المثال (1) نفسه أن نتعرف على النقطة من منطقة الحلول المقبولة والتي تجعل تابع الهدف أعظمياً، حيث نجد أن :

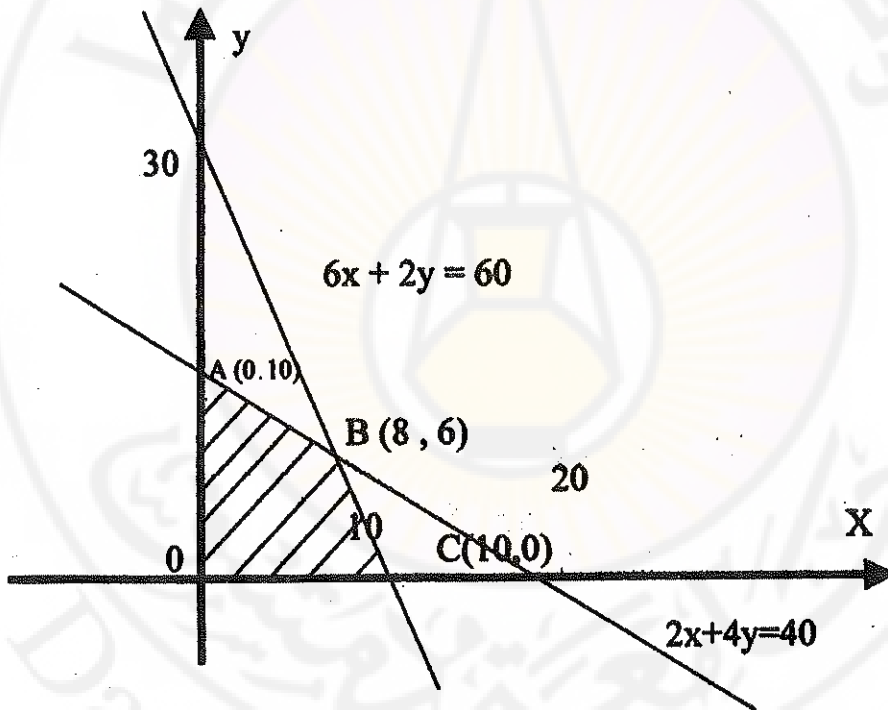
$$\max z = 0 \Rightarrow O(0.0)$$

$$150 = \max z \Rightarrow A(0.10)$$

$$= \max z \Rightarrow B(6.8)170$$

$$100 = \max z \Rightarrow C(10.0)$$

إن فإن أعظم قيمة لتابع الهدف هي 170 وحدة وذلك من أجل $8 = p_1$ و $6 = p_2$.



مثال (2): يحوي مصنع خطي إنتاج : ينتج للخط الأول السلعة A، وللخط الثاني السلعة A2 فإذا علمت أن الوحدة الواحدة من السلعة A تحتاج لـ 2.5 ساعة عملاً في القسم الأول و 3 ساعات عمل في القسم الثاني وساعة واحدة في القسم الثالث.

وأن الوحدة الواحدة من السلعة A2 تحتاج لساعة عمل واحدة في القسم الأول و3 ساعات عمل في القسم الثاني وساعتي عمل في القسم الثالث. وأن ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 20 ساعة وفي القسم الثاني 30 ساعة وفي القسم الثالث 16 ساعة أسبوعياً وأن ربح الوحدة الواحدة من السلعة A₁ هو 3 وحدات نقدية ومن السلعة A₂ هو 4 وحدات نقدية فالمطلوب الخطة المثلى لإنتاج المصنع بحيث يحقق المصنع أعظم ما يمكن من الأرباح.

الحل : نستطيع صياغة المسألة نفسها وفق الجدول التالي (I - 15)

الاقسام \ الإنتاج	إنتاج الخط (1) x_1	إنتاج الخط (2) x_2	المتاح من ساعات العمل
1	2.5	1	20
2	3	2	30
3	1	3	16

الجدول (I - 15)

حيث من خلال هذا الجدول نستطيع وضع المسألة وفق النموذج التالي:

$$2x_4 + {}_1\text{Max}z = 3x$$

$$20 \leq {}_2x + {}_1x2.5$$

$$30 \leq {}_2x3 + {}_1x3$$

$$16 \leq {}_2x2 + {}_1x$$

$$0 \geq {}_2x, {}_1x$$

حيث رمزنا ب x_1 للكمية المنتجة من السلعة A₁ وب x_2 للكمية المنتجة من السلعة A₂.

