الهندسة التفاضلية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الهندسة التفاضلية

الدكتور
سمير أبو عقل
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية
كلية الهندسة المدنية

الدكتور
محمد الشيخ
مدرس في قسم الرياضيات
كلية العلوم

جامعة دمشق

١٤٣١ - ١٤٣٢ هـ
٢٠١٠ - ٢٠١١ م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المحتويات

مقدمة ١١

الفصل الأول

المنحنيات في الفضاء الثلاثي ١٥
المتجهات الطلقة والدوال متجهية القيمة وحقول المتجهات ١٥
المتجه المقيد والمتجه الطلق ١٥
العمليات على المتجهات ١٦
الاستقلال الخطي ٢٠
توجيه الفضاء الثلاثي ٢١
الجداء المتجهي (أو الخارجي) ٢٢
الجداء المختلط ٢٣
المركبات ٢٤
الدوال المتجهية القيمة ٢٥
الفضاء $\mathfrak{R}^n$ ٣٠
المتجه المماس ٣١
الفضاء المماس ٣٢
التطبيق المماس ٣٥
حقل المتجهات ٣٦
التمثيل الوسيطي لمنحن ٤٣
القوس البسيط ٤٣
التطبيق المتباين محلياً (موضعياً) ٤٣
المنحني الهندسي والتمثيل الوسيطي ٤٤

التمثيلات الوسيطية المتكافئة ٤٦
التوسيط الطبيعي..... ٥٢
الوسيط الطبيعي ٥٤
تلامس المنحنيات وتلامس منحن ومستو ٦٠
تلامس منحنيين..... ٦٠
تلامس منحن ومستو أو كرة ٦٢
المستقيم المماس والمستوي الملاصق لمنحن ٦٣
زاوية منحنيين ٦٩
المستقيم المقارب لمنحن ٧٣
ثلاثية فرينيه ومعادلات فرينيه ٧٨
ثلاثية فرينيه ٧٨
تقوس منحن والتفافه ٨٤
دائرة التقوس ٨٨
التفاف منحن ٨٩
متجه داربوكس ٩٥
وضعية منحن في جوار نقطة منه..... ٩٧
منشور منحن وناشره ١٠٠
منشور منحن..... ١٠٠
ناشر منحن ١٠٣
المعادلتان الطبيعيتان لمنحن..... ١٠٦
اللولب المعمم ١١٢
منحني برتراند ١١٤
الأدلة الكروية ١١٧
الكرة الملاصقة..... ١١٨
المعادلة الضمنية لمنحن ١١٩

النقاط الشاذة لمنحن سوي معطى بالمعادلة الضمنية ١٢٠
تمرينات الفصل الأول ١٢٥

الفصل الثاني

السطوح في الفضاء ثلاثي الأبعاد ١٣٧
التمثيل الوسيطي للسطوح ١٣٧
شطر السطح ١٣٧
المعادلة الضمنية لسطح ١٤٦
المستوي المماس لسطح ومتجه وحدة الناظم ١٥٠
توجيه السطح ١٥٦
بعض السطوح الشهيرة ١٥٨
السطوح الدورانية ١٥٨
السطوح التربيعية ١٦٤
السطوح المسطرة ١٦٦
المنحني المضيق لسطح مسطر ١٧٢
مغلف عائلة سطوح والسطوح القابلة للنشر ١٧٥
تمرينات الفصل الثاني ١٨٩

الفصل الثالث

الشكلان التربيعيان الأساسيان لسطح ١٩٥
الشكل التربيعي الأساسي الأول ١٩٥
اصطلاح اينشتاين ورموز كرونكر ١٩٨
التطبيقات المتقايسة ٢١٧
الشكل التربيعي الأساسي الثاني ٢٢٥
تصنيف النقاط على سطح ٢٣٢
تقوس غوص ورموز كريستوفل ٢٣٨

التطبيق الكروي ٢٣٨
تقوس غوص ٢٣٩
رموز كريستوفل ٢٣٩
مبرهنة غوص ٢٤٥
التقوس الجيوديزي والخطوط الجيوديزية ٢٤٦
الناظم الجيوديزي والتقوس الجيوديزي ٢٤٧
الخطوط الجيوديزية ٢٥٣
الخطوط الجيوديزية على كرة ٢٥٦
السطح الاسطواني ٢٥٧
الإحداثيات نصف الجيوديزية ٢٥٧
خاصة الطول الأصغري للخط الجيوديزي ٢٦١
التقوس الناظمي والتقوسات الأساسية ٢٦٣
مبرهنة (*Meusnier*) ٢٦٥
التحويل الكروي لفضاء المتجهات المماسة ٢٦٦
التقوس الأساسي والاتجاه الأساسي ٢٦٩
الاتجاه المقارب ٢٧٦
تمرينات الفصل الثالث ٢٧٩

الفصل الرابع

التنسورات والأشكال الخارجية ٢٨٧
الفضاء الثنوي ٢٨٧
القاعدة الثنوية ٢٨٨
اصطلاح اينشتاين ٢٩٠
مصفوفة تغيير القاعدة ٢٩٠
مبدد مجموعة ٢٩٢

التنسورات ٢٩٤
الفضاء $T^2(V)$ ٢٩٧
الفضاء $T_1^1(V)$ ٢٩٨
العمليات على التنسورات ٣٠١
بعض التنسورات الخاصة ٣٠٥
الأشكال متعددة الخطية ٣٠٨
تمرينات الفصل الرابع ٣١٦

الفصل الخامس

المنطويات (المتنوعات) التفاضلية ٣٢٣
المنطويات التفاضلية ٣٢٣
الرقعة ٣٢٣
الأطلس ٣٢٤
المنطوي التفاضلي ٣٢٥
الأطلس الأعظمي أو الإتمام ٣٢٥
المنطوي الجزئي ٣٢٦
جداء منطويين ٣٢٦
الدوال القابلة للمفاضلة على المنطويات ٣٣٠
المتجهات المماسة على منطو تفاضلي ٣٣٥
التطبيقات المحدثة ٣٤٥
زمر لي ورزم الألياف ٣٥٣
الرزمة الليفية التفاضلية ٣٥٤
حقول المتجهات والتنسورات على منطو تفاضلي ٣٥٨
حقل المتجهات وقوس لي ٣٥٨
الحقل التنسوري ٣٦٢

التنسور الموافق للتغير ٣٦٢
الشكل الأحادي التفاضلي ٣٦٣
منطويات ريمان ٣٦٦
الصلة على منطو ٣٦٦
الصلة الطبيعية على $\mathfrak{R}^n$ ٣٦٧
المترك شبه الريماني ٣٧٣
مترك ريمان ٣٧٤
منطوي ريمان ٣٧٥
صلة ريمان ٣٧٦
المعالجة التقليدية للمترك ٣٧٧
تمرينات الفصل الخامس ٣٨٨
دليل المصطلحات العلمية ٣٩٣
إنكليزي — عربي ٣٩٥
عربي — إنكليزي ٤١٣

مُقدّمة

تعد الهندسة التفاضلية أحد الفروع الهامة في الرياضيات ، وقد تطورت في العقود الأخيرة تطوراً كبيراً ، فقد درست المنحنيات والسطوح باستخدام الرياضيات المعاصرة ولغة البرمجة *MATHEMATICA* . وتوالت البحوث في مجال المنطويات (المتنوعات) التفاضلية وزمر لي (*Lie Groups*) ، وهذا المجال زوّد بعض فروع الرياضيات البحتة والتطبيقية بأدوات وأطر التفكير اللازمة لتطورها.

يتكون هذا الكتاب في الهندسة التفاضلية من خمسة فصول . خصصنا الفصل الأول للمنحنيات في الفضاء الثلاثي، فعرضنا بإيجاز المتجهات والعمليات عليها في $\Re^3$ والمتجهات المماسة وحقول المتجهات في $\Re^n$ ، ثم درسنا التمثيل الوسيطي للمنحنيات وتلامسها وثلاثية فرينيه والناشر والمنشور والمعادلتين الطبيعيتين.

جعلنا الفصل الثاني للسطوح في $\Re^3$، فدرسنا التمثيل الوسيطي للسطوح وعرّفنا المستوي المماس والناظم لسطح، وعرضنا بعض السطوح الشهيرة ، ثم درسنا مغلف عائلة سطوح والسطوح القابلة للنشر.

وفي الفصل الثالث عرّفنا الشكلين التربيعيين الأساسيين لسطح، ودرسنا تطبيقاتهما في إيجاد طول منحن على سطح ومساحة منطقة من السطح والتطبيقات المتقايسة للسطوح، كما درسنا تصنيف النقاط على سطح، وعرفنا التقوس الجيوديزي والخطوط الجيوديزية والتقوس الأساسي والاتجاه الأساسي .

واقتصر الفصل الرابع على عرضٍ للتنسورات (الموترات) والعمليات عليها، ودرسنا بإيجاز الأشكال متعددة الخطية .

وعالج الكتاب في الفصل الخامس والأخير بإيجاز أحد الموضوعات المستجدة والمعاصرة في الهندسة التفاضلية وهو المنطويات التفاضلية، فعرّفنا المنطوي التفاضلي

والمتجهات المماسة عليه ، ثم عرفنا زمر (لي) ورزم الألياف، وتطرّقنا إلى حقول المتجهات والتنسورات على منطو تفاضلي، وأخيراً عرضنا لمنطويات ريمان وصلة ريمان.

نأمل في أن نكون قد أضفنا إلى مكتبتنا العلمية العربية واحداً من الكتب التي يحتاجها ويفيد منها طلاب المرحلة الجامعية الأولى وطلاب الدراسات العليا في قسم الرياضيات ليكون عوناً وإسهاماً في بناء مختصين أكفياء.

د. سمير أبو عقل **د. محمد الشيخ**

الفصل الأول

المنحنيات في الفضاء الثلاثي

1- تمهيد : المتجهات الطلقة والدوال متجهية القيمة وحقول المتجهات.

2- التمثيل الوسيطي لمنحن.

3- التوسيط الطبيعي.

4- تلامس المنحنيات وتلامس منحن ومستو.

5- المستقيم المماس والمستوي الملاصق لمنحن.

6- المستقيم المقارب لمنحن.

7- ثلاثية فرينيه ومعادلات فرينيه (Frenet).

8- تقوس منحن والتفافه.

9- منشور منحن وناشره.

10- المعادلات الطبيعية لمنحن.

تمرينات الفصل الأول.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المنحنيات في الفضاء الثلاثي

1- تمهيد : المتجهات الطلقة والدوال متجهية القيمة وحقول المتجهات

1-1 المتجه المقيد والمتجه الطلق

المتجه المقيد *(Localized Vector)* في نقطة A من الفضاء الثلاثي الأبعاد هو أي زوج مرتب (ثنائية) (A,B) أو أية قطعة مستقيمة موجهة AB مبدؤها النقطة A ونهايتها نقطة ما B. نرمز عادة للمتجه المقيد بـ $\overrightarrow{AB}$، ويعرف طوله بأنه البعد بين النقطتين A و B.

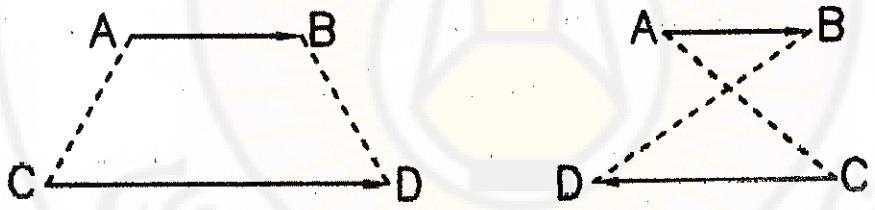
إذا كان $A=B$ فنقول عن المتجه المقيد $\overrightarrow{AA}$ إنه المتجه الصفري في النقطة A. ولتعريف المتجه الطلق *(Free Vector)* نستخدم علاقة تكافؤ على مجموعة المتجهات المقيدة، فنقول عن متجهين مقيدين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ إنهما متكافئان (أو متسايران) إذا كان لهما الطول نفسه، وكانا متوازيين أو واقعين على المستقيم نفسه، وكان لهما أخيراً الاتجاه نفسه. الأمر الذي يكافئ أن منتصف القطعة المستقيمة AD منطبق على منتصف القطعة BC. وإذا استثنينا الحالة التي تقع فيها النقاط A و B و C و D على المستقيم نفسه، فإن ذلك يعني أن الشكل الرباعي $ABDC$ هو متوازي الأضلاع. نقول الآن عن كل صف تكافؤ من المتجهات المقيدة المتكافئة (المتسايرة) فيما بينها إنه متجه طلق أو نقول اختصاراً متجه، وبالتالي فإن كل متجه مقيد $\overrightarrow{AB}$ يعين متجهاً طلقاً (صف تكافؤ المتجهات المقيدة المسايرة لـ $\overrightarrow{AB}$) نرمز له بـ $\overrightarrow{AB}$. وبالعكس إذا أعطينا نقطة A فإن كل متجه طلق يحوي بالضبط متجهاً مقيداً وحيداً مبدؤه النقطة A. وهكذا فإن تكافؤ المتجهين المقيدين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ يقتضي المتطابقة $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ وبالعكس.

وإذا لم يكن ضرورياً أن نشير إلى المتجه المقيد الذي يمثل المتجه الطلق فإننا نرمز للمتجهات الطلقة بأحرف لاتينية غامقة : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$.

أخيراً فإن جميع المتجهات المقيدة الصفرية متكافئة، وتمثل المتجه الطلق الصفري الذي نرمز له بـــ $\mathbf{o}$.

2-1 العمليات على المتجهات

نقول عن متجهين طلقين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ إنهما مرتبطان خطياً أو متوازيـــان، إذا كـــان المتجهان المقيدان اللذان يمثلاهما متوازيين أو واقعين على المستقيم نفسه. ونقول عـــن متجهين مرتبطين خطياً، ممثلين بالمتجهين المقيدين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ ، واللذين لا يقعـــان على المستقيم نفسه ؛ إن لهما الاتجاه نفسه، إذا لم يكن للقطعتين المـــستقيمتين AC و BD نقطة داخلية مشتركة. وإذا كان لهما نقطة مشتركة فنقول إن المتجهين الطلقـــين متعاكسان بالاتجاه (الشكل -1-)



الشكل -١-

نرمز لطول المتجه $\boldsymbol{a}$ الذي يعرّف بأنه طول أحد ممثليه بـــ $\|\boldsymbol{a}\|$، ولذلك فطول المتجه الصفري هو صفر، ونرمز للمتجه الذي له طول المتجه $\boldsymbol{a}$ ويعاكـــسه بالاتجـــاه بـــ $-\boldsymbol{a}$. وإذا كان $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ فإن $-\mathbf{a}=\overrightarrow{BA}$.

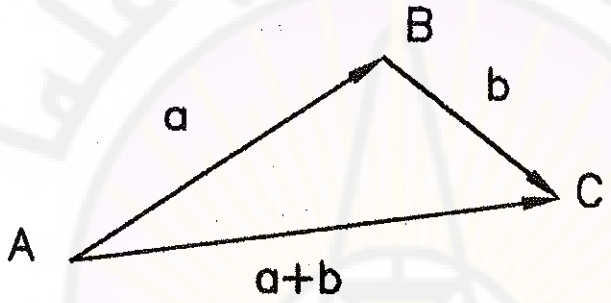
أ) جمع المتجهات.

يعرّف مجموع متجهين a و b والذي نرمز له بـ $a+b$ بأنه ذلك المتجه الممثّل بالمتجه المقيد $\overrightarrow{AC}$ المعين، كالآتي:

نختار نقطة A ونأخذ النقطة B حيث يمثل $\overrightarrow{AB}$ المتجه a ، كما نأخذ النقطة C حيث يمثل $\overrightarrow{BC}$ المتجه b ، أي:

$$a=\overrightarrow{AB} \quad ، \quad b=\overrightarrow{BC}$$

وعندئذ فإن : $a+b=\overrightarrow{AC}$ (الشكل $-2-$)



الشكل $-2-$

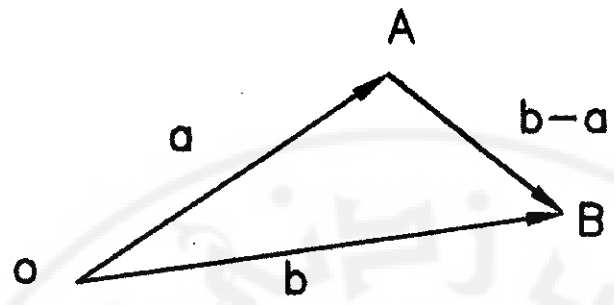
ويمكن أن نثبت بسهولة بأن هذا التعريف مستقل عن اختيار النقطة A، وأن جمع المتجهات يحقق الخواص الآتية:

$(a+b)+c=a+(b+c)$	-1
$a+b=b+a$	-2
$a+o=a$	-3
$a+(-a)=o$	-4

ممّا يعني أن مجموعة المتجهات الطلقة المزوّدة بعملية الجمع هي زمرة تبديلية. ويعرف عادة طرح المتجهات بالعلاقة:

$$a-b=a+(-b)$$

وإذا كان $a=\overrightarrow{OA}$ و $b=\overrightarrow{OB}$ فعندئذ $\overrightarrow{AB}=b-a$ (الشكل – 3 –)



الشكل – 3 –

أخيراً فإن أطوال المتجهات تحقق المتباينة:

$$\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|$$

والتي تدعى متباينة المثلث، وتتحقق المساواة :

$$\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$$

إذا وفقط إذا كان للمتجهين a و b الاتجاه نفسه.

ب) ضرب متجه بعدد حقيقي.

يعرف ضرب (أو جداء) متجه a بعدد حقيقي λ والذي نرمز له بـ λa بأنه ذلك المتجه ذو الطول $\|\lambda a\|=|\lambda|\|a\|$ والذي يتفق مع a في الاتجاه حينما تكون $\lambda>0$ ويختلف معه في الاتجاه حينما تكون $\lambda<0$. ومن الواضح أن هذا الضرب (الجداء) يحقق الخواص الآتية.

1) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$

2) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$

3) $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$

$$1\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\quad,\quad(-1)\,\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\qquad(4$$

$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}\quad,\quad\lambda\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}\qquad(5$$

وهكذا فإن مجموعة المتجهات الطلقة مزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد السابقتين ، تشكل فضاء متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية.

ج) الضرب (الجداء) السلمي (أو الداخلي):

إذا كان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ متجهين غير صفريين فنقول عن العدد الحقيقي :

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

حيث $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ترمز لزاوية المتجهين المقيدين اللذين لهما المبدأ نفسه ويمثلان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ ، إنه الجداء السلمي (أو الداخلي أو النقطي) للمتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$. وإذا كان أحد المتجهين صفراً فنضع $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

نستنتج بسهولة الخواص الآتية:

1) الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ هو: إما أن يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري، أو إنهما متعامدان .

2) إذا كان للمتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ الاتجاه نفسه فإن:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|$$

وبشكل خاص إن:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=\|\boldsymbol{a}\|^2$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\qquad(3$$

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}\qquad(4$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}\qquad(5$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\qquad(6$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\qquad(7$$

3-1 الاستقلال الخطي

نقول عن المتجهات:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

إنها مرتبطة خطياً إذا وُجِدَتْ أعداد حقيقية ليست كلها أصفاراً : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ حيث يكون :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = o$$

وإذا اقتضت المساواة الأخيرة أن يكون:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

فنقول عن المتجهات إنها مستقلة خطياً أو اختصاراً مستقلة .

نستنتج بسهولة الخواص الآتية :

1) إذا كان أحد المتجهات:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

هو المتجه الصفري فلا بد أن تكون هذه المتجهات مرتبطة خطياً.

2) يكون المتجهان a و b مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا وقع ممثلاهما المنطلقان من المبدأ نفسه على المستقيم ذاته.

3) تكون المتجهات الثلاثة : a و b و c مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وقعت المتجهات المقيدة الممثلة لها والمنطلقة من المبدأ نفسه في المستوي ذاته .

4) يوجد في الفضاء الثلاثي دائماً ثلاثة متجهات مستقلة خطياً، ولكن كل مجموعة من أربعة متجهات لا بد أن تكون مرتبطة خطياً.

5) إذا كانت المتجهات : e_1, e_2, e_3 مستقلة خطياً فإن أي متجه a سيمثل بالشكل:

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

وعندئذ نقول عن المتجهات e_1, e_2, e_3 إنها قاعدة (أساس) للفضاء.

1-4 توجيه الفضاء الثلاثي

لتكن e_1, e_2, e_3 ثلاثة متجهات مستقلة و v_1, v_2, v_3 ثلاثة متجهات أخرى . عندئذ توجد أعداد حقيقية a_i^j (j هو دليل علوي وليس قوة) حيث يكون:

$$v_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + a_1^3 e_3$$

$$v_2 = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3$$

$$v_3 = a_3^1 e_1 + a_3^2 e_2 + a_3^3 e_3$$

والمعين (المحدد):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

يساوي الصفر إذا وفقط إذا كانت المتجهات v_1, v_2, v_3 مرتبطة خطياً.

إذا كان $\Delta > 0$ فإننا نقول إن لثلاثيتي المتجهات الـمُرتَّبتين:

$$e_1, e_2, e_3 \quad \text{و} \quad v_1, v_2, v_3$$

التوجيه نفسه.وإذا كان $\Delta < 0$ فنقول إن لهما توجيهين متعاكسين. وخصوصاً إذا بدلنا موضعي متجهين في ثلاثية فإننا نغير توجيهها ، فمثلاً للثلاثيتين :

$$e_1, e_2, e_3 \quad \text{و} \quad e_2, e_1, e_3$$

توجيهان متعاكسان ، في حين أن للثلاثيتين :

$$e_1, e_2, e_3 \quad \text{و} \quad e_2, e_3, e_1$$

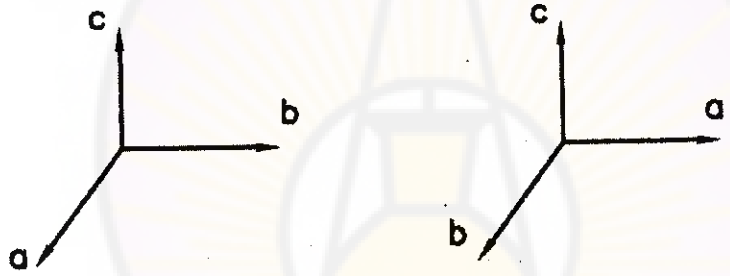
التوجيهَ نفسَه.

نقول الآن عن الفضاء المزود بثلاثية مرتبة مختارة: e_1, e_2, e_3 من المتجهات المستقلة إنه فضاء موجّه (*Oriented Space*)، ونقول عن ثلاثية في الفضاء الموجّه إنها

ذات توجيه موجب إذا كان لها توجيه الثلاثية الأساسية e_1, e_2, e_3 نفسه، وإلا قلنا عن توجيهها إنه سالب.

إن أي متجه ناظم n على مستو في فضاء موجّه يعين جهة دوران موجبة في هذا المستوي . فإذا كان المتجه b ناتجاً عن دوران المتجه a بزاوية مقدارها Φ، $0 < \Phi < \pi$ في الاتجاه الموجب؛ فلا بد أن يكون للثلاثية a,b,n توجيه موجب.

أخيراً يمكننا أن نتكلم على ثلاثية يمينية (*Right – Handed*) أو يسارية. فنقول عن الثلاثية. a و b و c إنها يمينية إذا كان لها التوجيه نفسه للثلاثية المؤلفة من أصابع اليد اليمنى الثلاثة: الإبهام , السبابة , والوسطى. ونقول إنها يسارية إذا تحقق الأمر ذاته من أجل اليد اليسرى (الشكل – 4 –)



الشكل – 4 –

1 – 5 الجداء المتجهي (أو الخارجي)

إذا كان a و b متجهين في فضاء موجه، فالجداء المتجهي (أو الخارجي) لهما والذي نرمز له بـ $a \times b$ هو المتجه ذو الطول:

$$\|a\| \|b\| \sin \angle(a,b)$$

والذي يعامد كلاً من a و b وحيث تكون الثلاثية

$$a , b , a \times b$$

موجبة التوجيه.

من الواضح أنه إذا كان المتجهان a و b مرتبطين خطياً (متوازيين) فإن $\angle(a,b)$ تساوي الصفر أو π، وبالتالي فالجداء المتجهي لهما يساوي صفراً. وبالعكس إذا كان الجداء المتجهي يساوي الصفر فلا بد أن يكونا مرتبطين خطياً.

ويحقق الجداء المتجهي العلاقات الآتية:

$$a\times b=-b\times a \qquad (1$$

$$(\lambda a)\times b=a\times(\lambda b)=\lambda(a\times b) \qquad (2$$

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c \qquad (3$$

$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c \qquad (4$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{cb})\mathbf{a} \qquad (5$$

1-6 الجداء المختلط

يعرف الجداء المختلط للمتجهات الثلاثة : a و b و c والذي يرمز له بـ $[a,b,c]$ بأنه العدد :

$$[a,b,c]=(a\times b)c$$

إن القيمة المطلقة لهذا الجداء تساوي حجم متوازي السطوح المنشأ بالمتجهات a,b,c كأحرف منطلقة من الرأس نفسه، وإشارة الجداء المختلط تتطابق مع إشارة توجيه الثلاثية a,b,c.

من الواضح أن الجداء المختلط يساوي الصفر إذا وفقط إذا كانت المتجهات الثلاثة مرتبطة خطياً . وأخيراً فإن الجداء المختلط يحقق المتطابقات:

$$[a,b,c]=[b,c,a]=[c,a,b]=-[a,c,b]=-[c,b,a]=-[b,a,c]$$

1-7 المركبات

لنأخذ في الفضاء الثلاثي ثلاثة محاور متلاقية في نقطة o ومتعامدة مثنى مثنى، ولنرمز لها بـ $oxyz$. إذا كانت $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ متجهات وحدة موازية للمحاور، فنحصل على النظام الإحداثي $\boldsymbol{oijk}$ ، وعندئذ فإن أي متجه $\boldsymbol{a}$ سيمثل بالشكل:

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

نقول عن الأعداد a_x, a_y, a_z إنها مركبات المتجه $\boldsymbol{a}$ بالنسبة للقاعدة $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ أو بالنسبة إلى النظام الإحداثي ، وحينئذ نرمز إلى المتجه $\boldsymbol{a}$ بـ (a_x, a_y, a_z). إن $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ تشكل قاعدة للفضاء ومتجهات القاعدة تحقق المتطابقات:

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1$$

$$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=0$$

ومركبات المتجه $\boldsymbol{a}$ تحقق العلاقات :

$$a_x=\boldsymbol{a}\boldsymbol{i} \quad , \quad a_y=\boldsymbol{a}\boldsymbol{j} \quad , \quad a_z=\boldsymbol{a}\boldsymbol{k}$$

إن اختيار القاعدة يجعل الفضاء موجَّهاً، وإذا عُدَّ التوجيه موجباً فعندئذ:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k} \quad , \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} \quad , \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

ونستطيع أن نكتب العمليات على المتجهات بدلالة مركباتها بالنسبة الى نظام إحداثي معين، فإذا كان:

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$$

$$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

$$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$$

فعندئذٍ :

$$(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z)$$

$$\lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

$$(a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = (a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z)$$

$$(a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

$$\left[(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z), (c_x, c_y, c_z) \right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\left\| (a_x, a_y, a_z) \right\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

إذا كانت الآن P نقطة من الفضاء الثلاثي المزود بالنظام الإحداثي $\boldsymbol{oijk}$ (والذي نرمز له بـــ $oxyz$ أيضاً)، فثمة أعداد حقيقية $x\ ,\ y\ ,\ z$ حيث يكون :

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

نقول عن $\overrightarrow{OP}$ إنه متّجه الموضع للنقطة P ونرمز له بـــ $\boldsymbol{r}$ أي $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ونقول عن $x\ ,\ y\ ,\ z$ إنها إحداثيات النقطة P (في النظام الإحداثي $\boldsymbol{oijk}$)، ممّا يعني أن إحداثيات نقطة P تتطابق مع مركبات متجه الموضع لهذه النقطة. أخيراً يقابل كل نقطة من الفضاء الثلاثي المزود بنظام إحداثي $\boldsymbol{oijk}$ متجه طلق وحيد $\overrightarrow{OP}$، وبالعكس يقابل كل متجه طلق $\boldsymbol{a}$ نقطة وحيدة P معينة بالعلاقة : $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{a}$.

1 – 8 الدوال المتجهية القيمة (*Vector-Valued Function*)

نستخدم عادة في الهندسة التفاضلية دوالاً متجهية القيمة (دوالاً تأخذ قيمها في فضاء المتجهات الطلقة الثلاثي الذي نرمزه $\Re^3$) وبمتغير حقيقي واحـــد أو بمـــتغيرين

حقيقيين، وسنرمز لهذه الدوال بأحرف بارزة x, y, r, f . وإذا زودنا الفضاء بنظـام إحداثي فإن كل دالة متجهية القيمة بمتغير حقيقي $t \to r(t)$ تكافئ ثلاثية مرتبة من الدوال الحقيقية بمتحول حقيقي:

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

حيث لكل t, تمثل الثلاثية:

$$(x(t), y(t), z(t))$$

مركبات المتجه $r(t)$ أي :

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k = (x(t), y(t), z(t))$$

إن نهاية الدوال متجهية القيمة بمتغير حقيقي واستمراريتها وقابلية اشـتقاقها تعرّف كما في الدوال الحقيقية, وتتمتع بخواص مشابهة، فنقول عن المتجه a إنه نهايـة الدالّة متجهية القيمة $t \to r(t)$ (أو اختصاراً r) في النقطة t_0، ونكتب:

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = a$$

إذا وفقط إذا وُجد لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي $\delta_\varepsilon > 0$، حيث أياً كان t من مجموعة تعريف الدالّة r الذي يحقق $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ فإن $\|r(t) - a\| < \varepsilon$.

وإن كانت u و v و w دوالاً متجهية القيمة وكانت λ دالّة حقيقية لها جميعها نهايات في النقطة t_0 فحينئذ.

$$\lim_{t \to t_0} (u(t) + v(t)) = \lim_{t \to t_0} u(t) + \lim_{t \to t_0} v(t)$$

$$\lim_{t \to t_0} (\lambda(t) u(t)) = \lim_{t \to t_0} \lambda(t) \lim_{t \to t_0} u(t)$$

$$\lim_{t \to t_0} (u(t)\, v(t)) = \lim_{t \to t_0} u(t) \lim_{t \to t_0} v(t)$$

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t))=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{v}(t)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t)]=[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{u}(t),\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{v}(t),\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{w}(t)]$$

ونقول عن الدالّة المتجهية القيمة $\boldsymbol{r}$ إنها مستمرة في النقطة t_0 إذا كانت معرفة في t_0 ، وكان:

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)$$

ونستنتج من العلاقة بين الدالّة متجهية القيمة ومركباتها (وهي دوال حقيقية) أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون لدالة متجهية القيمة نهاية في نقطة t_0 ؛ هو أن يكون لمركباتها نهايات في هذه النقطة، وحينئذ فإن مركبات النهاية تساوي نهايات المركبات:

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\lim_{t\to t_0}(x(t),y(t),z(t))=$$

$$=(\lim_{t\to t_0}x(t),\lim_{t\to t_0}y(t),\lim_{t\to t_0}z(t))$$

إذا كانت الآن $\boldsymbol{r}$ دالة متجهية القيمة معرفة في جوار للنقطة t_0 ووجدت النهاية:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)]$$

فنقول عن $\boldsymbol{r}$ إنها قابلة للاشتقاق في النقطة t_0 ، ونقول عن هذه النهاية إنها مشتق الدالة $\boldsymbol{r}$ في النقطة t_0 ، ونرمزها $\boldsymbol{r}'(t_0)$ أو $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ أو $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t_0)$. وينتج من التعريف أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة $\boldsymbol{r}$ قابلة للاشتقاق في النقطة t_0 ؛ هو أن تكون مركباتها قابلة للاشتقاق ، وعندئذ فإن مركبات المشتق تساوي مشتقات المركبات:

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

وإذا كانت الدوال المتجهية $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$ و $\boldsymbol{w}$ والدالة λ (السلمية) قابلة جميعها للاشتقاق فعندئذ:

$$\frac{d(u+v)}{dt}=\frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d(\lambda u)}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}u+\lambda\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d(uv)}{dt}=v\frac{du}{dt}+u\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d(u\times v)}{dt}=\frac{du}{dt}\times v+u\times\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d[u,v,w]}{dt}=[\frac{du}{dt},v,w]+[u,\frac{dv}{dt},w]+[u,v,\frac{dw}{dt}]$$

أما مشتق تركيب دالتين فيعطى بالعلاقة:

$$\frac{d(v\circ t)}{ds}(s_0)=\frac{dv}{dt}(t_0)\,\frac{dt}{ds}(s_0)$$

حيث :

$$t_0=t(s_0)$$

أخيراً يعرف المشتق من مراتب عليا، كما في الدوال الحقيقية، ويكون لدالة متجهية القيمة r مشتق من المرتبة n في t_0، إذا وفقط إذا كان لمركباتها مشتقات من المرتبة n في t_0، وعندئذ :

$$r^{(n)}(t_0)=(x^{(n)}(t_0),y^{(n)}(t_0),z^{(n)}(t_0))$$

ويمكن التحقق بسهولة من صحة مبرهنة تايلور الآتية:

إذا كان للدالة r مشتقات مستمرة حتى المرتبة $n+1$ فعندئذ:

$$r(t_0+h)=r(t_0)+\frac{h}{1!}r'(t_0)+\ldots\ldots+\frac{h^n}{n!}r^{(n)}(t_0)+R_{n+1}$$

حيث أن الباقي يعطى بصيغ مختلفة منها:

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} r^{(n+1)}(t_1)$$

حيث t_1 يقع بين t_0 و $t_0 + h$

$$R_{n+1} = h^{n+1} u_{n+1}(h)$$

حيث u_{n+1} دالة محدودة في جوار $h = 0$

تجدر الملاحظة إلى أن :

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_{n+1}}{h^n} = 0$$

ونقول عن الدالة r إنها من الصف C_n إذا كان لها مشتقات حتى المرتبة n وكان المشتق $r^{(n)}$ مستمراً.

ملاحظة: يكون لثلاثيتي متجهات مستقلة التوجيهَ نفسه، إذا أمكن لإحداها أن تتحول بانسحاب ودوران مستمرين لتتطابق مع الأخرى ، من دون أن تفقد متجهاتها خاصية الاستقلالية في أي نقطة من العملية. مما يقتضي وجود ثلاث دوال متجهية القيمة :

$$\omega_1(t) \quad \text{و} \quad \omega_2(t) \quad \text{و} \quad \omega_3(t)$$

معرفة ومستمرة على الفترة $[0,1]$ حيث يتحقق الشرطان:

أ) $\omega_i(0) = e_i$ و $\omega_i(1) = v_i$ ، $(i = 1,2,3)$

ب) أياً كان t فإن المتجهات :

$$\omega_1(t) \quad \text{و} \quad \omega_2(t) \quad \text{و} \quad \omega_3(t)$$

مستقلة .وإذا وضعنا :

$$\omega_i(t) = \Phi_i^1(t) e_1 + \Phi_i^2(t) e_2 + \Phi_i^3(t) e_3$$

حيث $\Phi_i^j(t)$ دوال حقيقية معرفة ومستمرة على $[0,1]$ فلا بد أن يتحقق :

أ) $$\Phi_i^j(0)=\delta_i^j=\begin{cases}1 & if\ \ i=j\\ 0 & if\ \ i\neq j\end{cases}$$

$$\Phi_i^j(1)=a_i^j$$

ب) $$\Delta(t)=\det\ \Phi_i^j(t)\neq 0$$

لإثبات التكافؤ بين التعريفين نفترض أولاً أن للثلاثيتين التوجيه نفسه حسب التعريف الأخير. لما كانت $\Delta(t)$ دالة مستمرة لـــ t على $[0,1]$ و $\Delta(t)\neq 0$ فلا يمكن أن تتغير إشارتها، وإذا لاحظنا أن:

$$\Delta(1)=\Delta \quad و \quad \Delta(0)=1$$

فلا بد أن يكون: $\Delta>0$.

وإذا فرضنا تحقق التعريف الأول ، فإن الصيغ:

$$\omega_1=\left(1+t(a_1^1-1)\right)e_1+ta_1^2\,e_2+ta_1^3\,e_3$$
$$\omega_2=ta_2^1\,e_1+\left(1+t(a_2^2-1)\right)e_2+ta_2^3\,e_3$$
$$\omega_3=ta_3^1\,e_1+ta_3^2\,e_2+\left(1+t(a_3^3-1)\right)e_3$$

تعرف ثلاث دوال مستمرة تحقق متطلبات التعريف الثاني.

1-9 الفضاء $\Re^n$

إذا رمزنا بـــ $\Re^n$ لمجموعة جميع المرتبات n-:

$$\Re^n=\left\{(p_1,p_2,\ldots,p_n)\,|\,p_j\in\Re\ \ ,j=1,2,\ldots\ldots,n\right\}$$

وعرفنا على $\Re^n$ عمليتي الجمع والضرب بعدد بالعلاقتين:

$$p+q=(p_1,\ldots\ldots,p_n)+(q_1,\ldots\ldots,q_n)=(p_1+q_1,\ldots\ldots\ldots,p_n+q_n)$$

$$\lambda p = \lambda(p_1,.....,p_n) = (\lambda p_1,.....,\lambda p_n)$$

فيمكن أن نتأكد بسهولة من أن لـــ $\Re^n$ بنية فضاء متجهات. ندعو $\Re^n$ عادة الفضاء الإقليدي ذا البعد n.

هذا ويعرَّف الجداء النقطي (العددي – الداخلي) في $\Re^n$ بالعلاقة:

$$p \cdot q = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j$$

كما يعرَّف النظيم بـــ:

$$\| p \| = \sqrt{p.p}$$

والمسافة بـــ:

$$d(p,q) = \| p - q \|$$

وعندئذ تكون لدينا الخواص الآتية:

$$p.q = q.p$$

$$(p+r).q = p.q + r.q$$

$$(\lambda p).q = \lambda(p.q) = p.(\lambda q)$$

$$\| \lambda p \| = |\lambda| \| p \|$$

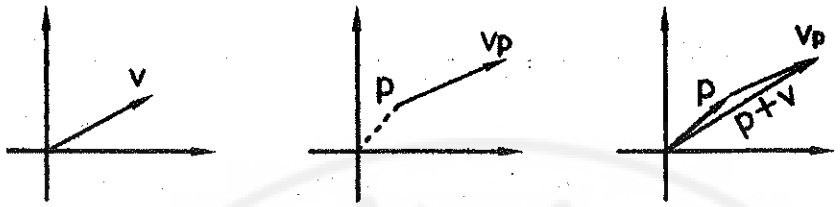
$$\| p+q \| \le \| p \| + \| q \|$$

$$\| p.q \| \le \| p \| \| q \|$$

1 – 10 المتجه المماس

ندعو متجهاً مماساً (*Tangent Vector*) للفضاء الإقليدي $\Re^n$ ونرمزه v_p كل زوج v,p من $\Re^n$.نقول عن v إنه الجزء المتجهي (*Vector Part*) وعن p إنها نقطة التطبيق (*Point Of Application*) لـــ v_p .

تجدر الملاحظة إلى أن v_p يمثل عادة بسهم من p إلى $p+v$.



الشكل – 5 –

هذا ويتساوى متجهان مماسان v_p و w_q إذا وفقط إذا كان:

$$v = w \quad \text{و} \quad p = q .$$

1 – 11 الفضاء المماس

ليكن $p \in \Re^n$. الفضاء المماس (*Tangent Space*) لـــ $\Re^n$ في p هو بالتعريف المجموعة:

$$\Re^n_p = \{v_p \setminus v \in \Re^n\}$$

من الواضح أنه ثمة تماثل قانوني (*Canonical Isomorphism*) بين $\Re^n_p$ و $\Re^n$ يعطى بـــ $v_p \to v$، ممّا يسمح لنا أن نعدّ $\Re^n_p$ فضاء متجهات، حيث يعرف جمع متجهين في $\Re^n_p$ وضرب متجه بعدد بالعلاقتين:

$$(v_p + w_p) = (v + w)_p$$

$$\lambda v_p = (\lambda v)_p$$

وهكذا فإن لـــ $\Re^n$ في كل نقطة منه p فضاءً مماساً $\Re^n_p$ ، وهذا الفضاء يشبه $\Re^n$ نفسه، ولهذا السبب نستطيع أن ننقل الجداء الداخلي (النقطي) في $\Re^n$ إلى أي فضاء مماس $\Re^n_p$. نضع بكل بساطة :

$$v_p \cdot w_p = v \cdot w \qquad , v_p, w_p \in \Re^n_p$$

ومتباينة كوشي ـــ شوارتز تكتب بالشكل:

$$|v_p \cdot w_p| \le \|v_p\| \|w_p\|$$

1 – 12 تعريف

إذا كانت:

$$f:\Re'' \to \Re$$

دالة قابلة للمفاضلة ، وكان v_p متجها مماساً لـــ $\Re''$ في النقطة p من $\Re''$ فإننا نضع:

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}(f(p+tv))\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

إن التعريف السابق يعطى في التحليل تحت اسم المشتق الاتجاهي للدالة f باتجاه v_p ، ولكننا نفضّل أن نعدَّه تعريفاً لتأثير المتجه المماس على الدوال.

1 – 13 مثال

إذا كان :

$$f(x,y) = \sin(x.y) \qquad ,p = (1,2) \qquad ,v = (2,3)$$

فإن :

$$f(p+tv) = \sin(6t^2 + 7t + 2)$$

ومنه :

$$\frac{d}{dt}(f(p+tv)) = (12t+7)\cos(6t^2+7t+2)$$

وبالتالي :

$$v_p[f] = (12t+7)\cos(6t^2+7t+2)\Big|_{t=0}$$

$$= 7\cos(2)$$

1 – 14 نتائج

1 – إذا كان :

$$v_p = (v_1,\ldots,v_n)_p$$

متجهاً مماساً لـــ $\Re^n$ ، وكانت:

$$f:\Re^n \to \Re$$

دالة قابلة للمفاضلة فإن:

$$v_p[f] = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial v_j}(p)$$

فلدينا مثلاً من أجل المثال السابق:

$$v_p[f] = (2\cdot y\cos xy + 3\cdot x\cos xy)(p) = 7\cos(2)$$

2 – إذا كانت: $f,g : \Re^n \to \Re$

دالتين قابلتين للمفاضلة ، وكان:

$$w_p \quad و \quad v_p$$

متجهين مماسين لـــ $\Re^n$ في p وكان a و b عددين حقيقيين فإن:

$$(av_p + bw_p)[f] = av_p[f] + bw_p[f]$$

$$v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g]$$

$$v_p[f\,g] = f(p)v_p[g] + g(p)v_p[f]$$

3 – قاعدة السلسلة:

إذا كانت : $g_1,\ldots\ldots,g_k : \Re^n \to \Re$

و : $F : \Re^k \to \Re$

دوالاً قابلة للمفاضلة و $v_p \in \Re^n_p$ حيث $p \in \Re^n$ وكتبنا:

$$f = F(g_1, \ldots\ldots, g_k)$$

فإن:

$$v_p(f) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial v_j}(g_1(p), \ldots, g_k(p)) v_p[g_i]$$

1 – 15 التطبيق المماس

لتكن $\mathcal{U}$ مجموعة جزئية مفتوحة من $\Re^n$ و $p \in \mathcal{U}$. إذا كان:

$$F: \mathcal{U} \to \Re^m$$

$$p \to F(p) = (f_1(p), \ldots\ldots, f_m(p))$$

تطبيقاً قابلاً للمفاضلة فيعرف التطبيق المماس (*Tangent Map*) لـــ F في النقطـــة p بـــ :

$$F_{*p} : \Re^n_p \to \Re^m_{F(p)}$$

$$v_p \to F_{*p}(v_p) = F'(p + tv)\big|_{t=0}$$

وعندئذ:

$$\begin{aligned} F_{*p}(v_p) &= \left(f_1'(p+tv), \ldots\ldots, f_m'(p+tv)\big|_{t=0}\right) \\ &= \left(v_p[f_1], \ldots\ldots, v_p[f_m]\right)_{F(p)} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f_1}{\partial v_j}(p), \ldots\ldots, v_j \frac{\partial f_m}{\partial v_j}(p)\right)_{F(p)} \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(p)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \cdot V \end{aligned}$$

حيث:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p)\right)$$

المصفوفة اليعقوبية للتطبيق F في النقطة p و V مصفوفة عمود عناصرها مركبات v_p.

1 – 16 مثال

إذا كان :

$$F:\Re^2 \to \Re^3 \ , \ (x_1,x_2) \to (x_1 e^{x_2}, 2x_2 - x_1^2, \sin(x_1 x_2))$$

و : $v(2,-1)$, $p(1,0)$

فإن:

$$F_{*p}(v_p) = \begin{pmatrix} e^{x_2} & x_1 e^{x_2} \\ -2x_1 & 2 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي :

$$F_{*p}(v_p) = (1,-6,-1)_{(1,-1,0)}$$

1 – 17 حقل المتجهات

ندعو حقل متجهات (*Vector Field*) على مجموعة جزئية مفتوحة $\mathcal{U}$ من $\Re^n$، أي دالة V تخصص وفقها كل نقطة p من $\mathcal{U}$ متجه مماس $V(p)$ من $\Re^n_p$.

وإذا كانت الدالة الحقيقية:

$$f:\ \mathscr{U} \to \Re$$

قابلة للمفاضلة فإن V يؤثر على f بالعلاقة :

$$V[f](p) = V(p)\,[f]$$

نقول عن حقل المتجهات V إنه قابل للمفاضلة، إذا كانت الدالة:

$$V[f]:\ \mathscr{U} \to \Re$$

$$p \to V[f](p)$$

قابلة للمفاضلة أياً كانت الدالة القابلة للمفاضلة f.

1 – 18 تعريف

الدوال الإحداثية الطبيعية (*Natural Coordinate Function*) لـــ $\Re^n$ هي الدوال:

$$\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$$

المعرفة بـــ :

$$u_i : \Re^n \to \Re$$

$$p = (p_1, \ldots\ldots p_n) \to u_i(p) = p_i$$

وفي الحالات الخاصة لـــ: $\Re^3$, $\Re^2$, $\Re$

نرمز إلى الدوال الإحداثية الطبيعية بـــ: t , $\{u,v\}$, $\{x,y,z\}$ على الترتيب.

1 – 19 تعريف

يعرف الحقل U_j على $\Re^n$ بـــ:

$$U_j(p) = (0\,,0\,,\ldots,0\,,1\,,0\,,\ldots,0)_p$$

حيث يظهر العدد 1 في الموضع ذي الترتيب j. وعندئذ نقول عن:

$$\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$$

إنه الحقل الإطاري الطبيعي (*Natural Form Field*) لـــ $\Re^n$.

ينتج مباشرة من التعريف أن :

$$U_j[f]=\frac{\partial f}{\partial u_j}$$

ولذلك نكتب أحياناً $\frac{\partial}{\partial u_j}$ لنرمز إلى U_j.

1-20 تعريف

إذا كان X و Y حقلي متجهات على مجموعة جزئية مفتوحة $\mathscr{U}$ من $\mathfrak{R}^n$ وكان $a\in\mathfrak{R}$ و $g\in\mathfrak{R}^n\to\mathfrak{R}$ فإننا نعرف aX و $X+Y$ و gX و $X.Y$ بـــ:

$$(aX)[f]=aX[f]$$

$$(X+Y)[f]=X[f]+Y[f]$$

$$(gX)[f]=gX[f]$$

$$(X\cdot Y)[p]=X[f]\cdot Y[p]$$

حيث:

$$f:\ \mathscr{U}\to\mathfrak{R}$$

دالة قابلة للمفاضلة و $p\in\mathscr{U}$. عندئذ فإن:

$$aX \text{ و } X+Y \text{ و } gX$$

هي حقول متجهات على $\mathscr{U}$ ، وإن:

$$X.Y:\ \mathscr{U}\to\mathfrak{R}$$

هي دالة حقيقية .

وإذا كانت X وY و g قابلة للمفاضلة فلا بد أن تكون كذلك حقول المتجهات aX و $X+Y$ و gX والدالة $X.Y$.

1-21 نتيجة

إذا كان V حقل متجهات على مجموعة جزئية مفتوحة $\mathcal{U}$ من $\mathfrak{R}^n$، فإن $V(p) \in \mathfrak{R}^n_p$ ، وبالتالي نستطيع أن نكتب :

$$V(p) = (v_1(p), \ldots\ldots, v_n(p))_p$$

حيث :

$$v_j : \mathcal{U} \to \mathfrak{R}$$

وعندئذٍ:

$$V(p) = (v_1(p), \ldots\ldots, v_n(p))_p$$

$$= v_1(p)(1,0\ldots,0)_p + \ldots + v_n(p)(0,\ldots,1)_p$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j(p)\, U_j(p)$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة لكل p من $\mathcal{U}$ فإننا نجد أن:

$$V = \sum_{j=1}^{n} v_j\, U_j$$

وعندئذ فإن V يكون قابلاً للمفاضلة إذا وفقط إذا كانت الدوال:

$$v_1, \ldots\ldots, v_n$$

قابلة للمفاضلة.

1-22 تعريف

ليكن W حقل متجهات قابلاً للمفاضلة على المجموعة الجزئية المفتوحة $\mathcal{U}$ من $\mathfrak{R}^n$ ، وليكن v_p متجهاً مماساً لـ $\mathfrak{R}^n$ في النقطة p من $\mathcal{U}$. عندئذٍ يعرف مشتق W بالنسبة إلى v_p بأنه المتجه المماس $D_v W$ الذي يعطى بـ :

$$D_v W = \lim_{t \to 0} \frac{W(p+tv) - W(p)}{t}\Big|_p$$

وإذا كان:

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i U_i$$

فإن :

$$D_v W = \sum_{i=1}^{n} v_p[w_i] U_i(p) = (v_p[w_1], \ldots\ldots, v_p[w_n])_p$$

1 – 23 نتيجة

أياً كان المتجه المماس v_p من $\mathfrak{R}^n$ فإن:

$$D_v U_j = 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$$

1 – 24 تعريف

إذا كان V و W حقلي متجهات على المجموعة الجزئية المفتوحة $\mathscr{U}$ من $\mathfrak{R}^n$ وكان W قابلاً للمفاضلة، فإننا نعرف حقل المتجهات $D_V W$ بـــ :

$$(D_V W)(p) = D_{V(p)} W$$

وإذا كان V قابلاً للمفاضلة أيضاً فلا بد أن يكون $D_V W$ قابلاً للمفاضلة. أضف إلى ذلك إذا كان:

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i U_i$$

فإن:

$$D_V W = \sum_{i=1}^{n} V[w_i] U_i$$

$$= (V[w_1], \ldots\ldots, V[w_n])$$

$$= (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_1}{\partial u_j} v_j , \ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_n}{\partial u_j} v_j)$$

1 – 25 مثال

إذا كان :

$$V = (x_1 + x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_3 e^{x_1})$$

$$W = (x_1 x_3 \ , \ x_3 e^{x_2} \ , \ x_1 - x_2)$$

حقلي متجهات على $\Re^3$ وكانت f الدالة المعرفة بـــ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_3} + x_2$$

أوجد كلاً من:

$$D_V W$$

و $(D_V W)[f]$

و $(D_V W)[f](1,0,-1)$

الحل: إذا رمزنا بـــ V لمصفوفة العمود التي عناصرها مركبات الحقل V نستطيع أن نكتب:

$$Z = D_V W = \left(\frac{\partial w_i}{\partial u_j}\right) \cdot V$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 e^{x_2} & e^{x_2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_3 e^{x_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_3(x_1 + x_2) + x_1 x_3 e^{x_1} \\ x_3^2 e^{x_2} + x_3 e^{x_1 + x_2} \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$Z = D_V W$$

$$= (x_3(x_1 + x_2) + x_1 x_3 e^{x_1} \ , \ x_3^2 e^{x_2} + x_3 e^{x_1 + x_2} \ , \ x_1 + x_2 - x_3)$$

$$Z[f] = (D_V W)[f] = \sum_{j=1}^{3} z_j \frac{\partial f}{\partial u_j}$$

$$= (x_3(x_1 + x_2) + x_1x_3e^{x_1})e^{x_3} + (x_3^2e^{x_2} + x_3e^{x_1+x_2}) \cdot 1 + (x_1 + x_2 - x_3)x_1e^{x_3}$$

وإذا وضعنا :

$$x_1 = 1 \quad , \qquad x_2 = 0 \quad , \qquad x_3 = -1$$

نجد:

$$(D_V W)[f](1,0,-1) = -1 - e + 1 + (-1)e + (1 + 0 + 1)e^{-1}$$

$$= -2e + \frac{2}{e}$$

2-التمثيل الوسيطي لمنحن

2-1 تعريف (القوس البسيط)

نقول عن أي مجموعة من نقاط الفضاء إنها قوس بسيط (*Simple Arc*) إذا كانت متجهات مواضعها هي قيم دالة متجهية القيمة r ، معرفة ومستمرة ومتباينة على فترة مغلقة $[a,b]$:

$$r:[a,b]\to\Re^3 \quad ,t\to r(t)$$

فمثلاً بيان دالّة حقيقية f معرفة على فترة مغلقة $[a,b]$ هو قوس بسيط. يكفي أن نضع:

$$r(t)=ti+f(t)j \qquad , \qquad t\in[a,b]$$

كما أن مجموعة النقاط (x,y,z) من الفضاء التي تحقق المعادلتين:

$$y=f(x) \qquad , \qquad z=g(x)$$

حيث f و g دالتان حقيقيتان مستمرتان على $[a,b]$ ؛ هي قوس بسيط . كذلك فإن النصف العلوي للدائرة $x^2+y^2=1$، هو قوس بسيط. أما الدائرة فليست قوساً بسيطاً، لأنه إذا كانت r أي دالة معرفة ومستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$، وتأخذ قيمها في الدائرة ، فلا بد من وجود قيمتين متباينتين t_1,t_2 من $[a,b]$ حيث يكون:

$$. \quad r(t_1)=r(t_2)$$

2-2 تعريف (التطبيق المتباين محلياً (موضعياً) – *Locally Injective Map*)

لتكن I فترة ما طرفاها a و b حيث:

$$-\infty<b\le+\infty \quad و \quad -\infty\le a<+\infty$$

وليكن f تطبيقاً لـ I في $\Re^3$. نقول عن f إنه متباين محلياً، إذا وجد لكل نقطة t_0 من $]a,b[$ عدد حقيقي δ حيث يتحقق:

أ - $[t_0-\delta,t_0+\delta] \subseteq]a,b[$

ب- اقتصار f على $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ متباين.

وفي حالة انتماء أحد الطرفين، وليكن a مثلاً إلى I ، فنشترط ـــ إضافةً لما سبق ـــ وجود δ حيث يكون:

$$[a,a+\delta]\subseteq[a,b[$$

واقتصار f على $[a,a+\delta]$ متباين. وهكذا فإذا كان f مستمراً فإن صورة $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ وفق f هي قوس بسيط.

2 – 3 تعريف (المنحني الهندسي والتمثيل الوسيطي)

نقول عن أي مجموعة $\mathscr{C}$ من نقاط الفضاء إنها منحن هندسي ، إذا كانت متجهات مواضعها هي صورة فترة I (مفتوحة أو مغلقة أو نصف مفتوحة أو محدودة أو غير محدودة) وفق تطبيق مستمر ومتباين محلياً:

$$r: I \to \Re^3 \qquad ,t \to \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

وبالتالي فإن المنحني يتعين بالدالة المتجهية القيمة $\boldsymbol{r}$ أو بشكل مكافئ بالمعادلات الثلاث:

$$x = x(t) \qquad ,y = y(t) \qquad ,z = z(t) \qquad (2-1)$$

نقول عندئذ عن $\boldsymbol{r}$ ، أو عن المعادلات المكافئة (2 – 1) إنها تمثيل وسيطي (*Parametric Representation*) للمنحني.

2 – 4 أمثلة

1 – الدائرة هي منحن هندسي فهي تمثّل بالدالة:

$$r:]a,b[\to \Re^3 \qquad ,t \to \boldsymbol{r}(t) = a(\cos(t)\boldsymbol{i} + \sin(t)\boldsymbol{j})$$

حيث:

a نصف قطر الدائرة و $b - a > 2\pi$

2 – التطبيق:

$$]-\infty,+\infty[\to \Re^3 \qquad ,t \to r(t) = r_0 + t\,a$$

حيث a, r_0 ثابتان في $\Re^3$ ، هو تمثيل وسيطي للمستقيم المار بالنقطة التي متجه موضعها r_0 , والموازي للمتجه a . فالمستقيم هو منحن. وصورة أي فترة مغلقة $[a,b]$ وفق r ، التي هي قطعة مستقيمة من المستقيم ؛ هي قوس بسيط، وإذا كان:

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

و كان:

$$r_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

فالمستقيم يتعين بالمعادلات الوسيطية:

$$x = x_0 + ta_1$$

$$y = y_0 + ta_2$$

$$z = z_0 + ta_3$$

3 – ورقة البرسيم (*Clover Leaf*):

هي المنحني المعين بالتمثيل:

$$x = \cos 3t \cos t$$

$$y = \cos 3t \sin t$$

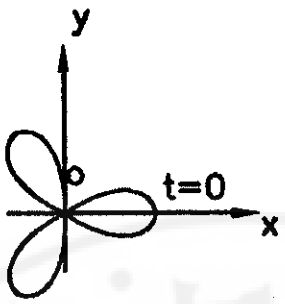
$$z = 0$$

حيث: $(0 \le t \le 2\pi)$

إن النقطة o هي نقطة تقاطع ذاتية لهذا المنحني ، فهي تقابل ثلاث قيم مختلفة للوسيط t ، وهي:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} \ , \qquad t_2 = \frac{1}{2}\pi \ , \qquad t_3 = \frac{5}{6}\pi$$

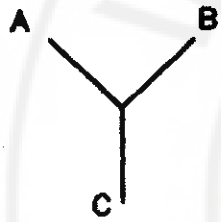
(انظر الشكل – 6 –)



الشكل – 6 –

2 – 5 ملاحظة

يُعرَّف المنحني أحياناً بأنه صورة فترة وفق دالة مستمرة، وهذا يقود إلى مجموعة واسعة من المنحنيات، وخصوصاً منحني بيانو ، الذي يغطي مربعاً كاملاً. إن تعريفنا للمنحني يستثني منحنيات كهذا ، كما يستثني منحنيات لها شكل حرف Y (الشكل – 7 –). لأنه أياً كان التمثيل الوسيطي لهذا المنحني؛ فإن واحدة على الأقل



الشكل – 7 –

من النقاط A,B,C ولتكن A مثلاً ستكون صورة قيمة داخلية t_0 للوسيط. ويمكن التحقق بسهولة من أن التطبيق لا يمكن أن يكون متبايناً على أي جوار لـ t_0.

2 – 6 تعريف (التمثيلات الوسيطية المتكافئة)

نقول عن تمثيلين وسيطيين:

$$r_1 :]a,b[\to \Re^3 \ , t \to r_1(t)$$

$$r_2 :]c,d[\to \Re^3 \ , \tau \to r_2(\tau)$$

إنهما متكافئان إذا وجدت دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة:

$$\phi :]c,d[\to]a,b[\quad , \tau \to \phi(\tau)$$

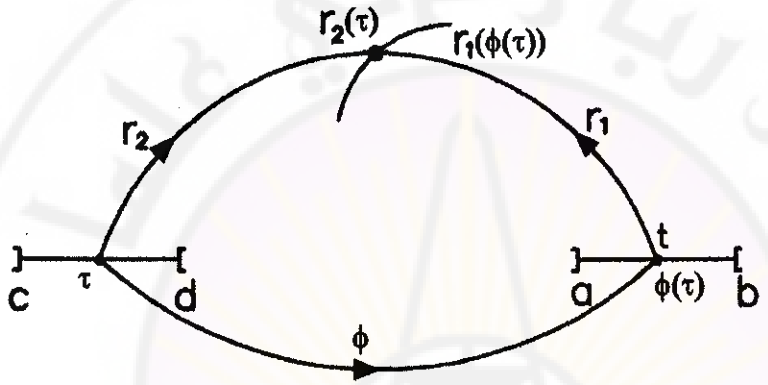
حيث يكون:

$$r_1(\phi(\tau)) = r_2(\tau)$$

وهكذا فإن أي تمثيل مكافئ لـ r_1 سيكون من الشكل:

$$\tau \to r_1(\phi(\tau))$$

حيث $\tau \to \phi(\tau)$ دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة (الشكل – 8 –)



الشكل – 8 –

تجدر الإشارة إلى أنه ليس للتمثيلين المتكافئين بمجموعة النقاط (صورة التطبيق) ذاتها وحسب، وإنما يعينان أيضاً التسلسل نفسه لنقاط هذه المجموعة.

أخيراً إذا وجدت دالة ϕ متناقصة وتحقق بقية الشروط السابقة فنقول عن التمثيلين إنهما متعاكسان. فللتمثيلين المتعاكسين النقاط نفسها ولكن بتسلسل معاكس.

ويمكن أن تمثّل بمجموعة النقاط نفسها بالفضاء بتمثيلين غير متكافئين وغير متعاكسين.

إن أداتنا الرئيسية لدراسة المنحنيات ستكون التمثيلات الوسيطية ، وليس من سبب للتمييز بين تمثيل وآخر مكافئ . ولذلك سندرس صفوف تكافؤ التمثيلات مفضلين ذلك على دراسة التمثيل الوسيطي نفسه.

2 – 7 تعريف

نقول عن كل صف تكافؤ من التمثيلات الوسيطية إنه **منحن (أو منحن موجه)**.

وتجدر الملاحظة إلى أننا سندرس المنحني بوصفه صف تكافؤ وليس مجموعة نقاط.

2 – 8 تعريف

نقول عن منحن إنه من الصف C_n إذا وجد بين تمثيلاته الوسيطية واحد على الأقل :

$$]a,b[\to \Re^3 \ , t \to r(t)$$

حيث تكون الدالة r من الصف C_n ، ونقول عنه إنه نظامي إذا كان :

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) \neq 0 \qquad \text{أيّاً كان } t.$$

من الواضح أن المنحني النظامي من الصف C_n، هو أيضاً منحن نظامي من الصف C_k $(k<n)$.

ونقول عن منحن إنه نظامي ومن الصف C_n **قطعياً** إذا وجد تمثيل وسيطي:

$$t \to r(t) \qquad , \ t \in]a,b[$$

وتجزئة للفترة بالنقاط:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_{m-1} < t_m = b$$

حيث يكون r من الصف C_n على كل فترة جزئية $]t_{k-1},t_k[$ ، ويحقق عليها :

$$r'(t) \neq 0$$

من الواضح أن النقاط الوحيدة التي يمكن أن يكون المشتق من المرتبة n غير مستمر فيها، أو غير موجود أو يتحقق من أجلها $r'(t)=0$ هي النقاط:

$$t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{m-1}$$

نقول عن النقاط t التي يكون فيها $r'(t)$ غير موجود أو $r'(t)=0$ إنها **نقاط منفردة (شاذة)** للتمثيل r.

ويمكن لهذا الشذوذ أن يكون خاصاً بالتمثيل المختار، وقد يكون لجميع التمثيلات المتكافئة شذوذ في القيم المتقابلة للوسيط. نقول في هذه الحالة إن للمنحني شذوذاً أساسياً.

2 – 9 أمثلة

1 – التمثيلان الوسيطيان للمستقيم:

$$r_1 = ta \quad , \quad -\infty < t < \infty$$

$$r_2 = \tau^3 a \quad , \quad -\infty < \tau < \infty$$

متكافئان . يكفي أن نأخذ الدالة المتزايدة والمستمرة $t = \tau^3$.

من الواضح أن النقطة $\tau = 0$ هي نقطة شاذة للتمثيل r_2 ($\frac{dr_2}{d\tau}(0) = 0$) في حين أن النقطة المقابلة $t = 0$ للتمثيل r_1 ليست شاذة ($\frac{dr_1}{dt}(0) \neq 0$). وهذا مثال على نقطة شاذة غير أساسية.

2 – **اللولب:**

هو مسار نقطة تتحرك بسرعة ثابتة على عنصر (مولّد) أُسطوانة تدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة. فإذا أخذنا النظام الإحداثي في الفضاء حيث يكون محور الأسطوانة محوراً لـــ z موجهاً باتجاه حركة النقطة على المولّد ، وحيث يمر محور x من الموضع الابتدائي للنقطة المتحركة ، فإن معادلة الحركة ستكون:

$$x = a\cos\omega t_1 \quad , \quad y = a\sin\omega t_1 \quad , \quad z = vt_1$$

حيث a نصف قطر الأسطوانة ، ω السرعة الزاوية، v السرعة النسبية في الحركة على طول مولد الأسطوانة و $t_1 \in \Re$.

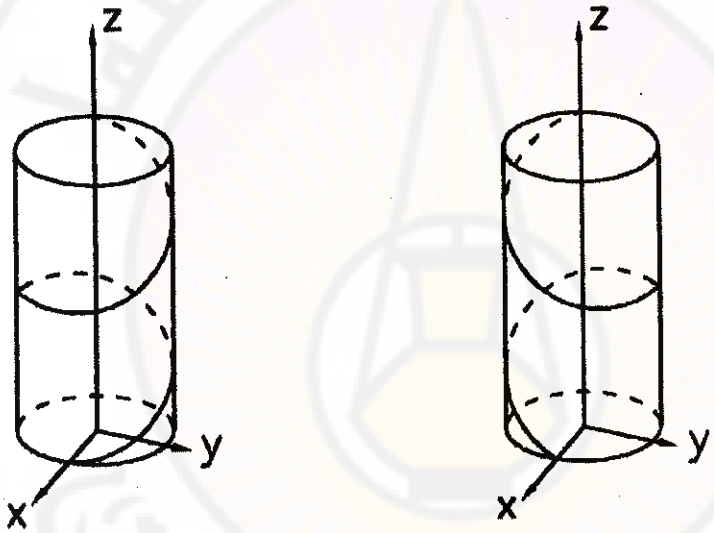
إن التمثيل السابق يكافئ التمثيل:

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

$$z = bt \qquad ,(b = \frac{v}{\omega}) \ , \ t \in \Re$$

نقول عن اللولب إنه يميني (ذو لفّ يميني) إذا كان تمثيله في نظام إحداثيات يميني يحقق $b > 0$. إما إذا كان $b < 0$ فنقول عنه إنه يساري (الشكل – 9 –).



الشكل – 9 –

من الواضح أن اللولب هو منحن وسيطي نظامي من الصف c^{∞} (تحليلي).

3 – **الدويري (السيكلوئيد):**

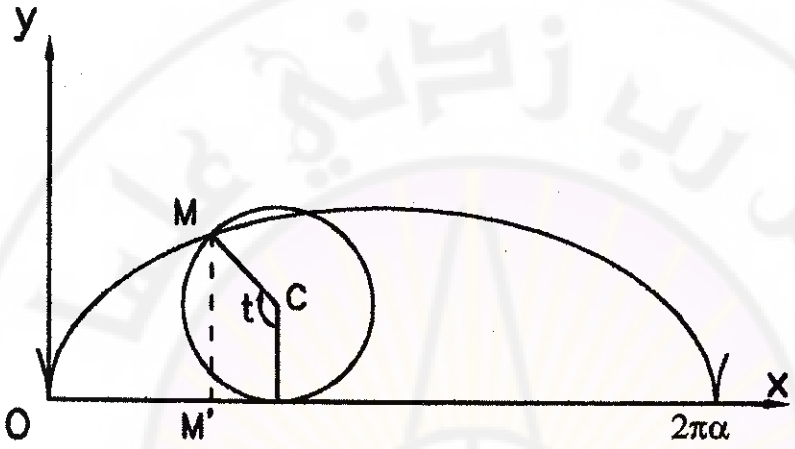
الدويري هو منحن سوي (يقع في مستو)، وهو بالتعريف مسار نقطة من دائرة، عندما تتدحرج الدائرة من دون انزلاق على طول مستقيم. يمثل الدويري بـــ:

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

$$z = 0$$

حيث a نصف قطر الدائرة (الشكل $-10-$)



الشكل $-10-$

3 - التوسيط الطبيعي

3 - 1 تعريف

إذا كان :

$$r : I \to \Re^3 \qquad , t \to r(t)$$

تمثيلاً لمنحن ما؛ فيعرف طوله في فترة مغلقة $[a,b]$ ($[a,b] \subseteq I$) على الشكل الآتي:

نجزئ الفترة $[a,b]$ إلى عدد منته من الفترات غير المتشابكة باستخدام النقاط:

$$a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots\ldots \le t_{n-1} \le t_n = b$$

ونشكل المجموع :

$$\sum_{k=1}^{n} \| r(t_k) - r(t_{k-1}) \|$$

عندئذ نقول عن الحد الأعلى الأصغر لهذه المجاميع ، من أجل جميع التجزئات، إنه طول قوس المنحني أو اختصاراً: طول المنحني. وإذا كان الحد الأعلى الأصغر محدوداً فعندئذ نقول عن المنحني إنه قابل للقياس (*Rectifiable*) في الفترة $[a,b]$ أو طريق.

ونقبل المبرهنة الآتية التي يمكن للقارئ أن يجدها في كتب حساب التفاضل والتكامل.

3 - 2 مبرهنة

إذا كان التمثيل الوسيطي:

$$r = r(t) \qquad , \qquad a \le t \le b$$

نظامياً قطَعيّاً فإنه يكون قابلاً للقياس وطوله يعطى بـــ:

$$\ell = \int_a^b \| r'(t) \| \, dt \qquad (3,1)$$

3 – 3 مبرهنة

للطريقين النظاميين قطعياً والمتكافئين الطول ذاته.

البرهان.

إذا كان أحد الطريقين هو :

$$[a,b] \to \Re^3 \quad ,t \to r(t)$$

فإن للطريق الآخر الشكل:

$$[\alpha,\beta] \to \Re^3 \quad ,\tau \to r(t(\tau))$$

حيث :

$$t:[\alpha,\beta] \to [a,b] \qquad ,\tau \to t(\tau)$$

دالة متزايدة تحقق :

$$t(\beta) = b \qquad , \qquad t(\alpha) = a$$

وإذا كان التمثيلان نظاميين قطعياً من الصف C_1 فإن الدالة t لا بد أن تكون قابلة للمفاضلة قطعياً ، وتتحقق العلاقة :

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}$$

باستثناء النقاط الشاذة لكل من التمثيلين على الأكثر. وبالتالي:

$$\int_\alpha^\beta \left\|\frac{dr}{d\tau}\right\| d\tau = \int_\alpha^\beta \left\|\frac{dr}{dt}\right\| \frac{dt}{d\tau}\, d\tau$$

$$= \int_a^b \left\|\frac{dr}{dt}\right\| dt$$

3 – 4 نتيجة

نستنتج من 3 – 3 أنه يمكننا أن نتكلم عن طول منحن من دون الإشارة إلى تمثيل معين.

