جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

شعبة الجبر والهندسة

رسالةٌ أُعدّت لنيل درجةِ الماجستير في الرياضيات

بعنوان

دراسةٌ حولَ التمثيلِ الثنوي للزمرِ المنتهيةِ

A study about dual representation of finite groups

إعداد الطالبة: أركان الخلف

إشراف أ.م.د: عبداللطيف هنانو

2018 م

1439هـ



بسم اللَّهِ الرَّحمنِ الرَّحيم

{ وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْماً }

صدقَ اللَّه العظيم

إهداء

إلى استقامةِ ظهري وبطلي الأَوحد ..... أبي

إلى التي قالت لي تعلّمي حتى لا تكوني مثلي، فصارَ أقصى طموحي أن أكون مثلها ..... أمي

إلى رفاقِ الطفولة، رفاق الضحكات ..... أُخوتي و أخواتي

إلى الفراشاتِ التي لوّنت ربيع عمري ..... صديقاتي

إلى رفاقِ المجد، السائرين نحو العلا ..... زملائي طلاب الدراسات العليا

إلى صاحب العلم، صاحب النصيحة، صاحب الفضل .... الدكتور عبداللطيف هنانو

إلى خيباتنا الكبرى، فالخيبات أحياناً أقوى دوافع النجاح .....

أركان ...

ملخصُ رسالةٍ أُعدت لنيلِ درجةِ الماجستيرِ في الرياضيات

بعنوان

دراسةٌ حولَ التمثيلِ الثنوي للزمرِ المنتهيةِ

إعداد: أركان جميل الخلف **إشراف: أ.م.د: عبد اللطيف هنانو**

تُقدِّمُ هذهِ الرسالةُ دراسةً حولَ التمثيلِ الثنويِّ للزمرِ المنتهيةِ، وقد تمَّتْ على ثلاثِ مراحل.

المرحلةُ الأولى: عُرِضَ فيها بعضُ المفاهيمِ الأساسيةِ في الجبرِ الخطيِّ، منها الفضاءُ الثنوي وفضاءُ الجداءِ الداخليِّ، وذكرْنا بعضَ أنواعِ المؤثراتِ الخطيّةِ والمصفوفاتِ التي استخدْمناها في إثباتِ النتائجِ التي توصلنَا إليْها.

المرحلةُ الثانيةُ: تتلخصُ بدراسةِ تمثيلِ الزمرِ المنتهيةِ، حيثُ عرَضنا مفهومَ التمثيلِ ρ والتمثيلَ الجزئيَّ منه، ومفهوم مميزَ التمثيلِ وذكرْنا بعضَ الخواصِ التي مِنَ الممكنِ أنْ يتمتَّعَ بِها التمثيلُ كالخزوليةِ والخزوليةِ التامةِ وقابليةِ التحليلِ، كما عرَضنا أهمَّ المبرهناتِ في نظريةِ تمثيلاتِ الزمرِ المنتهية.

المرحلةُ الثالثةُ: في هذهِ المرحلةِ ذكرنا تعريف التمثيلَ الثنويَّ ρ^*، وعرضنا النتائجَ التي توصلنا إليها حيثُ أثبتنا أنَّه إذا كان ρ خزولاً تماماً وقابلاً للتحليلِ، فإنَّ ρ^* خزولٌ تماماً وقابلٌ للتحليلِ، كما أثبتنا أنَّه إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً من ρ، فإنَّ ρ_W^* ليس بالضرورةِ تمثيلاً جزئياً من ρ^*، ولكنَّه يمدَّدُ إلى تمثيلٍ جزئيٍّ، كما استطعنا تحليلَ ρ^* إلى مجموعٍ مباشرٍ لتمثيلاتٍ جزئيّةٍ، وذلكَ بالاعتمادِ على التمثيلاتِ الجزئيّةِ من ρ، ثمَّ ذكرنا بعضَ التمثيلاتِ ذاتيَّةِ الثنويةِ لزمرةٍ منتهيةٍ.

الكلماتُ المفتاحيّة: التمثيلُ الثنوي– التمثيلُ الجزئي– مميزُ التمثيلِ– التمثيلان المتماثلان

التمثيلُ ذاتي الثنويّة

Abstract for Master thesis in Mathematics

titled

A study about dual representation of finite groups

By: Arkan Gamel Alkhalaf Supervision of: Dr.Abed Allatif Hanano

This thesis introduces a study about dual representation of finite groups, and it is done through three steps.

The first step: some main concepts of linear algebra were presented, where we defined dual space and inner product space, and showed some linear operators and matrixes that we depended on to prove findings that we obtain it.

The second step: which abbreviate by studying representation of finite groups, where we defined the representation and subrepresentation, then we defined the characteristic of representation and showed some properties of representation like reducible, completely reducible and decomposable representation, then we showed main theorems in representation theory.

The third step: in this step we defined the dual representation and presented the findings that we obtain it, where we proved that if ρ is completely reducible and decomposable then ρ^* is completely reducible and decomposable. We also proved that if ρ_W is subrepresentation of ρ then ρ_W^* is not necessarily subrepresentation of ρ^* but it extend to subrepresentation. We also could decomposition ρ^* to subrepresentation depending on subrepresentatio of ρ. Then we presented some selfdual representations of finite groups.

Key words: dual representation-subrepresentation-characteristic

isomorphic representations-selfdual representation

الفهرس

المقدمة i

الفصلُ الأول

مفاهيمٌ أساسيةٌ في الجبرِ الخطي

1–1 الزمرة..... 2

1–2 الفضاء الثنوي 2

1–3 مُعدم فضاء.....4

1–4 الفضاءُ الثنوي المضاعف 7

1–5 فضاءُ الجداءِ الداخلي 10

1–6 الفضاءُ الثنوي لفضاءِ الجداء الداخلي 15

الفصلُ الثاني

مقدمةٌ في تمثيلِ الزمرِ المنتهيةِ

2–1 تأثيرُ زمرة على مجموعة غير خالية 20

2–2 التمثيلُ الخطي والمصفوفي 21

2–3 التمثيلان المتماثلان 24

2–4 التمثيلُ الجزئي 25

2–5 مبرهنةُ Maschke 32

2 – 6 مميزُ التمثيل 36

2 – 7 الفضاء المتجهي C^G 41

2 – 8 جدولُ المميزات 43

2 – 9 التمثيل الواحدي 47

الفصلُ الثالث

التمثيلُ الثنوي للزمرِ المنتهيةِ

3 – 1 التمثيلُ الثنوي 56

3 – 2 مميزُ التمثيل الثنوي 56

3 – 3 التمثيلُ ذاتي الثنوية 57

3 – 4 التمثيلُ الثنوي الخزول 60

3 – 5 التمثيلُ الجزئي من التمثيلِ الثنوي..... 63

3 – 6 التمثيلُ الثنوي الواحدي 66

3 – 7 التمثيلان الثنويان المتماثلان 67

3 – 8 التمثيلُ الثنوي المضاعف 74

الرؤى المستقبلية 76

قائمةُ المصطلحات 77

المراجع 80

الرؤى المستقبلية

يمكن متابعة دراسة التمثيل الثنوي للزمر والبحث في القضايا التالية:

- إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً من ρ، ماهي الشروط اللازم توفرها حتى يكون ρ_W^* تمثيلاً جزئياً من ρ.
- محاولة إثبات أنَّه إذا كان ρ^* خزولاً تماماً وقابلاً للتحليل فإنَّ ρ خزولٌ تماماً وقابلٌ للتحليل.
- دراسة التمثيل الثنوي للزمرِ التبولوجية والضبابية، ومحاولة الاستفادة من خواصِ هذه الزمر لمعرفة خواص التمثيل الثنوي وطبيعة التمثيلات الجزئية منه.

مقدمة

تُعتبرُ نظريةُ التمثيلِ من أهمّ مفاهيمِ الرياضيات التي تُسهّلُ دراسةَ البنى الجبريةِ المجردةِ، وتشملُ هذه النظريةُ عدّةَ فروعٍ منها تمثيلُ الجبورِ، تمثيلُ المودولاتِ، تمثيلُ الزمرِ، وستقتصرُ دراستُنا على أحدِ هذهِ الفروعِ وهو تمثيلُ الزمرِ المنتهيةِ، حيثُ يتمُ استبدالُ كلّ عنصرٍ من عناصرِ الزمرةِ بمؤثرٍ خطيٍّ قلوبٍ على فضاءٍ متجهيّ أو مصفوفة قلوبة، ويُقالُ عندها إنَّ الزمرةَ تؤثرُ خطيّاً على الفضاءِ المتجهي.

كانَ أولُ ظهورٍ لمفهومِ تمثيلاتِ الزمرِ المنتهيةِ في العامِ 1896 في عملٍ للعالمِ الألماني Frobenuis، كان الدافعُ لهذا العملِ رسالةً تلقّاها من العالمِ Dedekind، تضمَّنت الملاحظةَ التاليةَ:

" خذِ الجدولَ الضربيَّ لزمرةٍ منتهيةٍ G، وحوِّلهُ إلى مصفوفةٍ X_G، وذلكَ باستبدالِ كلِّ عنصر g في هذا الجدولِ بالمتغيرِ x_g، كيفَ يمكنُ تحليلُ محددِ X_G إلى كثيراتِ حدودٍ غير خزولةٍ؟ ".

أجابَ Dedekind على هذا السؤالِ في الحالةِ الخاصةِ عندما تكون الزمرةُ تبديلة، حيثُ أثبتَ أنَّه يمكنُ تحليلُ X_G إلى كثيراتِ حدودٍ خطيّةٍ، لكنَّه لم يستطعْ الإجابةَ عنه في الحالةِ العامةِ لذلك أرسلَ هذه الرسالةَ إلى Frobenuis، الذي قامَ بإرساءِ مفهومِ نظريةِ تمثيلاتِ الزمرِ حيثُ وضعَ مفهومَ التمثيلِ المصفوفي، وعرَّفَ مميزَ التمثيلِ بأنَّهُ أثرُ مصفوفةِ التمثيلِ .

وضعَ العالمُ Maschke في العامِ 1899 أهمَّ مبرهنةٍ في نظريةِ تمثيلاتِ الزمرِ المنتهيةِ والتي سُمّيت باسمهِ، حيثُ أثبتَ من خلالها أنَّه يمكنُ تحليلُ أيِّ تمثيلٍ لزمرةٍ منتهيةٍ إلى تمثيلاتٍ جزئية غير خزولة.

في العامِ 1911 ألَّف العالمُ Burnsid أوَّل كتابٍ في نظريةِ تمثيلاتِ الزمرِ المنتهيةِ تحتَ عنوانِ:

"The theory of groups of finite order"

ولاحقاً قامت العالمةُ E.Noither باستبدالِ المؤثراتِ الخطيةِ القلوبةِ لفضاءٍ متجهيٍّ بالمصفوفاتِ وهو التعريفُ المستخدمُ حالياً لتمثيلِ زمرةٍ منتهيةٍ على فضاءٍ متجهي.

تكتسبُ نظريةُ تمثيلاتِ الزمرِ المنتهيةِ أهميّتَها من كونِها تُسهِّلُ دراسةَ الزمرةِ، ولكنَّ الأهميةَ الأكبرَ، تأتي من خلالِ تطبيقاتِها، والتي تشملُ الفيزياءَ والكيمياءَ النظريةَ وميكانيكَ الكمِّ، ففي مكانيكِ الكمِّ مثلاً يتمُ التعاملُ مع بعضِ الدوالِ الفيزيائيةِ المهمةِ كدوالِ أمواجِ الاهتزازِ الإلكتروني على أنَّها تمثيلاتٌ غير خزولةٍ، كما أنَّهُ من أجلِ أيِّ نظامٍ فيزيائيٍّ كميٍّ وزمرةٍ G تؤثرُ عليهِ فإنَّ فضاءَ الحالاتِ لهذا النظامِ والذي يُرمزُ لهُ H يُعرِّفُ تمثيلاً واحدياً للزمرةِ G، بالتالي بدراسةِ هذا التمثيلِ يُمكنُنا دراسةُ الفضاءِ H، وفي الكيمياءِ يتمُّ دراسةُ الأعدادِ الكمّيةِ لذرةِ الهيدروجين باستخدامِ تمثيلِ الزمرِ التناظرية.

المصطلحات العلمية

A	
Adjoint of a linear operator	قرين مؤثر خطي
Annihilator	مُعْدَم
Action	تأثير
B	
Base	قاعدة
C	
Conjugate	مرافق
Character	مميز
Complement	مكمل
Completely reducible	خزول تماماً
Conjugacy classe	صف ترافق
D	
Dual base	قاعدة ثنوية
Dual space	فضاء ثنوي
Dual representation	تمثيل ثنوي
Decomposable	قابل للتحليل
Dimension	بُعد
E	
Eigenvalue	قيمة ذاتية
Eigenvector	متجه ذاتي
F	
Faithful	مخلص
Field	حقل
G	
Group	زمرة
H	
Hermitian operator	مؤثر هرميتي
Hermitian inner product	جداء داخلي هرميتي
Homomorphism	تشاكل

I	
Injective	متباين
inner product space	فضاء جداء داخلي
Invariant subspace	فضاء جزئي صامد
Isomorphism	تماثل
Isomorphic	متماثل
Independent	مستقل
irreducible	غير خزول
Indecomposable	غير قابل للتحليل
K	
Kernel	نواة
L	
Linear function	دالة خطية
O	
Orthogonal complement	مكمل عمودي
Orthonormal base	قاعدة متعامدة منظمة
Operator	مؤثر
Orthogonality of characters	تعامد المميزات
P	
Projection	إسقاط
proper	فعلي
Q	
Quotient space	فضاء القسمة
R	
Real inner product space	فضاء جداء داخلي حقيقي
Representation of finite group	تمثيل زمرة منتهية
Reducible	خزول
Regular representation	تمثيل منتظم
S	
Self dual	ذاتي الثنوية
Subrepresentation	تمثيل جزئي

Surjective	غامر
T	
Trac of matrix	أثر مصفوفة
Transpose of a linear operator	منقول مؤثر خطي
Transpose of a matrix	منقول مصفوفة
Trivial	مبتذل
Tensor product	جداء تنسوري
U	
Unitary matrix	مصفوفة واحدية
Unitary operator	مؤثر واحدي
V	
Vector	متجه
Vector space	فضاء متجهي

المراجع العلمية

[1] Anton, H., Rorres, H. (2013). ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA. Wiley PLUS.

[2] Axler,S.(2016). Linear Algebra Abridged. Springer

[3] Bartel, A. (2016). Introduction to representation theory of finite groups.

[4] Baker, A.(2011). Representation of Finite Groups. SCHOOL OF MATHEMATICS & STATISTICS, UNIVERSITX OF GLASGOW.

[5] Casselmam, B. (2016). Representation of finite groups. University of British Columbia.

[6] Damron, M. (2012). LINEAR ALGEBRA. PRINCETON UNIVERSITY.

[7] Dieck, T. (2009). REPRESENTATION THEORY.

[8] Fulton, W., HARRIS, J. (1991). Representation Theory . Springer Verlage New York lnc.

[9] Halmos, P.(1995). LINEAR ALGEBRA PROBLEM BOOK. The mathematical association of America.

[10] Hoffman, K., Kunze, R. (1971). LINEAR ALGEBRA. Prentic-Hall, Inc.

[11] Hogben, L.(2007). HAND BOOK OF LINEAR ALGEBRA . chapman&Hall/CRC.

[12] Ho kwak, J., Hong, S.(2004). Linear Algebra. Springer Science + Businesc Media, New York.

[13] Jackson, D.(2004). Note on the representation theory of finite groups.

[14] Kowalski, E. (2011). Representation theory. ETH ZURICH.

[15] Leep, D. (2010). Linear Algebra. Department of Mathematics University of Kentucy.

[16] Mandal, S. (2005). Inner Product Spaces Linear Algebra Nots.

[17] Martin, S.(2011). Representation Theory.

[18] Neumann, p.(2007). Notes on Linear Algebra. Queen's college, Oxford.

[19] Otto, M. (2011). Linear Algebra II. Department of Mathematics.

[20] Segal, E.(2014). Group Representation Theory.

[21] Sengupta, A.(2010). Representing Finite Groups: Asemisimple Introduction.

[22] Serre, J. P. (1977). Linear Representation of Finite Groups. Springer-Verlag New York, Inc.

[23] Singh, A. (2009). Representation Theory of Finite Groups. Indian Institute of Science Education and Research.

[24] Smith, K. (2010). Groups and their Representation.

[25] Steinberg, B.(2009). Representation Theory of Finite Groups. School of Mathematics and statistics.

[26] Stoll, M. (2007). Linear Algebra II.

[27] Vinberg, E.(1989). Linear Representation Theory of Finite Groups. Birkhauser Verlage.

[28] Webb, P. (2016). A Course in Finite Group Representation Theory.

[29] Woit, P. (2015). Quantum Theory, Groups and Representation: An Introduction. Department of Mathematics, Columbia University.

[30] Zamiralov, V. (2007). Introduction to group theory and its representation and some applications to particale physics. D.V.Skobeltsyn Institute of Nuclear physics, Moscow, RUSSIA.

سنعرضُ في هذا الفصلِ بعضَ المفاهيمِ الأساسيَّةِ في الجبرِ الخطي، والتي اعتمدنا عليها في رسالتِنا هذه، حيث اقتصرتْ دراستُنا على الفضاءاتِ المتجهيَّةِ منتهيةِ البعدْ، فعرَّفنا الفضاءَ الثنوي لفضاءٍ متجهي، وبيّنا طبيعةَ الفضاءاتِ الجزئيةِ منه، ثمَّ عرّفنا فضاءَ الجداءِ الداخلي، وذكرنا بعضَ أنواعِ المؤثراتِ الخطيَّة على هذا الفضاء و خواصها.

تعريف: ([30], p.4)

لتكن G مجموعةً غير خالية مزوَّدة بقانونِ تشكيلٍ داخلي $(*)$، يُقال عن المجموعةِ G إنَّها زمرة إذا حققت الشروط التالية:

- القانون $(*)$ تجميعي على G أي أنَّ:

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3); \quad \forall \quad g_1, g_2, g_3 \in G$$

- يوجد في G عنصر e يحقق:

$$g * e = e * g = g \qquad \forall \quad g \in G$$

نسمي e العنصر الحيادي في G.

- يوجد لكلّ عنصرٍ $g \in G$ عنصراً $g^{-1} \in G$ يحقق:

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

نسمي العنصر g^{-1} مقلوب العنصر g.

