السنة: الأولى

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: هندسة الحواسيب والأتمتة

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

التحليل الرياضي / ١ /

د. عماد فتاش
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

د. معاذ عبد المجيد
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

جامعة دمشق

١٤٣٥ - ١٤٣٦ هـ
٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

فهرس

الموضوع	الصفحة
المقدمة	١١
الفصل الأول: مدخل في التحليل الرياضي	**١٣ - ٤٨**
1.1 المجموعات والرموز المنطقية	١٥
1.2 المبرهنات الرياضية	١٧
1.3 العمليات على المجموعات	١٨
1.4 التطبيقات على المجموعات	٢٠
1.5 مجموعات الأعداد	٢٣
1.6 التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية	٢٧
1.7 المجالات والجوارات في مجموعة الأعداد الحقيقية	٢٨
1.8 المجموعات العددية المحدودة	٢٩
1.9 القيمة المطلقة	٣١
1.10 الاستقراء الرياضي	٣٢
1.11 إحداثيات نقطة في المستوي	٣٤
1.12 مجموعة الأعداد العقدية	٣٩
تمارين الفصل الأول	٤٦
الفصل الثاني: الدوال التابعة لمتغيّر حقيقي واحد	**٤٩ - ١١٧**
2.1 المتغيرات والثوابت	٥١
2.2 الدالة	٥١
2.3 الخواص الأساسية لسلوك الدوال	٥٧
2.4 الدوال الأولية الأساسية ومنحنياتها البيانية	٧١
2.5 تصنيف الدوال	٩٠

الموضوع	الصفحة
2.6 الدوال المعطاة وسيطياً	٩٢
2.7 طرائق بسيطة لرسم المنحنيات البيانية للدوال في جملة الإحداثيات الديكارتية (الأسلوب المقارن)	٩٣
2.8 بعض المنحنيات الشهيرة وسيطياً	١٠٠
2.9 بعض المنحنيات الشهيرة قطبياً	١٠٣
تمارين الفصل الثاني	١١٣
الفصل الثالث: المتتاليات العددية	١١٩ - ١٥٦
3.1 مفاهيم أساسية	١٢١
3.2 المتتاليات المحدودة	١٢٢
3.3 المتتاليات المطردة	١٢٤
3.4 المتتاليات المتقاربة	١٢٧
3.5 العدد النيبري e	١٣٥
3.6 المتتاليات اللامتناهية في الصغر	١٣٧
3.7 المتتاليات اللامتناهية في الكبر	١٤١
3.8 المجالات المتداخلة	١٤٨
3.9 متتاليات كوشي	١٥٠
تمارين الفصل الثالث	١٥٢
الفصل الرابع: النهايات والاستمرار	١٥٧ - ٢٠٧
4.1 نهاية دالة	١٥٩
4.2 النهاية من اليمين والنهاية من اليسار	١٦٣
4.3 اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر	١٦٨
4.4 مبرهنات أساسية حول نهايات الدوال	١٦٩
4.5 نهايات شهيرة	١٧٢
4.6 خواص اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر	١٧٥
4.7 مقارنة السلوك التقاربي للدوال	١٧٦

الموضوع	الصفحة
4.8 إزالة بعض حالات عدم التعيين	١٧٨
4.9 استمرار الدالة	١٨٢
4.10 الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار	١٨٤
4.11 نقاط الانقطاع	١٨٥
4.12 الاستمرار الجزئي	١٨٩
4.13 العمليات على الدوال المستمرة	١٩٠
4.14 استمرار الدالة المركبة	١٩٥
4.15 استمرار الدالة العكسية	١٩٥
4.16 استمرار بعض الدوال الأولية الأساسية	١٩٧
4.17 الاستمرار المنتظم	١٩٩
تمارين الفصل الرابع	٢٠٣
الفصل الخامس: الحساب التفاضلي للدوال التابعة لمتحول حقيقي واحد	**٢٠٩ - ٣٤١**
5.1 مفهوم المشتق	٢١١
5.2 تفاضل دالة	٢١٧
5.3 العلاقة بين التفاضل والاستمرار	٢٢١
5.4 مشتق الدالة المركبة	٢٢٣
5.5 قواعد التفاضل	٢٢٤
5.6 اشتقاق وتفاضل الدوال الابتدائية الأساسية	٢٢٦
5.7 مشتق الدالة العكسية	٢٢٩
5.8 جدول المشتقات الشهيرة	٢٣٥
5.9 المشتق والتفاضل اللوغاريتمي	٢٣٦
5.10 المشتقات من مراتب عليا	٢٣٧
5.11 اشتقاق الدالة الضمنية	٢٤١
5.12 اشتقاق الدوال المعطاة وسيطياً	٢٤٢
5.13 التفاضل من مراتب عليا	٢٤٣

الموضوع	الصفحة
5.14 مبرهنات القيمة الوسطى	٢٤٤
5.15 قاعدة لوبيتال	٢٥٣
5.16 دراسة سلوك الدوال ورسم منحنياتها البيانية	٢٥٩
5.17 رسم المنحنيات المعطاة وسيطياً	٢٩٦
5.18 رسم المنحنيات المعطاة قطبياً	٣١٧
تمارين الفصل الخامس	٣٣٠
الفصل السادس: التكامل غير المحدد	٣٤٣ - ٣٩٥
6.1 الدالة الأصلية والتكامل غير المحدد	٣٤٥
6.2 الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد	٣٥٠
6.3 جدول التكاملات الشهيرة	٣٥٣
6.4 الطرائق الرئيسة في المكاملة	٣٥٣
6.5 التكامل بالتدريج	٣٦٣
6.6 تكامل الكسور العادية (المنطّقة)	٣٦٥
6.7 تكامل الدوال المثلثية	٣٧٣
6.8 تكامل الدوال القطعية والأسية	٣٨١
6.9 تكامل بعض الدوال غيرا لعادية (غير المنطقّة - الصماء)	٣٨٢
6.10 التكاملات التي لا يمكن التعبير عنها بدلالة دوال أولية	٣٨٩
تمارين الفصل السادس	٣٩١
الفصل السابع: التكامل المحدد وتطبيقاته	٣٩٧–٤٧٢
7.1 المجموع التكاملي ـ مفهوم التكامل المحدد	٣٩٩
7.2 الخواص الأساسية للتكامل	٤٠٤
7.3 التكامل المحدد كدالة	٤١١
7.4 صيغة نيوتن ـ ليبنتز	٤١٣
7.5 الطرائق الأساسية لحساب التكامل المحدود	٤١٥
7.6 التكاملات الشاذة (المعتلة)	٤٢٠

الموضوع	الصفحة
7.7 التطبيقات الهندسية للتكامل المحدد	٤٣٩
تمارين الفصل السابع	٤٦٣
الفصل الثامن: المتسلسلات العددية	٤٧٣ - ٥٣٤
8.1 مفاهيم أساسية	٤٧٥
8.2 خواص المتسلسلات المتقاربة	٤٨٢
8.3 الشرط اللازم لتقارب متسلسلة	٤٨٥
8.4 باقي متسلسلة	٤٨٧
8.5 المتسلسلات ذوات الحدود الموجبة	٤٨٨
8.6 اختبارات تقارب المتسلسلات ذوات الحدود الموجبة	٤٩٠
8.7 المتسلسلات ذوات الحدود كيفية الإشارة (المتسلسلات المختلطة)	٥١٣
تمارين الفصل الثامن	٥٢٦
الفصل التاسع: المتسلسلات الدالية ومتسلسلات القوى الصحيحة	٥٣٥ - ٦٠٨
9.1 المتواليات والمتسلسلات الدالية والتقارب النقطي	٥٣٧
9.2 التقارب المنتظم وخواصه	٥٤٠
9.3 متسلسلات القوى الصحيحة	٥٦١
9.4 نشر الدوال في متسلسلات تايلور وماكلوران	٥٧٤
تمارين الفصل التاسع	٦٠٤
المصطلحات العلمية	٦٠٩
قائمة المراجع	٦٢٧

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مُقدّمة

من بين جميع فروع العلم تؤدي الرياضيات دوراً مميزاً، فهي التي تعطي لغة الأعداد والرموز للتعبير عن الأشكال المختلفة للعلاقات بين ظواهر الطبيعة والمجتمع، والتعبير عنها بنماذج رياضية منطقية، وتدرس العلاقات بين هذه الظواهر وهذه النماذج.

ويعد التحليل الرياضي الفرع الأكبر من فروع الرياضيات المتعددة. وهو يدرس الدوال وتعميمها، باستخدام مفهوم النهايات المرتبطة بمفهوم اللامتناهيات في الصغر.

وقد قاد تطور التحليل الرياضي إلى دراسة مفاهيم أكثر تعميماً، مثل الدالّيات والمؤثرات وغيرها.

ويضم التحليل الرياضي الحساب التفاضلي والحساب التكاملي ونظرية المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية والمتسلسلات والهندسة التفاضلية والتحليل الدالّي ...

يتألف كتاب التحليل الرياضي / 1/ من تسعة فصول، وفقاً للمنهاج المعتمد لطلاب السنة الأولى هندسة الحواسيب والأتمتة.

خصصنا الفصل الأول كمدخل للتحليل الرياضي، عرضنا فيه المفاهيم والرموز الأساسية المستخدمة في الفصول اللاحقة. أما في الفصل الثاني، فقد عرضنا فيه الدوال لمتغير حقيقي واحد وطرائق إعطاء هذه الدوال، والدوال الأولية الأساسية، وطرائق بسيطة لرسم بيانات الدوال. وتحدثنا في الفصل الثالث عن المتتاليات العددية وخواصها، والمتتاليات اللامتناهية في الكبر والمتتاليات اللامتناهية في الصغر. وتطرقنا في الفصل الرابع لنهاية دالة، ولإزالة بعض حالات عدم التعيين، ولاستمرار الدوال. أما الفصل الخامس، فقد خصصناه لتفاضل واشتقاق الدوال ولتطبيقات التفاضل في دراسة سلوك الدوال ورسم بياناتها ديكارتياً ووسطياً وقطبياً. وفي الفصل السادس والسابع عرضنا التكامل غير المحدد والتكامل المحدد والتكاملات الشاذة، والتطبيقات الهندسية للتكامل المحدد. ويتعلق الفصل الثامن بالسلاسل العددية واختبارات تقارب هذه السلاسل. أما الفصل التاسع والأخير، فقد خصصناه للمتتاليات والسلاسل الدالية وسلاسل القوى الصحيحة، ومن ثم نشر الدوال في سلاسل تايلور وماكلوران.

ونشير إلى أننا حاولنا أن نقدم عرضاً وجيزاً لبعض المواضيع حيث حذفنا الكثير من البراهين المعقدة وتركنا بعض البراهين كتمرين للقارئ، وأبقينا على بعض البراهين التي وجدنا أنها ضرورية لفهم المواضيع المعروضة، وعرضنا مواضيع أخرى بأسلوب أوسع. وتوخينا الدقة في إعطاء التعاريف، وتجنبنا تكرار التعاريف المتشابهة، حيث وضعنا في التعريف، المفهوم المشابه بين قوسين وكذلك ما يوافقه بين قوسين. واستخدمنا الكثير من الأمثلة المساعدة في الفهم، وحاولنا التقليل ما أمكن من ترقيم المعادلات، وأتبعنا كل فصل بعدد غير قليل من التمارين والمسائل غير المحلولة بمستويات مختلفة، لتساعد القارئ على ترسيخ المفاهيم المعروضة. وأدرجنا قائمة بالمصطلحات العلمية الواردة في الكتاب باللغتين العربية والإنكليزية المعتمدة عربياً. كما أدرجنا قائمة بالمراجع المفيدة والمستخدمة في إعداد هذا الكتاب.

ونود أخيراً أن نشكر كل من ساهم في إعداد هذا الكتاب وإخراجه إلى النور، كما نشكر مقدّماً كل من سيقرأ هذا الكتاب ويخبرنا بالأخطاء والهفوات إن وجدت.

والله من وراء القصد

المؤلفان

الفصل الأول

مدخل في التحليل الرياضي

1.1 المجموعات والرموز المنطقية

1.2 المبرهنات الرياضية

1.3 العمليات على المجموعات

1.4 التطبيقات على المجموعات

1.5 مجموعات الأعداد

1.6 التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية

1.7 المجالات والجوارات في مجموعة الأعداد الحقيقية

1.8 المجموعات العددية المحدودة

1.9 القيمة المطلقة

1.10 الاستقراء الرياضي

1.11 إحداثيات نقطة في المستوي

1.12 مجموعة الأعداد العقدية

تمارين الفصل الأول

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مدخل في التحليل الرياضي

1.1 المجموعات والرموز المنطقية

نتناول في شتى مجالات النشاط الإنساني أشياء مختلفة تربط فيما بينها خاصية أو صفة عامة مشتركة. فمثلاً، عندما نتحدث عن طلاب جامعة دمشق فإننا نعني بذلك الطلاب الذين يتصفون بصفة مميزة هي الانتساب لجامعة دمشق. وعندما نتحدث عن نقاط محيط دائرة ما، فإننا نعني بذلك نقاطاً من المستوي تحقق خاصية مميزة، وهي أن هذه النقاط تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة.

1.1.1 المجموعة

المجموعة هي تجميع أشياء، يسمى كل منها عنصر المجموعة.

يُعد مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات ولكن يستحيل إعطاء مفهوم المجموعة تعريفاً دقيقاً. وكلمة مجموعة مرادفة للكلمات مجمل، جملة، صف، نظام...

نرمز للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة $A , B , C, \ldots$ ، ولعناصرها بالأحرف اللاتينية الصغيرة $a , b , c, \ldots$. إذا كان العنصر a أحد عناصر المجموعة A، فإننا نقول إن العنصر a ينتمي للمجموعة A، ونرمز لذلك بالرمز $a \in A$. وإذا كان العنصر a لا ينتمي للمجموعة A، فإننا نرمز بالرمز $a \notin A$.

تُعطى المجموعة بقائمة لجميع عناصرها أو بدلالة صفة مشتركة بين عناصرها. فإذا كانت عناصر المجموعة A هي a , b , c , d، فإننا نكتب

$$A = \{ a,b,c,d \}$$

إذا كانت جميع عناصر المجموعة A تتصف بصفة مشتركة $p(x)$، فإننا نكتب

$$A = \{x: p(x) \text{ يحقق الصفة } x\}$$

المجموعة الخالية: إذا كانت المجموعة لا تحوي أي عنصر، فإننا نقول إن المجموعة خالية ونرمز لها ϕ.

فمثلاً، مجموعة الأعداد التي تحقق المعادلة $x^2 + 1 = 0$ هي مجموعة خالية.

تصنف المجموعات في الطبيعة صنفين: مجموعات منتهية ومجموعات غير منتهية.

فمجموعة طلاب الجامعة أو مجموعة جذور المعادلة من الدرجة الثانية هي مجموعات منتهية، أما مجموعة الأعداد الصحيحة أو مجموعة المستقيمات المارة من نقطة ثابتة فهي مجموعات غير منتهية.

سعة مجموعة: إذا كانت المجموعة A منتهية فإن عدد عناصرها يسمى سعة (قدرة) المجموعة A، ونرمز لهذا العدد بالرمز $|A|$.

تساوي مجموعتين: نقول عن المجموعتين A و B إنهما متساويتان ونكتب $A=B$، إذا كان كل عنصر من عناصر A هو عنصر من عناصر B، وبالعكس، كل عنصر من عناصر B هو عنصر من عناصر A.

فمثلاً، مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من العدد 4، ومجموعة جذور المعادلة $x^3-6x^2+11x-6=0$ متساويتان، أي

$$\{ x \in \mathbb{N} : x < 4 \} = \{ x : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \}$$

المجموعة الجزئية: نقول عن المجموعة غير الخالية A إنها مجموعة جزئية من المجموعة غير الخالية B، إذا كان كل عنصر من عناصر A هو عنصر من عناصر B، ونكتب عندئذٍ $A \subseteq B$، ونقرأ A محتواة في B أو B تحوي A.

إذا كان $A \subseteq B$ و $A \neq B$، فإن A محتواه تماما في B، ونكتب $A \subset B$.

1.1.2 الرموز المنطقية

عند صياغة مبرهنة أو إعطاء البرهان نضطر لتكرار بعض الكلمات أو العبارات، ولكي نختصر الكتابة نستخدم بعض الرموز المنطقية :

الرمز $\wedge$ يُقرأ "و"، والرمز $\vee$ يُقرأ "أو".

الرمز $\forall$ يُقرأ: "مهما يكن" أو "أياً كان" أو "كل" أو "أي". فالعبارة " مهما يكن العنصر x من المجموعة M " تكتب اختصاراً $\forall x \in M$.

الرمز $\exists$ يُقرأ: "يوجد". فالعبارة " يوجد عنصر x من المجموعة M " تكتب اختصاراً $\exists x \in M$.

الرمز $\Rightarrow$ يُقرأ: "يؤدي" أو "ينتج". فالعبارة " تنتج الحقيقة B من الحقيقة A " تكتب اختصاراً $A \Rightarrow B$.

الرمز $\Leftrightarrow$ يُقرأ : "يكافئ" أو "إذا وفقط إذا" أو "يلزم ويكفي". وهو يعني تكافؤ الحقيقتين

على يمين وعلى يسار هذا الرمز. فالعبارة " في أي مثلث abc يكون الضلعان $\overline{ab}$ و $\overline{ac}$ متساويين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان $\hat{b}$ و $\hat{c}$ متساويتين، وتكتب اختصاراً

$$\forall\, abc \overset{\Delta}{:}\ \overline{ab} = \overline{ac} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{b} = \hat{c}$$

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أعداداً ما، فإن الكتابة $x = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$[1] تعني أن العدد x هو أكبر الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

وتعني الكتابة $x = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$[2] أن العدد x هو أصغر الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.2 المبرهنات الرياضية

يعبر عن المبرهنة الرياضية عادة بالمخطط التالي

$$A \Rightarrow B \qquad (1.1)$$

حيث تسمى A شروط المبرهنة (الفرض) وB نتيجة المبرهنة (الطلب). فمثلاً، إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 (الفرض)، فإن مربعه يقبل القسمة على 4 (النتيجة أو الطلب).

إذا كانت المبرهنة (1.1) صحيحة، فإن صحة القضية B تُعد شرطاً لازماً لصحة القضية A (أي إذا كانت القضية B مغلوطة، فإن القضية A حتماً مغلوطة).

وتُعد صحة القضية A شرطاً كافياً لصحة القضية B.

وعليه، فإنه ليس كل شرط لازم هو شرط كاف، وبالعكس ليس كل شرط كاف هو شرط لازم. وبعبارة أخرى، فإن المبرهنة " $B \Rightarrow A$ " ليست دائماً صحيحة بالاستناد إلى صحة المبرهنة (1.1).

فمثلاً: المبرهنة (إذا كان المستقيمان متوازيين، فإنهما يقعان في مستو واحد) صحيحة، بينما العبارة (إذا كان المستقيمان يقعان في مستو واحد، فإنهما متوازيان) غير صحيحة.

ترتبط كل مبرهنة من النمط (1.1) بثلاث مبرهنات: مبرهنة العكس ومبرهنة النفي ومبرهنة نفي العكس.

مبرهنة النفي للمبرهنة (1.1) هي المبرهنة:

---

[1] من الكلمة اللاتينية maximum وتعني الأكبر.

[2] من الكلمة اللاتينية minimum وتعني الأصغر.

$$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} \qquad (1.2)$$

حيث $\overline{A}$ تعني أن A غير صحيحة و $\overline{B}$ تعني أن B غير صحيحة.

ومبرهنة العكس للمبرهنة (1.1) هي المبرهنة :

$$B \Rightarrow A \qquad (1.3)$$

أي المبادلة بين موضوعي الفرض والطلب.

ومبرهنة نفي العكس للمبرهنة (1.1) هي المبرهنة

$$\overline{B} \Rightarrow \overline{A} \qquad (1.4)$$

إذا كانت المبرهنة (1.1) صحيحة فإن مبرهنة نفي العكس (1.4) حتماً صحيحة.

بينما ليست بالضرورة أن تكون مبرهنة النفي (1.2) أو مبرهنة العكس (1.3) صحيحة.

فمثلاً، المبرهنة (إذا كانت آحاد العدد هي 2، فان آحاد مربعه هي 4) صحيحة. بينما مبرهنة العكس (إذا كانت آحاد مربع عدد هي 4، فان آحاد العدد نفسه هي 2) غير صحيحة، $8^2 = 64$. وكذلك مبرهنة النفي (إذا لم تكن آحاد العدد هي 2، فان آحاد مربعه ليست 4) أيضاً غير صحيحة، $8^2 = 64$.

1.3 العمليات على المجموعات

نرمز بـ U للمجموعة الكلية أو المجموعة الشاملة، وهي مجموعة جميع المجموعات التي نتعامل معها، أي أن هذا المفهوم هو مفهوم نسبي، حيث تختلف هذه المجموعات تبعاً للمواضيع المدروسة.

فمثلاً، في الهندسة المستوية تكون المجموعة الشاملة هي مجموعة نقاط المستوي. بينما في الهندسة الفراغية تكون مجموعة نقاط الفراغ.

اتحاد مجموعتين: اتحاد أو اجتماع مجموعتين A و B هو المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي لإحدى المجموعتين A أو B، ونرمز للاتحاد بالرمز $A \cup B$ ويوصف كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن $A \cup A = A$ و $A \cup \phi = A$ و $A \cup U = U$.

تقاطع مجموعتين: تقاطع مجموعتين A و B هو المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي لإحدى للمجموعتين A و Bأو لكلتاهما، ونرمز للتقاطع بالرمز $A \cap B$ ويوصف كما يلي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن $A \cap A = A$ و $A \cap \phi = \phi$ و $A \cap U = A$ و $A \cap B = B \cap A$.

تقبل عمليتا الاتحاد والتقاطع، التوزيع إحداهما على الأخرى:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

فرق مجموعتين: فرق مجموعتين A و B (المجموعة $A \setminus B$، ونُقرأ A فرق B)، هو المجموعة التي تحوي العناصر التي تنتمي للمجموعة A ولا تنتمي للمجموعة B، وتوصف كما يلي:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

كما هو واضح، فإن $A \setminus B \neq B \setminus A$، أي أن عملية الفرق غير تبديلية.

متممة مجموعة: نسمي الفرق $U \setminus A$ المجموعة المتممة للمجموعة A، ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$:

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

يمكن، بسهولة، التحقق أن $A \cup \bar{A} = U$ و $A \cap \bar{A} = \phi$ و $\bar{\bar{A}} = A$ و $\bar{\phi} = U$ و $\bar{U} = \phi$.

مثال 1.1: إذا كان $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$، فإن $A \cap B = \{3\}$ و $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ و $A \setminus B = \{1,2\}$ و $B \setminus A = \{4\}$.

الجداء الديكارتي لمجموعتين:

نسمي زوج العناصر (x, y)، حيث $x \in A$ و $y \in B$، زوجاً مرتباً إذا كان ترتيب كتابة العنصرين x و y محدداً. ونسمي عندئذ عنصري الزوج (x, y) إحداثيي هذا الزوج.

يكون $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$، إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$.

الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B هو المجموعة $A \times B$ المؤلفة من جميع الأزواج المرتبة (x, y) الممكنة:

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

مثال 1.2: إذا كان $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$، فإن:

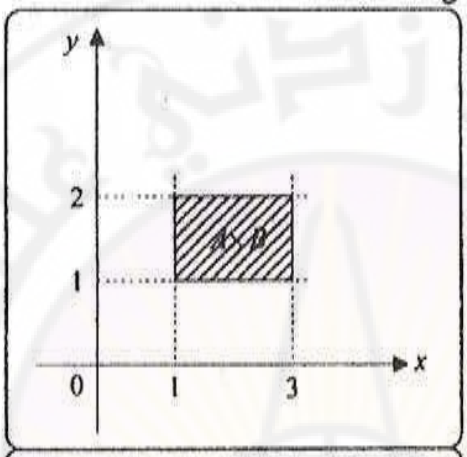
$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$
$$B \times A = \{(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(3,3),(4,3)\}$$

واضح أن $A\times B \neq A\times B$.

مثال 1.3: إذا كان

$$A=\{x\in\mathbb{R} \ : \ 1\le x\le 3\}\ ,\ B=\{y\in\mathbb{R} \ : \ 1\le y\le 2\}$$

فإن الجداء الديكارتي $A\times B=\{(x,y) \ : \ 1\le x\le 3 \ \wedge 1\le y\le 2\}$ هو المستطيل المبين بالشكل 1.1.



الشكل 1.1

1.4 التطبيقات على المجموعات

لتكن A و B مجموعتين ما وf قانوناً أو قاعدة يتم وفقه مُقابلة كل عنصر a من المجموعة A بعنصر وحيد b من المجموعة B. نقول عندئذٍ، إن f تطبيق من المجموعة A إلى المجموعة B، ونرمز لذلك بالرمز $f : A\to B$.

نسمي العنصر $b\in B$ المقابل للعنصر $a\in A$ وفق التطبيق f صورة العنصر a وفق هذا التطبيق، ونرمز لذلك بالرمز $f(a)=b$.

يمكن، باستخدام الرموز، كتابة هذا التعريف كما يلي:

$$f : A\to B \ \Leftrightarrow$$
$$\{\forall a\in A\ ,\exists b\in B : b=f(a)\wedge \ if \ \exists c\in B : c=f(a) \ \Rightarrow \ c=a\}$$

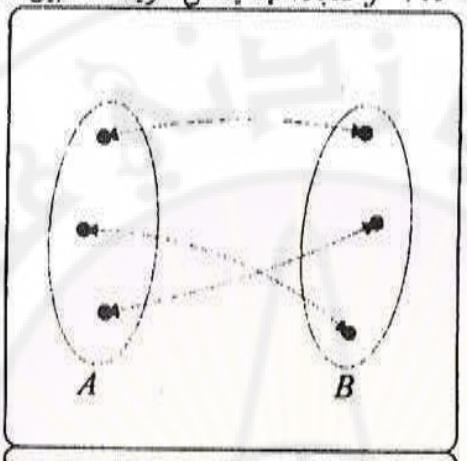
نسمي مجموعة صور جميع عناصر المجموعة A وفق التطبيق f، صورة المجموعة A ونرمز لها بالرمز $f(A)$:

$$f(A)=\{f(a) \ : \ a\in A\}\subseteq B$$

التطبيق التقابل: نقول عن التطبيق $f : A \to B$ إنه تقابل واحد لواحد واختصاراً تقابل، إذا كان كل عنصر $b \in B$ هو صورة لعنصر وحيد فقط $a \in A$، الشكل 1.2، أي

$$f \text{ تقابل} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, b \in B \ , \ \exists a \in A \ : \ b = f(a) \\ \forall\, a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \end{cases}$$

إذا كان التطبيق $f : A \to B$ تقابلاً، فإنه يمكن تعريف التطبيق العكسي f^{-1}.



الشكل 1.2

التطبيق العكسي: نسمي التطبيق f^{-1} تطبيقاً عكسياً للتطبيق f، إذا كان $f^{-1}(b) = a$ و $f(a) = b$. أي يقابل العنصر $b \in B$ عنصراً وحيداً $a \in A$، بحيث إن صورة a وفق التطبيق f هي b :

$$f^{-1} : B \to A \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \forall b \in B \ , \ \exists a \in A : a = f^{-1}(b) \ \wedge \ \text{if } \exists c \in A : c = f^{-1}(b) \ \Rightarrow \ c = a \right\}$$

إذا كان f^{-1} تطبيقاً عكسياً للتطبيق f، فإن f تطبيق عكسي للتطبيق f^{-1}. أي أن التطبيقين f و f^{-1} متعاكسان.

فمثلاً، إذا كانت A مجموعة كل الدوائر، وكان f تطبيقاً يربط كل دائرة بمساحتها. يكون عندئذٍ، $f : A \to \mathbb{R}^*$ تطبيق تقابل.

تكافؤ مجموعتين: نقول عن مجموعتين A و B إنهما متكافئتان ونكتب $A \sim B$، إذا وجد تقابل واحدي واحد على الأقل بين المجموعتين A و B.

مثال 1.4: إذا كانت A مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية، فإنه يوجد تقابل بين هذه

المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

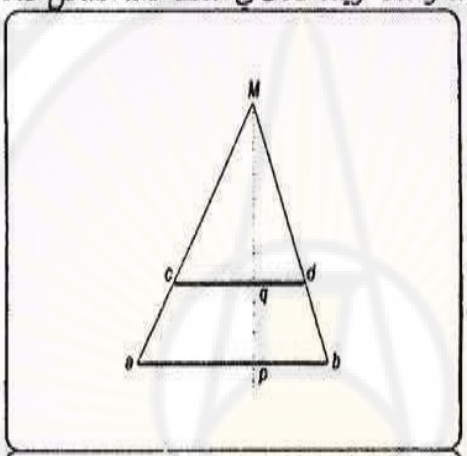
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & . & . & . & 2n \end{array}$$

ونعبّر عن هذا التقابل الواحدي بالعلاقة: $f(n) = 2n$.

مثال 1.5: إن أي مجالين حقيقيين $[a,b]$ و $[c,d]$ متكافئان.

الحل: نوجد تقابلاً بين هذين المجالين كما يلي:

نرسم هذين المجالين على مستقيمين متوازيين ومن ثم نرسم مستقيمين بمران من نهايتي القطعتين المستقيمتين $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ ويتقاطعان في النقطة M، الشكل 1.3.



الشكل 1.3

نرسم من النقطة M جميع المستقيمات التي تتقاطع مع القطعتين المستقيمتين $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$. عندئذٍ، أي نقطة $p \in [a;b]$ تُقابل نقطة وحيدة $q \in [c;d]$، وبالعكس.

إذن هناك تقابل بين المجالين $[a,b]$ و $[c,d]$، أي بين القطعتين المستقيمتين $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$.

خواص التكافؤ:

1- $A \sim A$ أياً تكن المجموعة A (خاصة الانعكاس).

2- إذا كان $A \sim B$، فإن $B \sim A$ أياً تكن المجموعتان A و B (خاصة التناظر).

3- إذا كان $A \sim B$ و $B \sim C$، فإن $A \sim C$ أياً تكن المجموعات A و B و C (خاصة التعدّي).

المجموعة المعدودة: نقول عن مجموعة إنها معدودة (قابلة للعد)، إذا كانت تكافئ

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. ويمكن عندئذ ترقيم عناصرها.

فمثلاً، مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية أو مجموعة الأعداد العادية هي مجموعات معدودة.

المجموعة المرتّبة: نقول عن المجموعة A إنها مرتبة، إذا أمكن تعريف علاقة ترتيب كلّي عليها، نرمز لها بالرمز "$\leq$"، تحقق ما يلي:

1. $\forall a,b,c \in A \ : a \leq b \ \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$; (متعدية)
2. $\forall a,b \in A \ : a \leq b \ \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$; (تخالفية)
3. $\forall a,b \in A \ \Rightarrow \ a \leq b \vee b \leq a$.

تُقرأ العلاقة "$a \leq b$: " a أصغر أو يساوي b أو b أكبر أو يساوي a.

إن نقيض القضية $a \leq b$ هي القضية $a > b$ (a أكبر تماماً من b).

نتائج:

1. إذا كان a وb عنصرين من المجموعة A، فإن إحدى العلاقات التالية صحيحة $a = b$ أو $a > b$ أو $a < b$.
2. إذا كان a وb وc عناصر من المجموعة A وكان $a < b$ و$b < c$، فإن $a < c$.

المجموعة الكثيفة: نقول عن المجموعة A إنها كثيفة، إذا تحقق الشرط التالي: أياً يكن العنصران a وb من المجموعة A، بحيث $a < b$، فإنه يوجد عنصر واحد على الأقل c من هذه المجموعة بحيث يكون $a < c < b$.

1.5 مجموعات الأعداد

1.5.1 مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$: هي المجموعة

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

نرمز لعناصرها بالرمز n، وتحقق الخواص التالية:

1. حاصل جمع وضرب عددين طبيعيين هو عدد طبيعي، أي

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \ n_1 + n_2 \in \mathbb{N} \ \wedge \ n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$$

وتتمتع هاتان العمليتان بالخاصتين التجميعية والتبديلية، كما أن الضرب توزيعي على الجمع.

2. عمليتا الطرح والقسمة غير محققة في $\mathbb{N}$، لأن حاصل طرح أو قسمة عددين طبيعيين ليس بالضرورة عدداً طبيعياً.

3. $1 \in \mathbb{N}$ ،

4. إذا كان $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $(n+1) \in \mathbb{N}$؛

5. إذا كان $M \subseteq \mathbb{N}$ و $1 \in M$، بحيث يتحقق الشرط

$$\forall\, n \in M \;\Rightarrow\; (n+1) \in M$$

فإن $M = \mathbb{N}$؛

6. مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ معدودة وغير منتهية ومرتبة.

1.5.2 مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$: هي المجموعة

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ \}$$

وتحقق الخواص التالية:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$؛

2. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ معدودة وغير منتهية ومرتبة؛

3. تعرّف في المجموعة $\mathbb{Z}$ عمليات الجمع والطرح والضرب أي أن حاصل جمع وطرح وضرب عددين صحيحين هو عدد صحيح؛

بينما لا تعرف في $\mathbb{Z}$ عملية القسمة، لأن حاصل قسمة عددين صحيحين ليس بالضرورة عدداً صحيحاً.

1.5.3 مجموعة الأعداد العادية (النسبية أو المنطّقة) $\mathbb{Q}$: هي المجموعة

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{n} : p \in \mathbb{Z} \ \wedge\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

وهي تحقق الخواص التالية:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$؛

2. مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ معدودة وغير منتهية ومرتبة؛

3. يمكن كتابة أي عدد عادي ككسر عشري منته أو غير منته ولكن دوري؛

4. المجموعة $\mathbb{Q}$ كثيفة. بالفعل، إذا كان $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ بحيث $q_1 < q_2$، فإنه يوجد عدد عادي $q = \frac{q_1+q_2}{2}$ بحيث يكون $q_1 < q < q_2$؛

5. خاصة أرخميدس[1]:

$$\forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \ :\ q_1 < q_2 \ ;\ \exists n \in \mathbb{N} : n q_1 > q_2$$

---

[1] أرخميدس : (287-212 قبل الميلاد) عالم رياضيات وميكانيك يوناني.

6. تُعرّف في $\mathbb{Q}$ العمليات الحسابية الأربع (عدا القسمة على صفر) وتحقق عمليتا الجمع والضرب الخاصة التجميعية والتبديلية. كما أن الضرب توزيعي على الجمع.

1.5.4 مجموعة الأعداد غير العادية (غير النسبية أو الصماء):

نسمي الأعداد التي لا يمكن أن يعبر عنها كحاصل قسمة عددين $\frac{p}{n}$، أعداداً غير عادية (غير نسبية أو صماء).

فمثلاً، الأعداد $\sqrt{2}$ و π و $\ln 3$ و $\sin 20^\circ$ هي أعداد صماء.

يمكن أن يُكتب أي عدد غير عادي ككسر عشري غير دوري لا نهائي.

1.5.5 مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

هي مجموعة الأعداد العادية وغير العادية. وهي تحقق معظم خواص مجموعة الأعداد العادية: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

إن مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة غير منتهية ومرتبة وتحقق خاصة أرخيدس. غير أنها ليست معدودة، كما هي حال مجموعة الأعداد العادية.

تُعرّف في $\mathbb{R}$ العمليات الحسابية الأربع (عدا القسمة على صفر) والرفع لقوة.

وتحقق هذه العمليات الخواص التالية:

I . موضوعات الجمع:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \; : \; a+b=b+a$ (الخاصة التبديلية)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; : \; (a+b)+c=a+(b+c)$ (الخاصة التجميعية)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} \; ; \; a+0=0+a=a \; , \; \forall a \in \mathbb{R}$ (حيادي الجمع)
4. $\forall a \in \mathbb{R} \; ; \; \exists (-a) \in \mathbb{R} \; ; \; a+(-a)=0$ (لكل عنصر نظير جمعي)

II. موضوعات الضرب:

5. $\forall a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \; : \; a \cdot b = b \cdot a$ (الخاصة التبديلية)
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^* \; : \; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (الخاصة التجميعية)
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} \; ; \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \; , \; \forall a \in \mathbb{R}$ (حيادي الضرب)
8. $\forall a \in \mathbb{R}^* \; ; \; \exists a^{-1} \in \mathbb{R}^* \; ; \; a \cdot a^{-1} = 1$ (لكل عنصر نظير ضربي)

نرمز للنظير a^{-1} بالرمز $\frac{1}{a}$.

9. $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \ . \ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (الضرب توزيعي على الجمع)

III. موضوعات الترتيب.

أياً يكن العددان الحقيقيان a وb، فإنه تتحقق إحدى العلاقات $a=b$ أو $a>b$ أو $a<b$.

وتحقق علاقة المساواة الخاصة:

10. $\forall\, a\,,b\,,c\, \in \mathbb{R} \ : \ a=b \ \wedge \ b=c \Rightarrow a=c;$

وتحقق العلاقة "<" أكبر، الخواص التالية:

11. $\forall\, a\,,b\,,c\, \in \mathbb{R} \ : \ a>b \ \wedge \ b>c \Rightarrow a>c;$

12. $\forall\, a\,,b\,,c\, \in \mathbb{R} \ : \ a=b \ \Rightarrow a+c>b+c;$

13. $\forall\, a\,,b\, \in \mathbb{R} \ : \ a>0 \ \wedge \ b>0 \Rightarrow a\cdot b>0;$

تعني الكتابة $a\le b$ أنه، إما $a=b$ أو $a<b$.

نسمي العلاقات $a<b$ أو $a\le b$ أو $a>b$ أو $a\ge b$ متراجحات.

IV. موضوعة الاستمرار:

14. لتكن A وB مجموعتين جزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

إذا كان $a\in A$ و $b\in B$ بحيث $a\le b$، فإنه يوجد عدد حقيقي c واحد على الأقل، بحيث يكون $a\le c\le b$.

ملحوظة 1.1 : إن مجموعة الأعداد العادية لا تحقق موضوعة الاستمرار. بالفعل، لأنه إذا كان $A=\{\, a\in\mathbb{Q} \ : \ a<\pi\}$، $B=\{\, b\in\mathbb{Q} \ : \ b>\pi\}$، فإن $a\le b$ أياً يكن $a\in A$ و $b\in B$. غير أنه لا يوجد عدد عادي c تتحقق من أجله العلاقة $a\le c\le b$. لأن العدد الوحيد الذي يحقق هذه العلاقة هو π وهو عدد غير عادي.

تنتج من هذه الموضوعات جميع خواص مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. نذكر بعضها:

15. $\forall\, a\,,b\, \in \mathbb{R} \ : \ a<b \ \Rightarrow -a>-b;$

وخصوصاً، إذا كان $a>0$، فإن $-a<0$.

16. $\forall\, a\,,b\,,c\,,d\, \in \mathbb{R} \ : \ a>b \ \wedge \ c>d \ \Rightarrow a+c>b+d\ ;$

17. $\forall\, a\,,b\,,c\,,d\, \in \mathbb{R} \ : \ a>b \ \wedge \ c>d \ \Rightarrow a-d>b-c\ ;$

18. $\forall\, a\in \mathbb{R} \ : \ a-a=0;$

19. $\forall\, a \in \mathbb{R} \;:\; a \cdot 0 = 0$;

20. $\forall\, a \in \mathbb{R} \;:\; -(-a) = a$;

21. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;:\; (-a)\cdot b = -a \cdot b$;

22. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;:\; a < 0 \wedge b > 0 \;\Rightarrow a \cdot b < 0$;

23. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;:\; a < 0 \wedge b < 0 \;\Rightarrow a \cdot b < 0$;

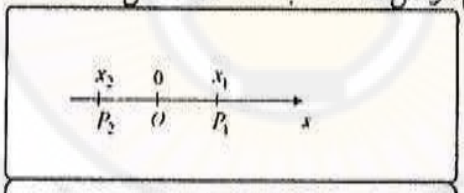
24. $\forall\, a \in \mathbb{R}^* \;:\; a \cdot a = a^2 > 0$;

25. $\forall\, a \in \mathbb{R} \;:\; a > 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$;

1.6 التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية

تُمثل الأعداد الحقيقية على محور يسمى محور الأعداد. وهو مستقيم لانهائي موجّه من اليسار إلى اليمين، ومحدد عليه نقطة ثابتة o (تسمى نقطة الأصل) وتقابل العدد 0، نعين على هذا المستقيم وحدة قياس لقياس الأطوال، فالنقطة التي تبعد عن نقطة الأصل إلى اليمين بوحدة قياس تقابل العدد 1 والنقطة التي تبعد عن نقطة الأصل إلى اليسار بوحدة قياس تقابل العدد -1. وغالباً ما يكون هذا المحور أفقياً. ويسمى محور الأعداد محوراً إحداثياً. ونرمز له بالرمز ox.

إذا كان x_1 عدداً موجباً، فإنه يُمثل بالنقطة P_1، الواقعة على يمين نقطة الأصل وتبعد عنها بالمقدار x_1. وإذا كان العدد x_2 سالباً، فإنه يُمثل بالنقطة P_2، الواقعة على يسار نقطة الأصل وتبعد عنها بالمقدار $|x_2|$. وتُمثل النقطة o بالعدد 0، الشكل 1.4.



الشكل 1.4

واضح أن كل عدد حقيقي يُمثل بنقطة معينة على محور الأعداد. ويمثل العددان الحقيقيان المختلفان على محور الأعداد بنقطتين مختلفتين. وبالعكس فإن أي نقطة من محور الأعداد تُقابل عدداً حقيقياً وحيداً.

وعليه، فإن هناك تقابلاً بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومحور الأعداد. ويُعطي ذلك إمكانية استخدام مفهوم "العدد x" ومفهوم "النقطة x" بالمعنى نفسه.

كما يمكن تمثيل أي عدد عادي بنقطة على محور الأعداد، غير أنه لا يقابل كل نقطة من

محور الأعداد عدد عادي.

فمثلاً، النقطة التي تبعد عن نقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات) مسافة تساوي طول قطر مربع، طول ضلعه يساوي الواحد، لا يمكن أن تقابل أى عدد عادي. أي أنه لا يوجد عدد عادي مربعه يساوي 2.

وعليه، فإنه لا يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد العادية ومحور الأعداد.

1.7 المجالات والجوارات في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

عند دراسة الدوال التابعة لمتغيّر حقيقي واحد، نتعرض لمجموعات جزئية من المجموعة $\mathbb{R}$، وهي مجالات مفتوحة أو نصف مفتوحة أو مغلقة. فإذا كان a وb عددين حقيقيين، بحيث $a < b$، فإن:

المجال المغلق الذي طرفاه a وb (القطعة المستقيمة) هو المجموعة:

$$[a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x \le b \}$$

المجال نصف المغلق أو نصف المفتوح هو المجموعة:

$$[a;b[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x < b \} \text{ أو }]a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \le b \}$$

المجال المفتوح (الفترة) هو المجموعة:

$$]a;b[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b \}$$

يمكن أن يكون المجال غير محدود:

$$[a;\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x < \infty \}$$

$$]a;\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < \infty \}$$

$$]-\infty;b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ -\infty < x \le b \}$$

$$]-\infty;b[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ -\infty < x < b \}$$

$$]-\infty;\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ -\infty < x < \infty \} = \mathbb{R}$$

يقابل هذه المجالات قطع مستقيمة على المحور الإحداثي. ويقابل المجال $]-\infty;\infty[$ كامل المحور الإحداثي، لذا يسمى هذا المحور "المحور الحقيقي".

تعريف 1.1: لتكن a نقطة اختيارية من المحور الحقيقي وδ عدداً موجباً. نسمي المجال المفتوح $u_\delta(a) =]a-\delta;a+\delta[$ جواراً للنقطة a مركزه النقطة a ونصف قطره δ، واختصاراً جوار للنقطة a. أي

$$u_\delta(a)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ |x-a|<\delta\}$$

ونسمي المجموعة

$$u_\delta^\circ(a)=\{x\in\mathbb{R}\ :0<|x-a|<\delta\}$$

جواراً مثقوباً للنقطة a.

نسمي المجال $[x_\circ;x_\circ+\delta[$ جواراً أيمنَ للنقطة $x_\circ$، ونرمز له بالرمز $u_\delta(x_\circ^{+})$. أي.

$$u_\delta(x_\circ^{+})=[x_\circ;x_\circ+\delta[=\{x\in\mathbb{R}:\ 0\le x-x_\circ<\delta\ ;\ \delta>0\}$$

ونسمي المجال $]x_\circ-\delta;x_\circ[$ جواراً أيسرَ للنقطة $x_\circ$، ونرمز له بالرمز $u_\delta(x_\circ^{-})$. أي

$$u_\delta(x_\circ^{-})=]x_\circ-\delta;x_\circ]=\{x\in\mathbb{R}\ :\ 0\le x_\circ-x<\delta\ ;\ \delta>0\}$$

وعليه، فإن المجال $u_\delta^\circ(x_\circ^{+})=]x_\circ;x_\circ+\delta[$ جواراً أيمن مثقوباً للنقطة $x_\circ$، والمجال $u_\delta^\circ(x_\circ^{-})=]x_\circ-\delta;x_\circ[$ جواراً أيسر مثقوباً للنقطة $x_\circ$.

1.8 المجموعات العددية المحدودة

تعريف 1.2: نقول عن المجموعة $A\subset\mathbb{R}$ إنها محدودة من الأعلى (من الأدنى)، إذا وجد عدد M (m)، بحيث يكون

$$x\le M\quad(x\ge m)\ ;\ \forall x\in A$$

نسمي العدد M (m) في هذه الحالة، حداً أعلى (حداً أدنى) للمجموعة A أو راجحاً على A (أو قاصراً على A).

إذا كانت المجموعة محدودة من الأعلى ومن الأدنى فإنها تسمى محدودة.

فمثلاً، أي مجال محدود $[a;b]$ أو $]a;b[$ أو $[a;b[$ أو $]a;b]$ هو مجموعة محدودة. بينما المجال $[a;\infty[$ أو المجال $]a;\infty[$ هو مجموعة محدودة من الأدنى فقط، والمجال $]-\infty;b[$ أو المجال $]-\infty;b]$ هو مجموعة محدودة من الأعلى فقط. بينما المجال $]-\infty;\infty[$ هو مجموعة غير محدودة لا من الأعلى ولا من الأدنى.

ملحوظة 1.2: أي مجموعة $A\subset\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى (من الأدنى) لها عدد غير منته من الحدود العليا (الحدود الدنيا).

بالفعل، إذا كان c حداً أعلى (حداً أدنى) للمجموعة A، فإن أي عدد M' (m') أكبر من M (أصغر من m) هو حد أعلى (أدنى) للمجموعة A. لأنه من تحقق المتراجحة $x \le M$ $(x \ge m)$، ينتج $x \le M'$ $(x \ge m')$.

تعريف 1.3 : نسمي أصغر الحدود العليا لمجموعة محدودة من الأعلى $A \subset \mathbb{R}$ أصغر حد أعلى أو أصغر راجح، ونرمز له بالرمز $\sup A$[1]. أي إذا كان $M = \sup A$، فإن الشرط التالي محقق:

$$\forall x \in A : x \le M \quad \wedge \quad \forall M' < M \Rightarrow \exists x_0 > M' \quad ; \quad x_0 \in A$$

تعريف 1.4 : نسمي أكبر الحدود الدنيا لمجموعة محدودة من الأدنى $A \subset \mathbb{R}$ أكبر حد أدنى او أكبر قاصر، ونرمز له بالرمز $\inf A$[2]. أي إذا كان $m = \inf A$، فإن الشرط التالي محقق:

$$\forall x \in A : x \ge m \quad \wedge \quad \forall m' > m \Rightarrow \exists x_0 < m' \quad ; \quad x_0 \in A$$

مثال 1.6: إذا كان $A =]a;b]$، فإن العدد b هو أصغر حد أعلى لهذه المجموعة، والعدد a هو أكبر حد أدنى لها. أي $a = \inf A$ و $b = \sup A$.

مثال 1.7: إذا كان $A =]a;\infty[$، فإن العدد a هو أكبر حد أدنى لهذه المجموعة، أي $a = \inf A$ بينما لا يوجد لهذه المجموعة حد أعلى.

ملحوظة 1.3: أياً كان العدد $\varepsilon > 0$، فإنه يوجد عدد $x \in A$، بحيث $x > \sup A - \varepsilon$. لأنه لو لم نتمكن من إيجاد هذا العدد x، لكان العدد $(\sup A - \varepsilon)$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة A، وأصغر من $\sup A$. وعليه، فإن العدد $\sup A$ ليس أصغر حد أعلى للمجموعة A.

وبأسلوبٍ مشابه، فإن:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists x \in A \quad : \quad x < \inf A + \varepsilon$$

إن أصغر حد أعلى أو أكبر حد أدنى لمجموعة، يمكن أن ينتمي لهذه المجموعة أولا ينتمي لها. فإذا كان $A = [a;b[$، فإن $a = \inf A \in A$ و $b = \sup A \notin A$.

مبرهنة 1.1: إن لأي مجموعة عددية غير خالية محدودة من الأعلى (من الأدنى) أصغر حد أعلى (أكبر حد أدنى).

---

[1] من الكلمة اللاتينية supremum الأعلى.

[2] من الكلمة اللاتينية infimum الأدنى.

البرهان: لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية محدودة من الأعلى. عندئذٍ، فإن مجموعة الحدود العليا B للمجموعة A هي مجموعة غير خالية. وينتج من تعريف الحد الأعلى، أنه عندما يكون $a \in A$ و $b \in B$، فإن $a \leq b$. ولما كانت المجموعة A تحقق موضوعة الاستمرار، فإنه يوجد عدد M بحيث يكون $a \leq M \leq b$.

ينتج من المتراجحة $a \leq M$ أن العدد M يحد المجموعة A من الأعلى، أي أنه حد أعلى لها. كما وينتج من المتراجحة $M \leq b$ أن العدد M هو أصغر الحدود العليا. أي أن M هو أصغر حد أعلى للمجموعة A.

تُبرهن حالة وجود أكبر حد أدنى للمجموعة المحدودة من الأدنى، بأسلوبٍ مشابه.

إذا كانت المجموعة A غير محدودة من الأعلى (من الأدنى)، فإننا نكتب

$$\sup A = +\infty \quad (\inf A = -\infty)$$

ملحوظة 1.4 : إذا كان $\sup A \in A$ $(\inf A \in A)$، فإن

$$\sup A = \max A \qquad (\inf A = \min A)$$

1.9 القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي القيمة غير السالبة له، أي العدد x نفسه إذا كان $x \geq 0$، أو العدد $-x$ إذا كان $x < 0$. ونرمز لها بالرمز $|x|$، أي

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

ينتج من هذا التعريف الخواص التالية :

1. $|x| \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = |-x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $-|x| \leq x \leq |x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\forall x \in \mathbb{R} \wedge \forall a > 0 \; ; \; |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a : a]$

وهذا صحيح، لأنه إذا كان $|x| \leq a$، فإننا نميز الحالتين:

إما $x \geq 0$، أي $|x| = x$. ومنه، فإن $x \leq a$. وعليه، فإن $0 \leq x \leq a$.

أو يكون $x < 0$، أي $|x| = -x$. ومنه، فإن $x \geq -a$. وعليه، فإن $-a \leq x < 0$

وهكذا، فإنه أياً يكن العدد x، فإن $-a \leq x \leq a$، أي $x \in [-a : a]$.

وبالمقابل، فإن المتراجحة $|x| \geq a$ تعني أن $x \geq a$ و $x \leq -a$، أي

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R} \setminus]-a;a[=]-\infty;-a[\cup]a;\infty[$$

5. $|x+y| \leq |x| + |y| \quad ; \forall\, x\,,\, y \in \mathbb{R}$

وهذا صحيح، لأنه من الخاصة 3 نجد: $-|x| \leq x \leq |x|$ و $-|y| \leq y \leq |y|$. وبجمع هاتين المتراجحتين نجد $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

ومن الخاصة 4، نجد $|x+y| \leq |x| + |y|$.

6. $|x-y| \geq |x| - |y| \quad ; \forall\, x\,,\, y \in \mathbb{R}$

وهذا صحيح، لأنه أياً يكن العددان الحقيقيان x و y، فإن $x = y + (x-y)$. ومن الخاصة 5، نجد $|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$. وعليه، فإن

$|x-y| \geq |x| - |y|$.

ويمكن بسهولة التحقق من صحة العلاقات :

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \; ; (y \neq 0) \quad ، \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad ، \quad |x+y| \geq |x| - |y|$$

$$|x^n| = |x|^n \; ; n \in \mathbb{N}$$

التفسير الهندسي للقيمة المطلقة: إن العدد $|x|$ يُمثّل المسافة بين نقطة الأصل o والنقطة التي تمثل العدد الحقيقي x، بغض النظر عما إذا كانت هذه النقطة تقع على يمين أو على يسار o. وبالمثل، فإن العدد $|b-a|$ يُمثّل المسافة بين النقطتين a و b على محور الأعداد.

1.10 الاستقراء الرياضي

تُعد طريقة البرهان بالاستقراء الرياضي من طرائق البرهان الهامة، وتستخدم عادةً لإثبات صحة قضية ما (مساواة أو متراجحة) متعلقة بعدد طبيعي n. كإثبات مثلاً، أن مجموع أول n عدد طبيعي فردي يساوي n^2، مثال 1.10.

وتعتمد هذه الطريقة على التحقق من صحة القضية عندما $n = 1$ (أساس الاستقراء)، ومن ثم نفرض صحة القضية من أجل n، حيث $n > 1$، ونثبت صحتها من أجل $n+1$. تكون عندئذٍ، القضية المعطاة صحيحة أياً يكن العدد n.

إذا كان المطلوب إثبات صحة علاقة من أجل $n \geq n_0$، فإن أساس الاستقراء يكون $n = n_0$.

مثال 1.8: أثبت صحة العلاقة

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \ \forall\, n\in\mathbb{N} \qquad (i)$$

الحل: العلاقة (i) صحيحة عندما $n=1$ (أساس الاستقراء)، لأن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر يساوي الواحد.

نفرض أن العلاقة (i) صحيحة لأي $n>1$، ونثبت صحتها من أجل $n+1$، أي نثبت صحة

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (ii)$$

نعوض العلاقة (i) في الطرف الأيسر للعلاقة (ii):

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

وهو نفس الطرف الأيمن من العلاقة (ii).

مثال 1.9 : أثبت صحة متراجحة برنولي[1]:

$$\forall\, x>0\ ,\ \forall\, n\geq 2 \quad \Rightarrow (1+x)^n>1+n\cdot x \qquad (1.5)$$

الحل: إن هذه المتراجحة صحيحة عندما $n=2$ (أساس الاستقراء)، لأن:

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$$

نفرض أن المتراجحة (1.5) صحيحة لأي $n\geq 2$، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$، أي نثبت صحة المتراجحة : $(1+x)^{n+1}>1+(n+1)\cdot x$.

نضرب طرفي المتراجحة (1.5) بالمقدار الموجب $(x+1)$:

$$(1+x)^n(1+x)>(1+n\cdot x)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2>1+(n+1)x$$

أي أن $(1+x)^{n+1}>1+(n+1)\cdot x$.

ملحوظة1.5 : تفيد طريقة الاستقراء الرياضي في حساب مجموع عددٍ محدود من الأعداد.

مثال 1.10: احسب المجموع $S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

الحل: واضح أن:

$$S_1=1\ ،\ S_2=1+3=4\ ،\ S_3=1+3+5=9\ ،$$
$$S_4=1+3+5+7=16\ ،\ \ldots$$

[1] جاكوب برنولي (1654-1705) عالم رياضيات سويسري.

إذن، يمكن أن نتوقع أن يكون $S_n = n^2$.

نبرهن صحة هذه العلاقة بالاستقراء الرياضي:

هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = 1$، نفرض أنها صحيحة من أجل $n > 1$، ونثبت صحتها من أجل $n + 1$، أي نثبت صحة المساواة

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$$

بالفعل، بإضافة المقدار $2n + 1$ إلى طرفي العلاقة المعطاة نجد:

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) =$$
$$= S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

أي أن $S_{n+1} = (n+1)^2$.

1.11 إحداثيات نقطة في المستوي

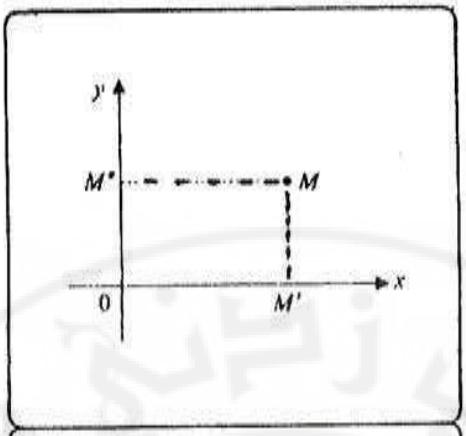
نُعرّف إحداثيات نقطة، بأنها تلك المقادير التي تعين موضعاً وحيداً لهذه النقطة على مستقيم أو في المستوي أو في الفراغ. فإذا كانت النقطة M تقع على المحور الإحداثي ox، فيمكن تعيين موضعها بعددٍ وحيد هو إحداثي هذه النقطة x وتمثّل القيمة المطلقة له بُعد النقطة M عن نقطة الأصل. وإذا كان x موجباً، فإن النقطة M تقع على يمين نقطة الأصل، وإذا كان x سالباً، فإن النقطة M تقع على يسار نقطة الأصل. وإذا كانت النقطة تقع في المستوي، فإنه يتعين موضع وحيد لها بمعرفة عددين. ويكون ذلك بعدة طرائق، نعطي طريقتين منها: الطريقة الديكارتية والطريقة القطبية.

1.11.1 جملة الإحداثيات الديكارتية

لتكن o نقطة ثابتة من المستوي يمر منها محوران إحداثيان متعامدان ox و oy، أحدهما أفقي ox يسمى محور السينات أو محور الفواصل، والآخر شاقولي oy يسمى محور العينات أو محور التراتيب، وتُعطى على كلٍ منها واحدة قياس معينة. ونسمي النقطة الثابتة o نقطة الأصل أو مبدأ الإحداثيات، الشكل 1.5.

ونسمي المستوي عندئذٍ، مستوي الإحداثيين الديكارتيين واختصاراً المستوي الديكارتي.

يقسم المستقيمان الإحداثيان ox و oy المستوي الديكارتي لأربعة أجزاء (أرباع).



الشكل 1.5

لتعيين إحداثيات نقطة M في المستوي الديكارتي، نرسم مستقيمين يمران من M يوازي الأول محور الفواصل والآخر محور التراتيب، فيقطعان المحاور الإحداثية في النقطتين M' و M'' على الترتيب، الشكل 1.5. ليكن x إحداثي النقطة M'، وy إحداثي النقطة M''. وهكذا، يتعين موضع وحيد للنقطة M بمعرفة المقدارين (العددين) x وy. نسمي العددين x وy الإحداثيين الديكارتيين للنقطة M، ونكتب $M(x,y)$.

كما هو واضح، فإن القيم x وy يمكن أن تأخذ أية قيمة، أي

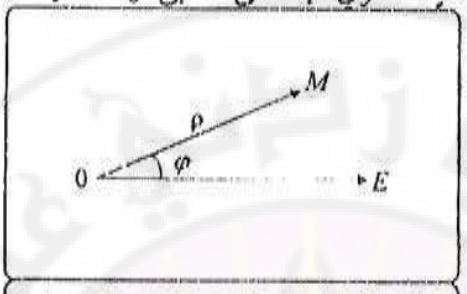
$$-\infty < x < \infty \quad , \quad -\infty < y < \infty$$

وبالعكس، يمكن تحديد موضع النقطة M في المستوي الديكارتي بمعرفة عددين x و y، تُمثل القيمة المطلقة للعدد الأول بُعد النقطة M عن محور التراتيب، وتُمثل القيمة المطلقة للعدد الثاني بُعد النقطة M عن محور الفواصل.

إذا كان العددان x وy موجبين، فإن النقطة M تقع في الربع الأول أو الربع الموجب من المستوي الديكارتي. وإذا كان العدد x سالباً والعدد y موجباً، فإن النقطة M تقع في الربع الثاني. وإذا كان العددان x وy سالبين، فإن النقطة M تقع في الربع الثالث. وإذا كان العدد x موجباً والعدد y سالباً، فإن النقطة M تقع في الربع الرابع.

1.11.2 جملة الإحداثيات القطبية

تتألف جملة الإحداثيات القطبية من نقطة ثابتة o، تسمى القطب، ونصف مستقيم $\overrightarrow{oE}$، منبعث من القطب o، يسمى المحور القطبي، وتعطى عليه واحدة قياس معينة، الشكل 1.6. نسمي المستوي عندئذ، المستوي الإحداثي القطبي، واختصاراً المستوي القطبي.



الشكل 1.6

لتكن M نقطة من المستوي القطبي. وليكن ρ طول القطعة المستقيمة oM. ولتكن φ الزاوية التي يدورها المحور القطبي $\overrightarrow{oE}$، بدءاً من محور الفواصل، حتى ينطبق على المستقيم oM، الشكل 1.6. يتعين عندئذ، موضع وحيد للنقطة M بمعرفة القيمتين ρ و φ. ونسمي العددين ρ و φ الإحداثيات القطبية للنقطة M، ونكتب $M(\rho,\varphi)$.

نسمي ρ نصف القطر الشعاعي و φ الزاوية القطبية.

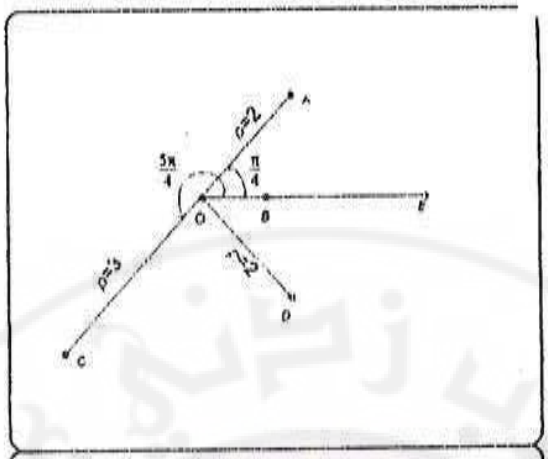
كما هو واضح فإن العدد ρ يمكن أن يأخذ أية قيمة غير سالبة، أي $0 \le \rho < \infty$. ونعتبر عادةً، الزاوية φ هي الزاوية المحققة لـ $0 \le \varphi < 2\pi$، مع العلم أنه يمكن أن تأخذ φ قيماً أكبر من 2π، أو قيماً سالبة.

مثال 1.11: يعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 2$ و $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ النقطة A في المستوي القطبي، الشكل 1.7. ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 1$ و $\varphi = 0$ النقطة B في هذا المستوي.

ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 1$ و $\varphi = 2\pi$ نفس النقطة B.

ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 3$ و $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ النقطة C.

ويعين الإحداثيان القطبيان $\rho = 2$ و $\varphi = \frac{7}{4}\pi$ النقطة D، وهي تناظر النقطة A بالنسبة إلى المحور القطبي $\overrightarrow{oE}$، الشكل 1.7.



الشكل 1.7

1.11.3 العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية

نفرض أن المستوي منسوب لجملة إحداثيات ديكارتية، أي توجد نقطة ثابتة o ومحوران إحداثيان متعامدان ox و oy.

نفرض أن القطب o يقع في نقطة الأصل وأن المحور القطبي $\overrightarrow{oE}$ ينطبق على محور الفواصل الموجب ox. ليكن x و y الإحداثيين الديكارتيين للنقطة M، وليكن ρ و φ الإحداثيين القطبيين لنفس النقطة، الشكل 1.8.

Δ

نجد من المثلث القائم oMM' علاقات التحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية وبالعكس:

$$\{\ x = \rho\cos\varphi \quad و \quad y = \rho\sin\varphi\ \} \qquad (1.6)$$

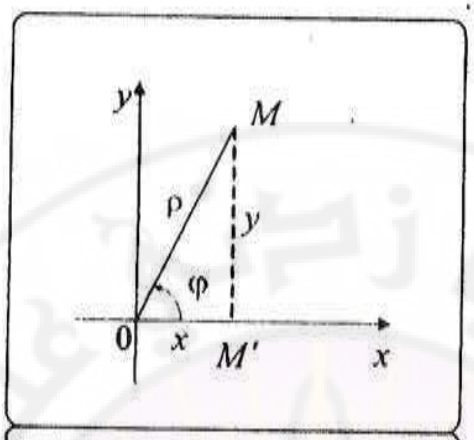
و $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتحقق φ العلاقتين:

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad و \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

واضح أنه إذا كان $x^2 + y^2 = 0$، أي $x = y = 0$، فإن الزاوية φ غير معينة، أي أن زاوية القطب o غير معينة، لذا تسمى النقطة o نقطة حرجة للجملة القطبية.

ملحوظة 1.6: تُعين العلاقة $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ زاويتين في المستوي القطبي، لذا إذا أردنا

استخدام هذه العلاقة لتعيين زاوية نقطة في المستوي يجب قبل ذلك تحديد في أي ربع من أرباع المستوي تقع هذه النقطة.



الشكل 1.8

مثال 1.12: أوجد الإحداثيين القطبيين للنقطة المعطاة ديكارتياً $M(2,-2)$.

الحل: إن $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. ونعين الزاوية φ من العلاقتين

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

أي أن $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

مثال 1.13: بين نوع المنحني المعطى قطبياً بالمعادلة $\rho = 4\sin\varphi$.

الحل: من العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية، نجد

$$\sqrt{x^2+y^2} = 4\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2+y^2 = 4y \Rightarrow x^2+(y-2)^2 = 4$$

وهي معادلة دائرة مركزها النقطة $(0,2)$ ونصف قطرها 2.

مثال 1.14: عين المعادلة القطبية للمستقيم $y = x$ (المنصف الأول).

الحل: من العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية نجد

$$\rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \sin\varphi$$

أي $\varphi = \frac{1}{4}\pi + \pi k$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

1.12 مجموعة الأعداد العقدية

توجد مسائل لا يمكن حلها في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. فمثلاً، ليس للمعادلة $x^2+1=0$ حل في $\mathbb{R}$، لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه يساوي -1.

نرمز بـ $i=\sqrt{-1}$. عندئذ يمكن التعبير عن حل المعادلة $x^2+1=0$ بالصيغة $x=\mp i$.

وهكذا ظهرت الحاجة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة جديدة تكون فيها كل المعادلات الجبرية

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \quad ; \quad (a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R})$$

قابلة للحل. تسمى مجموعة كهذه مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$.

تعريف 1.5: العدد العقدي هو العدد $z=x+iy$، حيث x و y أعداد حقيقية و i عنصر تخيلي يحقق الشرط $i^2=-1$.

نسمي هذا الشكل للعدد العقدي الشكل الجبري أو الديكارتي للعدد العقدي.

نسمي العدد x القسم الحقيقي و y القسم التخيلي للعدد العقدي $z=x+iy$ ونستخدم الرموز

$$x=^1\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(x+iy) \quad \text{و} \quad y=^2\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(x+iy)$$

ولما كان كل عدد حقيقي x هو عدد عقدي قسمه التخيلي معدوم، أي $x+i(0)$، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العقدية، أي $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

وهكذا، فإن

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

1.12.1 تعاريف أساسية

- إذا كان القسم الحقيقي من العدد العقدي معدوماً، فإن العدد العقدي يسمى عدداً تخيلياً.
- يتساوى عددان عقديان $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$، إذا وفقط إذا كان $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$، أي

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \iff x_1=x_2 \quad \text{و} \quad y_1=y_2$$

---

[1] من الكلمة الفرنسية reel حقيقي.

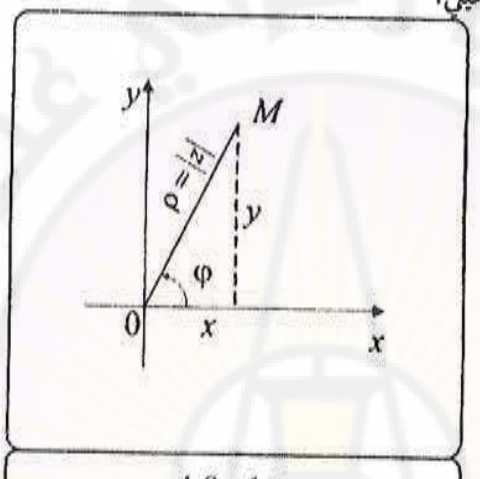
[2] من الكلمة الفرنسية imaginaire تخيلي.

- ينعدم العدد العقدي، إذا وفقط إذا انعدم قسمه الحقيقي وقسمه التخيلي، أي

$$x + iy = 0 \iff x = y = 0$$

- نسمي العدد العقدي $\bar{z} = x - iy$ مرافقاً للعدد العقدي $z = x + iy$.

يمثل العدد العقدي $z = x + iy$، هندسياً، بنقطة في المستوي الديكارتي إحداثياها x و y. ونسمي عندئذٍ، المستوي الديكارتي مستوياً عقدياً، محور الفواصل هو المحور الحقيقي ومحور التراتيب هو المحور التخيلي.



الشكل 1.9

وهكذا، فكل عدد عقدي $z = x + iy$ يمثل بنقطة محددة $M(x, y)$ في المستوي العقدي، الشكل 1.9. وبالعكس، فكل نقطة من المستوي العقدي $M(x, y)$ تقابل عدداً عقدياً محدداً $z = x + iy$، أي هناك تقابل بين نقاط المستوي الديكارتي وعناصر المجموعة $\mathbb{C}$.

طويلة العدد العقدي: نسمي المسافة بين النقطة $M(x, y)$ ونقطة الأصل o طويلة (قياس) العدد العقدي $z = x + iy$، ونرمز لها بالرمز $|z|$. وكما هو واضح من الشكل 1.9، فإن

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2}$$

زاوية العدد العقدي: إذا كانت طويلة العدد العقدي غير معدومة، فإن زاوية (سعة) العدد العقدي $z = x + iy$ تعرف بأنها الزاوية φ الكائنة بين الاتجاه الموجب للمحور ox والمستقيم oM. وتُعرّف الزاوية φ بالعلاقات:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

إذا كانت الزاوية φ تحقق الشرط $-\pi \le \varphi \le \pi$، فإن الزاوية تسمى رئيسية، ونرمز لها بالرمز $\arg(z)$، ونرمز لمجموعة جميع قيم الزاوية بالرمز $Arg(z)$، أي

$$Arg(z) = \arg(z) + 2\pi k \qquad ; \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال 1.15: بفرض $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ و $b > 0$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ عدداً عقدياً مثبّتاً. عين في المستوي العقدي مجموعة نقاط المستوي الذي تمثله كل من العلاقات

1) $\mathrm{Re}(z) = \alpha$; 2) $[\alpha < \mathrm{Re}(z) \le \beta] \cap [\gamma \le \mathrm{Im}(z) < \delta]$;
3) $a \le |z - z_0| < b$

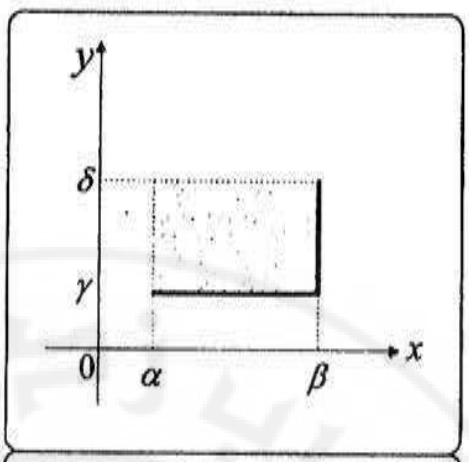
الحل:

1. $\mathrm{Re}(z) = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha$ وهي معادلة مستقيم يوازي المحور oy.

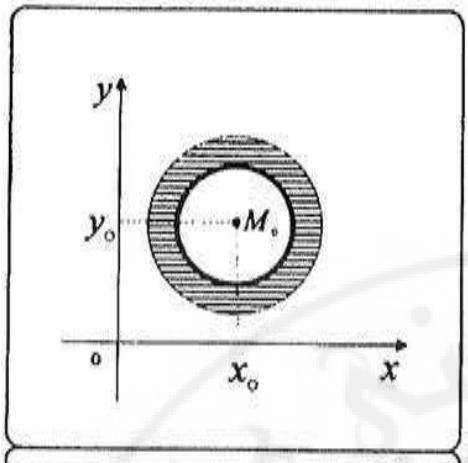
2. $\alpha < \mathrm{Re}(z) \le \beta \Leftrightarrow \alpha < x \le \beta$ و $\gamma \le \mathrm{Im}(z) < \delta \Leftrightarrow \gamma < y < \delta$، تمثل المتراجحة الأولى شريطاً شاقولياً لانهائياً محصوراً بين المستقيمين $x = \alpha$ و $x = \beta$، بحيث لا تنتمي نقاط المستقيم $x = \alpha$ لهذا الشريط وتنتمي نقاط المستقيم $x = \beta$ لهذا الشريط، وتمثل المتراجحة الثانية شريطاً أفقياً لانهائياً محصوراً بين المستقيمين $y = \gamma$ و $y = \delta$، بحيث تنتمي نقاط المستقيم $y = \gamma$ لهذا الشريط ولا تنتمي نقاط المستقيم $y = \delta$ لهذا الشريط، أي أن هذه المتراجحات تمثل مستطيلاً، الشكل 1.10.

3. $a \le |z - z_0| < b \Leftrightarrow a \le \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < b$، أي
$a^2 \le (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < b^2$، وهي تمثل حلقة دائرية مركزها النقطة (x_0, y_0) وأنصاف أقطارها a وb، بحيث إن المحيط الخارجي لهذه الحلقة لا ينتمي لها، الشكل 1.11.

Damascus University



الشكل 1.10



الشكل 1.11

1.12.2 العمليات على الأعداد العقدية

تخضع الأعداد العقدية بشكلها الجبري لقواعد الجبر الحقيقي شرط أن نعوض $i^2 = -1$.

ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين.

إن حاصل جمع العددين العقديين z_1 و z_2 هو العدد العقدي

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

وحاصل طرح العدد العقدي z_2 من العدد العقدي z_1، هو العدد العقدي

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

يمكن أن يكون حاصل جمع أو طرح عددين عقديين عدداً حقيقياً أو عدداً تخيلياً:

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$
$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$$

وعليه، فإن

$$y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{و} \quad x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

حاصل جداء العددين العقديين z_1 و z_2 هو العدد العقدي

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1\ y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

وعليه، فإن:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

تحول عملية قسمة العدد العقدي z_1 على العدد العقدي z_2، حيث $|z_2| \neq 0$، إلى عملية ضرب، وذلك بضرب البسط والمقام بـ $\bar{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

إن رفع العد العقدي z للقوة n، حيث $n \in \mathbb{N}$، يعني ضرب العدد z بنفسه n مرة.

ونجد، خصوصاً، قوى العنصر التخيلي i:

$$i^n = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 4k \\ i & ; \quad n = 4k+1 \\ -1 & ; \quad n = 4k+2 \\ -i & ; \quad n = 4k+3 \end{cases} \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

1.12.3 الشكل المثلثي (القطبي) للعدد العقدي

نبدل الإحداثيين الديكارتيين x وy للعدد العقدي $z = x + iy$ بالإحداثيين القطبيين المقابلين ρ وφ، فنحصل على الشكل المثلثي (القطبي) للعدد العقدي:

$$z = x + iy = \rho \cos\varphi + i\rho \sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

إن الشكل المثلثي للعدد العقدي مناسب في عمليات ضرب وقسمة الأعداد العقدية والرفع لقوة وحساب جذور العدد العقدي:

ليكن $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ و $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ عددين عقديين. عندئذٍ،

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = \\ = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

وبأسلوبٍ مشابه، نجد:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

وعليه، يمكن حساب z^n، حيث $n \in \mathbb{N}$، باستخدام الشكل المثلثي للعدد العقدي z:

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1.7)$$

أي $|z^n| = \rho^n$ و $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

وبوضع $\rho = 1$ في العلاقة (1.7) نحصل على علاقة ديموافر[1]

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

ونحصل على جذور العدد العقدي بأسلوب مشابه:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right] \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

واضح من هذه العلاقة، أن عدد الجذور المختلفة للعدد العقدي z هو n جذر، نحصل عليها عندما يكون $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

1.12.4 الشكل الأسي للعدد العقدي

هو الشكل الأكثر ملائمة للعدد العقدي. ونحصل على الشكل الأسي للعدد العقدي من تعويض علاقة أولر[2]

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ; \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

في الشكل المثلثي للعدد العقدي:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$$

حيث $\rho = |z|$ و $\varphi = \arg(z) + 2\pi k$، حيث $k \in \mathbb{Z}$، وتقاس الزاوية φ بالراديان فقط.

يحقق التابع $e^{i\varphi}$ خواص التوابع الأسية ذات الأس الحقيقي، لذا، فإن صيغ الضرب والقسمة والرفع لقوة طبيعية للعدد العقدي في شكله الأسي لها شكل بسيط.

فإذا كان $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ و $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ عددين عقديين، فإن

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad , \quad (\rho_2 \neq 0)$$

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

---

[1] ابراهام ديموافر (1667-1754) إنكليزي الجنسية فرنسي الأصل.

[2] ليونارد أولر (1707-1783) رياضي وفيزيائي سويسري.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

مثال 1.16 : إذا كان $z = 1 + i\sqrt{3}$ ، احسب z^6 ، والجذور من المرتبة الثالثة للعدد z.

الحل: نوجد طول وزاوية العدد z :

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2 \text{ ، } \cos\varphi = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{3}\pi$$

وعليه، فإن $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. وهكذا نجد:

$$z^6 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^6 = 2^6 e^{i6\frac{\pi}{3}} = 64\, e^{i2\pi} = 64$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2e^{i(\frac{\pi}{3}+2\pi k)}} = \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{1}{3}(\frac{\pi}{3}+2\pi k)} = \sqrt[3]{2}\, e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3})}$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{1}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{1}{9}\pi + i\sin\tfrac{1}{9}\pi) = 1.184 + i(0.431)$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i(\frac{1}{9}+\frac{1}{3})\pi} = \sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{7}{9}\pi + i\sin\tfrac{7}{9}\pi) = -0.965 + i(0.81)$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i(\frac{1}{9}+\frac{2}{3})\pi} = \sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{13}{9}\pi + i\sin\tfrac{13}{9}\pi) = -0219 - i(1.241)$$

خواص طويلات الأعداد العقدية:

1. لما كان $|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2}$ ، فإن $|z| \geq \mathrm{Re}(z)$ و $|z| \geq \mathrm{Im}(z)$.
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ و $|\bar{z}| = |z|$.
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ويمكن تعميم هذه القاعدة من أجل جداء أكثر من عددين عقديين.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ويمكن تعميم هذه القاعدة من أجل حاصل جمع أكثر من عددين عقديين.
5. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

تمارين الفصل الأول

1. أثبت صحة العلاقات التالية:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=(2^n-1)$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$$

$$(n+1)^n<n^{(n+1)}\ ;\ (n\geq 3)$$

$$(2!)(4!)(6!)\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n$$

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n}$$

$$|\sin\alpha n|\leq n|\sin\alpha|\ ;\ (\forall\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ ;\ (n\geq 2)$$

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}(1+2+3+\ldots+n)^2\cdot n^2(n+1)^2$$

$$\sin\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sin x_k\ ;\ (0\leq x_k\leq\pi\ ,\ k=1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}$$

$$(2n)!<2^n(n!)^2$$

$$2^n>(2n+1)\ ;\ (n\geq 3)$$

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{4n}<e-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{4}{n}$$

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin x}$$

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \ldots \cdot \sin nx = \sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + [a + (n-1)r] = \frac{n[2a(n-1)r]}{2}$$

2. أثبت أن المقدار $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ يقبل القسمة على 3.

3. أثبت أن المقدار $A = 4^n + 15n - 1$ يقبل القسمة على 9.

4. أثبت أن المقدار $A = n^3 - 3$ يقبل القسمة على 24.

5. أثبت أن المقدار $A = 11^{(n+2)} + 12^{(2n+1)}$ يقبل القسمة على 133.

6. لتكن X و Y مجموعتين عدديتين، ولتكن

$$A = \{a = x + y \ , \ x \in X \ , \ y \in Y\}, \quad B = \{b = x \cdot y \ , \ x \in X \ , \ y \in Y\}$$

أثبت أن

$$\sup A = \sup X + \sup Y \qquad \sup B = \sup X \cdot \sup Y$$
$$\inf A = \inf X + \inf Y \qquad \inf B = \inf X \cdot \inf Y$$

7. لتكن X مجموعة عددية ما و $Y = \{y = -x \ , \ x \in X\}$. أثبت أن

$$\sup Y = -\inf X \ , \ \inf Y = -\sup X.$$

8. أثبت صحة المتراجحة: $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$

9. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات:

$$|x+2| + |x-2| \le 12 \qquad |2x-1| < |x-1|$$
$$|x| > |x+1| \qquad \big||x+1| - |x-1|\big| < 1$$
$$|x+2| - |x| > 1$$

10. بسّط التراكيب العقدية التالية واكتب الناتج بالشكل الجبري والمثلثي والأسي:

$$z = 2 - 2i + \frac{2}{1+i} \qquad z = \frac{3+4i}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} \qquad z = \frac{\cos 6x + i\sin 6x}{\cos 4x + i\sin 4x}$$

11. احسب الجذور التكعيبية للعدد $z = 1 + 3i$.

12. عين في المستوي العقدي المجموعات النقطية التالية:

$\mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z) > 0$	$1 < \lvert z - i \rvert \le 2$	$\lvert z - 4i \rvert + \lvert z + 4i \rvert \le 10$
$\lvert z - 1 \rvert > \mathrm{Re}(z) \ge 0$	$\lvert z - (1 - 2i) \rvert = 5$	$\arg\left(\frac{z+i}{z-1}\right) = 0$
$\frac{\lvert z-2 \rvert}{\lvert z+2 \rvert} = 1$	$z = \bar{z}$	

13. أثبت أن $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

14. بفرض أن رؤوس مثلث هي النقط $z_1 = 1 - 6i$ و $z_2 = 1 + 2i$ و $z_3 = 4 - 2i$. أثبت أن هذا المثلث متساوي الساقين. احسب أطوال أضلاعه.

Damascus University

الفصل الثاني

الدوال التابعة لمتغيّر حقيقي واحد

2.1 المتغيرات والثوابت

2.2 الدالة

2.3 الخواص الأساسية لسلوك الدوال

2.4 الدوال الأولية الأساسية ومنحنياتها البيانية

2.5 تصنيف الدوال

2.6 الدوال المعطاة وسيطياً

2.7 طرائق بسيطة لرسم المنحنيات البيانية للدوال في جملة الإحداثيات الديكارتية (الأسلوب المقارن)

2.8 بعض المنحنيات الشهيرة وسيطياً

2.9 بعض المنحنيات الشهيرة قطبياً

تمارين الفصل الثاني

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الدوال التابعة لمتغيّر حقيقي واحد

2.1 المتغيرات والثوابت

المقدار المتغير هو ذاك المقدار الذي يمكن أن يأخذ قيماً مختلفة تحت شروط السؤال المطروح. وبالعكس، فإن المقدار الثابت هو ذاك المقدار الذي يحافظ على قيمته نفسها تحت شروط السؤال المطروح. ويمكن أن يكون المقدار نفسه ثابتاً فيما يتعلق بأحد الأسئلة ومتغيراً (متحولاً) فيما يتعلق بسؤالٍ آخر.

فمثلاً، درجة غليان الماء فيما يتعلق بمعظم مسائل الطبيعة، هي مقدار ثابت، ولكنها تكون متغيرة (متحولة)، إذا أخذنا بعين الاعتبار تغير الضغط الجوي.

كذلك، فإن الإحداثيين x وy متحولان ونصف القطر a ثابتٌ في معادلة الدائرة $x^2+y^2=a^2$، وذلك بفرض أننا ندرس دائرة واحدة. أما إذا كنا ندرس جميع الدوائر التي مركزها نقطة الأصل o، فإن نصف القطر a كون أيضاً متغيراً.

نرمز عادة للمتحولات بالرموز $x,y,z,t,u,v,\ldots$ وللثوابت بالرموز $a,b,c,\ldots$.

2.2 الدالة

يعد مفهوم الدالة من أهم مفاهيم التحليل الرياضي، وهو مفهوم أساسي في معظم فروع العلم

2.2.1 مفهوم الدالة

لتكن D وE مجموعتين عدديتين ما. الدالة f هي مجموعة من الأزواج المرتبة (x,y)، حيث $x\in D$ و $y\in E$، وكل عنصر x يدخل في زوجٍ واحد على الأقل من هذه المجموعة، وكل عنصر y يدخل في زوجٍ واحد فقط، من هذه المجموعة. ونقول إن x مقابل للعدد y، ونكتب $y=f(x)$. ونقول، أيضاً، إن f تطبيق من المجموعة D إلى المجموعة E، ونرمز للعبارة بالرمز $f:D\to E$

نسمي x المتغير المستقل واختصاراً المتغير، وy المتغير التابع أو الدالة. ونسمي المجموعة D مجموعة (أو ساحة) تعريف الدالة f ونرمز لها بالرمز $D(f)$، والمجموعة E مجموعة قيم (أو مدى) الدالة ونرمز لها بالرمز $E(f)$:

$$E(f)=\{\, y\in\mathbb{R} \;:\; y=f(x) \;\;;\;\; x\in D(f)\,\}$$

إذا كان $x_0 \in D(f)$، فإن العدد $f(x_0)$ هو قيمة الدالة f في النقطة $x = x_0$.

وإذا كان $x_0 \notin D(f)$، فإننا نقول إن الدالة f غير معرفة في النقطة $x = x_0$.

نسمي الدالة التي جميع قيمها متساوية دالةً ثابتة، ونرمز لها بالرمز $f(x) = c$. وهي معرفة على $\mathbb{R}$.

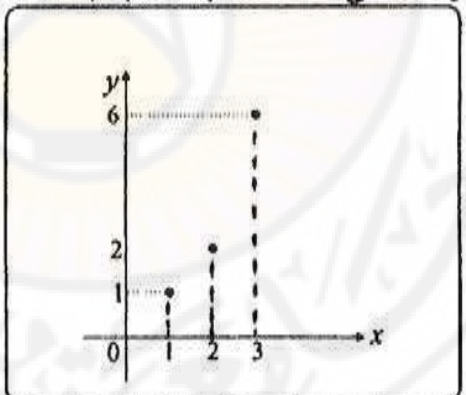
إذا كانت الدالة f معرفة على المجموعة $D(f)$، والدالة g معرفة على المجموعة $D(g)$، فإن الدوال $f \mp g$ و $f \cdot g$ معرفة على المجموعة $D(f) \cap D(g)$، والدالة $\frac{f}{g}$ معرفة على المجموعة

$$D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\}$$

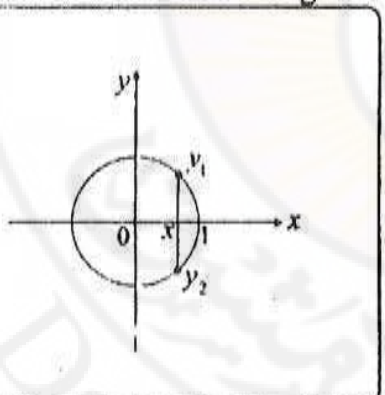
2.2.2 بيان دالة

يُمثل الزوج المرتب (x, y) نقطة في المستوي الديكارتي xoy، فاصلتها x وترتيبها $y = f(x)$. وعليه، فإن الدالة f تُمثل مجموعة من نقاط المستوي الديكارتي تسمى بيان الدالة أو منحنى الدالة، وتسمى المعادلة $y = f(x)$ معادلة المنحني.

يمكن أن يكون المنحني البياني للدالة خطاً متصلاً أو يتألف من نقاط أو أجزاء غير متصلة وكمثال على ذلك الدالة $y = n!$; $(n \in \mathbb{N})$ ، الشكل 2.1.



الشكل 2.1



الشكل 2.2

ملحوظة 2.1 : لا يُعبّر كل منحنى في المستوي عن دالة. فمثلاً، منحني الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ لا يعبر عن دالة، لأن كل نقطة $x \in]-1;1[$ تدخل في زوجين وليس في زوج واحد (x, y)

من مجموعة نقاط محيط الدائرة وبقيم مختلفة لـ y هي $y_1=\sqrt{1-x^2}$ و $y_2=-\sqrt{1-x^2}$، وهذا يناقض تعريف الدالة، الشكل 2.2. غير أن النصف العلوي لمحيط الدائرة، الواقع فوق محور الفواصل ox، هو منحن بياني للدالة $y=\sqrt{1-x^2}$. والنصف الآخر من الدائرة، الواقع تحت محور الفواصل، هو منحن بياني للدالة $y=-\sqrt{1-x^2}$. ونقول عندئذٍ، إن المعادلة المعطاة تُمثل دالتين أو دالة ثنائية الفرع.

2.2.3 تطابق دالتين

نقول عن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$، إنهما متطابقتان على المجموعة A، ونكتب

$$f(x)\equiv g(x) \quad ; \quad \forall x\in A$$

إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ معرفتين على المجموعة A، وكان

$$f(x)=g(x) \quad ; \quad \forall x\in A$$

فمثلاً، الدالتان $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ متطابقتان على $\mathbb{R}$، أي

$$g(x)=\sqrt{x^2}\equiv|x|=f(x) \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

2.2.4 طرائق إعطاء الدالة

تُعد الدالة معطاة (معلومة)، إذا استطعنا الحصول على قيمتها المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير المستقل. وهناك عدة طرائق لإعطاء الدالة.

أولاً. الطريقة التحليلية

تعتمد هذه الطريقة على تعريف علاقة تربط بين القيم المتغيرة. وهذه العلاقة هي العمليات التي يجب القيام بها للحصول على قيمة الدالة المقابلة لقيمة معطاة لمتحول مستقل.

فمثلاً، الصيغة x^3 تُعبّر عن دالة، مجموعة تعريفها ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$.

ويمكن أن تعطى الدالة تحليلياً بأكثر من صيغة:

مثال 2.1: إن الدالة

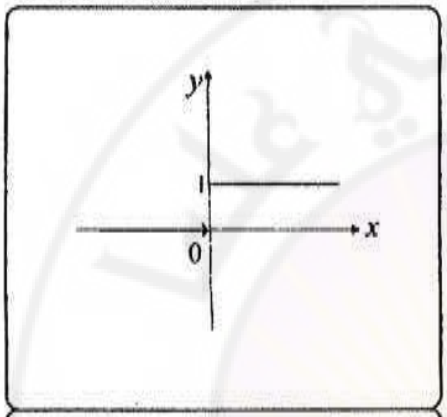
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \; ; \; x\in\,]-2;1[\\ 0 \quad\;\; ; \; x=1 \\ x \quad\;\; ; \; x\in\,]1;2[\end{cases}$$

معرفة على المجموعة $D(f) =]-2;2[$. ويمثل الشكل 2.3، المنحني البياني لها.

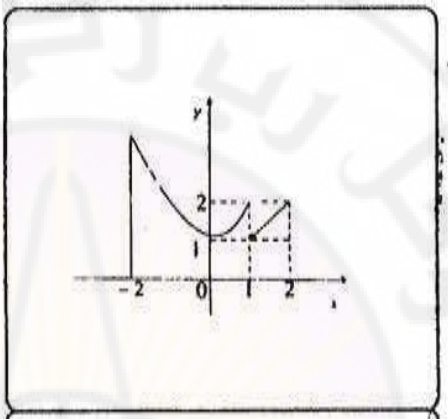
مثال 2.2: دالة هافيسايد[1]

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$. ويمثل الشكل 2.4، المنحني البياني لها.



الشكل 2.4



الشكل 2.3

مثال 2.3 : دالة الإشارة[2]

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

وهي دالة معرفة على $\mathbb{R}$. ويمثل الشكل 2.5، المنحني البياني لها.

مثال 2.4 : دالة ديرخليه[3]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

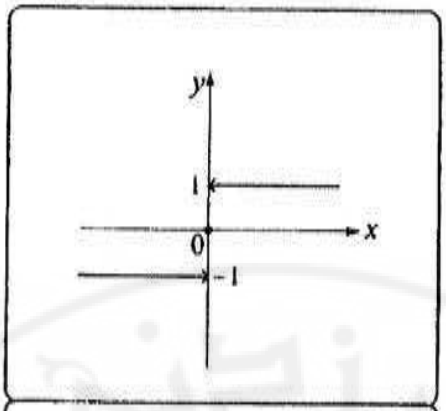
وهي دالة معرفة على $\mathbb{R}$. ولكن لا يمكن تمثيلها في المستوي

---

[1] أوليفر هافيسايد (1850-1925) عالم رياضيات ومهندس إنكليزي.

[2] من الكلمة اللاتينية signum إشارة.

[3] بيتر غوستاف ديرخليه (1805-1859) عالم رياضيات ألماني.



الشكل 2.5

ثانياً. الطريقة الجدولية

تعتمد هذه الطريقة على تعداد جدولي لـ n قيمة للمتحول المستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$، ومقابلاتها من قيم الدالة $y_1, y_2, \ldots, y_n$. ومن الأمثلة على ذلك، الجداول اللوغارتمية أو المثلثية وغيرها.

وتستخدم هذه الطريقة بشكلٍ واسع في المسائل العملية، وذلك عندما تكون لقيم الدالة معنى فيزيائي محدد، نحصل عليه أثناء القيام بتجربة ما.

فمثلاً، لقد بينت تجربة قياس درجة حرارة غليان ماء T، أنها تتغير كلما تغير الضغط الجوي p. ولقد تبين أنه يقابل كل قيمة p، قيمة وحيدة من قيم T. أي أن T دالة في المتغير p:

p	300	350	400	450	500	550	600	650
T	75.8	76.9	83.0	85.9	88.7	91.2	93.5	95.7

تكمن فائدة هذه الطريقة في الحصول على قيم الدالة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ المقابلة لقيم المتغير $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مباشرةً من الجدول. أما مثالبها، فهي صعوبة الحكم على خواص تغيّر الدالة، وعدم إمكانية تحديد قيمة الدالة ضمن مجالٍ ما من الجدول.

إذا كانت الدالة معطاة تحليلياً، فإنه يمكن دائماً إنشاء جدول، أي التعبير عنها جدولياً. غير أنه إذا كانت الدالة معطاة جدولياً، فإنه من الصعب في الحالة العامة، التعبير عنها تحليلياً. ويمكن باستخدام الاستقراء الرياضي، إيجاد صيغة أو أكثر للدالة انطلاقاً من الجدول. وتعطي هذه الصيغة قيم الجدول وقيماً أخرى عديدة غير موجودة في الجدول.

ثالثاً. الطريقة البيانية

تعتمد هذه الطريقة على إنشاء المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ في جملة إحداثية، يمثل فيها المحور الأفقي ox قيم المتغير المستقل x، ويمثل المحور الشاقولي oy قيم الدالة y المقابلة لقيم المتغير المستقل x.

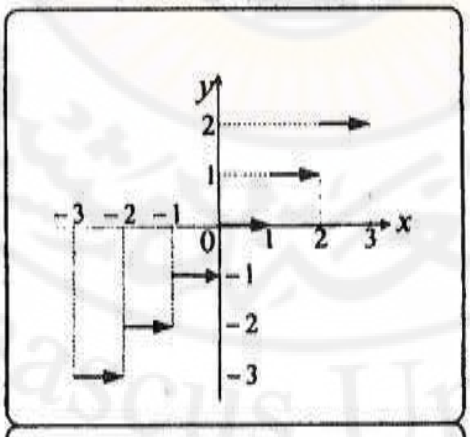
تستخدم هذه الطريقة، عادةً في المسائل العملية: في الفيزياء والكيمياء والطب والأرصاد الجوية وغيرها. وذلك عندما تكون العلاقة بين المتغيرين x وy معطاة بوساطة منحن بياني. ويرسم المنحني في كثير من الحالات، بوساطة أجهزة خاصة. ففي الطب، يرسم جهاز تخطيط القلب مخططاً أو منحنياً بيانياً لتغير النبضات الكهربائية لعضلة القلب.

وفي العقود الأخيرة، ومع التطور السريع في استخدام الحاسوب في شتى مجالات الحياة، أصبحت البرامج الحاسوبية إحدى الطرائق الأساسية لإعطاء الدوال، حيث تعطى الدالة بوساطة برنامج حاسوبي مكتوب بإحدى لغات البرمجة.

إن هذه الطرائق هي الطرائق الأكثر شيوعاً، لكنها ليست الوحيدة، فقد تعطى الدالة بوساطة عبارة لغوية تصف قانوناً لعلاقةٍ ما f، تسمح بتحديد قيمة y من أجل عنصرٍ ما x.

فمثلاً، دالة القسم الصحيح $E(x)=[x]$ تُعرّف بأنها أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x. تُعطى بيانياً بالشكل 2.6، وتحليلياً بالعلاقة:

$$E(x)=[x]=n \quad ; \quad \forall x \in [n;n+1[\ , \ n \in \mathbb{Z}$$



الشكل 2.6

2.3 الخواص الأساسية لسلوك الدوال

إن دراسة أو تحليل الدالة تعني توصيف سلوكها على مجموعة تعريفها، ورسم المنحني البياني لها. لذلك يلزمنا معرفة أصفار الدالة وإشارتها على مجموعة تعريفها وهل هي دالة زوجية أو لا، ودورية أو لا، وكذلك مجالات التزايد والتناقص وغيرها.

2.3.1 صفر دالة

تعريف 2.1: صفر الدالة $f(x)$ هو العدد $x_0 \in D(f)$ الذي تنعدم عنده قيمة الدالة.

أي أن أصفار الدالة $f(x)$ هي جذور المعادلة $f(x)=0$. ويعني ذلك هندسياً، أنها النقاط التي يقطع فيها المنحني البياني لهذه الدالة محور الفواصل. ويقع المنحني البياني للدالة $f(x)$ فوق محور الفواصل على المجال الذي تكون عليه الدالة موجبة، ويقع تحت محور الفواصل على المجال الذي تكون عليه الدالة سالبة.

مثال 2.5: العدد $x_0 = 1$ هو صفر للدالة $y = \log_3 x$ ، لأن $\log_3 1 = 0$.

مثال 2.6 : لتكن $f(x)$ دالة معرفة على المجال $[0;1]$، وتحقق الشروط :

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{و} \quad (x_1, x_2 \in [0;1]) \quad ; \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le f(x_1) + f(x_2)$$

أثبت أن لهذه الدالة عدداً غير منته من الأصفار على المجال $[0;1]$.

الحل : لتكن $x_1, x_2 \in [0;1]$. عندئذٍ، فإن $f(x_1) \le 2f(x_1)$. إذا كان $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ ، فإن

$$0 \le f(\tfrac{1}{2}) = f\left(\frac{1+0}{2}\right) \le f(0) + f(1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(\tfrac{1}{2}) = 0$$

ونبرهن أن $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ أيا كان n من $\mathbb{N}$. نفرض أن هذه العلاقة صحيحة من أجل n، ونثبت صحتها من أجل $n+1$:

$$0 \le f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1+0}{2^{n+1}}\right) \le f(0) + f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0$$

2.3.2 الدوال الزوجية والدوال الفردية

تعريف 2.2 : نقول عن الدالة $f(x)$ إنها زوجية، إذا حققت الشرطين :

1. المجموعة $D(f)$ متناظرة بالنسبة إلى نقطة الأصل o، أي إذا كان $x \in D(f)$ ،

فإن $-x \in D(f)$.

2. $(\forall x \in D(f))$; $f(x) = f(-x)$.

ونقول عن الدالة $f(x)$ إنها فردية، إذا حققت الشرطين :

1. المجموعة $D(f)$ متناظرة بالنسبة إلى نقطة الأصل o، أي إذا كان $x \in D(f)$، فإن $-x \in D(f)$.

2. $(\forall x \in D(f))$; $-f(x) = f(-x)$.

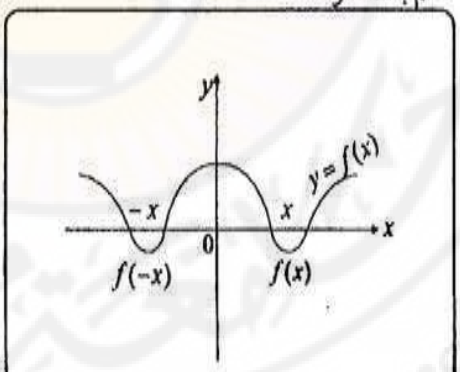
فمثلاً، الدوال $(n \in \mathbb{N})$; x^{2n} و $\cos x$ و $|x|$ هي دوال زوجية على $\mathbb{R}$.

والدوال $(n \in \mathbb{N})$; x^{2n+1} و $\sin x$ و $\tan x$ و $\frac{x}{|x|}$ و $\frac{2x}{1-x}$

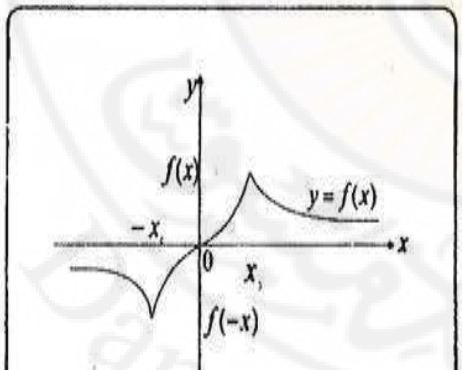
هي دوال فردية على مجموعة تعريفها.

بينما الدوال $x^2 + x$ و $\sqrt{x}$ و $x^3 + 1$ ليست زوجية وليست فردية.

يعني هذا التعريف هندسياً، أنه إذا كانت الدالة زوجية، فإن المنحني البياني لها يكون متناظراً بالنسبة إلى المحور oy، الشكل 2.7-A. أما إذا كانت الدالة فردية، فإن المنحني البياني لها يكون متناظراً بالنسبة إلى نقطة الأصل o، الشكل 2.7-B. لذا، نكتفي عند دراسة سلوك الدوال الزوجية أو الدوال الفردية بدراستها من أجل $x > 0$، أما متابعة الدراسة من أجل $x < 0$ فتتم بالتناظر.



الشكل 2.7-A



الشكل 2.7-B

ملحوظة 2.2 : أي دالة معرفة على مجموعة $D(f)$ متناظرة بالنسبة إلى نقطة الأصل o، يمكن التعبير عنها كحاصل جمع دالتين زوجية وفردية

$$f(x)=f(x_1)+f(x_2) \quad ; \quad (\forall x \in D(f))$$

حيث $f(x_2)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ و $f(x_1)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$.

خواص الدوال الزوجية والفردية

- حاصل جمع أو طرح دالتين زوجيتين (فرديتين) هو دالة زوجية (فردية).
- حاصل جداء دالتين زوجيتين أو دالتين فرديتين هو دالة زوجية.
- حاصل جداء دالة زوجية ودالة فردية هو دالة فردية.

2.3.3 الدوال الدورية

تعريف 2.3 : نقول عن الدالة f إنها دورية، إذا وجد عدد T، حيث $T \neq 0$، يحقق الشرطين :

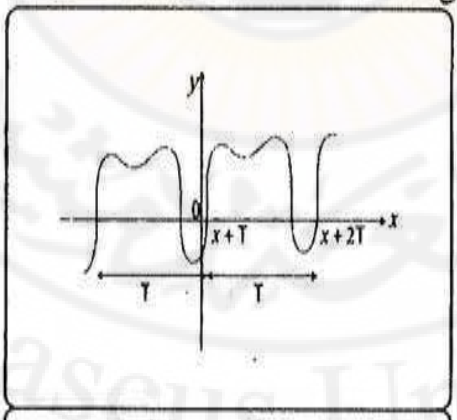
1. $\forall x \in D(f) \quad : \quad x \mp T \in D(f)$;
2. $\forall x \in D(f) \quad : \quad f(x)=f(x+T)=f(x-T) \qquad (2.1)$

نسمي العدد T دور الدالة f.

ملحوظة 2.3 : إذا كان العدد T دور الدالة f، فإن العدد nT، حيث $n \in \mathbb{N}$، هو أيضاً دور لهذه الدالة.

نسمي أصغر عدد T يحقق العلاقة (2.1) الدور الأساسي للدالة f.

يعني هذا التعريف هندسياً، أن المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ يكرر نفسه على كل مجال من $D(f)$ طوله T. لذا يكفي دراسة الدالة الدورية على مجالٍ T، ومن ثم نعمم النتائج على كامل المحور ox، الشكل 2.8.



الشكل 2.8

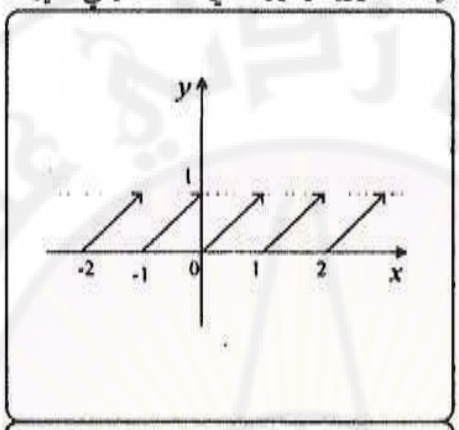
إذا كانت الدالة f دورية ودورها T، فان الدالة $f(\alpha x)$ دورية ودورها $\frac{T}{\alpha}$.

فمثلاً، الدالة $y=\cos x$ دورية ودورها $T=2\pi$.

والدالة $y=\cos 3x$ دورية ودورها $T=\frac{2}{3}\pi$.

ودالة الجزء الكسري $y=\{x\}=x-[x]$، الشكل 2.9، دورية ودورها $T=1$.

والدالة الثابتة $f(x)=c$ دالة دورية ودورها أي عدد حقيقي، غير أنه ليس لها دور أساسي.



الشكل 2.9

ملحوظة 2.4 : ليس لكل دالة دورية دورٌ أساسي. فالدالة الثابتة ودالة ديرخلية ليس لهما دور أساسي، ولكن لكل دالة دورية مستمرة ولا تطابق الثابت دور أساسي.

2.3.4 الدوال المطردة

تعريف 2.4 : نقول عن الدالة f إنها متزايدة (متزايدة تماماً) على المجموعة $A \subseteq D(f)$، إذا حققت الشرط :

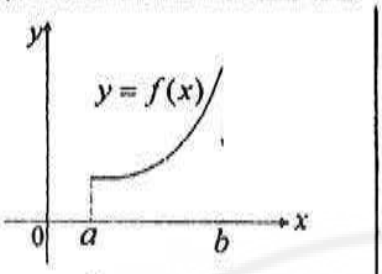
$$\forall x_1, x_2 \in A \quad : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

ونقول عن الدالة f إنها متناقصة (متناقصة تماماً) على المجموعة $A \subseteq D(f)$، إذا حققت الشرط :

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

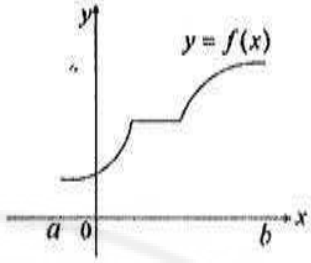
تسمى الدوال المتزايدة تماماً أو المتناقصة تماماً دوال مطردة تماماً. وتسمى الدوال المتزايدة أو المتناقصة دوال مطردة.

يعطي الشكل 2.10، التصور الهندسي لدوال مطردة ومطردة تماماً على المجال $[a;b]$.



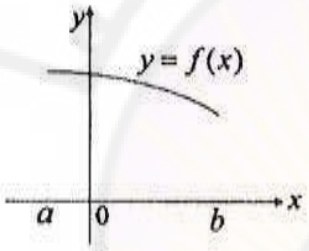
f متزايدة تماماً

الشكل 2.10-A



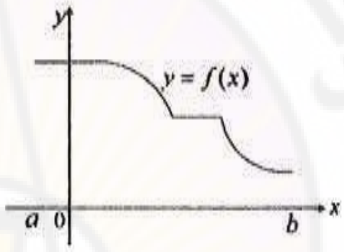
f متزايدة

الشكل 2.10-B



f متناقصة تماماً

الشكل 2.10-C



f متناقصة

الشكل 2.10-D

أمثلة :

- الدالة $y = 3^x$ متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
- الدالة $y = [x]$ متزايدة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $y = e^{-x}$ متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.
- الدالة الثابتة $f(x) = c$ مطردة، يمكن أن تسمى دالة متناقصة أو دالة متزايدة.

مثال 2.7 : أوجد مجالات اطرد الدالة $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

الحل : نحسب الفرق $y(x_1) - y(x_2)$:

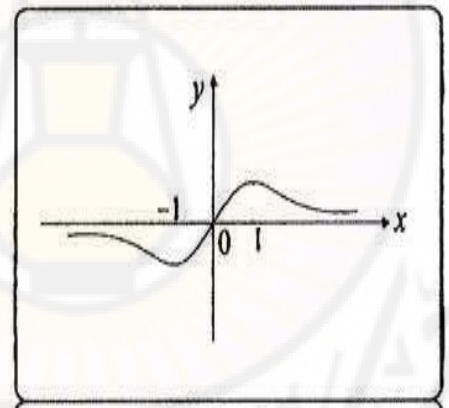
$$y(x_1) - y(x_2) = \frac{x_1}{1+{x_1}^2} - \frac{x_2}{1+{x_2}^2} = \frac{(x_1 - x_2)\cdot(1 - x_1x_2)}{(1+{x_1}^2)\cdot(1+{x_2}^2)}$$

إذا كان $x_1 < x_2$، أي $x_1 - x_2 < 0$، فإن إشارة المقدار $y(x_1) - y(x_2)$ تتعلق بإشارة المقدار $1 - x_1x_2$. فإذا كان $1 \le x_1 < x_2 \le \infty$ أو $-\infty < x_1 < x_2 \le -1$ فإن $x_1x_2 > 1$ أي $y(x_1) > y(x_2)$. وعليه، فإن الدالة y متناقصة تماماً على المجالين $[1;\infty[$ و $]-\infty;-1]$. أما إذا كان $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$، فإن $x_1x_2 < 1$، أي $y(x_1) < y(x_2)$ وعليه، فإن الدالة y متزايدة تماماً على المجال $[-1;1]$، الشكل 2.11.

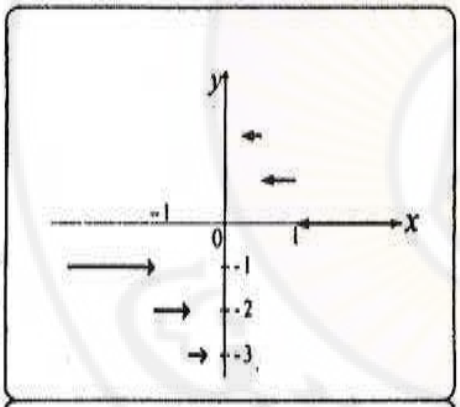
ملحوظة 2.5 : إذا كانت الدالة f متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على المجموعتين A و B، فإن هذه الدالة قد لا تكون مطردة على المجموعة $A \cup B$.

فمثلاً، الدالة $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ متناقصة تماماً على المجالين $]0;\infty[$ و $]-\infty;0[$، غير أنها ليست متناقصة تماماً على المجموعة $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;\infty[$، الشكل 2.12، لأنه لو أخذنا $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$، فإن:

$$f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2) \; ; \; x_1 < x_2$$



الشكل 2.11



الشكل 2.12

خواص الدوال المطردة :

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجموعة A.

1. إذا كانت الدالة f متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، و a ثابت ما، فإن

أ- $f(x) + a$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A.

ب- $a \cdot f(x)$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كان $a > 0$.

ج- $a \cdot f(x)$ دالة متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A، إذا كان $a < 0$. وخصوصاً، للدالة $-f(x)$ متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A.

د- $a^{f(x)}$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كان $a > 1$.

هـ- $a^{f(x)}$ دالة متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A، اذا كان $0 < a < 1$.

و- $\log_a f(x)$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كان $a > 1$، وكانت الدالة f موجبة تماماً على A.

ز- $\log_a f(x)$ دالة متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A، إذا كان $0 < a < 1$، وكانت الدالة f موجبة تماماً على A.

ح- $\dfrac{1}{f(x)}$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كانت الدالة f سالبة تماماً على A.

ط- $\dfrac{1}{f(x)}$ دالة متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A، إذا كانت الدالة f موجبة تماماً على A.

ي- $\sqrt{f(x)}$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كانت الدالة f موجبة تماماً على A.

2. إذا كانت الدالتان f و g متزايدتين تماماً (متناقصتين تماماً) على A، فإن:

أ- $f+g$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A.

ب- $f \cdot g$ دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كانت الدالتان f و g موجبتين على A.

ج- $f \cdot g$ دالة متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A، إذا كانت الدالتان f و g سالبتين على A.

وخصوصاً، إذا كانت الدالة f دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، فإن:

د- f^2 دالة متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على A، إذا كانت الدالة f موجبة على A.

هـ- f^2 دالة متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على A، إذا كانت الدالة f سالبة على A.

2.3.5 الدوال المحدودة

تعريف 2.5 : نقول عن الدالة f إنها محدودة من الأعلى على المجموعة $A \subseteq D(f)$ إذا تحقق الشرط :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) \leq M \quad ; \quad \forall x \in A$$

نسمي عندها العدد M أو أي عدد أكبر منه حداً أعلى للدالة f على المجموعة A

ونقول إن الدالة f محدودة من الأدنى على المجموعة $A \subseteq D(f)$ ، إذا تحقق الشرط:

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) \geq m \quad ; \quad \forall x \in A$$

ونسمي عندها العدد m أو أي عدد أصغر منه حداً أدنى للدالة f على المجموعة A.

تعريف 2.6 : نقول إن الدالة f محدودة على المجموعة $A \subseteq D(f)$ ، إذا كانت محدودة من الأعلى والأدنى على A ، أي إذا تحقق الشرط :

$$\exists\, M, m \in \mathbb{R} \quad : \quad m \leq f(x) \leq M \quad ; \quad \forall x \in A$$

وبعبارة أخرى، تكون الدالة f محدودة على المجموعة $A \subseteq D(f)$ ، إذا تحقق الشرط:

$$\exists\, K > 0 \quad : \quad |f(x)| \leq K \quad ; \quad \forall x \in A$$

لتكن f دالة معرفة على المجموعة $A \subseteq D(f)$ ، ولتكن $B = f(A) \subseteq E(f)$.

تعريف 2.7 : إذا كانت المجموعة B محدودة من الأعلى، فإن لهذه المجموعة أصغر حد أعلى، المبرهنة 1.1، يسمى أصغر حد أعلى للدالة f على المجموعة A. ونرمز له بالرمز $\sup\limits_{A} f(x)$.

وإذا كانت المجموعة B محدودة من الأدنى، فإن لهذه المجموعة أكبر حد أدنى يسمى أكبر حد أدنى للدالة f على المجموعة A. ونرمز له بالرمز $\inf\limits_{A} f(x)$.

بعبارة أخرى، نسمي العدد M أصغر حد أعلى للدالة f على المجموعة A، إذا حقق ما يلي:

1. $\forall x \in A \quad : \quad f(x) \leq M$;
2. $\forall M' \in \mathbb{R} \quad : \quad M' < M \quad ; \quad \exists x' \in A \quad : \quad f(x') > M'$

ونسمي العدد m أكبر حد أدنى للدالة f على المجموعة A، إذا حقق ما يلي:

1. $\forall x \in A \quad : \quad f(x) \geq m$;
2. $\forall m' \in \mathbb{R} \quad : \quad m' > m \quad ; \quad \exists x' \in A \quad : \quad f(x') < m'$

إذا كانت المجموعة B غير محدودة من الأعلى (من الأدنى)، فإننا نكتب

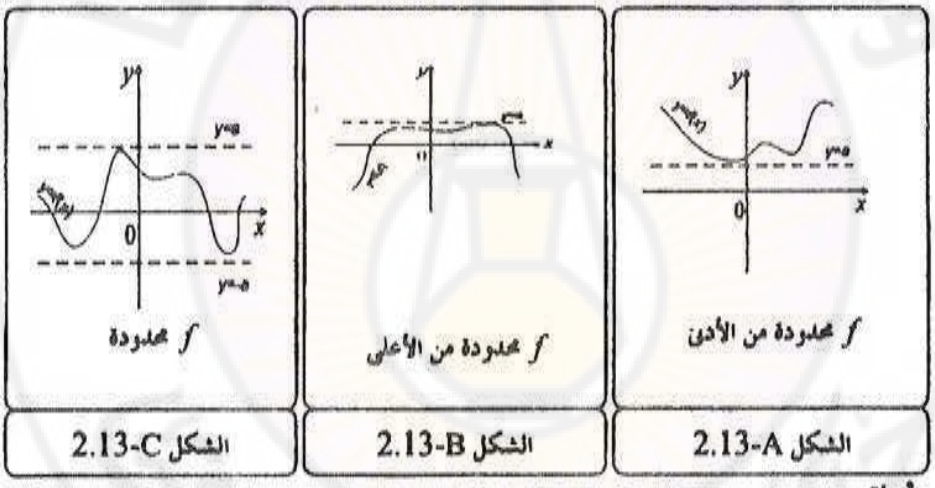
$$\sup_{A} f(x) = \infty \qquad \left(\inf_{A} f(x) = -\infty \right)$$

لأنه توجد في هذه الحالة نقطة $x' \in A$، بحيث يكون $f(x') < c$ $(f(x') > c)$، أيا يكن العدد الحقيقي c.

فمثلاً، $\sup_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 1$ و $\inf_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$.

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ محدودة من الأعلى (من الأدنى)، على المجموعة $A \subseteq D(f)$، فإن ذلك يعني هندسياً، أن المنحني البياني لهذه الدالة يقع تحت (فوق) مستقيم ما أفقي على المجموعة A، الشكل 2.13-A و 2.13-B.

وإذا كانت الدالة $y = f(x)$ محدودة على المجموعة $A \subseteq D(f)$، فإن ذلك يعني هندسياً، أن المنحني البياني لهذه الدالة يقع بين مستقيمين أفقيين على المجموعة A، الشكل 2.13-C.



الشكل 2.13-A | الشكل 2.13-B | الشكل 2.13-C

أمثلة :

- الدالة $y = \cos x$ محدودة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$، لأن:

$$|\cos x| \leq 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- الدالة $y = x^2 + 1$ محدودة من الأدنى على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$، لأن:

$$x^2 + 1 \geq 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- الدالة $y = \tan x$ محدودة من الأعلى على المجال $\left[0; \frac{1}{3}\pi\right]$، لأن:

$$\tan x \leq \sqrt{3} \quad ; \quad \forall x \in \left[0; \tfrac{1}{3}\pi\right]$$

- الدالة $y=\frac{1}{x}$ ليست محدودة من الأعلى على المجال $]0;1[$ ، لأنه أيا يكن العدد $M>0$ ، يوجد عدد $x=\frac{1}{M+1}\in]0;1[$ ، بحيث يكون:

$$f(\frac{1}{M+1})=1+M>M$$

خواص الدوال المحدودة

1. إذا كانت الدالتان f و g معرفتين ومحدودتين على المجموعة A، فإن الدوال:

$f\mp g$ و $f\cdot g$ و $|f|$ محدودة على A. وخصوصاً، تكون الدوال f^2 و $c\cdot f$، حيث c ثابت، محدودة على A.

2. إذا كانت الدالتان f و g معرفتين على المجموعة A، وكانت الدالة f محدودة على A ووجد عدد حقيقي موجب M بحيث يكون:

$$|g(x)|>M>0 \quad ; \quad \forall x\in A$$

فإن الدالة $\frac{f}{g}$ محدودة على A.

3. إذا كانت الدالة f معرفة ومحدودة على المجموعة A، فإن الدوال:

$a^{f(x)}\ ,(1\neq a>0)$ و $\sqrt[n]{f(x)}$ و $\sin f(x)$ و $\arcsin f(x)$ و $\arccos f(x)$ ... وغيرها، محدودة على مجموعة تعريفها.

2.3.6 الدوال المركبة

لتكن $u=\varphi(x)$ دالة معرفة على المجموعة $D(\varphi)$، ولتكن $E(\varphi)$ مجموعة قيم هذه الدالة، وليكن $y=f(u)$ دالة معرفة على المجموعة $D(f)\subseteq E(\varphi)$، بحيث $D(f)\cap E(\varphi)\neq\phi$. عندئذٍ، تنقل الدالة φ العنصر x إلى العنصر u وتنقل الدالة f العنصر u إلى العنصر y :

$$x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y \Leftrightarrow \quad y=f[\varphi(x)] \Leftrightarrow \quad y=(f\circ\varphi)(x)$$

وهكذا، فإنه يقابل النقطة $x\in D(f)\cap E(\varphi)$، قيمة وحيدة $y\in E(f)$ وفق الدالة f. ونسمي عندئذٍ، الدالة y دالة مركبة في المتغير x، أو دالة الدالة ونكتب $y=f[\varphi(x)]$. ونسمي الدالة $u=\varphi(x)$ متحولاً مرحلياً و x المتغير المستقل. ويكون

$$D(f\circ\varphi)=\{x\in\mathbb{R} \ : \ x\in D(f)\cap D(\varphi)\}$$

$$E(f\circ\varphi)=\{y\in\mathbb{R}\ :\ y=f(u)\ ;\ u=\varphi(x)\}$$

مثال 2.8 : الدالة $y=\sqrt{x+1}$ هي دالة مركبة. يمكن كتابتها بالصيغة

$y=f(x)=\sqrt{u}$ ، حيث $u=\varphi(x)=x+1$ ، $D(\varphi)=E(\varphi)=\mathbb{R}$

و $D(f)=\mathbb{R}^+$. واضح أن $D(f)\subseteq E(u)$. وهكذا، فإن

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]=\sqrt{x+1}$$

$$D(f\circ\varphi)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ x+1\geq 0\}=[-1;\infty[$$

مثال 2.9 : الدالة $y=\sin^2(2x+1)$ هي دالة مركبة. ندخل الرموز u و t كما يلي:

$$x\xrightarrow{\psi}u\xrightarrow{\varphi}t\xrightarrow{f}y\Leftrightarrow y=f[\varphi(\psi(x))]\Leftrightarrow y=(f\circ\varphi\circ\psi)(x)$$

حيث $\psi(x)=2x+1$ ، $\varphi(u)=\sin u$ ، $f(t)=t^2$ و

$$D(f\circ\varphi\circ\psi)=\mathbb{R}$$

$$E(f\circ\varphi\circ\psi)=\left\{y\in\mathbb{R}\ :\ y=\sin^2(2x+1)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\right\}=[0;1]$$

2.3.7 الدالة العكسية

لتكن f دالة معرفة على المجموعة $D(f)$ ، ومجموعة قيمها $E(f)$. أي أن f هي مجموعة الأزواج (x,y) ، حيث يدخل كل عدد $x\in D(f)$ في زوج واحد على الأقل من هذه المجموعة، ويدخل العدد $y\in E(f)$ في زوج واحد فقط، في هذه المجموعة.

إذا بادلنا في هذه الأزواج، مواضع x و y نحصل على مجموعة الأزواج (y,x) والتي تسمى دالة عكسية للدالة f، ونرمز له بالرمز f^{-1} .

ملحوظة 2.6 : إن الدالة العكسية f^{-1} ليست دائماً دالة، لأن العدد y يمكن أن يدخل في أكثر من زوج واحد من مجموعة الأزواج (y,x).

فمثلاً، الدالة $y=x$ هي دالة عكسية للدالة $y=x$ ، وهي دالة وحيدة القيمة. أي دالة بالمعنى العام، لأن y يدخل في زوج واحد فقط من مجموعة الأزواج (y,x).

بينما العلاقة $x=\mp\sqrt{y}$ تمثل دالة عكسية للدالة $y=x^2$ ، وهي دالة ثنائية الفرع، لأن كل عدد y يدخل في زوجين اثنين من مجموعة الأزواج (y,x). أي ليست دالة بالمعنى العام.