3-5 مبرهنة

إن طول أي منحن لا يتعلق باختيار النظام الإحداثي.

البرهان:

لما كان طول متجه ما يبقى ثابتاً بتأثير الدوران ، فإننا نستنتج من الصيغة (3-1) أن طول المنحني لا يتغير بتأثير دوران النظام الإحداثي حول المبدأ. وإذا غيرنا المبدأ فإن التمثيل الوسيطي:

$$t \to r(t)$$

سيتغير إلى :

$$t \to R(t) = r(t) + r_0$$

حيث r_0 متجه ثابت.

وبالتالي : $R' = r'$.

3-6 تعريف (الوسيط الطبيعي)

إذا كان $t \to r(t)$ تمثيلاً نظامياً ومن الصف C_k $(k \geq 1)$ قطعياً ؛ فيمكننا أن ندخل وسيطاً جديداً s معرفاً بالعلاقة

$$s = \int_{t_0}^{t} \|r'(u)\| \, du \qquad (3,2)$$

حيث t_0 نقطة من الفترة المعرفة عليها r. ولما كانت s دالة متزايدة $(\|r'(u)\| > 0$ باستثناء عدد من النقاط) ؛ فإن الدالة العكسية :

$$s \to t(s) \qquad (s \to t = \phi(s) \text{ أو})$$

لا بد أن تكون متزايدة ومن الصف C_k قطعياً.

وباستخدام هذه الدالة نحصل على تمثيل وسيطي مكافئ:

$$s \to r(\phi(s))$$

نقول عن s إنه الوسيط الطبيعي (أو الوسيط القوسي) .

وإذا كان: $a \le t \le b$

فإن: $c \le s \le d$

حيث :

$$c = s(a) = \int_{t_0}^{a} \| r'(t) \| \, dt$$

$$d = s(b) = \int_{t_0}^{b} \| r'(t) \| \, dt$$

3 – 7 ملاحظات

1 – إن الوسيط الطبيعي يتعلق بالنقطة t_0 (المبدأ). وإذا أخذنا القيمة t_1 بدلاً من القيمة t_0 يتغير الوسيط الطبيعي، ويرتبط الوسيط الجديد s_1 بالوسيط القديم بالعلاقة $s_1 = s + c$ حيث c ثابت يعطى بالعلاقة :

$$c = \int_{t_1}^{t_0} \| r'(t) \| \, dt$$

2 – التوسيط الطبيعي لا يتعلق باختيار تمثيل معين للمنحني موضوع الدراسة.

3 – 8 مبرهنة

إذا كانت P نقطة غير شاذة في تمثيل وسيطي من الصف C_n قطعياً لمنحن $\mathscr{C}$ فلا بد أن تكون غير شاذة (نظامية) في التمثيل الطبيعي لـ $\mathscr{C}$. زد على ذلك أن هذا التمثيل سيكون من الصف C_n قطعياً.

البرهان:

ليكن $t \to r(t)$ التمثيل الابتدائي لـ $\mathscr{C}$ ولنفترض أن $\overrightarrow{OP} = r(t_0)$. لما كان التعويض $t = \tau + t_0$ لا يغير في نظامية النقاط ، فيمكننا أن نفترض أن $t_0 = 0$.

وإذا أدخلنا الوسيط الطبيعي :

$$s = \int_0^t \|r'(u)\|\, du$$

فإننا ـــ بسبب استمرارية r' في النقطة $u = 0$ ـــ نجد أن:

$$\frac{ds}{dt}(0) = \|r'(0)\|$$

ولما كانت النقطة نظامية فالمشتق غير معدوم، وبالتالي:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|r'(0)\|}$$

ومنه المشتق:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{r'}{\|r'\|}$$

موجود ولا ينعدم في $s = 0$.

علاوة على ذلك فحقيقة أن $\|r'(0)\| \neq 0$ وكون المشتقات:

$$r'', r''', \ldots\ldots, r^{(n)}$$

مستمرة في النقطة $t = 0$ ، يقتضي وجود المشتقات واستمراريتها :

$$\frac{d^2t}{ds^2}, \frac{d^3t}{ds^3}, \ldots\ldots, \frac{d^nt}{ds^n}$$

والتي تقتضي بالتالي استمرارية المشتقات :

$$r', r'', r''', \ldots\ldots, r^{(n)}$$

بالنسبة للوسيط الطبيعي في النقطة $s = 0$.

ولما كان ذلك صحيحاً من أجل كل نقطة نظامية (غير شاذة) في أي تمثيل ؛ فإن التمثيل الطبيعي سيكون من الصف C_n قطعياً ، ونقاطه الشاذة هي نقاط التمثيل الابتدائي $t \to r(t)$ على الأكثر.

3 – 9 نتيجة

نستنتج من 3 – 8 أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون النقطة p شاذة في التمثيل الطبيعي هو أن تكون شاذة في كل تمثيل مكافئ . وهكذا فإن النقاط الشاذة للتمثيل الطبيعي تتطابق مع النقاط الشاذة الأساسية للمنحني .

3 – 10 مبرهنة

إن مشتق متجه الموضع لنقطة من منحن بالنسبة إلى الوسيط الطبيعي هو متجه وحدة (طبعاً إذا كان هذا المشتق موجوداً)، ولا يوجد هذا المشتق في النقاط الشاذة الأساسية من منحن.

البرهان:

استناداً إلى (3,2) نجد أن :

$$\frac{ds}{dt} = \|r'(t)\|$$

وذلك في النقاط النظامية من التمثيل $t \to r(t)$. وإذا رمزنا بـ $s \to t(s)$ للدالة العكسية لـ $t \to s(t)$ فإن التمثيل الطبيعي يعطى بـ $s \to r(t(s))$ ومنه:

$$\left\|\frac{dr}{ds}\right\| = \left\|\frac{dr}{dt}\right\| \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\|r'(t)\|}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\|r'(t)\|}{\|r'(t)\|} = 1$$

وبالتالي لا يمكن أن يكون في التمثيل الطبيعي $\frac{dr}{ds} = 0$ مما يقتضي أن المشتق $\frac{dr}{ds}$ غير موجود في النقاط الشاذة الأساسية.

3 – 11 ملاحظة

سنرمز للاشتقاق بالنسبة إلى الوسيط الطبيعي باستخدام النقطة فنكتب :

$$\dot{r} = \frac{dr}{ds}, \qquad \ddot{r} = \frac{d^2r}{ds^2}, \qquad \ldots\ldots,$$

3 – 12 مثال

لنجد طول جزء اللولب :

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

$$z = bt$$

بين النقطتين المقابلتين للقيمتين 0 , t للوسيط. لدينا:

$$x' = -a\sin t$$

$$y' = a\cos t$$

$$z' = b$$

ومنه :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + b^2$$

وبالتالي:

$$s = \int_0^t \| r'(u) \| \, du$$

$$= \int_0^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} \, du$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, du = \sqrt{a^2 + b^2} \, t$$

إذن :

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \, t$$

هو وسيط طبيعي ، وعندئذ:

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s$$

هو تمثيل طبيعي للولب.

Damascus University

4 – تلامس المنحنيات وتلامس منحن ومستو

4 – 1 تعريف (تلامس منحنيين)

لتكن p_0 نقطة مشتركة للمنحنيين $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ ، ولنفترض أن p' نقطة من $\mathscr{L}_1$ و p'' نقطة من $\mathscr{L}_2$ حيث يكون فرق قيمتي الوسيط الطبيعي المقابلتين للنقطتين p_0 و p' على $\mathscr{L}_1$ مساوياً لفرق قيمتي الوسيط الطبيعي المقابلتين للنقطتين p_0 و p'' على $\mathscr{L}_2$ ويساوي h ، ممّا يعني أن للقوسين p_0p' و p_0p'' طولاً مساوياً لـ $|h|$ ، وأن النقطتين تقعان في جهة تزايد الوسيط الطبيعي بالنسبة لـ p_0 عندما تكون $h>0$ وفي الجهة المعاكسة عندما تكون $h<0$.

نقول الآن إن للمنحنيين تلامساً من المرتبة n إذا كان :

$$\overrightarrow{p'p''}=0(h^n) \qquad \text{و} \qquad \overrightarrow{p'p''}\neq 0(h^{n+1})$$

عندما : $h\to 0$ (أو عندما: $p'\to p_0$ و $p''\to p_0$).

حيث $0(h^n)$ لا متناهٍ في الصغر من المرتبة n بالنسبة إلى h .

4 – 2 مبرهنة

ليكن $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ منحنيين نظاميين من الصف C_{n+1} ، وليكن:

$s\to r_1(s)$ تمثيلاً طبيعياً لـ $\mathscr{L}_1$

و $\sigma\to r_2(\sigma)$ تمثيلاً طبيعياً لـ $\mathscr{L}_2$

عندئذٍ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون للمنحنيين تلامس من المرتبة n في النقطة p_0 هو أن تتحقق العلاقات الآتية:

$$r_1(s_0)=r_2(\sigma_0)$$

$$
\begin{aligned}
&r_1'(s_0) = r_2'(\sigma_0)\\
&\vdots \qquad\qquad (4,1)\\
&r_1^{(n)}(s_0) = r_2^{(n)}(\sigma_0)\\
&r_1^{(n+1)}(s_0) \neq r_2^{(n+1)}(\sigma_0)
\end{aligned}
$$

حيث:

$$r_1(s_0) = \overrightarrow{op_0} \qquad \text{و} \qquad r_2(\sigma_0) = \overrightarrow{op_0}$$

البرهان:

لما كان :

$$\overrightarrow{op'} = r_1(s_0 + h)$$
$$\overrightarrow{op''} = r_2(\sigma_0 + h)$$

فإن :

$$\overrightarrow{p''p'} = r_1(s_0 + h) - r_2(\sigma_0 + h)$$

$$= r_1(s_0) - r_2(\sigma_0) + \frac{h}{1!}[r_1'(s_0) - r_2'(\sigma_0)] + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}[r_1^{(n)}(s_0) - r_2^{(n)}(\sigma_0)] +$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[r_1^{(n+1)}(s_0) - r_2^{(n+1)}(\sigma_0)] + 0(h^{n+1}) \qquad (4,2)$$

وبالتالي فإذا كانت العلاقات (4,1) محققة فإننا من العلاقة:

$$0(h^n) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[r_1^{(n+1)}(s_0) - r_2^{(n+1)}(\sigma_0)] + 0(h^{n+1})$$

نجد أن :

$$\overrightarrow{p''p'} \neq 0(h^{n+1}) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{p''p'} = 0(h^n) \qquad (4,3)$$

أما إذا كان للمنحنيين تلامس من المرتبة n أي إن العلاقات (4,3) محققة؛ فإننا نستنتج من (2 – 4) صحة العلاقات (4,1).

4 – 3 نتيجة

لتكن :

$$x \to f_1(x) \quad \text{و} \quad x \to f_2(x)$$

دالتين من الصف C_{n+1}. الشرط اللازم والكافي حتى يكون للمنحنيين المستويين المعينين بـــ: f_1 و f_2 تلامس من المرتبة n في النقطة x_0 هو أن تتحقق العلاقات :

$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0)$$

$$f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0)$$

4 – 4 مثال

ادرس تلامس المنحنيات :

آ) $y = x^2$ و $y = x^3$

ب) $y = x^2$ و $y = 0$

ج) $y = x^3$ و $y = 0$

د) $y = x^2$ و $y = x$

4 – 5 تعريف (تلامس منحن ومستو أو كرة)

لتكن p_0 نقطة مشتركة بين منحن $\mathscr{L}$ ومستو أو كرة k ، ولنفترض أن p نقطة متحركة على المنحني وأن طول القوس p_0p هو h ، ولنرمز بـ d_h لبعد p عن السطح k .

نقول إن للسطح والمنحني تلامساً من المرتبة n ـ على الأقل ـ في p_0 إذا كان:

$$d_h = 0(h^n)$$

5 – المستقيم المماس والمستوي الملاصق لمنحن

5 – 1 تعريف

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً و p نقطة منه . نقول عن المستقيم الذي له تلامس من المرتبة الأولى ـــ على الأقل ـــ مع المنحني في p إنه المستقيم المماس للمنحني في p.

5 – 2 مبرهنة

يوجد في أي نقطة نظامية من منحن من الصف C_1 مستقيم مماس ، وإذا كان:

$$s \to \boldsymbol{r}(s)$$

تمثيلاً طبيعياً لهذا المنحني فإن $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \dot{\boldsymbol{r}}$ هو متجه وحدة لهذا المستقيم.

البرهان :

إذا فرضنا أن النقطة p تقابل قيمة الوسيط s_0 ؛ فإن المعادلة الوسيطية لمستقيم يمر من p ، ومتجه وحدته $\boldsymbol{a}$ هي من الشكل :

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s_0) + \sigma \boldsymbol{a}$$

حيث σ الوسيط الطبيعي على المستقيم.

استناداً إلى المبرهنة 4 – 2 فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون للمستقيم تلامس من المرتبة الأولى مع المنحني هو:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}(s_0) = \frac{d\boldsymbol{R}}{d\sigma}(0) = \boldsymbol{a}$$

ممَّا يعني أن $\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)$ هو متجه وحدة للمستقيم ، وعندئذ فإن المعادلة الوسيطية للمماس هي:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s_0) + \dot{\boldsymbol{r}}(s_0)u \qquad (5{,}1)$$

حيث u الوسيط الطبيعي . وتُكتب المعادلة بالشكل:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(s_0))\times \dot{\boldsymbol{r}}(s_0)=\boldsymbol{0}$$

5 – 3 نتائج وملاحظات

1 – يكون لمنحن تلامس من مرتبة عليا مع المماس في نقطة منه ؛ إذا كان المنحني من الصف C_n ، وكانت المشتقات :

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3},\ldots\ldots,\frac{d^k\boldsymbol{r}}{ds^k}$$

معدومة في هذه النقطة ، وعندئذ تكون مرتبة التلامس أقل بواحد من مرتبة أول مشتق لا يساوي الصفر.

2 – نقول عن نقطة من منحن يكون فيها المماس من مرتبة تلامس عليا مع المنحني إنها نقطة مقوّمة (*Rectification*) للمنحني.

3 – إذا كان :

$$t\to \boldsymbol{r}(t)$$

تمثيلاً ما لمنحن فإن المتجه $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ يوازي المماس أيضاً ، لكنه ليس متجه وحدة بالضرورة . وبالتالي فإن المعادلة الوسيطية للمماس في النقطة التي تقابل القيمة t_0 للوسيط هي :

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)u \qquad (5,2)$$

حيث أن الوسيط u ليس طبيعياً بالضرورة . والمعادلة (5,2) تكافئ المعادلة :

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t_0))\times \boldsymbol{r}'(t_0)=0$$

وإذا كان المنحني ممثلاً بالمعادلات :

$$x=x(t) \qquad ,y=y(t) \qquad z=z(t)$$

فإن معادلة المستقيم المماس في t_0 هي:

$$X = x(t_0) + ux'(t_0)$$

$$Y = y(t_0) + uy'(t_0)$$

$$Z = z(t_0) + uz'(t_0)$$

4 – إذا كانت p_0 نقطة نظامية لمنحن من الصف C_1 ، فإن المستقيم الواصل بين p_0 ونقطة p متحركة على المنحني يؤول إلى المماس في p_0 عندما تسعى p إلى p_0 . يكفي أن نلاحظ أن المستقيم يمثّل بـــ :

$$R = r(t_0) + \frac{u}{t - t_0}(r(t) - r(t_0))$$

5 – في حالة منحن سوي فإن r' يكون موازياً لمستوي المنحني. وإذا أدخلنا نظاماً إحداثياً متعامداً معياراً (متجهات القاعدة هي متجهات وحدة) في المستوي، وكان $r(t) = (x(t), y(t))$ في هذا النظام ورمزنا بـــ α لزاوية r' مع محور x، فعندئذ:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

6 – النقاط الشاذة.

ليكن $t \to r(t)$ تمثيلاً لمنحن و p_0 نقطة منه تقابل القيمة t_0 للوسيط $(\overrightarrow{op_0} = r(t_0))$, ولنفترض أن $r'(t_0) = 0$، أي إن p_0 نقطة شاذة للتمثيل r .إذا كانت المشتقات من مراتب عليا لـــ r موجودة في t_0، وليست كلها مساوية للصفر، فإن اتجاه المستقيم المماس في p_0 يتعين بالمشتق غير المعدوم ذي المرتبة الأدنى في هذه النقطة ، فإذا كانت المرتبة الأدنى هذه زوجية ، فعندئذ :

$$r'(t_0) = r''(t_0) = 0, \ldots, r^{(2k-1)}(t_0) = 0$$

$$r(t_0 + h) = r(t_0) + \frac{h^{2k}}{(2k)!} r^{(2k)}(t_0) + \boldsymbol{0}(h^{2k})$$

وتقع النقطة p التي تقابل القيمة t_0+h للوسيط من أجل القيم السالبة و الموجبة لـــ h (h قريبة من الصفر)، في نصف الفضاء نفسه المعين بالمستوي المار بـــ p_0 والذي يعامد $r^{(2k)}(t_0)$، والمستقيم الذي متجهه $r^{(2k)}(t_0)$ هو مماس لفرعي المنحني في p_0، ولذلك فالنقطة p_0 هي قرنة (*Cusp*) أو نقطة تراجع . وإذا استخدمنا التوسيط الطبيعي فلا يوجد في p_0 مشتق بالنسبة إلى الوسيط الطبيعي.

لنفترض الآن أن المرتبة الأدنى للمشتق غير المعدوم في t_0 هي فردية أي :

$$r'(t_0)=\ldots\ldots=r^{(2k)}(t_0)=0 \quad ,r^{(2k+1)}(t_0)\neq 0$$

عندئذ:

$$r(t)=r(t_0)+\frac{(t-t_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}r^{(2k+1)}(t_0)+0((t-t_0)^{2k+1})$$

وإذا أجرينا التعويض $\tau=(t-t_0)^{2k+1}$ فنحصل على تمثيل وسيطي جديد:

$$\tau\to r^*(\tau)=r(t(\tau))$$

تقابل p_0 فيه القيمة $\tau=0$ للوسيط الجديد، وعندئذ فإنه من العلاقة :

$$r^*(\tau)=r(t_0)+\frac{\tau}{(2k+1)!}r^{(2k+1)}(t_0)+0(\tau)$$

نجد أن :

$$r^{*'}(0)=\frac{1}{(2k+1)!}r^{(2k+1)}(t_0)\neq 0$$

ممّا يقتضي أن تكون p_0 نظامية في التوسيط الطبيعي.

5 – 4 أمثلة

1 – المنحني السحبي (*Tractrix*):

السحبي هو منحن سوي يتمتع بالخاصة الآتية:

« للقطعة المستقيمة من مماسه المعينة بنقطة التماس p ومستقيم ثابت في المستوي (المستقيم المقارب للسحبي) طول ثابت مساو لـــ a.»

إذا أخذنا المستقيم الثابت محوراً لـــ x ورمزنا بـــ t لزاوية محور x والمتجه $\overrightarrow{p'p}$ حيث p نقطة متحركة على السحجي ، و p' النقطة المشتركة للماس في p ومحور x، فإن السحجي سيمثل بالمعادلات الوسيطية:

$$x = a(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$$

$$y = a \sin t$$

$$z = 0$$

عندما تتغير t بين 0 و π فإننا نحصل على جميع نقاط المنحني السحجي .

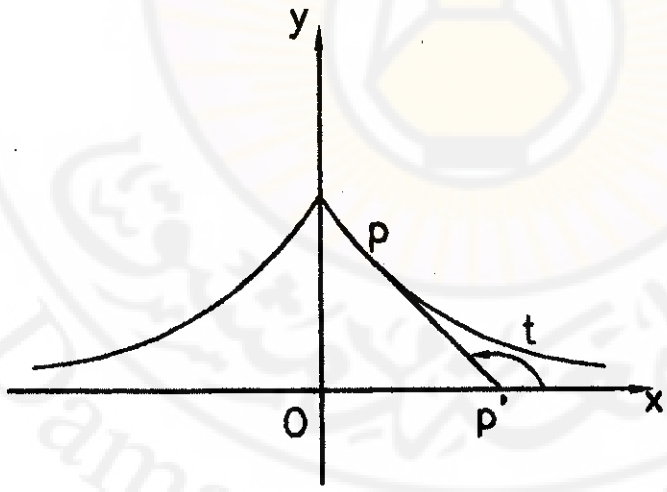
وعندما : $t \to 0$ فإن :

$$x \to -\infty \quad , \quad y \to 0$$

أما عندما : $t \to \pi$ فإن :

$$x \to \infty \ , \quad y \to 0$$

أما النقطة $t = \frac{\pi}{2}$ فهي شاذة (الشكل-11-)



الشكل-11-

2 – متجه وحدة مماس الدويري:

$$r(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$$

هو :

$$\dot{r} = \left(\frac{a(1-\cos t)}{|2a\sin\frac{t}{2}|} \ , \ \frac{a\sin t}{|2a\sin\frac{t}{2}|}\right)$$

$$= \left(|\sin\frac{t}{2}|, \frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{|\sin\frac{t}{2}|}\right)$$

وبالتالي فإن نهاية متجه وحدة المماس من اليسار في النقطة $t = 0$ هي المتجه $(0,-1)$ ومن اليمين المتجه $(0,1)$.

5 – 5 تعريف (زاوية منحنيين)

تعرف الزاوية بين منحنيين :

$$\tau \to r_2(\tau) \quad \text{و} \quad t \to r_1(t)$$

في النقطة المشتركة p_0 التي تقابل القيمتين t_0 , τ_0 للوسيطين t , τ ؛ بأنها زاوية المتجهين المماسين للطريقين في النقطة المشتركة. إذاً:

$$\cos\phi = \frac{r_1'(t_0)\cdot r_2'(\tau_0)}{\left\|r_1'(t_0)\right\|\cdot\left\|r_2'(\tau_0)\right\|}$$

6 – 5 تعريف

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً ما و p_0 نقطة منه . نقول عن المستوي الذي له تلامس من أعلى مرتبة ممكنة مع المنحني في p_0 إنه المستوي الملاصق في p_0.

7 – 5 مبرهنة

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً ما و $s \to r(s)$ تمثيلاً طبيعيا من الصف C_2 للمنحني، ولنفترض أن p_0 نقطة نظامية تقابل قيمة الوسيط s_0 وأن $\ddot{r}(s_0) \neq 0$. عندئذ يوجد

في p_0 مستو ملاصق ، وهذا المستوي يوازي المتجهين $\dot{r}(s_0)$ و $\ddot{r}(s_0)$ ، وبالتالي فإن معادلته:

$$[\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s_0)\ ,\ \dot{r}(s_0)\ ,\ \ddot{r}(s_0)] = 0 \qquad (5,3)$$

وإذا كان :

$$\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

فالمعادلة هي :

$$\begin{vmatrix} X - x(s_0) & Y - y(s_0) & Z - z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \\ \ddot{x}(s_0) & \ddot{y}(s_0) & \ddot{z}(s_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5,4)$$

ومرتبة التلامس تكون أكثر أو يساوي 2.

البرهان:

إن معادلة أي مستو يمر من النقطة p_0 ويعامد متجه وحدة $\boldsymbol{m}$ هي :

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s_0)).\boldsymbol{m} = 0$$

وبعد النقطة $\boldsymbol{r}(s_0 + h)$ من المنحني عن هذا المستوي هو:

$$d_h = |[\boldsymbol{r}(s_0 + h) - \boldsymbol{r}(s_0)].\boldsymbol{m}|$$

وباستخدام صيغة تايلور لدينا:

$$\boldsymbol{r}(s_0 + h) - \boldsymbol{r}(s_0) = h\dot{r}(s_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{r}(s_0) + 0(h^2)$$

ومنه :

$$d_h = h\dot{r}(s_0).\boldsymbol{m} + \frac{h^2}{2!}\ddot{r}(s_0) \cdot \boldsymbol{m} + 0(h^2)$$

وإذا لاحظنا أن المتجهين $\dot{r}(s_0)$ و $\ddot{r}(s_0)$ مستقلان لأنهما غير معدومين ومتعامدان* ؛ فإن التلامس يكون من مرتبة عليا إذا تحقق :

$$\dot{r}(s_0)\cdot m = 0$$

$$\ddot{r}(s_0)\cdot m = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نستنتج أن :

$$m = \frac{\dot{r}(s_0)\times\ddot{r}(s_0)}{\|\dot{r}(s_0)\times\ddot{r}(s_0)\|}$$

أو

$$m = -\frac{\dot{r}(s_0)\times\ddot{r}(s_0)}{\|\dot{r}(s_0)\times\ddot{r}(s_0)\|}$$

بيد أننا لإيجاد معادلة مستو يمكن أن نستخدم أي متجه ناظمي على المستوي، وليس متجه وحدة بالضرورة. فإذا أخذنا المتجه $\dot{r}(s_0)\times\ddot{r}(s_0)$ بدلاً من m وجدنا المعادلة المطلوبة (5,3).

5 – 8 ملاحظات

1– إذا كانت مرتبة تلامس المستوي الملاصق مع المنحني في نقطة p_0 منه أكثر من 2 (عندما $\ddot{r}(s_0)=0$ على سبيل المثال) فنقول عن p_0 إنها نقطة منبسطة للمنحني (*Flat*).

2 – إذا كان $\ddot{r}(s_0)=0$ فإن المستوي الملاصق في p_0 ، إما غير موجود ، أو أنه يتعين بمشتقات ذات مرتبة أكثر من 2. وفي الحالة الثانية تكون مرتبة التلامس أكثر من 2 أيضاً، وتكون في الوقت نفسه مرتبة تلامس المستقيم المماس أكثر من1، والنقطة p_0 مقوّمة.

---

* لأنه لدينا: $\dot{r}(s_0)\cdot\dot{r}(s_0)=1$

وبالاشتقاق $2\ddot{r}(s_0)\cdot\dot{r}(s_0)=0$

فعلى سبيل المثال إذا كان :

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)=0 \quad \text{و} \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)=0 \quad \text{و} \ \ldots \ \overset{(k-1)}{\boldsymbol{r}}(s_0)=0 \quad \text{و} \quad \overset{(k)}{\boldsymbol{r}}(s_0)\neq 0$$

وكان المتجهان $\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)$ و $\overset{(k)}{\boldsymbol{r}}(s_0)$ مستقلين خطيا؛ فيوجد عندئذ في p_0 المستوي الملاصق وهو يوازي $\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)$ و $\overset{(k)}{\boldsymbol{r}}(s_0)$ وله مرتبة تلامس لا تقل عن k.

5 – 9 نتيجة

إذا كان $t \to \boldsymbol{r}(t)$ تمثيلاً وسيطياً ليس بالضرورة طبيعياً لمنحن $\mathscr{C}$ ، وكانت t_0 نقطة نظامية لهذا التمثيل فإننا باستخدام التمثيل الطبيعي:

$$s \to \boldsymbol{r}(t(s))$$

حيث $s \to t(s)$ الدالة العكسية لـــ :

$$t \to s = \int_{t_1}^{t} \| \boldsymbol{r}'(u) \| du$$

نجد أن :

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'\, \dot{t} \qquad \text{أو} \qquad \boldsymbol{r}' = \dot{\boldsymbol{r}} \frac{ds}{dt}$$

ومنه :

$$\boldsymbol{r}'' = \ddot{\boldsymbol{r}} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{\boldsymbol{r}} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

ممَّا يعني أن المتجهين $\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ و $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''$ مرتبطان خطياً في النقاط النظامية، مما يسمح لنا بتبديل أحدهما بالآخر في معادلة المستوي الملاصق ، فنحصل على المعادلة:

$$[\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t_0)\,,\, \boldsymbol{r}'(t_0)\,,\, \boldsymbol{r}''(t_0)] = 0$$

أو المعادلة:

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

حيث : $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$ متجه الموضع لنقطة ما من المستوي الملاصق.

5 – 10 مثال

معادلة المستوي الملاصق للولب :

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

في النقطة $t = \frac{\pi}{2}$ هي :

$$\begin{vmatrix} X-\cos t & Y-\sin t & Z-t \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}_{t=\frac{\pi}{2}} = 0$$

أو :

$$\begin{vmatrix} X & Y-1 & Z-\frac{\pi}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$X + Z = \frac{\pi}{2}$$

6- المستقيم المقارب لمنحن

6-1 تعريف

إذا كانت $]a,b[$ فترة في $\Re$

حيث : $-\infty \le a < +\infty$ و $-\infty < b \le +\infty$

فنقول إن للمنحني:

$$t \to r(t) \quad , \quad a < t < b \qquad (6,1)$$

فرعاً غير محدود عندما $t \to b$ (أو $t \to a$)

إذا كان :

$$\lim_{t \to b-0} \|r(t)\| = \infty \qquad (\text{أو } \lim_{t \to a+0} \|r(t)\| = \infty)$$

وإذا كان الوسيط طبيعياً فإن الفرع غير المحدود للمنحني يقابل فقط الحالة :

$$t \to \pm\infty$$

6-2 تعريف

نقول عن مستقيم في الفضاء إنه مستقيم مقارب للفرع غير المحدود للمنحني (6,1)، إذا كان بعد نقطة متحركة على الفرع عن هذا المستقيم يسعى إلى الصفر عندما تسعى النقطة إلى اللانهاية على طول الفرع.

6-3 مبرهنة

يكون للفرع غير المحدود للمنحني:

$$t \to r(t) \quad , \quad a < t < b$$

عندما $t \to b-0$ مستقيم مقارب إذا وفقط إذا وجدت النهايتان:

$$\left.\begin{aligned} a &= \lim_{t \to b-0} \frac{r(t)}{\|r(t)\|} \\ p &= \lim_{t \to b-0} [r(t) - (ar(t))a] \end{aligned}\right\} \qquad (6,2)$$

وعندئذ فإن المستقيم المقارب يوازي المتجه a ويمر من النقطة التي متجه موضعها p وبالتالي فمعادلته:

$$R = p + ua \qquad \text{أو} \quad (R-p)\times a = 0$$

البرهان:

لزوم الشرط: لنفترض أن المستقيم المقارب موجود، إذا رمزنا بـــ a^* لمتجه وحدة اتجاهه وبـــ p^* لمتجه الموضع لنقطة تقاطع الناظم على هذا المستقيم والمار من المبدأ ، فعندئذ : $p^*.a^* = 0$. وبالتالي فإن معادلة المستقيم المقارب هي:

$$(R-p^*)\times a^* = 0$$

إن بعد النقطة التي متجه موضعها $r(t)$ عن هذا المستقيم يعطى بـــ:

$$d = \left\|(r(t)-p^*)\times a^*\right\|$$

استناداً إلى تعريف المستقيم المقارب فإن :

$$\lim_{t\to b-0}[r(t)\times a^* - p^*\times a^*] = 0 \qquad (6,3)$$

ولما كان:

$$\lim_{t\to b-0}\|r(t)\| = \infty$$

فيمكن أن نكتب:

$$\lim_{t\to b-0}\left[\frac{r(t)}{\|r(t)\|}\times a^* - \frac{p^*\times a^*}{\|r(t)\|}\right] = 0$$

ومنه:

$$\lim_{t\to b-0}\left[\frac{r(t)}{\|r(t)\|}\times a^* = 0\right.$$

ولما كان العاملان في العلاقة الأخيرة متجهي وحدة ، ومعرفين من أجل قيم t القريبة من $b-0$ ، فإن القيمة المطلقة للجداء تساوي جيب زاوية المتجهين:

$$a^* \quad \text{و} \quad \frac{r(t)}{\|r(t)\|}$$

وبالتالي فإن نهاية هذه الزاوية هي 0 أو π ومنه :

$$\lim_{t\to b-0} \frac{r(t)}{\|r(t)\|} = \pm a^*$$

إذا ضربنا العلاقة (6,3) خارجياً من اليسار بـ a^* فنجد أن :

$$\lim_{t\to b-0} [a^* \times (r(t)\times a^*) - a^* \times (p^* \times a^*)] = 0$$

وإذا استخدمنا العلاقة :

$$u \times (v \times w) = (u.w)v - (v.u)w$$

والمتطابقات:

$$a = \mp a^* \qquad \text{و} \qquad a^* p^* = 0 \qquad \text{و} \quad a^{*2} = 1$$

نجد أن :

$$\lim_{t\to b-0} [r(t) - (a\,.r(t))a - p^*] = 0$$

ممّا يقتضي وجود النهاية الثانية في (6,2) وأن:

$$\lim_{t\to b-0} [r(t) - (a\,r(t))a] = p$$

كفاية الشرط.

إذا فرضنا أن النهاية :

$$p = \lim_{t\to b-0} [r(t) - (a\,r(t))a]$$

موجودة ، حيث a متجه وحدة ما ، فعندئذ:

$$\lim_{t\to b-0} \{a \times [(r(t) - p) \times a]\} = 0$$

ولما كان:

$$|a \times [(r(t) - p) \times a]| = |(r(t) - p) \times a|$$

فعندئذ :

$$\lim_{t\to b-0} |(r(t)-p)\times a| = 0$$

مما يعني أن البعد بين نقطة Q من المنحني (متجه موضعها $r(t)$) وبين المستقيم المار من نقطة ، متجه موضعها p ، والذي يوازي a ، يسعى إلى الصفر عندما $t \to b-0$ و Q تسعى إلى اللانهاية .

إذن فهذا المستقيم هو مقارب للفرع غير المحدود للمنحني، ولا بد أن يكون:

$$a = \lim_{t\to b-0} \frac{r(t)}{\|r(t)\|}$$

6 – 4 ملاحظة

إن اتجاه المتجه :

$$a = \lim_{t\to b-a} \frac{r(t)}{\|r(t)\|}$$

هو الاتجاه المقارب على المنحني. ويمكن أن يكون لمنحن اتجاه مقارب من دون أن يكون له مستقيم مقارب. فمثلاً لا يوجد للقطع المكافئ :

$$y = x^2 \ , \ z = 0$$

مستقيم مقارب ، في حين أن اتجاه محور y هو اتجاهه المقارب.

6 – 5 مبرهنة

إذا تقارب المستقيم المماس لمنحن من الصف C_1 من مستقيم ما ، عندما تسعى نقطة التلامس إلى اللانهاية على طول فرع غير محدود للمنحني ؛ فإن هذا المستقيم لا بد أن يكون مستقيماً مقارباً .

نقبل المبرهنة من دون برهان .

7 – ثلاثية فرينيه ومعادلات فرينيه (*Frenet*)

7 – 1 ثلاثية فرينيه

إذا كان $\mathscr{C}$ منحنياً من الصف C_2، فتتعين في كل نقطة P من المنحني ثلاثة متجهات وحدة متعامدة هي متجه وحدة المماس $\boldsymbol{t}$ ، ومتجه وحدة الناظم الأساسي $\boldsymbol{n}$ ، ومتجه وحدة ثنائي الناظم $\boldsymbol{b}$.

متجه وحدة الناظم الأساسي $\boldsymbol{n}$ في نقطة P هو بالتعريف متجه وحدة ذلك المستقيم الناظم على المنحني في P (المستقيم الناظم على المماس للمنحني في P)، ويقع في المستوي الملاصق في P، وحيث يكون له اتجاه $\dot{\boldsymbol{t}}$ (اتجاه تقعر المنحني ، أو بشكل أدق اتجاه تقعر مسقط المنحني على المستوي الملاصق).

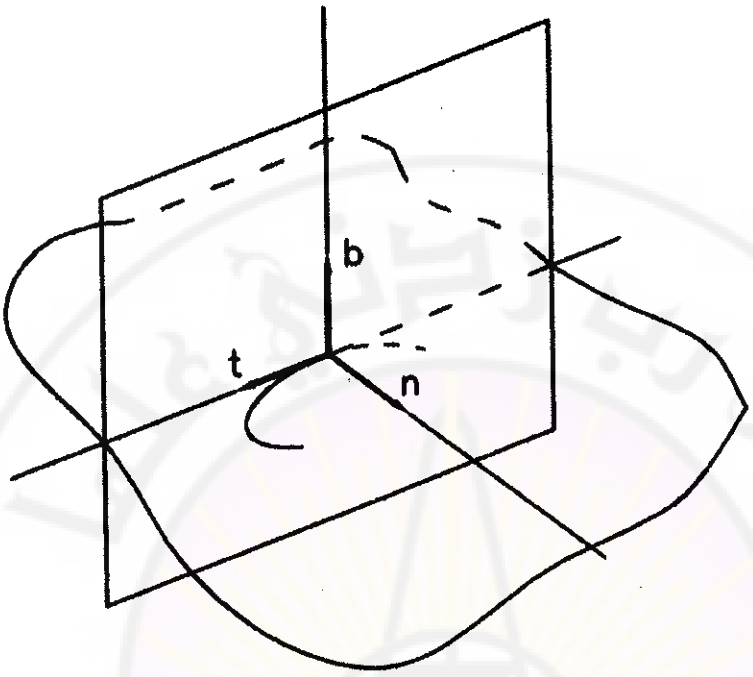
أما متجه وحدة ثنائي الناظم $\boldsymbol{b}$ فهو متجه وحدة عمودي على المستوي الملاصق ويتجه حيث تكون الثلاثية: $\boldsymbol{t}$ و $\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{b}$ موجبة التوجيه .

نقول الآن عن المستقيمات المارة بـــ P التي توازي $\boldsymbol{t}$ و $\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{b}$ إنها المماس والناظم الأساسي وثنائي الناظم على الترتيب.

إن المستوي الذي يحوي المماس والناظم الأساسي هو المستوي الملاصق ، ونقول عن المستوي الذي يحوي الناظم الأساسي وثنائي الناظم إنه المستوي الناظم ، كما نقول عن المستوي الذي يحوي المماس وثنائي الناظم إنه المستوي المقوِّم . أخيراً نقول عن هذا التشكل إنه ثلاثية وجوه فرينيه ، كما نقول عن متجهات الوحدة $\boldsymbol{t}$ و $\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{b}$ إنها ثلاثية فرينيه (الشكل –12–)

7 – 2 نتيجة

إذا كانت P نقطة نظامية من منحن من الصف C_2 ، وكان $\dot{\boldsymbol{t}} \neq 0$ في P؛ فإن



الشكل – 12 –

متجهات الوحدة t و n و b تعطى بالعلاقات الآتية:

$$t = \dot{r} \qquad n = \frac{\ddot{r}}{\|\ddot{r}\|} \qquad b = t \times n = \frac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\|\ddot{r}\|}$$

وإذا كان المنحني معرفاً بتمثيل ما ، ليس بالضرورة طبيعياً $t \to r(t)$ عندئذ فإنه من العلاقتين :

$$\dot{r} = r' \frac{dt}{ds} \qquad \text{و} \qquad \ddot{r} = r''(\frac{dt}{ds})^2 + r' \frac{d^2t}{ds^2}$$

نجد أن :

$$t = \dot{r} = \frac{r'}{\|r'\|} \qquad \dot{r} \times \ddot{r} = (r' \times r'')(\frac{dt}{ds})^3$$

وبالتالي :

$$t = \frac{r'}{\|r'\|}$$

$$b = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$$

$$n = b \times t = \frac{(r' \times r'') \times r'}{\|r' \times r''\| \|r'\|} = \frac{r'' \|r'\|^2 - r'(r' . r'')}{\|r'\| \, \|r' \times r''\|}$$

3 – 7 مثال

لنجد ثلاثية فرينيه للولب :

$$t \to r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

في نقطة منه.

لما كان:

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

فإن:

$$t = \dot{r} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

ومن العلاقة:

$$\ddot{r} = \dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{t'}{s'} = \frac{t'}{\|r'\|}$$

نجد أن :

$$\ddot{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\cos t, -a\sin t, 0)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ومنه :

$$n = \frac{\ddot{r}}{\|\ddot{r}\|} = \frac{\frac{1}{a^2 + b^2}(-a\cos t, -a\sin t, 0)}{\frac{a}{a^2 + b^2}}$$

$$= (-\cos t, -\sin t, 0)$$

أخيراً :

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$$

7 – 4 ملاحظة

في كل نقطة نظامية وغير مقومة من منحن تتعين لدينا ثلاثة مستقيمات وثلاثة مستويات هي :

المستقيم المماس ومعادلته:	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{t}$
الناظم الأساسي ومعادلته:	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{n}$
ثنائي الناظم ومعادلته:	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{b}$
المستوي الملاصق ومعادلته :	$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}).\boldsymbol{b} = 0$
المستوي الناظم ومعادلته :	$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}).\boldsymbol{t} = 0$
المستوي المقوم ومعادلته :	$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}).\boldsymbol{n} = 0$

7 – 5 مبرهنة

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً و $s \to r(s)$ تمثيلاً طبيعياً من الصف C_3 . إن مشتقات المتجهات $\boldsymbol{t}$ و $\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{b}$ ـــ في النقاط النظامية وغير المقومة ـــ تعطى بالعلاقات:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b}$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau \boldsymbol{n}$$

والتي تدعى علاقات فرينيه أو علاقات سيريه ـــ فرينيه.

البرهان :

لما كان : $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \dot{\boldsymbol{t}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ و $\boldsymbol{n} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|}$

فإننا إذا وضعنا $\kappa = \|\dot{t}\|$ نجد العلاقة الأولى

$$\frac{dt}{ds} = \kappa n$$

ولإيجاد مشتقي n و b نكتب كلاً من المشتقين كتركيب خطي بمتجهات القاعدة t و n و b :

$$\frac{dn}{ds} = \alpha t + \beta n + \gamma b$$
$$\frac{db}{ds} = \lambda t + \mu n + \nu b$$

وإذا ضربنا كلاً من المساواتين بـ t و n و b نجد أن :

$$\alpha = t \cdot \frac{dn}{ds} \quad , \quad \beta = n \cdot \frac{dn}{ds} \quad , \quad \gamma = b \cdot \frac{dn}{ds}$$
$$\lambda = t \cdot \frac{db}{ds} \quad , \quad \mu = n \cdot \frac{db}{ds} \quad , \quad \nu = b \cdot \frac{db}{ds}$$

وباستخدام المتطابقات :

$$t.t = 1 \qquad ,n.n = 1 \qquad ,b.b = 1$$
$$t.n = 0 \qquad ,t.b = 0 \qquad ,n.b = 0$$

نجد أن:

$$t.\frac{dt}{ds} = 0 \qquad ,n.\frac{dn}{ds} = 0 \qquad ,b.\frac{db}{ds} = 0$$

وأن:

$$t.\frac{dn}{ds} = -n.\frac{dt}{ds}$$
$$t.\frac{db}{ds} = -b.\frac{dt}{ds}$$
$$n.\frac{db}{ds} = -b.\frac{dn}{ds}$$

وبالتالي : $\beta = \nu = 0$ و $\gamma = -\mu$

وإذا لاحظنا أن

$$\boldsymbol{n}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{n}.\kappa\boldsymbol{n} = \kappa$$

$$\boldsymbol{b}.\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{b}.\kappa\boldsymbol{n} = 0$$

سنجد أن:

$$\alpha = -\kappa \qquad \text{و} \qquad \lambda = 0$$

أخيراً إذا وضعنا:

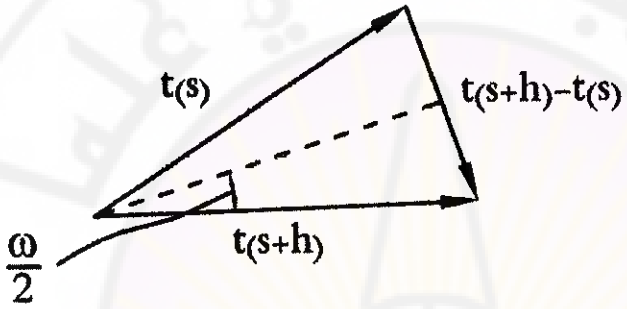
$$\tau = \gamma = -\mu$$

فإننا نجد علاقات فرينيه.

8- تقوس منحنٍ والتفافه

8-1 تعريف

ليكن $s \to r(s)$ تمثيلاً طبيعياً لمنحن ما ، ولتكن P نقطة نظامية تقابل القيمة s للوسيط ، و Q نقطة متحركة على المنحني تقابل القيمة $s+h$ للوسيط، ولنرمز بـــ ω لزاوية متجهي وحدة المماس في P و Q (انظر الشكل -13-).



الشكل -13-

عندئذ نقول عن النهاية : $\lim_{h\to 0}\frac{\omega}{|h|}$ إنها تقوس المنحني في النقطة P .

8-2 مبرهنة

يوجد في كل نقطة من منحن من الصف C_2 تقوس مساو لـــ:

$$\kappa = \| \ddot{r} \|$$

البرهان :

لما كان:

$$\omega = \angle(t(s), t(s+h))$$

فإن:

$$\|t(s+h)-t(s)\| = 2\sin\frac{\omega}{2}$$

وبالتالي:

$$\frac{\omega}{|h|} = \frac{\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{|h|} = \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} \frac{\|t(s+h)-t(s)\|}{|h|}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega}{h} = 1.\lim_{h\to 0}\frac{\|t(s+h)-t(s)\|}{|h|} = \| \dot{t}(s) \| = \| \ddot{r}(s) \| = \kappa$$

3 – 8 مبرهنة

إذا كان $t \to r(t)$ تمثيلاً ما لمنحن من الصف C_2 فإن تقوسه في نقطة نظامية منه يعطى بـــ :

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

البرهان .

إذا كانت $s \to t(s)$ الدالة العكسية للدالة :

$$t \to s(t) = \int_{t_0}^{t} \|r'(u)\| \, du$$

فإن :

$$s \to r(t(s))$$

هو تمثيل طبيعي للمنحني، وعندئذ :

$$\dot{r} = r' \frac{dt}{ds}$$

ومنه :

$$r' = \dot{r}s' \qquad \text{و} \qquad r'' = \dot{r}s'^2 + \dot{r}s''$$

وبالتالي:

$$r' \times r'' = (\dot{r} \times \ddot{r})s'^3$$

و: $$\|r' \times r''\| = \|\dot{r}\| . \|\ddot{r}\| . \sin\angle(\dot{r},\ddot{r}) \|r'\|^3$$

ولما كان:

$$\|\dot{r}\| = 1 \qquad \text{و} \qquad \|\ddot{r}\| = \kappa \qquad (\angle(\dot{r},\ddot{r}) = \frac{\pi}{2})$$

فنجد أن :

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$$

8 – 4 نتائج وأمثلة

1 – إذا كان :

$$t \to r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

تمثيلاً وسيطياً من الصف C_2 لمنحن $\mathscr{L}$ فإن التقوس في نقطة نظامية منه يعطى بالعلاقة:

$$\kappa = \frac{\left(\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2 – إذا كان:

$$t \to r(t) = (x(t), y(t))$$

تمثيلاً وسيطياً من الصف C_2 لمنحن سوي، فعندئذ:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3 – تقوس دائرة هو نفسه في كل نقطة منها ويساوي مقلوب نصف القطر.

في الحقيقة ، إن الدائرة التي نصف قطرها a تمثل بـــ :

$$x = a\cos t \quad , y = a\sin t \quad , z = 0$$

ومنه :
$$x' = -a\sin t \quad , y' = a\cos t \quad , z' = 0$$

$$x'' = -a\cos t \quad , y'' = -a\sin t \quad , z'' = 0$$

وبالتالي :

$$\kappa = \frac{|a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t|}{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}$$

8 – 5 مبرهنة

إذا كان: $\mathscr{L}$ منحنياً نظامياً (جميع نقاطه نظامية) من الصف C_2 ؛ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون مستقيماً هو أن يكون تقوسه معدوماً في كل نقطة منه.

البرهان :

كفاية الشرط : إذا كان $\kappa = 0$ فإن $\dot{t} = 0$ ، وبالمكاملة نجد أن $t = a$ حيث a ثابت . ولما كان $t = r$ فبالمكاملة مرة أخرى نجد أن :

$$r = as + b \quad , \quad b = const.$$

أي إن $\mathscr{L}$ هو مستقيم يمر من النقطة التي متجه موضعها b ويوازي المتجه a.

لزوم الشرط : إذا كان $\mathscr{L}$ مستقيماً فإنه يمثل بـــ :

$$t \to r(t) = at + b \quad , \quad a \neq 0$$

وعندئذ :

$$t = \frac{dr/dt}{\left\| dr/dt \right\|} = \frac{a}{\|a\|}$$

ومنه :

$$\kappa = \| \dot{t} \| = 0$$

8 – 6 ملاحظة

إذا كانت P نقطة مشتركة لمنحنيين من الصف C_3 ؛ فإن للمنحنيين تلامس من المرتبة الثانية على الأقل في P ، إذا وفقط إذا كان للمنحنيين متجه وحدة مماس مشترك ، ومتجه وحدة ناظم أساسي مشترك ، وكذلك تقوس مشترك في P.

إن صحة النص السابق تنتج من المبرهنة 4 – 2 ومن العلاقتين:

$$\dot{r} = t \qquad \text{و} \qquad \ddot{r} = \dot{t} = \kappa n$$

8 – 7 تعريف (دائرة التقوس)

ليكن $\mathscr{C}$ منحنياً و P نقطة منه . نقول عن الدائرة التي لها تلامس من أعلى مرتبة ممكنة مع المنحني في P إنها الدائرة الملاصقة للمنحني في P ، أو دائرة التقوس للمنحني في P . ونقول عن مركز هذه الدائرة إنه مركز تقوس المنحني في P.

نستنتج مباشرة من الملاحظة 8 – 6 والمثال 3 من 8 – 4 صحة المبرهنة .

8 – 8 مبرهنة

يوجد في كل نقطة نظامية وغير مقومة ($\kappa \neq 0$) من منحن من الصف C_3 دائرة تقوس ، تقع هذه الدائرة في المستوي الملاصق للمنحني في P، ولها تلامس من المرتبة الثانية على الأقل مع المنحني ، ونصف قطرها يساوي معكوس تقوس المنحني

في P ، ويقع مركزها على نصف الناظم الأساسي الذي يتجه صوبه متجه وحدة الناظم الأساسي للمنحني.

إذاً فمتجه موضع مركز التقوس للمنحني $s \to r(s)$ في النقطة s_0 هو:

$$\boldsymbol{R}_c = \boldsymbol{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\boldsymbol{n}(s_0)$$

8 – 9 تعريف

نقول عن الخط المستقيم المار من مركز التقوس لمنحن $\mathscr{L}$ في نقطة منه P، والعمودي على المستوي الملاصق لـ $\mathscr{L}$ في P إنه المستقيم القطبي للمنحني في P . إن المعادلة الوسيطية للمستقيم القطبي للمنحني $s \to \boldsymbol{r}(s)$ في النقطة s هي:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n} + \lambda\boldsymbol{b} \qquad \text{أو} \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_c + \lambda\boldsymbol{b}$$

8 – 10 مثال

أوجد تقوس اللولب ومركز تقوسه ومستقيمه القطبي

8 – 11 تعريف (التفاف منحن)

لتكن P نقطة نظامية وغير مقومة $(\kappa \neq 0)$ من منحن من الصف C_3، ولتكن Q نقطة متحركة على المنحني واقعة في جوار P وحيث تكون غير مقوّمة أيضاً. لنفترض أن P تقابل القيمة s للوسيط الطبيعي، وأن Q تقابل القيمة $s+h$. إن المتجهين الناظمين للمستويين الملاصقين في P و Q هما بالتعريف $\boldsymbol{b}(s)$ و $\boldsymbol{b}(s+h)$. وإذا كان المستويان غير متطابقين فلهما مستقيم مشترك ℓ مواز للمتجه $\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{b}(s+h)$. سنزود ℓ بتوجيه على الشكل التالي :

إذا لم يكن ℓ عمودياً على المماس للمنحني في P فنعطيه اتجاه المتجه ω الموازي لـــ ℓ والذي يتجه صوب نصف الفضاء نفسه المعين بالمستوي الناظم، والذي يتجه صوبه المتجه $t(s)$.

وبكلمات أخرى فإن ω هو متجه محمول على ℓ ويحقق : $t(s).\omega > 0$.

وإذا كان ℓ عمودياً على المماس فنختار التوجيه كيفياً . ومن أجل القيم الصغيرة جداً لـــ h ، فإن الحالة الأخيرة تحدث فقط عندما تكون $\tau = 0$.

في الحقيقة لدينا:

$$b(s+h) = b(s) + h\dot{b}(s) + 0(h)$$

$$= b(s) - h\tau n(s) + 0(h)$$

ومنه : $$b(s) \times b(s+h) = h\tau t(s) + 0(h)$$

وإذا كان $\tau \neq 0$ و h صغيراً بشكل كاف ؛ فإن $0(h)$ لا يمكن أن يختصر مع $h\tau t(s)$. فعندما تكون $\tau \neq 0$ فإنه يكون لدينا :

$$\big(b(s) \times b(s+h)\big).t = h\tau + 0(h)$$

وهكذا فإن اتجاه المستقيم ℓ يتطابق مع اتجاه $b(s) \times b(s+h)$ عندما تكون $h\tau > 0$ ويعاكسه عندما تكون $h\tau < 0$.

وبعد أن تم تعيين التوجيه على المستقيم ℓ ؛ فإن زاوية أية ثنائية مرتبة من المستويات المارة بـــ ℓ تقاس بعدد بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$.في الحقيقة نأخذ الدوران حول المستقيم بزاوية غير منفرجة حيث تراكب المستوي الأول فوق الآخر. نضع إشارة + أو – أمام القيمة المطلقة لقياس هذه الزاوية حسبما تكون ثلاثية المتجهات الآتية يمينية أو لا:

آ) متجه عمودي على محور الدوران ومواز للمستوي الأول

ب) وضع المتجه بعد الدوران

جـ) متجه توجيه محور الدوران .

إذا رمزنا الآن بـــ ψ للزاوية الموجهة بين المستوي الملاصق في P والمستوي الملاصق في Q ؛ فإننا نقول عن النهاية :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi}{h}$$

إنها التفاف المنحني في P.

8 – 12 مبرهنة

يوجد في كل نقطة نظامية وغير مقومة من منحن $s \to \boldsymbol{r}(s)$ من الصف C_3 التفاف مساو للمعامل τ في معادلات فرينيه.

البرهان:

لما كان:

$$|\psi| = \angle(\boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{b}(s+h))$$

فإن :

$$\sin|\psi| = \angle\|\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{b}(s+h)\|$$

ولكن باستخدام صيغة تايلور وعلاقات فرينيه لدينا:

$$\boldsymbol{b}(s+h) = \boldsymbol{b}(s) + h\dot{\boldsymbol{b}}(s) + 0(h)$$

$$= \boldsymbol{b}(s) - h\tau\,\boldsymbol{n}(s) + 0(h)$$

ومنه :

$$\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{b}(s+h)=-h\tau\,\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{n}(s)+0(h)$$

$$=h\tau\,\boldsymbol{t}(s)+0(h)$$

وعندئذ :

$$\sin|\psi|=|h\tau\,\boldsymbol{t}(s)+0(h)|=|h||\tau|+0(h)$$

وبالتالي: $$\lim_{h\to0}|\frac{\psi}{h}|=\lim_{h\to0}\frac{\sin|\psi|}{|h|}=|\tau|$$

وإذا كان :

$$\tau=0$$

فإن ذلك يكافئ

$$\lim_{h\to0}\frac{\psi}{h}=0$$

وإذا كان $\tau\neq0$ فإننا نلاحظ أن ψ موجبة عندما يكون للمتجه $\boldsymbol{b}(s)\times\boldsymbol{b}(s+h)$ ومحور الدوران التوجيه نفسه، والذي يحدث عندما يكون $h\tau>0$ و ψ سالبة عندما يكون $h\tau<0$. ولذلك فإن $\psi h\tau>0$ ممَّا يعني أن لـ $\frac{\psi}{h}$ و τ الإشارة نفسها .

إذن لابد أن يكون:

$$\lim_{h\to0}\frac{\psi}{h}=\tau$$

13 – 8 مبرهنة

إذا كانت P نقطة نظامية وغير مقومة من منحن $s\to\boldsymbol{r}(s)$ من الصف C_3 فإن الالتفاف في P يعطى بالعلاقة :

$$\tau=\frac{[\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}]}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|^2}=\frac{[\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}]}{\kappa^2}$$

البرهان :

لما كان:

$$\dot{r} = t \qquad \text{و} \qquad \ddot{r} = \kappa n$$

فإننا باستخدام معاملات فرينيه نجد أن:

$$\dddot{r} = \dot{\kappa} n + \kappa \dot{n} = \dot{\kappa} n + \kappa(-\kappa t + \tau b)$$

$$= -\kappa^2 t + \dot{\kappa} n + \kappa \tau b$$

ومنه :

$$\ddot{r} \times \dddot{r} = \kappa^2 \tau t + \kappa^3 b$$

وبالتالي:

$$\dot{r} \cdot (\ddot{r} \times \dddot{r}) = t \cdot (\kappa^2 \tau t + \kappa^3 b)$$

$$= \kappa^2 \tau$$

إذاً :

$$\tau = \frac{\dot{r} \cdot (\ddot{r} \times \dddot{r})}{\kappa^2}$$

وإذا كان :

$$r(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

فإن :

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{[(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2]}$$

8 – 14 مبرهنة

إذا كانت P نقطة نظامية وغير مقومة من منحن $t \to r(t)$ من الصف C_3 ؛ فإن الالتفاف في P يعطى بالعلاقة:

$$\tau = \frac{[r', r'', r''']}{\| r' \times r'' \|^2}$$

البرهان.

إذا أدخلنا تمثيلاً طبيعياً $s \to r(t(s))$ للمنحني حيث :

$$s \to t(s)$$

الدالة العكسية للدالة:

$$t \to s(t) = \int_{t_0}^{t} \| r'(u) \| du$$

فعندئذ:

$$\dot{r} = r' \dot{t}$$

$$\ddot{r} = r'' \dot{t}^2 + r' \ddot{t}$$

$$\dddot{r} = r''' \dot{t}^3 + 2r'' \dot{t} \ddot{t} + r'' \dot{t} \ddot{t} + r' \dddot{t}$$
$$= r''' \dot{t}^3 + 3r'' \dot{t} \ddot{t} + r' \dddot{t}$$

ومنه :

$$\dot{r} \cdot (\ddot{r} \times \dddot{r}) = r' \cdot (r'' \times r''') \cdot \dot{t}^6$$

ولما كان :

$$\kappa = \frac{\| r' \times r'' \|}{\| r' \|^3} \quad \text{و} \quad \dot{t}^2 = \frac{1}{\| r' \|^2}$$

فإن:

$$\tau = \frac{[\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}]}{\kappa^2}$$
$$= \frac{r' \cdot (r'' \times r''')}{\| r' \|^6 \cdot \frac{\| r' \times r'' \|^2}{\| r' \|^6}}$$
$$= \frac{[r', r'', r''']}{\| r' \times r'' \|^2}$$

8 – 15 مثال

1– لإيجاد التفاف اللولب :

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

نلاحظ أن:

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$r''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$r'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$$\|r'\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r' \times r'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$\|r' \times r''\| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$[r', r'', r'''] = a^2 b$$

ومنه:

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\tau = \frac{[r', r'', r''']}{\|r' \times r''\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

إذاً فاللولب هو منحن ذو تقوس والتفاف ثابتين.

8 – 16 تعريف (متجه داربوكس – *Darboux Vector*)

إذا تعاملنا مع الوسيط الطبيعي لمنحن كزمن ؛ فإن معادلة المنحني تغدو قانون حركة نقطة ، تتحرك بسرعة 1 على طول المنحني. إن ثلاثية فرينيه تتحرك مع النقطة

بوصفها جسماً صلباً . يمكننا أن نفرّق هذه الحركة إلى انسحاب للرأس ودوران حول هذا الرأس ، ويُعبَّر عن الانسحاب بمعادلة المنحني . أما سرعات نقاط النهاية لمتجهات ثلاثية فرينيه في دورانها حول الرأس فهي : $\dot{\boldsymbol{t}}$ و $\dot{\boldsymbol{n}}$ و $\dot{\boldsymbol{b}}$. ولكن سرعات نقـــاط جسم صلب في دورانه حول نقطة يمكن التعبير عنها بالمتجه نفسه : متجه الـــسرعة الزاوية.

فإذا رمزنا إلى هذا المتجه من أجل الجزء الدوراني من حركة ثلاثية فرينيه بـــ: $\boldsymbol{d}$ فعندئذ

$$\dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{t} \quad \text{و} \quad \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{n} \quad \text{و} \quad \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b}$$

ولتعيين المتجه $\boldsymbol{d}$ نكتب :

$$\boldsymbol{d} = \alpha \boldsymbol{t} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{b}$$

ونعوض في العلاقات السابقة فنجد أن:

$$\dot{\boldsymbol{t}} = -\beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{n}$$

$$\dot{\boldsymbol{n}} = \alpha \boldsymbol{b} - \gamma \boldsymbol{t}$$

$$\dot{\boldsymbol{b}} = -\alpha \boldsymbol{n} + \beta \boldsymbol{t}$$

وبمقارنة هذه الصيغ بمعادلات فرينيه نجد أن:

$$\beta = 0 \quad , \quad \gamma = 0 \quad , \quad \alpha = \tau$$

وهكذا فإن :

$$\boldsymbol{d} = \tau \boldsymbol{t} + \kappa \boldsymbol{b}$$

نقول عن هذا المتجه إنه متجه داربوكس.

8 – 17 وضعية منحن في جوار نقطة منه

لدراسة وضعية منحن في جوار نقطة نظامية وغير مقومة P منه ؛ نأخذ P مبدأ للإحداثيات ، كما نأخذ متجهات الوحدة $\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{k}$ منطبقة على ثلاثية فرينيه $\boldsymbol{t}_0$ و $\boldsymbol{n}_0$ و $\boldsymbol{b}_0$ في النقطة P ، ونفترض أخيراً أن النقطة P تقابل القيمة $s=0$ للوسيط الطبيعي . إذا استخدمنا صيغة تايلور فإن المنحني في جوار النقطة P يمثّل بالمعادلة :

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(0)+s\dot{\boldsymbol{r}}(0)+\frac{s^2}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}(0)+\frac{s^3}{3!}\dddot{\boldsymbol{r}}(0)+0(s^3)$$

ولكن:

$$\boldsymbol{r}(0)=0 \quad , \quad \dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{t}_0 \quad , \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(0)=\kappa_0\boldsymbol{n}_0$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}(0)=[\dot{\kappa}\boldsymbol{n}+\kappa\dot{\boldsymbol{n}}]_{s=0}=$$

$$=-\kappa_0^2\boldsymbol{t}_0+\dot{\kappa}_0\boldsymbol{n}_0+\kappa_0\tau_0\boldsymbol{b}_0$$

حيث أن κ_0 و τ_0 هي قيم الدالتين κ و τ في النقطة $s=0$ إذاً :

$$\boldsymbol{r}(s)=(s-\frac{1}{6}\kappa_0^2s^3)\boldsymbol{t}_0+(\frac{1}{2}\kappa_0s^2+\frac{1}{6}\kappa_0s^3)\boldsymbol{n}_0$$

$$+\frac{1}{6}\kappa_0\tau_0s^3\boldsymbol{b}_0+0(s^3)$$

والمنحني يمثل بالمعادلات الوسيطية:

$$x=s+0(s)$$

$$y=\frac{1}{2}\kappa_0s^2+0(s^2)$$

$$z=\frac{1}{6}\kappa_0\tau_0s^3+0(s^3)$$

حيث حافظنا في كل معادلة على الحد ذي المرتبة الأدنى بالنسبة إلى s فقط، بينما تمت تغطية بقية الحدود بالرمز 0.

نلاحظ من هذه المعادلات أن المنحني يخترق المستوي الناظم في P بالاتجاه t_0، لأن x تغير إشارتها مع s من السالب إلى الموجب ، كما نلاحظ أن المنحني لا يقطع المستوي المقوم ، لأن $y > 0$ عندما يكون $|s|$ صغيراً ، في حين أنه يلامس المستوي المقوم ويعود باتجاه n_0 . أخيراً فإن المنحني يخترق المستوي الملاصق ، لأن z تغير إشارتها مع s شريطة أن يكون $\kappa_0 \neq 0$ و $\tau_0 \neq 0$. إذا كان $\tau_0 > 0$ فإن المنحني يعبر المستوي الملاصق من أسفل إلى أعلى عندما تتزايد s .

إذاً فإن مساقط المنحني في جوار النقطة P على المستويات المعينة بثلاثية فرينيه في P تقرّب من المنحنيات التالية:

أ – المسقط على المستوي الملاصق يقرب من القطع المكافئ

$$x = s$$
$$y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2$$
$$z = 0$$

ب– المسقط على المستوي الناظم يقرب من القطع المكافئ نصف التكعيبي:

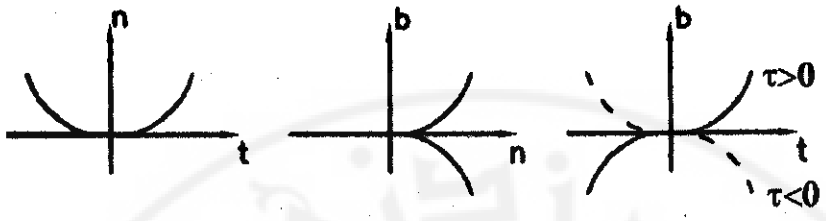
$$x = 0$$
$$y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2$$
$$z = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3$$

جـ – المسقط على المستوي المقوم يقرب من القطع المكافئ التكعيبي :

$$x = s$$
$$y = 0$$

$$z = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3$$

مع نقطة انعطاف في المبدأ. (الشكل –14–)



الشكل –14–

9- منشور منحن وناشره

9-1 تعريف (منشور منحن)

يوجد في كل نقطة من منحن $\mathscr{L}$ عدد غير منته من النواظم ، أي تلك المستقيمات المارة من النقطة والعمودية على المماس في تلك النقطة ، وبالتالي فهي تقع في المستوي الناظم.

إذا كان $s \to \boldsymbol{r}(s)$ تمثيلاً وسيطياً طبيعياً للمنحني $\mathscr{L}$ ؛ فنقول عن منحن $\mathscr{L}_1$ إنه منشور (*Evolute*) المنحني $\mathscr{L}$ ، إذا شكلت مماسات $\mathscr{L}_1$ عائلة نواظم قابلة للمفاضلة بوسيط واحد للمنحني $\mathscr{L}$ ، حيث يقابل كل قيمة s للوسيط ناظم في النقطة التي تقابل s ، وحيث يكون متجه وحدة هذا الناظم دالة قابلة للمفاضلة بالوسيط.

9-2 مبرهنة

لكل منحن $s \to \boldsymbol{r}(s)$ من الصف C_3 عدد غير منته من المناشير ، يمثّل كل منها بالدالة

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\cot\left(\int \tau(s)ds + const\right)\boldsymbol{b}(s) \qquad (9,1)$$

وذلك من أجل قيمة معينة للثابت *const* .

البرهان :

إذا كان $\mathscr{L}$ من الصف C_3 وفرضنا وجود منشور $\mathscr{L}_1$ ؛ فإنه يمكن أن يمثل بالدالة:

$$s \to \boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \alpha(s)\boldsymbol{n}(s) + \beta(s)\boldsymbol{b}(s) \qquad (9,2)$$

حيث β , α دالتان قابلتان للمفاضلة بالوسيط s ، الذي ليس طبيعياً بالنسبة لـ $\mathscr{L}_1$ بالضرورة .

إن المتجه :

$$\frac{dR}{ds} = \dot{r}(s) + \dot{\alpha}(s)n(s) + \alpha(s)\dot{n}(s) + \dot{\beta}(s)b(s) + \beta(s)\dot{b}(s)$$

هو متجه مماس لـ $\mathscr{L}_1$. وباستخدام علاقات فرينيه نجد أن :

$$\frac{dR}{ds} = t + \dot{\alpha}n + \alpha(-\kappa t + \tau b) + \dot{\beta}b - \beta\tau n$$

$$= (1 - \alpha\kappa)t + (\dot{\alpha} - \beta\tau)n + (\alpha\tau + \dot{\beta})b$$

ولكن هذا المتجه لابد أن يوازي المتجه $\alpha n + \beta b$ ، وبالتالي لا بد أن يتحقق:

$$1 - \alpha\kappa = 0 \quad , \quad \beta(\dot{\alpha} - \beta\tau) - \alpha(\alpha\tau + \dot{\beta}) = 0$$

ومنه :

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} \quad , \quad \beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta} = (\alpha^2 + \beta^2)\tau$$

وعندئذ :

$$\frac{\beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta}}{\alpha^2} = [1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2]\tau$$

أو

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = [1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2]\tau$$

أو

$$-\frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{1 + (\frac{\beta}{\alpha})^2} = \tau$$

أو

$$\frac{d}{ds}(\text{Arccot}\frac{\beta}{\alpha}) = \tau$$

وبالمكاملة نجد أن:

$$\text{Arccot}\frac{\beta}{\alpha} = \int \tau(s)\, ds + const.$$

ومنه :

$$\beta = \alpha \cot(\int \tau(s)\, ds + const.)$$

وبالتعويض في العلاقة (9,2) نجد العلاقة (9,1) .

9 – 3 ملاحظة

إذا كان المنحني $\mathscr{L}$ سوياً (واقعاً في مستو) فعندئذ $\tau = 0$ ، وهناك منشور لـ $\mathscr{L}$ يقع في مستوي $\mathscr{L}$ نفسه ، ويمثل بالدالة :

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{n}(s)$$

وبالتالي فهو المحل الهندسي لمراكز تقوس المنحني $\mathscr{L}$.

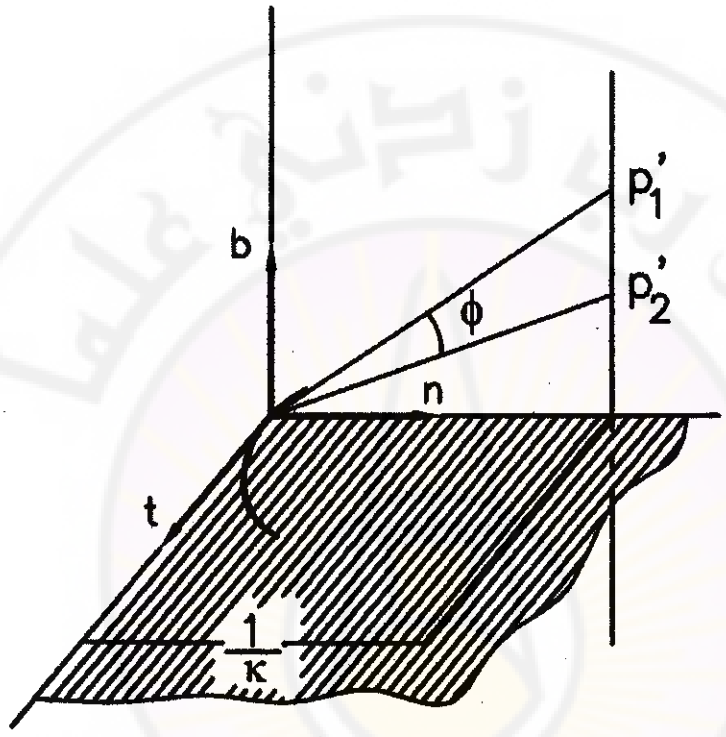
9 – 4 ملاحظة

إذا كان $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ منشورين مختلفين للمنحني نفسه $\mathscr{L}$ فلنناقش باختصار موقع أحدهما بالنسبة إلى الآخر. يتضح من المعادلة (9,1) أن نقطة المنشور التي تقابل نقطة معينة للمنحني $\mathscr{L}$ تقع على المستقيم القطبي للمنحني في تلك النقطة (تعريف 8 – 9) . فإذا ثبتنا النقطة p من المنحني وأخذنا النقطتين p_1' و p_2' من منشورين مختلفين $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ ، ورمزنا بـ ϕ لزاوية الناظمين pp_1' و pp_2' فإن ϕ تساوي الفرق بين الزاويتين ϕ_1 و ϕ_2 حيث ϕ_1 زاوية الناظم الأساسي في p و pp_1' و ϕ_2 زاوية الناظم الأساسي في p و pp_2' .

