



الجمهورية العربية السورية

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة في نظرية الفوضى وتطبيقاتها

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات فرع "الجبر والهندسة"

إشراف الدكتورة:

نور غازي

أستاذة مساعدة في كلية العلوم جامعة دمشق

إعداد الطالبة :

غفران أحمد راتب الريابي

2025م

إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم في الصالحات. اللهم علمني ما ينفعني وانفعني بما علمتني وزدني علماً. إلى من تقف كلمات التعبير عاجزة أمام إخلاصها في العطاء والتي كان لدعمها الأكاديمي أثر بليغ في إنجاز هذا العمل خالص التقدير والعرفان لعلمكم وتوجيهكم.

مشرفتي الأستاذة الدكتورة نور غازي

كما أتقدم بجزيل الشكر إلى اساتذتي أعضاء لجنة الحكم الموقرين على ما تكبدوه من عناء في قراءة البحث المقدم وإغنائه بمقترحاتهم القيمة.
أعضاء لجنة الحكم

إلى نبع الحنان الذي لا ينضب وصوت الدعاء الذي رافقني في كل خطوة ، شكراً
لحبك اللامشروط ، لصبرك عليّ ولإيمانك بي حتى حين لم أومن بنفسي.

أمي الحبيبة

إلى من علمني أن الإرادة تصنع المعجزات وأن الطريق إلى القمة يبدأ بخطوة ،
شكراً لحكمتك وصلابتك ولكلماتك التي كانت دائماً وقوداً لعزيمتي.

أبي الغالي

إلى شريك الدرب و الروح الذي وقف إلى جانبي في لحظات التعب الإنهاك ،
والذي تحمّل غيابي وانشغالي بصدرٍ رحب ، شكراً لاحتوائك ودعمك الذي لا يقدر
بثمن.

زوجي الدكتور ياسر العيد

إلى فلذة كبدي وثمره فؤادي وزينة حياتي ومصدر إلهامي ، وأملّي حين تضيق بي
الدنيا ، أنتم الحلم الذي تحقق وجودكم في حياتي هو المعنى الحقيقي لكل إنجاز .
أولادي باسل وعلاء

إلى من تشاركت معهم تفاصيل الحياة منذ البدايات إلى رفيقات القلب والروح وإلى
الكتف الذي احتميت به في لحظات ضعفي لكم في قلبي مكان لا يزاكمه أحد ولكم
في هذا الإنجاز نصيب لا يقدر بثمن

إخوتي وأخواتي

إلى تلك القلوب النبيلة التي احتضنتني بمحبة خالصة وفتحت لي أبوابها دون
تردد، إلى من منحوني شعور الانتماء منذ اللحظة الأولى ، وكانوا لي عائلة بكل ما
تحمله الكلمة من دفء وصدق ووفاء .
إلى أم زوجي التي لم تكن فقط أمّاً لابنها بل كانت أمّاً ثانية لي بحنانها ورقّيها
وصدق دعائها . وإلى والده الكريم صاحب الحكمة والوقار الذي تعلمت من هدوءه
الكثير . وإلى إخوانه وأخواته الذين غمروني بمحبتهم ودعمهم فكنتم لي أخوة
بالروح لا بالقراية فقط لكم مني خالص الشكر

عائلة السيّد عماد العيد المح

الفهرس:

الملخص.....	6
المقدمة	8
1. الفصل الأول: النظام الديناميكي أحادي البعد (النقطة الثابتة، الاستقرار، الدورية)	14
1.1. مفهوم النظام الديناميكي منفصل الوقت.....	15
2.1. استقرار النقاط الثابتة.....	25
3.1. النقاط الدورية والمدارات الدورية واستقرارها	28
2. الفصل الثاني: (الأسس التي يقوم عليها تعريف الفوضى).....	37
1.2. كثافة مجموعة النقاط الدورية	38
2.2. التعدي	43
3.2. الاعتماد الحساس على الشروط الابتدائية.....	49
4.2. تعريف الفوضى.....	53
3. الفصل الثالث (دور أس لبيانوف في تحديد الفوضى).....	60
1.3. دور أس لبيانوف في تحديد الفوضى	60
2.3. آلية عمل أس لبيانوف	60

4. الفصل الرابع(تطبيق نظرية الفوضى في التشفير)	65
1.4. التشفير باستخدام المعادلة اللوجستية	66
2.4. التشفير باستخدام تطبيق قط آرنولد	67
3.4. التشفير باستخدام معادلات لورنز الفوضوية	72
الرؤى المستقبلية	82
الخاتمة	83
المصطلحات العلمية	84
المراجع العلمية	86
الملخص باللغة الانكليزية	88

الملخص

نظرية الفوضى هي فرع من فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة خصائص الأنظمة الديناميكية التي تعتمد في سلوكها على مجموعة من الشروط الابتدائية، والتي تدرس السلوك الديناميكي للأنظمة التي تتسم بالتعقيد واللاتنظيم رغم أنها قد تكون خاضعة لقوانين رياضية محددة، تظهر هذه الأنظمة سلوكاً يبدو عشوائياً أو غير منتظم حتى وإن كانت تعمل وفق معادلات محددة وواضحة.

الفوضى لا تعني الفوضوية بالمعنى التقليدي (أي العشوائية)، بل تعني الأنماط غير القابلة للتنبؤ والتعقيد الذي ينشأ من هذه الأنماط، ومن أبرز خصائص نظرية الفوضى هي الحساسية للظروف الأولية، هذه الظاهرة تعني أن التغيرات الصغيرة جداً في الظروف الأولية للنظام قد تؤدي إلى نتائج كبيرة ومختلفة في المستقبل، مثال على ذلك هو "أثر الفراشة" الذي يقال فيه أن رفرفة جناحي فراشة في مكان ما يمكن أن يؤدي إلى تغيرات كبيرة في الطقس في مكان آخر.

أيضاً من أهم خصائص نظرية الفوضى هو الاحتمية، أي أنه حتى مع معرفة كامل الشروط الأولية يصبح من المستحيل التنبؤ بسلوك النظام الديناميكي على المدى الطويل، وأبرز مثال على ذلك دراسة النماذج السكانية التي تُظهر سلوكاً عشوائياً، ولدراسة مثل هذه الأنظمة سنقدم في بحثنا دراسة عن الدالة اللوجستية وكيف تطورت لتدرس هذا النمو السكاني بطريقة منطقية وواقعية، إذن الدالة اللوجستية هي طريقة رياضية تستخدم لدراسة ديناميكيات النمو السكاني.

بالمجمل إنَّ نظرية الفوضى تُظهر كيف يمكن لأنظمة محددة بالقوانين أن تنتج سلوكاً غير منظم وعشوائي مما يجعل التنبؤ بالمستقبل أمر شبه مستحيل.

وهذا ما يجسّد من وجهة نظري أن المستقبل يحكمه قدرة الله عزّ وجلّ لا القوانين والمعادلات الرياضية، وأنّ العلم مهما تقدّم وتطوّر لا يمكنه التنبؤ الحتمي بمجريات المستقبل كما يعتقد العالم نيوتن وغيره من العلماء.

سنقدّم في بحثنا دراسة موجزة حول مفهوم نظرية الفوضى في النظام الديناميكي أحادي البعد، وسنشرح مثلاً مهماً في الفصل الأول يقدّم دراسة لنمو نموذج من السكان بالاعتماد على الدالة اللوجستية، كما سنقدم شرحاً لمفهوم الاستقرار مدعماً بالأمثلة، أما الفصل

الثاني سنشرح فيه أهم ثلاثة مفاهيم ترتكز عليها نظرية الفوضى وهي كثافة النقاط الدورية لدالة ومفهوم تعدي دالة وحساسية دالة للشروط الأولية.

كما سنعرض في الفصل الثالث مفهوم أس لبيانوف بفقرة رئيسية نشرح دور أس لبيانوف في تحديد الفوضى، وسنختم هذا العمل بالفصل الرابع والأخير الذي سنتحدث فيه عن تطبيق عملي لنظرية الفوضى في علم التشفير.

الكلمات المفتاحية :

نظام ديناميكي، نقطة ثابتة ، نقطة دورية ، مدار دوري ، التعدي ، الحساسية، الفوضى، أس لبيانوف ، التشفير.

مقدمة

فراشة ترفرف بجناحيها في مكان ويضرب إعصار في مكان آخر على بعد أميال، هل يمكن أن يكون هذان الحدثان مرتبطان؟ هذا القول المأثور معروف لدى الكثير لكن القليل من يفهمه، يجب ذكر أنه في الواقع رفرفة أجنحة فراشة ليست سبب أي كوارث طبيعية، ولكن الفكرة في هذا المثال تبين القوة الدافعة لدراسة نظرية الفوضى، والموضوع المشترك بين هذا المثال ونظرية الفوضى هو الاعتماد الحساس على الشروط الابتدائية، إذ يعتبر مجموعة كبيرة من العلماء نظرية الفوضى هي الثورة العلمية الثالثة في القرن العشرين مرتبة مع النسبية وميكانيكا الكم.

تبدأ قصة نظرية الفوضى مع اكتشاف نيوتن معادلات لدراسة حركة الكواكب ومداراتها في أواخر القرن السابع عشر حيث اعتقد نيوتن أن العالم آنذاك عبارة عن آلة ميكانيكية، وأن أي حدث يحصل في المستقبل يمكن التنبؤ به طالما نعلم جميع الشروط الابتدائية المحيطة بهذا النظام الرياضي، ومن ثم جاء العلماء لابلاس وماكسويل وأكدا ما توصل إليه نيوتن بأن التغيرات الابتدائية البسيطة في الشروط الابتدائية لا تحدث فرقاً كبيراً في النتائج وإن أحدثت فرقاً فإن هذا الفرق سيكون صغيراً جداً ويمكن إهماله.

وفي عام 1900 جاء عالم الرياضيات الفرنسي المشهور هنري بوانكاريه وقام بدراسة حركة الكواكب ومداراتها، ولكنه لم يستخدم الشروط الابتدائية نفسها التي استخدمها نيوتن بل قام بتغييرها بشكل بسيط وتفاجاً بأن النتائج كانت مختلفة كلياً عما توصل إليه نيوتن، وهنا طرح بوانكاريه سؤاله، طالما العالم نظام محكم يمكن التحكم به عن طريق القوانين والمعادلات، لماذا يواجه علماء الأرصاد صعوبات في التنبؤ بالطقس وخصوصاً على المدى الطويل؟ لماذا يظهر الإعصار وكأنه حدث عن طريق الصدفة؟ من المؤكد أننا لا يمكننا الإحاطة بشكل دقيق بجميع الشروط الابتدائية، أي أن أي خطأ بسيط في قياس درجات الحرارة (أجزاء من الدرجة) في مكان ما يجعل الإعصار يحدث في مكان ما ولا يحدث في مكان آخر، ومن هنا برزت جذور نظرية الفوضى التي تدرس الأنظمة الديناميكية التي تتمتع بحساسية التغيرات في الشروط الابتدائية، لم يهتم العلماء لما توصل إليه بوانكاريه، وكادت النظرية أن تموت حتى جاء عالم الرياضيات والأرصاد الشهير إدوارد لورنز الذي كان من أوائل من بحث في نظرية الفوضى بعد العالم هنري بوانكاريه، تم تقديم ظاهرة

نظرية الفوضى إلى العالم الحديث من قبل إدوارد لورنز عام 1970.

إذاً نظرية الفوضى هي فرع من فروع الرياضيات التي يتعامل مع الأنظمة التي تبدو منظّمة ولكن في الواقع تبدي سلوكيات فوضوية، والأنظمة التي تبدو فوضوية ولكنها في الواقع تخضع لنظام أساسي.

وباعتبار أن دراسة نظرية الفوضى جزء لا يتجزأ من دراسة الأنظمة الديناميكية من المهم تقديم بعض الخلفيات الرياضية للأنظمة الديناميكية، حيث يتناول الفصل الأول من هذه الرسالة الأنظمة الديناميكية أحادية البعد ويشمل هذا الفصل أربعة فقرات، وهي مفهوم النقطة الثابتة ومدارها، واستقرار النقطة الثابتة، والنقاط الدورية والمدارات الدورية.

وقد توصلنا في هذا الفصل إلى عدة نتائج مهمة وهي:

- أهمية الدالة اللوجستية في دراسة النماذج السكانية، حيث توصلنا الدالة اللوجستية لنتائج أكثر منطقية.
- دور النقاط الثابتة في فهم سلوك الأنظمة الرياضية.
- دور مدار نقطة ثابتة في تحديد ما إذا كانت هذه النقطة تمثل حالة مستقرة أم غير مستقرة.
- نتيجة: شرط أن يكون التابع $I \rightarrow I$: f يمتلك نقطة ثابتة، أن يحقق $f(I) \subset I$.
- إثبات النتيجة [2] في هذا الفصل.
- تطبيق التعاريف والمبرهنات الواردة في الفصل على الدالة اللوجستية $f(x) = rx(1 - x)$

أما الفصل الثاني فسنعرض الفوضى في النظام الديناميكي أحادي البعد، ويشمل أربعة فقرات هي كثافة النقاط الدورية لدالة، ومفهوم التعدي لدالة، وحساسية الدالة للشروط الأولية، وينتهي الفصل بتعريف رياضي للفوضى.

أيضاً توصلنا في دراستنا لهذا الفصل لعدة نتائج وهي:

- توضيح العلاقة التي تربط بين كثافة النقاط الدورية والتعدي والاعتمادية الحساسة على الشروط الأولية بتعريف الدالة الفوضوية.

- تم العمل على إثبات كل من المبرهنات (2.2.2) و (3.2.2) و (1.3.2) و (2.3.2) .

- تم إثبات أن عكس المبرهنة (3.4.2) ليس بالضرورة صحيح من خلال ذكر مثال ينفي صحة العكس وإثباته.

كما سنعرض في الفصل الثالث مفهوم أس ليبانوف بفقرة رئيسية واحدة تشرح دور أس ليبانوف في تحديد الفوضى في الدول أحادية البعد، وسنختتم هذا العمل بالفصل الرابع والأخير والذي سنتحدث فيه عن تطبيق نظرية الفوضى في تشفير الصور والنصوص.

مشكلة البحث:

يمكن وصف العديد من الظواهر الفيزيائية أو غيرها من الظواهر الواقعية بالنماذج الرياضية، حيث يوصف النظام الديناميكي بنموذج رياضي مقدم من خلال معادلات رياضية جبرية، بشكل عام معظم هذه النماذج القائمة على المشكلات الحقيقية يصعب حلها خصوصاً أن مجموعة عديدة من الأنظمة الديناميكية غير الخطية تنتشر في مجالات مختلفة من الدراسة التي تتطور مع مرور الوقت إلى فوضى وحساسية شديدة للمعطيات الأولية (الشروط الابتدائية).

تم بالفعل ملاحظة سلوك أنظمة فوضوية من قبل العديد من العلماء، ولكن لم يتم التحقق وتدقيق فيها بشكل صحيح بالرغم من تطور التقنيات الحديثة في النصف الثاني من القرن التاسع عشر

تساؤلات البحث:

ولحل مشكلة البحث سنحاول الإجابة عن الأسئلة التالية:

- 1- ما هو النظام الديناميكي؟
- 2- ما هو مفهوم نظرية الفوضى في النظم الديناميكي أو أحادية البعد؟
- 3- هل توجد أداة رياضية لتحديد نظرية الفوضى في الأنظمة الديناميكية؟
- 4- كيف يمكننا تطبيق نظرية الفوضى في إحدى مجالات العلوم الحديثة؟

هدف البحث:

- 1- تقديم دراسة مبسطة حول نظرية الفوضى في الأنظمة الديناميكية أحادية البعد ومحاولة فهم مفهوم الاستقرار في هذه الأنظمة.
- 2- تقديم تعريفاً رياضياً للفوضى كما سنبحث في أداة رياضية نحدد من خلالها الفوضى في نظام معين ألا وهي أس لبيانوف، كما سنناقش تطبيقها لنظرية الفوضى في التشفير.

أهمية موضوع البحث:

تعتبر مجموعة كبيرة من العلماء الفوضى الثورة العلمية الثالثة في القرن العشرين مرتبة مع النسبية وميكانيكا الكم. حيث تم العثور على الفوضى في التفاعلات الكيميائية والطقس وحركة الكويكبات وحركة الذرات والتقلبات السكانية للحيوانات والنباتات

وغيرها، ومن هنا تأتي أهمية الدراسة في نظرية الفوضى التي اجتازت الحدود الفاصلة بين الاختصاصات العلمية واستطاعت أن تجمع مفكرين من حقول علمية مختلفة، علاوة على ذلك فإن نظرية الفوضى تناقش حالات الاستقرار للنظم الرياضية التي تعد من أهم سمات العلم الرياضي، كما تكمن أهمية موضوع البحث في التطبيقات المتعددة لنظرية الفوضى في العلوم المختلفة التي سنناقش منها تطبيق النظرية في علم التشفير.

الدراسات السابقة:

تبدأ قصة نظرية الفوضى من معادلات اسحاق نيوتن التي استنتجها من دراسة حركة الكواكب ومداراتها في مجموعتنا الشمسية، حيث افترض نيوتن حل لمعادلات تفاضلية بشروط ابتدائية معينة فحصل على مجموعة من الحلول والتوابع البيانية التي تصف حركة الكواكب ومداراتها، وفي بداية القرن العشرين 1900 قام عالم الرياضيات المشهور هنري بوانكاريه بدراسة حركة الكواكب ومداراتها ولكنه لم يستخدم نفس الشروط الابتدائية التي استخدمها نيوتن، بل قام بتغييرها بشكل بسيط فكانت النتيجة المفاجئة أنه قد توصل لنتائج مختلفة تماماً عن نتائج نيوتن، وبعد عدة تغييرات في الشروط الأولية لحركة الكواكب وجد بوانكاريه أن كل تغيير بسيط سيعطي نتيجة جديدة لا يمكن التنبؤ بها، لذلك عاده ما تنسب نظرية الفوضى إلى العالم هنري بوانكاريه.

لاحقاً عام 1960 قام عالم المناخ إدوارد لورنز بصياغة مصطلح نظرية الفوضى لأول مرة، لاحظ أن نتائج التنبؤات المتعلقة بالطقس تختلف اختلافاً كبيراً عما يستخدم رقمين بعد الفاصلة عن النتائج التي قد يحصل عليها عندما استخدم أربعة أو ستة أرقام بعد الفاصلة، لخص لورانس من دراسته نظرية الفوضى وأنظمة الطقس جملة الشهيرة

"هل يمكن لرصف الجناح فراشة في البرازيل أن تثير إعصار في ولاية تكساس"

وبالتالي عرفت نظرية الفوضى فيها بعد باسم "أثر الفراشة".

ومن ثم استعملت كلمة الفوضى لأول مره في سياق رياضي عام 1975 في بحث بعنوان "الدورة الثالثة تقتضي الفوضى" للمؤلفين

جيمس يورك وتلميذه تين ين لي، ويوظف هذا المصطلح الآن لوصف سلوك تطبيقات رياضية حيث تبدو لأول وهلة أنها تسلك سلوكاً عشوائياً وغير مرتب ولكنها في الواقع تخضع لقواعد تحكمها، منذ ذلك الحين أصبح اسم نظرية الفوضى يطلق على دراسة الأنظمة الديناميكية التي تتمتع بتأثير الفراشة الذي اكتشفه العالم ادوارد لورانس مسبقاً، كما قدم تم منح يورك جائزة في اليابان عام 2003 تقديراً لمساهمته كمؤسس وزعيم نظرية الفوضى.

1. الفصل الأول: النظام الديناميكي أحادي البعد (النقاط الثابتة، الاستقرار، الدورية):

مقدمة:

علاقة الأنظمة الديناميكية بنظرية الفوضى هي علاقة وثيقة، حيث تعتبر الفوضى نوعاً خاصاً من السلوك الذي قد يظهر في الأنظمة الديناميكية غير الخطية، لفهم هذه العلاقة بشكل أوضح يمكن توضيح النقاط التالية :

- الأنظمة الديناميكية هي الأنظمة التي تتطور مع مرور الوقت وفقاً لقواعد رياضية معينة، هذه الأنظمة قد تكون خطية أو غير خطية ويمكن أن تشمل العديد من المجالات مثل الميكانيكا والاقتصاد وعلم الأحياء والمناخ، في حالة الأنظمة الديناميكية الخطية يكون سلوك النظام قابلاً للتنبؤ ومرتبئاً بحلول رياضية ثابتة أما في الأنظمة الديناميكية غير الخطية فقد يظهر سلوك أكثر تعقيداً يصعب التنبؤ به .
- نظرية الفوضى هي فرع من فروع الرياضيات الذي يدرس السلوك غير المنتظم أو العشوائي للأنظمة الديناميكية غير الخطية، رغم أن هذه الأنظمة تعتمد على معادلات رياضية ثابتة إلا أن سلوكها قد يكون غير قابل للتنبؤ بشكل دقيق على المدى البعيد بسبب الحساسية الكبيرة للظروف الأولية، هذه الظاهرة تعرف عادة "بتأثير الفراشة" حيث أن التغيرات الطفيفة في البداية قد تؤدي إلى نتائج متباينة بشكل كبير.
- تكمن العلاقة بين الأنظمة الديناميكية والفوضى في أن الأنظمة الديناميكية غير الخطية تعتبر المصدر الرئيسي لنشوء الفوضى، حيث أن الأنظمة غير الخطية يمكن أن تظهر سلوكاً فوضوياً إذا كانت تعتمد على معادلات ديناميكية معقدة، مما يعني أن التنبؤ بما سيحدث في المستقبل يصبح صعباً جداً رغم أن النظام نفسه لا يحتوي على عشوائية حقيقية .
- إجمالاً نظرية الفوضى هي دراسة سلوك الأنظمة الديناميكية غير الخطية التي تظهر سلوكاً غير منتظم، إذ أن هناك نوعان من الأنظمة الديناميكية، نظام ديناميكي منفصل الوقت إذ يتم تطبيق القاعدة المتبعة في هذا النظام في أوقات منفصلة، حيث

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

- يأخذ النظام الرياضي النتيجة الحالية كمدخلات ويقوم بتحديث حالة النظام وإنتاج حالة جديدة كمخرجات، والنوع الثاني هو الأنظمة الديناميكية المستمرة يشابه النظام الديناميكي منفصل الوقت ولكن الفرق أنه في هذه الحالة يتم أخذ أوقات (تكرارات) بفروق صغيرة جداً.

وتوصلنا في هذا الفصل إلى عدة نتائج مهمة وهي:

- النموذج اللوجستي أفضل لدراسة نماذج السكان من النموذج الأسّي، حيث يوصلنا النموذج اللوجستي لنتائج منطقية أكثر.
- دور النقاط الثابتة في فهم سلوك الأنظمة الرياضية، حيث تمثل النقاط الثابتة مواقع أو حالات تظل ثابتة عند تطبيق دالة معينة مما يجعلها نقطة مرجعية هامة لفهم سلوك النظام الرياضي، هذه النقاط تعتبر حجر أساس في دراسة الديناميكيات الرياضية، وتوقع سلوكها عند تطبيق التكرارات أو التغييرات.
- المدارات تمثل مسارات النقاط التي تنشأ عند تطبيق الدالة بشكل متكرر وتظهر كيف تتفاعل النقاط المختلفة مع النظام بمرور الوقت، قد تتجذب النقاط المختلفة إلى النقطة الثابتة، أو قد تتحرك بعيداً عنها حسب خصائص الدالة والسلوك الديناميكي للنظام الرياضي، هذا يجعل دراسة المدارات مفيدة في تحديد إذا ما كانت النقاط الثابتة تمثل حالة مستقرة أو غير مستقرة .
- شرط أن يكون التابع المستمر $f: I \rightarrow I$ يمتلك نقطة ثابتة هو أن يكون $f(I) \subseteq I$.
- إثبات النتيجة [2] .
- تطبيق التعاريف والمبرهنات في هذا الفصل على الدالة اللوجستية $f(x) = rx(1 - x)$.

1.1 مفهوم النظام الديناميكي منفصل الوقت: [2]

1.1.1 تعريف [2]:

يعد النظام الديناميكي قاعده تصف التطور الزمني لنموذج رياضي معطى في ظل ظروف معينة، بحيث تكون الحالة الحالية للنظام محددة بشكل كامل من خلال حالته السابقة، أي تتغير تبعاً للقاعدة:

$$X(n) = f(X(n-1))$$

مثال:

ليكن لدينا $X(n)$ أفراد تجمع صنف معين من الكائنات في الوقت n ، وليكن μ يعبر عن معدل نمو السكان من جيل إلى آخر، عندئذ فإن النموذج الرياضي الذي يصف تعداد السكان يُعطى بالصيغة:

$$X(n+1) = \mu X(n) \quad , \quad \mu > 0 \dots \dots (1)$$

إذا كان الشرط الابتدائي $X(0) = x_0$ عندئذٍ بالتكرار نحصل على:

$$x_n = \mu^n x_0 \quad \dots \dots (2)$$

هو حل المعادلة (1)، ونميز الحالات التالية:

- إذا كان $\mu > 1$ فإن عدد السكان يزداد بدون حدود إلى اللانهاية.
 - إذا كان $\mu = 1$ فإن عدد السكان يبقى ثابتاً .
 - إذا كان $\mu < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = 0$ فإن عدد السكان ينقرض في نهاية المطاف.
- نلاحظ أن جميع السيناريوهات المذكورة غير منطقية بالنسبة لمعظم أنواع الكائنات، بل إن من المنطقي أن يزداد عدد السكان إلى قيمة قصوى ثم محدودة حسب أغلب الدراسات في هذا المجال، ونتيجةً لذلك يتم إعطاء نموذج أكثر منطقية من خلال المعادلة التالية:

$$X(n+1) = \mu X(n) (1 - X(n)) \quad , \mu > 0$$

تدعى هذه المعادلة بالمعادلة اللوجستية والتي هي أكثر نموذج رياضي معقول لوصف نمو السكان.

لتوضيح ماسبق نأخذ التابع المعروف على $\mathbb{R}$ وفق الصيغة:

$$f(x) = 3x$$

لنفرض أن x يشير إلى تعداد تجمع صنف معين من الحشرات في مختبر عند وقت ابتدائي محدد و $f(x)$ يشير إلى تعداد الحشرات

بعد مرور ساعة من الوقت، إذا كان تعداد الحشرات الابتدائي 10000 بعد مرور ساعة من الوقت سيصبح تعداد الحشرات 30000

وبعد مرور ساعتين سيكون 90000.

وهكذا إذن هذا المثال يتبع القاعدة: $X(n) = f(X_{n-1}) = 3 X(n - 1)$

نلاحظ أن تعداد الحشرات في هذه الحالة سيزداد بلا حدود، وهذا النوع من النمو يسمى النمو الأسّي، حيث يتم ضرب تعداد الحشرات بعامل ثابت في كل وقت معين، العامل في هذا المثال هو 3 .

وعلى الرغم من أن القاعدة $f(x) = 3x$ قد تكون صحيحة لنطاق معين من تعداد الحشرات فقد تفقد قابليتها للتطبيق في نطاقات أخرى ولحل هذه المشكلة لنرى نموذج محسّن مقدّم بواسطة الدالة:

$$g(x) = 3x(1 - x)$$

حيث x تقاس بالملايين أي نفرض أن $(10000 = 0.01\text{million})$ ، عندما يكون تعداد الحشرات صغير فإن العامل $(1 - x)$ يكون قريب من الواحد و $g(x)$ تتقارب إلى حد كبير مع $f(x)$ ، من جهة أخرى إذا كان تعداد الحشرات بعيداً عن الصفر فإن $g(x)$ لم تعد متناسبة مع تعداد الحشرات x ، إن هذا التأثير يسمى تأثير غير خطي والنموذج المعطى بواسطة $g(x)$ هو مثال على النمو اللوجستي.

باستخدام الآلة الحاسبة يمكننا التحقق من الاختلافات في نتائج كل من $f(x)$ و $g(x)$ ، ولنبدأ بقيمة ابتدائية $x = 0.01$.

n	$f^n(x)$	$g^n(x)$
0	0.01	0.01
1	0.03	0.0297
2	0.09	0.08645373
3	0.27	0.23693844

4	0.81	0.54239586
5	2.43	0.74206490
6	7.29	0.57291343
7	21.87	0.73405089
8	65.61	0.58566054
9	196.83	0.73793228
10	590.49	0.59772515

الجدول (1): انفجار النموذج الأسّي بينما النموذج اللوجستي يقترب من الاستقرار.

يمكننا أن نرى أنه بالنسبة للدالة $g(x)$ فإننا أثبتنا حسابياً أن عدد الحشرات يقترب في نهاية المطاف إلى عدد محدد يتأرجح تقريباً بين القيمتين 0.5 و 0.7 والتي تسمى نقاط ثابتة للتابع g .

كما نرى اختلافات واضحة بين تعداد سكان الحشرات تحت تطبيق النموذجين f و g ، حيث أنه باستخدام النموذج $f(x)$ كان تعداد الحشرات في البداية 0.01 ومع تقدم الوقت نتج عنه تعداد كبير وبشكل عشوائي أما في ظل النظام $g(x)$ نبدأ بنفس تعداد الحشرات 0.01 ونلاحظ أن التعداد يتضاعف كل ساعة تقريباً وفي نهاية المطاف نصل إلى تعداد محدد في هذه الحالة يتراوح تعداد الحشرات بشكل تقريبي بين 0.5 و 0.7 ثم لا يتغير ابداً مرة أخرى، أي أن تعداد الحشرات يملك حدود، أي أن هذا النموذج اللوجستي من التحسينات الرائعة حيث تتوافق مع المنطق ومع رأي العلماء بأن تعداد السكان يجب أن يملك حدوداً تتوافق مع ظروف البيئة وغيرها من العوامل، في هذا المثال نسمي 0.5 و 0.7 نقاط ثابتة لنظام ديناميكي منفصل الوقت.

سنقدم فيما يلي تعريفاً للنقطة الثابتة، حيث تعتبر النقطة الثابتة حالة في النظام الديناميكي، حيث لا يتغير النظام مع مرور الوقت إذا بدأ من هذه النقطة، بعبارة أخرى إذا كان النظام الرياضي بحالة معينة عند هذه النقطة فإنه سيبقى في هذه الحالة ولن يتغير. النقاط الثابتة تلعب دوراً مهماً في فهم سلوك الأنظمة غير الخطية، وتستخدم لتحديد الاستقرار والتذبذبات والتعقيدات التي قد تظهر في النظام مع مرور الوقت .

2.1.1. تعريف: [2]

لتكن لدينا X مجموعة في $\mathbb{R}$ ، وليكن لدينا التابع $f : X \rightarrow X$ ، نقول عن النقطة p من X إنها نقطة ثابتة للتابع f إذا تحقق $f(p) = p$ ، نرمز لمجموعة جميع النقاط الثابتة للتابع f بالرمز $Fix(f)$. نلاحظ أنه من أجل الحصول على نقاط ثابتة لتابع يجب حل المعادلة $f(x) = x$ ، من الناحية البيانية النقطة الثابتة هي نقطة تقاطع الخط البياني للتابع f مع الخط البياني للتابع $y = x$.

أمثلة:

1. بأخذ $X = \mathbb{R}$ ليكن لدينا التابع المعروف وفق $f(x) = 2x(1 - x)$ فإن:

$$Fix(x) = \{0, \frac{1}{2}\}$$

2. بأخذ $X = \mathbb{R}$ وليكن لدينا التابع المعروف وفق $g(x) = x$ عندها:

$$Fix(g) = \mathbb{R}$$

3. بأخذ $X = \mathbb{R}$ وكان التابع $h(x) = x + 4$ عندها:

$$Fix(h) = \emptyset$$

ملاحظات:

1. ليس بالضرورة كل تابع يملك نقاط ثابتة، على سبيل المثال التابع $h(x) = x + 4$ لا يملك نقاط ثابتة .

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

2. يمكن أن يكون عدد النقاط الثابتة لتابع غير منته كما في التابع $g(x) = x$.

3. بعض التوابع تملك نقاط ثابتة لكن يصعب أحياناً الحصول عليها جبرياً، على سبيل المثال لإيجاد النقاط الثابتة للتابع

$f(x) = 2 \sin(x)$ واضح أن $x = 0$ نقطة ثابتة للتابع f وللحصول على النقاط الثابتة الأخرى يتبع طرق عددية لنجد

أن النقطتين الثابتتين الباقيتين هما ± 1.944795452 .

مبرهنة:

ليكن لدينا $f : I \rightarrow I$ تابع مستمر على المجال $I = [a, b]$ ، عندها f يملك نقطة ثابتة.

البرهان:

لنعرف التابع $g(x) = f(x) - x$ ، عندها $g(x)$ أيضاً تابع مستمر، إذا كانت $f(a) = a$ أو

$f(b) = b$ يتم بذلك المطلوب (يتم إثبات المبرهنة)، لذا سنفرض أن $f(a) \neq a$ و $f(b) \neq b$

عندها $g(a) > 0$ و $g(b) < 0$ ، وبالتالي وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطى يوجد $c \in (a, b)$

بحيث $g(c) = 0$ ، هذا يؤدي إلى أن $f(c) = c$ ، أي أن c نقطة ثابتة للتابع f وبذلك يتم المطلوب.

نتيجة(1):

من أجل أي تابع مستمر $f : I \rightarrow I$ إذا حقق $f(I) \subset I$ ، عندها f يملك نقطة ثابتة في I .

توضيح أي أنه إذا أخذنا تابع لا يحقق الشرط السابق ليس بالضرورة أن يملك نقطة ثابتة، حتى لو كان مستمراً على مجال مغلق ومحدود.

سنقدم الآن تعريف مدار نقطة ثابتة الذي يُفهم على أنه مسار النقاط التي يتم الوصول إليها بشكل متكرر حيث يعتبر المدار هو

المسار الذي تسلكه النقاط التي تبدأ من حالة ثابتة تحت تأثير التطبيق التكراري.

3.1.1. تعريف مدار نقطة: [2]

ليكن لدينا X مجموعة من $\mathbb{R}$ وليكن لدينا $f : X \rightarrow X$ ، نعرف مدار النقطة x من X عن طريق التابع f بأنه المجموعة:

$$O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots \dots \dots\}$$

حيث $f^n(x)$ ترمز إلى تطبيق التابع f على x عدد n من المرات، ندعو x القيمة الابتدائية للمدار.

على سبيل المثال ليكن لدينا التابع المعروف وفق الصيغة $f(x) = 3x$ فإن مدار النقطة $x = 0.01$

بواسطة التابع f يكون:

$$O(x) = \{0.01, 0.03, 0.09, \dots \dots \dots\}$$

للحصول على رسم بياني لمدار نقطة بالنسبة لتابع سنستخدم تقنية رسومية تدعى شبكة العنكبوت

والتي توضح التقارب مع النقطة الثابتة للتابع نفسه.

4.1.1. تعريف [6]

يوضح مخطط نسيج العنكبوت كيفية التقارب مع النقطة الثابتة، على سبيل المثال لتكن لدينا الدالة

$$g(x) = 2x(1 - x), \text{ وليكن لدينا الشرط الابتدائي } x_0 = 0.1 \text{ عندها فإن أول تكرار للدالة}$$

هو $x_1 = g(x_0) = 0.18$ لاحظ أن النقطة (x_0, x_1) تقع على الخط البياني للتابع g والنقطة (x_1, x_1)

تقع على الخط البياني لمنصف الربع الأول والثالث، صل النقطة (x_0, x_1) بالنقطة (x_1, x_1)

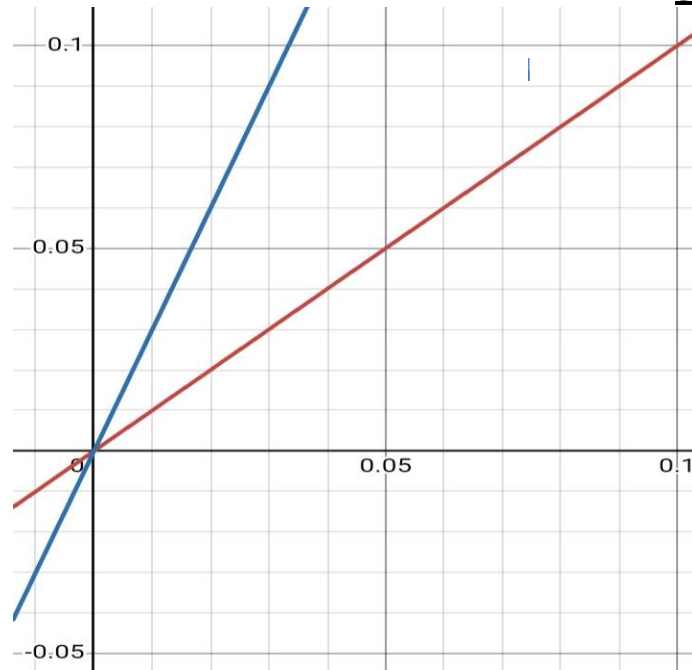
بخط عمودي منقط، عندها نجد $x_2 = g(x_1) = 0.295$ ، نكمل المسار بخط أفقي منقط لتصل إلى النقطة (x_2, x_2) ، إذاً يمكن

رسم المدار الذي نتبعه نلاحظ أنه سيتقارب عند نقطة تقاطع المنحني للتابع g

مع منحني منصف الربع الأول والثالث عند النقطة التي فاصلتها $x = \frac{1}{2}$ ، ندعو $x = \frac{1}{2}$ بنقطة ثابتة .

إذن لنرسم الخط البياني للتابع f المعروف سابقاً وفق الصيغة $f(x) = 3x$ ، أول ما يتضح من الشكل (1) هو موقع النقاط الثابتة

للتابع f عند أي تقاطع للخط البياني $y = f(x)$ والخط $y = x$.



(الشكل 1)

تتطابق قيمة x مع $f(x)$ عند النقطة $x = 0$ التي تدعى النقطة الثابتة للتابع f ، باستخدام تقنية شبكة

العنكبوت نلاحظ أن القيم التي يأخذها المدار بالرسم هي $\{0.01, 0.03, 0.09, \dots\}$ تم أخذها

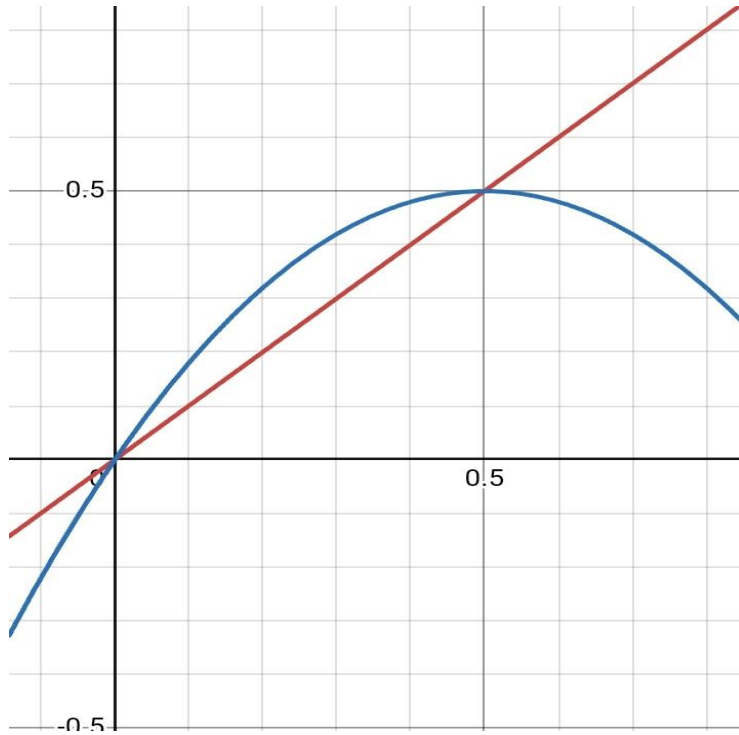
من مسار الخط المنقط وهو مدار النقطة $x = 0.01$ عن طريق الدالة f ، نلاحظ أن المدار يتباعد إلى

اللانهاية وذلك كون f لا يملك سوى نقطة جذب واحدة هي $x = 0$.

مثال آخر أكثر أهمية هو التابع $g(x) = 2x(1 - x)$ ، لنوجد النقاط الثابتة عن طريق حل المعادلة $x = 2x(1 - x)$ ، يوجد

حليين هما $x = 0, x = \frac{1}{2}$ ، نلاحظ باستخدام تقنية رسم شبكة العنكبوت أن المدار بقيمة ابتدائية $x = 0.1$ يتقارب من النقطة

$x = \frac{1}{2}$ ، أي أن المدار بقيمة ابتدائية $x = 0.1$ لا يمكن أن يتجاوز النقطة الثابتة $x = \frac{1}{2}$.



الشكل(2): النقاط الثابتة للتابع $g(x)$

مثال:

ليكن لدينا التابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعروف بالشكل التالي :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

بدايةً لنوجد النقطة الثابتة لهذا التابع، النقطة الثابتة هي التي تحقق المعادلة : $f(x) = x$

$$\frac{x}{2} + 1 = x$$

$$\frac{x}{2} - x = -1$$

$$x = 2$$

إذن النقطة الثابتة هي 2، والآن لنوجد مدار هذه النقطة الثابتة بنقطة ابتدائية ولنكن $x_0 = 3$ تحت تأثير تكرار تطبيق التابع f على هذه النقطة نجد أن المدار هو :

$$\{3, 2.5, 2.25, 2.125, \dots\}$$

إذن في هذا المثال نجد أن المدار للنقاط التي تبدأ بالقرب من هذه النقطة الثابتة سيؤدي إلى اقترابها تدريجياً نحو هذه النقطة مع التكرار. (أي أن النقطة $x = 2$ تدعى نقطة جذب لهذا النظام الرياضي).

مما سبق توصلنا إلى فهم أن النقاط الثابتة في الأنظمة الرياضية تمثل مواقع أو حالات تظل ثابتة عند تطبيق تابع معين، مما يجعلها نقطة مرجعية هامة لفهم سلوك النظام الرياضي، هذه النقاط تعتبر حجر أساس في دراسة الديناميكيات الرياضية وتوقع سلوكها عند تطبيق التكرارات أو التغييرات .

أما بالنسبة للمدارات فهي تمثل مسارات النقاط التي تنشأ عند تطبيق التابع بشكل متكرر وتظهر كيف تتفاعل النقاط المختلفة مع النظام بمرور الوقت، قد تتجذب النقاط إلى النقطة الثابتة أو قد تتحرك بعيداً عنها حسب خصائص التابع والسلوك الديناميكي للنظام الرياضي، هذا يجعل دراسة المدارات مفيدة في تحديد استقرار الأنظمة حيث يمكننا تحديد إذا ما كانت النقاط الثابتة تمثل حالة مستقرة أو غير مستقرة وهذا ما سنقدمه في الفقرة التالية .

2.1. استقرار النقاط الثابتة [10]:

تعتبر دراسة استقرار النقاط الثابتة من الجوانب الجوهرية في نظرية الفوضى، حيث توفر أداة قوية لفهم سلوك الأنظمة الديناميكية التي قد تظهر فيها ظواهر فوضوية، في هذه الأنظمة تتسم النقاط الثابتة بكونها حالات توازن محتملة ولكن استقرارها قد يختلف بشكل كبير حسب الطبيعة الديناميكية للنظام، إن الفهم العميق لاستقرار النقاط الثابتة يساعد في التمييز بين السلوك المستقر والتقلبات الفوضوية التي قد تحدث في الأنظمة .

كما أن مسألة الاستقرار مهمة جداً لأن العالم الحقيقي يخضع باستمرار إلى اضطرابات صغيرة، سنوضح في هذه الفقرة أنه ليست كل نقطة ثابتة هي نقطة مستقرة، هناك نقاط ثابتة مستقرة ونقاط ثابتة غير مستقرة، ويجب أن يتوقف النظام الواقعي مع نقطة ثابتة مستقرة، حيث أن النقطة الثابتة المستقرة تتصف بأن النقاط القريبة منها تبقى بالقرب منها نوعاً ما تحت تأثير الاضطرابات الصغيرة، أما النقاط الثابتة غير المستقرة فإن النقاط القريبة منها تبتعد عنها مع حدوث اضطرابات أو مع تقدم الوقت، على سبيل المثال للتوضيح نقول عن كرة في قاع وإد إنها نقطة ثابتة مستقرة بينما كرة على قمة جبل فهي نقطة ثابتة غير مستقرة .

سنقوم بتقديم تعريفاً لاستقرار في الأنظمة الديناميكية .

1.2.1. تعريف: [12]

ليكن لدينا التابع $f: I \rightarrow I$ ، وليكن لدينا x نقطة ثابتة للتابع f ، حيث I مجال محتوى في $\mathbb{R}$ عندها يقال عن النقطة x إنها نقطة ثابتة مستقرة إذا كان من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ ، بحيث يتحقق من أجل كل $x_0 \in I$ و $|x_0 - x| < \delta$ يكون لدينا $|f^n(x_0) - x| < \varepsilon$ من أجل كل $n \in \mathbb{Z}^+$ ، وإلا فإننا ندعو النقطة x بأنها نقطة ثابتة غير مستقرة.

بعبارة أخرى نقول عن النقطة x أنها نقطة ثابتة مستقرة إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: (x_0 \in I: |x_0 - x| < \delta) \rightarrow |f^n(x_0) - x| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

وإلا فإننا ندعو النقطة x بأنها نقطة ثابتة غير مستقرة.

تعتبر المبرهنة التالية معياراً مهماً للحكم على نقطة ثابتة بأنها مستقرة أم غير مستقرة.

مبرهنة (1): [2]

ليكن لدينا f تطبيق أملس معرف على $\mathbb{R}$ ، ولنفرض وجود p نقطة ثابتة لـ f عندها:

1. إذا كان $|f'(p)| < 1$ فإن p نقطة مستقرة.

2. إذا كان $|f'(p)| > 1$ فإن p نقطة غير مستقرة.

البرهان:

لنفرض أنه لدينا $|f'(x)| < M < 1$ ، من أجل بعض قيم M يوجد مجال مفتوح $I = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

بحيث يحقق $|f'(x)| \leq M < 1$ من أجل كل $x \in I$ ، هذا يعني أنه من أجل كل $x_0 \in I$ يوجد c

بين x و x_0 بحيث :

$$|f(x_0) - x| = |f(x_0) - f(x)| = |f'(c)||x_0 - x| \leq M|x_0 - x|$$

وطالما أن $M < 1$ فإن المتراجحة السابقة تبين أن $f(x_0)$ أقرب لـ x من x_0 وبالتالي فإن $f(x_0) \in I$

بالاستفادة مما سبق باستبدال $f(x_0)$ بـ x_0 نحصل على:

$$|f^2(x_0) - x| \leq M|f(x_0) - x| \leq M^2|x_0 - x| \dots \dots \dots (1)$$

وباستخدام الاستقراء الرياضي من أجل كل $n \in \mathbb{Z}$ نحصل على:

$$|f^n(x_0) - x| \leq M^n|x_0 - x| < \varepsilon$$

وهذا يؤكد الاستقرار، بالإضافة إلى ذلك نجد من المتراجحة (1) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - x| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x$$

إذن

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

وهذا يؤدي إلى أن x نقطة مستقرة، بنفس الأسلوب يمكننا إثبات الجزء الثاني من المبرهنة.

مثال:

لنأخذ التابع التربيعي $f(x) = x^2 - 0.5$ المعروف على المجال $[-2, 2]$ ، لنوجد النقاط الثابتة لهذه الدالة ثم نحدد استقرارها.

حتى نوجد النقاط الثابتة يجب علينا حل المعادلة $x^2 - x - 0.5 = 0$ ، هذا يؤدي إلى أن هناك نقطتين

ثابتتين هما $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(-0.5)} \approx -0.366$ و $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(-0.5)} \approx 1.366$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x_1) = 2(-0.366) < 1$$

إذن x_1 نقطة ثابتة مستقرة .

$$f'(x_2) = 2(1.366) > 1$$

إذن x_2 نقطة ثابتة غير مستقرة.

مثال:

لنأخذ التابع $f_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$ معرف على المجال $[-1, 1]$ حيث $\lambda \in]0, 2]$ ، لنوجد النقاط الثابتة للتابع ولنحدد استقرارها.

لإيجاد النقاط الثابتة للدالة سنحل المعادلة $\lambda x^2 + x - 1 = 0$ ، يوجد نقطتين ثابتتين:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}$$

$$f'_\lambda(x) = -2\lambda x$$

$$f'_\lambda(x_1) = 1 + \sqrt{1 + 4\lambda} > 1$$

إذن النقطة x_1 نقطة غير مستقرة من أجل $\lambda \in]0, 2]$.

$$f_{\lambda}(x_2) = \sqrt{1+4\lambda} - 1 < 1 \text{ إذا وفقط إذا } \sqrt{1+4\lambda} < 2 \text{ بحلها نحصل على } \lambda < \frac{3}{4}$$

هذا يؤدي إلى أن x_2 نقطة مستقرة إذا كان $0 < \lambda < \frac{3}{4}$ ونقطة غير مستقرة إذا كان $\lambda > \frac{3}{4}$.

3.1: النقاط الدورية والمدارات الدورية واستقرارها: [11]

النقطة الدورية هي نقطة يعود إليها النظام بعد عدد من التكرارات (تكرار تطبيق الدالة على هذه النقطة)، بمعنى آخر عندما يبدأ النظام من هذه النقطة ويستمر في تطوره فإنه يعود إلى نفس المكان بعد عدد معين من الخطوات الزمنية، في نظرية الفوضى تظهر هذه النقاط في أنظمة غير خطية تحتوي على سلوك غير ثابت أو فوضوي ولكنها تظهر تكراراً دورياً أو سلوكاً متكرراً على المدى الطويل.

أما المدار الدوري فهو مسار يلتزم به النظام الرياضي بشكل دوري، أي أن النظام بعد فترة زمنية معينة يعود إلى نفس النقطة أو المسار.

تعتبر النقاط الدورية واستقرارها من أهم المفاهيم في مجال نظرية الفوضى، حيث تتبع أهميتها من أنها تنتج أنماطاً معينة تكرر نفسها تدعى الدورات، حيث يقصد بالدورة أنها مدار النقطة الدورية، سنتناول في هذا القسم مسألة وجود نقاط دورية واستقرارها.

1.3.1. تعريف: [2]

ليكن لدينا x نقطة ضمن مجال تعريف التابع f عندها:

1. يقال عن النقطة x أنها نقطة دورية للتابع f من المرتبة k إذا تحقق $f^k(x) = x$ من أجل بعض قيم العدد الصحيح k ،

بإضافة لذلك إذا كان $f^r(x) \neq x$ من أجل $0 < r < k$ عندها ندعو k الدورة الأصغرية للنقطة x ، نلاحظ أن x دورية من

المرتبة k إذا كانت نقطة ثابتة للدالة f^k .

2. مدار النقطة الدورية من المرتبة k (الدورة k) هو المجموعة:

$$O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x)\}$$

بياناً النقطة الدورية من المرتبة k هي فواصل نقطة تقاطع الخط البياني للدالة f^k مع الخط البياني للدالة $y = x$.

على سبيل المثال ليكن لدينا التابع $f(x) = -x$ ، فقط النقطة $x = 0$ هي نقطة دورية من المرتبة الأولى، أما النقاط الدورية من المرتبة الثانية فهي جميع نقاط المحور الحقيقي لأنه أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن:

$$f^2(x) = x$$

مثال آخر: لنأخذ تابع الجيب $f(x) = \sin(x)$ ولنحدد النقاط الدورية لهذا التابع، أي يجب أن نبحث عن النقاط التي تتكرر فيها قيم التابع بعد فترة معينة، نلاحظ أن الفترة الزمنية لهذا التابع هي 2π أي :

$$\sin(x) = \sin(x + 2n\pi) \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$n = 1 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -2\pi$$

$$n = 2 \Rightarrow x = 4\pi$$

وهكذا

إذن النقاط الدورية هي كل النقاط على الشكل $x = 2n\pi$ حيث n هو عدد صحيح .

الآن سنتحدث عن استقرار النقاط الدورية، إن استقرار النقاط الدورية في النظام الديناميكي هو مفهوم أساسي في نظرية الفوضى، حيث يشير إلى السلوك الثابت أو المتكرر الذي يظهره النظام عندما يتم الوصول إلى نقطة معينة في زمن معين، وتستمر حركة النظام

الرياضي حول هذه النقطة دون تغيير في الخصائص الرئيسية للنظام الرياضي. كما تتبع أهمية استقرار النقاط الثابتة في فهم

الديناميكيات على المدى الطويل، فعندما يكون النظام الرياضي مستقرًا حول نقطة دورية يمكن التنبؤ بمسار تطوره بمرور الوقت، كما

تسهم دراسة استقرار النقاط الدورية في تحديد النطاقات الفوضوية حيث تساعد في تحديد الظروف التي قد ينتقل فيها النظام إلى سلوك فوضوي.

الآن سنقدم تعريفاً لاستقرار نقطة دورية ومدارها.

2.3.1 تعريف: [2]

ليكن لدينا f تابع، وليكن لدينا x نقطة دورية من المرتبة k ، عندها نقول عن مدار النقطة x أنه مدار مستقر إذا كانت x نقطة ثابتة مستقرة للتابع f^k ، ويكون مدار النقطة x غير مستقر إذا كانت x نقطة ثابتة غير مستقرة للتابع f^k .

نتيجة (2):

ليكن لدينا $o(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x)\}$ مدار النقطة الدورية x من المرتبة k عندئذٍ العبارات التالية صحيحة:

$$1. \quad o(x) \text{ مدار مستقر إذا تحقق } |(f^k)'(x)| < 1$$

$$2. \quad o(x) \text{ مدار غير مستقر إذا تحقق } |(f^k)'(x)| > 1$$

مبرهنة (2):

ليكن لدينا $o(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^k(x)\}$ مدار النقطة الدورية x من المرتبة k عندها:

$$1. \quad o(x) \text{ مدار مستقر إذا تحقق } |f'(x_k) \cdot f'(x_{k-1}) \dots f'(x_0)| < 1$$

$$2. \quad o(x) \text{ مدار غير مستقر إذا تحقق } |f'(x_k) \cdot f'(x_{k-1}) \dots f'(x_0)| > 1$$

حيث اصطلاحنا لسهولة الترميز :

$$x_0 = x, f(x_0) = x_1, f^2(x_0) = x_2, \dots, f^k(x_0) = x_k$$

الإثبات :

$o(x)$ مدار مستقر إذا تحقق $|(f^k)'(x_0)| < 1$ وذلك حسب التعريف، باستخدام قاعدة السلسلة في مشتق تركيب توابع نجد:

$$\begin{aligned} (f^k)'(x_0) &= (f(f^{k-1}))'(x_0) \\ &= f'(f^{k-1}(x_0))(f^{k-1})'(x_0) \end{aligned}$$

$$= f'(f^{k-1}(x_0))f'(f^{k-2}(x_0)) \dots f'(x_0) \\ = f'(x_k)f'(x_{k-1}) \dots \dots \dots f'(x_0)$$

مثال:

لنأخذ التابع f المعروف وفق $1 - x^2$ على المجال $[-1,1]$ ، لنوجد جميع مدارات النقاط الدورية من المرتبة الثانية (الدورة الثانية) للتابع f ولنحدد استقرارها.

بداية لنحسب النقاط الثابتة للتابع f عن طريق حل المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ ، نجد أن النقاط الثابتة للتابع f هي: $x_1 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ، $x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ، نلاحظ أن x_2 فقط هي ضمن مجال تعريف f ، كما أن النقطة الثابتة x_2 نقطة ثابتة غير مستقرة حسب المبرهنة (1).

لإيجاد المدار نوجد f^2 :

$$f^2(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$$

ونضع $f^2(x) = x$ كالتالي:

$$x(x^3 - 2x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

عندها نحصل على الدورة الثانية $\{0,1\}$ ، للتأكد من استقرار هذا المدار نطبق المبرهنة (2)

$$|f'(0) \cdot f'(1)| = 0 < 1$$

عندها نجد أن هذا المدار هو مدار مستقر.

مثال:

لنعرف دالة الخيمة كالتالي:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

لنوجد الدورة الثانية للدالة T ولنحدد استقرارها.

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

إن النقاط الثابتة للدالة T هي: $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$ هي نقاط ثابتة غير مستقرة طالما $|T'(x)| = 2$

لإيجاد الدورة الثانية سنوجد T^2 بعد إجراء الحسابات نحصل على:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2(1-2x) & , \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4\left(x - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & , \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

يوجد أربع نقاط ثابتة لـ T^2 هي $\left\{0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right\}$ اثنتان منها $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ هي نقاط ثابتة لـ T إذن $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

هو مدار النقطة الدورية من المرتبة الثانية (الدورة الثانية)، نلاحظ أن:

$$\left|T'\left(\frac{2}{5}\right)T'\left(\frac{4}{5}\right)\right| = 4 > 1$$

إذن مدار الدورة الثانية غير مستقر .

مثال:

ليكن لدينا الدالة اللوجستية المعرفة كالتالي $f(x) = 4x(1-x)$

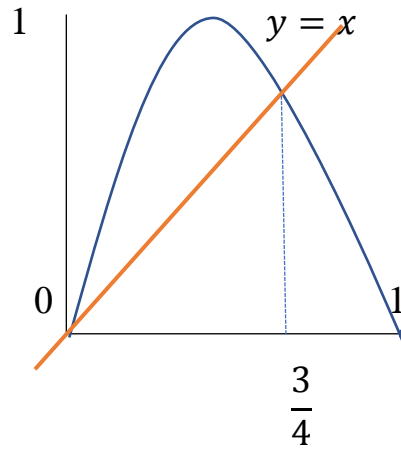
بدايةً لنوجد النقاط الثابتة لهذه الدالة وذلك بحل المعادلة $f(x) = x$ نجد أن f تملك نقطتين ثابتتين هما :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{4}$$

لندرس استقرار هذه النقاط وذلك بتطبيق المبرهنة (1) نجد أن :

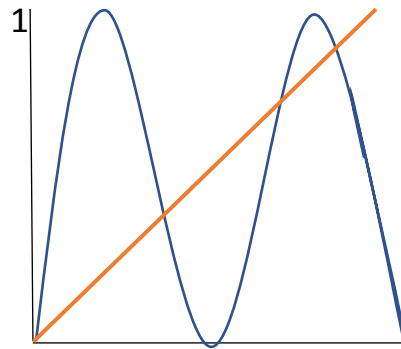
$$|f'(x_1)| = 4 > 1 \Rightarrow x_1 \text{ نقطة غير مستقرة}$$

$$|f'(x_2)| = 2 > 1 \Rightarrow x_2 \text{ نقطة غير مستقرة}$$



الشكل (3): يوضح بيانياً النقاط الثابتة للتابع f

لنوجد النقاط الدورية للدالة f من المرتبة الثانية أي النقاط الثابتة للدالة f^2 ، لنوجد هذه النقاط بيانياً (حيث أنَّ النقاط الثابتة للدالة f^2 هي نقاط تقاطع الخط البياني للدالة f^2 مع الخط البياني لمنصف الربع الأول والثالث)

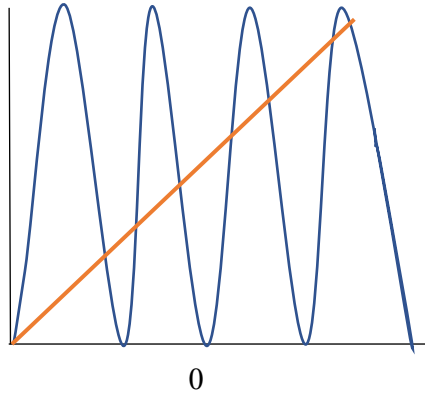


الشكل (4): يوضح عدد النقاط الثابتة للدالة f^2

إذن نلاحظ من الرسم البياني أن f^2 يملك أربع نقاط ثابتة اثنتان منهما للدالة f و النقطتين الباقيتين p_1, p_2

$$\text{يحققان } f(p_1) = p_2, f(p_2) = p_1$$

لنرى فيما إذا كان التابع f يملك نقاط دورية من المرتبة الثالثة (أي نقاط ثابتة للدالة f^3) بنفس الطريقة نستخدم الرسم البياني .



الشكل(5): يوضح النقاط الثابتة للدالة f^3

إذن نلاحظ أنَّ f^3 يملك ثمانية نقاط ثابتة اثنتان منها هي للتابع f هما $\{0, \frac{3}{4}\}$ ، أما النقاط الثابتة للدالة f^2 فهي ليست نقاط ثابتة للدالة f^3 .

نلاحظ أنَّ عدد النقاط الثابتة يتضاعف عند كل تكرار، وبالتالي يمكننا التعميم أنَّ f^k يملك 2^k نقطة ثابتة، وهذا ما يوضح وجود عدد

لا نهائي من المدارات الدورية، ومع ذلك يمكننا إيجاد هذه المدارات وإحصاء عدد النقاط الثابتة وهذا من أهم وأبرز مفاهيم نظرية

الفوضى، أنَّه قد يبدو النظام الرياضي معقد وغير قابل للتنبؤ ولكن يوجد نظام محكم وثابت يحكمه .

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي
مثال: (الدالة اللوجستية)

ليكن لدينا الدالة اللوجستية $f(x) = rx(1 - x)$ حيث r هو معامل النمو، لنوجد بداية النقاط الثابتة لهذه الدالة عن طريق حل

المعادلة $rx(1 - x) = x$ نجد:

$$\begin{aligned} rx(1 - x) &= x \\ rx(1 - x) - x &= 0 \\ rx - rx^2 - x &= 0 \\ x(r - 1) - rx^2 &= 0 \\ x[(r - 1) - rx] &= 0 \end{aligned}$$

إذن الحلول هي :

$$x = 0, x = \frac{r - 1}{r}$$

لنوجد النقاط الدورية من المرتبة الثانية في حال $r = 3.2$:

لإيجاد النقاط الدورية من المرتبة الثانية نوجد $f(f(x)) = x$ بحيث $f(x) \neq x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3.2x(1 - x) \\ \Rightarrow f(f(x)) &= 3.2[3.2x(1 - x)]. [1 - 3.2x(1 - x)] \end{aligned}$$

نرمز:

$$y = f(x) = 3.2x(1 - x) \Rightarrow f(f(x)) = 3.2y(1 - y)$$

نعوض y في المعادلة :

$$f(f(x)) = x \Rightarrow 3.2[3.2x(1 - x)]. [1 - 3.2x(1 - x)] = x$$

وبالحل العددي لهذه المعادلة نجد ان حلول المعادلة هي :

$$x_1 \approx 0.513, \quad x_2 \approx 0.799$$

وتتحقق هذه النقاط ان $f(f(x_1)) = x_1$ و $f(x_1) \neq x_1$

$$f(x_2) \neq x_2 \text{ و } f(f(x_2)) = x_2 \text{ و}$$

ولندرس استقرار هذه النقاط :

بداية لندرس استقرار النقطة x_1 أي لنحسب :

$$|(f^2)'(x_1)| = |f'(f(x_1)) \cdot f'(x_1)|$$

نحسب:

$$f'(x_1) = 3.2(1 - 2x_1)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \approx -0.0832 < 1$$

إذن النقطة x_1 هي نقطة ثابتة مستقرة .

لندرس استقرار النقطة x_2 :

$$f'(x_2) \approx 0.1593 < 1$$

أيضاً نجد ان النقطة x_2 هي نقطة ثابتة مستقرة .

إذن لدينا $\{0.513, 0.799\}$ هو مدار دوري من المرتبة الثانية لندرس استقراره .

$$|f'(x_1) \cdot f'(x_2)| \approx 0.1593 < 1$$

إذن المدار مستقر .

2. الفصل الثاني: الأسس التي يقوم عليها تعريف الفوضى

مقدمة:

"تأثير الفراشة"، هل رفرفة جناحي الفراشة في البرازيل يمكن أن تشعل إعصاراً في تكساس؟

"إدوارد لورنز"

إنّ دراسة الأنظمة الفوضوية تعود إلى هنري بوانكاريه، كما أصبح تعريف "الفوضى" شائعاً خلال أوراق قدمها لي ويورك تحمل عنوان "الدورة الثالثة تقتضي الفوضى"، من أهم الأمثلة على الأنظمة الفوضوية تشمل تدفق السوائل والديناميات السكانية واضطراب نبضات القلب وفيزياء البلازما والأنظمة الاقتصادية والتنبؤ بالطقس وما إلى ذلك، تشترك هذه الأنظمة في خاصية وجود درجة عالية من الحساسية للشروط الأولية "الظروف الأولية"، بمعنى آخر: تغيير بسيط في القيم الأولية يؤدي إلى تطور النظام بطريقة حسابية جديدة لا يمكن توقعها.

سنعتمد في دراستنا لهذا الفصل على تعريف ديفاني للفوضى، حيث أن تعريف ديفاني يتألف من ثلاث مكونات: التعدي وحساسية الاعتماد على الظروف الأولية وكثافة مجموعة النقاط الدورية، سندرس هذه المفاهيم الثلاثة المهمة بالتفصيل.

وقد توصلنا في هذا البحث إلى عدة نتائج مهمة وهي :

1. أهمية مفهوم كثافة النقاط الدورية في دراسة الدالة الفوضوية، حيث يمكننا القول أن دراسة كثافة النقاط الدورية يوفر فهماً عميقاً لكيفية انتقال الأنظمة الرياضية من حالة الاستقرار إلى حالة الفوضى.
2. أهمية مفهوم التعدي في دراسة الأنظمة الفوضوية، حيث أن دراسة التعدي الطوبولوجي يمكننا من فهم كيف يمكن لنظام ديناميكي أن ينتقل بين حالات غير مرتبطة، أو أن يعيد اكتشاف نفسه بعد تكرار تطبيق الدالة .
3. تم إثبات المبرهنات (2.2.2) و (3.2.2) و (1.3.2) و (2.3.2) .

دراسة في نظرية الفوضى/الريابي

4. تم إثبات أن عكس المبرهنة (3.4.2) ليس بالضرورة صحيح وذلك من خلال ذكر مثال يثبت عدم صحة العكس مع شرح هذا المثال.

1.2: كثافة مجموعة النقاط الدورية:

تعد كثافة النقاط الدورية من المفاهيم المهمة في دراسة الأنظمة الديناميكية، وهي تتعلق بالسلوك الدوري أو التكراري في الأنظمة التي تتبع قوانين رياضية معينة، يمكن تعريف النقاط الدورية بأنها حالات خاصة في النظام حيث يتكرر السلوك بمرور الوقت بعد فترة محددة، بشكل عام تعبر كثافة النقاط الدورية عن عدد هذه النقاط بالنسبة لحجم الفضاء الذي يتحرك فيه هذا النظام، وعلاقة كثافة النقاط الدورية بنظرية الفوضى تأتي من الأنظمة الديناميكية التي قد تبدو في البداية دائمة أو دورية وتظهر سلوكاً فوضوياً عند تغيير بعض الشروط الأولية، يمكن العثور على كثافة من النقاط الدورية في مراحل معينة من السلوك قبل أن يتغير النظام إلى سلوك فوضوي كامل، على سبيل المثال في نظام رياضي مثل الدالة اللوجستية يمكن أن تتغير سلوكيات النظام من دورية إلى فوضوية عند زيادة بعض المعلمات مما يعكس الانتقال من الاستقرار إلى الفوضى، كما أن دراسة كثافة النقاط الدورية في هذا السياق يساعد في فهم كيفية تطور الأنظمة الفوضوية وتحديد النقاط التي قد تكون دائمة أو متكررة قبل أن يحدث هذا التحول.

بشكل عام يمكن القول أن كثافة النقاط الدورية توفر فهماً عميقاً لكيفية تنظيم الأنظمة من حالة استقرار إلى حالة فوضوية.

سنقدم الآن تعريفاً للمجموعة الكثيفة ونأخذ بعض الأمثلة عليها.

1.1.2 تعريف:

ليكن لدينا I مجال في $\mathbb{R}$ ، عندها يقال عن المجموعة A أنها كثيفة في I إذا كان من أجل أي $x \in I$ فإنه أي مجال مفتوح يحتوي x يجب أن يتقاطع مع A ، بمعنى آخر من أجل أي $\delta > 0$ فإن المجال $J = (x - \delta, x + \delta)$ يحتوي نقطة a من A .

مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

لإثبات ذلك نفرض أنه لدينا $x \in \mathbb{R}$ ولنكتب x بالصيغة $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$

حيث $d_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ، وليكن لدينا $\delta > 0$ عندها يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $10^m < \delta$ ، لنفرض العدد العادي

$$y = \sum_{n=0}^m \frac{d_n}{10^n} \text{ عندها :}$$

$$|x - y| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^{m+1}} = \frac{1}{10^m}$$

عندها $|x - y| < \delta$ هذا يثبت أن $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

تعريف 2.1.2: نقطة نهاية المطاف لتابع [2]

يقال عن النقطة x إنها نقطة نهاية المطاف للتابع f إذا وجد عدد صحيح موجب r ونقطة ثابتة x^* للتابع f بحيث

يتحقق: $f^r(x) = x^*$ ولكن:

$$f^{r-1}(x) \neq x^*$$

هناك ارتباط وثيق بين النقاط الثابتة ونقاط نهاية المطاف، إذن نقاط نهاية المطاف هي النقاط التي تصل إلى نقطة ثابتة بعد عدد لا

نهائي من التكرارات.

نرمز لمجموعة جميع نقاط نهاية المطاف للتابع f بالرمز $EFix(f)$.

مثال:

لتكن لدينا الدالة اللوجستية $f(x) = 2x(1 - x)$ ، نلاحظ وجود نقطتين ثابتتين للدالة هما $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{1}{2}$ عن طريق الحساب

نجد أن :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{1-2x}]$$

عندها $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ و $EFix_{x_2}(f) \setminus \{\frac{1}{2}\} = \emptyset$ ، بالإضافة إلى ذلك $f^{-1}(0) = \{0,1\}$ و

$EFix_{x_1}(f) = \{0,1\}$ ، إذن نستنتج أنه لدينا نقطة نهاية مطاف وحيدة هي $x = 1$.

مثال:

ليكن لدينا الدالة اللوجستية $f(x) = 4x(1-x)$ ، هذه الدالة تملك نقطتين ثابتتين هما $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{3}{4}$ بالحساب نجد أن

$EFix_{x_1}(f) = \{0,1\}$ ، وبملاحظة أن :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{1-x}]$$

عندها :

$$f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{3}{4}}\right] = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{1}{2}\right]$$

والتي تساوي إما $\frac{3}{4}$ أو $\frac{1}{4}$ ، الآن :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{4}}\right]$$

والتي تساوي إما $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ أو $\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

بإعادة هذه العملية نلاحظ وجود عدد غير نهائي من نقاط نهاية المطاف للدالة f .

تكون $b \in (0,1)$ نقطة دورية لنهاية المطاف للدالة T إذا كان b عدد عادي.

الإثبات:

ليكن لدينا $b = \frac{r}{s}$ بصيغة كسرية، لنفرض أن $s = 2k + 1$ عدد صحيح فردي. عندها $T^n\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\text{عدد زوجي}}{s}$

من أجل كل $n \in \mathbb{Z}^+$ ، بالإضافة إلى ذلك يوجد بالضبط k عدد في المجال $[0,1]$

من الصيغة $\frac{\text{عدد زوجي}}{s}$ هي $\frac{2}{s}, \frac{4}{s}, \dots, \frac{2k}{s}$

عندها مدار النقطة b يملك على الأكثر k نقطة وبالنتيجة تكون b نقطة دورية لنهاية المطاف، من جهة أخرى إذا كانت $s = 2k$

عدد صحيح زوجي عندها من أجل بعض الأعداد الصحيحة الموجبة m ، إما:

$$1. \quad T^m(b) = \frac{\text{عدد صحيح}}{\text{عدد فردي}} \text{ والذي ناقشناه في الأعلى.}$$

$$2. \quad T^m(b) = 1 \text{ وعندها } T^{m+n}(b) = 0 \text{ من أجل كل } n \in \mathbb{Z}^+ \text{، } b \text{ نقطة نهاية المطاف.}$$

في كلا الحالتين b نقطة دورية لنهاية المطاف بالنسبة للدالة T بالعموم.

مبرهنة 2.1.2: [2]

ليكن لدينا $b = \frac{r}{s}$ عدد عادي ضمن المجال $(0,1)$ تكون b نقطة دورية للدالة T إذا كان r عدد صحيح زوجي، و s عدد صحيح

فردي.

الإثبات:

ليكن لدينا $b = \frac{r}{s}$ عدد عادي ضمن المجال $(0,1)$ حيث r عدد زوجي و s عدد فردي، إنه ينتج من المبرهنة 2.1.2 أن b نقطة نهاية

مطاف لدالة الخيمة T ، إنه يوجد على الأقل عدد صحيح غير سالب m وعلى الأقل عدد موجب $n > m$ بحيث:

$$T^m(b) = T^n(b)$$

إذا $m = 0$ تم المطلوب و b هي نقطة دورية من الدرجة n لدالة الخيمة T لكن لنفرض أن $m > 0$ عندها من تعريف الدالة T

نجد:

$$T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\text{عدد زوجي}}{s}$$

عندها:

$$T^m\left(\frac{r}{s}\right) = \begin{cases} \frac{2(EI)}{s} = \frac{4(I)}{s}, & \text{if } 0 \leq T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right) \leq \frac{1}{2} \\ 2\left(1 - \frac{EI}{s}\right) = \frac{4(I)}{s} + 2, & \text{if } \frac{1}{2} \leq T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right) \leq 1 \end{cases}$$

حيث EI هي عدد صحيح زوجي. عندها من أجل $T^m\left(\frac{r}{s}\right)$ لتكون مساوية $T^n\left(\frac{r}{s}\right)$ يجب أن يكون لدينا $T^{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)$ و $T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right)$

كلاهما ضمن المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ أو كلاهما ضمن المجال $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

بدون أن نفقد العمومية لنفرض أن كلا $T^{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)$ و $T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right)$ ضمن المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ عندها:

$$2T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right) = T^m\left(\frac{r}{s}\right) = T^n\left(\frac{r}{s}\right) = 2T^{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)$$

هذا يؤدي بالنتيجة إلى أن $T^{n-1}\left(\frac{r}{s}\right) = T^{m-1}\left(\frac{r}{s}\right)$ وهذا يناقض كون m أصغر من n لذا فإن $m = 0$ و b هي نقطة دورية من

المرتبة n لدالة الخيمة T .

مجموعة النقاط الدورية للدالة T تكون كثيفة في المجال $[0,1]$.

الإثبات:

ليكن لدينا $j = (a, b)$ مجال جزئي مفتوح ضمن المجال $[0,1]$ حيث $t = b - a$ لنختار عدد صحيح فردي s بحيث $s > \frac{2}{t}$,

ولتكن المجموعة $A = \left\{ \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{(s-1)}{s} \right\}$

سنوضح أنه من أجل أي عددين متتاليين $\frac{r}{s}, \frac{r+1}{s}$ في A فإن $\frac{r+1}{s} - \frac{r}{s} = \frac{1}{s} < \frac{t}{2}$

هذا يؤدي إلى أنه يوجد عددين متتاليين $\frac{m}{s}, \frac{(m+1)}{s}$ في A والتي تنتمي إلى المجال j

الآن إما m أو $m + 1$ هو عدد صحيح زوجي، إذن المجال j يحتوي نقطة c من الصيغة $c = \frac{\text{عدد زوجي}}{\text{عدد فردي}}$

الآن بفضل المبرهنة 2.1.2 النقطة c هي نقطة دورية للدالة T ، وبالنتيجة مجموعة النقاط الدورية للدالة T

كثيفة في المجال $[0,1]$.

2.2.التعدي:

إنَّ مفهوم التعدي الطوبولوجي مفهوم أساسي في نظرية الفوضى الذي يشير إلى نوع من السلوك الديناميكي المعقد في الأنظمة والدوال

الرياضية، إذ يساعد على تحديد ما إذا كان النظام الديناميكي يعرض خصائص الفوضى، والتي منها السلوك المتقلب واللامنتظم،

حيث أنه في الأنظمة الديناميكية الفوضوية يمكن أن يظهر سلوك غير قابل للتنبؤ بوضوح عند تطبيق الدالة بشكل تكراري، التعدي

الطوبولوجي يشير إلى قدرة النظام على التنقل بين مختلف الحالات بعد عدد معين من التطبيقات مما يعكس فكرة الفوضى، أيضا من

الخصائص المهمة للفوضى هي وجود المسارات العشوائية، إنَّ التعدي الطوبولوجي يعكس طبيعة انتقال الأنظمة بين حالات غير

مرتبطة بطريقة غير متوقعة.

في الأنظمة المتعدية طبولوجياً يمكن لأي مجموعة مفتوحة أن تتقاطع مع نفسها بعد عدد من التكرارات وهذا ما يعكس الميكانيكية الفوضوية لهذه الأنظمة، كما أنَّ الأنظمة الفوضوية غالباً ما تتضمن تكرار تطبيق دالة معينة والتعدي الطبولوجي يوفر إطاراً لفهم كيفية تأثير التكرار على النظام مما يعكس الطبيعة المتكررة للفوضى، حيث أن النظام قد يعود إلى بعض الحالات الأصلية أو يتداخل مع نفسه بشكل غير متوقع .

الخلاصة إنَّ التعدي الطبولوجي وفقاً لتعريف ديفاني له دور حاسم في نظرية الفوضى، حيث يستخدم لفهم الأنظمة الديناميكية التي تظهر سلوكاً غير قابل للتنبؤ ومعقد، ومن خلال دراسة التعدي الطبولوجي يمكننا فهم كيف يمكن لنظام ديناميكي أن ينتقل بين حالات غير مرتبطة أو أن يعيد اكتشاف نفسه بعد تكرار تطبيقات الدالة، سنقدم الآن التعريف الرياضي للتعدي الطبولوجي .

1.2.2 تعريف: [4]

ليكن لدينا f دالة معرفة على المجال I (أو $\mathbb{R}$) عندها يقال عن f أنها متعددة طبولوجياً إذا تحقق ما يلي:
من أجل أي زوج من المجالات المفتوحة غير الخالية j_1, j_2 في I يوجد عدد صحيح موجب k بحيث:

$$f^k(j_1) \cap j_2 \neq \emptyset$$

المبرهنة التالية سوف تعطي معيار التعدي لدالة.

1.2.2 مبرهنة:

إذا كان لدينا $f: I \rightarrow I$ دالة معرفة على المجال I ، إذا امتلكت f مدار كثيف من النقاط الدورية عندها تكون الدالة f متعددة طبولوجياً.

الإثبات:

لنفترض أن النقطة $a \in I$ تملك مدار كثيف، ليكن لدينا U و V زوج غير خالي من المجموعات المفتوحة في I ، عندها يوجد أعداد صحيحة موجبة r, s بحيث $f^r(a) \in U$ و $f^s(a) \in V$.

وليكن $b = f^r(a)$ و $c = f^s(a)$ ، بدون فقد العمومية لنفرض أن $k = s - r \geq 0$ عندها:

$$f^k(b) = f^{s-r}(f^r(a)) = f^s(a) = c$$

وبالنتيجة يكون لدينا:

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة المضاعفة $D: [0,1] \rightarrow [0,1]$ المعرفة كالتالي:

$$D(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & ; \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

سنوضح أن الدالة D متعددة كالتالي:

سنوضح بداية أن مدار الدالة D كثيف في $[0,1]$.

ليكن لدينا $x \in [0,1]$ ولنكتبه بالصيغة المفصلة الثنائية، $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$ حيث a_j هي إما 0 أو 1.

عندها:

$$D(x) = a_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-1}} \pmod{1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j-1}} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r+1}}{2^r}$$

طالما $a_1 = 0$ أو $a_1 = 1$

نلاحظ أن التكرار n ببساطة يغير الصيغة التفصيلية بمقدار n من الأماكن.

$$D^n(x) = D^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r+n}}{2^r}$$

بالإضافة إلى ذلك إذا امتلكت النقطة x امتلكت صيغة موسعة والتي تتكرر كل n مكان:

$$a_{j+n} = a_j$$

من أجل كل j ، عندها $D^n(x) = x$ وبالتالي x هي نقطة دورية للدورة n .

الآن ليكن لدينا النقطة $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} \in [0,1]$ و $\delta > 0$ عندها يوجد عدد صحيح موجب N بحيث $\frac{1}{2^N} < \delta$

ولنعتبر النقطة الدورية من الدورة N المرتبة هي $y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} \in [0,1]$ حيث $b_1, b_2, \dots, b_n$ تتكرر و $b_1 =$

عندها $a_1, b_2 = a_2, \dots, b_n = a_n$:

$$|x - y| = \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} - \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^N} < \delta$$

عندها مدار الدالة D كثيف ضمن المجال $[0,1]$ ، ومنه الدالة D متعدية طوبولوجياً.

2.2.2 مبرهنة:

ليكن لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3x \pmod{1}$ إن هذه الدالة متعدية طوبولوجياً.

الإثبات:

لنأخذ مجموعة مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}$ ولتكن A ، وبما أن f يعيد كل قيمة إلى المجال $[0,1]$ فإن تطبيق f عدد n من المرات

على هذا المجال سوف يعطينا نتيجة ضمن المجال نفسه أي أن:

$$f^n(A) \cap [0,1[\neq \emptyset$$

بناءً على ماسبق يمكننا استنتاج أن الدالة $f(x) = 3x \pmod{1}$ متعدية طوبولوجياً، لأننا تمكنا من إيجاد عدد n بحيث

$f^n(A)$ يتقاطع مع المجال المفتوح $[0,1[$.

لتكن لدينا الدالة المعرفة كالتالي (دالة الخباز):

$$B(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

إن دالة الخباز متعددة طبولوجياً.

الإثبات:

بداية لنناقش تعدي هذه الدالة بالاعتماد على التعريف.

- لنأخذ المجموعة المفتوحة وغير الخالية A محتواة ضمن المجال $[0,1]$.
- نلاحظ أنه عندما نطبق الدالة $B(x)$ على A أن الصورة $f(A)$ تتوزع عبر المجال $[0,1]$ بشكل دوري.
- النقاط ضمن المجموعة A ستتحرك إلى مواضع جديدة ولكن تبقى ضمن المجال $[0,1]$.
- وهذا ما سيضمن لنا في النهاية أن النقاط التي كانت في المجموعة المفتوحة A ستتقاطع مع المجال $[0,1]$ بعد عدد معين من التكرارات لتطبيق الخباز.
- وبالتالي تطبيق الخباز متعدي طبولوجياً لأننا تمكننا من إثبات وجود n بحيث يحقق:

$$B^n(A) \cap [0,1] \neq \emptyset$$

الآن سنثبت تعدي دالة الخباز بالاعتماد على المبرهنة (1.2.2)، أي سنثبت أن مجموعة النقاط الدورية للدالة كثيفة ضمن المجال

$[0,1]$.

- بداية سنوجد النقاط الدورية وذلك بالبحث عن النقاط x التي تحقق المعادلة $B^n(x) = x$.
- نلاحظ أنه ضمن الفرع الأول من الدالة نجد $x = 0$ هي نقطة دورية من المرتبة الأولى.

دراسة في نظرية الفوضى/الريابي

- ولننتقل إلى الفرع الثاني من الدالة نجد أن $x = \frac{1}{3}$ هي نقطة دورية من المرتبة الثانية.
- ونظراً لأن دالة الخباز تضاعف النقاط عبر المجال الأول ومن ثم تقلصه عبر المجال الثاني يمكننا أن نلاحظ أن هناك نقاطاً دورية أخرى على سبيل المثال يمكن أن نجد نقاطاً دورية من مرتبة 4 أو 8 وهكذا .
- الآن سنثبت أن مجموعة النقاط الدورية لدالة الخباز كثيفة ضمن المجال $[0,1[$.
- إن دالة الخباز تولد بنية دورية على المجال $[0,1[$ ، فإذا أخذنا نقطة x في هذا المجال فإن التكرار المستمر للدالة B سيوصلنا إلى نقطة أخرى في المجال نفسه بسبب الانتقال بين المجالات $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ و $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- ومن الحالات الخاصة لهذا التكرار هي النقطة $x = \frac{1}{3}$ التي أعادتها دالة الخباز إلى نفسها بعد تكرارين من التطبيق.
- لكي نثبت أن مجموعة النقاط الدورية كثيفة في $[0,1[$ نحتاج لإظهار أنه لكل $x \in [0,1[$ ولكل $\varepsilon > 0$ هناك نقطة دورية y بحيث يتحقق $|x - y| < \varepsilon$.
- نلاحظ أن دالة الخباز تضاعف النقاط ضمن المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ وتنقل النقاط إلى المجال الآخر ضمن المجال $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- عند تطبيق الدالة مراراً وتكراراً فإنها تنتقل بين هذه الفترات بشكل دوري، وبما أن كل نقطة تلتزم بنمط دوري في تطبيقات الدالة فهذا يضمن أن مجموعة النقاط الدورية تشمل نقاطاً في جميع أنحاء $[0,1[$.
- وللبحث عن نقطة دورية قريبة من x حيث $x \in [0,1[$ ونجعل $\varepsilon > 0$ وبالتالي يمكننا العثور على النقطة الدورية y بحيث $|x - y| < \varepsilon$ ، إذن الخلاصة أن مجموعة النقاط الدورية لدالة الخباز كثيفة ضمن المجال $[0,1[$ بفضل التكرار الدوري في دالة التوزيع المنتظم للنقاط الدورية، إذن دالة الخباز متعددة طوبولوجياً.

3.2: الاعتماد الحساس على الشروط الابتدائية: [3]

تعتبر نظرية الفوضى أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الأنظمة الديناميكية التي تظهر سلوكاً غير خطي ومعقد و تكون هنالك حساسية شديدة للشروط الابتدائية، هذا يعني أن الأنظمة الفوضوية تتميز بتطورات غير قابلة للتنبؤ رغم أنها قد تكون وصفاً رياضياً بسيطاً في البداية، إذن إحدى السمات الرئيسية لنظرية الفوضى هي التحسس الشديد للتغيرات الطفيفة التي قد تحصل في البداية وتؤدي إلى نتائج مختلفة بشكل جذري في المستقبل، والآن سنعرض التعريف الرياضي للحساسية.

1.3.2. تعريف: [3]

ليكن لدينا f دالة معرفة على المجال I ، يقال عن f إنها حساسة للشروط الأولية إذا وجد $\vartheta > 0$ من أجل كل $x_0 \in I$ و $\delta > 0$ يوجد $y_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ و k عدد صحيح موجب يحقق:

$$|f^k(x_0) - f^k(y_0)| \geq \vartheta$$

يسمى العدد ϑ ثابت الحساسية للدالة f .

بعبارة أخرى يقال عن f إنها حساسة للشروط الأولية إذا وجد $v > 0$ بحيث يحقق الشرط التالي :

$$(x_0 \in I, \delta > 0) \Rightarrow (\exists y_0 \in B_\delta(x_0) \ \& \ \exists k \in \mathbb{N}^*: |f^k(x_0) - f^k(y_0)| \geq v)$$

مثال:

أبسط مثال عن دالة حساسة للشروط الأولية هي الدالة $f(x) = cx$ حيث $(c > 1)$ من أجل النقاط الأولية x_0 و $x_0 + \delta$ لدينا:

$$f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0) = c^n(x_0 + \delta) - c^n x_0 = c^n \delta$$

عندها $|f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0)|$ ستزداد إلى ∞ كلما n سعت إلى ∞ .

مثال: [2]

ليكن لدينا الدالة المضاعفة $D: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ، سنوضح أن الدالة D تملك اعتمادية حساسة للشروط الأولية.

ليكن لدينا:

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

عندها من أجل أي نقطتين $x, y \in [0, 1]$ فإنه:

$$-1 \text{ إما } x, y \in I$$

$$-2 \text{ أو } x \in I_1, y \in I_2$$

الحالة الأولى: إذا كانت $x, y \in I_1$ عندها:

$$|D(x) - D(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y|$$

من جهة أخرى إذا كانت $x, y \in I_2$ عندها:

$$|D(x) - D(y)| = |2x - 1 - 2y + 1| = 2|x - y|$$

الحالة الثانية: لنفرض أن $x \in I_1, y \in I_2$ عندها:

$$|D(x) - D(y)| = |2x - 2y + 1| \geq 1 - 2|x - y|$$

لاحظ أنه إذا كان:

$$-2|x - y| > \frac{-1}{2} \text{ عندها } |x - y| < \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$|D(x) - D(y)| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

باختيار $v = \frac{1}{4}$ حيث v ثابت الحساسية للدالة D إذا كان $x_0 \in I$ و $\delta > 0$ سنضع أي نقطة

$$x_j = D^j(x_0) \text{ عندها المسافة بين } x_0, y_0 \in I_1 \text{ or } I_2 \text{ إذا كانت } y_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

و $y_k = D^k(y_0)$ ستكون على الأقل ضعف المسافة بين y_{k-1} و x_{k-1} عندها:

$$|y_k - x_k| \geq 2|y_{k-1} - x_{k-1}| \geq 2^k |y_0 - x_0|$$

عندها وأخيراً $|x_j - y_j| \geq \frac{1}{4} = v$ من أجل عدد صحيح موجب j .

من ناحية أخرى إذا كانت $x_0 \in I_1$ و $y_0 \in I_2$ و $|x_0 - y_0| < \frac{1}{4}$ عندها:

$$|D(x_0) - D(y_0)| > \frac{1}{4} = v$$

1.3.2 مبرهنة :

لتكن لدينا الدالة $f(x) = 3x \pmod{1}$ [دالة تعمل على إيجاد باقي القسمة على العدد 1]، إن الدالة f حساسة لتغيرات الشروط الأولية.

الإثبات:

لنثبت أن هذه الدالة f تملك اعتمادية حساسة على الشروط الأولية.

- لتكن لدينا x ولنفترض وجود نقطة y بحيث يكون $|x - y|$ صغير جداً، لنحسب الفرق بين $f(x)$ و $f(y)$

$$|f(x) - f(y)| = |3x \pmod{1} - 3y \pmod{1}|$$

- بما أن الدالة $\pmod{1}$ تعني أخذ باقي القسمة على 1 فإن الفرق بين $3x \pmod{1}$ و $3y \pmod{1}$ يمكن أن يكون كبيراً

حتى إذا كان $|x - y|$ صغير جداً .

- على سبيل المثال إذا اخترنا $x = 0.1$ و $y = 0.1000001$ فإن:

$$f(x) = 3(0.1) \pmod{1} = 0.3$$

$$f(y) = 3(0.1000001) \pmod{1} = 0.3000003$$

- بالرغم من أن الفرق بين y و x صغير جداً فإننا نلاحظ أن الفرق بين $f(y)$ و $f(x)$ سيكون أكبر من ذلك بكثير

$$|f(x) - f(y)| = |0.3 - 0.3000003| = 0.0000003$$

- إذن وبإجراء عدد معين من تكرار الدالة نلاحظ أن هذا الفرق يتضخم ولن يعود صغيراً كما كان في البداية إذن هذا ما يثبت أن الدالة $f(x) = 3x \pmod{1}$ حساسة للشروط الابتدائية .

2.3.2 مبرهنة :

دالة الخيمة المعرفة كالتالي هي دالة حساسة للشروط الأولية :

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$T(x) = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| \text{ أو بشكل آخر :}$$

الإثبات:

- لنأخذ نقطتين ابتدائيتين x_1, x_2 متقاربتين ضمن المجال $[0,1]$ بحيث $x_1 \neq x_2$.
- لنطبق دالة الخيمة على هذه النقاط نحصل على:

$$T(x_1) = 2 \left| x_1 - \frac{1}{2} \right|, T(x_2) = 2 \left| x_2 - \frac{1}{2} \right|$$

- الآن سنحسب الفرق بين القيمتين بعد تطبيق الدالة نجد:

$$|T(x_1) - T(x_2)| = \left| 2 \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| - 2 \left| x_2 - \frac{1}{2} \right| \right| = 2 \left| \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| - \left| x_2 - \frac{1}{2} \right| \right|$$

- إذن نلاحظ أنه إذا كان الاختلاف بين x_1, x_2 صغيراً جداً فإن الفارق بين $T(x_1)$ و $T(x_2)$ يكون كبيراً، ذلك لأن دالة الخيمة تحتوي على قفزات حادة عند $x = \frac{1}{2}$ مما يجعل التغيرات في القيم تكون حساسة جداً للاختلافات الصغيرة في الشروط الأولية.

- وعند تكرار تطبيق الدالة T عدد معين من المرات فإن هذه الفروق ستزداد بشكل متسارع مما يؤدي إلى سلوك فوضوي، لذلك إذا بدأنا من نقطتين قريبتين جداً فبعد عدد قليل من التكرارات سيظهر الفرق الكبير في النتائج النهائية أي أن الدالة T حساسة للشروط الأولية.

4.2: تعريف الفوضى: [7]

الدالة الفوضوية هي دالة رياضية تظهر سلوكاً غير خطي وغير قابل للتنبؤ بشكل دقيق عند تطبيقها على قيم مدخلة معينة، سنعتمد في دراستنا على تعريف ديفاني للدوال الرياضية التي تعتبر من أهم أعماله، حيث قام بتطوير نماذج رياضية تصف سلوك الأنظمة التي تبدو غير منظمة أو فوضوية ولكنها تخضع لقوانين رياضية معينة، بناءً على هذه الفكرة ظهرت الدوال الفوضوية التي تستخدم لدراسة التحولات المدهشة في الأنظمة التي تعتمد على الصدفة، مثل الطقس أو سلوك النظام البيئي .

إحدى أبرز الإسهامات في هذا المجال كانت محاكاة ديناميكيات الأنظمة التي تبدأ في حالة من التوازن ولكنها تتحول إلى فوضى تامة بعد فترة من الزمن وهو ما عرف لاحقاً بالفوضى الديناميكية .

1.4.2 تعريف: [7]

ليكن لدينا دالة $f: I \rightarrow I$ حيث I مجال، يقال عن الدالة f أنها فوضوية إذا:

1- f متعدية طبولوجياً.

2- مجموعة النقاط الدورية للدالة f كثيفة في I .

3- f لديها اعتمادية حساسة على الشروط الأولية.

1.4.2 مبرهنة: [9]

ليكن لدينا دالة $f: I \rightarrow I$ دالة مستمرة على المجال I ، إذا كانت f متعدية وتمتلك مجموعة من النقاط الدورية الكثيفة في I ، عندها f

تكون حساسة للشروط الأولية وبالتالي تكون f فوضوية.

لإثبات هذه المبرهنة سنقوم بداية بإثبات التمهيدية التالية .

تمهيدية:

ليكن لدينا دالة $f: I \rightarrow I$ دالة مستمرة على المجال I ، وكانت f على الأقل تملك نقطتين دوريتين،

عندها يوجد $\varepsilon_0 > 0$ والذي يحقق أنه من أجل كل $x \in I$ يوجد نقطة دورية $p \in I$ حيث $d(x, f^n(p)) \geq \varepsilon_0$ من أجل كل $n \in \mathbb{Z}^+$.

الإثبات:

لنختار نقطتين دوريتين p_0 و q_0 بحيث $O(p_0) \cap O(q_0) = \emptyset$

وبفرض $O(q_0) = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ و $O(p_0) = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$

ولنضع $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ هو:

$$\min\{d(p_i, q_j) : i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1\}$$

ولتكن لدينا $x \in I$ نقطة عشوائية، وبالتالي من خلال متراجحة المثلث لدينا من أجل $r, s \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

$$2\varepsilon_0 \leq d(f^r(p_0), f^s(q_0)) \leq d(f^r(p_0), x) + d(x, f^s(q_0))$$

لذا إذا كان $d(f^r(p_0), x) \leq \varepsilon_0$ عندها $d(x, f^s(q_0)) \geq \varepsilon_0$ من أجل كل $s \in \mathbb{Z}^+$

وإذا كان $d(x, f^s(q_0)) \leq \varepsilon_0$ عندها $d(f^r(p_0), x) \geq \varepsilon_0$ من أجل كل $s \in \mathbb{Z}^+$ ، وبهذا يتم إثبات التمهيدية.

إثبات المبرهنة 1.4.2:

ليكن لدينا $\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon_0$ حيث ε_0 كما في التمهيدية السابقة، وليكن $x \in I$ و $\delta > 0$ معطاة، مع $\delta < \varepsilon$ (بدون فقدان العمومية)،

بواسطة كثافة مجموعة النقاط الدورية يوجد نقطة دورية من المرتبة k هي $y \in I$ بحيث $|x - y| < \delta$

من خلال التمهيدية السابقة توجد نقطة دورية p بحيث:

$$|x - f^n(p)| \geq \varepsilon_0 = 4\varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \dots \dots (1)$$

ليكن:

$$U = \bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-i} \left(B_{\varepsilon} \left(f^i(p) \right) \right) \dots (2)$$

لنبين أن:

$$U = \{z: |f^i(z) - f^i(p)| < \varepsilon \text{ for } 0 \leq i \leq k-1\} \dots (3)$$

حيث U هي مجموعة مفتوحة وغير خالية طالما تحتوي على الأقل النقطة p طالما f متعدية يوجد $z \in B_{\varepsilon}(x)$ حيث $f^m(z) \in$

U من أجل بعض قيم $m \in \mathbb{Z}^+$ وليكن $r \in \mathbb{Z}^+$

حيث

$$0 < kr - m < k \text{ أو } \frac{m}{k} < r < \frac{m}{k} + 1$$

الآن:

$$|x - f^{kr-m}(p)| \leq |x - y| + |y - f^{kr}(z)| + |f^{kr}(z) - f^{kr-m}(p)| \dots (4)$$

بذكر أن $|x - y| < \delta < \varepsilon$ بالإضافة لذلك طالما

$$f^{kr}(z) = f^{kr-m}(p) \in B_{\varepsilon}(f^{kr-m}(p))$$

من أجل بعض قيم $q \in f^m(z)$ أو $z = f^{-m}(p)$

يكون لدينا:

$$|f^{kr}(z) - f^{kr-m}(p)| < \varepsilon$$

عندها من المتراجحة (4) نحصل على:

$$4\varepsilon \leq |x - f^{kr-m}(p)| < 2\varepsilon + |y - f^{kr}(z)|$$

هذا يؤدي وبواسطة (1) إلى:

$$|y - f^{kr}(z)| > 2\varepsilon$$

وطالما y دورية من الدرجة k :

$$|f^{kr}(y) - f^{kr}(z)| > 2\varepsilon$$

وطالما y دورية من الدرجة k فإنه وبحسب متراجحة المثلث:

$$2\varepsilon \leq |f^{kr}(y) - f^{kr}(z)| \leq |f^{kr}(y) - f^{kr}(x)| + |f^{kr}(x) - f^{kr}(z)|$$

$$\text{لذا إما } |f^{kr}(y) - f^{kr}(x)| > \varepsilon \text{ أو } |f^{kr}(x) - f^{kr}(z)| > \varepsilon$$

وهذا ما يثبت الاعتماد الحساس على الشروط الأولية.

ملاحظة:

في الآونة الأخيرة أظهر فيليكوب وبيرغلاند أنه بالنسبة للدوال المستمرة على مجالات في R فإن التعدي يعني أن مجموعة النقاط الدورية كثيفة، ويترتب على ذلك حسب المبرهنة 1.2.3 أن التعدي يعني الفوضى.

2.4.2:مبرهنة:

لتكن لدينا $J \rightarrow f: J$ دالة مستمرة على المجال J في $\mathbb{R}$ ، لنفرض أنه يوجد مجال جزئي I من J بحيث I لا يحتوي على أي نقاط دورية في f .

إذا كانت $f^n(x), f^m(x), x$ جميعها في I بحيث $0 < m < n$ ،

عندها إما $x < f^m(x) < f^n(x)$ أو $x > f^m(x) > f^n(x)$

الإثبات:

ليكن لدينا m و n أعداد صحيحة بحيث $0 < m < n$ ، وليكن لدينا $I \subset J$ مجال لا يحوي نقاط دورية للدالة f ،

ولنفرض أنه من أجل بعض قيم $x \in I$ لدينا $x < f^m(x)$ و $f^m(x) > f^n(x)$ و $f^m(x), f^n(x) \in I$

لنعرف دالة جديدة $g = f^m$ عندها لدينا $x < g(x)$ ، لنثبت أنه من أجل كل $1 < k$ فإن:

$$(1) \quad x < g(x) \leq x < g^k(x) \dots \dots$$

الآن إذا كانت $g^2(x) < g(x)$ ، عندها الدالة $h(x) = g(z) - z$ موجبة عندما $z = x$ وموجبة $z = g(x)$ وبالإستفادة من مبرهنة القيمة الوسطى، هذا يقودنا إلى أن $h(y) = g(y) - y$ ، من أجل بعض قيم y بين x و $g(x)$ هذا يعني أن $g(y) = f^m(y) = y$ حيث y هي نقطة دورية للدالة f .

ولكن $y \in I$ وطالما x و $g(x)$ في I ، بشكل أوضح نحن أمام تناقض، هذا يثبت أن $x < g(x) < g^2(x)$ الآن $x < g^k(x)$ من أجل كل $k \in \mathbb{Z}^+$ وعلى وجه الخصوص من أجل $k = n - m$

لدينا $x < g^{n-m}(x) = f^{(n-m)m}(x)$ ، بوضع $h = f^{n-m}$ لدينا:

$$x < h^m(x) \dots \dots (2)$$

بالإضافة لذلك من أول سطر في البرهان:

$$f^{m-n}(f^m(x)) = f^n(x) < f^m(x)$$

أو $h(f^m(x)) < f^m(x)$ ، باستخدام نفس الطريقة المتبعة في g لدينا:

$$h^m(f^m(x)) < f^m(x) \dots \dots (3)$$

باستخدام المعادلتين (2) و (3) نرى أن الدالة $p(y) = h^m(y) - y$ موجبة عندما $y = x$

وسالبة عندما $y = f^m(x)$ ، وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطى، يوجد $z \in I$ بين x و $f^m(x)$ بحيث:

$$h^m(z) = f^{(n-m)m}(z) = z$$

وهذا تناقض، مما يثبت أن $x < f^m(x) < f^n(x)$

بنفس الأسلوب يمكننا إثبات الجزء الثاني من المبرهنة.

3.4.2 مبرهنة: [9]

ليكن لدينا $f: J \rightarrow J$ دالة مستمرة على المجال J (ليس بالضرورة مغلق) في $\mathbb{R}$.

إذا كانت الدالة f متعدية عندها مجموعة النقاط الدورية في J كثيفة في J وبالتالي f فوضوية.

الإثبات:

لنفترض أن f متعدية، ولنفترض أنه يوجد مجال جزئي I من J والذي لا يحوي نقاط دورية لـ f .

وليكن لدينا $x \in I$ بحيث x ليست نقطة نهاية لـ $I, U \subset I$ مجالات مفتوحة تحتوي x ، وليكن $V \subset I \setminus U$ مجال مفتوح في I لا

يتقاطع مع U من خلال تعدي الدالة f يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ ، بحيث من أجل بعض قيم $y \in U$

و $f^m(x) \in V$. وطالما f^m مستمرة عندها يوجد مفتوح W يحوي y بحيث $f^m(W) \subset V$ ،

حيث $f^m(W) \cap W = \emptyset$ طالما $f^m(W)$ ليست مجموعة مفتوحة، لنختار مجال مفتوح $B \subset f^m(W)$

بحيث $f^m(y) \in W$ باستخدام التعدي للدالة f مرة أخرى لدينا $f^k(B) \cup W \neq \emptyset$ ، من أجل بعض قيم $k \in \mathbb{Z}^+$

إذن يوجد $z \in W$ بحيث $f^{m+k}(z) = f^n(z) \in W$ وهذا يناقض التمهيدية السابقة طالما $f^n(z) \in W$ ، بينما $f^m(z) \notin W$

W ، وبذلك يتم إثبات المبرهنة.

ولكن هل عكس هذه المبرهنة صحيح؟؟

لقد تمكنا في عملنا هذا من إثبات أن عكس هذه المبرهنة ليس صحيح بالضرورة

3.4.2: مبرهنة (عكس المبرهنة السابقة)

ليس بالضرورة أن تكون كل دالة تمتلك مجموعة كثيفة من النقاط الدورية أن تكون دالة متعدية.

الإثبات:

لإثبات ذلك نأخذ المثال التالي.

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

ليكن لدينا الدالة $f(x) = \sin(x^2)$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

- ولنثبت أن هذه الدالة تملك مجموعة كثيفة من النقاط الدورية ولنثبت أن الدالة تأخذ قيم -1 و 1 بشكل كثيف.
 - نعلم أن $\sin x = 1$ عندما تكون $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ حيث k عدد صحيح، بالنسبة للدالة $\sin(x^2)$ نقوم بحل المعادلة $\sin(x^2) = 1$ ، هذا يعني أن $x^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ وبالتالي $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.
 - وبما أن k يمكن أن يأخذ أي قيمة صحيحة فإننا نجد أن القيم التي تحقق $\sin(x^2) = 1$ تتوزع بشكل كثيف عبر جميع الأعداد الحقيقية .
 - بالمثل عندما نبحث عن النقاط التي تحقق $\sin(x^2) = -1$ نحل المعادلة $\sin(x^2) = -1$ وهذا يعني أن $x = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.
 - وبما أن k يمكن أن يأخذ أي قيمة صحيحة فإن النقاط التي تحقق $\sin(x^2) = -1$ تتوزع أيضاً بشكل كثيف عبر جميع الأعداد الحقيقية .
 - إذن بما أن القيم $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$ و $x = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}$ تتكرر بشكل كثيف على طول المجال $\mathbb{R}$ لكل $k \in \mathbb{Z}$ ، هذا يعني أن الدالة $f(x) = \sin(x^2)$ تمتلك مجموعة من النقاط الدورية الكثيفة، وهي النقاط التي تحقق $\sin(x^2) = 1$ و $\sin(x^2) = -1$ ، إذن الدالة f تمتلك مجموعة من النقاط الدورية الكثيفة .
 - لنثبت الآن أن الدالة $f(x) = \sin(x^2)$ غير متعدية .
 - لنأخذ زوج من المجالات المفتوحة j_1 و j_2 من $\mathbb{R}$ بحيث $j_1 \cap j_2 = \emptyset$.
 - نلاحظ أنه أياً تكن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $f^k(j_1) \in]-1, 1[$.
 - باختيار j_2 لا يتقاطع مع المجال $] -1, 1[$ فإننا نجد أن $f^k(j_1) \cap j_2 = \emptyset$ ، وبالتالي الدالة f غير متعدية.
- مما سبق نجد أنه ليس بالضرورة كل دالة تملك عدد كثيف من النقاط الدورية تكون متعدية وبذلك يتم المطلوب.

3. الفصل الثالث: دور أس ليبانوف في تحديد الفوضى:

مقدمة:

أس ليبانوف هو أسلوب رياضي يستخدم لدراسة استقرار الأنظمة الديناميكية وتحديد ما إذا كانت دالة معينة تظهر سلوكاً فوضوياً أم لا، يقوم هذا الأسلوب بتحليل التغيرات في الأنظمة الديناميكية من خلال دالة تسمى "دالة ليبانوف" التي تستخدم لتحديد استقرار النظام .

دالة ليبانوف هي دالة رياضية يتم اختيارها بعناية بحيث تكون غير سالبة، وتتناقص مع الزمن في النظام الديناميكي المستقر، في حالة وجود دالة ليبانوف لهذه الأنظمة يتم استخدامها لتحديد إذا كان النظام الرياضي سيبقى في حالة استقرار أو يدخل في سلوك فوضوي، عند تطبيق أسلوب ليبانوف على دالة معينة يتم تحليل سلوك النظام عبر إيجاد دالة ليبانوف وفحص التغيرات في قيمها على مر الوقت، وفي حال ثبت أن دالة ليبانوف تتناقص بشكل مستمر مع مرور الوقت فإن النظام يعتبر مستقراً، أما إذا ظهرت تغييرات غير منتظمة أو غير قابلة للتنبؤ في سلوك الدالة فإن هذا يشير إلى السلوك الفوضوي.

لنفسر آلية عمل أس ليبانوف:[6]

لتكن لدينا الدالة المضاعفة:

$$D: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

رأينا في الفصل السابق أن هذه الدالة تملك اعتماداً حساساً على الشروط الأولية، كما أظهرت هذه الدالة تمداً أسيّاً يمكن التعبير عنه

بواسطة أس ليبانوف λ ، يمكننا القول إن أس ليبانوف $\lambda(x)$ في النقطة x يقيس نمو الخطأ لكل تكرار للدالة

أو متوسط فقدان المعلومات أثناء التكرارات المتعاقبة ل x .

كيف نحدد هذا؟

نبدأ بالنظر إلى النقطة x_0 والنقطة a المجاورة حيث $a = x_0 + \delta$ ، ثم تعريف الخطأ على أنه:

$$e_n = |f^n(x_0 + \delta) - f(x_0)|$$

والخطأ النسبي:

$$\left| \frac{e_n}{\delta} \right| = \frac{f^n(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}$$

إذا كانت الدالة تملك اعتماداً حساساً على الشروط الأولية فإن الخطأ النسبي سيزداد أضعافاً مضاعفة بازدياد n وعندها سيكون قيمة

الخطأ الجديد:

$$e^{n\lambda^*} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e_n}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|f^n(x_0 + \delta) - f(x_0)|}{\delta}$$

من أجل بعض قيم $\lambda^* > 0$ عندها:

$$e^{n\lambda^*} = \left| \frac{d}{dx} f^n(x_0) \right| = |f'(x_0) \cdot f'(x_1) \dots \dots f'(x_{n-1})|$$

وبالتالي:

$$\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln f'(x_k)$$

وهذا يقودنا إلى تعريف أس ليبيانوف $\lambda(x_0)$ للدالة f :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |[f^n(x_0)]'| \dots \dots \dots (3.1)$$

وهذا يؤكد أن:

$$\ln |[f^n(x_0)]'| = \sum_{k=0}^{n-1} \ln f'(x_k) \dots \dots \dots (3.2)$$

حيث $x_k = f^k(x_0)$ عندها المعادلة (1.3) تصبح:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)| \dots \dots \dots (3.3)$$

- تخبرنا الصيغة (3.3) أن أس ليبانوف هو معدل تغير اللوغاريتم الطبيعي لمطلق قيمة مشتقات الدالة التي تم تقييمها عند نقاط المدار.
- نلاحظ أنه إذا كان تطبيق الدالة عند نقطتين قريبتين يؤدي إلى نقطتين آخريين فإن القيمة المطلقة لمشتقة الدالة أكبر من 1 عند تقييمه عند هذه النقاط المدارية، وبالتالي يكون لوغاريتمته موجبا لو استمرت نقاط المدار في التباعد، ثم إن معدل تغير اللوغاريتم للقيم المطلقة للمشتقات سيكون إيجابياً وبالتالي وجود اعتماد حساس على الظروف الأولية.
- إذا كان أس ليبانوف λ موجب فإن ذلك يعني وجود اعتماد حساس على الشروط الأولية وبالتالي وجود فوضى، علاوة على ذلك فإنه كلما كبر أس ليبانوف كلما كان حجم الخطأ أكبر وبالتالي حجم الفوضى أكبر كما سنرى في الأمثلة التالية :

1.3 مثال:

لنوجد أس ليبانوف لدالة الخيمة:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ليكن لدينا $x_0 \in (0, 1)$ عندها:

$$T(x(k)) = \begin{cases} 2x(k) & ; 0 \leq x(k) \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

عندها $|T'(x(k))| = 2$ من خلال المعادلة (3.3) نجد:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln 2 \approx 0.6931$$

هذا يقودنا الى أن دالة الخيمة حساسة للشروط الأولية إذن فهي دالة فوضوية.

2.3 مثال:

لنأخذ الدالة الدورانية المعرفة على دائرة الوحدة المعرفة كالتالي:

$$R_{\lambda}(\theta) = \theta + 2\pi k \quad ; \quad k \in R$$

$$|R'_{\lambda}(x)| = 1 \text{ عندها}$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln 1 = 0$$

هذا يعني أن الدالة R_{λ} تفشل أن تكون حساسة للشروط الأولية، إذن هي دالة ليست فوضوية.

3.3 مثال:

ليكن لدينا الدالة:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-x) & ; \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$I = \left[0, \frac{3}{4} \right] \text{ المعرفة على المجال}$$

لنرى فيما إذا كانت الدالة f فوضوية أم لا.

$$|f'(x)| = \frac{3}{2}$$

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{3}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n \cdot \ln \frac{3}{2}$$

$$= \ln \frac{3}{2} > 0$$

ومنه الدالة حساسة للشروط الأولية وبالتالي الدالة فوضوية.

لتكن لدينا الدالة اللوجستية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$$f(x) = rx(1 - x)$$

ولندرس استقرار هذه الدالة بالاعتماد على أس لبيانوف، حيث r معامل ثابت (معامل التحكم في النظام) .

نبدأ بحساب أس لبيانوف للنظام عند نقطة معينة x_0 باستخدام العلاقة :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

إذن وحسب قيمة r يمكننا حساب أس لبيانوف من العلاقة السابقة ونميز ثلاث حالات:

- $\lambda > 0$ هذا يشير إلى أن النظام سيكون فوضوياً .
- $\lambda = 0$ هذا يشير إلى أن النظام قد يكون دورياً أو ثابتاً .
- $\lambda < 0$ فإن النظام في هذه الحالة سيكون مستقراً ولن يظهر سلوكاً فوضوياً .

الخلاصة:

يعد دور أس لبيانوف في تحديد الفوضى في دالة معينة أمراً محورياً في فهم سلوك الأنظمة الديناميكية من خلال دوال لبيانوف، التي تستخدم كأداة لتحديد استقرار الأنظمة، يمكننا الكشف عن الفوضى من خلال تحليل النقاط الثابتة والسلوك غير المنتظم للنظام، عندما تظهر الدالة سلوكاً معقداً أو متذبذباً يتغير بشكل غير متوقع، فإن ذلك يعد مؤشراً على الفوضى التي تعيق التنبؤ المستقبلي للنظام، بفضل إسهامات لبيانوف أصبح من الممكن دراسة وتحليل الفوضى من منظور رياضي دقيق مما يسهم في تطوير الكثير من التطبيقات في الرياضيات والفيزياء والهندسة.

4 الفصل الرابع: تطبيق نظرية الفوضى في التشفير

لنظرية الفوضى تطبيقات عديدة كونها موضوع متعدد الاختصاصات، حيث تم العثور على الفوضى في التفاعلات الكيميائية والطقس و حركة الكويكبات و حركة الذرات الموجودة في المجال الكهرومغناطيسي والليزر والنشاط الكهربائي للقلب والدماغ وغيرها، سنتناول في هذا البحث تطبيقاً بسيطاً وشيقاً لنظرية الفوضى في تشفير الصور وفك تشفيرها.

تمثل نظرية الفوضى أداة قوية لإنشاء خوارزميات تشفير غير قابلة للتنبؤ، حيث تعتمد على سلوك الأنظمة الفوضوية لتوليد مفاتيح تشفير يصعب التنبؤ بها أو اختراقها، كما تتميز الأنظمة الفوضوية بوجود سلوك عشوائي ضمن حدود معينة مما يجعل من الصعب على المهاجمين فك شيفرة الصورة حتى مع وجود معلومات جزئية عن النظام.

إذن تتعلق نظرية الفوضى بتشفير الصور من خلال استخدام خصائص الأنظمة الفوضوية لتوليد عمليات غير خطية وعشوائية تهدف على تعزيز أمان البيانات في تشفير الصور.

يمكن تلخيص العلاقة بين نظرية الفوضى التشفير في النقاط التالية :

- **العشوائية واللامحدودية :** الأنظمة الفوضوية تتميز بوجود سلوك عشوائي وغير قابل للتنبؤ، حيث أن التغيرات الصغيرة في الشروط الأولية يمكن أن تؤدي إلى نتائج مختلفة تماماً، هذه الخاصية تجعل من الصعب التنبؤ بمحتوى الصورة المشفرة أو فك شفرتها دون معرفة المفتاح الدقيق، وبالتالي يستفاد من هذه الأنظمة العشوائية في إنشاء خوارزميات تشفير يصعب عملية فك تشفيرها.
- **التوليد العشوائي للمفاتيح:** في تشفير الصور باستخدام نظرية الفوضى يمكن استخدام الأنظمة الفوضوية مثل الدالة اللوجستية أو الأنظمة الديناميكية غير الخطية لتوليد مفاتيح التشفير باستخدام تحويلات رياضية معقدة بحيث يتم تطبيق العمليات الفوضوية في مراحل متعددة، هذه العمليات تجعل الصورة أكثر تعقيداً و تدني إمكانية التشفير .

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

• الحساسية للتغيرات الصغيرة: إن الأنظمة الفوضوية تكون حساسة جداً للتغيرات في الأولوية الصغيرة، يمكن استغلال هذه

الخاصية في تشفير الصورة بحيث يؤدي أي تغير طفيف في البيانات الأولية إلى تغيير جذري في البيانات المشفرة مما يعزز الأمان بشكل كبير.

إجمالاً يمكن القول أن نظرية الفوضى توفر الأساس الرياضي اللازم لإنشاء أنظمة تشفير الصور التي تعزز الأمان بشكل كبير بحيث يصبح فك التشفير أمراً صعباً للغاية دون امتلاك المفتاح الصحيح.

1.4: التشفير باستخدام المعادلة اللوجستية $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$ [14]

لتكن لدينا الدالة اللوجستية المعرفة كالتالي:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

حيث x_n هي قيمة المتغير عند الوقت n .

r هو معامل النمو الذي يحدد سلوك النظام (يكون بين 3.57 و 4 لظهور الفوضى)

خطوات التشفير :

المرحلة الأولى توليد المفتاح: حيث يتم اختيار قيمة أولية x_0 ومعامل نمو r يتم تطبيق الدالة اللوجستية على هذه القيمة لتوليد سلسلة من الأرقام العشوائية.

المرحلة الثانية هي تشويش الصورة: حيث تتحول الصورة الأصلية إلى مصفوفة بكسلات، يتم استخدام القيم الناتجة من الدالة اللوجستية بعد تطبيقها على المصفوفة لتبديل أو تشويش مكان البكسلات وتغيير قيمها مما يخلق تشويشاً في الصورة.

المرحلة الثالثة : يتم استخدام الدالة الفوضوية لتحديد كيفية تبديل البكسلات أو تعديل قيمتها، إذا كانت لدينا مجموعة من القيم العشوائية الناتجة عن الدالة اللوجستية يمكن استخدامها كدليل لتبديل مواقع البكسلات في الصورة، إذا تم تطبيق هذه العمليات بشكل صحيح فإن الصورة المشفرة تصبح غير قابلة للتعرف عليها، حيث يتم تشويش المواقع بشكل عشوائي.

على سبيل المثال لنفترض أنه لدينا صورة $4*4$ حيث تكون قيم البكسلات كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 100 & 150 & 200 & 255 \\ 120 & 170 & 220 & 255 \\ 130 & 170 & 220 & 250 \\ 140 & 190 & 230 & 245 \end{pmatrix}$$

نختار قيمة ابتدائية عشوائية ولتكن $x_0 = 0.5$ ، ومعامل نمو $r = 3.7$ ، بعد تطبيق الدالة اللوجستية نحصل على سلسلة من الأرقام العشوائية مثل:

$$0.5, 0.625, 0.75, 0.8125, 0.859375, \dots \dots \dots$$

بعد هذه العمليات الصورة تصبح مشوشة ولا يمكن التعرف عليها، كما أن كل تغيير في القيمة الابتدائية أو معامل النمو يؤدي إلى نتيجة مختلفة.

عملية فك التشفير : لفك تشفير الصورة يجب معرفة القيمة الابتدائية ومعامل النمو، وإن عملية الدالة اللوجستية نفسها تستخدم لتوليد نفس السلسلة العشوائية التي كانت تستخدم في التشفير بحيث يمكن استعادة ترتيب البكسلات الأصلية. لنأخذ تطبيق آخر لنظرية الفوضى في التشفير وذلك باستخدام تطبيق قط آرنولد.

2.4. التشفير باستخدام تطبيق قط آرنولد: [1]

دالة قط آرنولد هي دالة فوضوية تستخدم بشكل شائع في تطبيقات تشفير الصور على غرار الدالة اللوجستية التي ذكرناها سابقاً، تستخدم دالة قط آرنولد خصائص الفوضى لإحداث تشويش في صورة أو بيانات ما، مما يجعل من الصعب استعادة البيانات الأصلية بدون معرفة المفتاح (أو القيم الابتدائية).

تم تسمية الدالة المعروفة باسم دالة قط آرنولد نسبة إلى عالم الرياضيات فلاديمير آرنولد الذي أوضحه لأول مرة باستخدام رسم تخطيطي لقط، يتم تعريف تطبيق قط آرنولد على أنه التطبيق:

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

حيث:

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1 \dots \dots \dots (1)$$

حيث أن:

$$(x, y) \bmod 1 = (x \bmod 1, y \bmod 1)$$

أي أن المؤثر Γ هو تطبيق يقوم بتحويل أي نقطة في $\mathbb{R}^2$ إلى نقطة (x, y) في مربع الوحدة حيث:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

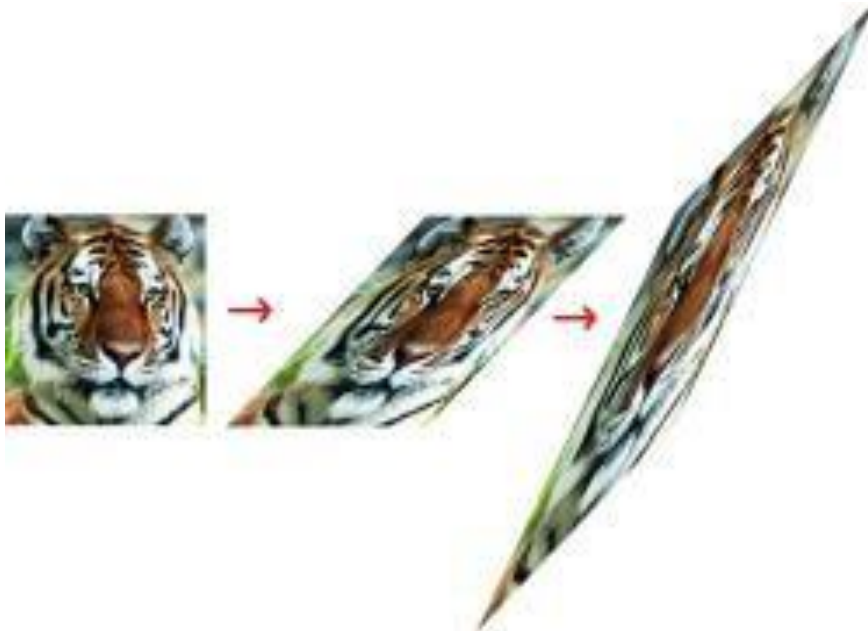
القص:

نستطيع كتابة المعادلة (1) بالصيغة:

$$\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1$$

يوضح هذا التحليل أن تطبيق القط يتكون من قص في الاتجاه x يليه قص في الاتجاه y ، ويبين الشكل (1) تأثير تلك المقصات

واحد تلو الآخر على مربع الوحدة والذي تم رسمه بصورة قطرة (أو يمكننا التعميم واستخدام أي صورة نريد)



الشكل (1)

دراسة في نظرية الفوضى/الريابي

ولأن محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ هو 1، أي أن أي صورة في المستوى R^2 والتي تم تحويلها بواسطة هذه المصفوفة ستحتفظ بمساحتها

الأصلية، وبالتالي فإن مساحة الصورة الثالثة في الشكل (1) هي نفس مساحة الصورة الأولى في هذا الشكل، يتمثل تأثير عملية التعديل في تقطيع الصورة الثالثة وإعادة تجميعها في مربع الوحدة كما هو موضح في الشكل (2)، هذا هو التطبيق الكامل لتطبيق قط آرنولد الذي تم إجراؤه مرة واحدة على الصورة الموضحة في الشكل (1)

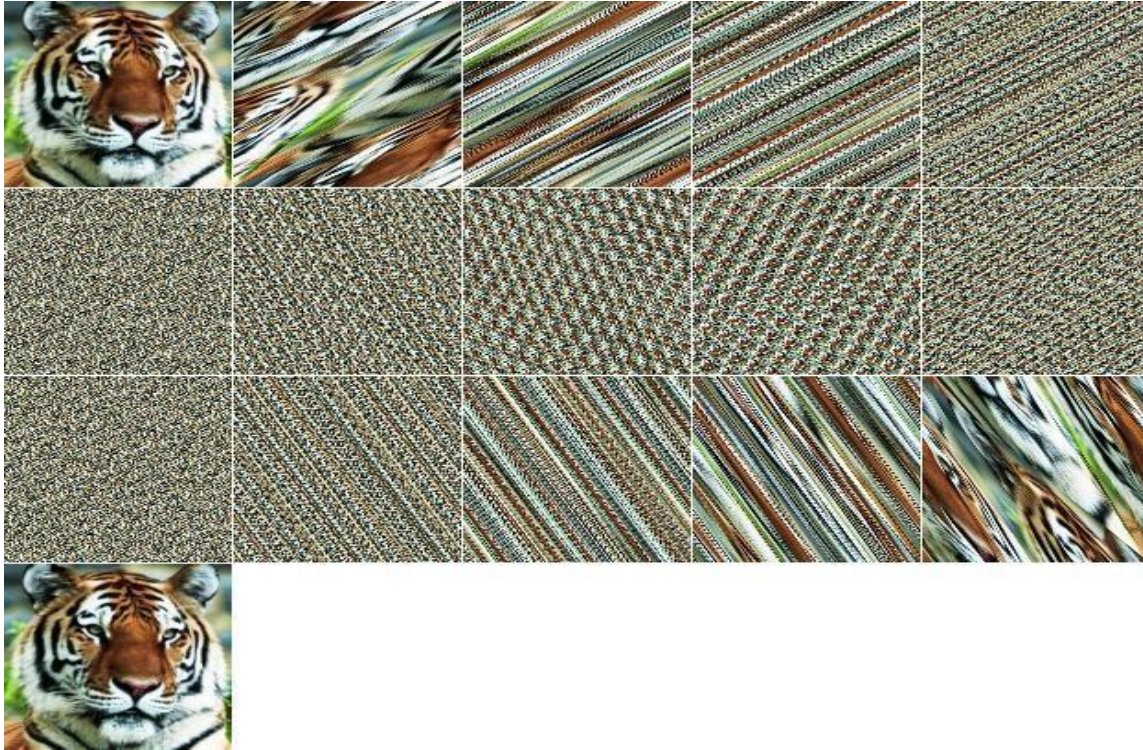


الشكل (2)

• دور تطبيق القط في التشفير وفك التشفير:

بعد التطبيقات المتكررة لتطبيق القط نرى بعض الأشياء المدهشة تحدث، تبدو الصورة تذبذب في حالة تشبه تشوش التلفاز (أي تم تشفير الصورة)، ومن ثم بعد عدد من التكرارات تعود الصورة إلى حالتها الأصلية (أي تم فك تشفير الصورة). يوضح الشكل (3) تأثير التطبيقات المتكررة لتطبيق القط على صورة مقاسها 124×124 بكسل، قد يبدو هذا الأمر غير عادي تماما في البداية ولكن في الواقع يمكن تفسيره بشكل معقول جدا، لنفترض تأثير تطبيق القط على نقطة واحدة في المستوى $\mathbb{R}^2$ من الصيغة $(a/n, b/n)$ حيث a, b أعداد صحيحة.

$$0 \leq a < n, 0 \leq b < n$$



الشكل (3): دورة كاملة

$$\begin{aligned}
 \Gamma \begin{pmatrix} a/n \\ b/n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/n \\ b/n \end{pmatrix} \mod 1 \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{a+b}{n} \\ \frac{a+2b}{n} \end{pmatrix} \mod 1 \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{a+b}{n} \right) \mod 1 \\ \left(\frac{a+2b}{n} \right) \mod 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

نعلم مسبقاً أن Γ سيحول أي نقطة في المستوى R^2 إلى مربع الوحدة، من أجل نقطة في مربع الوحدة إحداثياتها (x, y) كلاهما

أعداد حقيقية ذات قاسم مشترك أكبر n ، Γ ستقوم بتحويل تلك النقطة إلى نقطة أخرى من الصيغة $\left(\frac{c}{n}, \frac{d}{n} \right)$ حيث $0 \leq d < n$

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

كل نقطة إلى موضعها الأصلي بعد n^2 تكرار من تطبيق القط على الأكثر. $n, 0 \leq c < n$ ، تنتقل كل نقطة ما عدا النقطة $(0,0)$ إلى موضع جديد كانت تحتله في السابق نقطة أخرى حيث يجب أن تعود كل نقطة إلى موضعها الأصلي بعد n^2 تكرار من تطبيق القط على الأكثر.

لنفترض أنه إذا عادت نقطة إلى موضعها الأصلي بعد p تكرار من تطبيق القط نقول إن هذه النقطة تمتلك دورة قدرها p ، على سبيل المثال نستطيع ببساطة أن نرى دورة النقطة $(0,0)$ على أنها 1.

$$\begin{aligned} R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mod } 1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mod } 1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \text{ mod } 1 \\ 0 \text{ mod } 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

إذن بعد تكرار واحد من تطبيق القط عادت النقطة إلى موضعها الأصلي وبالتالي دورة النقطة $(0,0)$ هي واحد وهي النقطة الوحيدة التي دورتها واحد.

ليكن لدينا صورة مقاس $N \times N$ ، وليكن لدينا كل نقطة في هذه الصورة تمتلك دورة p_i دورة الصورة بأكملها ستكون المضاعف المشترك الأصغر لجميع p_i ، على سبيل المثال إذا كان لدينا صورة في مربع الوحدة وكان لدينا نقاط دوراتها 1 و 3 و 5 و 15 ، فإن عدد التكرارات المطلوبة لتطبيق القط لإعادة الصورة إلى حالتها الأصلية ستكون 15 ،

كما هو الحال في الصورة التي يبلغ حجمها 124×124 بكسل التي تم مشاهدتها في الشكل (3).

إذن تختلف عدد الدورات إعادة الصورة إلى حالتها الأصلية من صورة إلى أخرى.

في الختام يمكن القول أن نظرية الفوضى تمثل أحد الأدوات الرائدة في مجال تشفير الصور حيث تقدم حلاً مبتكرة وفعالة في تحسين الأمان والكفاءة والخوارزميات المستخدمة، ومن خلال استغلال المبادئ الأساسية لهذه النظرية مثل العشوائية والأنماط غير القابلة للتنبؤ، يمكن إنشاء أنظمة تشفير أكثر قوة وصعوبة في فك التشفير، هذه الأنظمة تعد مثالية في حماية البيانات الحساسة ضد

دراسة في نظرية الفوضى/الريابي

المحاولات غير الشرعية للوصول إليها، مما يساهم في تعزيز الأمان الرقمي بشكل عام وفي المستقبل من المتوقع أن تواصل نظرية الفوضى تطورها وتقديم أساليب جديدة ومتقدمة في مجال تشفير الصور وحمايتها .

3.4: تشفير نص باستخدام معادلات لورنز الفوضوية: [15]

يمكن تطبيق بعض مفاهيم نظرية الفوضى لتحقيق أمان أفضل، الفكرة الأساسية هي استخدام الخواص الفوضوية لتوليد مفتاح التشفير، أو خوارزميات غير قابلة للتنبؤ.

في التشفير باستخدام نظرية الفوضى يتم إنشاء خوارزميات أو مفاتيح تعتمد على عمليات فوضوية، حتى التغيير الطفيف في المدخلات أو المفتاح الأولي يؤدي إلى نتائج مختلفة تماماً هذا يعني أن الشخص الذي يحاول فك التشفير يجب أن يعرف المفتاح بشكل دقيق وإلا فإنه لن يتمكن من التوصل إلى النص الأصلي.

نظرية الفوضى تساعد على جعل الشيفرة أكثر مقاومة للهجمات وذلك لأن النظام الفوضوي يبذل البيانات بشكل معقد جداً. يمكن استخدام أنظمة فوضوية مثل معادلات لورنز الفوضوية لإنشاء آليات تبديل معقدة ، إذن نظرية الفوضى توفر أساساً رياضياً قوياً يمكن أن يعزز من قوة وأساليب التشفير عن طريق جعلها أكثر تعقيداً وصعوبة في التحليل والكسر. والآن لنتعرف على كيفية تشفير نص باستخدام معادلات لورنز الفوضوية.

بدايةً سنتعرف على معادلات لورنز الفوضوية.

معادلات لورنز الفوضوية هي مجموعة من المعادلات الرياضية التي تمثل نظاماً ديناميكياً غير خطي صممها العالم الرياضي إدوارد لورنز عام 1963 كنموذج مبسط لحركة الهواء في الغلاف الجوي، على الرغم من بساطتها إلى أنها أظهرت سلوكاً فوضوياً غير متوقع مما ساعد في تأسيس علم الفوضى، المعادلات على الشكل التالي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

حيث σ و ρ و β معاملات يمكن التحكم بها كشرط ابتدائية، والمتغيرات x, y, z تمثل عوامل في الطقس (ليست موضوعنا الآن)، إن هذه

المعاملات بسيطة لكنها عند قيم معينة للمعاملات مثل $(\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3})$

تظهر خصائص فوضوية بسبب :

1. الحساسية للشروط الابتدائية: إذا افترضنا أن المعادلة بدأت بقيم ابتدائية متقاربة جداً مثل 1.00001, 1

فإنه بعد وقت قصير نلاحظ أن المسارين سيكونان في اتجاهين مختلفين تماماً.

2. لا يوجد استقرار نحو نقطة أو دورة: في الأنظمة الخطية تتجه الحركة لنقطة توازن أو إلى مسار دوري، في معادلات لورنز

المسار لا ينتهي إلى نقطة ولا إلى تكرار بل يتحرك داخل شكل معقد وغير متكرر، تستخدم معادلات لورنز في تشفير

النصوص ضمن ما يعرف بـ " التشفير القائم على الفوضى " وهو نوع من التشفير يستخدم أنظمة فوضوية (مثل معادلات

لورنز) لتوليد مفاتيح أو تشويش البيانات.

سنشرح الآن آلية عمل معادلات لورنز في توليد مفاتيح فوضوية :

1. توليد مفاتيح فوضوية :

معادلات لورنز تستخدم لتوليد سلسلة من القيم (x, y, z) عبر الزمن، هذه القيم تعتمد وبشدة على القيم الأولية، المفتاح

النهائي هو مثلاً سلسلة من الأرقام الناتجة من المسار $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$

2. خلط النص:

السلسلة الفوضوية تستخدم لتغيير ترتيب الحروف أو تشفيرها باستخدام XOR ، التي هي واحدة من أبسط

دراسة في نظرية الفوضى/الرياضي

العمليات المنطقية المستخدمة في التشفير وتعمل كالتالي:

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

تتم العملية على الشكل التالي:

على فرض النص الواضح هو N

المفتاح هو M

النص المشفر هو P

العملية تكون على الشكل التالي:

$$P = N \text{ XOR } M$$

ولفك التشفير :

$$N = P \text{ XOR } M$$

مثال عملي :

لنأخذ على سبيل المثال كلمة "HELLO" ونريد تشفيرها باستخدام معادلات لورنز.

خطوات التشفير :

1. نحول النص إلى أرقام ASCII:

$$H = 72$$

$$E = 69$$

$$L = 76$$

$$L = 76$$

$$O = 79$$

نرمز للنص كسلسلة :

$$M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

حيث $m_i \in [0, 255]$ هو الرقم المقابل لكل حرف.

إذن الرسالة كمتجه هي: $M = (72, 69, 76, 76, 79)$

2. توليد مفتاح باستخدام معادلات لورنز:

نستخدم معادلات لورنز :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

مع قيم ثابتة مثل :

$$\sigma = 10$$

$$\rho = 28$$

$$\beta = \frac{8}{3}$$

3. نحدد قيم ابتدائية والخطوة الزمنية :

$$x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$$

ونستخدم طريقة أويلر لحساب خطوات تقريبية :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$z_{i+1} = z_i + \Delta t \cdot \frac{dz}{dt}$$

حيث $\Delta t = 0.01$.

4. نحسب القيم واحد تلو الآخر :

الخطوة الأولى ($i = 1$):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10(1 - 1) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 1(28 - 1) - 1 = 26 \\ \frac{dz}{dt} = 1(1) - 2.6667(1) = -1.6667 \end{cases}$$

نحسب القيم الجديدة :

$$x_1 = 1 + 0.01 = 1$$

$$y_1 = 1 + 26(0.01) = 1.26$$

$$z_1 = 1 - 1.6667(0.01) = 0.9833$$

الخطوة الثانية ($i=2$):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10(1.26 - 1.0) = 2.6 \\ \frac{dy}{dt} = 1(28 - 0.9833) - 1.26 = 25.7567 \\ \frac{dz}{dt} = 1(1.26) - 2.6667(0.9833) \approx -1.363 \end{cases}$$

ومنه يكون:

$$x_2 = 1 + 2.6(0.01) = 1.026$$

$$y_2 = 1.26 + 25.7567(0.01) \approx 1.5176$$

$$z_2 = 0.9833 - 1.363(0.01) \approx 0.9697$$

نكرر الخطوات حتى نحصل على عدد من القيم يساوي طول الرسالة.

5. تحويل القيم السابقة إلى مفتاح :

كل x_i نحوله إلى عدد صحيح 8_بت باستخدام :

$$k_i = [x_i \cdot s] \bmod 256$$

حيث :

$s = 1000$ (نضخم الرقم للحصول على دقة)

$\bmod 256$: حتى تكون القيمة ضمن 8_بت .

مثلاً:

x_i	$x_i \cdot 1000$	[.]	$\bmod 256$	k_i
1	1000	1000	$1000 \bmod 256$	232
1.026	1026	1026	$1026 \bmod 256$	2
1.05	1050	1050	$1100 \bmod 256$	34
1.1	1100	1100	$1100 \bmod 256$	76
1.2	1200	1200	$1200 \bmod 256$	176

فيصبح:

$$k = (232, 2, 34, 76, 176)$$

6. استخدام المفتاح مع XOR:

بدايةً ماهي عملية XOR :

هي عملية على البتات بحيث من اجل كل $a, b \in 0,1$:

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & : a = b \\ 1 & : a \neq b \end{cases}$$

عملية توسيع XOR إلى أعداد 8_بت (ASCII) :

بفرض النص الواضح هو $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$:

والمفتاح هو $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$:

بحيث $m_i, k_i \in \mathbb{Z}_{256}$

نحول كل عدد إلى تمثيله الثنائي 8_بت ونجري XOR على كل بت

$$c_i = m_i \oplus k_i = \sum_{j=0}^7 (m_{ij} \oplus k_{ij}) \cdot 2^j$$

وتتم عملية تشفير النص "HELLO" على الشكل التالي (باستخدام ASCII):

ثنائي (8 بت)	عشري	حرف
01001000	72	H
01000101	69	E
01001100	76	L
01001100	76	L

0	79	01001111
---	----	----------

باستخدام المفتاح الذي أوجدناه من معادلات لورنز:

المفتاح	عشري	ثنائي (8 بت)
k_1	232	11101000
k_2	2	11101000
k_3	34	00000010
k_4	76	00100010
k_5	176	10110000

عملية XOR لكل حرف:

$$1. \quad H=72, k_1 = 232$$

$$01001000 \oplus 11101000 = 10100000 = 160$$

$$2. \quad E=69, k_2 = 2$$

$$.01000101 \oplus 00000010 = 01000111 = 71$$

$$3. \quad L=76, k_3 = 34$$

$$01001100 \oplus 00100010 = 01101110 = 110$$

$$L = 76, k_4 .4$$

$$01001100 \oplus 01001100 = 00000000 = 0$$

$$O=79, k_5 .5$$

$$01001111 \oplus 10110000 = 11111111 = 255$$

ومنه النص المشفر يكون $c = (160, 71, 110, 0, 255)$

لإجراء عملية فك التشفير نكرر نفس العملية :

$$m_i = c_i \oplus k_i$$

مزايا التشفير باستخدام معادلات لورنز:

1. أمان عالي بفضل نظرية الفوضى:

معادلات لورنز تنتج تسلسلاً شبه عشوائى حساس جداً لأي تغير بسيط في القيم الابتدائية، هذا ما يجعل التنبؤ بالمفتاح شبه مستحيل بدون معرفة القيم الابتدائية الدقيقة.

2. آلية XOR بسيطة وسريعة:

عملية XOR خفيفة جداً من حيث الأداء وسهلة التطبيق كما يمكن تنفيذها بسرعة عالية حتى على أجهزة ضعيفة.

3. إمكانية توليد مفتاح ديناميكي :

إمكانية توليد مفتاح مختلف في كل مرة بسهولة بتغيير القيم الابتدائية للنظام يضيف طبقة حماية إضافية ويمنع إعادة استخدام المفتاح.

4. عملية عكسية مباشرة :

لا تحتاج إلى خوارزمية فك معقدة فقط باستخدام XOR وتطبيق المفتاح مرة أخرى.

يمثل استخدام معادلات لورنز في تشفير النصوص توجهاً حديثاً يعتمد على الفوضى الرياضية لتوليد مفاتيح تشفير قوية يصعب التنبؤ

بها، تعتمد هذه الطريقة على خاصية الحساسية الشديدة لمعادلات لورنز للقيم الابتدائية، ما يجعل عملية توليد مع XOR

البسيطة نحصل على أسلوب تشفير فعال وسريع.

ومع ذلك فإن هذه الطريقة تواجه بعض التحديات مثل ضرورة دقة عالية في الحسابات العددية وصعوبة في تبادل وتزامن القيم

الابتدائية بين الطرفين، لذلك فإن استخدامها يبقى مناسباً في المجالات البحثية والتطبيقات الخاصة.

وبشكل عام يظهر هذا الأسلوب كيف يمكن للأنظمة الفوضوية أن تستخدم كأداة قوية في تطوير أساليب التشفير التي تعتمد على

مبادئ رياضية غير تقليدية.

الرؤى المستقبلية :

تحدثنا في بحثنا عن دراسة نظرية الفوضى في الأنظمة الديناميكية أحادية البعد منفصلة الوقت ،يمكن تطوير الدراسة إلى دراسة نظرية الفوضى في الانظمة الديناميكية المستمرة من خلال المعادلات التفاضلية التي وضها ادوارد لورنز .أيضا من الممكن تطوير الدراسة من خلال دراسة الفوضى في الانظمة الديناميكية ثنائية البعد .وهناك الكثير من الرؤى المستقبلية لدراسة هذه النظرية ، فيما يلي بعض منها :

- تحليل الأنظمة الديناميكية غير الخطية المعقدة.
- التنبؤ والانتقال بين الأنظمة الفوضوية والمستقرة.
- دراسة نظرية الفوضى في النظم الديناميكية ثنائية البعد.
- دراسة الفوضى في معادلات لورنز الفوضوية.

تناول هذا البحث دراسة حول الأنظمة الديناميكية أحادية البعد من خلال تحليل سلوكها الاستقراري واستكشاف خصائصها الفوضوية، وقد تم التركيز على المفاهيم الأساسية التي تحدد الفوضى في هذه الأنظمة لا سيما من خلال تعريف ديفاني للفوضى الذي يجمع بين الحساسية للشروط الابتدائية والكثافة الدورية والتعدي الطولوجي لتوصيف الفوضى بدقة رياضية .

كما تم التطرق إلى الدور المحوري الذي يؤديه أس لبيانوف في توصيف الاستقرار والفوضى حيث يعد هذا المؤشر معياراً كمياً يكشف عن السلوك الاسي للانحراف بين المدارات القريبة مما يمكن التمييز بين الأنظمة المنتظمة والفوضوية بشكل دقيق.

وفي سياق التطبيقات ناقش البحث الارتباط الوثيق بين نظرية الفوضى والتشفير، حيث توظف الأنظمة الفوضوية مثل معادلات لورنز الفوضوية في تصميم خوارزميات تشفير تولد مفاتيح ذات طابع شبه عشوائي عالي التعقيد. وتتميز هذه الأنظمة بخصائص تجعلها مناسبة لتطبيقات أمنية متقدمة مثل الحساسية الفائقة للمعلومات الابتدائية وعدم القابلية للتنبؤ، مما يعزز من قوتها في مواجهة الهجمات التقليدية، إلا أن استخدام الأنظمة الفوضوية في التشفير لا يخلو من التحديات وعلى رأسها دقة ضبط المعلومات الأولية وصعوبة تزامن المفاتيح بين الاطراف، وهو ما يتطلب المزيد من البحث لضمان فعالية هذه الأنظمة في البيئات التطبيقية الواقعية، وعليه فإن هذا البحث يعد اسهاماً في تعميق الفهم النظري للأنظمة الديناميكية ويؤكد في الوقت ذاته على الإمكانيات الواعدة التي تتيحها نظرية الفوضى في ميدان التشفير بما يمهد الطريق نحو تطوير خوارزميات أكثر أماناً وابتكاراً في المستقبل.

المصطلحات العلمية :

Democratic system	النظام الديناميكي
Fixed point	النقطة الثابتة
Logistic equation	المعادلة اللوجستية
Point orbit	مدار نقطة
Spider web diagram	مخطط نسيج العنكبوت
Stable fixed point	النقطة الثابتة المستقرة
Unstable fixed point	النقطة الثابتة غير المستقرة
Periodic point	النقطة الدورية
Periodic orbit	المدار الدوري
Stable orbit	المدار المستقر
Chaotic function	الدالة الفوضوية
Density of the periodic point set	كثافة مجموعة النقاط الدورية
Topological transgression	التعدي الطوبولوجي

Sensitivity to initial conditions

Libanov's function

دالة ليبانوف

Encryption

التشفير

Arnold's cat map

تطبيق قط آرنولد

Lorenz chaotic equations

معادلات لورنز الفوضوية

المراجع العلمية :

- [1] Anton ,Howard,and Rorres chris,Elementary Linear Algebra .8th ed .New York:John Wiley & Sons,Itc.,2000.678-688
- [2] Alli good,k.,saur,T.,Yark,J.,Chaos An Introduction to dynamical systems,New York:USA1(2000)
- [3] Banks,J.,JeffBooks,Cairns,G.,Davis,Stacey,P.,On Devany 's definitions of chaos .The American Mathmaticl Monthly.(1992).
- [4] Crannel,A.,The Role of Transitivity in Devany 's definitions of chaos .USA, The American Mathmaticl Monthly.(1995).
- [5] Vellekoop,M.and Bergund,R.,On Interual,Transitivity=Chaos,The American Mathmaticl Monthly,(1994).
- [6] K. T. Ali good, T. D. Sauer, J. A.Yorke,Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, (1997).
- [7] B. Aulbach and B. Kieninger,On three definitions of chaos, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* 1,(2001), 23–37.
- [8] L. S. Block and W. L. Coppel,Dynamics in One Dimension, *LectureNotes in Mathematics No. 1513*, Springer-Verlag, New York, (1992).

- [9] U. Kirchgraber and D. Stoffer, On intervals: $\text{transitivity} \rightarrow \text{chaos}$, *Am.Math. Month.* 101(4),(1994), 353–355.
- [10] J. P. LaSalle, *The Stability of Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia,(1976).
- [11] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, *Am. Math. Month.*82, (1975), 985–992.
- [12] S. N. MacEachern and L. M. Berliner, *Aperiodic chaotic orbits*, *Am.Math. Month.* 100(3), (1993), 237–241.
- [13] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, NewYork, (1993).
- [14] Kocarev,Ljupco,and Shiguo Lian(eds.)*Chaos-Based Cryptography;Theory Algorithms and Applications*.Springer.(2011).
- [15] Fridrish,d.*Symmetric Ciphers based on two-dimensional Chaotic maps*.International Journal of Bifurction and Chaos,8(06).(1998).

Summary

Chaos theory is a branch of mathematics that studies the properties of dynamical systems whose behavior depends on a set of initial conditions. It studies the dynamic behavior of complex and disordered systems, although they may be subject to specific mathematical laws. These systems exhibit seemingly random or irregular behavior, even if they operate according to specific and clear equations. Chaos does not mean disorder in the traditional sense (i.e., randomness), but rather the unpredictable patterns and complexity that arise from defined systems. One of the most prominent characteristics of chaos theory is its sensitivity to initial conditions. This phenomenon means that very small changes in the initial conditions of a system can lead to large and different outcomes in the future. An example of this is the "butterfly effect," in which the flapping of a butterfly's wings in one location can lead to significant changes in the weather in another location. Another important characteristic of chaos theory is indeterminism, meaning that even with full knowledge of the initial conditions, it becomes impossible to predict the behavior of the dynamic system in the long term. The most prominent example of this is the study of population models that exhibit random behavior. To study such systems, we will present in our research a study of the logistic function and how it was developed to study This population growth occurs in a logical and realistic manner. Therefore, the logistic function is a mathematical method used to study population growth dynamics.

In summary, chaos theory demonstrates how systems defined by laws can produce disorderly and random behavior, making it nearly impossible to predict the future.

This, in my view, embodies the fact that the future is governed by the power of God Almighty, not by laws and mathematical equations. However, science, no matter how advanced, cannot predict the future with certainty, as Newton and other scientists believed.

In our research, we will present a brief study of the concept of chaos theory in a one-dimensional dynamical system. We will explain an important example in the first chapter, which presents a study of the growth of a population model based on the logistic function. We will also provide an explanation of the concept of stability, supported by examples. In the second chapter, we will explain the three most important concepts underlying chaos theory: the density of periodic points of a function, the concept of transitivity of a function, and the sensitivity of a function to initial conditions. In the third chapter, we will present the concept of S. Lipanov with a main paragraph explaining the role of S. Lipanov in defining chaos. We will conclude this work with the fourth and final chapter, in which we will talk about a practical application of chaos theory in cryptography, including two main paragraphs. In the first, we will present a simplified definition of the Arnold's cat application, and in the second, we will try to explain the use of the Arnold's cat application in encrypting and decrypting images.

Keywords:

Dynamic system, fixed point, periodic point, periodic orbit, transgression, sensitivity, chaos, Lipanov exponent, cryptography.

Syrian Arab Republic
University of Damascus
Faculty of Science
Department of Mathematics



A study in chaos theory and its applications

A study prepared for a master's degree in mathematics, branch of

"Algebra and Geometry"

Supervised by Dr:

Nour Ghazi

Assistant Professor at the Faculty of Science, Damascus University

Prepared by the student

Ghofran Ahmad rateb alreabi

2025