تمثل المعادلة الأولى: ${}_2\text{Max}z = 3x + 4x$

تابع الهدف في المسألة ويكمن هذا الهدف في الحصول على أعظم ما يمكن من الأرباح، أي في تحديد الكميات x_1 و x_2 التي تحقق الربح الأعظمي.

أما المتراجعة الأولى $20 \leq {}_2x + x2.5$ فتبين أن عدد ساعات العمل المتاحة لدى القسم الأول يجب أن لا تتجاوز الـ 20 ساعة أسبوعياً. والمتراجعة الثانية $30 > {}_2x3 + {}_1x3$ تبين أن عدد ساعات العمل المتاحة لدى القسم الثاني لا تتجاوز الـ 30 ساعة عملاً أسبوعياً. أما المتراجعة الثالثة $16 \leq {}_2x2 + {}_1x$

فقطين أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الثالث لا تتجاوز الـ 16 ساعة أسبوعياً.

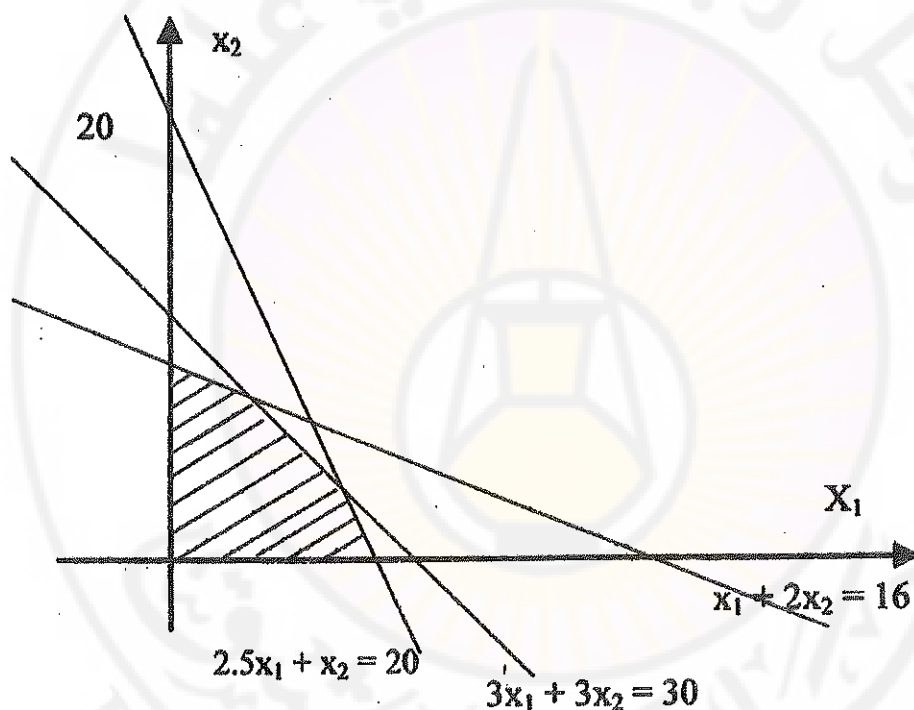
وأما $x_1, x_2 \geq 0$ فتدل على أن الكميات المنتجة من x_1 و x_2 يجب أن تكون موجبة. لنرسم الآن المستقيمات :

$$2.5x_1 + x_2 = 20$$

$$3x_1 + 3x_2 = 30$$

$$16 = x_1 + 2x_2$$

كما في الشكل (I - 16) إن منطقة الحلول المقبولة هي المنطقة المظللة والممثلة من خلال المضلع OABC وبخطوات حل المثالين السابقين نفسها نستطيع أن نتعرف على النقطة من منطقة الحلول المقبولة والتي نجعل تابع الهدف أعظم ما يمكن.