ولما كان :

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \cot(\int \tau ds + c_1) \qquad \text{و} \qquad \operatorname{tg} \phi_2 = \cot(\int \tau ds + c_2)$$

فإن هذا الفرق سيكون ثابتاً أي $\phi = const$ (الشكل – 15 –)



الشكل – 15 –

5 – 9 تعريف (ناشر منحن)

نقول عن منحن $\mathscr{L}_1$ إنه ناشر (*Involute*) منحن $\mathscr{L}$ إذا قطع $\mathscr{L}_1$ بزوايا قائمة مماسات $\mathscr{L}$.

من الواضح أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\mathscr{L}_1$ ناشراً لـ $\mathscr{L}$ هو أن يكون $\mathscr{L}$ منشوراً لـ $\mathscr{L}_1$.

9-6 مبرهنة

لكل منحن $s \to \boldsymbol{r}(s)$ من الصف C_2 عدد غير منته من النواشر ، يمثل كل منها بالدالة.

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(s) + (c-s)\boldsymbol{t}(s) \qquad (9,3)$$

وذلك من أجل قيمة معينة للثابت c.

البرهان.

إذا فرضنا وجود ناشر $\mathscr{C}_1$ للمنحني $\mathscr{C}$ فإنه يمكن أن يمثل بالدالة :

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{t}(s) \qquad (9,4)$$

حيث λ دالة قابلة للمفاضلة بالوسيط s . إن المتجه المماس :

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\lambda}\boldsymbol{t} + \lambda\dot{\boldsymbol{t}}$$

$$= (1+\dot{\lambda})\boldsymbol{t} + \lambda\kappa\boldsymbol{n}$$

للمنحني $\mathscr{C}_1$ يعامد متجه وحدة المماس $\boldsymbol{t}$ للمنحني $\mathscr{C}$.

إذن : $$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\cdot\boldsymbol{t} = 0$$

ومنه :

$$1+\dot{\lambda} = 0 \qquad \text{أو} \qquad \dot{\lambda} = -1$$

وبالتالي :

$$\lambda = c - s$$

حيث c ثابت . وبالتعويض في (9,4) نجد المعادلة (9,3)

9 – 7 ملاحظة

على الرغم من سهولة الصيغة (9,3) ، إلا أنها تتطلب تمثيلاً طبيعياً للمنحني. ولذلك فمن الأنسب عدم استخدام هذه الصيغة ، وإنما اللجوء إلى التعريف لتعيين الناشر . فإذا كان $t \to r(t)$ تمثيلاً ليس بالضرورة طبيعياً للمنحني $\mathscr{L}$ ؛ فإن الناشر $\mathscr{L}_1$ يمثل بـــ :

$$R(t) = r(t) + \mu(t) r'(t)$$

ومنه
$$R' = \frac{dR}{dt} = r' + \mu' r' + \mu r''$$

$$= (1 + \mu') r' + \mu r''$$

وتتعين μ من المعادلة التفاضلية :

$$R' \cdot r' = (1 + \mu') r' \cdot r' + \mu r' \cdot r'' = 0$$

9 – 8 مثال

لإيجاد ناشر للدائرة:

$$r = (a\cos t, a\sin t, 0)$$

نلاحظ أن :

$$r' = (-a\sin t, a\cos t, 0) \ , \|r'\| = a$$

ومنه :
$$s = \int_0^t \|r'(u)\| \, du = at$$

وإذا أخذنا $c = 0$ فالناشر الذي يقابل هذه القيمة للثابت يمثل بـــ :

$$R(s) = r(s) - s\,t(s)$$

$$= (a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}, 0) - s(-\sin\frac{s}{a}, \cos\frac{s}{a}, 0)$$

$$= (a\cos\frac{s}{a} + s\sin\frac{s}{a}, \ a\sin\frac{s}{a} - s\cos\frac{s}{a}, 0)$$

وإذا عدنا إلى الوسيط t الذي يرتبط مع s بالعلاقة $s = at$ ، فإن الناشر يمثل بـــ :

$$\boldsymbol{R}^*(t) = a(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, 0)$$

10- المعادلتان الطبيعيتان لمنحن

10-1 مبرهنة

إذا كانت :

$$s \to \kappa(s) > 0$$

$$s \to \tau(s)$$

دالتين معرفتين ومستمرتين على فترة محدودة أو غير محدودة $]a,b[$ ، فيوجد منحن حيث يكون s وسيطه الطبيعي ، وحيث تمثل الدالتان k و τ تقوسه والتفافه على الترتيب . وإذا وجد منحنيان لهما التقوس والالتفاف ذاتهما فإن أحدهما ينطبق على الآخر بحركة جسم صلب (انسحاب ودوران).

البرهان:

إذا وجد منحن تقوسه κ والتفافه τ ؛ فإنه سيمثل وسيطياً بدالّة $s \to \boldsymbol{r}(s)$ وهذه الدالة لابد أن تحقق جملة المعادلات التفاضلية :

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{t} \\ \dot{\boldsymbol{t}} &= \kappa \boldsymbol{n} \\ \dot{\boldsymbol{n}} &= -\kappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b} \\ \dot{\boldsymbol{b}} &= -\tau \boldsymbol{n} \end{aligned}\right\} \qquad (10,1)$$

كما تتحقق الشروط الإضافية الآتية :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}.\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{b} &= 1 \\ \boldsymbol{t}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{t} &= 0 \end{aligned} \qquad (10,2)$$

وهكذا فإن البرهان يؤول إلى إثبات وجود حل واحد للمعادلات (10,1) و (10,2) بشروطٍ ابتدائيةٍ معطاة ، والقيم الابتدائية هي موضع النقطة من أجل قيمة ابتدائية s_0 للوسيط ومواضع متجهات ثلاثية فرينيه من أجل القيمة هذه s_0 .

وإذا كانت مركبات المتجهات السابقة في نظام إحداثي ثابت هي:

$$\boldsymbol{t} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\boldsymbol{n} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\boldsymbol{b} = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

فإن الجملة (10,1) تكافئ جملة مكونة من المعادلات الثلاث :

$$\frac{dx}{ds} = u_1 \quad , \frac{dy}{ds} = u_2 \quad , \frac{dz}{ds} = u_3 \qquad (10,3)$$

والمعادلات التسع:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{ds} &= \kappa v_i \\ \frac{dv_i}{ds} &= -\kappa u_i + \tau w_i \\ \frac{dw_i}{ds} &= -\tau v_i \end{aligned}\right\} \qquad i = 1,2,3 \qquad (10,4)$$

أما الشروط (10,2) فهي تكافئ كون المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \qquad (10,5)$$

متعامدة .

ولما كانت الجملة (10,4) هي جملة تسع معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى بمعاملات مستمرة وتسعة مجاهيل ؛ فإن مبرهنة الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية العادية تقتضي وجود حل لهذه الجملة معيّن بشكل وحيد بالقيم الابتدائية :

$$\boldsymbol{t}_0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \quad \text{و} \quad \boldsymbol{n}_0 = (v_1^0, v_2^0, v_3^0) \quad \text{و} \quad \boldsymbol{b}_0 = (w_1^0, w_2^0, w_3^0)$$

سنثبت الآن أنه إذا كانت مصفوفة القيم الابتدائية متعامدة ومعينها يساوي 1+ (الثلاثية $\boldsymbol{t}_0$ و $\boldsymbol{n}_0$ و $\boldsymbol{b}_0$ متعامدة ويمينية) فإنها ستكون كذلك من أجل قيم الحل جميعها . بالفعل لنأخذ الدالة :

$$u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j$$

حيث أن u_ℓ و v_ℓ و w_ℓ و $\ell = 1,2,3$ هي حلول للجملة (10,4) .

إذا لاحظنا أن :

$$\frac{d}{ds}(u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j) = \frac{du_i}{ds}u_j + u_i\frac{du_j}{ds} + \frac{dv_i}{ds}v_j + v_i\frac{dv_j}{ds} +$$

$$+\frac{dw_i}{ds}w_j + w_i\frac{dw_j}{ds}$$

$$= \kappa v_i u_j + \kappa u_i v_j - \kappa u_i v_j + \tau w_i v_j - \kappa v_i u_j + \tau v_i w_j$$

$$-\tau v_i w_j - \tau w_i v_j = 0$$

فنستنتج أن الدالة :

$$u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j$$

ثابتة . ولما كانت العلاقات :

$$u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j = \begin{cases} 1 & ,if\ i = j \\ 0 & ,if\ i \neq j \end{cases}$$

محققة من أجل القيم الابتدائية فإنها ستكون محققة من أجل قيم الحل جميعها . أخيراً لما كان معين المصفوفة (10,5) دالة مستمرة بالوسيط وقيمته 1 أو 1− فلابد أن تكون هذه القيمة ثابتة ومساوية لقيمته من أجل القيم الابتدائية أي 1 .

نستخدم الآن حل الجملة (10,4) لنجد حلاً للجملة (10,3) والذي يتعين بشكل وحيد بالقيم الابتدائية x_0, y_0, z_0 للدوال x, y, z . وهكذا فإننا ـــ انطلاقاً من النقطة الابتدائية (x_0, y_0, z_0) والقيم الابتدائية $\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0$ لثلاثية فرينيه ـــ نستطيع أن

نجد منحنياً وحيداً ، تقوسه والتفافه دالتان معطيتان ، وحيث تكون ثلاثية فرينيه لهذا المنحني في النقطة (x_0,y_0,z_0) هي t_0,n_0,b_0 .

أخيراً فإن أي حلين متمايزين لـــ (10,4) أو بشكل مكافئ لـــ (10,1) ويحققان الشروط (10,2) ، يقابلان ثلاثيي فرينيه ابتدائيتين مختلفتين . ولكن أي زوج من ثلاثيات فرينيه يمكن أن تتراكب (تنطبق) إحداهما على الأخرى بحركة جسم صلب (انسحاب ودوران) . الأمر الذي يتحقق من أجل الحلين أيضاً . وبذلك نكون قد أثبتنا الجزء الثاني من المبرهنة.

10 – 2 تعريف

نقول عن الدالّتين :

$$s \to \kappa(s) \qquad \text{و} \qquad s \to \tau(s)$$

اللتين تعينان التقوس والالتفاف بدلالة طول القوس وبالتالي تعينان المنحني ، من دون تحديد موضعه في الفضاء ، إنهما المعادلتان الطبيعيتان (المميزتان) للمنحني.

10 – 3 ملاحظة

لإيجاد منحن سوي $(\tau(s)\equiv 0)$ علم تقوسه $\kappa(s)$ ؛ فإننا نرمز بـــ φ للزاوية التي يصنعها t مع المحور ox , وعندئذ:

$$t = \cos\varphi\, i + \sin\varphi\, j$$

ولما كان n يعامد t فيمكن أن نكتب :

$$n = -\sin\varphi\, i + \cos\varphi\, j$$

وبالاشتقاق نجد أن:

$$\dot{t} = \dot{\varphi} n \quad , \quad \dot{n} = -\dot{\varphi} t$$

ولكن عندما $\tau = 0$ فإن معادلات فرينيه تأخذ الشكل :

$$\dot{t} = \kappa n \qquad , \qquad \dot{n} = -\kappa t$$

ويكون t و n حلاً عندما يتحقق :

$$\varphi = \int \kappa\, ds + c_1 \qquad \text{أو} \qquad \dot{\varphi} = \kappa$$

والمنحني المطلوب يمثل بـــ :

$$r = \int t ds + c_2 = \int [\cos\varphi(s)\, i + \sin\varphi(s)\, j]\, ds + c_2$$

إن تغييراً في الثابت c_1 يعين تحويلاً لـــ φ وبالتالي دوراناً للمنحني حول المبدأ، وأما التغيير في c_2 فيعين انسحاباً للمنحني .

أخيراً نلاحظ أنه إذا كان $\kappa(s) \neq 0$ أياً كان s، فعندئذ $\dot{\varphi} \neq 0$، أياً كان s، وبالتالي يمكن أن ندخل $\varphi = \varphi(s)$ وسيطاً فنجد التمثيل الآتي للمنحني.

$$r = \int \frac{1}{\kappa(\varphi)} [\cos\varphi\, i + \sin\varphi\, j]\, d\varphi + c_2$$

10 – 4 مثال

لإيجاد المنحني (السوي) الذي معادلتاه الطبيعيتان هما:

$$\kappa = \frac{1}{s} \quad , \qquad \tau = 0 \quad , \qquad (s > 0)$$

نضع :

$$\dot{\varphi} = \kappa = \frac{1}{s}$$

فنجد أن :

$$\varphi = \ln s + c_1$$

ومنه :

$$s = e^{\varphi - c_1}$$

وبالتالي :

$$\kappa = \frac{1}{s} = e^{c_1 - \varphi}$$

وعندئذ :

$$\boldsymbol{r} = \int e^{\varphi - c_1}[\cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \sin\varphi\, \boldsymbol{j}]d\varphi + c_2$$

$$= \frac{1}{2}e^{\varphi - c_1}(\cos\varphi + \sin\varphi)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}e^{\varphi - c_1}(\sin\varphi - \cos\varphi)\boldsymbol{j} + c_2$$

$$= \frac{1}{2}e^{\varphi - c_1}\{[\cos\varphi + \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)]\boldsymbol{i} + [\sin\varphi + \sin(\varphi - \frac{\pi}{2})]\boldsymbol{j}\} + c_2$$

$$= \frac{1}{2}e^{\varphi - c_1}\{[2\cos\frac{\pi}{4}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})]\boldsymbol{i} + [2\cos\frac{\pi}{4}\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})]\boldsymbol{j}\} + c_2$$

وإذا اخترنا $c_1 = \frac{\pi}{4}$ و $c_2 = 0$ ووضعنا:

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$$

فإننا نجد التمثيل :

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta}(\cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j})$$

10 – 5 تعريف (اللولب المعمم)

نقول عن كل منحن يصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت إنه **لولب معمم** . إن المستقيمات التي لها هذا الاتجاه وتقطع المنحني تصنع سطحاً أسطوانياً.

والمنحني يقع على هذا السطح الأسطواني ويقطع عناصر (مولدات) السطح بزاوية ثابتة . وما اللولب الذي سبقت دراسته إلا الحالة الخاصة التي يكون فيها السطح الأسطواني أسطوانة دائرية.

10 – 6 مبرهنة

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً من الصف C_3 لا يحوي نقاطاً مقومة.

الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\mathscr{L}$ لولباً معمماً هو أن يتحقق :

$$\frac{\tau}{\kappa} = const.$$

زد على ذلك فإن :

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta$$

حيث θ الزاوية الثابتة بين المنحني والاتجاه الثابت في الفضاء.

البرهان :

لزوم الشرط : ليكن $\boldsymbol{a}$ متجه وحدة الاتجاه الثابت .عندئذ :

$$\boldsymbol{t}.\boldsymbol{a} = \cos\theta = const.$$

وبالتالي:

$$\dot{\boldsymbol{t}}.\boldsymbol{a} = 0$$

ومنه:

$$\kappa \boldsymbol{n}.\boldsymbol{a} = 0$$

ولما كان $\kappa \neq 0$ فإن :

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{a} = 0$$

ممَّا يعني أن المتجه $\boldsymbol{a}$ يوازي المستوي المقوم. باشتقاق المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$\dot{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{a} = 0$$

أو:

$$-\kappa \boldsymbol{a}.\boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0$$

وبملاحظة أن $\boldsymbol{a}$ متجه وحدة يوازي المستوي $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{b})$ ويحقق :

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{t} = \cos\theta$$

فلا بد أن يكون :

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \sin\theta \qquad \text{أو} \qquad \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = -\sin\theta$$

ويمكن أن نستثني الحالة الثانية وذلك بتبديل a بـ $-a$ إن اقتضت الضرورة، حيث أنه يعين الاتجاه نفسه في الفضاء .

إذاً : $$-\kappa\cos\theta+\tau\sin\theta=0$$

ومنه : $$\frac{\tau}{\kappa}=\cot\theta=const.$$

كفاية الشرط:

إذا حقق التقوس والالتفاف العلاقة:

$$\frac{\tau}{\kappa}=const.$$

فإن المتجه :

$$a=(\frac{\tau}{\kappa})t+b$$

ثابت.

في الحقيقة : $$\frac{da}{ds}=(\frac{\tau}{\kappa})\dot{t}+\frac{\tau}{\kappa}\dot{t}+\dot{b}$$

$$=\frac{\tau}{\kappa}kn-\tau n=0$$

وإذا رمزنا بـ θ لزاوية a و t فعندئذ:

$$\cot\theta=\frac{\frac{\tau}{\kappa}}{1}=\frac{\tau}{\kappa}=const.$$

ممَّا يعني أن t يصنع زاوية ثابتة مع a .

7-10 تعريف (منحني برتراند)

نقول عن منحنيين إنهما مترافقان حسب برتراند (*Bertrand*) إذا وجد تقابل (تطبيق غامر ومتباين) بين نقاطيهما ، حيث يكون للمنحنيين ناظم أساسي مشترك في النقطتين المتقابلتين.

ونقول عن كل منحن له مرافق حسب برتراند إنه منحني برتراند.

10-8 مبرهنة

إذا كان $\mathscr{L}$ منحنياً ملتوياً (لا يقع ـــ حتى ولو جزئياً ـــ في مستو أي $\tau \neq 0$) من الصف C_4 ؛ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\mathscr{L}$ منحني برتراند هو أن يتحقق:

$$\alpha\kappa + \beta\tau = 1$$

حيث α و β ثابتان .

البرهان :

ليكن :

$$s \to \boldsymbol{r}(s)$$

تمثيلاً وسيطياً طبيعياً لمنحني برتراند $\mathscr{L}$. إذا كان $\mathscr{L}_1$ مرافقاً لـــ$\mathscr{L}$, فإن متجه موضع تلك النقطة من $\mathscr{L}_1$, التي تقابل النقطة s من $\mathscr{L}$ يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s) + \alpha(s)\,\boldsymbol{n}(s)$$

وبالتالي فالدالة $s \to \boldsymbol{R}(s)$ هي تمثيل وسيطي ، ليس بالضرورة طبيعياً للمرافق $\mathscr{L}_1$.

بالاشتقاق نجد :

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \boldsymbol{t} + \dot{\alpha}\boldsymbol{n} + \alpha(-\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b})$$

$$= (1 - \alpha\kappa)\boldsymbol{t} + \dot{\alpha}\,\boldsymbol{n} + \alpha\tau\,\boldsymbol{b}$$

ولما كان $\dfrac{d\boldsymbol{R}}{ds}$ مماساً لـــ $\mathscr{L}_1$ فلابد أن يعامد الناظم الأساسي المشترك ، وبالتالي لابد أن يعامد n ممَّا يقتضي أن:

$$\dot{\alpha} = 0$$

ومنه :

$$\alpha = const.$$

وعندئذٍ :

$$R = r(s) + \alpha\, n(s) \qquad (10,6)$$

$$\frac{dR}{ds} = (1 - \alpha\kappa)t + \alpha\tau b$$

وبالاشتقاق مرة ثانية نحصل على :

$$\frac{d^2R}{ds^2} = (1-\alpha\kappa)\dot{t} + (1-\alpha\kappa)kn + \alpha\dot{\tau} b - \alpha\tau^2 n$$

$$= (1-\alpha\kappa)\dot{t} + [\kappa(1-\alpha\kappa) - \alpha\tau^2]n + \alpha\dot{\tau} b$$

ولكن المتجه $\frac{d^2R}{ds^2}$ يقع في المستوي الملاصق لـ $\mathscr{C}$، وبالتالي فهو تركيب خطي بالمتجهين:

$$n \quad \text{و} \quad \frac{dR}{ds}$$

والمتجه :

$$(1-\alpha\kappa)\dot{t} + \alpha\dot{\tau} b$$

الذي يعامد n ، لابد وأن يرتبط خطياً مع المتجه :

$$\frac{dR}{ds} = (1-\alpha\kappa)t + \alpha\tau b$$

وبالتالي إذا كان :

$$\alpha\kappa \neq 1 \qquad \text{و} \qquad \tau \neq 0$$

فإن ذلك يقتضي :

$$\frac{(1-\alpha\kappa)\dot{}}{1-\alpha\kappa} = \frac{\dot{\tau}}{\tau}$$

وهذه المعادلة تكافئ :

$$\ln|1-\alpha\kappa| = \ln|\tau| + \ln|\beta|$$

حيث β ثابت التكامل ، ومنه :

$$1-\alpha\kappa=\beta\tau$$

وبالتالي :

$$\alpha\kappa+\beta\tau=1$$

10 – 9 ملاحظة

إذا كان :

$$\alpha\kappa=1$$

فإن :

$$\kappa=\frac{1}{\alpha}==const.$$

وللمنحني $\mathscr{L}$ تقوس ثابت ، والمعادلة (10,6) تأخذ الشكل :

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{n}(s)$$

وهي معادلة المحل الهندسي لمراكز تقوس المنحني $\mathscr{L}$ ، وهو مرافق حسب برتراند لـ $\mathscr{L}$. يكفي أن نلاحظ أن :

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}=\boldsymbol{t}+\frac{1}{\kappa}(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=\frac{\tau}{k}\boldsymbol{b}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2}=\frac{\dot{\tau}}{\kappa}\boldsymbol{b}-\frac{\tau^2}{\kappa}\boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2}=-\frac{\tau^3}{\kappa^2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}=\frac{\tau^3}{\kappa^2}\boldsymbol{t}$$

10 – 10 تعريف (الأدلة الكروية)

إذا كان $s\to\boldsymbol{r}(s)$ تمثيلاً وسيطياً طبيعياً لمنحن $\mathscr{L}$ فعندئذٍ:

أ- نقول عن المنحني :

$$s \to r_1(s) = t(s)$$

والذي يقع على سطح كرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 1 ، إنه الدليل الكروي لـ t أو دليل المماسات لـ $\mathscr{C}$. نرمز عادة بـ κ_1 و τ_1 لتقوس والتفاف $r_1(s)$.

ب- نقول عن المنحني :

$$s \to r_2(s) = n(s)$$

إنه الدليل الكروي لـ n ، ونرمز لتقوسه والتفافه بـ κ_2 و τ_2 .

ج- نقول عن المنحني :

$$s \to r_3(s) = b(s)$$

إنه الدليل الكروي لـ b ، ونرمز إلى تقوسه والتفافه بـ κ_3 و τ_3.

10-11 تعريف (الكرة الملاصقة)

نقول عن الكرة التي لها مرتبة تلامس أكثر من 2 ، مع منحن في نقطة P، إنها الكرة الملاصقة للمنحني في P .

10-12 مبرهنة

إذا كان $\mathscr{C}$ منحنياً من الصف C_4 ، فيوجد في كل نقطة نظامية من $\mathscr{C}$ والتي يكون فيها $\kappa \neq 0$ و $\tau \neq 0$ كرة ملاصقة وحيدة ، يقع مركزها على المستقيم القطبي. زد على ذلك :

$$\overrightarrow{KC} = \frac{-\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} b$$

حيث K مركز تقوس المنحني و C مركز الكرة الملاصقة. كما أن نصف قطر الكرة الملاصقة يساوي :

$$R_C = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\dot{\kappa}^2}{\kappa^4 \tau^2}}$$

10 – 13 نتيجة

يقطع المستوي الملاصق الكرة الملاصقة ، وفق دائرة التقوس.

10 – 14 مبرهنة

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً من الصف C_4 من دون نقاط مقومة أو منبسطة . الشرط اللازم والكافي حتى يقع $\mathscr{L}$ على كرة هو أن يتحقق:

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau}\right)' = 0$$

10 – 15 تعريف (المعادلة الضمنية لمنحن)

إذا كان $\mathscr{L}$ منحنياً سوياً معرفاً بمعادلة من الشكل :

$$F(x, y) = 0$$

فإننا نقول عنها إنها المعادلة الضمنية للمنحني . ونستنتج مباشرة من نظرية الدوال الضمنية صحة المبرهنة الآتية:

10 – 16 مبرهنة

إذا كانت الدالة الحقيقية بمتغيرين:

$$(x, y) \to F(x, y)$$

تحقق الشروط الآتية :

أ- F من الصف C_1 على جوار للنقطة (x_0, y_0)

ب- $F(x_0, y_0) = 0$

ج- $[F_x(x_0, y_0)]^2 + [F_y(x_0, y_0)]^2 \neq 0$

فيوجد جوار للنقطة (x_0,y_0) حيث تمثل فيه المعادلة $F(x,y)=0$ قوساً بسيطاً واقعاً في مستو. وتكون معادلة المماس لهذا القوس في النقطة (x_0,y_0) هي:

$$(X-x_0)F_x(x_0,y_0)+(Y-y_0)F_y(x_0,y_0)=0$$

10 – 17 النقاط الشاذة لمنحن سوي معطى بالمعادلة الضمنية

إذا لم نستثن الحالة:

$$F_y=0 \quad \text{و} \quad F_x=0$$

فإن المعادلة $F(x,y)=0$ لا تمثل منحنيات فقط ، وإنما أيضاً مناطق ، نقاط منعزلة وغيرها.

إذا كان الآن :

$$t \to \boldsymbol{r}(t)=(x=x(t),y=y(t))$$

تمثيلاً وسيطياً للمنحني $\mathscr{L}$ المعين بالمعادلة الضمنية $F(x,y)=0$ فعندئذ:

$$F(x(t),y(t))=0$$

وبالتالي :

$$F_x\,x'(t)+F_y\,y'(t)=0$$

ومنه:

$$\frac{x'(t)}{-F_y}=\frac{y'(t)}{F_x}$$

ممَّا يقتضي أن المتجهين :

$$\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t)) \quad \text{و} \quad (-F_y,F_x)$$

مرتبطان خطياً في كل نقطة من المنحني . وبالتالي يمكن أن تكون النقطة من المنحني شاذة إذا كان :

$$F_x=F_y=0$$

لنفترض أن (x_0, y_0) نقطة شاذة للمنحني $\mathscr{L}$, ولتكن $(x_0 + h, y_0 + k)$ نقطة مجاورة من المنحني $\mathscr{L}$. باستخدام دستور تايلور نجد أن:

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + h F_x(x_0, y_0) + k F_y(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}[h^2 F_{xx}(x_0, y_0) + 2hkF_{xy}(x_0, y_0) + k^2 F_{yy}(x_0, y_0)] + 0(x^2 + y^2)$$

لما كانت (x_0, y_0) نقطة شاذة من المنحني فإن :

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$F_x(x_0, y_0) = 0$$

$$F_y(x_0, y_0) = 0$$

وحيث أن $(x_0 + h, y_0 + k)$ نقطة من المنحني فإن :

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = 0$$

ومنه :

$$F_{xx}(x_0, y_0) + 2\frac{k}{h} F_{xy}(x_0, y_0) + (\frac{k}{h})^2 F_{yy}(x_0, y_0) = -\frac{2}{h^2} 0(h^2 + k^2)$$

إن النسبة $\frac{k}{h}$ تمثل ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين :

$$P = (x_0, y_0) \quad \text{و} \quad Q = (x_0 + h, y_0 + k)$$

وعندما تسعى Q إلى P فإن $\frac{k}{h}$ تسعى إلى ميل المماس للمنحني في النقطة P والذي نرمز له بـ m . وعندئذ:

$$m^2 F_{yy}(x_0, y_0) + 2mF_{xy}(x_0, y_0) + F_{xx}(x_0, y_0) = 0$$

ويمكن إيجاد قيمة m من المعادلة هذه شريطة ألا تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية مساوية جميعها الصفر في النقطة P .

نناقش جذور المعادلة حسب قيم المميز:

$$\Delta = [F_{xy}(x_0, y_0)]^2 - F_{xx}(x_0, y_0) F_{yy}(x_0, y_0)$$

1- إذا كان $\Delta > 0$ فيوجد فرعان للمنحني يمران من (x_0, y_0)، ولكل منهما مماس في هذه النقطة ، والمماسان متمايزان . نقول في هذه الحالة إن (x_0, y_0) هي عقدة للمنحني.

2- إذا كان $\Delta = 0$ فيوجد فرعان للمنحني يمران من (x_0, y_0) ولهما مماس مشترك . فإذا وقع الفرعان ، في جوار (x_0, y_0) ، في جهتين مختلفتين من المماس قلنا عن (x_0, y_0) إنها نقطة تراجع (قرنة) من النوع الأول للمنحني . وإذا وقع الفرعان في الجهة نفسها من المماس قلنا عن (x_0, y_0) إنها نقطة تراجع من النوع الثاني.

3- إذا كان $\Delta < 0$ فيوجد جوار لـ (x_0, y_0) لا يحوي أية نقطة أخرى من المنحني.

نقول عن (x_0, y_0) في هذه الحالة إنها نقطة منعزلة للمنحني.

10-18 أمثلة

1- النقطة $(0,0)$ هي نقطة منعزلة للمنحني المعين بالدالة الضمنية :

$$(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$$

2- إذا أخذنا المنحني المعين بالدالة الضمنية :

$$F(x, y) = x^2(x + 1) - (y - 1)^2 = 0$$

فنلاحظ أن المشتقين F_x و F_y ينعدمان معاً في النقطتين $(0,1)$ و $(-\frac{2}{3}, 1)$.

النقطة $(0,1)$ تقع على المنحني فهي نقطة شاذة . ولما كان في هذه النقطة:

$$\Delta = 4 > 0$$

فهي عقدة للمنحني .

النقطة $(-\frac{2}{3},1)$ لا تقع على المنحني .

3- النقطة $(0,0)$ هي نقطة تراجع للمنحني المعين بـــ :

$$F(x,y)=y^2-x^3=0$$

لأن :

$$F_x=F_y=0 \quad \text{و} \quad \Delta=0$$

في هذه النقطة . إن ميل المماس للمنحني في هذه النقطة هو الجذر المضاعف للمعادلة:

$$m^2F_{yy}(0,0)+2mF_{xy}(0,0)+F_{xx}(0,0)=0$$

وبالتالي فهو $m=0$. وتكون معادلة المماس هي :

$$y=0$$

إذا كتبنا معادلة المنحني بالشكل :

$$y=\mp\sqrt{x^3}$$

فنلاحظ أنه إذا أخذت x قيمة موجبة قريبة من الصفر، فإن y تأخذ قيمتين الأولى موجبة والثانية سالبة . وهذا يعني أن فرعي المنحني المارين من $(0,0)$ يقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمماس ، وهذا يعني أن $(0,0)$ هي نقطة تراجع من النوع الأول.

4- النقطة $(0,0)$ هي نقطة تراجع للمنحني المعين بـــ :

$$F(x,y)=(y-x^2)^2-x^5=0$$

ومعادلة المماس في هذه النقطة هي $y=0$

وإذا كتبنا معادلة المنحني بالشكل :

$$y=x^2(1\mp\sqrt{x})$$

فنلاحظ أنه إذا أخذت x قيمة موجبة قريبة من الصفر فإن y تأخذ قيمتين موجبتين متمايزتين.ممَّا يعني أن فرعي المنحني المارين من (0,0) يقعان (في جوار (0,0)) في الجهة نفسها من المماس ، وبالتالي فإن (0,0) هي نقطة تراجع من النوع الثاني .

تمرينات الفصل الأول

1 – أثبت أن التمثيلين الوسيطيين:

$$t \to r_1(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}, 2b\ \mathrm{Arctg}\, t\right)$$
$$\tau \to r_2(\tau) = (a\cos\tau, a\sin\tau, b\tau)$$

متكافئان.

2 – أثبت أن علاقة التكافؤ على التمثيلات الوسطية هي انعكاسية تناظرية ومتعدية.

3 – أثبت أن التمثيلين الوسيطيين:

$$t \to (\ln t, \sin(\ln t), t) \quad , \quad 0 < t < \infty$$
$$\tau \to (\tau, \sin\tau, e^{\tau}) \quad , \quad -\infty < \tau < \infty$$

متكافئان .

4 – أثبت أنه لا توجد نقاط شاذة للطريق :

$$[-2\pi, 2\pi] \to \Re^3 \qquad , t \to \left(1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

وأن المنحني المعين بهذا التمثيل يقع على الكرة التي مركزها o ونصف قطرها 2 وعلى الأسطوانة :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

5 – أثبت أن النقاط $t_k = 2k\pi$، حيث أن k عدد صحيح، هي نقاط شاذة أساسية للدويري . وأن $t = 0$ هي نقطة شاذة أساسية لـــ :

$$x = t^2 \quad , y = t^3$$

6 – أوجد تمثيلاً وسطياً لا يحوي جذوراً للمنحني الناتج عن تقاطع الأسطوانة :

$$x^2 + y^2 = 1$$

والمستوي :

$$x+y+z=1$$

7- أثبت وجود دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $[a,b]$ على الفترة $[0,1]$.
وكذلك وجود دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $]-\infty,\infty[$ على $]0,1[$

8- أوجد طول الطريق :

$$r(t)=(3\,\mathrm{ch}\,2t\ ,3\,\mathrm{sh}\,2t\ ,6t)\quad ,0\le t\le\pi$$

9- أوجد تمثيلاً طبيعياً للمنحني:

$$r(t)=(e^t\cos t\ ,e^t\sin t,e^t),\ -\infty<t<+\infty$$

10- أوجد طول قوس واحد $0\le t\le 2\pi$ للدويري . أوجد طول جزء الدويري بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين 0 و t للوسيط ، ومن ثم أوجد تمثيلاً طبيعياً له.

11- أوجد طول السحي بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين $\frac{\pi}{2}$ و t للوسيط ($\frac{\pi}{2}$ نقطة شاذة) .

12- أثبت أن :

$$x=a(\ln t+\frac{1-t^2}{1+t^2})\quad ,y=\frac{2at}{1+t^2}\qquad 0<t<\infty$$

هو تمثيل وسيطي آخر للسحي.

13- أثبت أن مماسات اللولب في نقاط مختلفة منه ، تقطع بزاوية ثابتة محور z .

14- أثبت أنه إذا تقاطعت جميع مماسات منحن في النقطة نفسها كان خطاً مستقيماً.

15- أوجد المنحني الناتج عن تقاطع المستوي oxy والمستقيمات المماسة للولب:

$$t\to r(t)=(\cos t\ ,\sin t\ ,t)\qquad ,\ t\rangle o$$

16- أثبت أن المتجهات المماسة على طول المنحني :

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}t, t^2, t^3\right)$$

تصنع زاوية ثابتة مع المتجه $u = (1,0,1)$.

17- أوجد معادلة المستوي الملاصق لكل من المنحنيات:

أ- $x = y \quad , \quad x = \frac{1}{2}z^2$

ب- $x = t^2 \ , \ y = 1 - t^2 \ , \ z = 2t$

ج- $x = t \ , \ y = t^2 \ , \ z = t^3$

وذلك في النقطة الموافقة لقيمة الوسيط $t = 1$

18- أثبت أن المستقيم :

$$x = x_0 \ , \ y = y_0$$

هو مقارب للمنحني :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

عندما $t \to \infty$ إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = \pm\infty$$

19- أثبت أن محور z هو مقارب للمنحني :

$$x = e^{-t}\cos e^t$$

$$y = e^{-t}\sin e^t$$

$$z = t$$

عندما $t \to \infty$.

أوجد متجه الوحدة المماس لهذا المنحني، وأثبت أن ليس له نهاية عندما $t \to -\infty$

20- أوجد المستقيم المقارب للمنحني :

$$x=e^t \cos t$$

$$y=e^t \sin t$$

$$z=\frac{1}{t}$$

حيث : $0<t<\infty$

عندما $t\to 0$ وعندما $t\to\infty$.

21 – بفرض $0<t<\infty$ أوجد المستقيم المقارب للمنحني :

$$x=\frac{\cos t-\sin t}{\sqrt{t}}$$

$$y=\frac{\cos t+\sin t}{\sqrt{t}}$$

$$z=t$$

عندما $t\to 0$ وعندما $t\to\infty$.

22 – إذا كان :

$$t\to r(t)$$

تمثيلاً لمنحن $\mathscr{C}$ فأثبت أن المتجه $r'(t)$ هو تركيب خطي بـ n, t (يوازي المستوي الملاصق) وأوجد معاملاته .

23 – أوجد تقاطع المستوي oxy والمستوي الناظم للمنحني :

$$r(t)=(\cos t, \sin t, t)$$

في النقطة $t=\frac{\pi}{2}$

24 – أوجد ثلاثية فرينيه في نقطة t من المنحني :

$$r(t)=(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$$

25 – أوجد تقوس كلا من المنحنيات : اللولب ، الدويري ، السحي

26 – أوجد تقوس السلسلي الذي يمثل بـــ :

$$y = a\,ch\frac{x}{a} \quad , z = 0$$

27 – أوجد تقوس المنحني :

$$r(t) = (t - \sin t\ ,\ 1 - \cos t\ ,\ t)$$

28 – أوجد مراكز تقوس القطع الناقص :

$$x = a\cos t$$

$$y = b\sin t$$

وذلك في نقاط تقاطعه مع محاوره .

29 – أثبت أن مراكز تقوس لولب $\mathscr{C}$ تشكل لولباً $\mathscr{C}_1$ أيضاً ، له محور اللولب الأول نفسه.

30 – أوجد معادلة المستقيم القطبي للولب في نقطة منه .

31 – أثبت أن مماس منحن في نقطة ما ، والمماس في النقطة المقابلة من المحل الهندسي لمراكز تقوس المنحني ، لهما اتجاهان متعامدان .

32 – أوجد تقوس والتفاف كل من المنحنيات :

أ – $x = t\ ,\ y = t^2\ ,\ z = t^3$

ب – $y = f(x) \quad , z = g(x)$

ج – $x = 3t - t^3\ ,\ y = 3t^2\ ,\ z = 3t + t^3$

د – $x = t\ ,\ y = \frac{1+t}{t}\ ,\ z = \frac{1-t^2}{t}$

هـ – $x = a(t - \sin t)\ ,\ y = a(1 - \cos t)\ ,\ z = bt$

33 – أثبت أنه إذا كان $r=r(s)$ تمثيلاً طبيعياً لمنحن ذي تقوس ثابت فإن:

$$s \to r_1(s) = \int_0^s b(u)\,du$$

هو تمثيل لمنحن ذي التفاف ثابت .

34 – أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحني $s \to r(s)$ سوياً هو أن يكون التفافه معدوماً في جميع نقاطه .

35 – أثبت أن المنحني :

$$r(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$$

يقع في مستوٍ .

36 – أثبت أن تقوس المنحني السوي الممثل بالمعادلة القطبية

$$r = r(\theta)$$

يعطى بـ :

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

37 – أوجد مسقط اللولب :

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

على كل من المستويات : الملاصق ، الناظم ، القائم .

وذلك في جوار النقطة $t=\frac{\pi}{4}$.

38 – أوجد منشوراً لكل من المنحنيات : اللولب ، الدويري ، السحبي .

39 – أوجد ناشراً للولب .

40 – أثبت أن تقوس الناشر:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + (c-s)\,\boldsymbol{t}$$

للمنحني :

$$s \to \boldsymbol{r}(s)$$

يعطي بـــ :

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2\,\kappa^2}$$

41 – أثبت أن متجه وحدة ثنائي الناظم للناشر :

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + (c-s)\,\boldsymbol{t}$$

للمنحني :

$$s \to \boldsymbol{r}(s)$$

يعطي بـــ :

$$\boldsymbol{b}^* = \frac{\kappa \boldsymbol{b} + \tau \boldsymbol{t}}{|(c-s)\,\kappa|\kappa^*}$$

42 – أوجد تمثيلاً وسطياً للمنحني الذي معادلتاه الطبيعيتان :

أ – $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2s}}$, $\tau = 0$

ب – $\kappa = a\cos s$, $\tau = a\sin s$

43 – أوجد المعادلتين الطبيعيتين للسلسلي :

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(a\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\,,\ t\,,\ 0\right) \qquad , \qquad a = const.$$

44 – أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحني :

$$x = at$$

$$y = bt^2$$

$$z = t^3$$

لولباً معمماً هو أن يكون :

$$2b^2 = 3a$$

45 – ليكن:

$$s \to r(s)$$

تمثيلاً من الصف C_4 لمنحن $\mathscr{C}$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون هذا المنحني لولباً معمماً ، هو أن يحقق المتطابقة :

$$\frac{d^2r}{ds^2} \cdot \frac{d^3r}{ds^3} \cdot \frac{d^4r}{ds^4} = 0$$

(إرشاد : عبر عن $\frac{\tau}{\kappa}$ بدلالة r ومشتقاته واشتق المعادلة $\frac{\tau}{\kappa} = const.$)

46 – أثبت أن المسافة بين أية نقطتين متقابلتين ، من منحنيي برتراند، ثابتة. وأن زاوية مماسي المنحنيين في نقطتين متقابلتين ، ثابتة أيضاً .

47 – أثبت أن تقوس والتفاف دليل المماسات لمنحن $s \to r(s)$ تقوسه κ ، والتفافه τ يعطيان بالعلاقات :

$$\kappa_1^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}$$

$$\tau_1 = \frac{\tau\dot{\kappa} - \kappa\dot{\tau}}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

48 – أثبت أن تقوس والتفاف دليل ثنائي الناظم (الدليل الكروي لـــ b) للمنحني:

$$s \to r(s)$$

يعطيان بـــ :

$$\kappa_3^2 = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\tau^2}$$

$$\tau_3 = \frac{\tau\dot{\kappa} - \kappa\dot{\tau}}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)}$$

49 – ادرس النقاط الشاذة للمنحنيات الممثلة بالمعادلات :

أ – $x^2 + y^2 - x^3 = 0$

ب – $y^2 - x^3 + (x+y)^2 = 0$

ج – $y^2(2+x) - x^3 = 0$

د – $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$

هـ – $(x^2+y^2)^2 - 4x^2 = 0$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

السطوح في الفضاء ثلاثي الأبعاد

1- التمثيل الوسيطي للسطوح .

2- المستوي المماس لسطح ومتجه وحدة الناظم .

3- بعض السطوح الشهيرة .

4- مغلف عائلة سطوح والسطوح القابلة للنشر .

تمرينات الفصل الثاني .

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

السطوح في الفضاء ثلاثي الأبعاد

1- التمثيل الوسيطي للسطوح

1-1 تعريف (شطر السطح)

نقول عن مجموعة F من نقاط الفضاء ثلاثي الأبعاد، إنها شطر بسيط لسطح، إذا وُجِدَ تقابل (تطبيق غامر ومتباين) مستمر بينها وبين مستطيل في المستوي .

بعبارة أخرى ؛ فإن شطر السطح هو مجموعة نقط في الفضاء الثلاثي، متجهات موضعها هي قيم دالة متجهية متباينة ومستمرة معرفة على مستطيل :

$$r:\ [a,b]\times[c,d]\to \Re^3$$
$$(u^1,u^2)\to r\,(u^1,u^2)$$

نقول عادة عن الدالة:

$$r=r\,(u^1,u^2)$$

إنها تمثيل وسيطي لشطر السطح .

تجدر الملاحظة إلى أننا رمزنا للوسيطين بالحرف ذاته ، ولكن بدليلين علويين مختلفين 1 و 2. فمثلاً u^2 هو الوسيط الثاني وليس مربع u .

1-2 مثال

إذا رمزنا بـــ S لبيان الدالة .

$$(x,y)\to z=f\,(x,y)$$

المعرفة والمستمرة على المستطيل :

$$\Delta=[a,b]\times[c,d]$$

أي :

$$S = \{ (x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \Delta \}$$

فإن S هو شطر بسيط لسطح معين بالدالة .

$$r: \Delta \to \Re^3$$

$$(x,y) \to r(x,y) = x\,i + y\,j + f(x,y)\,k$$

والتي نكتبها اختصاراً بـــ:

$$r = (x, y, f(x,y))$$

أو أيضاً:

$$r = (x = u^1, y = u^2, z = f(u^1, u^2))$$

3 – 1 ملاحظة

يمكن القول إننا نستطيع الحصول على شطر بسيط لسطح ، بمط أو ضغط أو انحناء لمستطيل من دون تمزيق أو لزق .

ونستطيع أن نستخدم بدلاً عن المستطيل ، في هذا التعريف ، أي مجموعة جزئية من المستوي ، مغلقة وبسيطة الترابط ، وخاصة قرص مغلق .

إذاً فالأسطوانة ليست شطراً بسيطاً لسطح ، لأننا لا نستطيع الحصول على سطح الأسطوانة ، من مستطيل من دون القيام بعملية لزق . وبشكل مشابه فليس سطح الكرة شطر سطح .

ولكننا إذا أزلنا شريطاً من سطح أسطوانة حصلنا على شطر سطح . كما أن كرة دون قبعة مفتوحة هي شطر سطح . ولذلك فإن كلاً من الأسطوانة والكرة يمكن أن يغطى بشطرين بسيطين ، ولكن الطارة تحتاج إلى أربعة أشطر لتغطيتها .

1-4 تعريف

نقول عن مجموعة متصلة (مترابطة) $\mathcal{F}$ ، من نقاط الفضاء الثلاثي ، إنها **سطح عادي**، إذا وجد لكل نقطة p من $\mathcal{F}$ ، جوار $\mathcal{U}$ في $\mathcal{F}$ ، حيث تكون غلاقته شطر سطح . والمقصود هنا بجوار النقطة p في $\mathcal{F}$ ، المركبة المترابطة لـ p في تقاطع $\mathcal{F}$ مع مجموعة مفتوحة ، من الفضاء الثلاثي ، تحوي p .

إذاً يوجد لكل نقطة p من سطح عادي جزء من هذا السطح، يحوي p، حيث يكون شطراً بسيطاً .

1-5 ملاحظة

إن تعريفنا لجوار النقطة p في $\mathcal{F}$ ، يختلف عن التعريف المألوف للجوار ، في الطبولوجيا المحدثة للفضاء الجزئي $\mathcal{F}$ ، فتعريفنا هذا يعرّف على $\mathcal{F}$ طبولوجيا تدعى الطبولوجيا الأصيلة لـ $\mathcal{F}$. ومع أن هذه الطبولوجيا تتطابق مع الطبولوجيا المحدثة في حالات عديدة ، كما في الكرة والطارة ، غير أنهما مختلفتان في الحالة العامة .

1-6 أمثلة

1- القرص الدائري المغلق هو شطر بسيط لسطح .

2- الكرة هي سطح عادي وكذلك الأسطوانة .

3- لنأخذ المنحني المؤلف من القطعة المستقيمة $]-1,1[$ من محور y ، ومن بيان الدالة:

$$x \to y = \sin \frac{1}{x} \quad , 0 < x < \frac{2}{\pi}$$

ومن القوس الواصل بين النقطتين $(0,-1)$ و $(\frac{2}{\pi},1)$ بما أننا نستطيع تمثيل هذا المنحني طبيعياً (الوسيط طول القوس) فهو منحن عادي . وبالتالي فالسطح الأسطواني المشكل من النواظم على المستوي oxy والمارة من نقاط المنحني هو سطح عادي. إذا

كانت p نقطة من هذا السطح ، حيث يقع مسقطها على القطعة المستقيمة $[-1,1]$ من محور y ، فإن أي جوار صغير جداً لـــ p في هذا السطح سيكون قرصاً دائرياً .
ولكن أي جوار لـــ p في الطبولوجيا المحدثة سيحوي ـــ إضافةً إلى القرص ـــ نقاطاً من السطح تقع مساقطها على بيان الدالة .
وهذا مثال لا تتطابق فيه الطبولوجيا الأصيلة للسطح مع الطبولوجيا المحدثة .

1-7 تعريف

نقول عن السطح العادي $\mathcal{S}$ إنه من الصف C_n إذا وجد ، لكل نقطة منه ، جوار في $\mathcal{S}$ ، له تمثيل وسيطي:

$$(u^1,u^2) \to r\ (u^1,u^2)$$

من الصف C_n .

نقول عن النقطة p من السطح التي تقابل القيمتين (u_0^1, u_0^2) للوسيطين إنها نقطة نظامية بالنسبة للتمثيل إذا كان :

$$r_1(u_0^1, u_0^2) \times r_2(u_0^1, u_0^2) \neq 0$$

حيث :

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$$

$$r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$$

وإذا تحقق :

$$r_1 \times r_2 = 0$$

في نقطة فنقول عنها إنها شاذة بالنسبة للتمثيل .
نقول عن النقطة p من السطح إنها شاذة إذا كانت شاذة بالنسبة لكل تمثيل.
وأخيراً إذا كان:

$$r(u^1,u^2) = x(u^1,u^2)i + y(u^1,u^2)j + z(u^1,u^2)k$$

فإن شطر السطح يعين بالمعادلات:

$$x = x(u^1,u^2)$$

$$y = y(u^1,u^2)$$

$$z = z(u^1,u^2)$$

والتي تسمى المعادلات الوسيطية (أو تمثيلاً وسيطياً) لشطر السطح .

وعندئذٍ إن الشرط:

$$r_1 \times r_2 \neq 0$$

يكافئ الشرط :

$$rank \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 2$$

حيث:

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial u^i} \quad , \quad y_i = \frac{\partial y}{\partial u^i} \quad , \quad x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$$

1 – 8 تعريف

إذا كان :

$$(u^1,u^2) \rightarrow r(u^1,u^2)$$

تمثيلاً لشطر سطح فإن كل قيمة للثنائية (u^1,u^2) تعين نقطة من السطح ، ولذلك نقول عن الوسيطين u^1,u^2 إنهما الإحداثيان المنحنيان على السطح .

وإذا ثبتنا أحد الوسيطين $u^2 = c$ وجعلنا u^1 يتغير فإن النقاط المقابلة على السطح تقع على منحن يمثل بـــ :

$$u^1 \rightarrow r(u^1,c)$$

أو اختصاراً بـــ :

$$u^2 = c$$

ونسميه المنحني الإحداثي ذا الوسيط u^1 . وبشكل مشابه نعرف المنحني الإحداثي ذا الوسيط u^2 :

$$u^2 \to r(c,u^2)$$

من الواضح أن المنحنيات الإحداثية ذات الوسيط u^1 والمنحنيات الإحداثية ذات الوسيط u^2 تشكل شبكة منحنيات إحداثية على السطح ، ويمر من كل نقطة نظامية بالنسبة للتمثيل منحن ذو وسيط u^1 وآخر ذو وسيط u^2 .

وإذا كان:

$$t \to \phi(t) = (u^1(t), u^2(t))$$

منحنياً واقعاً في مجموعة تعريف r فإن الدالة :

$$t \to (r \circ \phi)(t) = r(u^1(t), u^2(t))$$

تمثل منحنياً واقعاً على السطح ، نقول عادة إنه يعين بالمعادلتين:

$$u^1 = u^1(t) \quad , \quad u^2 = u^2(t)$$

لما كان الآن :

$$\frac{d(r \circ \phi)}{dt} = r_1\left(u^1(t), u^2(t)\right)\frac{du^1}{dt}(t) + r_2\left(u^1(t), u^2(t)\right)\frac{du^2(t)}{dt}$$

فإن المتجه :

$$(r \circ \phi)'(t)$$

الذي يوازي المماس للمنحني هو تركيب خطي بالمتجهين :

$$r_1(u^1(t), u^2(t))$$

الذي يوازي مماس المنحني الإحداثي ذي الوسيط u^1 ، و :

$$r_2(u^1(t), u^2(t))$$

الذي يوازي مماس المنحني الإحداثي ذي الوسيط u^2 .

1-9 ملاحظة

إن السطح نفسه يمكن أن يمثل بطرق مختلفة ، فإذا كانت الإحداثيات المنحنية (u^1,u^2) مرتبطة بإحداثيات منحنية أخرى $(u^{1'},u^{2'})$ بالعلاقات .

$$u^1 = u^1(u^{1'},u^{2'})$$
$$u^2 = u^2(u^{1'},u^{2'})$$

وكان السطح ممثلاً بالدالة :

$$(u^1,u^2) \to r(u^1,u^2)$$

فإن الدالة .

$$(u^{1'},u^{2'}) \to r_*(u^{1'},u^{2'}) = r\left(u^1(u^{1'},u^{2'}),\ u^2(u^{1'},u^{2'})\right)$$

هي تمثيل وسيطي آخر للسطح نفسه .

أخيراً إذا كان المعين اليعقوبي

$$\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(u^{1'},u^{2'})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial u^{1'}} & \dfrac{\partial u^2}{\partial u^{1'}} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial u^{2'}} & \dfrac{\partial u^2}{\partial u^{2'}} \end{vmatrix}$$

لا يساوي الصفر ، فلن تظهر في التمثيل الجديد نقاط شاذة أخرى لأن :

$$r_{1'} \times r_{2'} = \frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(u^{1'},u^{2'})}\ (r_1 \times r_2) \qquad (1,1)$$

1-10 أمثلة

1- إذا كانت :

$$p_k = (a_k\ ,\ b_k\ ,\ c_k) \qquad ،\qquad k = 0,1,2$$

ثلاثة عناصر (متجهات) من الفضاء ثلاثي الأبعاد ، فإن الدالة :

$$(\lambda,\mu) \to r(\lambda,\mu) = p_0 + \lambda\, p_1 + \mu\, p_2$$

هي تمثيل وسيطي للمستوي المار بالنقطة التي متجه موضعها $\boldsymbol{p}_0$ ، والموازي للمتجهين $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ (إذا كانا مستقلين خطياً) . وإذا كان $\boldsymbol{P}=(X,Y,Z)$ متجه الموضع لنقطة متحركة على المستوي ، فالمعادلة الكارتيزية له هي :

$$\begin{vmatrix} X-a_0 & Y-b_0 & Z-c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

2- إذا كان المستوي منطبقاً عل المستوي الإحداثي oxy ، فإنه يمثل بـــ :

$$(u^1,u^2) \to \boldsymbol{r}(u^1,u^2) = (x=u^1,\ y=u^2,\ z=0)$$

أو أيضاً بـــ :

$$(\rho,\theta) \to \boldsymbol{r}_*(\rho,\theta) = (x=\rho\cos\theta\ ,\ y=\rho\sin\theta,\ z=0)$$

حيث θ, ρ الإحداثيان القطبيان في المستوي .

نستنتج بسهولة أن المبدأ ليس نظامياً في التمثيل الأخير . كما نلاحظ أن المنحنيات الإحداثية للمستوي في الإحداثيات الكارتيزية هي مستقيمات موازية للمحاور ، في حين أنها أشعة ودوائر في الإحداثيات القطبية .

3- الكرة :

إن موضع نقطة P من سطح الكرة :

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

يتعين بالوسيطين : ϕ و θ حيث ϕ الزاوية الموجَّهة للمستوي oxz والمستوي المار بـــ P ومحور z، و θ الزاوية التي يصنعها المستقيم OP مع المستوي oxy

وبإشارة + عندما $z>0$ وإشارة − عندما $z<0$. إن هذين الإحداثيين يعينان مواضع نقاط الكرة جميعها باستثناء القطبين:

$$(0,0,a) \quad \text{و} \quad (0,0,-a)$$

وهذان القطبان يقابلان القيمتين:

$$\theta=\frac{\pi}{2} \qquad \text{و} \qquad \theta=-\frac{\pi}{2}$$

على الترتيب ، وأي قيمة لـــ ϕ .

إذاً فالمعادلات الوسيطية لهذه الكرة هي

$$x=a\cos\theta\ \cos\phi$$

$$y=a\cos\theta\ \sin\phi$$

$$z=a\sin\theta$$

نقول عن المنحنيات الإحداثية :

$$\phi=const.$$

إنها خطوط الطول (وهي أنصاف دوائر عظمى مارة بالقطبين)، ونقول عن المنحنيات الإحداثية :

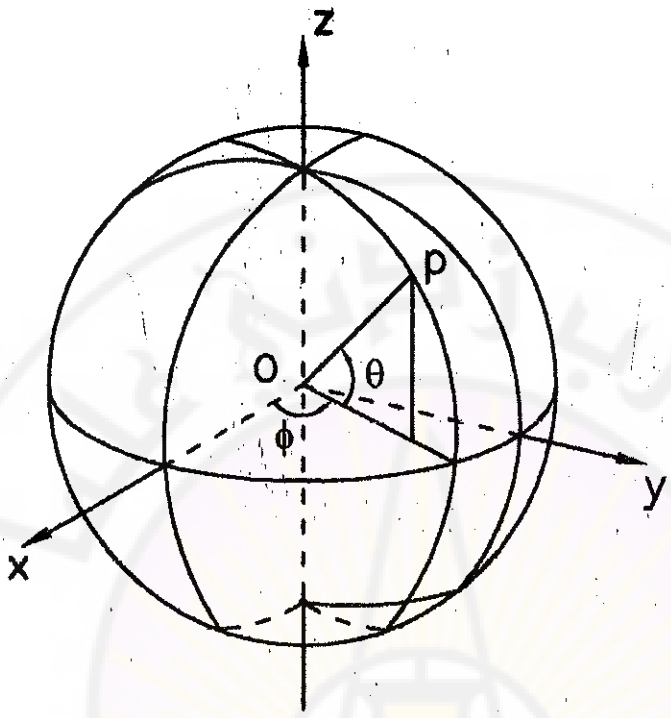
$$\theta=const.$$

إنها خطوط العرض .

ومن الواضح أن :

$$\theta=0$$

والذي يسمى خط الاستواء هو دائرة عظمى في حين أن بقية دوائر العرض ليست دوائرَ عظمى .



الشكل -1-

1-11 تعريف (المعادلة الضمنية لسطح)

على الرغم من أن دراستنا للسطوح كانت من خلال التمثيل الوسيطي ؛ إلا أن ذلك لا يمنعنا من الإشارة إلى طريقة أخرى لتمثيل السطوح معروفة للقارئ من الهندسة التحليلية. إنها المعادلة الضمنية من الشكل :

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1,2)$$

كمعادلة المستوي:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ومعادلة الكرة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

وغيرها .

إن مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة (1,2) ، ومن دون افتراضات أخرى على الدالة الحقيقية F ، يمكن أن تمتد من المجموعة الخالية إلى الفضاء الكلي .

ولكن إذا حققت F بعض الشروط فإن هذه المجموعة هي سطح ، وعندئذٍ نقول عن (1,2) إنها المعادلة الضمنية للسطح .

1-12 مبرهنة

لتكن :

$$(x, y, z) \to F(x, y, z)$$

دالة حقيقية من الصف C_n $(n \geq 1)$ ، على جوار للنقطة (x_0, y_0, z_0) ، ولنفترض أن :

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

وأن أحد المشتقات الجزئية (على الأقل) لـ F في هذه النقطة لا يساوي الصفر. عندئذٍ يوجد جوار U لهذه النقطة في الفضاء حيث تشكل نقاط $\overline{U}$ (U غلاقة $\overline{U}$) التي تحقق المعادلة :

$$F(x, y, z) = 0$$

شطراً بسيطاً لسطح يقبل تمثيلاً نظامياً من الصف C_n .

البرهان :

إذا افترضنا أن:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

فإنه يترتب على مبرهنة الدوال الضمنية وجود جوار V للنقطة (x_0,y_0) في $\Re^2$ ودالة وحيدة :

$$\phi : V \to R$$

$$(x,y) \to \phi\,(x,y)$$

من الصف C_n حيث يكون:

$$z_\circ = \phi\,(x_\circ, y_\circ)$$

$$F(x,y,\phi\,(x,y)) = 0 \quad , \forall (x,y) \in V$$

كما يوجد جوار U للنقطة $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ في $\Re^3$ حيث تكون العلاقتان:

$$(x,y,z) \in u \quad , \; F(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

$$z = \phi\,(x,y) \quad , (x,y) \in V \qquad (2)$$

متكافئتين .

وبالتالي فالدالة:

$$V \to \Re^3$$

$$(u^1,u^2) \to r(u^1,u^2) = (x = u^1, y = u^2, z = \phi\,(u^1,u^2))$$

هي تمثيل من الصف C_n . وإذا أخذنا في الحسبان أن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{Fy}{F_z}$$

فإن مركبات المتجهات :

$$r_1 \times r_2 \quad \text{و} \quad r_2 \quad \text{و} \quad r_1$$

هي على الترتيب :

$$(1,0,-\frac{F_x}{F_z}) \quad و \quad (0,1,-\frac{F_y}{F_z}) \quad و \quad (\frac{F_x}{F_z},\frac{F_y}{F_z},1)$$

ممّا يقتضي نظامية التمثيل. أخيراً إذا اخترنا جواراً U_1 حيث يكون $\overline{U}_1 \subseteq U$ فنجد المطلوب .

13-1 ملاحظة

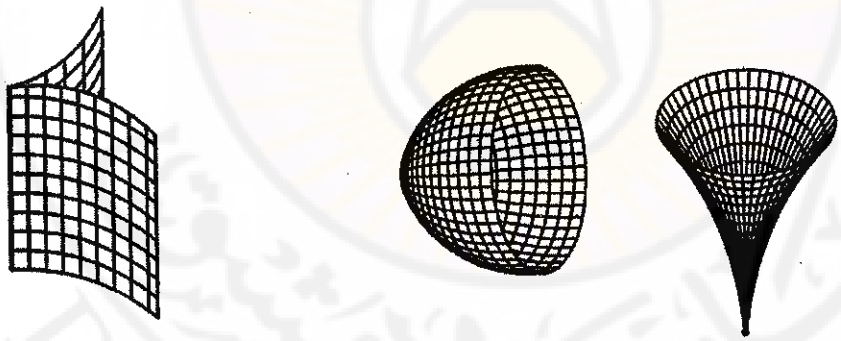
يمكن لبعض النقاط المنعزلة للسطح:

$$F(x,y,z)=0$$

أو لنقاط منحن واقع عليه أن يتحقق فيها:

$$F_x = F_y = F_z = 0$$

نقول في هذه الحالة عن هذه النقاط إنها نقاط شاذة للسطح. وتظهر الأشكال المجاورة بعض أنماط النقاط الشاذة.



نقطة شاذة　　نقطة شاذة منعزلة　　خط نقاط شاذة

الشكل -2-

2- المستوي المماس لسطح ومتجه وحدة الناظم

2-1 تعريف

لتكن P_0 نقطة نظامية من سطح و P نقطة متحركة .نقول عن المستوي $\mathscr{L}$ المار بـــ P_0 والذي يكون من أجله:

$$d(P,\mathscr{L})^*$$

لا متناه في الصغر من أعلى مرتبة ممكنة بالنسبة إلى البعد P_0P ، إنه المستوي المماس للسطح في P_0 .

ونقول عن المستقيم المار بـــ P_0 والعمودي على المستوي المماس في P_0 ، إنه المستقيم الناظم للسطح في P_0 ونقول عن كل متجه يوازي الناظم إنه متجه ناظم للسطح في P_0.

2-2 مبرهنة

ليكن S سطحاً من الصف C_1 ، و

$$(u^1,u^2)\to r(u^1,u^2)$$

تمثيلاً وسيطياً للسطح في جوار نقطة نظامية $P_0=(u_0^1,u_0^2)$ منه .

عندئذٍ يوجد في P_0 مستو مماس وحيد معين بالمتجهين

$$r_1(u_0^1,u_0^2)=r_{1,0}$$

$$r_2(u_0^1,u_0^2)=r_{2,0}$$

وبالتالي فإن :

$$r_1(u_0^1,u_0^2)\times r_2(u_0^1,u_0^2)$$

---

* (بعد P عن $\mathscr{L}$)

هو متجه ناظم .

ومعادلة المستوي المماس هي :

$$(\lambda,\mu)\to \boldsymbol{R}(\lambda,\mu)= \boldsymbol{r}(u_0^1, u_0^2)+\lambda \boldsymbol{r}_1(u_0^1, u_0^2)+\mu \boldsymbol{r}_2(u_0^1, u_0^2)$$

أو أيضاً

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(u_0^1, u_0^2)\ ,\ \boldsymbol{r}_1(u_0^1, u_0^2)\ ,\ \boldsymbol{r}_2(u_0^1, u_0^2)]=0$$

البرهان

إذا كان $\mathscr{L}$ مستوياً ماراً بـ P_0 فإن معادلته هي :

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0)\cdot \boldsymbol{N}=0$$

حيث :

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(u_0^1, u_0^2)$$

و $\boldsymbol{R}$ متجه الموضع لنقطة متحركة على المستوي و $\boldsymbol{N}$ متجه عمودي على المستوي.

وإذا كانت P نقطة من السطح متجه موضعها:

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$$

فإن بعدها عن المستوي $\mathscr{L}$ يعطى بالعلاقة :

$$d(P,\ \mathscr{L})=\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot \boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}$$

في حين أن بعد P عن P_0 يساوي:

$$\rho=\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\|$$

إذا استخدمنا صيغة تايلور ووضعنا :

$$h^i=u^i-u_0^i \qquad , \ i=1,2 \qquad \text{و} \qquad \boldsymbol{r}_i(u_0^1, u_0^2)=\boldsymbol{r}_{i,0}$$

فنجد العلاقة

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=h^1\ \boldsymbol{r}_{1,0}+h^2\boldsymbol{r}_{2,0}+\boldsymbol{0}(\sqrt{(h^1)^2+(h^2)^2})$$

التي تبين أن ρ له مرتبة $\sqrt{(h^1)^2+(h^2)^2}$ ذاتها .

زد على ذلك أن :

$$d(p,\mathscr{L}) = h^1 \frac{r_{1,0}\cdot N}{\|N\|} + h^2 \frac{r_{2,0}\cdot N}{\|N\|} + \boldsymbol{0}(\sqrt{(h^1)^2+(h^2)^2})$$

وعندئذٍ فإن :

$$r_{2,0}\cdot N = 0 \ , \ r_{1,0}\cdot N = 0 \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{d(P,\ell)}{\rho} = 0$$

ولما كانت P_0 نقطة نظامية فالمتجهان $r_{1,0}$, $r_{2,0}$ مستقلان خطياً والمتجه الناظم يتعين بـــ :

$$N = \alpha\, r_{1,0}\times r_{2,0} \qquad , \ \alpha\neq 0$$

يترتب على ذلك وجود المستوي المماس الذي يعامد المتجه :

$$r_{1,0}\times r_{2,0}$$

2 – 3 نتيجة

إذا كان السطح معيناً بالتمثيل :

$$r(u^1,u^2) = (x(u^1,u^2)\ ,\ y(u^1,u^2)\ ,\ z(u^1,u^2))$$

فإن معادلة المستوي المماس هي النقطة (u_0^1, u_0^2) هي :

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ x_1(u_0^1,u_0^2) & y_1(u_0^1,u_0^2) & z_1(u_0^1,u_0^2) \\ x_2(u_0^1,u_0^2) & y_2(u_0^1,u_0^2) & z_2(u_0^1,u_0^2) \end{vmatrix} = 0$$

حيث:

$$x_0 = x(u_0^1, u_0^2)$$
$$y_0 = y(u_0^1, u_0^2)$$
$$z_0 = z(u_0^1, u_0^2)$$

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} \qquad ,i=1,2 \qquad \text{و}$$

$$y_i = \frac{\partial y}{\partial u^i} \qquad ,i=1,2$$

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial u^i} \qquad ,i=1,2$$

وخصوصاً إذا كان السطح معيناً بالدالة:

$$z=f(x,y)$$

فإن معادلة المستوي المماس في النقطة $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ هي :

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$(X-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(Y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = Z-z_0$$

أما إذا كان السطح معيناً بمعادلته الضمنية:

$$F(x,y,z)=0$$

فإن معادلة المستوي المماس في النقطة $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ هي:

$$(X-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(Y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(Z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0)=0$$

4-2 ملاحظة

إذا كان السطح معيناً بمعادلته الضمنية:

$$F(x,y,z)=0$$

فإن المتجه:

$$(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1)$$

وبالتالي المتجه:

$$(F_x, F_y, F_z)$$

المرتبط معه خطياً $(F_z \neq 0)$ هو متجه ناظم على السطح (المبرهنة 1-12 والمبرهنة 2-2) . نقول عن المتجه:

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

إنه تدرج الدالة F في النقطة (x_0, y_0, z_0) ، ونرمز له بـــ :

$$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0)$$

أو:

$$\overrightarrow{grad}\, F(x_0, y_0, z_0)$$

2-5 تعريف

نسمي متجهاً مماساً، لسطح $\mathscr{S}$ ، في نقطة نظامية منه، أي متجه مماس، في هذه النقطة، لمنحن واقع على السطح.

2-6 مبرهنة

إن مجموعة المتجهات المماسة لسطح ، في نقطة نظامية منه ، تشكل فضاء متجهات ذا بعد 2 (وهو المستوي المماس للسطح في تلك النقطة) .

البرهان :

إذا كان:

$$(u^1, u^2) \to r(u^1, u^2)$$

تمثيلاً للسطح في جوار النقطة النظامية (u_0^1, u_0^2) منـــه ، فإن أي منحن واقع على السطح ، ومار بالنقطة (u_0^1, u_0^2) ، يمثل بدالة من الشكل :

$$t \to r(u^1(t), u^2(t)) \quad , \quad t \in [a, b]$$

حيث :

$$t \to u^2(t) \quad , \quad t \to u^1(t)$$

دالتان حقيقيتان تحققان :

$$u^1(t_0) = u_0^1 \ , \ u^2(t_0) = u_0^2 \qquad , \ t_0 \in [a,b]$$

ولما كان :

$$\frac{dr}{dt}(t_0) = \frac{du^1}{dt}(t_0)\, r_1(u_0^1, u_0^2) \ + \frac{du^2}{dt}(t_0)\, r_2(u_0^1, u_0^2)$$

فإن أي متجه مماس للسطح هو تركيب خطي بالمتجهين :

$$r_1(u_0^1, u_0^2) = r_{1,0}$$

$$r_2(u_0^1, u_0^2) = r_{2,0}$$

المستقلين خطياً فرضاً .

وبالعكس إذا كان المتجه w تركيباً خطياً بهذين المتجهين أي:

$$w = a\, r_{1,0} + b\, r_{2,0}$$

فإننا إذا أخذنا المنحني الواقع على السطح الممثل بـــ :

$$t \to r\,[(u^1 = u_0^1 + a(t - t_0) \ , \ u^2 = u_0^2 + b(t - t_0)]$$

لوجدنا أن:

$$w = \frac{dr}{dt}(t_0)$$

ممَّا يعني أن w هو متجه مماس للسطح في النقطة النظامية (u_0^1, u_0^2) .