يمكن بسهولة، التحقق من أنه إذا كان f تطبيقاً تقابلاً واحدياً من المجموعة $D(f)$ إلى المجموعة $E(f)$ ، (أي أن كل عنصر $y\in E(f)$ هو صورة لعنصر واحد فقط

$x \in D(f)$، وبالعكس، يقابل كل عنصر $x \in D(f)$ عنصر واحد فقط $(y \in E(f))$، فإن التطبيق العكسي f^{-1} هو دالة وحيدة الفرع، أي دالة بالمعنى العام، معرفة على المجموعة $E(f)$ ومجموعة قيمها $D(f)$، واختصاراً، دالة عكسية للدالة f:

$$f^{-1} : E(f) \to D(f)$$

أي أن $E(f)=D(f^{-1})$ و $D(f) = E(f^{-1})$.

ملحوظة 2.7 : نعني بعبارة "دالة عكسية" الدالة وحيدة الفرع. أما عندما يكون الحديث عن دوال متعددة الفروع، فإننا سنذكر ذلك صراحة.

أيا تكن $x_0 \in E(f^{-1}) = D(f)$، فإن المساواة $y_0 = f(x_0)$ محققة، إذا وفقط إذا كان $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

إذا كان f^{-1} دالة عكسية للدالة f، فإن الدالة f هي دالة عكسية للدالة f^{-1}. أي $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ و $y = f\left(f^{-1}(y)\right)$ و $x = f^{-1}(f(x))$.

مبرهنة 2.1: إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة ومطردة تماماً على المجموعة $D(f)$، ولتكن $E(f)$ مجموعة قيم هذه الدالة. عندئذٍ، فإن هذه الدالة عكوسة، أي يوجد دالة عكسية لها $x = f^{-1}(y)$، وهي أيضاً مطردة تماماً على $D(f)$. وعليه، إذا كانت الدالة f متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على $D(f)$، فإن الدالة العكسية لها f^{-1} متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على $E(f)$.

البرهان: لتكن f دالة متزايدة تماماً على $D(f)$، أي

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) \ : \ x_1 < x_2 \implies y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$$

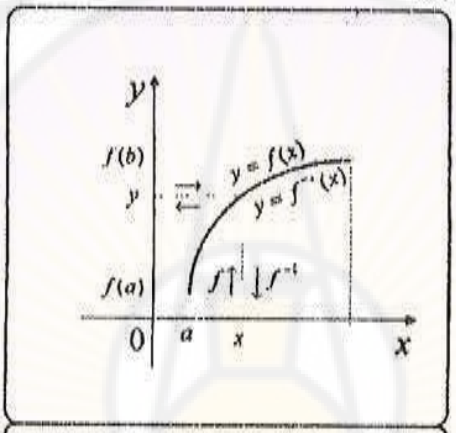
أي أن $y_1 \neq y_2$، عندما يكون $x_1 \neq x_2$. مما يعني أن y يدخل مرة واحدة فقط في كل زوج من مجموعة الأزواج (y, x). أي أن f^{-1} دالة وحيدة الفرع (دالة بالمعنى العام).

بقي إثبات أن الدالة f^{-1} متزايدة تماماً. وهذا صحيح، لأنه إذا كان $y_1 < y_2$، فإن $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$. لأنه لو كان $x_1 \geq x_2$، فإنه سيكون $y_1 \geq y_2$، لأن f دالة متزايدة تماماً، مما يناقض كون $y_1 < y_2$. أي أن f^{-1} دالة متزايدة تماماً على $E(f)$. نبرهن حالة كون f دالة متناقصة تماماً، بأسلوبٍ مشابه.

ملحوظة 2.8 : إن إطراد الدالة f يُعدّ شرطاً كافياً كي تكون هذه الدالة عكوسة، أي هناك دوال غير مطردة ولكنها عكوسة.

2.3.8 رسم المنحني البياني للدالة العكسية

لتكن $y = f(x)$ دالة مطردة على المجال $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$، أي يوجد دالة عكسية لها $x = f^{-1}(y)$. في الواقع، إن هاتين الدالتين هما علاقة واحدة تربط بين المتغيرين x و y. لكننا ننظر لـ x كمتغير ولـ y كدالة في العلاقة $y = f(x)$. أما في العلاقة $x = f^{-1}(y)$، فإن y متغير و x دالة. لذا، فإن المنحني البياني للدالة $x = f^{-1}(y)$ ينطبق على المنحني للدالة $y = f(x)$، الشكل 2.14.



الشكل 2.14

إذا عبّرنا عن متغير الدالة ومتغير عكسها بالرمز نفسه x، وعن الدالة وعكسها بالرمز نفسه y، فإنه يرمز للدالة العكسية بالرمز $y = f^{-1}(x)$.

تختلف الدالتان $y = f^{-1}(x)$ و $x = f^{-1}(y)$ عن بعضهما بعضاً، فقط برموز المتغير والدالة. لذا، للحصول على المنحني البياني للدالة $y = f^{-1}(x)$ من المنحني البياني للدالة $x = f^{-1}(y)$ (المطابق للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$)، يكفي فقط تغيير مكان المحورين الإحداثيين ox و oy، أي ندوّر مستوي الرسم حول المنصف الأول دورة كاملة.

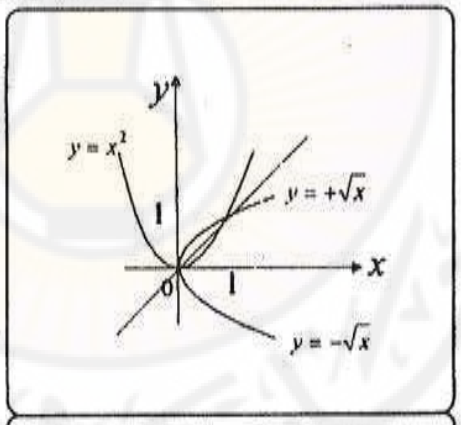
وهكذا، فإن المنحني البياني للدالة $y = f^{-1}(x)$ يناظر المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ بالنسبة إلى المنصف الأول.

مثال 2.10: الدالة $y = f(x) = x^2$ ليست عكوسة، أي ليس لها دالة عكسية على مجموعة تعريفها $D(f) = \mathbb{R}$. بينما على المجموعة $\mathbb{R}^+$ تكون هذه الدالة متزايدة تماماً، فهي دالة عكوسة على هذه المجموعة، وتكون الدالة العكسية لها $y = \sqrt{x}$. وكذلك على المجموعة $\mathbb{R}^-$ تكون هذه الدالة متناقصة تماماً، فهي دالة عكوسة على هذه المجموعة، وتكون الدالة العكسية لها $y = -\sqrt{x}$، الشكل 2.15.

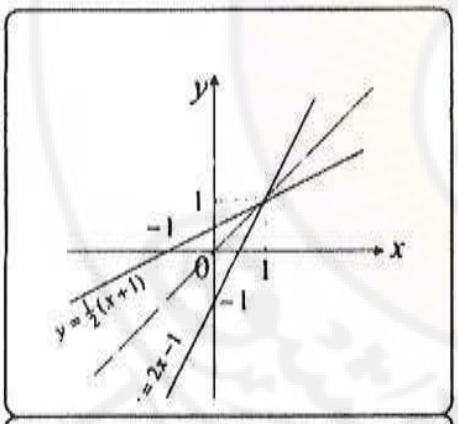
للحصول على الدالة العكسية لدالة التقابل $y = f(x)$، نحل المعادلة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x، فنجد $x = f^{-1}(y)$، ومن ثم نغيّر مكان المتغيرين x و y فنحصل على الدالة العكسية $y = f^{-1}(x)$.

مثال 2.11: أثبت أن الدالة $y = 2x - 1$ عكوسة، أوجد صيغه الدالة العكسية لها.

الحل: الدالة معرفة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$، فهي عكوسة. لإيجاد الدالة العكسية لها نحل المعادلة $y = 2x - 1$ بالنسبة إلى x، فنجد $x = \frac{1}{2}(y + 1)$. وبتغيير مكاني x و y نجد الدالة العكسية $y = \frac{1}{2}(x + 1)$، الشكل 2.16.



الشكل 2.15



الشكل 2.16

2.4 الدوال الأولية الأساسية ومنحنياتها البيانية

1. الدالة الخطية: $y = kx + b \;;\; (k,b \in \mathbb{R})$ هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$، ومجموعة قيمها

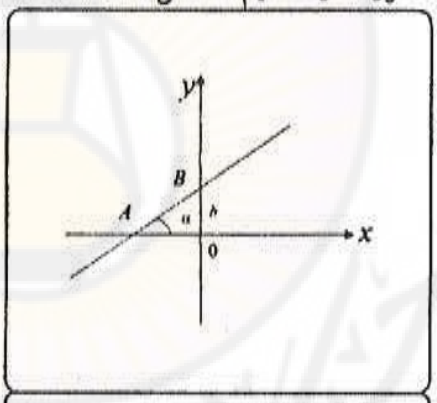
$$E(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; \quad k \neq 0 \\ \{b\} & ; \quad k = 0 \end{cases}$$

وهي دالة متزايدة تماماً من أجل $k > 0$، ومتناقصة تماماً من أجل $k < 0$. إن المنحني البياني لهذه الدالة هو مستقيم يتم رسمه بمساعدة النقطتين $A(\frac{-b}{k},0)$ و $B(0,b)$، الشكل 2.17، وهما نقطتا تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين.

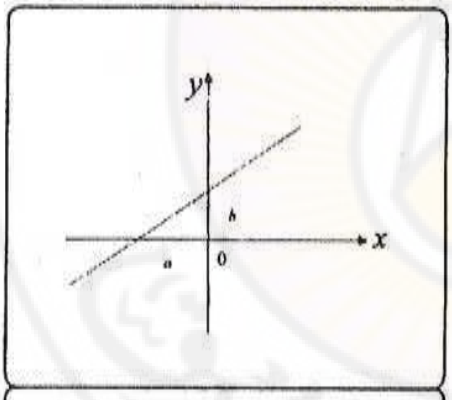
في الحالة $b = 0$، يمر المستقيم $y = kx + b$ من نقطة الأصل.

وفي الحالة $k = 0$، يكون المستقيم $y = b$ موازيا لمحور الفواصل.

إن للثابتين b و k معنى هندسياً، فالعدد b يعني طول القطعة المستقيمة $\overline{oB}$، أما العدد k فيمثل ميل المستقيم، أي $k = \tan\alpha$، حيث α الزاوية الكائنة بين الاتجاه الموجب للمحور ox والمستقيم، الشكل 2.17.



الشكل 2.17



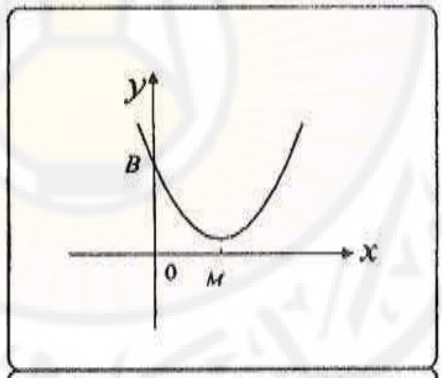
الشكل 2.18

يمكن أن تعطى معادلة المستقيم بعدة صيغ. فالمعادلة $y = y_0 + k(x - x_0)$ تمثل مستقيماً ميله k ويمر بالنقطة $M(x_0,y_0)$. وتمثل المعادلة $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ مستقيماً مار بالنقطتين $M(x_0,y_0)$ و $M(x_1,y_1)$. وتمثل المعادلة $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ المستقيم القاطع الذي يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها a ومحور التراتيب في نقطة ترتيبها b، الشكل 2.18.

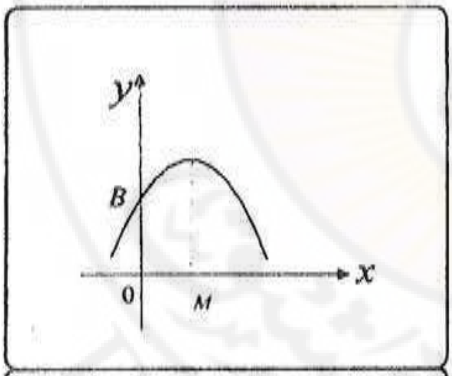
2. الدالة التربيعية: $y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$ هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$. المنحني البياني لها قطع مكافئ محوره التناظري هو المستقيم $x = \frac{-b}{2a}$، وذروته النقطة $M(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ويقطع محور التراتيب في النقطة $B(o,c)$ ومحور الفواصل بنقطتين على الأكثر. ونميز حالتين:

أ- $a > 0$، تكون مجموعة قيم هذه الدالة $E(f) = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}; \infty\right[$. وهي دالة متناقصة تماماً على المجال $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$، ومتزايدة تماماً على المجال $\left[\frac{-b}{2a}; \infty\right[$، ويكون القطع المكافئ في هذه الحالة، مقعراً نحو الأعلى، الشكل $A - 2.19$.

ب- $a < 0$، تكون مجموعة قيم هذه الدالة $E(f) = \left]-\infty; \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$. وهي دالة متزايدة تماماً على المجال $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ ومتناقصة تماماً على المجال $\left[\frac{-b}{2a}; \infty\right[$، ويكون القطع المكافئ في هذه الحالة، مقعراً نحو الأسفل، الشكل $B - 2.19$.



الشكل 2.19-A



الشكل 2.19-B

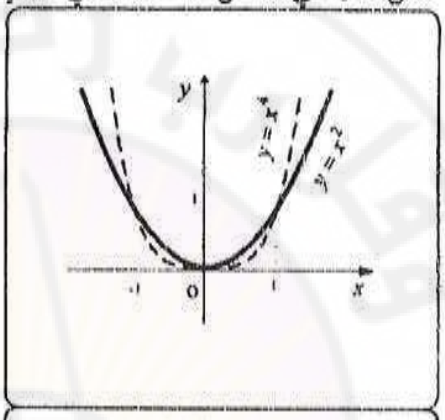
3. دالة القوة: $y = f(x) = x^{\alpha} \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ نميز الحالات:

أ- $\alpha = 2n \quad ; \quad (n \in \mathbb{N})$، يكون عندئذٍ $D(f) = \mathbb{R}$ و $E(f) = [0; \infty[$.

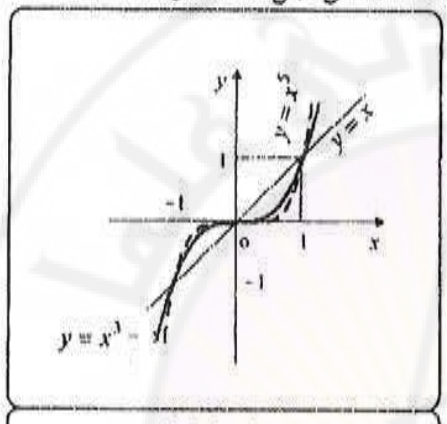
وهذه الدالة $y = x^{2n}$ زوجية ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[0; \infty[$. المنحني البياني لها قطع مكافئ من الدرجة $2n$، يمر بالنقطتين $(1,1)$

و $(-1,-1)$ ، ويمس محور الفواصل ومتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب. يعطي الشكل 2.20، المنحني البياني لهذه الدالة من أجل $n=1$ و $n=2$.

ب- $(n\in\mathbb{N})$; $\alpha=2n+1$ ، يكون عندئذٍ، $D(f)=\mathbb{R}$ و $E(f)=\mathbb{R}$. وهذه الدالة $y=x^{2n+1}$ فردية ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. المنحني البياني لها قطع مكافئ من الدرجة $2n+1$ يمر بالنقطتين $(1,1)$ و $(-1,-1)$ ، ويمس محور الفواصل ومتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل o. يعطي الشكل 2.21، المنحني البياني لهذه الدالة من أجل $n=1$ و $n=2$.



الشكل 2.20



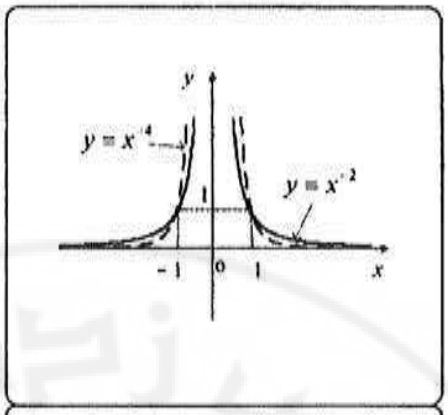
الشكل 2.21

ج- $(n\in\mathbb{N})$; $\alpha=-2n$ ، يكون عندئذٍ، $D(f)=\mathbb{R}^*$ و $E(f)=]0;\infty[$.

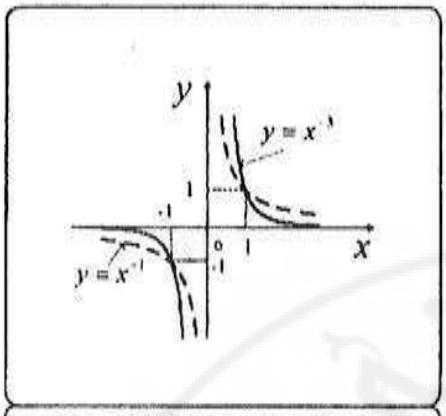
وهذه الدالة $y=\dfrac{1}{x^{2n}}$ زوجية ومتزايدة تماماً على المجال $]-\infty;0[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]0;\infty[$. ويمر المنحني البياني لهذه الدالة بالنقطتين $(1,1)$ و $(-1,1)$ وهو متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب. يعطي الشكل 2.22، المنحني البياني لهذه الدالة من أجل $n=1$ و $n=2$.

د- $(n\in\mathbb{N})$; $\alpha=-2n+1$ ، يكون عندئذٍ، $D(f)=\mathbb{R}^*$ و $E(f)=\mathbb{R}^*$.

وهذه الدالة $y=\dfrac{1}{x^{2n+1}}$ فردية ومتناقصة تماماً على $\mathbb{R}^*$، ويمر المنحني البياني لهذه الدالة بالنقطتين $(1,1)$ و $(-1,-1)$ ، وهو متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل o. يعطي الشكل 2.23، المنحني البياني لهذه الدالة من أجل $n=1$ و $n=2$.



الشكل 2.22



الشكل 2.23

هـ- $\alpha = \frac{m}{n}$ (حيث n و m عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما)

يمر المنحني البياني لهذه الدالة $y = x^{m/n}$ بالنقطة (1,1) ونميز الحالات:

- إذا كان n زوجياً، فإن $D(f) = [0;\infty[$.
- إذا كان n فردياً، فإن $D(f) = \mathbb{R}$.
- إذا كان n فردياً وm زوجياً، فإن المنحني البياني لهذه الدالة متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.
- إذا كان n وm فردين، فإن المنحني البياني لهذه الدالة متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.
- إذا كان $m < n$ ، فإن المنحني البياني لهذه الدالة يمس محور التراتيب في نقطة الأصل.
- إذا كان $m > n$ ، فإن المنحني البياني لهذه الدالة يمس محور الفواصل في نقطة الأصل.

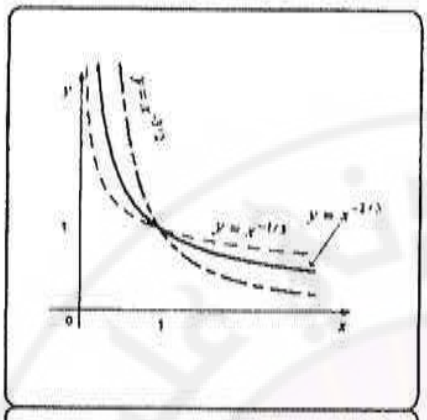
يمثل الشكل 2.24، المنحنيات البيانية لهذه الدوال في الحالات: $\alpha = \frac{1}{3}$ و $\alpha = \frac{2}{3}$ و $\alpha = \frac{3}{2}$ و $\alpha = \frac{5}{3}$.

و- $\alpha = \frac{m}{n} < 0$ (حيث n و m أعداد صحيحة أولية فيما بينها و $n \neq -1$).

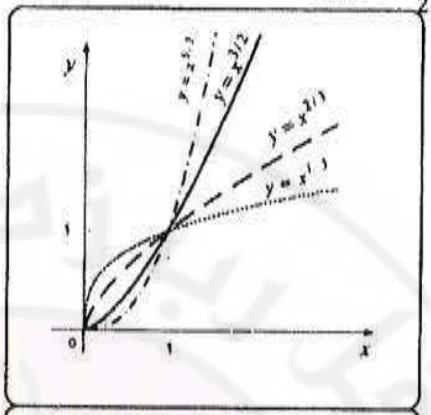
يمر المنحني البياني لهذه الدالة $y = x^{m/n}$ بالنقطة (1,1) وتكون المحاور الإحداثية مقاربات لها. ونميز الحالات.

- إذا كان n زوجياً، فإن $D(f) = [0;\infty[$.
- إذا كان n فردياً، فإن $D(f) = \mathbb{R}^*$.
- إذا كان n فردياً وm زوجياً، فإن المنحني البياني لهذه الدالة متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.
- إذا كان n و m فردين، فإن المنحني البياني لهذه الدالة متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل o.

يمثل الشكل 2.25، المنحنيات البيانية لهذه الدوال في الحالات: $\alpha = -\frac{1}{3}$ و $\alpha = -\frac{2}{3}$ و $\alpha = -\frac{3}{2}$.



الشكل 2.25



الشكل 2.24

4. الدالة الأسية: $y = f(x) = a^x \quad , \quad (1 \neq a > 0)$

هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $E(f) =]0;\infty[$، الشكل 2.26.

و هي متزايدة تماماً، من أجل $a > 1$، ومتناقصة تماماً من أجل $0 < a < 1$.

ومن أهم خواص هذه الدالة:

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})\ ;\ a^x > 0\ ,\ a^1 = a\ ,\ a^0 = 1\ ,\ a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

وكحالة خاصة من هذه الدالة : $y = e^x = \exp(x)$ (حيث e العدد النيبري)، الشكل 2.26.

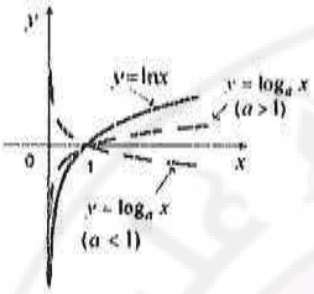
5. الدالة اللوغاريتمية: $y = f(x) = \log_a x \quad , \quad (1 \neq a > 0)$

هي دالة عكسية للدالة الأسية $x = a^y$. وهي معرفة على $D(f) =]0;\infty[$، ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$. وهذه الدالة متناقصة تماماً، من أجل $0 < a < 1$، وهي دالة متزايدة تماماً، من أجل $a > 1$، الشكل 2.27. ومن أهم خواص هذه الدالة:

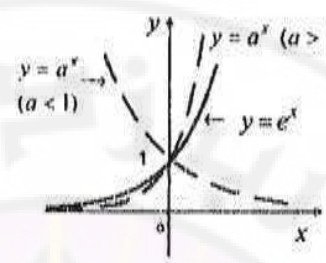
$\log_a a = 1$	$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$	$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a (x \cdot t) = \log_a x + \log_a t$	$\log_a x^c = c \cdot \log_a x$

(مهما يكن: $x,t \in]0;\infty[$ ، $0 < a \neq 1$ ، $0 < b \neq 1$ ، $c \in \mathbb{R}$).

وكحالةٍ خاصة من هذه الدالة، دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \log_e x = \ln x$ ، الشكل 2.27.



الشكل 2.27



الشكل 2.26

6. الدوال المثلثية:

هي الدوال: دالة الجيب $y = \sin x$ و دالة تمام الجيب (التجيب) $y = \cos x$ ودالة الظل $y = \tan x$ ، ومقلوب هذه الدوال: دالة القاطع $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ودالة تمام القاطع (التقاطع) $\cos ec\, x = \dfrac{1}{\sin x}$ ودالة التظل $y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

لتكن $M(x,y)$ نقطة من محيط الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ الشكل A-28، بحيث يحدد نصف المستقيم oM مع الإتجاه الموجب للمحور ox زاوية مركزية θ. نعرّف عندئذٍ، الدوال المثلثية كما يلي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \text{ و } \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ و } \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ و } \sec\theta = \frac{r}{x} \text{ و } \cos ec\,\theta = \frac{r}{y} \text{ و } \cot\theta = \frac{x}{y}.$$

إذا كان $r = 1$ ، فإن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ ، أي أن إحداثيان نقطة $M(x,y)$ من محيط دائرة الواحدة $x^2 + y^2 = 1$ هما، بالترتيب، $\cos\theta$ و $\sin\theta$، وعندما تتغير θ من 0

إلى 2π ترسم النقطة M محيط الدائرة، الشكل 28-B. وتسمى العبارة :

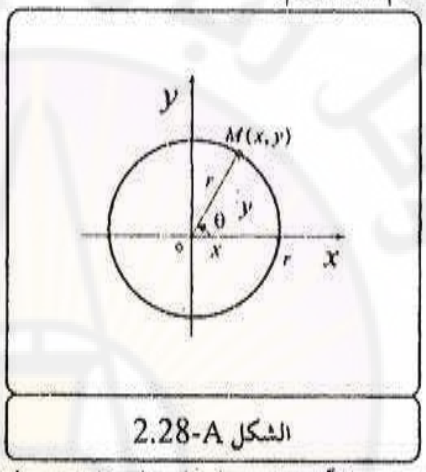
$$\{x=\cos\theta\ ,\ y=\sin\theta\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

تمثيلاً وسيطياً لدائرة الواحدة.

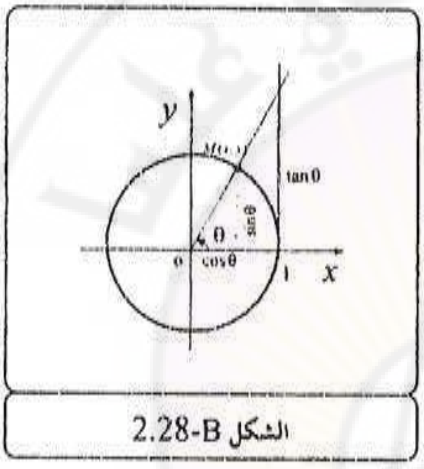
ومنها نجد العلاقة المثلثية الشهيرة:

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

ولما كان $|x|\le 1$ و $|y|\le 1$، فإن $|\cos\theta|\le 1$ و $|\sin\theta|\le 1$ و $|\sec\theta|\ge 1$ و $|\cos ec\theta|\ge 1$.



الشكل 2.28-A



الشكل 2.28-B

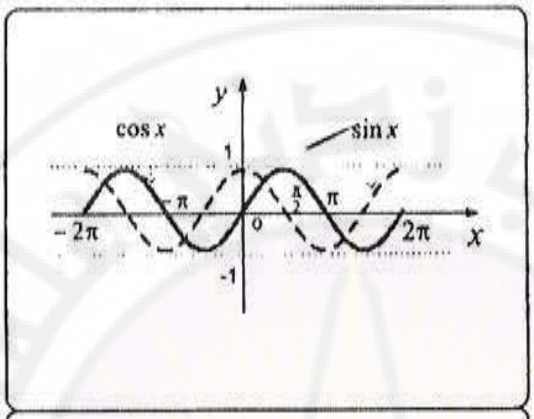
ندرس الآن بعض هذه الدوال بقليلٍ من التفصيل:

أ- دالة الجيب $y=\sin x$: إن هذه الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها المجال $[-1;1]$. وهي دالة فردية ودورية دورها 2π. وهي دالة متناقصة تماماً على المجالات $\left[\frac{1}{2}\pi+2\pi k\ ;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right]$، ومتزايدة تماماً على المجالات $\left[-\frac{1}{2}\pi+2\pi k\ ;\ \frac{1}{2}\pi+2\pi k\right]$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وهذه الدالة محدودة على مجموعة تعريفها: $(\forall\ x\in\mathbb{R})\ ;\ |\sin x|\le 1$، الشكل 2.29.

ب- دالة التجيب $y=\cos x$: إن هذه الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها المجال $[-1;1]$. وهي دالة زوجية ودورية دورها 2π. وهي دالة متزايدة تماماً على المجالات $[(2k-1)\pi;2\pi k]$ ومتناقصة تماماً على المجالات $[2\pi k;\pi(2k+1)]$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وهذه الدالة محدودة على مجموعة تعريفها: $(\forall\ x\in\mathbb{R})\ ;\ |\cos x|\le 1$، الشكل 2.29.

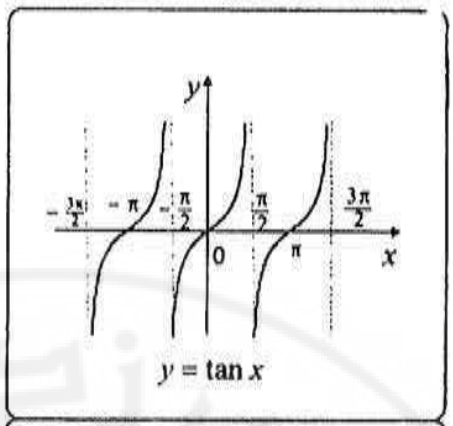


الشكل 2.29

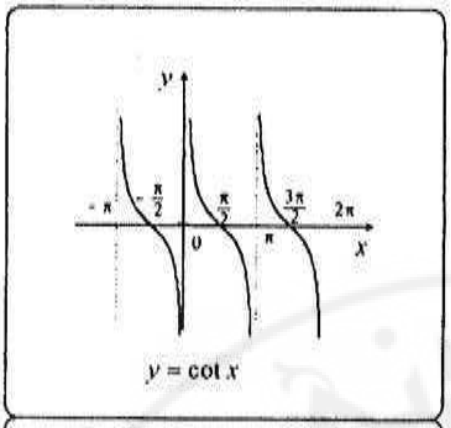
كما هو واضح من الشكل، فإن المنحني البياني للدالة $y = \cos x$ ينتج عن المنحني البياني للدالة $y = \sin x$ بإزاحة مقدارها $\frac{1}{2}\pi$، أي أن $\cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$. وعليه، فإن للدالتين $y = \cos x$ و $y = \sin x$ خواصّ متشابهة.

ج- دالة الظل $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: إن هذه الدالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi + \pi k \; ; (k \in \mathbb{Z})\right\}$، ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$. وهي دالة فردية ودورية دورها π. وهي دالة متناقصة تماماً على مجموعة تعريفها، أي على المجالات $\left]-\frac{1}{2}\pi + \pi k \; ; \frac{1}{2}\pi + \pi k\right[$، حيث $k \in \mathbb{Z}$، الشكل 2.30.

د- دالة التظل $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$: إن هذه الدالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \; , (k \in \mathbb{Z})\}$، ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$. وهي دالة فردية ودورية دورها π. وهي دالة متناقصة تماماً على مجموعة تعريفها، أي على المجالات $]\pi k \; ; \pi(k+1)[$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$، الشكل 2.31.



الشكل 2.30



الشكل 2.31

7. **الدوال المثلثية العكسية:** تُعرّف هذه الدوال كدوال عكسية للدوال المثلثية:

أ- دالة الجيب العكسي: $y = \arcsin x$

لما كانت الدالة $y = \sin x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها المجال $[-1;1]$، فإنه أياً تكن $y_0 \in [-1;1]$، توجد $x_0 \in \mathbb{R}$، بحيث يكون $y_0 = \sin x_0$. ولما كانت هذه الدالة دورية، فإن مجموعة قيم x المحققة للمعادلة $y_0 = \sin x$ مجموعة غير منتهية، أي أن عدد الأزواج (x, y_0) غير منته (بعبارةٍ أخرى، تدخل y على مجموعة الأزواج (x, y) عدداً غير منته من المرات). لذا، فإن الدالة العكسية للدالة $y = \sin x$ هي دالة متعددة الفروع (لأن y تدخل في مجموعة الأزواج (y, x) عدداً غير منته من المرات). نرمز لهذه الدالة بالرمز $x = Arc\sin y$ وهي دالة معرفة على المجال $[-1;1]$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$.

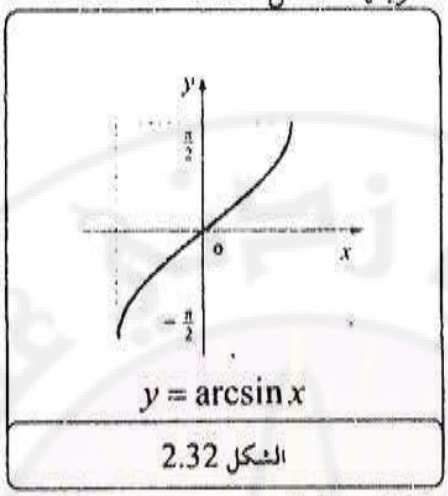
وباستخدام الرموز المألوفة للدالة والمتغير، نكتب $y = Arc\sin x$.

حتى تكون هذه الدالة وحيدة الفرع (أي دالة بالمعنى العام) يجب أن تدخل x (بعد تبديل الرموز بين x وy) في مجموعة الأزواج (x, y) مرة واحدة فقط، وهذا يتحقق عندما تأخذ y قيمها من أحد المجالات $\left[\pi(k-\frac{1}{2});\ \pi(k+\frac{1}{2})\right]$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

من أجل $k = 0$، أي $y \in \left[-\frac{1}{2}\pi;\ \frac{1}{2}\pi\right]$، نحصل على ما يسمى الفرع (القيمة) الرئيسة لهذه الدالة ونرمز لها بالرمز $y = \arcsin x$، ونحصل على بقية الفروع من العلاقة

$$Arc\sin x = (-1)^k \arcsin x + \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهكذا، فإن الفرع الرئيس للدالة العكسية لدالة الجيب هي الدالة $y = \arcsin x$ ، معرفة على المجال $[-1;1]$ ، ومجموعة قيمها هي المجال $\left[-\frac{1}{2}\pi ; \frac{1}{2}\pi\right]$. وهي دالة فردية ومتزايدة تماماً على مجموعة تعريفها، الشكل 2.32.



$y = \arcsin x$

الشكل 2.32

نجد من هذا التعريف لدالة الجيب العكسي:

$\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$	$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\pi$	$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi$
$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$	$\arcsin 0 = 0$	

ب- دالة التجيب العكسي: $y = \arccos x$

ولما كان للدالتين $y = \cos x$ و $y = \sin x$ خواصّ متشابهة، وعليه، فإنه بأسلوب مشابه لتعريف دالة الجيب العكسي نعرف دالة التجيب العكسي:

$$x = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad y = Arc\cos x$$

وهي دالة متعددة الفروع (لأن دالة التجيب دورية)، وهي معرفة على المجال $[-1;1]$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$.

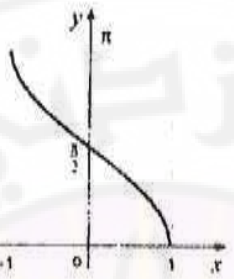
الفرع الرئيس لهذه الدالة هي الدالة $y = \arccos x$ المعرفة على المجال $[-1;1]$ ومجموعة قيمها هي المجال $[0;\pi]$، وهي دالة متناقصة تماماً على مجموعة تعريفها، الشكل 2.33.

نحصل على بقية فروع هذه الدالة من العلاقة :

$$Arc\cos x = \mp \arccos x + 2\pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

نجد من هذا التعريف لدالة التجيب العكسي:

$\arccos 1 = 0$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}\pi$	$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi$
$\arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$	$\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$	



$y = \arccos x$

الشكل 2.33

ج- دالة الظل العكسي: $y = \arctan x$

نُعرّف هذه الدالة بأسلوب مشابه لتعريف دالة الجيب العكسي:

$$y = Arc\tan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y$$

وهي دالة متعددة الفروع (لأن دالة الظل دورية) معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi + \pi k \; ; \; (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

الفرع الرئيس لهذه الدالة هي الدالة $y = \arctan x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها هي المجال $\left]-\frac{1}{2}\pi \; ; \; \frac{1}{2}\pi\right[$، وهي دالة فردية ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$، الشكل 2.34.

نحصل على بقية فروع هذه الدالة من العلاقة

$$Arc\tan x = \arctan x + \pi k \qquad ; \qquad k \in \mathbb{Z}$$

نجد من هذا التعريف

$\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$	$\arctan \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi$	$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\pi$
$\arctan 0 = 0$		

د- دالة التظل العكسي: $y = \operatorname{arc\,cot} x$

نُعرّف هذه الدالة بأسلوبٍ مشابه لتعريف دالة الجيب العكسي:

$$x = \cot y \quad \Leftrightarrow \quad y = Arc\cot x$$

وهي دالة متعددة الفروع (لأن دالة التظل دورية) معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R} \setminus \{\pi k\ ,\ (k \in \mathbb{Z})\}$.

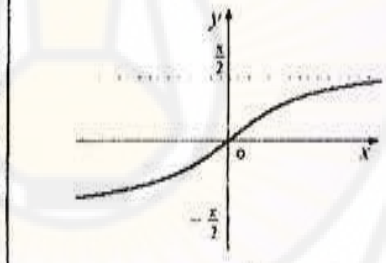
الفرع الرئيس لهذه الدالة هي الدالة $y = \operatorname{arc\,cot} x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $]0;\pi[$، وهي دالة متناقصة تماماً على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$، الشكل 2.35.

نحصل على بقية فروع هذه الدالة من العلاقة:

$$Arc\cot x = \operatorname{arc\,cot} x + \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

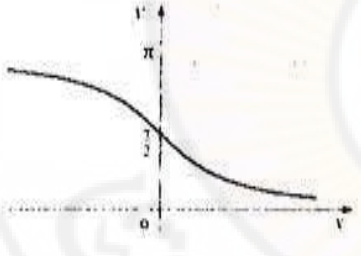
نجد من هذا التعريف

$\operatorname{arc\,cot} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\pi$	$\operatorname{arc\,cot} \sqrt{3} = \frac{1}{6}\pi$	$\operatorname{arc\,cot} 1 = \frac{1}{4}\pi$
		$\operatorname{arc\,cot} 0 = \frac{1}{2}\pi$



$y = \arctan x$

الشكل 2.34



$y = \operatorname{arc\,cot} x$

الشكل 2.35

ملحوظة 2.9 : نعني، لاحقاً، بالدوال المثلثية العكسية، الفروع الرئيسة لها، ما لم نذكر خلاف ذلك.

انطلاقاً من خواص الدوال المتعاكسة: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

ومن العلاقات بين الدوال المثلثية، يمكن حساب قيم الدوال المثلثية للدوال المثلثية العكسية

$\sin(\arcsin x) = x$ ، $\cos(\arccos x) = x$ ، $\tan(\arctan x) = x$

$\cot(\operatorname{arc\,cot} x) = x$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \quad ; \quad |x| \le 1$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad |x| < 1$$

$$\cot(\arcsin x) = \frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad ; \quad |x| \le 1 \ , \ x \neq 0$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2} \quad ; \quad |x| \le 1$$

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad ; \quad |x| \le 1 \ , \ x \neq 0$$

$$\cot(\arccos x) = \frac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad |x| < 1$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{\tan(\arctan x)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\operatorname{arc\,cot} x) = \frac{1}{\cot(\operatorname{arc\,cot} x)} = \frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

$$\sin(\operatorname{arc\,cot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\operatorname{arc\,cot} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arc\,cot} x) = \frac{\cot(\operatorname{arc\,cot} x)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ولما كان:

$\cos(\frac{1}{2}\pi - \arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x \quad ; \quad 0 < \frac{1}{2}\pi - \arcsin x < \pi$

$\cot(\frac{1}{2}\pi - \arctan x) = \tan(\arctan x) = x \quad ; \quad 0 < \frac{1}{2}\pi - \arctan x < \pi$

فإن

$\arccos = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$ و $\operatorname{arccot} x = \frac{1}{2}\pi - \arctan x$.

وهكذا نجد:

$\arccos x + \arcsin x = \frac{1}{2}\pi$	$\arcsin x + \arcsin(-x) = 0$
$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$	$\arctan x + \arctan(-x) = 0$
$\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{1}{2}\pi$	$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(-x) = \pi$

وتُدرس الدوال المثلثية العكسية للدوال المثلثية بأسلوبٍ مشابه:

$$\arcsin(\sin x) = x \quad ; \quad |x| \le \frac{1}{2}\pi$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad ; \quad 0 \le x \le \pi$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad ; \quad |x| < \frac{1}{2}\pi$$

$$\operatorname{arccot}(\cot x) = x \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

وعموماً، فإن

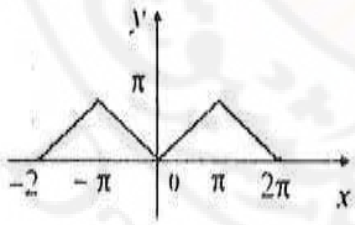
$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x + 2\pi k \\ (\pi - x) + 2\pi k \end{cases} \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حيث $|y| \le \frac{1}{2}\pi$، الشكل 2.36.

و

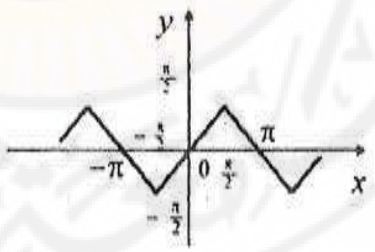
$$y = \arccos(\cos x) = \mp x + 2\pi k \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حيث $0 \le y \le \pi$، الشكل 2.37.



$y = \arccos(\cos x)$

الشكل 2.37



$y = \arcsin(\sin x)$

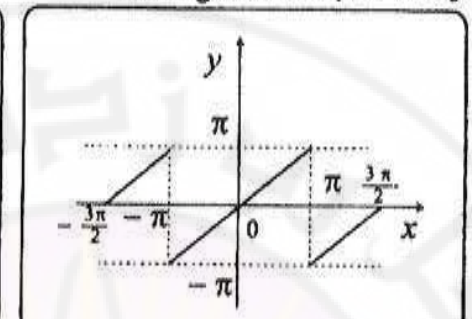
الشكل 2.36

$$y = \arctan(\tan x) = x + \pi k \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

حيث $|y| < \frac{1}{2}\pi$، الشكل 2.38.

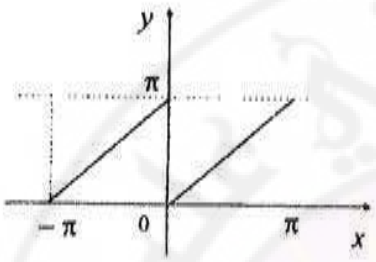
$$y = \operatorname{arc\,cot}(\cot x) = x + \pi k \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$$ و

حيث $0 < y < \pi$، الشكل 2.39.



$y = \arctan(\tan x)$

الشكل 2.38



$y = \operatorname{arc\,cot}(\cot x)$

الشكل 2.39

مثال 2.12 : حل المعادلة $\arcsin 2x - \arcsin \sqrt{2}\,x = \arcsin x$.

الحل: إن الدالة $y_1 = \arcsin 2x$ معرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

والدالة $y_2 = \arcsin \sqrt{2}\,x$ معرفة على المجال $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

والدالة $y_3 = \arcsin x$ معرفة على المجال $[-1;1]$.

إذن، فالمعادلة قابلة للحل في المجال المشترك، أي في المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

نطبق دالة الجيب على طرفي المعادلة:

$$\arcsin \sqrt{2}\,x + \arcsin x = \arcsin 2x$$

$$\sin(\arcsin \sqrt{2}\,x + \arcsin x) = \sin(\arcsin 2x) = 2x$$

$$\sin(\arcsin\sqrt{2}\,x)\cdot\cos(\arcsin x) + \sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin\sqrt{2}\,x) = 2x$$

$$x\sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2}x\sqrt{1-x^2} = 2x$$

$$\sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2}\sqrt{1-x^2} = 2 \quad ; \quad x \neq 0$$

نربع الطرفين

$$1-2x^2+2(1-x^2)+2\sqrt{2}\sqrt{(1-2x^2)(1-x^2)}=4$$

$$32x^2=7 \Rightarrow x^2=\frac{7}{32} \Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{7}{32}}$$

وهذان الحلان ينتميان للمجال $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$. بقي أن نتحقق من الحالة $x=0$:

$$\arcsin 0-\arcsin 0=\arcsin 0 \Rightarrow 0=0$$

إذن، مجموعة حلول المعادلة $\{0,\mp\sqrt{\frac{7}{32}}\}$.

8. الدوال القطعية: $y=sh\,x$ و $y=ch\,x$ و $y=th\,x$ و $y=cth\,x$.

أ- دالة الجيب القطعي: $y=sh\,x$ وهي بالتعريف الدالة $sh\,x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$. هذه الدالة فردية ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. وهي غير محدودة، الشكل 2.40.

ب- دالة التجيب القطعي: $y=ch\,x$ وهي بالتعريف الدالة $ch\,x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها المجال $[1;\infty[$. هذه الدالة زوجية ومتزايدة تماماً على المجال $[0;\infty[$، ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty;0]$. وهي غير محدودة، الشكل 2.40.

ج- دالة الظل القطعي: $y=th\,x$ وهي بالتعريف الدالة

$$th\,x=\frac{sh\,x}{ch\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

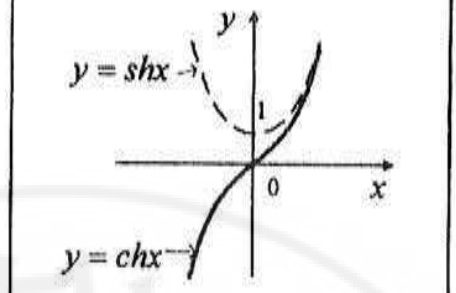
وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها المجال $]-1;1[$. هذه الدالة فردية ومتزايدة تماماً ومحدودة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$، الشكل 2.41:

$$|th\,x|<1 \quad ; \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

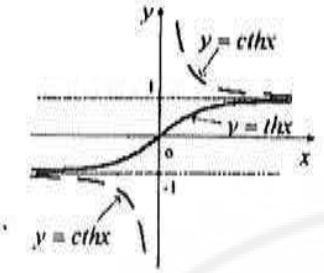
د- دالة التظل القطعي: $y=cth\,x$ وهي بالتعريف الدالة

$$cth\,x=\frac{cth\,x}{sh\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

وهي معرفة على $\mathbb{R}^*$ ومجموعة قيمها المجموعة $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. هذه الدالة فردية ومتناقصة تماماً وغير محدودة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$، الشكل 2.41.



الشكل 2.40



الشكل 2.41

ملحوظة 2.10 : تسمى هذه الدوال قطعية، لأن النقطة $M(ch\alpha, sh\alpha)$ تقع، دائماً، على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$.

تحقق هذه الدوال علاقات مشابهة للعلاقات التي تحققها الدوال المثلثية مع بعض الإختلافات:

$ch^2 x - sh^2 x = 1$	
$ch\,x - sh\,x = e^{-x}$	$ch\,x + sh\,x = e^{x}$
$ch\,x = ch(-x)$	$-sh\,x = sh(-x)$
$ch\,2x = ch^2 x + sh^2 x$	$sh\,2x = 2ch\,x \cdot sh\,x$
$\frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$	$\frac{1}{sh^2 x} = cth^2 x - 1$
$th\,2x = \frac{2th\,x}{1 + th^2 x}$	$th\frac{1}{2}x = \frac{sh\,x}{1 + ch\,x}$
$sh^2 x = \frac{ch\,2x - 1}{2}$	$ch^2 x = \frac{ch\,2x + 1}{2}$
$(ch\,x + sh\,x)^n = ch\,nx + sh\,nx$	$sh(x \mp y) = sh\,x \cdot ch\,y \mp sh\,y \cdot ch\,x$
$ch(x \mp y) = ch\,x \cdot ch\,y \mp sh\,x \cdot sh\,y$	$th(x \mp y) = \frac{thx \mp thy}{1 \mp thx \cdot thy}$

9. الدوال القطعية العكسية: تُعرّف هذه الدوال كدوال عكسية للدوال القطعية.

أ- دالة الجيب القطعي العكسي: $y = ar\,sh\,x$ وهي الدالة العكسية لدالة الجيب القطعي

$$x = sh\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = ar\,sh\,x$$

نوجد صيغة هذه الدالة، من حل المعادلة

$$x = sH\,y = \tfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \quad \Rightarrow \quad 2x = e^{y} - e^{-y}$$

$$e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{y} = x \mp \sqrt{x^2 + 1}$$

نهمل الإشارة (-)، لأن e^{y} موجب دوماً.

وعليه، فإن $y = ar\,sh\,x = \ln(x \mp \sqrt{x^2 + 1})$.

وهي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$. وهذه الدالة فردية ومتناقصة تماماً على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$، الشكل 2.42.

ب- دالة التجيب القطعي العكسي: $y = ar\,ch\,x$ وهي الدالة العكسية لدالة التجيب القطعي

$$x = ch\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = ar\,ch\,x$$

وهي دالة ثنائية الفرع معرفة على المجال $[1;\infty[$، ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$.

نوجد صيغة هذه الدالة من حل المعادلة

$$x = ch\,y = \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \quad \Rightarrow \quad 2x = e^{y} + e^{-y}$$

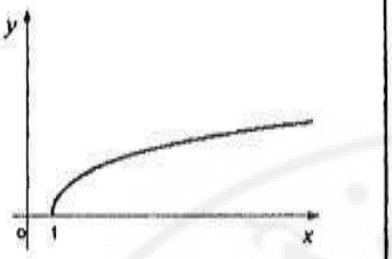
$$e^{2y} - 2xe^{y} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{y} = x \mp \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = Ar\,ch\,x = \ln(x \mp \sqrt{x^2 - 1})$$

نُعرّف الفرع الرئيس لهذه الدالة، بأنه الدالة

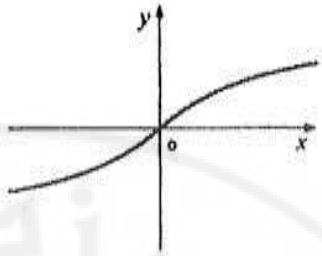
$$y = ar\,ch\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

وهذه الدالة معرفة على المجال $[1;\infty[$، ومجموعة قيمها المجال $[0;\infty[$. وهي متزايدة تماماً على مجموعة تعريفها $[1;\infty[$، الشكل 2.43.



$y = ar\,ch\,x$

الشكل 2.43



$y = ar\,sh\,x$

الشكل 2.42

ج- دالة الظل القطعي العكسي: $y = ar\,th\,x$ وهي الدالة العكسية لدالة الظل القطعي

$$x = th\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = ar\,th\,x$$

نوجد صيغة هذه الدالة من حل المعادلة

$$x = th\,y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} \quad \Rightarrow \quad x(e^{y} + e^{-y}) = e^{y} - e^{-y}$$

$$(x-1)e^{2y} + (x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$y = ar\,th\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

وهذه الدالة معرفة على المجال $]-1;1[$، ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$. وهي فردية ومتزايدة تماماً على مجموعة تعريفها $]-1;1[$، الشكل 2.44.

د- دالة التظل القطعي العكسي: $y = ar\,cth\,x$ وهي الدالة العكسية لدالة التظل القطعي

$$x = cth\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = ar\,cth\,x$$

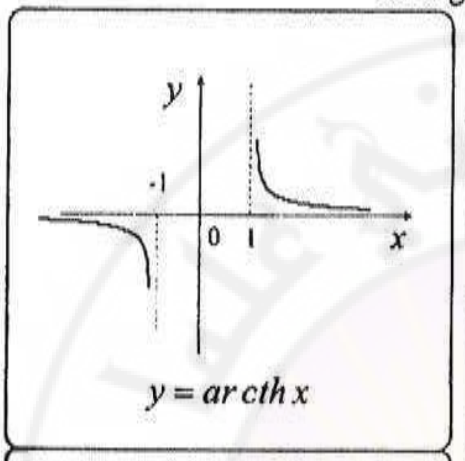
نوجد صيغة هذه الدالة من أجل حل المعادلة

$$x = cth\,y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{e^{y} - e^{-y}} \quad \Rightarrow \quad x(e^{y} - e^{-y}) = e^{y} + e^{-y}$$

$$(x-1)e^{2y} - (x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

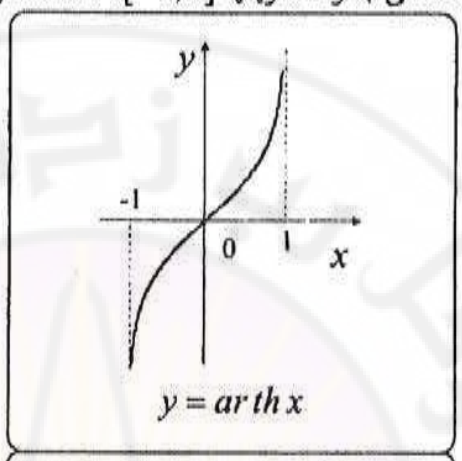
$$y = ar\,cth\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

وهذه الدالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$، ومجموعة قيمها $\mathbb{R}^*$. وهي فردية ومتناقصة تماماً على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$، الشكل 2.45.



$y = arcth\,x$

الشكل 2.45



$y = arth\,x$

الشكل 2.44

2.5 تصنيف الدوال

عرضنا في الفقرة 2.4، الدوال الأولية الأساسية، أما الدوال الأولية فهي الدوال التي نحصل عليها بإجراء عدد منته من العمليات الحسابية الأربع على الدوال الأولية الأساسية ومن خلال تركيبها مع بعضها بعضاً. ونصادف هذه الدوال بكثرة في التحليل الرياضي، حيث يتم بوساطتها عرض المفاهيم الأساسية لهذه الفرع الهام من العلم.

نعرض بعض الدوال الأولية:

1. الحدودية :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

حيث $n \in \mathbb{N}$ و $a_0 \neq 0$ و $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$.

وتسمى دالة الحدودية الدالة الصحيحة المنطّقة.

2. الكسر العادي (المنطّق): وهو الدالة التي تمثل حاصل قسمه حدوديتين:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

تشكل الدوال الصحيحة المنطقة (الحدوديات) والكسور المنطّقة صف الدوال المنطّقة.

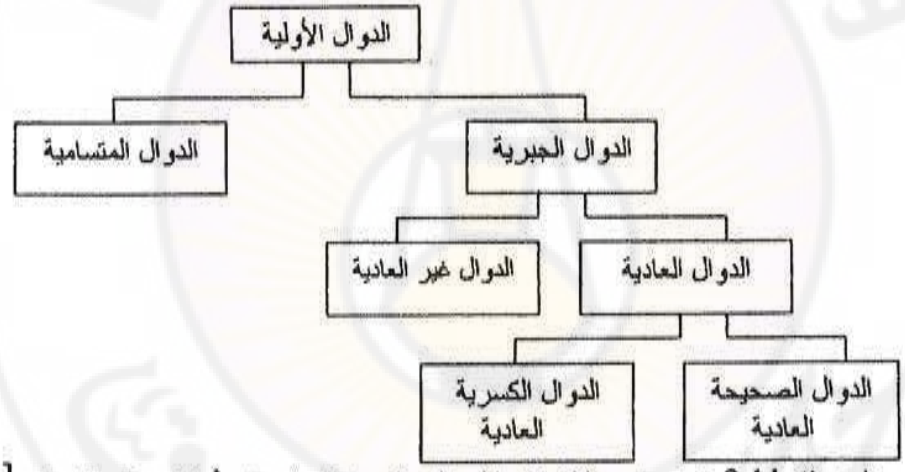
3. الدوال غير العادية (الصماء): وهي الدوال التي نحصل عليها باستخدام العمليات الحسابية الأربع وبتركيب التطبيقات لدوال القوة ذات الأس الصحيح والأس الكسري والتي لا تُعدّ دوال عادية.

فمثلاً الدوال $\sqrt{x}$ و $\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}+x^2}$ و $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ هي دوال غير عادية.

تشكل الدوال العادية والدوال غير العادية صف الدوال الجبرية.

4. الدوال المتسامية: وهي الدوال التي لا تنتمي لصف الدوال الجبرية وهي الدوال الأولية الأساسية جميعها باستثناء دوال القوة ذات الأس الكسري والدوال القطعية والدوال القطعية العكسية.

وهكذا، تصنف الدوال وفق المخطط التالي:



ملحوظة 2.11 : توجد، بالإضافة لهذه الدوال، دوال ليست أولية. مثل الدوال $[x]$ و $sign\, x$ ودالة هافيساید ودالة دیریخلیه وغیرها.

2.6 الدوال المعطاة وسيطياً

لتكن $x = \varphi(t)$ و $y = \psi(t)$ دالتين في المتغير المستقل t، حيث $t \in T$.

إذا كانت الدالة x مطردة تماماً على المجموعة T، فإنه يوجد دالة عكسية لها $t = \varphi^{-1}(x)$. لذا يمكن النظر للدالة $y = \psi(t)$، حيث $t = \varphi^{-1}(x)$ و $t \in T$، كدالة مركّبة تنقل العنصر x إلى العنصر y عبر المتغير t:

$$\left.\begin{array}{lll} x=\varphi(t) & \Rightarrow & t=\varphi^{-1}(x) \\ y=\psi(t) & ; & t\in T \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad y=\psi(\varphi^{-1}(x))=f(x)$$

نسمي المتغير t وسيطاً، ونقول في هذه الحالة، إن الدالة المركبة $y=f(x)$ معطاة وسيطياً بالعلاقات:

$$\{\, x=\varphi(t) \quad , \quad y=\psi(t) \quad ; \quad t\in T \,\}$$

ونكتب للسهولة:

$$\{\, x=x(t) \quad , \quad y=y(t) \quad ; \quad t\in T \,\} \qquad (2.2)$$

ملحوظة 2.12 : إن المتغير t يؤدي دور الوسيط في تحديد موضع نقطة في المستوي، فقولنا، مثلاً إن t تسعى إلى اللانهاية لا يعني بالضرورة أن النقطة M تبتعد إلى اللانهاية، بل على العكس قد يعني أنها تقترب من نقطة الأصل o، ويحدد هذا الأمر طبيعة الدالتين $x(t)$ و $y(t)$.

يستخدم، غالباً، الشكل الوسيطي للدوال، عند وصف مسار حركة نقطة مادية. فإذا كانت هذه النقطة تتحرك في المستوي، فإن إحداثييها x وy تعد دوال في الزمن t. وبإعطاء هذه الدوال بالعلاقات (2.2)، نستطيع تحديد مسار النقطة بدقة في مجال T للزمن t.

يمكن الانتقال من الشكل الوسيطي (2.2) إلى الشكل الديكارتي الواضح $y=f(x)$، بحذف الوسيط t من المعادلتين $x=x(t)$ و $y=y(t)$. كما ويمكن بسهولة، الانتقال من الشكل الواضح للدالة $y=f(x)$ إلى الشكل الوسيطي، وذلك بفرض $x=t$، فيكون $y=f(t)$.

يُفضل، أحياناً الشكل الوسيطي للدالة على باقي أشكاله، فقد يكون الارتباط المباشر بين x وy معقداً بينما الدوال $x=x(t)$ و $y=y(t)$ التي تُعرّف الارتباط الدالي بين x وy عبر t تعد أسهل.

مثال 2.13 : ليكن لدينا دالة معطاة وسيطياً:

$$\{x=3t+1 \quad , \quad y=\frac{1}{t^2} \; ; \quad t\in]0;\infty[\}$$

عبّر عن هذه الدالة بالشكل الديكارتي الواضح.

الحل: لما كانت الدالة $x=3t+1$ متزايدة تماماً على المجال $]0;\infty[$، فإن معادلتي x و y تُعرّفان دالة y في المتغير x. نحذف الوسيط t من هاتين المعادلتين كما يلي:

نوجد قيمة الوسيط t من المعادلة $x = 3t + 1$ ، فنجد $t = \frac{1}{3}(x-1)$ ، نعوض في معادلة y ، فنحصل على المطلوب:

$$y = \frac{9}{(x-1)^2}$$

مثال 2.14 : لتكن لدينا الدالة $\{y = \frac{1}{x} \; ; \; x \in]0;\infty[\}$. عبّر عن هذه الدالة وسيطياً.

الحل: نفرض $x = t$ ، فنجد $y = \frac{1}{t}$. وعليه، فإن الدالة تعطى وسيطياً بالعلاقات

$$\left\{ x = t \;\; , \;\; y = \frac{1}{t} \; ; \; t \in]0;\infty[\right\}$$

كما ويمكن التعبير عن هذه الدالة وسيطياً بأسلوبٍ آخر:

$$\left\{ x = e^{t} \;\; , \;\; y = e^{-t} \;\; ; \;\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

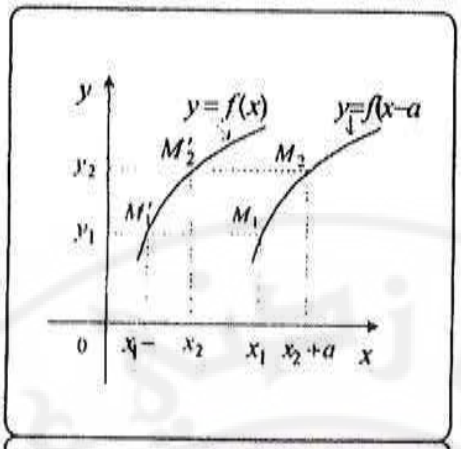
أي أنه يمكن التعبير عن الدالة وسيطياً بأكثر من طريقة.

2.7 طرائق بسيطة لرسم المنحنيات البيانية للدوال في جملة الإحداثيات الديكارتية (الأسلوب المقارن)

يمكن رسم المنحني البياني لدالة انطلاقاً من معرفة المنحنيات البيانية لبعض الدوال الأولية الأساسية، وفق الخطوات التالية:

1. ينتج المنحني البياني للدالة $y = f(x-a)$ عن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ ، بانسحاب وفق الاتجاه الموجب لمحور الفواصل مقداره a (إذا كان $a > 0$)، وبانسحاب وفق الاتجاه السالب لمحور الفواصل مقداره $|a|$ (إذا كان $a < 0$).

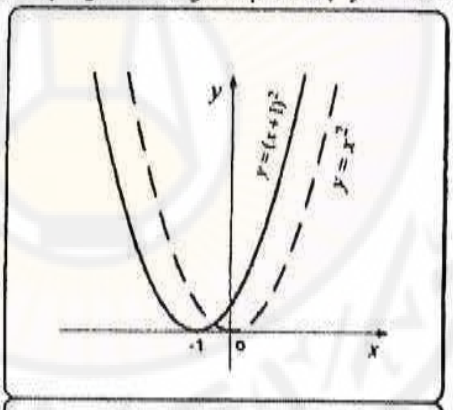
وذلك لأن النقطة $M_1(x_1, y_1)$ من المنحني البياني للدالة $y = f(x-a)$ تنتج بانسحاب مقداره a عن النقطة $M_1'(x_1 - a, y_1)$ ، وهذه النقطة تنتمي للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ ، وهذا يعني أن $y_1 = f(x_1 - a)$. وبأسلوبٍ مشابه، إذا كانت النقطة $M_2'(x_2, y_2)$ من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ ، فإن النقطة $M_2(x_2 + a, y_2)$ تنتمي للمنحني البياني للدالة $y = f(x-a)$ ، وهذا يعني أن $y_2 = f(x_2)$ ، الشكل 2.46.



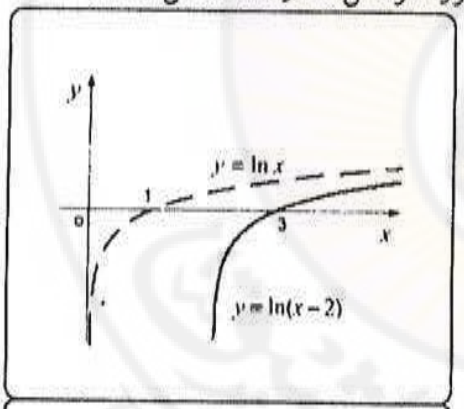
الشكل 2.46

فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y=(x+1)^2$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y=x^2$، بانسحاب نحو الاتجاه السالب لمحور الفواصل مقداره 1، الشكل 2.47.

ونحصل على المنحني البياني للدالة $y=\ln(x-2)$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y=\ln x$ بانسحاب نحو الاتجاه الموجب لمحور الفواصل مقداره 2، الشكل 2.48.



الشكل 2.47



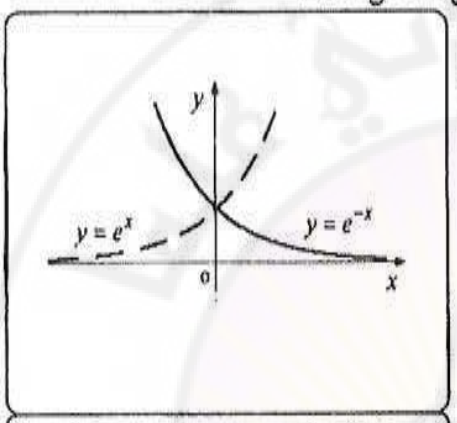
الشكل 2.48

2. ينتج المنحني البياني للدالة $y=f(x)+b$ عن المنحني البياني للدالة $y=f(x)$، بانسحاب وفق الاتجاه الموجب لمحور التراتيب مقداره b (إذا كان $b>0$)، وبانسحاب وفق الاتجاه السالب لمحور التراتيب مقداره $|b|$ (إذا كان $b<0$).

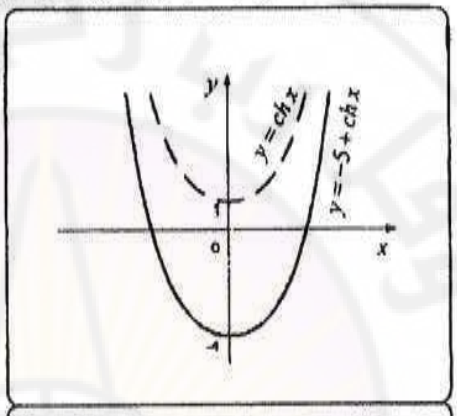
فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y=-5+ch\,x$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y=ch\,x$، بانسحاب نحو الاتجاه السالب لمحور التراتيب مقداره 5، الشكل 2.49.

3. المنحني البياني للدالة $y=-f(x)$ هو نظير المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ بالنسبة إلى محور الفواصل (أي ندور المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ حول محور الفواصل بزاوية مقدارها π).

فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y=e^{-x}$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y=e^{x}$ بأخذ نظيره بالنسبة إلى محور الفواصل، الشكل 2.50.



الشكل 2.50



الشكل 2.49

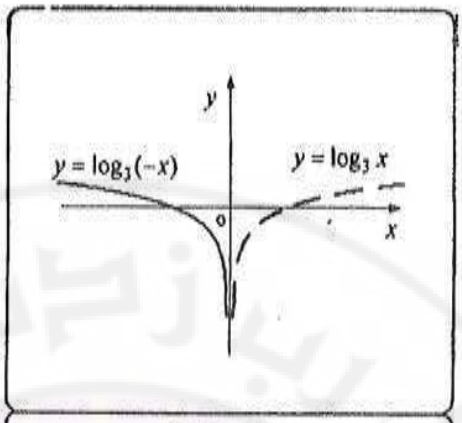
4. المنحني البياني للدالة $y=f(-x)$ هو نظير المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ بالنسبة إلى محور التراتيب (أي ندور المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ حول محور التراتيب بزاوية مقدارها π).

فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y=\log_3(-x)$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y=\log_3(x)$، بأخذ نظيره بالنسبة إلى محور التراتيب، الشكل 2.51.

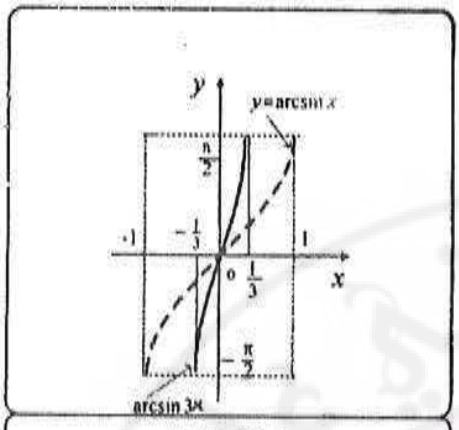
5. ينتج المنحني البياني للدالة : $y=f(kx)$, $(1\neq k>0)$ بضغط المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ مقترباً من محور التراتيب بنسبة $\frac{1}{k}$ (إذا كان $k>1$)، وبتوسيع المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ مبتعداً عن محور التراتيب بنسبة $\frac{1}{k}$ (إذا كان $0<k<1$).

أي أنه إذا كانت النقطة $M_0(x_0,y_0)$ من المنحني البياني للدالة $y=f(x)$، فإن النقطة $M'_0(\frac{x_0}{k},y_0)$ تنتمي للمنحني البياني للدالة $y=f(kx)$.

فمثلاً نحصل على المنحني البياني للدالة $y=\arcsin 3x$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y=\arcsin x$، وذلك بضغطه بنسبة $\frac{1}{3}$ مقترباً نحو محور التراتيب، الشكل 2.52.



الشكل 2.51



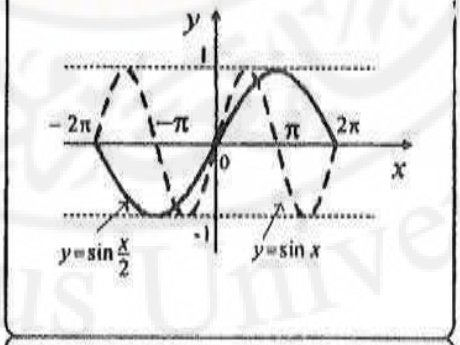
الشكل 2.52

ونحصل على المنحني البياني للدالة $y = \sin\frac{1}{2}x$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y = \sin x$ وذلك بتوسيعه بنسبة 2 مبتعداً عن محور التراتيب، الشكل 2.53.

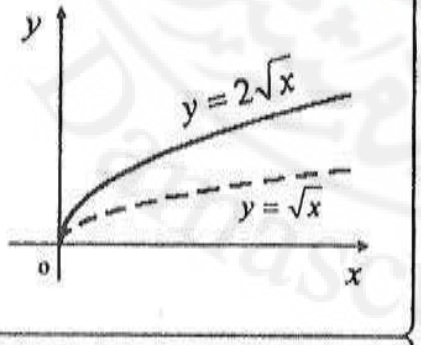
6. ينتج المنحني البياني للدالة $y = A \cdot f(x)$, $(1 \neq A > 0)$ بتوسيع المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مبتعداً عن محور الفواصل بنسبة A (إذا كان $A > 1$)، وبضغط المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مقترباً من محور الفواصل بنسبة A (إذا كان $y = f(x)$).

أي أنه إذا كانت النقطة $M_0(x_0, y_0)$ من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$، فإن النقطة $M'_0(x_0, Ay_0)$ من المنحني البياني للدالة $y = A \cdot f(x)$.

فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y = 2\sqrt{x}$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y = \sqrt{x}$، وذلك بتوسيعه مبتعداً عن محور الفواصل بنسبة 2، الشكل 2.54.



الشكل 2.53

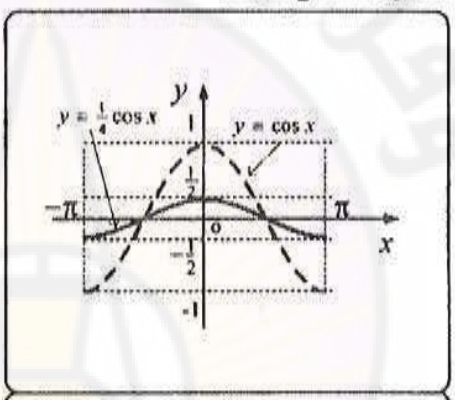


الشكل 2.54

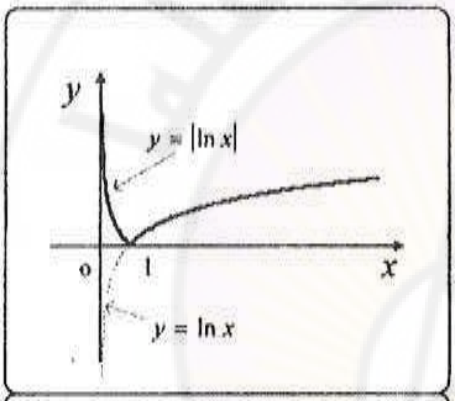
ونحصل على المنحني البياني للدالة $y = \frac{1}{4}\cos x$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y = \cos x$، وذلك بضغطه بنسبة 4 مقترباً من محور الفواصل، الشكل 2.55.

7. ينتج المنحني البياني للدالة $y = |f(x)|$ من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ **بإبقاء** جزئه الواقع فوق محور الفواصل ومن ثم نرسم نظير الجزء الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة إلى هذا المحور، أي ندوّر هذا الجزء حول محور الفواصل زاوية مقدارها π.

فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y = |\ln x|$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y = \ln x$، بإبقاء الجزء الواقع فوق محور الفواصل وأخذ نظير الجزء المتبقي بالنسبة لهذا للمحور، الشكل 2.56.



الشكل 2.55



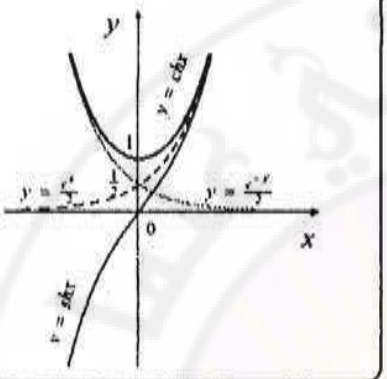
الشكل 2.56

8. ينتج المنحني البياني للدالة $y = f(|x|)$ من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ برسم جزء من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$، فقط من أجل $x \geq 0$، ونضيف إليه نظير هذا الجزء من المنحني بالنسبة إلى محور التراتيب، أي ندوره حول محور التراتيب بزاوية مقدارها π.

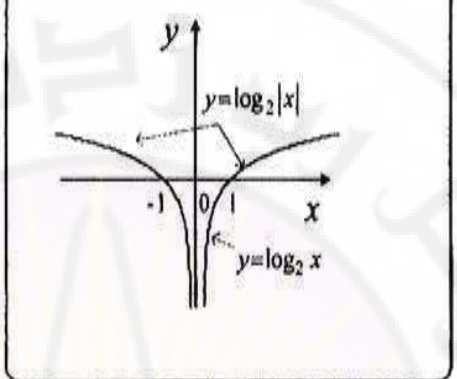
فمثلاً، نحصل على المنحني البياني للدالة $y = \log_2|x|$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y = \log_2 x$، وذلك بإضافة نظير هذا المنحني بالنسبة إلى محور التراتيب إليه، الشكل 2.57.

9. ينتج المنحني البياني للدالة $y = f(x) \mp g(x)$ و $y = f(x) \cdot g(x)$ و $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ بجمع أو طرح أو ضرب أو قسمة قيمتي الدالتين $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ الموافقتين لإحداثيات كل نقطتين متوافقتين (لهما نفس الفواصل) من نقاط المنحني البياني للدالتين $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$.

مثال 2.15: انطلاقاً من المنحنيين البيانيين للدالتين $y_1 = \frac{1}{2}e^x$ و $y_2 = \frac{1}{2}e^{-x}$ نحصل على المنحني البياني للدالة $y = ch\,x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$، والمنحني البياني للدالة $y = sh\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$، الشكل 2.58.

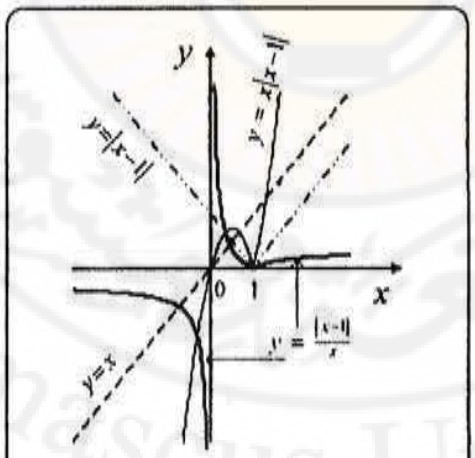


الشكل 2.58



الشكل 2.57

مثال 2.16 : انطلاقاً من المنحنيين البيانيين للدالتين $y_1 = |x-1|$ و $y_2 = x$ نحصل على المنحني البياني للدالة $y = x|x-1|$، وعلى المنحني البياني للدالة $y = \frac{|x-1|}{x}$، الشكل 2.59.



الشكل 2.59

مثال 2.17 : ارسم المنحني البياني للدالة $y = \left|3\sin(2x + \frac{1}{3}\pi) - 2\right|$ انطلاقاً من المنحني البياني للدالة $y = \sin x$.

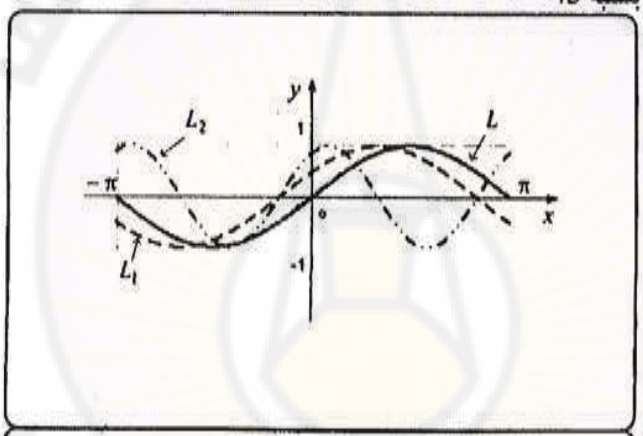
الحل: لرسم هذا المنحني نتبع الخطوات التالية:

1. نرسم L المنحني البياني للدالة $y = \sin x$.

2. نرسم L_1 المنحني البياني للدالة $y = \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$ ، بسحب المنحني L على محور الفواصل، بالاتجاه السالب مقداره $\frac{1}{6}\pi$.

3. نرسم L_2 المنحني البياني للدالة $y = \sin 2(x + \frac{1}{6}\pi)$ بضغط المنحني L_1 مقترباً من محور التراتيب بنسبة $\frac{1}{2}$ (الشكل A- 2.60).

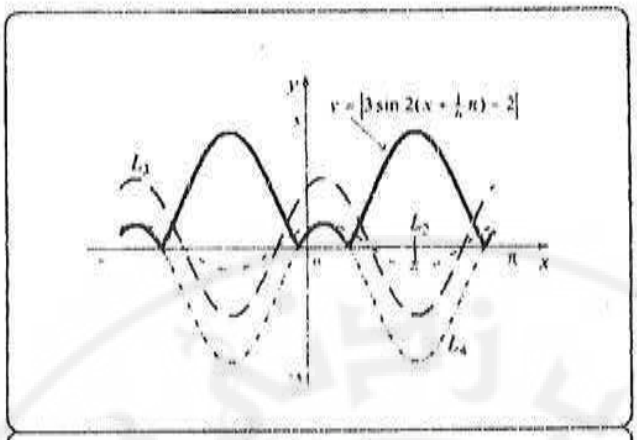
4. نرسم L_3 المنحني البياني للدالة $y = 3\sin 2(x + \frac{1}{6}\pi)$ بتوسيع المنحني L_2 مبتعداً عن محور الفواصل بنسبة 3.



الشكل A-2.60

5. نرسم L_4 المنحني البياني للدالة $y = 3\sin 2(x + \frac{1}{6}\pi) - 2$ بسحب المنحني L_3 مقترباً من محور التراتيب بالاتجاه السالب مقداره 2.

6. نُبقي جزءاً من المنحني L_4 الواقع فوق محور الفواصل، ونضيف إليه نظير الجزء المتبقي بالنسبة إلى محور الفواصل، الشكل B-2.60.



الشكل 2.60-B

2.8 بعض المنحنيات الشهيرة وسيطياً

إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ من المستوي الديكارتي xoy، والتي تحقق إحداثياتها العلاقات (2.2)، تمثل منحنياً L في هذا المستوي.

1. المستقيم :

$$y = ax + b \quad \Leftrightarrow \quad \{x = t \ , \ y = at + b \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$$

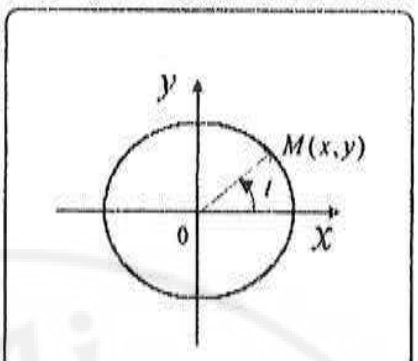
2. الدائرة : ندرس دائرة مركزها نقطة الأصل o ونصف قطرها a:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \{x = a\cos t \ , \ y = a\sin t \ ; \ 0 \le t \le 2\pi\}$$

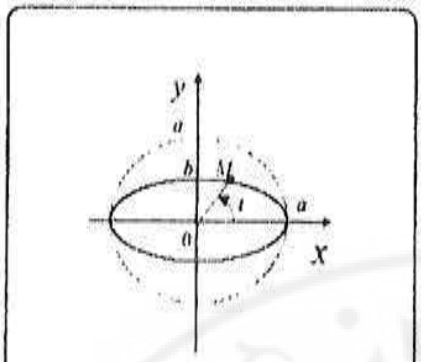
حيث الوسيط t هو الزاوية بين الاتجاه الموجب لمحور الفواصل والشعاع $\overrightarrow{oM}$، المار من نقطة M من الدائرة، والموجهة عكس دوران عقارب الساعة، الشكل 2.61.

3. **القطع الناقص**: ندرس قطعاً ناقصاً مركزه نقطة الأصل o، وأنصاف أقطاره a و b.

يمكن الحصول على القطع الناقص بضغط الدائرة التي نصف قطرها a بالمقدار $\frac{b}{a}$ على طول محور التراتيب، الشكل 2.62.



الشكل 2.61



الشكل 2.62

وهكذا، نحصل على المعادلات الوسيطية للقطع الناقص انطلاقاً من المعادلات الوسيطية للدائرة بضرب عيناتها بالمقدار $\frac{b}{a}$.

$$\left\{x = a\cos t \ , \ y = \frac{b}{a}\cdot a\sin t = b\sin t \ ; \ 0 \le t \le 2\pi\right\}$$

كما يمكن الحصول على المعادلة النموذجية الواضحة للقطع الناقص انطلاقا من معادلاته الوسيطية:

$$\cos t = \frac{x}{a} \ , \ \sin t = \frac{y}{b} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

4. القطع المكافئ: ندرس قطعاً مكافئاً ذروته نقطة الأصل o ومحوره ox ووسيطه p:

$$y^2 = 2px \quad \Leftrightarrow \quad \left\{y = t \ , \ x = \frac{t^2}{2p} \ ; \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

5. القطع الزائد: ندرس قطعاً زائداً مركز تناظره نقطة الأصل o.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{x = a\,ch\,t \ , \ y = b\,sh\,t \ ; \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

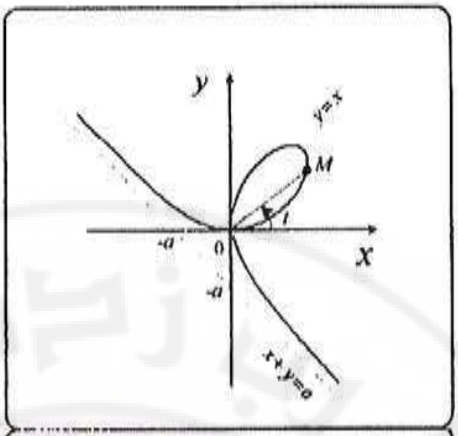
6. وريقة ديكارت: هو منحن جبري من الدرجة الثالثة، الشكل 2.63. معادلته الديكارتية

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

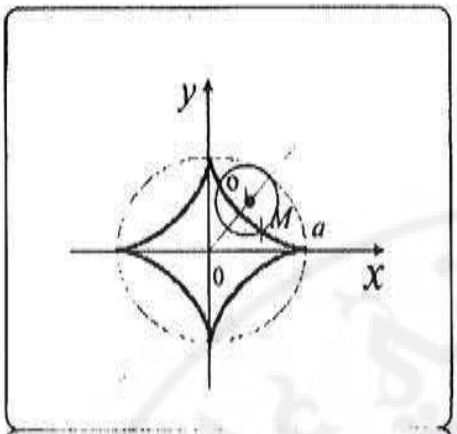
وهو متناظر بالنسبة إلى المنصف الأول $y = x$. ويتم الحصول على المعادلات الوسيطية لهذا المنحني بوضع $y = t\cdot x$ في المعادلة الديكارتية:

$$x^3 + (t\cdot x)^3 - 3axt\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+t^3)x^3 - 3atx^2 = 0$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \ , \ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \ ; \ \hat{t} = \tan\left(\overrightarrow{oM}, \overrightarrow{ox}\right)$$



الشكل 2.63



الشكل 2.64

7. **الستروئيد:** هو منحن جبري من الدرجة السادسة. وهو منحني مغلق ترسمه نقطة $M(x,y)$ من محيط دائرة نصف قطرها b تتدحرج دون انزلاق داخل دائرة نصف قطرها $a = 4b$، الشكل 2.64، معادلته:

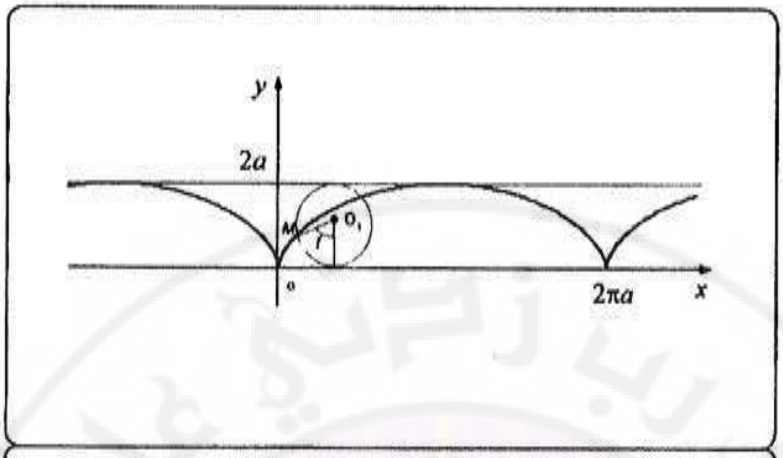
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ x = a\cos^3 t \ , \ y = a\sin^3 t \ ; \ 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

8. **السيكلوئيد :** هو منحن ترسمه نقطة $M(x,y)$ من محيط دائرة نصف قطرها a تتدحرج دون انزلاق على مستقيم ثابت، الشكل 2.65، معادلاته الوسيطية

$$\left\{ x = a(t - \sin t) \ , \ y = a(1 - \cos t) \ ; \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

بحذف الوسيط t، نحصل على المعادلة الديكارتية للسيكلوئيد

$$x = a\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$



الشكل 2.65

2.9 بعض المنحنيات الشهيرة قطبيا

تُعطى معادلة المنحنيات في الإحداثيات القطبية بالشكل $F(\rho,\varphi)=0$ أو $\rho = f(\varphi)$، حيث ρ نصف القطر الشعاعي و φ الزاوية القطبية.

يمكن الانتقال من الشكل القطبي إلى الشكل الديكارتي، وبالعكس، باستخدام العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية.

1. المستقيم : إذا كان المستقيم يمر من القطب o (نقطة الأصل)، فان معادلته الديكارتية $y = kx$. نعوض قيم x وy من العلاقات (1.6)

$$k=\tan\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi=\begin{cases}\arctan k = c \\ \pi+\arctan k = \pi + c\end{cases} \quad ; \ (c \text{ ثابت})$$

حيث إن المعادلة القطبية $\varphi = c$، تُمثل نصف مستقيم منبعث من القطب o، ويصنع زاوية ثابتة مقدارها c مع المحور القطبي oE.

إذا كان المستقيم لا يمر من القطب، فإن معادلته الديكارتية $Ax + By + C = 0$ وباستخدام العلاقات (1.6)، نجد المعادلة القطبية لهذا المستقيم :

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

حيث p بُعد المستقيم عن القطب o و α زاوية ميل المستقيم.

2. الدائرة: إذا كان مركز الدائرة هو القطب o ونصف قطرها a، فإن معادلتها القطبية

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = a$$

إذا كان مركز الدائرة يقع على محور التراتيب oy ونصف قطرها a، أي مركزها النقطة $(0,a)$، فإن معادلتها القطبية

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2a\sin\varphi$$

إذا كان مركز الدائرة يقع على محور الفواصل ox ونصف قطرها a، أي مركزها النقطة $(a,0)$، فإن معادلتها القطبية

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2a\cos\varphi$$

3- القطوع المخروطية (القطع الناقص - القطع الزائد - القطع المكافئ): وهي المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي نسبة بعديها عن نقطة ثابتة c (تسمى المحرق) وعن مستقيم ثابت Δ(يسمى الدليل) يساوي مقداراً ثابتاً موجباً ε (يسمى التباعد المحرقي):

$$\varepsilon = \frac{|\overrightarrow{Mc}|}{|\overrightarrow{MB}|} \qquad (2.3)$$

إذا اخترنا محور التراتيب oy منطبقاً على الدليل Δ ومحور الفواصل عمودياً على الدليل ويمر من المحرق c، الشكل 2.66، فإن الشرط اللازم والكافي لوقوع النقطة $M(x,y)$ على القطع المخروطي هو

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0 \qquad (2.4)$$

حيث p وسيط القطع: $p = \varepsilon|\overrightarrow{Ac}|$.

ونميز الحالات التالية :

أ- $\varepsilon < 1$، تكون عندئذٍ، أمثال x^2 و y^2 من إشارة واحدة، فالمعادلة (2.4) تُمثل قطعاً ناقصاً.

ب- $\varepsilon = 1$، تكون عندئذٍ، أمثال x^2 معدومة، فالمعادلة (2.4) تُمثل قطعاً مكافئاً.

ج- $\varepsilon > 1$، تكون عندئذٍ، أمثال x^2 و y^2 من إشارتين مختلفتين، فالمعادلة (2.4) تُمثل قطعاً زائداً.

تسمى المعادلة (2.4) المعادلة العامة للقطوع المخروطية.

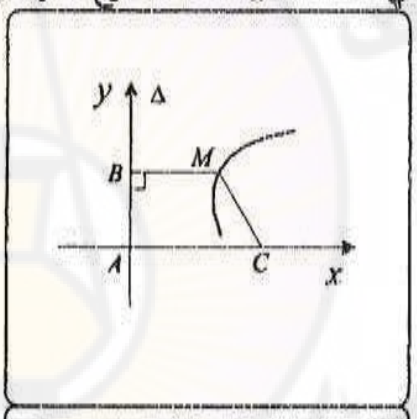
يمكن من هذه المعادلة، أو مباشرةً من التعريف العام للقطوع المخروطية، الحصول على المعادلة القطبية للقطوع المخروطية.

تختار القطب o منطبقاً على المحرق c والمحور القطبي oE عمودياً على الدليل Δ، الشكل 2.67.

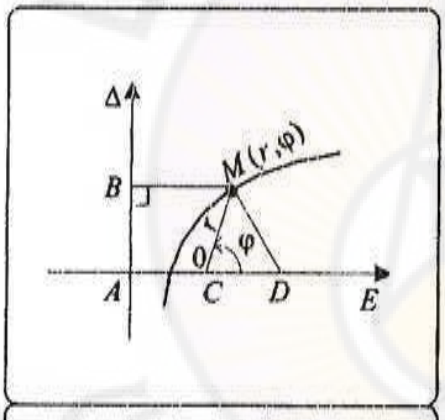
لما كان $|\overrightarrow{Mc}| = \rho$ و $|\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{Ac}| + |\overrightarrow{cD}| = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$، فإن الشرط (2.3) يصبح كما يلي:

$$\varepsilon = \frac{|\overrightarrow{Mc}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \qquad (2.5)$$

وهي المعادلة القطبية العامة للقطوع المخروطية.



الشكل 2.66



الشكل 2.67

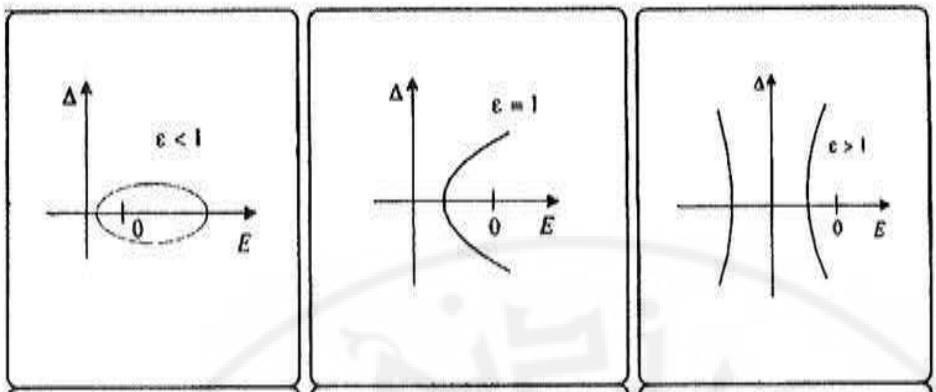
ونميز الحالات التالية:

أ- $\varepsilon < 1$، تمثل المعادلة (2.5) قطعاً ناقصاً يقع محرقه الأيسر في القطب o، الشكل 2.68-A.

ب- $\varepsilon = 1$، تمثل المعادلة (2.5) قطعاً مكافئاً، الشكل 2.68-B.

ج- $\varepsilon > 1$، تمثل المعادلة (2.5) قطعاً زائداً، الشكل 2.68-C.

Damascus University



الشكل 2.68-A	الشكل 2.68-B	الشكل 2.68 -C

مثال 2.18 : بيّن، مع الرسم، نوع المنحني البياني لكلٍ من المعادلات القطبية:

1) $\rho = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{3}{2-2\cos\varphi}$; 3) $\rho = \dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$

الحل:

1) نكتب المعادلة بالشكل $\rho = \dfrac{9/4}{1-\left(\frac{5}{4}\right)\cos\varphi}$

لما كان $\varepsilon = \frac{5}{4} > 1$، فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً. نبدل الإحداثيات القطبية بالإحداثيات الديكارتية:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{4-5\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{4} + \frac{5}{4}x$$

ومنه $\dfrac{(x+5)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$، الشكل 2.69-A.

2) نكتب المعادلة بالشكل $\rho = \dfrac{3/2}{1-\cos\varphi}$

لما كان $\varepsilon = 1$، فإن المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً. نبدل الإحداثيات القطبية بالإحداثيات الديكارتية:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2-2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2} + x$$

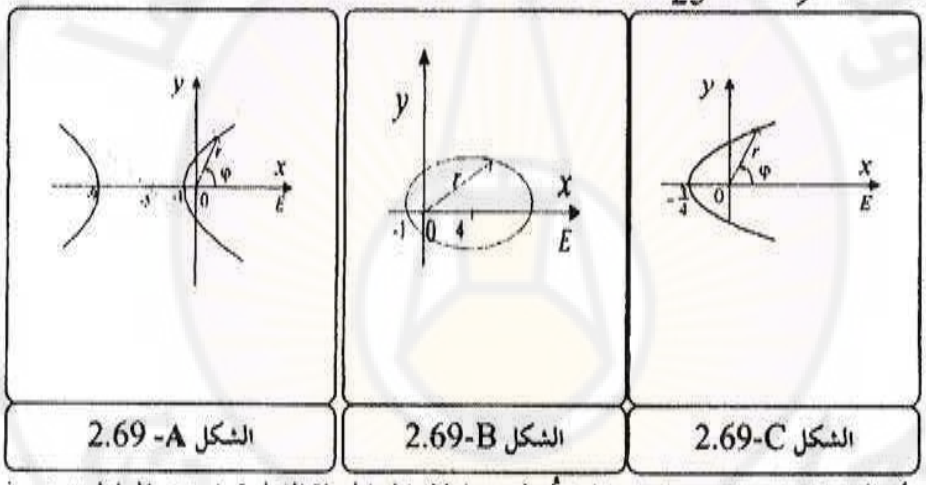
ومنه $y^2 = 3(x + \frac{3}{4})$، الشكل 2.69-B.

3) نكتب المعادلة بالشكل $\rho = \frac{9/5}{1 - (\frac{4}{5})\cos\varphi}$

لما كان $\varepsilon = \frac{4}{5} < 1$، فإن المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً. نبدل الإحداثيات القطبية بالإحداثيات الديكارتية:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{9}{5 - 4\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{9}{5} + \frac{4}{5}x$$

ومنه $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$، الشكل 2.69-C.



الشكل 2.69 -A | الشكل 2.69-B | الشكل 2.69-C

4. **الزهرات**: هي مجموعة منحنيات تُعطى معادلاتها في الجملة القطبية بإحدى المعادلتين:

$$\rho = a\sin k\varphi \qquad (2.6)$$

$$\rho = a\cos k\varphi \qquad (2.7)$$

حيث a و k ثوابت.

أياً تكن الأعداد a و k و φ و $\rho \le a$، فإنه يمكن الاستنتاج أن جميع هذه المنحنيات تتوضع داخل دائرة نصف قطرها a ومركزها القطب o.

لما كانت الدوال $\sin k\varphi$ و $\cos k\varphi$ دورية، فإن الزهرات تتألف من وريقات متطابقة ومتناظرة بالنسبة إلى أنصاف الأقطار الأكبر والتي كل منها مساوٍ لـ a.

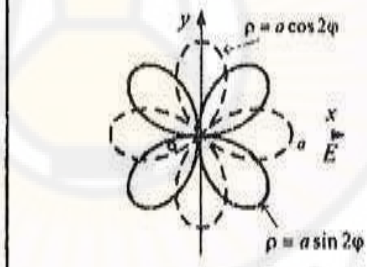
يتعلق عدد وريقات الزهرة بالعدد k. فإذا كان العدد k صحيحاً، فإن عدد الورقات يساوي k ،عندما يكون k فردياً. ويساوي $2k$ إذا كان العد k زوجياً.

- إذا كان $k = 0$، فإن المعادلة (2.6) تُمثل نقطة هي القطب o. وتُمثل المعادلة (2.7) دائرة مركزها القطب ونصف قطرها a.

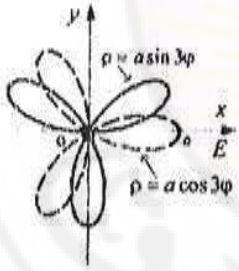
- إذا كان $k = 1$، فإن المعادلة (2.6) تُمثل دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}a$، ويقع مركزها فوق القطب ويبعد عنه بالمقدار $\frac{1}{2}a$. وتُمثل المعادلة (2.7) دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}a$، ويقع مركزها على يمين القطب ويبعد عنه بالمقدار $\frac{1}{2}a$.

- إذا كان $k = 2$، فإن كل من المعادليتن (2.6) و (2.7) تُمثل زهرة بأربع وريقات، مع الإشارة إلى أنه يمكن الحصول على الزهرة $\rho = a\cos 2\varphi$، من الزهرة $\rho = a\sin 2\varphi$، بدوران مقداره $\frac{1}{4}\pi$، الشكل 2.70.

- إذا كان $k = 3$، فإن كلاً من المعادليتن (2.6) و (2.7) تُمثل زهرة بثلاث وريقات، ويمكن الحصول على الزهرة $\rho = a\cos 3\varphi$، من الزهرة $\rho = a\sin 3\varphi$، بدوران مقداره $\frac{1}{6}\pi$، الشكل 2.71.



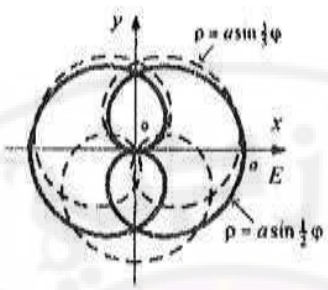
الشكل 2.70



الشكل 2.71

- إذا كان k عدداً عادياً، أي $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$ ، $k = \frac{m}{n}$، فإن الزهرة تتألف من m وريقة، إذا كان كلا العددين m و n فرديين. وتتألف من $2m$ وريقة، إذا كان أحد العددين m أو n زوجياً، الشكل 2.72. وتكون في هذه الحالة الوريقات متقاطعة مع بعضها بعضاً.

- إذا كان k عدداً غير عادياً، فإن الزهرة تتألف من عددٍ غير منته من الوريقات المتقاطعة مع بعضها بعضاً.



الشكل 2.72

5. الحلزونات:

أ- حلزون أرخميدس: هو المحل الهندسي لنقطة M تتحرك بانتظام على مستقيم oN وهذا المستقيم يدور حول نقطة ثابتة هي القطب o، مبتدئاً من الوضع الابتدائي، أي عندما ينطبق هذا المستقيم على المحور القطبي oE، الشكل 2.73.

ينتج من هذا التعريف، أن البعد $\rho = |\overline{oM}|$ يتناسب مع الزاوية φ (زاوية دوران المستقيم oN)، أي أن المعادلة القطبية لهذا المنحني:

$$\rho = a \cdot \varphi \quad ; \quad (a \text{ ثابت التناسب})$$

واضح من هذا التعريف، أن الدالة ρ معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R}$.

يتألف هذا المنحني من فرعين، الأول، عندما يكون الدوران متفقاً مع دوران عقارب الساعة ويقابل الزاوية $\varphi > 0$، والثاني، عندما يكون الدوران عكس دوران عقارب الساعة ويقابل الزاوية $\varphi < 0$.

إن هذا المنحني متناظر بالنسبة إلى مستقيم عمودي على المحور القطبي oE، ويمر من نقاط تقاطع فرعيه، أي من النقاط المضاعفة للحلزون.

كل نصف قطر شعاعي يقطع المنحني بعدد غير منته من النقاط، ويكون البعد بين أي نقطتي تقاطع متتاليتين هو $2\pi a$.

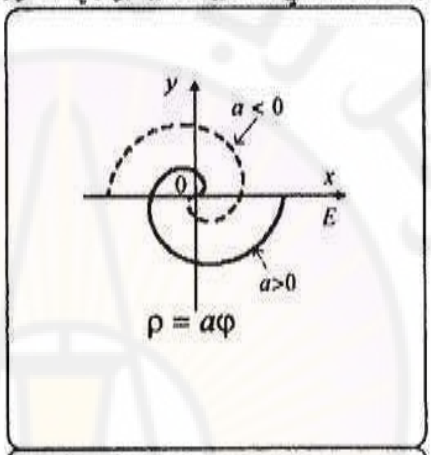
ب- الحلزون الزائدي: هو المحل الهندسي لنقطة M متحركة بسرعة v على مستقيم، وهذا المستقيم بدوره، يدور حول نقطة ثابتة ، القطب o ، بسرعة ω.

المعادلة القطبية لهذا المنحني

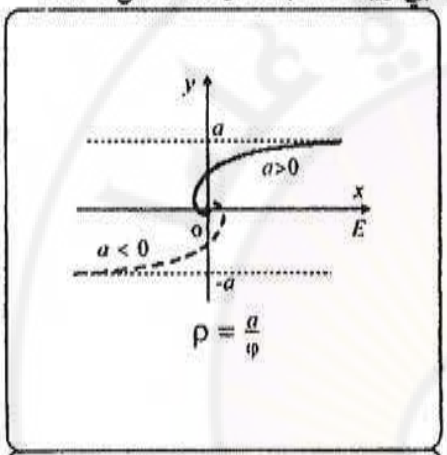
$$\rho = \frac{a}{\varphi} \qquad ; \qquad \left(a = \frac{v}{\omega} > 0\right)$$

واضح من هذا التعريف، أن الدالة r معرفة على $\mathbb{R}^*$ ومجموعة قيمها $\mathbb{R}^*$.

إن لهذا المنحني مستقيماً مقارباً يوازي المحور القطبي ويبعد عنه بالمقدار a، الشكل 2.74.



الشكل 2.73



الشكل 2.74

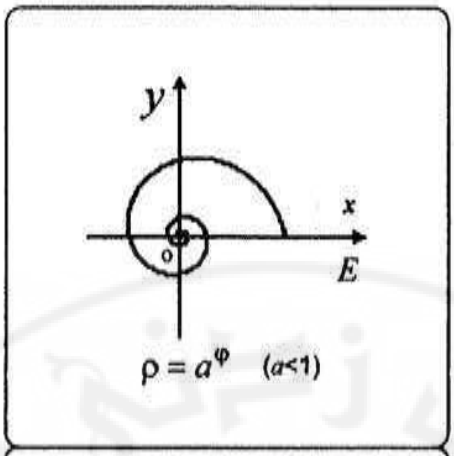
ج - الحلزون اللوغاريتمي: هو المحل الهندسي لنقطة متحركة M على مستقيم oN، وهذا المستقيم بدوره، يدور بحركة منتظمة حول نقطة ثابتة هي القطب o، مبتدئاً من الوضع الابتدائي، أي منطبقاً على المحور القطبي oE، وبسرعة تتناسب مع البعد $\rho = |\overrightarrow{oM}|$، الشكل 2.75.

المعادلة القطبية لهذا المنحني.

$$\rho = a^{\varphi} \qquad ; \qquad (1 \neq a > 0)$$

واضح أن هذه الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ ومجموعة قيمها المجموعة $]0;\infty[$.

إن الزاوية بين المماس ونصف القطر الشعاعي تبقى ثابتة في أية نقطة من الحلزون اللوغاريتمي.



الشكل 2.75

د- الحلزونات الجيبية: هي المنحنيات البيانية للدوال المعطاة قطبياً بإحدى المعادلات

$$\rho^m = a^m \sin m\varphi$$
$$\rho^m = a^m \cos m\varphi$$

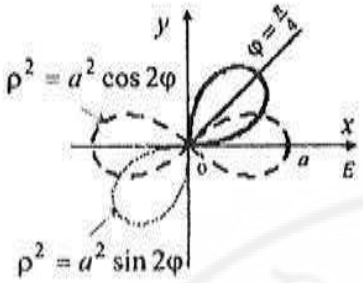
كلما تغير العدد الثابت m في هذه المعادلات، نحصل على أشكال مختلفة من المنحنيات الحلزونية:

- إذا كان $m = 1$، فإن المعادلة $\rho = a\sin\varphi$ أو $\rho = a\cos\varphi$ تمثل دائرة.

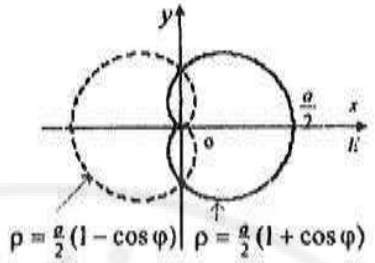
- إذا كان $m = \frac{1}{2}$، فإن المعادلة $\rho = a\cos^2\frac{1}{2}\varphi$، أي $\rho = \frac{1}{2}a(1+\cos\varphi)$ أو المعادلة $\rho = a\sin^2\frac{1}{2}\varphi$، أي $\rho = \frac{1}{2}a(1-\cos\varphi)$، تمثل كارديوئيد (منحني القلب)، الشكل2.76 .

- إذا كان $m = 2$، فإن المعادلة $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ أو $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$، تمثل ليمنسكات[1] بيرنولي (منحني العقدة)، الشكل 2.77.

[1] ليمنسك يعني باليونانية ربطة صوف.



الشكل 2.77



الشكل 2.76

Damascus University

تمارين الفصل الثاني

1- أوجد مجموعة تعريف كلٍ من الدوال التالية:

$$y=\sqrt{\log_{10}(2-\sqrt{x-1})} \qquad y=\arcsin\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad y=\frac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$$

$$y=\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b} \qquad y=\sqrt{\log_{13}(\sin x)} \qquad y=\sqrt{1-|x|}$$

$$y=\ln(5x-x^2-6) \qquad y=2^{(\arccos(1-x))} \qquad y=e^{(x-2)}$$

2- لتكن لدينا الدالتان

$$g(x)=2^x \text{ و } f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x>0\\ -1 & ; \quad x\le 0\end{cases}$$

والمطلوب، أوجد: $f[f(x)]$ و $g[f(x)]$ و $f\left[\frac{1}{f^2(x)}\right]$ و $f[g(x)]$ و $f\left[\frac{|x|}{x}\right]$ و $f[x-|x|]$.

3- أثبت أن الدالتين $f(x)=|x-1|+|x+1|$ و $g(x)=2x$ متطابقتان على المجال $[1;\infty[$.

4- أثبت أن الدالتين $f(x)=2^{\log_2(x+1)}$ و $g(x)=x+1$ متطابقتان على المجال $]-1;\infty[$.

5- أثبت أن الدالتين $f(x)=\sqrt{(x-1)(2x+1)}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+1}$ متطابقتان على المجال $[2;\infty[$.

6- أثبت أن الدالتين $f(x)=|x+4|$ و $g(x)=\sqrt{x^2+8x+16}$ متطابقتان على المجال $\mathbb{R}$.

7- أثبت أن الدالتين $f(x)=tgx\cdot ctgx$ و $g(x)=1$ متطابقتان على المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$.

8- أثبت أن الدالتين $f(x)=4\sqrt{3}\sqrt{tg4(x-\frac{5}{4})}$ و $g(x)=4\sqrt{3tg(4x-5)}$ متطابقتان على المجال $]\frac{5}{4};\frac{3}{2}[$.

9- أثبت أن جداء دالتين زوجيتين أو دالتين فرديتين هي دالة زوجية. وان جداء دالة زوجيه ودالة فردية هي دالة فردية.

10- أثبت أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية، وكان $f(x) \neq 0$ (حيث $x \in D(f)$)، فإن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ زوجية.

11- أثبت أنه إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $x = \varphi(t)$ زوجيتين، فإن الدالة $f[\varphi(t)]$ فردية.

12- أثبت أنه إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $x = \varphi(t)$ فرديتين، فإن الدالة $f[\varphi(t)]$ زوجية.

13- هل الدوال التالية زوجية أو فردية؟

$$y = |x+1| + |x-1|2 - 2|x|$$

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{x+\frac{1}{x}}}$$

$$y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

$$y = \left[\log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] \cdot \left[x - \log_3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right]$$

14- إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ معرفتين على المجموعة A، وكان $g(x) \neq 0$ (حيث $x \in A$)، وكانت الدالة $f(x)$ زوجية والدالة $g(x)$ فردية.

أثبت أن الدوال $|f(x)|$ و $|g(x)|$ و $f(-x) + g(|x|)$ زوجية.

وأن الدوال $g(x|x|)$ و $g(-x)$ و $xf(x) + x^2 g(x)$ فردية.

15- أثبت أنه إذا كان المنحني البياني للدالة $y = f(x)$، حيث $x \in \mathbb{R}$، متناظراً بالنسبة إلى المستقيم $x = a$ وبالنسبة إلى المستقيم $x = b$، حيث $a \neq b$، فإن الدالة f دورية.

16- أثبت أنه إذا كانت الدالة $y = \sin x + \cos bx$ دورية، فإن العدد b عادي.

17- أثبت أنه إذا كانت الدالة f دورية، وكان T_1 و T_2 دورين لها، حيث $T_1 + T_2 \neq 0$، فإن العدد $T_1 + T_2$ دور لهذه الدالة.

18- أثبت أن حاصل جمع دالتين دوريتين معرفتين على نفس المجموعة ولهما نفس الدور T، هو دالة دورية، دورها T.

19- أثبت أن الدالة المعرفة على كل مجموعة الأعداد الحقيقية، باستثناء عددٍ واحد، ليست دورية.

20- أثبت أن الدالة $y=f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$، بـ ... إن المنحني البياني لها متناظر بالنسبة إلى النقطة $A(a,y_0)$، حيث y_0 قيمة ثابتة، وبالنسبة إلى المستقيم $x=b$، حيث $a\neq b$، تكون دورية.

21- أثبت أن الدوال الآتية دورية، أوجد دورها.

$$y=\sqrt[4]{\log_5\left(\cos\frac{2\pi x}{\sqrt{13}}\right)} \quad \text{و} \quad y=\frac{\cos x}{4+\sin^2 x} \quad \text{و} \quad y=\tan(\sin x) \quad \text{و}$$

$$y=\tan^2 x-|\cos x| \quad .$$

22- هل الدوال التالية دورية أو لا؟

$$y=\sqrt{|\sin x|} \quad \text{و} \quad y=\sin\sqrt{|x|}$$

23- ادرس اطراد الدوال التالية:

$$y=\log_2 x \quad \text{و} \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{و} \quad y=x^4+|x| \quad \text{و} \quad y=x^2+\frac{1}{x^2} \quad .$$

24- أوجد مجال اطراد الدوال التالية:

$$y=\left|\frac{x-1}{x}\right| \qquad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sin x} \qquad y=\sqrt{\cos^2 x}-\cos x \qquad y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$$

$$y=\sqrt[4]{\tan x} \qquad y=\cot^2 x \qquad y=\sin 2x+\cos 2x$$

$$y=\begin{cases}1-|x| & ; \quad x>1\\ 2 & ; \quad x=1\\ 2-x & ; \quad x<1\end{cases} \qquad y=\begin{cases}|x+2| & ; \quad x\geq 3\\ \log_2(-x) & ; \quad x<-3\end{cases}$$

25- أثبت أن الدالة الزوجية على مجموعة لا يمكن أن تكون متزايدة على هذه المجموعة.

26- هل يمكن أن يكون حاصل جمع دالتين ليستا مطردتين على مجموعة، هو دالة

مطردة على هذه المجموعة؟

27- هل يمكن التعبير عن دالة ليست مطردة على $\mathbb{R}$، كحاصل فرق دالتين مطردتين؟

28- أثبت أن حاصل جمع دالتين إحداهما محدودة والأخرى غير محدودة على مجموعة، هي دالة غير محدودة على هذه المجموعة.

29- أثبت أنه إذا كانت الدالة f محدودة من الأعلى على مجموعة، فإن الدالة f^2 محدودة من الأعلى على هذه المجموعة.

30- هل يمكن أن يكون حاصل جمع أو فرق دالتين غير محدودتين على مجموعة، هو دالة محدودة على هذه المجموعة؟

31- حدد، أي من الدوال التالية محدودة:

$y = x - [x]$	$y = \dfrac{\lvert x+1\rvert}{x^3+1}$	$y = 2^{\sqrt{x}}$
$y = \lvert x\rvert + \lvert 2x+1\rvert$	$y = 2^{-\sqrt{x}}$	$y = \arctan x$
$y = \log_2 x$		

32- أوجد الدالة العكسية ومجموعة التعريف لكلٍ من الدوال التالية:

$y = 2x+3$ ، $y = (x-1)^3$ ، $y = x^2 - 1$ (من أجل $x \in \mathbb{R}^+$) ، $y = x^2 - 1$ (من أجل $x \in \mathbb{R}^-$).

33- حل في $\mathbb{R}$، كل من المعادلات التالية:

$\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin\sqrt{2}$	$\arcsin 2x = \arccos x$
$\arcsin 2x = -\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$	$\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) = \arctan x$
$\arctan x + \arctan x\sqrt{3} = \frac{7}{12}\pi$	

34- ارسم المنحني البياني لكلٍ من الدوال التالية:

$y = 2^{2x-1}$	$y = \sqrt{5x+1}$	$y = (x+2)^3$
$y = 3 + e^x$	$y = x + \cos x$	$y = e^{\lvert x\rvert}$
$y = \sqrt[3]{x+1}$	$y = -x^3$	$y = \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$
$y = \cos x + \lvert\cos x\rvert$	$y = \sqrt{5x+1}$	$y = \arcsin\lvert x\rvert$
$y = arc\cot(3x+1)$	$y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$	$y = \lvert\arctan x\rvert$

$y = \left|\frac{x+1}{x+5}\right|$

$y = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$

$y = 2^x + 3^{-x}$

$y = \sqrt{|x|}$

$y = \frac{1}{x+1} - 5$

$y = 2 + \frac{1}{x}$

$y = x + |x|$

$y = \frac{x}{|x+1|}$

$y = \frac{-5}{x+1}$

$y = x|\sin x$

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

المتتاليات العددية

3.1 مفاهيم أساسية

3.2 المتتاليات المحدودة

3.3 المتتاليات المطردة

3.4 المتتاليات المتقاربة

3.5 العدد النيبري e

3.6 المتتاليات اللامتناهية في الصغر

3.7 المتتاليات اللامتناهية في الكبر

3.8 المجالات المتداخلة

3.9 متتاليات كوشي

تمارين الفصل الثالث

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المتتاليات العددية

3.1 مفاهيم أساسية

تعريف 3.1: إذا قابل كل عدد طبيعي n عدد حقيقي a_n، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

تسمى متتالية عددية حقيقية لا نهائية، واختصاراً- متتالية.

ينتج من هذا التعريف مباشرةً، أن المتتالية العددية هي دالة عددية $f(n)$ في المتحول n من المجموعة $\mathbb{N}$. لذا فإنها تحقق معظم خواص الدوال الأساسية، حيث $D(f) = \mathbb{N}$.

نسمي العدد $a_n = f(n)$ الحد العام للمتتالية أو الحد النوني. ونرمز للمتتالية بالرمز $\{a_n\}$.

أمثلة على المتتاليات العددية:

1. المتتالية الثابتة، حدها العام $a_n = c$: $\{c, c, c, \ldots.\}$

2. $\{1^n\} = \{1, 1, 1, \ldots.\}$

3. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots.\}$

4. $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots.\}$

5. $\left\{\frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]\right\} = \{b, a, b, a, \ldots.\}$

6. المتتالية الحسابية: وهي المتتالية التي ينتج كل حد فيها، (باستثناء الحد الأول)، عن سابقه بإضافة عدد ثابت r (يسمى أساس المتتالية)، وتكتب بالشكل

$$\{a+nr\} = \{a+r, a+2r, a+3r, \ldots.\}$$

7. المتتالية الهندسية: هي متتالية حدها الأول غير معدوم، وينتج كل حد فيها، (باستثناء الحد الأول)، عن سابقه بضربه بعدد ثابت q (يسمى أساس المتتالية)، وتكتب بالشكل

$$\{q^n\} = \{q, q^2, q^3, \ldots.\}$$

ملحوظة 3.1 : ليس لكل متتالية حد عام، فمثلاً، لا يمكن التعبير عن الحد العام لمتتالية الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7, \ldots$ بعلاقة في n.

نقتصر في دراستنا على متتاليات لها حد عام من النمط $a_n = f(n)$.

تعريف 3.2: إن حاصل جمع أو طرح أو جداء أو قسمة متتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$

بالترتيب، المتتالية: $\{a_n + b_n\}$ أو $\{a_n - b_n\}$ أو $\{a_n \cdot b_n\}$ أو $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$، شرط عدم انعدام جميع حدود المتتالية $\{b_n\}$ في حالة القسمة.

مثال 3.1: إن حاصل جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة المتتاليتين $\{n\}$ و $\{(-1)^n\}$ هو على الترتيب المتتالية $\{n + (-1)^n\}$ أو $\{n - (-1)^n\}$ أو $\{n \cdot (-1)^n\}$ أو $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

ملحوظة 3.2 : يمكن النظر لحاصل ضرب المتتالية $\{a_n\}$ بالعدد الثابت c على أنه حاصل ضرب المتتالية $\{a_n\}$ بالمتتالية الثابتة التي حدها العام $b_n = c$، فنجد متتالية جديدة $\{c \cdot a_n\}$.

3.2 المتتاليات المحدودة

تعريف 3.3: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها محدودة من الأعلى، إذا وجد عدد حقيقي M، بحيث يكون

$$a_n \leq M \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

نسمي العدد M حد أعلى لهذه المتتالية.

تعريف 3.4 : نقول إن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة من الأدنى، إذا وجد عدد حقيقي m، بحيث يكون

$$a_n \geq m \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

نسمي العدد m حداً أدنى لهذه المتتالية.

كما هو واضح، فإن عدد الحدود العليا للمتتالية المحدودة من الأعلى غير منته، لأن أي عدد P: $P > M$ يمكن أن يكون حداً أعلى لها.

كذلك، فإن عدد الحدود الدنيا للمتتالية المحدودة من الأدنى غير منته، لأن أي عدد q : $q < m$ يمكن أن يكون حداً أدنى لها.

تعريف 3.5: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها محدودة، إذا وجد عددان حقيقيان m و M، بحيث يكون

$$m \leq a_n \leq M \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وبعبارة أخرى، تكون المتتالية $\{a_n\}$ محدودة، إذا وجد عدد حقيقي موجب K، بحيث يكون

$$|a_n| \le K \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

يمكن تمثيل المتتالية العددية بنقط على المحور الحقيقي. وعليه، فإذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة، أي $|a_n| \le K$ أو $m \le a_n \le M$، أياً يكن العدد الطبيعي n، فإن جميع حدود المتتالية تقع ضمن المجال $[-K;K]$، أو ضمن المجال $[m;M]$.

مثال 3.2: المتتالية $\{n\}$ محدودة من الأدنى فقط، لأن

$$n \ge 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال 3.3: المتتالية $\{5-n\}$ محدودة من الأعلى فقط، لأن

$$5-n \le 5 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال 3.4: المتتالية $\{(-1)^n\}$ محدودة، لأن

$$|(-1)^n| = 1 \le 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال 3.5: المتتالية $\{n\cos n\pi\}$ غير محدودة، لأنه لا يمكن إيجاد عدد حقيقي موجب K، بحيث يكون

$$|n\cos n\pi| = n \le K \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مبرهنة 3.1: إذا كانت المتتالية محدودة، فإن حذف عدد منته من حدودها أو إضافة عدد منته من الأعداد المحدودة لحدودها لا يؤثر على محدوديتها.

البرهان: إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة، فإنه يوجد العدد الحقيقي الموجب K، بحيث يكون

$$|a_n| \le K \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن جميع حدود المتتالية تقع ضمن المجال $[-K;K]$، وعليه، فإن حذف عدد منته من هذه الحدود يُبقي بقية حدود هذه المتتالية ضمن المجال المذكور.

وإذا أضفنا عدداً منتهياً من الأعداد المحدودة لحدود المتتالية، فإنه يمكن، إن لزم الأمر، توسيع المجال $[-K;K]$ لمجالٍ أكبر $[-M;M]$، بحيث تقع ضمنه جميع حدود المتتالية $\{a_n\}$ والحدود المضافة إليها. أي أن المتتالية الجديدة محدودة.

ملحوظة 3.3: تبقى المبرهنة صحيحة إذا كانت المتتالية محدودة من الأعلى فقط أو محدودة من الأدنى فقط.

مبرهنة 3.2: إذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ محدودتين، فإن المتتالية $\{a_n + b_n\}$ محدودة.

البرهان: لما كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة، فإنه يوجد عدد حقيقي موجب K_1، بحيث

$$|a_n| \le K_1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ولما كانت المتتالية $\{b_n\}$ محدودة، فإنه يوجد عدد حقيقي موجب K_2، بحيث

$$|b_n| \le K_2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

نشكل المتتالية $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$، عندئذ.

$$|c_n| = |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| \le K_1 + K_2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$ محدودة.

3.3 المتتاليات المطردة

تعريف 3.6: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها متزايدة (متزايدة تماماً)، إذا حققت الشرط:

$$a_{n+1} \ge a_n \quad (a_{n+1} > a_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي

$$a_{n+1} - a_n \ge 0 \quad (a_{n+1} - a_n > 0) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

تعريف 3.7 : نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها متناقصة (متناقصة تماماً)، إذا حققت الشرط

$$a_{n+1} \le a_n \quad (a_{n+1} < a_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي

$$a_{n+1} - a_n \le 0 \quad (a_{n+1} - a_n < 0) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ملحوظة 3.4 : إذا كان

$$a_n > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتتالية $\{a_n\}$ تكون متزايدة (متزايدة تماماً)، إذا كان

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad (\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وتكون متناقصة (متناقصة تماماً)، إذا كان

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \quad (\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

تسمى المتتاليات المتزايدة أو المتتاليات المتناقصة متتاليات مطردة.

وتسمى المتتاليات المتزايدة تماماً أو المتناقصة تماماً متتاليات مطردة تماماً.

مثال 3.6: ادرس اطراد المتتالية التي حدها العام $a_n = \frac{n}{n+1}$.

الحل: نحسب الفرق $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية المعطاة متزايدة تماماً.

مثال 3.7 : ادرس اطراد المتتالية التي حدها العام $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

الحل: واضح أن $(\forall n \in \mathbb{N})$, $a_n > 0$. نحسب حاصل القسمة $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فالمتتالية المعطاة متناقصة تماماً.

تعريف 3.8: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها متزايدة (متناقصة) بدءاً من العدد $n_0 > 1$ ، إذا تحقق الشرط

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n) \quad ; \quad n \geq n_0$$

ونعرف بأسلوب مشابه المتتاليات المتزايدة تماماً والمتناقصة تماماً بدءاً من العدد n_0.

مثال 3.9: ادرس اطراد المتتالية $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$.

الحل: واضح أن

$$a_n = \frac{2^n}{n!} > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

عندئذ:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} < 1 \quad ; \quad n \geq 2$$

فالمتتالية المعطاة متناقصة تماماً بدءاً من $n_0 = 2$.