الشكل (I-16)

حيث نجد أن :

$$O(0,0) \Rightarrow \max z = 3x_1 + 4x_2 = 0$$

$$A(0,8) \Rightarrow \max z = 3 * 0 + 8 * 4 = 32$$

$$B(4,6) \Rightarrow \max z = 3 * 4 + 6 * 4 = 36$$

$$C(6,7,3,3) \Rightarrow \max z = 3 * 6,7 + 4 * 3,3 = 33,3$$

$$D(8,0) \Rightarrow \max z = 3 * 8 + 4 * 0 = 24$$

إن فإن أعظم قيمة لتابع الهدف هي 36 وحدة وذلك من أجل $x_1 = 4$ و $x_2 = 6$.

مثال (3) : تتم عملية تصنيع منتجين p_1 و p_2 مستخدمين أربعة مواد أولية M_1, M_2, M_3, M_4 إن المتاحة : من المواد الأولية والعوامل الفنية (الاستهلاكات الخاصة) ومردود الوحدة الواحدة، معطى حسب الجدول التالي (I - 10).

Pj \ Mi	العوامل الفنية		المتاح بالطن
	p1	p2	
M1	2	2	12
M2	1	2	8
M3	4	0	16
M4	0	4	12
مردود الوحدة للوحدة	2	3	

الجدول (I - 10)

والمطلوب تحديد الكميات x و y التي يجب إنتاجها من p_1 و p_2 حتى نصل إلى أعظم ما يمكن من الأرباح.
الحل : من خلال التعرف على المسألة بعمق نستطيع صياغتها وفق النموذج التالي:

$$\max Z = 2x + 3y$$

$$2x + 2y \leq 12$$

$$y + x \leq 8$$

$$x + 0y \leq 16$$

$$x + 4y \leq 12$$

$$x \geq 0 \text{ و } y \geq 0$$

$$x + 3y = \max Z \text{ حيث العلاقة الأولى}$$

تمثل هدف المسألة وهو تحقيق أعظم ما يمكن من الأرباح من خلال عدد الوحدات المنتجة التي يجب على المصنع تصنيعها.

أما المتراجحة الأولى $x + 2y \leq 12$ فهي تعطينا الكميات المتاحة من المادة الأولية M_1 التي تدخل في تركيب المنتجين P_1 و P_2 .

والمتراجحة الثانية $x + 2y \leq 8$ فتعطينا الكميات المتوافرة من المادة الأولية M_2 التي تدخل في تركيب المنتجين.

والمتراجحة الثالثة $x + 0y \leq 16$ فتبين لنا الكميات المتوافرة من المادة الأولية M_3 التي تدخل في تركيب المنتجين.

والمتراجحة الرابعة $y \leq 12$ فتبين لنا الكميات المتوافرة من المادة الأولية M_4 التي تدخل في تركيب المنتجين.

تعد القيود الأربعة السابقة قيوداً فنية يتم تحديدها من خلال المخطط الإنتاجي الذي يدخل في عملية التصنيع.

وأما $x \geq 0$ و $y \geq 0$ فتبين أن الكميات المنتجة من P_1 والكميات المنتجة من P_2 يجب أن تكون موجبة دوماً، وهذا ما قصدها بشرط عدم السلبية. إذا قمنا برسم المستقيمات :

$$y \leq 12$$

$$x + 2y = 8$$

$$x + 0y \leq 16$$

$$y \leq 12$$

كما في الشكل (I - 11) لوجدنا أن منطقة الحلول التي تحقق المتراجحات السابقة هي القسم المظلل في الشكل السابق نفسه.

يتبين من الشكل (I - 11) أن المضلع OABCD والمظلل الذي يعطينا منطقة حلول المسألة وفق القيود المتعلقة بها. أما التعرف على تلك النقطة من منطقة الحلول هذه والتي تحقق تابع الهدف فيتم على النحو التالي:

نرسم مستقيماً يمثل تابع الهدف ميله $2/3$ ماراً بمبدأ الإحداثيات، ثم نحرك هذا المستقيم (بالشكل الذي نحافظ على ميله) بحيث يسمح منطقة الحلول المقبولة، إن أعلى نقطة (x,y) من منطقة الحلول المقبولة، هي النقطة التي تحقق القيود وتجعل لتابع الهدف أعظم ما يمكن من القيم. ولأن التعرف على مثل هذه النقطة وإيجادها يتطلب الدقة المتناهية في حركة المستقيم ومن ثم مسح نقاطه جميعاً، لهذا نستطيع الاعتماد على النظرية التي تبين أن مثل هذه النقطة ليست إلا أحد رؤوس المضلع المحدب OABCD ، فإذا ما أوجدنا إحداثيات هذه الرؤوس وبدلنا في تابع الهدف لأمكن التعرف على تلك النقطة التي تجعل من تابع الهدف أعظم ما يمكن، أي أن:

$$O(0.0) \Rightarrow \max z = 2x + 3y = 0$$

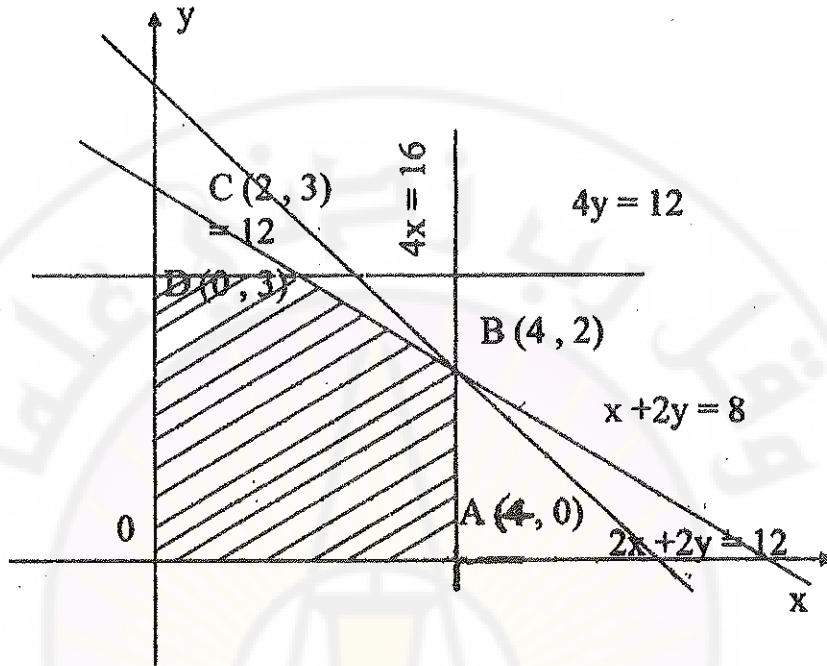
$$A(4.8) \Rightarrow \max z = 2.4 = 8$$

$$B(4.2) \Rightarrow \max z = 2.4 + 2.4 = 14$$

$$C(2.3) \Rightarrow \max z = 2.2 + 3.3 = 13$$

$$D(0.3) \Rightarrow \max z = 2.0 + 3.3 = 24$$

إن النقطة $B(4.2)$ هي التي تجعل تابع الهدف أعظماً، إذن فعلى المصنع أن ينتج 4 وحدات من السلعة P_1 وحدثين من السلعة P_2 حتى يحقق أعظم ما يمكن من الأرباح وتكون نسبة الاستخدام هي كما في الجدول التالي (I - 12)



المادة الأولية	الكمية المستهلكة لإنجاز الخطة المثلى	الكمية المتاحة	نسبة الاستخدام %
M_1	$2.4 + 2.2 = 12$	12	100
M_2	$1.4 + 2.2 = 8$	8	100
M_3	$4.4 + 0.2 = 16$	16	100
M_4	$0.4 + 4.2 = 8$	12	66.7

الجدول رقم (1-12)

مثال (4): يود صاحب منشأة دواجن أن تحصل دواجنه على ثلاث مواد غذائية أساسية A, B, C حيث يحتاج يومياً إلى 14 وحدة من A و 12 وحدة من B و 18 وحدة من C والعلف x_1 يحتوي على وحدتين من A ووحدة واحدة من B و C. أما للعلف x_2 فيحتوي على وحدة واحدة من A ومن B و 3 وحدات من C، وكلفة الوحدة الواحدة من x_1 هي وحدتين وكلفة الوحدة الواحدة من x_2 هي 4 وحدات. فالمطلوب تحديد النسبة التي تدخل في العلف والتي تحقق غاية صاحب المنشأة بأقل التكاليف الممكنة.

