



منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

نظرية الاحتمالات

الدكتور

عزات قاسم

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة دمشق

الدكتور

عدنان عمورة

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة دمشق

الدكتور

محمد صبح

أستاذ في قسم الرياضيات
كلية العلوم - جامعة دمشق

المدققون العلميون

الأستاذ الدكتور

محمد صبح

الأستاذ الدكتور

أنور اللحام

الأستاذ الدكتور

عبد الواحد أبو حمدة

جامعة دمشق



مقدمة الكتاب

إنّ لنظرية الاحتمالات أهمية واسعة ودوراً أساسياً في فروع العلوم الأخرى، وبخاصة في مجال التقنيات العلمية والصناعية، وتساهم نظرية الاحتمالات في ترسيخ الحلول المثلى لمختلف المسائل العلمية والمتعلقة بمختلف جوانب الحياة. ونقدم في هذا الكتاب موضوعات نظرية الاحتمالات بأسلوب واضح وسهل المنال.

وحرصنا على أن يتضمن كل فصل من فصول هذا الكتاب العديد من الأمثلة المحلولة والتمارين غير المحلولة بهدف تدعيم وتثبيت الأفكار النظرية المعالجة ضمن الفصول.

تنوزع موضوعات هذا الكتاب على عشرة فصول. حيث:

يعالج الفصل الأول، المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمالات وخصائصه.
ويعالج الفصل الثاني، الاحتمال الشرطي وخصائصه والاستقلال العشوائي وخصائصه.

ويعالج الفصل الثالث، المتغيرات العشوائية وخصائصها ودالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي وخصائصهما.

ويعالج الفصل الرابع، المتجهات العشوائية ودالة الكثافة العشوائية المشتركة ودالة التوزيع المشتركة وخصائصهما.

ويعالج الفصل الخامس، نقل المتغيرات والأشعة العشوائية المشتركة وإيجاد الكثافات الموافقة.

ويعالج الفصل السادس، الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية (توقع، تباين، تغاير، ارتباط، عزوم شرطية، الدالة المولدة للعزوم

وخصائصها، الدالة المميزة وخصائصها).

ويعالج الفصل السابع، دراسة أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة.

ويعالج الفصل الثامن، دراسة أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

ويعالج الفصل التاسع، المتباينات الاحتمالية الشهيرة وقانون الأعداد الكبيرة ومبرهنة النهاية المركزية وتطبيقاتها.

ويعالج الفصل العاشر، التوزيع الطبيعي الثنائي وخصائصه.

وهناك في آخر الكتاب ملحق يتضمن قائمة بالمراجع العربية والأجنبية، وقائمة بالمصطلحات العلمية (إنكليزي - عربي)، وجدول يتضمن الكثافات الاحتمالية وجدول التوزيع الاحتمالي وأشكال الكثافات الاحتمالية ثم فهرس المحتويات..

وأنهراً كلنا أمل في أن نغطي ملاحظات أساتذتنا الكرام وزملائنا الأعزاء حول كل ثغرة موجودة في الكتاب لكي نعمل على معالجتها بغية تدعيم بنيت هذا الكتاب وتطويره.

المؤلفون

مفردات مناهج مقرر الاحتمالات (1)

- التجربة - جبر الأحداث.
- الاحتمال وخصائصه وقواعد حسابه.
- المتجهات والمتغيرات العشوائية.
- التوقع والعزوم والتوزيعات الاحتمالية الشهيرة.
- قانون الأعداد الكبيرة ومبرهنة النهاية المركزية.



الفصل الأول

المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه

1.1 : الظواهر العشوائية ونظرية الاحتمالات:

إن علم الاحتمال هو علم دراسة الظواهر العشوائية، حيث يمكن أن نعد كل ما يحيط بحياتنا اليومية ظواهر عشوائية، لأننا لا نتوقع ماذا سيحدث لنا أو معنا في لحظة معينة من كل يوم أت. فالظاهرة العشوائية تعرف أنها ظاهرة اعتيادية تتميز بخاصة كون مشاهدتها المسجلة عند ظروف معينة لا تؤدي دائماً إلى نتيجة المشاهدة نفسها، ولكنها بطريقة ما تؤدي إلى انتظام إحصائي معين، أي نعي بوجود أعداد من الصفر إلى الواحد، تمثل التكرار النسبي للمشاهدات، حيث إن هذا التكرار النسبي لمشاهدة حدوث حادثة معينة في الظاهر سيقترّب كما سنرى من احتمال وقوع هذه الحادثة. وعلم الاحتمال هو علم دراسة الظواهر العشوائية فكرياً وتحليلياً في جميع مجالات ظهورها. والحساب الاحتمالي هو النظرية التي تشكل النموذج الرياضي للظواهر التي تنصف بالانتظام الإحصائي. وهناك العديد من الأمثلة على الظواهر العشوائية مثل ظاهرة حوادث السير وظاهرة سقوط المطر وظاهر توارد مكالمات هاتفية لمركز هاتفي وظاهرة تعطل الأجهزة وظاهرة حركة الموانئ والمطارات وتقلبات الأسعار ونمو النباتات... الخ. ويكون الهدف من نظرية الاحتمالات هو بناء مسألة رياضية تصف وتحلل هذه الظواهر ومشاهداتها.

إن علم الاحتمال يرتكز على المفاهيم الأساسية الثلاثة التالية: التجربة - حيز الجوارح - حساب الاحتمال.

1.2 : التجربة والتجربة العشوائية:

نواجه في معظم ميادين النشاط العلمي والحياة اليومية تجارب ومشاهدات وظواهر يمكن أن تتكرر عدداً كبيراً من المرات تحت ظروف مشاهة، وفي كل مرة نهتم

نتائج هذه التجارب والملاحظات والتي يمكن أن تكون كمية، فنسجل نتيجة كل مشاهدة على شكل عدد. أو قد تأخذ شكلاً كيفياً (وصفياً) فنسجل صفة معينة كأن نلاحظ مثلاً لوناً أو نسجل وقوع أو عدم وقوع حادثة أو ظاهرة معينة متصلة بالتجربة.

وتعرف التجربة بأنها كل عملية تؤدي إلى ملاحظة "مشاهدة" أو قياس. ويهتم علم الاحتمال بالتجارب العشوائية، حيث تعرف التجربة العشوائية بأنها تجربة نتحكم في ملاحظاتها المصادفة والتخمين. وهناك أمثلة على التجارب العشوائية منها:

- إلقاء قطع من النقود أو أحجار النرد وملاحظة النتائج الحاصلة.
- اختيار عنصر من مجموعة من العناصر.
- قياس درجة الحرارة في مكان وزمان معين عدة مرات.
- مراقبة تقلبات الأسعار ومشاهدة تواترات أسعار مادة معينة.
- توزيع مجموعة من الكرات على مجموعة من الصناديق.
- سحب ورقة أو عدة أوراق من ورق اللعب (52 ورقة).
- تواترات المكالمات الهاتفية في ساعة معينة في مركز هاتفي.
- قياس الطول والوزن لمجموعة من الأشخاص لهم العمر نفسه والجنس نفسه حيث نجد هنا الملاحظات على شكل زوج مرتب (X, Y) حيث X يمثل الطول و Y يمثل الوزن.
- أخذ عينة من الإنتاج اليومي لمصنع من الألمنيوم وقياس القساوة والمقاومة ونسبة الكربون في كل قطعة فنعتمد النتائج ستكون على شكل ثلاثيات (X, Y, Z) على الترتيب.
- متابعة جنس المولود حديثاً في منطقة معينة، فنحصل على نتيجة وصفية ذكر أو أنثى وهنا يمكن أن نعطي النتيجة الرقم (1) إذا كان المولود ذكراً والرقم (0) إذا كان المولود أنثى.
- ومن خلال الأمثلة السابقة نلاحظ أن لكل تجربة مجموعة من النتائج الممكنة والتي تحددها طبيعة الدراسة التي تستهدفها التجربة، حيث يتركز مجموع النتائج

Ω وندعوها بفضاء العينة وكل نتيجة ممكنة للشجرة ستدعوها بنقطة العينة والعدد الناتج (عدد نقاط العينة في فضاء العينة) بـ $|\Omega|$ وندعوها بعدة فضاء العينة Ω . ونعرف الحوادث بأنه مجموعة جزئية من فضاء العينة. ونسمي الحوادث الذي يجري نقطة واحدة من نقاط العينة الحادث الابتدائي.

1 . 3 : النماذج الأساسية في تحليل فضاء العينة Ω وعنده $|\Omega|$:

1 . 3 . 1 : بالحساب المباشر:

- مثال تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة يكون فضاء العينة $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $|\Omega| = 6$

- مثال ولادة طفل: فإذا رمزنا بـ B للذكر و G للإناث فإن $\Omega = \{B, G\}$ و $|\Omega| = 2$

- مثال إلقاء قطعة نقد: فإذا رمزنا بـ T للكعبة و H للصورة فإن $\Omega = \{H, T\}$ و $|\Omega| = 2$

1 . 3 . 2 : باعتماد طرائق العد:

① قاعدة الـ $m \times n$: إذا أمكن استكمال مرحلة أولى من عمل معين بـ m طريقة، ومن أجل كل من هذه الطرائق أمكن لمرحلة ثانية أن تتم بـ n طريقة، فالعدد الكلي للأشكال المختلفة لاستكمال العمل بمرحلتين هو $m \times n$ طريقة ويدعى ذلك أيضا بالبدأ الأساسي للعد.

مثال (1, 1):

يمكن لشخص يعمل في بلد معين أن يصل لأقاربه برا أو جوا أو بحرا ومن بعد يمكن أن يكمل سفره لأهله برا أو جوا. عندئذ يمكن لهذا الشخص أن يحصل لأهله بعدد من الطرق المختلفة يساوي:

$$|\Omega| = m \times n = 3 \times 2 = 6$$

مثال (2, 1):

بكم طريقة يمكن كتابة زوج مرتب عنصريه الأول أحد الأعداد 7, 1, 2, 3, 4, 8, 9 وعنصره الثاني أحد الأحرف a, b, c, d, e, f

الحل: هنا $m = 7$ و $n = 6$ ومنه:

$$|\Omega| = m \times n = 7 \times 6 = 42$$

② تعميم قاعدة الـ $m \times n$: يمكن تصميم هذه القاعدة وذلك من أجل عمل يتضمن k من المراحل المتتالية، حيث نفرض أنه يمكن إتمام المرحلة الأولى بـ n_1 طريقة والمرحلة الثانية بـ n_2 طريقة ، ، ، ، والمرحلة الـ k بـ n_k طريقة، فيكون عدد الطرائق المختلفة لإتمام العمل بجميع مراحله هو:

$$|\Omega| = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

مثال (1، 3): بكم طريقة يمكن تصنيف مجموعة من الأشخاص وذلك حسب حالتهم المدنية وعددها (3) وحسب مهنتهم وعددها (20) وحسب جنسهم وعدده (2) وحسب مكان إقامتهم وعدده (8) وحسب مؤهلهم العلمي وعدده (6).
الحل: إن عدد الطرائق المختلفة لتصنيف مجموعة هذه الأشخاص يكون:

$$|\Omega| = 3 \times 20 \times 2 \times 8 \times 6 = 5760$$

③ حالة خاصة: إذا كان لدينا تجربة مجموعة نتائجها وعددها N وكررنا هذه التجربة n مرة وبشكل مستقل في كل مرة عن المرات الأخرى. عندئذ عتة فضاء العينة النتائج يكون:

$$|\Omega| = |\Omega_1|^n = N^n$$

مثال (1، 4): تجربة دراسة توزع الذكور لدى أسرة تملك ثلاثة أطفال.

لدينا هنا: $|\Omega| = 2^3 = 8$ وفضاء العينة يكون:

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

ملاحظة: في حالة تجربة ثنائية (لها ناتجان فقط) وكررنا وبشكل مستقل هذه التجربة n مرة وبفرض Ω فضاء العينة لكل النتائج الممكنة عندئذ: $|\Omega| = 2^n$

④ العينات المرتبة: إذا كانت A مجموعة غير خالية وكان $r \in \mathbb{N}^*$ ، فإن كل عنصر $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ من A^r يدعى في مفهوم علم الاحتمال والإحصاء بعينة مرتبة من الحجم r مأخوذة من المجموعة A ويكون عدد العينات المرتبة هذه يساوي:
- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة (أي يعاد العنصر الذي

يتم سحبه):

$$|\Omega| = |A|^r = n^r$$

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية ($r \leq n$) بدون إعادة (أي يُحتفظ بالعنصر الذي يتم سحبه):

$$|\Omega| = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

والعناصر هنا تكون مختلفة وندعوه نسقاً من الحجم r مأخوذاً من A حيث: $r \leq |A|$ و $|\Omega|$ أعلاه يكون عدد الأنساق من الحجم r والممكن تشكيلها من A .

⑤ المتبادلات: يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متبادلة). حيث نفرض أنه لدينا شيء متمايز ونريد اختيار r شيئاً منها ($r \leq n$) ثم ترتيبها في متبادلة فعندئذ يكون عدد الطرائق المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, (r \leq n)$$

وعندما يكون $r = n$ أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرائق المختلفة لإنجاز ذلك:

$$P_n^n = n(n-1)(n-2)\dots3.2.1 = n!$$

مثال (1، 5):

بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق؟
الحل:

$$|\Omega| = n^n$$

مثال (1، 6):

لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا. ولكن لا يتوفر لنا سوى أربعة أماكن. فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن

الأربعة المتوفرة بأربعة أجزاء مختارها من الأجزاء الستة؟
الحل: إن عدد الطرائق المختلفة لشغل الأماكن الأربعة هو عدد مبادلات لسته
أشياء مأخوذة أربعة منها في وقت واحد أي P_4^6 ومنه:

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 360$$

⑥ المتوافقات: إن العديد من المواقف في العد تقتضي ألا نأخذ ترتيب العنصر
في الأنساق. فإذا كان لدينا مجموعة A عددها n وأردنا اختيار مجموعة جزئية مولفة
من r عنصراً ($r \leq n$)، فنقول عندئذ إن ذلك يدعى متوافقة حجمها r مأخوذة من A
ونرمز لها بـ C_r^n أو $\binom{n}{r}$. فمن أجل $r \neq 0$ يكون عدد المتوافقات من الحجم r
وللمأخوذة من A (التي عددها n):

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وإن هذا له علاقة وثيقة مع P_r^n ، حيث يمكننا الوصول إلى P_r^n بمرحلتين:
المرحلة الأولى يتم فيها اختيار جميع المتوافقات n من الحجم r أي C_r^n والمرحلة الثانية
(الثانية) يتم فيها ترتيب عناصر كل متوافقة فور اختيارها بجميع الأشكال وعدد
الترتيب هو $r!$ ومنه حسب المبدأ الأساسي في العد يكون:

$$P_r^n = r! \cdot C_r^n \Rightarrow C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ملاحظات:

1) اصطلاحاً نضع: $0! = 1$ ، كما يكون $1! = 1$.

2) بسهولة نجد: $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n-1} = n$

$$(3) \text{ وبالحساب نجد: } \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} ; \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

(4) إن اختيار مجموعة جزئية من r عنصراً يعني عملياً تقسيم المجموعة التي نختار منها إلى مجموعتين، إحداهما تتضمن r عنصراً التي اختيرت والأخرى تتضمن $(n-r)$ عنصر المتبقية. وبالتالي فإن عدد الطرائق التي يمكن تقسيم n شيئاً متمتماً إلى قسمين أحدهما يتضمن n_1 شيئاً والآخر يتضمن n_2 شيئاً حيث $n_1 + n_2 = n$ هو:

$$\binom{n}{n_1, n_2} \text{ ونرمز لذلك بـ } C_{n_1}^n = C_{n_2}^n = \frac{n!}{n_1! n_2!}$$

ويمكن تعميم ذلك من أجل تقسيم المجموعة المولدة من n شيئاً متمتماً إلى k قسماً الأول يتضمن n_1 شيئاً والثاني n_2 شيئاً و..... والقسم الأخير k يتضمن n_k شيئاً حيث: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ حيث يتم ذلك بعدد من الطرق يساوي:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

(ترك برهان ذلك للطالب كتمرين).

مثال (1، 7):

$$\binom{4}{1, 2, 1} = \frac{4!}{1! 2! 1!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2} = 12$$

مثال (1، 8):

إن عدد طرائق توزيع r كرة في n صندوق بحيث إن الصندوق b_i يحوي r_i كرة حيث $0 \leq i \leq n$ يكون:

$$|\Omega| = \binom{r}{r_1, r_2, \dots, r_n} = \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!}$$

مثال (1، 9): إن عدد طرائق اختيار ثلاثة كتب من 7 كتب لترتيبها على رف
ايكون:

$$C_r^n = C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{(3 \times 2)(4!)} = 35$$

⑧ العينات غير المرتبة: إن عدد العينات غير المرتبة من الحجم r والمسحوبة من مجموعة عددها n يساوي عدد الطرائق التي نستطيع أن نوزع بها r كرة غير متميزة في n صندوقا ويعطى بـ:

$$|\Omega| = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

وهو تماما عدد العينات من الحجم r والممكن سحبها من مجتمع حجم n مع الإعادة.

⑨ نموذج أساسي مع مثال: توزيع r كرة (متميزة أو غير متميزة) على n صندوقا:

إن توزيع r كرة متميزة على n صندوقا يعطى بـ:

$$|\Omega| = n^r = n \times n \times \dots \times n$$

مثال (1، 10):

توزيع أربع كرات a, b, c, d على صندوقين يكون:

$$|\Omega| = 2^4 = 16$$

ونقاط العينة تكون:

النتيجة	صندوق (1)	صندوق (2)	النتيجة	صندوق (1)	صندوق (2)	النتيجة	صندوق (1)	صندوق (2)	النتيجة	صندوق (1)	صندوق (2)
1	abcd	-	5	bcd	a	9	c	abd	13	ad	bc
2	-	abcd	6	acd	b	10	d	abc	14	bc	ad
3	abc	d	7	a	bcd	11	ab	cd	15	bd	ac
4	abd	c	8	b	acd	12	ac	bd	16	cd	ab

وفي حالة كون الكرات الأربع غير متمايزة (متماثلة) فإن عدة فضاء العينة يكون:

$$|\Omega| = \binom{n+r-1}{r} = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$$

ونقاط العينة هي:

صندوق (1)	****	—	***	*	**
صندوق (2)	—	****	*	***	**

ملاحظة: يعود لنموذج توزيع r كرة متمايزة على n صندوقا، العديم من التجارب العشوائية ومنها مثلا: دراسة توزيع أيام الميلاد لمجموعة من الأشخاص عددها r على أيام السنة $n = 365$.

- دراسة توزيع مجموعة من حوادث السير r على أيام الأسبوع $n = 7$.

- تصنيف مجموعة من الأشخاص r وفقا للعمر والمهنة والجنس.

- توزيع حبيبات الضوء على خلايا الشبكية.

- توزيع الأخطاء المطبعية على صفحات كتاب معين إلخ.

1. 3. 3: فضاءات عينة غير منتهية ولكن معدودة:

هناك تجارب عشوائية فضاءها غير منته ولكن معدود، مثل تجربة إلقاء حجر

نرد مرة بعد مرة حتى نحصل على الوجه 6، فإن مجموعة النتائج ليست إلا مجموعة

العينات من مختلف الحجوم والمأخوذة من $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والتي يرد في

آخرها العدد 6. أي أن Ω هنا غير منتهية ولكنها معدودة.

1. 3. 4: فضاءات عينة غير منتهية وغير معدودة:

هناك أيضا العديد من التجارب العشوائية، حيث فضاءاتها يكون غير منته وغير معدود، مثل تجربة اختيار نقطة من المجال المغلق $[0, 1]$ ، فإن مجموعة النتائج هنا تكون المجال $[0, 1]$ وهذه مجموعة غير منتهية وغير معدودة.

نتيجة:

كما سبق نجد أن فضاء العينة قد يكون منتهيا أو غير منته ولكنه معدود أو غير منته وغير معدود. ففي الحالتين الأولى والثانية نستخدم الطرائق الرياضية المعروفة في طرائق العد والتحليل الرياضي لمعالجة النماذج الاحتمالية، وفي الحالة الثالثة تعالج النماذج الاحتمالية حسب مفاهيم نظرية القياس.

1. 4: الجبر والجبر التام وبعض الخواص:

تعريف: إذا كانت Ω مجموعة مفروضة وكان F صفا غير خال من أجزاء Ω أي $F \subseteq P(\Omega)$ نقول عن F إنه جبر على Ω إذا تحققت الشروط التالية:

$$\textcircled{1} \Omega \in F; \textcircled{2} A \in F; \textcircled{3} A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$$

تعريف: إذا كان F جبرا على Ω وحقق F الشرط التالي:

(مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود)

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

عندئذ نقول إن F يشكل جبرا تاما أو σ -جبر على Ω .

نتائج:

1) إذا كان F جبرا على Ω فإن:

$$\emptyset \in F - 1$$

$$A, B \in F \Rightarrow A \setminus B \in F - 2 \quad (\text{مغلق بالنسبة للفرق})$$

$$A, B \in F \Rightarrow A \Delta B \in F - 3 \quad (\text{مغلق بالنسبة للفرق التناظري})$$

4- F مغلق بالنسبة للاتحاد المنتهي.

5- F مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي.

6- تقاطع الجبور هو جبر.

(2) إذا كان F جبرا تاما على Ω فإنه بالإضافة للناتج السابقة نجد أن:

1- F مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود.

2- كل جبر تام هو جبر والعكس غير صحيح.

3- كل جبر منته هو جبر تام.

4- تقاطع الجبور التامة هو جبر تام.

(3) إذا كان F صفا غير خالي من أجزاء Ω ، فإنه يوجد جبر (جبر تام): $\sigma(F)$

يحتوي F ويحتوي في أي جبر (جبر تام) يحتوي F .

تعريف: إن الجبر (الجبر التام) $\sigma(F)$ هو تعريفا الجبر الذي يولده F (أو الجبر التام الذي يولده F).

تعريف: إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحدودة على R يدعى جبر بوريل ونرمز له بـ R_1 وكل مجموعة متتمية إلى R_1 تدعى مجموعة بوريلية. وبالمطريقة ذاتها نعرف جبر بوريل على R^n ومجموعاته البوريلية ونرمز له بـ R_n .

ملاحظة: يلعب جبر بوريل دورا أساسيا في نظرية الاحتمالات لأن الدراسات العددية فيها تستخدم المجالات أساسا لها.

نتيجة: إن كل مجموعة جزئية أحادية $\{x\}$ من R هي بوريلية لأن:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right]$$

ولما كانت المجالات المحدودة تنتمي إلى جبر بوريل R_1 وكان الجبر التام مغلقا بالنسبة للتقاطع المعدود فإننا نستنتج أن $\{x\}$ هي بوريلية أي $\{x\} \in R_1$ وذلك من أجل أي x من R .

أمثلة:

- $P(\Omega)$ هو جبر وجبر تام على Ω .

- $F = \{\emptyset, \Omega\}$ هو جبر وجبر تام على Ω .
- المجالات المفتوحة من R ليست جبرا ولا جبرا تاما على Ω .
- إذا كانت: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ وأخذنا الصف:
 $F = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

إن F هو جبر وجبر تام على Ω لأنه يحقق الشروط الأربعة في التعريف.
تعريف: إذا كانت Ω مجموعة غير خالية و F جبرا تاما من أجزائها فإن الثنائية (Ω, F) تدعى فضاء قياس. وتدعو كل عنصر من عناصر F مجموعة قياسية.
نتيجة: إن $\emptyset, \Omega$ مجموعتان قياسيتان.
تعريف: ليكن (Ω, F) فضاء قياس، نقول عن دالة $\mu: F \rightarrow \overline{R_+}$ أنها تمثل قياسا على F إذا حققت ما يلي:

$$1) \mu(\emptyset) = 0$$

$$2) \forall A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \in F ; \forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset: \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

تعريف: ندعو الثلاثية (Ω, F, μ) بفضاء القياس μ .
مبرهنة:

1) إذا كانت $\{A_n\}_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيسية في الفضاء (Ω, F, μ) فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

2) إذا كانت $\{B_n\}_{n \geq 1}$ متتالية متناقصة من المجموعات القيسية في الفضاء (Ω, F, μ) وكان $\mu(B_1) < \infty$ فإن:

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$$

(وهذه المبرهنة تقبل بدون برهان).

1. 5: جبر الأحداث:

(1) تعريف: إذا كانت Ω مجموعة نتائج تجربة مفروضة وكانت Ω منتهية أو معدودة. فإن أي مجموعة جزئية B من Ω تدعى حدثا متعلقا بهذه التجربة.

(2) نتيجة: إن مجموعة الأحداث المتعلقة بالتجربة تكون $P(\Omega)$ وهي كما نعلم جبر تام مغلق جبريا بالنسبة للعمليات المنطقية المنتهية أو المعدودة.

(3) حالة عامة: إذا كانت Ω غير منتهية وغير معدودة فإننا نقبل أن الأحداث المتعلقة بالتجربة تشكل جبرا تاما على Ω ونرمز له بـ F ونسميه جبر الأحداث وليس من الضروري أن يساوي $P(\Omega)$.

(4) مسلمات احتمالية: من أجل Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية فإن قولنا A حدث متعلق بالتجربة Ω يكافئ قولنا إن $A \in F$ حيث F جبر الأحداث على Ω . وكذلك من أجل $\omega \in F$ يكون لدينا: $(\omega \in A) \Leftrightarrow$ الحدث A قد وقع (وقم) وقولنا $(\omega \notin A) \Leftrightarrow$ الحدث A لم يقع).

ونذكر بأن المجموعات الجزئية الأحادية من Ω هي أحداث وتدعى بالأحداث الابتدائية.

(5) نتيجة: إن تطبيق العمليات المنطقية على جبر الأحداث يعطي أحداثا. لأن جبر الأحداث هو جبر تام والجبر التام مغلق بالنسبة للعمليات المنطقية.

(6) بعض الحوادث الشهيرة: ليكن لدينا الفضاء المقيس (Ω, F) . الأحداث الشهيرة هي:

- الحدث الأكيد: وهو Ω .

- الحدث المستحيل: وهو $\emptyset$.

- اتحاد الأحداث: من أجل أي حدثين A, B من F فإن $A \cup B \in F$ (لأن

F جبر تام) و $A \cup B$ عندئذ هو حدث يقع إذا وقع أحد الحدثين A أو B على الأقل.

ومن أجل متتالية معدودة من الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ من F فإن:

$\bigcup_{i \in I} A_i \in F$ (لأن F جبر تام) ومنه $\bigcup_{i \in I} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد الأحداث $A_i, i \geq 1$ على الأقل.

- تقاطع الأحداث: من أجل A, B من F فإن $A \cap B \in F$ (لأن F جبر فهو مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي) ومنه $A \cap B$ هو حدث يقع إذا وقع A و B معا وبأن واحد.

وكذلك من أجل متتالية معدودة من الأحداث $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ فإن $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in F$ (لأن كل جبر تام فهو مغلق بالنسبة للتقاطع العدودي) وبالتالي $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ هو حدث يقع إذا وقعت الأحداث $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ معا وبأن واحد.

- الأحداث المتنافية: نقول عن الحدثين A, B من F أنهما متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (أي لا يمكن وقوعهما بأن واحد).

- نتيجة: من أجل متتالية من الأحداث من F والمتنافية مثنى مثنى $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ أي:

$$\forall i, j : i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset ; i, j = 1, 2, \dots$$

$$\left| \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + \dots$$

- فرق حدثين: من أجل A, B من F فإن $A - B \in F$ (لأن F جبر) وبالتالي $A - B$ هو حدث يقع إذا وقع A ولم يقع B أي أن $A - B = A \cap B'$.

- الأحداث المتعكسة: من أجل A من F فإن $A' \in F$ حيث A' يدعى بالحدث المعاكس لـ A أو الحدث المتمم لـ A بالنسبة لـ Ω و A' يقع إذا لم يقع A ومنه $A \cap A' = \emptyset$ أي أن A, A' حدثان متنافيان.

- الاحتواء: من أجل A, B من F و $A \subseteq B$ فهذا يعني أنه إذا وقع A يقع B ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحا.

- نتائج:

- (1) الحدث المستحيل $\emptyset$ في أي تجربة يتناق مع كل حادث آخر.
- (2) الأحداث الابتدائية في تجربة هي أحداث نافية لبعضها بعضا لدى اختلافها.

مثال (11,1):

التجربة هي قذف حجر نرد مرتين. عيّن فضاء العينة ثم حدد نقاط العينة

المتعلقة:

بالحدث A والبال على الحصول على مجموع يساوي 7.

والحدث B البال على الحصول على الفرق بين العددين الناتجين والمساوي

للواحد بالقيمة المطلقة.

والحدث C البال على الحصول على مجموع يساوي 9 على الأقل.

والحدث D البال على الحصول على الواحد في القذفة الأولى.

والحدث E البال على الحصول على جداء يساوي 6 على الأكثر.

والحدث F البال على الحصول على مجموع أقل من 2.

ثم لو نفذنا التجربة وحصلنا على النتيجة (1,1) فأى الحوادث تقع عندئذٍ من

الحوادث السابقة.

الحل:

لدينا: $|\Omega| = 6 \times 6 = 36$ وفضاء العينة يكون:

+	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) 2	(1,2) 3	(1,3) 4	(1,4) 5	(1,5) 6	(1,6) 7
2	(2,1) 3	(2,2) 4	(2,3) 5	(2,4) 6	(2,5) 7	(2,6) 8
3	(3,1) 4	(3,2) 5	(3,3) 6	(3,4) 7	(3,5) 8	(3,6) 9
4	(4,1) 5	(4,2) 6	(4,3) 7	(4,4) 8	(4,5) 9	(4,6) 10
5	(5,1) 6	(5,2) 7	(5,3) 8	(5,4) 9	(5,5) 10	(5,6) 11
6	(6,1) 7	(6,2) 8	(6,3) 9	(6,4) 10	(6,5) 11	(6,6) 12

حيث ينتج هنا ثنائيات.

وفضاء الحوادث المذكورة أعلاه تكون كما يلي:

$$A = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$$

$$B = \{(2,1), (1,2), (3,2), (2,3), (4,3), (3,4), (5,4), (4,5), (6,5), (5,6)\}$$

$$C = \{(6,3), (5,4), (4,5), (3,6), (6,4), (5,5), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

$$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$

$$D \subseteq E$$

نلاحظ هنا أن:

$$F = \emptyset$$

وعند حصولنا على (1,1) فإن الحوادث D و E تكون قد وقعت. بينما نلاحظ أن الحادث A لم يقع لأن المجموع الناتج 2 وليس 7 والحادث B لم يقع لأن الفرق بين العددين الناتجين وهو صفر لا يساوي الواحد بالقيمة المطلقة وكذلك C لم تقع لأن المجموع أقل من 9 و F بالطبع لأنها حادثة مستحيلة.

مثال (12,1): ألقينا ثلاثة أحجار نرد متمايزة. والمطلوب:

- 1- عين عدة فضاء العينة.
- 2- عين عدة الحدث الدال على الحصول على الوجه واحد على الأقل.
- 3- عين عدة الحدث الدال على الحصول على مجموع زوجي.
- 4- عين عدة الحدث الدال على الحصول على وجهين متساويين بالقيمة العددية.
- 5- عين عدة الحدث الدال على الحصول على مجموع زوجي ووجهين متساويين بالقيمة العددية.

الحل:

(1) لدينا:

$$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$|\Omega| = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$$

والنتائج متناظرة ضمن أصناف معينة موزعة بالتساوي.

(2) لتكن A حادثة الحصول على الوجه واحد على الأقل. عندئذ A' يدل على عدم الحصول على الوجه واحد وبالتالي:

$$|A'| = 5^3 = 125 \quad \text{وكون:} \quad |A| + |A'| = |\Omega| \quad \text{فإن:}$$

$$|A| = |\Omega| - |A'| = 216 - 125 = 91$$

(3) لتكن C حادثة الحصول على مجموع زوجي ومنه C' حادثة الحصول على مجموع فردي حيث:

$$|C| + |C'| = |\Omega| \quad ; \quad |C| = |C'| \quad ; \quad |C| = \frac{|\Omega|}{2} = \frac{216}{2} = 108$$

(4) لتكن B حادثة الحصول على وجهين متساويين بالقيمة العددية ومنه B' تدل على الحصول على أوجه ثلاثة مختلفة أي: $|B'| = 6 \times 5 \times 4 = 120$ وكون:

$$|B| + |B'| = |\Omega| \Rightarrow |B| = |\Omega| - |B'| = 216 - 120 = 96$$

(5) لتكن D حادثة الحصول على مجموع زوجي ووجهين متساويين بالقيمة العددية عندئذ:

$$D = B \cap C \quad ; \quad D = \{(\text{وجهين متساويين والمجموع زوجي})\} =$$

$$\{(\text{وجهين متساويين والثالث زوجي})\} \Rightarrow |D| = \frac{|B|}{2} = \frac{96}{2} = 48$$

6.1: مبرهنة (1,1):

كل حدث من جبر الأحداث مؤلف من عدد منته من العناصر يمكن وضعه بشكل وحيد كاتحاد لأحداث ابتدائية.

الإثبات: رأينا أن تقاطع حادثين ابتدائيين مختلفين هو $\emptyset$. وكذلك من أجل أي حادث مركب B من جبر الأحداث المنتهي، سيكون هناك حادث ابتدائي A حيث $A \subset B$ لأنه مهما يكن B حادثاً مركباً فإنه يوجد $A_1 \neq \emptyset$ حيث $A_1 \subset B$ فإذا كان A_1 حدثاً ابتدائياً يتم المطلوب وإذا لم يكن A_1 ابتدائياً فهذا يعني أن هناك $A_2 \subset A_1$ وإذا كان A_2 ابتدائياً فنكون قد وجدنا الحادث الابتدائي وإذا لم يكن فإنه سيقبل تركيباً جديداً وهكذا... حتى تتم عملية البحث بعدد منته من المراحل لأنه لدينا جبر منته أصلاً وبالتالي سنجد حتماً الحادث الابتدائي المطلوب.

والآن إذا أخذنا B حدثاً مركباً من هذا الجبر، فسندجد حادثاً ابتدائياً A_1 بحيث $A_1 \subset B$ أي أن: $B = A_1 \cup B_1$ ؛ فإذا كان B_1 ابتدائياً تم المطلوب، وإذا لم يكن B_1 ابتدائياً فإنه يوجد $A_2 \subset B_1$ بحيث $B_1 = A_2 \cup B_2$ فإذا كان B_2 ابتدائياً تم المطلوب، وإذا لم يكن فإنه يوجد $A_3 \subset B_2$ حيث $B_2 = A_3 \cup B_3$ وهكذا حتى تتم عملية التحليل بعدد منته من المراحل لأنه لدينا جبر منته وبالتالي ستمكن من كتابة B أخيراً بالشكل: $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ هي أحداث ابتدائية مختلفة ولا تساوي $\emptyset$.

ومن أجل برهان الوحداية لنفترض أننا تمكنا من كتابة الحادث المركب B بطريقتين مختلفتين:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_s'$$

حيث " $A_j \neq A_{j'}$ " حيث $j, j' = 1, 2, \dots, s$. تقاطع الطرفين A_1 فنحصل على $A_1 = \emptyset$ وهذا يناقض الفرض كون الأحداث الابتدائية في الجبر المنتهي المفروض ليست خالية. ومنه نحصل على وحداية كتابة الحادث B .

7.1: مبرهنة (2,1):

عدد الحوادث من جبر أحداث منته هو دوماً من شكل قوى للعدد 2. الإثبات: ليكن n عدد الحوادث الابتدائية المختلفة من الجبر المنتهي من

الأحداث. فاعتمادا على المبرهنة (1,1)، إن كل حادث من هذا الجسر يمكن أن يكتب على شكل اتحاد لعدد r من الحوادث الابتدائية حيث: $r=0,1,2,\dots,n$ (حيث $\emptyset$ أخذت بالحسبان). فمن أجل r ثابتة فإن عدد الحوادث التي يمكن أن تحلل إلى اتحاد لـ r حدثا ابتدائيا هو $\binom{n}{r}$ وبالتالي فإن عدد كل الحوادث من هذا الجسر المنتهي هو $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$. ولنحسب قيمة هذا المجموع معتمدين على ثنائي الحد لنيوتن، حيث لدينا مفكوك نيوتن من الشكل:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

ومن أجل $x = y = 1$ نجد أن المفكوك يصبح من الشكل:

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (1)^r \cdot (1)^{n-r} \Rightarrow \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

1. 8: التعاريف الأساسية للاحتمال:

1. 8. 1: التعريف التقليدي للاحتمال:

إذا كنا حيال تجربة مجموعة نتائجها منتهية أي أن $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ فيكون عندئذ $F = P(\Omega)$ هو جبر الأحداث، وإذا كنا لا نملك أي مبرر لترجيح وقوع حدث ابتدائي على وقوع حدث ابتدائي آخر فإننا نعرف $P(A)$ حيث $(A \in F)$ باحتمال وقوع الحدث A وبالشكل التالي:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{عدد نقاط العينة في } A}{\text{عدد نقاط العينة الكلي}}$$

$$P(A) = \frac{K}{N} \quad \text{فمن أجل } |A| = k \text{ حيث: } K \leq N \text{ نجد أن:}$$

1. 8. 2: التعريف الإحصائي للاحتمال:

لتكن Ω فضاء عينة لتجربة عشوائية، ولنفترض أننا كررنا هذه التجربة n مرة (حيث n كبيرة كبراً كافياً). وليكن A حدثاً متعلقاً بهذه التجربة وكان $n(A)$ عدد المرات التي يقع بها الحدث A ، وليكن $v_n(A) = \frac{n(A)}{n}$ يمثل التكرار النسبي لوقوع الحدث A . فإن المتتالية $v_1(A), v_2(A), \dots, v_n(A)$ تخضع لنوع من الانتظام الإحصائي حيث إنه من أجل n كبيرة كبراً كافياً، سيستراكم التكرارات النسبية $v_n(A)$ حول عدد ثابت سندعوه تقريباً باحتمال وقوع الحادثة A أي $P(A) \approx v_n(A)$.

1. 8. 3: التعريف الرياضي للاحتمال (تعريف كولومغوروف):

لتكن Ω تمثل مجموعة نتائج تجربة عشوائية و F حيز الأحداث المعرف عليها ولتعرف الدالة: $P: F \rightarrow R$ كما يلي:

$$\forall A \in F : P(A) \geq 0 - 1$$

$$P(\Omega) = 1 - 2$$

3 - من أجل متتالية معدودة من الحوادث المتنافية متتاي متتاي من F :
 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ يكون:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

عندئذ ندعو P بأنه دالة احتمالية أو احتمال بشكل مختزل ويكون $P(A)$ هو احتمال وقوع الحادث A من F في Ω . وهذا التعريف يدعى بتعريف كولومغوروف للاحتمال.

1. 8. 4: تعريف:

ندعو الثلاثية (Ω, F, P) بالفضاء الاحتمالي حيث Ω تمثل فضاء العينة و F حيز الأحداث على Ω و P قياس احتمال معرف حسب كولومغوروف. وندعو هذا الفضاء بالفضاء الاحتمالي المنفصل، إذا كانت مجموعة الأحداث الابتدائية للتجربة فيه منتهية أو معدودة. ويكون فضاء مستمراً إذا كانت مجموعة

الأحداث الابتدائية في فضاء العينة غير منتهية وغير معدودة.
1.8.5: التعريف التقليدي والتعريف الإحصائي للاحتمال يحققان تعريف

كولموغوروف:

أولاً:

بالنسبة للتعريف التقليدي لدينا:

$$\forall A \in F : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad - 1$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0 \quad \text{وكون } |A| \geq 0, \quad |\Omega| > 0 \quad \text{فإن:}$$

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{N}{N} = 1 \quad - 2 \quad (\text{من أجل } |\Omega| = N)$$

3 - إذا كان A, B حدين متنافيين من F يكون:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

وبالتالي يمكننا أن نبرهن على أنه من أجل متتالية من الحوادث المتنافية مثني

أن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

وبالتالي نجد أن شروط كولموغوروف الثلاثة قد تحققت ومنه التعريف التقليدي

يحقق التعريف الرياضي لكولموغوروف.

ثانياً:

بالنسبة للتعريف الإحصائي نجد:

$$n(A) \geq 0, \quad n > 0 \quad \text{لأن} \quad P(A) \approx \nu_n(A) = \frac{n(A)}{n} \geq 0 \quad - 1$$

$$P(\Omega) \approx \nu_n(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad - 2$$

3 - من أجل متتالية من الحوادث المتنافية مثنى مثنى $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ من F :

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &\approx \nu_n(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \frac{n(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} n(A_i)}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n(A_i)}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_n(A_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

وبالتالي تحققت شروط كولموغوروف أي أن التعريف الإحصائي يحقق التعريف الرياضي للاحتمال.

1. 8. 6: المقارنة بين التعاريف الثلاثة للاحتمال:

إن التعريف التقليدي للاحتمال يقصر عن دراسة التعارب ذات الفضاء غير المنتهي من الإمكانيات ويشترط عدم أرجحية وقوع حدث ابتدائي على وقوع حدث ابتدائي آخر وكذلك يعجز عن حساب احتمالات لحوادث ناتجة عن تعارب ثنائية. وكذلك التعريف الإحصائي يعطي قيمة تقريبية للاحتمال وهناك الكثير من التعارب التي لا يمكن تكرارها عدداً كبيراً من المرات تحت الشروط نفسها. وبذلك نجد أن تعريف كولموغوروف للاحتمال هو شامل ويفضي الصوب الموجودة في التعريفين التقليدي والإحصائي.

1. 8. 7: بناء نموذج احتمالي:

نقصد ببناء نموذج احتمالي تحديد طريقة عمل تسمح لنا بحساب قيمة الدالة P لكل حادثة من F في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) .

لنفترض أن $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ وأن الحوادث الابتدائية تشكل تجمزة لـ Ω أي $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} \{w_i\}$ وهي متنافية مثنى مثنى أي لا يمكن أن تؤدي

تؤدي إلى نتيجتين مختلفتين في آن واحد. فإذا خصصنا لكل حادثة ابتدائية w_i عددا حقيقيا P_i وهذه الأعداد تحقق الشرطين:

$$P_i \geq 0 \quad : \quad i \geq 1$$

$$\sum_{i \geq 1} P_i = 1 \quad (2)$$

نكون قد أقمنا نموذجاً احتمالياً، نستطيع من خلاله حساب الاحتمالات المخصصة لكل حادثة من F . حيث يكون احتمال أي حادثة من F هو مجموع احتمالات الحوادث الابتدائية الداخلة في تشكيل هذه الحادثة.

1.8.8: الحوادث شبه المستحيلة والحوادث شبه الأكيدة:

في الحياة العملية لا نواجه حوادث مستحيلة أو حوادث أكيدة دوماً، لكننا نواجه حوادث شبه مستحيلة أو حوادث شبه أكيدة. حيث نعرف الحوادث شبه المستحيل بالحوادث الذي يكون احتمال وقوعه قريباً جداً من الصفر، والحوادث شبه الأكيد بالحوادث الذي يكون احتمال وقوعه قريباً جداً من الواحد. وهذه الحوادث لها دور مهم في مفهوم نظرية الاحتمالات. لأنه على سبيل المثال عند تصنيع مظلات يهمننا جداً أن يكون احتمال أن تفتح المظلة وهي في الجو هو احتمال حادث شبه أكيد وكذلك عند تصنيع قمر اصطناعي يهمننا جداً أن يكون احتمال وقوعه في عطل عند الإطلاق هو احتمال حادث شبه مستحيل.

1.8.9: أمثلة محلولة:

مثال (1،12): يتسابق في الجري ثلاثة أشخاص A, B, C فإذا كان احتمال فوز C هو ضعف احتمال فوز A واحتمال فوز A هو ثلاثة أضعاف احتمال فوز B : عين احتمال فوز كل منهم ثم عين احتمال فوز B أو C علماً بأن هناك فائزاً واحداً فقط.

الحل:

ليكن احتمال فوز B يمثل k فاحتمال فوز A هو $3k$ واحتمال فوز C هو $2(3k)$ أي $6k$ وبما أن A, B, C تشكل تجزئة لـ Ω فإن:

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega) \Rightarrow 3k + k + 6k = 1 \Rightarrow 10k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{10}$$

$$P(A) = 3k = \frac{3}{10}; P(B) = k = \frac{1}{10}; P(C) = 6k = \frac{6}{10} \quad \text{ومنه:}$$

ويكون احتمال فوز B أو C أي:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

(لأن B, C متافيان كون لدينا فائز واحد).

مثال (13،1):

لدينا صندوقان، يحوي الأول كرتين بيضاوين وكرة سوداء ويحوي الثاني كرة بيضاء وكرة سوداء أيضا، نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ونخلطها جيدا مع كرات الصندوق الثاني، ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الثاني. عين احتمال الحصول على كرة بيضاء؟

الحل:

سنحل التمرين اعتمادا على بناء النموذج الاحتمالي. نميزا للكرات ذات اللون نفسه بعضها عن بعض نرقمها فنضع الرقم 1 على إحدى الكرتين البيضاوين في الصندوق الأول ونرمز لها بـ w_1 والرقم 2 على الكرة البيضاء الأخرى في الصندوق الأول ونرمز لها بـ w_2 ، والرقم 3 على الكرة البيضاء في الصندوق الثاني ونرمز لها بـ w_3 ، والرقم 1 على الكرة السوداء في الصندوق الأول ونرمز لها بـ B_1 ، والرقم 2 على الكرة السوداء في الصندوق الثاني، ونرمز لها بـ B_2 . فعندئذ يمكننا كتابة فضاء العينة كما يلي:

$$\Omega = \{w_1w_1, w_1w_3, w_1B_2, w_2w_2, w_2w_3, w_2B_2, B_1B_1, B_1w_3, B_1B_2\}$$

حيث مثلا: w_2B_2 يعني سحب الكرة w_2 من الصندوق الأول ثم سحب الكرة B_2 من الصندوق الثاني ونلاحظ أن Ω يتضمن تسع نقاط عينة، وبما أن

السحب عشوائي من كل من الصندوقين، فهذا يعني أن لكل النتائج التسع الفرص نفسها في أن تكون النتيجة التي نحصل عليها عند تنفيذ التجربة.

وحصة كل نقطة عينة هي إذا $\frac{1}{9}$ ، والحادثة المطلوبة، ونرمز لها بـ A تتضمن النقاط التالية:

$$A = \{w_1w_1, w_1w_3, w_2w_2, w_2w_3, B_1w_3\} ; |A|=5 ; |\Omega|=9$$

$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{9} \quad \text{أو:}$$

مثال (14,1):

تستخدم إحدى شركات الطيران طائرات من الطراز القديم والتي تعمل بمحركين مستقلين. فإذا كان احتمال أن يعطل المحرك الأول 0.10، واحتمال أن يعطل المحرك الثاني 0.15، واحتمال أن يعطل المحركان معا هو 0.015. عين احتمال أن تتابع طائرة من طائرات الشركة الرحلة التالية بأمان، علما بأنها يمكن أن تعمل بمحرك واحد.

الحل:

لتكن A حادثة متابعة الطائرة رحلتها التالية بأمان، ولتكن B حادثة سقوط الطائرة.

نلاحظ أن: $A \cup B = \Omega$ و A, B متنافيان.

فعندئذ:

$$P(A \cup B) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow$$

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0.015 = 0.985$$

1. 9: الخصائص الرئيسية العامة للاحتمال:

1. 9-1: خصائص مباشرة: ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي، ولنفترض أن جميع المجموعات الواردة هي أحداث (عناصر من F):
من أجل أي $A \in F$ ، B ، $A \cup A' = \Omega$ لدينا:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A') = (B \cap A) \cup (B \cap A') \quad (\text{متنافيان})$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)} \quad \text{خاصة (1):}$$

وبالمثل من أجل A : $B \cup B' = \Omega$

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')} \quad \text{خاصة (2):}$$

وبوضع $B = \Omega$ في الخاصة (1) نجد:

$$P(\Omega) = P(A \cap \Omega) + P(A' \cap \Omega) \Rightarrow 1 = P(A) + P(A')$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A) + P(A') = 1 ; P(A) = 1 - P(A')} \quad \text{خاصة (3)}$$

وفي الخاصة (3) يوضع $A = \emptyset$ نجد:

$$P(\emptyset) + P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{P(\emptyset) = 0} \quad \text{خاصة (4)}$$

وإذا كان $A \subseteq B$ فإن الخاصة (1) تصبح من الشكل:
خاصة (5)

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow \boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$$

$$\boxed{P(B) \geq P(A)} \quad \text{خاصة (6)}$$

ومن أجل أي: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ وحسب الخاصة (6) نجد:

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow \boxed{0 \leq P(A) \leq 1} \quad \text{خاصة (7)}$$

ومن أجل متتالية معدودة من الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ من F وحسب دو مرغان:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'$$

نجد من الخاصة (3):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'\right) \Rightarrow \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'\right)} \quad \text{خاصة (8)}$$

ومن أجل أي حادثتين A, B من F وكان $A \cap B \neq \emptyset$ (غير متنافيتين) وكون:

$$A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P[B - (A \cap B)]$$

وكون $A \cap B \subseteq B$ فحسب الخاصة (5) نجد:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \quad \text{خاصة (9)}$$

مثال (15,1):

قذفنا ثلاثة أحجار نرد، ومعرفة أنه لا يمكن للحجرين أن يعطيا القيمة العددية نفسها، عيّن احتمال الحصول على الوجه واحد.
الحل:

لتكن A حادثة الحصول على الوجه واحد.
فتكون A' حادثة عدم الحصول على الوجه واحد من أي حجر.
 $|\Omega| = 6 \times 5 \times 4 = 120$; $|A'| = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{60}{120} = 0.5$$

مثال (16,1):

يرغب طالب في دراسة الطب، فبعد أن رفض طلبه في جميع الكليات في بلده، لجأ للمراسلة مع دول خارجية وذلك بمساعدة مؤسستين للمراسلة، بقصد تحصيل قبول في إحدى الدول عن طريقها وهي x, y فإذا كان احتمال أن يحصل على قبول عن طريق x هو (0.7) ، واحتمال أن يحصل على قبول عن طريق y هو (0.4) ، ويشك 75% من أن إحدى المؤسستين سوف لا تحصل له قبولاً. عين احتمال حصوله على قبول من إحدى المؤسستين.

الحل:

لتكن الحادثة A حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة x .
ولتكن الحادثة B حادثة حصول الطالب على قبول عن طريق المؤسسة y .
ولدينا : $P(A \cup B) = 0.75$, $P(B) = 0.4$, $P(A) = 0.7$
والحادث المطلوب $A \cup B$ حيث A, B غير متنافيين. فعندئذ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - [1 - P(A \cap B)]$$

$$= P(A) + P(B) - 1 + P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 1 + 0.75 = 0.85$$

1. 9. 2: تعميم حساب احتمال اتحاد عدة حوادث:
من أجل ثلاثة حوادث A_1, A_2, A_3 غير متنافية من F يكون:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P[(A_1 \cup A_2) \cup A_3]$$

$$= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) + P[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)]$$

$$- P(A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$

$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) \quad \text{ومنه:}$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة من أجل الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ حيث سنجد بسهولة وبطريقة الاستقراء أن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots \dots \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

$$\dots \text{و } S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \quad \text{و} \quad S_1 = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{— إذا رمزنا —}$$

$$S_n = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \quad \text{فإن الخاصة تصبح من الشكل:}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{k-1} S_k + \dots + (-1)^{n-1} S_n \quad \text{خاصة (10)}$$

ومن أجل احتمالات متناظرة في النموذج الاحتمالي المدروس يكون عدد الحدود في S_k هو C_k^n وبالتالي:

$$S_1 = \binom{n}{1} P(A_1); S_2 = \binom{n}{2} P(A_1 \cap A_2), \dots, S_k = \binom{n}{k} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right), \dots,$$

$$S_n = \binom{n}{n} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

1. 9. 3: خاصية الفرق التناظري:

من أجل A, B من F لدينا:

$$P(A \Delta B) = P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \quad (\text{الحادثان متافيان})$$

$$\Rightarrow P(A \Delta B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) \quad (1) \text{ و } (2) \quad (\text{وحسب الخاصة})$$

$$\rightarrow P(A \Delta B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad \text{خاصة (11)}$$

1. 9. 4: متباينات احتمالية:

لنكن $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ متتالية معدودة من الحوادث من F . عندئذٍ نتوصل أن:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} P(A_n) \quad 1 - \text{الخاصة (12)}$$

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n \geq 1} P(A_n') \quad 2 - \text{الخاصة (13)}$$

ولإثبات ذلك سنبدأ بـ (أولاً) حيث تتشكل الأحداث التالية:

$$B_1 = A_1; B_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1'; B_3 = A_3 \setminus (A_2 \cup A_1) = A_3 \cap A_1' \cap A_2'; \dots;$$

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) = A_n \cap A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_{n-1}'; \dots$$

عندئذ نلاحظ أن الأحداث $(B_n)_{n \geq 1}$ متنافية مثنى مثنى:

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} B_n, \quad \forall n: B_n \subseteq A_n$$

وبالتالي:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(B_n)$$

وكون $B_n \subseteq A_n$: $\forall n$ فهذا يعطي $\forall n: P(B_n) \leq P(A_n)$ ومنه يصبح:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} P(A_n)$$

ومن أجل ثانياً نأخذ:

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right)'\right] = 1 - P\left[\bigcup_{n \geq 1} A_n'\right] \quad \odot$$

ومن الخاصية (12) نجد أن:

$$P\left[\bigcup_{n \geq 1} A_n'\right] \leq \sum_{n \geq 1} P(A_n') \stackrel{\odot}{\Rightarrow} 1 - P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} P(A_n')$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n \geq 1} P(A_n')$$

1. 9. 5: مبرهنة التكافؤ في النهايات في الاحتمالات:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي، حيث P قياس احتمالي جمعي على F . عندئذ الشروط الأربعة التالية متكافئة:

1- P قياس احتمالي جمعي تام (أي إذا كانت $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من الأحداث

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ فإن } F \text{ متنافية متنى من } F$$

2 - إذا كانت $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية غير متناقصة من الأحداث من F فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

3 - إذا كانت $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية غير متزايدة من الأحداث من F فإن:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

4 - إذا كانت $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية غير متزايدة من الأحداث من F وكان

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i) = 0 \text{ فإن } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Phi$$

الإثبات: لنبرهن هذا التكافؤ بالطريق التالي: $① \Leftarrow ④ \Leftarrow ③ \Leftarrow ② \Leftarrow ①$

لنبرهن أولاً $① \Leftarrow ②$: لنفترض أنه لدينا $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية غير متناقصة من

الأحداث كلها من F ولنأخذ:

$$A_0 = \Phi; B_i = A_{i+1} \setminus A_i; B_0 = A_1 \setminus A_0; B_1 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_{n-1} = A_n \setminus A_{n-1}; \\ B_n = A_{n+1} \setminus A_n, \dots$$

عندئذ نكون $(B_i)_{i \geq 0}$ متنافية متنى متنى وكذلك: $A_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$ ومنه:

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} B_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P(B_i) \quad \star$$

وكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ فعندئذ:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (\star \text{ حسب})$$

ولنبرهن الآن ② $\Leftarrow$ ③ : لتكن $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية غير متزايدة (أي $A_{i+1} \subseteq A_i$) $\forall i \geq 1$ فنحن نكون متتالية غير متناقصة من عناصر F وكون ② صحيحة ينتج من ذلك:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n') \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - P(A_n')] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

ولنبرهن ③ $\Leftarrow$ ④ : من صحة ③ وكون $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Phi$ ، نجد $P(\Phi) = 0$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(\Phi) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

ولنبرهن ④ $\Leftarrow$ ① : لنفترض أن $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من الأحداث المتنافية مثنى

مثنى كلها من F ولناخذ $C_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ عندئذ: $C_{n+1} \subseteq C_n$ ، $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \Phi$ (لأن A_i متنافية مثنى). وحسب الخاصية الجمعية لـ P يكون لدينا:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)\right] = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(C_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(C_n)$$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0$ (كون ④ صحيحة). ثم بأخذ نهاية الطرفين للعلاقة السابقة من أجل $n \rightarrow \infty$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ملاحظة: من ② و ③ في المبرهنة السابقة يمكننا صياغة النص التالي:
إذا كانت $(A_n)_{n \geq 1}$ متتالية مطردة (متزايدة أو متناقصة) من الأحداث فإن:
 $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$. وهذه تدعى بخاصة الاستمرار للقياس الاحتمالي الجذمي التام.

مثال (17، ف):

مؤسسة تجارية تستخدم عمالا من المدينة ومن خارجها. فإذا كان 60% من العمال إناثا و 30% من العمال من المدينة، وواحد من العمال من كل أربعة عمال هو من الذكور ومن المدينة. عين نسبة الإناث العاملات من خارج المدينة في هذه المؤسسة؟

الحل:

ليكن F حادثة كون العمال الإناث، فيكون $P(F) = 0.60$.
وليكن M حادثة كون العمال من الذكور، فيكون $P(M) = 1 - P(F) = 0.40$.
وليكن C حادثة كون العمال من المدينة، فيكون $P(C) = 0.30$.
وليكن B حادثة كون العمال من خارج المدينة، فيكون $P(B) = 1 - P(C) = 0.70$.
والدنيا $P(M \cap C) = 0.25$ والمطلوب حساب $P(F \cap B)$ ؟

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(F \cap C) + P(F \cap B) \Rightarrow P(F \cap B) = P(F) - P(F \cap C) \\
&= P(F) - [P(C) - P(M \cap C)] = P(F) - P(C) + P(M \cap C) \\
&= 0.60 - 0.30 + 0.25 = 0.55
\end{aligned}$$

مثال (18،1):

سحبنا عينة عشوائية حجمها r من مجموعة عددها n عين احتمال وجود عنصر معين في العينة إذا كان السحب:

- 1 - يجري مع الإعادة.
- 2 - يجري بدون إعادة.
- 3 - إذا تم السحب مع الإعادة، عين احتمال ظهور كل عنصر مرة على الأقل.

الحل:

- 1 - ليكن A الحادث المطلوب فيكون A' حادثة عدم ظهور عنصر معين في العينة حيث:

$$|\Omega| = n^r ; |A'| = (n-1)^r \Rightarrow P(A') = \frac{(n-1)^r}{n^r}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(n-1)^r}{n^r} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$$

- 2 - ليكن B الحادث المطلوب، فيكون B' حادثة عدم ظهور عنصر معين في العينة حيث:

$$|\Omega| = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}; |B'| = P_r^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} \Rightarrow P(B') = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}}{\frac{n!}{(n-r)!}} = \frac{n-r}{n}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{n-r}{n} = 1 - 1 + \frac{r}{n} = \frac{r}{n}$$

3 - ليكن C الحادث المطلوب، فيكون:

$$|\Omega| = n^r; |C| = P_r^n \Rightarrow P(C) = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{n^r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{n \times n \times \dots \times n} = \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{n-r+1}{n}$$

$$\Rightarrow P(C) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$$

مثال (19,1):

وزعنا r كرة متمايضة في n صندوقاً، عين احتمال عدم وجود صندوق خال (حيث $r \geq n$).

الحل:

ليكن A_i الحدث الدال على كون الصندوق i خالياً، فيكون A_i' دال على كون الصندوق i مشغولاً وذلك من أجل $i = 1, 2, \dots, n$. والحسبات المطلوب

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)'. \text{ ومن أجل ذلك نحسب } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \text{ ثم نتقل للمتمم.}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{k-1} S_k + \dots + (-1)^{n-1} S_n \quad \odot$$

حيث لدينا:

$$P(A_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r} \Rightarrow S_1 = \binom{n}{1} \frac{(n-1)^r}{n^r}; S_2 = \binom{n}{2} \frac{(n-2)^r}{n^r}; \dots;$$

$$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)^r}{n^r};$$

ومنه بالعودة لـ (20):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^r}{n^r}$$

$$P\left[\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)'\right] = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^r}{n^r}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r$$

مثال (20،1):

سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من بين 10 ورقات مرقمة من 1 إلى 10.

أوجد احتمال أن يكون مجموعها فرديا إذا تم السحب:

1 - للورقتين معا.

2 - ورقة بعد الأخرى بدون إعادة.

3 - ورقة بعد الأخرى مع الإعادة.

الحل:

ليكن A حادثة الحصول على مجموع فردي.

$$|\Omega| = \binom{10}{2}; |A| = \binom{5}{1} \binom{5}{1} \quad - 1$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{25}{45} = 0.56$$

$$|\Omega| = \binom{10}{1}\binom{9}{1} = 90 ; |A| = \binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{1}\binom{5}{1} = 50 \quad - 2$$

$$P(A) = \frac{50}{90} = 0.56$$

$$|\Omega| = \binom{10}{1}\binom{10}{1} = 100 ; |A| = \binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{1}\binom{5}{1} = 50 \quad - 3$$

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0.5$$

مثال (2F.1):

نصفد في بناء مؤلف من عشرة طوابق. فإذا بدأنا بالصعود وبه سبعة أشخاص وافترضنا أنه يتوقف عند كل طابق. عين احتمال نزول كل من هؤلاء في طابق.

الحل:

ليكن A الحادث المطلوب.

$$|A| = P_7^{10} = \frac{10!}{(10-7)!} = 604800$$

$$|\Omega| = 10^7 = 10000000$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{604800}{10000000} = 0.06048$$

مثال (22,1):

لنسحب عينة غير مرتبة من الحجم K من صندوق يحوي m كرة حمراء و $n-m$ كرة بيضاء. ما هو احتمال الحصول على r كرة حمراء على الأقل، وعين احتمال الحصول على r كرة حمراء على الأكثر.

الحل:

ليكن E_j حادثة سحب j كرة حمراء حيث $j = 0, 1, 2, \dots, k$.
ويكون:

$$P(E_j) = \frac{\binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$

ومن أجل الحصول على r كرة حمراء على الأقل، يكون الحادث المطلوب:

$$L_r = \bigcup_{j=r}^k E_j$$

$$P(L_r) = \sum_{j=r}^m \frac{\binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}} ; \quad m \leq k$$

ومن أجل الحصول على r كرة حمراء على الأكثر، فيكون الحادث المطلوب:

$$M_r = \bigcup_{j=0}^r E_j$$

$$P(M_r) = \sum_{j=0}^r \frac{\binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}} ; \quad r \leq m$$

1. 10: تمارين غير محلولة:

(1) عين عدة فضاء العينة في تجربة دراسة توزع الإناث لدى أسرة تملك خمسة أطفال؟

(2) عين عدة فضاء العينة وفضاء العينة في تجربة إلقاء أربع قطع نقود متوازنة؟

(3) لتكن لدينا المجموعة $A = \{a, b, c, d, e\}$ والمطلوب:

1 - عين عدد العينات المرتبة من الحجم 2 والمأخوذة من A وما هي تلك العينات.

2 - عين عدد الأنساق من الحجم 2 وأي منها من بين العينات السابقة في 1.

(4) بطريقة السحب على التتالي، بكم طريقة يمكن أن نسحب ثلاث ورقات من مجموعة ورق اللعب المؤلف من 52 ورقة وذلك إذا كان السحب يتم:

1 - مع الإعادة.

2 - بدون إعادة.

(5) عين مجموعة نتائج توزيع:

1 - ثلاث كرات على ثلاث صناديق في حالة كرات متميزة ثم غير متميزة.

2 - أربع كرات على ثلاث صناديق في حالة كرات متميزة ثم غير متميزة.

(6) ليكن F جيرا (جيرا تاما) في Ω ، ولتكن E مجموعة جزئية من Ω ولنأخذ البصف: $F_E = \{F \cap E; F \in F\}$. برهن أن F_E يمثل جيرا (جيرا تاما) في E.

(7) نقذف قطعة نقود مرة بعد مرة حتى يظهر وجه الصورة لأول مرة. اكتب فضاء العينة.

(8) نقذف حجر نرد وقطعة نقود، اكتب فضاء العينة Ω وحدد نقاط العينة في كل من الحوادث التالية:

A - ظهور عدد زوجي على حجر النرد.

B - ظهور وجه الـ H على قطعة النقود.
C - ظهور وجه الـ H على قطعة النقود وعدد أقل من 3 على حجر النرد.

D - الحصول على A و B.

E - الحصول على B و C.

(9) لتكن A, B, C ثلاث حوادث لا على التمييز من F في الفضاء (Ω, F) .
عبر عن الحوادث التالية حسب مفهوم نظرية المجموعات:

1 - الحادث A فقط يقع.

2 - A و B وليس C.

3 - A و B و C.

4 - أحد الحوادث على الأقل يقع.

5 - حادثان على الأقل يقعان.

6 - حادثان على الأكثر يقعان.

7 - حادث واحد فقط يقع.

8 - حادثان أو أكثر يقعون.

9 - ولا حادث يقع.

(10) في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة احسب احتمال الحصول:

1 - على عدد زوجي؛

2 - على عدد أكبر أو يساوي 2.

3 - على عدد أصغر من 5.

4 - عدد زوجي أو أكبر من 2.

(11) لدينا خمس بذور، اثنتان منها تنتجان زهورا حمراء، واثنتان منها تنتجان

زهورا بيضاء، وواحدة تنتج زهورا صفراء. خلطنا هذه البذور جيدا ثم

اخترنا منها عشوائيا بذرتين. عین احتمال أن تنتجا زهورا من اللون نفسه؟

(حل التمرين اعتمادا على مفهوم النموذج الاحتمالي).

12) يتضمن صندوق ست قطع حمراء من الورق مرقمة من 1 إلى 6، وكذلك ست قطع بيضاء من الورق مرقمة من 1 إلى 6، وجميع القطع من الحجم نفسه. سحبنا قطعة بصورة عشوائية. عيّن احتمال أن تكون:

1 - حمراء.

2 - عليها رقم زوجي.

3 - حمراء وعليها رقم زوجي.

4 - حمراء أو عليها رقم زوجي.

5 - ليست حمراء وليس عليها رقم زوجي.

13) لدى أسرة ثلاثة أطفال. عيّن احتمال أن يكون لدى الأسرة:

1 - ذكراة فقط.

2 - ثلاث إناث.

3 - ذكر واحد على الأقل.

4 - اثنيان على الأكثر.

5 - اثنيان وذكراة.

14) في تجربة إلقاء حجر نرد. عيّن احتمال الحصول على:

1 - مجموع زوجي.

2 - مجموع أكبر من 7.

3 - مجموع يساوي 7.

4 - مجموع محصور بين 3 و6 ضمناً.

15) لدى أسرة أربعة أطفال. عيّن احتمال أن يكون لدى الأسرة:

1 - ذكراة على الأقل.

2 - أنثى على الأكثر.

3 - ثلاثة ذكور وأنثى.

4 - أربعة ذكور أو أربعة إناث.

16) صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور العدد متناسباً مع العدد نفسه ولتكن لدينا الحوادث التالية:

A - حادثة الحصول على عدد زوجي.

B - حادثة الحصول على عدد أولي.

C - حادثة الحصول على عدد فردي.

والمطلوب:

1 - عيّن فضاء العينة واحتمال كل نقطة من نقاط العينة.

2 - احسب $P(C)$, $P(B)$, $P(A)$.

3 - احسب $P(C' \cap A')$, $P(A \cap B')$, $P(B \cap C)$, $P(A \cup B)$.

17) وزعنا ورق لعب (52 ورقة) على أربعة لاعبين بالتساوي. عيّن احتمال أن يكون بيد لاعب على الأقل سلسلة كاملة من الورق.

18) ليكن Ω فضاء تجربة عشوائية مفروضة. وليكن لدينا A, B حادثان من F حيث لدينا: $P(A) = 0.25$; $P(B) = 0.40$; $P(A \cap B) = 0.15$
احسب الاحتمالات التالية:

$$P(A' \Delta B); P(A \Delta B); P(A \cup B'); P(A \cap B')$$

19) لدينا A, B بلعبان لعبة قف حجرى نرد متوازنان وبشكل متناوب. يبدأ A ومن ثم B. ومن يحصل على مجموع قدره 7 من أول ظهور له يربح. عيّن احتمال ربح A، ثم عيّن احتمال ربح B.

20) لدينا A, B حادثان من F في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) برهن أن:

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A') - P(B')$$

21) وزعنا عشوائياً n كرة في n صندوقاً. عيّن احتمال أن تقع كرة واحدة في كل صندوق.

22) صندوق يحوي N عنصراً، موزعة على K صنفاً $A_1, A_2, \dots, A_K$ ،

بحيث إن عدد عناصر الصنف A_i هو N_i و $N_i = 1, 2, \dots, K$

و $N = \sum_{i=1}^K N_i$. والتجربة هي سحب عينة حجمها n وعلى التالي.

والمطلوب:

- 1 - احسب احتمال أن تحتوي هذه العينة على n_i عنصرا من النوع A_i حيث $i=1,2,\dots,K$ و $n = \sum_{i=1}^K n_i$ ، حيث نفرض أن لكل عنصر من عناصر الصندوق حظا متساويا في الظهور. ناقش حالة السحب مع الإعادة وحالة السحب بدون إعادة.
- 2 - برهن تكافؤ احتمال السحب مع الإعادة والسحب بدون إعادة للعينة في 1 وذلك من أجل N_i, N كبيرة كبرا كافيا بالنسبة لـ n_i, n حيث $i=1,2,\dots,K$.
- (23) تم ترتيب 20 كتابا بشكل عشوائي على رف معين وعلى شكل خط مستقيم. ومن بين تلك الكتب يوجد ثلاثة كتب للمؤلف A . عيّن احتمال وجود كتب المؤلف A بجانب بعضها.
- (24) صندوق يحوي M كرة حمراء و $N-M$ كرة بيضاء، تسحب الكرات من الصندوق واحدة تلو الأخرى دون إعادة. عيّن احتمال أنه في المرة K من السحب أن نحصل وللمرة الأولى على كرة حمراء.
- (25) اخترنا عشوائيا n شخصا حيث $n \leq 365$. والمطلوب:
- 1 - عيّن احتمال أن يكون للـ n شخصا المختارين، n عيدا للميلاد مختلفا.
- 2 - من أجل $n < 30$ ، كم شخصا يجب أن نختار لنحصل على احتمال أقل من $\frac{1}{2}$ لأعياد الميلاد المختلفة.
- (26) أربعة لاعبين a, b, c, d يأخذ كل منهم 13 ورقة من ورق اللعب (52) وبصورة عشوائية. والمطلوب:
- 1 - إذا لم يكن عند b أي آس، فما هو احتمال أن يكون عند زميله a آسين بالضبط.
- 2 - إذا كان عند b, a معا 9 ورقات كبة. عيّن احتمال أن يكون عند كل من d, c ورقتا كبة.
- (27) لدينا n شخصا وضعوا قبعاتهم في غرفة حفظ القبعات قبل الاجتماع، وعندما خرجوا كان هناك انقطاعا في التيار الكهربائي، وعندئذ أخذ

كل شخص قبعة بشكل عشوائي. عين احتمال أن يأخذ شخصا على الأقل قبعته بالذات. ناقش من أجل II كبيرة كيرا كافيًا.

28) طبعت سكرتيرة خمس رسائل، ووضعت كل رسالة في ظرف ولكن بطريقة عشوائية دون النظر للعناوين الصحيحة. عين احتمال أن تصل رسالة على الأقل لصاحبها بالذات.

الفصل الثاني

الاحتمال الشرطي والاستقلال العشوائي

2.1: مقدمة وتعريف:

إذا نظرنا إلى السماء في يوم من الأيام ووجدناها ملبدة بالغيوم، فهذا يعني أن احتمال هطول المطر أقوى مما لو وجدناها خالية من الغيوم. فإذا رمزنا لحادثة هطول المطر بـ A وحادثة كون السماء ملبدة بالغيوم بـ B فإننا نرمز لـ $P(A/B)$ باحتمال A علماً بأن B قد وقعت أي احتمال هطول المطر علماً بأن السماء ملبدة بالغيوم وبالتالي سيكون $P(A/B)$ أكبر من $P(A)$ وهو أكبر أيضاً من $P(A/B)$. وهذا المثال يوضح بأن هناك حوادث قد تكون على صلة ببعضها، أي وقوع حادثة قد يؤثر زيادةً أو نقصاناً في احتمال وقوع حادثة أخرى ومن هنا تأتي أهمية الاحتمال الشرطي. ولو وجدنا أن وقوع حادثة B لا يؤثر بزيادة أو نقصان في احتمال وقوع A أي:

$P(A/B) = P(A)$ ، نستنتج بلا شك أن لا صلة للحدثين ببعضهما من الناحية الاحتمالية، أو أنهما مستقلان احتمالياً.