ملحوظة 3.5: كل متتالية متزايدة تكون محدودة من الأدنى، لأن

$$a_n \geq a_1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وكل متتالية متناقصة تكون محدودة من الأعلى، لأن

$$a_n \leq a_1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

خواص المتتاليات المطردة:

1. ليكن : $c \in \mathbb{R}$ والمتتالية $\{a_n\}$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً). عندئذٍ:

- المتتالية $\{a_n + c\}$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً).
- المتتالية $\{c \cdot a_n\}$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) إذا كان $c > 0$، ومتناقصة تماماً (متزايدة تماماً) إذا كان $c < 0$.

وخصوصاً، المتتالية $\{-a_n\}$ متناقصة تماماً (متزايدة تماماً).

- المتتالية $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) بشرط $a_n \neq 0$، لأي n.
- المتتالية $\{a_n^2\}$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً)، إذا كان

$$a_n > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- المتتالية $\{a_n^2\}$ متناقصة تماماً (متزايدة تماماً) إذا كان

$$a_n < 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. إذا كانت إحدى المتتاليتين $\{a_n\}$ أو $\{b_n\}$ متزايدة تماماً والأخرى متزايدة، فإن:

- المتتالية $\{a_n + b_n\}$ متزايدة تماماً.
- المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متزايدة تماماً، إذا كانت جميع حدود المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ موجبة
- والمتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متناقصة تماماً، إذا كانت جميع حدود المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ سالبة.

3. إذا كانت إحدى المتتاليتين $\{a_n\}$ أو $\{b_n\}$ متناقصة تماماً والأخرى متناقصة، فإن:

- المتتالية $\{a_n + b_n\}$ متناقصة تماماً.
- المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متزايدة تماماً، إذا كانت جميع حدود المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ سالبة.
- المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متناقصة تماماً، إذا كانت جميع حدود المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ موجبة.

4. إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على المجموعة M، وكان $a_n \in M$، لأي عدد طبيعي n، وكانت المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً)، فإن:

- المتتالية $\{f(a_n)\}$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً)، إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متزايدة على M.

- المتتالية $\{f(a_n)\}$ متناقصة تماماً (متزايدة تماماً)، إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متناقصة على M.

نترك إثبات صحة هذه الخواص كتمرين للقارئ.

مثال 3.9 : أثبت أن المتتالية $\{a_n\} = \left\{\dfrac{-1}{n^2+n+2}\right\}$ متزايدة تماماً.

الحل: لما كانت المتتالية $\{n\}$ متزايدة تماماً، فإن المتتاليتين $\{n^2\}$ و $\{n+2\}$ متزايدتان تماماً. وعليه، فإن المتتالية $\{n^2+n+2\}$ متزايدة تماماً، ومنه فالمتتالية $\left\{\dfrac{1}{n^2+n+2}\right\}$ متناقصة تماماً. إذن فالمتتالية $\left\{\dfrac{-1}{n^2+n+2}\right\}$ متزايدة تماماً.

مثال 3.11: المتتاليات $\{\ln n\}$ و $\{e^n\}$ و $\{\sqrt[3]{n}\}$ هي متتاليات متزايدة تماماً، لأن المتتالية $\{n\}$ متزايدة تماماً والدوال $\ln x$ و e^x و $\sqrt[3]{x}$ متزايدة.

بينما المتتاليات $\left\{\ln\dfrac{1}{n}\right\}$ و $\{e^{1/n}\}$ و $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}$ هي متتاليات متناقصة تماماً، لأن المتتالية $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ متناقصة تماماً والدوال $\ln x$ و e^x و $\sqrt[3]{x}$ متزايدة.

3.4 المتتاليات المتقاربة

تعريف 3.9: نسمي العدد a، حيث $a < \infty$، نهاية المتتالية $\{a_n\}$، إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a| < \varepsilon \ ; \ n > n_0 \qquad (3.1)$$

ونكتب عندئذٍ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

نسمي المتتالية التي لها نهاية محدودة متتالية متقاربة.

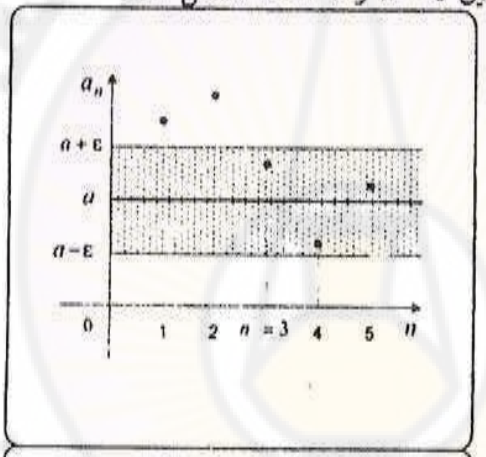
وإذا كان $a = \infty$ أو لم يكن للمتتالية نهاية، فإننا نقول إن المتتالية متباعدة.

لما كان بالإمكان تمثيل حدود المتتالية $\{a_n\}$ بنقط على محور الأعداد الحقيقية، فإن المتراجحة $|a_n - a| < \varepsilon$، أي $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ تعني أن العدد a_n ينتمي للمجال $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. وعليه، فإن وجود العدد a كنهاية للمتتالية $\{a_n\}$، يعني أنه أياً يكن العدد الحقيقي الموجب ε يوجد عدد طبيعي n، بحيث تقع جميع حدود المتتالية

$$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \cdots$$

داخل المجال $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$، ويقع خارج هذا المجال، ربما، عدد منته، أقل أو يساوي من n، من حدود المتتالية $\{a_n\}$.

ويعني ذلك، هندسياً، أن جميع النقط (n, a_n)، بدءاً من العدد $n > n$، تقع في الشريط الأفقي المحدد بالمستقيمين $a - \varepsilon$ و $a + \varepsilon$، الشكل 3.1.



الشكل 3.1

ملحوظة 3.6: إن العدد a قد ينتمي لحدود المتتالية المتقاربة من العدد a وقد لا ينتمي لحدودها.

مثال 3.11 : أثبت أن المتتالية $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ متقاربة من الواحد.

أي أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

الحل: إذا كانت نهاية المتتالية مساوية للواحد، فإن

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$

ولما كان $\frac{n+1}{n}-1=\frac{1}{n}$، فإن المتراجحة الأخيرة تكتب كمايلي:

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow \quad n>\frac{1}{\varepsilon}$$

ومنه، يمكن اختيار n_0 عدد أكبر من $\frac{1}{\varepsilon}$، مثلاً $n_0=1+\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. فنجد:

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \exists n_0=1+\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] : \forall n>n_0 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\frac{1}{1+[1/\varepsilon]}<\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon$$

مثال 3.12 : أثبت أنه إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة وكان $\lim_{n\to\infty} a_n=a$، فإن المتتالية $\{\sin a_n\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}\sin a_n=\sin(\lim_{n\to\infty} a_n)=\sin a$.

الحل: لما كان $\lim_{n\to\infty} a_n=a$، فإن

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ : \ |a_n-a|<\varepsilon \ , \ \forall n>n_0$$

وعليه، فإن

$$|\sin a_n-\sin a|=2\left|\sin\tfrac{1}{2}(a_n-a)\cos\tfrac{1}{2}(a_n+a)\right|\le 2\left|\sin\tfrac{1}{2}(a_n-a)\right|\le$$

$$\le 2\left|\tfrac{1}{2}(a_n-a)\right|=|a_n-a|<\varepsilon \quad , \quad \forall n>n_0$$

أي:

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon)\subset\mathbb{N} : \ |\sin a_n \ \ \sin a|<\varepsilon \ , \ \forall n>n_0$$

ومنه، فالمتتالية $\{\sin a_n\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}\sin a_n=\sin a$.

3.3.1 خواص المتتاليات المتقاربة

نثبت صحة بعض الخواص ونترك البقية كتمرين للقارئ.

1. وحدانية النهاية: للمتتالية المتقاربة نهاية وحيدة.

البرهان: ليكن $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ و $\lim_{n\to\infty} a_n=b$ ونبرهن أن $a=b$.

نفرض جدلاً، أن $a\neq b$. وليكن، مثلاً، $a<b$. نختار العدد $\varepsilon=\frac{1}{4}(b-a)$. عندئذ يتحقق:

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \exists n_0'(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ : \ |a_n-a|<\varepsilon \ , \ \forall n>n'$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0''(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - b| < \varepsilon \ , \ \forall n > n_0''$$

عندئذ يكون الشرطان السابقان صحيحين من أجل $n > n_0$، حيث $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$.

وعليه، فإن

$$|b-a| = |b - a_n + a_n - a| \le |b - a_n| + |a_n - a| <$$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2 \cdot \tfrac{1}{4}(b-a) = \tfrac{1}{2}(b-a)$$

تناقض. إذن $a = b$.

نتيجة 3.1: إذا كان للمتتالية أكثر من نهاية "فرعية"، فإن المتتالية متباعدة.

فمثلاً، المتتالية $\{(-1)^n\}$ متباعدة، لأن لها نهايتين "فرعيتين":

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{cases} 1 & ; \ n = 2k \\ -1 & ; \ n = 2k+1 \end{cases} \quad ; \quad (k \in \mathbb{N})$$

2. المتتاليات المتقاربة محدودة.

البرهان: ليكن $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ونبرهن أن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة. لما كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة، فإن

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - a| < \varepsilon \ , \ \forall n > n_0$$

ومنه،

$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| \quad , \quad \forall n > n_0$$

نختار العدد k كما يلي: $k = \max\{\varepsilon + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$

فنجد

$$|a_n| \le k \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة.

ملحوظة 3.7: إن شرط محدودية المتتالية هو شرط لازم وغير كاف لتقاربها، فمثلاً المتتالية $\{(-1)^n\}$ محدودة ولكنها متباعدة.

3. إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = a$، فإن $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$، حيث k عدد طبيعي ثابت. أي إذا كانت المتتالية متقاربة، فإن حذف عدد محدود من حدودها لا يؤثر على تقاربها.

4. إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ تحقق العلاقتين $\lim_{n\to\infty} a_{2k} = a$ و $\lim_{n\to\infty} a_{2k+1} = a$، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

5. المتتالية الثابتة، التي حدها العام $a_n = c$ متقاربة، أي $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

6. لتكن المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقاربتين و $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. عندئذٍ:

- المتتالية $\{a_n \mp b_n\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}(a_n \mp b_n) = a \mp b$.
- المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- المتتالية $\{\alpha \cdot a_n\}$ (حيث α ثابت) متقاربة و $\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a$.
- إذا كان $b_n \neq 0$، أياً يكن العدد الطبيعي n، وكان $b \neq 0$ ، فإن المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

ملحوظة 3.8: يمكن أن تكون إحدى النهايات $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ أو $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ أو $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ أو $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ موجودة بينما تكون إحدى أو كلتا المتتاليتين $\{a_n\}$ أو $\{b_n\}$ متباعدة.

فمثلاً، المتتاليتان $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ و $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$ متباعدتان، مع أن المتتالية $\{a_n + b_n\} = \{0\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ ، والمتتالية $\{a_n \cdot b_n\} = \{-1\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -1$.

ملحوظة 3.9: إذا وجدت نهايتان من النهايات الثلاث $\lim_{n\to\infty} a_n$ و $\lim_{n\to\infty} b_n$ و $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ ، فإن النهاية الثالثة موجودة حتماً.

7. إذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقاربتين وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ وكانت جميع حدود المتتالية $\{b_n\}$ موجبة تماماً، فإن المتتالية $\{b_n^{a_n}\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = b^a$.

8. إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، فإن المتتالية $\{|a_n|\}$ متقاربة $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

ملحوظة 3.10 : إن عكس هذه الخاصة غير صحيح بالضرورة. أي إذا كانت المتتالية $\{|a_n|\}$ متقاربة، فإنه ليس بالضرورة أن تكون المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة.

فمثلاً، المتتالية $\{1^n\} = \{|(-1)^n|\}$ متقاربة، بينما المتتالية $\{(-1)^n\}$ متباعدة.

9. إذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متقاربتين، وكان

$$a_n \le b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

وخصوصاً، إذا كان

$$a_n < b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

فمثلاً، المتتاليتان $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ متقاربتان و تحققان العلاقة

$$a_n > b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

نتيجة 3.2 : إذا كانت جميع حدود المتتالية المتقاربة موجبة، فإن نهايتها عدد غير سالب.

نتيجة 3.3 : إذا كانت جميع حدود المتتالية المتقاربة سالبة، فإن نهايتها عدد غير موجب.

10. إذا كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{c_n\}$ متقاربتين، وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ وكان

$$a_n \le b_n \le c_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتتالية $\{b_n\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

11. إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة، وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = a$، وكانت $f(x)$ دالة ابتدائية بسيطة معرفة على المجموعة M، أي $D(f) = M$، بحيث

$$a_n \in M \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

عندئذٍ، فإن المتتالية $\{f(a_n)\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

وخصوصاً،

$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\alpha} = a^{\alpha}$ ، $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = \sin a$ ، $\lim_{n\to\infty} \log_q a_n = \log_q a$ ،

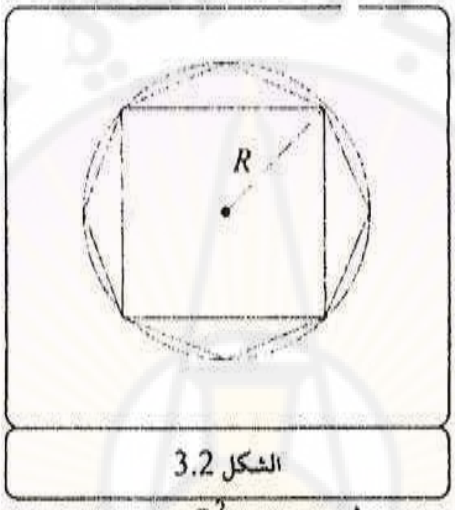
$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{a_n} = \alpha^{a} \quad , \quad (0 < \alpha \neq 1) \text{ ، ...}$$

12. إذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى، فإنها تكون متقاربة.

13. إذا كانت المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى، فإنها تكون متقاربة.

مثال 3.13 : لتكن a_n مساحة مضلع منتظم عدد زواياه 2^{n+1}، حيث $n \in \mathbb{N}$، مرسوم داخل دائرة نصف قطرها R. أثبت أن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة.

الحل: واضح من الشكل 3.2 أنه بمضاعفة عدد أضلاع المضلع فإن مساحة المضلع تزداد، أي أن المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة.



الشكل 3.2

إن جميع حدود هذه المتتالية ليست أكبر من العدد πR^2 (مساحة الدائرة). أي أن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة من الأعلى. وعليه، فإن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة.

مثال 3.14 : احسب الجذر التربيعي للعدد الموجب x.

الحل: نفرض أن a_1 قيمة تقريبية للجذر $\sqrt{x}$ (أكبر من الجذر نفسه). إن $x^2 \geq x$ من أجل $x \geq 1$ ، أما من أجل $0 < x < 1$، فإن $x \leq 1$.

أي يمكن أن نأخذ العدد a_1 أكبر العددين x و 1 . أي $a_1 = \max\{x,1\}$.

عندئذٍ، فإن العدد $\frac{x}{a_1}$ هو قيمة تقريبية للجذر $\sqrt{x}$ (أصغر منه). ولما كان الوسط الحسابي لعددين أكبر أو يساوي الوسط الهندسي لهما، أي $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$ ، فإن

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right) \geq \sqrt{a_1 \cdot \frac{x}{a_1}} = \sqrt{x}$$

أي أن الوسط الهندسي a_2 هو قيمة تقريبية للجذر $\sqrt{x}$ (أكبر منه). عندئذٍ، فإن العدد $\frac{x}{a_2}$ هو قيمة تقريبية للجذر $\sqrt{x}$ (أصغر منه).

وبمناقشة مشابهة، نجد قيمة تقريبية للجذر أكثر دقة $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{x}{a_2}\right)$.

وعموماً، إذا وجدنا قيمة تقريبية للجذر $\sqrt{x}$، لتكن a_n، فإن القيمة التقريبية التالية هي:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \qquad (*)$$

وهكذا، نكون قد حصلنا بالتوالي على متتالية من القيم التقريبية:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \; ; \; a_1 = \max\{x,1\}$$

نبرهن الآن، أن هذه المتتالية متقاربة ونهايتها العدد $\sqrt{x}$.

نفرض أن هذه المتتالية متقاربة و $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. عندئذٍ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = b$.

نأخذ نهاية طرفي المساواة (*):

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{b}\right) \Rightarrow b = \sqrt{x}$$

وعليه، فإذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة فإن نهايتها هي $\sqrt{x}$.

إذا كان $a_n = \sqrt{x}$ من أجل قيمة معينة لـ n، فإنه من العلاقة (*)، نجد

$$a_{n+1} = \sqrt{x} \; , \; a_{n+2} = \sqrt{x} \; , \; \ldots$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

أما إذا كان $a_n \neq \sqrt{x}$ أياً يكن العدد الطبيعي n، فإن العددين a_n و $\frac{x}{a_n}$ ليسا عددين موجبين، ويكون الوسط الحسابي لهما أكبر تماماً من الوسط الهندسي لهما، أي:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) > \sqrt{a_n \cdot \frac{x}{a_n}} = \sqrt{x} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وعليه، فإن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة من الأدنى، والعدد $\sqrt{x}$ أحد الحدود الدنيا لها.

ولما كان

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - a_n = \frac{x - a_n^{\,2}}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وكان $a_n > \sqrt{x}$ ، فإن $x - a_n^{\,2} < 0$ أي $a_{n+1} < a_n$ أياً يكن العدد الطبيعي n.

وهكذا، نكون قد أثبتنا أن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة من الأدنى ومتناقصة تماماً، فهي متقاربة.

تطبيق: نحسب مثلاً، قيمة الجذر $\sqrt{2}$ بوساطة طريقة التقريبات المتتالية.

ليكن $a_1 = 2$ ، عندئذٍ، فإن

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 1.5 \ ، \ a_3 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.4166 \ ، \ a_4 = 1.41421 \ ، \ \ldots$$

وبالمتابعة نحصل على قيم أكثر دقة حسبما تكون الدقة مطلوبة. فإذا كان المطلوب حساب $\sqrt{2}$ بدقة 0.001، فإنه يكفي أن نأخذ أربعة حدود من التقريبات، أي $\sqrt{2} = 1.414$.

3.5 العدد النيبري e

مبرهنة 3.3 : أثبت أن المتتالية التي حدها العام $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ متقاربة.

البرهان: ندرس متتالية مساعدة حدها العام $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ونثبت أنها متقاربة.

نثبت أولاً، أن هذه المتتالية متناقصة تماماً:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$$

وباستخدام متراجحة بيرنولي (1.5):

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2+2n} >$$

$$> 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2+2n+1} = 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

نجد

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\{b_n\}$ متناقصة تماماً.

نثبت الآن أن هذه المتتالية محدودة من الأدنى.

باستخدام متراجحة بيرنولي، مرة أخرى:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n} > 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

نجد

$$b_n > 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\{b_n\}$ محدودة من الأدنى.

وهكذا، نكون قد أثبتنا أن المتتالية $\{b_n\}$ متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى، فهي متقاربة.

وعليه، فإن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة، لأن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} b_n$$

نكتب بعض حدود المتتالية $\{a_n\}$:

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \text{ ، } a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \text{ ، } a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.37 \text{ ،}$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.44 \text{ ، } a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2.49 \ldots.$$

وهكذا بالمتابعة نحصل على قيم أكثر قرباً من نهاية هذه المتتالية. نرمز لنهاية هذه المتتالية بالرمز e (ويسمى العدد النيبري). وهو يساوي ...2.718281284590 وهو عدد غير عادي، ويؤدي دوراً هاماً في الرياضيات.

3.8 المتتاليات اللامتناهية في الصغر

نسمي المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر (أو a_n متغيّر لا متناه في الصغر)، إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، أي إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ |a_n| < \varepsilon \quad , \quad \forall n > n_0$$

مثال 3.15 : أثبت أن المتتالية $\{a_n\} = \left\{\frac{a}{bn+c}\right\}$ هي متتالية لامتناهية في الصغر، حيث a و b و c ثوابت حقيقية و $a \neq 0$ و $b > 0$.

الحل: ليكن ε عدداً موجباً اختيارياً. ندرس المتراجحة

$$\left|\frac{a}{bn+c}\right| < \varepsilon \qquad (i)$$

واضح أن

$$\frac{|a|}{|bn+c|} < \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{|bn+c|}{|a|} > \frac{1}{\varepsilon} \ \Rightarrow \ |bn+c| > \frac{|a|}{\varepsilon}$$

ولما كان $b > 0$، فإنه بدءاً من عددٍ معين n_1 يكون $bn + c > 0$، أي $|bn+c| = bn+c$. وعليه، فإن:

$$bn + c > \frac{|a|}{\varepsilon} \quad ; \quad \forall n > n_1$$

أي أن

$$n > \frac{1}{b}\left(\frac{|a|}{\varepsilon} - c\right) \quad ; \quad \forall n > n_1 \qquad (ii)$$

نختار العدد

$$n_0 = \max\left\{n_1 , \frac{1}{b}\left(\frac{|a|}{\varepsilon} - c\right)\right\}$$

عندئذٍ، أياً يكن العدد $n > n_0$، فإن (ii) محققة، ومنه فإن (i) محققة. أي أن المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

ملحوظة 3.11 : يمكن إعادة صياغة تعريف تقارب متتالية 3.9 ، بمساعدة المتتاليات اللامتناهية في الصغر.

تعريف 3.10 : نسمي العدد $a < \infty$ نهاية المتتالية $\{a_n\}$، إذا كانت المتتالية $\{b_n\} = \{a_n - a\}$ متتالية لامتناهية في الصغر. ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

وعليه، فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من العدد a هو أن يكون $a_n = a + b_n$، أياً يكن العدد الطبيعي n، حيث $\{b_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

3.6.1 خواص المتتاليات اللامتناهية في الصغر

نثبت صحة إحدى الخواص ونترك البقية كتمرين للقارئ.

1. المتتالية الثابتة: $\{c, c, c, ,... \}$ هي متتالية لامتناهية في الصغر، إذا وفقط إذا كان $c = 0$.

2. إن المتتالية اللامتناهية في الصغر تبقى كذلك إذا حذفنا عدداً منتهياً من حدودها، أو إذا أضفنا عدداً منتهياً من الأعداد المحدودة.

3. إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، وكان

$$|a_n| \geq |b_n| \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $\{b_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

4. المتتالية اللامتناهية في الصغر هي متتالية محدودة.

5. حاصل جمع متتاليتين لا متناهيتين في الصغر هو متتالية لامتناهية في الصغر.

6. حاصل جداء متتالية لامتناهية في الصغر ومتتالية محدودة هو متتالية لامتناهية في الصغر.

البرهان: لتكن المتتالية $\{a_n\}$ محدودة، أي

$$\exists K > 0 \; : \; |a_n| \leq K \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ولتكن $\{b_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر: أي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; : \; |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \quad ; \quad \forall n > n_0$$

نشكل المتتالية $\{c_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n_\circ(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \quad ; \quad \forall n > n_\circ$$

أي أن $\{c_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

نتيجة 3.4: إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، وكان α ثابتاً، فإن $\{\alpha \cdot a_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

نتيجة 3.5: جداء عدد منتهٍ من المتتاليات اللامتناهية في الصغر هو متتالية لامتناهية في الصغر.

نتيجة 3.6: إذا كانت $\{c_n\}$ ، ...، $\{b_n\}$ ، $\{a_n\}$ متتاليات لامتناهية في الصغر، وكانت $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ ثوابت. عندئذٍ، تكون المتتالية $\{\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n + \ldots + \gamma \cdot c_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

مثال 3.16 : لما كانت المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، لأن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن $\left\{\frac{3}{n}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، وفقاً للنتيجة 3.4، حيث $\alpha = 3$.

و $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر وفقاً للنتيجة 3.5، لأن $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$.

و $\left\{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، وفقاً للنتيجة 3.6، لأن

$$\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ملحوظة 3.12 : إن حاصل قسمة لا متناهيين في الصغر، ليس بالضرورة متتالية لامتناهية في الصغر.

مثال 3.17 : إذا كانت $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ متتاليتين لا متناهيتين في الصغر، فإن المتتالية

$$\{c_n\} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \{2, 2, 2, \ldots\}$$

هي المتتالية الثابتة، وهي ليست متتالية لامتناهية في الصغر.

مثال3.18 : برهن أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ و $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ، حيث $a > 0$.

الحل: نرمز بـ $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$ ونثبت أن المتتالية $\{\alpha_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

واضح أن $\alpha_n \geq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n.

لما كان $\sqrt[n]{n} = \alpha_n + 1$، فإن $n = (\alpha_n + 1)^n$. ومنه:

$$n = (\alpha_n + 1)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{1}{2}n(n-1)\,{\alpha_n}^2 + \ldots + {\alpha_n}^n$$

أي أن

$$n \geq \frac{1}{2}n(n-1)\,{\alpha_n}^2 \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

ومنه

$$0 \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

نأخذ نهاية أطراف هذه المتراجحة

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$$

فنجد $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ، أي أن $\{\alpha_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر.

وعليه، فإن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

لما كان

$$\forall a > 0 \quad ; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \frac{1}{n} < a < n \quad ; \quad \forall n > n_0$$

فإنه، بأخذ الجذر النوني لأطراف هذه المتراجحة:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \quad ; \quad \forall n > n_0$$

نأخذ نهاية أطراف هذه المتراجحة:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

3.7 المتتاليات اللامتناهية في الكبر

تعريف 3.10 : نقول إن المتتالية $\{a_n\}$ متباعدة إلى $+\infty$ ، ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ، إذا تحقق الشرط

$$\forall M > 0 \quad ; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad a_n > M \quad ; \quad \forall n > n_0$$

تعريف 3.11 : نقول إن المتتالية $\{a_n\}$ متباعدة إلى $-\infty$ ، ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ، إذا تحقق الشرط

$$\forall M < 0 \quad ; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad a_n < M \quad ; \quad \forall n > n_0$$

تعريف 3.12 : نسمي المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر أو متباعدة إلى اللانهاية ونكتب $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ (او $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$)، إذا تحقق الشرط

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n| > M \quad ; \quad \forall n > n_0$$

مثال 3.19 : ناقش حسب قيم $q \in \mathbb{R}$ تقارب وتباعد المتتالية الهندسية $\{q^n\}$.

الحل:

أ- إذا كان $q = 0$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ والمتتالية الهندسية متقاربة .

ب- إذا كان $q = 1$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$ والمتتالية الهندسية متقاربة .

ج- إذا كان $q = -1$ ، فإن المتتالية $\{q^n\} = \{(-1)^n\}$ متباعدة.

د- نفرض أن $0 < |q| < 1$ ، ولنثبت أن المتتالية $\{q^n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، أي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad |q^n| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n > n_0$$

لما كان $|q^n| = |q|^n < \varepsilon$ ، فإن $n > \log_q \varepsilon$. نختار، مثلاً، $n_0 = \lfloor \log_q \varepsilon \rfloor + 1$ ، فنجد

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n_0 = \lfloor \log_q \varepsilon \rfloor + 1 \in \mathbb{N} \quad : \quad |q^n| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n > n_0 \ .$$

فالمتتالية لامتناهية في الصغر، أي أن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

هـ- نفرض أن $|q| > 1$ ، ولنثبت أن المتتالية $\{q^n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر، أي

$$\forall M > 0 \quad ; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad |q^n| > M \quad ; \quad \forall n > n_0$$

لما كان $|q^n| = |q|^n > M$ ، فإن $n > \log_q M$. نختار، مثلاً، $n_0 = \lfloor \log_q M \rfloor + 1$ فنجد:

$$\forall M > 0 \quad ; \quad \exists n_\circ = \left[\log_q M\right] + 1 \in \mathbb{N} \quad : \quad \left|q^n\right| > M \quad ; \quad \forall n > n_\circ$$

فالمتتالية $\{q^n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر، أي $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

وهكذا، فإن المتتالية الهندسية $\{q^n\}$ متقاربة من أجل $-1 < q \le 1$ ، ومتباعدة عدا ذلك.

3.7.1 خواص المتتاليات اللامتناهية في الكبر

نثبت صحة إحدى الخواص ونترك البقية كتمرين للقارئ.

1. الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر هو أن تكون المتتالية $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر، حيث $a_n \neq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n.

2. حاصل جداء متتالية لامتناهية في الكبر $\{a_n\}$ ومتتالية متقاربة $\{b_n\}$ (ليست متتالية لامتناهية في الصغر) هو متتالية لامتناهية في الكبر.

البرهان: ليكن

$$c_n = a_n \cdot b_n \qquad ; \qquad a_n \cdot b_n \neq 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

وليكن $\alpha_n = \frac{1}{c_n}$، أي أن

$$\alpha_n = \frac{1}{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{b_n}$$

لما كان $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. أي أن المتتالية $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ متقاربة، فهي محدودة.

ولما كانت المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر، فإن المتتالية $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ متتالية لامتناهية في الصغر. عندئذ، وفقاً للخاصة 6 من خواص المتتاليات اللامتناهية في الصغر، تكون المتتالية $\{\alpha_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر. وعليه، فإن المتتالية $\{c_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر.

3. إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر والمتتالية $\{b_n\}$ محدودة، فإن المتتاليات $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n \cdot b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ، حيث $b_n \neq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n، متتاليات لامتناهية في الكبر، أي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty \text{ و } \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty \text{ و } \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$$

وخصوصاً، إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ والمتتالية $\{b_n\}$ محدودة من الأدنى، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$$

وإذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ والمتتالية $\{b_n\}$ محدودة من الأعلى، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-\infty$$

4. إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ وكانت المتتالية $\{b_n\}$ تحقق الشرط

$$b_n\geq a_n \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

فإن $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$.

مثال 3.20 : إذا كان $a_n=n^2$ و $b_n=2+\sin^3(n^2+n)$، فإن

$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ و

$$1\leq b_n\leq 3 \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty \text{ و } \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty \text{ و } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty \text{ و }$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

مثال 3.21 : أثبت أن $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+n^2\ln n\right)=+\infty$.

الحل: من أجل $n\geq 3$ ، نجد

$$n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+n^2\ln n=n-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+n^2\ln n\geq$$

$$\geq n-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+n^2\ln n\geq n^2$$

ولما كان $\lim_{n\to\infty} n^2=+\infty$ ، فإن $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+n^2\ln n\right)=+\infty$.

مثال 3.22 : أثبت أن $\{a_n\}=\{n^3-2n+5\}$ متتالية لامتناهية في الكبر.

الحل: نكتب الحد العام لهذه المتتالية بالشكل:

$$a_n = n^3 - 2n + 5 = n^3\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right) = b_n \cdot c_n$$

حيث $b_n = n^3$ حد عام لمتتالية لامتناهية في الكبر و $c_n = 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}$ حد عام لمتتالية متقاربة، وهي ليست متتالية لامتناهية في الصغر، لأن

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right) = 1$$

عندئذٍ، المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر، وفقاً للخاصة 2.

ملحوظة 3.13 : إن شرط كون المتتالية $\{b_n\}$ متقاربة وليست متتالية لامتناهية في الصغر الواردة في الخاصة 2 ضروري. فإذا كانت المتتالية المتقاربة $\{b_n\}$ متتالية لامتناهية في الصغر وكانت المتتالية $\{a_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر، فإنه ليس بالضرورة أن تكون المتتالية $\{a_n \cdot b_n\}$ متتالية لامتناهية في الكبر.

وعموماً، لا يوجد جواب محدد على الأسئلة التالية:

1. إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ فهل للمتتاليتين $\{a_n - b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$، حيث $b_n \neq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n، نهاية؟

2. إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ فهل للمتتاليتين $\{a_n \cdot b_n\}$ أو $\{a_n{}^{b_n}\}$ نهاية؟

3. إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ فهل للمتتاليتين $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$، حيث $b_n \neq 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n، أو $\{a_n{}^{b_n}\}$ نهاية؟

4. إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ فهل للمتتالية $\{a_n{}^{b_n}\}$ نهاية؟

نسمي هذه الحالات حالات عدم تعيين. أما الإجابة على هذه الأسئلة فتسمى إزالة حالات عدم التعيين.

مثال 3.23 : أوجد نهاية المتتالية $\{a_n - b_n\}$ في الحالتين:

أ- إذا كان $a_n = \sqrt{n^2 + n}$ و $b_n = n$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

ب- إذا كان $a_n=n^2+n$ و $b_n=n$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2+n-n)=\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty$$

مثال 3.24 : أوجد نهاية المتتالية $\{a_n\cdot b_n\}$ في الحالات التالية:

أ- إذا كان $a_n=n^2$ و $b_n=\frac{1}{n}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

ب- إذا كان $a_n=n$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ج- إذا كان $a_n=n$ و $b_n=\frac{1}{n}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

د- إذا كان $a_n=n$ و $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

وهذه النهاية غير موجودة.

مثال 3.25 : أوجد نهاية المتتالية التي حدها العام

$$a_n=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

الحل: واضح أن $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\infty}{\infty}$ وهي حالة عدم تعيين. لإزالتها نستخدم العلاقة

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1+q^{n+1}}{1-q}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{1+\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2.3^n}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1+\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2+\frac{1}{2^n}$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2.3^{n+1}}}{2+\frac{1}{2^n}}=\frac{3}{4}$$

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 3.3 (مبرهنة شتولتز): إذا كانت المتتالية $\{b_n\}$ متزايدة تماماً، وكان $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$، وكانت المتتالية $\left\{\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right\}$ متقاربة من العدد a. عندئذٍ، تكون المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ متقاربة من العدد a. أي $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

ملحوظة 3.14 : تبقى هذه المبرهنة صحيحة حتى إذا كان $a=\infty$.

مثال 3.26 : احسب نهاية المتتالية $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$، حيث $a>1$.

الحل: نفرض $a_n=a^n$ و $b_n=n$. ندرس تقارب المتتالية $\left\{\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right\}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(a^n-a^{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)=\infty$$

ولما كانت المتتالية $\{b_n\}$ متزايدة تماماً و $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$، فإنه، وفق مبرهنة شتولتز، يكون $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=\infty$

مثال 3.27 : أثبت أنه إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة من العدد a (يمكن أن يكون $a=\infty$)، فإن المتتالية $\left\{\frac{x_1+x_2+\ldots++x_n}{n}\right\}$ متقاربة من العدد a .

الحل: نفرض $a_n = x_1+x_2+\ldots++x_n$ و $b_n = n$. عندئذٍ، فإن

$$x_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

وعليه، فإن شروط مبرهنة شتولتز محققة. ومنه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots++x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}x_n = a$$

تطبيق : إذا كان $x_n = \sqrt[n]{n}$ ، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\ldots++\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 3.4 : إذا كان

$$0 < a_n < \infty \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وكانت النهاية $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجودة، فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_n}$$

نتيجة 3.7 : إذا كان

$$0 < a_n < \infty \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وكانت النهاية $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ موجودة، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

بالفعل، فإذا فرضنا $b_1 = a_1$ ، $b_2 = \frac{a_2}{a_1}$ ، $b_3 = \frac{a_3}{a_2}$ ، .... ، $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ، فإن $a_n = b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdots b_n$. ويكون

$$0 < b_n < \infty \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ولما كان $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ، فإنه وفق المبرهنة 3.4 ، يكون

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال 3.28 : احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

الحل: نفرض $a_n = n!$. كما هو واضح، فإن $a_n > 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n. وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

مثال 3.29 : احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

الحل: نفرض $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. كما هو واضح، فإن $a_n > 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n. وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}$$

مثال 3.30 : احسب قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)}$ ، حيث $P_k(n)$ حدودية من الدرجة k في المتغير n ، و $P_k(n) > 0$ أياً يكن العدد الطبيعي n .

الحل: ليكن $P_k(n) = \alpha n^k + \beta n^{k-1} + \cdots + \gamma$. عندئذٍ،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{P_k(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n^k + \beta n^{k-1} + \cdots + \gamma}{\alpha(n-1)^k + \beta(n-1)^{k-1} + \cdots + \gamma} = 1$$

3.8 المجالات المتداخلة

ليكن لدينا متتالية من المجالات:

$$[a_1;b_1], [a_2;b_2], \ldots, [a_n;b_n], \ldots \quad (3.1)$$

بحيث يكون

$$[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots$$

أي

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (3.2)$$

وليكن $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

نسمي هذه المتتالية متتالية المجالات المتداخلة.

مبرهنة 3.5 (مبرهنة المجالات المتداخلة): أيا تكن متتالية المجالات المتداخلة (3.1)، فإنه توجد نقطة وحيدة تنتمي لجميع مجالات هذه المتتالية.

البرهان: ينتج من المتراجحة (3.2)، أن الأطراف اليسرى من المجالات (3.1) تشكل متتالية عددية متزايدة:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots \qquad (3.3)$$

وتشكل الأطراف اليمنى من المجالات متتالية عددية متناقصة

$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge b_{n+1} \ge \cdots \qquad (3.4)$$

كذلك، فإن المتتالية (3.3) محدودة من الأدنى، والمتتالية (3.4) محدودة من الأعلى، لأن

$$a_n \le b_1 \quad و \quad b_n \ge a_1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وعليه، فإن المتتاليتين (3.3) و (3.4) متقاربتان.

ليكن $\lim_{n\to\infty} a_n = c'$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = c''$. ولما كان $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$، فإن

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c'' - c' = 0$$

إذن $c' = c''$، أي أن للمتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ نهاية وحيدة، نرمز لها بالرمز c. أي

$$a_n \le c \le b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وعليه، فإن النقطة c تنتمي لجميع مجالات المتتالية (3.1).

بقي علينا إثبات أن هذه النقطة وحيدة.

نفرض جدلاً، وجود نقطة أخرى $c^* \ne c$ تنتمي لجميع مجالات المتتالية (3.1). عندئذٍ:

$$|b_n - a_n| \ge |c^* - c| \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \ge |c^* - c| \ne 0$$

يُثبت هذا التناقض أن النقطة c وحيدة.

ملحوظة 3.15 : تكون هذه المبرهنة غير صحيحة، إذا كانت مجالات المتتالية (3.5) مفتوحة. فمثلاً، من أجل المتتالية

$$]0;1[\supset]0;\tfrac{1}{2}[\supset]0;\tfrac{1}{4}[\supset\ \ldots\ \supset]0;\tfrac{1}{2^n}[\supset\ \ldots$$

لا يوجد نقطة تنتمي لجميع هذه المجالات.

3.9 متتاليات كوشي[1]

تعريف 3.13 : نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ إنها متتالية كوشي، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n\,(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n, m \geq n$$

مثال 3.31 : المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متتالية كوشي.

الحل: نتحقق من الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n\,(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \quad : \quad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad ; \quad \forall n, m \geq n$$

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad ; \quad \forall n, m \geq n$$

أي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n\,(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \quad : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n, m \geq n$$

مبرهنة 3.6 : الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية هو أن تكون متتالية كوشي.

البرهان:

اللزوم: نفرض أن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من العدد a. ونثبت أن هذه المتتالية متتالية كوشي.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n\,(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad ; \quad \forall n \geq n$$

وعليه، فإن

$$\forall n, m \geq n \Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |a_m - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

---

[1] ليو اوغستين كوشي (1789-1857) عالم رياضيات فرنسي

أي

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n, m \geq n_{\varepsilon}$$

الكفاية: نفرض أن المتتالية $\{a_n\}$ متتالية كوشي. ونثبت أنها متقاربة من a.

ليكن $\varepsilon = 1$. عندئذٍ، يوجد العدد n_1، بحيث يكون

$$|a_n - a_m| < 1 \quad ; \quad \forall n, m \geq n_1$$

وعليه، فإن

$$1 > |a_n - a_m| \geq \big||a_n| - |a_m|\big| \quad ; \quad \forall n, m \geq n_1$$

أي أن

$$|a_n| < 1 + |a_m| \quad ; \quad \forall n, m \geq n_1$$

أي أن المتغير a_n محدود، أياً تكن $n > m$، من أجل عدد مثبت m.

نعرّف، من أجل أي عدد طبيعي n العددين

$$\beta_n = \sup\{a_k \ ; \ k > n\} \text{ و } \alpha_n = \inf\{a_k \ ; \ k > n\}$$

وعليه، فإن المجال $[\alpha_n;\beta_n]$ هو مجال أصغري، يحوي جميع المتغيرات a_n أياً يكن $k > n$. ويكون

$$[\alpha_n;\beta_n] \supset [\alpha_{n+1};\beta_{n+1}] \supset \cdots \qquad (3.9)$$

حيث $\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n$، وطول المجال $[\alpha_n;\beta_n]$ يسعى إلى الصفر، عندما تسعى n إلى ∞. ولما كانت المتتالية $\{a_n\}$ متتالية كوشي، فإنه يتحقق الشرط.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad a_{n_1} - \varepsilon < a_k < a_{n_1} + \varepsilon \quad ; \quad \forall k \geq n_1$$

واستناداً لمبرهنة المجالات المتداخلة. توجد نقطة a تنتمي لجميع المجالات (3.9)، وهي النقطة المطلوبة. لأنه أياً يكن المجال $]c;d[$، الذي يحوي النقطة a، فإنه يوجد العدد الطبيعي n، بحيث يكون $[\alpha_n;\beta_n] \subset]c;d[$. وعليه، فإن

$$a_k \in [\alpha_n;\beta_n] \subset]c;d[\quad ; \quad \forall k \geq n$$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Damascus University

تمارين الفصل الثالث

1. أوجد الحد العام لكلٍ من المتتاليات التالية:

$\{1,7,31,127,511,\dots\}$

$\left\{1,\frac{4}{3},\frac{1}{2},\frac{4}{5},\frac{1}{3},\dots\right\}$

$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},-\frac{1}{8},\dots\right\}$

$\left\{-1,-\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},-\frac{1}{25},-\frac{1}{36},\dots\right\}$

$\left\{1,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{4}},\dots\right\}$

$\left\{1,-2,\frac{1}{3},-4,\frac{1}{5},-6,\dots\right\}$

$\{1,0,-1,1,0,-1,1,0,\dots\}$

$\{0,3,2,5,4,7,\dots\}$

2. اكتب خمسة حدود من كلٍ من المتتاليات التالية:

$a_{n+2}=\frac{1}{2}(3a_{n+1}-a_n)\ ;\ a_1=0\ ,\ a_2=1$

$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n\ ;\ a_1=a\ ,\ a_2=b$

$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n+2\ ;\ a_1=1\ ,\ a_2=1$

$a_{n+1}=(n+1)(1+a_n)\ ;\ a_1=a$

$a_n=\sin a_{n-1}\ ;\ a_1=\sin x$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}\ ;\ a_1=\dfrac{1}{2}$

3. اثبت أن كلاً من المتتاليات التالية محدودة من الأعلى:

$\{a_n\}=\{7-2n-n^2\}$

$\{a_n\}=\{100-\sqrt{n}\}$

$\{a_n\}=\{5-2^n\}$

$\{a_n\}=\left\{\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right\}$

4. اثبت أن كلاً من المتتاليات التالية محدودة من الأدنى:

$\{a_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\cos^2(2+n-n^3)\right\}$

$\{a_n\}=\left\{\dfrac{2^n}{n^2+3^n}\right\}$

$\{a_n\}=\{n-\sqrt{n}\}$

$\{a_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}+\sin\sqrt{n}\right\}$

$\{a_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{n+2}{n^2}\right\}$

$\{a_n\}=\{n^2-n-10\}$

5. اثبت أن كلاً من المتتاليات التالية محدودة:

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n^2}-\cos^3\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & ;\ n \text{ زوجي}\\ \dfrac{n^2}{n+2} & ;\ n \text{ فردي}\end{cases}$$

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt[3]{8n-n^3}+\sqrt[3]{8n+n^3}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ \sqrt{2}}}}}_{n \text{ جذر}}\right\}$$

6. اثبت أن كلاً من المتتاليات التالية متزايدة تماماً:

$$\{a_n\}=\left\{n^2+1\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\cot\frac{1}{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{2^{n-1}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\log_2 n\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{2^n}{2n+1}\right\}$$

7. بفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$ و $\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{\sqrt{3}}$، أوجد النهايات

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}2a_n(7+\sqrt{b_{n+2}})$$

8. بفرض أن $a_1=a$ و $a_2=b$ و $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-2}+a_{n-1})$، اثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}(a+2b)$$

9. أوجد نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\ \sqrt[2^n]{2}\right.$$

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{a^n}{n!}\right\};\ a>1$$

$$\{a_n\}=\left\{\sin(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\tan\frac{3}{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\ln\left(\frac{2n+5}{n+1}\right)\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt[3]{n^2}\,\frac{\sin(n!)}{n+2}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{n!+(n+2)!}{n[n!+(n+1)!}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-3}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\left(\frac{2}{\pi}\arctan nx\right)^{\cot(\pi\sqrt{n^2+1})}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right\}$$

$$a_{n+1}=\arctan a_n+2\ ;\ a_1=25$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+3n+2}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2-5n+6}}-\frac{\sin n}{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}}{\ln(n+1)-\ln(n+2)}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{[2+(-1)^n]}{3^n\ln n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{\sin^2(n+2)}{n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{n^{(-1)^n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\left(1-\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{n\arccos\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$$

$$a_{n+1}=\sin a_n\ ;\ a_1=\sin x$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{2n}{3n+8}-\frac{\cos n}{2n}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{n+1}\right\}$$

$$a_n\}=\left\{n\ln(1-\frac{1}{n})\cos(\pi\sqrt{4n^2+10})\right\}$$

$$a_n\}=\left\{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right\}$$

$$\{a_n\}=\left\{\cos\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\cos\tfrac{1}{2^2}\varphi\cdot\cos\tfrac{1}{2^3}\varphi\cdot\ldots\ \cos\tfrac{1}{2^n}\varphi\right\}\ ;\ \varphi\neq 0$$

10. أثبت أن متتالية فيبوناتشي التالية $\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots\}$، حيث إن أول حدين مساويان، للواحد وباقي الحدود تنتج من العلاقة $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$، تحقق ما يلي:

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$	عدد أرقام العدد a_n أكبر من $\frac{1}{5}(n-2)$
$a_n\cdot a_{n+1}-a_{n-2}\cdot a_{n-1}=a_{2n-1}$	$a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_n\cdot a_{n+3}=(-1)^n$
$a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+\ldots+a_{2n-1}\cdot a_{2n}=a_{2n}^2$	$a_n^3+a_{n+1}^3-a_{n-1}^3=a_{3n}$
$a_n^4-a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=1$	$a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^{n-1}$
$1+a_1+a_2+\ldots+a_n=a_{n+2}$	$a_{n-1}^2+a_n^2=a_{2n-1}$
$a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}=a_{2n+2}$	$\frac{1}{10}a_{15k}\in\mathbb{N}\ ;\ k\in\mathbb{N}$
$1+a_2+a_4+\ldots+a_{2n}=a_{2n+1}$	$a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a_n{}^2=a_n\cdot a_{n+1}$

11. أثبت أن المتغير $a_n=n^{(-1)^n}$ غير محدود ولامتناهٍ في الكبر، عندما $n\to\infty$.

12. أثبت أن المتغيرات التالية لامتناهيات في الصغر، عندما $n\to\infty$:

$a_n=\frac{\ln n}{n}$	$a_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ;\ x\in\mathbb{R}$	$a_n=\frac{2^n}{n!}$
$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$	$a_n=n\cdot q^n\ ;\ (q\in\mathbb{R},\ \lvert q\rvert<1)$	

13. أثبت أن المتتالية $a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})$، حيث a و a_1 عددان حقيقيان موجبان و $n\in\mathbb{N}$، متقاربة من العدد $\sqrt{a}$.

14. أثبت أن المتتالية $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$، حيث a_1 عدد حقيقي موجب و $n\in\mathbb{N}$، متقاربة من الصفر.

15. ليكن $a_n = a^{1/(2^n)}$ و $a \in \mathbb{R}^+$، أوجد العلاقة بين a_n و a_{n+1}، وأثبت أن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من الواحد.

16. أعط مثالاً على متتالية عددية متقاربة وليست مطردة.

17. أعط مثالاً على لامتناهيين في الصغر يكون خارج قسمتهما لامتناه في الكبر، عندما $n \to \infty$.

Damascus University

الفصل الرابع

النهايات والاستمرار

4.1 نهاية دالة

4.2 النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

4.3 اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر

4.4 مبرهنات أساسية حول نهايات الدوال

4.5 نهايات شهيرة

4.6 خواص اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر

4.7 مقارنة السلوك التقاربي للدوال

4.8 إزالة بعض حالات عدم التعيين

4.9 استمرار الدالة

4.10 الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار

4.11 نقاط الانقطاع

4.12 الاستمرار الجزئي

4.13 العمليات على الدوال المستمرة

4.14 استمرار الدالة المركبة

4.15 استمرار الدالة العكسية

4.16 استمرار بعض الدوال الأولية الأساسية

4.17 الاستمرار المنتظم

تمارين الفصل الرابع

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

النهايات والاستمرار

4.1 نهاية دالة

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على جوارٍ مثقوب $u_\delta^\circ(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$، أي على المجموعة:

$$u_\delta^\circ(x_\circ)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,0<|x-x_\circ|<\delta\}$$

ولتكن

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad (4.1)$$

متتالية نقاط من الجوار $u_\delta^\circ(x_\circ)$، متقاربة من النقطة $x_\circ$. تشكل عندئذٍ، قيم الدالة، عند كل نقطة من نقاط المتتالية (4.1)، متتالية جديدة

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \qquad (4.2)$$

يمكن أن تكون هذه المتتالية متقاربة أو متباعدة.

تعريف 4.1 (تعريف غينيه[1]): نسمي العدد A نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=x_\circ$ (أو عندما تسعى x إلى $x_\circ$)، إذا كان من أجل أي متتالية نقاط (4.1) من الجوار $u_\delta^\circ(x_\circ)$، متقاربة من النقطة $x_\circ$، تكون المتتالية المقابلة (4.2)، متقاربة من العدد A. ونكتب عندئذٍ: $A=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$

$$A=\lim_{x\to x} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_\circ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

إذا كان للدالة $f(x)$ نهاية عند النقطة $x_\circ$، فإن هذه النهاية وحيدة، لأن للمتتالية $\{f(x_n)\}$ نهاية وحيدة.

مثال 4.1 : إذا كان $f(x)=c$ (دالة ثابتة)، و $x_\circ$ أي نقطة من نقاط المحور الحقيقي $\mathbb{R}$، أثبت أن $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=c$.

الحل: أياً تكن المتتالية $\{x_n\}$ المتقاربة من النقطة $x_\circ$، فإن المتتالية المقابلة $\{f(x_n)\}$

---

[1] ادوارد هينيه (1821-1881) عالم رياضيات ألماني.

تبقى ثابتة وغير متغيرة : $c, c, \ldots, c, \ldots$ ، أي

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c$$

ومنه، فإن $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

مثال 4.2 : إذا كان $f(x) = x$ ، و x_0 أي نقطة من نقاط المحور الحقيقي $\mathbb{R}$، أثبت أن $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

الحل: أياً تكن المتتالية $\{x_n\}$ من أي جوار للنقطة x_0 ، المتقاربة من النقطة x_0 ، فإن المتتالية المقابلة لها $\{f(x_n)\}$ هي المتتالية:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

وهي متطابقة مع المتتالية $\{x_n\}$ ، على الجوار المدروس، فهي تسعى إلى النقطة x_0 ، أي أن

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ومنه، فإن $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$.

مثال 4.3 : إذا كان $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ، أثبت أن $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ، الشكل 4.1.

لتكن $\{x_n\}$ متتالية ما من نقاط المجموعة $D(f)$ ، بحيث يكون

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

نشكل المتتالية المقابلة لها:

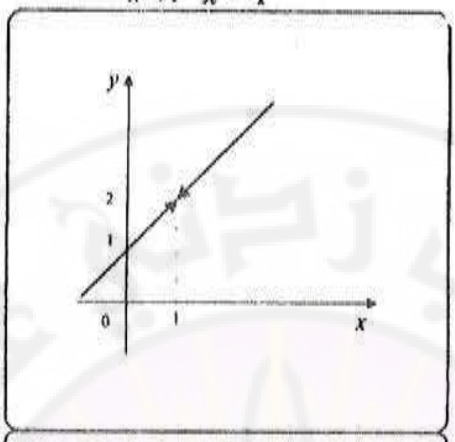
$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1}$$

لما كان $(\forall n \in \mathbb{N})$ ، $x_n \neq 1$ ، فإن $f(x_n) = x_n + 1$. ومنه، فإن

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n + 1) = 2$$

أي أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$



الشكل 4.1

مثال 4.4 : أثبت أن دالة ديريخلية غير متقاربة، أياً تكن النقطة x_0 من نقاط المحور الحقيقي $\mathbb{R}$.

الحل: لتكن $\{x_n\}$ متتالية من الأعداد العادية $\mathbb{Q}$، متقاربة من العدد x_0. تكون عندئذٍ، المتتالية المقابلة لها، وفق دالة ديرخليه: $\{1,1,1,\ldots\}$، متقاربة من العدد 1.

أما إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من الأعداد غير العادية (الصماء)، متقاربة من العدد x_0، فإن المتتالية المقابلة لها، وفق دالة ديرخليه: $\{0,0,0,\ldots\}$، متقاربة من العدد 0.

وعليه، فإن دالة ديرخليه غير متقاربة، لوجود نهايتين لها 1 و 0، عندما تسعى x إلى x_0.

هناك تعريف آخر لنهاية دالة يسمى تعريف كوشي:

تعريف 4.2 (تعريف كوشي): نقول عن العدد A إنه نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 (أو عندما تسعى x إلى النقطة x_0)، إذا كان، من أجل أي عدد $\varepsilon>0$، يوجد عدد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$، بحيث تتحقق المتراجحة $|f(x)-A|<\varepsilon$ من أجل جميع القيم x المحققة للشرط $0<|x-x_0|<\delta$، أي

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow$$

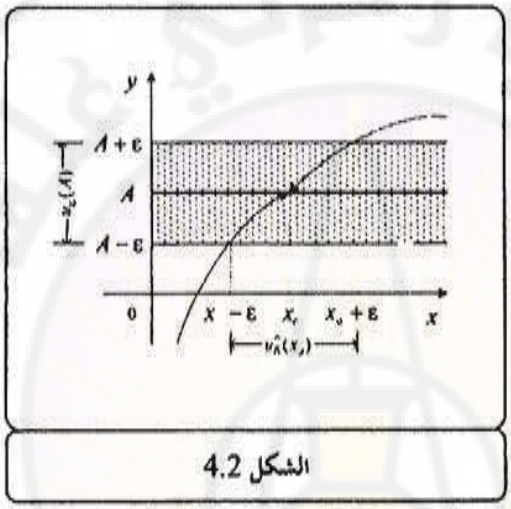
$$\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ ,\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon$$

وباستخدام مفهوم الجوارات يمكن صياغة هذا التعريف كما يلي:

$$A = \lim_{x \to x} f(x) \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in u_{\delta}^{\circ}(x_0) \implies f(x) \in u_{\varepsilon}(A)$$

حيث $u_{\varepsilon}(A) = \{y = f(x) : |f(x) - A| < \varepsilon\}$ جوار للنقطة A و $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$ جوار مثقوب للنقطة x_0.



الشكل 4.2

يعطي الشكل 4.2، المعنى الهندسي للتعريف 4.2، أي أن الجوار $u_{\varepsilon}(A)$ هو صورة للجوار $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$ وفق الدالة $f(x)$. وهذا يعني أنه أياً تكن النقطة x من الجوار $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$، فإنه يقابلها القيمة $f(x)$ من الجوار $u_{\varepsilon}(A)$.

يسمى تعريف غينيه تعريف نهاية دالة بلغة المتتاليات ويسمى تعريف كوشي. تعريف نهاية دالة بلغة الجوارات $\varepsilon - \delta$. ويمكن بسهولة البرهان على أن هذين التعريفين متكافئان.

مثال 4.5 : أثبت، وفق تعريف كوشي، أن $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$، حيث $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد العدد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

أياً تكن x المحققة للمتراجحة $0 < |x - 1| < \delta$.

لما كان

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|\frac{(x-1)^2}{(x-1)}\right|=|x-1| \qquad ; \qquad \forall x\neq 1$$

فإنه أياً يكن العدد $\varepsilon>0$، يوجد العدد $\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$ بحيث تتحقق المتراجحة

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$$

أياً تكن x المحققة للمتراجحة $1<|x-1|<\delta=\varepsilon$. أي أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

4.2 النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

عند تعريف نهاية دالة $f(x)$، عندما تسعى x إلى x_0، افترضنا أن هذه النقاط x يمكن أن تكون يمين أو يسار النقطة x_0.

أحياناً يكون المطلوب حساب نهاية الدالة عندما تأخذ x في سعيها لـ x_0، قيماً تقع فقط على يسار x_0 أو تقع فقط على يمين x_0.

تعريف 4.3 : نقول إن العدد A نهاية الدالة $f(x)$ من اليمين عند النقطة x_0، ونكتب $A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$، إذا تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ :\ f(x)\in u_\varepsilon(A)\ ,\ \forall x\in u_\delta^o(x_0^+)$$

أي:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ :\ |f(x)-A|<\varepsilon\ ,\ \forall x\in]x_0,x_0+\delta[$$

تعريف 4.4 : نقول إن العدد A نهاية الدالة $f(x)$ من اليسار عند النقطة x_0، ونكتب $A=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$، إذا تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ :\ f(x)\in u_\varepsilon(A)\ ;\ \forall x\in u_\delta^o(x_0^-)$$

أي:

$$\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ :\ |f(x)-A|<\varepsilon\ ;\ \forall x\in]x_0-\delta\ ;\ x_0[$$

مبرهنة 4.1 : الشرط اللازم والكافي لوجود نهاية للدالة $f(x)$ عند النقطة x_0، هو وجود النهاية من اليمين والنهاية من اليسار لهذه الدالة عند النقطة x_0، وبحيث تكون هاتان النهايتان متساويتين، وتكون قيمة النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند النقطة x_0 هي قيمة نهاية الدالة $f(x)$ عند هذه النقطة.

البرهان: ليكن $A = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ عندها، من تعريف النهاية من اليمين والنهاية من اليسار، نجد

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \ , \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \ : \ |f(x) - A| < \varepsilon \ ;$$
$$\forall x \in]x_0 - \delta_1 ; x_0[\ \wedge \ \forall x \in]x_0 ; x_0 + \delta_2[$$

نختار $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. عندها، نجد أن المتراجحة $|f(x) - A| < \varepsilon$ محققة أياً تكن x من المجال $]x_0 - \delta \ ; \ x_0 + \delta[$. مما يعني أن $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

وبالعكس، إذا كان $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$، فإن الشرط التالي محقق

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ |f(x) - A| < \varepsilon \ ; \ \forall x \in]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[$$

أي أن المتراجحة $|f(x) - A| < \varepsilon$ محققة أياً تكن x من المجال $]x_0 - \delta \ ; \ x_0[$ أو من المجال $]x_0 \ ; \ x_0 + \delta[$، أي أن

$$A = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

مثال 4.6 : أوجد النهايتين من اليمين ومن اليسار للدالة

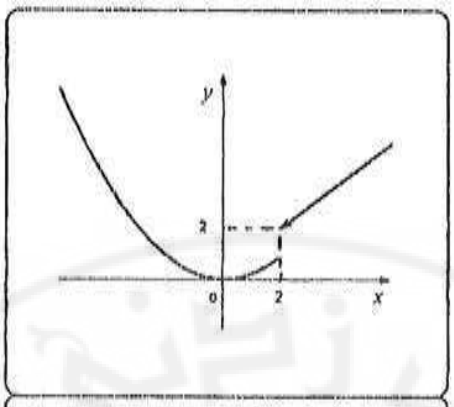
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & ; \ x \in]-\infty ; 2] \\ x & ; \ x \in]2 ; \infty[\end{cases}$$

عند النقطة $x_0 = 2$.

الحل: نجد بالتعويض المباشر

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4}x^2 = 1$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x = 2$$

لما كانت النهايتان من اليمين ومن اليسار عند النقطة $x_0 = 2$ غير متساويتين، فإنه ليس للدالة f نهاية عند هذه النقطة، الشكل 4.3.



الشكل 4.3

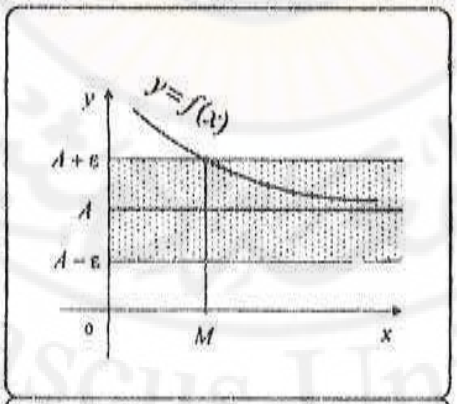
تعريف 4.5 : نقول إن العدد A نهاية الدالة $f(x)$ ، عندما تسعى x إلى $+\infty$ ، ونكتب $A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، إذا تحقق الشرط

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists M(\varepsilon) > 0 \quad : \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad ; \quad \forall\, x > M$$

تعريف 4.6 : نقول إن العدد A نهاية الدالة $f(x)$ عندما تسعى x إلى $-\infty$ ، ونكتب $A = \lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، إذا تحقق الشرط

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists M > 0 \quad : \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad ; \quad \forall\, x < -M$$

تعني هاتان النهايتان هندسياً، أن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقع في الشريط الأفقي المحدد بالمستقيمين $y = A - \varepsilon$ و $y = A + \varepsilon$ ، بدءاً من $x > M$ ، من أجل النهاية الاولى، الشكل 4.4، أو بدءاً من $x < -M$ ، من أجل النهاية الثانية.



الشكل 4.4

مثال 4.7 : أثبت أن $\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$.

الحل: نبحث عن العدد $M > 0$ بحيث يتحقق الشرط $\left|2^{-x} - 0\right| < \varepsilon$ أياً يكن $\varepsilon > 0$ و $x > M$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; ; \quad \left|2^{-x} - 0\right| = \left|2^{-x}\right| = 2^{-x} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x > -\log_2 \varepsilon = M$$

إذن، وجدنا العدد $M = \log_2 \varepsilon$ يحقق الشرط المذكور.

إذا تزايدت القيمة المطلقة للدالة $f(x)$ ، بشكلٍ لا نهائي، عندما تسعى x إلى x_0 ، فإن هذه الدالة ليس لها نهاية محدودة. لذا يلزمنا تعميم مفهوم نهاية دالة.

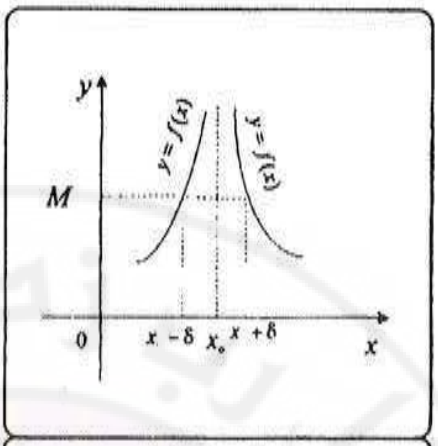
تعريف 4.7 : نقول إن الدالة $f(x)$ تسعى إلى اللانهاية، عندما تسعى x إلى x_0 ، ونكتب $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ، إذا تحقق الشرط:

$$\forall M > 0 \; ; \exists\, \delta > 0 \; : \; |f(x)| > M \; , \; \forall x \in \;]x_0 - \delta \; ; \; x_0 + \delta[$$

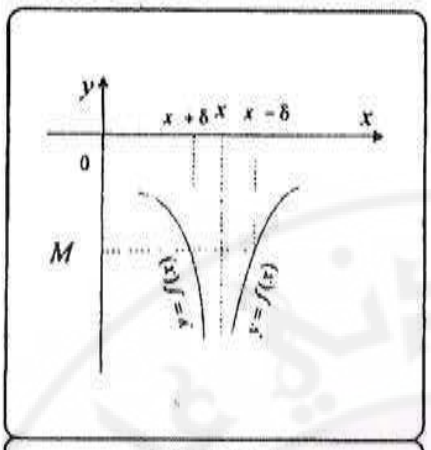
ونسمي عندئذٍ الدالة $f(x)$ دالة لامتناهية في الكبر، عندما تسعى x إلى x_0 .

يمكن أن تسعى الدالة $f(x)$ إلى اللانهاية، عندما تسعى x إلى x_0 ، بأخذ قيم موجبة أو قيم سالبه فقط، ونكتب عندها، $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ بالترتيب.

تعني النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ هندسياً، أن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يتوضع في نصف المستوي $y > M$ ، الشكل 4.5-A ، و تعني النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ أن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يتوضع في نصف المستوي $y < M$ ، الشكل 4.5-B.



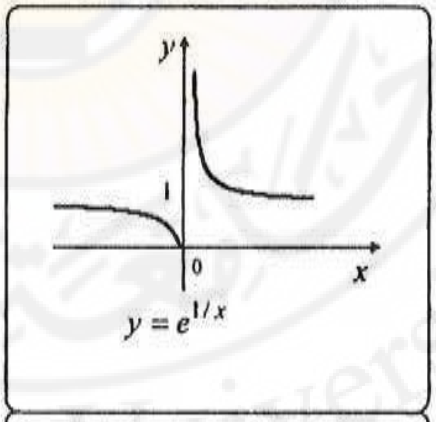
الشكل 4.5-A



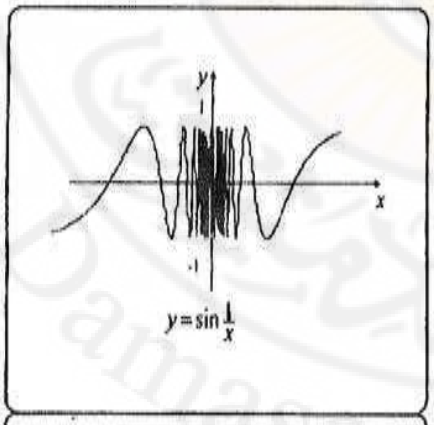
الشكل 4.5-B

ملحوظة 4.1 : يمكن أن تكون النهاية من اليسار محدودة والنهاية من اليمين غير محدودة أو بالعكس، فمثلاً $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ ، الشكل 2.6.

كما يمكن أن تكون غير موجودة، عندما تسعى x إلى x_0 ، فمثلاً النهاية $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ غير موجودة، لأن الدالة $\sin\frac{1}{x}$ تتأرجح، في جوار الصفر، بين القيمتين 1+ و 1- ، الشكل 4.7.



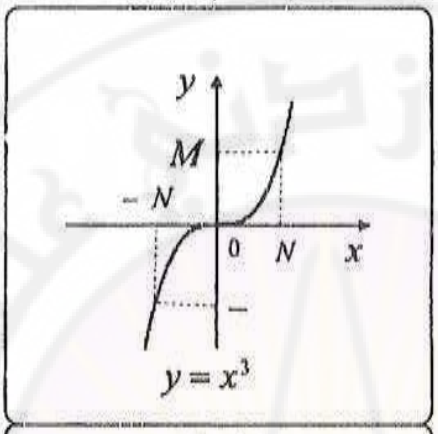
الشكل 4.6



الشكل 4.7

تعريف 4.8 : نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ غير محدودة، عندما تسعى x إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$)، ونكتب $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$، إذا تحقق الشرط:

$$\forall\, M>0\ ,\ \exists\, N>0\ :\ |f(x)|>M\quad ;\quad \forall\, |x|>N$$



الشكل 4.8

يعني هذا التعريف، هندسياً، أن المنحني البياني للتابع $y = f(x)$ يقع خارج الشريط الأفقي المحدد بالمستقيمين $y = M$ و $y = -M$ ، أياً تكن x تقع خارج الشريط الشاقولي المحدد بالمستقيمين $x = N$ و $x = -N$. فمثلاً، يبين الشكل 4.8، النهاية

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty .$$

مثال 4.8: أثبت أن $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{6-x} = \infty$.

الحل: للحصول على المتراجحة $f(x) > M$ ، يكفي اختيار $6 - x > M^2$ ، عندما فإن $x < 6 - M^2$ و $\sqrt{6-x} = f(x) > M$ أياً تكن x من المجال $]-\infty; 6-M^2[$.

4.3 اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر

تعريف 4.9 : نقول إن الدالة $f(x)$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى x إلى x_0 (أو على جوار مثقوب $u_\delta^\circ(x_0)$ للنقطة x_0)، إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

ونُعرّف بأسلوبٍ مماثل، اللاتناهي في الكبر، عندما تسعى x إلى $\mp\infty$ أو إلى x_0^+ أو إلى x_0^- .

مثال 4.9 :

1. الدالة $f(x)=\sin x$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى x إلى $x_0=0$، لأن $\lim_{x\to 0}\sin x=0$.

2. الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى x إلى $\mp\infty$ ، لأن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=0$.

3. الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ لامتناهية في الكبر عندما تسعى x إلى $x_0=0$، لأن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

مبرهنة 4.2 : إذا كانت الدالة $f(x)$ لامتناهية في الكبر، على جوارٍ مثقوب $u_\delta^{\circ}(x_0)$ للنقطة x_0، فإن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ لامتناهية في الصغر، على هذا الجوار.

وبالعكس، إذا كانت الدالة $f(x)$ لامتناهية في الصغر، على الجوار المثقوب $u_\delta^{\circ}(x_0)$ للنقطة x_0، فإن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ لامتناهية في الكبر، على هذا الجوار.

فمثلاً، الدالة $f(x)=x^4$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى x إلى 0، والدالة $\frac{1}{x^4}$ لامتناهية في الكبر، عندما تسعى x إلى 0.

4.4 مبرهنات أساسية حول نهايات الدوال

نعطي البرهان على إحدى هذه المبرهنات

مبرهنة 4.3 : لتكن النهايات $A=\lim_{x\to x_0} f(x)$ و $B=\lim_{x\to x_0} g(x)$ محدودة. عندئذٍ، فإن:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\mp g(x)]=A\mp B \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B \quad \text{و}$$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ ، حيث $B\neq 0$.

وفي الحالة الخاصة، إذا كان c ثابتاً ما، فإن $\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot A$.

نعطي في الجدول 4.1 نهاية حاصل جمع وطرح وضرب وقسمة دالتين $f(x)$ و $g(x)$ مع التعميم من أجل نهايات غير محدودة.

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$	$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$
A	B	$A+B$	$A\,.\,B$	$\frac{A}{B};(B\neq o)$
A	∞	∞	$\infty;(A\neq 0)$	0
∞	B	∞	$\infty;(B\neq 0)$	∞
0	0	0	0	$\frac{0}{0}$ عدم تعيين
0	∞	∞	$0\cdot\infty$ عدم تعيين	0
∞	0	∞	$0\cdot\infty$ عدم تعيين	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين
$+\infty$	$-\infty$	$\infty-\infty$ عدم تعيين	$-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين
$-\infty$	$+\infty$	$\infty-\infty$ عدم تعيين	$-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

الجدول 4.1

مبرهنة 4.4 : إذا كانت النهاية $A=\lim_{x\to x_0} f(x)$ محدودة، فإن الدالة $\alpha(x)=f(x)-A$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى x إلى x_0.

وهذا صحيح، لأن

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=\lim_{x\to x_0}f(x)-A=A-A=0$$

نتيجة 4.1 : إذا كانت النهاية $A=\lim_{x\to x_0}f(x)$ محدودة، فإنه يمكن التعبير عن الدالة $f(x)$، كما يلي: $f(x)=A+\alpha(x)$، حيث إن الدالة $\alpha(x)$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى x إلى x_0.

مبرهنة 4.5 : إذا كان $f(x)\le g(x)$ على جوارٍ مثقوب $u_\delta^{\circ}(x_0)$ للنقطة x_0، وكانت النهايتان $\lim_{x\to x_0}f(x)$ و $\lim_{x\to x_0}g(x)$ محدودتين. عندئذٍ، فإن $\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x)$.

مبرهنة 4.6 : إذا كان $h(x)\le f(x)\le g(x)$، على جوارٍ مثقوب $u_\delta^{\circ}(x_0)$ للنقطة x_0، وكان $A=\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)$، فإن $A=\lim_{x\to x_0}f(x)$.

مبرهنة 4.7 : لتكن $y=f[u(x)]$ دالة معرفة على جوارٍ للنقطة x_0، ولتكن

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=u_0 \quad ; \quad u(x)\neq 0\ ,\ \forall x\neq n_0$$

وليكن $A=\lim_{u\to u_0}f(u)$. توجد عندئذٍ، نهاية للدالة المركبة $y=f[u(x)]$ عند النقطة x_0 و

$$\lim_{x\to x_0}f[u(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)$$

مثال 4.10 : احسب النهاية $\lim_{x\to 0}\cos\left(x^3+\frac{1}{3}\pi\right)$.

الحل: الدالة المعطاة مركبة: $f[u(x)]=\cos u(x)$، حيث

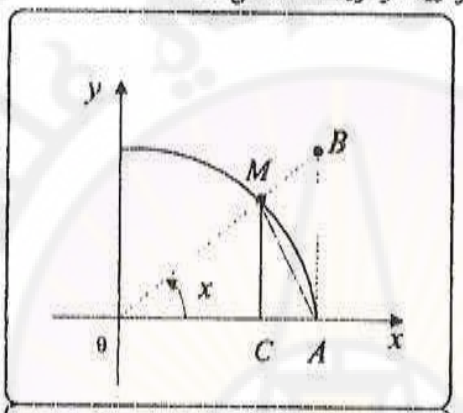
$u(x)=x^3+\frac{1}{3}\pi$. عندها

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{3}\pi \quad\Rightarrow\quad \lim_{u\to\frac{1}{3}\pi}\cos u=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$$

4.5 نهايات شهيرة

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

لما كانت الدالة $\dfrac{\sin x}{x}$ زوجية، فإننا ندرسها على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\pi\right[$. ليكن $\overset{\frown}{AM}$ قوساً من دائرة الواحدة، المقابل للزاوية المركزية x الشكل 4.9.



الشكل 4.9

عندئذٍ $|\overline{OC}|=\cos x$ و $|\overline{MC}|=\sin x$ و $|\overline{OA}|=1$. إن مساحة القطاع الدائري OMA محصورة بين مساحتي المثلثين $\overset{\Delta}{OMA}$ و $\overset{\Delta}{OBA}$. أي

$$\frac{1}{2}|\overline{OA}|\cdot|\overline{CM}|<\frac{1}{2}|\overline{OA}|^2 x<\frac{1}{2}|\overline{OA}|\cdot|\overline{AB}|$$

ولما كان $|\overline{OA}|=1$ و $|\overline{MC}|=\sin x$ و $|\overline{AB}|=\tan x$، فإننا نجد

$$\sin x<x<\tan x \quad\Leftrightarrow\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad\Leftrightarrow$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (4.3)$$

ولما كانت الدالتان $\frac{\sin x}{x}$ و $\cos x$ زوجيتان، فإن المتراجحة (4.3) صحيحة أيضاً، على المجال $]-\frac{1}{2}\pi;0[$. وعليه، فإن المتراجحة (4.3) صحيحة على المجموعة $]-\frac{1}{2}\pi;0[\cup]0;\frac{1}{2}\pi[$. نأخذ النهايات في المتراجحة (4.3)، عندما تسعى x إلى الصفر، فنجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

تستخدم هذه النهاية لإزالة بعض حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

مثال 4.11 : احسب النهايات

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\quad ,\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}$$

الحل: النهايتان من النمط $\frac{0}{0}$:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\tan 4x}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

$$2.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}=e$$

مرّ معنا سابقاً (في الفقرة 2.3.3)، أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\qquad ;\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

ليكن $x>1$; $n=[x]$ ، عندها فإن $x=n+\alpha$ ، حيث $n\in\mathbb{N}$ ، و α عدد يحقق العلاقة $0\le\alpha<1$.

ولما كان

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\quad ;\quad n\le x<n+1$$

فإن

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (4.4)$$

وكما نعلم، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

وبأخذ النهايات في (4.4)، عندما تسعى n إلى ∞، أي عندما تسعى x إلى ∞، نجد

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

إذا كان $x<-1$، فإننا نفرض $x=-y$، فنجد:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e$$

وهكذا، فإن

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

تستخدم هذه النهاية، لإزالة بعض حالات عدم التعيين من الشكل 1^{∞}.

مثال 4.12 : احسب النهايات:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^x$

الحل: هذه النهايات من الشكل 1^{∞}:

1. نضع $x = 2t$، عندها، فإن t تسعى إلى ∞ عندما تسعى x إلى ∞. وعليه، فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t} = e\cdot e = e^{2}$$

2. نضع $t = \frac{1}{x}$ عندها، فإن t تسعى إلى ∞، عندما تسعى x إلى الصفر. وعليه، فإن

$$\lim_{x\to 0}\ (1+x)^{1/x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e \quad .3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\ \frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}}{\left(1+-\frac{3}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{4}}{e^{-3}} = e^{7} \quad .4$$

4.6 خواص اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر

تُقبل دون برهان المبرهنات

مبرهنة 4.8 : حاصل جمع عدد منته من اللامتناهيات في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_{\delta}^{\circ}(x_{\circ})$ للنقطة $x_{\circ}$، هو لامتناه في الصغر على هذا الجوار.

مبرهنة 4.9 : حاصل جداء لا متناهيات في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_{\delta}^{\circ}(x_{\circ})$ للنقطة $x_{\circ}$، ودالة محدودة على هذا الجوار، هو لامتناه في الصغر على هذا الجوار.

نتيجة 4.3 : حاصل جداء لامتناهيين في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_{\delta}^{\circ}(x_{\circ})$ للنقطة $x_{\circ}$، هو لامتناه في الصغر على هذا الجوار.

مبرهنة 4.10 : لتكن الدالة $\alpha(x)$ لامتناهية في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_{\delta}^{\circ}(x_{\circ})$ للنقطة $x_{\circ}$، و $\varphi(x)$ دالة تحقق الشرط $\lim_{x\to x_{\circ}}\varphi(x)\neq 0$. عندئذٍ، فإن الدالة $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ لامتناهية في الصغر، على الجوار $u_{\delta}^{\circ}(x_{\circ})$.

4.7 مقارنة السلوك التقاربي للدوال

نقصد بعبارة "مقارنة السلوك التقاربي للدوال على جوارٍ ما للنقطة x_0"، وصف سلوك الدوال بقرب النقطة x_0، حيث إن هذه الدوال قد تكون غير معرفة على هذا الجوار لـ x_0.

ندرس عادةً السلوك التقاربي للدوال بمساعدة دوال أخرى، ربما تكون أسهل ولكن هذه الدوال تتطابق تقريباً مع الدوال المدروسة على الجوار المدروس.

تعريف 4.9 : إذا كان $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ لامتناهيين في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_\delta^\circ(x_0)$ للنقطة x_0، وكان $A = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$، فإن:

1. إذا كان $A \neq 0$، فإننا نقول إن اللامتناهيين في الصغر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ من نفس المرتبة، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$. وفي الحالة الخاصة، إذا كان $A = 1$، فإننا نقول إن اللامتناهيين في الصغر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ متكافئان، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$. ونكتب عندها $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

2. إذا كان $A = 0$، فإننا نقول إن $\alpha(x)$ لامتناه في الصغر من مرتبة أعلى بالنسبة للامتناهي في الصغر $\beta(x)$، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$.

3. إذا كان $A = \infty$، فإننا نقول إن $\alpha(x)$ لامتناه في الكبر من مرتبة أدنى بالنسبة للامتناهي في الكبر $\beta(x)$، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$.

4. إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} \neq 0$، حيث $k > 0$، فإن $\alpha(x)$ لامتناه في الصغر من المرتبة k بالنسبة للامتناهي في الصغر $\beta(x)$ على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$.

تعريف 4.10 : إذا كان $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ لا متناهيان في الكبر، على جوارٍ مثقوب $u_\delta^\circ(x_0)$ للنقطة x_0، وكان $A = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$، فإن:

1. إذا كان $A \neq 0$، فإننا نقول إن اللامتناهيين في الكبر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ من نفس المرتبة، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$. وفي الحالة الخاصة، إذا كان $A = 1$، فإننا نقول إن اللامتناهيين في الكبر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ متكافئان، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$. ونكتب عندها $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

2. إذا كان $A = 0$ ، فإننا نقول إن $\alpha(x)$ لامتناه في الكبر من مرتبة أدنى بالنسبة للامتناهي في الكبر $\beta(x)$، على الجوار $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$.

3. إذا كان $A = \infty$ ، فإننا نقول إن $\alpha(x)$ لامتناه في الكبر من مرتبة أعلى بالنسبة للامتناهي في الكبر $\beta(x)$، على الجوار $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$.

4. إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} \neq 0$ ، حيث $k > 0$، فإن $\alpha(x)$ لامتناه في الكبر من المرتبة k بالنسبة للامتناهي في الكبر $\beta(x)$ على الجوار $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$.

مثال 4.13 : الدالتان $\alpha(x) = \sin 4x$ و $\beta(x) = 5x$ لامتناهيتان في الصغر، عندما تسعى x إلى الصفر. وهما من نفس المرتبة، لأن

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \frac{4}{5}\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}\right) = \frac{4}{5} \neq 0$$

مثال 4.14 : الدالتان $\alpha(x) = \sin x$ و $\beta(x) = x$ متكافئتان، عندما تسعى x إلى الصفر، لأن

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \sim x$$

ملحوظة 4.2 : إذا كان $\alpha(x)$ لامتناهياً في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_{\delta}^{\circ}(x_0)$ للنقطة x_0، فإن

$$\tan \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ و } \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ و } \arctan \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ و } \sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{2} \text{ و } \sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x) \text{ و }$$

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 4.10 : نهاية حاصل قسمة لامتناهيين في الصغر (الكبر)، عندما تسعى x إلى x_0، يساوي نهاية حاصل قسمة دالتين تكافئان اللامتناهيين في الصغر (الكبر) عندما تسعى x إلى x_0 ، أي إذا كان $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ و $\beta(x) \sim \beta_1(x)$، عندما تسعى x إلى x_0، فإن

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

تُستخدم هذه المبرهنة كثيراً في حساب النهايات.

مثال 4.15: احسب النهاية $\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$.

الحل: لما كان $\sin 3x \sim 3x$، عندما تسعى x إلى الصفر من اليمين، فإن

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0} 3\sqrt{x} = 0$$

مثال 4.16 : احسب النهاية $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{\tan(x^2-9)}$.

الحل: لما كان $\tan(x^2-9) \sim (x^2-9)$ ،عندما تسعى x إلى 3 ، فإن

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{\tan(x^2-9)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{3}$$

مثال 4.17 : الدالة $\alpha(x) = x^5$ لامتناه في الصغر من مرتبة أعلى بالنسبة للامتناهي في الصغر $\beta(x) = \sin x^3$، عندما تسعى x إلى الصفر، أي

$x^5 = o(\sin x^3)$، لأن

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sin x^3} = \left(\lim_{x\to 0} x^2\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x^3}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

مثال 4.18 : أثبت أن الدالة $[\alpha(x) - \beta(x)]$ لامتناهية في الصغر من المرتبة 2 بالنسبة لـ x عندما تسعى x إلى الصفر، حيث $\alpha(x) = \frac{4}{2+x}$ و $\beta(x) = 2 - x$.

الحل: لما كان $\alpha(x) - \beta(x) = \frac{4}{2+x} = 2 + x = \frac{x^2}{2+x}$، فإن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(2+x)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \neq 0$$

مبرهنة 4.11 : إذا كان $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ لا متناهيان في الصغر، على جوارٍ مثقوب $u_\delta^\circ(x_0)$ للنقطة x_0، فإن الجداء $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ لامتناه في الصغر من مرتبة أعلى بالنسبة لـ $\alpha(x)$ وبالنسبة لـ $\beta(x)$، على الجوار $u_\delta^\circ(x_0)$.

ويمكن صياغة مبرهنة مشابهه من أجل اللاتناهي في الكبر.

4.8 إزالة بعض حالات عدم التعيين

1. حالة عدم تعيين من النمط $(\frac{0}{0})$: نحصل على هذه الحالة، عند حساب النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ، حيث $x_0 \notin D(f)$ و $f(x)$ دالة كسرية يحوي بسطها ومقامها عاملاً من الشكل $(x-x_0)^{\alpha}$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$. نحصل، بعد اختصار الكسر، على الدالة $f_1(x)$; $(\alpha_1 \in \mathbb{R})$ و $f(x)=(x-x_0)^{\alpha_1}$ $f_1(x)$; $(\alpha_1 \in \mathbb{R})$ و $x_0 \in D(f)$. عندئذٍ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x-x_0)^{\alpha_1} f_1(x) = \begin{cases} 0 & ; \ \alpha_1 > 0 \\ f_1(x_0) & ; \ \alpha_1 = 0 \\ \infty & ; \ \alpha_1 < 0 \end{cases}$$

إن عملية عزل المضروب $(x-x_0)^{\alpha_1}$ من الدالة $f(x)$ ، يتعلق بطبيعة هذه الدالة.

مثال 4.19 : احسب النهايتين

$$A = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+x+6} \quad \text{و} \quad B = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2-\sqrt{x+4}}$$

الحل: نحلل البسط والمقام ونختصر في A ، ومن أجل B نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$A = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)(x-3/2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{2(x-3/2)} = \frac{1}{7}$$

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(2-\sqrt{x+4})\cdot(2+\sqrt{x+4})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{4-x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -(2+\sqrt{x+4}) = -4$$

2- حالة عدم التعيين من النمط $(\frac{\infty}{\infty})$: نحصل على هذه الحالة عند حساب النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ، حيث $x_0 \notin D(f)$ و $f(x)$ دالة كسرية تحوي دوال غير عادية (صماء).

إذا كان $x_0 \neq \infty$ ، فإن حالة عدم التعيين $(\frac{\infty}{\infty})$ تؤول إلى الحالة السابقة $(\frac{0}{0})$.

نعزل من البسط المضروب x^{α} ، ومن المقام المضروب x^{β} حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. عندئذ:

$f(x) = x^{\alpha-\beta} \cdot f_1(x)$ ، حيث $x_0 \in D(f_1)$. ويكون

$$\lim_{x\to x} f(x) = \lim_{x\to x} x^{\alpha-\beta} f_1(x) = \begin{cases} 0 & ; \ \alpha < \beta \\ f_1(x_0) & ; \ \alpha = \beta \\ \infty & ; \ \alpha > \beta \end{cases}$$

ونميز الحالات:

أ. إذا كان $f(x)$ كسراً منطقاً:

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+....+b_m}\ ;\ (x_0=\infty\ \text{و}\ a_0\neq 0\ \text{و}\ b_0\neq 0)$$

نكتب الكسر بالشكل:

$$f(x)=\frac{x^n}{x^m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}=x^{n-m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}$$

ومنه

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}0 & ;\ n<m\\ \frac{a}{b} & ;\ m=n\\ \infty & ;\ n>m\end{cases}\qquad(4.5)$$

ب. إذا كان الكسر $f(x)$ يحوي دوال غير عادية (صماء)، نعزل المضاريب x^α و x^β من البسط والمقام (حيث α و β الأسس الأكبر في البسط والمقام و $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$)، ثم نختصر من البسط والمقام المقدار x^γ، حيث $\gamma=\min(\alpha,\beta)$.

مثال 4.20 : احسب النهايات:

1) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$, 2) $B=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{2x^2+x}$

3) $C=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$, 4) $D=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{4+x^3}+x}$

الحل: باستخدام العلاقة (4.5)، نجد:

1) $n=2$ و $m=3$ $\Rightarrow$ $A=0$

2) $n=2$ و $m=2$ $\Rightarrow$ $B=-\dfrac{1}{2}$

3) $n=2$ و $m=1$ $\Rightarrow$ $C=\infty$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{\frac{4}{x^3}+1+\frac{x}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}}=1$$

3. إزالة حالة عدم التعيين من النمط $(0\cdot\infty)$: نحصل على هذه الحالة، عند حساب النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$، حيث $x_0 \notin D(f)$ و $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ و $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ و $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=0$.

تُردّ هذه الحالة إلى إحدى الحالتين $(\frac{\infty}{\infty})$ أو $(\frac{0}{0})$، بالاستفادة من خواص الدالتين φ و ψ، أو باستخدام إحدى العلاقتين:

$$f=\frac{\psi}{(1/\varphi)} \quad \text{أو} \quad f=\frac{\varphi}{(1/\psi)}$$

مثال 4.21 : احسب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot(\tan x+2x^2)$

الحل: إن النهاية حالة عدم تعيين من النمط $(0\cdot\infty)$ نردها للحالة $(\frac{0}{0})$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot(\tan x+2x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+2x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x^2}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}+2\right)=\infty$$

حيث استخدمنا العلاقة $\tan x\sim x$.

4. إزالة حالة عدم التعيين من النمط $(\infty-\infty)$: نحصل على هذه الحالة، عند حساب النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$، حيث $x_0\notin D(f)$ و $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ و $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\infty$. تُرد هذه الحالة إلى إحدى: الحالتين $(\frac{\infty}{\infty})$ أو $(\frac{0}{0})$، بالاستفادة من خواص الدالتين φ و ψ، أو باستخدام العلاقة

$$\psi-\varphi=\frac{(1/\psi)-(1/\varphi)}{[1/(\psi\cdot\varphi)]}$$

مثال 4.22 : احسب النهاية

$$A=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$$

الحل: إن النهاية حالة عدم تعيين من النمط $(\infty-\infty)$:

$$A=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})\cdot(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}$$

$$= \lim_{x \to \mp\infty} \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ونميز الحالتين:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{5-(4/x)}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{5}{2} \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$A = \lim_{x \to -\infty} \frac{5-(4/x)}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = -\frac{5}{2} \quad ; \quad \forall x < 0$$

5. إزالة حالة عدم التعيين من النمط (1^∞): نحصل على هذه الحالة، عند حساب النهاية

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

حيث $\lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1$ و $\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \infty$. لإزالة حالة عدم التعيين، نضع $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$:

$$\lim_{x \to x} [\psi(x)]^{\psi(x)} = \lim_{x \to x} \left[[1+\alpha(x)]^{(1/\alpha(x))}\right]^{\alpha(x)\cdot\psi(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to x} [\alpha(x)\cdot\psi(x)]} \quad e^{\lim\limits_{x \to x} [\varphi(x)-1]\cdot\psi(x)}$$

نحصل على حالة عدم تعيين من النمط $(0 \cdot \infty)$، نزيلها كما مر معنا سابقاً.

مثال 4.23 : احسب النهايتين:

$$1)\ \lim_{x \to 0} (1+\sin x)^{1/x} \quad , \quad 2)\ \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

الحل: إن هذه النهايات من النمط (1^∞):

$$1)\ \lim_{x \to 0} (1+\sin x)^{(1/x)} = \lim_{x \to 0} \left[(1+\sin x)^{(1/\sin x)}\right]^{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e$$

$$2)\ \lim_{x \to \infty} (1+\frac{2}{x})^x = \lim_{x \to \infty} \left[(1+(2/x))^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}\cdot x} = \lim_{x \to \infty} \left[(1+(2/x))^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$$

عرضنا في هذه الفقرة، إزالة بعض حالات عدم التعيين من الأنماط $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ أو $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $(\infty-\infty)$ أو $\left(1^{\infty}\right)$. وسنعرض في الفصل الخامس إزالة حالات أخرى من حالات عدم التعيين من النمط $\left(\infty^{0}\right)$ و $\left(0^{0}\right)$، بالإضافة للحالات السابقة، باستخدام قاعدة لوبيتال.

4.9 استمرار الدالة

تعريف 4.11 : نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0، إذا حققت ما يلي:

1. الدالة $f(x)$ معرفة على النقطة x_0 أي $x_0 \in D(f)$؛
2. توجد النهاية $\lim_{x\to x_0} f(x)$؛
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

إذا اختل أحد الشروط السابقة، فإننا نقول إن الدالة غير مستمرة عند النقطة x_0 ونسمي النقطة x_0 نقطة انقطاع للدالة $f(x)$.

مثال 4.24 : ادرس استمرار الدالتين $f(x)=c$ و $g(x)=x$ عند نقطة اختيارية x_0 من $\mathbb{R}$.

الحل: الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$.

لما كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = c = f(x_0)$، فإن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0.

و لما كان $\lim_{x\to x_0} g(x) = x_0 = g(x_0)$، فإن الدالة $g(x)$ مستمرة عند النقطة x_0.

مثال 4.25 : ادرس استمرار الدالة $f(x)=\operatorname{sign} x$ عند النقطة $x_0 = 0$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على النقطة $x_0 = 0$، ولكن ليس لها نهاية عند هذه النقطة، لأن $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign} x = 1$ و $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign} x = 1$. وعليه، فإن الدالة $f(x)=\operatorname{sign} x$ غير مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$.

يمكن صياغة تعريف استمرار دالة باستخدام تعريف نهاية دالة:

تعريف 4.12 : نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0، إذا حققت الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

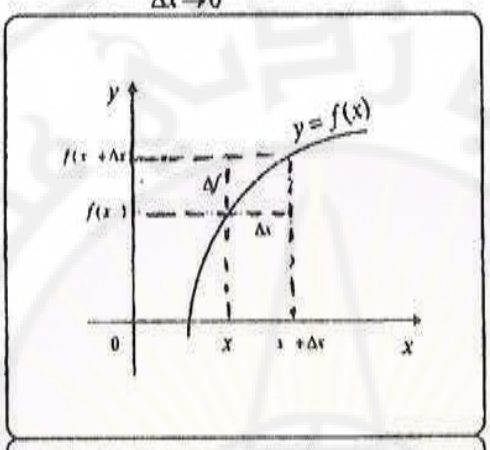
إذا رمزنا بـ $\Delta x = x - x_0$ للتغير الذي يطرأ على x و بـ $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ للتغير الذي يطرأ على الدالة f عند النقطة x_0، فإن الشرط السابق يُكتب كما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ : \ |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f| < \varepsilon$$

وبذا نحصل على تعريف آخر لاستمرار دالة:

تعريف 4.13 : نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0، إذا قابل تغير لامتناه في الصغر للمتغير x تغيراً لامتناهياً في الصغر للدالة $f(x)$، الشكل 4.10، أي:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$



الشكل 4.10

مثال 4.26 : ادرس استمرار الدالة $f(x) = x^2$ عند نقطة اختيارية x_0 من $\mathbb{R}$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$. نحسب التغير Δf عند النقطة x_0:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 \right] = 2x_0 \cdot 0 + 0 = 0$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة الاختيارية x_0 من $\mathbb{R}$.

4.10 الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار

إذا كان $f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \to x_0^+}$، فإننا نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة من اليمين عند النقطة x_0.

وإذا كان $f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \to x_0^-}$، فإننا نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة من اليسار عند النقطة x_0.

وهكذا، تكون الدالة $f(x)$ مستمرة من اليمين عند النقطة x_0، إذا وفقط إذا كانت هذه الدالة مستمرة من اليمين ومستمرة من اليسار عند هذه النقطة.

مثال 4.27 : ادرس استمرار الدالة $f(x)$ من اليمين ومن اليسار عند النقطة $x_0 = 0$، حيث

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ x+1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

الحل: لما كان $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$، فإن الدالة $f(x)$ مستمرة من اليمين عند النقطة $x_0 = 0$.

ولما كان $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1 \neq f(0) = 0$، فإن الدالة $f(x)$ غير مستمرة من اليسار عند النقطة $x_0 = 0$.

وهكذا، فإن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند هذه النقطة.

تعريف 4.14 : نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $]a;b[$، إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط هذا المجال.

ونقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط المجال $]a;b[$ ومستمرة من اليمين عند النقطة a ومستمرة من اليسار عند النقطة b.

4.11 نقاط الانقطاع

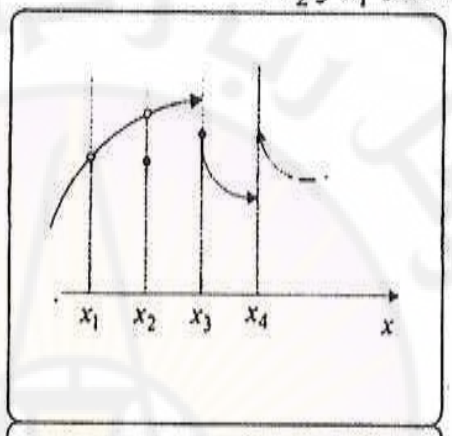
إذا اختل أحد شروط التعريف 4.11 عند النقطة x_0، فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقطاع للدالة $f(x)$. ونميز الحالات:

1. إذا تحقق الشرط الثاني فقط من التعريف 4.11 وكان $x_0 \notin D(f)$ أو $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$، فإن النقطة x_0 تسمى نقطة انقطاع قابلة للإزالة للدالة $f(x)$، الشكل 4.11، النقطتان x_1 و x_2.

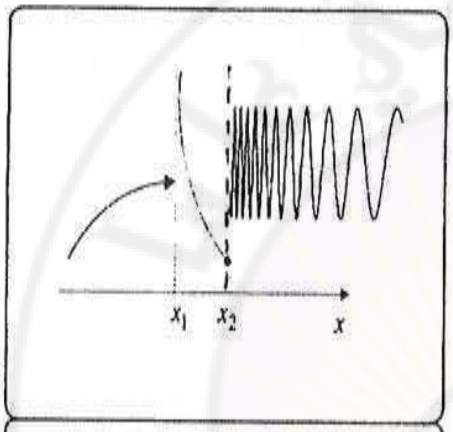
2. إذا اختل الشرط الثاني من التعريف 4.11، أي أن النهاية $\lim_{x \to x_0} f(x)$ غير موجودة ولكن النهايتين من اليمين ومن اليسار موجودتين ومحدودتين وغير متساويتين عند النقطة x_0، فإن النقطة x_0 تسمى نقطة انقطاع من النوع الأول للدالة $f(x)$. ونسمي المقدار

[$\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)$] قفزة الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0، الشكل 4.11، النقطتان x_3 و x_4.

3. إذا كانت إحدى النهايتين من اليمين أو من اليسار غير موجودة أو غير محدودة عند النقطة x_0، فإن النقطة x_0 تسمى نقطة انقطاع من النوع الثاني للدالة $f(x)$، الشكل 4.12، النقطتان x_1 و x_2.



الشكل 4.11



الشكل 4.12

مثال 4.28 : ادرس استمرار الدالة $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

الحل: إن الدالة $f(x)$ معرفة على المجموعة $D(f) = \mathbb{R}^*$. وعليه، فإن النقطة $x_0 = 0$ نقطة انقطاع لهذه الدالة.

لما كان

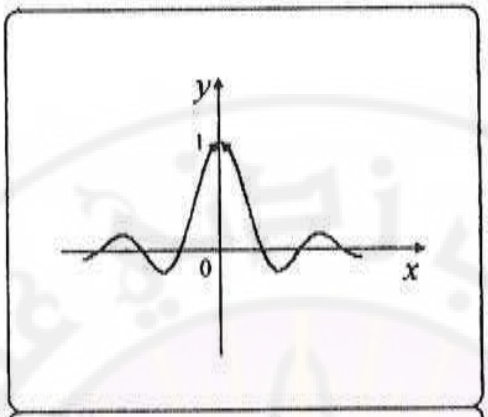
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

فإن النقطة $x_0 = 0$ نقطة انقطاع قابلة للإزالة، الشكل 4.13.

يمكن تمديد مجموعة تعريف الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_0 = 0$ حتى تصبح الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$. أي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

وهذه الدالة مستمرة عند $\mathbb{R}$ لأنها معرفة على $\mathbb{R}$. وأيا تكن x_0 من $\mathbb{R}$، فإن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



الشكل 4.13

مثال 4.29 : ادرس، على $\mathbb{R}$، استمرار الدالة

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x \le 0 \\ x^2 + 1 & ; \quad 0 < x \le 1 \\ 2 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$، وتتألف من ثلاثة أجزاء كل جزء هو دالة مستمرة عند كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفها:

$$f_1(x) = -x \; ; \; \forall x \le 0 \quad ، \quad f_2(x) = x^2 + 1 \; ; \; x \in]0;1[\quad ،$$

$$f_3(x) = 2 \; ; \; x > 1$$

بقي التحقق من استمرار الدالة $f(x)$ عند نقاط الالتحام، أي عند النقطتين $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$. لما كان

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

فإن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند النقطة $x_1 = 0$. وهذه النقطة نقطة انقطاع من النوع الأول للدالة $f(x)$. وقفزة الدالة عند هذه النقطة:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 - 0 = 1$$

ولما كان

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2) = 2 \quad ,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2+1) = 2$$

أي أن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2$$

فإن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x_2 = 1$، الشكل 4.14.

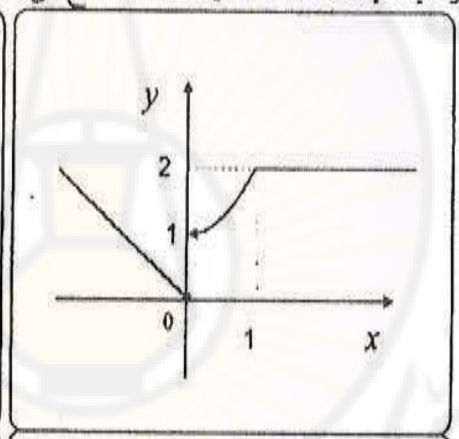
مثال 4.30 : بين نوع النقطة $x_0 = 1$ بالنسبة للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

الحل: الدالة $f(x)$ غير معرفة عند النقطة $x_0 = 1$، فهي نقطة انقطاع لهذه الدالة.

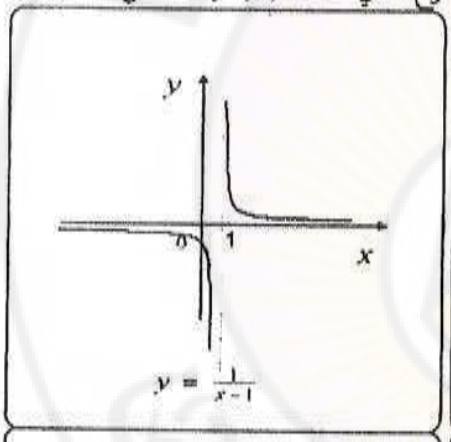
ولما كان

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

وعليه، فإن النقطة $x_0 = 1$ نقطة انقطاع من النوع الثاني للدالة $f(x)$، الشكل 4.15.



الشكل 4.14



الشكل 4.15

مثال 4.31 : ادرس استمرار الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$. نثبت، وفق تعريف غينيه لنهاية دالة، أن النهاية $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة.

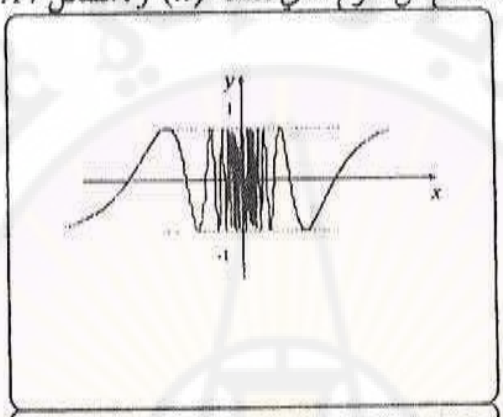
لتكن $\left\{\dfrac{2}{\pi(1+4n)}\right\}$ و $\left\{\dfrac{2}{\pi(3+4n)}\right\}$ متتاليتين من نقاط $\mathbb{R}$ متقاربتين من الصفر،

وتكون المتتاليتان المقابلتان لهما وفق الدالة $f(x)$:

$$\left\{f\left(\frac{2}{\pi(1+4n)}\right)\right\} = \{1, 1, 1, \ldots \}$$

$$\left\{f\left(\frac{2}{\pi(3+4n)}\right)\right\} = \{-1, -1, -1, \ldots \}$$

المتتالية الأولى متقاربة من 1 والثانية من -1. أي ليس للدالة $f(x)$ نهاية عند النقطة $x_0 = 0$. وهي نقطة انقطاع من النوع الثاني للدالة $f(x)$، الشكل 4.17.



الشكل 4.17

4.12 الاستمرار الجزئي

نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة جزئياً على المجال $[a;b]$، إذا كانت مستمرة عند جميع نقاط المجال $]a;b[$ باستثناء، ربما، عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول أو نقاط الانقطاع القابلة للإزالة، وبحيث إن للدالة $f(x)$ نهاية من اليمين عند النقطة a و نهاية من اليسار عند النقطة b.

ونقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة جزئياً على $\mathbb{R}$، إذا كانت مستمرة جزئياً على كل مجال جزئي مغلق من $\mathbb{R}$.

فمثلاً، الدالة $f(x) = [x]$، الشكل 2.6، مستمرة جزئياً على أي مجال مغلق، فهي مستمرة جزئياً على $\mathbb{R}$.

الدالة $f(x) = [x]$ مستمرة من اليمين عند النقاط $x = n \in \mathbb{Z}$، وغير مستمرة من اليسار عند هذه النقاط، وهي مستمرة من اليمين ومن اليسار عند النقاط الأخرى.

4.13 العمليات على الدوال المستمرة

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 4.12 : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتين عند النقطة x_0، فإن الدوال $f(x) \mp g(x)$ و $f(x)\cdot g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0)\neq 0\right)$ مستمرة عند هذه النقطة.

يمكن تعميم هذه المبرهنة من أجل عددٍ منته من الدوال. فحاصل جداء أو مجموع عدد منته من الدوال المستمرة عند نقطةٍ ما، هو دالة مستمرة عند هذه النقطة.

نتيجة 4.4: الحدودية $P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$ هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

نتيجة 4.5 : الكسر المنطق $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتان في x، هو دالة مستمرة على المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{x : Q(x)=0\}$.

4.13.1 الخواص الأساسية للدوال المستمرة

تُقبل دون برهان المبرهنة

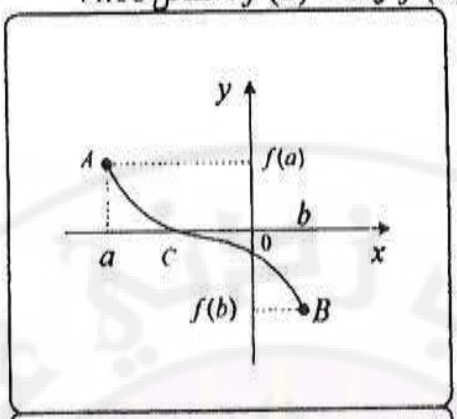
مبرهنة 4.13 : إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة عند النقطة x_0، وكان $f(x_0)>0\ (f(x_0)<0)$، فإنه يوجد عدد $\delta>0$، بحيث يكون $f(x)>0\ (f(x)<0)$ على الجوار $]x_0-\delta;x_0+\delta[$.

مبرهنة 4.14 (مبرهنة بولزانو[1]-كوشي الأولى): إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وكان $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإنه توجد على الأقل قيمة واحدة للدالة $f(x)$ تساوي الصفر. أي

$$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists\, c\in]a;b[\ :\ f(c)=0$$

[1] برنارد بولزانو (1781-1848) عالم رياضيات تشيكي.

البرهان: ليكن $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ ، الشكل 4.18.



الشكل 4.18

نقسم المجال $[a;b]$ لقسمين متساويين. إذا كانت قيمة الدالة عند منتصف هذا المجال تساوي الصفر، فإن المبرهنة صحيحة. أما إذا لم تكن كذلك، فإننا نختار نصف المجال الذي تكون إشارة الدالة عند طرفيه مختلفة، وليكن $[a_1;b_1]$. نقسم المجال $[a_1;b_1]$ لقسمين متساويين إذا كانت قيمة الدالة عند منتصف هذا المجال تساوي الصفر، فإن المبرهنة صحيحة، أما إذا لم تكن كذلك، فإننا نختار نصف المجال الذي تكون إشارة الدالة عند طرفيه مختلفة، وليكن $[a_2;b_2]$ ، نكرر العملية السابقة عدداً غير منته من المرات، فنحصل على متتالية المجالات المتداخلة.

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots$$

حيث

$$\lim_{x\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

وإشارة الدالة عند طرفي المجال $[a_n;b_n]$ مختلفة. وفق مبرهنة المجالات المتداخلة، توجد نقطة c تنتمي لجميع المجالات.

بقي إثبات أن $f(c) = 0$. بالفعل، إذا فرضنا $f(c) > 0$ ، فإنه وفق المبرهنة 4.13، يوجد جوار للنقطة c يكون فيه $f(x) > 0$ ، ومن أجل n كبيرة بقدرٍ كاف ينطبق هذا الجوار على المجال $[a_n;b_n]$ أي أن $f(x) > 0$ على المجال $[a_n;b_n]$ وهذا يناقض كون الدالة $f(x)$

مختلفة الإشارة عند طرفي هذا المجال. إذن يستحيل أن يكون $f(c) > 0$.

نبرهن بأسلوب مماثل استحالة كون $f(c) < 0$. وعليه، فإن $f(c) = 0$.

نتيجة 4.6 : إن إثبات صحة هذه المبرهنة يعطي طريقة لإيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$، تسمى طريقة تنصيف المجال.

مثال 4.32 : أوجد جذراً للمعادلة $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ يقع في المجال $[-1;3]$ بطريقة تنصيف المجال.

الحل: ليكن $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

لما كان $f(-1) = -3 < 0$ و $f(3) = 13 > 0$. وكانت $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[-1;3]$، لأنها حدودية، فإنه وفق المبرهنة 4.14، يمكن إيجاد الجذر. نحسب قيمة الدالة عند منتصف المجال $f\left(\frac{-1+3}{2}\right) = f(1) = -3$.

نختار المجال الجديد $[1;3]$، ونحسب قيمة الدالة عند منتصفه $f\left(\frac{1+3}{2}\right) = f(2) = 0$.

إذن فالجذر المطلوب $x_0 = 2$.

التصور الهندسي للمبرهنة: إذا كانت النقطتان $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ تقعان بجهتين مختلفتين بالنسبة للمحور ox، الشكل 4.18، فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقطع محور الفواصل ox في نقطة واحدة على الأقل من نقاط المجال $]a;b[$.

مبرهنة 4.15 (مبرهنة بولزانو- كوشي الثانية): إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ عندئذٍ، أياً يكن العدد $f(a) < C < f(b)$، فإنه توجد نقطة $c \in [a;b]$، بحيث يكون $f(c) = C$.

البرهان: ندرس الدالة $\varphi(x) \overset{\Delta}{=} f(x) - C$ المستمرة على المجال $[a,b]$، لأنها حاصل فرق دالتين مستمرتين على هذا المجال

لما كان $\varphi(a) = f(a) - C < 0$ و $\varphi(b) = f(b) - C > 0$، فإنه وفق المبرهنة 4.14، توجد نقطة $c \in [a;b]$ بحيث يكون $\varphi(c) = f(c) - C = 0$. وعليه فإن $f(c) = C$.

نتيجة 4.7 : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على مجالٍ ما $X \subseteq D(f)$، فإن مجموعة قيمها تشكل، أيضاً، مجال $Y \subseteq E(f)$.

إن التصور الهندسي للمبرهنة 4.15 يعني أن المستقيم $y = C$ يقطع المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ على الأقل في نقطة واحدة.

مبرهنة 4.16 : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند نقطة x_0، فإنها تكون محدودة على جوارٍ ما لهذه النقطة.

البرهان: ليكن $\varepsilon = 1$ عندئذ، يوجد $\delta > 0$، بحيث يكون $|f(x) - f(x_0)| < 1$، أياً تكن $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$. وعليه، فإن

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$$

أي:

$$|f(x)| < M = 1 + |f(x_0)| \quad ; \quad \forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

إذن، فالدالة $f(x)$ محدودة على الجوار $u_\delta(x_0)$.

مبرهنة 4.17 (مبرهنة فايرشتراوس[1] الأولى): إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على المجال المغلق $[a;b]$، فإنها تكون محدودة على هذا المجال.

البرهان: نفرض جدلاً أن الدالة $f(x)$ غير محدودة على المجال $[a;b]$. نقسم هذا المجال لقسمين متساويين، عندئذٍ، تكون الدالة $f(x)$ غير محدودة على أحد هذين القسمين، على الأقل، وليكن هذا المجال هو $[a_1, b_1]$. نقسم هذا المجال لقسمين متساويين عندئذ تكون الدالة $f(x)$ غير محدودة على أحد هذين القسمين على الأقل. وليكن هذا المجال $[a_2, b_2]$ نكرر هذه العملية عدداً غير منته من المرات فنحصل على متتالية مجالات متداخلة

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots$$

حيث إن الدالة $f(x)$ غير محدودة على كل منها، و

$$\lim_{x\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

عندئذٍ، من مبرهنة المجالات المتداخلة، توجد نقطة c تنتمي لجميع هذه المجالات. ولما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$ فهي مستمرة عند النقطة c. وعليه، فإن هذه الدالة محدودة على جوارٍ لهذه النقطة. ويمكن من أجل n كبير بقدرٍ كافٍ، ينطبق هذا الجوار على المجال $[a_n;b_n]$ وهذا يناقض كون الدالة $f(x)$ غير محدودة على هذا المجال.

---

[1] كارل فايرشتراوس (1815-1897) عالم رياضيات ألماني.

ملحوظة 4.3: تكون هذه المبرهنة غير صحيحة، إذا استبدلنا المجال $[a;b]$ بالمجال المفتوح $]a;b[$. فمثلاً، الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]0;1[$ ، غير أنها ليست محدودة فيه، لأن

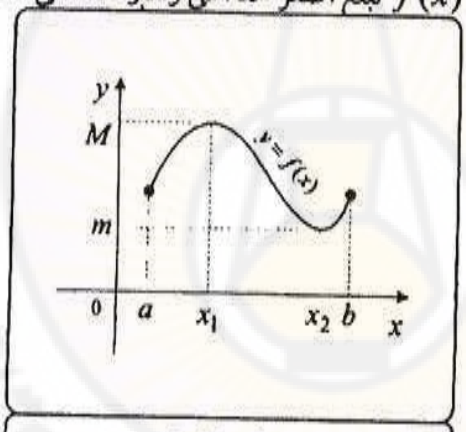
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 4.18 (مبرهنة فايرشتراوس الثانية): إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a;b]$ ، فإنه توجد نقطتان $x_1, x_2 \in [a;b]$ ، الشكل 4.19، بحيث يكون

$$f(x_2) = m = \inf_{[a;b]} f(x) \quad \text{و} \quad f(x_1) = M = \sup_{[a;b]} f(x)$$

ونقول عندها، إن الدالة $f(x)$ تبلغ أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى لها على المجال $[a;b]$.



الشكل 2.19

ملحوظة 4.4 : عندما تبلغ الدالة أصغر حد أعلى M وأكبر حد أدنى لها m على المجال $[a;b]$. نسمي أصغر حد أعلى M القيمة العظمى لهذه الدالة وأكبر حد أدنى m القيمة الصغرى لهذه الدالة على المجال $[a;b]$ ونرمز بـ

$$M = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x) \quad \text{و} \quad m = \inf_{[a,b]} f(x) = \min_{[a,b]} f(x)$$

ويمكن عندئذ، صياغة المبرهنة 4.18 كما يلي:

الدالة المستمرة على مجال مغلق، لها قيمة عظمى وقيمة صغرى على هذا المجال.

ملحوظة 4.5 : نسمي الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$ تذبذب (تواتر أو اهتزاز) الدالة $f(x)$ على هذا المجال، ونرمز له بالرمز $w = M - m$.

4.14 استمرار الدالة المركبة

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 4.19 : إذا كانت الدالة $u = \varphi(x)$ مستمرة عند النقطة x_0 والدالة $y = f(u)$ مستمرة عند النقطة $u_0 = \varphi(x_0)$، فإن الدالة المركبة $F(x) = f[\varphi(x)]$ مستمرة عند النقطة x_0.

يمكن تعميم هذه المبرهنة من أجل تركيب عدد منته من الدوال المستمرة عند نقطة.

نتيجة 4.8 : من هذه المبرهنة ومن تعريف استمرار دالة عند نقطة، نجد

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} F(x) = F\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

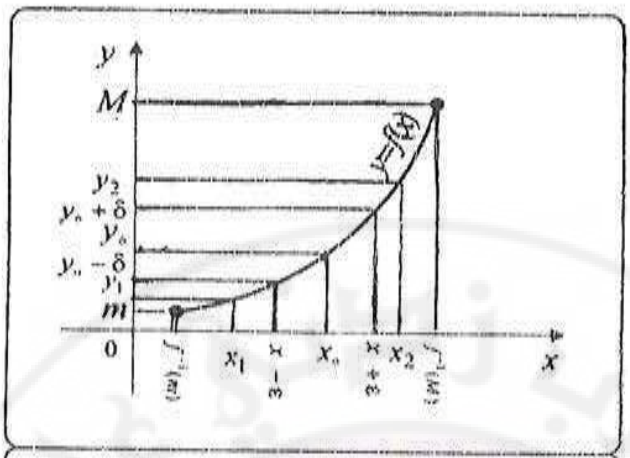
أي أنه يمكن التبديل بين رمزي الدالة والنهاية إذا كانت هذه الدالة مستمرة.

4.15 استمرار الدالة العكسية

مبرهنة 4.20 : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ مستمرة ومطردة تماماً على مجالٍ ما $X \subseteq D(f)$ ، فإن الدالة العكسية لها $x = f^{-1}(y)$ مستمرة على المجموعة $Y = f(X)$.

البرهان: استناداً للنتيجة4.7 ، فإن المجموعة Y هي مجال طرفاه m و M، حيث $m = \inf_x f(x)$ و $M = \sup_x f(x)$. لتكن $y_0 \in Y$ و $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

ندرس، أولاً، الحالة $m < y_0 < M$، الشكل 4.20. عندئذٍ، فإن النقطة x_0 نقطة داخلية من المجال X، نختار العدد $\varepsilon > 0$، بحيث $(x_0 + \varepsilon) \in X$ و $(x_0 - \varepsilon) \in X$ ونرمز بـ $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ و $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. لما كانت الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً، فإن $y_1 < y_0 < y_2$.



الشكل 4.20

نختار العدد $\delta > 0$ بحيث يكون $y_1 \le y_0 - \delta$ و $y_2 \ge y_0 + \delta$.

عندئذٍ، إذا حقق y المتراجحة $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$، فإن $y_1 < y < y_2$.

ولما كانت الدالة العكسية f^{-1} متزايدة تماماً، المبرهنة 2.1، فإن

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$$

ولما كان

$$f^{-1}(y_1) = x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon \text{ و } f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

فإن

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

حيث $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$.

وهكذا، نكون قد أثبتنا صحة الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0\ :\ |y - y_0| < \delta \implies \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon$$

أي أن الدالة العكسية f^{-1} مستمرة عند النقطة y_0 ولما كانت النقطة y_0 اختيارية من المجال $]m; M[$، فإن الدالة العكسية f^{-1} مستمرة على هذا المجال.

إذا كان $m \in Y$ أو $M \in Y$، فإنه بمناقشةٍ مشابهة، نبرهن أن الدالة العكسية f^{-1} مستمرة من اليسار عند النقطة m ومن اليمين عند النقطة M.

إذن، الدالة العكسية $x = f^{-1}(y)$ مستمرة على المجموعة Y.

4.16 استمرار بعض الدوال الأولية الأساسية

1 . استمرار الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية

نثبت أن الدالة $y = \sin x$ مستمرة عند أية نقطة x_0 من $\mathbb{R}$. ليكن Δx تغيراً يطرأ على المتحول x عند النقطة x_0، فيكون التغير الذي يطرأ على الدالة y:

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}) \cdot \sin(\tfrac{\Delta x}{2})$$

ومنه

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [2\cos(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}) \cdot \sin(\tfrac{\Delta x}{2})]$$

ولما كان

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin(\tfrac{\Delta x}{2}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \cdot (\tfrac{\Delta x}{2}) = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{و} \quad \left|\cos(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2})\right| \le 1$$

فإن $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

أي أن الدالة $y = \sin x$ مستمرة عند أية نقطة x من $\mathbb{R}$.

نبرهن بأسلوبٍ مشابه، استمرار الدالة $y = \cos x$ عند أية نقطة x من $\mathbb{R}$.

واستناداً للمبرهنة 4.12، فإن الدوال $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ و $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}$، باستثناء النقاط المحققة للمعادلة $\cos x = 0$ ، أي باستثناء النقاط $x_k = \frac{1}{2}\pi + \pi k$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وكذلك فإن الدوال $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ و $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}$، باستثناء النقاط المحققة للمعادلة $\sin x = 0$، أي باستثناء النقاط $x_k = \pi k$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالاستناد للمبرهنة 4.20 ، فإن الدوال المثلثية العكسية مستمرة على مجموعة تعريفها.

2 . استمرار الدالة الأسية والدوال القطعية والدوال القطعية العكسية والدالة اللوغاريتمية

نثبت أن الدالة $y = a^x$ ، حيث $0 < a \neq 1$ ، مستمرة عند أية نقطة x_0 من $\mathbb{R}$.

ليكن Δx تغير يطرأ على المتغير x عند النقطة x_0 ، ونحسب نهاية التغير الموافق الذي يطرأ على y:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[a^{(x_0 + \Delta x)} - a^{x_0}\right] = a^{x_0}\left(\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x}\right) - a^{x_0} =$$

$$= a^{x_0}\left(\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} - 1\right) = a^{x_0} \cdot 0 = 0$$

فالدالة $y = a^x$ مستمرة أياً تكن النقطة x من $\mathbb{R}$.

وخصوصاً، فالدالة $y = e^x$ مستمرة أياً تكن النقطة x من $\mathbb{R}$.

وبالاستناد للمبرهنة 4.12 ، فإن الدوال القطعية مستمرة على مجموعة تعريفها، لأنها تنتج عن الدالة الأسية e^x بعمليات حسابية.

واستناداً للمبرهنة 4.20، فإن الدوال القطعية العكسية والدالة اللوغاريتمية $y = \log_a x$ مستمرة على مجموعة تعريفها.

3. استمرار الدالة $y = |x|$

إن الدالة $y = |x| = x \;\; ; \;\; x > 0$ مستمرة على المجال $]0;\infty[$.

والدالة $y = |x| = x \;\; ; \;\; x < 0$ مستمرة على المجال $]-\infty;0[$.

بقي إثبات استمرار الدالة $y = |x|$ عند النقطة $x_0 = 0$ (نقطة الالتحام).

نحسب النهايتين من اليمين ومن اليسار لهذه الدالة عند النقطة $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

أي أن الدالة $y = |x|$ مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$ ، أي أنها مستمرة أياً تكن النقطة x من $\mathbb{R}$

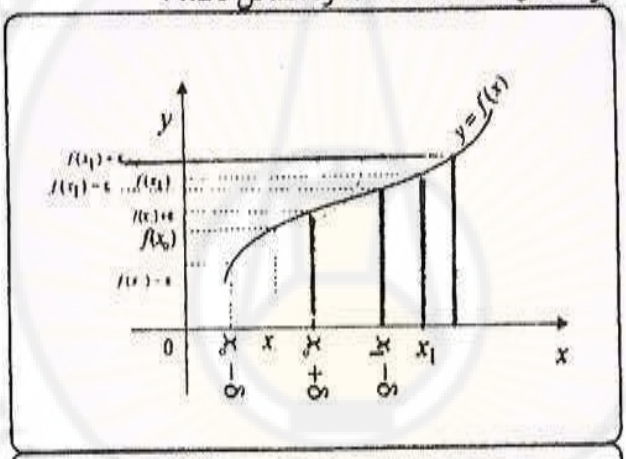
4.17 الاستمرار المنتظم

تتمتع الدوال المستمرة على مجالات مغلقة بميزةٍ هامة، وهي ما تسمى خاصة الاستمرار المنتظم.

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على مجموعةٍ ما $X \subseteq D(f)$ ولتكن $x_0 \in X$. لما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0، فإنه يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (4.7)$$

حيث إن العدد δ يتبع لـ ε و x_0، في الحالة العامة. عندما تتغير x_0 على المجموعة X (من أجل ε ثابت)، فإن العدد δ يختلف عند تغير x_0. وكلما كان المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ أكثر انحداراً كان العدد δ أصغر، الشكل 4.21.