2 – 7 نتيجة

إذا كان:

$$(u^1, u^2) \to r(u^1, u^2)$$

تمثيلاً لسطح في جوار نقطة نظامية (u_0^1, u_0^2) منه ، فإن المتجهين:

$$r_{1,0} = r_1(u_0^1, u_0^2)$$

$$r_{2,0} = r_2(u_0^1, u_0^2)$$

يشكلان قاعدة لفضاء المتجهات المماسة للسطح في هذه النقطة .نقول عن هذه القاعدة إنها القاعدة الطبيعية لفضاء المتجهات المماسة في (u_0^1, u_0^2).

2 – 8 توجيه السطح

إذا اخترنا، في نقطة P من سطح ، متجه وحدة ناظم m ، فإننا نعرف الوجه الموجب والوجه السالب للسطح في P ، كما يعين في الوقت نفسه توجيهاً للمستوي المماس في P .

فإذا كان a_1 ، a_1 متجهين موازيين للمستوي المماس للسطح في P، فنقول عن الزوج المرتب (a_1, a_2) إنه ذو توجيه موجب إذا كانت الثلاثية (a_1, a_2, m) ذات توجيه موجب. ويعين ذلك جهة دوران موجبة في المستوي المماس . فإذا كان توجيه الفضاء يمينياً فإن الدوران الموجب في المستوي المماس يكون على عكس دوران عقرب الساعة بالنسبة لمراقب يقف على المستوي المماس ورأسه باتجاه m .

إذاً فاختيار متجه وحدة ناظم m لسطح في نقطة P منه يعين توجيهاً للسطح في P ، وإذا كانت P نظامية فنستطيع أن نمدد اختيار التوجيه بشكل مستمر ، على جوار صغير للنقطة P ، ولكن ذلك ليس ممكناً بالضرورة للسطح بأكمله . فبينما تقبل بعض السطوح اختياراً مستمراً لمتجهات وحدة ناظمة في كل نقطة من سطح كالكرة مثلاً ، فإن ذلك يكون مستحيلاً بالنسبة لسطوح أخرى مثل حزام موبيس (*Mobius Band*) والذي نحصل عليه من شريط مستطيل الشكل $ABCD$ بقلب إحدى نهايتيه ولزقها على النهاية الأخرى، حيث تنطبق C على A و D على B . نقول عن السطوح الأخيرة هذه إنها غير قابلة للتوجيه .

أخيراً فهناك ارتباط طبيعي بين التوسيط والتوجيه ، فكل توسيط نظامي $r(u^1,u^2)$ يحدث توجيهاً معرفاً بالاختيار:

$$m=\frac{r_1\times r_2}{\|r_1\times r_2\|}$$

وفي جوار لا يحوي نقاطاً شاذة تكون الدالة:

$$m=m(u^1,u^2)$$

من الصف C_{n-1} . شريطة أن يكون التمثيل الوسيطي $r(u^1,u^2)$ من الصف C_n. وعند الانتقال إلى إحداثيات منحنية أخرى $u^{1'},u^{2'}$:

$$u^1=u^1(u^{1'},u^{2'})$$

$$u^2=u^2(u^{1'},u^{2'})$$

فعندئذٍ:

$$r_{1'}\times r_{2'}=\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(u^{1'},u^{2'})}(r_1\times r_2)$$

وبالتالي :

$$m'=\varepsilon m$$

حيث :

$$\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(u^{1'},u^{2'})}\right)$$

ممّا يقتضي أن يكون التوجيه المحدث من التوسيط الثاني نفسه إذا كان المعين اليعقوبي موجباً ، ومعاكساً إذا كان المعين اليعقوبي سالباً .

3- بعض السطوح الشهيرة

3-1 السطوح الدورانية

السطح الدوراني هو السطح المولّد من دوران منحن سوي (واقع في مستو) حول محور دوران ، واقع في المستوي ذاته .

إذا اخترنا محور الدوران محوراً لـــ z في النظام الإحداثي ومستوي المنحني المولد مستوياً لـــ xz ، فإن المنحني سيمثل وسيطياً بدالة من الشكل :

$$u \to (x = f(u)\ ,\ y=0\ ,\ z=h(u))$$

نقول عن تقاطعات السطح الدوراني مع المستويات المارة من محور الدوران إنها خطوط الطول . كل خط طول هو منحن متطابق مع المنحني المولد للسطح الدوراني ويمثل بالمعادلات الوسيطية :

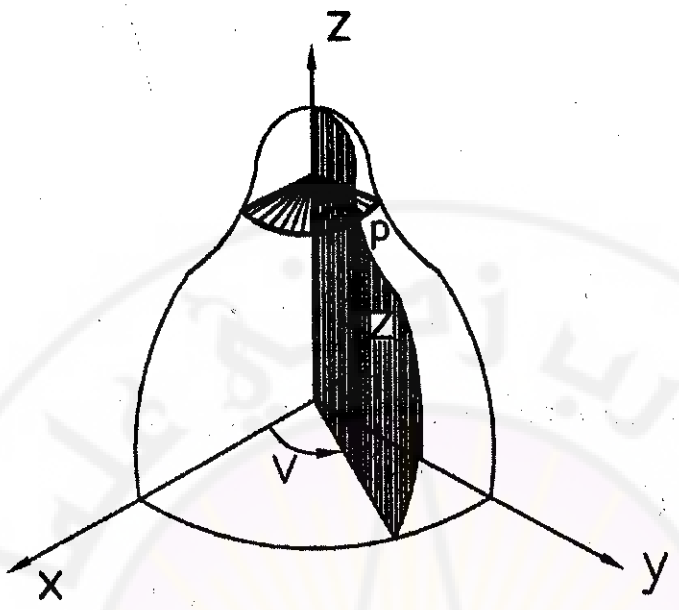
$$r = f(u)$$
$$z = h(u)$$

حيث r بعد نقطة متحركة على خط الطول ، عن محور الدوران و z الإحداثية الثالثة للنقطة .

وإذا اخترنا الزاوية الموجهة v لثنائية الوجوه المشكّلة بالمستوي xz ومستوي خط الطول ، وسيطاً ثانياً ، فإن إحداثيات نقطة ما P على السطح الدوراني تعطى بالمعادلات .

$$x = f(u)\cos v$$
$$y = f(u)\sin v$$
$$z = h(u)$$

وهي المعادلات الوسيطية للسطح الدوراني .



الشكل –3–

نقول عن تقاطعات السطح الدوراني مع مستوياتٍ تعامد محور الدوران ، إنها خطوط عرض . كل خط عرض هو دائرة تقابل قيمة ثابتة للوسيط u ، فهو منحن إحدائي ذو وسيط v. ومن الواضح أن المنحنيات الإحداثية ذات الوسيط u:

$$v = const.$$

هي خطوط الطول (الشكل –3–) .

نلاحظ أخيراً أنه عندما يتغير الوسيط v في الفترة $]-\infty, +\infty[$ فإن السطح الدوراني يُغطّى مرات غير منتهية العدد . وإذا قصرنا v على الفترة $]0,2\pi[$ فنضمن استمرارية التطبيق العكسي .

وهذه بعض السطوح الدورانية

أ– الأُسطوانة الدائرية

وهي سطح دوراني مولّد بالمستقيم

$$u \to (a\,,0\,,u)$$

وبالتالي فهي تمثل بالدالة

$$(u\,,v) \to r\,(u\,,v) = (a\cos v\,,\ a\sin v\ ,\ u\ )$$

ب- الكـــرة

هي سطح دوراني مولد بنصف دائرة .

$$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \Re^3$$

$$u \to (a\cos u\ ,0,\ a\sin u\ )$$

وبالتالي فهي تمثل بالدالة:

$$[u\,,v\ ] \to r\,(u,v) = (\ a\cos u\cos v\,,\ a\cos u\sin v\,,\ a\sin u\ )$$

ج- الطـــارة $(Torus)$

هي السطح الدوراني المولّد بالدائرة .

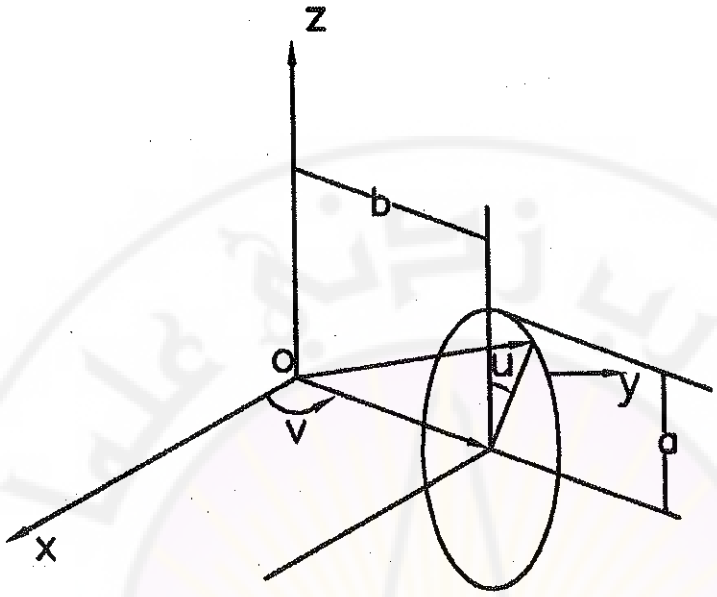
$$u \to (b+a\sin u\,,\ 0\,,\ a\cos u) \qquad ,\ b > a > 0$$

وبالتالي فالمعادلات الوسيطية للطارة هي :

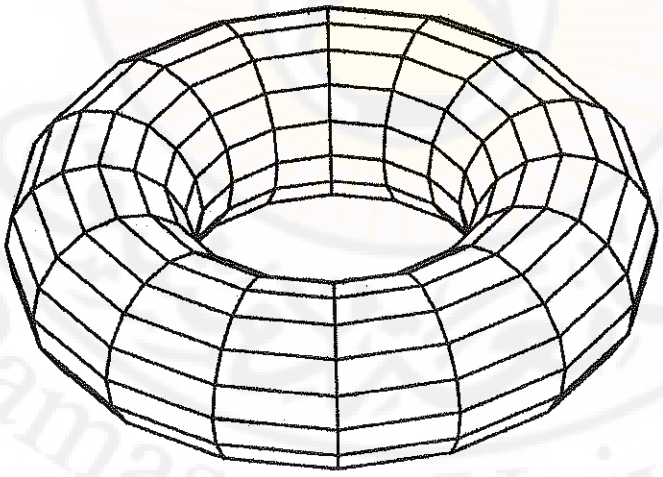
$$x = (b+a\sin u)\ \cos v$$

$$y = (b+a\sin u)\ \sin v$$

$$z = a\cos u$$



الشكل – 4 –



الشكل – 5 –

د- المخروط الدوراني

هو السطح الدوراني المولد بالمستقيم

$$u \to (au\,,\,0\,,\,u)\quad,\quad a=const.$$

وبالتالي فيمثل بالمعادلات الوسيطية الآتية :

$$x = au\cos v$$

$$y = au\sin v$$

$$z = u$$

ه- السطح السلسلي (*Catenoid*)

هو السطح الدوراني المولد من دوران المنحني السلسلي (*Catenary*) حول دليله (دليل السلسلي $y=\cosh\frac{x}{a}$ هو محور x) . فإذا اخترنا الدليل محوراً لـــ z ؛ فإن السلسلي يمثل بالدالة .

$$u \to (a\cosh\frac{u}{a}\,,\,0\,,\,u)$$

وإذا استخدمنا الرموز :

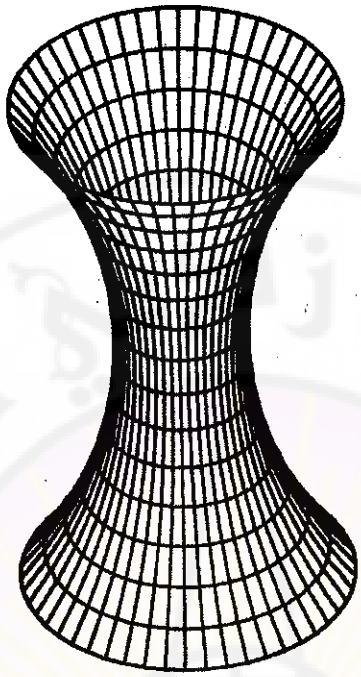
$$u^2 = v\quad,\quad u^1 = u$$

فنجد المعادلات الوسيطية الآتية للسطح السلسلي (الشكل -6-)

$$x = a\cosh\frac{u^1}{a}\,\cos u^2$$

$$y = a\cosh\frac{u^1}{a}\,\sin u^2$$

$$z = u^1$$



الشكل – 6 –

و- السطح شبه الكروي (*Pseudosphere*)

هو السطح الدوراني المولد من دوران المنحني السحجي حول مستقيمه المقارب، فإذا اخترنا المستقيم المقارب للسحجي محوراً لـــ z فسيمثَّل السحجي بالدالة :

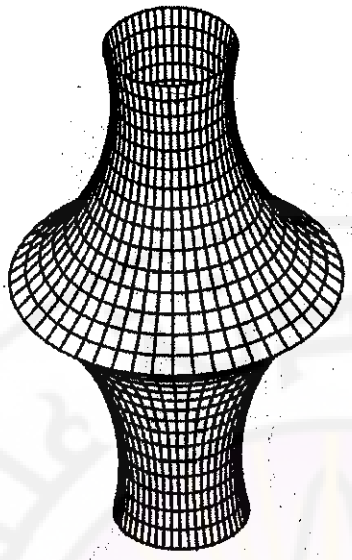
$$u^1 \to (a\sin u^1 \, , 0 \, , \, a(\cos u^1 + \ln \tan \frac{u^1}{2}))$$

إذاً فالمعادلات الوسيطية للسطح شبه الكروي هي :

$$x = a\sin u^1 \cos u^2$$

$$y = a\sin u^1 \sin u^2$$

$$z = a(\cos u^1 + \ln \tan \frac{u^1}{2})$$



الشكل – 7 –

3 – 2 السطوح التربيعية

وهي السطوح المعينة بمعادلة ضمنية من الشكل :

$$f(x,y,z) = a_{11}\,x^2 + a_{12}\,xy + a_{13}\,xz + a_{22}\,y^2 + a_{23}\,yz + \\ + a_{33}\,z^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0$$

وبإجراء دوران وانسحاب مناسبين فإن المعادلة السابقة ترجع إلى أحد الأشكال الآتية:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$

وهي المعادلة الضمنية لمجسم قطع ناقص (*Ellipsoid*)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (2)$$

وهي معادلة مجسم قطع زائد ذي شطر واحد (*Hyperboloid*)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad (3)$$

وهي معادلة مجسم قطع زائد ذي شطرين .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0 \qquad (4)$$

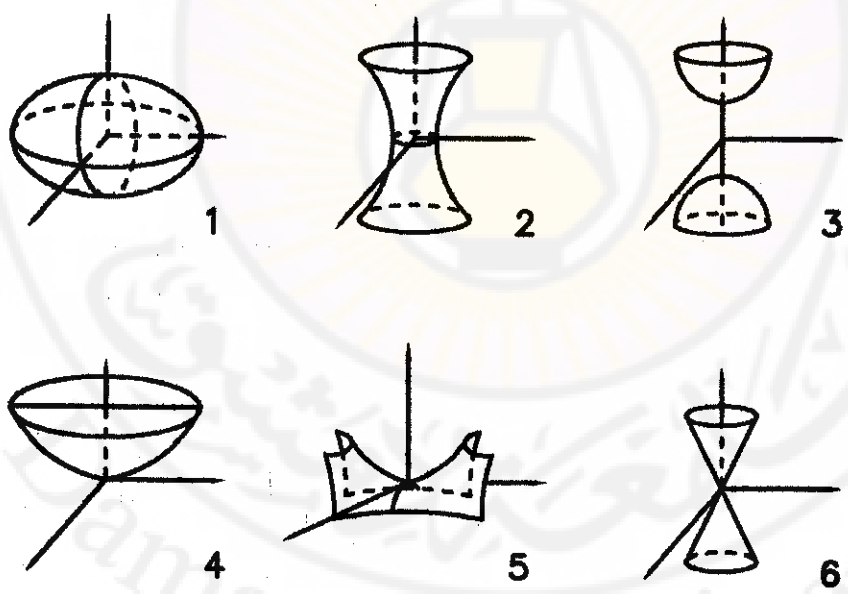
وهي معادلة مجسم قطع مكافئ ناقصي (*EllipticParaboloid*)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0 \qquad (5)$$

وهي معادلة مجسم قطع مكافئ زائدي (*Hyperbolic Paraboloid*)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (6)$$

وهي معادلة المخروط التربيعي .



الشكل – 8 –

3-3 السطوح المسطرة

نقول عن سطح إنه مسطر إذا مر من كل نقطة منه مستقيم واقع على السطح. إذن فالسطح المسطر يُغطّى بمستقيمات تدعى الأسطر أو المولدات المستقيمة ، وهي تشكل عائلة تابعة لمتغير واحد .

لإيجاد تمثيل وسيطي للسطح المسطر ، نختار منحنيا C على السطح، يقطع الأسطر جميعها ، ولنفترض أنه يمثل بالدالة .

$$u^1 \longrightarrow \boldsymbol{p}(u^1)$$

نقول عن C إنه دليل (*directrix*) السطح المسطر.

نأخذ الآن في كل نقطة من الدليل متجه وحدة موازياً للسطر المار بهذه النقطة. وهذا المتجه يتعلق بـــ u^1 :

$$u^1 \to \boldsymbol{I}(u^1)$$

وعندئذ فإن السطح المسطر يمثل بـــ :

$$(u^1,u^2) \to \boldsymbol{p}(u^1)+u^2\,\boldsymbol{I}(u^1)$$

من الواضح أن الوسيط u^1 يعين السطر على السطح الذي تقع عليه النقطة (u^1,u^2) ، والوسيط u^2 يعين موضع هذه النقطة على السطر. إذا فرضنا أخيراً أن الدالتين $\boldsymbol{I},\boldsymbol{p}$ من الصف C_1 ؛ فإن :

$$\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{I}}=0 \quad , \quad \boldsymbol{I}^2=1 \qquad (\text{أو } \boldsymbol{I}\,d\boldsymbol{I}=0)$$

وهذه بعض السطوح المسطرة .

أ- السطح اللولبي :

إذا كان C اللولب الدائري الممثل بـــ:

$$u \to \boldsymbol{p}(u)=(a\cos u\ ,\ a\sin u\ ,\ bu)$$

ورمزنا بـ Δ_u للمستقيم المار بالنقطة $M_u = (0, 0, bu)$، والنقطة من اللولب التي تقابل قيمة الوسيط u (متجه موضعها $p(u)$) فإن السطح المسطر الذي تشكل المستقيمات (Δ_u) أسطره يدعى سطحاً لولبياً. يُمثَّل السطح اللولبي بالمعادلة:

$$r_1(u, v_1) = p(u) + v_1 [\, p(u) - \overrightarrow{OM_u} \,]$$

وإذا وضعنا:

$$v_1 = v - 1$$

فنجد التمثيل:

$$r_2(u, v) = r_1(u, v-1) = p(u) + (v-1)[\, p(u) - \overrightarrow{OM_u} \,]$$

$$= (a\cos u, a\sin u, bu) + (v-1)(a\cos u, a\sin u, 0)$$

$$= (av\cos u, av\sin u, bu)$$

وإذا وضعنا أخيراً :

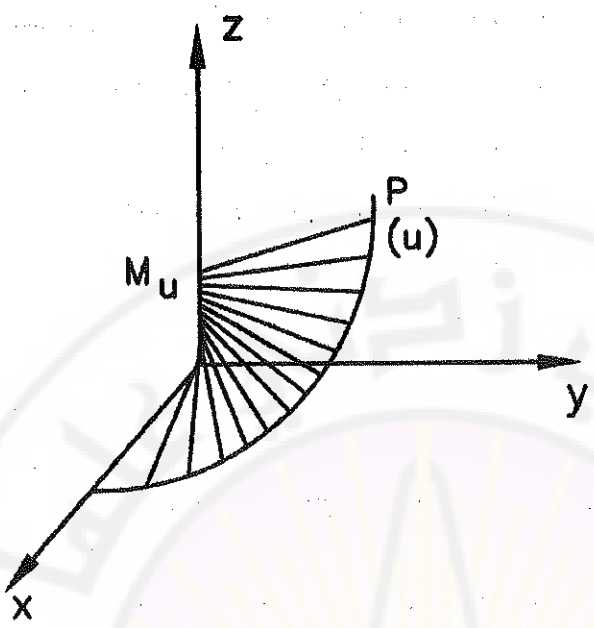
$$u^2 = av \quad , \quad u^1 = u$$

فنجد المعادلات الوسيطة الآتية:

$$x = u^2 \cos u^1$$

$$y = u^2 \sin u^1$$

$$z = bu^1$$



الشكل –9–

ب– السطح المولد المماسي :

إذا كان :

$$u^1 \to \boldsymbol{p}(u^1)$$

تمثيلاً وسيطياً طبيعياً من الصف C_3 لمنحن $\mathscr{L}$، ورمزنا بـــ Δ_{u^1} للمستقيم المماس للمنحني في النقطة المقابلة لقيمة الوسيط u^1، فإن السطح المسطر الذي تشكل المستقيمات (Δ_{u^1}) أسطره يدعى السطح المولد المماسي للمنحني $\mathscr{L}$ وهو يمثل بـــ :

$$(u^1,u^2) \to \boldsymbol{r}\,(u^1,u^2) = \boldsymbol{p}(u^1)+u^2\,\dot{\boldsymbol{p}}(u^1)$$

$$= \boldsymbol{p}(u^1)+u^2\,\boldsymbol{t}(u^1)$$

حيث $\boldsymbol{t}$ متجه وحدة المماس للمنحني.

ج- السطوح الأسطوانية :

ليكن :

$$u^1 \to p(u^1)$$

تمثيلاً وسيطياً لمنحن $\mathscr{L}$ ، وليكن :

$$a=(a_1,a_2,a_3)$$

متجهاً في $\Re^3$. إذا رمزنا بـ Δ_{u^1} للمستقيم المار من النقطة التي تقابل قيمة الوسيط u^1, ويوازي المتجه a ، فنقول عن السطح المسطر الذي تشكل المستقيمات (Δ_{u^1}) أسطره إنه سطح أسطواني دليله $\mathscr{L}$ ، ويمثل بالدالة :

$$(u^1,u^2) \to r\,(u^1,u^2) = p(u^1)+u^2 a$$

ولاسيما إذا كان $\mathscr{L}$ دائرة وكان a يعامد مستويها فنحصل على الأسطوانة الدائرية.

د- السطوح المخروطية :

ليكن

$$u \to p(u)$$

تمثيلاً وسيطياً لمنحن $\mathscr{L}$ و s نقطة ما من $\Re^3$ ، لا تنتمي إلى المنحني.

إذا رمزنا بـ Δ_u للمستقيم المار بالنقطتين s و $p(u)$ ، فإن السطح المسطر الذي تشكل المستقيمات Δ_u أسطره يدعى سطحاً مخروطياً دليله $\mathscr{L}$ ، ويمثل بالدالة:

$$(u,v) \to r^*(u,v) = p(u)+v\,[\,p(u)-\overrightarrow{os}\,]$$

ولو أخذنا مبدأ الإحداثيات منطبقاً على s ووضعنا:

$$u^2 = v+1 \qquad , \quad u^1 = u$$

لوجدنا التمثيل الآتي للسطح المخروطي :

$$r(u^1,u^2) = u^2\ p(u^1)$$

نقول عادة عن s إنه رأس السطح المخروطي. إذا فرضنا الآن أن p من الصف C_1 ، فعندئذ :

$$r_1 = u^2\, p'(u^1) \quad , r_2 = p(u^1)$$

ومنـــه :

$$r_1 \times r_2 = u^2\, p'(u^1) \times p(u^1)$$

وإذا كان المتجهان $p(u^1)$ ، $p'(u^1)$ غير مرتبطين خطياً (مستقلين) وكان $u^2 \neq 0$ (ممّا يعني أن النقطة المذكورة ليست رأس المخروط) فإن النقطة (u^1, u^2) ستكون نقطة نظامية ، ومعادلة المستوي المماس فيها هي :

$$[\,(R - u^2\, p(u^1)), p'(u^1)\,, p(u^1)\,] = 0$$

أو $$[R\,, p'(u^1),\, p(u^1)] = 0$$

والمعادلة تتعلق بالوسيط u^1 فقط ، ممّا يعني أن عائلة المستويات المماسة لسطح مخروطي تتعلق بوسيط واحد .

3 – 4 مبرهنة

المستوي المماس لسطح مسطر (باستثناء الأسطواني والمخروطي) يدور حول سطر منه بزاوية قياسها π ، عندما تتحرك نقطة التلامس على طول السطر كاملاً.

البرهان:

ليكن : $$r(u^1, u^2) = p(u^1) + u^2\, I(u^1)$$

تمثيلاً وسيطياً لسطح مسطر ، ولنفرض أن الدالتين $I\,, P$ من الصف C_1 عندئذ :

$$r_1 = p' + u^2\, I'$$
$$r_2 = I$$

ومنـــه :

$$r_1 \times r_2 = p' \times I + u^2 I' \times I$$

وإذا كان المتجهان :

$$p' \times I \qquad \text{و} \qquad I' \times I$$

مستقلين فإن المتجه الناظم $r_1 \times r_2$ يغير اتجاهه على طول السطر $u^1 = const.$، تبعاً لتغير الوسيط u^2، حيث أن المتجهين $p' \times I$ و $I' \times I$ يبقيان ثابتين على طول السطر .

نلاحظ الآن أن المستويات المماسة لسطح مسطر في نقاط سطر معين منه تحوي جميعها هذا السطر ، ممّا يعني أن المستوي المماس يدور حول السطر عندما تتحرك نقطة التلامس على طول هذا السطر . وإذا استعضنا عن المتجه الناظم $r_1 \times r_2$ بالمتجه :

$$M^* = \frac{r_1 \times r_2}{\left|u^2\right|} = \frac{p' \times I}{\left|u^2\right|} + \operatorname{sgn}(u^2)\, I' \times I$$

فنلاحظ أنه عندما: $u^2 \to -\infty$

فإن :

$$M^* \to -I' \times I .$$

وعندما:

$$u^2 \to \infty$$

فإن :

$$M^* \to I' \times I$$

ممّا يعني أنه عندما تتحرك نقطة التلامس على طول السطر كاملاً ، فإن المستوي المماس يدور حول السطر بزاوية قياسها π، والوضع النهائي للمستوي المماس (وضع المستوي المماس عندما $u^2 \to \infty$) يعامد المتجه $I' \times I$.

تجدر الملاحظة إلى أن المستويات المماسة على طول سطر من سطح أسطواني أو مخروطي تكون جميعها منطبقة .

3-5 المنحني المضيق (*Striction Line*) لسطح مسطر

ليكن $\mathcal{S}$ سطحاً مسطراً ، ولنأخذ سطراً معيناً منـــه . نقول عن النقطة من هذا السطر التي يكون فيها المستوي المماس عمودياً على الوضع النهائي للمستوي إنها نقطة مضيقة لهذا السطر . ومجموعة النقاط المضيقة على السطح تشكل منحنياً ندعوه المنحني المضيق للسطح .

3-6 مبرهنة

إذا كان :

$$r(u^1,u^2)= p(u^1) + u^2\, I(u^1)$$

تمثيلاً وسيطياً لسطح مسطر فالمنحني المضيق يمثل بـــ :

$$R(u^1) = p(u^1) - \frac{p'(u^1).\, I'(u^1)}{[I'(u^1)]^2}\, I(u^1)$$

البرهان:

لتكن (u^1, u^2) نقطة مضيقة للسطر u^1 ، عندئذ فإن المتجه الناظم للسطح في هذه النقطة يعامد المتجه:

$$I'(u^1)\times I(u^1)$$

ومنه:

$$[\, p'(u^1)\times I(u^1)+u^2\, I'(u^1)\times I(u^1)]\,.\,[I'(u^1)\times I(u^1)] = 0$$

وبالتالي :

$$(p'\times I)(I'\times I)+u^2(I'\times I)^2 = 0$$

وباستخدام المطابقة :

$$(a\times b).(c\times d) =(a.c).(b.d)-(a.d).(b.c) =\begin{vmatrix} a.c & a.d \\ b.c & b.d \end{vmatrix}$$

نجد أن :

$$p' \cdot I' + u^2 I'^2 = 0$$

فإذا كان:

$$I'^2 = 0$$

فإن النقطة المضيقة غير موجودة ، وهذا يحدث لـــ u^1 في فترة، عندما يكون الجزء من السطح الذي يقابل قيم u^1 من هذه الفترة سطحاً أسطوانياً. وباستثناء هذه النقاط فإن المعادلة تعين u^2 :

$$u^2 = -\frac{p'.I'}{I'^2}$$

وبالتعويض في معادلة السطح نجد متجه الموضع للنقطة المضيقة للسطر u^1 :

$$r = p - \frac{p'.I'}{(I')^2} I$$

والمنحني المضيق يمثل بالدالة :

$$u^1 \to p(u^1) - \frac{p'(u^1).I'(u^1)}{[I'(u^1)]^2} I(u^1)$$

3-7 مثال

إذا وضعنا:

$$P(u^1) = (a\cos u^1, a\sin u^1, bu^1)$$

$$M_{u^1} = (0, 0, bu^1)$$

$$I(u^1) = \frac{p(u^1) - o\vec{M}_{u^1}}{\left\| p(u^1) - \vec{oM}_{u^1} \right\|}$$

$$= (\cos u^1, \sin u^1, 0)$$

فنستطيع أن نمثل السطح اللولبي بالدالة.

$$r(u^1, u^2) = p(u^1) + u^2 I(u^1)$$

ولما كان :

$$\boldsymbol{p}'(u^1) = (-a\sin u^1, a\cos u^1, b)$$

$$\boldsymbol{I}'(u^1) = (-\sin u^1, \cos u^1, 0)$$

$$\boldsymbol{p}'(u^1).\boldsymbol{I}'(u^1) = a$$

$$\boldsymbol{I}'(u^1).\boldsymbol{I}'(u^1) = 1$$

فإن معادلة المنحني المضيق للسطح اللولبي هي :

$$\boldsymbol{r}(u^1) = \boldsymbol{p}(u^1) - \frac{\boldsymbol{p}'(u^1).\boldsymbol{I}'(u^1)}{[\boldsymbol{I}'(u^1)]^2}\boldsymbol{I}(u^1)$$

$$= (a\cos u^1, a\sin u^1, bu^1) - \frac{a}{1}(\cos u^1, \sin u^1, 0)$$

$$= (0, 0, bu^1)$$

وهي معادلة محور z.

Damascus University

4- مغلف عائلة سطوح والسطوح القابلة للنشر

4-1 تعريف

لتكن :

$$F(x,y,z,\alpha)=0 \qquad (4,1)$$

عائلة سطوح تابعة لوسيط واحد α ، ولنفترض أن F من الصف C_1 وأن لها مشتقاً جزئياً ، بالنسبة إلى α، مستمراً .

نقول عن سطح S إنه مغلف عائلة السطوح (4,1) إذا تحقق الشرطان :

أ – أن يمسّ السطح S في كل نقطة منه أحد سطوح العائلة .

ب- أن توجد في أي جوار لنقطة تلامس S مع أحد سطوح العائلة نقاط تلامس مع سطوح أخرى من العائلة ، ممّا يعني أن S لا يمكن أن يتطابق، في جوار مفتوح، مع أحد سطوح العائلة.

4-2 ملاحظة

إذا فرضنا أن لعائلة السطوح (4,1)، مغلفاً S وكان S سطحاً نظامياً معيناً بالتمثيل الوسيطي :

$$(u^1,u^2)\rightarrow r\,(u^1,u^2)$$

فيقابل كل نقطة (u^1,u^2) من المغلف سطح من العائلة يمس S في هذه النقطة. وبالتالي تغدو α دالة بالمتغيرين u^1,u^2 :

$$(u^1,u^2)\rightarrow\alpha(u^1,u^2)$$

لنفترض أيضاً أن α من الصف C_1 .

ضمن الافتراضات السابقة سنثبت صحة المبرهنة .

4 – 3 مبرهنة

إن نقاط مغلف عائلة السطوح :

$$F(x,y,z,\alpha)=0$$

تحقق المعادلتين:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z,\alpha)&=0\\ F_\alpha(x,y,z,\alpha)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (4,2)$$

كما أن النقاط الشاذة لسطوح العائلة ، التي لا تنتمي إلى المغلف ، تحقق هاتين المعادلتين.

البرهان :

ليكن :

$$(u^1,u^2)\to r(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2))$$

تمثيلاً وسيطياً للمغلف . لما كانت النقطة (u^1,u^2) من المغلف هي نقطة تلامس مع ذلك السطح من العائلة الذي يقابل القيمة $\alpha(u^1,u^2)$ للوسيط ، فلا بد أن تتحقق المتطابقة :

$$F(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2),\alpha(u^1,u^2)=0$$

وبالاشتقاق بالنسبة للمتغيرين u^1 و u^2 نجد المعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} F_x x_1+F_y y_1+F_z z_1+F_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}&=0\\ F_x x_2+F_y y_2+F_z z_2+F_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (4,3)$$

ولما كان السطح والمغلف متماسين ، فلهما المستوي المماس نفسه ، وبالتالي فإن المتجه (F_x,F_y,F_z) الناظم على السطح ، لا بد أن يكون عمودياً على المتجهين :

$$(x_1,y_1,z_1) \quad و \quad (x_2,y_2,z_2)$$

المماسين للمغلف (يوازيان المستوي المماس للمغلف) ، وعندئذ

$$\left.\begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 &= 0 \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4,4)$$

نستنتج الآن من (4,3) , (4,4) صحة المساوتين :

$$F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} = 0$$

$$F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = 0$$

ولما كان المشتقان $\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}$ لا ينعدمان في الوقت ذاته ، فلا بد أن تحقق نقاط المغلف المعادلة :

$$F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

وهذه المعادلة مع معادلة العائلة تعطيان (4,2) .

أخيراً ، لما كانت النقاط الشاذة لسطوح العائلة تحقق :

$$F_x = F_y = F_z = 0$$

فستحقق (4,4) ، وبالتالي (4,2).

إذا كانت الآن النقاط التي تحقق (4,2) والتي ليست نقاطاً شاذة للعائلة ؛ تشكل سطحاً ، فإن (4,2) تقتضي (4,4) ، وهذه تعني أن هذا السطح يمس السطح المقابل من العائلة ، أي أنه المغلف .

4 – 4 ملاحظة

لإيجاد مغلف عائلة سطوح بوسيط واحد ، نبدأ بإيجاد المعادلتين (4,2)، وبعدئذ نحذف α فنحصل على معادلة ضمنية ، أو نعبّر عن x و y و z و α كدوال بوسيطين مساعدين فنحصل على المعادلات الوسيطية . يمكن أن تكون α خاصةً أحد الوسيطين ، والمعادلة الناتجة ستمثل اتحاد المغلف ومجموعة النقاط الشاذة.

4 – 5 تعريف

إن المعادلتين (4,2) ، من أجل قيمة معينة لـــ α تمثلان ـــ في الحالة العامة ـــ منحنياً واقعاً على ذلك السطح من العائلة الذي يقابل هذه القيمة لـــ α ، فإذا لم يكن خطاً من النقاط الشاذة ؛ فإن هذا المنحني سيقع أيضاً على المغلف ، وعندئذ يكون السطح والمغلف متماسين على طول هذا المنحني .

نقول عن هكذا منحنيات إنها خطوط مميزة (*Characteristic Lines*) للعائلة .

4 – 6 مثال

نقول عن مغلف عائلة كرات تابعة لوسيط واحد إنه سطح قنوي (*Canal Surface*).

إذا وقعت مراكز الكرات على المنحني $t \to \boldsymbol{p}(t)$ ، وكان نصف قطر الكرة التي يقع مركزها في النقطة $\boldsymbol{p}(t)$ مساوياً لـــ $a(t)$ ؛ فإن معادلة العائلة هي :

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p}(t)]^2 - [a(t)]^2 = 0$$

حيث t هو وسيط العائلة ويقوم بدور α في الدراسة النظرية . والمغلف يتعين بالمعادلتين :

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p})^2 - a^2 = 0$$

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p}' + a\cdot a' = 0$$

لنجد خصوصاً مغلف عائلة كرات لها نصف القطر نفسه a ، وتقع مراكزها على محيط دائرة نصف قطرها b حيث $b > a$. إذا كتبنا معادلة الدائرة بالشكل:

$$\boldsymbol{p}(t) = (b\cos t\,,\, b\sin t\,,\, 0)$$

فإن عائلة الكرات تعطى بالمعادلة .

$$(x - b\cos t)^2 + (y - b\sin t)^2 + z^2 = a^2$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـــ t نجد المعادلة :

$$2b(x-b\cos t)\sin t - 2b(y-b\sin t)\cos t = 0$$

أو:

$$x\sin t - y\cos t = 0$$

وبالتالي يمكن أن نضع :

$$x = w\cos t$$

$$y = w\sin t$$

فنجد المتغير الثاني w (المتغير الأول t) . إذا عوضنا قيمتي x و y هاتين في معادلة العائلة فنجد أن :

$$(w-b)^2\cos^2 t + (w-b)^2\sin^2 t + z^2 = a^2$$

أو $$(w-b)^2 + z^2 = a^2$$

وإذا أدخلنا الوسيط الجديد u حيث :

$$w-b = a\cos u \quad , \quad z = a\sin u$$

ووضعنا $v = t$ فنجد المعادلات الوسيطية الآتية للمغلف :

$$x = (b+a\cos u)\cos v$$

$$y = (b+a\sin u)\sin v$$

$$z = a\sin u$$

إذاً فالمغلف هو طارة .

4 – 7 مبرهنة

مغلف عائلة مستويات بوسيط واحد هو سطح مسطر تشكل الخطوط المميزة للعائلة أسطره .

البرهان :

إن عائلة مستويات بوسيط واحد تمثل بالمعادلة :

$$N(u)\cdot R = h(u) \qquad (4,5)$$

حيث $N(u)$ متجه ناظم على المستوي الذي يقابل القيمة u للوسيط .

لما كانت سطوح العائلة مستويات فليس لها نقاط شاذة ، والخطوط المميزة للعائلة ستحقق المعادلتين :

$$N(u)\cdot R = h(u)$$
$$\frac{dN(u)}{du}\cdot R = \frac{dh(u)}{du} \qquad (4,6)$$

وبالتالي فإن الخطوط المميزة للعائلة هي خطوط مستقيمة معينة بالمعادلتين الخطيتين (4,6) ، ومتجه توجيهها هو $N\times N'$ ؛ وهكذا فإن الخط المميز الواقع على المستوي الذي يقابل القيمة u للوسيط يمثل بالدالة .

$$v \to r_0(u) + v\,(N(u)\times N'(u))$$

حيث $r_0(u)$ نقطة اختيارية على هذا الخط . وإذا اخترنا $r_0(u)$ حلاً قابلاً للمفاضلة للمعادلتين (4,6) فإن مغلف عائلة المستويات سيمثل بالدالة .

$$(u,v)\to r(u,v) = r_0(u) + v\,(N(u)\times N'(u))$$

ممّا يعني أن المغلف هو سطح مسطر تشكل الخطوط المميزة للعائلة أسطره .

4 – 8 تعريف

نقول عن منحن ــ تكون جميع الخطوط المميزة لعائلة سطوح مماسة له ــ إنه حرف الانكفاء (*edge of regression*) لمغلف العائلة .

4 – 9 مبرهنة

لتكن :

$$N(u)\cdot R = h(u)$$

عائلة مستويات بوسيط واحد ، ولنفترض أن الدالتين: $N(u)$, $h(u)$ من الصف C_2 ، وأن $[N, N', N''] \neq 0$. عندئذٍ سيكون مغلف عائلة المستويات هذه إما سطحاً مولداً مماسياً ، أو سطحاً مخروطياً . وإذا كان

$$[N, N', N''] = 0$$

والعائلة لا تتألف من مستويات متوازية ؛ فإن المغلف سيكون سطحاً اسطوانياً.

البرهان :

لنجد في البداية حرف الانكفاء لمغلف العائلة ، ولهذا الغرض سنستخدم وسيط العائلة u ، وسيطاً للحرف ، فنقابل لكل قيمة u نقطة تماس حرف الانكفاء والخط المميز الذي يقابل القيمة u .

ولنفترض أننا نحصل بهذه الطريقة على التمثيل الوسيطي. $u \to p(u)$ لحرف الانكفاء حيث p دالة من الصف C_1 .

لما كانت النقطة $p(u)$ من حرف الانكفاء تقع على الخط المميز الذي يقابل القيمة u فستحقق المعادلتين (4,6) :

$$N(u) \cdot p(u) = h(u)$$
$$N'(u) \cdot p(u) = h'(u)$$

وباشتقاق هاتين المتطابقتين ؛ نجد :

$$\left.\begin{aligned} N'(u) \cdot p(u) + N(u) \cdot p'(u) &= h'(u) \\ N''(u) \cdot p(u) + N'(u) \cdot p'(u) &= h''(u) \end{aligned}\right\} \qquad (4,7)$$

ولما كان حرف الانكفاء مماساً للخط المميز فإن المتجه $p'(u)$ سيوازي المتجه :

$$N(u) \times N'(u)$$

وبالتالي فإنه سيعامد كلاً من المتجهين : $N'(u)$, $N(u)$ وبالتالي :

$$N(u) \cdot p'(u) = 0$$
$$N'(u) \cdot p'(u) = 0$$

والمعادلة الثانية في (4,7) تغدو :

$$N''(u)\cdot p(u) = h''(u)$$

إذاً إن حرف الانكفاء سيحقق جملة المعادلات التفاضلية الثلاث :

$$N(u)\cdot p = h(u)$$
$$N'(u)\cdot p = h'(u)$$
$$N''(u)\cdot p = h''(u)$$

فإذا كان :

$$p=(x,y,z) \qquad \text{و} \qquad N=(A,B,C)$$

فإن الجملة السابقة تكافئ الجملة :

$$Ax+By+Cz=h$$
$$A'x+B'y+C'=h'$$
$$A''x+B''y+C''z=h''$$

والشرط $[N,N',N''] \neq 0$ يعني أن معين الجملة السابقة لا يساوي الصفر ، مما يقتضي وجود حل $p(u)=(x(u),y(u),z(u))$ لهذه الجملة . فإذا كان الحل ثابتاً (متجهاً ثابتاً) فإن الخطوط المميزة جميعها ستمر من النقطة نفسها التي متجه موضعها هو هذا المتجه الثابت ، والمغلف سيكون سطحاً مخروطياً .

وإذا لم يكن الحل ثابتاً في أي فترة فإن $p'(u) \neq 0$ ، باستثناء بعض النقاط المنعزلة، وعندئذٍ فإن المغلف هو السطح المسطر الذي تشكل مماسات المنحني $u \to p(u)$ (وهي تتطابق مع الخطوط المميزة) أسطره .

إذاً فهو السطح المولد المماسي للمنحني $p(u)$.

أخيراً ، إذا كان:

$$N\times N' \neq 0 \quad \text{و} \quad [N,N',N'']=0$$

فلا بد أن تكون جميع المتجهات $N\times N^1$ متوازية (انظر 4 – 10) ممّا يعني أن الخطوط المميزة (أسطر المغلف) متوازية والمغلف سيكون سطحاً اسطوانياً.

4 – 10 ملاحظة

إذا كان :

$$N\times N'\neq 0 \quad \text{و} \quad [N,N',N'']=0$$

فنضع :

$$m=\frac{N\times N'}{\|N\times N'\|}$$

(m يعامد كلاً من N و N' وبالتالي N'')

وعندئذٍ :

$$m\cdot N=0 \ , \ m\cdot N'=0 \ , \ m\cdot N''=0 \ , \ m\cdot m'=0$$

ومنه:

$$m'\cdot N+m\cdot N'=0$$

$$m'\cdot N'+m\cdot N''=0$$

وبالتالي:

$$m'\cdot N=0 \ , m'\cdot N'=0 \ , m\cdot m'=0$$

ممّا يعني أن المتجه m' يعامد المتجهات m, N', N المستقلة خطياً . إذاً $m'=0$ ، وبالتالي m متجه ثابت أي أن المتجهات $N\times N'$ متوازيـــة .

4 – 11 أمثلة

1– إذا كان $t\to p(t)$ منحنياً من الصف C_3 تقوسه غير معدوم ؛ فإن مغلف عائلة المستويات الملاصقة لهذا المنحني يتطابق مع السطح المولد المماسي لهذا المنحني . ممّا يعني أن المنحني هو حرف الانكفاء لمغلف مستوياته الملاصقة.

2- مغلف المستويات الناظمة لمنحن .

إذا كان : $s \to \boldsymbol{p}(s)$ تمثيلاً طبيعياً من الصف C_2 لمنحن تقوسه غير معدوم؛ فإن معادلة عائلة مستوياته الناظمة هي :

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p}(s))\cdot \boldsymbol{t}(s)=0$$

حيث $\boldsymbol{t}(s)$ متجه وحدة المماس للمنحني . وبالتالي فإن المغلف هو حل المعادلتين:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p})\cdot \boldsymbol{t}=0$$

$$-\boldsymbol{t}^2+(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p})\,\kappa \boldsymbol{n}=0$$

أو المعادلتين:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p})\cdot \boldsymbol{t}=0$$

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p})\cdot \boldsymbol{n}=\frac{1}{\kappa}$$

حيث $\boldsymbol{n}$ متجه وحدة الناظم الأساسي للمنحني و κ تقوسه .

ومن أجل قيمة ثابتة للوسيط s ، فإن المعادلات السابقة هي معادلات الخط المميز، وبالتالي فمتجه توجيهه هو $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}$ ويمر من مركز تقوس المنحني (يتطابق مع الخط القطبي للمنحني) . في الحقيقة فإن مسقط المتجه $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{p}$ على المستوي الملاصق هو متجه يوازي $\boldsymbol{n}$ وطوله $\frac{1}{\kappa}$. إذاً يُمَثَّل المغلف بالدالة :

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{p}(u)+\frac{1}{\kappa(u)}\,\boldsymbol{n}(u)+v\,\boldsymbol{b}(u)$$

4-12 تعريف

لتكن :

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \qquad (4,8)$$

عائلة سطوح تابعة لوسيطين α, β ، ولنفترض أن F من الصف C_1 ، وأن F_α , F_β لا يتطابقان مع الصفر في أي مجموعة مفتوحة . نقول عن سطح S إنه مغلف عائلة السطوح (4,8) إذا تحقق الشرطان :

أ- أن يمسّ السطح S في كل نقطة منه أحد سطوح العائلة .

ب- أن توجد في أي جوار لنقطة تلامس S مع أحد سطوح العائلة نقاط تلامس مع سطوح أخرى من العائلة .

سنفترض أن المغلف يمثل بدالة :

$$(u^1,u^2)\to r(u^1,u^2)$$

من الصف C_1 ، وأن الوسيطين α و β هما دالتان:

$$\alpha(u^1,u^2) \qquad \text{و} \qquad \beta(u^1,u^2)$$

من الصف C_1 أيضاً ، وأن المعين اليعقوبي $\dfrac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(u^1,u^2)}$ لا يساوي الصفر .

ضمن الافتراضات السابقة سنثبت صحة المبرهنة .

4 – 13 مبرهنة

إن نقاط مغلف عائلة السطوح:

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0$$

تحقق المعادلات:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z,\alpha,\beta)&=0\\ F_\alpha(x,y,z,\alpha,\beta)&=0\\ F_\beta(x,y,z,\alpha,\beta)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4,9)$$

كما أن النقاط الشاذة لسطوح العائلة ، تحقق هذه المعادلات .

البرهان :

ليكن :

$$(u^1,u^2) \rightarrow (x(u^1,u^2),\ y(u^1,u^2)\ ,z(u^1,u^2)\ )$$

تمثيلاً وسيطياً للمغلف . لما كانت النقطة (u^1,u^2) هي نقطة تلامس المغلف مع ذلك السطح من العائلة الذي يقابل قيمتي الوسيطين $\alpha(u^1,u^2)$, $\beta(u^1,u^2)$ ، فلابد أن تتحقق المتطابقة :

$$F(x(u^1,u^2)\ ,\ y(u^1,u^2)\ ,\ z(u^1,u^2)\ ,\ \alpha(u^1,u^2)\ ,\ \beta(u^1,u^2)\ ) = 0$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـــ u^1 و u^2 نجد المعادلتين :

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 + F_\alpha \alpha_1 + F_\beta \beta_1 = 0$$

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 + F_\alpha \alpha_2 + F_\beta \beta_2 = 0$$

حيث:

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} \qquad \alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial u^i} \quad .....$$

ولما كان للسطح والمغلف المستوي المماس نفسه في النقطة المشتركة فإن المتجهين (x_1,y_1,z_1) , (x_2,y_2,z_2) المماسين للمغلف لابد أن يعامدا المتجه (F_x,F_y,F_z) الناظم على السطح ، وبالتالي لابد أن يكون :

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 = 0$$

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 = 0$$

وعندئذٍ نجد المساواتين :

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha \alpha_1 + F_\beta \beta_1 = 0 \\ F_\alpha \alpha_2 + F_\beta \beta_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4,10)$$

ولما كان المعين اليعقوبي :

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(u^1,u^2)} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

لا يساوي الصفر بالفرض فيترتب على ذلك أن :

$$F_\alpha = F_\beta = 0$$

والمغلف يحقق المعادلات (4,9) .

أخيراً ، لما كانت النقاط الشاذة لسطوح العائلة تحقق:

$$F_x = F_y = F_z = 0$$

فستحقق (4,10) ، وبالتالي (4,9) .

4 – 14 ملاحظة

لإيجاد مغلف عائلة سطوح بوسيطين ، نستطيع أن نستخدم α , β وسيطين للمغلف ، ونجد x , y , z دوالاً لـــ α , β من المعادلات (4,9) ،كما نستطيع أن نحذف α , β فنحصل على معادلة ضمنية . وفي كلتا الحالتين لابد من فحص للنقاط الشاذة.

4 – 15 تعريف

نقول عن سطح إنه قابل للنشر إذا كان مستوياً أو مغلفاً لعائلة مستويات بوسيط واحد ، وبالتالي فالسطوح القابلة للنشر هي بالتعريف : المستويات والسطوح المولدة المماسية والسطوح المخروطية والسطوح الأسطوانية .

4 – 16 مبرهنة

ليكن :

$$r(u^1,u^2) = p(u^1) + u^2 I(u^1)$$

سطحاً مسطراً نظامياً من الصف C_1 ، حيث $I(u^1)$ متجه وحدة .

الشرط اللازم والكافي حتى يكون هذا السطح قابلاً للنشر هو أن يتحقق:

$$[p', I', I] = 0 \ .$$

البرهان :

لدينا:

$$r_1 = p'(u^1) + u^2 I'(u^1) \ , \ r_2 = I(u^1)$$

$$r_1 \times r_2 = p'(u^1) \times I(u^1) + u^2 I'(u^1) \times I(u^1) \qquad (4,11)$$

ويكون السطح قابلاً للنشر إذا وفقط إذا تطابقت المستويات المماسة في جميع نقاط أي سطر وبالتالي إذا وفقط إذا كان اتجاه المتجه الناظم (4,11) غير متعلق بـ u^2 ، وهذا يحدث إذا وفقط إذا كان المتجهان $P' \times I$ و $I' \times I$ مرتبطين خطياً ، أياً كان u^1 ، أي :

$$(P' \times I) \times (I' \times I) = 0$$

ولكن:

$$(P' \times I) \times (I' \times I) = [p', I', I]\, I - [I', I, I]\, p' = [p', I', I]\, I$$

ومنه نجد الشرط :

$$[p', I', I] = 0$$

Damascus University

تمرينات الفصل الثاني

1- أثبت أن كلاً من الأسطوانة ، الطارة ، الكرة ، هي سطح عادي .

2- أثبت صحة العلاقة (1,1)

3- أثبت أن المعادلات :

$$x=\frac{4a^2u}{4a^2+u^2+v^2}$$

$$y=\frac{4a^2v}{4a^2+u^2+v^2}$$

$$z=a\,\frac{4a^2-u^2-v^2}{4a^2+u^2+v^2}$$

تمثل كرة باستثناء النقطة (0,0,1) وأن بقية النقاط جميعها نظامية .

4- أوجد معادلات ضمنية لكل من السطوح : السطح اللولبي ، السطح السلسلي، السطح شبه الكروي ، الطارة .

5- أوجد معادلة المستوي المماس، ومركبات المتجه الناظم لكل من السطوح: الكرة، الأسطوانة ، السطح السلسلي، السطح اللولبي، السطح شبه الكروي، الطارة، مجسم قطع مكافئ زائدي .

6- أوجد نقاط تقاطع السطح اللولبي

$$x=u\cos v \quad , \quad y=u\sin v \quad , \quad z=v$$

مع المستقيم:

$$x=1 \qquad , \qquad y=0$$

7- أثبت أن متجه وحدة الناظم على السطح الأسطواني يعامد متجه وحدة أسطره a.

8- أوجد المستوي المماس للكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

في كل من النقاط :

$$(1,0,0) \quad \text{و} \quad (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0) \quad \text{و} \quad (\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$$

9- أوجد متجه وحدة الناظم في نقطة من سطح كرة ، وأثبت أن المستقيم الناظم في هذه النقطة يمر من مركز الكرة .

10- إذا كان :

$$(u^{1'},u^{2'}) \ , \ (u^1,u^2)$$

توسيطين للسطح نفسه فإن:

$$r_{1'} \times r_{2'} = \frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(u^{1'},u^{2'})} \ r_1 \times r_2$$

11- أوجد المستوي المماس في نقطة من سطح كرة ، وكذلك مخروط ، وأثبت أن المنحنيات الإحداثية للمخروط هي دوائر ومستقيمات متعامدة . أثبت أن رأس المخروط نقطة شاذة.

12- أثبت أن خطوط الطول وخطوط العرض للطارة في نقطة منها هي دوائر متعامدة.

13- ادرس المستوي المماس في نقطة من السطح شبه الكروي ولاسيما في $(\frac{\pi}{2},0)$.

14- أوجد تمثيلين وسيطيين مختلفين لمجسم القطع المكافئ الزائدي ، وأوجد معادلة المستوي المماس في نقطة الأصل .

15- أوجد معادلة المستوي المماس ، والمستقيم الناظم في نقطة من السطح اللولبي .

16- المستويات المماسة لسطح مسطر في نقاط سطر معين منه ، تحوي جميعها هذا السطر .

17- أوجد معادلة المنحني المضيق للسطح اللولبي .

18- أوجد متجه وحدة الناظم على سطح مولد مماسي بدلالة ثلاثية فرنيه للمنحني.

19- أثبت أن عائلة المستويات المماسة للسطح الأسطواني لا تتعلق إلا بوسيط واحد.

20- أثبت أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون السطحان

$$x = x(u^1,u^2)\,,\quad y = y(u^1,u^2)\,,\quad z = z(u^1,u^2)$$

$$F(x,y,z) = 0$$

متماسين في النقطة المشتركة $(x_0,y_0,z_0)=0$ التي تقابل القيمتين $(u_0^1\,,\,u_0^2)$ هو أن تتحقق المعادلتان الآتيتان في هذه النقطة :

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 = 0$$

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 = 0$$

21- أوجد مغلف كل من عائلتي الكرات :

أ- الكرات ذات نصف القطر c ، والمراكز الواقعة على اللولب :

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

$$z = bt$$

ب- $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 2a$

22- أوجد حرف الانكفاء لمغلف عائلة المستويات الناظمة لمنحن .

23 – أوجد مغلف عائلة المستويات المقوّمة لمنحن $r=r(s)$ من الصف C_3 وذي تقوس غير معدوم .

24 – أوجد مغلف عائلة المستويات المقومة للمنحني :

$$p(s)=(\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 0)$$

25 – أوجد مغلف عائلة المستويات الملاصقة ، ومغلف عائلة المستويات الناظمة للولب .

26 – أوجد مغلف كل من عائلات السطوح :

أ- $x+a^2y+z-2a=0$

ب- $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-a^2=0$

ج- $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=a^2+b^2$

د- $2ax+2by+z=a^2+b^2$

الفصل الثالث

الشكلان التربيعيان الأساسيان لسطح

1- الشكل التربيعي الأساسي الأول .

2- التطبيقات المتقايسة .

3- الشكل التربيعي الأساسي الثاني .

4- تقوس غوص (*Gauss*) ورموز كريستوفل (*Christoffel*) .

5- التقوس الجيوديزي والخطوط الجيوديزية.

6- التقوس الناظمي والتقوسات الأساسية .

تمرينات الفصل الثالث .

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الشكلان التربيعيان الأساسيان لسطح

1- الشكل التربيعي الأساسي الأول

1-1 تمهيد

نسمي شكلاً تربيعياً على $\Re^p$ (أو شكلاً تربيعياً بالمتغيرات، $x_1, x_2, \cdots, x_p$) كل تطبيق من الشكل :

$$q : \Re^p \to \Re$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \to q(x) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i x_j$$

حيث :

$$a_{ij} = a_{ji}$$

وتدعى معاملات الشكل التربيعي .

وإذا وضعنا :

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_p \end{bmatrix} \quad , \quad X^T = [x_1, x_2, \cdots, x_p]$$

فعندئذ :

$$q(x) = X^T Q X$$

وخصوصاً الشكل التربيعي على $\Re^2$ يعطى بـــ :

$$(x_1 = x,\ x_2 = y)$$

$$q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

ليكن الآن E و F فضاءَي متجهات ، و V مجموعة جزئية مفتوحة من E . نسمي شكلاً تفاضلياً من الدرجة الأولى على V وبقيم في F كل تطبيق W لـِ V في $\mathscr{L}(E,F)$ (فضاء التطبيقات الخطية لـ E في F) ، ونقول عن W إنه شكل مضبوط إذا وجدت دالة :

$$g : V \to F$$

حيث يكون :

$$W = dg$$

وإذا كان :

$$r(u^1,u^2) = (x(u^1,u^2), y(u^1,u^2), z(u^1,u^2))$$

تمثيلاً من الصف C_k $(k \geq 1)$ لسطح S، وكانت r معرفة على مجموعة مفتوحة D في $\Re^2$ ؛ فإن dr هو شكل تفاضلي (مضبوط) على D ، وبقيم في $\Re^3$:

$$dr : D \to \mathscr{L}(\Re^2, \Re^3)$$

$$(u^1,u^2) \to dr_{(u^1,u^2)}$$

حيث :

$$dr_{(u^1,u^2)}(h^1,h^2) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u^1,u^2) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u^1,u^2) \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u^1,u^2) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u^1,u^2) \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u^1,u^2) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u^1,u^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} h^1 \dfrac{\partial x}{\partial u^1}(u^1,u^2) & + & h^2 \dfrac{\partial x}{\partial u^2}(u^1,u^2) \\ h^1 \dfrac{\partial y}{\partial u^1}(u^1,u^2) & + & h^2 \dfrac{\partial y}{\partial u^2}(u^1,u^2) \\ h^1 \dfrac{\partial z}{\partial u^1}(u^1,u^2) & + & h^2 \dfrac{\partial z}{\partial u^2}(u^1,u^2) \end{bmatrix} =$$

$$= h^1 \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1}(u^1,u^2) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^1}(u^1,u^2) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u^1}(u^1,u^2) \end{bmatrix} + h^2 \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^2}(u^1,u^2) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^2}(u^1,u^2) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u^2}(u^1,u^2) \end{bmatrix} =$$

$$= h^1 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}(u^1,u^2) + h^2 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}(u^1,u^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} h^i \boldsymbol{r}_i(u^1,u^2)$$

وإذا استخدمنا التفاضلين : du^1 و du^2

$$du^i : \Re^2 \to \Re$$

$$(h^1,h^2) \to du^i(h^1,h^2) = h^i$$

فإننا نجد أن :

$$\boldsymbol{dr}_{(u^1,u^2)}(h^1,h^2) = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{r}_i(u^1,u^2)\, du^i(h^1,h^2) =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{r}_i(u^1,u^2)\, du^i\right](h^1,h^2)$$

ومنه :

$$\boldsymbol{dr}_{(u^1,u^2)} = \boldsymbol{r}_1(u^1,u^2)\, du^1 + \boldsymbol{r}_2(u^1,u^2) du^2$$

وعندئذٍ نستطيع أن نكتب :

$$\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{r}_1\, du^1 + \boldsymbol{r}_2\, du^2$$

وبالتالي :

$$dr \cdot dr = r_1 \cdot r_1 (du^1)^2 + 2r_1 \cdot r_2 \, du^1 du^2 + r_2 \cdot r_2 (du^2)^2$$

ممّا يعني أن :

$$I_{(u^1,u^2)} = dr_{(u^1,u^2)} \cdot dr_{(u^1,u^2)}$$

هو شكل تربيعي :

$$I_{(u^1,u^2)} : \Re^2 \to \Re$$

$$(h^1,h^2) \to I_{(u^1,u^2)}(h^1,h^2) = r_1(u^1,u^2) \cdot r_1(u^1,u^2)(h^1)^2 +$$

$$+ 2r_1(u^1,u^2) \cdot r_2(u^1,u^2) h^1 h^2 + r_2(u^1,u^2) \cdot r_2(u^1,u^2)(h^2)^2$$

وإذا رمزنا بـ $Q(\Re^2)$ لمجموعة الأشكال التربيعية على $\Re^2$ ؛ فعندئذ :

$$I : D \to Q(\Re^2)$$

$$(u^1,u^2) \to I_{(u^1,u^2)}$$

1-2 اصطلاح اينشتاين ورموز كرونكر

إذا تكرر دليل ما مثل i في الحد ذاته ، مرة بوصفه دليلاً علوياً ، وأخرى بوصفه دليلاً سفلياً فنصطلح على أن العبارة هي مجموع لهذا الحد من أجل $i = 1$ و $i = 2$ ... وهكذا حتى $i = p$.

فمثلاً

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \ldots + a_p b^p$$

$$a_j b^{jk} = a_1 b^{1k} + a_2 b^{2k} + \ldots + a_p b^{pk}$$

وإذا كان :

$$p = 2$$

فعندئذ :

$$r_i \, du^i = r_1 \, du^1 + r_2 \, du^2$$

$$g_{ij}\,du^i du^j = g_{11}\,du^1 du^1 + g_{12}\,du^1 du^2 + g_{21}\,du^2 du^1 + g_{22}\,du^2 du^2$$

أما رموز كرونكر δ_i^j أو δ_{ij} أو δ^{ij} فتعرف بـــ

$$\delta_i^j = \delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & ,if\ i = j \\ 0 & ,if\ i \neq j \end{cases}$$

1 – 3 تعريف

إذا كان:

$$r(u^1,u^2)$$

تمثيلاً من الصف C_k $(k \geq 1)$ لسطح S ، فنقول عن العبارة:

$$I_{(u^1,u^2)} = g_{11}(u^1,u^2)(du^1)^2 + 2g_{12}(u^1,u^2)du^1du^2 + g_{22}(u^1,u^2)(du^2)^2$$

حيث :

$$g_{ij}(u^1,u^2) = r_i(u^1,u^2)\cdot r_j(u^1,u^2) \qquad i,j = 1,2$$

إنها الشكل التربيعي الأساسي الأول للسطح ، ونقول عن g_{ij} إنها معاملات الشكل التربيعي الأساسي الأول . ومن الواضح أن g_{ij} هي دوال من الصف C_{k-1} .

1 – 4 نتائج

1 – إذا كانت (u^1,u^2) نقطة نظامية وكان :

$$(h^1,h^2) \neq 0$$

فعندئذٍ :

$$I_{(u^1,u^2)}(h^1,h^2) = g_{ij}(h^1,h^2)h^i h^j > 0$$

2 – المعاملات g_{ij} متناظرة أي:

$$g_{ij} = g_{ji}$$

3 – إذا رمزنا بـــ g لمعين المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

أي :

$$g = g_{11}\ g_{22} - g_{12}^2$$

فلدينا في النقاط النظامية :

$$g_{11} > 0 \quad , \quad g_{22} > 0 \quad , \quad g > 0$$

وإذا رمزنا بـــ g^{ij} لعناصر المصفوفة العكسية، للمصفوفة السابقة فعندئذ :

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}$$

$$g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

أي أن:

$$g^{ij} = g^{ji}$$

ومن المساواة :

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد العلاقات :

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \qquad i, j = 1,2$$

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \qquad i, j = 1,2$$

$$(r_1 \times r_2)^2 = g \qquad -4$$

في الحقيقة لدينا :

$$
\begin{aligned}
(r_1 \times r_2)^2 &= \|r_1\|^2 \, \|r_2\|^2 \sin^2 \angle(r_1, r_2) \\
&= \|r_1\|^2 \, \|r_2\|^2 (1 - \cos^2 \angle(r_1, r_2)) \\
&= \|r_1\|^2 \, \|r_2\|^2 (1 - \frac{(r_1 \cdot r_2)^2}{\|r_1\|^2 \, \|r_2\|^2}) \\
&= (r_1 \cdot r_1)(r_2 \cdot r_2) - (r_1 \cdot r_2)^2 \\
&= g_{11} \, g_{22} - (g_{12})^2 \\
&= g
\end{aligned}
$$

5 – تغيير الإحداثيات المنحنية :

إذا كانت $u^{1'}, u^{2'}$ إحداثيات جديدة ترتبط مع الإحداثيات القديمة u^1, u^2 بالعلاقتين:

$$
\begin{aligned}
u^1 &= u^1(u^{1'}, u^{2'}) \\
u^2 &= u^2(u^{1'}, u^{2'})
\end{aligned}
$$

ورمزنا للتمثيل الجديد للسطح بـــ

$$r^*(u^{1'}, u^{2'}) = r\left(u^1(u^{1'}, u^{2'}), u^2(u^{1'}, u^{2'})\right)$$

فعندئذ :

$$r^*_{i'} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} \, r_j$$

وبالتالي ؛ فإن معاملات الشكل التربيعي تتحول كالآتي :

$$
\begin{aligned}
g_{i'j'} &= r_{i'} \cdot r_{j'} \\
&= \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \, r_k \cdot \frac{\partial u^\ell}{\partial u^{j'}} r_\ell \\
&= \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \, \frac{\partial u^\ell}{\partial u^{j'}} \, r_k \cdot r_\ell
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^\ell}{\partial u^{j'}} g_{k\ell}$$

ونستطيع أن نكتب هذه العلاقات بالشكل :

$$g_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} g_{ij}$$

وإذا كان المعين اليعقوبي

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u^{1'}, u^{2'})}$$

لا يساوي الصفر ؛

فيوجد للتطبيق (1,1) تطبيق عكسي (محلي) :

$$u^{1'} = u^{1'}(u^1, u^2)$$

$$u^{2'} = u^{2'}(u^1, u^2)$$

ونجد بطريقة مشابهة العلاقات

$$g_{ij} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} g_{i'j'}$$

وإذا لاحظنا أن :

$$du^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} du^i$$

فإن الشكل التربيعي الأول في الإحداثيات الجديدة يعطى بـــ :

$$I_{(u^{1'}, u^{2'})} = g_{i'j'} du^{i'} du^{j'}$$

$$= \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} g_{ij} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^k} du^k \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^\ell} du^\ell$$

$$= \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^\ell} g_{ij} du^k du^\ell$$

ولما كانت المصفوفة $\left[\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}\right]$ هي معكوسة المصفوفة $\left[\frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}}\right]$ فإن :

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}}\ \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^j}=\delta^i_j$$

$$\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^k}\ \frac{\partial u^k}{\partial u^{j'}}=\delta^{i'}_j$$

وبالتالي :

$$I_{(u^{1'},u^{2'})} = \delta^i_k\ \delta^j_\ell\ g_{ij}\ du^k du^\ell$$

$$= g_{ij}\, du^i du^j$$

$$= I_{(u^1,u^2)}$$

1 – 5 أمثلة

1 – المستوي :

أ) إذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية ؛ فيمثل المستوي بـــ :

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=(x=u^1\ ,\ y=u^2\ ,\ z=0\ )$$

وعندئذٍ :

$$\boldsymbol{r}_1=(1,0,0)\ \ ,\ \ \boldsymbol{r}_2=(0,1,0)$$

ومنـــه :

$$g_{11}=1\ \ ,\ g_{12}=0\ \ ,\ g_{22}=1\ \ ,\ g=1$$

$$g^{11}=1\ \ ,\ \ g^{12}=0\ \ ,\ \ g^{22}=1$$

والشكل التربيعي الأول للمستوي في هذه الحالة هو :

$$I=dx^2+dy^2$$

ب) وإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية ؛ فسيمثل المستوي بـــ :

$$\boldsymbol{r}(\rho,\theta)=(x=\rho\cos\theta\ ,\ y=\rho\sin\theta\ ,\ z=0)$$

وعندئذٍ :

$$\boldsymbol{r}_1=(\cos\theta\ ,\sin\theta\ ,0)\ \ ,\ \boldsymbol{r}_2=(-\rho\sin\theta\ ,\rho\cos\theta,0)$$

ومنه :

$$g_{11}=1$$

$$g_{12}=g_{21}=0$$

$$g_{22}=\rho^2$$

$$g=\rho^2$$

وكذلك

$$g^{11}=1$$

$$g^{12}=g^{21}=0$$

$$g^{22}=\frac{1}{\rho^2}$$

2 – الكرة في الإحداثيات الكروية تمثل بـــ :

$$x=a\cos\theta\cos\phi$$

$$y=a\cos\theta\sin\phi$$

$$z=a\sin\theta$$

وبالتالي:

$$g_{11}=a^2$$

$$g_{12}=g_{21}=0$$

$$g_{22}=a^2\cos^2\theta$$

$$g=a^4\cos^2\theta$$

والشكل التربيعي الأول الأساسي للكرة هو :

$$I=a^2(d\theta^2+\cos^2\theta\ d\phi^2)$$

3 – السطح الدوراني :

معاملات الشكل التربيعي الأساسي الأول للسطح الدوراني:

$$x = f(u)\cos v$$

$$y = f(u)\sin v$$

$$z = h(u)$$

تعطى بـــ :

$$g_{11} = f'^2 + h'^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{22} = f^2$$

وبالتالي: $g = f^2(f'^2 + h'^2)$

كما أن :

$$g^{11} = \frac{1}{f'^2 + h'^2}$$

$$g^{12} = g^{21} = 0$$

$$g^{22} = \frac{1}{f^2}$$

والشكل التربيعي الأول للسطح الدوراني هو :

$$I = (f'^2 + h'^2)du^2 + f^2 dv^2$$

4 – السطح السلسلي :

الشكل التربيعي الأساسي الأول للسطح السلسلي

$$x = a\cosh\frac{u^1}{a}\cos u^2$$

$$y = a\cosh\frac{u^1}{a}\sin u^2$$

$$z = u^1$$

هو:

$$I = \cosh^2 \frac{u^1}{a}[(du^1)^2 + a^2(du^2)^2]$$

5 – السطح شبه الكروي :

الشكل التربيعي الأساسي الأول للسطح شبه الكروي .

$$x = a \sin u^1 \cos u^2$$

$$y = a \sin u^1 \sin u^2$$

$$z = a(\cos u^1 + \ell n \tan \frac{u^1}{2})$$

هو:

$$I = a^2[\cot^2 u^1 (du^1)^2 + \sin^2 u^1 (du^2)^2]$$

6 – معاملات الشكل التربيعي الأساسي الأول للسطح اللولبي .

$$x = u \cos v$$

$$y = u \sin v$$

$$z = av$$

هي :

$$g_{11} = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{22} = u^2 + a^2$$

ومنه :

$$g = u^2 + a^2$$

والشكل التربيعي الأول :

$$I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

7 – الشكل التربيعي الأول للطارة .

$$x = (b + a\sin u^1)\cos u^2$$

$$y = (b + a\sin u^1)\sin u^2$$

$$z = a\cos u^1$$

هو:

$$I = a^2(du^1)^2 + (b + a\sin u^1)^2(du^2)^2$$

1-6 نتائج أخرى

1- جداء متجهين مماسين لسطح .