وبالتالي إذا كان لدينا (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً وكان A, B حدثين من F وإذا علمنا أن $P(B) > 0$ فإننا نعرف الاحتمال الشرطي لوقوع A علماً بأن B قد وقع

بـ :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) > 0; (P_B(A) = P(A/B) \text{ — حيث نرمز أيضاً بـ})$$

وبالمثل:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} ; P(A) > 0 ; (P_A(B) = P(B/A)) \text{ حيث:}$$

2. إثبات علاقة الاحتمال الشرطي:

ترمز لنقطة عينة بـ w ، واحتمال حادثة A علماً بأن الحادثة B قد وقعت
بـ $P_B(A)$ و $P(A)$ لاحتمال A غير الشرطي. ونعلم أولاً أن:
 $\sum_{w \in B} P_B(\{w\}) = 1$ حيث نقصد بالرمز $\sum_{w \in B}$ بالمجموع فوق نقاط العينة w التي تنتمي
إلى B . وهذه العلاقة تعبر عن حقيقة أن B هي الآن (تحت شرط وقوع B) الحادثة
الأكيدة، مما يجعل احتمال أي نقطة عينة لا تنتمي إلى B مساوياً للصفر وفقاً للدالة
الشرطية P_B . ويزيد من احتمال كل نقطة تنتمي إلى B مقدار يتناسب مع الاحتمال
الذي خصتها به الدالة غير الشرطية P . وهذا يسمح لنا بكتابة:

$$P_B(\{w\}) = \begin{cases} KP(\{w\}); & \forall w \in B \\ 0 & ; \forall w \notin B \end{cases} \text{ حيث } K \text{ عدد ثابت موجب.}$$

ولكن:

$$1 = \sum_{w \in B} P_B(\{w\}) = K \sum_{w \in B} P(\{w\}) = KP(B) \Rightarrow K = \frac{1}{P(B)}$$

وبالتالي:

$$P_B(\{w\}) = \begin{cases} \frac{P(\{w\})}{P(B)}; & w \in B \\ 0 & ; w \notin B' \end{cases}$$

وبالتالي من أجل أي حادثة A ، لدينا:

$$P(A/B) = P_B(A) = \sum_{w \in A} P_B(\{w\}) = \sum_{w \in A \cap B} P_B(\{w\}) + \sum_{w \in A \cap B'} P_B(\{w\})$$

$$(A = (A \cap B) \cup (A \cap B')) \text{ حيث}$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \sum_{w \in A \cap B} P_n(\{w\}) + 0 = \sum_{w \in A \cap B} \frac{P(\{w\})}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{P(B)} \sum_{w \in A \cap B} P_n(\{w\}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال (1,2):

صنفنا مائة شخص وفقاً للجنس (ذكر، أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض عمى الألوان (مصاب، غير مصاب) وكان لدينا للتأليح التالية:

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	2	58	60
أنثى	1	39	40
المجموع	3	97	100

اخترنا عشوائياً شخصاً واحداً. والمطلوب:

1 - إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان ذكراً فما هو احتمال أن يكون مصاباً؟

2 - إذا علمنا أن الشخص الذي اختير مصاباً، فما هو احتمال أن يكون ذكراً؟

الحل:

لتكن A حادثة كون الشخص مصاب بمعنى الألوان و B حادثة كون الشخص ذكراً.

1 - الحادث المطلوب $P(A/B)$:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/100}{60/100} = \frac{2}{60} = 0.033$$

2- الحادث المطلوب (B/A) :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/100}{3/100} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

2. 3 نتائج:

(1) لدينا $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ولدينا $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$; $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ ومنه:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

(2) بالمثل كما في النتيجة (1) نجد:

$$P(A/B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

2. 4: مبرهنة (2. 1):

إذا كان (Ω, F, P) فضاء احتمالي وكان $A \in F$; $P(A) > 0$ فإن الاحتمال المشروط بـ A يكون احتمالا على F .

الإثبات: لنبرهن أن $P_A: F \rightarrow R$ يحقق شروط كولموغوروف أي:

$$\forall B \in F: P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0 \quad (1)$$

لأن $P(A \cap B) \geq 0$; $P(A) > 0$

$$P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \quad (2)$$

(3) من أجل متتالية معدودة من الحوادث المتتافية متنى متنى $(B_i)_{i \geq 1}$ من F لدينا:

$$P_A\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) = \frac{P\left[A \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right)\right]}{P(A)} = \frac{P\left[\bigcup_{i \geq 1} (A \cap B_i)\right]}{P(A)} = \frac{\sum_{i \geq 1} P(A \cap B_i)}{P(A)}$$

لأن $(A \cap B_i)_{i \geq 1}$ متتالية متنى متنى، كون $(B_i)_{i \geq 1}$ متتالية متنى متنى (فرضاً).

وبالتالي:

$$P_A\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) = \sum_{i \geq 1} \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i \geq 1} P_A(B_i)$$

2. 5: نتائج:

- (1) إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً، فإنه بمعرفة وقوع الحدث A يعني أننا سنتعامل مع الفضاء الاحتمالي الشرطي (Ω, F, P_A) .
- (2) بما أننا أثبتنا في المبرهنة (2. 1) أن P_A هو احتمال فعلي (بحقق التعريف الرياضي للاحتمال) فهذا يعني أن كل الخواص التي رأيناها في الفصل الأول للاحتمال صالحة في حالة الاحتمال الشرطي.

2. 6: قاعدة الاحتمال المركب:

من تعريف الاحتمال الشرطي رأينا أن:

$$\left[P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} ; P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right]$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

وهذه تدعى بقاعدة الاحتمال المركب.

ويمكننا ببساطة تعميم هذه القاعدة من $A_1, A_2, \dots, A_n$ متتالية من الأحداث:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

مثال (2, 2):

صندوق يحوي n كرة زرقاء و m كرة سوداء. سحبنا على التوالي كرتين وبدون إعادة، عَمَّ احتمال الحصول على كرتين من اللون الأسود.

الحل:

ليكن A حادثة سحب الكرة الأولى سوداء اللون.

ليكن B حادثة سحب الكرة الثانية سوداء اللون.

والحادث المطلوب $A \cap B$ - حسب قاعدة الاحتمال المركبة:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1}$$

2. 7: تعريف التجزئة:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي، وليكن $(A_i)_{i \in I}$ متتالية من الحوادث كلها من F . نقول عن $(A_i)_{i \in I}$ إنها تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا حققت الشروط التالية:

$$(1) \quad \Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$(2) \quad \forall i, j \geq 1; i \neq j: A_i \cap A_j = \Phi$$

2. 8: نتائج:

(1) إذا كانت الأحداث $(A_i)_{i \in I}$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω ، عندئذ

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) = 1$$

تدعى بقاعدة الاحتمال الكلي.

(2) إن أي تجزئة للحدث الأكيد Ω تؤدي إلى تجزئة لأي حدث متعلق

بالتجربة ذاتها. فإذا كانت الأحداث $(A_i)_{i \in I}$ تجزئة لـ Ω وكان B حدثا متعلقا بها فإن:

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

وكون $(A_i)_{i \in I}$ متنافية متني متني فإن الأجزاء منها $(B \cap A_i)_{i \in I}$ تكون

متنافية متني متني أيضا ومنه:

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)\right] = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$$

وبالتالي $(B \cap A_i)_{i \in I}$ تشكل تجزئة للحدث B المرتبط بـ Ω .

2.9: دستور بايز:

لتكن $(A_i)_{i \in I}$ تجزئة لـ Ω في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وليكن B حادثا مرتبطا بهذه التجربة. فإن دستور بايز ينص على:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

إن هذا الدستور يدعى بدستور بايز أو احتمال السبب أي أنه إذا وقع الحادث B فما هو احتمال أن يكون الجزء (A_i) (من التجزئة $(A_i)_{i \in I}$) هو السبب في وقوعه، وبالتالي الأحداث $(A_i)_{i \in I}$ تلعب دور العوامل المسببة لوقوع الحادث B وغيره من الأحداث المرتبطة بالتجربة ذاتها.

الإنبات: من (2.8) رأينا أن:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad (\text{حسب قاعدة الاحتمال المركب})$$

ومن تعريف الاحتمال الشرطي نجد:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

مثال (2,3):

في دراسة لمحنة تلفزيونية محلية حول 'نشرة الأخبار' التي تعرضها، تم طرح سؤاليين:

- 1 - هل تشاهد بانتظام نشرة الأخبار (حيث نرسم لهذا الحدث A).
- 2 - هل نشرة الأخبار مشاهمة لأي نشرة أخبار أخرى في محطات أخرى (B) .

وكان لدينا النتائج التالية: $P(A) = 0.40$; $P(B) = 0.50$; $P(A \cap B) = 0.24$

والمطلوب: احسب: $P(B/A)$, $P(B/A')$, $P(B'/A')$ ؟

الحل: لدينا:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.24}{0.50} = 0.48$$

ولدينا:

$$P(B/A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.50 - 0.24}{1 - 0.40} = 0.43$$

ولدينا:

$$P(B'/A') = 1 - P(B/A') = 1 - 0.43 = 0.47$$

مثال (4.2):

لدى شخص 500 جهاز إرسال تحوي 10 عاطلة عن العمل، بدأ يفحص الأجهزة، جهازاً فـجهازاً، عين احتمال أن يجد الشخص ثلاثة أجهزة صالحة للعمل ثم يليها جهاز عاطل عن العمل.

الحل: لتكن E_i حادثة الحصول على جهاز عاطل عمن العمل $i=1,2,3,4$ والحادث المطلوب: $E_1' \cap E_2' \cap E_3' \cap E_4$ فحسب قاعدة الاحتمال المركب:

$$P(E_1' \cap E_2' \cap E_3' \cap E_4) = P(E_1')P(E_2'/E_1')P(E_3'/E_1' \cap E_2')P(E_4/E_1' \cap E_2' \cap E_3')$$

$$= \frac{490}{500} \times \frac{489}{499} \times \frac{488}{498} \times \frac{10}{497} = 0.019$$

مثال (5.2):

وزعنا أربع كرات في أربعة صناديق، وذلك كرة بعد كرة. فحسب إذا علمنا أن الكرتين الأولى والثانية وقعتا في صندوقين مختلفين. عين احتمال وقوع ثلاث كرات في صندوق واحد.

الحل:

لتكن A حادثة وقوع كرتين في صندوقين مختلفين.

لتكن B حادثة وقوع ثلاث كرات في صندوق واحد.

والحادث المطلوب هو B/A :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 4^2} = \frac{24}{192} \Rightarrow P(B/A) = 0.125$$

مثال (6,2):

موظفان يقومان بنسخ الرسائل على الآلة الكاتبة، فإذا كان الموظف الأول ينسخ 80% من الرسائل و90% من رسائله خالية من الأخطاء. والموظف الثاني ينسخ 20% من الرسائل و50% من رسائله خالية من الأخطاء. اختيرت عشوائيا إحدى الرسائل المنسوخة، احسب احتمال أن تكون هذه الرسالة خالية من الأخطاء. وإذا كانت الرسالة المسحوبة خالية من الأخطاء، احسب احتمال أن يكون الموظف الثاني هو الذي نسخ هذه الرسالة.

الحل:

لتكن A_1 حادثة كون الرسالة المختارة منسوخة من قبل الموظف الأول.

لتكن A_2 حادثة كون الرسالة المختارة منسوخة من قبل الموظف الثاني.

لتكن B حادثة كون الرسالة المختارة خالية من الأخطاء.

ولدينا هنا $A_1 \cup A_2 = \Omega$ و B حادث مرتبط بالتجربة ذاتها فممكنه حسب

مفهوم التجزئة لفضاء التجربة والحادث المرتبط به Ω يكون:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$= (0.80) \cdot (0.90) + (0.20) \cdot (0.50) = 0.82$$

$P(A_2/B)$ ومن أجل حل الطلب الثاني: هنا لدينا حالة قانون بايز، والمطلوب

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{(0.20) \cdot (0.50)}{0.82} = 0.122$$

مثال (7,2):

لجنة مؤلفة من $4n$ شخصا، نصفها ذكور والنصف الآخر إناث، اختيرت امرأة

من بين اللجنة بطريقة عشوائية، ثم اختارت بطريقة عشوائية من الباقي لجنة مؤلفة من

n شخصا، فإذا كانت اللجنة المختارة كلها من الجنس نفسه، عين احتمال أن يكونوا

كلهم ذكور.

الحل:

لتكن M حادثة كون الشخص ذكورا، وتكن F حادثة كون الشخص
شخصا إناثا، وتكن N حادثة كون الشخص شخصا من الجنس نفسه. والحادث
المطلوب M/N ونجد أن $M \cap N = \emptyset$ و N حادث مرتبط بالتجربة ذاتها. ومنه:

$$P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{P(M).P(N/M)}{P(M).P(N/M) + P(F).P(N/F)}$$

$$P(M) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{4n-1}{n}}, P(F) = \frac{\binom{2n-1}{n}}{\binom{4n-1}{n}} \text{ وكذلك } P(N/F) = P(N/M) = 1$$

وبالتالي:

$$P(M/N) = \frac{\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{4n-1}{n}}}{\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{4n-1}{n}} + \frac{\binom{2n-1}{n}}{\binom{4n-1}{n}}} = \frac{1}{1 + \frac{\binom{2n-1}{n}}{\binom{2n}{n}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0.667$$

2. 10: تعريف الاستقلال العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتماليا:

(1) لتكن A, B من F ، نقول عن الحادتين A, B أنهما مستقلان عشوائيا إذا

كانا يحققان الشرط التالي: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

(2) إذا الأحدث A_1, A_2, A_3 من F . فإننا نقول عن هذه الأحداث إقبا

مستقلة عشوائيا إذا كانت تحقق الشرطين التاليين:

1 - الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة مثنى مثنى.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \quad 2$$

3 - نقول عن متتالية من الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ من F إنها مستقلة عشوائيا إذا كانت تحقق الشرطين التاليين:

أ- كل متتالية جزئية منها من المرتبة $(n-1)$ تكون مستقلة عشوائيا.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{ب-}$$

2. 1.1: نتائج:

(1) من تعريف الاستقلال ينتج أن: $P(B/A) = P(B)$; $P(A/B) = P(A)$ أي أن استقلال حادثتين يعني أنه إذا وقع أحدهما فليس له أي علاقة بوقوع أو عدم وقوع الآخر. ويمكن تعميم ذلك..

(2) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (حادثان متنافيان)، فلكي يكونا مستقلين يجب أن يتحقق:

$$P(A) = 0 \text{ أو } P(B) = 0$$

$$P(B) = 0 \Leftrightarrow 0 = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

أي يجب أن يكون أحدهما على الأقل حادثا مستحيلا.

(3) نوه هنا إلى أنه في حالة تنافي الأحداث سنستخدم قاعدة احتمال اتحاد يساوي مجموع الاحتمالات. وفي حالة استقلال الأحداث سنستخدم قاعدة احتمال التقاطع يساوي جداء الاحتمالات.

مثال (2، 8):

صندوق يحوي تسع قطع من النقود، أربع منها من النوع الأول بتواريخ إصدار 1976، 1978، 1980، 1982 وثلاث منها من النوع الثاني بتواريخ إصدار 1976، 1980، 1982 واثنان منها من النوع الثالث بتواريخ إصدار 1980، 1982. سحبنا قطعة نقود بصورة عشوائية، ولتكن A حادثة السحب من النوع الأول و B حادثة السحب من النوع الثاني، و C حادثة سحب قطعة نقود إصدار

1980. والمطلوب حساب $P(A/C)$; $P(C)$ ثم هل الحادثان A و C مستقلتان؟ وهل

الحادثان B و C مستقلتان؟

الحل: لدينا:

$$P(C) = \frac{3}{9}; P(A \cap C) = \frac{1}{9}; P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = 0.33$$

$$P(A) \times P(C) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{4}{27} \neq P(A \cap C) = \frac{1}{9} \Rightarrow (A, C) \text{ غير مستقلين}$$

لكن لدينا:

$$P(B) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, P(B \cap C) = \frac{1}{9}, P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

أي $P(B \cap C) = P(B).P(C)$ ومنه B, C مستقلتان.

مثال (2,9):

إذا كان احتمال كون باب معين مقفلاً هو $\frac{1}{3}$ ومفتاح الباب هو بين 15 مفتاحاً متوفرة ضمن حزمة واحدة، فإذا اختار شخص ثلاثة مفاتيح بصورة عشوائية. عمن احتمال أن يستطيع فتح الباب بدون اللجوء إلى مفاتيح أخرى؟

الحل:

لتكن A حادثة فتح الباب، وبالتالي فإن الطرائق المختلفة والتي تؤدي لتحقيق A هي إما أن يكون الباب غير مقفل أو أن يكون الباب مقفلاً B ونختار المفتاح الصحيح

C وبالتالي فالحدث المطلوب يصبح من الشكل $A = B' \cup (B \cap C)$

ومنه: $P(A) = P(B') + P(B \cap C)$ ولكن الحادثين B, C مستقلتان لأن B

تتعلق بفضاء B و C بفضاء حزمة المفاتيح ومنه:

$$P(A) = P(B') + P(B).P(C) = 1 - P(B) + P(B).P(C)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\binom{14}{2} \binom{1}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{14!}{2! \cdot 12!}}{\frac{15!}{3! \cdot 12!}} = \frac{2}{3} + \frac{(3 \times 2) \cdot (14!)}{(2) \cdot (15 \times 14!)} = \frac{2}{3} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15} = 0.867$$

مثال (10,2):

نقذف حجرين نرد أحدهما أسود والآخر أبيض، ولتكن A حادثة الحصول على عدد زوجي من الحجر الأسود، ولتكن B حادثة الحصول على عدد فردي من الحجر الأبيض، وليكن C حادثة الحصول على وجهين من الصفة نفسها (أي فرديين أو زوجيين). هل الحوادث A, B, C مستقلة عشوائياً؟
الحل:

لدينا هنا: $|\Omega| = 6 \times 6 = 36$ وسبق ورأينا مجموعة نقاط فضاء العينة في المثال (11,1)، ومنه:

$$P(A) = \frac{18}{36} = 0.5 ; P(B) = \frac{18}{36} = 0.5 ; P(A \cap B) = \frac{9}{36} = 0.25$$

$$P(C) = \frac{18}{36} = 0.5 ; P(A \cap C) = \frac{1}{4} = 0.25 ; P(B \cap C) = 0.25$$

وبالتالي نلاحظ أن:

$$P(A).P(B) = (0.5).(0.5) = 0.25 = P(A \cap B) \text{ (مستقلان عشوائياً) } A, B$$

$$P(A).P(C) = (0.5).(0.5) = 0.25 = P(A \cap C) \text{ (مستقلان عشوائياً) } A, C$$

$$P(B).P(C) = (0.5).(0.5) = 0.25 = P(B \cap C) \text{ (مستقلان عشوائياً) } B, C$$

ومنه نلاحظ أن الحوادث الثلاثة A, B, C مستقلة متتالية.

ولنبحث الآن في احتمال تقاطع الحوادث الثلاثة معاً:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\phi) = 0 ; P(A).P(B).P(C) = (0.5)^3 = 0.125$$

وبالتالي: $P(A \cap B \cap C) \neq P(A).P(B).P(C)$

فالحوادث A, B, C غير مستقلة عشوائيا.

2. 12: خواص الاستقلال العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) قضاء احتماليا.

2. 12: 1: الأحداث المستقلة عن نفسها هي الأحداث شبه المستقلة

والأحداث شبه الأكيدة فقط.

الإثبات:

إن ϕ مستقل عن نفسه لأن:

$$P(\phi \cap \phi) = P(\phi) = 0 = 0 \times 0 = P(\phi) \times P(\phi)$$

وإن Ω مستقل عن نفسه لأن:

$$P(\Omega \cap \Omega) = P(\Omega) = 1 = 1 \times 1 = P(\Omega) \times P(\Omega)$$

ومن أجل أي حدث A من F مستقل عن نفسه يكون:

$$P(A' \cap A) = P(A).P(A) \Rightarrow P(A) = P^2(A) \Rightarrow P(A).(1 - P(A)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow (A \text{ حادث شبه مستحيل}) \\ 1 - P(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 1 \Rightarrow (A \text{ حادث شبه أكيد}) \end{cases}$$

2. 12: 2: إن ϕ, Ω حادثان مستقلان عن أي حدث A من F حيث

$$1 > P(A) > 0$$

الإثبات:

$$P(\phi \cap A) = P(\phi) = 0 = 0 \times P(A) = P(\phi).P(A) \Rightarrow (A, \phi \text{ مستقلان عشوائيا})$$

$$P(\Omega \cap A) = P(A) = 1 \times P(A) = P(\Omega).P(A) \Rightarrow (A, \Omega \text{ مستقلان عشوائيا})$$

2. 12: 3: إذا كانت الأحداث A, B من F مستقلة عشوائيا فإن A, B'

تكون مستقلة عشوائيا و A', B مستقلة عشوائيا.

الإثبات:

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) \stackrel{\text{مستقلة}}{=} P(A) - P(A).P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A).P(B') \Rightarrow (A, B' \text{ مستقلة عشوائيا}) \end{aligned}$$

$$P(B \cap A') = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(B).P(A) = P(B)(1 - P(A)) \quad (2)$$

$$= P(B).P(A') \Rightarrow \text{B, A' مستقلة عشوائياً}$$

2. 12. 4: إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ من F مستقلة عشوائياً فإن الحوادث المتممة لها $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ تكون مستقلة عشوائياً أيضاً.

الإثبات:

لنبرهن أولاً من أجل A_1, A_2 من F :

$$P(A'_1 \cap A'_2) = 1 - P[(A'_1 \cap A'_2)'] = 1 - P(A_1 \cup A_2)$$

$$= 1 - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)]$$

$$= 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1).P(A_2)$$

$$= (1 - P(A_1)) - P(A_2)(1 - P(A_1))$$

$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = P(A'_1).P(A'_2) \Rightarrow A'_1, A'_2 \text{ مستقلة عشوائياً}$$

وبالمثل نبرهن من أجل أي حادثين من $A_1, A_2, \dots, A_n$ المستقلة عشوائياً تكون متمماتها مستقلة.

لنبرهن الآن من أجل أي ثلاثة حوادث A_1, A_2, A_3 من F :

$$P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = 1 - P[(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3)'] = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$$

$$= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_3) + P(A_2)P(A_3)$$

$$- P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$= (1 - P(A_1)) - P(A_2)(1 - P(A_1)) - P(A_3)(1 - P(A_1)) + P(A_2)P(A_3)(1 - P(A_1))$$

$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2) - P(A_3) + P(A_2)P(A_3))$$

$$= (1 - P(A_1))[(1 - P(A_2)) - P(A_3)(1 - P(A_2))]$$

$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) = P(A'_1)P(A'_2)P(A'_3)$$

ومنه: A'_1, A'_2, A'_3 مستقلة عشوائيا.

وبالتالي من أجل أي ثلاثة حوادث من $A_1, A_2, \dots, A_n$ المستقلة عشوائيا

تكون متمماتها مستقلة عشوائيا.

ثم يمكن متابعة ذلك بالتدرج للوصول للنتيجة النهائية وهي:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A'_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A'_i)$$

2. 12. 5: لنكن متتالية من الأحداث المتنافية متني متني من F ، وإذا

كانت الحوادث B, A_i مستقلة عشوائيا من أجل كل $i \geq 1$. عندئذ تكون الحوادث

$$\bigcup_{i=1}^n A_i, B$$

الآتيات:

$$\begin{aligned} P\left[\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \cap B\right] &= P\left[\bigcup_{i \geq 1} (A_i \cap B)\right] = \sum_{i \geq 1} P(A_i \cap B) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)P(B) \\ &= \left(\sum_{i \geq 1} P(A_i)\right)P(B) = P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)P(B) \Rightarrow \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i, B\right) \text{ مستقلة عشوائيا} \end{aligned}$$

2. 12. 6: من أجل A, B حدثين من F وبحققان الشرط التالي:
عندئذ يكون A, B مستقلين عشوائيا. $P(B/A') = P(B/A)$

الإثبات:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A).P(B/A) + P(A').P(B/A')$$

ومن الفرض يتبع:

$$P(B) = P(A).P(B/A) + P(A').P(B/A) = P(B/A).(P(A) + P(A'))$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B/A) \Rightarrow (A, B \text{ مستقلان عشوائيا})$$

2. 12. 7: من أجل A, B, C من F . وكان $A \subseteq B$ ، وكذلك كان A, C مستقلين عشوائيا، وكان B, C مستقلين عشوائيا. عندئذ يكون $B \setminus A, C$ مستقلين عشوائيا.

الإثبات:

بما أن $A \subseteq B$ فإن $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$ وبالتالي:

$$P[(B \setminus A) \cap C] = P[(B \cap C) \setminus (A \cap C)] = \overset{\text{مستقلان}}{P(B \cap C)} - \overset{\text{مستقلان}}{P(A \cap C)}$$

$$= P(B).P(C) - P(A).P(C) = [P(B) - P(A)]P(C) = P(B \setminus A).P(C)$$

$$\Rightarrow (B \setminus A, C \text{ مستقلان عشوائيا})$$

2. 12. 8: إذا كان لدينا صفان من الأحداث F_2, F_1 . نقول عن هذين الصفتين إنهما مستقلان عشوائيا فيما إذا كان كل حادث من F_1 مستقلا عن كل حادث F_2 وكتطبيق على ذلك: من أجل A, B من F ومستقلان عشوائيا فإن الصفتين:

$$F_1 = \{\phi, A, A', \Omega\} ; F_2 = \{\phi, B, B', \Omega\}$$

يكونان مستقلين عشوائيا وذلك اعتمادا على الخواص (2. 12: (1, 2, 3, 4)).

2. 12. 9: إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقلة عشوائيا فعندئذ

لحساب $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$ يصبح هذا سهلا إذا استفدنا من الخاصية (2. 12. 4) حيث:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A'_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A'_i)$$

مثال (2: 11):

ألقينا حجر نرد 10 مرات متتالية. احسب احتمال الحصول على الوجه 6 على الأقل.

الحل:

لتكن A_i حادثة الحصول على الوجه 6 في المرة i حيث $i = 1, 2, \dots, 10$ والحادث المطلوب $\bigcup_{i=1}^{10} A_i$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A'_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{10} P(A'_i) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

$$= 1 - 0.162 = 0.838$$

2. 12. 10: تعريف وخاصة متعلقة به:

نقول عن حادثين A, B إنهما مستقلان شرطيا بالنسبة للحادث C من $\mathcal{F}$ الفضاء الاحتمالي $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ إذا تحقق:

$$P(A \cap B / C) = P(B / C) \cdot P(A / C)$$

ويمكننا أن نثبت أنه يمكن لـ A, B أن يكونا مستقلين عشوائيا وغير مستقلين شرطيا بالنسبة لـ C حيث نأخذ: $C = A \cup B$ هنا. وبالتالي:

مستقلان

$$P(A \cap B / C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap B)}{P(C)} ; (A \cap B \subseteq C)$$

$$= \frac{P(A).P(B)}{P(C)} = P(A). \frac{P(B)}{P(C)} = P(A). \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A).P(B/C) \neq P(A/C).P(B/C) \quad (B \subseteq C = A \cup B)$$

ومنه فإن A, B غير مستقلين شرطيا بالنسبة لـ C .

مثال (2،12):

يمكن لمؤشر داو جونز في بورصة نيويورك أن يزداد أو ينخفض يوميا. فإذا كان احتمال الزيادة (0.50) في اليوم، فخلال أربعة أيام عين احتمال أن يزداد مرة على الأقل، علما بأن الزيادة أو النقصان هي حوادث مستقلة.

الحل:

ليكن E_i حادثة أن يزداد المؤشر في اليوم i ، حيث $i = 1, 2, 3, 4$ والحوادث

المطلوب $\bigcup_{i=1}^4 E_i$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^4 E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^4 E_i'\right) = 1 - \prod_{i=1}^4 P(E_i') = 1 - (0.50)^4 = 0.938$$

مثال (2،13):

إذا كان احتمال أن يصيب A الهدف هو 0.25، واحتمال أن يصيب B الهدف هو 0.40، فإذا صوب كل من A, B نحو الهدف مرة واحدة. عين احتمال:

1 - إصابة الهدف.

2 - عدم إصابة الهدف.

3 - إصابة الهدف من واحد فقط.

الحل:

1 - الحادث المطلوب $A \cup B$ مستقلان:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

$$= 0.25 + 0.40 - (0.25).(0.40) = 0.55$$

مستقلان

$$P(A' \cap B') = P(A').P(B') = (0.75).(0.60) = 0.45 \quad - 2$$

متنافيان

مستقلان

مستقلان

- 3

$$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P((A' \cap B))$$

$$= P(A).P(B') + P(A').P(B)$$

$$= (0.25).(0.60) + (0.75).(0.40)$$

$$= 0.15 + 0.3 = 0.45$$

مثال (14,2):

صنعت قطعة نقود بحيث يكون: $P(H) = \frac{2}{3}$ و $P(T) = \frac{1}{3}$. ألقيت هذه القطعة مرة واحدة ونختار بعد ذلك عدداً عشوائياً من 1 إلى 9 إذا ظهرت الصورة، ونختار عدداً عشوائياً من 1 إلى 5 إذا ظهرت الكتابة. عيّن احتمال أن يكون العدد المختار زوجياً.

الحل:

لتكن A حادثة اختيار عدد زوجي ولتكن E_1 حادثة اختيار عدد زوجي من المجموعة من 1 إلى 9، و E_2 حادثة اختيار عدد زوجي من المجموعة من 1 إلى 5.

$$A = (H \cap E_1) \cup (T \cap E_2)$$

مستقلان متنافيان مستقلان

$$P(A) = P(H \cap E_1) + P(T \cap E_2) = P(H).P(E_1) + P(T).P(E_2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = 0.296 + 0.133 = 0.429$$

مثال (15,2):

إذا كان احتمال أن يصيب ثلاثة رجال هدفاً هو على الترتيب:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ فإذا أطلق كل منهم على الهدف مرة واحدة. فالمطلوب:

1 - عين احتمال أن يصيب الهدف رجل واحد منهم فقط.

2 - إذا أصاب الهدف رجل واحد فقط، فعين احتمال أن يكون الأول

هو الذي أصاب الهدف.

الحل:

لتكن A حادثة إصابة الهدف من الرجل الأول $P(A) = \frac{1}{6}$

لتكن B حادثة إصابة الهدف من الرجل الثاني $P(B) = \frac{1}{4}$

لتكن C حادثة إصابة الهدف من الرجل الثالث $P(C) = \frac{1}{3}$

ومنه: $P(A') = \frac{5}{6}$; $P(B') = \frac{3}{4}$; $P(C') = \frac{2}{3}$

1 - الحادث المطلوب:

مستقلة متنافية مستقلة متنافية مستقلة

$$E = (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$$

ومنه:

$$P(E) = P(A).P(B').P(C') + P(A').P(B).P(C') + P(A').P(B').P(C)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72} = 0.431$$

2 - الحادث المطلوب: A/E

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap B' \cap C)}{P(E)} = \frac{P(A) \cdot P(B') \cdot P(C)}{P(E)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{0.431} = \frac{0.083}{0.431} = 0.193$$

2. 13: تمارين غير محلولة:

(1) صندوق يحوي مجموعة من الكرات عددها n ومرقمة من 1 إلى n ، سحبتنا منه كرة فأخرى فآخرى دون إعادة، فإذا افترضنا أن رقم الكرة الأولى i ورقم الكرة الثانية j فما هو احتمال أن يكون رقم الكرة الثالثة k . حيث $i \neq j \neq k$.

$$(2) \text{ إذا كان } P(A) = \frac{2}{3} ; P(B) = \frac{1}{4} ; P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$\text{احسب } P(A \cup B) ; P(A \cup B / A \cap B) ; P(A / A \cap B) ; P(A / B)$$

(3) عند الاصطفاف يهرع 30 طالبا من صف للانتظام صف أحادي، فإذا كان الطالبان A, S من هذا الصف. المطلوب:

1 - عين احتمال أن يكون A, S متجاورين.

2 - إذا علمت أن A, S متجاورين، فما هو احتمال أن يكون S في أول الصف.

(4) ثلاث خزان مرقمة من 1 إلى 3، ولكل منها درجان وفي كل درج من الخزائن الأولى قطعة ذهبية، وفي كل درج من الخزائن الثانية يوجد قطعتان ذهبيتان، والدرج الأول من الخزائن الثالثة يحوي قطعتين ذهبيتين وقطعة فضية بينما بالدرج الثاني فيه ثلاث قطع ذهبية وثلاث قطع فضية. اخترنا عشوائيا إحدى هذه الخزائن وفتحنا أحد درجها وسحبنا منه قطعة وكانت ذهبية. فما هو احتمال أن نسحب من الدرج الثاني فيها قطعة ذهبية أيضا ؟

(5) لدينا ثلاثة أكياس متجانسة، في الكيس الأول يوجد كرتان بيضاء وواحدة سوداء، وفي الثاني يوجد ثلاث كرات بيضاء وواحدة سوداء، وفي الثالث يوجد كرتان بيضاوان وكرتان سوداوان. نسحب عشوائيا أحد الأكياس الثلاثة ونسحب منه كرة. عين احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء. ثم إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة مسحوبة من الكيس الثاني.

(6) في مزرعة أغنام افترضنا أن احتمال أن يصاب الحيوان بالمرض M هو (0.3)، واحتمال أن ييذي حيوانا ما لم يصب بالمرض M رد فعل سلبيا بالمصل T هو

(0.9)، وإذا أصيب بالمرض M فإن احتمال أن يبدي رد فعل إيجابيا بالمصل T هو (0.8). عين احتمال أن يكون حيوان ما اختبر بشكل عشوائي وأبدي رد فعل إيجابيا بالمصل T مصابا بالمرض M .

7) سكرتيرة مهمة تضع n عنوانا على n رسالة بشكل عشوائي. عين احتمال أن تصل رسالة على الأقل لصاحبها بالذات. (ناقش حالة n كبيرة كثيرا كافيًا).
8) من بين الناخبين المسجلين في مدينة معينة، هناك 60% منهم شارك في الانتخابات البلدية و80% منهم شارك في الانتخابات الوطنية و50% منهم شارك في الانتخابات. والمطلوب:

- 1 - عين نسبة الناخبين الذين شاركوا في الانتخابات الوطنية ولم يشاركوا في الانتخابات البلدية.
- 2 - عين نسبة الذين لم يشاركوا في الانتخابات البلدية علما بأنهم شاركوا بالانتخابات الوطنية.
- 3 - عين نسبة الذين شاركوا بالانتخابات البلدية علما بأنهم شاركوا بالانتخابات الوطنية.
- 4 - عين نسبة الذين شاركوا بالانتخابات البلدية علما بأنهم لم يشاركوا بالانتخابات الوطنية.
- 5 - عين نسبة الذين لم يشاركوا بالانتخابات البلدية علما بأنهم لم يشاركوا بالانتخابات الوطنية.

9) مصنع محركات فيه 0.06 من محركاته تحمل الصفة السيئة A و0.04 من محركاته تحمل الصفة السيئة B . والباقي خال من العيوب ولا يوجد محركات تحمل الصفتين السيئتين معا. وعند خضوع هذه المحركات لجهاز مراقبة الجودة، فإن هذا الجهاز يكشف العيب A باحتمال 0.95، ويكشف العيب B باحتمال 0.75، ويكشف 0.10، من القطع السليمة على أنها سيئة الصنع. وكل المحركات المكتشفة من قبل الجهاز ترفض، والباقي يغلف للتسويق. عين نسبة القطع المغلفة والسيئة الصنع والتي تذهب للتسويق.

(10) ثلاث آلات M_1, M_2, M_3 تنتج 40%، 35%، 25% من إنتاج مصنع على الترتيب، ولنفترض أن 2%، 4%، 5% من إنتاج هذه الآلات سيء الصنع على الترتيب أيضا. اخترنا سلعة من إنتاج هذا المصنع فكانت سيئة الصنع، عين احتمال كون السلعة من إنتاج الآلة M_1 .

(11) لدينا ثلاثة أكياس يحوي الأول كرتين بلون أبيض وثلاث كرات سوداء وخمس كرات حمراء، ويحوي الثاني خمس كرات بيضاء و 10 كرات سوداء و 5 كرات حمراء، ويحوي الثالث 6 كرات بيضاء وكرتين بلون أسود وكرة حمراء. اخترنا عشوائيا كيسا من هذه الأكياس، وسحبنا منه كرة.

1 - عين احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء اللون.

2 - إذا علمت أن الكرة المسحوبة بيضاء، فما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الكيس الأول.

(12) صندوق يحوي 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء وصندوق آخر يحوي 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء. اختيرت كرة عشوائيا من الكيس الأول ووضعت في الكيس الثاني ثم سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني. عين احتمال أن تكون هذه الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء.

(13) نبحث عن مظلة قد تكون موجودة بأحد الطوابق السبعة من بناء معين باحتمال يساوي $\frac{P}{7}$ حيث $P \in [0,1]$ ، فإذا تخبرنا دون حدود الطوابق الستة الأولى، عين احتمال أن تكون المظلة في الطابق السابع.

(14) لدينا صندوق يحوي 10 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء، نسحب أربع كرات على التوالي، عين احتمال أن تكون إحدى هذه الكرات سوداء.

(15) قلنا حجر نرد أحدهما أحمر اللون والآخر أبيض اللون، عين احتمال الحصول على الوجه ستة من كل حجر علما بأن الحجر الأبيض أعطى رقم 96.

(16) ألقينا حجر نرد مرة واحدة، وليكن A حادثة الحصول على الوجه واحد من الحجر الأول، و B حادثة الحصول على عدد زوجي من الحجر الثاني، هل A, B حادثتان مستقلتان عشوائيا؟

17) ألقينا حجري نرد دفعة واحدة، ولتكن A حادثة الحصول على عدد فردي من الحجر الأول و B حادثة الحصول على عدد فردي من الحجر الثاني و C حادثة الحصول على مجموع فردي. هل الحوادث A, B, C تكون مستقلة عشوائياً؟

18) صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء، سحبت كرة من الصندوق وأضيفت كرة من اللون المخالف. سحبت بعد ذلك كرة ثانية من الصندوق. والمطلوب:

- 1 - عين احتمال أن تكون الكرة الثانية المسحوبة حمراء؟
 - 2 - إذا كانت الكرتان المسحوبتان من اللون نفسه، فما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض؟
- 19) لعب A, B اثني عشر دوراً في الشطرنج، وكانت النتائج كما يلي: ربح A ست مرات وربح B أربع مرات وتعادلا مرتين، ولقد اتفقا أن يلعبا ثلاثة أدوار أخرى. عين احتمال:

- 1 - أن يربح A المباريات الثلاث.
- 2 - أن تنتهي مباراتان بالتعادل.
- 3 - أن يربح A و B بالتبادل.
- 4 - أن يربح B مباراة على الأقل.

20) جمعية خيرية باعت 500 بطاقة يانصيب، وهناك جائزتان ستوزعان لبطاقات الراجعة، علماً بأن البطاقة نفسها يمكن أن تربح الجائزتين، اشترى أحد الأشخاص 50 بطاقة، عين احتمال أن يربح على الأقل جائزة من الجائزتين.

21) لدى أسرة ثلاثة أطفال، ولتكن A حادثة وجود صبي وبنت و C حادثة وجود بنت على الأكثر. برهن أن A, C مستقلان عشوائياً.

22) مجموعتان من المحولات تحوي كل منهما 6 محولات، وفي كل منها محولتان

لا تعملان:

- 1 - إذا اخترنا محولتين من كل مجموعة. عين احتمال أن تكون المحولات الأربع عاملة.

2 - إذا اخترنا محوطة واحدة من المجموعة الأولى وعملناها مع محمولات المجموعة الثانية. ثم سحبنا عشوائياً محولين من المجموعة الثانية. عيّن احتمال أن تكون المحولتان عاملتين.

23) ثلاثة أحصنة a, b, c تتسابق في مضمار سباق، فإذا كان احتمال فوز a هو $\frac{1}{2}$ واحتمال فوز b هو $\frac{1}{3}$ واحتمال فوز c هو $\frac{1}{6}$ فإذا تسابقت هذه الأحصنة مرتين معاً، عيّن احتمال فوز:

1 - c بالسباق الأول و a بالسباق الثاني.

2 - a بالسباقين.

3 - $(a$ و $b)$ أو $(b$ و $c)$.

24) إذا اختير الطلبة في صف بطريقة عشوائية واحداً تلو الآخر لإجراء اختبار. عيّن احتمال أن يتناوب الطلاب والطالبات إذا كان:

1 - بالصف 5 طلاب و 4 طالبات.

2 - بالصف 4 طلاب و 4 طالبات.

25) شركة تأمين لديها ثلاثة زبائن من المناطق R_1, R_2, R_3 وتعتقد الشركة بأنهم سيعيشون حتى عام 2000. باحتمال 0.7 للزبون من المنطقة R_1 ، وباحتمال 0.9 للزبون من المنطقة R_2 ، وباحتمال 0.3 للزبون من المنطقة R_3 ، عيّن احتمال أن تدفع الشركة عقد تأمين واحد فقط قبل حلول عام 2000.

الفصل الثالث

دراسة المتغيرات العشوائية

3. 1: مقدمة:

رأينا أن التجربة هي أي عملية تؤدي إلى قياس أو ملاحظة، فعدد الخريجين في جامعة دمشق مثلاً هو قياس كمي (عددي) وأن يفوز الحصان a في سباق فرسية أو لا يفوز هو قياس وصفي (نوعي) ويمكننا في هذه الحالة إعادة المعلومات الوصفية إلى معلومات عددية بتخصيص عد: لكل نتيجة وصفية وفق نظام متفق عليه سلفاً، فنسجل مثلاً الرقم 1 إذا ربح الحصان a السباق والرقم 0 إذا لم يربحه.

فإذا رمزنا بـ X لعدد الخريجين وبـ Y لنتيجة السباق، فسوف نحصل على قيمة لـ X في نهاية العام الدراسي وقيمة لـ Y عند نهاية كل سباق، ومن الطبيعي أن نقول عن متغير مثل X ومتغير مثل Y بأنه متغير عشوائي. لأن القيم التي يفترضها كل منهما مرتبطة بتجارب عشوائية، فيمكننا أن نقول إن المتغير العشوائي هو دالة عددية معروفة على فضاء عينة.

3. 2: تعريف:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي، إن الدالة $X: \Omega \rightarrow R$ تدعى بالمتغير العشوائي إذا حققت الشرط:

$$\forall B \subseteq R: X^{-1}(B) \in F$$

أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من R وفق X هي حدث من F في Ω .
ولكل متغير عشوائي مجموعة من القيم نرمز لها بـ R_X .

ملاحظة:

(1) إذا كان فضاء العينة منتهياً أو غير منتهٍ ولكنه محدود فنقول عن هذا الفضاء بأنه فضاء منفصل وبالتالي يكون المتغير العشوائي المولد من فضاء العينة هذه، متغيراً عشوائياً منفصلاً.

(2) إذا كان فضاء العينة غير منتهٍ وغير معدود فنقول عن هذا الفضاء إنه فضاء مستمر وبالتالي يكون المتغير العشوائي المولّد من فضاء العينة هذه، متغيراً عشوائياً مستمراً.

3.3: تذكير ببعض خواص الصورة العكسية:

إذا كان $X: E \rightarrow F$ تطبيقاً، وكان $B \subseteq F$ فإن:

$$X^{-1}(B) = \{x: x \in E, X(x) \in B\}$$

تدعى بالصورة العكسية لـ B وفق X ونرمز لها بـ $[X \in B]$ ونكتب أيضاً $X^{-1}(x) = [X = x]$ ومن أهم خواص الصورة العكسية:

$$[X \in \bigcup_i B_i] = \bigcup_i [X \in B_i] \quad (1)$$

$$[X \in \bigcap_i B_i] = \bigcap_i [X \in B_i] \quad (2)$$

$$[X \in B \setminus A] = [X \in B] \setminus [X \in A] \quad (3)$$

$$[X \in B'] = [X \in B]' \quad (4)$$

$$B \subseteq A \Rightarrow [X \in B] \subseteq [X \in A] \quad (5)$$

$$B \cap R_X = \emptyset \Rightarrow [X \in B] = \emptyset \quad (6)$$

3.4: دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل:

3.4.1: دالة الكثافة الاحتمالية:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً بمجموعة قيمه $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ أو $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ إن مجموعة كل الأحداث الأولية w من Ω والتي من أجلها يأخذ المتغير X القيمة x_i تشكل حدثاً نرمز له بـ $[X = x_i]$ ولاحتمال هذا الحدث بـ $P[X = x_i]$ فإن الدالة $R \rightarrow R$ f والتي يكون من أجلها

X : $P[X=x_i]=f_X(x_i)$ $i=1,2,\dots,n,\dots$ تدعى f_X الكثافة الاحتمالية لـ X حيث تحقق الشروط التالية:

$$\forall x_i \in R_X : f_X(x_i) \geq 0 ; \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) = 1$$

ويمكن أن نصف هذه الدالة بالشكل:

X	x_1	x_2	x_i	
$P[X=x_i]=f_X(x_i)$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	$f_X(x_i)$	

ونرمز للاختزال بـ: $P[X=x_i]=P_i=f_X(x_i)=f(x_i)$ حيث نلاحظ أن الأحداث $[X=x_i]_{i \in \mathbb{N}}$ متنافية متني ومتناهية Ω فهي تشكل تجزئة لـ Ω نرمز لها بـ A_X وهذه التجزئة تولد جبر الأحداث F_X والذي كل عنصر من عناصره هو اتحاد لعناصر من التجزئة A_X ويعطى بالشكل:

$$B \subset R : [w : X(w) \in B] = [X \in B]$$

ونقول إن A_X, F_X مولدان للمتغير العشوائي X ، واحتمال الحدث $[X \in B]$ يعطى

$$B \subset R : P[X \in B] = \sum_{x_i \in B} P_i$$

مغال (1,3):

تجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية، وليكن X المتغير الدال على هذه الصور الحاصلة. عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X ؟

الحل:

لدينا $|\Omega|=2^3=8$ و $\Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH\}$

ومجموعة قيم المتغير X هي: $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

ودالة الكثافة الاحتمالية لـ X توصف بالجدول التالي:

X	0	1	2	3
$f_X(x_i)$	$P[X=0]$	$P[X=1]$	$P[X=2]$	$P[X=3]$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. 4. 2: تعريف دالة التوزيع الاحتمالي:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً على Ω في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) ولناخذ الدالة: $F: R \rightarrow R$ والمعروفة بـ $F_X(x) = P[X \leq x]$ وذلك مهما يكن $x \in R$.

سنستخدم الرموز الكبيرة $F, G, H, \dots$ للدلالة على دوال التوزيع الاحتمالية.

وسنستخدم الرموز الصغيرة $f, g, h, \dots$ للدلالة على دوال الكثافة الاحتمالية.

- وفائدة دالة التوزيع F هذه تكمن في إمكان حساب احتمالات لـ X من الشكل:

$$P[a < X \leq b] = P[(X \leq b) \setminus (X \leq a)] = P[X \leq b] - P[X \leq a]$$

$$= F(b) - F(a)$$

(حيث نرمز بـ $F_X(x) = F(x)$ للاختزال).

- إذا كانت $f_X(x)$ تمثل دالة للكثافة الاحتمالية لـ X فإن:

$$F_X(x) = \sum_{n \leq x} f_X(x)$$

وبالتالي من أجل $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإن:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 = \sum_{i=1}^n f(x_i) & x_n \leq x \leq \infty \end{cases}$$

مثال (2,3):

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين جدول الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة التوزيع $F(x)$ واحسب $F(2.5)$ ؟
ثم صف بيانياً الدالة F .

الحل:

إن جدول الكثافة الاحتمالية يكون من الشكل:

X	0	1	2	3
$f_X(x)$	$f_X(0)$	$f_X(1)$	$f_X(2)$	$f_X(3)$
	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\sum_i f_X(x_i) = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = 1 \quad \text{نلاحظ أن:}$$

وتكون دالة التوزيع بالشكل:

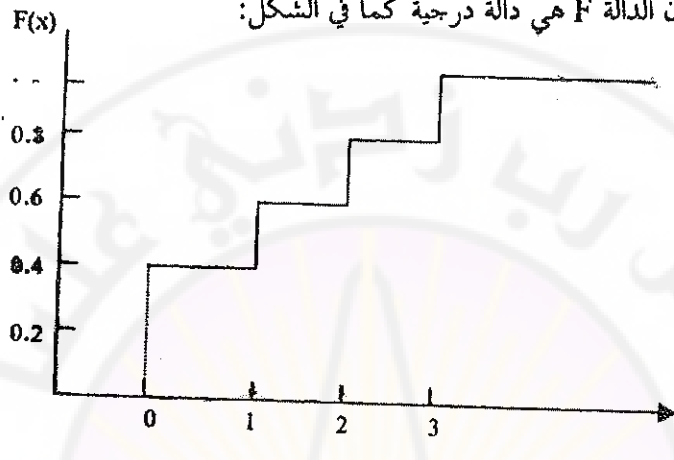
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < 0 \\ \frac{8}{15} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \leq +\infty \end{cases}$$

وبالتالي:

$$F(2.5) = P\{X \leq 2.5\} = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{12} = \frac{14}{15}$$

وبلاحظ أن الدالة F هي دالة درجية كما في الشكل:



3. 5: خواص دالة التوزيع:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي وليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً على Ω ولتكن F دالة توزيعه الاحتمالية. عندئذ:

$$\forall x \in R: 0 \leq F(x) \leq 1 \quad (1)$$

وهذا واضح فعلاً لأنه: $F(x) = P[X \leq x]$ (أي هي احتمال)

(2) F هي دالة متزايدة في x لأنه:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow [X \leq x_1] \subseteq [X \leq x_2] \Rightarrow P[X \leq x_1] \leq P[X \leq x_2]$$

$$\Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

(3)

$$F(+\infty) = P[X \leq +\infty] = P(\Omega) = 1$$

$$F(-\infty) = P[X \leq -\infty] = P(\phi) = 0$$

(4) F غير مستمر من اليمين: أي لنبرهن أن $F(x^+) = F(x)$ ومن أجل ذلك

نأخذ متتالية الأحداث التالية: $(B_n)_{n \geq 1}$ حيث: $B_n = [X \leq x + \frac{1}{n}]$:

$$B_1 = [X \leq x+1]; B_2 = [X \leq x + \frac{1}{2}]; \dots; B_n = [X \leq x + \frac{1}{n}]; \dots$$

وهذه الأحداث تشكل متتالية متناقصة من أجل قيم n . وبالتالي: $\bigcap_{n \geq 1} B_n = [X \leq x]$

ومنه:

$$F(x^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \leq x + \frac{1}{n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$$

وحسب خاصية الاستمرار للدالة الاحتمالية P :

$$= P\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = P[X \leq x] = F(x)$$

(5) F مستمر من اليسار: أي لنبرهن أن $F(x^-) \neq F(x)$ ومن أجل ذلك نأخذ

متتالية من الأحداث $B_n = [X \leq x - \frac{1}{n}]$ حيث:

$$B_1 = [X \leq x-1]; B_2 = [X \leq x - \frac{1}{2}]; B_3 = [X \leq x - \frac{1}{3}]; B_n = [X \leq x - \frac{1}{n}]; \dots$$

وهذه الأحداث تشكل متتالية متزايدة من الأحداث. ومنه: $\bigcup_{n \geq 1} B_n = [X < x]$

وبالتالي:

$$F(x^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \leq x - \frac{1}{n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$$

وحسب خاصية الاستمرار للدالة الاحتمالية P :

$$= P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = P[X < x] \neq F(x)$$

(6) نلاحظ من الخاصتين 4، 5 أن:

$$F(x^+) - F(x^-) = P[X \leq x] - P[X < x] = P[X = x]$$

أي أنه إذا كان $P[X = x] > 0$ فإن $F(x)$ يعاني قفزة عند x مساوية لهذا الاحتمال.

وبالتالي إذا كان $P[X = x] = 0$ فإن $F(x^+) = F(x^-)$ ويكون عندئذ X متغيراً عشوائياً مستمراً.

ومنه نقول عن المتغير X إنه مستمر إذا كان:

$$\forall x \in \mathbb{R}: P[X = x] = 0$$

ملاحظة: 1) إذا وضعنا في تعريف دالة التوزيع $F(x) = P[X \leq x]$ نكتب $F^-(x)$ يصبح مستمراً من اليسار.

2) يمكن تلخيص الحساب الاحتمالي معتمدين على دالة التوزيع F كما يلي:

(قفزة للأعلى للدالة $F^-(x)$ عند $x = 0 \rightarrow [x = a]$)

$$[a < X] \rightarrow 1 - F(a)$$

$$[a \leq X] \rightarrow 1 - F^-(a) + P[X = a]$$

$$[X \leq b] \rightarrow F(b)$$

$$[X < b] \rightarrow F^-(b) - P[X = b]$$

$$[a < X \leq b] \rightarrow F(b) - F(a)$$

$$[a < X < b] \rightarrow F^-(b) - F^-(a) - P[X = b]$$

$$[a \leq X \leq b] \rightarrow F(b) - F(a) + P[X = a]$$

$$[a \leq X < b] \rightarrow F(b) - F(a) + P[X = a] - P[X = b]$$

3. 6: دالة حدث:

ليكن $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضاءً احتمالياً، وليكن $A \in \mathcal{F}$ نقول عن الدالة $x_A: \Omega \rightarrow R$ إنها تمثل دالة الحدث A إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall w \in \Omega: \begin{cases} x_A(w) = 1 & ; w \in A \\ x_A(w) = 0 & ; w \in A' & ; (w \notin A) \end{cases}$$

وبالتالي إذا كانت $x_A: \Omega \rightarrow R$ تمثل دالة الحدث A وكان $B \subseteq R$ فإن:

$$x_A^{-1}(B) = \{w \in \Omega : x_A(w) \in B\} = \begin{cases} A & ; \{1\} \in B & ; \{0\} \notin B \\ A' & ; \{1\} \notin B & ; \{0\} \in B \\ \Omega & ; \{0,1\} \in B \\ \emptyset & ; \{0,1\} \notin B \end{cases}$$

وبالتالي نستنتج أن x_A هو متغير عشوائي منفصل بمجموعة قيمه $\{0,1\}$ ، ويأخذ القيمة 1 إذا وقع الحدث A ، ويأخذ للقيمة صفراً إذا لم يقع الحدث A . وهذا يدعى بقانون المتغير العشوائي x_A .

وبالعكس: إذا كان X متغيراً عشوائياً بمجموعة قيمه $\{0,1\}$ ، ولناخذ $A = \{X=1\}$ و $A' = \{X=0\}$. ومن أجل أي $w \in \Omega$ ، فإذا كان $X(w) = 1 \Leftrightarrow w \in A$ ، وإذا كان $X(w) = 0 \Leftrightarrow w \in A' \Leftrightarrow w \notin A$. وهذا يدل على أن X يمثل x_A .

وبالتالي كل متغير عشوائي X بمجموعة قيمه $\{0,1\}$ يمثل دالة حدث والعكس صحيح.
مثال (3، ق):

ألقينا حجر نرد مرتين، وليكن X المتغير الدال على أكبر الوجهين الحاصلين و Z المتغير الدال على أصغر الوجهين الحاصلين. عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X . ودالة الكثافة الاحتمالية لـ Z ثم دالة توزيع X ودالة توزيع Z .
الحل: لدينا مجموعة نقاط العينة:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

إن مجموعة قيم X : $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$

إن مجموعة قيم Z : $R_Z = \{1,2,3,4,5,6\}$

ولحساب الاحتمالات الموافقة نأخذ مثلاً:

$$P[X = 2] = P\{(1,2), (2,1), (2,2)\} = \frac{3}{36}$$

$$P[Z = 2] = P\{(2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6), (6,2)\} = \frac{9}{36}$$

وبالتالي فجدول الكثافة الاحتمالية لـ X يكون من الشكل:

X	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

وجدول الكثافة الاحتمالية لـ Z يكون من الشكل:

Z	1	2	3	4	5	6
$f_Z(z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

ودالة توزيع X تكون من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{25}{36} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \leq +\infty \end{cases}$$

ودالة توزيع Z تكون من الشكل:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq z < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \leq z < 2 \\ \frac{20}{36} & 2 \leq z < 3 \\ \frac{27}{36} & 3 \leq z < 4 \\ \frac{32}{36} & 4 \leq z < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \leq z < 6 \\ 1 & 6 \leq z \leq +\infty \end{cases}$$

3. 7: دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لتغير عشوائي مستمر:

نقول عن الدالة الموجبة $f: R \rightarrow R +$ إنها دالة كثافة احتمالية لتغير X إذا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

ومن أجل f دالة كثافة احتمالية لـ X نعرف دالة التوزيع الاحتمالي لـ X بـ:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad ; \quad x \in R$$

3.7.1: نتائج وملاحظات:

(1) في هذه الحالة نجد:

$$F(x^+) = F(x^-) = F(x) = P[X \leq x] = P[X < x]$$

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b] = F(b) - F(a) \quad (2)$$

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

(4) إذا كانت A مجموعة قیوسة من R فإن:

$$P[X \in A] = \int_A f(x) dx$$

(5) إذا كانت $F_X(x)$ دالة التوزيع الاحتمالي لـ X (المستمر):

فإنه حسب لبتز نجد: $F'_X(x) = f_X(x)$ من أجل كل نقطة x يكون عندها f مستمراً.

مثال (3،4):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & x \geq 0; \quad (\lambda \text{ ثابت موجب تماماً}) \\ 0 & \text{خلاف ذلك (أي } x < 0) \end{cases}$$

1 - عین λ لكي تكون $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X .

2 - عین دالة التوزيع الاحتمالي لـ X ، واحسب $F(2.5)$.

الحل:

1 - إن الدالة $f_X(x)$ هي دالة موزعة، ولكي تصبح كثافة احتمالية فعلية يجب أن يتحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \lambda e^{-x} dx = 1 \Leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda [-e^{-x}]_0^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^{\alpha} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [e^{-\alpha} - e^0] = \frac{-1}{\lambda} \Leftrightarrow -1 = \frac{-1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ومنه كثافة X الاحتمالية تصبح من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2 - دالة التوزيع:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}; x \geq 0$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$F(2.5) = 1 - e^{-(2.5)} = 0.92$$

مثال (5,3):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2}; a \in R; a > 0; -\infty < x < +\infty$$

عَيِّن دالة التوزيع الاحتمالي لـ X واحسب $P(-a < x < a)$ حيث $a = 1$

الحل:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{a}{\pi} \int_{\beta}^x \frac{du}{a^2 + u^2} = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{a} \right) \left[\arctg \frac{u}{a} \right]_{\beta}^x$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctg \frac{x}{a} - \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \arctg(\beta) \right] = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{a} - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{a} + \frac{1}{2}$$

$$P(-a < X < a) = F(a) - F(-a)$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} \arctg \frac{a}{a} + \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{1}{\pi} \arctg \left(-\frac{a}{a} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctg(1) + \frac{1}{\pi} \arctg(1) = \frac{2}{\pi} \arctg(1) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0.5$$

مثال (6.3):

لتكن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X معطاة بالشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq -a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) & ; -a < x < a \\ 1 & ; x \geq a \end{cases} \quad ; a > 0$$

عَيِّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X . عَيِّن

الحل:

$$P\left[-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right] = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\frac{a}{2}}{a}\right) \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{-\frac{a}{2}}{a}\right) \right] \quad (1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} = 0.33$$

(2) دالة الكثافة:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} \right]' = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad ; \quad -a < x < a$$

ومنه:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & ; \quad -a < x < a \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (7,3):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

احسب $F_X(x)$ ثم احسب $F(0.8)$ ، $F(1.5)$.
الحل:

من أجل $x < 0$ فإن $F_X(x) = 0$
ومن أجل $0 \leq x < 1$ فإن:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

ومن أجل $1 \leq x < 2$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^x \frac{1}{2} dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} t \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

ومن أجل $x \geq 2$ فإن $F_X(x) = 0$ ومنه:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & ; 1 \leq x < 2 \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

وبالتالي:

$$F(0.8) = \frac{(0.8)^2}{2} = 0.32$$

$$F(1.5) = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

مثال (3،8):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

عَيِّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك، ثم عَيِّن C من أجل

$$P[X \leq C] = \frac{1}{2}$$

الحل:

إن دالة الكثافة:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \left[\frac{x}{1+x} \right]' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} ; x > 0$$

ومنه:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & ; x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث إن الدالة موجبة و:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^{\infty} = - \left[\frac{1}{\infty} - 1 \right] = 1$$

ومن أجل:

$$P[X \leq c] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{1+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = 1+c \Rightarrow c=1$$

3. 8: تمارين غير محلولة:

(1) أراد شخص إرسال ثلاث رسائل إلى أصدقائه، كتب الرسائل وعنون الظروف ونسي أن يضع كل رسالة في الظرف المخصص لها، فجاء ابنه ووضع عشوائياً كل رسالة في ظرف، وأرسلها بالبريد. والمطلوب:

1 - عيّن فضاء العينة.
2 - إذا كان X المتغير الدال على عدد الذين استلموا رسائلهم بالذات، عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة توزيعه الاحتمالية.

3 - احسب: $P[0 \leq X \leq 2]$

(2) إذا علمت أن الطلب اليومي على مادة معينة من مخزن يمثل متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة الاحتمالية التالية:

X	0	1	2	3	4	5	6	> 6
$f_X(x)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.1	0.05	0

والمطلوب:

- 1 - عيّن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .
- 2 - احسب $P(X < 2)$ و $P(X \geq 4)$.
- 3 - من أجل أي قيمة لـ X يمكن أن نكتب $P(X < x) = 0.7$.
- 4 - من أجل أي قيمة لـ X يمكن أن نكتب $P(X \geq x) = 0.3$.
- (3) صنعت قطعة نقود بحيث يكون $P(H) = \frac{3}{4}$ و $P(T) = \frac{1}{4}$ ، ألقيت هذه القطعة ثلاث مرات، وليكن X المتغير الدال على عدد الصور المتتالية الحاصلة. عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة توزيعه الاحتمالية واحسب: $P(0 < X \leq 2)$ و $P(X) > 1$.

4) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x-2)^3 & ; x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل $f_X(x)$ يمثل كثافة احتمالية فعلية لـ X .

5) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{9} & ; x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل $f_X(x)$ يمثل كثافة احتمالية فعلية.

6) ليكن T متغيراً عشوائياً يدل على زمن المخاطرة الهاتفية في المدينة، ولنفرض أن له دالة الكثافة:

$$f_T(t) = \begin{cases} a.e^{-\frac{5t}{6}} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases} \quad (a \text{ ثابت موجب تماماً})$$

1 - عيّن قيمة الثابت a كي تصبح الدالة $f_T(t)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ T .

2 - عيّن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي T .

3 - احسب: $P(3 < T < 6)$ ، واحسب: $P(T > 3)$

7) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة:

$$f_X(x) = \begin{cases} k.x^2 & ; x \in [0,3] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1 - عيّن الثابت k حتى تكون الدالة $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X .

2 - عيّن دالة التوزيع الاحتمالية لـ X . واحسب $P[0.5 < X < 2.5]$.

8) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cos x & ; a > 0; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1 - عيّن a كي تصبح الدالة $f_X(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية فعلية لـ X .

2 - عيّن دالة التوزيع الاحتمالي لـ X . ثم احسب $P[0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}]$.

9) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X ، وعيّن $P[X > 10]$ ؟

10) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية على الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 7.7 \\ 10(x - 7.7) & ; 7.7 \leq x < 8.1 \\ 40(8.2 - x) & ; 8.1 \leq x < 8.2 \\ 0 & ; x \geq 8.2 \end{cases}$$

احسب : $P[8.0 < X < \infty]$ ؟

الفصل الرابع

دراسة المتجهات العشوائية

4-1: تعريف المتجه العشوائي: ليكن (Ω, F, P) فضاءاً احتمالياً، وليكن $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ دالة من Ω في R^k أي $X: \Omega \rightarrow R^k$ وليكن W_k صف الحالات من R^k و R_k جبر بوريل الذي يولده W_k في R^k أي أن:

$$w \in W_k \Leftrightarrow I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$$

$$[X \in w] = [(X_1, X_2, \dots, X_k) \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k]$$

$$= [X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \dots, X_k \in I_k]$$

$$= \bigcap_{i=1}^k [X_i \in I_i]$$

وإذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall w \in W_k : [X \in w] \in F$$

تقول عندئذ عن X إنه شعاع عشوائي في R^k .
في الحالة الخاصة: $k=1$ يكون $X: \Omega \rightarrow R$ وهو كما رأينا يدعى متغير عشوائي في R .

4-2: مبرهنة (4-1):

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالياً ولتكن الدالة $X: \Omega \rightarrow R$. عندئذ إن الشرط اللازم والكافي ليكون X شعاعاً عشوائياً هو أن تكون مركباته $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ متغيرات عشوائية.

الإثبات: ستثبت هذه المبرهنة من أجل $K=2$ والتعميم يكون بالتدريج بالنمط /

نفسه.

لزوم الشرط: نفترض أن $X = (X_1, X_2)$ شعاع عشوائي وليكن I مجالاً من R ولتأخذ $W = I \times R$ مجالاً من R^2 وبالتالي:

$$F \ni [X \in w] = [X_1 \in I, X_2 \in R]$$

$$= [X_1 \in I] \cap [X_2 \in R] = [X_1 \in I] \cap \Omega = [X_1 \in I]$$

ومنه الصورة العكسية لأي مجال من R وفق X_1 هي عنصر من F وبالتالي X_1 متغير عشوائي.

وإذا أخذنا $W = R \times I$ مجالاً من R^2 فإن:

$$[X_2 \in I] \in F \Leftarrow [X_1 \in R] \cap [X_2 \in I] \in F \Leftarrow [X \in W] \in F$$

أي أن X_2 متغير عشوائي.

كفاية الشرط: بفرض أن X_1, X_2 متغيرات عشوائية، وليكن I_1, I_2 مجالين في R عندئذ:

(حيث F جبر تام مغلق بالنسبة للتقاطع)

$$[X_1 \in I_1, X_2 \in I_2] = [X_1 \in I_1] \cap [X_2 \in I_2] \in F$$

(حيث $[X_1 \in I_1] \in F$ و $[X_2 \in I_2] \in F$ لأنها متغيرات عشوائية).

ومنه X هو شعاع عشوائي.

3-4: مبرهنة (2-4): ليكن X شعاعاً عشوائياً في R^k و $f: R^k \rightarrow a^m$ دالة

مستمرة عندئذ foX هو شعاع عشوائي في R^m .

وفي الحالة الخاصة عندما يكون $m=1$ يكون foX متغيراً عشوائياً.

البرهان: لدينا $\Omega \xrightarrow{X} a^k \xrightarrow{f} R^m$ فلنكن foX شعاعاً عشوائياً، علينا

أن نثبت أن الصورة العكسية لكل مجال $W \in R^m$ وفق foX هي "حدث" وكون:

$(foX)^{-1}(W) = X^{-1}(f^{-1}(W))$ وبما أن f مستمر فإن $f^{-1}(W)$ فتكون اجتماعاً مطلوباً لمجالات في R^k ، والصورة العكسية لكل من هذه المجالات وفقاً لـ X هي $X^{-1}(f^{-1}(W))$ ومنه $X^{-1}(f^{-1}(W))$ هي اجتماع هذه الصورة العكسية وبالتالي فهي من F (كون أن F جبر تام مغلق بالنسبة للاتحاد المحدود). ومنه $X^{-1}(f^{-1}(W))$ هو عنصر من F أي foX يمثل شعاعاً عشوائياً.

4-4: نتائج: (1) لنأخذ $X: \Omega \rightarrow R$ متغيراً عشوائياً و $f: R \rightarrow R$ دالة مستمرة معرفة كما يلي: $f(X(w)) = X(w) + a$ حيث a ثابت، فحسب المبرهنة (2-4) يكون foX متغيراً، أي أن إضافة ثابت لقيم متغير عشوائي يقيه متغيراً عشوائياً.

$$\Omega \xrightarrow{X \text{ متغير عشوائي}} R \xrightarrow{F \text{ مستمر}} R: X^n(w) \quad (2)$$

أي أن رفع متغير عشوائي لقوة n يقيه متغيراً عشوائياً.

$$\Omega \xrightarrow{X \text{ شعاع عشوائي}} R^k \xrightarrow{F \text{ مستمر}} X_1(w) + X_2(w) + \dots + X_k(w) \quad (3)$$

فهذا يعني أن مجموع متغيرات عشوائية هو متغير عشوائي.

وينتج من ذلك أيضاً ضرب متغير عشوائي بثابت يقيه متغيراً عشوائياً.

4-5: مبرهنة (3-4): قللون الشعاع العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي وليكن $X: \Omega \rightarrow R^k$ شعاعاً عشوائياً. ولنأخذ

$B_X = \{B: B \subseteq R^k; [X \in B] \in F\}$ ، ثم لنأخذ الدالة $P_X: B_X \rightarrow R$ المعرفة

كما يلي: $P_X(B) = P[X \in B]$ $\forall B \in B_X$ عندئذ الثلاثية (R^k, B_X, P_X) تمثل

فضاء احتمالي. وهذا الفضاء يدعى بقانون الشعاع العشوائي X .

الإثبات: كي تكون الثلاثية (R^k, B_X, P_X) فضاء احتمالي، يجب أن نبرهن أن

B_X هو جبر تام على R^k و P_X هو قياس احتمالي على B_X يحقق شروط كولموغوروف ومنه لنثبت أولاً أن B_X هو جبر تام:

(1) إن $\Omega = [X \in R^k]$ و Ω من F فهذا يعني حسب تعريف B_X أن R^k من B_X .

(2) من أجل أي B من B_X لدينا $[X \in B] \in F$ وكون F جبر تام فإن التسم $[X \in B]^c$ من F ، وحسب خواص الصورة العكسية تكون:

$$[X \in B]^c = [X \in B^c] \in F \text{ وحسب تعريف } B_X \text{ ينتج أن } B^c \text{ من } B_X.$$

(3) من أجل أي متتالية معدودة من العناصر من B_X أي $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots \in B_X$ فإن $[X \in B_i]_{i \in \mathbb{N}} \in F$ وكون F جبر تام (فهو مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود) عندئذ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [X \in B_i] \in F$ وحسب خواص الصورة العكسية:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [X \in B_i] = [X \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i] \in F$$

وعندئذ حسب تعريف B_X يكون $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in B_X$

ومنه إن B_X يحوي الكلية R^k ومغلقة بالنسبة للمتمة ومغلق بالنسبة للاتحاد المعدود. فهذا يعني أن B_X هو جبر تام على R^k .
ولتثبت الآن أن P_X يحقق شروط كولموغوروف:

$$(1) \forall B \in B_X : P_X(B) = P[X \in B] \geq 0 \text{ لأن } P \text{ قياس احتمالي.}$$

$$(2) P_X(R^k) = P[X \in R^k] = P(\Omega) = 1$$

(3) من أجل متتالية معدودة من المجموعات المنفصلة متت متت من B_X ولتكن:

$B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ نأخذ:

(حسب خواص الصورة العكسية)

$$P_X\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = P\left[X \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right] = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [X \in B_i]\right)$$

وبما أن $(B_i)_{i \geq 1}$ متنافية متنى متنى عندئذ الصور العكسية $[X \in B_i]_{i \geq 1}$ تكون متنافية متنى متنى ومنه:

$$P_X \left(\bigcup_{i \geq 1} B_i \right) = \sum_{i \geq 1} P[X \in B_i] = \sum_{i \geq 1} P_X(B_i)$$

ومن P_X يحقق شروط كولموغوروف.

4-6: دراسة الشعاع العشوائي المنفصل في R^2 : ليكن $Z=(X,Y)$ شعاعاً عشوائياً في R^2 منفصلاً (منقطعاً) قيمة (x_i, y_i) حيث $i = 1, 2, \dots$ حيث إن قيم X الفعلية تكون من بين القيم x_i وقيم Y الفعلية تكون من بين القيم y_i ونكتب: $h(x_i, y_i) = P[X = x_i, Y = y_i]$; $i, j = 1, 2, \dots$ والتي تمثل دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (X, Y) ونرمز لها بـ $h(x, y)$ وإذا كلنت $f_X(x_i)$ و $f_Y(y_j)$ تدل على كثافة X وكثافة Y على الترتيب.

حيث $f_X(x_i) = P[X = x_i]$ و $f_Y(y_j) = P[Y = y_j]$. فبمعرفتنا لـ $h(x_i, y_j)$ يمكننا معرفة $f_X(x_i)$ و $f_Y(y_j)$ حيث بسهولة نجد أن:

$$f_X(x_i) = \sum_j h(x_i, y_j); f_Y(y_j) = \sum_i h(x_i, y_j)$$

ولكن العكس غير صحيح لأننا نستخدم بالكثافات الشرطية بشكل عام. نسمي الكثافات $f_X(x_i)$ و $f_Y(y_j)$ والمستنتجة من $h(x_i, y_j)$ الكثافات الأمثلة حيث من أجل $R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots\}; R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ يمكننا وصف الكثافة المشتركة والكثافات الهامشية للشعاع المنقطع (X, Y) بالشكل التالي:

X \ y	x ₁	x ₂		x _i		f _Y (y _j)
y ₁	h(x ₁ ,y ₁)	h(x ₂ ,y ₁)	...	h(x _i ,y ₁)	...	f _Y (y ₁)
y ₂	h(x ₁ ,y ₂)	h(x ₂ ,y ₂)		h(x _i ,y ₂)	...	f _Y (y ₂)
			...		...	
y _j	h(x ₁ ,y _j)	h(x ₂ ,y _j)		h(x _i ,y _j)	...	f _Y (y _j)
			...		...	
f _X (x _i)	f _X (x ₁)	f _X (x ₂)		f _X (x _i)		المجموع

وإن الكثافة المشتركة تحقق كما هو واضح الشروط التالية:

$$1) \forall x \in R_X, y \in R_Y : 1 \geq h(x, y) \geq 0$$

$$2) \sum_x \sum_y h(x, y) = 1$$

$$3) P[(X, Y) \in A] = \sum_{(x, y) \in A} h(x, y) : (R^2 \text{ من جزئية من } R^2)$$

4-6-1: الكثافة الشرطية: ليكن $Z=(X, Y)$ شعاعاً عشوائياً كثافته

المشتركة $h(x, y) = P[X=x, Y=y]$ ولتكن $f_X(x)$ ، $f_Y(y)$ الكثافات الهامشية لـ X ولـ Y على الترتيب.

فإننا نعرف الكثافة الشرطية لـ Y مشروطاً بـ X بـ

$$f_{Y|X}(y/x) = P[Y=y/X=x] = \frac{P[X=x, Y=y]}{P[X=x]} = \frac{h(x, y)}{f_X(x)}$$

وكذلك نعرف الكثافة الشرطية لـ X مشروطاً بـ Y :

$$f_{X/Y}(x/y) = P[X=x/Y=y] = \frac{P[X=x, Y=y]}{P[Y=y]} = \frac{h(x,y)}{f_Y(y)}$$

وإذا كان:

$$\forall x \in R_X : \frac{h(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y) \Leftrightarrow P[Y=y/X=x] = P[Y=y]$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R_X : h(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

فإننا نقول عن المتغيرين Y, X إنهما مستقلان عشوائياً.

مثال (1-4): ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية المشتركة

التالية:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21}; x=1,2,3; y=1,2$$

عين الكثافات الهامشية لـ X و لـ Y :

الحل:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_{y=1}^2 \frac{x+y}{21} = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21}; x=1,2,3$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y) = \sum_{x=1}^3 \frac{x+y}{21}$$

$$= \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21} = \frac{6+3y}{21} = \frac{2+y}{7}; y=1,2$$

وبلاحظ أن:

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=1}^3 \frac{2x+3}{21} = 1; \sum_y f_Y(y) = \sum_{y=1}^2 \frac{2+y}{7} = 1$$

أي تحققان خواص الكثافة الاحتمالية.