الشكل 4.21

لو كان عدد نقاط المجموعة X منتهياً، لكانت مجموعة الأعداد المقابلة δ مؤلفة من عددٍ منته أيضاً، ولاخترنا، عندها δ أصغر هذه الأعداد وكان هذا العدد يتعلق فقط بـ ε، ويصلح من أجل جميع نقاط X. بينما يكون ذلك غير ممكن، عندما يكون عدد نقاط المجموعة X غير منته.

والسؤال هنا: هل توجد دوال مستمرة على مجموعة تحقق الشرط (4.7)، حيث δ يتعلق بـ ε فقط، من أجل جميع النقاط x_0 من المجال X؟

يقود هذا السؤال لمفهوم الاستمرار المنتظم.

تعريف 4.15 : نقول إن الدالة $f(x)$ مستمرة بانتظام على المجموعة $X \subseteq D(f)$، إذا تحقق الشرط:

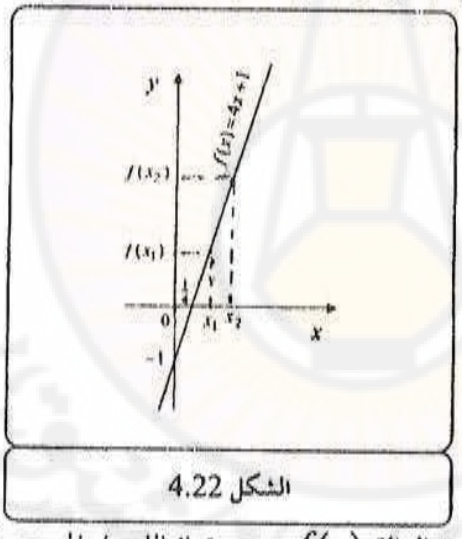
$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \forall x_1, x_2 \in X \, , \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

مثال 4.33 : أثبت أن الدالة الخطية $f(x) = 4x - 1$ مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$.

الحل: أياً يكن العدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد العدد $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon > 0$ ، بحيث يكون $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ من أجل نقطتين x_1 و x_2 اختياريتين من $\mathbb{R}$، تحققان المتراجحة $|x_1 - x_2| < \delta$ ، لأن

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |4x_1 - 1 - 4x_2 + 1| = 4|x_1 - x_2| < 4\delta = \varepsilon$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$. وهذا يعني أن تغيراً بسيطاً في المتغير x يؤدي إلى تغير بسيط في الدالة $f(x)$ على أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، الشكل 4.22.



الشكل 4.22

ملحوظة 4.6 : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة بانتظام على المجموعة X، فإنها تكون مستمرة على هذه المجموعة. وللتحقق من ذلك، يكفي أن نضع في تعريف الاستمرار بانتظام $x = x_1$ و $x_2 = x_0$، فنحصل على تعريف استمرار الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0، أما عكس هذه الحقيقة فهو غير صحيح بالضرورة. أي إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على مجموعة، فإنه ليس بالضرورة أن تكون هذه الدالة مستمرة بانتظام على هذه المجموعة.

فمثلاً، الدالة $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ مستمرة على المجال $]0;1[$ لكنها غير مستمرة بانتظام على هذا المجال.

ليكن $x_n^{(1)}=\frac{1}{n}$ و $x_n^{(2)}=\frac{2}{2n+1}$. نختار n بحيث يكون

$$\left|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}\right|=\frac{1}{n(2n+1)}<\delta$$

عندئذٍ، باختيار $\varepsilon=\frac{1}{2}$، يكون

$$\left|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})\right|=1>\varepsilon=\frac{1}{2}\quad ;\quad x_n^{(1)}\,,\,x_n^{(2)}\in]0;1[$$

وعليه، فإن الدالة $f(x)$ غير مستمرة بانتظام على المجال $]0;1[$.

إن شرط الانتقال من الاستمرار إلى الاستمرار المنتظم تضمنه المبرهنة:

مبرهنة 4.21 (مبرهنة كانتور[1]) : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنها مستمرة بانتظام على هذا المجال.

نتيجة 4.9 : لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال المغلق $[a;b]$ عندئذٍ، أياً يكن العدد $\varepsilon>0$، يوجد عدد $\delta>0$ بحيث إنه إذا جزّأنا المجال $[a;b]$ اختيارياً، لعدد منته من المجالات الجزئية المغلقة طول كل منها δ، فإن w، اهتزاز الدالة $f(x)$ على كل من هذه المجالات الجزئية، أقل من ε.

البرهان: لما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة بانتظام على المجال $[a;b]$، فإنه يتحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\,,\,\exists\delta>0\;:\;\forall x_1-x_2\in[a;b]\;:\;|x_1-x_2|<\delta\;\Rightarrow\;|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

نجزئ المجال $[a;b]$ اختيارياً لعددٍ منته من المجالات الجزئية المغلقة، طول كل منها δ. لما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنه يمكن إيجاد نقطتين x_1 و x_2، من كل مجال جزئي من مجالات تجزئة المجال $[a;b]$، بحيث يكون على هذا المجال الجزئي

$$f(x_2)=m=\inf f(x)\ \text{ و }\ f(x_1)=M=\sup f(x)$$

ولما كان $|x_1-x_2|<\delta$، فإن $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ أي $w<\varepsilon$.

ملحوظة 4.7 : تكون المبرهنة غير صحيحة إذا استبدلنا المجال المغلق بمجالٍ مفتوح أو بمجالٍ نصف مغلق.

---

[1] جورج كانتور (1845-1915) عالم رياضيات ألماني -- مؤسس النظرية المعاصرة للمجموعات.

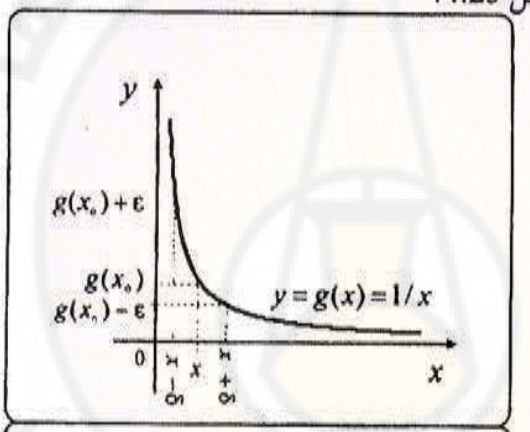
مثال 4.34 : ادرس الاستمرار المنتظم للدالتين:

$f(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$ على المجال $[-1;1]$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ على المجال $]0;3]$.

الحل: الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[-1;1]$، فهي مستمرة بانتظام على هذا المجال. أما الدالة $g(x)$ المستمرة على المجال $]0;3]$ فهي غير مستمرة بانتظام على هذا المجال، لأنه أياً يكن العدد المثبّت $\varepsilon>0$ ، توجد نقطتان x_1 و x_2 قريبتان من الصفر، لا يمكن من أجلها إيجاد العدد $\delta>0$ ، بحيث يتحقق الشرط

$$|x_1-x_2|<\delta \quad \Rightarrow \quad |g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$$

أي أن تغير بسيط في المتحول x ، عند نقطة x_0 قريبة من الصفر، يؤدي لتغير كبير في الدالة $y=g(x)$ ، الشكل 4.23.



الشكل 4.23

تمارين الفصل الرابع

1. هل للدالة التالية نهاية عندما تسعى x إلى الصفر

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ; \quad x>0\\ \dfrac{\cos x}{2} & ; \quad x\le 0\end{cases}$$

2. أعطِ مثالاً على دالة ليس لها نهاية عند النقطة $x_0=2$.

3. أعطِ مثالاً على دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وليس لها نهاية عند أية نقطة.

4. أعط مثالاً على دالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$، جميع قيمها سالبة وبحيث $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

5. أعطِ مثالاً لدالتين $f(x)$ و $g(x)$ ليس لهما نهاية عند النقطة $x_0=0$ وبحيث يكون لـ $f+g$ (أو $f\cdot g$) نهاية عند النقطة $x_0=0$.

6. أوجد النهاية من اليمين ومن اليسار للدالة $f(x)$ عند النقط $x_1=0$ و $x_2=1$ و $x_3=2$، حيث:

$$f(x)=\frac{|x|\,(x+2)}{x(x-1)^3(x-2)^2}$$

$$f(x)=\frac{x\,(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}\cdot\frac{1}{x^{\alpha}(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{(\sin x)(x-1)^3\cdot|x-2|}$$

7. قارن بين اللامتناهيين في الصغر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$، عندما تسعى x إلى الصفر في الحالات:

A. $\alpha(x)=x^2 \quad ; \quad \beta(x)=\sin x$

B. $\alpha(x)=5x^2 \quad ; \quad \beta(x)=\tan 3x^2$

C. $\alpha(x)=25x^2 \quad ; \quad \beta(x)=\tan^2 5x$

D. $\alpha(x)=\tan x \quad ; \quad \beta(x)=\sin x$

E. $\alpha(x)=1-\cos 2x \quad ; \quad \beta(x)=x$

F. $\alpha(x)=2x^3-3x^2+7x \quad ; \quad \beta(x)=16x^2+100x$

8. احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x^4+8}}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to +\infty}x^{3/4}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{\frac{x}{5}+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to \mp\infty}\arctan x$$

$$\lim_{x\to \mp\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\tan 1}}{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin 1}}$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{x^3-5x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to 2^+}\arctan\frac{1}{2-x}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\arctan\frac{1}{2-x}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/4}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$$

9. حدد قيمة الثابت a حتى تكون الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x_0=0$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & ; \quad x\in\left]-\frac{1}{4}\pi;0\right[\cup\left]0;\frac{1}{4}\pi\right[\\ a & ; \quad x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & ; \quad x\neq 0\\ a & ; \quad x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x+1) & ; \quad x\in\left]-1;1\right[\\ a & ; \quad x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & ; \quad x\neq 0\\ a & ; \quad x=0\end{cases}$$

10. ادرس استمرار الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 المكتوبة بجوار الدالة في الحالات:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & ; \quad x\neq 2\\ 5 & ; \quad x=2\end{cases} \quad ; \quad x_0=2$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x^2+x} & ; \quad x\neq \mathbb{Q}\\ \frac{1}{2} & ; \quad x=\mathbb{Q}\end{cases} \quad ; \quad x_0=0$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ x & ; \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases} \quad ; \quad x_0=0$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2x} & ; \quad |x|\leq 1\\ |x-1| & ; \quad |x|>1\end{cases} \quad ; \quad x_0=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2x} & ; \ |x|\le 1\\ |x-1| & ; \ |x|>1\end{cases} \quad ; \ x_0=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{\pi} & ; \ x\neq 0\\ 1 & ; \ x=0\end{cases} \quad ; \ x_0=0$$

$$f(x)=|sign\,x| \quad ; \ x_0=0$$

11. حل المتراجحات

$$(x^4-2x^2)\arctan x\ge 0 \qquad \left|\begin{array}{l}(x^3-1)(x-1)\le 0\\ \left(x^2-\frac{1}{4}\right)\sqrt{\arctan x}\ge 0\\ \sqrt{4-x}\,(\log_2 x)(\sin x)<0\end{array}\right.$$

$$(1-x)^2\sqrt{4-x^2}\,\cos x>0$$

$$(x^4-1)\sqrt{16-x^2}\,\log_{\frac{1}{2}}(10-x)\ge 0$$

$$[\log_2(x+5)]\cdot[\log_\pi(3-x)]\sqrt{(x+5)(3-x)}<0$$

12. برهن أن لكلٍ من المعادلات التالية جذراً حقيقياً واحداً على الأقل:

$$x+\ln x=0 \qquad \left|\begin{array}{l}(1+x)2^{(x^3+x-2)}-\sqrt{1+x^2}\,\sin^2 x=0\\ x^3-x+2=0\\ 3\sin^3 x-5\sin x+1=0\end{array}\right.$$

$$8^x-3.2^x-16=0$$

$$x^5+x+17=0$$

13. أوجد جذر المعادلة $x^3+2x^2-2x-4=0$ في المجال $[1;2]$.

14. أوجد جذر المعادلة $x^3+2x^2+3x-18=0$ الواقع في المجال $[1;2]$.

15. حدد وصنف نقاط الانقطاع للدوال التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\arcsin x} \qquad \left|\begin{array}{l}f(x)=\cot x\\ f(x)=\frac{1}{x-[x]}\\ f(x)=\frac{x^2}{x}\\ f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & ; \ x\neq 0\\ 2 & ; \ x=0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l}f(x)=sign\,x\\ f(x)=\frac{1}{\sin x}\\ f(x)=e^{1/x}\\ f(x)=\frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}\end{array}\right.$$

$$f(x)=\frac{(x-1)+|x-1|}{x^2-1}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \ x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & ; \ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1\cdot 2^{\frac{1}{x}} & ; \ x\neq 0\\ 1 & ; \ x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+2} & ; \quad x\neq -2\\ 1 & ; \quad x=-2\end{cases}$$

16. أعطِ مثالاً لدالتين غير مستمرتين عند نقطة x_0 ولكن مجموعهما (جداءهما) دالة مستمرة عند هذه النقطة.

17. هل الدالتان $f[g(x)]$ و $g[f(x)]$ مستمرتان على $\mathbb{R}$، إذا كان $f(x)=sign\,x$ و $g(x)=1+x-|x|$.

18. هل الدالة $f(u)=u^2+1$ مستمرة على $\mathbb{R}$، إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}x & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ -x & ; \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

19. هل الدالة $f(u)=\cos u$ مستمرة على $\mathbb{R}$، إذا كان

$$u=\begin{cases}x & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & ; \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

20. إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[0;1]$ ومجموعة قيمها $[0;1]$. أثبت أنه توجد نقطة x_0 من المجال $[0;1]$، بحيث يكون $f(x_0)=x_0$.

21. إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[2;5]$ وجميع قيمها على هذا المجال أعداد عادية (منطقة) و $f(4)=\frac{7}{9}$ أوجد $f(\pi)$ و $f(e)$.


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

الحساب التفاضلي للدوال التابعة لمتحول حقيقي واحد

5.1 مفهوم المشتق

5.2 تفاضل دالة

5.3 العلاقة بين التفاضل والاستمرار

5.4 مشتق الدالة المركبة

5.5 قواعد التفاضل

5.6 اشتقاق وتفاضل الدوال الابتدائيه الأساسية

5.7 مشتق الدالة العكسية

5.8 جدول المشتقات الشهيرة

5.9 المشتق والتفاضل اللوغارينمي

5.10 المشتقات من مراتب عليا

5.11 اشتقاق الدالة الضمنية

5.12 اشتقاق الدوال المعطاة وسيطيا

5.13 التفاضل من مراتب عليا

5.14 مبرهنات القيمة الوسطى

5.15 قاعدة لوبيتال

5.16 دراسة سلوك الدوال ورسم منحنياتها البيانية

5.17 رسم المنحنيات المعطاة وسيطياً

5.18 رسم المنحنيات المعطاة قطبياً

تمارين الفصل الخامس


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الحساب التفاضلي
للدوال التابعة لمتغير حقيقي واحد

5.1 مفهوم المشتق

تعريف 5.1 : لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة على جوارٍ $u_\delta(x_0)$ للنقطة x_0، وليكن Δx تغيراً للمتغير x عند النقطة x_0، بحيث تبقى النقطة $x_0 + \Delta x$ ضمن الجوار $u_\delta(x_0)$. يكون عندئذٍ، تغير الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 :

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، فإنها تسمى مشتق الدالة $y = f(x)$ عند النقطة x_0، ونرمز لها بأحد الرموز

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad ، \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad ، \quad y'(x_0) \quad ، \quad f'(x_0)$$

ونرمز لمشتق الدالة $y = f(x)$، عند نقطة اختيارية x، بأحد الرموز

$$\frac{dy}{dx} \quad ، \quad \frac{df}{dx} \quad ، \quad y' \quad ، \quad f'$$

إذا كان مشتق الدالة $f(x)$ موجوداً عند كل نقطة x من نقاط المجموعة $X \subseteq D(f)$، أي أن للمشتق $f'(x)$ قيمة محددة عند كل قيمة للمتغير x، فإن المشتق $f'(x)$ هو دالة في x، معرفة على المجموعة X.

إذا كان

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$$

عند نقطةٍ ما x_0، فإننا نقول إن للدالة $f(x)$ مشتقاً لا نهائياً، غير محدد، عند النقطة x_0. ونعني، لاحقاً، بعبارة "للدالة $f(x)$ مشتق" أن هذا المشتق موجود ومحدود، ما لم نذكر خلاف ذلك.

مثال 5.1: أوجد مشتق الدالة الثابتة $f(x) = C$ عند نقطة اختيارية x.

الحل: ليكن Δx تغيراً للمتغير x. عندئذٍ، فإن تغير الدالة $f(x)$:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

وعليه، فإن المشتق هو

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

أي أن: $f'(x) = c' = 0$.

مثال 5.2 : أوجد مشتق الدالة $f(x) = x^3$ عند نقطة اختيارية x.

الحل: ليكن Δx تغيراً للمتغير x. يكون عندئذٍ، تغير الدالة $f(x)$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

وعليه، فإن المشتق هو

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [2x + \Delta x] = 2x$$

أي أن: $f'(x) = (x^2)' = 2x$

مثال 5.3 : أوجد مشتق الدالة $f(x) = \sin x$ عند نقطة اختيارية x.

الحل: ليكن Δx تغيراً للمتغير x. عندئذٍ، فإن تغير الدالة $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x$$

أي أن: $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

تعريف 5.2 : لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة على جوار أيسر للنقطة x، أي على المجال $]x - \delta; x[$. إذا وُجدت النهاية

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فإننا نسميها المشتق الأيسر (المشتق من اليسار) للدالة $f(x)$ عند النقطة x. ونرمز له بالرمز $f'_-(x)$.

وإذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على جوار أيمن للنقطة x، أي على المجال:

$]x_0, x_0 + \delta[$ ، فإنه إذا ، جدت النهاية

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فإننا نسميها المشتق الأيمن (المشتق من اليمين) للدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 . ونرمز له بالرمز $f'_+(x_0)$.

ينتج من خواص النهايات، أنه إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على جوارٍ ما للنقطة x_0 ، وكان لها مشتق محدود $f'(x_0)$ ، فإن المشتق من اليمين والمشتق من اليسار لهذه الدالة عند النقطة x_0 ، موجودان، ويكون

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

ملحوظة 5.1 : توجد دوال ليس لها مشتق عند نقطة x_0 ، مع أن لها مشتقاً من اليمين ومشتقاً من اليسار عند هذه النقطة.

مثال 5.6 : أوجد المشتق من اليمين والمشتق من اليسار للدالة $f(x) = |x|$ ، عند النقطة $x_0 = 0$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على أي جوار للنقطة $x_0 = 0$. ليكن Δx تغيراً للمتغير x عندئذٍ،

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

ولما كان $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ، فإنه ليس للدالة $f(x) = |x|$ مشتق عند النقطة $x_0 = 0$.

5.1.1 المعنى الفيزيائي للمشتق

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على جوار $u_\delta(x_0)$ للنقطة x_0 وليكن Δx تغيراً للمتغير x عند النقطة x_0 ، بحيث تبقى النقطة $x_0 + \Delta x$ داخل الجوار $u_\delta(x_0)$. يكون عندئذٍ، تغير الدالة $f(x)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$$

ويكون متوسط السرعة لتغير الدالة $f(x)$:

$$v_{cp} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

أما السرعة اللحظية لهذا التغير:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

وهو المعنى الفيزيائي للمشتق أي أن المشتق هو النموذج الرياضي للسرعة الآنية لعملية ما ممثلة بالدالة $f(x)$. ويمكن الحصول على نماذج عديدة لسرعة جريان عملية ما. حسبما تمثل هذه الدالة ونعرض هنا بعضاً منها:

1. لتكن M نقطة مادية تتحرك حركة غير منتظمة. ولتكن $y = s(t)$ دالة تمثل علاقة المسافة مع الزمن t. تكون عندئذٍ، السرعة الآنية لحركة النقطة M في اللحظة t هي مشتق المسافة s بالنسبة للزمن t:

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

2. لتكن $y = v(t)$ دالة تمثل عملية تغير سرعة حركة غير منتظمة بالنسبة للزمن t يكون عندئذٍ، التسارع الآني للنقطة المادية M في لحظة مثبتة t_0 هو مشتق السرعة v بالنسبة للزمن t:

$$a = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

3. لتكن $y = Q(T)$ دالة تمثل عملية تغير كمية حرارة جسم عند تسخينه حتى الدرجة T. تكون عندئذٍ، السعة الحرارية هي مشتق كمية الحرارة Q بالنسبة لدرجة الحرارة T:

$$C = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q(T_0 + \Delta T) - Q(T_0)}{\Delta T}$$

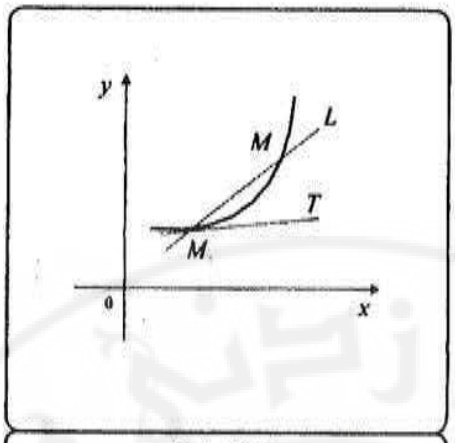
5.1.2 المعنى الهندسي للمشتق

ندرس مسألة تعيين مماس لمنحنٍ عند نقطة منه.

ليكن L قوساً منحنياً مستوياً، ولتكن M_0 نقطة من هذا المنحني و M_0M قاطعاً للمنحني، الشكل 5.1.

عندما تتحرك النقطة M على المنحني L حتى تصل للنقطة M_0، فإن المستقيم القاطع يتحرك حول النقطة M_0 حتى يصل إلى وضع نهائي M_0T.

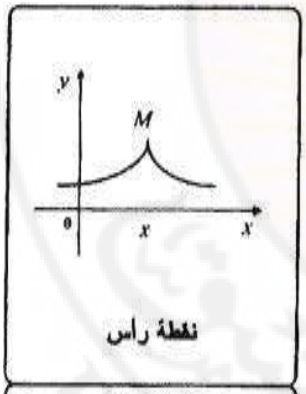
نسمي المستقيم MT المستقيم المماس للمنحني L عند النقطة M والذي هو الوضع النهائي للمستقيم القاطع M_0T.



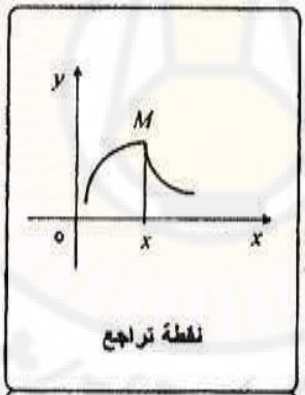
الشكل 5.1

إذا لم يوجد وضع نهائي للمستقيم القاطع، فإننا نقول إنه لا يمكن رسم مستقيم مماس للمنحني عند النقطة M_0. تظهر حالة كهذه، عندما تكون M_0 نقطة تراجع أو نقطة رأس ، الشكل 5.2-A و 5.2-B.

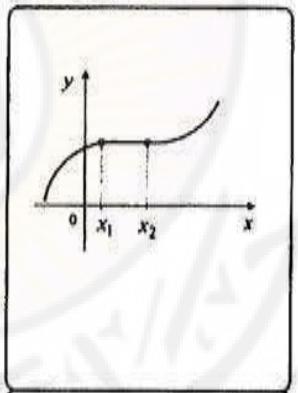
ملحوظة 5.2 : ليس لكل منحنٍ مماس عند كل نقطة من نقاطه، فالمنحنيات الممثلة بالشكل 5.2، ليس لها مماسات عند النقط x_0 و x_1 و x_2.



الشكل A- 5.2



الشكل B- 5.2

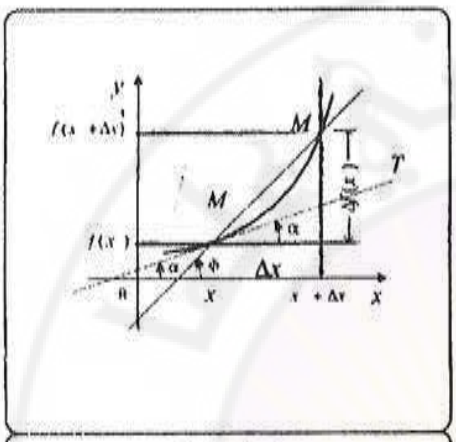


الشكل C- 5.2

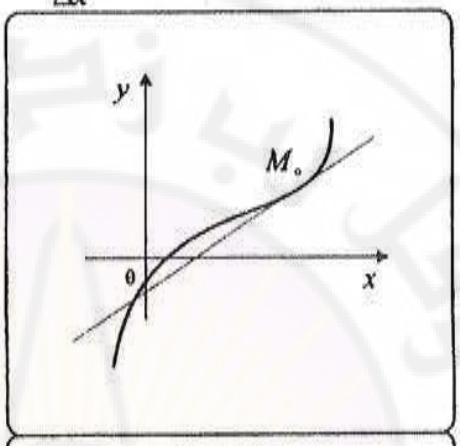
ملحوظة 5.3 : يمكن أن يقطع المماس للمنحني (عند نقطة منه M_0) عند نقطةٍ أخرى، الشكل 5.3.

ليكن المنحني L هو المنحني البياني للدالة $y = f(x)$، ولتكن $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطة من L، الشكل 5.4. نفرض أن المماس للمنحني L عند النقطة M_0 موجود، ونرمز لزاوية ميل القاطع M_0M (الزاوية بين المستقيم القاطع والاتجاه الموجب لمحور الفواصل):

$$k = \tan\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$



الشكل 5.4



الشكل 5.3

عندما تسعى Δt إلى الصفر، فإن النقطة M تتحرك على المنحني L حتى النقطة M_0 ويسعى المستقيم القاطع M_0M إلى الوضع النهائي M_0T. وعليه:

$$k = \tan\alpha = \lim_{M \to M_0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \qquad (5.1)$$

أي أن المعنى الهندسي للمشتق ينتج من العلاقة (5.1): مشتق الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = x_0$، يساوي ميل المماس للمنحني البياني لها عند نقطة فاصلتها x_0.

5.1.3 معادلة المستقيم المماس والناظم لمنحني – الزاوية بين منحنيين

لما كان ميل المماس للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عند نقطة منه $M_0(x_0, f(x_0))$ هو $k = f'(x)$، فإن معادلة المستقيم المماس للمنحني عند النقطة M_0 هي معادلة مستقيم يمر بالنقطة M_0 وميله معلوم $k = f'(x_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \quad ; \quad y_0 = f'(x_0)$$

أو

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

ولما كان k ميل مماس المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ و k_1 ميل ناظم هذا المنحني عند نقطة ما منه، ترتبطان بالعلاقة

$$k_1 = -\frac{1}{k}$$

فإن معادلة المستقيم الناظم للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ هي

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad ; \qquad y_0 = f(x_0)$$

أي

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

مثال 5.6 : أوجد معادلة المستقيم المماس للمنحني البياني $y = \sin x$ عند النقطة $x_0 = 0$.

الحل: لما كان

$$y'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \cos 0 = 1$$

(أي أن زاوية ميل مماس منحني الجيب عند نقطة الأصل $\varphi = \frac{1}{4}\pi$)، فإن

$$y - \sin 0 = (\cos 0)\cdot(x - 0) \Rightarrow y = x$$

الزاوية بين منحنيين: هي الزاوية الحادة بين مماسي المنحنيين في نقطة تقاطعهما، وإذا كان k_1 ميل مماس المنحني الأول، و k_2 ميل مماس المنحني الثاني في نقطة تقاطع المنحنيين، فإن الزاوية بينهما φ تحقق العلاقة

$$\tan\varphi = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2} \qquad ; \qquad k_1 \cdot k_2 = -1$$

إذا كان $k_1 \cdot k_2 = -1$ فإن الزاوية بين المماسين (المنحنيين) $\varphi = \frac{1}{2}\pi$، ونقول عندها إن المنحنيين متعامدان.

5.2 تفاضل دالة

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على جوارٍ $u_\delta(x_0)$ للنقطة x_0.

تعريف 5.3 : نقول إن الدالة $f(x)$ قابلة للمفاضلة (فضولة) عند النقطة x_0، إذا أمكن كتابة تغيرها عند هذه النقطة كما يلي:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \qquad (5.2)$$

حيث A عدد حقيقي ما و $\alpha(\Delta x)$ لامتناه في الصغر من مرتبة أعلى من مرتبة Δx ، عندما تسعى Δx إلى الصفر.

وهكذا، فإن قابلية المفاضلة لدالة عند نقطة x_0 ، تعني أن تغير الدالة هو دالة خطية في Δx ، مع فارق بسيط هو لا متناه في الصغر من مرتبة أعلى من مرتبة تغير المتغير Δx .

مبرهنة 5.1: الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f(x)$ فضولة عند النقطة x_0 ، هو وجود مشتق محدد عند النقطة x_0 هو $A = f'(x_0)$.

البرهان:

اللزوم: الدالة $f(x)$ فضولة عند النقطة x_0 ، أي أن تغيرها عند هذه النقطة

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

وعليه، فإن

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A$$

الكفاية: ليكن المشتق $f'(x_0)$ موجوداً ومحدوداً عند النقطة x_0 ويساوي A ، وليكن $A = f'(x_0)$. تكون عندئذٍ، الدالة $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - A$ لامتناهية في الصغر، عندما تسعى Δx إلى الصفر. ومنه، فإن

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x - \alpha(\Delta x)$$

حيث $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. أي أن الدالة $f(x)$ فضولة عند النقطة x_0 .

وهكذا، فإن مفهوم تفاضل دالة، ووجود مشتقها مفهومان متكافئان، لذا فإن عملية الحصول على مشتق دالة تسمى مفاضلة دالة.

ملحوظة 5.4 : إذا كانت الدالة $f(x)$ فضولة عند النقطة x_0 ، فإن العلاقة (5.2) تُكتب كما يلي

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

وعليه، إذا كان $f'(x_0) \neq 0$ ، فإن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0) \cdot \Delta x} \right] = 1$$

أي أن التغير $\Delta f(x_0)$ والعبارة $f'(x_0)\cdot\Delta x$ هما لا متناهيان في الصغر متكافئان، عندما تسعى Δx إلى الصفر. وعليه، فإن

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

تسمى القيمة $f'(x_0)\cdot\Delta x$ تفاضل الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0، ونرمز لها بالرمز $df(x_0)$. وعليه، فإن

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$$

وخصوصاً، إذا كان $f(x)=x$، فإن $f'(x)=1$. ومنه $df = dx = \Delta x$.

أي أن تغير متغير مستقل وتفاضله متساويان. لذا، فإن تفاضل الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 يمكن أن يُكتب كما يلي:

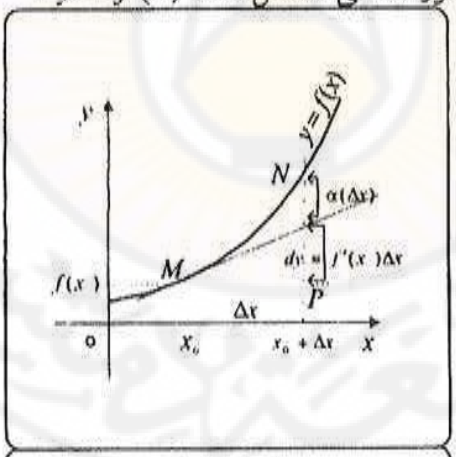
$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

وينتج من تعريف التفاضل:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

أي أن تفاضل دالة وتغيرها عند نقطة x_0 يختلفان بقيمة لا متناهية في الصغر من مرتبة أعلى من مرتبة Δx، عندما تسعى Δx إلى الصفر.

يُعطي الشكل 5.5 التصور الهندسي لتفاضل الدالة $y=f(x)$.



الشكل 5.5

لما كان $\tan\alpha = f'(x)$، فإن تفاضل الدالة $y = f(x)$ عند النقطة x_0 هو طول القطعة المستقيمة PT، أي أن التفاضل dy للدالة $y = f(x)$ عند النقطة x، يُعبّر عن تغير تراتيب نقطة من مماس المنحني البياني للدالة $y = f(x)$، المار بالنقطة $M_0(x_0, f(x_0))$.

فمثلاً، تفاضل الدالة $y = x^2$ عند النقطة x، من أجل تغير ما Δx للمتغير x، هو

$$dy = 2x\,dx$$

وتغير الدالة عند النقطة x_0، هو

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

ملحوظة 5.5 : يمكن استخدام تفاضل دالة لحساب قيم تقريبية لها، وذلك باستبدال تغير الدالة عند النقطة x_0 بتفاضل الدالة عند هذه النقطة، فنحصل على الصيغة التقريبية:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx$$

حيث إن الخطأ عندئذٍ، $|\Delta f - df|$ هو لا متناهٍ في الصغر عندما تسعى Δx إلى الصفر.

مثال 5.6 : أثبت أن

$$(x + \Delta x)^\beta \approx x^\beta + \beta\, x^{\beta-1} \cdot \Delta x$$

الحل: ننظر في الدالة $f(x) = x^\beta$. ليكن Δx تغيراً في المتغير x. عندئذٍ:

$$\Delta f = (x + \Delta x)^\beta - x^\beta \quad \text{و} \quad df = \beta x^{\beta-1} \cdot \Delta x$$

وعندما يكون التغير Δx صغيراً، فإن $df = \Delta f$، أي أن

$$(x + \Delta x)^\beta \approx x^\beta + \beta\, x^{\beta-1} \cdot \Delta x$$

وفي الحالة الخاصة: إذا كان $\beta = \frac{1}{2}$ و $x \neq 0$، نجد

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

وإذا كان $x = 1$، فإن

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\Delta x$$

تطبيق 1 : احسب القيمة التقريبية للجذر $\sqrt{1.0003}$.

نفرض $\Delta x = 0.0003$ فيكون $\sqrt{1 + 0.0003} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.0003) = 1.00015$

تطبيق 2 : احسب القيمة التقريبية للجذر $\sqrt{3.9978}$.

نفرض $x = 4$ و $\Delta x = -0.0022$، فيكون

$$\sqrt{4+(-0.0022)} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0.0022) \approx 1.99945$$

تعريف 5.4 : نقول عن الدالة $f(x)$ ، إنها فضولة على المجال $[a;b]$ ، إذا كانت فضولة عند كل نقطة من نقاط هذا المجال.

5.2.1 خواص الدوال الفضولة

1. إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ فضولتين على المجال $]a;b[$ ، وكان

$$f(x) \equiv g(x) \quad ; \quad \forall x \in]a,b[$$

فإن $f'(x) \equiv g'(x)$ في هذا المجال.

2. إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ فضولتين على المجال $]a;b[$ وكان

$$f'(x) = g'(x) \quad ; \quad \forall x \in]a;b[$$

فإن $f(x) = g(x) + c$ حيث c ثابت حقيقي.

وخصوصاً، إذا كانت الدالة $f(x)$ فضولة على المجال $]a;b[$ ، وكان $f'(x) \equiv 0$ في هذا المجال، فإن $f(x) = c$ في هذا المجال.

5.3 العلاقة بين التفاضل والاستمرار

مبرهنة 5.2 : إذا كانت الدالة $f(x)$ فضولة عند نقطة $x_0 \in D(f)$ ، فإنها تكون مستمرة عند هذه النقطة.

البرهان: لما كانت الدالة $f(x)$ فضولة عند النقطة x_0 ، فإن تغيرها عند هذه النقطة

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

وعليه، فإن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = A \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

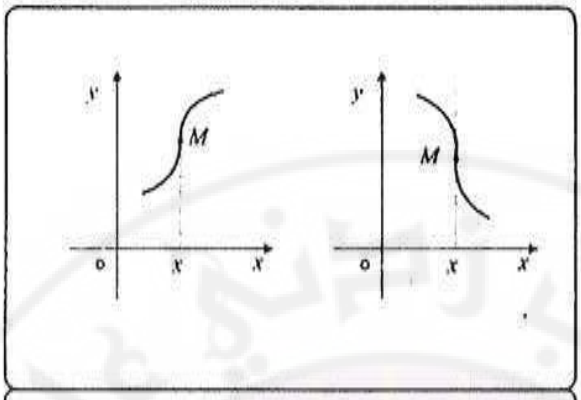
أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0 .

نتيجة 5.1 : إذا كان للدالة $f(x)$ مشتق عند نقطة ما، فإنها تكون مستمرة عند هذه النقطة.

ملحوظة 5.6 : إن عكس المبرهنة 5.2 غير صحيح بالضرورة، أي يمكن أن تكون الدالة $f(x)$ مستمرة عند نقطة x_0 ولكنها غير فضولة عند هذه النقطة.

يمثل الشكل 5.2 منحنيات بيانية لدوال ليس لها مشتق عند النقط x_0 و x_1 و x_2 . فالمشتقان من اليمين ومن اليسار غير متساويين. ويمثل الشكل 5.6 منحنيات بيانية لدوال

مستمرة عند النقطة x_0 ولكنها غير فضولة عند هذه النقطة، مع أنها ليست نقطة تراجع.



الشكل 5.6

مثال 5.7 : الدالة $y=|x|$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$. أثبت أنه ليس لها مشتق عند النقطة $x_0=0$.

الحل: من أجل $x \geq 0$ يكون $y=|x|=x$ و $\Delta y=\Delta x$.

نحسب مشتق الدالة y عند النقطة $x_0=0$ من اليمين:

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

ونحسب بأسلوبٍ مشابه، مشتق الدالة y عند النقطة $x_0=0$ من اليسار. فمن أجل $x<0$، فإن $y=|x|=-x$ و $\Delta y=-\Delta x$، ومنه

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$$

ولما كان $f'_-(0)\neq f'_+(0)$، فإن المشتق $f'(0)$ غير موجود. وعليه، فإن الدالة $y=|x|$ غير فضولة عند النقطة $x_0=0$.

مثال 5.8 : الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$. أثبت أنه ليس للدالة $f(x)$ مشتق محدد عند النقطة $x_0=0$، أي أثبت أن هذه الدالة غير فضولة عند هذه النقطة.

الحل: ليكن Δx تغيراً للمتغير x. نحسب المشتق y' عند أية نقطة x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

وعليه، فإن $f'(0) = \infty$ أي لا يوجد مشتق محدد عند النقطة $x_0 = 0$.

5.4 مشتق الدالة المركبة- قاعدة السلسلة

لتكن $y = f[u(x)] = (f \circ u)(x)$ دالة مركبة. وليكن المشتقان $f'(u)$ و $u'(x)$ موجودين. وليكن Δx تغيراً للمتغير x. عندئذٍ، يكون Δu التغير الذي يطرأ على الدالة $u(x)$. وعليه يكون Δf التغير الذي يطرأ على الدالة $f(u)$. نحسب النسبة

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} = \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (5.3)$$

عندما يسعى Δx إلى الصفر. فإن التغيرين Δf و Δu يسعيان إلى الصفر، طالما أن الدالتين f و u فضولتان. ولما كان

$$f'_u(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \quad \text{و} \quad u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

فإنه، بأخذ نهاية طرفي العلاقة ((5.3)، نجد:

$$y = f(u(x)) \implies y' = f'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$$

يمكن بأسلوبٍ مشابه، تعميم هذه النتيجة من أجل اشتقاق تركيب أكثر من دالتين.

فمثلاً، إذا كانت $y = f(u)$ و $u = u(v)$ و $v = v(t)$ و $t = t(x)$ دوال فضولة، و $F(x) = f(u(v(t(x))))$ دالة مركبة، وكان Δx تغيراً للمتغير x، فإن Δt التغير الذي يطرأ على الدالة t و Δv التغير الذي يطرأ على الدالة v و Δu التغير الذي يطرأ على الدالة u و Δf التغير الذي يطرأ على الدالة f، ونكتب النسبة $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ كما يلي:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad (5.4)$$

ولما كانت الدوال u و v و t فضولة فهي مستمرة. وعليه، عندما تسعى Δx إلى الصفر، فإن التغيرات Δu و Δv و Δt تسعى إلى الصفر.

نأخذ نهاية طرفي العلاقة (5.4)، فنجد

$$y' = F'(x) = f'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x$$

نتيجة 5.2 : إذا كانت الدالة $f(x)$ فضولة على $\mathbb{R}$ ودورية، دورها T، أي تحقق العلاقة

$$f(X+T) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (5.5)$$

فإن مشتقها $f'(x)$ دالة دورية دورها T.

نتحقق من صحة ذلك بسهولة، وذلك بمفاضلة طرفي العلاقة (5.5):

$$f'(X+T) = f'(x)$$

5.4.1 تفاضل الدالة المركبة

عرّفنا سابقاً أن تفاضل الدالة $y = f(x)$ عند النقطة x_0 هو حاصل جداء مشتق الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 وتفاضل المتغير المستقل x، أي $dy = f'(x)\,dx$.

وعليه، إذا كانت $y = f(u(x))$ دالة مركبة، فإن $y' = f'_u(u) \cdot u'(x)$. ومنه، فإن

$$dy = f'_u(u) \cdot u'(x)\,dx$$

ولما كان $du = u'(x)\,dx$، فإن تفاضل الدالة المركبة هو

$$dy = f'(u)\,du$$

أي أن تفاضل الدالة يساوي، دائماً، حاصل جداء مشتق الدالة وتفاضل المتغير.

ينتج من هذه الخاصة، أن

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

أي أن مشتق دالة عند نقطة، يساوي حاصل قسمة تفاضل الدالة، عند هذه النقطة، على تفاضل المتغير، بغض النظر عن كون هذه الدالة تابعة للمتغير x أو كانت دالة مركبة.

5.5 قواعد التفاضل

نُعطي قواعد حساب مشتق أو تفاضل حاصل جمع أو طرح أو جداء أو قسمة دالتين عُلِم مشتقاهما.

مبرهنة 5.3 : إذا كانت الدالتان $u = u(x)$ و $v = v(x)$ فضولتين عند نقطة x، فإن حاصل جمع أو طرح أو جداء أو قسمة هاتين الدالتين (شرط عدم انعدام دالة المقام عند النقطة x)، هو دالة فضولة عند هذه النقطة، ويكون

$$(u \mp v)' = u \mp v$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad v(x) \neq 0$$

البرهان: من تعريف الاشتقاق ومن خواص النهايات، نجد

$$(u \mp v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \mp v(x+\Delta x)] - [u(x) \mp v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \mp \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \mp \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \mp \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \mp v'$$

$$(u.v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x)+\Delta u] \cdot [v(x)+\Delta v] - u(x)\,v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x)v(x) + \Delta u \cdot v(x) + u(x)\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - u(x)v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] =$$

$$= v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= v.u' + uv' + 0 = u'v + uv'$$

حيث $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ والمضاريب $u(x)$ و $v(x)$ مستقلة عن Δx.

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x) \cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)]v(x) - u(x)[v(x)+\Delta x]}{\Delta x \cdot v(x)[v(x)+\Delta v]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - u\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{v^2 + v\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

لما كان تفاضل دالة عند نقطة يساوي حاصل جداء مشتق الدالة عند هذه النقطة وتفاضل المتغير، فإن

$$d(u \mp v) = (u \mp v)'dx = u'dx \mp v'dx = du \mp dv$$
$$d(u.v) = (u.v)'dx = (u'v + uv')dx = v\cdot u'dx + uv'dx = v\,du + u\,dv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

ملحوظة 5.7 : يمكن بسهولة تعميم هذه القواعد من أجل أكثر من دالتين، فإذا كانت الدوال $u_1(x)\ ,\ u_2(x),\ldots\ ,u_n(x)$ فضولة، فإن

$$(u_1 \mp u_2 \mp \ldots \mp u_n)' = u_1' \mp u_2' \mp \ldots \mp u_n'$$
$$(u_1\cdot u_2 \ldots u_n)' = u_1'\cdot u_2\cdot u_3 \ldots\ldots u_n + u_1\cdot u_2'\cdot u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1\cdot u_2 \ldots u_{n-1}\cdot u_n'$$

نتيجة 5.3 : إذا كانت الدالة $u(x)$ فضولة في x وكان c ثابتاً، فإن الدالة $cu(x)$ فضولة عند x. ويكون

$$(cu)' = cu' \ ,\ d(cu) = cdu$$

نتيجة 5.4 : إذا كانت الدوال $u_1(x)\ ,\ u_2(x),\ldots\ ,u_n(x)$ فضولة عند x، وكانت $c_1, c_2 \ldots, c_n$ ثوابت، فإن التركيب الخطي $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$ هو دالة فضولة عند x، ويكون

$$(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n)' = c_1u_1' + c_2u_2' + \ldots + c_nu_n'$$

5.6 اشتقاق وتفاضل الدوال الابتدائية الأساسية

1. مشتق وتفاضل الدالة $y = \log_\alpha x$ (حيث $\alpha > 0\ ,\ \alpha \neq 1$).

ليكن Δx تغيراً للمتغير x. يكون عندئذٍ، تغير الدالة

$$\Delta y = \log_\alpha (x + \Delta x) - \log_\alpha x = \log_\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

نقسم على Δx ونأخذ نهاية الطرفين، عندما تسعى Δx إلى الصفر:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_\alpha\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_\alpha\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{(x/\Delta x)}\right] = \frac{1}{x}\log_\alpha e$$

ومنه، فإن

$$(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x\ln\alpha} \quad \text{و} \quad d(\log_\alpha x) = \frac{dx}{x\ln\alpha}$$

إذا كانت الدالة y دالة لوغاريتمية مركبة : $y = \log_\alpha u(x)$ ، فإن

$$y' = \frac{1}{u(x)}(\log_\alpha e)\cdot u'(x) = \frac{u'_{(x)}}{u(x)\ln\alpha}$$

وفي الحالة الخاصة: $a = e$، أي $y = \ln u(x)$ ، يكون

$$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{و} \quad dy = \frac{du(x)}{u(x)}$$

2. مشتق وتفاضل دالة القوة: $y = [u(x)]^\alpha$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

نبدأ بالحالة $u(x) > 0$. يكون عندئذٍ $\ln y = \alpha \ln u(x)$ ، نشتق طرفي هذه العلاقة:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha u'(x)}{u(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = y\frac{\alpha\, u'(x)}{u(x)}$$

أي

$$y' = a^{u(x)}u'(x)\cdot \ln a \quad \text{و} \quad dy = a^{u(x)}\cdot \ln a \cdot du$$

وفي الحالة الخاصة $a = e$ أي $y = e^{u(x)}$ ، يكون

$$y' = e^{u(x)}u'(x) \quad \text{و} \quad dy = e^{u(x)}\cdot du$$

3. مشتق وتفاضل الدوال المثلثية:

الدالة $y = \sin x$:

وجدنا في المثال 5.3، أن $y' = \cos x$ أي $dy = \cos x\, dx$.

وإذا كانت الدالة مركبة، أي $y = \sin u(x)$ ، فإن

$$y' = u'(x)\cos u(x) \quad \text{و} \quad dy = \cos u(x)\cdot du(x)$$

الدالة $y = \cos x$:

ليكن Δx تغيراً للمتغير x. يكون، عندئذٍ، تغيّر الدالة y :

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\tfrac{1}{2}\Delta x\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\Delta x\right)$$

نقسم على Δx ونأخذ نهاية الطرفين عندما تسعى Δx إلى الصفر:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x + \frac{1}{2}\Delta x)\sin(\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} - \frac{\sin(\frac{1}{2}\Delta x)}{(\frac{1}{2}\Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{1}{2}\Delta x) = -1 \cdot \sin x = -\sin x$$

أي أن $dy = -\sin x\,dx$ و $y' = -\sin x$.

وإذا كانت الدالة المثلثية مركبة: $y = \cos u(x)$، فإن

$$y' = -u'(x)\sin u(x) \quad \text{و} \quad dy = -\sin u(x)du$$

الدالة $y = \tan x$:

لما كان $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$، فإنه ووفق قاعدة اشتقاق حاصل قسمة دالتين، بفرض $x \neq \frac{1}{2}\pi + \pi k\,;\, k \in \mathbb{Z}$:

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

أي أن

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{و} \quad dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

وإذا كانت الدالة مركبة أي $y = \tan u(x)$، فإن

$$y' = [\tan u(x)]' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} \quad \text{و} \quad dy = \frac{du}{\cos^2 u(x)}$$

الدالة $y = \cot x$:

لما كان $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$، فإنه ووفق قاعدة اشتقاق حاصل قسمة دالتين (بفرض $x \neq \pi k\,;\, k \in \mathbb{Z}$):

$$y = (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

أي أن

$$dy = \frac{-dx}{\sin^2 x} \quad , \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

وإذا كانت الدالة مركبة، أي $y = \cot u(x)$ ، فإن

$$dy = \frac{-du}{\sin^2 u(x)} \quad , \quad y' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$$

5.7 مشتق الدالة العكسية

لتكن $y = f(x)$ دالة مطردة تماماً على المجال $[a;b]$، ولها مشتق $y' = f'(x) \neq 0$ وليكن $\alpha = f(a)$ و $\beta = f(b)$. توجد عندئذٍ، وفق المبرهنة 2.1، دالة عكسية لها $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ وهي دالة مستمرة ومطردة تماماً على المجال $[\alpha;\beta]$. ليكن $\Delta y \neq 0$ تغيراً للمتغير y. يكون عندئذٍ، Δx التغير الذي يطرأ على الدالة x، ولما كانت الدالة φ مطردة تماماً، فإن $\Delta y \neq 0$. وعليه، فإن

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$$

نأخذ نهاية طرفي هذه العلاقة عندما يسعى Δy إلى الصفر (Δx تسعى إلى الصفر أيضاً، طالما أن الدالة φ مستمرة)

$$x'_y = \varphi'(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta y / \Delta x)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x})} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'_x}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة:

مبرهنة 5.4 : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ مطردة تماماً على المجال $[a;b]$، وكان

$$f'(x) \neq 0 \quad ; \quad \forall x \in]a,b[$$

تكون عندئذٍ، الدالة العكسية لها $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ فضولة عند جميع نقاط المجال $]f(a);f(b)[$ ، ويكون

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad \forall y \in]f(a);f(b)[$$

5.7.1 مشتق الدوال المثلثية العكسية

الدالة $y = \arcsin x$:

وهي دالة عكسية للدالة $x = \sin y$. وهي دالة مطردة تماماً على المجال $\left]-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right[$.

لما كان

$$x'_y = \cos y \neq 0 \quad ; \quad \forall y \in \left]-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right[$$

فإن

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad |x|<1$$

اخترنا الإشارة + للجذر، لأن

$$\cos y > 0 \quad ; \quad \forall y \in \left]-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right[$$

وهكذا، فإن

$$dy = d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وإذا كانت الدالة مركبة أي $y = \arcsin u(x)$ ، فإن

$$y' = (\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

$$dy = d(\arcsin u(x)) = \frac{du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

ونجد بأسلوبٍ مشابه، مشتق دالة التجيب العكسي: $y = \arccos u(x)$

$$y' = (\arccos u(x))' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

$$dy = d(\arccos u(x)) = \frac{-du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

الدالة $y = \arctan x$:

مجموعة قيم هذه الدالة $\left]-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right[$. وهي الدالة العكسية للدالة $x = \tan y$.

ولما كان:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0 \quad ; \quad \forall y \in \left]-\tfrac{1}{2}\pi;\tfrac{1}{2}\pi\right[$$

فإن

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(1/\cos^2 y\right)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

أي أن

$$dy = d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2} \quad , \quad y' = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

وإذا كانت الدالة مركبة، أي $y = \arctan u(x)$ ، فإن

$$y' = (\arctan u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$dy = d(\arctan u(x)) = \frac{du(x)}{1+u^2(x)}$$

ونجد بأسلوبٍ مشابه، مشتق دالة التظل العكسي: $y = \operatorname{arc\,cot} u(x)$

$$y' = (\operatorname{arc\,cot} u(x))' = \frac{-u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$dy = d(\operatorname{arc\,cot} u(x)) = \frac{-du(x)}{1+u^2(x)}$$

5.7.2 مشتق وتفاضل الدوال القطعية

الدالة $y = sh\,x$:

لما كان $y = sh\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ، فإنه ووفق قاعدة اشتقاق مجموع دالتين نجد:

$$y' = (sh\,x)' = \left[\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]' = \tfrac{1}{2}\left[(e^x)' - (e^{-x})'\right] = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

أي أن

$$dy = d(sh\,x) = ch\,x\,dx \quad , \quad y' = (sh\,x)' = ch\,x$$

وإذا كانت الدالة مركبة، فإن

$$dy = d(sh\,u(x)) = ch\,u(x)\,du(x) \quad y' = (sh\,u(x))' = u'(x)\,ch\,u(x)$$

ونجد بأسلوبٍ مشابه، مشتق دالة التجيب القطعي $y = ch\,x$

$$dy = d(ch\,x) = sh x\,dx \quad , \quad y' = (ch\,x)' = sh\,x$$

وإذا كانت الدالة مركبة، فإن

$$dy = d(ch\,u(x)) = sh\,u(x)\,du(x) \quad , \quad y' = (ch\,u(x))' = u'(x) sh\,u(x)$$

ومشتق دالة الظل القطعي $y = th\,x$:

$$dy = d(th\,x) = \frac{dx}{ch^2 x} \quad , \quad y' = (th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

وإذا كانت الدالة مركبة، فإن

$$dy = d(th\,u(x)) = \frac{du(x)}{ch^2 u(x)} \quad , \quad y' = (th\,u(x))' = \frac{u'(x)}{ch^2 u(x)}$$

ومشتق دالة التظل القطعي $y = cth\,x$:

$$dy = d(cth\,x) = \frac{-dx}{sh^2 x} \quad , \quad y' = (cth\,x)' = \frac{-1}{sh^2 x}$$

وإذا كانت الدالة مركبة، فإن

$$dy = d(cth\,u(x)) = \frac{-du(x)}{sh^2 u(x)} \quad , \quad y' = (cth\,u(x))' = \frac{-u'(x)}{sh^2 u(x)}$$

5.7.3 مشتق الدوال القطعية العكسية

لما كانت الدوال القطعية العكسية تعطى بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، فإن مشتقاتها تنتج من مشتقات الدوال اللوغاريتمية

$$y = ar\,sh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad , \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y = ar\,sh u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + 1}} \quad , \quad dy = \frac{du(x)}{\sqrt{u^2(x) + 1}}$$

$$y = ar\,ch x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad , \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = ar\,ch\,u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}} \quad , \quad dy = \frac{du(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}}$$

$$y = ar\ th\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{و} \quad dy = \frac{dx}{1-x^2}$$

$$y = ar\ th\, u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)} \quad \text{و} \quad dy = \frac{du(x)}{1-u^2(x)}$$

$$y = ar\ cth\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{و} \quad dy = \frac{dx}{1-x^2}$$

$$y = ar\ cth\, u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)} \quad \text{و} \quad dy = \frac{du(x)}{1-u^2(x)}$$

مثال 5.9 : أوجد مشتق الدالة $y = e^{\arctan x}$.

الحل: نكتب الدالة y كما يلي $y = e^{u(x)}$ حيث $u(x) = \arctan x$. ومنه

$$y' = u'(x)\cdot e^{u(x)} = \frac{1}{1+x^2}\ e^{\arctan x}$$

مثال 5.10: أوجد مشتق الدالة $y = \tan^2\sqrt{x^2+1}$.

الحل: نكتب الدالة y كما يلي: $y = u^2$ ، حيث $u = \tan v$ و $v = \sqrt{t}$ و $t = x^2 + 1$. ومنه، فإن

$$y'(x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x = (2u)\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 2x = \frac{2x\tan\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\cdot\cos^2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال 5.11 : بسّط العبارة

$$f(x) = \sin^3 x(1+\cot x) + \cos^3 x + (1+\tan x)$$

الحل: نشتق الدالة $f(x)$:

$$f'(x) = 3\sin^2 x\ \cos x(1+\cot x) - \sin^3 x\frac{1}{\sin^2 x} -$$

$$-3\cos^2 x\ \sin x(1+\tan x) + \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x} = \cos x - \sin x$$

أي أن $f'(x) = (\cos x + \sin x)'$

ومنه $f(x) = \cos x + \sin x + c$ حيث c ثابت اختياري.

نعوض في هذه العبارة وفي العبارة المعطاة $x = \frac{1}{4}\pi$، فنجد $c = 0$.

وهكذا، نجد

$$f(x) = \cos x + \sin x \quad ; \quad \forall\ x \neq \tfrac{1}{2}\pi k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

مثال 5.12 : بسّط العبارة

$$(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (x+z-y)^3$$

الحل: نرمز للعبارة المعطاة بالرمز $f(x)$ حيث نفرض x متغيراً مستقلاً و نفرض y و z ثوابت:

$$f(x) = (x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (x+z-y)^3 \qquad (i)$$

نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ x :

$$f'(x) = 3(x+y+z)^2 - 3(x+y-z)^2 + 3(y+z-x)^2 - 3(x+y-z)^2 = 24y$$

ولما كان

$$f(x) = 24yz = (24xyz)'$$

فإن

$$f(x) = 24xyz + c \qquad (ii)$$

حيث c ثابت غير متعلق بـ x وربما يكون متعلقاً بـ y و z. لإيجاد قيمة الثابت c، نعوض $x = 0$ في العبارتين (i) و (ii)، فنجد

$$c = f(0) = 0$$

وعليه، فإن

$$f(x) = 24xyz$$

5.8 جدول المشتقات الشهيرة

لتكن u دالة في x :

الدالة	المشتق	الدالة	المشتق
$y=c$	$y'=0$	$y=chu$	$y'=u'shu$
$y=u^{\alpha};\alpha\in\mathbb{R}$	$y'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	$y=thu$	$y'=\frac{u'}{ch^2u}$
$y=a^u$	$y'=a^u\ln a\cdot u'$	$y=cthu$	$y'=\frac{-u'}{sh^2u}$
$y=e^u$	$y'=e^u u'$	$y=\arcsin u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\log_a u$	$y'=\frac{u'}{u\ln a}$	$y=\arccos u$	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\ln u$	$y'=\frac{u'}{u}$	$y=\arctan u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\operatorname{arc}\cot u$	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$
$y=\cos u$	$y'=u'\sin u$	$y=arshu$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$y=\tan u$	$y'=\frac{u'}{\cos^2 u}$	$y=archu$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$y=\cot u$	$y'=\frac{u'}{\sin^2 u}$	$y=arthu$	$y'=\frac{u'}{1-u^2}$
$y=shu$	$y'=u'chu$	$y=arcthu$	$y'=\frac{u'}{1-u^2}$

ملحوظة 5.8 : واضح من الجدول أن مشتق أي دالة أولية أساسية هو دالة أولية أساسية.

ملحوظة 5.9 : يمكن إيجاد مشتق أو تفاضل دالة باستخدام جدول المشتقات الشهيرة وباستخدام قواعد الاشتقاق والتفاضل. غير أنه نضطر أحياناً لاستخدام تعريف المشتق، لإيجاد هذا المشتق.

مثال 5.13 : أوجد مشتق الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

الحل: نوجد مشتق f عندما يكون $x\neq 0$ ، من قاعدة مشتق جداء دالتين

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad ; \quad x\neq 0$$

غير أنه لا يمكن استخدام هذه الصيغة من أجل $x=0$ ، لذا من تعريف المشتق نجد

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin(1/\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)=0$$

وعليه، فإن

$$f'(x)=\begin{cases} 2x^2\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

5.9 المشتق والتفاضل اللوغاريتمي

تساعد قاعدة اشتقاق الدالة المركبة واشتقاق اللوغاريتم بتبسيط مسألة إيجاد المشتق. فإذا كانت $y=f(x)$ دالة فضولة على المجال $[a;b]$ ، وكان $f(x)>0$ في هذا المجال، فإن

$$\ln y=\ln f(x)$$

ويكون عندئذٍ،

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=[\ln f(x)]' \Rightarrow y'=[\ln f(x)]'\cdot y$$

تستخدم هذه الطريقة، عند حساب مشتق جداء أو قسمة عدد كبير من الدوال أو عند اشتقاق الدالة الأسية u^v.

فمثلاً، إذا كان $y=[u(x)]^{v(x)}$ ، حيث $u(x)>0$ و u و v دالتان فضولتان، فإن

$$\ln y = v(x)\ln u(x) \quad \Rightarrow (\ln y)' = \frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

ومنه:

$$y = u^v \cdot v'\ln u + vu^{v-1} \cdot u'$$

وإذا كان

$$y = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$$

حيث إن الدوال $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ فضولة و

$$u_i(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in D(y) \quad , \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

فإن

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n \quad \Rightarrow (\ln y)' = \frac{y}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}$$

ومنه:

$$y' = (u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)\left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}\right)$$

مثال 5.14 : احسب مشتق الدالتين $y_1 = x^x$ و $y_2 = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+4)^5}$.

الحل: نأخذ لوغاريتم الدالتين، ثم نشتق

$$\ln y_1 = x\ln x \quad \Rightarrow \quad y_1' = x^x(\ln x + 1)$$

$$\ln y_2 = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 5\ln(x+4) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x+4} \quad \Rightarrow$$

$$y_2' = y_2\left[\frac{-6(x^2+3x+1)}{(x+1)(x+2)(x+4)}\right] = \frac{-6(x^2+3x+1)(x+1)}{(x+2)^4(x+4)^6}$$

5.10 المشتقات من مراتب عليا

إن مشتق الدالة $y = f(x)$ هو دالة أيضاً. نسمي المشتق $f'(x)$ المشتق من المرتبة الأولى للدالة $f(x)$. إذا كانت الدالة $f'(x)$ فضولة، فإن مشتقها $f''(x)$ يسمى المشتق من المرتبة الثانية (المشتق الثاني) للدالة $f(x)$ ونرمز له بـ y'' أو $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. أي $y'' = (y')'$

ونعرّف بأسلوبٍ مماثل، المشتق من المرتبة الثالثة والرابعة... وهكذا:

$$y''' = (y'')' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(4)} = (y''')' = \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d^ny}{dx^n}$$ (المشتق النوني)

نسمي المشتقات من المرتبة الثانية فما فوق، المشتقات من مراتب عليا.

مثال 5.15 : أوجد المشتق النوني للدوال

$$v = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0) \ , \ u = a^x \ (1 \neq a > 0)$$

الحل: نشتق u بالتتالي:

$$u' = a^x \ln a \ , \ u'' = a^x (\ln a)^2 \ , \ u''' = a^x (\ln a)^3$$

بالاستقراء نجد

$$u^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

وفي الحالة الخاصة، $a = e$، يكون

$$u = e^x \ \Rightarrow \ u^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x$$

نشتق v بالتتالي:

$$v' = \alpha x^{\alpha-1} \ , \ v'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \ , \ v''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

وبالاستقراء نجد

$$v^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]x^{\alpha-n}$$

وفي الحالة الخاصة: $\alpha = m \in \mathbb{N}$ و $m > n$، فإن:

$$v = x^m \Rightarrow v^{(n)} = (x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

وإذا كان $m = n$، فإن $\left(x^m\right)^{(m)} = m!$

وإذا كان $n > m$، فإن $\left(x^m\right)^{(n)} = 0$

مثال 5.16 : أوجد المشتق النوني للدوال $u = \sin x$ و $v = \cos x$.

الحل: نشتق u بالتتالي:

$$u' = \cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$u'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$u''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$u^{(4)} = -\sin x = \sin\left(x + 4\tfrac{\pi}{2}\right)$$

وبالاستقراء نجد

$$u^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

وبأسلوبٍ مماثل، نجد

$$v^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

تطبيق: $\cos^{(20)} x = \cos\left(x + 20\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

مثال 5.17 : أوجد المشتق النوني للدالة $y = \ln(1+x)$

الحل: نشتق بالتتالي:

$$y' = \frac{1}{1+x};\ y'' = \frac{-1}{(1+x)^2},\ y''' = \frac{1.2}{(1+x)^3},\ y^{(4)} = \frac{-1.2.3}{(1+x)^4}$$

وبالاستقراء نجد:

$$y^{(n)} = [\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

مثال 5.18 : هل الدالة $f(x) = \cos x \sin(x\sqrt{2})$ دورية؟

الحل: نفرض جدلاً أن الدالة $f(x)$ دورية دورها T. نكتب الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[\sin x(\sqrt{2}+1) + \sin x(\sqrt{2}-1)] = \tfrac{1}{2}(\sin \alpha x + \sin \beta x)$$

حيث $\alpha = \sqrt{2}+1$ و $\beta = \sqrt{2}-1$.

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}(-\alpha^2 \sin \alpha x - \beta^2 \sin \beta x)$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\alpha \cos \alpha x + \beta \cos \beta x)$$

ولما كانت الدالة f دورية دورها T، فإن الدالة $f'(x)$ دورية دورها T. وكذلك، فإن الدالة $f''(x)$ دورية دورها T.

وعليه، فإن الدالة $f''(x)+\beta^2 f(x)=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha x$ دورية دورها T

أي يوجد عد $k\in\mathbb{Z}^*$، بحيث يكون $T=\frac{2k\pi}{\alpha}$.

نبين بأسلوبٍ مشابه، وجود عدد $n\in\mathbb{Z}^*$، بحيث يكون $T=\frac{2n\pi}{\beta}$.

ولما كان $\frac{k}{n}\in\mathbb{Q}$ و $\frac{k}{n}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\notin\mathbb{Q}$.

فإن هذا التناقض يثبت أن الدالة $f(x)$ غير دورية.

5.10.1 المشتق النوني لحاصل جداء دالتين – صيغة ليبنتز[1]

ليكن $y=u\cdot v$، حيث u و v دالتان في x ولهما مشتقات حتى المرتبة n. نشتق y بالتتالي:

$$y'=(u.v)'=u'v+v'u \quad . \quad y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''$$

$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=u'''.v+3u''v'+3u'v''+uv'''$$

واضح أن الأطراف اليمنى في هذه المشتقات تشابه مفكوك الكرخي[2] - نيوتن[3] للمقدار $(u+v)^n$، ولكن الأس n يمثل مرتبة اشتقاق وينظر للدالتين u و v كمشتقين من المرتبة صفر، أي $u=u^{(0)}$ و $v=v^{(0)}$.

وعليه، فإن

$$y^{(n)}=(u.v)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1!}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}.v''+\ldots+u.v^{(n)}$$

$$y^{(n)}=(u.v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(n-k)}.v^{(k)}$$

حيث $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

نسمي هذه الصيغة صيغة ليبنتز ونبرهن صحتها بالاستقراء الرياضي.

---

[1] غوتفريد ليبنتز (1646-1716) عالم رياضيات ألماني.

[2] أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي – ولد في الكرخ (إحدى ضواحي بغداد) وتوفي فيها سنة 421هـ-1020م.

[3] اسحق نيوتن (1643-1727) عالم رياضيات وفيزياء إنكليزي.

مثال 5.19 : استخدم صيغة ليبنتز في حساب المشتق $y^{(1001)}$ للدالة $y = x^2 e^x$.

الحل: نعوض في صيغة ليبنتز حيث $u = e^x$ و $v = x^2$

$$y^{(1001)} = \left(x^2 \cdot e^x\right)^{(1001)} = \left(e^x\right)^{(1001)} \cdot x^2 + \frac{1001}{1!}\left(e^x\right)^{(1000)} \cdot 2x +$$

$$+ \frac{(1001)(1000)}{2!}\left(e^x\right)^{(999)} \cdot 2 + \frac{(1001)(1000)(999)}{3!}\left(e^x\right)^{(998)} \cdot 0 =$$

$$= x^2 e^x + 2002\, x e^x + (1001).10^3 e^x$$

5.11 اشتقاق الدالة الضمنية

لتكن $y = f(x)$ دالة معطاة ضمنياً بالمعادلة $F(x,y) = 0$ ، ولتكن الدالة $f(x)$ فضولة على المجال $[a;b]$. نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على معادلة جديدة تحوي x و y و y'_x . نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ y'_x ، فنحصل على مشتق الدالة الضمنية معطى بدلالة x و y.

$$F'(x,y) = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

ولإيجاد المشتق من المرتبة الثانية للدالة الضمنية $y = f(x)$ نشتق y'_x بالنسبة لـ x ، فيكون المشتق y'' يحوي x و y و y'_x نعوض فيه قيمة المشتق y'_x ، فنحصل على المشتق من المرتبة الثانية y'' الذي يحوي x و y فقط. ونتابع بهذا الأسلوب، لإيجاد المشتقات من مراتب عليا.

مثال 5.20 : أوجد المشتق من المرتبة الثالثة للدالة $y = f(x)$ المعطاة ضمنياً بالمعادلة $x^2 + y^2 = a^2$.

الحل: نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x :

$$2x + 2y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\frac{x}{y}$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ x :

$$y'' = \frac{-y + xy'}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}$$

نشتق y'' بالنسبة لـ x :

$$y''' = \frac{3a^2 y'}{y^4} = \frac{-3a^2 x}{y^5}$$

5.12 اشتقاق الدوال المعطاة وسيطياً

لتكن $y = f(x)$ دالة معطاة وسيطياً بالعلاقات

$$\{x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad ; \quad t \in T\}$$

ولتكن الدالتان $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ فضولتين على T، بحيث

$$\varphi'(t) \neq 0 \quad ; \quad \forall t \in T$$

وليكن للدالة $x = \varphi(t)$ دالة عكسية فضولة $t = \varphi^{-1}(x)$.

يمكن عندئذٍ، النظر للدالة $y = f(x)$ كدالة مركبة:

$$y = \psi(t) \; ; \; t = \varphi^{-1}(x)$$

حيث t متغير مرحلي.

نشتق الدالة $y = f(x)$، وفق قاعدة اشتقاق الدالة المركبة:

$$y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x$$

ونوجد المشتق t'_x باستخدام قاعدة مشتق الدالة العكسية:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

نستخدم الرموز $\varphi'(t) = x'_t$ و $\psi'(t) = y'_t$، فنجد

$$\left.\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = y'_t / x'_t \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

ونحصل على المشتق ديكارتياً، بتعويض $t = \varphi^{-1}(x)$ في صيغة المشتق y'_x.

يتم إيجاد المشتق من المرتبة الثانية y''_x بنفس الطريقة:

$$\left\{ y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad ; \quad x = \varphi(t) \right\}$$

والمشتق من المرتبة الثالثة:

$$\left\{ y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \quad ; \quad x = \varphi(t) \right\}$$

وهكذا نوجد المشتقات من مراتب عليا.

مثال 5.21 : أوجد المشتقات y'_x و y''_x و y'''_x للدالة

$$\{x = a\cos t, y = b\sin t\}$$

الحل: لما كان

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

فإن المشتق y'_x يُعطى بالعلاقات

$$\left\{y'_x = -\frac{b}{a}\cot t \quad ; \quad x = a\cos t\right\}$$

وبأسلوبٍ مماثل، نجد

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t} \Rightarrow \left\{y''_x = \frac{b}{a^2\sin^3 t} \; ; \; x = a\cos t\right\}$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(-\frac{b}{a^2}\sin^3 t\right)'}{-a\sin t} = \frac{-3b\cos t}{a^3\sin^5 t} \Rightarrow \left\{y'''_x = \frac{-3b\cos t}{a^3\sin^5 t} \; ; \; x = a\cos t\right\}$$

ملحوظة 5.10 : إذا عوضنا في المشتق من المرتبة الثانية $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ قيمة المشتق $y'_x = \frac{y'_x}{x'_t}$، فإننا نحصل على صيغة أخرى للمشتق من المرتبة الثانية:

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(y'_t / x'_t)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}$$

5.13 التفاضل من مراتب عليا

إن تفاضل الدالة $y = f(x)$ هو $dy = f'(x)\,dx$ وهو مقدار متعلق بـ x حيث إن $\Delta x = dx$ لا يتعلق بـ x، لأنه تغير المتغير عند نقطة مثبّتة x.

نفاضل العبارة $f'(x)dx$ فنحصل على التفاضل من المرتبة الثانية:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f''(x)dx)\cdot dx = f''(x)(dx)^2$$

ونعرف بأسلوبٍ مماثل، التفاضل من المرتبة الثالثة:

$$d^3y = d(d^2y) = d\left[f''(x)(dx)^2\right] = \left[d\ f''(x)\right](dx)^2 = f'''(x)(dx)^3$$

وهكذا، نجد التفاضل من المرتبة n :

$$d^n y = d\left[d^{n-1} y\right] = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

وينتج من هذه العلاقة

$$f^{(n)}{}_{(x)} = \frac{d^n y}{(dx)^n}$$

نعطي الآن صيغة التفاضل من مراتب عليا، عندما يكون المتغير x هو دالة فضولة عند t: $x = \varphi(t)$.

لما كان $dx = d\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$، فإن

$$d^2 y = d\left[f'(x)dx\right] = d\left[f'(x)\right]dx + f'(x)\cdot d(dx) =$$
$$= \left[f''(x)dx\right]dx + f'(x)d^2 x = f''_{(x)}(dx)^2 + f'(x)d^2 x$$

وبأسلوبٍ مماثل، نجد

$$d^3 y = f'''(x)(dx)^3 + 3f''(x)dx\, d^2 x + f'(x)\cdot d^3 x$$

واضح أن صيغة التفاضلات من مراتب عليا مختلفة وهي مرتبطة بكون x متغيراً مستقلاً أو دالة فضولة عند متغير آخر t. مع التذكير بأن صيغة التفاضل من المرتبة الأولى هي نفسها سواءً كان x متغيراً مستقلاً أو دالة فضولة عند متغير آخر.

5.14 مبرهنات القيم الوسطى

تُعد مبرهنات القيم الوسطى من أهم خواص الدوال الفضولة.

إن أهم مجموعات الدول التي تدرس في التحليل الرياضي هي مجموعة الدوال المستمرة وكما بينا سابقاً، فإن مجموعة الدوال الفضولة هي مجموعة جزئية من مجموعة الدوال المستمرة مع أن للدوال الفضولة أهمية خاصة في كثيرٍ من المسائل التقنية والطبيعية. ولهذه الدوال بعض الخواص العامة تسمى مبرهنات القيم الوسطى. وتؤكّد هذه المبرهنات حقيقة وجود نقطة وسطية من المجال $]a;b[$ تحقق عندها الدالة $y = f(x)$ بعض الخواص.

نعطي برهان إحدى هذه المبرهنات ونترك الباقي كتمرين للقارئ

مبرهنة 5.5 (مبرهنة فيرما[1]): لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة على المجال $]a;b[$ ولها قيمة عظمى أو صغرى عند نقطة x_0 من المجال $]a;b[$ عندئذٍ، إذا كان $f(x)$ فضولاً عند النقطة x_0، فإن $f'(x_0) = 0$.

البرهان: نفرض للتحديد، أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى عند النقطة x_0، أي

$$f(x) \le f(x_0) \quad ; \quad \forall x \in]a;b[$$

وهذا يعني أن

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0 \quad , \quad \forall (x_0 + \Delta x) \in]a;b[$$

إذا كان $\Delta x > 0$ (أي $x > x_0$)، فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$. وعليه، فإن

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \le 0$$

وإذا كان $\Delta x < 0$ (أي $x < x_0$)، فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$. وعليه، فإن

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \ge 0$$

ولما كان المشتق f' موجود عند النقطة x_0، فإن

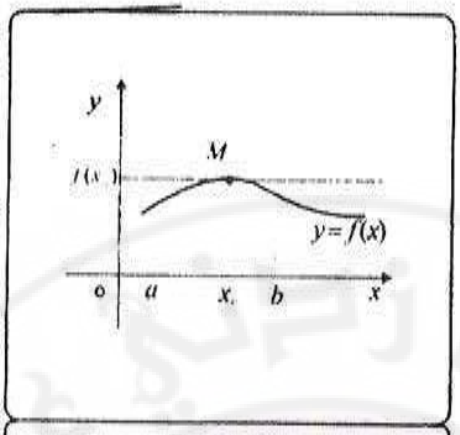
$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0$$

نثبت صحة المبرهنة في حال وجود قيمة صغرى للدالة $f(x)$، عند النقطة x، بأسلوب مشابه.

المعنى الهندسي لمبرهنة فيرما:

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ تحقق فرضيات المبرهنة، فإن مماس المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ يوازي محور الفواصل، الشكل 5.7.

[1] بيير فيرما (1601-1665) عالم رياضيات فرنسي.



الشكل 5.7

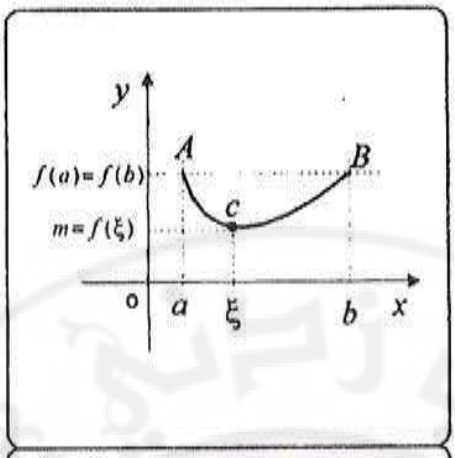
ملحوظة 5.11 : إذا كان مجال تعريف الدالة $y = f(x)$ مغلقاً أي $[a;b]$، فإن مبرهنة فيرما قد لا تكون صحيحة.

فمثلاً، الدالة $f(x) = x$ معرفة على المجال $[0;2]$، ولها قيمة صغرى عند النقطة $x_1 = 0$، وقيمة عظمى عند النقطة $x_2 = 2$. غير أن المشتق $f'(x)$ لا ينعدم عند هاتين النقطتين: $f'(x) = 1$.

مبرهنة 5.6 (مبرهنة رول[1]): لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a;b]$، وفضولة على المجال $]a;b[$، وبحيث يكون $f(a) = f(b)$. توجد عندئذٍ، نقطة، واحدة على الأقل، ξ من المجال $]a;b[$ يكون من أجلها $f'(\xi) = 0$.

المعنى الهندسي لمبرهنة رول:

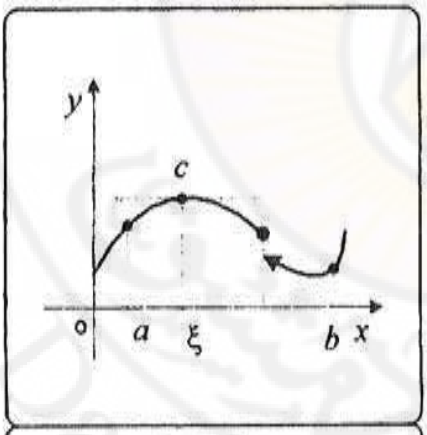
إذا كانت الدالة $y = f(x)$ تحقق فرضيات مبرهنة رول. فإنه توجد من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ نقطة واحدة على الأقل c، فاصلتها $x = \xi$، يكون عندها المماس لهذا المنحني يوازي محور الفواصل، الشكل 5.8.



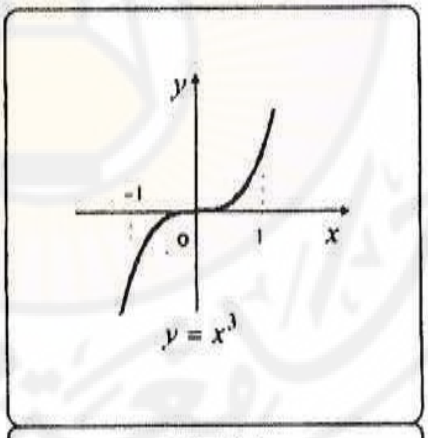
الشكل 5.8

ملحوظة 5.12 : إن شروط مبرهنة رول كافية وغير لازمة، فمثلاً، الدالة $f(x)=x^3$ معرفة ومستمرة على المجال $[-1;1]$، وقضولة على المجال $]-1;1[$، بينما $f(-1)\neq f(1)$. ومع ذلك، توجد نقطة $\xi=0$، يكون من أجلها $f'(\xi)=0$، الشكل 5.9.

كذلك، فإن، الشكل 5.10، يمثل المنحني البياني لدالة غير مستمرة وغير قضولة على المجال $[a;b]$ ولكن توجد نقطة $\xi\in]a,b[$، بحيث $f'(\xi)=0$.



الشكل 5.10



الشكل 5.9

مثال 5.22 : أثبت أنه لا يوجد للمعادلة $3^{x+2}-26x=29$ أكثر من جذرين حقيقيين مختلفين.

الحل: نفرض جدلاً وجود ثلاثة جذور حقيقية مختلفة عن بعضها البعض، للمعادلة المعطاة: x_1 و x_2 و x_3، ولنفرض $x_1 < x_2 < x_3$.

نطبق مبرهنة رول على الدالة $f(x) = 3^{x+2} - 26x - 29$ في المجالين $[x_1; x_2]$ و $[x_2; x_3]$، حيث إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على هذين المجالين وقابلة للاشتقاق فيهما. عندئذٍ، توجد نقطتان $\xi_1 \in]x_1; x_2[$ و $\xi_2 \in]x_2; x_3[$، بحيث يكون

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

غير أنه لا يوجد للمعادلة

$$f'(x) = 3^{x+2} \ln 3 - 26 = 0$$

سوى جذر واحد فقط. يثبت هذا التناقض أن للمعادلة المعطاة فقط جذرين حقيقيين مختلفين.

ويمكن التحقق بسهولة أن الجذرين هما $x_1 = -1$ و $x_2 = 2$.

مبرهنة 5.7 (مبرهنة التزايدات المحدودة- لاغرانج[1]):

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$ وقابلة على المجال $]a;b[$، فإنه يوجد على الأقل نقطة ξ من المجال $]a;b[$، بحيث يكون

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

تسمى هذه الصيغة صيغة لاغرانج، وتكتب أحياناً كما يلي:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad ; \quad \xi \in]a;b[\qquad (5.6)$$

المعنى الهندسي لمبرهنة لاغرانج:

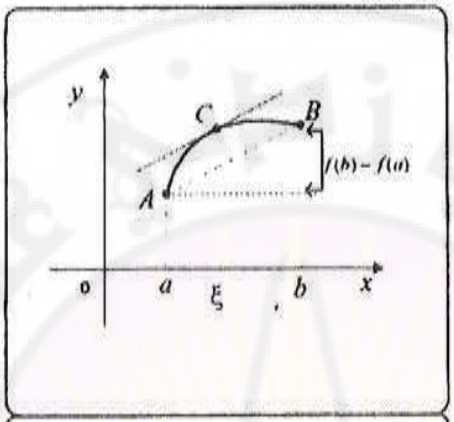
تعني العبارة

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k$$

زاوية ميل الوتر AB و $f'(\xi)$ زاوية ميل مماس المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عند النقطة C، الشكل 5.11. لذا، فإنه ووفق العلاقة (5.6)، توجد بين النقطتين A و B نقطة

[1] جوزيف - لوي لاغرانج (1736-1813) عالم رياضيات فرنسي.

واحدة على الأقل C من القوس AB يكون المماس عندها للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يوازي الوتر AB . (نذكّر هنا، أن الشرط $f(b) = f(a)$ يعني، وفق مبرهنة رول أن المماس عند النقطة C يوازي المحور ox).



الشكل 5.11

ملحوظة 5.13 : إذا وضعنا في صيغة لاغرانج (5.6) : $f(b) = f(a)$ ، فإننا نحصل على مبرهنة رول. أي أن مبرهنة رول حالة خاصة من مبرهنة لاغرانج.

ملحوظة 5.14 : لما كانت النقطة ξ تقع بين النقطتين a و b، فإن

$$\xi = a + \theta(b - a) \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

وعليه، تكتب صيغة لاغرانج (5.6) كما يلي:

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'[a + \theta(b - a)]$$

ملحوظة 5.15 : نضع في صيغة لاغرانج (5.6) : $a = x_0$ و $b = x_0 + \Delta x$، فتصبح:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x \quad ; \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x \qquad (5.7)$$

تربط هذه الصيغة بين تغير الدالة وتغير المتغير، لذا، فإنها تسمى صيغة التزايدات المحدودة. وتعطي هذه الصيغة، عبارة دقيقة لتغير الدالة f من خلال تغير المتغير x، وذلك بخلاف تفاضل الدالة، الذي يعطي قيمة تقريبية لتغير الدالة:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)dx$$

مع الإشارة إلى أنه في الحساب التقريبي نستبدل تغير الدالة بتفاضلها: $\Delta f \approx df$، حيث إن الصيغة (5.7) قليلاً ما تستخدم، لأن استخدامها يتطلب إيجاد النقطة ξ من المجال $]a;b[$ وذلك غير ممكن دوماً.

مثال 5.23 : أوجد باستخدام صيغة التزايدات المحدودة، القيمة التقريبية لـ $\sin 31^\circ$.

الحل: نكتب صيغة التزايدات المحدودة للدالة $f(x)=\sin x$ في المجال $[x_\circ;x_\circ+\Delta x]$

$$\sin(x_\circ+\Delta x)-\sin x_\circ=(\cos\xi)\Delta x \quad ; \quad \xi\in\,]x_\circ;x_\circ+\Delta x[$$

أي

$$\sin(x_\circ+\Delta x)=\sin x_\circ+(\cos\xi)\Delta x$$

ولما كان

$$31^\circ=\tfrac{\pi}{180}\cdot 31=0.541\ rad$$

فإن

$$\sin(0.541)=\sin\tfrac{1}{6}\pi+\cos\xi(0.0175) \quad ; \quad \tfrac{1}{6}\pi<\xi<0.541$$

نأخذ $\cos\xi\approx\cos\frac{1}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. عندئذٍ، يكون

$$\sin(0.541)\approx\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}(0.0175)=0.515$$

مثال 5.24 : برهن باستخدام مبرهنة لاغرانج، صحة المتراجحة.

$$|\arctan x_2-\arctan x_1|\le|x_2-x_1| \quad ; \quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

الحل: لتكن الدالة $f(x)=\arctan x$ وهي مستمرة على أي مجال $[x_1;x_2]$ وفضولة دوماً و

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

توجد عندئذٍ، نقطة ξ من المجال $]x_1,x_2[$ تحقق الصيغة:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$$

$$\arctan x_2-\arctan x_1=\frac{x_2-x_1}{1+\xi^2}$$

ومنه:

$$|\arctan x_2 - \arctan x_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{1+\xi^2}$$

ولما كان

$$\frac{1}{1+\xi^2} \le 1 \quad ; \quad \forall \xi \in \,]x_1; x_2[$$

فإن

$$|\arctan x_2 - \arctan x_1| \le |x_2 - x_1|$$

نتيجة 5.5 : النظرية الأساسية في الحساب التكاملي

إذا كان

$$f'(x) \equiv 0 \qquad ; \qquad \forall x \in \,]a;b[$$

فإن

$$f(x) \equiv c \quad ; \quad \forall x \in [a;b]$$

البرهان: لتكن x_1 و x_2 نقطتين اختياريتين من المجال $[a;b]$. عندئذٍ، تحقق الدالة $f(x)$ شروط مبرهنة لاغرانج على المجال $[x_1 ; x_2]$. وعليه، توجد نقطة ξ من المجال $]x_1; x_2[$ تحقق

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ولما كان $f'(\xi) = 0$، فإن $f(x_2) - f(x_1) = 0$. أي أن $f(x_2) = f(x_1)$. ولما كانت النقطتان x_1 و x_2 اختياريتين من المجال $[a;b]$، فإن للدالة $f(x)$ قيماً متساوية من أجل جميع نقاط هذا المجال. وعليه، فإن هذه الدالة هي الدالة الثابتة، أي

$$f(x) \equiv c \quad ; \quad \forall x \in [a;b[$$

مثال 5.25 : أثبت صحة العلاقة

$$2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \quad ; \quad \forall x \ge 1$$

الحل: نعرف الدالة

$$f(x) \overset{\Delta}{=} 2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \qquad (i)$$

إذا كان $x = 1$، فإن

إذا كان $x > 1$، فإن الدالة $f(x)$ تحقق شروط مبرهنة لاغرانج، ويكون

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0 \;\; ; \;\; \forall x > 1$$

ومنه

$$f(x) \equiv c \;\; ; \;\; \forall x > 1 \qquad (ii)$$

لحساب الثابت c نعوض $x = \sqrt{3}$ في العلاقتين (i) و (ii)، فنجد

$$c = f(\sqrt{3}) = 2\arctan\sqrt{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \pi$$

إذن

$$f(x) = \pi \;\; ; \;\; \forall x \geq 1$$

مبرهنة 5.8 (مبرهنة التزايدات المحدودة المعممة- كوشي)

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين على المجال $[a;b]$ وقابلتين للاشتقاق على المجال $]a;b[$، بحيث

$$g'(x) \neq 0 \;\; ; \;\; \forall x \in]a;b[$$

توجد عندئذٍ، نقطة واحدة على الأقل ξ من المجال $]a;b[$ بحيث يكون

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ملحوظة 5.16: يمكن التحقق بسهولة، أن مبرهنة لاغرانج حالة خاصة من مبرهنة كوشي، وذلك بوضع $g(x) = x$ في مبرهنة كوشي.

إن التفسير الهندسي لبرهنة كوشي ومبرهنة لاغرانج هو نفسه. إذا رمزنا للمتغير المستقل بالرمز t ونفرض $x = g(t)$ و $y = f(t)$ المعادلات الوسيطية لمنحنٍ ما عندما يتغير الوسيط t على المجال $[t_1;t_2]$ تتحرك النقطة المقابلة على المنحني من النقطة $A(g(t_1),f(t_1))$ إلى النقطة $B(g(t_2),f(t_2))$. وتكون عندئذٍ، زاوية ميل الوتر الواصل بين هاتين النقطتين هي

$$k = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{g(t_2) - g(t_1)}$$

ولما كان مشتق الدالة المعطاة وسيطياً: $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$

فإنه ينتج من الصيغة

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{g(t_2) - g(t_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

أنه إذا كان المنحني معطى وسيطياً بالعلاقات

$$\{x = g(t) \quad , \quad y = f(t) \quad ; t \in [t_1;t_2]\}$$

فإنه توجد نقطة منه C يكون المماس عندها يوازي الوتر المقابل لهذا المنحني.

ننتقل لتطبيق هام من تطبيقات الاشتقاق وهو إزالة بعض حالات عدم التعيين.

5.15 قاعدة لوبيتال[1]

مبرهنة 5.9 : لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين تحققان الشروط التالية:

أ- فضولتان على المجال $]a;b[$ ، باستثناء ربما نقطة x_0 ، وبحيث

$$g(x) \neq 0 \quad , \quad g'(x) \neq 0 \quad ; \quad \forall x \in]a;b[$$

ب- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ أو

[1] غيلوم فرانسوا لوبيتال (1661-1704) عالم رياضيات فرنسي.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

ج- توجد النهاية $A = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (محدودة أو غير محدودة).

عندئذٍ، توجد النهاية $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$، ويكون

$$A = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

البرهان: نعطي البرهان من أجل إزالة حالة عدم التعيين من النمط $\left(\frac{0}{0}\right)$. ونبرهن الحالة $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ بأسلوب مشابه.

نحدد تعريف الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ عند النقطة $x = x_0$، بأن نضع $f(x_0) = g(x_0) = 0$ وستكون عندها، الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتين عند هذه النقطة. لما كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتين على المجال $[x_0; x]$، حيث $x_0 < x < b$، وفضولتين على المجال $]x_0; x[$، فإنه وفق مبرهنة كوشي توجد نقطة ξ من المجال $]x_0; x[$، بحيث يكون

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ولما كان $f(x_0) = g(x_0) = 0$، فإن العلاقة السابقة تكتب كما يلي:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

إذا سعت x إلى x_0، فإن ξ تسعى إلى x_0. لذا، فإنه من الشرط ج من شروط المبرهنة، ومن العلاقة السابقة نجد

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملحوظة 5.17 : إذا حققت الدالتان $f'(x)$ و $g'(x)$ نفس الشروط التي حققتها الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ في المبرهنة 5.9 ، وكانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ موجودة، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال مرتين متتاليتين:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ويمكن المتابعة بتطبيق قاعدة لوبيتال طالما بقيت شروط المبرهنة 5.9 محققة.

ملحوظة 5.18 : تبقى المبرهنة 5.9 صحيحة في الحالة، عندما تسعى x إلى ∞.

فإذا كان

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

وكانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة (محدودة أو غير محدودة). فإننا نفرض $x=\frac{1}{t}$. وعندما تسعى t إلى الصفر، تسعى x إلى ∞. و

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to0}f\left(\frac{1}{t}\right)=0$$
$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{t\to0}g\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

نطبق المبرهنة 5.9 على الدالتين $f\left(\frac{1}{t}\right)$ و $g\left(\frac{1}{t}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to0}\frac{(-\frac{1}{t^2})f'(\frac{1}{t})}{(-\frac{1}{t^2})\cdot g'(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g'(x)}$$

مثال 5.26 : احسب النهاية

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$$

الحل: نعوض في الكسر $x=0$، فنحصل على حالة عدم تعيين من النمط $\left(\frac{0}{0}\right)$. لإزالتها، نطبق قاعدة لوبيتال ثلاث مرات متتالية ، حيث إن الدالتين $f(x)=e^x-e^x-2x$ و $g(x)=x^3$ تحققان شروط المبرهنة 5.9:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

مثال 5.29 : احسب النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 5x}{\cot x}$.

الحل: نعوض في الكسر $x=0$، فنحصل على حالة عدم تعيين من النمط $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. ولما كانت الدالتان $f(x)=\ln 5x$ و $g(x)=\cot x$ تحققان شروط المبرهنة 5.9، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 5x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{(-1/\sin^2 x)}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=$$

$$=-\left(\lim_{x\to 0^+}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\right)=-0\cdot 1=0$$

ملحوظة 5.19 : يمكن رد حالات عدم التعيين من الأنماط $(\infty-\infty)$ و $(0\cdot\infty)$ و (0^0) و (∞^0) و (1^∞)، إلى أحد النمطين $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$، ثم تطبيق قاعدة لوبيتال.

أ- حالة عدم تعيين من النمط $(\infty-\infty)$: تظهر هذه الحالة عند دراسة النهاية $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$ حيث $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

يمكن رد هذه الحالة إلى إحدى الحالتين $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$، بالاستفادة من خواص الدالتين f و g.

أو ترد إلى الحالة $\left(\frac{0}{0}\right)$، بالاستفادة من العلاقة:

$$\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{(1/f.g)}=f(x)-g(x)$$

مثال 5.28 : احسب النهاية $A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$.

الحل: إن هذه النهاية هي حالة عدم تعيين من النمط $(\infty - \infty)$، بتوحيد المقامات نحصل على حالة عدم تعيين من النمط $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\tan x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

ولما كانت الدالتان $f(x) = \tan x - x$ و $g(x) = x\tan x$ تحققان شروط المبرهنة 5.9، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos^2 x\right) - 1}{\tan x + \left(x/\cos^2 x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x + \frac{1}{2}\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$$

ب- حالة عدم التعيين من النمط $(0\cdot\infty)$: تظهر هذه الحالة عند دراسة النهاية $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ ، حيث إن إحدى النهايتين $\lim_{x\to x_0} f(x)$ أو $\lim_{x\to x_0} g(x)$ تساوي الصفر والأخرى ∞. تُردّ هذه الحالة إلى إحدى الحالتين $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$، بالاستفادة من العلاقة

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{(1/g(x))} \quad \text{أو} \quad f(x).g(x) = \frac{g_{(x)}}{(1/f(x))}$$

مثال 5.29 : احسب النهاية $A = \lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$

الحل: إن هذه النهاية هي حالة عدم تعيين من النمط $(0\cdot\infty)$. نكتب هذه النهاية كما يلي:

$$A = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ولما كانت الدالتان $f(x) = \ln x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ تحققان شروط المبرهنة 5.9، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال:

$$A = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{\left(-1/x^2\right)} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

ج- حالات عدم التعيين من النمط (0^0) و(∞^0) و(1^∞): تظهر هذه الحالات عند دراسة النهاية $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$، حيث إن:

$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ للحالة (0^0)،

أو $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ للحالة (∞^0)،

أو $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ للحالة (1^∞).

تُرد هذه الحالات إلى الحالة $(0\cdot\infty)$، بالاستفادة من العلاقة:

$$[f(x)]=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

مثال 5.30 : احسب النهاية $A=\lim_{x\to 0^+} x^x$.

الحل: إن هذه النهاية هي حالة عدم تعيين من النمط (0^0). نكتب هذه النهاية كما يلي:

$$A=\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln x/(1/x)}$$

ومن المثال 5.29، نجد $A=e^0=1$.

مثال 5.31 : احسب النهاية $A=\lim_{x\to+\infty} x^{(1/\sqrt{x})}$.

الحل: إن هذه النهاية هي حالة عدم تعيين من النمط (∞^0) نكتب هذه النهاية كما يلي:

$$A=\lim_{x\to+\infty} x^{(1/\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty} e^{(1/\sqrt{x})\cdot\ln x}$$

نحسب النهاية

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

لما كانت الدالتان $f(x)=\ln x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ تحققان شروط المبرهنة 9.5، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1/x)}{(1/2\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

ومنه، $A = e^0 = 1$.

مثال 5.32 : احسب النهاية $A = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{(1/x^2)}$.

الحل: إن هذه النهاية هي حالة عدم تعيين من النمط (1^∞) . نكتب هذه النهاية كما يلي:

$$A = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{(1/x^2)} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot \ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)}$$

نحسب النهاية

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

وهي من النمط $\left(\frac{0}{0}\right)$. لما كانت الدالتان $f(x) = \ln\cos x$ و $g(x) = x^2$ تحققان شروط المبرهنة 5.9، فإننا نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

ومنه، فإن $A = e^{-(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

5.16 دراسة سلوك الدوال ورسم منحنياتها البيانية

يمكن بمساعدة مشتق الدالة، إعطاء العديد من مفاهيم سلوك هذه الدالة: إيجاد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى ونقاط الانعطاف ومجالات التحدب والتقعر.

5.16.1 معيار اطراد دالة

مبرهنة 5.10 : الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f(x)$ الفضولة على المجال $]a;b[$ ، متزايدة (متناقصة) على هذا المجال، هو

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) \leq 0) \qquad ; \qquad \forall x \in]a;b[$$

البرهان: نعطي البرهان من حالة التزايد، ونبرهن حالة التناقص بأسلوب مماثل.

اللزوم: لتكن $f(x)$ دالة متزايدة على المجال $]a;b[$ وليكن Δx تغيراً موجباً تماماً للمتغير x. يكون عندئذٍ، تغير الدالة:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in]a;b[$$

الكفاية: ليكن

$$f'(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in]a;b[$$

وليكن $x_1, x_2 \in]a;b[$، بحيث $x_1 > x_2$. نطبق مبرهنة لاغرانج على الدالة $f(x)$ على المجال $[x_1;x_2]$. يوجد عندئذٍ، عدد ξ من المجال $]x_1;x_2[$ يحقق:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1)$$

لما كان $f'(\xi) \geq 0$، فإن $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

أي $f(x_2) \geq f(x_1)$. وعليه، فإن الدالة $f(x)$ متزايدة على المجال $]a;b[$.

ملحوظة 5.20 : إذا كان

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \quad ; \quad \forall x \in]a;b[$$

فإن الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً)، غير أن العكس غير صحيح بالضرورة.

فمثلاً، الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة تماماً على المجال $]-1;1[$، غير أن $f'(0) = 0$.

المعنى الهندسي للمبرهنة 5.10

إن المماس للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ المتزايدة تماماً على المجال $]a;b[$ يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور الفواصل.

والمماس للمنحني البياني للدالة المتناقصة تماماً على المجال $]a;b[$ يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور الفواصل.

وإذا كانت الدالة $f(x)$ ثابتة على المجال $]a;b[$، فإن $f'(x)=0$ على هذا المجال. ويكون المماس للمنحني البياني لهذه الدالة يوازي محور الفواصل.

مثال 5.33 : أوجد مجالات اطراد الدالة

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. نوجد المشتق

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

كما هو واضح، فإن

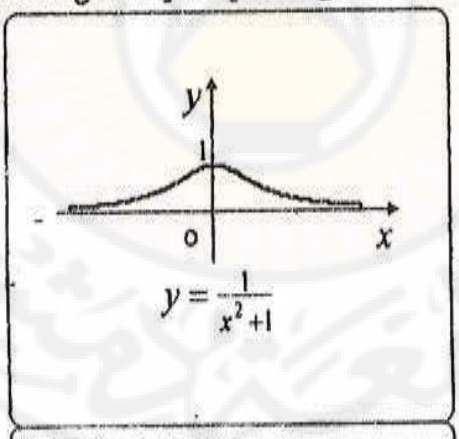
$$f'(x)>0 \quad ; \quad \forall x\in\ ]-\infty;0[$$

أي أن الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً على المجال $]-\infty;0[$

كما أن

$$f'(x)<0 \quad ; \quad \forall x\in]0;\infty[$$

أي أن الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على المجال $]0;\infty[$، الشكل 5.12.



الشكل 5.12

مثال 5.34 : حل المتراجحة $2x^9 - x^5 + x > 2$.

الحل: نعرّف الدالة $f(x) \overset{\Delta}{=} 2x^9 - x^5 + x - 2$. ونوجد مجالات اطراد هذه الدالة:

$$f'(x) = 18\,x^8 - 5x^4 + 1 = 18t^2 - 5t + 1 \quad ; \quad (t = x^4)$$

إن مميز ثلاثي الحدود $18t^2 - 5t + 1$ ، سالب تماماً وأمثال t^2 موجبة تماماً، فإشارة ثلاثي الحدود هذا دائماً موجبة. إذن

$$f'(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وعليه، فالدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. أي أن المنحني البياني لهذه الدالة يمكن أن يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة. ولما كان $f(1) = 0$ ، فإن جميع حلول المتراجحة هي المجال $]1;\infty[$.

مثال 5.35 : أي العددين أكبر $\cos(2005)$ أو $1 + \cos(2005)$.

الحل: نعرف الدالة $f(x) = x + \cos x$. لما كان $f'(x) = 1 - \sin x$ ، فإن

$$f'(x) = 0 \quad ; \quad (x = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k \ , \ k \in \mathbb{z}) \ \text{و} \ f'(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن الدالة متزايدة تماماً على المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\pi + 2\pi k \ ; \ k \in \mathbb{z}\right\}$. ومنه

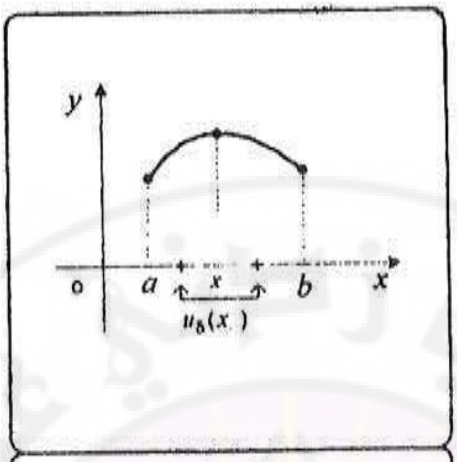
$$f(2004) < f(2005) \Rightarrow 2004 + \cos(2004) < 2005 + \cos(2005)$$

أي أن $\cos(2004) < 1 + \cos(2005)$

5.16.2 القيم القصوى الموضعية – الشروط اللازمة والكافية لوجود القيم القصوى

تؤدي النقاط التي تقسم مجموعة تعريف الدالة لمجالات تزايد وتناقص دوراً مميزاً في دراسة سلوك هذه الدالة. فالنقطة x_0 التي تقسم المجال $]a;b[$ لمجالين، الأول $]a;x_0[$ تكون عليه الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً، والثاني $]x_0;b[$ تكون عليه الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً، الشكل 5.13.

واضح من الشكل 5.13، وجود جوار $u_\delta(x_0)$ للنقطة x_0، تكون فيه $f(x_0) > f(x)$.



الشكل 5.13

تعريف 5.5 : نقول عن النقطة $x_\circ$ ، إنها نقطة قيمة عظمى (صغرى) موضعية للدالة $f(x)$ ، إذا وجد جوار $u_\delta(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$ ، بحيث يكون

$$\Delta f(x_\circ) = f(x) - f(x_\circ) < 0 \quad (\Delta f(x_\circ) = f(x) - f(x_\circ) > 0) \quad ; \quad \forall x \in u_\delta(x_\circ)$$

أي

$$f(x) < f(x_\circ) \qquad (f(x) > f(x_\circ)) \quad ; \quad \forall x \in u_\delta(x_\circ)$$

نسمي القيمة $f(x_\circ)$ القيمة العظمى (الصغرى) الموضعية للدالة $f(x)$. ونكتب

$$f(x_\circ) = \max_{x \in u_\delta(x_\circ)} f(x) \qquad \left(f(x_\circ) = \min_{x \in u_\delta(x_\circ)} f(x) \right)$$

نسمي نقاط القيم العظمى أو الصغرى الموضعية للدالة $f(x)$ نقاط القيم القصوى الموضعية لهذه الدالة. ونسمي القيم العظمى أو الصغرى الموضعية للدالة $f(x)$ القيم القصوى الموضعية لهذه الدالة.

ملحوظة 5.21 : إن القيم القصوى الموضعية للدالة تحمل صفة موضعية وهي أنها القيمة الأكبر أو القيمة الأصغر لهذه الدالة بالمقارنة مع قيم الدالة القريبة منها فقط وليست بالضرورة مع جميع قيم الدالة على مجموعة تعريفها.

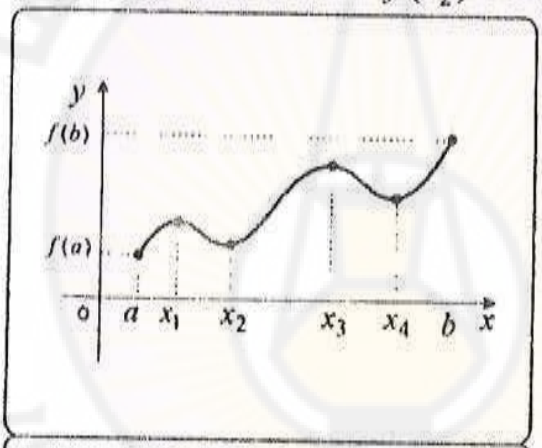
ملحوظة 5.22 : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a;b]$، ولها عدة قيم قصوى، فإنه يمكن أن تكون إحدى القيم العظمى الموضعية أصغر من إحدى القيم الصغرى الموضعية أو

بالعكس. فمثلاً، يبين الشكل 5.14، النقاط x_1 و x_3 نقاط قيم عظمى موضعية للدالة $f(x)$ والنقاط x_2 و x_4 نقاط قيم صغرى موضعية للدالة $f(x)$ ولكن $f(x_1) < f(x_2)$.

تعريف 5.6: نسمي القيمة الأكبر (الأصغر) للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$، القيمة العظمى المطلقة (الصغرى المطلقة) للدالة $f(x)$ على هذا المجال ونرمز لها بالرمز

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \left(\min_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$

فمثلاً، القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ الممثلة بالشكل 5.14 هي $f(b)$ والقيمة الصغرى المطلقة لهذه الدالة $f(x_2)$.



الشكل 5.14

مثال 5.36 : حدد عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

$$12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

الحل: نعرف الدالة $f(x) \overset{\Delta}{=} 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$ ونحدد مجالات اطرادها

$$f'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x = 48x\left(x + \tfrac{1}{8}\right)(x - 1)$$

واضح أن الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على المجالين $]0;1[$ و $]-\infty;-\frac{1}{8}[$، ومتزايدة تماماً على المجالين $]-\frac{1}{8};0[$ و $]1;\infty[$.

أي أن النقطتين $x_1 = -\frac{1}{8}$ و $x_2 = 1$ هي نقاط قيم صغرى موضعية للدالة $f(x)$ والنقطة $x_3 = 0$ نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$. نحسب قيم الدالة $f(x)$ عند هذه النقاط:

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{5137}{2 \cdot 8^3} \text{ و } f(1) = -10 \text{ و } f(0) = -5 .$$

وعليه، فإن $f\left(-\frac{1}{8}\right) < f(0)$.

ولما كانت الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً على المجال $[1;\infty[$ فإنها متزايدة تماماً على المجال $[1;2]$.

ولما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال، وقيمتها على طرفي المجال من إشارتين مختلفتين، $f(2) = 63$ و $f(1) = -10$، فإنه، وفق مبرهنة بولزانو 4.14، توجد نقطة $x_0 \in]1;2[$ يكون من أجلها $f(x_0) = 0$.

ونبرهن بالأسلوب ذاته، وجود نقطة $x'_0 \in]-1;-\frac{1}{8}[$ يكون من أجلها $f(x') = 0$. أي أن للمعادلة المعطاة جذرين حقيقيين فقط.

الشروط اللازمة لوجود القيم القصوى الموضعية لدالة

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 5.11: إذا كانت x_0 نقطة قيمة قصوى موضعية للدالة $f(x)$، فإن مشتقها عند هذه النقطة معدوم أو غير موجود.

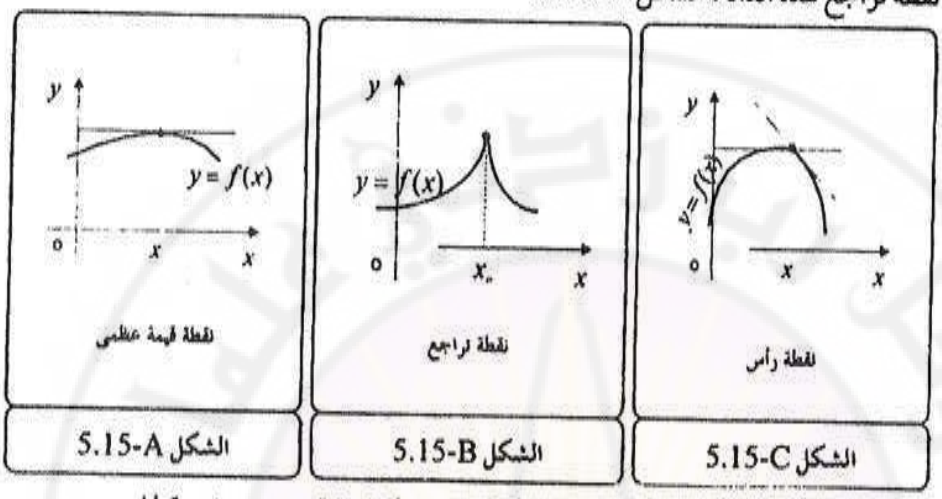
التصور الهندسي للمبرهنة 5.11

يكون المماس للمنحني البياني للدالة $y = f'(x)$ عند نقاط القيم القصوى الموضعية لها موازياً لمحور الفواصل إذا كان $f'(x_0) = 0$، الشكل 5.15-A. ويكون موازياً لمحور التراتيب إذا كان المشتق $f'(x_0)$ غير محدود، الشكل 5.15-B. ويوجد مماسان من اليمين ومن اليسار غير طبوقين عند هذه النقاط إذا كان $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$، الشكل 5.15-C.

نسمي النقاط التي يكون عندها مشتق الدالة $y = f(x)$ معدوماً أو غير موجود ولكن مستمر عندها نقاطاً حرجة لهذه الدالة.

ونسمي النقاط التي ينعدم عندها مشتق الدالة $f(x)$ نقاط استقرار لهذه الدالة.

ونسمي النقطة الحرجة x_0 التي يكون عندها $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ نقطة رأس، الشكل 5.15-C. ونسمي النقطة الحرجة x_0 التي يكون عندها $f'_+(x_0)$ و $f'_-(x_0)$ غير محدودين نقطة تراجع لهذه الدالة، الشكل 5.15-B.



الشكل 5.15-A | الشكل 5.15-B | الشكل 5.15-C

ملحوظة 5.23 : ليست كل نقطة حرجة لدالة هي نقطة قيمة قصوى موضعية لها.

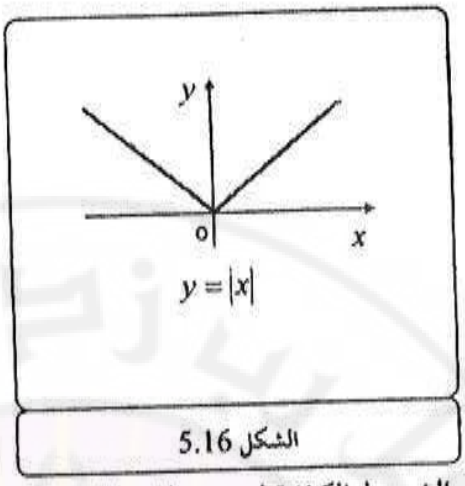
فمثلاً، النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة حرجة للدالة $f(x) = x^3$. لأن

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

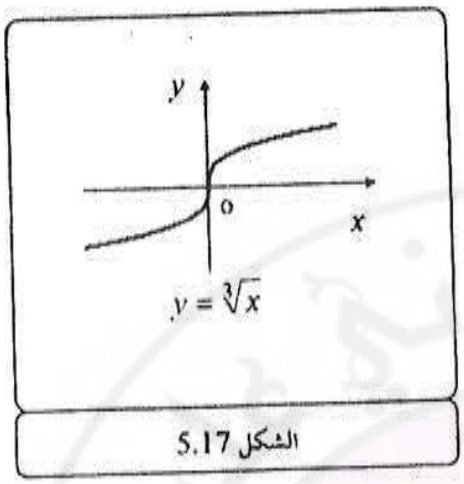
ولكن هذه النقطة ليست نقطة قيمة قصوى موضعية لهذه الدالة، الشكل 5.9.

مثال 5.37 : النقطة $x_0 = 0$ نقطة حرجة للدالة $f(x) = |x|$ لأن المشتق $f'(x)$ غير موجود عند هذه النقطة: $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$. وكما هو واضح من الشكل 5.16، فإن هذه النقطة هي نقطة قيمة صغرى لهذه الدالة.

مثال 5.38 : إن مشتق الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ غير موجود عند النقطة $x_0 = 0$، لأن المشتق $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ غير معرف عند النقطة $x_0 = 0$. وكما هو واضح من الشكل 5.17، فإن هذه النقطة ليست نقطة قيمة قصوى لهذه الدالة.



الشكل 5.16



الشكل 5.17

الشروط الكافية لوجود القيم القصوى

يمكن توضيح أي من النقاط الحرجة هي نقاط قيم قصوى موضعية وذلك بوساطة ثلاثة اختبارات (معايير) لوجود القيم القصوى الموضعية.

مبرهنة 5.12 (الاختبار الأول): لتكن x_0 نقطة حرجة للدالة المستمرة $f(x)$. إذا غير المشتق $f'(x)$، في جوارٍ للنقطة x_0، إشارته من موجب إلى سالب، فإن x هي نقطة قيمة عظمى موضعية.

وإذا غير المشتق $f'(x)$ إشارته، في جوارٍ للنقطة x_0، من سالب إلى موجب، فإن x هي نقطة قيمة صغرى موضعية.

أما إذا لم يغير المشتق $f'(x)$ إشارته في جوارٍ للنقطة x_0، فإن النقطة x_0 ليست نقطة قيمة قصوى.

البرهان: لتكن x_0 نقطة حرجة للدالة $f(x)$ و

$$f'(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in u_\delta(x_0^-) =]x_0 - \delta; x_0]$$
$$f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in u_\delta(x_0^+) = [x_0; x_0 + \delta[$$

عندئذٍ، يكون

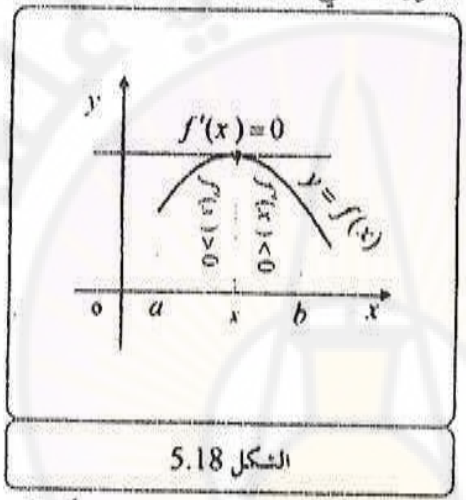
$$f(x_0) > f(x) \quad ; \quad \forall x \in u_\delta(x_0^-)$$
$$f(x_0) > f(x) \quad ; \quad \forall x \in u_\delta(x_0^+)$$

أي أنه يوجد الجوار $u_\delta(x_0)$ للنقطة x_0، يكون فيه $f(x) < f(x_0)$. أي أن x_0 نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$.

نبرهن بأسلوبٍ مشابه، وجود نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$.

وإذا حافظ المشتق $f'(x)$ على إشارته في جوارٍ للنقطة x_0، فإن الدالة تكون مطردة في هذا الجوار. مما يعني أن النقطة x_0 ليست نقطة قيمة قصوى موضعية للدالة $f(x)$.

يعطي الشكل 5.18، التصور الهندسي لنقطة القيمة العظمى الموضعية.



الشكل 5.18

مثال 5.39: أوجد نقاط القيم القصوى الموضعية للدالة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ مبيناً نوعها.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$، ومشتقها $f'(x) = x^2 - x$ أيضاً مستمرة على $\mathbb{R}$. نوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \ \text{ و } \ x_2 = 1$$

نبحث في إشارة المشتق $f'(x)$ في جوارٍ للنقط الحرجة.

واضح أنه إذا كان $x \in u_\delta(0^-)$، فإن $f'(x) = x^2 - x > 0$

وإذا كان $x \in u_\delta(0^+)$، فإن $f'(x) = x^2 - x < 0$

أي أن المشتق $f'(x)$ يغير إشارته من موجب إلى سالب. وعليه، فإن النقطة $x_1 = 0$

نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$:

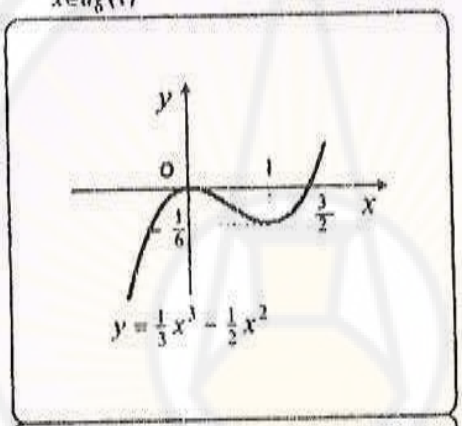
$$\max_{x\in u_8(0)} f(x) = f(0) = 0$$

وإذا كان $x \in u_8(1^-)$، فإن $f'(x) = x^2 - x < 0$

وإذا كان $x \in u_8(1^+)$، فإن $f'(x) = x^2 - x > 0$

أي أن المشتق $f'(x)$ يغير إشارته من سالب إلى موجب. وعليه، فإن النقطة $x_2 = 1$ نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$، الشكل 5.19. ويكون عندها

$$\min_{x\in u_8(1)} f(x) = f(1) = -\frac{1}{6}$$



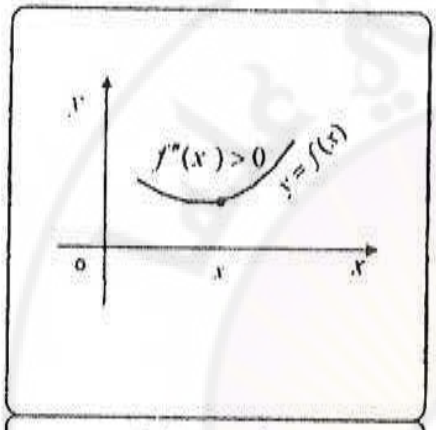
الشكل 5.19

مبرهنة 5.13 (الاختبار الثاني): لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الجوار $u_8(x_0)$ للنقطة x_0، وكان مشتقها من المرتبة الثانية موجوداً على هذا الجوار، وكان $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) \neq 0$. عندئذٍ، فإن x_0 نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$ إذا كان $f''(x_0) > 0$. وتكون x_0 نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$ إذا كان $f''(x_0) < 0$.

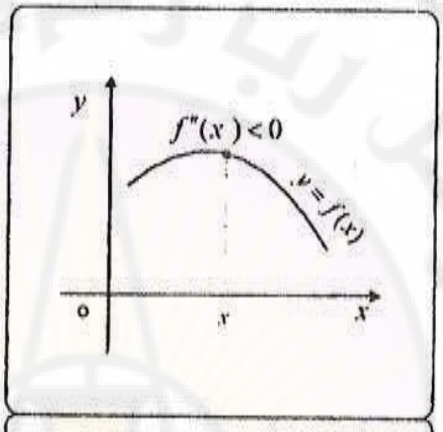
البرهان: نفرض تحقق فرضيات المبرهنة و $f''(x_0) > 0$. يكون عندئذٍ المشتق $f'(x)$ متزايداً تماماً على الجوار $u_8(x_0)$، ولكن لدينا $f'(x_0) = 0$. أي أن المشتق $f'(x)$ يغير إشارته في الجوار $u_8(x_0)$ من سالب إلى موجب، الشكل 5.20-A.

وهذا يعني حسب المبرهنة 5.12، أن x_0 نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$.

وإذا كان $f''(x_0) < 0$، فإن المشتق $f'(x)$ متناقص تماماً على الجوار $u_\delta(x_0)$. ولكن لدينا $f'(x_0) = 0$، أي أن المشتق $f'(x)$ يغير إشارته في الجوار $u_\delta(x_0)$ من موجب إلى سالب، الشكل 5.20-B. وهذا يعني حسب المبرهنة 5.12، أن x_0 نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$.



الشكل 5.20-A



الشكل 5.20-B

مثال 5.40 : أوجد نقاط القيم القصوى الموضعية للدالة $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ مبيناً نوعها.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين على $\mathbb{R}$. نحدد النقاط الحرجة للدالة $f(x)$:

$$f'(x) = x^3 - x = 0 \implies x_1 = 0 \text{ و } x_2 = -1 \text{ و } x_3 = 1$$

نوجد المشتق من المرتبة الثانية: $f''(x) = 3x^2 - 1$.

لما كان $f''(0) = -1 < 0$، فإن $x_1 = 0$ نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$ و

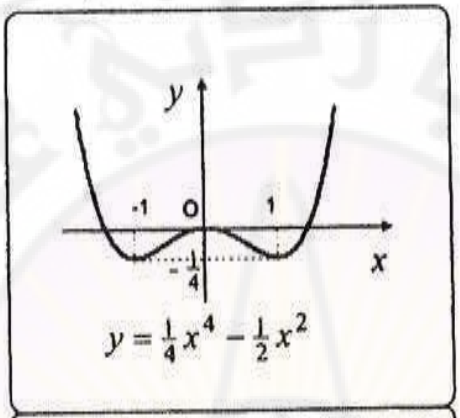
$$\max_{x \in u_\delta(0)} f(x) = f(0) = 0$$

ولما كان $f''(-1) = -2 < 0$، فإن $x_2 = -1$ نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$

$$\min_{x\in u_\delta(-1)} f(x) = f(-1) = -\tfrac{1}{4}$$

ولما كان $f''(1) = -2 < 0$، فإن $x_3 = 1$ نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$، الشكل 5.21، ويكون عندها

$$\min_{x\in u_\delta(+1)} f(x) = f(1) = -\tfrac{1}{4}$$



الشكل 5.21

مبرهنة 5.14 (الاختبار الثالث): لتكن $f(x)$ قابلة للاشتقاق n مرة متتالية، وجميع هذه المشتقات مستمرة عند النقطة x_0. وليكن

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

عندئذٍ، نميز الحالات:

أ. إذا كان n عدداً زوجياً وكان $f^{(n)}(x_0) < 0$، فإن x_0 نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$.

ب. إذا كان n عدداً زوجياً و $f^{(n)}(x_0) > 0$، فإن x_0 نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$.

ج. إذا كان n عدداً فردياً، فإن x_0 ليست نقطة قيمة قصوى موضعية للدالة $f(x)$.

نترك البرهان كتمرين للقارئ.

مثال 5.41 : أوجد نقاط القيم القصوى الموضعية للدالة $f(x)=x^4-4x^3$ مبيناً نوعها.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. نوجد النقاط الحرجة لهذه الدالة:

$$f'(x)=4x^3-12x^2=0 \Rightarrow x_1=0 \quad \text{و} \quad x_2=3$$

$$f''(x)=12x^2-24x \Rightarrow f''(3)=36>0 \quad \text{و} \quad f''(0)=0$$

أي أن النقطة $x_2=3$ نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$ و

$$\min_{x\in u_\delta(3)} f(x)=f(3)=-27$$

لتحديد نوع النقطة $x_1=0$، نوجد المشتق من المرتبة الثالثة

$$f'''(x)=24x-24$$

ولما كان $f'''(0)=0$، فإن النقطة $x_1=0$ ليست نقطة قيمة قصوى موضعية للدالة $f(x)$.