إذا كان:

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{r}_1 + a^2\boldsymbol{r}_2$$

متجهاً مماساً للسطح :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$$

فإن طول هذا المتجه يعطي بـــ:

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = a^2 = (a^i\boldsymbol{r}_i)^2 = (a^i\boldsymbol{r}_i)(a^j\boldsymbol{r}_j) =$$

$$= a^i a^j(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j) = g_{ij}a^i a^j$$

وإذا كان:

$$\boldsymbol{b} = b^j\boldsymbol{r}_j$$

متجهاً مماساً آخر ؛ فعندئذ:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = g_{ij}a^i b^j$$

وإذا رمزنا بـــ ϕ لزاوية المتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ ؛ فعندئذ :

$$\cos\phi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{g_{ij}a^i b^j}{\sqrt{g_{ij}a^i a^j}\sqrt{g_{ij}b^i b^j}}$$

2- زاوية منحنيين على سطح .

إذا كان :

$$u^1 = \phi^1(t) \quad , \quad u^2 = \phi^2(t)$$

$$u^1 = \psi^1(\tau) \quad , \quad u^2 = \psi^2(\tau)$$

تمثيلين وسيطيين من الصف C_k $(k \geq 1)$ لمنحنيين $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ واقعين على السطح، ويمران من النقطة المشتركة $p_\circ$ ذات الإحداثيين :

$$(u_0^1, u_0^2) = (\phi^1(t_\circ), \phi^2(t_\circ)) = (\psi^1(\tau_\circ), \psi^2(\tau_\circ))$$

فعندئذ ؛ إذا وضعنا :

$$\delta u^i = \frac{d\psi^i}{d\tau} d\tau \qquad du^i = \frac{d\phi^i}{dt} dt$$

$$\delta r = r_i \, \delta u^i \qquad dr = r_i \, du^i$$

ورمزنا بـــ θ لزاوية المنحنيين في النقطة المشتركة $p_\circ$ ؛ فإن:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}$$

ولاسيما إذا كان $\mathscr{L}_1$ المنحني الإحداثي ذا الوسيط u^1

أي : $u^2 = const.$

و $\mathscr{L}_2$ المنحني الإحداثي ذا الوسيط u^2

أي : $u^1 = const.$

فعندئذ:

$$du^2 = 0 \qquad \text{و} \qquad \delta u^1 = 0$$

ونستطيع أن نضع :

$$du^1 = 1 \qquad \text{و} \qquad \delta u^2 = 1$$

وبالتالي ، فإن :

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}}$$

ممّا يعني أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنحنيان الإحداثيان متعامدين في النقطة (u^1,u^2) هو أن يكون:

$$g_{12} = 0$$

في تلك النقطة .

وأخيراً ، إذا كانت المنحنيات الإحداثية متعامدة في كل نقطة من سطح، فنقول عنها إنها إحداثيات متعامدة. فالإحداثيات الديكارتية المتعامدة في المستوي ، وكذلك الإحداثيات القطبية هي إحداثيات متعامدة.

3 – المسارات المتزاوية لعائلة منحنيات بوسيط واحد على سطح .

إذا كانت $\{\mathscr{L}_\alpha\}$ عائلة منحنيات بوسيط واحد واقعة على سطح ؛ فنقول عن منحن على السطح، يقطع منحنيات العائلة جميعها بالزاوية ذاتها ϕ إنه مسارٌ متزاوٍ لهذه العائلة (*Isogonal trajectory*) ، وإذا كان $\phi = \frac{\pi}{2}$ فنقول عن المنحني إنه مسار متعامد.

إذا رمزنا بـــ δu^i للتفاضلات باتجاه منحنيات العائلة، وبـــ du^i للتفاضلات باتجاه المسار المتزاوي المطلوب إيجاده ، فعندئذ :

$$\frac{\left|g_{ij}\delta u^i du^j\right|}{\sqrt{g_{ij}du^i du^j}\ \sqrt{g_{ij}\delta u^i \delta u^j}} = \cos\phi$$

ومنه :

$$(g_{ij}\delta u^i du^j)^2 = g_{ij}du^i du^j g_{k\ell}\delta u^k \delta u^\ell \cos^2\phi$$

وهذه معادلة تفاضلية ، بالتفاضلين du^1 و du^2، ونحصل على الحل ؛ إما بإيجاد أحد المتغيرين u^i بوصفه دالة للآخر ، أو من خلال علاقة ضمنية بين المتغيرين u^1,u^2 .

ولاسيما في حالة المسار المتعامد ، فإن المعادلة التفاضلية تغدو من الشكل :

$$g_{ij}du^i\delta u^j = 0$$

1 – 7 مبرهنة

إذا كان :

$$r : D \to \Re^3$$
$$(u^1,u^2) \to r(u^1,u^2) \quad ,D \subseteq \Re^2$$

تمثيلاً وسيطياً من الصف C_k $(k \geq 1)$ لسطح $\mathcal{F}$ ، وكان :

$$[a,b] \to D$$
$$t \to (u^1(t),u^2(t))$$

تمثيلاً لمنحن $\mathcal{L}$ من الصف C_r $(r \geq 1)$ واقعاً على السطح ، فإن طول هذا المنحني يعطى بـــ :

$$s = \int_{t=a}^{b} \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\,dt = \int_{\mathcal{L}} \sqrt{I}$$

البرهان :

لما كان المنحني $\mathcal{L}$ يمثل بالدالة :

$$[a,b] \to \Re^3$$
$$t \to r(u^1(t),u^2(t))$$

وكان :

$$s = \int_{t=a}^{b} \left\|\frac{dr}{dt}\right\| dt$$

فإن :

$$s = \int_{t=a}^{b} \sqrt{\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}}\,dt = \int_{t=a}^{b} \sqrt{r_i\frac{du^i}{dt}\cdot r_j\frac{du^j}{dt}}dt$$

$$= \int_{t=a}^{b} \sqrt{(r_i \cdot r_j)\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\,dt = \int_{t=a}^{b} \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\,dt$$

1 – 8 ملاحظة

لما كان:

$$s' = \sqrt{(\frac{dr}{dt})^2}$$

فإن :

$$ds^2 = (dr)^2 = g_{ij}du^i du^j = I$$

1 – 9 مبرهنة

ليكن :

$$r : D \to \Re^3$$
$$(u^1, u^2) \to r(u^1, u^2)$$

سطحاً من الصف C_k $(k \geq 1)$ ، ولتكن σ منطقة على السطح معرفة بالمستطيل D_0 من D أي أن متجهات مواضع نقاط σ هي $r(D_0)$. عندئذ فإن مساحة المنطقة σ والتي نرمز لها بـــ σ أيضاً تعطى بـــ:

$$\sigma = \iint_{D_0} \sqrt{g}\, du^1 du^2$$

البرهان :

نجزئ المنطقة σ إلى ربيعات إحداثية (أشكال رباعية صغيرة) باستخدام المنحنيات الإحداثية .

$$u^1 = u_0^1 \ , \ u^1 = u_1^1 \ , \ \cdots \ , \ u^1 = u_n^1$$
$$u^2 = u_0^2 \ , \ u^2 = u_1^2 \ , \ \cdots \ , \ u^2 = u_m^2$$

ونستبدل الربيع $ABCD$ المحدود بالمنحنيات .

$$u^1 = u^1_{\lambda-1} \qquad \text{و} \qquad u^1 = u^1_{\lambda}$$

$$u^2 = u^2_{\mu-1} \qquad \text{و} \qquad u^2 = u^2_{\mu}$$

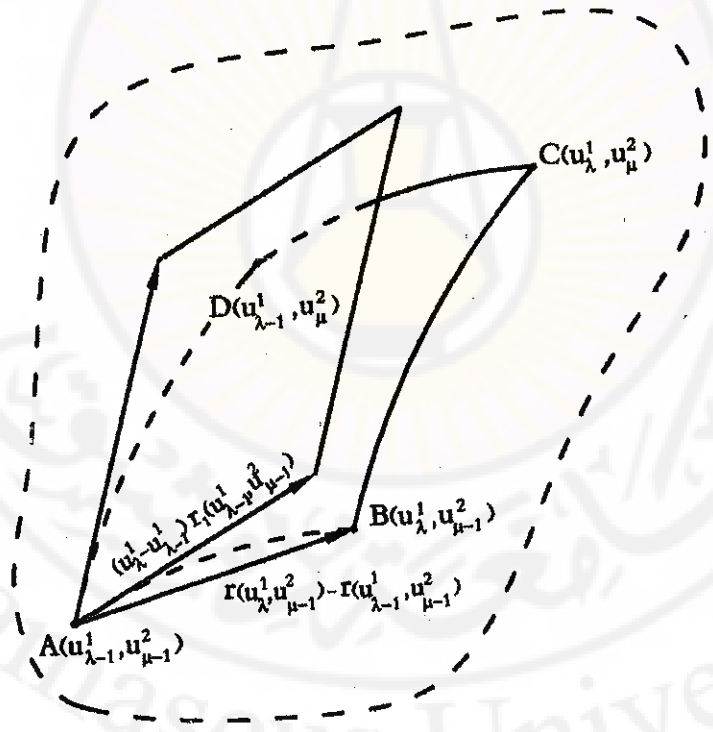
بمتوازي الأضلاع (المستقيمي : أضلاعه قطع مستقيمة) الموجود في المستوي المماس في النقطة :

$$A = (u^1_{\lambda-1}\ ,\ u^2_{\mu-1})$$

والمولد بالمتجهين .

$$(u^1_{\lambda} - u^1_{\lambda-1}) r_1(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})$$

$$(u^2_{\mu} - u^2_{\mu-1}) r_2(u^1_{\lambda-1}, u^2_{\mu-1})$$



الشكل -1-

اللذين يمسان ضلعي الربيع الإحداثي ويتساويان معهما تقريباً بالطول ، ويوافقاهما بالاتجاه تقريباً .

وهكذا فإن المنطقة σ من السطح تُغطّى بدرجات كل منها على شكل متوازي أضلاع يساوي تقريباً الخلية الأصلية (الربيع) للتجزئة التي نرمز لها بـــ p .

إن مساحة متوازي الأضلاع تعطى بـــ :

$$\left\|(u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})r_1(u^1_{\lambda-1},u^2_{\mu-1}) \times (u^2_\mu - u^2_{\mu-1})r_2(u^1_{\lambda-1},u^2_{\mu-1})\right\| =$$

$$= \sqrt{g(u^1_{\lambda-1},u^2_{\mu-1})}\ \ (u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1})$$

وبالتالي ؛ فإن مساحة σ تساوي تقريباً مجموع مساحات الدرجات التي تغطي σ :

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\sqrt{g(u^1_{\lambda-1},u^2_{\mu-1})}\ \ (u^1_\lambda - u^1_{\lambda-1})(u^2_\mu - u^2_{\mu-1})$$

ولكن المقدار السابق هو مجموع ريمان للدالة $\sqrt{g}$ من أجل التجزئة p ، وكلما كانت التجزئة أدق ؛ فإن مجموع ريمان يقترب أكثر من مساحة σ ، ممّا يعني أن مساحة σ هي التكامل الثنائي :

$$\sigma = \iint_{D_0}\sqrt{g(u^1,u^2)}\ \ du^1du^2$$

1-10 ملاحظة

إن الصيغة الأخيرة تبقى صالحة في حالة مناطق أكثر عمومية ، كأن تكون مثلاً متجهات مواضع نقاط σ هي صورة منطقة $\mathscr{E}$ في المستوي (u^1,u^2) محدودة بمنحنيات قابلة للمفاضلة قطعياً ومغلقة.

1-11 أمثلة

1- أوجد المسارات المتزاوية لعائلة أسطر الأسطوانة الدائرية :

$$x = a\cos u^1$$

$$y = a\sin u^1$$

$$z = u^2$$

لما كانت الأسطر هي المنحنيات الإحداثية ذات الوسيط u^2 $(u^1 = const.)$ ، فنستطيع أن نضع:

$$\delta u^1 = 0 \qquad ، \qquad \delta u^2 = 1$$

والشكل الأساسي الأول للأسطوانة هو :

$$ds^2 = a^2(du^1)^2 + (du^2)^2$$

وبالتالي ، فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المتزاوية ستكون

$$\frac{|\,du^2\,|}{\sqrt{a^2(du^1)^2 + (du^2)^2}} = \cos\phi$$

ومنه :

$$du^2 = \pm\cos\phi\sqrt{a^2(du^1)^2 + (du^2)^2}$$

وعندئذٍ نجد :

$$(\frac{du^2}{du^1})^2 = a^2\cos^2\phi + (\frac{du^2}{du^1})^2\cos^2\phi$$

أو :

$$(1-\cos^2\phi)(\frac{du^2}{du^1})^2 = a^2\cos^2\phi$$

أو :

$$\frac{du^2}{du^1} = \pm a\cot\phi$$

أخيراً :

$$u^2 = \pm au^1\cot\phi + c$$

والمسارات المتزاوية تعطى بالمعادلات :

$$x = a\cos u^1$$

$$y = a\sin u^1$$

$$z = \pm(a\cot\phi)u^1 + c$$

ممّا يعني أن المسارات هي لوالب .

لإيجاد المسارات المتعامدة نضع:

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

فنجد :

$$\cot\phi = 0$$

ومنه:

$$z = c$$

والمسارات تكون عندئذٍ دوائرَ .

2 – أوجد طول المنحني:

$$u^1 = t \ , \quad u^2 = \mathrm{ch}\, t \qquad , \quad 0 \le t \le 1$$

على السطح :

$$r(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$$

لدينا :

$$r_1 = (-\sin u^1, \cos u^1, 0) \ , \ r_2 = (0,0,1)$$

ومنه :

$$g_{11} = r_1 \cdot r_1 = 1$$

$$g_{12} = r_1 \cdot r_2 = 0$$

$$g_{22} = r_2 \cdot r_2 = 1$$

وعندئذٍ ، فإن طول المنحني يعطى بـــ :

$$s=\int_0^1\sqrt{g_{11}(\frac{du^1}{dt})^2+2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+g_{22}(\frac{du^2}{dt})^2}\ \ dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+0+\mathrm{sh}^2 t}\ \ dt=\int_0^1 \mathrm{ch}\,t\,dt=\mathrm{sh}\,t\Big|_{t=0}^1=\mathrm{sh}\,1$$

3 – أوجد مساحة الطارة :

$$x=(b+a\sin u^1)\cos u^2$$

$$y=(b+a\sin u^1)\sin u^2$$

$$z=a\cos u^1$$

لما كان الشكل الأساسي الأول للطارة هو :

$$ds^2=a^2(du^1)^2+(b+a\sin u^1)^2(du^2)^2$$

فإن مساحة الطارة تعطى بـــ:

$$\sigma=\int_{u^1=0}^{2\pi}\int_{u^2=0}^{2\pi}\sqrt{a^2(b+a\sin u^1)^2-0}\ \ du^1du^2$$

$$=2\pi a[bu^1-a\cos u^1]_{u^1=0}^{2\pi}=4\pi^2ab$$

2 – التطبيقات المتقايسة

2 – 1 تمهيد

ليكن $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ سطحين في $\Re^3$ و ϕ تطبيقاً لـ $\mathcal{F}_1$ في $\mathcal{F}_2$، ولنفترض أن صورة النقطة P_0 من $\mathcal{F}_1$ هي النقطة Q_0 من $\mathcal{F}_2$.ولنفترض أخيراً أن لـ $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ في جوار P_0 و Q_0 التمثيلين النظاميين :

$$(u^1,u^2) \to r(u^1,u^2)$$
$$(v^1,v^2) \to R(v^1,v^2)$$

على الترتيب.

إذا كانت النقطة Q من $\mathcal{F}_2$ هي صورة النقطة P من $\mathcal{F}_1$ وفق ϕ ، فإن ϕ يتعين تماماً ، إذا استطعنا أن نعبّر عن الإحداثيين (v^1,v^2) للنقطة Q بوصفهما دالتين بالإحداثيين (u^1,u^2) للنقطة P :

$$v^1 = v^1(u^1,u^2) \qquad v^2 = v^2(u^1,u^2) \qquad (2,1)$$

نقول عن التطبيق ϕ إنه نظامي من الصف C_n ، إذا كان المعين اليعقوبي:

$$\frac{\partial(v^1,v^2)}{\partial(u^1,u^2)}$$

لا يساوي الصفر ، وكانت الدالتان (2,1) من الصف C_n . ممّا يقتضي أن يكون التطبيق متبايناً محلياً .

إن أي تطبيق لسطح $\mathcal{F}_1$ في سطح آخر $\mathcal{F}_2$ ، يحدث في كل نقطة تطبيقاً لفضاء المتجهات المماسة لـ $\mathcal{F}_1$ في هذه النقطة، في فضاء المتجهات المماسة لـ $\mathcal{F}_2$ في صورة هذه النقطة .

فإذا كان:

$$w = w^i r_i$$

متجهاً مماساً لـ $\mathscr{F}$ في P_0 فنعرف صورته:

$$w^* = w^{*i} R_i$$

بالعلاقات :

$$w^{*i} = A^i_j w^j \qquad (2,2)$$

حيث :

$$A^i_j = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u^1_0, u^2_0)$$

علماً أن (u^1_0, u^2_0) هي إحداثيات النقطة P_0 .

من الواضح أن (2,2) تمثل تطبيقياً خطياً لفضاء المتجهات المماسة في P_0 على فضاء المتجهات المماسة في Q_0 .

تجدر الملاحظة أخيراً إلى أن العلاقات (2,1) تُعدُّ تحويلاً للإحداثيات على السطح الثاني، فإذا عوضنا (2,1) في معادلة السطح الثاني لحصلنا على تمثيل وسيطي آخر لهذا السطح .

$$(u^1, u^2) \to R(v^1(u^1, u^2), v^2(u^1, u^2)) = R^*(u^1, u^2)$$

وبهذا التمثيل الجديد للسطح الثاني يصبح للنقطتين المتقابلتين على السطحين الإحداثيان المنحنيان ذاتهما ، كما يصبح للمتجهين المتقابلين المركبات نفسها ، بالنسبة إلى القاعدتين الطبيعيتين (r_1, r_2) و (R^*_1, R^*_2) . نقول في هذه الحالة عن تمثيلي السطحين ، إنهما منسجمان مع التطبيق .

2 – 2 تعريف

نقول عن تطبيق لسطح في آخر إنه متقايس (*Isometric*) إذا حافظ على أطوال المنحنيات على السطح ، أي إذا كان طول صورة أي منحن يساوي طول

المنحني ذاته . ونقول عن سطحين إنهما متقايسان إذا وُجِدَ تطبيق متقايس لأحدهما في الآخر .

2-3 مبرهنة

إذا كان ϕ تطبيقاً نظامياً من الصف C_1 لسطح $\mathscr{F}_1$ في سطح آخر $\mathscr{F}_2$ ؛ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون ϕ متقايساً هو أن يتطابق الشكل التربيعي الأول لـِ $\mathscr{F}_1$ مع الشكل التربيعي الأول لـِ $\mathscr{F}_2$ وذلك في تمثيلين منسجمين ، أي:

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$$

حيث: $g_{ij}du^i du^j$

الشكل التربيعي الأول لـِ $\mathscr{F}_1$.

و: $\tilde{g}_{ij}du^i du^j$

الشكل التربيعي الأول لـِ $\mathscr{F}_2$.

البرهان:

لما كان التمثيلان منسجمين مع التطبيق، فإن لمنحن على السطح الأول، ولصورته على السطح الآخر ، وفق هذا التطبيق ؛ التمثيل نفسه في الإحداثيات المنحنية:

$$u^1 = u^1(t) \quad \text{و} \quad u^2 = u^2(t)$$

وطول الجزء من المنحني من t_0 إلى t على السطح الأول يساوي :

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\ dt$$

وطول صورته على السطح الثاني يساوي :

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{\tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\ dt$$

لزوم الشرط :

إذا فرضنا أن التطبيق متقايس ؛ فعندئذ:

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\;dt \;=\; \int_{t_0}^{t}\sqrt{\tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\;dt \qquad (2,3)$$

أياً كان المنحني ممّا يقتضي أن يكون:

$$g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} \;=\; \tilde{g}_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}$$

أياً كان المنحني .

فإذا أخذنا المنحني :

$$u^1 = u_0^1 + t$$
$$u^2 = u_0^2$$

لحصلنا في $t=0$ على :

$$g_{11}(u_0^1,u_0^2) = \tilde{g}_{11}(u_0^1,u_0^2)$$

ولو أخذنا المنحني :

$$u^1 = u_0^1$$
$$u^2 = u_0^2 + t$$

لوجدنا:

$$g_{22}(u_0^1,u_0^2) = \tilde{g}_{22}(u_0^1,u_0^2)$$

وأخيراً ، فإن المنحني :

$$u^1 = u_0^1 + t$$
$$u^2 = u_0^2 + t$$

يقتضي صحة المساواة :

$$g_{ij}(u_0^1,u_0^2) = \tilde{g}_{ij}(u_0^1,u_0^2)$$

وبالتالي :

$$g_{12}(u_0^1,u_0^2)=\tilde{g}_{12}(u_0^1,u_0^2)$$

ولما كانت النقطة (u_0^1,u_0^2) اختيارية ؛ فنستنتج أن:

$$g_{ij}=\tilde{g}_{ij}$$

كفاية الشرط :

إذا تحققت المتطابقات $g_{ij}=\tilde{g}_{ij}$ ؛ فعندئذ تتحقق المساواة (2,3) أيا كان المنحني:

$$u^1=u^1(t)$$

$$u^2=u^2(t)$$

ممّا يعني أن التطبيق متقايس .

4 – 2 أمثلة

1 – الشكل التربيعي الأول للمستوي oxy الممثل بـــ

$$r(u^1,u^2)=(u^1,u^2,0)$$

هو :

$$I=(du^1)^2+(du^2)^2$$

والشكل التربيعي الأول للأسطوانة الدائرية:

$$R(v^1,v^2)=(a\cos v^1\ ,\ a\sin v^1\ ,\ v^2)$$

هو :

$$I=a(dv^1)^2+(dv^2)^2$$

وإذا أخذنا التطبيق ϕ للمستوي في الأسطوانة المعرف بـــ :

$$v^1=\frac{u^1}{a}$$

$$v^2=u^2$$

فإن تمثيل الأسطوانة المنسجم مع التطبيق يكون :

$$\boldsymbol{R}^*(u^1,u^2)=(a\cos\frac{u^1}{a}\,,\,a\sin\frac{u^1}{a}\,,\,u^2)$$

ومعاملات الشكل التربيعي الأول للأسطوانة في هذا التمثيل تغدو :

$$\widetilde{g}_{11}=\boldsymbol{R}_1^*\cdot\boldsymbol{R}_1^*=1$$

$$\widetilde{g}_{12}=\boldsymbol{R}_1^*\boldsymbol{R}_2^*=0$$

$$\widetilde{g}_{22}=\boldsymbol{R}_2^*\cdot\boldsymbol{R}_2^*=1$$

ممّا يعني أن المستوي والأسطوانة متقايسان .

2 – السطح السلسلي والسطح اللولبي متقايسان .

معاملات الشكل التربيعي الأول للسطح السلسلي :

$$(a\cosh\frac{u^1}{a}\cos u^2,\ a\cosh\frac{u^1}{a}\sin u^2,\ z=u^1)$$

هي :

$$g_{11}=\cosh^2\frac{u^1}{a}$$

$$g_{12}=0$$

$$g_{22}=a^2\cosh^2\frac{u^1}{a}$$

وإذا أخذنا التطبيق :

$$v^1=a\sinh\frac{u^1}{a}$$

$$v^2=u^2$$

للسطح السلسلي في السطح اللولبي:

$$(v^1\cos v^2,\ v^1\sin v^2,\ a v^2)$$

فإن تمثيل السطح اللولبي المنسجم مع التطبيق يكون :

$$\boldsymbol{R}^*(u^1,u^2)=(a\sinh\frac{u^1}{a}\cos u^2,\ a\sinh\frac{u^1}{a}\sin u^2,au^2)$$

وعندئذٍ ؛ نجد أن معاملات الشكل التربيعي الأول للسطح اللولبي تغدو:

$$\tilde{g}_{11}=\cosh^2\frac{u^1}{a}$$

$$\tilde{g}_{12}=0$$

$$\tilde{g}_{22}=a^2\cosh^2\frac{u^1}{a}$$

وهي تتطابق مع معاملات الشكل التربيعي الأول للسطح السلسلي ، ممّا يقتضي أن يكون السطحان متقايسين .

3 – المخروط والمستوي متقايسان

معاملات الشكل التربيعي الأول للمخروط :

$$(v^1\cos v^2,v^1\sin v^2,v^1)$$

هي :

$$g_{11}=2$$

$$g_{12}=0$$

$$g_{22}=(v^1)^2$$

وإذا أخذنا التطبيق:

$$u^1=\sqrt{2}\ v^1\sin\frac{v^2}{\sqrt{2}}$$

$$u^2=\sqrt{2}\ v^1\cos\frac{v^2}{\sqrt{2}}$$

للمخروط في المستوي $(u^1,u^2,0)$.

فنجد تمثيل المستوي المنسجم مع التطبيق :

$$(\sqrt{2}\, v^1 \sin\frac{v^2}{\sqrt{2}} \ , \ \sqrt{2}\, v^1 \cos\frac{v^2}{\sqrt{2}} \ , 0)$$

ومعاملات الشكل التربيعي الأول للمستوي في هذا التمثيل تعطى بـــ :

$$\widetilde{g}_{11} = 2$$

$$\widetilde{g}_{12} = 0$$

$$\widetilde{g}_{22} = (v^1)^2$$

وهي تتطابق مع معاملات الشكل التربيعي الأول للمخروط .

3- الشكل التربيعي الأساسي الثاني

3-1 مبرهنة

ليكن :

$$r = r(u^1, u^2)$$

تمثيلاً من الصف C_2 لسطح ، ولتكن P و Q نقطتين متجاورتين إحداثياهما (u^1, u^2) و $(u^1 + h^1, u^2 + h^2)$ على الترتيب. عندئذ فإن بعد النقطة Q عن المستوي المماس للسطح في P يساوي القيمة المطلقة للمقدار:

$$\delta = \frac{1}{2} b_{ij} h^i h^j$$

بخطأ من المرتبة الثانية على الأقل بالنسبة إلى المقدار :

$$\sqrt{(h^1)^2 + (h^2)^2}$$

حيث:

$$b_{ij} = r_{ij}(u^1, u^2) \cdot \boldsymbol{m}(u^1, u^2)$$

و $\boldsymbol{m}$ متجه وحدة الناظم على السطح .

البرهان :

إن بعد النقطة Q عن المستوي المماس في P يساوي القيمة المطلقة للمقدار :

$$d = [r(u^1 + h^1, u^2 + h^2) - r(u^1, u^2)] \cdot \boldsymbol{m}(u^1, u^2)$$

وإشارة d تعيّن الجانب من المستوي المماس الذي تقع فيه Q ، فإذا كانت موجبة فإن Q تقع في نصف الفضاء الذي يتجه نحوه $\boldsymbol{m}$.

إذا استخدمنا صيغة تايلور فنجد المساواة.

$$d = [r_i h^i + \frac{1}{2} r_{ij} h^i h^j + 0((h^1)^2 + (h^2)^2)] \cdot \boldsymbol{m}$$

ولما كان:

$$r_i \cdot m = 0$$

فعندئذ:

$$d = \frac{1}{2} r_{ij} \cdot m \; h^i h^j + 0((h^1)^2 + (h^2)^2)$$

علماً أن قيم الدوال m , r_{ij} , r_i مأخوذة في النقطة $P(u^1,u^2)$. وباستخدام الرموز:

$$b_{ij} = r_{ij} \cdot m = \frac{[r_{ij}, r_1, r_2]}{\|r_1 \times r_2\|} = \frac{[r_{ij}, r_1, r_2]}{\sqrt{g}} \qquad (3,1)$$

فإننا نجد المساواة المطلوبة ، مع ملاحظة أن المعاملات b_{ij} تتعلق بالنقطة P فقط.

3-2 تعريف

نقول عن الشكل التربيعي .

$$\mathrm{II} = b_{ij}\, du^i\, du^j$$

حيث أن المعاملات b_{ij} تعطى بالعلاقات (3,1) ، إنه الشكل التربيعي الأساسي الثاني للسطح ، وإذا لاحظنا أن:

$$b_{ij} = b_{ji}$$

فعندئذ :

$$\mathrm{II} = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}\, du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2$$

3-3 ملاحظات ونتائج

1- لما كان:

$$r_i \cdot m = 0$$

فإننا بالاشتقاق بالنسبة لـ u^j نجد أن :

$$r_{ij} \cdot m + r_i \cdot m_j = 0$$

ومنه :

$$b_{ij} = r_{ij} \cdot m = -r_i \cdot m_j$$

وإذا لاحظنا أن:

$$dr = r_i\, du^i$$

$$dm = m_j\, du^j$$

فعندئذٍ :

$$-dr \cdot dm = -r_i \cdot m_j\, du^i\, du^j = b_{ij}\, du^i du^j = \mathrm{II}$$

2 – نرمز عادة إلى مميز الشكل الأساسي الثاني بـ b :

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

3 – إذا كان :

$$r(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),\ y(u^1,u^2),\ z(u^1,u^2))$$

فعندئذٍ :

$$b_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}}$$

4 – إذا كان السطح معيناً بالدالة الحقيقية :

$$(x,y) \to z(x,y)$$

فعندئذٍ من :

$$r(u^1,u^2)= (u^1,u^2,\ z(u^1,u^2))$$

نجد أن :

$$r_1 = (1,0,z_1) \quad , \quad r_2 = (0,1,z_2)$$

$$r_{11} = (0,0,z_{11}) \ , \ r_{12} = (0,0,z_{12}) \ , \ r_{22} = (0,0,z_{22})$$

ومنـــه :

$$b_{ij} = \frac{z_{ij}}{\sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2}}$$

3 – 4 أمثلة

1 – الشكل التربيعي الثاني للمستوي :

$$(u^1, u^2) \to (x = u^1,\ y = u^2,\ z = 0)$$

يتطابق مع الصفر .

في الحقيقة من :

$$r_1 = (1,0,0) \quad , \quad r_2 = (0,1,0)$$

$$r_{11} = 0 \ , \quad r_{12} = 0 \quad , \quad r_{22} = 0$$

نجد أن:

$$b_{ij} = r_{ij} \cdot m = 0$$

ويمكن أن نستنتج ذلك من المعنى الهندسي للشكل التربيعي الثاني لسطح (مبرهنة 3 – 1).

لنفترض بالعكس أنه لدينا في جوار نقطة من سطح $b_{ij} = 0$.

عندئذٍ :

$$r_i \cdot m_j = 0$$

وكذلك:

$$m \cdot m_j = 0$$

لأن m متجه وحدة ، وبالتالي فالمتجه m_j يعامد المتجهات المستقلة r_1 , r_2 , m · الأمر ممّا أن يكون متطابقاً مع الصفر أي $m_j = 0$ ، وهذا يقتضي أن يكون m متجهاً ثابتاً $m = const.$ أخيراً من العلاقات :

$$\frac{\partial (r \cdot m)}{\partial u^i} = r_i \cdot m + r \cdot m_i = 0$$

نجد العلاقة:

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}=const$$

وهي معادلة مستو.

2 – الشكل التربيعي الثاني للكرة .

$$x=a\cos\theta\ \cos\phi$$

$$y=a\cos\theta\sin\phi$$

$$z=a\sin\theta$$

هو:

$$\mathrm{II}=a(d\theta^2+\cos^2\theta\ d\phi^2)$$

ولما كان الشكل التربيعي الأول هو :

$$I=a^2(d\theta^2+\cos^2\theta\ d\phi^2)$$

فنجد العلاقة الآتية بين الشكلين :

$$\mathrm{I}=a\ \mathrm{II}$$

3 – سنثبت الآن الخاصة المميزة الآتية للكرة .

إذا حقق الشكلان التربيعيان الأول والثاني للسطح

$$r=r(u^1,u^2)$$

العلاقة:

$$\mathrm{II}=\alpha\ \mathrm{I}\qquad(\alpha\neq 0)$$

في منطقة D من مستوي الوسيطين u^1,u^2 ، فإن المعادلة تمثل جزءاً من كرة نصف قطرها $\left|\frac{1}{\alpha}\right|$.

في الحقيقة لدينا:

$$(i,j=1,2) \qquad b_{ij}=\alpha g_{ij}$$

ومنـــه:

$$\boldsymbol{m}_i\cdot\boldsymbol{r}_j=\alpha\,\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j$$

أو :

$$(\boldsymbol{m}_i+\alpha\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{r}_j=0$$

لدينا من ناحية أخرى:

$$(\boldsymbol{m}_i+\alpha\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{m}=0$$

لأن $\boldsymbol{m}$ يعامد $\boldsymbol{m}_i$ و $\boldsymbol{r}_i$.

عندئذ :

$$\boldsymbol{m}_i+\alpha\boldsymbol{r}_i=0$$

لأنه متجه يعامد ثلاثة متجهات مستقلة هي $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ ، وبالتالي:

$$\boldsymbol{m}_i=-\alpha\,\boldsymbol{r}_i$$

وبالاشتقاق بالنسبة إلى u^j نجد العلاقات:

$$\boldsymbol{m}_{ij}=-\alpha_j\,\boldsymbol{r}_i-\alpha\boldsymbol{r}_{ij}$$

وبالتعويض $i=1$, $j=2$ و $i=2$, $j=1$ نجد :

$$\boldsymbol{m}_{12}=-\alpha_2\,\boldsymbol{r}_1-\alpha\,\boldsymbol{r}_{12}$$

$$\boldsymbol{m}_{21}=-a_1\,\boldsymbol{r}_2-\alpha\,\boldsymbol{r}_{21}$$

وإذا كان التمثيل من الصف C_3 ؛ فإن:

$$\boldsymbol{m}_{12}=\boldsymbol{m}_{21} \qquad \text{و} \qquad \boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_{21}$$

ومنه :

$$\alpha_1\,\boldsymbol{r}_2-\alpha_2\,\boldsymbol{r}_1=0$$

ولما كان المتجهان $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ مستقلين ، فعندئذ :

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ و α ثابت .

إذا أخذنا الآن الدالة :

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + (\frac{1}{\alpha})\, \boldsymbol{m}$$

فعندئذٍ :

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r}_i + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{m}_i = \frac{1}{\alpha}(\alpha\, \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{m}_i) = 0$$

ممّا يقتضي أن $\boldsymbol{R}$ متجه ثابت .

وإذا لاحظنا أخيراً أن بعد النقطة التي متجه موضعها $\boldsymbol{R}$ عن نقاط السطح تساوي:

$$\left|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(u^1, u^2)\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{m}\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\right|$$

لوجدنا المطلوب .

4 – الشكل التربيعي الثاني للسطح الدوراني

$$x = f(u)\cos v$$
$$y = f(u)\sin v$$
$$z = h(u)$$

هو :

$$\frac{f'h'' - h'f''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}\, du^2 + \frac{f\,h'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}\, dv^2$$

5 – الشكل التربيعي الثاني للسطح شبه الكروي هو :

$$\mathrm{II} = a[-\cot u^1 (du^1)^2 + \sin u^1 \cos u^1 (du^2)^2]$$

ونسبة مميزي الشكلين لهذا السطح هي :

$$\frac{b}{g} = -\frac{1}{a^2}$$

3 – 5 تصنيف النقاط على سطح

نميز ثلاثة أنماط من النقاط على سطح ، وذلك حسب إشارة مميز الشكل التربيعي الأساسي الثاني :

1 – $b > 0$ في النقطة P . عندئذٍ فإن الشكل التربيعي الثاني :

$$b_{ij}\,du^i\,du^j = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}\,du^1\,du^2 + b_{22}(du^2)^2$$

يكون محدداً ، أي يأخذ قيماً لها الإشارة نفسها أياً كانت القيمتان لـــ du^1 و du^2 اللتان لا تنعدمان في الوقت نفسه .

ولذلك فإن السطح ـــ في جوار صغير للنقطة P ـــ يقع في الجانب نفسه من المستوي المماس في P . والنقطة P هي النقطة المشتركة الوحيدة للمستوي المماس في P ، والسطح في جيرة لـِ P . نقول عن نقطة من هذا النمط إنها ناقصية للسطح. جميع نقاط كرة ونقاط مجسم قطع ناقص ، هي أمثلة على نقاط ناقصية.

2 – $b = 0$ في النقطة P . نميّز عندئذٍ حالتين :

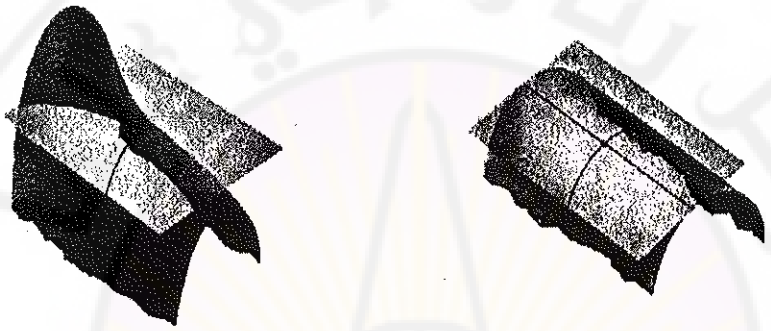
أ) $b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 \neq 0$

يكون الشكل التربيعي الثاني ـــ في هذه الحالة ـــ معدوماً من أجل اتجاه وحيد $du^1 : du^2$ ، ويأخذ قيماً لها الإشارة نفسها في جميع الاتجاهات الأخرى . فأي منحن على السطح ذو اتجاه $du^1 : du^2$ في P له في هذه النقطة تلامس من المرتبة الثانية، على الأقل، مع المستوي المماس للسطح في P ، لأنه استناداً إلى 3 – 1 فإن:

$$\delta = 0\left((h^1)^2 + (h^2)^2\right)$$

وهذا يقتضي تطابق المستوي المماس في P مع المستوي الملاصق لهذا المنحني في P. فإذا تقاطع السطح والمستوي المماس في P وفق منحن ؛ فسيكون له اتجاه المنحني السابق في P . ولدراسة تصرف السطح في هذا الاتجاه ، وبتفصيل أكبر ؛ علينا

استخدام الحدود ذات المراتب الأعلى في صيغة تايلور ، التي تعطي انحراف السطح عن المستوي المماس (مبرهنة 3–1) . إن نقاط السطح في جيرة P ، يمكن أن تقع في الجانب نفسه من المستوي المماس ، كما يمكن أن تقع على كلا الجانبين ، ولكن تقاطع المستوي المماس مع السطح ، عندئذٍ ، له قرنة (أو قرنة مزدوجة) في P، ويكون اتجاه المماس متطابقاً مع الاتجاه الذي ينعدم وفقه الشكل التربيعي الثاني . نقول عن النقاط من هذا النمط إنها نقاط مكافئية (الشكل –2–) .



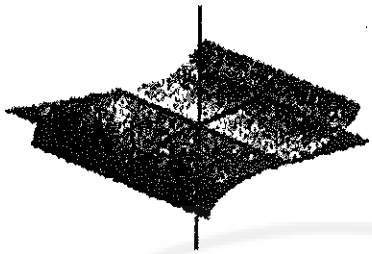
الشكل –2–

إن جميع النقاط النظامية لسطح قابل للنشر هي نقاط مكافئية . وفي سطوح أخرى تشكل النقاط المكافئية منحنيات تدعى خطوطاً مكافئية .

ب) $b_{11}=b_{12}=b_{22}=0$ في P

يكون للمستوي المماس ــ في هذه الحالة ــ تلامس من مرتبة عليا مع السطح. والانحراف يتعين بالحدود ذات المراتب الأعلى بالنسبة لـــ du^2, du^1 . نقول عن P في هذه الحالة إنها نقطة سوّية للسطح .

نلاحظ في الشكل –3– مثالاً لنقطة سوّية ، والسطح في الشكل سطح أسطواني، لدليله نقطة انعطاف في P . ومن الواضح أن جميع نقاط السطر المار بـــ P هي نقاط سوية .



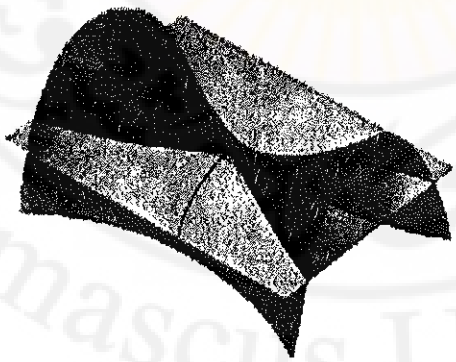
الشكل – 3 –

3 – $b<0$ في P . وللمعادلة:

$$b_{ij}\,du^i\,du^j=0$$

في هذه الحالة حلان مختلفان من أجل النسبة $du^1:du^2$ ، وينعدم الشكل التربيعي الثاني وفق اتجاهين ، ويقطع المماس في P السطح في جيرة P على طول منحنيين يمران من P ، ويتطابق مماساهما في P مع هذين الاتجاهين . يشرِّح هذان المنحنيان السطح ، في جوار صغير بقدر كاف لـ P إلى زوجين من المناطق الزاويَّة ، لها الرأس نفسه في P. زوج يقع على الجانب نفسه من المستوي المماس في P ، ويقع الزوج الثاني على الجانب الآخر (الشكل – 4 –) . للسطح في جوار P شكل السرج .

نقول عن هذا النمط من النقاط إنها نقاط زائدية . نقاط مجسم قطع مكافئ زائدي جميعها ، ونقاط مجسم قطع زائد مكافئي بشطر واحد هي نقاط زائدية .



الشكل – 4 –

3 – 6 مثال

إذا أخذنا الطارة .

$$r(u^1,u^2)=((b+a\cos u^1)\cos u^2,\ (b+a\cos u^1)\sin u^2, a\sin u^1)$$

فعندئذ :

$$r_1=(-a\sin u^1\cos u^2,-a\sin u^1\sin u^2,a\cos u^1)$$

$$r_2=(-(b+a\cos u^1)\sin u^2,\ (b+a\cos u^1)\cos u^2,0)$$

$$r_{11}=(-a\cos u^1\cos u^2,-a\cos u^1\sin u^2,-a\sin u^1)$$

$$r_{12}=(a\sin u^1\sin u^2,-a\sin u^1\cos u^2,\ 0)$$

$$r_{22}=(-(b+a\cos u^1)\cos u^2,-(b+a\cos u^1)\sin u^2,\ 0)$$

ومنـــه :

$$g_{11}=r_1\cdot r_1=a^2$$

$$g_{12}=r_1\cdot r_2=0$$

$$g_{22}=(b+a\cos u^1)^2$$

$$g=g_{11}\,g_{22}-(g_{12})^2=a^2(b+a\cos u^1)^2$$

وبالتالي :

$$b_{11}=\frac{[r_{11},r_1,r_2]}{\sqrt{g}}=\frac{a^2(b+a\cos u^1)}{a(b+a\cos u^1)}=a$$

$$b_{12}=\frac{[r_{12},r_1,r_2]}{\sqrt{g}}=0$$

$$b_{22}=\frac{[r_{22},r_1,r_2]}{\sqrt{g}}=(b+a\cos u^1)\cos u^1$$

$$b = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = a(b + a\cos u^1)\cos u^1$$

ولما كان $0 < a < b$ ؛ فإن :

$$b + a\cos u^1 > 0$$

وبالتالي ، فإن إشارة b توافق إشارة $\cos u^1$.

وهكذا ، فإننا نصنّف نقاط الطارة كما يأتي :

تكون النقطة (u^1, u^2)

ناقصية عندما يكون : $-\frac{\pi}{2} < u^1 < +\frac{\pi}{2}$

وتكون زائدية عندما يكون : $\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{3\pi}{2}$

وتكون مكافئية عندما يكون : $u^1 = \frac{\pi}{2}$ أو $u^1 = -\frac{\pi}{2}$

إذاً فالمنحنيان الإحداثيان :

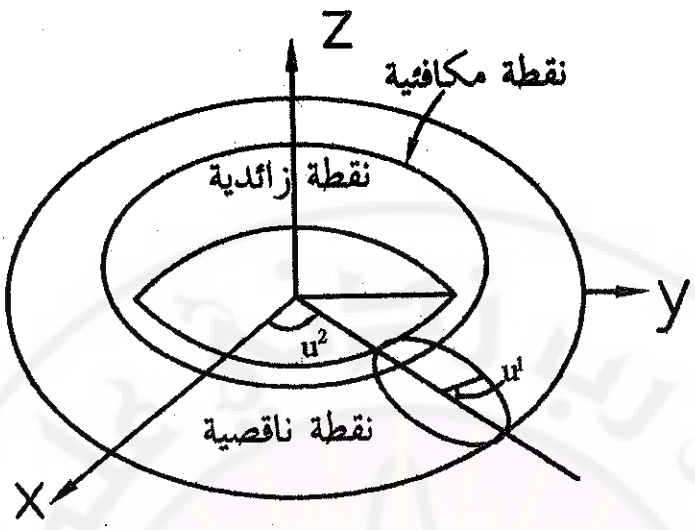
$$u^1 = \frac{\pi}{2} \ ، \ u^1 = -\frac{\pi}{2}$$

هما خطان مكافئان على الطارة يقسمانها إلى منطقتين:

ـــ منطقة خارجية $-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}$ نقاطها ناقصية

ـــ منطقة داخلية $\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{3\pi}{2}$ نقاطها زائدية

- انظر الشكل -5- .



الشكل – 5 –

4- تقوس غوص (*Gauss*) ورموز كريستوفل (*Christoffel*)

4-1 تعريف (التطبيق الكروي)

إذا كان $\mathcal{F}$ سطحاً موجهاً من الصف C_2 ؛ فنقول عن التطبيق المعّرف على $\mathcal{F}$، ويأخذ قيمه في كرة الوحدة، والذي نقابل وفقه أي نقطة P من السطح، بتلك النقطة P^* من كرة الوحدة ، التي متجه موضعها يساوي متجه الوحدة الناظمي في P، إنه التطبيق الكروي أو تطبيق غوص (*Gauss*) للسطح $\mathcal{F}$.

إذا كان :

$$r = r(u^1,u^2)$$

تمثيلاً وسيطياً محلياً للسطح $\mathcal{F}$ ، فإن متجه موضع الصورة P^* ، للنقطة $P=(u^1,u^2)$ من السطح ، وفق التطبيق الكروي هو:

$$R = m(u^1,u^2)$$

ونستطيع أن نعدَّ المعادلة الأخيرة تمثيلاً وسيطياً لجزء الكرة المغطى بصور نقاط السطح.

إذا كان الآن :

$$m_1 \times m_2 \neq 0$$

في نقطة من السطح ؛ فإن تمثيل الكرة سيكون نظامياً في النقطة المقابلة على الكرة. ولما كان المتجه $m_1 \times m_2$ يعامد متجهين مماسين (m_1 و m_2) للسطح $\mathcal{F}$ ؛ فلابد أن يكون ناظماً على السطح ، وبالتالي سيوازي (يرتبط خطياً مع) m ، ويمكن أن يكون للمتجهين m و $m_1 \times m_2$ الاتجاه نفسه ، كما يمكن أن يختلفا بالاتجاه ، ممّا يقتضي أن يكون المستوي المماس لـ$\mathcal{F}$ في P والمستوي المماس لكرة الوحدة في P^* متوازيين، ولهما التوجيه المحدث من التوسيط نفسه في الحالة الأولى ، وتوجيه مخالف في الحالة الثانية .

ولذلك نقول إن التطبيق الكروي يحافظ على التوجيه ، إذا كان للمتجهين $\boldsymbol{m}$ و $\boldsymbol{m_1 \times m_2}$ الاتجاه نفسه ، ويعكس التوجيه إذا كانا متخالفين بالاتجاه. وفي الحالة التي يكون فيها $\boldsymbol{m_1 \times m_2 = 0}$ ؛ فإن توجيه المستوي المماس لكرة الوحدة غير معين.

4 – 2 تعريف (تقوس غوص (*Gauss*))

لتكن Ω منطقة على السطح تحوي النقطة P ، و Ω^* صورتها الكروية، ولنأخذ نسبة مساحة Ω^* إلى مساحة Ω . نقول عن نهاية هذه النسبة عندما تتقلص المنطقة Ω إلى P ، في الحالة التي يحافظ فيها التطبيق الكروي على التوجيه، ونهاية النسبة السالبة ، في الحالة التي يعكس فيها التوجيه ؛ إنها تقوس غوص (*Gauss*) (أو التقوس الكلي) للسطح في النقطة P. وفي النقاط التي يكون التوجيه في صورها غير معين نأخذ تقوس غوص (*Gauss*) فيها مساوياً للصفر. نرمز عادة إلى تقوس غوص بـــ k.

ويمكن إثبات صحة المبرهنة الآتية :

4 – 3 مبرهنة

ليكن :

$$r = r(u^1, u^2)$$

تمثيلاً وسيطياً من الصف C_2 لسطح $\mathscr{S}$، و P نقطة نظامية منه. عندئذ يوجد في النقطة النظامية P تقوس غوص ، ويساوي :

$$k = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

حيث g_{ij} و b_{ij} معاملات الشكل التربيعي الأول والثاني على الترتيب في P .

4 – 4 تعريف (رموز كريستوفل)

ليكن :

$$r = r(u^1, u^2)$$

سطحاً من الصف C_2 ، ولنكتب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية r_{ij} ، في نقطة غير شاذة (u^1,u^2) ، بوصفها تراكيب خطية بالمتجهات المستقلة خطياً r_1, r_2, m في هذه النقطة:

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + \beta_{ij} m = \Gamma_{ij}^k r_k + \beta_{ij} m$$

إذا ضربنا الطرفين بـــ m ، فنجد :

$$b_{ij} = r_{ij} \cdot m = \beta_{ij}$$

ممّا يعني أن β_{ij} هي معاملات الشكل التربيعي الثاني ، وبالتالي :

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} m \qquad (4,1)$$

نقول عن المعاملات Γ_{ij}^k إنها رموز كريستوفل من النوع الثاني للسطح ، كما نقول عن (4,1) إنها صيغ غوص (*Gauss*) .

إذا لاحظنا الآن أن المشتقين m_2, m_1 يعامدان m ، فنستطيع أن نكتب (صيغة *Weingarten*) :

$$m_i = -b_i^k r_k \qquad (4,2)$$

(رمزنا لمركبتي m_i بـــ $(-b_i^1 \ , \ -b_i^2)$. وإذا ضربنا الطرفين بـــ $-r_j$ نجد أن :

$$m_i \cdot r_j = -b_i^k r_k \cdot r_j$$

$$-b_{ij} = -b_i^k g_{kj}$$

ومنه

$$b_{ij} = b_i^k g_{kj} \qquad (4,3)$$

وإذا ضربنا الطرفين بـــ $g^{j\ell}$ (وقمنا بعملية الجمع بالنسبة للدليل j) ، فإننا نجد أن :

$$b_{ij} g^{j\ell} = b_i^k g_{kj} \ g^{j\ell} = b_i^k \delta_k^\ell = b_i^\ell$$

وبتبديل الدليلين j و ℓ نجد العلاقات :

$$b_i^j = b_{i\ell} g^{\ell j} \qquad (4,4)$$

4 – 5 نتيجة

لما كانت الكميات r_{ij} و b_{ij} متناظرة ، فلابد أن تكون رموز كريستوفل Γ_{ij}^{k} متناظرة بالنسبة للدليلين السفليين:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \qquad (4,5)$$

4 – 6 تعريف

إذا ضربنا طرفي العلاقة :

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^{k} r_k + b_{ij} m$$

بـــ r_t ولاحظنا أن:

$$r_t \cdot m = 0$$

لوجدنا أن :

$$r_{ij} \cdot r_t = \Gamma_{ij}^{k} r_k \cdot r_t = \Gamma_{ij}^{k} g_{kt}$$

نقول عن المقادير $r_{ij} \cdot r_t$ إنها رموز كريستوفل من النوع الأول ونرمز لها بـــ Γ_{ijt} :

$$\Gamma_{ijt} = r_{ij} \cdot r_t = \Gamma_{ij}^{s} g_{st} \qquad (4,6)$$

ومن الواضح أن :

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \qquad (4,7)$$

إذا ضربنا طرفي (4,6) بـــ g^{tk} (وجمعنا بالنسبة للدليل ℓ) فنجد أن :

$$\Gamma_{ijt} g^{tk} = \Gamma_{ij}^{s} g_{st} g^{tk} = \Gamma_{ij}^{s} \delta_{s}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$$

أو

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ijt} g^{tk} \qquad (4,8)$$

إن الصيغ (4,6) و (4,8) تظهر العلاقة بين رموز كريستوفل من النوع الأول والرموز من النوع الثاني ، وباستخدام هذه الصيغ نحوّل أحد النوعين إلى النوع الآخر .

4 – 7 مبرهنة

إن رموز كريستوفل من النوع الأول تعطى بالعلاقات

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}\right) \qquad (4,9)$$

التي تحوي معاملات الشكل التربيعي الأول ومشتقاتها فقط .

أما رموز كريستوفل من النوع الثاني فتعطى بالعلاقات :

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^{i}}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{m}}\right) \qquad (4,10)$$

البرهان :

باشتقاق المتطابقة:

$$r_i \cdot r_j = g_{ij}$$

بالنسبة لـــ u^k نجد أن :

$$r_{ik}\cdot r_j + r_i \cdot r_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}$$

أو :

$$\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}$$

وبإجراء تبديلين دوريين متعاقبين للأدلة نجد العلاقات :

$$\Gamma_{kji}+\Gamma_{ijk}=\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^{j}}$$

$$\Gamma_{jik}+\Gamma_{kij}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}$$

بجمع العلاقتين الأخيرتين وطرح السابقة منهما ، وبملاحظة تناظر رموز كريستوفل من النوع الأول بالنسبة إلى الدليلين الأيسر والأوسط نجد أن :

$$2\Gamma_{ijk}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}$$

ومنها نجد (4,9) . أما (4,10) فنجدها من (4,9) باستخدام (4,8) .

4 – 8 ملاحظة

إذا كان النظام الإحداثي على السطح متعامداً $(g_{12}=0)$ ، فعندئذ:

$$\Gamma_{111}=+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \quad , \quad \Gamma_{121}=+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma_{221}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \quad , \quad \Gamma_{112}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma_{122}=+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \quad , \quad \Gamma_{222}=+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}$$

ولما كان في حالة الإحداثيات المتعامدة :

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}=\frac{1}{g_{11}}$$

$$g^{22}=\frac{g_{11}}{g}=\frac{1}{g_{22}}$$

$$g^{12}=g^{21}=0$$

فإن صيغ رموز كريستوفل من النوع الثاني تغدو :

$$\Gamma^1_{11}=+\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \quad , \quad \Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma^1_{12}=+\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \quad , \quad \Gamma^2_{12}=+\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \quad , \quad \Gamma^2_{22}=+\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}$$

4 – 9 أمثلة

1) إن رموز كريستوفل للمستوي في الإحداثيات الكارتيزية كلها أصفار :

$$\Gamma^k_{ij}=0$$

ولكن في الإحداثيات القطبية (ρ,ϕ) لدينا :

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=0$$

$$\Gamma_{22}^1=-\rho$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{1}{\rho}$$

2) رموز كريستوفل للكرة هي :

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=0$$

$$\Gamma_{22}^1=\cos u^1\sin u^1$$

$$\Gamma_{12}^2=-\tan u^1$$

ويمكن إثبات صحة المبرهنتين الآتيتين :

4 – 10 مبرهنة

إن معاملات الشكل التربيعي الأول والثاني لسطح من الصف C_3 تحقق المعادلات التالية :

$$b=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}-(\Gamma_{11}^s\Gamma_{22}^r-\Gamma_{12}^s\Gamma_{12}^r)g_{sr} \qquad (4,11)$$

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}+\Gamma_{11}^t b_{t2}=\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}+\Gamma_{12}^t b_{t1}$$
$$\frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}+\Gamma_{21}^t b_{t2}=\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}+\Gamma_{22}^t b_{t1} \qquad (4,12)$$

الصيغة (4,11) تدعى صيغة غوص *Gauss* في حين أن (4,12) تدعى صيغة *Codazzi*.

4-11 مبرهنة غوص (*Gauss*)

إن تقوس غوص k لسطح من الصف C_3 يتبع فقط معاملات الشكل التربيعي الأول ومشتقاتها من المرتبة الأولى والثانية.

Damascus University

5 – التقوس الجيوديزي والخطوط الجيوديزية

5 – 1 تعريف

إذا كان $\mathscr{L}$ منحنياً في الفضاء و p نقطة منه ، فنقول عن المتجه الذي يوازي متجه وحدة الناظم الأساسي n في p ويوافقه بالاتجاه ، والذي طوله يساوي تقوس المنحني في p ؛ إنه متجه تقوس المنحني في p . إذا رمزنا لمتجه التقوس هذا بـ K فعندئذ:

$$K = \kappa n$$

وإذا وقع المنحني على سطح فنستطيع أن نفرق متجه التقوس K إلى مركبتين ، الأولى مماسة للسطح في p ، نرمز إليها بـ K_g ، ونسميها متجه التقوس الجيوديزي، والثانية ناظمية على السطح في p ، نرمز إليها بـ K_n ، ونسميها متجه التقوس الناظمي وعندئذٍ :

$$K = K_g + K_n$$

5 – 2 مبرهنة

ليكن :

$$r = r(u^1, u^2)$$

تمثيلاً من الصف C_2 لسطح .

وليكن :

$$r = r(u^1(s), u^2(s))$$

تمثيلاً طبيعياً لمنحن على هذا السطح . عندئذ

$$K_g = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right) r_k \qquad (5,1)$$

$$K_n = \left(b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right) \cdot m \qquad (5,2)$$

البرهان :

لدينا :

$$\boldsymbol{K} = \kappa \boldsymbol{n} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

ولما كان:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_i \frac{du^i}{ds}$$

فإن :

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_{ij} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \boldsymbol{r}_i \frac{d^2u^i}{ds^2}$$

وباستخدام (4,1) نجد أن :

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{\kappa}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k + b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{m}$$

ومنه :

$$\boldsymbol{K}_g = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{k}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\boldsymbol{r}_k$$

$$\boldsymbol{K}_n = b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{m}$$

3 – 5 تعريف (الناظم الجيوديزي والتقوس الجيوديزي)

ليكن :

$$u^1 = u^1(s)$$

$$u^2 = u^2(s)$$

منحنياً من الصف C_2 واقعاً على سطح من الصف C_2 أيضاً .

لما كان متجه التقوس الجيوديزي $\boldsymbol{K}_g$ في نقطة p هو المسقط القائم لمتجه التقوس $\boldsymbol{K}$ في p (الذي يعامد المماس في p) على المستوي المماس للسطح في p (الذي يحوي

هذا المماس) فلابد أن يكون K_g عمودياً على متجه وحدة المماس t للمنحني في p .

إذا عرفنا في p متجه الوحدة :

$$u = m \times t \qquad (5,3)$$

الذي يعامد كلاً من متجه وحدة الناظم على السطح m في p ، ومتجه وحدة المماس t للمنحني في p ؛ فإن المتجهات t,u,m تشكل ثلاثية متعامدة موجهة موجباً .

نقول عن u إنه الناظم الجيوديزي للمنحني في p . ولما كان المتجهان K_g و u مرتبطين خطياً (يعامدان كلاً من m و t) فإن :

$$K_g = k_g u$$

نقول عن المعامل k_g إنه التقوس الجيوديزي للمنحني على السطح في p ، وهو يعطي بالعلاقة :

$$k_g = K \cdot u = K \cdot (m \times t) = [t, K, m] = [\dot{r}, \ddot{r}, m]$$

5 – 4 مبرهنة

إذا كان:

$$u^1 = u^1(s)$$

$$u^2 = u^2(s)$$

منحنياً من الصف C_2 واقعاً على سطح من الصف C_2 ، فإن تقوسه الجيوديزي يعطى بـــ :

$$k_g = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{du^2}{ds} \\ \dfrac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{ij} \dfrac{du^i}{ds} \dfrac{du^j}{ds} & \dfrac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{ij} \dfrac{du^i}{ds} \dfrac{du^j}{ds} \end{vmatrix} \qquad (5,4)$$

حيث s وسيط طول قوس للمنحني .

البرهان :

لدينا استناداً إلى (5,1) :

$$k_g = K_g \cdot u = (\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}) r_k \cdot u \qquad (5,5)$$

ولكن :

$$r_k \cdot u = r_k \cdot (m \times t) = m \cdot (t \times r_k)$$

و

$$t = \frac{du^\ell}{ds} r_\ell$$

وبالتالي :

$$r_k \cdot u = \frac{du^\ell}{ds} m \cdot (r_\ell \times r_k)$$

ومنه:

$$r_1 \cdot u = \frac{du^\ell}{ds} m \cdot (r_\ell \times r_1)$$

$$= \frac{du^2}{ds} m \cdot (r_2 \times r_1) = -\frac{du^2}{ds} m \cdot (r_1 \times r_2)$$

ولما كان :

$$r_1 \times r_2 = \sqrt{g}\, m$$

فعندئذ :

$$r_1 \cdot u = -\sqrt{g}\, \frac{du^2}{ds}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن :

$$r_2 \cdot u = \sqrt{g}\, \frac{du^1}{ds}$$

وأخيراً ، إذا عوضنا في (5,5) فنجد المساواة (5,4).

5 – 5 نتيجة

إذا كان المنحني معيناً بتمثيل

$$u^1 = u^1(t)$$

$$u^2 = u^2(t)$$

ليس بالضرورة طبيعياً ، فعندئذ:

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{du^k}{dt}\frac{dt}{ds} = (g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt})^{-\frac{1}{2}}\frac{du^k}{dt}$$

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} = \frac{d^2u^k}{dt^2}(\frac{dt}{ds})^2 + \frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

$$= (g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt})^{-1}\frac{d^2u^k}{dt^2} + \frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

وبالتعويض في (5,4) وضرب السطر الأول بـــ :

$$(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt})^{\frac{1}{2}}\frac{d^2t}{ds^2}$$

وطرحه من السطر الثاني نحصل على المساواة .

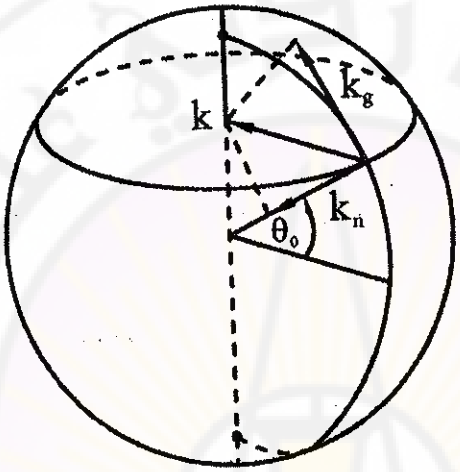
$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{(g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt})^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} & \frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} \end{vmatrix} \qquad (5,6)$$

5 – 6 أمثلة

1 – التقوس الجيوديزي لدائرة عرض على الكرة .

لنجد التقوس الجيوديزي لدائرة العرض $\theta=\theta_0$ ، من التعريف مباشرة . إن متجه التقوس $\boldsymbol{K}$ يقع في مستوي الدائرة وطوله يساوي معكوس نصف قطر الدائرة أي $|a\cos\theta_0|^{-1}$ ، وبالتالي فإن طول المتجه $\boldsymbol{K}_g$ يساوي القيمة المطلقة للمقدار :

$$\frac{1}{a\cos\theta_0}\sin\theta_0=\frac{1}{a}\tan\theta_0$$



الشكل – 6 –

2 – التقوس الجيوديزي لمنحن سوي يتطابق مع تقوسه العادي .

وهذا ينتج مباشرة من تعريف التقوس الجيوديزي ، أو من العلاقة (5,6) ، حيث أنه من أجل المستوي :

$$(u^1,u^2)\to r(u^1,u^2)=(x=u^1,y=u^2,z=0)$$

لدينا :

$$g_{11}=g_{22}=1$$

$$g_{12}=0$$

$$\Gamma_{ij}^{k}=0$$

$$g=1$$

3 – لإيجاد التقوس الجيوديزي للولب

$$x=a\cos t$$
$$y=a\sin t$$
$$z=bt$$

على الأسطوانة:

$$r(u^1,u^2)=(x=a\cos u^1\ ,y=a\sin u^1,\ z=u^2)$$

نلاحظ أن:

$$r_1=(-a\sin u^1,\ a\cos u^1\ ,0)$$
$$r_2=(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

ومنه :

$$g_{11}=a^2$$
$$g_{12}=0$$
$$g_{22}=1$$
$$g=a^2$$
$$\Gamma_{ij}^{k}=0\quad ,\quad k,i,j=1,2$$

ولما كانت معادلات اللولب على الأسطوانة هي :

$$u^1=t$$
$$u^2=bt$$

فعندئذ :

$$\frac{du^1}{dt}=1$$

$$\frac{du^2}{dt}=b$$

$$\frac{d^2u^1}{dt^2}=\frac{d^2u^2}{dt^2}=0$$

وبالتعويض في (5,6) ؛ نجد أن :

$$k_g=0$$

5 – 7 تعريف (الخطوط الجيوديزية)

نقول عن المنحنيات على سطح ، التي تقوسها الجيوديزي في كل نقطة منها يساوي الصفر ، إنها الخطوط الجيوديزية للسطح. ونحصل على المعادلة التفاضلية للخط الجيوديزي بمساواة الطرف الأيمن لـ (5,4) أو (5,6) بالصفر .

ولكننا سنستخدم عوضاً عن ذلك جملة معادلتين تفاضليتين من المرتبة الثانية نحصل عليهما بمساواة كل من مركبتي متجه التقوس الجيوديزي بالصفر .

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0 \quad , \quad k=1,2 \qquad (5,7)$$

ولما كان s في المعادلة السابقة هو طول القوس ، فإن الخط الجيوديزي لابد وأن يحقق الشرط :

$$g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=1 \qquad (5,8)$$

5 – 8 مبرهنة

إذا كان :

$$u^1=u^1(s) \ , \ u^2=u^2(s) \qquad (5,9)$$

حلاً لجملة المعادلتين التفاضليتين (5,7) وكانت القيم الابتدائية لـــ u^i و $\frac{du^i}{ds}$ محققة للشرط (5,8) ؛ فإن الحل (5,9) لابد أن يحقق هذا الشرط في كل نقطة منه .

البرهان :

باشتقاق الطرف الأيسر لـــ (5,8) نجد :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}+2g_{ij}\frac{d^2u^i}{ds^2}\frac{du^j}{ds}$$

$$(g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{d^2u^j}{ds}=g_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{d^2u^i}{ds}=g_{ij}\frac{d^2u^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\quad \text{(لأن}$$

وإذا كان u^i حلاً لـِ (5,7) فنجد :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}-2g_{ij}\Gamma^i_{\ell k}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

$$=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}-2\Gamma_{\ell kj}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

$$=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^\ell}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

$$-\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}+\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial u^j}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

ولكن بتغيير مناسب لأدلة الجمع ، وملاحظة أن

$$g_{\ell k}=g_{k\ell}$$

نجد :

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^\ell}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\quad (k\to i,\ell\to k)$$

$$\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial u^j}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}=\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial u^j}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}=$$

$$=\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^k}\frac{du^\ell}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\qquad (k\to j, j\to k)$$

ممّا يقتضي أن مشتق الطرف الأيسر لـــ (5,8) يساوي الصفر ، وهذا يعني أن الطرف الأيسر لـــ (5,8) ثابت ، وله القيمة ذاتها في نقاط الحل جميعها ، وتساوي القيمة في النقطة الابتدائية .

5 – 9 مبرهنة

يمـــرّ من كل نقطة نظامية من سطح من الصف C_2 وفي كل اتجاه منحن جيوديزي واحد على الأقل ، وإذا كان السطح من الصف C_3 ؛ فالمنحني الجيوديزي يكون وحيداً .

البرهان :

ليكن :

$$a=a^i r_i$$

متجه وحدة الاتجاه المعطى في النقطة $p_0(u_0^1,u_0^2)$. إذا استخدمنا المركبات a^i قيماً ابتدائية لـــ $\frac{du^i}{ds}$ ؛ فستحقق المعادلة (5,8) (لأن $\|a\|=1$) . وهكذا فإن معادلة الخط الجيوديزي المار بـــ p_0 وباتجاه a هي حل الجملة (5,7) من أجل القيم الابتدائية :

$$u^i=u_0^i \qquad \text{و} \qquad \frac{du^i}{ds}=a^i$$

وتضمن مبرهنة الوجود والوحدانية في المعادلات التفاضلية وجود هذا الحل ، وذلك إذا كانت المعاملات مستمرة ، ووحدانيته إذا حققت المعاملات إضافة إلى استمراريتها شروطاً أقسى ، كأن تكون لها ـــ مثلاً ـــ مشتقات جزئية مستمرة . ولكن الافتراض

بأن السطح من الصف C_2 يقتضي استمرارية المعاملات Γ_{ij}^k ، والافتراض بأنه من الصف C_3 يقتضي أن تكون المعاملات Γ_{ij}^k من الصف C_1 .

5 – 10 مبرهنة

الشرط اللازم والكافي حتى يكون منحن من الصف C_2 ، على سطح من الصف C_2 خطاً جيوديزياً ؛ هو إما أن يكون المستوي الملاصق للمنحني في كل نقطة منه ، عمودياً على المستوي المماس للسطح في هذه النقطة ، أو أن يكون تقوس المنحني معدوماً في كل نقطة منه .

البرهان : يكفي أن نلاحظ أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون:

$$K_g = 0$$

هو أن يكون المتجهان K و m مرتبطين خطياً ، ممّا يتحقق إما إذا كان $K = 0$ ، أو إذا كان متجه وحدة الناظم الأساسي n للمنحني ، ومتجه وحدة الناظم على السطح مرتبطين خطياً ، والحالة الأخيرة تعني أن المستوي الملاصق يحوي الناظم على السطح، وبالتالي لابد أن يعامد المستوي المماس .