مثال (2-4):

لتكن $f(x,y)$ الكثافة الاحتمالية المشتركة للشعاع العشوائي (X,Y) :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30}; x=1,2,3; y=1,2$$

عين الكثافات الهامشية $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ ثم أوجد العلاقة بين $f(x,y)$ و $f_Y(y)$ ؛ $f_X(x)$ وماذا نستنتج؟

الحل:

لدينا:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y) = \sum_{y=1}^2 \frac{xy^2}{30} = \frac{x}{30} + \frac{4x}{30} = \frac{5x}{30} = \frac{x}{6}, x=1,2,3$$

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^3 f(x,y) = \sum_{x=1}^3 \frac{xy^2}{30} = \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{y^2}{5}, y=1,2$$

ونلاحظ أنه من أجل $x=1, 2, 3$ و $y=1, 2$ يكون

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow (X,Y) \text{ مستقلان عشوائيا}$$

مثال (3-4):

ليكن (X,Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{13}; (x,y) = (1,1), (1,2), (2,2)$$

عين كثافة X وكثافة Y ماذا تستنتج؟

الحل: إن كثافة X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_y f(x,y); x=1 \\ \sum_y f(x,y); x=2 \end{cases} \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{(1)(1)}{13} + \frac{(1)(2)^2}{13}; x=1 \\ \frac{(2)(2)^2}{13}; x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{13}; x=1 \\ \frac{8}{13}; x=2 \end{cases}$$

كثافة Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_x f(x,y); y=1 \\ \sum_x f(x,y); y=2 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{(1)(1)}{13} = \frac{1}{13}; y=1 \\ \frac{(1)(2)^2}{13} + \frac{(2)(2)^2}{13} = \frac{12}{13}; y=2 \end{cases}$$

ونلاحظ أن:

$$f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ من أجل } x=1, 2, y=1, 2.$$

وبالتالي X, Y غير مستقلة (مرتبطة).

مثال (4-4):

وزعنا أربع كرات متميزة على صندوقين وليكن X المتغير الدال على عدد الصناديق الخالية و Y المتغير الدال على عدد الكرات في الصندوق j حيث j=1, 2. عين الكثافة المشتركة للشعاع (Y₁, X) وكذلك الكثافة المشتركة للشعاع (Y₁, Y₂)

ثم استنتج منها الكثافات الهامشية ثم احسب الكثافة الشرطية $f(Y_1 = 2/Y_2 = 2)$ والكثافة الشرطية $f(X = 1/Y_1 = 0)$.

الحل:

لدينا: مجموعة قيم $X: R_X = \{1, 2\}$

مجموعة قيم $Y_j: R_{Y_j} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $j=1, 2$

لتعين أولاً جدول الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (Y_1, X) :

حيث أولاً نلاحظ أن نقاط العينة الناتجة من توزيع أربع كرات متميزة a, b,

c, d على صندوقين هي كما يلي: حيث: $|\Omega| = n^n = 2^4 = 16$

النتيجة	صندوق (1)	صندوق (2)	النتيجة	صندوق (1)	صندوق (2)
1	abcd	-	9	b	acd
2	-	abcd	10	a	bcd
3	abc	d	11	Ab	cd
4	abd	c	12	Ac	bd
5	acd	b	13	Ad	bc
6	bcd	a	14	Bc	ad
7	d	abc	15	Bd	ac
8	c	abd	16	Cd	ab

X \ Y	0	1	2	3	4	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{14}{16}$
$f_Y(y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

⇒

		X			
		1		2	
F _X (x)		$\frac{2}{16}$		$\frac{4}{16}$	

		0	1	2	3	4
F _{Y1} (y)		$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

والكثافة المشتركة لـ (Y_1, Y_2) :

Y ₂ \ Y ₁	0	1	2	3	4	f _{y₂} (y)
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	0	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
2	0	0	$\frac{6}{16}$	0	0	$\frac{6}{16}$
3	0	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
f _{y₂} (y)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

والكثافة الهامشية هي كما وجدناها أعلاه.

ولحساب الكثافات الشرطية:

$$f(Y_1 = 2 / Y_2 = 2) = \frac{P[Y_1 = 2, Y_2 = 2]}{P[Y_2 = 2]} = \frac{\frac{6}{16}}{\frac{6}{16}} = 1$$

$$f(X = 1 / Y_1 = 0) = \frac{P[X = 1, Y_1 = 0]}{P[Y_1 = 0]} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} = 1$$

4-7: تصميم: يمكن تصميم الكثافة الاحتمالية لمتغيرين عشوائيين إلى الكثافة المشتركة لـ n متغير عشوائي حيث تعرف بالشكل:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n]$$

ويمكن استنتاج الكثافات الهامشية بالأسلوب نفسه الذي رأينا من أجل متغيرين عشوائيين:

$$f_{X_k}(x_k) = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \dots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n); x_k \in R_{X_k}$$

وتكون المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة عشوائيا إذا تحقق:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n);$$

$$x_1 \in R_{X_1}, x_2 \in R_{X_2}, \dots, x_n \in R_{X_n}$$

ويمكن استنتاج الكثافة الهامشية لـ (X_j, X_k) بالشكل:
(حيث نجمع على الأدلة المعالفة)

$$f_{X_j, X_k}(x_j, x_k) = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} \dots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \dots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

وهكذا من أجل كثافة لشعاع بثلاثة مركبات.

مثال (4-5):

ليكن لدينا مجتمعا من 200 طالب أُلهموا امتحان مقرر التفاضل حيث كان من بينهم 40 طالبا حصلوا على المعدل A و 60 طالبا حصلوا على المعدل B و 70 حصلوا على المعدل C و 20 حصلوا على المعدل D و 10 طلاب حصلوا على المعدل F. اخترنا عشوائيا عينة من 25 طالبا من بين 200 طالب وبدون إعادة. وليكن X_1 المتغير الدال على عدد الطلاب الذين حصلوا على المعدل A و X_2 المتغير الدال على

عدد الطلاب الذين حصلوا على المعدل B و X_3 المتغير الدال على عدد الطلاب الذين حصلوا على المعدل C، و X_4 المتغير الدال على عدد الطلاب الذين حصلوا على المعدل D و $(25 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4)$ المتغير الدال على عدد الطلاب الذين حصلوا على المعدل F. الفضاء R المؤلف من (X_1, X_2, X_3, X_4) معرف بالرابعية من الأعداد الموجبة (x_1, x_2, x_3, x_4) بحيث تحقق $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25$ والكثافة المشتركة لـ (X_1, X_2, X_3, X_4) .

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\binom{40}{x_1} \binom{60}{x_2} \binom{70}{x_3} \binom{20}{x_4} \binom{10}{25 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4}}{\binom{200}{25}}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R$$

والكثافة الهامشية لـ X_3 :

$$f_{X_3}(x_3) = \frac{\binom{70}{x_3} \binom{130}{25 - x_3}}{\binom{200}{25}}; x_3 = 0, 1, 2, \dots, 25$$

والكثافة الهامشية لـ (X_1, X_2) تكون:

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \frac{\binom{40}{x_1} \binom{60}{x_2} \binom{100}{25 - x_1 - x_2}}{\binom{200}{25}}; x_1 + x_2 = 0, 1, 2, \dots, 25$$

وبلاحظ بسهولة أن:

$$f_{(X_1, X_2, X_3, X_4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) f_{X_4}(x_4)$$

أي أن المتغيرات غير مستقلة عشوائيا بل مرتبطة عشوائيا.

8-4: المتغيرات العشوائية المستقلة:

4-8-1: تعريف: ليكن X متغيرا عشوائيا على (Ω, F, P) ، وليكن R_1 حيز بوريل على R . إن كل حدث $[X \in R_1]$ حيث $B \in R_1$ يدعى حدثا معرفا بـ X . وليكن $F_X = \{[X \in B]; B \in R_1\}$ صف الأحداث المعرفة بـ X وسبق وبرهنا ذلك أنه حيز تام.

4-8-2: تعريف: ليكن X, Y متغيرين عشوائيين. نقول عن المتغيرين العشوائيين X, Y إنهما مستقلان إذا كان حيزا الأحداث F_X, F_Y المعرفان بـ X, Y على الترتيب مستقلين أي:

$$\forall B_1, B_2 \in R_1 : P[X \in B_1, Y \in B_2] = P[X \in B_1] \cdot P[Y \in B_2]$$

ومن أجل متغيرين منفصلين:

$$\forall x_i \in R_X, y_j \in R_Y : P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i] P[Y = y_j]$$

$$\Leftrightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

4-8-3: حالة الكثافة لمجموع متغيرين منفصلين: لتكن $h(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين المستقلين X, Y . عندئذ يمكننا أن نعين كثافة المتغير $Z = X + Y$ وذلك بأخذ المجموعة: $\{X = x_i, Y = y_j; Z_k = x_i + y_j\}$ والكثافة:

$$\begin{aligned} f_Z(Z_k) &= P\left[\bigcup_{Z_k} [X = x_i, Y = y_j]\right] = P[Z = Z_k] \\ &= \sum_{Z_k} P[X = x_i, Y = y_j] = \sum_{Z_k} h(x_i, y_j) = \sum_{x_i} h(x_i, z_k - x_i) \end{aligned}$$

وكون X, Y مستقلين فإن كثافة المجموع تصبح من الشكل:

$$f_Z(Z_K) = \sum_{x_i} f_X(x_i) \cdot f_Y(z_k - x_i)$$

مثال (6،4):

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ من أجل

$i = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$ وليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته $f_Y(j) = \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu}$ حيث

$j = 0, 1, 2, \dots, \mu > 0$ وإذا كان X, Y مستقلين عشوائياً فعين كثافة $Z = X + Y$ ؟

الحل:

$$P[X + Y = K] = \sum_{i=0}^K P[X = i, Y = K - i] \quad (i+j=k: \text{حيث})$$

وكون (X, Y) مستقلين عشوائياً:

$$P[X + Y = K] = \sum_{i=0}^K P[X = i] \cdot P[Y = K - i]$$

$$= \sum_{i=0}^K \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{K-i}}{(K-i)!} e^{-\mu}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^K \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \cdot \mu^{k-i}$$

$$= \frac{(\lambda + \mu)^K}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

ونلاحظ أن هذه الكثافة هي من نفس نوع كثافة X وكثافة Y ولكن بالوسيط $(\lambda + \mu)$ وهو مجموع الوسطاء.

4-9: التوزيعات المشتركة للمتغيرات العشوائية وخاصة الاستقلال:

4-9-1: تعريف: إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين، فإن دالة التوزيع

الاحتمالي المشترك لهما تعرف بـ $F_{(X,Y)}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]; x, y \in R$

4-9-2: قاعدة دالة التوزيع المشتركة وخواصها:

(1) يسمح بحساب احتمالات من الشكل:

$$P[a < X \leq b, C < Y \leq d] = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

(2) من أجل دالة توزيع مشتركة و $F_X(x)$ دالة توزيع هامشية لـ X و $F_Y(y)$ دالة توزيع هامشية لـ Y ، والكثافات الهامشية لـ X : $f_X(x)$ ولـ Y : $f_Y(y)$ يكون:

$$F_X(x) = F(x, +\infty); F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

ومن أجل دالة الكثافة المشتركة لـ (X,Y) يكون:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) dv du$$

(3) يمكننا بسهولة أن نستنتج حساب الاحتمال في (1):

$$P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$$

(4) ومن أجل أي مجموعة بوريلية A في المستوى، فإن:

$$P[(x,y) \in A] = \iint_A f(x,y) dx dy$$

وإذا كانت A تمثل المستوي بأكمله فيكون:

$$P[(x, y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy = 1$$

(5) يمكننا استنتاج التوزيعات الهامشية من دالة التوزيع المشتركة إذا لاحظنا:

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^x f(u, y) dy \right] du$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^y f(x, v) dx \right] dv$$

وحسب ليبتز نشق فنجد:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

(6) كون:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv \Rightarrow f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

(7) وإذا كان X, Y متغيرين مستقلين، وبأخذ:

$$P[a < X \leq b, c < Y \leq d] = P[a < X \leq b] \cdot P[c < Y \leq d]$$

وبأخذ: $d=y, b=x, c=a=-\infty$ فتصبح العلاقة السابقة من الشكل:

$$P[-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y] = P[-\infty < X \leq x].P[-\infty < Y \leq y]$$

$$\Leftrightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$$

ومن الخاصة التالية:

$$(X,Y \text{ مستقلان عشوائيا}) \Leftrightarrow F(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$$

4-9-3: مبرهنة (4-4):

ليكن (X,Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة $f(x,y)$ ودالة توزيعه المشتركة $F(x,y)$ والكثافات الهامشية $f(x), f(y)$ ودوال التوزيع الهامشية $F(x), F(y)$. عندئذ الشرط اللازم والكافي ليكون X, Y مستقلين عشوائيا هو أن تكون $f(x,y) = f(x).f(y)$.

الإثبات:

اعتمادا على الخاصة (7) من (4-9-2) يكفي أن نبرهن أن:

$$f(x,y) = f(x).f(y) \Leftrightarrow F(x,y) = F(x).F(y)$$

وسنبرهن ذلك في حالة متغيرات مستمرة، حيث برهان ذلك من أجل متغيرات منفصلة يكفي أن نستبدل $\sum$ بـ $\int$.

لزوم الشرط: نفترض أن X, Y مستقلان عندئذ $F(x,y) = F(x).F(y)$ وبالتالي:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 [F(x).F(y)]}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} F(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} F(y) = f(x).f(y)$$

كفاية الشرط:

نفترض أن $f(x,y) = f(x).f(y)$ ومنه:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u) \cdot f_Y(v) du dv$$

$$= \int_{-\infty}^x f_X(u) du \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

4-9-4: دالة الكثافة لمجموع متغيرين عشوائيين مستمرين:

لنفترض أن X, Y متغيران عشوائيان كثافتهما المشتركة f وليكن Z تابعاً في Y, X حيث $Z = X + Y$ ولنبحث عن كثافة Z . لأجل ذلك نأخذ المجموعة:

$$A_z = \{(x, y) : x + y \leq z\}$$

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right] dx$$

وبأخذ التغير $Z = V \Leftrightarrow Z - x = V - x \Leftrightarrow y = V - x$ عندئذ:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(x, v-x) dv \right] dx = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v-x) dx \right] dv$$

حسب ليبنتز نشتق بالنسبة لـ Z ، فينتج:

$$f_Z(z) = F'_Z(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, Z-x) dx$$

وفي حالة كون Y, X مستقلان عشوائياً نصبح الكثافة من الشكل:

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(x+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx; Z \in R$$

مثال (4-7):

ليكن متغيرا عشوائيا كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وليكن Y متغيرا عشوائيا كثافته:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & ; y > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنفترض أن X, Y مستقلان عشوائيا، عين كثافة Z=X+Y ثم تحقق من أن الحاصل هو كثافة احتمالية فعلية.

الحل: حسب (4-9-4) لدينا:

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x} \cdot 3e^{-3(z-x)} dx$$

$$= 6e^{-3z} \int_0^z e^x dx, \begin{cases} x > 0; y > 0 \Rightarrow Z = x+y > 0 \\ Z = x+y > 0 \Rightarrow Z-x = y > 0 \Rightarrow Z > x \end{cases} \text{ حيث:}$$

$$f_Z(Z) = 6e^{-3Z} [e^x]_0^Z = 6e^{-3Z} [e^Z - 1] = 6(e^{-2Z} - e^{-3Z}); Z > 0$$

وللتحقق من أنها كثافة احتمالية فعلية:

$$f_z(z)dz = \int_0^{\infty} 6(e^{-2z} - e^{-3z})dz = 6\left[\frac{e^{-2z}}{-2} - \frac{e^{-3z}}{-3}\right]_0^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{6}{6}[3e^{-2z} - 2e^{-3z}]_0^{\infty} = -\lim_{z \rightarrow \infty}[(3e^{-2z} - 2e^{-3z}) - (3e^0 - 2e^0)]$$

$$= -(-1) = 1$$

4-9-5: تعميم على الأشعة العشوائية في R^n :

إذا كان X شعاعاً عشوائياً في R^n فإننا نعرف دالة توزيعية بـ:

$$F_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n]$$

ودالة كثافته الاحتمالية المشتركة تعرف بـ:

$$f_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

ويكون بالتالي:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

والتوزيع الهامشي لـ X_i : $i=1, 2, \dots, n$ يكون من الشكل:

$$F_{X_i}(x_i) = F(\infty, \infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ونقول عن المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ إنها مستقلة عشوائياً إذا كان:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

أو إذا كان:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

مثال (4-8):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً، دالة كثافته المشتركة:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} + xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) عين $f_{Y/X}(y/x)$

$$P\left[Y > \frac{1}{2} / \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx\right] \quad (2) \text{ احسب}$$

الحل:

(1) إن الكثافة الشرطية تعطى بالشكل التالي:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

لذلك نحسب الكثافة الهامشية لـ X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{4} + xy\right) dy = \frac{3}{4} + \frac{x}{2}; 0 < x < 1$$

ومنهُ:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{\frac{3}{4} + xy}{\frac{3}{4} + \frac{x}{2}} = \begin{cases} \frac{3+4xy}{3+2x}; & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(2)

$$P[Y > 1/2 | 1/2 < X < 1/2 + dx] = \int_{1/2}^{\infty} f\left(\frac{y}{1/2}\right) dy = \int_{1/2}^1 \frac{3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)y}{3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)} dy$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{3 + 2y}{4} dy = \frac{9}{16} = 0.526$$

مثال (9-4):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالجدول التالي:

X	0	1
$F_X(x)$	1/3	2/3

وليكن Y متغيراً عشوائياً مستقلاً عن X ودالة كثافته الاحتمالية معرفة

بالجدول:

Y	0	1	2
$F_Y(y)$	1/4	1/2	1/4

والمطلوب:

(1) عين دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (X, Y) .(2) عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Z = X + Y$.

الحل:

(1) بما أن X, Y متغيران مستقلان عشوائياً فإن $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$	$\frac{8}{12}$
$f_Y(y)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{16}$	1

(2) لتعيين كثافة $Z=X+Y$ نلاحظ أولاً أن مجموعة قيم Z من الشكل:

$$R_Z = \{0, 1, 2, 3\}$$

والاحتمالات الموافقة لهذه القيم نحسبها كما يلي:

$$P[Z = 0] = P[X = 0, Y = 0] = \frac{1}{12}$$

$$P[Z = 1] = P[X = 0, Y = 1] + P[X = 1, Y = 0] = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \frac{4}{12}$$

$$P[Z = 2] = P[X = 0, Y = 2] + P[X = 1, Y = 1] = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P[Z = 3] = P[X = 1, Y = 2] = \frac{2}{12}$$

وبالتالي كثافة Z توصف بالجدول التالي:

Z	0	1	2	3
$f_Z(z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$

$$\sum_{z=0}^3 f_Z(z) = 1 \text{ واضح تماماً أن:}$$

مثال (4-10):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً، دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة بالشكل:

$$f_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

برهن أن X, Y مستقلان عشوائياً.

البرهان: لنحسب الكثافات الحدية:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^1 dy = 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_0^1 dx = 1$$

ومنه نجد أن:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x, y) = 1 = f(x, y)$$

أي أن X, Y مستقلان عشوائياً.

مثال (4-11):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 360xy^2(1-x-y); & x \geq 0; y \leq 1; 0 \leq x+y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

عَيِّن الكثافة الهامشية لـ Y والكثافة الهامشية لـ X .
الحل: لدينا:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 360y^2 \int_0^{1-y} [x(1-y) - x^2] dx$$

$$= 360y^2 \left\{ [(1-y) \cdot \frac{x^2}{2}]_0^{1-y} - [\frac{x^3}{3}]_0^{1-y} \right\} = 60y^2(1-y)^3$$

ومنه:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 60y^2(1-y)^3; & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبالنسبة لكثافة X بالأسلوب السابق نفسه ينتج:

$$f_X(x) = \begin{cases} 30x(1-x)^4; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

مثال (4-12):

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين لهما الكثافة المشتركة:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{210}, & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب:

(1) عين دوال التوزيع الاحتمالية الهامشية ودوال الكثافات الاحتمالية الهامشية.

(2) احسب $P[3 < X < 4, Y > 2]$, ثم احسب $P[X > 3]$.

(3) احسب $P[X+Y > 4]$.

(4) عين دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة.

(5) هل المتغيرات X, Y مستقلة عشوائيا.

الحل:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv \quad (1)$$

$$= \int_2^x \int_0^5 \frac{2u+v}{210} du dv = \frac{2x^2 + 5x - 18}{84}, 2 \leq x \leq 6$$

ومنه دالة التوزيع $F_X(x)$ توصف بالشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x < 2 \\ \frac{2x^2 + 5x - 18}{84}; & 2 \leq x < 6 \\ 1; & x \geq 6 \end{cases}$$

وكذلك:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_2^6 \int_0^y \frac{2u+v}{210} du dv$$

$$= \begin{cases} 0; & y < 0 \\ \frac{y^2 + 16y}{105}; & 0 \leq y < 5 \\ 1; & y \geq 5 \end{cases}$$

وكتافة X:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{4x+5}{84}; & 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وكتافة Y:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+16}{105}; & 0 < y \leq 5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(2)

$$P[3 < X < 4, Y > 2] = \frac{1}{210} \int_3^4 \int_2^5 (2x+y) dy dx = \frac{3}{20}$$

$$P[X > 3] = \frac{1}{210} \int_3^6 \int_0^5 (2x+y) dy dx = \frac{23}{28}$$

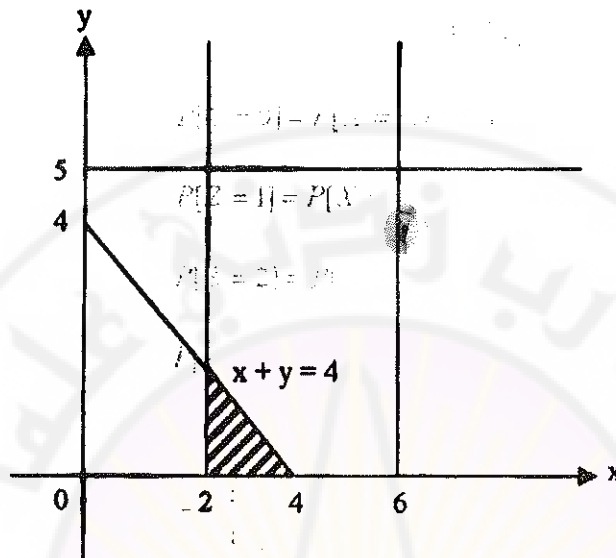
(3)

$$P[X+Y > 4] = \iint_D f(x,y) dx dy$$

حيث: $D = \{(x,y) : x+y > 4\}$

$$P[X+Y > 4] = 1 - P[X+Y \leq 4]$$

$$= 1 - \frac{1}{210} \int_2^4 \int_0^{4-x} (2x+y) dx dy = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}$$



(4) دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_2^x \int_0^y \frac{2u+v}{210} dv du$$

$$= \frac{1}{210} \int_2^x \left[2uv + \frac{v^2}{2} \right]_0^y du = \frac{1}{210} \int_2^x \left(2uy + \frac{y^2}{2} \right) du$$

$$= \frac{1}{210} \left[u^2 y + \frac{y^2 u}{2} \right]_2^x = \frac{1}{210} \left[yx^2 + \frac{y^2 x}{2} - 4y - y^2 \right]$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_2^4 \frac{2x+y}{210} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(x^2 - 4)y + (\frac{x}{2} - 1)y^2}{210}; & 2 \leq x < 6, 0 \leq y < 5 \\ 0; & x < 2, y < 0 \\ 1; & x \geq 6, y \geq 5 \end{cases} \quad (5) \text{ ملاحظة:}$$

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \left(\frac{2x^2 + 5x - 18}{84} \right) \cdot \left(\frac{y^2 + 16y}{105} \right)$$

$$\neq \frac{(x^2 - 4)y + (\frac{x}{2} - 1)y^2}{210} = F(x, y)$$

ومنه X, Y متغيران عشوائيان غير مستقلين.

مثال (4-13):

ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = e^{-x-y}; \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

$$A = \{(x, y) : 0 < x < \infty; \quad 0 < y < \frac{x}{3}\}$$

ولتكن

$$P[(X, Y) \in A] \text{ احسب}$$

الحل:

$$P[(X, Y) \in A] = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{x}{3}} e^{-x-y} dy dx = \int_0^{\infty} e^{-x} [-e^{-y}]_0^{\frac{x}{3}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} [e^{-x} - e^{-\frac{4x}{3}}] dx = [-e^{-x} + \frac{3}{4} e^{-\frac{4x}{3}}]_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

4-10: تمارين غير محلولة:

1) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً منقطعاً كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} C(2x + y); & x = 0.1, 2; y = 0.1, 2, 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1) عين قيمة الثابت C من أجل أن تكون $f(x, y)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ (X, Y) .

2) احسب $P[X \geq 1, Y \leq 2]$

3) احسب $P[X=2, Y=1]$

4) احسب $f(y/x=2)$ ، ثم احسب $f(x/y=3)$

2) وزعنا ثلاث كرات متمايزة على ثلاثة صناديق. وليكن N المتغير الدال على عدد الصناديق غير الخالية (المشغولة)، و X_i عدد كرات الصندوق i . عين جدول الكثافة المشتركة للشعاع (X_1, N) و جدول الكثافة المشتركة للشعاع (X_1, X_2) ثم استنتج منها الكثافات الهامشية لـ N, X_1, X_2 . ثم احسب $f(N=3/X_1=1)$ واحسب $f(X_1=2/X_2=1)$

3) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته $f_X(i) = q^i P$ حيث $P+q=1$ و $P>0$ و $q>0$. وليكن Y متغيراً عشوائياً دالة كثافته $f_Y(j) = q^j P$ بالشروط السابقة نفسها، وحيث $i, j = 0, 1, 2, \dots$. عين كثافة المتغير $Z = X + Y$ ، علماً بأن X, Y مستقلان عشوائياً.

4) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Cx^2(8-y); & x < y < 2x; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين قيمة الثابت C لتكون $f(x, y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة فعلية لـ

(X, Y)

(2) عين الكثافات الاحتمالية الهامشية لـ X ولـ Y ؟

(3) احسب $f_{Y/X}(y/x), f_{X/Y}(x/y)$

(5) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5} \left(\frac{x+y}{x^3} \right); & 1 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$(1) \text{ عين } P \left[0 < Y < \frac{1}{2} \middle| X = 2 \right]$$

(2) عين قيمة الثابت A والتي من أجلها تتحقق العلاقة:

$$P \left[0 < Y < \frac{1}{2} \middle| X > A \right] = \frac{5}{16}$$

(6) ليكن X متغيرا عشوائيا كثافته من الشكل:

$$f_X(x) = \binom{n_1}{x} P^x q^{n_1-x}; x = 0, 1, 2, \dots, n_1; P + q = 1; P > 0; q > 0$$

وليكن Y متغيرا عشوائيا مستقلا عن X وكثافته من الشكل:

$$f_Y(y) = \binom{n_2}{y} P^y q^{n_2-y}; y = 0, 1, 2, \dots, n_2; P + q = 1; P > 0; q > 0$$

عين كثافة المتغير $Z = X + Y$ وماذا تستنتج؟

(7) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا، كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8}; & 0 \leq x, y \leq 2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

(1) هل Y, X مستقلان؟

(2) احسب $P(|X - Y| > 1)$.

(8) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy; & 0 < x < 4; 1 < y < 5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

(1) عين قيمة الثابت C حتى يكون $f(x, y)$ كثافة احتمالية فعلية (X, Y) .

(2) احسب $P[1 < X < 2, 2 < Y < 3]$.

(3) احسب $P[X \geq 3, Y \leq 2]$.

(4) عين دوال التوزيع الهامشية $F_Y(y), F_X(x)$.

(5) عين دوال الكثافة الهامشية $f_Y(y), f_X(x)$.

(6) هل X, Y مستقلان عشوائيا.

(7) احسب $P(X+Y < 3)$ واحسب $P(X+Y > 3)$.

(9) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا، دالة كثافته المشتركة من الشكل:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}; \quad x \in R; y \in R$$

(1) احسب دالة التوزيع المشتركة $F(x, y)$.

(2) احسب: $P[0 < X < 1, 0 < Y < 1]$.

(10) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا، كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{54}; & x = 1, 2, 3, 4. \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

برهن أن $f_{X,Y}(x, y)$ يمثل دالة كثافة احتمالية مشتركة فعلية واحسب $f_Y(y), f_X(x)$.

(11) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا، كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} e^{-x(y+1)^2}; & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

برهن أن $f_{(X,Y)}(x,y)$ تمثل كثافة احتمالية مشتركة فعلية لـ (X,Y) .
ثم عين $f_Y(y)$, $f_X(x)$.

(12) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x > 0; \lambda > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وليكن Y متغيراً عشوائياً مستقلاً عن X وله الكثافة الاحتمالية:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}; & y > 0; \lambda > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Z = X + Y$ وتحقق من ذلك.

(13) إذا كانت دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y, X معطاة بالشكل التالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy; & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_{X/Y}\left(\frac{x}{y}\right), f_{Y/X}\left(\frac{y}{x}\right), f_Y(y), f_X(x)$$

عين:

(14) ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً له الكثافة المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}; & 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) برهن أن $f(x,y)$ تمثل كثافة احتمالية مشتركة فعلية لـ (X,Y) .

(2) لنكـن: $A = \{(x,y) : 0 < x < 1; \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$ عـ

$$P[(X,Y) \in A]$$

$$(3) \text{ احسب } f_{X/Y}\left(\frac{x}{y}\right), f_Y(y), f_X(x)$$

$$(4) \text{ احسب } P\left[\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3}\right]$$

5) هل X, Y متغيران مستقلان عشوائيا.
 15) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} & : a_1 < x < b_1; \quad a_2 < y < b_2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الكثافة الهامشية لـ X والكثافة الهامشية لـ Y وعين دوال التوزيع الهامشية لـ X ولـ Y ؟

16) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 1)}; x \in R, y \in R$$

هل X, Y مستقلان عشوائيا.

17) إذا كان (X, Y) شعاعا عشوائيا له دالة الكثافة:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2; & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وإذا كانت $A_1 = \{(x, y) : \frac{1}{2} < x < y < 1\}$

وكانت $A_2 = \{(x, y) : x < y < 1; 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$

عين $P[A_1 \cup A_2]$ واحسب الكثافات الهامشية لـ X ولـ Y ثم احسب

$$P\left[0 < X < \frac{1}{2} \middle/ Y = \frac{3}{4}\right] \quad \text{وأخيرا احسب} \quad f_{X/Y}\left(\frac{x}{y}\right)$$

18) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6-x-y}{8}; & 0 < x < 2; 2 < y < 4 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

- (1) عين $f_{Y/X}(y/x)$ ، $f_X(x)$.
(2) احسب $P[2 < Y < 3/X=1]$.

الفصل الخامس

دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

5-1: الانتقال بمتغير عشوائي منفصل:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً بمجموعة قيمه $\{R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ وله الكثافة الاحتمالية $f_X(x) = P[X=x]$ ونعرف المتغير Y بالشكل التالي: $Y=U(X)$ حيث $X=U^{-1}(Y)$ وبشكل أن كل قيمة لـ Y تقابلها قيمة وحيدة لـ X . عندئذ المتغير Y يكون منفصلاً ومجموعة قيمه $\{R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ ومرتبطة مع قيم X بالعلاقة $y_n = U(x_n)$ وبحيث يكون:

$$P[Y=y_n] = P[U(X)=y_n] = P[X=U^{-1}(y_n)]$$

مثال (5-1):

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة احتماله معطاة بالجدول:

X	1	2
$P[X=x]$	0.2	0.8

عين دالة الاحتمال للمتغير $Y=X^2+1$.

الحل:

نلاحظ أن مجموعة قيم Y هي $\{2, 5\}$ ودالة الاحتمال تكون كما في الجدول التالي:

Y	2	5
$P[Y=y]$	0.2	0.8

5-2: ملاحظة: إذا كان للدالة $Y=U(X)$ قيم متساوية فيما بينها، عندئذ يكفي أخذ الاحتمال الموافق لإحدى القيم المتساوية فقط، على أن يكون هذا مساوياً لمجموع الاحتمالات الموافقة لقيم X التي أعطت القيم المتساوية لـ Y .

مثال (2-5):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية الموصوفة بالجدول التالي:

X	1-	2-	3-	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

عين جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = |X|$.

الحل:

نلاحظ أن القيم الممكنة لـ Y هي: $R_Y = \{1, 2, 3\}$

$$\left. \begin{aligned} P[Y=1] &= P[X=-1] + P[X=1] = \frac{2}{6} \\ P[Y=2] &= P[X=-2] + P[X=2] = \frac{2}{6} \\ P[Y=3] &= P[X=-3] + P[X=3] = \frac{2}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Y	1	2	3
$P[Y=y]$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

مثال (3-5):

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً جدول كثافته الاحتمالية معطى بالشكل:

X	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	0.15	0.20	0.20	0.15	0.30

عين جدول كثافة المتغير $Y = (X-2)^2$.

الحل:

X	0	1	2	3	4
$P[X=x]$	0.15	0.20	0.20	0.15	0.30
$Y=(X-2)^2$	4	1	0	1	4
$P[Y=y]$	0.15	0.20	0.20	0.15	0.30

وبالتالي $R_Y = \{0, 1, 4\}$

وجداول الكثافة الاحتمالية سينتج من:

$$P[Y = 0] = 0.20$$

$$P[Y = 1] = P[X = 1] + P[X = 4] = 0.20 + 0.15 = 0.35$$

$$P[Y = 4] = P[X = 0] + P[X = 4] = 0.15 + 0.30 = 0.45$$

ومنه:

Y	0	1	4
P[Y=y]	0.20	0.35	0.45

مثال (4-5):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y=4X$.

الحل:

$$g_Y(y) = P[Y = y] = P[4x = y] = P[x = \frac{y}{4}]$$

$$= \frac{\mu^{y/4}}{(\frac{y}{4})!} e^{-\mu}; y = 0, 4, 8, \dots$$

3-5: الانتقال بمتغير عشوائي مستمر:

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً له الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ وليكن

$Y=U(X)$ متغيراً معطى بدلالة X وبشكل أن كل قيمة لـ Y تقابلها قيمة وحيدة X ، عندئذ يكون Y متغيراً مستمراً وكثافته تتعين من العلاقة:

$$f_Y(y) = f_X[U^{-1}(y)] \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

ولإثبات ذلك نبدأ أولاً من أجل U^{-1} دالة متزايدة، فتكون $(U^{-1}(y))' > 0$ وبالتالي $(U^{-1}(y))' = \left| (U^{-1}(y))' \right|$ ومنه:

$$\int_{-\infty}^y f_Y(V) dV = P[Y \leq y] = P[U(X) \leq y] = P[X \leq U^{-1}(y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{U^{-1}(y)} f_X(u) du$$

وباشتقاق طرفي هذه المساواة (حسب ليبتز) بالنسبة لـ y نحصل على كثافة Y :

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) (U^{-1}(y))' = f_X(U^{-1}(y)) \left| (U^{-1}(y))' \right|$$

ومن أجل U^{-1} دالة متناقصة، يكون عندئذ:

$$\int_{-\infty}^y f_Y(V) dV = P[Y \leq y] = P[U(X) \leq y] = P[X \geq U^{-1}(y)]$$

$$= 1 - P[X \leq U^{-1}(y)] = 1 - \int_{-\infty}^{U^{-1}(y)} f_X(u) du$$

وباشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ Y نحصل على:

$$f_Y(y) = -f_X(U^{-1}(y)) (U^{-1}(y))' = f_X(U^{-1}(y)) [-(U^{-1}(y))']$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \left| (U^{-1}(y))' \right|; \quad (U^{-1}(y))' = X'_y \quad (\text{حيث:})$$

مثال (5-5):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = -2\ln X$

الحل:

$$Y = -2 \ln X \Rightarrow \ln X = -\frac{Y}{2} \Rightarrow X = e^{-\frac{Y}{2}}$$

$$A = \{x: 0 < x < 1\} \Rightarrow B = \{y: 0 < y < \infty\}$$

$$(U^{-1}(y))' = X'_y = -\frac{1}{2} e^{-\frac{Y}{2}}$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) |X'_y| = 1 \times \frac{1}{2} e^{-\frac{Y}{2}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{Y}{2}}}{2}; & 0 < y < \infty \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (5-6):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x); & 0 < x < 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) عين دالة كثافة $Y = X^3$.

(2) عين كثافة $Y = 2X + 1$.

الحل:

(1) إن دالة التوزيع تعطى بالشكل.

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^3 \leq y] = P[X \leq y^{\frac{1}{3}}]$$

$$= \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 6x(1-x)dx = 3y^{\frac{2}{3}} - 2y; \quad 0 < y < 1$$

وبما أن دالة الكثافة هي مشتق دالة التوزيع:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2(y^{\frac{-1}{3}} - 1); & 0 < y < 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$(2) \text{ إن: } Y = 2X + 1; \quad 0 < X < 1 \Rightarrow Y = 2X + 1; \quad 1 < y < 3$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) |X'_y|; \quad X = \frac{Y-1}{2}; \quad X'_y = \frac{1}{2}$$

$$= \left[6 \left(\frac{y-1}{2} \right) \left(1 - \frac{y-1}{2} \right) \right] \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{-3y^2}{4} + 3y - \frac{3}{2}; & 1 < y < 3 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (7-5):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < x < \infty; \sigma > 0$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = X^3$.

$$Y = X^3 \Rightarrow X = Y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow X'_y = \frac{1}{3Y^{\frac{2}{3}}}$$

الحل: إن:

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) |X'_Y| = \frac{1}{3\sigma y^3 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-y^3}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < y < \infty$$

4-5: حالات خاصة في التقال المتغيرات العشوائية:

(1) إذا كان X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(x)$ وليكن $Y=bX$ حيث $b>0$ فإن

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f\left(\frac{y}{b}\right) \text{ تعطى بالشكل:}$$

(2) إذا كان $Y=aX+b$ حيث $a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ فإن كثافة Y

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

(3) وإذا كان $Y=X^2$ فإن كثافة Y كما يلي:

$$\int_{-\infty}^y f_Y(y) dy = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(u) du - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(u) du$$

وبالاشتقاق في طرفي المساواة السابقة بالنسبة لـ y ينتج:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

مثال (5-8):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty$$

عين كثافة $Y=X^2$.

الحل:

لدينا:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$
$$= \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}; & 0 < y < \infty \\ 0; & y \leq 0 \end{cases}$$

مثال (5-9):

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & x \in [-1, 1] \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة $Y = X^2$.

الحل: لدينا:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}; & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

5-5: الانتقال بشعاع عشوائي منفصل:

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً منفصلاً له الكثافة الاحتمالية المشتركة

حيث: $f_{(X,Y)}(x,y)$

$$y \in R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \text{ و } x \in R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

$$\text{و } f(x,y) = P[X=x, Y=y]$$

ولنفترض أن هناك متغيرين عشوائيين منفصلين معرفين بدلالة المتغيرين Y, X

بالعلاقات التالية: $P_1(X, Y)$ و $P_2(X, Y)$ بحيث أن كل قيمة (u, v) —

(U, V) يقابلها قيمة وحيدة (x, y) لـ (X, Y) وبالعكس. أي أنه يمكننا كتابة Y, X بالشكل: $Y = \omega_2(u, v)$; $X = \omega_1(u, v)$ عندئذ كثافة الشعاع العشوائي المنفصل (U, V) تعطى بالعلاقة:

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}[\omega_1(u, v), \omega_2(u, v)]$$

ومجموعة القيم:

$$(u_i, v_j) = [\Psi_1(x_i, y_j), \Psi_2(x_i, y_j)]$$

$$\mathfrak{R}_U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}; \mathfrak{R}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$$

ويكون:

$$P[U = u_i, V = v_j] = P[X = \omega_1(u_i, v_j), Y = \omega_2(u_i, v_j)]$$

مثال (5-10):

ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا كثافته المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} P_1^x P_2^y (1-P_1-P_2)^{n-x-y}; \begin{cases} x=0,1,2,\dots,n \\ y=0,1,2,\dots,n \\ 0 \leq x+y \leq n \end{cases}$$

$$V = \frac{X}{X+Y}, U = X+Y$$

ونعرف المتغيرين

عن كثافة الشعاع (U, V)

الحل:

لدينا:

$$\begin{cases} U = X+Y \\ V = \frac{X}{X+Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = UV \\ Y = U(1-V) \end{cases}$$

والكثافة المشتركة:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(uv, u(1-v))$$

$$= \frac{n!}{(uv)![(u(1-v))](n-u)!} P_1^{uv} \cdot P_2^{u(1-v)} \cdot (1-P_1-P_2)^{n-u}$$

من أجل: $0 \leq u \leq n$ و $u(1-v) = 0, 1, 2, \dots$, $uv = 0, 1, 2, 3, \dots$

5-6: الانتقال بشعاع مستمر:

ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا مستمرا له دالة الكثافة المشتركة $f_{(X,Y)}(x,y)$

ولنعرف المتغيرات:

$$Y = \Psi_2(U, V), \quad X = \Psi_1(U, V) \quad \text{حيث} \quad V = \phi_2(X, Y), \quad U = \phi_1(X, Y)$$

فيمكننا أن نثبت أن كثافة الشعاع (U, V) تعطى بالشكل:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}[\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v)] \cdot |J| \cdot J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ولإثبات ذلك، نلاحظ أولا أنه عندما يزايد x, y يزايد معه u, v أيضا.

وبالتالي (حسب 1-5):

$$P[u_1 < U < u_2, v_1 < V < v_2] = P[x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2]$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} f_{(U,V)}(u,v) du dv = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy$$

$$y = \Psi_2(u,v), \quad x = \Psi_1(u,v) \quad \text{وكون:}$$

نجد أن:

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} f_{(U,V)}(u,v) du dv = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} f_{(X,Y)}[\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v)] \cdot |J| du dv$$

وبالتالي:

$$f_{(u,v)}(u,v) = f_{(x,y)}[\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v)] \cdot |J|$$

حيث نلاحظ أيضا أن:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}; J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}; |J(u,v)| = \frac{1}{|J(x,y)|}$$

وبالتالي:

$$f_{(u,v)}(u,v) = \begin{cases} f_{(x,y)}[\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v)] \cdot \frac{1}{|J(x,y)|} \\ f_{(x,y)}[\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v)] \cdot |J(u,v)| \end{cases} \quad \text{أو}$$

مثال (11-5):

ليكن (X,Y) شعاعا عشوائيا له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة:

$$f_{(x,y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12}; & 0 < x < 3; 0 < y < 4 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$U = \frac{4X}{3Y}, V = X + Y \quad \text{ولنأخذ المتغيرين}$$

عبر كثافة الشعاع (U,V) ؟

الحل:

نحسب أولا:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3y} & \frac{-4x}{3y^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3y} + \frac{4x}{3y^2} = \frac{4}{3} \left[\frac{y+x}{y^2} \right]$$

$$4V = (3U + 4)Y \Leftrightarrow U = \frac{4}{3} \cdot \frac{V - Y}{Y} \Leftrightarrow V - Y = X \text{ ولدينا من}$$

$$\text{ومنه } Y = \frac{4V}{3U + 4} \text{ وبالتالي:}$$

$$J(x, y) = \frac{4}{3} \left[\frac{y + x}{y^2} \right] = \frac{4}{3} \left[\frac{V}{\left(\frac{4V}{3u + 4} \right)^2} \right] = \frac{(3u + 4)^2}{12V}$$

$$|J(u, V)| = \frac{1}{|J(x, y)|} = \frac{12V}{(3u + 4)^2}$$

حيث:

$$y = \frac{4V}{3u + 4}; 0 < y < 4 \Rightarrow 0 < \frac{4V}{3u + 4} < 4 \Rightarrow 0 < v < 3u + 4$$

$$\overline{x} = v - y = V - \frac{4V}{3u + 4} = \frac{3uV + 4V - 4V}{3u + 4} = \frac{3uV}{3u + 4}; 0 < x < 3 \Rightarrow$$

$$0 < \frac{3uV}{3u + 4} < 3 \Rightarrow 0 < uV < 3u + 4$$

ومنه:

$$f_{(u, V)}(u, V) = f_{(x, y)}[\Psi_1(u, V), \Psi_2(u, V)] |J|$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{12V}{(3u + 4)^2} = \begin{cases} \frac{V}{(3u + 4)^2}; & 0 < V < 3u + 4; 0 < uV < 3u + 4 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (12-5):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً له دالة الكثافة التالية:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}; & x > 0, y > 0 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ المتغيرين $V = \frac{X}{Y}, U = X + Y$. عين كثافة الشعاع (U, V) ؟
الحل:

$$U = X + Y; V = \frac{X}{Y} \Rightarrow X = \frac{UV}{1+V}; Y = \frac{U}{1+V} \quad \text{لدينا:}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{V}{1+V} & \frac{u(1+V) - uV}{(1+V)^2} \\ \frac{1}{1+V} & \frac{-u}{(1+V)^2} \end{vmatrix} = \frac{-u}{(1+V)^2}$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}[\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v)] |J| = \begin{cases} e^{-u} \cdot \frac{u}{(1+V)^2}; & u > 0; uV > 0 \\ 0; & \end{cases}$$

مثال (5-13):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{\theta^{2r} \cdot x^{r-1} \cdot y^{r-1} \cdot e^{-\theta(x+y)}}{[\Gamma(r)]^2}; & 0 < x < \infty; 0 < y < \infty; r > 0 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \quad \theta > 0$$

ولنأخذ المتغيرين $V = \frac{X}{Y}, U = X + Y$. عين كثافة الشعاع (U, V) ؟
الحل:

رأينا من المثال (5-12) أن:

$$X = \frac{UV}{1+V}; Y = \frac{U}{1+V}; |J(u,v)| = \frac{u}{(1+V)^2}; (u > 0; uV > 0)$$

ومنه:

$$f_{(U,V)}(u,V) = |J(u,V)| \cdot f_{(X,Y)}[\Psi_1(u,V), \Psi_2(u,V)]$$

$$= \frac{u}{(1+V)^2} \cdot \frac{\theta^{2r} \left(\frac{uV}{1+V}\right)^{r-1} \left(\frac{u}{1+V}\right)^{r-1} e^{-\theta u}}{[\Gamma(r)]^2}, \quad 0 < u < \infty$$

$$= \begin{cases} \frac{u^{2r-1} \theta^{2r} V^{r-1} e^{-\theta u}}{(1+V)^{2r} [\Gamma(r)]^2}; & 0 < u < \infty; 0 < V < \infty \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

5-7: حالات خاصة:

(1) إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين مستمرين، فلتعبر كثافة $U = X + Y$ ،
نأخذ $U = X + Y$ و $V = X$ وبالتالي:

$$J(u,V) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$f_{(U,V)}(u,V) = f_{(X,Y)}(\Psi_1(u,V), \Psi_2(u,V)) \cdot |J|$$

$$= f_{(X,Y)}(V, u-V) \cdot |-1| = f_{X,Y}(V, u-V)$$

والكثافة الهامشية لـ U : $f_U(u) = \int f_{(X,Y)}(V, u-V) dV$

وإذا كان (X, Y) مستقلين عندئذ: $f_U(u) = \int f_X(V) \cdot f_Y(u-V) dV$

مثال (5-14):

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث X له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1; & x \in [0,1] \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وكثافة Y معرفة كما يلي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}; & y > 0 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $U = X + Y$.

الحل:

من أجل $0 < x \leq 1$:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(u-x) dx = \int_0^u 1 \cdot e^{-(u-x)} dx = e^{-u} [e^x]_0^u = e^{-u} (e^u - 1)$$

$$= 1 - e^{-u}.$$

حيث أنه من أجل $u > x > 0$ يكون $f_Y(u-x) > 0$ وخلاف ذلك يكون

$$f_Y(u-x) = 0$$

من أجل $u > 1$:

$$f_U(u) = \int_0^1 e^{-(u-x)} dx = (e-1)e^{-u}$$

$$f_U(u) = \begin{cases} 0; & u \leq 0 \\ 1 - e^{-u}; & 0 \leq u \leq 1 \\ (e-1)e^{-u}; & u > 1 \end{cases}$$

مثال (5-15):

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين منفصلين لكل منهما الكثافة الاحتمالية التالية:

$$P(z) = \begin{cases} P(1-p)^z; & z = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة $W = X + Y$.

الحل:

نجد أولاً أن $W = 0, 1, 2, \dots$

$$P_w(w) = \sum_{u=0}^w f_X(u) \cdot f_Y(w-u) = \sum_{u=0}^w f_X(u) f_Y(w-u) = \sum_{u=0}^w p^2 (1-p)^w$$

$$= (w+1)p^2(1-p)^w$$

(2) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستمرين، ولنبحث عن كثافة $U = XY$.

فمن أجل ذلك نأخذ $U = XY$ و $V = X$ ومنه فالتحويل العكسي:

$$Y = \frac{U}{V}, X = V$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{V} & -\frac{u}{V^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{V} \Rightarrow |J| = \left| \frac{-1}{V} \right|$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u, v) &= f_{(X,Y)}(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)) |J| \\ &= f_{(X,Y)}\left(v, \frac{u}{v}\right) \left| \frac{-1}{v} \right| \end{aligned}$$

وكثافة U تكون بالتالي:

$$f_U(u) = \int f_{(X,Y)}\left(v, \frac{u}{v}\right) \left| \frac{1}{v} \right| dv$$

مثال (5-16):

ليكن Y, X متغيرين عشوائيين لهما الكثافة المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ $V = XY, U = X$. عين كثافة (U, V) ثم استنتج كثافة V ؟

الحل:

لدينا $A = \{(x, y) : 0 < x < 1; 0 < y < 1\}$ ومنه:

$$E = \{(u, v) : u = x, 0 < V < u < 1; y = \frac{v}{u}\}$$

حيث التحويل العكسي: $Y = \frac{V}{U}, X = U$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{V}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

$$f_{(U,V)}(u, V) = f_{(X,Y)}\left(u, \frac{V}{u}\right) |J| = 4u \cdot \frac{V}{u} \cdot \frac{1}{u} = \begin{cases} 4 \frac{V}{u}; & \begin{cases} 0 < u < 1 \\ 0 < V < u < 1 \end{cases} \\ 0; & \text{ومنه كثافة } V \text{ تكون:} \end{cases}$$

$$f_V(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u, V) du = \int_V^1 4 \frac{V}{u} du = 4V [\ln u]_V^1 = \begin{cases} -4V \ln V; & 0 < V < 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(3) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً. ولنبحث عن كثافة $U = \frac{X}{Y}$

فمن أجل ذلك نأخذ التحويل $V = X, U = \frac{X}{Y}$ والتحويل العكسي:

$Y = \frac{V}{U}, X = V$ ويكون:

$$J(u, V) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{V}{u^2}$$

والكثافة المشتركة:

$$f_{(U,V)}(u, V) = f_{(X,Y)}\left(V, \frac{V}{u}\right) \left| \frac{V}{u^2} \right|$$

ومنه تكون كثافة U من الشكل:

$$f_U(u) = \int f_{(X,Y)}\left(V, \frac{V}{u}\right) \left| \frac{V}{u^2} \right| dV \quad (\text{على حدود } V)$$

مثال (5-17):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x+y}{2}}; & x > 0; y > 0 \\ 0; & \end{cases}$$

إذا كان $U = \frac{X}{Y}$ عين كثافة U .

الحل:

نأخذ التحويل: $V = Y, U = \frac{X}{Y}$ فالتحويل العكسي:

$$Y = V, X = UV$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(uv,v) |J| = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{(u+1)V}{2}}; & u > 0; V > 0 \\ 0; & \end{cases}$$

خلاف ذلك

ومنه كثافة U تكون:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u,V) dV = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} V e^{-\frac{(u+1)V}{2}} dV = \begin{cases} \frac{1}{(u+1)^2}; & u > 0 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

5-8: تمارين غير محلولة:

(1) ليكن X متغيرا عشوائيا منفصلا جدول كثافته الاحتمالية من الشكل:

X	2	3
$P[X=x]$	0.6	0.4

عين جدول كثافة المتغير $Y=X^2$.

(2) ليكن X متغيرا عشوائيا منفصلا جدول كثافته الاحتمالية من الشكل:

X	-2	2	3
$P[X=x]$	0.4	0.5	0.1

عين جدول كثافة المتغير $Y=X^2$.

(3) ليكن X متغيرا عشوائيا منفصلا جدول كثافته الاحتمالية من الشكل:

X	0	1	2	3
$P[X=x]$	0.512	0.384	0.096	0.008

عين جدول كثافة المتغير $Y=200X-75$.

(4) ليكن X متغيرا عشوائيا منفصلا جدول كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3!}{x!(3-x)!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}, & x=0,1,2,3 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Y=X^2$.

(5) ليكن X متغيرا عشوائيا يدل على عدد الصور الحاصلة من تجربة إلقاء أربع

قطع نقود معدنية متماثلة ومتوازنة عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير: $Y = \frac{1}{1+X}$.

(6) ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على إحدى نتائج قذف حجر نرد متسرة واحدة. عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y=2+X^2$.

(7) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2^{-x}; & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y=X^4+1$.

(8) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad -\infty < x < \infty$$

عين كثافة المتغير $Y = \frac{1}{X}$ ، ثم عين دالة التوزيع الاحتمالية لـ Y .

(9) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}; & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وليكن $Z=\cos X$ ؛ $Y=\sin X$.

عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Z .

(10) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; & x > 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Y = e^{-x^2}$.

(11) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}; & 0 \leq x < 2 \\ 1; & x \geq 2 \end{cases}$$

عين دالة توزيع المتغير $Y=X^3$ واحسب $P[Y \leq 3.375]$.

(12) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x); & 0 \leq x \leq 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Y=15X+10$.

(13) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; & x \geq 1 \\ 0; & x < 1 \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Y=e^{-X}$.

(14) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; & 0 \leq x \leq 2 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Y=3X+4$.

15) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

عين كثافة المتغير $Y = X^2$.

16) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث كثافة كل منهما بالشكل

التالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1; & 0 \leq y \leq 1 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ $V = X - Y, U = X + Y$. عين كثافة (U, V) ثم عين الكثافات الهامشية لـ U ولـ V .

17) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين دالة كثافتهما المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{(x+y)}{2}}; & 0 < x < \infty; 0 < y < \infty \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ $V = Y, U = \frac{1}{2}(X - Y)$ عين كثافة (U, V) وكثافة U .

18) عين كثافة المجموع لمتغيرين عشوائيين مستقلين حيث كثافة أحدهما من

الشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty$$

19) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً، دالة كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}; & x \geq 0; y \geq 0 \\ 0; & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

عين كثافة الشعاع $\left(X + Y, \frac{Y}{X}\right)$

(20) ليكن (X, Y) شعاعا عشوائيا، كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{96}; & 0 < x < 4; 1 < y < 5 \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) عين كثافة $U = X + 2Y$.

(2) عين كثافة (U, V) حيث $V = X^2Y, U = XY^2$.

§

الفصل السادس

الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية

6-1: مقدمة:

رأينا أن لكل متغير عشوائي مجتمعاً من القياسات وهو المجتمع الناشئ عن تكرار قياس المتغير العشوائي مرة بعد أخرى، وأن التوزيع الاحتمالي يقدم وصفاً للبنية الداخلية لهذا المجتمع ويمثل التوزيع التكراري النظري له، وكما أن لكل مجموعة من القياسات مقاييس للترعة المركزية ومقاييس للتشتت فكذلك الأمر بالنسبة إلى مجتمع القياسات، لذلك سنقدم تعريفاً لمتوسط مجتمع القياسات ولتباين مجتمع القياسات ونقول متوسط المجتمع أو متوسط التوزيع وكذلك نقول تباين المجتمع أو تباين التوزيع ونقول الانحراف المعياري للتوزيع.

حيث سنستخدم الرمز μ أو $E(X)$ لتوقع المتغير العشوائي X أو (متوسط التوزيع الاحتمالي X) وسنستخدم الرمز σ^2 أو $V(X)$ لتباين المتغير العشوائي X أو تباين التوزيع الاحتمالي لـ X وسنستخدم الرمز σ للانحراف المعياري لـ X أو الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لـ X .

وإن معرفة توقعات وتباينات المتغيرات العشوائية لها نفس أهمية معرفة قانون الاحتمال لـ X ، حيث التوقع والتباين والتغاير والانحراف المعياري والترابط تعد من الوسطاء المهمة في الاحتمال والتي لها دور كبير في الدراسات الإحصائية.

6-2: التوقع الرياضي لمتغير منفصل ولدالة في المتغير المنفصل:

6-2-1: تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته الاحتمالية

$f_X(x)$. عندئذ نعرف توقع X بـ $E(X) = \sum x f_X(x)$ وذلك من أجل كل قيم X الممكنة وذلك بشرط أن تتقارب السلسلة في الطرف الأيمن إطلاقاً وفي حالة كون $\sum |x| f_X(x)$ متباعدة عندئذ لـ X متوقع غير منته وبالتالي $-\infty \leq E(X) \leq \infty$.

وحسب هذا التعريف نلاحظ أن $E(X)$ هو متوسط القيم التي يمكن أن يفترضها هذا المتغير على المدى الطويل أي متوسط مجتمع القياسات الموافقة للمتغير X ، وأيضاً قيمة $E(X)$ تمثل الموقع على المحور OX والتي يتركز حولها التوزيع الاحتمالي لـ X فلذلك سنسميها أيضاً متوسط التوزيع الاحتمالي.

مثال (6-1):

نقذف ثلاث قطع نقدية وليكن X عدد الأوجه H الحاصلة . عين توقع X وفسر الناتج.

الحل:

لدينا كثافة X من الشكل:

X	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \sum_x xP[X=x] = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

وبالتالي $E(X)=1.5$ هي القيمة المتوقعة رياضياً لعدد الأوجه H أي 1.5 هي متوسط التوزيع الاحتمالي لـ X ، أي 1.5 تمثل القيمة المتوسطة لعدد الأوجه H على المدى الطويل (أي متوسط مجتمع القياسات).

بمعنى أننا لو كررنا قذف قطع النقود الثلاث عدداً كبيراً من المرات وسجلنا في كل مرة عدد الأوجه H الحاصلة ثم حسبنا متوسط هذه الأعداد لحصلنا على 1.5.

6-2-2: تعريف التوقع الرياضي لدالة عددية في X :

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً، دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ ، ولتكن $g(X)$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot f_X(x)$$

دالة عددية في X عندئذ شرط تقارب السلسلة في الطرف الأيمن إطلاقاً أي إذا كان لـ $g(X)$ توقعاً رياضياً متنها.

مثال (2-6):

احسب $E(X^2)$ في المثال (1-6).

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = (0)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

مثال (3-6):

ليكن جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير X من الشكل:

X	5	5^2	5^3		5^n	
$P[X=x]$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{1}{3})^3$		$(\frac{1}{3})^n$	

فإن توقع X :

$$E(X) = \sum_x xP[X = x] = 5(\frac{1}{3}) + 5^2 \cdot (\frac{1}{3}) + 5^3 \cdot (\frac{1}{3})^3$$

$$= (\frac{5}{3})^1 + (\frac{5}{3})^2 + (\frac{5}{3})^3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{5}{3})^i$$

وهذا المجموع متباعد لأنه مجموع حدود سلسلة هندسية أساسها أكبر من الواحد وبالتالي ليس لـ X توقع منته.

مثال: (4-6):

ليكن X متغيراً عشوائياً له القانون الاحتمالي التالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)}; & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل لـ X توقع منته؟

الحل:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP[X=x] = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = \infty$$

وبالتالي ليس لـ X توقع رياضي منته.

3-6: التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر وللدوال في هذا المتغير:

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته $f_X(x)$. عندئذ نعرف توقع X —

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

إذا كان التكامل موجوداً (أي $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$) وإلا

فله توقع غير منته أو ليس له توقع.

ويمكن تعميم التوقع هذا من أجل $g(X)$ أي دالة في X .

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

مثال (5-6):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [2, 5] \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع X وتوقع X^2 وتوقع $(X+1)$.

الحل:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^5 \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^5 = \frac{1}{6} [25 - 4] = \frac{21}{6}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{3} \int_2^5 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^5 = \frac{1}{9} [125 - 8] = \frac{117}{9}$$

$$E(X+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)f_X(x)dx = \frac{1}{3} \int_2^5 (x+1)dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^5$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left[\left(\frac{25}{2} + 5 \right) - \left(\frac{4}{2} + 2 \right) \right] \right\} = \frac{1}{3} \left(\frac{35}{2} - 4 \right) = \frac{27}{6}$$

مثال (6-6):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad -\infty < x < \infty$$

عين توقع X .

الحل:

يلاحظ هنا أن:

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{h \rightarrow \infty} [\ln(1+x^2)]_0^h = \infty$$

ومنه ليس لـ X توقع معروف (معين).

4-6: خواص التوقع:

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(x)$ وله توقع موجود $E(X)$.

1-4-6: توقع الثابت هو الثابت نفسه، فمن أجل C ثابت.

$$E(C) = \sum_x C f(x) = C \sum_x f(x) = C$$

2-4-6: من أجل $g(x) = CX$ (حيث C ثابت).

$$E(CX) = \sum_x c x f(x) = C \sum_x x f(x) = C E(X)$$

3-4-6: من أجل $g(X) = \sum_{i=1}^K g_i(X)$ ولكل من $g_i(x)$ توقع موجود

فإن:

$$\begin{aligned}
E(g(x)) &= E\left[\sum_{i=1}^K g_i(X)\right] = \sum_x \left[\sum_{i=1}^K g_i(x)\right] f(x) \\
&= \sum_x [g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_K(x)] f(x) \\
&= \sum_x g_1(x) f(x) + \sum_x g_2(x) f(x) + \sum_x g_3(x) f(x) + \dots + \sum_x g_K(x) f(x) \\
&= E(g_1(x)) + E(g_2(x)) + \dots + E(g_K(x)) = \sum_{i=1}^K E(g_i(x))
\end{aligned}$$

نتيجة:

$$E\left[\sum_{i=1}^n C_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n C_i E(X_i)$$

4-4-6: ليكن X متغيراً عشوائياً له توقع رياضي يكون:
 $|E(X)| \leq E(|X|)$ لأنه في حالة X مستمراً (المبدأ نفسه في حالة X منفصلاً).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \Rightarrow |E(X)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = E(|X|)$$

5-4-6: إذا كان $a \leq X \leq b$ فإن $a \leq E(X) \leq b$ لأن من أجل:

$$a \leq x_i \leq b \Rightarrow a P[X = x_i] \leq x_i P[X = x_i] \leq b P[X = x_i]$$

$$\Rightarrow a \sum_i P[X = x_i] \leq \sum_i x_i P[X = x_i] \leq b \sum_i P[X = x_i]$$

$$\Rightarrow a \leq E(X) \leq b$$

6-4-6: إذا كان $X \geq 0$ فإن $E(X) \geq 0$ تستنتج مباشرة من (5-4-6).

7-4-6: من أجل كون Y, X متغيرين عشوائيين ولكل منهما توقع منه فليذا
 كان $X \leq Y$ فإن $E(X) \leq E(Y)$. حيث أن $X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \geq 0$ ومنه $E(Y - X) \geq 0$
 $E(Y) \geq E(X)$.

6-4-8: إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها

توقع متته عندئذ $\prod_{i=1}^n X_i$ توقع متته وهذا التوقع يعطى بالشكل:

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

من أجل $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ كثافة مشتركة لـ

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 x_2 \dots x_n) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

وكون المتغيرات مستقلة ولكل متغير توقع نفسه:

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f(x_2) dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_n f(x_n) dx_n$$

$$= E(X_1) \cdot E(X_2) \dots E(X_n) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

6-4-9: يمكن أن نتأكد من أن $E(X^2) \neq E(X) \cdot E(X)$

كمثال على ذلك: تجربة إلقاء ثلاث قطع من النقود وليكن X المتغير الدال على

عدد الأوجه H الحاصلة عندئذ:

X	0	1	2	3
P[X=x]	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

رأينا من مثال (6-1) أن:

$$E(X) = 1.5 \text{ ومن المثال (6-2) أن } E(X^2) = 3 \text{ وبالتالي:}$$

$$E(X) \cdot E(X) = (1.5)^2 = 2.25 \neq 3 = E(X^2)$$

6-4-10: إن عكس الخاصة (6-4-8) ليس صحيحاً بشكل عام، أي يمكن

أن يكون $E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$ دون أن يكون X_2, X_1 مستقلين عشوائياً

ومثال على ذلك هو الشعاع العشوائي (X_1, X_2) والذي له جدول الكثافة المشترك

من الشكل:

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$f_{X_2}(x)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	2/4
1	0	1/4	0	1/4
$f_{X_1}(x)$	1/4	2/4	1/4	1

$$E(X_1) = \sum_x xP[X_1 = x]$$

$$= (-1)\left(\frac{1}{4}\right) + (0 \times \frac{2}{4}) + (1)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$E(X_2) = \sum_x xP[X_2 = x] = 0$$

$$E(X_1 X_2) = (-1)(-1)(0) + (-1)(0)\left(\frac{1}{4}\right) + (-1)(1)(0) + (0)(-1)\left(\frac{1}{4}\right) \\ + (0)(0)(0) + (0)(1)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)(-1)(0) + (1)(0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)(1)(0) = 0$$

$$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = 0 \text{ ومنه نلاحظ أن}$$

$$P[X_1 = 0, X_2 = 0] = 0, P[X_1 = 0] = \frac{1}{2}, P[X_2 = 0] = \frac{1}{2} \text{ ولكن:}$$

$$P[X_1 = 0] \cdot P[X_2 = 0] = \frac{1}{4} \neq 0 = P[X_1 = 0, X_2 = 0]$$

وبالتالي X_1, X_2 غير مستقلين.

مثال (6-7):

ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{x}{10}; \quad x=1,2,3,4$$

عين توقع $X(X-5)$.

الحل:

$$E[X(X-5)] = E(X^2) - 5E(X) \text{ حسب خواص التوقع}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^4 x \left(\frac{x}{10}\right) = (1)\left(\frac{1}{10}\right) + (2)\left(\frac{3}{10}\right) + (4)\left(\frac{4}{10}\right) = 3$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^4 x^2 \left(\frac{x}{10}\right) = (1)\left(\frac{1}{10}\right) + (2)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (3)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (4)^2\left(\frac{4}{10}\right) = 10$$

$$E[X(X-5)] = E(X^2) - 5E(X) = 10 - 5(3) = -5$$

11-4-6: إن احتمال أي حدث A من F في الفضاء (Ω, F, P) يمثل توقع

دالة الحدث نفسه وذلك لأن:

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1; & w \in A \\ 0; & w \notin A \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} \chi_A & 1 & 0 \\ P_i & P(A) & 1-P(A) \end{array}$$

$$P(A) = E[\chi_A(w)] \text{ ومنه}$$

5-6: العزوم:

1) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(x)$ ، ليكن $r \geq 1$ عدداً صحيحاً. إذا وجد

لـ X^r توقع فإننا ندعوه بالعزم من المرتبة r ويعطى بالشكل:

$$E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r \cdot f_X(x); & (X \text{ منفصل}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(x) dx; & (X \text{ مستمر}) \end{cases}$$

نلاحظ من أجل $r = 1$ نحصل على التوقع $\mu = E(X)$ ومن أجل $r = 2$ نحصل على العزوم من المرتبة الثانية وهكذا.....

(2) نتيجة: بما أن $|X|^{r-1} \leq |X|^r$ فهذا يعني أنه إذا وجد العزم من المرتبة r فإن العزوم من المرتبة التي هي أصغر من r تكون موجودة.

(3) ليكن X متغيراً عشوائياً له توقع رياضي μ . فنعرّف العزم المركزي من المرتبة $r \geq 1$ حول $\mu \rightarrow E(X - \mu)^r$ ويعطى بـ:

$$E(X - \mu)^r = \begin{cases} \sum_x (x - \mu)^r \cdot f(x); & X \text{ منقطع (منفصل)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^r f(x) dx; & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

مثال (8-6):

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x); & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $E(X)^r$ واستخدم الناتج في تعيين $E(2X+1)^2$.
الحل:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^1 x^r \cdot 2(1-x) dx = 2 \int_0^1 (x^r - x^{r+1}) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^{r+2}}{r+2} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{r+2-r-1}{(r+1)(r+2)} \right) = \frac{2}{r^2 + 3r + 2} \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$E(2X+1)^2 = 4E(X^2) + 4E(X) + E(1)$$

$$= \left[\frac{2}{(2)^2 + 3(2) + 2} \right] + 4 \left(\frac{2}{1+3+2} \right) + 1$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{8}{6} + 1 = \frac{36}{12} = 3$$

6-6: التباين والانحراف المعياري وخواصها:

6-6-1: تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً له عزم من المرتبة الثانية متته فإننا

نعرف تباين X بـ:

$$\sigma_x^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2$$

ومن أجل $E(X) = \mu$ نكتب $V(X) = E(X - \mu)^2$

وهو العزم المركزي من المرتبة الثانية حول μ .

وهو يمثل متوسط مربعات انحرافات القياسات عن متوسطها.

6-6-2: تعريف: نعرف الانحراف المعياري لـ X بأن الجذر التربيعي

الموجب لتباين X أي:

$$\sigma = \sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

6-6-3: يمكننا إيجاد صيغة أبسط لحساب التباين مستفيدين من خواص التوقع

حيث:

$$V(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

أي أن تباين X هو العزم من المرتبة الثانية لـ X مطروحاً منه مربع توقع X .
مثال (6-8):

بالعودة للمثال (6-1) والمثال (6-2) احسب تباين X وانحرافه المعياري؟
 التباين:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} = 0.865$$

4-6-6: تباين العدد الثابت معدوم: لأنه من أجل C ثابت:

$$V(C) = E(C^2) - (E(C))^2 = C^2 - C^2 = 0$$

5-6-6: من أجل X متغير عشوائي و C ثابت فإن: $V(CX) = C^2 V(X)$ لأن:

$$V(CX) = E(CX)^2 - (E(CX))^2 = C^2 E(X^2) - C^2 (E(X))^2$$

$$= C^2 [E(X^2) - (E(X))^2] = C^2 V(X)$$

وينتج من ذلك أن:

$$\sigma_{CX} = |C| \sigma_X$$

6-6-6: نتيجة: من (6-6-4) ومن (6-6-5) نجد أن:

$$V(aX + b) = a^2 V(X); V(X + b) = V(X) \quad *$$

* أي أن تباين X له علاقة بوحدة القياس وليس له علاقة بمبدأ الإحداثيات

من أجل $a, b \in \mathbb{R}$

6-6-7: ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 عندئذ نسمي المتغير:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

المتغير المعياري لـ X ولنبرهن أن توقع هذا المتغير معدوم

وتباينه يساوي الواحد مستخدمين خواص التوقع والتباين وملاحظة μ ثابت.

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} [E(X) - E(\mu)] = \frac{1}{\sigma} (\mu - \mu) = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : V(X) \leq E(X - a)^2 \quad 6-6-8$$

لأن:

$$(X - a)^2 = [(X - E(X)) + (E(X) - a)]^2$$

$$= (X - EX)^2 + 2(X - EX)(EX - a) + (EX - a)^2$$

$$E(X - a)^2 = E(X - EX)^2 + 2(EX - a) \underbrace{E(X - EX)}_{\text{معدوم}} + (EX - a)^2$$

$$E(X - a)^2 = E(X - EX)^2 + \underbrace{(EX - a)^2}_{\text{موجب}} \Rightarrow E(X - a)^2 \geq V(X)$$

6-6-7: المتغيرات وخواصه:

6-6-7-1: تعريف: ليكن X, Y متغيرين عشوائيين، لكل منها توقع متته ولـ

XY توقع متته عندئذ نعرف تغاير (X, Y) بالعلاقة:

$$CoV(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$$

ونرمز له أيضاً بـ σ_{XY} .

6-7-2: صيغة مبسطة لحساب التغاير:

$$CoV(X, Y) = E[XY - XEY - YEX + EXEY]$$

$$= E(XY) - E(X).E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$CoV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y); (E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy \text{ حيث:})$$

نتيجة: إذا كانت X, Y مستقلة عشوائياً فإن $E(XY) = E(X)E(Y)$ وبالتالي:

$$CoV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

6-7-3: إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

لأن:

$$V(X + Y) = E(X + Y - E(X + Y))^2 = E[(X - EX) + (Y - EY)]^2$$

$$= E(X - EX)^2 + E(Y - EY)^2 + 2E(X - EX)(Y - EY)$$

$$= V(X) + V(Y) + 2CoV(X, Y)$$

وكون المتغيرات مستقلة فإن: $CoV(X, Y) = 0$ ومنه

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

6-7-4: يمكن تعميم الخاصة (6-7-3): فمن أجل $X_1, X_2, \dots, X_n$

متغيرات عشوائية لها عزوم من المرتبة الثانية متتالية ومن أجل $C_1, C_2, \dots, C_n$ ثوابت حقيقية سنبرهن أن:

$$V\left(\sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n C_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^n C_i C_j CoV(X_i, X_j)$$

ولإثبات ذلك:

$$V\left(\sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = E\left[\sum_{i=1}^n C_i X_i - \sum_{i=1}^n C_i EX_i\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^n C_i (X_i - EX_i)\right]^2$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^n C_i^2 (X_i - EX_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n C_i C_j (X_i - EX_i)(X_j - EX_j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i^2 E(X_i - EX_i)^2 + 2 \sum_{i < j} C_i C_j E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n C_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} C_i C_j \text{CoV}(X_i - X_j) \quad *$$

نتيجة (1): إذا كانت المتغيرات X_i $i=1,2,3,\dots,n$ مستقلة عشوائياً عندئذٍ التباينات تكون معدومة وتصبح العلاقة (*) من الشكل:

$$V\left(\sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n C_i^2 V(X_i) \quad **$$

نتيجة (2): إذا كان X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 وكانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X (تكرار مستقل للتجربة التي تصف X أي أن X_i $i=1,2,\dots,n$ هي مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة ولها توزيع X نفسه أي لكل X_i التوقع μ نفسه والتباين σ^2 عندئذٍ تباينات $X_1, X_2, \dots, X_n$ متساوية معدومة.