مثال 5.42 : حل المعادلة $x^2-x+2=2\sqrt[4]{2x-1}$.

الحل: نكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$x^2-2x+2=2\sqrt[4]{2x-1}-x$$

إن جذور هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع أو تماس المنحنيين البيانيين للدالتين

$$f(x)=x^2-2x+2 \quad \text{و} \quad g(x)=2\sqrt[4]{2x-1}-x$$

نوجد نقاط القيم القصوى الموضعية للدالتين.

واضح أن للدالة $f(x)=(x-1)^2+1$ نقطة قيمة صغرى $x_1=1$ قيمتها

$$\min f(x)=f(1)=1$$

الدالة $g(x)$ معرفة من أجل $x\geq\frac{1}{2}$. نوجد المشتق

$$g'(x)=(2x-1)^{-(3/4)}-1=\frac{1-(2x-1)^{(3/4)}}{(2x-1)^{(3/4)}} \quad ; \quad x>\frac{1}{2}$$

واضح أن

$$g'(1)=0 \quad \text{و} \quad [\,g'(x)<0 \;;\; \forall x>1\,] \quad \text{و} \quad [\,g'(x)>0 \;;\; \forall x\in\left]\tfrac{1}{2};1\right[\,]$$

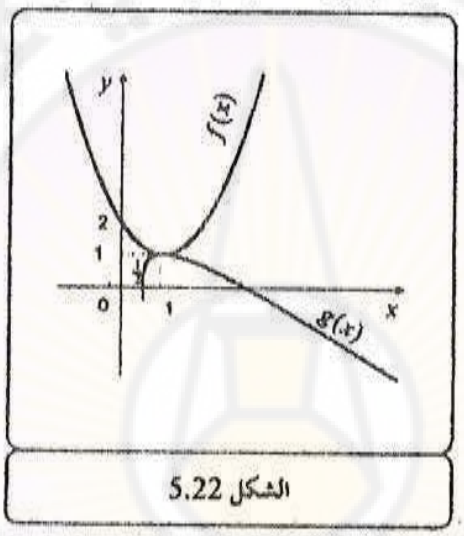
ولما كانت الدالة $g(x)$ مستمرة على المجال $\left[\frac{1}{2};\infty\right[$، فإن الدالة $g(x)$ متزايدة تماماً على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ومتناقصة تماماً على المجال $[1;\infty[$. أي أن النقطة $x_2 = 1$ نقطة قيمة عظمى للدالة $g(x)$.

ولما كان

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2};\infty\right[\; ; \; f(x) = x^2 - 2x + 2 \geq 1 \; \text{ و } \; g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1} - x \leq 1$$

فإن للمعادلة المعطاة جذراً واحداً هو $x = 1$.

يبين الشكل 5.22، المنحنيين البيانيين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$.



الشكل 5.22

5.16.3 القيم القصوى المطلقة لدالة (القيم القصوى المطلقة لدالة)

تعد القيم القصوى المطلقة لدالة على مجالٍ ما (مغلق أو نصف مغلق أو مفتوح، محدد أو غير محدد) من أهم خواص الدوال المستمرة.

تبلغ الدالة $f(x)$، المستمرة على المجال $[a;b]$، قيمتها العظمى أو الصغرى عند طرفي هذا المجال أو عند نقاط القيم القصوى الموضعية لهذه الدالة على المجال $[a;b]$.

وهكذا، لإيجاد القيم القصوى (العظمى أو الصغرى) لدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، ولها عدد منته من النقاط الحرجة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ على المجال $]a;b[$، نوجد قيم

الدالة $f(x)$ عند هذه النقاط وعند النقطتين a و b، ثم نختار منها القيمة الأكبر فتكون القيمة العظمى للدالة، أما القيمة الأصغر فتكون القيمة الصغرى لهذه الدالة على المجال $[a;b]$:

$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b)\}$$

$$\min_{x\in[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b)\}$$

وإذا كانت الدالة $f(x)$ تُدرس على $\mathbb{R}$ أو على أحد المجالات $[a;b[$ أو $]a;b]$ أو $]a;b[$ أو $]a;\infty[$ أو $]-\infty;b[$ أو $]-\infty;b]$ أو $[a;\infty[$، فإنه يمكن ألا يكون للدالة المستمرة $f(x)$ قيم قصوى على هذه المجالات.

فمثلاً، ليس للدالة $y = x$ قيمة عظمى على المجال $[0;1[$ وليس لها قيمة صغرى على المجال $]0;1]$ وليس لها قيمة عظمى أو صغرى على المجال $]0;1[$.

كما أنه ليس للدالة $y = x^2$ قيمة عظمى على $\mathbb{R}$.

وليس للدالة $y = \arctan x$ قيم قصوى على $\mathbb{R}$.

نذكّر هنا، أن للدالة التربيعية $y = ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى، عندما يكون $a > 0$، مساوية للقيمة $\frac{4ac - b^2}{4a}$ تبلغها عند النقطة $x = -\frac{b}{2a}$.

ولها قيمة صغرى عندما يكون $a < 0$، مساوية للقيمة $\frac{4ac - b^2}{4a}$ تبلغها عند النقطة $x = -\frac{b}{2a}$.

ويمكن بسهولة التحقق من الحقائق التالية:

- إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b[$ أو على المجال $[a;\infty[$، وكانت متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على هذا المجال، فإن للدالة $f(x)$ على هذا المجال قيمة صغرى (عظمى) تبلغها عند النقطة $x = a$.

- إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $]a;b]$ أو على المجال $]-\infty;b]$، وكانت متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على هذا المجال، فإن للدالة $f(x)$ على هذا المجال قيمة عظمى (صغرى) تبلغها عند النقطة $x = b$.

- إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $]a;b[$، وكانت $x_0 \in]a;b[$ نقطة حرجة لها، وكانت الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على المجال $]a;x_0[$ ومتناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على المجال $]x_0;b[$، فإن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى (صغرى) على المجال $]a;b[$ تبلغها عند النقطة $x = x_0$.

- إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $]a;b[$، ولها عدد منته من النقاط الحرجة $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ ومتزايدة تماماً (متناقصة تماماً) على المجال $]a;x_0[$ ومتناقصة تماماً (متزايدة تماماً) على المجال $]x_n;b[$، فإن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى (صغرى) على المجال $]a;b[$ تبلغها عند إحدى النقاط الحرجة.

- إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$ (أو على المجال $]a;b[$) وكانت النهايات $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$ (أو $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$) موجودة، فإنه يمكن تحديد إمكانية وجود قيمة قصوى للدالة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ (أو على المجال $]a;b[$) بمقارنة قيمة الدالة عند النقط الحرجة مع قيم النهايات $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$ (أو مع قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$) وقيمة الدالة عند النقطة $(x = a)$.

مثال 5.43 : أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x}$ على المجال $]0;\infty[$.

الحل: نكتب الدالة كما يلي:

$$f(x) = \frac{(2x+3\pi)^2}{x} + 12\pi + \sin x$$

واضح أنه أياً تكن $x > 0$، فإن $f(x) \geq 0 + 12\pi - 1 = 12\pi - 1$. أي أن قيمة الدالة $f(x)$ عند أي نقطة x من المجال $]0;\infty[$ ليست أقل من $(12\pi - 1)$. أي أن القيمة الصغرى للدالة $f(x)$ على هذا المجال هي $(12\pi - 1)$.

مثال 5.44 : أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ على المجال $[-5;5]$ مبيناً نوعها.

الحل: نوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ و } x_2 = -6$$

واضح أن $x_2 \notin [-5;5]$ ، فهي خارج نطاق البحث. فالنقطة الحرجة الوحيدة $x_1 = 4$:

$$\max_{x\in[-5;5]} f(x) = \max\{f(-5), f(5), f(4)\} = \max\{400,-70,-86\} = 400$$

$$\min_{x\in[-5;5]} f(x) = \min\{f(-5), f(5), f(4)\} = \min\{400,-70,-86\} = -86$$

مثال 5.45 : أوجد أصغر مسافة بين النقطتين $M(x,y)$ و $A(0,-2)$ ، حيث

$$y = \frac{16}{x^3\sqrt{3}} - 2 \quad ; \quad x > 0 .$$

الحل: من قانون المسافة بين نقطتين من المستوي:

$$\overline{MA}^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y+2)^2 =$$

$$= x^2 + \left(\frac{16}{x^3\sqrt{3}}\right)^2 = x^2 + \frac{256}{3x^6}$$

أي أن $f'(x) < 0$ في المجال $]0;2[$ و $f'(x) > 0$ في المجال $]2;\infty[$. أي أن الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على المجال $]0;2[$ ومتزايدة تماماً على المجال $]2;\infty[$.

ولما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = 2$ ، فإن القيمة الأصغر للدالة $f(x)$ على المجال $]0;\infty[$ هي $f(2) = \frac{16}{3}$. وعليه، فإن المسافة الأصغر المطلوبة هي $\sqrt{f(2)} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

مثال 5.46 : أوجد الحد الأكبر للمتتالية: $(n \in \mathbb{N})$; $a_n = n^{\frac{1}{n}}$.

الحل: ندرس الدالة

$$f_{(x)} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} \quad ; \quad x > 1$$

ونوجد القيمة الصغرى لها على المجال $]1;\infty[$ نوجد النقط الحرجة للدالة $f(x)$:

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}\left[-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}(1-\ln x) \quad ; \; x > 1$$

$$f'(x) = 0 \implies x = e$$

واضح أن $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]1;e[$ ، و $f'(x) < 0$ من أجل $x > e$.

ولما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[1;e]$، وكان $f''(x) > 0$ في المجال $]1;e[$ ، فإن الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً على المجال $[1;e]$.

ولما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[e;\infty[$ ، وكان $f'(x) < 0$ في هذا المجال، فإن الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على المجال $[e;\infty[$. وعليه، فإن القيمة العظمى للدالة $f(x)$ على المجال $]1;\infty[$ هي $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ تبلغها عند النقطة $x = e$.

ولما كان $2 < e < 3$ و $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$، فإن العنصر المطلوب من المتتالية $a_3 = \sqrt[3]{3}$.

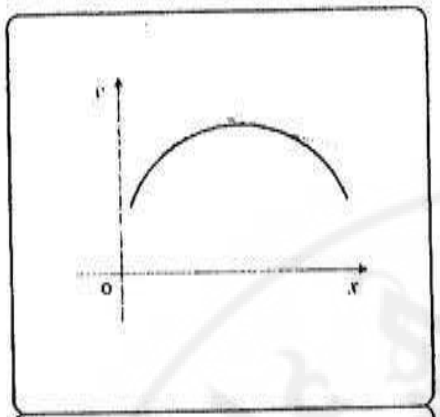
5.16.4 اتجاه تقعر منحني دالة – نقاط الانعطاف

لتكن $y = f(x)$ دالة فضولة على المجال $]a;b[$. يوجد عندئذٍ، مماس للمنحني البياني لهذه الدالة عند أي نقطة $M(x, f(x))$ من هذا المنحني (حيث $a < x < b$)، حيث إن هذا المماس لا يمكن أن يكون موازياً لمحور التراتيب، لأن ميل المماس هو $f'(x)$ وهو محدود.

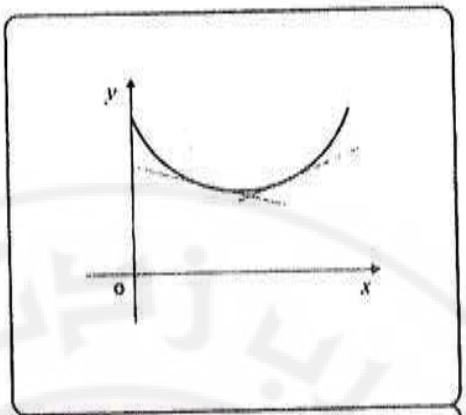
تعريف 5.7 : نقول عن المنحني البياني للدالة الفضولة $y = f(x)$ إنه مقعر نحو الأسفل، اختصاراً محدب، على المجال $]a;b[$ ، إذا كان قوس هذا المنحني يقع تحت أي مماس له على المجال $]a;b[$. الشكل 5.23-A.

تعريف 5.8 : نقول عن المنحني البياني للدالة الفضولة $y = f(x)$ ، إنه مقعر نحو الأعلى، اختصاراً مقعر، على المجال $]a;b[$ ، إذا كان قوس هذا المنحني يقع فوق أي مماس له على المجال $]a;b[$. الشكل 5.23-B.

Damascus University



الشكل 5.23-A



الشكل 5.23-B

ينتج من هذا التعريف مباشرةً، أنه لا يمكن لمماسات المنحني البياني لدالة أن تقطع هذا المنحني على مجالات التقعر.

لما كانت معادلة المستقيم المماس للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

فإنه ينتج من تعريف التقعر نحو الأعلى ونحو الأسفل ما يلي:

- إذا كان المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مقعراً نحو الأعلى على المجال $]a;b[$، فإن

$$f(x) \le f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0) \quad ; \quad \forall x, x_0 \in]a;b[$$

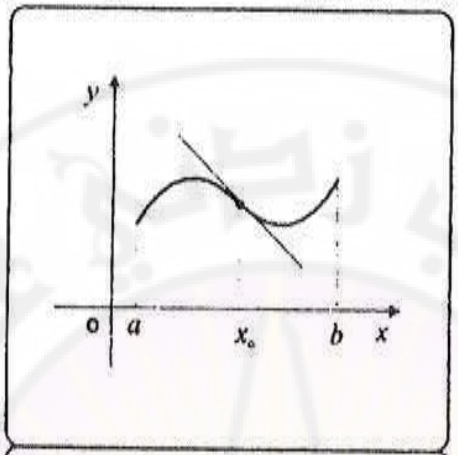
مثال 5.47 : أثبت أن: $e^b \ge e^a + e^a(b-a) \quad ; \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$.

الحل: لما كان المنحني البياني للدالة $y = e^x$ مقعراً نحو الأعلى، الشكل 2.26-B، فإن المنحني البياني لها يقع فوق المستقيم المماس لها عند النقطة (a, e^a). وعليه، فإن

$$e^b \ge e^a + e^a(b-a) \quad ; \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

وفي الحال الخاصة، إذا كان $a = 0$، فإن $(\forall b \in \mathbb{R})$; $e^b \ge 1 + b$

تعريف 5.9 : نقول عن النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ من المنحني البياني للدالة الفضولة $y = f(x)$ ، إنها نقطة انعطاف إذا كان المنحني البياني للدالة $f(x)$ يغير جهة تقعره من الأعلى إلى الأسفل أو بالعكس على جوار لهذه النقطة، الشكل 5.24. تُقبل دون برهان المبرهنة.



الشكل 5.24

مبرهنة 5.15 : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين على المجال $]a;b[$ و كان $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ في هذا المجال، فإن المنحني البياني لهذه الدالة على المجال $]a;b[$ مقعر نحو الأعلى (الأسفل).

نتيجة 5.6 : يلزم ويكفي كي يكون المنحني البياني لدالة $f(x)$ ، فضولة على المجال $]a;b[$ ، مقعراً نحو الأعلى (الأسفل) على المجال $]a;b[$ ، أن يكون المشتق $f'(x)$ دالة متزايدة (متناقصة) على المجال $]a;b[$.

مثال 5.48 : أوجد مجالات تقعر المنحني البياني للدالة

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

الحل: الدالة $f(x)$ فضولة على $\mathbb{R}$، و $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$.

ندرس اطراد الدالة $g(x) = f'(x)$.

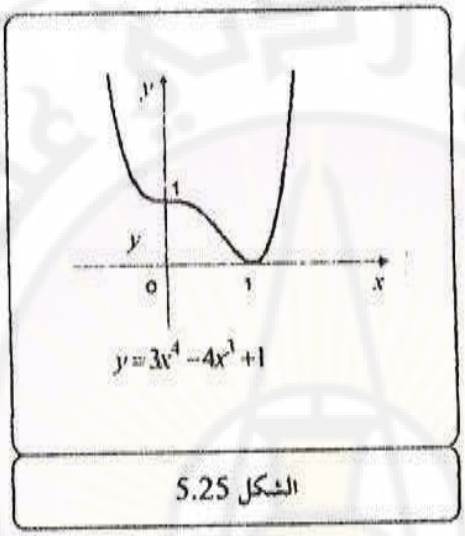
$$g'(x) = f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ و } x_2 = \frac{2}{3}$$

إن $g'(x) > 0$ في المجالين $]-\infty;0[$ و $]\frac{2}{3};\infty[$، أي أن الدالة $g(x)$ متزايدة تماماً على هذين المجالين.

و $g'(x) < 0$ في المجال $]0;\frac{2}{3}[$، أي أن الدالة $g(x)$ متناقصة تماماً على هذا المجال.

وعليه، فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مقعر نحو الأعلى على المجالين $]-\infty;0[$ و $]\frac{2}{3};\infty[$، ومقعر نحو الأسفل على المجال $]0;\frac{2}{3}[$، الشكل 5.25.



الشكل 5.25

مبرهنة 5.16 (مبرهنة الشرط اللازم) : إذا كانت النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$، وكان المشتق من المرتبة الثانية للدالة $f(x)$ مستمراً على جوارٍ للنقطة x_0، فإن $f''(x_0) = 0$.

البرهان: نفرض جدلاً $f''(x_0) \neq 0$. لما كان المشتق من المرتبة الثانية للدالة $f(x)$ مستمراً على جوار للنقطة x_0، فإن $f''(x_0) < 0$ أو $f''(x_0) > 0$، وهذا يعني أن للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ اتجاهاً محدداً للتقعر على هذا الجوار. وهذا يناقض كون النقطة M نقطة انعطاف لهذا المنحني.

ملحوظة 5.24 : إن الشرط $f''(x_0) = 0$ هو شرط لازم وغير كاف كي تكون النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$. فمثلاً، النقطة $(0,0)$ ليست نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $f(x) = x^2$ مع أن المشتق الثاني

$f''(x) = 2x$ ينعدم عند هذه النقطة، أي $f''(0) = 0$.

مبرهنة 5.17 (مبرهنة الشرط الكافي): لتكن الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين على جوارٍ للنقطة x_0، ولتكن قيمتا المشتق $f''(x)$ عند طرفي جوار النقطة x_0، من إشارتين مختلفتين. تكون عندئذٍ، النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$.

البرهان: لما كان للمشتق $f''(x)$ إشارتان مختلفتان على يمين وعلى يسار النقطة x_0، فإنه يكون اتجاه تقعر المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ على يمين النقطة x_0 مختلفاً عن اتجاه التقعر على يسارها. مما يعني أن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$.

ملحوظة 5.25 : تبقى هذه المبرهنة صحيحة، إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين على جوارٍ مثقوب للنقطة x_0 (أي أن المشتق من المرتبة الثانية $f''(x)$ غير موجود عند النقطة x_0)، وبحيث يوجد مماس للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$. عندئذٍ، إذا كان للمشتق $f''(x)$ إشارتين مختلفتين على يمين وعلى يسار النقطة x_0، فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$.

فمثلاً: إذا كانت لدينا للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ فإن المشتق $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ غير محدد عند النقطة $x_0 = 0$، أي أن المماس للمنحني البياني للدالة $y = \sqrt[3]{x}$ ينطبق على محور التراتيب والمشتق $f''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$ غير موجود عند النقطة $x = 0$. ولكن النقطة $(0,0)$ هي نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y = \sqrt[3]{x}$، لأن للمشتق $f''(x)$ إشارتين مختلفتين على يمين وعلى يسار هذه النقطة $x = 0$، الشكل 5.17.

مثال 5.49 : أوجد مجالات تقعر المنحني البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وفضولة على $\mathbb{R}$ نوجد المشتق من المرتبة الثانية

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{و} \quad f''(x)=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x^2-2=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

واضح أن $f''(x)<0$ في المجال $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$، أي أن المنحني البياني للدالة $f(x)$ مقعر نحو الأسفل على هذا المجال.

و $f''(x)>0$ في المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ و $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right[$، أي أن المنحني البياني للدالة $f(x)$ مقعر نحو الأعلى على هذين المجالين.

ولما كان المنحني البياني غيّر من جهة تقعره عند النقطتين $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$ و $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$، فإن هاتين النقطتين هما نقطتا انعطاف للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$، الشكل 5.12.

مثال 5.50 : أوجد نقاط الانعطاف للمنحني البياني للدالة

$$f(x)=x^4-4x^3$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ نوجد المشتق من المرتبة الثانية

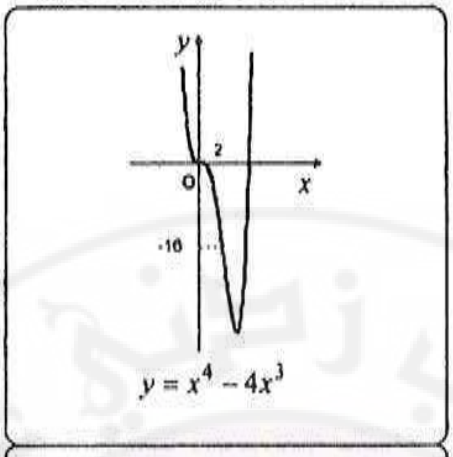
$$f''(x)=12x^2-24x \quad \text{و} \quad f'(x)=4x^3-12x^2$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x_1=0 \quad \text{و} \quad x_2=2$$

ندرس إشارة المشتق $f''(x)$ في الجوارين $u_{\delta_1}(0)$ و $u_{\delta_2}(2)$.

لما كان $f''(x)>0$ في الجوار $u_{\delta_1}(0^-)$ و $f''(x)<0$ في الجوار $u_{\delta_1}(0^+)$، فإن النقطة $(0,0)$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$.

ولما كان $f''(x)<0$ في الجوار $u_{\delta_2}(2^-)$ و $f''(x)>0$ في الجوار $u_{\delta_2}(2^+)$، فإن النقطة $(2,-16)$ نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$، الشكل 5.26.



الشكل 5.26

مثال 5.51 : أوجد مجالات تقعر المنحني $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x + 1$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وفضولة على $\mathbb{R}$ نوجد المشتق من المرتبة الثانية

$$f''(x) = 3x^2 \qquad \text{و} \qquad f'(x) = x^3 - 2$$

واضح أن $f''(x) \geq 0$ ، أياً تكن x من $\mathbb{R}$. أي أن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مقعر نحو الأعلى على $\mathbb{R}$، ولا يوجد نقاط انعطاف لهذا المنحني.

5.16.5 الخطوط المقاربة – والفروع اللانهائية

ندرس الآن المنحنيات ذات الفروع اللانهائية، حيث يزداد أحد الإحداثيين x أو y أو كلاهما بقيمته المطلقة، لنقطة $M(x,y)$ متغيرة على المنحني إلى ما لانهاية.

أي ندرس سلوك الدالة $y = f(x)$ عندما يسعى المتغير x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو في جوار نقاط الانقطاع من النوع الثاني. وهكذا، يكون للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ فروع لا نهائية، إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

وتظهر عند دراسة الفروع اللانهائية، حالة هامة جداً، وهي التي يقترب عندها المنحني الذي ندرسه بلا حدود إلى مستقيم ما، عندما تبتعد النقطة المتغيرة $M(x,y)$ من المنحني إلى ما لانهائية، أي عندما يكون بعد هذه النقطة المتغيرة عن المبدأ يسعى إلى ما لانهاية. نسمي هذا

المستقيم مستقيماً مقارباً (محاذياً) للمنحني. وتُصنف المستقيمات المقاربة حسب وضعها في المستوي (شاقولي – أفقي – مائل).

تعريف 5.10: نسمي المستقيم $x = x_0$ مقارباً شاقولياً للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$، إذا كانت إحدى النهايتين على الأقل:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

غير محدودة.

وتكون في هذه الحالة المسافة d بين نقطة $M(x, f(x))$ من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ والمستقيم $x = x_0$، تساوي:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + [f(x) - f(x)]^2} = |x - x_0|$$

وعليه، فإن $\lim_{x \to x_0} d = 0$.

واضح أنه ليس للدوال المستمرة على $\mathbb{R}$ مستقيمات مقاربة شاقولية. فالمستقيمات المقاربة الشاقولية توجد فقط، عند وجود نقاط انقطاع من النوع الثاني للدالة.

وهكذا، للبحث عن المستقيمات المقاربة الشاقولية للمنحني البياني لدالة، يجب تحديد النقاط التي تكون إحدى النهايتين من اليمين أو من اليسار عندها غير محدودة.

مثال 5.52 : أوجد المستقيمات المقاربة الشاقولية للمنحني البياني للدالة

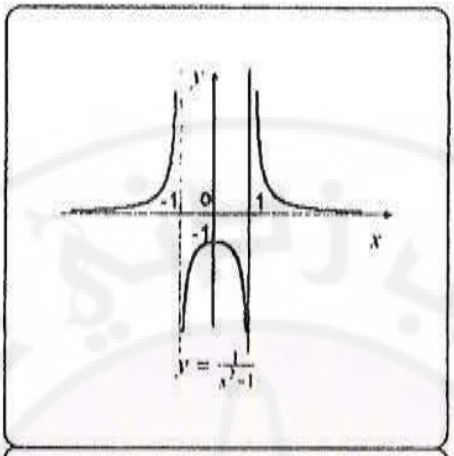
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

الحل: توجد نقطتا انقطاع من النوع الثاني للدالة $f(x)$ هما $x = \mp 1$. نحسب النهايتين من اليمين ومن اليسار للدالة $f(x)$ عند هاتين النقطتين.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$$

أي أن المستقيمين $x = 1$ و $x = -1$ مستقيمان مقاربان للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$، الشكل 5.27.



الشكل 5.27

تعريف 5.11 : نسمي المستقيم $y = A$ مستقيماً مقارباً أفقياً للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$، عندما تسعى x إلى $+\infty$ (أو إلى $-\infty$) إذا كان

$$\lim_{(x \to +\infty)} f(x) = A$$

من المنحني البياني للدالة $M(x, f(x))$ بين نقطة d وتكون في هذه الحالة، المسافة

تساوي $y = A$ والمستقيم $y = f(x)$

$$d = \sqrt{(x - x)^2 + [f(x) - A]^2} = |f(x) - A|$$

أي أن

$$\lim_{x \to \infty} d = 0$$

ملحوظة 5.26 : إذا كان $f(x) - A \geq 0$، فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقع فوق المستقيم المقارب الأفقي $y = A$. وإذا كان $f(x) - A \leq 0$، فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقع تحت المستقيم المقارب الأفقي $y = A$.

ملحوظة 5.27 : إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$، فإن المستقيم المقارب $y = A$ للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ هو مستقيم مقارب من جهتيه (من اليمين ومن اليسار)، الشكل 5.27.

مثال 5.53 : أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية للمنحني البياني للدالة

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

الحل: إن للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مستقيماً مقارباً أفقياً واحداً معادلته $y = 0$ وهو مقارب من اليمين ومن اليسار، الشكل 5.27، لأن:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

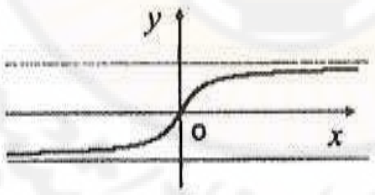
مثال 5.54 : أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية للمنحني البياني للدالة

$$y = \arctan x$$

الحل: واضح أن

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = +\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\tfrac{1}{2}\pi$$

أي أن للجزء الأيمن من المنحني البياني للدالة $y = \arctan x$ مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = \frac{1}{2}\pi$، وللجزء الأيسر من هذا المنحني مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = -\frac{1}{2}\pi$، الشكل 5.28.



$y = \arctan x$

الشكل 5.28

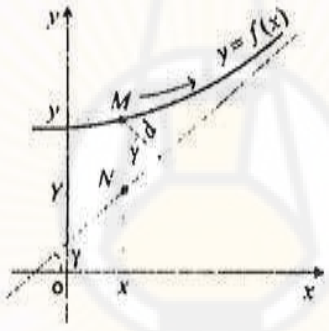
تعريف 5.12 : نسمي المستقيم $y = kx + b$ مستقيماً مقارباً مائلاً للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ عندما تسعى x إلى $+\infty$ (أو عندما تسعى x إلى $-\infty$)، إذا أمكن كتابة الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

حيث $\alpha(x)$ لا متناه في الصغر عندما تسعى x إلى $+\infty$ (أو عندما تسعى x إلى $-\infty$)، أي $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ (أو $\lim_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$).

المعنى الهندسي للمستقيم المقارب المائل

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ وليكن $y = kx + b$ مستقيماً مقارباً مائلاً لهذا المنحني، عندما تسعى x إلى ∞. نرمز بـ Y لترتيب نقاط المستقيم المقارب المائل، ولتكن $N(x, Y)$ نقطة من هذا المستقيم، الشكل 5.29.



الشكل 5.29

يكون عندئذٍ:

$$|\overline{MN}| = |y - Y| = |f(x) - (kx + b)| = |kx + b + \alpha(x) - (kx + b)| = |\alpha(x)|$$

وعليه، فإن

$$\lim_{x\to\infty} |\alpha(x)| = 0$$

إن المسافة بين النقطة M والمستقيم المقارب المائل هي

$$d = |\overline{MP}| = |\overline{MN}||\cos\gamma|$$

حيث γ الزاوية بين المستقيم المقارب المائل ومحور الفواصل. وعليه، فإن

$$\lim_{x\to\infty} d = 0$$

وهذا يعني أن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقترب بشكلٍ لا متناه من المستقيم المقارب المائل عندما تسعى x إلى $+\infty$.

تتم معالجة الحالة، عندما تسعى x إلى $-\infty$، بأسلوبٍ مماثل.

مبرهنة 5.18: الشرط اللازم والكافي كي يكون للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مستقيم مقارب مائل، عندما تسعى x إلى $+\infty$ (أو تسعى x إلى $-\infty$) معادلته $y = kx + b$، هو وجود النهايتين المحدودتين

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{و} \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - kx] = b \qquad (5.10)$$

البرهان:

اللزوم: ليكن $y = kx + b$ مستقيماً مقارباً مائلاً للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$. يكون عندئذٍ، $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ حيث $\alpha(x)$ لا متناهٍ في الصغر، عندما تسعى x إلى ∞. وعليه، فإن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} [b + \alpha(x)] = b$$

الكفاية: لتكن النهايتان (5.10) موجودتين ومحدودتين. نجد عندئذٍ، من النتيجة 4.1 ومن النهاية الثانية من النهايتين (5.10)، أن $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ عندما تسعى x إلى $+\infty$. وتعني هذه الصيغة للدالة $f(x)$، أن للدالة $y = f(x)$ مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = kx + b$. ويبرهن بأسلوب مماثل الحالة، عندما تسعى x إلى $-\infty$.

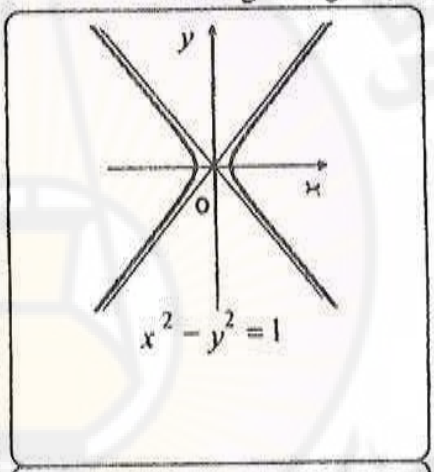
ملحوظة 5.27 : إذا كان المستقيم $y = kx + b$ مستقيماً مقارباً للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ وكان $f(x) - (kx + b) < 0$، فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقع تحت المستقيم المقارب. أما إذا كان $f(x) - (kx + b) > 0$، فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يقع فوق المستقيم المقارب.

ملحوظة 5.28 : عند البحث عن المستقيم المقارب المائل يمكن أن تظهر الحالات التالية:

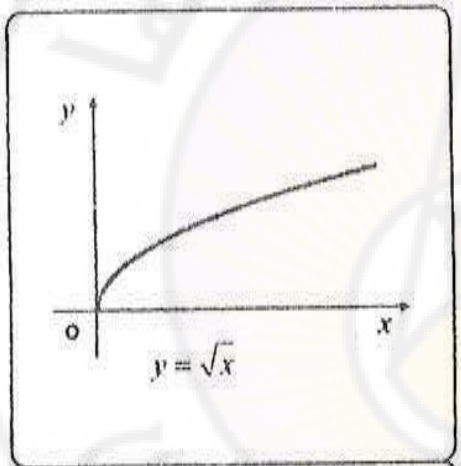
1. النهايتان (5.10) موجودتان من أجل x تسعى إلى $+\infty$ ومن أجل x تسعى إلى $-\infty$. يسمى عندئذٍ، المستقيم $y = kx + b$ مستقيماً مقارباً من الجهتين (الجهة اليمنى والجهة اليسرى لهذا المستقيم)، الشكل 5.12.

2. النهايتان (5.10) موجودتان، ولكن تختلف قيمها عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو عندما تسعى x إلى $-\infty$. يوجد عندئذٍ، مستقيمان مقاربان مائلان، كل منهما من جهة واحدة، إما من الجهة اليمنى أو من الجهة اليسرى، الشكل 5.30.

3. إذا كانت إحدى النهايتين (5.10) على الأقل غير محدودة، فإنه لا يوجد عندئذٍ، مستقيم مقارب مائل، الشكل 5.31.



الشكل 5.30

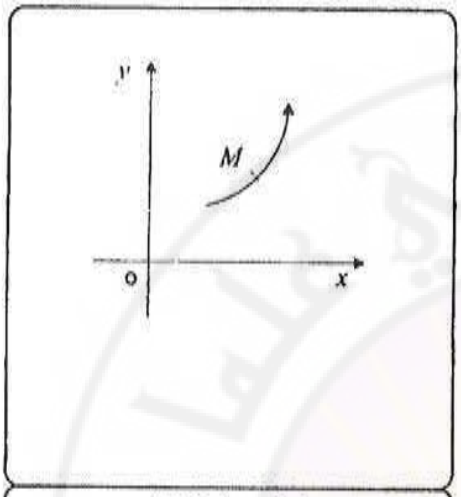


الشكل 5.31

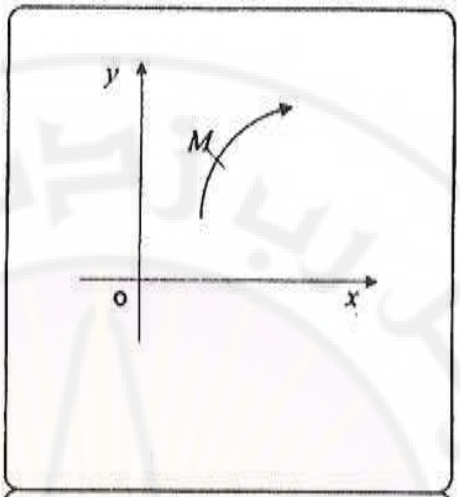
إذا كان $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$، فإن عينات النقطة $M(x, y)$ من المنحني تسعى إلى ∞ أسرع من سيناتها. وهذا يعني أن M تبقى، في أثناء ابتعادها، أقرب إلى محور التراتيب منها إلى محور الفواصل. ونقول عندئذٍ، إنه لدينا منحى مقارب موازٍ لمحور التراتيب، الشكل 5.32-A.

وإذا كان $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ و $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$، فإن فواصل النقطة $M(x, y)$ من المنحني، تسعى إلى ∞ أسرع من تراتيبها. أي أن النقطة M، في أثناء ابتعادها،

تبقى أقرب إلى محور الفواصل منها إلى محور التراتيب. ونقول عندئذٍ، إنه لدينا منحى مقارب موازٍ لمحور الفواصل، الشكل 5.32-B.



الشكل 5.32-A



الشكل 5.32-B

مثال 5.55: أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني البياني للدالة

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$. إذن، لا توجد للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$ مستقيمات مقاربة شاقولية.

لإيجاد المستقيمات المقاربة المائلة نحسب النهايتين:

$$k=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}=0$$

$$b=\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$$

النهايتان موجودتان وغير متعلقتين بإشارة اللانهاية. إذن، فالمستقيم $y=0$ (محور الفواصل) مستقيم مقارب أفقي من الجهتين، الجهة اليمنى والجهة اليسرى لهذا المستقيم، الشكل 5.12.

مثال 5.56 : أوجد المستقيمات المقاربة للقطع الزائد $x^2-y^2=1$.

الحل: نُعرّف معادلة القطع الزائد الدالتين $y = \mp\sqrt{x^2 - 1}$ وهما معرفتان ومستمرتان على المجموعة $\mathbb{R} \setminus]-1;1[$. نحسب النهايتين

$$k = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\mp\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \mp 1$$

$$b = \lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \mp\infty} [\mp\sqrt{x^2 - 1} \mp x] = \mp \lim_{x \to \mp\infty} [\sqrt{x^2 - 1} - x] =$$

$$= \mp \lim \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

وعليه، فإن المستقيمين المقاربين المائلين هما $y = \mp x$، الشكل 5.30.

مثال 5.57: أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني البياني للدالة $y = \sqrt{x}$.

الحل: الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ معرفة ومستمرة في $[0;\infty[$. إذن لا يوجد مستقيمات مقاربة شاقولية. لإيجاد المستقيمات المقاربة المائلة نحسب النهايتين:

$$k = \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

$$b = \lim [f(x) - kx] = \lim \sqrt{x} = \infty$$

لما كانت النهاية الثانية غير محدودة، فإنه لا يوجد مستقيمات مقاربة مائلة للمنحني البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ ولكن يوجد منحى مقارب يوازي محور الفواصل، الشكل 5.31.

مثال 5.58 : أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني البياني للدالة

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. والنقطة $x = 0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني. ولما كان $\lim f(x) = -\infty$ و $\lim f(x) = +\infty$، فإن المستقيم $x = 0$، أي محور التراتيب، هو مستقيم مقارب شاقولي للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$.

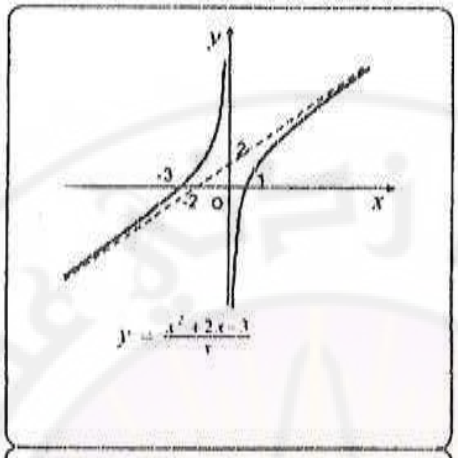
نبحث عن المستقيمات المقاربة الأفقية:

لما كان $\lim f(x) = +\infty$ و $\lim f(x) = -\infty$، فإنه لا توجد مستقيمات مقاربة أفقية.

نبحث عن المستقيمات المقاربة المائلة. نحسب النهايتين:

$$k = \lim \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{و} \quad b = \lim [f(x) - x] = 2$$

يوجد عندئذٍ، مستقيم مقارب مائل، معادلته $y = x + 2$، عندما تسعى x إلى $\mp\infty$ أي هو مقارب من جهتيه، الشكل 5.33.



الشكل 5.33

5.16.6 خطوات دراسة سلوك الدالة $y = f(x)$ ورسم المنحنى البياني لها

إن دراسة سلوك الدوال القابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين $y = f(x)$ على مجموعة تعريفها $D(f)$ ورسم المنحنى البياني لها يتم وفق المخطط التالي:

1. إيجاد مجموعة تعريف الدالة $D(f)$: يمكن تقليص مجموعة التعريف، أي دراسة سلوك الدالة على مجموعة جزئية من المجموعة $D(f)$، حسبما تكون الدالة دورية أو متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب أو بالنسبة إلى نقطة الأصل.

فإذا كانت الدالة دورية، دورها T، فإنه يكفي دراسة الدالة على مجال طوله T من مجموعة التعريف $D(f)$، أي على المجال $D(f) \cap [a; a+T]$، حيث a ثابت يتم تعيينه بأسلوب مناسب، ومن ثم نعمم النتائج من أجل جميع نقاط المجموعة $D(f)$. أي نكرر رسم قوس المنحني، الذي حصلنا عليه على المجال المذكور، على كامل المجموعة $D(f)$.

دراسة التناظر:

إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية أو فردية، فإنه يكفي دراستها على المجموعة $D(f) \cap [0; \frac{1}{2}T]$، ومن ثم نعمم النتائج من أجل جميع نقاط المجموعة $D(f)$، ونرسم

نظير قوس المنحني، الذي حصلنا عليه في المجموعة المذكورة، بالنسبة إلى محور التراتيب، فنكون قد رسمنا قوساً من منحني الدالة $y = f(x)$ على المجال $D(f) \cap \left[-\frac{1}{2}T; \frac{1}{2}T\right]$، ومن ثم نكرر رسم هذا القوس على كامل المجموعة $D(f)$.

ملحوظة 5.29 : إذا وجد عدد حقيقي α يحقق:

$$\forall x \in D(f) \Rightarrow (x-a) \in D(f) \quad \text{و} \quad f(x-a) = f(x)$$

فإن المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ يكون متناظراً بالنسبة إلى المستقيم $x = \frac{1}{2}a$، لأن

$$f\left(\tfrac{1}{2}a - x\right) = f\left[a - \tfrac{1}{2}a + x\right] = f\left(x + \tfrac{1}{2}a\right) \qquad ; \qquad \forall x \in D(f)$$

يكفي عندئذٍ، رسم قوس من المنحني على المجموعة $D(f) \cap \left[\frac{1}{2}a; \infty\right[$ ومن ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى المستقيم $x = \frac{1}{2}a$.

2. نبحث عن الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة.

3. نعين بعض النقط المساعدة، وهي نقاط تقاطع المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ مع المحاور الإحداثية.

4. نبحث عن النقاط الحرجة ومجالات اطراد الدالة $f(x)$ بمساعدة المشتق من المرتبة الأولى $f'(x)$.

5. نحدد مجالات التقعر نحو الأعلى ونحو الأسفل، ونقاط الانعطاف للمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ والقيم القصوى لهذه الدالة، بمساعدة المشتق من المرتبة الثانية $f''(x)$.

6. ننظم جدولاً للنتائج التي حصلنا عليها. ونرسم المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ استناداً للجدول.

مثال 5.59: ادرس سلوك الدالة $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ وارسم المنحني البياني لها.

الحل:

1. نوجد مجموعة تعريف الدالة: الدالة معرفة من أجل $x \neq \mp\sqrt{3}$ أي أن

$$D(f) =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; \infty[$$

ولما كان

$$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^{-}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}^{-}}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\sqrt{3}^{+}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}^{+}}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty$$

فإن النقطتين $\pm\sqrt{3}$ نقطتا انقطاع من النوع الثاني للدالة $f(x)$ وعليه، فإن المستقيمين $x=+\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ مستقيمان مقاربان شاقوليان للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$.

الدالة $f(x)$ فردية، لأن المجموعة $D(f)$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر و

$$f(-x)=-f(x) \quad ; \quad \forall x\in D(f)$$

فالمنحني البياني للدالة $y=f(x)$ متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل. ويكفي دراسة سلوك الدالة من أجل $x\geq 0$، أي على المجموعة $M=[0;\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};\infty[$

2. نبحث عن المستقيمات المتقاربة والفروع اللانهائية:

لما كان $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$ فإنه ليس للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$ مستقيم مقارب أفقي.

لإيجاد المستقيمات المقاربة المائلة، نوجد النهايتين:

$$k=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^3}{x(3-x^2)}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^3}{3-x^2}+x\right]=0$$

أي أن المستقيم $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$.

3. التقاطع مع المحاور الإحداثية: لما كان $f(0)=0$ فإن المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ يقطع محور الفواصل في نقطة الأصل.

4. النقاط الحرجة ومجالات اطراد الدالة: نوجد المشتق من المرتبة الأولى

$$f'(x)=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$$

إن المشتق $f'(x)$ معرف على $D(f)$ وينعدم في المجموعة M، عند نقطتين $x_1=0$ و $x_2=3$، وهما النقطتان الحرجتان للدالة $f(x)$ في المجموعة M. ولما كان

$$f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}>0 \quad \Rightarrow$$

$$9-x^2>0 \quad \Rightarrow \quad x^2<9 \quad \Rightarrow \quad 0<x<3 \;\; ; \;\; x\in M$$

فإن الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً على المجالين $]0;\sqrt{3}]$ و $]\sqrt{3};3[$.

ولما كان

$$f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}<0 \quad \Rightarrow$$

$$9-x^2<0 \quad \Rightarrow \quad x^2>9 \quad \Rightarrow \quad x>3$$

فإن الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على المجال $]3;\infty[$.

5. مجالات التقعر نحو الأعلى ونحو الأسفل: نوجد المشتق من المرتبة الثانية:

$$f''(x)=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)(2)(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$$

واضح أن المشتق $f''(x)$ معرف على $D(f)$. لما كان

$$f''(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}>0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ 3-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0<x<\sqrt{3}$$

فإن المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ مقعر نحو الأعلى على المجال $]0;\sqrt{3}[$ ولما كان

$$f''(x)<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ 3-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2>\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ |x|>\sqrt{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>\sqrt{3}$$

فإن المنحني البياني للدالة $y=f(x)$ مقعر نحو الأسفل على المجال $]\sqrt{3};\infty[$. ولما كان $f''(0)=0$ و

$$\left[f''(x)<0 \;\; ; \;\; \forall x\in u_\delta(0^-)\right] \text{ و } \left[f''(x)>0 \;\; ; \;\; \forall x\in u_\delta(0^+)\right]$$

فإن نقطة الأصل هي نقطة انعطاف للمنحني البياني للدالة $y=f(x)$.

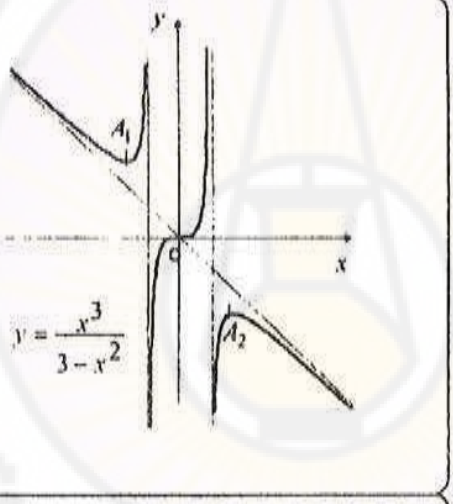
ولما كان $f''(3)=0$ ، فإن النقطة $A_1(3,-4.5)$ نقطة قيمة عظمى موضعية للدالة $f(x)$

ولما كان المنحني البياني لهذه الدالة متناظراً بالنسبة إلى نقطة الأصل، فإن النقطة $A_2(-3,4.5)$ نقطة قيمة صغرى موضعية للدالة $f(x)$:

$$\min_{x\in u_\delta(-3)} f(x) = f(-3) = 4.5 \quad , \quad \max_{x\in u_\delta(3)} f(x) = f(3) = -4.5$$

6. ننظم جدولاً للنتائج التي حصلنا عليها في المجموعة M ، ونرسم المنحني البياني للدالة $y = f(x)$ الشكل 5.35.

x	0	$]0;\sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3};3[$	3	$]3;\infty[$
y'	0	+	‖	+	0	—
y''	0	+	‖	—	—	—
y	0	↗	‖	↗	-4.5	↘



الشكل 5.35

5.17 رسم المنحنيات المعطاة وسيطياً

إن رسم المنحنيات المعطاة وسيطياً بالعلاقات:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad ; \quad t \in D \qquad (5.11)$$

يتم بخطوات مشابهة لما تم عرضه من أجل رسم المنحنيات المعطاة ديكارتياً بالمعادلة

$$y = f(x) \quad ; \quad x \in D(f)$$

وتجدر الإشارة، إلى أن المعادلة المعطاة ديكارتياً يمكن أن تكتب وسيطياً بالعلاقات:

$$x = t \quad , \quad y = f(t)$$

وتجدر الإشارة إلى أن t تؤدي دور الوسيط في تحديد موضع نقطة $M(x(t), y(t))$. فإن قولنا t تسعى إلى اللانهاية، لا يعني بالضرورة أن النقطة M تبتعد إلى اللانهاية.

أ. مجموعة التعريف ومنطقة وجود المنحني: هي مجموعة قيم الوسيط t التي تجعل كل من الدالتين $x(t)$ و $y(t)$ معرّفة (معينة). ونرمز لهذه المجموعة بالرمز D.

يمكن تقليص مجموعة الدراسة إذا كان للمنحني خواص تناظرية أو إذا كان دورياً، كما فعلنا ذلك من أجل الدوال المعطاة ديكارتياً.

دراسة التناظر:

أ. إذا كانت الدالتان $x(t)$ و $y(t)$ فرديتين، أي المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر و

$$x(-t) = -x(t) \quad , \quad y(-t) = -y(t) \quad ; \quad \forall t \in D$$

فإن المنحني المعطى بالعلاقات (5.11) متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل. لذا يكفي رسم قوس من المنحني في نصف المجموعة D. مثلاً، في المجموعة $D \cap [0;\infty[$، ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى نقطة الأصل.

ب. إذا كانت الدالة $y(t)$ فردية والدالة $x(t)$ زوجية. فإن المنحني المعطى بالعلاقات (5.11) متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل. لذا يكفي رسم قوس من المنحني على نصف المجموعة D. مثلاً، على المجموعة $D \cap [0;\infty[$، ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور الفواصل.

ج. إذا كانت الدالة $y(t)$ زوجية والدالة $x(t)$ فردية. فإن المنحني المعطى بالعلاقات (5.11) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب. لذا يكفي رسم قوس من المنحني على نصف المجموعة D، مثلاً على المجموعة $D \cap [0;\infty[$، ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور التراتيب.

إذا كانت الدالة $x(t)$ دورية دورها p، والدالة $y(t)$ دورية دورها q، فإننا نقول إن المنحني المعطى بالعلاقات (5.11) دوري دوره T، المضاعف المشترك الأصغر للعددين p و q.

يكفي عندئذٍ، رسم قوس من المنحني في المجال $D \cap [a;a+T]$، حيث a ثابت يتم تعيينه بصورة مناسبة. ومن ثم نكرر هذا القوس من أجل جميع قيم t من المجموعة D.

مثال 5.60: المنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = \sin\frac{1}{3}t \quad , \quad y = \cos\frac{1}{2}t$$

معرف في $\mathbb{R}$، وهو دوري دوره $T = 12\pi$. لذا يكفي دراسته ورسمه على مجال طوله 12π، أي على المجال $[-6\pi;6\pi]$. ولما كان

$$\forall t[-6\pi;6\pi] \quad ; \quad x(-t) = -x(t) \quad , \quad y(-t) = y(t)$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب، أي يمكن تقليص مجال الدراسة إلى النصف: $[0;6\pi]$.

2. الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة:

نبحث عن قيم الوسيط t من مجموعة التعريف D التي تجعل x أو y أو كليهما تسعى إلى اللانهاية. ونميز الحالات:

أ. إذا كان

$$\lim_{t\to t_0} y(t) = b \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$$

فإن المعادلة $y = b$ تمثل مستقيماً مقارباً للمنحني المعطى بالعلاقات (5.11) وهو يوازي محور الفواصل.

ب. إذا كان

$$\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0} x(t) = a$$

فإن المعادلة $x = a$ تمثل مستقيماً مقارباً للمنحني المعطى بالعلاقات (5.11) وهو يوازي محور التراتيب.

ج. إذا كان

$$\lim_{t\to t_0} y(t) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0} x(t) = \infty$$

نبحث عن النهاية

$$k = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$$

ونميز الحالات:

1. إذا كان $k = 0$، فإن للمنحني فرعاً مكافئاً لا نهائياً يوازي محور الفواصل.

2. إذا كان $k = \infty$، فإن للمنحني فرعاً مكافئاً لا نهائياً يوازي محور التراتيب.

3. إذا كان $0 \neq k \neq \infty$، فإن للمنحني مستقيماً مقارباً مائلاً. ونحسب النهاية

$$l = \lim_{t \to I} (y - kx)$$

فإذا كانت هذه النهاية محدودة، فإن المعادلة $y = kx + l$ تمثل مستقيماً مقارباً للمنحني.

وإذا كانت هذه النهاية غير محدودة، فإنه لا يوجد مستقيم مقارب للمنحني وإنما منحى مقارب مائل ميله k.

مثال 5.61: عين المستقيمات المقاربة للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = \frac{t^5}{10(1-t)} \quad , \quad y = t^3$$

الحل: المنحني معرف من أجل $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. لما كان

$$\lim_{t \to 1} x(t) = \lim_{t \to 1} \frac{t^5}{10(1-t)} = \infty \quad , \quad \lim_{t \to 1} y(t) = 1$$

فإن المعادلة $y = 1$ تمثل مستقيماً مقارباً يوازي محور الفواصل للمنحني المعطى.

ولما كان

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \infty \quad , \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = \infty$$

نحسب النهاية

$$k = \lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{10(1-t)}{t^2} = 0$$

أي أن للمنحني المعطى فرعاً مكافئاً لا نهائياً يوازي محور الفواصل. أي ليس للمنحني مستقيم مقارب مائل الشكل 5.36.

مثال 5.62: عين المستقيمات المقاربة للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = \frac{t^2}{t-1} \quad , \quad y = \frac{t}{t^2-1}$$

الحل: مجموعة التعريف هي $\mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$. لما كان

$$\lim_{t \to -1} y(t) = \lim_{t \to -1} \frac{t}{t^2-1} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{t \to -1} x(t) = \lim_{t \to -1} \frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2}$$

فإن المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ تمثل مستقيماً مقارباً يوازي محور التراتيب.

ولما كان

$$\lim_{t\to 1} y(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t}{t^2-1} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{t\to 1} x(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t^2}{t-1} = \infty$$

نحسب النهاية:

$$k = \lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2}$$

والنهاية

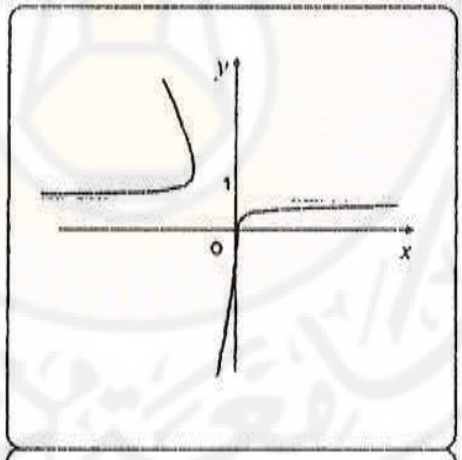
$$l = \lim_{t\to 1} (y - kx) = \lim_{t\to 1} \frac{-3t^2 - 2t + 2}{4t} = -\frac{3}{4}$$

أي أن المعادلة $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ تمثل مستقيماً مقارباً مائلاً للمنحني المعطى.

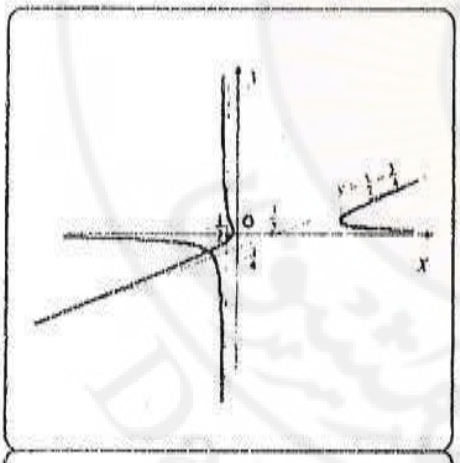
ولما كان

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{t-1} = \infty$$

فإن المعادلة $y = 0$ تمثل مستقيماً مقارباً، وهو محور الفواصل، الشكل 5.37.



الشكل 5.36



الشكل 5.37

3. التزايد والتناقص والمماسات:

نبحث عن قيم الوسيط t من المجموعة D التي تعدم أحد المشتقين $x'(t)$ أو $y'(t)$ أو

كليهما، أو تلك التي يكون من أجلها أحد المشتقين على الأقل غير معرف. نسمي هذه القيم الحرجة للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات (5.11) ولتكن هذه القيم هي $t_1, t_2, \ldots, t_n$، حيث تقسم هذه النقاط مجموعة التعريف D إلى عددٍ من المجالات، يحافظ في كلٍ منها المشتق $x'(t)$ (والمشتق $y'(t)$) على إشارة محددة.

ونميز الحالات

أ. إذا كان المشتقان $x'(t)$ و $y'(t)$ من إشارةٍ واحدة في مجالٍ جزئي من المجالات المذكورة، فإن $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} > 0$ في هذا المجال. ويكون عندئذٍ، المنحني متزايداً تماماً على هذا المجال.

ب. إذا كان المشتقان $x'(t)$ و $y'(t)$ من إشارتين مختلفتين في مجالٍ جزئي من المجالات المذكورة، فإن $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} < 0$ في هذا المجال. ويكون عندئذٍ، المنحني متناقصاً تماماً على هذا المجال.

ج. إذا كان $x'(\tau) \neq 0 \quad y'(\tau) = 0$، فإن المشتق y'_x غير معين في النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$، ويكون للمنحني مماس، في هذه النقطة، موازٍ لمحور التراتيب. وتوافق هذه النقطة نقطة قيمة قصوى موضعية أو نقطة انعطاف.

د. إذا كان $x'(\tau) = 0$ و $y'(\tau) \neq 0$، فإن $y'_x = 0$ في النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$ ويكون للمنحني مماس، في هذه النقطة، موازٍ لمحور الفواصل. وتوافق هذه النقطة نقطة قيمة قصوى موضعية أو نقطة انعطاف.

هـ. إذا كان $x'(\tau) = y'(\tau) = 0$ فإن النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$ تسمى نقطة شاذة للمنحني.

4. النقاط الشاذة: نرمز بـ $M'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$. وعليه، فإن النقطة الشاذة هي النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$، وتحقق العلاقة $M'(\tau) = 0$.

ليكن $M^{(r)}(\tau)$ أول مشتق غير معدوم، و $M^{(s)}(\tau)$ أول مشتق يليه غير معدوم، بحيث يكون $M^{(r)}(\tau)$ و $M^{(s)}(\tau)$ مستقلين خطياً، أي:

$$M^{(r)}(\tau) \wedge M^{(s)}(\tau) = \begin{vmatrix} x^{(r)} & x^{(s)} \\ y^{(r)} & y^{(s)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad (r < s)$$

ونميز الحالات:

أ. إذا كان r فردياً و s زوجياً، فإن سلوك المنحني في جوارٍ للنقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$ هو نفسه من أجل أي نقطة عادية للمنحني.

ب. إذا كان r و s فرديين، فإن النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$ هي نقطة انعطاف للمنحني.

ج. إذا كان r زوجياً و s فردياً، فإن النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$ هي نقطة تراجع من النوع الأول للمنحني، أي يمر منها فرعان للمنحني يقعان بجهتين مختلفتين بالنسبة إلى مماس المنحني في هذه النقطة، الشكل 5.38-A .

د. إذا كان r و s زوجيين، فإن النقطة المقابلة للقيمة $t = \tau$ هي نقطة تراجع من النوع الثاني للمنحني. أي يمر منها فرعان للمنحني يقعان بجهة واحدة بالنسبة إلى مماس المنحني في هذه النقطة، الشكل 5.38-B .



الشكل 5.38 -A



الشكل 5.38 -B

ملحوظة 5.30 : يعطى المماس للمنحني في نقطة التراجع بوساطة المشتق $M^{(r)}$ غير الصفري: $\tan\alpha = \dfrac{y^{(r)}}{x^{(r)}}$.

مثال 5.63 : ابحث في النقاط الشاذة للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات

$$x = 2t - t^2 \quad , \quad y = 3t - t^3$$

الحل: نوجد النقاط الشاذة، وهي نقاط انعدام المشتقين $x'(t)$ و $y'(t)$

$$x'(t) = 2 - 2t \quad , \quad x' = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$y'(t) = 3 - 3t^2 \quad , \quad y'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \mp 1$$

أي أنه توجد نقطة شاذة للمنحني المعطى توافق القيمة $t=1$، وهي النقطة $M_0(1,2)$. نبين نوعها:

$$M''(t)=(x''(t),y''(t))=(-2,-6t) \quad \Rightarrow \quad M''(t=1)=(-2,-6)\neq 0$$
$$M'''(t)=(x'''(t),y'''(t))=(0,-6)\neq 0$$

ولما كان

$$(M''\wedge M''')_{(t=1)}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -6 & -6\end{vmatrix}=12\neq 0$$

فإن النقطة M_0 نقطة تراجع من النوع الأول للمنحني المعطى، الشكل 5.39.

مثال 5.64 : ابحث في النقاط الشاذة للمنحني المعطى وسيطياً:

$$x=t^3-t^2 \quad , \quad y=t^4+1$$

الحل: نوجد النقاط الشاذة، وهي نقاط انعدام المشتقين $x'(t)$ و $y'(t)$:

$$x'(t)=3t^2-2t \quad , \quad x'(t)=0 \quad \Rightarrow \quad t=0 \ , \ t=\frac{2}{3}$$
$$y'(t)=4t^3 \quad , \quad y'(t)=0 \quad \Rightarrow \quad t=0$$

أي أنه توجد نقطة شاذة وحيدة للمنحني تقابل القيمة $t=0$، وهي النقطة $M_0(0,1)$ نبين نوعها:

$$M''(t)=(x''(t),y''(t))=(6t-2,12t^2) \quad \Rightarrow \quad M''(t=0)=(-2,0)\neq 0$$
$$M'''(t)=(x'''(t),y'''(t))=(6,24t) \quad \Rightarrow \quad M'''(t=0)=(6,0)\neq 0$$

ولكن

$$(M''\wedge M''')_{(t=0)}=\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

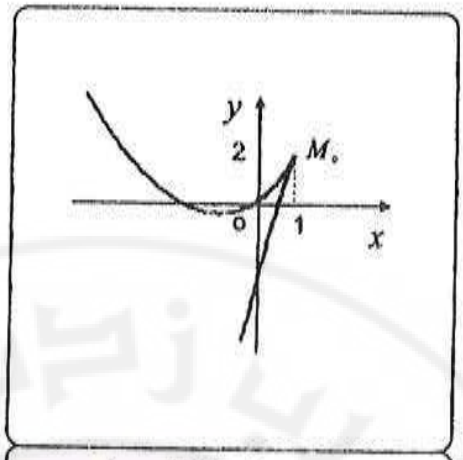
لذا نبحث عن المشتق غير الصفري التالي:

$$M^{(4)}(t)=(x^{(4)}(t),y^{(4)}(t))=(0,24)\neq 0$$

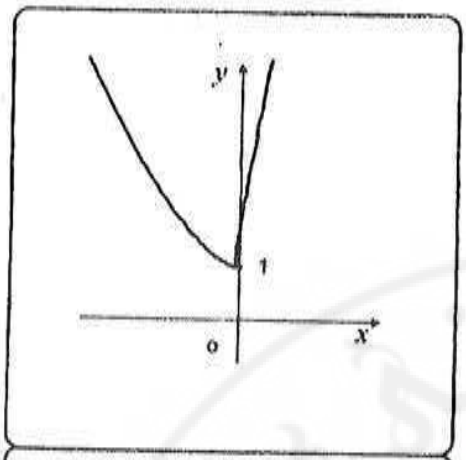
ولما كان

$$(M''\wedge M''')_{(t=0)}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 24\end{vmatrix}=-48\neq 0$$

فإن النقطة M_0 نقطة تراجع من النوع الثاني للمنحني المعطى، الشكل 5.40.



الشكل 5.39



الشكل 5.40

5. دراسة التقعر: إن جهة تقعر المنحني تتعلق بإشارة المشتق الثاني:

نشتق الدالة $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$، بالنسبة إلى x، كدالة مركبة:

$$y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)\cdot y'(t)}{(x'(t))^3}$$

ونشتق الدالة $x'_y = \dfrac{x'(t)}{y'(t)}$، بالنسبة إلى y، كدالة مركبة:

$$x''_{yy} = \frac{d(x'_y)}{dt}\cdot\frac{dt}{dy} = \frac{x''(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y''(t)}{(y'(t))^3}$$

ونميز الحالات:

أ. إذا كان $y''_{xx} > 0$ على مجالٍ ما من المجموعة D، فإن المنحني مقعر نحو الأعلى على هذا المجال، أي مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور التراتيب.

وإذا كان $y''_{xx} > 0$ على مجال ما من D، فإن المنحني مقعر نحو الأسفل على هذا المجال، أي مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور التراتيب.

ب. إذا كان $x''_{yy} > 0$ على مجال ما من D، فإن المنحني مقعر نحو اليمين على هذا المجال، أي مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور الفواصل.

وإذا كان $x''_{yy} < 0$ على مجال ما من المجموعة D، فإن المنحني مقعر نحو اليسار على هذا المجال، أي مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور الفواصل.

ملحوظة 5.31 : يمكن من المشتق الثاني إيجاد نقاط الانعطاف للمنحني، حيث إن نقطة الانعطاف للمنحني، هي النقطة التي يغير عندها المنحني من جهة تقعره.

فإذا كانت النقطة M_0، المقابلة للقيمة $t = t_0$، نقطة انعطاف للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات (5.11)، فإنه يجب أن تتحقق الشروط:

1. المنحني مستمر عند النقطة M_0

2. يوجد مماس وحيد للمنحني عند النقطة M_0.

3. يوجد جوار مثقوب $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$ للنقطة $x_0 = x(t_0)$، بحيث يكون:

أ. y'_x متزايداً (متناقصاً) على الجوار الأيسر $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0^-) =]x_0 - \delta; x_0[$ للنقطة x_0، أي يكون $y''_{xx} > 0$ ($y''_{xx} < 0$) على هذا الجوار.

ب- y'_x متناقصاً (متزايداً) على الجوار الأيمن $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0^+) =]x_0; x_0 + \delta[$ للنقطة x_0، أي يكون $y''_{xx} < 0$ ($y''_{xx} > 0$) على هذا الجوار.

ينتج من ذلك، أنه كي تكون النقطة M_0 المقابلة للقيمة $t = t_0$ نقطة انعطاف للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات (5.11)، يجب أن يكون المنحني مستمراً في جوارٍ لهذه النقطة ويغير المشتقان y''_{xx} و x''_{yy} إشارتهما في هذا الجوار. مع الإشارة إلى أن أحد أو كلا هذين المشتقين يمكن ألا يكونا موجودين في هذه النقطة. أما إذا وجد أحدهما أو كلاهما، فإنه يجب أن يكونا معدومين عند هذه النقطة.

مثال 5.65 : ادرس تقعر المنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = 4t^2 \quad , \quad y = 3t(t^2 + 1)$$

وأوجد نقاط الانعطاف.

الحل: نوجد المشتقات

$$x'(t) = 8t \quad , \quad y'(t) = 9t^2 + 3$$

$$x'_y = \frac{x'_{(t)}}{y'_{(t)}} = \frac{8t}{3(3t^2+1)} \quad , \quad y'_x = \frac{y'_{(t)}}{x'_{(t)}} = \frac{3(3t^2+1)}{8t}$$

$$x''_{yy} = \frac{d(x'y)}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{8(1-3t^2)}{3(3t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{3(3t^2+1)} = \frac{8}{9} \frac{1-3t^2}{(3t^2+1)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3(3t^2-1)}{8t^2} \cdot \frac{1}{8t} = \frac{3(3t^2-1)}{64\,t^3}$$

كما هو واضح، فإن $y''_{xx} < 0$ في المجال $]0;\frac{1}{\sqrt{3}}[$ أي أن المنحني مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور التراتيب على هذا المجال.

و $y''_{xx} > 0$ على المجال $]0;-\frac{1}{\sqrt{3}}[$ أي أن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور التراتيب على هذا المجال.

مع أن المنحني يغير من جهة تقعره في النقطة المقابلة للقيمة $t = 0$، وهي نقطة الأصل، إلا أن هذه النقطة ليست نقطة انعطاف لهذا المنحني، لأن

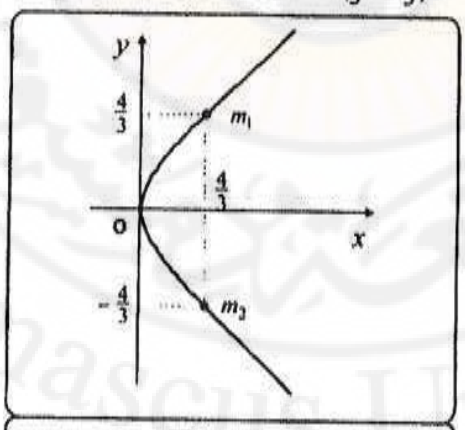
$$x''_{yy}\big|_{(t=0)} = \frac{8}{9} \neq 0$$

ولما كان $x''_{yy} > 0$ على المجال $]-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور الفواصل على هذا المجال.

من أجل $t > \frac{1}{\sqrt{3}}$، يكون $y''_{xx} > 0$، أي أن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور التراتيب.

من أجل $t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$، يكون $y''_{xx} < 0$، أي أن المنحني مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور التراتيب.

ولما كان $y''_{xx}\big|_{(t=\mp\frac{1}{\sqrt{3}})} = 0$ و $x''_{yy}\big|_{(t=\mp\frac{1}{\sqrt{3}})} = 0$، فإن النقطتين المقابلتين للقيمتين $t = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ أي النقطتين $M_1\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ و $M_2\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$ نقطتا انعطاف للمنحني، الشكل 5.41.



الشكل 5. 41

6. **النقاط المساعدة:** لرسم المنحني بأسلوب دقيق نوجد بعض النقاط المساعدة في الرسم. وهي نقاط تقاطع المنحني مع المحاور الإحداثية، أي حلول المعادلتين

$$x(t)=0 \quad \text{و} \quad y(t)=0$$

ونبحث كذلك عن النقاط المضاعفة للمنحني، أي النقاط التي يمر بها المنحني مرتين. ونحصل عليها بالبحث عن القيم t_1 و t_2، حيث $t_1 \neq t_2$، المحققة، في آنٍ معاً، للمعادلتين

$$\{x(t_1)=x(t_2) \quad , \quad y(t_1)=y(t_2)\} \qquad (5.12)$$

مثال 5.66 : ابحث في النقاط المضاعفة ونقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x=\frac{t^2}{t^2+1} \quad , \quad y=\frac{t(1-t^2)}{(t^2+1)}$$

الحل: نوجد الحل المشترك للمعادلتين (5.12)، من أجل $t_1 \neq t_2$:

$$x(t_1)=x(t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1^2}{t_1^2+1}=\frac{t_2^2}{t_2^2+1} \qquad (i)$$

$$y(t_1)=y(t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1(1-t_1^2)}{t_1^2+1}=\frac{t_2(1-t_2^2)}{t_2^2+1} \qquad (ii)$$

من المعادلة (i)، نجد $t_1=-t_2$. نعوض في المعادلة (ii)

$$\frac{t_1(1-t_1^2)}{t_1^2+1}=-\frac{t_1(1-t_1^2)}{t_1^2+1} \quad \Rightarrow \quad t_1(1-t_1^2)=-t_2(1-t_1^2)$$

أي، إما $t_1=0$، ومنه $t_2=0$. وهذا مرفوض لأن $t_1 \neq t_2$. أو $t_1=1$، ومنه $t_2=-1$.

وعليه، فإن النقطة المقابلة لهذه القيم $M_1\left(\frac{1}{2},0\right)$. وهي النقطة المضاعفة الوحيدة للمنحني المعطى.

نوجد التقاطع مع محور الفواصل. أي نبحث عن حل المعادلة $x(t)=0$:

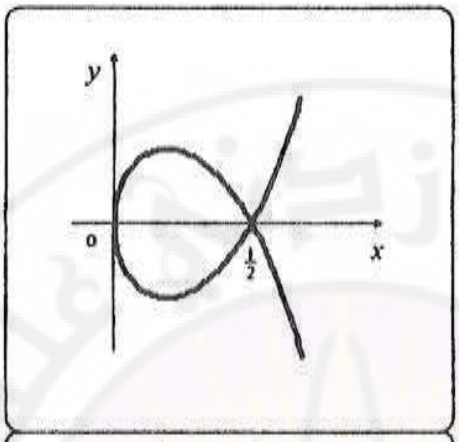
$$\frac{t^2}{t^2+1}=0 \quad \Rightarrow \quad t=0$$

وتقابل هذه القيمة نقطة الأصل.

وندرس التقاطع مع محور التراتيب: أي نبحث عن حل المعادلة $y(t)=0$:

$$\frac{t(1-t^2)}{t^2+1}=0 \quad \Rightarrow \quad t(1-t^2)=0 \quad \Rightarrow \quad t=0 \text{ و } t=\mp 1$$

تقابل القيمة $t=0$ نقطة الأصل. وتقابل القيمتين $t=\mp 1$ النقطةُ المضاعفة $M_1\left(\frac{1}{2},0\right)$، الشكل 5.42.



الشكل 5.42

7. ننظم جدولاً لتحولات الدالتين ونرسم المنحني.

مثال 5.67 : ارسم المنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = a\cos^3 t \quad , \quad y = a\sin^3 t \quad ; \quad a > 0$$

الحل: مجموعة التعريف $D \equiv \mathbb{R}$. والدالتان $x(t)$ و $y(t)$ دوريتان دور كل منهما $T = 2\pi$. لذا نكتفي بالدراسة في مجالٍ طوله 2π، أي في المجال $I = [-\pi;\pi]$.

ولما كان المنحني متناظراً بالنسبة إلى محور الفواصل، لأن

$$y(-t) = -y(t) \quad \text{و} \quad x(-t) = x(t)$$

فإنه يمكن تقليص المجال I للنصف: $[0;\pi]$.

ولما كان

$$y(\pi - t) = -y(t) \quad \text{و} \quad x(\pi - t) = -x(t)$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب. أي نكتفي بالدراسة في ربع المجال I، أي أن مجال الدراسة هو $J = \left[0;\frac{1}{2}\pi\right]$.

لما كانت الدالتان $x(t)$ و $y(t)$ محدودتين دوماً، فإنه ليس للمنحني فروع لا نهائية.

التزايد والتناقص والنقاط الشاذة:

نوجد المشتقات

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t \quad \text{و} \quad y'(t) = 3a\cos t \sin^2 t$$

لما كان $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan x < 0$ في المجال J، فإن المنحني متناقص تماماً في هذا المجال.

لما كان $x'(t)\big|_{(t=0)} = y'(t)\big|_{(t=0)} = 0$، فإن النقطة المقابلة للقيمة $t = 0$، أي النقط $M_1(a,0)$ هي النقطة الشاذة الوحيدة للمنحني. نبين نوعها:

$$M''_{(t)} = (x''(t), y''(t)) = \left(6a\cos t \sin^2 t - 3a\cos^3 t, 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t\right)$$

$$M''(t)\big|_{(t=0)} = (-3a, 0) \neq 0$$

$$M'''(t) = (x'''(t), y'''(t)) = \left(-6a\sin^3 t + 21a\cos^2 t \sin t, 6a\cos^3 t - 21\sin^2 t\cos t\right)$$

$$M'''(t)\big|_{(t=0)} = (0, 6a) \neq 0$$

$$(M'' \wedge M''')\big|_{(t=0)} = \begin{vmatrix} -3a & 0 \\ 0 & 6a \end{vmatrix} = -18a^2 \neq 0$$

أي أن النقطة $M_1(a,0)$ نقطة تراجع من النوع الأول للمنحني المعطى.

لما كان

$$\tan\alpha = \frac{y''(t)}{x''(t)} = \frac{0}{-3a} = 0$$

فإن المماس للمنحني في نقطة التراجع $M_1(a,0)$ هو محور الفواصل.

التقعر: نشتق الدالة y'_x، بالنسبة إلى x، كدالة مركبة:

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{\cos^2 t} \cdot \frac{-1}{3a\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t \sin t}$$

لما كان $y''_{xx} > 0$ في المجال J، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور التراتيب.

نشتق الدالة $x'_y = -\cot t$، بالنسبة إلى y، كدالة مركبة:

$$x''_{yy} = \frac{dx'_y}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{1}{3a\sin^4 t\cos t}$$

لما كان $x''_{yy} > 0$ في المجال J، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور الفواصل.

التقاطع مع المحاور الإحداثية: أي نحل المعادلتين

$$x(t) = 0 \quad \text{و} \quad y(t) = 0$$

$$x(t)=0 \Rightarrow a\cos^3 t=0 \Rightarrow \cos t=0 \Rightarrow t=\tfrac{1}{2}\pi$$

أي أن المنحني يتقاطع مع محور التراتيب في النقطة المقابلة للقيمة $t=\frac{1}{2}\pi$، أي في النقطة $M_2(0,a)$.

$$y(t)=0 \Rightarrow a\sin^3 t=0 \Rightarrow \sin t=0 \Rightarrow t=0$$

أي أن المنحني يتقاطع مع محور الفواصل في النقطة المقابلة للقيمة $t=0$، أي في النقطة $M_3(a,0)$.

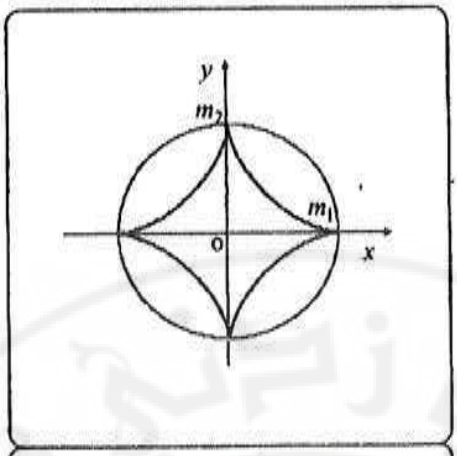
ننظم جدولاً للنتائج من أجل $t\in\left[0;\frac{1}{2}\pi\right]$ ونرسم قوساً من المنحني في هذا المجال ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور الفواصل ثم نظير القوس الناتج بالنسبة إلى محور التراتيب، الشكل 5.43.

ملحوظة 5.32 : يسمى هذا المنحني الستروئيد. نحصل على المعادلة الديكارتية لهذا المنحني بحذف الوسيط t من معادلتي $x(t)$ و $y(t)$:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

t	0	$]0;\frac{1}{2}\pi[$	$\frac{1}{2}\pi$
$y'(t)$	0	+	0
$x'(t)$	0	−	0
y'_x	0	−	$-\infty$
x	a	↘	0
y	0	↗	a

Damascus University



الشكل 5.43

مثال 5.69: ارسم المنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = t^4 \quad , \quad y = t^2 - t^5$$

الحل: مجموعة التعريف $D = \mathbb{R}$.

الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة: لما كان

$$\lim_{t \to \mp\infty} x(t) = \lim_{t \to \mp\infty} t^4 = +\infty \quad , \quad \lim_{t \to \mp\infty} y(t) = \lim_{t \to \mp\infty} (t^2 - t^5) = \pm\infty$$

$$k = \lim_{t \to \mp\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \mp\infty} \frac{t^2 - t^5}{t^4} = \lim_{t \to \mp\infty} \left(\frac{1}{t^2} - t \right) = \pm\infty$$

فإن للمنحني فرعين مكافئين لا نهائيين يوازيان محور التراتيب من جهته الموجبة ومن جهته السالبة.

التزايد والتناقص والنقاط الشاذة: نوجد المشتقات

$$x'(t) = 4t^3 \quad , \quad y'(t) = 2t - 5t^4$$

$$x'(t) = 0 \implies t = 0 \quad \text{و} \quad y'(t) = 0 \implies \left(t = 0 \quad \text{و} \quad t = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \right)$$

أي أن المشتقين $x'(t)$ و $y'(t)$ ينعدمان معاً من أجل القيمة $t = 0$. وعليه، فإن نقطة الأصل هي النقطة الشاذة الوحيدة للمنحني.

نبين نوع النقطة الشاذة، نقطة الأصل، المقابلة للقيمة $t = 0$.

$$M''(t) = (x''(t), y''(t)) = \left(12t^2, 2 - 20t^3\right) \implies M''(t)\big|_{(t=0)} = (0.2) \neq 0$$

$$M'''(t)=\left(x'''(t),y'''(t)\right)=\left(24t,-60t^2\right) \Rightarrow M'''(t)\big|_{(t=0)}=(0,0)$$
$$M^{(4)}(t)=\left(x^{(4)}(t),y^{(4)}(t)\right)=(24,-120t) \Rightarrow$$
$$M^{(4)}(t)\big|_{(t=0)}=(24,0)\neq 0$$

لما كان:

$$\left(M''\wedge M^{(4)}\right)_{(t=0)}=\begin{vmatrix}0 & 24\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-48\neq 0$$

فإن النقطة الأصل هي نقطة تراجع من النوع الثاني للمنحني المعطى.

ولما كان

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2-5t^3}{4t^3} \Rightarrow y'_x\big|_{(t=0)}=\infty$$

فإن المماس للمنحني في نقطة الأصل هو محور التراتيب.

لما كان $y'_x>0$ في المجموعة $\left]-\infty;\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right[\setminus\{0\}$، فإن المنحني متزايد تماماً على هذه المجموعة.

ولما كان $y'_x<0$ في المجال $\left]\sqrt[3]{\frac{2}{5}};\infty\right[$، فإن المنحني متناقص تماماً على هذا المجال. ولما كان $y'_x\big|_{\left(t=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)}=0$، فإن المماس في النقطة المقابلة للقيمة $t=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$، أي في النقطة $M_1(0.29,0.32)$ يوازي محور الفواصل.

التقعر ونقاط الانعطاف: نشتق الدالة y'_x، بالنسبة إلى x، كدالة مركبة

$$y''_{xx}=\frac{dy'_x}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-5t^3-4}{4t^3}\cdot\frac{1}{4t^3}=\frac{-5t^3-4}{16t^6}$$
$$y''_{xx}=0 \Rightarrow t=-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}=-0.93$$

من أجل $t<-0.93$، يكون $y''_{xx}>0$، أي أن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور التراتيب.

من أجل $t>-0.93$، يكون $y''_{xx}<0$، أي أن المنحني مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور التراتيب.

نشتق الدالة x'_y، بالنسبة إلى y، كدالة مركبة:

$$y''_{yy} = \frac{dx'_y}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = 4\frac{5t^4 + 4t}{\left(2-5t^3\right)^2} \cdot \frac{1}{t\left(2-5t^3\right)} = \frac{20t^3 + 16}{\left(2-5t^3\right)^3}$$

$$y''_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = -0.93$$

لما كان $x''_{yy} > 0$، في المجال $\left]-0.93;\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور الفواصل في هذا المجال.

ولما كان $x''_{yy} < 0$، في المجالين $]-\infty;-0.93[$ و $\left]\sqrt[3]{\frac{2}{5}};\infty\right[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور الفواصل على هذين المجالين.

ولما كان $x''_{yy} = y''_{xx} = 0$ في النقطة المقابلة للقيمة $t = -0.93$، أي في النقطة $M_2(0.74,1.55)$، وغيّر عندها المشتق x''_{yy} إشارته، وكذلك المشتق y''_{xx} ، فإن النقطة M_2 نقطة انعطاف للمنحني.

التقاطع مع المحاور الإحداثية: نحل المعادلتين

$$y(t) = 0 \quad \text{و} \quad x(t) = 0$$

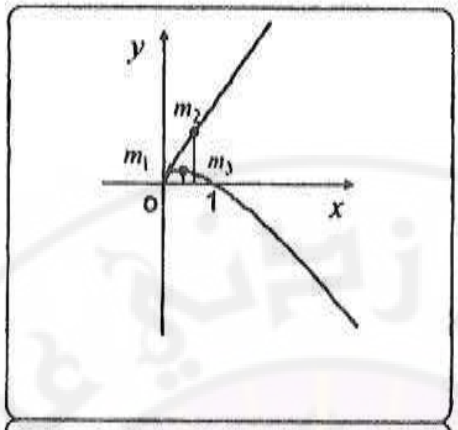
$$x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

أي أن المنحني يتقاطع مع محور التراتيب في نقطة الأصل.

$$y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - t^5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{و} \quad t = 1$$

أي أن المنحني يتقاطع مع محور الفواصل في نقطة الأصل وفي النقطة المقابلة للقيمة $t = 1$ أي في النقطة $M_3(1,0)$. ننظم جدولاً للنتائج ونرسم المنحني، الشكل 5.44.

t	$-\infty$	$]-\infty;-0.93]$	0	$]0;\sqrt[3]{2/5}[$	$\sqrt[3]{2/5}$	$]\sqrt[3]{2/5};1[$	1	$]1;\infty[$
$y'(t)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	-3	$-$
$x'(t)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1.6	$+$	4	$+$
y'_x	$-5/4$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$-3/4$	$-$
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0.29	$\nearrow$	1	$\nearrow$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0.32	$\searrow$	0	$\searrow$



الشكل 5.44

مثال 5.70 : ارسم المنحني المعطى وسيطياً:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad , \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad ; \quad (a>0)$$

الحل: مجموعة التعريف $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة: نوجد النهايات

$$\lim_{t\to -1} y(t) = \lim_{t\to -1} \frac{3at^2}{1+t^3} = \infty \text{ و } \lim_{t\to -1} x(t) = \lim_{t\to -1} \frac{3at}{1+t^3} = \infty$$

$$k = \lim_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to -1} t = -1$$

$$b = \lim_{t\to -1} (y+x) = \lim_{t\to -1} \frac{a(3t^2+3t)}{(1+t^3)} = \lim_{t\to -1} \frac{3at}{(t^2-t+1)} = -a$$

أي أن للمنحني المعطى مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y + x + a = 0$

النقط الشاذة: نوجد المشتقات

$$x'(t) = \frac{a(3-6t^3)}{(1+t^3)^2} \quad \text{و} \quad y'(t) = \frac{a(6t-3t^4)}{(1+t^3)^2}$$

واضح أن المشتقين $x'(t)$ و $y'(t)$ ينعدمان معاً فقط، عندما $t \to \mp\infty$، وهي تقابل نقطة الأصل، أي أن نقطة الأصل هي النقطة الشاذة الوحيدة للمنحني.

النقط المضاعفة: نبحث عن النقاط المحققة للمعادلتين (5.12)

$$x(t_1)=x(t_2) \Rightarrow \frac{3at_1}{1+t_1^3}=\frac{3at_2}{1+t_2^2}$$
$$y(t_1)=y(t_2) \Rightarrow \frac{3at_1^2}{1+t_1^3}=\frac{3at_2^2}{1+t_2^3}$$

بحل هاتين المعادلتين نجد $t_1=\frac{1}{t_2}$. وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد أنهما محققتان فقط عندما $t_1=0$ أي عندما $t_2\to\infty$. بالفعل، إذا كان $t=0$، فإن $x=y=0$. وإذا كان $t\to\infty$، فإن $x\to 0$ و $y\to 0$ أي أن نقطة الأصل هي النقطة المضاعفة الوحيدة للمنحني. لما كان

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

فإن المشتق y'_x ينعدم ،عندما $t_1=\sqrt[3]{2}$ و $t_2=0$. ويقابل هاتين القيمتين النقطتان $m_1\left(a\sqrt[3]{2},a\sqrt[3]{4}\right)$ و $(0,0)$، بالترتيب. ويكون المماس عند هاتين النقطتين موازياً لمحور الفواصل.

ويكون المشتق y'_x غير معرّف، عندما يكون $t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$، أي في النقطة المقابلة $m_2\left(a\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2}a\right)$، يكون المماس موازياً لمحور التراتيب.

التقعر ونقاط الانعطاف: نشتق الدالة y'_x، بالنسبة إلى x، والدالة x'_y، بالنسبة إلى y، كدوال مركبة:

$$y''_{xx}=\frac{dy'_x}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left[\frac{2t-t^4}{1-2t^3}\right]\cdot\frac{(1+t^3)^2}{3a(1-2t^3)}=\frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}$$
$$x''_{yy}=\frac{dx'_y}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1-2t^3}{2t-t^4}\right]\cdot\frac{(1+t^3)^2}{3at(2-t^3)}=\frac{-2(t^3+1)^4}{3at^3(2-t^3)^3}$$

لما كان $y''_{xx}>0$ على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور التراتيب على هذا المجال.

ولما كان $y''_{xx}<0$ على المجال $\left]\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\infty\right[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور التراتيب على هذا المجال.

ولما كان $x''_{yy} > 0$ على المجموعة $]0;\sqrt[3]{2}[\cup]\sqrt[3]{2};\infty[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه الموجب لمحور الفواصل على هذه المجموعة.

ولما كان $x''_{yy} < 0$ على المجال $]-\infty;0[$، فإن المنحني مقعر نحو الاتجاه السالب لمحور الفواصل على هذا المجال.

واضح من هذه التقعرات أنه ليس للمنحني نقاط انعطاف.

التقاطع مع المحاور الإحداثية: نبحث عن حلول المعادلتين

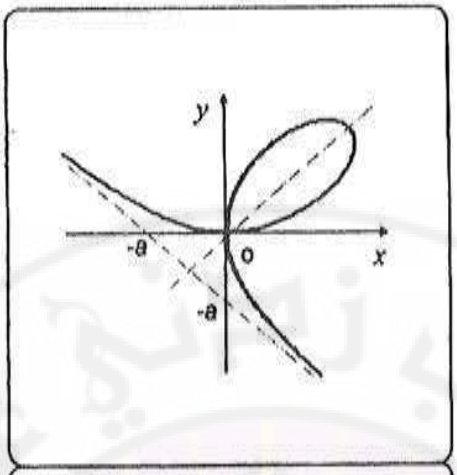
$$x(t)=0 \quad \text{و} \quad y(t)=0$$

$$y(t)=0 \Rightarrow t=0 \quad \text{و} \quad x(t)=0 \Rightarrow t=0$$

أي أن المنحني يتقاطع مع المحاور الإحداثية في نقطة الأصل فقط.

ننظم جدولاً بالنتائج ونرسم المنحني، الشكل 5.45.

t	$]-\infty;-1]$	-1	$]-1;0[$	0	$]0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}[$	$1/\sqrt[3]{2}$	$]\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}[$	$\sqrt[3]{2}$	$]\sqrt[3]{2};\infty[$
$y'(t)$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$0.4a$	$+$	0	$-$
$x'(t)$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-a$	$-$
y'_x	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$
x	$+\infty \nearrow$	$\|\|$	$\nearrow -\infty$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\searrow 0$
y	$\searrow \infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow 0$



الشكل 5.45

ملحوظة 5.33: يسمى هذا المنحني وريقة ديكارت.

ونحصل على المعادلة الديكارتية لهذا المنحني بحذف الوسيط t من معادلتي $x(t)$ و $y(t)$:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

وينتج من هذه المعادلة أن هذا المنحني متناظر بالنسبة إلى المنصف الأول $y = x$.

5.18 رسم المنحنيات المعطاة قطبياً

تعطى معادلة المنحني قطبياً عادة بالعلاقة:

$$\rho = f(\varphi)$$

يمكن الانتقال إلى الشكل الديكارتي لمعادلة هذا المنحني باستخدام العلاقات بين الجملة الديكارتية والجملة القطبية:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

ويمكن الانتقال إلى الشكل الوسيطي لمعادلة هذا المنحني، باستخدام العلاقات

$$x = \rho\cos\varphi \quad \text{و} \quad y = \rho\sin\varphi$$

فنجد

$$x = f(\varphi)\cos\varphi \quad \text{و} \quad y = f(\varphi)\sin\varphi$$

وعليه، فإننا نستطيع دراسة ورسم هذا المنحني كما درسنا المنحنيات المعطاة وسيطياً، وسيطها φ. غير أنه من الأنسب دراسته بشكله القطبي مباشرةً دون الانتقال إلى الشكل الديكارتي أو الشكل الوسيطي.

تتم الدراسة والرسم، تقريباً، بنفس الخطوات التي اتبعناها عند دراسة المنحنيات المعطاة ديكارتياً أو وسيطياً.

1. مجموعة التعريف: هي المجموعة $D(f)$ التي تجعل الدالة $f(\varphi)$ معرفة.

يمكن تقليص مجموعة الدراسة إذا كان للمنحني خواص تناظرية أو إذا كان دورياً، كما فعلنا ذلك من أجل الدوال المعطاة ديكارتياً ووسيطياً.

فإذا كانت الدالة $f(\varphi)$ دورية، دورها T، فإن مجموعة الدراسة يمكن أن تكون $D\cap[a;a+T]$، حيث a ثابت يتم تعيينه بأسلوبٍ مناسب، ومن ثم نعمم النتائج من أجل جميع نقاط المجموعة D. ونرسم قوساً من المنحني في المجموعة $D\cap[a;a+T]$، ومن ثم ندوّر هذا القوس حول القطب o بمقدار الدور T ومضاعفاته، إلى أن لا يعطينا الدوران شيئاً جديداً.

دراسة التناظر: نفرض أن المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر

أ. إذا كان

$$f(-\varphi)=f(\varphi)\ ;\ \forall\varphi\in D$$

أي أن الدالة $f(\varphi)$ زوجية، فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل. لذا يكفي رسم قوس من المنحني على نصف المجموعة D. مثلاً، على المجموعة $D\cap[0;\infty[$، ومن ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور الفواصل.

ب. إذا كان

$$f(-\varphi)=-f(\varphi)\ ;\ \forall\varphi\in D$$

أي أن الدالة $f(\varphi)$ فردية، أو إذا كان

$$f(\pi-\varphi)=f(\varphi)\ ;\ \forall\varphi\in D$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب. لذا يكفي رسم قوس من المنحني في نصف المجموعة D. مثلاً، على المجموعة $D\cap[0;\infty[$، ومن ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور التراتيب.

ج. إذا كان

$$f(\pi+\varphi)=f(\varphi)\ ;\ \forall\varphi\in D$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل (القطب o). لذا يكفي رسم قوس من المنحني على نصف المجموعة D، مثلاً في المجموعة $D\cap[0;\infty[$، ومن ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى القطب.

د. إذا وجد عدد ثابت a، بحيث يكون

$$f(a-\varphi)=f(a+\varphi)\ \text{ أو }\ f(2a-\varphi)=f(\varphi)\ ;\ \forall\varphi,a\mp\varphi,2a-\varphi\in D$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى نصف المستقيم $\varphi=a$ وامتداده. لذا يكفي رسم قوس من المنحني على نصف المجموعة D، ومن ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى المستقيم $\varphi=a$ وامتداده.

هـ. إذا وجد عدد ثابت a، بحيث يكون

$$f(a-\varphi)=-f(a+\varphi)\ \text{ أو }\ f(2a-\varphi)=-f(\varphi)\ ;\ \forall\varphi,a\mp\varphi,2a-\varphi\in D$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى نصف المستقيم $\varphi=a+\frac{1}{2}\pi$ وامتداده. لذا يكفي رسم قوس من المنحني في نصف المجموعة D، ومن ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى المستقيم $\varphi=a+\frac{1}{2}\pi$ وامتداده.

مثال 5.71: ادرس تناظر المنحني $\rho=\cos\frac{1}{2}\varphi$.

الحل: الدالة ρ معرفة في $\mathbb{R}$. لما كان

$$\cos\left(-\tfrac{1}{2}\varphi\right)=\cos\tfrac{1}{2}\varphi\quad ;\quad \forall\varphi\in\mathbb{R}$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل.

نبحث عن العدد a المحقق للعلاقة

$$\cos\tfrac{1}{2}(2a-\varphi)=\cos\tfrac{1}{2}\varphi\quad ;\quad \forall\tfrac{1}{2}(2a-\varphi)\in\mathbb{R}\ ,\ \varphi\in\mathbb{R}$$

واضح أن $a=2\pi$، فالمنحني متناظر بالنسبة إلى نصف المستقيم $a=2\pi$ وامتداده، وهو محور الفواصل.

نبحث عن العدد a المحقق للعلاقة:

$$\cos\tfrac{1}{2}(2a-\varphi)=-\cos\tfrac{1}{2}\varphi\quad ;\quad \forall\tfrac{1}{2}(2a-\varphi)\in\mathbb{R}\ ,\ \varphi\in\mathbb{R}$$

واضح أن $a = \pi$ ، فالمنحني متناظر بالنسبة إلى نصف المستقيم $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ وامتداده، وهو محور التراتيب.

2. النقاط المساعدة:

الأصفار: يمر المنحني من القطب o، من أجل قيم φ المحققة للمعادلة

$$f(\varphi) = 0$$

التقاطع مع محور الفواصل، هي النقاط التي تبعد عن القطب o بالمقدار

$$\rho = f(\pi) \text{ أو } \rho = f(0)$$

التقاطع مع محور التراتيب، هي النقاط التي تبعد عن القطب o بالمقدار

$$\rho = f(\tfrac{3}{2}\pi) \text{ أو } \rho = f(\tfrac{1}{2}\pi)$$

النقاط المضاعفة: وهي النقاط المحققة لإحدى العلاقتين:

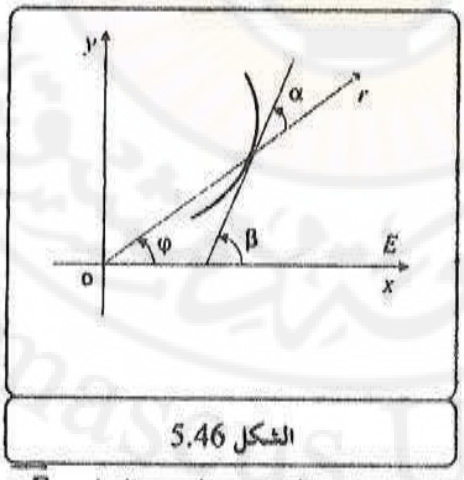
$$f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi k) \text{ أو } f(\varphi) = -f(\varphi + \pi + 2\pi k) \; ; \; \forall \varphi \in D \, , \, k \in \mathbb{Z}$$

3. التزايد والتناقص: إن تزايد وتناقص المنحني مرتبط بإشارة المشتق $\rho' = f'(\varphi)$.

4. المماسات: ندرس وضع مماس المنحني في كل نقطة من نقاطه، وذلك من العلاقة

$$m = \tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$$

حيث α الزاوية بين المماس ونصف القطر الشعاعي $\overrightarrow{oM}$ ، الشكل 5.46.



الشكل 5.46

البرهان: لتكن β الزاوية بين مماس المنحني والمحور القطبي $\overrightarrow{oE}$. واضح من الشكل أن $\alpha = \beta - \varphi$ ، وعليه، فإن

$$\tan\alpha = \tan(\beta - \varphi) = \frac{\tan\beta - \tan\varphi}{1 - \tan\beta\tan\varphi}$$

ولما كان

$$x = \rho\cos\varphi \quad و \quad y = \rho\sin\varphi$$

فإن

$$y' = \frac{dy}{d\varphi} = \rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi \quad ، \quad x' = \frac{dx}{d\varphi} = -\rho\sin\varphi + \rho'\cos\varphi$$

أي أن

$$xx' + yy' = \rho' \qquad و \qquad xy' - yx' = \rho$$

ولما كان

$$\tan\beta = \frac{y'}{x'} \quad و \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

فإن

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y'}{x'} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y'}{x'}\cdot\frac{y}{x}} = \frac{xy' - yx'}{xx' + yy'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

ملحوظة 5.34 : إذا كان المنحني يمر من القطب o، من أجل $\varphi = \varphi_\circ$، فإن المستقيم المماس للمنحني في القطب هو المستقيم $\varphi = \varphi_\circ$، لأنه إذا فرضنا أن m ميل المستقيم المماس في القطب o، فإن

$$m = \lim_{\varphi\to\varphi_\circ}\frac{y}{x} = \lim_{\varphi\to\varphi_\circ}\tan\varphi = \tan\varphi_\circ$$

مثال 5.72 : أوجد زاوية ميل مماس المنحني $\rho = ae^{\varphi} \;;\; (a > 0)$ في أية نقطة منه.

الحل: لما كان

$$m = \tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{ae^{\varphi}}{ae^{\varphi}} = 1$$

فإن مماس المنحني في أية نقطة M، منه يصنع دائماً زاوية ثابتة $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ مع الشعاع $\overline{OM}$.

5. الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة:

نبحث عن قيم φ التي تجعل ρ يسعى إلى اللانهاية، أي $\lim_{\varphi\to\varphi_\circ}\rho = \infty$. يكون عندئذٍ،

للمنحني منحى مقارباً يوازي المستقيم $\varphi = \varphi_0$ أو يكون له مستقيماً مقارباً، ونميز الحالات.

أ. إذا كان $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ أو $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$، وكان $\lim_{\varphi \to \varphi_0} \rho = \infty$، وكانت النهاية $x_0 = \lim_{\varphi \to \varphi_0} [f(\varphi)\cos\varphi]$ موجودة ومحدودة، فإن للمنحني مستقيماً مقارباً يوازي محور التراتيب معادلته $x = x_0$. وفيما عدا ذلك، فإن للمنحني منحى مقارباً يوازي محور التراتيب.

ب. إذا كان $\varphi_0 = 0$ أو $\varphi_0 = \pi$، وكان $\lim_{\varphi \to \varphi_0} \rho = \infty$، وكانت النهاية $y_0 = \lim_{\varphi \to \varphi_0} [f(\varphi)\sin\varphi]$ موجودة ومحدودة، فإن للمنحني مستقيماً مقارباً يوازي محور الفواصل معادلته $y = y_0$. وفيما عدا ذلك، فإن للمنحني منحى مقارباً يوازي محور الفواصل.

ج. إذا كان $\varphi_0 \notin \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$، وكان $\lim_{\varphi \to \varphi_0} \rho = \infty$، وكانت النهاية

$$d = \lim_{\varphi \to \varphi_0}(y - x\tan\varphi_0) = \lim_{\varphi \to \varphi_0}(\rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi\tan\varphi_0) =$$

$$= \lim_{\varphi \to \varphi_0} \frac{\rho\sin(\varphi - \varphi_0)}{\cos\varphi_0}$$

موجودة ومحدودة، فإن للمنحني مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = x\tan\varphi_0 + d$. وفيما عدا ذلك، فإن للمنحني منحى مقارباً مائلاً.

د. إذا كان $\lim_{\varphi \to \infty} \rho = \infty$، فإن للمنحني فرعاً لا نهائياً حلزونياً (أي أن المنحني يسلك في اللانهاية سلوك الحلزون).

هـ. إذا كان $\lim_{\varphi \to \infty} \rho = 0$ فإن للمنحني نقطة مقاربة هي القطب o.

و. إذا كان $\lim_{\varphi \to \infty} \rho = a \neq 0$، فإن للمنحني دائرة مقاربة معادلتها $\rho = a$.

فمثلاً، للحلزون $\rho = \frac{b}{\varphi} + a$ دائرة مقاربة، معادلتها $\rho = a$، لأن $\lim_{\varphi \to \infty} \rho = a$.

ولما كان

$$y_0 = \lim_{\varphi \to 0}[f(\varphi)\sin\varphi] = \lim_{\varphi \to 0}\left(\frac{b}{\varphi} + a\right)\sin\varphi \quad \text{و} \quad \lim_{\varphi \to 0}\rho = \infty$$

فإن للمنحني مستقيماً مقارباً يوازي محور الفواصل معادلته $y = b$.

ملحوظة 5.35 : نضطر، أحياناً، لدراسة التقعر ونقاط الانعطاف والتراجع كما يلي:

أ. لتكن M_0 نقطة من المنحني لا تقع في القطب o، وليكن ρ' محدوداً، وليكن مماس المنحني في النقطة M_0 لا يمر من القطب.

إذا كان $2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 > 0$ عند النقطة $M_\circ$، فإن المنحني مقعر نحو القطب.

وإذا كان $2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 < 0$ عند النقطة $M_\circ$، فإن المنحني مقعر باتجاه معاكس للقطب.

وإذا كان

$$\left(2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2\right)_{M_\circ} = 0 \quad \text{و} \quad \left(3\rho'\rho'' - \rho\rho'' + 2\rho\rho'\right)_{M_\circ} \neq 0$$

فإن النقطة $M_\circ$ نقطة انعطاف للمنحني.

ب. نفرض، الآن، أن مماس المنحني في النقطة $M_\circ$ يمر من القطب. إذا غيّر المشتق إشارته عند $M_\circ$، فإن النقطة $M_\circ$ نقطة تراجع من النوع الأول للمنحني.

أما إذا لم يُغيّر المشتق إشارته فإن النقطة $M_\circ$ نقطة انعطاف للمنحني.

ج. إذا كانت النقطة $M_\circ$ تقع في القطب، وكان $\rho'(M_\circ) \neq 0$، فإن النقطة $M_\circ$ نقطة عادية للمنحني. أما إذا كان $\rho''(M_\circ) \neq 0$ و $\rho'(M_\circ) = 0$، فإن القطب نقطة تراجع من النوع الأول للمنحني.

نشير إلى أن دراسة التقعر وإيجاد نقاط الانعطاف والتراجع من هذه القوانين غير عملية، لذا فإنها نادرة الاستخدام.

6. ننظم جدولاً بالنتائج ونرسم المنحني.

مثال 5.73 : ارسم المنحني $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $(a > 0)$ (منحني الكارديوئيد- القلب).

الحل: الدالة معرفة في $\mathbb{R}$. وهي دورية دورها $T = 2\pi$. لذا يكفي دراسة الدالة ρ في مجال طوله 2π.

لما كان

$$\rho(\varphi) = \rho(-\varphi) \;\; ; \;\; (\forall \varphi \in \mathbb{R})$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل. لذا يكفي دراسة الدالة ρ في مجال طوله π وليكن $[0;\pi]$.

واضح أن الدالة ρ محدودة دوماً، لأن تابع التجيب محدود دوماً. وعليه، لا يوجد فروع لا نهائية للمنحني ولا يوجد مستقيمات مقاربة له.

التزايد والتناقص: نوجد مشتق الدالة ρ : $\rho' = -a\sin\varphi$.

لما كان $\rho' < 0$ في المجال $[0;\pi]$، فإن المنحني متناقص تماماً في هذا المجال.

φ	0		$\frac{1}{2}\pi$		π
ρ'	0	—	a	—	0
ρ	$2a$	↘	a	↘	0

المماسات: من العلاقة

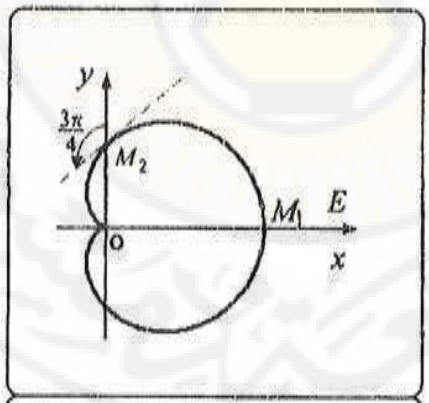
$$\tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

إذا كان $\varphi = 0$، فإن $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. أي أن المماس في النقطة المقابلة للقيمة $\varphi = 0$، أي في النقطة $M_1(2a,0)$ عمودي على محور الفواصل.

إذا كان $\varphi = \frac{1}{2}\pi$، فإن $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. أي أن المماس في النقطة المقابلة للقيمة $\varphi = \frac{1}{2}\pi$، أي في النقطة $M_2\left(a, \frac{1}{2}\pi\right)$ يصنع مع الشعاع $\overrightarrow{OM_2}$ زاوية مقدارها $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

إذا كان $\varphi = \pi$، فإن $\alpha = 0$. أي أن المماس في النقطة المقابلة للقيمة $\varphi = \pi$، أي في القطب، هو محور الفواصل.

نرسم قوساً من المنحني في المجال $[0;\pi]$، ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور الفواصل، الشكل 5.47.



الشكل 5.47

مثال 5.74: ارسم المنحني $\rho = \dfrac{2}{\cos\varphi} + 2$.

الحل: الدالة ρ معرفة في المجموعة $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi + \pi k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

وهي دورية دورها $T = 2\pi$. أي يكفي دراسة الدالة في مجال طوله 2π.

ولما كان $\rho(\varphi) = \rho(-\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in D$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل. لذا يكفي دراسة الدالة في مجال طوله π. ندرس في المجموعة $J = [0;\pi] \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi\right\}$.

المستقيمات المقاربة:

لما كان

$$\lim_{\varphi \to \frac{1}{2}\pi} \rho = \infty \quad \text{و} \quad x_0 = \lim_{\varphi \to \frac{1}{2}\pi} \rho\cos\varphi = \lim_{\varphi \to \frac{1}{2}\pi}\left(2 + \frac{2}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi = 2$$

فإن للمنحني مستقيماً مقارباً معادلته $x = 2$.

التزايد والتناقص: نوجد المشتق $\rho' = \dfrac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

لما كان $\rho' > 0$ في المجموعة J، فإن المنحني متزايد تماماً في هذه المجموعة.

φ	0		$\frac{1}{2}\pi$		π
ρ'	0	+	‖	+	0
ρ	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

المماسات: نحصل عليها من العلاقة

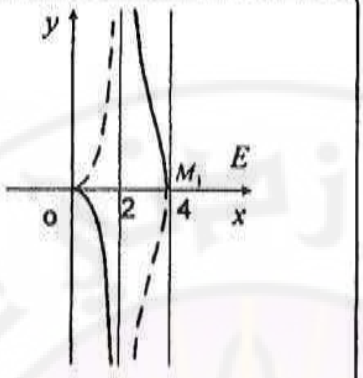
$$\tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = \cos\varphi \cdot \cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

إذا كان $\varphi = 0$، فإن $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. أي أن مماس المنحني في النقطة $M_1(4,0)$ عمودي على محور الفواصل.

وإذا كان $\varphi = \pi$، فإن $\alpha = 0$. أي أن مماس المنحني في القطب، هو محور الفواصل.

نرسم قوساً من المنحني في المجموعة J، ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور الفواصل

فنحصل على جزء من المنحني في مجال طوله 2π . نكرر هذا الجزء على كامل مجموعة التعريف، الشكل 5.48.



الشكل 5.48

مثال 5.75 : ارسم المنحني $(a > 0)$; $\rho = a\sin 3\varphi$.

الحل: الدالة ρ معرفة في $\mathbb{R}$. وهي دورية دورها $T = \frac{2}{3}\pi$. لذا نكتفي بدراسة الدالة في مجال طوله $\frac{2}{3}\pi$. ولما كان

$$-\rho(\varphi) = \rho(-\varphi) \quad ; \quad \forall\varphi \in \mathbb{R}$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب. لذا نكتفي بدراسة الدالة على مجال طوله نصف الدور، أي على المجال $\left[0;\frac{1}{3}\pi\right[$.

لما كان تابع الجيب محدوداً دوماً، فإن الدالة ρ محدودة دوماً وعليه ليس للمنحني فروع لا نهائية ومستقيمات مقاربة.

التزايد والتناقص: نوجد المشتق $\rho' = 3a\cos 3\varphi$.

لما كان $\rho' > 0$ في المجال $\left]0;\frac{1}{6}\pi\right[$ فإن المنحني متزايد تماماً على هذا المجال.

ولما كان $\rho' < 0$ في المجال $\left]\frac{1}{6}\pi;\frac{1}{3}\pi\right[$ ، فإن المنحني متناقص تماماً على هذا المجال.

φ	0		$\frac{1}{6}\pi$		$\frac{1}{3}\pi$
ρ'	$3a$	+	0	—	$3a$
ρ	0	↗	a	↘	0

المماسات: من العلاقة

$$\tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a\sin 3\varphi}{3a\cos 3\varphi} = \frac{1}{3}\tan 3\varphi$$

إذا كان $\varphi - 0$، فإن $\alpha = 0$. أي أن المماس في القطب هو محور الفواصل.

وإذا كان $\varphi = \frac{1}{3}\pi$، فإن $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. أي أن مماس المنحني في النقطة $\left(a, \frac{1}{6}\pi\right)$ هو مستقيم عمودي على محور الفواصل.

النقاط المضاعفة: وهي النقاط المحققة للمعادلة

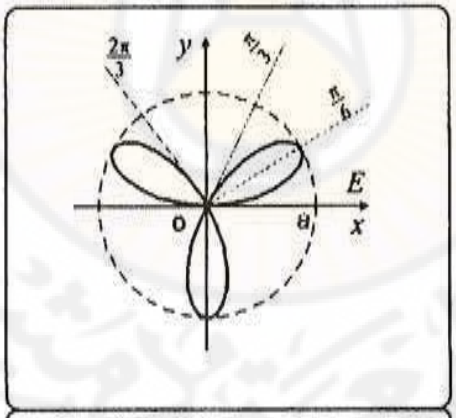
$$f(\varphi) = -f(\varphi+\pi) \implies a\sin 3\varphi = -a\sin 3(\varphi+\pi)$$

$$\sin 3\varphi = \sin(-3\varphi - 3\pi) \implies 3\varphi = -3\varphi - 3\pi \implies \varphi = -\frac{1}{2}\pi$$

أي أن الزاوية $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ تقابل نقطة مضاعفة للمنحني $\left(0, -\frac{1}{2}\pi\right)$.

وإذا كان $\varphi = \frac{1}{3}\pi$، فإن $\alpha = 0$. أي أن المماس في القطب هو محور الفواصل

نرسم قوساً من المنحني في المجال $\left[0; \frac{1}{3}\pi\right]$ ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور التراتيب فنحصل على جزء من المنحني في مجال طوله $\frac{2}{3}\pi$ ندور هذا الجزء حول القطب زاوية مقدارها $\frac{2}{3}\pi$ ثم مرة أخرى زاوية مقدارها $\frac{2}{3}\pi$ فنحصل على كامل المنحني، الشكل 5.49.



الشكل 5.49

ملحوظة 5.35 : لما كان $\rho\left(\frac{1}{6}\pi + \varphi\right) = \rho\left(\frac{1}{6}\pi - \varphi\right)$، فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى نصف المستقيم $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ وامتداده. أي أنه كان بالإمكان الاكتفاء بالدراسة في المجال $\left[0; \frac{1}{6}\pi\right]$، ثم نرسم قوساً من المنحني في هذا المجال، ونرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى

نصف المستقيم $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ وامتداده، فنحصل على جزء من المنحني في المجال $\left[0;\frac{1}{3}\pi\right[$. ونتابع بعد ذلك كما ذكرنا سابقاً.

مثال 5.76 : ارسم المنحني $(a>0)$; $\rho = \dfrac{a}{\cos\frac{1}{3}\varphi}$.

الحل: الدالة معرفة في المجموعة $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\pi+3\pi k \ ; \ k\in\mathbb{Z}\right\}$. وهي دورية دورها $T=6\pi$. ولما كان

$$\rho(\varphi)=\rho(-\varphi) \quad ; \quad \forall\varphi\in\mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{3}{2}\pi+3\pi k \ ; \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل. لذا نكتفي بالدراسة والرسم في نصف المجال.

وليكن في المجموعة $J=[0;3\pi]\setminus\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}$

المقاربات: لما كان $\lim\limits_{\varphi\to\frac{3}{2}\pi}\rho=\infty$ و

$$x_0=\lim_{\varphi\to\frac{3}{2}\pi}\rho\cos\varphi=\lim_{\varphi\to\frac{3}{2}\pi}\frac{a\cos\varphi}{\cos\frac{1}{3}\varphi}=a\lim_{\varphi\to\frac{3}{2}\pi}\frac{-\sin\varphi}{-\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi}=-3a$$

فإن للمنحني مستقيماً مقارباً يوازي محور التراتيب، معادلته $x_0=-3a$

التزايد والتناقص: نوجد المشتق $\rho'=\dfrac{a\sin(\frac{1}{3}\varphi)}{3\cos^2(\frac{1}{3}\varphi)}$

لما كان $\rho'>0$ في المجموعة J فإن المنحني متزايد تماماً في هذه المجموعة.

φ	0		$\frac{3}{2}\pi$		3π
ρ'	0	$+$	$\|\|$	$+$	0
ρ	a	↗	$+\infty \ \|\| \ -\infty$	↗	$-a$

التقاطع مع المحاور الإحداثية:

لما كان $\varphi=0$، فإن $\rho=a$. أي أن نقطة التقاطع مع محور الفواصل الموجب هي النقطة $M_1(a,0)$.

ولما كان $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ ، فإن $\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}a$ أي أن نقطة التقاطع مع محور التراتيب الموجب هي النقطة $M_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a,\frac{1}{2}\pi\right)$.

ولما كان $\varphi = \pi$، فإن $\rho = 2a$. أي أن نقطة التقاطع مع محور الفواصل السالب هي النقطة $M_3(2a, \pi)$.

المماسات: من العلاقة

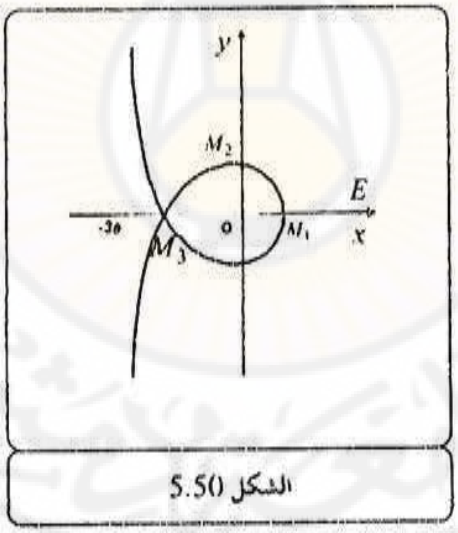
$$\tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a}{\cos\frac{1}{3}\varphi} \cdot \frac{3\cos^2\frac{1}{3}\varphi}{a\sin\frac{1}{3}\varphi} = 3\cot\frac{1}{3}\varphi$$

إذا كان $\varphi = 0$، فإن $\alpha = \frac{1}{2}\pi$، أي أن مماس المنحني في النقطة $M_1(a,0)$ عمودي على محور الفواصل.

إذا كان $\varphi = \frac{1}{2}\pi$، فإن $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. أي أن مماس المنحني في النقطة $M_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a; \frac{1}{2}\pi\right)$ يصنع من الشعاع $\overline{OM_2}$ زاوية مقدارها $\frac{1}{3}\pi$.

إذا كان $\varphi = \pi$، فإن $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. أي أن مماس المنحني في النقطة $M_3(2a, \pi)$ يصنع مع الشعاع $\overline{OM_3}$ زاوية مقدارها $\frac{1}{6}\pi$.

نرسم قوساً من المنحني في المجموعة J، ثم نرسم نظير هذا القوس بالنسبة إلى محور الفواصل، الشكل 5.50.



الشكل 5.50

تمارين الفصل الخامس

1. أثبت أن الدوال التالية فضولة، أياً تكن x:

$$y = x|\sin x| \qquad y = x^2 \cdot sign\, x \qquad y = x^2|x|$$

$$y = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \geq 0 \\ x^4 & ; \quad x < 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & ; \quad x \geq 0 \\ x^2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

2. أثبت أن الدالة $y = |(x-1)\cdot(x-2)|$ غير قابلة للاشتقاق في النقطتين $x = 1$ و $x = 2$.

3. حدد قيمة الثابتين a و b حتى تكون الدالة $f(x)$ مستمرة وفضولة في النقطة $x = x_0$، حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq x_0 \\ ax + b & ; \quad x > x_0 \end{cases}$$

4. حدد قيمة الثابتين a و b حتى تكون الدالة $f(x)$ مستمرة وفضولة في النقطة $x = 0$، حيث

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & ; \quad x \geq 0 \\ (x+a)e^{-bx} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

5. أوجد، في النقطتين $x = 0$ و $x = 2$، مشتق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

6. أوجد، في النقطتين $x = 0$ و $x = 1$، مشتق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

7. أوجد المشتق من اليمين والمشتق من اليسار للدوال التالية في النقطة المجاورة x_0:

$$y = \tan x \cdot \cot x \quad ; \quad x_0 = \tfrac{1}{4}\pi \qquad y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x \quad ; \quad x_0 = \pi$$

$$y = \arcsin(\sin x) \quad ; \quad x_0 = \tfrac{1}{2}\pi \qquad y = |x+1| \quad ; \quad x_0 = -1$$

$$y = \sin x \quad ; \quad x_0 = \pi \qquad y = |x| - |x+1| \quad ; \quad x_0 = 0$$

$$y=\begin{cases} e^{x} & ; \quad x \geq 0 \\ \cos x & ; \quad x<0 \end{cases} \quad ; \quad x=0$$

8. أثبت أن: $\left(\frac{1}{\cos f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{\cos f(x)} \cdot \tan f(x)$

9. أوجد مشتقات الدوال

$y=\log_2[\log_3(\log_4 x)]$

$y=\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2+1}}}$

$y=\frac{1}{\arccos(\ln x)}$

$y=\sqrt[7]{x^3}\cdot\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot(x^2+2x)^3$

$y=\cos^3(\ln 2x)-\tan\frac{1}{x^3}$

$y=\tan^2(\cot\frac{1}{\sqrt{x}})$

$y=\log_{x^3}^4+\log_{-x}^2$

$y=(1+4x)^{\cot x}$

$y=\sqrt{\sin(\cos\frac{1}{x^2})}$

$y=\arctan\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$

$y=\frac{\arctan x^3}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$

$y=x^{(x^2)}$

10. أعطِ مثالاً على دالة معرفة على $\mathbb{R}$، ولكنها غير فضولة عند نقطتين، وأخرى غير فضولة في أربع نقاط.

11. أعطِ مثالاً على دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ وغير فضولتين عند النقطة $x=1$، بحيث يكون مجموعهما (أو جداؤهما) دالة فضولة عند هذه النقطة.

12. أثبت أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ فضولة وزوجية (فردية)، فإن $f'(x)$ دالة زوجية (فردية).

13. أعطِ مثالاً على دالة فضولة وليست فردية ولكن مشتقها دالة زوجية.

14. أثبت أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ فضولة وكانت $f'(x)$ دالة فردية، فإن الدالة $f(x)$ زوجية.

15. أثبت أن مشتق الدالة الدورية والفضولة هو دالة دورية لها نفس الدور.

16. أوجد، على المنحني البياني للدالة $f(x) = x^2 - 7x + 3$، نقطة يكون فيها المماس لهذا المنحني يوازي المستقيم $y = 5x + 2$.

17. أوجد، على المنحني البياني للدالة $f(x) = x^2$، نقطة يكون فيها المماس لهذا المنحني يعامد المستقيم $y = 2x + 1$.

18. أوجد قيم الوسيطين a و b، بحيث يكون المستقيم $y = 2x + 2b$ مماساً للمنحني البياني للدالة $f(x) = x^2 + bx + c$ في النقطة $(2,0)$.

19. أوجد قيم الوسيط a (حيث $a > 1$) كي يكون من أجلها المستقيم $y = x$ مماساً للمنحني البياني للدالة $f(x) = a^x$.

20. أوجد معادلة مستقيم، يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$، ويمس المنحني البياني للدالة $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$، ويقطع المنحني البياني للدالة $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ في نقطتين مختلفتين.

21. أوجد المحل الهندسي لنقطة تقاطع مستقيمين متعامدين يمس كل منهما المنحني البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

22. أوجد إحداثيات نقطة تقاطع مماس المنحني البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$ في نقطتين من هذا المنحني تقابل القيمتين $x = -2$ و $x = 4$.

23. عين قيمة b و c حتى يكون المستقيم $y = x$ مماساً للقطع المكافئ $y = x^2 + bx + c$ في النقطة $(1,1)$.

24. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ والذي يمس المنحني البياني للدالة $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ويقطع الدائرة $(x-2)^2 + y^2 = 1$ بنقطتين مختلفتين.

25. أوجد معادلة المستقيم المماس للمنحنيين البيانيين للدالتين $f(x) = \sqrt{2x}$ و $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ المارين من نقطة تقاطع هذين المنحنيين.