5 – 11 أمثلة

1 – المستوي .

لما كان من أجل أي منحن في المستوي $K = K_g$ ، فإن المنحني يكون خطاً جيوديزياً إذا وفقط إذا كان خطاً مستقيماً.

2 – جميع الخطوط المستقيمة على سطح هي خطوط جيوديزية .

3 – الخطوط الجيوديزية على كرة هي الدوائر العظمى .

في الحقيقة إذا كان $\mathscr{C}$ خطاً جيوديزياً على كرة ؛ فإن المستويات الملاصقة له ستحوي m ، وبالتالي ستمر من مركز الكرة ، ولكن المنحني الذي تمر مستوياته

الملاصقة جميعها من نقطة ثابتة يقع في مستو (أثبت ذلك) ممّا يقتضي أن يقع $\mathscr{C}$ في مستو يمر من مركز الكرة ، وبالتالي لابد أن يكون دائرة عظمى . والعكس صحيح أي كل دائرة عظمى هي خط جيوديزي .

4 – السطح الأسطواني

إذا فرضنا أن أسطر السطح الأسطواني توازي متجه الوحدة $\boldsymbol{a}$ فمن الواضح أن:

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

يكون الآن المنحني $\mathscr{C}$ على السطح الأسطواني خطاً جيوديزياً إذا وفقط إذا كان:

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_n=(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{m}$$

وبالتالي ، إذا وفقط إذا كان:

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

أو

$$\dot{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

($\boldsymbol{t}$ متجه وحدة المماس للمنحني) ، وبالمكاملة نجد $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{a}=const.$. ممّا يعني أن الخطوط الجيوديزية على السطح الأسطواني هي لوالب معممة . وهذه تتضمن الأسطر نفسها حيث:

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{a}=\mp 1$$

5 – 12 تعريف (الإحداثيات نصف الجيوديزية – *Semigeodesic*)

سنصف الآن إنشاءً يؤدي إلى الإحداثيات نصف الجيوديزية . نأخذ منحنياً نظامياً اختيارياً على السطح ماراً بنقطة اختيارية p_0 ، ونرمز بـــ u^2 للوسيط الطبيعي لهذا المنحني، الذي يقابل النقطة p_0 بالقيمة $u^2=0$. ولنأخذ في كل نقطة من هذا

المنحني الخط الجيوديزي المعّين بالناظم الجيوديزي u في هذه النقطة ، ولنرمز بـــ u^1 لوسيط طول القوس على هذا الخط الجيوديزي .

إن الوسيطين u^1 و u^2 يعينان موضع أي نقطة في المجال المكتسح من قبل الخطوط الجيوديزية هذه . وفي جوار صغير جداً لـــ p_0 تغدو u^1 و u^2 إحداثيين منحنيين في تمثيل وسيطي نظامي للسطح .

وهكذا نلاحظ أن معادلة المنحني الابتدائي في الإحداثيات نصف الجيوديزية هي:

$$u^1 = 0$$

ومعادلات الخطوط الجيوديزية هي:

$$u^2 = const.$$

في حين أن u^1 هو وسيط طول القوس على الخطوط الجيوديزية .

5 – 13 مبرهنة

إن الشكل التربيعي الأول لســـطح في الإحداثيات نصف الجيوديزية (u^1,u^2) يعطى بـــ :

$$I = ds^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2$$

حيث G دالة بالمتغيرين u^1 و u^2 وتساوي g_{22} .

البرهان :

لدينا من أجل الخطوط الجيوديزية:

$$u^2 = const.$$

$$\frac{du^1}{ds} = 1$$

$$\frac{du^2}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2u^K}{ds^2}=0$$

ولما كانت الخطوط الجيوديزية تحقق المعادلتين :

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0$$

$$g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=1$$

فبالتعويض نجد أن :

$$\Gamma_{11}^k=0$$

$$g_{11}=1$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^k}=0$$

وإذا لاحظنا أن :

$$\Gamma_{11}^k=\frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{1m}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{m1}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^m}\right)$$

$$=\frac{1}{2}g^{k1}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}g^{k2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$$

فنجد أن :

$$g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}=0$$

$$g^{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}=0$$

ولما كان المعين:

$$g^{11}g^{22}-(g^{12})^2=\frac{1}{g}$$

لا يساوي الصفر فلا يمكن لـــ g^{12} و g^{22} أن ينعدما في الوقت نفسه ، ولذلك فإن:

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}=0$$

وهذا يظهر أن الدالة g_{12} غير مرتبطة بـــ u^1 .

وينتج من طريقة إنشاء الإحداثيات نصف الجيوديزية أن الزاوية بين المنحني الابتدائي $u^1=0$ ، وأي خط جيوديزي $u^2=c$ زاوية قائمة ، وهذا يؤدي إلى أن:

$$g_{12}(0,u^2)=0$$

أياً كان u^2 ، ممّا يعني أن g_{12} غير مرتبطة (لا تتبع) بـــ u^2 أيضاً . يترتب على ذلك أن g_{12} دالة ثابتة وتساوي الصفر.

5 – 14 ملاحظة

لما كان $g_{12}=0$ في الإحداثيات نصف الجيوديزية ، فإن هذه الإحداثيات لابد أن تكون متعامدة .

5 – 15 ملاحظة

إن رموز كريستوفل تعطى في الإحداثيات نصف الجيوديزية بالصيغ :

$$\Gamma^1_{11}=0 \quad , \quad \Gamma^1_{12}=0 \quad , \quad \Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}$$

$$\Gamma^2_{11}=0 \quad , \quad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^1} \quad , \quad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^2}$$

ونستطيع بالاعتماد على هذه الصيغ إثبات أن تقوس غوص يعطى بالصيغة :

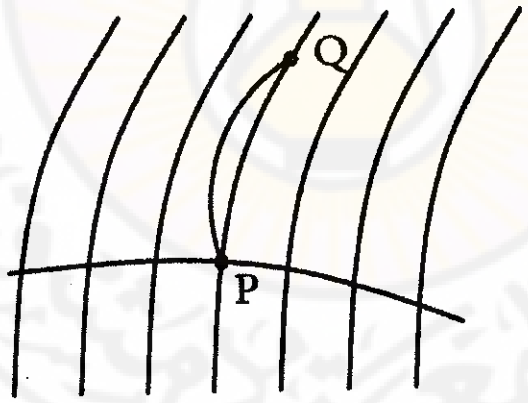
$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 G}{\partial u^1 \partial u^1}$$

5 – 16 مبرهنة (خاصة الطول الأصغري للخط الجيوديزي)

ليكن $\mathscr{S}$ سطحاً من الصف C_3 و P نقطة منه ، وليكن $\mathscr{L}$ خطاً جيوديزياً ماراً بـ P ، ويقع في جوار صغير بقدر كاف للنقطة P . إن طول جزء الخط الجيوديزي بين P ، وأي نقطة من هذا الخط أقصر من طول أي منحن يصل بين P ، وهذه النقطة ويقع في هذا الجوار .

البرهان :

لنأخذ على السطح منحنياً يمر من P ويعامد $\mathscr{L}$ ، الشكل – 7 – ولنستخدم هذا المنحني أساساً (منحنياً ابتدائياً) لإنشاء نظام الإحداثيات نصف الجيوديزية في جوار لـ P. باختيار مناسب للتوسيط على هذا المنحني ؛ فإن إحداثيات P ستكون (0,0) ، ومعادلة الخط الجيوديزي $\mathscr{L}$ ستكون $u^2 = 0$.



الشكل – 7 –

لتكن الآن Q نقطة على $\mathscr{C}$ ولنأخذ منحنياً من الصف C_1 يصل بين P و Q، ويقع في الجوار الذي تكون فيه الإحداثيات المنشأة متعامدة . إذا فرضنا أن معادلات المنحني هي :

$$u^i = u^i(t) \qquad 0 \le t \le 1$$

فإن طوله يساوي :

$$\int_0^1 \sqrt{(\frac{du^1}{dt})^2 + G(\frac{du^2}{dt})^2}\ dt$$

ولما كان $G > 0$ ؛ فعندئذ :

$$\int_0^1 \sqrt{(\frac{du^1}{dt})^2 + G(\frac{du^2}{dt})^2}\ dt \ge \left| \int_0^1 \frac{du^1}{dt} dt \right| =$$

$$= \left| u^1(1) - u^1(0) \right| = \left| u^1(1) \right|$$

حيث $u^1(1)$ قيمة الوسيط u^1 من أجل النقطة Q و $\left|u^1(1)\right|$ طول قوس الخط الجيوديزي بين النقطتين P و Q .

6- التقوس الناظمي والتقوسات الأساسية

6-1 تعريف

إذا كان $\mathscr{C}$ منحنياً على سطح ، وماراً بالنقطة p ؛ فنقول عن مسقط متجه التقوس $\boldsymbol{K}$ ، للمنحني في p ، على متجه وحدة الناظم على السطح ، $\boldsymbol{m}$ ، في p ؛ إنه التقوس الناظمي للمنحني على السطح . إذا رمزنا للتقوس الناظمي بـــ k_n فإن:

$$k_n = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{m}$$

6-2 مبرهنة

التقوس الناظمي لمنحن على سطح ، في نقطة منه p ، يتبع اتجاه المنحني $du^1 : du^2$ في تلك النقطة ، ويساوي حاصل قسمة قيمة الشكل التربيعي الثاني على قيمة الشكل التربيعي الأول ، وفق هذا الاتجاه :

$$k_n = \frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j} \qquad (6,1)$$

البرهان :

لدينا :

$$k_n = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_n + \boldsymbol{K}_g \qquad \text{و}$$

ولما كان $\boldsymbol{K}_g$ متجهاً مماساً للسطح ؛ فإن:

$$\boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{m} = 0$$

ومنه :

$$k_n = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{K}_n \cdot \boldsymbol{m}$$

واستناداً إلى (5,2) نجد أن:

$$k_n = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

حيث s الوسيط الطبيعي للمنحني . وإذا لاحظنا أن :

$$1 = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_i \frac{du^i}{ds} \cdot \boldsymbol{r}_j \frac{du^j}{ds}$$

$$= \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

$$= g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

فعندئذٍ :

$$k_n = \frac{b_{ij} \dfrac{du^i}{ds} \dfrac{du^j}{ds}}{g_{ij} \dfrac{du^i}{ds} \dfrac{du^j}{ds}}$$

وإذا ضربنا البسط والمقام بـــ ds^2 ؛ فإننا نجد (6,1) .

6 – 3 ملاحظة

إذا رمزنا بـــ θ لزاوية متجه الناظم الأساسي $\boldsymbol{n}$ ، لمنحن على سطح ، في نقطة p ، ومتجه الوحدة الناظمي $\boldsymbol{m}$ ، على السطح في p ؛ فعندئذٍ:

$$k_n = \kappa \cos\theta$$

حيث κ تقوس المنحني في p ، و k_n التقوس الناظمي في p .

ولما كان التقوس الناظمي يتعلق باتجاه المنحني وحسب ، والزاوية θ تتعلق بوضع المستوي الملاصق للمنحني ، فإن تقوس المنحني في p يتعين تماماً بالمستوي الملاصق للمنحني في هذه النقطة . وبالتالي فإن المنحنيات جميعها على السطح والتي لها المستوي الملاصق نفسه في p ، لابد أن يكون لها التقوس ذاته في p .

وإذا كان المستوي الملاصق ناظمياً على السطح $(\cos\theta = \mp 1)$ ؛ فإن تقوس المنحني يساوي تقوس المنحني الناتج من تقاطع السطح مع المستوي الناظم على السطح

والمماس للمنحني في p (نقول عن هذا المنحني إنه مقطع قائم للسطح وفق الاتجاه $du^1 : du^2$ المماس للمنحني الأول) . وفي هذه الحالة يتطابق تقوس المنحني مع التقوس الناظمي أو سالب التقوس الناظمي .

ونعبر عن النتائج السابقة من خلال المبرهنة .

4 – 6 مبرهنة (*Meusnier*)

ليكن $\mathscr{L}$ منحنياً واقعاً على سطح $\mathscr{S}$ ، ولنفترض أن التقوس الناظمي للمنحني في النقطة P غير معدوم .

عندئذ ؛ فإن مركز تقوس المنحني في P ينطبق على المسقط القائم ، على المستوي الملاصق في P ، لمركز تقوس المقطع القائم للسطح ، المماس للمنحني $\mathscr{L}$ في P .

البرهان :

إذا كان C_0 مركز تقوس المقطع القائم ، و C مركز تقوس المنحني $\mathscr{L}$ في P فعندئذ:

$$\vec{PC} = \frac{1}{\kappa} n$$

$$\vec{PC_0} = \frac{1}{k_n} m$$

ومن ناحية أخرى ؛ فإن مسقط المتجه $\vec{PC_0}$ على المتجه n يعطى بـــ :

$$\vec{PC_0} \cdot n = \frac{1}{k_n} m \cdot n = \frac{\cos\theta}{k_n} = \frac{1}{\kappa}$$

ومنه:

$$(\overrightarrow{PC_0} \cdot n) n = \frac{1}{\kappa} n = \overrightarrow{PC}$$

ممّا يعني أن مسقط النقطة C_0 على الناظم الأساسي يتطابق مع C . ولما كان الناظم الأساسي للمنحني ، والناظم على السطح عموديين على مماس المنحني الذي يقع في المستوي الملاصق ؛ فإن المسقط القائم لـــ $\overline{PC_0}$ على المستوي الملاصق يقع على الناظم الأساسي للمنحني ، وبالتالي فإن مسقط C_0 على المستوي الملاصق يتطابق مع مسقط C_0 على الناظم الأساسي . ممّا يقتضي أن مسقط C_0 على المستوي الملاصق يتطابق مع C .

6 – 5 تعريف (التحويل الكروي لفضاء المتجهات المماسة)

إن التطبيق الكروي (تعريف 3 – 1) لسطح $\mathcal{F}$ ، ممثل بـــ :

$$r = r(u^1,u^2)$$

في كرة الوحدة ، والذي نقابل وفقه أي نقطة $p=(u^1,u^2)$ من السطح ، بالنقطة p^* من كرة الوحدة ، التي متجه موضعها يساوي $m(u^1,u^2)$، يحدث تطبيقاً لفضاء المتجهات المماسة للسطح في p ، على فضاء المتجهات المماسة لكرة الوحدة في p^* . فنقابل المتجه المماس:

$$a = a^i r_i$$

للسطح في p بالمتجه المماس:

$$a^* = a^i m_i$$

لكرة الوحدة في p^* $(A_i^j = \delta_i^j)$ والذي نرمز إليه بـــ $\mathcal{S}(a)$.

ولما كان $\mathcal{S}(r_i) = m_i$ ؛ فإننا باستخدام صيغة *Weingarten* (3,2) نجد أن :

$$\mathcal{S}(a) = a^i m_i = -a^i b_i^j r_j$$

ممّا يعني أن $\mathcal{S}(a)$ هو أيضاً متجه مماس للسطح $\mathcal{F}$ في p . وإذا لاحظنا أن :

$$\mathcal{S}(\lambda a + \mu b) = \lambda\ \mathcal{S}(a) + \mu\ \mathcal{S}(b)$$

فإننا نستطيع أن نعدَّ $\mathscr{S}$ تحويلاً خطياً لفضاء المتجهات المماسة للسطح في p في نفسه. نقول عن $\mathscr{S}$ إنه التحويل الكروي لفضاء المتجهات المماسة (أو للفضاء المماس) في p ، ونقول عن $\mathscr{S}(\boldsymbol{a})$ إنه الصورة الكروية للمتجه المماس $\boldsymbol{a}$.

تجدر الملاحظة أخيراً ، إلى أن $\mathscr{S}(\boldsymbol{a})$ مستقل عن التوسيط ، ولكنه يتبع توجيه السطح $\mathscr{F}$.

6 – 6 نتيجة

الجداء الداخلي لمتجه مماس $\boldsymbol{a}$ وصورته الكروية $\mathscr{S}(\boldsymbol{a})$ يساوي سالب قيمة الشكل التربيعي الثاني ، من أجل المتجه $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathscr{S}(\boldsymbol{a}) = -b_{ij}a^i a^j$$

في الحقيقة إذا استخدمنا الصيغة (3,3) ؛ فنجد أن :

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathscr{S}(\boldsymbol{a}) = (a^i\boldsymbol{r}_i)\cdot(-a^j b^k_j\boldsymbol{r}_k) = -b^k_j(\boldsymbol{r}_i.\boldsymbol{r}_k)a^i a^j$$
$$= -b^k_j g_{ik}a^i a^j = -b_{ij}a^i a^j$$

7 – 6 نتيجة

إن التقوس الناظمي وفق اتجاه المتجه $\boldsymbol{a}$ يساوي:

$$k_n = \boldsymbol{a}\cdot\mathscr{S}(\boldsymbol{a})\,/\,\boldsymbol{a}^2$$

8 – 6 مبرهنة

إذا كان $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$ متجهين مماسين لسطح في نقطة منه p ، فعندئذ :

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{a})\times\mathscr{S}(\boldsymbol{b}) = k\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

حيث k تقوس غوص للسطح في p .

البرهان:

لما كان :

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{a}) = a^i\boldsymbol{m}_i \qquad \text{و} \qquad \mathscr{S}(\boldsymbol{b}) = b^j\boldsymbol{m}_j$$

فعندئذ:

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{a})\times\mathscr{S}(\boldsymbol{b}) = a^i b^j \boldsymbol{m}_i \times \boldsymbol{m}_j$$

$$= (a^1 b^2 - a^2 b^1)\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2$$

باستخدام صيغة (*Weingarten*) (2 – 3) نجد أن

$$\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2 = b_1^i b_2^j \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j = (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2)\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$$

ولما كان :

$$b_j^i = g^{ik} b_{jk}$$

فعندئذ

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b}{g} = k$$

حيث b مميز الشكل التربيعي الأساسي الثاني و g مميز الشكل التربيعي الأساسي الأول.

ومنه

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{a})\times\mathscr{S}(\boldsymbol{b}) = k(a^1 b^2 - a^2 b^1)\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$$

$$= k\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

ولاسيَّما إذا وضعنا:

$$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{r} = du^i \boldsymbol{r}_i$$

و

$$\boldsymbol{b} = \delta\boldsymbol{r} = \delta u^i \boldsymbol{r}_i$$

فنجد :

$$\mathscr{S}(d\boldsymbol{r})\times\mathscr{S}(\delta\boldsymbol{r}) = k\ d\boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{r}$$

6 – 9 تعريف

نقول عن نقطة P من سطح إنها نقطة سُرّية (*Umbilical Point*) إذا وفقط إذا كان التقوس الناظمي في هذه النقطة له القيمة ذاتها في كل اتجاه :

$$k_n(du^1 : du^2) = K$$

6 – 10 نتيجة

الشرط اللازم والكافي حتى تكون نقطة P من سطح نقطة سّرية هو أن يكون الشكلان الأساسيان في هذه النقطة متناسبين ، أي :

$$b_{ij}\, du^i\, du^j = \lambda\, g_{ij}\, du^i\, du^j$$

أو

$$b_{11} = \lambda g_{11} \ , \ b_{12} = \lambda g_{12} \ , \ b_{22} = \lambda g_{22}$$

وبالتالي ، فجميع نقاط مستو ، وجميع نقاط كرة هي نقاط سرية .

6 – 11 تعريف (التقوس الأساسي والاتجاه الأساسي)

لما كان التقوس الناظمي k_n ، في نقطة ما P من سطح ، دالة بالمتغيرين du^1 و du^2 ، فنقول عن أية قيمة قصوى تأخذها الدالة $k_n(du^1, du^2)$ ، إنها تقوس أساسي للسطح في هذه النقطة ، كما نقول عن الاتجاه $du^1 : du^2$ الذي تأخذ وفقه الدالة k_n قيمة قصوى إنه اتجاه أساسي للسطح $\mathcal{S}$.

6 – 12 مبرهنة

الشرط اللازم والكافي حتى يكون العدد الحقيقي k تقوساً أساسياً هو أن يحقق المعادلة :

$$\begin{vmatrix} b_{11} - kg_{11} & b_{12} - kg_{12} \\ b_{12} - kg_{12} & b_{22} - kg_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6,2)$$

أو :

$$(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)k^2-(g_{11}b_{22}+g_{22}b_{11}-2g_{12}b_{12})k+(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)=0 \quad (6,3)$$

البرهان :

لزوم الشرط :

لنفترض أن k_0 تقوس أساسي مقابل للاتجاه الأساسي $du_0^1 : du_0^2$. لما كان العدد k_0 قيمة قصوى للدالة :

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}\,du^1du^2 + b_{22}\,(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1du^2 + g_{22}\,(du^2)^2}$$

فلابد أن ينعدم المشتقان الجزئيان :

$$\left(\frac{\partial k_n}{\partial (du^1)}\right)_{(du_0^1,\,du_0^2)} \quad , \quad \left(\frac{\partial k_n}{\partial (du^2)}\right)_{(du_0^1,\,du_0^2)}$$

أي :

$$\left[\frac{\mathrm{I}\,\mathrm{II}_{du^1}-\mathrm{II}\,\mathrm{I}_{du^1}}{\mathrm{I}^2}\right]_{(du_0^1,du_0^2)}=0$$

$$\left[\frac{\mathrm{I}\,\mathrm{II}_{du^2}-\mathrm{II}\,\mathrm{I}_{du^2}}{\mathrm{I}^2}\right]_{(du_0^1,du_0^2)}=0$$

وبالضرب بـــ I نجد :

$$\left[\mathrm{II}_{du^1}-\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}\mathrm{I}_{du^1}\right]_{(du_0^1,\,du_0^2)}=0$$

$$\left[\mathrm{II}_{du^2}-\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}\mathrm{I}_{du^2}\right]_{(du_0^1,du_0^2)}=0$$

ولكن:

$$\left(\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}\right)_{(du_0^1,\,du_0^2)} = k_n(du_0^1,du_0^2)=k_0$$

إذن :

$$(\mathrm{II}_{du^1} - k_0 \mathrm{I}_{du^1})_{(du_0^1, du_0^2)} = 0$$
$$(\mathrm{II}_{du^2} - k_0 \mathrm{I}_{du^2})_{(du_0^1, du_0^2)} = 0$$

ومنه :

$$\left.\begin{aligned}(b_{11}\,du_0^1 + b_{12}\,du_0^2) - k_0(g_{11}\,du_0^1 + g_{12}\,du_0^2) = 0\\ (b_{12}\,du_0^1 + b_{22}\,du_0^2) - k_0(g_{12}\,du_0^1 + g_{22}\,du_0^2) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (6,4)$$

أو

$$(b_{11} - k_0 g_{11})\,du_0^1 + (b_{12} - k_0 g_{12})\,du_0^2 = 0$$
$$(b_{12} - k_0 g_{12})\,du_0^1 + (b_{22} - k_0 g_{22})\,du_0^2 = 0$$

ممّا يقتضي أن يحقق k_0 المعادلة (6,2) وبالتالي (6,3) .

كفاية الشرط .

إذا كان k_0 حلاً لـــ (6,3) أو (6,2) ؛ فلابد أن يكون لجملة المعادلتين :

$$(b_{11} - k_0 g_{11})\,x + (b_{12} - k_0 g_{12})\,y = 0$$
$$(b_{12} - k_0 g_{12})\,x + (b_{22} - k_0 g_{22})\,y = 0$$

حل :

$$y_0 = du_0^2 \quad , \quad x_0 = du_0^1$$

ولو اتبعنا خطوات معاكسة لتلك الواردة في لزوم الشرط لوجدنا أن k_0 قيمة قصوى لـــ k_n .

6 – 13 ملاحظة

لما كان مميز المعادلة (6,3) هو :

$$(g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12})^2 - 4(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)$$

فنستطيع أن نكتبه بالشكل :

$$4\left(\frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}^2}\right)(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})^2 +$$

$$+\left[g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11}-\frac{2g_{12}}{g_{11}}(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})\right]^2$$

ممّا يقتضي أن يكون أكبر أو يساوي الصفر .

ولما كان :

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$$

فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون المماز مساوياً للصفر هو أن يتحقق :

$$g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11}=0$$

$$g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11}-\frac{2g_{12}}{g_{11}}(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})=0$$

أو :

$$g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11}=0$$

$$g_{11}b_{22}-g_{22}b_{11}=0$$

أو :

$$b_{ij}=\lambda g_{ij}$$

14 – 6 نتيجة

يوجد في النقطة السُرّية تقوس أساسي واحد ، وكل اتجاه هو اتجاه أساسي. أما في النقطة غير السرية فيوجد تماماً تقوسان أساسيان k_1 و k_2 ، وبالتالي يوجد اتجاهان أساسيان يحققان الجملة (6,4) التي لو حذفنا منها k_0 لحصلنا على المعادلة :

$$\frac{g_{11}du^1+g_{12}du^2}{g_{12}du^1+g_{22}du^2}=\frac{b_{11}du^1+b_{12}du^2}{b_{12}du^1+b_{22}du^2}$$

أو :

$$(g_{11}b_{12}-g_{12}b_{11})(du^1)^2+$$

$$(g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})\,du^1du^2 +$$

$$(g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})(du^2)^2 = 0 \qquad (6,5)$$

6 – 15 تعريف

إذا كان k_1 و k_2 التقوسين الأساسيين في نقطة من سطح، فنقول عن العدد k_1k_2 إنه تقوس غوص (Gauss) ، أو التقوس الكلي للسطح في P ، ونرمز إليه بـ k ، ونقول عن العدد :

$$\frac{k_1 + k_2}{2}$$

إنه التقوس الوسطي في P ونرمز إليه بـ H .

6 – 16 نتيجة

$$k = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

6 – 17 تعريف

نقول عن منحن على سطح إنه منحني تقوس ، إذا كان اتجاه المماس في كل نقطة منه هو اتجاه أساسي في هذه النقطة، وبالتالي إذا حقق اتجاه المماس (du^1, du^2) في كل نقطة منه المعادلة (6,5) .

6 – 18 تعريف

نقول عن سطح تقوسه الوسطي صفر إنه سطح أصغري . وتُبرر المبرهنة الآتية هذه التسمية .

6-19 مبرهنة

إذا كانت مساحة أي منطقة على سطح $\mathcal{F}$ محدودة بمنحن $\mathcal{L}$ مغلق وأملس قطعيًّا أصغرَ من مساحة المنطقة المحددة بـ $\mathcal{L}$ على أي سطح آخر يحوي $\mathcal{L}$، فلابد أن يكون $\mathcal{F}$ سطحاً أصفريا.

6-20 مبرهنة

إذا كان لسطحين التقوس الكلي (تقوس غوص) الثابت نفسه ، فلابد أن يكون السطحان متقايسين محلياً ، وبالتالي فأي سطح ذي تقوس كلي ثابت وموجب:

$$k = \frac{1}{a^2}$$

لابد أن يكون متقايساً محلياً مع كرة نصف قطرها a. وأي سطح ذي تقوس كلي ثابت $k = 0$ يكون متقايساً محلياً مع المستوي ، وكل سطح ذي تقوس كلي ثابت وسالب:

$$k = -\frac{1}{a^2}$$

يكون متقايساً مع السطح شبه الكروي .

6-21 أمثلة

1- النقطة السرية تكون إما ناقصية أو مكافئية ، وكل نقطة على كرة لابد أن تكون سرية ناقصية ؛ لأن:

$$k_n = \frac{1}{a} = const.$$

2- إذا أخذنا السطح :

$$r(u^1,u^2) = (u^1,u^2,(u^1)^2 - (u^2)^2)$$

فإن :

$$r_1 = (1,0,2u^1) \ , r_2(0,1,-2u^2)$$

$$r_{11}=(0,0,2)\ ,\ r_{12}=(0,0,0)\ ,\ r_{22}=(0,0,-2)$$

ومنـــه :

$$g_{11}=1+4(u^1)^2$$

$$g_{12}=-4u^1u^2$$

$$g_{22}=1+4(u^2)^2$$

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=1+4(u^1)^2+4(u^2)^2$$

$$b_{11}=\frac{2}{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2}$$

$$b_{12}=0$$

$$b_{22}=\frac{-2}{1+4(u^1)^2+4(u^2)^2}$$

وفي النقطة $(u^1,u^2)=(0,0)$ لدينا:

$$g_{11}=1\ ,\ g_{12}=0\ ,\ g_{22}=1$$

$$b_{11}=2\ ,\ b_{12}=0\ ,\ b_{22}=-2$$

ومنه:

$$k_n=\frac{2\left[(du^1)^2-(du^2)^2\right]}{(du^1)^2+(du^2)^2}$$

تقوس غوص (Gauss) في هذه النقطة

$$k=\frac{b}{g}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-b_{12}^2}=\frac{-4}{1}=-4$$

والتقوس الوسطي

$$H=\frac{1}{2}\ \frac{g_{11}b_{22}+g_{22}b_{11}-2g_{12}b_{12}}{g}=\frac{-2+2-0}{1}=0$$

التقوسان الأساسيان هما جذرا المعادلة :

$$k^2-4=0$$

وبالتالي هما :

$$k_1 = 2 \qquad \text{و} \qquad k_2 = -2$$

أما الاتجاهان الأساسيان فهما جذرا المعادلة

$$-4\, du^1 du^2 = 0$$

وبالتالي نستطيع أن نضع :

$$(du^1, du^2) = (0,1)$$

$$(du^1, du^2) = (1,0)$$

6 – 22 تعريف (الاتجاه المقارب)

نقول عن اتجاه $du^1 : du^2$ في نقطة $P(u^1, u^2)$ من سطح أنه اتجاه مقارب إذا كان:

$$\mathrm{II} = b_{ij}\, du^i du^j = 0 \qquad (6,6)$$

ولما كان :

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \qquad \text{و} \qquad \mathrm{I} > 0$$

فإن الاتجاهات المقاربة هي الاتجاهات التي يكون من أجلها $k_n = 0$.

وعندئذٍ :

أ- لا يوجد في النقطة الناقصية من سطح اتجاهات مقاربة .

ب- يوجد في النقطة الزائدية اتجاهان مقاربان .

ج- يوجد في النقطة المكافئية اتجاه مقارب واحد .

د- كل اتجاه في النقطة السوية هو اتجاه مقارب .

6 – 23 تعريف

نقول عن المنحنيات الواقعة على سطح ـــ والتي يكون اتجاه المماس في كل نقطة منها هو اتجاه مقارب ـــ إنها منحنيات مقاربة على السطح ، وبالتالي إن المنحنيات المقاربة هي حلول المعادلة (6,6) .

6 – 24 تمرين

إذا كان $\mathcal{S}$ السطح الممثل بـــ (مخروط دوراني) :

$$r(u^1,u^2)=(\frac{1}{\sqrt{2}}u^2\cos\sqrt{2}\,u^1,\frac{1}{\sqrt{2}}u^2\sin\sqrt{2}\,u^1,\frac{u^2}{\sqrt{2}}) \qquad u^2>0$$

فعندئذ :

أ– أثبت أن المنحنيات ذات الوسيط u^2 هي مستقيمات .

ب– أثبت أن هذا السطح والمستوي متقايسان محلياً .

ج– أوجد المنحنيات المقاربة على السطح .

د– أوجد منحنيات التقوس على السطح .

الحل

أ– المنحني ذو الوسيط u^2 يمثل بـــ $u^1=c$ أو بـــ

$$u^2=t\rightarrow r(c,t)=(\frac{1}{\sqrt{2}}t\cos\sqrt{2}\,c,\frac{1}{\sqrt{2}}t\sin\sqrt{2}\,c,\frac{t}{\sqrt{2}})=r_*(t)$$

ومنـــه :

$$r_*'(t)=(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}\,c,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,c,\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$r_*''(t)=0$$

ممّا يقتضي أن يكون تقوس المنحني مساوياً للصفر ، وبالتالي إنه مستقيم .

ب– لما كان:

$$r_1 = (-u^2 \sin\sqrt{2}\, u^1 \ , \ u^2 \cos\sqrt{2}\, u^1 , 0)$$

$$r_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\sqrt{2}\, u^1 , \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}\, u^1 , \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$r_{11} = (-\sqrt{2}\, u^2 \cos\sqrt{2}\, u^1 \ , \ -\sqrt{2}\, u^2 \sin\sqrt{2}\, u^1 , 0)$$

$$r_{12} = (-\sin\sqrt{2}\, u^1 \ , \ \cos\sqrt{2}\, u^1 , 0)$$

$$r_{22} = 0$$

فإن :

$$g_{11} = (u^2)^2 \quad , \quad g_{12} = 0 \quad , \quad g_{22} = 1 \quad , \quad g = (u^2)^2$$

$$b_{11} = -u^2 \quad , \quad b_{12} = 0 \quad , \quad b_{22} = 0$$

وبالتالي ، إن تقوس غوص (Gauss) للسطح هو :

$$k = \frac{b}{g} = 0 = const$$

ولما كان تقوس غوص (Gauss) للمستوي ثابتاً أيضاً ، ويساوي الصفر وحسب المبرهنة لابد أن يكون السطح والمستوي متقايسين محلياً .

ج- المنحنيات المقاربة هي حلول المعادلة $II = 0$ أو $-u^2 (du^1)^2 = 0$

ولما كان $u^2 > 0$ ، فإن :

$$du^1 = 0 \qquad \text{ومنه} \qquad u^1 = c$$

والمنحنيات المقاربة هي المنحنيات ذات الوسيط u^2 .

د- منحنيات التقوس هي حلول المعادلة (6,5)

أو :

$$-v\, du^1 du^2 = 0$$

ممّا يقتضي أن تكون منحنيات التقوس هي المنحنيات الإحداثية:

$$u^1 = c \quad \text{و} \quad u^2 = c$$

تمرينات الفصل الثالث

1 – أثبت أن المعادلات الوسيطية

$$x=a\cos u^1\cos u^2\ ,\ y=b\cos u^1\sin u^2\ ,\ z=c\sin u^1$$

تمثل مجسم القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

وأوجد الشكل الأساسي الأول للمجسم في هذه الإحداثيات . أوجد النقاط الشاذة لهذا التمثيل . أوجد مساحة مجسم القطع الناقص الدوراني ($a=b$) .

2 – أوجد المسارات المتزاوية لخطوط الطول للكرة .

3 – أوجد المسارات المتزاوية لخطوط الطول للطارة .

4 – أوجد طول المنحني :

$$u^1=t\quad ,\ u^2=e^{t\frac{\cot b}{\sqrt{2}}}\qquad 0\le t\le\pi$$

على المخروط:

$$r(u^1,u^2)=(u^2\cos u^1\ ,\ u^2\sin u^1\ ,\ u^2)$$

5 – أثبت أن المنحني :

$$u=\ln t\ ,\ v=2\,\mathrm{Arctg}\,t\ ,\ t>0$$

الواقع على الكرة

$$r(u,v)=(\cos u\sin v\ ,\ \sin u\sin v\ ,\ \cos v)$$

يقطع المنحنيات الإحداثية $u=const$ بالزاوية نفسها $\phi=\frac{\pi}{4}$.

6 – أثبت أن زاوية تقاطع المنحيين الإحداثيين:

$$u^1=u_0^1\quad \text{و}\quad u^2=u_0^2$$

على السطح :

$$x = u^1 \quad , \qquad y = u^2 \quad , \qquad z = a u^1 u^2$$

تعطى بـــ :

$$\cos\theta = \frac{a^2 u_0^1 u_0^2}{\sqrt{1 + a^2 u_0^1}\ \sqrt{1 + a^2 u_0^2}}$$

7 – لدينا السطح:

$$x = u^1 + (u^2 - 1)\sin u^1$$

$$y = 1 + (u^2 - 1)\cos u^1$$

$$z = \frac{(u^1)^2}{2} + u^2$$

أ) أوجد الشكل التربيعي الأساسي الأول لهذا السطح .

ب) برهن أن المنحنيات الإحداثية $u^1 = const.$ هي مستقيمات .

ج) أوجد المنحنيات المتعامدة مع المنحنيات الإحداثية :

$$u^1 = const.$$

8 – أوجد مساحة الشكل المحدد بالمنحنيات :

$$u^1 = 0 \quad , \qquad u^1 = 1 \quad , \qquad u^2 = 0 \quad , \qquad u^2 = \frac{b}{a}$$

على السطح :

$$x = a u^2 \cos u^1$$

$$y = a u^2 \sin u^1$$

$$z = b u^1$$

9 – بين أن الشكل التربيعي الأول للسطح :

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = \boldsymbol{R}(u^1) + u^2 \boldsymbol{b}(u^1)$$

المولّد بثنائي الناظم $\boldsymbol{b}(u^1)$ للمنحني $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(u^1)$ هو :

$$(1+(u^2)^2\tau^2)(du^1)^2+(du^2)^2$$

علماً أن u^1 هو الوسيط الطبيعي للمنحني.

10- صنّف نقاط كل من السطحين :

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=\left(u^1\ ,\ u^2\ ,\ (u^1)^2+(u^2)^2\right)$$

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=\left(u^1\ ,\ u^2\ ,\ (u^1)^2-(u^2)^2\right)$$

11- بين أن المنحنيات الإحداثية للسطح :

$$x=3u^1-(u^1)^3+3u^1(u^2)^2$$

$$y=(u^2)^3-3(u^1)^2u^2-3u^2$$

$$z=3\left((u^1)^2-(u^2)^2\right)$$

هي منحنيات تقوس.

12- بين أن المنحنيات المقاربة على السطح :

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=(\cosh u^2\cos u^1,\cosh u^2\sin u^1,z=u^2)$$

تعطى بـــ :

$$u^1\pm u^2=const.$$

13- أوجد المنحنيات المقاربة للطارة .

14- لدينا السطح :

$$x=u^2\cos u^1-a\sin u^1$$

$$y=u^2\sin u^1+a\cos u^1$$

$$z=au^1$$

أ) أوجد المنحنيات المتعامدة مع : $u^1=const.$.

ب) أوجد المنحنيات المقاربة على السطح .

ج) أوجد منحنيات التقوس على السطح .

15- لدينا السطح (اللولبي) :

$$r(u^1,u^2)=(u^1\cos u^2\ ,u^1\sin u^2,u^2)$$

أ) أوجد المنحنيات المقاربة على السطح

ب) أوجد منحنيات التقوس على السطح .

ج) أحسب قيمة التقوس الوسطي .

16- لدينا السطح :

$$x=\sqrt{1+(u^2)^2}\cos u^1$$

$$y=\sqrt{1+(u^2)^2}\sin u^1$$

$$z=\ln\left(u^2+\sqrt{1+(u^2)^2}\right)$$

أ) أوجد المنحنيات المقاربة على السطح .

ب) أوجد منحنيات التقوس على السطح .

ج) صنف نقاط السطح .

17- لدينا السطح :

$$r(u^1,u^2)=(u^1+u^2\ ,u^1-u^2,u^1u^2)$$

أثبت أن تقوس غوص في النقطة $(u^1=1,u^2=1)$ يساوي $k=\frac{1}{16}$.

وأن التقوس الوسطي هو : $H=\frac{1}{8\sqrt{2}}$.

18- ليكن : $(u^1,u^2)\longrightarrow r(u^1,u^2)$ سطحاً نظامياً

ولنفترض أن :

$$g_{11}(u^1,u^2) = E(u^1)$$

$$g_{12}(u^1,u^2) = 0$$

$$g_{22}(u^1,u^2) = G(u^1)$$

أثبت أن المنحنيات الإحداثية : $u^1 = const.$ هي منحنيات جيوديزية.

19- أوجد المنحنيات الجيوديزية على السطح :

$$x = \sin\alpha\, u^2 \cos u^1$$

$$y = \sin\alpha\, u^2 \sin u^1$$

$$z = u^2 \cos\alpha$$

حيث :

$$u^2 > 0 \qquad \text{و} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad \text{و} \qquad \alpha = const.$$

20- أوجد التقوس الجيوديزي للمنحنيات الإحداثية للسطح الدوراني :

$$x = f(u^1)\cos u^2$$

$$y = f(u^2)\sin u^2$$

$$z = h(u^1)$$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

التنسورات والأشكال الخارجية

1 – الفضاء الثنوي (*Dual Space*) .

2 – التنسورات (*Tensors*) .

3 – الأشكال متعددة الخطية .

تمرينات الفصل الرابع .

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

التنسورات والأشكال الخارجية

1- الفضاء الثنوي (*Dual Space*)

1-1 تعريف

إذا كان V فضاء متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية $\Re$ ، وأخذنا مجموعة التطبيقات الخطية :

$$\xi : V \to \Re$$

وعرفنا على هذه المجموعة جمع تطبيقين خطيين ξ و η بـــ :

$$(\xi + \eta)(x) = \xi(x) + \eta(x)$$

وجداء تطبيق خطي ξ بعدد حقيقي k بـــ :

$$(k\xi)(x) = k\xi(x)$$

فيمكننا أن نتأكد بسهولة من أن هذه المجموعة مزودة بالعمليتين السابقتين هي فضاء متجهات نرمزه $T_1(V)$ أو V^* ، ونسميه فضاء المتجهات الثنوي، كما نسمي عناصر V^* أشكالاً خطية *(Linear Forms)* .

1-2 ملاحظات ونتائج

1- إذا كانت $e_1,\cdots,e_n$ قاعدة ما لـــ V و ξ شكلاً خطياً على V وكان:

$$x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$$

متجهاً ما من V فإن :

$$\xi(x) = \xi(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i \xi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i \xi_i$$

حيث :

$$\xi_i = \xi(e_i)$$

2 – إذا كان ξ تطبيقاً لـ V في $\mathfrak{R}$ معنياً بالعلاقة :

$$\xi(x)=\sum_{i=1}^{n}x^i\xi_i \qquad (1,1)$$

لكل $x=\sum_{i=1}^{n}x^ie_i$ من V ، فإننا نجد بسهولة أن :

$$\xi(x+y)=\xi(x)+\xi(y)$$

$$\xi(kx)=k\xi(x)$$

وذلك أياً كان المتجهان x و y من V وأياً كان العدد الحقيقي k .

كما نجد أن :

$$\xi(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\delta_j^i\xi_i=\xi_j \quad , \quad j=1,2,\cdots,n$$

إذاً العلاقة (1,1) تعين بصورة وحيدة شكلاً خطياً ξ من V^* ، وذلك لكل n عدد حقيقي $\xi_1,\cdots,\xi_n$.

3 – 1 مبرهنة (القاعدة الثنوية – *Dual base*)

إذا كانت $e_1,\cdots,e_n$ قاعدة ما لـ V ؛ فإن مجموعة الأشكال الخطية $e^1,\cdots,e^n$ المعينة بالعلاقات :

$$e^i(e_j)=\delta_j^i=\begin{cases}1\ , & i=j\\ 0\ , & i\neq j\end{cases} \quad , \quad i,j=1,\cdots,n$$

تشكل قاعدة للفضاء الثنوي V^* نسميها القاعدة الثنوية لـ $e_1,\cdots,e_n$ ، وهي تحقق:

$$e^i(x)=x^i$$

وذلك أياً كان $x=\sum_{i=1}^{n}x^ie_i$ من V .

البرهان :

نلاحظ أولاً أنه إذا كان :

$$x=\sum_{j=1}^{n}x^je_j$$

متجهاً ما من V فإن :

$$e^i(x) = e^i(\sum_{j=1}^{n} x^j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j e^i(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \delta_j^i = x^i$$

وعندئذ فأياً كان الشكل الخطي ξ على V يكون :

$$\xi(x) = \xi(\sum_{j=1}^{n} x^j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \xi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^j(x)$$

$$= (\sum_{j=1}^{n} \xi_j e^j)(x)$$

حيث :

$$\xi_j = \xi(e_j)$$

وبالتالي يكون :

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^j$$

ممّا يعني أن $e^1,\cdots,e^n$ تولّد V^* .

إذا كان من ناحية أخرى :

$$\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n = 0$$

فإنه لكل j لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_i \delta_j^i = \xi_j = 0$$

وهذا يعني أن الأشكال الخطية $e^1,\cdots,e^n$ مستقلة خطياً .

4-1 نتيجة

$$\dim V^* = \dim V$$

1-5 ملاحظة (اصطلاح اينشتاين)

إذا تكرر دليل ما مثل i في الحد ذاته ، مرة بوصفه دليلاً علوياً ، وأخرى بوصفه دليلاً سفلياً ، فنصطلح على أن العبارة هي مجموع لهذا الحد من أجل $i=1$ ، $i=2$ .... حتى $i=n$ ، فمثلاً :

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \xi_i = x^1\xi_1 + \cdots + x^n\xi_n = x^i\xi_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^i e^j = C_1^i e^1 + \cdots + C_n^i e^n = C_j^i e^j$$

1-6 مصفوفة تغيير القاعدة

إذا كانت $e_{1'},\cdots,e_{n'}$ قاعدة أخرى لـ V فثمة مصفوفة $(C_{i'}^{j})$ حيث يكون:

$$e_{i'} = C_{i'}^{j} e_j \quad , \quad e_i = C_i^{j'} e_{j'}$$

حيث $(C_i^{j'})$ المصفوفة العكسية لـ $(C_{i'}^{j})$.وإذا كانت (x^i) و $(x^{j'})$ هي مركبات متجه ما x بالنسبة للقاعدتين (e_i) و $(e_{j'})$ على الترتيب فإن :

$$x^i = C_{j'}^{i} x^{j'} \quad , \quad x^{i'} = C_j^{i'} x^j$$

وإذا أخذنا القاعدة الثنوية لـ $e_{1'},\cdots,e_{n'}$ ورمزناها $e^{1'},\cdots,e^{n'}$ فعندئذ:

$$e^{j'}(e_{i'}) = \delta_{i'}^{j'}$$

وبالتالي :

$$e^{j'}(e_i) = e^{j'}(C_i^{k'} e_{k'}) = C_i^{k'} e^{j'}(e_{k'}) = C_i^{k'} \delta_{k'}^{j'} = C_i^{j'}$$

ومن ناحية أخرى لدينا :

$$e^{j'}(e_i) = C_i^{j'} = C_k^{j'} \delta_i^k = C_k^{j'} e^k(e_i)$$

ممّا يقتضي أن :

$$e^{j'} = C_k^{j'} e^k$$

وبطريقة مشابهة ، نجد أن :

$$e^{i} = C^{i}_{j'} e^{j'}$$

وأخيراً ، إذا كان :

$$\xi = \xi_i e^i = \xi_{j'} e^{j'}$$

لشكلاً خطياً ما فإن المركبات :

$$\xi_{j'} = \xi(e_{j'}) \qquad \text{و} \qquad \xi_i = \xi(e_i)$$

ترتبط وفق العلاقات :

$$\xi_i = C^{j'}_{i} \xi_{j'} \qquad \text{و} \qquad \xi_{j'} = C^{i}_{j'} \xi_i$$

1 – 7 نتيجة

إذا كان x متجهاً ما من V فإن التطبيق :

$$V^* \to \Re, \xi \to \xi(x)$$

هو شكل خطي على V^* أي هو عنصر من $(V^*)^*$ نرمز إليه بـــ $\phi(x)$ ، وعندئذ يمكن أن نثبت أن التطبيق :

$$V \to (V^*)^*$$
$$x \to \phi(x)$$

هو تماثل *(Isomorphism)* أي إنه خطي :

$$\phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \phi(x_1) + \alpha_2 \phi(x_2)$$

ومتباين (إذا كان $\phi(x) = 0$ فإن $x = 0$) .

نطابق عادة بين الشكل الخطي $\phi(x)$ الذي نرمز إليه بـــ $\hat{x}$ والمتجه x ومنه إمكان المطابقة بين $(V^*)^*$ و V ، ولاسيما أن التماثل بينهما هو تماثل طبيعي (لا يتعلق بالقاعدة المختارة) .

1 – 8 تعريف (مبدد مجموعة *Annulator*)

إذا كانت S مجموعة جزئية من فضاء المتجهات V ؛ فإننا نقول عن مجموعة الأشكال الخطية من V^*، والتي قيمة كل منها صفر من أجل كل متجه x من S ؛ إنها مبدد المجموعة S ونرمز إليه بـ $Ann\,S$ ، أو S° :

$$Ann\,S = S^\circ = \{\xi \in V^* : \xi(x) = 0 \ , \ \forall x \in S\}$$

ويمكن أن نتأكد بسهولة من أن S° هو فضاء جزئي من V^* ، وأنه إذا كان $S \subset T$ فإن $S^\circ \supset T^\circ$. كذلك فإن مبدد مجموعة جزئية S من V ومبدد غلافها الخطي $[S]$ متساويان .

1 – 9 نتائج

أ – $Ann\,0 = V^*$. وإذا كان $Ann\,S = V^*$ فإن $S = \{0\}$.

ب– $Ann\,V = 0$. وإذا كان $Ann\,S = 0$ فإن $S = V$.

ج– إذا كان L فضاء جزئياً من V ذي البعد n فعندئذ

$$\dim L^\circ = n - \dim L$$

في الحقيقة : لنفترض أن $\dim L = p$ ، ولنأخذ القاعدة $e_1,\cdots,e_p,e_{p+1},\cdots,e_n$ لـ V ، حيث تكون $e_1,\cdots,e_p$ قاعدة لـ L ، ولتكن $e^1,\cdots,e^p,e^{p+1},\cdots,e^n$ القاعدة الثنوية.

إذا كان $i \le p$ و $j > p$ فإن:

$$e^j(e_i) = 0$$

وبالتالي :

$$e^{p+1},\cdots,e^n \in [e_1,\cdots,e_p]^\circ = L^\circ$$

ومن ناحية أخرى ؛ إذا كان $\xi = \xi_i e^i \in L^\circ$ فإن :

$$\xi(e_1) = \cdots = \xi(e_p) = 0$$

وبالتالي :

$$\xi = \xi_{p+1} e^{p+1} + \cdots + \xi_n e^n$$

وهكذا فإن مجموعة الأشكال الخطية $e^{p+1},\cdots,e^n$ تشكل قاعدة للفضاء الجزئي L° ومنه :

$$\dim L^\circ = n - p$$

Damascus University

2 – التنسورات (*Tensors*)

2 – 1 تعاريف

أ– ليكن V و W فضاءَي متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية . نقول عن التطبيق :

$$B : V \times W \to \Re$$
$$(x, y) \to B(x, y)$$

إنه شكل ثنائي الخطية على الجداء $V \times W$ ، إذا كان خطياً بالنسبة إلى كل من x و y .

يمكن أن نتأكد بسهولة من أن مجموعة الأشكال ثنائية الخطية على الجداء $V \times W$، المزودة بالجمع $B_1 + B_2$ والضرب بعدد حقيقي aB هي فضاء متجهات .

ب ــ إذا كان $V = W$ ، فإننا نقول عن B إنه شكل ثنائي الخطية على V ونرمز عادة إلى فضاء هذه الأشكال بـــ : $T_2(V)$.

ج– إذا كانت $e_1, \cdots, e_n$ قاعدة ما لـــ V وكان :

$$x = x^i e_i \qquad \text{و} \qquad y = y^i e_i$$

متجهين من V ووضعنا:

$$b_{ij} = B(e_i, e_j)$$

فإن :

$$B(x, y) = B(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j B(e_i, e_j) = b_{ij} x^i y^j$$

نقول عن المصفوفة :

$$B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le n}$$

إنها مصفوفة الشكل ثنائي الخطية B . ويمكن أن نتأكد بسهولة من أن التطبيق الذي يقابل كل شكل من $T_2(V)$ بمصفوفته هو تماثل للفضاء $T_2(V)$ على فضاء المصفوفات المربعة من المرتبة n ، إذا وضعنا :

$$Y=\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad X=\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

فإن:

$$B(x,y)=X^TBY$$

حيث X^T منقول X .

د- إذا كان ξ و η عنصرين من $T_1(V)$ (شكلين خطيين على V) فإن العلاقة:

$$(\xi\otimes\eta)(x,y)=\xi(x)\eta(y)$$

تعرف شكلاً ثنائي الخطية $\xi\otimes\eta$ نسميه الجداء التنسوري لـــ ξ و η .

2 – 2 مبرهنة

إذا كانت $e^1,\cdots,e^n$ القاعدة الثنوية لـــ $e_1,\cdots,e_n$ ؛ فإن مجموعة الجداءات التنسورية :

$$e^i\otimes e^j \qquad , i,j=1,\cdots,n \qquad (2,1)$$

تشكل قاعدة للفضاء $T_2(V)$، وتكون مركبات الشكل ثنائي الخطية B بالنسبة إلى هذه القاعدة هي الأعداد $b_{ij}=B(e_i,e_j)$ أي :

$$B=b_{ij}e^i\otimes e^j$$

البرهان :

نلاحظ في البداية أنه إذا كان :

$$y = y^j e_j \qquad \text{و} \qquad x = x^i e_i$$

متجهين من V ؛ فإن :

$$(e^i \otimes e^j)(x, y) = e^i(x)e^j(y) = x^i y^j \qquad (2,2)$$

وعندئذ ؛ فإن العلاقة :

$$b_{ij}(e^i \otimes e^j) = 0$$

تقتضي أن:

$$b_{ij}(e^i \otimes e^j)(e_k, e_\ell) = b_{ij}\delta^i_k \delta^j_\ell = b_{k\ell} = 0$$

ممّا يعني أن الأشكال (2,1) مستقلة .

وإذا كان الآن B شكلاً ثنائي الخطية من $T_2(V)$ وكان $B(e_i, e_j) = b_{ij}$ فإن :

$$B(x, y) = B(x^i e_i, x^j e_j) = x^i x^j B(e_i, e_j) = b_{ij} x^i x^j$$

وباستخدام (2,2) نجد أن :

$$B(x, y) = b_{ij}(e^i \otimes e^j)(x, y)$$

وبالتالي يكون :

$$B = b_{ij}(e^i \otimes e^j)$$

وهذا يعني أن الأشكال ثنائية الخطية $e^i \otimes e^j$ تولد $T_2(V)$ فهي تشكل قاعدة له .

3 – 2 نتيجة

$$\dim T_2(V) = n^2$$

لنأخذ الآن قاعدة أخرى $e_{i'} = C^j_{i'} e_j$ لـ V . عندئذ :

$$b_{i'j'} = B(e_{i'}, e_{j'}) = B(C^k_{i'} e_k, C^\ell_{j'} e_\ell) = C^k_{i'} C^\ell_{j'} B(e_k, e_\ell)$$

$$= C^k_{i'} C^\ell_{j'} b_{k\ell}$$

أي إن مركبات الشكل ثنائي الخطية B بالنسبة إلى القاعدة الجديدة $e^{i'} \otimes e^{j'}$ تعطى بـــ:

$$b_{i'j'} = C^k_{i'} C^\ell_{j'} b_{k\ell}$$

والتي تُكتَبُ باستخدام المصفوفات بالشكل $B' = C^T B C$ ، حيث :

$$B = (b_{ij}) \quad , \quad B^1 = (b_{i'j'}) \quad , C = (C^i_{j'})$$

4-2 الفضاء $T^2(V)$

نعرف ـــ بشكل مشابه ـــ الأشكال ثنائية الخطية على V^* :

$$B : V^* \times V^* \to \Re, (\xi, \eta) \to B(\xi, \eta)$$

حيث يكمن الاختلاف الوحيد عن الأشكال ثنائية الخطية على V في موضع الأدلة .

إن قيم الشكل B تعطى بـــ :

$$B(\xi, \eta) = B(\xi_i e^i, \eta_j e^j) = \xi_i \eta_j B(e^i, e^j) = \xi_i \eta_j b^{ij}$$

حيث :

$$\eta_j = \eta(e_j) \quad , \xi_i = \xi(e_i) \quad , b^{ij} = B(e^i, e^j)$$

وإذا أخذنا قاعدة جديدة:

$$e_{i'} = C^j_{i'} e_j$$

فنجد العلاقات :

$$b^{i'j'} = B(e^{i'}, e^{j'}) = B(C^{i'}_k e^k, C^{j'}_\ell e^\ell) = C^{i'}_k C^{j'}_\ell B(e^k, e^\ell)$$
$$= C^{i'}_k C^{j'}_\ell b^{k\ell}$$

وهكذا ؛ فإن الأشكال ثنائية الخطية على V^* تشكل فضاء المتجهات :

$$T^2(V) = T_2(V^*)$$

والذي بعده يساوي n^2 .

نعرف أيضاً ــ بشكل مشابه ــ الجداء التنسوري $x \otimes y$ للمتجهين من V بأنه الشكل ثنائي الخطية من $T^2(V)$ المعين بـــ :

$$(x \otimes y)(\xi, \eta) = \xi(x)\eta(y)$$

إن الجداءات التنسورية:

$$e_i \otimes e_j \qquad ,i,j = 1,\ldots,n$$

تشكل قاعدة لـــ $T^2(V)$ ، وعندئذ :

$$B = b^{ij}(e_i \otimes e_j)$$

وذلك أياً كان الشكل B من $T^2(V)$.

5 – 2 الفضاء $T_1^1(V)$

نأخذ الآن الأشكال ثنائية الخطية على $V \times V^*$:

$$B : V \times V^* \to \Re$$
$$(x, \xi) \to B(x, \xi)$$

حيث x متجه من V و ξ شكل خطي من V^* .

نقول عن هذه الأشكال إنها أشكال مختلطة . إن مجموعة الأشكال المختلطة تشكل فضاء متجهات بعده n^2 ونرمزه $T_1^1(V)$. إن قيم الشكل المختلط B تعطى بـــ :

$$B(x, \xi) = B(x^i e_i, \xi_j e^j) = x^i \xi_j B(e_i, e^j) = x^i \xi_j b_i^j$$

حيث :

$$b_i^j = B(e_i, e^j)$$

وحيث :

$$x^i = e^i(x)$$

هي مركبات x بالنسبة إلى القاعدة $e_1, \cdots, e_n$ و $\xi_j = \xi(e_j)$ مركبات ξ بالنسبة إلى القاعدة الثنوية $e^1, \cdots, e^n$.

نعرف الآن الجداء التنسوري $\eta \otimes y$، حيث η شكل خطي من V^* و y متجه من V ، بأنه الشكل المختلط من $T_1^1(V)$ المعين بـــ :

$$(\eta \otimes y)(x,\xi) = \eta(x)\xi(y)$$

إن الجداءات التنسورية :

$$e^i \otimes e_j \qquad \text{و} \qquad i,j = 1,\cdots,n$$

تشكل قاعدة للفضاء $T_1^1(V)$ ، وعندئذ :

$$B = b_i^j \; e^i \otimes e_j$$

وذلك أياً كان الشكل B من $T_1^1(V)$.

إذا كانت الآن $b_{i'}^{j'}$ مركبات B بالنسبة إلى القاعدة $e_{i'} = C_{i'}^j e_j$ ، فإن :

$$b_{i'}^{j'} = B(e_{i'}, e^{j'}) = B(C_{i'}^k e_k, C_\ell^{j'} e^\ell) =$$

$$= C_i^k C_\ell^{j'} B(e_k, e^\ell) = C_i^k C_\ell^{j'} b_k^\ell$$

وإذا استخدمنا المصفوفات :

$$B = (b_j^i) \quad , \quad B' = (b_{j'}^{i'}) \quad , \quad C = (C_{j'}^i)$$

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \quad , \quad \xi = [\xi_1 \cdots \xi_n]$$

فإن العلاقات السابقة تكتب بالشكل المصفوفي كما يأتي :

$$B(x,\xi) = \xi B x \qquad \text{و} \qquad B' = C^{-1} B C$$

2 – 6 تعريف

نسمي تنسوراً من النوع (p,q) ، $p,q \geq 0$ على فضاء المتجهات V ، أي تطبيق من الشكل :

$$T : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to \Re$$

$$(x_1,\cdots,x_p,\xi^1,\cdots,\xi^q) \to T(x_1,\cdots,x_p,\xi^1,\cdots,\xi^q)$$

حيث $x_1,\cdots,x_p$ متجهات من V و $\xi^1,\cdots,\xi^q$ أشكال خطية من V^* وحيث يكون التطبيق خطياً في كل متغير ، أي إن T هو تطبيق متعدد الخطية . ندعو p مرتبة موافق التغير *(Covariant)* و q مرتبة مخالف التغير *(Contra variant)* .

وهكذا ؛ فإن عناصر $T_2(V)$ هي تنسورات من النوع (2,0) ، وعناصر $T^2(V)$ هي تنسورات من النوع (0,2) ، وعناصر $T_1^1(V)$ هي تنسورات من النوع (1,1) . كذلك فإن عناصر V^* هي تنسورات من النوع (1,0) ، وعناصر V هي تنسورات من النوع (0,1) (لأن $V=(V^*)^*$) .

أما التنسورات من النوع (0,0) ، فإننا نطابقها مع الأعداد الحقيقية . نرمز عادة إلى مجموعة التنسورات من النوع (p,q) بـ $T_p^q(V)$ ، ونحذف عادة الدليل 0 فيكون:

$$T_0^2(V)=T^2(V) \quad , \quad T_2^0(V)=T_2(V)$$

$$T_0^1(V)=T^1(V)=V \quad , \quad T_1^0(V)=T_1(V)=V^*$$

أخيراً ، يمكن التأكد بسهولة من أن كلاً من المجموعات $T_p^q(V)$ هي فضاء متجهات.

لتكن $e_1,\cdots,e_n$ قاعدة ما لـ V و $e^1,\cdots,e^n$ القاعدة الثنوية لـ V^* . إذا أخذنا p متجهاً من V و q شكلاً خطياً من V^* :

$$x_1=x_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,x_p=x_p^{i_p}e_{i_p}$$

$$\xi^1=\xi^1_{j_1}e^{j_1},\cdots,\xi^q=\xi^q_{j_q}e^{j_q}$$

وكان T تنسوراً من النوع (p,q) ، فإننا نجد أن :

$$T(x_1,\cdots,x_p,\xi^1,\cdots,\xi^q)=T(x_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,x_p^{i_p}e_{i_p},\xi^1_{j_1}e^{j_1},\cdots,\xi^q_{j_q}e^{j_q})$$

$$=x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\xi^1_{j_1}\cdots\xi^q_{j_q}T(e_{i_1},\cdots,e_{i_p},e^{j_1},\cdots,e^{j_q})$$

$$=T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\xi^1_{j_1}\cdots\xi^q_{j_q}$$

حيث :

$$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}=T(e_{i_1},\cdots,e_{i_p},e^{j_1},\cdots,e^{j_q})$$

نسمي الأعداد $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$ معاملات (أو مركبات) التنسور T ، وكما هو واضح فإن عددها يساوي n^{p+q} .

إذا كانت :

$$e_{1'},\cdots,e_{n'}$$

قاعدة أخرى لـ V :

$$e_{i'} = C^{i}_{i'} e_i$$

وكانت :

$$T^{j'_1\cdots j'_q}_{i'_1\cdots i'_p} = T(e_{i'_1},\cdots,e_{i'_p},e^{j'_1},\cdots,e^{j'_q})$$

معاملات T بالنسبة إلى هذه القاعدة فإن :

$$T^{j'_1\cdots j'_q}_{i'_1\cdots i'_p} = C^{i_1}_{i'_1}\cdots C^{i_p}_{i'_p} C^{j'_1}_{j_1}\cdots C^{j'_q}_{j_q} T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} \qquad (2,3)$$

2 – 7 نتيجة

لنفترض أننا نقابل كل قاعدة $e_1,\cdots,e_n$ للفضاء V بـ n^{p+q} عدد $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$، وحيث ترتبط الأعداد المقابلة لقواعد مختلفة وفق العلاقة (2,3) . عندئذ يوجد على V تنسور وحيد من النوع (p,q)، تكون معاملاته بالنسبة إلى القاعدة $e_1,\cdots,e_n$ هي الأعداد $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$.

في الحقيقة يكفي أن نعين T بالعلاقة :

$$T(x_1,\ldots,x_p,\xi^1,\ldots,\xi^q) = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} x^{i_1}_1\cdots x^{i_p}_p \xi^1_{j_1}\cdots\xi^q_{j_q}$$

2 – 8 العمليات على التنسورات

أ– جمع التنسورات

إذا كانت :

$$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} \quad \text{و} \quad S^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$$

معاملات تنسورين S,T من النوع (p,q) ، فإن حاصل جمعهما هو تنسور من النوع ذاته تعطى معاملاته بـــ :

$$(T+S)^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} + S^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}$$

ب- جداء التنسورات

إذا كان T تنسوراً من النوع (p,q) ، و S تنسوراً من النوع (r,s) ، فإننا نعرف الجداء التنسوري لـــ S,T على أنه تنسور من النوع $(p+r,q+s)$ نرمزه $T\otimes S$، وتعطى معاملاته بـــ :

$$(T\otimes S)^{j_1\cdots j_{q+s}}_{i_1\cdots i_{p+r}} = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} S^{j_{q+1}\cdots j_{q+s}}_{i_{p+1}\cdots i_{p+r}}$$

وعندئذ :

$$(T\otimes S)(x_1,\cdots,x_{p+r},\xi^1,\cdots,\xi^{q+s}) =$$

$$= T(x_1,\cdots,x_p,\xi^1,\cdots,\xi^q)\, S(x_{p+1},\cdots,x_{p+r},\xi^{q+1},\cdots,\xi^{q+s})$$

يمكن أن نتأكد بسهولة من أن الجداء توزيعي بالنسبة إلى الجمع ، أي :

$$(T+S)\otimes R = T\otimes R + S\otimes R$$

$$R\otimes(T+S) = R\otimes T + R\otimes S$$

كما أنه تجميعي أي :

$$(T\otimes S)\otimes R = T\otimes(S\otimes R)$$

ولكنه ليس تبديلياً في الحالة العامة :

$$T\otimes S \neq S\otimes T$$

وإذا كان K تنسوراً من النوع $(0,0)$ (عدداً حقيقياً) ، فعندئذ يؤول الجداء التنسوري إلى جداء عادي :

$$K\otimes T = T\otimes K = KT$$

نستنتج مما سبق أن مجموعة عناصر فضاءات المتجهات $T_p^q(V)$ مزودة بعمليتي الجمع+ والجداء $\otimes$ هي جبر نسميه الجبر التنسوري لفضاء المتجهات V .

ج- تقلص الأدلة :

ليكن T تنسوراً من النوع (p,q) و $q>0$ ، $p>0$ ، ولنفترض أن :

$$1\le k\le p \qquad \text{و} \qquad 1\le \ell\le q$$

إذا وضعنا في موقع المتغير x_k متجه القاعدة e_i ، وفي موقع المتغير ξ^ℓ متجه القاعدة الثنوية e^j وجمعنا ، حيث يأخذ الدليل i القيم من 1 إلى n ؛ فإننا نحصل على تنسور S من النوع $(p-1,q-1)$:

$$S(x_1,\cdots,x_{k-1},\xi^1,\cdots,\xi^{q-1}) =$$

$$= T(x_1,\cdots,x_{k-1},e_i,x_k,\cdots x_{p-1},\xi^1,\cdots,\xi^{\ell-1},e^j,\xi^\ell,\cdots,\xi^{q-1})$$

من المفيد أن نشير إلى أن هناك عملية جمع في الطرف الأيمن حسب اصطلاح اينشتاين. إن مركبات S تعطى بـــ :

$$S_{i_1\cdots i_{p-1}}^{j_1\cdots j_{q-1}} = T_{i_1\cdots i_{k-1}i i_k\cdots i_{p-1}}^{j_1\cdots j_{\ell-1}j j_\ell\cdots j_{q-1}}$$

ونقول إننا حصلنا على التنسور S بتقلص (*Contraction*) للدليل العلوي ذي الترتيب ℓ مع الدليل السفلي ذي الترتيب k .

يبقى أن نثبت أن S لا يتعلق بالقاعدة المختارة $e_1,\cdots,e_n$. إذا كانت $e_{1'},\cdots,e_{n'}$ قاعدة أخرى ، حيث :

$$e_{i'} = C_{i'}^i e_i$$

فعندئذ :

$$T(x_1,\cdots,x_{k-1},e_{i'},x_k,\cdots,x_{p-1},\xi^1,\cdots,\xi^{\ell-1},e^{j'},\xi^\ell,\cdots,\xi^{q-1}) =$$

$$= C_{i'}^i C_{j'}^{j'} T(x_1,\cdots,e_i,\cdots,x_{p-1},\xi^1,\cdots,e^j,\cdots,\xi^{q-1})$$

$$= \delta_j^i T(x_1,\cdots,e_i,\cdots,x_{p-1},\xi^1,\cdots,e^j,\cdots,\xi^{q-1})$$

$$= T(x_1,\cdots,e_i,\cdots,x_{p-1},\xi^1,\cdots,e^i,\cdots,\xi^{q-1})$$

$$= S(x_1,\cdots,x_{p-1},\xi^1,\cdots,\xi^{q-1})$$

2 – 9 أمثلة

1 – إن تقلص الدليلين i و j للتنسور ذي النوع (1,1)

$$B(x,y) = b_i^j x^i \xi_j$$

يعطي تنسوراً من النوع (0,0) أي يعطي العدد $B(e_i,e^i)$. نسمي هذا العدد أثر *(Trace)* التنسور B ونرمزه $\mathrm{tr}\,B$ ، فلدينا بالتعريف إذاً :

$$\mathrm{tr}\,B = B(e_i,e^i) = b_k^\ell \delta_i^k \delta_\ell^i = b_i^i = b_1^1 + \cdots + b_n^n$$

ويمكن التأكد من أن:

$$b_i^i = b_{i'}^{i'}$$

2 – إذا كان x متجهاً من V و ξ شكلاً خطياً من V^* ؛ فإن :

$$\mathrm{tr}(\xi \otimes x) = \xi_i x^i = \xi_1 x^1 + \cdots + \xi_n x^n$$

3 – إذا كانت t_{jk}^i مركبات تنسور من النوع (2,1) فإن t_{ik}^i هي مركبات تنسور من النوع (1,0) وترتبط المركبات $t_{i'k'}^{i'}$ للتنسور نفسه في قاعدة أخرى، مع سابقاتها بالعلاقات :

$$t_{i'k'}^{i'} = C_i^{i'} C_{i'}^j C_{k'}^\ell t_{j\ell}^i = \delta_i^j C_{k'}^\ell t_{j\ell}^i = C_{k'}^\ell t_{i\ell}^i$$

4 – إذا كان T تنسوراً من النوع (p,q) و $x_1,\cdots,x_p$ عناصراً من V و $\xi^1,\cdots,\xi^q$ عناصراً من V^* ؛ فإن الجداء :

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes T \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^q$$

هو تنسور من النوع $(p+q,p+q)$ ، وإذا قمنا بعملية تقلص للأدلة العلوية والأدلة السفلية ذات الترتيب نفسه نحصل على العدد :

$$t^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}x^{i_1}_1\cdots x^{i_p}_p\xi^1_{j_1}\cdots\xi^q_{j_q}$$

أي على قيمة T من أجل المتجهات $x_1,\cdots,x_p$ والأشكال $\xi^1,\cdots,\xi^q$.