ومن (**) ينتج:

$$V\left(\sum_{i=1}^n C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n C_i^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma^2 = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n C_i^2\right) \quad (\bullet)$$

وإذا كانت $C_i=1$ $\forall i$ فإن $(\bullet)$ تصبح:

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2$$

6-7-5: من العلاقة (*) إذا كانت $C_i = I$ وكانت المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة عشوائياً عندئذ تصبح العلاقة (*) في (6-7-4) من الشكل:

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

أي تبين مجموع متغيرات مستقلة هو مجموع تباينات هذه المتغيرات.
6-7-6: ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X وليكن $\bar{X}$ متوسط هذه العينة أي $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ وباستخدام العلاقة (*) من (6-7-4) نجد:

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^n V(X_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n^2}$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

وكذلك من أجل توقع $\bar{X}$ نجد:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

ومنه متوسط العينة العشوائية $\bar{X}$ له التوقع نفسه μ وله التباين $\frac{\sigma^2}{n}$.

6-7-8: من أجل المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ و $\bar{X}$ متوسطها فإن استخدام العلاقة (*) في (6-7-4) نجد في حالة كون لهذه المتغيرات التوزيع نفسه:

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} V(X_i) + \sum_{i < j} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \text{CoV}(X_i, X_j)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(X_i) + \frac{n(n-1)}{n^2} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= \frac{nV(X_i)}{n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2} \text{CoV}(X_i, X_j)$$

$$= \frac{V(X_i)}{n} + \frac{(n-1)}{n} \text{CoV}(X_i, X_j)$$

6-7-9: التغير له علاقة بوحدة القياس وليس له علاقة بمبدأ الإحداثيات أي

من أجل المتغيرين العشوائيين X, Y والثوابت الحقيقية a, b, c, d فإن:

$$\text{CoV}(aX + b, cY + d) = ac \text{CoV}(X, Y)$$

وإثبات ذلك: باستخدام خواص التوقع نجد:

$$\text{CoV}(aX + b, cY + d) = E\{[aX + b - E(aX + b)][cY + d - E(cY + d)]\}$$

$$= E\{[a(X - EX)c(Y - EY)]\} = acE(X - EX)(Y - EY)$$

$$= ac \text{CoV}(X, Y)$$

6-7-10: متراجحة شوارتز: من أجل X, Y متغيرات عشوائية لها عزوم من

المرتبة الثانية موجودة عندئذ فتتحقق المتراجحة:

$$(EXY)^2 \leq EX^2 \cdot EY^2$$

ولإثبات ذلك نأخذ المقدار $(X+\lambda Y)^2$ ونحسب توقع هذه الكمية الموجبة:

$$E(X + \lambda Y)^2 = E(X^2 + 2X\lambda Y + \lambda^2 Y^2); \quad \lambda \in R$$

$$= EX^2 + 2\lambda EXY + \lambda^2 EY^2$$

$$= (EY^2)\lambda^2 + (2EXY)\lambda + EX^2$$

وهذا ثلاثي حدود غير سالب من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ وبالتالي المميز

$$\Delta \leq 0 \text{ أي: } 4(EXY)^2 - 4EX^2 EY^2 \leq 0 \text{ أي } (EXY)^2 \leq EX^2 EY^2$$

6-8: معامل الارتباط وخواصه:

6-8-1: تعريف: لتكن X, Y متغيرات عشوائية لهما عزوم من المرتبة الثانية

منتهية نعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X, Y بالعلاقة التالية:

$$\rho(X, Y) = \frac{CoV(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

نتيجة: إذا كان المتغيران X, Y مستقلين فإن $\sigma_{XY} = 0$ وبالتالي

$$\rho(X, Y) = 0$$

6-8-2: من تعريف معامل الارتباط نجد أن:

$$\rho(X, X) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1 \quad (\text{ارتباط إيجابي تام})$$

$$\rho(X, -X) = \frac{CoV(X, -X)}{\sigma_X \sigma_{-X}} = \frac{-CoV(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{-\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = -1 \quad (\text{ارتباط عكسي تام})$$

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$$

6-8-3: إن: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

وللتحقق من ذلك نستخدم متراجحة شوارتز في (6-7-10) حيث

$$(EXY)^2 \leq EX^2 EY^2 \text{ وسأخذ بدلاً من } X \text{ المقدار } (X-EX) \text{ وبدلاً من } Y \text{ المقدار } (Y-EY)$$

فنجد من هذه المتراجحة:

$$[E(X - EX)(Y - EY)]^2 \leq E(X - EX)^2 \cdot E(Y - EY)^2$$

$$\Rightarrow \text{CoV}^2(X, Y) \leq V(X) \cdot V(Y) \Rightarrow \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \right]^2 \leq 1$$

$$| \rho(X, Y) | \leq 1 \text{ أي } \left| \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \right| \leq 1$$

$$\text{أي } -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

6-8-4: إن معامل الارتباط مستقل عن واحدة القياس وعن مبدأ الإحداثيات

أي من أجل $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\rho(aX + b, cX + d) = \rho(X, Y)$$

ولإثبات ذلك:

$$\rho(aX + b, cX + d) = \frac{\text{CoV}(aX + b, cY + d)}{\sqrt{V(aX + b)} \cdot \sqrt{V(cY + d)}}$$

وباستخدام (6-7-9) و (6-6-6) نجد أن:

$$\rho(aX + b, cY + d) = \frac{ac \text{CoV}(X, Y)}{a \sqrt{V(X)} \cdot c \sqrt{V(Y)}} = \frac{\text{CoV}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} = \rho(X, Y)$$

6-8-5: الشرط اللازم والكافي ليكون المتغيران العشوائيان X, Y مرتبطين

خطياً هو أن يكون $\rho^2(X, Y) = 1$ فلايثبات ذلك:

لزوم الشرط:

نفرض أن X, Y مرتبطان خطياً بالعلاقة $Y = aX + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ عندئذ:
 $EY = aEX + b$

$$V(Y) = a^2 V(X); \text{Co}V(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

$$= E[(X - EX)(aX + b - aEX - b)]$$

$$= aE(X - EX)^2 = aV(X)$$

ومنه:

$$\rho^2(X, Y) = \frac{\text{Co}V^2(X, Y)}{(\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)})^2} = \frac{a^2 V^2(X)}{a^2 V(X) \cdot V(X)} = 1$$

كفاية الشرط:

إذا كان $\rho^2(X, Y) = 1$ فإنه توجد علاقة خطية بين (X, Y) أي:

$$\rho^2(X, Y) = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2} = 1 \Rightarrow \sigma_{XY}^2 - \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 = 0$$

وهذا يعني أن هناك ثلاثي حدود من الشكل:

$$(*) \quad (\sigma_X^2)t^2 + (2\sigma_{XY})t + \sigma_Y^2 \geq 0 \quad (t \text{ وسيط حقيقي})$$

مميزه معدوم، ونرمز لهذه الحدودية بـ σ_Z^2 حيث:

$$Z = (X - EX)t + (Y - EY)$$

وبالتالي هناك حل t_0 يحقق المعادلة $(*)$ أعلاه أي:

$$\sigma_X^2 t_0^2 + 2\sigma_{XY}t_0 + \sigma_Y^2 = 0$$

$$EZ^2 = E\{[(X - EX)t_0 + (Y - EY)]^2\} = 0 \quad \text{أو}$$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت:

$$(X - EX)t_0 + (Y - EY) = 0$$

$$\Rightarrow Y - EY = -(X - EX)t_0 = -Xt_0 + (EX)t_0$$

$$\Rightarrow Y = (-t_0)X + [(EX)t_0 + EY]$$

وبأخذ $(EX)t_0 + EY = b, -t_0 = a$ عندئذ:

$$Y = aX + b$$

وهي العلاقة الخطية بين Y, X .

مثال (9-6):

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية المشتركة معطاة بالجدول

التالي:

Y \ X	-1	0	1
-2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

عين $\rho(X, Y)$ ، هل X, Y مستقلان عشوائياً؟

الحل: إن:

$$\rho(X, Y) = \frac{CoV(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}}$$

حيث:

$$CoV(X, Y) = EXY - EX \cdot EY; V(X)$$

$$= EX^2 - (EX)^2; V(Y) = EY^2 - (EY)^2$$

وبالتالي لا بد من حساب التوقعات والعزوم من المرتبة الثانية أولاً.

حيث لدينا من الجدول أعلاه:

X	-1	0	1
$f_X(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

Y	-2	0	2
$f_Y(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$EX = \sum_x x f_X(x) = (-1)\left(\frac{4}{10}\right) + (0)\left(\frac{3}{10}\right) + (1)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{-4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{-1}{10}$$

$$EY = \sum_y y f_Y(y) = (-2)\left(\frac{4}{10}\right) + (0)\left(\frac{2}{10}\right) + (2)\left(\frac{4}{10}\right) = 0$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 f_X(x) = (-1)^2\left(\frac{4}{10}\right) + (0)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (1)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

$$EY^2 = \sum_y y^2 f_Y(y) = (-2)^2\left(\frac{4}{10}\right) + (0)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (2)^2\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{32}{10}$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{10} - \left(\frac{-1}{10}\right)^2 = \frac{7}{10} - \frac{1}{100} = \frac{69}{100}$$

$$V(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{32}{10} - 0 = \frac{32}{10}$$

$$\begin{aligned} EXY &= \sum_{x,y} xy f(x,y) = (-1)(-2)\left(\frac{2}{10}\right) + (-1)(0)\left(\frac{1}{10}\right) + (-1)(2)\left(\frac{1}{10}\right) \\ &+ (0)(-2)\left(\frac{1}{10}\right) + (0)(0)(0) + (0)(2)\left(\frac{2}{10}\right) + (1)(-2)\left(\frac{1}{10}\right) + (1)(0)\left(\frac{1}{10}\right) \\ &+ (1)(2)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{10} - \frac{2}{10} - \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{2}{10} \end{aligned}$$

$$CoV(X,Y) = EXY - EXEY = \frac{2}{10} - \left(\frac{-1}{10}\right)(0) = \frac{2}{10}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{CoV(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{2}{10}}{\sqrt{\frac{69}{100}} \sqrt{\frac{32}{10}}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.69} \sqrt{3.2}} = 0.135$$

وبالتالي: $\rho \neq 0$

ومن جهة دراسة الاستقلال نلاحظ أنه هناك ارتباطاً لأن $\rho \neq 0$ ولكن يجب التأكد من ذلك الاستقلال فلنلاحظ مثلاً:

$$P[X = -1, Y = -2] = \frac{2}{10}; P[X = -1] = \frac{4}{10}; P[Y = -2] = \frac{4}{10}$$

$$P[X = -1] \cdot P[Y = -2] = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100} \neq \frac{2}{10} = P[X = -1, Y = -2]$$

ومنه X, Y غير مستقلين عشوائياً.

مثال (10-6):

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y); & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $\rho(X,Y), CoV(X,Y)$

الحل: نعين أولاً:

$$f_X(X) = \int_0^1 6xy(2-x-y)dy = \begin{cases} x(4-3x); & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(Y) = \int_0^1 6xy(2-x-y)dy = \begin{cases} y(4-3y); & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$EX = \int_0^1 x[x(4-3x)]dx = \frac{7}{12}; EY = \int_0^1 y[y(4-3y)]dy = \frac{7}{12}$$

$$VarX = \int_0^1 (x - \frac{7}{12})^2 [x(4-3x)]dx = \frac{43}{720}$$

$$VarY = \int_0^1 (y - \frac{7}{12})^2 [y(4-3y)]dy = \frac{43}{720}$$

$$EXY = \int_0^1 \int_0^1 xy[6xy(2-x-y)]dxdy = \frac{1}{3}$$

$$CoV(X,Y) = EXY - EX.EY = \frac{-1}{144}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{CoV(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\frac{-1}{144}}{\frac{43}{720}} = \frac{-5}{43}$$

مثال (6-11):

لتكن X, Y متغيرات عشوائية مستقلة بتباين $\sigma_Y^2 = 2, \sigma_X^2 = 1$. عين تباين المتغير $Z = 3X - 2Y + 5$

$$V(Z) = V(3X - 2Y + 5) = 9V(X) + 4V(Y) = (9)(1) + (4)(2) = 17$$

6-9: الصفات العددية للأشعة العشوائية: ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً

كثافته المشتركة $f(x, y)$.

6-9-1: تعاريف:

(1) نعرف توقع X بـ:

$$\mu_X = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dxdy \quad \text{أو} \quad \mu_X = \sum_x \sum_y xf(x, y)$$

(2) نعرف توقع Y :-

$$\mu_y = EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy$$

$$\mu_y = \sum_x \sum_y yf(x, y) \quad \text{أو}$$

(3) نعرف تباين X :-

$$V(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x, y) dx dy & \text{أو} \\ \sum_x \sum_y (x - \mu_x)^2 f(x, y) \end{cases}$$

(4) نعرف تباين Y :-

$$V(Y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 f(x, y) dx dy & \text{أو} \\ \sum_x \sum_y (y - \mu_y)^2 f(x, y) \end{cases}$$

(5) نعرف تغاير (X, Y) :-

$$CoV(X, Y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy & \text{أو} \\ \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) \end{cases}$$

(6) وكذلك نعرف توقع XY :-

$$\mu_{xy} = EXY = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy & \text{أو} \\ \sum_x \sum_y xyf(x, y) \end{cases}$$

6-9-2: الصفات الشرطية:

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة $f(x, y)$ والكثافات الهامشية $f_Y(y), f_X(x)$ معلومة وغير معدومة.

(1) نعرف التوقع الشرطي لـ Y علماً بأن X قد وقع مثلاً بـ:

$$E(Y/X = x_i) = \sum_y y p[Y = y/X = x_i] = \sum_y y \frac{f(x_i, y)}{f_X(x_i)}$$

أو

$$E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(Y/X = x) dy$$

والنتيجة هو دالة في x .

وبالمثل نعرف التوقع الشرطي لـ X علماً بأن Y قد وقع فعلاً:

$$E(X/Y = y_i) = \sum_x x p[X = x/Y = y_i] = \sum_x x \frac{f(x, y_i)}{f_Y(y_i)}$$

أو

$$E(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(X/Y = y) dx$$

والنتيجة هو دالة في y .

(2) ونعرف التباين الشرطي:

$$V(Y/X = x) = \begin{cases} \sum_y (y - \mu_1)^2 \cdot f(Y/X = x) & \text{(حيث } \mu_1 \text{ التوقع الشرطي)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_1)^2 \cdot f(Y/X = x) dy & \text{لـ } Y \text{ علماً بأن } X \text{ قد وقع مثلاً} \end{cases}$$

$$V(X/Y = y) = \begin{cases} \sum_x (x - \mu_2)^2 \cdot f(X/Y = y) & \text{(حيث } \mu_2 \text{ التوقع الشرطي)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_2)^2 \cdot f(X/Y = y) dx & \text{لـ } X \text{ علماً بأن } Y \text{ قد وقع مثلاً} \end{cases}$$

(3) ونعرف العزم الشرطي من المرتبة r حيث $1 \leq r$ بالعلاقة:

$$E(Y^r/X=x) = \begin{cases} \sum_y y^r \cdot P[Y=y/X=x] & \text{وهو العزم الشرطي من المرتبة } r \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^r \cdot f(Y/X=x) dy & \text{لـ } Y \text{ علماً بأن } X \text{ قد وقع مثلاً} \end{cases}$$

وبالمثل:

$$E(X^r/Y=y) = \begin{cases} \sum_x x^r \cdot P[X=x/Y=y] \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(X/Y=y) dx \end{cases}$$

(4) يمكننا بسهولة برهان أن توقع التوقع الشرطي لمتغير هو توقع المتغير أي:

$$E[E(X/Y)] = EX \quad \text{أو} \quad E[E(Y/X)] = EY$$

حيث بما أن $E(X/Y)$ هو دالة في y عندئذ:

$$\begin{aligned} E[E(X/Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X/Y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f\left(\frac{x}{y}\right) dx \right] f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx \right] f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = EX \end{aligned}$$

وبالمثل نبرهن في حالة متغيرات منفصلة.

(5) يمكننا ببساطة أن نثبت أن:

$$V(X/Y) = E(X^2/Y) - [E(X/Y)]^2$$

حيث:

$$V(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X/Y})^2 \cdot f(x/y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2x\mu_{X/Y} + \mu_{X/Y}^2) \cdot f(x/y) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x/y) dx - 2\mu_{X/Y} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x/y) dx + \mu_{X/Y}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y) dx$$

وكون $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y) dx = 1$ (كثافة احتمالية) فإن:

$$V(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x/y) dx - 2\mu_{X/Y} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x/y) dx + \mu_{X/Y}^2$$

$$= E(X^2/Y) - 2E(X/Y) \cdot E(X/Y) + [E(X/Y)]^2$$

$$= E(X^2/Y) - 2[E(X/Y)]^2 + [E(X/Y)]^2$$

$$V(X/Y) = E(X^2/Y) - [E(X/Y)]^2$$

وهذا يعني أن التباين الشرطي هو العزم من المرتبة الثانية الشرطي مطروحاً منه

مربع التوقع الشرطي.

مثال (12-6):

لتكن X, Y متغيرات عشوائية لها دالة كثافة احتمالية مشتركة من الشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+2y)}{3}; & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

احسب التباين الشرطي لـ X علماً بأن $Y = \frac{1}{2}$.

الحل:

لنحسب

أولاً $f(x/y)$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{2(x+2y)}{3} dx = \frac{1+4y}{3}; \quad 0 < y < 1$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{2(x+2y)}{3} dy = \frac{2(x+1)}{3}; \quad 0 < x < 1$$

ومنه:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{2(x+2y)}{3}}{\frac{1+4y}{3}} = \frac{2(x+2y)}{1+4y}; \quad 0 < x < 1$$

$$f(x/y = 1/2) = 2(x+2(1/2))/(1+4(1/2)) = 2(x+1)/3; \quad 0 < x < 1$$

$$E(x/y = 1/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x [f(x/y = 1/2)] dx = \int_0^1 x \left[\frac{2}{3}(x+1) \right] dx = \frac{5}{9}$$

$$E(x^2/y = 1/2) = \int_0^1 x^2 \left[\frac{2}{3}(x+1) \right] dx = \frac{7}{18}$$

$$V(x/y = 1/2) = E(x^2/y = 1/2) - [E(x/y = 1/2)]^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}$$

مثال (6-13):

ليكن Y, X متغيرين عشوائيين منفصلين لهما دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{42}; & x=0,1,2,3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

احسب التوقع الشرطي: $V(X/Y=1), E(X/Y=1), E(Y/X=2)$
الحل:

إن الكثافة المشتركة المعطاة توصف بالجدول التالي:

$Y \backslash X$	0	1	2	$f_Y(y)$
0	$\frac{0}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{6}{42}$
1	$\frac{1}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{9}{42}$
2	$\frac{2}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{12}{42}$
3	$\frac{3}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{7}{42}$	$\frac{15}{42}$
$f_X(x)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{22}{42}$	1

X	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{22}{42}$

Y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{9}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{15}{42}$

$$f\left(\frac{y}{X=2}\right) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{f(2,y)}{f_x(2)} = \frac{\frac{4+y}{42}}{\frac{22}{42}} = \frac{4+y}{22}; \quad y=0,1,2,3$$

$$f\left(\frac{X}{y=1}\right) = \frac{f(x,1)}{f_y(1)} = \frac{\frac{2x+1}{42}}{\frac{9}{42}} = \frac{2x+1}{9}; \quad x=0,1,2$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{X=2}\right) &= \sum_y y f\left(\frac{y}{X=2}\right) = 0\left(\frac{4+0}{22}\right) + (1)\left(\frac{4+1}{22}\right) + (2)\left(\frac{4+2}{22}\right) \\ &\quad + (3)\left(\frac{4+3}{22}\right) = \frac{5}{22} + \frac{12}{22} + \frac{21}{22} = \frac{38}{22} = \frac{19}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X}{Y=1}\right) &= \sum_x x f\left(\frac{x}{y=1}\right) = (0)\left(\frac{2(0)+1}{9}\right) + (1)\left(\frac{2(1)+1}{9}\right) + 2\left(\frac{2(2)+1}{9}\right) \\ &= \frac{13}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X^2}{y=1}\right) &= \sum_x x^2 f\left(\frac{x}{y=1}\right) = (0)^2 + \left(\frac{2(0)+1}{9}\right) + (1)^2 \left(\frac{2(1)+1}{9}\right) \\ &\quad + (2)^2 \left(\frac{2(2)+1}{9}\right) = \frac{23}{9} \end{aligned}$$

والتباين الشرطي يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{X}{Y=1}\right) &= E\left(\frac{X^2}{Y=1}\right) - \left[E\left(\frac{X}{Y=1}\right)\right]^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 \\ &= \frac{207-169}{81} = \frac{38}{81} \end{aligned}$$

6-10: دراسة التناظر والخواص الخطية في الصفات العددية:

6-10-1: تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً توفقه μ . نقول عن توزيع X إنه

متناظر بالنسبة لـ μ إذا كان:

$$\begin{cases} \forall x \in R_X : P[X = \mu + x] = P[X = \mu - x]; \\ f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x); \quad \forall x \in R \end{cases} \quad \begin{array}{l} X \text{ متغير منفصل} \\ \text{أو} \end{array}$$

6-10-2: التناظر والعزوم: يمكننا أن نبرهن أنه من أجل أي متغير عشوائي

X متناظر بالنسبة لـ μ ، تكون عزومه المركزية ومن المراتب الفردية معدومة. أي:

$$E[(X - \mu)^{2i+1}] = 0; i = 0, 1, 2, \dots$$

ولإثبات ذلك: سنأخذ حالة الاستمرار (لأنه بشكل مماثل نبرهن حالة الانفصال

باستخدام $\sum$):

$$E[(X - \mu)^{2i+1}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^{2i+1} \cdot f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu)^{2i+1} \cdot f(x) dx + \int_{\mu}^{+\infty} (x - \mu)^{2i+1} f(x) dx$$

وبأخذ $x - \mu = y$ نحصل على:

$$E[(x - \mu)^{2i+1}] = \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} \cdot f(y + \mu) dy + \int_0^{+\infty} y^{2i+1} f(y + \mu) dy$$

وبالنسبة للتكامل الثاني إذا أخذنا $y = -z$ فنحصل على:

$$E[(X - \mu)^{2i+1}] = \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} \cdot f(y + \mu) dy + \int_0^{+\infty} z^{2i+1} f(\mu - z) dz$$

$$= \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} f(y+\mu) dy - \int_{-\infty}^0 z^{2i+1} f(\mu-z) dz$$

$$= \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} f(y+\mu) dy - \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} f(\mu-y) dy$$

(حيث التكامل المحدود لا يتعلق بالمتغير المكامل بل بمحدود التكامل) ولدينا أيضاً من خاصية التناظر أن:

$$\forall y \in R: f(\mu+y) = f(\mu-y)$$

$$E[(X-\mu)^{2i+1}] = \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} f(y+\mu) dy - \int_{-\infty}^0 y^{2i+1} f(\mu+y) dy = 0$$

نتيجة: يكفي لمعرفة التناظر في التوزيع أن نختار أحد العزوم المركزية الفردية. ونحسب قيمته ونأخذ هنا μ_3 فما فوق لأن $\mu_1 = E(X-\mu)$ دوماً معدوم بينما $E(X-\mu)^3 = \mu_3$ لا نعرف عنه مسبقاً أي شيء.

وبالتالي نختار $E(X-\mu)^3 = \mu_3$ كقياس لواقع التناظر حول μ .

وجرت العادة اعتماد المقدار $S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ كقياس للتناظر حيث:

من أجل $S=0$ يكون التوزيع متناظراً بالنسبة لـ μ .

ومن أجل $S>0$ يكون التوزيع منحرفاً نحو اليمين ويزداد هذا الانحراف مع ازدياد S .

ومن أجل $S<0$ يكون التوزيع منحرفاً نحو اليسار ويزداد هذا الانحراف مع ابتعاد S عن الصفر يساراً.

3-10-6: عزم مجموع: إذا كان العزم من المرتبة r موجوداً لكل من المتغير العشوائي X والمتغير العشوائي Y ، عندئذ فإن $(X+Y)^r$ يكون موجوداً. وهذا ينتج مباشرة من المتراجحة الحقيقية التالية:

$$\forall a, b \in R; r > 0: \begin{cases} |a+b|^r \leq C_r |a|^r + C_r |b|^r \\ C_r = \begin{cases} 1; & r \leq 1 \\ 2^{r-1}; & r > 1 \end{cases} \end{cases}$$

فناخذ X بدل a و Y بدل b فينتج المطلوب.

4-10-6: التوقع الرياضي والعزوم من المرتبة K : ($K \geq 1$):

لدينا العزوم غير المركزية بدلالة العزوم العاملة من المرتبة K كما يلي:

$$\mu_1 = EX = m_1$$

$$\mu_2 = E[X(X-1)] = m_2 - m_1$$

$$\mu_3 = E[X(X-1)(X-2)] = m_3 - 3m_2 + 2m_1$$

$$\mu_4 = E[X(X-1)(X-2)(X-3)] = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1$$

$$\mu_K = E[X(X-1)(X-2) \dots (X-K+1)]; m_K = EX^K$$

ومن أجل متغيرات منفصلة لدينا:

$$\mu_K(X) = \sum_x x(x-1) \dots (x-K+1) P_x$$

$$= \sum_{x=K}^{\infty} \frac{x!}{(x-K)!} P_x; P_x = P[X=x]$$

ويمكن إيجاد العلاقات أعلاه عكسياً كما يلي:

$$m_1 = EX = \mu_1$$

$$m_2 = \mu_2 + \mu_1$$

$$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2 + \mu_1$$

$$m_4 = \mu_4 + 6\mu_3 + 7\mu_2 + \mu_1$$

ومن هذه العلاقات يمكننا حساب العزوم غير المركزية والمركزية بدءاً من العزوم
العاملية.

مثال (6-14):

ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} P^x q^{(n-x)}; \quad 0 < P < 1; p + q = 1; n \in N^*$$

احسب التوقع والتباين باستخدام العزوم العاملية.

الحل:

$$\mu_K(X) = \sum_{x=k}^n \frac{x!}{(x-k)!} \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} P^k \sum_{x=k}^n \binom{n-k}{x-k} P^{x-k} q^{n-x}$$

وبأخذ $y = x - k$ فإن $y = 0 \leftarrow x = k$ و $N = n - k$ و $[n - x = N + k - y - K = N - y]$ وبالتالي:

$$\mu_K(X) = \frac{n!}{(n-k)!} P^K \cdot \sum_{y=0}^N \binom{N}{y} P^y q^{N-y}$$

كثافة احتمالية $(P+q)^N = 1$

$$\Rightarrow \mu_K(X) = \frac{n!}{(n-K)!} P^K$$

وبالتالي:

$$K=1 \Rightarrow \mu_1 = EX = nP = m_1$$

$$K=2 \Rightarrow m_2 = \mu_2 + \mu_1 = \frac{n!}{(n-2)!} P^2 + nP = n(n-1)P^2 + nP$$

$$= n^2 P^2 - nP^2 + nP = n^2 P^2 + nP(1-P) = n^2 P^2 + nPq$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = n^2 P^2 + nPq - n^2 P^2 = nPq$$

6-11: الدوال المولدة للعزوم وخواصها:

6-11-1: تعريف: ليكن X متغير عشوائياً كثافته الاحتمالية $f_X(x)$. نعرف الدالة المولدة لعزوم X — $M_X(t) = E(e^{tx})$ وذلك من أجل t وسيط حقيقي. وشرط وجود $M_X(t)$ هو وجود التوقع المنته $E(e^{tx})$. ومن التعريف يكون:

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x); & X \text{ منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) dx; & X \text{ مستمر} \end{cases} \quad x \in R_X$$

6-11-2: خواص الدالة المولدة للعزوم:

(1) من أجل أن a, b, c ثوابت حقيقية تكون:

$$M_{\frac{aX+b}{c}}(t) = e^{\frac{bt}{c}} \cdot M_X\left(\frac{at}{c}\right)$$

ولإثبات ذلك:

$$\begin{aligned} M_{\frac{aX+b}{c}}(t) &= E\left(e^{t\left(\frac{aX+b}{c}\right)}\right) = E\left[e^{\left(\frac{at}{c}\right)X} \cdot e^{\frac{tb}{c}}\right] = e^{\frac{tb}{c}} \cdot E\left[e^{\left(\frac{at}{c}\right)X}\right] \\ &= e^{\frac{bt}{c}} \cdot M_X\left(\frac{at}{c}\right) \end{aligned}$$

(حيث $e^{\frac{bt}{c}}$ ثابت).

(2) لدينا $M_X(t) = E(e^{tX})$ وحسب دستور النشر لـ e^{tX} :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[1 + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \frac{t^3}{3!}X^3 + \dots + \frac{t^r}{r!}X^r + \dots\right] \\ &= 1 + tEX + \frac{t^2}{2!}EX^2 + \frac{t^3}{3!}EX^3 + \dots + \frac{t^r}{r!}EX^r + \dots \end{aligned}$$

فمن العلاقة الأخيرة نجد بسهولة أن:

$$\left[\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right]_{t=0} = EX^r$$

أي أنه بمشتق الدالة المولدة للعزوم من المرتبة r وجعل t يساوي الصفر نحصل على العزم من المرتبة r للمتغير X ومنه:

$$EX = [M'(t)]_{t=0}; EX^2 = [M''(t)]_{t=0}, \dots, EX^r = [M^{(r)}(t)]_{t=0}, \dots$$

(3) إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين وكان لكل من e^{tX}, e^{tY} توقع

حينئذ عندئذ:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

إن إثبات هذه الخاصة يأتي من تطبيق خواص التوقع والاستقلال العشوائي

للمتغيرات حيث:

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX+tY}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}]$$

$$= E[e^{tX}] E[e^{tY}] = M_X(t) M_Y(t)$$

(4) يمكن تعميم الخاصة (3) وذلك من أجل $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية. وكان لكل $i=1,2,\dots,n: e^{tX_i}$ توقع منته. فنحصل عندئذٍ على:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

وإذا كان X متغيراً عشوائياً له الدالة المولدة لعزومه $M_X(t)$ ، وكانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X عندئذٍ:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_X(t) = [M_X(t)]^n$$

ومن أجل متوسط تلك العينة: $\bar{X}$:

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= M_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = M_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^n M_X\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \left[M_X\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \end{aligned}$$

(5) هناك توزيع احتمالي وحيد له الدالة المولدة لعزومه $M(t)$. لأن هناك دالة التوزيع الاحتمالي الوحيدة $F(x) = P[X \leq x]$ تحدد توزيع المتغير العشوائي X منفصلاً. أكان أم مستمراً وهذه الخاصة تكافئ القول من أجل أي دالة مولدة للعزوم $M(t)$ يقابلها دالة توزيع احتمالية واحدة $F(x)$ وهذا يعني أن الدوال المولدة للعزوم عندما تكون موجودة تكون وحيدة، فإذا نتج لدينا دالة مولدة للعزوم لمتغير عشوائي ما فمن نعط معين، فإنما يعني ذلك أن التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو الذي أدى إلى هذا النمط من الدوال المولدة للعزوم.

مثال (6-15):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة التوزيع الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} P & ; x=1 \\ 1-P & ; x=0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \quad ; 0 < P < 1, P+q=1$$

عين $M_X(t)$ واحسب العزوم حتى المرتبة الثالثة ثم استنتج تباین X . وعین الدالة المولدة للمتغير $5X+4$ واستنتج تباینه.

الحل:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x)$$

$$= e^{t(1)} \cdot P + e^{t(0)} \cdot (1-P) = Pe^t + q \quad ; t \in R$$

$$EX = [M'(t)]_{t=0} = [Pe^t]_{t=0} = P.$$

$$EX^2 = [M''(t)]_{t=0} = [Pe^t + q]_{t=0} = [Pe^t]_{t=0} = P$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = P - P^2 = P(1-P) = Pq$$

$$EX^3 = [M'''(t)]_{t=0} = P$$

$$M_{5X+4}(t) = E(e^{t(5X+4)}) = e^{4t} E(e^{5tX}) = e^{4t} E(e^{(5t)X})$$

$$= e^{4t} M_X(5t) = e^{4t} (Pe^{5t} + q)$$

ومنه:

$$M_{5X+4}(t) = e^{4t} (Pe^{5t} + q) \quad ; t \in R$$

$$E(5X+4) = [M'(t)]_{t=0} = [4e^{4t}(Pe^{5t} + q) + 5Pe^{9t}(Pe^{5t} + q)]_{t=0}$$

$$= 4 + 5P$$

$$E(5X+4)^2 = [M''(t)]_{t=0} = [16e^{4t}(Pe^{5t} + q) + 20Pe^{9t}(Pe^{5t} + q)$$

$$+ 45Pe^{9t}(Pe^{5t} + q) + 25P^2e^{14t}(Pe^{5t} + q)]_{t=0}$$

$$= 16 + 20P + 45P + 25P^2 = 25P^2 + 65P + 16$$

$$V(5X+4) = E(5X+4)^2 - (E(5X+4))^2$$

$$= 25P^2 + 65P - (4 + 5P)^2$$

$$= 25P^2 + 65P + 16 - 16 - 40P - 25P^2 = 25P$$

مثال (6-16):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ ، واستنتج منها توقع وتباين X ، عين $M_Y(t)$ حيث $Y=5X+7$.
الحل:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 e^{tx} dx$$

$$= \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}; \quad t \in \mathbb{R}$$

(حيث $t=0: M(0)=E(e^{0X})=E(1)=1$)

$$EX = [M'(t)]_{t=0} = \frac{e' t - e' + 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te' - e' + 1}{t^2}$$

حسب أويثال:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e' + te' - e'}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te'}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e'}{2} = \frac{1}{2}$$

$$EX^2 = [M''(t)]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(te' + e' - e')t^2 - 2t(te' - e' + 1)}{t^4} \right]$$

$$EX^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t^2 e' - 2te' + 2e' - 2}{t^3} \right]$$

حسب أويثال:

$$EX^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{2te' + t^2 e' - 2e' - 2te' + 2e'}{3t^2} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{e'}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$M_Y(t) = M_{5X+7}(t) = e^{7t} M_X(5t) = e^{7t} \left[\frac{e^{5t} - 1}{5t} \right]$$

$$= \frac{e^{12t} - e^{7t}}{5t}$$

مثال (6-17):

ليكن Z متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; 7 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_z(t)$ وماذا تستنتج بالمقارنة مع المثال (6-16)؟
الحل:

$$M_z(t) = \int_7^{12} e^{tz} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) dz = \frac{e^{12t} - e^{7t}}{5t}$$

وبالتالي بالمقارنة مع المثال (6-17) نجد أن $Y=5X+7$ و Z هما الدالة المولدة للمعزوم نفسها وبسبب الوحدانية فإن Z, Y هما التوزيع الاحتمالي نفسه ومنه فإن كثافة Y هي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; 7 \leq y \leq 12 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

6-11-3: الدالة لمعزوم شعاع عشوائي (X, Y) :

لتكن $f(x, y)$ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين (X, Y) . وإذا كان $E(e^{t_1 X + t_2 Y})$ موجوداً من أجل قيم $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ الموافقة لذلك. فإننا نعرف الدالة المولدة لمعزوم (X, Y) بالعلاقة:

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y})$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{t_1 x + t_2 y} \cdot f(x, y); & X, Y \text{ منفصلان} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} \cdot f(x, y) dx dy; & X, Y \text{ مستمران} \end{cases}$$

وإن $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ يحدد توزيع (X, Y) وتوزيع X وتوزيع Y بسبب الوحدانية و:

$$M_{X,Y}(t_1, 0) = M_X(t_1) = E(e^{t_1 X})$$

$$M_{X,Y}(0, t_2) = M_Y(t_2) = E(e^{t_2 Y})$$

وأيضاً يمكننا معرفة العزوم كما رأينا في خواص الدالة التولدة للعزوم:

$$EX^K Y^m = \left[\frac{\partial^{(K+m)} M_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1^K \partial t_2^m} \right]_{(t_1=0, t_2=0)}$$

وبالتالي نجد:

$$EX = \left[\frac{\partial M_{X,Y}(t_1, 0)}{\partial t_1} \right]_{t_1=0}; EY = \left[\frac{\partial M_{X,Y}(0, t_2)}{\partial t_2} \right]_{t_2=0}$$

$$EX^2 = \left[\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t, 0)}{\partial t_1^2} \right]_{t_1=0}; EY^2 = \left[\frac{\partial^2 M_{X,Y}(0, t_2)}{\partial t_2^2} \right]_{t_2=0}$$

$$EXY = \left[\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{(t_1=0, t_2=0)}$$

ومنه يمكننا حساب:

$$V(X) = E(X)^2 - (EX)^2; V(Y) = E(Y^2) - (EY)^2;$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

مثال (18-6):

ليكن X, Y شعاعاً عشوائياً. دالة كثافته الاحتمالية للمتفرقة من الشكل

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & ; 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

عبر $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ واستنتج منها $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ ؟

الحل:

$$\begin{aligned}
 M_{X,Y}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t_1 x + t_2 y)} \cdot f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{(t_1 x + t_2 y)} \cdot e^{-y} dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} \left[\int_x^{\infty} e^{(t_1 x + t_2 y - y)} dy \right] dx \\
 &= \frac{1}{(1-t_1-t_2)(1-t_2)}; \quad t_2 < 1; t_1 + t_2 < 1
 \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$M_X(t_1) = M_{X,Y}(t_1, 0) = \frac{1}{1-t_1}; \quad t_1 < 1$$

$$M_Y(t_2) = M_{X,Y}(0, t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^2}; \quad t_2 < 1$$

ملاحظة: من خاصية التوحيدانية للدالة المولدة للعزوم، نقول إن X, Y مستقلان عشوائياً إذا وقفط إذا كان:

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = M_X(t_1) \cdot M_Y(t_2)$$

12-6: الدوال المميزة وخواصها: رأينا من الفقرة السابقة أن الدالة المولدة للعزوم تكون موجودة. إذا كان التوقع $E(e^{tX})$ موجوداً وبالتالي ليس من الضروري أن يكون لكل متغير عشوائي دالة مولدة لعزومه. وللتغلب على هذه السلبية تم تعريف الدوال المميزة والتي تكون موجودة مهما يكن الوسيط الحقيقي t .

12-6-1: تعريف: إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ ، نعرف الدالة المميزة لـ X بـ:

$$\Phi_X(\omega) = E(e^{i\omega X})$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{i\omega x} \cdot f_X(x); & (X \text{ منفصل}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \cdot f_X(x) dx; & (X \text{ مستمر}) \end{cases}$$

ملاحظة: بما أن $|e^{i\omega x}| = 1$ ، فإن الدالة المميزة بالقيمة المطلقة لـ X لن تزيد على الواحد، وتساوي الواحد من أجل $\omega = 0$.

وكذلك نلاحظ أن $\Phi_X(\omega)$ موجود دوماً دون أي شروط على ω .

مثال (6-19): ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; & x = 0, 1, 2, \dots, n; p > 0; p + q = 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المميزة لـ X ؟

الحل:

$$\Phi_X(\omega) = E(e^{i\omega X}) = \sum_x e^{i\omega x} \cdot f_X(x) = \sum_{x=0}^n e^{i\omega x} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (p \cdot e^{i\omega})^x q^{n-x} = (p e^{i\omega} + q)^n$$

مثال (6-20):

ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & ; x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المميزة لـ X ؟

الحل:

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega) &= E(e^{i\omega X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{i\omega x} \cdot 3e^{-3x} dx = 3 \int_0^{\infty} e^{(i\omega-3)x} dx = 3 \int_0^{\infty} e^{-(3-i\omega)x} dx \\ &= 3 \left[\frac{e^{-(3-i\omega)x}}{-(3-i\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{3}{3-i\omega} = (1-i\frac{\omega}{3})^{-1}\end{aligned}$$

2-12-6: خواص الدالة المميزة:

(1) ليكن X متغيراً عشوائياً، عندئذ من أجل $a, b \in \mathbb{R}$ لأن:

$$\Phi_{aX+b}(\omega) = e^{i\omega b} \cdot \Phi_X(a\omega)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{aX+b}(\omega) &= E(e^{i\omega(aX+b)}) = E[e^{i\omega aX + i\omega b}] = e^{i\omega b} \cdot E(e^{i\omega aX}) \\ &= e^{i\omega b} \cdot \Phi_X(a\omega)\end{aligned}$$

(2) لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة عشوائياً عندئذ:

$$\Phi_{\sum_{i=1}^n X_i}(\omega) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(\omega)$$

لأن:

$$\Phi_{\sum_{i=1}^n X_i}(\omega) = E \left(e^{i\omega \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)} \right) = E \left[e^{i\omega X_1 + i\omega X_2 + \dots + i\omega X_n} \right]$$

$$= E \left[e^{i\omega X_1} e^{i\omega X_2} \dots e^{i\omega X_n} \right]$$

$$= E \left[e^{i\omega X_1} \right] E \left[e^{i\omega X_2} \right] \dots E \left[e^{i\omega X_n} \right]$$

$$= \Phi_{X_1}(\omega) \cdot \Phi_{X_2}(\omega) \dots \Phi_{X_n}(\omega) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(\omega)$$

(3) إذا وجد العزم من المرتبة K أي $E\{X^K\} < \infty$ حيث $K \geq 1$.
 فهناك مشتق من المرتبة K للدالة المميزة $\Phi_X(\omega)$ لأن:
 $\Phi_X^{(K)}(0) = i^K E(X^K)$

$$\left| \int i x e^{i\omega x} dF_X(x) \right| \leq \int |x| dF_X(x) = E|X| < \infty$$

ومن التكامل $\int i x e^{i\omega x} dF_X(x)$ متقارب بانتظام بالنسبة لـ ω ، فيمكننا الاشتقاق تحت التكامل:

$$\Phi_X'(\omega) = i \int x e^{i\omega x} dF_X(x) \Rightarrow \Phi_X'(0) = i \int x dF_X(x) = iE(X)$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{\Phi_X'(0)}{i}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{\Phi_X''(0)}{i^2}, \dots, EX^K = \frac{\Phi_X^{(K)}(0)}{i^K}$$

(4) من خواص تحويلات فورييه والتحويل العكسي لفورييه ضمن شروط تعريف تكامل فورييه يمكننا انطلاقاً من الدالة المميزة لـ X معرفة كثافة X الاحتمالية ومن ثم دالة توزيعها الاحتمالي، ومن ثم قانون المتغير العشوائي X . حيث:

$$\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \Phi_X(\omega) d\omega; & (X \text{ متغير مستمر}) \\ P_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\omega} \Phi_X(\omega) d\omega; & (X \text{ متغير منفصل}) \end{cases}$$

(5) إن $M_X(t) = E(e^{itX})$ ، $\Phi_X(\omega) = E(e^{i\omega X})$ ومنه فإن $\Phi_X(\omega)$ ينتج مباشرة من $M_X(t)$ باستبدال $i\omega$ بـ t . ومنه وجود الدوال المولدة للعزوم يصبح من السهل استنتاج الدوال المميزة. والعكس صحيح ولكن ضمن شروط وجود الدالة للعزوم (أي وجود التوقع).

مثال (6-21):

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً. عين كثافة X الاحتمالية إذا كانت دالة المميزة من الشكل:

$$\Phi_X(\omega) = \cos \omega$$

الحل:

$$P_K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iK\omega} \Phi_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iK\omega} \cos \omega d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iK\omega} \left[\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right] d\omega$$

$$P_K = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(1-K)\omega} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(1+K)\omega} d\omega$$

وكذلك: $K \neq 1; K \neq -1 \Rightarrow P_K = 0$

$$K = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$K = -1 \Rightarrow P_{-1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{i2\omega} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{i0\omega} d\omega = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad x = -1, 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ملاحظة: من خلال تعريفنا للدالة المميزة للمتغير العشوائي حقيقي X تعرضنا لمتغيرات عشوائية من الشكل $Y = e^{iu}$ حيث $i = \sqrt{-1}$ وهذا يعني أننا تعاملنا مع متغيرات عشوائية عقدية، فالمتغير العشوائي العقدي هو المتغير العشوائي الذي مجموعة قيمه الممكنة هي مجموعة أعداد عقدية ونكتب:

$$Y = U + iV$$

حيث U, V متغيران عشوائيان حقيقيان و $i = \sqrt{-1}$. وبسهولة نجد أن:

$$E(Y) = EU + iEV; V(Y) = V(U) + V(V)$$

وذلك لأن التباين موجب وأن $Y = U + iV$

$$V(Y) = E(|Y - EY|^2) = E(|(U - EU) + i(V - EV)|^2)$$

(مربع القيمة المطلقة لعدد عقدي هو مجموع مربعي قسمه الحقيقي وقسمه

الوهمي).

$$V(Y) = E[(U - EU)^2 + (V - EV)^2] = V(U) + V(V)$$

مثال (22-6):

ليكن X متغيراً عشوائياً دالته المميزة من الشكل:

$$\Phi_X(\omega) = e^{-|\omega|} \quad ; -\infty < \omega < \infty$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X .

الحل:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \cdot e^{-|\omega|} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-i\omega x} \cdot e^{\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} \cdot e^{-\omega} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(1-ix)\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-(1+ix)\omega} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left[\frac{e^{(1-ix)\omega}}{1-ix} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(1+ix)\omega}}{-(1+ix)} \right]_0^{\infty} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

3-12-6: الدالة المميزة لشعاع عشوائي:

ليكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ شعاعاً عشوائياً له دالة الكثافة المشتركة

$$f_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

فإننا نعرف الدالة المميزة للشعاع العشوائي المفروض بـ:

$$\Phi_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E[e^{i(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \dots + \omega_n X_n)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n)} \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

وذلك $i = \sqrt{-1}, \forall \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in R$

ولدينا دالة الكثافة المشتركة للمتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ غير سالبة وقابلة للمكاملة، يمكن تمثيلها باستخدام تكامل فورييه، والحصول على دالة الكثافة المشتركة من خلال معرفة الدالة المميزة للشعاع $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ من التحويل العكسي لفورييه:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} \Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) d\omega_1 \dots d\omega_n$$

وأيضاً يمكننا استنتاج المزموم من العلاقة:

$$E(X_1^{K_1} X_2^{K_2} \dots X_n^{K_n}) =$$

$$\left[\frac{\partial^{(K_1 + K_2 + \dots + K_n)} \Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{K_1} \cdot \partial \omega_2^{K_2} \dots \partial \omega_n^{K_n}} \right]_{(\omega_1=0, \omega_2=0, \dots, \omega_n=0)} \left(\frac{1}{i^{(K_1 + K_2 + \dots + K_n)}} \right)$$

6-13: تمارين غير مطلوبة:

(1) بنت إحصائية في إحدى المدن أن 20% من الأسر لا تمتلك أي سيارة و 50% من الأسر تمتلك سيارة واحدة و 15% من الأسر تمتلك ميارتين و 10% من الأسر تمتلك ثلاث سيارات و 3% من الأسر تمتلك أربع سيارات. وليكن X المتغير الدال على عدد السيارات و Y للمتغير الدال على هذه العائلات التي تمتلكها الأسرة.

احسب توقع X وتوقع Y ثم احسب تباين X وانحرافه المعياري وتباين Y وانحرافه المعياري.

(2) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}; x = 0, 1, 2, \dots$$

عين توقع المتغير $Y = \frac{1}{1+X}$

(3) ليكن X متغيراً عشوائياً جدول كثافته الاحتمالية من الشكل:

X	0	1
$f_X(x)$	$1-P$	P

حيث $P > 0$. عين توقع X وعين EX^2 ثم احسب تباين X .

(4) ليكن X متغيراً عشوائياً جدول كثافته الاحتمالية من الشكل:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P[X=x]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

احسب توقع المتغير $Y = (X-3)^2$.

(5) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع المتغير $Y = \sin^2 \pi X$.

(6) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $E(X^2 - 2X + 1)$, $E(X^2)$, $E(X+1)$, EX

(7) تاجر للتجهيزات الثقيلة يتصل في اليوم الواحد بـ 100000 باحتمال $\frac{1}{3}$ أو $\frac{2}{3}$ ، وسيستج عن كل اتصال إما لا شيء أو صفقة بيع بقيمة 50000 ل.س وذلك باحتمال $\frac{9}{10}$ أو $\frac{1}{10}$ على الترتيب. عين توقع مبيعاته اليومية.

(8) ليكن X متغيراً عشوائياً جدول توزيعه الاحتمالي من الشكل:

X	1	2	3	4	5	6
P[X=x]	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

تحقق من أن $EX^2 \neq EX \cdot EX$.

(9) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}; x = 0, 1, 2, \dots \text{وسيط } \lambda$$

عين توقع X وتباينه وانحرافه المعياري.

(10) ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; x \in [5, 10] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع X وتباينه وانحرافه المعياري.

(11) لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها الكثافة الاحتمالية

نفسها للمتغير X التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & ; x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع X وتباينه وانحرافه المعياري ثم عين تباين $\sum_{i=1}^n X_i$ وتباين $\bar{X}$ متوسط المتغيرات X_i حيث $i=1, 2, \dots, n$.

(12) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته الاحتمالية المشتركة من الشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+2y}{18} & ; x=1,2; y=1,2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $p(X, Y)$.

(13) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً لهما الكثافة المشتركة:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{96} & ; 0 < x < 4; 1 < y < 5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع X وتوقع Y و EXY و $E(2X+3Y)$.

(14) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته الاحتمالية المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{42} & ; x=0,1,2; y=0,1,2,3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $p(X, Y)$.

(15) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{210} & ; 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $p(X, Y)$.

(16) لتكن X, Y متغيرات عشوائية لها الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & ; 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) برهن أن $EXY=EX.EY$.

(2) هل X, Y مستقلان؟

(17) لتكن X, Y, Z متغيرات عشوائية لها:

$$\begin{array}{lll} EX=2 & VarX=1 & CoV(X,Y)=-2 \\ EY=-3 & VarY=5 & CoV(Y,Z)=1 \\ EZ=4 & VarZ=2 & CoV(X,Z)=-1 \end{array}$$

ولنأخذ المتغير:

$$W=3X-Y+2Z$$

احسب EW و $VarW$.

(18) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين دالة كثافتهما الاحتمالية المشتركة من

الشكل:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 8xy & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) احسب $f_Y(y); f_X(x)$.

(2) احسب $f_Y(Y/X), f_X(X/Y)$.

(3) احسب $E(X/Y=y), E(Y/X=x)$.

(4) احسب $V(X/Y=y), V(Y/X=x)$.

(19) ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً كثافته:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, \dots$$

وليكن Y متغيراً عشوائياً منفصلاً كثافته:

$$f_Y(y) = \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu}; y = 0, 1, 2, \dots$$

وإذا كان X, Y مستقلين عشوائياً فإلّا المطلوب:

(1) عين الكثافة الشرطية $f(X/Y=y) = P(X=K/X+Y=n)$ وذلك من أجل

$$K=0, 1, 2, \dots, n$$

(2) احسب $E[X=K/X+Y=n]$.

(20) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية المشتركة من الشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & ; 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $V(X/Y), E(X^2/Y), V(Y/X), E(X/Y), E(Y/X)$

(21) ألقينا حجرين نرد، وليكن X المتغير الدال على أكبر الوجهين الحاصلين،

وليكن Y المتغير الدال على الحصول على مجموع الوجهين. عين $p(X, Y)$.

(22) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية المشتركة من الشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & , 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) عين $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ واستنتج $f_{Y/X}(y/X = 0.25)$

(2) احسب $E(Y/X = 0.25)$ ثم $V(Y/X = 0.25)$

(3) عين $E(XY^2), E(X^2 - Y^2)$ واحسب $p(X, Y)$

(23) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية المشتركة من الشكل:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $f_X(x), f_Y(y)$ ثم احسب $EX, EY, V(X), V(Y), \text{CoV}(X, Y)$

$$P\left[\frac{3}{4} \leq Y \leq \frac{7}{8} \mid X = \frac{1}{4}\right] \text{ ثم احسب } V(Y/X), E(Y/X), E(X/Y)$$

$p(X, Y)$

(24) ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x+2y)}{7}; & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \frac{X}{Y^3} \quad \text{عين توقع الدالة}$$

(25) متغيرات عشوائية فيها X, Y, Z

$$EX = 3; EY = 5; EZ = 2; CoV(X, Y) = -1; CoV(X, Z) = -3,$$

$$CoV(Y, Z) = 2, V(X) = 8; V(Y) = 12; V(Z) = 18$$

(1) احسب EX^2, EY^2, EZ^2 .

$$(2) \text{ لتأخذ المتغيران: } U = X + 4Y + 2Z; V = 3X - Y - Z; \text{ احسب } CoV(U, V)$$

(26) ليكن X متغيراً عشوائياً، دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \binom{3}{x}; & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ واحسب $EX, EX^2, V(X)$ واحسب $M_{5X}(t)$ واستنتج منه $E(5X)$.

(27) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ واستنتج منها توقع X وتباينه، ثم احسب $M_{2X+1}(t)$ واستنتج منه تباین $(2X+1)$.

(28) ليكن X متغيراً عشوائياً، جدول كثافته الاحتمالية:

X	1	-1
P[X=x]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

عين الدالة المولدة لعزوم X ثم عين منها العزوم التالية:
 EX^4, EX^3, EX^2, EX

(29) ليكن X متغيراً عشوائياً، كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}; & 17 \leq x \leq 23 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ وتوقع وتباين X .

(30) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

عين $M_X(t)$ واستنتج منها توقع X وتباينه.

(31) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}; & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ ، وتوقع X وتباينه.

(32) ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3^x}{x!} e^{-3}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ ، واستنتج منها توقع X وتباينه.

(33) ليكن X متغيراً عشوائياً، دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}; & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولتكن X_1, X_2 متغيرات عشوائية مستقلة ولها قانون X نفسه. ولنأخذ $Y = X_1 + X_2$ عين $M_Y(t)$ ، ثم عين قانون Y الاحتمالي وماذا تستنتج بالعلاقة مع الدالة المولدة لعزوم Y .

(34) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}; & x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ ، واستنتج منها توقع X وتباينه؟
(35) عين الدالة المولدة لعزوم المتغير X والذي له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2h^2 x e^{-h^2 x^2}; & x \geq 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(36) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & x = -1, 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المميزة لـ X واستنتج منها توقع X وتباينه.

(37) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}; & |x| < a \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المميزة لـ X واستنتج منها توقع X وتباينه.

(38) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

عين الدالة المميزة لـ X ، واستنتج منها توقع X وتباينه.

(39) عين الدالة المميزة للمتغير العشوائي X . والذي له دالة الكثافة الاحتمالية

التالية:

$$f_X(x) = Ce^{-a|x|} \quad ; -\infty < x < \infty; \quad a > 0; C = \frac{a}{2}$$

واستنتج منها توقع X وتباينه.

(40) عين الدالة المميزة للمتغير العشوائي X والذي له دالة الكثافة الاحتمالية

التالية:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}; \quad -\infty < x < +\infty; \quad a > 0$$

الفصل السابع

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الشهيرة

7-1: تعريف التجربة الثنائية:

التجربة الثنائية هي تجربة تتصف بالخواص التالية:

- (1) تتألف التجربة من عدد من التكرارات المتماثلة تمامًا، n مثالاً.
- (2) يُنتج كل تكرار إحدى نتيجتين، إما أن تكون النتيجة ((نجاحاً)) أي وقوع الأمر الذي نحن في صدد دراسته ونرمز لها بـ S أو تكون ((فشلاً)) ونرمز لهذه النتيجة بـ F .
- (3) احتمال النجاح في تكرار معين ونرمز له بـ P يبقى ثابتاً من تكرار إلى آخر. ويكون احتمال الفشل بالطبع $1-P$ ونرمز له بـ q .
- (4) التكرارات مستقلة بعضها عن بعض.
- (5) نهتم بعدد النجاحات التي نحصل عليها خلال التكرارات n ونرمز للمتغير الدال على عدد النجاحات الحاصلة بـ X .

7-2: توزيع برنولي (التوزيع الثنائي النقطي):

7-2-1: تعريف: نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق برنولي إذا كان له

دالة الكثافة التالية:

$$(أي حالة تجربة ثنائية مكررة: $n=1, P+q=1$)$$

X	0	1
$f_X(x)$	$1-P=q$	P

$P>0, 0<P<1$

7-2-2: الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f_X(x) = e^{(0)t} q + e^{(1)t} P = (Pe^t + q); t \in R$$

7-2-3: التوقع والتباين:

التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = [(Pe' + q)']_{t=0} = [Pe']_{t=0} = Pe^0 = P$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = (Pe' + q)''_{t=0} = (Pe'')_{t=0} = P$$

والتباين:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = P - P^2 = P(1 - P) = Pq$$

7-2-4: توزيع مجموع متغيرات عينة عشوائية برنولية من الحجم n :

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير برنولي X وسيطه P فإن توزيع

$\sum_{i=1}^n X_i$ ينتج من شكل صيغة دالته المولدة لعزومه أي من $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t)$. حيث:

(كون متغيرات العينة مستقلة ولها التوزيع نفسه) نجد أن:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_X(t) = [M_X(t)]^n = (Pe' + q)^n; t \in R$$

وسنجد لاحقا أن هذه الدالة هي إلا دالة مولدة لعزوم متغير ثنائي (حدائي)

وسمّاؤه n, P ومنه مجموع متغيرات عشوائية برنولية هو متغير حدائي.

7-2-5: الدالة المميزة: بما أن $M_X(t) = (Pe' + q); t \in R$ فإن الدالة

المميزة تنتج منها بتبديل t بـ iw أي:

$$\Phi_X(w) = (Pe^{iw} + q); w \in R$$

7-3-3: التوزيع الحدائي (الثاني):

7-3-1: تعريف: ليكن لدينا تجربة برنولية وسيطها P ولنفترض أننا كررنا هذه

التجربة تكرارا مستقلا n مرة. فسنحصل على عدد معين من النجاحات والباقي

فاشلة. فإذا كان المتغير الدال على عدد النجاحات الحاصلة ولتكن K مثلا حيث

($K=0,1,2,\dots,n$) فإن:

$$P[X = k] = \binom{n}{k} P^k q^{n-k}; \quad K = 0, 1, 2, \dots, n$$

يدعى بقانون التوزيع الثنائي أو الحداني و X يدعى بالمتغير الحداني. (حيث

$P+q=1$ و $0 < P < 1$) بالوسطاء n, P .

حيث يلاحظ أن:

$$\sum_{K=0}^n P[X = K] = \sum_{K=0}^n \binom{n}{K} P^K q^{n-K} = (P + q)^n = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} P^x q^{n-x} & \text{أي أن} \\ x = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

يمثل فعالاً كثافة احتمالية فعلية لـ X .

$$P[X = K] = \binom{n}{K} P^K q^{n-K} \quad \text{من القانون 2-3-7 ينتج أن:}$$

$$P[X \geq K] = 1 - P[X < K] = 1 - \sum_{x=0}^{K-1} P[X = x] = \sum_{x=K}^n \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$$

$$P[X > 0] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{n}{0} P^0 q^n = 1 - q^n$$

3-3-7: الدالة المولدة لعزومه وذالته المميزة:

$$M_X(t) = E(e^{tw}) = \sum_{K=0}^n e^{tk} \binom{n}{K} P^K q^{n-K} = \sum_{K=0}^n \binom{n}{K} (e^t P)^K q^{n-K}$$

$$= (Pe^t + q)^n; \quad t \in R$$

والدالة المميزة تنتج من $M_X(t)$ بتبديل $t \rightarrow iw$:

$$\Phi_X(w) = (Pe^{iw} + q)^n$$

7-3-4: التوقع والعزم من المرتبة الثانية والتباين والانحراف المعياري لـ X :
من الدالة المولدة لعزوم X وخواصها نجد أن:

التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = \left[(Pe' + q)^n \right]'_{(t=0)} = [nPe'(Pe' + q)^{n-1}]_{t=0} \\ = nP(P + q)^{n-1} = nP$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = \left[(Pe' + q)^n \right]''_{(t=0)} = [nPe'(Pe' + q)^{n-1}]'_{(t=0)} \\ = [nPe'(pe' + q)^n + n(n-1)P^2e^{2t}(Pe' + q)^{n-2}]_{t=0}$$

$$= nP + (n)(n-1)P^2 = nP + n^2P^2 - nP^2$$

والتباين:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = nP + n^2P^2 - nP^2 - n^2P^2 = nP - nP^2$$

$$= nP(1 - P) = nPq$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{nPq} > 0$$

7-3-5: توزيع مجموع متغيرات عينة عشوائية من الحجم N المتغير ثنائي

(حداني) X وسطاؤه n, P :

ليكن X متغيرا حدانيا وسطاؤه n, P ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ

X من الحجم N ولمعرفة توزيع $\sum_{i=1}^N X_i$ ، سنستخدم الدالة المولدة لعزوم X_i

حيث:

$$M_{\sum_{i=1}^N X_i}(t) = \prod_{i=1}^N M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^N M_X(t) = [M_X(t)]^N = [(Pe' + q)^n]^N$$

$$= (Pe' + q)^{nN}$$

ومنه الدالة الناتجة هي دالة مولدة لعزوم متغير حداني وسطيته nN, P ومنه

$\sum_{i=1}^N X_i$ هو حداني التوزيع بالوسطاء nN, P .

مثال (1-7):

ليكن X متغيراً دالة كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{7}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{7-x} & ; x = 0, 1, \dots, 7 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المولدة لـ X واستنتج منها توقع X وتباينه؟

الحل:

إن الدالة المعطاة هي دالة حدانية بالوسطاء $P = \frac{1}{2}$, $n = 7$, أي $q = \frac{1}{2}$

ومنه:

$$M_X(t) = (Pe' + q)^n = \left(\frac{1}{2}e' + \frac{1}{2}\right)^7$$

ومنه توقع X :

$$E(X) = nP = 7\left(\frac{1}{2}\right) = 3.5$$

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^7 (e' + 1)^7\right]_{t=0}'' = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^7 (7)(e')(e' + 1)^6\right]_{t=0}'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 (7) [e'(e' + 1)^6 + 6e'(e' + 1)^5]_{e'=0}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 (7) [2^6 + 6(2)^5] = 14$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 14 - (3.5)^2 = 1.75$$

7-3-6: علاقة التوزيع الحداني بمفكوك ذي الحدين: إن:

$$(P+q)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} P^x q^{n-x} = q^n + \binom{n}{1} P^1 q^{n-1} + \binom{n}{2} P^2 q^{n-2} + \dots + \binom{n}{x} P^x q^{n-x} + \dots + P^n$$

حيث نجد أن:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$$

هو الحد ذو المرتبة $(x+1)$ من مفكوك ذي الحدين $(P+q)^n$.

ملاحظة:

1) إذا كان X متغيرا حدانيا وسطاؤه n, P وكان $P=q$ فإن:

$$P[X=K] = P[X=n-K]$$

$$\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K} \text{ لأن:}$$

2) إن: $K=0, 1, 2, \dots, n; P[X=K]$ يبلغ قيمته العظمى من أجل

$K \in [nP - q, nP + q]$ وهذا ينتج مباشرة من المتراجحتين:

$$1) P[X = K] \geq P[X = K - 1]; \quad 2) P[X = K] \geq P[X = K + 1]$$

مثال (7-2):

لتكن لدينا تجربة معينة فضاءها Ω ، وليكن A حدثاً من F في Ω حيث $0 < P(A)$.

فإذا كررنا تكراراً مستقلاً التجربة Ω ، n مرة. عين احتمال وقوع الحدث A مرة واحدة على الأقل.

الحل:

يمكن النظر للتجربة على أنها برنولية (لأنه إما أن يقع الحدث A أو لا يقع) والتكرار مستقل. فالنموذج يتبع التوزيع الحداني بالوسطاء n و $P(A)$ وإذا كان X المتغير الدال على عدد مرات وقوع A فالمطلوب $P(X \geq 1)$ (على فرض $P(A) = p$, $(1 - P(A)) = q$)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \sum_{x=1}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x} - P[X = 0] \\ &= 1 - \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = 1 - q^n \end{aligned}$$

مثال (7-3):

قلدت قطعة نقود $2m$ مرة، حيث (m عدد صحيح موجب). عين احتمال الحصول على الصورة عدداً من المرات يساوي r واحسب القيمة العظمى لهذا الاحتمال.

حيث $0 \leq r \leq 2m$.

الحل:

النموذج يتبع التوزيع الحثلي لأن المتحارب ثنائية (أما الحصول على الصورة أو

الحصول على الكتابة) والتكوير مستقل. والوسطاء $n = 2m, P = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}$

والمطلوب أولاً: $P[X=r]$

$$P[X=r] = \binom{2m}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-r} = \binom{2m}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

والقيمة العظمى للاحتتمال هي من أجل $K \in [nP - q, nP + q]$ أي:

$K \in [2m - \frac{1}{2}, 2m + \frac{1}{2}]$ أي $K \in [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}]$ والعدد الصحيح

الموجب والمحصور في المجال السابق هو من أجل $K=m$ ومنه:

$$P_{\max}[X=m] = \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

مثال (7-4):

إذا كان احتمال إصابة هدف من طلقة واحدة 0.6. كم طلقة يجب إطلاقها على الهدف لكي يكون احتمال إصابة الهدف بطلقة على الأقل لا يقل عن 0.95.
الحل:

ليكن A الحدث الدال على إصابة الهدف بطلقة على الأقل عند رمي n طلقة:

وإن الأحداث الدالة على إصابة الهدف في الطلقة i: $i=1,2,\dots,n$ تكون مستقلة ومنه $P(A) = 1 - q^n$ وكون $P=0.6$ فإن $q=1-P=0.4$ وكون المطلوب

$P(A) \geq 0.95$ فإن $1 - q^n \geq 0.95$ أي $1 - (0.4)^n \geq 0.95$ وبأخذ

لوغاريتم الطرفين $\ln(1 - (0.4)^n) \geq \ln(0.95)$ وكون $\ln(1 - (0.4)^n) \leq (-2.996)$ فإن:

$$n \geq \frac{-2.996}{-0.916}$$

أربع طلقات.

مثال (7-5):

يجري تفتيش الشحنات الكبيرة من البضاعة القادمة إلى مؤسسة صناعية بطريقة العينة، لنفرض أن هذه الطريقة تلتخص في اختبار عشر قطع عشوائية. ثم اختيارها واحدة تلو الأخرى. وترفض البضاعة إذا لاحظنا قطعتين مرفوضتين أو أكثر. إذا احتوت شحنة بضاعة 0.05 من القطع المرفوضة، فما هو احتمال قبول البضاعة؟

وما هو احتمال رفض البضاعة؟

الحل:

إذا كان النحاج متمثلاً بالحصول على قطعة مرفوضة عندئذ $q=0.95$, $P=0.05$ ومن الواضح أن $n=10$ والنموذج يتبع التوزيع الحداني

$$\begin{cases} P[X = x] = \binom{10}{x} (0.05)^x (0.95)^{10-x} \\ x = 0, 1, 2, \dots, 10 \end{cases}$$

وا احتمال قبول البضاعة يعني $P(X \leq 1)$ أي:

$$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0) = \binom{10}{1} (0.05)(0.95)^9 + (0.95)^{10} = 0.91$$

وا احتمال رفض البضاعة يعني $P(X \geq 2)$ أي:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.914 = 0.086$$

7-4: التوزيع الحدودي:

7-4-1: تعريف: إذا كان لدينا تجربة عشوائية مجموعة نتائجها Ω أي

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ وإذا كان احتمال الحصول على w_i هو P_i :

$i=1, 2, \dots, r$ ومن أجل n تكراراً مستقلاً للتجربة Ω ، فسوف نحصل على n مرة

للحدث w_i حيث $\sum_{i=1}^r n_i = n$ وبالتالي فالمتغير الدالي على الحصول على w_i هو n_i

مرة من التكرار n يدعى بالمتغير الحدودي ونرمز له بـ X ويكون الاحتمال الموافق:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_r^{n_r}$$

ومن أجل $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ حيث X_i هو المتغير الدال على الحصول على w_i مرة n_i من التكرار n فنكتب عندئذ قانون التوزيع الحدودي بالشكل: (حيث: $i=1, \dots, r$)

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_r = n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_r^{n_r}$$

حيث:

$$n_1, \dots, n_r = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^r P_i = 1 \quad \text{و} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

ويلاحظ مباشرة أن:

$$\sum_{n_1, \dots, n_r} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_r^{n_r} = (P_1 + P_2 + \dots + P_r)^n = 1$$

2-4-7: حالات خاصة:

(1) ومن أجل $\mu=3$: يكون لدينا:

$$X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n - n_1 - n_2$$

$$f(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! n_2! (n - n_1 - n_2)!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} (1 - P_1 - P_2)^{n - n_1 - n_2}$$

حيث: $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, n; n_1 + n_2 \leq n$

(2) والكثافات الهامشية لـ X_1 هي حدانية بالوسطاء n_1, P_1 لـ X_2 و n_2, P_2 لـ X_3 .

مثال (7-9):

وزعنا عشر كرات على ثلاثة صناديق. فإذا كان X_i يمثل عدد الكرات في الصندوق i حيث $i=1, 2, 3$. عين احتمال أن يقع في الصندوق الأول سبع كرات والثاني كرة. علما بأن إمكانات وقوع كرة في الصندوق متساوية.

الحل:

هنا لدينا توزيع حدودي حيث:

$$n_1 = 7, n_2 = 1, n_3 = 2; \quad n = 10$$

$$P_1 = \frac{1}{3}, P_2 = \frac{1}{3}, P_3 = \frac{1}{3}$$

والمطلوب:

$$P(n_1, n_2, n_3) = P(7, 1, 2) = \binom{10}{7 \ 1 \ 2} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{10!}{7!1!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = (360)(0.0000169) = 0.006$$

مثال (7-7):

لتكن Ω تجربة إلقاء حجر نرد ومراقبة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي بعد استقراره. ولتكن لدينا الأحداث التالية: $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$. ولنفرض أننا كررنا هذه التجربة عشر مرات. عين احتمال وقوع A_1 مرتين و A_2 لخمس مرات و A_3 ثلاث مرات.

الحل:

لدينا:

$$P_1 = P(A_1) = \frac{2}{6}, P_2 = P(A_2) = \frac{1}{6}; P_3 = P(A_3) = \frac{3}{6}$$

$$n_1 = 2 \quad n_2 = 5 \quad n_3 = 3 \quad n = 10$$

$$P(2, 5, 3) = \binom{10}{2 \ 5 \ 3} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{35}{7776} = 0.0045$$

7-5: التوزيع البواسوني:

7-5-1: استنتاج التعريف: يمكننا التوصل لدالة الاحتمال لتوزيع بواسون كنهاية لدالة الاحتمال للتوزيع الحداني وذلك عندما n تصبح كبيرة كبرا كافيا و P يصبح صغيرا جدا. وبمحيث يبقى nP مساويا عددا ثابتا. فلدينا دالة التوزيع الحداني:

(حيث نفترض أن $\lambda = nP$):

$$f_x(x) = \binom{n}{x} P^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x \cdot \frac{(1-P)^n}{(1-P)^x}$$

$$= n(n-1).....(n-x+1) \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{x! \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{n(n-1).....(n-x+1)}{n^x} \cdot \frac{\lambda^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{x! \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \cdot \frac{n-x+1}{n} \cdot \frac{\lambda^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{x! \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

ومن أجل n كبيرة كبرا كافيا، وقيمته لـ x ثابتة وصغيرة بالمقارنة مع n ، تكون كل من النسب $\frac{n-1}{n}, \frac{n-x+1}{n}, \dots, \frac{n-x+1}{n}$ قريبة جدا من الواحد، وبالتالي فإن:

$$f_X(x) \approx \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

وكون $e = 2.718$ ومنه $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$ ومنه $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$ عندما $n \rightarrow \infty$ ومنه نحصل على الصيغة:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}; x = 0, 1, 2, \dots$$

وهي صيغة بواسون أي دالة التوزيع الاحتمالي البواسوني بالوصف λ (حيث $\lambda = nP$) و P احتمال النجاح في تجربة برنولي و n عدد التكررات المستقلة لتجربة برنولي.

مثال (7-8):

يتلقى عامل الهاتف في شركة معينة المكالمات الهاتفية بمعدل مكالمتين في الدقيقة:

(1) عين احتمال ألا يتلقى العامل أية مكالمات خلال فترة دقيقة؟

(2) عين احتمال تلقي مكالمتين خلال دقيقة واحدة؟

(3) عين احتمال ألا يتلقى أي مكالمات خلال فترة خمس دقائق؟

الحل:

إن وحدة القياس هي الدقيقة بالنسبة للطلب (1) و (2) وخمس دقائق بالنسبة للطلب الثالث فتكون $\lambda = 2$ في حالة الطلب (1) و (2) و $\lambda = 10$ في حالة الطلب (3). حيث إن التجارب برنولية و n كبيرة كبراً كافياً. حيث نحدد الإشارة إلى أن X في توزيع بواسون يمثل عدد الحوادث التي تقع في وحدة القياس أي $f_X(x) = P[X=x]$ هو احتمال أن تقع x حادثة في وحدة القياس.

(1) في الطلب الأول: دالة الاحتمال هي:

$$f_X(x) = P[X=x] = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{2^x}{x!} e^{-2}; x = 0, 1, 2, \dots$$

والمطلوب $P[X=0]$ أي:

$$f_X(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} = 0.135$$

(2) المطلوب $P[X=2]$ أي:

$$f_X(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2e^{-2} = 0.270$$

(3) المطلوب $P[X=0]$ و $\lambda=10$ أي:

$$f_X(0) = \frac{10^0}{0!} e^{-10} = e^{-10} = 0.000045$$

7-5-2: الدالة المولدة لعزوم المتغير اليواسوفي X بالوسيط λ : ودالته المميزة:

$$M_X(t) = E(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}}$$

وباستخدام ماك لوران في منشور الدالة $U=e^t$ حيث $f(u) = e^{\lambda u}$ بالنسبة لـ u ونحوار الصفر:

$$\Rightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}; \quad t \in \mathbb{R}$$

ومنه دالته المميزة تكون (من أجل $t=iw$):

$$\Rightarrow \Phi_X(w) = e^{\lambda(e^{iw}-1)}$$

7-5-3: التوقع والعزم من المرتبة الثانية والتباين والانحراف المعياري لـ X :

من دالته المولدة لعزومه:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

يكون التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = [e^{\lambda(e^{it}-1)}]_{t=0}' = [\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}]_{t=0}' = \lambda$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = [e^{\lambda(e^{it}-1)}]_{t=0}'' = [\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}]_{t=0}'$$

$$= [\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + \lambda^2 e^{2it} e^{\lambda(e^{it}-1)}]_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

والتباين:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} > 0$$

4-5-7: توزيع متغيرات عينة عشوائية بواسونية:

ليكن X متغيراً عشوائياً بواسونياً وسيطه λ ولنكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة

عشوائية لـ X من الحجم n . ولنبحث عن توزيع $\sum_{i=1}^n X_i$ من خلال:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_X(t) = [M_X(t)]^n = [e^{\lambda(e^t-1)}]^n$$

$$= e^{n\lambda(e^t-1)}$$

ومنه الدالة الناتجة ما هي إلا دالة مولدة لغزوم متغير بواسوني وسيطه $(n\lambda)$.

وبالتالي مجموع متغيرات عشوائية بواسونية فهو بواسوني بوسيط يساوي مجموع

وسيطاتها.

ملاحظة: إن لتوزيع بواسون تطبيقات واسعة في كثير من الظواهر العشوائية

وبخاصة في مجال نظرية الخدمات الشعبية (المراكز الخدمية بمختلف أنواعها) ومجال

البيضاء الإحصائية ومجال بحوث العمليات والعلوم الإدارية.

مثال (7-9):

نفترض أن هناك 300 خطأ مطبعي موزعة على صفحات كتاب يحوي 500

صفحة. عين الاحتمال الموافق لاحتواء صفحة معينة:

(1) خطأين بالضبط.

(2) خطأين أو أكثر.

(3) خطأ على الأقل.

الحل:

إن $n=300$ ، $P = \frac{1}{500}$ والتجربة برنولية فيها n كبيرة و P صغيرة فالنموذج يتبع توزيع بواسون.

$$f_X(x) = P[X=x] = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}; \quad \lambda = nP = \frac{300}{500} = 0.6$$

(1) المطلوب $P[X=2]$

$$f_X(2) = \frac{(0.6)^2}{2!} e^{-0.6} = 0.1$$

(2) المطلوب $P[X \geq 2]$

$$f(x \geq 2) = 1 - f_X(1) - f_X(0) = 1 - \frac{(0.6)^1}{1!} e^{-0.6} - \frac{(0.6)^0}{0!} e^{-0.6} =$$

$$= 1 - 0.349 - 0.320 = 0.122$$

(3) المطلوب $P[X \geq 1]$

$$f_X(x \geq 1) = 1 - f_X(0) = 1 - e^{-0.6} = 1 - 0.320 = 0.680$$

مثال (7-10): تقع حوادث الاصطدام على الطرق في منطقة معينة بمعدل حادث واحد لكل يومين.

(1) احسب الاحتمالات الموافقة لـ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 حوادث اصطدام في الأسبوع في تلك المنطقة؟

(2) ما هو عدد الاصطدامات الأسبوعية الأكثر احتمالا؟

(3) كم يوما في الأسبوع تتوقع أن يمر بدون اصطدامات؟

الحل:

(1) متوسط عدد الحوادث لكل أسبوع $\lambda = 7(0.5) = 3.5$ ودالة الاحتمال هي:

$$f_X(x) = \frac{(3.5)^x}{x!} e^{-3.5}; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$f_X(0) = \frac{(3.5)^0}{0!} e^{-3.5} = 0.030$$

$$f_X(1) = \frac{(3.5)^1}{1!} e^{-3.5} = 0.106$$

$$f_X(2) = \frac{(3.5)^2}{2!} e^{-3.5} = 0.185$$

$$f_X(3) = \frac{(3.5)^3}{3!} e^{-3.5} = 0.216$$

$$f_X(4) = \frac{(3.5)^4}{4!} e^{-3.5} = 0.189$$

$$f_X(5) = \frac{(3.5)^5}{5!} e^{-3.5} = 0.132$$

$$f_X(6) = \frac{(3.5)^6}{6!} e^{-3.5} = 0.077$$

(2) من السؤال الأول نجد أن عدد الحوادث الأكثر احتمالاً هو $x=3$.

(3) على فرض أن اليوم هو وحدة القياس بدلاً من الأسبوع فإن $\lambda=0.5$

وبالتالي:

$$f_X(x) = \frac{(0.5)^x}{x!} e^{-0.5}; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

حيث x عدد الحوادث اليومية. ومرور يوم بدون حوادث يعني $x=0$ باحتمال:

$$f_X(0) = \frac{(0.5)^0}{0!} e^{-0.5} = 0.607$$

والآن لدينا نموذج حداثي فيه $P=0.607$ في كل يوم من أيام الأسبوع وبناخذ

$n=7$ يكون عدد النجاحات هو عدد أيام الأسبوع التي تمر بدون حوادث وليكن Y

المتغير الدال على عدد الأيام التي تمر بدون حوادث خلال الأسبوع.

$$E(Y) = nP = 7 \times 0.607 = 4.25$$

وبالتالي متوسط عدد الأيام التي تمر بدون حوادث في الأسبوع هو 4.25 يوماً.
ملاحظة:

(1) من أجل X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ . إن $f_X(x)$ يكون أعظمياً من أجل $x \in [\lambda^{-1}, \lambda]$ وهذا ينتج مباشرة من قانون X والمتراهجتين:

$$f_X(x-1) \leq f_X(x); \quad f_X(x+1) \leq f_X(x) \quad (2)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

6-7: التوزيع الهندسي:

1-6-7: تعريف: إذا كررنا تجربة برنولي وسيطها P مرة بعد مرة، وكان X يمثل عدد مرات الفشل الحاصلة حتى الوصول لأول نجاح فإن $[X=x]$ تمثل النتيجة المولفة من X فشلاً يتلوها نجاح أي:

$$f_X(x) = P[X=x] = q^x \cdot P; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

نسمي X عندئذ المتغير العشوائي الهندسي بالوسيط P .

ملاحظة: بسهولة نجد أن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} q^x \cdot P = P \sum_{x=0}^{\infty} q^x; \quad 0 < q < 1$$

$$= P \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{P}{q} = 1; \quad \text{(حيث } q^x \text{ هي سلسلة هندسية أساسها أقل من الواحد)}$$

2-6-7: الدالة المولدة لعزوم X :

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot q^x \cdot P = P \sum_{x=0}^{\infty} (e^t \cdot q)^x$$

ومن أجل $e^t \cdot q < 1$ فإن:

$$M_X(t) = P \frac{1}{1 - e'q} = \frac{P}{1 - qe'}$$

7-6-3: التوقع والتباين لـ X :

التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = \left[\frac{P}{1 - qe'} \right]'_{t=0} = \left[\frac{Pqe'}{(1 - qe')^2} \right]_{t=0} = \frac{Pq}{P^2} = \frac{q}{P}$$

المعزم من المرتبة الثانية:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= [M''(t)]_{t=0} = \left[\frac{P}{1 - qe'} \right]''_{t=0} = \left[\frac{Pqe'}{(1 - qe')^2} \right]'_{t=0} \\ &= \left[\frac{Pqe'(1 - qe')^2 - Pqe'(2)(-qe')(1 - qe')}{(1 - qe')^4} \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{Pqe'(1 - qe') + 2Pq^2e'^2}{(1 - qe')^3} \right]_{t=0} = \frac{Pq(1 - q) + 2Pq^2}{P^3} \\ &= \frac{Pq + Pq^2}{P^3} = \frac{q}{P^2} + \frac{q^2}{P^2} \end{aligned}$$

التباين:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{q}{P^3} + \frac{q^2}{P^2} - \frac{q^2}{P^2} - \frac{q}{P^2}$$

7-6-4: الدالة المميزة: بما أن دالته المولدة للمعزم من الشكل:

$$M_X(t) = \frac{P}{1 - qe'}, \quad qe' < 1$$

فإنه بتبديل $t \rightarrow it$ نتج الدالة المميزة. أي:

$$\Phi_X(w) = \frac{P}{1 - qe^{iw}}$$

مثال (7-11):

في تجربة مراقبة لون البراعم لزهرة معين، لنفترض أننا نلاحظ برعمًا أبيض باحتمال $\frac{1}{4}$ ونلاحظ برعمًا أحمر باحتمال $\frac{3}{4}$. ولنفترض أنه مقابل ثلاث مشاهدات لبرعم أحمر سوف نشاهد برعمًا أبيض.

المطلوب:

حدد نوع التوزيع والاحتمال الموافق ثم احسب الاحتمال الموافق لأربع مشاهدات للبراعم الحمراء ثم شاهد برعمًا أبيض.

الحل:

إن التجارب برنولية (أحمر أو أبيض) والتوزيع هندسي وليكن X فيه

$$q = \frac{3}{4}, P = \frac{1}{4} \text{ ومنه:}$$

$$P[X = 3] = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = 0.105$$

حيث X يدل على البراعم الحمراء المشاهدة قبل مشاهدة برعم أبيض.

والاحتمال المطلوب $P(X+1 \leq 4)$

$$P[(X+1) \leq 4] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0.684$$

لأن:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 2 \\ 1 - q^{x+1} & ; x = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

مثال (7-12):

ليكن X متغيرًا هندسيًا وسيطه $P=0.2$ احسب:

$$P(3 \leq X \leq 5), \quad P(3 < X \leq 5), \quad P(X > 4)$$

الحل:

$$q=1-p=1-0.2=0.8$$

$$P(X > 4) = 1 - P[X \leq 4] = 1 - F(4) = 1 - (1 - (0.8)^4) = (0.8)^4 \\ = 0.328$$

$$P(3 < X \leq 5) = F(5) - F(3) = (1 - (0.8)^6) - (1 - (0.8)^4) \\ = 0.147$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = P[3 < X \leq 5] + P[X = 3] = 0.147 + (0.8)^3 \cdot (0.2) \\ = 0.2494$$

7-7: التوزيع فوق الهندسي:

7-7-1: تعريف: لنفرض أن صندوقاً يحتوي K كرة (شيئاً) من النوع A و $N-K$ كرة K (شيئاً) من النوع B . ولنسحب عشوائياً n كرة بدون إعادة. وليكن X المتغير الدال على عدد الكرات من النوع A الناتجة عندئذ:

$$P[X=x] = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x=0,1,2,\dots,n \quad :x \leq n, x \leq K; n-x \leq N-K$$

وهذه تمثل كثافة احتمالية للمتغير X تدعى بالكثافة فوق الهندسية.

7-7-2: التوقع:

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x f_X(x) = \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= K \sum_{x=1}^n \frac{(K-1)!}{(x-1)!(K-x)!} \cdot \frac{\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = K \sum_{x=1}^n \frac{\binom{K-1}{x-1} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

وحيث نضع $y=x-1$ نحصل على:

$$E(X) = K \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{y} \binom{N-K}{n-1-y}}{\binom{N}{n}} = K \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{y} \binom{N-1-(K-1)}{n-1-y}}{\frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1}}$$

$$= \frac{Kn}{N} \left[\sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{y} \binom{N-1-(K-1)}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}} \right] = \frac{nK}{N}$$

لأن ما داخل قوس هو مجموع احتمالات الكثافة فوق الهندسية فيساوي الواحد:

التباين: يمكننا بطريقة مماثلة لحساب التوقع الحصول على:

$$E[X(X-1)] = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$V(X) = E[X(X-1)] + E(X) - (EX)^2 = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N} - \frac{n^2 K^2}{N^2}$$

$$= \frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)} = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right)$$

مثال (7-13):

خضع 12 مريضاً بالتهاب الفصيات إلى تجربة طبية فاختار ستة منهم بصورة عشوائية وأعطوا المعالجة A، بينما أعطى الباقون المعالجة B وإذا كان أربعة من المرضى يعانون من ارتفاع ضغط الدم والآخرون طبيعيين بالنسبة لمعدل ضغط الدم. عيّن احتمال:

- (1) أن ينفع ذوي الضغط المرتفع جميعهم للمعالجة A
 - (2) أن ينفع ذوي الضغط المرتفع جميعهم للمعالجة B
 - (3) أن يوجد واحد على الأقل من ذوي الضغط المرتفع في كل معالجة؟
- الحل:

هنا لدينا $n=6, N-K=8, K=4, N=12$

وليكن X المتغير الدال على عدد المصابين بالضغط المرتفع الذين يجري تخصيصهم للمعالجة A فتوزيع X هو التوزيع فوق الهندسي.

$$f_X(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{8}{6-x}}{\binom{12}{6}}; \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

المطلوب (1) هو: $P[X=4]$

$$f_X(4) = \frac{\binom{4}{4} \binom{8}{2}}{\binom{12}{6}} = \frac{1}{33}$$

المطلوب (2): $x=0$ أو $x=4$ أي جميع ذوي الضغط المرتفع خاضعون للمعالجة A. أو من أجل $x=0$ أي جميع ذوي الضغط المرتفع خاضعون للمعالجة B ونكتب:

$$P[X=4 | X=0] = P(X=0) + P(X=4) = f_X(0) + f_X(4)$$

$$= \frac{\binom{4}{0} \binom{8}{6}}{\binom{12}{6}} + \frac{1}{33} = \frac{2}{32}$$

المطلوب (3): هنا الحادثة المطلوبة هي الحادثة المتممة لما هو مطلوب في (2) أي:

$$P = 1 - \frac{2}{32} = \frac{31}{32}$$

7-8: التوزيع الثنائي السالب (توزيع باسكال):

7-8-1: تعريف: ليكن لدينا تجربة عشوائية وليكن A حدثا من F في Ω في

الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) . فإن كان $P(A) = p$ عند التكرار المستقل للتجربة Ω ولنفترض أن التجارب مستمرة حتى الحصول على K مرة من تحقيق A. فإذا تطلب ذلك r تكرارا مستقلا. ونبحث عن احتمال وقوع A في التجربة r . أي احتمال الحصول على الحادث A: $(K-1)$ مرة خلال الـ $(r-1)$ تجربة مضروبا باحتمال الحصول على الحادث A في التجربة رقم r . أي أن:

$$P_{K-1, r-1} = \binom{r-1}{K-1} p^K q^{r-K}$$

واحتمال الحصول على الحادث A: K مرة من μ تجربة فأما هو:

$$P[X=r] = (P_{K-1, r-1}) \cdot p$$

$$\Rightarrow P[X=r] = \binom{r-1}{K-1} p^K q^{r-K} \quad ; r = K, K+1, \dots$$

يدعى X بالمتغير العشوائي الثنائي السالب أو توزيع باسكال بالوسطاء K, p.

ملاحظة:

$$\begin{aligned}\sum_{r=K}^{\infty} P[X=r] &= \sum_{r=K}^{\infty} \binom{r-1}{K-1} p^K q^{r-K} = p^K \sum_{r=K}^{\infty} \binom{r-1}{K-1} q^{r-K} \\ &= p^K \left[\binom{K-1}{K-1} q^0 + \binom{K}{K-1} q + \binom{K+1}{K-1} q^2 + \binom{K+2}{K-1} q^3 + \dots \right]\end{aligned}$$

وكون $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ عندئذ:

$$\begin{aligned}\sum_{r=K}^{\infty} P[X=r] &= p^K \left[1 + \binom{K}{1} q + \binom{K+1}{2} q^2 + \binom{K+2}{3} q^3 + \dots \right] \\ &= p^K (1-q)^{-K} = p^K \cdot p^{-K} = 1\end{aligned}$$

2-8-7: التوقع والتباين:

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{r=K}^{\infty} r \binom{r-1}{K-1} p^K q^{r-K} = \sum_{r=K}^{\infty} \frac{r(r-1)!}{(K-1)!(r-K)!} p^K q^{r-K} \\ &= \frac{K}{p} \sum_{r=K}^{\infty} \frac{r!}{K(K-1)!(r-K)!} p^{K+1} q^{r-K}\end{aligned}$$

بأخذ $m=r+1$ نجد:

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{K}{p} \sum_{r=K}^{\infty} \binom{r}{K} p^{K+1} q^{r-K} = \frac{K}{p} \sum_{m=K+1}^{\infty} \binom{m-1}{K} p^{K+1} q^{m-1-K} \\ E(X) &= \frac{K}{p}\end{aligned}$$

بمجموع احتمالات كلالة باسكال $1 =$

وبأسلوب مماثل نجد أن:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{Kq}{p^2}$$

7-8-3: الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة:

$$M_X(t) = E(e^t) = \sum_{r=K}^{\infty} e^{tr} \binom{r-1}{K-1} P^K q^{r-K}$$

ومن أجل $r=K, K+1, \dots$ نأخذ $q_1 = qe^t, P_1 = 1 - qe^t$ حيث $q_1 < 1$ عندئذ:

$$M_X(t) = \frac{(Pe^t)^K}{P_1^K} \sum_{r=K}^{\infty} \binom{r-1}{K-1} P_1^K q_1^{r-K} = \left(\frac{Pe^t}{1 - qe^t} \right)^K; t < -\ln q$$

مجموع احتمالات كثافة باسكال
بالوسيطين P_1, K قساري الواحد

ومنه:

$$\Phi_X(w) = \left(\frac{Pe^{iw}}{1 - qe^{iw}} \right)^K$$

ملاحظة: بأخذ $Y = X - K$ فإن:

$$P[Y = y] = P[X - K = y] = P[X = y + K]$$

$$= \binom{y+K-1}{K-1} P^K q^y; \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

7-9: تمارين غير محلولة:

- (1) ليكن X متغيراً عشوائياً يرتبطاً وسيطة P احسب توقع X وتباينه وانحرافه المعياري بالحساب المباشر (دون استخدام مفهوم الدالة المولدة للعزوم أو الدالة المميزة).
 (2) ليكن X متغيراً حداثياً وسطاؤه n, P . احسب توقع X وتباينه وانحرافه المعياري بالحساب المباشر.

$$(3) \text{ ليكن } X \text{ متغيراً حداثياً وسطاؤه } n=9, P=\frac{1}{3}$$

استمع الدالة المولدة لعزوم X ودالة الحيزة ثم استمع منها توقع X وتباينه وانحرافه المعياري.

(4) إذا كان 0.05 من إنتاج مصنع معين سيء الصنع اخترنا عشوائياً عشر قطع من إنتاج هذا المصنع. عين احتمال الحصول على قطعة جيدة الصنع على الأقل؟

(5) إذا كان احتمال اكتشاف هدف في الجو من قبل جهاز الرادار هو 0.9 وإذا كان لدينا خمسة أجهزة رادار تعمل بشكل مستقل. عين احتمال اكتشاف هدف معين على أربعة أجهزة منها بالضبط، وعين احتمال اكتشاف هدف في الجو.

(6) في طريقة للعمل سوف يواجه السائق أربع إشارات مرور، والمسافة بين هذه الإشارات كبيرة بقدر كاف لتحصيّل الإشارة الخضراء عند كل مقابلة لها. وإذا كان الضوء الأخضر يعمل كل 40 ثانية من الدقيقة. عين احتمال أن يواجه السائق:

1- ثلاث مرات توقفاً على الأقل.

2- توقفاً واحداً على الأقل.

3- توقفتين بالضبط.

(7) في كل يوم أجهزة الحاسوب تزداد نقطة باحتمال 0.75 أو تنقص باحتمال 0.25. عين احتمال أن يعود سعر الحاسب إلى قيمته الأصلي بعد مضي ستة أيام. وذلك بفرض أن حركة الأسعار اليومية مستقلة عن بعضها.

8) يصيب أحد أنواع الصواريخ الهدف باحتمال (0.4). عين عدد الصواريخ اللازم إطلاقها لكي يكون احتمال إصابة الهدف بصاروخ على الأقل لا يقل عن (0.90).

9) اختبر لقاح جديد لتحديد فعاليته في الوقاية من الزكام، وقد أعطي لقشرة أشخاص رويوا لمدة ستة. ووجد أن ثمانية منهم لم يصابوا بالزكام. إذا كان احتمال عدم الإصابة بالزكام خلال ستة هو بصورة طبيعية 0.5. فما هو احتمال ألا يصاب ثمانية أو أكثر علما أن اللقاح لا يزيد من مقاومة الجسم للمرض؟

10) قدنا 500 قطعة نقدية مغذية من فئة الخمس ليرات. ما القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد القطع التي تظهر وجه الكتابة؟

11) يطلق رامي على هدف، فإذا كان احتمال إصابة مركز الهدف هو 0.2 واحتمال إصابة باقي الهدف 0.5. وإذا أطلق الرامي عشر طلقات. عين احتمال إصابة مركز الهدف بأربع منها وإصابة باقي الهدف بأربع أخرى منها؟

12) عند اعتراض طائرة في الجو بصواريخ مضادة للطائرات، فإذا كان احتمال إصابة خزان الوقود هو 0.3 واحتمال إصابة بقية الطائرة 0.4. وإذا أطلق خمسة صواريخ على الطائرة.

1- عين احتمال إصابة خزان الوقود بصاروخين وإصابة بقية الطائرة بصاروخين.

2- عين عدد الصواريخ اللازم إطلاقها لكي يصاب خزان الوقود على الأقل باحتمال 0.80.

13) ليكن X متغيرا عشوائيا جواسونيا وسيطه λ . عين توقع X وتباينه بالحساب المباشر.

14) ليكن X متغيرا عشوائيا كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2^x \cdot e^{-2}}{x!} & ; x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المولدة لعزوم X وعالته المميز، ثم استنتج توقع X وتباينه.

15) ينقطع خيط نسيجي وسطيا 0.375 مرة كل ساعة عمل. عين احتمال أن يكون العدد X لانقطاع الخيط محصورا بين 2 و 4 خلال ثماني ساعات.

16) ليكن X متغيرا عشوائيا هندسيا وسيطه P . عين توقع X وتباينه دون استخدام الدالة المولدة لعزومه.

17) عينة تتضمن 3 عناصر من النوع A و 5 عناصر من النوع B . سحبنا عينة عشوائيا من 4 عناصر من هذه العينة. وليكن X المتغير الدال على عدد العناصر في العينة من النوع A .

1- عين جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير X .

2- عين $E(X)$, $V(X)$ مستخدما الجدول الناتج ثم احسبهم باستخدام القوانين المناسبة للتوزيع وقارن التيجتين.

الفصل الثامن

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الشهيرة

8-1-1: التوزيع المنتظم:

8-1-1-1: تعريف: نقول عن متغير عشوائي X إنه يتوزع توزيعاً منتظماً على

المجال $[a, b]$ حيث $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ إذا كان له دالة كثافة احتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث نلاحظ هنا أن الدالة $f_X(x)$ هي دالة موجبة و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

8-1-2: دالة التوزيع:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

ومنه:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

8-1-3: الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة:

تكون الدالة المولدة لعزوم X :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) dx = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_a^b = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}; \quad a < b, t \neq 0$$

والدالة المميزة تنتج مباشرة من $M_X(t)$ بتعويض $t \rightarrow iw$:

$$\Phi_X(w) = \frac{e^{iwb} - e^{iwa}}{iw(b-a)}$$

4-1-8: التوقع والتعزم من المراتبة الثانية والثمانين والانحراف المعياري لـ X :

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = \left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \right]_{t=0} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{(be^{tb} - ae^{ta})t - e^{tb} + e^{ta}}{t^2} \right]_{t=0}$$

والنهاية من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين نطبق أو بيتال:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{(b^2e^{tb} - a^2e^{ta})t + be^{tb} - ae^{ta} - be^{tb} + ae^{ta}}{2t} \right]_{t=0}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2e^{tb} - a^2e^{ta}}{2} \right]_{t=0}$$

فالتوقع يكون:

$$Ex = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2 - a^2}{2} \right] = \frac{b+a}{2}$$

والتعزم من المراتبة الثانية:

$$EX^2 = [M''(t)]_{t=0} = \left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \right]_{t=0} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{(be^{tb} - ae^{ta})t - e^{tb} + e^{ta}}{t^2} \right]_{t=0}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{(b^2 e^{tb} t^3 - a^2 t^3 e^{ta} + b t^2 e^{tb} - a t^2 e^{tb} - a t^2 e^{ta} - b t^2 e^{tb}) + a t^2 e^{ta} - 2 t^2 b e^{tb} + 2 t^2 a e^{ta} + 2 t e^{tb} - 2 t e^{ta}}{t^4} \right]_{t=0}$$

$$EX^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2 t^2 e^{tb} - a^2 t^2 e^{ta} - 2 t b e^{tb} + 2 t a e^{ta} + 2 t a e^{ta} + 2 e^{tb} - 2 e^{ta}}{t^3} \right]_{t=0}$$

النهاية من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين نطبق أوبيتال:

$$EX^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{2 b^2 t e^{tb} + b^3 t^2 e^{tb} - 2 a^2 t e^{ta} - a^3 t^2 e^{ta} - 2 b e^{tb}}{-2 t b^2 e^{tb} + 2 a e^{ta} + 2 t a^2 e^{ta} + 2 b e^{tb} - 2 a e^{ta}} \right]_{t=0}$$

$$EX^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^3 t^2 e^{tb} - a^3 t^2 e^{ta}}{3 t^2} \right]_{t=0} = \frac{1}{3(b-a)} [b^3 e^{tb} - a^3 e^{ta}]_{t=0}$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

والتباين:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{12}} > 0$$

مثال (1-8):

ليكن X منتظم التوزيع على المجال $[a, b]$. عين $P[X \leq \frac{2a+b}{3}]$ وإذا كان $P(|X| \leq \frac{1}{2})$ احسب $b=4, a=-3$.

الحل:

لدينا دالة توزيع X من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

وملاحظة أن: $a \leq \frac{2a+b}{3} \leq b$

$$P\left[X \leq \frac{2a+b}{3}\right] = F_X\left(\frac{2a+b}{3}\right) = \frac{\frac{2a+b}{3} - a}{b-a} = \frac{1}{3}$$

ومن أجل $b=4$ و $a=-3$ فإن:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ \frac{x+3}{7} & -3 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

فإن:

$$P\left[|X| \leq \frac{1}{2}\right] = P\left[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right] = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 3}{7} - \frac{\frac{-1}{2} + 3}{7} = \frac{1}{7}$$

8-1-5: توزيع مجموع متغيرات عينة عشوائية منتظمة التوزيع على المجال $[a, b]$:
ليكن X متغيراً عشوائياً منتظماً التوزيع على المجال $[a, b]$ ولتكن

$X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير X . عندئذٍ توزيع $\sum_{i=1}^n X_i$ نلاحظه من:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_X(t) = \left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \right]^n$$

والدالة الناتجة لا تدل على أنها دالة مولدة لعزوم متغير منتظم.

8-1-6: حالة خاصة: رأينا أن الدالة المميزة لـ X :

$$\Phi_X(w) = \frac{e^{iwb} - e^{iwa}}{iw(b-a)}$$

وفي حالة $a = -b$ أي المجال $[-b, b]$ فإن:

$$\Phi_X(w) = \frac{e^{iwb} - e^{-iwb}}{(2b)iw} = \frac{1}{bw} \left[\frac{e^{iwb} - e^{-iwb}}{2i} \right] = \frac{\sin wb}{wb}$$

ملاحظة: إن التوزيع المنتظم على المجال $[0, 1]$ يستخدم بشكل واسع في توليد الأرقام العشوائية بطريقة مونت كارلو على الحاسوب، أي اقتراع قيم عشوائية من عناصر المجتمع المرقمة من 1 إلى N (حجم المجتمع) باحتمالات متساوية $\left(P = \frac{1}{N}\right)$. ولاقتراع قيمة x للمتغير المنتظم التوزيع X على المجال $[0, 1]$ أي $U(0, 1)$ من X هو حل المعادلة $F_Y(y) = x$ أي $F_Y(y) = \frac{y-a}{b-a} = y = x$ وفي حالة عدم وحدانية الحل نأخذ أصغر قيمة في الحل $F_Y(y) = x$.

8-2: التوزيع الأسّي:

8-2-1: تعريف: نقول عن متغير عشوائي X إنه يتوزع وفق التوزيع الأسّي بالوسيط $\lambda > 0$ إذا كان له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث نلاحظ أن $f_X(x)$ دالة موجبة و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = -[e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = 1$$

2-2-8: دالة التوزيع:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

وصف:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

3-2-8: التوزيع الأسّي لا يملك ذاكرة: حيث يستخدم هذا التوزيع في

دراسة أعمار الكائنات الحية فمن أجل X أسّي التوزيع بالوسط $a > 0, b > 0, a, b \in \mathbb{R}$ و λ

$$\begin{aligned} P\left[\frac{X > a+b}{X > a}\right] &= \frac{P[X > a+b, X > a]}{P[X > a]} = \frac{P[X > a+b]}{P[X > a]} \\ &= \frac{1 - P[X \leq a+b]}{1 - P[X \leq a]} = \frac{1 - [1 - e^{-\lambda(a+b)}]}{1 - [1 - e^{-\lambda a}]} = \frac{e^{-\lambda a} e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} \\ &= e^{-\lambda b} \end{aligned}$$

نلاحظ أن الناتج متعلق بـ b فقط ومستقل عن a .

8-2-4: الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx = \left[\frac{\lambda e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{t-\lambda} [e^{-x} - e^0]$$

والدالة المولدة للعزوم تكون من الشكل:

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad t < \lambda$$

والدالة المميزة تكون:

$$\Phi_X(w) = \frac{\lambda}{\lambda - iw}; \quad (\text{بتدليل } t \rightarrow iw \text{ في } M_X(t))$$

8-2-5: التوقع والتباين والانحراف المعياري:

التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t} \right]_{t=0} = \left[\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right]_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t} \right]_{t=0}'' = \left[\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right]_{t=0}'$$

$$= \left[\frac{-\lambda(2)(-1)(\lambda - t)}{(\lambda - t)^4} \right]_{t=0} = \left[\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \right]_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

والتباين:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}; \quad \lambda > 0$$

8-2-6: توزيع مجموع متغيرات عينة عشوائية لمتغير أسّي بالوسيط λ :

ليكن X متغيراً عشوائياً أسياً وسيطه ($\lambda > 0$) ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة

عشوائية لـ X ، يمكننا استنتاج نوع توزيع $\sum_{i=1}^n X_i$ من $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t)$:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_X(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$$

والدالة الناتجة سنرى أنها تمثل دالة مولدة لعزوم متغير يتوزع وفق غاما وسطاؤه

n, λ .

مثال (8-2):

ليكن X متغيراً عشوائياً أسياً بالوسيط $\lambda = \frac{1}{100}$. احسب $P(X < 90)$ وعين

$F_X(m) = 0.5$ من أجل m .

الحل:

إن دالة الكثافة لـ X من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}; & x \geq 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$P(X < 90) = \int_0^{90} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx = 1 - e^{-\frac{90}{100}} = 0.593$$

إن دالة التوزيع الأسّي بالوسيط (λ) من الشكل:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}; & \infty > x \geq 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ومن أجل $F(m) = 0.5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda m} = 0.5$

$$m = \frac{-1}{\lambda} \ln(0.5) \text{ أي } -\lambda m = \ln(0.5) \Leftrightarrow e^{-\lambda m} = 0.5$$

$$\text{ومن أجل } \lambda = \frac{1}{100} \text{ نجد } m = -100(-0.693) \text{ أي } m = 69.3$$

مثال (3-8):

$$P(X > x) \text{ ليكن } X \text{ متغيراً عشوائياً، يتوزع أسياً بالوسيط } \lambda = \frac{1}{500} \text{ . احسب } P(X > x)$$

$$\text{و } P(X > 900 / X > 300)$$

الحل:

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx = e^{-\frac{x}{500}}$$

$$P(X > 900 / X > 300) = \frac{P(X > 900; X > 300)}{P(X > 300)} = \frac{P(X > 900)}{P(X > 300)} = \frac{e^{-\frac{900}{500}}}{e^{-\frac{300}{500}}}$$

$$= e^{-\frac{6}{5}} = 0.0011$$

ملاحظة: إذا رغبتنا بنمذجة متغير عشوائي أسى بالوسيط $\lambda=1$ حيث دالة توزيعه $F_X(y) = 1 - e^{-y}$ باستخدام مولد الأرقام العشوائية، حيث تولد القيمة x من X الذي يتوزع وفق $U[0,1]$ ونعمل المعادلة $y^* = -\log(1-x) \Leftrightarrow F_X(y) = 1 - e^{-y} = x$. فين أجل $x=0.93$ مثلاً نجد $y^* = 2.65926$ أي $y^* = -\log(0.07)$

3-8: التوزيع الطبيعي (النظامي):

1-3-8: تعريف: نقول عن متغير عشوائي X إنه يتوزع وفق التوزيع الطبيعي

(النظامي) بالوسطاء μ, σ^2 إذا كانت له دالة كثافة احتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; x \in R; -\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$$

2-3-8: تعريف: بأخذ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ (التغير المعياري لـ X) حيث نعرف
لاحقاً أن μ هو توقع X و σ هو الانحراف المعياري لـ X فإن:

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}; \quad Z \in R$$

تدعى بالكثافة الاحتمالية لتغير عشوائي طبيعي معياري Z حيث يبرهن مسبقاً
من أجل أي متغير معياري، التوقع يكون معدوماً والتباين يساوي الواحد ومنه

$$V(Z)=1; \quad E(Z)=0$$

ملاحظة: مما سبق نقول إن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ أي X يتوزع طبيعياً بتوقع μ
وتباين σ^2 ونقول $Z \sim N(0,1)$ أي Z يتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً (مختزلاً).

3-3-8: الكثافة المعروفة في (1-3-8) هي كثافة احتمالية فعلية لأنه يمكننا
أن نبرهن أنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow C^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy$$

وباستخدام التمثيل الوسيط: $y=r\sin\theta, \quad x=r\cos\theta$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و
 $0 \leq r < \infty$ وكذلك $x^2+y^2=r^2$ فإن:

$$dx dy = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right| dr d\theta = \left| \begin{array}{cc} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{array} \right| dr d\theta$$

$$= r dr d\theta$$

$$C^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

4-3-8: الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة:

ليكن X متغيراً طبيعياً بالوسطاء μ, σ^2 .

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

نأخذ التحويل $y = x - \mu$ ومنه $dy = dx$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(y+\mu)} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot dy \\ &= e^{t\mu} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot dy \end{aligned} \quad (*)$$

وبالإتمام لمربع كامل للمقدار:

$$\begin{aligned} -\frac{y^2}{2\sigma^2} &= \frac{-1}{2\sigma^2} [y^2 - 2\sigma^2 ty] = \frac{-1}{2\sigma^2} [y^2 - 2\sigma^2 ty + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2] \\ &= \frac{-1}{2\sigma^2} [(y - \sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2] = \frac{-(y - \sigma^2 t)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \end{aligned}$$

بالتعويض (*) :

$$M_X(t) = e^{t\mu} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot dy$$

$$= e^{t\mu} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} \cdot dy \right]$$

ما داخل القوس هو تكامل للكثافة الطبيعية على طول المجال وبالتالي $\approx$ مساوي الواحد ومنه:

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} ; t \in R$$

فالدالة المولدة للعزوم من الشكل:

والدالة المميزة تنتج منها بتبديل $t \rightarrow iw$ حيث $i^2 = -1$:

$$\Phi_X(w) = e^{i\mu w - \frac{\sigma^2 w^2}{2}}$$

وفي حالة الكثافة الطبيعية المعيارية $Z \sim N(0,1)$ فإنه من $M_X(t)$ وتبديل

$$\sigma^2 = 1, \mu = 0$$

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}; \quad t \in R; \quad \Phi_Z(t) = e^{-\frac{w^2}{2}}$$

8-3-5: التوقع والعزم من المرتبة الثانية والتباين والانحراف المعياري:

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \text{فإن:}$$

التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = \left[e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right]'_{t=0} = \left[(\mu + \sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right]_{t=0}$$

$$\Rightarrow E(X) = \mu$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = \left[e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right]''_{t=0} = \left[(\mu + \sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right]'_{t=0}$$

$$= \left[\sigma^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \right]_{t=0}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

والتباين:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

ورأينا من أجل $Z \sim N(0,1)$ أن $E(Z)=0$ ، $V(Z)=1$ أي $\sigma_Z=1$.

6-3-8: توزيع مجموع متغيرات عشوائية طبيعية:

لتكن $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ حيث $i=1,2,\dots,n$ ولنأخذ $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ فإن توزيع

Y يمكن أن نلاحظه من شكل $M_{\sum_{i=1}^n X_i}$. حيث إذا كانت المتغيرات مستقلة فإن:

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left[e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} \right]$$

$$= e^{(\sum_{i=1}^n \mu_i)t + (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2) \frac{t^2}{2}}$$

ومنه فالدالة الناتجة ما هي إلا دالة مولدة لعزوم متغير طبيعي توقعه $\sum_{i=1}^n \mu_i$

وتباينه $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ ومنه:

$$Y = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

وإذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عش. واثية طبيعية لـ

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu, \sum_{i=1}^n \sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

وإذا أخذنا $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ أي متوسط العينة العشوائية:

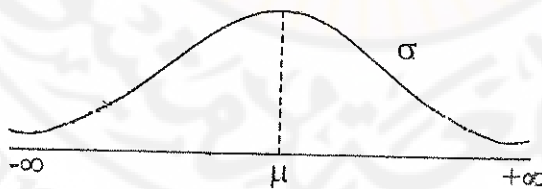
$$M_{\bar{X}}(t) = M_{\sum_{i=1}^n X_i} \left(\frac{t}{n} \right) = M_{\sum_{i=1}^n X_i} \left(\frac{t}{n} \right) = \prod_{i=1}^n M_{X_i} \left(\frac{t}{n} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^n M_{X_i} \left(\frac{t}{n} \right) = \left[e^{\mu \frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t}{n} \right)^2} \right]^n = e^{n \left(\mu \frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \right)} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

أي أن متوسط عينة عشوائية من الحجم n طبيعية لـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ هو متغير طبيعي توقعه μ نفسها وتباينه $\frac{\sigma^2}{n}$.

8-3-7: شكله وطريقة حساب الاحتمالات الموافقة له:

من أجل $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إن شكل منحنى الكثافة الاحتمالية هو من شكل منحنى الجرس (منحنى غوص): وهو متناظر حول $X = \mu$ ويبلغ ذروته عند $X = \mu$ ويتناقص على طرفي هذه الذروة ومن أجل حساب احتمال من الشكل:



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

فإن تكامل من هذا الشكل ليس من السهل حسابه مباشرة لذلك نستخدم

بالانتقال إلى المتغير الطبيعي المعياري $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ وبالتالي:

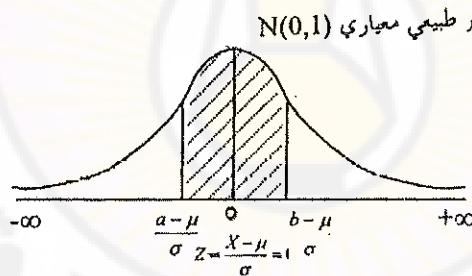
$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{\frac{a - \mu}{\sigma}}^{\frac{b - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P\left[Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right] - P\left[Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right]$$

والاحتمالات الأخيرة محسوبة مسبقاً في جدول التوزيع الاحتمالي الطبيعي المعياري والذي يحسب لنا احتمالات من الشكل $P[Z \leq z]$ ونلاحظ فيه أيضاً أن:

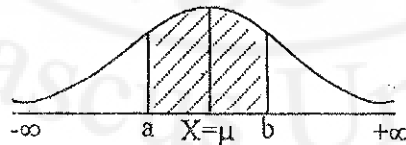
$$\int_{-3.4}^{3.4} f_Z(z) dz \approx 1$$

ونوضح ذلك على الشكل: (كمثال)



متغير طبيعي

$N(\mu, \sigma^2)$



حيث نكتب بعض الأمثلة على استخدام الجدول:

$$P(Z < 2.51) = 0.9940$$

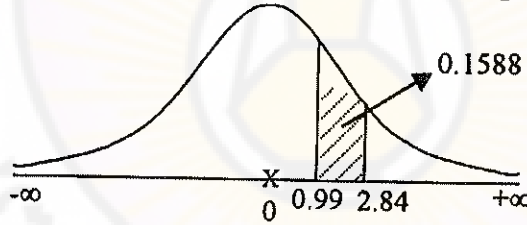
$$P(Z < -1.74) = 0.0409$$

$$P(Z > 1.64) = 1 - P(Z < 1.64) = 1 - 0.9495 = 0.0505$$

$$\begin{aligned} P(-2.4 \leq Z \leq 1.88) &= P(Z \leq 1.88) - P(Z \leq -2.4) = 0.9699 - 0.0082 \\ &= 0.9617 \end{aligned}$$

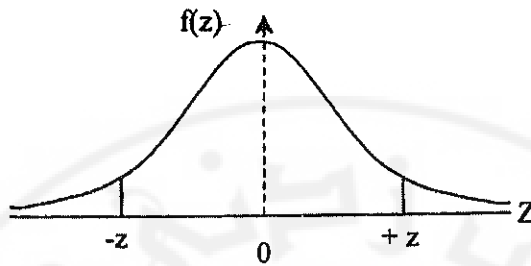
$$\begin{aligned} P(0.99 \leq Z \leq 2.84) &= P(Z \leq 2.84) - P(Z \leq 0.99) = 0.9977 - 0.8389 \\ &= 0.1588 \end{aligned}$$

وعلى الشكل نجد:



ويمكننا أيضاً حساب C من أجل $P(Z \leq C) = 0.90$ وذلك بالاستخدام العكسي للجدول (من داخل الجدول إلى عموده الأول Z وسطره (النسب المئوية) فنجد أن $C = 1.28$.

وبالمثل من أجل $P(Z \leq C) = 0.05$ تكون $C = -1.645$.
ومن خاصية التناظر في التوزيع الطبيعي (والتوزيع الطبيعي المعياري) ومفهوم دالة التوزيع الاحتمالي يكون $F(-z) = 1 - F(z)$ و $P(Z \geq +z) = P(Z \leq -z)$



لذلك يمكننا حساب C في حالة: (كمثال)

$$P(-C < Z < C) = 0.95$$

$$P(Z < C) - [1 - P(Z < C)] = 0.95 \text{ أو } (Z < C) - P(Z < -C) = 0.95$$

$$\text{أو } 2P(Z < C) - 1 = 0.95 \text{ أي } P(Z < C) = 0.975$$

$$\text{ومنه } C = 1.96$$

مثال (4-8):

ليكن $X \sim N(40, 9)$ احسب: (1) $P(38 < X < 45)$

(2) $P(X > 50)$

الحل:

(1)

$$P(38 < X < 45) = P\left(\frac{38 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{45 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{38 - 40}{3} < Z < \frac{45 - 40}{3}\right) = P(-0.67 < Z < 1.67)$$

$$= P(Z < 1.67) - P(Z < -0.67) = 0.9525 - 0.2514 = 0.7011$$

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{50 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{50 - 40}{3}\right)$$

$$= P(Z > 3.33) = 1 - P(Z < 3.33)$$

$$= 1 - 0.996 = 0.004$$

مثال (5-8):

إذا كانت درجات الذكاء في مجتمع من الطلبة تتوزع طبيعياً بمعدل 100 وانحراف معياري 15. والمطلوب:

- (1) عين نسبة الأشخاص الذين تزيد درجة ذكائهم على 125.
 - (2) عين نسبة الأشخاص الذين تقل درجة ذكائهم عن 80.
 - (3) عين نسبة الأشخاص الذي تقع درجة ذكائهم بين 70 و 100.
 - (4) عين أدنى درجة ذكاء للسبعة في المائة الأوائل بدرجة ذكائهم.
 - (5) عين أعلى درجة ذكاء للخمسة في المائة الآخرين بدرجة ذكائهم.
- الحل:

ليكن X المتغير الدال على درجة الذكاء، عندئذٍ $X \sim N(100, (15)^2)$ ومنه:

$$P(X > 125) = 1 - P(X < 125) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{125 - 100}{15}\right)$$

$$= 1 - P(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

(2)

$$P(X < 80) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{80 - 100}{15}\right) = P(Z < -1.33) = 0.0918$$

(3)

$$P(70 < X < 130) = P(X < 130) - P(X < 70) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{130 - 100}{15}\right)$$

$$- P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{70 - 100}{15}\right) = P(Z < 2) - P(Z < -2)$$

$$= 0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

(4)

$$P(Z > a) = 0.07 \Rightarrow 1 - P(Z < a) = 0.07$$

$$\Rightarrow P(Z < a) = 0.93 \Rightarrow a = 1.47 \Rightarrow a = \frac{x - \mu}{\sigma} = 1.47$$

$$\Rightarrow x = 1.47\sigma + \mu = (1.47)(15) + 100 \approx 122$$

(5)

$$P(Z < a) = 0.05 \Rightarrow a = -1.645 \Rightarrow a = \frac{x - \mu}{\sigma} = -1.645$$

$$\Rightarrow x = (-1.645)(15) + 100 \approx 75$$

8-3-8: القاعدة التجريبية والخواص الخطية:

1) القاعدة التجريبية: إن قياسات عينة طبيعية مسحوبة من مجتمع طبيعي توقعه

μ وتباينه σ^2 تكون موزعة بالشكل التالي:

68.26% من القياسات تقع ضمن المجال $\mu \pm \sigma$

95.44% من القياسات تقع ضمن المجال $\mu \pm 2\sigma$

99.74% من القياسات تقع ضمن المجال $\mu \pm 3\sigma$

ولإثبات ذلك: نأخذ أولاً:

$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] = P\left[\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right]$$

$$P[-1 < Z < 1] = P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

بالأسلوب نفسه:

نثبت أن:

$$P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] = 0.9544$$

$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] = 0.9974$$

وإن القاعدة التجريبية تعد قاعدة لتحديد فيما إذا كان المجتمع المدروس يتوزع طبيعياً أم لا وذلك بتحديد نسبة القياسات من العينة والواقعة في المجالات:

$$\bar{X} \pm S; \bar{X} \pm 2S; \bar{X} \pm 3S$$

حيث $\bar{X}$ متوسط العينة و S الانحراف المعياري للعينة.

وهذه القاعدة تدعى بقاعدة 3σ .

(2) إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولناخذ $Y = aX + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ عندئذ Y يتوزع طبيعياً بتوقع $a\mu + b$ وتباين $a^2\sigma^2$. ولإثبات ذلك

$$M_Y(t) = M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) = e^{bt} \left[e^{\mu at + \frac{\sigma^2}{2} a^2 t^2} \right]$$

(لأن X طبيعي فدالة المولدة لعزومه من الشكل $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$ ومنه:

$$M_{aX+b}(t) = e^{(a\mu+b)t + a^2\sigma^2 \frac{t^2}{2}}$$

أي أن هذه الدالة هي دالة مولدة لعزوم متغير طبيعي توقعه $a\mu + b$ وتباينه $a^2\sigma^2$. $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

مثال (6-8):

يُنتج مصنع مسامير أنصاف أقطارها X تتوزع وفق $N(3, 0.04)$ ، ويُنْتِج صفائح مثقبة بثقوب دائرية أنصاف أقطارها Y تتوزع وفق $N(3.2, 0.01)$.
(1) عَيِّن احتمال أن تكون المسامير ملائمة لتدخل في ثقوب الصفائح؟

(2) إذا اخترنا أربعة أزواج من المسامير والصفائح، فما هو احتمال أن نجد زوجين منها على الأقل يحققان شرط الملاءمة؟
الحل:

(1) شرط الملاءمة هو: $X \leq Y$ أي $X - Y \leq 0$ حيث
 $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 3 - 3.2 = -0.2$
 (حيث X, Y مستقلان لأنهما فضاءين منفصلين):

$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$
 $\Rightarrow V(X - Y) = 0.04 + 0.01 = 0.05$
 وبما أن X طبيعي و Y طبيعي فإن $X - Y$ طبيعي حيث:

$$X - Y \sim N(-0.2, 0.05)$$

$$P[(X - Y) \leq 0] = P\left[\frac{(X - Y) - \mu}{\sigma} \leq \frac{-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \leq \frac{-(-0.2)}{\sqrt{0.05}}\right]$$

$$= P[Z \leq 0.893] = 0.813$$

(2) هنا لدينا تجربة برنولية (ملائمة أو عدم ملائمة) وتكرار مستقل فيها
 $P = 0.813$ و $n = 4$ فيكون $q = 1 - P = 1 - 0.813 = 0.187$ حيث المطلوب:
 (والتوزيع حداني):

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{4}{1}(0.813)(0.187)^3 - \binom{4}{0}(0.813)^0(0.187)^4 = 0.978$$

ملاحظة: تعميم: إذا كانت $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, \dots, n$ ومستقلة عشوائياً فإنه اعتماداً على مفهوم وخواص الدالة المولدة للعزوم نجد أنه من أجل
 $i = 1, 2, \dots, n; a_i \in R$

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

8-4: توزيع كوشي:

8-4-1: تعريف: نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق كوشي إذا كان

له دالة كثافة احتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)}; x \in R$$

حيث يلاحظ أن الدالة $f_X(x) > 0$ $\forall x \in R$ وأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} [\arctg x]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(x) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

مما يدل على أن $f_X(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية فعلية.

8-4-2: دالة التوزيع:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} [\text{Arctg} x]_{-\infty}^x$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\text{Arctg} x - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \text{Arctg} x + \frac{1}{2}$$

8-4-3: دراسة التوقع: لنبحث فيما إذا كان لـ X توقع متته

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} [\ln(1+x^2)]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) - 0 \right] = \infty$$

ومنه ليس لـ X توقع متته وبالتالي فإن دالته المولدة للعزوم غير موجودة.

مثال (7-8):

إذا كان X يتوزع بانتظام على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. فاثبت أن $Y = a \operatorname{tg} X$ حيث $a > 0$ يتوزع وفق كوشي من أجل $y \in \mathbb{R}$.
الإثبات:

إن دالة كثافة X من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}; & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$y = a \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{y}{a}; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a}{y^2 + a^2} > 0$$

ومنه دالة الكثافة:

$$g_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{y^2 + a^2}; \quad y \in \mathbb{R}$$

وهي كثافة كوشي.

8-4-4: الدالة المميزة: إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق كوشي أي:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2}; \quad x \in \mathbb{R}$$

فإن:

$$\Phi_X(w) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos wx + i \sin wx}{a^2 + x^2} dx;$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos wx}{a^2 + x^2} dx + i \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin wx}{a^2 + x^2} dx;$$

إن التكامل الثاني معدوم لأن الدالة المكاملة هي دالة فردية ومنه:

$$\Phi_X(w) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos wx}{a^2 + x^2} dx$$

ونلاحظ أن الدالة $\Phi_X(w)$ هي دالة زوجية وبالتالي لنحسب من أجل $w > 0$.
لنشتق $\Phi_X(w)$ بالنسبة لـ w :

$$\Phi'_X(w) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x \sin wx}{a^2 + x^2} dx$$

$$. a = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin wx}{x} dx \text{ وبالمثل } \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin wx}{x} dx$$

$$\Phi'_X(w) + a = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x \sin wx}{a^2 + x^2} dx + \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin wx}{x} dx$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin wx}{x} - \frac{x \sin wx}{a^2 + x^2} \right) dx$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2 \sin wx}{x(a^2 + x^2)} dx$$

بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ w :

$$\Phi''_X(w) = \frac{a^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos wx}{x(a^2 + x^2)} dx = \frac{a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos wx}{a^2 + x^2} dx$$

$$\Rightarrow \Phi''_X(w) = a^2 \Phi_X(w) \Rightarrow \Phi_X(w) = c_1 e^{aw} + c_2 e^{-aw}$$

وبما أن $\Phi_X(w)$ تابع محدود على كل المحاور الحقيقي، فإن $c_1=0$ ومن كون $\Phi_X(0)=1$ نجد $c_2=1$ وبالتالي $\Phi_X(w)=e^{-aw}$ وبما أن $\Phi_X(w)$ دالة زوجية فإن $\Phi_X(w)=e^{-a|w|}$.

ملاحظة: يمكن أن نعرف توزيع كوشي لمتغير X بـ:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + (x-b)^2}; \quad x \in R$$

a, b وسطاء هذا التوزيع.

5-8: توزيع غاما:

1-5-8: الدالة غاما: نعرف دالة $\Gamma(\alpha)$ بصورة عامة ومن أجل α عقدية جزؤها الحقيقي موجب بالتكامل:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx$$

وسندرس نحن حالة α حقيقية موجبة. حيث يمكننا حساب التكامل السابق

$$du = (\alpha-1)x^{\alpha-2} \cdot dx \Leftarrow u = x^{\alpha-1} \quad \text{بطريقة التجزئة وذلك بأن نأخذ}$$

$$V = -e^{-x} \Leftarrow dv = +e^{-x} dx$$

$$\Gamma(\alpha) = [uV]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} V du = \left[-x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} \cdot e^{-x} dx$$

(الجزء الأول من الطرف الأيمن معدوم بينما الجزء الثاني يمثل دالة في Γ)

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

وبتكرار الحسابات بالأسلوب نفسه:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2); \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\Gamma(\alpha-3)$$

ومن أجل كون n صحيحاً موجباً و $\alpha=n$ نجد:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3).....3.2.\Gamma(1)$$

حيث:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 1$$

ومنه:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = (n-1)!$$

وكذلك نجد أن:

$$\Gamma(2) = (2-1)\Gamma(2-1) = 1.\Gamma(1) = 1$$

وفي حالة كون $\alpha > 0$ (حقيقياً موجباً وليست صحيحة) نهتم، هنالك، بالقيمة:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{أن ثبت أن}$$

حيث إذا أخذنا الكثافة الاحتمالية الطبيعية المعيارية:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

وبسبب التناظر:

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \quad (*)$$

وبأخذ التحويل $Z = \frac{x^2}{2}$ حيث $x = \sqrt{2Z}$ ، $dx = \frac{dz}{\sqrt{2Z}}$ عندئذ من

(*) نجد:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-z} \cdot \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \sqrt{2} \int_0^{\infty} Z^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-z} dz = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} Z^{\frac{1}{2}-1} e^{-z} dz = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2-5-8: تعريف: من الدالة $\Gamma(\alpha)$ يمكننا أن نعرف دالة الكثافة الاحتمالية

الغماوية والتي نبرز فوائدها في دراسة مسائل تتعلق بأشكال تربيعية لتغيرات عشوائية طبيعية.

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق غاما بالوسيط α إذا كان له دالة كثافة احتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}; & x > 0; \alpha > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ونرمز لهذه الكثافة بـ $G(\alpha)$.

كما نعرف دالة الكثافة الضماوية المعصمة بالشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}; & x > 0; \alpha > 0; \beta > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ونرمز لهذه الكثافة بـ $G(\alpha, \beta)$ (حيث نأخذ أن $G(\alpha) = G(\alpha, 1)$).

3-5-4: حالات خاصة من التوزيع $G(\alpha, \beta)$:

(1) من أجل $\alpha = 1$ فإن $\beta > 0$ فإن $G(\alpha, \beta) = G(1, \beta)$ أي:

$$G(1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}; & x > 0; \beta > 0; \Gamma(1) = 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وهذه كثافة احتمالية لمتغير أسّي بالوسيط $\lambda = \frac{1}{\beta}$.

(2) من أجل ν صحيح موجب و $\alpha = \frac{\nu}{2}$ فإن $\beta = 2$ فإن $G(\alpha, \beta) = G(\frac{\nu}{2}, 2)$

$$G(\frac{\nu}{2}, 2) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-\frac{x}{2}}; & x > 0; \nu \text{ صحيح موجب} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وهذه كثافة احتمالية تدعى بكثافة كاي-مربع بدرجة من الحرية ν أي

نرمز بـ $G(\frac{\nu}{2}, 2)$ ولهذا التوزيع استخدامات واسعة في اختبار فرضيات الملاءمة والاستقلال والدراسات حول التباينات وتحليل التباين.

4-5-8: الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{(t-\frac{1}{\beta})x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x(1-\beta t)}{\beta}} dx$$

وبأخذ التحويل $dx = \frac{\beta dy}{(1-\beta t)}$; $t < \frac{1}{\beta}$; $x = \frac{\beta y}{1-\beta t} \Leftrightarrow y = \frac{x(1-\beta t)}{\beta}$ ومنه:

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^{\alpha}} \left[\frac{\beta y}{1-\beta t} \right]^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot \left(\frac{\beta}{1-\beta t} \right) dy; \quad t < \frac{1}{\beta}$$

$$= \left(\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} \cdot y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy$$

$$\Rightarrow M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = (1-\beta t)^{-\alpha}; \quad t < \frac{1}{\beta}$$

والدالة المميزة تكون:

$$\Phi_X(w) = (1-i\beta w)^{-\alpha}$$

ومن أجل $G(\alpha) = G(\alpha, 1)$ ينتج:

$$M_X(t) = (1-t)^{-\alpha}; \quad t < 1$$

$$\Phi_X(v) = (1-iv)^{-\alpha}$$

8-5-5: التوقع والعزم من المرتبة الثانية والتباين والانحراف المعياري للتوزيع غاما:

من الدالة المولدة للعزوم $M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$ يكون:
التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = E[\alpha(-\beta)(1-\beta t)^{-\alpha-1}]_{t=0} = \alpha\beta$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$EX^2 = [M''(t)]_{t=0} = [(1-\beta t)^{-\alpha}]''_{t=0} = [\alpha\beta(1-\beta)^{-(\alpha+1)}]_{t=0}$$

$$= [\alpha\beta(-(\alpha+1)(-\beta)(1-\beta)^{-(\alpha+1)-1})]_{t=0}$$

$$= \alpha\beta^2(1+\alpha)$$

والتباين:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \alpha\beta^2(1+\alpha) - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\alpha\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha} > 0$$

وبالتالي من أجل:

$$X \sim G(\alpha, \beta) \Rightarrow EX = \alpha\beta, \quad EX^2 = \alpha\beta^2(1+\alpha); V(X) = \alpha\beta^2; \sigma_X = \beta\sqrt{\alpha}$$

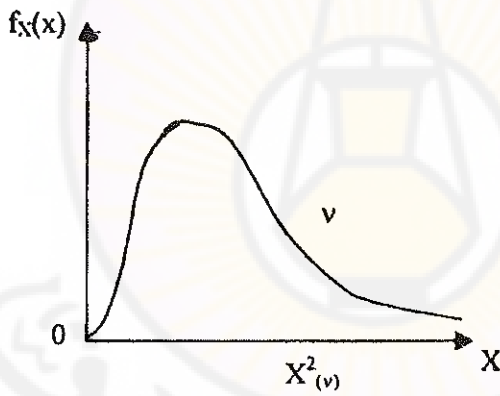
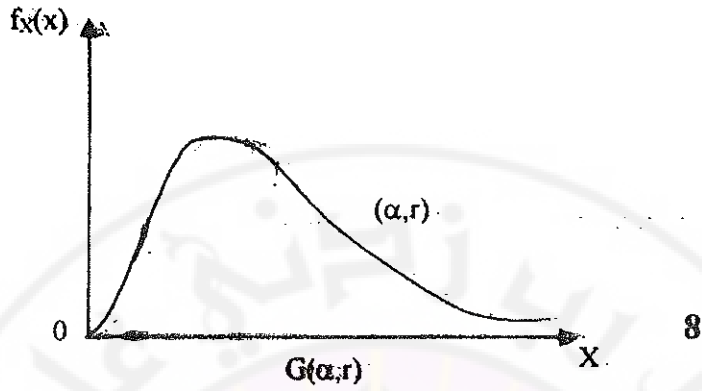
ومن أجل:

$$X \sim G(\alpha) = G(\alpha, 1) \Rightarrow EX = \alpha, EX^2 = \alpha(1+\alpha); V(X) = \alpha, \sigma_X = \sqrt{\alpha}$$

ومن أجل:

$$X \sim G(1, \beta) \Rightarrow EX = \beta; EX^2 = 2\beta^2 = 2\beta^2; \sigma_X = \beta$$

والكثافة الغماوية v الشكل:



5-6: توزيع مجموع متغيرات عشوائية غماوية مستقلة ولها التوزيع فقط:
 ليكن $X \sim G(\alpha, \beta)$ ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X مسين
 الحجم n . ولناخذ $\sum_{i=1}^n X_i$ ولنبحث عن نوع توزيع $\sum_{i=1}^n X_i$ وهذا يمكن أن نستغل
 إليه من $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t)$ حيث:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha} = (1 - \beta t)^{-n\alpha}$$

والدالة الناتجة هي مولدة لعزوم متغير غماوي وسطاؤه $(n\alpha, \beta)$. وبالتالي

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim G(n\alpha, \beta)$$

مثال (8-8): ليكن $X \sim G(2, 2)$ احسب $P(X > 5)$

الحل:

$$P(X > 5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{2\Gamma(2)} x^{2-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[-2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}} \right]_5^{\infty} = \frac{7}{2} e^{-\frac{5}{2}} = 0.287$$

6-8: توزيع كاي مربع:

1-6-8: تعريف: نقول عن متغير عشوائي X إنه يتوزع وفق كاي مربع —

ν درجة من الحرية (حيث ν صحيح موجب) أي $X \sim \chi^2(\nu)$ إذا كان له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}; x > 0; \\ 0 \end{cases} \quad \text{خلاف ذلك}$$

ومن تعريف توزيع غاما حيث $\chi^2(\nu) = G(\frac{\nu}{2}, 2)$ نجد أنها كثافة احتمالية

فعلية.

8-6-2: الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة:

$$M_X(t) = E(e^x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} e^x \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{(1-2t)x}{2}} dx$$

ثم نأخذ التحويل $t < \frac{1}{2}; x = \frac{2y}{1-2t} \Leftrightarrow \left(\frac{1-2t}{2}\right)x = y$ ومنه:

$$M_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\infty} \left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{2}{1-2t} dy$$

$$= (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} \left[\Gamma(\frac{\nu}{2})\right]^{-1} \int_0^{\infty} y^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} \left[\Gamma(\frac{\nu}{2})\right]^{-1} \Gamma(\frac{\nu}{2})$$

$$\Rightarrow M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}}; \quad t < \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi_X(w) = (1-2iw)^{-\frac{\nu}{2}}$$

8-6-3: التوقع والعزم من المرتبة الثانية والتباين والانحراف المعياري —

$$: X \sim \chi^2_{(\nu)}$$

من الدالة المولدة للعزوم لـ X : $t < \frac{1}{2}$: نجد أن $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}}$:

التوقع:

$$E(X) = [M'(t)]_{t=0} = \left[(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} \right]'_{t=0} = \left[\left(\frac{-\nu}{2} \right) (-2) (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}-1} \right]_{t=0} = \nu$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = [M''(t)]_{t=0} = [1-2t]^{-\frac{\nu}{2}} \Big|_{t=0} = \left[\nu(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}-1} \right]_{t=0}$$

$$= \left[\nu \left(\frac{-\nu}{2} - 1 \right) (-2)(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}-2} \right]_{t=0} = \nu(\nu+2) = \nu^2 + 2\nu$$

والتباين:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \nu^2 + 2\nu - \nu^2 = 2\nu$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2\nu} > 0$$

8-6-4: توزيع مجموع متغيرات عشوائية مستقلة تتوزع وفق كاي مربع:

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وحيث: $X_i \sim \chi^2_{(\nu_i)}$ حيث

$i=1, 2, \dots, n$ ولنبحث عن نوعية توزيع $\sum_{i=1}^n X_i$ وهذا ينتج من $M_{\sum_{i=1}^n X_i}$ حيث:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-\frac{\nu_i}{2}} = (1-2t)^{-\frac{\sum_{i=1}^n \nu_i}{2}}$$

والدالة الناتجة هي دالة مولدة لعزوم متغير كاي مربع بـ $\sum_{i=1}^n \nu_i$ درجة من

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{(\sum_{i=1}^n \nu_i)} \text{ الحرية أي}$$

8-6-5: علاقة توزيع كاي مربع مع التوزيع الطبيعي المعياري:

ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولنأخذ $W = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)$ أي $W \sim N(0,1)$

ولنأخذ $V = W^2 = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2$ فيمكننا أن نثبت أن $V \sim \chi^2_{(1)}$. ولإثبات ذلك

نأخذ دالة التوزيع لـ V حيث:

$$G_V(u) = P[V \leq u] = P[W^2 \leq u] = P[-\sqrt{u} \leq W \leq \sqrt{u}]$$

وبسبب التناظر في التوزيع الطبيعي المعياري فيكون:

$$G_V(u) = 2P[0 \leq W \leq \sqrt{u}] = 2 \int_0^{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw; u \geq 0$$

وبما أخذ التحويل $w = \sqrt{y}$ أي $w^2 = y$ فإن $dw = \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{dy}{2w}$

$$G_V(u) = 2 \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}} dy$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ u نجد:

$$f_V(u) = G'_V(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}}; u > 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{خلاف ذلك}$$

وكون: $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow f_V(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}}; u > 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{خلاف ذلك}$$

والكثافة الناتجة مقارنة مع كثافة $\chi^2_{(1)}$ نجد أن $f_V(u) \sim \chi^2_{(1)}$

8-6-6: مجموع مربعات متغيرات عشوائية طبيعية معيارية مستقلة هو كاي

مربع بدرجة من الحرية تساوي عدد المتغيرات:

ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X

ولنأخذ $W_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ أي $W_i \sim N(0,1)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، ووجدنا من

5-6. أن: $V_i = W_i^2$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ يتوزع وفق $\chi^2_{(1)}$ ومن (4-6-8) نجد

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{\substack{(1+1+\dots+1) \\ \text{مرّة } n}} \\ \sim \chi^2_{(v=n)}$$

مثال (8-9): عين نوع توزيع المتغير X والذي له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{2}}; & x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ثم استنتج توقع X وتباينه؟

الحل:

إن دالة الكثافة يمكن أن تكتب بالشكل: (بعد ملاحظة $\Gamma(2)=1$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^2 \cdot \Gamma(2)} \cdot x^{2-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}; & x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبالتالي نجد أن الكثافة هي كاي مربع بـ $\frac{v}{2}$ أي $v=4$ درجة مسن الحرية

$$EX = v = 4; EX^2 = v^2 + 2v = 24; V(X) = 2v = 8$$

مثال (8-10):

إذا كان لـ X دالة مولدة للعزوم من الشكل $M_X(t) = (1-2t)^{-8}$ عين نوع

X وتوقعه وتباينه (علماً بأن $t < \frac{1}{2}$).

الحل:

يمكننا كتابة الدالة بالشكل:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{16}{2}}$$

وبالتالي الدالة هي دالة لمتغير يتوزع وفق كاي-مربع بـ $v=16$ درجة من الحرية ومنه:

$$EX = v = 16; \quad V(X) = 2v = 32$$

مثال (8-11):

ليكن $X \sim \chi^2_{(v=5)}$ احسب: (1) $P(1.145 \leq X \leq 12.83)$

(2) $P(X > 15.09)$

الحل:

باستخدام جدول توزيع χ^2 :

(1)

$$P(1.145 \leq X \leq 12.83) = P(X \leq 12.83) - P(X \leq 1.145)$$

$$= 0.975 - 0.050 = 0.925$$

(2)

$$P(X > 15.09) = 1 - P(X \leq 15.09) = 1 - 0.99 = 0.01$$

ملاحظة: إذا كان X أسّي التوزيع بالوسط $\lambda = \frac{1}{2}$ فإن $X \sim \chi^2_{(2)}$ لأن:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{2-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{2}{2}} \cdot \Gamma(\frac{2}{2})} \Rightarrow X \sim \chi^2_{(v=2)}$$

ملاحظة: إذا كان $Z \sim N(0,1)$ وكان مثلاً المطلوب

$$P(|Z| < 1.96) = 0.95 \text{ فحسب (8-6-5) يكون } P(Z^2 < (1.96)^2) = 0.95$$

$$\text{أي } P(Z^2 < 3.842) = 0.95 \text{ حيث } Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

7-8: توزيع بيتا:

1-7-8: تعريف: يعرف تكامل بيتا من أجل $n > 0, m > 0$ —

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} dx; \quad m > 0, n > 0$$

ويبرهن في التحليل الرياضي أن:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}; \quad m, n > 0$$

2-7-8: تعريف واستنتاج توزيع بيتا:

ليكن $X_1 \sim G(m, \theta)$; $X_2 \sim G(n, \theta)$; وإذا كان X_1, X_2 مستقلين عشوائياً، فإن الكثافة المشتركة:

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

$$= \frac{1}{\theta^m \Gamma(m)} x_1^{m-1} \cdot e^{-\frac{x_1}{\theta}} \cdot e^{-\frac{x_1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta^n \Gamma(n)} x_2^{n-1} \cdot e^{-\frac{x_2}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m) \Gamma(n) \theta^{m+n}} x_1^{m-1} x_2^{n-1} \cdot e^{-\frac{(x_1+x_2)}{\theta}}; \quad x_1 > 0; x_2 > 0; m, n, \theta > 0$$

ولنأخذ $Z_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ ، $Z_2 = X_1 + X_2$ ، فهذا يعطي أن:

$$0 < Z_1 < 1, \quad 0 < Z_2 < \infty, \quad X_2 = Z_2 - Z_1 Z_2, \quad X_1 = Z_1 Z_2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Z_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_2 & Z_1 \\ -Z_2 & 1 - Z_1 \end{vmatrix} = Z_2(1 - Z_1) + Z_1 Z_2 = Z_2$$

ومنه الكثافة المشتركة لـ (Z_1, Z_2) من الشكل:

$$f_{(z_1, z_2)}(z_1, z_2) = |Z_2| \cdot \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)\theta^{m+n}} \cdot (Z_1 Z_2)^{m-1} \cdot (Z_2 - Z_1 Z_2)^{n-1} e^{-z_2/\theta}$$

$$0 < Z_1 < 1; 0 < Z_2 < \infty$$

والكثافة الهامشية لـ Z_1 :

$$f_{Z_1}(z_1) = \frac{Z_1^{m-1} \cdot (1 - Z_1)^{n-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot \int_0^\infty \frac{Z_2^{m+n-1}}{\theta^{m+n}} e^{-\frac{Z_2}{\theta}} dz_2$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot Z_1^{m-1} \cdot (1 - Z_1)^{n-1} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{m+n} \Gamma(m+n)} \cdot Z_2^{m+n-1} e^{-\frac{Z_2}{\theta}} dz_2$$

تكمّل لكثافة $G(m+n, \theta)$ تساوي الواحد

$$\Rightarrow f_{Z_1}(z_1) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot Z_1^{m-1} \cdot (1 - Z_1)^{n-1}; 0 < Z_1 < 1; m, n > 0$$

ومنّه فالكثافة الناتجة تدعى بكثافة بيتا ونرمز لها بـ $\beta(m, n)$.

ومنّه نقول عن متغير عشوائي X إنه يتوزع وفق $\beta(m, n)$ إذا كانت دالة

الكثافة الاحتمالية له من الشكل:

$$f_X(x) = \beta(m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1}; m, n > 0; 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$

خلاف ذلك

حيث m, n يمثلان وسطاء التوزيع.

7-3: التوقع والعزم من المرتبة الثانية والتباين والانحراف المعياري:

التوقع:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 x^m \cdot (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot B(m+1, n)$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot \frac{m\Gamma(m)\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)} = \frac{m}{m+n}$$

والآن من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m+1} \cdot (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} B(m+2, n)$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(m+2)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{\Gamma(m+n) \cdot (m+1)m\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m)\Gamma(n) \cdot (m+n+1)(m+n)\Gamma(m+n)}$$

$$= \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)}$$

سوف نباين عندئذ:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)} - \frac{m^2}{(m+n)^2}$$

$$= \frac{m \cdot n}{(m+n)^2 (m+n+1)}$$

والانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{m \cdot n}{(m+n)^2 (m+n+1)}}$$

8-7-4: العلاقة بين توزيع $\beta(m,n)$ والتوزيع الحداني:

يمكننا ملاحظة أنه إذا كان $X \sim \beta(m,n)$ حيث m,n صحيحان موجبيان ومن أجل $0 < x < 1$ فإن:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[U \geq m] = 1 - F_U(m-1)$$

حيث U يتوزع توزيعاً حدانياً بالوسطاء $N=m+n-1$ و $P=x$.

مثال (8-12):

ليكن $X \sim \beta(3,2)$ احسب $P(X \leq 0.40)$ واحسب $P(X \leq 0.20)$.
الحل:

لدينا $m=3, n=2$ ومنه: $P(X \leq 0.4) = P[U \geq 3]$

حيث U حداني وسطاؤه $N=3+2-1$ و $x=P=0.40$.

$$P(X \leq 0.40) = P[U \geq 3] = \binom{4}{3} (0.40)^3 (0.60)^1 + \binom{4}{4} (0.40)^4 (0.60)^0$$

$$= 0.15360 + 0.02560 = 0.17920$$

$$P(X \leq 0.20) = P[U \geq 3] = \binom{4}{3} (0.20)^3 (0.80)^1 + \binom{4}{4} (0.20)^4 (0.80)^0$$

$$= 0.02720$$

8-8: توزيع ستودنت:

8-8-1: تعريف: إذا كان $V \sim N(0,1)$ وكان $U \sim \chi^2_v$ و U, V مستقلين عشوائياً. عندئذ نقول عن المتغير

$$T = \frac{V}{\sqrt{\frac{U}{v}}}$$

بدرجة من الحرية v .

حيث تعرف دالة الكثافة الاحتمالية لـ T بـ:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}; \quad t \in R$$

وتكتب الكثافة أيضاً بالشكل:

$$f_T(t) = \frac{(1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n} \cdot B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})}; \quad t \in R$$

8-8-2: التوقع والتباين والعزم من المرتبة الثانية والانحراف المعياري:
من دالة الكثافة لـ T:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}; \quad t \in R$$

نلاحظ أنها متناظرة حول الصفر ومنه العزوم الفردية معدومة أي $E(T)=0$
أما بالنسبة للعزم من المرتبة الثانية، سنناقش كما يلي:
من أجل $n=1$ تصبح $f_T(t)$ من الشكل:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + t^2)} = \frac{1}{\pi(1 + t^2)}; \quad t \in R$$

(حيث $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$) والكثافة الناتجة هي لكوشي حيث لا يوجد تباين.
ولذلك سنناقش من $n > 2$:

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{t^2}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt$$

وبالتكامل بطريقة التجزئة نأخذ:

$$\begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \frac{t}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt \Rightarrow V = \frac{-n}{n-1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \end{cases}$$

$$ET^2 = [u \cdot v]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} V du = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left\{ \left[-t \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right.$$

ممدوم بسبب التناظر

$$\left. + \frac{n}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \right\}$$

$$ET^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\frac{n}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} dt \right]$$

$$ET^2 = \frac{n}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt + \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{t^2}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt$$

$$ET^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) dt}{n-1} + \frac{ET^2}{n-1} \Rightarrow ET^2 - \frac{ET^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$\Rightarrow (ET^2) \left[1 - \frac{1}{n-1}\right] = \frac{n}{n-1} \Rightarrow ET^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} = \frac{n}{n-2}; n > 2$$

ومنه تبين T :

$$V(T) = ET^2 - (ET)^2 = \frac{n}{n-1}; n > 2$$

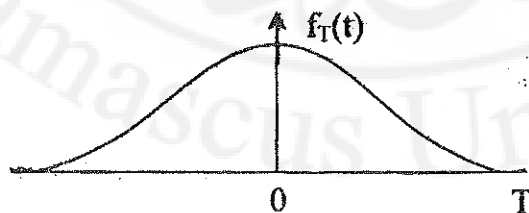
والانحراف المعياري:

$$\sigma_T = \sqrt{V(T)} = \sqrt{\frac{n}{n-2}}; n > 2$$

8-3 ملاحظات:

(1) يمكننا حساب القيم الاحتمالية للواقعة لـ T ودرجة حرية معينة من جدول توزيع ستودنت وتعامل مع الجدول بالأسلوب نفسه المستخدم في جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

(2) إن منحنى الكثافة لستودنت مشابه لمنحنى الكثافة في التوزيع الطبيعي المعياري لكنه أكثر تفلطحاً ويتمتع بالخواص نفسها التي يتمتع بها منحنى الكثافة الطبيعية المعياري ويعتمد المنحنى على درجة الحرية v .



والجدول يعطي القيمة الموجبة لـ t والتي يقع على يسارها $(1-\alpha)$ من المساحة الكلية تحت المنحني وذلك من أجل قيم مختلفة لـ α و v ونرمز بـ $t_{\alpha}(v)$ للدلالة على قيمة المتغير t في جدول التوزيع الاحتمالي لـ T والواقعة في ملتقى السطر v والعمود $(1-\alpha)$.

مثال: $t_{0.025}=2.145$ (حيث ندخل الجدول وفق السطر 14 ونتحرك إلى العمود 0.975 فنجد القيمة 2.145). (انظر ملحق الجداول).

(3) من تعريف $T = \frac{V}{\sqrt{U/\gamma}}$ أي $T = \frac{V \cdot \sqrt{\gamma}}{\sqrt{U}}$ وكون v, u مستقلين يمكننا ببساطة إيجاد الكثافة المشتركة.

$$f_{(v, \sqrt{u})}(v, u) = f_v(v) \cdot f_{\sqrt{u}}(u)$$

وكون:

$$U \sim \chi^2_{(v)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} x^{\frac{v}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & ; x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ويكون:

$$\sqrt{U} \sim \chi_{(v)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} u^{\frac{v}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}} & ; u > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث استخدمنا مفهوم الانتقال من $\sqrt{U} \sim \chi_{(v)}$ إلى $U \sim \chi^2_{(v)}$

$$f_U(v) = f(u) \left| \frac{dU}{dw} \right|_{x=u^2} = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} e^{-\frac{u^2}{2}} (u^2)^{\frac{v}{2}-1} 2u, \quad u > 0$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{v}{2}-1} \Gamma(\frac{v}{2})} e^{-\frac{u^2}{2}} u^{v-1}, \quad u > 0$$

$$f_{(v, \sqrt{U})}(v, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{v}{2}-1} \Gamma(\frac{v}{2})} e^{-\frac{u^2}{2}} u^{v-1}; \quad u > 0; \quad v \in \mathbb{R}$$

وإذا كان $f_{(T, \sqrt{U})}(t, u)$ هو دالة الكثافة المشتركة لـ $(T, \sqrt{U})$ فإن:

$$f_{(T, \sqrt{U})}(t, u) = \int_{v=\frac{t}{\sqrt{v}}} f_{(v, \sqrt{U})}(v, u) |J| dv$$

ولكن:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial T} & \frac{\partial V}{\partial \sqrt{U}} \\ \frac{\partial \sqrt{U}}{\partial T} & \frac{\partial \sqrt{U}}{\partial \sqrt{U}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{u}{\sqrt{v}} & \frac{\partial V}{\partial \sqrt{U}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{u}{\sqrt{v}}$$

ومنه:

$$f_{(T, \sqrt{U})}(t, u) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}-1} \sqrt{2\pi} \Gamma(\frac{v}{2})} e^{-\frac{1}{2}(v^2 + u^2)} u^{v-1} \cdot \frac{u}{\sqrt{v}} \Big|_{v=\frac{t}{\sqrt{v}}}^{\frac{t}{\sqrt{v}}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{v}{2}-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{v\pi} \Gamma(\frac{v}{2})} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2 u^2}{v} + u^2)} u^v$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{\nu}+1)u^2} u^{\nu}$$

ومنه الكثافة الهامشية لـ T:

$$f_T(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{\nu}+1)u^2} u^{\nu} du$$

$$\text{فإن } u = \frac{(2Z)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{t^2}{\nu}+1)^{\frac{1}{2}}} \text{ فإن } Z = \frac{1}{2}(\frac{t^2}{\nu}+1)u^2 \text{ إذن}$$

$$du = \frac{(2Z)^{\frac{-1}{2}}}{(\frac{t^2}{\nu}+1)^{\frac{1}{2}}} dz$$

وبذلك

$$f_T(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\infty} e^{-z} \cdot \frac{(2Z)^{\frac{\nu}{2}}}{(\frac{t^2}{\nu}+1)^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{(2Z)^{\frac{-1}{2}}}{(\frac{t^2}{\nu}+1)^{\frac{1}{2}}} dz$$

$$= \frac{2^{\frac{\nu-1}{2}}}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2}) (\frac{t^2}{\nu}+1)^{\frac{\nu+1}{2}}} \int_0^{\infty} Z^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-z} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \cdot \frac{1}{(\frac{t^2}{v} + 1)^{\frac{v+1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-z} dz}{\text{دالة غاماوية}}$$

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \cdot \frac{1}{(\frac{t^2}{v} + 1)^{\frac{v+1}{2}}} \Gamma(\frac{v+1}{2}), \quad t \in R$$

وهي فعلاً كثافة ستودنت بـ v درجة من الحرية. وهي كثافة احتمالية فعلية أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) dt = 1$$

والتناظر حول الصفر $f_T(-t) = f_T(t)$ حيث $f_T(t)$ متناظر حول الصفر

مثال (8-3):

ليكن T متغيراً عشوائياً يتوزع وفق ستودنت بتباين $\frac{5}{4}$

احسب $P(-1.812 \leq T \leq 1.812)$.

الحل:

$$\text{بما أن } V(T) = \frac{v}{v-2} \text{ و } V(T) = \frac{5}{4} \text{ عندئذ:}$$

$$\frac{v}{v-2} = \frac{5}{4} \Rightarrow v = 10 \text{ ومنه:}$$

$$P(-1.812 \leq T \leq 1.812) = P(T \leq 1.812) - P(T \leq -1.812)$$

من جدول ستودنت و $v=10$

$$= 0.95 - 0.05 = 0.90$$

مثال (8-4):

إذا كان T متغيراً عشوائياً يتوزع وفق ستودنت بـ $v=14$ فمتى c من أجل

$$P(|T| < c) = 0.90$$

الحل:

$$P(|T| < C) = P(-C < T < C) = P(T < C) - P(T < -C)$$

وبسبب التناظر:

$$P(|T| < C) = P(T < C) - P(T > C) = P(T < C) - [1 - P(T < C)]$$

$$= 2P(T < C) - 1 = 0.90 \Rightarrow 2P(T < C) = 1.90$$

من جدول ستودنت و $v=14$ نجد أن:

$$\Rightarrow P(T < C) = 0.95 \Rightarrow C = 1.761$$

9-8: توزيع فيشر:

1-9-8: تعريف: إذا كان $X_1 \sim \chi^2_{(v_1)}$ وكان $X_2 \sim \chi^2_{(v_2)}$ وكان

$$F = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$$
 متغيرين عشوائيين مستقلين. عندئذ ندعو المتغير F بمتغير فيشر

وله دالة الكثافة التالية:

$$f_F(x) = \frac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2})} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} x^{\frac{v_1}{2}-1} \cdot \left(1 + \frac{v_1}{v_2}x\right)^{-\frac{(v_1+v_2)}{2}} ; x > 0$$

ولهذا التوزيع أهمية خاصة في دراسات حول التباين وتحليل التباين في التجارب الإحصائية. ونقول إن F يتوزع وفق فيشر بدرجة من الحرية (v_1, v_2) ونرمز له بـ $f_{(v_1, v_2)}$.

2-9-8: ملاحظات:

$$(1) \text{ إن } f_{(v_1, v_2)} \neq f_{(v_2, v_1)}$$

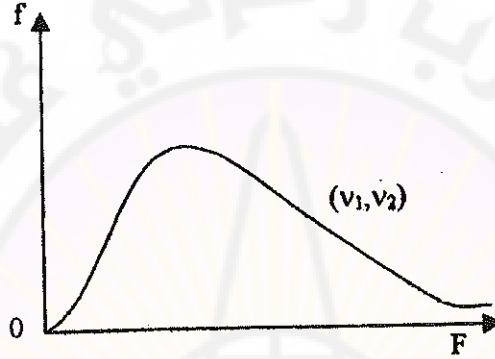
$$(2) \text{ من أجل } \alpha \text{ قيمة احتمالية معينة فإن } \frac{1}{f_{(v_1, v_2)}(\alpha)} = f_{(v_2, v_1)}(1-\alpha)$$

(3) إن شكل منحنى الكثافة لتوزيع فيشر هو من شكل كثافة χ^2 والقيم الاحتمالية الموافقة لمتغير فيشر تستخرج من جدول توزيع فيشر

(انظر ملحق الجداول الاحتمالية للتوزيعات)

مثال:

من أجل $v_1=7$, $v_2=8$ فإن: $P[F \leq 3.50] = 0.95$ أو $F_{0.05}(7,8) = 3.50$.



مثال:

من أجل $v_1=9$, $v_2=4$ فإن $P(F \leq 14.66) = 0.99$ أو $F_{0.01}(9,4) = 14.66$

حيث الجدول F يحسب قيم من الشكل $P[F \geq F_{\alpha}(v_1, v_2)] = \alpha$.

(4) يمكننا استنتاج كثافة فيشر من تعريف متغير فيشر F حيث كون

وكون $F = \frac{X_1/V_1}{X_2/V_2}$ (X_1, X_2) مستقلين. لنبحث
أولاً عن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (X_1, X_2) :

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

$$\Rightarrow f_{(x_1, x_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^{\frac{\eta+1}{2}} \Gamma(\frac{\nu_1}{2}) \Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \cdot e^{-\frac{(x_1+x_2)}{2}} \cdot x_1^{\frac{\eta_1}{2}-1} x_2^{\frac{\eta_2}{2}-1}; x_1, x_2 > 0$$

فإذا فرضنا أن $f_{(F, X_1)}(x, x_2)$ هو دالة الكثافة المشتركة لـ (F, X_2) عندئذ:

$$f_{(F, X_2)}(x, x_2) = f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) \cdot |J|_{x_1 = \frac{\nu_1}{\nu_2} x, x_2}$$

ولكن:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial F} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial F} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\nu_1}{\nu_2} x_2 & \frac{\nu_1}{\nu_2} x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\nu_1}{\nu_2} x_2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{(x_1, x_2)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2^{\frac{\eta+1}{2}} \Gamma(\frac{\nu_1}{2}) \Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu_1}{\nu_2} x + x_2)} \cdot (\frac{\nu_1}{\nu_2} x x_2)^{\frac{\eta_1}{2}-1} x_2^{\frac{\eta_2}{2}-1} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2} x_2 \\ &= \frac{(\frac{\nu_1}{\nu_2})^{\frac{\eta_1}{2}} x^{\frac{\eta_1}{2}-1}}{2^{\frac{\eta+1}{2}} \Gamma(\frac{\nu_1}{2}) \Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu_1}{\nu_2} x + 1)x_2} \cdot x_2^{\frac{\eta_2}{2}-1} \end{aligned}$$

والكثافة الهامشية لـ F يتبع من:

$$f_F(x) = \frac{(\frac{\nu_1}{\nu_2})^{\frac{\eta_1}{2}} x^{\frac{\eta_1}{2}-1}}{2^{\frac{\eta+1}{2}} \Gamma(\frac{\nu_1}{2}) \Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu_1}{\nu_2} x + 1)x_2} \cdot x_2^{\frac{\eta_2}{2}-1} dx$$

$$\text{بالتعويض } x_2 = \frac{2u}{(\frac{\nu_1}{\nu_2} x + 1)} \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} (\frac{\nu_1}{\nu_2} x + 1) x_2$$

$$dx_2 = \frac{2du}{\left(\frac{v_1}{v_2}x + 1\right)}$$

$$f_F(x) = \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} x^{\frac{v_1}{2}-1}}{2^{\frac{v_1+v_2}{2}} \Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \frac{(2u)^{\frac{v_1+v_2}{2}-1}}{\left(\frac{v_1}{v_2}x + 1\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \cdot \frac{2du}{\left(\frac{v_1}{v_2}x + 1\right)}$$

حيث يلاحظ بعد اعتبار التواب وإصلاح ما تحت التكامل، أن ما تحت التكامل يؤدي إلى دالة غاماوية من الشكل: $\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)$ ومنه نجد:

$$f_F(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}x + 1\right)^{-\frac{v_1+v_2}{2}} \cdot x^{\frac{v_1}{2}-1} & x > 0 \\ 0 & \text{غلاف ذلك} \end{cases}$$

ونقول إنه $F \sim F_{v_1, v_2}$ أي F يتوزع وفق فيشر بـ v_1 درجة حرية للبسط و v_2 درجة حرية للمقام.

8-9-3: التوقع والتباين: ليكن X متغيراً عشوائياً يتوزع وفق فيشر $f_{(v_1, v_2)}$ حيث

$$X_2 \sim \chi^2_{(v_2)}; \quad X_1 \sim \chi^2_{(v_1)}; \quad X = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$$

و X_1, X_2 مستقلات، فإن العزم من المرتبة r :

$$E(X^r) = E\left[\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r X_1^r X_2^{-r}\right] = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r E(X_1^r) E(X_2^{-r})$$

ولكن:

$$E(X'_1) = \frac{1}{2^{\frac{v_1}{2}} \Gamma(\frac{v_1}{2})} \int_0^{\infty} x_1^{\frac{v_1}{2} + r - 1} \cdot e^{-\frac{x_1}{2}} dx_1$$

وبأخذ $dx_1 = 2dz \Leftarrow x_1 = 2z \Leftarrow \frac{x_1}{2} = z$ نجد:

$$E(X'_1) = \frac{2^{\frac{v_1}{2} + r}}{2^{\frac{v_1}{2}} \Gamma(\frac{v_1}{2})} \int_0^{\infty} z^{\frac{v_1}{2} + r - 1} \cdot e^{-z} dz = 2^r \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_1}{2} + r)}{\Gamma(\frac{v_1}{2})}$$

وبالأسلوب نفسه نجد أن:

$$E(X'_2)^{-r} = 2^{-r} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_2}{2} - r)}{\Gamma(\frac{v_2}{2})}$$

ومنه:

$$E(X^r) = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_1}{2} + r) \cdot \Gamma(\frac{v_2}{2} - r)}{\Gamma(\frac{v_1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{v_2}{2})}; \forall 2r < v_2$$

من أجل $r=1$:

$$E(X) = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_1}{2} + 1) \cdot \Gamma(\frac{v_2}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{v_1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{v_2}{2})}$$

وكون $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ فنجد عندئذ:

$$E(X) = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{\frac{v_1}{2} \Gamma(\frac{v_1}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_2}{2} - 1)}{(\frac{v_2}{2} - 1) \Gamma(\frac{v_2}{2} - 1)} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{\frac{v_1}{2}}{\frac{v_2}{2} - 1} = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \forall 2 < v_2$$

ومن أجل $r=2$:

$$E(X^2) = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_1}{2} + 2) \Gamma(\frac{v_2}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{v_2}{2}) \Gamma(\frac{v_2}{2})}; \quad \forall 4 < v_2$$

$$= \frac{v_2^2}{v_1^2} \cdot \frac{(\frac{v_1}{2} + 1)(\frac{v_1}{2}) \Gamma(\frac{v_1}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_2}{2} - 2)}{(\frac{v_2}{2} - 1)(\frac{v_2}{2} - 2) \Gamma(\frac{v_2}{2} - 2)}$$

$$= \frac{v_2^2}{v_1^2} \cdot \frac{(\frac{v_1}{2} + 1)(\frac{v_1}{2})}{(\frac{v_2}{2} - 1)(\frac{v_2}{2} - 2)} = \frac{v_2^2(v_1 + 2)}{v_1(v_2 - 2)(v_2 - 4)}; \quad \forall v_2 > 4$$

ومنه التباين:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{v_2^2(v_1 + 2)}{v_1(v_2 - 2)(v_2 - 4)} - \frac{v_2^2}{(v_2 - 2)^2}$$

$$V(X) = \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)(v_2 - 4)}$$

مثال (8-15):

إذا F يتوزع وفق فيشر بـ $v_1=4$, $v_2=9$ درجة من الحرية وإذا كان $P(F \leq c) = 0.01$ و $P(F \leq d) = 0.05$ عين c, d ؟

الحل:

(1)

$$C = F_{0.99}(4.9) = \frac{1}{F_{0.01}(9.4)} = \frac{1}{14.66} = 0.0682$$

$$d = F_{0.25}(4.9) = \frac{1}{F_{0.05}(9.4)} = \frac{1}{6.00} = 0.1667$$

(2) وإذا كان $F \sim f_{(6,9)}$ احسب $P(F \leq 0.2439)$

$$P(F \leq 0.2439) = P\left(\frac{1}{F} \geq \frac{1}{0.2439}\right) = P\left(\frac{1}{F} \geq 4.100\right) = 0.05$$

لأن $\frac{1}{F} \sim f_{(9,6)}$

8-10: توزيع وايبول:

8-10-1: تعريف: نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتوزع وفق وايبول إذا

كان له دالة كثافة احتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} abx^{b-1} \cdot e^{-ax^b} & ; x > 0; a, b > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وهذه كثافة احتمالية فعلية (يمكن بسهولة التحقق من ذلك). ونرمز له بـ

$W(b, a)$.

8-10-2: حالة خاصة: من أجل $b=1$ تصبح كثافة وايبول من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & ; x > 0; a > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وهذه هي كثافة متغير عشوائي أسّي بالوسيط a أو $X \sim G(1, a)$.

8-10-3: دالة التوزيع:

إذا كان $Y \sim G(1, a)$ وكان $X = Y^{\frac{1}{b}}$ فإن $X \sim W(b, a)$ $a, b > 0$

لأن:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X^b \leq x^b] = P[Y \leq x^b]$$

ولكن Y أسّي التوزيع بالوسيط a ومنه:

$$F_X(x) = F_Y(x^b) = 1 - e^{-ax^b}$$

وبدالة الكثافة تكون:

$$f_X(x) = \begin{cases} abx^{b-1} \cdot e^{-ax^b} & ; x > 0; a > 0, b > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

4-10-8: التوقع والتباين:

التوقع:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} abx^b \cdot e^{-ax^b} dx$$

وبأخذ التحويل $u = ax^b$ عندئذ:

$$E(X) = \frac{ab}{ab} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{b}-1}} \cdot \int_0^{\infty} u e^{-u} u^{\frac{1}{b}-1} du = \frac{1}{a^{\frac{1}{b}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{b}} e^{-u} du$$

$$= a^{-\frac{1}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$$

والعزم من المرتبة الثانية:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\infty} abx^{b+1} \cdot e^{-ax^b} dx$$

$$\frac{1}{ab} \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{b}-1} du = dx \Leftrightarrow \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{b}} = x \Leftrightarrow u = ax^b$$

وبأخذ

$$\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{b}-1}} du = dx \quad \text{أو} \quad \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{b}-1}} du = dx$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \frac{(ab)}{ab} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{b}-1}} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{u}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \right]^{b+1} \cdot e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{b}-1} du \\
 &= \frac{1}{a^{\frac{1}{b}-1} \cdot a^{1+\frac{1}{b}}} \int_0^{\infty} u^{1+\frac{1}{b}} \cdot e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{b}-1} du \\
 &= \frac{1}{a^{\frac{2}{b}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{2}{b}} \cdot e^{-u} du = a^{-\frac{2}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right)
 \end{aligned}$$

والتباين يكون عندئذ:

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = a^{-\frac{2}{b}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right]$$

8-11 توزيع ماكسويل: نقول عن المتغير العشوائي X والذي له دالة الكثافة

الاحتمالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}; & x > 0, a > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بأنه متغير ماكسويل بالوسيط a ، أي أن X يتوزع وفق ماكسويل بالوسيط a .
ويمكننا ببساطة أن نتحقق من أن:

$$E(X) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi a}}; V(X) = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)a^{-1}$$

8-12 توزيع ريل: نقول عن المتغير العشوائي X والذي له دالة كثافته

الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2h^2 \cdot x \cdot e^{-h^2 x^2}; & x > 0; h \neq 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بأنه متغير ريل أي X يتوزع وفق ريل وهو حالة خاصة من توزيع وايبول
عندما يكون $b=2$.

ويمكننا ببساطة إثبات أن:

$$E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}; \quad E(X^2) = \frac{1}{h^2}; \quad V(X) = \frac{4-\pi}{4h^2}$$

8-13: توزيع لابلاس: نقول عن المتغير العشوائي X والذي ليس له دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}; \quad x \in R; \quad \lambda > 0$$

بأنه يتوزع وفق لابلاس بالوسيط λ .

ودالة التوزيع تكون ببساطة:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & ; x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & ; x > 0 \end{cases}$$

والتوقع يكون:

$$E(X) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda|x|} dx = 0$$

والتباين:

$$V(X) = EX^2 = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x|} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

والدالة المميزة:

$$\Phi_X(w) = E(e^{iwx}) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} \cdot e^{-\lambda|x|} dx$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{iwx + \lambda x} dx + \int_0^{+\infty} e^{iwx - \lambda x} dx \right]$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+iw)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-iw)x} dx \right]$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{\lambda+iw} + \frac{1}{\lambda-iw} \right] = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{2\lambda}{\lambda^2 + w^2} \right] = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + w^2}$$

8-14: توزيع اللوغاريتم الطبيعي: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وأخذنا

$W = e^X$ عندئذ الكثافة الاحتمالية الناتجة لـ W هي من الشكل:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sigma w \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln w - \mu)^2}{\sigma^2}}; 0 < w < \infty$$

تدعى بكثافة اللوغاريتم الطبيعي حيث $X = \ln W$.

حيث يلاحظ أن:

$$F_W(w) = P[W \leq w] = P[e^X \leq w] = P[X \leq \ln w]$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln w} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx; w > 0$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ w نجد:

$$f_W(w) = F'_W(w) = \frac{1}{\sigma w \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\ln w - \mu)^2}{\sigma^2}}; w > 0$$

وهي دالة الكثافة لتغير W يتوزع وفق اللوغاريتم الطبيعي.

ويرهن ببساطة أن:

$$E(W) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}; E(W^2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}; V(W) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

وهذا التوزيع يستخدم في دراسة أعمار النظم الإلكترونية والكهربائية والميكانيكية.

8-15: قانون غير معلوم:

(1) ليكن X متغيراً عشوائياً منتظماً التوزيع على المجال $[a, b]$ ، $a < b$. عيّن $E(X)$ ، $E(X^2)$ ، $V(X)$ ، σ_X بالحساب المباشر (دون استخدام الدالة المولدة لعزوم X أو دالته المميزة). ثم احسب العزم من المرتبة r لـ X (حيث r صحيح موجب).

(2) ليكن X منتظماً التوزيع على المجال $[0, 1]$. عيّن الدالة المميزة لـ X بالحساب المباشر (دون استنتاجها من الدالة المولدة لعزوم X).

(3) ليكن X متغيراً عشوائياً دالته المولدة لعزومه من الشكل:

$$M_X(t) = \frac{e^{5t} - e^{4t}}{t}; t \neq 0; M(0) = 1$$

احسب $E(X)$ ، $V(X)$ واحسب $P(4.2 < X \leq 4.7)$

(4) ليكن X متغيراً أسياً وسيطه $(\lambda > 0)$. عيّن توقع وتباين X بطريقة الحساب المباشر. ثم احسب العزم من المرتبة r للمتغير X .

(5) ليكن Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين يتوزع كل منهما توزيعاً أسياً بالوسيط نفسه λ . عيّن الدالة المولدة لعزوم $X+3Y$ واستنتج منه $E(X+3Y)$ و $V(X+3Y)$

(6) ليكن X متغيراً عشوائياً أسياً التوزيع بالوسيط $\lambda=2$. عيّن $E(X)$ ، $V(X)$ و $M_X(t)$

(7) ليكن X متغيراً عشوائياً أسياً وسيطه $\lambda = \frac{1}{2}$. عيّن $E(X)$ ، $V(X)$ ، $M_X(t)$ واحسب $P(X > 3)$ ثم احسب $P(X > 5 | X > 2)$.

(8) ليكن X متغيراً عشوائياً، دالته المولدة للعزوم من الشكل:

$$M_X(t) = \frac{3}{3-t} \quad \text{من أجل } t < 3 \quad (a)$$

(b) $M_X(t) = \frac{1}{3-t}$ من أجل $t < \frac{1}{3}$. ماهي دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتوقع X وتباينه.

١٠- ليس μ متغيراً عشوائياً طبيعياً بالوسطاء μ ، σ . عين توقع μ وبإتجاه الحساب المباشر.

(10) ليكن X متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً احسب EX^2 حيث σ صحيح موجب (ناقش حالة كون σ فردياً و σ زوجياً).

(11) تقدم لامتحان مقرر الإحصاء 750 طالباً وطالبة. وبعد إعلان النتائج، تبين أن درجات الطلاب والطالبات التي نالوها تتوزع طبيعياً وفق $N(60, 100)$. عين أقل درجة نالها الطالب من العشرة الأوائل.

(12) إذا كان متوسط القطر الداخلي في عينة من 200 قرص دائري هو 5.02 بانحراف معياري 0.05 mm. والهدف من استخدام هذه الأقراص يسمح بانحراف في القطر من 4.96 إلى 5.08؛ وفيما عدا ذلك يعد القرص معيماً. فإذا كانت الأقطار تتوزع طبيعياً. عين النسبة المئوية للأقراص المعيبة وما هو عددها في العينة المفروضة.

(13) إذا كان زمن وصول الطالب A من منزله إلى جامعته يتوزع طبيعياً وفق $N(25, 16)$ وزمن وصول الطالب B من منزله إلى الجامعة نفسها أيضاً يتوزع طبيعياً وفق $N(28, 9)$ فإذا خرج الطالبان كل من منزله بالتحفة نفسها. فما هو احتمال أن يتلاقيا أمام مدخل الجامعة، إذا كان كل منهما سيعتظر الآخر 5 دقائق ثم يدخل للجامعة.

(14) ينتج مصنع مدخرات، وتبين نتيجة الدراسة أن متوسط عمر البطارية هو 1200 يوماً بانحراف معياري 50 يوماً. وأن هذا العمر يتوزع توزيعاً طبيعياً. كم يوماً يجب أن تكون مدة الكفالة التي يريد أن يقدمها صاحب المصنع لزملائه على أن لا تزيد نسبة البطاريات من إنتاجه والمسكن أن تلف قبل مدة الكفالة على 10%.

(15) إذا كان طول طلبة الجامعة يتوزع طبيعياً وفق $N(175, 56.25)$ ، ووحدة القياس سنتيمتر. فعند بناء كلية جديدة في الجامعة كيف يحدد مهندس ارتفاع أبواب القاعات الدراسية، بحيث لا يضطر أكثر من 0.02 من الطلبة إلى طأطأة رؤوسهم عند الدخول أو الخروج.

(16) إذا كانت الدالة المولدة للعزوم لمتغير X من الشكل: $M_X(t) = e^{5t+12t^2}$

ما هو نوع توزيع المتغير X ثم عين التوقع والتباين لـ X عندئذ؟

(17) ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين وطبيعيين معياريين. عندئذ $U = \frac{X}{Y}$

يتوزع وفق كوشي من أجل $u \in \mathbb{R}$.

(18) ليكن $X \sim G(\alpha, \beta)$. عين $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$, $E(X)^2$

بالحساب المباشر.

(19) ليكن $X \sim G(\alpha)$ عين $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$, $E(X)^2$

بالحساب المباشر.

(20) إذا كانت الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X من الشكل:

$M(T) = (1 - 7t)^{-20}$; $t < 1/7$ ما هو نوع توزيع X ثم استنتج $E(X)$, $V(X)$.

(21) إذا كانت الدالة المميزة لعزوم المتغير العشوائي X من الشكل:

$\Phi_X(w) = (1 - i8w)^{-24}$ ما هو نوع توزيع X واستنتج منها $E(X)$, $V(X)$.

(22) ليكن $X \sim \chi^2_{(v)}$ احسب $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$, $E(X)^2$ بطريقة

الحساب المباشر.

(23) إذا كانت الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي X من الشكل:

$M_X(t) = (1 - 2t)^{-16}$ ما هو توزيع X واستنتج عندئذ توقع وتباين X .

(24) ليكن $X \sim G(\frac{r}{2}, \beta)$ حيث r صحيح موجب و $\beta > 0$. ولناخذ المتغير

$Y = \frac{2X}{\beta}$ عين نوع توزيع Y واستنتج توقع وتباينه.

(25) لتكن X_1, X_2, X_3, X_4 عينة عشوائية لـ $X \sim N(76.4, 383)$ وليكن

$U = \sum_{i=1}^4 \frac{(X_i - 76.4)^2}{383}$ احسب $P(0.711 \leq U \leq 7.779)$.

(26) إذا كان $X \sim \chi^2_{(17)}$ عين $P(X < 7.564)$ و $P(X > 27.59)$ و

$P(6.408 < X \leq 27.59)$.

(27) إذا كان $X \sim \chi^2_{(12)}$ عين التوابت a, b حيث:

$P(a < X < b) = 0.90 - 1$

$P(X < a) = 0.05 - 2$

28) إذا كان $X \sim \chi^2_{(23)}$ احسب $P(10.20 < X < 35.17)$.

ثم احسب توقع وتباين X .

29) 1- إذا كان $X \sim N(7,4)$ أوجد: $P[15.364 \leq (X-7)^2 \leq 20.096]$.

2- إذا كانت $M_{X,Y}(t) = e^{500t+3000t^2}$ دالة مولدة لعزوم متغير عشوائي X .

احسب $P[27.060 \leq (X-500)^2 \leq 50.240]$.

30) لتكن $Z_1, Z_2, \dots, Z_7$ عينة عشوائية لـ Z حيث $Z \sim N(0,1)$ ولناخذ

$W = \sum_{i=1}^7 Z_i^2$ احسب $P[1.62 < W < 14.07]$.

31) إذا كان $X \sim \beta(4,6)$ احسب $P(X \leq 0.30)$, $P(X > 0.40)$ ثم احسب

$P(0.20 \leq X \leq 0.60)$.

32) إذا كان T يتوزع وفق ستودنت بتباين $\frac{8}{7}$

فاحسب $P(T > 1.746)$ واحسب $P(1.337 < T < 2.921)$.

33) إذا كان T يتوزع وفق ستودنت بـ $v=20$ درجة من الحرية فعين C من

أجل $P(|T| < C) = 0.90$.

34) ليكن $F \sim f_{(9,10)}$ احسب $P(F \geq 3.02)$

وإذا كان $F \sim f_{(7,15)}$ فاحسب $P(F \geq 4.14)$.

وإذا كان $F \sim f_{(6,15)}$ فاحسب $P(0.1323 \leq F \leq 2.79)$.

35) إذا كان $F \sim f_{(8,6)}$ فعين a, b بحيث $P(a \leq F \leq b) = 0.90$.

الفصل التاسع

المتباينات الاحتمالية ومبرهنة النهاية المركزية والتقريب الطبيعي

9-1: توقع دالة حدث:

ليكن A حدثاً من $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ولتكن χ_A دالة ذلك الحدث فإن $E(\chi_A) = P(A)$ لأن:

χ_A	0	1
P	$1-P(A)$	$P(A)$

9-2: متباينة ماركوف:

إذا كان X متغيراً عشوائياً له عزم من المرتبة r متتهياً. عندئذٍ
 $\forall \varepsilon > 0: P[|X| \geq \varepsilon] \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$ تكون صحيحة حيث $r \geq 1$. ولإثبات ذلك: نفترض
 أن $A = \{|X| \geq \varepsilon\}$ حيث $\varepsilon > 0$ ولنقارن بين المتغيرين العشوائيين: χ_A و $|X|^r$
 حيث نلاحظ أولاً أنه يمكن بسهولة أن نتحقق من أن:

$$\left. \begin{aligned} w \in A &\Rightarrow |X(w)|^r \geq \varepsilon^r; \chi_A(w) = \varepsilon^r \\ w \notin A &\Rightarrow |X(w)|^r \geq 0; \varepsilon^r \chi_A(w) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \forall w \in \Omega: |X(w)|^r \geq \varepsilon^r \chi_A(w)$$

$$\Rightarrow |X|^r \geq \varepsilon^r \chi_A \Rightarrow E|X|^r \geq E(\varepsilon^r \chi_A) \Rightarrow E|X|^r \geq \varepsilon^r E\chi_A$$

$$\Rightarrow E|X|^r \geq \varepsilon^r P(A) \Rightarrow P[A] \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r} \Rightarrow P[|X| \geq \varepsilon] \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$$

حالة خاصة: إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ القيم غير السالبة فقط، عندئذ من أجل
 أي عدد موجب تماماً ε يكون:

$$P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

يمكننا أن نستنتجها مباشرة من الفقرة السابقة أو نأخذ:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{\varepsilon} xf_X(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} xf_X(x)dx \\ &\geq \int_{\varepsilon}^{\infty} xf_X(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon \cdot f_X(x)dx = \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} f_X(x)dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{EX}{\varepsilon} \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} f_X(x)dx \Rightarrow P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{EX}{\varepsilon}$$

9-3: متباينة تشيبيشيف:

إذا كان X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 متتهيان، فإن من أجل أي عدد موجب تماماً ε يكون $P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$. ولإثبات ذلك نعود إلى (9-2) وملاحظة أن $|X - \mu|$ يأخذ قيماً غير سالبة فقط نجد أن من أجل $\varepsilon = 2$:

$$P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{E|X - \mu|^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

وأن أهمية متباينة تشيبيشيف تكمن في إمكان إيجاد حد راجع لاحتمال دون الحاجة لمعرفة نوعية توزيع المتغير العشوائي ولكن بمعرفة توقعه وتباينه فقط.

9-3-1: حالة خاصة من متباينة تشيبيشيف: رأينا من (9-3) أن:

$$\forall \varepsilon > 0: P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

وبأخذ $\varepsilon = k\sigma$ حيث $k \in \mathbb{R}^+$ نجد أن:

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{k^2 \sigma^2} \Rightarrow P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow 1 - P[|X - \mu| < k\sigma] \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow P[|X - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow P[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

أي على الأقل يوجد $(1 - \frac{1}{k^2})$ من قيم X ضمن المجال $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ ففي حالة مجموعة من الملاحظات الإحصائية (قياسات) $x_1, x_2, \dots, x_n$ فحسب تشيبيشيف ومن أجل $k=1, 2, 3, 4, \dots$ يوجد على الأقل صغر من القياسات

(1) $1 - \frac{1}{k^2} = 1 - 1 = 0$ ضمن المجال $[\bar{X} - S, \bar{X} + S]$ حيث $\bar{X}$ متوسط مجموعة

القياسات و S الانحراف المعياري لمجموعة القياسات حيث

$$S = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n(n-1)}}$$

ويوجد على الأقل 0.75: $(1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4})$ من القياسات ضمن المجال

$[\bar{X} - 2S, \bar{X} + 2S]$ وهكذا حتى $k=10$ نجد أن هناك 0.99 من القياسات ضمن المجال $[\bar{X} - 10S, \bar{X} + 10S]$.

مثال (9-1):

ليكن X متغيراً عشوائياً يتوزع توزيعاً أسياً بالوسط $\lambda=2$. استخدم متباينة تشيبيشيف للحصول على حد راجح للاحتمال $P[|X - EX| > 1]$ وقارن ذلك مع القيمة الفعلية لهذا الاحتمال.

الحل:

نعلم من الكثافة الأسية بالوسط $\lambda=2$ أن $E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ أي $E(X) = \frac{1}{2}$; $V(X) = \frac{1}{4}$. متباينة تشيبيشيف تقول إن:

$$\forall \varepsilon > 0: P[|X - EX| > \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon = 1; P[|X - EX| > 1] \leq \frac{\frac{1}{4}}{1} \\ \Rightarrow P[|X - EX| > 1] \leq 0.25$$

أي أن أعلى قيمة لهذا الاحتمال لن تتجاوز 0.25.

ومن أجل القيمة الفعلية لهذا الاحتمال:

$$P[|X - EX| > 1] = 1 - P[|X - EX| \leq 1] = 1 - P\left[-1 \leq X - \frac{1}{2} \leq 1\right] \\ = 1 - P\left[\frac{1}{2} - 1 \leq X \leq 1 + \frac{1}{2}\right] = 1 - P\left[\frac{-1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right] = 1 - P[0 \leq X \leq 1.5] \\ = 1 - F_X(1.5) = 1 - (1 - e^{-2(1.5)}) = e^{-3} = 0.0498$$

وبالمقارنة مع الحد الراجح نجد أن المتباينة محققة.

مثال (2-9):

ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد السيارات التي تمر من نقطة معينة خلال فترة زمنية محددة. فإذا كان X بواسونياً بالوسيط $\mu=4$. عين العدد الراجح لاحتمال أن يمر من هذه النقطة أكثر من عشر سيارات في الفترة الزمنية المحددة سابقاً. وقارن ذلك مع القيمة الفعلية لهذا الاحتمال.

الحل:

كون X بواسونياً بالوسيط $\mu=4$ فإن $EX=4$, $V(X)=4$ ومتباينة تشيشف تكون:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|X - 4| \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{\varepsilon^2}$$

وباختيار $\varepsilon=6$ نجد:

$$P(X - 4 \geq 6) \leq \frac{4}{36} \Rightarrow P(X \geq 10) \leq 0.111$$

وحسب بواسون بـ $\mu=4$:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0.9919$$

(من جدول بواسون بالوسيط 4):

$$= 0.0081$$

وبالتالي نجد أن القيمة الفعلية أقل بكثير من الحد الراجح.

2-3-9: إثبات متباينة تشيشف بطريقة أخرى:

ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ وتباينه σ^2 منتهيان. ولتثبت أنه من أجل أي $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

حيث سنأخذ X مستمراً (بالأسلوب نفسه من أجل كون X منفصلاً): حيث لدينا:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} (x - \mu)^2 f_X(x) dx + \int_{\mu - \varepsilon}^{\mu + \varepsilon} (x - \mu)^2 f_X(x) dx + \int_{\mu + \varepsilon}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} (x - \mu)^2 f_X(x) dx + \int_{\mu + \varepsilon}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \end{aligned}$$

وكون $|x - \mu| \geq \varepsilon$ في كل الإمكانات لأن $\left\{ \begin{array}{l} x \geq \mu + \varepsilon \\ x \leq \mu - \varepsilon \end{array} \right\} \leftarrow (x - \mu)^2 \geq \varepsilon^2$
وبالتالي:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\geq \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} \varepsilon^2 f(x) dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 f(x) dx \\ \sigma^2 &\geq \varepsilon^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right] \\ &\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \geq P[X \leq \mu - \varepsilon \vee X \geq \mu + \varepsilon] \\ &\Rightarrow P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

9-3-3: مبرهنة برنولي: ليكن X متغيراً عشوائياً برنولياً بالوسط P أي

X	0	1
P_i	q	P

ولكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X . يمكننا أن نجد أن من أجل أي $\varepsilon > 0$:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{حيث} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P[|\bar{X} - P| < \varepsilon] = 1$$

حيث نعلم من متغير برنولي أن: $EX = P$, $V(X) = Pq$ وبالتالي:

$$\text{من (6-7-6) نجد أن: } E(\bar{X}) = P; \quad V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{Pq}{n}$$

ومن متباينة تشيفسف نجد مباشرة:

$$\begin{aligned} P[|\bar{X} - P| \geq \varepsilon] &\leq \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2} \Rightarrow P[|\bar{X} - P| \geq \varepsilon] \leq \frac{Pq}{n\varepsilon^2} \\ &\Rightarrow P[|\bar{X} - P| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{Pq}{n\varepsilon^2} \end{aligned}$$

وبأخذ $n \rightarrow \infty$ نجد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\bar{X} - P| < \varepsilon] = 1 \quad (\text{وذلك لأن الاحتمال لن يزيد على الواحد})$$

ومنه نجد أن مبرهنة برنولي هي حالة خاصة من متباينة تشيشف.

9-4: قانون الأعداد الكبيرة: متباينة تشيشف

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X والذي توقعه μ وتباينه σ^2 .
عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$$

أو:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \bar{X} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$$

ولإثبات ذلك ضمن (6-7-6) رأينا أن:

$$E(\bar{X}) = \mu; \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

وحسب تشيشف:

$$\forall \varepsilon > 0: P \left[\left| \bar{X} - \mu \right| > \varepsilon \right] \leq \frac{V(\bar{X})}{n \varepsilon^2}$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $n \rightarrow \infty$ نتج:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \bar{X} - \mu \right| > \varepsilon \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} = 0$$

وكون الاحتمال موجبا دوماً عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \bar{X} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$$

وهو ما يدعى بقانون الأعداد الكبيرة في شكله الابتدائي، حيث يعبر القانون عن أن $\bar{X}$ هو مقدر لـ μ ولهذا القانون الفائدة الكبيرة في الإحصاء الرياضي لأنه يسمح لنا أن نقدر متوسط المجتمع μ (المجهول) من خلال متوسط العينة $\bar{X}$ والمسحوبة من ذلك المجتمع.

وله الشكل المكافئ:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \bar{X} - \mu \right| < \varepsilon \right] = 1$$

مثال (3-9):

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X حيث توزيع X من الشكل:

X	-1	0	1
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

فهل يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على $(X_1, \dots, X_n)$.

الحل:

نبحث في $E(X)$, $V(X)$ أولاً.

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = \frac{-1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8}$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{4}{64} = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$$

$$E(\bar{X}) = \frac{2}{8}; V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{7}{16n}$$

ومن كون تباین كل من المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ يساوي $\frac{7}{16}$ وهو محدود ومنه

يمكننا تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على هذه المتغيرات حيث: $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left[\left|\bar{X} - \frac{2}{8}\right| > \varepsilon\right] < \frac{7}{16n\varepsilon^2}$$

ومنه:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\left|\bar{X} - \frac{2}{8}\right| > \varepsilon\right] = 0$$

مثال (4-9):

نفترض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات مستقلة حيث أن المتغير X_i يأخذ القيم

$3^i, 0, 3^i$ باحتمال ثابت $\frac{1}{3}$ ، هل نستطيع تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على هذه

المتغيرات؟

الحل:

$$E(X_i) = \sum x f_x(x) = (-3^i) \frac{1}{3} + \frac{3^i}{3} = 0 \Rightarrow E(\bar{X}) = 0$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\frac{3^{2i}}{3} + \frac{3^{2i}}{3}}{n} = \frac{(2)3^{2i}}{3n} = \frac{(2)(3^{2i-1})}{n}; i = 1, 2, \dots, n$$

حيث نلاحظ أن تباين $\bar{X}$ غير محدود عندما $n \rightarrow \infty$. وبالتالي لا يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة.

9-5: مبرهنة النهاية المركزية:

9-5-1: أهمية مبرهنة النهاية المركزية: تعرض مبرهنة النهاية المركزية، وتحت شروط عامة جداً، أن كلاً من مجموع ومتوسط عينة عشوائية، مسحوبة من مجتمع ما، يمتلك عند تكرار هذه العينات عدداً كبيراً من المرات، توزيعاً له، على وجه التقريب، شكل الجرس.

فالفكرة الأساسية لمبرهنة النهاية المركزية تكمن في أنه إذا سحبنا عينات عشوائية حجم كل منها n ، من مجتمع توقعه μ وانحرافه المعياري σ محدودان، فإن توزيع متوسط العينة $\bar{X}$ يتطابق تقريباً مع التوزيع الطبيعي. متوسط يساوي μ وانحراف معياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

وتزداد دقة التقريب كلما ازداد n . وبشكل مكافئ يمكن أن نقول إن $\sum_{i=1}^n X_i$ يتوزع طبيعياً على وجه التقريب. متوسط $n\mu$ وانحرافه المعياري $\sqrt{n}\sigma$. وذلك عندما يصبح n كبيراً جداً. وتبدو أهمية مبرهنة النهاية المركزية من جهتين.

فمن جهة أولى نلاحظ نزوع العديد من المتغيرات العشوائية إلى أن يكون توزيعها بصورة تقريبية، هو التوزيع الطبيعي، إذ يمكن، مثلاً، أن تتصور طول الإنسان حصيلة عدد كبير من المؤثرات العشوائية، مثل طول الأب، وطول الأم، والمورثات (وعندها كبير) ونشاط الغدة أو العدد ذات العلاقة بالطول، والبيئة أو المحيط بأنواعه والتغذية والنشاط الرياضي، الخ. وإذا كانت هذه الآثار لهذه العوامل، تضاف بعضها إلى بعض، لتنتج واقعا معينا بالنسبة إلى طول الإنسان، فعندئذ يمكن عد الطول حصيلة لعدد كبير

من المتغيرات العشوائية، وهكذا تنطبق مبرهنة النهاية المركزية، ويكون توزيع متغير الطول هو، على وجه التقريب، التوزيع الطبيعي، وذلك بصرف النظر عن توزيع أي من المتغيرات العشوائية التي تؤثر في تحديد الطول. وهذه بالطبع محاولة للتعليل، ليس أكثر، إذ إن ما يجري في الواقع غير معروف لنا بصورة دقيقة ولكن ما يمكن قوله، على كل حال، هو أن مبرهنة النهاية المركزية توضح سبب وجود العديد من المتغيرات العشوائية التي تصادفها على حياتنا العامة، والتي تعد أن توزعها الاحتمالي هو التوزيع الطبيعي.

ومن جهة ثانية: إن لمبرهنة النهاية المركزية أهمية كبيرة في مسألة الاستقراء الإحصائي، فالعديد من الإحصاءات التي تستخدم للقيام باستقراءات حول وسطاء توزيع (والتي تحتل بدورها خصائص مهمة لمجسج القياسات مثل P احتمال النجاح في التوزيع الحداني) أو μ متوسط التوزيع الطبيعي)، هذه الإحصاءات تأخذ شكل مجموع لقياسات العينة أو متوسط هذه القياسات، وإذا كان الحال كذلك، وكانت n كبيرة بكفاية، فيمكننا عد التوزيع الطبيعي تقريبا جيدا للتوزيع الاحتمالي لذلك الإحصاء. ولكن السؤال المهم هنا كم يجب أن يبلغ حجم العينة n حتى يصبح التقريب الناشئ عن تطبيق مبرهنة النهاية المركزية تقريبا جيدا؟ ولسوء الحظ لا يوجد جواب عام ومحدد تماما لهذا السؤال لأن الأمر يتعلق بالتوزيع الاحتمالي الموافق للمجسج الذي جاءت منه العينة، وبالنهاية من استخدام التقريب ولكن يمكن القول إنه كلما كانت درجة التناظر في التوزيع الذي نعالجه عالية كان التقريب جيدا حتى في عينات صغيرة الحجم لذلك أحيانا نجد في بعض المراجع تستخدم $n \geq 12$ أو $n \geq 30$ أو ... ولكن بشكل عام تعد عتبة الـ 30 لحجم العينة هي بداية تطبيق مبرهنة النهاية المركزية إذا لم يكن المجتمع المدروس طبيعيا.

9.5.2: نص المبرهنة:

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X توقعه μ وتباينه σ^2 ولتأخذ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. ثم نأخذ $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$. عندئذ من أجل n كبيرة كفايا فإن $S_n^* \sim N(0,1)$.

ملاحظة (1): سنستخدم من أجل إثبات المبرهنة الحقيقة الرياضية التالية في التحليل الرياضي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{b}{n} + \frac{\Psi(n)}{n} \right]^n = e^b; (b, c \in \mathbb{R}; \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n) = 0)$$

ملاحظة (2): من S_n, S_n^* نجد أن:

$$E(S_n) = n\mu$$

$$V(S_n) = n\sigma^2$$

وبالتالي فإن S_n^* يمثل المتغير المعياري لـ S_n .

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(\bar{X}) = \frac{S_n}{n}$$

ومنه إذا أثبتنا أن:

$$S_n^* \sim N(0,1) \Leftrightarrow \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1) \Leftrightarrow S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

إثبات المبرهنة: سنعمد في الإثبات على مفهوم الدالة المولدة للعزوم لـ S_n^* حيث:

$$\begin{aligned} M_{S_n^*}(t) &= E[e^{tS_n^*}] = E\left[e^{t \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}\right] \\ &= E\left[e^{t \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right] \\ &= E\left[e^{t \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} e^{t \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} \dots e^{t \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right] \end{aligned}$$

وكون المتغيرات العشوائية مستقلة ولها توزيع X نفسه فإن:

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n E \left[e^{t \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \right)} \right] = \left[E \left(e^{t \left(\frac{X - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \right)} \right) \right]^n$$

وكون منشور e^x من الشكل $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ فنطبق ذلك من أجل الدالة الأسية السابقة فنجد:

$$e^{t \left(\frac{X - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \right)} = 1 + \frac{t}{\sigma \sqrt{n}} (X - \mu) + \frac{t^2}{2! \sigma^2 n} (X - \mu)^2 + \frac{t^3}{3! \sigma^3 (\sqrt{n})^3} (X - \mu)^3 + \dots$$

وبأخذ توقع الطرفين وتطبيق الخاصية الخطية للتوقع نجد:

$$\begin{aligned} E \left[e^{t \left(\frac{X - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \right)} \right] &= 1 + \frac{t}{\sigma \sqrt{n}} E(X - \mu) + \frac{t^2}{2! \sigma^2 n} E(X - \mu)^2 + \\ &\quad \frac{t^3}{3! \sigma^3 (\sqrt{n})^3} E(X - \mu)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \left[\frac{t^3}{3! \sigma^3 \sqrt{n}} E(X - \mu)^3 + \frac{t^4}{4! \sigma^4 n} E(X - \mu)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\Psi(n) = \frac{t^3}{3! \sigma^3 \sqrt{n}} E(X - \mu)^3 + \frac{t^4}{4! \sigma^4 n} E(X - \mu)^4 + \dots \text{ وبأخذ}$$

وملاحظة أن $\Psi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ فإن:

$$E \left[e^{t \left(\frac{X - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \right)} \right] = 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n}$$

وبأخذ:

$$\left[E \left[e^{t \left(\frac{X - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \right)} \right] \right]^n = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n} \right]^n$$

و نأخذ نهاية الطرفين عندما $n \rightarrow \infty$ أي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E \left[e^{t \left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \right)} \right] \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n} \right]^n$$

وباستخدام النهاية في الملاحظة (1) مع ملاحظة تحقق الشروط نجد أنه من أجل n كبيرة كفايا:

$$M_{S_n^*}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t^2/2}{n} + \frac{\Psi(n)}{n} \right]^n = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$(\Psi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, C=1, b=\frac{t^2}{2} \text{ حيث})$$

والدالة الناتجة ما هي إلا دالة مولدة لحزوم متغير عشوائي طبيعي معياري ومنه $S_n^* \rightarrow N(0,1)$ كبراً كفايا يكون $S_n^* \sim N(0,1)$.

3-5-9: تطبيق مبرهنة النهاية المركزية في حالة المتغير الحداني:

إذا كان X متغيراً عشوائياً حدانياً وسطاؤه np و npq عندئذ $E(X) = np$ ، $\sigma = \sqrt{npq}$ ، ويمكننا أن نثبت أنه من أجل n كبيرة كفايا يكون $X^* \sim N(0,1)$ حيث:

$$X^* = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad (\text{أي تحقيق مبرهنة النهاية المركزية})$$

ولإثبات ذلك نأخذ الدالة المولدة لحزوم X^* :

$$M_{X^*}(t) = E[e^{tX^*}] = E \left[e^{t \left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \right)} \right] = e^{\frac{-tnp}{\sqrt{npq}}} E \left[e^{\frac{tX}{\sqrt{npq}}} \right]$$

$$= e^{\frac{-tnp}{\sqrt{npq}}} \sum_{k=0}^n e^{\frac{tk}{\sqrt{npq}}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{\frac{-tnp}{\sqrt{npq}}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(p e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}} \right)^k q^{n-k}$$

$$= e^{\frac{-tnp}{\sqrt{npq}}} \left(q + p e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}} \right)^n = \left[e^{\frac{-tp}{\sqrt{npq}}} \left(q + p e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}} \right) \right]^n$$

$$= \left[q.e^{\frac{-tp}{\sqrt{npq}}} + P.e^{\frac{-tq}{\sqrt{npq}}} \right]^n$$

وبتطبيق مفهوم منشور الدالة الأسية نجد:

$$\begin{aligned} q.e^{\frac{-tp}{\sqrt{npq}}} + P.e^{\frac{-tq}{\sqrt{npq}}} &= q \left[1 - \frac{tp}{\sqrt{npq}} + \frac{t^2 \cdot P^2}{2npq} - \dots \right] + P \left[1 + \frac{tp}{\sqrt{npq}} + \frac{t^2 \cdot P^2}{2npq} + \dots \right] \\ &= (q + p) + \frac{pq(p+q)t^2}{2npq} + \dots = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{\psi(n)}{n} \end{aligned}$$

حيث $\psi(n)$ هو باقي الحدود في المنشور ومماثل في دوره كما رأينا في إثبات مبرهنة النهاية المركزية وأيضا $\psi(n) \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$. وبالتالي:

$$M_{X^*}(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2} + \frac{\psi(n)}{n} \right]^n$$

وعندما $n \rightarrow \infty$ فإن الطرف اليمين يسعى إلى $e^{t^2/2}$ (حسب الملاحظة 1) مما يسدل على أن $M_{X^*}(t)$ هي دالة مولدة لعزوم متغير طبيعي معياري أي $X^* \sim N(0,1)$.
9. 5. 4: مبرهنة دو موافر:

إذا كان X متغيرا عشوائيا حثايباً وسطاؤه n, p .

ومن أجل قيم مختلفة لـ p ومن أجل $a, b \in \mathbb{R}$ يكون:

$$P[a \leq X \leq b] = \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= P\left[Z \leq \frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right] - P\left[Z \leq \frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right]$$

وهي نتيجة مباشرة من المبرهنة (9.5.3) مع ملاحظة إضافة نصف وطرح نصف من حدود التكامل وهي ما تدعى بمعامل التصحيح من أجل الاستمرار حيث نتقل من متغير منفصل إلى متغير مستمر وهذا ما يدعى بتقريب التوزيع الحداني بقانون التوزيع الطبيعي وهو من أهم تطبيقات مبرهنة النهاية المركزية. وجودة التقريب هنا تعود إلى تناظر التوزيع الحداني وبخاصة من أجل قيم p القريبة من 0.5 حيث نكتب:

$$P[a \leq X \leq b] \cong P\left[a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2}\right]$$

مثال (9.5):

ليكن X متغير احداثي وسطاؤه $n = 10$, $p = 0.5$. احسب $P[2 \leq X \leq 4]$ باستخدام:

- 1 - التوزيع الحداني.
 - 2 - تقريب التوزيع الطبيعي.
- الحل:

(1) نلاحظ أولاً باستخدام قانون التوزيع الحداني:

$$P(2 \leq X \leq 4) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.3662$$

(2) باستخدام التقريب الطبيعي، نلاحظ أولاً أن:

$$E(X) = np = 10(0.5) = 5 ; \quad \sigma = \sqrt{(10)(0.5)(0.5)} = 1.58$$

$$P(2 \leq X \leq 4) \equiv P(2 - \frac{1}{2} \leq X \leq 4 + \frac{1}{2}) = P(1.5 \leq X \leq 4.5)$$

$$= P\left(\frac{1.5 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{1.5 - 5}{1.58} \leq Z \leq \frac{4.5 - 5}{1.58}\right)$$

$$= P(-2.215 \leq Z \leq -0.316) = P(Z \leq -0.316) - P(Z \leq -2.215)$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$P(2 \leq X \leq 4) \equiv 0.3745 - 0.0132 = 0.3613$$

ونلاحظ أن القيمة الناتجة صحيحة إلى رقمين عشريين رغم أن n لم تتجاوز العشرة. ولكن فضل ذلك يعود إلى أن $P=0.5$ حيث التوزيع الحداني متناظر تماماً في هذه الحالة.

مثال (6.9):

اخترنا عينة عشوائية حجمها 1000 قطعة إلكترونية من إنتاج مصنع معين. فإذا كان 98% من إنتاج المصنع يعد صالحاً للعمل. احسب احتمال الحصول على 27 قطعة إلكترونية غير صالحة للعمل ضمن العينة على الأقل.

الحل: النموذج الاحتمالي يتبع التوزيع الحداني، لأن كل قطعة لختارها إما أن تعمل أو لا تعمل فإذا كان نجاح التجربة هو الحصول على قطعة لا تعمل عندئذٍ $P = 0.02$ و $q = 0.98$. والاحتمال المطلوب هو:

$$P(X \geq 27) = \sum_{k=27}^{1000} \binom{1000}{k} (0.02)^k (0.98)^{1000-k}$$

وحساب مثل هذا الاحتمال ليس سهلاً لذلك نفضل استخدام تقريب التوزيع الطبيعي:

$$P(X \geq 27) \cong P(X \geq 27 - \frac{1}{2}) = P(X \geq 26.5)$$

$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{26.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \times 0.02 \times 0.98} = 4.43,$$

$$\mu = np = (1000)(0.02) = 20$$

ومنه:

$$P(X \geq 27) \cong P\left(Z \geq \frac{26.5 - 20}{4.43}\right) = P(Z \geq 1.4)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.4) = 1 - 0.9292 = 0.0708$$

مثال (7.9):

يتضمن امتحان خمسين سؤالاً من النوع متعدد الاختيارات، ولكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة، واحد منها فقط هو الجواب الصحيح، ولكي ينجح الطالب لابد له من الإجابة بصورة صحيحة على عشرين سؤالاً على الأقل. والمطلوب:

- 1 - احسب احتمال نجاح طالب غير مؤهل يختار جوابه عن كل سؤال عشوائياً.
- 2 - مع بقاء عدد الأسئلة ودرجة النجاح كما هي، كم يجب أن يكون عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ليصبح احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائياً أقل من 0.01.

- 3 - في حال وجود اختبارين فقط، كم يجب أن تكون درجة النجاح بحيث لا يزيد احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائياً على الواحد في المائة؟

الحل:

- 1) ليكن X عدد الأجوبة الصحيحة حيث لدينا $n = 50$, $P = 1/3$. والمطلوب $P(X \geq 20)$ حيث باستخدام التقريب الطبيعي:

$$M = np = 50 \times \frac{1}{3} = \frac{50}{3}, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \frac{10}{3}$$

$$P(X \geq 20) \approx P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{20 - \frac{1}{3} - \mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \geq \frac{19.5 - \frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right]$$

$$= P(Z \geq 0.85) = 1 - P(Z \leq 0.85) = 1 - 0.8023 = 0.198$$

(2)

$$P(X \geq 20) \approx P\left(Z \geq \frac{19.5 - 50P}{\sqrt{50P(1-P)}}\right) \leq 0.01$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{19.5 - 50P}{\sqrt{50P(1-P)}}\right) \leq 0.01 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{19.5 - 50P}{\sqrt{50P(1-P)}}\right) \geq 0.99$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$\frac{19.5 - 50P}{\sqrt{50P(1-P)}} \geq 2.33$$

والمطلوب تحديد قيمة p التي تحقق المتباينة السابقة وتجعل المقدار $19.5 - 50P$ موجبا كما ينبغي أن يكون، حيث نجد بتربيع الطرفين والإصلاح في المتباينة:

$$2771.45P^2 - 2221.45P + 380.25 \geq 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد أنها محققة من أجل $P > 0.55$ أو $P < 0.248$ ولكن قيم P الأكبر من 0.55 مرفوضة لأنها تجعل $19.5 - 50P$ سالبا. وبما أن عدد الاختيارات هو بالضرورة عدد صحيح فعليا أخذ أول نسبة تقل عن 0.248 ويكون جداولها بعدد صحيح مساويا للواحد تماما. والنسبة المطلوبة إذا هي 0.2 ، وهذا يعني أن عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ينبغي أن تكون خمسة.

(3) المطلوب تحديد عدد صحيح يحقق المتباينة التالية $P(X \geq a) \leq 0.01$

$$\text{حيث: } \sigma = \sqrt{npq} = 3.54, \mu = np = 25, p = \frac{1}{2}, n = 50$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - \frac{1}{2} - 25}{3.54}\right) \leq 0.01 \Rightarrow$$

$$1 - P\left(Z \geq \frac{a - 25.5}{3.54}\right) \leq 0.01 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 25.5}{3.54}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{a - 25.5}{3.54} \geq 2.33 \Leftrightarrow a = 34$$

مثال (8.9):

ليكن X متغيراً عشوائياً منتظم التوزيع على المجال $[0, 1]$ ، ولتكن لدينا عينة عشوائية X من الحجم 75. احسب $P(0.45 < \bar{X} < 0.55)$.

الحل:

بما أن $n = 75 > 30$ سنستخدم مفهوم مبرهنة النهاية المركزية حيث:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2}\right) ; \quad \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$V(\bar{X}) = 0.0011 \text{ أي } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) ; \quad \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ومنه:}$$

$$\bar{X} \sim N(0.5, 0.0011) \text{ وبالتالي } \sigma_{\bar{X}} = 0.033 \text{ ومنه:}$$

$$P(0.45 < \bar{X} < 0.55) = P\left(\frac{0.45 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{0.55 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{0.45 - 0.5}{0.033} < Z < \frac{0.55 - 0.5}{0.033}\right) = P(-1.52 < Z < 1.52)$$

$$= P(Z < 1.52) - P(Z < -1.52) = 0.9357 - 0.0643 = 0.8714$$

9.6: قارن غير محلولة:

(1) ليكن X متغيراً عشوائياً، دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

فإذا كان $E(x) = \mu = 0$ وكان $V(x) = 1$ و $\sigma = \frac{3}{2}$ ، عيّن باستخدام متباينة تشيبيشيف حداً راجحاً للاحتمال $P(|X - EX| \geq k\sigma)$ ، قارن ذلك مع القيمة الفعلية للاحتمال.

(2) ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه 8 وتباينه 9. عيّن قيمة حدية للاحتمال التالي:

$$P(-4 < X < 20) - a$$

$$P(|X - 8| \geq 6) - b$$

(3) ليكن $X \sim N(40, 4)$ و X يدل على كمية تساقط المطر في منطقة معينة، عيّن حداً راجحاً لاحتمال أن تكون كمية المطر في عام معين تختلف بـ 5 cm عن المعدل، وقارنه مع القيمة الفعلية لهذا الاحتمال.

(4) عيّن الحجم الأعظمي والواجب سحبه لعينة عشوائية من أجل أن يكون احتمال

اختلاف متوسط العينة عن متوسط مجتمعها على الأكثر $\frac{\sigma}{10}$ هو على الأقل 0.95. حيث $0 < \sigma$.

(5) ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه 25 وتباينه 16. عيّن حداً راجحاً لـ:

$$P(17 < X < 33) - a$$

$$P(|X - 25| \geq 12) - b$$

(6) لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة، ولنفترض أن

المتغير X_i يأخذ القيم $2^i, -2^i$ باحتمال ثابت $\frac{1}{2}$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$.

هل من الممكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على هذه المتغيرات ؟

(7) لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة، ولنفترض أن

المتغير X_i يأخذ القيم $0, 2^i, -2^i$ باحتمالات $\frac{1}{2^{2i+1}}, 1 - \frac{1}{2^{2i}}, \frac{1}{2^{2i+1}}$ على

الترتيب. والمطلوب هل نستطيع تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على هذه المتغيرات ؟

(8) اخترنا لقاحا جديدا ضد الزكام، وقد أعطي اللقاح لمائة شخص وروقوا من

حيث إصابتهم بالزكام لمدة سنة. وقد نجا 68 منهم من الإصابة بالزكام، ولنفترض أننا

نعلم من معلومات سابقة أن احتمال عدم الإصابة بالزكام هي بصورة طبيعية ويسدون

استخدام اللقاح 0.5.

أي نتائج يمكنك استخلاصها من هذه التجربة حصول فعالية اللقاح. (احسب

$P(X \geq 68)$ وناقش ؟

(9) إذا كانت نسبة القطع غير الصالحة التي تنتجها آلة هي 15%، احسب بصورة

تقريبية احتمال أن تتضمن عينة عشوائية 400 قطعة من إنتاج هذه الآلة على أكثر من

96 قطعة غير صالحة ؟

(10) إذا كان 55% من الناحيين في مدينة كبيرة يؤيدون قضية ما فمسا احتمال أن

تظهر عينة عشوائية من 100 ناخب من هذه المدينة أغلبية لصالح القضية ؟

(11) نفرض أننا ألقينا حجر نرد 6000 مرة، وإذا كان X يمثل المتغير الدال على عدد

مرات ظهور 3. احسب احتمال الحصول على الوجه 3 عددا من المرات ما بين 980

و 1030 ؟

(12) ليكن X متغيرا عشوائيا برنوليا وسيطه P ، ولتكن لدينا عينة عشوائية لـ X من

الحجم 100 فبماذا كان $P = 0.5$ احسب $P[48 \leq Y \leq 52]$ حيث

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

(13) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 100$ من مجتمع إحصائي توقعه $\mu = 80$

واشغافه المعياري $\sigma = 20$. والمطلوب:

1 - احسب احتمال أن يقع متوسط هذه العينة بين القيمتين 82 و 85 ؟

2 - احسب احتمال أن يزيد متوسط هذه العينة على 77 ؟

14) أُلقيت قطعة نقود 15 مرة، عين احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 مرات ضمنا مستخدما مفهوم التوزيع الحداني ثم التوزيع البواسوني ثم التقريب الطبيعي للتوزيع الحداني.

15) ليكن X منتظم التوزيع على المجال $[0, 1]$ ولناخذ عينة عشوائية من الحجم 20

$$X_i. \text{ ثم لكن } Y = \sum_{i=1}^{20} X_i. \text{ احسب } P(Y \leq 9.1).$$

$$\text{ثم احسب } P(8.5 \leq Y \leq 11.7).$$

الفصل العاشر

التوزيع الطبيعي الثنائي

10. 1: تعريف: نقول عن الشعاع (X, Y) إنه يخضع للتوزيع الثنائي الطبيعي إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية من الشكل:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

حيث: $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$ هي ثوابت معلومة وهي وسطاء التوزيع و ρ معامل الارتباط بين x, y و $\sigma_x, \sigma_y > 0$ و μ_x, μ_y متهيان و $x, y \in R$

10. 2: حالة خاصة: إذا كان X, Y مستقلين عشوائياً فإن $\rho(X, Y) = 0$ ومنه دالة الكثافة الاحتمالية تصبح من الشكل:

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]} \\ &= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \\ &= f_X(x) \cdot f_Y(y) \end{aligned}$$

حيث نلاحظ أن $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ و $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 10. 3: كثافة (X, Y) هي كثافة احتمالية فعلية: وذلك لأن الدالة $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$ من أجل أي $x, y \in R$ وأيضاً بأخذ التحويل:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sigma_x} \Leftrightarrow u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \\ dv = \frac{dy}{\sigma_y} \Leftrightarrow v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \end{cases}$$

$$\iint_{R^2} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy = \iint_{R^2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[u^2 - 2\rho uv + v^2]} du dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{R^2} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[(u-\rho v)^2 + v^2(1-\rho^2)]} du dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-v^2}{2}} dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(u-\rho v)^2} du$$

بأخذ $dw = du \Leftrightarrow w = u - \rho v$ ومنه:

$$\iint_{R^2} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-v^2}{2}} dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2} \left[\frac{w}{\sqrt{1-\rho^2}} \right]^2} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-v^2}{2}} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2} \left[\frac{w}{\sqrt{1-\rho^2}} \right]^2} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi}) \cdot (1) = 1$$

ومنه $f_{(X,Y)}(x,y)$ تمثل دالة كثافة احتمالية فعلية لـ (X,Y) .

ونقول إن $(X,Y) \sim BVN[(\mu_x, \mu_y), (\sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)]$

10. 4: دالة التوزيع لـ $Z=X+Y$ أو دالة الكثافة لـ Z : نعلم أن:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(z-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(z-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]} dx$$

بأخذ $u = x - \mu_x$; $V = z - \mu_x - \mu_y$ عندئذ:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{u^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{u(V-u)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(V-u)^2}{\sigma_y^2} \right]} du$$

وعما أن:

$$\frac{u^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{u(V-u)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(V-u)^2}{\sigma_y^2} = u^2 \left[\frac{\sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_x^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \right] - 2uV \left[\frac{\sigma_x + \rho\sigma_y}{\sigma_x\sigma_y^2} \right] + \frac{V^2}{\sigma_y^2}$$

$$= \left[u \cdot \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{V}{\sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x + \rho\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}} \right]^2 + \frac{V^2}{\sigma_y^2} \left[1 - \frac{(\sigma_x + \rho\sigma_y)^2}{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} \right]$$

$$= \left[u \cdot \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{V}{\sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x + \rho\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}} \right]^2 + \frac{V^2(1-\rho^2)}{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}$$

وبالحذ:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[u \cdot \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}}{\sigma_x\sigma_y} - \frac{v}{\sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x + \rho\sigma_y}{\sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}} \right]$$

عندئذ نجد:

وفي الحالة الخاصة عندما يكون X, Y مستقلين عشوائياً أي $\rho = 0$ تصبح دالة الكثافة من الشكل:

$$f_z(z) = \frac{e^{-\frac{(z-\mu_x-\mu_y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

وكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \quad , \quad V = Z - \mu_x - \mu_y$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{(z-\mu_x-\mu_y)^2}{2(\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2)}}$$

وفي الحالة الخاصة عندما يكون X, Y مستقلين عشوائياً أي $\rho = 0$ تصبح دالة

الكثافة من الشكل:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{(z-\mu_x-\mu_y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}$$

ومنه فإن مجموع متغيرين عشوائيين لهما التوزيع الطبيعي الثنائي المشترك هو

متغير عشوائي طبيعي أي أن:

$$Z \sim (\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

ورأينا قبل قليل أنه إذا كان X, Y مستقلين فإن العكس يكون صحيحاً أي إذا

كان مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين له التوزيع الطبيعي فإن كل متغير من المتغيرات له التوزيع الطبيعي.

ويمكننا القول بأن الشرط اللازم والكافي ليكون المتغيران الخاصصان للتوزيع الطبيعي الثنائي غير مرتبطين أن يكونا مستقلين.

5.10: الكثافات الهامشية والشرطية: نعلم أن:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy$$

وبأخذ التغير:

$$v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \quad u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$\frac{1}{1-\rho^2} [u^2 - 2\rho uv + v^2] = u^2 + \frac{(v - \rho u)^2}{1-\rho^2}$$

ومنه:

$$f_x(x) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sigma_x \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v - \rho u)^2}{2(1-\rho^2)}} dv = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sigma_x \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} (\sqrt{2\pi}) (\sqrt{1-\rho^2})$$

$$= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

وبالأسلوب نفسه نجد:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

أي: $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

ومن أجل الحصول على الكثافات الشرطية:

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\left[x - \mu_x - \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_y) \right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2}}$$

وبالأسلوب نفسه نحصل على:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{\left[y - \mu_y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}}$$

ومنه:

$$X/Y \sim N\left(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x^2(1-\rho^2)\right)$$

$$Y/X \sim N\left(\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y^2(1-\rho^2)\right)$$

10. 6: الدالة المميزة لـ $(X,Y) \sim BVN$

لحساب الدالة المميزة للشعاع $BVN \sim (X,Y)$ نعلم على الفقرة (6. 12. 3):

$$\phi_{(X,Y)}(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(w_1x + w_2y)} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]} \cdot dx \cdot dy$$

$$\text{نأخذ التحويل: } V = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}, \quad U = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$\phi_{(X,Y)}(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i w_1(\sigma_x U + \mu_x) + i w_2(\sigma_y V + \mu_y)} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [u^2 - 2\rho uv + v^2]} \cdot du \cdot dv$$

ومنه:

$$\phi_{(X,Y)}(w_1, w_2) = \frac{e^{i(w_1\mu_x + w_2\mu_y)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i w_1 \sigma_x u} \cdot e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)} [v^2 - 2\rho uv]} \cdot dv$$

$$\cdot \{ [V - \rho u - i w_2 \sigma_y (1-\rho^2)]^2 - [\rho^2 u^2 + w_2^2 \sigma_y^2 (1-\rho^2)^2 + 2i \rho u w_2 \sigma_y (1-\rho^2)] \} dv du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x$$

ولكن نعلم أن:

وبالتالي:

$$\phi_{(X,Y)}(w_1, w_2) = e^{i(w_1\mu_x + w_2\mu_y) - \frac{1}{2}(1-\rho^2)w_1^2\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2iw_1\sigma_x u + 2i\rho w_1 w_2 \sigma_x \sigma_y u)} du$$

وبالإتمام إلى مربع كامل نجد أن:

$$\phi_{(X,Y)}(w_1, w_2) = e^{i(w_1\mu_x + w_2\mu_y) - \frac{1}{2}(w_1^2\sigma_x^2 + 2\rho w_1 w_2 \sigma_x \sigma_y + w_2^2\sigma_y^2)}$$

10. 7: دراسة الدالة المولدة للعزوم:

إذا كان $(X, Y) \sim BVN(\mu_x, \mu_y, (\sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho))$ عندئذ يمكننا أن نعرف من أن الدالة المولدة للعزوم (X, Y) :

$$M(s, t) = E[e^{sX + tY}] = e^{s\mu_x + t\mu_y + \frac{1}{2}[s^2\sigma_x^2 + t^2\sigma_y^2 + 2st\rho\sigma_x\sigma_y]}$$

وذلك من أجل: $-\infty < s, t < +\infty$

فقبل إثبات ذلك لنأخذ التركيب الخطي: $U = ax + by + c$ للمتغيرين X, Y ولنبحث عن الدالة المولدة للعزوم U :

$$M_U(t) = E[e^{tU}] = E[e^{t(ax+by+c)}] = e^{tc} E[e^{(ta)x + (tb)y}] = e^{tc} M(ta, tb)$$

$$= e^{tc + ta\mu_x + tb\mu_y + \frac{1}{2}[(ta)^2\sigma_x^2 + 2(ta)(tb)\sigma_x\sigma_y\rho]}$$

$$= e^{t(a\mu_x + b\mu_y + c) + \frac{t^2}{2}[a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y]}$$

وهي دالة مولدة لعزوم متغير طبيعي بتوقع $a\mu_x + b\mu_y + c$ وتباين $a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y$ أي أن:

$$ax + by + c \sim N(a\mu_x + b\mu_y + c, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y)$$

وبالتالي وجدنا الآن أنه إذا كان $(X, Y) \sim BVN[(\mu_x, \mu_y), (\sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)]$ فإن

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2); \forall a, b, c \in R: U = ax + by + c:$$

أي تركيب خطي لـ X, Y

$$U \sim N[a\mu_x + b\mu_y + c, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y]$$

لنأخذ الآن التركيبين الخطيين لـ X, Y

$$U_1 = a_1x + b_1y + c_1; \quad U_2 = a_2x + b_2y + c_2$$

ولنبعث في الدالة المولدة لعزوم (U_1, U_2) :

$$M_{(U_1, U_2)}(t_1, t_2) = E[e^{t_1U_1 + t_2U_2}] = E[e^{t_1(a_1x + b_1y + c_1) + t_2(a_2x + b_2y + c_2)}]$$

$$= e^{t_1c_1 + t_2c_2} M(t_1a_1 + t_2a_2, t_1b_1 + t_2b_2)$$

$$M_{(U_1, U_2)}(t_1, t_2) = e^{\left[t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}(t_1^2\tau_1^2 + t_2^2\tau_2^2 + 2t_1t_2\tau_1\tau_2\rho) \right]}$$

حيث:

$$\mu_1 = a_1\mu_x + b_1\mu_y + c_1; \quad \mu_2 = a_2\mu_x + b_2\mu_y + c_2$$

$$\tau_1^2 = a_1^2\sigma_x^2 + b_1^2\sigma_y^2 + 2a_1b_1\rho\sigma_x\sigma_y,$$

$$\tau_2^2 = a_2^2\sigma_x^2 + b_2^2\sigma_y^2 + 2a_2b_2\rho\sigma_x\sigma_y,$$

$$\tau_1\tau_2\rho = a_1a_2\sigma_x^2 + b_1b_2\sigma_y^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\rho\sigma_x\sigma_y$$

ومنه نجد:

$$\Rightarrow (U_1, U_2) \sim BVN[(\mu_1, \mu_2), (\tau_1^2, \tau_2^2; \alpha)]$$

ومنه نستنتج أيضا أنه إذا كان: $(X, Y) \sim BVN[(\mu_1, \mu_2), (\sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)]$

وكان: $U_1 = a_1X + b_1Y + c_1$; $U_2 = a_2X + b_2Y + c_2$ عندئذ:

يكون U_1, U_2 مستقلين عشوائياً إذا وفقط إذا كان المقدار:

$$a_1a_2\sigma_x^2 + b_1b_2\sigma_y^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sigma_x\sigma_y\rho = \gamma\tau_1\tau_2 = 0 \quad (*)$$

مثال (1.10) ...

ليكن $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ و $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ أثبت أن:

$U = a_1X + a_2Y$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي الثنائي وعين وسطاءه عندئذ؟

الحل: لدينا هنا:

$$E(U) = E(a_1X + a_2Y) = a_1E(X) + a_2E(Y) = a_1\mu_x + a_2\mu_y$$

$$V(U) = V(a_1X + a_2Y) = a_1^2V(X) + a_2^2V(Y) + 2a_1a_2CoV(X, Y)$$

والدالة المميزة:

$$\Phi_U(\omega) = E(e^{i\omega U}) = E(e^{i\omega(a_1X + a_2Y)})$$

وبأخذ: $\omega a_1 = t_1$, $\omega a_2 = t_2$ نجد عندئذ:

$$\Phi_U(\omega) = E(e^{it_1X + it_2Y})$$

ومن خواص الدالة المميزة نجد:

$$\Phi_U(\omega) = g_{(X,Y)}(t_1, t_2) = e^{i(t_1\mu_x + t_2\mu_y) - \frac{1}{2}[t_1^2\sigma_x^2 + 2t_1t_2\sigma_x\sigma_y\rho + t_2^2\sigma_y^2]}$$

$$\Phi_U(\omega) = \Phi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = e^{i(t_1\mu_x + t_2\mu_y) - \frac{1}{2}[t_1^2\sigma_x^2 + 2t_1t_2\sigma_x\sigma_y\rho + t_2^2\sigma_y^2]}$$

وهكذا نستنتج بأن المتغير U دالة مميزة وهي الدالة المميزة لمتغير ثنائي طبيعي

مستمر وسطاءه: $[(a_1\mu_x + a_2\mu_y), (a_1^2\sigma_x^2 + a_2^2\sigma_y^2 + 2\rho a_1a_2\sigma_x\sigma_y)]$

وهذا يدل على أن أي ربط بين متغيرين عشوائيين طبيعيين هو في النتيجة متغير طبيعي.

مثال (2.10):

ليكن $X \sim N(0,1)$ و $Y \sim N(0,1)$ ولتأخذ $V = X - Y$, $U = X + Y$ عيّن دالة الكثافة المشتركة لـ (X, Y) علماً بأن X, Y مستقلان عشوائياً.

الحل: من الفرض نجد:

$$X = \frac{U+V}{2}, \quad Y = \frac{U-V}{2}$$

$$f_{(U,V)}(z_1, z_2) = f_{(X,Y)}(x, y) \left| J \right|_{x=\frac{z_1+z_2}{2}, y=\frac{z_1-z_2}{2}}$$

حيث:

$$\left| J \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وكذلك:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

وبالتالي:

$$f_{(U,V)}(z_1, z_2) = \left[\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_{x=\frac{z_1+z_2}{2}, y=\frac{z_1-z_2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{z_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{z_2^2}{2}}$$

أي أن U, V مستقلان و $U \sim N(0,2)$ و $V \sim N(0,2)$

مثال (3.10):

ليكن $(X, Y) \sim BVN[(0,0), (\sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)]$ عيّن نوع توزيع المتغير

$$U = \frac{X}{Y}$$

الحل: نعلم أن:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z| f_{(X,Y)}(zu, z) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |Z| e^{\frac{-z^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\sigma_y^2 u^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y u + \sigma_x^2}{(\sigma_x^2\sigma_y^2)} \right]} dz$$

وكون الدالة المستكملة زوجية عندئذ:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z| f_{(X,Y)}(zu, z) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |Z| e^{\frac{-z^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\sigma_y^2 u^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y u + \sigma_x^2}{(\sigma_x^2\sigma_y^2)} \right]} dz$$

لنأخذ:

$$t = \frac{-z^2}{2(1-\rho^2)} \cdot \frac{\sigma_y^2 u^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y u + \sigma_x^2}{(\sigma_x^2\sigma_y^2)}$$

عندئذ:

$$f_U(u) = \frac{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(\sigma_y^2 u^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y u + \sigma_x^2)} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

لكن: $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ ومنه:

$$f_U(u) = \frac{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}}{\pi(\sigma_y^2 u^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y u + \sigma_x^2)}$$

وفي حال كون (X, Y) مستقلان نجد:

$$f_U(u) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 u^2)}$$

فالدالة الناتجة هي كثافة كوشي.

10. 8: معامل الارتباط:

ليكن: $(X, Y) \sim BVN((\mu_x, \mu_y), (\sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho))$ ولنعرهن الآن أن:

$$Cov(X, Y) = \sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \rho$$

حيث نعلم أن:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

وكون:

$$\sigma_{xy} = Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} dx dy$$

وبأخذ: $u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$, $v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$ نجد:

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{uv e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2 - 2\rho uv + v^2]}}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} du dv$$

$$= \sigma_x \sigma_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v e^{\frac{-v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u e^{\frac{-(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} du \right] dv$$

نلاحظ أن التكامل الداخلي على u هو توزيع متغير طبيعي بوزن وفوق $N(\rho v, 1-\rho^2)$ ومنه:

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v e^{\frac{-v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (\rho v) dv = \sigma_x \sigma_y \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2 e^{\frac{-v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dv$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}} dv$$

حيث: $V \sim N(0,1)$ فإن: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}}$

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \rho E(V^2)$$

$$\text{وكون: } \sigma^2 = E(V^2) - (EV)^2$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \rho [\sigma^2 + \mu_v^2]$$

$$= \sigma_x \sigma_y \rho [1+0] = \sigma_x \sigma_y \rho$$

ومنه:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_x \sigma_y \rho}{\sigma_x \sigma_y} = \rho$$

مثال (4.10):

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. متى يكون المتغيران $X+Y$ و $X-Y$ مستقلين عشوائياً؟
الحل: إن الشعاع (X, Y) له التوزيع الطبيعي الثنائي مثال (4.10) وكذلك:

$$M_{X,Y}(s,t) = M_X(s)M_Y(t) \quad (\text{بسبب الاستقلال})$$

$$= e^{s\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}s^2} \cdot e^{t\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}t^2}$$

$$= e^{(s\mu_1 + t\mu_2) + \frac{1}{2}(s^2\sigma_1^2 + t^2\sigma_2^2)}$$

وهذا ما رأيناه في (10.7): أي (X,Y) له توزيع ثنائي طبيعي بـ $\rho=0$ (بسبب

الاستقلال) وبالتالي: $X+Y = (1)X + (1)Y$ ، $X-Y = (1)X + (-1)Y$

أي: $a_1 = 1, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = -1$ وحسب (*) في (10.7) نجد:

$$a_1a_2\sigma_1^2 + b_1b_2\sigma_2^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\sigma_1\sigma_2\rho = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1)(1)\sigma_1^2 + (1)(-1)\sigma_2^2 + 0 = 0 \Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

أي أن: $X+Y$ و $X-Y$ متغيران مستقلان إذا وفقط إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

أي تبيننا X, Y متساويان.

مثال (10.5):

إذا كان $X \sim N(10,9)$ و $Y \sim N(15,16)$ و $\rho = 0.8$ عيّن نوع توزيع

$$f_{Y|X=x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل: من (10.5) نعلم أن:

$$Y/X \sim N\left(\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$Y/X \sim N\left(15 + (0.8)\left(\frac{3}{4}\right)(x - 16), 16(1 - (0.8)^2)\right)$$

$$Y/X \sim N\left[\left(\frac{3.2}{3}\right)x + \frac{13}{3}, 5.76\right]$$

10. 9: تمارين غير محلولة:

- (1) إذا كان $(X, Y) \sim BVN[(\mu_1, \mu_2), (\sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)]$ ومن أجل $Z_1 = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}$, $Z_2 = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}$ عيّن نوع توزيع (Z_1, Z_2) .
 أثبت أن $(Z_1, Z_2) \sim BVN[(0, 0), (1, 1; \rho)]$
 (2) إذا كان $(X, Y) \sim BVN[(\mu_1, \mu_2), (\sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)]$ أثبت حسب تعريف الدالة المولدة للعزوم لـ (X, Y) أن:

$$M_{X,Y}(s, t) = e^{\left[(s\mu_1 + t\mu_2) + \frac{1}{2}(s^2\sigma_1^2 + t^2\sigma_2^2 + 2st\rho\sigma_1\sigma_2) \right]}$$

من أجل: $-\infty < s, t < +\infty$

(3) إذا كان: $(X, Y) \sim BVN[(2, 5), (4, 4; 0.3)]$

- 1 - عيّن نوع توزيع $(X, 1-Y)$.
 - 2 - عيّن نوع توزيع $(X, 2X+Y)$.
 - 3 - عيّن نوع توزيع $(X, Y-0.3X)$.
 - 4 - استتج التوقعات والتباينات و f لأجل كل متجه في 1 و 2 و 3.
 - 5 - أي من 1، 2، 3 يكونان مستقلين.
- (4) إذا كانت (Z_1, Z_2) متغيرات عشوائية مستقلة وطبيعية معيارية. ولتأخذ:

$$W_2 = \frac{(Z_1 - Z_2)}{\sqrt{2}}, W_1 = \frac{(Z_1 + Z_2)}{\sqrt{2}}$$

- عيّن نوع توزيع (W_1, W_2) وهل (W_1, W_2) مستقلان عشوائيا؟
 (5) ليكن $(X, Y) \sim BVN[(2.9, 2.4), ((0.4)^2, (0.5)^2; 0.8)]$ عيّن:
 $P(2.1 < Y < 3.3 / x = 3.2)$ ثم عيّن $P(2.1 < Y < 3.3)$
 وماذا تستنتج من الحسابين السابقين؟

(6) ليكن: $(X, Y) \sim BVN[(22.7, 22.7), (17.64, 12.25; 0.78)]$

احسب:

$$P(18.5 < Y < 25.5) - 1$$

$$E(Y/X) - 2$$

$$Var(Y/X) - 3$$

$$P(18.5 < Y < 25.5 / X = 23) - 4$$

$$P(18.5 < Y < 25.5 / X = 25) - 5$$

$$(X, Y) \sim BVN[(185, 84), (100, 64, \frac{3}{5})] \text{ ليكن: (7)}$$

والمطلوب:

$$1 - \text{عين كثافة } (Y/X = X) \text{ ثم احسها من أجل } X = 190$$

$$2 - \text{احس: } P(86.4 < Y < 95.36 / X = 190)$$

$$(8) \text{ ليكن: } (X, Y) \sim BVN[(-3, 10), (25, 9, 0.6)]$$

احس:

$$1 - P(-5 < X < 5) \text{ واحس } P(-5 < X < 5 / Y = 13)$$

$$2 - P(7 < Y < 16) \text{ واحس } P(7 < Y < 16 / X = 2)$$



الملاحق

I - مراجع الكتاب العربية والأجنبية.

II - أشكال الكثافات الاحتمالية.

III - الجداول الاحتمالية.

IV - المصطلحات العلمية (إنكليزي - عربي).

V - فهرس المحتويات.



ملحق I: مراجع الكتاب العربية والأجنبية

1) المراجع العربية:

- 1 - د. أنيس كنحو: الإحصاء الرياضي - جامعة دمشق - 1978 - 1979.
- 2 - د. صلاح أحمد: الاحتمالات - جامعة دمشق - 1982.
- 3 - د. عدنان مصورة: الاحتمالات - جامعة دمشق - 1992.
- 4 - د. الحسين، فرح، العمر: نظرية الاحتمالات - جامعة حلب - 1991.
- 5 - د. غندينكو: نظرية الاحتمالات - دار مير - موسكو - 1991.

2) المراجع الأجنبية:

- 1 - M. Loe've: Probability Theory - Springer 1978.
- 2 - FELLER, W: An Introduction To Probability Theory - New York - 1970.
- 3 - R. HOGG ; E. TANIS: Probability and Statistical Inference - Mac. P - 1983.
- 4 - I. OLKIN ; L. GLEESER ; C. DERMAN: Probability Models and Applications - Mac.P - 1994.
- 5 - N. L. JOHNSON ; S. KOTZ ; A. W. KEMP: Univeriate Discrete Distribution - New York - J. Wiley. S. 1992.
- 6 - MONTGOMERY: Applied Statistics and Probability for Engineers - Churchill - 1996.
- 7 - ROSS: Introduction to Probability Models ; Academic Press - 1997.
- 8 - GNEDENKO: Limit Distribution for Sums of Independent Random Variable - Churchill - 1997.

جدول الكثافة الاحتمالية وأشكالها وجدول توزيعها الاحتمالية

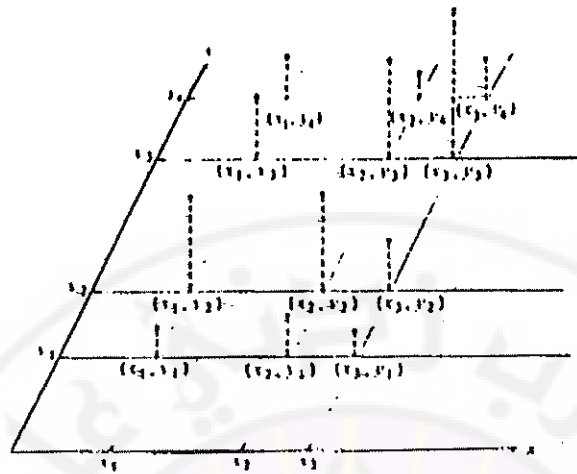
التوزيع	$f(x)$ الكثافة	التوقع EX	التباين Var X	التابع المولد للزخم $M_X(t)$	التابع المميز $\phi_X(\omega)$
برنولي	$X \begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array} \frac{1}{p}$ $f(x) \begin{array}{ c } \hline 1-p \\ \hline \end{array}$ $0 < p < 1$	p	pq	$pe^t + q$ $\forall t \in R$	$pe^{i\omega} + q$
سحائي	$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ $0 < p < 1; p + q = 1$	np	npq	$(pe^t + q)^n$ $\forall t \in R$	$(pe^{i\omega} + q)^n$
پواسوني	$PX(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $\lambda = np > 0; 0 < p < 1$ $k = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t - 1)}$ $\forall t \in R$	$e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$
سحودي	$p(n_1 + n_2 + \dots + n_r) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n; p_1 + \dots + p_r = 1$	-	-	-	-

[illegible]

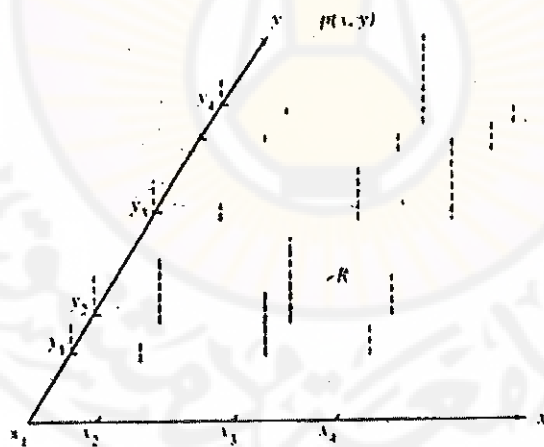
التوزيع	$f(x)$ الكثافة	المتوسط EX	التباين VarX	الدالة التابع الأول للزير $M_X(t)$	الدالة التابع المميز $\Phi_X(\omega)$
متطبيع	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ; a < x < b ; a, b \in \mathbb{R} ; a < b$ علاى ذلك $= 0$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega(b-a)}$
نطاى	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ; x \in \mathbb{R}$ $-\infty < \mu < \infty ; \sigma > 0$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$	$e^{i\omega\mu - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$
كروى	$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} ; x \in \mathbb{R}$	λ	-	-	$e^{-\omega}$
الاي	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} ; x \geq 0 ; \lambda > 0$ $= 0$ علاى ذلك	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t} ; t < \lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-i\omega}$

التوزيع	الكثافة $f(x)$	الترفع $E X$	التباين $Var X$	الدالة التوليدية $M_X(t)$	الدالة المميزة $\phi_X(\omega)$
غاما Γ رابط α	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}; & x > 0; \alpha > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$	α	α	$(1-t)^{-\alpha}$	$(1-i\omega)^{-\alpha}$
غيبا Γ وسيط β, α	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta \alpha \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}; & \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$	$\alpha \beta$	$\alpha \beta^2$	$(1-\beta t)^{-\alpha}$	$(1-i\beta\omega)^{-\alpha}$
كاي مربع χ^2 درجة من الحرية	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} \cdot x^{v/2-1} \cdot e^{-x/2}; & x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$	v	$2v$	$(1-2t)^{-v/2}$	$(1-2i\omega)^{-v/2}$
بيتا β $B(v_1, v_2)$	$f(x) = \frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} \cdot x^{v_1-1} \cdot (1-x)^{v_2-1}; \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ v_1, v_2 > 0 \end{cases}$ خلاف ذلك = 0	$\frac{v_1}{v_1+v_2}$	$\frac{v_1 v_2}{(v_1+v_2)(v_1+v_2+1)}$	-	-
ستودنت T	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x^2}{n})^2}$ درجة الحرية n : $n > 2$ حيث $Y \sim \chi^2(v)$ و $U \sim N(0,1)$ Y و U مستقلان. $T = \frac{U}{\sqrt{Y/v}}$	0	$\frac{n}{n-2} \quad n > 2$	-	-

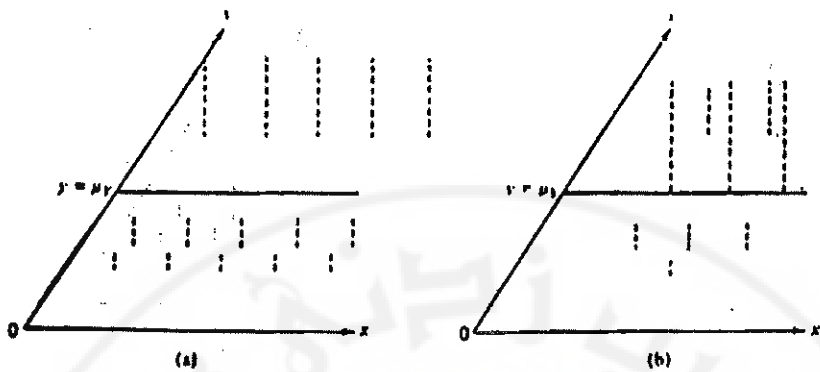
التوزيع	الكثافة $f(x)$	التوقع EX	التباين Var X	التابع المولد للزخم $M_X(t)$	التابع للميز $\Phi_X(\omega)$
فريشر F_{ν_1, ν_2}	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1 + \frac{1}{2}\nu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1)\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{1}{2}\nu_1} x^{\frac{1}{2}\nu_1-1} \cdot \frac{e^{-\frac{\nu_1 x}{\nu_2 + \nu_1}}}{2}$ $\cdot \left[1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F\right]^{-\frac{1}{2}}$ حيث $U \sim \chi^2(\nu_1)$ و $F = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$ $U \sim \chi^2(\nu_1)$ و $V \sim \chi^2(\nu_2)$ مستقلان	$\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ $\nu_2 > 2$	$\frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)}$	-	-
رايبرول	$f(x) = \begin{cases} a b x^{b-1} \cdot e^{-a b x} & ; x > 0 ; a, b > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$	$\frac{1}{a b} \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$	$\frac{2}{a b} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right]$	-	-
ماكسويل	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^{3/2} x^2 \cdot e^{-\frac{a x^2}{2}} & ; x > 0 ; a > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$	$2 \sqrt{\frac{2}{\pi a}}$	$\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) a^{-1}$	-	-



Graph of a
joint probability mass func-
tion $p(x, y)$.



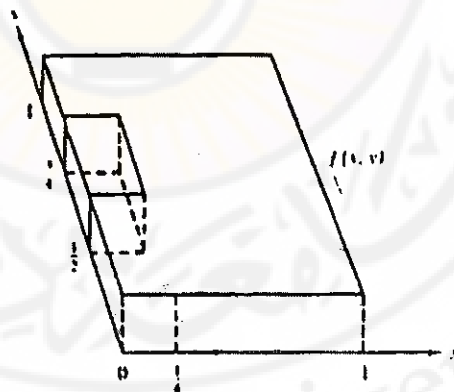
A region R in the plane. The
probability that the random point (x, y) falls in
 R is the sum of the heights $p(x, y)$ of the dotted
lines that correspond to points (x, y) in R .



The variance σ_y^2 shows the dispersion of the joint probability mass function $p(x, y)$ around the line $y = \mu_y$. The dispersion in (a) is larger than the dispersion in (b).

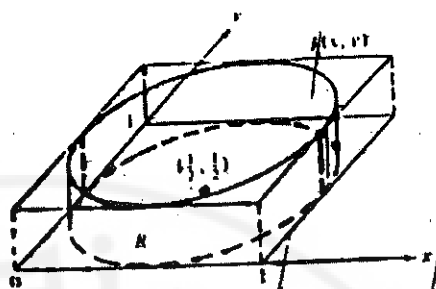
$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This density defines the bivariate uniform distribution over the unit square.

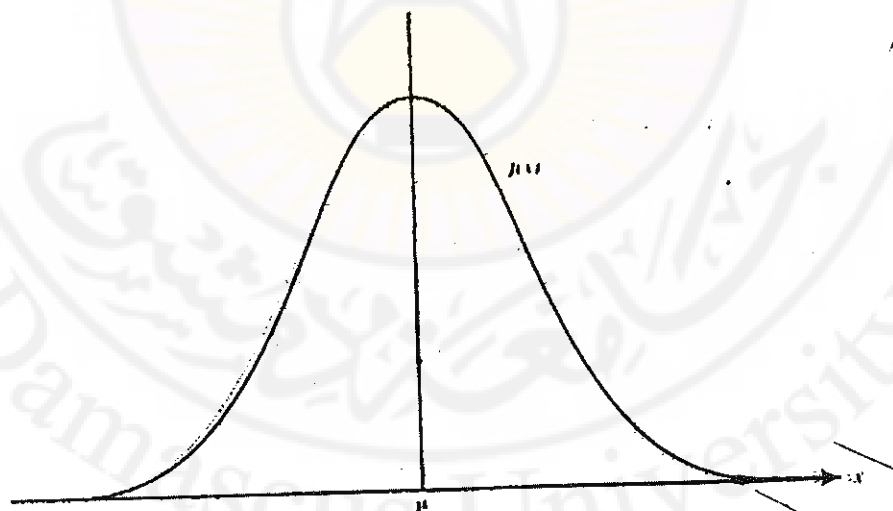
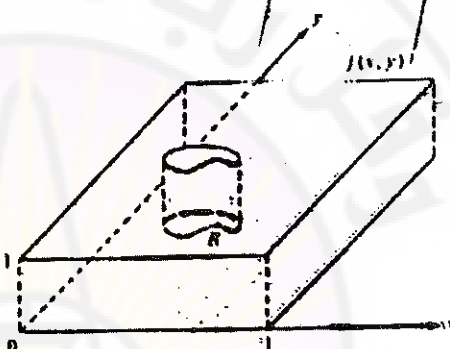


The probability $P\{0 \leq X \leq \frac{1}{2} \text{ and } \frac{1}{2} \leq Y \leq 1\}$ equals the volume of the shaded rectangle.

The probability of the event $\{(X - \mu)^2 + (Y - \mu)^2 \leq \delta\}$ equals the volume of the shaded cylinder whose base is the circle R .

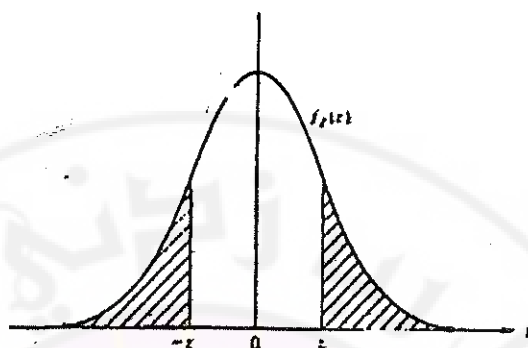


The shaded volume equals the probability $P\{(X, Y) \text{ in } R\}$.

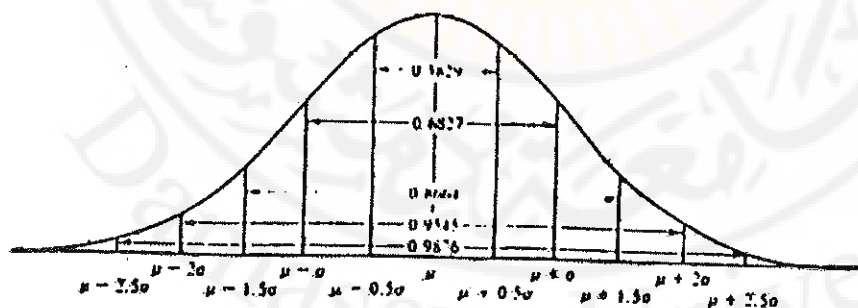
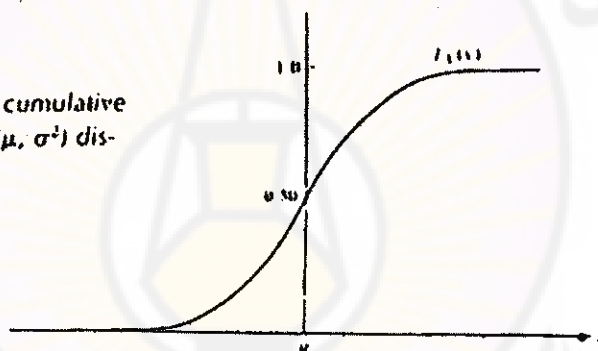


Graph of a normal density function, $f(x)$, symmetric about the point μ .

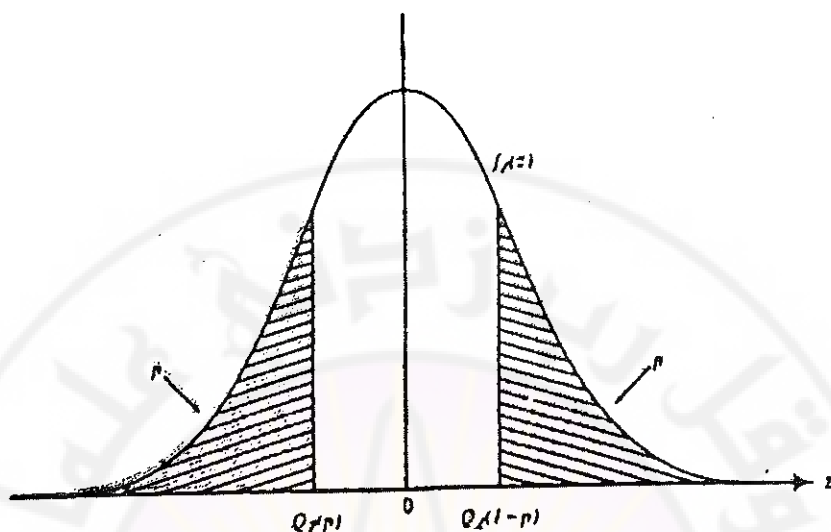
Graph of the density of the $N(0, 1)$ distribution. The shaded area $P\{Z \leq -z\}$ equals the shaded area $P\{Z \geq z\}$ under the graph to the right of $Z = z$.



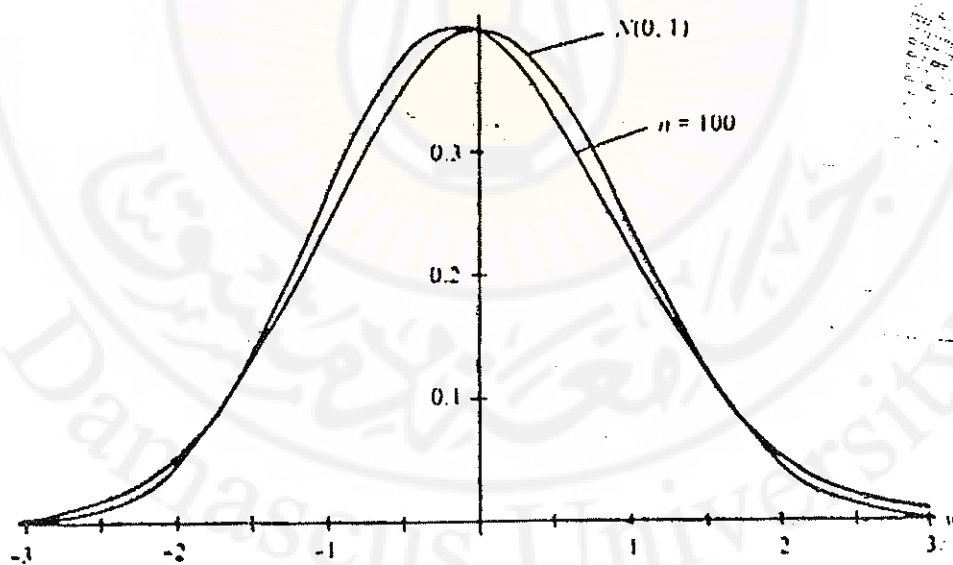
Graph of the cumulative distribution function of a $N(\mu, \sigma^2)$ distribution.

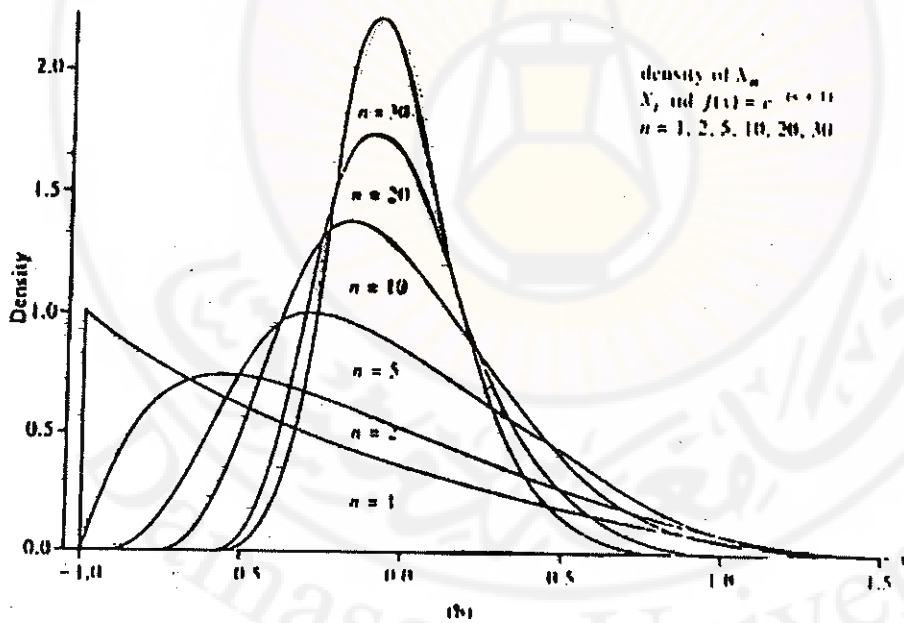
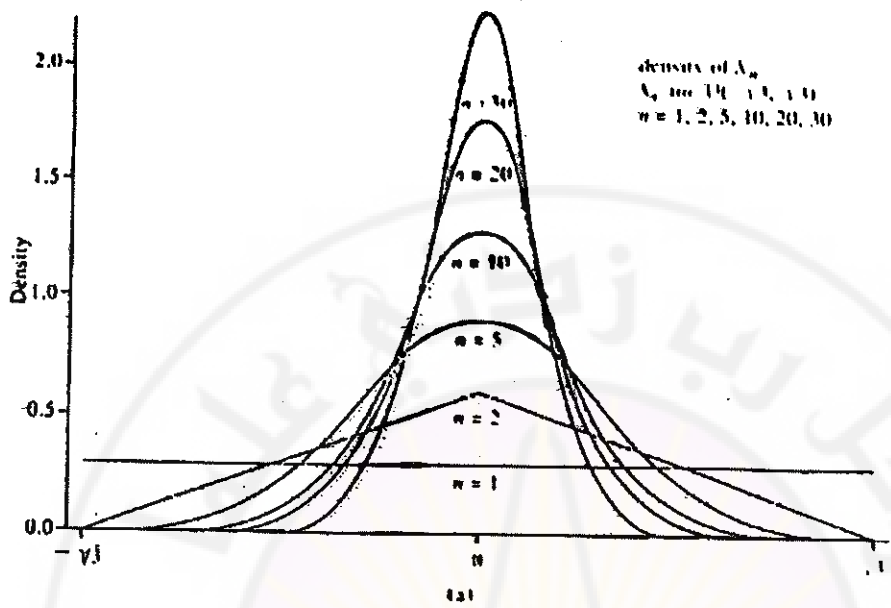


The areas indicated by the arrows give the probability that a normally distributed random variable is within k standard deviations of its mean μ .

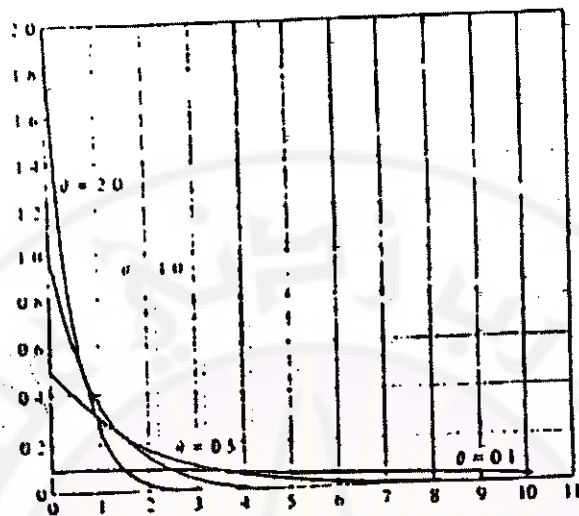


By symmetry, because the shaded areas are equal, $Q_z(p)$ is the same distance to the left of 0 as $Q_z(1 - p)$ is to the right of 0.

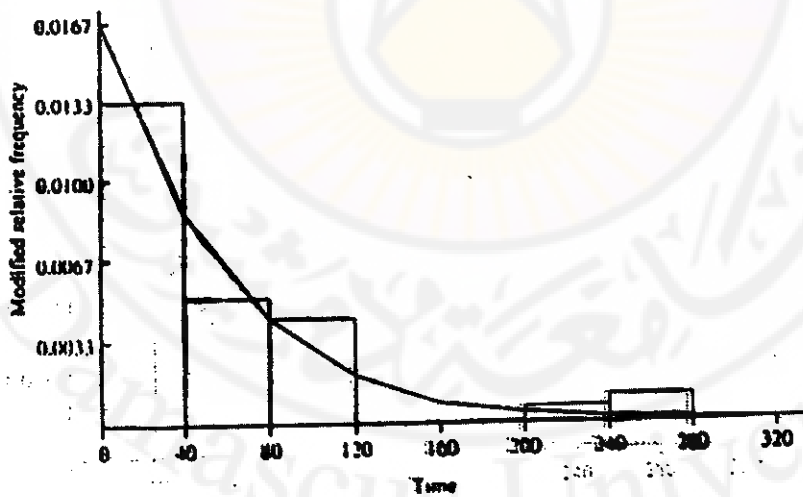




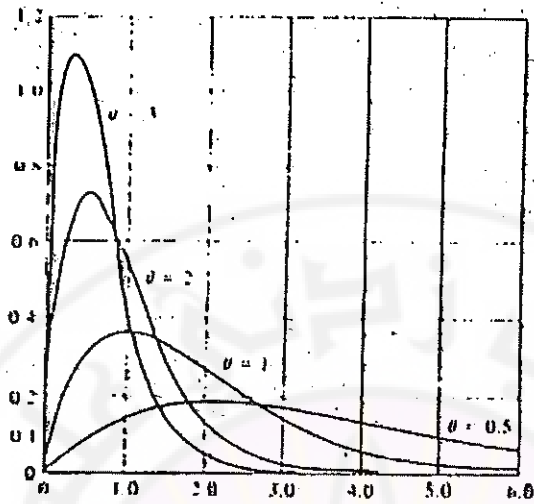
Densities of X_n for choices (a) and (b) when $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30$.



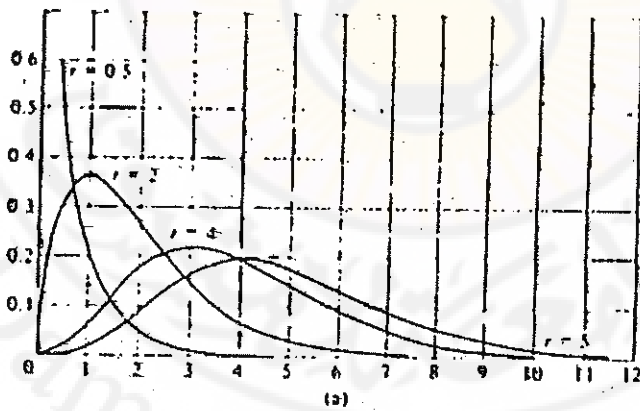
Graphs of exponential density functions for $\theta = 0.1, 0.5, 1.0$, and 2.0 .

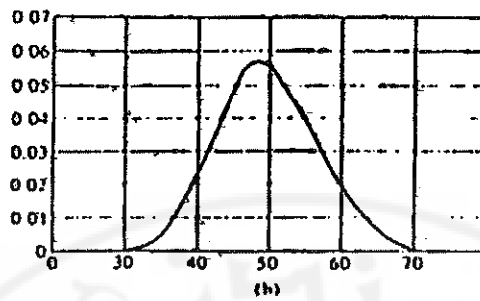


Modified relative frequency histogram and fitted exponential density ($\theta = 0.0168$).

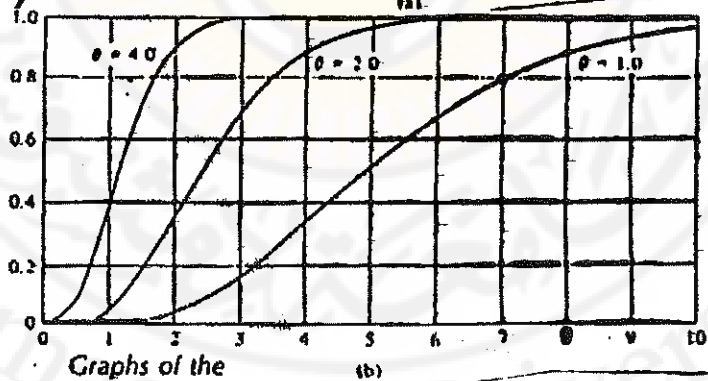
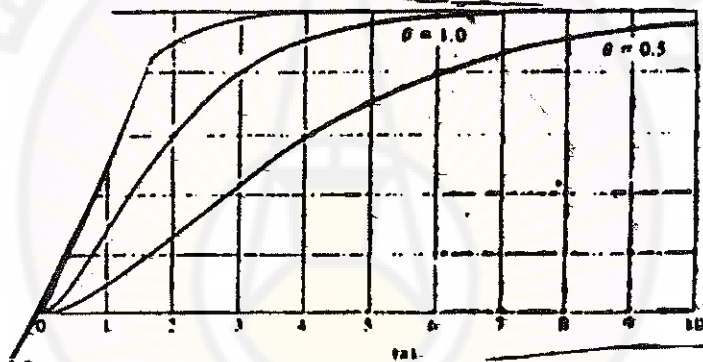


Graphs of the
gamma density function for
 $r = 2, \theta = 0.5, 1, 2, 3$.

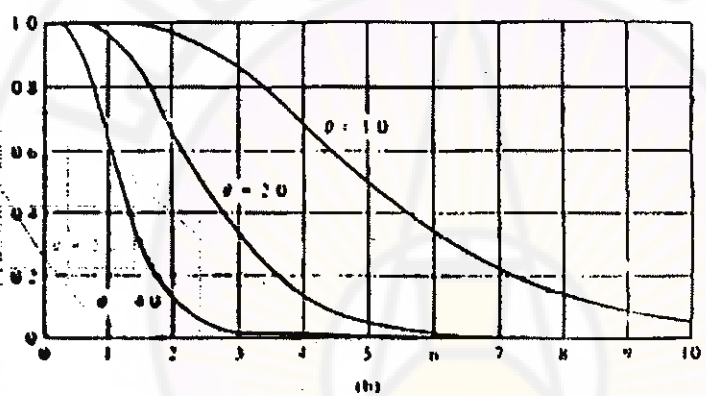
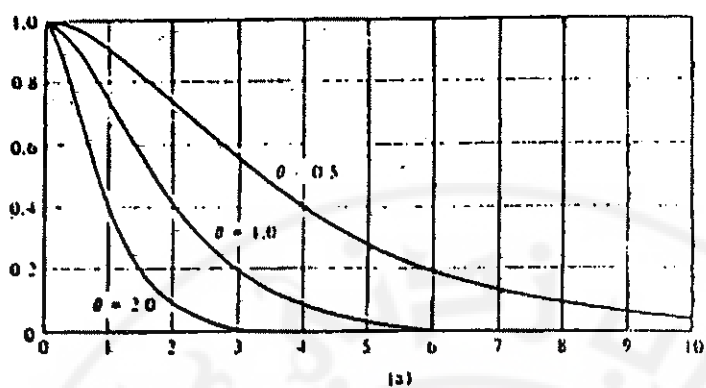




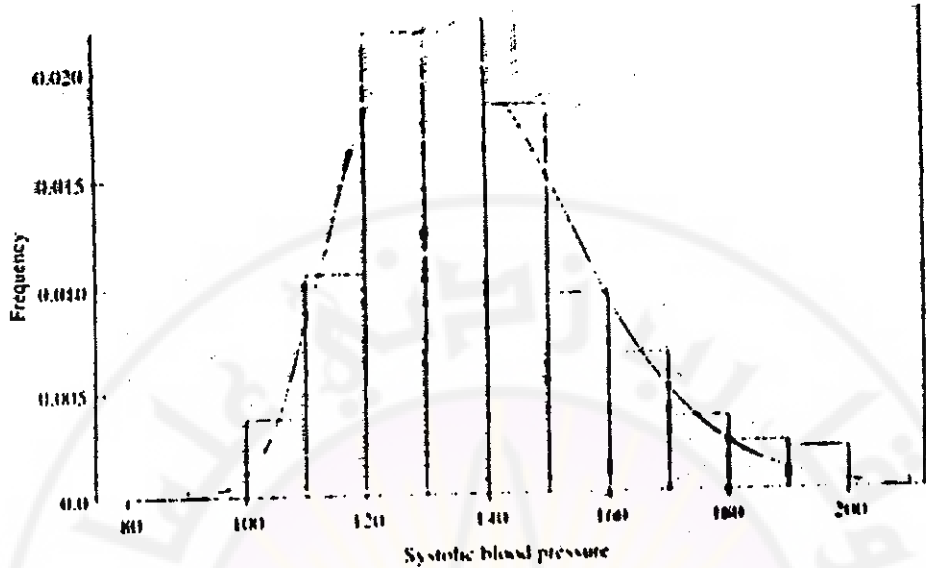
Graphs of the standardized gamma density function for (a) $r = 0.5, 2, 4, 5$; (b) $r = 50$.



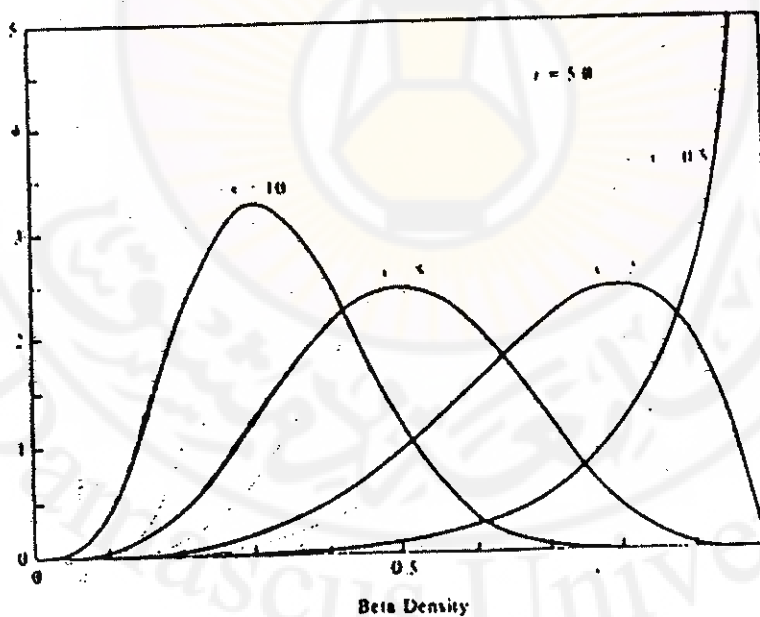
Graphs of the cumulative distribution functions for gamma distributions with parameters (a) $r = 2, \theta = 0.5, 1.0, 2.0$; (b) $r = 5, \theta = 1.0, 2.0, 4.0$.



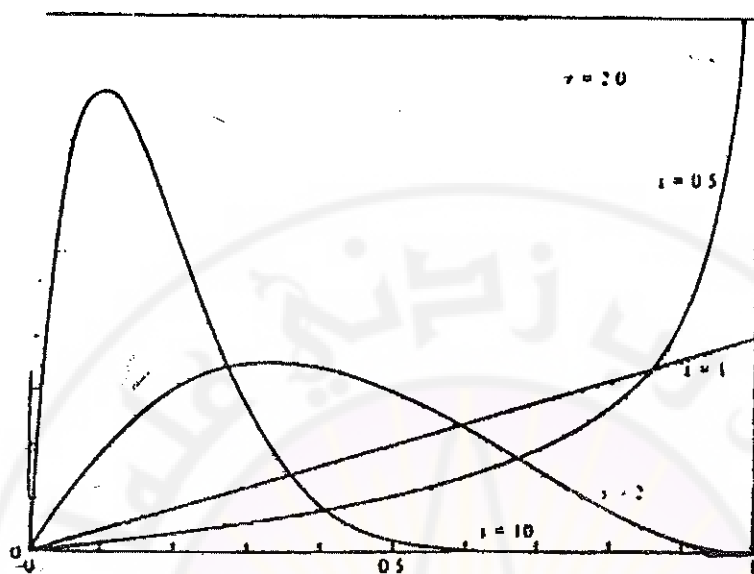
Graphs of the
survival functions for gamma
distributions with parameters (a)
 $r = 2, \theta = 0.5, 1.0, 2.0$; (b) $r =$
 $5, \theta = 1.0, 2.0, 4.0$.



Modified relative frequency histogram and hypothesized shifted gamma density.

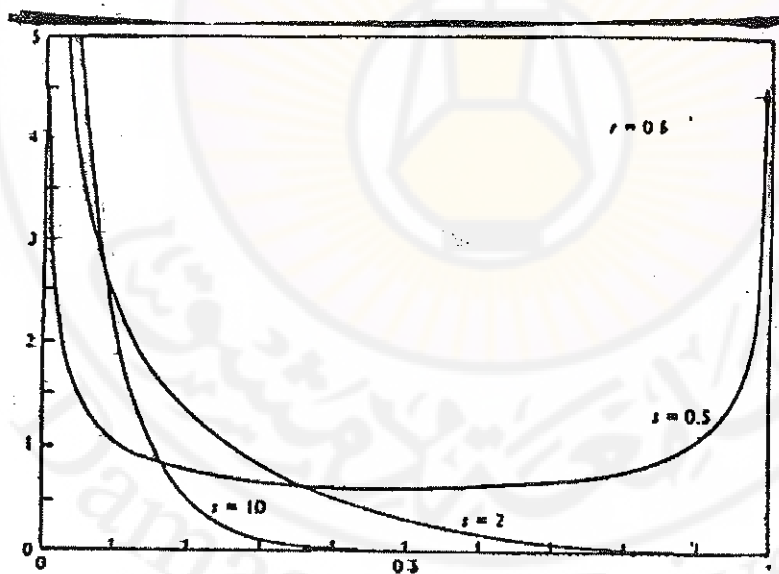


Graphs of the beta density function for (a) $r = 5.0, s = 0.5, 2.0, 5.0, 10.0$, (b) $r = 2.0, s = 0.5, 1.0, 2.0, 10.0$ (c) $r = 0.5, s = 0.5, 2.0, 10.0$



Beta Density

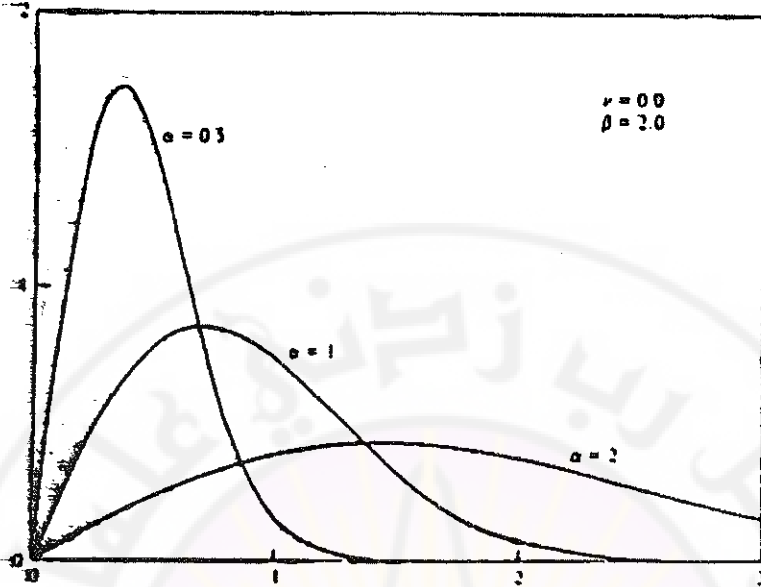
(b)



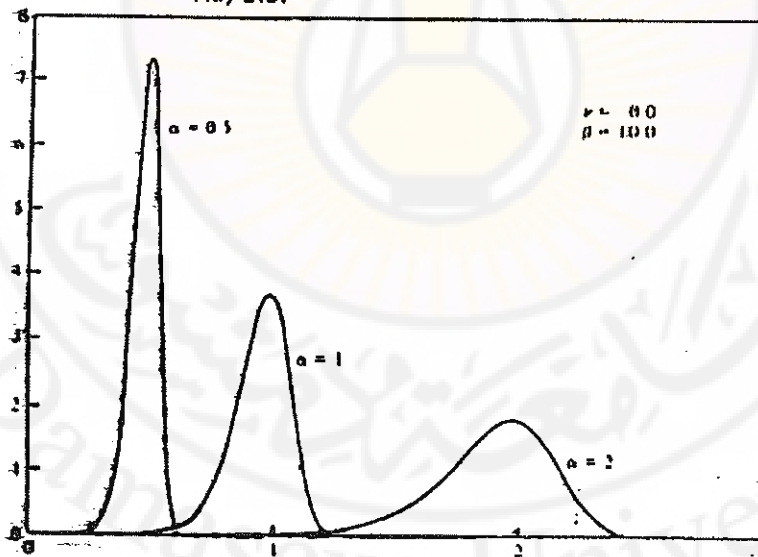
Beta Density

(c)

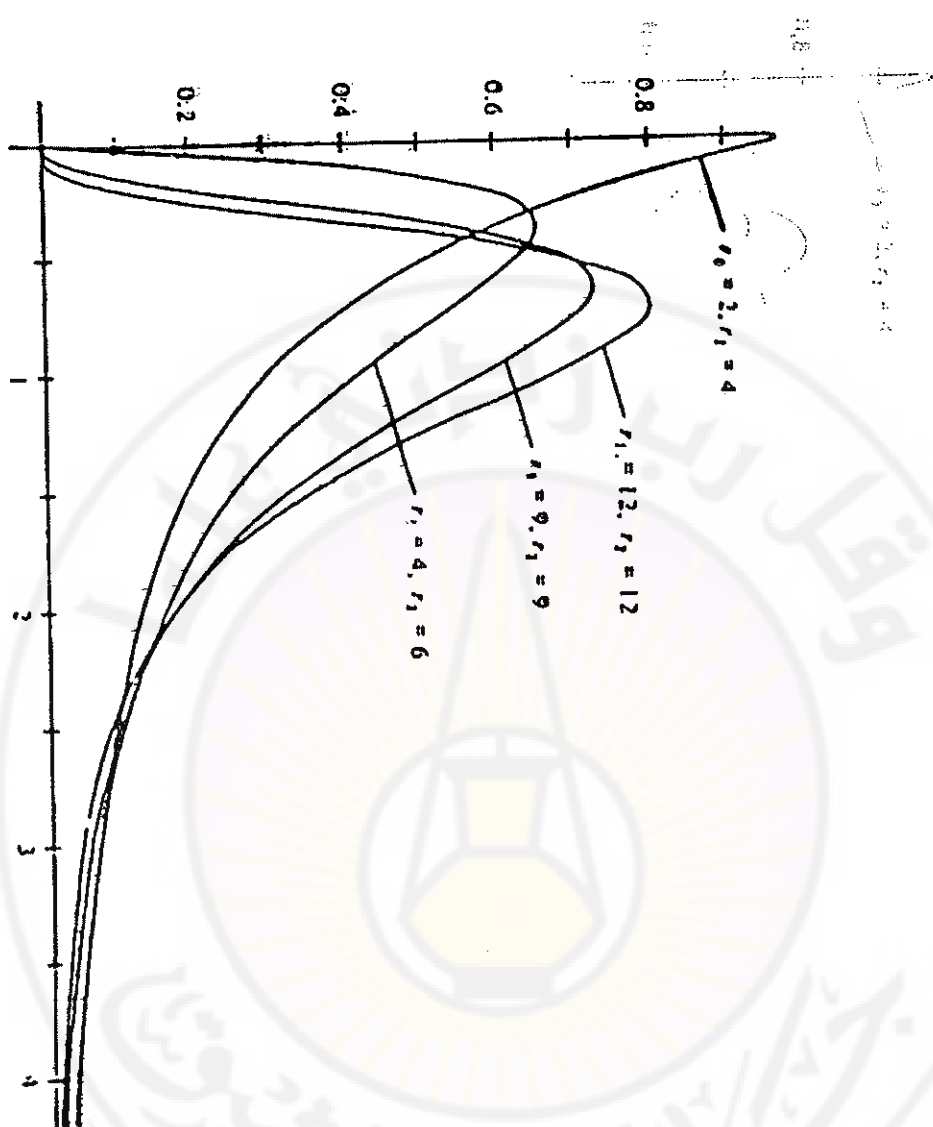
(continued)

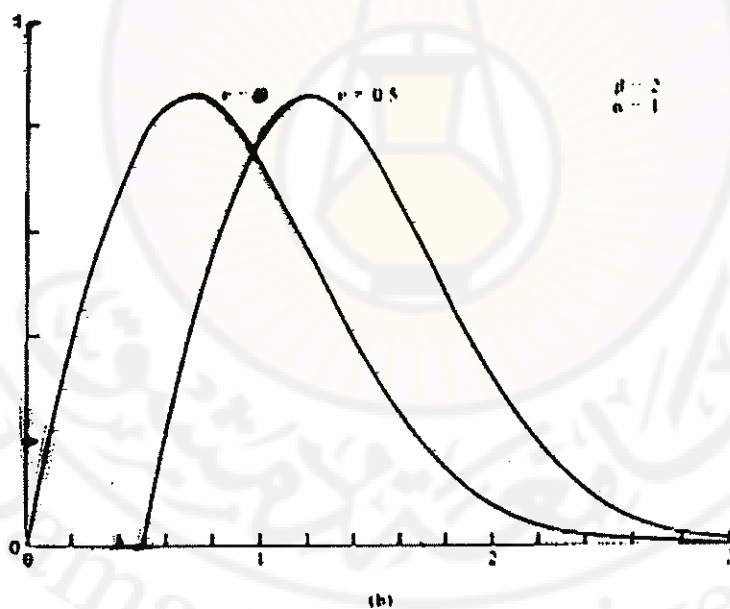
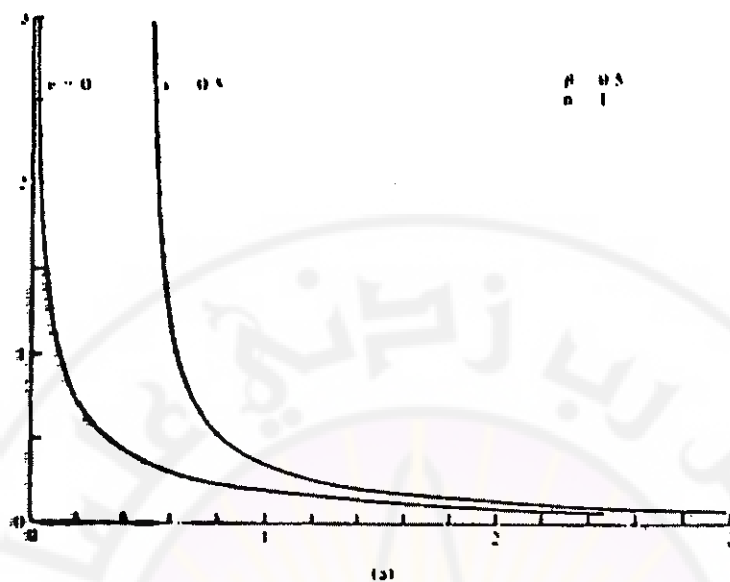


Graphs of the
Weibull density function for
 $\nu = 0.0$, $\beta = 2.0$, $\alpha = 0.5$,
1.0, 2.0.

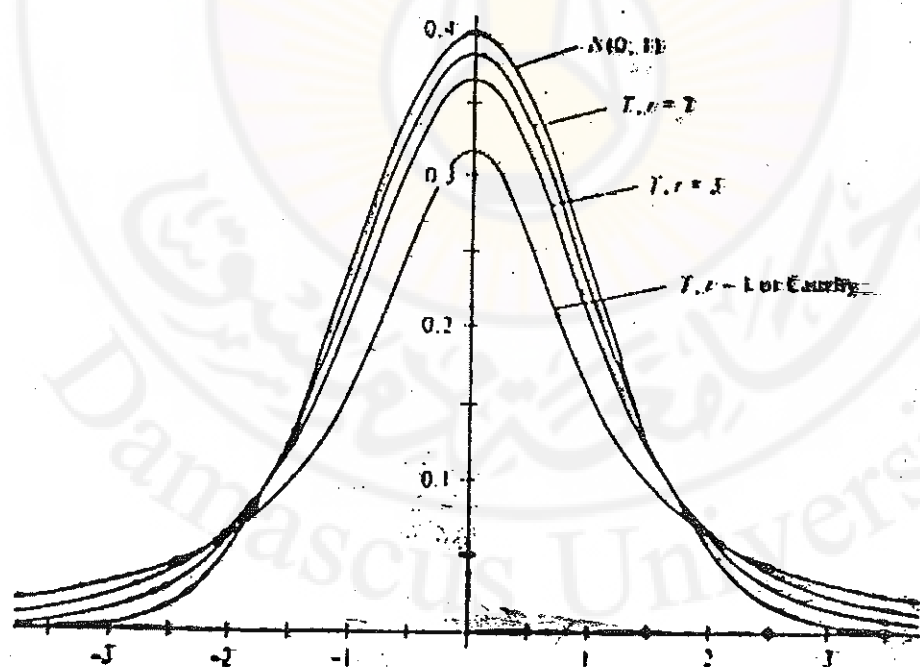
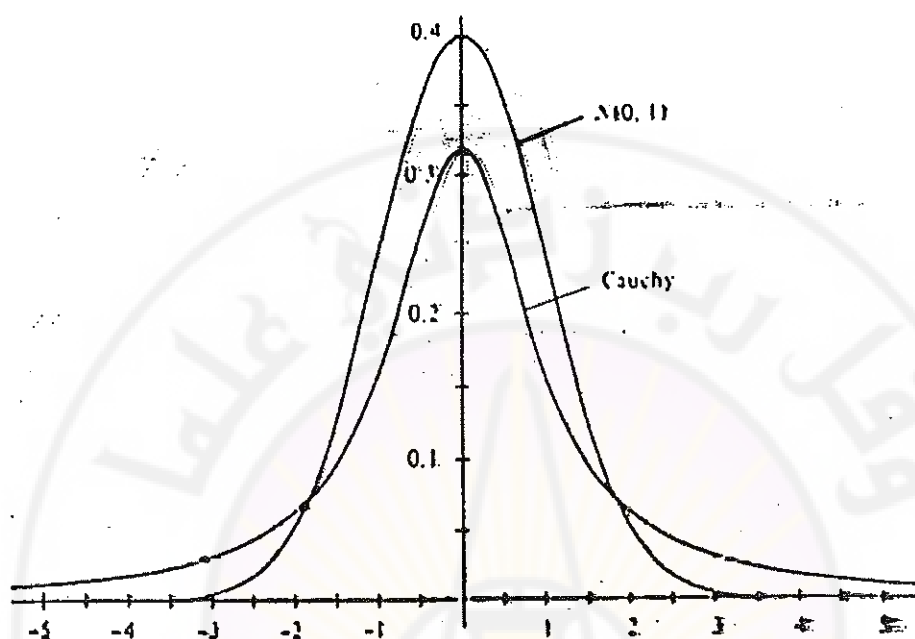


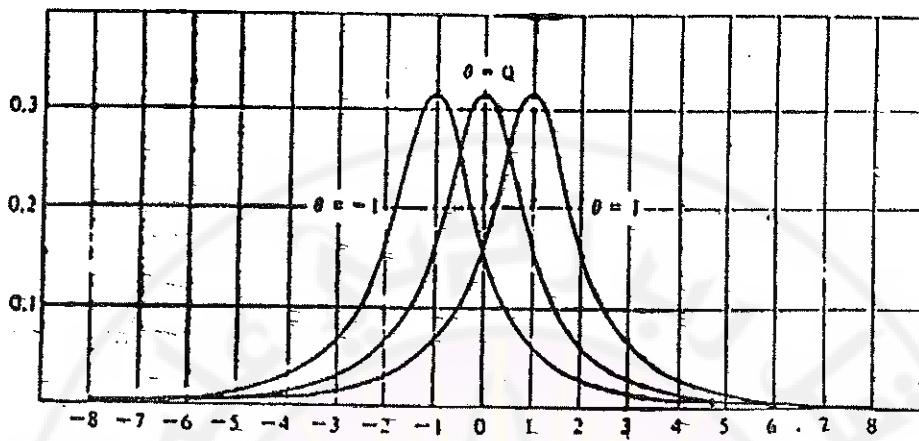
Graphs of the
Weibull density function for
 $\nu = 0.0$, $\beta = 10.0$, $\alpha = 0.5$,
1.0, 2.0.



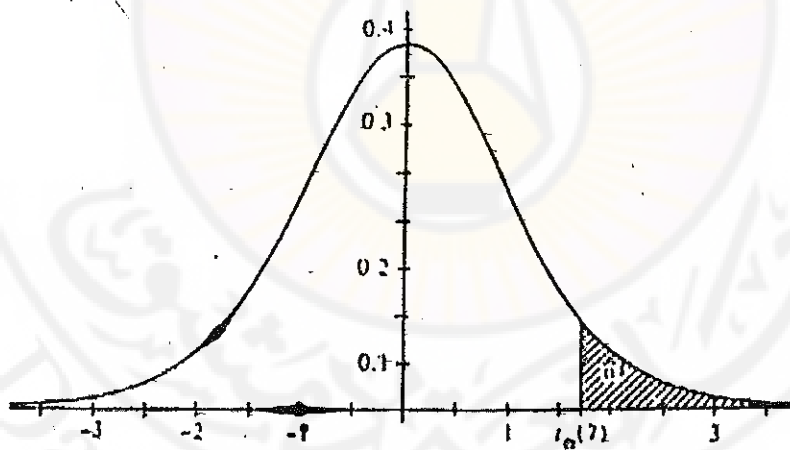


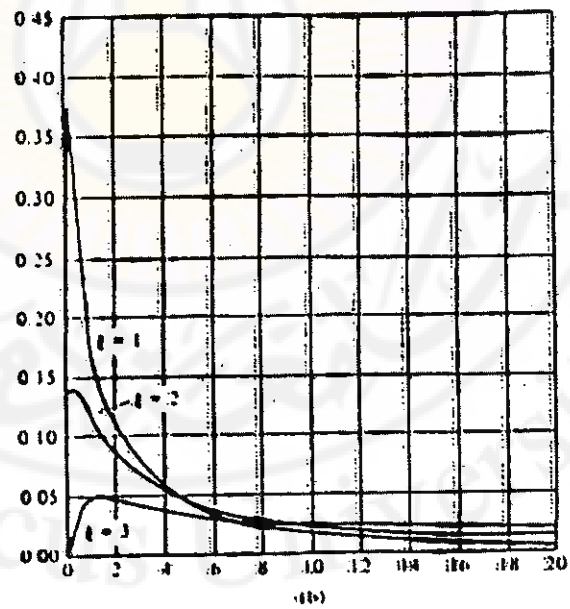
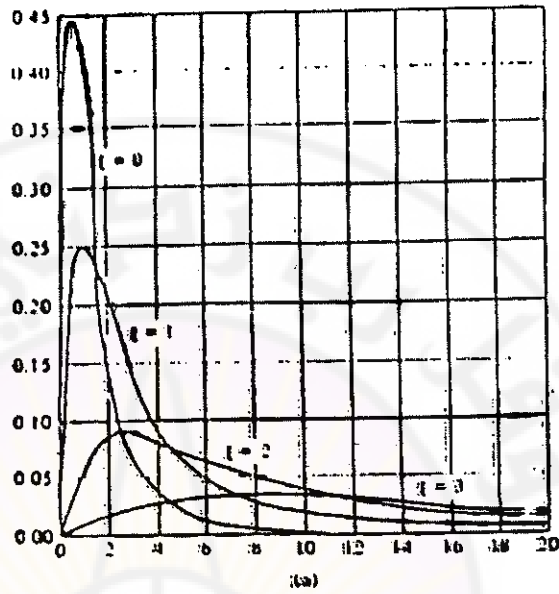
Graphs of the
Weibull density functions for
(a) $\beta = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $\nu = 0.0$,
0.5; (b) $\beta = 2.0$, $\alpha = 1.0$, $\nu =$
0.0, 0.5.



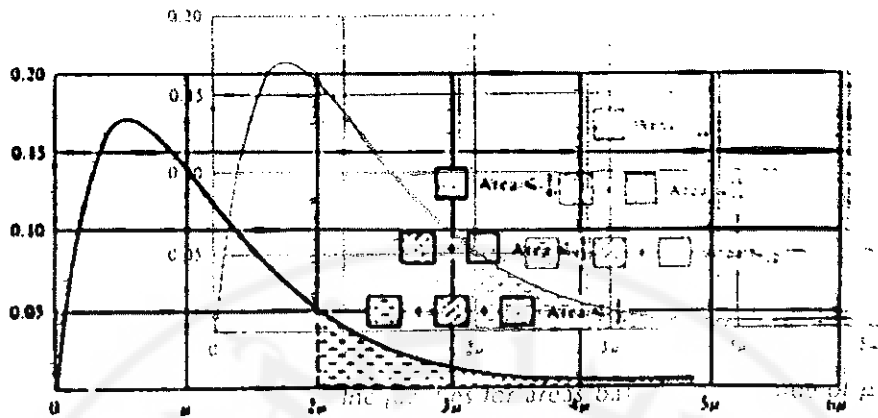


Graphs of the Cauchy density function for $\theta = -1, 0, 1$.

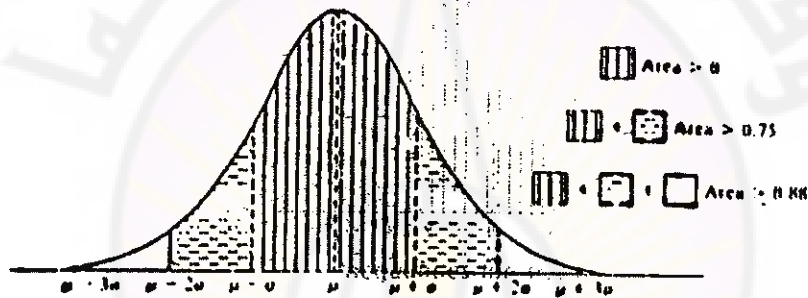




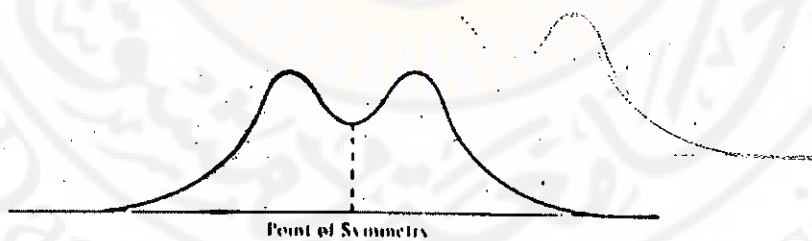
Graphs of the probability density function of the lognormal distribution for (a) $\delta^2 = 1$, $\xi = 0, 1, 2, 3$; (b) $\delta^2 = 3$, $\xi = 1, 2, 3$.



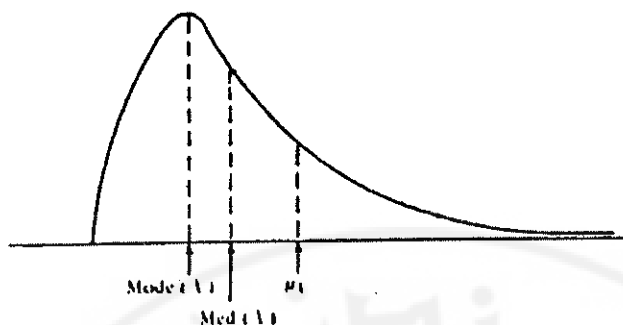
Inequalities for areas based on the value of μ .



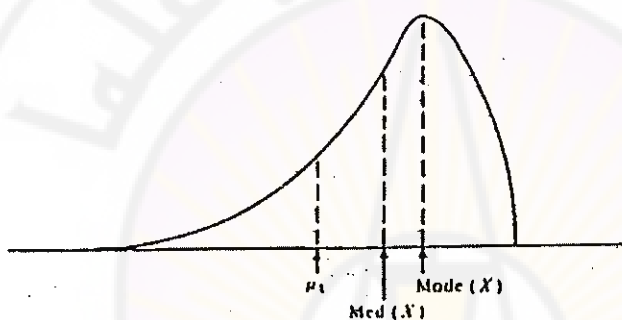
Inequalities for areas based on the values of μ and σ .



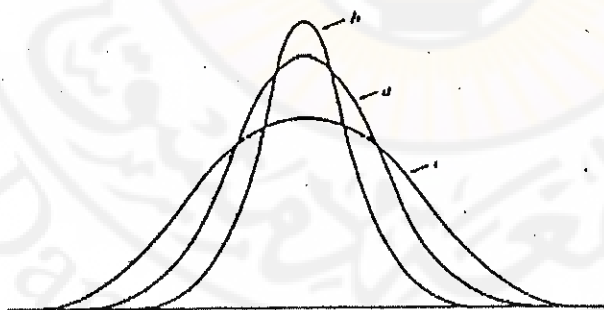
Graph of a symmetric probability density function.



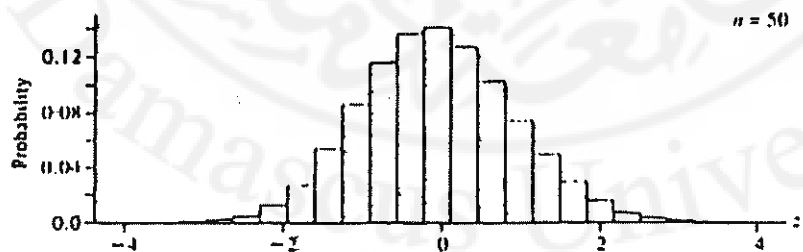
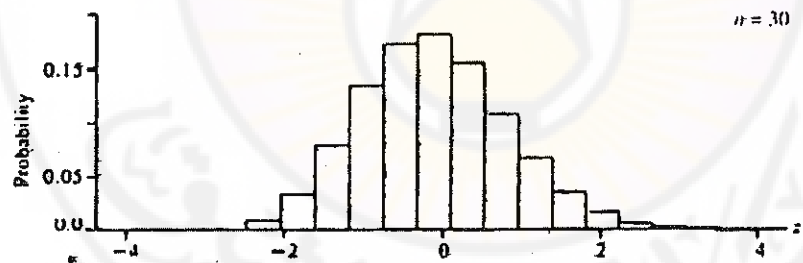
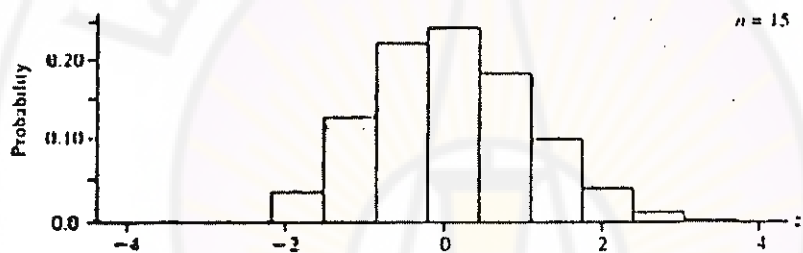
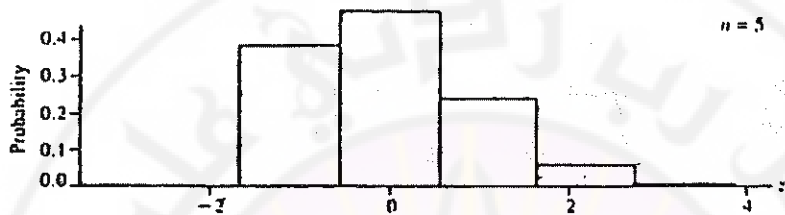
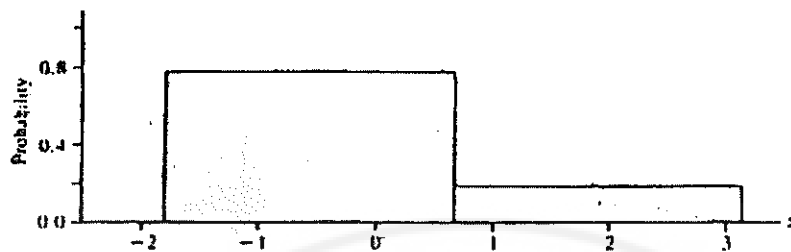
Graph of a probability density function skewed to the left.



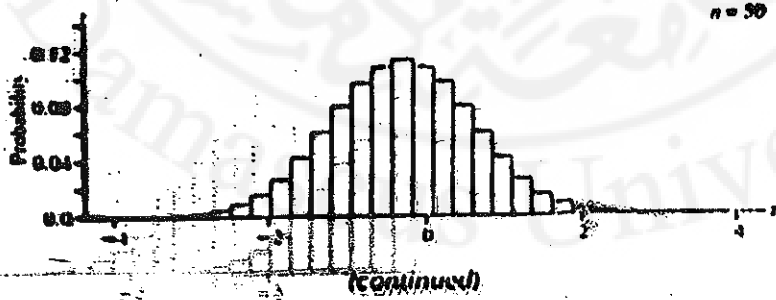
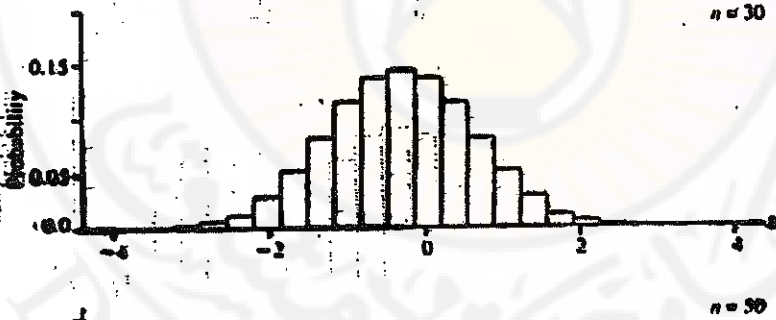
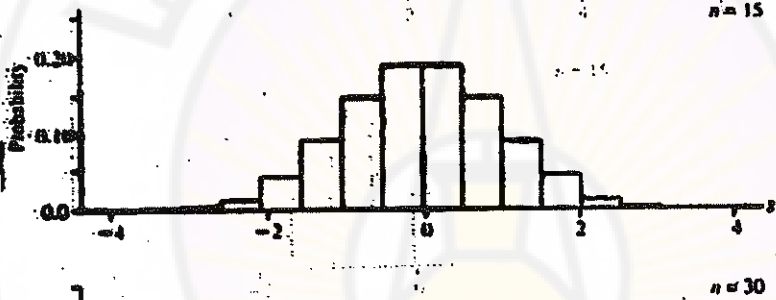
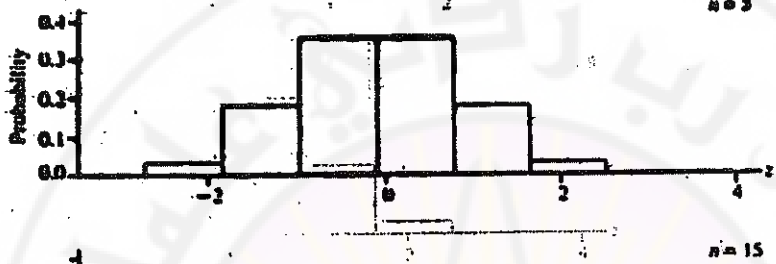
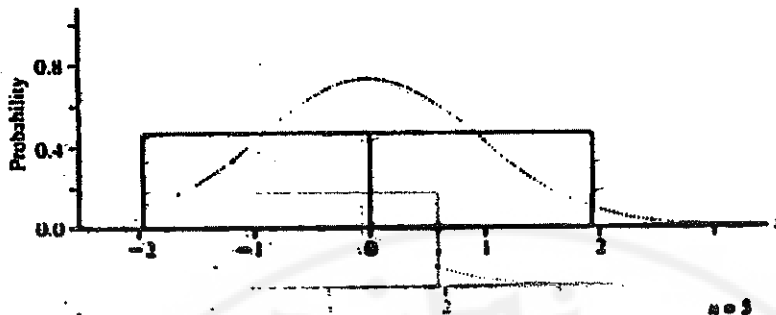
Graph of a probability density function skewed to the right.



Graph of the probability density functions of the normal distribution (a), a more peaked distribution (b), and a less peaked distribution (c).



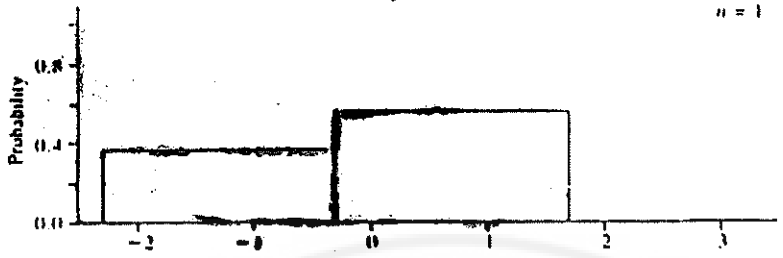
Histograms for binomial as approximated by the standard normal density.



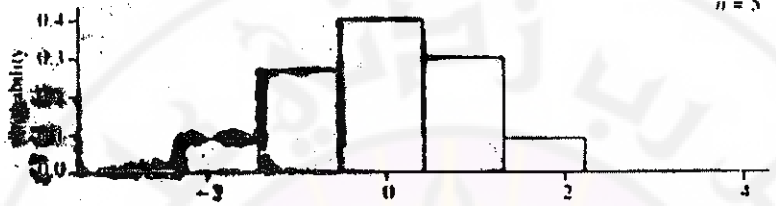
(continued)

$$\mu = 0.6$$

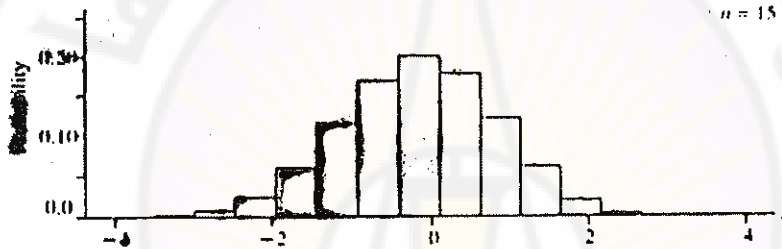
$$n = 1$$



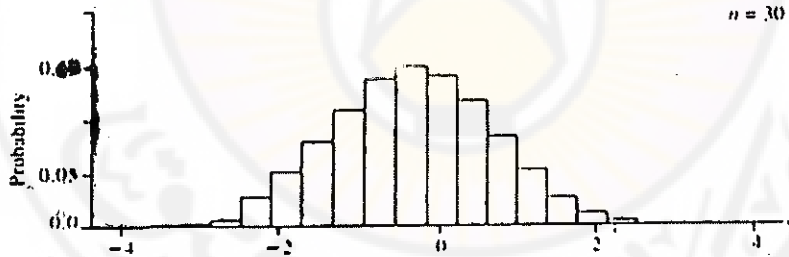
$$n = 5$$



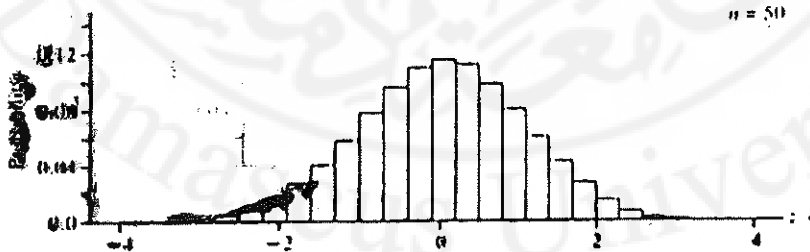
$$n = 15$$



$$n = 30$$

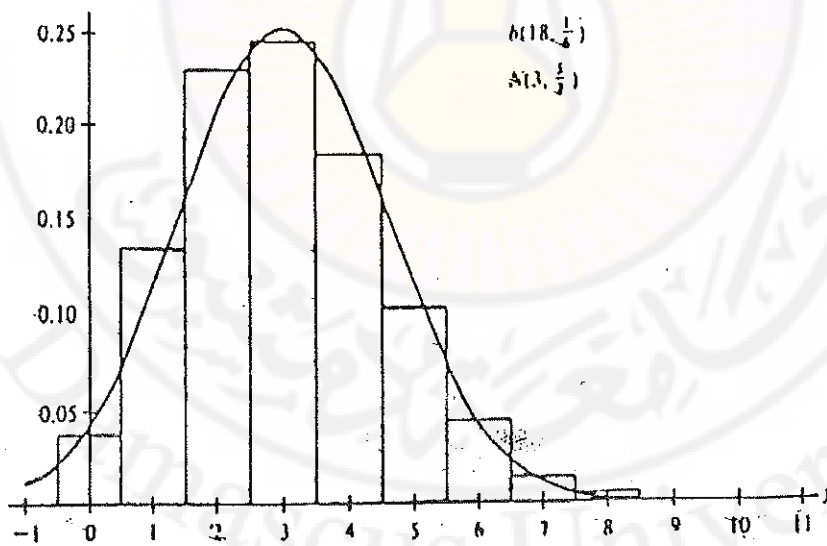
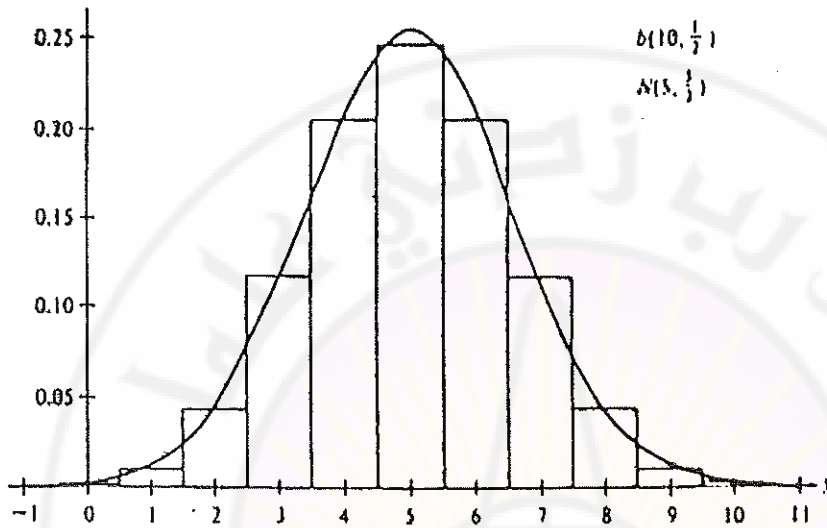


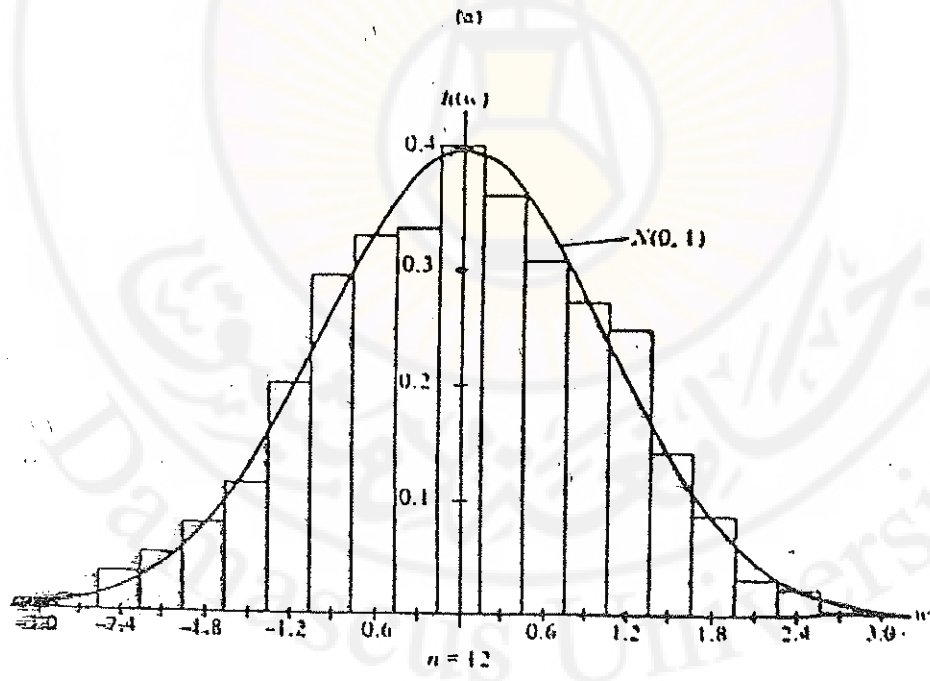
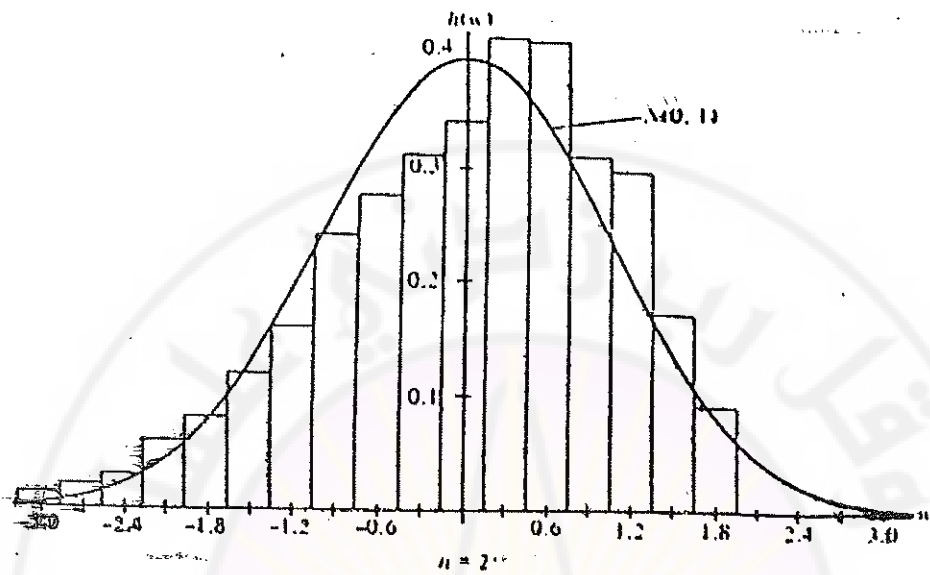
$$n = 50$$

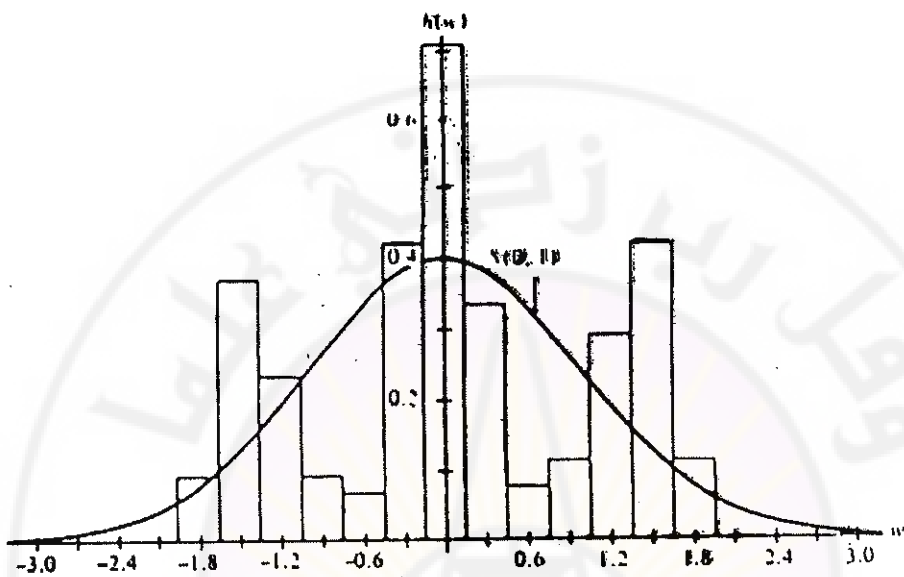


(continued)

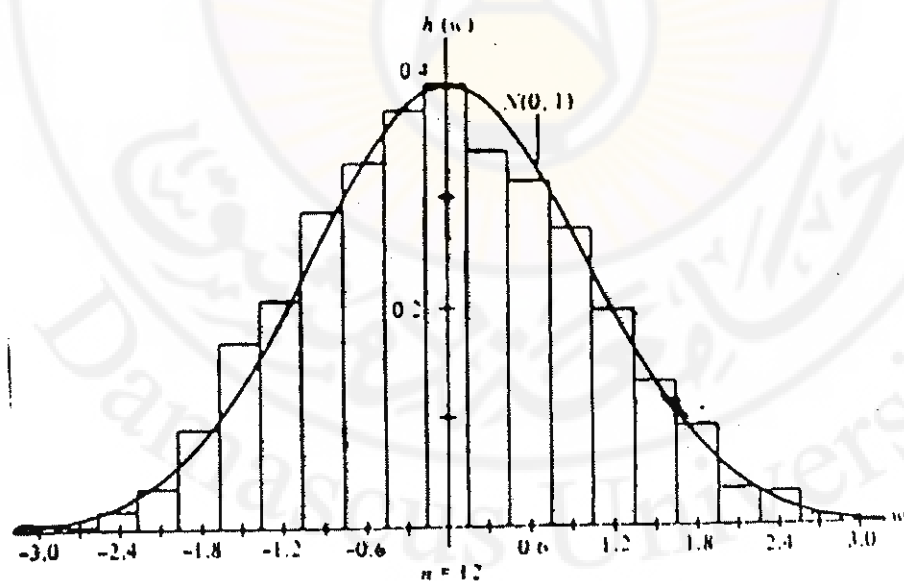
APPROXIMATIONS FOR DISCRETE DISTRIBUTIONS



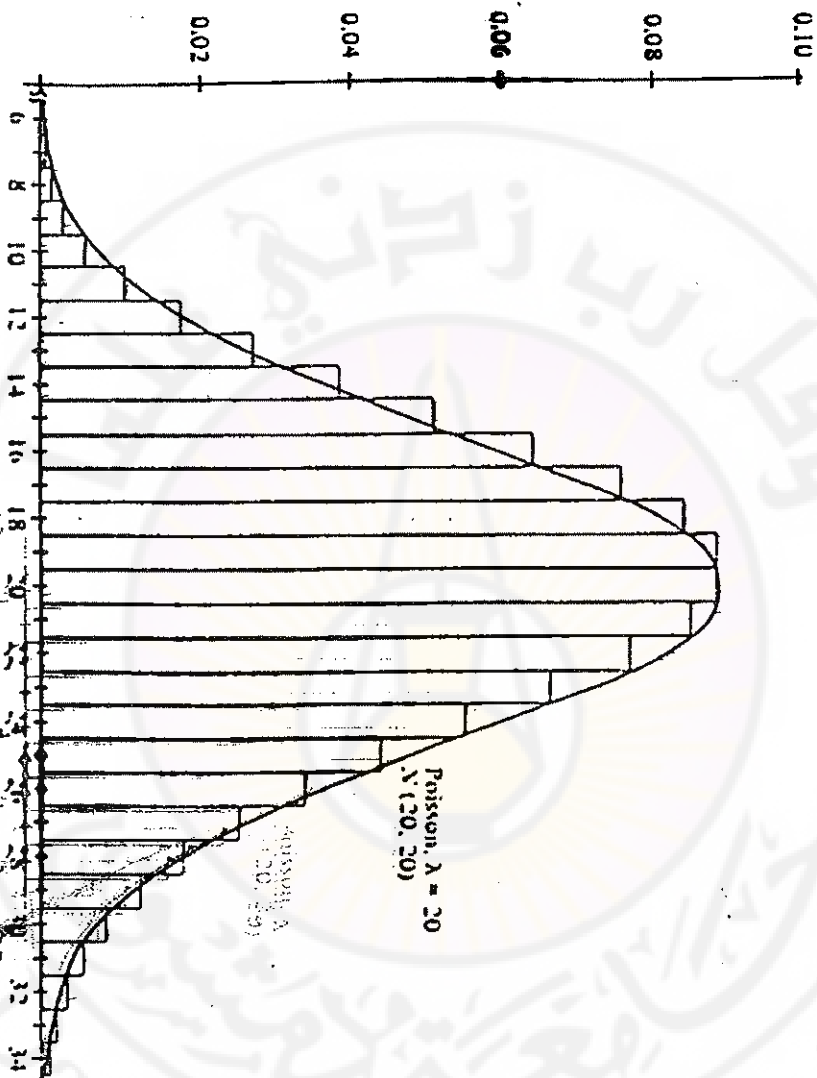




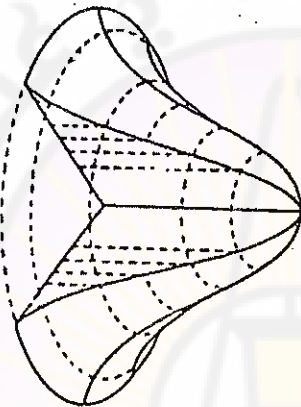
$n = 2$
(a)



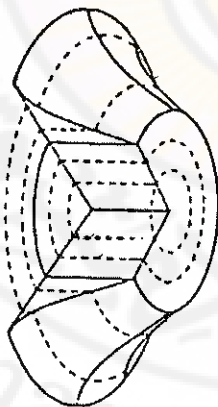
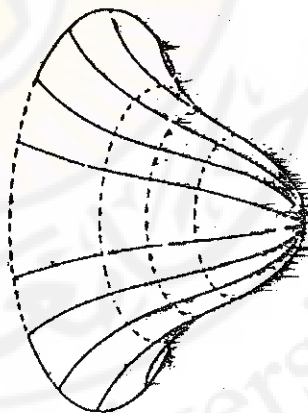
$n = 12$
(b)



The bivariate normal probability density function.

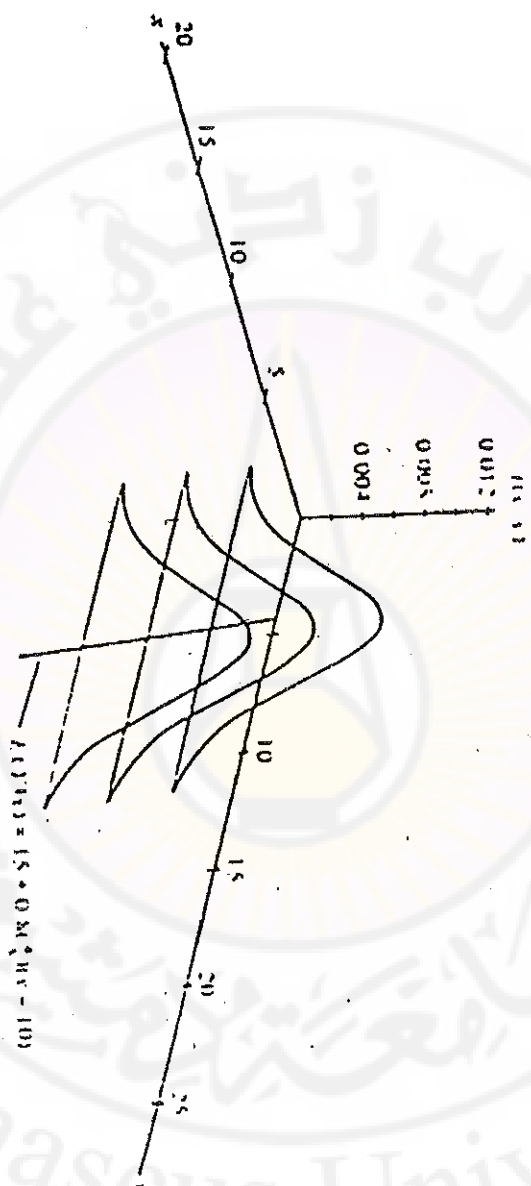


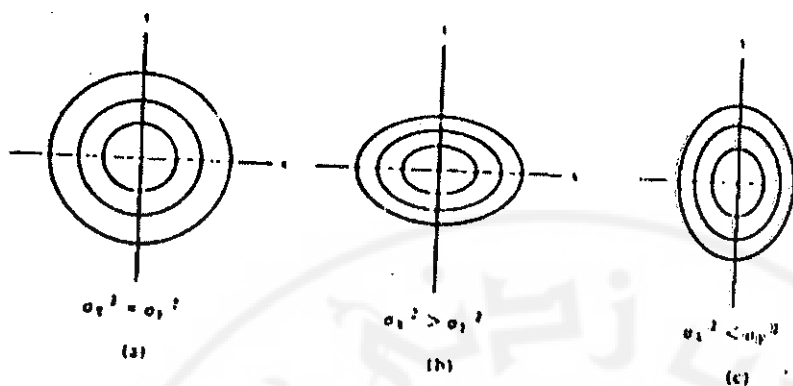
(a)



(b)

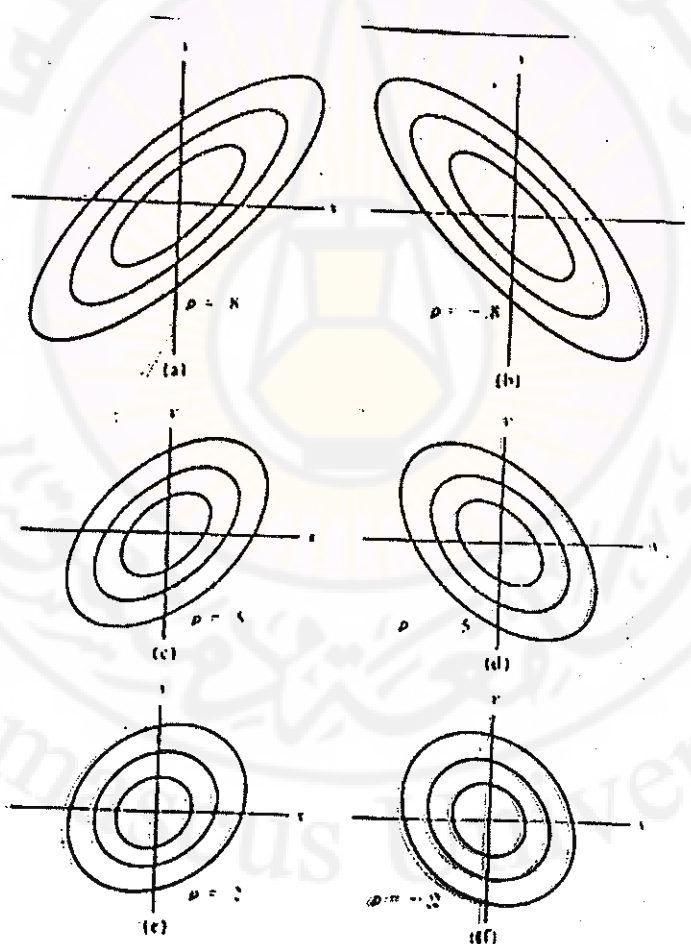
Probability contours of the bivariate normal density function given in full view and in cross section.



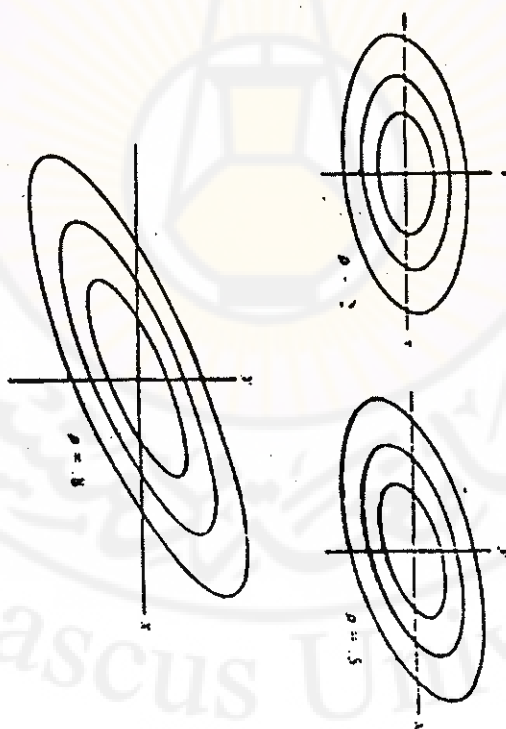


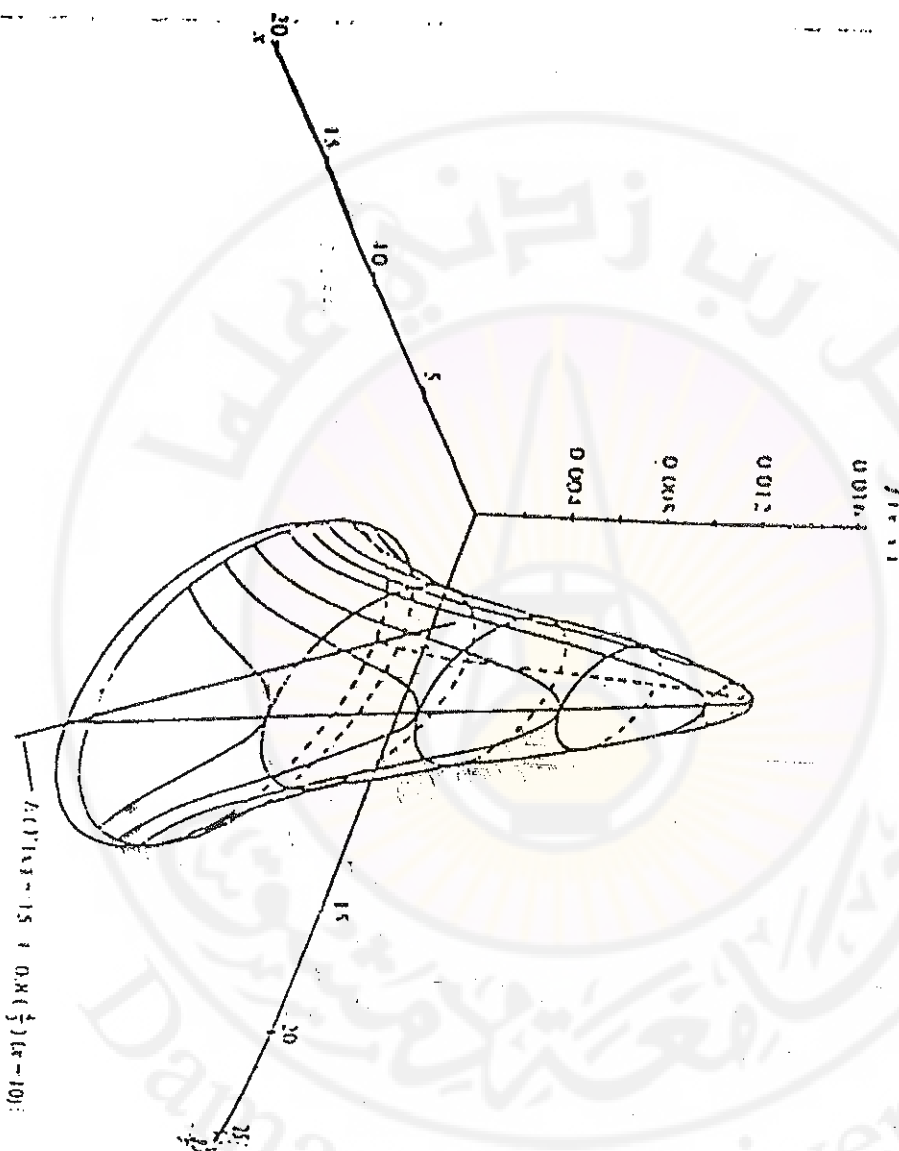
Contours of the bivariate normal density function when X and Y are uncorrelated.

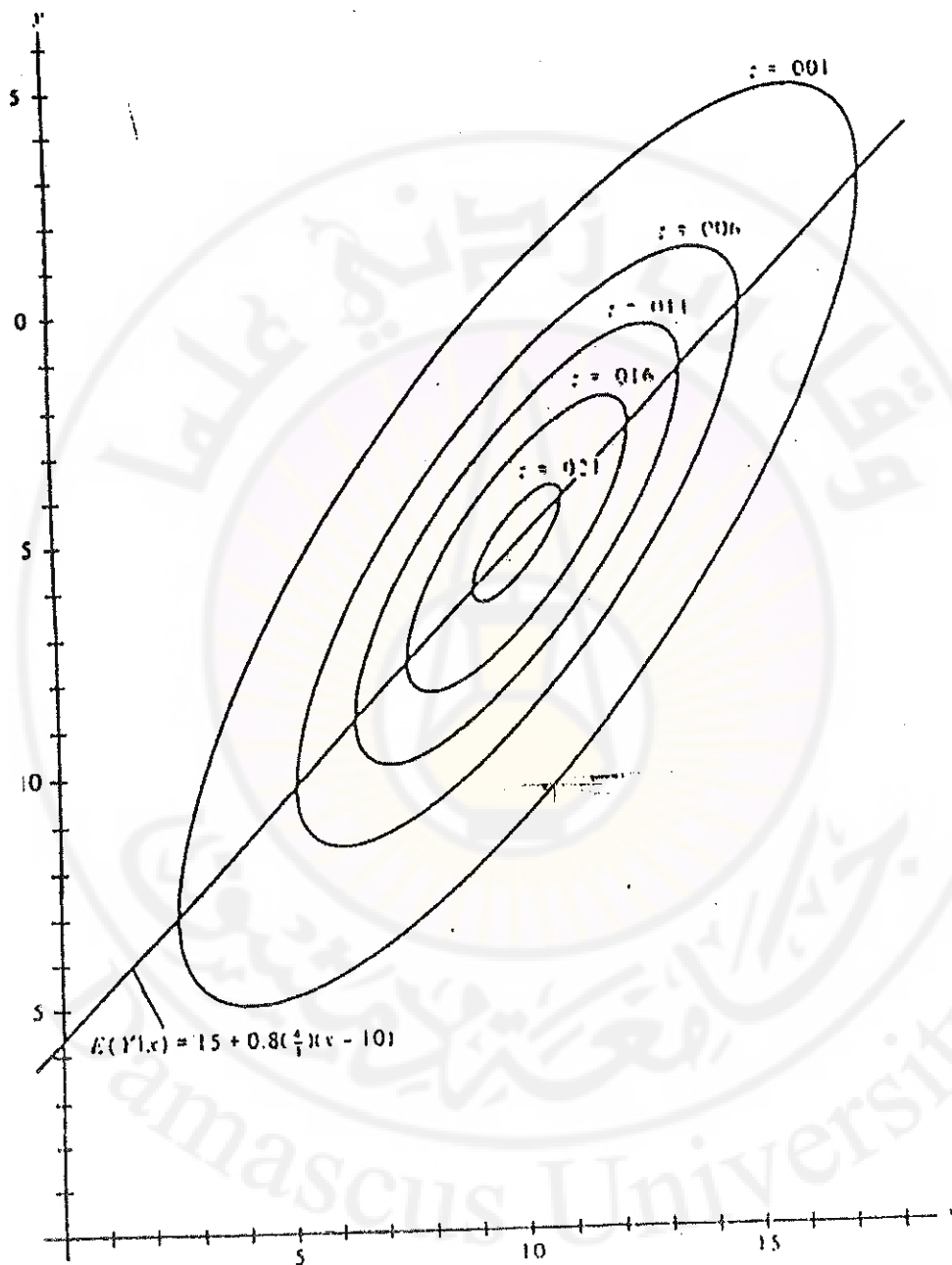
Contours of the bivariate normal density function for different values of the correlation coefficient ρ when $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$.



Contours of the
bivariate normal density function
for different values of ρ when
 $\sigma_x^2 = 4$ and $\sigma_y^2 = 1$.







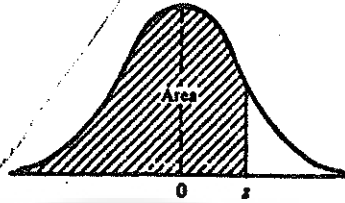
(c) (توزیع بواسون) : $p(x, \lambda)$ λ مجموعه احتمالات بواسون
 $x=0$

x	λ								
	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0893	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1530	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3583	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2000	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2806	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8787	0.8355	0.7359	0.6441	0.5640	0.4677	0.3750
17	0.9853	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6530	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9819	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9671	0.9418	0.9047	0.8551
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9917	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989
24	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594
25		0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554
26		1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718
27			0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827
28			1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897
29				1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941
30					0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967
31					1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982
32						0.9999	0.9999	0.9996	0.9990
33							0.9999	0.9998	0.9995
34							1.0000	0.9999	0.9998
35								1.0000	0.9999
36									0.9999
37									1.0000

تمة (c) مجموع احتمالات بواسون : $p(x, \lambda)$:
 $\sum_{x=0}^{\infty}$

r	λ								
	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0023	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3573	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4157	0.3290	0.2607	0.2114	0.1712	0.1406	0.1157	0.0885
6	0.6960	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3154	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8603	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4599	0.3896	0.3211	0.2687
8	0.9344	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9867	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9977	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9990	0.9799	0.9661	0.9466	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9995	0.9912	0.9840	0.9730	0.9578	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9998	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9999	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9407
15	0.9999	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21						1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22							1.0000	0.9999	0.9999
23								1.0000	0.9999
24									1.0000

(d) (توزيع طبيعي مصاري) في
 تابع التوزيع الطبيعي المصاري



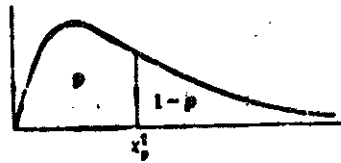
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0005	0.0007	0.0010	0.0013	0.0017	0.0021	0.0026
-3.3	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027	0.0033
-3.2	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0017	0.0021	0.0026	0.0031	0.0037	0.0044
-3.1	0.0010	0.0013	0.0016	0.0020	0.0024	0.0029	0.0034	0.0040	0.0047	0.0054
-3.0	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056
-2.9	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0035	0.0040	0.0046	0.0052	0.0059	0.0066
-2.8	0.0024	0.0028	0.0032	0.0037	0.0042	0.0048	0.0054	0.0060	0.0067	0.0074
-2.7	0.0028	0.0033	0.0038	0.0043	0.0049	0.0055	0.0061	0.0068	0.0075	0.0082
-2.6	0.0032	0.0037	0.0043	0.0048	0.0054	0.0060	0.0067	0.0073	0.0080	0.0087
-2.5	0.0036	0.0041	0.0047	0.0053	0.0059	0.0065	0.0072	0.0078	0.0085	0.0092
-2.4	0.0040	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0070	0.0077	0.0083	0.0090	0.0097
-2.3	0.0044	0.0050	0.0056	0.0062	0.0068	0.0074	0.0081	0.0087	0.0094	0.0101
-2.2	0.0048	0.0054	0.0060	0.0066	0.0072	0.0078	0.0085	0.0091	0.0098	0.0105
-2.1	0.0052	0.0058	0.0064	0.0070	0.0076	0.0082	0.0089	0.0095	0.0102	0.0109
-2.0	0.0054	0.0060	0.0066	0.0072	0.0078	0.0084	0.0091	0.0097	0.0104	0.0111
-1.9	0.0059	0.0065	0.0071	0.0077	0.0083	0.0089	0.0096	0.0102	0.0109	0.0116
-1.8	0.0064	0.0070	0.0076	0.0082	0.0088	0.0094	0.0101	0.0107	0.0114	0.0121
-1.7	0.0068	0.0074	0.0080	0.0086	0.0092	0.0098	0.0105	0.0111	0.0118	0.0125
-1.6	0.0072	0.0078	0.0084	0.0090	0.0096	0.0102	0.0109	0.0115	0.0122	0.0129
-1.5	0.0076	0.0082	0.0088	0.0094	0.0100	0.0106	0.0113	0.0119	0.0126	0.0133
-1.4	0.0080	0.0086	0.0092	0.0098	0.0104	0.0110	0.0117	0.0123	0.0130	0.0137
-1.3	0.0084	0.0090	0.0096	0.0102	0.0108	0.0114	0.0121	0.0127	0.0134	0.0141
-1.2	0.0088	0.0094	0.0100	0.0106	0.0112	0.0118	0.0125	0.0131	0.0138	0.0145
-1.1	0.0092	0.0098	0.0104	0.0110	0.0116	0.0122	0.0129	0.0135	0.0142	0.0149
-1.0	0.0096	0.0102	0.0108	0.0114	0.0120	0.0126	0.0133	0.0139	0.0146	0.0153
-0.9	0.0100	0.0106	0.0112	0.0118	0.0124	0.0130	0.0137	0.0143	0.0150	0.0157
-0.8	0.0104	0.0110	0.0116	0.0122	0.0128	0.0134	0.0141	0.0147	0.0154	0.0161
-0.7	0.0108	0.0114	0.0120	0.0126	0.0132	0.0138	0.0145	0.0151	0.0158	0.0165
-0.6	0.0112	0.0118	0.0124	0.0130	0.0136	0.0142	0.0149	0.0155	0.0162	0.0169
-0.5	0.0116	0.0122	0.0128	0.0134	0.0140	0.0146	0.0153	0.0159	0.0166	0.0173
-0.4	0.0119	0.0125	0.0131	0.0137	0.0143	0.0149	0.0156	0.0162	0.0169	0.0176
-0.3	0.0123	0.0129	0.0135	0.0141	0.0147	0.0153	0.0160	0.0166	0.0173	0.0180
-0.2	0.0127	0.0133	0.0139	0.0145	0.0151	0.0157	0.0164	0.0170	0.0177	0.0184
-0.1	0.0131	0.0137	0.0143	0.0149	0.0155	0.0161	0.0168	0.0174	0.0181	0.0188
0.0	0.0135	0.0141	0.0147	0.0153	0.0159	0.0165	0.0172	0.0178	0.0185	0.0192
0.1	0.0139	0.0145	0.0151	0.0157	0.0163	0.0169	0.0176	0.0182	0.0189	0.0196
0.2	0.0143	0.0149	0.0155	0.0161	0.0167	0.0173	0.0180	0.0186	0.0193	0.0200
0.3	0.0147	0.0153	0.0159	0.0165	0.0171	0.0177	0.0184	0.0190	0.0197	0.0204
0.4	0.0151	0.0157	0.0163	0.0169	0.0175	0.0181	0.0188	0.0194	0.0201	0.0208
0.5	0.0155	0.0161	0.0167	0.0173	0.0179	0.0185	0.0192	0.0198	0.0205	0.0212
0.6	0.0159	0.0165	0.0171	0.0177	0.0183	0.0189	0.0196	0.0202	0.0209	0.0216
0.7	0.0163	0.0169	0.0175	0.0181	0.0187	0.0193	0.0200	0.0206	0.0213	0.0220
0.8	0.0167	0.0173	0.0179	0.0185	0.0191	0.0197	0.0204	0.0210	0.0217	0.0224
0.9	0.0171	0.0177	0.0183	0.0189	0.0195	0.0201	0.0208	0.0214	0.0221	0.0228
1.0	0.0175	0.0181	0.0187	0.0193	0.0199	0.0205	0.0212	0.0218	0.0225	0.0232
1.1	0.0179	0.0185	0.0191	0.0197	0.0203	0.0209	0.0216	0.0222	0.0229	0.0236
1.2	0.0183	0.0189	0.0195	0.0201	0.0207	0.0213	0.0220	0.0226	0.0233	0.0240
1.3	0.0187	0.0193	0.0199	0.0205	0.0211	0.0217	0.0224	0.0230	0.0237	0.0244
1.4	0.0191	0.0197	0.0203	0.0209	0.0215	0.0221	0.0228	0.0234	0.0241	0.0248
1.5	0.0195	0.0201	0.0207	0.0213	0.0219	0.0225	0.0232	0.0238	0.0245	0.0252
1.6	0.0199	0.0205	0.0211	0.0217	0.0223	0.0229	0.0236	0.0242	0.0249	0.0256
1.7	0.0203	0.0209	0.0215	0.0221	0.0227	0.0233	0.0240	0.0246	0.0253	0.0260
1.8	0.0207	0.0213	0.0219	0.0225	0.0231	0.0237	0.0244	0.0250	0.0257	0.0264
1.9	0.0211	0.0217	0.0223	0.0229	0.0235	0.0241	0.0248	0.0254	0.0261	0.0268
2.0	0.0215	0.0221	0.0227	0.0233	0.0239	0.0245	0.0252	0.0258	0.0265	0.0272
2.1	0.0219	0.0225	0.0231	0.0237	0.0243	0.0249	0.0256	0.0262	0.0269	0.0276
2.2	0.0223	0.0229	0.0235	0.0241	0.0247	0.0253	0.0260	0.0266	0.0273	0.0280
2.3	0.0227	0.0233	0.0239	0.0245	0.0251	0.0257	0.0264	0.0270	0.0277	0.0284
2.4	0.0231	0.0237	0.0243	0.0249	0.0255	0.0261	0.0268	0.0274	0.0281	0.0288
2.5	0.0235	0.0241	0.0247	0.0253	0.0259	0.0265	0.0272	0.0278	0.0285	0.0292
2.6	0.0239	0.0245	0.0251	0.0257	0.0263	0.0269	0.0276	0.0282	0.0289	0.0296
2.7	0.0243	0.0249	0.0255	0.0261	0.0267	0.0273	0.0280	0.0286	0.0293	0.0300
2.8	0.0247	0.0253	0.0259	0.0265	0.0271	0.0277	0.0284	0.0290	0.0297	0.0304
2.9	0.0251	0.0257	0.0263	0.0269	0.0275	0.0281	0.0288	0.0294	0.0301	0.0308
3.0	0.0255	0.0261	0.0267	0.0273	0.0279	0.0285	0.0292	0.0298	0.0305	0.0312
3.1	0.0259	0.0265	0.0271	0.0277	0.0283	0.0289	0.0296	0.0302	0.0309	0.0316
3.2	0.0263	0.0269	0.0275	0.0281	0.0287	0.0293	0.0300	0.0306	0.0313	0.0320
3.3	0.0267	0.0273	0.0279	0.0285	0.0291	0.0297	0.0304	0.0310	0.0317	0.0324
3.4	0.0271	0.0277	0.0283	0.0289	0.0295	0.0301	0.0308	0.0314	0.0321	0.0328
3.5	0.0275	0.0281	0.0287	0.0293	0.0299	0.0305	0.0312	0.0318	0.0325	0.0332
3.6	0.0279	0.0285	0.0291	0.0297	0.0303	0.0309	0.0316	0.0322	0.0329	0.0336
3.7	0.0283	0.0289	0.0295	0.0301	0.0307	0.0313	0.0320	0.0326	0.0333	0.0340
3.8	0.0287	0.0293	0.0299	0.0305	0.0311	0.0317	0.0324	0.0330	0.0337	0.0344
3.9	0.0291	0.0297	0.0303	0.0309	0.0315	0.0321	0.0328	0.0334	0.0341	0.0348
4.0	0.0295	0.0301	0.0307	0.0313	0.0319	0.0325	0.0332	0.0338	0.0345	0.0352
4.1	0.0299	0.0305	0.0311	0.0317	0.0323	0.0329	0.0336	0.0342	0.0349	0.0356
4.2	0.0303	0.0309	0.0315	0.0321	0.0327	0.0333	0.0340	0.0346	0.0353	0.0360
4.3	0.0307	0.0313	0.0319	0.0325	0.0331	0.0337	0.0344	0.0350	0.0357	0.0364
4.4	0.0311	0.0317	0.0323	0.0329	0.0335	0.0341	0.0348	0.0354	0.0361	0.0368
4.5	0.0315	0.0321	0.0327	0.0333	0.0339	0.0345	0.0352	0.0358	0.0365	0.0372
4.6	0.0319	0.0325	0.0331	0.0337	0.0343	0.0349	0.0356	0.0362	0.0369	0.0376
4.7	0.0323	0.0329	0.0335	0.0341	0.0347	0.0353	0.0360	0.0366	0.0373	0.0380
4.8	0.0327	0.0333	0.0339	0.0345	0.0351	0.0357	0.0364	0.0370	0.0377	0.0384
4.9	0.0331	0.0337	0.0343	0.0349	0.0355	0.0361	0.0368	0.0374	0.0381	0.0388
5.0	0.0335	0.0341	0.0347	0.0353	0.0359	0.0365	0.0372	0.0378	0.0385	0.0392
5.1	0.0339	0.0345	0.0351	0.0357	0.0363	0.0369	0.0376	0.0382	0.0389	0.0396
5.2	0.0343	0.0349	0.0355	0.0361	0.0367	0.0373	0.0380	0.0386	0.0393	0.0400
5.3	0.0347	0.0353	0.0359	0.0365	0.0371	0.0377	0.0384	0.0390	0.0397	0.0404
5.4	0.0351	0.0357	0.0363	0.0369	0.0375	0.0381	0.0388	0.0394	0.0401	0.0408
5.5	0.0355	0.0361	0.0367	0.0373	0.0379	0.0385	0.0392	0.0398	0.0405	0.0412
5.6	0.0359	0.0365	0.0371	0.0377	0.0383	0.0389	0.0396	0.0402	0.0409	0.0416
5.7	0.0363	0.0369	0.0375	0.0381	0.0387	0.0393	0.0400	0.0406	0.0413	0.0420
5.8	0.0367	0.0373	0.0379	0.0385	0.0391	0.0397	0.0404	0.0410	0.0417	0.0424
5.9	0.0371	0.0377	0.0383	0.0389	0.0395	0.0401	0.0408	0.0414	0.0421	0.0428
6.0	0.0375	0.0381	0.0387	0.0393	0.0399	0.0405	0.0412	0.0418	0.0425	0.0432
6.1	0.0379	0.0385	0.0391	0.0397	0.0403	0.0409	0.0416	0.0422	0.0429	0.0436
6.2	0.0383	0.0389	0.0395	0.0401	0.0407	0.0413	0.0420	0.0426	0.0433	0.0440
6.3	0.0387	0.0393	0.0399	0.0405	0.0411	0.0417	0.0424	0.0430	0.0437	0.0444
6.4	0.0391	0.0397	0.0403	0.0409						

(c) جدول قيم تابع الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري



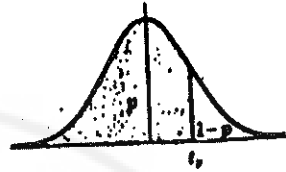
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3946	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3830	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1759	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1625	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0776	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

جدول تابع توزیع $(\chi^2_p(v))$ حيث v درجة الحرية



p	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.9}$	$\chi^2_{.8}$	$\chi^2_{.7}$	$\chi^2_{.6}$	$\chi^2_{.5}$	$\chi^2_{.4}$	$\chi^2_{.3}$	$\chi^2_{.2}$	$\chi^2_{.1}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	13.8
2	.0100	.0201	.0506	.193	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.6	16.3
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	15.8	18.5
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	17.5	20.5
5	.412	.554	.831	1.16	1.61	2.07	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	19.3	22.3
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	21.1	24.1
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.26	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	22.9	25.9
8	1.34	1.66	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.6	20.1	22.0	24.6	27.6
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	26.2	29.2
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.6	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	27.8	30.8
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	29.4	32.4
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	30.9	33.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	32.4	35.4
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	33.8	36.8
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	35.2	38.2
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	36.7	39.7
17	5.70	6.41	7.58	8.67	10.1	12.8	16.2	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	38.1	41.1
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	39.6	42.6
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	41.0	44.0
20	7.43	8.20	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	39.9	42.3	45.3
21	8.03	8.80	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.2	43.6	46.6
22	8.64	9.44	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	45.1	48.1
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	46.7	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	48.2	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	49.6	52.8
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	51.1	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	52.5	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	53.9	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	55.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	56.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.5	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	70.4	73.4
50	23.0	24.7	27.4	30.6	33.7	38.9	44.9	51.3	57.7	61.7	65.2	69.6	72.6	76.2	79.2
60	25.5	27.5	30.6	34.2	37.7	43.8	50.3	56.9	63.4	67.4	71.1	75.5	78.5	82.1	85.1
70	28.3	30.4	33.9	37.1	41.7	48.7	55.3	62.0	68.7	72.8	76.4	80.8	83.8	87.4	90.4
80	31.2	33.5	37.2	40.4	45.7	53.7	60.3	67.3	74.2	78.4	82.0	86.4	89.4	93.0	96.0
90	34.2	36.6	40.5	44.1	50.0	58.9	66.3	73.6	80.6	84.9	88.5	92.9	95.9	99.5	102.5
100	37.2	39.7	43.8	47.9	54.2	63.1	70.8	78.3	85.5	90.0	93.6	98.0	101.0	104.6	107.6

(g) جدول تابع توزيع t (ستودنت): $t_p(v)$ حيث v درجة الحرية



v	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.50}$	$t_{.40}$	$t_{.30}$	$t_{.20}$	$t_{.10}$	$t_{.05}$
1	.168	.325	.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	
2	.142	.289	.617	.818	1.061	1.89	2.92	4.80	6.96	9.92	
3	.137	.277	.584	.765	.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	
4	.134	.271	.560	.741	.941	1.59	2.13	2.78	3.75	4.60	
5	.132	.267	.559	.727	.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	
6	.131	.265	.553	.716	.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	
7	.130	.263	.549	.711	.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50	
8	.130	.262	.546	.706	.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	
9	.129	.261	.543	.703	.883	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	
10	.129	.260	.542	.700	.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	
11	.129	.260	.540	.697	.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	
12	.128	.259	.539	.695	.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	
13	.128	.259	.538	.694	.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	
14	.128	.258	.537	.692	.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	
15	.128	.258	.536	.691	.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	
16	.128	.258	.535	.690	.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	
17	.128	.257	.534	.689	.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	
18	.127	.257	.534	.688	.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	
19	.127	.257	.533	.688	.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	
20	.127	.257	.533	.687	.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84	
21	.127	.257	.532	.686	.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	
22	.127	.256	.532	.686	.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	
23	.127	.256	.532	.685	.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	
24	.127	.256	.531	.685	.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	
25	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79	
26	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	
27	.127	.256	.531	.684	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	
28	.127	.256	.530	.683	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	
29	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76	
30	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	
40	.126	.255	.529	.681	.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	
60	.126	.254	.527	.679	.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	
120	.126	.254	.526	.677	.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	
∞	.126	.253	.524	.674	.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58	

(h) جدول تابع توزيع F (ف) : $F_{0.95; v_1, v_2}$ حيث v_1, v_2 درجتا الحرية



$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	300	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	250	250	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.80	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.80	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.09	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.51	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.36	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.08

فتحة (h) جدول تابع توزيع F (فيشر) : $FO.99, v_1, v_2$ حيث
 v_1, v_2 درجات الحرية .



$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6167	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.9	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.69	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.04	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.66	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.80	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.63	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.52	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.66
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.59	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.46	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.95	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.63	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.39	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.46	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.08
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.16	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.86	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.60	1.47	1.32	1.00

ملحق IV: المصطلحات العلمية (إنكليزي - عربي)

Absolute Value	قيمة تقريبية
Approximation	تقريب
Arithmetic Mean	متوسط حسابي
Ascending Order	ترتيب تصاعدي
Axioms of Probability	مسلمات الاحتمال
Absolutely Continuos	مستمر إطلاقاً
Almost Everywhere	حيثما كان تقريباً
Associative	تجميعي
Area	مساحة
Aleatory	عشوائي
Average Sample Size	متوسط حجم العينة
Additive	جمعي
Borel Set	مجموعة بوريليه
Binomial Distribution	التوزيع الحدائي (الثنائي)
Bivariate Normal Distribution	التوزيع الثنائي الطبيعي
Beta Distribution	توزيع بيتا
Bayes Formula	قانون بايز
Bernoulli Distribution	توزيع برنولي
Beta Function	دالة بيتا

Central Limit Theorem	مبرهنة النهاية المركزية
Coding	ترميز
Coefficient	معامل
Combinations	متوافقات
Complement	متنمة
Compound Event	حادثة مركبة
Conditional Probability	احتمال شرطي
Confidence Coefficient	معامل الثقة
Confidence Interval	مجال الثقة
Continuos Random Variables	متغير عشوائي مستمر
Correlation	ارتباط
Correlation Coefficient	معامل الارتباط
Counting Principle	مبدأ العد
Curve	منحنى
Calculus	حساب
Calculus of Probability	حساب الاحتمالات
Cauchy Distribution	توزيع كوشي
Certain Event	حادث أكيد
Central Moment	عزم مركزي
Change of Variable	تحويل المتغير
Chi-Square	كاي - مربع
Characteristic Function	دالة مميزة

Complementary Event	حادث متمم
Composite Experimental	تجربة مركبة
Conditional Distribution	توزيع شرطي
Countable	قابل للعد
Constant	ثابت
Convex	محدب
Convergence	تقارب
Covariance	تغاير
Decomposition	تفكيك
Degree of Freedom	درجة الحرية
Density	كثافة
Density Function	دالة الكثافة
Determinant	معين
Dependants Variable	متغيرات مرتبطة
Discrete Random Variables	متغيرات عشوائية منفصلة
Discrete Distribution	توزيع منفصل
Divergent	متباعد
Data	بيانات
Deviation	انحراف
Deviation Mean	متوسط الانحراف
Disjoint Events	حادثتان منفصلتان
Definite Integral	تكامل محدود

Element	عنصر
Equation	معادلة
Event	حادثة
Expectation	التوقع
Elementary Event	حادثة ابتدائية
Empty Set	مجموعة خالية
Equality	مساواة
Equivalence	تكافؤ
Error	خطأ
Evens Numbers	أعداد زوجية
Exponential Distribution	التوزيع الأسّي
Expected Value	توقع رياضي
Experment	تجربة
Equal Probability Model	نموذج الاحتمالات المتساوية
Exponent	أسّي
Factorial Moments	العزوم العاملية
Finite Probability Space	فضاء احتمالي منتهي
Function	دالة
Failure	فشل
Formula	دستور - قانون
Frequency Distribution	توزيع التكرار
Factorial n	n عامل

Favorable Events	حوادث مواتية
Finite	منته
Fourrier Transformation	تحويل فورييه
Fisher Distribution	توزيع فيشر
Function of Density	دالة الكثافة
Function of Distribution	دالة التوزيع
Games of Chance	ألعاب الحظ
Gamma Distribution	توزيع غاما
Geometrical Mean	وسط هندسي
Geometrical Distribution	توزيع هندسي
Gamma Function	دالة غاما
Gaussian Distribution	توزيع غوص
Generating Function	دالة مولدة
Graph	بيان
Graphic Presentation	تمثيل بياني
Head	وجه
Histogram	مدرج
Hypergeometric Distribution	توزيع فوق الهندسي
Increasing Function	دالة متزايدة
Infinite	لا نهاية
Independence Events	حوادث مستقلة
Interval	بمال

Impossible Events	حوادث مستحيلة
Integral	تكامل
Inclusion	احتواء
Inversion Formula	قانون العكس
Intersection	تقاطع
Inverse Image	صورة عكسية
Infimum	حد أدنى
Independents Variables	متغيرات مستقلة
Inequality	متباينة
Joint Distribution	توزيع مشترك
Joint Moments	عزوم مشتركة
Jump	قفزة
Jacobian	جاكوبي
Limit	نهاية
Law	قانون
Law of Large Numbers	قانون الأعداد الكبيرة
Linear Combination	تركيب خطي
Linear Form	شكل خطي
Linear Relation	علاقة خطية
Large Samples	عينات كبيرة
Marginal Distribution	توزيع هامشي
Mean	متوسط

Measures of Distribution	مقاييس التشتت
Median	وسط
Mode	منوال
Moments	عزوم
Multinomial Distribution	التوزيع الحدودي
Multivariate Normal Distribution	التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات
Mapping	تطبيق
Matrix	مصفوفة
Measurable Set	مجموعة قیوسة
Moment Generating Function	الدالة المولدة للعزوم
Mutual Independent	استقلال متبادل
Normal Distribution	التوزيع الطبيعي
Norm	نظم
Negative Binomial Distribution	توزيع حداثي سالب
Numerical Function	دالة عددية
Numbers	أعداد
Odd - Function	دالة فردية
Observation	ملاحظة
Occurrence of an Event	وقوع حادثة
Outcome	نتيجة
Original	أصلي
Objects	أشياء

Occur	يقع - يحدث
Open Set	مجموعة مفتوحة
Probability	احتمال
Permutation	تباديل
Phenomena	ظاهرة
Probability Function	دالة احتمال
Poisson Distribution	توزيع بواسون
Parameter	لوسيط
Partial	جزئي
Partition	تجزئة
Percentage	النسبة مئوية
Point	نقطة
Population	مجتمع
Presentation of Data	عرض البيانات
Properties	خواص
Proportion	نسبة
Positive	موجب
Population Mean	متوسط مجتمع
Probability Density	كثافة احتمالية
Priority	أفضلية
Quadratic Form	شكل تربيعي
Quotient	خارج قسمه

Quartiles	الربعات
Repetition	تكرار
Random	عشوائي
Relative Frequency	التكرار النسبي
Row	صف
Rate	معدل
Random Variables	متغيرات عشوائية
Random Experiment	تجربة عشوائية
Random Number	رقم عشوائي
Random Sample	عينة عشوائية
Range	مدى
Ratio	نسبة
Real	حقيقي
Real Numbers	أعداد حقيقية
Relative Frequency	تكرار نسبي
Rule	قاعدة
Rules of Probability	قواعد الاحتمال
Risk	مخاطر
Random Vector	شعاع عشوائي
Repeated Experiments	تجارب متكررة
Sequence	متتالية
Sample	عينة

Simple Random Variable	متغير عشوائي بسيط
Sample Mean	متوسط عينة
Simple Function	دالة بسيطة
Standardized Normal Distribution	توزيع طبيعي معياري
Standardized Normal Variable	متغير طبيعي معياري
Standardized Deviation	انحراف معياري
Standardized Normal Variable	متغير عشوائي معياري
Statistic	إحصاء
Student Distribution	توزيع ستودنت
Subset	مجموعة جزئية
Sum	مجموع
Sum of Squares	مجموع مربعات
Supremum	حد أعلى
Sure Event	حادث أكيد
Symmetric	متناظر
Sample Space	فضاء العينة
Samples distribution	توزيع العينات
Sample Moments	عزوم العينة
Series	سلسلة
Sample Size	حجم العينة
Sampling	معاينة
Sampling Distribution	توزيع المعاينة

Simple Event	حادثة بسيطة
Success	النجاح
Trial	تجربة
Toss	يلقي
Tchebysheff's Inequality	متباينة تشيبشيف
Test	اعتبار
Tables of Distribution	جداول التوزيع
Total	كلي
Transformation of Variables	تحويل المتغيرات
Trivial	تافه
Uniform Distribution	توزيع منتظم
Union of Sets	اتحاد المجموعات
Uniqueness	وحدانية
Upper Bound	حد راجع
Universal Set	مجموع شاملة (كلية)
Uncountable	غير قابلة للعد
Variance	تباين
Variable	متغير (متحول)
Vector	متجه (شعاع)
Venn – Diagram	مخطط من
Volume	حجم
Value of Mean	قيمة متوسطة

Waiting Time
Weighted Mean
Weights
Zero

زمن الانتظار
المتوسط المرجح
أوزان
صفر



ملحق ٧: محتويات الكتاب

7	الفصل الأول: المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه
7	1. 1: الظواهر العشوائية ونظرية الاحتمالات.
7	1. 2: التجربة والتجربة العشوائية.
9	1. 3: النماذج الأساسية في تحديد فضاء العينة Ω وعدته $ \Omega $.
9	1. 3. 1: بالحساب المباشر.
9	1. 3. 2: باسناد طرق العد.
15	1. 3. 3: فضاءات عينة غير منتهية ولكن معدودة.
16	1. 3. 4: فضاءات عينة غير منتهية وغير معدودة.
16	1. 4: الجبر والجبر التام وبعض الخواص.
19	1. 5: جبر الأحداث.
24	1. 6: مبرهنة (1. 1).
24	1. 7: مبرهنة (1. 2).
25	1. 8: التعاريف الأساسية للاحتمال.
25	1. 8. 1: التعريف التقيدي للاحتمال
26	1. 8. 2: التعريف الإحصائي للاحتمال.
26	1. 8. 3: التعريف الرياضي للاحتمال (تعريف كولموغوروف).
26	1. 8. 4: تعريف الفضاء الاحتمالي.
27	1. 8. 5: تحقيق التعريف التقيدي والتعريف الإحصائي للاحتمال لشروط كولموغوروف.
28	1. 8. 6: المقارنة بين النماذج الثلاثة للاحتمال.

28	1. 8. 7: بناء نموذج احتمالي.
29	1. 8. 8: أحداث شبه المستحبة وأحداث شبه الأكيدة.
29	1. 8. 9: أمثلة بمحولة.
32	1. 9: الخصائص الرئيسية العامة للاحتمال.
32	1. 9. 1: خصائص مباشرة.
34	1. 9. 2: تعميم حساب احتمال اتحاد عدة حوادث.
36	1. 9. 3: خاصية الفرق التناظري.
36	1. 9. 4: متباينات احتمالية.
38	1. 9. 5: مبرهنة التكافؤ في النهايات في الاحتمالات.
47	1. 10: تمارين غير محولة.
53	الفصل الثاني: الاحتمال الشرطي والاستقلال العشوائي
53	2. 1: مقدمة وتعريف.
54	2. 2: إثبات علاقة الاحتمال الشرطي.
56	2. 3: نتائج.
56	2. 4: مبرهنة (2، 1).
57	2. 5: نتائج.
57	2. 6: قاعدة الاحتمال المركب.
58	2. 7: تعريف التجزئة.
58	2. 8: نتائج.
59	2. 9: دستور بايز.
62	2. 10: تعريف الاستقلال العشوائي.
63	2. 11: نتائج.

66	2. 12: خواص الاستقلال العشوائي.
75	2. 13: تمارين غير محلولة.
80	الفصل الثالث: دراسة المتغيرات العشوائية
80	3. 1: مقدمة.
80	3. 2: تعريف المتغير العشوائي.
81	3. 3: تذكير ببعض خواص الصورة العكسية.
81	3. 4: دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل.
85	3. 5: خواص دالة التوزيع.
88	3. 6: دالة حدث.
90	3. 7: دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر.
97	3. 8: تمارين غير محلولة.
100	الفصل الرابع: دراسة المتجهات العشوائية
100	4. 1: تعريف المتجه العشوائي.
100	4. 2: مبرهنة (4. 1).
101	4. 3: مبرهنة (4. 2).
102	4. 4: نتائج.
102	4. 5: مبرهنة (4. 3): قانون الشعاع العشوائي.
104	4. 6: دراسة الشعاع العشوائي المنفصل في R^2 .
105	4. 6. 1: الكثافة الشرطية.
111	4. 7: تعميم.
113	4. 8: المتغيرات العشوائية المستقلة.
115	4. 9: التوزيعات المشتركة للمتغيرات العشوائية وخاصة الاستقلال.

129	4. 10: تمارين غير محلولة.
135	الفصل الخامس: دراسة دوال في المتغيرات العشوائية
135	5. 1: الانتقال بمتغير عشوائي منفصل.
135	5. 2: ملاحظة.
137	5. 3: الانتقال بمتغير عشوائي مستمر.
141	5. 4: حالات خاصة في انتقال المتغيرات العشوائية.
142	5. 5: الانتقال بشعاع عشوائي منفصل.
144	5. 6: الانتقال بشعاع عشوائي مستمر.
148	5. 7: حالات خاصة.
153	5. 8: تمارين غير محلولة.
158	الفصل السادس: الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية
158	6. 1: مقدمة.
158	6. 2: التوقع الرياضي لمتغير منفصل ولدالة في المتغير المنفصل.
161	6. 3: التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر ولدوال في هذا المتغير.
162	6. 4: خواص التوقع.
166	6. 5: العزوم.
168	6. 6: التباين والانحراف المعياري وخواصهما.
170	6. 7: التغاير وخواصه.
175	6. 8: معامل الارتباط وخواصه.
181	6. 9: الصفات العددية للأشعة العشوائية.
181	6. 9. 1: تعاريف.
183	6. 9. 2: الصفات الشرطية.

189	6. 10: دراسة التناظر والخواص الخطية في الصفات العددية.
193	6. 11: الدوال المولدة للعزوم وخواصها.
201	6. 12: الدوال المميزة وخواصها.
209	6. 13: تمارين غير محلولة.
218	الفصل السابع: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الشهيرة
218	7. 1: تعريف التجربة الثنائية.
218	7. 2: توزيع برنولي.
219	7. 3: التوزيع الحداني (الثنائي).
226	7. 4: التوزيع الحدودي.
229	7. 5: التوزيع البواسوني.
235	7. 6: التوزيع الهندسي.
238	7. 7: التوزيع فوق الهندسي.
241	7. 8: التوزيع الثنائي السالب (توزيع باسكال).
244	7. 9: تمارين غير محلولة.
247	الفصل الثامن: التوزيعات الاحتمالية المستمرة الشهيرة
247	8. 1: التوزيع المنتظم.
251	8. 2: التوزيع الأسّي.
255	8. 3: التوزيع الطبيعي.
68	8. 4: توزيع كوشي.
271	8. 5: توزيع غاما.
277	8. 6: توزيع كاي - مربع.
283	8. 7: توزيع بيتا.

286	8. 8: توزيع ستودنت.
294	8. 9: توزيع فيشر.
300	8. 10: توزيع وايول.
302	8. 11: توزيع ماكسويل.
302	8. 12: توزيع ريل.
303	8. 13: توزيع لابلاس.
304	8. 14: توزيع اللوغاريتم الطبيعي.
305	8. 15: تمارين غير محلولة.
309	الفصل التاسع:
	المضامين الاحتمالية ومبرهنة النهاية المركزية والتقريب الطبيعي
309	9. 1: توقع دالة الحدث.
309	9. 2: متباينة ماركوف.
310	9. 3: متباينة تشيشف.
314	9. 4: قانون الأعداد الكبيرة.
316	9. 5: مبرهنة النهاية المركزية (مفهومها - ونصها مع الإثبات - تطبيقات).
328	9. 6: تمارين غير محلولة.
331	الفصل العاشر: التوزيع الطبيعي الثاني (BVN)
331	10. 1: تعريف كثافة (BVN).
331	10. 2: حالة خاصة.
332	10. 3: كثافة (BVN) هي كثافة احتمالية مقالية.
333	10. 4: دالة التوزيع لـ $Z = X + Y$ حيث $(X, Y) \sim BVN$.
335	10. 5: الكثافات الهامشية والشرطية.

336	10. 6: الدالة المميزة لـ (X, Y) والذي يتوزع وفق BVN.
337	10. 7: دراسة الدالة المولدة للعزوم في حالة BVN.
342	10. 8: معامل الارتباط.
346	10. 9: تمارين غير محلولة.
349	الملاحق:
351	I: مراجع الكتاب العربية والأجنبية.
352	II: أشكال الكثافات الاحتمالية.
390	III: الجداول الاحتمالية.
398	IV: المصطلحات العلمية (إنكليزي - عربي).
410	V: فهرس المحتويات.