الحل : نستطيع صياغة نص المسألة وفق الجدول التالي (I - 17).

الغذاء \ العلف	العلف الأول x_1	العلف الثاني x_2	المتاح
A	2	1	14
B	1	1	12
C	1	3	18
التكلفة	2	4	

حيث من خلال هذا الجدول نستطيع صياغة المسألة وفق النموذج التالي:

$$(2x_1 + 4x_2) \text{ Min } z = \min (2x_1 + 4x_2)$$

$$14 \leq x_1 + 2x_2$$

$$12 \leq x_1 + x_2$$

$$18 \leq x_1 + 3x_2$$

$$0 \leq x_1, x_2$$

تمثل المعادلة الأولى: $(2x_1 + 4x_2) \text{ Min } z = \min (2x_1 + 4x_2)$

تابع الهدف في المسألة والذي يمكن في الوصول إلى أقل التكاليف، أي في جعل كل من العلف x_1 و x_2 أقل ما يمكن.

أما المتراجحة الأولى $14 \leq x_1 + 2x_2$ فتبين أن حاجة الدواجن من المادة الغذائية A هي على الأقل 14.

والمتراجحة الثانية $12 \leq x_1 + x_2$ تبين أن حاجة الدواجن من المادة الغذائية B هي على الأقل 12.

والمتراجحة الثالثة $18 \leq x_1 + 3x_2$ تبين أن حاجة الدواجن من المادة الغذائية C هي على الأقل 18.

وأما شرط عدم السلبية فيمكن في جعل x_1 و x_2 يساوي الصفر أو أكبر منه.

لنرسم الآن المستقيمات :

$$14 = x_1 + 2x_2$$

$$12 = x_1 + x_2$$

$$18 = x_1 + 3x_2$$

كما في الشكل (I - 18) إن منطقة الحلول المقبولة هي المظللة في الربع الأول والمحددة بالمحورين x_1 و x_2 والنقاط A, B, C, D ونستطيع التعرف على النقطة من منطقة الحلول المقبولة والتي تجعل تابع الهدف أقل ما يمكن حيث نجد أن :

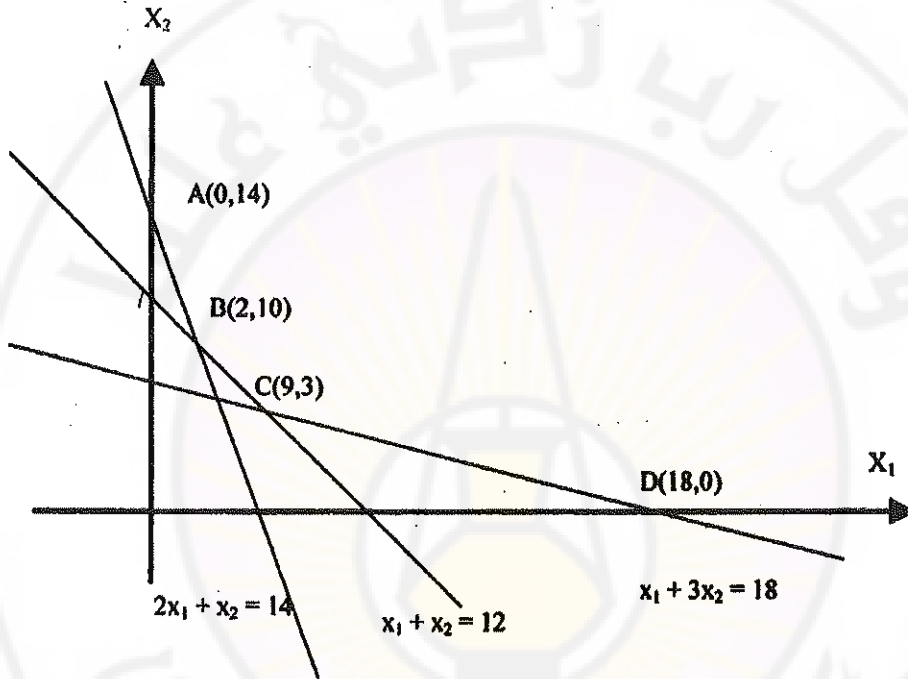
$$A(0,14) \Rightarrow \min z = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 14 = 56$$