26. حلل العبارات التالية لمضاريب:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$$

$$x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$$

$$(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$$

27. أثبت صحة ما يلي:

$$2\arctan x+\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=\pi \quad ; \quad x\geq 1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}(\cos^2 x-\sin^2 x)^2$$

$$\arctan x+\arctan 3x=\arccos\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}+\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$1-\sin^6 x-\cos^6 x=3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$3\arcsin x-\arccos(3x-4x^3)=\pi \quad ; \quad |\pi|\leq\tfrac{1}{2}$$

$$\cos^4 x-\tfrac{1}{8}\cos 4x=2\cos^2 x-\tfrac{1}{2}\cos 2x-\tfrac{5}{8}$$

$$\arctan x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin y}{y} \quad ; \quad 0<x<y<\tfrac{\pi}{2}$$

$$x-\tfrac{x^2}{2}<\ln(x+1)<x \quad ; \quad x>0$$

$$\frac{\tan x}{x}<\frac{\tan y}{y} \quad ; \quad 0<x<y<\tfrac{1}{2}\pi$$

$$x+\tfrac{x^3}{3}<\tan x \quad ; \quad 0<x<\tfrac{1}{2}\pi$$

$$\frac{2}{\sqrt[k]{n+1}+\sqrt[k]{n-1}}>\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \quad ; \quad n,k\in\mathbb{Z},\ n\geq 2,\ k\geq 2$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}\geq a^a\cdot b^b\cdot c^c \quad ; \quad a,b,c\in\mathbb{R}^+$$

28. بفرض $0<x<\frac{1}{2}\pi$، أثبت أن

$$\sin x>x-2\frac{x^3}{\pi} \qquad \left|\ \tfrac{1}{3}\tan x+\tfrac{2}{3}\sin x>x\ \right| \qquad \sqrt{\cos x}<\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}x$$

$\cos x + x > \frac{1}{2}\pi(1-\frac{1}{24}\pi^2)$ | $\sin 2x < \dfrac{2}{3x-x^2}$

29. ناقش حسب قيم $a \in \mathbb{R}$ عدد جذور المعادلة:

$$a = x\ln x \quad \text{أو} \quad ae^x = x^3 \quad \text{أو} \quad x^3 - 3x^2 - a = 0$$

30. حل المعادلات:

$e^x - e^{-x} = 2\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ | $\sqrt[6]{4x}+3 = \sqrt{27-\sqrt[5]{2x}}$

$x\,e^{-x} + e^{-x} + \frac{x^2}{2} = 1$ | $x^x + x^{1-x} = x+1$

$\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2} = \dfrac{1}{x-1}$ | $\dfrac{4}{x+\sqrt{x+x^2}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

$\log_{12}\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right) = \frac{1}{2}\log_9 x$

31. حل المتراجحات:

$\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+12} > 4$ | $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$

$x-1 < \log_6(x^3+3)\ ;\ x \in \mathbb{Z}$ | $x^9 + x^6 + 448 < 0$

$2x+3 < \ln(x^3+9)\ ;\ x \in \mathbb{Z}$ | $\log_5(1+\sqrt{x}) > \log_{16} x$

$\dfrac{9}{3x+2} > \dfrac{1+\log_3(x+6)}{x}$ | $x^2 + \frac{1}{x} < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

32. أثبت أن

$\tan 55^\circ > 1.4$ | $\sin^3 1^\circ + \sin^3 4^\circ > \sin^3 2^\circ + \sin^3 3^\circ$

$\frac{1}{52} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}$ | $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{n \text{ جذر}} < 3$

$\ln 2 > 0.72$

$(\sin 3^\circ)\sqrt[3]{\cos 2^\circ} - (\sin 2^\circ)\sqrt[3]{\cos 3^\circ} > \sqrt[3]{\cos 3^\circ \cdot \cos 2^\circ}$

33. أثبت صحة المتراجحات:

$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}\ ;\ x > a > 0$

$$a^4+b^4 \geq a^3\cdot b+ab^3$$

$$2a\cdot b\ln\frac{b}{a} < b^2-a^2\ ;\ b>a>0$$

$$(a+b+c)\leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$(1+x)^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}\geq 2\ ;\ |x|>1\ ;\ 0\leq\alpha\leq 1$$

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$$

$$\left(\frac{a+bx}{1+x}\right)^{1+x}\geq a\cdot b^x\ ;\ a,b,x\in\mathbb{R}^+$$

$$e^{2x}<\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ ;\ 0<x<1$$

$$(\sin^2 x)^{\sin^2 x}\cdot(\cos^2 x)^{\cos^2 x}\geq\frac{1}{2}\ ;\ x\neq\frac{\pi}{2}k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$(a+b)^p\leq a^p+b^p\ ;\ a,b\in\mathbb{R}^+,\ 0\leq p\leq 1$$

34. أثبت عدم وجود جذور، في المجال $\left[\frac{1}{2}\pi;\pi\right]$، للمعادلة:

$$\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{10-6\cos x}=\sqrt{10-6\cos 2x}$$

35. أثبت صحة ما يلي:

$$\sin x-\sin y\leq(x-y)\cos y\ ;\ x,y\in[0,\pi]$$

$$y\ln\frac{x}{y}<x-y\ ;\ (x,y\in\mathbb{R}^+)$$

$$x^n\geq y^n+n\,y^{n-1}(x-y)\ ;\ x,y\in\mathbb{R}\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

$$x+\frac{1}{x}\geq y+\frac{1}{y}+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)(x-y)\ ;\ x,y\in\mathbb{R}^+$$

$$n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}\ ;\ b>a>0\ ,\ (n\geq 2,n\in\mathbb{N})$$

36. أثبت أن الدالة

$$f(x)=\sin x+\sin x\sqrt{2}+\sin x\sqrt{3}+\ldots+\sin x\sqrt{n}\ ;\ (n\geq 2\ ,\ n\in\mathbb{N})$$

غير دورية.

37. أوجد قيم العدد $a>0$ المحققة للمتراجحة

$$\ln(1+x)\geq x-ax^2\ ;\ (\forall x\geq 0)$$

38. أوجد جذور كلٍ من المعادلات التالية:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+1}=9$ ، $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x-1}=4$

$\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}=1$

39. أي العددين أكبر $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\frac{\pi}{3}}$ أو $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\sin\frac{\pi}{6}}$.

40. أثبت أن:

$e^{\pi}>\pi^{e}$

$1001^{1000}<1000^{1001}$

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

$4(\tan 5^\circ)\cdot(\tan 9^\circ)<3(\tan 6^\circ)\cdot(\tan 10^\circ)$

$\cos 200<1+\cos 201$

$(\log_{10}5)^3<3^{\log_{10}5}$

41. أثبت صحة المتراجحات:

$\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}\ ;\ (\forall x\ge 0)$

$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$

$1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1\ ;\ (\forall x\ge 0)$

$\frac{9-\sqrt{85}}{2}<\frac{3-2x}{x^2+6x+10}<\frac{9+\sqrt{85}}{2}$

$\frac{1}{\sin(x+\frac{1}{2}\pi)}+\frac{1}{\sin(\frac{1}{3}\pi-x)}\ge\frac{4}{\sqrt{3}}\ ;\ x\in\left[0;\frac{1}{3}\pi\right]$

$\ln(n-1)\ln(n+1)<\ln^2 n\ ;\ (\forall n>2)$

$a^3+b^3+c^3\ge 3abc\ ;\ \left(\forall a,b,c\in\mathbb{R}^+\right)$

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{x^n+y^n}{2}\ ;\ n\in\mathbb{N}\ ,\ x\ge 0\ ,\ y\ge 0$

42. أوجد مجالات تزايد وتناقص الدوال:

$y=x^2e^x$

$y=2e^x+3e^{-x}$

$y=x\ln x$

$y=(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$

$y = \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)^2}$

$y = \dfrac{(x-2)(x-1)}{x^2}$

$y = \dfrac{\pi}{2x} - x\arctan x$

$y = \sin 2x - x \;;\; x \in \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$

$y = \sin x + \cos 2x \;;\; x \in \left[0; \frac{1}{2}\pi\right]$

$(\arcsin\sqrt{1-4x^2}) - 2\sqrt{1-4x^2}$

$y = x\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)$

$y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

$y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

$y = (1+\cos x)\sin x$

$y = \arctan x - \ln x$

43. عين قيم $a \in \mathbb{R}$ حتى تكون

ا. الدالة $y = 2x^5 + 5ax^4 + 10x^3$ متزايدة تماماً.

ب. الدالة $y = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + (4a^2+8a-14)x$ متزايدة تماماً.

ج. الدالة $y = 16(a+1)\sin x - \sin 2x - (16a^2+32a-10)x$ متناقصة تماماً

44. أوجد مجالات تقعر الدوال:

$y = x + \dfrac{1}{2x}$

$y = (1+2x^2)e^x$

$y = x^2 \ln x$

$y = \dfrac{x}{\ln x}$

$y = \sin x + \sin 2x$

$y = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

$y = \sqrt[3]{x}(1+x)$

$y = x^2 e^{-x}$

$y = \dfrac{|x|}{x+1}$

$y = \dfrac{|x|}{x+1}$

$y = \sqrt[3]{1-x^2}$

$y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$

$y = 2 + \sqrt[3]{x-4}$

$y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$

45. أوجد نقاط النهاية الحدية القصوى الموضعية للدوال:

45. أوجد نقاط النهاية الحدية القصوى الموضعية للدوال:

$y=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$	$y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1}$	$y=\sqrt[3]{x^2}-1$
$y=(x-1)^2(x+1)^3$	$y=xe^{-x}$	$y=x+\cos x$
$y=x^2e^{-x}$	$y=x\sin x$	$y=\sqrt[3]{x^2}-x$
$y=\lvert x-5\rvert(x-3)^3$	$y=\lvert x+1\rvert\cdot\sqrt[3]{x^2}$	$y=\lvert x^3-x\rvert$
$y=\dfrac{\ln x}{x}$	$y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$	$y=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+2}}$

46. أوجد القيم القصوى للدوال التالية في المجالات المجاورة:

$y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}\ ;\ x\in[1;6]$	$y=\tan x+\cot 2x : x\in\left[\frac{1}{6}\pi;\frac{1}{3}\pi\right]$
$y=\lvert\log_2^2 2x-\log_2 8x\rvert\ ;\ \left[\frac{1}{2};2\sqrt{2}\right]$	$y=\cos^2\frac{1}{2}x.\sin x\ ;\ [0;\pi]$
$y=\lvert x^2+x-2\rvert-\ln\frac{1}{x}\ ;\ x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$	$y=\lvert(x+1)(2x-5)^2\rvert\ ;\ [-5.4]$
$y=\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert\ ;\ x\in[-2;0]$	$y=\left(\dfrac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2\ ;\ ]0;\pi[$

$y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{1+2x+x^2}\ ;\ x\in[-2;0]$

$y=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x\ ;\ x\in\left[e^{\frac{1}{4}};e^3\right]$

$y=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{1-x}}\ ;\ n\in\mathbb{N}\ ,\ ]-1;1[$

47. جزّء العدد الموجب a لمجموع عددين موجبين، بحيث يكون جداؤهما أكبر ما يمكن.

48. أوجد أقصر مسافة بين المستقيم $y=-x$ والقطع الزائد $xy=1$.

49. أوجد أقصر مسافة بين المستقيم $y=x-1$ والقطع المكافئ $y=x^2$.

50. أثبت عدم وجود حل وحيد للمعادلة $\ln x=\sin x$ في المجال $\left[\frac{3}{2}\pi;\frac{7}{2}\pi\right]$.

51. ادرس تحولات الدوال التالية وارسم المنحني البياني لكلٍ منها:

$y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-1}$

$y=x^3-9x^2+24x-1$

$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

$y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

$y=2+\sqrt{\dfrac{x^3}{x-6}}$

$y=\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{-2x}{3}}$

$y=x^2\ln^2 x$

$y=\sqrt[3]{x}\,(1-x)$

$y=\dfrac{\ln x}{x}$

$y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x+1}$

$y=\cos 2x+2\sin x$

$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$y=\dfrac{x^3}{x+1}$

$y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$

$y=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$y=x\ln x$

$y=x^2e^{-x}$

$y=\dfrac{1}{x}+x$

$y=x(\sqrt[3]{x}+1)$

$y=\cos x\cos 2x$

$y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}$

$y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$

$y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$

$y=x^2\ln^2 x$

$y=2x+4\arctan x$

52. ارسم المنحنيات المعطاة وسيطياً:

$x=\dfrac{2+t^2}{1+t^2}\ ,\quad y=t-\dfrac{t}{t^2+1}$

$x=2t-t^2\ ,\ y=3t-t^3$

$x=\dfrac{t^2+1}{4(1-t)}\ ,\ y=\dfrac{t}{t+1}$

$x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\ ,\ y=\dfrac{t(1-t)}{1+t^2}$

$x=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\ ,\ y=\dfrac{3t}{1+t^3}$

$x=t^2\ ,\ y=\dfrac{2t}{3}(3-t^2)$

$x=t^4\ ,\ y=t^2-t^5$

$x=\dfrac{t^5}{10(1-t)}\ ,\ y=t^3$

$x=\dfrac{2t^2-1}{t(t+1)}\ ,\ y=\dfrac{2t^2-1}{t+1}$

$x=\dfrac{t^2}{t-1}\ ,\ y=\dfrac{t}{t^2-1}$

$x=\frac{2t}{1-t^2}\ ,\ y=\frac{t^2}{1-t^2}$

$x=\frac{1}{1+t}\ ,\ y=\frac{1}{1+t^2}$

$x=\frac{4t}{1-t^4}\ ,\ y=\frac{4t^2}{1-t^4}$

$x=1+t^2\ ,\ y-t^3-1$

$x=t^3+3t+1\ ,\ y=t^3-3t+1$

$x=\frac{t^2}{t^2-1}\ ,\ y=\frac{t^3}{t^2-1}$

$x=\frac{t^2-t+1}{t}\ ,\ y=\frac{t(t-2)}{3-t}$

$x=\frac{t^2}{1-t^2}\ ,\ y=\frac{1}{1+t^2}$

$x=\frac{t}{1-t^2}\ ,\ y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$

$x=\frac{(t+2)^2}{t+1}\ ,\ y=\frac{(t-2)^2}{t-1}$

$x=\sin t\ ,\ y=\frac{\sin t}{2+\cos t}$

$x=t^2\ ,\ y=t^4+t^5$

$x=\frac{3at^2(1-t)}{1-3t+3t^2}\ ,\ y=\frac{3at(1-t)^2}{1-3t+3t^2}\ ;$
$(a>0)$

$x=\frac{5t^2}{1+t^5}\ ,\ y=\frac{5t^3}{1+t^5}$

$x=t+\frac{1}{t}\ ,\ y=t-\frac{1}{t}$

$x=\frac{6t}{1+t^3}\ ,\ y=\frac{6t^2}{1+t^3}$

$x=4t^2\ ,\ y=3t(t^2+1)$

$x=\sin\frac{t}{2}\ ,\ y=\tan t$

$x=\frac{t^2}{t^2+1}\ ,\ y=\frac{t^3}{t^2+1}$

$x=\frac{e^t}{t^2+1}\ ,\ y=\frac{te^t}{t+2}$

$x=\frac{t^2}{1-t^2}\ ,\ y=\frac{t^3}{1-t^2}$

$x=\frac{t^2}{1-t}\ ,\ y=\frac{t^3}{1-t^2}$

$x=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}\ ,\ y=\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t}$

$x=\frac{3at}{1+t^3}\ ,\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\ ;\ (a>0)$

$x=2\cos t-\cos 2t\ ,\ y=2\sin t-\sin 2t$

53. ارسم المنحنيات المعطاة قطبياً:

$\rho = \dfrac{a\sin 2\varphi}{\sin 3\varphi}$

$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$

$\rho = a\varphi + b$

$\rho = \dfrac{a}{\varphi} + b$

(ليمنسكات بيرنولي)

$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$

$\rho = \dfrac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$

$\rho = a\cot\varphi$ (منحني كابا)

$\rho = 1 + \tan\frac{1}{2}\varphi$

$\rho^2 = \dfrac{a^2}{\varphi}\ ;\ (a > 0)$

$\rho = \dfrac{a\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$

$\rho = \varphi$ (حلزون أرخميدس)

(حلزون غاليليو)

$\rho = a\varphi^2 - b\ ;\ (b \geq 0)$

$\rho^2 = a^2\varphi$ حلزون فيرما)

$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{4+\cos 3\varphi}{a}$

$\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$

$\rho^2 = a\sin^3\varphi$

$\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi} + b$ (نيكوميد)

$\rho = 2a\cos\varphi + b$ (حلزون باسكال)

$\rho = \mp\sqrt{\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}}$

$\rho = a\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ (كوهلوئيد)

$\rho = \tan\frac{2}{3}\varphi$

$\rho = \dfrac{a}{\varphi^2}$

(الحلزون اللوغاريتمي)

$\rho = a^{\varphi}\ ;\ (a > 0)$

$\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (حلزون زائدي)

(الحلزون المكافئ)

$(\rho - b)^2 = a^2\varphi\ ;\ (b > 0)$

$\rho = a(1-\cos\varphi)\ ;\ (a > 0)$


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

التكامل غير المحدد

6.1 الدالة الأصلية والتكامل غير المحدد

6.2 الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد

6.3 جدول التكاملات الشهيرة

6.4 الطرائق الرئيسة في المكاملة

6.5 التكامل بالتدريج

6.6 تكامل الكسور العادية (المنطّقة)

6.7 تكامل الدوال المثلثية

6.8 تكامل الدوال القطعية والأسية

6.9 تكامل بعض الدوال غيرالعادية (غير المنطقّة- الصماء)

6.10 التكاملات التي لا يمكن التعبير عنها بدلالة دوال أولية

تمارين الفصل السادس

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

التكامل غير المحدد

6.1 الدالة الأصلية والتكامل غير المحدد

تعد المسألة الأساسية للحساب التفاضلي مسألة إيجاد المشتق $f(x)$ أو التفاضل $df = f'(x)dx$ للدالة $f(x)$. بينما المسألة المعاكسة، هي المسألة الأساسية في الحساب التكاملي. أي إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ والمطلوب إيجاد دالة $F(x)$ تحقق:

$$F'(x) = f(x) \text{ أو } dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

فالمسألة الأساسية في الحساب التكاملي إيجاد دالة عُرِف مشتقها أو تفاضلها. وهناك تطبيقات واستخدامات عديدة للحساب التكاملي في الهندسة والميكانيك والتكنولوجيا والفيزياء وغيرها.

تعريف 6.1: تسمى الدالة $F(x)$، حيث $x \in D \subseteq \mathbb{R}$، دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجموعة D، إذا كانت الدالة $F(x)$ قابلة للمفاضلة على المجموعة D، وكان:

$$F'(x) = f(x) \text{ أو } dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

مثال 6.1 : الدالة $F(x) = \sin x$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \cos x$ على $\mathbb{R}$، لأن

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x \text{ أو } dF = d(\sin x) = \cos x\, dx \;;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال 6.2: الدالة $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $]-1;1[$، لأن:

$$F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \forall x \in]-1;1[$$

من الطبيعي أن يظهر السؤال التالي: هل لكل دالة $f(x)$ دالة أصلية $F(x)$؟

الجواب، بالنفي.

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 6.1: لكل دالة مستمرة $f(x)$ على المجال $[a;b]$ دالة أصلية $F(x)$ على هذا المجال. لكن ليس بالضرورة أن يُعبّر عن الدالة الأصلية بدلالة دوال أولية.

ندرس في هذا الفصل دوال مستمرة في مجالٍ ما. مع أن مسألة إيجاد الدالة الأصلية، مع هذا الشرط، ليست دائماً سهلة، كما أن الدالة الأصلية لدالة ليست وحيدة.

مثال 6.3: إذا كان $f(x) = -2\sin 2x$ ، فإن الدالة $F(x) = \cos 2x$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على $\mathbb{R}$. كما أن الدالة $G(x) = -2\sin^2 x$ هي دالة أصلية أيضاً، للدالة $f(x)$ على $\mathbb{R}$، لأن:

$$F'(x) = -2\sin 2x \quad \text{و} \quad G'(x) = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال 6.4 : إذا كان $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{4+x^2}}$ ، فإن كلاً من الدالتين

$$F(x) = 2\ln(\sqrt{4+x^2} - x) \quad \text{و} \quad G(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2} - x}{\sqrt{4+x^2} + x}\right)$$

دوال أصلية للدالة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

توطئة 6.1: إذا كان مشتق الدالة $f(x)$ مساوياً للصفر في كل نقطة من نقاط مجال I، فإن هذه الدالة هي الدالة الثابتة في هذا المجال.

البرهان: لتكن x_1 و x_2 نقطتين اختياريتين من المجال I. توجد، عندئذٍ، من صيغة لاغرانج نقطة ξ من المجال $]x_1;x_2[$ ، بحيث يكون:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1)$$

ولما كان $f'(\xi) = 0$ فرضاً، فإن $f(x_2) - f(x_1) = 0$. وعليه، فإن

$$f(x_2) = f(x_1)$$

ولما كانت النقطتان x_1 و x_2 اختياريتين من المجال I، فإن جميع قيم الدالة $f(x)$ ثابتة:

$f(x)=C$ ، حيث C ثابت ما.

مبرهنة 6.2 : إذا كانت $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دالتين أصليتين مختلفتين للدالة $f(x)$ على مجالٍ I، فإن حاصل فرقهما ثابت في هذا المجال. أي: $F_2(x)=F_1(x)+C$ ، حيث C ثابت ما.

البرهان: نعرّف دالة قابلة للمفاضلة على المجال I:

$$F(x)\overset{\Delta}{=}F_2(x)-F_1(x)$$

عندئذٍ، فإن

$$F'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ووفق التوطئة 6.1، يكون $\forall x\in I\ ;\ F(x)=C$. أي أن

$$F_2(x)-F_1(x)+C\ ;\ \forall x\in I$$

نتيجة 6.1: إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ في مجالٍ I، فإن كل الدوال الأصلية لهذه الدالة ، على هذا المجال، تعطى بالعلاقة: $F(x)+C$ ، حيث C ثابت اختياري.

نسمي عملية إيجاد الدالة الأصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$ مكاملة الدالة $f(x)$.

تعريف 6.2 : نسمي مجموعة جميع الدوال الأصلية $F(x)+C$ للدالة $f(x)$ على المجال I، بالتكامل غير المحدد، ويُرمز لها بالرمز:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

نسمي $f(x)dx$ العبارة المكاملة (عبارة ما تحت التكامل)، والدالة $f(x)$ الدالة المكاملة، و x متغير التكامل و C ثابت التكامل.

تعني كلمة «غير محدد» أن الشكل العام للدالة الأصلية يحوي ثابتاً اختيارياً.

وهكذا، فإن التكامل غير المحدد هو دالة مشتقها مساوٍ للدالة المكاملة، وتفاضلها مساوٍ للعبارة المكاملة[1].

[1] تكامل من الكلمة اللاتينية Integralis –التكامل. أول من أدخل هذا المصطلح العالم الألماني ليبنتز (1646-1716).

مثال 6.5:

آ- $\int 2xdx = x^2 + C$ ، لأن $(x^2 + C)' = 2x$ أو $d(x^2 + C) = 2xdx$.

ب- $\int e^x dx = e^x + C$ ، لأن $(e^x + C)' = e^x$ أو $d(e^x + C) = e^x$.

جـ- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ ، لأن $(-\cot x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ أو

$$d(-\cot x + C) = \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

مثال 6.6: أوجد تكامل الدالة $f(x) = e^{|x|}$ على $\mathbb{R}$.

الحل: لما كان $e^{|x|} = e^x$، من أجل $x > 0$، فإن الدالة الأصلية للدالة $e^{|x|}$ هي الدالة e^x. ولما كان $e^{|x|} = e^{-x}$، من أجل $x < 0$، فإن الدالة الأصلية للدالة $e^{|x|}$ هي الدالة $-e^{-x}$، وعليه، فإن:

$$\int e^{|x|}\,dx = -e^x + k \;;\; x < 0$$

حيث k ثابت اختياري.

ولما كانت الدالة الأصلية للدالة $e^{|x|}$ هي دالة مستمرة، فإنه يجب أن تتحقق المساواة:

$$\lim_{x \to 0^+} e^x = \lim_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k) \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + k$$

أي أن $k = 2$.

وهكذا، فإن الدالة الأصلية للدالة $f(x) = e^{|x|}$ هي الدالة المستمرة على $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x > 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \\ -e^{-x} + 2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

ولما كان:

$$F'(x) = e^{-x} = e^{|x|} \quad ; \quad x < 0 \text{ و } F'(x) = e^{x} = e^{|x|} \quad ; \quad x > 0$$

فإنه يكفي كي تكون الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x) = e^{|x|}$ هو أن يكون:

$$F'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

$$F'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{e^{-x} + 2 - 1}{x} = 1$$

أي أن

$$F'_{-}(0) = F'_{+}(0) = F'(0) = e^{0} = 1$$

وعليه، فإن:

$$\int e^{|x|} dx = F(x) + C = \begin{cases} e^{x} + C & ; \quad x \geq 0 \\ -e^{-x} + C & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

التفسير الهندسي للمبرهنة 6.2 :

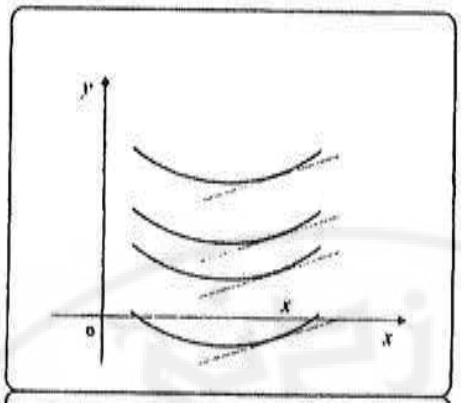
إن التكامل غير المحدد: $y = F(x) + C$ يمثل في المستوى xOy مجموعة منحنيات ذات وسيط واحد هو C ثابت المكاملة.

ولمجموعة المنحنيات هذه خاصة مميزة، هي أن كل المماسات لهذه المنحنيات في النقط التي فاصلتها $x = x_0$ متوازية فيما بينها:

$$\left[F(x) + C\right]'\Big|_{x = x_0} = F'(x_0) = f(x)$$

يمثل الشكل 6.1، المنحنيات الممثلة للدالة $y = x^2 + C$ وهي التابع الأصلي للدالة $f(x) = 2x$.

Damascus University



الشكل 6.1

نسمي كل المنحنيات $y = F(x) + C$ المنحنيات التكاملية للدالة $f(x)$. وهذه المنحنيات غير متقاطعة فيما بينها وغير متماسة مع بعضها بعضاً ويمر في كل نقطة من نقاط المستوي منحنٍ تكاملي واحد فقط للدالة $f(x)$. وتنتج المنحنيات التكاملية عن بعضها بعضاً بانسحاب متوازٍ على المحور oy.

6.2 الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد

نستعرض خواص التكامل غير المحدد التي تنتج مباشرة من تعريفه.

1. مشتق التكامل غير المحدد مساوٍ لدالة التكامل، وتفاضل التكامل المحدد مساوٍ لعبارة التكامل:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{و} \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

وذلك صحيح، لأنه إذا كان $\int f(x)dx = F(x) + C$ ، فإن:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx$$

2. التكامل غير المحدد لتفاضل دالة ما، مساوٍ لحاصل جمع هذه الدالة مع ثابت اختياري:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

وذلك صحيح، لأنه لما كان $dF(x) = F'(x)dx$، فإن

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

3. يمكن إخراج الثابت خارج إشارة التكامل:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad ; \quad a \neq 0$$

وذلك صحيح، لأنه إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$، فإن الدالة $aF(x)$ هي دالة أصلية للدالة $af(x)$، لأن:

$$\big(aF(x)\big)' = aF'(x) = af(x)$$

وعليه، فإن:

$$a\int f(x)dx = a\big(F(x)+C\big) = aF(x) + C_1 = \int af(x)dx \quad ; \quad C_1 = aC$$

4. التكامل غير المحدد للمجموع الجبري لعددٍ محدد من الدوال، مساوٍ للمجموع الجبري لتكاملات غير محددة لهذه الدوال:

$$\int[f_1(x) \mp f_2(x) \mp \ldots \mp f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \mp \int f_2(x)dx \mp \ldots \mp \int f_n(x)dx$$

5. إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$، فإن:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

6. لا يتغير التكامل غير المحدد لدالة إذا غيرنا رمز متحول المكاملة:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

6.3 جدول التكاملات الشهيرة

تشكل الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد وجدول التكاملات الشهيرة، القواعد الرئيسة للحساب التكاملي. وهي تنتج جميعها عن قواعد مفاضلة الدوال الأساسية الابتدائية، والتي يمكن التحقق منها بمفاضلة الطرفين.

نعرض جدول التكاملات الشهيرة، مع ملحوظة أن الرمز u يمكن أن يعني المتحول المستقل $u = x$، أو دالة لمتحول مستقل x: $u = u(x)$.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$	9. $\int shudu = chu + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C \; ; \; u \neq 0$	10. $\int chudu = shudu + C$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \; ; \; 1 \neq a > 0$	11. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$
4. $\int e^u du = e^u + C$	12. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$	13. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \; ; \; a \neq 0$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	14. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C \; ; a \neq 0$
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$	15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \; ; \; a \neq 0$
8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 + k}\right\| + C \; ; \; k \neq 0$

نتحقق من صحة بعض التكاملات الشهيرة غير الموجود مقابل لها في جدول المشتقات الشهيرة وذلك باشتقاق الطرفين.

مثال 6.7: أثبت صحة العلاقة

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \; ; \; a \neq 0$$

الحل: نفاضل طرفي هذه العلاقة:

$$\left(\arcsin\frac{u}{a}+C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}}\left(\frac{u}{a}\right)'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{a^2-u^2}} \quad \Rightarrow$$

$$d\left(\arcsin\frac{u}{a}+C\right) = \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

يمكن باستخدام جدول التكاملات الشهيرة والقواعد الأساسية للمكاملة إيجاد تكاملات لدوال أكثر صعوبة.

مثال 6.8: احسب التكامل:

$$I = \int\left[x^3 + e^{2x} + \frac{2}{x+1} - \sin(2x-1)\right]dx$$

الحل: باستخدام خواص وقواعد التكامل، نجد:

$$I = \int x^3 dx + \int e^{2x}dx + 2\int\frac{dx}{x+1} - \int\sin(2x-1)dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}e^{2x} + 2\ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\cos(2x-1) + C$$

حيث C ثابت اختياري، وهو حاصل جمع ثوابت المكاملة الناتجة عن تكامل كل حد من الحدود. وللتحقق من صحة النتيجة، نشتق الطرف الأيمن.

6.4 الطرائق الرئيسة في المكاملة

6.4.1 الطريقة المباشرة

وتعتمد على رد العبارة المكاملة، إلى تكاملات موجودة في جدول التكاملات الشهيرة، وذلك بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد.

مثال 6.9 : احسب التكاملات:

1. $I = \int 2^x \cdot 3^{2x} dx$,2. $J = \int \tan^2 x dx$, 3. $K = \int (\sin(\frac{1}{2}x) + \cos(\frac{1}{2}x))^2 dx$

الحل:

$$1.\ I = \int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int (2 \cdot 3^2)^x = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C$$

$$2.\ J = \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C$$

$$3.\ K = \int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$$

6.4.2 طريقة تغيير المتحول

إذا لم يكن من السهولة رد التكامل المعطى، إلى تكاملات موجودة في جدول التكاملات الشهيرة، فإننا نضطر أحياناً لتغيير متحول المكاملة x إلى متحول جديد t وفق العلاقة $x = \varphi(t)$.

مبرهنة 6.3 : لتكن $x = \varphi(t)$ دالة معرفة وفضولة على مجموعة ما T. ولتكن D مجموعة قيم هذه الدالة والتي تكون عليها الدالة $f(x)$ معرفة. عندئذٍ، إذا كان للدالة $f(x)$ دالة أصلية على المجموعة D، فإنه في المجموعة T تكون صحيحة العلاقة:

$$\int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (6.1)$$

البرهان: لتكن $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجموعة D. نفاضل في المجموعة T الدالة المركبة $F[\varphi(t)]$:

$$\{F[\varphi(t)]\}' = F'_x\ [\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$$

أي أن للدالة $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ دالة أصلية في المجموعة T هي الدالة $F[\varphi(t)]$. وعليه، فإن:

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C = [F(x) + C]_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)}$$

تسمى العلاقة (6.1) صيغة تغيير المتحول في التكامل غير المحدد.

مثال 6.9 : احسب التكامل $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx$.

الحل: نفرض $t = x - 1$ ، ومنه $dt = dx$. نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

ملحوظة 6.1: يكون من الأنسب أحياناً اختيار t كدالة في x بدلاً من اختيار x كدالة في t.

مثال 6.10 : احسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 2}}$.

الحل: نفرض $t = \sqrt{e^x + 2}$، أي $x = \ln(t^2 - 2)$. ومنه $dx = \frac{2t\,dt}{t^2 - 2}$.

نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int \frac{2\,dt}{t^2 - 2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{e^x + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{e^x + 2} + \sqrt{2}}\right| + C$$

مثال 6.11 : احسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k^2}}$.

الحل: نفرض $t = x + \sqrt{x^2 + k^2}$، ومنه $dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + k^2}} + 1\right)dx$. نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k^2}\right| + C$$

مثال 6.12: احسب التكامل $I = \int \sin^n x \cos x\,dx$.

الحل: نفرض $t = \sin x$ ومنه $dt = \cos x\,dx$ ، نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int t dt = \begin{cases} \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C & ; \quad n \neq -1 \\ \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C & ; \quad n = -1 \end{cases}$$

ملحوظة 6.2: إذا كانت العبارة المكاملة من النمط $f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)dx$ ، فإنه يمكن كتابتها كما يلي:

$$f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)dx = \int f(u)du$$

حيث يمكن أن يكون التكامل في الطرف الأيمن أسهل في الحساب، من التكامل في الطرف الأيسر.

مثال 6.13 : احسب التكاملات:

$$I = \int \frac{\sin x}{\sqrt{10 + 2\cos x}} dx \ , \ J = \int \tan x\,dx \ , \ K = \int cthx\,dx$$

الحل:

$$I = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{10 + 2\cos x}} = \int \frac{-d(10 + 2\cos x)}{2\sqrt{10 + 2\cos x}} = -\sqrt{10 + 2\cos x} + C$$

$$J = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$K = \int cthx dx = \int \frac{chx}{shx} dx = \int \frac{d(shx)}{shx} = \ln|shx| + C$$

6.4.3 طريقة التكامل بالتجزئة

تنتج هذه الطريقة من صيغة تفاضل جداء دالتين.

مبرهنة 6.4: لتكن $u(x)$ و $v(x)$ دالتين معرفتين وفضوليتين على المجموعة D، وليكن للدالة $v\cdot du$ دالة أصلية على D. عندئذٍ، يوجد للدالة $u\cdot dv$ دالة أصلية على D تعطى بالصيغة:

$$\int u dx = uv - \int v du \qquad (6.2)$$

البرهان: من صيغة تفاضل جداء دالتين:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \quad (6.3)$$

نجد:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

ولما كان للدالة $d(u \cdot v)$ دالة أصلية هي الدالة $(u \cdot v)$، على المجموعة D، وللدالة $v \cdot du$ دالة أصلية على D، من فرضيات المبرهنة، فإن للدالة $u \cdot dv$ دالة أصلية على D.

بمكاملة طرفي (6.3)، نجد صحة العلاقة (6.2).

تسمى العلاقة (6.2) دستور التكامل بالتجزئة.

مثال 6.14: احسب التكامل $I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$

الحل: نفرض $u = \sqrt{1-x^2}$ و $dv = dx$. ومنه $du = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v = x$.

نعوض في دستور المكاملة بالتجزئة:

$$I = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$I = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - I$$

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C_1 \implies I = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$$

مثال 6.15: احسب التكامل $I = \int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

الحل: نفرض $u = x$ و $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. ومنه $du = dx$ و $v = -\cot x$.

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = -x\cot x + \int \cot x\,dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$$= -x\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

مثال 6.16: احسب التكامل $I = \int \ln x\,dx$.

الحل: نفرض $u = \ln x$ و $dv = dx$. ومنه $du = \frac{dx}{x}$ و $v = x$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

مثال 6.17 : .حسب التكامل $I = \int x\sin x\,dx$.

الحل: نفرض $u = x$ و $dv = \sin x\,dx$. ومنه $du = dx$ و $v = -\cos x$.

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

مثال 6.18: احسب التكامل $I = \int \arctan x\,dx$.

الحل: بفرض $u = \arctan x$ و $dv = dx$. ومنه $du = \frac{dx}{1+x^2}$ و $v = x$.

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

ملحوظة 6.3 : إن اختيار u و dv عند استخدام دستور التكامل بالتجزئة مهم، فإذا كان الاختيار غير مناسب، فإننا قد نحصل على تكامل أعقد بكثير من التكامل بالمدروس.

مثال 6.19 : احسب التكامل: $I = \int e^{-x}\sin x\,dx$

الحل: نفرض $u = e^{-x}$ و $dv = \sin x\,dx$. ومنه $du = -e^{-x}dx$ و

$v = -\cos x$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = -e^{-x} - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

نحل التكامل الذي حصلنا عليه، أيضاً باستخدام دستور التكامل بالتجزئة، بفرض $u = e^{-x}$ و $dv = \cos x\,dx$. ومنه $du = -e^{-x}dx$ و $v = \sin x$. وعليه، فإن:

$$I = -e^{-x}\cos x - \left[e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx\right] = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - I$$

$$2I = -e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_1 \Rightarrow I = -\tfrac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$$

نعرض بعض التكاملات التي تحل بطريقة التجزئة:

إن الجزء الأكبر من التكاملات التي تحل بطريقة التجزئة تقسم لثلاث مجموعات:

لتكن $P_n(x)$ حدودية في x من الدرجة n، و a و b ثوابت.

1. التكاملات من النمط:

$$\int P_n(x)\cos bx\,dx \quad , \quad \int P_n(x)\sin bx\,dx \quad , \quad \int P_n(x)e^{ax}\,dx$$

لحل هذه التكاملات نختار $u(x) = P_n(x)$ وما تبقى في العبارة المكاملة نختاره مساوياً لـ dv ونطبق دستور التكامل بالتجزئة n مرة متتالية.

2. التكاملات من النمط:

$$\int P_n(x)\ln bx\,dx \ , \ \int P_n(x)\arcsin bx dx \ , \ \int P_n(x)\arccos bx dx \ ,$$
$$\int P_n(x)\arctan bx\,dx \ , \ \int P_n(x)arc\cot bx\,dx$$

لحل هذه التكاملات نختار $dv = P_n(x)dx$، وما تبقى في العبارة المكاملة مساوياً لـ u.

ونطبق دستور التكامل بالتجزئة.

3. التكاملات من النمط:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx \quad و \quad I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

نطبق دستور التكامل بالتجزئة مرتين متتاليتين، فنحصل على معادلة خطية في I. نوجد منها قيمة I، مع الإشارة إلى أن اختيار u و dv في هذه التكاملات غير مهم.

ويمكن بسهولة التحقق من صحة العلاقتين:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}\cos(bx+\gamma)+C$$

$$\int e^{ax} sibx\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}\cos(bx+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)+C$$

حيث إن الثابت γ يعطى بالعلاقتين:

$$\left\{\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \sin\gamma = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

ملحوظة 6.4: يمكن بسهولة التحقق أنه بعد تطبيق التكامل بالتجزئة n مرة متتالية لحل التكامل $\int e^{ax}P_n(x)dx$ ، تكون الدالة الأصلية عبارة عن جداء الدالة الأسية e^{ax} و $Q_n(x)$ حدودية في x من الدرجة n. وهي نفس درجة الحدودية الموجودة في العبارة المكاملة. أي

$$\int e^{ax}P_n(x)dx = e^{ax}Q_n(x)+C \qquad (6.4)$$

وعليه، لإيجاد الدالة الأصلية، نفرض أن الحدودية $Q_n(x)$ ذات أمثال غير معينة. لتعيين هذه الأمثال نشتق طرفي العلاقة (6.4) ، ونطابق بين الطرفين، فنجد:

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[P_n(x)-\frac{P_n'}{a}+\frac{P_n''(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n}\right]+C \qquad (6.5)$$

وبأسلوب مشابه، نتحقق من أن:

$$\int P_n(x)\cos bx\,dx = M_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx + C$$

$$\int P_n(x)\sin bx\,dx = S_n(x)\cos bx + T_n(x)\sin bx + C$$

حيث $T_n(x)$ و $S_n(x)$ و $Q_n(x)$ و $M_n(x)$ حدوديات في x من الدرجة n، نعينها بالاشتقاق والمطابقة، فنجد:

$$\int P_n(x)\cos bx\,dx = -\frac{\sin bx}{b}\left[P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{b^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{b^4} - \dots\right] +$$

$$+\frac{\cos bx}{b}\left[P_n'(x) - \frac{P_n^{(3)}(x)}{b^2} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{b^4} - \dots\right] + C \qquad (6.6)$$

و

$$\int P_n(x)\sin bx\,dx = -\frac{\cos bx}{b}\left[P_n(x) - \frac{P_n''(x)}{b^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{b^4} - \dots\right] +$$

$$+\frac{\sin bx}{b}\left[P_n'(x) - \frac{P_n^{(3)}(x)}{b^2} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{b^4} - \dots\right] + C \qquad (6.7)$$

مثال 6.20 : احسب التكامل $I = \int (x^3 - 2x)e^{2x}dx$

الحل: نعوض في العلاقة (6.5)، حيث $P_3(x) = x^3 - 2x$ و $a = 2$:

$$I = \frac{e^{2x}}{2}\left[(x^3 - 2x) - \frac{3x^2 - 2}{2} + \frac{3x^2 - 2}{2} + \frac{6x}{4} - \frac{6}{4}\right] + C$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{2x}(4x^3 - 6x^4 - 2x + 1) + C$$

مثال 6.21 : احسب التكامل $I = \int (x^2 + 3x + 5)\sin x\,dx$.

الحل: نعوض في العلاقة (6.7)، حيث $P_2(x) = x^2 + 3x + 5$ و $a = 1$

$$I = -(\cos x)[(x^2 + 3x + 5) - 2] + (\sin x)[(2x + 3)] + C$$

$$= -(x^2 + 3x + 3)\cos x + (2x + 3)\sin x + C$$

ملحوظة 6.5 : نضطر أحياناً، قبل البدء بحل التكامل بطريقة التجزئة، أن نجري تغييراً في المتحول، أو نقوم بتبسيط الدالة المكاملة.

مثال 6.22 : احسب التكامل $I = \int \cos(\ln 3x)\,dx$.

الحل: نفرض $\ln 3x = t$. أي $x = \frac{1}{3}e^t$. ومنه $dx = \frac{1}{3}e^t dt$. نعوض في التكامل

$$I = \frac{1}{3}\int e^t \cos t\,dt$$

نفرض $u = \cos t$ و $dv = e^t dt$، فيكون $du = -\sin t\,dt$ و $v = e^t$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = \frac{1}{3}e^t \cos t + \frac{1}{3}\int e^t \sin t\,dt$$

نفرض، مرة جديدة، $u = \sin t$ و $dv = e^t dt$، فيكون $du = \cos t\,dt$ و $v = e^t$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = \frac{1}{3}e^t \cos t + \frac{1}{3}e^t \sin t - \frac{1}{3}\int e^t \cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}e^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{3}I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}e^t(\cos t + \sin t) + C$$

مثال 6.23: احسب التكامل $I = \int \sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2\ln x]\frac{dx}{x^4}$.

الحل: نكتب التكامل بالشكل:

$$I = \int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) dx$$

نفرض $\frac{x^2+1}{x^2} = t$. ومنه $dt = \frac{-dx}{x^3}$. نعوض في التكامل، فنحصل على التكامل

$$I = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t} \ln t\,dt$$

نفرض $u = \ln t$ و $\sqrt{t}dt = dv$، فيكون $du = \frac{dt}{t}$ و $v = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \ln t - \frac{2}{3}\int \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t} dt\right] = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} \ln t + \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}\ln t + \frac{2}{9}t^{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^3}\left[-\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+\frac{2}{3}\right]+C$$

6.5 التكامل بالتدريج

هو تطبيق للتكامل بطريقة التجزئة، ويكون ذلك عندما يكون المطلوب إيجاد تكامل معطى بدلالة دليل $n \in \mathbb{N}$، حيث نستطيع إيجاد هذا التكامل بدلالة تكامل آخر من نفس النمط ولكن بدليلٍ أقل. ونقول عندئذٍ، إننا وجدنا دستوراً تدريجياً.

مثال 6.24 : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل

$$I_n = \int (x^2 - a^2)^n dx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

الحل: نكتب التكامل بالشكل:

$$I_n = \int (x^2 - a^2)(x^2 - a^2)^{n-1} dx = \int x(x^2 - a^2)^{n-1} x dx - a^2 \int (x^2 - a^2)^{n-1} dx$$

نفرض $u = x$ و $(x^2 - a^2)xdx = dv$، فيكون $du = dx$ و $v = \frac{1}{2n}(x^2 - a^2)^n$.

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I_n = \frac{1}{2n} x(x^2 - a^2)^n - \frac{1}{2n}\int (x^2 - a^2)dx - a^2 \int (x^2 - a^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = \frac{1}{2n} x(x^2 - a^2)^n - \frac{1}{2n} I_n - a^2 I_{n-1}$$

ومنه نجد:

$$I_n = \frac{1}{2n+1} x(x^2 - a^2)^n - \frac{2n}{2n+1} a^2 I_{n-1}$$

مثال 6.25 : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل $I_n = \int \sin^n x\, dx$.

الحل: نفرض $u = \sin^{n-1} x$ و $\sin x dx = dv$، فيكون

$du = (n-1)\sin^{n-2} x dx$ و $v = -\cos x$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

ومنه نجد:

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

مثال 6.26: استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$.

الحل: نكتب التكامل بالشكل:

$$I_n = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^n x} dx = \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx = I_{n-2} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx =$$

نفرض $u = \sin x$ و $dv = \frac{\sin x\, dx}{\cos^n x}$، فيكون $du = \cos x\, dx$ و

$v = \frac{1}{n-1}\cos^{1-n} x$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة

$$I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\sin x \cos^{n-1} x - \frac{1}{n-1}\int \cos^{2-n} x\, dx =$$

$$= I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\sin x \cos^{n-1} x - \frac{1}{n-1} I_{n-2}$$

ومنه نجد:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

مثال 6.27: استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

الحل: نفرض $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ و $dv = dx$. فيكون

$du = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1} dx$ و $v = x$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

ومنه نجد:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$$

6.6 تكامل الكسور العادية (المنطّقة)

نسمى الكسر $R(x)$ كسراً عادياً، إذا كان البسط والمقام حدوديتين في x، أي إذا كان من النمط:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

نسمي الكسر المنطق $R(x)$ كسراً نظامياً، إذا كانت درجة بسطه أقل تماماً من درجة مقامة وفيما عدا ذلك، يسمى الكسر $R(x)$ كسراً غير نظامي.

يمكن كتابة كل كسر غير نظامي على شكل كسر نظامي مضافاً إليه حدودية، وهي الجزء الصحيح الناتج عن تقسيم البسط على المقام.

فمثلاً: يمكن رد الكسر غير النظامي $R(x) = \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2}$ إلى كسر نظامي، بتقسيم بسطه على مقامه:

$$R(x) = \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} = (x^2 - 2x) + \frac{4x + 1}{x^2 + x + 2}$$

ولما كان تكامل الحدودية ليس صعباً، فإن تكامل الكسور المنطقّة يؤول دوماً لمكاملة كسور منطقّة نظامية. وسوف نرد الكسور المنطقّة النظامية إلى كسور بسيطة، قبل المكاملة.

6.6.1 تكامل الكسور البسيطة

الكسر البسيط هو كل كسر نظامي من أحد الأشكال:

$$\frac{A}{x-\alpha}\ ,\ \frac{A}{(x-\alpha)^n}\ ,\ \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\ ,\ \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n}\ ;\ n\geq 2$$

حيث $A,B,p,q,\alpha\in\mathbb{R}$، وليس لثلاثي الحدود $x^2+2px+q$ جذور حقيقية، أي $\Delta=4p^2-4q<0$.

إن مكاملة الكسرين البسيطين من النوعين الأول والثاني تتم بوساطة جدول التكاملات الشهيرة مباشرةً:

$$\int\frac{A\,dx}{x-\alpha}=A\int\frac{dx}{x-\alpha}=A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^n}=A\int(x-\alpha)^n d(x-\alpha)=\frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}}+C$$

أما مكاملة الكسرين البسيطين من النوعين الثالث والرابع، فهي أصعب قليلاً، وتتم بوساطة إتمام المقام لمربع كامل وإجراء تغيير في المتحول، كما يلي:

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2$$

نفرض $x+p=t$ و $h=q-p^2$، واضح أن $h>0$. ونتابع كما يلي:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx=\int\frac{At+B-Ap}{t^2+h}dt=A\int\frac{tdt}{t^2+h}+(B-Ap)\int\frac{dt}{t^2+h}=$$

$$=\tfrac{1}{2}A\ln|t^2+h|+\frac{(B-Ap)}{\sqrt{h}}\arctan\frac{t}{\sqrt{h}}+C$$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n}dx=A\int\frac{tdt}{(t^2+h)^n}+(B-Ap)\int\frac{dt}{(t^2+h)^n}=$$

$$=\tfrac{1}{2}A\int(t^2+h)^{-n}d(t^2+h)+(B-Ap)\int\frac{dt}{(t^2+h)^n}=$$

$$= \frac{A}{2(1-n)(t^2+h)^{n-1}} + (B-Ap)\int \frac{dt}{(t^2+h)^n}$$

حيث يحل التكامل المتبقي في الطرف الأيمن بالتدريج، كما في المثال 6.26.

مثال 6.28: احسب التكامل $I = \int \frac{5x+3}{x^4+2x^2+1}dx$.

الحل: الكسر المُكامل هو كسر بسيط من النوع الرابع:

$$I = \int \frac{5x+3}{(x^2+1)^2}dx = 5\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-5}{2(x^2+1)^2} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} - 3\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-5}{2(x^2+1)} + 3\arctan x - 3\int \frac{x}{(x^2+1)^2}x\,dx$$

لحل التكامل الأخير، نفرض $u = x$ و $dv = \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$. فيكون $du = dx$ و $v = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$. نعوض في دستور التكامل بالتجزئة، فنجد

$$I = \frac{-5}{2(x^2+1)} + 3\arctan x + \frac{3x}{2(x^2+1)} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$I = \frac{3x-5}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\arctan x + C$$

6.6.2 تفريق الكسور المنطقة إلى كسور بسيطة

يمكن تفريق كل كسر نظامي منطقّ إلى كسور بسيطة كما يلي:

ليكن لدينا الكسر المنطق النظامي $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

وفق النظرية الأساسية في الجبر، يوجد m جذر للمعادلة $Q_m(x) = 0$، حقيقي أو عقدي،

بسيط أو مضاعف.

عند تحليل الحدودية $Q_m(x)$ إلى مضاريب نلاحظ ما يلي:

1. إذا كان α جذراً بسيطاً للحدودية $Q_m(x)$، فإن هذه الحدودية تقبل القسمة على المقدار $(\alpha - x)$ دون باق، أي $Q_m(x) = (x-\alpha)Q_{m-1}(x)$.

2. إذا كان α جذراً مكرراً k مرة للحدودية $Q_m(x)$، فإن هذه الحدودية تقبل القسمة على المقدار $(x-\alpha)^k$ دون باق، أي $Q_m(x) = (x-\alpha)^k Q_{m-k}(x)$.

3. إذا كان العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$ جذراً عقدياً للحدودية $Q_m(x)$، فإن مرافقه $\bar{z} = \alpha - i\beta$ أيضاً جذر لهذه الحدودية، وهي تقبل القسمة دون باق على المقدار:

$$(x-\bar{z})(x-z) = (x-\alpha+i\beta)(x-\alpha-i\beta) = x^2 + 2px + q$$

حيث: $q = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ و $p = -\alpha$ و $\Delta = 4(p^2 - q) < 0$، ويكون عندئذٍ:

$$Q_m(x) = (x^2 + 2px + q)Q_{m-2}(x)$$

4. إذا كان العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$ جذراً عقدياً مكرراً k مرة للحدودية $Q_m(x)$، فإن مرافقه $\bar{z} = \alpha - i\beta$ جذر عقدي مكرر k مرة لهذه الحدودية. وهي تقبل القسمة دون باقٍ على المقدار $(x-\bar{z})^k(x-z)^k = (x^2 + 2px + q)^k$، حيث:

$q = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ و $p = -\alpha$ و $\Delta = 4(p^2 - q) < 0$. ويكون عندئذٍ:

$$Q_m(x) = (x^2 + 2px + q)^k Q_{m-2k}(x)$$

وهكذا يمكن تحليل الحدودية $Q_m(x)$ لمضاريب أولية من الأشكال التالية $(x-\alpha)$ و $(x-\alpha)^k$ و $x^2 + 2px + q$ و $(x^2 + 2px + q)^k$، حيث مميز ثلاثي الحدود سالب.

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة:

مبرهنة 6.6 : يمكن تفريق الكسر المنطق النظامي $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$، حيث:

$Q_m(x)=(x-\alpha)^k\cdot(x-\beta)^r\cdot(x^2+2px+q)^s$; $\alpha,\beta,q,r\in\mathbb{R}$ و $m=k+r+2s$

لمجموع كسور بسيطة بأسلوبٍ وحيد، كما يلي:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{(x-\beta)}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+$$
$$+\frac{B_r}{(x-\beta)^r}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+2px+q)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+2px+q)^s} \qquad (6.8)$$

حيث $N_1,N_2,\ldots,N_s$ و $M_1,M_2,\ldots,M_s$ و $B_1,B_2,\ldots,B_k$ و

$A_1,A_2,\ldots,A_k$ أعداد حقيقية يجب تعيينها.

ملحوظة 6.6: تبقى العلاقة (6.8) صحيحة، من أجل عددٍ أكبر من العوامل الأولية للحدودية $Q_m(x)$.

لتعيين الثوابت في العلاقة (6.8) نضرب طرفيها بالحدودية $Q_m(x)$ ونطابق بين البسطين.

ملحوظة 6.7: توجد طرائق خاصة لإيجاد الثوابت في العلاقة (6.8)، تُدرس في الجبر الخطي.

مثال 6.29: فرق الكسر $\frac{3x^2}{x^3-8}$ إلى كسور بسيطة.

الحل: لما كان $x^3-8=(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$، فإن الكسر يكتب كما يلي:

$$\frac{3x^2}{x^3-8}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{Bx+D}{(x^2+2x+4)}$$

نضرب الطرفين بالحدودية (x^3-8) ونطابق بين البسطين:

$$3x^2=A(x^2+2x+4)+(Bx+D)\cdot(x-2)$$

$x^2:3=A+B$ ، $x^1:0=2A+D-2B$ و $x^0:0=4A-2D$

بحل هذه المعادلات، نجد: $D=2$ و $B=2$ و $A=1$. وعليه، يُكتب الكسر كما يلي:

$$\frac{3x^2}{x^3-8}=\frac{1}{x-2}+\frac{2(x+1)}{x^2+2x+4}$$

مثال 6.30 : فرق الكسر $\dfrac{7x^2+6x+3}{x^4-1}$ إلى كسور بسيطة.

الحل: لما كان $x^4-1=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$، فإن الكسر يُكتب كما يلي:

$$\frac{7x^2+6x+3}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

نضرب طرفي المساواة بالحدودية (x^4-1)، ونطابق بين الطرفين، فنجد:

$E=2$ و $D=-3$ و $B=-1$ و $A=4$. وعليه، يكتب الكسر كما يلي:

$$\frac{7x^2+6x+3}{x^4-1}=\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{-3x+2}{x^2+1}$$

مثال 6.31 : فرق الكسر $\dfrac{x^3-2x+4}{x^5+4x^3+4x}$ إلى كسور بسيطة.

الحل: لما كان $x^5+4x^3+4x=x(x^2+2)^2$، فإن:

$$\frac{x^3-2x+4}{x^5+4x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

نضرب الطرفين بالحدودية $x(x^2+2)^2$، ونطابق بين الطرفين، فنجد:

$E=-4$ و $D=-2$ و $C=1$ و $B=-1$ و $A=1$. وعليه، فإن:

$$\frac{x^3-2x+4}{x^5+4x^3+4x}=\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+2}+\frac{-2x-4}{(x^2+2)^2}$$

6.6.3 قاعدة مكاملة الكسور العادية

لمكاملة الكسور العادية نتبع الخطوات التالية:

1. إذا كان الكسر العادي $R(x)=\dfrac{H_k(x)}{Q_m(x)}$ غير نظامي ($m\le k$)، نقسم البسط على

المقام، فيصبح كما يلي: $R(x)=W(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$، حيث إن الكسر $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ نظامي ($m>k$) و $w(x)$ الجزء الصحيح (حدودية).

2. نفرق الكسر النظامي $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ إلى كسور بسيطة.

3. نكامل الكسر $R(x)$ الذي أصبح، مجموع حدودية وكسور بسيطة.

مثال 6.32 : احسب التكامل $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

الحل: الكسر المكامل عادي وغير نظامي، نخرج الجزء الصحيح، ونفرق الكسر النظامي الناتج:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+2}$$

نضرب الطرفين بالحدودية (x^3-4x)، ونطابق بين الطرفين، فنجد:

$D=-3$ و $B=5$ و $A=2$. وعليه، فإن:

$$I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int(x^2+x+4)dx+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$$

مثال 6.33 : احسب التكامل $I=\int\frac{dx}{x^4+1}$.

الحل: نفرق الكسر إلى كسور بسيطة:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

نضرب الطرفين بالحدودية (x^4+1)، ونطابق بين الطرفين، فنجد:

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad و \quad B=\frac{1}{2} \quad و \quad D=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad و \quad E=\frac{1}{2}$$

وعليه، فإن:

$$I=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx$$

نحسب كل تكامل على حدة. لحل التكامل الأول نفرض $x-\frac{1}{\sqrt{2}}=t$، فنجد

$$J=\int\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=\int\frac{-x+\sqrt{2}}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}dx=$$

$$=-\int\frac{tdt}{(t^2+\frac{1}{2})}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{(t^2+\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{1}{2}\right|+\arctan\sqrt{2}t+C_1=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)+C_1$$

وبأسلوبٍ مشابه، نجد:

$$K=\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)+C_2$$

وعليه، فإن:

$$I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}x-1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)\right)+C$$

ملحوظة 6.8: قبل البدء بعملية مكاملة الكسور العادية، نتحقق فيما إذا كانت توجد عوامل مشتركة في البسط والمقام، لاختصارها مع بعضها بعضاً، أو فيما إذا كان البسط مشتقاً للمقام، فنحصل على تكامل من جدول التكاملات الشهيرة.

مثال 6.34 : احسب التكامل $I=\int\frac{2x^3+6x^2+6x}{x^4+4x^3+6x^2+2}dx$.

الحل: بسهولة نجد

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^4+4x^3+6x^2+2)}{x^4+4x^3+6x^2+2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^4+4x^3+6x^2+2\right| + C$$

6.7 تكامل الدوال المثلثية

الدوال العادية: نرمز بـ $R(u,v,w,\ldots)$ لدالة عادية في المتغيرات u و v و w. أي للدالة التي تحوي بالإضافة للمتغيرات u و v و w أعداداً حقيقية، وبحيث يطبق عليها فقط العمليات الحسابية الأربع (الجمع والطرح والضرب والقسمة).

فمثلاً: $R(u,v) = \dfrac{2u^2 - \sqrt{3}v}{\pi u + 2uv + 1}$ دالة عادية في u و v.

وإذا كانت المتغيرات هي أيضاً دوال: $u = \varphi(x)$ و $v = \psi(x)$ و...، فإن الدالة $R = [\varphi(x), \psi(x), \ldots]$ هي دالة عادية في الدوال $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ و....

فمثلاً، الدالة $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{(x^2-1)^2}}{x^3 + 3\sqrt{x^2-1}}$ هي دالة عادية في x و $\sqrt{x^2-1}$.

ونرمز لها بالرمز $f(x) = R(x, \sqrt{x^2-1})$.

والدالة $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^3 x + 2\cos x + 1}$ هي دالة عادية في $\cos x$ و $\sin x$ ونرمز لها بالرمز $f(x) = R(\cos x, \sin x)$.

6.7.1 التكاملات من النمط

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx \qquad (6.9)$$

إن حساب التكاملات من هذا النمط ممكن بعدة طرق. وتستخدم أحياناً القوانين المثلثية لتبسيط التكامل، أو جعل عبارة التكامل على شكل تفاضل لتابع ما، أو عن طريق المكاملة بالتجزئة.

مثال 6.35: احسب التكاملات:

$$1.\ I=\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int\tan^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int\tan^2 x\,d(\tan x)+\tan x=\tfrac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$$

$$2.\ J=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d(\frac{1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)\cos(\frac{1}{2}x)}=\int\frac{d(\frac{1}{2}x)}{\tan(\frac{1}{2}x)\cos^2(\frac{1}{2}x)}=$$

$$=\ln\left|\tan(\tfrac{1}{2}x)\right|+C$$

$$3.\ K=\int\cos^2 x dx=\tfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\tfrac{1}{2}\sin 2x\right]+C$$

$$4.\ H=\int\tan^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\tan x-x+C$$

مثال 6.36: احسب التكاملات:

$$1.\ I=\int\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int(\cos\tfrac{x}{2}+\sin\tfrac{x}{2})dx=2\sin\tfrac{x}{2}-2\cos\tfrac{x}{2}+C$$

$$2.\ J=\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int\sqrt{2}\sin(\tfrac{1}{4}\pi-x)dx=\sqrt{2}\cos(\tfrac{1}{4}\pi-x)+C$$

$$3.\ K=\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\frac{\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}}dx=$$

$$=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)}{\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C$$

نلاحظ أنه لا توجد قواعد عامة في الحساب التكاملي، فالمكاملة يمكن إجراؤها بعدة طرائق، حتى إنه عند وجود طرائق نظرية لحساب التكامل، يظهر أحياناً أنها ليست الطرائق الأفضل.

التحويل العام

لحساب الكامل من النمط (6.9)، نستخدم التحويل $t=\tan(\frac{1}{2}x)$ وهو التحويل العام لحل هذا النوع من التكاملات، وهو يردها إلى تكاملات لدوال منطّقة في المتغير t.

$$\sin x = \frac{2\sin(\frac{1}{2}x)\cos(\frac{1}{2}x)}{\sin^2(\frac{1}{2}x)+\cos^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{2\tan(\frac{1}{2}x)}{1+\tan^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{2\cos^2(\frac{1}{2}x)-\sin^2(\frac{1}{2}x)}{\cos^2(\frac{1}{2}x)+\sin^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{1-\tan^2(\frac{1}{2}x)}{1+\tan^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\arctan t \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

نعوض في التكامل (6.9):

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

مثال 6.37: احسب التكامل $I = \int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$.

الحل: نفرض $t = \tan(\frac{1}{2}x)$، ونعوض في التكامل:

$$I = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+8\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}\right]} = \int \frac{2dt}{t^2+2t+7} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{4}\right)+C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan(\frac{1}{2}x)+1}{4}\right)+C$$

ملحوظة 6.8 : مع أن التحويل العام $t = \tan(\frac{1}{2}x)$ يسمح دائماً بحل التكاملات من النمط (6.9)، إلا أنه لا يستخدم دائماً، لأنه يقود غالباً لتكامل دوال منطقة صعبة. فهو يستخدم خصوصاً لحل التكاملات من النمط:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}$$

وتوجد الكثير من الحالات نستخدم من أجلها تحويلات أكثر ملائمة.

حالات خاصة:

1. إذا كانت الدالة المكاملة فردية في $\sin x$، أي

$$R(\cos x,-\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$$

فإن التحويل الأنسب هو $t=\cos x$.

2. إذا كانت الدالة المكاملة فردية في $\cos x$، أي:

$$R(-\cos x,\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$$

فإن التحويل الأنسب هو $t=\sin x$.

3. إذا كان الدالة المكاملة زوجية في $\cos x$ و $\sin x$ معاً، أي:

$$R(-\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$$

فإن التحويل الأنسب $t=\tan x$.

مثال 6.38 : احسب التكامل $I=\int\frac{\sin x}{4+\cos^2 x}dx$.

الحل: الدالة المكاملة فرديـة في $\sin x$. لـذا فـإن التحويـل المناسـب $t=\cos x$. نعـوض في التكامل I، فنجد:

$$I=\int\frac{-dt}{4+t^2}=-\tfrac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}t)+C=-\tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{1}{2}\cos x\right)+C$$

مثال 6.39 : احسب التكامل $I=\int\frac{dx}{\cos x}$.

الحل: الدالة المكاملة فردية في $\cos x$. لـذا، فـإن التحويـل المناسـب $t=\sin x$. نعـوض في التكامل I، فنجد:

$$I=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

مثال 6.40 : احسب التكامل $I = \int \tan^5 x dx$

الحل: الدالة المكاملة زوجية في $\cos x$ و $\sin x$ معاً، فالتحويل المناسب $t = \tan x$، ومنه $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x) + C$$

مثال 6.41 : احسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

الحل: الدالة المكاملة زوجية في $\cos x$ و $\sin x$ معاً، ولكن التحويل $t = \tan x$ يؤدي لتكامل منطّق صعب. لذا نستخدم القوانين المثلثية لتبسيط الدالة المكاملة:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x)$$

وهذه الدالة زوجية في $\cos 2x$. فالتحويل الأنسب هنا $t = \tan 2x$، ومنه $dx = \frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2}$. نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int \frac{dx}{\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x)} = 4\int \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{2(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{4+t^2} =$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{2}t\right) + C + \arctan\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right) + C$$

6.7.2 التكاملات من النمط: $\int \cos^m x \sin^n x dx \quad ; \quad m,n, \in \mathbb{N}$

نميز الحالتين:

1. أحد العددين m أو n على الأقل فردي: نخرج من القوة الفردية مضروباً واحداً، ونعبّر عما بقي في الدالة المكاملة، باستخدام العلاقة الشهيرة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$، فنحصل على تكامل شهير.

2. كلا العددين m و n زوجي: نستخدم علاقات تخفيض الدرجة:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \tfrac{1}{2}\sin 2x$$

مثال 6.42: احسب التكامل $I = \int \sin^5 x\,dx$.

الحل:

$$I = \int \sin^4 x \sin x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d(\cos x) = -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C$$

مثال 6.43 : احسب التكامل $I = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$

الحل:

$$I = \int \sin^2 x(\sin x \cos x)^2 dx = \int \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\tfrac{1}{4}\sin^2 2x\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{8}\int (\sin^2 2x - \sin^2 2x\cos 2x)dx = \tfrac{1}{8}\int \tfrac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx -$$

$$-\tfrac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \tfrac{1}{16}\left[x - \tfrac{1}{4}\sin 4x - \tfrac{1}{3}\sin^3 2x\right] + C$$

6.7.3 التكاملات من النمط:

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x\,dx\ ,\quad \int \cos \alpha x \cos \beta x\,dx\ ,$$

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x\,dx\ ;\ \alpha, \beta, \in \mathbb{R}^*$$

نحل هذا النوع من التكاملات، بتجزئة الدالة المكاملة لمجموع دالتين، وفق إحدى العلاقات:

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}[-\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x]$$

مثال 6.44: احسب التكامل $I = \int \sin 5x\cos 3x\,dx$.

الحل:

$$I = \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

هناك طرائق خاصة لحل التكاملات المثلثية، نعرض بعضها من خلال الأمثلة:

مثال 6.45 : احسب التكامل $I = \int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx$.

الحل: نعبّر عن بسط الدالة المكاملة كعبارة خطية في المقام ومشتق المقام:

$$\sin x - 3\cos x \equiv A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x)$$

حيث A و B ثوابت يجب تعيينها. بالمطابقة بين الطرفين، نجد:

$$1 = 4A - 5B$$

$$-3 = 5A + 4B \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{11}{41} \text{ و } B = -\frac{17}{41}$$

وعليه، فإن التكامل يجزأ لتكاملين:

$$I = -\frac{11}{41}\int\frac{4\sin x + 5\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx - \frac{17}{41}\int\frac{d(4\sin x + 5\cos x)}{4\sin x + 5\cos x} =$$

$$= -\frac{11}{41}x - \frac{17}{41}\ln|4\sin x + 5\cos x| + C$$

مثال 6.46: احسب التكامل $I = \int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2}dx$.

الحل: نعبّر عن بسط الدالة المكاملة، كعبارة خطية في المقام ومشتق المقام:

$$2\sin x + \cos x - 1 \equiv A(\sin x - \cos x + 2) + B(\cos x + \sin x) + D$$

حيث A و B و D ثوابت يجب تعيينها. بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= A + B \\ -1 &= 2A + D \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \tfrac{1}{2} \text{ و } B = \tfrac{3}{2} \text{ و } D = -2$$

وعليه، فإن التكامل يُجزأ لثلاثة تكاملات:

$$I = \tfrac{1}{2}\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x + 2}\,dx + \tfrac{3}{2}\int \frac{d(\sin x - \cos x + 2)}{\sin x - \cos x + 2} - 2\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| + J$$

$$J = -2\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = -4\int \frac{d(\tan \tfrac{1}{2}x)}{3\tan^2 \tfrac{1}{2}x + 2\tan \tfrac{1}{2}x + 1} =$$

$$= -2\sqrt{2}\arctan[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3\tan(\tfrac{1}{2}x) + 1)] + C_1$$

ومنه:

$$I = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x + 2| - 2\sqrt{2}\arctan[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3\tan(\tfrac{1}{2}x) + 1)] + C$$

مثال 6.47 : احسب التكامل:

$$I = \int \frac{2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x}{\sin x - 2\cos x}\,dx$$

الحل: نُعبّر عن بسط الدالة المكاملة، كعبارة في المقام، كما يلي:

$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x \equiv (A\sin x + B\cos x)(\sin x - 2\cos x) + \\ + D(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

حيث A و B وD ثوابت يجب تعيينها. بالمطابقة بين الطرفين، نجد:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= A + C \\ 3 &= B - 2A \\ 5 &= -2B + D \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -\tfrac{9}{5} \text{ و } B = -\tfrac{3}{5} \text{ و } D = \tfrac{19}{5}$$

وعليه، فإن التكامل I، يجزأ لتكاملين:

$$I = \int(-\frac{9}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x)\,dx + \frac{19}{5}\int\frac{dx}{\sin x - 2\cos x} =$$

$$= \frac{9}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + \frac{19}{5}\int\frac{2d(\tan\frac{1}{2}x)}{2\tan^2(\frac{1}{2}x) + 2\tan(\frac{1}{2}x) - 2} =$$

$$= \frac{9}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + \frac{19}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\tan(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\tan(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C$$

6.8 تكامل الدوال القطعية والأسية

$$\int R(chx, shx)dx \quad \text{و} \quad \int R(e^x)dx$$

يمكن حل تكاملات الدوال القطعية، تماماً كما هي تكاملات الدوال المثلثية، أي باستخدام تحويلات مناسبة، أو باستخدام القوانين القطعية الشهيرة. ولكن، لما كانت الدوال القطعية تُعرّف بوساطة الدالة الأساسية e^x، فإن تكامل الدوال القطعية يؤول إلى تكامل دوال أسية. وباستخدام التحويل $t = e^x$، تُرد الدوال الأسية إلى دوال عادية في t.

مثال 6.48 : احسب التكاملات: $J = \int sh2xchxdx$ و $I = \int\frac{dx}{shxchx}$.

الحل:

$$I = \int\frac{dx}{ch^2x\frac{shx}{chx}} = \int\frac{dx}{ch^2xthx} = \int\frac{d(thx)}{thx} = \ln|thx| + C$$

$$J = \int\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})\cdot\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,dx = \frac{1}{4}\int(e^{3x} - e^{-3x} + e^x - e^{-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + e^x + e^{-x}\right] + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{6}(e^{3x} + e^{-3x}) + C$$

$$= \frac{1}{2}chx + \frac{1}{6}ch3x + C$$

مثال 6.49: احسب التكامل: $I = \int\frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}$.

الحل: لحل التكامل نفرض $t = e^x$، فيكون:

$$I = \int\frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$$

6.9 تكامل بعض الدوال غير العادية (غير المنطقة- الصماء)

6.9.1 التكاملات من النمط:

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right]dx$$

حيث $ad-cd\neq 0$ و $r_1,r_2,\ldots,r_n\in\mathbb{Q}$.

تُرد الدالة المكاملة، غير العادية في x، إلى دالة عادية في t، باستخدام التحويل $t^s=\frac{ax+b}{cx+d}$، حيث s المقام المشترك للأعداد $r_1,r_2,\ldots,r_n$.

مثال 6.50 : احسب التكاملات $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$ و $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

الحل: لحل التكامل I، نفرض $\frac{1+x}{1-x}=t^2$، فنجد $dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$ و

$1-x=\frac{2}{t^2+1}$. وعليه، فإن

$$I=\int\frac{2t^2dt}{t^2+1}=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2t-2\arctan t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$$

ولحل التكامل J، نفرض $x=t^6$. ومنه $dx=6t^5dt$، فنجد:

$$J=\int\frac{6+t^5}{t^2+t^3}dt=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\left[\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right]+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$$

6.9.2 التكاملات من النمط

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (6.10)$$

حيث $a\neq 0$، ومميز ثلاثي الحدود ax^2+bx+c غير صفري.

يمكن أن يحل هذا التكامل باستخدام تحويلات اولر:

أ. إذا كان $a>0$، التحويل المناسب $\sqrt{ax^2+bx+c}=\mp tx\mp x\sqrt{a}$.

ب. إذا كان $a<0$ و $c>0$، التحويل المناسب $\sqrt{ax^2+bx+c}=\mp tx\mp\sqrt{c}$.

ج. إذا كان $a<0$، وكان لثلاثي الحدود المجذور، جذران حقيقيان مختلفان x_1 و x_2، أي: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

نختار التحويل $\sqrt{ax^2+bx+c}=\mp(x-x_1)$، حيث x أحد الجذرين x_1 أو x_2. أما إذا كان لثلاثي الحدود المجذور جذر مضاعف، أي $\Delta=0$، فإن الدالة المكاملة تصبح دالة عادية وليست غير عادية.

ملحوظة 6.9 : إن الإشارات في هذه التحويلات اختيارية.

مثال 6.51: احسب التكاملات:

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\ ,\ J=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}\ ,\ K=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{3x-x^2-2}}$$

الحل: لحل التكامل I، نفرض $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$. ومنه

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1}\quad\text{و}\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt$$

وعليه، فإن

$$I=2\int\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)}dt$$

وباستخدام تفريق الكسور، نجد:

$$2\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)}=\frac{2}{t}-\frac{3}{2t+1}-\frac{3}{(2t+1)^2}$$

ومنه:

$$I=\int\frac{2}{t}dt-3\int\frac{dt}{2t+1}-3\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+C=$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+$$

$$+\frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})}+C$$

لحل التكامل J، نفرض $\sqrt{1+x-x^2}=tx-1$. ومنه

$$\sqrt{1+x-x^2}=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}\ ,\quad x=\frac{1+2t}{t^2+1}\ ,\quad dx=\frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)}dt$$

وعليه، فإن

$$J=-2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2}=-2\arctan(t+1)+C=-2\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x}\right)+C$$

لحل التكامل K، نفرض $\sqrt{3x-x^2-2}=\sqrt{+(x-2)(1-x)}=t(x-2)$. ومنه

$$\sqrt{3x-x^2-2}=\frac{t}{t^2+1}\ ,\quad x=\frac{2t^2+1}{t^2+1}\ ,\quad dx=\frac{2tdt}{(t^2+1)^2}$$

وعليه، فإن:

$$K=2\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}+C=-\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}+C$$

ملحوظة 6.10: إن استخدام تحويلات أولر لحل التكاملات من النمط (6.10) يقود أحياناً إلى تكاملات ذات أشكال غير بسيطة. لذلك توجد طرائق لحل أشكال خاصة، من هذه التكاملات:

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ ,\quad I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I_3=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\ ,\quad I_4=\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث $P_n(x)$ حدودية في x من الدرجة n.

لحل التكامل I_1 نتمم ثلاثي الحدود المجذور لمربع كامل:

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})\right]=a(t^2\mp k^2)$$

حيث $t=x+\frac{b}{2a}$ و $k^2=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$، في الحالة $\frac{c}{a}>\frac{b^2}{4a^2}$. أو $k^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$، في الحالة $\frac{c}{a}<\frac{b^2}{4a^2}$. وعليه، فإن التكامل I_1 يصبح تكاملاً شهيراً:

$$I_1=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\mp k^2}}$$

لحل التكامل I_2، نعزل من بسط الدالة المكاملة $2ax+b$، وهو مشتق ثلاثي الحدود المجذور فنحصل على مجموع تكاملين:

$$I_2=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{Ab}{2a})I_1$$

ويرد التكامل I_3 إلى التكامل من النمط I_1، بإجراء تغيير في المتحول: $t=\frac{1}{x-\alpha}$.

أما التكامل I_4، فيُحل باستخدام صيغة استروغرادسكي[1]:

$$I_4=\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\quad(6.11)$$

حيث $P_{n-1}(x)$ حدودية في x، من الدرجة $n-1$ ذات أمثال غير معينة و k ثابت غير معين.

لتعيين هذه الثوابت، نشتق طرفي العلاقة (6.11)، ونضرب الطرفين بالجذر $\sqrt{ax^2+bx+c}$، ومن ثم نطابق بين الطرفين.

مثال 6.52: احسب التكامل $I=\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

الحل: نعزل من البسط $(2x+2)$:

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+x)}{\sqrt{x^2+2x+2}}-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

مثال 6.53: حل التكامل $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

الحل: نفرض $t=\frac{1}{x-1}$، ومنه $dt=\frac{-dx}{(x-1)^2}$. نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I=\int\frac{-dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}(t-1)+C=$$

$$=-\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-x}{x-1}\right)\right]+C$$

[1] ميخائيل فاسيليفتش استروغرادسكي (1801-1862) عالم رياضيات روسي.

مثال 6.54 : احسب التكامل $I = \int \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx$.

الحل: من العلاقة (6.11)، نجد:

$$I = (Ax + B)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

نشتق الطرفين:

$$\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = A\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{(Ax + B)(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

نضرب الطرفين بالجذر $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$:

$$x^2 - x - 1 \equiv A(x^2 + 2x + 2) + (Ax + B)(x + 1) + k$$

نطابق بين الطرفين:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= A + A \\ -1 &= 2A + A + B \\ -1 &= 2A + B + k \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \tfrac{1}{2} \text{ و } B = -\tfrac{5}{2} \text{ و } k = \tfrac{1}{2}$$

ومنه فإن

$$I = \tfrac{1}{2}(x - 5)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - 5)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d(x + 1)}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - 5)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \tfrac{1}{2}\ln\left|(x + 1) + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C$$

ملحوظة 6.11 : يمكن حل التكاملات من النمط (6.10)، باستخدام التعويضات المثلثية أو القطعية، وذلك باتمام ثلاثي الحدود المجذور لمربع كامل، فيصبح من النمط $(u^2 \mp k^2)$. وعليه، نميز الحالات:

$$I_1 = \int R(u, \sqrt{k^2 - u^2})\,du \text{ و } I_2 = \int R(u, \sqrt{k^2 + u^2})\,du$$

$$I_3 = \int R(u, \sqrt{u^2 - k^2})\,du$$

لحل التكامل I_1 ، نفرض $u = k\sin t$ أو $u = k\cos t$ أو $u = k\,tht$ أو $u = \frac{k}{cht}$.

ولحل التكامل I_2، نفرض $u = k\tan t$ أو $u = k\cot t$ أو $u = k\,sht$

ولحل التكامل I_3، نفرض $u = \frac{k}{\cos t}$ أو $u = \frac{k}{\sin t}$ أو $u = k\,cht$.

ونحصل في الحالات الثلاث على تكامل دوال منطقة في $\cos t$ أو $\sin t$ أو cht أو sht.

مثال 6.55 : احسب التكاملين $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$ و $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

الحل: لحل التكامل I، نفرض $x = 2\tan t$، ومنه $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$. نعوض في التكامل I، فنجد:

$$I = \int \frac{2dt/\cos^2 t}{4^4\tan^4 t \cdot \frac{2}{\cos t}} = \frac{1}{256}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{256}\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}d(\sin t) =$$

$$= \frac{1}{256}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^4 t} - \frac{1}{256}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{(768)\sin^4 t} + \frac{1}{(256)\sin t} + C =$$

$$= \frac{1}{256}\left[-\frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right] + C$$

لحل التكامل J، نفرض $x = \frac{1}{\cos t}$. ومنه $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$. نعوض في التكامل J، فنجد:

$$J = \int \frac{\sin t\cos t dt}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} = \int dt = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C$$

6.9.3 التكاملات من النمط $\int x^m(a+bx)^p dx$ ،

حيث $m,n,p \in \mathbb{Q}$ و $a,b \in \mathbb{R}$:

يُسمى هذا التكامل تكامل ثنائي الحد التفاضلي. ويُعبر عن هذا التكامل بدلالة دوال أولية، فقط في ثلاث حالات:

أ. إذا كان $p \in \mathbb{Z}$، فإن التحويل المناسب $x = t^k$. حيث k المقام المشترك للعددين m و n.

ولقد برهن تشيبتشيف[1]، أنه في **الحالات الثنائية لا يمكن التعبير** عن تكامل ثنائي الحد التفاضلي بدلالة دوال أولية.

ب. إذا كان $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$، فإن التحويل المناسب هو $t^s = a + bx^n$ حيث s مقام العدد p.

جـ. إذا كان $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ ولكن $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$، فإن التحويل المناسب هو $t^s = ax^{-n} + b$، حيث s مقام العدد p.

مثال 6.56: احسب التكاملات:

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x}+2)^2}\,dx \quad , \quad J = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad , \quad K = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

الحل: في التكامل I نلاحظ أن $m = \frac{1}{4}$ و $n = \frac{1}{2}$ و $p = -2 \in \mathbb{Z}$، فالتحويل المناسب $t^4 = x$. ومنه $dx = 4t^3dt$. وعليه، فإن:

$$I = \int \frac{4t^4 dt}{(t^2+2)^2}$$

لحل هذا التكامل، نفرض $t = \sqrt{2}\tan z$، فنجد

$$I = 4\int \frac{4\tan^4 z}{4(1+\tan^2 z)} \cdot \frac{\sqrt{2}dz}{\cos^2 z} =$$
$$= 4\sqrt{2}\int \tan^4 z dz = 4\sqrt{2}\int \tan^2 z(\tan^2 z + 1 - 1)dz =$$
$$= 4\sqrt{2}\int \tan^2 d(\tan z) - 4\sqrt{2}\int \tan^2 z dz =$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\tan^3 z - 4\sqrt{2}\int d(\tan z) + 4\sqrt{2}\int dz =$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\tan^3 z - 4\sqrt{2}\int (\tan^2 z + 1 - 1)dz =$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\tan^3 z - 4\sqrt{2}\tan z + 4\sqrt{2}z + C =$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}t^3 - 4\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}t + 4\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}t + C =$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{4}} + C$$

في التكامل J، نلاحظ أن $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ و $m = -\frac{1}{2}$ و $n = \frac{1}{4}$. ولكن

---

[1] بافنوتي لفوفيتش تشيبتشيف (1894- 1947) عالم رياضيات روسي

$\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$، فالتحويل المناسب $x = (t^3-1)^{\frac{1}{3}}$، ومنه $dx = 12t^2(t^3-1)^3$. وعليه فإن:

$$J = \int (t^3-1)^{-2} \cdot t \cdot 12(t^3-1)^3 dt = 12\int t^3(t^3-1)dt = 12\int (t^6 - t^3)dt -$$
$$= 12\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{4}t^4\right) + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C$$

في التكامل K، نلاحظ أن $p = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ و $m = -2$ و $n = 2$ و $\frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ولكن $p = -2 \in \mathbb{Z}$ ، فالتحويل المناسب $x^{-2} + 1 = t^2$، ومنه $x = (t^2-1)^{-1/2}$ و $dx = -t(t^2-1)^{-3/2}dt$. وعليه، فإن:

$$K = -\int (t^2-1)\left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} dt = -\int \frac{t^2-1}{t^2} dt =$$
$$= -\int (1-t^2)dt = -t - \frac{1}{t} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C$$

6.10 التكاملات التي لا يمكن التعبير عنها بدلالة دوال أولية

درسنا في هذا الفصل، دوال أولية يمكن التعبير عن تكاملاتها (دوالها الأصلية) بدلالة دوال أولية، أو الدوال التي يمكن مكاملتها بشكل منتهٍ. وقد قبلنا في المبرهنة 6.1، أن أي دالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$ لها دالة أصلية $F(x)$ تحقق العلاقة $F'(x) = f(x)$ في هذا المجال. غير أنه لا يمكن التعبير عن كل دالة أصلية بدلالة عددٍ منه من الدوال الأولية. فمثلاً، يعبّر عن تكامل ثنائي الحد التفاضلي بدلالة عدد منتهٍ من الدوال الأولية فقط في الحالات الثلاث المدروسة سابقاً. ونعرض فيما يأتي أمثلة على بعض التكاملات التي لا يمكن التعبير عنها بدلالة دوال أولية:

1. $\int e^{-x^2} dx$ (تكامل بواسون[1]).

[1] سيميون ديني بواسون (1781-1840) عالم رياضيات وفيزياء فرنسي.

2. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ و $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (الجيب والتجيب التكامليان).

3. $\int \frac{e^x}{x} dx$ و $\int \frac{dx}{\ln x}$ (اللوغاريتم التكاملي).

4. $\int \sin x^2 dx$ و $\int \cos x^2 dx$ (تكاملي فرينيل[1]).

5. التكاملات الناقصية: وتظهر في بعض التطبيقات، كحساب طول قوس القطع الناقص. ولها عدة أشكال نورد بعضها:

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}\, dx \; ; \; 0 < k < 1 \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} \quad \text{و}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

[1] أوغستين جان فرينيل (1788-1827) عالم رياضيات وفيزياء فر نسي.

تمارين الفصل السادس

1. احسب التكاملات:

$$\int \frac{3^x \cdot 2^x}{9^x - 4^x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$\int \frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int (1 + arc\cot x)^{5/2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \left(\ln x + \frac{5}{\ln x} \right) \frac{dx}{x}$$

$$\int (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\,dx$$

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,dx$$

$$I = \int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 + 6x}\,dx$$

$$\int (x^3 + 3x + 1) \ln^2 x\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

$$\int \cot 2x\,dx$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \ln x\,dx$$

$$\int thx\,dx$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int chx \cos x\,dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 + a^2}$$

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\,dx$$

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{x e^x}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{\cot x\,dx}{\ln(\sin x)}$$

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 1}\,dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+3)^3}\,dx$$

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx$$

$$\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$$

$$I = \int \sin \sqrt{x}\,dx$$

$$\int x^3 \sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$\int x \ln x\,dx$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

$$\int x^3 sh2x\,dx$$

$$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$\int \arctan \sqrt{x}\,dx$$

$\int x^2 \arccos x dx$

$\int \frac{2x^2-1}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$

$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$\int \frac{12dx}{x^4+x^3-x-1}$

$\int \frac{3x+5}{x^5+2x^3+x} dx$

$\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx$

$\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4}$

$\int \frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} dx$

$\int \sin^n x \cos(n+1)x dx$

$\int \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$\int \sqrt{e^{3x}+e^{2x}} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

$\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1} dx$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\tan x)}$

$\int \cos^2 x \sin 3x dx$

$\int \frac{(x-1)dx}{x(x+1)^2}$

$\int \frac{dx}{x^4+1} dx$

$\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

$\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^8}$

$\int \frac{xdx}{x^3+1}$

$\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

$\int th^2 x dx$

$\int e^{-\sqrt[3]{x+1}} dx$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^7}}$

$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$

$\int e^x \sin^2 x dx$

$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

$\int xe^x \sin x dx$

$\int x arc\cos x dx$

$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$

$\int \frac{\sin x}{2-\sin^2 x} dx$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$

$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$

$\int x(arc\cot x)^2 dx$

$\int e^x \cos e^x dx$

$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x} dx$

$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$\int x\cos\sqrt{x}\,dx$

$\int \frac{dx}{3+5\tan x}$

$\int \frac{dx}{\cos x+\sin x}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

$$\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$$

$$\int \cos\tfrac{1}{2}x \sin\tfrac{3}{2}x\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$$

$$\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$$

$$\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$$

$$\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

$$\int cth^2 x\,dx$$

$$\int \sqrt{th x}\,dx$$

$$\int \frac{1+2chx}{sh^2 x}\,dx$$

$$\int \cos^2(\ln x)\,dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{ch^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{(1+chx)^2}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[4]{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$$

$$\int sh^2 x ch^2 x\,dx$$

$$\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$$

$$\int \sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}\,dx$$

$$\int x \arccos\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int x \operatorname{arccos}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{2shx+3chx}$$

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$$

$$\int x^2 \sqrt[3]{(x^8+1)}\,dx$$

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}$$

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{2+x-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2+2x}}$$

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$$

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^5(x-3)^4}}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^4+1}\left[\ln(x^4+1)-4\ln x\right]}{x^7}\,dx$$

$$\sqrt{x}\,\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}\,dx}{\sqrt{3-2x^{3/5}}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{(2x-3)}+1}\,dx$$

$$\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\int x e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}\,dx$$

$$\int |1-4x^2|\,dx$$

$$\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{dx}{(2-x)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^{-1/3})^3}$$

$$\int x^2(1+2x^3)^{-3/2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$$

$$\int x\ln(1+x^3)\,dx$$

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$$

$$\int x\,|x-1|\,dx$$

2. استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكاملات:

$$I_n = \int e^{ax} \sin^n bx dx \qquad I_n = \int \tan^n x dx \qquad I_n = \int x^n e^{ax} dx$$

$$I_n = \int x^n \cos x dx \qquad I_n = \int (\ln x)^n dx \qquad I_n = \int \cos^n x dx$$

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} \qquad I_n = \int x^n e^{-x^2} dx$$

3. احسب التكامل $I = \int f(x)dx$ في الحالات:

$$f(x) = \max(4 - x^2, 2) \qquad f(x) = \min(\sqrt{x}, 2)$$

$$f(x) = \max(|x|, 4) \qquad f(x) = \min(|x|, 4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; \ |x| \le 1 \\ 1 - |x| & ; \ |x| > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & ; -\infty < x < 0 \\ x + 1 & ; \ 0 \le x \le 1 \\ 2x & ; \ 1 < x < \infty \end{cases}$$

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع

التكامل المحدد وتطبيقاته

7.1 المجموع التكاملي ـ مفهوم التكامل المحدد

7.2 الخواص الأساسية للتكامل

7.3 التكامل المحدد كدالة

7.4 صيغة نيوتن ـ ليبنتز

7.5 الطرائق الأساسية لحساب التكامل المحدود

7.6 التكاملات الشاذة (المعممة-المختلة)

7.7 التطبيقات الهندسية للتكامل المحدد

تمارين الفصل السابع

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

التكامل المحدد وتطبيقاته

7.1 المجموع التكاملي ـ مفهوم التكامل المحدد

لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة ومحددة على المجال $[a;b]$ حيث $a < b$. نجزئ المجال $[a;b]$ اختيارياً لـ n جزء، بالنقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، ونرمز لهذه التجزئة بـ τ_n :

$$\tau_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

وليكن $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ طول المجال الجزئي $[x_k; x_{k-1}]$، حيث $k = 1,2,\ldots, n$. و نختار في كل مجال جزئي نقطة اختيارية ξ_k.

نشكل المجموع:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (7.1)$$

يسمى هذا المجموع مجموع ريمان[1] التكاملي للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$ المقابل للتجزئة τ_n لهذا المجال والمقابل لاختيار النقط ξ_k.

نرمز بـ λ لطول أكبر مجال جزئي من مجالات التجزئة τ_n : $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$ ويسمى λ قطر التجزئة.

تعريف 7.1 : إذا وُجِدَت النهاية:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

بغض النظر عن طريقة تجزئة المجال $[a;b]$ وبغض النظر عن طريقة اختيار النقط ξ_k، فإنها تسمى التكامل المحدد (أو تكامل ريمان) للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$ ونرمز بالرمز:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

---

[1] جورج فريدريك برنهارد ريمان (1826-1866) عالم رياضيات ايطالي.

ونقول عندئذٍ، إن الدالة $f(x)$ قابلة للمكاملة (كمولة) على المجال $[a;b]$. وأن التكامل المحدد موجود.

نسمي $f(x)dx$ العبارة المكاملة و $f(x)$ الدالة المكاملة و x متحول المكاملة و a و b حدي التكامل الأدنى والأعلى.

ملحوظة 7.1 : واضح من التعريف أن المجموع التكاملي غير متعلق برمز متغير المكاملة. وعليه، فإن نهاية هذا المجموع، أي التكامل المحدد، غير متعلقة أيضاً برمز متغير المكاملة:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

ملحوظة 7.2 : واضح أن رمز التكامل المحدد يشبه رمز التكامل غير المحدد. وهذا ليس مصادفة فقد تبيّن أن التكامل المحدد يتم حسابه بوساطة التكامل غير المحدد. ويسهّل هذا التشابه، كتابة واستذكار صيغ التكامل. غير أنه يوجد اختلاف بينهما، وهو أن التكامل المحدد لدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$ هو عدد، بينما التكامل غير المحدد لدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$، هو دالة: $F(x)+c$.

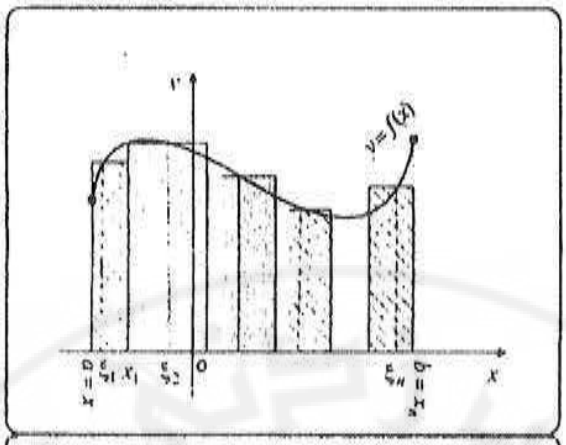
7.1.1 المعنى الهندسي للتكامل المحدد

لتكن $y=f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a;b]$. وليكن $f(x)\geq 0$ على هذا المجال.

إن للمجموع التكاملي (7.1) ولكل حد من حدوده معنى هندسياً، فالجداء $f(\xi_k)\Delta x_k$ هو مساحة المستطيل الذي عرضه $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ وطوله $f(\xi_k)$. وعليه، فإن المجموع (7.1) يمثل مساحة المنطقة المظللة، الشكل 7.1.

كما هو واضح، إن هذه المساحة متعلقة بالتجزئة τ_n للمجال $[a;b]$ وباختيار النقط ξ_k.

كلما صغر المقدار Δx_k، حيث $k=1,2,\ldots,n$، اقتربت مساحة الشكل المظلل من مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)$ ومحور الفواصل وبالمستقيمين $x=a$ و $x=b$.



الشكل 7.1

وعليه، فإن المساحة الدقيقة لهذه المنطقة هي نهاية المجموع (7.1)، عندما تسعى λ إلى الصفر، أي هي التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

وعليه، فإن التكامل المحدد لدالة مستمرة $f(x)$ على المجال $[a;b]$، مساوٍ لمساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x)$ ومحور الفواصل وبالمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

7.1.2 شروط وجود التكامل المحدد

عند تعريفنا للتكامل المحدد، كنهاية لمجموعة ريمان التكاملي، اشترطنا أن تكون الدالة $f(x)$ محدودة على المجال $[a;b]$. وهذا الشرط يُعد ضرورياً، كي تكون الدالة $f(x)$ كمولة على المجال $[a;b]$.

مبرهنة 7.1 : إذا كان التكامل $\int_a^b f(x)dx$ موجوداً، فإن الدالة $f(x)$ محدودة على المجال $[a;b]$.

البرهان: نفرض جدلاً، أن الدالة $f(x)$ غير محدودة على المجال $[a;b]$، عندئذ، فإنه أياً تكن التجزئة τ_n للمجال $[a;b]$:

$$[x_0;x_1],[x_1;x_2],\ldots\ ,[x_{n-1};x_n]$$

يوجد مجال جزئي، واحد على الأقل $[x_{k-1};x_k]$، تكون الدالة $f(x)$ غير محددة عليه.

لما كانت الدالة $f(x)$ غير محدودة على المجال $[x_{k-1};x_k]$، فإنه يمكن اختيار نقطة ξ_k داخل هذا المجال بحيث تكون القيمة المطلقة للجداء $f(\xi_k)\Delta x_k$ غير محدودة. وعليه، فإن مجموع ريمان التكاملي $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ يكون غير محدود. أي أنه لا توجد نهاية محدودة لمجموع ريمان التكاملي عندما يسعى قطر التجزئة λ إلى الصفر، مما يناقض فرضيات المبرهنة، فالفرض الجدلي مغلوط.

ملحوظة 7.3: إن عكس المبرهنة غير صحيح.

ونبين في المثال التالي، أن شرط محدودية الدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$، شرط ضروري (لازم)، ولكنه غير كاف كي تكون هذه الدالة كمولة على هذا المجال. أي توجد دوال محدودة ولكنها غير كمولة.

مثال 7.1 : أثبت أن دالة ديرخليه

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ;\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

غير كمولة على المجال $[0;1]$.

الحل: نختار نقطة حقيقية ξ_k من كل مجال جزئي $[x_{k-1};x_k]$من مجالات تجزئة المجال $[0;1]$، فيكون:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 1$$

نختار، الآن نقطة غير حقيقية ξ، من كل مجال جزئي $[x_{k-1};x_k]$ من مجالات تجزئة المجال $[0;1]$، فيكون:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0$$

وعليه، فإن لمجموع ريمان التكاملي قيمتين: صفر وواحد. ومنه، فإن نهاية هذا المجموع، عندما يسعى قطر التجزئة λ إلى الصفر، غير موجودة. أي لا يوجد تكامل محدد لدالة ديرخليه، مع أنها محدودة على $\mathbb{R}$.

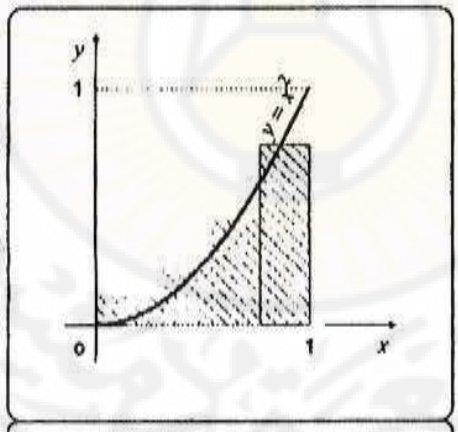
نعطي، دون برهان الشرط الكافي لتكامل الدوال.

مبرهنة 7.2 : إذا كانت $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنها كمولة على هذا المجال.

مبرهنة 7.3 : إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة على المجال $[a;b]$، ومستمرة عند كل نقاط المجال $[a;b]$، باستثناء عددٍ منتهٍ من هذه النقاط، فإن الدالة $f(x)$ كمولة على هذا المجال.

مثال 7.2: احسب التكامل $I = \int_0^1 x^2 dx$.

الحل: لما كانت الدالة المكاملة مستمرة على المجال $[0;1]$، فإن التكامل المعطى موجود ويساوي S، مساحة المنطقة المحدد بمنحني الدالة $y = x^2$ وبالمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$ ومحور الفواصل، الشكل 7.2.



الشكل 7.2

نجزئ المجال $[0;1]$ لـ n جزء متساوٍ، بالنقاط

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = \Delta x \ , \ x_2 = 2\Delta x \ , \ldots \ , x_n = n\Delta x \quad ; \quad \Delta x = \frac{1}{n}$$

نختار النقط ξ_k الأطراف اليمنى لكل مجال جزئي، أي $x_k = \xi_k$، حيث

$.k = 1,2,\ldots\ ,n$

نشكل مجموع ريمان التكاملي:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n\Delta x =$$

$$= (\Delta x)^2\Delta x + (2\Delta x)^2\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\Delta x = (\Delta x)^3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

ولما كان

$$1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

فإن:

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}$$

كما هو واضح من هذا المثال، إن حساب التكامل المحدد بطريقة مباشرة، كنهاية لمجموع ريمان التكاملي، غير بسيط.

7.2 الخواص الأساسية للتكامل

نفرض أن التكاملات الواردة في هذه الفقرة موجودة. نعرض لبراهين بعض هذه الخواص.

1. عندما عرفنا التكامل المحدد افترضنا $a < b$. نعمم هذا التعريف في حالة كون

$.a > b\ ,\ a = b$

نضع بالتعريف:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

وهذا واضح، بتعميم التعريف من أجل مجال طوله معدوم.

ونضع أيضاً بالتعريف:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (7.2)$$

وينتج هذا، مباشرةً من التعريف، لأن الأعداد $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ سالبة، حيث $k = 1,2,\ldots, n$ ، وحيث إن التجزئة هي:

$$\tau_n = \{a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b\}$$

2. إذا كان $f(x) \equiv 1$ على المجال $[a;b]$، فإن

$$\int_a^b dx = b - a$$

وهذا صحيح، لأنه لما كان $f(x) \equiv 1$ على المجال $[a;b]$، فإن:

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

3. يمكن إخراج العامل الثابت من الدالة المكاملة، خارج التكامل المحدد:

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

4. التكامل المحدد للمجموع الجبري لعدد منتهٍ من الدوال الكمولة على المجال $[a;b]$، يساوي المجموع الجبري للتكاملات المحددة لكل من هذه الدوال:

$$\int_a^b [f(x) \mp g(x) \mp \ldots \mp h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx \mp \ldots \mp \int_a^b h(x)dx$$

5. إذا وجد التكاملان $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ ، فإن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ أيضاً موجود، وذلك أياً تكن الأعداد a و b و c.

6. إذا كان $f(x) \geq 0$ على المجال $[a;b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad ; \quad (a < b)$$

7. إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ كمولتين على المجال $[a;b]$، وكان:

$$f(x) \geq g(x) \quad ; \quad \forall x \in [a;b]$$

فإن،

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

البرهان: لما كان

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in [a;b]$$

فإنه وباستخدام الخواص السابقة، يكون

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

ومنه:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad .8$$

البرهان: لما كان

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

فإن

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

ومنه

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

نتيجة 7.1: إذا كان

$$|f(x)| \le k \quad ; \quad \forall x \in [a;b]$$

فإن

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le k(b-a)$$

وهذا صحيح، لأن

$$\left|\int_a^b f(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b kdx = k(b-a)$$

9. إذا كانت m و M القيمتين الصغرى والعظمى للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$، فإن

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad ; \quad a<b \qquad (7.3)$$

البرهان: لما كان

$$m \le f(x) \le M \quad ; \quad \forall x \in [a;b]$$

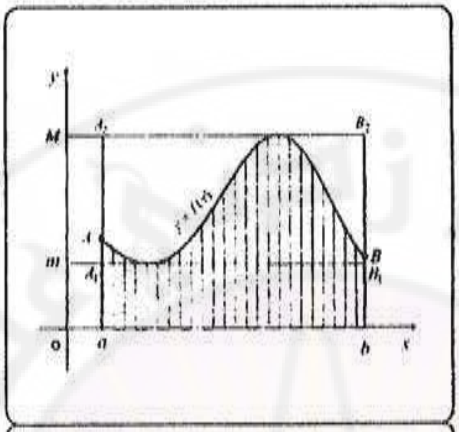
فإن

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$$

ومنه

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x) \le M(b-a)$$

يعطي الشكل 7.3 التفسير الهندسي لهذه الخاصة.



الشكل 7.3

إن مساحة المستطيل aA_1B_1b هي $m(b-a)$، ومساحة المستطيل aA_2B_2b هي $M(b-a)$.

تعني المتراجحة (7.3)، أن مساحة المنطقة $aABb$ المحصورة بالمنحني البياني للدالة $y=f(x)$ ومحور الفواصل وبالمستقيمين $x=a$ و $x=b$، ليست أقل من مساحة المستطيل الأول، وليست أكبر من مساحة المستطيل الثاني.

10. مبرهنة 7.4 (مبرهنة القيمة الوسطى): إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنه توجد في هذا المجال نقطة c، بحيث يكون:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

أي أن التكامل المحدد لدالة مستمرة في مجال، يساوي حاصل جداء طول هذا المجال وقيمة الدالة المكاملة عند نقطة ما من هذا المجال.

البرهان: لما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، فإنه وفق مبرهنة فايرشتراوس، يوجد العددان m و M بحيث:

$$\min_{[a;b]} f(x) = m \le f(x) \le M = \max_{[a;b]} f(x)$$

وبالاعتماد على العلاقة (7.3) نجد

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

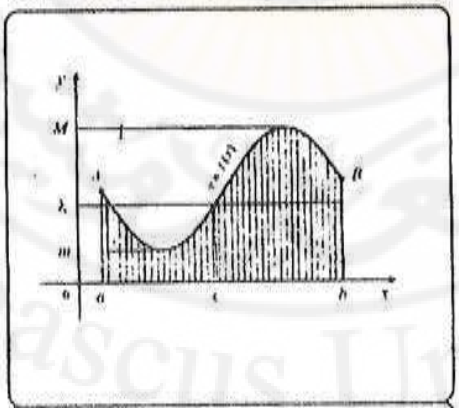
نرمز بـ

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ومنه، فإن $m \le \lambda < M$.

ولما كان العدد λ يقع بين القيمتين العظمى والصغرى للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$، الشكل 7.4، فإنه، وفق مبرهنة بولزانو، توجد نقطة c من هذا المجال، بحيث يكون $f(c) = \lambda$. أي

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (7.4)$$



الشكل 7.4

ومنه

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

يسمى العدد $\lambda = f(c)$، المعرّف بالعلاقة (7.4)، القيمة الوسطى للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$.

يعطي الشكل 7.4، التفسير الهندسي لبرهنة القيمة الوسطى، وهو أنه إذا كان $f(x) \geq 0$ على المجال $[a;b]$، فإن مساحة المنطقة $aABb$ المحصورة بالمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ ومحور الفواصل وبالمستقيمين $x = a$ و $x = b$، تساوي مساحة مستطيل عرضه $(b-a)$ وطوله $f(\xi)$.

11. إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية بالنسبة إلى x على المجال $[-a;a]$، أي أن منحني الدالة $y = f(x)$ متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب، فإن:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

وإذا كانت الدالة $f(x)$ فردية بالنسبة إلى x على المجال $[-a;a]$، أي أن منحني الدالة $y = f(x)$ متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل، فإن:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x)dx = 0$$

12. إذا كانت الدالة $f(x)$ دورية دورها T، حيث $T \neq 0$، وكانت مستمرة على المجال $[0;T]$، فإنها كمولة على أي مجال $[a;b]$، ويكون:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

وخصوصاً، إذا كان k عدداً طبيعياً فردياً و n عدداً طبيعياً و a عدداً حقيقياً، فإن:

$$\int_a^{a+2\pi n} \sin^k x\,dx = \int_a^{a+2\pi n} \cos^k x\,dx = 0$$

13. متراجحة كوشي-بونياكوفسكي[1]: إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين لمجال $[a;b]$، فإن

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right]^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

7.3 التكامل المحدد كدالة

نفرض أن حدي التكامل الأعلى والأدنى دالتان في x، معرفتان على المجال $[a;b]$. تكون عندئذ قيمة التكامل دالة في x معرفة على المجال $[a;b]$. فإذا كان $u=u(x)$ و $v=v(x)$ حدي التكامل، وكانت $F(t)$ دالة أصلية للدالة $f(t)$ على المجال $[a;b]$، فإن:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F[v(x)]-F[u(x)]=\phi(x)$$

وعليه، فإن:

$$\frac{d\phi(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f[v(x)]\frac{dv(x)}{dx}-f[u(x)]\frac{du(x)}{dx}$$

وكحالة خاصة، إذا كان $u(x)=a$ و $v(x)=x$، فإن الدالة:

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a) \quad ; \; x\in[a;b]$$

تمثل هندسياً، في الحالة $f(t)\ge 0$ على المجال $[a;b]$، مساحة المنطقة $aABb$ المحصورة بالمنحني البياني للدالة $y=f(x)$ ومحور الفواصل وبالمستقيمين $x=a$ و $x=b$، المظللة في الشكل 7.5، ويكون:

$$\phi'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

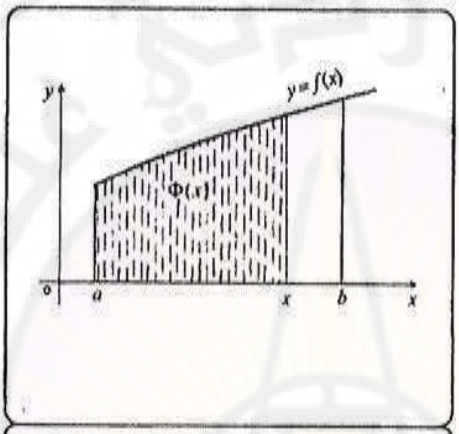
[1] فيكتور ياكوفليفيتش بونياكوفسكي (1804-1889) عالم رياضيات روسي.

وعليه، فإن:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + c$$

(حيث c ثابت اختياري).

وبذا نكون قد وجدنا العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد.



الشكل 7.5

مثال 7.3 : احسب قيمة النهاية $A = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$.

الحل: نعوض في الدالة $x = 0$، فنحصل على حالة عدم تعيين من النمط $\left(\frac{0}{0}\right)$. نطبق أوبيتال:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sin t^3 dt\right]}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

7.4 صيغة نيوتن ـ ليبنتز

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ ولها دالة أصلية على هذا المجال

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

ننظر في المسألة المعاكسة: إذا وُجدت إحدى الدوال الأصلية $\phi(x)$ للدالة $f(x)$، على المجال $[a;b]$، وكان المطلوب إيجاد التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على هذا المجال. أي المطلوب إيجاد التكامل المحدد إذا علم التكامل غير المحدد لنفس الدالة.

لتكن $F(x)$ دالة أصلية أخرى للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$. ولما كان الفرق بين أي دالتين أصليتين لدالة هو ثابت، فإن:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c \ ; \ \forall x \in [a;b] \ , \ c \in \mathbb{R} \qquad (7.5)$$

نعوض في هذه المساواة $x = a$، فنجد:

$$0 = \int_a^a f(t)dt = F(a) + c \ \Rightarrow -F(a) = c$$

نعوض في العلاقة (7.5)، قيمة c التي حصلنا عليها، فنجد:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \ ; \ \forall x \in [a;b]$$

نعوض في هذه العلاقة $x = b$، ونجعل متحول المكاملة x، فنجد:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (7.6)$$

تسمى هذه الصيغة صيغة نيوتن ـ ليبنتز. وهي تُعطي العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد لدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$. وهي تجنبنا حساب التكامل المحدد كنهاية لمجموع ريمان التكاملي.

نرمز اختصاراً للطرف الأيمن من العلاقة (7.6) بالرمز $F(x)\Big|_a^b$ أو $\left[F(x)\right]_a^b$ أي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال 7.4: احسب التكاملات:

1. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x dx = (\sin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sin(\tfrac{1}{2}\pi) - \sin 0 = 1$

2. $\int_0^1 (3x^2 + 2x)dx = (x^3 + x^2)\Big|_0^1 = 1^3 + 1^2 = 2$

3. $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\right]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$

4. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \left[\arctan x\right]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$

مثال 7.5 : أثبت صحة المتراجحة: $\frac{1}{20\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{x^3+1}}dx \le \frac{1}{20}$.

الحل: واضح أن:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \le 1 \; ; \; \forall x \in [0;1] \quad , \quad 1 \le \sqrt{1+x^3} \le \sqrt{2} \; ; \; \forall x \in [0;1]$$

نضرب جميع حدود المتراجحة بالمقدار الموجب x^{19}:

$$\frac{x^{19}}{\sqrt{2}} \le \frac{x^{19}}{\sqrt{x^3+1}} \le \frac{x^{19}}{20} \quad ; \quad \forall x \in [0;1]$$

نكامل حدود هذه المتراجحة على المجال $[0;1]$، فنجد:

$$\int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{2}}dx \le \int_0^1 \frac{x^{19}dx}{\sqrt{x^3+1}} \le \int_0^1 \frac{x^{19}}{20}dx$$

$$\frac{x^{20}}{20\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{20}\sqrt{2} \le \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt{x^3+1}}dx \le \frac{x^{20}}{20}\Big|_0^1 = \frac{1}{20}$$

7.5 الطرائق الأساسية لحساب التكامل المحدد

7.5.1 طريقة تغيير المتحول

مبرهنة 7.5 : إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$ والدالة $x=\varphi(t)$ قابلة للمفاضلة باستمرار على المجال $[\alpha;\beta]$، حيث $\varphi([\alpha;\beta])=[a;b]$ و $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (7.7)$$

البرهان: لتكن $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال $[a;b]$. عندئذٍ، من صيغة نيوتن ـ ليبنتز، نجد:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

من جهةٍ أخرى، ننظر إلى الدالة المركبة $\phi(t)=F[\varphi(t)]$ المعرفة والقابلة للمفاضلة على المجال $[\alpha;\beta]$. نفاضل:

$$\phi'(t)=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

ينتج من هنا، أن الدالة $\phi(t)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ على المجال $[\alpha;\beta]$، ومنه:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \phi(\beta)-\phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)] = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

ملحوظة 7.4 : عند حساب التكامل المحدد باستخدام طريقة تغيير المتحول، لا داعي للعودة بالمتحول إلى متحول المكاملة المعطى، كما كان في حساب التكامل غير المحدد بهذه الطريقة، لأنه في أثناء الحساب يجب تغيير حدود المكاملة مع تغيير المتحول.

مثال 7.6 : احسب التكامل $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

الحل: إن التغير المناسب لحساب التكامل $x = \sin t$، حيث $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$.

وهذا صحيح، لأن الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ مستمرة على المجال $[0;1]$ والدالة $x = \sin t$ قابلة للمفاضلة على المجال $[0;\frac{1}{2}\pi]$ و $x' = \cos t$ مستمرة في هذا المجال. وعند تغير t من 0 حتى $\frac{1}{2}\pi$، تتغير الدالة $x = \sin t$ من 0 حتى 1. كذلك فإن $x(0) = 0$ و $x(\frac{1}{2}\pi) = 1$. وعليه، فإن:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{4}\pi$$

ملحوظة 7.5 : عند استخدام الصيغة (7.7)، يجب التحقق من شروط المبرهنة 7.5، لأنه إذا اختل أحد الشروط قد نحصل على نتائج مغلوطة.

مثال 7.7 : احسب التكامل $\int_0^{\pi} dx$.

الحل: من صيغة نيوتن ـ ليبنتز، نجد مباشرة:

$$\int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$$

من جهة أخرى:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)} = \int_0^{\pi} \frac{d(\tan x)}{1+\tan^2 x}$$

نجري تغييراً في المتحول $t = \tan x$، فنجد:

$$\pi = \int_0^{\pi} dx = \int_0^{0} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

وهذا التناقض سببه اختلال أحد شروط المبرهنة 7.5، فالدالة $t = \tan x$ غير مستمرة في النقطة $x = \frac{1}{2}\pi$.

نتيجة 7.2: ينتج من طريقة حساب التكامل المحدد بتغيير المتحول، خواص هامة لم نذكرها سابقاً:

- خاصة الانسحاب (الإزاحة):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx \quad ; \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

البرهان: نفرض $x = t - c$، فيكون $dx = dt$. ومن أجل $x = a$، يكون $t = a + c$ ومن أجل $x = b$، يكون $t = b + c$. وعليه، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t=a+c}^{t=b+c} f(t-c)dt$$

وبالعودة لرمز المكاملة من t إلى x، في التكامل الأيمن من العلاقة الأخيرة، نجد صحة خاصة الانسحاب.

- خاصة التمديد أو التقليص:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(\frac{x}{\alpha})dx \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$$

البرهان: نفرض $x = \frac{t}{\alpha}$، فيكون $dx = \frac{dt}{\alpha}$، ومن أجل $x = a$، يكون $t = \frac{a}{\alpha}$، ومن أجل $x = b$، يكون $t = \frac{b}{\alpha}$. وعليه، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha a}^{\alpha b} f(\frac{t}{\alpha})\frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(\frac{t}{\alpha})dt$$

وبالعودة لرمز المكاملة من t إلى x، في التكامل الأيمن من العلاقة الأخيرة، نجد صحة خاصة التمديد أو التقليص.

وكحالةٍ خاصة من هذه الخاصة، نجد خاصة الانعكاس.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_{-a}^{-b} f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx$$

مثال 7.8: احسب التكامل $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

الحل: نفرض $x = \pi - y$، فيكون $dx = -dy$. ومن أجل $x = 0$، يكون $y = \pi$ ومن أجل $x = \pi$، يكون $y = 0$. وعليه، فإن:

$$I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - y)\sin(\pi - y)}{1+\cos^2(\pi - y)}(-dy) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y}dy =$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy - \int_0^{\pi} \frac{y\sin y}{1+\cos^2 y}dy = -\pi\int_0^{\pi} \frac{d(\cos y)}{1+\cos^2 y} - I$$

ومنه، فإن

$$2I = -\pi \cdot \arctan(\cos y)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\pi^2$$

مثال 7.9: احسب التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}dx$.

الحل: نفرض $x = \frac{1}{2}\pi - y$، فيكون $dx = -dy$. ومن أجل $x = 0$، يكون $y = \frac{1}{2}\pi$ ومن أجل $x = \frac{1}{2}\pi$ يكون $y = 0$. وعليه، فإن:

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{\sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{2} - y)}(-dy)}{\sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{2} - y)} + \sqrt[3]{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt[3]{\cos y}}{\sqrt[3]{\cos y} + \sqrt[3]{\sin y}}dy$$

نضيف ونطرح للبسط في الدالة المكاملة المقدار $\sqrt[3]{\sin y}$، فنجد:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt[3]{\cos y}+\sqrt[3]{\sin y}-\sqrt[3]{\sin y}}{\sqrt[3]{\cos y}+\sqrt[3]{\sin y}}dy=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1-\frac{\sqrt[3]{\sin y}}{\sqrt[3]{\cos y}+\sqrt[3]{\sin y}}\right)dy=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dy-I$$

ومنه، فإن

$$2I=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dy=y\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{1}{2}\pi \;\Rightarrow\; I=\tfrac{1}{4}\pi$$

ملحوظة 7.6: يوضح المثالان 7.8 و 7.9، أنه يمكن حساب بعض التكاملات المحددة، علماً أنه لا يوجد دوال أصلية للدوال المكاملة، معطاة كمجموع منتهٍ لدوال أولية.

7.5.2 طريقة التجزئة

لتكن $u(x)$ و $v(x)$ دالتين قابلتين للمفاضلة على المجال $[a;b]$. عندئذٍ، الدالة $u(x)\cdot v(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة:

$$\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

على المجال $[a;b]$. ووفق صيغة نيوتن ـ ليبنتز، يكون

$$\int_a^b\left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$$

أي أن

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$$

ومنه، فإن

$$\int_a^b udv=u.v\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (7.8)$$

وتسمى هذه العلاقة دستور التكامل بالتجزئة للتكامل المحدد.

مثال 7.10: احسب التكامل $\int_1^e \ln x\,dx$.

الحل: نفرض $u = \ln x$ و $dv = dx$. ومنه، فإن $du = \frac{dx}{x}$ و $v = x$. نعوض في (7.8)، فنجد:

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1$$

مثال 7.11: احسب التكامل $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

الحل: نفرض $u = x$ و $dv = \sin x\,dx$. ومنه، فإن $du = dx$ و $v = -\cos x$. نعوض في (7.8)، فنجد:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx = (\pi - 0) + (\sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

7.6 التكاملات الشاذة (المعممة-المعتلة)

عند تعريف التكامل المحدد، اشترطنا أن يكون مجال المكاملة محدوداً والدالة المكاملة محدودة على هذا المجال. إذا اختل أحد هذين الشرطين على الأقل، فإن هذا التعريف يفقد معناه. فإذا كان المجال غير محدود فلا يمكن تجزئته لـ n جزء، طول كل منها محدود. أما إذا كانت الدالة المكاملة غير محدودة، فإن مجموع ريمان التكاملي غير محدود، وعليه، فإن نهاية هذا المجموع غير محدودة. غير أنه يمكن تعميم مفهوم التكامل المحدد من أجل هاتين الحالتين. وهنا يظهر مفهوم التكامل الشاذ.

7.6.1 النوع الأول: مجال المكاملة غير محدود

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a;\infty[$، وكمولة على أي مجال جزئي $[a;b]$. أي أن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ موجود، أياً يكن $a < b$.

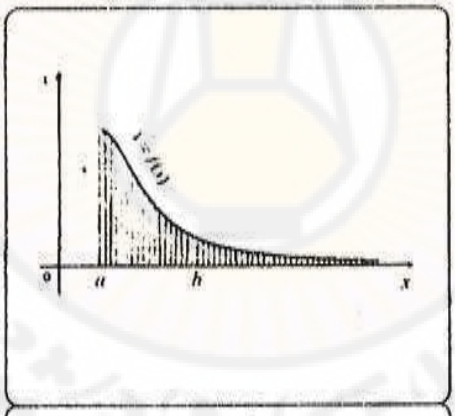
تعريف 7.2: التكامل الشاذ الذي حده الأعلى غير محدود لدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a;\infty[$ هو النهاية:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a<b<+\infty}} \int_a^b f(x)dx \qquad (7.9)$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، فإن التكامل الشاذ (7.9) يسمى متقارباً، وقيمته تساوي قيمة النهاية.

أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو غير محدودة، فإن التكامل الشاذ (7.9) يسمى متباعداً.

ويعني ذلك هندسياً، أن المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) \geq 0$ و $x = a$ و $y = 0$ وممددة لا نهائياً في الجهة الموجبة لمحور الفواصل، الشكل 7.6، لها مساحة محدودة، إذا كان التكامل الشاذ (7.9) متقارباً، وليس لها مساحة إذا كان التكامل الشاذ (7.9) متباعداً.



الشكل 7.6

تعريف 7.3: التكامل الشاذ الذي حده الأدنى غير محدود، لدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $]-\infty;b]$، هو النهاية:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ -\infty<a<b}} \int_a^b f(x)dx \qquad (7.10)$$

ويكون هذا التكامل الشاذ متقارباً، إذا كانت النهاية السابقة موجودة ومحدودة وقيمة النهاية هي قيمة التكامل الشاذ. ويكون متباعداً، إذا كانت النهاية غير موجودة وغير محدودة.

تعريف 7.4 : التكامل الشاذ، الذي حداه غير محدودين، لدالة $f(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$ يُعرّف كمجموع للتكاملين الشاذين (7.9) و (7.10). أي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \quad ; \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ -\infty < a < c}} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{\substack{b \to +\infty \\ c < b < +\infty}} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

ويكون هذا التكامل الشاذ متقارباً، إذا كانت النهايتان السابقتان موجودتين ومحدودتين وقيمته تساوي مجموع النهايتين.

ويكون متباعداً، إذا كانت إحدى هاتين النهايتين على الأقل غير محدودة أو غير موجودة.

مثال 7.12 : ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي α، تقارب وتباعد التكامل الشاذ $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

الحل: التكامل شاذ، لأن حده الأعلى غير محدود.

نحسب التكامل المحدد $\phi(b) = \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}}$، حيث $1 < b < \infty$:

$$\phi(b) = \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} [\ln|x|]_{1}^{b} = \ln b & ; \quad \alpha = 1 \\ \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) & ; \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

نحسب، الآن النهاية $\lim_{b \to \infty} \phi(b)$:

1. $\alpha = 1 \Rightarrow \lim_{b \to \infty} \phi(b) = \lim_{b \to \infty} \ln b = \infty$

$$\alpha \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{b\to\infty}\phi(b)=\frac{1}{1-\alpha}\left[\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}-1\right]=\begin{cases}\infty & ;\ \alpha<1\\ \dfrac{1}{1-\alpha} & ;\ \alpha>1\end{cases}$$

وعليه، فإن التكامل الشاذ المعطى متقارب فقط في الحالة $\alpha > 1$ ، وقيمته:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\quad ;\quad \alpha>1$$

مثال 7.13 : ادرس تقارب وتباعد التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

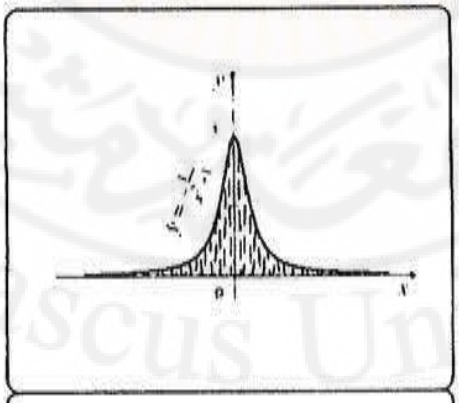
الحل: التكامل شاذ، لأن حديه الأدنى والأعلى غير محدودين. نجزئ هذا التكامل لتكاملين شاذين:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ -\infty<a<0}}\int_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\substack{b\to+\infty\\ 0<b<\infty}}\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}(\arctan x)\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}(\arctan x)\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(\arctan 0-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan 0)=\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\pi=\pi$$

أي أن التكامل الشاذ متقارب وقيمته π. ويمثل هذا التكامل، مساحة الشكل المظلل في الشكل 7.7.



الشكل 7.7

مثال 7.14 : ادرس تقارب وتباعد التكامل $\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$.

الحل: التكامل شاذ، لأن حده الأدنى غير محدود. نحسب النهاية:

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ -\infty<a<0}} \int_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (\sin x)\Big|_{a}^{0} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\sin 0 - \sin a) = -\lim_{a\to-\infty} \sin a$$

إن هذه النهاية غير موجودة. وعليه، فإن التكامل الشاذ المعطى متباعد.

ملحوظة 7.7: إذا كان التكامل الشاذ (7.9) متقارباً، فإنه يمكن تطبيق صيغة نيوتن ـ ليبنتز:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{\infty} = F(\infty) - F(a) \quad ; \quad F(\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b)$$

فمثلاً، إذا علمنا أن التكامل الشاذ $\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx$ متقارب، فإننا نستطيع أن نكتب مباشرة:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = -e^{-\infty} + 1 = 1$$

مثال 7.15 : عين قيمة الثابت الحقيقي α، حتى يتقارب التكامل

$$A = \int_{2}^{\infty}\left(\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx .$$

الحل: التكامل شاذ، لأن حده الأعلى غير محدود. نحسب النهاية:

$$A = \lim_{\substack{b\to\infty \\ 2<b<\infty}} \int_{2}^{b}\left(\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x^2+1)^{\alpha}}{(2x+1)}\right|\right]_{2}^{b} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{(b^2+1)^{\alpha}}{(2b+1)}\right| - \ln\frac{5^{\alpha}}{5}\right]$$

نلاحظ أن اللوغاريتم يسعى إلى نهاية محددة، عندما يسعى b إلى اللانهاية، فقط عندما تتساوى درجة البسط ودرجة المقام، ويكون ذلك عندما يكون $\alpha = \frac{1}{2}$. وعليه، فإن:

$$A = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2} + \ln\sqrt{5}\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

7.6.2 القيمة الأساسية للتكامل الشاذ من النوع الأول

إذا كان التكامل الشاذ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ متباعداً، ولكن كانت النهاية

$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ موجودة ومحدودة، فإنها تسمى القيمة الأساسية للتكامل الشاذ من النوع الأول، ونرمز لها بالرمز

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

مثال 7.16 : أوجد القيمة الأساسية للتكامل الشاذ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

الحل: نحسب التكامل المحدد

$$A = \int_{-a}^{a} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \quad ; \quad a > 0$$

$$A = \int_{-a}^{a} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-a}^{a} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

ولما كانت الدالة $\frac{x}{1+x^2}$ فردية، فإن تكاملها على المجال $[-a;a]$ معدوم. ومنه

$$A = 2\int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} + 0 = 2\arctan x\Big|_0^a = 2\arctan a$$

وعليه، فإن القيمة الأساسية للتكامل الشاذ

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\lim_{a\to\infty}(2\arctan a)=\pi$$

7.6.3 اختبارات تقارب التكاملات الشاذة من النوع الأول

يكون المطلوب أحياناً، معرفة نوع التكامل الشاذ دون الحاجة لمعرفة قيمته، أو أن الحصول على هذه القيمة مستحيل. لذلك ندرس بعض اختبارات تقارب التكاملات الشاذة، والتي تشبه إلى حدٍ كبير، اختبارات تقارب السلاسل العددية، وذلك للتكامل الشاذ الذي حده الأعلى غير محدود. وبالنسبة إلى التكامل الشاذ الذي حده الأدنى غير محدود، فإنه يُرد إلى الحالة السابقة بإجراء تغيير في المتحول $x=-t$، فنحصل على تكامل شاذ حده الأعلى غير محدود.

نعطي دون برهان الاختبارات التالية:

1. اختبار المقارنة:

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين وموجبتين على المجال $[a;\infty[$، وكمولتين في كل مجال جزئي $[a;b]$ من هذا المجال، وتحققان الشرط:

$$0\le f(x)\le g(x)\quad ;\quad \forall x\ge a$$

عندئذٍ، إذا كان التكامل الشاذ $\int_a^{\infty}g(x)dx$ متقارباً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^{\infty}f(x)dx$ متقارب.

وإذا كان التكامل الشاذ $\int_a^{\infty}f(x)dx$ متباعداً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^{\infty}g(x)dx$ متباعد.

مثال 7.17 : ادرس تقارب وتباعد التكاملين الشاذين

$$J=\int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln x}\qquad \text{و}\qquad I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

الحل: لما كان

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \forall x \geq 1$$

وكان التكامل الشاذ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ متقارباً، المثال 7.12، حيث $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

فإنه، ووفق اختبار المقارنة، يكون التكامل الشاذ I متقارباً.

ولما كان

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \quad ; \quad \forall x \geq 2$$

وكان التكامل الشاذ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ متباعداً، المثال 7.12، حيث $\alpha = 1$، فإن التكامل الشاذ I متباعد.

2. اختبار القسمة (اختبار المقارنة الثاني)

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين وموجبتين على المجال $[a;\infty[$ وكمولتين على كل مجال جزئي $[a;b]$ من هذا المجال، ووجدت النهاية:

$$A = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

فإننا نميز الحالات:

أ- إذا كان $0 \neq A < \infty$، فإن التكاملين الشاذين $\int_a^{\infty} f(x)dx$ و $\int_a^{\infty} g(x)dx$ يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً.

ب- إذا كان $A = 0$، وكان التكامل الشاذ $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متقارباً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب.

جـ- إذا كـان $A = \infty$ ، وكـان التكامـل الشـاذ $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متباعـداً، فـإن التكامـل الشـاذ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متباعد.

مثال 7.18: ادرس تقارب وتباعد التكامل $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+2x^2+1}}$.

الحل: لما كان التكامل الشاذ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ متباعداً، المثال 7.12، حيث $\alpha = 1$ ، وكان:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+2x^2+1}} \cdot \frac{x}{1} = 1 \neq 0$$

فإن التكامل المعطى متباعد.

3. اختبار القيمة المطلقة:

إذا غيّرت الدالـة $f(x)$ إشـارتها عـلى المجـال $[a;\infty[$ ، وكـان التكامـل الشـاذ $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ متقارباً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب.

نسمي عندئذ، تقارب التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ تقارباً مطلقاً.

ملحوظة 7.8 : إذا كان التكامل الشاذ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارباً وكان التكامل الشاذ $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ متباعداً، فإن التقارب يسمى شرطياً.

مثال 7.19 : ادرس تقارب وتباعد التكامل الشاذ $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

الحل: لما كان

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وكان التكامل الشاذ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ متقارباً، المثال 7.12، حيث $\alpha - 2 > 1$، فإن التكامل الشاذ

$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ متقارب. وعليه، فإن التكامل I متقارب بالإطلاق.

مثال 7.20: ادرس التقارب المطلق والتقارب الشرطي للتكامل الشاذ $I = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

الحل: نبدأ بدراسة التكامل الشاذ $K = \int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$:

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \ldots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \qquad (*)$$

نفرض $x = \nu + n\pi$، ونعوض في العلاقة (*)، فنجد:

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \nu}{\nu + n\pi} dx$$

ولما كان

$$\frac{1}{\nu + n\pi} \ge \frac{1}{(n+1)\pi} \quad ; \quad 0 \le \nu \le \pi$$

فإن

$$\frac{\sin \nu}{\nu + n\pi} \ge \frac{\sin \nu}{\nu + n\pi} \quad ; \quad \nu \in [0;\pi]$$

نكامل طرفي هذه المتراجحة على المجال $[0;\pi]$، فنجد:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+n\pi}dv \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin v\,dv = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

ولما كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(n+1)}$ متباعدة، فإن السلسلة في الطرف الأيمن من (*) متباعدة. وعليه، فإن التكامل الشاذ K متباعد، وفق اختبار المقارنة.

ندرس الآن، تقارب وتباعد التكامل J.

لما كان التكامل $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ متقارباً، لأن الدالة $\frac{\sin x}{x}$ مستمرة على المجال $[0;1]$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$، فإنه يتبقى علينا دراسة تقارب وتباعد التكامل $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

نحسب النهاية:

$$\lim_{\substack{b\to\infty\\ 1<b<x}}\int_1^b\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b+\int_1^b\frac{\cos x}{x^2}dx\right]=$$

$$=\cos 1-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\cos b}{b}\right)+\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

ولما كان $\lim_{b\to\infty}\frac{\cos b}{b}=0$ والتكامل $I=\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ متقارباً، المثال 7.18، فإن التكامل $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ متقارب. وعليه، فإن التكامل J متقارب شرطياً.

7.6.4 النوع الثاني: الدالة المكاملة غير محدودة

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a;b[$، وغير محدودة عند النقطة $x=b$، أي $\lim_{x\to b^-}f(x)=0$. نكون عندئذٍ، هذه الدالة كمولة على المجال $[a;b-\varepsilon[$، حيث $\varepsilon>0$. أي يوجد التكامل الذي حده الأعلى متغير $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$

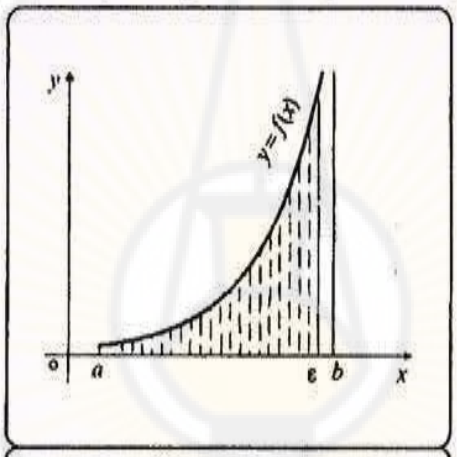
تعريف 7.5: نسمي النهاية

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (7.11)$$

تكاملاً شاذاً من النوع الثاني (تكامل شاذ عند حده الأعلى).

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متقارب وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية. أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو غير محدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متباعد.

ويعني ذلك هندسياً، أن مساحة المنطقة المظللة في الشكل 7.8، موجودة إذا كان التكامل الشاذ (7.11) متقارباً، وليس لها مساحة، إذا كان التكامل الشاذ (7.11) متباعداً.



الشكل 7.8

نُعرّف بأسلوبٍ مماثل، التكامل الشاذ عند حده الأدنى.

تعريف 7.6 : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على المجال $]a;b]$، وغير محدودة عند النقطة $x = a$، فإننا نسمي النهاية:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

تكاملاً شاذاً عند حده الأدنى.

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متقارب وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية. أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو غير محدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ متباعد.

تعريف 7.7 : إذا كان للدالة $f(x)$ نقطة انقطاع من النوع الثاني من نقطة داخلية c من المجال $[a;b]$، فإننا نجزئ التكامل $\int_a^b f(x)dx$ لمجموع تكاملين شاذين من النوع الثاني:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \qquad (7.12)$$

إذا كانت كل من النهايتين موجودة ومحدودة، فإننا نقول إن التكامل الشاذ $\int_a^b f(x)dx$ متقارب، وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية، أما إذا كانت إحدى هاتين النهايتين، على الأقل غير موجودة أو غير محدودة فإن التكامل الشاذ متباعد.

ملحوظة 7.9 : يمكن، بأسلوبٍ مشابه، تعميم هذا التعريف إذا كان للدالة $f(x)$ نقطتان أو أكثر من نقاط الانقطاع من النوع الثاني على المجال $[a;b]$.

مثال 7.21 : ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي α تقارب وتباعد التكامل

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad ; \quad (a < b)$$

الحل: التكامل شاذ عند حده الأدنى. ليكن $\varepsilon > 0$. نحسب التكامل:

$$\phi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \left[\ln|x-a|\right]_{a+\varepsilon}^b = \ln(b-a) - \ln|\varepsilon| & ; \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{a+\varepsilon}^b = \dfrac{-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & ; \alpha \neq 1 \end{cases}$$

نحسب الآن النهاية $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\phi(\varepsilon)$:

1. $\alpha=1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+}\phi(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right]=\infty$

2. $\alpha\neq 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+}\phi(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\alpha-1}\left[\varepsilon^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right]=\begin{cases}\infty & ;\ \alpha>1\\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & ;\ \alpha<1\end{cases}$

وعليه، فإن التكامل الشاذ المعطى متقارب فقط في الحالة $\alpha<1$، وقيمته:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad ; \quad (\alpha<1)$$

مثال 7.22 : ادرس تقارب وتباعد التكامل $I=\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}$.

الحل: التكامل I شاذ، لأن الدالة المكاملة غير معرفة وغير محدودة عند النقطة $x=2$ وهي نقطة داخلية من مجال المكاملة $[-1;3]$. نجزئ التكامل I إلى تكاملين شاذين، الأول عند حده الأعلى والثاني عند حده الأدنى.

$$I=\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x-2)^3}+\int_{2}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$I=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{2-\varepsilon_1}\frac{dx}{(x-2)^3}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left[\frac{-1}{2(x-2)^2}\Big|_{-1}^{2-\varepsilon_1}\right]+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left[\frac{-1}{2(x-2)^2}\Big|_{2+\varepsilon_2}^{3}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left(\frac{-1}{2\varepsilon_1^2}+\frac{1}{18}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\right)=\frac{1}{18}-\frac{1}{2}-\infty+\infty$$

فالتكامل الشاذ متباعد.

7.6.5 القيمة الأساسية للتكامل الشاذ من النوع الثاني

إذا كان للدالة $f(x)$ نقطة انقطاع من النوع الثاني في نقطة داخلية c من المجال $[a;b]$، وكان التكامل الشاذ (7.12) متباعداً، ولكن باختيار $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ في (7.12)، أي:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

وكانت هذه النهاية موجودة ومحدودة، فإن قيمتها تسمى القيمة الأساسية لكوشي للتكامل الشاذ ونرمز لها بـ $V.P.\int_a^b f(x)dx$.

مثال 7.23 : أوجد القيمة الأساسية للتكامل الشاذ $I = \int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}$.

الحل: وجدنا في المثال 7.22، أن التكامل I غير متقارب. نفرض $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ونحسب النهاية:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^3} + \int_{2+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = -\frac{4}{9}$$

أي أن التكامل الشاذ I موجود بمعنى القيمة الأساسية لكوشي. والقيمة الأساسية هي

$$V.P.I = -\frac{4}{9}$$

7.6.6 اختبارات تقارب التكاملات الشاذة من النوع الثاني

نعطي دون برهان بعض اختبارات تقارب التكاملات الشاذة من النوع الثاني، والتي تشبه إلى حد كبير اختبارات تقارب التكاملات الشاذة من النوع الأول. وسوف نعطي هذه الاختبارات في حالة أن الدالة $f(x)$ غير محدودة عند النقطة $x = a$. وتعطى اختبارات مماثلة إذا كانت الدالة $f(x)$ غير محدودة عند النقطة $x = b$، أو عند النقطة $x = c$ $a < c < b$.

1. اختبار المقارنة:

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين وموجبتين على المجال $[a;b]$ وكمولتين على كل مجال جزئي من هذا المجال. وليكن:

$$0 < f(x) \le g(x) \quad ; \quad a < x < b$$

عندئذٍ، إذا كان التكامل الشاذ $\int_a^b g(x)dx$ متقارباً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^b f(x)dx$ متقارب

وإذا كان التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً، فإن التكامل $\int_a^b g(x)dx$ متباعد.

مثال 7.24 : ادرس تقارب وتباعد التكاملين:

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} \text{ و } J = \int_2^5 \frac{\ln x}{(x-2)^3}dx$$

الحل: التكامل I شاذ عند حده الأدنى. واضح أن:

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad ; \quad x > 1$$

ولما كان التكامل الشاذ $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ متقارباً (المثال 7.21، حيث $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)، فإن التكامل الشاذ I متقارب.

التكامل J شاذ عند حده الأدنى. واضح أن:

$$\frac{\ln x}{(x-2)^3} > \frac{1}{(x-2)^3} \quad ; \quad x > 2$$

ولما كان التكامل $\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^3}$ متباعداً (المثال 7.21، حيث $\alpha = 3 > 1$)، فإن التكامل J متباعد.

2. اختبار القسمة (اختبار المقارنة الثاني):

إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ معرفتين وموجبتين على المجال $[a;b[$ وكمولتين على كل مجال جزئي من هذا المجال، ووجدت النهاية:

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

فإننا نميز الحالات:

آ- $0 \neq A < \infty$، فإن التكاملين الشاذين $\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b g(x)dx$ يتقاربان معاً ويتباعدان معاً.

ب- $A = 0$ وكان التكامل الشاذ $\int_a^b g(x)dx$ متباعداً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^b f(x)dx$ متقارب.

جـ- $A = \infty$ وكان التكامل الشاذ $\int_a^b g(x)dx$ متباعداً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^b f(x)dx$ متباعد.

مثال 7.25 : ادرس تقارب وتباعد التكامل $I = \int_4^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 12}$.

الحل: التكامل I شاذ عند حده الأدنى. ولما كان التكامل الشاذ $J = \int_4^6 \frac{dx}{(x-4)}$ متباعد (المثال 7.21، حيث $\alpha = 1$)، وكان:

$$A = \lim_{x \to 4} \frac{1/(x^2 - 7x + 12)}{1/(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-3)} = 1 \neq 0$$

فإن التكامل I متباعد.

3. اختبار القيمة المطلقة:

إذا غيرت الدالة $y = f(x)$ إشارتها على المجال $[a;b[$، وكان التكامل الشاذ $\int_a^b |f(x)|dx$ متقارباً، فإن التكامل الشاذ $\int_a^b f(x)dx$ متقارب. نسمي عندئذٍ، تقارب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ تقارباً مطلقاً.

ملحوظة 7.10 : إذا كان التكامل الشاذ $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً، وكان التكامل الشاذ $\int_a^b |f(x)|dx$ متباعداً، فإن التقارب يسمى شرطياً.

مثال 7.26 : ادرس التقارب المطلق والشرطي للتكامل الشاذ $I = \int_{\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}}\,dx$

الحل: لما كان

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[4]{x-\pi}} \quad ; \quad x > \pi$$

وكان التكامل $\int_{\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}}\,dx$ متقارباً (المثال 7.21، حيث $\alpha = \frac{1}{4} < 1$)، فإن التكامل الشاذ $\int_{\pi}^{4\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}}\right| dx$ متقارب. وعليه، فإن التكامل I متقارب بالإطلاق.

مثال 7.27 : أثبت أن التكامل الشاذ $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ متقارب شرطياً.

الحل: نعوض في التكامل $x = \frac{1}{t}$، فنجد $I = \int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ وهذا التكامل متقارب شرطياً، المثال 7.20.

7.6.7 النوع الثالث:

مجال المكاملة غير محدودة والدالة المكاملة غير محدودة عند نقطة، أو أكثر، داخل هذا المجال أو عند إحدى طرفيه.

يُعبّر عن هذا النوع من التكاملات بدلالة تكاملات شاذة من النوعين الأول والثاني، وبذا تؤول دراسة هذا النوع إلى النوعين السابقين.

مثال 7.28 : ادرس تقارب وتباعد التكامل الشاذ $(\alpha \in \mathbb{R})$; $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

الحل: التكامل I شاذ من النوع الثالث، لأن مجال المكاملة غير محدود والدالة المكاملة غير محدودة عند حده الأدنى. نجزئ التكامل I لتكاملين شاذين:

$$I = \int_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

كما مر معنا في المثال 7.22، فإن التكامل $\int_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ متقارب من أجل $\alpha < 1$، ومتباعد من أجل $\alpha \geq 1$. وعليه، فإن التكامل الشاذ I متباعد أيا تكن قيمة الوسيط α.

مثال 7.29 : ادرس تقارب وتباعد التكامل $I = \int_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\, dx$.

الحل: التكامل I شاذ من النوع الثالث، لأن مجال المكاملة غير محدود والدالة المكاملة غير محدودة عند النقطة $x = 0$. نجزئ التكامل الشاذ لتكاملين شاذين:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\cos - \sin x}{x^2}\, dx + \int_{\pi}^{\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\, dx$$

التكامل الأول شاذ من النوع الثاني والتكامل الثاني شاذ من النوع الأول. ندرس كل واحد على حدة.

$$\int_0^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{\pi} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{\sin\pi}{\pi} - \frac{\sin 0}{0}\right) = -1$$

أي أن هذا التكامل متقارب.

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ \pi<b<\infty}} \int_{\pi}^{b} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\pi}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{\sin b}{b} - \frac{\sin\pi}{\pi}\right) = 0$$

أي أن هذا التكامل متقارب.

وعليه، فإن التكامل I متقارب، وقيمته:

$$I = -1 + 0 = -1$$

7.7 التطبيقات الهندسية للتكامل المحدد

7.7.1 حساب مساحة شكل مستو

أولاً. حساب مساحة شكل مستو في الإحداثيات الديكارتية:

وجدنا من المعنى الهندسي للتكامل المحدد، أنه إذا كان $f(x) \le 0$ على المجال $[a;b]$، فإن مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الدالة $y = f(x)$ وبالمحور ox وبالمستقيمين $x = a$ و $x = b$، الشكل 7.9-A، تعطى بالعلاقة:

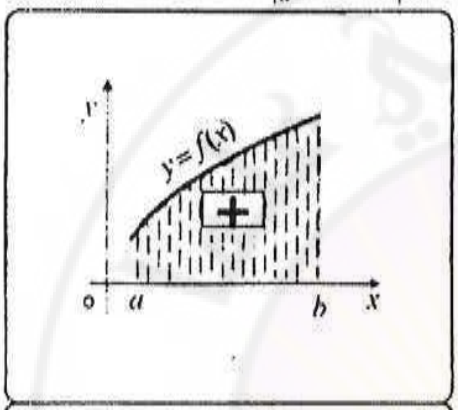
$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx \qquad (7.12)$$

وكما هو واضح، فإن $S > 0$.

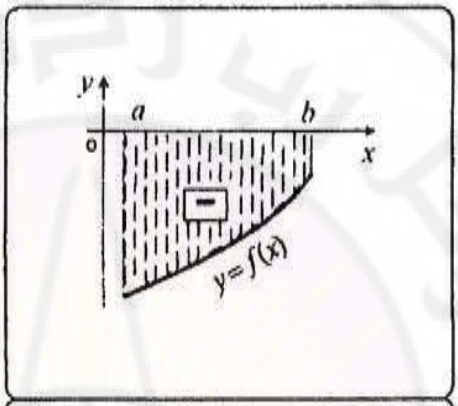
أما إذا كان $f(x) \le 0$ على المجال $[a;b]$، فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$، الشكل 7.9-B.

وعليه، فإن:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b y\,dx$$



الشكل 7.9-A



الشكل 7.9-B

وبأسلوبٍ مشابه، إذا كانت المنطقة محصورة بمنحني الدالة $x = \varphi(y)$ وبالمحور oy وبالمستقيمين $y = c$ و $y = d$، الشكل 7.10، فإن مساحتها تعطى بإحدى العلاقتين:

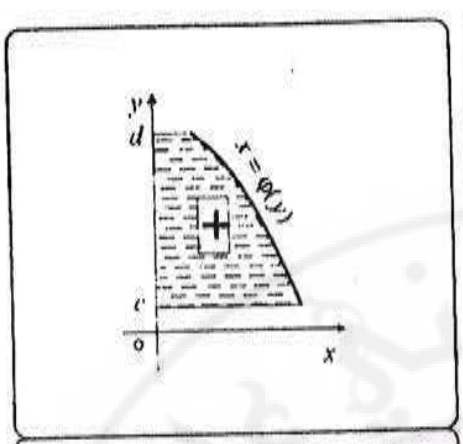
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d x\,dy$$

إذا كان $\varphi(y) \ge 0$ على المجال $[c;d]$، الشكل 7.10-A، أو

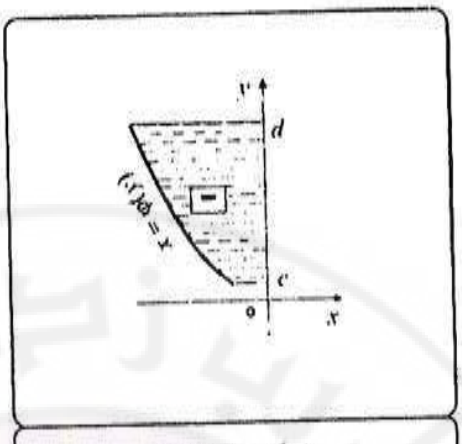
$$S = \left|\int_c^d \varphi(y)dy\right| = -\int_c^d x dy$$

إذا كان $\varphi(y) \ge 0$ على المجال $[c;d]$، الشكل 7.10-B.

Damascus University

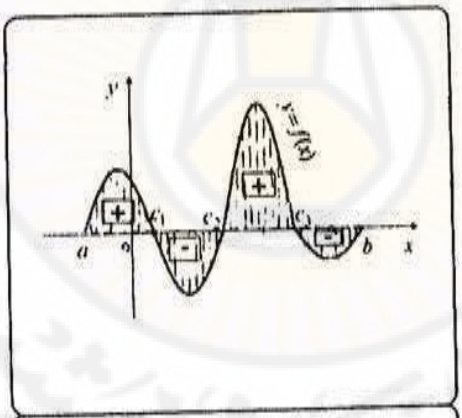


الشكل 7.10-A



الشكل 7.10 -B

إذا كانت الدالة $f(x)$ تغير إشارتها عدداً منتهياً من المرات على المجال $[a;b]$، فإن التكامل (7.12) يساوي المجموع الجبري لمساحات المناطق المحصورة بالمنحني البياني للدالة $y = f(x)$ والواقعة فوق المحور ox مع الإشارة (+)، والواقعة تحت المحور ox مع الإشارة (-) الشكل 7.11.



الشكل 7.11

فلحساب مساحة المنطقة المظللة في الشكل 7.11، يجب تجزئة مجال المكاملة $[a;b]$ لأجزاء، تُحافظ فيها الدالة $f(x)$ على إشارتها:

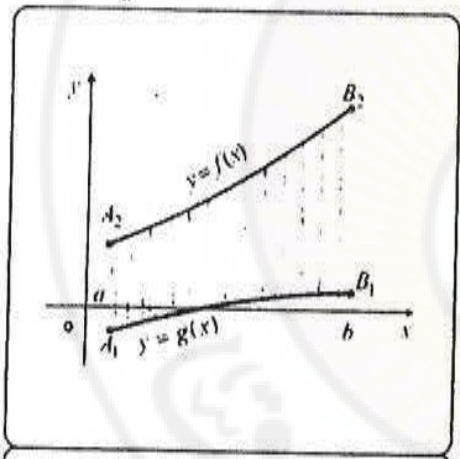
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{b} f(x)dx$$

إذا كان المطلوب حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنيي الدالتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$، فإن هذه المساحة هي الفرق بين مساحتي الشكلين aA_2B_2b و aA_1B_1b، الشكل 7.12.

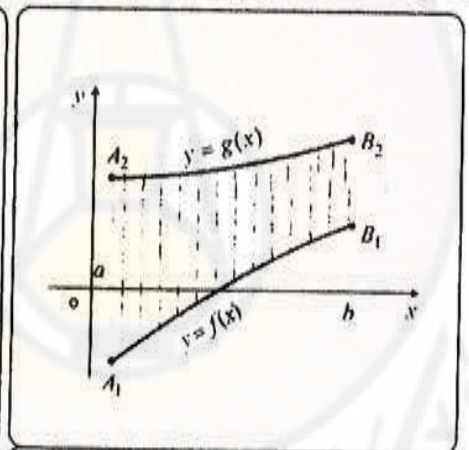
ويمكن في هذه الحالة استخدام إحدى الصيغتين:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad ; \quad f(x) \geq g(x) \ , \ \forall x \in [a;b]$$

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \quad ; \quad g(x) \geq f(x) \ , \ \forall x \in [a;b]$$



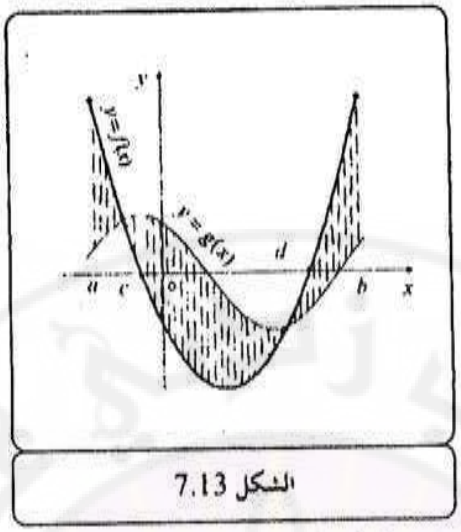
الشكل 7.12 -A



الشكل 7.12 -B

وإذا لم يكن للفرق $f(x) - g(x)$ إشارة ثابتة على المجال $[a;b]$، فإننا نقسم هذا المجال لأجزاء، يحافظ في كلٍ منها الفرق $f(x) - g(x)$ على إشارته. فمثلاً، من أجل الحالة المبينة بالشكل 7.13، تعطى مساحة المنطقة المظللة بالعلاقة:

$$S = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^d [g(x) - f(x)]dx + \int_d^b [f(x) - g(x)]dx$$



الشكل 7.13

مثال 7.30 : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = \sin x$ والمحور ox، من أجل $-\frac{1}{2}\pi \le x \le \frac{1}{2}\pi$.

الحل: لما كان $\sin x \le 0$ من أجل $x \in [-\frac{1}{2}\pi;0]$، و $\sin x \ge 0$ من أجل $x \in [0;\frac{1}{2}\pi]$، فإن المساحة المطلوبة:

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin x dx \right| + \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin x dx =$$

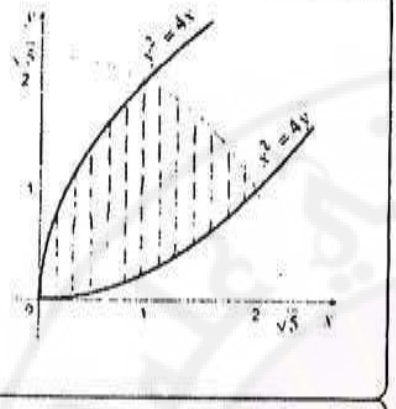
$$= \left| (-\cos x)\Big|_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \right| + (-\cos x)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = |(-1+0)| + (0+1) = 1+1 = 2 \quad \text{(وحدة مساحة)}$$

مثال 7.31 : احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $x = 0$ و $x = 2$ و $y = 2^x$ و $y = 2x - x^2$.

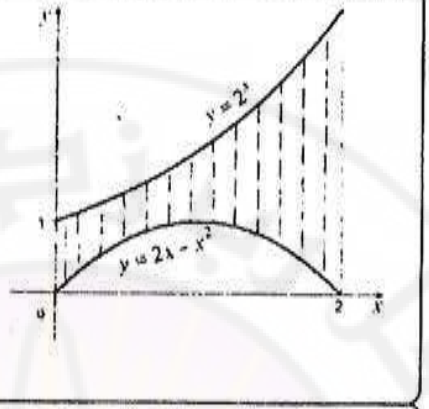
الحل: لما كانت أعظم قيمة للدالة $y = 2x - x^2$ على المجال $[0;2]$ هي 1، تبلغها عند النقطة $x = 1$، و $2^x \ge 1$ على هذا المجال، فإن $2^x > 2x - x^2$ على هذا المجال. عندئذٍ، فإن مساحة المنطقة المطلوبة:

$$S = \int_0^2 \left[2^x - (2x - x^2)\right] dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 - (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = \left(\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}\right)$$

مثال 7.32: احسب مساحة جزء من القرص الدائري $x^2 + y^2 \le 5$ المحاط بالمنحنيين $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$، من أجل $x \ge 0$ و $y \ge 0$، الشكل 7.15.



الشكل 7.15



الشكل 7.14

الحل: بحل المعادلتين $y^2 = 4x$ و $x^2 + y^2 = 5$ نجد النقطة $A(1,2)$. وبحل المعادلتين $x^2 = 4y$ و $x^2 + y^2 = 5$ نجد النقطة $B(2,1)$. وعليه، فإن المساحة المطلوبة:

$$S = \int_0^2 [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

حيث $f_1(x) = \frac{x^2}{4}$ و $f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{4x} & ; \quad x \in [0.1] \\ \sqrt{5 - x^2} & ; \quad x \in [1,2] \end{cases}$

وعليه، فإن

$$S = \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^4}{4}\right)dx + \int_1^2 \left(\sqrt{5 - x^2} - \frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^5}{12}\right)\Big|_0^1 + \left[\frac{x}{2}\sqrt{5 - x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{x^5}{12}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{1}{12} + \left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{3}{5}$$

إذا كانت المنطقة محددة بمنحن معطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad ; \quad t_1 \le t \le t_2$$

وبالمحور ox وبالمستقيمين $x(t_1) = a$ و $x(t_2) = b$، فإن مساحتها، من أجل $y(t) \ge 0$ على المجال $[t_1; t_2]$، تعطى بالعلاقة:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$$

حيث تنتج هذه العلاقة من العلاقة (7.12)، بتغيير في المتحول $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $dx = x'(t)dt$ وتحدد القيمتان t_1 و t_2 من المعادلتين $x(t_1) = a$ و $x(t_2) = b$.

مثال 7.33 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالقطع الناقص، باستخدام معادلاته الوسيطية

$$x = a\cos t \quad , \quad y = b\sin t \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

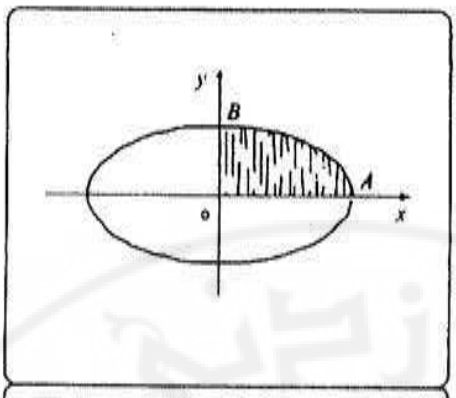
الحل: لما كان القطع الناقص متناظراً بالنسبة إلى المحورين ox و oy، فإنه يكفي حساب ربع المساحة المحصورة داخله، المساحة oAB، الواقعة في الربع الأول من المستوي، الشكل 7.16.

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx$$

نجري تغييراً في المتحول، باستخدام المعادلات الوسيطية للقطع، حيث $dx = -a\sin t dt$. من أجل $x_1 = 0$ يكون $t_1 = \frac{1}{2}\pi$ ومن أجل $x_2 = a$، يكون $t_2 = 0$، نجد:

$$S = 4\int_0^a y dx = -4ab\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin^2 t dt = 2ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 2ab(t - \tfrac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \pi ab$$



الشكل 7.16

مثال 7.34: احسب مساحة المنطقة الواقعة على يمين المستقيم $x = 3$، والمحصورة بين المنحني $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ والمحور ox.

الحل: المنطقة المطلوب حساب مساحتها غير محدودة من اليمين، لذا نحسب المساحة على المجال $[3;b]$، حيث $3 < b < \infty$، ومن ثم نجعل b تسعى إلى اللانهاية:

$$S = 4\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_3^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln\sqrt{2}$$

ثانياً. حساب مساحة شكل مستو في الإحداثيات القطبية

لتكن المنطقة المطلوب حساب مساحتها محاطة بالشعاعين $\varphi = \alpha$ و $\varphi = \beta$ وبالمنحني المعطى قطبياً بالمعادلة $\rho = \rho(\varphi)$، حيث $\varphi \in [\alpha;\beta]$.

تسمى هذه المنطقة قطاعاً منحنياً وهي شبيهة بالقطاع الدائري، الشكل 7.17.

يُعد القطاع المنحني نظامياً، إذا كان أي نصف مستقيم منبعث من القطب o، معادلته $\varphi = \varphi^*$، حيث $\alpha \le \varphi^* \le \beta$، يقطع المنحني $\rho = \rho(\varphi)$ بنقطة واحدة فقط.

ونفرض أن المنحني $\rho = \rho(\varphi)$ مستمر على المجال $[\alpha;\beta]$.

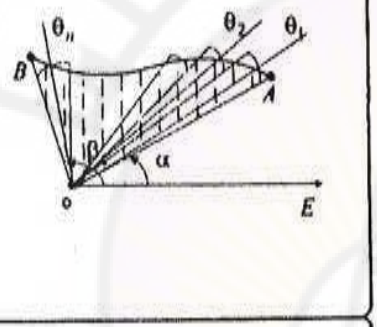
نستخدم لحساب مساحة القطاع المنحني oAB طريقة مشابهة في حساب مجموع ريمان التكاملي:

1. نجزئ المجال $[\alpha;\beta]$ لـ n جزء اختياري بالنقاط

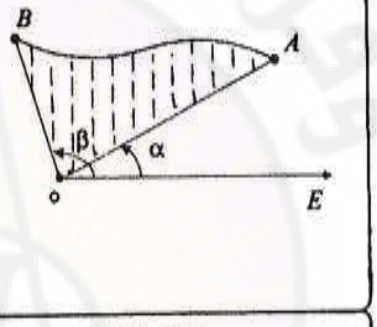
$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$$

نرمز بـ $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$، ونرسم الأشعة $\varphi = \varphi_k$، حيث $k = 1,2,\ldots ,n$.

ينقسم عندئذٍ، القطاع المنحني oAB لـ n جزء، الشكل 7.18.



الشكل 7.18



الشكل 7.17

2. نختار في كل قطاع جزئي نقطة θ_k ونوجد قيمة الدالة $\rho(\varphi)$ عندها. أي

$$\rho_k = \rho(\theta_k) \;;\; k = 1,2,\ldots ,n$$

3. نفرض أن الدالة $\rho = \rho(\varphi)$ ثابتة على كل مجال جزئي $[\varphi_{k-1};\varphi_k]$، وتساوي $\rho_k = \rho(\theta_k)$ يمكن عندئذٍ، استبدال كل قطاع منحن جزئي بقطاع دائري نصف قطره $\rho_k = \rho(\theta_k)$ وزاويته $\Delta\varphi_k$، الشكل 7.18. مساحة هذا القطاع الدائري هي:

$$\Delta S_k = \tfrac{1}{2}\rho^2(\theta_k)\cdot\Delta\varphi_k$$

نحسب الآن مساحة كافة القطاعات الدائرية الجزئية التي حصلنا عليها، وهي قريبة من S مساحة القطاع المنحني oAB:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}\rho^2(\theta_k)\cdot\Delta\varphi_k \qquad (7.13)$$

تكون هذه القيمة قريبة من المساحة S، كلما قل مقدار الخطأ في حساب فروق مساحات القطاعات، أو كلما صغرت المجالات الجزئية $[\varphi_{k-1};\varphi_k]$، أي كلما ازدادت n. ويُعدّ الطرف الأيمن من العلاقة (7.13)، مجموع ريمان التكاملي للدالة $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ على المجال $[\alpha;\beta]$.

4. حتى نحصل على القيمة الدقيقة للمساحة S، نأخذ نهاية طرفي العلاقة (7.13)، عندما تسعى $\lambda = \lim\limits_{[\alpha;\beta]}\{\Delta\varphi_k\}$ للصفر:

$$S = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho^2(\theta_k)\cdot\Delta\varphi_k \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

وهكذا، فإن مساحة القطاع المنحني:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

مثال 7.35 : احسب مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الكارديوئيد:

$$\rho = a(1+\cos\varphi)\ ;\ (a>0)$$

الحل: إن منحني الكارديوئيد متناظر بالنسبة إلى المحور القطبي، وعليه، فإن مساحة المنطقة المحصورة داخله تساوي ضعفي مساحة المنطقة الواقعة فوق المحور القطبي أي القطاع oAB، الشكل 7.19. وتكون معادلة القوس oAB هي:

$$\rho = a(1+\cos\varphi)\ \ ;\ \ 0\le\varphi\le\pi$$

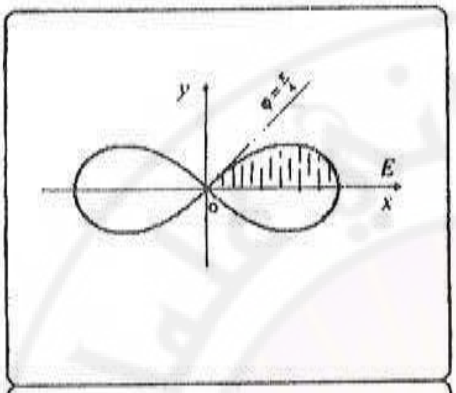
وهكذا، فإن المساحة هي:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$
$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

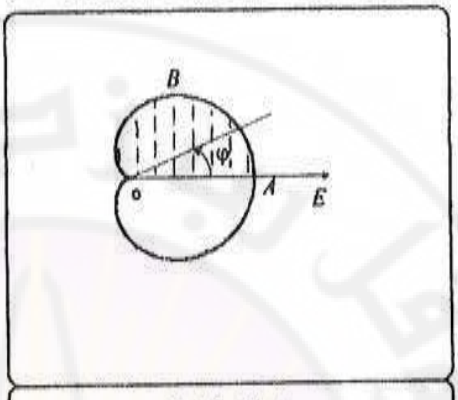
مثال 7.36 : احسب مساحة المنطقة المحصورة بمنحني ليمنسكات بيرنولي:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$$

الحل: لما كانت معادلة المنحني تحوي x و y بقوى زوجية فقط، فإن المنحني متناظر بالنسبة إلى المحورين ox و oy. وعليه، فإن المساحة المطلوبة تساوي أربعة أضعاف مساحة الجزء الواقع في الربع الأول من المستوي xoy، الشكل 7.20.



الشكل 7.20



الشكل 7.19

نكتب المعادلة القطبية لمنحني الليمنسكات. نعوض $x=\rho\cos\varphi$ و $y=\rho\sin\varphi$ في المعادلة:

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)\Rightarrow$$

$$\rho^2=a^2\cos 2\varphi$$

وهكذا، فإن المساحة المطلوبة:

$$S=4\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\,\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{1}{4}\pi}=a^2$$

مثال 7.38 : احسب مساحة المنطقة المحصورة بالدائرتين

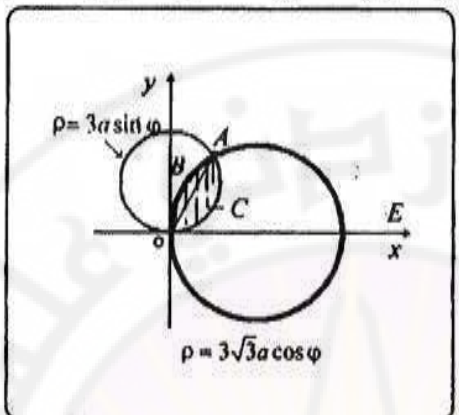
$$\rho=3a\sin\varphi \quad \text{و} \quad \rho=3\sqrt{3}a\cos\varphi$$

الحل: نحل المعادلتين حلاً مشتركاً لإيجاد نقطة تقاطع الدائرتين A:

$$\left.\begin{aligned}\rho&=3\sqrt{3}a\cos\varphi\\ \rho&=3a\sin\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=\tfrac{1}{3}\pi\Rightarrow\rho=a$$

وعليه، فإن $A\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)$.

إن المساحة المطلوبة S هي مجموع مساحتي القطاعين الدائريين oCA وoBA، الشكل 7.21.



الشكل 7.21

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 9a^2\sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 27a^2\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi + \frac{27}{2}a^2\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{9}{2}a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$$

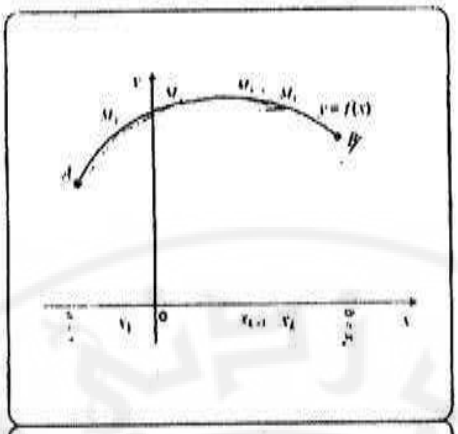
7.7.2 حساب طول قوس منحن

أولاً. حساب طول قوس منحنٍ مستوٍ في الإحداثيات الديكارتية

لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a;b]$، وليكن l منحني هذه الدالة، الشكل 7.22. نحسب طول القوس l المحصور بين المستقيمين $x = a$ و $x = b$.

نجزئ المجال $[a;b]$ اختيارياً لـ n جزء بالنقاط

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$



الشكل 7.22

نمرر من نقاط التجزئة، مستقيمات شاقولية توازي المحور oy فتتقاطع مع القوس AB بالنقاط $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. عندئذٍ، يتجزأ هذا القوس لـ n جزء. نرسم الخط المنكسر $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$، الشكل 7.22. ونرمز لطول هذا الخط المنكسر بالرمز l_n:

$$l_n = \left|\overline{AM_1}\right| + \left|\overline{M_1M_2}\right| + \ldots + \left|\overline{M_{n-1}B}\right| = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k$$

حيث Δl_k طول القطعة $\overline{M_{k-1}M_k}$ من الخط المنكسر AB.

واضح أن طول الخط المنكسر يساوي تقريباً طول القوس AB، أي $l \approx l_n$. وإذا كبرنا n (عدد نقاط تجزئة المجال $[a;b]$)، بحيث يصبح أكبر أطوال المجالات الجزئية يسعى إلى الصفر، فإن طول الخط المنكسر AB يصبح مساوياً لطول القوس AB.

إذا وُجدت النهاية l_n، عندما يسعى $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$ إلى الصفر، فإنها تساوي l طول القوس AB.

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \qquad (7.14)$$

أما إذا لم تكن تلك النهاية موجودة، فإن طول القوس AB غير موجود.

ونبيّن، الآن، أنه إذا كان المشتق $f'(x)$ مستمراً على المجال $[a;b]$، فإن طول القوس AB موجود، ونوجد صيغة لحسابه.

نوجد طول قطعة $\overline{M_{k-1}M_k}$ من الخط المنكسر AB.

لما كان $M_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ و $M_k(x_k, f(x_k))$، فإن:

$$\Delta l_k = \left|\overline{M_{k-1}M_k}\right| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot (\Delta x_k)$$

ومن مبرهنة لاغرانج، نجد

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k) \quad ; \quad \xi_k \in]x_{k-1}; x_k[$$

وعليه، فإن:

$$\Delta l_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot (\Delta x_k)$$

نعوض في (7.14):

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot (\Delta x_k)$$

كما هو واضح، فإن المجموع في الطرف الأيمن من هذه العلاقة يمثل مجموع ريمان التكاملي للدالة $\sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}$ على المجال $[a;b]$، ونهاية هذا المجموع موجودة وتساوي تكامل هذه الدالة في هذا المجال:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \cdot (\Delta x_k) \overset{\Delta}{=} \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

وهكذا، إذا كان للدالة $f(x)$ مشتق مستمر على المجال $[a;b]$، فإنه يمكن حساب طول القوس AB بالعلاقة:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (7.15)$$

إذا كان المنحني AB معطى وسيطياً بالعلاقات

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad ; \quad t_1 \le t \le t_2$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ دوال مستمرة هي ومشتقاتها $x'(t)$ و $y'(t)$ على المجال $[t_1;t_2]$ و $x'(t) \neq 0$ في هذا المجال و تتغير t من t_1 إلى t_2، عندما تتغير $x(t)$ من a إلى b و $x(t_1) = a$ و $x(t_2) = b$، فإن l طول القوس AB يعطى بالعلاقة:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \qquad (7.16)$$

حيث تنتج هذه العلاقة من العلاقة (7.15)، بإجراء تغيير في المتحول $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $dx = x'(t)dt$

مثال 7.39: احسب طول محيط الدائرة $x^2 + y^2 = R^2$.

الحل: نوجد طول ربع المحيط ونضرب الناتج بـ 4. وذلك لأن الدائرة متناظرة بالنسبة إلى المحورين ox و oy. معادلة ربع المحيط، الواقع في الربع الأول من المستوي xoy.

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad ; \quad 0 \le x \le R$$

ومنه:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

نعوض في (7.15):

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \int_0^R \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R\left[\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi R$$

وعليه، فإن محيط الدائرة: $l = 2\pi R$.

مثال 7:40: احسب طول قوس منحني السيكلويد:

$$x = a(t - \sin t)\ ,\ y = a(1 - \cos t)\ \ ;\ \ 0 \le t \le 2\pi$$

الحل: نعوض في العلاقة (7.16):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \tfrac{t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2}\, dt = -4a \cos \tfrac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4a + 4a = 8a \ \text{(وحدة طول)}$$

ملحوظة 7.11: إذا كان المنحني فراغياً ومعطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ \ ;\ \ t_1 \le t \le t_2$$

حيث إن مشتقات الدوال $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ مستمرة على المجال $[t_1;t_2]$، فإن طول هذا المنحني يعطى بالعلاقة:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt \qquad (7.17)$$

مثال 7.41 : احسب طول اللولب الدائري:

$$x = a\cos t\ ,\ y = a\sin t\ ,\ z = amt\ :\ 0 \le t \le 2\pi\ \ (a, m \in \mathbb{R}^+)$$

الحل: نعوض في العلاقة (7.17)

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + m^2}\, dt = 2\pi a \sqrt{1 + m^2}$$

ثانياً. طول قوس منحنٍ مستوٍ في الإحداثيات القطبية

لنكن المنحني معطى قطبياً بالمعادلة:

$$\rho = \rho(\varphi)\ \ ;\ \ \varphi \in [\alpha;\beta]$$

نفرض أن الدالتين $\rho(\varphi)$ و $\rho'(\varphi)$ مستمرتان على المجال $[\alpha;\beta]$. يمكن التعبير عن هذا المنحني وسيطياً، وذلك من العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية:

$$x = \rho\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\sin\varphi$$

نعوض في هذه العلاقات $\rho = \rho(\varphi)$، فنجد:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi \ , \ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \quad ; \quad \varphi \in [\alpha;\beta]$$

وهي معادلات وسيطية، وسيطها φ.

لما كان: $y'_\varphi = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi$ و $x'_\varphi = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi$، فإن

$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = \rho^2 + \rho'^2$$

نعوض في العلاقة (7.16)، فنحصل على علاقة حساب طول قوس منحن معطى قطبياً:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \qquad (7.18)$$

مثال 7.42 : احسب طول منحني الكاردیوئید

$$\rho = a(1+\cos\varphi) \ ; \ (a > 0)$$

الحل: لما كان المنحني متناظراً بالنسبة إلى المحور القطبي، نحسب نصف طول المنحني، أي من أجل $\varphi \in [0;\pi]$ ونضرب الناتج بـ 2:

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\tfrac{1}{2}\varphi d\varphi = 8a\sin\tfrac{1}{2}\varphi\Big|_0^\pi = 8a$$

ثالثاً. تفاضل طول القوس

نفرض في العلاقة (7.15)، أن الحد الأدنى للتكامل ثابت والحد الأعلى متغير x. يكون عندئذٍ، الطول l تابعاً للمتحول x:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

وباشتقاق طرفي هذه العلاقة بالنسبة إلى x، نجد:

$$l'(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

وعليه، فإن $dl = l'(x)dx$، أي أن $dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

ولما كان $y' = \frac{dy}{dx}$، فإن:

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

أي أن $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

7.7.3 حساب حجم مجسم دوراني

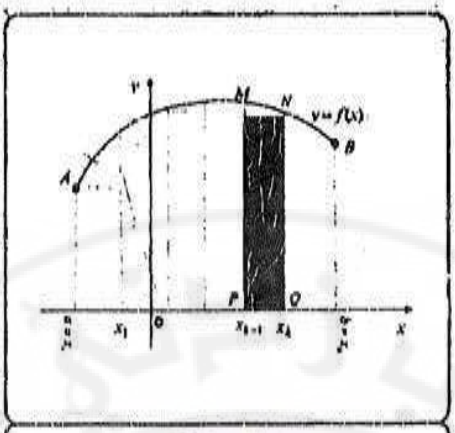
لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a;b]$. نفرض أن منحني الدالة $y = f(x)$ يدور حول المحور ox بين المستويين $x = a$ و $x = b$. نحسب حجم المجسم الدوراني الناتج.

نجزئ المجال $[a;b]$ اختيارياً لـ n جزء بالنقاط

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

ننشئ على كل مجال جزئي $[x_{k-1};x_k]$ مستطيل، الشكل 7.23، عندما يدور المنحني $y = f(x)$ حول المحور ox يشكل المستطيل $PMNQ$ أسطوانة دورانية قائمة، حجمها $v_k = \pi f^2(x_{k-1})\cdot(\Delta x_k)$، حيث $\Delta x_k = x_k = x_k - x_{k-1}$. ويكون مجموع حجوم هذه الأسطوانات الجزئية، مساوياً تقريباً للحجم المطلوب، أي:

$$v \approx \sum_{k=1}^{n} \pi f(x_{k-1})\cdot(\Delta x_k)$$



الشكل 7.23

يمثل المجموع في الطرف الأيمن من هذه العلاقة، مجموع ريمان التكاملي للدالة $f^2(x)$ على المجال $[a;b]$.

إذا كانت الدالة $f^2(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$، فإن نهاية مجموع ريمان التكاملي لها، عندما يسعى $\lambda = \max_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ إلى الصفر، موجودة ومساوية للتكامل المحدد للدالة $f^2(x)$ على المجال $[a;b]$.

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi f^2(x_{k-1})\cdot(\Delta x_k) \overset{\Delta}{=} \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_a^b y^2dx \qquad (7.19)$$

- إذا كان المجسم الدوراني ناتجاً عن دوران المنحني CD حول المحور oy، فإن حجمه يعطى بالعلاقة:

$$V = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_c^d [g(y)]^2dx$$

حيث $y\in[c,d]$; $x=g(y)$ معادلة المنحني CD.

- وإذا كان المجسم الدوراني ناتجاً عن الدوران حول المحور ox للمنحني المعطى وسيطياً بالعلاقات

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad ; \quad t_1 \le t \le t_2$$

حيث $y(t) \ge 0$ في هذا المجال و $x(t)$ تتغير من a إلى b عندما تتغير t من t_1 إلى t_2، و $x(t_1) = a$ و $x(t_2) = b$، فإن حجم هذا المجسم الدوراني تعطى بالعلاقة:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt$$

حيث تنتج هذه العلاقة من العلاقة (7.19)، بإجراء تغيير في المتحول $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $dx = x'(t)dt$.

- يمكن بأسلوبٍ مشابه، استنتاج علاقة حساب حجم مجسم دوراني لمنحن معطى قطبياً ويدور هذا المنحني حول المحور القطبي.

مثال 7.43: احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران حول المحور ox للنصف العلوي من القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

الحل: معادلة نصف القطع الناقص الواقع فوق المحور ox:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad ; \quad (-a \le x \le a)$$

نعوض في العلاقة (7.19):

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = 2\pi \int_{0}^{a} \pi y^2 dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2 \quad \text{(وحدة حجم)}$$

مثال 7.44 : احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران حول المحور ox، لمنحني السيكلوئيد

$$x = a(t - \sin t) \ , \ y = a(1 - \cos t) \ ; \ t \in [0; 2\pi].$$

الحل: نعوض قيم x و y في العلاقة (7.19)

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 a(1-\cos t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \left[(t - \sin t)\Big|_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t) d(\sin t) \right] =$$

$$= \pi a^3 \left[2\pi + \tfrac{3}{2}(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t) - \sin t + \tfrac{1}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3$$

ملحوظة 7.12: إذا كان المجسم الدوراني ناتجاً عن الدوران حول المحور ox، لمنطقة مستوية محصورة بين منحنيي الدالتين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ على المجال $[a;b]$، حيث $f(x) \le g(x)$ على المجال $[a;b]$، أي أن مقطع هذا المجسم بمستو يعامد المحور ox، هو حلقة محصورة بين دائرتين مشتركتين بالمركز، مساحتها $(\pi g^2 - \pi f^2)$، فإن حجمه يعطى بالعلاقة:

$$V = \pi \int_a^b (g^2 - f^2) dx$$

مثال 7.45 : احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران حول المحور ox، للمنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

الحل: يمكن التحقق بسهولة أن

$$f(x) = x \le \sqrt{x} = g(x) \qquad ; \qquad 0 \le x \le 1$$

وعليه، فإن حجم المجسم الدوراني المطلوب هو

$$V = \pi \int_a^b (g^2 - f^2) dx = \pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \pi (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{6}\pi$$

7.7.4 حساب مساحة سطح دوراني

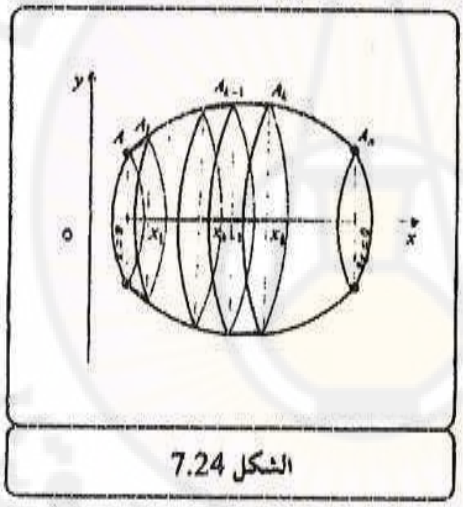
لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a;b]$. نفرض أن منحني الدالة $y=f(x)$ يدور حول المحور ox بين المستويين $x=a$ و $x=b$. نحسب مساحة السطح الدوراني الناتج.

نجزئ المجال $[a;b]$ اختيارياً لـ n جزء بالنقاط

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

ولتكن $A_0, A_1, \ldots, A_n$ النقاط المقابلة، لنقط التجزئة، من المنحني $y=f(x)$.

ننشئ الخط المنكسر $A_0A_1\ldots A_n$، الشكل 7.24.



الشكل 7.24

عندما يدور المنحني $y=f(x)$ حول المحور ox، يدور الخط المنكسر وتشكل كل قطعة مستقيمة من هذا الخط المنكسر سطحاً مخروطياً أو سطحاً أسطوانياً، مساحته الجانبية:

$$\sigma_k=2\pi\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}l_k\,.$$

حيث l_k طول القطعة المستقيمة $\overline{A_{k-1}A_k}$. أي:

$$l_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}$$

ومن مبرهنة لاغرانج:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \ ; \ \xi \in [x_{k-1}; x_k]$$

وعليه، فإن:

$$l_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \ ; \ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

إن مجموع المساحات الجانبية الجزئية المقابلة للقطع المستقيمة، المكونة للخط المنكسر $A_0A_1 \dots A_n$ يساوي تقريباً المساحة المطلوبة، أي:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k \approx 2\pi\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}(\Delta x_k)$$

$$\sigma \approx 2\pi\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(\Delta x_k) +$$

$$+\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) - f(\xi_k) + f(x_k) - f(\xi_k)]\cdot\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(\Delta x)\right\} \quad (7.20)$$

كما هو واضح، فإن الحد الأول في الطرف الأيمن عبارة عن مجموع ريمان التكاملي للدالة $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ على المجال $[a;b]$. وعندما يسعى الطول $\lambda = \max_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ إلى الصفر، فإن هذا المجموع يصبح مساوياً للتكامل المحدد للدالة المستمرة $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ على المجال $[a;b]$.

ولما كانت الدالة $f(x)$ مستمرة بانتظام على المجال $[a;b]$، فإنه وفق مبرهنة كانتور، أياً يكن العدد الموجب ε يوجد $\delta > 0$، بحيث يكون:

$$|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| < \varepsilon \ \text{ و } \ |f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon \ ; \ \lambda < \delta$$

نرمز بـ $M = \max_{[a;b]}\{\sqrt{1 + f'^2(x)}\}$. يكون عندئذٍ:

$$\left|\left\{\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) - f(\xi_k) + f(x_k) - f(\xi_k)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(\Delta x_k)\right\}\right| <$$

$$< 2\varepsilon M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k == 2\varepsilon M(b-a) \quad ; \quad \lambda < \delta$$

ولما كان ε صغيراً بقدرٍ كاف، فإن العبارة الأخيرة تسعى إلى الصفر، عندما تسعى λ إلى الصفر وهكذا، فإنه بأخذ نهاية طرفي العلاقة (7.20)، نجد المساحة المطلوبة:

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx \qquad (7.21)$$

إذا كان السطح الدوراني ناتجاً عن دوران القوس AB حول المحور ox، وهذا القوس معطى وسيطياً بالعلاقات:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad ; \quad t_1 \le t \le t_2$$

حيث $y(t) \ge 0$ في هذا المجال و $x(t)$ تتغير من a إلى b عندما تتغير t من t_1 إلى t_2 و $x(t_1) = a$ و $x(t_2) = b$، فإن مساحة هذا السطح الدوراني تعطى بالعلاقة:

$$\sigma = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (7.22)$$

حيث تنتج هذه العلاقة من (7.21)، بإجراء تغيير في المتحول $x = x(t)$ و $y = y(t)$.

إذا كان المنحني AB معطى قطبياً بالمعادلة:

$$\rho = \rho(\varphi) \quad ; \quad \varphi \in [\alpha;\beta]$$

حيث $\rho(\varphi)$ و $\rho'(\varphi)$ دالتان مستمرتان على المجال $[\alpha;\beta]$، فإنه وبأسلوبٍ مشابه تماماً لما فعلناه سابقاً، نحصل على مساحة السطح الدوراني، الناتج عن دوران هذا المنحني حول المحور القطبي:

$$\sigma = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

مثال 7.46: احسب مساحة جزء من سطح كرة ناتج عن الدوران حول المحور ox، لجزء من نصف الدائرة:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad ; \quad (-R < a \le x \le b < R)$$

الحل: نعوض في العلاقة (7.21)

$$\sigma = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_a^b R\,dx = 2\pi R(b-a)$$ (وحدة مساحة)

مثال 7.47 احسب مساحة السطح الناتج عن الدوران حول المحور ox، لنصف الستروئيد:

$$x = a\cos^3 t \quad , \quad y = a\sin^3 t \quad ; \quad 0 \le t \le \pi$$

الحل: نعوض في العلاقة (7.22)

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\,dt =$$

$$= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt = 6a^2\pi \int_0^{\pi} \sin^4 t|\cos t|dt =$$

$$= 12a^2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 t\cos t dt = \tfrac{12}{5}a^2\pi\left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{12}{5}a^2\pi$$

Damascus University

تمارين الفصل السابع

1. احسب التكاملات:

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \qquad \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \cot^2 2x\,dx \qquad \int_0^{\pi} x\cos x\,dx \qquad \int_0^{9} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$\int_3^2 \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx \qquad \int_0^1 \arcsin x\,dx \qquad \int_0^2 |1-x|\,dx \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{|x|}{x}\,dx$$

2. احسب النهايات:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (arc\cot t)\,dt}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\,dt} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\int_0^x \cos t^2\,dt \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\cdot\int_0^x e^{t^2}\,dt \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\int_0^x \sin t\sin 2t\,dt$$

$\lim_{x\to 0} x\cdot\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}}\,dt \;;\; a>0$ حيث $f(x)$ دالة مستمرة في المجال $[0;1]$.

3. أثبت صحة المتراجحات:

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)} \le \frac{1}{2}(e-1)$$

$$0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x} dx}{x+20} < \frac{1}{100}$$

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{19} dx}{\sqrt[3]{x^6+1}} \le \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\ln 2 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x} dx < \ln 2$$

4. أثبت صحة:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x} \frac{tdt}{t^2+1} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot x} \frac{dt}{t(t^2+1)} = 1$$

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt = \frac{1}{4}\pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\cos^m x + \sin^m x} dx = \frac{1}{4}\pi \ ; \ (m \in \mathbb{R})$$

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2+1} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{t^2+1} \ ; \ (x>0)$$

$$\int_0^{\pi} x \ln(\sin x) dx = -\frac{1}{2}\pi^2 \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{1}{2}\pi \ln 2$$

5. عين قيمة الثابت الحقيقي α كي يكون كل من التكاملين التاليين متقارب:

$$A = \int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1} \right) dx$$

$$B = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} - \frac{\alpha}{x+1} \right) dx$$

6. ادرس تقارب وتباعد التكاملات التالية واحسب قيمة التكامل في حالة التقارب:

$$\int_{-\infty}^{\ln 2} e^x dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\tan x}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \qquad \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} \qquad \int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^4+1} \qquad \int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$$

$$\int_1^{\infty}\frac{x^2+1}{x^3}dx \qquad \int_0^{\infty}e^{-x}\sin x dx \qquad \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx$$

$$\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)} \qquad \int_0^{4}\frac{dx}{(x-1)^2} \qquad \int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{(1+\cos x)^2} \qquad \int_0^{1}x\ln x dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx \qquad \int_1^{2}\frac{dx}{x\ln x}$$

$$\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}} \qquad \int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

7. أوجد القيمة الأساسية للتكاملات:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\arctan x dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x} \qquad \int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x dx \qquad \int_0^{2}\frac{dx}{1-x^2} \qquad \int_0^{5}\frac{dx}{4-x}$$

8. أثبت أن التكامل $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$; $(m,n\in\mathbb{R})$ متقارب إذا كان $n>0$ و $m>0$ ، ومتباعد عدا ذلك.

9. أثبت أن التكامل $\int_0^{\infty}x^{n-1}.e^{-x}dx$; $(n\in\mathbb{R})$ متقارب من أجل $n>0$ ، ومتباعد عدا ذلك.

10. رد التكامل الشاذ $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ لتكامل شاذ من النوع الأول ومن ثم لتكامل شاذ من النوع الثاني.

11. ادرس تقارب وتباعد التكاملات:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\,dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2^{\arcsin x}}{1-x}\,dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt[3]{x}(3+2\sin x)} \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{x}dx}{\sqrt{shx}}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{xdx}{(\ln x)^3} \qquad \int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx \qquad \int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx \qquad \int_2^{3} \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{2/3}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^n}\,dx \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{xdx}{3x^4+5x^2+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{4x^4+25}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2\sin^2 x} \qquad \int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^3\sin^2 x} \qquad \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$\int_3^{6} \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx \qquad \int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{dx}{\sqrt{x-\pi}} \qquad \int_0^{1} \frac{dx}{x^x} \qquad \int_0^{1} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad \int_0^{1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad \int_0^{\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]^2 dx$$

$$\int_0^{\cdot} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3}dx \qquad \int_0^{3} \frac{x^2dx}{(3-x)^2}$$

$$\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \qquad \int_0^{2} \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{8-x^3}} \qquad \int_1^{1} \frac{e^{\arctan x}}{x}dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}dx \qquad \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \qquad \int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

$$\int_0^{1} \frac{\cos x}{x^2}dx \qquad \int_1^{\infty} e^{-x}\ln x dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x+a}dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{chx}dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{sh\sqrt{x}}dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{sh\alpha x}{sh\pi x}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}} \ ; (n\in\mathbb{N}) \qquad \frac{\arctan\alpha x}{x^2}dx \ ; (\alpha\neq 0)$$

12. احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

$y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = |x-2|$

$y_1 = x-2$, $y_2 = x^2-4x+2$

$y_1 = \frac{1}{2}x$, $y_2 = x(x-2)$

$y_1 = \frac{1}{4}x^2$, $y_2 = \frac{8}{x^2+4}$

$y_1^3 = x^2$, $y_2 = 2-x^2$

$y_1 = 2^x$, $y_2 = 1+4x-x^2$; $x\in[0;2]$

$y_1 = x-1$, $y_2^2 = 2x+1$

$x_1 = [illegible]$, $x_2 = 1-3y^2$

$y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{4}x^3$; $x\in[-1;2]$

$y_1 = x^2$, $y_2 = \frac{1}{x^2}$; $x > 0$, $y > 0$

$x_1 = y^2$, $x_2 = \frac{3}{4}y^2 + 1$

$y_1 = \sin x$, $y_2 = 3\sin x$; $x \in [0; \frac{3}{2}\pi]$

13. احسب مساحة لفة واحدة من حلزون أرخيدس $\rho = a\varphi$

14. احسب مساحة الستروئيد $\{x = a\cos^3 t \ , \ y = a\sin^3 t\}$

15. احسب مساحة السيكلوئيد $\{x = a(t - \sin t) \ , \ y = a(1 - \cos t)\}$

16. احسب مساحة المنطقة المحصورة داخل كل من المنحنيين:

$$\rho = \frac{3a\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \ ; \ \varphi \in [0; \tfrac{\pi}{2}] \quad \text{و} \quad \rho = \sqrt{|\sin\varphi|}$$

17. احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $x = \frac{1}{2}(y^2 - \ln y)$ ومحور التراتيب والمستقيمين $y = 1$ و $y = e$.

18. احسب المساحة الواقعة بين المنحني وخطوطه المقاربة:

$$y = \frac{8}{x^2 + 4} \qquad \left| \begin{array}{l} y^2 = \dfrac{4 - x}{x} \\ y = \dfrac{\pi}{4 + x^2} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} y^2 = \dfrac{1}{x(1 - x)} \\ y = \dfrac{1}{2 + x} \end{array} \right.$$

$$y = xe^{-x^2/2}$$

19. احسب مساحة زهرة بأربعة أوراق.

20. احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ والمستقيم $x + y = 1$.

21. احسب مساحة جزء من القطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 8$ المقطوع بالقطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 1$.

22. احسب مساحة المنطقة المحددة بحلزون باسكال $\rho = 2 + \cos\varphi$.

23. احسب مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $\rho = a\cos^3\varphi$

24. احسب مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $\rho = a\sin\varphi\cos^2\varphi$

25. احسب مساحة المنطقة المحصورة داخل كل من المنحنيات:

$\{x = a(2\cos t - \cos 2t)\ ,\ y = a(2\sin t - \sin 2t)\}$

$\left\{x = \dfrac{3at}{1+t^2}\ ,\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}\right\}$

$\{x = a\cos t\ ,\ y = b\sin t\cos^2 t\}$

$\left\{x = \frac{1}{3}t(3-t^2)\ ,\ y = t^2\right\}$

26. احسب طول قوس من المنحني:

$y = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)\ ;\ a \le x \le b$

$x = \left(y^2 - 2\ln y\right)\ ;\ 1 \le y \le 2$

$x = \ln\cos y\ ;\ 0 \le y \le \frac{1}{4}\pi$

$\{x = a\cos^3 t\ ,\ y = a\sin^3 t\}$

$\{x = 4\sqrt{2}\sin t\ ,\ y = a\sin 2t\}$

$\{x = \sqrt{3t^2}\ ,\ y = t - t^3\}$

$\{\rho = a\varphi\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$\rho = a\sin^4(\frac{1}{4}\varphi)$

$\{\rho = \varphi^2\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\sqrt{3}\}$

$\rho = \sin^3(\frac{1}{3}\varphi)$

$\{\rho\varphi = 1\ ;\ \frac{3}{4} < \varphi < \frac{4}{3}\}$

$\{\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\ ;\ 2 < \rho < 4\}$

$\{\rho = e^{2\varphi}\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

27. احسب طول قوس من منحني الدالة $\left\{x = \int_1^t \dfrac{\cos z}{z}\,dz\ ,\ y = \int_1^t \dfrac{\sin z}{z}\,dz\right\}$ من نقطة الأصل حتى نقطة المماس الشاقولي لها.

28. احسب طول قوس من منحني الدالة $\left\{x = \frac{1}{6}t^6\ ,\ y = 2 - \frac{1}{4}t^4\right\}$ المحصور بين نقطتي التقاطع مع المحاور الإحداثية.

29. احسب طول قوس من منحني الدالة $\left\{x = t^2 \ , \ y = \frac{1}{3}t(t^2 - 3)\right\}$ المحصور بين نقطتي التقاطع مع المحور ox.

30. احسب حجم الكرة.

31. احسب حجم المخروط.

32. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران منحني الدالة $y^2 = e^{-2x}$ حول المحور ox.

33. احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران حول ox، للشكل الحاصل من تقاطع القطع المكافئ $y = \frac{x^2}{4} + 2$ والمستقيم $5x - 8y + 14 = 0$.

34. احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران حول oy، للشكل الحاصل من تقاطع القطعتين $y^2 = 8x$ و $x^2 = y$.

35. احسب حجم المجسم الناتج عن الدوران حول المحور ox، لمنحني الدالة $y = \cos x$، حيث $x \in \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$.

36. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السيكلوئيد.

37. احسب مساحة القبة الكروية.

38. احسب مساحة سطح الكرة.

39. احسب مساحة السطح الناتج عن الدوران حول المحور القطبي، لمنحني الكارديوئيد $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

40. احسب مساحة السطح الناتج عن الدوران حول المحور القطبي، لمنحني الدللة $\rho = a^2 \cos 2\varphi$.

41. احسب مساحة السطح الناتج عن الدوران حول ox، لكلٍ من المنحنيات التالية:

$x = a(t - \sin t) \ , \ y = a(1 - \cos t) \ ; \ t \in [0; 2\pi]$

$y = \sin x \ ; \ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right) \ , \ y^2 = 4ax \ ; \ (0 \le x \le 3a)$

$\left\{x = e^t \sin t \ , \ y = e^t \cos t \ ; t \in \left[0; \frac{1}{2}\pi\right]\right\}$

$4y = x^2 - 2\ln x \ ; \ \ x \in [1;4]$

42. احسب مساحة السطح الناتج عن الدوران حول oy، لمنحني الدالة

$x = y^3 \ ; \ (0 \le y \le 3)$.

Damascus University

الفصل الثامن

المتسلسلات العددية

8.1 مفاهيم أساسية

8.2 خواص المتسلسلات المتقاربة

8.3 الشرط اللازم لتقارب متسلسلة

8.4 باقي متسلسلة

8.5 المتسلسلات ذوات الحدود الموجبة

8.6 اختبارات تقارب المتسلسلات ذوات الحدود الموجبة

8.7 المتسلسلات ذوات الحدود كيفية الإشارة (المتسلسلات المختلطة)

تمارين الفصل الثامن

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المتسلسلات العددية

8.1 مفاهيم أساسية

نعلم أن عملية جمع عدد منته من الأعداد الحقيقية أو الأعداد العقدية ممكنة دوماً. أياً تكن الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$، يوجد عدد S، يُمثّل مجموع هذه الأعداد:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ونعلم أيضاً أن عملية الجمع هذه هي عملية تبديلية وتجميعية ويمكن توزيع الضرب على عملية الجمع:

$$c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n$$

ليكن لدينا متتالية عددية غير منتهية من الأعداد الحقيقية أو العقدية:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

تعريف 8.1 : نسمي العبارة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (8.1)$$

متسلسلة عددية، ونسمي الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ حدود هذه المتسلسلة.

ونسمي العدد a_n الحد العام (الحد النوني) للمتسلسلة، وهو عادةً دالة في المتغير الطبيعي n.

ملحوظة 8.1 : لا يوجد في الحالة العامة للمتسلسلة (8.1) معنى عددي معين، لأن عملية جمع الأعداد معرفة من أجل عدد منته من الأعداد.

وسيكون هدفنا هو ذاك المعنى العددي، وذلك بجعل المجموع اللانهائي (8.1) مشابهاً للمجموع المنتهي. كذلك إمكانية استخدام المتسلسلات العددية في وصف بعض مسائل التحليل الرياضي النظرية والتطبيقية.

مثال 8.1 : المتسلسلة الحسابية: وهي تجميع لحدود المتتالية الحسابية أي هي المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)q] = a + (a+q) + (a+2q) + (a+3q) + \ldots$$

حيث a و q ثوابت. يسمى العدد q أساس هذه المتسلسلة.

مثال 8.2 : المتسلسلة الهندسية: وهي مجميع لحدود المتتالية الهندسية، أي هي المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$

حيث a , q ثوابت. يسمى العدد q أساس هذه المتسلسلة.

مثال 8.3 : المتسلسلة التوافقية (المتجانسة): هي المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

تعريف 8.2: نسمي مجموع أول n حد من حدود المتسلسلة (8.1) المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة، ونرمز له بالرمز S_n، أي

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

واضح أن المجموع الجزئي الأول والثاني والثالث... تشكل متتالية لا نهائية $\{S_n\}$:

$$S_1 = a_1 \ , \ S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \ , \ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3, \dots$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

تعريف 8.3 : نقول عن المتسلسلة (8.1)، إنها متقاربة، إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة، وإذا كان S نهاية هذه المتتالية، أي $S = \lim_{n\to\infty} S_n$، فإننا نسمي العدد S مجموع المتسلسلة (8.1).

أما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متباعدة، فإننا نقول إن المتسلسلة (8.1) متباعدة وليس لها مجموع.

إن دراسة تقارب وتباعد المتسلسلات وحساب مجموعها، في حالة التقارب، هو محور هذا الفصل.

مثال 8.4 : ادرس تقارب وتباعد المتسلسلة $1 + 1 + 1 + \dots$.

الحل: إن الحد العام لهذه المتسلسلة هو $a_n = 1^n$. أي أن المتسلسلة تكتب بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1+1+1+\ldots$$

الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية $S_n = n$. ولما كان

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال 8.5 : ادرس تقارب المتسلسلة $1-1+1-1+\ldots$.

الحل: إن الحد العام لهذه المتسلسلة $a_n = (-1)^{n+1}$ أي أن المتسلسلة تكتب بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\ldots$$

نوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية.

$$S_1 = 1\ ,\ S_2 = 1-1 = 0\ \ ,\ \ S_3 = 1-1+1 = 1, \ldots$$

$$S_n = \begin{cases} 1 & ; \quad n \text{ فردي} \\ 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

ولما كانت هذه المتتالية متباعدة (متأرجحة، ليس لها نهاية)، فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال 8.6: ادرس تقارب المتسلسلة الحسابية $\sum_{n-1}^{\infty} [a+(n-1)q]$.

الحل: إن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية هو

$$S_n = a+(a+q)+(a+2q)+\ldots+[a+(n-1)q] =$$
$$= \tfrac{1}{2} n[a+a+(n-1)q] = \tfrac{1}{2} n[2a+(n-1)q]$$

ولما كان

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} n[2a+(n-1)q] = \infty$$

فإن المتسلسلة الحسابية متباعدة.

مثال 8.7 : ادرس تقارب المتسلسلة

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$$

وإذا كانت متقاربة احسب مجموعها.

الحل: إن الحد العام لهذه المتسلسلة $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. وعليه، نكتب المتسلسلة اختصاراً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية:

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

لحساب نهاية الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية، نعيد كتابة هذا الحد بوساطة تفريق الكسور

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n}$$

نوحد المقامات ونطابق بين البسطين:

$$1 \equiv A(n+1) + nB \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \text{و} \quad A = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

ومنه

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

وعليه، نكتب الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

وهكذا، فإن

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة من العدد 1. وعليه، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها مساوٍ للواحد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

مثال 8.8 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n \ln(n+1)}$.

وإذا كانت متقاربة احسب مجموعها.

الحل: لما كان

$$a_n = \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n \ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

فإن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية

$$S_n = \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) + \left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right] = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

ولما كان

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها $S = \frac{1}{\ln 2}$.

مثال 8.9 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

وإذا كانت متقاربة، احسب مجموعها.

الحل: نوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية بالاستفادة في كل حد فيها من الحد الذي يسبقه:

$$S_1 = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}$$

$$S_2 = \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = \sqrt{4} - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}$$

$$S_3 = \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{4} + 1 - \sqrt{2}$$

وعليه، يمكن أن نتوقع أن الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية هو

$$S_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} + 1 - \sqrt{2}$$

ونبرهن صحة هذه العلاقة بالاستقراء الرياضي:

العلاقة صحيحة من أجل $n=1$. نفرض أنها صحيحة من أجل $n-1$، ونثبت صحتها من أجل n:

$$S_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1-\sqrt{2}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2}$$

أي أن عبارة S_n صحيحة.

لما كان

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2}\right)=$$

$$=(1-\sqrt{2})-\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=$$

$$=(1-\sqrt{2})-\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1})\cdot(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=(1-\sqrt{2})-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{2}$$

فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها $S=1-\sqrt{2}$.

مثال 8.10 : ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية: $\sum_{n=1}^{\infty}a\,q^{n-1}\ ;\ (a\neq 0)$.

الحل: نوجد الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$$

لتبسيط هذه العلاقة نضرب طرفيها بـ $(-q)$، ونجمع الناتج مع S_n:

$$S_n-qS_n=a-aq^n \quad\Rightarrow\quad (1-q)S_n=a(1-q^n)$$

أي

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

لحساب نهاية متتالية المجاميع الجزئية S_n نميز الحالات:

1) $|q|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}q^n=0 \Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}$

أي أن المتسلسلة الهندسية، في هذه الحالة، متقاربة ومجموعها $S = \frac{a}{1-q}$.

2) $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \infty$

أي أن المتسلسلة الهندسية، في هذه الحالة، متباعدة

3) $q = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a\,(1^{n-1}) = a + a + a + \ldots$

وهي متسلسلة متباعدة، لأن

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\text{ مرة}}\right) = \lim_{n\to\infty}(n\cdot a) = \infty$$

4) $q = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a\,(-1)^{n-1} = a - a + a - a + \ldots$

الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية هو

$$S_n = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}a(-1)^n = \begin{cases} a & ; \quad n \text{ فردي} \\ 0 & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

وهذه المتتالية متباعدة (ليس لها نهاية)، فالمتسلسلة الهندسية متباعدة في هذه الحالة.

وهكذا، فإن المتسلسلة الهندسية متقاربة فقط عندما يكون $|q| < 1$، ومتباعدة عدا ذلك، أي من أجل $|q| \geq 1$.

تطبيق: عبّر عن الكسر العشري الدوري التالي في صورة كسر عادي

$$A = 0.23\ 23\ 23\ldots$$

الحل: نكتب العدد A كما يلي:

$$A = \frac{23}{10^2} + \frac{23}{10^4} + \frac{23}{10^6} + \ldots = 23\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n$$

وهي متسلسلة هندسية، أساسها $q = \frac{1}{10^2}$. ولما كان $q = \frac{1}{100} < 1$، فإن هذه المتسلسلة متقاربة. نحسب مجموعها

$$A = 23\,\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{99}$$

ملحوظة 8.2 : إن دراسة تقارب وتباعد متسلسلة بوساطة متتالية المجاميع الجزئية، كما في الأمثلة السابقة، ليست سهلة أو ممكنة دوماً. فليس بالإمكان دوماً، إيجاد شكل بسيط للحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية. كما أنه في العديد من مسائل التحليل الرياضي، يكون المطلوب معرفة طبيعة المتسلسلة، من حيث التقارب والتباعد دون الحاجة لمعرفة مجموعها.

8.2 خواص المتسلسلات المتقاربة

مبرهنة 8.1 (عملية الجمع في المتسلسلات المتقاربة تجميعية)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة مجموعها S . نُجمّع، اختيارياً حدود هذه المتسلسلة في مجموعات، داخل أقواس، دون تغيير في ترتيب الحدود، وبحيث يدخل الحد في مجموعة واحدة من هذه المجموعات:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}\right) + \left(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}\right) +$$

$$+ \left(a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_3}\right) + \ldots = b_1 + b_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (8.2)$$

حيث $b_1, b_2, \ldots$ هي مجاميع الحدود داخل كل قوسين بالترتيب.

تكون عندئذٍ، المتسلسلة (8.2) متقاربة ومجموعها S.

بعبارة أخرى، إن تقارب متسلسلة ومجموعها لا يتأثران إذا قمنا بأي تجميع لحدود هذه المتسلسلة بوساطة أقواس، شريطة المحافظة على ترتيب الحدود.

البرهان: نوجد متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$S_1 = a_1 \quad , \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad , \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 , \ldots$$

يوجد بين عناصر هذه المتتالية مجاميع من الشكل:

$$S_{n_1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} = b_1$$

$$S_{n_2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} = b_1 + b_2$$

$$S_{n_3} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} + a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3} = b_1 + b_2 + b_3$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة (8.2) هي متتالية جزئية من متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ولما كانت هذه المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة، ونهايتها S، فإن المتتالية الجزئية منها $\{S_{n_k}\}$ (حيث $k = 1,2,\ldots$) متقاربة، ونهايتها S. أي أن المتسلسلة (8.2) متقاربة ومجموعها S.

نتيجة 8.1 : إذا جمعنا حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ضمن فرضيات المبرهنة 8.1، وكانت المتسلسلة الناتجة (8.2) متباعدة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

ملحوظة 8.3 : إذا كانت المتسلسلة (8.2) متقاربة، فإنه ليس بالضرورة أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. فتقارب متتالية $\{S_{n_k}\}$ ، الجزئية من المتتالية الشاملة $\{S_n\}$، لا يعني بالضرورة أن هذه المتتالية الشاملة $\{S_n\}$ متقاربة.

فمثلاً، إذا كانت لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

وجمّعنا كل حدين من حدود هذه المتسلسلة كما يلي:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

فإننا نحصل على متسلسلة جديدة كل حدودها أصفار، وهي متسلسلة متقاربة ومجموعها الصفر، مع أن المتسلسلة الأصلية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ متباعدة.

ملحوظة 8.4 : إن حذف الأقواس الأساسية في متسلسلة، لا يعتبر قانونياً في الحالة العامة، فإذا حذفنا الأقواس في المتسلسلة المتقاربة

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

نحصل على المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. ولكن إذا كانت جميع الحدود الواقعة ضمن كل قوس في المتسلسلة (8.2) ذات إشارة واحدة (قد تتغير هذه الإشارة من قوس لآخر)، فإن المتسلسلة (8.2) تكون متقاربة ولها نفس مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

وعليه، فإذا كانت جميع حدود المتسلسلة من إشارة واحدة، فإن تجميع حدود هذه المتسلسلة بوساطة الأقواس، أو حذف هذه الأقواس، في حالة وجودها في هذه المتسلسلة، شريطة المحافظة على ترتيب الحدود، لا يؤثر على تقاربها ومجموعها.

مبرهنة 8.2 : إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots \qquad (8.3)$$

متقاربة، فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots \qquad (8.4)$$

متقاربة وبالعكس، فإذا كانت المتسلسلة (8.4) متقاربة. فإن المتسلسلة (8.3) متقاربة.

بعبارة أخرى، إن حذف عدد منته من الحدود الأولى لمتسلسلة متقاربة، لا يؤثر على تقاربها.

البرهان: لتكن المتسلسلة (8.3) متقاربة ومجموعها S، أي $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ نرمز بـ S_k لمجموع العناصر المحذوفة من المتسلسلة (8.3) وبـ t_{n-k} لمجموع أول $(n-k)$ حد من المتسلسلة (8.4). فيكون عندئذٍ

$$S_n = S_k + t_{n-k} \qquad (8.5)$$

واضح أن العدد S_k لا يتعلق بـ n . نجد من المساواة (8.5) أن

$$\lim_{n\to\infty} t_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_k) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $\{t_{n-k}\}$ للمتسلسلة (8.4) متقاربة، أي أن هذه السلسة متقاربة.

إذا كانت المتسلسلة (8.4) متقاربة ومجموعها t ، أي $t = \lim_{n\to\infty} t_{n-k}$. فإننا نجد، من المساواة (8.5):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_k + t_{n-k}) = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} t_{n-k} = S_k + t$$

أي أن المتسلسلة (8.3) متقاربة.

ملحوظة 8.5 : يمكن بأسلوب مشابه، التحقق أن إضافة عدد منته من الحدود الجديدة المحدودة، إلى مقدمة متسلسلة، لا يؤثر على تقاربها أو تباعدها.

مبرهنة 8.3: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ومجموعها S ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ ، حيث c عدد ما، متقاربة، ومجموعها cS .

نترك البرهان كتمرين للقارئ.

مبرهنة 8.4: إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين، ومجموعهما S و t، بالترتيب. فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n)$ متقاربة، ومجموعها $S \mp t$.

نترك البرهان كتمرين للقارئ.

8.3 الشرط اللازم لتقارب متسلسلة

مبرهنة 8.5: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، فإن حدها العام a_n يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

البرهان: نرمز بـ S لمجموع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\{S_n\}$ لمتتالية مجاميعها الجزئية.

لما كان $S_n = S_{n-1} + a_n$، فإن $a_n = S_n - S_{n-1}$. نأخذ نهاية الطرفين، عندما $n \to \infty$، فنجد

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

ملحوظة 8.6 : إن الشرط $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ هو شرط لازم وغير كاف لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال 8.11 : ادرس تقارب المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

الحل: نفرض جدلاً أن المتسلسلة التوافقية متقاربة، ومجموعها S. عندئذٍ، فإن

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

من ناحيةٍ أخرى:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

أي أن $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$. وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) > \frac{1}{2}$. وهذا يناقض (*). فالفرض الجدلي مغلوط، أي أن المتسلسلة التوافقية متباعدة، مع أن الحد العام للمتسلسلة التوافقية يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

وعليه، إذا سعى الحد العام لمتسلسلة إلى الصفر، عندما $n \to \infty$، فإننا لا نستطيع الحكم على تقارب أو تباعد هذه المتسلسلة، لذا تلزمنا شروط إضافية (شروط كافية للتقارب) تسمى اختبارات تقارب المتسلسلات.

نتيجة 8.2 : إذا كانت نهاية الحد العام لمتسلسلة مغايرة للصفر، عندما $n \to \infty$، أو كانت هذه النهاية غير موجودة، فإن المتسلسلة حتماً متباعدة.

مثال 8.12: أثبت ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ متباعدة.

الحل: نثبت أن الحد العام لهذه المتسلسلة لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

نفرض جدلاً أن $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0$. عندئذٍ، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 n = 0 \qquad (i)$$

و $\lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$. أي أن

$$\lim_{n\to\infty} (\cos n \cdot \sin 1 + \sin n \cdot \cos 1) = 0$$

ولما كان $\sin 1 \neq 0$ و $\cos 1 \neq 0$، فإن $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$. وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \cos^2 n = 0 \qquad (ii)$$

نجمع النهايتين (i) و (ii) :

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 n + \lim_{n\to\infty} \cos^2 n = \lim_{n\to\infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0$$

وهذا يناقض العلاقة المثلثية الشهيرة، $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. فالفرض الجدلي خاطئ. أي أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

8.4 باقي متسلسلة

نسمي المتسلسلة الناتجة من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، بعد حذف أول n حد من حدودها:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

الباقي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

فالباقي الأول للمتسلسلة $r_1 = a_2 + a_3 + \dots$

والباقي الثاني $r_2 = a_3 + a_4 + \dots$، وهكذا...

يمكن بسهولة، التحقق أنه إذا تقارب أحد بواقي المتسلسلة، فإن هذه المتسلسلة متقاربة. وبالعكس، فإن تقارب متسلسلة يعني تقارب جميع بواقيها.

أما إذا كان أحد بواقي متسلسلة متباعداً، فإن هذه المتسلسلة تكون متباعدة. وإذا كانت هذه المتسلسلة متباعدة، فإن كل باقٍ من بواقيها يكون متسلسلة متباعدة.

كما هو واضح، فإن المجموع الجزئي النوني S_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يختلف عن مجموع هذه المتسلسلة S، بمقدار مجموع الباقي النوني لها. أي $S = S_n + r_n$. لذا، فإنه كلما قلّ مجموع الباقي النوني لمتسلسلة، كان المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة أقرب إلى مجموع هذه المتسلسلة.

وعليه، فإذا اعتبرنا أن S_n قيمة تقريبية للمجموع S، فإن الباقي النوني r_n هو الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي.

مبرهنة 8.6: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، فإن الباقي النوني لها r_n يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

البرهان: لما كان

$$S = S_n + r_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$S = \lim_{n\to\infty} (S_n + r_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} r_n$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، فإن $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

8.5 المتسلسلات ذات الحدود الموجبة

هي المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ التي يكون فيها

$$a_n \geq 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات حدود موجبة، فإن

$$S_n \geq 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وعليه، فإن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ محدودة من الأدنى

ولما كان

$$S_n = a_n + S_{n-1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$S_n \geq S_{n-1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متزايدة.

نعلم أن كل متتالية متزايدة تكون متقاربة إذا كانت محدودة من الأعلى، وهذا يقودنا إلى المبرهنة:

مبرهنة 8.7 : الشرط اللازم والكافي لتقارب متسلسلة ذات حدود موجبة، هو أن تكون متتالية مجاميعها الجزئية محدودة من الأعلى. وإذا لم تكن هذه المتتالية محدودة من الأعلى، فإن المتسلسلة متباعدة.

البرهان:

لزوم الشرط: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة ومجموعها S. أي أن $S = \lim_{n \to \infty} S_n$، حيث S_n الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة. ولما كانت هذه المتسلسلة ذات حدود موجبة، فإن المتتالية $\{S_n\}$ متزايدة. وعليه، فإن

$$S_n \leq S \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى.

كفاية الشرط: لتكن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ محدودة من الأعلى، وهي متزايدة لأن هذه المتسلسلة ذات حدود موجبة، وعليه، فإن المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة (وفق

الخاصة 12 من خواص المتتاليات المتقاربة). ومنه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

مثال 8.13 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

الحل: واضح أن هذه المتسلسلة ذات حدود موجبة. نبرهن أن متتالية المجاميع الجزئية لها محدودة من الأعلى:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (*)$$

وذلك اعتماداً عل العلاقة

$$n! > 2^{n-1} \quad ; \quad \forall n > 2$$

ونبرهن صحة هذه العلاقة بالاستقراء الرياضي: إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = 3$، لأن $3! = 6 > 2^{3-1} = 4$. نفرض أن هذه العلاقة صحيحة من أجل $(n-1)$، ونثبت صحتها من أجل n :

$$(n-1)! > 2^{n-2} \Rightarrow n(n-1)! > n\,2^{n-2} \Rightarrow n! > 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

لما كان الطرف الأيمن من العلاقة (*) هو متسلسلة هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$، فإنها متقاربة ومجموعها:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

أي أن

$$S_n < 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مما يعني أن المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى. وعليه، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

8.6 اختبارات تقارب المتسلسلات ذات الحدود الموجبة

مبرهنة 8.8 (اختبار المقارنة الأول)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين ذواتي حدود موجبة. ليكن

$$a_n \le b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

عندئذٍ، فإن

أ- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- نفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

البرهان:

أ- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، فإن متتالية مجاميعها الجزئية $\{t_n\}$ محدودة من الأعلى. أي يوجد عدد حقيقي M، بحيث يكون

$$t_n \le M \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه، فإن

$$S_n \le M \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى. وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، وفق المبرهنة 8.7.

ب- نفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة. ونفرض جدلاً أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة. تكون عندئذٍ، المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، حسب القسم الأول من المبرهنة. وهذا يناقض الفرض، أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

ملحوظة 8.7: إذا كانت المتراجحة $a_n \le b_n$ صحيحة من أجل $n \ge n_0 > 1$، أي أنها قد تكون غير صحيحة من أجل $n = 1,2,3,\ldots, n_0 - 1$، فإنه بدلاً من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، في المبرهنة 8.8، نأخذ المتسلسلتين $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ وتكون المبرهنة 8.8 صحيحة من أجلها. ووفق المبرهنة 8.2، تكون المبرهنة 8.8 صحيحة من أجل المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ملحوظة 8.8 : إذا كان

$$a_n \le b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ووجد عدد طبيعي n_0، بحيث يكون $a_{n_0} < b_{n_0}$، وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أيضاً، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

مثال 8.14 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n}$.

الحل: لما كان

$$\frac{1}{(n+2)^n} \le \frac{1}{3n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ متقاربة (هندسية أساسها $q = \frac{1}{3} < 1$)، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة، وفق اختبار المقارنة الأول.

مثال 8.15 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$.

الحل: لما كان

$$\frac{1}{n} < \tan\frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وكانت المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة، وفق اختبار المقارنة الأول.

مثال 8.16: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

الحل: لما كان

$$\ln n < n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad ; \quad n \geq 2$$

ولما كانت المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، أيضاً، المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، وفق المبرهنة 8.2، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة، وفق اختبار المقارنة الأول.

مبرهنة 8.9 (اختبار المقارنة الثاني)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة. وليكن $k > 0$ و K عددين ثابتين يحققان المتراجحة:

$$k \leq \frac{a_n}{b_n} \leq K \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (8.6)$$

تكون المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ عندئذٍ، من نوعٍ واحد، متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً.

البرهان: نجد من المتراجحة (8.6)

$$k b_n \leq a_n \leq K b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

من المتراجحة

$$k b_n \leq a_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

نجد أنه إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} K b_n$ متقاربة. وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وفق اختبار المقارنة الأول.

أما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} K b_n$ متباعدة. وفق اختبار المقارنة الأول. ومنه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

ملحوظة 8.9 : تبقى المبرهنة 8.9 صحيحة، إذا كانت المتراجحة (8.6) محققة، من أجل $n \geq n_0 > 1$ (انظر الملحوظة 8.7).

مثال 8.17 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

الحل: لما كان

$$\cos\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{1}{2} < \cos\frac{1}{n} < 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$ من نوعٍ واحد، اختبار المقارنة الثاني.

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$ متباعدة، المثال 8.16، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ متباعدة.

نتيجة 8.3 : إذا كانت النهاية $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ موجودة ومحدودة، بحيث $r > 0$، فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوعٍ واحد، متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً.

وإذا كان $r = 0$، فإن تقارب متسلسلة المقام $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يؤدي لتقارب متسلسلة البسط $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، وتباعد متسلسلة البسط $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يؤدي إلى تباعد متسلسلة المقام $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

أما إذا كان $r = \infty$، فإن تقارب متسلسلة البسط $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يؤدي إلى تقارب متسلسلة المقام $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، وتباعد متسلسلة المقام $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يؤدي إلى تباعد متسلسلة البسط $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

البرهان: إن النهاية r تعني أنه بدءاً من عددٍ ما n_0 تكون النسبة $\frac{a_n}{b_n}$ قريبة من العدد r، و تكون، خاصّةً، محصورة بين العددين $\frac{1}{2}r$ و $2r$. أي

$$\frac{1}{2}r \le \frac{a_n}{b_n} \le 2r \quad ; \quad \forall n \ge n_0$$

واستناداً إلى اختبار المقارنة الثاني، تكون المتسلسلتان $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ من نوعٍ واحد.

وعليه، تكون المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوعٍ واحد.

وإذا كان $r = 0$، فإنه يوجد عدد طبيعي n_1، بحيث يكون

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \quad ; \quad n \ge n_1$$

أي ان

$$a_n < b_n \quad ; \quad n \ge n_1$$

واستناداً إلى اختبار المقارنة الأول والملحوظة 8.7، نجد صحة المطلوب.

ونبرهن الحالة $r = \infty$ بأسلوبٍ مماثل.

مثال 8.18 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

الحل: لما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة، المثال 8.7، وكان

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة وفق النتيجة 8.3.

مثال 8.19: ادرس تقارب المتسلسلة

$$2\cdot 1+\frac{1}{2\cdot 2}+2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4}+2\cdot\frac{1}{5}+\ldots+\frac{2}{2k-1}+\frac{1}{2\cdot 2k}+\ldots$$

الحل: نرمز للحد العام للمتسلسلة المعطاة بالرمز a_n:

$$a_n=\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2\cdot 2n}$$

ونقارن مع المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$، حيث

$$\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{1}=2 & ;\quad n \text{ فردي}\\ \frac{1}{2n}\cdot\frac{n}{1}=\frac{1}{2} & ;\quad n \text{ زوجي}\end{cases}$$

أي أنه ليس للنسبة $\frac{a_n}{b_n}$ نهاية. وعليه، لا يمكن تطبيق النتيجة 8.3. غير أن، النسبة $\frac{a_n}{b_n}$ محصورة، دائماً، بين العددين $\frac{1}{2}$ و 2. أي

$$\frac{1}{2}\le\frac{a_n}{b_n}\le 2\quad ;\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

وعليه، فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ من نوعٍ واحد. أي أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

ملحوظة 8.10 : يبين هذا المثال، أن اختبار المقارنة الثاني أقوى من الاختبار المعطى في النتيجة 8.3.

مبرهنة 8.10 (اختبار المقارنة الثالث)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين ذواتي حدود موجبة تماماً، وليكن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\quad ;\quad \forall n\in\mathbb{N}\qquad (8.7)$$

عندئذٍ، فإن

١ - إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة.

ب- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

البرهان: ينتج من المتراجحة (8.7)، أن

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ متناقصة. وبفرض $\frac{a_1}{b_1} = k$، فإن

$$\frac{a_n}{b_n} \le k \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

واستناداً إلى اختبار المقارنة الثاني، نجد

أ- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

ملحوظة 8.11 : تبقى المبرهنة 8.10 صحيحة، إذا كانت المتراجحة (8.7) صحيحة من أجل $n \ge n_0 > 1$.

ملحوظة 8.12 : تبقى المبرهنة 8.10 صحيحة، إذا كان

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{b_n}{a_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

يمكن بالاعتماد على اختبار المقارنة الثالث، صياغة وإثبات عدة اختبارات أخرى، نورد منها اختبار دالامبير[1].

مبرهنة 8.11 (اختبار دالامبير)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة، ولنفرض وجود النهاية

[1] جان لير ون دالامبير (1717-1783) عالم رياضيات وميكانيك فرنسي.

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

عندئذٍ:

أ- إذا كان $D<1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- إذا كان $D>1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان:

أ- ليكن $D<1$، ولنبرهن أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

من تعريف نهاية متتالية عددية نجد

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - D \right| < \varepsilon \ ; \ n \geq N$$

وعليه، فإن

$$D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon \ ; \ n \geq N \qquad (8.8)$$

لما كان $D<1$، فإننا نختار ε صغيراً بقدرٍ كاف، حتى يكون $D+\varepsilon<1$. نرمز بـ $q = D+\varepsilon$. نكتب عندئذٍ، الطرف الأيمن من المتراجحة (8.8)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \ \Rightarrow \ a_{n+1} < a_n q \ ; \ n \geq N$$

أي أن

$$a_{N+1} < qa_N \ , \ a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N \ , \ a_{N+3} < qa_{N+2} < q^3 a_N \ , \ldots$$

ولما كانت المتسلسلة $qa_N + q^2 a_N + q^3 a_N + \ldots$، هي متسلسلة هندسية متقاربة، لأن أساسها $q<1$ وكل عنصر من عناصرها أكبر من مقابله من عناصر المتسلسلة

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots$$

فإن المتسلسلة الأخيرة متقاربة، استنادا لاختبار المقارنة الأول. ولما كانت هذه المتسلسلة ناتجة عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحذف أول N حد من حدودها، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، وفق المبرهنة 8.2.

ب- ليكن $1 < D < \infty$ ، ولنبرهن أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة. نختار العدد ε في المتراجحة (8.8) ، بحيث يكون $D - \varepsilon > 1$. نكتب عندئذٍ، الطرف الأيمن من المتراجحة (8.8)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n \qquad ; \qquad \forall n \geq \mathbb{N}$$

أي أن حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متزايدة، بدءاً من العدد الطبيعي N. أي أن الحد العام لهذه المتسلسلة a_n لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$. وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، وفق المبرهنة 8.2.

وإذا كان $D = \infty$ ، فإنه يوجد من أجل العدد الحقيقي 2 مثلاً، عدد طبيعي $N_0 \in \mathbb{N}$ ، بحيث يكون

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad ; \qquad \forall n \geq N_0$$

أي أن $a_{n+1} > a_n > 0$ ، عندما $n \geq N_0$ ، أي أن الحد العام a_n لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$. وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، وفق المبرهنة 8.2.

ملحوظة 8.13: إذا كان $D = 1$ ، فإن اختبار دالامبير يفشل في تحديد نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، فقد تكون المتسلسلة متقاربة أو متباعدة.

فمثلاً، المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، ويكون من أجلها

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = 1$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة، المثال 8.19، ويكون من أجلها أيضاً:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = 1$$

مثال 8.20: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

الحل: نطبق اختبار دالامبير

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متقاربة

مثال 8.21 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$.

الحل: نطبق اختبار دالامبير:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e} = \infty > 1$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

ملحوظة 8.14: يعطى أحياناً، اختبار دالامبير دون حساب النهاية D وإنما فقط نحسب النسبة $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. فإذا كان $q < 1$، فإن المتسلسلة متقاربة، وإذا كان $q \geq 1$ فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال 8.22 : ادرس تقارب المتسلسلة

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{2^k \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^{k+1}} + \ldots$$

الحل: نحسب النسبة $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad n \text{ زوجي} \\ \frac{1}{3} & ; \quad n \text{ فردي} \end{cases}$$

أي أن النهاية $D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ غير موجودة. ولكن لما كان $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ أياً يكن العدد الطبيعي n ، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مبرهنة 8.12 (اختبار كوشي – الجذر النوني)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة، ولنفرض وجود النهاية

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

عندئذٍ، فإن

أ- إذا كان $C < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- إذا كان $C > 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان:

أ- ليكن $C < 1$. ونبرهن أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

من تعريف نهاية متتالية عددية

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad \left|\sqrt[n]{a_n} - C\right| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n \geq N$$

ومنه

$$C - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < C + \varepsilon \quad ; \quad (\forall n \geq N) \qquad (8.9)$$

نختار العدد ε صغير بحيث يكون $c + \varepsilon < 1$. نرمز بـ $q = c + \varepsilon$. نكتب عندئذٍ، الطرف الأيمن من (8.9)

$$a_n < q^n \quad ; \quad n \geq N$$

ولما كانت السلسة $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ هندسية متقاربة، لأن أساسها $q < 1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ متقاربة وفق اختبار المقارنة الأول. واستناداً إلى المبرهنة 8.2، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- ليكن $1 < C < \infty$ ونبرهن أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

لما كان $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ فإنه يوجد عدد طبيعي N، بحيث يكون

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n > 1 \quad ; \quad \forall n \geq N$$

وعليه، فإن الحد العام a_n لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$. أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة استناداً إلى المبرهنة 8.2.

وإذا كان $C = \infty$، فإنه يوجد من أجل العدد الحقيقي 2 مثلاً، عدد طبيعي N_0 بحيث يكون $\sqrt[n]{a_n} \geq 2$، أي أن $\sqrt[n]{a_n} > 1$، عندما يكون

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} > 1 \quad ; \quad \forall n \geq N_0$$

وعليه، فإن الحد العام a_n لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$. أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة وفق المبرهنة 8.2.

ملحوظة 8.15 : إذا كان $C = 1$، فإن اختبار كوشي – الجذر النوني يفشل في تحديد نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فقد تكون هذه المتسلسلة متقاربة أو متباعدة.

فمثلاً، المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، ويكون من أجلها

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة، المثال 8.19، ويكون من أجلها

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$$

مثال 8.23 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\ln^n(n+2)}$.

الحل: نطبق اختبار كوشي - الجذر النوني:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\ln(n+2)} = 0 < 1$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متقاربة

مثال 8.25: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

الحل: نطبق اختبار كوشي – الجذر النوني:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

ملحوظة 8.15 : مع أن اختبار دالامبير هو الاختبار الأكثر استخداماً، إلا أن اختبار كوشي الجذر النوني أقوى من اختبار دالامبير. أي أن اختبار دالامبير يفشل أحياناً، في حين ينجح اختبار كوشي - الجذر النوني.

بعبارةٍ أخرى، إذا أعطانا اختبار دالامبير نوع المتسلسلة، من حيث التقارب والتباعد، فإن اختبار كوشي – الجذر النوني حتماً يعطينا نوع هذه المتسلسلة. وبالمقابل، فإن فشل اختبار كوشي - الجذر النوني، يؤدي حتماً إلى فشل اختبار دالامبير. أي إذا كانت النهاية

$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجودة ولا تساوي الواحد، فإن

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

مثال 8.25 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$.

الحل: نطبق اختبار دالامبير

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}=\begin{cases}2 & ;\ n\ \text{زوجي}\\ \frac{1}{8} & ;\ n\ \text{فردي}\end{cases}$$

أي أن الاختبار يفشل في دراسة تقارب المتسلسلة لأن النهاية D غير موجودة (لها قيمتان، إحداهما أكبر من الواحد والأخرى أصغر منه).

نطبق اختبار كوشي – الجذر النوني:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}}=\frac{1}{2}<1$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مبرهنة 8.13 (اختبار ماكلوران[1] – كوشي أو الاختبار التكاملي)

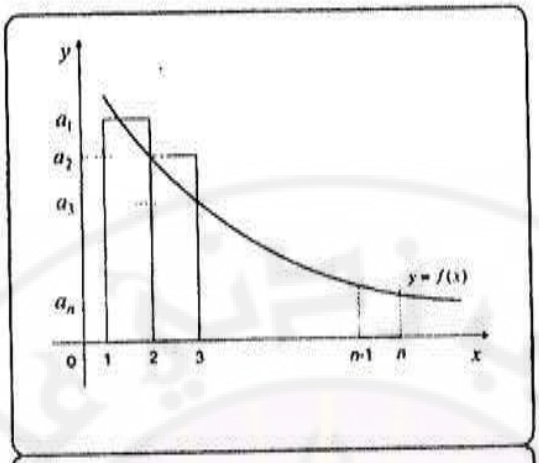
لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة. ولتكن $f(x)$ دالة مستمرة ومتناقصة من أجل $x\geq 1$، بحيث يكون

$$f(n)=a_n \qquad ; \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

عندئذٍ، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة، إذا وفقط إذا، كان التكامل الشاذ $\int_1^{\infty}f(x)dx$ متقارباً.

البرهان: نرسم المنطقة المحددة بالمستقيمات $x=1$ و $x=n$ ومحور الفواصل وبمنحني الدالة $y=f(x)$ من الأعلى، الشكل 8.1.

[1] كولين ماكلوران (1698-1746) عالم رياضيات اسكوتلندي.



الشكل 8.1

إن مساحة هذا الشكل أكبر من مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها القطع المستقيمة: $[1;2], [2;3], \ldots, [n-1;n]$ وأطوالها الأعداد: $f(2), f(3), \ldots, f(n)$، وهي أصغر من مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها القطع المستقيمة: $[1;2], [2;3], \ldots, [n-1;n]$ وأطوالها الأعداد: $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$. أي أن

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)<\int_1^n f(x)dx<f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$$

او

$$S_n-f(1)<\int_1^n f(x)dx<S_n-f(n)$$

حيث S_n المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

ومنها نجد

$$S_n>f(n)+\int_1^n f(x)dx=a_n+\int_1^n f(x)dx \qquad (8.10)$$

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx = a_1 + \int_1^n f(x)dx \qquad (8.11)$$

لزوم الشرط: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، فإن متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n\}$ محدودة من الأعلى. واستناداً إلى المتراجحة (8.10)، تكون المتتالية $\left\{\int_1^n f(x)dx\right\}$ محدودة من الأعلى. ولما كانت هذه المتتالية متزايدة (لأن $f(x) \geq 0$ و n متزايدة) ومحدودة من الأعلى، لأن $\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$، فإنه استناداً إلى المتراجحة (8.11)، تكون متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ محدودة من الأعلى. واستناداً للمبرهنة 8.7، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ضمن فرضيات المبرهنة 8.13، يمكن صياغة النتيجة.

نتيجة 8.4 : الشرط اللازم والكافي كي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، هو أن يكون التكامل الشاذ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متباعداً.

ملحوظة 8.17 : إذا كانت الدالة $f(x)$، الواردة في المبرهنة 8.13، معرفة ومستمرة ومتناقصة من أجل $x \geq \gamma > 1$، فإن تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يكافئ تقارب التكامل الشاذ $\int_{\gamma}^{\infty} f(x)dx$، لأن مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات $x = \gamma$ و $x = n$ ومحور الفواصل وبمنحني الدالة $y = f(x)$ محدودة أيضاً، وبالعكس.

مثال 8.26 : ادرس تقارب متسلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

الحل: نميز الحالتين

1- إذا كان $\alpha \le 0$، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$، أي أن المتسلسلة متباعدة.

2- ليكن $\alpha > 0$. نعرف الدالة $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ المعرفة والمستمرة والمتناقصة من أجل $x \ge 1$. نحسب التكامل

$$\int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b = \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) & ; \quad \alpha \neq 1 \\ \left[\ln|x|\right]_1^b = \ln b & ; \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

إذا كان $\alpha = 1$، فإن

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & ; \ 1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \\ \infty & ; \ 1-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1 \end{cases}$$

أي أن التكامل الشاذ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ متقارب فقط من أجل $\alpha > 1$. وعليه، فإن متسلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ متقاربة فقط من أجل $\alpha > 1$، ومتباعدة عدا ذلك، أي عندما $\alpha \le 1$.

نتيجة 8.5: إذا كان $a_n = \frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$ الحد العام للمتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $P_m(n)$ و $Q_k(n)$ حدوديتان في n من الدرجتين m و k بالترتيب، فإن هذه المتسلسلة تكون متقاربة، فقط إذا كان $k - m > 1$، وذلك بالمقارنة مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}}$، ومتباعدة عدا ذلك، أي من أجل $k - m \le 1$.

مثال 8.27 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^3 - n^2 + n + 2}$.

الحل: نقارن مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ نرمز للحد العام للمتسلسلة المعطاة بالرمز b_n. ونحسب النهاية

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n^3-n^2+n+2}\cdot\frac{n^2}{1}=\frac{2}{3}$$

فالمتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ من نوع واحد ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة، لأنها متسلسلة ريمان، فيها $\alpha=2>1$، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

ويمكن اختصاراً إثبات ذلك استناداً إلى النتيجة، ذلك لأن $k-m=3-1=2>1$.

ملحوظة 8.18 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة، فإن

$$\int_{n}^{\infty}f(x)dx\le r_n\le\int_{n-1}^{\infty}f(x)dx$$

حيث $a_n=f(n)$ و $f(k)$، $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}$، الحد الباقي للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

وتفيد هذه العلاقة في تقدير الأخطاء.

مثال 8.28 : احسب مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ بدقة حتى 10^{-3}.

الحل:

$$r_n=S-S_n\le\int_{n-1}^{\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3(n-1)^3}$$

وحتى يكون $r_n\le10^{-3}$، يجب أن يكون $n=8$. وعليه، فإن المجموع المطلوب هو:

$$S_8=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{8^4}=1.082$$

مبرهنة 8.14 (اختبار راب[1])

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة. ولنفرض وجود النهاية

[1] جوزيف لودفيغ راب (1801-1859) عالم رياضيات سويسري.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right]$$

عندئذٍ

أ- إذا كان $R > 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- إذا كان $R < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان:

أ- ليكن $\infty > R > 1$. عندئذٍ، من تعريف نهاية متتالية عددية، يوجد عدد حقيقي q بحيث $R > q > 1$ ، ويوجد عدد طبيعي N_1 ، بحيث يكون

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q > 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n} \quad ; \quad n \geq N_1$$

وليكن p عدداً حقيقياً، بحيث يكون $q > p > 1$.

لما كان $P = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}}\right]$ و $p > q$ ، فإنه يوجد عدد طبيعي N_2 ، بحيث يكون

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \Rightarrow 1 + \frac{q}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \quad ; \quad n \geq N_2$$

بفرض $N = \max\{N_1; N_2\}$. يكون عندئذٍ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} \quad ; \quad n \geq N$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متقاربة (لأنها متسلسلة ريمان فيها $p > 1$)، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، وفق المبرهنتين 8.2 و 8.10.

إذا كان $R = \infty$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي t، بحيث يكون $t > q > 1$. ويوجد عدد طبيعي N_3 ، بحيث يكون

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq t > q > 1 \quad ; \quad n \geq N_3$$

ونتابع كما فعلنا سابقاً (في الحالة $\infty > R > 1$) فنجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- ليكن $1 > R > -\infty$. عندئذٍ، من تعريف نهاية متتالية عددية، يوجد عدد طبيعي N_4 ، بحيث يكون

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \quad \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n}{n+1} = \frac{1/n+1}{1/n} \quad ; \quad n \geq N_4$$

لما كانت المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، وفق المبرهنتين 8.2 و8.10 .

إذا كان $R = -\infty$ ، فإنه يوجد من أجل العدد الحقيقي $\frac{1}{3}$ ، مثلاً، عدد طبيعي N_5 بحيث يكون

$$n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] \leq \frac{1}{3} < 1 \quad ; \quad n \geq N_5$$

ونتابع كما فعلنا سابقاً (في الحالة $1 > R > -\infty$)، فنجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ملحوظة 8.19 : إن اختبار راب أقوى من اختبار دالامبير. أي أن اختبار دالامبير يفشل أحياناً في حين ينجح اختبار راب.

فإذا وجدت النهاية $D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ، وكانت لا تساوي الواحد، فإن النهاية

$R = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right]$ حتماً موجودة، وتساوي $+\infty$ في الحالة $D < 1$ ، وتساوي $-\infty$ في الحالة $D > 1$.

مثال 8.29 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots\ (n+a)}$ ، حيث $a > 0$.

الحل: نطبق اختبار دالامبير

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\ldots\ (a+n)(a+n+1)} \cdot \frac{(a+1)(a+2).....(a+n)}{n!}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} = 1$$

أي أن اختبار دالامبير يفشل في تحديد نوع المتسلسلة. لذا، نلجأ لاختبار راب:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+a+1}{n+1} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{na}{n+a} = a$$

وعليه، نميز الحالات:

1- $a > 1$ ، فالمتسلسلة المعطاة متقاربة.

2- $a < 1$ ، فالمتسلسلة المعطاة متباعدة.

3- $a = 1$ ، يفشل اختبار راب. نعوض هذه القيمة في المتسلسلة المعطاة، فنحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

وهي متسلسلة متباعدة بالمقارنة مع المتسلسلة التوافقية.

مبرهنة 8.15 : إن تغيير ترتيب عددٍ محدود، أو غير محدود، من حدود متسلسلة عددية ذات حدود موجبة ومتقاربة (دون تكرار أو إهمال أي من هذه الحدود)، لا يخل بتقاربها ولا يغيّر من مجموعها.

البرهان: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة، متقاربة ومجموعها S. نغيّر ترتيب عددٍ محدود أو غير محدود من حدودها، دون إهمال أو تكرار أي من هذه الحدود، فنحصل على

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \dots \qquad (8.12)$$

وليكن t_m المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة. نفرض

$N = \max\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. عندئذٍ، يكون

$$t_m \le S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

(لأن t_m جزء من S_N).

لما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، فإن متتالية مجاميعها الجزئية S_N محدودة من الأعلى. وعليه، فإن المتتالية $\{t_m\}$ محدودة من الأعلى. أي أن المتسلسلة (8.12) متقاربة.

نفرض أن t مجموع المتسلسلة (8.12)، لما كان $N \to \infty$ ، عندما $m \to \infty$ ، فإننا نجد استناداً إلى (8.12):

$$t = \lim_{m\to\infty} t_m \le \lim_{N\to\infty} S_N = S$$

وإذا استبدلنا في المناقشة السابقة، المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ إحداهما بالأخرى، فإننا نجد $s \le t$. وعليه، فإن $s = t$.

تُقبل دون إثبات المبرهنة

مبرهنة 8.16: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين متقاربتين، ذواتي حدود موجبة. إذا ضربنا كل حد من حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بجميع حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، ثم جمعنا ناتج هذه الجداءات، نحصل على متسلسلة جديدة نرمز لها بالرمز $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ وهي متسلسلة متقاربة، ومجموعها يساوي حاصل جداء مجموع المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ملحوظة 8.20: يمكن استخدام المتسلسلات المتقاربة لدراسة نهاية متغير a_n، فإذا كان المطلوب إثبات أن المتغير a_n لامتناه في الصغر، أي $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، فإننا ندرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، فنحصل على المطلوب.

مثال 8.30 : أثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = 0$.

الحل: نشكّل المتتالية $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$، ونثبت أنها متقاربة.

نطبق اختبار كوشي – الجذر النوني:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\left(\frac{\ln n}{n}\right)}}{\ln n} = \left(\frac{\infty^0}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

حيث

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

أي أن المتسلسلة المدروسة متقاربة. وعليه، فإن حدها العام يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

ملحوظة 8.21 : درسنا فيما سبق، متسلسلات ذوات حدود موجبة، ولما كانت المتسلسلات ذات الحدود السالبة هي متسلسلات ذات حدود موجبة، ولكن مضروبة بالعدد (-1)، فإنه واستناداً إلى المبرهنة 8.3 (حيث $c = -1$) نجد أن دراسة هذه المتسلسلات تؤول إلى دراسة المتسلسلات ذوات الحدود الموجبة.

8.7 المتسلسلات ذات الحدود كيفية الإشارة (المتسلسلات المختلطة)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة عددية، إشارات حدودها a_n كيفية. يمكن الحصول على معلومات حول هذه المتسلسلة بالاعتماد على دراسة المتسلسلة المقابلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$، حيث إن $|a_n|$ هي القيمة المطلقة للعدد الحقيقي a_n. كما وتفيدنا في الدراسة، أيضاً متسلسلتان مساعدتان مرتبطتان بهذه المتسلسلة:

أ- متسلسلة الحدود الموجبة فقط من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ونرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$b_n = \begin{cases} a_n & ; \quad a_n > 0 \\ 0 & ; \quad a_n \le 0 \end{cases}$$

ب- متسلسلة القيم المطلقة للحدود السالبة من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، ونرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

$$c_n = \begin{cases} 0 & ; \quad a_n \ge 0 \\ |a_n| & ; \quad a_n < 0 \end{cases}$$

واضح أن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ هما متسلسلتان ذواتا حدود موجبة، وأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

وعليه، إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متقاربتين، فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربتان، وفق المبرهنة 8.5، ونميز الحالات:

1. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة، ومجموعها $+\infty$، وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متقاربة، فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدتين، ومجموع كل منهما $+\infty$.

2. إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متباعدة، ومجموعها $+\infty$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة ومجموعها $-\infty$، والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة، ومجموعها $+\infty$.

3. إذا كانت كل من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متباعدتين، ومجموع كل منهما $+\infty$، فإن

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متباعدة، ومجموعها $+\infty$. بينما لا نستطيع الحكم على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$، لأننا نحصل على حالة عدم تعيين من النمط $(\infty-\infty)$.

8.7.1 التقارب المطلق والتقارب الشرطي

تعريف 8.4 : نقول إن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (a_n أعداد حقيقية كيفية الإشارة) متقاربة بالإطلاق (إطلاقاً)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة.

تعريف 8.5 : نقول إن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة شرطياً، إذا كانت متقاربة، بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متباعدة.

مثال 8.31 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha n}{n^2}$، حيث $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

الحل: إن حدود المتسلسلة ذات إشارات كيفية. ندرس متسلسلة القيم المطلقة لحدودها $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos\alpha n|}{n^2}$.

لما كان

$$|\cos\alpha n|\le 1 \qquad ; \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

فإن

$$\frac{|\cos\alpha n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2} \qquad ; \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos\alpha n|}{n^2}$ متقاربة، وفق اختبار المقارنة الأول. وعليه، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة بالإطلاق.

مبرهنة 8.17 : كل متسلسلة متقاربة بالإطلاق متقاربة.

البرهان: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود كيفية الإشارة، متقاربة بالإطلاق.

ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ المتسلسلتين المساعدتين المرتبطتين بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

لما كان

$$0 \le b_n \le |a_n| \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، وفق اختبار المقارنة الأول.

ولما كان

$$0 \le c_n \le |a_n| \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متقاربة، وفق اختبار المقارنة الأول.

ولما كان

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، وفق المبرهنة 8.5.

نتيجة 8.6: إذا كان S مجموع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و B مجموع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و C مجموع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$، حيث إن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ المتسلسلتان المساعدتان المرتبطتان بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، فإن $S = B - C$.

وهذا صحيح، لأن المجموع الجزئي النوني S_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو

$$S_n = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$$

وكما هو واضح، فإن عدد حدود الطرف الأيمن في هذه العلاقة هو n حد. نأخذ نهاية الطرفين، عندما $n \to \infty$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)] = B - C$$

نتيجة 8.7 : الشرط اللازم والكافي كي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بالإطلاق، هو أن تتقارب المتسلسلتان المساعدتان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ المرتبطتان بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال 8.32 : ادرس تقارب المتسلسلة كيفية الإشارة

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{27} + \ldots$$

واحسب مجموعها.

الحل: نوجد المتسلسلتين المساعدتين المرتبطتين بهذه المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + 0 + 0 + \frac{1}{9} + 0 + 0 + \frac{1}{27} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

وهما متسلسلتان هندسيتان متقاربتان، لأن أساس كل منهما أقل من الواحد. واستناداً إلى النتيجة 8.7، تكون المتسلسلة الكيفية متقاربة بالإطلاق، ومجموعها $S = B - C$، حيث

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad , \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

وعليه، فإن

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

مبرهنة 8.18 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بالإطلاق، ومجموعها S، فإن $|S| \le S$، حيث S مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

البرهان: ليكن S_n المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. عندئذٍ، فإن

$$|S_n| \le |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

نأخذ نهاية طرفي المتراجحة، عندما $n \to \infty$

$$|S| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \le \lim_{n\to\infty} [|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|] = S$$

ملحوظة 8.22 : تعد هذه المبرهنة تعميماً لخاصة القيمة المطلقة لمجموع عدد منته من الأعداد، أي

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

نتيجة 8.9: إذا كان r_n الباقي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و R_n الباقي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$، فإن $|r_n| \le R_n$.

مبرهنة 8.19 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة شرطياً، فإن المتسلسلتين المساعدتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ المرتبطتين بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، متباعدتان.

البرهان: لما كان

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right] \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right]$$

وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة، فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ متباعدتان وفق المبرهنة 8.5.

ملحوظة 8.23 :إن عكس هذه المبرهنة غير صحيح بالضرورة، أي أن تباعد المتسلسلتين المساعدتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ المرتبطتين بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، لا يؤدي بالضرورة إلى تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ شرطياً.

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 8.20 : إن تغيير ترتيب عدد منته أو غير منته من حدود متسلسلة متقاربة بالإطلاق، دون تكرار أو إهمال أي من حدودها، لا يخل بتقاربها المطلق، ولا يغير من مجموعها.

ملحوظة 8.24 : إن تغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة شرطياً، يمكن أن يؤثر على تقاربها أو على قيمة مجموعها.

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 8.21 : إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ متقاربتين بالإطلاق، فإن المتسلسلة $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n\right)$ متقاربة بالإطلاق، ومجموعها يساوي حاصل جداء مجموع المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

مبرهنة 8.22 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بالإطلاق، وكانت المتتالية $\{\gamma_n\}$ محدودة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n a_n$ متقاربة بالإطلاق.

البرهان: لما كانت المتتالية $\{\gamma_n\}$ محدودة، فإنه يوجد العدد الحقيقي الموجب K بحيث

$$\{\gamma_n\} \le K \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} K|a_n|$ متقاربة. ولما كان

$$|\gamma_n a_n| \le K|a_n| \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n a_n|$ متقاربة، وفق اختبار المقارنة الأول. أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n a_n$ متقاربة بالإطلاق.

8.7.2 اختباران للتقارب الشرطي

تُقبل دون برهان المبرهنتان

مبرهنة 8.23 (اختبار آبل[1])

إذا كانت المتتالية $\{\gamma_n\}$ ذات حدود موجبة ومتناقصة، وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n a_n$ متقاربة.

مبرهنة 8.24 (اختبار ديرخليه)

إذا كانت المتتالية $\{\gamma_n\}$ متناقصة ونهايتها صفراً. وكانت متتالية المجاميع الجزئية لحدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ محدودة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n a_n$ متقاربة.

8.7.3 المتسلسلات المتناوبة

تعريف 8.6: نقول عن متسلسلة عددية إنها متناوبة إذا كانت إشارة كل حدين متجاورين من حدودها مختلفة. أي من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots \quad ; \quad a_n \geq 0 \quad , \forall k \in \mathbb{N}$$

يمكن أن تكون إشارة أول حد موجبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots \quad ; \quad a_n \geq 0 \quad , \forall k \in \mathbb{N}$$

---

[1] نيلز هينرك آبل (1802-1829) عالم رياضيات نرويجي.

ملحوظة 8.25 : تعد المتسلسلات المتناوبة، حالة خاصة من المتسلسلات كيفية الإشارة. لذا، فإن كل ما ذكرناه من أجل المتسلسلات المختلطة صحيح من أجل المتسلسلات المتناوبة.

مبرهنة 8.25 (اختبار ليبنتز)

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة، وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، فإن المتسلسلة المتناوبة

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ متقاربة.

البرهان: ندرس متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المتناوبة بدليلٍ زوجي:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots (a_{2n-1} - a_{2n})$$

لما كانت المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة، أي

$$a_{n+1} \le a_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المقادير داخل الأقواس في عبارة S_{2n} موجبة. وعليه، فإن

$$S_{2n} \le S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن المتتالية $\{S_{2n}\}$ متزايدة.

من جهةٍ أخرى، فإن

$$S_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}]$$

أي أن

$$S_{2n} \le a_1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وعليه، فإن المتتالية $\{S_{2n}\}$ محدودة من الأعلى.

ولما كانت المتتالية $\{S_{2n}\}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى، فإنها متقاربة، أي لها نهاية S:

$S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

ولما كان $S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$ ، فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$

ولما كان $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ (لأن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)، فإن $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$. وعليه، فإن:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$. أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ متقاربة.

ملحوظة 8.26 : يمكن إثبات صحة هذه المبرهنة مباشرةً، استناداً للمبرهنة 8.24، وذلك بفرض أن γ_n تقابل a_n في هذه المبرهنة، و a_n تقابل $(-1)^{n+1}$، حيث إن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ (متأرجحة بين القيمتين 0 و1)، والمتتالية $\{a_n\}$ متناقصة و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ملحوظة 8.27: لما كانت المتتالية $\{S_{2n}\}$ متزايدة والمتتالية $\{S_{2n-1}\}$ متناقصة، لأن

$$S_{2n-1} \geq S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} + a_{2n+1})$$

والعدد S هو نهاية المتتاليتين، وهو مجموع المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$، فإن العدد S هو الحد الأعلى للمتتالية $\{S_{2n}\}$ والحد الأدنى للمتتالية $\{S_{2n-1}\}$. وعليه، فإن

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وإذا عوضنا في هذه المتراجحة $n = 1$، نجد

$$0 \leq S_2 = (a_1 - a_2) \leq S \leq S_1 = a_1$$

أي أن

$$0 \leq S \leq a_1 \qquad (8.13)$$

ملحوظة 8.28 : إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة تماماً، أي

$$a_n > a_{n+1} > 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن المتراجحة (8.13)، تصبح كما يلي: $0 < S < a_1$. وهذا يعني أن مجموع أي متسلسلة عددية متناوبة ومتقاربة، وحدها الأول موجب تماماً، يكون موجباً تماماً وأصغر تماماً من الحد الأول.

وهذا صحيح، لأنه إذا فرضنا أن $S \approx S_{2n}$، فإن الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي هو

$$r_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} - \cdots$$

أي أن $0 < r_{2n} < a_{2n+1}$. ومنه، فإن $|r_{2n}| < a_{2n+1}$.

وإذا فرضنا أن $S \approx S_{2n-1}$، فإن الخطأ المرتكب في هذا الحساب التقريبي هو:

$$r_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} + \cdots = -(a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - \cdots)$$

أي أن

$$|r_{2n-1}| = a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - \cdots$$

ومنه، فإن

$$|r_{2n-1}| < a_{2n}$$

وعليه، فإن

$$|r_n| \le a_{n+1} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال 8.33: أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة. بين نوع هذا التقارب، ومن ثم أوجد قيمة تقريبية لمجموعها بخطأ لا يتجاوز 0.1.

الحل: المتسلسلة المعطاة متناوبة. ندرس متسلسلة القيم المطلقة لحدودها

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ وهي المتسلسلة التوافقية المتباعدة.

ولما كانت المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متناقصة، وكان $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، فإن المتسلسلة المتناوبة متقاربة وفق اختبار ليبنتز وهذا التقارب شرطي.

لإيجاد مجموع هذه السلسلة بخطأ لا يتجاوز 0.1، يجب أن نختار $n = 9$، لأن $|r_9| < \frac{1}{10} = 0.1$.

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0.746$$

ملحوظة 8.29: إن الشرطين في اختبار ليبنتز ضروريان، فتحقق أحدهما لا يغني عن الآخر. وإن اختلال شرط تناقص الحد العام لمتتالية القيم المطلقة لحدود المتسلسلة المتناوبة يعني فشل الاختبار، أما اختلال شرط نهاية الحد العام لهذه المتسلسلة إلى الصفر، عندما $n \to \infty$، فيعني تباعد هذه المتسلسلة.

مثال 8.34 : ادرس تقارب المتسلسلة المتناوبة

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$$

الحل: واضح أن الحد العام لهذه المتسلسلة يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$، لأن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}=0$$

بينما متتالية القيم المطلقة لحدودها غير متناقصة، لأن

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1}<\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \qquad ; \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

أي أنه لا يمكن تطبيق اختبار ليبنتز.

ندرس تقارب هذه المتسلسلة انطلاقاً من متتالية مجاميعها الجزئية

$$S_{2m}=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{m+1}\frac{2}{n-1}=2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)=2S_m^*$$

حيث S_m^* المجموع الجزئي للمتسلسلة التوافقية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. أي أن

$$\lim_{m\to\infty}S_m^*=\infty$$

وعليه، فإن

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\infty$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

مثال د8.3 : ادرس تقارب المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3^{n-1}+1)}{3^n}$.

الحل: واضح أن المتتالية $\left\{\frac{3^{n-1}+1}{3^n}\right\}$ متناقصة، لأن

$$a_n = \frac{3^{n-1}+1}{3^n} \geq a_{n+1} = \frac{3^n+1}{3^{n+1}} = \frac{3^{n-1}+\frac{1}{3}}{3^n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

إلا أن الحد العام للمتسلسلة لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$، لأن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n} = \frac{1}{3} \neq 0$$

أي أن هذه المتسلسلة متباعدة.

Damascus University

تمارين الفصل الثامن

1. ادرس تقارب المتتاليات العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \qquad \sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln n)}}{n\ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2.n+1)!}{(3n)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^5\cdot e^{-\sqrt[3]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=15}^{\infty}\frac{1}{[\ln n]} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\alpha n|}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{3}}{(\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2})\cdot n^{\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\arctan n}}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^{2n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n!)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n-5^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n^2}}{3^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$$

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^{\sqrt{n}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(5+\frac{1}{n})^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[5+(-1)^n]^2}{n^2\cdot 7^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n-n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n+n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right]^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)(\arccos(1/n))}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \tan^5\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(2\pi \cdot n! e)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)(\arccos 1/n)}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right]^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \tan^5\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(2\pi \cdot n! e)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(2\pi \cdot n! e)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right]^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \tan^5\left(-\frac{\pi}{\sqrt{n^3}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\alpha)\cdot(\cos 2\alpha)\cdot\ldots(\cos 2^n\alpha)\ ;(\alpha>0)$$

2. أعط مثالاً على سلسلتين متباعدتين حاصل جمعهما متسلسلة متقاربة.

3. ناقش حسب قيم x تقارب المتسلسلة:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots(1+x^n)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}th\frac{x}{2n}$$

4. ادرس تقارب المتسلسلات:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arctan\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n/6)}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\right]\cdot\frac{2^{n-1}}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\ln n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+1)\cdot e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arctan\frac{\pi}{3n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n\ln(\ln n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{5^{n/2}-n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

Damascus University

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{5}{3^n}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n} \cdot \sin\frac{\pi n}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha} ;(\alpha>0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-3n+1}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1}\right] \cdot \frac{e^{\arctan n}}{n^2}$$

5 . ادرس تقارب المتسلسلات:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}} \int_0^n e^{-x^2} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x \sin nx dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\int_n^{n+1} x^x dx\right]^{1/n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{n-1}^{n+1} \frac{\arctan x}{x^5+1} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\sin n}{n}} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (1-x^2)^{n^2} \sin n dx$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\ln^2 x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\ln(\ln x)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_n^{2n} \frac{x dx}{x^5+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{n}^{n^2}\frac{dx}{x^6+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(n\sqrt[4]{n^4+(-1)^n n^2+4}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\left|\int_{n}^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{0}^{1}x^n\arctan\left(\frac{x}{n}\right)dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{x^2+1}dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\sin^4 x}{x}dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(sh\frac{1}{n}-sh\frac{1}{2n}\right)^{\alpha};\ (\alpha>0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\pi\sqrt[4]{n^4+n^3+4}\right)\right]^n$$

6. أثبت أن المتسلسلات التالية متقاربة، ثم أوجد قيمة تقريبية للمجموع بخطأ قيمته المطلقة أصغر من ε:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n};\ (\varepsilon=0.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!};\ (\varepsilon=0.001)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2};\ (\varepsilon=0.1)$$

$$\frac{1}{10}-\frac{2}{3\cdot 10^3}+\frac{2^2}{2!\ 5\cdot 10^5}-\frac{2^3}{3!\ 7\cdot 10^7}+\ldots;\ (\varepsilon=10^{-9})$$

7. ادرس تقارب كل من المتسلسلات واحسب مجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln^{n/2}5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{x^{3n}+1}{x^{2n}+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[2^{1/(2n-1)}-2^{1/(2n+1)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+e)(n+e+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(n^2+n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[\frac{n^3+1}{n^3-1}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n!}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$$

8. أثبت تباعد المتسلسلات التالية، عن طريق إثبات أن متتالية المجاميع الجزئية غير محدودة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-1}}$$

9. أثبت تباعد المتسلسلات التالية، عن طريق إثبات أن الحد العام لكلٍ منها لا يسعى إلى الصفر:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2+n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^{n^2}}{e^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos n^2$$

10. ادرس تقارب المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إذا كان:

1) $a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

2) $a_1 = \dfrac{1}{2}\,,\ a_{n+1} = \dfrac{na_n}{n+2}$

3) $a_1 = \dfrac{1}{2}\,,\ a_{n+1} = a_n - na_n^2$

4) $a_1 = -1\,,\quad a_2 = \dfrac{1}{2}\,,\quad (n+2)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + na_n = 0$

5) $a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$

6) $a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

7) $a_1 = 1,\quad a_2 = 2-\sqrt{3}\,, a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$

11. ليكن $a_n = \sqrt[3]{n^3+3n+7} - \sqrt{f(n)}$ الحد العام لمتسلسلة، حيث $f(n)$ دالة في n، أثبت أن: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^2} = 1$.

12. أثبت، استناداً للمتسلسلات المتقاربة، أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad ;(\alpha>0) \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}=0\right]$$

الفصل التاسع

المتسلسلات الدالية ومتسلسلات القوى الصحيحة

9.1 المتتاليات والمتسلسلات الدالية والتقارب النقطي

9.2 التقارب المنتظم وخواصه

9.3 سلاسل القوى الصحيحة

9.4 نشر الدوال في متسلسلات تايلور وماكلوران

تمارين الفصل التاسع

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المتسلسلات الدالية

ومتسلسلات القوى الصحيحة

9.1 المتتاليات والمتسلسلات الدالية والتقارب النقطي

المتسلسلة الدالية هي المتسلسلة التي يكون كل حد من حدودها دالة في المتحول x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (9.1)$$

إذا كان كل حد من حدود هذه المتسلسلة ثابتاً، فإننا نحصل على متسلسلة عددية، أي أن المتسلسلات العددية هي حالة خاصة من المتسلسلات الدالية.

9.1.1 منطقة تقارب المتسلسلة الدالية

إذا أعطينا المتغير x في المتسلسلة (9.1) قيماً ثابتة x_0 أو x_1 ... الخ، فإننا نحصل على المتسلسلات العددية $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ أو $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1)$ ... الخ، وهذه المتسلسلات العددية قد تكون متقاربة أو متباعدة.

تعريف 9.1 : نسمي مجموعة قيم المتغير x التي تكون من أجلها المتسلسلة (9.1) متقاربة، منطقة تقارب هذه المتسلسلة.

وإذا كانت x_0 نقطة من منطقة تقارب المتسلسلة (9.1)، فإن مجموع هذه المتسلسلة الدالية عند النقطة $x = x_0$ هو:

$$S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

وباختيارات أخرى للنقط x من منطقة التقارب نحصل على متسلسلات عددية متقاربة، مجموع كل منها متعلق باختيار هذه النقط. وعليه، فإن مجموع المتسلسلة الدالية هو دالة في المتحول x ونشير إلى أن مجموعة قيم (مدى) دالة المجموع $S(x)$ هي منطقة تقارب المتسلسلة.

مثال 9.1 : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة الدالية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$.

الحل: تمثل هذه المتسلسلة، من أجل كل قيمة مثبتة للمتحول x، متسلسلة هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}x$. وكما نعلم، فإن المتسلسلة الهندسية متقاربة، إذا كان $|q| = \left|\frac{1}{3}x\right| < 1$. وعليه، فإن منطقة تقارب هذه المتسلسلة $|x| < 3$ أي المجال $]-3;3[$ ومجموعها في هذا المجال الدالة

$$S(x) = \frac{x/3}{1 - x/3} = \frac{x}{3 - x}$$

مثال 9.2 : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

الحل: تمثل هذه المتسلسلة، من أجل قيم مثبتة للمتحول x، متسلسلة هندسية أساسها $q = \frac{x+1}{x-1}$. وهي متقاربة إذا كان $|q| = \left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$ ، أي

$$-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1$$

إذا كان $x - 1 > 0$ ، أي $x > 1$ ، فإن $-x + 1 < x + 1 < x - 1$ ، أي أن

$x + 1 < x - 1$ و $-x + 1 < x + 1$. المتراجحة الأولى مستحيلة، والثانية صحيحة من أجل $x > 0$.

أما إذا كان $x - 1 < 0$ ، أي $x < 1$ ، فإن $-x + 1 > x + 1 > x - 1$ ، أي أن

$x + 1 > x - 1$ و $-x + 1 > x + 1$. المتراجحة الأولى محققة دوماً، والثانية محققة من أجل $x < 0$.

ولكن $|q| < 1$ ، من أجل $x > 0$. إذن، فالمتسلسلة المعطاة متقاربة من أجل $x < 0$. أي أن منطقة التقارب هي المجال $]-\infty;0[$.

مثال 9.3: أوجد منطقة تقارب المتسلسلة الدالية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

الحل: لما كان

$$\frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة، أياً تكن قيمة المتحول x وفق اختبار المقارنة الأول. أي أن منطقة التقارب هي $\mathbb{R}$.

مثال 9.4 : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sin x)+n+1}$

الحل: لما كان:

$$\sin x \le 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

فإن:

$$\frac{1}{n+1+\sin x} \ge \frac{1}{n+2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، وفق اختبار المقارنة الأول، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة أيضاً، أياً يكن x من $\mathbb{R}$. وعليه، فإن منطقة تقارب المتسلسلة المعطاة فارغة.

9.1.2 تقارب المتتاليات الدالية

تعريف 9.2: نقول إن المتتالية الدالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x)$ عند النقطة x_0، إذا تقاربت المتتالية العددية $\{S_n(x_0)\}$ من العدد $S(x_0)$. أي إذا كان:

$$S(x_0) = \lim_{n \to \infty} S_n(x_0)$$

أي إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon < 0 , \exists N \in \mathbb{N} \ : \ |S_n(x_\circ) - S(x_\circ)| < \varepsilon \quad ; \quad n \geq N$$

تعريف 9.3 : نقول إن متتالية الدوال $\{S_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x)$ في منطقة ما D، إذا كان:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x) \quad ; \quad \forall x \in D$$

أي إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ |S_n(x) - S(x)| < S(x) \quad ; \quad n \geq N \ , \ \forall x \in D$$

نلاحظ في هذا التعريف أن اختيار العدد N متعلق باختيار النقطة x وبالعدد ε.

ويسمى هذا التقارب تقارباً نقطياً.

9.2 التقارب المنتظم وخواصه

تعريف 9.4 : نقول إن متتالية الدوال $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$ في منطقة ما D، إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \ ; \ n \geq N \ , \ \forall x \in D$$

نلاحظ أن الفرق بين التعريفين 9.3 و 9.4 أي بين نوعي التقارب، هو أن العدد N متعلق فقط باختيار العدد ε في التعريف الأخير، بغض النظر عن اختيار x.

ويمكن تفسير الاختلاف بين نوعي التقارب هندسياً، كما يلي:

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين على المجال $[a;b]$، معطى المنحني البياني لهما بالشكل 9.1.

يمكن أن يكون هذان المنحنيان قريبين أو بعيدين عن بعضهما بعضاً. ويمكن إعطاء أكثر من تعريف للمسافة بين هذين المنحنيين في المستوي الديكارتي.

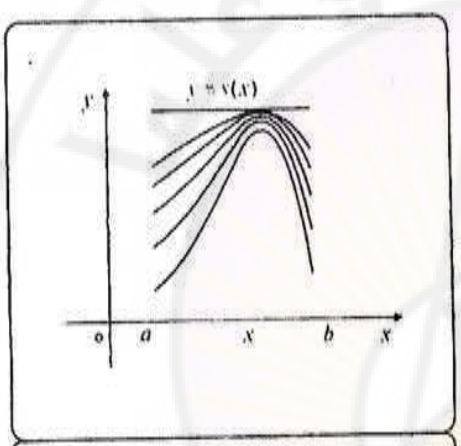
إذا كان المنحني البياني لكل دالة من دوال المتتالية $\{S_n(x)\}$ يقترب من المنحني البياني للدالة $S(x)$، وفق معنى معين للمسافة بين منحنيين في المستوي الديكارتي، فإننا نقول إن متتالية الدوال $\{S_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x)$ وفق التعريف المحدد للمسافة.

فمثلاً، إذا ثبتنا نقطة x_0 من المجال $]a;b[$، فإن المسافة بين المنحنيين البيانيين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ (وأيضاً، بين الدالتين $f(x)$ و $g(x)$) في هذه النقطة هي القيمة:

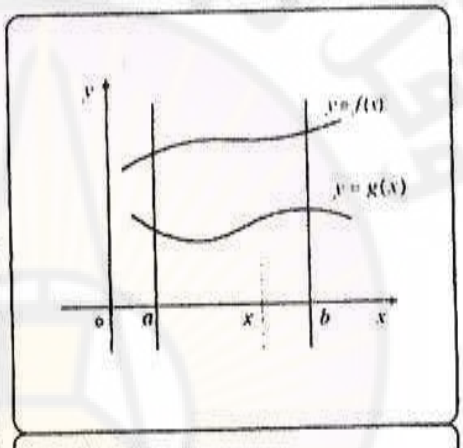
$$\rho[f(x),g(x)] = |f(x_0) - g(x_0)|$$

أي أن المسافة بين الدالتين أو بين منحنييهما متعلقة باختيار النقطة x_0.

إن تقارب المتتالية $\{S_n(x)\}$ من الدالة $S(x)$ عند النقطة x_0 يعني أن المسافة بين المنحنيات البيانية للدوال $S_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، تقترب من المنحني البياني للدالة $S(x)$ عند النقطة x_0، الشكل 9.2.



الشكل 9.2



الشكل 9.1

أي أن المسافة بين المنحنيات البيانية للدوال $\{S_n(x)\}$، حيث $n \in \mathbb{N}$، والدالة $S(x)$ عند النقطة x_0 تسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(x_0) - S(x_0)| = 0 \qquad (9.2)$$

وعليه، فإن منطقة تقارب المتتالية $\{S_n(x)\}$ من الدالة $S(x)$ تتألف من جميع النقط x_0 التي تتحقق من أجلها (9.2) أي النقاط من محور الفواصل التي تقترب فيها المنحنيات البيانية للدوال $S_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، من المنحني البياني للدالة $S(x)$.

يمكن إعطاء تعريف آخر للمسافة بين الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ أو بين بيانيهما (منحنييهما).

فمثلاً، يمكن اعتبار هذه المسافة هي المسافة الأكبر بين نقط متقابلة لمنحنيي الدالتين، أي:

$$\rho[f(x),g(x)]=\max_{x\in[a;b]}\ |f(x)-g(x)|$$

وفي حالة عدم إمكانية الحصول على المسافة الأكبر بين الدالتين على المجال $[a;b]$، نختار أصغر حد أعلى للمقدار $|f(x)-g(x)|$ على المجال $[a;b]$.

وعليه، فإن تقارب المتتالية $\{S_n(x)\}$ من الدالة $S(x)$ على المجال $[a;b]$ يعني تحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a;b]}\ |S_n(x)-S(x)|=0$$

أي يتحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\exists N\in\mathbb{N}:\ \max_{x\in[a,b]}|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon\ \ ;\ \ n\geq N$$

بعبارة أخرى:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\exists N\in\mathbb{N}:|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon\ ,\ n\geq N\ ;\ \ \forall x\in[a;b]$$

وهو نفس تعريف التقارب المنتظم للمتتالية $\{S_n(x)\}$ من الدالة $S(x)$ على المجال $[a;b]$.

عند دراسة تقارب المتتالية $\{S_n(x)\}$ من الدالة $S(x)$، يمكن إيجاد الدقة (أو الخطأ) في التعبير عن الدوال $S_n(x)$، حيث $n\in\mathbb{N}$، بوساطة الدالة $S(x)$. وتكون هذه الدقة غير متعلقة باختيار x، إذا كان التقارب منتظماً، بينما الخطأ هو الخطأ الأكبر المحسوب في كل نقطة من نقاط هذا المجال.

ملحوظة 9.1: يمكن أن تكون كل دالة من متتالية الدوال $\{S_n(x)\}$ ثابتة. أي أن هذه المتتالية هي متتالية عددية $\{S_n\}$. ولنفرض أن هذه المتتالية متقاربة من العدد S. أي يتحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\exists N\in\mathbb{N}:\ |S_n-S|<\varepsilon\ \ ;\ \ n\geq N$$

واضح أن العدد N ليس له علاقة بالمتحول x. لذا يمكن اعتبار المتتالية العددية $\{S_n\}$، ومنه المتسلسلة العددية، متقاربة بانتظام أياً كان x.

مثال 9.5 : ادرس تقارب المتتالية $\{x^n\}$ على المجال $[0;1]$.

الحل: نعلم أن:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad ; \quad x \in [0;1[$$

ومن أجل $x = 1$ نحصل على المتتالية الثابتة:

$$1,1,1,\ldots$$

وهي متقاربة من العدد 1. أي أن المتتالية $\{x^n\}$ متقاربة على المجال $[0;1]$ ونهايتها هي الدالة:

$$S(x) = \begin{cases} 0 \; ; & 0 \le x < 1 \\ 1 \; ; & x = 1 \end{cases}$$

ندرس التقارب المنتظم لهذه المتتالية:

أياً يكن العدد الحقيقي الموجب ε، نبحث عن عدد طبيعي N بحيث يكون:

$$\left|x^n - S(x)\right| < \varepsilon \quad ; \; x \in]0;1[\quad (*)$$

نفرض أولاً: $x \in]0;1[$، نعوض قيمة $S(x)$ في المتراجحة (*)

$$\left|x^n - 0\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x^n < \varepsilon \quad ; \quad x \in]0;1[$$

أي:

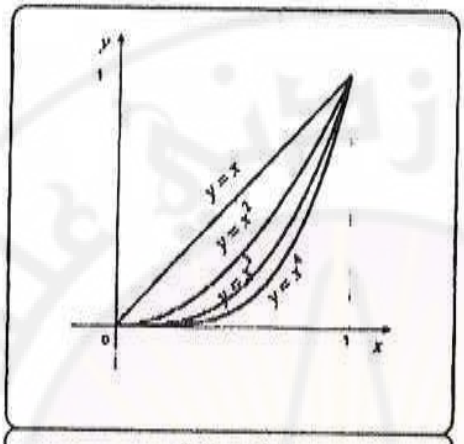
$$n \ln x < \ln \varepsilon \;\Rightarrow\; n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

أي أنه يمكن أن نأخذ العدد N، بحيث يكون $N > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$، ولكن $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x} = \infty$، أي أنه لا يمكن إيجاد العدد N بحيث تكون (*) محققة أياً يكن x من المجال $]0;1[$. أي أن المتتالية $\{x^n\}$ غير متقاربة بانتظام على المجال $]0;1[$، ومنه، غير متقاربة بانتظام على المجال $[0;1]$.

يبين الشكل 9.3، أنه لا يمكن أن تقع جميع منحنيات الدوال x^n، حيث $n \in \mathbb{N}$، في الشريط:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon$$

تجدر الإشارة هنا أن الدالة $S(x)$ غير مستمرة عند النقطة $x = 1$ ، مع أن كل حد من حدود المتتالية $\{x^n\}$ هو دالة مستمرة في هذه النقطة.



الشكل 9.3

مبرهنة 9.1 : إذا كانت المتتاليتان $\{S_n(x)\}$ و $\{t_n(x)\}$ متقاربتين بانتظام على المنطقة D من الدالتين $S(x)$ و $t(x)$ بالترتيب، فإن المتتالية $\{S_n(x) + t_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على D من الدالة $S(x) + t(x)$.

البرهان: لما كانت المتتاليتان $\{S_n(x)\}$ و $\{t_n(x)\}$ متقاربتين بانتظام على D من الدالتين $S(x)$ و $t(x)$، بالترتيب، فإنه يمكن إيجاد عددين طبيعيين N_1 و N_2 مقابل

أي عدد حقيقي موجب ε بحيث يكون:

$$|S(x) - S_n(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad ; \quad n \geq N_1 \ , \ \forall x \in D$$

$$|t(x) - t_n(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad ; \quad n \geq N_2 \ , \ \forall x \in D$$

نفرض $N = \max\{N_1, N_2\}$. عندئذٍ، تكون المتراجحتان السابقتان محققتين من أجل $n \geq N$. نجمع هاتين المتراجحتين:

$$\varepsilon > |S(x) - S_n(x)| + |t(x) - t_n(x)| \geq |S(x) - S_n(x) + t(x) - t_n(x)| =$$
$$= |S(x) + t(x) - [S_n(x) + t_n(x)]| \quad ; \quad \forall x \in D$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{S_n(x)+t_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x)+t(x)$.

يمكن تعميم هذه المبرهنة من أجل مجموع عدد منته من المتتاليات المتقاربة بانتظام.

مبرهنة 9.2 : إذا كانت الدوال $S_n(x)$، حيث $n\in\mathbb{N}$، مستمرة على المجال $[a;b]$، وكانت المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$، فإن الدالة $S(x)$ مستمرة على المجال $[a;b]$

البرهان: حتى تكون الدالة $S(x)$ مستمرة عند نقطة اختيارية $x_\circ$ من المجال $[a;b]$، يجب تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0:\ |S(x_\circ+h)-S(x_\circ)|<\varepsilon\ \ ;\ \ |h|<\delta$$

حيث إن النقطة $(x_\circ+h)$ تقع ضمن المجال $[a;b]$.

أياً تكن $x_\circ$ و h و n، فإن:

$$\begin{aligned}&|S(x_\circ+h)-S(x_\circ)|=\\&=|S(x_\circ+h)-S_n(x_\circ+h)+S_n(x_\circ+h)-S_n(x_\circ)+S_n(x_\circ)-S(x_\circ)|\le\\&\le|S(x_\circ+h)-S_n(x_\circ+h)|+|S_n(x_\circ+h)-S_n(x_\circ)|+|S_n(x_\circ)-S(x_\circ)|\end{aligned}\qquad(9.3)$$

لما كانت المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$، فإنه يمكن اختيار العدد n كبيراً، بحيث يتحقق الشرط:

$$\forall x\in[a;b]\ :\ |S(x)-S_n(x)|<\tfrac{1}{3}\varepsilon$$

وخصوصاً، يكون:

$$|S(x_\circ+h)-S_n(x_\circ+h)|<\tfrac{1}{3}\varepsilon\qquad(9.4)$$

$$|S_n(x_\circ)-S(x_\circ)|<\tfrac{1}{3}\varepsilon\qquad(9.5)$$

ولما كانت الدوال $S_n(x)$، حيث $n\in\mathbb{N}$، مستمرة فإنه يمكن إيجاد هذا العدد n. وعليه، فإنه يمكن إيجاد عدد δ، بحيث يكون:

$$|S_n(x_\circ+h)-S_n(x_\circ)|<\tfrac{1}{3}\varepsilon$$

وبتعويض العلاقات (9.4) و (9.5) و (9.6) في (9.3)، نجد:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 : \quad |S(x_\circ + h) - S(x_\circ)| < \varepsilon \quad ; \quad |h| < \delta$$

أي أن الدالة $S(x)$ مستمرة عند النقطة الاختيارية $x_\circ$ من المجال $[a;b]$، أى مستمرة على المجال $[a;b]$.

مبرهنة 9.3 : إذا كانت الدوال $S_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، مستمرة على منطقة D تحوي النقطة $x_\circ$، وكانت المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$ على D. فإن دالة النهاية $S(x)$ مستمرة عند النقطة $x_\circ$. أي إذا كان

$$\lim_{x \to x_\circ} S_n(x) = S_n(x_\circ)$$

فإن

$$\lim_{x \to x_\circ} S(x) = S(x_\circ)$$

أي أن

$$\lim_{x \to x_\circ} [\lim_{n \to \infty} S_n(x)] = \lim_{n \to \infty} [\lim_{x \to x_\circ} S_n(x)]$$

البرهان: لما كانت المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على D من الدالة $S(x)$، فإنه يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} : |S_n(x) - S(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \ ; \ n \geq N \ , \ x \in D$$

ولما كانت الدوال $S_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، مستمرة عند النقطة $x_\circ$ من D، فإنه يتحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 : |S_n(x) - S_n(x_\circ)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \ ; \quad x \in D \cap u_\delta(x_\circ)$$

وعليه، فإنه أياً تكن x من $D \cap u_\delta(x_\circ)$، فإنه يتحقق الشرط:

$$|S(x) - S(x_\circ)| = |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_\circ) + S_n(x_\circ) - S(x_\circ)| \leq$$

$$\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_\circ)| + |S_n(x_\circ) - S(x_\circ)| <$$

$$< \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \quad ; \quad n \geq N$$

أي أن

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$$

مثال 9.6 : ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $S_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

الحل: واضح أنه أياً يكن العدد x، فإن:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{2nx^2} = 0$$

أي أن المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x) = 0$، أياً يكن x. ويكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$$

ولكن هذا التقارب غير منتظم، لأنه، إذا فرضنا $x_n = \frac{1}{n}$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1/n)}{1+n^2(1/n^2)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

مثال 9.7 : ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $S_n(x) = nxe^{-nx^2/2}$.

الحل: واضح أنه أياً يكن العدد x، فإن:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-2x^2/2} = 0$$

أي أن المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x) = 0$ أياً يكن x. ولكن هذا التقارب غير منتظم، لأنه إذا فرضنا $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$، فإن:

$$S_n(x_n) = nx_ne^{-nx_n^2/2} = \sqrt{n}e^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{e}}$$

واضح أن المقدار $S_n(x_n)$ غير محدود، عندما تزداد n.

يدل هذان المثالان، على أن متتالية الدوال المستمرة يمكن أن تتقارب لدالة مستمرة، مع أن التقارب غير منتظم.

مبرهنة 9.4 : (المبادلة بين عمليتي المكاملة والنهاية)

لتكن $S_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، دوال مستمرة على المجال $[a;b]$. ولتكن المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على هذا المجال من الدالة $S(x)$. عندئذٍ، فإنه أياً يكن العددان الحقيقيان α و β، بحيث $a \le \alpha < \beta \le b$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} S_n(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx$$

نترك البرهان كتمرين للقارئ.

نتيجة 9.1 : إذا كانت متتالية الدوال $\{S_n(x)\}$، المستمرة على المجال $[a;b]$، متقاربة بانتظام على هذا المجال من الدالة $S(x)$، فإنه أياً يكن x من هذا المجال، تكون المتتالية $\left\{\int_{\alpha}^{x} S_n(t)dt\right\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $\int_{\alpha}^{x} S(t)dt$ أياً تكن x من المجال $[a;b]$.

مبرهنة 9.5 : (المبادلة بين عمليتي الاشتقاق والنهاية)

لتكن $\{S_n(x)\}$ متتالية دوال متقاربة من الدالة $S(x)$ على المجال $[a;b]$. ولتكن للدوال $S_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، مشتقات مستمرة على هذا المجال، بحيث تكون المتتالية $\{S'_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$ من الدالة $\sigma(x)$. عندئذٍ يكون:

أ. $S'(x) = \sigma(x)$

ب. المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$ على المجال $[a;b]$.

البرهان:

أ. ليكن $a \le \alpha < \beta \le b$. نجد استناداً إلى المبرهنة 9.4:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{x} S'_n(t)dt = \int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$$

ومن ناحية أخرى، نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{x}S_n'(t)dt=\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S_n(\alpha)]=S(x)-S(\alpha)$$

وعليه، فإن:

$$S(x)-S(\alpha)=\int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt$$

نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة إلى x:

$$S'(x)=\sigma(x)$$

ب. نكتب الحد العام للمتتالية $\{S_n(x)\}$ بالشكل:

$$S_n(x)=S_n(\alpha)+\int_{\alpha}^{x}S_n'(t)dt \qquad (9.7)$$

لما كانت المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام، الملحوظة 9.1، والمتتالية $\left\{\int_{\alpha}^{x}S_n'(t)dt\right\}$ متقاربة بانتظام، النتيجة 9.1، فإن المتتالية التي يعطى حدها بالعلاقة (9.7) متقاربة بانتظام، وفق المبرهنة 9.1.

9.2.2 المتسلسلات المتقاربة بانتظام واختبار فايرشتراوس

تعريف 9.5 : نقول إن المتسلسلة الدالية $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ متقاربة بانتظام على المنطقة D، إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$، متقاربة بانتظام من دالة $S(x)$ على هذه المنطقة.

مبرهنة 9.6 : (اختبار فايرشتراوس)

تكون المتسلسلة الدالية $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ المعرفة على المجال $[a;b]$ متقاربة بانتظام وبالإطلاق على هذا المجال، إذا وجدت متتالية عددية متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ذات حدود موجبة، بحيث يكون:

$$|u_n(x)| \le a_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in [a;b]$$

نترك البرهان كتمرين للقارئ.

مثال 9.8 : ادرس التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$.

الحل: لما كان

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام وبالإطلاق، وفق اختبار فايرشتراوس.

ملحوظة 9.2 : ليس بالضرورة أن تكون المتسلسلة المتقاربة بانتظام على مجالٍ ما، متقاربة بالإطلاق على نفس المجال.

مثال 9.9 : ادرس التقارب المنتظم والتقارب المطلق للمتسلسلة الدالية

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

الحل: لما كان $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$ ، والمتتالية $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ متناقصة أياً يكن n وأياً يكن x من المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة، وفق اختبار ليبنتز.

وعليه، فإن

$$|r_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \quad ; \quad \forall x \in \left[\tfrac{1}{2};1\right]$$

واضح أن الطرف الأيمن في هذه المتراجحة غير متعلق بالمتحول x.

وعليه، فإنه أياً يكن العدد الحقيقي الموجب ε، يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad ; \quad n \geq N(\varepsilon) \ , \ \forall x \in \left[\tfrac{1}{2};1\right]$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$. ولكن هذا التقارب غير مطلق، لأنه إذا عوضنا $x=1$، نحصل على المتسلسلة العددية المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ غير المتقاربة بالإطلاق.

يكون من المفيد أحياناً استنتاج التقارب المنتظم لمتسلسلة دالية بالاعتماد على التقارب المنتظم والمطلق لمتسلسلة أخرى.

ويمكن بسهولة إثبات صحة المبرهنة:

مبرهنة 9.7 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام على منطقة ما D، فإن المتتالية $\{U_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الصفر على المنطقة D.

ملحوظة 9.3 : إن شرط المبرهنة لازم وغير كافٍ.

فمثلاً: المتتالية $\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$ متقاربة بانتظام من الصفر على المجال $]0;1[$، لأن:

$$0 < \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in]0;1[$$

ولكن من أجل كل نقطة مثبتة x_0 من المجال $]0;1[$، تكون المتسلسلة العددية التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x_0}$ متباعدة.

تُقبل دون برهان المبرهنة

مبرهنة 9.8 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام وبالإطلاق على منطقة ما D، وكانت الدوال $f_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، محدودة على المنطقة D. فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) \cdot f_n(x)]$ متقاربة بانتظام وبالإطلاق على D.

نعلم أن مجموع عددٍ منتهٍ من الدوال المستمرة هو دالة مستمرة. كما أن تكامل (أو اشتقاق) مجموع عددٍ منتهٍ من الدوال الكمولة (أو الفضولة) هو دالة كمولة (فضولة) وتساوي مجموع تكاملات (أو مشتقات) هذه الدوال. ونبين فيما يلي كيف نعمم ذلك من أجل مجموع عدد غير منتهٍ من الدوال.

مبرهنة 9.9 : (استمرار مجموع متسلسلة دوال مستمرة متقاربة بانتظام)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متسلسلة دالية متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$. ولتكن الدوال $u_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، معرفة مستمرة على هذا المجال. عندئذ، يكون مجموع هذه المتسلسلة $S(x)$ هو دالة ومستمرة على هذا المجال.

البرهان: لما كانت الدوال $u_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، مستمرة على المجال $[a;b]$، فإن كل حد من حدود متتالية مجاميعها الجزئية $\{S_n(x)\}$ هو دالة مستمرة على هذا المجال. وهذه المتتالية متقاربة بانتظام من دالة $S(x)$ على هذا المجال. وتمثل هذه الدالة مجموع المتسلسلة على هذا المجال. واستناداً إلى المبرهنة 9.2، تكون الدالة مستمرة على المجال $[a;b]$.

ملحوظة 9.4 : إن شرط التقارب المنتظم، في هذه المبرهنة، هو شرط كافٍ وغير لازم كي يكون المجموع دالة مستمرة.

مثال 9.10 : ادرس التقارب المنتظم، على المجال $[0;1]$، للمتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

الحل: واضح أن جميع حدود هذه المتسلسلة هي دوال مستمرة على المجال $[0;1]$. ولما كان

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0 \quad ; \quad \forall x\in[0;1]$$

فإن الدالة $S(x)$ مستمرة على هذا المجال. مع أن التقارب غير منتظم:

نفرض جدلاً، أن المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام على المجال $[0;1]$، تكون، عندئذٍ، متتالية

مجاميعها الجزئية متقاربة بانتظام من الدالة $S(x) \equiv 0$ على هذا المجال. أي يوجد، من أجل العدد الحقيقي $\frac{1}{2}$ عدد طبيعي N، بحيث يكون

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2} \quad ; \quad n \geq N \ , \ \forall x \in [0;1]$$

فإذا كان $n \geq N$، فإن $\frac{1}{n} \in [0;1]$. وعليه، فإن $\frac{n(1/n)}{1+n^2(1/n)^2} < \frac{1}{2}$، أي $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$، وهذا مستحيل. أي أن المتسلسلة المعطاة غير متقاربة بانتظام على المجال $[0;1]$، مع أن كل حد من حدودها دالة مستمرة على هذا المجال، ونهايتها $S(x) \equiv 0$ دالة مستمرة على هذا المجال.

تعريف 9.6 : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متسلسلة دالية متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$ على المجال $[a;b]$، ولتكن الدوال $u_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، دوال كمولة على هذا المجال. إذا كان

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$$

فإننا نقول إنه يمكن مكاملة المتسلسلة حداً حدا.

مبرهنة 9.10 : (تكامل حدود المتسلسلة الدالية حداً حدا)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متسلسلة دالية متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$ ومجموعها الدالة $S(x)$. عندئذ، تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} u_n(t)dt \quad ; \quad a \leq \alpha < x \leq b \qquad (9.8)$$

متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$، ومجموعها هو الدالة $\int_{\alpha}^{x} S(t)dt$.

البرهان: ليكن $S_n(x)$ المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. عندئذٍ، يكون المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة (9.8) هو الدالة

$$\int_{\alpha}^{x} S_n(t)dt = \int_{\alpha}^{x} [u_1(t) + u_2(t) + \ldots + u_n(t)]dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{x} u_1(t)dt + \int_{\alpha}^{x} u_2(t)dt + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(t)dt \qquad (9.9)$$

لما كانت المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$، فإن المتتالية $\left\{\int_{\alpha}^{x} S_n(t)dt\right\}$ هي متتالية متقاربة بانتظام على هذا المجال ، من الدالة $\int_{\alpha}^{x} S(t)dt$ ، وفق النتيجة 9.1. ومن العلاقة (9.9)، نجد أن المتتالية $\left\{\int_{\alpha}^{x} S_n(t)dt\right\}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة (9.8) . وعليه، فإن هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$، ومجموعها هو الدالة $\int_{\alpha}^{x} S(t)dt$.

مثال 9.11 : ادرس إمكانية مكاملة حدود المتسلسلة التالية حداً حدا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

الحل: ليكن α عدداً حقيقياً يحقق المتراجحة $0 < \alpha < 1$. تكون عندئذٍ، المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n}$ متسلسلة هندسية متقاربة (أساسها $q = \alpha < 1$). كذلك، فإن المتسلسلة المعطاة هندسية متقاربة، من أجل $|q| = |-x^2| \le \alpha < 1$، ومجموعها $S(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ، وهذا التقارب منتظم، استناداً إلى اختبار فايرشتراوس، حيث $|x^n| \le \alpha^n$، أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.

نكامل حدود المتسلسلة المعطاة حداً حدا، على المجال $[0;x]$، حيث $x < 1$:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

وهي متسلسلة متقاربة بانتظام من أجل $|x| \le \alpha < 1$، ومجموعها هو الدالة:

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t\Big|_0^x = \arctan x$$

وعليه، فإن

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

مثال 9.12 : ادرس إمكانية مكاملة حدود المتسلسلة التالية حداً حدا $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

الحل: ليكن α عدداً حقيقياً يحقق المتراجحة $0 < \alpha < 1$. تكون عندئذٍ، المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ متسلسلة هندسية متقاربة، أساسها $q = \alpha < 1$. كذلك، فإن المتسلسلة المعطاة هندسية متقاربة، من أجل $|q| = |-x| \le \alpha < 1$، ومجموعها $S(x) = \frac{1}{x+1}$، وهذا التقارب منتظم، استناداً إلى اختبار فايرشتراوس، حيث $|x^n| \le \alpha^n$، أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.

نكامل حدود المتسلسلة المعطاة حداً حدا، على المجال $[0;x]$، حيث $x < 1$:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وهي متسلسلة متقاربة بانتظام من أجل $|x| \le \alpha < 1$، ومجموعها هو الدالة:

$$\int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln|t+1|\Big|_0^x = \ln|x+1|$$

وعليه، فإن

$$\ln|x+1| = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

مثال 9.13 : ادرس إمكانية مكاملة حدود المتسلسلة التالية حداً حدا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot x\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}-(n-1)\cdot x\cdot e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}\right]$$

الحل: إن المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة هو الدالة

$$S_n(x)=n\cdot x\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}$$

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $S(x)\equiv 0$، ولكن هذا التقارب غير منتظم، المثال 9.7. وعليه، فإن تقارب المتسلسلة المعطاة غير منتظم، أي لايمكن مكاملة حدودها حداً حدا.

وهذا صحيح، فإذا كاملنا حدود هذه المتسلسلة على المجال $[0;1]$:

$$\int_0^1 S_n(x)dx=\int_0^1 n\cdot x\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}dx=\int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}}d(-\tfrac{nx^2}{2})=-\left[e^{-\frac{nx^2}{2}}\right]_0^1=1-e^{-\frac{1}{2}n}$$

ومنه، فإن

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-\frac{n}{2}})=1$$

بينما،

$$\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot x\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}-(n-1)\cdot x\cdot e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}\right]dx=0$$

أي أن

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot x\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}-(n-1)\cdot x\cdot e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}\right]dx\neq$$

$$\neq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left[n\cdot x\cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}-(n-1)\cdot x\cdot e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}\right]dx$$

ملحوظة 9.5 : إن التقارب المنتظم لمتسلسلة على مجالٍ ما، هو شرط كافٍ وغير لازم كي يكون بالإمكان تكامل حدودها حداً حدا.

مثال 9.14 : إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$ غير متقاربة بانتظام، لأن متتالية مجاميعها الجزئية، التي حدها العام $S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ غير متقاربة بانتظام بالقرب من الصفر، المثال 9.6، وهي متقاربة من الدالة $S(x)=0$. ولكن يمكن مكاملة هذه المتسلسلة حداً حدا. بالفعل، فإذا كان $x>0$. فإن:

$$\int_0^x S_n(t)dt=\int_0^x\frac{nt\,dt}{1+n^2t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{d(n^2t^2)}{1+n^2t^2}=\frac{1}{2n}\left[\ln(1+n^2t^2\right]_0^x=$$

$$=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x S_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)=0$$

وهذا يطابق النتيجة:

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nt}{1+n^2t^2}-\frac{(n-1)t}{1+(n-1)^2t^2}\right]dt=0$$

أي أن

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nt}{1+n^2t^2}-\frac{(n-1)t}{1+(n-1)^2t^2}\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\left[\frac{nt}{1+n^2t^2}-\frac{(n-1)t}{1+(n-1)^2t^2}\right]dt$$

تعريف 9.7 : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ متسلسلة دالية متقاربة بانتظام من الدالة $S(x)$ على المجال $[a;b]$، ولتكن الدوال $u_n(x)$، حيث $n\in\mathbb{N}$، دوال فضولة على هذا المجال. إذا تحققت، على المجال $[a;b]$، العلاقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = S'(x)$$

فإننا نقول إنه يمكن اشتقاق حدود هذه المتسلسلة حداً حدا على هذا المجال.

مبرهنة 9.11 : (اشتقاق حدود المتسلسلة الدالية حداً حدا)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متسلسلة دالية متقاربة على المجال $[a;b]$ ومجموعها الدالة $S(x)$. وليكن للدوال $u_n(x)$، حيث $n \in \mathbb{N}$، مشتقات مستمرة على هذا المجال. ولتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$ ومجموعها الدالة $\sigma(x)$. عندئذ، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام على هذا المجال ومشتق مجموعها مساوياً لمجموع متسلسلة المشتقات، أي:

$$S'(x) = \sigma(x)$$

البرهان: ليكن $S_n(x)$ المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. عندئذ، تكون الدالة

$$S_n'(x) = \left[u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)\right]' = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x)$$

هي المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

من فرضيات المبرهنة المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة على المجال $[a;b]$، والمتتالية $\{S_n'(x)\}$ متقاربة بانتظام على هذا المجال، وعليه، فإن المتتالية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$ ومشتق نهاية هذه المتتالية هو نهاية متتالية المشتقات $\{S_n'(x)\}$ وفق المبرهنة 9.5. أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$ ومشتق مجموعها $S'(x)$

يساوي مجموع متسلسلة المشتقات $\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$.

ملحوظة 9.6 : لاشتقاق متسلسلة دالية متقاربة، حداً حدا عند نقطة ما، يكفي أن يكون تقارب متسلسلة مشتقات حدودها المستمرة، ليس على كل المجال $[a;b]$، وإنما على جوارٍ صغير للنقطة x.

مثال 9.15 : ادرس إمكانية اشتقاق حدود المتسلسلة التالية حداً حدا

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)x^n}{n}$$

الحل: وجدنا في المثال 9.12

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـ x

$$x\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

نشتق المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$ حداً حدا

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)}{n}x^n \qquad (*)$$

ندرس تقارب هذه المتسلسلة :

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)x^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}|x|=|x|$$

أي أن المتسلسلة (*) متقاربة بانتظام وبالإطلاق من أجل $|x| \le \alpha < 1$، وفق اختبار فايرشتراوس.

وعليه، فإن متسلسلة المشتقات (*) تتقارب ومجموعها يساوي مشتق مجموع المتسلسلة المعطاة:

$$\left[x\ln(1+x)\right]' = \frac{x}{x+1} + \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(n+1)}{n}x^n$$

ويكون هذا التقارب منتظماً من أجل $|x| \le \alpha < 1$.

ملحوظة 9.7 : إن شرط التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ على المجال $[a;b]$ هو شرط كافٍ وغير لازم كي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ فضولة حداً حدا على هذا المجال.

مثال 9.16 : ندرس متسلسلة الدوال المستمرة:

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln\left[1+(n-1)^2x^2\right]\right\}$$

إن الحد العام لمتتالية مجاميع هذه المتسلسلة

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \left[\frac{1}{4}\ln(1+2^2x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2\right] + \ldots +$$
$$+ \left\{\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln\left[1+(n-1)^2x^2\right]\right\}$$

نوجد نهاية هذه المتتالية:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty}(x) = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) = 0 \qquad ; \qquad x \in [0;1]$$

أي أن المتسلسلة المعطاة متقاربة على المجال $[0;1]$ ومجموعها $S(x) \equiv 0$. نوجد متسلسلة مشتقات حدود المتسلسلة المعطاة:

$$\frac{x}{x^2+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

وهذه الدالة المتقاربة من الدالة $g(x)\equiv 0$ على المجال $[0;1]$ ولكن هذا التقارب غير منتظم، المثال 9.10، مع أن $S'(x)=g(x)\equiv 0$ على المجال $[0;1]$.

9.3 متسلسلات القوى الصحيحة

9.3.1 مجال تقارب متسلسلة القوى

تعريف 9.8: نسمي متسلسلة قوى المتسلسلة الدالية من الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (9.13)$$

أو المتسلسلة من الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n (x-a)^n \qquad (9.14)$$

حيث a_n ، ... a,a_1,a_2 ثوابت حقيقية.

ونكتفي بدراسة المتسلسلات من الشكل (9.13)، لأنه يمكن رد المتسلسلات من الشكل (9.14) إلى المتسلسلات من الشكل (9.13) بفرض $x-a=y$.

كما هو واضح، فإن حدود متسلسلات القوى هي دوال مستمرة وقابلة للمفاضلة والمكاملة على $\mathbb{R}$.

إن متسلسلة القوى (9.13) متقاربة من أجل $x=0$، ومتسلسلة القوى (9.14) متقاربة من أجل $x=a$.

مبرهنة 9.12 : (مبرهنة آبل الأولى)

1. إذا كانت متسلسلة القوى (9.13) متقاربة من أجل قيمة معينة $x=x_0\neq 0$، فإنها تكون متقاربة بالإطلاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x|<|x_0|$.

2. إذا كانت المتسلسلة (9.13) متباعدة من أجل قيمة معينة $x = x_1$، فإنها تكون متباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| > |x_1|$.

البرهان:

1. لما كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ متقاربة، لأن x_0 نقطة تقارب للمتسلسلة (9.13)، فإن حدها العام يسعى إلى الصفر، أي $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

كما أن جميع حدود هذه المتسلسلة العددية محدودة، أي يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث

$$\left|a_n x_0^n\right| < M \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

نفرض أن x يحقق المتراجحة $|x| < |x_0|$، أي $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. عندئذٍ، يكون

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^{\,n}\right| \cdot q^n \le M \cdot q^n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

ولما كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ هندسية متقاربة، لأن $q < 1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ متقاربة، استناداً إلى اختبار المقارنة الأول، أي أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بالإطلاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < |x_0|$.

2. نفرض جدلاً، أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < |x_1|$، عندئذٍ، فإن هذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x = x_1 \neq 0$، وهذا يناقض الفرض. وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة، من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < |x_1|$.

نتيجة 9.2 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة عند النقطة $x = x_0 \neq 0$، فإن هذه المتسلسلة متقاربة بالإطلاق على المجال $]-|x_0|;|x_0|[$.

وإذا كانت هذه المتسلسلة متباعدة عند النقطة $x = x_1$، فإنها تكون متباعدة خارج المجال $]-|x_1|;|x_1|[$.

مبرهنة 9.13 : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة عند كل نقطة من نقاط مجموعة X، حيث $\{0\} \subset X \subset \mathbb{R}$، ومتباعدة على المجموعة $\mathbb{R} \setminus X$، فإنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً $R > 0$ بحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بالإطلاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < R$، ومتباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| > R$.

البرهان: لتكن $x_1 \in \mathbb{R} \setminus X$ نقطة تباعد للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. عندئذٍ، فإنه وفق مبرهنة آبل الأولى 9.12، تكون المتراجحة $|x| < |x_1|$ محققة، أياً تكن x من المجموعة X، لأنه لو كان $|x| > |x_1|$، لكانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة عند النقطة x من X.

وعليه، فإن المجموعة $Y = \{|x| \; ; \; x \in X\} \neq \phi$ محدودة من الأعلى، أي يوجد لها أصغر حد أعلى نرمز له بالرمز R، أي $R = \sup_{x \in X} Y$.

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة ليس فقط عند النقطة $x = 0$، فإن $R > 0$.

إذا كانت x نقطة اختيارية تحقق المتراجحة $|x| < R$، فإنه توجد نقطة x_0 من X، بحيث يكون $|x| < |x_0| \leq R$، وعليه فإنه، وفق مبرهنة آبل الأولى 9.12، تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{x} a_n x^n$ متقاربة بالإطلاق من أجل قيمة x المأخوذة اختيارياً بحيث يكون $|x| < R$.

وإذا كانت x نقطة اختيارية تحقق المتراجحة $|x| > R$، فإن $x \notin X$، لأنه لو كان $|x| \le \sup_{x \in X} Y = R$ وهذا غير صحيح، أي أن $x \in \mathbb{R} \setminus X$. وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متباعدة من أجل قيمة x المأخوذة اختيارياً، بحيث يكون $|x| > R$.

تعريف 9.9: نسمي العدد R المعرّف في المبرهنة 9.13 نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، ونسمي المجال $]-R;R[$ مجال تقارب هذه المتسلسلة.

يمكن أن يكون أحد أو كلا طرفي مجال التقارب مغلقاً، حسب طبيعة المتسلسلة عند القيمتين $x = \mp R$. لذا فإنه بعد إيجاد مجال التقارب يجب دراسة التقارب على طرفي مجال التقارب.

نلاحظ أن مجال تقارب متسلسلة القوى يمكن أن يكون كل المحور الحقيقي، أي $R = +\infty$، كما يمكن أن تكون المتسلسلة متقاربة عند نقطة وحيدة فقط، أي $R = 0$.

9.3.2 طرائق إيجاد نصف قطر التقارب

مبرهنة 9.14 : إذا وجدت النهاية $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$، فإن نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، حيث $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n \neq 0$، هو العدد

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

البرهان: نطبق اختبار دالامبير على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{R}$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ متقاربة إذا كان $\frac{|x|}{R} < 1$، أي $|x| < R$.

وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بالإطلاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < R$، أي على المجال $]-R; R[$. وبالمقابل، فإن هذه المتسلسلة متباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| > R$.

أي أن نصف قطر التقارب هو العدد

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (9.10)$$

مبرهنة 9.15 : إذا وجدت النهاية $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$، فإن نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، حيث $\forall n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \neq 0$، هو العدد

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (9.11)$$

البرهان: نطبق اختبار كوشي ـ الجذر النوني على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|} = |x| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{R}$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ متقاربة إذا كان $\frac{|x|}{R} < 1$، أي $|x| < R$.

وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بالإطلاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| < R$، أي على المجال $]-R; R[$. وبالمقابل، فإن هذه المتسلسلة متباعدة من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $|x| > R$. وعليه، فإن نصف قطر التقارب هو العدد

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

مثال 9.17 : أوجد مجال ونصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

الحل: واضح أن $a_n = 1/n$ ، وعليه، فإن:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{1}\right| = 1$$

أي أن المتسلسلة متقاربة على المجال $]-1;1[$.

ندرس التقارب على طرفي هذا المجال:

من أجل $x = 1$ نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي المتسلسلة التوافقية المتباعدة

من أجل $x = -1$ نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ وهي المتسلسلة التوافقية المتناوبة، وهي متقاربة شرطياً.

إذن، مجال التقارب $]-1;1]$.

مثال 9.18 : أوجد مجال ونصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n$.

الحل: واضح أن $a_n = n!$ ، وعليه، فإن

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

أي أن المتسلسلة متقاربة فقط عند النقطة $x = 0$.

مثال 9.19 : أوجد مجال ونصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

الحل: واضح أن $a_n = 1/n!$. وعليه، فإن:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

أي أن المتسلسلة متقاربة دوماً، أي على $\mathbb{R}$.

مثال 9.20 : أوجد مجال ونصف قطر تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^{2n}x^{2n}}{2n}$$

الحل: لما كانت قوى x زوجية، فإن معاملات قوى x ذوات الأسس الفردية معدومة، أي لا يمكن استخدام العلاقتين (9.10) و(9.11) لإيجاد نصف قطر التقارب R، نطبق اختبار الجذر النوني مباشرة:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{2n+2}x^{2n+2}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{3^{2n}x^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x^n|\frac{3^2\cdot 2n}{2n+2} = 9x^2$$

وعليه، فإن المتسلسلة تكون متقاربة من أجل $C = 9x^2 < 1$. أي على المجال $\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right[$.

ندرس التقارب على طرفي هذا المجال:

من أجل $x = \mp\frac{1}{3}$ ، نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

وهي المتسلسلة التوافقية المتناوبة وهي متقاربة شرطياً.

أي أن مجال تقارب المتسلسلة هو المجال $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ ونصف قطر التقارب $R = \frac{1}{3}$.

مثال 9.21 : أوجد مجال ونصف قطر تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{n}(2x-1)^n$$

الحل: نكتب المتسلسلة بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} \cdot 2^n}{n} (x-\frac{1}{2})^n$ ، أي أن

$$a_n = \frac{2^{\sqrt{n}+n}}{n}.$$

وعليه، فإن

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2^{(\sqrt{n}+n)/n}} = \frac{1}{2}$$

أي أن المتسلسلة تكون متقاربة من أجل $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$، أي على المجال $]0;1[$.

ندرس التقارب على طرفي المجال:

من أجل $x = 1$، نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$ وهي متباعدة، لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 2}{2} \cdot 2^{\sqrt{n}} = \infty$$

ومن أجل $x = 0$، نحصل على المتسلسلة العددية المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$ وهي متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$. أي أن مجال التقارب $]0;1[$.

9.3.3 خواص متسلسلات القوى

ليكن R_1 نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $S_1(x)$ مجموعها.

وليكن R_2 نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ و $S_2(x)$ مجموعها.

عندئذٍ، تكون السلسلتان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ متقاربتين على المجال $]-R;R[$، حيث $R = \min(R_1, R_2)$. وتكون كذلك المتسلسلات التالية متقاربة على هذا المجال:

1. $S_1(x) \mp S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n)x^n$

2. $S_1(x) \cdot S_2(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

3. $\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)}$

ملحوظة 9.8 : إن نصف قطر تقارب هذه المتسلسلات قد يكون أكبر من العددين R_1 و R_2. فمثلاً، إذا كانت لدينا السلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^n$ المتقاربتان من أجل $|x| < 1$، فإن متسلسلة المجموع

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

متقاربة دوماً.

مبرهنة 9.16 : (مبرهنة آبل الثانية)

تتقارب متسلسلة القوى بانتظام على أيّ مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها.

البرهان: ليكن R نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، وليكن $[a;b]$ مجالاً محتوى تماماً في مجال التقارب $]-R;R[$. وليكن $r = \max\{|a|,|b|\}$، أي أن $r < R$ و $[a;b] \subseteq [-r;r]$.

لما كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة عند النقطة $x = r$، فإن المتسلسلة العددية

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ ذات حدود موجبة ومتقاربة.

ولما كان $|x| \le r$، فإن:

$$|a_n x^n| = |a_n||x^n| \le |a_n| r^n \qquad , \quad n = 0,1,2,...$$

وعليه، فإنه، وفق اختبار فايرشترواس تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بانتظام على المجال $[-r;r]$ ومنه تكون متقاربة بانتظام على المجال $[a;b]$.

ملحوظة 9.9 : على الرغم من أنه لا يمكن اختيار r قريباً بشكلٍ كاف من العدد R، فإن متسلسلة القوى متقاربة بانتظام على المجال $[-r;r]$ ولكنها ليست بالضرورة متقاربة بانتظام في كل المجال $]-R;R[$. أما إذا كان مجال التقارب مغلقاً $[-R;R]$، فإن المتسلسلة تكون متقاربة بانتظام عليه.

مبرهنة 9.17 : إن مجموع متسلسلة القوى هو دالة مستمرة على كل مجال جزئي مغلق من مجال تقاربها.

البرهان: لما كانت متسلسلة القوى متقاربة بانتظام على كل مجال جزئي مغلق من مجال تقاربها، وكل حد من حدودها دالة مستمرة على هذا المجال، فإن مجموع المتسلسلة هو دالة مستمرة على هذا المجال، استناداً إلى المبرهنة 9.9.

تسمح هذه المبرهنة بالحديث عن اشتقاق أو تكامل متسلسلة القوى.

مبرهنة 9.18 : يمكن مكاملة أو اشتقاق متسلسلة القوى حداً حدا على كل مجال جزئي مغلق من مجال تقاربها.

ينتج برهان هذه المبرهنة مباشرة من المبرهنتين 9.10 و 9.11.

مبرهنة 9.19 : إن لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ومتسلسلة مشتقاتها $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ومتسلسلة تكاملاتها $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ نصف قطر التقارب نفسه.

ملحوظة 9.10 : يمكن أن تختلف مجالات تقارب المتسلسلات الثلاث السابقة فقط عند أطرافها. فمثلاً، للمتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ نصف قطر التقارب نفسه $R = 1$ ، أي أن هذه المتسلسلات متقاربة من أجل $|x| < 1$.

من أجل $x = 1$ نجد:

المتسلسلة الأولى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة، والمتسلسلة الثانية $\sum_{n=1}^{\infty} 1^{n-1}$ متباعدة، والمتسلسلة الثالثة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة.

ومن أجل $x = -1$ نجد:

المتسلسلة الأولى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة شرطياً، والمتسلسلة الثانية $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ متباعدة، والمتسلسلة الثالثة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ متقاربة بالإطلاق.

وعليه، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ متقاربة على المجال $]-1;1]$.

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ متقاربة على المجال $]-1;1[$.

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ متقاربة على المجال $[-1;1]$.

مثال 9.22: أوجد مجموع المتسلسلة $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

الحل: نعلم أن مجموع المتسلسلة الهندسية هو الدالة $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ وذلك على المجال $]-1;1[$.

نكامل حدود هذه المتسلسلة حداً حدا على المجال $]-1;1[$:

$$\int_0^x s(t)\,dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

أي أن:

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=f(x)$$

مبرهنة 9.20 : إذا كان لمتسلسلتي القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ المجموع نفسه في أحد المجالات $[-R;R]$ أو $[0;R]$ أو $[-R;0]$، حيث $R>0$، فإن:

$$a_n=b_n \qquad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

9.3.4 متسلسلات القوى الصحيحة ذوات الأسس السالبه

هي المتسلسلات من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{-n}$ أو من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{-n}$ يمكن رد هذه المتسلسلات إلى متسلسلات ذوات أسس موجبة بفرض $x=\frac{1}{y}$ أو $x-a=\frac{1}{y}$ فنحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n$ وتدرس هذه المتسلسلة كما فعلنا ذلك سابقاً.

فإذا طبقنا اختبار دالامبير نجد:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(y)}{f_{n+1}(y)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|y|=R|y|$$

ومنه، فإن المتسلسلة متقاربة من أجل $D=R|y|<1$ ، أي $|y|<\frac{1}{R}$. وعليه، فإن $\frac{1}{|x|}=|y|$. منطقة تقارب المتسلسلة $|x|>R$. وبالمقابل فإن مجال التباعد $|x|<R$.

مثال 9.23 : أوجد منطقة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n\ln(n+2)}$.

الحل: نطبق اختبار دالامبير:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x^{n+1}\ln(n+3)}\cdot\frac{x^n\ln(n+2)}{1}\right|=\frac{1}{|x|}$$

ومنه، فإن المتسلسلة متقاربة من أجل $D=\frac{1}{|x|}<1$ ، أي $|x|>1$.

من أجل $x=-1$ نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$ وهي متسلسلة متباعدة، بالمقارنة مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$.

من أجل $x=1$ نحصل على المتسلسلة العددية المتناوبة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ وهي متقاربة شرطياً، لأن متسلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة، ووفق اختبار ليبنتز نجد

الحد العام يسعى إلى الصفر $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}=0$ ، والمتتالية $\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\right\}$ متناقصة، لأن المتتالية $\{\ln(n+2)\}$ متزايدة.

وعليه، فإن منطقة تقارب المتسلسلة : $]-\infty;-1[\cup[1;\infty[$ ومجال التباعد $]-1;1[$.

9.4 نشر الدوال في متسلسلات تايلور وماكلوران

9.4.1 مفاهيم أساسية

وجدنا أن مجموع أي متسلسلة قوى متقاربة هو دالة معرفة ومستمرة على مجال تقاربها. ويظهر هنا سؤالان مرتبطان بسلاسل القوى، الأول، مسألة إيجاد دالة مجموع هذه المتسلسلة ضمن مجال تقاربها. والثاني، مسألة إيجاد متسلسلة قوى متقاربة، يكون مجموعها هو دالة مفروضة، وتسمى هذه المسألة مسألة نشر أو فك الدالة وفق متسلسلة قوى.

وكان نيوتن أول من استخدم المنشور $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$، من أجل $|x|<1$، في إيجاد تكامل دوال لا يمكن التعبير عن دالتها الأصلية بدلالة مجموع منتهٍ لدوال أولية. وقد حسب ذلك المنشور بتقسيم البسط على المقام.

مبرهنة 9.21 : لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق باستمرار حتى المرتبة $(n+1)$، ضمناً، على المجال $[a;b]$. ولتكن x_0 نقطة داخلية من هذا المجال. عندئذٍ، تكون صيغة تايلور التالية صحيحة، أياً تكن x من هذا المجال:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad (9.12)$$

حيث إن الحد الباقي $R_n(x)$ يُعطى بالعلاقة:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} \qquad (9.13)$$

و ξ نقطة تقع بين x و x_0.

البرهان: واضح أن المبرهنة صحيحة إذا كان $x = x_0$. لذا، سنفرض أن $x \neq x_0$.

نفرض أن الحد الباقي $R_n(x)$ مُعرّف بالعلاقة (9.12) نستنتج صحة العلاقة (9.13).

نثبّت x و x_0 ونفرض متحولاً جديداً y ونعرّف الدالة

$$g(y) = f(y) + \frac{f'(y)}{1!}(x-y) + \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + (x-y)^{n+1}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \qquad (9.14)$$

واضح من تعريف الدالة $g(y)$ أنها مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال الواقع بين النقطتين x و x_0. إذا فرضنا $y = x$، فإننا نجد

$$g(x) = f(x) \qquad (9.15)$$

و إذا فرضنا $y = x_0$، فإننا نجد

$$g(x_0) = f(x) \qquad (9.16)$$

واستناداً إلى مبرهنة رول وإلى العلاقتين (9.15) و (9.16)، يمكن إيجاد عدد ξ يقع بين النقطتين x و x_0، بحيث يكون

$$g'(\xi) = 0 \qquad (9.17)$$

نشتق طرفي (9.14) بالنسبة إلى y:

$$g'(y) = f'(y) - f'(y) + \frac{f''(y)}{1!}(x-y) - \frac{f''(y)}{1!}(x-y) + \frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 -$$

$$- \frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - (n+1)(x-y)^n\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

أي أن

$$g'(y) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - (n+1)(x-y)^n\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

وعليه، فإن المساواة (9.17) تكتب بالشكل:

$$(x-\xi)^n\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1)(x-\xi)^n\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

ولما كان $x \neq \xi$، فإن $R_n(x) = (x-x_0)^{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

تسمى الصيغة (9.13) للحد الباقي، صيغة لاغرانج.

إذا رمزنا $\theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}$، أي $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$، حيث $0 < \theta < 1$، فإن صيغة لاغرانج تكتب بالشكل

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n+1)!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}$$

وتسمى صيغة كوشي للحد الباقي.

نسمي العلاقة (9.12) صيغة تايلور في النشر المنتهي للدالة $f(x)$ على جوار للنقطة x_0، أو حول x_0 أو وفق قوى $(x - x_0)$.

في الحالة الخاصة، $x_0 = 0$ نحصل على صيغة ماكلوران للدالة $f(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(1-\theta)^n x^{n+1} \quad ; \quad (0 < \theta < 1)$$

9.4.2 متسلسلات تايلور وماكلوران

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق باستمرار عدداً غير منتهٍ من المرات على مجالٍ I يحوي النقطة x داخلة، فإنه يمكن كتابة صيغة تايلور لهذه الدالة، أياً يكن العدد الطبيعي n.

تُسمى المتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \quad (9.18)$$

متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ على جوار للنقطة x_0، أو حول x_0، وفق قوى $(x - x_0)$.

ونكتب

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

وفي الحالة الخاصة $x_0 = 0$، تُسمى المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

متسلسلة ماكلوران للدالة $f(x)$ على جوار للنقطة $x_0 = 0$، أو وفق قوى x. ونكتب

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

تعريف 9.9 : إذا كانت الدالة $f(x)$ تساوي مجموع متسلسلة تايلور الموافقة لها في مجالٍ I يحوي النقطة x_0 داخلة، أو على جوار للنقطة x_0. أي إذا كان

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{n!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^2 + \dots \quad ; \quad x \in I$$

فإننا نقول إن الدالة $f(x)$ نُشرت وفق متسلسلة تايلور على المجال I، أو على جوارٍ للنقطة x_0، أو وفق قوى $(x - x_0)$. وتُسمى هذه المتسلسلة منشور الدالة $f(x)$ على المجال I أو على جوارٍ للنقطة x_0، أو وفق قوى $(x - x_0)$.

وفي الحالة الخاصة، إذا كان $x_0 = 0$، فإننا نحصل على نشر ماكلوران للدالة $f(x)$ على جوار الصفر أو وفق قوى x.

مبرهنة 9.22 : الشرط اللازم والكافي كي تكون متسلسلة تايلور (9.18) للدالة $f(x)$ على جوارٍ I، للنقطة x_0، متقاربة ومجموعها يساوي الدالة $f(x)$ في هذا الجوار، هو أن يكون

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \quad ; \quad x \in I \qquad (9.19)$$

البرهان:

لزوم الشرط: نفرض أن المتسلسلة تايلور (9.18) متقاربة في الجوار I للنقطة x_0، ومجموعها يساوي الدالة $f(x)$، وليكن $S_n(x)$ المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة، أي

$$S(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{n!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad ; x \in I$$

عندئذٍ يكون:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

نعوض قيمة $S_n(x)$ في العلاقة (9.12)، فنجد

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in I$$

كفاية الشرط:

نفرض أن (9.19) محققة. يكون عندئذ

$$\lim_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = 0$$

أي أن

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

وهذا يعني أن متسلسلة تايلور (9.18) متقاربة ومجموعها يساوي الدالة $f(x)$.

ملحوظة 9.11 : إن تقدير الحد الباقي $R_n(x)$ هو تقدير للخطأ المرتكب عند استبدال الدالة $f(x)$ بالمجموع الجزئي النوني لمتسلسلة تايلور الموافقة لها. لذا، فإن حساب الحد الباقي $R_n(x)$ له أهمية خاصة في حساب القيم التقريبية للدالة $f(x)$.

ملحوظة 9.12 : إن باقي تايلور للدالة $f(x)$، في العلاقة (9.12)، ليس بالضرورة أن يكون هو باقي متسلسلة تايلور (9.18) للدالة $f(x)$ نفسها. أي أن تقارب متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ لا يكفي حتى يكون مجموع هذه المتسلسلة هو الدالة $f(x)$، وإنما يجب التحقق من صحة (9.19).

نورد فيما يلي مثالاً على متسلسلة تايلور لدالة وهذه المتسلسلة متقاربة، ولكن مجموع هذه المتسلسلة لا يساوي الدالة نفسها.

مثال 9.24 : لدينا الدالة

$$f(x)=\begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x^2} & ;\ x\neq 0 \\ 0 & ;\ x=0 \end{cases} \qquad (*)$$

حيث $P\left(\frac{1}{x}\right)$ حدودية في $\frac{1}{x}$.

واضح أنه إذا كان $x\neq 0$ و $\frac{1}{x}$ ليس جذراً للحدودية P، فإن $f(x)\neq 0$ وعليه، فإن الدالة $f(x)$ لا تطابق الصفر من أجل جميع قيم x المحققة للعلاقة $x\neq 0$.

ونلاحظ أن الدالة $f(x)$ مستمرة من أجل $x\neq 0$. وكي نتحقق من أنها مستمرة عند النقطة $x=0$، نفرض $y=1/x$، فنجد $f(x)=P(y)e^{-y^2}$. وباستخدام قاعدة اوبيتال عدداً مناسباً من المرات، نجد

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{P(y)}{e^{y^2}}=0=f(0)$$

أي أن الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x=0$. وعليه فإن $f(x)$ مستمرة في $\mathbb{R}$.

نوجد، الآن، مشتق الدالة $f(x)$:

من أجل $x\neq 0$ يكون:

$$f'(x)=P'\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-1/x^2}+P\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right)=Q\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x^2} \qquad (**)$$

حيث:

$$Q\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}P'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}P\left(\frac{1}{x}\right)$$

أي أن $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ حدودية في $\left(\frac{1}{x}\right)$.

ومن أجل $x=0$ نستخدم صيغة لاغرانج، لأن الدالة $f(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$، وقابلة للمفاضلة من أجل $x\neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\theta x) \quad ; \quad 0<\theta<1$$

نأخذ نهاية الطرفين، عندما تسعى x إلى الصفر من اليمين أو من اليسار، فإننا نجد

$$f'(0)=\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0} f'(\theta x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x^2}=0$$

من هذه العلاقة ومن العلاقة (**)، نجد مشتق الدالة $f(x)$:

$$f'(x)=\begin{cases} Q\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x^2} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

أي أن مشتق الدالة $f(x)$ موجود وله نفس الشكل (*). وهكذا يمكن اشتقاق الدالة $f'(x)$ عدداً غير منتهياً من المرات. ولجميع المشتقات الشكل نفسه، أي من الشكل (*). ويكون:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=0$$

وعليه، فإن صيغة تايلور (9.12) للدالة $f(x)$ عند النقطة $x_0=0$، هي

$$S_n(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+\ldots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0 \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

ومنه، فإن:

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x)=f(x)$$

مما يعني أن الحد الباقي $R_n(x)$ لا يسعى إلى الصفر، عندما $n\to\infty$.

وعليه، فإن متسلسلة تايلور (9.18) للدالة $f(x)$ على جوار الصفر، أي متسلسلة ماكلوران لهذه الدالة، متقاربة ومجموعها يطابق الصفر، أي لا يساوي الدالة $f(x)$.

ينتج من هذا المثال، أنه ليس بالضرورة أن تكون كل دالة قابلة للنشر وفق متسلسلة تايلور.

مبرهنة 9.23 : ليكن

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (9.20)$$

حيث إن المتسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة في مجال معين $[x_0-R;x_0+R]$ ومجموعها الدالة $f(x)$ على هذا المجال. عندئذٍ، فإن هذه المتسلسلة هي متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ على جوار النقطة x_0، أي

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (9.21)$$

البرهان: يمكن اشتقاق حدود المتسلسلة (9.20) حداً حداً، استناداً إلى المبرهنة 9.11:

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\frac{(n+1)}{1!}a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\ldots$$

إذا وضعنا في هذه العلاقة $x=x_0$، نجد $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$.

وهكذا، نجد صحة (9.21).

ملحوظة 9.13 : ينتج من هذه المبرهنة أن الدالة $f(x)$ الواردة في المثال 9.24 لا يمكن أن تكتب على شكل مجموع متسلسلة قوى بجوار الصفر، ولا يمكن كتابتها على شكل مجموع متسلسلة ماكلوران الموافقة لها.

نتيجة 9.3 : إذا أمكن نشر دالة وفق متسلسلتي قوى بجوار نقطة x_0:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n+\ldots$$

فإن هاتين المتسلسلتين هما متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ على جوار النقطة x_0، أي أنهما متطابقتان

$$a_n=b_n \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

تعطي المبرهنة التالية اختباراً أسهل لنشر دالة وفق متسلسلة تايلور.

مبرهنة 9.24 : لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على جوار $u_\delta(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$. لنفرض أن جميع هذه المشتقات محدودة على هذا الجوار، أي يوجد عدد حقيقي موجب M ، بحيث

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M \qquad ; \qquad \forall x \in u_\delta(x_\circ)\ ,\ \ n = 0,1,2,...$$

عندئذٍ، يمكن نشر الدالة $f(x)$ على جوار النقطة $x_\circ$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n = f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)}{1!}(x - x_\circ) + ...$$

البرهان: من فرضيات المبرهنة، نجد أنه أياً يكن x من الجوار $u_\delta(x_\circ)$ للنقطة $x_\circ$، يكون

$$\left|R_n(x)\right| = \left|(x - x_\circ)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}\right| \le M \frac{\left|x - x_\circ\right|^{n+1}}{(n+1)}$$

ولما كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{\left|x - x_\circ\right|^{n+1}}{(n+1)!}$ متقاربة، يمكن بسهولة التحقق من ذلك باستخدام اختبار دالامبير، فإن حدها العام يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

وعليه، فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right| \le \lim_{n\to\infty} M \frac{\left|x - x_\circ\right|}{(n+1)} = 0$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. وهكذا، فإنه يمكن نشر الدالة $f(x)$ على جوار للنقطة $x_\circ$. استناداً إلى المبرهنة 9.22.

مثال 9.25 : انشر، وفق تايلور، الدالة $f(x) = \sin x$ على جوار للنقطة $x_\circ = \frac{1}{4}\pi$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على $\mathbb{R}$.

لما كان

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi n) \qquad ; \qquad n \in \mathbb{N}$$

وكانت جميع هذه المشتقات محدودة:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin(x + \tfrac{1}{2}\pi n)\right| \le 1 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

فإن نشر الدالة $f(x)$ وفق قوى $(x - \frac{1}{4}\pi)$، يعطى بالعلاقة

$$f(x) = \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)}{1!} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^2}{2!} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^4}{4!} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)}{1!} - \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^2}{2!} + \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^4}{4!} - \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^n}{n!}$$

ندرس تقارب متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$:

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(x-\frac{1}{4}\pi)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-\frac{1}{4}\pi)}{(n+1)}\right| = 0$$

أي أن متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ متقاربة دوماً.

9.4.3 نشر الدوال الأولية وفق متسلسلة تايلور ومتسلسلة ماكلوران

أولاً: نشر الدالة e^x وفق متسلسلة ماكلوران، أي على جوار الصفر.

الدالة e^x معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على $\mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

نعوض وفق متسلسلة ماكلوران

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad ; \quad 0<\theta<1$$

وأياً يكن x فإن

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\le \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{x}=e^{x}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

وعليه، فإن

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

تطبيق: إذا عوضنا وفق متسلسلة ماكلوران للدالة e^x القيمة $x=1$، نجد

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\approx 2.71828\cdots$$

وعليه، يمكن حساب قيمة العدد e بأي دقة نشاء، وفقاً لاختيار n.

وعموماً، يمكن الاستفادة من منشور الدالة e^x وفق ماكلوران، لنشر الدالة $e^{(\alpha x^{\gamma}+\beta)}$

والدالة a^x، وفق ماكلوران:

$$e^{(\alpha x^{\gamma}+\beta)}=e^{\beta}\cdot e^{\alpha x^{\gamma}}=e^{\beta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha x^{\gamma})^n}{n!}=e^{\beta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}x^{2\gamma} \quad ; \quad \forall x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ 1\neq a>0$$

كما يمكن الاستفادة من هذا النشر في نشر الدالة e^x وفق تايلور.

مثال 9.26 : انشر الدالة e^x على جوار للنقطة $x_0=-1$.

الحل: بالاستفادة من منشور ماكلوران للدالة e^x، نجد

$$e^x = e^{-1}\cdot e^{x+1} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!} \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ثانياً: نشر الدالتين القطعيتين shx و chx، وفق ماكلوران:

لما كان $\text{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ و $\text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$، فإن

$$\text{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

تطبيق: انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x) = \text{ch}(\alpha x + \beta)$.

$$\text{ch}(\alpha x + \beta) = \text{ch}\alpha x\cdot\text{ch}\beta + \text{sh}\alpha x\cdot\text{sh}\beta =$$

$$= \text{ch}\beta\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha x)^{2n}}{(2n)!} + \text{sh}\beta\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \forall x\in\mathbb{R}$$

ثالثاً: نشر الدالتين المثلثيتين $\sin x$ و $\cos x$، وفق ماكلوران:

الدالة $\sin x$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على $\mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

وكانت جميع هذه المشتقات محدودة:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin(x + \tfrac{1}{2}\pi n)\right| \le 1 \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

وكان

$$f^{(2k+1)}(0) = \sin[\tfrac{1}{2}\pi(2k+1)] = (-1)^k \ , f^{(2k)}(0) = \sin(\pi k) = 0 \quad ; \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

فإن

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

وباسلوبٍ مماثل، نجد

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

تطبيق: يمكن حساب النسب المثلثية لزوايا صغيرة مقدرة بالراديان، باستخدام متسلسلات ماكلوران لهذه النسب. فمثلاً، لحساب $\cos 10^\circ$، نعوض وفق متسلسلة ماكلوران للدالة $\cos x$، القيمة $x = 10(\frac{1}{180}\pi) = \frac{1}{18}\pi$:

$$\cos\frac{1}{18}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{18}\pi)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\pi^2}{(18)^2 2!} + \frac{\pi^4}{(18)^4 4!} - \ldots = 0.985$$

يمكن بالاستفادة من منشور ماكلوران للدالتين $\sin x$ و $\cos x$، استنتاج صيغة اولر والشكل الأسي لهذه الدوال:

يمكن تعميم نشر الدالة الحقيقية e^x في حالة كون الأس متحولاً عقدياً، أي

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

وعليه، إذا كان $z = ix$، فإن

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots =$$

$$= (1 + -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots) + i(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + -\frac{x^5}{5!} - \ldots)$$

وبالمقارنة مع متسلسلتي ماكلوران للدالتين $\sin x$ و $\cos x$، نجد

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

تسمى هذه العلاقة علاقة اولر.

وباسلوبٍ مماثل، نجد

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

وعليه، فإن

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad , \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

مثال 9.27 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

الحل: لما كان $\sqrt{1+\sin x} = \cos\frac{1}{2}x + \sin\frac{1}{2}x$، فإن

$$\sqrt{1+\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

مثال 9.28: انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x) = \cos^2 x$.

الحل: لما كان $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$، فإن

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

مثال 9.29 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x) = e^x \cos x$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على $\mathbb{R}$، ولما كانت الدالتان e^x و $\cos x$ قابلتين للنشر على $\mathbb{R}$، فإن الدالة $f(x)$ قابلة للنشر على $\mathbb{R}$، أيضاً.

بالاستفادة من علاقة اولر، يمكن كتابة الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x) = e^x \cos x = e^x \cdot \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}[e^{(i+1)x} + e^{(-i+1)x}]$$

وعليه، فإن

$$f(x) = e^x \cos x = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(i+1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-i+1)^n \frac{x^n}{n!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(i+1)^n + (-i+1)^n\right]\frac{x^n}{n!}$$

ولما كان

$$i+1 = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} \Rightarrow \quad (i+1)^n = 2^{\frac{1}{2}n}e^{i\frac{1}{4}\pi n}$$
$$-i+1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{1}{4}\pi} \Rightarrow \quad (-i+1)^n = 2^{\frac{1}{2}n}e^{-i\frac{1}{4}\pi n}$$

فإن

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2^{\frac{1}{2}n}(e^{i\frac{1}{4}\pi n} + e^{-i\frac{1}{4}\pi n})\right]\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{i\frac{1}{4}\pi n} + e^{-i\frac{1}{4}\pi n})2^{\frac{1}{2}n}\frac{x^n}{n!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{1}{2}n}\frac{x^n}{n!}\cos\frac{1}{4}n\pi$$

رابعاً: نشر ثنائي الحد $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ، وفق ماكلوران.

إذا كان $\alpha > 0$ ، فإن هذه الدالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على $\mathbb{R}$. أما إذا كان $\alpha < 0$ ، فإن هذه الدالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهياً من المرات على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. لما كان

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

وتسمى المتسلسلة اللانهائية المقابلة متسلسلة ثنائي الحد، وهي من الشكل:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad (9.22)$$

إذا كان α عدداً طبيعياً محدداً، فإننا نحصل على دستور الكرخي - نيوتن:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\alpha}C_n^{\alpha}x^n$$

لذا سنفرض أن α عدد غير طبيعي و $x \neq 0$، أي أن جميع حدود المتسلسلة (9.22) غير صفرية.

ندرس تقارب المتسلسلة (9.22) وفق اختبار دالامبير، حيث

$$f_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}\right| =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{\alpha-n+1}\right| = |x|$$

أي أن المتسلسلة (9.22) متقاربة بالإطلاق، من أجل $D = |x| < 1$ ومتباعدة، من أجل $|x| > 1$.

نثبت أن مجموع المتسلسلة هو الدالة $(1+x)^\alpha$ على المجال $]-1;1[$. ندرس لذلك الحد الباقي:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1} \quad ; \quad 0<\theta<1$$

نرمز بـ

$$a_n(x) = \frac{(\alpha-1)[(\alpha-1)-1]\dots[(\alpha-1)-n+1]}{(n+1)!}x^n$$

$$c_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \quad , \quad b_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$$

أي أن

$$R_n(x) = a_n(x)\cdot b_n(x)\cdot c_n(x) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

إن الحد $a_n(x)$ هو الحد العام للمتسلسلة المقابلة لثنائي الحد $(1+x)^{\alpha-1}$، وهذه المتسلسلة متقاربة كما برهنا سابقاً. وعليه، فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0$$

ولما كان

$$1-|x|<1-\theta|x|\le 1+\theta x\le 1+\theta|x|<1+|x| \qquad ; \qquad x\in\,]-1;1[$$

فإن المقدار $b_n(x)$ محصور بين العددين $|\alpha x|\cdot(1+|x|)^{\alpha-1}$ و $|\alpha x|\cdot(1-|x|)^{\alpha-1}$، وهما غير متعلقين بالعدد الطبيعي n. أي أن المتتالية $\{b_n(x)\}$ محدودة على المجال $]-1;1[$. كذلك، فإن المتتالية $\{c_n(x)\}$ محدودة، لأن

$$|c_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\le\left(\frac{1-\theta}{1+\theta|x|}\right)<1 \qquad ; \qquad n\in\mathbb{N}\,,\ x\in\,]-1;1[$$

وهكذا، فإن

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

إذن،

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

إن تقارب المتسلسلة في النقطتين $x=\pm 1$، بحاجة لدراسة خاصة.

يمكن التحقق أنه، من أجل $x=1$، تكون هذه المتسلسلة متقاربة، عندما يكون $\alpha>-1$، ومتباعدة عندما يكون $\alpha\le -1$. ومن أجل $x=-1$ تكون هذه المتسلسلة متقاربة بالإطلاق، عندما يكون $\alpha\ge 0$، ومتباعدة عندما يكون $\alpha<0$.

عموماً، يمكن نشر ثنائي الحد $(a+bx)^{\alpha}$، استناداً إلى هذا الدستور:

$$(a+bx)^{\alpha}=a^{\alpha}(1+\tfrac{b}{a}x)^{\alpha}=a^{\alpha}+a^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}(\tfrac{b}{a})^n x^n$$

حيث

$$\left|\frac{b}{a}x\right|<1 \quad\Rightarrow\quad |x|<\left|\frac{a}{b}\right|$$

مثال 9.30 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$.

الحل: بالمقارنة مع ثنائي الحد، نجد $\alpha=\frac{1}{2}$. وعليه، فإن

$$\sqrt{1+x}=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2\cdot 4}x^2+\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+... \qquad ; \qquad |x|<1$$

مثال 9.31 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x)=1/\sqrt[3]{1+x}$.

الحل: بالمقارنة مع ثنائي الحد، نجد $\alpha=-\frac{1}{3}$. وعليه، فإن

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{4}{2!3^2}x^2-\frac{4\cdot7}{3\cdot3^3}x^3+\ldots \quad ; \quad |x|<1$$

تطبيق: يمكن، بالاستفادة من منشور ثنائي الحد، إيجاد جذور الأعداد الصحيحة من المرتبة α، فإذا كان A عدداً صحيحاً، فإنه يمكن دوماً إيجاد العدد الصحيح a، بحيث يكون: $A=a^{\alpha}+b$، حيث $|b|<a^{\alpha}$، أي $\left|\frac{b}{a^{\alpha}}\right|<1$. وعليه، فإن

$$A^{\frac{1}{\alpha}}=(a^{\alpha}+b)^{\frac{1}{\alpha}}=a(1+\frac{b}{a^{\alpha}})^{\frac{1}{\alpha}}=a(1+x)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ; \quad x=\frac{b}{a^{\alpha}}$$

نعوض وفق متسلسلة ثنائي الحد، فنحصل على قيمة تقريبية للجذر $A^{\frac{1}{\alpha}}$.

مثال 9.32: أوجد قيمة تقريبية للجذر $\sqrt[8]{267}$.

الحل: نكتب العدد A كما يلي:

$$A=267=256+11=2^8+11=2^8(1+\frac{11}{256})$$

بالمقارنة مع ثنائي الحد، حيث $x=\frac{11}{256}$ و $\alpha=\frac{1}{8}$، نجد

$$\sqrt[8]{267}=2^8+11=2(1+\frac{11}{256})^{\frac{1}{8}}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{8}(\frac{11}{256})-\frac{7}{8^2}(\frac{11}{256})^2+\frac{7\cdot15}{8^3}(\frac{11}{256})^3-\ldots\right]\approx 2.011$$

ويمكن الحصول على دقة أكبر، باختيار قيمة أكبر للعدد الطبيعي n.

خامساً: نشر الدالة $f(x)=\ln(1+x)$، وفق ماكلوران.

الدالة $\ln(1+x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $x>-1$:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

نعوض في متسلسلات ماكلوران:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}x^n+R_n(x)$$

حيث إن الحد الباقي $R_n(x)$ يكتب بالشكل

$$R_n(x) = (-1)^n (1+\theta x)^{-n-1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

إذا كان $0 \le x \le 1$، فإن $0 \le \frac{1}{1+\theta x} \le 1$، وعليه، فإن:

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

وإذا كان $-1 < x < 0$، فإن صيغة كوشي للحد الباقي:

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}$$

لما كان $\theta|x| < \theta$، فإن $1-\theta|x| > 1-\theta$. وعليه، فإن:

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$$

ولما كان $\theta|x| < |x|$، فإن $1-\theta|x| > 1-|x|$. وعليه، فإن:

$$0 < \frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|}$$

وهكذا، يكون

$$R_n(x)| = \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \frac{1}{|1+\theta x|} |x|^{n+1} \le \frac{|x|}{1-|x|}^{n+1} \quad ; \quad -1 < x < 0$$

ولما كان $|x| < 1$، فإن:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in]-1;0[$$

هكذا، يكون

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad ; \quad x\in]-1;1]$$

من أجل $x=-1$، نحصل على المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي المتسلسلة التوافقية المتباعدة.

كذلك، من أجل $|x|>1$، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ متباعدة، لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر، عندما $n\to\infty$،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}=\infty$$

تطبيق 1:

إذا عوضنا في متسلسلات ماكلوران للدالة $\ln(1+x)$، القيمة $x=1$، نجد:

$$\ln(1+1)=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

تطبيق 2:

إذا فرضنا أن $p,q\in\mathbb{N}$، فإن $\left|\frac{p-q}{p+q}\right|<1$. ولما كان

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1-x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad ; \quad |x|<1 \qquad (*)$$

فإنه، بتعويض $x=\frac{p-q}{p+q}$، نجد:

$$\ln\frac{p}{q}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{p-q}{p-q}\right)^{2n+1}$$

وتفيد هذه الصيغة في حساب اللوغاريتمات الطبيعية.

فمثلاً، إذا كان $p=2$ و $q=1$، فإننا نجد:

$$\ln\frac{p}{q}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

ومن ثم إذا فرضنا $p=3$ و $q=2$، نجد:

$$\ln 3=\ln 2+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}$$

وإذا فرضنا $x=\dfrac{1}{2k+1}$، أي $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{k+1}{k}$، فإنه، بالتعويض في (*)، نجد:

$$\ln(k+1)=\ln k+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^{2n+1}$$

فمثلاً،

$$\ln 5=2\ln 2+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{2n+1}$$

وهكذا، يمكن إيجاد اللوغاريتمات.

مثال 9.33 : انشر وفق ماكلوران الدالة $f(x)=arcthx$.

الحل: نستخدم الشكل اللوغاريتمي لهذه الدالة:

$$f(x)=arcthx=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\tfrac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$$

وعليه، فإن

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\quad;\quad |x|<1$$

مثال 9.34 : انشر، وفق تايلور، الدالة $f(x)=\ln x$ على جوار النقطة $x_0=2$.

الحل: نكتب الدالة $f(x)$ كما يلي.

$$f(x)=\ln x=\ln(x+2-2)=\ln\left[2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left[1+\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]$$

وبالاستفادة من منشور الدالة $\ln(1+x)$ ، وفق ماكلوران، نجد:

$$f(x)=\ln x=\ln 2+\ln\left[1+\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

حيث $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$.

أي أن النشر صحيح على المجال $]0;4[$. ويمكن التحقق أن هذا النشر صحيح عند النقطة $x=4$.

9.4.4 طرائق أخرى في النشر

1. النشر باستخدام المتسلسلات الهندسية

نعلم أن المتسلسلات الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ متقاربة ومجموعها هو الدالة $\frac{1}{1-x}$ ، ضمن المجال $]-1;1[$ ، أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\qquad;\qquad |x|<1$$

ويمكن استخدام هذه المتسلسلات في نشر الدوال الكسرية الجبرية العادية.

مثال 9.35 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x)=\frac{x+2}{1-x^2}$.

الحل: نكتب الدالة كما يلي

$$f(x)=(x+2)\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

وهي معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق باستمرار عدداً غير منتهٍ من المرات على جوارٍ للصفر.
نقارن هذه الدالة مع مجموع المتسلسلات الهندسية:

$$f(x)=(x+2)\cdot\frac{1}{1-x^2}=(x+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=(x+2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

وهذا النشر صحيح من أجل $|x^2|<1$، أي على المجال $]-1;1[$.

مثال 9.36 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة

$$f(x)=\frac{3x+1}{(x-1)(x+2)(3-x)}$$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق باستمرار عدداً غير منتهٍ من المرات على جوار الصفر. نفرق الكسر كما يلي:

$$f(x)=\frac{3x+1}{(x-1)(x+2)(3-x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3-x}=\frac{2/3}{x-1}+\frac{1/3}{x+2}+\frac{1}{3-x}$$

نقارن هذه الكسور البسيطة مع مجموع المتسلسلات الهندسية، فنجد:

$$f(x)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+x/2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3}=$$

$$=-\tfrac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\tfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^n+\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}x\right)^n$$

وهذا النشر صحيح من أجل $|x|<1$ و $\left|-\frac{1}{2}x\right|<1$ و $\left|\frac{1}{3}x\right|<1$، أي على المجال $|x|<1$.

مثال 9.37 : انشر، وفق تايلور، الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على جوار للنقطة $x_0=3$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على جوار للنقطة x_0. نكتب هذه الدالة كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{3-3+x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{3-x}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-x}{3}\right)^n$$

وهذا النشر صحيح من أجل $\left|\frac{3-x}{3}\right|<1$، أي على المجال $]0;6[$.

2. النشر بالاشتقاق حداً حدا أو بالمكاملة حداً حدا

يكون أحياناً من الصعب نشر الدالة $f(x)$ بينما يكون نشر الدالة $f'(x)$ أو الدالة $\int f(x)dx$ أسهل، لذا ننشر الدالة $f'(x)$ (أو الدالة $\int f(x)dx$) ومن ثم نكامل (نشتق) المتسلسلات الناتجة حداً حدا. ومع الإشارة إلى أن نصف قطر تقارب المتسلسلات لا يتغير بالاشتقاق أو بالمكاملة حداً حدا، وإنما الاختلاف في مجالات التقارب يكون فقط عند الأطراف، المبرهنتان 9.19 و 9.20.

مثال 9.38 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x)=\arctan x$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على جوارٍ للصفر.

لما كان $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$، فإننا ننشر الدالة $f'(x)$ وفق ماكلوران، بالاستفادة من المتسلسلات الهندسية:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad ; \quad \left|-x^2\right|<1 \Rightarrow |x|<1$$

نكامل هذه المتسلسلات حداً حدا:

$$\int_0^x f'(t)dt=f(x)=\arctan x=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad |x|<1$$

ندرس تقارب هذه المتسلسلات عند طرفي مجال التقارب، أي عند النقطتين $x = \pm 1$.

من أجل $x = 1$، نعوض في المتسلسلات السابقة، فنحصل على المتسلسلات العددية المتناوبة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ وهي متسلسلات متقاربة شرطياً، استناداً إلى اختبار ليبنتز، لأن المتتالية $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ متناقصة و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.

ومن أجل $x = -1$، نعوض في المتسلسلات السابقة فنحصل على المتسلسلات العددية المتناوبة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ وهي متقاربة شرطياً، استناداً إلى اختبار ليبنتز.

أي أن مجال النشر هو المجال $[-1;1]$.

تطبيق: يمكن بالاستفادة من منشور الدالة $\arctan x$ استنتاج قيمة تقريبية للعدد π.

نعوض في المتسلسلات $x = 1$، فنجد:

$$\arctan 1 = \tfrac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow$$

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

مثال 9.39: انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x) = \arcsin x$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على جوار الصفر.

لما كان $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، فإننا ننشر الدالة $f'(x)$ بجوار الصفر، بالاستفادة من نشر ثنائي الحد:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-x^2) + \tfrac{3}{4}(-x^2)^2 + \ldots +$$

$$+(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}(-x^2)^n + \ldots \quad ; \quad |-x^2| < 1$$

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} x^{2n} \quad ; \quad |x| < 1$$

وعليه، فإن:

$$f(x) = \arcsin x = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} t^{2n}\right] dt =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad ; \quad |x| < 1$$

ويمكن التحقق أن هذه المتسلسلات متقاربة عند طرفي مجال النشر، أي عند النقطتين $x = \pm 1$.

وهكذا، فإن النشر صحيح على المجال $[-1;1]$.

مثال 9.40 : انشر، وفق ماكلوران، الدالة $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات على جوارٍ للصفر. ولما كان:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-x}$$

فإننا ننشر الدالة $F(x)$ على جوارٍ للصفر:

$$F(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad ; \quad |x| < 1$$

ومنه، فإن

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots)' =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad ; \quad |x| < 1$$

ندرس طبيعة هذه المتسلسلات عند طرفي مجال النشر، أي عند النقطتين $x = \pm 1$.

من أجل $x = 1$، نحصل على المتسلسلات العددية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} n$، لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

ومن أجل $x = -1$، نحصل على المتسلسلات العددية المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ وهي متباعدة، لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر، عندما $n \to \infty$.

إذن، مجال النشر هو المجال $]-1;1[$.

9.4.5 تطبيقات النشر في حساب مجموع المتسلسلات الدالية

تفيد معرفة نشر بعض الدوال الشهيرة، أو مجموع بعض المتسلسلات الدالية الشهيرة، في حساب مجموع متسلسلات دالية.

مثال 9.41 : أوجد مجال تقارب المتسلسلات التالية، واحسب مجموعها:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

الحل: نطبق اختبار دالامبير:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) |x| = |x|$$

أي أن المتسلسلات المعطاة متقاربة من أجل $|x| < 1$. وهي متباعدة عند النقطتين $x = \pm 1$، لأننا نحصل على متسلسلتين عدديتين، الحد العام لكل منها يسعى إلى الصفر. أي أن مجال تقارب المتسلسلات المعطاة هو $]-1;1[$.

نرمز لمجموع هذه المتسلسلات بالرمز $S(x)$، أي $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ نكامل طرفي هذه العلاقة على المجال $[0;x]$:

$$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ولما كانت المتسلسلات الهندسية متقاربة على المجال $]-1;1[$ ومجموعها يساوي $\frac{1}{1-x}$، فإن

$$\int_0^x S(t)dt=\frac{1}{1-x}\quad\Rightarrow\quad S(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

أي أن:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\quad;\quad |x|<1$$

طريقة ثانية: نحسب المقدار $S(x)-x\cdot S(x)$:

$$S(x)-x\cdot S(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

$$(1-x)\,S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad;\quad |x|<1$$

ومنه، فإن

$$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\quad;\quad |x|<1$$

مثال 9.42 : أوجد مجال تقارب المتسلسلات التالية، واحسب مجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n-1}$$

الحل: نطبق اختبار دالامبير:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)|x|$$

أي أن المتسلسلات المعطاة متقاربة من أجل $|x|<1$، وهي متباعدة عند النقطتين $x=\pm 1$،

لأننا نحصل على متسلسلتين عدديتين، الحد العام لكلٍ منها لا يسعى إلى الصفر.

أي أن المتسلسلات المعطاة متقاربة على المجال $]-1;1[$. نرمز لمجموع هذه المتسلسلات بالرمز $S(x)$.

نحسب المقدار $S(x)-x\cdot S(x)$:

$$S(x)-x\cdot S(x)=1+2(x+x^2+\dots\ )=2(1+x+x^2+\dots\ )-1=$$

$$=\frac{2}{1-x}-1=\frac{1+x}{1-x}\qquad\Rightarrow\qquad S(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$

مثال 9.43 : أوجد مجال تقارب المتسلسلات التالية، واحسب مجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$

الحل: نطبق اختبار دالامبير:

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right]|x|=|x|$$

أي أن المتسلسلات المعطاة متقاربة من أجل $|x|<1$. وهي متقاربة عند النقطتين $x=\pm 1$،

لأننا نحصل على متسلسلتين عدديتين متقاربتين، بالمقارنة مع متسلسلات ريمان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

أي أن مجال تقارب المتسلسلات المعطاة هو المجال $[-1;1]$.

نرمز لمجموع هذه المتسلسلات بالرمز $S(x)$:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^n}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots \ + \frac{1}{n}x^n + \ldots \ \right) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots \ + \frac{1}{n}x^n + \ldots \ \right) =$$

$$= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left[\ln(1-x) - x\right] = \left[\left(-\frac{1+x}{x}\right)\ln(1-x)\right] + 1 \quad ; \quad |x| \le 1$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

تمارين الفصل التاسع

1. أثبت أن المتسلسلات التالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^4+n^3} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin b^n x \ ; \ (|a|<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{3/2}}$$

2. أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ على المجال $[-1;1]$، ثم بين أن التقارب ليس منتظماً في هذا المجال.

3. هل يجوز اشتقاق المتسلسلات التالية حداً حداً؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{1}{x^{2n-1}} \right)$$

4. أوجد منطقة تقارب كل من المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n \sin x}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2n}{1+x^2} \right)^2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x+2}{x} \right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \cos^n x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^n x}{n(n+2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{(x+n)}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2} x^{n^2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$	$\sum_{n=0}^{18} \frac{1}{n}\left(\frac{\lvert x\rvert}{x}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^n}$
		$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$

5. أوجد منطقة تقارب المتسلسلات:

$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)(x-3)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$
$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\arctan n}(2x+1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n$
$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (n^3+2)(2x+3)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3(n-1)}}{(125)^{n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n^2+2}\right)(x-1)^{2n+1}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2n-1}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}(x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+a}}{n!(n+a)!2^{2n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} x^n$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^{n-1}}{\sqrt{3^n(2n+1)}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-1-(-2)^n\right]x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x+2)^n$
$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)(x-2)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x n^2 (t-2)^n dt$	$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} x^n$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \arctan\frac{1}{n}\right]\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+\ldots+n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2n)}{x^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\tan^n x$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3+4(-1)^n}{3+2(-1)^{n-1}}\right]^n(x+3)^n$
$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n dt$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(3x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\arctan\frac{1}{n}\right](x-1)^n$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}(x+2)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{3^n.n}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$		

6. انشر وفق تايلور الدوال التالية، بجوار النقطة x_0 :

$f(x)=x^3\ ;\ x_0=-1$	$f(x)=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}\ ;\ x_0=-1$
$f(x)=\frac{x}{2+x}\ ;\ x_0=-1$	$f(x)=\cos x\sin x\ ;\ x_0=\frac{1}{6}\pi$
$f(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{3x+4}}\ ;\ x_0=1$	$f(x)=\ln\left(\frac{3-2x}{2+3x}\right)\ ;\ x_0=1$

7. انشر وفق ماكلوران كل من الدوال التالية:

$$f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$$

$$f(x)=\frac{x^{10}}{1-x}$$

$$f(x)=2^x$$

$$f(x)=chx\cos x$$

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt$$

$$\int_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$$

$$\int_0^x \frac{1-ch}{t}\,dt$$

$$\int_0^x \frac{\arcsin t^2}{t^2}\,dt$$

$$\int_0^x \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)dt$$

$$f(x)=\ln(1+x+x^2)$$

$$f(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

$$f(x)=\cos^2 x$$

$$f(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$$

$$f(x)=\tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\tfrac{1}{2}\arctan x$$

$$f(x)=\tfrac{1}{3}\ln\left(\frac{1+2x+x^2}{1-x+x^2}\right)$$

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\int_0^x \sqrt{1+t^5}\,dt$$

$$\int_0^x \cos\sqrt{t}\,dt$$

$$f(x)=\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt$$

$$f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$$

$$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$$

$f(x) = \cos x \sin x$

$f(x) = e^{-x} \cos 3x$

$f(x) = x \arccos(x - \sqrt{1-x^2})$

$f(x) = \arctan \dfrac{2x}{2-x^2}$

$f(x) = \arctan\left(\dfrac{2-2x}{1+4x}\right)$

$f(x) = x \arcsin(x + \sqrt{1-x^2})$

$f(x) = (1-x)^2 ch\sqrt{x}$

$f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$

$f(x) = (1+x)\ln(1+x)$

$f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$

$f(x) = e^{x \cot \alpha} \cos x$

$f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$

$f(x) = \left(\dfrac{\arcsin x}{n}\right)^2$

$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

$f(x) = (\arctan x)^2$

$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

8. احسب مجموع كل من المتسلسلات التالية:

$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots$

$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots$

$x + 2x^2 + 3x^2 + \ldots$

$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$

$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

$\dfrac{x}{1.2} + \dfrac{x^2}{2.3} + \dfrac{x^3}{3.4} + \ldots$

$(1\cdot 2)x + (2\cdot 3)x^2 + (3\cdot 4)x^3 + \ldots$

9. احسب، تقريباً، القيم:

$\arctan(1.2)$ | $\sqrt[10]{1000}$ | $1/\sqrt{e}$ | $\ln(1.25)$ | $\sqrt[3]{9}$

المصطلحات العلمية

A

Abscissa of a point	فاصلة نقطة
Absolute	قيمة مطلقة
Acute angle	زاوية حادة
Acyclic	لادوري
Addition	جمع
Additive	تجميعي
Adherent	ملتحم
Ad infinitum	إلى اللانهاية
Adjacent	مجاور
Algebraic addition	جمع جبري
Algorithm	خوارزمية
Almost	تقريباً
Alternating series	متسلسلة متناوبة
Analysis	تحليل
Analog	مشابهه
Angle	زاوية
Anticlockwise	عكس عقارب الساعة
Antinomy	تناقض

Apex	ذروة
Arc	قوس
Area	مساحة
Arithmetic progression	متتالية حسابية
Arithmetic sequence	متسلسلة حسابية
Asymptote line	خط مقارب
Axiom of continuity	موضوعة الإستمرار
Axis	محور

B

Ball	كرة
Basis	أساس
Belong to	ينتمي إلى
Binomial expansion	منشور ثنائي الحد
Bipartite	ثنائي الفرع
Bounded	محدود
Bounded above	محدودة من الأعلى
Bounded below	محدودة من الأسفل
Bounded set	مجموعة محدودة

C

Cardioid	منحني القلب (الكارديوئيد)
Cartesian	ديكارتي
Cartesian coordinate	إحداثيات ديكارتية

Casting	إسقاط
Center	مركز
Chain rule	قاعدة السلسلة
Cipher	صفر
Circle	دائرة
Circular	دائري
Clockwise	مع عقارب الساعة
Closed curve	منحني مغلق
Closed region	منطقة مغلقة
Common logarithm	لوغاريتم عادي
Complex number	عدد عقدي
Complex plane	مستوي عقدي
Complex valued function	دالة عقدية القيمة
Composition of mapping	تركيب التطبيقات
Concave	مقعر
Conclusion	نتيجة
Condition	شرط
Conditional convergence	تقارب شرطي
Congruence	تتطابق
Conic section	قطع مخروطي
Constant function	دالة ثابتة
Constant of integration	ثابت المكاملة

Content	محتوى
Continues	مستمر
Convergent	متقارب
Convergent sequence	متتالية متقاربة
Convergent series	متسلسلة متقاربة
Conversely	بالعكس
Coordinate	إحداثي
Coordinate axis	محور إحداثي
Coordinate system	جملة إحداثية
Countable set	مجموعة قابلة للعد (معدودة)
Counter example	مثال مناقض (معاكس)
Crooked line	خط منكسر
Curl	دوران
Curvature	تقوس
Curve	منحني
Curve tracing	رسم المنحني

D

Decease	تناقص
Definite integral	تكامل محدد
Definition	تعريف
Dense	كثيف
Dependent	تابع

Derivation	المشتقاق
Derivative	مشتق
Differential	تفاضل
Directory	دليل
Discontinuity	انقطاع
Disjoint	منفصل
Distance	مسافة
Divergent sequence	متتالية متباعدة
Divergent series	متسلسلة متباعدة
Double point	نقطة مضاعفة
Double root	جذر مضاعف

E

Echelon	درجي
Ellipse	قطع ناقص
End point	نقطة نهاية
Entire	صحيح
Entire function	دالة صحيحة
Equality	مساواة
Equation	معادلة
Equivalence	تكافؤ
Even	زوجي
Expand	منشور

Exponential function	دالة أسية

F

Factor	عامل
Factorial	عاملي
Finite sequence	متتالية منتهية
Finite series	متسلسلة منتهية
Finite set	مجموعة منتهية
Fixed point	نقطة مثبتة
Fraction	كسر
Function	دالة
Fundamental	أساسي

G

General term	حد عام
Generalization	تعميم
Geometric sequence	متتالية هندسية
Greatest lower bound	أكبر حد أدنى

H

Half	نصف
Height	ارتفاع
Helical	لولبي
Helix	لولب
Higher	أعلى
Homogeneous	متجانس

Horizontal	أفقي
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي
Hypotenuse	وتر
Hypothesis	فرض

I

Identify	يطابق
Identity	متطابقة
Identity element	عنصر محايد
If and only if	إذا وفقط إذا
Image	صورة
Imaginary	تخيلي
Implication	اقتضاء
Implicit function	دالة ضمنية
Imply	يقتضي
Impossible	مستحيل
Improper	معتل (شاذ)
Inclusion	احتواء
Increase	تتزايد
Increasing	متزايد
Indefinite	غير محدد
Indefinite integral	تكامل غير محدد

Independence	استقلال
Independent	مستقل
Indeterminate	غير معين
Index	دليل
Induction	استقراء
Inequality	متباينة (متراجحة)
Inferior	أدنى
Infimum	صغور (أكبر حد أدنى)
Infinite	لامنته
Infinite branch	فرع لامنته
Infinite decimal	كسر عشري لامنته
Infinite sequence	متتالية لامنتهية
Infinite series	متسلسلة لامنتهية
Infinitesimal	متناهي في الصغر
Infinitude	لامتناه
Inflection	انعطاف
Initial	ابتدائي
Injection mapping	تطبيق متباين
Inner	داخلي
Integer	عدد صحيح
Integrable	قابل للمكاملة (كمول)
Integral	تكامل

Integral domain	مجال المكاملة
Interior point	نقطة داخلية
Intersection	تقاطع
Interval	فترة
Introduction	مقدمة
Inverse	معاكس
Irrational number	عدد غير عادي (أصم)
Isosceles	متساوي الساقين

J

Joint	مشترك

L

Large	كبير
Law	قانون
Leap	قفزة
Left hand	طرف أيسر
Left hand derivative	مشتق من اليسار
Lemma	تمهيدية
Lemniscate	ذو العروتين (ليمنسكات)
Length	طول
Limit	نهاية
Limit of sequence	نهاية متتالية
Limit on the right	نهاية من اليمين

Limit superior	نهاية عليا
Limiting	نهائي
Limiting value	قيمة حدية
Limits of an integral	حدود التكامل
Line	خط
Line segment	قطعة مستقيمة
Linear	خطّي
Linear correlation	ارتباط خطّي
Local	محلّي
Locus	محل هندسي
Logarithm	لوغاريتم
Loop	عروة
Lower bound	حد سفلي
Lowest common multiple	مضاعف مشترك أصغر

M

Main	رئيسي
Major	كبير
Map	تطبيق
Maximal	أعظمي
Maximum	قيمة عظمى
Mean	وسط
Midpoint	منتصف

Minimal	أصغري
Minimum	قيمة صغرى
Multiple point	نقطة مضاعفة

N

Necessary	لازم
Negation	نفي
Negative	سالب
Neighborhood	جوار
Nested intervals	مجالات متداخلة
Neutral	محايد
Node	عقدة
Null	صفري
Null set	مجموعة خالية
Number	عدد
Numerical	عددي

O

Oblique	مائل
Obtuse angle	زاوية منفرجة
Odd function	دالة فردية
Operator	مؤثر
Opposite	متقابل
Order relation	علاقة ترتيب

Ordered	مرتّب
Ordinary	عادي
Orientation	توجيه
Origin	نقطة الأصل (المبدأ)
Orthogonal	متعامد
Oscillation	تذبذب
Outer	خارجي

P

Pair	زوج
Parabola	قطع مكافئ
Parallel	متواز
Parameter	وسيط
Parametric equation	معادلة وسيطية
Partitioning	تجزئة
Peak	ذروة
Pencil	حزمة
Perfect square	مربع كامل
Perimeter	محيط
Period	دور
Periodic function	دالة دورية
Perpendicular	عمودي
Plane	مستو

Plumb	شاقولي
Plus	زائد
Point wise	نقطياً
Polar	قطب
Polar angle	زاوية قطبية
Polar axis	محور قطبي
Pole	قطب
Polynomial	حدودية
Positive	موجب
Power	قوة
Power series	متسلسلة قوى
Primary	أولي
Primitive function	دالة أصلية
Principal	رئيسي
Problem	مسألة
Product	جداء
Projection of	مسقط
Proof	برهان
Property	خاصة
Proportion	تناسب
Propositional	افتراضي

Q

Qualitative	كيفي
Quarter	ربع
Quotient	خارج القسمة

R

Radian	راديان
Radius	نصف قطر
Range	مدى
Rank	رتبة
Rational number	عدد عادي (نسبي- منطّق)
Real	حقيقي
Reciprocally proportional	متناسب عكسياً
Rectangle	مستطيل
Recurring fraction	كسر دوري
Reflexive	انعكاسي
Region	منطقة
Regular	نظامي
Relation	علاقة
Relative	نسبي
Removable	قابل للإزالة
Repeated root	جذر مكرر
Representation	تمثيل
Rest	باق

Result	نتيجة
Revolution	دوران
Right angle	زاوية قائمة
Right line	خط مستقيم
Right triangle	مثلث قائم الزاوية
Ring	حلقة
Rose	وردة
Rule	قاعدة

S

Scalar	سلّمي
Segment	قطعة
Sense	منحى
Sequence	متتالية
Series	متسلسلة
Sheft	انزياح
Side	ضلع
Sign	إشارة
Simple root	جذر بسيط
Single	وحيد
Singular point	نقطة مفردة
Sinusoid	منحن جيبي
Size	حجم

Slope	ميل
Smooth	أملس
Solid	مجسم
Solution	حل
Solvable	قابل للحل
Sphere	كرة
Spiral	حلزون
Square root	جذر تربيعي
Stage	مرحلة
Steep	حاد
Step function	دالة درجية
Straight line	خط مستقيم
Strip	شريط
Subsequence	متتالية جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Sufficient condition	شرط كاف
Sum	مجموع
Summability	تجميعي
Supremum	عظوم (أصغر حد أعلى)
Surjection	غامر
Symmetric	متناظر

T

Tacpoint	نقطة تماس
Tangent	مماس
Tangent of an angle	ظل زاوية
Term	حد
Terminating	منته
Ternary	ثلاثي
Theorem	مبرهنة
Theory	نظرية
Trajectory	مسار
Translation	انسحاب
Transitive	علاقة متعدية
Trapezoid	شبه منحرف
Triangle	مثلث
Triangular function	دالة مثلثية
Trivial solution	حل تافه
Tow valued	ثنائي القيمة
Type	نمط

U

Uncountable	غير معدود
Undefined	غير معرف
Undetermined	غير معين
Uniform continuity	استمرار منتظم

Uniformaly continuous	مستمر بانتظام
Unique	وحيد
Unisolvent	وحيد الحل
Universal set	مجموعة شاملة
Unknown	مجهول
Upper bound	حد أعلى
Upper limit of integration	الحد الأعلى للتكامل

V

Value	قيمة
Vanish	ينعدم
Variable	متغير
Variant	متباين
Vector	متجه (شعاع)
Vertex	رأس
Vertical	رأسي
Vibration	اهتزاز
Vice-versa	وبالعكس
Volume	حجم

W

Whole number	عدد صحيح

Z

Zero of function	صفر دالة
Zone	نطاق

المراجع باللغة العربية

١- بوريس ديميدوفيتش- مسائل وتمارين في التحليل الرياضي. (مترجم عن الروسية) - دار مير - موسكو-١٩٩٠.

٢- د. خضر الأحمد- التحليل / ٣/ - منشورات جامعة دمشق-١٩٨٢.

٣- د. عادل سودان، د. موفق دعبول- التفاضل والهندسة التفاضلية- سلسلة الرياضيات العالية- مؤسسة الرسالة -١٩٨٥.

٤- د. عبد الغني الطنطاوي- الساحة الحقيقية / ٢/ -جامعة دمشق (أملية)-١٩٧٣-١٩٧٤

٥- د. عبد الواحد أبو حمدة- الرياضيات العامة / ٤/ - منشورات جامعة دمشق-١٩٨١.

٦- فيجودسكي- المرجع في الرياضيات العالية. (مترجم عن الروسية) - دار مير - موسكو-١٩٨٠.

٧- د. فوزي دنان- الرياضيات للمهندسين / ٤/ - الهندسة التفاضلية- منشورات جامعة دمشق-١٩٨٨.

٨- د. محي الدين بحبوح، د. دعد الحسيني- التحليل / ٢/ - منشورات جامعة دمشق-١٩٨٣.

٩- معجم الرياضيات- مؤسسة الكويت المتقدم العلمي- إدارة التأليف والترجمة والنشر- مؤسسة الكويت العلمية- الطبعة الثانية-الكويت-١٩٩٠.

١٠- موراي ر. شبيجل- التفاضل والتكامل المتقدم- سلسلة ملخصات شوم - دار ماكجروهيل للنشر-١٩٧٤.

المراجع الأجنبية

1-Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Краткий физико-математический сбравочник. Москва, Наука-1990.

2-Вавилов В.В., Мельников И.Н., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математики – Начала анализа . Москва, Наука-1990.

3- Воробьев Н.Н. Теория рядов. Москва, Наука-1986.

4-Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1 и 2, Москва, Высшая школа-2000.

5-Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ.-Т.1, Минск, Высшая школа-1989.

6-Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математки (Издание седьмое). Москва, Наука-1989.

7-Райхмист Р.Б.- Графики функций.-Москва, Высшая школа-1990.

8-Шибачев В.С. Высшая математика Москва, Высшая школа-1990.

9-Jordan D.W., Smith P.S. Mathematical Techniques. Third Edition. Oxford university press-2002.

10- Wolfram Research - www.mathworld.wolfram.com

اللجنة العلمية

أ.د. محي الدين بحبوح

أ.د. بشير قابيل

أ.د. علاء الدين قبانجي

المدقق اللغوي

د. أحمد الشريف

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University