تعريف: ([10] ,p.98)

ليكن V فضاءً متجهيّاً منتهي البعد على حقلٍ F، يُعرَّف الفضاء الثنوي لـ V بأنَّه مجموعة كلِّ الدوال الخطيّة على V، والتي يرمزُ لها V^*، والمزوّدة بعمليتَي الجمع والضرب بعنصرٍ من F

$$1- \qquad \varphi_1 + \varphi_2 : V \longrightarrow F$$
$$v \longrightarrow \varphi_1(v) + \varphi_2(v)$$

$$2- \qquad k\varphi : V \longrightarrow F$$
$$v \longrightarrow k \cdot \varphi(v) \qquad ; k \in F$$

أي أنَّ:

$$V^* = \{\varphi : V \longrightarrow F\} = Hom(V,F).$$

إذا كانَت $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ قاعدةً للفضاءِ V، فإنَّ $\alpha^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ قاعدةٌ للفضاءِ V^* على الحقلِ F حيث :

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad ; \quad i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

وتسمّى α^* القاعدة الثنوية لـ α، ويكون $\dim(V) = \dim(V^*)$.

الفضاءُ الجزئي من الفضاءِ الثنوي: (p.147, [12])

ليكن V فضاءً متجهيّاً بُعده n، وليكن W فضاءً متجهيّاً جزئياً من V بُعده k، عندئذٍ $W^* = \{\varphi : W \longrightarrow F\}$ ليس فضاءً جزئياً من V^*، إلا أنَّه يمكن أنْ نمددَ كل عنصر $\varphi \in W^*$ ليصبحَ دالة خطية على V بالشكلِ:

لتكن $\alpha = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ قاعدةً للفضاءِ W، عندئذٍ $\alpha^* = \{w_1^*, w_2^*, \ldots, w_k^*\}$ قاعدة للفضاء W^*.

لنمدد α لتصبح قاعدة للفضاءِ V بالشكلِ $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$.

من أجلِ كل عنصر $\varphi \in W^*$ لنعرِّف الدالة $\bar{\varphi} : V \longrightarrow F$ الخطيَّة على V بالشكلِ:

$$\bar{\varphi}(w_i) = \begin{cases} \varphi(w_i) & if \quad i \leq k \\ 0 & if \quad k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

عندئذٍ $\bar{\varphi} \in V^*$، و مقصورُ $\bar{\varphi}$ على W هو φ، أي أنَّ $\bar{\varphi}_{|W} = \varphi \in W^*$.

كما أنَّ مجموعةَ العناصرِ $\{\overline{w_1^*}, \overline{w_2^*}, \ldots, \overline{w_k^*}\}$ مستقلة خطياً في V^* ويكون:

$$\overline{w_i^*}_{|W} = w_i^* \in W^* ; \quad i = 1,2,\ldots,k$$

بالتالي نحصلُ على التطبيقِ الخطيِّ المتباين:

$$\psi : W^* \longrightarrow V^*$$

المعرَّف بالشكلِ:

$$\psi(\varphi) = \overline{\varphi} \quad \forall \varphi \in W^* .$$

إنَّ $\psi(W^*)$ فضاءٌ جزئيٌّ من V^*، وإذا كان $\psi(W^*) = W^*$ يمكننا القول إنَّ W^* فضاءٌ جزئيٌّ من V^*.

تعريف: ([15] ,p.78,80)

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهيّاً منتهي البعد، وليكن W فضاءً جزئياً من V، إنَّ مُعْدَم الفضاء W والذي يُرمز له بالرمزِ W°، هو فضاءٌ جزئيٌّ من V^* ويُعرَّف بالشكلِ:

$$W^\circ = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in W\}$$

وإذا كانَ N فضاءً جزئياً من V^*، عندئذٍ مُعْدَم N والذي يُرمز له بالرمزِ $N_\circ$ هو فضاءٌ جزئيٌّ من V ويُعرَّف بالشكلِ:

$$N_\circ = \{v \in V; \quad \varphi(v) = 0; \forall \quad \varphi \in N\}$$

ملاحظة: ([15] ,p.79)

إذا كانَ $W = \{0\}$ فإنَّ $W^\circ = V^*$، وإذا كان $W = V$ فإنَّ W° هو الفضاءُ الجزئيُّ الصفري من V^*.

مبرهنة: ([26] ,p.22)

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهيّاً منتهي البعد، وليكن W فضاءً جزئياً من V،عندئذٍ:

$$\dim V = \dim W + \dim W^\circ$$

مبرهنة: ([10] ,p.101)

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهيّاً منتهي البعد بُعده n، وليكن W,U فضاءَيْن جزئِيِيَن متكاملَين في V عندئذٍ فإنَّ W°, U° فضاءان جزئيّان متكاملان في V^*.

الإثبات:

إذا كان W فضاءً جزئياً من V بُعده k، عندئذٍ يكون بُعد U هو $n-k$.

ويكون بُعد W° هو $n-k$، وبُعد U° هو k إذن:

$$\dim V^{*} = \dim U^{\circ} + \dim W^{\circ}$$

إذا كانت $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ قاعدةً للفضاءِ W، فإنَّ $\beta = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ قاعدةٌ للفضاءِ الجزئيِّ المكملِ U.

كما أنَّ $\beta^{*} = \{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ قاعدةٌ للفضاءِ الجزئيِّ W°، و $\alpha^{*} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ قاعدة للفضاءِ الجزئي U°.

إذن $U^{\circ} \cap W^{\circ} = \{0\}$، بالتالي $V^{*} = U^{\circ} \oplus W^{\circ}$، أي أنَّ U° و W° فضاءان جزئيّان متكاملان في V^{*}.

مبرهنة: ([15] ,p.81)

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهيّاً منتهي البعد، و W فضاءً جزئياً من V، و N فضاءً جزئياً من V^{*} عندئذٍ:

$$(W^{\circ})_{\circ} = W \qquad (N_{\circ})^{\circ} = N$$

الإثبات:

من الواضحِ أنَّ $W \subset (W^{\circ})_{\circ}$، ولدينا

$$\begin{aligned} \dim((W^{\circ})_{\circ}) &= \dim(V^{*}) - \dim(W^{\circ}) \\ &= \dim(V) - (\dim(V) - \dim(W)) \\ &= \dim(W) \end{aligned}$$

ومنه يكون $W = (W^{\circ})_{\circ}$.

لدينا $N \subset (N_{\circ})^{\circ}$ كمَا أنَّ

$$\begin{aligned}\dim((N_\circ)^\circ) &= \dim(V) - \dim(N_\circ) \\ &= \dim(V) - (\dim(V^*) - \dim(N)) \\ &= \dim(V) - \dim(V) + \dim(N) \\ &= \dim(N)\end{aligned}$$

ومنه يكون $(N_\circ)^\circ = N$.

تعريف: ([11] ,p.71)

ليكن $V(F), W(F)$ فضاءَيْن متجهيَّين منتهيي البعد، وليكن $\varphi \in Hom(V,W)$ و $f \in Hom(W,F) = W^*$ ، يُعرَّف منقولُ التطبيق الخطي φ والذي يُرمز له φ^* بأنَّه التطبيق:

$$\begin{aligned}\varphi^* : W^* &\longrightarrow V^* \\ f &\longrightarrow f \circ \varphi\end{aligned}$$

مبرهنة: ([10] ,p.115)

ليكن $V(F), W(F)$ فضاءَيْن متجهيَّين منتهيي البعد، و α, β قاعدتين لـ V, W على الترتيبِ، ولتكن α^*, β^* ثنويتي α, β في V^*, W^* على الترتيبِ، و A هي مصفوفة $T \in Hom(V,W)$ بالنسبةِ للقاعدتين α, β ، عندئذٍ فإنَّ مصفوفة T^* بالنسبةِ للقاعدتين α^*, β^* هي منقولُ A ، أي أنَّ $A^* = A^T$

الإثبات:

لتكن $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$

$\alpha^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ $\beta^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

عندئذٍ:

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \beta_i \quad ; j = 1,2,\ldots,n$$

فتكون $A = (a_{ij})$ ، كما أنَّ مصفوفة T^* ، ولتكن A' هي من الشكلِ $A' = (a'_{ij})$ حيثُ

$$T^*(g_j)=\sum_{i=1}^{n}a'_{ij}\cdot f_i \qquad ;j=1,2,\ldots,m$$

لدينا:

$$\begin{aligned}(T^*g_j)(\alpha_i)&=g_j(T(\alpha_i))\\&=g_j(\sum_{k=1}^{m}a_{ki}\cdot\beta_k)\\&=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}\cdot g_j(\beta_k)=a_{ji}\end{aligned}$$

حيثُ $g_j(\beta_j)=1,\quad g_j(\beta_k)=0 \qquad \forall j\neq k;\quad j,k\in\{1,2,\ldots,m\}$

كما أنَّ:

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi(\alpha_i)f_i \qquad \forall\varphi\in V^*$$

لكنَّ $T^*(g_j)\in V^*$، بالتالي:

$$\begin{aligned}T^*(g_j)&=\sum_{i=1}^{n}T^*(g_j)(\alpha_i)\cdot f_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\cdot f_i \qquad ;j=1,2,\ldots,m\end{aligned}$$

ومنهُ $a'_{ij}=a_{ji}$، بالتالي $A'=A^T$.

تعريف: ([6] ,p.34)

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهيّاً منتهي البعد، وليكن $V^*=Hom(V,F)$ الفضاء الثنوي لـ V، عندئذٍ الفضاء الثنوي $V^{**}=Hom(V^*,F)$ لـ V^*، يُسمى الفضاء الثنوي المضاعف للفضاءِ V.

مبرهنة: ([6] ,p.34)

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهيّاً منتهي البعد، و $\alpha=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ قاعدة للفضاءِ V، ولتكن مجموعةُ التطبيقات:

$$T_v : V^* \longrightarrow F$$
$$f \longrightarrow f(v) \quad \forall \quad v \in V$$

عندئذٍ يكون:

1- T_v تطبيقٌ خطيٌّ على V^*.

2- $T_{v+u} = T_v + T_u \quad T_{mv} = mT_v \quad \forall m \in F \quad u,v \in V$.

3- $\beta = \{T_{v_1}, T_{v_2}, \ldots, T_{v_n}\}$ قاعدةٌ للفضاءِ V^{**}.

4- من أجل كلِّ $T \in V^{**}$ يوجدُ متجهٌ وحيد $v \in V$ بحيث $T = T_v$.

5- التطبيق $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ المعرَّف بالشكلِ $\varphi(v) = T_v$، هو تماثل.

مبرهنة: ([20] ,p.38)

لتكن U,V,W ثلاثة فضاءات متجهيّة على حقلٍ F، عندئذٍ:

$$Hom(V, U \oplus W) \cong Hom(V,U) \oplus Hom(V,W) \quad -1$$

$$Hom(U \oplus W, V) \cong Hom(U,V) \oplus Hom(W,V) \quad -2$$

الإثبات:

1- ليكن لدينا تطبيقا الاحتواء:

$$l_U : U \longrightarrow U \oplus W \qquad l_W : W \longrightarrow U \oplus W$$
$$x \longrightarrow (x,0) \qquad y \longrightarrow (0,y)$$

وتطبيقا الإسقاط:

$$\pi_U : U \oplus W \longrightarrow U \qquad \pi_W : U \oplus W \longrightarrow W$$
$$(x,y) \longrightarrow x \qquad (x,y) \longrightarrow y$$

حسب تعريف التطبيقات السابقة نجدُ أنَّ:

$$l_U \circ \pi_U + l_W \circ \pi_W = 1_{U \oplus W}$$

لنعرِّف التطبيق:

$$\varphi : Hom(V, U \oplus W) \longrightarrow Hom(V, U) \oplus Hom(V, W)$$

بالشكلِ:

$$\varphi(f) = (\pi_U \circ f, \pi_W \circ f)$$

و التطبيق:

$$\varphi^{-1} : Hom(V, U) \oplus Hom(V, W) \longrightarrow Hom(V, U \oplus W)$$

بالشكلِ:

$$\varphi^{-1}(f_U, f_W) = l_U \circ f_U + l_W \circ f_W \quad .$$

كلٌ من التطبيقَين φ, φ^{-1} هو تطبيقٌ خطيٌ، كما أنَّ:

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1} \circ \varphi)(f) &= l_U \circ \pi_U \circ f + l_W \circ \pi_W \circ f \\ &= (l_U \circ \pi_U + l_W \circ \pi_W) \circ f \\ &= f\end{aligned}$$

وبما أنَّ الفضاءَيْن لهما البعد ذاتُه، فإنَّ $\varphi \circ \varphi^{-1}$ هو التطبيقُ المطابق.

مما سبق نجد أنَّ φ هو تماثل.

2 – لنأخذ التطبيقَ:

$$\psi : Hom(U \oplus W, V) \longrightarrow Hom(U, V) \oplus Hom(W, V)$$

المعرَّف بالشكلِ:

$$\psi(f) = (f \circ l_U, f \circ l_W) .$$

والتطبيق :

$$\psi^{-1} : Hom(U,V) \oplus Hom(W,V) \longrightarrow Hom(U \oplus W,V)$$

المعرَّف بالشكلِ:

$$\psi^{-1}(f_U, f_V) = f_U \circ \pi_U + f_W \circ \pi_W .$$

وبمناقشةٍ مشابهةٍ لما سبق نحصلُ على المطلوب.

فضاءُ الجداءِ الداخلي: **([1] ,p.345)**

ليكن V فضاءً متجهيّاً معرَّفاً على الحقلِ C، نقول عن التطبيقِ:

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow C$$
$$(v,u) \longrightarrow \langle v,u \rangle$$

إنَّه جداءٌ داخليٌّ على الفضاءِ V إذا حقق الشروطَ التالية:

$$\langle v, u+w \rangle = \langle v,u \rangle + \langle v,w \rangle \quad \forall \ v,u,w \in V \quad -1$$

$$\langle v+w, u \rangle = \langle v,u \rangle + \langle w,u \rangle \quad \forall v,u,w \in V \quad -2$$

$$\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v,u \rangle \quad \forall \quad v,u \in V, \lambda \in C \quad -3$$

$$\langle v, \lambda u \rangle = \overline{\lambda} \langle v,u \rangle \quad \forall \quad v,u \in V, \lambda \in C \quad -4$$

$$\langle v,u \rangle = \overline{\langle u,v \rangle} \quad \forall \quad u,v \in V \quad -5$$

$$\langle v,v \rangle \geq 0 \quad \forall \quad v \in V \quad -6$$

$$\langle v,v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad -7$$

وفي هذه الحالةِ يُقالُ عن V إنَّه فضاءُ جداءٍ داخلي.

إذا كان V فضاءً متجهيّاً على الحقلِ R عندئذٍ:

$$\langle v, \lambda u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle \quad \text{و} \quad \langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$$

تعريف: ([19] ,p.75)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ منتهي البعد على الحقلِ C، وليكن $T \in GL(V)$ مؤثراً خطيّاً على الفضاءِ V، عندئذٍ يوجد مؤثرٌ خطيٌّ وحيدٌ $T^* : V \longrightarrow V$ يحقق:

$$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T^*(u) \rangle \quad \forall \quad v, u \in V$$

يُسمى T^* قرين المؤثِّر T.

مبرهنة: ([19] ,p.76)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً على الفضاءِ V مصفوفته A عندئذٍ مصفوفةُ T^* بالنسبةِ لقاعدةٍ متعامدةٍ منظمةٍ في V تساوي مرافق منقول مصفوفة T بالنسبة لنفسِ القاعدة أي:

$$A^* = \overline{A^T}$$

تعريف: ([2] ,p.87)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً على الفضاءِ V، يُقال عن T إنَّه مؤثرٌ خطيٌّ هرميتيٌّ إذا كان $T = T^*$، أي إذا وفقط إذا كان:

$$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle \quad \forall \quad v, u \in V$$

مبرهنة: ([2] ,p.91)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً هرميتياً على الفضاءِ V، و W فضاءٌ جزئيٌّ من V صامد أمام T، عندئذٍ القضايا التالية محققة:

1- $W^{\perp}$ صامدٌ أمامَ T

2- $T_{|W}$ مؤثرٌ خطيٌّ هرميتي على الفضاءِ W

3- $T_{|W^{\perp}}$ مؤثرٌ خطيٌّ هرميتي على الفضاءِ $W^{\perp}$

مبرهنة: ([18] ,p.50)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً هرميتياً على الفضاءِ V، عندئذٍ جميع القيم الذاتية لـ T هي أعدادٌ حقيقية.

الإثبات:

لتكن λ قيمةً ذاتيةً لـ T، عندئذٍ يوجد $0 \neq v \in V$ بحيث $T(v) = \lambda v$، وبما أنَّ T هرميتيٌ فإنَّ:

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle$$

وبالتالي يكون $\lambda\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$، ومنه $\lambda = \overline{\lambda}$، أي أنَّ $\lambda \in R$.

مبرهنة: ([18] ,p.51)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً هرميتياً على الفضاءِ V، عندئذٍ يوجد قاعدةٌ متعامدةٌ منظمةٌ للفضاءِ V مؤلفةٌ من المتجهاتِ الذاتيةِ لـ T.

الإثبات:

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ قيماً ذاتيةً مختلفةً لـ T وليكن

$$V_i = \{v \in V;\quad T(v) = \lambda_i v\} \quad ; \quad 1 \leq i \leq k$$

وليكن $U = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$، عندئذٍ U هو فضاءٌ جزئيٌّ من V مولَّد بالمتجهاتِ الذاتيةِ لـ T.

لنبرهن الآن على أنَّ $V = U$.

بفرض أنَّ $W = U^{\perp}$، عندئذٍ W صامدٌ أمام T.

إذا كان W فضاءً جزئيّاً فعليّاً، فإنَّه سيحوي جميعَ المتجهاتِ الذاتيةِ لـ T، لكنَّ جميع هذه المتجهات تنتمي إلى U لذلك، فإنَّ $W = \{0\}$ و $U = V$.

نعلم أنَّه إذا كان $v_i \in V_i$ فإنَّ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ هي مجموعةٌ من المتجهاتِ المتعامدةِ في الفضاءِ V فهي مستقلةٌ خطياً، ومنه $U = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$.

V_iهو فضاءُ جداءٍ داخلي منتهي البعد، بالتالي فهو يملكُ قاعدةً متعامدةً منظمةً ولتكن β_i، كما أنَّ β_iتحوي المتجهات الذاتية المقابلةِ للقيمِ الذاتيةِ λ_i.

بما أنَّ عناصرَ β_i متعامدة مع عناصر β_j، إذا أخذنا $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_k$ تكون β قاعدةً متعامدةً منظمةً للفضاءِ V تحوي جميع المتجهاتِ الذاتيةِ للفضاءِ V.

تعريف: ([16] ,p.19)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً على الفضاءِ V، يُقال عن T إنَّه واحديٌ إذا حافظ على الجداءِ الداخلي أي إذا تحقق:

$$\langle T(v), T(u) \rangle = \langle v, u \rangle \qquad \forall \qquad v, u \in V$$

تعريف: ([1] ,p.438)

لتكن Aمصفوفةً مربعةً على الحقلِ C، يُقال عن A إنَّها مصفوفةٌ واحديةٌ إذا تحقق:

$$AA^* = A^*A = I$$

مبرهنة: ([11] ,p.120)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ على الحقلِ C، وليكن T مؤثراً خطيّاً على الفضاءِ V، و A هي مصفوفة T بالنسبة لقاعدةٍ متعامدةٍ منظمةٍ في V، عندئذٍ الشرطان التاليان متكافئان:

1- T مؤثر خطي واحدي.

2- A مصفوفة واحدية.

الإثبات:

(1) $\Leftarrow$ (2) بفرض أنَّ T مؤثرٌ خطيٌّ واحدي عندئذٍ يكون $T^* = T^{-1}$، بالتالي يكون لدينا

مصفوفة T^* تساوي مصفوفة T^{-1}، أي أنَّ $A^* = A^{-1}$، ومنه $AA^* = A^*A = I$.

(2) $\Leftarrow$ (1) بفرض أنَّ A مصفوفةٌ واحديةٌ، عندئذٍ $A^* = A^{-1}$، ومنه $T^* = T^{-1}$

أي أنَّ T مؤثرٌ خطيٌّ واحدي.

مبرهنة: ([11] ,p.121)

لتكن A,B مصفوفتين واحديتَين على الحقلِ C، عندئذٍ كل من المصفوفاتِ التاليةِ:

$$\overline{A} \ , \ A^T \ , \ A^{-1} \ , \ A^* \ , \ AB$$

هي مصفوفةٌ واحديةٌ.

مبرهنة: ([9] ,p.134)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ، ولتكن φ دالةً خطيّةً على الفضاءِ V، عندئذٍ يوجد عنصر وحيد $u \in V$ بحيث يكون:

$$\varphi(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall \quad v \in V$$

الإثبات:

سنبرهن أولاً على أنَّه يوجد $u \in V$، يحقق $\varphi(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall \quad v \in V$.

لتكن $\{e_1, e_n, \ldots, e_n\}$ قاعدةً متعامدةً منظمةً للفضاءِ Vعندئذٍ:

$$\varphi(v) = \varphi(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \langle v, e_n \rangle e_n)$$

$$\varphi(v) = \langle v, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \langle v, e_2 \rangle \varphi(e_2) + \ldots + \langle v, e_n \rangle \varphi(e_n)$$

$$= \left\langle v, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \overline{\varphi(e_2)} e_2 + \ldots + \overline{\varphi(e_n)} e_n \right\rangle$$

و بوضع $u = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \overline{\varphi(e_2)} e_2 + \ldots + \overline{\varphi(e_n)} e_n$ يتم المطلوب

لنبرهن الآن على وحدانيةِ u .

بفرض أنَّه يوجد $u_1,u_2 \in V$ بحيث

$$\varphi(v)=\langle v,u_1\rangle=\langle v,u_2\rangle \forall \quad v\in V$$

عندئذٍ:

$$\langle v,u_1\rangle-\langle v,u_2\rangle=\langle v,u_1-u_2\rangle=0 \qquad \forall v\in V$$

وبأخذ $v=u_1-u_2$ نجد أنَّ $u_1-u_2=0$ ومنه $u_1=u_2$.

الفضاءُ الثنوي لفضاءِ الجداءِ الداخلي:

مبرهنة: ([16] ,p.14)

ليكن V فضاءَ جداءٍ داخلي، و V^* الفضاء الثنوي لـ V، عندئذٍ يوجد تماثل

$$T:V\longrightarrow V^*$$
$$v\longrightarrow \varphi_v$$

حيث $\varphi_v(u)=\langle u,v\rangle \forall \quad u\in V$.

الإثبات:

بفرض أنَّ $T(v)=0$، عندئذٍ $\varphi_v=0$، ومنه $u\in V \quad \forall \langle u,v\rangle=0$، ومن أجل $u=v$ نجد أنَّ $\langle v,v\rangle=0$، ومنه $v=0$ أي أنَّ $\ker T=\{0\}$، و T متباين.

من جهةٍ ثانيةٍ بما أنَّ $\dim V=\dim V^*$ و T متباين فإنَّ T غامر، ومنه T تماثل.

ملاحظة: ([9] ,p.135)

ليكن $T:V\longrightarrow V^*$، عندئذٍ إذا كان $w_1\longrightarrow\varphi_1$ و $w_2\longrightarrow\varphi_2$ حيث $\varphi_1,\varphi_2\in V^*$ فإنَّ:

- $w_1+w_2\longrightarrow\varphi_1+\varphi_2$
- $\lambda\in C \quad ;\quad \lambda w_1\longrightarrow\overline{\lambda}\varphi_1$ ، لأنَّ $\langle v,\lambda w_1\rangle=\overline{\lambda}\langle v,w_1\rangle=\overline{\lambda}\varphi_1(v)$
- $\lambda\in C \quad ;\quad \overline{\lambda}w_1\longrightarrow\lambda\varphi_1$ ، لأنَّ $\langle v,\overline{\lambda}w_1\rangle=\overline{\overline{\lambda}}\langle v,w_1\rangle=\lambda\langle v,w_1\rangle=\lambda\varphi_1(v)$

السؤال المطروح الآن أنَّه إذا كان V فضاء جداء داخلي هل V^* فضاء جداء داخلي؟

إنَّ كون V^* فضاء جداء داخلي يعتمدُ على كيفيةِ تعريف الجداءِ الداخلي للدالتين الخطيتين φ_1, φ_2.

لتكن $\varphi_1(v) = \langle v, w_1 \rangle$ و $\varphi_2(v) = \langle v, w_2 \rangle$، عندئذٍ يُعرَّف الجداء الداخلي على الفضاءِ V^* والذي يُرمز له $\langle , \rangle^*$ بالشكلِ :

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle^* = \langle w_1, w_2 \rangle$$

حيث $$\langle \lambda\varphi_1, \varphi_2 \rangle^* = \langle \overline{\lambda} w_1, w_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle w_1, w_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle^*$$

كما يمكن أن يُعرَّف بالشكلِ :

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle^* = \langle w_2, w_1 \rangle$$

حيث $$\langle \lambda\varphi_1, \varphi_2 \rangle^* = \langle w_2, \overline{\lambda} w_1 \rangle = \overline{\overline{\lambda}} \langle w_2, w_1 \rangle = \lambda \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle^*$$

مبرهنة: ([16] ,p.19)

ليكن V, W فضاءَي جداءٍ داخلي على الحقلِ C لهما البعد ذاته، وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطيّاً، عندئذٍ القضايا التالية متكافئة:

$1-T$ يحافظُ على الجداءِ الداخلي.

$2-T$ تماثل بين فضاءَي الجداءِ الداخلي.

3- إذا كانت $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ قاعدةً متعامدةً منظمةً للفضاءِ V فإنَّ $\{T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)\}$ قاعدةٌ متعامدةٌ منظمةٌ للفضاءِ W.

الإثبات:

$1 \Leftarrow 2$ بفرض أنَّ T يحافظُ على الجداءِ الداخلي، عندئذٍ فإنَّ T متباين .

بما أنَّ $\dim V = \dim W$، فإنَّ T غامر، ومنه T تماثل.

$2 \Leftarrow 3$ بفرض أنَّ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدةٌ متعامدةٌ منظمةٌ للفضاءِ V، وبما أنَّ T يحافظُ على الجداءِ الداخلي، فإنَّ $\{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ هي مجموعةٌ متعامدةٌ منظمةٌ، بالتالي هي مستقلة خطياً.

من جهةٍ أخرى لدينا $\dim W = n$، إذن $\{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ قاعدة متعامدة منظمة للفضاءِ W.

$3 \Leftarrow 1$ لتكن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدةً متعامدةً منظمةً للفضاءِ V، بحيث $\{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ قاعدة متعامدة منظمة للفضاءِ W، وبما أنَّ:

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

عندئذٍ:

$$\forall x, y \in V; \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$
$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

حيث $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k}$

يكون :

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j T(e_j) \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle T(e_i), T(e_j) \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k} = \langle x, y \rangle$$

نتيجة:

من المبرهنتين السابقتين نجد أنَّه إذا كانت $\alpha = \{v_1, v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ قاعدةً متعامدةً منظمةً لفضاءِ الجداءِ الداخلي V فإنَّ:

$$\alpha^* = \{T(v_1), T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\} = \{\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}, \ldots\ldots, \varphi_{v_n}\}$$

هي قاعدةٌ متعامدةٌ منظمةٌ للفضاءِ V^* و تمثل ثنوية القاعدة α لأنَّ :

$$\varphi_{v_i}(v_i) = \langle v_i, v_i \rangle = 1$$
$$\varphi_{v_i}(v_j) = \langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad \forall i, j \in \{1,2,.....,n\}$$

أي أنَّه إذا كانت α قاعدةً متعامدةً منظمةً في V فإنَّ α^* قاعدةٌ متعامدةٌ منظمةٌ في V^*.

سنعتمدُ في رسالتِنا هذه بشكلٍ أساسيٍّ على الفضاءاتِ المتجهيةِ المنتهيةِ البعد والمبنيةِ على الحقلين R و C، وإذا لم نحدد الحقل فإنَّ المقصودَ هو حقلٌ مميزهُ لا يقسم مرتبةَ الزمرةِ أو مميزهُ الصفر، كما أنَّه في بعضِ مفاهيمِ التمثيلِ نحتاجُ أن يكونَ الحقلُ مغلقاً جبرياً لذلك نختار الحقلَ C، أما الزمرة G فهي دائماً زمرة منتهية.

سنعرضُ في هذا الفصلِ بعض المفاهيمِ الأساسيةِ في نظريةِ تمثيلاتِ الزمر، حيث عرَّفنا التمثيلَ الخطيّ والتمثيلَ المصفوفي لزمرةٍ منتهيةٍ، ثمَّ عرَّفنا التمثيلَ الجزئيَّ وبينَّا أنَّه أي تمثيل يُكتب على شكلِ مجموعٍ مباشرٍ لتمثيلاتٍ جزئيّةٍ، وذكرنا بعضَ الصفاتِ التي من الممكن أن يتمتع بها التمثيل كالخزوليةِ والخزوليةِ التامةِ وقابليّة التحليل، وعرَّفنا أيضاً مميز التمثيل وذكرنا بعض الخواص المتعلقة به، كما عرَّفنا التمثيلين المتماثلين وبيَّنا أنَّ التمثيلين المتماثلين يملكان المميز ذاته.

تعريف: ([17] ,p.2)

لتكن G زمرةً و X مجموعةً ما غير خالية، يُعرَّف تأثيرُ الزمرة G على المجموعةِ X بأنَّه التطبيق:

$$*: G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longrightarrow g * x$$

بحيث يحققُ الشرطين التاليين:

$$e * x = x \quad \forall x \in X \quad -1$$
$$(g.h) * x = g * (h * x) \quad \forall g, h \in G \quad x \in X \quad -2$$

تعريف: ([25] ,p.8)

لتكن G زمرةً، و $V(F)$ فضاءً متجهياً منتهي البعد بُعده n، يُعرَّف تمثيلُ الزمرةِ G على الفضاءِ V

بأنَّه التشاكلُ الزمري:

$$\rho: G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow \rho_g$$

أي أنَّ ρ يحققُ الخواصَ التاليةَ:

$$\rho(e) = id_V \qquad -1$$

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \quad \forall g,h \in G \qquad -2$$

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \quad \forall g \in G \qquad -3$$

يُسمى هذا التمثيلُ بالتمثيلِ الخطي للزمرةِ G.

بما أنَّ كلَّ مؤثرٍ خطي ρ_g يُعينُ مصفوفةً وحيدة، وبالعكسِ كل مصفوفة تُعين مؤثراً خطيَّاً وحيداً يمكننا أن نعرَّف التمثيل المصفوفي للزمرةِ G بأنَّه التشاكلُ الزمري:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(n,F) \\ g &\longrightarrow [\rho_g]_\alpha \end{aligned}$$

حيث $[\rho_g]_\alpha$ هي مصفوفةُ المؤثر ρ_g بالنسبةِ لقاعدةٍ α للفضاءِ V.

تعريف: ([17] ,p.3)

لتكن G زمرةً، و $V(F)$ فضاءً متجهياً، يُعرَّفُ التأثيرُ الخطي للزمرةِ G على الفضاءِ V بأنَّه التطبيق:

$$\begin{aligned} * : G \times V &\longrightarrow V \\ (g,v) &\longrightarrow g * v \end{aligned}$$

والذي يحققُ مايلي:

$$e * v = v \quad \forall v \in V \qquad -1$$

$$(g.h) * x = g * (h * x) \quad \forall g,h \in G \quad x \in X \qquad -2$$

$$g * (v_1 + v_2) = g * v_1 + g * v_2 \quad \forall g \in G \quad v_1, v_2 \in V \qquad -3$$

$$g * (\lambda v) = \lambda (g * v) \quad \forall g \in G \quad v \in V \quad \lambda \in F \qquad -4$$

أي أنَّه إذا كانت الزمرة G تؤثرُ خطياً على الفضاءِ V فإنَّ التطبيقَ:

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow \rho_g$$

هو تمثيلٌ للزمرةِ G على الفضاءِ V، وبالعكس إذا كان ρ تمثيلاً للزمرةِ G على الفضاءِ V فإنَّ G تؤثرُ خطيّاً على الفضاءِ V.

مما سبق نستنتجُ أنَّ تمثيلَ زمرة G على فضاءٍ V هو حالةٌ خاصةٌ من تأثيرِ زمرة على مجموعةٍ غير خالية.

ملاحظة: ([12] ,p.9)

يُرمزُ للتمثيلِ بالرمزِ ρ أو V وأحياناً بالثنائيةِ (ρ,V)، و يُسمى بُعد الفضاءِ الذي بُني عليه التمثيل بدرجةِ التمثيل.

مثال: ([17] ,p.3)

لتكن G زمرةً، و $V(F)$ فضاءً متجهياً، إنَّ التشاكلَ الزمري:

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow id_V$$

يُعرِّف تمثيلاً للزمرةِ G يُسمى التمثيل المبتذل، وبما أنَّ F فضاءٌ متجهيٌّ بعده1، عندئذٍ يمكن أن نعرَّف تمثيلاً مبتذلاً على الفضاءِ F بالشكلِ:

$$\rho : G \longrightarrow GL(F)$$
$$g \longrightarrow id_F$$

مثال: ([20] ,p.24)

لتكن لدينا الزمرةُ S_3، والمولدة بالعنصرين $b=(12)$ $a=(123)$ حيث:

$$a^3 = b^2 = e \qquad bab = a^{-1}$$

إنَّ التمثيلَ ρ للزمرةِ S_3 على الفضاءِ C^2 يُعرَّف بالشكلِ:

$$\rho(a)=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix} \qquad \rho(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

حيث $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

مثال: ([28] ,p.5)

لتكن لدينا الزمرة $C_2=\{1,-1\}$ ، إنَّ هذه الزمرة تملكُ تمثيلاً ρ على الفضاءِ R^2 معرَّفاً بالشكلِ:

$$\rho(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \rho(-1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ملاحظة: ([14] ,p.11)

إنَّ مجموعةَ كل العناصرِ من G والتي صورتها وفق ρ هي المصفوفةُ الواحدية تشكلُ زمرةً جزئيةً ناظميةً من الزمرةِ G تُسمى نواةُ التمثيلِ ويُرمز لها $Ker\rho$.

إذا كانت $Ker\rho=\{e\}$ فإنَّ التمثيلَ ρ يُسمى تمثيلاً مخلصاً.

مثال: ([20] ,p.6)

التمثيلُ المبتذل ρ لأيِّ زمرةٍ G على فضاءٍ V هو تمثيلٌ غير مخلص، حيث $\ker\rho = G$.

مثال: ([17] ,p.5)

لتكن لدينا الزمرة $C_4=\langle x\rangle$ حيث $x^4=1$ ، إنَّ هذه الزمرة تملكُ أربعةَ تمثيلاتِ أحادية البعد على الفضاءِ C مُعرَّفة بالشكلِ:

$$\rho_1(x)=1 \quad \rho_2(x)=i \quad \rho_3(x)=-1 \quad \rho_4(x)=-i$$

إنَّ التمثيلين ρ_2,ρ_4 مخلصين، حيثُ $\ker\rho_2=\ker\rho_4=\{e\}$

التمثيلان المتماثلان لزمرةٍ منتهية:

تعريف: ([13] ,p.13)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ و $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $V(F), W(F)$ على الترتيبِ، يُقالُ عن $\varphi: V \longrightarrow W$ إنَّه G–تشاكل إذا كان:

$$\sigma_g \circ \varphi = \varphi \circ \rho_g \quad \forall \quad g \in G$$

أي أنَّ:

$$\sigma_g = \varphi \circ \rho_g \circ \varphi^{-1} \quad \forall \quad g \in G$$

وإذا كان φ تماثل، فإنَّه يُسمى G–تماثل، وفي هذه الحالة يُقالُ عن التمثيلين إنَّهما متماثلان، و نكتبُ $\rho \sim \sigma$.

نرمزُ لمجموعةِ الـ G–تشاكلات بالرمزِ $Hom_G(V,W)$.

التمثيلُ المنتظمُ لزمرةٍ منتهية: ([24] ,p.26)

لتكن $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ زمرةً منتهيةً، عندئذٍ أيّاً كان $g \in G$ فإنَّه يوجدُ $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ بحيث يكون (1) $g = x_i.x_j$ ، لنأخذ فضاءً متجهيّاً V بُعده $\dim V = n = |G|$ ، و قاعدته $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ولنأخذ التشاكل الزمري:

$$\rho_{reg}: G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow \rho_g$$

بحيث $\rho_g(v_i) = v_j$ حسب العلاقة (1) .

فيكون ρ_{reg} تمثيلاً للزمرةِ G على الفضاءِ V، يُسمى التمثيل المنتظم للزمرةِ G .

مثال : ([24] ,p.26)

ليكن $V(C)$ فضاءً متجهيّاً قاعدته $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ ، ولتكن الزمرةُ:

$$S_3 = \{1,(12),(23),(13),(123),(132)\}$$

إنَّ العلاقةَ :

$$\rho_{reg} : S_3 \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow \rho_g : V \longrightarrow V$$
$$v_i \longrightarrow \rho_g(v_i) = v_{g(i)}$$

هي تشاكلٌ زمريٌّ وتُعرِّف تمثيلاً للزمرةِ S_3 على الفضاءِ V، ويكون التمثيلُ المصفوفي المقابل لكلِّ عنصرٍ من S_3 على الترتيب بالشكلِ:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مفهومُ التمثيل الجزئي:

تعريف: ([22] ,p.5)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G، وليكن W فضاءً جزئياً من V، يُقال عن W إنَّه $G-$ فضاء جزئي من V إذا حقق الشرط:

$$\rho_g(W) \subseteq W \qquad \forall g \in G$$

وفي هذه الحالة، يمكن تعيين تمثيلاً للزمرةِ G على الفضاءِ الجزئيِّ W يُرمز له ρ_W معرَّفاً بالشكلِ التالي:

$$\rho_W : G \longrightarrow GL(W)$$
$$\rho_W(g)(w) = \rho_g(w) \qquad \forall g \in G, w \in W$$

ويُسمى التمثيلُ ρ_W تمثيلاً جزئياً من التمثيلِ ρ.

مبرهنة: ([4] ,p.18)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ و $\sigma : G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $V(F), W(F)$ على الترتيبِ و $\varphi : V \longrightarrow W$ هو G–تشاكل عندئذٍ:

1– $ker\varphi$ هو G–فضاء جزئي من V.

2– $\mathrm{Im}\varphi$ هو G–فضاء جزئي من W.

الإثبات:

1– ليكن $v \in ker\varphi$ عندئذٍ، من أجل كل $g \in G$ لدينا:

$$\varphi(\rho_g(v)) = \sigma_g \varphi(v) = 0$$

لذا $\rho_g(v) \in \ker\varphi$ ، ومنه $ker\varphi$ هو G–فضاء جزئي من V.

2– ليكن $w \in \mathrm{Im}\varphi$ عندئذٍ $u \in V \;;\; w = \varphi(u)$ ، ولدينا:

$$\sigma_g(w) = \sigma_g(\varphi(u)) = \varphi(\rho_g(u)) \in \mathrm{Im}\varphi$$

وبالتالي $\mathrm{Im}\varphi$ هو G–فضاء جزئي من W.

تعريف: ([27] ,p.15)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، يُقال عن ρ إنَّه تمثيلٌ خزول، إذا وُجِدَ G–فضاء جزئي فعلي من V، وإذا لم يملكْ V أي G–فضاء جزئي فعلي يُقال عن ρ إنَّه غير خزول .

الشكلُ المصفوفي للتمثيلِ الخزول: ([27] ,p.14)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً خزولاً لزمرةٍ G على الفضاء $V(F)$ الذي بعده n، عندئذٍ يوجد G –فضاء جزئي فعلي من V وليكن W.

بفرض أنَّ $\alpha_W = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ قاعدة لـ W، عندئذٍ يمكن أن نوسعَ α_W لتصبح قاعدة لـ V بالشكلِ $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$، عندئذٍ مصفوفةُ التمثيلِ تأخذُ الشكلَ التالي:

$$\rho_g = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \forall g \in G$$

حيث مرتبة A هي بُعد W ومرتبة كل من X, B هي $n-r$.

مثال: ([20] ,p.23)

أي تمثيل أحادي البعد لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$ هو تمثيلٌ غير خزول.

مثال: ([20] ,p.24)

لتكن لدينا الزمرةُ S_3 المولدة بالعنصرين $b = (12)$ $a = (123)$ حيث:

$$a^3 = b^2 = e \qquad bab = a^{-1}$$

وجدنا سابقاً أنَّ ρ يُعرِّف تمثيلاً للزمرةِ S_3 على الفضاءِ C^2 بالشكلِ:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$، لنبرهن الآن على أنَّ ρ غير خزول.

بفرض أنَّ W هو G –فضاء جزئي من V، عندئذٍ يكون W صامد أمام $\rho(a)$ و $\rho(b)$، كما أنَّ $\dim(W) = 1$، أي أنَّ W هو متجهٌ ذاتيٌّ لكلٍّ من المصفوفتين $\rho(a)$، $\rho(b)$.

المتجهات الذاتية للمصفوفة $\rho(a)$ هي:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

والمتجهاتُ الذاتيةُ للمصفوفةِ $\rho(b)$ هي:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

أي أنَّه لا يوجد متجهٌ ذاتيٌّ مثل W، وبالتالي ρ غير خزول.

مبرهنة Schur: ([8] ,p.7)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ و $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين غير خزولين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $V(F), W(F)$ على الترتيب، وليكن $\varphi: V \longrightarrow W$ هو $G-$تشاكل عندئذٍ:

$1-\ \varphi$ هو إما إيزومورفيزم أو التطبيق الصفري.

$2-$ إذا كان ρ, σ تمثيلين على الفضاءَيْن $V(C), W(C)$، فإنَّ $\varphi = \lambda 1_V \ ; \lambda \in C$.

الإثبات:

$1-$ بفرض أنَّ $\varphi \neq 0$، عندئذٍ $\ker(\varphi)$ هي $G-$فضاء جزئي من V، لكنَّ ρ غير خزول بالتالي إما $\ker(\varphi) = 0$ أو $\ker(\varphi) = V$، وبما أنَّ $\varphi \neq 0$ فإنَّ $\ker(\varphi) = 0$، أي أنَّ φ متباين.

كما أنَّ $\mathrm{Im}(\varphi)$ هي $G-$فضاء جزئي من W، لكنَّ σ غير خزول بالتالي إما $\mathrm{Im}(\varphi) = 0$ أو $\mathrm{Im}(\varphi) = W$، وبما أنَّ $\varphi \neq 0$ فإنَّ $\mathrm{Im}(\varphi) = W$، أي أنَّ φ غامر، مما سبق نجد أنَّ φ إيزومورفيزم.

$2-$ بفرض أنَّ λ قيمةٌ ذاتيةٌ لـ φ، وبفرض أنَّ $\hat{\varphi}: V \longrightarrow V$ تطبيق خطي بحيث $\hat{\varphi} = (\varphi - \lambda 1_V)$، عندئذٍ $\hat{\varphi}$ هو $G-$تشاكل لأنَّ:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\rho_g(v)) &= \varphi(\rho_g(v)) - \lambda\rho_g(v)\\ &= \rho_g(\varphi(v)) - \rho_g(\lambda v)\\ &= \rho_g(\varphi(v) - \lambda v) = \rho_g(\hat{\varphi}(v))\end{aligned}$$

وذلك من أجلِ أيِّ $g \in G, v \in V$.

بفرض أنَّ u هو المتجهُ الذاتيُّ المقابلُ للقيمةِ الذاتيةِ λ عندئذٍ:

$$\hat{\varphi}(u) = (\varphi - \lambda 1_V)(u) = \varphi(u) - \lambda u = 0$$

أي أنَّ $u \in \ker \hat{\varphi}$ و $\hat{\varphi}$ ليس متبايناً، وحسب الجزء الأوَّل من المبرهنةِ يكون $\hat{\varphi} = 0$

أي أنَّ $\varphi = \lambda 1_V$.

التمثيلُ الخزولُ تماماً:

تعريف: ([27] ,p.16)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، يُقال عن التمثيلِ ρ إنَّه خزولٌ تماماً إذا تحقق الشرط:

من أجل أي G –فضاء جزئي من V مثل W، يوجد G –فضاء جزئي من V وليكن U بحيث يكون $V = W \oplus U$.

نتيجة: ([27] ,p.16)

كل تمثيل غير خزول $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$ يكون خزولاً تماماً.

مبرهنة: ([27] ,p.17)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً خزولاً تماماً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، عندئذٍ كل تمثيل جزئي من ρ يكون خزولاً تماماً.

الإثبات:

ليكن U هو G –فضاء جزئي من V، وليكن U' هو G –فضاء جزئي من U. بما أنَّ ρ خزولٌ تماماً فإنَّ U' له G –فضاء جزئي مكمِّل في V وليكن W، أي أنَّ $V = U' \oplus W$.

لنأخذ الفضاء $W \cap U$ فنجد أنَّه G –فضاء جزئي من U، وأنَّ:

$$U = U' \oplus (W \cap U)$$

أي أنَّ $W \cap U$ مكمَّل لـ U' في U، وهذا يثبت أنَّ ρ_U خزولٌ تماماً.

مبرهنة: ([27] ,p.18)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً خزولاً تماماً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، فإنَّ V يُحلَّلُ إلى مجموعٍ مباشرٍ لـ G–فضاءات جزئية غير خزولة.

الإثبات:

باستخدامِ الاستقراءِ الرياضيِّ على بُعدِ الفضاءِ V.

إذا كان التمثيلُ ρ غير خزول، نحصل على المطلوب.

إذا كان ρ خزولاً، عندئذٍ يوجد G–فضاء جزئي فعلي من V، وليكن W هو الـ G–فضاء جزئي من V الأصغر بعداً، و U هو الـ G–فضاء جزئي من Vالمكمِّل لـ W أي $V = W \oplus U$.

لدينا التمثيل ρ_U خزول تماماً، وبتطبيقِ فرضيةِ الاستقراء الرياضي على ρ_U، نجدُ أنَّ U يُحلَّلُ إلى مجموعٍ مباشرٍ لـG–فضاءات جزئية من Vغير خزولة، وبإضافةِ W إلى هذا التحليل نكونُ قد كتبنا Vعلى شكلِ مجموعٍ مباشرٍ لـ G–فضاءات جزئية غير خزولة.

تعريف: ([17] ,p.6)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، يُقال عن التمثيلِ ρ إنَّه قابلٌ للتحليلِ إذا وُجِدَ G–فضاءَيْن جزئيين فعليين U,W، بحيث $V = U \oplus W$ ونكتب $\rho = \rho_U \oplus \rho_W$، وإذا لم توجد الـ G–فضاءات الجزئية المحققة للعلاقةِ السابقةِ، نقول إنَّ ρ غير قابل للتحليل.

الشكلُ المصفوفي للتمثيلِ القابلِ للتحليل: ([25] ,p.13)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً قابلاً للتحليل لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$ بعده n، عندئذٍ يوجد G–فضاءَيْن جزئيين من V مثل U و W بحيث يكون $V = W \oplus U$، وبفرض أنّ $\alpha_W = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ قاعدة للفضاءِ W و $\alpha_U = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$ قاعدة للفضاءِ U، عندئذٍ

مصفوفة التمثيل تأخذُ الشكل التالي:

$$\rho_g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

مثال: ([28] ,p.5)

لتكن لدينا الزمرةُ $C_2 = \{1,-1\}$، وجدنا سابقاً أنَّ هذه الزمرةَ تملكُ تمثيلاً ρ على الفضاءِ R^2 معرّفاً بالشكلِ:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إنَّ المتجهات الذاتيةَ للمصفوفتين $\rho(1), \rho(-1)$ هي:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بالتالي التمثيل ρ يملك الـ G–فضاءات الجزئية التالية:

$$U_1 = \{0\} \qquad U_2 = R^2 \qquad U_3 = \langle x_1 \rangle \qquad U_4 = \langle x_2 \rangle$$

ونلاحظ أنَّ $R^2 = U_3 \oplus U_4$، بالتالي التمثيل ρ قابلٌ للتحليل.

تعريف: ([21] ,p.16)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، وليكن W هو G–فضاء جزئي من V

يُعرَّف التمثيل على فضاءِ القسمةِ V/W بالشكلِ:

$$\rho_{V/W} : G \longrightarrow GL(V/W)$$
$$\rho_{V/W}(g)(v+W) = \rho_g(v) + W \qquad \forall v \in V$$

ملاحظة: ([27] ,p.16)

إذا كان U, W فضاءَيْن جزئيين متكاملين في $V(F)$، فإنَّ مقصورَ التطبيق $T : V \longrightarrow V/U$

على W هو تماثل، كما أنَّه إذا كان $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على الفضاءِ $V(F)$، وكان U,W هما $G-$ فضاءَيْن جزئيين من V، فإنَّ التمثيلين $\rho_{V/U}, \rho_W$ متماثلان.

مبرهنة Maschke: ([3] ,p.5)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، ومميز الحقل F لا يقسمُ مرتبةَ الزمرةِ G، إذا كان W هو $G-$فضاء جزئي من V، عندئذٍ يوجد $G-$فضاء جزئي U من V بحيث يكون $V = W \oplus U$، أي أنَّ التمثيلَ ρ خزولٌ تماماً.

الإثبات:

ليكن W' فضاءً جزئياً من V مكمِّل للفضاءِ W، أي أنَّ $V = W \oplus W'$، وليكن

$$\pi: V \longrightarrow W$$
$$v = w + w' \longrightarrow w$$

إسقاط للفضاءِ Vعلى W موازٍ لـ W'.

لنعرِّف العلاقة:

$$\overline{\pi}: v \longrightarrow \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_g \pi(\rho_{g^{-1}} v)$$

و لنستخدم الترميز $\rho_g \pi(\rho_{g^{-1}} v) = g\pi(g^{-1}v)$.

لدينا $v \in V$ $\forall \pi(g^{-1}v) \in W$ و $\rho_g(W) \subseteq W$، إذن $\overline{\pi}: V \longrightarrow W$.

كما أنَّه أيّاً كان $w \in W$ فإنَّ:

$$\overline{\pi}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g\pi(\underbrace{g^{-1}w}_{\in W})$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(g^{-1}w)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} w = w$$

أي أنَّ $\mathrm{Im}(\bar{\pi}) = W$.

مما سبق نجدُ أنَّ $\bar{\pi}$، هو إسقاط للفضاءِ Vعلى W.

إذا كان $h \in G$، فإنَّه $\forall v \in V$ يكون:

$$h\bar{\pi}(v) = h\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg\pi(g^{-1}v)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} ((hg)\pi(hg)^{-1}hv)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} g'\pi(g'^{-1}(hv))$$
$$= \bar{\pi}(hv)$$

كما أنَّه $h \in G, \quad \forall v \in \ker\bar{\pi}$ يكون:

$$h\bar{\pi}(v) = 0 = \bar{\pi}(hv)$$

ومنه $hv \in \ker\bar{\pi}$، أي أنَّ $\ker\bar{\pi}$ هي G–فضاء جزئي من V.

مما سبق نجدُ أنَّ:

$$V = \mathrm{Im}\,\bar{\pi} \oplus \ker\bar{\pi}$$
$$= W \oplus \ker\bar{\pi}$$

أي أنَّ ρخزولٌ تماماً.

مثال: ([20] ,p.26)

لتكن لدينا الزمرةُ S_3 المولدة بالعنصرين $b = (12)$ $a = (123)$، وليكن ρالتمثيل المنتظم للزمرةِ S_3على الفضاءِ $V(C)$ وجدنا سابقاً أنَّ:

$$\rho(b)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \rho(a)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

نلاحظُ أنَّ:

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

هو متجهٌ ذاتيٌّ للمصفوفتين $\rho(a),\rho(b)$ ، بالتالي يكون متجهاً ذاتيّاً للمصفوفات $\rho(a^2),\rho(ab),\rho(a^2b)$ ، ومنه يكون $U_1=\langle x_1\rangle$ هو G–فضاء جزئي من V، أي أنَّ ρ_{U_1} تمثيلٌ جزئيٌّ من ρ ، وليكن لدينا:

$$x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

وليكن الفضاء $U_2=\langle x_2,x_3\rangle$، عندئذٍ نجدُ أنَّ $V=U_1\oplus U_2$، و $\{x_1,x_2,x_3\}$هي قاعدةٌ للفضاءِ V كما أنَّ U_2 هو G–فضاء جزئي من V، ومنه:

$$\rho=\rho_{U_1}\oplus\rho_{U_2}$$

مبرهنة: ([5] ,p.7)

ليكن $\rho:G\longrightarrow GL(V)$ و $\sigma:G\longrightarrow GL(W)$ تمثيلين غير خزولين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $V(C),W(C)$على الترتيب، عندئذٍ:

$$\dim Hom_G(V,W)=\begin{cases}0 & if \quad \rho\not\sim\sigma\\ 1 & if \quad \rho\sim\sigma\end{cases}$$

الإثبات:

بفرض أنَّ التمثيلين ρ,σ غير متماثلين، عندئذٍ حسب مبرهنة *Schur* فإنَّ الـ G–تشاكل الوحيد بين الفضاءَيْن V,W هو التطبيقُ الصفري، ومنه $\dim Hom_G(V,W)=\{0\}$.

إذا كان ρ,σ متماثلين و $\varphi: V \longrightarrow W$ هو G–تماثل عندئذٍ:

$$\forall f \in Hom_G(V,W) \qquad \varphi^{-1} \circ f \in Hom_G(V,V)$$

وحسب مبرهنة *Schur* يكون $\varphi^{-1} \circ f = \lambda 1_V$ ومنه $f = \lambda\varphi$

أي أنَّ $Hom_G(V,W)$ مولدٌ بـ φ، ويكون $\dim Hom_G(V,W) = \{1\}$.

مبرهنة: ([20] ,p.41)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، وليكن

$$\rho_V = \rho_{U_1} \oplus \rho_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho_{U_S}$$

تحليل التمثيل ρ إلى تمثيلاتٍ جزئيةٍ غير خزولة، وليكن $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ أي تمثيل غير خزول للزمرة G، عندئذٍ عدد التمثيلات من المجموعة $\{\rho_{U_1}, \rho_{U_2}, \ldots, \rho_{U_S}\}$، والتي تماثلُ σ يساوي بعد الفضاء $Hom_G(V,W)$.

مبرهنة: ([27] ,p.33)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، وليكن:

$$\rho_V = \rho_{U_1} \oplus \rho_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho_{U_S}$$
$$\rho_V = \rho_{U_1'} \oplus \rho_{U_2'} \oplus \ldots \oplus \rho_{U_r'}$$

تحليلين للتمثيلِ ρ إلى تمثيلاتٍ جزئيةٍ غير خزولة، عندئذٍ المجموعتان:

$$\{\rho_{U_1}, \rho_{U_2}, \ldots, \rho_{U_S}\}$$
$$\{\rho_{U_1'}, \rho_{U_2'}, \ldots, \rho_{U_r'}\}$$

هما المجموعة ذاتها و $r = s$، كما أنَّ $\rho_{U_i}, \rho_{U_i'}$ متماثلان من أجلِ أيٍّ $i \in \{1,2,\ldots,r\}$

الإثبات:

ليكن $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلاً غير خزول للزمرةِ G، عندئذٍ يكونُ عدد التمثيلاتِ غير

الخزولة من التحليلِ الأول لـ ρ والمتماثلةِ مع σ يساوي بعد الفضاء $Hom_G(V,W)$.

لكنّ عددَ التمثيلاتِ غير الخزولة من التحليلِ الثاني لـ ρ والمتماثلة مع σ يساوي أيضاً بعد الفضاء $Hom_G(V,W)$ أي أنَّه من أجلِ أي تمثيل σ غير خزول للزمرةِ G، التحليلان لـ ρ يملكان العدد ذاته من التمثيلاتِ غير الخزولةِ والمتماثلةِ مع σ.

مبرهنة: ([20] ,p.42)

ليكن $\rho_{reg}: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً منتظماً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، وليكن:

$$\rho_{reg} = \rho_{U_1} \oplus \rho_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho_{U_S}$$

تحليل التمثيل ρ إلى تمثيلاتٍ جزئيةٍ غير خزولة، وليكن $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ أي تمثيل غير خزول للزمرةِ G، عندئذٍ عدد التمثيلات من المجموعةِ $\{\rho_{U_1}, \rho_{U_2}, \ldots, \rho_{U_S}\}$، والتي تماثلُ σ يساوي $\dim W$.

نتيجة: ([20] ,p.42)

أي زمرة منتهية G تملكُ عدداً منتهياً من التمثيلاتِ غير الخزولة.

الإثبات:

ليكن $\rho_{reg}: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً منتظماً لزمرةٍ G على فضاءٍ V، حيث

$$\rho_{reg} = \rho_{U_1} \oplus \rho_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho_{U_S}$$

بما أنَّ أي تمثيل غير خزول للزمرةِ G يماثلُ إحدى التمثيلات الجزئية غير الخزولة لـ ρ_{reg} و V منتهي البعد، فإنَّ G تملكُ عدداً منتهياً من التمثيلاتِ غير الخزولة.

مميزُ التمثيل:

تعريف: ([5] ,p.19)

ليكن ρ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، يُعرَّف مميزُ التمثيل ρ بأنَّه التطبيق:

$$\chi : G \longrightarrow F$$
$$\chi(g) = tr(\rho_g)$$

مثال: ([4] ,p.33)

وجدنا سابقاً من أجلِ التمثيلِ المنتظم للزمرةِ S_3 أنَّ:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ:

$$\chi_\rho(1) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(23) = 1$$
$$\chi_\rho(13) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0 \quad \chi_\rho(132) = 0$$

خواص مميز التمثيل:

مبرهنة: ([23] ,p.29)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، حيث $\dim V = n$ عندئذٍ:

$$\chi_\rho(e) = n \qquad -1$$

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)} \qquad -2$$

$$\chi_\rho(h^{-1}gh) = \chi_\rho(g) \qquad -3$$

الإثبات:

$1-\ \chi_\rho(e)=tr(\rho_e)=tr(I_V)=\dim V=n$.

$2-$ بما أنَّ الزمرة G منتهية فإنَّه لكل $g\in G$ يوجد k بحيث $g^k=e$ ، وبالتالي $\rho_g^k=\rho_{g^k}=I_V$.

فإذا كانت $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ هي القيمُ الذاتيةُ للمؤثرِ ρ_g ، عندئذٍ $\lambda_1{}^k,\lambda_2{}^k,\ldots,\lambda_n{}^k$ هي القيمُ الذاتية للمؤثرِ ρ_g^k وبالتالي $tr(\rho_g^k)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k=n$ ، ومنهُ $\lambda_i^k=1;\quad i=1,2,\ldots,n$

أي أنَّ $|\lambda_i|=1$ ، ومنه $\lambda_i^{-1}=\overline{\lambda_i};\quad i=1,2,\ldots,n$.

و بما أنَّ $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1}$ هي القيمُ الذاتيةُ للمؤثرِ ρ_g^{-1} ، نجد أنَّ:

$$\chi_\rho(g^{-1})=tr(\rho_{g^{-1}})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}$$
$$=\overline{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\overline{\chi_\rho(g)}$$

$3-\ \chi_\rho(h^{-1}gh)=tr(\rho_{h^{-1}gh})=tr(\rho_{h^{-1}}\rho_g\rho_h)=tr(\rho_g)=\chi_\rho(g)$.

نتيجة: ([20] ,p.55)

ليكن ρ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$ بعده n عندئذٍ:

$$[\rho_g]=I_n\Leftrightarrow\chi_\rho(g)=n$$

بالتالي فإنَّه بمعرفةِ مميز التمثيل يمكنُ أن نحددَ فيما إذا كان التمثيلُ مخلصاً أم لا.

ملاحظة: ([7] ,p.34)

ليكن $\rho:G\longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً غير خزول لزمرةٍ G مميزه χ ، عندئذٍ نقولُ عن المميزِ χ إنَّه غير خزول.

مبرهنة: ([23] ,p.32)

ليكن $\sigma:G\longrightarrow GL(W),\rho:G\longrightarrow GL(V)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $W(F),V(F)$

على الترتيب، عندئذٍ إذا كان التمثيلان ρ,σ متماثلين فإنَّ $\forall g\in G$ $\chi_\rho(g)=\chi_\sigma(g)$

الإثبات:

بفرض أنَّ التمثيلين ρ,σ متماثلين، ولتكن $\alpha=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ قاعدةً للفضاءِ V، عندئذٍ تشكلُ $\beta=\{w_i=\varphi(v_i);\quad i=1,2,\ldots,m\}$ قاعدةً للفضاءِ W، حيث φ هو $G-$تماثل.

ولدينا:

$$\rho(g)=\varphi\sigma(g)\varphi^{-1};\quad \forall g\in G$$

عندئذٍ لأجل أي $g\in G$ مصفوفة $\rho(g)$ بالنسبةِ للقاعدةِ α هي مصفوفةٌ مشابهةٌ لمصفوفةِ $\sigma(g)$ بالنسبةِ للقاعدةِ β لذلك يكون:

$$tr(\rho(g))=tr(\sigma(g));\quad \forall g\in G$$

أي أنَّ $\forall g\in G;\quad \chi_\rho(g)=\chi_\sigma(g)$.

تعريف: ([25] ,p.10)

ليكن $\rho:G\longrightarrow GL(V)$ و $\sigma:G\longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $V(F),W(F)$ على الترتيب، يُعرَّف المجموعُ المباشر للتمثيلين ρ,σ بأنَّه التشاكلُ الزمري:

$$\rho\oplus\sigma:G\longrightarrow GL(V\oplus W)$$

والمعرَّفُ بالشكلِ:

$$(\rho\oplus\sigma)(g)(v,w)=(\rho_g(v),\sigma_g(w))$$

كما أنَّ التمثيلَ المصفوفي لـ $\rho\oplus\sigma$ يُعطى بالشكلِ:

$$(\rho\oplus\sigma)(g)=\begin{pmatrix}\rho_g & 0\\ 0 & \sigma_g\end{pmatrix}\quad \forall g\in G$$

مبرهنة: ([7] ,p.35)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ و $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $V(F), W(F)$

على الترتيب، و $\rho \oplus \sigma: G \longrightarrow GL(V \oplus W)$ المجموع المباشر للتمثيلين ρ, σ عندئذٍ:

$$\chi_{\rho \oplus \sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$$

الإثبات:

بما أنَّ:

$$(\rho \oplus \sigma)(g) = \begin{pmatrix} \rho_g & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{pmatrix} \quad \forall g \in G$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned} \chi_{\rho \oplus \sigma}(g) &= tr((\rho \oplus \sigma)(g)) \\ &= tr(\rho_g) + tr(\sigma_g) \\ &= \chi_\rho(g) + \chi_\sigma(g) \end{aligned}$$

تعامدُ المميزات:

ملاحظة: ([22] ,p.16)

ليكن $V(C)$ فضاءً متجهياً، و ليكن ρ_i تمثيلاً لزمرةٍ G على الفضاءِ V، لنأخذ الترميز التالي:

$$m_i \rho_i = \underbrace{\rho_i \oplus \ldots \oplus \rho_i}_{m_i}$$

حسب مبرهنة Maschke، أي تمثيل للزمرةِ G يُمكن التعبير عنه بالشكلِ:

$$\rho = m_1\rho_1 \oplus m_2\rho_2 \oplus \ldots\ldots \oplus m_r\rho_r$$

حيث $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ تمثيلات غير خزولة للزمرةِ G.

العددُ الصحيح m_i يُسمى تعددية ρ_i في ρ، كما أنَّ:

$$\rho(g) = m_1\rho_1(g) \oplus m_2\rho_2(g) \oplus \ldots\ldots \oplus m_r\rho_r(g) \quad ; g \in G$$

لذا يكون:

$$\chi_\rho(g) = m_1\chi_{\rho_1}(g) + m_2\chi_{\rho_2}(g) + \ldots + m_r\chi_{\rho_r}(g)$$

الفضاء المتجهي C^G: ([4] ,p.35)

لتكن G زمرةً منتهيةً، ولنأخذ المجموعة $C^G = \{f : G \longrightarrow C\}$ ونزودها بالعمليتين:

$$(f + f')(g) = f(g) + f'(g) \quad ; \quad \forall g \in G$$
$$(\lambda f)(g) = \lambda f(g) \quad ; \quad \forall g \in G, \lambda \in C$$

فنجدُ أنَّها تشكلُ فضاءً متجهياً يُسمى فضاء الدوال الصفيّة C^G على G.

إذا كان χ أي مميز لـ G، عندئذٍ $\chi \in C^G$، كما أنَّه إذا كان:

$$\chi_\rho(g) = m_1\chi_{\rho_1}(g) + m_2\chi_{\rho_2}(g) + \ldots + m_r\chi_{\rho_r}(g)$$

نجد أنَّ:

$$\left\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} m_i\chi_i, \chi_i \right\rangle = \left\langle m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \ldots + m_i\chi_i + \ldots + m_r\chi_r, \chi_i \right\rangle$$

$$= m_1\langle \chi_1, \chi_i \rangle + m_2\langle \chi_2, \chi_i \rangle + \ldots + m_i\langle \chi_i, \chi_i \rangle + \ldots + m_r\langle \chi_r, \chi_i \rangle$$
$$= 0 + 0 + \ldots + m_i(1) + \ldots + 0 = m_i$$

كما يُمكننا أن نعرِّفَ جداءً داخلياً هرميتياً على الفضاءِ C^G بالشكلِ:

$$\langle , \rangle : C^G \times C^G \longrightarrow C$$

$$\langle f, f' \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \cdot f'(g)$$

و إذا كانت G زمرة منتهية، و $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_n$ هي صفوف ترافق الزمرة G، عندئذٍ الدوال $\delta_{\theta_i} : G \longrightarrow C$ المعرّفة بالشكلِ:

$$\delta_{\theta_i}(y)=\begin{cases}1 & ; \quad y\in\theta_i \\ 0 & ; \quad y\notin\theta_i\end{cases} \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

تشكلُ قاعدةً للفضاءِ C^G ويكون $\dim C^G$ هو عددُ صفوف ترافق الزمرة G.

مبرهنة تعامد المميزات: ([22] ,p.15)

ليكن χ_ρ,χ_σ المميزين المقابلين للتمثيلين غير الخزولين ρ,σ على الترتيب لزمرةٍ G عندئذٍ:

$$\langle\chi_\rho,\chi_\sigma\rangle=\begin{cases}1 & ; \quad \rho\sim\sigma \\ 0 & ; \quad \rho\not\sim\sigma\end{cases}$$

تمهيدية: ([13] ,p.31)

ليكن $V(C)$ فضاءً متجهياً، وليكن $\rho=m_1\rho_1\oplus m_2\rho_2\oplus\ldots\ldots\oplus m_r\rho_r$ تمثيلاً لزمرةٍ G على الفضاءِ V، حيث $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_r$ تمثيلات غير خزولة للزمرةِ G، عندئذٍ:

$$\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=\sum_{i=1}^{r}m_i^{\,2}$$

الإثبات:

$$\begin{aligned}\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle&=\left\langle\sum_{i=1}^{r}m_i\chi_{\rho_i},\sum_{j=1}^{r}m_j\chi_{\rho_j}\right\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^{r}m_im_j\langle\chi_{\rho_i},\chi_{\rho_j}\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^{r}m_im_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{r}m_i^{\,2}\end{aligned}$$

نتيجة: ([3] ,p.16)

ليكن $V(C)$ فضاءً متجهياً، وليكن ρ تمثيلاً لزمرةٍ G على الفضاءِ V، عندئذٍ يكون ρ غير خزول إذا وفقط إذا كان $\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle=1$.

مبرهنة: ([4] ,p.38)

لتكن G زمرة منتهية، و C^G فضاء الدوال الصفيَّة على G، عندئذٍ المميزات غير الخزولة للزمرةِ G تشكلُ قاعدةً متعامدةً منظمةً للفضاءِ C^G.

نتيجة: ([20] ,p.69)

لتكن G زمرةً منتهيةً، عندئذٍ عدد التمثيلات غير الخزولة للزمرةِ G يساوي عدد صفوف ترافقها.

نتيجة: ([13] ,p.26)

لتكن G زمرةً منتهيةً، و $g \in G$، عندئذٍ من أجلِ أي تمثيل ρ للزمرةِ G يكون $\chi(g)$ عدداً حقيقياً إذا وفقط إذا كان g, g^{-1} مترافقان.

جدولُ المميزات: ([4] ,p.40)

لكتابةِ جدول المميزات لزمرةٍ منتهيةٍ G نقومُ بما يلي:

- نكتب صفوف ترافق الزمرة G: $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_n$ حيث $\theta_1 = \{e\}$
- نختار $g_i \in \theta_i$; $i = 1,2,\ldots,n$ ممثل لصفِ الترافقِ ثمَّ نحسب $\chi_1(g_i), \chi_2(g_i), \ldots\ldots, \chi_n(g_i)$ حيث χ_1 هو مميزُ التمثيل المبتذل.

فيكون لدينا الجدول التالي:

	g_1	g_2	…	g_n
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\chi_1(g_2)$	…	$\chi_1(g_n)$
χ_2	$\chi_2(g_1)$	$\chi_2(g_2)$	…	$\chi_2(g_n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
χ_n	$\chi_n(g_1)$	$\chi_n(g_2)$	…	$\chi_n(g_n)$

مثال: ([3] ,p.16)

لتكن لدينا زمرةُ التباديل $S_3 = \{1, (12), (23), (13), (123), (132)\}$، والتي تملكُ صفوفَ الترافق

التالية:

- $\theta_1 = \{e\}$
- $\theta_2 = \{(12),(23),(13)\}$ تباديل الـ2 دور
- $\theta_3 = \{(123),(132)\}$ تباديل الـ3 دور

بالتالي يوجدُ ثلاثة تمثيلات غير خزولة للزمرةِ S_3 على الفضاء $V(C)$

- التمثيل ρ_1 وهو التمثيلُ المبتذل.
- التمثيل ρ_2 والذي مميزه يأخذُ القيمَ $\{\pm 1\}$، حيث $\chi_2(g)=1$ إذا وفقط إذا كان g يُكتبُ على شكلِ جداءِ عددٍ زوجي من تباديلِ الـ2 دور.
- التمثيل ρ_3 وسنحسب مميزه χ_3 بالاعتماد على تعامد المميزات.

بفرض أنَّ :

$$\chi_3(e)=a \qquad \chi_3(12)=b \qquad \chi_3(123)=c$$

عندئذٍ a,b,c هي أعدادٌ حقيقيةٌ لأنَّ g مرافقٌ لمقلوبهِ من أجلِ أي $g \in G$.

كما أنَّ:

$$\langle \chi_1, \chi_3 \rangle = \frac{1}{6}(a+3b+2c)=0$$
$$\langle \chi_2, \chi_3 \rangle = \frac{1}{6}(a-3b+2c)=0$$
$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{1}{6}(a^2+3b^2+2c^2)=1$$

أي أنَّ:

$$b=0$$
$$a+2c=0$$
$$a^2+2c^2=6$$

حيث a موجب لأنَّه يساوي بُعد فضاء التمثيل، ومنه $c=-1 \quad a=2$، وبالتالي يكون جدول المميزات كما يلي:

	e	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

مثال: ([21] ,p.43)

لتكن D_n زمرةَ *Dihedral*، حيث n عدد صحيح موجب، عدد عناصرها $2n$، ومولدة بعنصرين r,c، حيث:

$$c^n = e \quad , \quad r^2 = e \quad , \quad rcr^{-1} = c^{-1}$$

وفي حال $n = 4$ نحصلُ على الزمرةِ D_4، والتي تملكُ جدولَ المميزاتِ التالي:

	e	c	c^2	r	cr
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	1	1	-1	-1
χ_{ρ_3}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_4}	1	-1	1	-1	1
χ_{ρ_5}	2	0	-2	0	0

مثال: ([17] ,p.11)

لتكن لدينا الزمرةُ $C_4 = \langle x \rangle$ حيث $x^4 = 1$، وجدنا سابقاً أنَّ هذه الزمرة تملكُ أربعة تمثيلات أحادية البعد على الفضاءِ C:

$$\rho_1(x) = 1 \qquad \rho_2(x) = i$$

$$\rho_3(x) = -1 \qquad \rho_4(x) = -i$$

عندئذٍ جدولُ المميزات للزمرة C_4 يُعطى بالشكلِ:

	1	x	x^2	x^3
χ_{ρ_1}	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	i	-1	i
χ_{ρ_3}	1	-1	1	-1
χ_{ρ_4}	1	$-i$	-1	i

مبرهنة: ([23] ,p.32)

ليكن $\sigma: G \longrightarrow GL(W), \rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $W(C), V(C)$ على الترتيب، عندئذٍ إذا كان $\forall g \in G \;\; ; \chi_\rho(g) = \chi_\sigma(g)$ ، فإنَّ التمثيلين ρ, σ متماثلان.

الإثبات:

بفرض أنَّ $\forall g \in G \;\; ; \chi_\rho(g) = \chi_\sigma(g)$ ، وبما أنَّ التمثيلين ρ, σ خزولان تماماً حسب مبرهنة Maschke يمكن أن نكتب:

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i \rho_i \qquad \sigma = \bigoplus_{j=1}^{r} n_j \rho_j$$

حيث $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ هي التمثيلات غير الخزولة لـ G عندئذٍ:

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_{\rho_i} \qquad \chi_\sigma = \sum_{j=1}^{r} n_j \chi_{\rho_j}$$

وبالتالي: $m_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = \langle \chi_\sigma, \chi_{\rho_i} \rangle = n_j$ من أجل $i = 1,2\ldots, r$ ، أي أنَّ التمثيلين ρ, σ متماثلان.

ملاحظة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ V ، وليكن U, W هما G –فضاءان جزئيان من V ، أي أنَّ $\rho = \rho_U \oplus \rho_W$ ، ومنه $\chi_V = \chi_U + \chi_W$.

وجدنا أنَّ $\rho_W, \rho_{V/U}$ متماثلان، بالتالي $\chi_W = \chi_{V/U}$ ، لكنَّ $\chi_W = \chi_V - \chi_U$ ، ومنه $\chi_{V/U} = \chi_V - \chi_U$.

التمثيل الواحدي:

تعريف: ([29] ,p.7)

ليكن $V(C)$ فضاءَ جداءٍ داخلي، يُقالُ عن التمثيلِ $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ لزمرةٍ G على الفضاءِ V إنَّه تمثيلٌ واحديٌّ، إذا كان المؤثرُ ρ_g واحدياً لكلِ $g \in G$، أي يحققُ:

$$\langle \rho_g(v), \rho_g(w) \rangle = \langle v, w \rangle; \quad \forall v, w \in V$$

مبرهنة: ([21] ,p.27)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءِ الجداءِ الداخلي $V(C)$، عندئذٍ يوجدُ جداء داخلي هرميتي $\langle -,- \rangle_\circ$ على V بحيث يكون كل مؤثر $g \in G \quad \forall \ \rho_g$ هو مؤثرٌ واحديٌّ أي أنَّ:

$$\langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle_\circ = \langle u, v \rangle_\circ \quad \forall \quad u, v \in V, g \in G$$

الإثبات:

لنأخذ العلاقة:

$$\langle u, v \rangle_\circ = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle \quad \forall \quad u, v \in V, g \in G$$

ولنبرهن على أنَّها تُعرِّفُ جداءً داخليّاً كما يلي:

أيّاً كان $u, u', v, v' \in V, \alpha \in C$ فإنَّ:

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + u', v \rangle_\circ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(\alpha u + u'), \rho_g(v) \rangle \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \langle \alpha \rho_g(u) + \rho_g(u'), \rho_g(v) \rangle \end{aligned} \qquad -1$$

$$\begin{aligned} &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left[\langle \alpha \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle + \langle \rho_g(u'), \rho_g(v) \rangle \right] \\ &= \alpha |G|^{-1} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle + |G|^{-1} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(u'), \rho_g(v) \rangle \\ &= \alpha \langle u, v \rangle_\circ + \langle u', v \rangle_\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u,\alpha v+v'\rangle_{\circ} &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(u),\rho_g(\alpha v+v')\rangle \\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(u),\alpha\rho_g(v)+\rho_g(v')\rangle \\ &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\left[\langle \rho_g(u),\alpha\rho_g(v)\rangle+\langle \rho_g(u),\rho_g(v')\rangle\right] \\ &= \overline{\alpha}|G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(u),\rho_g(v)\rangle+|G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(u),\rho_g(v')\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle u,v\rangle_{\circ}+\langle u,v'\rangle_{\circ}\end{aligned} \qquad -2$$

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{\circ} &= |G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(u),\rho_g(v)\rangle \quad = \quad |G|^{-1}\sum_{g\in G}\overline{\langle \rho_g(v),\rho_g(u)\rangle} \\ &= |G|^{-1}\overline{\sum_{g\in G}\langle \rho_g(v),\rho_g(u)\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle_{\circ}}\end{aligned} \qquad -3$$

$$\langle v,v\rangle_{\circ} = |G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(v),\rho_g(v)\rangle \geq 0 \qquad -4$$

5- إذا كان $\langle v,v\rangle_{\circ}=0$ عندئذٍ، $\langle v,v\rangle_{\circ}=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\langle \rho_g(v),\rho_g(v)\rangle=0$ ومنه $v=0$.

مما سبق نجدُ أنَّ $\langle -,-\rangle_{\circ}$ هو جداءٌ داخليٌّ هرميتيٌّ، ولكي يتمَ المطلوب سنبرهن على أنَّ:

$$\langle \rho_g(u),\rho_g(v)\rangle_{\circ}=\langle u,v\rangle_{\circ}$$

أياً كان $u,v\in V, g\in G$ نجدُ أنَّ:

$$\begin{aligned}\langle \rho_g(u),\rho_g(v)\rangle_{\circ} &= |G|^{-1}\sum_{h\in G}\langle \rho_h(\rho_g(u)),\rho_h(\rho_g(v))\rangle \\ &= |G|^{-1}\sum_{h\in G}\langle \rho_{hg}(u),\rho_{hg}(v)\rangle \\ &= |G|^{-1}\sum_{k\in G}\langle \rho_k(u),\rho_k(v)\rangle=\langle u,v\rangle_{\circ}\end{aligned}$$

ومنه فإنَّ المؤثر $g\in G \quad \forall \ \rho_g$ هو مؤثرٌ واحديٌّ، وبالتالي التمثيل ρ هو تمثيلٌ واحديٌّ.

مبرهنة: ([17] ,p.26)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ و $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $V(F), W(F)$ على الترتيب عندئذٍ التطبيق:

$$\rho \otimes \sigma: G \longrightarrow GL(V \otimes W)$$

المعرَّف بالشكلِ:

$$\rho \otimes \sigma_g(\sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j) = \sum \lambda_{ij} \rho_g v_i \otimes \sigma_g w_j$$

هو تمثيلٌ للزمرةِ G على فضاءِ الجداءِ التنسوري $V \otimes W$، ومميزه يُعطى بالعلاقةِ:

$$\chi_{\rho \otimes \sigma_g} = \chi_{\rho_g} . \chi_{\sigma_g} \qquad \forall g \in G$$

الإثبات:

من الواضحِ أنَّ $\rho \otimes \sigma_g \in GL(V \otimes W)$، كما أنَّ $\rho \otimes \sigma: G \longrightarrow GL(V \otimes W)$

المعرَّف بالشكلِ:

$$\rho \otimes \sigma_g(\sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j) = \sum \lambda_{ij} \rho_g v_i \otimes \sigma_g w_j$$

هو تشاكلٌ زمري.

ليكن $g \in G$، ولتكن $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ قاعدةً للفضاءِ V مكونة من المتجهاتِ الذاتيةِ لـ ρ_g، و $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ قاعدةً للفضاءِ W مكونة من المتجهاتِ الذاتيةِ لـ σ_g أي:

$$\rho_g(v_i) = \lambda_i v_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$\sigma_g(w_j) = \mu_j w_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}(\rho \otimes \sigma)_g(v_i \otimes w_j) &= \rho_g(v_i) \otimes \sigma_g(w_j) \\ &= \lambda_i v_i \otimes \mu_j w_j \\ &= (\lambda_i \mu_j)(v_i \otimes w_j)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\chi_{\rho\otimes\sigma}(g)=\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\mu_j$$
$$=\chi_\rho(g).\chi_\sigma(g)$$

مبرهنة: ([20] ,p.33)

ليكن $\rho:G\longrightarrow GL(V)$ و $\sigma:G\longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $W(F),V(F)$ على الترتيب، عندئذٍ التطبيق:

$$T:G\longrightarrow GL(Hom(V,W))$$

المعرَّف بالشكلِ:

$$T_g(f)=\sigma_g\circ f\circ\rho_{g^{-1}}\quad ;f\in Hom(V,W)$$

هو تمثيلٌ للزمرةِ G على الفضاءِ $Hom(V,W)$ ومميزه يُعطى بالعلاقةِ:

$$\chi_T=\overline{\chi_\rho}.\chi_\sigma$$

الإثبات:

من الواضحِ أنَّ $T_g\in GL(Hom(V,W))$، كما أنَّ T_g هو تشاكل زمري لأنَّ:

$$\forall\quad f\in Hom(V,W)\quad ,\quad h,g\in G$$

$$T_{hg}(f)=\sigma_{hg}\circ f\circ\rho_{g^{-1}h^{-1}}=\sigma_h\circ(\sigma_g\circ f\circ\rho_{g^{-1}})\circ\rho_{h^{-1}}$$
$$=\sigma_h\circ T_g(f)\circ\rho_{h^{-1}}=(T_h\circ T_g)(f)$$

ليكن $g\in G$ ولتكن $\alpha=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ قاعدةً للفضاءِ V مكوَّنة من المتجهاتِ الذاتيةِ لـ ρ_g، و $\beta=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ قاعدة للفضاءِ W مكوَّنة من المتجهاتِ الذاتيةِ لـ σ_g أي:

$$\rho_g(v_i)=\lambda_i v_i\qquad i=1,2,\ldots,m$$
$$\sigma_g(w_j)=\mu_j w_j\qquad j=1,2,\ldots,n$$

كما أنَّ الدوال $\{f_{ij} : 1 \le i \le n \ , \ 1 \le j \le m\}$ هي قاعدة للفضاءِ $Hom(V,W)$ ، حيث

$$f_{ij} : V \longrightarrow W$$
$$a_k \longrightarrow \begin{cases} w_j ; & k = i \\ 0 ; & k \neq i \end{cases}$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}(T_g f_{ij})(v_i) &= (\sigma_g \circ f_{ij} \circ \rho_{g^{-1}})(v_i) \\ &= (\sigma_g \circ f_{ij})(\lambda_i^{-1} v_i) \\ &= \sigma_g(\lambda_i^{-1} f_{ij}(v_i)) \\ &= \sigma_g(\lambda_i^{-1} w_j) = \lambda_i^{-1}\mu_j w_j \\ &= \lambda_i^{-1}\mu_j f_{ij}(v_i)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\chi_T(g) &= \sum_{i,j} \lambda_i^{-1}\mu_j = \sum_i \lambda_i^{-1} \sum_j \mu_j \\ &= \chi_\rho(g^{-1})\chi_\sigma(g) \\ &= \overline{\chi_\rho(g)}\,\chi_\sigma(g)\end{aligned}$$

وبذلك يتمُ المطلوب.

مبرهنة: ([20] ,p.35)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ و $\sigma : G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على الفضاءَيْن $V(F), W(F)$ على الترتيب، عندئذٍ:

$$T_{|Hom_G(V,W)} : G \longrightarrow GL(Hom_G(V,W))$$

هو تمثيلٌ جزئيٌّ من التمثيلِ $T : G \longrightarrow GL(Hom(V,W))$.

الإثبات:

من الواضحِ أنَّ $Hom_G(V,W)$ هو فضاءٌ جزئيٌّ من الفضاءِ $Hom(V,W)$.

كما أنَّه $\forall \ f \in Hom(V,W)$ ، فإنَّ f صامدٌ أمامَ T إذا وفقط إذا كان

$$T_g(f) = f \qquad \forall g \in G$$

أي أنَّ:

$$\sigma_g \circ f \circ \rho_{g^{-1}} = f \qquad \forall g \in G$$
$$\Leftrightarrow \qquad \sigma_g \circ f = f \circ \rho_g$$

بالتالي $f \in Hom_G(V,W)$ ، وبذلك يتمُ المطلوب.

مبرهنة: ([20] ,p.38)

لتكن U,V,W ثلاثةَ فضاءات متجهية على حقلٍ F ، عندئذٍ يكون لدينا التماثلان

$$1- \quad Hom(V,U \oplus W) \cong Hom(V,U) \oplus Hom(V,W)$$
$$2- \quad Hom(U \oplus W,V) \cong Hom(U,V) \oplus Hom(W,V)$$

وإذا كان لدينا تمثيلات لزمرةٍ G على الفضاءات U,V,W، فإنَّ التماثلين السابقين هما

G–تماثلان.

الإثبات:

1– بفرض أنَّ ρ_W, ρ_V, ρ_U ثلاثةُ تمثيلات لزمرةٍ G على الفضاءات W,V,U على الترتيب.

ليكن لدينا تطبيقا الاحتواء :

$$l_U : U \longrightarrow U \oplus W \qquad l_W : W \longrightarrow U \oplus W$$
$$u \longrightarrow (u,0) \qquad w \longrightarrow (0,w)$$

وتطبيقا الإسقاط:

$$\pi_W : U \oplus W \longrightarrow W \qquad \pi_U : U \oplus W \longrightarrow U$$
$$(u,w) \longrightarrow w \qquad (u,w) \longrightarrow u$$

ولنأخذ التطبيق:

$$\varphi : Hom(V, U \oplus W) \longrightarrow Hom(V,U) \oplus Hom(V,W)$$

المعرَّف بالشكلِ:

$$\varphi(f) = (\pi_U \circ f, \pi_W \circ f) .$$

أثبتنا سابقاً أنَّ φ تماثل، وحتى يتم المطلوب يجب إثبات أنَّ φ هو G–تشاكل.

نعلمُ أنَّ:

$$\rho_{Hom(V,U\oplus W)}(g)(f) = \rho_{U\oplus W}(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \pi_U \circ (\rho_{Hom(V,U\oplus W)}(g)(f)) &= \pi_U \circ \rho_{U\oplus W}(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) \\ &= \rho_U(g) \circ \pi_U \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) \\ &= \rho_{Hom(U,V)}(g)(f) \end{aligned}$$

كما أنَّ:

$$\begin{aligned} \pi_W \circ (\rho_{Hom(V,U\oplus W)}(g)(f)) &= \pi_W \circ \rho_{U\oplus W}(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) \\ &= \rho_W(g) \circ \pi_W \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) \\ &= \rho_{Hom(W,V)}(g)(f) \end{aligned}$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_{Hom(V,U\oplus W)}(g)(f)) &= (\pi_U \circ \rho_{Hom(V,U\oplus W)}(g)(f) \ , \ \pi_W \circ \rho_{Hom(V,U\oplus W)}(g)(f)) \\ &= (\rho_{Hom(V,U)}(g)(\pi_U \circ f) \ , \ \rho_{Hom(V,W)}(g)(\pi_W \circ f)) \\ &= \rho_{Hom(V,U)\oplus Hom(V,W)}(g)(\pi_U \circ f, \pi_W \circ f) \end{aligned}$$

مما سبق نجدُ أنَّ φ هو G–تشاكل.

2– لنأخذ التطبيق:

$$\psi : Hom(U \oplus W, V) \longrightarrow Hom(U,V) \oplus Hom(W,V)$$

المعرَّف بالشكلِ: $\psi(f)=(f\circ l_U, f\circ l_W)$

وبمناقشةٍ مشابهةٍ لما سبق نحصلُ على المطلوب.

نتيجة: ([20] ,p.40)

لتكن لدينا تمثيلات لزمرةٍ G على الفضاءات U,V,W، عندئذٍ التماثلان

$$1- \quad Hom_G(V,U\oplus W)\cong Hom_G(V,U)\oplus Hom_G(V,W)$$
$$2- \quad Hom_G(U\oplus W,V)\cong Hom_G(U,V)\oplus Hom_G(W,V)$$

هما G-تماثلان.

سنعرضُ في هذا الفصلِ النتائجَ التي توصلنا إليها خلال دراستنا للتمثيلِ الثنويِّ للزمرِ المنتهية حيثُ أثبتنا أنَّه إذا كان ρ خزولاً تماماً وقابلاً للتحليلِ، فإنَّ ρ^* خزولاً تماماً وقابلاً للتحليلِ، كما أثبتنا أنَّه إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً من ρ ، فإنَّ ρ_W^* ليس بالضرورةِ تمثيلاً جزئياً من ρ^* ، ولكنَّه يمدَّدُ إلى تمثيلٍ جزئيٍّ، كما استطعنا تحليلَ ρ^* إلى مجموعٍ مباشرٍ لتمثيلاتٍ جزئيِّةٍ، وذلكَ بالاعتمادِ على التمثيلات الجزئية من ρ .

تعريف: ([21] ,p.17)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ V ، يُعرَّفُ التمثيلُ الثنوي لزمرةٍ G بأنَّه التشاكلُ الزمري :

$$\begin{aligned} \rho^* : G &\longrightarrow GL(V^*) \\ g &\longrightarrow \rho^{tr}_{g^{-1}} : V^* \longrightarrow V^* \\ &\qquad \varphi \longrightarrow \varphi \circ \rho_{g^{-1}} \end{aligned}$$

أي يمكننا القول بأنَّ كل تمثيل ρ لزمرةٍ G يعين تمثيلاً ثنوياً ρ^* ، وتكون مصفوفة ρ_g^* بالنسبةِ لقاعدةٍ α^* هي منقولُ مصفوفة $\rho_{g^{-1}}$ بالنسبةِ لقاعدةٍ α أي أنَّ :

$$[\rho_g^*] = [\rho_{g^{-1}}]^T$$

مبرهنة: ([4] ,p.34)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ V مميزه χ_ρ ، عندئذٍ $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho}$

الإثبات:

لدينا $\forall g \in G$:

$$\begin{aligned} \chi_{\rho^*}(g) &= tr(\rho_g^*) = tr(\rho_{g^{-1}})^T \\ &= tr(\rho_{g^{-1}}) = \chi_\rho(g^{-1}) \\ &= \overline{\chi_\rho(g)} \end{aligned}$$

وبهذا يتمُ المطلوب.

مثال: ([20] ,p.47)

لتكن لدينا الزمرةُ S_3، والمولدة بالعنصرين $b=(12)$ $a=(123)$ حيث:

$$a^3=b^2=e \qquad bab=a^{-1}$$

وجدنا سابقاً أنَّ التمثيلَ ρ للزمرةِ S_3 على الفضاءِ C^2 معرَّف بالشكلِ:

$$\rho(a)=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix} \qquad \rho(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

وذلك بالنسبةِ لقاعدةٍ α، عندئذٍ التمثيلُ الثنوي بالنسبةِ للقاعدةِ α^* يُعطى بالشكلِ:

$$\rho^*(a)=\begin{pmatrix}\omega^{-1} & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix} \qquad \rho^*(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

كما أنَّ:

$$\chi_{\rho^*}(a)=\omega^{-1}+\omega \quad , \quad \chi_{\rho^*}(b)=0$$

مثال: ([20] ,p.47)

لتكن لدينا الزمرةُ $C_3=\langle x;\ x^3=e\rangle$، ولنأخذ التمثيلَ أحادي البعدِ ρ على الفضاءِ C عندئذٍ:

$$\rho: x\longrightarrow \omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

ويكون التمثيل الثنوي لـ ρ معرَّفاً بالشكلِ:

$$\rho^*: x\longrightarrow \omega^{-1}=e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

تعريف: ([20] ,p.48)

ليكن $\rho: G\longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، يُقال عن التمثيلِ ρ إنَّه ذاتي الثنوية إذا كان التمثيلان ρ, ρ^* متماثلين.

نتيجة: ([3] ,p.35)

ليكن $V(R)$ فضاءً متجهيّاً، و G زمرة منتهية، عندئذٍ أي تمثيل للزمرةِ G على الفضاءِ $V(R)$ هو تمثيلٌ ذاتيُّ الثنوية.

الإثبات:

ليكن ρ تمثيلاً للزمرةِ G على الفضاءِ $V(R)$، عندئذٍ $\chi_\rho(g)$ هو عددٌ حقيقيٌ أيّاً كان $g \in G$

ومنه أيّاً كان g من G فإنَّ:

$$\chi_\rho(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

$$\chi_\rho(g) = \chi_{\rho^*}(g)$$

أي أنَّ $\rho \sim {}^*\rho$، والتمثيل ρ ذاتي الثنوية.

نتيجة: ([3] ,p.35)

إذا كان ρ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءِ $V(C)$، فإنَّ ρ يكونُ ذاتي الثنوية إذا وفقط إذا كان:

$$\chi_\rho(g) \in R \qquad \forall g \in G$$

مثال: ([13] ,p.26)

لتكن لدينا الزمرةُ $C_2 = \{1,-1\}$، وجدنا سابقاً أنَّ هذه الزمرة تملكُ تمثيلاً ρ على الفضاءِ R^2 معرَّفاً بالشكلِ:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نلاحظُ أنَّ:

$$\chi_\rho(1) = 2 = \overline{\chi_\rho(1)} = \chi_{\rho^*}(1)$$

$$\chi_\rho(-1) = 0 = \overline{\chi_\rho(-1)} = \chi_{\rho^*}(-1)$$

أي أنَّ التمثيلَ ρ للزمرةِ C_2 هو تمثيلٌ ذاتيُّ الثنوية.

مثال:([13] ,p.26)

لتكن لدينا الزمرةُ S_n، بما أنَّ أي عنصر g من S_n يكون مرافقٌ لمقلوبهِ فإنَّه من أجلِ أي تمثيلٍ ρ للزمرةِ S_n يكون $\chi_\rho = \chi_{\rho^*}$، أي أنَّ التمثيلَ ρ ذاتي الثنوية.

نتيجة:

ليكن $\sigma: G \longrightarrow GL(W), \rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $W(F), V(F)$ على الترتيب، عندئذٍ إذا كان كل من التمثيلين σ, ρ هو تمثيلٌ ذاتيُّ الثنوية فإنَّ التمثيلين:

$$\rho \otimes \sigma: G \longrightarrow GL(V \otimes W) \quad , \quad \rho \oplus \sigma: G \longrightarrow GL(V \oplus W)$$

هما ذاتِيَي الثنوية.

الإثبات:

لدينا $\forall g \in G$

$$\begin{aligned} \chi_{(\rho\otimes\sigma)^*}(g) &= \overline{\chi_\rho(g) \cdot \chi_\sigma(g)} \\ &= \overline{\chi_\rho(g)}.\overline{\chi_\sigma(g)} \\ &= \chi_\rho(g) \cdot \chi_\sigma(g) \\ &= \chi_{\rho\otimes\sigma}(g) \end{aligned}$$

أي أنَّ $\rho \otimes \sigma \sim (\rho \otimes \sigma)^*$، ومنه التمثيل $\rho \otimes \sigma$ ذاتي الثنوية.

ولدينا $\forall g \in G$

$$\begin{aligned} \chi_{(\rho\oplus\sigma)^*}(g) &= \overline{\chi_\rho(g) + \chi_\sigma(g)} \\ &= \overline{\chi_\rho(g)} + \overline{\chi_\sigma(g)} \\ &= \chi_\rho(g) + \chi_\sigma(g) \\ &= \chi_{(\rho\oplus\sigma)}(g) \end{aligned}$$

أي أنَّ $\rho \oplus \sigma \sim (\rho \oplus \sigma)^*$، ومنه التمثيل $\rho \oplus \sigma$ ذاتي الثنوية.

ملاحظة: ([21] ,p.21)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، ρ^* تمثيله الثنوي، وليكن W هو G–فضاء جزئي من V، عندئذٍ W° هو G–فضاء جزئي من V^* لأنَّ:

$$\rho_g(W) \subseteq W \qquad \forall \ g \in G$$

كما أنَّ: $\rho_g^*(\varphi) = \rho_{g^{-1}}^{tr}(\varphi) = \varphi \circ \rho_{g^{-1}} \qquad \forall \ g \in G, \varphi \in W^\circ$

ومنه $(\varphi \circ \rho_{g^{-1}})(w) = \varphi(\underbrace{\rho_{g^{-1}}(w)}_{\in W}) = 0 \qquad \forall \ w \in W$

بالتالي $\rho_g^*(\varphi) \in W^\circ \qquad \forall \ \varphi \in W^\circ$ وبذلك يتمُ المطلوب.

كما أنَّه إذا كان N هو G–فضاء جزئي من V^* فإنَّ $N_\circ$ هو G–فضاء جزئي من V لأنَّ:

$$\rho_g^*(\varphi) = \varphi \circ \rho_{g^{-1}} \in N \qquad \forall \ \varphi \in N$$

وإذا كان $v \in N_\circ$ عندئذٍ:

$$\varphi(\rho_g(v)) = \varphi(\rho_{g_1^{-1}}(v)) = (\underbrace{\varphi \circ \rho_{g_1^{-1}}}_{\in N})(v) = 0 \qquad \forall \ \varphi \in N, g \in G$$

ومنه $\rho_g(v) \in N_\circ$، وبذلك يتمُ المطلوب.

مبرهنة: ([21] ,p.20)

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، ρ^* تمثيله الثنوي، عندئذٍ يكون ρ خزولاً إذا وفقط إذا كان ρ^* خزولاً.

الإثبات:

$\Leftarrow$ بفرض أنَّ ρ خزولٌ، عندئذٍ V يملكُ G–فضاءً جزئياً فعلياً وليكن W، عندئذٍ W° هو G–فضاء جزئي فعلي من V^*، أي أنَّ ρ^* خزول.

$\Rightarrow$ بفرض أنَّ ρ^* خزولٌ، عندئذٍ V^* يملكُ G–فضاءً جزئياً فعلياً وليكن N، عندئذٍ $N_\circ$ هو

G–فضاء جزئي فعلي من V، أي أنَّ ρ خزول.

نتيجة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، و

$$\rho^*: G \longrightarrow GL(V^*)$$
$$g \longrightarrow \rho^{tr}_{g^{-1}}: V^* \longrightarrow V^*$$
$$\varphi \longrightarrow \varphi \circ \rho_{g^{-1}}$$

التمثيل الثنوي لـ ρ، وليكن $\rho_W: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلاً جزئياً من ρ عندئذٍ:

$$\rho^*_W: G \longrightarrow GL(W^*)$$
$$g \longrightarrow \rho^{tr}_W(g^{-1}): W^* \longrightarrow W^*$$
$$\varphi_{|W} \longrightarrow \varphi_{|W} \circ \rho_W(g^{-1})$$

هو التمثيلُ الثنويُّ لـ ρ_W

الإثبات:

لنبرهن على أنَّ ρ^*_W تشاكلٌ زمري

$$\forall \quad g_1, g_2 \in G \ , \ \varphi_{|W} \in W^*; \varphi \in V^*$$

$$1- \quad \rho^*_W(g_1g_2) = \rho^{tr}_W(g_1g_2)^{-1}(\varphi_{|W}) = \varphi_{|W} \circ \rho(g_1g_2)^{-1}$$
$$= \varphi_{|W}(\rho_W(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})) = \varphi_{|W}(\rho_W(g_2^{-1}) \cdot \rho_W(g_1^{-1}))$$
$$= \varphi_{|W} \circ \rho_W(g_2^{-1}) \circ \rho_W(g_1^{-1})$$

$$2- \quad \rho^*_W(g_1) \cdot \rho^*_W(g_2) = (\rho^{tr}_W(g_1^{-1}) \cdot \rho^{tr}_W(g_2^{-1}))(\varphi_{|W})$$
$$= \rho^{tr}_W(g_1^{-1})(\rho^{tr}_W(g_2^{-1})(\varphi_{|W})) = \rho^{tr}_W(g_1^{-1})(\varphi_{|W} \circ \rho_W(g_2^{-1}))$$
$$= \varphi_{|W} \circ \rho_W(g_2^{-1}) \circ \rho_W(g_1^{-1})$$

من (1) و (2) نجدُ أنَّ ρ^*_W تشاكلٌ زمري.

مبرهنة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، عندئذٍ إذا كان ρ خزولاً تماماً فإنَّ ρ^* خزولٌ تماماً.

الإثبات:

بفرض أنَّ ρ خزولٌ تماماً، وليكن W هو G–فضاء جزئي من V^*، عندئذٍ $W_\circ$ هو G–فضاء جزئي من V.

بما أنَّ ρ خزولٌ تماماً فإنَّه يوجد G–فضاء وليكن U جزئي من V، بحيث يكون $V = U \oplus W_\circ$ كما أنَّ U° هو G–فضاء جزئي من V^*.

أصبح لدينا $V = U \oplus W_\circ$، ومنه $V^* = U^\circ \oplus (W_\circ)^\circ$.

أي أنَّ $V^* = U^\circ \oplus W$، وبالتالي فإنَّ ρ^* خزولٌ تماماً.

مبرهنة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، عندئذٍ إذا كان ρ قابلاً للتحليلِ فإنَّ ρ^* قابلٌ للتحليل.

الإثبات:

بفرض أنَّ ρ قابلٌ للتحليلِ، عندئذٍ V يُحلل إلى مجموعٍ مباشرٍ لـ G–فضاءَيْن جزئيين فعليين U, W بحيث يكون $V = U \oplus W$.

نعلمُ أنَّه إذا كان W هو G–فضاء جزئي فعلي من V، فإنَّ W° هو G–فضاء جزئي فعلي من V^*، وكذلك U° هو G–فضاء جزئي من V^*، و منه $V^* = U^\circ \oplus W^\circ$، أي أنَّ V^* كُتب على شكلِ مجموعٍ مباشرٍ لـ G–فضاءَيْن جزئيين فعليين، وبذلك يتمُ المطلوب.

نتيجة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، و ρ^* تمثيله الثنوي، وليكن

ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ ، عندئذٍ ρ_W^* تمثيلٌ ثنويٌّ لـ ρ_W لكنَّه ليس بالضرورة تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ^* .

الإثبات:

ليكن ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ ، عندئذٍ W هو $G-$ فضاء جزئي فعلي من V ويمكنُ تعيين تمثيلاً للزمرةِ G على الفضاءِ W بالشكلِ :

$$\rho_W : G \longrightarrow GL(W)$$
$$g \longrightarrow \rho_W(g) : W \longrightarrow W$$

ويكون $\rho_W^* : G \longrightarrow GL(W^*)$ تمثيله الثنوي.

من جهةٍ أخرى لدينا W فضاء جزئي فعلي من V لكنَّ W^* ليس بالضرورة فضاءً جزئياً فعلياً من V^*، بالتالي ρ_W^* ليس بالضرورة تمثيلاً جزئياً من ρ^* .

نتيجة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، و ρ^* تمثيلهُ الثنوي، وليكن ρ_W تمثيلاً جزئياً من ρ ، عندئذٍ إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً غير فعلي من ρ فإنَّ ρ_W^* هو تمثيلٌ جزئيٌّ من ρ^* .

الإثبات:

إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً غير فعلي من ρ ، عندئذٍ W هو $G-$ فضاء جزئي غير فعلي من V، أي أنَّه إما $W = V$ أو $W = \{0\}$، ومنه إما $W^* = V^*$ أو $W^* = \{0\}$

بالتالي فإنّ W^* هو فضاءٌ جزئيٌّ من V^*، وفي كلتا الحالتين يكون $\rho^*(W^*) \subseteq W^*$ ، أي أنَّ ρ_W^* هو تمثيلٌ جزئيٌّ من ρ^* .

مبرهنة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$ بُعده n و ρ^* تمثيلهُ الثنوي، عندئذٍ إذا كان W هو $G-$فضاء جزئي من V فإنَّ W^* يُمدد إلى $G-$فضاء جزئي من V^*.

الإثبات:

ليكن W هو G–فضاء جزئي من V قاعدته $\alpha=\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$.

نعلمُ أنَّ الفضاء W^*، والذي قاعدته $\alpha^*=\{w_1^*,w_2^*,\ldots,w_k^*\}$ ليس فضاءً جزئياً من V^* في الحالةِ العامةِ، كما أنَّ $W^*=\{T:W\longrightarrow F\}$ يمددُ إلى فضاءٍ $\overline{W}=\{\overline{T}:V\longrightarrow F\}$ جزئيٍّ من V^* بحيث:

$$\overline{T}(w_i)=\begin{cases}T(w_i) & i\ \leq k\\ 0 & k+1\leq i\leq n\end{cases}$$

ويحققُ: $\forall\quad \overline{T}\in\overline{W}$

$$\rho^*(\overline{T})(w_i)=(\varphi\circ\rho_{g^{-1}})(\overline{T}(w_i))$$

$$=\begin{cases}(\varphi\circ\rho_{g^{-1}})(T(w_i)) & ;\quad i\ \leq\ k\\ 0 & ;\ k+1\leq i\leq n\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(\varphi_{|W}\circ\rho_{|W}(g^{-1}))(T(w_i)) & ;\quad i\ \leq\ k\\ 0 & ;\ k+1\leq i\leq n\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\underbrace{\rho_W^*(T(w_i))}_{\in W^*} & ;\quad i\ \leq\ k\\ 0 & ;\ k+1\leq i\leq n\end{cases}$$

$$=\begin{cases}T'(w_i) & ;\quad i\ \leq\ k\\ 0 & ;\ k+1\leq i\leq n\end{cases}\quad\in\overline{W}$$

أي أنَّ $\rho^*(\overline{W})\subseteq\overline{W}$، و $\overline{W}$ هو G– فضاء جزئي من V^* أي أنَّ $\rho_{\overline{W}}^*$ تمثيلٌ جزئيٌّ من ρ^*.

نتيجة:

ليكن $\rho:G\longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$ ، عندئذٍ إذا كان ρ مخلصاً فإنَّ ρ^* مخلص.

الإثبات:

بما أنَّ ρ مخلصٌ، فإنَّ $Ker\rho=\{e\}$ أي أنَّ :

$$\rho_g \neq I_n \quad \forall e \neq g \in G$$
$$\rho_e = I_n$$

وبما أنَّ $\rho_g^* = \rho_{g^{-1}}^{tr}$ و $[I_n]^T = I_n$ فإنَّ:

$$\rho_g^* \neq I_n \quad \forall e \neq g \in G$$
$$\rho_e^* = I_n$$

بالتالي فإنَّ $Ker\rho^* = \{e\}$، أي أنَّ ρ^* مخلص.

مثال:

وجدنا سابقاً أنَّ التمثيلَ المبتذلَ ρ لأي زمرة G على فضاءٍ V بعده n هو تمثيلٌ غير مخلص حيث:

$$\rho(g) = id_V \ \forall \quad g \in G$$

ومنه $\chi_\rho(g) = n$، بالتالي $\chi_{\rho^*}(g) = n$ وذلك من أجلِ أي عنصر g من G، أي أنَّ التمثيلَ ρ^* هو تمثيلٌ غير مخلص.

مثال:

لتكن لدينا الزمرةُ $C_4 = \langle x \rangle$ حيث $x^4 = 1$، وجدنا سابقاً أنَّ هذه الزمرة تملكُ أربعة تمثيلاتٍ أحادية البعد على الفضاءِ C:

$$\rho_1(x) = 1 \quad \rho_2(x) = i \quad \rho_3(x) = -1 \quad \rho_4(x) = -i$$

كما أنَّ التمثيلين ρ_2, ρ_4 مخلصان، حيث $\ker \rho_2 = \ker \rho_4 = \{e\}$.

لدينا:

$$\chi_{\rho_1}(x) = 1 \quad \chi_{\rho_2}(x) = i \quad \chi_{\rho_3}(x) = -1 \quad \chi_{\rho_4}(x) = -i$$

عندئذٍ:

$$\chi_{\rho_1^*}(x) = 1 \quad \chi_{\rho_2^*}(x) = -i \quad \chi_{\rho_3^*}(x) = -1 \quad \chi_{\rho_4^*}(x) = i$$

بالتالي فإنَّ كلاً من التمثيلين ρ_2^*, ρ_4^* هما تمثيلان مخلصان.

مبرهنة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءِ الجداءِ الداخليِّ $V(C)$، عندئذٍ إذا كان ρ تمثيلاً واحدياً فإنَّ ρ^* تمثيلٌ واحدي.

الإثبات:

نعلمُ أنَّه إذا كان V فضاءَ جداءٍ داخليٍّ، فإنّ V^* هو فضاءُ جداء داخلي، وإذا كانت α قاعدةً متعامدةً للفضاءِ V فإنَّ α^* قاعدةٌ متعامدةٌ منظمةٌ للفضاءِ V^* .

إذا كان ρ تمثيلاً واحدياً، عندئذٍ كلّ مؤثر $\rho_g \ \forall \ g \in G$ هو مؤثر واحدي، أي أنَّ $\rho_{g^{-1}} \forall g \in G$ مؤثرٌ واحديٌّ، وبالتالي مصفوفته بالنسبةِ لقاعدةٍ متعامدةٍ منظمةٍ α للفضاءِ V هي مصفوفةٌ واحدية.

نعلمُ أنَّ مصفوفةَ ρ_g^* هي $[\rho_{g^{-1}}]^T$، وبما أنَّ $[\rho_{g^{-1}}]$ مصفوفةَ واحدية فإنَّ $[\rho_{g^{-1}}]^T$ مصفوفةَ هي واحدية وذلك بالنسبةِ لقاعدةٍ متعامدةٍ منظمةٍ α^* للفضاءِ V^*، بالتالي $\rho_g^* \ \forall \ g \in G$ هو مؤثرٌ واحديٌّ، ومنه ρ^* تمثيلٌ واحدي.

التمثيلاتُ المتماثلة لزمرةٍ منتهية:

نتيجة:

ليكن $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ ، $\sigma: G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $W(C), V(C)$ على الترتيب، عندئذٍ التمثيلان

$$\tau: G \longrightarrow GL(Hom(V,W)) \ ، \ \mu: G \longrightarrow GL(W \otimes V^*)$$ متماثلان

الإثبات:

نعلمُ أنَّ $g \in G \quad \forall$ ، $\chi_\tau(g) = \overline{\chi_\rho(g)}.\chi_\sigma(g)$ ، كما أنَّ:

$$\chi_\mu(g) = \chi_\sigma(g).\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\sigma(g).\overline{\chi_\rho(g)} \quad \forall \quad g \in G$$

وبالتالي $g \in G \quad \forall$ ، $\chi_\tau(g) = \chi_\mu(g)$ ، ومنه التمثيلان μ, τ متماثلان.

نتيجة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ ، $\sigma : G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $V(C), W(C)$ على الترتيب. إذا كان كلٌّ من التمثيلين ρ, σ ذاتي الثنوية، فإنَّ التمثيلَ $\mu : G \longrightarrow GL(W \otimes V^*)$ ذاتيُّ الثنوية.

الإثبات:

بما أنَّ كلاً من ρ, σ ذاتي الثنوية فإنّ $\rho \sim \rho^*$ و $\sigma \sim \sigma^*$ أي أنَّ:

$$\chi_\rho(g) = \chi_{\rho^*}(g) \quad , \quad \chi_\sigma(g) = \chi_{\sigma^*}(g) \quad \forall \quad g \in G$$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}\chi_{\mu^*}(g) &= \overline{\chi_\mu(g)} = \overline{\chi_\sigma(g).\chi_{\rho^*}(g)} = \overline{\chi_\sigma(g).\overline{\chi_\rho(g)}} \\ &= \overline{\chi_\sigma(g)}.\overline{\overline{\chi_\rho(g)}} = \overline{\chi_\sigma(g)}.\chi_\rho(g) = \chi_{\sigma^*}(g).\chi_\rho(g) \\ &= \chi_\sigma(g).\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\mu(g)\end{aligned}$$

بالتالي $\mu \sim \mu^*$ ، أي أنَّ μ ذاتي الثنوية.

مبرهنة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V), \sigma : G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $V(C), W(C)$ على الترتيب، عندئذٍ التمثيلان ρ, σ متماثلان إذا وفقط إذا كان ρ^*, σ^* متماثلين.

الإثبات:

$\Leftarrow$ بفرض أنَّ ρ, σ متماثلان عندئذٍ: $\chi_\rho(g) = \chi_\sigma(g) \quad \forall \quad g \in G$

ومنه $\overline{\chi_\rho(g)} = \overline{\chi_\sigma(g)} \quad \forall \quad g \in G$.

نعلمُ أنَّ:

$$\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)} \quad , \quad \chi_{\sigma^*}(g) = \overline{\chi_\sigma(g)} \quad \forall \quad g \in G$$

بالتالي $\forall\ g \in G$ $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_{\sigma^*}(g)$ ، ومنه التمثيلان ρ^*, σ^* متماثلان.

$\Rightarrow$ بفرض أنَّ ρ^*, σ^* متماثلان عندئذٍ: $\forall\ g \in G$ $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_{\sigma^*}(g)$

ومنه $\forall\ g \in G$ $\overline{\chi_{\rho^*}(g)} = \overline{\chi_{\sigma^*}(g)}$.

نعلمُ أنَّ: $\forall\ g \in G$ $\chi_{\sigma^*}(g) = \overline{\chi_{\sigma}(g)}$, $\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_{\rho}(g)}$

بالتالي $\forall\ g \in G$ $\overline{\overline{\chi_{\rho}(g)}} = \overline{\overline{\chi_{\sigma}(g)}}$ ، ومنه $\forall\ g \in G$ $\chi_{\rho}(g) = \chi_{\sigma}(g)$

أي أنَّ التمثيلين ρ, σ متماثلان .

مبرهنة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، وليكن $\rho = \rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2} \oplus \ldots \oplus \rho_{W_n}$

عندئذٍ $\rho^* \cong \rho^*_{W_1} \oplus \rho^*_{W_2} \oplus \ldots \oplus \rho^*_{W_n}$ متماثلان كتمثيلين للزمرةِ G ويكون:

$$\chi_{\rho^*} = \chi_{\rho^*_{W_1}} + \chi_{\rho^*_{W_2}} + \ldots + \chi_{\rho^*_{W_n}} .$$

الإثبات:

بما أنَّ $\rho = \rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2} \oplus \ldots \oplus \rho_{W_n}$ ، عندئذٍ $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$، حيث $W_1, W_2, \ldots, W_n$ هي G – فضاءات جزئية من V.

بما أنَّ G تملكُ تمثيلاً على الفضاءِ F يكون لدينا:

$$Hom(W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n, F) \cong Hom(W_1, F) \oplus Hom(W_2, F) \oplus \ldots \oplus Hom(W_n, F)$$

أي أنَّ:

$$V^* \cong W_1^* \oplus W_2^* \oplus \ldots \oplus W_n^*$$

ومنه $\rho^* \cong \rho^*_{W_1} \oplus \rho^*_{W_2} \oplus \ldots \oplus \rho^*_{W_n}$ متماثلان كتمثيلين للزمرةِ G.

من جهةٍ ثانيةٍ بما أنَّ التمثيلين متماثلان، فهما يملكان المميزَ ذاته أي:

$$\chi_{\rho^*}(g) = \chi_{\rho^*_{W_1}\oplus\rho^*_{W_2}\oplus\ldots\oplus\rho^*_{W_n}}(g)$$
$$= \chi_{\rho^*_{W_1}}(g) + \chi_{\rho^*_{W_2}}(g) + \ldots + \chi_{\rho^*_{W_n}}(g) \qquad \forall g \in G$$

مثال:

وجدنا سابقاً أنّ جدولَ المميزات للزمرةِ D_4 يعطى بالشكلِ:

	e	c	c^2	r	cr
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	1	1	-1	-1
χ_{ρ_3}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_4}	1	-1	1	-1	1
χ_{ρ_5}	2	0	-2	0	0

فيكون جدولُ المميزات المقابل للتمثيلاتِ الثنويةِ للزمرةِ D_4بالشكلِ التالي:

	e	c	c^2	r	cr
$\chi_{\rho_1^*}$	1	1	1	1	1
$\chi_{\rho_2^*}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{\rho_3^*}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{\rho_4^*}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_{\rho_5^*}$	2	0	-2	0	0

بالمقارنةِ بين الجدولين السابقين نلاحظُ مايلي:

- كلُّ تمثيل من التمثيلاتِ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ هو تمثيلٌ ذاتيُّ الثنوية، حيث $\chi_{\rho_i} = \overline{\chi_{\rho_i}}$ من أجلِ كل $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

- $\chi_{\rho_i}\chi_{\rho_5}=\chi_{\rho_5}$ وذلك من أجلِ كلِ $i\in\{1,2,3,4\}$، أي أنّ $\rho_i\otimes\rho_5\sim\rho_5$، كما أنَّ $\chi_{\rho_i^*}\chi_{\rho_5^*}=\chi_{\rho_5^*}$، أي أنّ $\rho_i^*\otimes\rho_5^*\sim\rho_5^*$.
- $\chi_{\rho_5}\chi_{\rho_5}=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_2}+\chi_{\rho_3}+\chi_{\rho_4}$ أي أنَّ $\rho_5\otimes\rho_5\sim\rho_1\oplus\rho_2\oplus\rho_3\oplus\rho_4$، كما أنَّ $\chi_{\rho_5^*}\chi_{\rho_5^*}=\chi_{\rho_1^*}+\chi_{\rho_2^*}+\chi_{\rho_3^*}+\chi_{\rho_4^*}$، ومنه $\rho_5^*\otimes\rho_5^*\sim\rho_1^*\oplus\rho_2^*\oplus\rho_3^*\oplus\rho_4^*$.

مثال:

أوجدنا سابقاً جدولَ المميزات للزمرةِ C_4

	1	x	x^2	x^3
χ_{ρ_1}	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	i	-1	i
χ_{ρ_3}	1	-1	1	-1
χ_{ρ_4}	1	$-i$	-1	i

فيكون جدولُ المميزات المقابل للتمثيلاتِ الثنويةِ للزمرةِ C_4 بالشكلِ:

	1	x	x^2	x^3
$\chi_{\rho_1^*}$	1	1	1	1
$\chi_{\rho_2^*}$	1	$-i$	-1	$-i$
$\chi_{\rho_3^*}$	1	-1	1	-1
$\chi_{\rho_4^*}$	1	i	-1	$-i$

بالمقارنةِ بين الجدولين السابقين نلاحظُ مايلي:

- التمثيلات ρ_2,ρ_3,ρ_4 ليست ذاتيةِ الثوية، حيث $\chi_{\rho_i}\neq\overline{\chi_{\rho_i}}$ من أجلِ كل $i\in\{2,3,4\}$
- $\chi_{\rho_2}\chi_{\rho_3}=\chi_{\rho_4}$ أي أنَّ $\rho_2\otimes\rho_5\sim\rho_4$، كما أنَّ $\chi_{\rho_2^*}\chi_{\rho_3^*}=\chi_{\rho_4^*}$، ومنه $\rho_2^*\otimes\rho_3^*\sim\rho_4^*$

نتيجة:

ليكن $\rho:G\longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(C)$، و $\rho=\rho_U\oplus\rho_W$

عندئذٍ $\rho^* \cong \rho^*_{V/W} \oplus \rho^*_{V/U}$ متماثلان كتمثيلين للزمرةِ G، ويكون $\chi_{\rho^*} = \chi_{\rho^*_{V/W}} + \chi_{\rho^*_{V/U}}$.

الإثبات:

بما أنَّ $\rho = \rho_U \oplus \rho_W$، عندئذٍ $V = U \oplus W$، حيث U, W هما G–فضاءان جزئيان من V.
لدينا:

$$\rho_U \cong \rho_{V/W} \qquad \rho_W \cong \rho_{V/U}$$

ومنه يكون:

$$\rho^*_U \cong \rho^*_{V/W} \qquad \rho^*_W \cong \rho^*_{V/U}$$

وبما أنَّ $\rho^* \cong \rho^*_U \oplus \rho^*_W$، عندئذٍ يكون $\rho^* \cong \rho^*_{V/W} \oplus \rho^*_{V/U}$، أي أنَّهما متماثلان كتمثيلين للزمرةِ G، ويكون:

$$V^* \cong (V/W)^* \oplus (V/U)^*$$

من جهةٍ ثانيةٍ بما أنَّ التمثيلين متماثلان فهما يملكان المميزَ ذاته أي:

$$\chi_{\rho^*} = \chi_{\rho^*_{V/W} \oplus \rho^*_{V/U}}$$

$$= \chi_{\rho^*_{V/W}} + \chi_{\rho^*_{V/U}}$$

مبرهنة:

ليكن $\sigma : G \longrightarrow GL(W), \rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلين متماثلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $W(F), V(F)$ على الترتيب، عندئذٍ يوجدُ تماثل بين تمثيلات جزئية لكل من σ, ρ.

الإثبات:

بما أنَّ σ, ρ متماثلان فإنَّه يوجدُ G–تماثل وليكن:

$$\varphi : V \longrightarrow W$$
$$v \longrightarrow \varphi(v)$$

يحققُ $\varphi \circ \rho_g = \sigma_g \circ \varphi \quad \forall \quad g \in G$.

ليكن U هو G–فضاء جزئي من V عندئذٍ، $\varphi_{|U} : U \longrightarrow \varphi(U)$ تماثل، كما أنَّ $\varphi(U)$ هو G– فضاء جزئي من W.

لنبرهن الآن على أنَّ $\varphi_{|U}$ هو G–تشاكل أي أنَّ:

$$\varphi_{|U} \circ \rho_{g|U} = \sigma_{g|\varphi(U)} \circ \varphi_{|U} \quad \forall \quad g \in G$$

لدينا $\forall g \in G$:

$$(\varphi_{|U} \circ \rho_{g|U})(u) = \varphi_{|U}(\rho_{g|U}(u)) = \varphi_{|U}(\underbrace{\rho_g(u)}_{\in U})$$

$$= \varphi(\rho_g(u)) = (\varphi \circ \rho_g)(u) = (\sigma_g \circ \varphi)(u)$$
$$= \sigma_g(\varphi(u)) = \sigma_g(\underbrace{\varphi_{|U}(u)}_{\in \varphi(U)}) = \sigma_{g|\varphi(U)}(\varphi_{|U}(u))$$
$$= (\sigma_{g|\varphi(U)} \circ \varphi_{|U})(u)$$

مما سبق نجدُ أنَّ $\varphi_{|U}$ هو G–تماثل، أي أنَّ $\rho_U, \sigma_{\varphi(U)}$ متماثلان كتمثيلين للزمرةِ G.

نتيجة:

ليكن $\sigma : G \longrightarrow GL(W), \rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلين متماثلين لزمرةٍ G على فضاءَيْن $W(C), V(C)$ على الترتيب، و $U_1, U_2, \ldots, U_m$ هي G–فضاءات جزئية من V، عندئذٍ

$$\rho^*_{U_1} \oplus \rho^*_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho^*_{U_m} \cong \sigma^*_{\varphi(U_1)} \oplus \sigma^*_{\varphi(U_2)} \oplus \ldots \oplus \sigma^*_{\varphi(U_m)}$$

حيث $\varphi : V \longrightarrow W$ هو G–تماثل.

الإثبات:

بما أنَّ $U_1, U_2, \ldots, U_m$ هي G–فضاءات جزئية من V، عندئذٍ $\varphi(U_1), \varphi(U_2), \ldots, \varphi(U_m)$ هي G–فضاءات جزئية من W، كما أنَّ:

$$\rho_{U_I} \cong \sigma_{\varphi(U_i)} \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$$

ويكون:

$$\sigma^* \cong \sigma^*_{\varphi(U_1)} \oplus \sigma^*_{\varphi(U_2)} \oplus \ldots \oplus \sigma^*_{\varphi(U_m)}$$

$$\rho^* \cong \rho^*_{U_1} \oplus \rho^*_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho^*_{U_m}$$

لكنَّ $\rho^* \cong \sigma^*$ عندئذٍ:

$$\rho^*_{U_1} \oplus \rho^*_{U_2} \oplus \ldots \oplus \rho^*_{U_m} \cong \sigma^*_{\varphi(U_1)} \oplus \sigma^*_{\varphi(U_2)} \oplus \ldots \oplus \sigma^*_{\varphi(U_m)}$$

مبرهنة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(C)$، عندئذٍ إذا كانت $\rho_g \; \forall g \in G$ مؤثرات خطية هرميتية، فإنَّ التمثيلَ ρ يكون ذاتيُّ الثنوية.

الإثبات:

بما أنَّ المؤثرات الخطية $\rho_g \; \forall g \in G$ هي مؤثراتٌ هرميتيةٌ، فإنَّ V يملكُ قاعدةً متعامدةً منظمةً مؤلفة من المتجهاتِ الذاتيةِ لـ ρ_g، أي أنَّ كل مؤثر خطي $\rho_g \; \forall g \in G$ يكون قطوراً و مصفوفته بالنسبةِ للقاعدةِ المتعامدةِ المنظمةِ لـ V من الشكلِ:

$$\rho_g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيمُ الذاتية المقابلة للمتجهاتِ الذاتيةِ لـ ρ_g، وهذه القيمُ الذاتيةُ حقيقية بالتالي χ_ρ عددٌ حقيقيٌ، ومنه $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho} = \chi_\rho$.

بالتالي التمثيلان ρ, ρ^* متماثلان لأنَّهما يملكان المميزَ ذاته، أي أنَّ ρ ذاتيُّ الثنوية.

نتيجة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على الفضاءِ $V(C)$، عندئذٍ إذا كانت $\rho_g \; \forall g \in G$ مؤثرات

خطية هرميتية، فإنَّ أي تمثيل جزئي من ρ يكون ذاتي الثنوية.

الإثبات:

بفرض أنَّ ρ_U تمثيلٌ جزئيٌّ من ρ على الفضاءِ U الجزئي من V والذي بُعده k.

بما أنَّ $\forall g \in G \quad \rho_g$ مؤثرٌ خطيٌّ هرميتيٌ على الفضاءِ V فإنَّ $\forall g \in G \quad \rho_{g|U} \in GL(U)$ مؤثرٌ خطيٌّ هرميتيٌ على الفضاءِ U، و U يملكُ قاعدةً متعامدةً منظمةً مؤلّفة من المتجهاتِ الذاتيّةِ لـ $\rho_{g|U}$.

أي أنَّ كلَّ مؤثر خطي $\forall g \in G \quad \rho_{g|U}$ يكون قطوراً، ومصفوفته بالنسبةِ للقاعدةِ المتعامدةِ المنظمة لـ U من الشكلِ:

$$\rho_{g|U} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_k \end{pmatrix}$$

حيث $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ هي القيمُ الذاتيةُ المقابلةُ للمتجهاتِ الذاتيةِ لـ $\rho_{g|U}$، وهذه القيمُ حقيقيةٌ، بالتالي χ_{ρ_U} عدد حقيقيٌ ومنه $\chi_{\rho_U} = \overline{\chi_{\rho_U}} = \chi_{\rho_{U^*}}$، والتمثيل ρ_U ذاتيُّ الثنوية.

التمثيلُ على الفضاءِ الثنويِّ المضاعف: ([21] ,p.18)

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، وليكن $\rho^* : G \longrightarrow GL(V^*)$ التمثيل الثنوي لـ ρ، لنأخذ الفضاء الثنوي المضاعف $V^{**} = \{ \quad T_v : V^* \longrightarrow F \quad \}$ للفضاءِ V و لنعرِّف العلاقة التالية :

$$\rho^{**} : G \longrightarrow GL(V^{**})$$
$$g \longrightarrow (\rho^*_{g^{-1}})^{tr} : V^{**} \longrightarrow V^{**}$$
$$T_v \longrightarrow T_v \circ \rho^*_{g^{-1}}$$

نلاحظُ أنَّ: $\forall \quad g_1, g_2 \in G \quad T_v \in V^{**}$

$$1- \quad (\rho^*_{(g_1g_2)^{-1}})^{tr}(T_v) = T_v \circ \rho^*_{(g_1g_2)^{-1}}$$

$$= T_v(\rho^*_{g_2^{-1}g_1^{-1}}) = T_v(\rho^*_{g_2^{-1}}.\rho^*_{g_1^{-1}})$$
$$= T_v \circ \rho^*_{g_2^{-1}} \circ \rho^*_{g_1^{-1}}$$

$$2- \quad ((\rho^*_{g_1^{-1}})^{tr}.(\rho^*_{g_2^{-1}})^{tr})(T_v) = (\rho^*_{g_1^{-1}})^{tr}.((\rho^*_{g_2^{-1}})^{tr}.T_v)$$

$$= (\rho^*_{g_2^{-1}})^{tr}.(T_v \circ \rho^*_{g_2^{-1}})$$
$$= T_v \circ \rho^*_{g_2^{-1}} \circ \rho^*_{g_1^{-1}}$$

من (1) و (2) نجدُ أنَّ هذه العلاقة هي تشاكلٌ زمري، وبالتالي تُعرِّف تمثيلاً للزمرةِ G على الفضاءِ V^{**} نسميه التمثيل الثنوي المضاعف لـ ρ، ويكون التمثيلُ الثنوي المضاعف ρ^{**} هو التمثيلُ الثنوي لـ ρ^*، بالتالي تكون مصفوفة ρ^{**}_g هي منقولُ مصفوفة $\rho^*_{g^{-1}}$ كما أنَّ $\chi_{\rho^{**}} = \overline{\chi_{\rho^*}}$.

نتيجة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، و ρ^{**} التمثيلُ الثنويُّ المضاعف لـ ρ، عندئذٍ ρ, ρ^{**} تمثيلان متماثلان للزمرةِ G.

الإثبات:

لدينا: $\forall g \in G \qquad \chi_{\rho^{**}}(g) = \overline{\chi_{\rho^*}(g)} = \overline{\overline{\chi_\rho(g)}} = \chi_\rho(g)$

ومنه التمثيلان ρ, ρ^{**} متماثلان.

نتيجة:

ليكن $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرةٍ G على فضاءٍ $V(F)$، عندئذٍ إذا كان ρ ذاتيَّ الثنوية فإنَّ ρ^* ذاتيُّ الثنوية.

الإثبات:

بما أنَّ التمثيلَ ρ ذاتي الثنوية فإنَّ $\chi_\rho = \chi_{\rho^*}$، ويكون $\chi_{\rho^{**}}(g) = \overline{\chi_{\rho^*}(g)} = \overline{\chi_\rho(g)} = \chi_{\rho^*}(g)$

وبذلك يتمُ المطلوب.