2 – 10 مبرهنة

إذا كانت $e_1,\cdots,e_n$ قاعدة لفضاء المتجهات V و $e^1,\cdots,e^n$ القاعدة الثنوية لـــ V^* فإن الجداءات التنسورية :

$$e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}$$

تشكل قاعدة لفضاء المتجهات $T^q_p(V)$ وتكون مركبات التنسور T بالنسبة إلى هذه القاعدة هي :

$$T^{j_1-j_q}_{i_1\cdots i_p}=T(e_{i_1},\cdots,e_{i_p},e^{j_1},\cdots,e^{j_q})$$

أي :

$$T=T^{j_1-j_q}_{i_1\cdots i_p}\ e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}$$

2 – 11 بعض التنسورات الخاصة

1– تنسور كرونكر

تنسور كرونكر هو بالتعريف تنسور من النوع (1,1) مركباته هي :

$$t^i_j=\delta^i_j$$

إذا كانت $t^{k'}_{\ell'}$ مركبات هذا التنسور بالنسبة إلى القاعدة $e_{1'},\cdots,e_{n'}$ ، فعندئذ :

$$t^{k'}_{\ell'}=C^{k'}_iC^j_{\ell'}t^i_j=C^{k'}_iC^j_{\ell'}\delta^i_j=C^{k'}_iC^i_{\ell'}=\delta^{k'}_{\ell'}$$

ممّا يعني أن لـــ T المركبات نفسها بالنسبة إلى أي قاعدة لـــ V .

2 – التنسورات الإقليدية

نقول عن فضاء المتجهات V إنه فضاء جداء داخلي أو فضاء إقليدي إذا وُجِدَ تنسور g من النوع (2,0) على V حيث يتحقق :

أ – $g(x,y)=g(y,x)$ ، وذلك أياً كان المتجهان x و y من V (g متناظر) .

ب– $g(x,y)\geq 0$ ويكون $g(x,x)=0$ إذا وفقط إذا كان $x=0$ (g موجب بالتحديد) .

نقول عندئذ عن g إنه التنسور الرئيسي لـــ V .

نعرف الجداء الداخلي $<x,y>$ للمتجهين x وy بـــ :

$$<x,y>=g(x,y)$$

والجداء العددي لمتجهين في $\Re^3$ المعرف في الفصل الأول هو حالة خاصة من هذا التعريف .

كما نعرف نظيم المتجه x بأنه العدد الحقيقي :

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>}$$

إذا كانت :

$$g_{ij}=g(e_i,e_j)$$

مركبات g بالنسبة إلى القاعدة $e_1,\cdots,e_n$ لـــ V ؛ فإن :

$$g_{ij}=g_{ji} \qquad \text{و} \qquad \det(g_{ij})\neq 0$$

وبالتالي فهناك معكوس المصفوفة (g_{ij}) التي نرمز إليها بـــ (g^{ij}) .

يمكن التأكد من أن الأعداد g^{ij} هي مركبات تنسور متناظر $(g^{ij}=g^{ji})$ من النوع (0,2) نطابقه عادة مع g . نسمي g_{ij} مركبات g موافقة التغير و g^{ij} مركبات g مخالفة التغير .

إذا كان x أحد متجهات V ؛ فإننا نعرف الشكل الخطي x^* من V^* بـــ :

$$x^*(y) = g(x,y)$$

وبالتالي إذا كانت $x^1,\cdots,x^n$ مركبات x بالنسبة إلى القاعدة $e_1,\cdots,e_n$ ؛ فإن :

$$x^*(y) = g_{ik}x^i y^k$$

وخصوصاً :

$$x^*(e_j) = g_{ik}x^i\delta_j^k = g_{ij}x^i$$

وبالتالي إن مركبات x^* بالنسبة إلى القاعدة الثنوية $e^1,\cdots,e^n$ هي $g_{ij}x^i$. نطابق عادة بين المتجهين x و x^* ، ونقول عن x^i إنها مركبات x مخالفة التغير ، بينما نقول عن $x_j = g_{ij}x^i$ إنها مركبات x موافقة التغير .

إذا كان T تنسوراً من النوع $(0,q)$ وكانت مركباته هي $t^{i_1\cdots i_q}$ ؛ فإن المقادير :

$$t_{j_1}^{i_2\cdots i_q} = g_{i_1 j_1}t^{i_1\cdots i_q}$$

$$t_{j_1 j_2}^{i_3\cdots i_q} = g_{i_1 j_1}g_{i_2 j_2}t^{i_1 i_2\cdots i_q}$$

.....

$$t_{j_1 j_2\cdots j_q} = g_{i_1 j_1}g_{i_2 j_2}\cdots g_{i_q j_q}t^{i_1 i_2\cdots i_q}$$

هي مركبات تنسورات الأول من النوع $(1,q-1)$ ، والثاني من النوع $(2,q-2)$، والأخير من النوع $(q,0)$.

نطابق عادة بين هذه التنسورات ، ونقول إن المقادير السابقة هي مركبات التنسور ذاته.

3- الأشكال متعددة الخطية

أ- **الفضاء المشارك** لشكل متعدد الخطية

إن للتنسورات من النوع $(p,0)$ التي تسمى أيضاً أشكالاً متعددة الخطية على V أهمية خاصة . نسمي عادة p مرتبة الشكل متعدد الخطية . إذا كانت $e_1,\cdots,e_n$ قاعدة لـــ V فإن أي شكل متعدد الخطية A على V يعرف بشكل وحيد بالأعداد :

$$A_{i_1\cdots i_p} = A(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})$$

وبإحدى العلاقتين

$$A(x_1,\cdots x_p) = A_{i_1\cdots i_p} x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p} \qquad (3,1)$$

$$A = A_{i_1\cdots i_p} e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}$$

3-1 تعاريف

1- نسمي شكلاً خطياً مشاركاً للشكل متعدد الخطية A كل شكل خطي نحصل عليه بتثبيت $p-1$ متغير في (3,1) . إن كل مجموعة مرتبة مؤلفة من $p-1$ متجه $a_1,a_2,\ldots,a_{p-1}$ ومن عدد i ، $1\le i\le p$ تعرف شكلاً خطياً مشاركاً لـــ A بالعلاقة :

$$\xi(x) = A(a_1,\cdots,a_{i-1},x,a_i,\cdots,a_{p-1})$$

2- نقول عن فضاء المتجهات الجزئي من V^* المولّد بالأشكال المشاركة للشكل متعدد الخطية A ، إنه الفضاء المشارك لـــ A .

3- نقول عن شكل متعدد الخطية من المرتبة p إنه تركيب تنسوري بالأشكال الخطية $\xi^1,\cdots,\xi^r$ من V^* إذا كان تركيباً خطياً بالجداءات التنسورية:

$$\xi^{j_1}\otimes\cdots\otimes\xi^{j_p} \qquad , 1\le j_1,\cdots,j_p\le r$$

3 – 2 مبرهنة

كل شكل متعدد الخطية A هو تركيب تنسوري بأي قاعدة لفضائه المشارك.

البرهان

لتكن $e^1,\cdots,e^r$ قاعدة للفضاء المشارك L لـ A .

نتممها لنحصل على القاعدة $e^1,\cdots,e^r,e^{r+1},\cdots,e^n$ للفضاء V^* ونأخذ القاعدة الثنوية $e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$ لـ $V=(V^*)^*$

إن المتجهات $e_{r+1},\cdots,e_n$ تشكل قاعدة لـ L^0 وبالتالي:

$$\xi(e_j)=0$$

أياً كان $j>r$ ، وأياً كان الشكل الخطي ξ من L .

نجد خاصة بين عناصر L الأشكال الخطية جميعها التي من الشكل :

$$\xi(x)=A(x,e_{i_2},\cdots,e_{i_p})$$

وبالتالي ، فإنه أياً كانت الأدلة $i_2,\cdots,i_p$ و $i_1>r$

نجد:

$$A(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_p})=0$$

أي:

$$A_{i_1i_2\cdots i_p}=0$$

وبشكل مشابه نثبت أن المساواة الأخيرة صحيحة أيضاً من أجل $i_2>r$. وعموماً، إذا كان $i_k>r$ ، فإنها صحيحة من أجل قيمة واحدة على الأقل لـ k، $k=1,2,\ldots,p$ ، وهكذا فإننا يكفي أن نجمع في :

$$A=A_{i_1i_2\cdots i_p}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}$$

بالنسبة لجميع الأدلة من 1 إلى r فقط ، وهذا يعني أن A هو تركيب تنسوري بالقاعدة $e^1,\cdots,e^r$.

3 – 3 تعريف

رتبة شكل A هي بالتعريف بعد الفضاء المشارك لهذا الشكل .

ب– **الأشكال المتناظرة تخالفياً** (الأشكال الخارجية) ***(Antisymmetric Forms)***

من المعلوم أن التبديل (*permutation*) من المرتبة p ، هو تقابل للمجموعة $\{1,2,\cdots,p\}$ على نفسها، وأنه يمكننا أن نمثل أي تبديل σ بجدول من سطرين :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(p) \end{pmatrix}$$

ونكتفي عادة بالسطر السفلي لتمثيل التبديل σ . من المعلوم أيضاً أن مجموعة التباديل من المرتبة p هي زمرة (بالنسبة إلى تركيب التطبيقات) ، نسميها الزمرة المتناظرة، ونرمز إليها بـــ S_p . نقول عن التبديل σ إنه زوجي إذا كان عدد الثنائيات (الذي نرمزه $I(\sigma)$) :

$$(\sigma(i),\sigma(j)) \qquad i<j\ ,\ \sigma(i)>\sigma(j)$$

زوجياً ، وإنه فردي ، إذا كان $I(\sigma)$ فردياً . ونعرف إشارة التبديل σ بأنها $(-1)^{I(\sigma)}$ ونرمز إليها بـــ ε_σ . وأخيراً لدينا:

$$\varepsilon_{\sigma\tau}=\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau$$

3 – 4 تعاريف

1– إذا كان A شكلاً متعدد الخطية من المرتبة p على V، فإننا نرمز بـــ $\sigma(A)$ إلى الشكل متعدد الخطية المعرف بـــ :

$$(\sigma A)(x_1,\cdots,x_p)=A(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)})$$

وعندئذٍ :

$$(\sigma A)_{i_1\cdots i_p}=(\sigma A)(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})=A(e_{i_{\sigma(1)}},\cdots,e_{i_{\sigma(p)}})$$
$$=A_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}$$

فمثلاً ، إذا كان :

$$n = \dim V = 5 \qquad \text{و} \qquad p = 3$$

وكان :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

فإننا نجد أن :

$$(\sigma A)_{145} = (\sigma A)_{i_1 i_2 i_3} = A_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}} = A_{i_3 i_1 i_2} = A_{514}$$

$$(\sigma A)_{553} = A_{355}$$

2 – إذا كان A شكلاً متعدد الخطية من المرتبة p على V ؛ فإننا نرمز بـ $\mathrm{Alt}\,A$ إلى الشكل متعدد الخطية المعرف بـ

$$\mathrm{Alt}\,A = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma \, \sigma(A)$$

وعندئذ :

$$(\mathrm{Alt}\,A)_{i_1 \cdots i_p} = \frac{1}{p!} \sum \varepsilon_\sigma A_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}}$$

$$= \frac{1}{p!} \varepsilon_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} A_{j_1 \cdots j_q}$$

حيث $\varepsilon_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}$ يساوي 0 ، إذا لم يكن $j_1, \cdots, j_q$ تبديلاً لـ $i_1, \cdots, i_p$ ، ويساوي 1 إذا كان تبديلاً زوجياً ، ويساوي 1– إذا كان فردياً . ويمكن التأكد من أن المقادير $\varepsilon_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}$ تشكل مركبات تنسور يدعى تنسور كرونكر (المعمم) .

3 – 5 أمثلة

1 – إذا كان A شكلاً ثنائيَّ الخطية $(p = 2)$ ، فإن مركبات $\mathrm{Alt}\,A$ تعطى بـ :

$$(\mathrm{Alt}\,A)_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

وعندئذ :

$$(\mathrm{Alt}\,A)(x,y) = (\mathrm{Alt}\,A)_{ij}x^i y^j$$

$$= \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})x^i y^j$$

$$= \frac{1}{2}A_{ij}(x^i y^j - x^j y^i)$$

$$= \frac{1}{2}A_{ij}\begin{vmatrix} x^i & y^i \\ x^j & y^j \end{vmatrix}$$

2 – إذا كان A شكلاً من المرتبة الثالثة $(p=3)$ ؛ فإن :

$$(\mathrm{Alt}\,A)_{ijk} = \frac{1}{3!}(A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} - A_{ikj} - A_{jik} - A_{kji})$$

وعندئذ :

$$(\mathrm{Alt}\,A)(x,y,z) = \frac{1}{3!}A_{ijk}\begin{vmatrix} x^i & y^i & z^i \\ x^j & y^j & z^j \\ x^k & y^k & z^k \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3!}A_{ijk}\begin{vmatrix} x^i & x^j & x^k \\ y^i & y^j & y^k \\ z^i & z^j & z^k \end{vmatrix}$$

يتضح بسهولة أنه إذا كان A شكلاً من المرتبة p وكان اثنان (أو أكثر) من المتجهات $x_1,\cdots,x_p$ متطابقين فإن :

$$A(x_1,\cdots,x_p) = 0$$

3 – 6 تعريف

نقول عن الشكل متعدد الخطية A ذي المرتبة p إنه متناظر تخالفياً (*antisymmetric*) إذا كان:

$$\sigma A = \varepsilon_\sigma A$$

وذلك أياً كان التبديل σ من S_p، وهذا يكافئ :

$$A_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}} = \varepsilon_\sigma A_{i_1\cdots i_p}$$

فمثلاً إذا كان A شكلاً من المرتبة الثانية ؛ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون متناظراً تخالفياً هو:

$$A_{ji} = -A_{ij}$$

أما الشرط اللازم والكافي حتى يكون شكل من المرتبة الثالثة A متناظراً تخالفياً فهو :

$$A_{jki} = +A_{ijk}, A_{kij} = +A_{ijk} \quad , A_{ikj} = -A_{ijk}$$

$$A_{jik} = -A_{ijk} \quad , A_{kji} = -A_{ijk}$$

3 – 7 مبرهنة

الشرط اللازم والكافي حتى يكون A متناظراً تخالفياً هو أن يكون:

$$\mathrm{Alt}\, A = A$$

3 – 8 ملاحظة

نقول عن الأشكال المتناظرة تخالفياً إنها أشكال خارجية (*Exterior Forms*)، وتعد الأشكال الخطية أشكالاً خارجية . إذا رمزنا إلى مجموعة الأشكال الخارجية ذات المرتبة p بـــ $\Lambda_p(V)$ ؛ فإن $\Lambda_p(V)$ هو فضاء متجهات جزئي من $T_p(V)$.

ج– الجداء الخارجي

3 – 9 تعريف

إذا كان A و B شكلين خارجيين من المرتبة p و q على الترتيب فإننا نسمي الشكل:

$$\mathrm{Alt}(A \otimes B)$$

ذا المرتبة $p+q$ ، الجداء الخارجي لـــ A و B ونرمزه $A \wedge B$ وعندئذ لدينا :

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \qquad .i$$

$$A \wedge (B+C) = A \wedge B + A \wedge C) \qquad .ii$$

$$B \wedge A = (-1)^{p.q} A \wedge B \qquad .iii$$

iv. إذا كانت $\xi^1,\cdots\xi^p$ أشكالاً خطية ؛ فإن :

$$\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^p = \mathrm{Alt}(\xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^p)$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^p)$$

$$= \frac{1}{p!} \varepsilon^{1\,2\cdots p}_{i_1 i_2 \cdots i_p}\, \xi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi^{i_p}$$

v. وإذا كانت $x^1,\cdots,x^p$ متجهات من V فعندئذ :

$$(\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^p)(x_1,\cdots,x_p) =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^p)(x_1,\cdots,x_p)$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma (\xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^p)(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)})$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma \xi^1(x_{\sigma(1)}) \cdots \xi^p(x_{\sigma(p)})$$

$$= \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \xi^1(x_1) & \cdots & \xi^1(x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi^p(x_1) & \cdots & \xi^p(x_p) \end{vmatrix}$$

وبالتالي ، إذا كان اثنان على الأقل من الأشكال ξ^i متطابقين فعندئذ:

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \cdots \wedge \xi^p = 0$$

vi. الشرط اللازم والكافي حتى يكون:

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \cdots \wedge \xi^p = 0$$

هو أن تكون الأشكال الخطية $\xi^1,\cdots,\xi^p$ مرتبطة خطياً .

vii. إذا كانت $e^1,\cdots,e^n$ قاعدة للفضاء V^*، فإن مجموعة الأشكال الخارجية :

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \qquad \text{و} \qquad 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$$

تشكل قاعدة للفضاء $\Lambda_p(V)$، وكل شكل خارجي A من المرتبة p يكتب بـــ :

$$A = p! \sum_{i_1<\cdots<i_p} A_{i_1\cdots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$$

وهكذا فإن :

$$\dim \Lambda_p(V) = \binom{n}{p}$$

وبشكل خاص إذا كان A شكلاً خارجياً من المرتبة الثانية فإن :

$$A = 2\sum_{i<j} A_{ij} e^i \wedge e^j =$$

$$= \sum_{i<j} A_{ij}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)$$

تجدر الملاحظة إلى أن الجداء المتجهي لمتجهين في $\mathfrak{R}^3$ المعرف في الفصل الأول هو حالة خاصة من الجداء الخارجي .

تمرينات الفصل الرابع

1- أثبت صحة المساواة:

$$(2a_{ijh} - a_{hij})x^i x^j = (a_{ijh} + a_{jih} - a_{hij})x^i x^j$$

2- إذا كان :

$$a_{ij}x^i x^j = 0$$

وذلك أياً كانت قيم $x^1, x^2, \cdots, x^n$ فأثبت أن :

$$a_{ij} + a_{ji} = 0$$

3- إذا كان :

$$a_{ij}x^i x^j = b_{ij}x^i x^j$$

وذلك أياً كانت قيم $x^1, x^2, \cdots, x^n$ فأثبت أن :

$$a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$$

4- أوجد ناتج كل من المجاميع :

a) $\delta_{ij}\, a^i a^j$, $i, j = 1,2,\ldots,n$

b) $\delta^j_i\, b_{jk}$, $i, j, k = 1,2,\ldots,n$

c) $\delta^j_i\, \delta^\ell_k a_{j\ell}$, $i, j, k, \ell = 1,2,\ldots,n$

d) $\delta^i_j\, \delta^j_k$, $i, j, k = 1,2,\ldots,n$

e) $\delta^i_j\, \delta^j_k a^k b_h$, $i, j, k, h = 1,2,\ldots,n$

f) $\delta^{ij}\, a_{ij}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$

g) $\delta_{ij}\, a^{ik}\, b^j$, $i, j, k = 1,2,\ldots,n$

5- إذا كانت :

$\xi_1 = a$ (a ثابت)

$\xi_i = 0$, $i \neq 1$

مركبات متجه موافق التغير ξ^i من V^* فأوجد مركبات ξ^i بالنسبة إلى قاعدة أخرى.

6- إذا كانت (x_1, x_2, x_3) و $(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})$ إحداثيات النقطة نفسها M في الفضاء النقطي $\mathfrak{R}_3$ وذلك بالنسبة إلى جملتين إحداثيتين ، وكانت :

$$F : \mathfrak{R}_3 \to \mathfrak{R}$$

$$M \to F(M)$$

دالة حقيقية قابلة للمفاضلة . فأثبت أن الكميات $a_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ تشكل مركبات متجه موافق التغير . ندعو هذا المتجه تدرج F ونرمز إليه بـ $grad\, F$.

7- إذا كانت :

$$t_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

مركبات تنسور من النوع (2,0) فأثبت أن العلاقة:

$$t_{ij} = k\, t_{ji}$$

تبقى صحيحة عند أي تغيير للقاعدة .

8- إذا كان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ متجهين من V , مركباهما a^i و b^j على الترتيب فأوجد طريقة تغيير الكميات الآتية عند تغيير القاعدة .

$$a^i a^j - b^i b^j$$

$$a^i b^j - a^j b^i$$

$$(a^i - b^i)(a^j - b^j)$$

9- إذا كانت x^i و y^j مركبات متجهين $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ من V ، وكانت b_{ij} مركبات تنسور من النوع (2,0) على V فأثبت أن الكمية :

$$b_{ij} x^i x^j$$

لا تتغير بتغير القاعدة (*Invariant*).

10- ليكن :

$$T = t^i_j e^j \otimes e_i$$

تنسوراً من النوع (1,1) على $\Re^3$ مصفوفته :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

أ- إذا كان $x = (-1,0,2)$ و $\xi = (5,-2,1)$ متجهين من $\Re^3$ و $(\Re^3)^*$ على الترتيب فأوجد قيمة $T(x,\xi)$.

ب- إذا كانت $\{e_{i'}\}$ قاعدة أخرى لـ $\Re^3$ معينة بالعلاقات :

$$e_{1'} = e_1 + e_2$$

$$e_{2'} = 2e_2$$

$$e_{3'} = -e_2 + e_3$$

فأوجد $\{t^{k'}_{i'}\}$ مركبات التنسور T في هذه القاعدة .

ج- أثبت أن قيمة معين مصفوفة المركبات t^i_j تساوي قيمة معين مصفوفة المركبات $t^{k'}_{i'}$.

11- إذا كانت $\{t^i_j\}$ مركبات تنسور من النوع (1,1) على $\Re^n$.

فأوجد علاقة تغير معين مصفوفة مركبات التنسور في قاعدتين لـ $\Re^n$.

12- إذا كان T تنسوراً من النوع (1,1) على $\Re^n$ وكان له المركبات نفسها $\{t^i_j\}$ في أي قاعدة ؛ فعندئذ :

$$t^i_j = a\delta^i_j \qquad a \in \Re$$

13- لتكن $\{t^{ijk}\}$ مركبات تنسور T من النوع (0,3) , وذلك في قاعدة معينة لـ $\Re^n$ ، ولنفترض أنها تحقق :

$$\alpha t^{ijk} + \beta t^{jki} + \gamma t^{kij} = 0 \qquad \forall i, j, k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

حيث α و β و γ أعداد حقيقية .

أ- أثبت أن مركبات T في قاعدة أخرى تحقق علاقات مشابهة .

ب- بفرض أن $t^{ijk} \neq 0$ ؛ فعندئذ :

إما $\alpha + \beta + \gamma = 0$

أو $\alpha = \beta = \gamma$

14- إذا كانت :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مركبات تنسور T من النوع (1,1) فأوجد التنسور الناتج عن T بتقلص الدليل العلوي والسفلي.

15- إذا كانت المركبات $\{t^{ij}\}$ و $\{\xi_k\}$ لتنسور T من النوع (0,2) ومتجه ξ موافق التغير تعطى بـــ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فأوجد قيم الكميات :

$$\{t^{ij}\xi_i\} \qquad \text{و} \qquad \{t^{ij}\xi_j\}$$

واذكر ماذا تمثل كل مجموعة .

16- إذا كانت $\{x^i\}$ مركبات تنسور مخالف التغير، وكان المقدار $c_{ij}x^i x^j$ لا متغيراً؛ فأثبت أن الكميات :

$$c_{ij} + c_{ji}$$

هي مركبات تنسور من النوع (2,0) .

17- إذا كانت $\{A_{ij}\}$ مركبات شكل خارجي من النوع (2,0) فأثبت أن :

$$(\delta^i_j\delta^k_\ell + \delta^i_\ell\delta^k_j)\,A_{ik} = 0$$

18- إذا كانت $\{t_{ij}\}$ مركبات تنسور متناظر من النوع (2,0) و $\{b^{ij}\}$ مركبات تنسور متناظر تخالفياً من النوع (0,2) $(b^{ij} = -b^{ji})$ ؛ فأثبت أن:

$$a_{ij}\,b^{ij} = 0$$

19- إذا كانت $\{A_{ij}\}$ مركبات شكل خارجي من النوع (2,0) و $\{u^i\}$ مركبات متجه مخالف التغير ؛ فأثبت أن :

$$A_{ij}u^iu^j = 0$$

20- إذا كانت $\{a_{ij}\}$ مركبات تنسور متناظرٍ من النوع (2,0) و $\{u_i\}$ مركبات متجه مخالف التغير ، وكان :

$$A_{ijk} = u_k a_{ij} + u_i a_{jk} - u_j a_{ki}$$

فأثبت أن :

$$A_{ijk} = A_{kji}$$

الفصل الخامس

المنطويات (المتنوعات) التفاضلية

1- المنطويات التفاضلية .

2- الدوال القابلة للمفاضلة على المنطويات .

3- المتجهات المماسة على منطو تفاضلي .

4- التطبيقات المحدثة (*Induced Maps*) .

5- زمر لي (*Lie group*) ورزم الألياف (*Fiber Bundle*) .

6- حقول المتجهات والتنسورات على منطو تفاضلي .

7- منطويات ريمان (*Riemannian Manifolds*) .

تمرينات الفصل الخامس .

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المنطويات (المتنوعات) التفاضلية

1- المنطويات التفاضلية

1-1 تعريف (الرقعة)

نسمي رقعة *(Patch)* على فضاء طبولوجي M كل زوج $(x, \mathcal{U})$ حيث $\mathcal{U}$ مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathfrak{R}^n$ و :

$$x : \mathcal{U} \to x(\mathcal{U}) \subset M$$

تماثل مستمر *(homeomorphism)* لـ $\mathcal{U}$ على مجموعة مفتوحة $x(\mathcal{U})$ من M . نقول عن x إنه التماثل المستمر المحلي (الموضعي) للرقعة ، وعن $x(\mathcal{U})$ إنه الجوار الإحداثي *(coordinate neighborhood)* ، وإذا لم يكن ضرورياً أن نشير إلى $\mathcal{U}$ فنكتفي عادة بالإشارة إلى الرقعة x .

إذا كانت :

$$u_i : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$$

$$(y_1, \cdots, y_n) \to y_i$$

الدوال الإسقاطية فنكتب :

$$x_i = u_i \circ x^{-1} : x(\mathcal{U}) \to \mathfrak{R} \quad i = 1, \cdots, n$$

ونقول عن x_i إنها الدالة الإحداثية ذات الترتيب i ، وعن $(x_1, \cdots, x_n)$ إنه نظام إحداثيات محلية *(system of local coordinates)* لـ M , أو أيضاً خارطة محلية *(local chart)* لـ M .

نكتب عادة :

$$x^{-1} = (x_1, \cdots, x_n)$$

والذي يعني أن :

$$x^{-1}(p)=(x_1(p),\cdots,x_n(p))$$

أياً كان p من $x(\mathscr{U})$.

2-1 تعريف (الأطلس)

نقول عن جماعة *(Collection)* من الرقع على فضاء طبولوجي M إنها أطلس *(atlas)* على M ونرمز إليه بـ $\mathscr{A}$ إذا حققت الجماعة الشرطين التاليين :

i. التماثل المستمر لأي رقعة من الجماعة هو تطبيق لمجموعة مفتوحة من الفضاء نفسه $\Re^n$ في M .

ii. M هو اتحاد المجموعات $x(\mathscr{U})$ ، حيث $(x,\mathscr{U})\in\mathscr{A}$.

نقول عن فضاء طبولوجي M مزود بأطلس إنه منطو طبولوجي *(Topological manifold)*.

ليكن $\mathscr{A}$ أطلساً على فضاء طبولوجي M . نلاحظ أنه إذا كانت :

$$(x,\mathscr{U}) \text{ و } (y,\mathscr{V})$$

رقعتين في $\mathscr{A}$ وكانت المجموعة:

$$x(\mathscr{U})\cap y(\mathscr{V})=\mathscr{W}\subset M$$

غير خالية ؛ فإن التطبيق :

$$x^{-1}\circ y: y^{-1}(\mathscr{W})\to x^{-1}(\mathscr{W}) \qquad (1,1)$$

هو تماثل مستمر بين مجموعتين مفتوحتين من $\Re^n$. نقول عن $x^{-1}\circ y$ إنه تطبيق تغيير الإحداثيات *(Change of coordinates)* .

1 – 3 تعريف (المنطوي التفاضلي)

نقول عن فضاء طبولوجي مثل المتراص (*Paracompact*) وقابل للفصل (*Separable*) ومزود بأطلس $\mathscr{A}$ إنه منطو تفاضلي *(differentiable manifold)* إذا حققت رقع الأطلس $\mathscr{A}$ الشرط الآتي :

أياً كانت الرقعتان $(x, \mathscr{U})$ و $(y, \mathscr{V})$ من $\mathscr{A}$ حيث :

$$x(\mathscr{U}) \cap y(\mathscr{V}) = \mathscr{W} \neq \phi$$

فإن تطبيق تغيير الإحداثيات (I,I) قابل للمفاضلة (نقصد قابلاً للمفاضلة عدداً غير منته من المرات ، أي من الصف C^{∞}) .

يعرف بعد المنطوي M والذي نرمز إليه بـ $\dim M$ بأنه العدد n ، حيث $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ أياً كانت الرقعة $(x, \mathscr{U})$ من $\mathscr{A}$.

سنفترض أخيراً أن المنطويات التفاضلية جميعها مترابطة (متصلة) *(connected)* .

1 – 4 تعريف (الأطلس الأعظمي أو الإتمام)

أطلس أعظمي أو إتمام (*Completion*) $\tilde{\mathscr{A}}$ لأطلس $\mathscr{A}$ هو جماعة كل الرقع $(x, \mathscr{U})$ حيث تكون التطبيقات :

$$x^{-1} \circ y \qquad \text{و} \qquad y^{-1} \circ x$$

قابلة للمفاضلة وذلك من أجل جميع الرقع $(y, \mathscr{V}) \in \mathscr{A}$. ونقول عن أطلس $\mathscr{A}$ إنه تام *(complete)* إذا تطابق مع أطلسه الأعظمي.

لانميز عادة بين منطويين تفاضليين :

$$(M, \mathscr{A}_1) \qquad \text{و} \qquad (M, \mathscr{A}_2)$$

إذا كان للأطلسين $\mathscr{A}_1$ و $\mathscr{A}_2$ الأطلس الأعظمي نفسه ، وعندما نتكلم عن منطو تفاضلي M^n ؛ فإننا نعني منطوياً تفاضلياً M مزوداً بأطلس أعظمي معين .

ثمة طريقتان بسيطتان ومهمتان لإنشاء منطويات جديدة من أخرى قديمة .

1-5 تعريف (المنطوي الجزئي)

ليكن M منطوياً تفاضلياً معرفاً بأطلس تام $\mathscr{A}$ ، ولتكن $\mathscr{V}$ مجموعة جزئية مفتوحة من M . لنضع :

$$\mathscr{A}/\mathscr{V}=\{(x,\mathscr{U})\in\mathscr{A}: x(\mathscr{U})\subseteq\mathscr{V}\}$$

من الواضح أن $\mathscr{A}/\mathscr{V}$ هو أطلس على $\mathscr{V}$. نقول عن $\mathscr{V}$ المزودة بالأطلس $\mathscr{A}/\mathscr{V}$ (إنها منطو جزئي مفتوح (*Open submanifold*) لـ M .

1-6 تعريف (جداء منطويين)

ليكن M_1 و M_2 منطويين تفاضليين بعد الأول n_1 والثاني n_2 معرفين بالأطلسين $\mathscr{A}_1$ و $\mathscr{A}_2$ على الترتيب .

إذا كانت $(x,\mathscr{U})$ رقعة من $\mathscr{A}_1$ و $(y,\mathscr{V})$ رقعة من $\mathscr{A}_2$ ؛ فإننا نعرف :

$$x\times y:\ \mathscr{U}\times\mathscr{V}\to M_1\times M_2$$

بالعلاقة :

$$(x\times y)(p,q)=(x(p),y(q))$$

عندئذ فإن $M_1\times M_2$ المزود بإتمام (الأطلس الأعظمي) الأطلس :

$$\{(x\times y,\mathscr{U}\times\mathscr{V}):(x,\mathscr{U})\in\mathscr{A}_1\ ,(y,\mathscr{V})\in\mathscr{A}_2\}$$

هو منطو تفاضلي بعده n_1+n_2 ، يدعى جداء M_1 و M_2 .

1-7 أمثلة

i. الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$

إذا كان :

$$1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

التطبيق المطابق؛ فإن الرقعة $(1,\mathbb{R}^n)$ تشكل أطلساً لـ $\mathbb{R}^n$.

ii. دائرة الوحدة S^1 .

إذا أخذنا الرقعتين $(x,\mathscr{U})$ و $(y,\mathscr{V})$ ، حيث:

$\mathscr{V}=]0,1[\subseteq \Re$ و $\mathscr{U}=]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\subset \Re$

و:

$$x:]-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}[\to S^1\setminus\{-1\}\subset S^1$$

$$t\to x(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$$

$$y:]0,1[\to S^1\setminus\{1\}$$

$$t\to y(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$$

فإنهما تعرفان على S^1 بنية منطو تفاضلي لأن تطبيق تغيير الإحداثيات :

$$y^{-1}\circ x(t)=\begin{cases} t+1 & (if\quad -\frac{1}{2}<t<0)\\ t & (if\quad 0<t<\frac{1}{2})\end{cases}$$

هو تماثل تفاضلي.

iii. كرة الوحدة S^2 في $\Re^3$.

إن الرقع الست :

$$x_{1,\varepsilon}(u,v)=(x_1=\varepsilon\sqrt{1-u^2-v^2},x_2=u,x_3=v)$$

$$x_{2,\varepsilon}(u',v')=(x_1=u',x_2=\varepsilon\sqrt{1-u'^2-v'^2},x_3=v')$$

$$x_{3,\varepsilon}(u'',v'')=(x_1=u'',x_2=v'',x_3=\varepsilon\sqrt{1-u''^2-v''^2})$$

حيث $\varepsilon=\mp 1$ تعرف أطلساً على S^2 ، ولما كانت تطبيقات تغيير الإحداثيات قابلة للمفاضلة ، فإن S^2 هي منطو تفاضلي بعده 2.

iv. الكرة S^2 والتطبيق الستيريوغرافي المجسادي.

إذا رمزنا إلى القطب الشمالي $(1,0,0)$ للكرة S^2 بـ p ، وإلى القطب الجنوبي $(-1,0,0)$ بـ q ، وأخذنا الرقعتين :

$$(x,\ \mathscr{U}=\Re^2)\quad ,\ (y,\ \mathscr{V}=\Re^2)$$

حيث :

$$x:\Re^2 \to S^2 \setminus \{p\}$$

$$(u,v) \to x(u,v) = \left(x_1 = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, x_2 = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, x_3 = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$$

$$y:\Re^2 \to S^2 \setminus \{q\}$$

$$(u',v') \to y(u',v') = \left(y_1 = \frac{2u'}{u'^2+v'^2+1}, y_2 = \frac{2v'}{u'^2+v'^2+1}, y_3 = \frac{1-u'^2-v'^2}{u'^2+v'^2+1} \right)$$

فإننا نزود S^2 ببنية منطو تفاضلي .

٧. الكرة $S^n(a)$

ليكن $a>0$ ولنضع :

$$S^n(a) = \{(t_0,\cdots t_n) \in \Re^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} t_j^2 = a^2\}$$

نعرف على $S^n(a)$ الأطلس :

$$A = \{(north, \Re^n), (south, \Re^n)\}$$

حيث *north* و *south* التطبيقان المتباينان المجساديان (*stereographic injections*):

$$north:\Re^n \to S^n(a) \setminus \{sp\}$$

$$south:\Re^n \to S^n(a) \setminus \{np\}$$

علماً أن:

$$np = (a,0,\cdots,0)$$

هو القطب الشمالي ، وأن:

$$sp = (-a,0,\cdots,0)$$

هو القطب الجنوبي، والتطبيقان

$$north = (\phi_0,\cdots,\phi_n)$$

$$south = (\psi_0, \cdots, \psi_n)$$

معينان بـــ :

$$\phi_0 = -\psi_0 = a\frac{\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - a^2}{\sum_{j=1}^{n} u_j^2 + a^2}$$

$$\phi_k = \psi_k = \frac{2a^2 u_k}{\sum_{j=1}^{n} u_j^2 + a^2}$$

من أجل:

$$k = 1, \cdots, n$$

وهكذا فإن :

$north \circ south^{-1}$ و $south \circ north^{-1}$

قابلان للمفاضلة.

Damascus University

2- الدوال القابلة للمفاضلة على المنطويات

2-1 تعريف

لتكن $\mathscr{W}$ مجموعة جزئية مفتوحة من المنطوي التفاضلي M ، و لتكن :

$$f : \mathscr{W} \to \mathfrak{R}$$

دالة حقيقية معرفة على $\mathscr{W}$. نقول عن f إنها قابلة للمفاضلة في النقطة p من $\mathscr{W}$ إذا وجدت رقعة $(x, \mathscr{U})$ ، حيث $\mathscr{U} \subset \mathfrak{R}^n$ و:

$$x : \mathscr{U} \to M$$

و:

$$p \in x(\mathscr{U}) \subset \mathscr{W}$$

وكان التركيب :

$$f \circ x : \mathscr{U} \subset \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$$

قابلاً للمفاضلة (بالمعنى الإقليدي العادي) في $x^{-1}(p)$.

وإذا كانت f قابلة للمفاضلة في نقاط $\mathscr{W}$ جميعها ؛ فنقول عن f إنها قابلة للمفاضلة على $\mathscr{W}$.

إن تعريف قابلية مفاضلة دالة حقيقية على منطو تفاضلي لا تعتمد على الرقعة المختارة، فإذا كانت $(y, \mathscr{V})$ رقعة أخرى ، وكتبنا $f \circ y$ بالشكل:

$$f \circ y = (f \circ x) \circ (x^{-1} \circ y)$$

فإننا نستنتج أن $f \circ y$ قابلة للمفاضلة .

2-2 تعريف

إذا كان M منطوياً تفاضلياً ، ووضعنا :

$$\mathfrak{I}(M) = \{f : M \to \mathfrak{R} \mid f \text{ قابلة للمفاضلة}\}$$

فإننا نسمي $\mathfrak{I}(M)$ جبر الدوال الحقيقية القابلة للمفاضلة على M ، وإذا كان:

$$a \quad \text{و} \quad b \quad \text{من} \quad \mathfrak{R}$$

وكان:

$$f \quad و \quad g \quad \text{من} \quad \Im(M)$$

فإن الدالتين :

$$af+bg \quad و \quad fg$$

اللتين تعرفان بـــ :

$$(af+bg)(m)=af(m)+bg(m) \qquad m\in M$$

$$(fg)(m)=f(m)g(m)$$

قابلتان للمفاضلة . كما نطابق عادة بين العدد a من $\Re$ والدالة الثابتة a المعرفة بـــ:

$$a(m)=a$$

ونلاحظ أخيراً ، أنه إذا كانت f من $\Im(M)$ ، ولا تنعدم أبداً على M ؛ فإن :

$$\frac{1}{f}\in\Im(M)$$

2 – 3 ملاحظة

ليكن $\mathcal{U}\subset M$ جواراً مفتوحاً للنقطة p من M ولنفترض أن $f\in\Im(\mathcal{U})$ ؛ عندئذ ثمة دالة $\tilde{f}\in\Im(M)$ وجوار $\mathcal{V}$ حيث يكون :

$$\tilde{f}\mid\mathcal{V}=f\mid\mathcal{V} \quad و \quad p\in\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$$

نسمي $\tilde{f}$ إشمال f *(globalization)* .

2 – 4 تعريف

ليكن M و N منطويين تفاضليين . نقول عن التطبيق:

$$\psi : M\to N$$

إنه قابل للمفاضلة إذا كان التركيب $y^{-1}\circ\psi\circ x$ قابلاً للمفاضلة ، وذلك أياً كانت الرقعة $(x,\mathcal{U})$ من أطلس M ، والرقعة $(y,\mathcal{V})$ من أطلس N ، وحيث يكون التركيب معرفاً.

نقول عن التطبيق القابل للمفاضلة

$$\phi : M \to N$$

إنه تماثل تفاضلي (*diffeomorphism*) للمنطويين M و N إذا كان التطبيق المعاكس (*inverse*)

$$\phi^{-1} : M \to N$$

قابلاً للمفاضلة .

وعندئذ نقول عن M و N إنهما متماثلان تفاضلياً (*diffeomorphic*) . أخيراً نقول عن التطبيق :

$$\psi : N \to M$$

إنه تماثل تفاضلي محلي إذا وجد لكل نقطة $p \in M$ جوار $\mathcal{U}$ حيث يكون التطبيق:

$$\psi \mid \mathcal{U} : \mathcal{U} \to \psi(\mathcal{U})$$

تماثلاً تفاضلياً .

ينتج مباشرة من التعريف أنه إذا كان التطبيقان :

$$\psi : N \to P \quad \text{و} \quad \phi : M \to N \ .$$

قابلين للمفاضلة ؛ فإن التركيب :

$$\psi \circ \phi : M \to P$$

قابل للمفاضلة ، وإذا كان ϕ و ψ تماثلين تفاضليين فلابد أن يكون $\psi \circ \phi$ كذلك ، وعندئذ :

$$(\psi \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$$

2 – 5 نتيجة

ليكن M منطوياً تفاضلياً بعده n ، ولتكن:

$$x : \mathcal{U} \to M$$

رقعة ما. إذا كتبنا:

$$x^{-1} = (x_1, \cdots, x_n)$$

فعندئذ :

أ – x هو تماثل تفاضلي للمنطويين $\mathscr{U}$ و $x(\mathscr{U})$

ب– التطبيق :

$$x^{-1} : x(\mathscr{U}) \to \mathfrak{R}^n$$

قابل للمفاضلة .

ج– الدوال الإحداثية:

$$x_i : x(\mathscr{U}) \to \mathfrak{R} \quad , i = 1, \cdots, n$$

قابلة للمفاضلة (تستنتج من تعريف المنطوي القابل للمفاضلة) .

يكفي أن نلاحظ أنه إذا كان :

$$1 : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$$

التطبيق المطابق ؛ فإن التطبيقات :

$$1 \circ x^{-1} \circ y \qquad \text{و} \qquad y^{-1} \circ x \circ 1$$

لـــ $\mathfrak{R}^n$ في $\mathfrak{R}^n$ قابلة للمفاضلة ، وذلك أياً كانت الرقعة $(y, \mathscr{V})$ في $\mathscr{A}$ ، ممّا يقتضي أن x و x^{-1} قابلان للمفاضلة.

6 – 2 تمهيدية

إذا كان :

$$\phi : M \to N$$

تطبيقاً قابلاً للمفاضلة للمنطويين M و N ، فإن :

$$f \in \mathfrak{I}(N) \Rightarrow f \circ \phi \in \mathfrak{I}(M)$$

البرهان :

لتكن $(x, \mathscr{U})$ رقعة على M ، و $(y, \mathscr{V})$ رقعة على N . لما كان التطبيقان:

$$f \circ y : \mathscr{V} \to \mathfrak{R} \qquad \text{و} \qquad y^{-1} \circ \phi \circ x$$

قابلين للمفاضلة فرضاً ، فإن التركيب :

$$f \circ \phi \circ x = (f \circ y) \circ (y^{-1} \circ \phi \circ x)$$

قابل للمفاضلة . ولو لاحظنا أن هذا صحيح لكل رقعة $(x, \mathscr{U})$ من أطلس M لوجدنا أن التطبيق $f \circ \phi$ قابل للمفاضلة .

Damascus University

3- المتجهات المماسة على منطو تفاضلي

3-1 تعريف

لتكن p نقطة من المنطوي M . نسمي متجهاً مماساً للمنطوي التفاضلي M في النقطة p ، ونرمز إليه بـــ v_p كل دالة حقيقية:

$$v_p : \Im(M) \to \Re$$

تحقق الشرطين :

أ- الخاصة الخطية :

$$v_p[af+bg]=av_p[f]+bv_p[g]$$

ب- خاصة ليبنتز:

$$v_p[f\,g]=f(p)\,v_p[g]+g(p)\,v_p[f]$$

وذلك أياً كان a و b من $\Re$ ، و f و g من $\Im(M)$.

3-2 تعريف

لتكن :

$$x: \mathcal{U} \to M$$

رقعة للمنطوي التفاضلي M ، ولنكتب:

$$x^{-1}=(x_1,\ldots,x_n)$$

إذا كان :

$$p \in x(\mathcal{U}) \quad \text{و} \quad f \in \Im(M)$$

ووضعنا :

$$p=x(q)$$

فإننا نعرف :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x(q)}=\frac{\partial(f\circ x)}{\partial u_i}\bigg|_q \qquad i=1,\ldots,n \qquad (3,1)$$

وعموماً لدينا :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial(f\circ x)}{\partial u_i}\circ x^{-1}$$

3 – 3 مبرهنة

لتكن :

$$x:\mathscr{U}\to M$$

رقعة للمنطوي التفاضلي M . إذا كان $p\in x(\mathscr{U})$ ؛ فإن الدالة :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p:\Im(M)\to\Re$$

المعرفة بـــ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p[f]=\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_p$$

هي متجه مماس لـــ M في p ، أياً كان $i=1,\ldots,n$.

البرهان :

لنضع :

$$p=x(q) \qquad \text{حيث} \qquad q\in\mathscr{U}$$

إذا كان :

$$a,b\in\Re \qquad \text{و} \qquad f,g\in\Im(M)$$

فلدينا :

$$\frac{\partial(af+bg)}{\partial x_i}\bigg|_{x(q)}=\frac{\partial}{\partial u_i}\big((af+bg)\circ x\big)\big|_q$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i}\big(a(f\circ x)+b(g\circ x)\big)\Big|_q$$

$$= a\frac{\partial(f\circ x)}{\partial u_i}\Big|_q + b\frac{\partial(g\circ x)}{\partial u_i}\Big|_q$$

$$= a\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x(q)} + b\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x(q)}$$

وبطريقة مشابهة :

$$\frac{\partial(f\,g)}{\partial x_i}\Big|_{x(q)} = \frac{\partial}{\partial u_i}\big((f\,g)\circ x\big)\Big|_q$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i}\big((f\circ x)(g\circ x)\big)\Big|_q$$

$$= (g\circ x)(q)\,\frac{\partial(f\circ x)}{\partial u_i}\Big|_q + (f\circ x)(q)\,\frac{\partial(g\circ x)}{\partial u_i}\Big|_q$$

$$= g\big(x(q)\big)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x(q)} + f\big(x(q)\big)\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x(q)}$$

3 – 4 تعريف (الفضاء المماس)

ليكن M منطوياً تفاضلياً ، وp نقطة من M . نقول عن مجموعة المتجهات المماسة لـ M في p جميعها إنها الفضاء المماس (*Tangent Space*) لـ M في p ، ونرمز إليه بـ T_p ، وهكذا :

$$T_p = \left\{ \begin{array}{l} v_p : \Im(M) \to \Re \,|\, v_p[a\,f + b\,g] = a\,v_p[f] + b\,v_p[g] \\ \qquad\qquad v_p[f\,g] = f(p)\,v_p[g] + g(p)\,v_p[f] \\ \qquad a,b \in \Re \qquad\quad f,g \in \Im(M) \end{array} \right\}$$

3 – 5 تمهيدية

إذا كان M منطوياً تفاضلياً ، و p نقطة من M ؛ فإن الفضاء المماس T_p هو فضاء متجهات .

يكفي أن نعرف مجموع متجهين مماسين $v_p + w_p$ ، وجداء عدد حقيقي a بمتجه مماس v_p بـــ :

$$(v_p + w_p)[f] = v_p[f] + w_p[f]$$

$$(av_p)[f] = av_p[f]$$

3 – 6 تمهيدية

ليكن M منطوياً تفاضلياً ، و p نقطة من M ؛ عندئذ :

أ- إذا استطعنا أن نكتب الدالة f من $\Im(M)$ بوصفها جداء دالتين g و h من $\Im(M)$ تنعدمان في p ؛ فإن :

$$v_p[f] = 0 \qquad \text{لكل } v_p \text{ من } T_p$$

ب- إذا كانت c دالة ثابتة على M ؛ فإن :

$$v_p[c] = 0 \qquad \text{لكل } v_p \text{ من } T_p$$

ج- إذا كانت h دالة حقيقية قابلة للمفاضلة معرفة فقط على جوار $\mathcal{U}$ للنقطة p، وكان v_p متجهاً مماساً في p ؛ فإن $v_p[\tilde{h}]$ يأخذ القيمة نفسها ، أياً كان الاشمال $\tilde{h}$ لـــ h ، وندعو هذه القيمة $v_p[h]$.

البرهان:

أ- بديهي .

ب- إذا لاحظنا أن :

$$v_p[1] = v_p[1^2] = 1 \cdot v_p[1] + 1 \cdot v_p[1] = 2 \cdot v_p[1]$$

ممّا يقتضي أن :

$$v_p[1]=0$$

فإننا نجد أن :

$$v_p[c]=v_p[c\cdot 1]=c\cdot v_p[1]=0$$

ج- ليكن $\tilde{h}$ و $\hat{h}$ إشمالين لـــ h يأخذان القيم نفسها على الجوار $\mathscr{V}$ لـــ p، ولنضع :

$$g=\tilde{h}-\hat{h}$$

إن g تنعدم على $\mathscr{V}$. استناداً إلى مبرهنة في التحليل فثمة جوار $\mathscr{W}$ للنقطة p، حيث $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}$ ، ودالة k من $\mathfrak{I}(M)$ ، حيث :

$$k(m)=0 \quad \text{عندما} \quad m\in\mathscr{W}$$

$$k(m)=1 \quad \text{عندما} \quad m\in M\setminus\mathscr{V}$$

وعندئذ : $g=gk$ و $g(p)=k(p)=0$

ولو استخدمنا (أ) لوجدنا أن :

$$v_p[g]=0$$

ومنه :

$$v_p[\tilde{h}]=v_p[\hat{h}]$$

3 – 7 تمهيدية

لتكن :

$$g:\Re^n\to\Re$$

دالة قابلة للمفاضلة ، وليكن :

$$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Re^n$$

عندئذ ثمة دوال قابلة للمفاضلة :

$$g_i:\Re^n\to\Re \qquad i=1,\ldots,n$$

حيث :

$$g=\sum_{i=1}^{n}(u_i-a_i)g_i+g(\boldsymbol{a})$$

البرهان

ليكن $\boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ متجهاً من $\Re^n$ ، ولنأخذ الدالة :

$$f:\Re\to\Re$$

المعرفة بـــ :

$$\begin{aligned}f(s)&=g\big(st_1+(1-s)a_1,\cdots,st_n+(1-s)a_n\big)\\&=g\big(s\boldsymbol{t}+(1-s)\boldsymbol{a}\big)\end{aligned}$$

لما كانت g قابلة للمفاضلة ؛ فلا بد أن تكون f كذلك ، ولدينا :

$$f'(s)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-a_i)\frac{\partial g}{\partial u_i}\big(st_1+(1-s)a_1,\cdots,st_n+(1-s)a_n\big)$$

ومنه :

$$\int_0^1 f'(s)\,ds=f(1)-f(0)=g(\boldsymbol{t})-g(\boldsymbol{a})$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{t})-g(\boldsymbol{a})&=\int_0^1 f'(s)\,ds\\&=\sum_{i=1}^{n}(t_i-a_i)\int_0^1\frac{\partial g}{\partial u_i}\big(st_1+(1-s)a_1,\cdots,st_n+(1-s)a_n\big)\,ds\\&=\sum_{i=1}^{n}\big(u_i(\boldsymbol{t})-a_i\big)g_i(\boldsymbol{t})\end{aligned}$$

حيث :

$$g_i(\boldsymbol{t})=\int_0^1\frac{\partial g}{\partial u_i}\big(st_1+(1-s)a_1,\cdots,st_n+(1-s)a_n\big)\,ds$$

3 – 8 مبرهنة (أساسية)

لتكن $x: \mathcal{U} \to M$ رقعة على المنطوي التفاضلي M ، و p نقطة من $x(\mathcal{U})$ ولنكتب:

$$x^{-1} = (x_1, \ldots, x_n)$$

إذا كان $v_p \in T_p$ ؛ فإن :

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v_p[x_i] \left.\frac{\partial}{dx_i}\right|_p$$

البرهان :

يكفي أن نثبت أن :

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_p[x_i] \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$$

وذلك أياً كانت الدالة f من $\Im(M)$.

لنأخذ إشمالاً : $g: \Re^n \to \Re$ لـــ $f \circ x$ قرب $x^{-1}(p)$ ؛ عندئذ يوجد استناداً إلى التمهيدية 3 – 7 دوال قابلة للمفاضلة :

$$g_i : \Re^n \to \Re \qquad i = 1, \ldots, n$$

حيث : $$g = \sum_{i=1}^{n} \big(u_i - u_i(x^{-1}(p))\big) g_i + g(x^{-1}(p))$$

وقرب p لدينا :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - x_i(p)\big) f_i + f(p)$$

حيث: $f_i = g_i \circ x^{-1}$ ، ومنه :

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ f_i(p) v_p[x_i - x_i(p)] + \big(x_i(p) - x_i(p)\big) v_p[f_i] \Big\} + v_p[f(p)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i[p] v_p[x_i]$$

وبشكل مشابه نجد :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\delta_j^i = f_j(p)$$

لأن :

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(x_i \circ x)}{\partial u_j}(x^{-1}(p))$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial u_j}(x^{-1}(p)) = \delta_j^i$$

وأخيراً :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} v_p[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Bigg|_p [f] = \sum_{j=1}^{n} v_p[x_j]\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_p[x_j] f_j(p) = v_p[f]$$

3 – 9 نتيجة

لتكن $x : \mathcal{U} \to M$ رقعة على منطو تفاضلي M ، ولنفترض أن $p \in x(\mathcal{U})$ ، ولنكتب $x^{-1} = (x_1,\ldots,x_n)$ ؛ عندئذ إن المتجهات :

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots\ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$$

تشكل قاعدة للفضاء المماس T_p ، ممّا يقتضي أن بعد الفضاء المماس T_p ، بوصفه فضاء متجهات ، هو نفسه بعد المنطوي M .

في الحقيقة يكفي أن نثبت أن هذه المتجهات مستقلة خطياً . لذلك نفترض أن $a_1,\ldots,a_n$ أعداد حقيقية ، وأن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0$$

عندئذ ومن أجل $j = 1,2,\ldots,n$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (x_j \circ x)}{\partial u_i}\left(x^{-1}(p)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$$

3 – 10 مبرهنة (قاعدة السلسلة)

ليكن M منطوياً تفاضلياً ، ولنفترض أن $g_1,\ldots\ldots,g_k$ تنتمي إلى $\Im(M)$ ، و $F \in \Im(\Re^k)$.

إذا كان :

$$f = F(g_1,\ldots\ldots,g_k)$$

أي :

$$f(p) = F\left(g_1(p),\ldots\ldots,g_k(p)\right) \qquad ,p \in M$$

فإن :

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial u_i}\left(g_1(p),\ldots,g_k(p)\right) v_p[g_i] \qquad (3,2)$$

وذلك أياً كان المتجه المماس v_p من T_p .

البرهان

لنضع :

$$g = (g_1,\ldots\ldots,g_k)$$

ولنعرف الدالة :

$$w : \Im(\Re^k) \to \Re$$

بـ : $w[H]=v_p[H\circ g]$ حيث $H\in\Im(\Re^k)$.

يمكن التأكد بسهولة من أن w هو متجه مماس لـ $\Re^k$ في $g(p)$، وباستخدام المبرهنة 3 – 8 من أجل الرقعة $(u_1,\ldots,u_k)$ في $g(p)$ نجد أن :

$$w[F]=\sum_{i=1}^{k} w[u_i]\frac{\partial F}{\partial u_i}\big(g(p)\big) \qquad (3,3)$$

ولما كان :

$$w[F]=v_p[F\circ g]=v_p[f]$$

و : $$w[u_i]=v_p[u_i\circ g]=v_p[g_i]$$

فإن (3,3) تأخذ الشكل :

$$v_p[f]=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial u_i}\big(g(p)\big)v_p[g_i] \qquad (3,4)$$

3 – 11 تعريف

لتكن $x:\mathscr{U}\to M$ رقعة على منطوي تفاضلي M ، ولنفترض أن q نقطة من $\mathscr{U}$ ؛ عندئذ نعرف المؤثر :

$$x_{u_i}(q):\Im(M)\to\Re$$

بـ : $$x_{u_i}(q)[f]=\frac{\partial(f\circ x)}{\partial u_i}\bigg|_q=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

حيث : $f\in\Im(M)$ و $p=x(q)$

4 – التطبيقات المحدثة (*Induced Maps*)

4 – 1 تعريف

ليكن : $\psi : M \to N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة للمنطوين M و N ، ولتكن p نقطة من M ؛ عندئذ يُعَرَّف التطبيق المماس ψ_{*p} (*Tangent Map*) في p :

$$\psi_{*p} : T_p \to T_{\psi(p)}$$

بـــ :

$$\psi_{*p}(v_p)[f] = v_p[f \circ \psi] \qquad (4,1)$$

حيث : $f \in \Im(N)$ و $v_p \in T_p$

حتى يكون للتعريف معنى يجب أن نتحقق من أن :

$$\psi_{*p}(v_p) \in T_{\psi(p)}(N)$$

لنثبت صحة خاصة ليبنتز على سبيل المثال:

$$\psi_{*p}(v_p)[f\,g] = v_p[(f\,g)\circ\psi] = v_p[(f\circ\psi)(g\circ\psi)]$$

$$= (f\circ\psi)(p)v_p[g\circ\psi] + (g\circ\psi)(p)v_p[f\circ\psi]$$

$$= f(\psi(p))\psi_{*p}(v_p)[g] + g(\psi(p))\psi_{*p}(v_p)[f]$$

نقول عن هذا التطبيق إنه تطبيق محدث (مستنتج) من التطبيق ψ .

4 – 2 نتيجة

ليكن M منطوياً تفاضلياً بعده n ، و $x : \mathcal{U} \to M$ رقعة في M ، حيث: $\mathcal{U} \subseteq \Re^n$.

إذا كتبنا:

$$x^{-1} = (x_1, \ldots, x_n)$$

فإن :

$$x_{*q}(\frac{\partial}{\partial u_i}|_q) = x_{u_i}(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_{x(q)} \qquad (4,2)$$

حيث : $q \in \mathscr{U}$ و $i = 1,2,\ldots,n$.

يكفي أن نلاحظ أن :

$$x_{*q}(\frac{\partial}{\partial u_i}|_q)[f] = \frac{\partial}{\partial u_i}|_q [f \circ x] = \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x(q)} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_{x(q)} [f]$$

4 – 3 مبرهنة

ليكن : $\psi : M \longrightarrow N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة ، و $p \in M$ ؛

عندئذ:

أ- $\psi_{*p} : T_p \longrightarrow T_{\psi(p)}$ هو تطبيق خطي بين فضاءَي متجهات.

ب- إذا كان التطبيقان $M \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\phi} P$ قابلين للمفاضلة ؛ فإن :

$$(\phi \circ \psi)_{*p} = \phi_{*\psi(p)} \circ \psi_{*p}$$

ج- إذا كانت : $x : \mathscr{U} \to M$ رقعة لـ M في p ،

و $y : \mathscr{V} \to N$ رقعة لـ N في $\psi(p)$ ،

وكتبنا :

$$x^{-1} = (x_1, \ldots, x_m) \quad \text{و} \quad y^{-1} = (y_1, \ldots, y_n)$$

حيث : $m = \dim M$ و $n = \dim N$ ؛ فإن :

$$\psi_{*p}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y_j \circ \psi)}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}|_{\psi(p)}$$

البرهان :

يمكن أن نثبت بسهولة (أ) و (ب) , وسنستخدم المبرهنة الأساسية 3-8 لإثبات صحة (ج).

لما كان :

$$\psi_{*p}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) \in T_{\psi(p)}$$

وبما أن :

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{\psi(p)},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_{\psi(p)}\right\}$$

قاعدة لـــ $T_{\psi(p)}$ ، فيمكننا أن نكتب :

$$\psi_{*p}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}|_{\psi(p)} \qquad (4,3)$$

ولإيجاد المعاملات a_{ij} ، فإننا نؤثر بطرفي (4,3) على y_k .

لدينا :

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}|_{\psi(p)})[y_k] = a_{ik}$$

$$\psi_{*p}(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)[y_k] = (\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)[y_k \circ \psi]$$

$$= \frac{\partial(y_k \circ \psi)}{\partial x_i}(p)$$

وبالتالي :

$$a_{ik} = \frac{\partial(y_k \circ \psi)}{\partial x_i}(p)$$

4-4 ملاحظة

إذا كان :

$$h: I \longrightarrow \Re \quad , \quad I \subseteq \Re$$

قابلاً للمفاضلة فعندئذ :

$$h_{*t}\left(\frac{d}{du}|_t\right) = h'(t)\frac{d}{du}|_{h(t)} \quad , \quad t \in \Re$$

4 – 5 تعريف (المصفوفة اليعقوبية لتطبيق)

ليكن M و N منطوين تفاضليين بعد الأول m ، وبعد الثاني n ، وليكن $\psi: M \longrightarrow N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة . لتكن p نقطة من M ، و$(x, \mathcal{U})$ رقعة لـ M في p ، و $(y, \mathcal{V})$ رقعة لـ N في $\psi(p)$.

المصفوفة اليعقوبية $J(\psi)(p)$ للتطبيق ψ في p بالنسبة إلى x و y هي بالتعريف مصفوفة ψ_{*p} بالنسبة إلى القاعدتين :

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{\psi(p)}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_{\psi(p)}\right\}$$

أي أن :

$$J(\psi)(p) = \left(\frac{\partial(y_j \circ \psi)}{\partial x_i}(p)\right)$$

4 – 6 مبرهنة (التطبيق المعاكس)

ليكن : $\psi: M \longrightarrow N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة ، و $p \in M$ ،

ولنفترض أن :

$$\dim M = \dim N = n$$

عندئذ فإن الشروط الآتية متكافئة:

أ- ψ_{*p} تماثُل (*Isomorphism*) .

ب- المصفوفة اليعقوبية $J(\psi)(p)$ غير شاذة .

ج- يوجد جوار $\mathscr{W}$ لـ p ، وجوار $\mathscr{V}$ لـ $\psi(p)$ ، حيث يكون للمقصور :

$$\psi/\mathscr{W}:\mathscr{W}\longrightarrow\mathscr{V}$$

تطبيق معاكس قابل للمفاضلة :

$$(\psi/\mathscr{W})^{-1}:\mathscr{V}\longrightarrow\mathscr{W}$$

4 – 7 نتيجة

ليكن $(x_1,\ldots,x_n)$ نظاماً إحداثياً للمنطوي التفاضلي M معرفاً في جوار $\mathscr{V}$ للنقطة p من M .

عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تشكل الدوال $f_1,\ldots,f_n$ من $J(\mathscr{V})$ نظاماً إحداثياً لـ M في جوار للنقطة p ؛ هو :

$$\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\neq 0$$

على $\mathscr{V}$.

4 – 8 ملاحظة

إذا كانت $(x,\mathscr{U})$ رقعة للمنطوي التفاضلي M في جوار للنقطة p ، فإننا نقول عن القاعدة :

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p,\ldots\ldots,\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right\}$$

لـ $T_p(M)$ إنها القاعدة الطبيعية المشاركة للرقعة $(x,\mathscr{U})$.

وإذا كانت $(y,\mathscr{V})$ رقعة أخرى ، حيث أن $p\in x(\mathscr{U})\cap y(\mathscr{V})$ ؛ فعندئذ :

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$$

وبالتالي ، إذا كان :

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} v'_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$$

متجهاً من $T_p(M)$ ؛ فعندئذ :

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) v_j$$

4 – 9 تعريف

نقول عن التطبيق القابل للمفاضلة : $\psi : M \longrightarrow N$ إنه نظامي ، إذا كان ψ_{*p} تحويلاً خطياً غير شاذ (*Nonsingular Linear Transformation*) لكل p من M .

4 – 10 نتيجة

الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق :

$$\psi : M \longrightarrow N$$

تماثلاً تفاضلياً محلياً ؛ هو أن يكون ψ_{*p} تماثلاً.

4 – 11 تعريف

نسمي منحنياً على منطو تفاضلي M أي تطبيق قابل للمفاضلة $\alpha : I \longrightarrow M$ حيث I مجال مفتوح من $\Re$ ، وإذا كان $t \in I$ ؛ فإننا نقول عن المتجه :

$$\alpha'(t) = \alpha_{*t}\left(\frac{d}{du}|_t\right) \in T_{\alpha(t)}(M)$$

إنه متجه السرعة لـــ α في t.

تجدر الملاحظة إلى أن $\frac{d}{du}|_t$ هو متجه مماس في R_t ، ويمكننا أن نفترض دوماً أن $0 \in I$.

4 – 12 تعريف

نقول إن المنحني α يبدأ في النقطة p من M ، إذا كان : $\alpha(0)=p$ ، ونقول إن $v_p \in T_p(M)$ هي سرعته الابتدائية (الأولية) *(Initial Velocity)* إذا كان:

$$\alpha'(0)=v_p$$

4 – 13 نتائج

أ- إذا كان $\alpha: I \longrightarrow M$ منحنياً في M ، فإن قيمة متجه السرعة $\alpha'(t)$ من أجل الدالة $f \in \Im(M)$ تعطى بـــ :

$$\alpha'(t)[f]=\alpha_{*t}\left(\frac{d}{du}|_t\right)[f]=\frac{d(f\circ\alpha)}{du}(t)$$

وخصوصاً لدينا :

$$\alpha'(t)[x_i]=\frac{d(x_i\circ\alpha)}{du}(t)$$

وإذا كانت v_p السرعة الابتدائية ؛ فإن :

$$v_p[f]=\frac{d(f\circ\alpha)}{du}(0)$$

ممّا يعني أن العدد $v_p[f]$ هو مشتق f باتجاه v_p.

ب- إذا كان $(x_1,\ldots,x_n)$ نظاماً إحداثياً في $\alpha(t)\in M$ ؛ فإنه ينتج من (أ) ومن المبرهنة 3 – 8 أن :

$$\alpha'(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha'[x_i]\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\alpha(t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x_i\circ\alpha)}{du}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\alpha(t)}$$

ج- قاعدة السلسلة للمنحنيات على منطو تفاضلي

إذا كان : $\alpha:]a,b[\longrightarrow M$ منحنياً في M ، وكانت $h:]c,d[\longrightarrow]\alpha,b[$ دالة قابلة للمفاضلة ؛ فإنه ينتج من 4 – 3 (ج) أن :

$$h_{*t}\left(\frac{d}{du}|_t\right)=h'(t)\frac{d}{du}|_{h(t)}$$

وإذا وضعنا :

$$\beta = \alpha \circ h$$

فعندئذ :

$$\beta'(t) = \beta_{*t}\left(\frac{d}{du}|_t\right) = \alpha_{*h(t)} \circ h_{*t}\left(\frac{d}{du}|_t\right)$$
$$= \alpha_{*h(t)}\left(h'(t)\frac{d}{du}|_{h(t)}\right) = h'(t)\alpha'\left(h(t)\right)$$

أي أن :

$$\beta' = h'(\alpha' \circ h)$$

Damascus University

5 – زمر لي (*Lie group*) ورزم الألياف (*Fiber Bundle*)

5 – 1 تعريف

نقول عن المجموعة G إنها زمرة (لي) إذا تحققت الشروط الثلاثة :

1 – G زمرة .

2 – G منطو تفاضلي .

3 – التطبيق :

$$G\times G\longrightarrow G\ ,\ (x,y)\longrightarrow xy^{-1}$$

قابل للمفاضلة .

يمكن التأكد بسهولة من أن الشرط الثالث يكافئ الشرطين :

3′) التطبيق $(x,y)\to xy$, $G\times G\to G$ قابل للمفاضلة .

3″) التطبيق $x\to x^{-1}$, $G\to G$ قابل للمفاضلة .

5 – 2 مثال

ليكن E فضاء متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية $\Re$ بعده n . إن لمجموعة التماثلات الذاتية *(Automorphism)* $GL(n,\Re)$ لـــ E بنية زمرة لي .

في الحقيقة : إذا أخذنا قاعدة لـــ E ؛ فإن كل تماثل ذاتي h لـــ E يقابل مصفوفة غير شاذة (a_i^j) من النوع $(n\times n)$ ، وعندئذ فإن الرقعة :

$$x:\Re^{n^2}\to GL(n,\Re)$$

المعرفة بـــ :

$$x^{-1}((a_i^j))=(a_1^1,a_1^2,\cdots,a_1^n,a_2^1,\cdots,a_2^n,\cdots,a_n^1,\cdots,a_n^n)$$

تعرف بنية منطو تفاضلي على $GL(n,\Re)$ ، كما أن $GL(n,\Re)$ هي زمرة بالنسبة إلى تركيب التطبيقات (جداء المصفوفات) ، وأخيراً فإن التطبيق :

$$GL(n,\Re)\times GL(n,\Re)\to GL(n,\Re)$$

$$(A,B)\to AB^{-1}$$

قابل للمفاضلة .

3 – 5 تعريف (الرزمة الليفية التفاضلية)

ليكن F فضاء متجهات ذا بعد n ، و B و E منطويين تفاضليين ، ولنفترض أن:

$$\pi : E\to B$$

هو تطبيق غامر ، وقابل للمفاضلة . نقول عن الثلاثية $\eta=(E,\pi,B)$ إنها رزمة ليفية تفاضلية *(differentiable fiber bundle)* ذات نمط ليفي F ، إذا وجدت مجموعة $\hat{H}=\{(\omega_\alpha,\phi_\alpha)\}$ ، حيث تتحقق الشروط الآتية :

1- $\{\omega_\alpha\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ B ، حيث يكون $\pi^{-1}(\omega_\alpha)$ متماثلاً استمرارياً مع $\omega_\alpha\times F$ وفق التطبيق :

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(\omega_\alpha)\to \omega_\alpha\times F$$

$$q\to \phi_\alpha(q)=\left(\pi(q),\overline{\phi}_\alpha(q)\right)$$

حيث $\overline{\phi}_\alpha$ تماثل مستمر لـ :

$$F_p=\pi^{-1}(p)$$

على F .

2 – إذا كان :

$$\omega_\alpha\cap\omega_\beta\neq\phi \qquad \text{و} \qquad v\in F$$

فإن :

$$\phi_\beta\phi_\alpha^{-1}(p,v)=\left(p,g_{\beta\alpha}(p)v\right)$$

حيث $g_{\beta\alpha}$ تطبيق قابل للمفاضلة لـ $\omega_\alpha\cap\omega_\beta$ في زمرة لي $GL(F)$.

3 – إذا كانت $\tilde{H}$ مجموعة تحوي $\hat{H}$ ،وتحقق 1 و 2 ؛ فإن $\tilde{H}=\hat{H}$

نقول عندئذ إن :

E هو الفضاء الكلي لـــ η .

B القاعدة .

π تطبيق الإسقاط .

$F_p=\pi^{-1}(p)$ الفضاء الليفي في النقطة p من B .

$\hat{H}$ أطلس الرزمة الليفية η.

$(\omega_\alpha,\phi_\alpha)$ خارطة لـــ η.

$g_{\beta\alpha}:\omega_\alpha\cap\omega_\beta\to GL(F)$ تطبيقات تغيير الخرائط .