$$B(2,10) \Rightarrow \min z = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 10 = 44$$

$$C(9,3) \Rightarrow \min z = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 30$$

$$D(18,0) \Rightarrow \min z = 2 \cdot 18 + 4 \cdot 0 = 36$$

إذا أقل ما يمكن من التكاليف هو 30 وحدة نقدية وذلك من أجل $x_1 = 9$ و $x_2 = 3$





المصطلحات العلمية باللغة الأجنبية

- A -

Abscisa	إحداثي سيني
Absolut	مطلق
Absolut value	قيمة مطلقة
Addition	جمع
Addition and subtraction	الجمع والطرح
Administration	الإدارة
Analysis	تحليل
Anti differentiation	عكس التفاضل
Anti derivative	عكس المشتق
Applications	تطبيقات
Average	معدل
Average cost	معدل التكلفة
Average rate	معدل التغير

- B -

Bases	الأسس
Bound	حد
Bounded	محدود

- C -

Cramer's rule	قاعدة كرامر
Cartesian	ديكارتي
closed	مغلق
Closed interval	مجال مغلق
Coefficient matrix	مصفوفة المعامل
Co - facotr	مرافق
Column	عمود
Column vector	شعاع عمودي (شاقولي)
Composite function	تابع مركب

Concavity	تقعر
Concavity down word	تقعر نحو الأسفل
Concept	مفهوم
Constant	ثابت
Constant coefficients	معاملات ثابتة
Constant of integration	ثابتة التكامل
Consumption function	تابع الاستهلاك
continuos	مستمر
Continuos function	تابع متصل (مستمر)
Constraints	قيود
cost	تكلفة - كلفة
Cost function	تابع كلفة

- D -

Decision	قرار
Decision making	اتخاذ القرار
decreasing	متناقص
Decreasing function	تابع متناقص
Differential calculus	حساب التفاضل
definite	محدود (معرف)
Definite integral	تكامل محدد
Definition af a matrix	تعريف المصفوفة
Degree	درجة
Demand function	تابع الطلب
Dependent variable	متغير مستقل
Derivative	اشتقاق
Derivative Of higher order	مشتقات من رتبة عالية
Deternimant	معين - محدد
diagonal	قطر
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Differentiations	تفاضلات

Dimension	حجوم - أبعاد
Direction of concavity	جهة التقعر
Discontinuous	غير مستمر
Dual	ثنائي - مرافق

- E -

Economic	اقتصادي
Economic applications	تطبيقات اقتصادية
Economic sciences	علم الاقتصاد
Economic table	جدول اقتصادي
Economic function	تابع اقتصادي
Economist	اقتصادي
Equality	متراجعة
Equation	معادلة
Exponential function	تابع أسّي
extreme	حد

- F -

Factorial	عاملي
Finite	محدود
Function	دالة - تابع
Function differentiation	تغير تابع
Fundamental theorem of integral	النظرية الأساسية للتكامل

- G -

General	عام
General solution	حل عام

- I -

increasing	متزايد
Increasing function	تابع متزايد

Indefinite integral :	تكامل غير محدود
independent	مستقل
Independent variable	متحول مستقل
Inequality	متباينة - متراجحة
Infinite	غير منتهى
Input - output	المدخلات - المخرجات
Input - output analysis	تحليل المدخلات - المخرجات
integration	تكامل - مكاملة
Integration facotr	عامل المكامل
Integral calculus	حساب التكامل
Integrable	قابل للمكاملة
Integer	عدد صحيح
Interval	مجال
Inverse function	تابع عكسي
Inverse matrix	مقلوب المصفوفة
Irrational function	تابع أصم

- L -

Law	قانون
Lineas demand and supply function	توابع الطلب والعرض الخطية
Linear function	توابع الطلب الخطية
Linear supply	توابع العرض الخطية
Linear composition	توابع الاستهلاك الخطية
Lineas equation	معادلة خطية
Limite	نهاية
Logarithm	لوغاريتم
Logarithmic differentiation	اشتقاق لوغاريتمي

- M -

Marginal	حدي
Marginal cost	تكلفة حدية
Matrices and dtermimants	المصفوفات والمعينات
Matrix	مصفوفة
Matrix invers	مقلوب مصفوفة
Matrix multiplication	ضرب المصفوفات
Matrix reciprocal	معكوس المصفوفة
Maximum	نهاية عظمى
Method	طريقة
Minimum	نهاية صغرى
Minor	(صغير) مصغر
Multinomial	كثير حدود
Multiplication	ضرب

- N -

natural	طبيعي
Natural logarithm	لو غاريتم طبيعي
Necessary condition	شرط لازم
Necessary and sufficient condition	شرط لازم وكاف
Negative	سالِب
Null matrix	مصفوفة معدومة

- O -

Open	مفتوح
Order	رتبة
Overall product	إنتاج إجمالي

- P -

Partial	جزئي
Partial differentiation	اشتقاق جزئي
Partial derivative	مشتق جزئي
Partial elasticity	مرونة جزئية
Partial elasticity function	مرونة جزئية للتابع
Plan	مستوى
Planning	تخطيط
Polynomial	متعدد (كثير) الحدود
Positive	موجب
Price elasticity of demand	مرونة الطلب السعرية
Price elasticity of supply	مرونة العرض السعرية
Production planning	تنظيم الإنتاج
Production function	تابع الإنتاج
Profit function	تابع الربح
profit maximization	تعظيم الربح

- R -

Rate of change	معدل التغير
Real number	عدد حقيقي
Rectangular axes	محاور متعامدة
Replacement	استهلاك
restrictions	قيود
Roots	جذور
Row	سطر
Row vector	شعاع أفقي

- S -

Scalar multiplication	الضرب بعدد
Secant	قاطع
Slope	ميل
Slope of the tangent	ميل المماس
Side	ضلع
Single value	قيمة واحدة
solution	حل
square	مربع
Square matrix	مصفوفة مربعة
Sufficient condition	شرط كاف
Supply function	تابع عرض
Symmetric matrix	مصفوفة متماثلة

- T -

Table	جدول
Tangent	مماس
Term	حد
Theorem	نظرية
Total	كلي
Total cost	كلفة كلية
Total utility	منفعة كلية
Total differntial	تفاضل كلي
Total differntiation	اشتقاق كلي
Transpose	مدور (منقول)

- V -

Value	قيمة
Variable	متغير - متحول
Variation	تحويلات
Variation of a function	تحويلات تابع
Vector	شعاع

المراجع باللغة العربية

- د. عبد الرزاق الفاضل - سميرة تفلنكجي : الرياضيات العامة والمالية - منشورات جامعة دمشق - مطبعة الاتحاد - 1994 - 1995 .
- د. عبد الرزاق الفاضل - الرياضيات العالية - منشورات جامعة دمشق - كلية الاقتصاد - مطبعة المدنية . 1987 - 1988
- د. عبد الرزاق الفاضل - الرياضيات الاقتصادية والإدارية - منشورات جامعة دمشق - كلية الاقتصاد - مطبعة المدنية 1990 - 1991 .
- د. إبراهيم الطي : الرياضيات الاقتصادية - (المالية والإدارية) - جامعة تشرين - كلية الاقتصاد 1988 - 1989 .
- د. محمد سمير دركزالي : مدخل إلى الرياضيات العالية - منشورات جامعة حلب - كلية الاقتصاد والتجارة 1985 - 1986 .
- د. محمد سمير دركزالي - د. سمير حجير : الرياضيات الاقتصادية والإدارية - منشورات جامعة حلب - كلية الاقتصاد - 1988 .
- د. عبد العزيز فهمي هيكل : الرياضيات والإدارة الاقتصادية - دار النهضة العربية للطباعة والنشر .

اللجنة العلمية :

الاستاذ الدكتور محمد سالم الصفدي
الاستاذ الدكتور محمد سمير دركزلي
الاستاذ الدكتور سمير حجير

المدقق اللغوي :

الاستاذ الدكتور خليل الموسى

- حقوق الطبع و الترجمة و النشر محفوظة لديرية الكتب و المطبوعات -