5 – 4 مثال

ليكن M منطوياً تفاضلياً بعده n مزوداً بالأطلس :

$$A=\{(x,\mathcal{U}_\alpha),(y,\mathcal{U}_\beta),\cdots,\cdots\}$$

ولنأخذ المجموعة :

$$T(M)=\{(p,v_p):p\in M,v_p\in T_p(M)\}$$

عندئذ إن $(T(M),\pi,M)$ هي رزمة ليفية تفاضلية فيها :

$E=T(M)$ الفضاء الكلي ، وهو منطو تفاضلي بعده $2n$.

$B=M$ القاعدة .

$\pi:T(M)\to M,(p,v_p)\to p$ تطبيق الإسقاط .

المجموعة $\{\omega_\alpha=x(\mathcal{U}_\alpha),\omega_\beta=y(\mathcal{U}_\beta),\cdots\}$ تشكل تغطية لـــ M .

$F=F_p=\pi^{-1}(p)=\Re^n$ الفضاء الليفي .

التماثل بين $\pi^{-1}(\omega_\alpha)$ و $\omega_\alpha\times\Re^n$ (أو $\mathcal{U}_\alpha\times\Re^n$) يعطى بـــ :

$$\phi_\alpha(q)=\phi_\alpha(p,v_p)=$$

$$= (x_1(p), \cdots, x_n(p), v_1, \cdots, v_p)$$

حيث :

$$x^{-1}(p) = (x_1(p), \cdots, x_n(p))$$

الإحداثيات المحلية لـ p في الخارطة $(x, \mathcal{U}_\alpha)$ ، و $v_i = v_p[x_i]$ مركبات v_p في القاعدة الطبيعية المشاركة للخارطة :

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\} \quad \text{لـ} \quad T_p(M) .$$

وإذا كانت p نقطة من $\omega_\alpha \cap \omega_\beta$ ؛ فإن:

$$\phi_\beta(q) = \phi_\beta(p, v_p) = (y_1(p), \cdots, y_n(p), v'_1, \cdots, v'_n)$$

حيث :

$$y^{-1}(p) = (y_1(p), \cdots, y_n(p))$$

$$v'_i = v_p[y_i] \qquad \text{و}$$

مركبات v_p في القاعدة الطبيعية $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_p \right\}$ لـ $T_p(M)$ ؛ وعندئذ :

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_p v_j \qquad , i = 1, \cdots, n$$

أي أن :

$$g_{\alpha\beta}(p) = \left(\left.\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_p \right)$$

هو عنصر من زمرة لي $GL(n, \Re)$.

نقول عن :

$$(T(M), \pi, M)$$

إنها **الرزمة الليفية المماسية** *(Tangent fiber bundle)* للمنطوي M .

5-5 تعريف

نسمي مقطعاً *(Section)* للرزمة المماسية $T(M)$ كل تطبيق قابل للمفاضلة:

$$X : M \to T(M)$$

يحقق $\pi \circ X = 1_M$ ، حيث 1_M التطبيق المطابق على M . من الواضح أن X هو تطبيق نخصص وفقه كل نقطة p من M بمتجه مماس X_p من $T_p(M)$.

Damascus University

6- حقول المتجهات والتنسورات على منطو تفاضلي

6-1 تعريف (حقل المتجهات وقوس لي)

حقل متجهات (*A vector Field*) X على منطو تفاضلي M هو عملية اشتقاق (*deriviation*) على $\Im(M)$ (جبر الدوال الحقيقية القابلة للمفاضلة على M) ، أي أن X هو تطبيق :

$$X:\Im(M)\to\Im(M)$$

يحقق الخاصتين :

$$X[af+bg]=aX[f]+bX[g]$$

$$X[fg]=fX[g]+gX[f]$$

حيث $a,b\in\Re$ ، و $f,g\in\Im(M)$.

نلاحظ أن XY هو مؤثر معرف تماماً على $\Im(M)$ ، ولكنه ليس عملية اشتقاق، ولذلك نعرف قوس لي (*Lie bracket*) لحقلي متجهات X و Y بـــ :

$$[X,Y]=XY-YX$$

6-2 نتيجة

إن مجموعة حقول المتجهات على منطو تفاضلي M التي نرمز إليها بـــ $\mathfrak{X}(M)$ مزودة بقوس لي $[X,Y]$ هي جبر لي *(Lie Algebra)* فوق $\Re$، أي إنها فضاء متجهات على $\Re$ ، والتطبيق :

$$[\ ,\ ]:\ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

يحقق :

أ) $[X,X]=0$

ب) $[aX+bY,Z]=a[X,Y]+b[Y,Z]$

ج) $[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]$

د) $[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]=0$

والتي تسمى متطابقة جاكوبي *(Jacobi identity)*

تجدر الملاحظة إلى أنه يمكننا أن نضرب حقلاً متجهياً بعدد حقيقي أو بدالة حقيقية، فنحصل على حقل متجهات، كما يمكننا أن نضرب حقلي متجهات X و Y ضرباً قوسياً ، فنحصل على حقل متجهات $[X,Y]$ من $\mathfrak{X}(M)$.

6 – 3 ملاحظة

إذا كان X وY حقلي متجهات و f وg دالتين حقيقيتين قابلتين للمفاضلة على M ، فلدينا :

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+fX[g]Y-gY[f]X$$

6 – 4 ملاحظة

إن كل حقل متجهات X يعين مقطعاً لـ $T(M)$ ، وكل مقطع للرزمة المماسية يعين بشكل طبيعي عنصراً من $\mathfrak{X}(M)$ أي حقل متجهات .

6 – 5 تعريف

إذا كان $(x_1,\cdots,x_n)$ نظام إحداثيات محليه للمنطوي التفاضلي M معرفاً في جوار $\mathcal{U}$ للنقطة p من M ، فإن :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}:\Im(\mathcal{U})\longrightarrow\Im(\mathcal{U})$$

هو حقل متجهات نخصص وفقه كل دالة f من $\Im(\mathcal{U})$ بمشتقها الجزئي $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

من الواضح أن:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_p(M) \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(u)$$

وإذا كان : $X \in \mathcal{X}(M)$ ، فيمكننا أن نكتب على $\mathcal{U}$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

6 – 6 تعريف

ليكن $\psi : M \to N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة للمنطويين M و N ، وليكن:

$$Y \in \mathcal{X}(N) \qquad \text{و} \qquad X \in \mathcal{X}(M)$$

نقول عن X و Y إنهما مرتبطان وفق ψ إذا تحقق:

$$\psi_{\bullet p}(X_p) = Y_{\psi(p)}$$

لكل p من M . نكتب في هذه الحالة عادة :

$$\psi_{\bullet}(X) = Y \qquad \text{أو} \qquad X^{\psi} = Y$$

6 – 7 مبرهنة

إذا كان $\psi : M \to N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة ؛ فعندئذ :

أ- يكون الحقلان :

$$Y \in \mathcal{X}(N) \qquad \text{و} \qquad X \in \mathcal{X}(M)$$

مرتبطين وفق ψ إذا وفقط إذا كان :

$$Y[f] \circ \psi = X[f \circ \psi]$$

لكل f من $\Im(N)$.

ب- إذا كان :

$$Y, Z \in \mathcal{X}(N) \qquad \text{و} \qquad W, X \in \mathcal{X}(M)$$

حيث :

$$X^{\psi} = Z \quad \text{و} \quad W^{\psi} = Y$$

فإن :

$$[W,X] \text{ و } [Y,Z]$$

مرتبطان وفق ψ ، ولدينا:

$$[W^{\psi},X^{\psi}] = [Y,Z] = [W,X]^{\psi}$$

ج- إذا كان $\psi : M \to N$ تماثلاً تفاضلياً ؛ فعندئذ لكل X من $\mathfrak{X}(M)$ يوجد حقل وحيد Y من $\mathfrak{X}(N)$ حيث يكون $X^{\psi} = Y$

6 – 8 نتيجة

ليكن M منطوياً تفاضلياً بعده n ، ولتكن $x : \mathcal{U} \to M$ رقعة لـ M حيث $\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ ، ولنكتب:

$$x^{-1} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

عندئذ :

$$x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} = x_{u_i} \circ x^{-1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \left[x_{u_i}, x_{u_j}\right] = 0$$

حيث : $1 \le i, j \le n$.

لإثبات صحة العلاقة الثانية لدينا :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \left[x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right), x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)\right]$$

$$= x_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right]\right) = 0$$

6 – 9 تعريف (الحقل التنسوري)

نسمي حقلاً تنسورياً موافق التغيير (*A covariant tensor field*) من المرتبة r على منطو تفاضلي M أي تطبيق :

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{I}(M)$$

يحقق :

$$\alpha(X_1, \cdots, f_1 Y_1 + g_1 Z_1, \cdots, X_r) = f_1 \alpha(X_1, \cdots, Y_1, \cdots, X_r)$$

$$+ g_1 \alpha(X_1, \cdots, Z_1, \cdots, X_r)$$

لكل $f_1, g_1 \in \mathfrak{I}(M)$ و $X_1, \cdots, X_r, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M)$

نقول عن α عادة إنه حقل تنسوري من النوع $(r,0)$.

هذا ونقول عن التطبيق :

$$\phi : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

إنه حقل تنسوري متجهي التغير من المرتبة r إذا حقق العلاقة السابقة .

6 – 10 تعريف (التنسور الموافق للتغير)

نسمي تنسوراً موافقاً للتغير (*A covariant tensor*) في نقطة p من منطو تفاضلي M كل تطبيق متعدد الخطية :

$$\alpha : T_p(M) \times \cdots \times T_p(M) \to \mathfrak{R}$$

يحقق :

$$\alpha(x_1, \cdots, a_1 y_1 + b_1 z_1, \cdots, x_r) = a_1 \alpha(x_1, \cdots, y_1, \cdots, x_r)$$

$$+ b_1 \alpha(x_1, \cdots, z_1, \cdots, x_r)$$

لكل : $a_1, b_1 \in \mathfrak{R}$, $x_1, \cdots, x_r, y_1, z_1 \in T_p(M)$

6 – 11 تعريف

ليكن : $\psi : M \to N$ تطبيقاً قابلاً للمفاضلة و t حقلاً تنسورياً موافقاً للتغير من المرتبة r على N . نعرف الصورة العكسية لـــ t وفق ψ بأنها الحقل التنسوري $\psi^*(t)$ على M الذي يعطي بـــ :

$$\psi^*(t)(v_1,\cdots,v_r) = t\big(\psi_{*p}(v_1),\cdots,\psi_{*p}(v_r)\big)$$

وذلك أياً كانت النقطة p من M وأياً كانت المتجهات المماسة $v_1,\cdots,v_r$ في p .

6 – 12 تعريف (الشكل الأحادي التفاضلي)

نسمي شكلاً أحادياً تفاضلياً (*A differential 1-form*) على منطو تفاضلي M كل تطبيق :

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \to \Im(M)$$

يحقق :

$$\omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y)$$

أياً كان f,g من $\Im(M)$ و X,Y من $\mathfrak{X}(M)$.

نرمز لجماعة الأشكال الأحادية على M بـــ $\mathfrak{X}(M)^*$.

وإذا عرفنا الجمع والضرب بدالة بـــ :

$$(f\omega + g\vartheta)(X) = f\omega(X) + g\vartheta(X)$$

حيث :

$$f,g \in \Im(M) \quad \text{و} \quad \omega,\vartheta \in \mathfrak{X}(M)^* \quad \text{و} \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

فإن $\mathfrak{X}(M)^*$ تغدو حلقية *(Module)* هي الحلقية الثنوية لـــ $\mathfrak{X}(M)$.

6 – 13 مبرهنة

لنفترض أن $X \in \mathfrak{X}(M)$ وأن p من M حيث $X_p = 0$.

عندئذ :

$$\omega(X)(p)=0$$

لكل ω من $\mathcal{X}(M)^*$.

البرهان

لتكن $(x,\mathcal{U})$ رقعة لـــ M في p حيث $x^{-1}=(x_1,\cdots,x_n)$.

لما كان :

$$X=\sum_{i=1}^{n}X[x_i]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

في جوار p و $X_p=0$ ، فلا بد أن يكون :

$$X[x_i](p)=0 \qquad /\ ,i=1,\cdots,n$$

وعندئذ:

$$\omega(X)(p)=\omega\Big(\sum_{i=1}^{n}X[x_i](\frac{\partial}{\partial x_i})\Big)(p)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X[x_i](p)\omega(\frac{\partial}{\partial x_i})(p)=0$$

6 – 14 تعريف

ليكن : $\omega\in\mathcal{X}(M)^*$ و $p\in M$ ؛ عندئذ نعرف الشكل الأحادي ω_p في النقطة p بـــ :

$$\omega_p:T_p(M)\to\Re$$

$$x\to\omega_p(x)=\omega(X)(p)$$

حيث : $X\in\mathcal{X}(M)$ و $X_p=x$.

6 – 15 تمهيدية

إن تعريف ω_p لا يعتمد على اختيارنا لحقل المتجهات X .

البرهان : ليكن X و $\tilde{X}$ حقلي متجهات بحيث أن $X_p = \tilde{X}_p = x$ عندئذ $(X - \tilde{X})_p = 0$ وبالتالي فإننا نجد من المبرهنة 6 – 12 أن :

$$\omega(X)(p) - \omega(\tilde{X})(p) = \omega(X - \tilde{X})(p) = 0$$

6 – 16 تعريف

إذا كان $f \in \Im(M)$ فإن تفاضل f والذي نرمز إليه بـــ df هو الشكل الأحادي الذي يعرف بـــ :

$$df[X] = X[f]$$

أياً كان X من $\mathfrak{X}(M)$.

6 – 17 نتيجة

إذا كان $(x_1,\cdots,x_n)$ نظام إحداثيات محلية على مجموعة مفتوحة $\mathcal{U}$ من M ؛ فعندئذ:

أ– أياً كانت النقطة p من $\mathcal{U}$ فإن الأشكال الأحادية

$$dx_1(p),\cdots,dx_n(p)$$

تشكل قاعدة للفضاء الثنوي $T_p^*(M)$ لـــ $T_p(M)$.

وبالتالي:

$$T_p^*(M) = \{\omega_p : \omega \in \mathfrak{X}(M)^*\}$$

ب– المجموعة $\{dx_1,\cdots,dx_n\}$ هي قاعدة لـــ $\mathfrak{X}(\mathcal{U})^*$ ، وبالتالي أيا كان $\omega \in \mathfrak{X}(M)^*$ فنستطيع أن نكتب :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}) dx_i$$

7 – منطويات ريمان (*Riemannian Manifolds*)

7 – 1 تعريف (الصلة على منطو)

نسمي صلة *(connection)* أو اشتقاقاً موافقاً التغير *(Covariant derivative)* على منطو تفاضلي M ، كل تطبيق :

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

حيث إذا كان $X \in \mathfrak{X}(M)$ ؛ فإننا نعده التطبيق :

$$D_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

الذي يجب أن يحقق الخواص الآتية :

$$D_{fX+gY} = f D_X + g D_Y \qquad (7,1)$$

$$D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z \qquad (7,2)$$

$$D_X(fY) = X[f]Y + f D_X Y \qquad (7,3)$$

أياً كان Y, Z من $\mathfrak{X}(M)$ و f, g من $\mathfrak{I}(M)$.

7 – 2 ملاحظات

1– الصلة D ليست حقلاً تنسورياً ؛ لأن D ليس خطياً بالنسبة للدوال في مركبته الثانية.

2 – إن (7,2) و (7,3) تقتضيان أن :

$$D_X(aY + bZ) = aD_X Y + bD_X Z$$

أياً كان b, a من $\Re$ و X, Y, Z من $\mathfrak{X}(M)$.

3- لا يوجد ـــ عادة ـــ اختيار طبيعي لصلة على منطو تفاضلي، ولكننا سنرى أن لكل مترك ريماني *(Riemannian metric)* صلة خاصة مشاركة له .

7-3 الصلة الطبيعية على $\Re^n$

نعرف:

$$D:\mathcal{X}(\Re^n)\times\mathcal{X}(\Re^n)\to\mathcal{X}(\Re^n)$$

وذلك بوضع :

$$D_{\frac{\partial}{\partial u_i}}\frac{\partial}{\partial u_j}=0 \qquad , \qquad 1\le i,j\le n$$

وعموماً إذا كان:

$$X=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial}{\partial u_i}$$

حقل متجهات على $\Re^n$ فإن خواص الصلة تقتضي أن يكون :

$$D_XY=\sum_{i=1}^{n}X[y_i]\frac{\partial}{\partial u_i}$$

7-4 تعريف

لتكن D صلة خطية على منطو تفاضلي M . عندئذ يتعرف لدينا تطبيق (نرمزه D أيضاً) .

$$D:T_p(M)\times\mathcal{X}(M)\to T_p(M)$$

على النحو الآتي: إذا كان $\boldsymbol{v}_p$ متجهاً مماساً لـــ M في النقطة P ، فنختار:

$$V\in\mathcal{X}(M)$$

حيث يكون :

$$V_P=\boldsymbol{v}_p$$

وإذا كان :

$$W \in \mathfrak{X}(M)$$

فإن المتجه المماس $D_v W$ يعطي بـــ :

$$D_v W = (D_v W)_p$$

7 – 5 مبرهنة

إذا ثبتنا W من $\mathfrak{X}(M)$ فإن تعريف $D_v W$ مستقل عن اختيارنا لـــ V من $\mathfrak{X}(M)$ بحيث $V_P = v_p$.

البرهان :

ليكن V و Y من $\mathfrak{X}(M)$ حيث $V_p = Y_p$ وليكن $(x_1,\cdots,x_n)$ نظاماً إحداثياً معرفاً على مجموعة مفتوحة تحوي P . عندئذ استناداً إلى 6 – 4 نستطيع أن نكتب :

$$V = \sum_{i=1}^{n} V[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

وباستخدام الخاصتين (1,1) و (1,3) نجد أن :

$$(D_V W)_P = \sum_{i=1}^{n} (V[x_i] D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W)_P$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V[x_i](P)(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W)_P$$

$$= \sum Y[x_i](P)(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W)_P$$

$$= (D_Y W)_P$$

7 – 6 ملاحظة

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن أن يكون :

$$Y_P = Z_P$$

ولكن

$$(D_X Y)_P \neq (D_X Z)_P$$

7 – 7 مبرهنة

ليكن :

$$X \in \mathfrak{X}(M)$$

وليكن : $\alpha :]a,b[\to M$

منحنياً ، حيث :

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$$

(أي أن α هو منحن تكاملي *(Integral curve)* لـ X) .وليكن Y و Z حقلي متجهات من $\mathfrak{X}(M)$ بحيث :

$$Y_{\alpha(t)} = Z_{\alpha(t)} \qquad , a < t < b$$

عندئذ :

$$(D_X Y)_{\alpha(t)} = (D_X Z)_{\alpha(t)} \qquad a < t < b$$

البرهان :

نستطيع أن نفترض ـــ من دون التقليل من عمومية المسألة ـــ أنه يوجد نظام إحداثي $(x_1,\cdots,x_n)$ معرف على مجموعة مفتوحة $\mathcal{U}$ من M حيث يقع أثر α في $\mathcal{U}$.

يكفي الآن أن نثبت أنه إذا كان $Y \in \mathfrak{X}(M)$ فإن $t \to Y_{\alpha(t)} \equiv 0$ تقتضي أن:

$$t \to (D_X Y)_{\alpha(t)} \equiv 0$$

نستطيع أن نكتب :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

على $\mathscr{U}$ ، ولنفترض أن :

$$t \to Y_{\alpha(t)} \equiv 0$$

عندئذ:

$$Y[x_i](\alpha(t)) = 0 \qquad , a < t < b \qquad , i = 1, \cdots, n$$

وبالتالي :

$$D_X Y = \sum_{i=1}^{n} (XY[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + Y[x_i] D_X \frac{\partial}{\partial x_i})$$

ومنه :

$$(D_X Y)_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{n} \left(XY[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \right)\Big|_{\alpha(t)}$$

ولكن :

$$\begin{aligned} XY[x_i](\alpha(t)) &= X_{\alpha(t)}[Y[x_i]] \\ &= \alpha'(t)[Y[x_i]] \\ &= \frac{d(Y[x_i] \circ \alpha)}{du}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المركبات $XY[x_i]$ كلها معدومة ممّا يقتضي أن :

$$(D_X Y)_{\alpha(t)} = 0$$

لكل t حيث $a < t < b$.

7 – 8 تعريف

ليكن :

$$\alpha :]a, b[\longrightarrow M$$

منحنياً في منطو تفاضلي M . ندعو حقل متجهات على طول α أي تطبيق Y تخصص وفقه لكل t حيث $a < t < b$، متجهاً مماساً $Y(t)$ من $T_{\alpha(t)}(M)$.

7 – 9 تعريف

ليكن :

$$\alpha :]a,b[\to M$$

منحنياً نظامياً ومتبايناً *(injective regular curve)* في منطو تفاضلي M ، وليكن Y حقل متجهات على طول α . يعرف المشتق موافق التغير لـ Y على طول α بالعلاقة :

$$Y'(t) = D_{\alpha'(t)}\tilde{Y}$$

حيث $\tilde{Y}$ حقل متجهات من $\mathfrak{X}(M)$ يحقق :

$$\tilde{Y}_{\alpha(t)} = Y(t) \qquad , a < t < b$$

إن لحقول المتجهات على طول منحن في منطو M ، أغلب الخواص التي تتمتع بها حقول المتجهات على طول منحن في $\mathfrak{R}^n$.

7 – 10 مبرهنة

ليكن Y و Z حقلي متجهات على طول منحن :

$$\alpha :]a,b[\to M$$

في منطو تفاضلي M ، ولنفترض أن الدالتين :

$$f :]a,b[\longrightarrow \mathfrak{R}$$

$$h :]c,d[\longrightarrow]a,b[$$

قابلتان للمفاضلة .

عندئذ :

$$(Y+Z)' = Y' + Z'$$

$$(fY)' = f'Y + fY'$$

$$(Y \circ h)'(t) = h'(t) \circ Y'(h(t)) \qquad \text{(قاعدة السلسلة)}$$

سنثبت صحة العلاقتين الأخيرتين .

ليكن :

$$\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{و} \quad \tilde{f} \in \mathfrak{I}(M)$$

حيث :

$$\tilde{f}\big(\alpha(t)\big) = f(t) \qquad ,\tilde{Y}\big(\alpha(t)\big) = Y(t) \qquad ,a < t < b$$

عندئذ :

$$(fY')(t) = D_{\alpha'(t)}(\tilde{f}\tilde{Y})$$

$$= \alpha'(t)[\tilde{f}]\,\tilde{Y}_{\alpha(t)} + \tilde{f}\big(\alpha(t)\big)D_{\alpha'(t)}\tilde{Y}$$

$$= (\tilde{f} \circ \alpha)'(t)Y(t) + f(t)Y'(t)$$

$$= f'(t)Y(t) + f(t)Y'(t)$$

ولإثبات صحة العلاقة الأخيرة نأخذ $\tilde{Y}$ من $\mathfrak{X}(M)$ حيث :

$$\tilde{Y}\big(\alpha(h(t))\big) = Y\big(h(t)\big) \qquad , \qquad c < t < d$$

وعندئذ باستخدام قاعدة السلسلة المعروفة نجد أن :

$$(Y \circ h)'(t) = D_{(\alpha\circ h)'(t)}\tilde{Y} = D_{h'(t)(\alpha'\circ h)(t)}\tilde{Y}$$

$$= h'(t)D_{(\alpha'\circ h)(t)}\tilde{Y}$$

$$= h'(t)Y'(h(t))$$

7 – 11 تعريف

ليكن t حقلاً تنسورياً موافقاً التغير من المرتبة 2 على منطو تفاضلي M . نقول عن t إنه شكل متناظر ثنائي الخطية *(symmetric bilinear form)* إذا حقق :

$$t(X,Y)=t(Y,X)$$

لكل X و Y من $\mathfrak{X}(M)$.

وبشكل مشابه نقول عن t إنه شكل ثنائي الخطية متناظر تخالفياً *(antisymmetric bilinear form)* إذا حقق :

$$t(X,Y)=-t(Y,X)$$

لكل X و Y من $\mathfrak{X}(M)$.

تجدر الملاحظة إلى أن كل حقل تنسوري موافق التغير t يعيّن تنسوراً t_p في كل فضاء مماس $T_p(M)$، يعطى بـــ :

$$t_p(x,y)=t(X,Y)(p)$$

حيث :

$$X,Y\in\mathfrak{X}(M) \qquad \text{و} \qquad X_p=x \quad ، \quad Y_p=y$$

ومن الواضح أن t_p مستقل عن اختيارنا لـــ X و Y حيث :

$$X_p=x \text{ و } Y_p=y \ .$$

7 – 12 تعريف (المترك شبه الريماني)

نقول عن شكل متناظر ثنائي الخطية t على منطو تفاضلي M ، إنه غير مضمحل *(non degenerate)* إذا كان التنسور t_p غير مضمحل في كل فضاء مماس $T_p(M)$ ؛ أي إن :

$$t_p(x,y)=0$$

لكل y من $T_p(M)$ تقتضي أن $x=0$.

ونقول عن شكل متناظر ثنائي الخطية وغير مضمحل إنه مترك شبه ريماني (*Pseudo-Riemannian metric*).

نعلم من الجبر الخطي أنه يمكن تقطير أي شكل متناظر ثنائي الخطية t على فضاء متجهات V بعده n على $\mathfrak{R}$. ممّا يعني أنه توجد قاعدة $\{e_1,\cdots,e_n\}$ لـــ V بحيث :

$$t(e_i,e_j)=0 \qquad , \quad i\neq j$$

وإذا كان t غير مضمحل فيمكننا أن نختار القاعدة حيث :

$$t(e_i,e_i)=\pm 1$$

إن عدد الإشارات + والذي نرمز إليه بـــ p وعدد الإشـــارات - والذي نرمز إليه بـــ q مستقل عن اختيارنا للقاعدة $\{e_1,\cdots,e_n\}$. نقول عن (p,q) إنها شارة (*signature*) الشكل المتناظر .

7 – 13 تعريف (مترك ريمان)

نقول عن شكل متناظر ثنائي الخطية t على منطو تفاضلي M إنه موجب بالتحديد (*positive definite*) إذا كان t_p موجباً بالتحديد على $T_p(M)$ لكل p من M ، أي إذا كان :

$$t_p(x,x)>0$$

لكل متجه مماس غير صفري x من $T_p(M)$.

نقول ـــ في هذه الحالة ـــ عن t إنه مترك ريمان .

وعندما نستخدم مصطلح مترك فإننا نقصد إما مترك شبه ريماني أو مترك ريماني .ندل على المترك عادة بـــ $<\ ,\ >$. وإذا كان $<\ ,\ >$ موجباً بالتحديد فإن النظيم (*Norm*) يعرف بـــ :

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>}$$

وذلك لكل متجه مماس x للمنطوي M . وحتى إن لم يكن $< , >$ موجباً بالتحديد فإننا نكتب :

$$\|x\|^2 = < x, x >$$

7 – 14 تعريف (منطوي ريمان)

نقول عن منطو تفاضلي M مزود بمترك $< , >$ إنه منطو شبه ريماني. إذا كان x, y متجهين مماسين لـــ M ، فنسمي $< x, y >$ الجداء الداخلي (*Inner product*) لـــ x, y . وبشكل مشابه يمكننا أن نتكلم عن الجداء الداخلي لحقلي متجهات . فإذا كان X و Y ينتميان إلى $\mathfrak{X}(M)$ فإن $< X, Y >$ هو الدالة من $\mathfrak{I}(M)$ المعرفة بـــ:

$$< X, Y > (p) = < X_p, Y_p >$$

نقول عن منطو تفاضلي M مزود بمترك موجب بالتحديد $< , >$ إنه منطوي ريمان (*A Riemannian manifold*) .

7 – 15 مثال

ثمة مترك موجب بالتحديد يعطى بشكل طبيعي على $\mathfrak{R}^n$ بـــ :

$$< \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial u_j} > = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i$$

ويتطابق هذا المترك مع الجداء النقطي (*dot product*) على $\mathfrak{R}^n$. هذا ويمكن أن نعرف متركاً على $\mathfrak{R}^n$ بـــ:

$$< \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial u_j} > = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i g_i$$

حيث $a_1, \cdots, a_n$ ثوابت غير معدومة . ويكون هذا المترك موجباً بالتحديد إذا وفقط إذا كانت الثوابت a_i موجبة .

وعموماً فإن :

$$<\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial u_j}> = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i g_j$$

حيث (a_{ij}) مصفوفة ثوابت معينها غير معدوم تعرف متركاً على $\Re^n$.

7 – 16 تعريف

إذا كان θ شكلاً أحادياً على منطو شبه ريماني M فإن ثنوي θ هو حقل متجهات θ^* من $\mathfrak{X}(M)$ يحقق :

$$<\theta^*, Y> = \theta(Y)$$

لكل Y من $\mathfrak{X}(M)$. وفي الحالة الخاصة $\theta = df$ حيث $f \in \Im(M)$ نقول عن df^* إنه تدرج (*gradient*) f ونرمز إليه بـــ $grad\ f$ ، وهو يعطي بـــ :

$$<grad\ f, Y> = Y[f]$$

7 – 17 ملاحظة

إذا كان V فضاء متجهات مزود بجداء داخلي $< , >$ ، فإن كل x من V يتعرف تماماً بالجداءات الداخلية $<x, y>$ لكل y من V .

في الحقيقة إذا كان :

$$<x, y> = <x', y>$$

لكل y من V فإن $<x - x', y> = 0$ لكل y من V ممّا يقتضي أن $x = x'$.

وهكذا فإن θ^* في 7 – 16 معرف تماماً .

7 – 18 تعريف (صلة ريمان)

إذا كان M منطوياً شبه ريمانياً؛ فإن صلة ريمان *(Riemannian connection)* :

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

للمنطوي M تعرف بـــ :

$$2<\nabla_X Y,Z>=X<Y,Z>+Y<X,Z>-Z<X,Y>$$
$$-<X,[Y,Z]>-<Y,[X,Z]>+<Z,[X,Y]> \qquad (7,4)$$

وذلك أياً كان X,Y,Z من $\mathfrak{X}(M)$.

7 – 19 نتيجة

إن لصلة ريمان ∇ , الخواص الآتية :

$$\nabla_{fX+gY}=f\nabla_X+g\nabla_Y \qquad (7,5)$$
$$\nabla_X(aY+bZ)=a\nabla_X Y+b\nabla_X Z \qquad (7,6)$$
$$\nabla_X(fY)=X[f]Y+f\nabla_X Y \qquad (7,7)$$
$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y] \qquad (7,8)$$
$$X<Y,Z>=<\nabla_X Y,Z>+<Y,\nabla_X Z> \qquad (7,9)$$

وذلك أياً كان X,Y,Z من $\mathfrak{X}(M)$ و f,g من $\mathfrak{I}(M)$ و a,b من $\Re$. وبالعكس إذا حقق التطبيق :

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

الخاصتين (7,5) و (7,9) فإنه يعطى بـ (7,4) .

المعالجة التقليدية للمترك

نصادف في كثير من المطبوعات الرمز ds^2 ليدل على مترك من خلال العلاقة:

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j$$

وحتى نعطي لهذه المعادلة معنى في المصطلحات الحديثة، نأخذ منطوي ريمان M مزوداً بمترك $<\ ,\ >$. نكتب $ds^2=<\ ,\ >$ ونختار نظاماً إحداثياً $(x_1,\cdots,x_n)$ في M، ولتكن $dx_1,\cdots,dx_n$ الأشكال الأحادية $(1-forms)$ المشاركة لهذا النظام الإحداثي.

إن الجداء التناظري (المتناظر) لـــ dx_i و dx_j هو الحقل التنسوري موافق التغير ومن المرتبة 2 والذي يعطي بـــ :

$$(dx_i\, dx_j)(X,Y)=\frac{1}{2}\left(dx_i(X)dx_j(Y)+dx_i(Y)\, dx_j(X)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(X[x_i]Y[x_j]+Y[x_i]X[x_j]\right)$$

حيث : $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$

لنضع أخيراً :

$$g_{ij}=<\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}> \qquad , \qquad 1\le i,j\le n$$

نقول عن g_{ij} إنها مركبات المترك $<\ ,\ >$.

20 – 7 مبرهنة

إن المترك $<\ ,\ >$ $ds^2=$ يعطى بدلالة g_{ij} بالصيغة .

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (7,10)$$

البرهان :

لدينا بالتعريف :

$$ds^2(\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_\ell})=<\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_\ell}>=g_{k\ell}$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$(g_{ij}\, dx_i dx_j)(\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_\ell})=\frac{g_{ij}}{2}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial x_\ell}+\frac{\partial x_i}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right\}$$

$$=\frac{g_{ij}}{2}(\delta_{ik}\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\delta_{jk})$$

وبالتالي :

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i dx_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = g_{k\ell} \qquad (7,11)$$

وهكذا

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = g_{k\ell} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i dx_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)$$

وذلك أياً كان $1 \le k, \ell \le n$. وعموماً إذا كان Y, X حقلي متجهين من $\mathfrak{X}(M)$ وكتبنا :

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad , \quad Y = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

فإننا استناداً إلى (7,11) نجد أن :

$$ds^2(X,Y) = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_k b_\ell ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)$$

$$= \sum_{k,\ell=1}^{n} a_k b_\ell \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j\right)(X,Y)$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة لكل X و Y ؛ فإننا نستنتج صحة (7,10) .

21-7 تعريف

إذا كانت g_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ مركبات مترك بالنسبة لنظام إحداثي $(x_1, \cdots, x_n)$ فإننا نرمز إلى معكوس المصفوفة (g_{ij}) بـ (g^{ij})، ونقول عادة عن g_{ij} إنها مركبات المترك موافقة التغير (أو ذات الأدلة السفلية) ، وعن g^{ij} إنها مركباته مخالفة التغير (أو ذات الأدلة العلوية) . أخيراً نضع :

$$g = \det(g_{ij})$$

7 – 22 مبرهنة

أياً كان نظام الإحداثيات $(x_1,\cdots,x_n)$ في منطو ريماني M فإن الشكل الأحادي $(1-form)$ dx_i هو ثنوي العنصر : $\sum_{h=1}^{n} g^{ih}\frac{\partial}{\partial x_h}$

وذلك لكل $i=1,2,\cdots,n$ أي إن :

$$dx_i^* = \sum_{h=1}^{n} g^{ih}\frac{\partial}{\partial x_h}$$

البرهان :

لدينا استناداً إلى تعريف معكوس مصفوفة :

$$\delta_{ij} = \sum_{h=1}^{n} g^{ih}g_{hj} = \sum_{h=1}^{n} g^{ih} < \frac{\partial}{\partial x_h}, \frac{\partial}{\partial x_j} >$$

$$= < \sum g^{ih}\frac{\partial}{\partial x_h}, \frac{\partial}{\partial x_j} >$$

ولدينا من ناحية أخرى :

$$< dx_i^*, \frac{\partial}{\partial x_j} > = dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$$

واستناداً إلى الملاحظة 7 – 17 ؛ فإن dx_i^* يتطابق مع

$$\sum_{h=1}^{n} g^{ih}\frac{\partial}{\partial x_h}$$

7 – 23 تعريف

ليكن $ds^2 =< , >$ متركاً على منطو تفاضلي M بعده n ولتكن ∇ صلة ريمان المعينة بـــ ds^2 . إذا كان $(x_1,\cdots,x_n)$ نظام إحداثيات محلية في M فإن رموز كريستوفل (*Christoffel symbols*) Γ_{ij}^k للصلة ∇ بالنسبة إلى $(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ تعطى بـــ :

$$\Gamma_{ij}^{k} = dx_k(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) \quad , 1 \le i, j \le n \qquad (7,12)$$

وعندئذ :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad , 1 \le i, j \le n \qquad (7,13)$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad , 1 \le i, j \le n \qquad (7,14)$$

24 – 7 مبرهنة

إن رموز كريستوفل Γ_{ij}^{k} لصلة ريمان تعطى بـــ :

$$\Gamma_{jk}^{l} = \sum_{h=1}^{n} \frac{g^{lh}}{2} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h}\right) \qquad (7,15)$$

البرهان :

لما كان $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ (نتيجة 6 – 7)

فإننا باستخدام (7,4) نجد أن :

$$< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h} > = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} < \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h} > \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_k} < \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_h} > - \frac{\partial}{\partial x_h} < \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} > \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h} \right) \qquad (7,16)$$

وينتج من تعريف Γ_{jk}^{l} ومن المبرهنة 7 – 22 أن :

$$\Gamma_{jk}^{l} = dx_l(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}) = < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, dx_i^* >$$

$$= \sum_{h=1}^{n} g^{lh} < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h} > \qquad (7,17)$$

وأخيراً فإن (7,15) تنتج من (7,16) و (7,17) .

25-7 مبرهنة

ليكن Y,X حقلي متجهات من $\mathfrak{X}(M)$ و $(x_1,\cdots,x_n)$ نظام إحداثيات محلية لمنطوي ريمان M . عندئذ :

$$\nabla_X Y=\sum_{k=1}^{n}(XY[x_k]+\sum_{i,j=1}^{n}X[x_i]Y[x_j]\Gamma_{ij}^{k})\frac{\partial}{\partial x_k}$$

البرهان :

لدينا :

$$\nabla_X Y=\nabla_{(\sum X[x_i]\frac{\partial}{\partial x_i})}(\sum Y[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j})$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}X[x_i]\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}Y[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j}+Y[x_j]\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}XY[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{ijk=1}^{n}\Big(X[x_i]Y[x_j]\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Big\{XY[x_k]+\sum_{ij=1}^{n}X[x_i]Y[x_j]\Gamma_{ij}^{k}\Big\}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

26-7 تمرين محلول

لتكن :

$$y_1=2x_1+x_2$$

$$y_2=e^{x_1+x_2}$$

دالتين حقيقيتين على $\Re^2$ و :

$$V=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$W=2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Z = (x_2 + e^{x_1})\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

ثلاثة حقول متجهات على $\Re^2$.

i. أثبت أن الثنائية (y_1, y_2) تشكل نظاماً إحداثياً على $\Re^2$.

ii. اكتب القاعدة الثنوية dx_1 , dx_2 في النقطة $P(1,0)$ بدلالة dy_1 , dy_2

iii. إذا كان :

$$\psi : \Re^2 \to \Re^2$$
$$(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$$

فأوجد $\psi_{*P}(W_P)$ حيث $P(1,0)$

iv. أوجد الجداء القوسي $[V, W]$

v. أوجد الجداء التنسوري $V_q \otimes W_q = t$ حيث $q(1,1)$.

ومن ثم أوجد المركبة $t^{1'2'}$ ، وذلك في القاعدة الطبيعية المشاركة للنظام الاحداثي (y_1, y_2).

vi. أوجد كلاً من :

$$D_W Z \quad \text{و} \quad [D_W Z][y_1] \quad \text{و} \quad [D_W Z][y_1](1,1)$$

الحل :

i. لما كان :

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \begin{vmatrix} A_1^{1'} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = 2 & A_2^{1'} = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} = 1 \\ A_1^{2'} = \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = e^{x_1+x_2} & A_2^{2'} = \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} = e^{x_1+x_2} \end{vmatrix}$$

$$= e^{x_1+x_2} \neq 0$$

فإن (y_1, y_2) هو نظام إحداثي لـ $\Re^2$.

ii. لنضع

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad e^i = dx_i$$

$$e_{i'} = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad , \quad e^{i'} = dy_i$$

عندئذ بالتعويض في :

$$e_i = \sum_{j=1}^{2} A_i^{j'} e_{j'} \quad , \quad e^i = \sum_{j=1}^{2} A_{j'}^{i} e^{j'}$$

نجد العلاقات :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad , \quad dx_i = \sum_{j=1}^{2} A_{j'}^{i} dy_j$$

علماً أن $[A_{j'}^{i}]$ هي المصفوفة العكسية لـ $[A_j^{i'}]$.

لدينا الآن :

$$[A_j^{i'}]_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ e & e \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\det[A_j^{i'}] = e$$

وبالتالي :

$$[A_{j'}^{i}]_{(1,0)} = \frac{1}{e}\begin{bmatrix} e & -1 \\ -e & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1'}^{1} = 1 & A_{2'}^{1} = -\frac{1}{e} \\ A_{1'}^{2} = -1 & A_{2'}^{2} = \frac{2}{e} \end{bmatrix}$$

وأخيراً :

$$dx_1 = e^1 = A_{1'}^{1} e^{1'} + A_{2'}^{1} e^{2'} = A_{1'}^{1} dy_1 + A_{2'}^{1} dy_2$$

$$dx_2 = e^2 = A_{1'}^{2} e^{1'} + A_{2'}^{2} e^{2'} = A_{1'}^{2} dy_1 + A_{2'}^{2} dy_2$$

وفي النقطة (1,0) :

$$dx_1 = dy_1 + (-\frac{1}{e}) dy_2$$

$$dx_2 = -dy_1 + \frac{2}{e}\,dy_2$$

iii. لدينا :

$$W_P = (w_1 = 2, w_2 = 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{*P}(W_P) = \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(P)\right] \cdot W_P$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3e \end{bmatrix}$$

أي إن :

$$\psi_{*P}(W_P) = 5\frac{\partial}{\partial x_1} + 3e\frac{\partial}{\partial x_2}$$

iv. لما كان :

$$\left[f\frac{\partial}{\partial x_i}, g\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 + f\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - g\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

فإن :

$$[V,W] = \left[x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, 2\frac{\partial}{\partial x_1}\right] + \left[x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right]$$

$$= 0 - 0 + x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$= -x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

v. لدينا في النقطة $q(1.1)$.

$$V_q = (v_1, v_2) = (1,0)$$

$$W_q = (w_1, w_2) = (2,1)$$

وبالتالي ؛ إن مركبات التنسور :

$$t = V_q \otimes W_q$$

تعطى بـــ :

$$t^{11} = v_1 w_1 = 2$$

$$t^{12} = v_1 w_2 = 1$$

$$t^{21} = v_2 w_1 = 0$$

$$t^{22} = v_2 w_2 = 0$$

وعند تغيير القاعدة تتغير مركبات التنسور وفق العلاقات :

$$t^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} t^{ij}$$

ولاسيما :

$$t^{1'2'} = A_i^{1'} A_j^{2'} t^{ij}$$

$$= A_1^{1'} A_1^{2'} t^{11} + A_1^{1'} A_2^{2'} t^{12} + A_2^{1'} A_1^{2'} t^{21} + A_2^{1'} A_2^{2'} t^{22}$$

وفي النقطة $q(1,1)$:

$$\left[A_j^{i'}\right] = \begin{bmatrix} A_1^{1'} = 2 & A_2^{1'} = 1 \\ A_1^{2'} = e^2 & A_2^{2'} = e^2 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$t^{1'2'} = 2e^2 \cdot 2 + 2 \cdot e^2 \cdot 1 + 1 \cdot e^2 \cdot 0 + 1 \cdot e^2 \cdot 0$$

$$D_W Z = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right) \cdot W \qquad .vi$$

$$= \begin{bmatrix} e^{x_1} & 1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + x_1 \\ 2x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

أو :

$$D_W Z = \left(2e^{x_1} + x_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(2x_2 + x_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$D_W Z[y_1] = \left(2e^{x_1} + x_1\right)\cdot 2 + \left(2x_2 + x_1^2\right)\cdot 1$$

$$D_W Z[y_1](1,1) = 2\left(2e + 1\right)\cdot 2 + 3$$

Damascus University

تمرينات الفصل الخامس

التمرين الأول:

ليكن :

$$\psi : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$$

التطبيق المعطى بـــ :

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2 \ , \ x_1 e^{x_2} - x_2)$$

i. أثبت أن ψ هو تماثل تفاضلي .

ii. أوجد : $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ و $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$

iii. أثبت أن حقلي المتجهات :

$$X = (x_1 + x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y = (x_2^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

مستقلان خطياً.

iv. أوجد $\psi_*(X)$ و $\psi_*(Y)$

التمرين الثاني:

لدينا حقول المتجهات الثلاثة التالية على $\Re^3$:

$$X = (2 + x_2^2)e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$Y = 2x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (2 + x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Z = -2x_1 x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2(2 + x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (2 + x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

i. أثبت أن هذه الحقول مستقلة خطياً وبالتالي تشكل قاعدة لحلقية حقول المتجهات القابلة للمفاضلة على $\Re^3$.

ii. أوجد القاعدة الثنوية لـ X,Y,Z بدلالة dx_1,dx_2,dx_3 .

iii. أوجد الجداءات $[X,Y]$, $[X,Z]$, $[Y,Z]$.

iv. أثبت أن الدوال :

$$y_1 = \frac{x_1}{2+x_2^2} + x_2 e^{x_3}$$

$$y_2 = \frac{x_1}{2+x_2^2} - x_2 e^{x_3} + x_3$$

$$y_3 = 2x_2 e^{x_3} + x_3$$

تشكل نظاماً إحداثياً لـ $\Re^3$.

v. إذا كان :

$$\psi : \Re^3 \longrightarrow \Re^3$$

$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow (y_1,y_2,y_3)$$

فأوجد $\psi_*(X)$, $\psi_*(Y)$.

vi. إذا كان t حقل متجهات من النوع (1,1) مركباته بالنسبة إلى القاعدة الطبيعية المشاركة لـ x_1,x_2,x_3 هي :

$$t_1^1 = x_2 + x_3 \quad , \quad t_2^1 = x_1 + x_2 \quad , \quad t_3^1 = 0$$

$$t_1^2 = 0 \quad , \quad t_2^2 = x_3 + x_1 \quad , \quad t_3^2 = x_2 + x_3$$

$$t_1^3 = x_3 + x_1 \quad , \quad t_2^3 = 0 \quad , \quad t_3^3 = x_1 + x_2$$

فأوجد مركبات t في القاعدة المشاركة للنظام الإحداثي (y_1,y_2,y_3).

التمرين الثالث :

ليكن X و Y حقلي المتجهات على $\Re^3$:

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}$$

$$Y = y^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

ولتكن الدالة الحقيقية :

$$f : \Re^3 \longrightarrow \Re$$

$$p \longrightarrow f(p) = f(p_1, p_2, p_3) = p_1^2 p_2 p_3$$

والمطلوب إيجاد كل من :

$i.$ $[X,Y]_p$ $\quad$ $ii.$ $(fY)_p$

$iii.$ $(Yf)(p)$ $\quad$ $iv.$ $f_{*p}Y_p$

حيث $p(1,2,1)$.

التمرين الرابع :

إذا كان ψ التطبيق المعرف بـــ :

$$\psi : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$$

$$(u,v) \longrightarrow \psi(u,v) = (u^2 \sin v, e^{uv})$$

فأوجد مصفوفة ψ_{*p} ومن ثم $\psi_{*p}(v_p)$ حيث $p(1,2)$ و $v = (-1,3)$.

التمرين الخامس :

ليكن X و Y حقلي المتجهات على $\Re^3$:

$$X = (x_1 - x_2, x_1 e^{x_3} + x_2, x_1 e^{x_2})$$

$$Y = (x_1 x_2 e^{x_3}, x_1 + x_3, x_1^2 x_3 - x_2)$$

و f الدالة الحقيقية :

$$f : \Re^3 \longrightarrow \Re$$

$$(p_1, p_2, p_3) \longrightarrow f(p) = p_1 p_2 - p_3$$

والمطلوب إيجاد كل من :

$i.$ $D_Y X(-1,2,1)$ $\quad ii.$ $D_X Y(1,-1,2)$

$iii.$ $D_X Y(f)(1,-1,2)$ $\quad iv.$ $D_X(fY)(1,-2,1)$

$v.$ df $\quad vi.$ $(X \otimes Y)_{(1.01)}$

التمرين السادس:

لتكن :

$$y_1 = x_1 e^{x_2} \quad , \quad y_2 = 2x_2 - x_1^2$$

دالتين حقيقيتين على $\Re^2$ و

$$V = (x_1 + e^{x_2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$W = (x_2 - 1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Z = x_1^2 e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

ثلاثة حقول متجهات على $\Re^2$.

$i.$ أثبت أن (y_1, y_2) تشكل نظاماً إحداثياً على $\Re^2$.

$ii.$ اكتب القاعدة الثنوية dx_1, dx_2 في النقطة $p(1,0)$ بدلالة dy_1, dy_2 .

$iii.$ إذا كان ψ التطبيق المعرف بـــ :

$$\psi : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (y_1, y_2)$$

فأوجد $\psi_{*p}(V_p)$ حيث $p(1,0)$

$iv.$ أوجد الجداءات :

$$[V,W] \quad , \quad [W,Z] \quad , \quad [Z,V]$$

$v.$ أوجد الجداء التنسوري :

$$V_p \otimes W_p = t \qquad (\text{حيث } p(1,0))$$

ومن ثم أوجد المركبة $t^{12'}$ وذلك في القاعدة الطبيعية المشاركة للنظام الإحداثي (y_1, y_2) .

Damascus University

دليل المصطلحات العلمية

1- إنكليزي ــ عربي .

2- عربي ــ إنكليزي .

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

إنكليزي ـــ عربي

A

Absolute	مطلق
Addition	جمع
Addition of tensors	جمع التنسورات
Additive	جمعي
Admissible	مقبول
Adverse	معكوس
Affine	تآلفي
Algebra	جبر
Alternate	متناوب
Amount	مقدار
Analyse	يحلل
Analysis	تحليل
Analytic	تحليلي
Angle	زاوية
Annulator	مبدّد
Application	تطبيق
Approximation	تقريب
Arc	قوس
Arc length	طول القوس

Area	مساحة
Associate	مشارك
Associative	تجميعي
Asymptote line	خط مقارب
Asymptotic	مقارب
Atlas	أطلس
Automorphism	تماثل ذاتي
Autoparallel	متواز ذاتياً
Axiom	موضوعة
Axis	محور
Axis of revolution	محور الدوران

B

Base	قاعدة — أساس
Basis	قاعدة — أساس
Belong to	ينتمي إلى
Bijection	تقابل
Bilinear	ثنائي الخطية
Binormal	ثنائي الناظم
Branch	فرع
Bundle	رزمة

C

Canonical	قانوني

Catenary	سلسلي
Catenoid	سطح سلسلي
Center	مركز
Chain rule	قاعدة السلسلة
Chart	خارطة
Christoffel symbol	رمز كريستوفل
Circle	دائرة
Circular	دائري
Circumference	محيط
Class	صنف–صف
Closure	غلاقة
Coefficient	معامل
Coincide	يتطابق
Collection	جماعة
Column	عمود
Common	مشترك
Commutative	تبديلي
Compact	متراص
Compatible	منسجم
Complete	تام
Completion	إتمام
Component	مركبة

Composition	تركيب
Condition	شرط
Cone	مخروط
Connected	متصل-مترابط
Connection	صلة
Constant	ثابت
Contact	تلامس
Continuous	مستمر
Contraction	تقلص
Contravariant	مخالف التغير
Contravariant tensor	تنسور مخالف التغيير
Convention	اصطلاح
Coordinate	إحداثي
Coordinate neighborhood	جوار إحداثي
Covariant	موافق التغيير
Covariant tensor	تنسور موافق التغيير
Covector	متجه مقابل
Curvature	تقوس
Curvature of a surface	تقوس سطح
Curve	منحن
Cusp	قرنة
Cycle	دورة

Cycloid	دويري
Cylinder	أسطوانة
Cylindrical surface	سطح اسطواني

D

Define	يعرّف
Definition	تعريف
Derivative	مشتق
Determinant	معين
Developable	قابل للنشر
Developable surface	سطح قابل للنشر
Diffeomorphism	تماثل تفاضلي
Differentiable	قابل للمفاضلة
Differential	تفاضل
Differential geometry	هندسة تفاضلية
Dimension	بعد
Directed	موجّه
Direction	اتجاه- (منحى)
Discriminant	مايز - (مميز)
Division	قسمة
Dot product	جداء نقطي
Dual	ثنوي
Dual space	فضاء ثنوي

E

Edge of regression	حزف الإنكفاء
Element	عنصر
Element of area	عنصر مساحة
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	مجسم قطع ناقص
Elliptic	ناقصي
Envelope	غلاف (مغلف)
Equation	معادلة
Equivalence	تكافؤ
Equivalence class	صف تكافؤ
Equivalence relation	علاقة تكافؤ
Euclidean	اقليدي
Expansion	منشور
Expansive	ناشر
Expression	عبارة
Exterior	خارج
Exterior product	جداء خارجي

F

Family	عائلة
Family of surfaces	عائلة سطوح
Fiber = fibre	ليف
Fiber bundle	رزمة ليفية

Field	حقل
Form	شكل
Function	دالة
Fundamental	أساسي

G

Geodesic	جيوديزي
Geometry	الهندسة
Global	شامل
Globalization	اشمال
Graph	بيان
Group	زمرة

H

Helicoid	مجسم لولبي - سطح لولبي
Helix	لولب
Homeomorphism	تماثل مستمر
Homomorphism	تشاكل
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي
Hyperbolic paraboloid	مجسم قطع مكافئ زائدي
Hyperboloid	مجسم قطع زائد
Hypothesis	فرض

I

Identical	متطابق
Identify	يطابق
Identity	متطابقة
If and only if	إذا وفقط إذا
Image	صورة
Implicit	ضمني
Imply	يقتضي
Independent	مستقل
Index	دليل
Indicatrix	مبين (دليل)
Induce	يحدث
Induced	محدث
Infection	انعطاف
Initial	ابتدائي
Injective	تطبيق متباين
Inner	داخلي
Integral	تكامل
Integral curve	منحن تكاملي
Interior	داخل
Interval	فترة (مجال)
Invariant	لا متغير
Inverse	معاكس

Isoganal	متزاو
Isogonal trajectory	مسار متزاو
Isometric	متقايس
Isometric surfaces	سطوح متقايسة
Isometry	تقايس
Isomorphism	تماثل
Isotropic	متخاصص

J

Jacobian	يعقوبي

K

Knot	عقدة
Kronecker symbol	رمز كرونكر

L

Leaf	ورقة
Length	طول
Limit	نهاية
Line	خط
Linear	خطي
local	محلي
Locally	محلياً
Longitude	خط طول

M

Manifold	منطو (متنوع ـــ متعدد)
Map	تطبيق
Mapping	تطبيق
Matrix	مصفوفة
Maximal	أعظمي
Mean	وسط
Mean Curvature	تقوس وسطي
Measurable	قابل للقياس
Meridian	خط طول
Metric	مقياس – مترك
Minimal	أصغري
Minimal surface	سطح أصغري
Mixed tensor	تنسور (موتر) مختلط
Module	حلقية
Multi-index	متعدد الأدلة
Multilinear	متعدد الخطية
Multiplication	ضرب
Multivector	متعدد المتجهات

N

Natural	طبيعي
Neighbourhood	جوار
Net	شبكة

Norm	معيار (نظيم)
Normal line	مستقيم ناظمي
Normal to a surface	ناظم على سطح
Number	عدد

O

Open	مفتوح
Operation	عملية
Operator	مؤثر
Order	مرتبة
Orthogonal	متعامد
Osculating	ملاصق
Outer	خارجي

P

Parabola	قطع مكافئ
Parabolic	مكافئي
Paraboloid	مجسم قطع مكافئ
Paracompact	مثل التراص
Parallel	متواز
Parameter	وسيط
Parameterization	توسيط
Parametric	وسيطي
Partition	تجزئة

Patch	رقعة
Path	طريق (ممر)
Permutation	تبديل
Permutation group	زمرة التباديل
Piecewise	قطعياً
Planar	سوي
Plane	مستو
Point	نقطة
Pole	قطب
Position	موضع
Position vector	متجه الموضع
Positive	موجب
Positive definite	موجب بالتحديد
Problem	مسألة
Product	جداء
Projection	إسقاط
Projective	إسقاطي
Proof	برهان
Proper	فعلي
Proportional	متناسب
Pseudospherical surface	سطح شبه كروي

Q

Quadratic	تربيعي
Quantity	كمية
Quotient	خارج القسمة

R

Radius	نصف قطر
Radius of curvature	نصف قطر التقوس
Range	مدى
Rank	رتبة
Real	حقيقي
Real valued function	دالة حقيقية القيمة
Reciprocal	مقلوب
Rectifiable curve	منحن قابل للقياس
Rectifying plane	مستو مقوم
Region	منطقة
Regular	نظامي
Relation	علاقة
Representation	تمثيل
Restriction of a function	اقتصار دالة
Revolution	دوران
Right	قائم
Right line	خط مستقيم
Ring	حلقة

Row	صف
Row matrix	مصفوفة سطرية
Rule	قاعدة
Ruled	مسطر
Ruled surface	سطح مسطر

S

Saddle	سرجي
Saddle point	نقطة سرجية
Satisfy	يحقق
Scalar	سلمي
Section	مقطع
Sense	منحى
Separable	قابل للفصل
Separable space	فضاء قابل للفصل
Set	مجموعة
Sheet	شطر
Sheet of a surface	شطر سطح
Sign	إشارة
Simple	بسيط
Skew-symmetric	متناظر تخالفياً
Smooth	أملس
Solution	حل

Solve	يحل
Space	فضاء
Space curve	منحن فضائي
Span	يولّد
Spanned	مولد
Spanning	مولّد
Sphere	كرة
Stereographic	مجسادي
Straight	مستقيم
Straight line	خط مستقيم
Strict	قطعي
Structure	بنية
Subgroup	زمرة جزئية
Submanifold	منطو جزئي (متعدد جزئي)
Subscript	دليل سفلي
Subset	مجموعة جزئية
Subspace	فضاء جزئي
Subtraction	طرح
Sum	مجموع
Superscript	دليل علوي
Support	حامل
Surface	سطح

Surface of revolution	سطح دوراني
Surjection	تطبيق غامر
Symbol	رمز
Symmetric	متناظر
Symmetric form	شكل متناظر
Symmetric group	زمرة متناظرة
System	نظام

T

Tangent	مماس
Tangent plane	مستو مماس
Tangential	مماسي
Tend to	يؤول إلى
Tensor	تنسور ـــ موتر
Tensorial	تنسوري ـــ موتري
Term	حد
Theorem	مبرهنة
Theory	نظرية
Topological	طبولوجي
Topological manifold	منطو طبولوجي (متعدد طبولوجي)
Topology	طبولوجيا
Torsion	فتل (التفاف)
Torus	طارة

Torus ring	طارة حلقية
Total	كلي
Total curvature	تقوس كلي
Trace	أثر
Trajectory	مسار
Transform	يحول
Translation	انسحاب
Transport	نقل
Transpose of a matrix	منقول مصفوفة
Trivial	تافه
Trivial solution	حل تافه
Type	نمط

U

Unique	وحيد
Uniqueness	وحدانية
Unit	وحدة
Unit sphere	كرة الوحدة
Unit vector	متجه الوحدة
Unparametrized	لا وسيطي

V

Valid	صالح
Value	قيمة

Vanish	ينعدم
Variable	متغير
Variation of coordinates	تغيير الإحداثيات
Vector	متجه
Vector field	حقل متجهات
Vector valued function	دالة متجهية القيمة
Vicinity	جيرة

Damascus University

عربي ــ إنكليزي

ا

ابتدائي	*Initial*
اتجاه- (منحى)	*Direction*
إتمام	*Completion*
أثر	*Trace*
إحداثي	*Coordinate*
إذا وفقط إذا	*If and only if*
أساسي	*Fundamental*
أسطوانة	*Cylinder*
إسقاط	*Projection*
إسقاطي	*Projective*
إشارة	*Sign*
اشمال	*Globalization*
اصطلاح	*Convention*
أصغري	*Minimal*
أطلس	*Atlas*
أعظمي	*Maximal*
اقتصار دالة	*Restriction of a function*
اقليدي	*Euclidean*
الهندسة	*Geometry*
أملس	*Smooth*

Translation	انسحاب
Infection	انعطاف

ب

Proof	برهان
Simple	بسيط
Dimension	بعد
Structure	بنية
Graph	بيان

ت

Trivial	تافه
Affine	تآلفي
Complete	تام
Permutation	تبديل
Commutative	تبديلي
Partition	تجزئة
Associative	تجميعي
Analysis	تحليل
Analytic	تحليلي
Quadratic	تربيعي
Composition	تركيب
Homomorphism	تشاكل
Application	تطبيق

Map	تطبيق
Mapping	تطبيق
Surjection	تطبيق غامر
Injective	تطبيق متباين
Definition	تعريف
Variation of coordinates	تغيير الإحداثيات
Differential	تفاضل
Bijection	تقابل
Isometry	تقايس
Approximation	تقريب
Contraction	تقلص
Curvature	تقوس
Curvature of a surface	تقوس سطح
Total curvature	تقوس كلي
Mean Curvature	تقوس وسطي
Equivalence	تكافؤ
Integral	تكامل
Contact	تلامس
Isomorphism	تماثل
Diffeomorphism	تماثل تفاضلي
Automorphism	تماثل ذاتي
Homeomorphism	تماثل مستمر

تمثيل	*Representation*
تنسور ـــ موتر	*Tensor*
تنسور (موتر) مختلط	*Mixed tensor*
تنسور مخالف التغيير	*Contravariant tensor*
تنسور موافق التغيير	*Covariant tensor*
تنسوري ـــ موتري	*Tensorial*
توسيط	*Parameterization*

ث

ثابت	*Constant*
ثنائي الخطية	*Bilinear*
ثنائي الناظم	*Binormal*
ثنوي	*Dual*

ج

جبر	*Algebra*
جداء	*Product*
جداء خارجي	*Exterior product*
جداء نقطي	*Dot product*
جماعة	*Collection*
جمع	*Addition*
جمع التنسورات	*Addition of tensors*
جمعي	*Additive*
جوار	*Neighbourhood*

جوار إحداثي	*Coordinate neighborhood*
جيرة	*Vicinity*
جيوديزي	*Geodesic*

ح

حامل	*Support*
حد	*Term*
حرف الإنكفاء	*Edge of regression*
حقل	*Field*
حقل متجهات	*Vector field*
حقيقي	*Real*
حل	*Solution*
حل تافه	*Trivial solution*
حلقة	*Ring*
حلقية	*Module*

خ

خارج	*Exterior*
خارج القسمة	*Quotient*
خارجي	*Outer*
خارطة	*Chart*
خط	*Line*
خط طول	*Longitude*
خط طول	*Meridian*

Right line	خط مستقيم
Straight line	خط مستقيم
Asymptote line	خط مقارب
Linear	خطي

د

Circle	دائرة
Circular	دائري
Interior	داخل
Inner	داخلي
Function	دالة
Real valued function	دالة حقيقية القيمة
Vector valued function	دالة متجهية القيمة
Index	دليل
Subscript	دليل سفلي
Superscript	دليل علوي
Revolution	دوران
Cycle	دورة
Cycloid	دويري

ر

Rank	رتبة
Bundle	رزمة
Fiber bundle	رزمة ليفية

رقعة	*Patch*
رمز	*Symbol*
رمز كرونكر	*Kronecker symbol*
رمز كريستوفل	*Christoffel symbol*

ز

زائدي	*Hyperbola*
زاوية	*Angle*
زمرة	*Group*
زمرة التباديل	*Permutation group*
زمرة جزئية	*Subgroup*
زمرة متناظرة	*Symmetric group*

س

سرجي	*Saddle*
سطح	*Surface*
سطح اسطواني	*Cylindrical surface*
سطح أصغري	*Minimal surface*
سطح دوراني	*Surface of revolution*
سطح سلسلي	*Catenoid*
سطح شبه كروي	*Pseudospherical surface*
سطح قابل للنشر	*Developable surface*
سطح مسطر	*Ruled surface*
سطوح متقايسة	*Isometric surfaces*

Catenary	سلسلي
Scalar	سلمي
Planar	سوي

ش

Global	شامل
Net	شبكة
Condition	شرط
Sheet	شطر
Sheet of a surface	شطر سطح
Form	شكل
Symmetric form	شكل متناظر

ص

Vulid	صالح
Row	صف
Equivalence class	صف تكافؤ
Connection	صلة
Class	صنف-صف
Image	صورة

ض

Multiplication	ضرب
Implicit	ضمني

ط

Torus	طارة
Torus ring	طارة حلقية
Topological	طبولوجي
Topology	طبولوجيا
Natural	طبيعي
Subtraction	طرح
Path	طريق (ممر)
Length	طول
Arc length	طول القوس

ع

Family	عائلة
Family of surfaces	عائلة سطوح
Expression	عبارة
Number	عدد
Knot	عقدة
Relation	علاقة
Equivalence relation	علاقة تكافؤ
Operation	عملية
Column	عمود
Element	عنصر
Element of area	عنصر مساحة

غ

غلاف (مغلف)	*Envelope*
غلاقة	*Closure*

ف

فترة (مجال)	*Interval*
فتل (التفاف)	*Torsion*
فرض	*Hypothesis*
فرع	*Branch*
فضاء	*Space*
فضاء ثنوي	*Dual space*
فضاء جزئي	*Subspace*
فضاء قابل للفصل	*Separable space*
فعلي	*Proper*

ق

قائم	*Right*
قابل للفصل	*Separable*
قابل للقياس	*Measurable*
قابل للمفاضلة	*Differentiable*
قابل للنشر	*Developable*
قاعدة	*Rule*
قاعدة — أساس	*Base*
قاعدة — أساس	*Basis*
قاعدة السلسلة	*Chain rule*

قانوني	*Canonical*
قرنة	*Cusp*
قسمة	*Division*
قطب	*Pole*
قطع مكافئ	*Parabola*
قطع ناقص	*Ellipse*
قطعي	*Strict*
قطعياً	*Piecewise*
قوس	*Arc*
قيمة	*Value*

ك

كرة	*Sphere*
كرة الوحدة	*Unit sphere*
كلي	*Total*
كمية	*Quantity*

ل

لا متغير	*Invariant*
لا وسيطي	*Unparametrized*
لولب	*Helix*
ليف	*Fiber = fibre*

م

مؤثر	*Operator*

Annulator	مبدّد
Theorem	مبرهنة
Indicatrix	مبين (دليل)
Vector	متجه
Position vector	متجه الموضع
Unit vector	متجه الوحدة
Covector	متجه مقابل
Isotropic	متخاصص
Compact	متراص
Isoganal trajectory	متزاو
Connected	متصل-مترابط
Identical	متطابق
Identity	متطابقة
Orthogonal	متعامد
Multi-index	متعدد الأدلة
Multilinear	متعدد الخطية
Multivector	متعدد المتجهات
Variable	متغير
Isometric	متقايس
Proportional	متناسب
Symmetric	متناظر
Skew-symmetric	متناظر تخالفياً

Alternate	متناوب
Parallel	متواز
Autoparallel	متواز ذاتياً
Paracompact	مثل المتراص
Stereographic	مجسادي
Hyperboloid	مجسم قطع زائد
Paraboloid	مجسم قطع مكافئ
Hyperbolic paraboloid	مجسم قطع مكافئ زائدي
Ellipsoid	مجسم قطع ناقص
Helicoid	مجسم لولبي - سطح لولبي
Sum	مجموع
Set	مجموعة
Subset	مجموعة جزئية
Induced	محدث
local	محلي
Locally	محلياً
Axis	محور
Axis of revolution	محور الدوران
Circumference	محيط
Contravariant	مخالف التغير
Cone	مخروط
Range	مدى

Order	مرتبة
Component	مركبة
Center	مركز
Area	مساحة
Trajectory	مسار
Isogonal	مسار متزاو
Problem	مسألة
Independent	مستقل
Straight	مستقيم
Normal line	مستقيم ناظمي
Continuous	مستمر
Plane	مستو
Rectifying plane	مستو مقوم
Tangent plane	مستو مماس
Ruled	مسطر
Associate	مشارك
Common	مشترك
Derivative	مشتق
Matrix	مصفوفة
Row matrix	مصفوفة سطرية
Absolute	مطلق
Equation	معادلة

Inverse	معاكس
Coefficient	معامل
Adverse	معكوس
Norm	معيار (نظيم)
Determinant	معين
Open	مفتوح
Asymptotic	مقارب
Admissible	مقبول
Amount	مقدار
Section	مقطع
Reciprocal	مقلوب
Metric	مقياس – مترك
Parabolic	مكافئي
Osculating	ملاصق
Tangent	مماس
Tangential	مماسي
Discriminant	مميز – (مميز)
Curve	منحن
Integral curve	منحن تكاملي
Space curve	منحن فضائي
Rectifiable curve	منحن قابل للقياس
Sense	منحى

Compatible	منسجم
Expansion	منشور
Region	منطقة
Manifold	منطو (متعدد)
Submanifold	منطو جزئي (متعدد جزئي)
Topological manifold	منطو طبولوجي (متعدد طبولوجي)
Transpose of a matrix	منقول مصفوفة
Covariant	موافق التغيير
Positive	موجب
Positive definite	موجب بالتحديد
Directed	موجّه
Position	موضع
Axiom	موضوعة
Spanned	مولد
Spanning	مولِّد

ن

Expansive	ناشر
Normal to a surface	ناظم على سطح
Elliptic	ناقصي
Radius	نصف قطر
Radius of curvature	نصف قطر التقوس
System	نظام

Regular	نظامي
Theory	نظرية
Point	نقطة
Saddle point	نقطة سرجية
Transport	نقل
Type	نمط
Limit	نهاية

هـ

Differential geometry	هندسة تفاضلية

و

Uniqueness	وحدانية
Unit	وحدة
Unique	وحيد
Leaf	ورقة
Mean	وسط
Parameter	وسيط
Parametric	وسيطي

ي

Tend to	يؤول إلى
Coincide	يتطابق
Induce	يحدث
Satisfy	يحقق

Solve	يحل
Analyse	يحلل
Transform	يحول
Identify	يطابق
Define	يعرّف
Jacobian	يعقوبي
Imply	يقتضي
Belong to	ينتمي إلى
Vanish	ينعدم
Span	يولّد

المراجع

1– *ABRAHAM GOETZ .Introduction to Differential Geometry. ADDISON WESLEY PUBLISHING COMPA.*

2– *ALFRED GRAY .Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA.*

CRC PRESS . Boca Raton Boston London New York Washington,D.C.

3– *CHOQUET-BRUHAT . Y Geometrie Differentielle et Systems Exterieurs . DUNOD-PARIS .*

4– *COHN . P . M . Lie Groups-university Press-CAMBRIDGE.*

5– *GODBILLON . C . Geometrie Differentielle et Mecanique Analitique-Hermann-Paris.*

6– *Klingenberg . W. A Course in Differential Geometry. Springer-Verlag New York .*

7– *POSTNICOV . M . Leçons de Geometrie-Algebre Lineaire et Geometrie Differentielle .Edition Mir. Moscou.*

8– *WILLIMOR . T . J . An Introduction to Differential Geometry, Oxford University Press.*

9– محمد سعيد البرني ـــ المدخل في الهندسة التفاضلية ـــ جامعة دمشق

Damascus University

اللجنة العلمية:

ـــ أ. د. محمد سعيد البرني

ـــ أ. د. محمد غسان سنوبر

ـــ أ. م. د. طالب غريبة

المدقق اللغوي:

الدكتور أسامة اختيار

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات