منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية



الميكانيك الهندسي
علم التحريك



الدكتور
إسكندر عمجة
أستاذ في قسم هندسة الميكانيك العام

الدكتور
أيمن الخباز
مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام

جامعة دمشق
١٤٣٩ - ١٤٤١ هـ
٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

الميكانيك الهندسي – علم التحريك

السنة: الثانية

القسم: هندسة الميكانيك العام

هندسة التصميم الميكانيكي

منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الميكانيك الهندسي

علم التحريك

الدكتور إسكندر عمجة
أستاذ في قسم هندسة الميكانيك العام

1439-1438 هـ
جامعة دمشق
2018-2017 م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

Table of Contents الفهرس

5	***Introduction***	**مقدمة**	
	Preface	**تمهيد**	
17	*Concept of Dynamics*	مفهوم علم الديناميك	-1
17	*Kinematics*	علم الكينماتيك	-1-1
18	*Kinetics*	علم الكينيتيك	-2-1
18		مراحل اكتشاف علم الميكانيك	-2
21	*Basic Concepts*	المبادئ الأساسية	-3
21	*Space*	الفراغ	-1-3
21	*Reference Frame*	المجموعة المقارنة	-2-3
22	*Time*	الزمن	-3-3
23	*Force*	القوة	-4-3
23	*Inertia*	العطالة	-5-3
23	*Matter*	المادة	-6-3
24	*Mass*	الكتلة	-7-3
24	*Particle*	الجسيم المادي	-8-3
24	*Rigid Body*	الجسم الصلب	-9-3
25	*Scalar Quantity*	الكمية القياسية	-10-3
25	*Vector Quantity*	الكمية الشعاعية	-11-3
25	*Newton's Laws*	قوانين نيوتن	-4
26	*Inertia Law*	القانون الأول - قانون العطالة	-1-4
26	*Fundamental Law of Dynamics*	القانون الثاني - القانون الأساسي بعلم التحريك	-2-4
27	*Action and Reaction Law*	القانون الثالث - قانون تساوي الفعل ورد الفعل	-3-4
28	*Gravitation Law*	قانون الجاذبية	-5

-6	مجموعات الوحدات	*Systems of Units*	30
-1-6	المجموعة المطلقة	*Absolute System*	31
-2-6	المجموعة الفنية	*Technical System*	31
-7	وصف مسائل علم التحريك *Description of Dynamic Problems*		32

الفصل الأول

تحريك الجسيم المادي *Kinetic of Particle*

-1	مقدمة	*Introduction*	35
-2	العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المادي الحر *Fundamental Law of Dynamics of an Independent Particle*		35
-3	العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المادي المقيد *Fundamental Law of Dynamics of a dependent Particle*		37
-4	المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المادي الحر *Differential Equation for a Motion of an Independent Particle*		50
-1-4	حركة الجسيم المادي الحر على خط مستقيم *Rectilinear Motion of an Independent Particle*		50
-2-4	حركة الجسيم المادي الحر على خط منحنٍ *Curvilinear Motion of an Independent Particle*		62
-5	حركة الجسيم المادي المقيد على خط منحنٍ *Curvilinear Motion of a dependent Particle*		69
	مسائل غير محلولة	*Problems*	81

الفصل الثاني

المبادئ العامة في تحريك الجسيم المادي

General principles of Particle Dynamics

-1	مقدمة	*Introduction*	105
-2	دفع القوة	*Impulse of a Force*	105
-3	كمية الحركة الخطية لجسيم مادي *Linear Momentum of a Particle*		107
-4	مبدأ الدفع وكمية الحركة لجسيم مادي *Principle of Impulse and Momentum of a Particle*		107

-5	عمل القوة	*Work of a Force*	113
-1-5	أمثلة على حساب العمل		117
-1-1-5	عمل قوة الثقالة لجسيم مادي	*Work of a Weight Force of a Particle*	117
-2-1-5	عمل قوة الاحتكاك	*Work of a Friction Force*	118
-3-1-5	عمل قوة المرونة	*Work of an Elastic Force*	119
-4-1-5	عمل قوة الجذب	*Work of an Attraction Force*	121
-6	الاستطاعة	*Power*	122
-7	الطاقة الحركية لجسيم مادي	*Kinetic Energy of a Particle*	125
-8	مبدأ العمل والطاقة الحركية لجسيم مادي	*Principle of Work and Kinetic Energy of a Particle*	126
-9	القوى المحافظة	*Conservative Forces*	145
-10	الطاقة الكامنة	*Potential Energy*	150
-11	مبدأ تغير الطاقة الكامنة لجسيم مادي	*Principle of Variation Potential Energy of a Particle*	156
-12 -9	العزم الحركي لجسيم مادي	*Moment of Momentum of a Particle*	157
-13	مبدأ العزوم لجسيم مادي	*Principle of Moments of a Particle*	158
-14	الحركة تحت تأثير القوة المركزية	*Central Force Motion*	163
	مسائل غير محلولة	*Problems*	167

الفصل الثالث

الحركة النسبية لجسيم مادي *Relative Motion of a Particle*

-1	مقدمة	*Introduction*	205
-2	العلاقة الأساسية في الحركة النسبية لجسيم مادي	*Fundamental Law of Dynamics in Relative Motion of a Particle*	205

-3	تأثير دوران الأرض على اتزان الأجسام وحركتها *Effect of the Earth Rotation on the Equilibrium and the Motion of Bodies*	220
-1-3	التوازن النسبي على سطح الأرض *Relative Equilibrium on the Surface of the Earth*	220
-2-3	الحركة النسبية قرب سطح الأرض *Relative Motion near the Surface of the Earth*	222
-3-3	الحركة النسبية على سطح الأرض *Relative Motion on the Surface of the Earth*	223
-4-3	السقوط الشاقولي *Vertical Motion*	224
	مسائل غير محلولة *Problems*	225

الفصل الرابع

الحركة الاهتزازية ***Vibration Motion***

-1	مقدمة *Introduction*	233
-2	أنواع الحركة الاهتزازية *Types of Vibration Motion*	233
-1-2	الحركة الاهتزازية الحرّة *Undamped Free Vibration Motion*	235
-1-1-2	تأثير القوة الثابتة على الاهتزازات الحرة	244
-2-2	الحركة الاهتزازية المتخامدة *Damped Vibration Motion*	264
-1-2-2	الحركة الاهتزازية المتخامدة بسبب قوة الاحتكاك *Damped Vibration Motion caused by Friction Force*	265
-2-2-2	الحركة الاهتزازية المتخامدة بسبب قوة مقاومة الوسط *Damped Vibration Motion caused by Medium Friction*	270
-3-2	الحركة الاهتزازية القسرية *Forced Vibration Motion*	280
-1-3-2	الحركة الاهتزازية القسرية الحرة *Undamped Forced Vibration Motion*	281
-2-3-2	الطنين *Resonance*	291
-3-3-2	الحركة الاهتزازية القسرية المتخامدة *Damped Forced Vibration Motion*	293
-4-3-2	الخواص العامة للاهتزازات القسرية	301

-3	التطبيقات الهندسية		302
-1-3	الحامل النابضي	*Spring Holder*	302
-2-3	راسم الاهتزاز وراسم الهزات الأرضية *Vibrographs & Seismographs*		303
-3-3	الهزاز	*Vibrator*	304
	مسائل غير محلولة	*Problems*	305

الفصل الخامس

عزم العطالة الكتلي للأجسام الصلبة المتجانسة

Mass Moment of Inertia of Homogeneous Solids

-1	الجملة الميكانيكية	*Mechanical System*	309
-2	مركز كتل الجملة	*Center of Mass of a system*	310
-3	عزم العطالة لجسم صلب *Mass Moment of Inertia of Rigid Bodies*		312
-4	عزم العطالة لجسم حول محاور متعامدة *Mass Moment of Inertia about a Perpendicular Axies*		318
-5	عزم العطالة لجسم حول محاور متوازية *Mass Moment of Inertia about a Parallel Axies*		318
-6	عزم عطالة الأجسام المتجانسة *Moment of Inertia of Homogeneous Solids*		321
-1-6	الأشكال الخطية	*Linear Shapes*	321
-1-1-6	عزم عطالة قضيب رفيع منتظم *Moment of Inertia of a Thin Slender Rod*		321
-2-1-6	عزم عطالة حلقة دائرية *Moment of Inertia of a Thin Ring*		322
-2-6	الأشكال المسطحة	*Plane Surfaces*	323
1-2-6	عزم عطالة صفيحة رقيقة دائرية الشكل *Moment of Inertia of a Thin Circular Disk*		324
-2-2-6	عزم عطالة صفيحة رقيقة مستطيلة الشكل *Moment of Inertia of a Thin Rectangular Plate*		326

-3-2-6	عزم عطالة صفيحة رقيقة مثلثة الشكل *Moment of Inertia of a Thin Triangular Plate*	328
-4-2-6	عزم عطالة غلاف أسطواني *Moment of Inertia of a Circular Cylindrical Shell*	329
-5-2-6	عزم عطالة غلاف كروي *Moment of Inertia of a Spherical Shell*	331
-3-6	الأشكال الحجمية *Volume Shapes*	332
-1-3-6	عزم عطالة متوازي مستطيلات *Moment of Inertia of a Rectangular Parallelepiped*	332
-2-3-6	عزم عطالة اسطوانة دائرية *Moment of Inertia of a Circular Cylinder*	334
-3-3-6	عزم عطالة مخروط دائري *Moment of Inertia of a Circular Cone*	336
-4-3-6	عزم عطالة كرة *Moment of Inertia of a Sphere*	338
-4-6	قاعدة راوث *Routh's Rule*	340
-7	جداء العطالة *Product of Inertia*	343
-8	عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور ما مار من مبدأ الإحداثيات	345
-9	مجسم القطع الناقص للعطالة *Ellipsoid of Inertia*	346
-10	المستويات والمحاور الأساسية للعطالة *Principal Planes and Principal Axes of Inertia*	348
1-10	المحاور الأساسية للعطالة *Principal Axes of Inertia*	348
-2-10	المستويات الأساسية للعطالة *Principal Planes of Inertia*	350
-11	عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور كيفي	353
	مسائل غير محلولة *Problems*	355

الفصل السادس

المبادئ العامة في تحريك الجملة الميكانيكية

General principles of System Dynamics

-1	المعادلات التفاضلية لحركة الجملة المادية *The Differential Equations of Motion of a System*	361

-2	حركة مركز الكتل لجملة مادية *Motion of the Centre of Mass of a system*	362
-3	كمية الحركة الخطية لجملة مادية *Linear Momentum of a System*	365
-4	مبدأ الدفع وكمية الحركة لجملة مادية *Principle of Impulse and Momentum for a System*	366
-5	حفظ حركة مركز الكتل وحفظ كمية الحركة لجملة مادية *Conservation of motion of the Mass Centre* *Conservation of Momentum of System*	369
-1-5	أمثلة على حفظ حركة مركز الكتل لجملة المادية	371
-2-5	أمثلة على حفظ كمية الحركة لجملة مادية	377
-6	حركة الجسم ذي الكتلة المتغيرة *Motion of a Variable Mass Body*	388
-7	العزم الحركي لجملة مادية *Moment of Momentum of a System*	394
-8	مبدأ العزوم لجملة مادية *Principle of Moments of a System*	397
-9	العزم الحركي لجملة مادية حول مركز الكتل	399
-10	حفظ العزم الحركي لجملة مادية *Conservation of Moment of Momentum of a System*	403
-1-10	أمثلة على حفظ العزم الحركي لكمية حركة الجملة المادية	404
-11	الطاقة الحركية لجملة مادية *Kinetic energy of a System*	411
-1-11	الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة الانسحابية *Kinetic Energy of Rigid Body in Translation Motion*	411
-2-11	الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة الدورانية *Kinetic Energy of Rigid Body in Rotation Motion*	412
-3-11	الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة المستوية العامة *Kinetic Energy of Rigid Body in General Plane Motion*	413
-12	مبدأ العمل والطاقة الحركية لجملة مادية *Principle of Work and Kinetic Energy of a System*	416

-13	تطبيقات على حساب العمل	421
-1-13	عمل قوى الثقالة المطبقة على جملة مادية *Work of Gravitational Forces Applied to a System*	421
-2-13	عمل القوى المؤثرة على جسم قابل للدوران *Work of Forces Applied to a Rotating Body*	422
-3-13	عمل القوى الناتجة عن التدحرج *Work of Forces Acting on a Rolling Body*	424
-14	الطاقة الكامنة *Potential Energy*	441
-15	مبدأ تغير الطاقة الكامنة	441
-16	حفظ الطاقة الميكانيكية *Conservation of Mechanical Energy*	442
	مسائل غير محلولة *Problems*	447

الفصل السابع

تحريك الأجسام الصلبة *Kinetics of Rigid Bodies*

-1	مقدمة *Introduction*	483
-2	معادلات الحركة المستوية لجسم صلب *Plane Motion Equations for rigid body*	483
-1-2	معادلات الحركة الانسحابية *Translation Motion Equations*	485
-2-2	معادلات الحركة الدورانية المركزية *Centroidal Rotation Motion Equations*	490
-3-2	معادلات الحركة المستوية العامة *General Plane Motion Equations*	498
-3	حركة مجموعة من الأجسام الصلبة *Motion of Systems of Rigid Bodies*	504
-1-3	الحركة الدورانية اللامركزية *Noncentroidal Rotation Motion*	504
-1-1-3	حركة النواس المركب *Compound Pendulum Motion*	507
-2-3	الحركة التدحرجية *Rolling Motion*	514
-4	الحركة الابتدائية *Initial Motion*	546
	مسائل غير محلولة *Problems*	553

الفصل الثامن

التصادم *Impact*

-1	ظاهرة التصادم	*Impact Phenomenon*	581
-2	العلاقة الأساسية للتصادم	*The Fundamental Equation of Impact*	582
-3	المبادئ الأساسية للتصادم	*The Fundamental Principles of Impact*	584
-4	معامل الارتداد	*Coefficient of Restitution*	588
-5	اصطدام جسم بحاجز ثابت		589
-1-5	حالة الاصطدام المباشر	*Direct Impact*	589
-2-5	حالة الاصطدام المائل	*Oblique Impact*	591
-6	التصادم المركزي المباشر	*Direct Central Impact*	597
-1-6	تصادم عديم المرونة	*Perfectly Inelastic Impact*	601
-2-6	تصادم كامل المرونة	*Perfectly Elastic Impact*	603
-7	فقدان الطاقة الحركية في التصادم عديم المرونة	*Loss of Kinetic Energy in Perfectly Inelastic Impact*	611
-8	التصادم المركزي المائل	*Oblique Central Impact*	619
-9	التصادم غير المركزي	*Eccentric Impact*	623
-10	الاصطدام بجسم صلب	*Impact With a Rigid Body*	627
-1-10	الاصطدام بجسم دائر	*Impact with a Rotating Body*	628
-2-10	الاصطدام بجسم يتحرك حركة مستوية عامة	*Impact with a Body In General Plane Motion*	630
-11	مركز الصدم	*Centre of Impact*	634
	مسائل غير محلولة	*Problems*	641

الفصل التاسع

653	**التوازن التحريكي *Dynamic Equilibrium***	
653	مقدمة *Introduction*	-1
653	التوازن التحريكي لجسيم مادي *Dynamic Equilibrium of a Particle*	-2
663	التوازن التحريكي لجملة مادية *Dynamic Equilibrium of a System*	-3
680	الضغوط التحريكية المؤثرة على محور دوران الجسم الصلب	-4
685	موازنة الأجسام الدوارة *Balancing of Rotating Bodies*	-5
686	آلات الموازنة *Balancing Machines*	-6
693	مسائل غير محلولة *Problems*	

الفصل العاشر

703	**العمل الافتراضي *Virtual Work***	
703	مقدمة *Introduction*	-1
703	مبدأ العمل الافتراضي *Principle of Virtual Work*	-2
706	مبدأ العمل الافتراضي للجسيم المادي الحر	-1-2
708	مبدأ العمل الافتراضي للجسيم المادي المقيد	-2-2
709	مبدأ العمل الافتراضي للجسم المادي الصلب	-3-2
712	تطبيق مبدأ العمل الافتراضي في حل المسائل	-3
720	تطبيق مبدأ العمل الافتراضي في توازن الآلات البسيطة	-4
737	المردود الميكانيكي *Mechanical Efficiency*	-5
744	الطاقة الكامنة *Potential Energy and Equilibrium*	-6
746	استقرار التوازن *Stability of Equilibrium*	-7
750	المعادلة العامة للتحريك *General Equation of Dynamics*	-8
763	المراجع العلمية *Bibliography*	
765	جدول الرموز *List of Symbols*	
770	الوحدات الأساسية للنظام العالمي المستخدمة في الميكانيك *Principal SI Units Used in Mechanics*	

مقدمة *Introduction*

يتمتع مقرر الميكانيك الهندسي بمنزلة خاصة بين العلوم الأساسية، ويُعتمد عليه كثيراً للانتقال إلى العلوم الهندسية الأخرى؛ لذا فهو يشكل حلقة رئيسة في خطة تأهيل مهندسي الميكانيك، وركيزة أساسية يعتمدون عليها في دروب العمل الهندسي المبدع، وقد اصطلح على تسميته الميكانيك الهندسي؛ تمييزاً له عن الميكانيك النظري، والميكانيك التطبيقي، فهو شيء بينهما، أو أنه منهما معاً.

خُصص هذا المقرر أساساً لطلبة كليات الهندسة والمعاهد الصناعية العليا، ويُمثل الكتاب الحالي بعلم التحريك الجزء الأخير من البرنامج الكلي للميكانيك الهندسي، وهو مقرر لطلبة السنة الثانية في كلية الهندسة الميكانيكية، ويفترض أن الجزء الأول منه علم التوازن، وعلم الحركة؛ قد أعطيا لطلاب السنة الأولى.

بعد ممارستنا للتدريس، أردنا القيام بوضع كتاب بعلم التحريك، يتفق مع المستوى العالي، بل يزيد عن ذلك الذي تم تقديمه في الماضي، ولا عجب فإنه يحتوي على مجموعة من المسائل التي أعدت حديثاً، ولقد راعينا، قبل كل شيء عند اختيار مادته وعرضها، أن يكون المنهاج كاملاً، يعطي صوراً وافية، عن طرق الميكانيك الأساسية اللازمة للمهندس في مجالات هذا العلم، وأن يكون للطلاب معيناً في دراستهم الجامعية، ومصدراً عربياً يضاف إلى المصادر الأخرى باللغات الأجنبية. كما راعينا أيضاً إمكانية استخدام الكتاب عند دراسة موضوع الميكانيك؛ سواء بمنهاج مختصر أو موسع.

انطلقنا عند وضع الكتاب من اعتقادنا العميق؛ الذي أكدته مراجع عديدة من البرامج التعليمية، بشرح أركان علم التحريك ضمن عشرة فصول، وضعت بطريقة منهجية لا تعدم التسلسل والترابط، وبأسلوب متميز لا ينأى عن الاستقلالية والرصانة، فبدأنا الكتاب بدراسة تحريك الجسيم المادي، ثم الجسم الصلب، ليتمكن الطالب من فهم المادة واستيعابها بسهولة أكثر، مما يجعل عملية الدراسة أكثر وضوحاً ومنطقية.

استخدمنا في هذا الكتاب طريقة المتجهات الشائعة، إلى جانب الطريقة التحليلية؛ نظراً لأهميتها، في دقة دلالاتها، للتفسيرات الفيزيائية والهندسية، ولما لها من مميزات عديدة في الوقت الحاضر، وأفردنا جزءاً كبيراً منه للأمثلة والمسائل المحلولة، بما يزيد عن مئة وخمسين مسألة، بمراعاتنا عند اختيارها، ضرورة توضيح الظواهر الميكانيكية، ودراسة الأنواع الأساسية من المسائل، وحلها بكل طريقة من الطرق المشروحة في الكتاب، وتحتوي حلول المسائل على إرشادات وملاحظات، لمساعدة الطلاب عند دراستهم دون معلم، وعلى تجاوز الصعوبات التي يواجهها في تطبيق المعلومات النظرية على مسائل هندسية، ولتخطي الفاصل بين مجرد الإلمام بالمبادئ العامة، وبين القدرة على تطبيقها في المسائل الواقعية، وذلك هو الهدف الحقيقي للتعليم الهندسي.

لقد بذلنا الجهد، في هذا الكتاب، للابتعاد عن مجرد الترجمة، والنقل عن المصادر الأجنبية، إلى الاختيار والانتقاء، محاولين أخذ أفضل ما في كتب الميكانيك الهندسي المعروفة، فجاء الكتاب وافياً بالغرض، إلى حد كبير؛ بحيث يمكن اعتباره مرجعاً مفيداً للمهندس العربي.

لقد تم حل أغلب المسائل، بوحدات مجموعة القياس العالمية ***SI*** ، واستعمال الرموز الفيزيائية المصطلح عليها دولياً، كما حاولنا، عند اختيار المصطلحات الهندسية والعلمية العربية، استعمال الدارج والمألوف في سورية، ونعتقد أنه لابد من المحاولة الجدية، لتوحيد هذه المصطلحات، ودونها فإن انتشار النهضة العربية العلمية سيبقى بطيئاً، ولقد جمعنا عدداً من الرموز التقنية الواردة في هذا الكتاب بعد معجم المصطلحات العلمية مباشرةً.

تتفق الطبعة الثالثة من هذا الكتاب مع المستوى العالي، بل يزيد على ذلك الذي قدم في الماضي بمجموعة لا يستهان بها، من مسائل غير محلولة لكل فصل من فصول الكتاب، مرفقة بأجوبتها، بما يزيد على ثلاثمائة مسألة، ومع ذلك قد يجد الدارس كلمات لا يرى أن محلها فيه، وقد يفتقد إلى كلمات كان يفضل أن يراها فيه، مما لا يمكن تجنبه من المؤلفين حتى ولو حرصوا على ذلك، ومع ذلك فإننا نرجو أن يكون هذا الكتاب خطوة تتلوها خطوات أفضل، ومهما كانت الكتب الجامعية العربية في حالتها الراهنة، فإن المصلحة العامة تقتضي دعمها وتشجيعها، ولا مناص من إزالة القيود، التي تحد منها، وتشل حركتها.

نرجو أن يكون لهذا الكتاب الفائدة المرجوة من وضعه، ومرشداً للطالب في دراسته، وعوناً للمهندس الممارس في البحث والإنتاج، وأن يتم تطويره في المستقبل إلى مرجع أكبر، وأوفى في الميكانيك الهندسي. آملين أن نكون قد قدمنا، بعملنا هذا خدمة لوطننا، في مجال العلم، وأن يكون هذا الكتاب رافداً للعاملين من أبنائه، في مجال الثقافة والتقدم الحضاري، فإن استطعنا تحقيق هذه الغاية فذلك رجاؤنا.

نريد في ختام هذه المقدمة أن نرفع جزيل شكرنا، إلى وزارة التعليم العالي؛ لمجهودها الطيب، في تشجيع الأساتذة على تأليف الكتب؛ التي نحن أحوج ما نكون إليها ، كخطوة أولى في مضمار مسيرة وطننا في درب الحضارة والعلم، حتى يتبوأ المكانة التي تليق به بين دول المعرفة والعلم والحضارة.

دمشق أيار – 2017

د. أيمن الخباز أ.د. إسكندر عمجة

تمهيد *PREFACE*

1- مفهوم علم الديناميك *Concept of Dynamics*

أو ما يطلق عليه **علم التحريك**، ويُعَدُّ جزءاً من علم ميكانيك الجسيمات، والأجسام المتماسكة؛ الذي يبحث في حركة الأجسام المادية، تحت تأثير القوى. وتأتي عادة دراسة علم التحريك في الهندسة، بعد دراسة علم السكون (*Statics*)، الذي يبحث في الدراسات العامة للقوى، وشروط اتزان الأجسام المادية؛ التي تؤثر عليها القوة الثابتة بالقيمة والاتجاه بالنسبة للزمن، ويتألف علم التحريك من جزأين متباينين:

1-1- علم الكينماتيك *Kinematics*

أو ما يطلق عليه **علم الحركة** المجردة، ويُعَدُّ مقدمة لعلم التحريك؛ لأنه يدرس حركة الأجسام المادية من وجهة نظر هندسية؛ لإيجاد العلاقة بين المكان والزمان دون اعتبار كتلتها، والرجوع إلى القوى التي سببتها، أي: أنه يقوم بدراسة المظاهر الخارجية للجسيم المادي، أو الجملة المادية، ويتضمن هذا التعريف مفهومين أساسيين، مفهوم الجملة المقارنة، ومفهوم الزمن.

فإذا أردنا التحقق من أن جُسيماً ما هو في حالة حركة، وجب أن ندرس المسافات التي تفصل بين هذا الجسيم وجملة مقارنة نعدها ثابتة كالأرض، أو أجساماً صلبة أخرى متصلة معها، وبما أن الحركة نسبية؛ بمعنى أن ظاهرة الحركة تختلف بحسب الجملة المقارنة المتخذة أساساً لدراسة هذه الحركة، لذا وجب أن نحدد، دوماً، الجملة المقارنة التي ترد إليها الحركة، وبحدوث الحركة، يحدث تحول في المسافة، بين الجسم المتحرك ونقط الجملة المقارنة، ونكون بذلك قد أدخلنا مفهوماً جديداً هو الزمن.

بالتالي يهتم علم الحركة بالمظاهر الخارجية لحركة الأجسام، بتعابير رياضية خاصة، تشمل بعض العناصر التفاضلية؛ التي لها صلة وثيقة بالشكل الهندسي للمسار؛ الذي يسير عليه المتحرك بدلالة جملة مقارنة مفروضة، وتنحصر مسائل علم الحركة في تعيين جميع مميزات الحركة، من مسار المتحرك وسرعته وتسارعه في مختلف الأزمنة؛ بمعرفة معادلة حركته، ولقد أدى هذا العلم خدمات جليلة للأبحاث الهندسية، إذ ساعد في حل كثير من مسائل الإنشاء الهندسي؛ مما دفع بعض العلماء إلى إطلاق اسم الهندسة الحركية على علم الحركة.

2-1- علم الكينيتيك *Kinetics*

أو ما يطلق عليه **علم التحرك**، وهو الجزء الذي يبحث في قوانين حركة الأجسام المادية، تحت تأثير قوى غير متزنة، وبالتالي يربط بين فعل القوى المؤثرة على الأجسام مع الحركات الناتجة، ويأخذ بالحسبان تأثير القوى والكتلة للأجسام المادية نفسها، وبذلك يكون قد أدخلنا مفهوم القوة والكتلة في هذا العلم.

بالنسبة للقوة فعلم التحرك يدرس، إضافةً لتأثير القوة الثابتة، تأثير القوة المتغيرة، والتي تتغير مقاديرها واتجاهاتها خلال حركة الجسم، أما الكتلة، فتعبر عن خاصية الأجسام المادية في تغير سرعة حركتها إلى أسرع أو أبطأ؛ تحت تأثير القوة المؤثرة عليها، وبوجه عام لا تعتمد حركة الجسم على كتلته الكلية، والقوى المؤثرة عليه فحسب، وإنما يمكن أن، تعتمد، أيضاً، على الأبعاد الهندسية للجسم، وعلى مواقع الجسيمات المكونة له، أي: على توزيع الكتل.

كما يهتم علم التحرك، أيضاً، بإيجاد نوع حركة الجسم، إذا أثرت فيه قوة معطاة، أو إيجاد القوى التي ينبغي أن تفعل في الأجسام؛ لتجعلها تتحرك حركة مفروضة، ولا يهتم بالمظاهر الخارجية للحركة، وتنحصر مسائل التحريك في تعيين القوة المؤثرة على الجسم بمعرفة معادلة حركته، أو العكس.

2- مراحل اكتشاف علم ميكانيك الجسيمات والأجسام المتماسكة

أنفقت البشرية آلاف السنين للحصول على تعليلات علمية لبعض الظواهر الميكانيكية، ويرجع الفضل لقدماء المصريين، في تطوير علم السكون بصفة خاصة، ويشهد بذلك ما شيدوه من مبانٍ ضخمة باقية على الزمن. ومن أول الباحثين في قوانين الروافع، والمستوى المائل، وطفو الأجسام، وغيرها، كان أرخميدس (*Archimedes*) (212-287.av.J.C)، وبعده خمدت جذوة البحث في هذا العلم، حتى القرن الخامس عشر ميلادي، مع بداية عصر النهضة، باستثناء المجهود، الذي بذله أبو الفتوح الخازني عن فكرة الجاذبية الأرضية، حيث نشرها في كتابه ميزان الحكمة حوالي عام (1122)، وذلك قبل اكتشاف نيوتن لها بخمسة قرون.

بالتالي، فإن علم التحريك هو علم قديم، دام تطوره ما ينوف على العشرين قرناً، ومازال حتى هذه اللحظة، في تطور مستمر، حيث عرف اليونان مفهوم السرعة، إلا أن مفهوم التسارع لم يطرح إلا في أواخر القرن الرابع عشر، ولم يظهر مفهوم الكتلة إلا في القرن السابع عشر، ودرست حركة سقوط الأجسام في القرن الخامس عشر، وجرت عندها أولى المحاولات لترجمة النتائج التجريبية إلى علاقات رياضية.

ويعزى السبب الأساسي في تأخر تطور علم التحريك، إلى الصعوبات التصميمية، التي اعترضت إجراء التجارب اللازمة لإقامة أسس هذا العلم، ولأن علم السكون لا يستعمل إلا نوعين من الوحدات فقط، هما وحدة الطول اللازمة لقياس أبعاد الأجسام، أو المسافات، التي تفصل بينها، ووحدة القوة اللازمة لقياس الأفعال بين الأجسام، أو ردود الأفعال فيما بينها، والأجهزة الدقيقة لقياس الطول، والقوة، أجهزة بسيطة نسبياً، وقد أمكن صنعها منذ القديم.

أما في علم التحريك، فإننا نحتاج إلى وحدة لقياس الزمن، بالإضافة إلى وحدتي الطول والقوة، والأجهزة المستعملة لقياس الزمن هي أجهزة حديثة نسبياً، ولذلك كان طبيعياً، أن يعوق نمو علم التحريك الصعوبات المتعلقة بقياس المجالات الزمنية القصيرة.

ترجع بداية الفهم المنطقي لهذا العلم، إلى العالم الإيطالي غاليليو غاليلي (1564-1642) (*Galileo Galilee*) الذي عمل أستاذاً بجامعة بيزا، حيث قام بدراسة متقنة للأجسام في حالة السقوط الحر، والحركة على مستوٍ مائل، وحركة النواس، وكان أيضاً له الفضل الأكبر، في إيجاد التقريب العلمي للمسائل الفيزيائية. هذا وقد أُنتقد غاليلي بشدة، وذلك بسبب رفضه القبول بالمعتقدات السائدة في تلك الأيام، كفلسفة أرسطو (*Aristotle*)، القائلة بأن سرعة سقوط الأجسام الثقيلة، هي أكبر من سرعة سقوط الأجسام الخفيفة. إلا أن العقبة الرئيسية لـــ غاليلي كانت عدم توفر أجهزة قياس دقيقة للزمن.

لهذا فإن التطورات المهمة في علم التحريك، لم تظهر إلا حين اختراع الساعة ذات النواس، عام (1657) من قبل عالم ميكانيكي وفيزيائي وفلكي هولندي، يدعى كريستيان هيوجنس (*Christian Huygens*) (1629-1695)، وهو أول من درس النواس المركب، وأدخل مفهوم عزم العطالة للجسم، وقد استطاع العالم إسحاق نيوتن (*Isaac Newton*) (1642-1727)، الذي عمل أستاذاً بجامعة كمبردج، مسترشداً بالأعمال التي قام بها غاليلي، من وضع الصيغ الدقيقة لعلم الحركة، أي: الأساسات الصحيحة لعلم التحريك.

لقد ظهر عمل نيوتن الشهير سنة 1687، في نشرته الأولى لمبادئه المسماة (*Principia*)، التي تُعَدُّ، بصورة عامة، كواحدة من أكبر السجلات، التي ساهمت في نشر العلم. هذا بالإضافة إلى وضعه للقوانين، التي تتحكم في حركة الجسيم المادي، فإنه أول من صاغ، بصورة صحيحة قانون الجاذبية العالمي العام للثقالة، وكان وضعه الرياضي دقيقاً، إذ بين أن فكرة الانتقال من بعيد لقوة الثقالة دون وسط مادي كان غير صحيح.

وقد أتى بعد نيوتن علماء كثيرون، قاموا بأعمال مهمة للميكانيك، أمثال عالم الرياضيات السويسري الشهير جان برنوللي (*Jean Bernouilli*) (1667-1748)، الذي استخدم لأول مرة مبدأ العمل الافتراضي، وعالم الرياضيات والميكانيك الشهير ليونارد اويلر السويسري (*Leonard Euler*) (1707-1783)، حيث وضع أساس طرق حل مسائل تحريك الجسيم، والجسم الصلب، بوساطة تكوين المعادلات التفاضلية الخاصة بها وحلها، والعالم الفرنسي جان لو روند دالمبير (*Jean le Rond D'Alembert*) (1717-1783)، الذي اقترح مبدأه الشهير في التوازن التحريكي، لحل مسائل التحريك، والعالم الفرنسي جوزيف لاغرانج (*Joseph Lagrange*) (1736-1813)، الذي وضع الطريقة التحليلية العامة لحل مسائل التحريك على أساس مبدأ دالمبير، ومبدأ العمل الافتراضي، والعالم الفرنسي جوستان كوريوليس (*Justin Coriolis*) الذي اشتهر بأبحاثه في مجالات الميكانيك النظرية والتطبيقية، وغيرهم من العلماء أمثال بوانسوت (*Poinsot*)، ولابلاس (*Laplace*)، وألبير أينشتاين (*Albert Einstein*) (1879-1953)، الذي أدخل (*Theory of Relativity*) النظرية النسبية، وبها وضعت البشرية يدها على منبع هائل للطاقة، تلك هي الطاقة الذرية.

يُعَدُّ علم التحريك أكثر حداثة في مجال التطبيقات الهندسية، إذ إن الحاجة إلى إجراء الحسابات على أساس علم التحريك، بدلاً من علم السكون، قد ظهرت فقط عندما ابتدأت الآلات، والإنشاءات العمل بسرعة كبيرة وبتسارعات مهمة، ويتطلب التطور التقني السريع، في أيامنا هذه، المزيد من تطبيقات الميكانيك، وخصوصاً علم التحريك؛ الذي يقوم بتحليل وتصميم الإنشاءات المتحركة والساكنة، المعرضة لأحمال الصدم، ولآليات الحاسب الآلي عالي السرعة، ومجموعات التحكم الآلي للصواريخ والقذائف، والسفن الفضائية، وأيضاً عربات النقل الأرضية والهوائية، وللقذائف الإلكترونية الخاصة بالأجهزة الكهربائية، والآلات بكل أنواعها، كالعنفات والمضخات والمحركات الترددية، والروافع وآلات القطع وغيرها.

3- المفاهيم الأساسية *Basic Concepts*

نورد فيما يلي بعضاً من المفاهيم والتعاريف الأساسية اللازمة لدراسة علم التحريك.

3-1- الفراغ *Space*

تجري حركة الأجسام في الفراغ مع مرور الزمن، وهو المنطقة الهندسية (الجغرافية) التي تحدث فيها الحوادث، وسنستخدم كلمة الفراغ هنا للرجوع إلى فراغ إقليدس ثلاثي الأبعاد المألوف لدينا. مثلاً عند دراسة حركة الجسيم المادي على طول خط مستقيم أو على مستوى، فإنهما تُعدّان كحادثتين في فراغ ذي بعد أو بعدين.

3-2- مجموعة المقارنة *Reference Frame*

هي المجموعة التي تعين موضعاً في الفراغ بالنسبة لبعض الإحداثيات الجغرافية، بوساطة قياسات خطية أو زاوية، وتدل المشاهدات على أن النجوم تشكل جسما صلباً ثابتاً، والجملة المقيدة بجملة النجوم المتماسكة هي بدورها جملة ثابتة، وتسمى الجملة النجمية.

والمجموعة المقارنة الأساسية لقوانين الميكانيك النيوتينية هي مجموعة المقارنة العطالية الرئيسة أو الفلكية، وتسمى أحياناً مجموعة المقارنة النيوتينية.
(*Primary Inertial System or Astronomical Frame of Reference*)
وتتألف من ثلاثة محاور متعامدة خيالية تقع نقطة الأصل في مركز الشمس، وتتجه المحاور الثلاثة باتجاه نجوم ثابتة أساسية في الفضاء، أي: يفترض أنها لا تتحرك حركة دورانية، ولا انسحابية، وتبين القياسات أن قوانين الميكانيك النيوتني صحيحة، من أجل هذه المجموعة من الإحداثيات، طالما أن السرعة المدروسة تكون مهملة بالمقارنة مع سرعة الضوء، وتسمى القياسات التي تجري بالنسبة لهذه المجموعة العطالية: القياسات المطلقة (*Absolute*).

لكن من أجل سرعة من رتبة سرعة الضوء نفسها (300000 km/sec)، يجب تطبيق النظرية النسبية (*Theory of Relativity*)، التي أعلنها ألبير اينشتاين في عام (1905).

إن حركة مجموعة الإحداثيات المرتبطة بسطح الأرض تكون معقدة بالنسبة للمجموعة الرئيسة، وينبغي إجراء تصحيحات على معادلات الميكانيك الأساسية، لكي يمكن تطبيقها على القياسات؛ التي تجري بالنسبة لمجموعة الإحداثيات المرتبطة بالأرض.

مثلاً في حسابات حركة الصواريخ ومساراته في الفضاء، تكون حركة الأرض المطلقة مهمة، إلا أنه في أغلب المسائل الهندسية للمنشآت الموجودة على سطح الأرض، والباقية عليه، يكون مقدار التصحيح صغيراً جداً يمكن بالتالي إهماله، ويمكن في أمثال هذه المسائل تطبيق قوانين الميكانيك مباشرةً على القياسات الأرضية، وعدَّها كقياسات مطلقة.

3-3- الزمن *Time*

الزمن هو قياس تتابع الحوادث، ويعرف في أشهر القواميس على أنه فترة، وتعرف الفترة بأنها زمن، وذلك يبدو غير مفيد، ولربما كان ينبغي القول أن الزمن هو ما يحدث عندما لا يحدث أي شي آخر.

ليس المهم تعريف الزمن، ولكن كيف نستطيع قياسه في حالة عدم وجود الحركة، فإذا كان الكون دون حراك فمن أين نقتبس عندها مفهوم الزمن، ونصنع الأجهزة التي تقيسه!.

فالزمن العياري المتفق عليه عالمياً هو الثانية النجمية، وهو مقتبس من حركة دوران الأرض في الكون، أي: بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة؛ بدلالة الكون، فلا زمن دون حركة، ولا حركة دون زمن، بالتالي الزمن هو مثل المسافة مفهوم أولي.

وتقضي إحدى الطرق لقياس الزمن استخدام وسيلة لها صفة دورية كساعة الحائط ذات النواس، حيث واحدة الزمن هي الثانية النجمية، وهي الفترة الزمنية التي يحتاجها نواس يقوم بـــ 3600 دورة في الساعة ليقوم بنوسة واحدة، وباعتبار أن اليوم يساوي 24 ساعة، وهو الزمن اللازم لمرورين متتاليين لنجم معين فوق خط طول معين من سطح الأرض، فالثانية تساوي 1/86400 من اليوم الوسطي.

بالتالي يمكن القول: إن الزمن هو قياس لحوادث متتالية، ويُعَدُّ ككمية مطلقة في الميكانيك النيوتني، وهو عبارة عن كمية قياسية متغيرة باستمرار، ويؤخذ كمتغير مستقل، وتعَدُّ الكميات المتغيرة الأخرى كميات متغيرة بمرور الزمن.

3-4- القوة *Force*

عُرف مفهوم القوة في علم السكون على أنه مقدار يحدد مقياس التأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام المادية، وكان يُعَدُّ ثابتاً، بينما في المجموعات الحقيقية، فإنه بالإضافة للقوى الثابتة يخضع الجسم غالباً إلى تأثير قوى متغيرة بالقيمة والاتجاه.

تبين التجارب العملية أن القوى المتغيرة تعتمد على الزمن، وعلى موضع الجسم، وعلى سرعته، وكحالة خاصة تعتمد على الزمن قوة جذب القاطرة الكهربائية عند الفرملة، والقوة المسببة للاهتزاز في قاعدة محرك محوره منحرف عن المركز، وتعتمد قوة نيوتن للجاذبية، وقوة المرونة في النابض على موضع الجسم، وقوة مقاومة الوسط الماء أو الهواء على سرعة الحركة، وتظل علاقات جمع القوى المتغيرة أو تحويلها كما هي للقوى الثابتة.

3-5- العطالة *Inertia*

إن مفهوم العطالة للأجسام أو القصور الذاتي يتم بمقارنة نتائج تأثير قوة واحدة على أجسام مادية مختلفة، وتبين التجارب العملية أنه إذا أثرت قوة واحدة على جسمين ساكنين مختلفين في المادة، ولا تؤثر عليهما أيّ تأثيرات أخرى، فإن الجسمين بوجه عام يقطعان مسافتين مختلفتين خلال فترة زمنية واحدة، كما تكون لهما سرعتان مختلفتان.

فالعطالة هي خاصية الأجسام المادية؛ التي تعبر عن مقدار مقاومة المادة لعوامل تغيير سرعة حركتها من تأثير القوى المطبقة عليها إلى أسرع أو أبطأ. فعلى سبيل المثال، إذا كان التغيير في سرعة أحد الأجسام أكثر بطئاً مما في جسم آخر تحت تأثير قوتين متكافئتين، فإن الجسم الأول يكون أكثر عطالةً، والعكس صحيح، ومنه تعتمد درجة العطالة الذاتية للجسم على كمية ما يحتويه من مادة.

3-6- المادة *Matter*

هي مَدرك حس يدركه الإنسان ببعض حواسه مباشرةً كاللمس مثلاً، أو بطريق تجريبي غير مباشر، وتشغل المادة حيزاً من الفراغ، والكمية التي تعتمد على ما يحتويه الجسم من مادة، والتي تحدد مقياس قصوره الذاتي، أي: عطالته، تسمى: كتلة الجسم.

3-7- الكتلة *Mass*

هي مقياس لما يحتويه الجسم من المادة، أو هي المقياس الكمي للعطالة، أو لمقاومة التغير في حركة الجسم، فإذا أثرت قوة معينة على التتابع في أجسام مختلفة لفترات متساوية أنتجت تغيرات في السرعة تتناسب عكسياً مع كتل تلك الأجسام. كما هي الخاصة التي تولد جذب الثقالة الأرضية، وهي أيضاً خاصة كل جسم يرافقها دوماً التجاذب المتبادل مع الأجسام الأخرى، و تُعَدُّ الكتلة كمية قياسية موجبة ثابتة لكل جسم معطى.

3-8- الجسيم المادي *Particle*

لا تعتمد حركة الجسم المادي على شكله وكتلته الكلية والقوى المؤثرة فيه فحسب، بل تعتمد أيضاً على الأبعاد الهندسية للجسم، وعلى مواضع النقاط المكونة له، أي على توزيع مادته، وعليه يدعى الجسم الذي يحتوي على مقدار محدود من المادة موزعة بشكل منتظم وأبعاده مهملة، وغير معبرة عن وصف حركته، أو أثر القوة المؤثرة علية، بالنقطة المادية، ولو توخينا الدقة الكاملة في دراستنا، لما وجدنا في الطبيعة كلها شيئاً يمكن أن نسميه نقطة مادية، وذلك لأن مقدار محدود من المادة لا بد أن يشغل بعض المكان، وعليه يمكن تسميته بالجسيم المادي، كما يمكن أيضاً اعتبار الجسم كجسيم، عندما تكون أبعاده بالنسبة للفراغ المحيط به صغيرة جداً، أو إذا كانت المسافات التي تقطعها نقط هذا الجسم خلال حركته كبيرة للغاية بالمقارنة مع أبعاده.

3-9- الجسم الصلب *Rigid Body*

الجسم الصلب هو الجسم الذي لا تحدث فيه أي تشوهات نسبية بين أي جزأين من أجزائه، أي أن المسافة بين أي نقطتين ضمنه تبقى ثابتة. هذه الفرضية مثالية، وعلمياً تتغير وتتشوه جميع الأجسام الصلبة الحقيقية بمقدار معين تحت تأثير القوى، لكن عندما يكون مقدار التغير في الشكل مهملاً إذا ما قورن بأبعاد الجسم الكلية، أو بتغيرات موضع الجسم ككل، يمكن عندها استعمال فرضية الجسم الصلب، دون الوقوع في أخطاء تذكر.

3-10- الكمية القياسية *Scalar*

أو **الكمية العددية**، وهي التي يعبر عنها بعدد من وحدات معينة ليس لها اتجاه فراغي مثل الزمن، درجة الحرارة، الطول، المساحة، الحجم، العمل، القدرة، الكثافة والكتلة، ولكل منها وحداته الخاصة كالساعة، والدقيقة، والثانية للزمن، وكالمتر المكعب للحجم، ونيوتن متر للعمل، والطاقة، ولا تتضمن هذه الكميات بطبيعتها معنى الاتجاه، وتخضع للعمليات الحسابية والجبرية، وسنستخدم رمز النقطة فوق الحرف لتشير إلى اشتقاق بالنسبة للزمن، أي: إن $\dot{x}$ تعني dx/dt و $\ddot{x}$ تعني d^2x/dt^2.

3-11- الكمية الشعاعية *Vector*

هي كمية يلزم لتحديدها تعيين الاتجاه بالإضافة إلى المقدار العددي، مثل السرعة، التسارع، الانتقال، القوة، الدفع وكمية الحركة، وكلها لا يتم التعرف عليها إلا بذكر نقطة تأثيرها، واتجاهها، وقيمتها العددية، وسنرمز للكمية الشعاعية بحروف غامقة، مثلاً $\boldsymbol{AB}$

4- قوانين نيوتن *Newton's Laws*

تعتمد دراسة علم التحريك أساساً على عدد من القوانين التي تعمم نتائج عدد كبير من التجارب، ومراقبة حركة الأجسام، وقد فحصت وبرهنت هذه القوانين خلال فترة زمنية طويلة من تاريخ الإنسان، وقد نشأت هذه القوانين من تعميم مشاهدات جوهان كبلر (*Johann kepler*) (1571-1630) وذلك نتيجة لمراقبته المباشرة لحركة الكواكب، ومن التجارب التي أجريت على حركة الأجسام الأرضية التي قام بها غاليلي، وأول من جمع ونظم هذه القوانين بشكل نهائي كان إسحاق نيوتن في عمله الكلاسيكي المسمى بالمبادئ الرياضية في الفلسفة الطبيعية (*Mathematical Principles of Natural Philosophy*)، الذي نشر في عام (1687)، وتسمى هذه القوانين أيضاً بقوانين علم التحريك، وهي ثلاثة:

4-1- القانون الأول - قانون العطالة *Inertia Law*

اكتُشِفَ قانون العطالة من قبل العالم غاليلي عام (1638)، وقد صاغه نيوتن كما يلي: يستمر الجسيم المادي الحر من أي تأثيرات خارجية في حالة السكون، أو في حالة الحركة المستقيمة المنتظمة، ولا يغير هذه الحالة إلا إذا طبقت عليه قوى غير متوازنة. تدعى حركة الجسيم دون تأثير أي قوى بحركة الجسيم دون قوى، أو بالحركة العطالية، أو الحركة بالعطالة (*Inertia Motion*)، ويبين هذا القانون تكافؤ حالة السكون وحالة الحركة بالعطالة.

يعطي قانون العطالة إحدى الصفات الرئيسية للمادة، وهي كونها دوماً في حالة الحركة المعادلة لحالة السكون. أي: إذا كانت ($\boldsymbol{F} = 0$) فالجسيم المادي يكون أما في حالة السكون أو أنه يتحرك بسرعة ثابتة القيمة والاتجاه، وواضح من ذلك أن تسارع الجسيم معدوم، ولا يحتاج الجسيم لأي عمل للمحافظة على الحركة العطالية.

نحتاج لأمثال هذه التأثيرات فقط لتغيير الحركة، ومن ذلك نستنتج أنه إذا كانت حركة الجسيم لا تنتج عن العطالة فقط، فلابد من وجود قوة ما تؤثر عليه.

4-2- القانون الثاني - القانون الأساسي بعلم التحريك
Fundamental Law of Dynamics

لقد اكتشف غاليليو أيضاً القانون الثاني، والذي يبين الطريقة التي تتغير بها سرعة الجسيم المادي بتأثير القوى، وينص على ما يلي:

إن حاصل جداء كتلة الجسيم المادي m بتسارعه $\boldsymbol{A}$ ، الذي يكتسبه من جراء تطبيق القوة يكون متناسباً مع القوة المطبقة $\boldsymbol{F}$ ، ويتجه التسارع في اتجاه القوة المطبقة نفسها.

يعبر هذا القانون رياضياً بالعلاقة الشعاعية التالية:

$$m \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \qquad (1)$$

والعلاقة العددية بين التسارع والقوة تكون:

$$m \,.\, A = F \qquad (2)$$

كما يمكن التعبير عن هذا القانون في صورة أخرى. إن معدل تغير كمية الحركة لجسيم مادي يساوي القوة المطبقة، أي: رياضياً:

$$\frac{d}{dt}\, m \,.\, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \qquad (3)$$

إن القانون الثاني لعلم التحريك مثله في ذلك القانون الأول فهو صالح فقط في مجموعة المقارنة العطالية، ونرى مباشرة من هذا القانون أن مقياس عطالة الجسيم المادي تكون كتلته m ، إذ أنه عند تطبيق قوة واحدة على جسيمين ماديين مختلفين، فإنهما سيكتسبان تسارعاً واحداً فقط في حالة كون كتلتيهما متساويتين. أما إذا كانت الكتلتان مختلفتين فالجسيم المادي ذو الكتلة الأكبر، أي: ذو العطالة الأكبر سيكتسب تسارعاً أصغر، والعكس صحيح.

إذا أثرت مجموعة من القوى المادية $\sum \boldsymbol{F}$ على جسيم مادي، فيمكن استبدالهم بمحصلتهم $\boldsymbol{R}$ ، التي تساوي الجمع الشعاعي لهذه القوى، بحيث كل قوة تكسب هذا الجسيم التسارع التي تكسبها له لو أثرت به وحدها، ويمكن كتابة القانون الأساسي في هذه الحالة على الصورة:

$$m.\boldsymbol{A} = \Sigma \boldsymbol{F} \qquad \Rightarrow \qquad m.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$$

يمكن تعيين كتلة جسم ما m بوساطة القانون الثاني، إذا عرفنا تسارعه في الحركة الانسحابية والقوة المطبقة عليه، ولقد برهن تجريبياً أنه بتأثير قوة الجاذبية الأرضية المساوية عدديا لوزن الجسم W ، فإن جميع الأجسام عند سقوطها الحر على الأرض من ارتفاع صغير نسبياً، وفي الفراغ الخالي من الهواء لهم التسارع نفسه g الذي يعرف بالتسارع الأرضي، أو تسارع السقوط الحر، فمن العلاقة العددية لقانون نيوتن:

$$m.g = W \qquad \Rightarrow \qquad m = W/g \qquad (4)$$

أي: أن كتلة الجسم تساوي حاصل تقسيم وزنه على تسارع الجاذبية الأرضية، ويتغير وزن الجسم كالمقدار g ، أما الكتلة فهي مقدار ثابت للجسم.

4-3- القانون الثالث - قانون الفعل ورد الفعل *Action and Reaction Law*

يبين هذا القانون طبيعة التأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام المادية، وينص من أجل جسيمين ماديين على الشكل التالي:

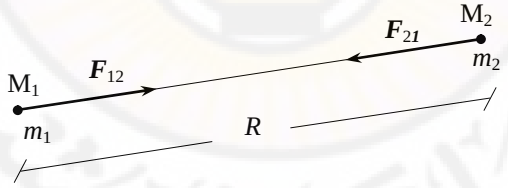
يؤثر الجسيمان الماديان كل منهما على الآخر بقوتين متساويتين في القيم تعمل في الاتجاهات المتعاكسة على المستقيم الواصل بينهما، أو بصورة مألوفة أكثر، لكل فعل رد فعل مساو ومعاكس له في الاتجاه، ويقع الاثنان على حامل واحد.

مما يجدر بالذكر أنه توجد حالات لقوى الجذب أو الدفع بين جسيمين لا تشكل مجموعة متوازنة، مثل قوى الجذب بين قطعة صغيرة من الحديد على مقربة من مغناطيس يقعان على سطح أملس تماماً، فإنهما سوف يتحركان بعضهما تجاه بعض تحت تأثير قوة التجاذب، ولا تبقى ساكنة مع العلم أن القوتين المؤثرتين على كل واحد من هذين الجسمين متساويتان في المقدار، وأن تسارع الجسمين يكون تبعاً للقانون الثاني لنيوتن متناسبين عكساً مع كتلتيهما.

يلعب القانون الثالث لنيوتن، والذي يبحث في القوى المتبادلة بين الأجسام المادية، دوراً مهماً في علم تحريك الجملة.

5- قانون الجاذبية *Gravitation Law*

أول من وضع قانون الجاذبية العام هو العالم نيوتن، وينص على أنه إذا عُزل جسيمان ماديان M_1 و M_2 عن كل تأثير خارجي في جملة مقارنة عطالية، وقدر الزمن بالثانية النجمية، أثر الجسيم الأول على الجسيم الثاني بقوة جاذبة تعمل على المستقيم الواصل بين الجسيمين، وتتناسب شدتها طرداً مع كتلتي الجسيمين، وعكساً مع مربع البعد بينهما، كما في الشكل التالي:



فالقانون يعبر عن:

قوة تأثير الجسيم M_2 على الجسيم M_1 بالعلاقة:

$$F_{21} = -\frac{G_2}{R^2} m_1 . m_2$$

وقوة تأثير الجسيم M_1 على الجسيم M_2 بالعلاقة:

$$F_{12} = \frac{G_1}{R^2} m_2 . m_1$$

حيث:

F تمثل قوة التجاذب المتبادلة بين الجسيمين الماديين.

R تمثل المسافة بين مركزي الجسيمين.

G تمثل ثابت عام يعرف بثابت الجاذبية، أو ثابت الثقالة.

m_1 و m_2 تمثل كتلتي النقطتين الماديتين.

بالاستناد إلى قانون الفعل ورد الفعل يكون:

$$\boldsymbol{F_{21}} = -\boldsymbol{F_{12}}$$

بالتالي:

$$G_2 = G_1 = G$$

ولقد بينت التجارب أن قيمة ثابت الجاذبية في الجملة ($C.G.S$) تساوي إلى:

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg.sec}^2)$$

ومنه قوة التجاذب:

$$F = \frac{G}{R^2}\, m_1 . m_2 \qquad (5)$$

توجد قوى التجاذب بين أي زوج من الأجسام، إلا أنه على سطح الأرض تكون القوة الناتجة عن الجاذبية الأرضية ذات قيمة أكبر، لذا تهمل بجانبها قوى التجاذب الأخرى كافة.

مثلاً إذا كان لدينا كرتان من الحديد قطر كل منهما (10 cm)، تنجذب كل منهما نحو الأرض بقوة مقدارها (37.9 N) تقريباً، والتي تعرف بالوزن، من ناحية أخرى فإن مقدار قوة التجاذب بينهما إن تماستا فقط تساوي (9.9×10^{-8} N)، لذا يبدو واضحاً أن هذه القوة مهملة تماماً بالمقارنة مع قوة جذب الأرض.

لذا فإننا في التجارب التي تجري على سطح الأرض سنأخذ في الاعتبار قوة الجاذبية الأرضية فقط مهما كانت قيمتها، وإذا كانت مؤثرة على الجسم تكون وزنه، وتعتمد قيمتها على موضعها بالنسبة للأرض. إلا أن حركة الصواريخ في الارتفاعات الكبيرة، والسفن الفضائية، والأقمار الصناعية، تعتمد على تغير قوة الجاذبية بالنسبة لمواضعها.

إن كل جسم يترك ليسقط في الفراغ من موضع معين من على سطح الأرض، سيكون له تسارع ناشئ بفعل الثقالة، يرمز له بـــ g ، وإن غاليلي عدّ قيمة هذا التسارع الأرضي ثابتة؛ نظراً لعدم وجود الأجهزة الدقيقة في ذلك الوقت، غير أنه في الواقع تختلف قيمة هذا التسارع من مكان لآخر على سطح الأرض، فهي تعتمد على وجودها على خط العرض الأرضي، وعلى ارتفاعها عن سطح البحر، وقيمته تنتج من حل المعادلتين (2) و (5) وحذف كتلة الجسم الساقط:

$$g = \frac{G.m_0}{R_0^2}$$

حيث R_0 تمثل نصف قطر الكرة الأرضية:

$$R_0 = 6.371 \text{ x } 10^6 \text{ m}$$

و m_0 تمثل كتلة الأرض:

$$m_0 = 5.976 \text{ x } 10^{24} \text{ kg}$$

بتبديل هاتين القيمتين وأيضاً قيمة G المذكورة سابقاً في علاقة g ، نحصل على:

$$g = 9.814 \text{ m/sec}^2$$

يقاس تسارع الجاذبية الأرضية المطلق المعين بالقانون العام للجاذبية، بدلالة مجموعة للإحداثيات تنطبق نقطة الأصل فيها على مركز الأرض، على أنها ثابتة لا تدور مع الأرض، ولكن الحقيقة أن الأرض غير ثابتة وإنما تدور، بالتالي فإن قيمة تسارع السقوط الحر للأجسام؛ التي تقاس من موضع مرتبط مع سطح الأرض، سيكون أقل بمقدار طفيف عن القيمة المطلقة.

يعين الفرق في g نسبة للارتفاع بوساطة قانون الثقالة، فإذا مثلت g_0 التسارع المطلق الناتج عن الثقالة عن سطح البحر فإن القيمة المطلقة عند ارتفاع قدره h هو:

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

6- مجموعات الوحدات *Systems of Units*

يستخدم المتر (*meter*) m كوحدة للطول، والثانية (*Second*) sec كوحدة للزمن، وهاتان الوحدتان تكفيان لعلم الحركة.

لكن لقياس الكميات التحريكية، من الضروري اختيار مجموعة لقياس الكتلة m (*Mass*)، أو القوة F (*Force*) ولا يمكن أن تكون هذه المجموعات اختيارية. بالتالي يمكننا وفق القانون الثاني لعلم التحريك استخدام مجموعتين للقياس تعتمدان على مبدأين مختلفين.

6-1- المجموعة المطلقة *Absolute System*

في هذه المجموعة تُعَدُّ وحدة الطول هي المتر m ، وحدة الزمن هي الثانية sec ، ووحدة الكتلة هي الكيلو غرام كتلي kg كوحدات أساسية، وتقاس القوة بوحدة مشتقة تعين من القانون الثاني:

$$F \Rightarrow \text{kg.m/sec}^2$$

في هذه المجموعة (*M.K.S.A*) فإن وحدة القوة هي النيوتن (*Newton*)، وهي القوة التي تكسب جسماً كتلته 1 kg تسارعاً مقداره $1\ \text{m/sec}^2$ أي:

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg.m/sec}^2$$

دعيت هذه المجموعة بالمجموعة المطلقة لاعتبار الكتلة كمية مطلقة أو أساساً، وتعرف بجملة الوحدات العالمية المترية (*International System of Units*) (*SI Units*)، والمجموعة المماثلة لها مجموعة (*C.G.S*) التي تستخدم كثيراً من قبل الفيزيائيين، وتدعى أيضاً بالمجموعة الفيزيائية، حيث وحدة الطول هي السنتمتر cm ، ووحدة الزمن هي الثانية sec ، ووحدة الكتلة هي الغرام الكتلي gm ، وتكون وحدة القوة هي الدينة Dyne.

6-2- المجموعة الفنية *Technical System*

في هذه المجموعة تُعَدُّ وحدة الطول هي المتر m ، ووحدة الزمن هي الثانية sec ، ووحدة القوة هي الكيلو غرام قوة kgf كوحدات أساسية، وتقاس الكتلة بوحدة مشتقة تعين من القانون الثاني:

$$m : \text{kgf. sec}^2/\text{m}$$

وهي الكتلة التي أثرت عليها قوة مقدارها 1 kgf تكسبها تسارعاً مقداره $1\ \text{m}/\text{sec}^2$.

تدعى هذه المجموعة أيضاً بالمجموعة التثاقلية (*Gravitational System*)؛ لأن القوة فيها المقاسة من شدة الثقالة اتخذت وحدة أساسية.

يستخدم المهندسون هذه المجموعة؛ لأن في معظم تجاربهم يتم قياس القوة مباشرةً.

أما العلاقة بين وحدة القوة في المجموعتين فهو:

$1\ \text{N} = 10^5\ \text{Dyn} = 0.102\ \text{kgf}$ و $1\ \text{kgf} = 9.81\ \text{N} = 981.10^3\ \text{Dyn}$

7- وصف مسائل علم التحريك *Description of Dynamic Problems*

إن غاية علم التحريك، هي فهم ووصف الكميات المختلفة التي تدخل في حركة الأجسام، ويمكن بوساطة هذا التفهم التنبؤ بسلوك الجسم التحريكي؛ لذلك فمن الضروري عند دراستنا لحركة ما في مسألة معينة، أن نأخذ في الاعتبار موضوعين، الحالة الفيزيائية، ومن ثم الوصف الرياضي الموافق لها.

نحتاج غالباً عند حلنا لإحدى المسائل الانتقال باستمرار بين الحالتين الفيزيائية والرياضية، وبالاتجاهين، وعدم إمكانية الطلاب القيام بسهولة بهذا العمل يشكل إحدى العقبات الرئيسية التي يصادفونها؛ لذا يجب على الطالب منذ الآن أن يعرف الحقيقة التالية:

إن التمثيل الرياضي لمسألة فيزيائية ما، هو وصف مثالي محدود، لا يصل أبداً إلى الحالة الفيزيائية الحقيقية، وسبب ذلك مرده إلى أننا نأخذ بعين الاعتبار عدداً من الفرضيات، وبعض التقريب أثناء التمثيل والبناء الرياضي المثالي، والتي تُوصلنا إلى إنشاء الحالة التقريبية، مثلاً نهمل في بعض الأحيان بعض القوى والزوايا والمسافات إذا كانت قيمتها صغيرة بالمقارنة مع قوى وزوايا ومسافات أخرى كبيرة، وإذا كان تغير سرعة جسم ما مع الزمن تقريباً منتظماً؛ يمكن أن نفترض في هذه الحالة أن قيمة التسارع ثابتة.

أما إذا لم نتمكن من وصف الحركة الكلية لجسم ما بسهولة، فإننا نقسمها إلى أجزاء صغيرة تمكن من عملية التقريب، مثلاً يمكن إهمال تأثير قوى الاحتكاك في محور دوران على الحركة الدورانية الناتجة عن قوى أو عزوم خارجية مطبقة، إذا كانت قوى الاحتكاك هذه صغيرة، ولكن لا يمكن إهمال قوى الاحتكاك عندما نريد حساب انخفاض مردود آلة ما بسبب عمل قوى الاحتكاك.

إن درجة الفرضيات التي تدخل في مسألة ما، تعتمد على نوعية المعلومات التي نرغب في تعيينها، ودقتها، وعلى ذلك فيجب أن يكون الطالب ملماً بمختلف الفرضيات اللازمة أثناء حل أي مسألة هندسية، وتُعد قابلية تفهم واستعمال الفرضيات المناسبة أثناء دراسة وتحليل أي مسألة هندسية، صفة من أهم صفات المهندس الناجح، وإن إحدى الأهداف الرئيسية لهذا الكتاب هي تطوير قابلية الطالب لتشكيل النموذج والعلاقة الرياضية الصحيحة لحالة فيزيائية معطاة، عن طريق شرح مبادئ وطرق تحليل علم التحريك، ويكتسب الطالب الخبرة نتيجة دراسته، وحله العدد الكبير من المسائل العلمية، وهذه الخبرة توصله إلى اختيار الفرضيات المناسبة، واختيار أكثر طرق الحل ملاءمةً.

من المعروف أن بداية الحل الصحيح وأسلوبه ضروري جداً في أي مسألة هندسية، ويجب أن يتابع الطالب بقية الحل بخطوات متسلسلة معقولة مع ما تتضمنه من الفرضيات، إلى أن يصل بحله إلى الاستنتاجات. ويمكن تجزئه حل أي مسألة إلى الخطوات التالية: معطيات المسألة - النتيجة المطلوبة - المخططات والأشكال الضرورية - العمليات الحسابية - الأجوبة والاستنتاجات.

مع الحرص على كون كل واحدة منها واضحة تماماً، كما ويجب على الطالب أن يقوم باختيار صحة حساباته وأجوبته، ودقتها، وخصوصاً عند حصوله على أرقام غير مقبولة، وعليه أن يتأكد دوماً من تجانس الوحدات المختلفة التي يستعملها في جميع العلاقات.

من الضروري أن يعتاد الطالب على ترتيب عمله واتقانه؛ إذ أن الحلول مهما كانت تفقد قيمتها عند خلوها من الترتيب، وخصوصاً عند تعذر قراءتها بسهولة، وسيجد الطالب أن الترتيب الجيد سيساعده تلقائياً على تطوير قابليته وزيادتها لمعالجة وتحليل المسائل، إذ تبدو كثير من المسائل صعبة ومعقدة في الوهلة الأولى، ولكن يصبح حلها متسلسلاً وواضحاً بدراستنا لها بأسلوب منتظم وخطوات متقنة.

هذا ونرى - في أبحاثنا النظرية - أن علم التحريك يعتمد ويقوم بكامله على عدد من المبادئ الرئيسية والمفاهيم، التي ينتج عنها - كما سنرى - عدد قليل من العلاقات والمعادلات، إلا أنها مع قلتها تمتد وتطبق على مجال واسع جداً، وللخبرة أهمية كبيرة جداً في التحليل والدراسة، بل وتُعدّ إحدى الصفات المميزة لدراسة علم التحريك، ولا نحصل على هذه الخبرة بخزن معادلات وعلاقات الحركة والتحريك وحفظها فقط، وإنما أثناء دراسة وحل عدد كبير ومتنوع من المسائل بحالات مختلفة ولشروط مختلفة أيضاً، وهو ما يجبر على معرفة اختيار ما يناسب كل حالة من الحالات واستعماله من المبادئ الأساسية.

تعتمد دراستنا - كما سبق وذكرنا ذلك - على وصف وإيجاد العلاقات الصحيحة بين القوى المطبقة والحركات التي تنتجها هذه القوى في مجموعة معينة، فمن الضروري أن نعين في البداية - بشكل واضح - المجموعة، مثلاً نعدّ في حالات معينة الجسيم المادي بمفرده أو الجسم الصلب وحده كمجموعة نعزلها لنقوم بدراستها، وفي حالات أخرى فإننا نعدّ عدداً من الجسيمات المادية أو جسمين صلبين أو أكثر معا تؤلف المجموعة.

بعد تحديد المجموعة نعينها بصورة أوضح عن طريق رسم مضلع الجسم الحر (*Free Body Diagram*)، ويتم ذلك عند فصل المجموعة عن كل ما يحيط ويتصل بها من أجسام وأجزاء، والتي تستبدل برسم تأثيرها على المجموعة والممثلة بسهم القوة. أي أن القوة الممثلة بسهم يمثل أثر العنصر المفصول على المجموعة المعزولة، ونفرق في هذه الطريقة بين فعل ورد الفعل لكل قوة، ونأخذ بعين الاعتبار القوى كافة التي تؤثر على المجموعة. هذا وإن الطالب قد اعتاد على رسم أمثال تلك المخططات الحرة خلال دراسته لعلم السكون.

ويمكن أن يتم حل أي مسألة بطريقتين:

1. باستخدام القيم العددية مباشرة في عمليات الحل.

2. باستخدام رموز تمثيل مختلف الكميات، حيث يترك في هذه الطريقة جواب المسألة على شكل علاقة، ويمكن تبديل القيم العددية للحدود كافة مكان الرموز في أي مرحلة من مراحل الحسابات، إضافةً لذلك فإن لهذه الطريقة عدة مزايا عن الطريقة الأولى، وهي:

- الاختصار الذي نحصل عليه باستخدام الرموز الذي يساعد في الانتباه، ومن ثم تفهم العلاقة بين الحالة الفيزيائية والعلاقة الرياضية التي تصفها.
- اختيار تجانس وحدات العلاقة في أي مرحلة من مراحل الحل بسهولة، بينما يتعذر ذلك عند استعمال الحل العددي.
- إمكانية أن يشكل الحل بالرموز الحل العام لمسألة ما، حيث يمكن استعماله عدة مرات من أجل إيجاد أجوبة المسألة نفسها؛ باستعمال مجموعات ومعطيات جديدة.

يجب على الطالب أن يعتاد على كلا الحلين، ولا يتم له ذلك إلا بكثرة التمرين، وسيجد أن حلولاً لمختلف معادلات علم التحريك يمكن أن تتم بإحدى الطرق الثلاث التالية:

- الحل الرياضي المباشر عن طريق الحسابات اليدوية عندما يكون ذلك ممكناً، وعند كون الجواب المطلوب على شكل رموز جبرية، أو قيم عددية. يدخل ضمن هذه الفئة معظم المسائل التحريكية.
- الحل البياني، ويكون ذلك ممكناً وسهلاً في بعض المسائل. مثلاً عند تعيين السرعة والتسارع في الحركة النسبية لجسم صلب يتحرك حركة مستوية.
- الحل باستخدام الحاسبات الإلكترونية (*Computers*) في حل بعض المسائل، وهي طريقة حديثة قد تمكن من حل مسائل كان من المتعذر حسابها بالطرق الأخرى، إلا أن هذه الطريقة - وعلى مستوى كليتنا - غير متوفرة في الوقت الحاضر.

الفصل الأول

تحريك الجسيم المادي *Kinetics of Particle*

1- مقدمة *Introduction*

تقود دراسة تحريك الجسيم المادي أو ما يدعى بـــ الجزيء فيزيائياً، نحو فهم ووصف حركته إلى تحديد نوع هذه الحركة، حيث هناك نوعان من أنواع حركة الجسيم:

- النوع الأول خاص بالحركة غير المقيدة، حيث يكون الجسيم حراً من القيود الميكانيكية، ويتبع مساراً يتعين بحركته الأولية، وبتأثير القوى الفاعلة عليه، ومن أمثلة هذه الحركة: انطلاق طيارة، أو صاروخ، أو حركة إلكترون في حقل مشحون.

- النوع الثاني خاص بالحركة المقيدة، حيث يحدد المسار جزئياً أو كلياً بقيود مقيدة، ومن أمثلة التقيد الجزئي تدحرج كرة بتقيد جزئي من الأرض، ومن أمثلة التقيد الكلي للحركة قطار يسير على سكته المعدنية، أو جلبة تنزلق على محور ثابت، يمكن أن تكون بعض القوى المؤثرة على الجسيم خلال حركته المقيدة مصدرها خارجي، بينما قد يكون بعضها الآخر ردود الفعل على الجسيم من وسائل القيد، عندئذ يجب اعتبار جميع القوى، سواء كانت فاعلة أو ردود فعل، قوى مؤثرة على الجسيم.

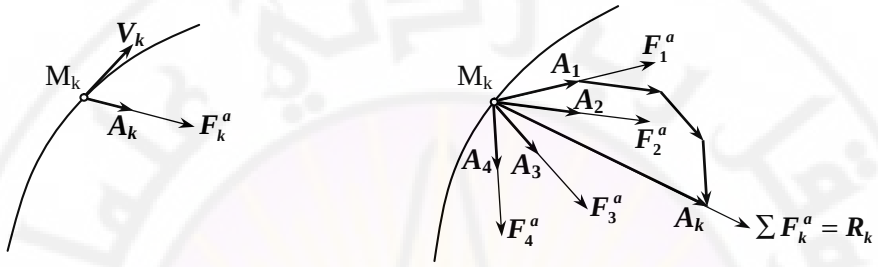
2- العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المادي الحر
Fundamental Law of Dynamics of an Independent Particle

يتحرك الجسيم المادي الحر M_k بحركة متسارعة عندما يخضع إلى مجموعة من القوى غير المتزنة، وإن العلاقة الرئيسية بين القوى والتسارع أعطاها نيوتن في شكل قانونه الثاني للحركة، وينص بأن تسارع الجسيم المادي $\boldsymbol{A_k}$ يتناسب مع القوة الفاعلة $\boldsymbol{F_k^a}$ (*Active Force*) المؤثرة عليه، وينطبق على حامل هذه القوة، كما هو موضح في a من (الشكل-1-1)، وعامل التناسب هو كتلة الجسيم المادي m_k ، ومنه:

$$m_k \,.\, \boldsymbol{A_k} = \boldsymbol{F_k^a} \qquad (1\text{-}1)$$

مَثَّل المتجه $m_k \,.\, \boldsymbol{A_k}$ الناتج عن جداء تسارع الجسيم المادي بكتلته عموماً القوة الديناميكية (*Dynamics Force*)، أي القوة التحريكية، أو ما يطلق عليها بـــ القوة الفعالة (*Effective Force*) للجسيم المادي.

لا تبحث العلاقة السابقة في حركة الجسيم المادي الحر قبل أن تؤثر فيه القوة المدروسة، فتسارع الجسيم المتولد من قوة معطاة مستقل عن حركته قبل تأثير القوة، فإذا أثرت قوة معطاة في جسيم مادي ولدت فيه التسارع نفسه، سواء كان الجسيم المادي ساكناً أو متحركاً، ومهما كان منحى حركته.



b- جسيم M_k يخضع إلى مجموعة من القوى الفاعلة R_k . ، a- جسيم M_k يخضع إلى قوة فاعلة F_k^a .

(الشكل-1-1)

كذلك لا تبحث هذه العلاقة في عدد القوى الفاعلة في الجسيم المادي، فإذا أثرت جملة من القوى المتلاقية في جسيم مادي F_1^a , F_2^a , F_n^a، الموضحة في b من (الشكل-1-1)، فإن كل قوة في هذه الجملة تولد في الجسيم المادي التسارع الذي تولده؛ لو أنها أثرت فيه منفردةً. فالتسارع الحاصل A_k للجسيم المادي هو إذاً المجموع الهندسي للتسارعات التي تولدها كل قوة من القوى الفاعلة فيه منفردةً، وبما أن التسارع المتولد من كل قوة من القوى محمول على حامل القوة الفاعلة، ومتناسب معها، فإن التسارع الحاصل محمول على حامل القوة الحاصلة R_k ومتناسب معها أيضاً، ومنه:

$$m_k . A_k = \sum F_k^a = R_k \qquad (2\text{-}1)$$

حيث $(\sum F_k^a = R_k)$ تمثل المجموع الهندسي للقوى الفاعلة المؤثرة على الجسيم المادي M_k .

إن العلاقتين (1-1) و (2-1) تحددان العلاقة بين التسارع، أي: الكمية المميزة لحركة الجسيم وبين القوة المؤثرة على هذا الجسيم، بالتالي فإنهما تساعدان في حل المسائل العامة لتحريك الجسيم المادي الحر، وهي على نوعين:

- النوع الأول هو أن يكون تسارع الجسيم معلوماً، والمطلوب إيجاد القوة اللازمة لتوليد الحركة المعطاة. إن مسائل هذا النوع سهلة جداً ولا يزيد حل كل حالة خاصة فيها على أن نعوض القيمة العددية للتسارع الناتج من حسابات حركية بحتة، أو من معادلة حركة الجسيم، في العلاقة الأساسية للتحريك للحصول على القوة المجهولة.

- النوع الثاني هو أن تكون القوة معطاة، إضافة للشروط الابتدائية للحركة، والمطلوب إيجاد معادلة حركة الجسيم، إن مسائل هذا النوع أكثر صعوبة من النوع الأول؛ لأنها تحتاج إلى تكامل العلاقة الأساسية للتحريك مرتين لإيجاد معادلة السرعة، ومن ثم معادلة الحركة، وهو أمر لا يمكن التوصل إلى حله حلاً كاملاً في الحالات كلها؛ لذا يمثل هذا النوع من مسائل التحريك مكاناً رئيسياً، وتُعدّ المسألة الأساسية في التحريك لأهميتها العملية.

3- العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المادي المقيد

Fundamental Law of Dynamics of a dependent Particle

إن حركة الجسيم المادي المقيد هي الحالة التي يضطر الجسيم فيها إلى الحركة على سطح أو منحنٍ ثابتين ومعلومين نتيجة لبعض القيود الموضوعة عليه، وفي هذه الحالة ينبغي التحري عن قوى القيد، أو قوى الاتصال، ويمكن عَدّ أي جسيم مادي مقيد كجسيم حر وذلك بالتخلص من القيد، واستبدال تأثيره برد فعله $\boldsymbol{N_k}$. حينئذ تتخذ العلاقة الأساسية للتحريك في حالة حركة الجسيم المقيد:

$$m_k \,.\, \boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F_k^a} + \boldsymbol{N_k} \qquad (3\text{-}1)$$

حيث $\sum \boldsymbol{F_k^a}$ تمثل المجموع الهندسي للقوى الفاعلة المؤثرة على الجسيم المادي، وتساعد العلاقة في حل المسائل العامة لتحريك الجسيم المقيد، وهي على نوعين:

- النوع الأول هو أن تكون محصلة القوى الفاعلة المؤثرة على الجسيم المادي، ومعادلة حركته معطاة، ويكون المطلوب إيجاد رد فعل القيد.

- النوع الثاني هو أن تكون محصلة القوى الفاعلة المؤثرة على الجسيم المادي، ورد فعل القيد معطاة، ويكون المطلوب إيجاد معادلة حركة الجسيم المادي.

يمكن تطبيق نتائج دراسة تحريك الجسيم على الحركة الانسحابية للجسم الصلب، لأن جميع جسيماته تقوم بنفس الحركة، ويمكن اعتباره جسيم متمركز في مركز ثقله، وسنوضح النوع الأول من مسائل تحريك الجسيم الحر، والمقيد بالأمثلة التالية:

مسألة-1-1

يهبط منطاد وزنه الكلي W سقوطاً شاقولياً بتسارع قدره A . المطلوب تعيين الوزن الاحتياطي P الذي يجب التخلص منه حتى يبدأ المنطاد بالارتفاع بقيمة التسارع A نفسه.

الحل:

يحدد الوزن P بتطبيق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم الحر على المنطاد الهابط قبل إلقاء الوزن الاحتياطي P ، والخاضع كما هو مبين في a من (الشكل1-2)، للقوتين الفاعلتين القوة الرافعة، أو دافعة أرخميدس $\boldsymbol{F}$ التي تمثل وزن حجم الهواء المزاح، ولوزنه الكلي $\boldsymbol{W}$ المتضمن الوزن الاحتياطي:

$$\frac{W}{g}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{F}$$

بإسقاطها على منحى التسارع باتجاه التسارع:

$$\frac{W}{g}A=W-F$$



b- مخطط الجسم الحر للمنطاد الصاعد. a- مخطط الجسم الحر للمنطاد الهابط.

(الشكل-1-2)

وعندما يلقى بالوزن الزائد $\boldsymbol{P}$ ، يصبح وزن المنطاد مساوياً لـــ $(W–P)$، وتظل القوة الرافعة كما هي، كما هو مبين في b من (الشكل-1-2). عندئذ وبالأخذ بالحسبان أن المنطاد يتحرك عند ذلك نحو الأعلى، نحصل بإسقاط العلاقة الأساسية لهذا الوضع على منحى التسارع باتجاه التسارع على:

$$(W-P)A/g=F-(W-P)=F-W+P$$

علاقتين بمجهولين P و $\boldsymbol{F}$ ، بحلهما نحصل على:

$$P=2W.A/(A+g) \qquad \Leftrightarrow \qquad F=W(g-A)/g$$

مسألة-1-2

إذا طبق على جسيم ساكن كتلته 1 kg موضوع على مستو أفقي أملس قوة $\boldsymbol{F}$ ثابتة، فأكسبته بعد مضي 20 sec سرعة مقدارها 5 m/sec .

المطلوب تعيين مقدار هذه القوة.

الحل:

تحسب القوة الفاعلة $\boldsymbol{F}$ بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة القيد $\boldsymbol{N}$ ، والقوة الفاعلة $\boldsymbol{F}$:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}$$

بما أن القوة الفاعلة $\boldsymbol{F}$ ثابتة، والجسيم كان ساكناً ($V_0 = 0$) قبل تأثير القوة، فحركة الجسيم هي حركة مستقيمة متسارعة بتسارع قدره $\boldsymbol{A}$.

بإسقاط العلاقة الأساسية على منحى التسارع باتجاه التسارع:

$$m\,.\,A = F$$

حيث التسارع ثابت، ويحسب من معادلة الحركة المستقيمة المتسارعة:

$$V = A\,.\,t + V_0$$

منه بالتعويض:

$$A = V/t = 5/20 = 0.25\ \mathrm{m/sec^2}$$

بالتعويض في علاقة القوة الفاعلة؛ نحصل على:

$$F = 0.25\ \mathrm{N}$$

مسألة-1-3

يتحرك جسيم كتلته 0.4 kg موضوع على مستو أفقي أملس تحت تأثير قوة $\boldsymbol{F}$ ، حركة توافقية على المحور OX وفق المعادلة:

$$x = 20\sin\frac{p}{2}t$$

المطلوب تعيين معادلة القوة الفاعلة $F_{(x)}$ المؤثرة على الجسيم كتابع للإحداثي x .

الحل:

تعين القوة الفاعلة $\boldsymbol{F}$ بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة القيد $\boldsymbol{N}$ ، والقوة الفاعلة $\boldsymbol{F}$:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}$$

بإسقاطها على محور الحركة X :

$$m\,.\,A_{\mathrm{X}} = F_{\mathrm{X}}$$

ما أن حركة الجسيم مستقيمة، فالسرعة والتسارع محمولان على محور الحركة، ويحسبان من اشتقاق معادلة الحركة:

$$V_{\mathrm{X}} = \dot{x} = 10\,p\,.\cos\frac{p}{2}t$$

وباشتقاقها مرة ثانية:

$$A_{\mathrm{X}} = \ddot{x} = -5\,p^{2}.\sin\frac{p}{2}t$$

بالتعويض في معادلة القوة:

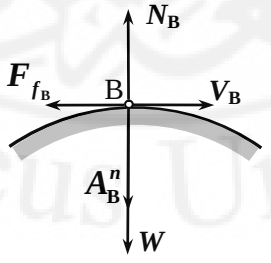
$$F_{\mathrm{X}} = -\,0.4\,(5\,p^{2}\cdot\sin\frac{p}{2}t) = -2\,p^{2}\cdot\sin\frac{p}{2}\,t = -\,0.1\,p^{2}\cdot x$$

نلاحظ أن القوة المؤثرة على الجسيم تتغير متناسبة مع بعدها x عن المركز O ، أي:

$$F_{(x)} = -\,0.1\,p^{2}\cdot x$$

مسألة4-1

إذا كان نصف قطر انحناء الجسر المبين في (الشكل-1-3) عند ذروته B يساوي R . المطلوب تعيين قوة الضغط N_{B} الذي تحدثه سيارة كتلتها m تتحرك بسرعة $\boldsymbol{V}$ على الجسر عند الموضع B .



(الشكل-1-3) سيارة تتحرك على جسر منحني.

الحل:

إن القوى التي تؤثر على السيارة عند الموضع B هي $\boldsymbol{W}$ قوة الجاذبية، و $\boldsymbol{N}_{\mathbf{B}}$ قوة الضغط، أو قوة القيد الناظمية، و $\boldsymbol{F}_{f_{\mathbf{B}}}$ قوة الاحتكاك أو قوة القيد المماسية، وبتكوين العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد عند الموضع B :

$$m\,.\,\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{N}_{\mathbf{B}}+\boldsymbol{F}_{f_{\mathbf{B}}}$$

بإسقاطها على منحى وباتجاه التسارع الناظمي:

$$m\,.\,A_{\mathrm{B}}^{n}=W-N_{\mathrm{B}}$$

منه قوة الضغط الذي تحدثه السيارة:

$$N_{\mathrm{B}}=m\,.\,g-m\,.\,\frac{V_{\mathrm{B}}^{2}}{R}\qquad\Rightarrow\qquad N_{\mathrm{B}}=m\,(\,g-\frac{V_{\mathrm{B}}^{2}}{R}\,)$$

مسألة-1-5

يتحرك جسيم كتلته 3 kg على مسار منحن وفق المعادلة:

$$s=8\,\sin\frac{t}{2}$$

حيث تقاس المسافة s بالمتر والزمن t بالثانية. المطلوب:

تعيين محصلة القوى المطبقة عليه R في اللحظة التي تصبح سرعته 2 m/sec ، عندها كان نصف قطر انحناء المسار يساوي 2 m .

الحل:

لإيجاد محصلة القوى $\boldsymbol{R}$ نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم في اللحظة المطلوبة:

$$m\,.\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}$$

ونحصل على مركبات القوة $\boldsymbol{R}$ من إسقاط العلاقة الأساسية على مناحي مركبات التسارع باتجاه هذه المركبات:

$$m\,.\,A^{n}=R^{n}\qquad,\qquad m\,.\,A^{t}=R^{t}$$

حيث التسارع الناظمي للجسيم يساوي إلى:

$$A^n = \frac{V^2}{r} = 2 \ \mathrm{m/sec^2}$$

والتسارع المماسي له يساوي إلى:

$$A^t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4\cos\frac{t}{2}) = -2\sin\frac{t}{2}$$

ولحساب الزمن الموافق للسرعة ($V = 2$ m /sec)، لدينا:

$$V = 4\cos\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 = 4\cos\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}p$$

منه التسارع المماسي:

$$A^t = -2\sin\frac{p}{3} = -\sqrt{3} \ \mathrm{m/sec^2}$$

بالتعويض في مركبات القوة؛ نحصل على:

$$R^n = m\,.\,A^n = 6 \ \mathrm{N} \quad ، \quad R^t = m\,.\,A^t = -3\sqrt{3} \ \mathrm{N}$$

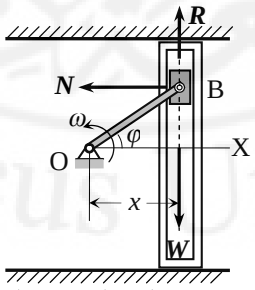
منه القوة المطبقة:

$$R = (R_n^2 + R_t^2)^{1/2} = 7.94 \ \mathrm{N}$$

مسألة-1-6

يدور مرفق OB طوله l بانتظام بسرعة زاوية ω ، فيحرك عبر المنزلقة B ذراعاً مشقوقاً وزنه W حركة انسحابية على امتداد المجرى الأفقي، كما هو موضح في (الشكل-1-4).

المطلوب، بإهمال الاحتكاك، تعيين المقدار N ضغط المنزلقة B على الذراع المشقوق.



(الشكل-1-4) المرفق OB يدور ليحرك عبر المنزلقة B ذراع مشقوق.

الحل:

إن القوى التي تؤثر على الذراع المشقوق في أي موضع اختياري هي $\boldsymbol{W}$ قوة الجاذبية، $\boldsymbol{N}$ ضغط المنزلقة، و $\boldsymbol{R}$ رد فعل المجرى، وبتكوين العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد على الذراع:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{R}$$

بإسقاطها على المحور OX ؛ نحصل على:

$$-m\,.\,A_{\mathrm{X}} = -N_{\mathrm{X}}$$

منه علاقة ضغط المنزلقة:

$$N_{\mathrm{X}} = \frac{W}{g} A_{\mathrm{X}}$$

لحساب A_{X} تسارع الذراع الذي يتحدد وضعه على محور الحركة بـــ:

$$x_{\mathrm{B}} = l\,.\cos j$$

حيث φ زاوية دوران المرفق، وتتحدد من معادلة الحركة الدورانية له:

$$j = w\,.\,t$$

منه معادلة حركة الذراع المشقوق:

$$x_{\mathrm{B}} = l\,.\cos w\,t$$

ومنه تسارع الذراع المشقوق:

$$A_{\mathrm{X}} = \ddot{x}_{\mathrm{B}} = -\,l\,.\,w^2.\cos w\,t = -\,w^2.\,x_{\mathrm{B}}$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه التسارع معاكس لاتجاه المحور X كما في الفرض، منه معادلة ضغط المنزلقة على الذراع المشقوق:

$$N_{\mathrm{X}} = -\frac{W}{g} w^2\,.\,x_{\mathrm{B}}$$

نلاحظ أن ضغط المنزلقة على الذراع المشقوق يتغير متناسباً مع بعده x عن المركز O .

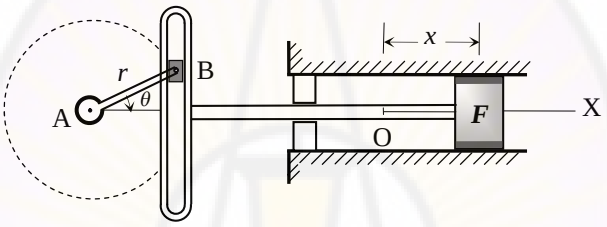
$$N_{(x)} = -\frac{W}{g} w^2\,.\,x_{\mathrm{B}}$$

مسألة-1-7

يدور المرفق ($AB = r = 25$ cm) الموضح في (الشكل-1-5) بعدد دورات ثابتة قدرها (n =120 r.p.m). فيحرك عبر المنزلقة B مكبساً، وذراع توصيل بحركة انسحابية على امتداد المجرى الأفقي.

إذا كان وزن المكبس وذراع التوصيل يساوي إلى ($W = 50$ N). المطلوب تعيين مقدار القوة المحصلة F الفاعلة في المكبس في الحالتين:

1. عندما يكون المكبس في وضعه الأقصى.
2. عندما يكون المكبس في وضعه الأوسط.



(الشكل-1-5) المرفق AB يدور ليحرك عبر المنزلقة B مكبس على امتداد المجرى الأفقي.

الحل:

تعين محصلة القوى الفاعلة في المكبس $\boldsymbol{F}$ ، بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك عليه:

$$m \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$$

نعدّ O مبدأ المحور X يقع على محور ذراع التوصيل في الوضع؛ الذي يكون فيه المرفق شاقولياً، ونحصل بإسقاط العلاقة على محور الحركة على:

$$F_X = m \,.\, \ddot{x}$$

يعين التسارع $\ddot{x}$ من تحديد وضع المكبس بالإحداثية:

$$x_{(q)} = r \,.\, \cos q$$

التي تدل على أن حركة المكبس هي حركة توافقية بسيطة.

بما أن حركة دوران المرفق دورانية منتظمة، منه:

$$q = w \,.\, t$$

حيث ω السرعة الزاوية:

$$w = 2p \,.\, n / 60 = 4p \ \text{rad/sec}$$

بالتالي، فإن معادلة حركة المكبس وذراع التوصيل هي من الشكل:

$$x_{(t)} = r.\cos wt$$

وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة.

بالاشتقاق مرتين لمعادلة الحركة:

$$\ddot{x} = -r.w^2.\cos wt$$

بالتعويض في معادلة القوة:

$$F_{(x)} = -\frac{W}{g} r.w^2.\cos wt = -\frac{W}{g} w^2.x$$

تبين لنا هذه النتيجة أن القوة الحاصلة الفاعلة هي تابع للمسافة، أي: تابع للزمن، ويبين لنا الشكل أيضاً أنه:

- عندما يكون المكبس في وضعه الأيسر الأقصى، فإن الزاوية:

$$q = wt = ip$$

حيث i عدد صحيح فردي، ويكون لدينا:

$$\cos wt = -1$$

بالتعويض، نحصل على أن القوة الحاصلة في هذا الوضع:

$$F_{X(q=p)} = 201 \ \text{N}$$

- عندما يكون المكبس في وضعه الأوسط، فإن الزاوية:

$$q = wt = ip/2$$

حيث i عدد صحيح فردي، ويكون لدينا:

$$\cos wt = 0$$

نستنتج من ذلك أن القوة الحاصلة في هذا الوضع معدومة:

$$F_{X(q=p/2)} = 0$$

مسألة-1-8

يربط ثقلان متساويان كل منهما W وثقل وحيد P بنهايتي حبل لين غير قابل للتمدد، مار على محيط البكرة المبينة في a من (الشكل-1-6)،

إذا تحركت هذه الجملة بتسارع ثابت قدره $\boldsymbol{A}$ وبالاتجاه المشار إليه بالأسهم، المطلوب تعيين مقدار الثقل P مهملاً مقاومة الهواء، وعطالة البكرة.

الحل:



a- يُربَط بنهايتي حبل مار على محيط بكرة ثقلان متساويان وثقل وحيد.

b- مخطط الجسم الحر لأجسام الجملة.

(الشكل-1-6)

نقسم الجملة إلى ثلاثة أجزاء حرة المبينة في b من (الشكل-1-6) ، ونستبدل تأثير القيد، أي: الحبل اللين بقوة القيد $\boldsymbol{T}$ ، ومن ثم نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الثقل المقيد الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه، ولقوة شد الحبل على الثقل الواقع في الجهة اليسرى:

$$\frac{W}{g}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{T}$$

بإسقاطها على محور الحركة باتجاه متجه التسارع:

$$\frac{W}{g}A=T-W$$

وعلى الثقلين الواقعين في الجهة اليمنى:

$$\frac{W+P}{g}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{P})+\boldsymbol{T}$$

بإسقاطها على محور الحركة باتجاه متجه التسارع:

$$\frac{W+P}{g}A=W+P-T$$

من علاقة الإسقاط الأولى نعين قوة الشد:

$$T = (1 + \frac{A}{g})\, W$$

بالتعويض في علاقة الإسقاط الثانية نعين الثقل:

$$P = \frac{2A}{g - A}\ W$$

وتدلنا هذه العلاقة على أنه إذا أردنا أن نولد تسارعاً ($A = g$)، لوجب أن يكون الثقل P غير محدود أي ($P = \infty$).

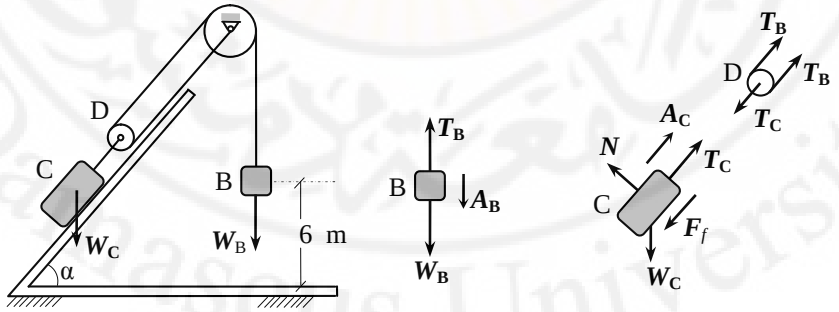
مسألة-1-9

يُترك الجسم B وكتلته ($m_B = 125$ kg) يسقط وشأنه من السكون في الجملة الميكانيكية المبينة في a من (الشكل-1-7)؛ ليسحب بوساطة حبل الجسم C وكتلته ($m_C = 200$ kg) إلى أعلى المستوى المائل بزاوية ($\alpha = 30^o$) عبر البكرة المهملة D .

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الجسم C والمستوى هو ($f_k = 0.5$)، المطلوب تعيين:

1. السرعة V_C للجسم C عندما يصل الجسم B إلى الأرض الأفقية.
2. ما هو شرط الحركة المفروضة.

الحل:



c- مخطط الجسم الحر للجسم C. b- مخطط الجسم الحر للجسم B. a- الجسم B مربوط بحبل مع الجسم C عبر بكرات.

(الشكل-1-7)

1.بما أن القوى المؤثرة على الجملة هي قوى ثابتة، فيمكن تعيين سرعة الجسم C من دراسة الحركة غير المستقلة لمجموعة جسيمات على مسار مستقيم، حيث لدينا:

$$2\Delta C + \Delta B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2V_C + V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A_C + A_B = 0$$

من علاقة السرعة:

$$V_C = -V_B / 2 \qquad (1)$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه حركة الجسم C معاكس لاتجاه حركة الجسم B .

كما يمكن حساب السرعة V_B من علاقة فرق مربعي سرعة الجسم B خلال حركته المتسارعة:

$$V_B^2 - V_{0B}^2 = 2\, A_B . \Delta B$$

حيث:

$$\Delta B = 6\ \text{m} \quad , \quad V_{0B} = 0$$

ومنه:

$$V_B^2 = 12 . A_B \qquad (2)$$

ويحسب التسارع A_B ، من تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الكتلة B ، الموضحة في b من (الشكل-1-6):

$$m_B . \boldsymbol{A_B} = \sum \boldsymbol{F}^{a} + \boldsymbol{T_B} = \boldsymbol{W_B} + \boldsymbol{T_B}$$

بإسقاطها على منحى التسارع باتجاه التسارع:

$$m_B . A_B = W_B - T_B \qquad (3)$$

وتحسب قوة الشد T_B ، من تطبيق العلاقة الأساسية على البكرة المهملة D ، الموضحة في c من (الشكل-1-7):

$$m_D . A_D = 0 = 2T_B - T_C \qquad \Rightarrow \qquad 2T_B = T_C$$

وتحسب قوة الشد T_C ، من تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الكتلة C ، الموضحة في c من (الشكل-1-7):

$$m_C . \boldsymbol{A_C} = \sum \boldsymbol{F_C^a} + \boldsymbol{T_C} + \boldsymbol{F_f} = \boldsymbol{W_C} + \boldsymbol{T_C} + \boldsymbol{F_f} + \boldsymbol{N_C}$$

بإسقاطها على منحى التسارع باتجاه التسارع:

$$m_{\mathrm{C}} \,.\, A_{\mathrm{C}} = 2\,T_{\mathrm{B}} - W_{\mathrm{C}} .\, \sin a - F_f \qquad (4)$$

حيث لدينا من علاقات الحركة:

$$A_{\mathrm{C}} = A_{\mathrm{B}} / 2$$

وتحسب قوة الاحتكاك F_f من شرط الانزلاق:

$$F_f = f_k \,.\, N_{\mathrm{C}}$$

حيث رد الفعل الناظمي N_C ، يحسب من إسقاط العلاقة على منحى عمودي على منحى التسارع.

$$N_{\mathrm{C}} - W_{\mathrm{C}} .\cos a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_{\mathrm{C}} = m_{\mathrm{C}} \,.\, g \,.\cos a = 1700\ \mathrm{N}$$

ومنه قوة الاحتكاك:

$$F_f = 850\ \mathrm{N}$$

بالتالي نحصل على معادلتين (3) و (4) بمجهولين هما T_B و A_B ، وبحلهما نحصل على:

$$A_{\mathrm{B}} = 1.78\ \mathrm{m/sec^2} \qquad , \qquad T_{\mathrm{B}} = 1004\ \mathrm{N}$$

بالتعويض في علاقة السرعة (2)؛ نحصل على:

$$V_{\mathrm{B}} = 4.62\ \mathrm{m/sec}$$

بالتعويض في علاقة السرعة (1)؛ نحصل على:

$$V_{\mathrm{C}} = 2.31\ \mathrm{m/sec}$$

2. أما شرط الحركة، فيمكننا التأكد من حقيقة حركة الكتلة C إلى أعلى المستوى من كون قوة الشد في الحبل اللازمة لتوليد الحركة في حالة السكون التي تساوي:

$$2T_S = W_{\mathrm{C}} .\sin a + F_f = 1831\mathrm{N} \qquad \Rightarrow \qquad T_S = 915\,\mathrm{N}$$

هي أقل من حركة الوزن لـــ B :

$$W_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}} .\, g = 1226\ \mathrm{N}$$

بالتالي تتحرك الكتلة C إلى الأعلى.

4- المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المادي الحر

Differential Equation for a Motion of an Independent Particle

إذا أثرت على جسيم مادي حر M_k كتلته m_k مجموعة من القوى الفاعلة $\sum \boldsymbol{F}_k^a$ بدلالة الجملة الإحداثية T(OXYZ)، فإنه يكتسب تسارعاً $\boldsymbol{A_k}$ وفق العلاقة الأساسية للتحريك:

$$m_k \,.\, \boldsymbol{A_k} = \Sigma \boldsymbol{F}_k^a$$

حيث محصلة القوى الفاعلة $(\Sigma \boldsymbol{F}_k^a = \boldsymbol{R_k})$ يجب أن تساير متجه القوة الفعالة $m_k \,.\, \boldsymbol{A_k}$.

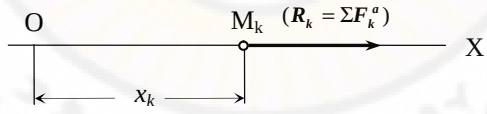
فإذا كانت محصلة القوى الفاعلة $\boldsymbol{R_k}$ ثابتة بالمنحى، وكانت السرعة الابتدائية $\boldsymbol{V_{0k}}$ للجسيم معدومة أو منطبقة على حامل المحصلة، رسم عندها الجسيم خطاً مستقيماً بحركة متغيرة.

أما إذا كان منحى محصلة القوى الفاعلة $\boldsymbol{R_k}$ متغيراً، أو كانت السرعة الابتدائية $\boldsymbol{V_{0k}}$ غير موازية للمحصلة $\boldsymbol{R_k}$ ، رسم عندها الجسيم مساراً منحنياً.

4-1- حركة الجسيم المادي الحر على خط مستقيم

Rectilinear Motion of an Independent Particle

في الحركة المستقيمة يكون متجها السرعة والتسارع محمولين على المسار المستقيم، وبالاستناد إلى العلاقة الأساسية للتحريك ينطبق متجه التسارع $\boldsymbol{A_k}$ على حامل محصلة القوى الفاعلة $(\boldsymbol{R_k} = \Sigma \boldsymbol{F}_k^a)$، أي: على طول الخط المستقيم OX المبين في (الشكل-1-8).



(الشكل1-8) جسيم حر M_k يتحرك تحت تأثير القوى الفاعلة $\Sigma \boldsymbol{F}_k^a$ على خط مستقيم.

يحدد وضع الجسيم على مساره بفاصلته x_k ، ومنه بإسقاط العلاقة الأساسية للتحريك على منحى التسارع؛ نحصل على:

$$m_k \,.\, A_{kX} = \sum F_{kX}$$

التي تكتب بالشكل التالي:

$$m_k \,.\, \ddot{x}_k = \sum F_{kX} \qquad (3\text{-}1)$$

تدعى هذه العلاقة بـــ المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم الحر على مسار مستقيم، وتساعد في حل النوع الثاني من مسائل تحريك الجسيم الحر، والتي تتم بتعيين المعادلة:

$$x = f(t) \qquad (4\text{-}1)$$

وذلك متى علمنا محصلة القوى المؤثرة على الجسيم، بالإضافة إلى الشروط الابتدائية من وضع ابتدائي x_{0k} ، وسرعة ابتدائية V_{0k} .

يمكن استبدال المعادلة (1-3) بمعادلتين تفاضليتين تحتويان على المشتقات الأولى فقط؛ عندئذ تأخذ المعادلة (1-3) الشكل:

$$m_k \frac{dV_{kX}}{dt} = \sum F_{kX} \qquad ، \qquad \frac{dx_k}{dt} = V_{kX} \qquad (5\text{-}1)$$

وإذا كان المطلوب إيجاد السرعة $V_{(x)}$ كتابع للمسافة x ، أو عندما تكون القوة تابعة للمسافة $F_{(x)}$ ؛ عندئذ تأخذ المعادلة (1-3) الشكل:

$$m_k . V_{kX} \frac{dV_{kX}}{dx_k} = \sum F_{kX} \qquad (6\text{-}1)$$

فمن المعادلتين (1-5) و (1-6) نستنتج أنه في الحالة العامة تكون القوى ΣF_{kX} تابعة للزمن t ، ولوضع النقطة المتحركة x_k ، ولسرعتها V_k ، وفي هذه الحالة يكون:

$$m_k . \ddot{x}_k = f\,(V_k , x_k , t)$$

بالتالي تمثل هذه العلاقة الشكل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية للحركة المستقيمة للجسيم المادي، وحلها يتم بعد توضيح صورة طرفها الأيمن؛ الذي يعتمد على القوة المؤثرة، والحل العام لها يحوي ثابتي المكاملة المضاعفة c_1 و c_2 وهو من الشكل:

$$x_k = f\,(t , c_1 , c_2)$$

تعين الثوابت c_1 و c_2 من الشروط الابتدائية للحركة؛ لذلك يجب معرفة موضع النقطة x_{0k} ، وسرعتها V_{0k} في اللحظة $(t = 0)$، وتعطى الشروط الابتدائية في حالة الحركة المستقيمة بالشكل:

$$c_1 = \dot{x}_{0k} = V_{0k} \qquad \text{و} \qquad c_2 = x_{0k}$$

ومنه:

$$x_k = f\,(t , \dot{x}_{0k} , x_{0k})$$

وهي المعادلة العامة للانتقال مع الزمن.

مسألة1-10

يخضع جسيم مادي كتلته m لثقله ($W = 45$ N)، ولمقاومة الهواء شاقولية نفرضها ثابتة ($R = 4.5$ N).

إذا بدأ الجسيم حركته من السكون، المطلوب تعيين من أي ارتفاع y ينبغي أن يسقط الجسيم حتى تبلغ سرعته ($V = 6$ m /sec).

الحل:

يتعين الارتفاع المطلوب بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم الخاضع في أي موضع اختياري له لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة مقاومة الهواء $\boldsymbol{R}$:

$$m \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{R}$$

بإسقاط العلاقة على محور الحركة OY باتجاه التسارع:

$$\frac{W}{g}\, \ddot{y} = W - R$$

بالتعويض؛ نحصل على التسارع:

$$\ddot{y} = 8.8 \text{ m/sec}^2$$

بالتكامل الأول؛ نحصل على:

$$\dot{y} = 8.8\, t + c_1$$

والتكامل الثاني؛ نحصل على:

$$y = 4.4\, t^2 + c_1\, t + c_2$$

تعين ثوابت التكامل c_2 و c_1 من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; \dot{y}_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0 \quad , \quad t = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = 0 \Rightarrow\; c_2 = 0$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$y = 4.4\, t^2$$

معادلة الحركة التي هي من الشكل:

$$y_{(t)} = 4.4\, t^2$$

لتعيين مسافة السقوط لدينا:

$$V_{\mathrm{Y}} = \dot{y} = 8.8\, t = 6 \text{ m/sec}$$

ومنه زمن السقوط:

$$t = 0.68 \text{ sec}$$

بالتعويض في معادلة الحركة؛ نحصل على مسافة السقوط:

$$y_{(t = 0.68\,\mathrm{sec})} = 2.04 \text{ m}$$

تدعو الضرورة أحياناً إلى دراسة الحركة المستقيمة لجسيم مادي يتحرك بفعل قوة يتغير مقدارها إما مع الزمن، أو مع المسافة، أو مع السرعة تغيراً معيناً بعلاقة معطاة، بالتالي تنتج معادلات تفاضلية للحركة تحل بطريقة أخرى، وفيما يلي مسائل نموذجية تعتمد القوة فيها على الزمن، أو على سرعة المتحرك، أو على المسافة.

مسألة1-11

يتحرك جسيم مادي وزنه $\boldsymbol{W}$ موضوع على مستو أفقي أملس بفعل قوة:

$$F = F_0 . e^{-kt}$$

حيث F_0 تمثل مقدار هذه القوة في بدء الحركة، و k تمثل معامل ثابت التناسب.

إذا تحرك الجسيم من السكون $(V_0 = 0)$ و $(x_0 = 0)$ بحركة مستقيمة. المطلوب ايجاد معادلة حركة الجسيم $x_{(t)}$.

الحل:

لإيجاد معادلة حركة الجسيم نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة القيد $\boldsymbol{N}$ ، والقوة $\boldsymbol{F}$:

$$m . \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}$$

بالإسقاط على منحى التسارع:

$$\frac{W}{g} . \ddot{x} = F_X = F_0 . e^{-kt}$$

نحصل على المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم:

$$\ddot{x} = \frac{g . F_0}{W} e^{-kt}$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$d\dot{x} = \frac{g . F_0}{W} e^{-kt} . dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين السرعة والزمن، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$\dot{x} = -\frac{g . F_0}{W . k} . e^{-kt} + c_1 \qquad (1)$$

حيث c_1 يمثل ثابت المكاملة الأول، ونحصل عليه من الشرط الابتدائي الأول:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_0 = V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{g.F_0}{W.k}$$

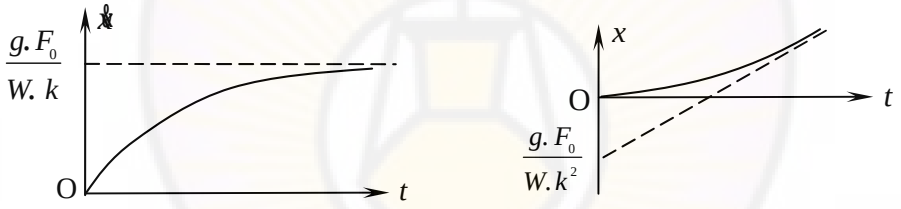
بالتعويض في العلاقة (1):

$$\dot{x} = \frac{g.F_0}{W.k}\left(1-e^{-kt}\right) \qquad (2)$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين السرعة والزمن ممثلة تخطيطاً في a من (الشكل-1-9)، الذي يدلنا على أن السرعة عندما يصبح المقدار $k\,t$ كبيراً تسعى أسياً إلى القيمة:

$$V = \dot{x} = \frac{g.F_0}{W.k}$$

فالحركة تسعى إذاً إلى أن تصبح حركة منتظمة، وعندما يصبح المقدار kt كبيراً؛ فيمكن اعتبار حركة الجسيم قد أصبحت منتظمة دون أن يكون في ذلك خطأ كبير.



a- مخطط علاقة السرعة والزمن. b- مخطط علاقة الانتقال والزمن.

(الشكل-1-9)

وبفصل المتحول في المعادلة (2) نكتب:

$$dx = \frac{g.F_0}{W.k}\left(1-e^{-kt}\right)dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين المسافة والزمن، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$x = \frac{g.F_0}{W.k}\,t + \frac{g.F_0}{W.k^2}\,e^{-kt} + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 يمثل ثابت المكاملة الثاني، ونحصل عليه من الشرط الثاني الابتدائي:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{g.F_0}{W.k^2}$$

بالتعويض في المعادلة (3)؛ نحصل على معادلة حركة الجسيم $x_{(t)}$:

$$x_{(t)} = \frac{g \,.\, F_0}{W \,.\, k^2} \left(k.t + e^{-kt} - 1 \right)$$

تعبر هذه المعادلة عن هذه العلاقة بين الانتقال والزمن ممثلة تخطيطياً في b من (الشكل-1-9)، الذي يدلنا على أن الانتقال عندما تصبح t كبيرة يسعى الحد الأوسط من الحدود الموضوعة بين قوسين إلى الصفر، وتكون معادلة المستقيم المقارب الممثل بالخط المنقط هي:

$$x_{(t)} = \frac{g \,.\, F_0}{W \,.\, k^2} \left(k.t - 1 \right)$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة الحركة بدقة كافية للحسابات العملية.

مسألة-1-12

يتحرك جسيم كتلته m وزنه $\boldsymbol{W}$ موضوع على مستو أفقي أملس على المحور OX ، بقوة تابعة للزمن تعطى بالمعادلة:

$$F_{(t)} = W.\sin wt$$

إذا كانت قيم الوضع الابتدائي x_0 ، والسرعة الابتدائية V_0 . المطلوب إيجاد معادلة حركة الجسيم $x_{(t)}$.

الحل:

لإيجاد معادلة حركة الجسيم نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة القيد $\boldsymbol{N}$ ، والقوة $\boldsymbol{F}$:

$$m \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}$$

بالإسقاط على منحى التسارع:

$$m \,.\, \frac{dV}{dt} = F_{\mathrm{X}} = m \,.\, g \,.\, \sin w\, t$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$dV = g \,.\, \sin w\, t \,.\, dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين السرعة والزمن، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$\int_{V_0}^{V} dV = g\int_{t_0=0}^{t} \sin w\,t\,.dt \qquad \Rightarrow \qquad V - V_0 = -\frac{g}{w}\left[\cos w\,t\right]_0^t$$

$$V = -\frac{g}{w}\cos w\,t + \frac{g}{w} + V_0$$

هذه العلاقة بين السرعة والزمن تكتب بالشكل:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{w}\cos w\,t + \frac{g}{w} + V_o$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$dx = -\frac{g}{w}\cos w\,t.\,dt + \frac{g}{w}\,dt + V_0.\,dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين المسافة والزمن، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x} dx = -\frac{g}{w}\int_{t_0=0}^{t} \cos w\,t\,.dt + \int_{t_0=0}^{t} \frac{g}{w}\,dt + \int_{t_0=0}^{t} V_0.\,dt$$

$$x - x_0 = V_0.\,t + \frac{g}{w}\,t - \frac{g}{w^2}\left[\,\sin w\,t\,\right]_{t_0=0}^{t}$$

منه:

$$x_{(t)} = -\frac{g}{w^2}\sin w\,t + (V_0 + \frac{g}{w})\,t + x_0$$

هذه العلاقة بين الانتقال والزمن تمثل معادلة حركة الجسيم.

مسألة-1-13

جسيم كتلته m موضوع على مستو أفقي أملس يتحرك على المستقيم OX بحيث يتجه نحو المركز الثابت O تحت تأثير القوة [$F_X = k.m.x$] المتناسبة مع الكتلة m ، ومع المسافة x ، وعامل التناسب الثابت هو ($k = 4\ \text{sec}^{-2}$).

إذا كانت الشروط الابتدائية عند ($t = 0$) هي ($V_0 = 2\ \text{m/sec}$) و ($x_0 = 5\ \text{m}$). المطلوب إيجاد معادلة حركة الجسيم $x_{(t)}$.

الحل:

لإيجاد معادلة حركة الجسيم نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة القيد $\boldsymbol{N}$ ، والقوة $\boldsymbol{F}$:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}$$

بإسقاطها على منحى التسارع باتجاه التسارع:

$$m\,.\,\ddot{x} = F_x = k\,.m.\,x$$

نحصل على المعادلة التفاضلية له:

$$\ddot{x} = k\,.\,x$$

ولفصل المتحول نكتب:

$$\frac{dV}{dt} = 4\,x$$

$$\frac{dV}{dx}\,.\,\frac{dx}{dt} = 4\,x \qquad \Rightarrow \qquad V\,.\,dV = 4x\,.\,dx$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين السرعة والمسافة، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$\int_{V_0=2}^{V} V\,.dV = 4\int_{x_0=5}^{x} x.dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = 2(x^2 - x_0^2)$$

بالتعويض:

$$V^2 = 4\,(x^2 - 25) + 4 = 4\,(x^2 - 24)$$

نحصل على:

$$V = 2\,\sqrt{x^2 - 24}$$

علاقة بين السرعة والمسافة التي تكتب بالشكل:

$$\frac{dx}{dt} = 2\,\sqrt{x^2 - 24}$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2\,.\,dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين المسافة والزمن، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$\int_{x_0=5}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2-24}} = \int_{t_0=0}^{t} 2\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left[x+\sqrt{x^2-24}\right]_{x_0=5}^{x} = 2t$$

$$\ln\,(x+\sqrt{x^2-24}) - \ln 6 = 2\,t \qquad \Rightarrow \qquad \ln(\frac{x+\sqrt{x^2-24}}{6}) = 2t$$

$$(\frac{x+\sqrt{x^2-24}}{6}) = e^{2t} \qquad \Rightarrow \qquad x+\sqrt{x^2-24} = 6\,e^{2t}$$

منه:

$$\sqrt{x^2-24} = 6\,.\,e^{2t} - x$$

بالتربيع:

$$x^2 - 24 = 36\,.\,e^{4t} + x^2 - 12\,.\,x\,.\,e^{2t}$$

نحصل على معادلة حركة الجسيم $x_{(t)}$:

$$x\,.\,e^{2t} = 3\,.\,e^{4t} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_{(t)} = 3\,e^{2t} + 2\,e^{-2t}$$

مسألة-1-14

يقفز مظلي كتلته (m = 75 kg) من طائرته، فبفرض أن السرعة الابتدائية للقذف معدومة، وأنه يخضع أثناء سقوطه لقوة مقاومة الهواء قدرها [$R_{(V)} = 30\ V^2$] . المطلوب ايجاد:

1. العلاقة بين السرعة $V_{(y)}$ ومسافة السقوط y .
2. السرعة الحدية V_{Lim} .
3. مسافة السقوط اللازمة حتى يبلغ المظلي سرعة ($V = 0.95\ V_{lim}$).

الحل:

1. لإيجاد العلاقة بين السرعة V ومسافة السقوط y، نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المظلي الخاضع في أي موضع اختياري لوزنه $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة مقاومة الهواء $\boldsymbol{R}$:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \Sigma\boldsymbol{F} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{R}$$

نسقط العلاقة على محور الحركة الشاقولي OY باتجاه التسارع $\boldsymbol{g}$:

$$m\,.\,\ddot{y} = W - R$$

بالتعويض نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dV}{dt} = 9.8 - 0.4\,V^2$$

وحلها يتم بتحويلها بالشكل التالي:

$$\frac{dV}{dt} = 9.8 - 0.4\,V^2$$

$$V\,.\,\frac{dV}{dy} = 9.8 - 0.4\,V^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V\,.\,dV}{9.8 - 0.4\,V^2} = dy$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين السرعة والمسافة، وبتكامل طرفيها؛ نحصل على:

$$-0.8\,\frac{V.\,dV}{9.8 - 0.4\,V^2} = -0.8\,dy \qquad \Rightarrow \qquad \ln(9.8 - 0.4\,V^2) = -0.8\,y + c$$

ومن الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = 0 \quad , \quad V_0 = V_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \ln 9.8$$

بالتعويض ينتج:

$$\ln\left(\frac{9.8 - 0.4\,V^2}{9.8}\right) = -0.8\,y$$

$$\frac{9.8 - 0.4\,V^2}{9.8} = e^{-0.8\,y} \qquad \Rightarrow \qquad V_{(y)}^2 = 24.5(1 - e^{-0.8y})$$

وهذه هي العلاقة التي تربط بين السرعة V ومسافة السقوط y .

2.لإيجاد السرعة الحدية نلاحظ أنه كلما ازدادت y نقص المقدار $e^{-0.8\,y}$ ، ويتناهى هذا المقدار إلى الصفر بتناهي y إلى اللانهاية، وعندها تبلغ V قيمة ثابتة نسميها السرعة الحدية، وقيمتها:

$$V_{lim} = 4.59 \quad \text{m/sec}$$

3. حتى يبلغ المظلي سرعة ($V = 0.95\,V_{lim}$) ، ينبغي أن يقطع مسافة y يمكن حسابها بتعويض قيمة V هذه في علاقتها بدلالة y .

$$(0.95 \cdot 4.95)^2 = 24.5\,(1 - e^{-0.8\,y}) \qquad \Rightarrow \qquad e^{-0.8y} = 0.1$$

بالتالي مسافة السقوط:

$$y = \frac{\ln 10}{0.8} = 3\,\text{m}$$

مسألة-1-15

تسقط كرة وزنها $\boldsymbol{W}$ وكتلتها m بدون سرعة أولية من الموضع O . فإذا كانت مقاومة الهواء R متناسبة مع السرعة V وتساوي إلى [$R_{(V)} = \mu \,.\, \boldsymbol{V}$]، حيث μ عامل التناسب الثابت. المطلوب ايجاد معادلة حركة الكرة.

الحل:

لإيجاد معادلة حركة الكرة نطبق العلاقة الأساسية للتحريك عليها، والخاضعة في أي موضع اختياري لوزنها $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة مقاومة الهواء $\boldsymbol{R}$:

$$m \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{R}$$

نعدّ موضع الكرة الابتدائي O مبدأ الإحداثيات، ونوجه محور الحركة OY نحو الأسفل، وبالإسقاط على محور الحركة باتجاه الحركة:

$$m.A = m.g - m.V$$

منه؛ نحصل على علاقة التسارع بدلالة السرعة:

$$A = g - \frac{m}{m} V$$

نرمز لـــ $\frac{m}{m}$ بـــ k الذي يمثل ثابت مقاومة الهواء من أجل وحدة الكتلة، وتكتب العلاقة على شكل معادلة تفاضلية لحركة الكرة:

$$\frac{dV}{dt} = g - k \,.\, V$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$\frac{dV}{g - k \,.\, V} = dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين السرعة والزمن، وبتكامل طرفيها حسب الشروط الابتدائية:

$$\int_{V_0=0}^{V} \frac{dV}{g - k.V} = \int_{t_0=0}^{t} dt \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{k}[\ln(g - k.V)]_{V_0=0}^{V} = t$$

$$\ln\,(g - k.V) - \ln\,(g) = -\,k.t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\,(\frac{g - k.V}{g}) = -k.t$$

نحصل على:

$$(\frac{g-k.V}{g}) = e^{-k\,t}$$

منه؛ نحصل على معادلة السرعة بدلالة الزمن:

$$V_{(t)} = \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$$

يلاحظ أنه عندما:

$$t = \infty \quad \Rightarrow \quad V_{(t=\infty)} \to g/k$$

أي: إن سرعة السقوط تتزايد، وتسعى إلى سرعة حدية قدرها:

$$V_{cr} = g/k$$

وعندها تصبح قوة مقاومة الهواء:

$$R_{t=\infty} = m\,.\,k\,.V_{cr} = m.\,g = W$$

وتكتب علاقة السرعة بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}\left(1-e^{-k\,t}\right)$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$dy = \frac{g}{k}\,(\,1-e^{-k\,t}\,)\,dt$$

تعبر هذه المعادلة التفاضلية عن العلاقة بين المسافة والزمن، وبأخذ التكامل المحدود ضمن المجالات الموافقة:

$$\int_{y_o=0}^{y} dy = \frac{g}{k}\int_{t_0=0}^{t} dt - \frac{g}{k}\int_{t_0=0}^{t} e^{-kt}.\,dt$$

$$y = \frac{g}{k}\,t + \frac{g}{k^2}\,\left[e^{-k\,t}\,\right]_{t_0=0}^{t}$$

نحصل على معادلة حركة الكرة:

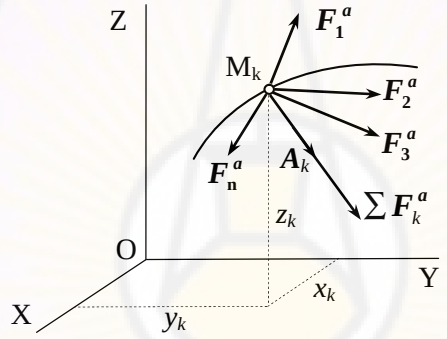
$$y_{(t)} = \frac{g}{k}\,t - \frac{g}{k^2}\,(\,1-e^{-k\,t}\,)$$

2-4- حركة الجسيم المادي الحر على خط منحنٍ

Curvilinear Motion of an Independent Particle

نعدّ جسيماً مادياً طليقاً M_k يتحرك تحت تأثير القوى الفاعلة $\boldsymbol{F}_1^a , \boldsymbol{F}_2^a , \boldsymbol{F}_n^a$ المعينة بدلالة جملة محاور إحداثية ثابتة T(OXYZ) مبينة في (الشكل-1-10)، حيث يكتسب الجسيم تسارعاً منطبقاً على حامل محصلة هذه القوى، ومتناسباً مع مقدارها، فإذا كان منحى محصلة القوى الفاعلة $(\Sigma \boldsymbol{F}_k^a = \boldsymbol{R}_k)$ متغيراً، أو إذا كانت سرعة حركة الجسيم الابتدائية غير موازية لهذه المحصلة، فإن الجسيم المادي يرسم منحنياً بحيث تبقى العلاقة الأساسية للتحريك صحيحة.

$$m_k \,.\, \boldsymbol{A}_k = \sum \boldsymbol{F}_k^a \qquad (7\text{-}1)$$



(الشكل-1-10) جسيم حر M_k يتحرك تحت تأثير القوى الفاعلة $\Sigma \boldsymbol{F}_k^a$ على خط منحن.

لما كانت محصلة القوى الفاعلة في هذه الحالة متغيرة في المنحى أو المقدار، فإنه يستحسن أن نستعمل طريقة ماك لوران (*Mac Lauran*)، بأن نحلل كلاً من محصلة القوى والتسارع إلى مركباتهم القائمة وفق محاور الإحداثيات الديكارتية:

$$m_k \,(\, A_{kX} \,.\, \boldsymbol{i} + A_{kY} \,.\, \boldsymbol{j} + A_{kZ} \,.\, \boldsymbol{k}\,) = \sum (F_{kX}^a \,.\, \boldsymbol{i} + F_{kY}^a \,.\, \boldsymbol{j} + F_{kZ}^a \,.\, \boldsymbol{k})$$

بالتطابق؛ نحصل على:

$$\begin{aligned} m_k \,.\, A_{kX} &= \sum F_{kX}^a \quad , \quad m_k \,.\, \ddot{x}_k = \sum F_{kX}^a \\ m_k \,.\, A_{kY} &= \sum F_{kY}^a \quad , \quad m_k \,.\, \ddot{y}_k = \sum F_{kY}^a \qquad (8\text{-}1) \\ m_k \,.\, A_{kZ} &= \sum F_{kZ}^a \quad , \quad m_k \,.\, \ddot{z}_k = \sum F_{kZ}^a \end{aligned}$$

نستنتج على أن كل مركبة من مركبات محصلة القوى الفاعلة تولد في الجسيم المادي تسارعاً منطبقاً على حاملها، ومتناسباً مع مقدارها، تدعى هذه المعادلات بـــ المعادلات التفاضلية للحركة في خط منحن لجسيم الحر. وبما أن القوى المؤثرة على الجسيم يمكن أن تتناسب مع الزمن ومع موضع النقطة ومع سرعتها، بالتالي يمكن أن تحتوي الأطراف اليسرى من المعادلات (1-8) على الزمن t ، وإحداثيات النقطة المتحركة x_k، y_k، z_k ، ومركبات سرعتها $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$ ، كما يمكن أن يحتوي الطرف الأيسر من كل معادلة على كل هذه المتغيرات، أي: إن مجموعة المعادلات (1-8) تكون في الحالة العامة مجموعة آنية من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية.

تساعد هذه المعادلات في حل مسائل التحريك من النوع الثاني، فإذا علمنا القوى والشروط الابتدائية أمكن تعيين مركبات السرعة، وإحداثيات الجسيم المتحرك كتوابع للزمن، أي: تعيين معادلات الحركة، ومنه معادلة المسار، وذلك في الأوضاع والأزمنة كافة.

في الحالة العامة لتأثير القوى يصادف صعوبات رياضية، حيث لا يمكن الحصول في الغالب على الحل بوساطة توابع رياضية عادية، عندها يتطلب الأمر استخدام الطرق العددية التقريبية في حل المعادلات التفاضلية، أو إستخدام الآلات الحاسبة.

كذلك في الحالة عندما تسمح المعادلات التفاضلية بتفريق المتغيرات، يمكن أثناء الحل حساب التكاملات المحدودة ذات النهاية العليا المتغيرة ضمن المجالات الموافقة، وتؤخذ النهاية السفلى للتكامل الموافقة إلى لحظة البدء.

إذا كان مسار حركة النقطة يقع في مستوى، عندئذ يمكن التعبير عن العلاقة الشعاعية (1-7) بإسقاطها على جملة محورين متعامدين فقط.

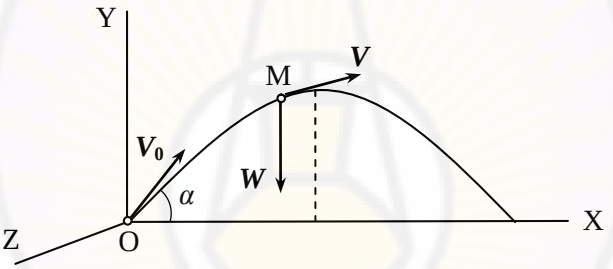
مسألة-1-16

قذف جسيم M كتلته m بسرعة ابتدائية $\boldsymbol{V}_0$ تميل بزاوية α على الأفقي، كما هو مبين في (الشكل-1-11).

إذا كان مجال الجاذبية متجانساً، أي (g = Const.)، ومقاومة الهواء مهملة. المطلوب تعيين معادلات حركة الجسيم.

الحل:

لتعيين معادلات حركة الجسيم، نمرر من مركز القذف جملة محاور إحداثية T(OXYZ) ، بحيث يقع متجه السرعة الابتدائي $\boldsymbol{V}_0$ في المستوى OXY ، ويميل على المحور OX بالزاوية α ، كما هو مبين في (الشكل-1-11)، ونختار M في وضع ما على مسارها، والتي تتأثر فقط بقوة الثقالة $\boldsymbol{W}$.



(الشكل-1-11) جسيم M قذف بسرعة ابتدائية $\boldsymbol{V}_0$ تميل بزاوية α على الأفقي.

بالتعويض في المعادلات التفاضلية للحركة (1-8) نحصل على المركبات القائمة لتسارع الجسيم:

$$\ddot{x} = \dot{V}_X = 0 \quad , \quad \ddot{y} = \dot{V}_Y = -g \quad , \quad \ddot{z} = \dot{V}_Z = 0$$

بالتكامل نجد:

$$V_X = c_1 \quad , \quad V_Y = -g.t + c_2 \quad , \quad V_Z = c_3$$

وتتعين الثوابت c_1 , c_2 , c_3 من الشرط الابتدائي للمسألة عندما يكون:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; V_{0X} = V_0.\cos a \quad , \quad V_{0Y} = V_0.\sin a \quad , \quad V_{0Z} = 0$$

بالتعويض نجد أن:

$$c_1 = V_0.\cos a \quad , \quad c_2 = V_0.\sin a \quad , \quad c_3 = 0$$

ومنه؛ نحصل على المركبات القائمة لسرعة الجسيم:

$$V_X = \dot{x} = V_0 . \cos a \quad , \quad V_Y = \dot{y} = -g . t + V_0 . \sin a \quad , \quad V_Z = \dot{z} = 0$$

بالتكامل مرة ثانية:

$$x = V_0 . \cos a . t + c_4 \quad , \quad y = -\frac{1}{2} g . t^2 + V_0 . \sin a . t + c_5 \quad , \quad z = c_6$$

وتتعين الثوابت c_4 , c_5 , c_6 من الشرط الابتدائي للمسألة عندما يكون:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad z_0 = 0$$

بالتعويض نجد أن:

$$c_4 = 0 \quad , \quad c_5 = 0 \quad , \quad c_6 = 0$$

ومنه؛ تصبح معادلات حركة الجسيم:

$$x_{(t)} = V_0 . \cos a . t \quad , \quad y_{(t)} = -\frac{1}{2} g . t^2 + V_0 . \sin a . t \quad , \quad z = 0$$

هذه المعادلات تعبر عن معادلات الحركة للجسيم، حيث يقع مساره في المستوى OXY ، وأن حركته في الاتجاه الأفقي منتظمة، بينما حركته في الاتجاه الشاقولي متغيرة بانتظام، أي: يمكن أن تستبدل حركة هذا الجسيم بحركتين مستقيمتين مستقلتين، ويظهر ذلك بوضوح إذا تخيلنا أن الجسيم أطلق شاقولياً باتجاه الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها V_{0Y} من فوق عربة تتحرك بحركة أفقية منتظمة بسرعة ثابتة مقدارها V_{0X} ، وبالتالي فإن الإحداثية x للجسيم في أي لحظة يساوي المسافة التي تقطعها العربة، بينما الإحداثية y تحسب كما لو أن الجسيم يتحرك على طول خط شاقولي.

بحذف الوسيط t من معادلتي الحركة؛ نحصل على معادلة مسار الجسيم في حالة قوة مقاومة الهواء مهملة:

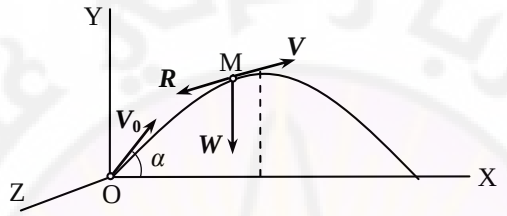
$$y_{(x)} = \text{tg}\, a . x - \frac{g}{2 V_0^2 . \cos^2 a} x^2$$

وهي معادلة قطع مكافئ، وهذا ما حصلنا عليه سابقاً في بحث حركة القذائف في علم الحركة.

مسألة-1-17

إذا كانت قوة مقاومة الهواء تعطى بالعلاقة [$\boldsymbol{R}_{(V)} = - k.m.\boldsymbol{V}$] المتناسبة مع m كتلة الجسيم، ومع $\boldsymbol{V}$ متجه سرعته وعامل التناسب الثابت هو k . المطلوب تعيين معادلات حركة الجسيم للمسألة السابقة.

الحل:



(الشكل-1-12) جسيم M قذف بسرعة ابتدائية $\boldsymbol{V}_0$ تميل بزاوية α على الأفق خاضع لمقاومة الهواء.

تكون قوة المقاومة محمولة على المماس للمسار، ومتجهة عكس اتجاه السرعة $\boldsymbol{V}$ الموضحة في (الشكل-1-12).

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{R}$$

بإسقاطها على المحور X ، والاختصار على m نجد:

$$\ddot{x} = - k.\dot{x}$$

بإسقاطها على المحور Y ، والاختصار على m نجد:

$$\ddot{y} = - g - k.\dot{y}$$

تكتب علاقة الإسقاط الأولى بالشكل:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = - k.\dot{x}$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{dV_X}{V_X} = - k.\,dt$$

بالتكامل نجد:

$$\ln V_X = -k.t + c_1$$

c_1 ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{0X} = V_0.\cos a \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ln (V_0.\cos a)$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$\ln V_X = -k.t + \ln (V_0.\cos a)$$

أو:

$$\ln \frac{V_X}{V_0.\cos a} = -k.t$$

ومنه علاقة مركبة السرعة على المحور X بدلالة الزمن:

$$V_X = V_0.\cos a \ .e^{-kt}$$

بالتكامل نجد:

$$x = -\frac{V_0.\cos a}{k} e^{-kt} + c_2$$

c_2 ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{V_0.\cos a}{k}$$

بالتعويض؛ نحصل على معادلة الحركة على المحور X :

$$x_{(t)} = \frac{V_0.\cos a}{k} (1 - e^{-kt})$$

وتكتب علاقة الإسقاط الثانية بالشكل:

$$\frac{dV_Y}{dt} = -(g + k.V_Y)$$

وبفصل المتحولات نكتب:

$$\frac{dV_Y}{(g + k.V_Y)} = -dt \qquad \Rightarrow \qquad k\frac{dV_Y}{(g + k.V_Y)} = -k.dt$$

بالتكامل نجد:

$$\ln (g + k.V_{\mathrm{Y}}) = - k.t + c_3$$

c_3 ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{0\mathrm{Y}} = V_0 . \sin a \quad \Rightarrow \quad c_3 = \ln (g + k . V_0 . \sin a)$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$\ln[\frac{g + k.V_{\mathrm{Y}}}{g + k.V_0 . \sin a}] = - k. t$$

أو:

$$\frac{g + k. V_{\mathrm{Y}}}{g + k. V_0 . \sin a} = e^{- kt}$$

ومنه علاقة مركبة السرعة على المحور Y بدلالة الزمن:

$$V_{\mathrm{Y}} = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{k} (g + k.V_0 . \sin a) e^{- kt} - \frac{g}{k}$$

بالتكامل نجد:

$$y = - \frac{1}{k^2} (g + k.V_0 . \sin a) e^{- kt} - \frac{g}{k} t + c_4$$

c_4 ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = \frac{1}{k^2} (g + k.V_0 . \sin a)$$

بالتعويض؛ نحصل على معادلة الحركة على المحور Y :

$$y_{(t)} = \frac{1}{k^2} (g + k.V_0 . \sin a) (1 - e^{- kt}) - \frac{g}{k} t$$

بحذف الوسيط t من معادلتي الحركة نجد معادلة مسار الجسيم في حالة قوة مقاومة الهواء:

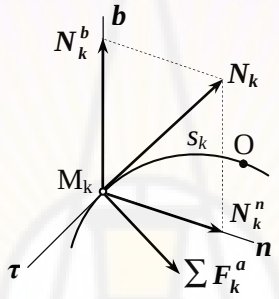
$$y_{(x)} = \frac{g + k.V_0 . \sin a}{k (V_0 . \cos a)} x^2 + \frac{g}{k^2} . \ln [1 - \frac{k}{V_0 . \cos a} x]$$

5- حركة الجسيم المادي المقيد على خط منحنٍ

Curvilinear Motion of a dependent Particle

إذا اعتبرنا M_k جسيماً مادياً يتحرك على منحنٍ صقيل معلوم، وثابت بتأثير القوى الفاعلة $\boldsymbol{F_1^a}, \boldsymbol{F_2^a}, \boldsymbol{F_n^a}$ المعينة بدلالة جملة محاور إحداثية $M\boldsymbol{\tau nb}$ ، هي ثلاثية فرينيه (*Freinet*) المقيدة بالجسيم المادي المتحرك والمبينة في (الشكل-1-13)، ولتكن O بداية الفواصل للمنحني حيث ($OM_k = s$)، وإذا حررنا الجسيم من القيد، واستبدلنا تأثيره برد الفعل $\boldsymbol{N_k}$ ؛ فإن العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد هي من الشكل:

$$m_k \,.\, \boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F_k^a} + \boldsymbol{N_k}$$



(الشكل-1-13) جسيم M_k يتحرك على منحنٍ صقيل معلوم وثابت بتأثير القوى الفاعلة.

وبما أن المسار المنحني أملس، فإن رد الفعل $\boldsymbol{N_k}$ يتجه عمودياً على المنحني، أي: يقع في المستوى الناظمي (*Normal Plan*) للمسار $M\boldsymbol{bn}$ ، وباستخدام طريقة هيوجنس في تحليل كل من محصلة القوى وتسارع الجسيم المقيد الذي يقع في المستوى الملاصق (*Osculate Plane*) للمسار $M\boldsymbol{\tau\, n}$ ، نحصل بإسقاط طرفي العلاقة على جملة محاور ثلاثية فرينيه على:

المحور المماسي $\boldsymbol{\tau}$ (*Tangential*):

$$m_k \,.\, A_k^t = \sum F_{kt}^a$$

المحور الناظم الرئيسي $\boldsymbol{n}$ (*Principal Normal*):

$$m_k \,.\, A_k^n = \sum F_{kn}^a + N_k^n$$

المحور الناظم الثانوي $\boldsymbol{b}$ (*Binomial*):

$$m_k \,.\, A_k^b = \sum F_{kb}^a + N_k^b$$

وبما أن:

$$A_k^t = \dot{V}_k = \ddot{s}_k \qquad , \qquad A_k^n = \frac{V_k^2}{r_k} \qquad , \qquad A_k^b = 0$$

ومنه بالتعويض:

$$m_k \cdot \ddot{s}_k = \sum F_{kt}^a$$

$$m_k \cdot \frac{V_k^2}{r_k} = \sum F_{kn}^a + N_k^n$$

$$0 = \sum F_{kb}^a + N_k^b$$

هذه المعادلات تدعى بـــ معادلات حركة الجسيم المقيد وفق صيغة اويلر، وتستعمل في حل مسائل النوع الثاني لحركة الجسيم المقيد.

فالمعادلة الأولى تمثل المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد؛ التي تساعد في إيجاد معادلة حركته $[s_k = f(t)]$ على طول المنحني.

أما المعادلتان الأخيرتان فإنهما تساعدان في حساب رد الفعل الناظمي التحريكي N_k ، وما يجب ملاحظته أنه في الحركة المنحنية لا يعتمد رد الفعل الناظمي التحريكي على القوى الفاعلة المفروضة، وعلى شكل القيد فحسب، كما في حالة رد الفعل حالة التوازن، بل أيضاً على سرعة المتحرك V_k .

كما أن هذه المعادلات صحيحة حالة حركة الجسيم على منحن يقع في مستو رأسي ثابت ومعلوم فيما إذا عوضنا $(N_k^b = 0)$، وحالة الجسيم الطليق فيما إذا عوضنا فيه $(N_k = 0)$.

كما يمكن استعمالها في حالة المنحنيات الخشنة، وفي هذه الحالة ينبغي إضافة قوة الاحتكاك $(F_f = f_k.N)$ المتجهة عكس السرعة إلى القوى الفاعلة، عندها تصبح العلاقة الأساسية للتحريك:

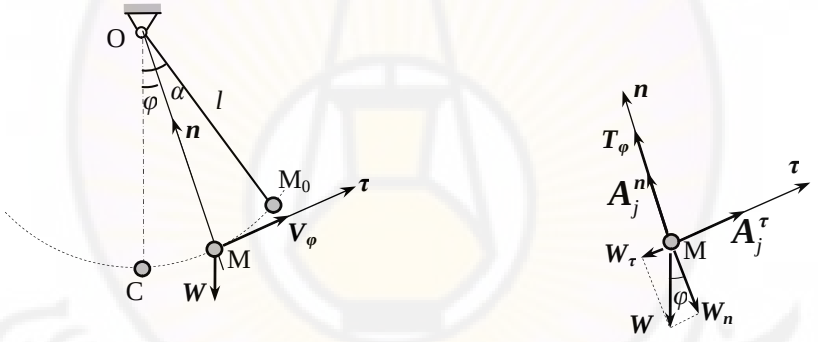
$$m_k \cdot \boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F_k^a} + \boldsymbol{N_k} + \boldsymbol{F_{fk}}$$

مسألة-1-18

تتم دراسة حركة النواس البسيط (*Simple Pendulum*) أو ما يدعى بـــ النواس الرياضي المكون من كرة ثقيلة صغيرة الحجم كتلتها m ، والمعلقة بطرف سلك خفيف غير مرن طوله l ، حيث الطرف الثاني منه مثبت بمحور أفقي ثابت O ، وتترك الكرة في وضع الاتزان الشاقولي C كما هو مبين في a من (الشكل1-14).

تزاح الكرة عن وضع الاتزان الشاقولي بزاوية α صغيرة إلى الوضع M_0 ، وتترك وشأنها دون سرعة ابتدائية، عندئذ تتحرك الكرة في المستوى الشاقولي تحت تأثير قوة الجاذبية على محيط دائرة مركزها نقطة التعليق C ، ونصف قطرها طول السلك l . المطلوب إيجاد معادلة حركة الكرة φ ، وقوة شد الخيط T .

الحل:



b- مخطط الجسم الحر لكرة النواس. a- حركة النواس البسيط.

(الشكل-1-14)

لإيجاد معادلة حركة الكرة نختار النقطة C وضع الاتزان الشاقولي مبدأ الفواصل على الدائرة، ثم نحدد وضعاً اختيارياً للكرة M المعينة بالزاوية φ ، ونعين جهة تزايد الأقواس نحو اليمين كما هو مبين في a من (الشكل1-14).

يؤثر على الكرة في الوضع العام M ، المبين في b من (الشكل1-14) القوتان $\boldsymbol{W}$ ثقلها الشاقولي و $\boldsymbol{T}$ شد السلك، ومن تطبيق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد:

$$m.\boldsymbol{A}=\sum \boldsymbol{F}^{a}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{T}$$

نسقط العلاقة على المماس للدائرة في M :

$$m.A_j^t = -W.\sin j = -m.g.\sin j$$

حيث:

$$A_j^t = \ddot{s}_j = -g.\sin j$$

وبما أن:

$$s_j = l.j \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{s}_j = l.\ddot{j}$$

بالتعويض نحصل على:

$$\ddot{j} + \frac{g}{l}\sin j = 0$$

معادلة التفاضلية لا يمكننا مكاملتها بوساطة التوابع العادية المعروفة، لذا نقتصر على الزوايا الصغيرة، وعندها يمكن إبدال:

$$\sin j \approx j$$

وهذا ممكن فقط إذا كانت φ أصغر بكثير من راديان واحد، أي: من رتبة بضع درجات. أخيراً بوضع:

$$k^2 = g/l$$

نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{j} + k^2.j = 0$$

وحلها هو من الشكل:

$$j = c_1.\cos kt + c_2.\sin kt$$

وتعين الثوابت c_1 , c_2 من الشروط الابتدائية للحركة:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; j_0 = a \quad , \quad V_0 = 0 \;\Rightarrow\; \dot{j}_0 = 0$$

ومنه:

$$c_1 = a \quad , \quad c_2 = 0$$

بالتعويض؛ نحصل على معادلة الحركة الاهتزازية:

$$j_{(t)} = a\ .\cos kt$$

إذا ضربنا طرفي المعادلة بـــ l طول السلك نحصل على:

$$s_j = s_0 \,.\cos kt$$

معادلة حركة الكرة M التي تتحرك على القوس الدائري حركة توافقية بسيطة تعبر عن حركة نوسية تتصف بأن سعتها:

$$s_0 = l \,.\, a$$

ونبضها k الذي يكافئ السرعة الزاوية لحركة جسيم على محيط دائرة حركة دائرية منتظمة:

$$k = \sqrt{g / l}$$

ودورها يحسب على أن زمن نصف النوسة الواحدة لها (π / k) هو عبارة عن الزمن اللازم للكرة لتتحرك من أقصى اليمين إلى أقصى اليسار، ويساوي نصف زمن الدور، أي:

$$\pi / k = T_s / 2$$

فيكون دورها:

$$T_s = 2p \,/ k = 2\,p \,\sqrt{l / g}$$

يعرف T_s بـــ دور النواس البسيط، الذي يعبر عن الفترة الزمنية التي تعمل الكرة خلالها نوسة كاملة، وهو مستقل عن السعة α ، وعن كتلة الكرة m ، ويتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لطول السلك l ، وعكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الثقالة g ، وعلاقة دور النواس صحيحة فقط في الحالة التي تكون فيها φ صغيرة جداً، أي: السعة α صغيرة جداً.

- لحساب قوة الشد في الخيط T_φ عند الوضع φ نسقط العلاقة الأساسية على الناظم:

$$m \,.\, A_j^n = T_j - W.\cos j$$

بالتعويض بقيمة التسارع الناظمي:

$$m \,.\, \frac{V_j^2}{l} = T_j - W.\cos j$$

ومنه:

$$T_j = m \,.\, \frac{V_j^2}{l} + W.\cos j$$

من هذه العلاقة يمكن حساب قيمة شد السلك T_φ في كل وضع من أوضاع الكرة M ، إذا علمنا φ و V_φ التي تعين من تكامل المعادلة التفاضلية الأساسية للحركة بعد كتابتها بالشكل:

$$\ddot{j} = \frac{d^2 j}{dt^2} = \frac{dw_j}{dt} = \frac{dw_j}{dj} \cdot \frac{dj}{dt} = w_j \cdot \frac{dw_j}{dj} = -\frac{g}{l} \sin j$$

وبفصل المتغيرات في المساواة الأخيرة:

$$w_j \cdot dw_j = -\frac{g}{l} \sin j \cdot dj$$

بالتكامل:

$$\frac{w_j^2}{2} = \frac{g}{l} \cos j + c_3$$

c_3 ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad j_0 = a \qquad , \qquad V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 0$$

بالتعويض؛ نحصل على أن:

$$c_3 = -\frac{g}{l} \cos a$$

ومنه؛ نحصل على علاقة السرعة الزاوية بدلالة زاوية الوضع φ :

$$w_j^2 = 2\frac{g}{l}(\cos j - \cos a)$$

بضرب طرفي العلاقة بـــ l^2 نحصل على علاقة السرعة الخطية بدلالة زاوية الوضع φ :

$$V_j^2 = 2 \cdot g \cdot l (\cos j - \cos a)$$

بالتعويض في علاقة قوة شد الخيط T_φ ؛ نحصل على:

$$T_j = W(3\cos j - 2\cos a)$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل الاهتزازات ذات السعات الكبيرة والصغيرة للنواس، وذلك لأنها استخرجت من المعادلة التفاضلية الدقيقة، وليس من المعادلة التقريبية.

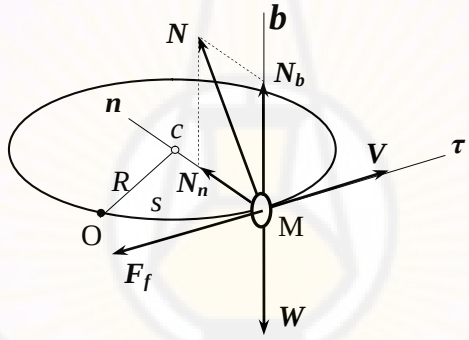
مسألة-1-19

حلقة ثقيلة M كتلتها m لُفقت في سلك خشن أفقي ثابت على شكل دائرة نصف قطرها ($R = 0.3$ m)، ومعامل احتكاك الحلقة به هو ($f_k = 0.3$) كما في (الشكل-1-15).

فإذا اكتسبت الحلقة سرعة ابتدائية قدرها ($V_0 = 2$ m/sec). المطلوب تعيين المسافة s التي تقطعها الحلقة على السلك الدائري حتى تتوقف.

الحل:

نعدّ نقطة الأصل O تقع في الموضع الابتدائي للحلقة، ونمثل الحلقة في موضع عام اختياري M ونمرر جملة المحاور $M\boldsymbol{\tau mb}$ ، وتكون القوى المؤثرة على الحلقة هي قوة الجاذبية الأرضية $\boldsymbol{W}$ ، رد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_f}$.



(الشكل-1-15) الحلقة M ملفقة في سلك خشن أفقي على شكل دائرة.

من تطبيق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد على الحلقة:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F_f}$$

بإسقاطها على المحاور؛ نحصل على:

$$m\,.\,A_t = -F_f \quad , \quad m\,.\,A_n = N_n \quad , \quad 0 = N_b - W$$

التي تكتب بالشكل:

$$m\,.\,\frac{dV}{dt} = -F_f \quad , \quad N_n = m\,.\,\frac{V^2}{R} \quad , \quad N_b = m\,.\,g$$

وإذا اعتبرنا أن قوة الاحتكاك تعطى بـــ:

$$F_f = f_k \,.\, N = f_k \sqrt{N_b^2 + N_n^2}$$

نحصل على:

$$F_f = f_k . m \sqrt{g^2 + \frac{V^4}{R^2}} = \frac{f_k \,.\, m}{R} \sqrt{g^2 \,.\, R^2 + V^4}$$

نلاحظ أن قوة الاحتكاك F_f عن طريق رد الفعل N تعتمد على سرعة حركة الحلقة V .

بالتعويض في علاقة تغير السرعة:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{f_k}{R} \sqrt{g^2 . R^2 + V^4}$$

التي تكتب بالشكل:

$$\frac{dV}{ds} . \frac{ds}{dt} = V . \frac{dV}{ds} = -\frac{f_k}{R} \sqrt{g^2 . R^2 + V^4}$$

بفصل المتحولات، وبتكامل طرفي العلاقة تكاملاً محدوداً بالنهايات المناظرة؛ نحصل على:

$$\int_{V_0}^{V} \frac{d(V^2)}{\sqrt{g^2 . R^2 + V^4}} = -\frac{2\, f}{R} \int_0^s ds$$

ومنها:

$$-\frac{2\, f_k}{R} s = \ln (V^2 + \sqrt{g^2 . R^2 + V^4}) - \ln (V_0^2 + \sqrt{g^2 . R^2 + V_0^4})$$

وأخيراً:

$$s = \frac{R}{2\, f_k} \ln \frac{V_0^2 + \sqrt{g^2 \,.\, R^2 + V_0^4}}{V^2 + \sqrt{g^2 \,.\, R^2 + V^4}}$$

وفي لحظة توقف الحركة تكون $(V = 0)$، منه:

$$s_1 = \frac{R}{2\, f_k} \ln \frac{V_0^2 + \sqrt{g^2 \,.\, R^2 + V_0^4}}{g \,.\, R}$$

لذا، فالمسافة المطلوبة إذا ما اعتبرنا بشكل تقريبي أن $(g \approx 10\,\mathrm{m/sec^2})$ تساوي:

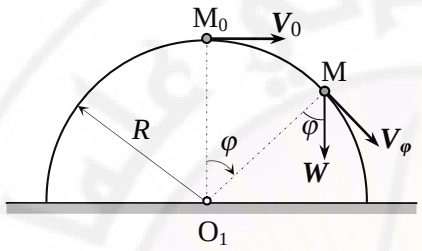
$$s_1 \approx 0.5 \,.\, \ln 3 \approx 0.55\,\mathrm{m}$$

مسألة-1-20

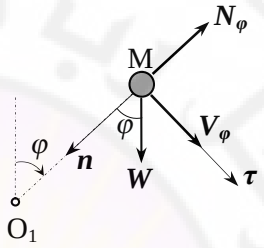
تعطى كرة كتلتها m واقعة على قمة سطح كروي أملس قطره ($2R = 1$ m) سرعة أفقية قدرها ($V_0 = 0.7$ m /sec)، كما هو مبين في a من (الشكل1-16).

المطلوب تعيين الموضع M الذي تترك فيه الكرة مسارها الكروي.

الحل:



a- كرة واقعة على قمة سطح كروي أملس.



b- مخطط الجسم الحر للكرة.

(الشكل1-16)

تتحرك الكرة على السطح الكروي تحت تأثير ثقلها ($W = m.g$)، وتترك مسارها الكروي عندما ينعدم رد فعل السطح N ، ولإيجاده نحرر الكرة من مسارها في M عند الوضع المحدد بالزاوية φ ، والمبين في b من (الشكل1-16)، ونطبق العلاقة الأساسية للتحريك عليها:

$$m.\boldsymbol{A}_j = \sum \boldsymbol{F}^a + \boldsymbol{N}_j = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}_j$$

بإسقاطها على الناظم:

$$m.A_j^n = W.\cos j - N_j$$

منه:

$$N_j = W.\cos j - m.\frac{V_j^2}{R}$$

تفقد الكرة مسارها عندما ينعدم رد فعل السطح:

$$N_j = 0$$

منه علاقة الزاوية φ :

$$\cos j = V_j^2 / g.R$$

تعين السرعة V_φ من إسقاط العلاقة الأساسية على المماس:

$$m \,.\, A_j^t = W \,.\, \sin j$$

منه علاقة التسارع المماسي:

$$A_j^t = g \,.\, \sin j$$

حيث:

$$A_j^t = \frac{dV_j}{dt} = \frac{d}{dt}(R \,.\, w_j) = R\frac{dw_j}{dt} = R\frac{dw_j}{dj} \,.\, \frac{dj}{dt} = R \,.\, w_j \frac{dw_j}{dj}$$

بالتعويض في علاقة التسارع المماسي:

$$R \,.\, w_j \frac{dw_j}{dj} = g \,.\, \sin j$$

وبفصل المتحولات:

$$R \,.\, w_j \,.\, dw_j = g \,.\, \sin j \,.\, dj$$

بالتكامل:

$$R\frac{w_j^2}{2} = -\, g \,.\, \cos j + c$$

وتكتب بالشكل:

$$\frac{1}{2R} V_j^2 = -\, g \,.\, \cos j + c$$

حيث c ثابت التكامل، ويحدد من الشروط الإبتدائية:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; j_0 = 0 \;,\; V_{j_0} = V_0 \;\Rightarrow\; c = \frac{V_0^2}{2R} + g$$

بالتعويض:

$$\frac{V_j^2}{2R} = -\, g \,.\, \cos j + \frac{V_0^2}{2R} + g$$

منه علاقة السرعة:

$$V_j^2 = V_0^2 + 2\, g \,.\, R\,(1 - \cos j)$$

بالتعويض في علاقة $\cos\varphi$:

$$\cos j = \frac{V_0^2}{g \,.\, R} + 2\,(1 - \cos j)$$

منه علاقة زاوية الوضع φ :

$$\cos j = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{V_0^2}{g \,.\, R}\right)$$

بالتعويض بالقيم العددية تكون الزاوية التي عندها تترك الكرة السطح:

$$\cos j = 0.7 \Rightarrow j = 45^{o}\ 30'$$

بسرعة قدرها:

$$V_{(j = 45^{o}\ 30')} = 1.85 \text{ m/sec}$$

وتميل عن الأفق بزاوية:

$$\theta = 2\,\pi - \varphi = 2\,\pi - 45^{o}\,30' = 314^{o}\ 30'$$

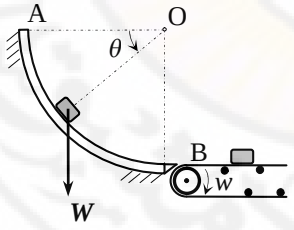
مسألة-1-21

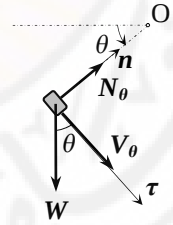
ينزلق جسيم كتلته m من الموقع A إلى أسفل السطح الدائري الأملس الذي نصف قطره R إلى حزام النقل B ، كما هو مبين في a من (الشكل-1-17).

المطلوب إيجاد:

1. علاقة قوة القيد N العمودية بين السطح والجسيم.
2. السرعة الزاوية اللازمة لبكرة حزام النقل ω التي نصف قطرها r ، بحيث لا يحصل انزلاق على الحزام عندما ينتقل الجسيم إليه.

الحل:





b- مخطط الجسيم الحر. a- جسيم ينزلق من A على السطح الدائري إلى حزام النقل B .

(الشكل-1-17)

1. لإيجاد قوة القيد N بين الجسيم والسطح نرسم مخطط الجسم الحر في الوضع العام المحدد بالزاوية θ والموضح في (الشكل-1-17b)، ونطبق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد عليه:

$$m \,.\, \boldsymbol{A}_{\theta} = \sum \boldsymbol{F}^{a} + \boldsymbol{N}_{\theta} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}_{\theta}$$

وبإسقاط العلاقة على الناظم؛ نحصل على:

$$m.A_q^n = N_q - W.\sin q$$

منه علاقة قوة القيد:

$$N_q = (m.V_q^2)/R + W.\sin q$$

حيث V_θ تمثل سرعة الجسيم عند الوضع العام، ويحسب من تكامل علاقة التسارع المماسي الذي يحدد من إسقاط العلاقة الأساسية على المماس:

$$m.A_q^t = m.g.\cos q$$

منه علاقة التسارع المماسي:

$$A_q^t = g.\cos q$$

تكتب بالشكل:

$$A_q^t = \frac{dV_q}{dt} = \frac{dV_q}{ds}.\frac{ds}{dt} = V_q.\frac{dV_q}{ds} = g.\cos q$$

بفصل المتحولات:

$$V_q.dV_q = g.\cos q.ds = g.\cos q.d(Rq) = g.R.\cos q.dq$$

بالتكامل:

$$\int_{V_0=0}^{V_q} V_q.dV_q = g.R\int_{q_0=0}^{q} \cos q.dq$$

نحصل على:

$$V_q^2/2 = g.R.\sin q$$

منه علاقة سرعة الجسيم بدلالة زاوية الوضع:

$$V_q^2 = 2\,g.R.\sin q$$

بالتعويض في علاقة N_θ نحصل على علاقة قوة القيد:

$$N_q = \frac{m}{R}2.g.R.\sin q + W.\sin q = 3.W.\sin q$$

2. حتى لا ينزلق الجسيم على حزام النقل B ، يجب أن يتحقق:

$$V_B = V_{(q=\pi/2)}$$

بالتعويض:

$$w.r = \sqrt{2\,g.R}$$

منه السرعة الزاوية لبكرة حزام النقل:

$$w = \sqrt{2\,g.R}/r$$

مسائل غير محلولة *PROBLEMS*

م-1-1

تصعد عربة وزنها 5000 N بحركة منتظمة على مستو مائل بزاوية ($\alpha = 30^o$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-1).

إذا كانت القوة المقاومة للهواء والاحتكاك $\boldsymbol{R}$ تعادل W 0.01 . المطلوب إيجاد القوة المحركة للعربة F .

الجواب: $F = 2550$ N



a b

(الشكل م-1-1)

م-1-2

تسير آلية مؤلفة من قاطرة ومقطورة على أرض مستقيمة أفقية، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-1) حركة متغيرة بانتظام، فتبلغ سرعتها 54 km/h في اللحظة ($t = 60$ sec).

إذا كان وزن المقطورة 200000 N ، ومقاومة الهواء والاحتكاك تساوي 1/200 من وزن المقطورة. المطلوب إيجاد قوة الشد T في عمود الربط AB .

الجواب: $T = 6100$ N

م-1-3

يعلق الثقل ($W = 1000$ N) في مستوٍ شاقولي بحبل وبكرتين، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-2)، وتسحب نهايته A نحو الأسفل بتسارع ثابت ($A = 6$ m/sec^2).

بفرض أن وزن البكرات مهمل. المطلوب إيجاد قوة الشد T في الحبل.

الجواب: $T = 653$ N



a b

(الشكل م-1-2)

م-1-4

ترسم كرة نواس مخروطي وزنها W المبينة في b من (الشكل م-1-2) دائرة أفقية نصف قطرها r ، معينة بالمعادلتين التاليتين:

$$x_{(t)} = r.\cos wt \quad , \quad y_{(t)} = r.\sin wt$$

حيث ω عامل التناسب الثابت. المطلوب إيجاد قوة الشد T في الخيط.

الجواب: $T = W.w^2.r/g$

م-1-5- (الفصل الثاني-2004-2005)

يتحرك جسيم كتلته ($m = 2$ kg) على مسار منحن وفق العلاقة:

$$s_{(t)} = 12 \sin t/2$$

إذا كان نصف قطر تقوس المسار عندها ($\rho = 6$ m). المطلوب إيجاد القوة F المؤثرة على الجسيم في اللحظة التي تكون فيها سرعته ($V = 3$ m/sec).

الجواب: $F_{(V=3\text{m/sec})} = 6$ N

م-1-6

مصعد يبدأ حركته من السكون نحو الأسفل، ويخضع لتسارع يتجه إلى الأسفل قدره ($A_1 = 4.8$ m/sec^2)، ويدوم التسارع مدة ثانية واحدة، وبعدها تصبح الحركة منتظمة لمدة ثانيتين، وبعدها يتجه التسارع نحو الأعلى وقدره ($A_3 = 3.2$ m/sec^2)، ويدوم حتى يقف المصعد. المطلوب:

1. من أي ارتفاع y سقط المصعد.
2. ما هو رد فعل أرض المصعد على شخص بداخله يزن ($W = 75.g$ N)، وذلك في كل مرحلة من مراحل الحركة.

الجواب: $y = 15.6$ m , $R_1 = 375$ N , $R_2 = 735$ N , $R_3 = 1095$ N

مسألة-1-7

ينحدر قطار وزنه W على مستوٍ مائل ميله 0.008 ، وبسرعة أولية (V_0=30 km/h)، ويطبق السائق في اللحظة t المكابح فتتولد مقاومة كلية قدرها $0.1\,W$. المطلوب إيجاد المسافة x التي يقطعها القطار خلال فترة الكبح.

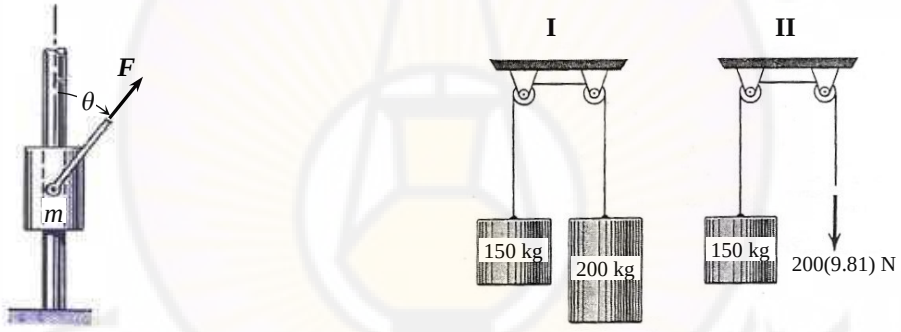
الجواب: $x = 30.24$ m

م-1-8

تنزلق جلبة وكتلتها m إلى أعلى العمود بتأثير القوة $\boldsymbol{F}$ ذات القيمة الثابتة والمنحى المتغير وفق الزاوية ($\theta = k\,t$)، حيث k عامل التناسب الثابت، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-3).

فإذا كان معامل الاحتكاك الحركي f_k بين الجلبة والعمود، وبدأت الجلبة حركتها من السكون ($\theta = 0$). المطلوب إيجاد قيمة F بحيث تصبح الجلبة في حالة سكون عندما تصل الزاوية إلى ($\theta = \pi/2$).

الجواب: $F_{(q=p/2)} = p\,.m.g/[2(1-f_k)]$



a b

(الشكل م-1-3)

م-1-9

تعلق أسطوانة كتلتها ($m = 150$ kg) في مستوٍ شاقولي بحبل وبكرتين، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-3).

المطلوب بإهمال الاحتكاك وكتل البكرات إيجاد التسارع الشاقولي للأسطوانة المذكورة في كل من الحالتين I و II الموضحتين في الشكل.

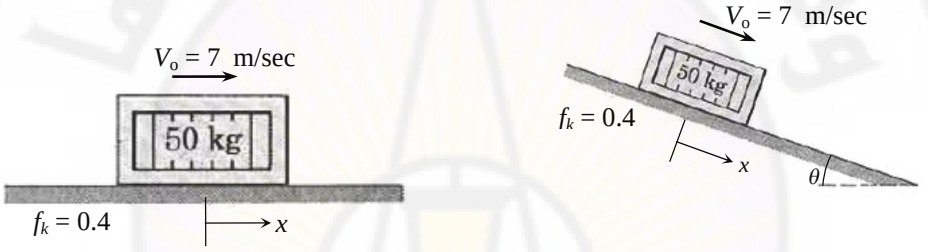
الجواب: $A_{\mathrm{I}} = 1.40\ \mathrm{m/sec^2}$, $A_{\mathrm{II}} = 3.27\ \mathrm{m/sec^2}$

م-1-10

يدفع صندوق كتلته 50 kg على سطح أفقي بسرعة ابتدائية 7 m/sec ، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-4).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي له ($f_k = 0.4$). المطلوب إيجاد الزمن اللازم لتوقف الصندوق عن الحركة t ، والمسافة المقطوعة عندئذ x .

الجواب: $t = 1.78\,\text{sec}$, $x = 6.24\,\text{m}$



a b

(الشكل م-1-4)

م-1-11

يدفع صندوق كتلته 50 kg إلى أسفل سطح خشن مائل على الأفق بزاوية θ بسرعة ابتدائية 7 m/sec ، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-4).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي له ($f_k = 0.4$). المطلوب إيجاد الزمن اللازم لتوقف الصندوق عن الحركة t ، والمسافة المقطوعة عندئذ x ، في الحالتين:

$$q_{\text{I}} = 15^{\text{o}} \qquad , \qquad q_{\text{II}} = 30^{\text{o}}$$

الجواب: للحالة (θ_{I}) $t = 5.59$ sec، $x = 19.58$ m

للحالة (θ_{II}) الصندوق لا يتوقف نهائياً.

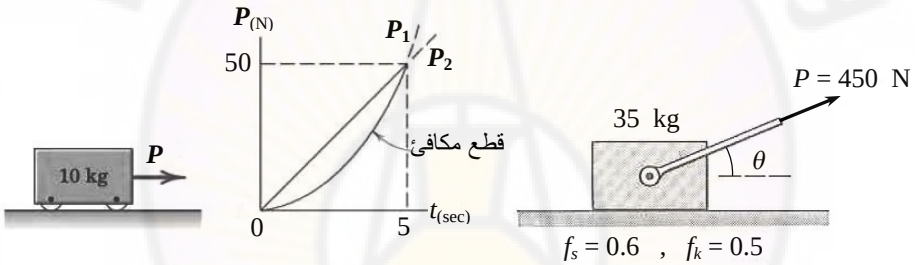
م-1-12

تطبق قوة $\boldsymbol{P}$ على عربة ساكنة كتلتها ($m = 10$ kg) قابلة للحركة على سطح أفقي، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-5).

المطلوب إيجاد سرعة العربة وإزاحتها عند الزمن ($t = 5$ sec) من أجل الحالتين المبينتين في مخطط تغير القوة $\boldsymbol{P}$ بدلالة الزمن.

الجواب: حالة P_1 : $V = 12.5$ m/sec ، $s = 20.8$ m

حالة P_2 : $V = 8.33$ m/sec ، $s = 10.42$ m



b b

(الشكل م-1-5)

م-1-13

تؤثر قوة $\boldsymbol{P}$ ثابتة بالقيمة متغيرة بالمنحى على الجسم المبين في b من (الشكل م-1-5)، القابل للحركة على مستوي افقي خشن.

المطلوب إيجاد قيمة، أو قيم، الزاوية θ التي من أجلها يجب أن يتحرك الجسم بتسارع قدره 9 m/sec^2 نحو اليمين.

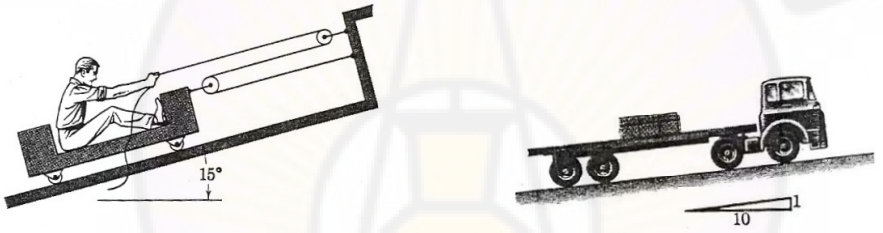
الجواب: $\theta' = 11.88^o$ ، $\theta'' = 41.3^o$

م-1-14

يسحب رجل نفسه إلى أعلى منحدر ميله 15^o كما هو موضح في a من (الشكل م-1-6).

فإذا كانت كتلة الرجل والعربة سوية تساوي 100 kg . المطلوب بإهمال الاحتكاك وكتلة الحبل، والبكرات، والعجلات، إيجاد تسارع العربة A عندما يسلط الرجل قوة سحب 250 N على الحبل.

الجواب: $A = 4.96\,\mathrm{m/sec^2}$



a b

(الشكل م-1-6)

م-1-15

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين سطح الشاحنة المستوي وحملها هو ($f_k = 0.3$)، كما هو موضح في b من (الشكل م-1-6).

المطلوب إيجاد السرعة العظمى $V_{\max}$ التي تصل إليها الشاحنة من السكون لقطع مسافة 50 m إلى أعلى منحدر معدل انحداره 10 % بدون انزلاق الحمل.

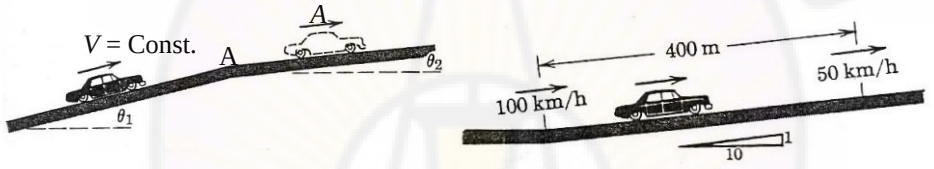
الجواب: $V_{\max} = 50.3$ km/h

م-1-16

تصعد سيارة هضبة ذات ميل θ_1 بسرعة V . ويتغير ميل الهضبة فجأةً إلى θ_2 في الموضع A ، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-7).

إذا لم يغير السائق كمية الوقود، ولم يغير وضع التروس. المطلوب إيجاد تسارع السيارة A مباشرةً بعد مرورها من الموضع A .

الجواب: $A = (\sin q_1 - \sin q_2)\, g$



a b

(الشكل م-1-7)

م-1-17

تدخل سيارة وكتلتها 1500 kg مرتفعاً يميل 10% بسرعة 100 km/h ، وبعد مرور مسافة 400 m على الطريق تصبح سرعتها 50 km/h ، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-7).

المطلوب بإهمال مقاومة الهواء، إيجاد قوة السحب $\boldsymbol{F}$ بين العجلات والطريق معتبراً أنها تبقى ثابتة خلال هذه الفترة

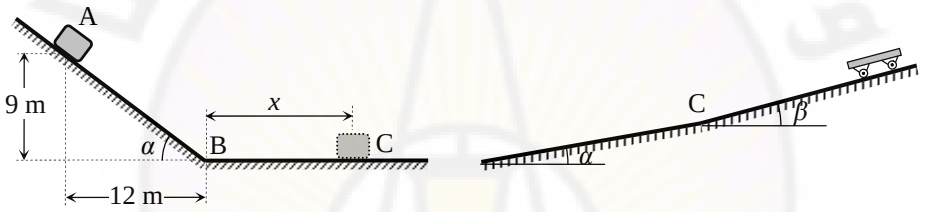
الجواب: $F = 379\ \text{N}$

م-1-18

ينطلق جسيم وزنه W من حالة السكون من الموقع A ، وينزلق على مستوٍ مائل خشن كما هو مبين في a من (الشكل م-1-8).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الجسيم والمستوي ($f_k = 0.3$). المطلوب إيجاد المسافة x التي يقطعها هذا الجسيم على المستوي الأفقي BC ، وزمن حركته t عليه حتى لحظة وقوفه.

الجواب: $x = 18\,\text{m}$, $t = 3.5\,\text{sec}$



a **b**

(الشكل م-1-8)

م-1-19

تبدأ عربة حركتها من السكون على طريق مستو يميل على الأفق بزاوية ($\beta = 15^o$)، فتكتسب سرعة معينة بعدما تقطع مسافة معينة خلال زمن قدره 20 sec ثانية من بدء الحركة، وبعدها ينعدم التسارع وتهبط العربة بسرعة ثابتة عند C وفق طريق مستوى يميل على الأفق بزاوية ($\alpha = 10^o$)، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-8).

فإذا كان الاحتكاك المقاوم للحركة على الطريقين يتناسب طرداً مع رد الفعل الناظمي. المطلوب إيجاد تسارع A_C ، وسرعة العربة V_C عند الموقع C ، والمسافة التي قطعتها على الطريق s ذي الميل α .

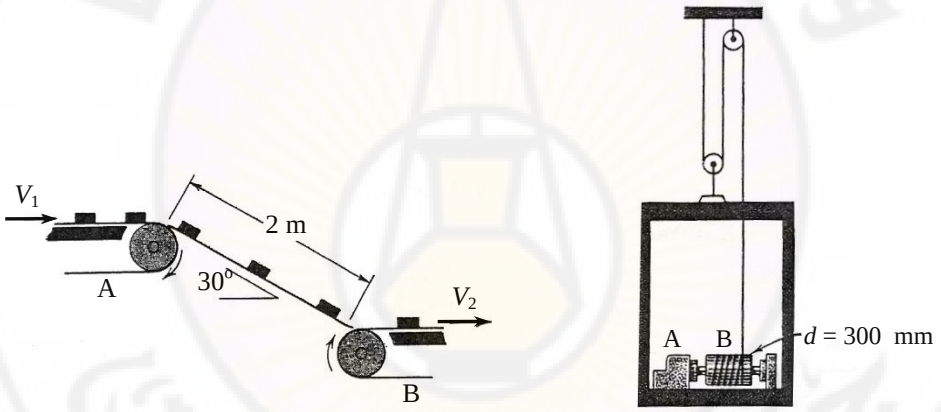
الجواب: $A_C = 0.87\,\text{m/sec}^2$, $V_C = 17.4\,\text{m/sec}$, $s = 174\,\text{m}$

م-1-20

تستخدم الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي لنقل الأجسام الصغيرة إلى القناة المائلة وطولها 2 m بواسطة حزام النقل الميكانيكي A الذي يتحرك بسرعة ($V_1 = 0.4$ m/sec)، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-9).

إذا كانت سرعة حزام النقل الميكانيكي B تساوي ($V_2 = 1$ m/sec)، وأن الأجسام تسلم إلى هذا الحزام بدون انزلاق. المطلوب إيجاد معامل الاحتكاك الحركي f_k بين الأجسام والقناة.

الجواب: $f_k = 0.553$



a b

(الشكل م-1-9)

م-1-21

يعلق قفص كتلته ($m = 550$ kg) في مستوٍ شاقولي بحبل وبكرتين، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-9).

إذا أعطى المحرك A عزم دوران ثابت مقداره 300 N.m إلى عمود برميل الرفع B . المطلوب، باعتبار أن كتلة البرميل صغيرة، إيجاد التسارع الرأسي A للقفص.

الجواب: $A = 1.099\,\mathrm{m/sec^2}$

م-1-22

إذا كان معامل الاحتكاك بين جسم A كتلته 20 kg ، وعربة حمل B كتلتها 100 kg هو 0.5 ، المبينة في a من (الشكل م-1-10).

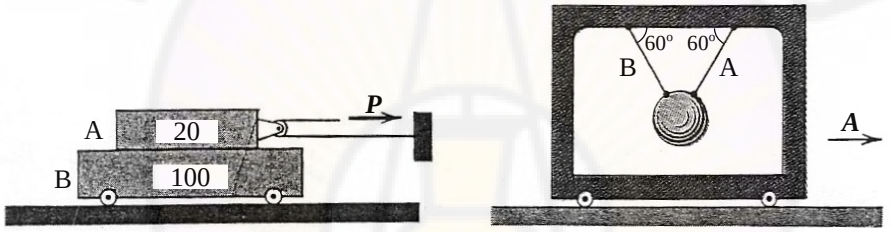
المطلوب إيجاد تسارع كل من الجسمين في حالتين للقوة P :

$$P_{\mathrm{I}} = 60\ \mathrm{N} \quad \text{و} \quad P_{\mathrm{II}} = 40\ \mathrm{N}$$

الجواب:

$$P_{\mathrm{I}} = 60\,\mathrm{N} \ \Rightarrow\ A_{\mathrm{A}} = 1.10\,\mathrm{m/sec^2} \ , \ A_{\mathrm{B}} = 0.98\,\mathrm{m/sec^2}$$

$$P_{\mathrm{II}} = 40\,\mathrm{N} \ \Rightarrow\ A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}} = A = 0.67\,\mathrm{m/sec^2}$$



a b

(الشكل م-1-10)

م-1-23

علقت كرة من الفولاذ في عربة وهي في حالة تسارع بواسطة حبلين A و B ، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-10).

المطلوب إيجاد التسارع A للعربة الذي يجعل الشد في الحبل A ضعفي الشد في الحبل B .

الجواب: $A = g/3\sqrt{3}$

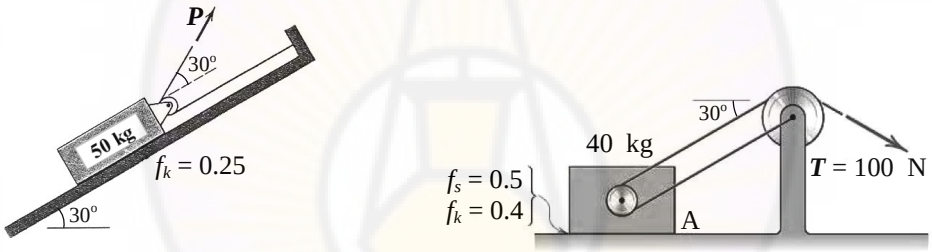
م-1-24

يسحب جسم كتلته $50\ kg$ إلى أعلى منحدر ميله 30^o ، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-11).

فإذا كانت قوة الشد في الكبل ثابتة بالمنحى والاتجاه وقيمتها ($P = 200\ N$). المطلوب إيجاد تسارع الجسم A عند صعوده إلى أعلى المنحدر.

وإذا كان تسارع الجسم إلى أعلى منحدر ($A = 2\ m/sec^2$). المطلوب إيجاد قوة الشد P في الكبل.

الجواب: $A = 0.935\,m/sec^2$, $P = 277\,N$



b b

(الشكل م-1-11)

م-1-25

يسحب جسم A كتلته ($m = 40\ kg$) في مستوٍ أفقي بحبل وبكرتين، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-11).

المطلوب، بإهمال كتل البكرات إيجاد تسارع الجسم A_A .

الجواب: $A_A = 1.406\ m/sec^2$

م-1-26- (الفصل الثاني-2007-2008)

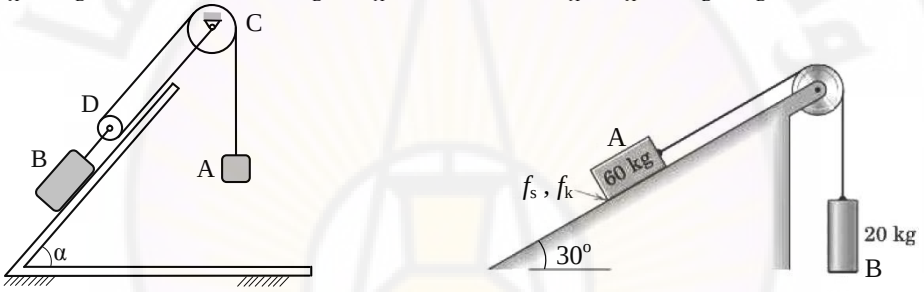
يبدأ الجسم B وكتلته (m_B = 450 kg) في الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي بالحركة من السكون بتسارع ثابت نحو أسفل المستوي الأملس المائل بزاوية ($\alpha = 30^o$) على الأرض الأفقية، ليرفع الجسم A ، وكتلته (m_A = 100 kg) من الأرض نحو الأعلى عبر البكرة المهملة C ، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-12).

المطلوب إيجاد:

1- التسارع الخطي لكل من الجسمين A_A و A_B ، والقوى المؤثرة عليهما.

2- شرط الحركة المفروضة.

الجواب: $A_A = 2A_B = 0.577\ \mathrm{m/sec^2}$ ، $T_B = 2T_A = 2077.4\ \mathrm{N}$ ، $T_A > W_A$ ، $T_B < W_B.\sin\alpha$



a b

(الشكل م-1-12)

م-1-27

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على جسم A كتلته 60 kg ، واسطوانة B كتلتها 20 kg ، مربوطين بواسطة حبل يمر على بكرة مهملة الكتلة. كما هو مبين في b من (الشكل م-1-12).

إذا بدأت الجملة حركتها من السكون بانزلاق الجسم A على السطح الخشن المائل بزاوية 30^o على الأفق، وكان معامل الاحتكاك السكوني له f_s ، والحركي f_k . المطلوب إيجاد قيمة واتجاه تسارع كل من الجسمين، وقوة الشد في الحبل لحظة بدء الحركة في الحالتين:

(I) $f_s = 0.25$ ، $f_k = 0.20$ و (II) $f_s = 0.15$ ، $f_k = 0.10$

الجواب: الحالة (I): لا يوجد حركة، الجملة في حالة سكون.

الحالة (II): $A_A = A_B = 0.589\ \mathrm{m/sec^2}$ ، الجسم A ينزلق إلى أسفل السطح المائل.

م-1-28

تستند أسطوانة كتلتها m على عربة قادرة على الحركة بدون احتكاك على منحدر يميل بزاوية θ ، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-13).

إذا كانت ($\beta = 45^o$) و ($\theta = 30^o$). المطلوب إيجاد التسارع الأكبر A الذي يمكن إعطاؤه إلى العربة لدفعها إلى أعلى المنحدر، بحيث لا تفقد الأسطوانة تماسها في B .

الجواب: $A = 3.59\,\mathrm{m/sec^2}$



a b

(الشكل م-1-13)

م-1-29

أطلقت جلبة ذات كتلة 2 kg من السكون تمس نابض مرن خفيف مضغوط له صلابة 1.75 kN/m ، وقد ضغط مسافة 0.15 m ، كما هو موضح في b من (الشكل م-1-13).

المطلوب بإهمال الاحتكاك إيجاد:

- تسارع الجلبة A بدلالة الازاحة الرأسية y لها مقاسه بالأمتار من نقطة الانطلاق.
- سرعة الجلبة V عندما تكون الازاحة الرأسية ($y = 0.15$ m).

الجواب: $A_y = (121.4 - 875\,y)\,\mathrm{m/sec^2}$, $V_{(y=0.15)} = 4.092\,\mathrm{m/sec}$

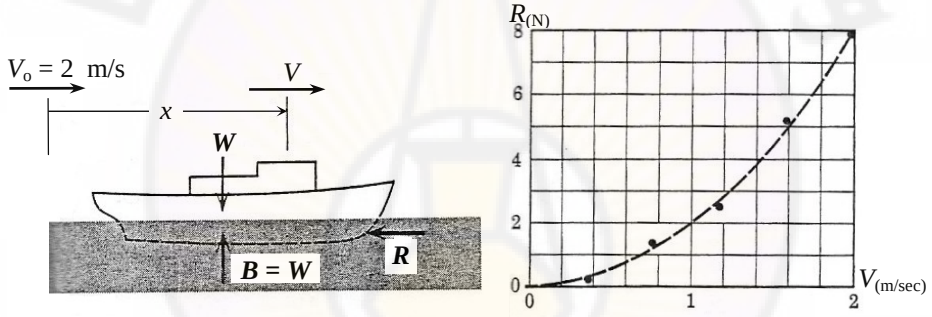
م-1-30

إن كتلة نموذج تصميم الباخرة الجديدة هي 10 kg المبين في a من (الشكل م-1-14)، ولقد تم اختباره في حوض السحب التجريبي لإيجاد مقاومته الحركية خلال الماء بسرعات مختلفة، وقد رسمت نتائج الاختبار على المخطط البياني المرفق بحيث يمكن تقريب المقاومة R بمنحنى القطع المكافئ المنقط، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-14).

فإذا أطلق النموذج عندما كانت سرعته 2 m/sec . المطلوب إيجاد الزمن t اللازم لكي تنخفض سرعته إلى 1 m/sec ، والمسافة المناظرة x التي يقطعها بعد الانطلاق.

ارشاد: قَرّب علاقة السرعة والمقاومة بالمعادلة $(R = k.V^2)$، حيث k عامل تناسب ثابت.

الجواب: $t = 2.5\,\text{sec}$, $x = 3.47\,\text{m}$



A b

(الشكل م-1-14)

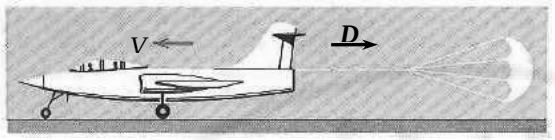
م-1-31

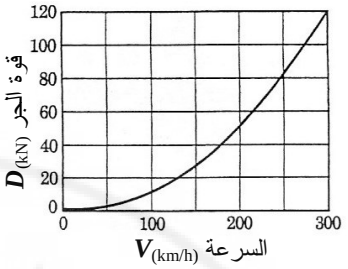
لمقاتلة نفاثة سرعة ملامسة نزول 300 km/h ، وكتلتها 5 Mg عندما يقفل مفتاح القدرة وتفتح مظلة الوقوف، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-15).

إذا كانت قوة الجر الخارجية المؤثرة على المقاتلة تتغير مع تغير سرعتها، كما هو مبين في b من (الشكل م-1-15). المطلوب إيجاد المسافة x على امتداد مدرج المطار اللازمة لانخفاض سرعة الطيارة إلى 150 km/h .

ارشاد: قَرّب تغير قوة الجر باستخدام المعادلة $(D = k.V^2)$، حيث k عامل تناسب ثابت.

الجواب: $x = 201\,\text{m}$





a b

(الشكل م-1-15)

م-1-32

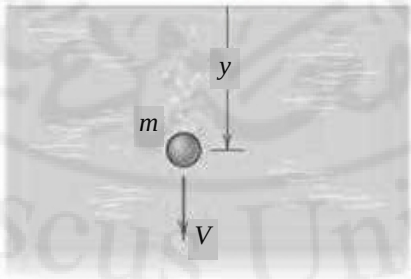
أطلقت كرة فولاذية صغيرة ذات كتلة m من السكون في تجربة قياس مقاومة الحركة في حوض زيت عند سطحه حيث ($y = 0$)، كما هو موضح في (الشكل م-1-16).

المطلوب إيجاد علاقة العمق اللازم للكرة h لكي تصل إلى سرعتها V . إذا عبر عن المقاومة بالمعادلة:

1- ($R = k \, . \, V$)، حيث k عامل تناسب ثابت.

2- ($R = c \, . \, V^2$)، حيث c عامل تناسب ثابت.

الجواب: $h_1 = \frac{m^2}{k^2}.g.\ln\left(\frac{1}{1-\frac{k.V}{m.g}}\right) - \frac{m.V}{k}$ ، $h_2 = \frac{m}{2c}\ln\frac{m.g}{m.g - c.V^2}$



(الشكل م-1-16)

م-1-33

يتحرك جسيم كتلته m وزنه W موضوع على مستو أفقي أملس على المحور OX بقوة متناقصة بانتظام مع الزمن تعطى بالمعادلة:

$$F_{(t)} = F_0 - kt$$

إذا انطلق هذا الجسيم من المبدأ من حالة السكون، وكان ($F_0 = 12$ N)، وعامل التناسب الثابت ($k = 2$ N/sec). المطلوب إيجاد اللحظة t التي يعود هذا الجسيم إلى المبدأ.

الجواب: $t = 18\,\text{sec}$

م-1-34

جسيم كتلته m موضوع على مستو أفقي أملس يتحرك على المستقيم OX بحيث يتجه نحو المركز الثابت O تحت تأثير القوة [$F_{(x)} = k.m.x$] المتناسبة مع الكتلة m ، ومع المسافة x ، وعامل ثابت التناسب هو ($k = 4$ sec^{-2}).

فإذا كانت الشروط الابتدائية عند ($t = 0$) هي: ($V_0 = 0$) و ($x_0 = 2$ m).

المطلوب إيجاد معادلة حركة الجسيم $x_{(t)}$.

الجواب: $x_{(t)} = e^{2t} + e^{-2t}$

م-1-35

يتحرك متزحلق على مستو من الجليد يميل بزاوية ($\alpha = 45^o$)، وعامل الاحتكاك الحركي له ($f_k = 0.1$)، وتخضع الحركة لمقاومة الهواء ($R = a.V^2$)، حيث a عامل التناسب الثابت، و V سرعة المتزحلق، وعندما تبلغ السرعة ($V = 1$ m/sec) تبلغ مقاومة الهواء القيمة ($R = 0.623$ N).

فإذا كانت كتلة المتزحلق ($m = 90$ kg). المطلوب إيجاد السرعة العظمى $V_{\max}$ التي يمكن أن يبلغها المتزحلق.

الجواب: $V_{\max} = 108\,\text{km/h}$

م-1-36

ينزلق الجسم الصغير A الذي كتلته 2 kg إلى أسفل المسار المقوس، ويمر من أسفل نقطة B عليه بسرعة 1.5 m/sec ، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-17).

فإذا كانت القوة بين الجسم والدليل العمودية على السطح تساوي 25 N عندما تمر من هذا الموقع. المطلوب إيجاد نصف قطر التقوس ρ_B للمسار في النقطة B .

الجواب: $r_B = 0.83\,\text{m}$



a b

(الشكل م-1-17)

م-1-37

المطلوب إيجاد السرعة العظمى لجسم منزلق على جزء من مسار دائري كما هو موضح في b من (الشكل م-1-17)، عندما يمر فوق قمة المسار C بحيث لا يفقد الاتصال بالمسار.

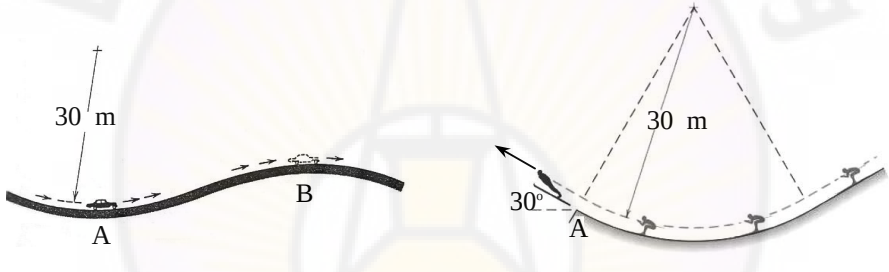
الجواب: $V_C = 4.2\,\text{m/sec}$

م-1-38

تمر سيارة كتلتها 1600 kg من منخفض في طريق كان نصف قطر تقوسه 30 m بسرعة 50 km/h ، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-18). المطلوب:

1. إيجاد القوة العمودية الكلية R المسلطة من الطريق على العجلات في الموضع A .
2. إذا انخفضت القوة R إلى نصف وزن السيارة عندما تمر من القمة B للتقوس الثاني الذي نصف قطر تقوسه أيضاً 30 m . المطلوب إيجاد سرعة السيارة عندئذ V_B .

الجواب: $R_A = 26\,\text{kN}$, $V_B = 43.7\,\text{km/h}$



a b

(الشكل م-1-18)

م-1-39

تصل سرعة المتزحلق وكتلته 90 kg على الجليد إلى 25 m/sec ، عندما يقترب من موقع بداية تركه المسار في A ، كما هو موضح في b من (الشكل م-1-18).

المطلوب إيجاد القوة العمودية $\boldsymbol{R}$ المسلطة من الجليد على منزلقته في اللحظة قبل وصول الموقع A .

الجواب: $R = 2.64\,\text{kN}$

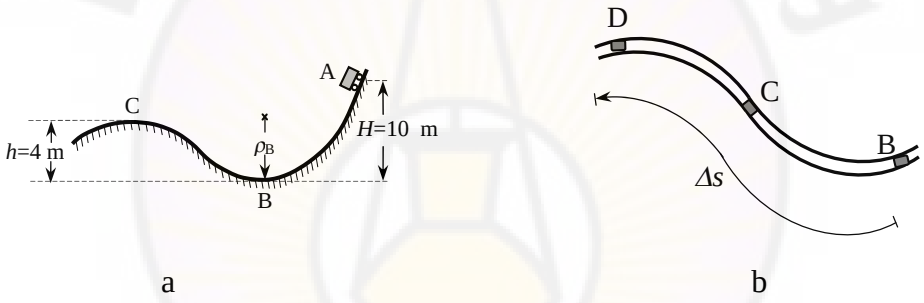
م-1-40- (الدورة الثالثة-2012-2013)

يبدأ جسيم على شكل عربة صغيرة وزنها W ، بالانزلاق من السكون من الموقع A من المسار A B C المكون من ارتفاعات وانخفاضات متتالية، والواقع في مستو شاقولي، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-19). المطلوب إيجاد:

1- قوة رد فعل المسار على العربة N_B عند وصولها الموقع B عنده كان نصف قطر المسار يساوي ($\rho_B = 5$ m).

2- أصغر قيمة لنصف قطر تقوس المسار ρ_C عند الموقع C ، بحيث لا تفقد العربة تماسها مع المسار.

الجواب: $N_B = 5W$, $r_C = 12$ m



a b

(الشكل م-1-19)

م-1-41- (الفصل الثاني-2013-2014)

تتحرك سيارة كتلتها ($m = 1400$ kg) على طريق منحنٍ منبسط يقع في مستوي أفقي، بحيث تنخفض سرعتها بمعدل ثابت من سرعة 95 km/h في الموقع B عندها كان نصف قطر انحناء الطريق ($\rho_B = 350$ m)، إلى سرعة 45 km/h في D عندها كان نصف قطر انحناء الطريق ($\rho_D = 50$ m). كما هو موضح في b من (الشكل م-1-19).

إذا كانت المسافة المقطوعة من B إلى D هي ($\Delta s = 250$ m)، وكانت C تمثل نقطة الانعطاف يتم فيها تغير اتجاه المسار المنحني. المطلوب إيجاد القوة الأفقية الكلية المسلطة من الطريق على دواليب السيارة في كل من المواقع B ، C ، D . F_B, F_C, F_D

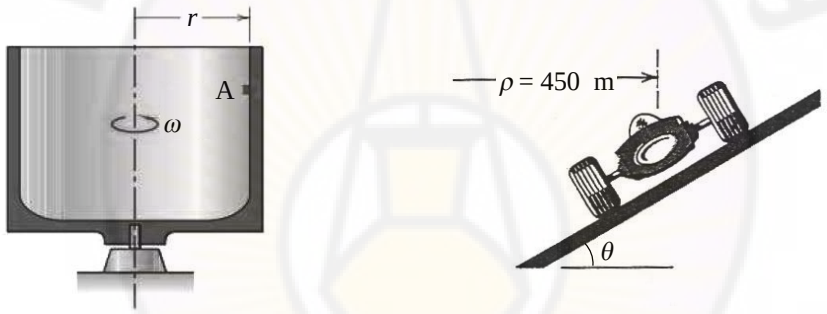
الجواب: $F_B = 3170$ N , $F_C = 1512$ N , $F_D = 4629$ N

م-1-42

يلتصق الجسم الصغير A على جدار أسطوانة تدور، لها نصف قطر r نتيجة تأثير القوة المركزية، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-20).

إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الأسطوانة والجسم هو f_s ، المطلوب إيجاد أصغر سرعة زاوية للأسطوانة $\omega_{(\min)}$ ، بحيث يبقى الجسم ملتصقاً على جدارها دون انزلاق.

الجواب: $w^2 = (g / f_s.r)\ \text{rad}^2/\text{sec}^2$



a b

(الشكل م-1-20)

م-1-43

ما هي الزاوية θ لميل طريق السباق الذي نصف قطر انحنائه 450 m ، الموضح في b من (الشكل م-1-20)، بحيث لا يحصل أي انزلاق جانبي من سيارة سباق تسير عليه بسرعة 200 km/h عندما تمر من الانحناء.

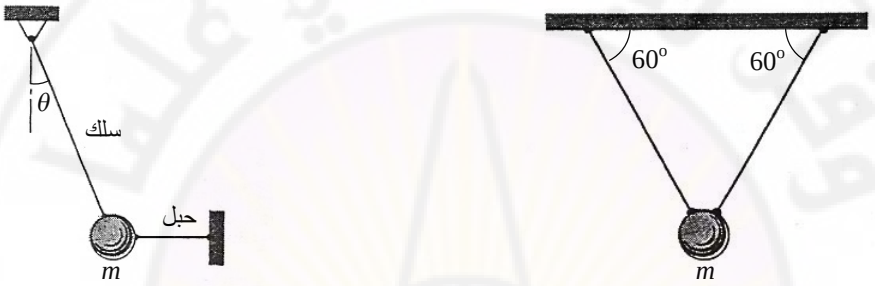
الجواب: $q = 35^o$

م-1-44

تؤلف الكتلة الصغيرة m والسلك المتصل بها نواساً بسيطاً ، كما هو موضح في a من (الشكل م-1-21).

إذا قُطع جزء الحبل الأفقي فجأةً. المطلوب إيجاد النسبة k لقوة الشد T_2 في السلك مباشرةً بعد قطعه إلى قوة الشد T_1 قبل قطعه.

الجواب: $k = T_2 / T_1 = \cos^2 q$



a b

(الشكل م-1-21)

م-1-45

تعلق الكرة الصغيرة m بواسطة سلكين، وتكون في البداية في حالة سكون، كما هو موضح في b من (الشكل م-1-21).

إذا قطع أحد السلكين فجأةً. المطلوب إيجاد النسبة k للشد في السلك الباقي مباشرةً بعد قطع السلك الآخر T_2 ، إلى الشد الأولي قبل القطع T_1 .

الجواب: $k = T_2 / T_1 = 3/2$

م-1-46

نواس يدق الثواني على سطح البحر دوره 2 sec . يتم نقله إلى قمة جبل يقع على خط عرض المكان الأول، فيؤخر النواس 12 ثانية في اليوم.

إذا كان نصف قطر الكرة الأرضية 6370 km . المطلوب إيجاد ارتفاع قمة الجبل h .

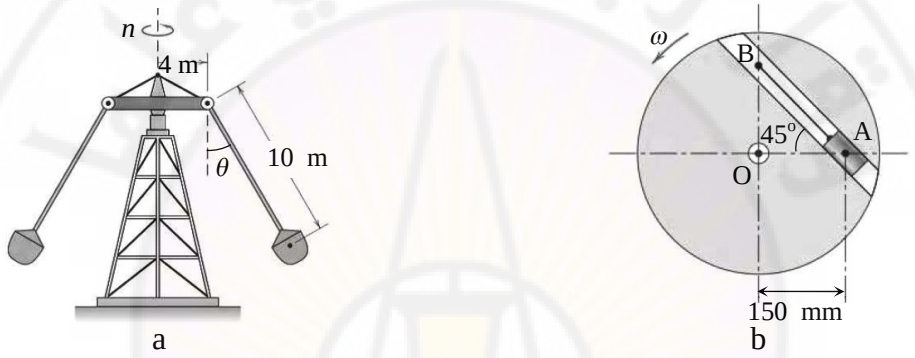
الجواب: $h = 1884\,\text{m}$

م-1-47

المطلوب إيجاد سرعة الدوران n الضرورية لدولاب الهواء في منتزه الألعاب الموضح في a من (الشكل م-1-22)، بحيث تصنع أذرع الدولاب المتصلة بالمقاعد زاوية ($\theta = 60^o$) مع العمود.

ارشاد: اهمل كتلة الأذرع، واعتبر كل مقعد جسيم.

الجواب: $n = 10.65\ \text{r.p.m}$



(الشكل م-1-22)

م-1-48

تستند منزلقة A ذات كتلة 3 kg في المجرى الأملس المائل بزاوية 45^o في قرص يدور في مستواه الأفقي حول مركزه O ، كما هو موضح في b من (الشكل م-1-22).

إذا أوقفت A في مكانها بواسطة حبل مشدود بالنقطة B . المطلوب:

1- إيجاد قوة الشد T في الحبل، في حال سرعة دورانية ثابتة ($n = 300$ r.p.m).

2- هل يولد تغير السرعة أي فرق بقوة الشد.

3- إيجاد قوة الشد T في الحبل، عندما يبدأ القرص حركته من السكون بتسارع زاوي ($\ddot{q} = e = 120\ \text{rad/sec}^2$).

4- إيجاد القوة الأولية الأفقية N المسلطة من المجرى على المنزلقة.

الجواب:

$1 \Rightarrow T = 314\ \text{N}\ ,\ 2 \Rightarrow No.\ ,\ 3 \Rightarrow T = 38.18\ \text{N}\ ,\ 4 \Rightarrow N = 38.18\ \text{N}$

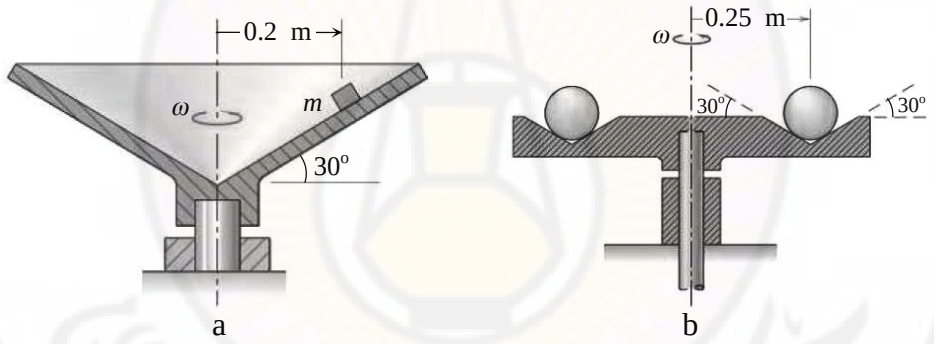
م-1-49

يوضع جسيم صغير على السطح الداخلي لطبق مخروطي الشكل عند نصف القطر ($r = 0.2$ m)، كما هو مبين في a من (الشكل م-1-23).

إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسيم والسطح المخروطي ($f_s = 0.3$). المطلوب إيجاد مجال السرعات الزاوية ω لدوران محور المخروط الذي من أجله يبقى الجسيم في مكانه بدون انزلاق.

إرشاد: اعتبر تغير السرعة الزاوية ضئيلاً بحيث يمكن اهمال التسارع الزاوي للسطح المخروطي.

الجواب: $3.41 < \omega < 7.21$ rad/sec



(الشكل م-1-23)

م-1-50

يدور القرص ذو الأخدود الدائري حول محوره الرأسي بسرعة ثابتة 30 r.p.m ، ويحمل كرتين كتلة كل منها 4 kg ، كما هو موضح في b من (الشكل م-1-23).

المطلوب إيجاد:

1. أكبر قيمة لقوى التماس بين القرص وكل من الكرتين R_1 ، R_2 .
2. سرعة الدوران الكبرى للقرص n_{max} لكي لا تخرج الكرتان من أخدوديهما.

الجواب: $R_1 = 32.52$ N , $R_2 = 12.78$ N , $n_{max} = 45.5$ r.p.m

الفصل الثاني

المبادئ العامة لتحريك الجسيم المادي

General principles of Particle Dynamics

1- مقدمة *Introduction*

وجد علماء الميكانيك في أثناء التحري عن حل بعض المسائل الميكانيكية؛ أنه من السهل استخدام ما يدعى بـــ المبادئ العامة للتحريك، التي تعدّ نتائج للعلاقة الأساسية في التحريك، وذلك بدلاً من استخدام طريقة تكامل المعادلات التفاضلية للحركة، وتكمن أهمية المبادئ العامة في أنها تعين علاقات واضحة بين المميزات التحريكية الأساسية لحركة الأجسام المادية، وبهذا تتيح إمكانيات جديدة لبحث دراسة الحركات الميكانيكية، التي تطبق تطبيقاً واسعاً في الأعمال الهندسية.

2- دفع القوة *Impulse of a Force*

إن تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$ المؤثرة على جسيم M_k خلال فترة زمنية ما يدعى بـــ دفع القوة، فالدفع الجزئي للقوة هو بالتعريف المتجه $\boldsymbol{F_k}.dt$ الذي يعين مدى تأثير القوة خلال الفترة الزمنية الجزئية المتناهية بالصغر dt ، ويرمز له $\boldsymbol{dI_k}$ ويتجه على امتداد خط عمل القوة:

$$\boldsymbol{dI_k} = \boldsymbol{F_k}.\, dt \qquad (1\text{-}2)$$

ومنه نحصل على دفع القوة خلال فترة زمنية محصورة بين الزمنين t_0 و t_1 بالتكامل المحدود لدفعها الجزئي خلال هذه الفترة، ويساوي إلى:

$$\boldsymbol{I_k} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F_k}\,.dt \qquad (2\text{-}2)$$

تحدد هذه العلاقة دفع القوة خلال فترة زمنية، ومنه النص التالي:

إن دفع القوة $\boldsymbol{F_k}$ خلال فترة زمنية يساوي التكامل المحدود للدفع الجزئي للقوة المأخوذ من الزمن t_0 إلى الزمن t_1 .

إذا طبق على الجسيم جملة من القوى $\Sigma \boldsymbol{F_k}$ التي محصلتها $\boldsymbol{R_k}$ ؛ فإن دفع المحصلة خلال الفترة الزمنية $(t_1 - t_0)$ يتعين بالعلاقة:

$$\Sigma \boldsymbol{I_k} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{R_k} \, . dt \qquad (3\text{-}2)$$

أي: **أن دفع محصلة قوى متلاقية في نقطة يساوي المجموع الهندسي لدفع كل من مركباتها.**

في الحالة الخاصة التي تبقى فيها $\boldsymbol{F_k}$ ثابتة بالمقدار والاتجاه والمنحى يكون:

$$\boldsymbol{I_k} = \boldsymbol{F_k} . t_1 \qquad (4\text{-}2)$$

وفي الحالة العامة التي تبقى فيها $\boldsymbol{F_k}$ متحولة ينبغي إبدال $\boldsymbol{F_k}$ بما يساويها، عندئذ يحسب مقدار الدفع بدلالة مركباته القائمة، وذلك بإسقاط العلاقة (2-2) على المحاور الإحداثية:

$$I_{kX} = \int_{t_0}^{t_1} F_{kX} \, . dt \quad , \quad I_{kY} = \int_{t_0}^{t_1} F_{kY} \, . dt \quad , \quad I_{kZ} = \int_{t_0}^{t_1} F_{kZ} \, . dt \qquad (5\text{-}2)$$

يمكن بدلالة هذه المركبات القائمة رسم متجه الدفع $\boldsymbol{I_k}$ ، وتعيين مقداره، وزوايا ميله على المحاور الإحداثية، وتكون وحدات قياسه في المجموعة المطلقة هي N.sec .

يتضح من المعادلات الأخيرة أن هذه القوى ما هي إلا القوى الثابتة أو المرتبطة بالزمن، أما لحساب دفع القوى المعتمدة على الإحداثيات، أو على سرعة حركة الجسيم لا بد من معرفة معادلات حركة الجسيم، ويتم ذلك باستخراجها من حل المسألة الأساسية في التحريك أولاً للحصول على المعادلات:

$$x_k = f_1(t) \qquad , \qquad y_k = f_2(t) \qquad , \qquad z_k = f_3(t)$$

التي يمكن منها حساب المركبات القائمة للتسارع:

$$\ddot{x}_k = A_{kX} = \ddot{f}_1(t) \qquad , \qquad \ddot{y}_k = A_{kY} = \ddot{f}_2(t) \qquad , \qquad \ddot{z}_k = A_{kZ} = \ddot{f}_3(t)$$

ومنها نجد المركبات القائمة للقوة:

$$F_{kX} = m_k \, . A_{kX} \qquad , \qquad F_{kY} = m_k \, . A_{kY} \qquad , \qquad F_{kZ} = m_k \, . A_{kZ}$$

نستبدل F_{kX} ، F_{kY} ، F_{kZ} بما يساويها في المعادلات (5-2)، ونكامل فنحصل على المركبات القائمة لدفع القوة، وبالتالي قيمة الدفع الكلي تعطى بـــ:

$$I_k = \sqrt{I_{kX}^2 + I_{kY}^2 + I_{kZ}^2} \qquad (6\text{-}2)$$

3- كمية الحركة الخطية لجسيم مادي *Linear Momentum of a Particle*

نعدّ جسيماً مادياً M_k كتلته m_k يخضع لتأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$ بدلالة الجملة الإحداثية T(OXYZ) ، فإنه يكتسب تسارعاً $\boldsymbol{A_k}$ وفق العلاقة الأساسية للتحريك:

$$m_k \,.\, \boldsymbol{A_k} = \boldsymbol{F_k}$$

والتي تكتب بالشكل التالي:

$$m_k \frac{d}{dt}\boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{F_k}$$

وبما أن كتلة الجسيم ثابتة لا علاقة لها بالزمن، ولا بالسرعة، فيمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\frac{d}{dt} m_k \,.\boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{F_k} \qquad (7\text{-}2)$$

يمثل المتجه $m_k \,.\boldsymbol{V_k}$ اندفاع الجسيم المادي، ويدعى بـــ كمية الحركة الخطية، أو ببساطة كمية حركة الجسيم المادي، ويساوي جداء كتلة الجسيم بمتجه سرعته، واتجاهه باتجاه متجه السرعة نفسه، ووحداته بالمجموعة المطلقة kg.m/sec ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{q_k}$.

كما تنص العلاقة (7-2) على **أن القوة التي تؤثر على الجسيم المادي تساوي معدل تغير كمية حركته بدلالة الزمن**، وهو النص الذي نشره العالم نيوتن.

4- مبدأ الدفع وكمية الحركة لجسيم مادي
Principle of Impulse and Momentum of a Particle

بفصل المتحولات في العلاقة (7-2):

$$d\,(m_k \,.\boldsymbol{V_k}) = \boldsymbol{F_k} \,.\, dt$$

بالتكامل:

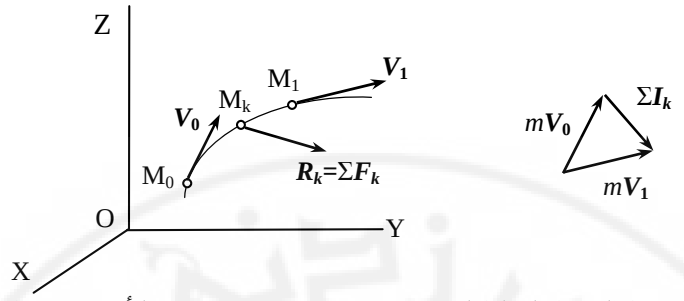
$$m_k \int_{\boldsymbol{V_0}}^{V_1} d\boldsymbol{V_k} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F_k} \,.\, dt$$

بفرض أن سرعة الجسيم في اللحظة t_0 تساوي $\boldsymbol{V_0}$ ، وفي اللحظة t_1 تساوي $\boldsymbol{V_1}$ ، كما هو موضح في a من (الشكل-2-1)، وبما أن حد التكامل للطرف اليميني يمثل متجه دفع القوة، منه نحصل على العلاقة:

$$m_k \,.\boldsymbol{V_{1k}} - m_k \,.\boldsymbol{V_{0k}} = \boldsymbol{I_k}$$

التي تكتب بالشكل:

$$\boldsymbol{q_{1k}} - \boldsymbol{q_{0k}} = \boldsymbol{I_k}$$



b- مخطط تغير كمية الحركة الخطية لجسيم. ، a- جسيم M_k يخضع لتأثير مجموعة قوى $\Sigma \boldsymbol{F_k}$.

(الشكل-2-1)

وإذا أثرت مجموعة من القوى $\Sigma \boldsymbol{F_k}$ على الجسيم المادي؛ فيجب أن نأخذ بعين الاعتبار دفع كل قوة، وتكتب العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\boldsymbol{q_{1k}} - \boldsymbol{q_{0k}} = \sum \boldsymbol{I_k} \qquad (8\text{-}2)$$

تحدد هذه العلاقة تغير كمية الحركة الخطية لجسيم مادي الموضحة في b من (الشكل-2-1)، ومنه النص التالي:

أن تغير كمية الحركة الخطية لجسيم مادي خلال فترة زمنية معينة يساوي المجموع الهندسي لدفوع كل القوى المؤثرة على هذا الجسيم؛ في هذه الفترة الزمنية.

بترتيب العلاقة السابقة:

$$\boldsymbol{q_{1k}} = \boldsymbol{q_{0k}} + \sum \boldsymbol{I_k} \qquad (9\text{-}2)$$

تحدد هذه العلاقة مبدأ الدفع وكمية الحركة لجسيم مادي، ومنه النص التالي:

إن كمية الحركة النهائية لجسيم مادي يساوي الجمع الشعاعي لكمية حركته الابتدائية، ودفع القوى خلال الفترة الزمنية بينهما.

في حل المسائل يفضل اللجوء إلى مساقط العلاقة (2-8):

$$\begin{aligned} q_{1X} - q_{0X} &= \sum I_{kX} \quad , \quad m_k . V_{1kX} - m_k . V_{0kX} = \sum I_{kX} \\ q_{1Y} - q_{0Y} &= \sum I_{kY} \quad , \quad m_k . V_{1kY} - m_k . V_{0kY} = \sum I_{kY} \\ q_{1Z} - q_{0Z} &= \sum I_{kZ} \quad , \quad m_k . V_{1kZ} - m_k . V_{0kZ} = \sum I_{kZ} \end{aligned} \qquad (10\text{-}2)$$

وفي حالة الحركة في خط مستقيم على امتداد OX ؛ فإن المعادلة الأولى من هذه المعادلات تعبر عن تغير الكمية الحركية لهذه الحركة.

يساعد مبدأ الدفع، وكمية الحركة في حل مسائل التحريك، التي لا تحتاج إلى حساب التسارع؛ لأن هذا المبدأ يربط بين القوة والكتلة والسرعة والزمن؛ لذا يستعمل في الحالات:

- القوى المؤثرة في الجسيم معلومة، وتكون ثابتة، أو تعتمد على الزمن فقط.
- المقادير المفروضة والمطلوبة تقتصر فقط على القوى المؤثرة، وزمن حركة الجسيم، والسرعة الابتدائية والنهائية له.

مسألة-2-1

يعطى متجه سرعة جسيم كتلته 1.2 kg بالمعادلة:

$$\boldsymbol{V}_{t(\mathrm{m/sec})} = 1.5\,t^3\boldsymbol{i} + (2.4 - 3\,t^2)\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}$$

المطلوب عند الزمن ($t = 2$ sec)، إيجاد ما يلي:

1. مركبات متجه كمية الحركة الخطية للجسيم $q_{(t=2\mathrm{sec})}$ ، والقيمة العددية له.
2. القوة المحصلة $R_{(t=2\mathrm{sec})}$ المؤثرة على الجسيم.

الحل

1. يعطى متجه كمية الحركة الخطية للجسيم بالمعادلة:

$$\boldsymbol{q}_t = m\,.\,\boldsymbol{V}_t$$

حيث $\boldsymbol{V}_t$ تمثل متجه سرعة الجسيم، ومعادلته عند الزمن ($t = 2$ sec) هي:

$$\boldsymbol{V}_{(t=2\mathrm{sec})} = 1.5\,(2)^3\boldsymbol{i} + [2.4 - 3\,(2)^2]\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k} = 12\,\boldsymbol{i} - 9.6\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}$$

منه بالتعويض في معادلة متجه كمية الحركة الخطية للجسيم:

$$\boldsymbol{q}_{(t=2\mathrm{sec})} = 14.4\,\boldsymbol{i} - 11.52\,\boldsymbol{j} + 6\,\boldsymbol{k}$$

حيث مركبات متجه كمية الحركة الخطية للجسيم:

$$q_{\mathrm{X}} = 14.4\ \mathrm{kg.m/sec} \quad , \quad q_{\mathrm{Y}} = -11.52\ \mathrm{kg.m/sec} \quad , \quad q_{\mathrm{Z}} = 6\ \mathrm{kg.m/sec}$$

وقيمته العددية:

$$q_{(t=2\mathrm{sec})} = [q_{\mathrm{X}}^2 + q_{\mathrm{Y}}^2 + q_{\mathrm{Z}}^2]^{1/2} = [(14.4)^2 + (11.52)^2 + (6)^2]^{1/2} = 19.39\,\mathrm{kg.m/sec}$$

2. إن القوة المحصلة $\boldsymbol{R}$ المؤثرة على الجسيم، تساوي معدل تغير كمية حركته بدلالة الزمن وفق العلاقة:

$$\boldsymbol{R} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{q} = \frac{d}{dt} m.\boldsymbol{V} = m\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}$$

من اشتقاق معادلة متجه السرعة بدلالة الزمن:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_t = 4.5\, t^2\boldsymbol{i} - 6\, t\, \boldsymbol{j}$$

بالتعويض في معادلة القوة:

$$\boldsymbol{R}_t = 5.4\, t^2\boldsymbol{i} - 7.2\, t\, \boldsymbol{j}$$

نحصل على معادلة القوة عند الزمن $(t = 2 \text{ sec})$:

$$\boldsymbol{R}_{(t=2sec)} = 21.6\, \boldsymbol{i} - 14.4\, \boldsymbol{j}$$

حيث مركبات متجه القوة المحصلة $\boldsymbol{R}$:

$$R_{\mathrm{X}} = 21.6 \text{ N} \qquad , \qquad R_{\mathrm{Y}} = -14.4 \text{ N}$$

وقيمته العددية:

$$F_{(t=2\mathrm{sec})} = [R_{\mathrm{X}}^2 + R_{\mathrm{Y}}^2]^{1/2} = [(21.6)^2 + (14.4)^2]^{1/2} = 25.95 \text{ N}$$

مسألة-2-2

كم ينبغي أن يكون معامل الاحتكاك الحركي f_k بين عجلات السيارة والطريق الأفقي حتى تقف السيارة بعد زمن ($t = 6$ sec) من فرملة عجلاتها، وذلك إذا كانت سرعة السيارة قبل الفرملة تساوي إلى ($V = 72$ km/h).

الحل:

لإيجاد معامل الاحتكاك الحركي f_k نحسب قوة الاحتكاك المؤثرة على عجلات السيارة، وبما أن القوى المؤثرة على الجسم الحر للسيارة ثابتة، وهي $\boldsymbol{W}$ قوة الثقالة، $\boldsymbol{N}$ قوة القيد الناظمية و $\boldsymbol{F_f}$ قوة الاحتكاك المؤثرة على عجلات السيارة، والمقادير المطلوبة والمعطاة تتضمن قوى ثابتة وزمناً وسرعة؛ لذا نطبق مبدأ الدفع وكمية الحركة على السيارة:

$$\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0 = \sum \boldsymbol{I}_k = \boldsymbol{I}_W + \boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{I}_{F_f}$$

بإسقاط العلاقة على منحى الحركة المستقيم الأفقي:

$$m.V_1 - m.V_0 = -F_f.t$$

F_f قوة الاحتكاك ثابتة، وتحسب من شرط الانزلاق مع احتكاك:

$$F_f = f_k.N$$

$\boldsymbol{N}$ قوة القيد الناظمية وتحسب من إسقاط العلاقة الأساسية لتحريك السيارة على منحى عمودي على محور الحركة:

$$N = W = m.g$$

بالتعويض علماً أن السرعة النهائية للسيارة ($V_1 = 0$):

$$-m\,(72000/3600) = -f_k.m.g.6$$

ومنه معامل الاحتكاك الحركي:

$$f_k = 0.34$$

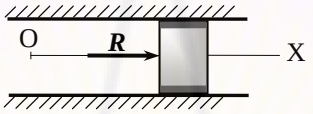
مسألة-2-3

إذا كانت قيمة $\boldsymbol{R}$ محصلة كل القوى المؤثرة على المكبس الموضح في (الشكل-2-2) تتغير خلال فترة زمنية وفق المعادلة:

$$R_{(t)} = 0{,}4\,W\,(1 - k.t\,)$$

حيث $\boldsymbol{W}$ وزن المكبس، و t الزمن بالثواني، و ($k = 1.6\ \text{sec}^{-1}$) عامل التناسب الثابت.

إذا كانت سرعة المكبس في اللحظة ($t_0 = 0$) تساوي ($V_0 = 0.2\ \text{m/sec}$). المطوب تعيين سرعته في اللحظة ($t_1 = 0.5\ \text{sec}$).



(الشكل-2-2) مكبس خاضع لمحصلة قوى $\boldsymbol{R}$.

الحل:

بما أن محصلة القوى المؤثرة على المكبس تعتمد على الزمن، والمقادير المعلومة والمجهولة تتضمن V_1 و V_0 و t_1 ، نلجأ لعلاقة تغير كمية الحركة لإيجاد السرعة المطلوبة:

$$\boldsymbol{q_1 - q_0 = I_R}$$

بإسقاطها على محور الحركة الأفقي باتجاه السرعة:

$$m\,.\,V_{1X} - m\,.\,V_{0X} = I_{RX}$$

حيث الدفع:

$$I_{RX} = \int_{t_0}^{t_1} R_X\,.dt = 0.4\,W \int_{t_0=0}^{t_1=0.5} (1 - k.t)\,dt = 0.4W\,(t_1 - \frac{k}{2}\,t_1^2) = 0.12\,m.g$$

بالتعويض في علاقة الإسقاط:

$$m\,.\,V_1 - m\,.\,V_0 = 0.12\,m\,.\,g$$

ومنه سرعة المكبس في اللحظة المطلوبة:

$$V_1 = V_0 + 0.12\,g = 0.2 + 0.12\,g = 1.38\,\text{m/sec}$$

5- عمل القوة *Work of a Force*

القوة هي السبب القادر على تحريك الجسيم، ويمكن قياس القوة بتأثيرها التحريكي على الجسيم المادي، ويتجلى هذا التأثير بالعمل، وعندها يُقَدر العمل بتأثير القوة الذي يؤدي إلى تغيير في قيمة السرعة العددية.

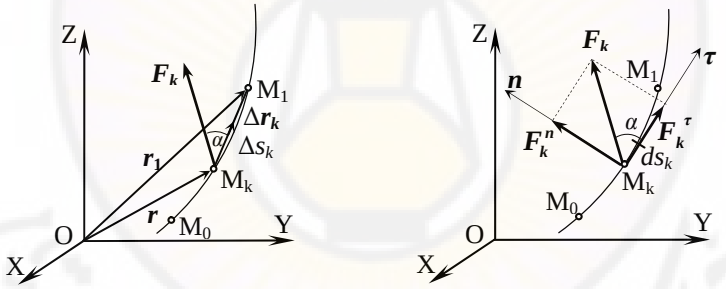
نعدّ جسيماً مادياً M_k يتحرك على منحنٍ بدلالة جملة محاور إحداثية $T(OXYZ)$ تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$ من الموضع M_0 إلى الموضع المجاور M_1 ، كما هو موضح في a من (الشكل-2-3)، حيث $\mathbf{OM_k}$ تمثل المتجه الموضعي للجسيم في الوضع العام:

$$\boldsymbol{r_k} = \mathbf{OM_k}$$

والمتجه الموضعي للجسيم في M_1 :

$$\boldsymbol{r_1} = \mathbf{OM_1} = \mathbf{OM_k} + \mathbf{M_kM_1} = \boldsymbol{r_k} + \boldsymbol{\Delta r_k}$$

و $\boldsymbol{\Delta r_k}$ يمثل متجه الانتقال لنقطة تأثير القوة، أي: انتقال الجسيم.



b- تحليل القوة $\boldsymbol{F_k}$ إلى مركبة مماسية ومركبة ناظمية. a- جسيم مادي M_k يتحرك تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$.

(الشكل-2-3)

فالعمل الجزئي dw للقوة $\boldsymbol{F_k}$ إذا ما انتقل الجسيم المادي $\mathbf{M_k}$ انتقالاً جزئياً متناهياً في الصغر (*Finite Displacement*) قدره $\boldsymbol{dr_k}$ ، يساوي إلى الجداء القياسي للمتجهين $\boldsymbol{F_k}$ و $\boldsymbol{dr_k}$ أي:

$$dw_{F_k} = \boldsymbol{F_k} \,.\, \boldsymbol{dr_k} \qquad (11\text{-}2)$$

بتناهي Δt إلى الصفر تتناهى M_1 إلى M_k ، ويتناهى طول الوتر Δr_k إلى طول القوس Δs_k ، ويتناهى الوتر إلى مماس في M_k ، كما هو مبين في b من (الشكل-2-3).

بالتالي إذا كان F_k و ds_k قيمتي القوة والانتقال القياسيتين، و α الزاوية المحصورة بين متجه القوة ومتجه الانتقال، ومن تعريف الجداء القياسي لمتجهين نكتب:

$$dw_{F_k} = F_k \,.\, ds_k \,.\, \cos a \qquad (12\text{-}2)$$

منه العمل هو كمية قياسية له إشارة وقيمة ودون اتجاه، وتكون وحدة قياسه في المجموعة المطلقة هي N.m . إن هذه الوحدة تدعى بـــ الجول (Joule) ويرمز لها بـــ J وتعرف بأنها: العمل الناتج من تأثير قوة نيوتن واحد 1 N عندما يتحرك الجسيم مسافة متر واحد 1 m باتجاه القوة. يبعدنا استعمال وحدة الجول في حساب العمل بصورة مستمرة عن الخلط بينها وبين وحدة عزم القوة؛ التي تكتب أيضاً بـــ N.m ، ونلاحظ أن:

العمل يكون موجباً ويدعى بـــ العمل المحرك إذا كانت الزاوية ($\alpha < \pi / 2$).

ويكون العمل سالباً ويدعى بـــ العمل المقاوم إذا كانت الزاوية ($\alpha > \pi / 2$).

ويكون العمل معدوماً عندما القوة تكون عمودية على الانتقال ($\alpha = \pi / 2$).

وبما أن القوة $\boldsymbol{F_k}$ تتجه باتجاه التسارع $\boldsymbol{A_k}$ الذي يمكن تحليله إلى مركبتين $\boldsymbol{A_k^\tau}$ وفق المماس و $\boldsymbol{A_k^n}$ وفق الناظم؛ لذا نحلل القوة $\boldsymbol{F_k}$ إلى مركبة مماسية $\boldsymbol{F_k^\tau}$ ، كما هو مبين في b من (الشكل-2-3) التي تعمل على تغير مقدار سرعة الجسيم المتحرك بإكسابه تسارعاً مماسياً، ومركبة ناظمية $\boldsymbol{F_k^n}$ تعمل إما على تغير اتجاه متجه سرعة الجسيم $\boldsymbol{V_k}$ بإكسابه تسارعاً ناظمياً، وإما على تغيير الضغط على القيد في حركة الجسيم المقيد، منه يمكن أن نكتب:

$$dw_{F_k} = \mathbf{m}\, F_k \,.\, \cos a \,.\, ds_k = \mathbf{m}\, F_k^t \,.\, ds_k \qquad (13\text{-}2)$$

حيث عمل مركبة القوة الناظمية معدوم لأنها لا تؤثر على مقدار السرعة.

يمكن القول أيضاً أن العمل يكون موجباً عندما تتجه المركبة المماسية للقوة في اتجاه الحركة، أي: عندما تعمل القوة على تسارع الحركة، ويكون العمل سالباً عندما تتجه المركبة المماسية للقوة عكس اتجاه الحركة، أي: عندما تعمل القوة على إبطاء الحركة.

بالتالي نحصل على عمل القوة خلال انتقال معين للجسيم من M_0 إلى M_1 بالتكامل المحدود لعملها الجزئي (2-13) خلال هذا الانتقال، ويساوي:

$$w_{M_0 \to M_1} = \int_{s_0}^{s_1} F_k^t \,.\, ds_k \qquad (14\text{-}2)$$

تحدد هذه العلاقة عمل القوة خلال انتقال معين، ومنه النص التالي:

إن عمل القوة $\boldsymbol{F_k}$ خلال انتقال معين يساوي التكامل المحدود للعمل الجزئي للقوة على طول المسار؛ الذي يرسمه الجسيم المادي.

حيث مقادير حدود التكامل تقيس المسافة التي يقطعها الجسيم المادي على طول المسار.

إذا كانت القوة المؤثرة $\boldsymbol{F_k^\tau}$ ثابتة في المقدار (F_k^t = Const.)؛ نحصل على:

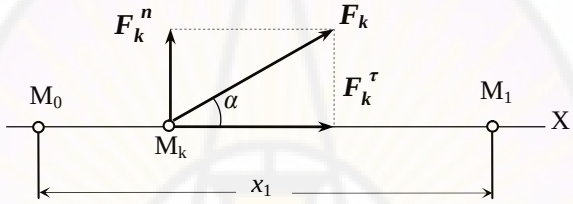
$$w_{M_0 \to M_1} = F_k^t \ (s_{1k} - s_{0k}) \qquad (15\text{-}2)$$

وإذا كانت القوة المؤثرة $\boldsymbol{F_k}$ ثابتة في المقدار والاتجاه، وكان الجسيم التي تؤثر عليه هذه القوة يتحرك في خط مستقيم، كما هو موضح في (الشكل-2-4) في هذه الحالة تكون:

$$F_k^t = F_k . \cos a = \text{Const.}$$

وعمل القوة عندئذ يساوي إلى:

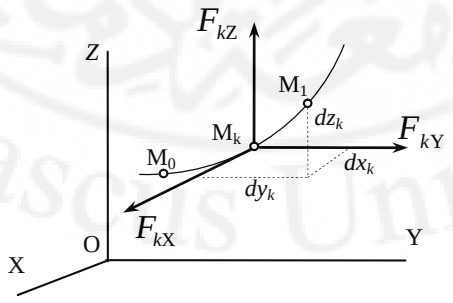
$$w_{M_0 \to M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \boldsymbol{F_k} . d\boldsymbol{r_k} = \int_{x_0}^{x_1} F_k^t . dx_k = F_k^t \ (x_{1k} - x_{0k}) \qquad (16\text{-}2)$$



(الشكل-2-4) جسيم يتحرك في خط مستقيم عندما يخضع لقوة $\boldsymbol{F_k}$ ثابتة في المقدار والاتجاه.

كما يمكن أن نحصل على العمل الجزئي بدلالة مركبات كل من القوة والانتقال على المحاور الإحداثية، وذلك إذا عبرنا عن حاصل الجداء القياسي للعلاقة (2-11) بدلالة مساقط المتجهين $\boldsymbol{F_k}$ و $d\boldsymbol{r_k}$ ، كما هو موضح في (الشكل-2-5). نجد مباشرة العلاقة التحليلية للعمل الجزئي:

$$dw_{\boldsymbol{F_k}} = F_{kX} . dx_k + F_{kY} . dy_k + F_{kZ} . dz_k$$



(الشكل-2-5) مركبات القوة والانتقال على المحاور الإحداثية.

بالتكامل؛ نحصل على عمل القوة المبذول في أي انتقال محدود M_0M_1 :

$$w_{M_0 \to M_1} = \int_{M_0}^{M_1} (F_{kX} \, . \, dx_k + F_{kY} \, . \, dy_k + F_{kZ} \, . \, dz_k) \qquad (17\text{-}2)$$

أي: **إن عمل القوة يساوي المجموع الجبري لعمل مركباتها القائمة.**

لحساب التكامل (17-2) لا بد من معرفة العلاقة بين مركبات القوة وإحداثياتها المناظرة، فإذا علمنا معادلات الحركة أمكن حساب كل من dx_k، dy_k، dz_k ، كما يمكن حساب $F_{kX}.F_{kY}.F_{kZ}$ من المعادلات التفاضلية للحركة.

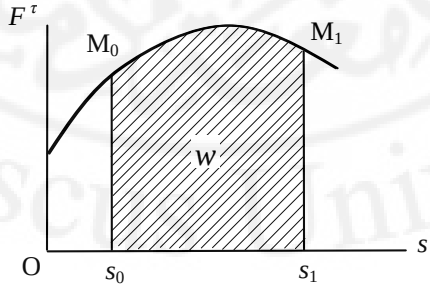
بالتالي فإن حساب عمل القوى الثابتة والقوى المعتمدة على موضع الجسيم المتحرك يتم دون الحاجة لمعرفة معادلة حركة الجسيم؛ التي تؤثر عليه هذه القوى.

أما لحساب عمل القوى المعتمدة على الزمن، أو على سرعة حركة الجسيم، فلا بد من معرفة معادلة حركته أي معرفة الاحداثيات x، y، z كتوابع للزمن، ويتم ذلك باستخراجها من حل المسألة الأساسية في التحريك أولاً.

وإذا كانت القوة تعتمد على المسافة، وكان معلوماً تحولات F_k^t بدلالة s ، أي:

$$F_k^t = f\,(s)$$

أمكن بالتمثيل البياني تقدير العمل، وذلك بفرض أن الجسيم في الوضع M_0 يقع على مسافة s_0 من نقطة الأصل، وفي الوضع M_1 يقع على مسافة s_1 منها، كما هو موضح في (الشكل-2-6)، وباعتبار المعنى الهندسي للتكامل نحصل من تطبيق العلاقة (2-14) على العمل الممثل بمقدار المساحة المهشرة الواقعة أسفل منحنى المسار مضروباً بعامل مقياس الرسم.

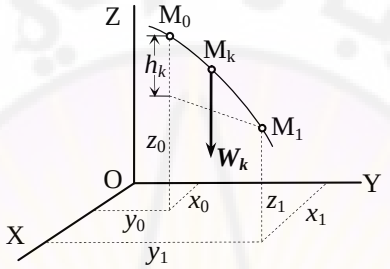


(الشكل-2-6) التمثيل البياني لتقدير العمل.

1-5- أمثلة على حساب العمل

1-1-5- عمل قوة الثقالة لجسيم مادي *Work of a Weight Force of a Particle*

نعدّ جسيماً مادياً M_k خلال حركته على منحنٍ تحت تأثير قوة ثقالته $\boldsymbol{W_k}$ ، التي تقوم بنقله من الموضع $M_0(x_0 , y_0 , z_0)$ إلى الموضع $M_1(x_1 , y_1 , z_1)$ ، بدلالة جملة محاور إحداثية $T(OXYZ)$ فيها المحور OZ شاقولي إلى الأعلى، كما هو موضح في (الشكل-2-7).



(الشكل-2-7) جسيم مادي M_k خلال حركته على منحنٍ تحت تأثير قوة ثقالته $\boldsymbol{W_k}$.

يحسب عمل قوة الثقالة من علاقة العمل (2-17)، بأن نسقط القوة على جملة المحاور:

$$F_X = 0 \quad , \quad F_Y = 0 \quad , \quad F_Z = -W_k$$

بالتعويض في علاقة العمل:

$$w_{W_k(M_0 \to M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} -W_k \, . dz_k = -\int_{z_0}^{z_1} W_k \, . dz_k$$

$$w_{W_k(M_0 \to M_1)} = -W_k (z_{1k} - z_{0k}) = W_k (z_{0k} - z_{1k})$$

$$w_{W_k(M_0 \to M_1)} = \mathbf{m}\, W_k \, . \Delta z_{01k} = \mathbf{m}\, W_k \, . h_k \qquad (18\text{-}2)$$

حيث h_k تمثل الانتقال الشاقولي للجسيم M_k .

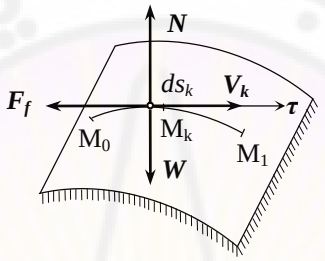
فإذا كان الموضع M_1 على سوية أعلى من سوية الموضع M_0 كانت إزاحة الانتقال $(\Delta z_{01k} < 0)$ منه العمل سالب، أي: مقاوم، وإذا كانت M_0 على سوية أعلى من سوية M_1 كانت إزاحة الانتقال $(\Delta z_{01k} > 0)$ منه العمل موجب، أي: محرك.

بالتالي **عمل قوة الثقالة لجسيم مادي يساوي إلى جداء القوة بالانتقال الشاقولي للجسيم؛ الذي تؤثر عليه هذه القوة مأخوذاً بإشارته الموافقة.**

يلاحظ أنه لا علاقة لعمل قوة الثقالة بشكل المسار؛ الذي ينتقل عليه هذا الجسيم، وتدعى القوة التي تمتاز بخاصة كهذه بـــ قوة محافظة (*Conservative Forces*).

5-1-2- عمل قوة الاحتكاك *Work of a Friction Force*

نعدّ جسيماً مادياً M_k يتحرك على مسار خشن معامل الاحتكاك فيه هو f_k ، من الموضع M_0 إلى الموضع M_1 بدلالة جملة محاور إحداثية $M_k\boldsymbol{\tau n}$ فيها المحور $\boldsymbol{\tau}$ باتجاه الحركة، ويؤثر على الجسيم المادي خلالها قوة الاحتكاك ($F_f = f_k. N$) التي تعاكس جهة الحركة، و $\boldsymbol{N}$ رد الفعل الناظمي، و $\boldsymbol{W_k}$ قوة ثقالته، كما هو موضح في (الشكل-2-8).



(الشكل-2-8) جسيم مادي M_k يتحرك على مسار خشن.

يحسب عمل قوة الاحتكاك من علاقة العمل (2-14)، بأن نسقط القوى على المماس:

$$F_k^t = -F_f$$

بالتعويض في علاقة العمل:

$$w_{\boldsymbol{F}_f\,(M_0 \to M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_k^t . ds_k = -\int_{s_0}^{s_1} F_f . ds_k$$

الإشارة السالبة تدل أن القوة تعاكس الانتقال منه عمل قوة الاحتكاك هو عمل مقاوم، وإذا بقيت قوة الاحتكاك ثابتة كان عندها:

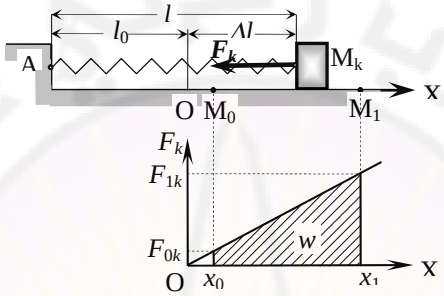
$$w_{\boldsymbol{F}_f\,(M_0 \to M_1)} = -\int_{s_0}^{s_1} f_k . N . ds_k = -f_k . N \int_{s_0}^{s_1} ds_k = -f_k . N (s_{1k} - s_{0k}) \quad (19\text{-}2)$$

بالتالي **عمل قوة الاحتكاك تساوي جداء قوة الاحتكاك بانتقال الجسيم على المسار الذي يتحرك عليه.**

فعمل قوة الاحتكاك سالب عند الانزلاق دوماً، ويعتمد على شكل المسار، أي: على طول القوس المنحني M_0M_1 الذي يتحرك عليه الجسيم، وبالتالي قوة الاحتكاك ليست قوة محافظة.

5-1-3- عمل قوة المرونة *Work of an Elastic Force*

نثبت طرف نابض لولبي مرن مهمل الكتلة بنقطة ثابتة A في حائط شاقولي، ونصل طرفه الآخر بجسيم مادي M_k يستطيع الحركة على مستوى أفقي أملس، ويتزن عندما يكون النابض غير مشدود في الموضع O ، حيث ($AO = l_0$) تمثل طول النابض غير المشدود، كما هو موضح في a من (الشكل-2-9).



(الشكل-2-9) جسيم M_k مثبت بطرف نابض مشدود يستطيع الحركة على مستوى أفقي أملس.

نختار محور الحركة AX ينطبق على النابض، ونعتبر مبدأ الفواصل الموضع O على هذا المحور. نحرف الجسيم عن وضع توازنه بشد النابض حتى الطول ($OM_k = \Delta l$)، عندها تؤثر على الجسيم المادي قوة مرونة النابض المتجهة دوماً إلى الموضع O ، وتبعاً لقانون هوك (*Hooke*)، يتناسب مقدار هذه القوة طرداً مع استطالة النابض ($F_k = k.\Delta l$)، حيث:

$$\Delta l = l - l_0 = x$$

وعليه:

$$F_k = k \,.\, x$$

حيث k تمثل ثابت النابض (*Spring Constant*) أو عامل صلابة النابض (*Stiffness*)، وتساوي عددياً القوة اللازمة لجعل استطالة النابض مساوياً لوحدة الطول، ووحدتها هي N/cm .

هذه العلاقة تكون صحيحة فقط تحت شروط التوازن السكوني، ويجب تعديلها تحت الشروط التحريكية؛ لكي نأخذ في الاعتبار عطالة النابض، مع ذلك فالخطأ الناتج من استعمالها في حل مسائل التحريك يكون صغيراً إذا كانت كتلة النابض صغيرة بالمقارنة مع الكتل الأخرى المتحركة، وهي تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الأصل وميله k ، كما هو مبين في b من (الشكل-2-9).

فالعمل الذي تقوم به القوة $\boldsymbol{F_k}$ الناتجة عن النابض المرن خلال انتقال الجسيم المادي من الموضع M_0 إلى الموضع M_1 مثلاً، ينتج بالتعويض في العلاقة (2-17) على أن:

$$F_Y = F_Z = 0 \quad , \quad F_X = -F_k$$

منه؛ نحصل على:

$$w_{\boldsymbol{F_k}(M_0 \to M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} F_X . dx = -\int_{x_0}^{x_1} k . x . dx = \frac{k}{2}(x_0^2 - x_1^2)$$

حيث x_0 تمثل الاستطالة الابتدائية (*Initial Extension*)، ويرمز لها بـــ Δl_{in} ، في حين x_1 تمثل الاستطالة النهائية (*Final Extension*)، ويرمز لها بـــ Δl_{fin} ، عندئذ تصبح علاقة العمل:

$$w_{F_k(M_0 \to M_1)} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2) \qquad (20\text{-}2)$$

بالتالي **عمل قوة المرونة يساوي إلى نصف حاصل جداء ثابت المرونة k بالفرق بين مربعي الاستطالة الابتدائية، والاستطالة النهائية للنابض المرن.**

ويكون العمل موجباً إذا كان:

$$\Delta L_{in} > \Delta L_{fin}$$

أي عندما يتحرك الجسيم M_k نحو وضع الاتزان، والعكس بالعكس، ويجب الانتباه إلى وحدات كل من x و k إذ يجب أن تكون متجانسة.

يبرهن أن العلاقة الأخيرة تبقى صحيحة؛ حتى لو لم يكن انتقال الجسيم مستقيماً، وبالتالي لا يعتمد عمل قوة المرونة إلا على الاستطالة النهائية والابتدائية للنابض، فهو مستقل عن مسار الجسيم المتحرك، منه قوة المرونة هي قوة محافظة.

ويمكن الحصول على نتيجة مماثلة لعلاقة العمل، وذلك من مخطط تحولات F_k بدلالة x ، المبين في b من (الشكل-2-9)، عندئذ العمل يساوي سطح شبه المنحرف المهشر، وذلك بعد حساب القوة F_{0k} و F_{1k} الموافقة للموضعين x_0 و x_1 :

$$w_{\boldsymbol{F_k}(x_0 \to x_1)} = \frac{1}{2}(F_{0k} + F_{1k})\Delta x_{01} \qquad (21\text{-}2)$$

هذه العلاقة تُعَدُّ أفضل من العلاقة السابقة في حساب العمل، إذ إن إمكانية المزج بين الوحدات تكون أقل.

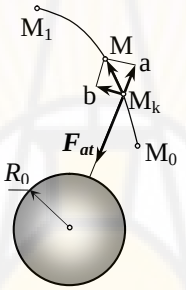
5-1-4- عمل قوة الجذب *Work of an Attraction Force*

إذا اعتبرنا كوكب الأرض كرة مكونة من طبقات متجانسة متحدة المركز، فإنه ستؤثر على كل جسيم M_k ذو الكتلة m_k الموجود خارج الكرة، أو على سطحها قوة الجذب $\boldsymbol{F_{at}}$ المتجهة إلى مركز الكرة O ، كما هو موضح في (الشكل-2-10)، التي تتغير متناسبة عكسياً مع مربع r بعد الجسيم M_k عن المركز O :

$$F_{at} = z\ \frac{m_k}{r^2}$$

حيث z تمثل عامل تناسب ثابت، ويعين من الشرط الذي ينص على أنه عندما يكون الجسيم على سطح الأرض؛ فإن:

- بعد الجسيم عن المركز يساوي $(r = R_0)$، حيث R_0 تمثل نصف قطر الكرة الأرضية.
- قوة الجذب تساوي $(F_{at} = m_k.g)$، حيث g تمثل تسارع الجاذبية على سطح الأرض.



(الشكل-2-10) جسيم M_k موجود خارج كوكب الأرض خاضع لقوة جذب $\boldsymbol{F_{at}}$.

بالتعويض؛ نحصل على:

$$m_k\,.g = z\ \frac{m_k}{R_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad z\ = g\,.R_0^2$$

لحساب عمل قوة الجذب $\boldsymbol{F_{at}}$ خلال انتقال الجسيم M_k ، من الموضع M_0 حيث $(r = r_0)$ إلى الموضع M_1 حيث $(r = r_1)$، نحلل الانتقال الأولي $\mathbf{M_kM}$ للجسيم إلى انتقال $\mathbf{M_kb}$ عمودي على OM_k ، وبالتالي على قوة الجذب $\boldsymbol{F_{at}}$ ، وانتقال $\mathbf{M_ka}$ مساوي بالمقدار التغير $\boldsymbol{dr}$ للمسافة $(\mathbf{OM} = \boldsymbol{r})$، والمتجه على امتداد $\mathbf{OM_k}$ ، وبما أن عمل قوة الجذب المبذول في الانتقال $\mathbf{M_kb}$ معدوم، بالتالي يصبح العمل الجزئي لقوة الجذب:

$$dw_{F_{at}} = -\,\boldsymbol{F_{at}}\,.\boldsymbol{dr} = -\,z\ \frac{m_k}{r^2}\,dr$$

الإشارة السالبة تدل على أن الانتقال M_ka عكس اتجاه قوة الجذب $\boldsymbol{F_{at}}$.

بالتكامل:

$$w_{\boldsymbol{F}_{at}(\mathrm{M}_0\to\mathrm{M}_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dw = -z\,.\,m_k \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = z\,.\,m_k \int_{r_0}^{r_1} d\frac{1}{r}$$

$$w_{\boldsymbol{F}_{at}(\mathrm{M}_0\to\mathrm{M}_1)} = z\,.\,m_k \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right] = m_k\,.g\,.R_0^2 \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right] \qquad (22\text{-}2)$$

نلاحظ أن عمل قوة الجذب موجب إذا كان ($r_0 > r_1$)، أي: عندما يكون الوضع النهائي للجسيم المادي أقرب إلى سطح الأرض من الوضع الابتدائي، وسالب عندما ($r_0 < r_1$)، وأنه لا يعتمد على شكل مسار الجسيم، وبالتالي فإن قوة الجذب تُعَدُّ قوة محافظة.

6- الاستطاعة *Power*

الاستطاعة هي المقدار الذي يحدد عمل القوة المبذول في واحدة الزمن، فإذا بذل العمل بانتظام فإن الاستطاعة الوسطية هي:

$$P_{av} = w/t$$

حيث t تمثل الزمن الذي أنجز فيه العمل. أما الاستطاعة الآنية:

$$P = \mathrm{Lim}_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}}{dt} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{V} = F_t\,.\frac{ds}{dt} = F_t\,.V \qquad (23\text{-}2)$$

فالاستطاعة الآنية للقوة في اللحظة t هي مقدار سلمي، تساوي حاصل الجداء العددي لمتجه القوة بمتجه السرعة، أو جداء المركبة المماسية للقوة بالقيمة العددية لسرعة الحركة.

في المحركات التي تتميز باستطاعة ثابتة؛ تكون السرعة التي ينقلها المحرك إلى الجسم المتحرك متناسبة عكساً مع القوة المماسية الدافعة. فحتى تتمكن سيارة من تسلق المرتفعات، أو السير في الطريق الوعرة، ينبغي تخفيض سرعتها؛ لتصبح القوة الدافعة المماسية كبيرة وقادرة على دفع السيارة إلى الأمام، حيث تقوم علبة السرعة في السيارة بهذه المهمة.

إن وحدة قياس الاستطاعة في مجموعة الوحدات المطلقة هي الواط Watt ، ويرمز له بـــ W ، ويساوي (W = N.m/sec)، وفي مجموعة الوحدات الفنية تُعَدّ وحدة الاستطاعة قوة الحصان (*Horse Power*)، ويرمز له بـــ hp ، ويساوي:

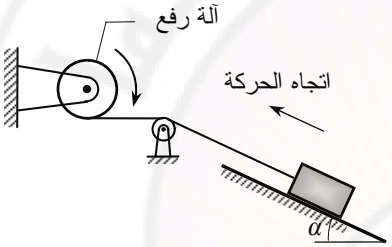
$$\mathrm{hp} = 75\,\mathrm{kgf.m/sec} = 736\,\mathrm{W}$$

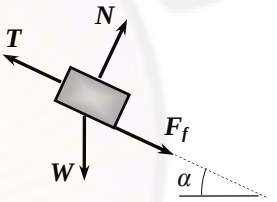
كما يقاس العمل كجداء الاستطاعة في زمن العمل، ومن هنا نشأت الوحدة الشائعة الاستعمال الكيلواط الساعي kW.h ، ويساوي ($\mathrm{kW.h} = 3.6\ \mathrm{X}\ 10^6\ \mathrm{J}$).

مسألة-2-4- (الدورة الامتحانية الثالثة-2013-2014)

ترفع آلة رفع جسم كتلته (m = 350 kg)، إلى أعلى المستوى المائل بزاوية ($\alpha = 30^o$) بسرعة ثابتة قدرها (V =1.2 m/sec) ، فإذا:

1. كانت استطاعة آلة الرفع (P_1 = 3.6 kW)، المطلوب إيجاد معامل الاحتكاك الحركي f_k بين الجسم والمستوى المائل.
2. ازدادت الاستطاعة فجأة إلى (P_2 = 6 kW)، المطلوب إيجاد التسارع المكافئ للجسم A_2 عندئذ في هذه اللحظة.





a- آلية رفع جسم على سطح مائل. b- مخطط الجسم الحر.

(الشكل-2-11)

الحل:

1.لتحديد القوى المؤثرة على الجسم نرسم مخطط الجسم الحر له، كما هو مبين في b من (الشكل-2-12)، وبما أن سرعة الجسم ثابتة (A_1 = 0)، عندئذ تؤول العلاقة الأساسية لتحريك الجسم إلى علاقة توازن، ويحسب معامل الاحتكاك الحركي من علاقة شرط الانزلاق.

$$f_k = F_f / N$$

حيث N رد الفعل العمودي على الجسم، ويحسب من اسقاط علاقة التوازن على محور عمودي على محور الحركة:

$$\Sigma F_{\mathrm{Y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad W\cos a - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m.g.\cos 30^{\mathrm{o}} = 2973.5\ \mathrm{N}$$

و F_f قوة الاحتكاك بين الجسم والمستوي المائل، وتحسب من اسقاط علاقة التوازن على محور الحركة:

$$\Sigma F_{\mathrm{X}} = 0 \ \Rightarrow \ T_1 - F_f - W\sin a = 0 \ \Rightarrow \ F_f = T_1 - m.g.\sin 30^{\mathrm{o}} = T_1 - 1717$$

حيث T_1 قوة الشد في الكبل الناتجة من استطاعة آلة الرفع الخارجية، وتحسب من العلاقة:

$$P = F^t.V \quad \Rightarrow \quad T_1 = P_1/V = 3.6\times 1000/1.2 = 3000\ \mathrm{N}$$

بالتعويض في علاقة قوة الاحتكاك F_f ؛ نحصل على:

$$F_f = 3000 - 1717 = 1283\ \mathrm{N}$$

بالتعويض في علاقة معامل الاحتكاك f_k ؛ نحصل على:

$$f_k = 1283/2973.5 = 0.431$$

2 . يحسب تسارع الجسم من تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسم لحظة زيادة الاستطاعة:

$$m.\boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{T_2} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F_f} + \boldsymbol{W}$$

بإسقاط العلاقة على محور الحركة:

$$m.A_2 = T_2 - F_f - W\sin a$$

حيث T_2 قوة الشد في الكبل الناتجة من استطاعة آلة الرفع الجديدة، وتحسب من العلاقة:

$$T_2 = P_2/V = 6\times 1000/1.2 = 5000\ \mathrm{N}$$

بالتعويض في علاقة الاسقاط:

$$350.A_2 = 5000 - 1283 - 350\times 9.81\sin a$$

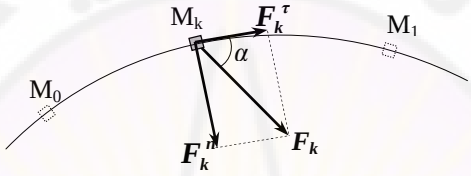
نحصل على التسارع الموافق:

$$A_2 = 5.71\,\mathrm{m/sec^2}$$

7- الطاقة الحركية للجسيم المادي *Kinetic Energy of a Particle*

عندما يتحرك جسيم مادي M_k كتلته m_k تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$ على طول مسار مستقيم أو منحنٍ كما هو مبين في (الشكل-2-12)، من الموضع M_0 بسرعة $\boldsymbol{V_{0k}}$ إلى الموضع M_1 حيث كانت سرعته $\boldsymbol{V_{1k}}$ ، عندئذ نحصل بإسقاط العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم M_k على المماس على:

$$m_k \,.\, A_k^t = F_k^t$$



(الشكل-2-12) جسيم مادي M_k يتحرك تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$ على طول مسار منحنٍ.

حيث المركبة المماسية تكتب بالشكل التالي:

$$m_k \,.\, \frac{dV_k}{dt} = m_k \,.\, \frac{dV_k}{ds_k} \,.\, \frac{ds_k}{dt} = m_k \,.\, V_k \,.\, \frac{dV_k}{ds_k} = F_k^t \qquad (24\text{-}2)$$

ومنه بفصل المتحولات:

$$m_k \,.\, V_k \,.\, dV_k = d\,[\frac{m_k V_k^2}{2}] = F_k^t \,.\, ds_k$$

بإجراء عملية التكامل لطرفي هذه المعادلة في المجال المحصور من M_0 إلى M_1 :

$$m_k \int_{V_0}^{V_1} V_k \,.\, dV_k = \int_{s_0}^{s_1} F_k^t \,.\, ds_k$$

ينتج:

$$\frac{1}{2} m_k \,.\, V_{1k}^2 - \frac{1}{2} m_k \,.\, V_{0k}^2 = w_{M_0 \to M_1}$$

المقدار $m_k \,.\, V_k^2 / 2$ هو كمية قياسية يمثل الطاقة الحركية، أو القدرة الحركية للجسيم المادي، ويساوي نصف جداء كتلة الجسيم بمربع سرعته الخطية، وقيمته العددية موجبة دوماً، أي: لا تأثير لاتجاه حركة الجسيم المادي على إشارته، ووحداته بالمجموعة المطلقة هي N.m ، ويرمز له بـــ E_k .

8- مبدأ العمل والطاقة الحركية لجسيم مادي

Principle of Work and Kinetic Energy of a Particle

نلاحظ أن الطرف الثاني من العلاقة السابقة، يمثل العمل الذي تقوم به القوة $\boldsymbol{F_k}$ المؤثرة على الجسيم المادي M_k أثناء انتقاله من M_0 إلى M_1 ، ومنه بالتعويض:

$$E_k^1 - E_k^0 = w_{M_0 \to M_1} \qquad (25\text{-}2)$$

وإذا أثرت مجموعة من القوى $\Sigma \boldsymbol{F_k}$ على الجسيم المادي؛ فيجب أن نأخذ بعين الاعتبار عمل كل قوة، وتكتب العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$E_k^1 - E_k^0 = \Sigma w_{M_0 \to M_1} \qquad (26\text{-}2)$$

تحدد هذه العلاقة تغير الطاقة الحركية لجسيم مادي، ومنه النص التالي:

أن التغير في الطاقة الحركية لجسيم مادي خلال انتقال ما، يساوي المجموع الجبري لأعمال القوى المؤثرة على هذا الجسيم خلال هذا الانتقال.

بترتيب العلاقة السابقة بالشكل:

$$E_k^1 = E_k^0 + \Sigma w_{M_0 \to M_1} \qquad (27\text{-}2)$$

تحدد هذه العلاقة مبدأ العمل والطاقة الحركية لجسيم مادي، ومنه النص التالي:

إن الطاقة الحركية النهائية لجسيم في الموضع M_1 ، يساوي المجموع الجبري للطاقة الحركية الابتدائية له في الموضع M_0 ، وأعمال القوى المؤثرة على هذا الجسيم خلال هذا الانتقال.

إذا كان الجسيم المادي المعتبر مقيداً بسلك أو سطح، وجب عندها إضافة أعمال قوى الاتصال، وردود أفعال القيد، إلى أعمال القوى الفاعلة، وإذا تحرك الجسيم على سطح أملس أو على منحنٍ أملس، حيث رد الفعل $\boldsymbol{N}$ يتجه باتجاه العمود على مسار الجسيم، فهو لا يقوم بعمل، وتغير الطاقة الحركية عندئذ يساوي فقط مجموع أعمال القوى الفاعلة.

أما إذا كان السطح المنحني يتحرك؛ فإن الانتقال المطلق للجسيم المادي قد لا يكون عمودياً على رد الفعل $\boldsymbol{N}$ ، وعندئذ لا يكون عمل رد الفعل مساوياً للصفر.

أما إذا تحرك الجسيم على سطح خشن؛ خضع عندها الجسيم لقوة احتكاك معاكسة للحركة، وعمل هذه القوة سالب دوماً، وينبغي إضافة هذا العمل إلى أعمال القوة الفاعلة.

يساعد مبدأ العمل والقدرة في حل المسائل التي لاتحتاج إلى حساب التسارع؛ لأن هذا المبدأ يربط بين القوة والكتلة والسرعة والانتقال، ويستعمل في إحدى الحالات:

- القوى المؤثرة على الجسيم كلها معلومة، وتكون ثابتة، أو تعتمد على المسافة فقط.
- المقادير المفروضة أو المطلوبة تقتصر على القوى المؤثرة، ومقدار انتقال الجسيم، والسرعة الابتدائية والنهائية له.

يمكن دمج مبدأ العمل والقدرة مع مبدأ الدفع وكمية الحركة في حل المسائل التي يطلب فيها زمن الحركة أو انتقال الجسيم.

إذا كانت القوى الفاعلة المفروضة تعتمد على السرعة، ففي هذه الحالة ينبغي العودة إلى العلاقة الأساسية للتحريك، واستخدام طريقة تكامل المعادلات التفاضلية للحركة.

مسألة-2-5

يصعد قطار وزنه W على طريق مائل بزاوية ($\alpha = 0.008$ rad) بسرعة قدرها ($V = 36$ Km/h)، في لحظة معينة t فرمل القطار، وسببت الفرملة قوة احتكاك قدرها ($F_f = 0.1\ W$). عين المسافة x التي يقطعها القطار قبل وقوفه، وما هو الزمن اللازم لذلك.

الحل:

يحسب الزمن t من تطبيق علاقة تغير كمية الحركة على القطار من بدء الفرملة t_0 حتى نهايته بعد زمن t :

$$m.\boldsymbol{V} - m.\boldsymbol{V_0} = \Sigma \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I_W} + \boldsymbol{I_{F_f}} + \boldsymbol{I_N}$$

بإسقاطها على منحى X باتجاه الحركة:

$$m.V - m.V_0 = -\int_{t_0=0}^{t} 0.1W\,.dt - \int_{t_0=0}^{t} W.\sin a\,.dt$$

حيث:

$$V_0 = 36000/3600 = 10\ \mathrm{m/sec} \quad , \quad V = 0$$

وباعتبار أن:

$$W.\sin a \approx W.a = 0.008W$$

ومنه بالتعويض:

$$-10\,m = -0.108\,m.g.t$$

بالتالي يكون زمن الحركة:

$$t = \frac{10}{0.108 \times 9.8} = 9.5 \text{ sec}$$

وتحسب المسافة المقطوعة x من تطبيق علاقة تغير الطاقة الحركية على القطار من موقع بدء الفرملة إلى موقع توقفه:

$$\frac{1}{2} m.V^2 - \frac{1}{2} m.V_0^2 = -(0.1\,W + 0.008\,W)\,x$$

ومنه المسافة المقطوعة:

$$x = \frac{V_0^2}{2 \times 0.108 g} = \frac{100}{2 \times 0.108 \times 9.8} = 47.24 \text{ m}$$

مسألة-2-6

سقط نيزك كتلته (m = 39 kg) على الأرض، ودخل في الأرض مسافة (l = 1.875 m)، ودلت التحريات أن مقاومة التربة في مكان السقوط هي (F = 500 kN). بفرض أن قوة الثقالة ثابتة، وبإهمال مقاومة الهواء المطلوب تعيين:

1. سرعة اصطدام النيزك بالأرض V_1 .
2. الارتفاع h الذي سقط منه النيزك.

الحل:

1. لحساب V_1 سرعة اصطدام النيزك بالأرض نطبق علاقة تغير الطاقة الحركية على النيزك بعد بلوغه الأرض:

$$\frac{1}{2} m.V_2^2 - \frac{1}{2} m.V_1^2 = w_W + w_F = -F.l$$

حيث (V_2 = 0) السرعة النهائية، وبالتعويض بعد إهمال وزن النيزك أمام مقاومة التربة:

$$-\frac{1}{2} 39\,V_1^2 = -500000 \times 1.875$$

ومنه سرعة الاصطدام بالأرض:

$$V_1^2 = 48077 \text{m}^2/\text{sec}^2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 219 \text{ m/sec}$$

2. لحساب h الارتفاع الذي سقط منه النيزك؛ نطبق علاقة تغير الطاقة الحركية على حركة النيزك قبل بلوغه الأرض:

$$\frac{1}{2}m.V_1^2 - \frac{1}{2}m.V_0^2 = w_W = W.h = m.g.h$$

حيث السرعة الابتدائية للسقوط ($V_0 = 0$)، بالتعويض نحصل على:

$$48077/2 = 9.8\,h \qquad \Rightarrow \qquad h = 2453\,\text{m}$$

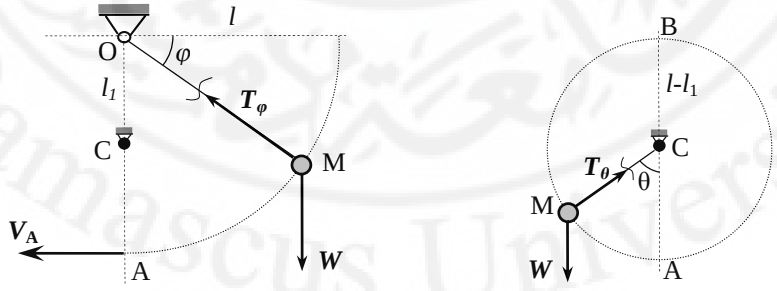
مسألة-2-7

سلك خفيف غير قابل للتمدد طوله ($l = 2$ m) ثبت أحد طرفيه في نقطة O وعلق في طرفه الثاني جسيم M على شكل كرة صغيرة وزنها W ، تترك الكرة وشأنها دون سرعة ابتدائية من الوضع الابتدائي، وهو الأفق المار من O ، وفي الوضع الشاقولي يصطدم السلك بوتد C يقع تحت O وعلى بعد ($OC = l_1 = 1.2$ m)، كما هو موضح في a من (الشكل-2-13)، ترسم عندها الكرة مساراً جديداً. المطلوب:

1. إيجاد الشرط اللازم حتى تتمكن الكرة من رسم دائرة كاملة مركزها الوتد C .
2. تعيين قوة الشد في السلك T_A عند عودة الكرة إلى الشاقول.

الحل:

1. حتى تتمكن الكرة من رسم دائرة كاملة مركزها الوتد C ، ونصف قطرها $(l - l_1)$ كما هو موضح في b من (الشكل-2-13)، يجب أن تكون قوة الشد في السلك عند الموضع B ($T_B > 0$) ، وأن تكون سرعة الكرة فيه موجبة ($V_B > 0$).



a- كرة M معلقة بسلك تركت وشأنها من الأفق. b- السلك يصطدم في الوضع الشاقولي بوتد C.

(الشكل-2-13)

تحسب قوة الشد هذه من تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الكرة المحررة عند وضع عام محدد بالزاوية θ خلال حركتها من A إلى B :

$$m.\boldsymbol{A}_{\theta} = \sum \boldsymbol{F}^{a} + \boldsymbol{T}_{\theta} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}_{\theta}$$

بالإسقاط على الناظم الأساسي:

$$m\frac{V_q^2}{l-l_1} = T_q - m.g.\cos q$$

منه علاقة قوة الشد:

$$T_q = m\frac{V_q^2}{l-l_1} + m.g.\cos q$$

فإذا انعدمت قوة الشد $(T_\theta = 0)$ في منطقة ما، وكان $(V_\theta \neq 0)$؛ فإن السلك يترك الكرة تكمل حركتها كجسيم مادي حر. أما إذا كان $(V_\theta = 0)$؛ فإن السلك يترك الكرة تكمل حركتها كسقوط حر.

وإذا كانت قوة الشد غير معدومة $(T_\theta \neq 0)$، فإن السلك يبقى مشدوداً طيلة فترة الحركة أي: أن السلك لا يكون مرتخياً في أي مكان، وكانت سرعة الكرة خلالها موجبة $(V_\theta > 0)$؛ فإن الكرة ترسم دائرة كاملة مركزها C .

بالتالي يجب أن نشترط أن يكون $(T_\theta > 0)$ في وضع للزاوية $(\theta > \pi)$ أي:

$$T_q = m\frac{V_q^2}{l-l_1} + m.g.\cos q \quad > \quad 0$$

نلاحظ أن الحد:

$$m.V_q^2/(l-l_1) > 0 \qquad \text{دوماً}$$

في حين يمكن أن يكون الحد $m.g.\cos\theta$ سالباً أو موجباً، وأكبر قيمة سالبة له هي القيمة $(-m.g)$ عند $(\theta = \pi)$، أي: عندما تصبح الكرة في أعلى الدائرة عند الوضع B .

تحسب سرعة الكرة في الموضع B من علاقة تغير الطاقة الحركية بين B و A :

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = w_W = -m.g.2(l-l_1)$$

منه علاقة سرعة الكرة في الموضع B :

$$V_B^2 = V_A^2 - 4.g\ (l-l_1)$$

وتحسب السرعة V_A في الموضع A من تطبيق علاقة تغير الطاقة الحركية على الكرة من الوضع الابتدائي الأفقي الساكن إلى الوضع النهائي A :

$$\frac{1}{2}m.V_A^2 - \frac{1}{2}m.V_0^2 = w_T + w_W$$

حيث:

$$w_T = 0 \quad , \quad V_0 = 0$$

منه سرعة الكرة في الموضع A :

$$\frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g.l \qquad \Rightarrow \qquad V_A^2 = 2g.l = 4g$$

بالتعويض في علاقة السرعة V_B^2 :

$$V_B^2 = 4g - 4g(l - l_1) = 0.8g > 0$$

بالتعويض بقيمة قوة الشد في أعلى موضع B $(\theta = \pi)$؛ نحصل على:

$$T_{q=p} = T_B = \frac{m}{l - l_1}0.8g - m.g = 0$$

وينعدم الشد في الموضع B ويكون موجباً فيما عداها، وترسم الكرة الدائرة الجديدة بكاملها.

2. تحسب قوة الشد في السلك من تطبيق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد على الكرة بعد تحريرها من قيدها في الوضع المحدد بالزاوية φ ، المبين في a من (الشكل-2-12)، عندئذ تخضع الكرة لثقلها $\boldsymbol{W}$ ، ولقوة شد الخيط T_φ .

فمن العلاقة الأساسية للتحريك:

$$m.\boldsymbol{A}_j = \sum \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}_j$$

نسقط العلاقة على الناظم الرئيسي:

$$m\frac{V_j^2}{l} = T_j - m.g.\sin j$$

منه علاقة قوة الشد:

$$T_j = m\frac{V_j^2}{l} + m.g.\sin j$$

وتحدد السرعة V_φ من تطبيق علاقة تغير الطاقة الحركية على الكرة من الوضع الابتدائي الأفقي الساكن؛ إلى الوضع العام المحدد بالزاوية φ :

$$\frac{1}{2}m.V_j^2 - \frac{1}{2}m.V_0^2 = w_{T_j} + w_W$$

حيث:

$$w_{T_j} = 0 \quad , \quad V_0 = 0$$

منه علاقة السرعة V_φ :

$$\frac{1}{2}m.V_j^2 = m.g.l.\sin j \qquad \Rightarrow \qquad V_j^2 = 2g.l.\sin j$$

بابدال V_φ بقيمتها في علاقة الشد:

$$T_j = 3\,m.g.\sin j$$

في الوضع الشاقولي ($\varphi = \pi/2$) تكون قوة الشد مساوية لـــ:

$$T_A = 3\,m.g = 3W$$

وسرعة الكرة في الموضع A مساوية لـــ:

$$V_A^2 = 2\,g.l$$

أما قوة الشد في السلك في الموضع الشاقولي A بعد رسم الدائرة ($\theta = 2\pi$) فهو:

$$T_A = T_{q=2p} = m\frac{V_A^2}{l-l_1} + m.g = 2m.g\frac{l}{l-l_1} + m.g = 6m.g = 6W$$

ويساوي ضعف قوة الشد في السلك قبل صدمه بالوتد C .

مسألة-2-8- (الفصل الأول-2005-2006)

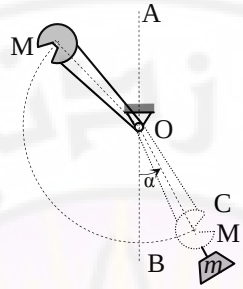
جسيم ثقيل من الفولاذ M كتلته ($m = 10$ kg) مثبت في نهاية قضيب مهمل الكتلة (OM = l = 981 mm) يمكنه الدوران دون احتكاك حول المحور الأفقي الثابت المار من O .

يبدأ الجسيم حركته من أعلى موضع في A بسرعة ابتدائية متناهية في الصغر (السكون)، وعندما يصل الموضع B يلتحم الجسيم مع كتلة إضافية لها كتلة الجسيم نفسها.

المطلوب تعيين الموضع C الموضح في (الشكل-2-14) والمحدد بالزاوية α الذي يمكن أن تصله الكتلتان معاً.

الحل:

لتعيين الموضع C الذي يمكن أن تصله الكتلتان معاً، نطبق مبدأ العمل والطاقة على الكتلتين من الموضع الشاقولي B المحدد بالسرعة V_{B_1} إلى الموضع النهائي C المحدد بالسرعة ($V_C = 0$).



(الشكل-2-14) جسيم M معلق بنهاية قضيب ترك وشأنه من الوضع الشاقولي.

$$\frac{1}{2}(2m)V_C^2 - \frac{1}{2}(2m)V_{B_1}^2 = -(2m).g.\Delta z_{B\to C} = -2m.g(l - l.\cos a)$$

منه:

$$V_{B_1}^2 = 2g.l(1-\cos a) \quad \Rightarrow \quad \cos a = 1 - \frac{V_{B_1}^2}{2g.l}$$

حيث V_{B_1} تمثل سرعة الكتلتين معاً في الموضع B ، وتحسب أيضاً من مبدأ حفظ كمية الحركة لحظة التحام الكتلتين:

$$m.V_B = 2m.V_{B_1}$$

منه:

$$V_{B_1} = 0.5\,V_B \quad \Rightarrow \quad V_{B_1}^2 = 0.25\,V_B^2$$

حيث V_B تمثل سرعة الكتلة في الموضع B ، وتحسب من تطبيق مبدأ العمل والطاقة على الكتلة من الموضع الابتدائي الشاقولي A المحدد بالسرعة ($V_A = 0$)، إلى الموضع النهائي B المحدد بالسرعة V_B :

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g.\Delta z_{A\to B} = 2l.m.g$$

منه:

$$V_B^2 = 4g.l$$

بالتالي:

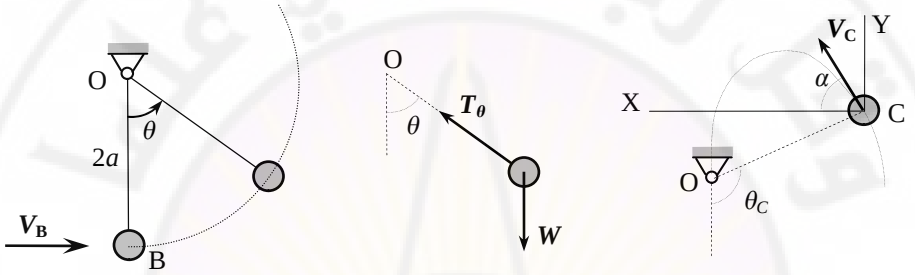
$$V_{B_1}^2 = g.l \quad \Rightarrow \quad \cos a = 0.5 \quad \Rightarrow \quad a = 60^o$$

مسألة-2-9- (الفصل الثاني-2000-2001)

يعلق جسيم على شكل كرة صغيرة وزنها ($W = m\,.\,g$) بطرف خيط خفيف غير قابل للتمدد طوله $2a$ ، طرفه الآخر مثبت بمحور أفقي ثابت في O ، كما في a من (الشكل-2-15).

فإذا قذف الجسيم من أسفل موضع له في B بسرعة قدرها $[V_B = (\sqrt{3}+1)\sqrt{g.a}]$. المطلوب إثبات أن الجسيم سوف يمر بنقطة التعليق O بعد تركه المسار الدائري.

الحل:



c- حركة الجسيم كقذيفة b- الجسيم حر عند وضع عام a- جسيم معلق بخيط قُذف بسرعة من الشاقول.

(الشكل-2-15)

يترك الجسيم مساره الدائري عندما تنعدم قوة شد الخيط T ، ولإيجاد علاقة حركته عندئذ نحرر الجسيم من قيده عند وضع عام محدد بالزاوية θ ، كما هو مبين في b من (الشكل-2-15)، ونطبق العلاقة الأساسية للتحريك عليه:

$$m.\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\theta}}$$

بإسقاطها على الناظم باتجاه الناظم:

$$m.A_q^n = T_q - m.g.\cos q$$

منه علاقة قوة شد الخيط:

$$T_q = m\frac{V_q^2}{2a} + m.g.\cos q$$

حيث V_θ تمثل سرعة الجسيم عند الوضع العام، وتحسب من تطبيق مبدأ العمل والطاقة على الجسيم بين الوضع الابتدائي B المحدد بالسرعة V_B ، والوضع العام المحدد بالزاوية θ :

$$\frac{1}{2}m.V_q^2 - \frac{1}{2}m.V_B^2 = w_{\boldsymbol{T}} + w_{\boldsymbol{W}} = -m.g(2a - 2a\cos q)$$

منه:

$$V_q^2 = V_B^2 - 4a.g(1-\cos q)$$

منه علاقة السرعة:

$$V_q^2 = (\sqrt{3}+1)^2 g.a - 4a.g(1-\cos q) = 2(\sqrt{3}+2\cos q)g.a$$

بالتعويض في علاقة قوة الشد:

$$T_q = \frac{m}{2a}2(\sqrt{3}+2\cos q)g.a + m.g.\cos q = m.g(\sqrt{3}+3\cos q)$$

يترك الجسيم مساره الدائري في الموضع C ، عندما تنعدم قوة شد الخيط $(T_q = 0)$ المحدد بالزاوية:

$$\sqrt{3}+3\cos q_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos q_C = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad q_C = 125^o$$

بسرعة:

$$V_C^2 = V_{q=125}^2 = 2a.g(\sqrt{3}-2\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}g.a$$

ويواصل الجسيم حركته كقذيفة كما هو موضح في c من (الشكل-2-15) بسرعة ابتدائية V_C تميل على الأفق بزاوية ($\alpha = 180^o\text{-}125^o = 55^o$) على مسار يعطى بالعلاقة:

$$y = \tan a\,.x - \frac{g}{2V_C^2.\cos^2 a}x^2$$

بالتعويض بقيمة α و V_C نحصل على علاقة مسار الجسيم:

$$y = \sqrt{2}\,x - \frac{3\sqrt{3}}{4a}x^2$$

وبما أن إحداثيات نقطة التعليق O هي:

$$y_O = -2a.\cos a = 2a.\cos q_C = -\frac{2}{\sqrt{3}}a$$

$$x_O = 2a.\sin a = 2a.\sin q_C = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

بالتعويض في معادلة مسار الجسيم؛ نجد أن إحداثيات نقطة التعليق O تحقق معادلة المسار، بالتالي يمر الجسيم من مركز التعليق O .

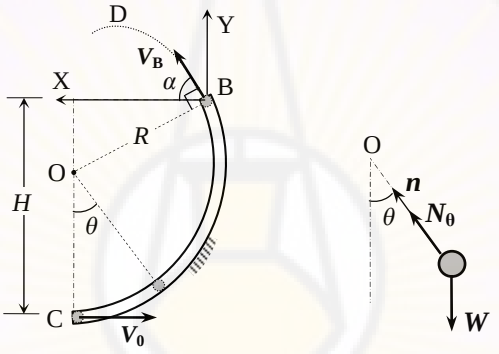
مسألة-2-10- (الفصل الأول-2006-2007)

تنزلق كرة صغيرة كتلتها (m = 0.5 kg) داخل أنبوب دائري أملس CB نصف قطره (R = 2.5 m)، كما هو مبين في a من (الشكل-2-16).

إذا ابتدأت الكرة بالحركة من أسفل نقطة C بسرعة V_0 ، وغادرت الأنبوب عند نقطة B ترتفع مقدار (h = 3.75 m) من أسفل نقطة. المطلوب إيجاد:

1. السرعة الابتدائية V_0 .
2. الضغط الأعظمي $N_{\max}$ على الأنبوب.
3. أقصى ارتفاع $H_{\max}$ تبلغه الكرة.

الحل:



b- الجسيم الحر للكرةعند وضع عام. a- تنزلق كرة داخل أنبوب دائري أملس.

(الشكل-2-16)

إن الحركة بين الموضعين C و B هي حركة مقيدة، وبعد الموضع B هي حركة مقذوف حر بالسرعة المكتسبة من الحركة الأولى.

1.تحسب السرعة الابتدائية من تطبيق علاقة تغير الطاقة الحركية من الوضع الابتدائي إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ :

$$\frac{1}{2}m.V_q^2 - \frac{1}{2}m.V_0^2 = w_W + w_N = -m.g.R(1-\cos q) \qquad (1)$$

ثم بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الكرة عند الوضع العام، واسقاطها على الناظم:

$$m.A_q = W + N_q \quad \Rightarrow \quad m.A_q^n = m\frac{V_q^2}{R} = N_q - m.g.\cos q \qquad (2)$$

بحذف V_q^2 بين المعادلتين (1) و (2) نحصل بعد شيء من الاختزال على:

$$N_q = 3\,m.g.\cos q - 2m.g + m\frac{V_0^2}{R} \qquad (3)$$

تغادر الكرة الأنبوب عندما ينعدم رد الفعل N_θ ، وبتعويضها بالصفر، مع $(\theta = 120^o)$ تعطي المعادلة (3) قيمة V_θ :

$$V_0^2 = 3.5\,g.R = 3.5\times 9.81\times 2.5 = 85.83\ \mathrm{m^2/sec^2} \Rightarrow V_0 = 9.26\ \mathrm{m/sec}$$

2. إن المعادلة (2) تعطي الضغط الأعظمي عند الوضع $(\theta = 0)$، ومنه:

$$N_{(q=0)} = N_{\max} = 3\,m.g - 2m.g + \frac{m}{R}3.5g.R = 4.5\,m.g = 22\ \mathrm{N}$$

3. لإيجاد أقصى ارتفاع D تبلغه الكرة، التي تنطلق بشكل قذيفة من الوضع B ، وهو بداية المقذوف الحر بسرعة V_B تعينها المعادلة (1):

$$V_B^2 = V_0^2 - 2.g.R\,(1-\cos 120) = 12.25\ \mathrm{m^2/sec^2} \quad \Rightarrow \quad V_B = 3.5\ \mathrm{m/sec}$$

وهذه هي السرعة الابتدائية لحركة المقذوف، وميلها $(\alpha = 60^o)$ على الأفق، ومن حل **المسألة-1-16** ، لدينا معادلات حركة المقذوف:

$$x = V_0\,.\cos a\,.t \quad , \quad y = -\frac{1}{2}\,g\,.t^2 + V_0\,.\sin a\,.t \quad , \quad z = 0$$

والمركبات القائمة لسرعته:

$$V_X = \dot{x} = V_0.\cos a \quad , \quad V_Y = \dot{y} = -\,g.t + V_0.\sin a \quad , \quad V_Z = \dot{z} = 0$$

حيث نلاحظ أن مسقط سرعة القذيفة $\boldsymbol{V_t}$ على المحور الأفقي ثابت لا علاقة له بالزمن، في حين يتحول مسقطه مع الزمن على المحور الشاقولي، وينعدم هذا المسقط في اللحظة:

$$t_D = \frac{V_0\,.\sin a}{g}$$

بالتعويض في معادلة الحركة y نحصل على أقصى ارتفاع فوق نقطة القذف B :

$$y_D = \frac{V_B^2.\sin^2 a}{2g} = \frac{12.25\times 3}{2\times 9.81\times 4} = 0.47\ \mathrm{m}$$

بهذا يكون الارتفاع الكلي فوق الموضع الابتدائي مساوياً لـــ :

$$H_{\max} = h + y_D = 3.75 + 0.47 = 4.22\ \mathrm{m}$$

مسألة-2-11- (الفصل الأول-2008-2009)

تعلق كرة النواس البسيط A كتلتها (m = 0.5 kg) بحبل غير مرن، طوله (l = 1 m) طرفه الآخر مثبت في المسند الثابت O ، وترتبط الكرة بطرف نابض ثابت صلابته (k = 50 N/m) وطوله الحر ($l_0 = l / 2$)، وطرفه الآخر مثبت في المسند الثابت O_1 ، كما هو مبين في a من (الشكل-2-17).

فإذا بدأت الكرة حركتها من السكون من الوضع ($\theta = 30^o$) عندها كان طول النابض ($O_1A = l$)، المطلوب إيجاد قوة شد الخيط T_B عند الوضع الشاقولي B للكرة.

الحل:



b- مخطط الجسم الحر لكرة النواس. a- كرة النواس البسيط ترتبط بطرف نابض ثابت.
(الشكل-2-17)

تحسب قوة الشد من تطبيق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد على الكرة بعد تحريرها عند الوضع B ، كما هو مبين في b من (الشكل-2-17):

$$m.\boldsymbol{A}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F}_{k\mathbf{B}} + \boldsymbol{T}_{\mathbf{B}}$$

بإسقاط العلاقة على الناظم باتجاه الناظم:

$$m.A_{\mathrm{B}}^{n} = T_{\mathrm{B}} - W - F_{k\mathrm{B}}$$

منه علاقة قوة الشد:

$$T_{\mathrm{B}} = m\frac{V_{\mathrm{B}}^2}{l} + m.g + k.\Delta l_{fin}$$

وتحسب سرعة كرة النواس من تطبيق مبدأ العمل والطاقة على الكرة خلال انتقالها من الوضع الابتدائي الساكن في A ، والمحدد بالزاوية ($\theta = 30^o$)، إلى الوضع النهائي في A ، والمحدد بالزاوية ($\theta = 0$) :

$$\frac{1}{2}m.V_{\mathrm{B}}^2 - \frac{1}{2}m.V_{\mathrm{A}}^2 = w_{T_B} + w_W + w_{F_{kB}}$$

حيث:

$$V_{\mathrm{A}} = 0 \qquad , \qquad w_{T_B} = 0$$

وعمل قوة الثقالة:

$$w_W = m.g.h_{\mathrm{G}} = m.g\,(l - l\cos q) = m.g.l\,(1 - \cos q)$$

$$w_W = 0.5 \times 9.81 \times 1(1 - 0.866) = 0.657\ \mathrm{N.m}$$

وعمل قوة نابض:

$$w_{F_{kB}} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

حيث الاستطالة الابتدائية والنهائية:

$$\Delta l_{in} = \mathrm{O_1A} - l_0 = l - \frac{l}{2} = 0.5\,\mathrm{m} \qquad , \qquad \Delta l_{fin} = \mathrm{O_1B} - l_0 = \mathrm{O_1B} - \frac{l}{2}$$

$$\mathrm{O_1B} + \mathrm{BO} = \mathrm{O_1O} = 2l.\cos 30^o = 2 \times 1 \times 0.866 = 1.732\,\mathrm{m}$$

منه:

$$\mathrm{O_1B} = 1.732 - \mathrm{OB} = 1.732 - l = 0.732\,\mathrm{m}$$

منه الاستطالة والنهائية:

$$\Delta l_{fin} = 0.232\ \mathrm{m} \quad > \quad 0$$

مما يدل على أن النابض مشدود، بالتعويض في علاقة عمل قوة النابض:

$$w_{F_{kB}} = \frac{50}{2}[(0.5)^2 - (0.232)^2] = 4.9\ \mathrm{N.m}$$

بالتعويض في علاقة تغير الطاقة الحركية؛ نحصل على:

$$V_{\mathrm{B}}^2 = 22.228\,\mathrm{m^2/sec^2}$$

بالتعويض في علاقة قوة شد الخيط؛ نحصل على:

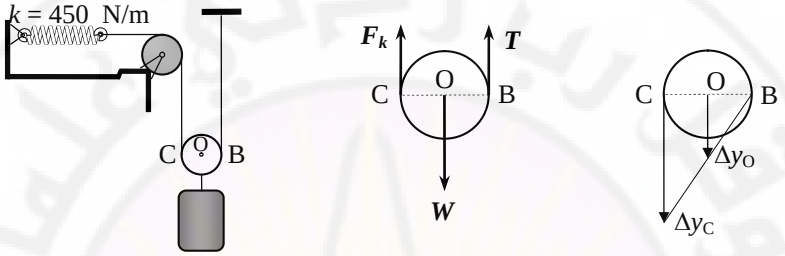
$$T_{\mathrm{B}} = 27.619\,\mathrm{N}$$

مسألة-2-12- (الفصل الثاني-2006-2007)

تبدأ أسطوانة كتلتها 50 kg في التركيبة الموضحة في a من (الشكل-2-18)، بالحركة من السكون نحو الأسفل، عندها كان النابض تحت تأثير قوة شد تساوي 45 N .

المطلوب إيجاد سرعة الأسطوانة V بعد أن تقطع مسافة 150 mm.

الحل:



c- الدوران الآني للبكرة حول B. b- مخطط الجسم الحر للأسطوانة. a- أسطوانة معلقة ترتبط بنابض.

(الشكل-2-18)

تحسب سرعة الأسطوانة من تطبيق مبدأ العمل والطاقة على الأسطوانة بعد تحريرها، وخلال انتقالها مسافة 150 mm ، كما هو مبين في b من (الشكل-2-18):

$$\frac{1}{2}m.V^2-\frac{1}{2}m.V_0^2=w_{\boldsymbol{W}}+w_{\boldsymbol{F_k}}+w_{\boldsymbol{T}}$$

حيث:

$$V_0=0 \quad , \quad V_{\mathrm{B}}=0 \quad \Rightarrow \quad w_{\boldsymbol{T}}=0$$

وعمل قوة الثقالة:

$$w_{\boldsymbol{W}}=m.g.h=m.g.\Delta\mathrm{O}=50\times9.81\times0.15=73.575\ \mathrm{N.m}$$

وعمل قوة مرونة النابض:

$$w_{\boldsymbol{F_k}}=\frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2-\Delta l_{fin}^2)$$

حيث Δl_{in} تمثل الاستطالة الابتدائية، وتحسب من علاقة قوة نابض:

$$F_{k0}=k.\Delta l_{in}$$

منه الاستطالة الابتدائية:

$$\Delta l_{in}=\frac{F_{k0}}{k}=\frac{45}{450}=0.1\ \mathrm{m}$$

ولدينا الاستطالة النهائية:

$$\Delta l_{fin} = \Delta l_{in} + \Delta y_{\mathrm{C}}$$

حيث Δy_C تمثل انتقال النقطة C ويحسب من الدوران الآني للبكرة المهملة حول المركز اللحظي B ، الموضح في c من (الشكل-2-18):

$$\frac{\Delta y_{\mathrm{C}}}{2R} = \frac{\Delta y_{\mathrm{O}}}{R} \quad \Rightarrow \quad \Delta y_{\mathrm{C}} = 2\Delta y_{\mathrm{O}} = 2\times 150 = 300\ \mathrm{mm} = 0.3\ \mathrm{m}$$

بالتعويض نحصل عمل قوة مرونة النابض:

$$w_{F_k} = \frac{450}{2}[(0.1)^2 - (0.4)^2] = -33.75\ \mathrm{N.m}$$

وبالتعويض في علاقة تغير الطاقة نحصل على سرعة الأسطوانة:

$$\frac{50}{2}.V^2 = 73.575 - 33.75 \quad \Rightarrow \quad V^2 = 1.593\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \quad \Rightarrow \quad V = 1.26\mathrm{m/s}$$

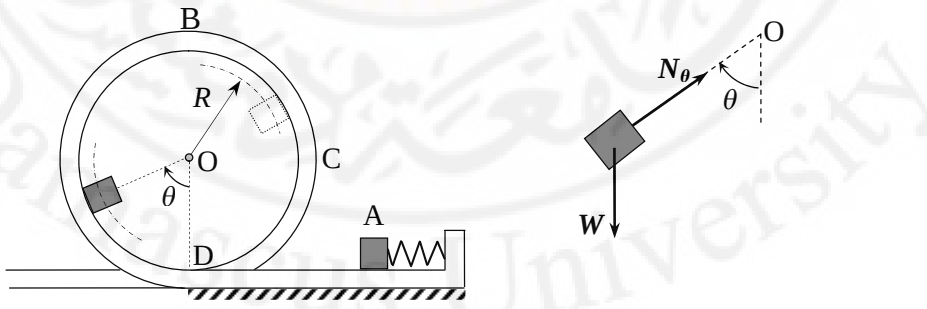
مسألة-2-13- (الفصل الأول-2003-2004)

وضع جسيم كتلته (m = 200 g) أمام نابض مضغوط مقدار Δl وعامل مرونته (k = 500 N/m)، كما هو مبين في a من (الشكل-2-19).

إذا ترك الجسيم وشأنه لينزلق على سطح دائري رأسي أملس نصف قطره (R = 60 cm).

المطلوب أقل قيمة لانضغاط النابض $\Delta l_{\min}$ حتى يعبر الجسيم المسار الدائري عند B .

الحل:



b- مخطط الجسيم الحر عند وضع عام. ، a- جسيم يمس نابض مضغوط.

(الشكل2-19)

حتى يصل الجسيم الموقع B ($\theta_B = 180^o$) يجب أن يكون الجسيم مقيداً بالمسار حتى B ($N_B > 0$)، وحتى يعبر الجسيم الموقع B يجب أن تكون سرعته موجبة ($V_B > 0$).

لإيجاد علاقة سرعة الجسيم نحرر الجسيم من قيده عند وضع عام محدد بالزاوية θ ، والموضح في b من (الشكل-2-19)، ونطبق عليه مبدأ العمل والطاقة من الوضع الابتدائي الساكن في A إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ :

$$\frac{1}{2}m.V_q^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = w_N + w_W + w_{F_k}$$

حيث:

$$V_A = 0 \quad , \quad w_N = 0$$

وعمل قوة مرونة النابض:

$$w_{F_k} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2) = \frac{k}{2}\Delta l^2$$

حيث الاستطالة الابتدائية والنهائية:

$$\Delta l_{in} = \Delta l \quad , \quad \Delta l_{fin} = 0$$

وعمل قوة الثقالة:

$$w_W = -W.R(1-\cos q)$$

بالتعويض:

$$V_q^2 = \frac{1}{m}[k.\Delta l^2 - 2W.R(1-\cos q)]$$

ولإيجاد علاقة قوة القيد نطبق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد عند الموضع العام:

$$m.\boldsymbol{A}_\theta = \Sigma \boldsymbol{F}^a + \boldsymbol{N}_\theta = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N}_\theta$$

بالإسقاط على الناظم:

$$m.A_q^n = N_q - W.\cos q$$

منه علاقة قوة القيد:

$$N_q = m\frac{V_q^2}{R} + W.\cos q$$

بالتعويض من علاقة V_θ نحصل على:

$$N_q = \frac{k}{R}\Delta l^2 - W(2-3\cos q)$$

فحتى يعبر الجسيم المسار الدائري في B ($\theta_B = 180^o$) يجب:

- أن يكون الجسيم في B مقيداً، أي:

$$N_{q=180} > 0$$

ويتحقق ذلك عندما يكون:

$$\frac{k}{R}\Delta l^2 > W[2-(-3)] \quad \Rightarrow \quad \Delta l^2 > \frac{5W.R}{k}$$

بالتعويض:

$$\Delta l^2 > \frac{5\times 0.2\times 9.81\times 0.6}{500} \quad \Rightarrow \quad \Delta l > 0.1085\ \text{m}$$

- وأن يكون للجسيم سرعة، أي:

$$V_{q=180} > 0$$

ويتحقق ذلك عندما يكون:

$$k.\Delta l^2 > 2W.R[1-(-1)] \quad \Rightarrow \quad \Delta l^2 > \frac{4W.R}{k}$$

بالتعويض:

$$\Delta l^2 > \frac{4\times 0.2\times 9.81\times 0.6}{500} \quad \Rightarrow \quad \Delta l > 0.097\ \text{m}$$

بالتالي حتى يعبر الجسيم السطح الدائري في B يجب أن يكون النابض مضغوطاً بمقدار:

$$\Delta l_{\min} > 10.85\ \text{cm}$$

مسألة-2-14

إذا وضع ثقل W في منتصف قضيب مرن كما في (الشكل-2-20)، فإنه يحنيه بمقدار δ_{st} بما يدعى بـــ الانحناء السكوني للقضيب.

إذا سقط الثقل على القضيب من ارتفاع H . المطلوب، بإهمال وزن القضيب، تعيين أقصى انحناء له δ_{max} .

الحل:

لتعيين أقصى انحناء للقضيب δ_{max} نطبق علاقة تغير الطاقة الحركية على الثقل، من الوضع الابتدائي M_0 الساكن إلى الوضع النهائي M_1 الموافق لأقصى انحناء للقضيب؛ عنده كانت سرعة الثقل معدومة، عندئذ تتخذ العلاقة (2-25):

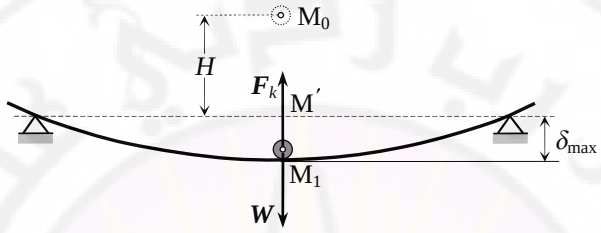
$$\sum w = w_W + w_{F_k} = 0$$

حيث قوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ تبذل عملاً في الانتقال M_0M_1 قدره:

$$w_{\boldsymbol{W}} = W(H + d_{\max})$$

وقوة مرونة القضيب $\boldsymbol{F_k}$ تبذل عملاً في الانتقال $M'M_1$ قدره:

$$w_{\boldsymbol{F_k}} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2) = -\frac{k}{2} d_{\max}^2$$



(الشكل-2-20) ثقل وُضع في منتصف قضيب مرن.

لأن الاستطالة الابتدائية والنهائية:

$$\Delta l_{in} = 0 \quad , \quad \Delta l_{fin} = d_{\max}$$

منه:

$$W(H + d_{\max}) - \frac{k}{2} d_{\max}^2 = 0$$

ومن تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على الثقل عند الوضع M_1 ؛ نحصل على علاقة توازن:

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad W = F_k = k.d_{st}$$

بالتعويض في العلاقة؛ نحصل على:

$$d_{\max}^2 - 2d_{st}.d_{\max} - 2d_{st}.H = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية، بحلها مع الأخذ بعين الاعتبار أن $(\delta_{\max} > 0)$، نجد أن:

$$d_{\max} = d_{st} + \sqrt{d_{st}^2 + 2H.d_{st}}$$

نلاحظ أنه عندما:

$$H = 0 \quad \Rightarrow \quad d_{\max} = 2d_{st}$$

بالتالي إذا وضع الثقل في منتصف القضيب الأفقي؛ فإن أقصى انحناء يحدث له عند سقوط الثقل من ارتفاع قدره $(H = 0)$، سيساوي ضعف الانحناء السكوني، وبعد ذلك يبدأ القضيب والثقل بالاهتزاز حول موضع الاتزان، وتحت تأثير المقاومة تخمد هذه الاهتزازة، وتتزن المجموعة في ذلك الوضع عندما يصبح انحناء القضيب مساوياً لـــ δ_{st} .

9- القوى المحافظة *Conservative Forces*

يمكن حساب عمل بعض القوى المؤثرة دون معرفة سابقة بمعادلات الحركة، ومن المهم أن نبين بوجه عام نوع تلك القوى؛ التي تتمتع بهذه الخاصية.

إن العمل الذي تبذله القوة $\boldsymbol{F}$ المؤثرة في الجسيم M ، خلال الانتقال من الموضع M_1 إلى الموضع M_2 يحسب وفق العلاقة (2-17):

$$w_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} dw = \int_{M_1}^{M_2} (F_X \,.\, dx + F_Y \,.\, dy + F_Z \,.\, dz) \qquad (28\text{-}2)$$

حيث لا يمكن حساب هذا التكامل دون معرفة معادلات الحركة، إلا في الحالات التي تعتمد القوة فيها على موضع الجسيم فقط، أي: على إحداثياته x ، y ، z ، ويقال عن مثل هذه القوى أنها تُكَوّن مجالاً للقوى.

ويُمَثل مجال القوى بمنطقة في الفراغ، فيما إذا وضع جسيم مادي في كل موضع من مجال الفراغ، خضع عندها هذا الجسيم لقوة معينة من المقدار والاتجاه، تعتمد على موضع هذا الجسيم.

فمجال الجاذبية الأرضية هو مجال قوى يخضع فيه الجسيم المادي الموضوع في كل موضع من الفضاء المحيط بالأرض، لقوة تتجه نحو مركز الأرض منحاها الشاقول، وتتناسب شدتها عكساً مع مربع البعد عن مركز الأرض، فقوة الثقالة والحالة هذه تعتمد إذاً على موضع الجسيم المادي المعتبر، وبما أن القوة تتحدد بمساقطها على محاور الإحداثيات؛ فإن مجال القوى يعطى بالمعادلات:

$$F_X = \Phi_1(x,y,z) \quad , \quad F_Y = \Phi_2(x,y,z) \quad , \quad F_Z = \Phi_3(x,y,z) \qquad (29\text{-}2)$$

لحساب عمل هذه القوة في الحالة العامة يجب أن نحول التكامل (2-28) بدلالة متغير واحد، أي: على سبيل المثال لابد من معرفة العلاقات التي تربط الإحداثيات بعضها مع بعض، مثل:

$$y = f_1(x) \qquad , \qquad z = f_2(x)$$

تحدد هاتان المعادلتان كما نعلم، معادلة المنحنى في الفراغ، الذي هو مسار الجسيم M ، وبالتالي في الحالة العامة فإن عمل القوى؛ التي تكون مجالاً للقوى، يعتمد على شكل المسار الذي تتحرك فيه نقطة تأثير القوة.

إلا أنه إذا اتضح أن التعبير الموجود داخل التكامل في المعادلة (2-28)، الذي هو عبارة عن العمل الجزئي للقوة $\boldsymbol{F}$ هو تفاضل كامل للتابع $U(x\,,\,y\,,\,z)$، أي: يكون:

$$dw = dU(x,y,z)$$

أو:

$$(F_{\mathrm{X}}\,.\,dx + F_{\mathrm{Y}}\,.\,dy + F_{\mathrm{Z}}\,.\,dz) = dU(x,y,z) \qquad (30\text{-}2)$$

بالتالي يمكن حساب العمل $w_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}$ دون معرفة سابقة بمسار الجسيم M .

إن التابع U في الإحداثيات x ، y ، z ، الذي يساوي تفاضلها العمل الجزئي يدعى بـــ تابع القوى، ومجال القوى الذي توجد له تابع قوى يدعى بـــ مجال القوى المحافظ (*Conservative*)، والقوى المؤثرة في هذا المجال تدعى بـــ القوة المحافظة.

إذا عوضنا في المعادلة (2-28) بتعبير dw من المعادلة (2-30)؛ فإننا نحصل على:

$$w_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2} = \int_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} dU(x,y,z) = U_2 - U_1 \qquad (31\text{-}2)$$

حيث $U_1 = U(x_1,y_1,z_1)$ قيمة تابع القوة في الموضع M_1 .

و $U_2 = U(x_2,y_2,z_2)$ قيمة تابع القوة في الموضع M_2 .

بالتالي فإن العمل الذي تبذله قوة محافظة، يساوي الفرق بين قيمتي تابع القوى عند الموضعين النهائي والابتدائي من المسار، ولا يعتمد على شكل مسار الجسيم المتحرك، وعند الحركة في مسار مقفل يكون $(U_2 = U_1)$، وعمل القوة المحافظة يساوي صفراً.

إن الميزة الأساسية لمجال القوى المحافظ هي أن العمل الذي تبذله قوى المجال عند حركة الجسيم المادي فيه، يعتمد فقط على الوضع الابتدائي والوضع النهائي لهذا الجسيم، ولا يعتمد لا على شكل مسار الجسيم، ولا على معادلة حركته.

تدعى القوى التي يعتمد عملها على شكل المسار، أو على معادلة حركة نقطة تأثير القوة بـــ القوى غير المحافظة، وتنتمي قوى الاحتكاك وقوى مقاومة الوسط إلى هذه القوى.

إذا ثبت أن المعادلة (2-30) صحيحة؛ فإنه يمكن تعيين تابع القوى من العلاقة:

$$U = \int dw + c$$

أو:

$$U = \int (F_X \,.\, dx + F_Y \,.\, dy + F_Z \,.\, dz) + c \qquad (32\text{-}2)$$

يمكن أن يكون للثابت c هنا أي قيمة، وكما يتضح من العلاقة (2-32) أن العمل لا يعتمد على قيمة c . إلا أنه يصطلح عادة على اعتبار تابع القوى يساوي الصفر في نقطة ما O تدعى بـــ نقطة الصفر ($U_0 = 0$)، ويتحدد الثابت c انطلاقاً من هذا الشرط.

يستفاد من العلاقة (2-32) في تعيين تابع القوى U إذا علم العمل الجزئي لهذه القوى المحافظة، وإن الأمثلة المعروفة للقوى المحافظة هي قوى الثقالة الناتجة عن الجاذبية، وقوة المرونة، وقوة الجذب العام، ولتعيينها:

- تابع القوى لقوة الثقالة

إذا كان اتجاه المحور الرأسي OZ نحو الأعلى؛ فإن العمل الجزئي لقوة االثقالة $\boldsymbol{W}$ يعطي بالعلاقة:

$$dw_W = -W \,.\, dz$$

وباعتبار نقطة الصفر تقع في المبدأ الإحداثي للمحور OZ ، يكون:

$$z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 0$$

بالتعويض في علاقة تابع القوى، نحصل على تابع القوى لقوة الثقالة:

$$U_W = -W \,.\, z \qquad (33\text{-}2)$$

- تابع القوى لقوة المرونة

إذا كانت قوة المرونة المؤثرة على امتداد المحور OX ؛ فإن العمل الجزئي لقوة المرونة $\boldsymbol{F_k}$ يعطي بالعلاقة:

$$dw_{F_k} = -k \,.\, x \,.\, dx$$

وباعتبار نقطة الصفر تقع في المبدأ الإحداثي للمحور OX ، يكون:

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 0$$

بالتعويض في علاقة تابع القوى؛ نحصل على تابع القوى لقوة المرونة:

$$U_{F_k} = -\frac{1}{2} k \,.\, x^2 \qquad (34\text{-}2)$$

- تابع القوى لقوة الجذب العام

إن العمل الجزئي لقوة الجذب $\boldsymbol{F_{at}}$ يعطي بالعلاقة (2-22):

$$dw_{F_{at}} = z \,.\, m \,.d\,[\frac{1}{r}] = m.g.R_0^2.d\,[\frac{1}{r}]$$

وباعتبار نقطة الصفر تقع في اللانهاية، يكون:

$$r_0 = \infty \quad \Rightarrow \quad U_0 = 0$$

بالتعويض في علاقة تابع القوى؛ نحصل على تابع القوى لقوة الجذب العام:

$$U_{F_{at}} = \frac{R_0^2}{r} m.g \qquad (35\text{-}2)$$

كما يمكن تعيين القوة المؤثرة في أي نقطة من نقط المجال إذا عرف تابع القوى، ونحصل من المعادلة (2-29) بعد حساب التغير في تفاضل التابع $U(x\ ,\ y\ ,\ z)$، والأخذ بالحسبان تعريف اشتقاق تابع لعدة متغيرات على:

$$F_{\mathrm{X}} \,.\, dx + F_{\mathrm{Y}} \,.\, dy + F_{\mathrm{Z}} \,.\, dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

ومنها بمساواة القيم dx، dy، dz في الطرفين نحصل على:

$$F_{\mathrm{X}} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad F_{\mathrm{Z}} = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (36\text{-}2)$$

واضح أن مركبات القوة F هي تابعة للإحداثيات x ، y ، z ، وهذا الشرط ضروري للقوى المحافظة؛ بأن يكون اعتمادها فقط على موضع نقطة تطبيقها، بالتالي ففي مجال القوى المحافظ؛ فإن مساقط القوة تساوي المشتقات الجزئية (*Partial Derivatives*) لتابع القوى بالنسبة للإحداثيات المناظرة.

يمكن كتابة العلاقات (2-36) بصورة أكثر ملاءمة بالصيغة الشعاعية:

$$\boldsymbol{F} = F_{\mathrm{X}} \,.\, \boldsymbol{i} + F_{\mathrm{Y}} \,.\, \boldsymbol{j} + F_{\mathrm{Z}} \,.\, \boldsymbol{k} = \frac{\partial U}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن يمثل تدرج (*Gradient*) التابع القياسي $U(x\ ,\ y\ ,\ z)$ ، وهكذا فإن:

$$F = Grad\ U$$

بالتالي فإن هذه العلاقة والعلاقات (2-30) و (2-31) و (2-32) تتحقق بوساطة أي قوة محافظة، ويكفي أن تحقق القوة $\boldsymbol{F}$ إحدى هذه العلاقات لتكون قوة محافظة.

من العلاقة (2-36) نجد أن:

$$\frac{\partial F_X}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y.\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_Y}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x.\partial y}$$

ومن هنا نستنتج أنه إذا وجد تابع قوى للمجال المعطى، فإن مساقط القوة تحقق المعادلات:

$$\frac{\partial F_X}{\partial y}=\frac{\partial F_Y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_Y}{\partial z}=\frac{\partial F_Z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_Z}{\partial x}=\frac{\partial F_X}{\partial z} \qquad (37\text{-}2)$$

ويمكن إثبات النتيجة العكسية، أي: إذا تحققت المعادلات (2-37) فإنه يوجد تابع قوى U ، بالتالي تكون هذه المعادلات شروطاً ضرورية، وكافية لكي يكون مجال القوى مجالاً محافظاً.

وهكذا نستنتج مايلي:

- إذا كان مجال القوى معلوماً بالمعادلات (2-29) فإنه يمكن مباشرة معرفة ما إذا كان هذا المجال محافظاً أم لا، وذلك حسب الشروط (2-37).
- إذا كان مجال القوى محافظاً؛ فإن العلاقة (2-32) تحدد تابع القوى له.
- إذا كان مجال القوى محافظاً؛ فإن العلاقة (2-31) تحدد عمل قوى المجال.
- إذا علم تابع القوى؛ فإن المعادلات (2-36) تعين مجال القوى الذي يحدده هذا التابع.

إذا تحركت جملة من الجسيمات المادية في مجال القوى المحافظ؛ فإنه يمكن أن نعين لكل جسيم إحداثياته z_k ، y_k ، x_k تابع قوى $U(x_k , y_k , z_k)$، يكفل حساب العمل الجزئي؛ الذي تبذله القوة المؤثرة على هذا الجسيم. عندئذ يكون تابع القوى في إحداثيات جميع جسيمات الجملة:

$$U(x_1, y_1, z_1 .... x_n, y_n, z_n) = \sum U_k(x_k, y_k, z_k)$$

هو تابع القوى للجملة الميكانيكية. وعند ذلك تكون:

$$dU = \sum dU_k$$

أو وفقاً للعلاقة (2-30)، يكون لكل جسيم من جسيمات الجملة:

$$dU = \sum dw_k \qquad (38\text{-}2)$$

أي: **إن تفاضل تابع قوى الجملة يكون مساوياً لمجموع الأعمال الجزئية الذي تبذله كل القوى المؤثرة على الجملة.**

10- الطاقة الكامنة *Potential Energy*

في حالة المجالات المحافظة يمكننا إدخال **مفهوم الطاقة الكامنة، أو طاقة الموضع، وهي مقدار يقيس إمكانية الجسيم المادي في انجاز عمل؛ بفضل وضعه في مجال القوى المحافظ**، أي أن الطاقة الكامنة تتبع لموضع الجسيم ولا تتبع لشكل المسار الذي تسلكه، وبغية مقارنة مختلف إمكانيات إنجاز العمل هذه فيما بينها، ينبغي أن يتم أولاً اختيار نقطة الصفر O ، التي يفترض فيها إمكانية إنجاز العمل معدومة، ويتم تعيين نقطة الصفر كأي نقطة بداية للقياس يكون اختيارياً، وبالتالي الطاقة الكامنة لجسيم مادي في الوضع M ، هي المقدار السلمي القياسي المساوي لعمل قوى المجال في نقل الجسيم المادي من الموضع M إلى نقطة الصفر O ، ويرمز لها بـــ E_p ، أي:

$$E_p = w_{\mathrm{M}\to 0}$$

يعني التعريف أعلاه أن الطاقة الكامنة تعتمد على إحداثيات الوضع x، y ، z للجسيم M ، أي:

$$E_p = f(x,y,z)$$

سنعدّ أن نقطتي الصفر لتابع القوى $U(x\,,\,y\,,\,z)$، ولتابع الطاقة الكامنة $f\,(x\,,\,y\,,\,z)$ ، منطبقتان، عندئذ يكون:

$$U_0 = 0$$

ومن المعادلة (2-31):

$$w_{\mathrm{M}\to 0} = U_0 - U = -U$$

حيث U تمثل قيمة تابع القوى عند النقطة M من نقط المجال، ومنها ينتج أن:

$$E_p(x,y,z) = -U(x,y,z)$$

أي: إن الطاقة الكامنة في أي نقطة من نقط مجال القوى تساوي قيمة تابع القوى عند هذه النقطة مأخوذة بإشارة عكسية، منه نجد:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (39\text{-}2)$$

وباعتبار العلاقة (2-36)، نحصل على:

$$F_{\mathrm{X}} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad , \quad F_{\mathrm{Y}} = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad , \quad F_{\mathrm{Z}} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad (40\text{-}2)$$

أي: أن مساقط القوى المؤثرة على النقطة على المحاور الإحداثية تساوي المشتقات الخاصة للطاقة الكامنة بالإحداثية الموافقة بإشارة ناقص.

وبما أن الجسيم المادي يتحرك في مجال قوى فيه تابع القوى $U(x\,,\,y\,,\,z)$، من شكل تابع الطاقة الكامنة $f\,(x\,,\,y\,,\,z)$ ، منه تكون مساقط القوة المؤثرة على الجسيم مساوية إلى:

$$F_{\mathrm{X}}=\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial E_p}{\partial x}\quad,\quad F_{\mathrm{Y}}=\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial E_p}{\partial y}\quad,\quad F_{\mathrm{Z}}=\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{\partial E_p}{\partial z}\qquad(41\text{-}2)$$

بالتالي يمكن توضيح علاقة الطاقة الكامنة للجسيم بوضعية هذا الجسيم بالفراغ، وأن المحل الهندسي لنقاط الفراغ التي يكون فيها للجسيم طاقة كامنة واحدة مساوية لـــ C يعين بالمعادلة:

$$E_p(x,y,z)=C\qquad(42\text{-}2)$$

هذه المعادلة تعين سطحاً ذا طاقة ثابتة، حيث من كل نقطة من المجال يمر سطح واحد ذو طاقة ثابتة.

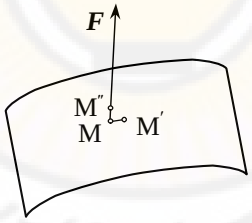
لتحديد اتجاه قوى المجال في كل نقطة بالنسبة للسطح ذي الطاقة الثابتة، نفرض أن الجسيم M يتحرك إلى وضعية مجاورة على السطح نفسه كما في (الشكل-2-21)، فيكون عمل القوة $\boldsymbol{F}$:

$$dw_{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}.\mathbf{MM'}=F.\,\mathrm{MM'}.\cos(\boldsymbol{F}.\mathbf{MM'})$$

حيث:

$$dw_{\boldsymbol{F}}=E_P^{\mathrm{M}}-E_P^{\mathrm{M'}}=0\quad,\quad F\neq 0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{F}\perp\mathbf{MM'}$$

بالتالي تتجه القوة $\boldsymbol{F}$ وفق الناظم على السطح ذي الطاقة الثابتة، والمار من الجسيم.



(الشكل-2-21) جسيم M يتحرك إلى وضعية مجاورة على السطح نفسه.

وعندما يتحرك الجسيم باتجاه القوة المؤثرة عليها يكون عمل القوة $\boldsymbol{F}$:

$$dw_{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}.\mathbf{MM'}=F.\,\mathrm{MM'}.\cos(0)>0$$

حيث:

$$dw_{\boldsymbol{F}}=E_P^{\mathrm{M}}-E_P^{\mathrm{M''}}>0\quad\Rightarrow\quad E_P^{\mathrm{M}}>E_P^{\mathrm{M''}}$$

بالتالي تتجه القوة $\boldsymbol{F}$ إلى جهة تناقص قيم الطاقة الكامنة.

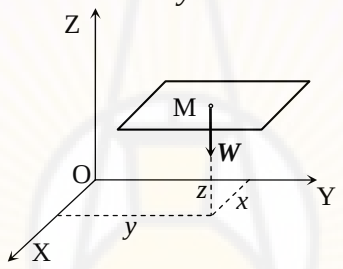
إن مفهوم الطاقة الكامنة يستخدم في الحالات التي لا يعتمد فيها العمل على المسار الذي يسلكه الجسيم في انتقاله مثل قوى الثقالة $\boldsymbol{W}$ ، وقوى مرونة النوابض $\boldsymbol{F_k}$ ، وقوة الجذب العام $\boldsymbol{F_{at}}$ وهي القوى المحافظة، ولتعيين:

- الطاقة الكامنة لقوة الثقالة *Potential Energy for Gravitational Forces*

ندرس حركة جسيم مادي M وزنه W عندما يكون قريباً من سطح الأرض، ويقع في مجال قوى الثقالة بدلالة جملة المحاور T(OXYZ)، بحيث المحور OZ موجه للأعلى، أما المحاور OX و OY فهي موجهة بشكل كيفي في المستوى الأفقي، كما في (الشكل-2-22).

لإيجاد الطاقة الكامنة للجسيم M نطبق على مساقط قوة الثقالة W العلاقة (2-40):

$$F_X = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad , \quad F_Y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \quad , \quad F_Z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -W$$



(الشكل-2-22) جسيم M_k قريب من سطح الأرض.

نلاحظ أن الطاقة الكامنة للجسيم تتعلق فقط بالإحداثية z ، أي:

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = \frac{dE_p}{dz} = W \quad \Rightarrow \quad dE_p = W.dz$$

بالتكامل:

$$E_p = W.z + C$$

وباعتبار مستوى المقارنة OXY سطحاً ذا طاقة كامنة معدومة:

$$z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{p_{(z_0=0)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

عندها تكون الطاقة الكامنة للجسيم:

$$E_p = W.z \qquad (43\text{-}2)$$

وعليه **فالطاقة الكامنة لقوة ثقالة الجسيم هو العمل الحاصل ضد مجال الجذب الأرضي لرفع الجسيم مسافة z فوق مستوى المقارنة.**

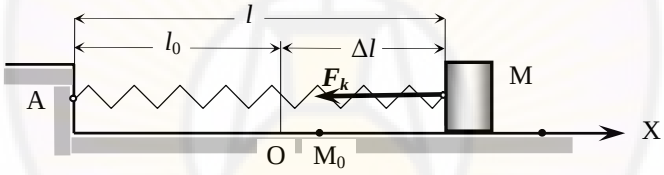
وتكون معادلات السطوح ذات الطاقة الكامنة الثابتة وفق المعادلة (2-42)، هي من الشكل:

$$W.z = \text{Const.} \quad \Rightarrow \quad z = \text{Const.}$$

أي: أن المستويات الأفقية تكون ذات طاقة كامنة ثابتة، ويعود ذلك عند إهمال انحناء سطح الكرة الأرضية ضمن مجالات محدودة، وتكون قوة الثقالة متجهة عمودياً على المستويات، وإلى جهة تناقص الطاقة الكامنة.

- الطاقة الكامنة لقوة المرونة ***Potential Energy for Elastic Force***

نثبت طرف نابض لولبي مرن عديم الكتلة، معامل مرونته k بنقطة ثابتة A في حائط شاقولي، ونصل طرفه الآخر بجسيم مادي M يستطيع الحركة على مستوى أفقي أملس، ويتزن عندما يكون النابض غير مشدود في الموضع O ، حيث ($AO = l_0$) تمثل طول النابض غير المشدود، كما هو مبين في (الشكل-2-23).



(الشكل-2-23) جسيم M مثبت بطرف نابض مشدود يستطيع الحركة على مستوى أفقي

نختار محور الحركة OX ينطبق على النابض، ونعدّ مبدأ الفواصل الموضع O على هذا المحور، أما المحاور OZ و OY فهي موجهة بشكل كيفي. نحرف الجسيم عن وضع توازنه بشد النابض حتى الطول ($OM = \Delta l$)، عندها تؤثر على الجسيم المادي قوة مرونة النابض المتجهة دوماً إلى الموضع O ، وتبعاً لقانون هوك (*Hooke*) يتناسب مقدار هذه القوة طرداً مع استطالة النابض:

$$F_k = k\,.\,\Delta l = k\,(l - l_0) = k\,.\,x$$

ولإيجاد الطاقة الكامنة للجسيم M نطبق على مساقط قوة النابض $\boldsymbol{F}_k$ العلاقة (2-40):

$$F_{\text{X}} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -F_k = -k.x \quad , \quad F_{\text{Y}} = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \quad , \quad F_{\text{Z}} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

نلاحظ أن الطاقة الكامنة للجسيم تتعلق فقط بالإحداثية x ، أي:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{dE_p}{dx} = k.x \qquad \Rightarrow \qquad dE_p = k.x.dx$$

بالتكامل:

$$E_p = \frac{k}{2}x^2 + C$$

وباعتبار مستوى المقارنة OZY سطحاً ذا طاقة كامنة معدومة:

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p = 0$$

عندها تكون الطاقة الكامنة للجسيم:

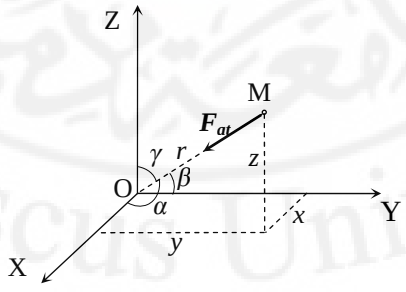
$$E_p = \frac{k}{2}x^2 \qquad (44\text{-}2)$$

- الطاقة الكامنة لقوة الجذب ***Potential Energy for Attraction Force***

ندرس حركة جسيم مادي M كتلته m عندما يكون بعيداً عن سطح الأرض بدلالة جملة المحاور T(OXYZ) ، عندها يخضع الجسيم لقوة جذب إلى المركز O قدرها:

$$F_{at} = z\ .m/r^2$$

حيث z تمثل عامل ثابت التناسب، ويساوي إلى ($z = g.R_0^2$)، و R_0 تمثل نصف قطر الكرة الأرضية، و(r = OM) تمثل بعد الجسيم M عن المركز O الذي يميل على المحاور الإحداثية بالزوايا γ ، β ، α ، كما هو مبين في (الشكل-2-24).



(الشكل-2-24) جسيم M موجود خارج كوكب الأرض خاضع لقوة جذب F_{at}

بإسقاط قوة الجذب على المحاور الإحداثية:

$$F_{at_X} = -F_{at}.\cos a = -z\ \frac{m}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{m}{r^3}x \quad , \quad F_{at_Y} = -z\ \frac{m}{r^3}y \ , \ F_{at_Z} = -z\ \frac{m}{r^3}z$$

وحسب العلاقة (2-28) نجد

$$dE_p = -(F_{at_X}\ .dx + F_{at_Y}\ .dy + F_{at_Z}\ .dz\ ) = z\ \frac{m}{r^3}(x.dx + y.dy + z.dz)$$

وبما أن:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x\,.\,dx + y\,.\,dy + z\,.\,dz\ ) = r.dr$$

بالتعويض:

$$dE_p = z\ \frac{m}{r^3}r.dr = z\ .m\frac{dr}{r^2}$$

بالتكامل:

$$E_p = -\frac{z\ .m}{r} + C$$

نلاحظ أن الطاقة الكامنة للجسيم M تتعلق ببعدها r عن مركز الجذب O ، بالتالي يتحدد الثابت C بوضع:

$$r = \infty \quad \Rightarrow \quad E_{p(r=\infty)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

وتعين الطاقة الكامنة للجسيم بالعلاقة:

$$E_p = -\frac{z\ .m}{r} \qquad (45\text{-}2)$$

وتكون معادلات السطوح ذات الطاقة الثابتة من الشكل:

$$-\frac{z\ .m}{r} = \text{Const.} \quad \Rightarrow \quad r = \text{Const.}$$

وهي معادلات لسطوح كروية متحدة المركز، ينطبق مركزها على مركز الجذب، وتتجه قوة الجذب في كل نقطة من نقط المجال على امتداد العمود للسطح الكروي، وإلى جهة مركز هذا السطح، أي إلى جهة تناقص الطاقة الكامنة.

بمقارنة هذه النتائج للطاقة الكامنة لقوة الثقالة، ولقوة المرونة يتحقق لنا عملياً أنه يمكن حساب الطاقة الكامنة لقوة الثقالة، وقوة المرونة من العلاقة العامة:

$$E_p = w_{M\to 0} = \int_M^0 (F_X \,.\, dx + F_Y \,.\, dy + F_Z \,.\, dz)$$

ومنه الطاقة الكامنة لقوة الثقالة:

$$E_p = w_{M\to 0} = \int_M^0 -W.dz = W.z$$

والطاقة الكامنة لقوة المرونة:

$$E_p = w_{M\to 0} = \int_M^0 -k.x.dx = \frac{k}{2}x^2$$

يتضح من هنا أنه يمكن استخدام مفهوم الطاقة الكامنة، في جميع خواص مجال القوى المحافظة؛ التي سبقت دراستها بدلاً من تابع القوى.

11- مبدأ تغير الطاقة الكامنة لجسيم مادي

Principle of Variation Potential Energy of a Particle

إذا تحرك جسيم مادي في مجال محافظ من الوضع M_1 إلى الوضع M_2 ، وبما أن عمل قوى المجال لا يعتمد على المسار المسلوك، فيمكن أن نكتب:

$$w_{M_1\to 0} = w_{M_1\to M_2} + w_{M_2\to 0}$$

ومنه:

$$w_{M_1\to M_2} = w_{M_1\to 0} + w_{M_2\to 0}$$

وبالتعويض:

$$\Delta E_p = E_p^1 - E_p^2 \qquad (46\text{-}2)$$

فعمل قوى المجال المحافظ في انتقال الجسيم المادي M من الموضع M_1 إلى الموضع M_2 ، يساوي الفرق بين الطاقتين الكامنتين للجسيم في وضعه الابتدائي M_1 ووضعه النهائي M_2 .

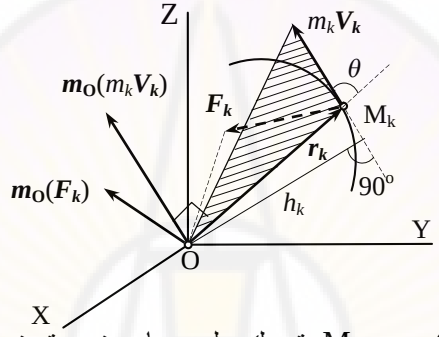
وإذا انتقل الجسيم المادي M على خط منحنٍ مغلق دورة كاملة، كان:

$$E_p^1 = E_p^2$$

وكان عمل قوى المجال في الانتقال المذكور معدوماً.

12- العزم الحركي لجسيم مادي *Moment of Momentum of a Particle*

نعدّ جسيماً مادياً M_k كتلته m_k يتحرك على مسار منحنٍ تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$ بالنسبة لجملة محاور إحداثية $T(OXYZ)$، فيكون **تعريف العزم الحركي للجسيم المادي M_k الذي يدعى أيضاً بـــ العزم الزاوي (*Angular Momentum*)، بالنسبة لنقطة ثابتة O ، أو محور ثابت Δ ، هو عزم كمية الحركة ($\boldsymbol{q_k} = m_k \,.\, \boldsymbol{V_k}$) للجسيم المادي M_k بالنسبة للنقطة الثابتة O ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{m_O}$** ، كما هو مبين في (الشكل-2-25)، **أو بالنسبة للمحور الثابت Δ ، ويرمز له بـــ $\boldsymbol{m_\Delta}$** .



(الشكل-2-25) جسيم M_k يتحرك على مسار منحنٍ تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F_k}$.

فعلاقة العزم الحركي لجسيم مادي بالنسبة للنقطة O ، يكون:

$$\boldsymbol{m_O} = \boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{q_k}) = \mathbf{OM_k} \wedge \boldsymbol{q_k} = \mathbf{OM_k} \wedge m_k \,.\, \boldsymbol{V_k} \qquad (47\text{-}2)$$

وبالنسبة للمحور Δ ، يكون:

$$m_\Delta = m_\Delta(\boldsymbol{q_k}) = (\mathbf{OM_k} \wedge \boldsymbol{q_k}) \,.\, \boldsymbol{u} = (\mathbf{OM_k} \wedge m_k \,.\, \boldsymbol{V_k}) \,.\, \boldsymbol{u} \qquad (48\text{-}2)$$

حيث $\boldsymbol{u}$ يمثل المتجه الواحدي للمحور الثابت Δ و O هي نقطة منه.

والقيمة العددية للعزم الحركي الناتج من تعريف الجداء الشعاعي، هو:

$$m_O = r_k \,.\, m_k \,.\, V_k \,.\, \sin q = m_k \,.\, V_k \,.\, h_k \qquad (49\text{-}2)$$

حيث: θ تمثل الزاوية المحصورة بين المتجهين $\boldsymbol{q_k}$ و $\boldsymbol{r_k}$.

و ($h_k = r_k \,.\, \sin\theta$) يمثل طول العمود المقام من المركز O على منحى المتجه $\boldsymbol{q_k}$.

أما منحى العزم الحركي الناتج فيكون عمودياً على مستوى المتجهين $\boldsymbol{q_k}$ و $\boldsymbol{r_k}$ ، واتجاهه يتحدد بتطبيق حركة اليد اليمنى.

كما يمكن تعيين القيمة العددية للعزم الحركي بدلالة مركبات $\boldsymbol{q_k}$ و $\boldsymbol{r_k}$ وذلك بعد نشر معين العلاقة (2-47) للحصول على مركبات المتجه $\boldsymbol{m_O}$ على المحاور، التي تمثل عزم كمية الحركة الخطية للجسيم المادي حول محاور الإحداثيات الثلاثة:

$$\begin{aligned} m_X &= m_k\,(\,y_k\,.V_Z - z_k\,.V_Y\,) \\ m_Y &= m_k\,(\,z_k\,.V_X - x_k\,.V_Z\,) \\ m_Z &= m_k\,(\,x_k\,.V_Y - y_k\,.V_X\,) \end{aligned} \qquad (50\text{-}2)$$

أما إذا تحرك الجسيم المادي في المستوى OXY ؛ فإن:

$$z_k = 0 \;\Rightarrow\; V_Z = 0 \;\Rightarrow\; m_Y = m_X = 0$$

ويكون في هذه الحالة متجه عزم كمية الحركة عمودياً على المستوى OXY ، وتعين قيمته تماما بالكمية التالية:

$$m_Z = m_k\,(\,x_k\,.V_Y - y_k\,.V_X\,)$$

ويمكن أن تكون قيمة العزم الحركي موجبة أو سالبة، وذلك حسب الاتجاه الذي يراقب منه الجسيم المادي من النقطة الثابتة O ، ووحداته بالمجموعة المطلقة $\mathrm{kg.m^2/sec}$.

13- مبدأ العزوم لجسيم مادي *Principle of Moments of a Particle*

باشتقاق العلاقة (2-46) علاقة تعريف العزم الحركي بالنسبة لنقطة O بدلالة الزمن:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{q_k}) = \frac{d}{dt}\,\mathbf{OM_k} \wedge m_k.\boldsymbol{V_k} \;+ \mathbf{OM_k} \wedge \frac{d}{dt}\,m_k.\boldsymbol{V_k}$$

منه:

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}} = \boldsymbol{V_k} \wedge m_k.\boldsymbol{V_k} + \mathbf{OM_k} \wedge \boldsymbol{F_k}$$

وإذا أثرت مجموعة من القوى $\Sigma\boldsymbol{F_k}$ على الجسيم المادي:

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}} = \mathbf{OM_k} \wedge \Sigma\boldsymbol{F_k} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(\Sigma\boldsymbol{F_k}) \qquad (51\text{-}2)$$

وذلك لأن:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{OM_k} = \boldsymbol{V_k} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_k} \wedge \boldsymbol{V_k} = 0 \qquad \text{و} \qquad \frac{d}{dt}\,m_k.\boldsymbol{V_k} = \Sigma\,\boldsymbol{F_k}$$

كذلك بالنسبة للعلاقة (2-47) حيث نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\,m_\Delta = \left[\,\mathbf{OM_k} \wedge \Sigma\boldsymbol{F_k}\,\right].\boldsymbol{u} = m_\Delta(\Sigma\boldsymbol{F_k}) \qquad (52\text{-}2)$$

وذلك لأن المحور Δ ثابت، بالتالي:

$$d\boldsymbol{u}\,/\,dt = 0$$

نلاحظ أن الطرف الثاني من العلاقتين الأخيرتين يمثل عزوم القوى المؤثرة على الجسيم المادي بالنسبة للنقطة الثابتة O ، أو بالنسبة للمحور الثابت Δ ،
كما تحدد هاتين العلاقتين مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن لجسيم مادي، ومنه النص التالي:

أن مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن لجسيم مادي حول نقطة ثابتة، أو حول محور ثابت، يساوي إلى محصلة عزوم القوى المؤثرة على هذا الجسيم بالنسبة للنقطة الثابتة، أو المحور الثابت.

ينتج أيضاً من المعادلتين (2-51) و (2-52)؛ أنه إذا كانت عزوم القوة المؤثرة حول النقطة الثابتة، أو حول المحور الثابت معدوماً؛ فإن عزم كمية حركة الجسيم حول النقطة الثابتة، أو المحور الثابت يبقى ثابتاً بالمقدار والاتجاه، أي:

$$(\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}})_{t_1} = (\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}})_{t_2}$$

بالمثل نحصل على:

$$(m_{\Delta})_{t_1} = (m_{\Delta})_{t_2}$$

هذه النتيجة صحيحة، ولها أهمية علمية كبيرة، حالة عندما يتحرك الجسيم تحت تأثير القوة المركزية (*Central Force*).

بضرب طرفي العلاقة (2-51) بـ dt ، نحصل على:

$$d\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}} = \mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}} \,.\, dt = \mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge \sum \boldsymbol{dI}_{\boldsymbol{k}}$$

بتكامل طرفي المعادلة الأخيرة بين اللحظتين t_1 و t_2 :

$$(\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}})_{t_2} - (\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}})_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge \sum \boldsymbol{dI}_{\boldsymbol{k}} \qquad (53\text{-}2)$$

كذلك بالنسبة للمحور Δ :

$$(m_{\Delta})_{t_2} - (m_{\Delta})_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge \sum \boldsymbol{dI}_{\boldsymbol{k}}\,] \,.\, \boldsymbol{u} \qquad (54\text{-}2)$$

تحدد هاتان العلاقتان تغير العزم الحركي لجسيم مادي، ومنه النص التالي:

أن تغير العزم الحركي لجسيم مادي $\mathbf{M}_{\mathbf{k}}$ بالنسبة لنقطة ثابتة O ، أو بالنسبة لمحور ثابت Δ بين لحظتين t_1 و t_2 ، يساوي إلى تكامل عزوم مجموع الدفوع الجزئية للقوى المؤثرة على الجسيم المادي بين هاتين اللحظتين بالنسبة للنقطة الثابتة، أو المحور الثابت.

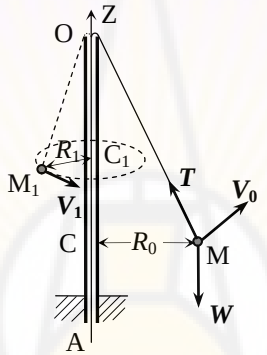
في حل المسائل يفضل استعمال مساقط العلاقتين (2-53) و (2-54) على المحاور الإحداثية، حيث نحصل على العزم الحركي بدلالة هذه المحاور.

مسألة-2-15

تعلق كرة صغيرة كتلتها m في الموضع M من طرف سلك غير مرن MOA كما في (الشكل-2-26). يمرر القسم OA من السلك داخل أنبوب شاقولي، بحيث تدور الكرة حول المحور الشاقولي للأنبوب على مسار دائري نصف قطره ($MC = R_0$) بعدد دورات ($n_0 = 120$ r.p.m)، يشد السلك ببطء إلى داخل الأنبوب، وعندما تصبح الكرة في الموضع M_1 تدور على محيط دائرة نصف قطرها ($M_1C_1 = R_1 = R_0 / 2$).

المطلوب تعيين عدد دورات الكرة n في موضعها الجديد.

الحل:



(الشكل-2-26) كرة معلقة في الموضع M من طرف سلك MOA يمر داخل أنبوب شاقولي.

نطبق علاقة تغير العزم الحركي على الكرة بالنسبة للمحور OA :

$$(m_Z)_1 - (m_Z)_0 = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{OM} \wedge \Sigma \boldsymbol{dI}\ ] . \boldsymbol{k}$$

نلاحظ أن دفع القوى المؤثرة على الكرة في M الممثلة بقوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ التي توازي المحور OA ، وقوة شد السلك $\boldsymbol{T}$ التي تلاقيه هي معدومة؛ لذا فإن العزم الجزئي للدفع يكون معدوماً، وعليه:

$$(m_Z)_1 - (m_Z)_0 = 0$$

حيث العزم الحركي للكرة بالنسبة للمحور Z يساوي:

$$(m_Z)_1 = m_Z(\, m . \boldsymbol{V_1}\,) = m . V_1 . R_1 = m . w_1 . R_1^2$$

$$(m_Z)_0 = m_Z(\, m . \boldsymbol{V_0}\,) = m . V_0 . R_0 = m . w_0 . R_0^2$$

ويكون بالتالي:

$$m\,.\,w_1\,.\,R_1^2 = m\,.\,w_0\,.\,R_0^2$$

منه السرعة الزاوية للدوران:

$$w_1 = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 w_0 = 4\,w_0$$

وعدد الدورات هو:

$$n_1 = 4\,n_0 = 480\,\text{r.p.m}$$

وتزداد سرعة الكرة كلما اقتربت من المحور.

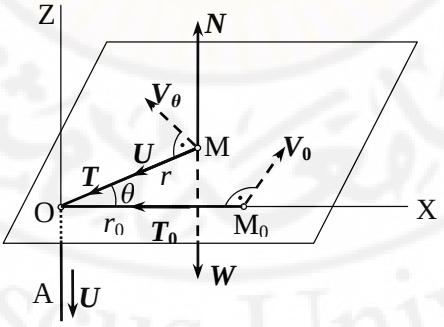
مسألة-2-16

تربط كرة صغيرة كتلتها m في الموضع M من طرف سلك غير مرن AOM يمر جزؤه عبر ثقب O يقع في مستو أفقي أملس، كما هو مبين في (الشكل-2-27).

في اللحظة عندما تكون الكرة على بعد r_0 عن الثقب؛ فإنها تكتسب سرعة ابتدائية $\boldsymbol{V_0}$ عمودية على السلك OM_0 ، وفي اللحظة نفسها يشد السلك بسرعة U .

المطلوب دراسة حركة الكرة.

الحل:



كرة معلقة في الموضع M من طرف سلك يمر عبر ثقب O يقع في مستو أفقي أملس.

(الشكل-2-27)

نعين موقع الكرة في الوضع العام M بالإحداثيات القطبية θ و $\boldsymbol{r}$ **(r = OM)**، ونلاحظ أن عزوم القوى المؤثرة عليها $\boldsymbol{W}$ وزن الكرة، و $\boldsymbol{N}$ رد الفعل الناظمي، و $\boldsymbol{T}$ شد السلك حول المحور Z العمودي على مستوى الحركة، والمار من النقطة O معدومة.

من علاقة مشتق العزم الحركي حول المحور Z بالنسبة للزمن:

$$m_{\mathrm{Z}}(m.\boldsymbol{V})_t = m_{\mathrm{Z}}(m.\boldsymbol{V})_0 = \mathrm{Const.}$$

حيث $\boldsymbol{V}$ السرعة المطلقة للكرة، وتساوي إلى:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_r} + \boldsymbol{V_\theta}$$

حيث V_θ تمثل السرعة العرضانية، وتساوي إلى $(V_q = r.w = r.\dot{q})$، وهي عمودية على OM

و V_r تمثل السرعة القطرية، وتساوي إلى $(V_r = U)$، وتتجه من M إلى O .

بالتعويض:

$$m_{\mathrm{Z}}\left(m.\boldsymbol{U} + m.\boldsymbol{r}.\dot{q}\right) = m_{\mathrm{Z}}\left(m.\boldsymbol{U} + m.\boldsymbol{V_0}\right)$$

بما أن:

$$m_{\mathrm{Z}}(m.\boldsymbol{U}) = 0 \quad \Rightarrow \quad m.r^2.\dot{q} = m.V_0.r_0$$

وأن:

$$r = r_0 - U.t \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{V_0.r_0}{(r_0 - U.t)^2}$$

بالتكامل:

$$q = \frac{V_0.R_0}{U(R_0 - U.t)} + c$$

حيث c ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{(t=0)} = r_0 \quad , \quad q_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -V_0 / U$$

منه:

$$q = \frac{V_0.t}{(r_0 - U.t)}$$

بالتعويض بقيمة $[t = (R_0 - r) / U]$؛ نحصل على معادلة حركة الكرة:

$$q = \frac{V_0}{U}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)$$

14- الحركة تحت تأثير القوة المركزية *Central Force Motion*

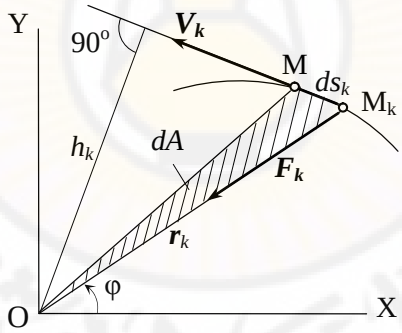
إن لعلاقة مشتق العزم الحركي فائدة كبيرة، وذلك عندما تدعونا الحاجة إلى دراسة الحركة المستوية لجسيم مادي يقع مساره المنحني في مستوى، وتؤثر فيه قوة من نوع خاص يكون خط عملها مار طوال الوقت بمركز ثابت معلوم، نسميها بـــ القوة المركزية، وتُعدُ قوة جذب الشمس لكوكب، أو جذب الأرض لتابع لها؛ مثالاً لهذه القوة التي تتجه دوماً نحو نقطة ثابتة محددة.

لمعرفة كيف يتحرك جسيم مادي M_k كتلته m_k في (الشكل-2-28) تحت تأثير القوة المركزية $\boldsymbol{F_k}$، نطبق المعادلة (2-51)، ونلاحظ في هذه الحالة أن عزم القوة $\boldsymbol{F_k}$ ينعدم بالنسبة إلى النقطة الثابتة O ، بالتالي:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{q_k}) = \mathbf{OM_k} \wedge \boldsymbol{F_k} = \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F_k}) = 0$$

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{q_k}) = \mathbf{OM_k} \wedge m_k . \boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{O}} \qquad (55\text{-}2)$$

حيث $\boldsymbol{G}_{\mathrm{O}}$ متجه ثابت.



(الشكل-2-28) جسيم مادي M_k يتحرك تحت تأثير القوة المركزية $\boldsymbol{F_k}$.

وبما أن الكتلة m_k ثابتة ينتج:

$$\mathbf{OM_k} \wedge \boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{r_k} \wedge \boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{V_k})$$

أي: إن المتجه $\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{V_k})$ ثابت بالمقدار والاتجاه، ويتجه عمودياً على المستوى المحدد بالمتجهين $\boldsymbol{V_k}$ و $\boldsymbol{r_k}$.

فإذا كان للمتجه $\boldsymbol{m_O}(\boldsymbol{V_k})$ اتجاه ثابت دوماً؛ فإن المتجهين $\boldsymbol{V_k}$ و $\boldsymbol{r_k}$ يجب أن يكونا طوال الوقت في مستوى واحد، ومن هنا نستنتج أن مسار الجسيم M_k يكون خطاً منحنياً مستوياً، بالإضافة إلى أنه في الوقت نفسه يكون:

$$m_O(\boldsymbol{V_k}) = V_k . h_k = \text{Const.}$$

منه في الحركة تحت تأثير القوة المركزية يتحرك الجسيم المادي في خط منحنٍ مستو، ويتغير متجه سرعته $\boldsymbol{V_k}$ بحيث يبقى عزم المتجه $\boldsymbol{V_k}$ حول المركز O ثابتاً.

هذه النتيجة لها معنى هندسي واضح، فمن (الشكل-2-28)؛ فإن dA مساحة المثلث (السطح المهشر) تساوي إلى:

$$dA = \frac{1}{2} h_k . ds_k = \frac{1}{2} h_k . V_k . dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} V_k . h_k = \text{Const.} \qquad (56\text{-}2)$$

حيث dA/dt تحدد السرعة التي تزداد بها المساحة التي يرسمها المتجه الموضعي $\mathbf{OM_k}$ عند حركة الجسيم M_k ، وتسمى بـــ السرعة القطاعية للجسيم، وأن المقدار $V_k.h_k/2$ يمثل معدل رسم الجسيم M_k للسطح، واستناداً للمعادلة (2-55) يدل على أن هذا المعدل ثابت لا يتغير.

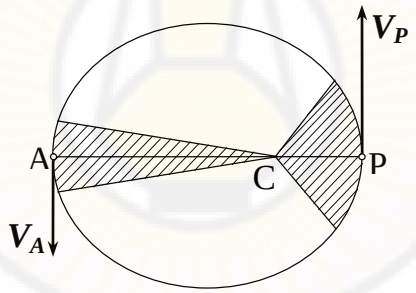
وهكذا فإن الجسيم المادي يتحرك تحت تأثير القوة المركزية في منحنٍ مستو بسرعة قطاعية ثابتة، بحيث يغطي متجه موضع الجسيم مساحات متساوية، في فترات زمنية متساوية، وهذا ما يدعى بـــ قانون السطوح؛ الذي ينطبق على حركة الكواكب، والأقمار الصناعية.

كتطبيق على الميكانيك الفضائي (*Mechanics of Space*) يمكن الاستفادة من النتيجة السابقة عند دراسة حركة الكواكب (*Planetary Motion*)، حيث تمثل O موضع الشمس و M_k موضع الكوكب الذي يتحرك على مداره تحت تأثير القوة المركزية في منحنٍ مستو، بسرعة قطاعية ثابتة، حركة يمسح فيها نصف قطره الشعاعي سطوحاً متساوية خلال مجالات زمنية متساوية، وأن المتجه الموضعي للكوكب وسرعة دورانه يتغيران؛ بحيث يبقى عزم كمية حركته حول الشمس ثابتاً، وتكون السرعة أعظم ما يمكن في نقاط المدار القريبة من الشمس، والعكس بالعكس.

فإذا كان مسار كوكب متحرك تحت تأثير قوة جذب الشمس عبارة عن قطع ناقص، وكانت الشمس تقع في إحدى بؤرتيه C ، كما هو مبين في (الشكل-2-29)، وبما أن قوة الجذب قوة مركزية؛ فإن قانون المساحات يكون صحيحاً عند حركة الكوكب، ولذا فعند أقرب نقطة على المسار من الشمس P التي تدعى بـــ نقطة الحضيض (*Perihelion*) تبلغ سرعة الكوكب V_P أوجها، وعند أبعد نقطة على المسار من الشمس A التي تدعى بـــ نقطة الرأس (*Aphelion*) تكون السرعة V_A أصغر ما يمكن، وينتج هذا من تطبيق المعادلة (2-55) التي تعطي للنقطتين P و A بأن:

$$V_A \cdot AC = V_p \cdot PC$$

يمكن التوصل إلى هذه النتيجة نفسها، إذا اعتبرنا أن مساحات القطاعات المهشرة في (الشكل-2-28) التي تغطي في فترات زمنية متساوية يجب أن تكون متساوية، وبالتالي ففي الزمن نفسه لا بد أن يقطع الكوكب قرب P مسافة أكبر مما يقطعها قرب نقطة A ، ونحصل على نتائج مماثلة لحركة الأقمار الصناعية.



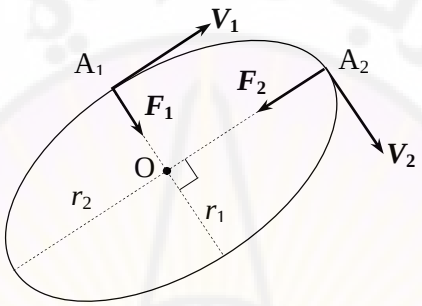
(الشكل-2-29) مسار كوكب متحرك تحت تأثير قوة جذب الشمس.

إن أول من توصل إلى هذه النتيجة، كان العالم الفلكي الألماني جوهان كبلر (*Johan Kepler*) ، وهو من معاصري غاليليو، وذلك نتيجة لمراقبته المباشرة لحركة الكواكب، وكانت هذه الملاحظات والنتائج إحدى الحقائق التي ساعدت العالم نيوتن في صياغته لقوانينه الثلاث في الحركة.

مسألة-2-17

يتحرك جسيم كتلته m على قطع ناقص كما في (الشكل-2-30) بفعل قوة مركزية؛ فإذا كانت سرعة الجسيم في A_1 ، أقرب وضع من المركز O ، هي ($V_1 = 30$ m/sec). المطلوب تعيين سرعته V_2 في أقصى وضع A_2 ، علماً بأن ($r_2 = 5\, r_1$).

الحل:



(الشكل-2-30) جسيم يتحرك على قطع ناقص.

بما أن القوة F المطبقة على الجسيم مركزية فإن:

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(\sum \boldsymbol{F}) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{q}) = \text{Const.} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}})_{A_1} = (\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}})_{A_2}$$

حيث العزم الحركي للجسيم بالنسبة للمركز O :

$$(\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}})_{A_1} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(m.\boldsymbol{V}_1) = m.V_1.r_1 = 30\, m.r_1$$

$$(\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}})_{A_2} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(m.\boldsymbol{V}_2) = m.V_2.r_2 = 5\, m.r_1.V_2$$

ويكون بالتالي:

$$30m.r_1 = 5m.r_1.V_2$$

منه سرعة الجسيم في الوضع A_2 :

$$V_2 = 6 \text{ m/sec}$$

* * *

مسائل غير محلولة *PROBLEMS*

م-2-1

يوضع نابض مدرج (جهاز قياس القوة *Dynamometer*) بين القاطرة والعربات بغية قياس وزن قطار مشحون بالبضاعة. بعد دقيقتين من بدء الحركة كانت القيمة الوسطية لقراءات التدريج هي 100800 kgf ، وبلغت عندها سرعة القطار ($V = 57.6$ km/h).

إذا كان القطار ساكناً في البدء وكان معامل الاحتكاك الحركي بين العجلات وسكة القطار يساوي ($f_k = 0.02$). المطلوب إيجاد وزن القطار W .

الجواب: $W \cong 3\times10^6$ kgf

م-2-2

تتحرك قاطرة وزنها 60 tonf بسرعة 16 km/h نحو الخلف، فتصطدم نهايتها بعربة للقطار ساكنة وزنها 10 tonf .

إذا تحركت القاطرة مع العربة بعد التصادم بسرعة V . المطلوب إيجاد مقدار هذه السرعة بفرض أن الاحتكاك مهمل.

الجواب: $V = 13.71$ km/h

م-2-3

إذا عُبر عن كمية الحركة الخطية لجسيم في لحظة معينة بالمعادلة:

$$\boldsymbol{q}_{(\text{kg.m/sec})} = 6t^3.\boldsymbol{i} + 15t^2.\boldsymbol{j}$$

فإذا كان الزمن t يقاس بالثواني، وبدأ الجسيم بالحركة من السكون. المطلوب إيجاد القوة المحصلة $R_{(t=3\text{ sec})}$ المؤثرة على الجسيم في اللحظة ($t = 3$ sec).

إرشاد: استخدم صيغة العلاقة الأساسية في التحريك من الشكل: $\dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}) = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{q} = \Sigma\boldsymbol{F}$

الجواب: $R_{(t=3\text{sec})} = 185.3$ N

م-2-4

يتحرك جسيم كتلته ($m = 0.2$ kg) في المستوي الرأسي OYZ ، تحت تأثير وزنه $\boldsymbol{W}$ وقوة $\boldsymbol{F}$ متغيرة مع الزمن كما هو مبين في a من (الشكل م-2-1).

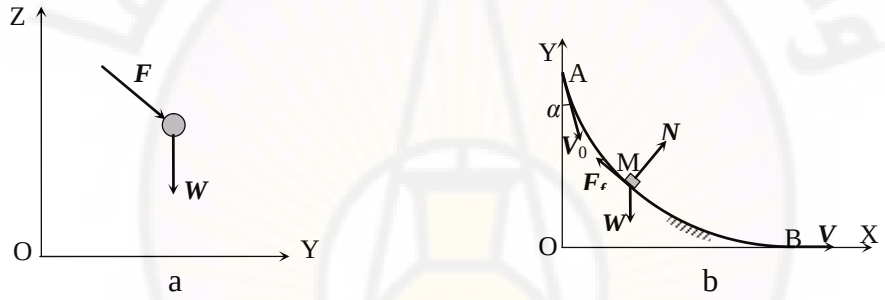
فإذا كان متجه كمية الحركة الخطية له معطى بالمعادلة:

$$\boldsymbol{q}_{(\text{kg.m/sec})} = 3/2(t^2+3)\,\boldsymbol{j} - 2/3(t^3-4)\,\boldsymbol{k}$$

المطلوب إيجاد القيمة العددية للقوة $F_{(t=2\,\text{sec})}$ في اللحظة ($t = 2$ sec).

إرشاد: استخدم صيغة العلاقة الأساسية في التحريك من الشكل: $\dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}) = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{q} = \Sigma\boldsymbol{F}$

الجواب: $F_{(t=2\,\text{sec})} = 8.51\,\text{N}$



(الشكل م-2-1)

م-2-5

يبدأ جسيم M صغير كتلته m حركته من الموضع A على المجرى المنحني AB المتوضع في المستوى الشاقولي OXY تحت تأثير ثقله، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-1).

فإذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم في الموضع A تميل عن المحور الشاقولي بزاوية α ، وتساوي إلى V_0 ، والسرعة النهائية له في الموضع B تتجه وفق المحور OX ، وقيمتها V ، ومعامل الاحتكاك الحركي لسطح المجرى f_k . المطلوب إيجاد علاقة دفع قوة رد الفعل الناظمي I_N خلال فترة زمنية t يتحرك خلالها الجسيم من الموضع A إلى الموضع B .

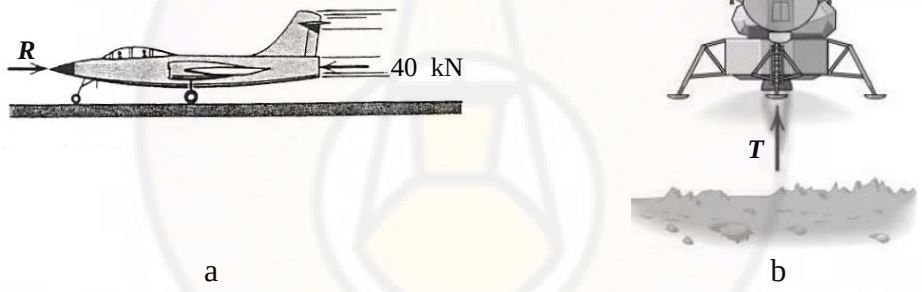
الجواب: $$I_N = \frac{m}{\sqrt{1+f_k^2}}\sqrt{(V - V_0^2\sin\alpha)^2 + (V_0\cos\alpha + g.t)^2}$$

م-2-6

تبلغ كتلة طائرة مقاتلة نفاثة 6.6 Mg ، وتحتاج إلى 12 sec من السكون لتصل إلى سرعة الإقلاع البالغة 250 km/h تحت تأثير قوة ضغط محركها النفاث البالغة 40 kN ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-2).

المطلوب إيجاد متوسط قوة مقاومة الهواء والأرض سويةً R خلال الإقلاع، بإهمال فقدان الكتلة الصغير نسبياً أثناء الإقلاع.

الجواب: $R = 1.8\,\text{kN}$



a b

(الشكل م-2-2)

م-2-7

إذا كانت كتلة مركبة الفضاء التي تهبط على سطح القمر هي 200 kg ، ومجهزة بصاروخ معاكس بحيث يولد ضغطاً ثابتاً إلى الأعلى T لتوليد دفع كلي 18 kN.sec خلال فترة 10 sec، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-2).

إذا كان تسارع الجاذبية قرب سطح القمر $1.62\ \text{m/sec}^2$. وكانت المركبة على ارتفاع 150 m فوق سطح القمر، وكانت تهبط بسرعة 45 m/sec . المطلوب إيجاد الزمن t اللازم لتقليل سرعة المركبة إلى 1.5 m/sec .

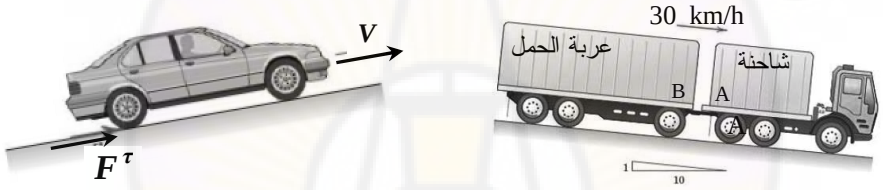
الجواب: $t = 5.9\,\text{sec}$

م-2-8

سيارة كتلتها 1500 kg تتحرك بسرعة 30 km/h إلى أعلى طريق ميله 10% ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-3).

إذا قام السائق بتطبيق قدرة إضافية لمحرك السيارة لمدة 8 sec ليرفع سرعة السيارة إلى 60 km/sec . المطلوب، بإهمال مقاومة الهواء، إيجاد القوة المماسية الوسطية F^{τ} المطبقة من الاطارات على الطريق خلال هذا الزمن.

الجواب: $F^{t} = 3.03\,\text{kN}$



a b

(الشكل م-2-3)

م-2-9

تمت معايرة نظام الكبح لشاحنة كتلتها 10 Mg ، وعربة الحمل وكتلتها 7.5 Mg ، المبينة في b من (الشكل م-2-3)، بحيث يعطي قوى كبح متساوية لكل منهما.

إذا سلطت المكابح لمدة 5 sec لإيقاف النظام إلى حالة سكون من سرعة 30 km/h ، عندما يكون في حالة حركة إلى أسفل منحدر ميله 10% . المطلوب إيجاد القوة $\boldsymbol{P}$ في عمود التوصيل AB بين الشاحنة وعربة الحمل.

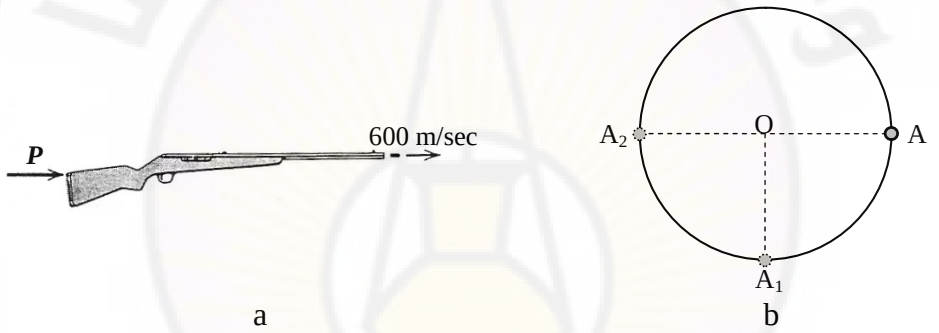
الجواب: $P = 33055\,\text{N}$

م-2-10

تطلق بندقية رصاصة كتلتها 60 g مع سرعة أفقية عند فوهتها قيمتها 600 m/sec ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-4)، وتستغرق الرصاصة زمن قدره $3x10^{-3}$ sec لكي تنتقل عبر ماسورة البندقية.

المطلوب إيجاد متوسط القوة الأفقية P المسلطة على البندقية اللازمة لتبقيها في مكانها ساكنة عند الإطلاق.

الجواب: $P = 12\,\text{kN}$



(الشكل م-2-4)

م-2-11

يتحرك جسيم كتلته 10 kg على محيط دائرة نصف قطرها 1 m تقع في مستو رأسي، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-4) بسرعة ثابتة مقدارها 10 m/sec.

المطلوب إيجاد دفع قوة الثقالة I ، ومقدار العمل w الذي يقوم به الجسيم خلال الانتقال فيما:

- إذا تحرك الجسيم من الموضع A إلى A_1 .
- إذا تحرك من الموضع A إلى A_2 .

الجواب:

$$I_{A\to A_1} = 141.4\,\text{N.sec} \quad , \quad I_{A\to A_2} = 200\,\text{N.sec} \quad , \quad w_{A\to A_1} = 98.1\,\text{J} \qquad w_{A\to A_2} = 0$$

م-2-12

يتحرك جسيم مادي M كتلته m على مسار بشكل قطع مكافئ معادلته:

$$x^2 = 4 + y$$

تحت تأثير القوة التي مركباتها:

$$F_X = -k.m.y \quad , \quad F_Y = k.m.x \quad , \quad F_Z = 0$$

المطلوب إيجاد عمل القوة w_F ، وذلك عندما ينتقل الجسيم من الموضع $(x = 0)$ إلى الموضع $(x = 2\text{m})$.

الجواب: $w_{F(0\to 2\text{m})} = (32/3)k.m$

م-2-13

يتحرك جسيم مادي M كتلته m على مسار معادلته:

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$$

تحت تأثير القوة التي مركباتها:

$$F_X = k.m.y \quad , \quad F_Y = k.m.x.y \quad , \quad F_Z = 0$$

المطلوب إيجاد عمل القوة w_F ، وذلك عندما ينتقل الجسيم من الوضع $\text{M}_0(0\,,a)$ إلى الوضع $\text{M}_1(a\,,0)$.

الجواب: $w_{F(\text{M}_0\to\text{M}_1)} = k.m.a^2(35+29a)/30$

م-2-14

جسم كتلته 100 kg يستند على مستوٍ أفقي خشن، فإذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينهما ($f_k = 0.5$). المطلوب إيجاد مقدار العمل w الواجب بذله لتحريكه على خط مستقيم مسافة 10 m .

الجواب: $w_{(0\to 10\,\text{m})} = 4900\ \text{J}$

م-2-15

إذا كان المتجه الموضعي لجسيم معين بالمعادلة:

$$\boldsymbol{r}_{(\mathrm{m})} = 1.2\boldsymbol{i} + 0.9t^2\boldsymbol{j} - 0.6(t^3 - 1)\boldsymbol{k}$$

وكان الزمن t يقاس بالثواني من بدء الحركة. المطلوب، عندما تكون (t = 4 sec)، إيجاد الاستطاعة P الناتجة من تطبيق القوة:

$$\boldsymbol{F}_{(\mathrm{N})} = 60\boldsymbol{i} - 25\boldsymbol{j} - 40\boldsymbol{k}$$

المؤثرة على الجسيم.

الجواب: $P = 1044\,\mathrm{Watt}$



(الشكل م-2-5)

م-2-16

سيارة كتلتها m تتسارع على طريق أفقية تحت تأثير القوة $\boldsymbol{F}$ ، من السرعة V_1 إلى سرعة أعلى $\boldsymbol{V}_2$ خلال مسافة معلومة s ، كما هو مبين في (الشكل م-2-5).

إذا كان محرك السيارة يولد استطاعة ثابتة P . المطلوب إيجاد قيمة السرعة V_2 .

إرشاد: اعتبر السيارة جسيم مادي يتحرك بتأثير القوة الأفقية $\boldsymbol{F}$.

الجواب: $$V_2 = \left(\frac{3P.s}{m} + V_1^3 \right)^{1/3}$$

م-2-17

يصعد قطار وزنه W على طريق مائلة بزاوية (α = 0.008 rad) بسرعة (V= 36 km/h)، في لحظة معينة t لجم القطار وسبب اللجام قوة احتكاك تحت العجلات.

إذا كانت قوة الاحتكاك (F_f = 0.1 W). المطلوب إيجاد المسافة x التي يقطعها القطار قبل وقوفه، وما هو الزمن t اللازم.

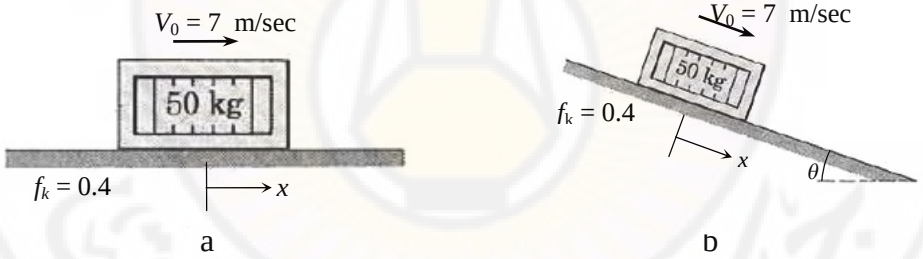
الجواب: $t = 100/9 \,\text{sec}$, $x = 500/9 \,\text{m}$

م-2-18

يدفع صندوق كتلته 50 kg على سطح أفقي بسرعة ابتدائية 7 m/sec ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-6).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي له (f_k = 0.4). المطلوب إيجاد الزمن t اللازم لتوقف الصندوق عن الحركة، والمسافة x المقطوعة عندئذ.

الجواب: $t = 1.78 \,\text{sec}$, $x = 6.24 \,\text{m}$



(الشكل م-2-6)

م-2-19

يدفع صندوق كتلته 50 kg إلى أسفل سطح خشن مائل على الأفق بزاوية θ بسرعة ابتدائية 7 m/sec ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-6).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي له (f_k = 0.4). المطلوب إيجاد الزمن t اللازم لتوقف الصندوق عن الحركة، والمسافة المقطوعة x عندئذ في الحالتين I و II الموافقتين لـــ :

$$q_{\text{I}} = 15^{\text{o}} \quad , \quad q_{\text{II}} = 30^{\text{o}}$$

الجواب: للحالة (I) (x_{I} = 19.58 m) ، (t_{I} = 5.59 sec)

للحالة (II) الصندوق لا يتوقف نهائياً.

م-2-20

جسم مادي كتلته m يستند على مستوٍ أفقي، ويتحرك بتأثير صدمة تكسبه سرعة ابتدائية $\boldsymbol{V_0}$ ، ويخضع أثناء حركته لقوة مقاومة $\boldsymbol{F}$ معاكسة لحركته.

إذا كانت قوة المقاومة $\boldsymbol{F}$ ثابتة بالمنحى والجهة والقيمة. المطلوب إيجاد الزمن t المنقضي قبل وقوف الجسيم عن الحركة، وما هي المسافة x المقطوعة في هذه الفترة.

الجواب: $t = m.V_0 / F \quad , \quad x = m.V_0^2 / 2F$

م-2-21

أطلقت رصاصة كتلتها 60 g خلال حزمة صفائح من خشب الألياف سماكتها 200 mm ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-7).

إذا كانت سرعة الرصاصة عند اقترابها من الحزمة 600 m/sec ، وتخرج منها بسرعة 300 m/sec . المطلوب إيجاد متوسط قوة مقاومة الحزمة R_{av} لاختراق الرصاصة لها.

الجواب: $R_{av} = 40.5\,\text{kN}$



a b

(الشكل م-2-7)

م-2-22

تتحرك رافعة هدم بسرعة ثابتة 3 km/h ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-7)، إذا أجبرت الرافعة على الوقوف فجأةً. المطلوب إيجاد الزاوية العظمى $\theta_{\max}$ التي يتأرجح بها الكبل الحامل لكرة الهدم.

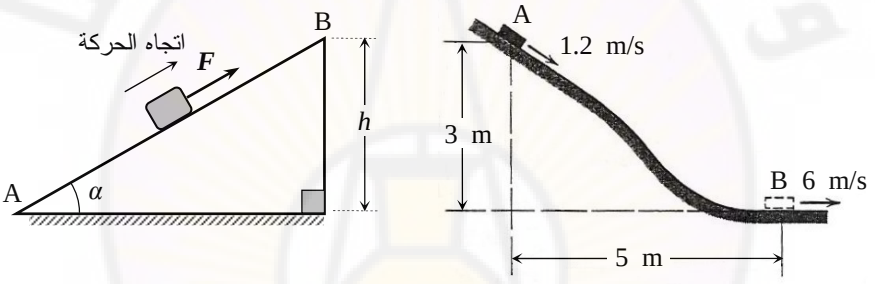
الجواب: $\theta_{\max} = 6.23^o$

م-2-23

يتحرك جسم وزنه 500 N على مستوٍ مائل خشن نحو الأعلى بسرعة منتظمة، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-8).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينهما يساوي 0.4 . المطلوب إيجاد مقدار القوة المحركة F ، ومقدار العمل الذي تقوم به w_F عندما تقطع المسافة AB .

الجواب: $F = 42.32\ \text{N}$, $w_{F_{(\text{A}\to\text{B})}} = 423\ \text{J}$



a b

(الشكل م-2-8)

م-2-24

ينزلق حمل كتلته 30 kg إلى أسفل المسار المنحني في المستوى الرأسي، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-8).

إذا كانت سرعة الحمل 1.2 m/sec في الموقع A ، وسرعته 6 m/sec في أسفل المسار B . المطلوب إيجاد العمل w_{F_f} الذي يعمله الاحتكاك على الحمل خلال حركته من A إلى B .

الجواب: $w_{F_{f\,(\text{A}\to\text{B})}} = -364.5\ \text{J}$

م-2-25

إذا كانت كتلة رجل ودراجته معاً 90 kg ، المبين في a من (الشكل م-2-9). المطلوب إيجاد الاستطاعة P التي يجب أن يقدمها الرجل لكي يقود الدراجة إلى أعلى منحدر ميله 5% بسرعة 30 km/sec .

الجواب: $P = 367.4\,\text{Watt}$



a b

(الشكل م-2-9)

م-2-26

يسقط جسيم كتلته 1.96 kg من الموضع A على الأرض بدون سرعة أولية، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-9)، فتصل إليها بسرعة 14 m/sec .

المطلوب إيجاد الطاقة الكامنة للجسيم E_p وهو في الموضع A بالنسبة للأرض.

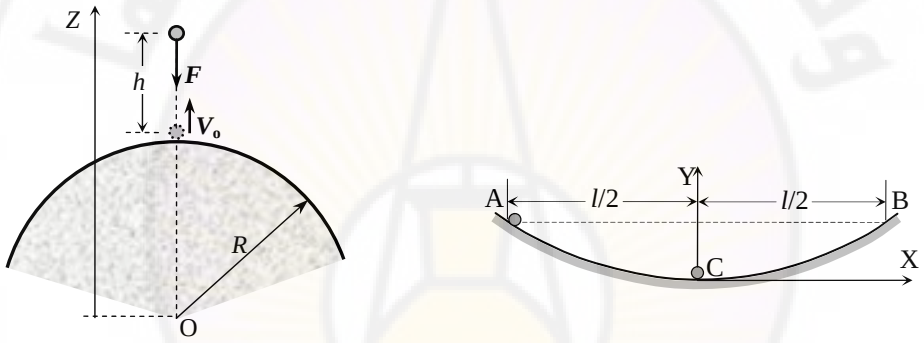
الجواب: $E_p = 192\,\text{J}$

م-2-27

قذف جسيم شاقولياً من موقع على سطح الأرض، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-10) خلالها يخضع الجسيم لقوة الثقالة فقط، وهذه القوة F تتحول عكساً مع مربع البعد عن مركز الأرض وفق العلاقة $(F=-k.m/z^2)$.

إذا كان محور الحركة Z يتجه نحو الأعلى. المطلوب إيجاد السرعة الابتدائية V_0 ، التي ينبغي إعطاءها ليبلغ الارتفاع h .

الجواب: $$V_0=\left[\frac{2g_0.R.h}{R+h}\right]^{1/2}$$



(الشكل م-2-10)

م-2-28- (الفصل الثاني-2003-2004)

يبدأ جسيم كتلته m بالحركة من السكون من الموضع A على سطح منحنٍ أملس ACB معادلته: $[y=\frac{4a}{l^2}x^2]$ حيث a عامل التناسب الثابت.

إذا كان نصف قطر انحناء السطح يعطى بالعلاقة: $[\frac{1}{r^2}=\frac{8a^2}{(1+4x^2)^2}]$.

المطلوب عندما يصل الجسيم ذروة المنحني في C ، كما هو مبين في b من(الشكل م-2-10)، إيجاد كل من سرعة الجسيم V_C عندئذ، ورد فعل القيد N_C عليه.

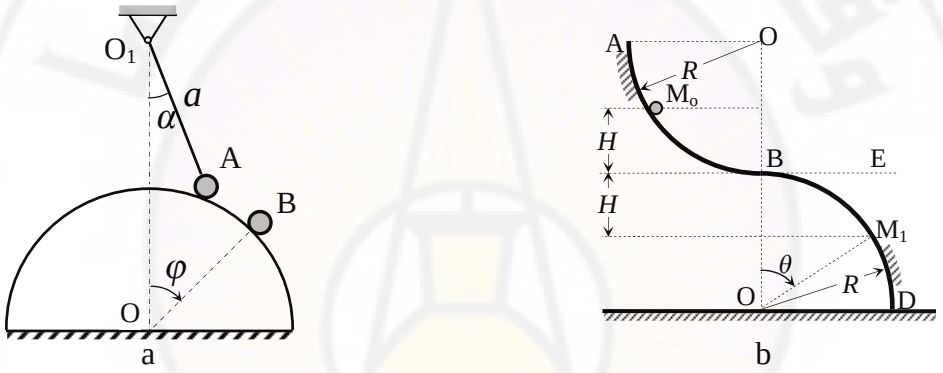
الجواب: $$V_C=(2g.a)^{1/2} \quad , \quad N_C=m.g(1+16\frac{a^2}{l^2})$$

م-2-29- (الدورة الثالثة-2011-2012)

تعلق كرة صغيرة وزنها ($W = m \,.\, g$) بخيط طوله a ، طرفه الآخر مثبت بمركز تعليق O_1 ، وتستند الكرة في موقع A من سطح أسطوانة ملساء نصف قطرها أيضاً a ، بحيث يميل الخيط O_1A على الشاقول زاوية α . كما هو مبين في a من (الشكل م-2-11).

إذا ما قطع الخيط والكرة في الموقع A ، عندها تنزلق الكرة على سطح الأسطوانة، وتتركه عند الموقع B . المطلوب تحديد الموقع B الذي تترك فيه الكرة سطح الأسطوانة، وإيجاد متجه سرعتها V_B عندئذ.

الجواب: $\cos j \geq 2\cos a / 3$, $V_B = (2g.a.\cos a / 3)^{1/2}$



(الشكل م-2-11)

م-2-30- (الفصل الثاني-2009-2010)

يتكون المنحدر الأملس ABD من قوسين AB و BD لدائرتين نصف قطر كل منهما R ، والدائرتان تقعان في مستوٍ رأسي بحيث يكون المماس BE في نقطة الانعطاف B أفقياً، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-11).

إذا وضعت كرة صغيرة ثقيلة كتلتها m على المنحدر في M_0 على ارتفاع H فوق المماس BE ، لتبدأ حركتها من السكون على المنحدر وتتركه عند الموضع M_1 الواقعة على نفس المسافة H تحت خط المماس BE . المطلوب، بإهمال الاحتكاك، إيجاد:

1. الارتفاع H بدلالة R الذي يحقق الحركة المذكورة أعلاه.
2. سرعة الكرة V_1 في M_1 لحظة تركها المنحدر وزاوية ميلها على الأفق.

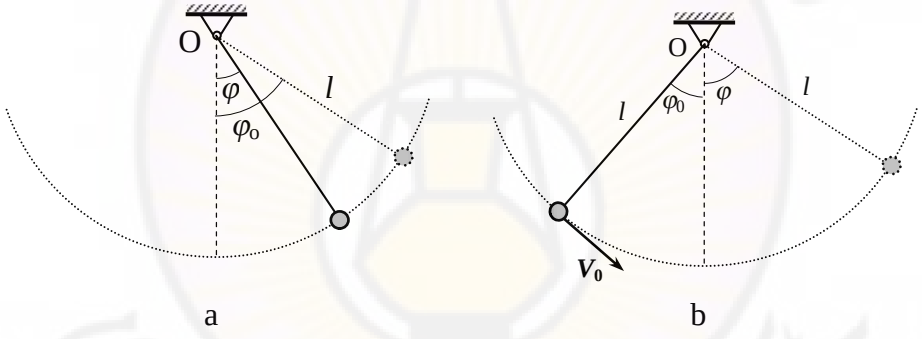
الجواب: $H = 0.2R$, $V_1 = \sqrt{0.8g.R}$

م-2-31

يعلق جسيم M وزنه W بطرف سلك غير مرن طوله l ، ويثبت الطرف الثاني منه بمسند ثابت O ، ويتزن الثقل مع السلك في وضع شاقولي.

إذا أزيح الجسيم عن وضع توازنه زاوية φ_0 ، وترك وشأنه، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-12). المطلوب إيجاد سرعة الجسيم V_φ في اللحظة التي يصنع فيها السلك مع الشاقول زاوية φ .

الجواب: $V_j = [2g.l(\cos j - \cos j_0)]^{1/2}$



(الشكل م-2-12)

م-2-32

تعلق كرة M وزنها W بطرف سلك غير مرن طوله ($l = 2$ m)، ويثبت الطرف الثاني منه بمسند ثابت O ، ويتزن الثقل مع السلك في وضع شاقولي، ثم تزاح الكرة عن وضع توازنها زاوية ($\cos \varphi_0 = ¾$)، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-12).

إذا اطلقت الكرة من هذا الوضع بسرعة أولية مقدارها ($V_0 = 3.13$ m/sec)، المطلوب إيجاد الزاوية العظمى φ_{max} التي يصنعها السلك مع الشاقول.

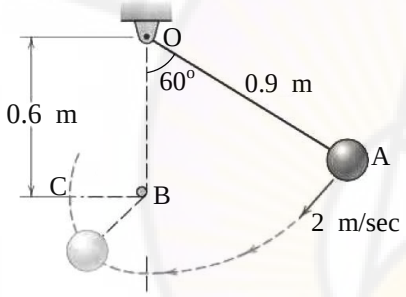
الجواب: $j_{max} = 60^o$

م-2-33

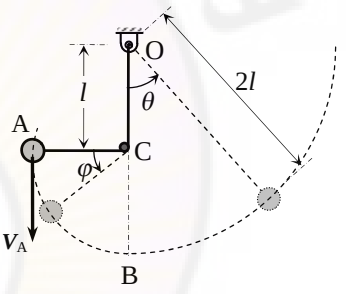
خيط طوله 0.9 m ثبت أحد طرفيه في نقطة ثابتة O ، وعلق في طرفه الثاني كرة صغيرة كتلتها m .

إذا أطلقت الكرة من الوضع A بسرعة (V_A=2 m/sec)، لتتأرجح في المستوى الرأسي، فيصطدم الحبل المعلق بها بالوتد الثابت في B ، وتستمر الكرة بالتأرجح طبقاً للقوس المنقط، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-13). المطلوب إيجاد سرعة الكرة V_C عندما تمر من الموقع C .

الجواب: $V_C = 2.63\,\mathrm{m/sec}$



a



b

(الشكل م-2-13)

م-2-34- (الفصل الثاني-2005-2006)

خيط طوله $2l$ ثبت أحد طرفيه في نقطة ثابتة O ، وعلق في طرفه الثاني كرة صغيرة كتلتها m . يلف الخيط على وتد C يقع تحت O على بعد l ، بحيث تأخذ الكرة الموضع A المبين في b من (الشكل م-2-13).

إذا تحركت الكرة بسرعة ابتدائية ($V_A = 2\sqrt{g.l}$) . المطلوب إيجاد:

1. قيمة كل من سرعة الكرة V_B ، وشد الخيط T_B في الموضع الشاقولي عند B .
2. قيمة الزاوية θ التي تترك عندها الكرة مسارها، بعد مغادرة الخيط للوتد C .

الجواب: $V_B = V_{(j=p/2)} = \sqrt{6g.l}$, $T_B = T_{(j=p/2)} = 7m.g$, $q = 109.47^o$

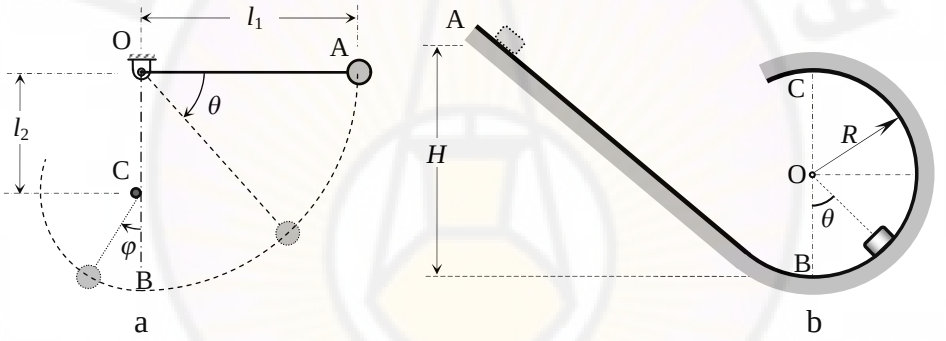
م-2-35- (الدورة التكميلية-2006-2007)

خيط طوله l_1 ثبت أحد طرفيه في نقطة ثابتة O ، وعلق في طرفه الثاني كرة صغيرة كتلتها m .

إذا تركت الكرة وشأنها دون سرعة ابتدائية من الوضع الابتدائي A وهو الأفق المار من O ، وفي الوضع الشاقولي يصطدم الخيط بوتد C يقع تحت O وعلى بعد l_2 ، وترسم عنده الكرة مساراً جديداً، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-14). المطلوب إيجاد:

1. قيمة كل من سرعة الكرة V_B ، وشد الخيط T_B في الموضع الشاقولي عند B .
2. قيمة الزاوية φ الذي تترك فيه الكرة مسارها بعد الصدم.

الجواب: $V_{(q=p/2)} = (2g.l)^{1/2}$, $T_{(q=p/2)} = 3m.g$, $\cos j = -\frac{2}{3}\frac{l_2}{l_1 - l_2}$



(الشكل م-2-14)

م-2-36- (الفصل الثاني-2004-2005)

إذا بدأ جسيم وزنه ($W = m.g$) حركته من السكون من الموقع A ، لينزلق إلى الأسفل على سطح أملس ABC ، حيث القوس BC يمثل محيط نصف دائرة نصف قطرها R . كما هو مبين في b من (الشكل م-2-14). المطلوب إيجاد:

1. علاقة كل من سرعة الجسيم، وقوة رد الفعل الناظمي المؤثرة عليه خلال حركته على المسار الدائري BC بدلالة الزاوية θ ، والارتفاع الشاقولي H .
2. سرعة الجسيم V_C ، وقوة رد الفعل الناظمي N_C عليه عند وصوله الموقع C .
3. قيمة الارتفاع الشاقولي H ، حتى يعبر الجسيم الموقع C .

الجواب: $V_C = [2g(H - 2R)]^{1/2}$, $N_C = W(2\frac{H}{R} - 5)$, $H > 2.5\,R$

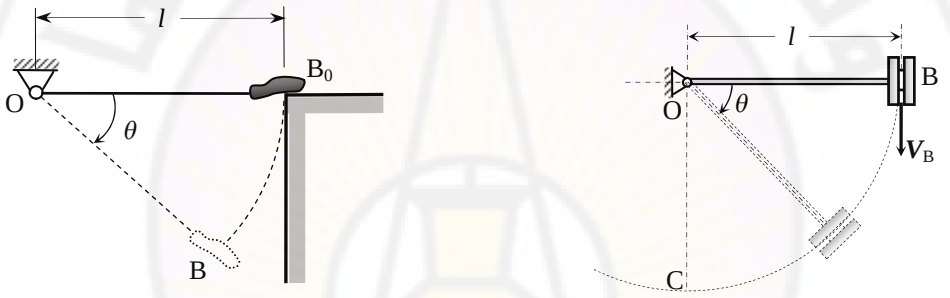
م-2-37- (الفصل الثاني-2014-2015)

يستند جسيم على شكل كيس وزنه (W = 500 N) على جدار شاقولي عنـد B_0 ، ويرتبط بطرف حبل طوله l يتحمل قوة شد أعظمية قدرها $750\sqrt{3}$ N ، طرفـه الآخـر مثبت بالمسند الثابت O ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-15).

إذا ترك الجسيم وشأنه ليتأرجح في مستوي شاقولي تحت تأثير ثقله. المطلوب إيجاد:

1. الزاوية θ^* التي عندها ينقطع الحبل.
2. سرعة وتسارع الجسيم V_{q^*}, A_{q^*} قيمةً واتجاهاً لحظة انقطاع الحبل إذا كان طوله (l = 2 m).
3. وزن الجسيم W^* البديل الذي يجب استخدامه حتى لا ينقطع الحبل.

الجواب: $q^* = 60^o$ ، $V_{(q^*=60^o)} = 5.83\,\text{m/sec}$ ، $A_{(q^*=60)} = 17.68\,\text{m/sec}^2$ ، $W^* = 433$ N



(الشكل م-2-15)

م-2-38- (الفصل الأول-2015-2016)

يثبت جسيم مؤلف من كتلتين متماثلتين قيمة كل منهما m 0.5 إلى نهاية قضيب مهمل الكتلة طوله l ، يمكنه الدوران بدون احتكاك حول المحور الأفقي الثابت O . كما هو مبين في b من (الشكل م-2-15).

إذا أعطى للجسيم عند الوضع الابتدائي له في B ، سرعة ابتدائية قدرها ($V_B = \sqrt{g.l}\downarrow$) ، المطلوب:

1. ايجاد θ^* زاوية الوضع التي ينهار عندها القضيب إذا كانت أكبر قوة شد يتحملها ($N_{max} = 4m.g$).
2. لتجنب انقطاع القضيب يتم التخلص من إحدى الكتلتين وذلك عند المرور بالموضع C . المطلوب إيجاد أقصى ارتفاع h^* تصله الكتلة المتبقية عن الموضع C .

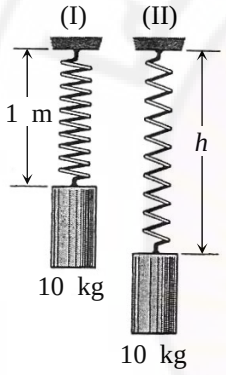
الجواب: $q^* = 90^o$ ، $h^* = 3l/2$

م-2-39

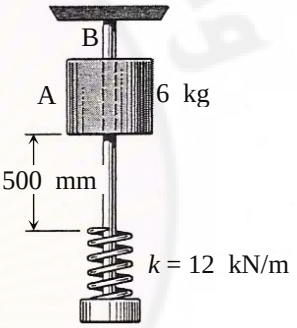
أطلقت أسطوانة كتلتها 10 kg من وضع السكون (I)، بحيث كان النابض المربوط فيه بطوله الحر، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-16).

إذا كان عامل صلابة النابض (k = 450 N/m)، المطلوب إيجاد المسافة h في الوضع (II)، عندما تصل الأسطوانة أوطأ وضع لها.

الجواب: $h = 1.436\,\text{m}$



a



b

(الشكل م-2-16)

م-2-40

أطلقت جلبة كتلتها 6 kg من السكون في الوضع المبين لتسقط على النابض، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-16).

إذا كان عامل صلابة النابض (k = 12 kN/m). المطلوب إيجاد سرعة الجلبة V عندما يضغط النابض مسافة 50 mm .

الجواب: $V = 2.41\,\text{m/sec}$

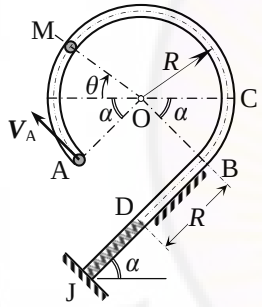
م-2-41- (الفصل الأول-2012-2013)

يتكون أنبوب رأسي أملس ABJ من قوس دائري AB مركزه O ، ونصف قطره (R = 1 m) ، ومن مستقيم BJ مثبت في نهايته الثابتة J نابض بطوله الحر، ويميل بزاوية ($\alpha = 45^o$) على الأفق. كما هو مبين في a من (الشكل م-2-17).

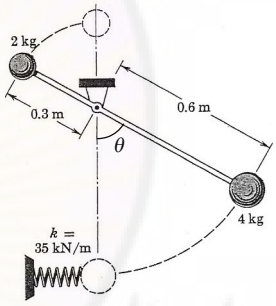
إذا بدأ جسيم M على شكل كرة صغيرة كتلته (m = 0.2 kg) حركته من الفوهة A بسرعة ابتدائية (V_A = 6 m/sec). المطلوب إيجاد:

1. سرعة الكرة V_C و V_B في كل من الموضعين C و B .
2. قوة رد الفعل الناظمي الأعظمية N_{max} ، وموقعها.
3. عامل مرونة النابض k إذا كان الانضغاط الأعظمي الناتج عن حركة الجسيم عليه يساوي (Δl_{max} = 18 cm).

الجواب: $V_C = V_{(q=p)} = 4.7$ m/sec , $V_B = V_A = 6$ m/sec , $N_{(q=p)} = N_{Cmax} = 4.425$ N , $k = 323$ N/m



a



b

(الشكل م-2-17)

م-2-42

يرتكز قضيب خفيف في المسند O ، ويحمل كتلتين 2 kg و 4 kg في نهايتيه. كما هو مبين في b من (الشكل م-2-17).

إذا تحرك القضيب من وضع السكون عندما تكون ($\theta = 60^o$)، وتأرجح في المستوي الرأسي. المطلوب إيجاد:

1- السرعة الخطية V للكتلة 4 kg في اللحظة قبل أن ترتطم بالنابض.

2- مقدار الانضغاط الأعظمي Δx للنابض معتبراً أن هذا الانضغاط صغير بحيث يبقى القضيب عمودياً تقريباً عندما يكون النابض مضغوطاً.

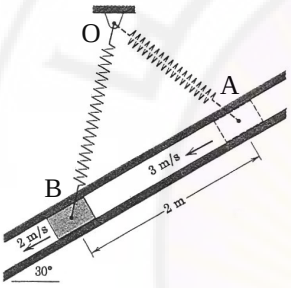
الجواب: $V = 1.981$ m/sec , $\Delta x = 22.5$ mm

م-2-43

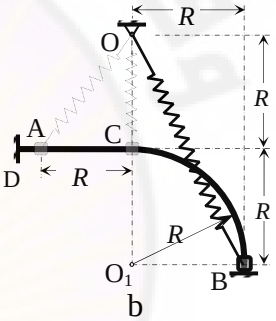
ينزلق جسيم كتلته 4 kg إلى أسفل الدليل الخشن المائل بزاوية 30^o على الأفق. كما هو مبين في a من (الشكل م-2-18).

فإذا علمنا بأن سرعة الجسيم في الموضع A هي ($V_A = 3$ m/sec)، وفي الموضع B هي ($V_B = 2$ m/sec). وأن ثابت صلابة النابض المتصل بالجسيم هو 120 N/m ، وأن استطالته في الموضع A كانت مساوية لـــ 0.6 m ، بينما في الموضع B فكانت مساوية لـــ 1 m . المطلوب إيجاد العمل الناتج عن الاحتكاك w_{F_f} بين الموضعين A و B .

الجواب: $w_{F_f} = -10.84$ J



a



b

(الشكل م-2-18)

م-2-44- (الفصل الأول-2011-2012)

جسيم على شكل جلبة وزنه ($W = 3$ N)، ملظوم بسلك معدني قاسٍ أملس BCD ، مكون من ربع دائرة BC نصف قطرها ($R = 60$ cm)، ومن مستقيم أفقي CD . يربط الجسيم وهو في الموضع B بنابض طوله الحر ($l_0 = R$)، ومعامل مرونته k طرفه الآخر معلق بمفصل ثابت O . كما هو مبين في a من (الشكل م-2-18).

إذا ترك الجسيم وشأنه لينزلق على السلك المعدني. المطلوب إيجاد:

1. علاقة سرعة الجسيم V_C لحظة وصوله الموضع C بدلالة معامل المرونة k .
2. علاقة تسارع الجسيم A_C ، وقوة القيد الشاقولية A_C^n المؤثرة عليه عند الموضع C .
3. قيمة معامل مرونة النابض بحيث يكون أقصى بعد يصله الجسيم عن الموضع C بمقدار (AC = R).

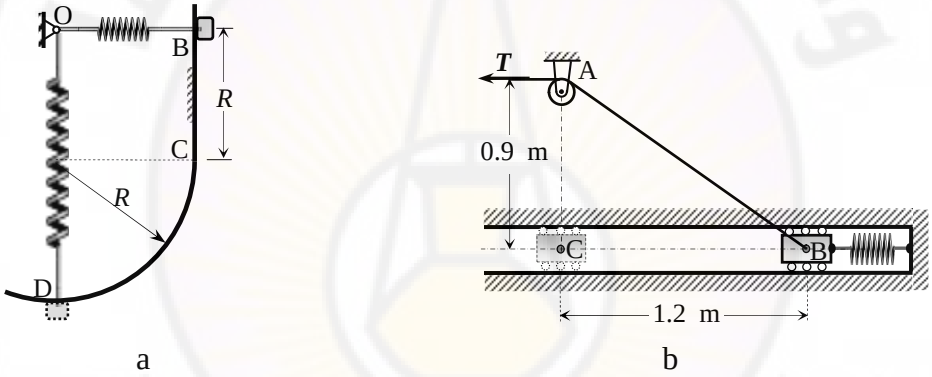
الجواب: $V_C = (1.7985\,k - 11.772)^{1/2}$, $A_C^n = 3k - 19.62$, $N_C = 0.917k - 3$, $k = 7.377$ N/m

م-2-45- (الفصل الأول-2013-2014)

يربط جسيم كتلته m بطرف نابض عامل مرونته k وطوله الحر $(l_0 = R)$ ، طرفه الآخر مثبت في المسند O . كما هو مبين في a من (الشكل م-2-19).

إذا بدأ الجسيم حركته من السكون من الموقع B ، عندها كان النابض أفقياً وبطوله الحر لينزلق على السطح الرأسي الأملس BCD . المطلوب، عندما يصل الجسيم الموقع D ، إيجاد قيمة عامل مرونة النابض k حتى يبقى الجسيم ملامساً للسطح حتى الموقع D ، وأن يكون الجسيم ساكناً عند هذا الموقع.

الجواب: $k = 4m.g / R$



a b

(الشكل م-2-19)

م-2-46- (الدورة الامتحانية الثالثة-2013-2014)

عربة كتلتها $(m = 60 \text{ kg})$ مثبتة على أسطوانات صغيرة، وتتصل بنابض مشدود بمقدار$(\Delta l = 0.233 \text{ m})$، وعامل صلابته $(k = 75 \text{ N/m})$. كما هو مبين في b من (الشكل م-2-19).

إذا بدأت العربة حركتها بالتدحرج على سكة ثابتة أفقية بدون احتكاك من السكون من الموقع B بتأثير قوة شد الحبل الثابتة $(T = 310 \text{ N})$ الذي يمس البكرة المهملة في A . المطلوب إيجاد سرعة العربة V_C عندما تصل الموقع C ، والنابض لا يزال متصل بها.

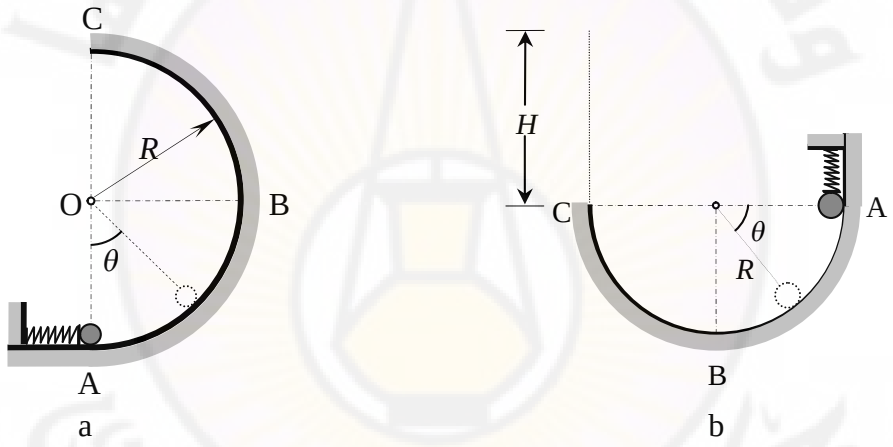
الجواب: $V_C = 1.92 \text{ m/sec}$

م-2-47- (الدورة الامتحانية الثالثة-2012-2013)

جسيم على شكل كرة صغيرة كتلتها m تستند على نابض (تمس نابض) مضغوط مقدار Δl ، وثابت صلابته k . . كما هو مبين في a من (الشكل م-2-20).

إذا تركت الكرة وشأنها بدون سرعة ابتدائية لتتحرك على المسار الدائري الرأسي الأملس A B C ، والذي نصف قطره R. المطلوب إيجاد علاقة ثابت صلابة النابض k حتى يستطيع الجسيم عبور الموقع C .

الجواب: $k > 5W.R/\Delta l^2$



(الشكل م-2-20)

م-2-48- (الدورة الامتحانية الثالثة-2014-2015)

جسيم على شكل كرة صغيرة كتلتها m تمس نابض مضغوط بمقدار Δl عامل صلابته k . كما هو مبين في b من (الشكل م-2-20).

إذا تركت الكرة وشأنها دون سرعة ابتدائية لتتحرك على المسار الدائري الرأسي الأملس ABC ، الذي نصف قطره R . المطلوب إيجاد علاقة عامل صلابة النابض k حتى يستطيع الجسيم بلوغ أقصى ارتفاع قدره H بعد مغادرته المسار الدائري عند C .

الجواب: $k = 2m.g.H/\Delta l^2$

م-2-49- (الدورة الامتحانية الثالثة-2009-2010)

وضع جسيم على شكل كرة صغيرة وزنها ($W = 2$ N)، على نابض مضغوط مقدار ($\Delta l = 7.5$ cm)، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-21)

إذا ترك الجسيم ليتدحرج على السطح المنحني الرأسي الأملس ABC . المطلوب:

1. إيجاد أقل قيمة لعامل صلابة النابض k حتى يستطيع الجسيم عبور الموقع C .
2. إذا كان ($k = 3.8$ N/cm)، فما هي سرعة الجسيم V_C لحظة تركه الموقع C .
3. إيجاد معادلات حركة الجسيم بعد تركه الموقع C ، وبعده AE عن A عند وصوله إلى الأرض الأفقية E ، وسرعة اصطدامه بها V_E .

الجواب: $k = 3.73$ N/cm , $V_C = 128.66$ cm/sec $\rightarrow$, AE = 60 cm , $V_E = 366$ cm/sec



(الشكل م-2-21)

م-2-50- (الفصل الثاني-1999-2000)

وضع جسيم على شكل علبة صغيرة كتلتها m في الموقع A ، بحيث يمس نابض مضغوط مقدار Δl ، كما هو كما هو مبين في b من (الشكل م-2-21).

إذا ترك الجسيم وشأنه لينزلق على سطح أملس نصف دائـري BCD مركـزه O ونصف قطره R . المطلوب إيجاد:

1- عامل صلابة النابض k اللازم، حتى يسقط الجسيم على الحاجز E .

2- مقدار انضغاط النابض Δl اللازم، حتى يسقط الجسيم على الحاجز H .

الجواب: $k \geq 2R.W/\Delta l^2$, $\Delta l = (5R.W/k)^{1/2}$

م-2-51- (الفصل الثاني-2012-2013)

تعلق كرة صغيرة كتلتها m بحبل غير قابل للاستطالة يمر عبر وتد ثابت D ، طرفه الآخر مثبت في المسند O ، بحيث تمس نابض مضغوط بمقدار Δl في الوضع A لها، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-22).

إذا تركت الكرة وشأنها دون سرعة ابتدائية. المطلوب إيجاد علاقة الزاوية θ التي عندها تترك الكرة مسارها الدائري، وقيمتها وقيمة كل من سرعتها وتسارعها عندئذ إذا كان:
($m = 0.75$ kg) و ($g = 9.81$ m/sec^2) و ($\Delta\ell = 50$ mm) و ($r = 60$ cm) و ($k = 13.18$ kN/m).

الجواب: $\sin q = \frac{1}{3}[\frac{k}{2r.m.g}\Delta l^2 - 1]$, $q = 60^o$, $V_q = 3.189$ m/sec , $A_q = 9.79$ m/sec^2



(الشكل م-2-22)

م-2-52- (الفصل الأول-2010-2011)

تعلق كرة صغيرة كتلتها m بحبل طوله $2r$ غير قابل للاستطالة يمر عبر وتد ثابت D طرفه الآخر مثبت في المسند O ، بحيث تمس نابض مضغوط بمقدار $\Delta\ell$ في الوضع A لها، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-22).

إذا تركت الكرة وشأنها دون سرعة ابتدائية. المطلوب إيجاد لكل من الوضعين التاليين:

1. عامل صلابة النابض اللازم k_1 ، بحيث تصبح سرعة الكرة معدومة في الوضع B .
2. عامل صلابة النابض اللازم k_2 ، بحيث تصبح قوة شد الحبل معدومة في الوضع C .
3. قيمة ووحدة عامل الصلابة للوضعين السابقين باستخدام القيم التالية:
($m = 0.75$ kg) و ($g = 9.81$ m/sec^2) و ($\Delta\ell = 50$ mm) و ($r = 60$ cm).

الجواب: $k_1 = 2m.g.r/\Delta l^2 = 3.53$ kN/m , $k_2 = 8m.g.r/\Delta l^2 = 14.12$ kN/m

م-2-53- (الفصل الأول-2014-2015)

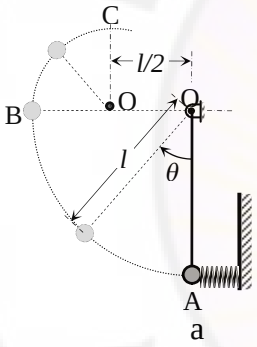
تعلق كرة صغيرة كتلتها m بنهاية حبل غير مرن طوله l طرفه الآخر مثبت في المسند O ، بحيث تمس نابض عامل صلابته k مضغوط بمقدار Δl في الوضع A لها كما هو مبين في a من (الشكل م-2-23).

إذا بدأت الكرة حركتها من السكون بتأثير النابض المضغوط، ولدى المرور بالوضع الأفقي يصطدم الخيط بوتد مثبت في O_1 ، وترسم الكرة بعده مساراً دائرياً جديداً نصف قطره $l/2$. المطلوب إيجاد:

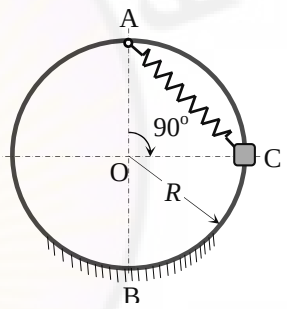
1- عامل صلابة النابض اللازم k_1 ، بحيث تصبح سرعة الكرة معدومة في الوضع B .

2- عامل صلابة النابض اللازم k_2 ، بحيث تستطيع الكرة عبور الموقع C .

الجواب: $k_1 = 2l.m.g/\Delta l^2$, $k_2 = 3.5l.m.g/\Delta l^2$



a



b

(الشكل م-2-23)

م-2-54- (الفصل الأول-1999-2000)

جسيم وزنه $(W = 5\sqrt{2}\ \text{N})$ ملضوم بحلقة ثابتة ملساء نصف قطرها $(R.=.20\ \text{cm})$ تقع في مستو شاقولي، ومعلق بطرف نابض طوله الحر $(l_0 = 20\ \text{cm})$ طرفه الثاني مثبت في النقطة A من الحلقة، بحيث يكون الجسيم ساكناً في الموضع C ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-23).

يزاح الجسيم حتى الموضع B ويترك وشأنه دون سرعة ابتدائية ليتحرك حركة مقيدة على محيط الحلقة. المطلوب إيجاد ثابت مرونة النابض k ، ومن ثم رد فعل القيد N_C عند مرور الجسيم من الموضع C ، وسرعته V_C خلال حركته من الموضع B .

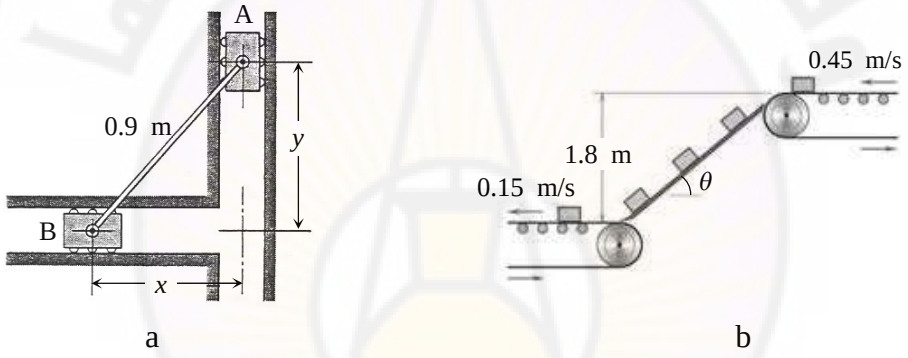
الجواب: $k = 1.2\ \text{N/cm}$, $V_C = 16.37\ \text{cm/sec}$, $N_C = 2.59\ \text{N}$

م-2-55

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على منزلقتين A و B لهما كتل متساوية، وتتمفصلان مع قضيب AB خفيف مهمل الكتلة، بحيث تتحركان بالمجريين الأملسين العمودي والأفقي على التوالي، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-24).

إذا بدأت الحركة من الوضع الذي فيه ($x = y$)، وانزلقتا دون احتكاك، المطلوب إيجاد السرعة V_A للمنزلقة A عندما تمر من الخط الأفقي المار من B .

الجواب: $V_A = 3.53\,\text{m/sec}$



a b

(الشكل م-2-24)

م-2-56

تستخدم الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي لنقل القطع المعدنية الصغيرة بسرعة 0.45 m/sec إلى حصيرة مائلة بواسطة دولاب الحركة العلوية، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-24).

إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الحصيرة والقطع 0.3 . المطلوب إيجاد قيمة الزاوية θ التي تصنعها الحصيرة مع الأفق، بحيث لا يحصل انزلاق للقطع عندما تنتقل إلى دولاب الحركة السفلية، الذي يتحرك بسرعة محيطية 0.15 m/sec .

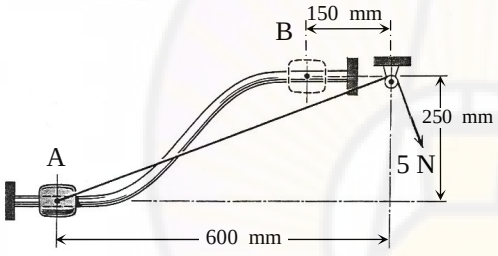
الجواب: $q = 16.62^o$

م-2-57

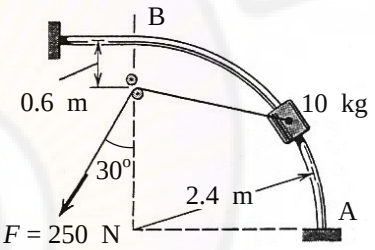
تتحرك الجلبة وكتلتها 0.2 kg بطلاقة على المنحنى الثابت من A إلى B المتوضع في المستوى العمودي، تحت تأثير الشد الثابت 5 N في الحبل، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-25).

إذا بدأت هذه الجلبة في الحركة من السكون من الموضع A ، المطلوب إيجاد سرعتها V_B عندما تصل الموضع B .

الجواب: $V_B = 4.48\,\text{m/sec}$



a



b

(الشكل م-2-25)

م-2-58

تنزلق جلبة كتلتها 10 kg بحرية على عارضة ثابتة شكلها ربع دائرة، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-25).

إذا رفعت هذه الجلبة من السكون من الموضع A بواسطة قوة ثابتة 250 N في الكبل المربوط بها. المطلوب إيجاد سرعتها V_B عندما تصل الموضع B .

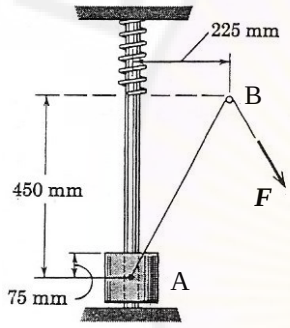
الجواب: $V_B = 8.54\,\text{m/sec}$

م-2-59

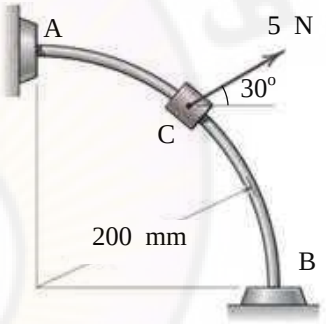
تنزلق الجلبة A وكتلتها 7 kg على قائم عمودي دون احتكاك، وتنطلق الجلبة من الوضع السفلي عندما تكون ساكنةً كما هو مبين في a من (الشكل م-2-26). متحركةً إلى أعلى القائم تحت تأثير القوة الثابتة (F = 200 N) المسلطة على الكبل، وتصطدم بنابض بطوله الحر.

إذا كان أكبر انضغاط في النابض لا يزيد عن 75 mm . المطلوب إيجاد عامل صلابة النابض k .

الجواب: $k = 8.79\ \text{kN/m}$



a



b

(الشكل م-2-26)

م-2-60

تبدأ جلبة C كتلتها 0.5 kg حركتها من السكون من الموضع A تحت تأثير قوة 5 N ثابتة بالاتجاه، لتتزلق دون احتكاك على قضيب AB على شكل ربع دائرة نصف قطرها 200 mm متوضع في المستوي الشاقولي، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-26).

المطلوب إيجاد سرعة اصطدام الجلبة V_B عند النهاية B من القضيب.

الجواب: $V_B = 2.32$ m/sec

م-2-61

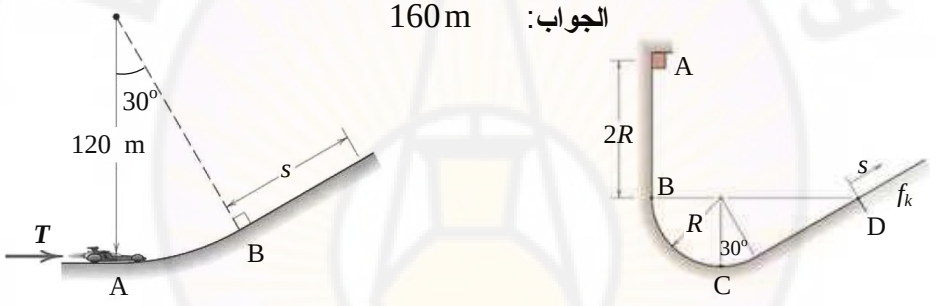
يدير صاروخ صغير مركبة اختبار فضائية كتلتها 100 kg ، ويبدأ من السكون في الوضع A ، ويتحرك على مسار عديم الاحتكاك في المستوى العمودي، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-27).

إذا كان الصاروخ يسلط قوة دفع T قدرها 2 kN من الوضع A إلى الوضع B حيث تنعدم القوة. المطلوب إيجاد المسافة s التي تسيرها مركبة الفضاء على السطح المائل قبل الوقوف.

إرشاد:

اعتبر أن فقدان الكتلة لخروج الغازات من الصاروخ صغيرة، بحيث يمكن اعتبارها مهملة.

الجواب: 160 m



a b

(الشكل م-2-27)

م-2-62

يبدأ جسيم صغير كتلته m حركته من السكون من الموضع A على المسار الرأسي المبين في b من (الشكل م-2-27).

إذا كان الجزء ABCD من المسار أملساً، وبعد أن يقطع الجسيم الموضع D يصبح المسار خشناً معامل الاحتكاك الحركي له f_k . المطلوب إيجاد:

1- قوة رد فعل المسار على الجسيم N_B و N_C عند الموضعين B و C .

2- المسافة s التي يقطعها الجسيم بعد مروره بالموقع D ، وحتى لحظة توقفه عن الحركة.

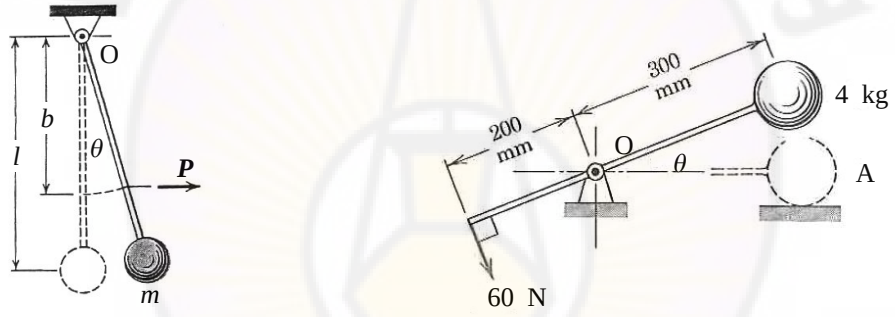
الجواب: $N_B = 4m.g$, $N_C = 7m.g$, $s = 4R/(1+ f_k\sqrt{3})$

م-2-63

ثبتت كرة صغيرة كتلتها m في نهاية عمود صلب طوله ($l = 0.8$ m)، عديم الكتلة يتصل بالمفصل O بحيث يتأرجح بطلاقة، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-28).

إذا سلطت قوة ثابتة مقدارها ($P = 20$ N)، بصورة أفقية على العمود في وضع السكون ($\theta = 0$)، بحيث تبعد عن المفصل O مقدار ($b = 0.6$ m). المطلوب إيجاد سرعة الكرة $V_{(\theta=30)}$ عندما تكون ($\theta = 30^o$).

الجواب: $V_{(\theta=30)} = 1.97$ m/sec



b a

(الشكل م-2-28)

م-2-64

يتصل جسيم على شكل كرة كتلتها 4 kg بطرف قضيب مهمل الكتلة قابل للدوران حول المسند الثابت O كما هو مبين في b من (الشكل م-2-28).

إذا بدأت الحركة من السكون عندما ($\theta = 0$) بتأثير القوة الثابتة 60 N العمودية على الطرف الآخر من القضيب. المطلوب إيجاد سرعة الكرة $V_{(q=90^o)}$ لدى الوصول إلى الموضع ($\theta = 90^o$).

الجواب: $V_{(q=90^o)} = 1.881\,\text{m/sec}$

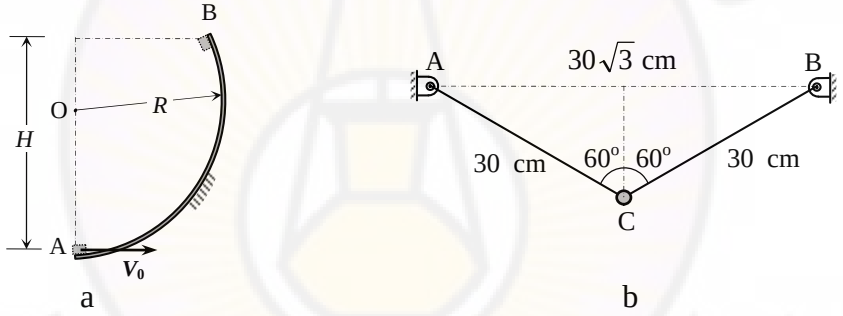
م-2-65

ينزلق جسيم كتلته (m = 450 gr) داخل طوق دائري أملس في وضع رأسي نصف قطره (R = 200 cm)، المبين في a من (الشكل م-2-29).

إذا بدأ الجسيم حركته من أوطأ وضع A بسرعة V_0 ، وغادر الطوق عند وضع B يرتفع مقدار (H =300 cm) عن أوطأ وضع. المطلوب إيجاد السرعة V_0 ، وسرعة الجسيم عند مغادرة الطوق V ، وأقصى ضغط على الطوق $N_{\max}$ ، وأقصى ارتفاع يبلغه الجسيم $h_{\max}$.

الجواب:

$$V_0 = 8.29\,\text{cm/sec}\ ,\ V = 7.9\,\text{cm/sec}\ ,\ N_{\max} = 19.87\,\text{N}\ ,\ h_{\max} = 337.5\,\text{cm}$$



(الشكل م-2-29)

م-2-66

جسيم وزنه (W = 1.5 N) ثبت في وسط خيط غير قابل للمط ABC طوله (l = 2 m)، وطرفا الخيط مثبتان في مسندين A ، B على خط أفقي واحد، ويبعدان بعضهما عن بعض مقدار ($\text{AB} = \sqrt{3}\,\text{m}$)، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-29).

إذا دفع الجسيم من موضع اتزانه بسرعة أفقية قدرها ($V = 5\,\text{m/sec}$) عمودياً على المستوى. المطلوب إثبات أنه يتم دورة رأسية كاملة، وإيجاد أقل وأكبر قوة شد $T_{\min}$, $T_{\max}$ في الخيط.

الجواب: $T_{\min} = 5.4\,\text{N}$, $T_{\max} = 9.15\,\text{N}$

م-2-67

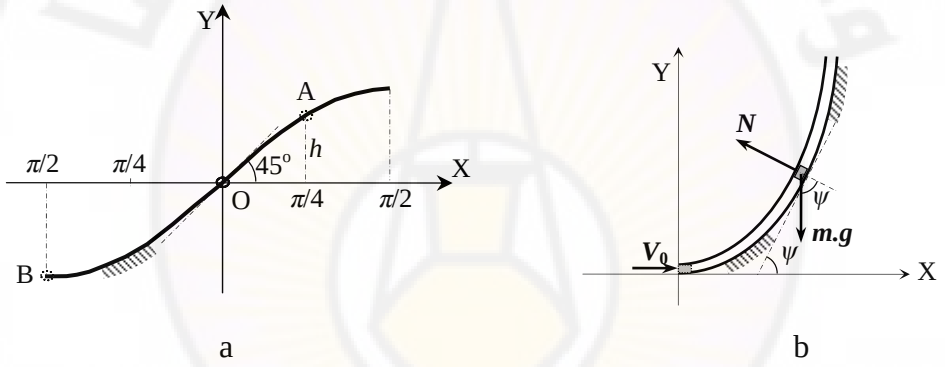
تنزلق حلقة صغيرة كتلتها m على سلك منحنٍ ثابت يقع في مستوى رأسي، ومعادلته:

$$y = \sin x$$

إذا بدأت الحلقة حركتها من السكون عند الموضع A($x = \pi/4$) . المطلوب إيجاد ضغط الحلقة على السلك N_O عند مرورها بنقطة أصل الإحداثيات O ، و N_B عندما تمر بالموضع B($x = -\pi/2$) ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-30).

إرشاد : استعمل علاقة نصف قطر الانحناء التالية $r = (1+y'^2)^{3/2} / y''$

الجواب: $N_O = m.g/\sqrt{2}$, $N_B = m.g(3+\sqrt{2})$



a b

(الشكل م-2-30)

م-2-68

ينزلق جسيم صغير كتلته m داخل أنبوب ثابت على هيئة قطع مكافئ موضوع في مستوى رأسي كما هو مبين في b من (الشكل م-2-30)، ومعادلته:

$$y = 2a.x^2$$

إذا قذف الجسيم من رأس هذا القطع بسرعة V_0 ، وواصل سيره داخل الأنبوب. المطلوب إيجاد علاقة ضغط الجسيم $N\rho$ على الأنبوب خلال مرورها فيه.

إرشاد : استعمل علاقة نصف قطر الانحناء التالية $r = (1+y'^2)^{3/2} / y''$

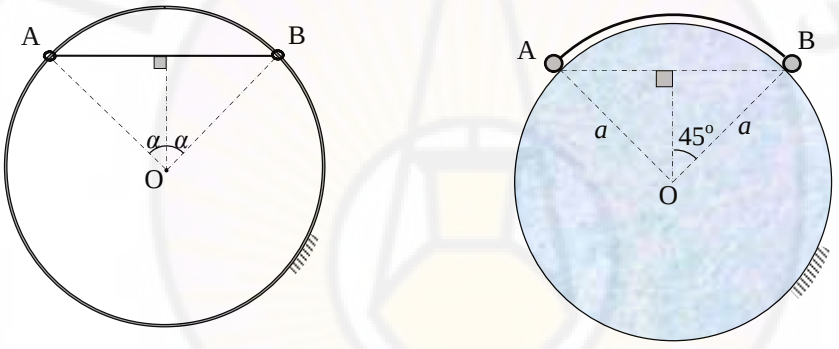
الجواب: $N_r = m.V_0^2 + m.g/4a$

م-2-69

حلقتان صغيرتان A و B كتلتاهما m_1 ، m_2 ، مربوطتان بخيط غير مرن على طوق دائري رأسي أملس ثابت، المبين في a من (الشكل م-2-31).

إذا بدأتا الحركة من السكون والخيط مشدود في وضع أفقي تقريباً فوق مركز الدائرة، والزاوية المركزية المقابلة له 2α . المطلوب إيجاد علاقة قوة شد الخيط T_θ عندما يصبح ميله يساوي θ .

الجواب: $T_q = 2m_1.m_2.g.\tan a\ .\cos q\ /(m_1 + m_2)$



a **b**

(الشكل م-2-31)

م-2-70

جسيمان A و B متساويان في الكتلة ($m_1 = m_2 = m$)، يربطهما خيط غير مرن طوله $0.5.\pi.a$ يمر فوق أسطوانة أفقية ملساء ثابتة نصف قطرها a ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-31).

إذا بدأ الجسيمان الحركة من موضع كانا فيه على خط أفقي واحد تقريباً. المطلوب إيجاد ضغط الجسيم الثاني على الأسطوانة N_2 عندما يغادرها الجسيم الأول.

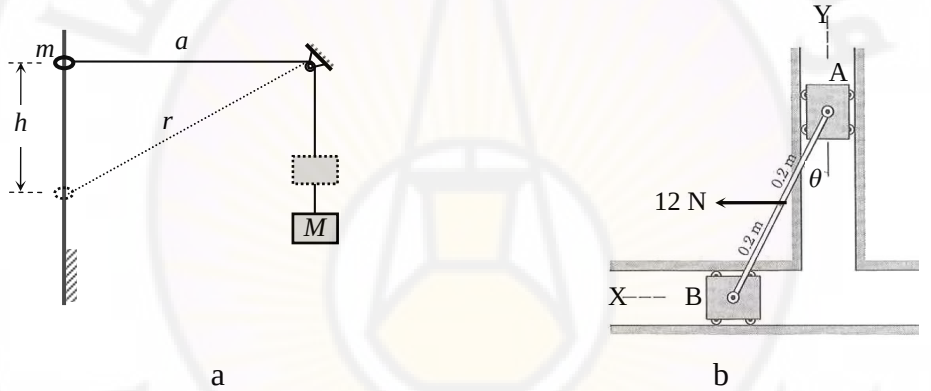
الجواب: $N_2 = 0.75\,m.g$

م-2-71

تنزلق حلقة صغيرة كتلتها m على قضيب رأسي أملس ثابت. ربط في الحلقة خيط خفيف يمر حول وتد أملس ثابت على بعد a من القضيب، ويتدلى من طرفه الآخر كتلة أخرى M أكبر m ، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-32).

إذا تركت الحلقة من سكون في وضع كانت فيه في مستوى أفقي واحد مع الوتد، المطلوب إيجاد المسافة h التي ستقطعها الحلقة حتى تقف.

الجواب: $h = 2m.M.a/(M^2 - m^2)$



a b

(الشكل م-2-32)

م-2-72

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على منزلقتين A و B كتلة كل منهما 2 kg . يربط بينهما قضيب مهمل الكتلة، وتتحركان على المجريين الأملسين الشاقولي والأفقي، وتؤثر في منتصف القضيب قوة أفقية ثابتة 20 N ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-32).

إذا بدأت الحركة من السكون من الوضع ($\theta = 0$). المطلوب إيجاد قيمة كل من سرعتي المنزلقتين V_A و V_B في الوضع ($\theta = 90^o$).

الجواب: $V_A = 3.44\,\text{m/sec}$, $V_B = 0$

م-2-73

إذا عُبر عن كمية الحركة الخطية لجسيم في لحظة معينة بالمعادلة:

$$\boldsymbol{q}_{(\text{kg.m/sec})} = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

وعن متجه موضعها بالمعادلة:

$$\boldsymbol{r}_{(\text{m})} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

المطلوب إيجاد قيمة عزم كمية الحركة $m_{\text{O}}(\boldsymbol{q})$ للجسيم حول إحداثيات المبدأ O .

الجواب: $m_{\text{O}}(q) = 7.21 \text{ kg.m}^2/\text{sec}$

م-2-74

إذا كان متجه كمية الحركة لجسيم مادي كتلته m معطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{q}_{(\text{kg.m/sec})} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

وكان متجه الموضع:

$$\boldsymbol{r}_{(\text{m})} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

المطلوب إيجاد القيمة العددية للعزم الزاوي $m_{\text{O}}(q)$ (عزم كمية الحركة)، بالنسبة للنقطة الثابتة O مبدأ الإحداثيات.

الجواب: $m_{\text{O}}(q) = 8.49 \text{ kg.m}^2/\text{sec}$

م-2-75

إذا كان متجه الموضع لجسيم مادي كتلته ($m = 4$ kg) معطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{r}_{(\text{m})} = 3t^2.\boldsymbol{i} - 2t.\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$$

المطلوب عندما ($t = 3$ sec) إيجاد القيمة العددية للعزم الزاوي (عزم كمية الحركة) $m_{\text{O}}(q)$ ، وعزم محصلة القوى المؤثرة على الجسيم $m_{\text{O}}(\Sigma F)$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات الثابت O .

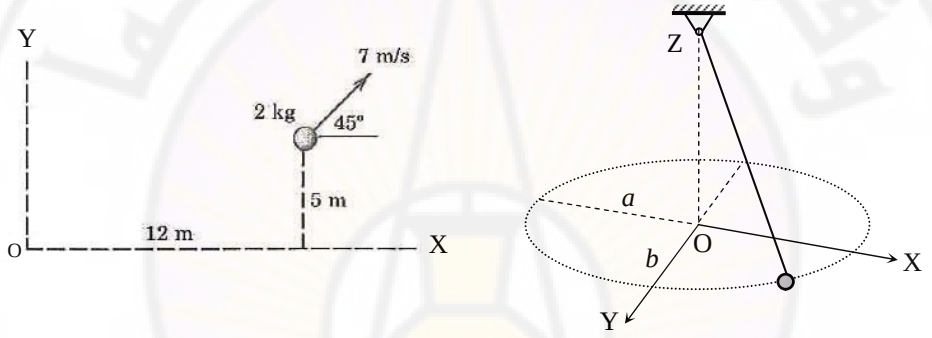
الجواب: $m_{\text{O}}(q) = 389 \text{ kg.m}^2/\text{sec}$, $m_{\text{O}}(\Sigma F) = 260 \text{ N.m}$

م-2-76

كرة صغيرة كتلتها 2 kg تتحرك في المستوى OXY ، كما هو موضح في a من (الشكل م-2-33).

المطلوب إيجاد القيمة العددية للعزم الزاوي $m_O(q)$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات الثابت O .

الجواب: $m_O(q) = 69.3 \text{ kg.m}^2/\text{sec}$



a b

(الشكل م-2-33)

م-2-77

يعلق جسيم مادي M ثقيل بطرف سلك طويل غير مرن ويثبت الطرف الثاني منه بمحور شاقولي. بشكل يستطيع معه وبتأثير الثقالة رسم مسار على شكل قطع ناقص أفقي يقع مركزه على شاقول وضعية التوازن O ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-33).

إذا كان المحور الكبير للقطع هو $2a$ ، ومحوره الصغير $2b$. المطلوب إيجاد النسبة بين السرعة V_X للجسيم عندما يقطع المحور OY ، وسرعته V_Y عندما يقطع المحور OX .

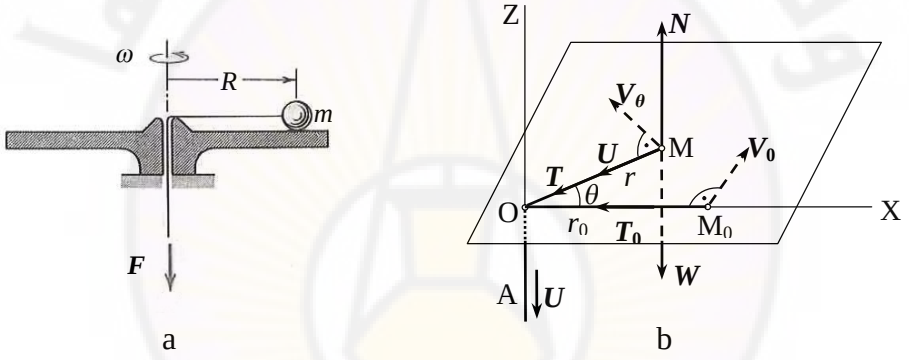
الجواب: $V_X / V_Y = a/b$

م-2-78

تتصل كرة صغيرة وزنها W بطرف سلك غير مرن، وتستند على مستوى أفقي أملس، وتتحرك على مسار دائري نصف قطره R بسرعة V_0 ، ويخترق الطرف الثاني للسلك المستوى في مركز الدائرة O ، ويتدلى شاقولياً إلى الأسفل، كما هو مبين في a من (الشكل م-2-34).

إذا تم شد السلك ببطء من طرفه الحر حتى يصبح نصف قطر الدائرة ($r = R/2$). المطلوب تعيين السرعة الجديدة للكرة V_r ، والشد T_r في السلك.

الجواب: $V_r = 2V_0$, $T_r = 8W.V_0^2 / g.r$



(الشكل م-2-34)

م-2-79

تنزلق كرة صغيرة وزنها W على مستوى أفقي أملس، وهي مربوطة بطرف سلك خفيف غير مرن. الطرف الثاني منه يمر عبر ثقب O أحدث في المستوى، ويسحب هذا الطرف بسرعة ثابتة قدرها a ، كما هو مبين في b من (الشكل م-2-34).

إذا كان السلك مستقيماً في البدء، والبعد بين الكرة والثقب هو R ، ومسقط السرعة الابتدائية للكرة على مستقيم يعامد السلك هو V_0 . المطلوب إيجاد معادلة كل من حركة الكرة، والشد T_θ في السلك.

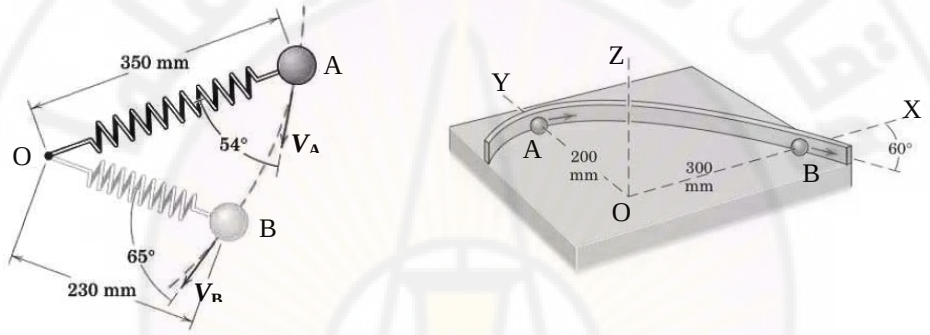
الجواب: $q = \dfrac{V_0.t}{R - a.t}$, $T_q = \dfrac{W.R^2.V_0^2}{g(R - a.t)^3}$

م-2-80

يتحرك جسيم كتلته m دون احتكاك على سطح أفقي، بحيث يرتبط بنابض خفيف مثبت طرفه الآخر في O . كما هو مبين في a من (الشكل م-2-35).

إذا كان للجسيم سرعة ($V_A = 4$ m/sec) في الموضع A كما في الشكل. المطلوب إيجاد سرعة الجسيم V_B لدى مروره بالموضع B .

الجواب: $V_B = 5.43\,\text{m/sec}$



a b

(الشكل م-2-35)

م-2-81

يتحرك جسيم صغير كتلته 0.1 kg في المستوى الأفقي X-Y ، بسرعة ثابتة بالقيمة 2 m/sec ، بحيث تكون حركته مقيدة بالحاجز المنحني الأملس، بحيث عندما يعبر المحور Y عند الموضع A يكون متجه سرعته باتجاه المحور X ، وعندما يعبر المحور X عند الموضع B يصنع متجه سرعته زاوية 60^o مع المحور X . كما هو مبين في b من (الشكل م-2-35).

إذا كان نصف قطر تقوس المسار عند B مساوياً 500 mm . المطلوب إيجاد القيمة العددية لمشتق العزم الحركي $\boldsymbol{m_O}$ للجسيم حول المحور Z العمودي على مستوى الحركة، والمار من النقطة O ، وذلك في كل من الموضعين A و B .

الجواب: $At\ \text{A}: \dot{h}_{O_z} = 0 \quad , \quad At\ \text{B}: \dot{h}_{O_z} = -0.12\ \text{kg.m}^2/\text{sec}^2$

الفصل الثالث

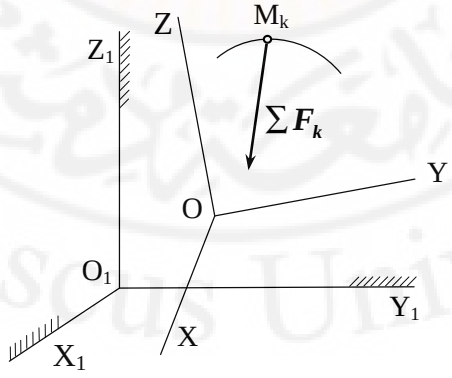
الحركة النسبية لجسيم مادي *Relative Motion of a Particle*

1- مقدمة *Introduction*

لقد ناقشنا في البنود السابقة حركة الجسيم المادي؛ بدلالة جملة محاور إحداثية ساكنة؛ هي الجملة العطالية، أو الجملة المطلقة، لكن في الواقع العلمي نحتاج إلى دراسة حركة الجسيم المادي، أو الجسم الصلب بدلالة جملة مقارنة مقيدة بالأرض، والأرض - كما نعلم - ليست ساكنة، بل تتحرك بدلالة الجملة المطلقة؛ لذا وجب إعطاء الشروط التي تحدد العلاقة بين الجملة المطلقة وجملة مقارنة تتحرك بدلالتها حركة ما.

2- العلاقة الأساسية في الحركة النسبية لجسيم مادي
Fundamental Law of Dynamics in Relative Motion of a Particle

نَعُدُّ جسيماً مادياً M_k كتلته m_k يخضع لمجموعة من القوى $\Sigma \boldsymbol{F_k}$ ناتجة عن التأثير المتبادل بين الجسيم والأجسام المجاورة، ويتحرك الجسيم نتيجة خضوعه لتأثير هذه القوى كما في (الشكل-3-1) بالنسبة لجملة المحاور T(OXYZ) ، التي تتحرك بدورها بطريقة معلومة بدلالة جملة المحاور الثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$.



(الشكل-3-1) حركة جسيم M بدلالة جملة إحداثية متحركة.

تؤول المسألة إلى إيجاد علاقة بين تسارع الجسيم المادي بالنسبة للجملة T ، والذي نسميه بـــ التسارع النسبي $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}}$ ، والقوى المؤثرة على هذا الجسيم $\Sigma \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}$.

إن تسارع الجسيم المادي M_k بدلالة الجملة المطلقة T_1 يدعى بـــ التسارع المطلق $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{a}}$ ، وتعطينا العلاقة الأساسية في التحريك المعادلة:

$$m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{a}} = \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}} \qquad (1\text{-}3)$$

حيث التسارع المطلق في بحث الحركة؛ يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{c}}$$

بالتعويض في العلاقة (3-1):

$$m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}} + m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}} + m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{c}} = \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}$$

ومنه يكون:

$$m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}} = \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}} + (- m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}) + (- m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{c}})$$

باستخدام الرموز:

$$- m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{\boldsymbol{e}} \qquad \text{و} \qquad - m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{\boldsymbol{c}}$$

لأن هذين الحدين لهما أبعاد قوة، وندعوهما بـــ قوة عطالة كوريوليس وقوة العطالة المكتسبة، ويعود منشؤهما إلى حركة الجملة T بدلالة الجملة العطالية T_1 ، ومنه:

$$m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}} = \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}} + (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{\boldsymbol{e}} + (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{\boldsymbol{c}} \qquad (2\text{-}3)$$

تعبر هذه المعادلة عن العلاقة الأساسية في التحريك في الحركة النسبية للجسيم المادي بدلالة الجملة المتحركة T ، وبالمقارنة بين المعادلتين (3-1) و (3-2) نصل إلى النتيجة التالية:

تكتب العلاقة الأساسية في التحريك في حالة الحركة النسبية لجسيم مادي بشكل مطابق للعلاقة الأساسية في التحريك؛ في حالة الحركة المطلقة للجسيم المادي، شرط أن نضيف قوة العطالة المكتسبة، وقوة عطالة كوريوليس إلى القوى المؤثرة على الجسيم المادي؛ نتيجة للتأثير المتبادل بينه وبين الأجسام المادية الأخرى.

تعطى قوة عطالة كوريوليس بالعلاقة:

$$(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{c} = -\, m_k \,.\, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{c}} = -\, 2\, m_k \,(\, \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \,\Lambda\, \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}})$$

بالتالي تعامد قوة عطالة كوريوليس $(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{c}$ كلاً من السرعة النسبية $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}}$ ، ومتجه السرعة الزاوية للحركة المكتسبة $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}}$ لدوران الجملة المتحركة T بدلالة الجملة المطلقة الثابتة T_1 حول محور آني يمر من القطب O ، وتتجه هذه القوة $(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{c}$ بشكل تكون معه الثلاثية:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} \perp \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}} \perp (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{c}$$

ثلاثية عكسية، أي: إن القوة $(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{c}$ تكون عمودية على المماس للمسار النسبي للجسيم المادي، بالتالي يكون مسقط هذه القوة على المماس معدوماً، أي:

$$(F_k^{in})_{\tau}^{c} = 0$$

ويصبح مسقط العلاقة الأساسية للحركة النسبية للجسيم المادي على المماس، بالشكل:

$$m_k \,.\, \frac{dV_k^r}{dt} = (\sum F_k)_t + (F_k^{in})_t^e$$

ويكون عمل قوة عطالة كوريوليس معدوماً خلال انتقال الجسيم المادي M_k على مساره بدلالة الجملة المتحركة T من M_0 إلى M_1 ، وتأخذ عندئذ علاقة تغيير الطاقة الحركية في الحركة النسبية للجسيم المادي الشكل التالي:

$$\frac{1}{2}\, m_k\, (V_k^r)_1^2 - \frac{1}{2}\, m_k\, (V_k^r)_0^2 = w_{M_0 \to M_1}(\sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}) + w_{M_0 \to M_1}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{\boldsymbol{e}} \qquad (3\text{-}3)$$

حالات خاصة:

§ إذا تحركت الجملة T حركة انسحابية بدلالة الجملة المطلقة T_1 ، كان:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{e}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{c}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{c} = 0$$

وتصبح العلاقة الأساسية للحركة النسبية للجسيم:

$$m_k . \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{r}} = \sum \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}} + (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{in}})^{\boldsymbol{e}} \qquad (4\text{-}3)$$

§ إذا تحركت الجملة T حركة انسحابية منتظمة على مسار مستقيم؛ بدلالة الجملة المطلقة T_1 ، كان:

$$\boldsymbol{\Omega_e = 0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A_k^c = 0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{(F_k^{in})^c = 0} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{A_k^e = 0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{(F_k^{in})^e = 0}$$

وتصبح العلاقة الأساسية للحركة النسبية للجسيم:

$$m_k \,.\boldsymbol{A_k^r} = \sum \boldsymbol{F_k} \qquad (5\text{-}3)$$

وتأخذ هذه العلاقة في الجملة T شكل العلاقة في الجملة المطلقة T_1 ، بالتالي تدعى الجملة T بـــ الجملة العطالية؛ لأنها تخلو من القوى العطالية.

ينتج مما سبق أنه لا يمكن بوساطة أي تجربة ميكانيكية اكتشاف ما إذا كانت مجموعة القياس المعطاة في حالة سكون، أم تتحرك حركة انتقالية منتظمة في خط مستقيم. هذا هو مضمون مبدأ الحركة النسبية في الميكانيك الكلاسيكي الذي اكتشفه غاليلي غاليليو.

§ إذا كان الجسيم المادي M_k ساكناً بدلالة الجملة المتحركة T ، كان:

$$\boldsymbol{V_k^r = 0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A_k^c = 0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{(F_k^{in})^c = 0} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{A_k^r = 0}$$

وتصبح العلاقة الأساسية للحركة النسبية للجسيم:

$$0 = \sum \boldsymbol{F_k} + \boldsymbol{(F_k^{in})^e} \qquad (6\text{-}3)$$

وهي علاقة التوازن النسبي، وينتج منها:

أن معادلات التوازن النسبي تطابق معادلات التوازن المطلق شرط أن نضيف للقوى المؤثرة على الجسيم المادي، والناتجة عن تأثير الأجسام المجاورة قوة العطالة المكتسبة.

مسألة-3-1

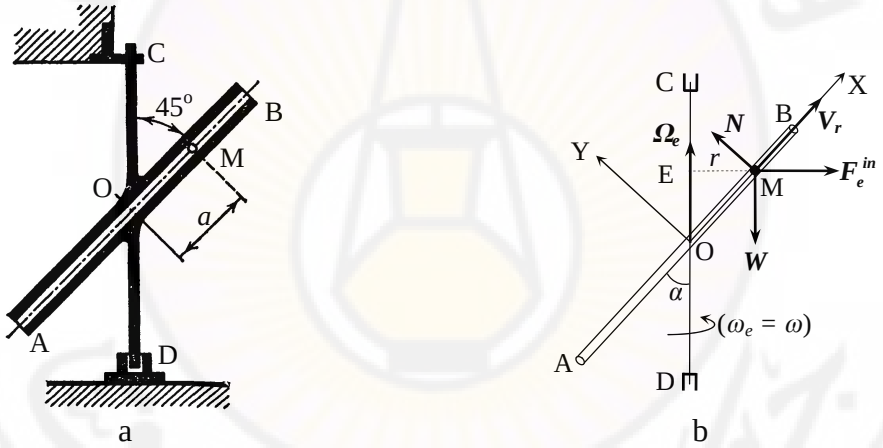
توضع كرة صغيرة M كتلتها m داخل أنبوب مجوف ورفيع AB ، يدور حول المحور الشاقولي CD بسرعة زاوية ثابتة ω ، بحيث تبقى الزاوية α بين CD و AB ثابتة، وتساوي 45^o على الدوام كما هو مبين في a من (الشكل-3-2).

المطلوب، بإهمال الاحتكاك، تعيين معادلة حركة الكرة $x_{(t)}$ ، بفرض أن سرعتها الابتدائية معدومة، وبعدها عن O منتصف AB في اللحظة الابتدائية هو a .

الحل:

نحلل الحركة المركبة للكرة M إلى حركة نسبية حركة الكرة بالنسبة للأنبوب AB ، وهي حركة مستقيمة، وحركة مكتسبة حركة الكرة وهي مقيدة بالأنبوب، وهي حركة دورانية منتظمة حول المحور الثابت CD .

نعدُّ الجملة الإحداثية OXY بحيث المحور OX ينطبق على الأنبوب المجوف AB ، حينئذ يرسم المحور OX سطح مخروط محوره المحور الثابت CD وزاويته ($2\alpha = \pi/2$)، وبحيث تتحرك الكرة على المحور OX ، والقوى المؤثرة عليها هي ثقلها الشاقولي $\boldsymbol{W}$ ، ورد الفعل العمودي على الأنبوب $\boldsymbol{N}$ ، وقوة العطالة المكتسبة $\boldsymbol{F_e^{in}}$ ، وقوة عطالة كوريوليس $\boldsymbol{F_c^{in}}$. الموضحة في b من الشكل (الشكل-3-2).



(الشكل-3-2) حركة كرة M داخل انبوب متحرك AB .

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك في الحركة النسبية على الكرة عند الوضع العام المحدد بالإحداثية x :

$$m.\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_e^{in} + \boldsymbol{F}_c^{in}$$

حيث قوة عطالة كوريوليس $\boldsymbol{F_c^{in}}$ عمودية على السرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ ، أي: عمودية على المحور OX لأن السرعة النسبية تتجه وفق المحور OX ، أي: أن القوة عمودية على مستوى الشكل، ويكون مسقطها على المحور OX معدوم.

وقوة العطالة المكتسبة تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F}_e^{in} = -m.\boldsymbol{A}_e = -m(\boldsymbol{A}_e^n + \boldsymbol{A}_e^\tau) = (\boldsymbol{F}_e^{in})^n + (\boldsymbol{F}_e^{in})^\tau$$

لأن الحركة المكتسبة للكرة M هي حركة دائرية حول المحور الثابت CD ، وترسم الكرة خلالها دائرة يقع مركزها E على محور الدوران ونصف قطرها:

$$r = \mathrm{OM}.\sin 45 = (\sqrt{2}/2)\,x$$

وبما أن الحركة المكتسبة دائرية منتظمة منه التسارع المماسي المكتسب معدوم، بالتالي مركبة قوة العطالة المماسية المكتسبة معدومة، أما مركبة التسارع الناظمي المكتسب؛ فإنها تنطبق على نصف قطر الدائرة، وتتجه نحو مركزها E ، وقيمتها العددية:

$$A_e^n = w_e^2.r = (\sqrt{2}/2)w^2.x$$

ومنه تتجه مركبة قوة العطالة الناظمية المكتسبة على نصف قطر الدائرة من المركز E نحو M ، وقيمتها العددية:

$$(F_e^{in})^n = m.A_e^n = m(\sqrt{2}/2)\,w^2.x$$

لإيجاد معادلة حركة الكرة؛ نسقط العلاقة الأساسية على المحور OX :

$$m(A_r)_{\mathrm{X}} = -W.\sin 45^{\circ} + (F_e^{in})^n \cos 45^{\circ}$$

بالتعويض:

$$m.\ddot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}m.g + \frac{1}{2}m.w^2.x$$

وتكتب المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$\ddot{x} = \frac{w^2}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

وحلها هو من الشكل:

$$x = c_1.e^{\frac{\sqrt{2}}{2}wt} + c_2.e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}wt} + \frac{\sqrt{2}.g}{w^2}$$

تعيين الثوابت c_1 و c_2 من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \text{و} \quad x_0 = a$$

من الشرط الأول؛ نحصل على:

$$x_0 = c_1 + c_2 + \frac{\sqrt{2}\,.\,g}{w^2} = a$$

من الشرط الثاني؛ نحصل على:

$$\dot{x}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} w\,(c_1 - c_2) = 0$$

ومنه؛ نحصل على:

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\,(a - \frac{\sqrt{2}\,.\,g}{w^2})$$

وتكون معادلة حركة الكرة بالشكل:

$$x_{(t)} = \frac{1}{2}\,(a - \frac{\sqrt{2}\,.\,g}{w^2})\,(e^{\frac{\sqrt{2}}{2} w t} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} w t}) + \frac{\sqrt{2}\,.\,g}{w^2}$$

مسألة-3-2

سلك أملس منحنٍ على شكل قطع مكافئ معادلته:

$$x^2 = 2\,a\,.\,W\,.\,y$$

حيث a عامل التناسب الثابت.

يدور السلك حول محوره الشاقولي OY بسرعة زاوية ثابتة ω ، خلالها تتحرك حلقة M وزنها ($W = m.g$) على السلك، كما هو مبين في (الشكل-3-3).

المطلوب تعيين:

1. علاقة سرعة الحلقة بالنسبة إلى السلك V_r ؛ إذا كانت الحلقة في لحظة البدء ساكنة في الموضع $M_o(x_o,y_o)$.
2. إلى أي ارتفاع تصله الحلقة y_{max} ؛ إذا كانت الحلقة في لحظة البدء تقع في مبدأ الإحداثيات O ، وأعطيت سرعة أفقية V_O نحو اليمين.

الحل:

1. نحلل الحركة المركبة للحلقة إلى حركة نسبية، حركة الحلقة بالنسبة للسلك المنحني، وحركة مكتسبة حركة الحلقة مقيدة بالسلك؛ الذي يتحرك حركة دورانية حول المحور الثابت OY .

نعدّ الجملة الإحداثية OXY بحيث المحور OX أفقي، والقوى المؤثرة على الحلقة هي ثقلها الشاقولي $\boldsymbol{W}$ ، ورد الفعل العمودي على السلك $\boldsymbol{N}$ ، وقوة العطالة المكتسبة $\boldsymbol{F_e^{in}}$ ، وقوة عطالة كوريوليس $\boldsymbol{F_c^{in}}$.

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك في الحركة النسبية، على الحلقة عند الوضع المحدد بالإحداثية x :

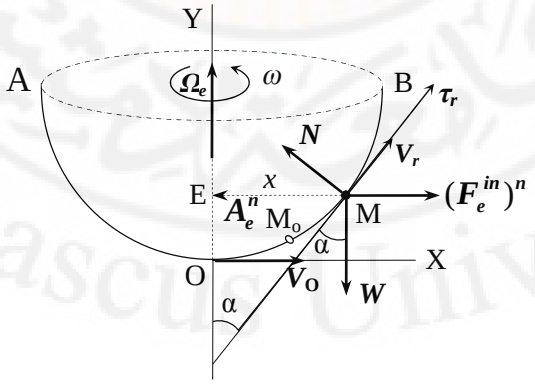
$$m.\boldsymbol{A_r} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F_e^{in}} + \boldsymbol{F_c^{in}}$$

حيث قوة عطالة كوريوليس تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F_c^{in}} = -2\,m\,(\,\boldsymbol{\Omega_e} \wedge \boldsymbol{V_r}\,)$$

وهي عمودية على السرعة النسبية $\boldsymbol{V_r}$ أي: عمودية على المماس $\boldsymbol{\tau_r}$ لأن السرعة النسبية تتجه وفق المماس $\boldsymbol{\tau_r}$ ، عندئذ تتجه القوة باتجاه عمودي على مستوى الشكل باتجاه القارئ، ويكون مسقطها على المماس $\boldsymbol{\tau_r}$ معدوم، وقيمتها العددية:

$$F_c^{in} = 2\,m.w_e.V_r.\sin a = 2\,m.w.V_r.\sin a \qquad , \qquad a = \boldsymbol{\Omega_e}\,,\boldsymbol{V_r}$$



(الشكل-3-3) حركة حلقة M على سلك متحرك AOB.

وقوة العطالة المكتسبة تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F}_e^{in} = -m.\boldsymbol{A}_e = -m(\boldsymbol{A}_e^n + \boldsymbol{A}_e^\tau) = (\boldsymbol{F}_e^{in})^n + (\boldsymbol{F}_e^{in})^\tau$$

لأن الحركة المكتسبة للحلقة M هي حركة دائرية حول المحور الثابت OY ، وترسم الحلقة خلالها دائرة مركزها E يقع على محور الدوران، ونصف قطرها x ، وبما أن الحركة المكتسبة دائرية منتظمة، منه التسارع المماسي المكتسب معدوم، وبالتالي مركبة قوة العطالة المماسية المكتسبة معدومة. أما مركبة التسارع الناظمي المكتسب؛ فإنها تنطبق على نصف قطر الدائرة، وتتجه نحو مركزها E وقيمتها العددية:

$$A_e^n = w_e^2 . x = w^2 . x$$

ومنه تتجه مركبة قوة العطالة الناظمية المكتسبة على نصف قطر الدائرة من المركز E نحو M ، وقيمتها العددية:

$$(F_e^{in})^n = m . A_e^n = m . w^2 . x$$

لإيجاد معادلة حركة الكرة نسقط العلاقة الأساسية على المماس $\boldsymbol{\tau_r}$:

$$m . A_r^t = F_e^{in} . \sin a - W . \cos a$$

بالتعويض نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة النسبية:

$$\frac{dV_r}{dt} = w^2 . \sin a . x - g . \cos a$$

بما أن:

$$\text{tn}\, a = \frac{dx}{dy} \quad \Rightarrow \quad \sin a = \frac{dx}{ds} \quad \text{و} \quad \cos a = \frac{dy}{ds}$$

كما أن:

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V_r \cdot \frac{dV_r}{ds}$$

بالتعويض:

$$V_r . dV_r = w^2 . x . dx - g . dy$$

بالتكامل:

$$\frac{1}{2}V_r^2 = \frac{1}{2}w^2.x^2 - g\,.\,y + c$$

منه بالتعويض بمعادلة x :

$$V_r^2 = 2\,(\,a\,.W.w^2 - g\,)\,y + \,c_1 \qquad (1)$$

c_1 ثابت التكامل يحدد من الشروط الابتدائية:

$$t=0 \;\Rightarrow\; y=y_o \;\text{ و }\; (V_r)_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = -2\,(\,a\,.W.w^2 - g\,)\,y_o$$

بالتعويض:

$$V_r = \sqrt{2\,(a\,.W.w^2 - g)\,(y - y_o\,)}$$

كما يمكن استنتاج علاقة السرعة النسبية من تطبيق علاقة تغيير الطاقة الحركية على الحلقة؛ خلال حركتها النسبية من الوضع الابتدائي الساكن M_o إلى الوضع العام M .

$$\frac{1}{2}\,m\,(V_r^2) - \frac{1}{2}\,m\,(V_r^2)_0 = w_{M_o\to M}(\boldsymbol{W}) + w_{M_o\to M}(\boldsymbol{F_e^{in}})^n + w_{M_o\to M}(\boldsymbol{N})$$

منه:

$$\frac{1}{2}\,m\,.V_r^2 = -\,m\,.\,g\int_{y_o}^{y} dy + m\,.w^2\int_{x_o}^{x} x\,.dx$$

$$V_r^2 = w^2\left(x^2 - x_o^2\right) - 2\,g\,(y - y_o) = 2\,a.W.w^2(y - y_o) - 2\,g\,(y - y_o)$$

منه:

$$V_r^2 = 2(a.W.w^2 - g)\,(y - y_o) \;\Rightarrow\; V_r = \sqrt{2(a.W.w^2 - g)\,(y - y_o)}$$

ويمكن تعيين اتجاه حركة الحلقة M ، وذلك إذا اعتبرنا ما تحت الجذر موجباً:

إذا كان $a\,.\,W\,.\,\omega^2 > g$ فإن $y > y_o$ الحلقة تتحرك نحو الأعلى.

إذا كان $a\,.\,W\,.\,\omega^2 < g$ فإن $y < y_o$ الحلقة تتحرك نحو الأسفل.

إذا كان $a\,.\,W\,.\,\omega^2 = g$ فإن $V_r = 0$ الحلقة في حالة اتزان نسبي.

2. يتحدد الارتفاع الذي تصله الحلقة؛ بتغيير الشروط الابتدائية:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad y_{\mathrm{o}}=0 \quad \text{و} \quad , \quad (V_r)_0=V_{\mathrm{O}} \quad \Rightarrow \quad c_1=V_{\mathrm{O}}^2$$

بالتعويض في (1):

$$V_r=\sqrt{V_{\mathrm{O}}^2+2(a.W.w^2-g)\,y}$$

منه عند أعلى ارتفاع للحلقة، أي: عندما تترك الحلقة مسارها المقيد يكون $(V_r=0)$. منه:

$$y_{\max}=\frac{V_{\mathrm{O}}^2}{2(g-W.a.w^2)}$$

ومن معادلة المنحني يكون:

$$x_{\max}=\sqrt{2a.W.y_{\max}}=\sqrt{\frac{a.W.V_{\mathrm{O}}^2}{g-W.a.w^2}}$$

لأجل : $y_{max}>0$ ، يكون: $(g-a\,.\,W\,.\,\omega^2)>0$ ، أي: $w^2<\frac{g}{a.W}$.

فعندما : $w^2>\frac{g}{a.W}$ ؛ فإن: $V_r\neq 0$ ، وترتفع الحلقة نحو الأعلى دون حدود.

وعندما: $w^2=\frac{g}{a.W}$ ؛ فإن: $V_r=V_{\mathrm{O}}$ ، وتتحرك الحلقة بسرعة ثابتة.

مسألة-3-3

تنزلق حلقة M كتلتها m على قضيب أملس AB طوله $(l = 1\ \mathrm{m})$ ، يدور بانتظام بمقدار دورة واحدة في الثانية؛ باتجاه عكس حركة عقارب الساعة، في مستوى أفقي حول محور شاقولي يعامد المستوى؛ ويمر من الطرف A ، كما هو مبين في (الشكل-3-4).

فإذا كانت الحلقة ساكنة في اللحظة $(t = 0)$، وعلى بعد $(r = 60\ \mathrm{cm})$ من الطرف A . المطلوب تعيين معادلة حركة الحلقة $x_{(t)}$ ، واللحظة t التي تترك فيها الحلقة القضيب.

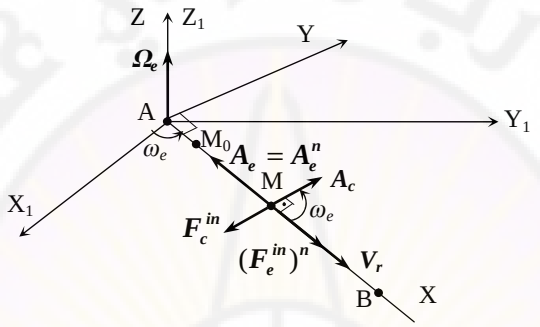
الحل:

لتعيين معادلة حركة الحلقة، نعدّ جملة محاور إحداثية AXYZ ينطبق محورها AX على القضيب، ويمثل AZ محور دوران، تدور هذه الجملة بدلالة جملة محاور إحداثية ثابتة $AX_1Y_1Z_1$.

تخضع الحلقة M لوزنها الشاقولي $\boldsymbol{W}$ ، ورد فعل القضيب العمودي N ، العموديين على مستوى الحركة الأفقي AXY ، ولقوة العطالة المكتسبة، ولقوة عطالة كوريوليس.

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك في الحركة النسبية:

$$m\,.\,\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_e^{in} + \boldsymbol{F}_c^{in}$$



(الشكل-3-4) حركة حلقة M على قضيب متحرك AB .

تحسب قوة عطالة كوريوليس من العلاقة:

$$\boldsymbol{F}_c^{in} = -\,2\,m\,(\,\boldsymbol{\Omega}_e\,\Lambda\,\boldsymbol{V}_r\,)$$

وتعامد السرعة النسبية $\boldsymbol{V}_r$ فهي تعامد القضيب، وتتجه عمودياً عليه في مستوى الشكل الأفقي.

أما مركبة قوة العطالة المكتسبة الناظمية؛ فإنها تتجه باتجاه المحور AX ، وقيمتها العددية:

$$(F_e^{in})^n = m\,.\,A_e^n = m\,.\,w_e^2\,.\,\mathrm{AM} = m.w^2.\,x$$

بإسقاط العلاقة الأساسية على القضيب، أي: على AX:

$$m\,.\,\ddot{x} = m\,.\,w^2\,.\,x$$

بالتالي:

$$\ddot{x} - w^2\,.\,x = 0$$

وبالمكاملة:

$$x = c_1.\,e^{w\,t} + c_2\,.\,e^{-w\,t}$$

وتعين c_1 و c_2 من الشروط الابتدائية:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=0 \quad , \quad x_0=0.6$$

من الشرط الأول:

$$0.6=c_1+c_2$$

من الشرط الثاني:

$$0=c_1+c_2$$

وبالتالي:

$$c_1=c_2=0.3$$

ولدينا:

$$w=2p\,n=2p \text{ rad/sec}$$

فتكون معادلة حركة الحلقة من الشكل:

$$x_{(t)}=0.3\,(e^{wt}+e^{-wt})$$

وحتى تترك الحلقة القضيب ينبغي أن يصبح:

$$x=l=1$$

وبالتالي:

$$e^{wt}+e^{-wt}=10/3$$

نضرب طرفي العلاقة بـــ e^{wt} نحصل على:

$$e^{2wt}-(10/3)\,e^{wt}+1=0$$

ومنه نحسب مميز هذه المعادلة:

$$e^{wt}=\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}-1}=\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}$$

بالتالي جذرا المعادلة هما:

$$e^{wt}=3 \qquad \text{أو} \qquad e^{wt}=1/3$$

فمن أجل الجذر الأول:

$$w.t=\log(1/3)=-\log 3 \quad \Rightarrow \quad t=-(1/2p)\log 3$$

وهي نتيجة سالبة ينبغي طرحها جانباً.

أما الحل الثاني فهو:

$$w.t=\log 3 \quad \Rightarrow \quad t=(1/2p)\log 3=0.175 \text{ sec}$$

وهذا الحل مقبول.

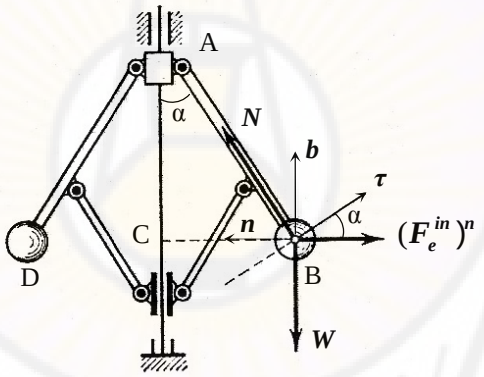
مسألة-3-4

يدور منظم حول محوره الثابت بسرعة زاوية ثابتة ω ، كما هو مبين في (الشكل-3-5).

بإهمال أوزان الوصلات إذا ما قورنت بوزن الكرتين B و D . المطلوب إيجاد الزاوية α المحددة للتوازن النسبي للوصلة AB طولها l .

الحل:

نعدُّ ثلاثية فرينيه المتحركة B$\boldsymbol{\tau nb}$ مقيدة بالكرة B مبدؤها في B ، ومحورها B$\boldsymbol{\tau}$ ينطبق على المماس لمسار B الذي هو دائرة أفقية مركزها C بدلالة الجملة الثابتة، حيث محور المنظم الثابت هو أحد محاورها، ومحورها B$\boldsymbol{n}$ ينطبق على نصف القطر BC ، أما المحور B$\boldsymbol{b}$ فهو شاقولي إلى الأعلى.



(الشكل-3-5) منظم يدور حول محوره الثابت.

الكرة B ثابتة بدلالة ثلاثية فرينيه، والقوى المؤثرة عليها في حالة التوازن النسبي هي ثقلها الشاقولي إلى الأسفل $\boldsymbol{W}$ ، وقوة القيد $\boldsymbol{N}$ بالوصلة AB ، وقوة العطالة المكتسبة $\boldsymbol{F_e^{in}}$ ، وبتطبيق علاقة التوازن في الحركة النسبية:

$$0 = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F_e^{in}}$$

حيث قوة العطالة المكتسبة تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F}_e^{in} = -m.\boldsymbol{A}_e = -m(\boldsymbol{A}_e^n + \boldsymbol{A}_e^\tau) = (\boldsymbol{F}_e^{in})^n + (\boldsymbol{F}_e^{in})^\tau$$

لأن الحركة المكتسبة للكرة B هي حركة دائرية حول محور المنظم الثابت AC ، وترسم الكرة خلالها دائرة يقع مركزها C على محور الدوران، ونصف قطرها BC ، وبما أن الحركة المكتسبة دائرية منتظمة، فالتسارع المماسي المكتسب معدوم، بالتالي مركبة قوة العطالة المماسية المكتسبة معدومة.

أما مركبة التسارع الناظمي المكتسب؛ فإنها تنطبق على نصف قطر الدائرة، وتتجه نحو مركزها C ، وقيمتها العددية:

$$A_e^n = w_e^2 . \mathrm{BC} = w^2 . l . \sin a$$

ومنه تتجه مركبة قوة العطالة الناظمية المكتسبة على نصف قطر الدائرة من المركز C نحو B ، وقيمتها العددية:

$$(F_e^{in})^n = m . A_e^n = m . w^2 . l . \sin a$$

باسقاط علاقة التوازن على محاور الجملة المتحركة، حيث نلاحظ أن القوى عمودية على المماس $\mathrm{B}\boldsymbol{\tau}$.

وبالإسقاط على الناظم $\mathrm{B}\boldsymbol{n}$:

$$N . \sin a - (F_e^{in})^n = 0 \quad \Rightarrow \quad N . \sin a - m . w^2 . l . \sin a = 0$$

منه:

$$N = m . l . w^2$$

بالإسقاط على الناظم الثانوي $\mathrm{B}\boldsymbol{b}$:

$$N . \cos a - W = 0 \quad \Rightarrow \quad m . l . w^2 . \cos a - m . g = 0$$

منه:

$$\cos a = \frac{g}{l . w^2} \quad \Rightarrow \quad a = \arccos \frac{g}{l . w^2}$$

3- تأثير دوران الأرض على اتزان الأجسام وحركتها

Effect of the Earth Rotation on the Equilibrium and the Motion of Bodies

عند حل معظم المسائل الهندسية، يُعَدُّ عادة أن جملة محاور القياس المتعلقة بالأرض هي ثابتة، ونتيجة لذلك نهمل دوران الأرض اليومي حول نفسها وحركتها في المدار حول الشمس، وبما أن الفترات الزمنية في مسائل التحريك تكون عادةً أقل كثيراً من السنة، فيمكن اعتبار أن حركة الأرض هي عملياً حركة منتظمة في خط مستقيم خلال هذه الفترات، وباعتبار أن جملة محاور القياس المثبتة بالأرض عطالية، فيمكن إهمال حركتها الدورانية اليومية مع الأرض بالنسبة إلى النجوم الذي يحدث بسرعة دورة واحدة في كل 23 ساعة و 56 دقيقة و 4 ثوان أي بسرعة زاوية:

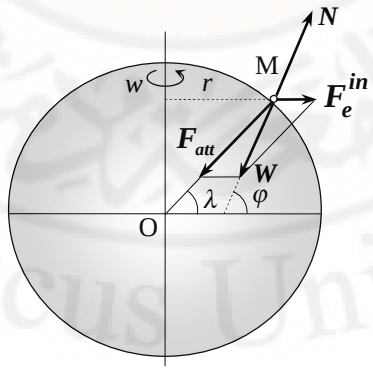
$$w = \frac{2p}{86164} \approx 0.0000729\,\sec^{-1}$$

سنبحث كيف يؤثر الدوران البطيء لجملة محاور القياس على توازن الأجسام وحركتها.

3-1- التوازن النسبي على سطح الأرض

Relative Equilibrium on the Surface of the Earth

ليكن الجسيم المادي M الواقع على سطح أفقي أملس وثابت بالنسبة للأرض، ويبعد بمقدار r عن محور الأرض، كما هو مبين في (الشكل-3-6).



(الشكل-3-6) التوازن النسبي على سطح الأرض.

إن شرط توازن الجسيم M بالنسبة للأرض يتم وفق علاقة التوازن النسبي (3-6):

$$\boldsymbol{F}_{att} + N + \boldsymbol{F}_e^{in} = 0$$

حيث $\boldsymbol{F}_{att}$ قوة جذب الأرض و $\boldsymbol{N}$ رد فعل السطح و $\boldsymbol{F}_e^{in}$ قوة العطالة المكتسبة الموافقة لدوران الأرض.

بما أن الحركة المكتسبة دورانية منتظمة:

$$w_e = w = \text{Const.}$$

فإن القوة $\boldsymbol{F}_e^{in}$ لها مركبة عمودية فقط متجهة عمودياً على محور دوران الأرض.

نرمز لمجموع القوتين $\boldsymbol{F}_{att}$ و $\boldsymbol{F}_e^{in}$ بـــ $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{F}_e^{in} + \boldsymbol{F}_{att} = \boldsymbol{W}$$

وعندها يكون الجسيم M خاضعاً للقوتين N و W التي توازن كل منهما الأخرى.

القوة $\boldsymbol{W}$ هي التي تسمى عادة بـــ قوة الثقالة، واتجاهها هو اتجاه الشاقول في المكان المفروض على سطح الأرض، والمستوى العمودي على $\boldsymbol{W}$ هو ما يسمى بـــ المستوى الأفقي.

كما أن القيمة العددية للقوة الناظمية المكتسبة $(F_e^{in} = m.r.w^2)$ ، تُعَدُّ صغيرة بالنسبة للقيمة العددية لقوة الجذب F_{at} لأن المقدار w^2 يكون صغيراً للغاية، بالتالي فإن اتجاه القوة $\boldsymbol{W}$ يختلف قليلاً عن اتجاه القوة $\boldsymbol{F}_{att}$.

عملياً عند وزن الأجسام نحدد القوة $\boldsymbol{W}$ لأن الجسم يضغط على كفة الميزان بهذه القوة، وبالتالي عندما نعدّ قوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ في معادلات التوازن؛ فإننا نكون قد أدخلنا قوة العطالة أيضاً، أي: أننا أخذنا بعين الاعتبار تأثير دوران الأرض، ولذلك لا يلزم إجراء أي تعديل على دوران الأرض عند كتابة معادلات توازن الأجسام بالنسبة للأرض مطلقاً.

2-3- الحركة النسبية قرب سطح الأرض

Relative Motion near the Surface of the Earth

حتى نأخذ بعين الاعتبار دوران جملة المحاور المتعلقة بالأرض لا بد من إضافة قوة عطالة كوريوليس $\boldsymbol{F_c^{in}}$ ، وقوة العطالة المكتسبة $\boldsymbol{F_e^{in}}$ إلى القوى المؤثرة على الجسيم المادي. لكن القوة $\boldsymbol{F_e^{in}}$ كما رأينا تدخل ضمن قوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ ، وتؤخذ بعين الاعتبار إذا تضمنت معادلات الحركة لهذه القوة، وبالتالي عندما نعتبر جملة المحاور المثبتة بالأرض ثابتة؛ فإننا نهمل قوة العطالة الموافقة لتسارع كوريوليس:

$$F_c^{in} = 2\,m\,.w_e\,.V_r\,.\sin a = 2\,m\,.w\,.V.\sin a \qquad , \qquad a = \boldsymbol{\Omega_e}\,,\boldsymbol{V_r}$$

حيث w تمثل السرعة الزاوية للأرض و α تمثل الزاوية بين السرعة النسبية للجسيم ومحور الأرض؛ الذي ينطبق عليه متجه السرعة الزاوية $\boldsymbol{\Omega_e}$.

وبما أن السرعة الزاوية صغيرة للغاية، وعندما لا تكون السرعة النسبية ذات قيمة كبيرة؛ فإنه يمكن إهمال قوة عطالة كوريوليس بالمقارنة بقوة الثقالة.

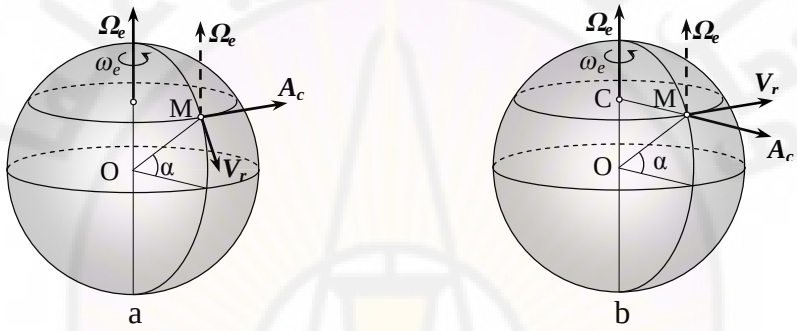
مثلاً من أجل سرعة قذيفة مدفعية عادية يكون (V = 700 m/sec و $\alpha = \pi/2$) ، بالتالي فإن مقدار قوة عطالة كوريوليس الموافقة تشكل تقريباً 1% من مقدار قوة الثقالة، ولذلك فعند حل أغلب المسائل الهندسية؛ نعدّ فعلاً عند دراسة حركة الأجسام أن مجموعة المحاور المرتبطة بالأرض ثابتة.

إن لدوران الأرض تأثير ملحوظ من أجل السرعات الكبيرة جداً كحركة الصواريخ بعيدة المدى، وعند دراسة الحركة التي تستغرق زمناً طويلاً جداً؛ كحركة تيارات المياه في الأنهار وحركة التيارات الهوائية والبحرية.

3-3- الحركة النسبية على سطح الأرض

Relative Motion on the Surface of the Earth

عندما يتحرك جسيم في دائرة خط الزوال (*Meridian*) من الشمال إلى الجنوب في النصف الشمالي من الكرة الأرضية، كما هو مبين في a من (الشكل-3-7)، فإن متجه تسارع كوريوليس يتجه نحو الشرق، وتتجه قوة عطالة كوريوليس عندئذ نحو الغرب، وعند الحركة من الجنوب إلى الشمال تكون القوة كما هو واضح متجه نحو الشرق، وفي كلتا الحالتين كما نلاحظ فإن هذه القوة تعمل على انحراف الجسيم إلى يمين اتجاه حركته.



(الشكل-3-7) الحركة النسبية على سطح الأرض.

وعندما يتحرك الجسيم على امتداد خط العرض، ونحو الشرق؛ فإن متجه تسارع كوريوليس يتجه نحو محور الدوران على نصف قطر خط العرض، أي: على امتداد MC ، كما هو مبين في b من (الشكل-3-7)، وتتجه قوة عطالة كوريوليس بالاتجاه المعاكس، والمركبة الشاقولية لهذه القوة التي هي على امتداد OM ستغير من وزن الجسيم قليلاً، والمركبة الأفقية تتجه نحو الجنوب، وتعمل على انحراف الجسيم إلى يمين اتجاهها أيضاً. نصل للنتيجة نفسها عندما يتحرك الجسيم على خط العرض نحو الغرب.

من هنا نستنتج أنه عندما يتحرك جسم على سطح الأرض في نصف الكرة الشمالي؛ فإنه ينحرف إلى يمين اتجاه حركته، وذلك بسبب دوران الأرض، وفي نصف الكرة الجنوبي يحصل انحراف نحو اليسار.

بهذه النتائج تفسر ظواهر تآكل الشواطئ اليمنى للأنهار الجارية في النصف الشمالي للكرة الأرضية وفق قانون بير (*Baer Law*)، وانحراف الرياح ذات الاتجاه الثابت، وانحراف التيارات البحرية.

3-4- الحركة الشاقولية *Vertical Motion*

لتعيين اتجاه قوة عطالة كوريوليس المؤثرة على جسيم مادي يسقط سقوطاً حراً؛ يلزم معرفة اتجاه السرعة النسبية له، وبما أن هذه القوة صغيرة للغاية بالمقارنة مع قوة الثقالة؛ فيمكن اعتبار متجه السرعة النسبية شاقولياً، أي: متجهاً على امتداد المستقيم OM ، كما هو مبين في b من (الشكل-3-7)، وعندها يتجه تسارع كوريوليس نحو الغرب، وتتجه قوة عطالة كوريوليس نحو الشرق، أي: كما تتجه السرعة النسبية.

إذاً يمكن القول بالتقريب أن الجسم الذي يسقط بشكل حر ينحرف بسبب دوران الأرض نحو الشرق، والجسم المقذوف نحو الأعلى سينحرف نحو الغرب، وتكون مقادير هذه الانحرافات صغيرة جداً، ولا تلاحظ إلا عندما يكون الارتفاع كبيراً بصورة كافية.

* * *

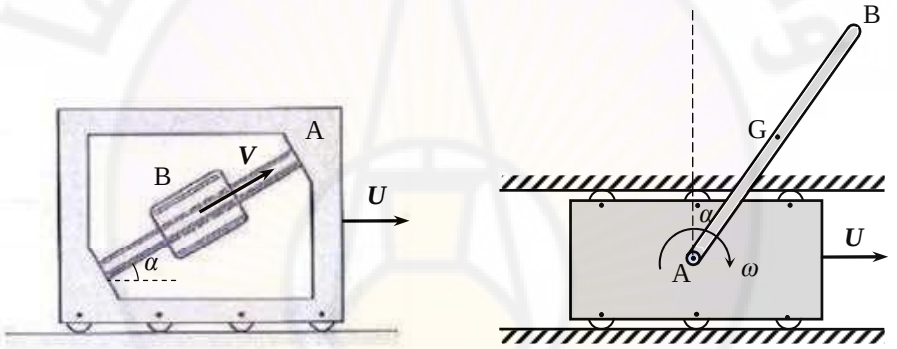
مسائل غير محلولة ***PROBLEMS***

م-3-1

تسحب العربة A بسرعة $\boldsymbol{U}$ ، وأثناء انسحابها يتحرك الجسيم B بسرعة $\boldsymbol{V}$ ، كما هو مبين في a من (الشكل م-3-1).

المطلوب إيجاد الطاقة الحركية E_c للجسيم B بدلالة الزاوية α .

الجواب: $E_c = M(V^2 + U^2 + 2V.U.\cos a)$



a b

(الشكل م-3-1)

م-3-2

تنسحب وصلة من تركيبة آلية بسرعة $\boldsymbol{U}$ ، وتتصل بقضيب AB طوله l ، وكتلته M يتمفصل معها في A ، كما هو مبين في b من (الشكل م-3-1).

إذا دار القضيب حول المحور المار من A بسرعة زاوية ω ، المطلوب إيجاد الطاقة الحركية للقضيب E_c .

الجواب: $E_c = M(U^2 + \frac{w^2.l^2}{4} + w.U.l.\cos a) + \frac{M}{24} l^2.w^2$

م-3-3

تتحرك العربة المبينة في a من (الشكل م-3-2)، والمرتبطة بالإحداثيات X-Y بسرعة مطلقة (V=2 m/sec) لجهة اليمين، وفي الوقت نفسه يدور ذراع خفيف طوله (l = 0.5 m) حول النقطة B من العربة بسرعة زاوية ($\dot{\theta}$ = 2 rad/sec) بجهة حركة عقارب الساعة.

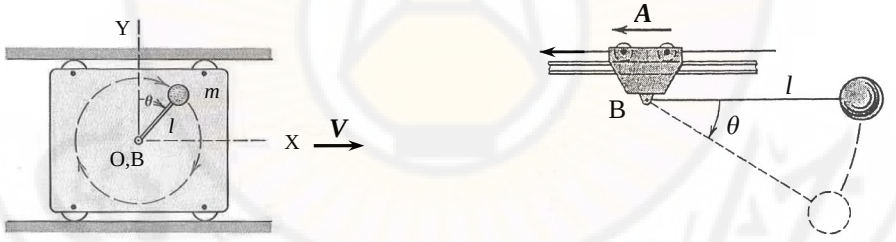
إذا كانت كتلة الكرة المتصله بنهاية الذراع (m = 3 kg). المطلوب إيجاد المقادير التالية للكرة في اللحظة عندما تكون الزاوية ($\theta = 0$):

- كمية الحركة المطلقة $\boldsymbol{q}$ ، وكمية الحركة النسبية $\boldsymbol{q}_{rel}$.
- الطاقة الحركية المطلقة E_c ، والطاقة الحركية النسبية E_{rel} .
- العزم الحركي المطلق $\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}$ ، والعزم الحركي النسبي $\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}\,rel}$.

حيث الرمز rel يشير إلى الحركة بالنسبة للجملة المقيدة بالعربة OXY ، والنقطة B منطبقة على O لحظة الدراسة.

الجواب: $\boldsymbol{q} = 9\,\boldsymbol{i}$ [kg.m/sec] , $\boldsymbol{q}_{rel} = 3\,\boldsymbol{i}$ kg.m/sec , $E_c = 13.5$ J , $E_{rel} = 1.5$ J

$\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}} = -4.5\,\boldsymbol{k}$ [kg.m^2/sec] , $\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}rel} = -1.5\,\boldsymbol{k}$ [kg.m^2/sec]



a b

(الشكل م-3-2)

م-4-3

نواس بسيط كتلة كرته m ، وطول حبله l ، ونقطة تعليقه B ، له تسارع أفقي ثابت A ، كما هو مبين في b من (الشكل م-3-2)

إذا تركت كرة النواس من وضع السكون بالنسبة للجملة المتحركة، وكانت ($\theta = 0$). المطلوب إيجاد علاقة قوة الشد T_θ في حبل النواس بدلالة θ .

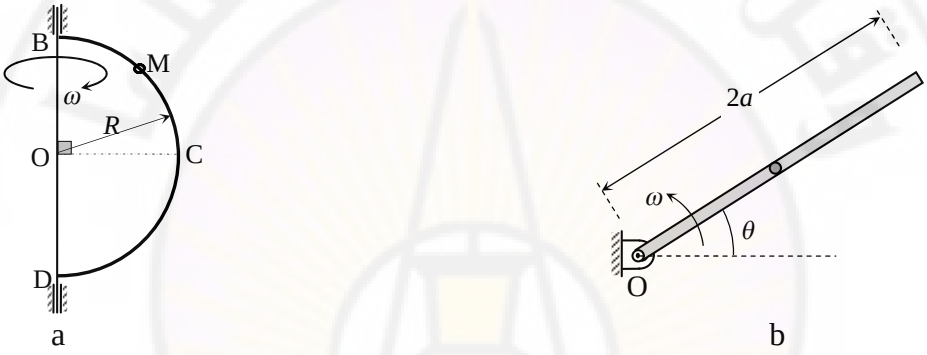
الجواب: $T_q = m[3g\sin q + A(3\cos q - 2)$

م-3-5

يدور سلك نصف دائري BCD نصف قطره R حول محور شاقولي بسرعة زاوية ثابتة، وأثناء الدوران تنزلق حلقة M على السلك دون احتكاك بدءاً من الموضع B في أعلى السلك وقريبة جداً من محور الدوران. كما هو مبين في a من (الشكل م-3-3).

إذا بدأت الحلقة حركتها من السكون، المطلوب إيجاد السرعة النسبية V_r للحلقة في الموضع C .

الجواب: $V_r = [2g.R(1+R.w^2/2g)]^{1/2}$



(الشكل م-3-3)

م-3-6

وضع جسيم كتلته m داخل أنبوب مستقيم دقيق أملس طوله $2a$ ، يدور في مستوى أفقي حول محور رأسي مار بإحدى نهايتيه بسرعة زاوية منتظمة ω ، كما هو مبين في b من (الشكل م-3-3).

إذا بدأ الجسيم الحركة من سكون نسبي من منتصف الأنبوب. المطلوب إيجاد:

1. سرعة الجسيم المطلقة V^a عند خروجه من الأنبوب.
2. الزمن اللازم t لخروج الجسيم من الأنبوب.
3. علاقة ضغط الجسيم على الأنبوب N .
4. علاقة مسار الجسيم المطلق.

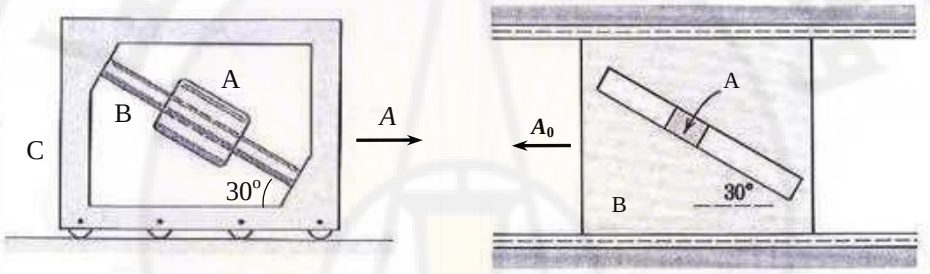
الجواب: $V^a = \sqrt{7}\, w.a$, $t \cong \frac{1}{w}\cosh^{-1}(2)$, $N_q = 2m.w^2.a.\sinh wt$, $r = a.\cosh q$

م-3-7

جلبة A قادرة على الحركة بحرية على طول محور أملس B مثبت على إطار C متوضع في مستوي شاقولي، كما هو موضح في a من (الشكل م-3-4).

المطلوب إيجاد التسارع الأفقي A اللازم للإطار C للحفاظ على الجلبة ثابتة في مكانها على المحور B .

الجواب: $A = 5.66 \text{ m/ sec}^2$



a b

(الشكل م-3-4)

م-3-8

تتحرك منزلقة A كتلتها 2 kg بدون احتكاك على المجرى الأملس لصفيحة شاقولية B قابلة للحركة في المستوى الأفقي. كما هو مبين في b من (الشكل م-3-4).

المطلوب إيجاد قيمة التسارع الأفقي A_0 الذي يجب أن تتحرك به الصفيحة، بحيث يكون التسارع المطلق للمنزلقة شاقولياً متجه نحو الأسفل، وإيجاد قيمة القوة المطبقة R من المجرى على المنزلقة في هذه الحالة.

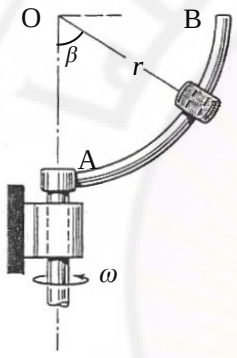
الجواب: $A_0 = 16.99 \text{ m/sec}^2 \quad , \quad R = 0$

م-3-9

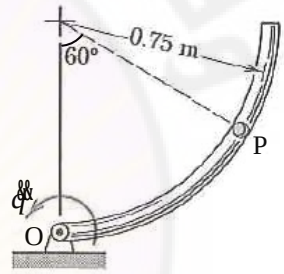
تتحرك منزلقة صغيرة على قضيب دائري AB نصف قطره r ، بطلاقة ودون احتكاك، كما هو موضح في a من (الشكل م-3-5).

إذا دار القضيب حول المحور الرأسي OA بسرعة زاوية ثابتة ω . المطلوب إيجاد الزاوية β المحددة للتوازن النسبي للمنزلقة.

الجواب: $b = \cos^{-1}\dfrac{g}{r.w^2}$, $\dot{q} = w \geq \sqrt{g/r}$ rad/sec



a



b

(الشكل م-3-5)

م-3-10

يبدأ أنبوب مجوف على شكل ربع دائرة حركته من السكون عندما (t = 0)، بالدوران في المستوى الأفقي حول المسند الثابت O بتسارع زاوي ثابت بعكس جهة عقارب الساعة ($\ddot{q} = 2$ rad/sec^2) . كما هو موضح في b من (الشكل م-3-5).

إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسيم والأنبوب (f_s = 0.8)، المطلوب إيجاد:

1- الزمن t اللازم لكي يبدأ جسيم صغير P كتلته 0.5 kg بالانزلاق بالنسبة للأنبوب.

2- قوة رد فعل الأنبوب على الجسيم N في هذه اللحظة.

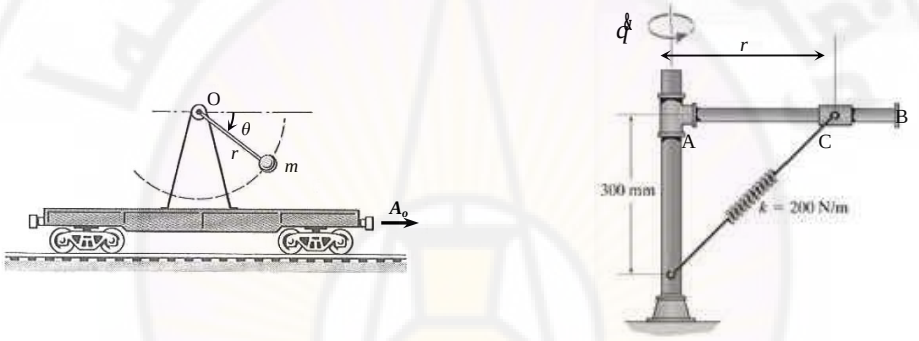
الجواب: $t = 2.02$ sec , $N = 3.71$ N

م-3-11

يثبت نواس بسيط ذو كتلة m ونصف قطر r على عربة مسطحة تتحرك بتسارع ثابت A_o ، كما هو مبين في a من (الشكل م-3-6).

إذا أطلق النواس من السكون بالنسبة للعربة من الوضع الزاوي $(\theta = 0)$. المطلوب إيجاد علاقة قوة الشد T_θ في قضيب النواس الخفيف الحامل للكرة بدلالة زاوية الوضع θ ، وإيجاد قيمته عندما $(\theta = \pi/2)$ و $(\theta = \pi)$.

الجواب: $T = m[3g.\sin q + A_0(2-3\cos q)]$, $T_{(q=p/2)} = m(3g+2A_0)$, $T_{(q=p)} = 5m.A_0$



a b

(الشكل م-3-6)

م-3-12

تدور الآلية المبينة في b من (الشكل م-3-6) حول المحور الشاقولي بسرعة زاوية ثابتة $(\dot{q} = 6\ \text{rad/sec})$.

فإذا كان العمود AB أملس، وتنزلق عليه جلبة كتلتها 3 kg مرتبطة بنابض طوله الحر 400 mm . المطلوب، بإهمال كتلة العمود، واعتبار الجلبة جسيماً مادياً، إيجاد نصف القطر r الذي تصبح عنده المنزلقة ثابتة بالنسبة للعمود AB .

وإذا كان $(r = 720\ \text{mm})$. المطلوب إيجاد قيمة السرعة الزاوية الثابتة $\dot{q}$ لدوران العمود AB حول المحور الشاقولي.

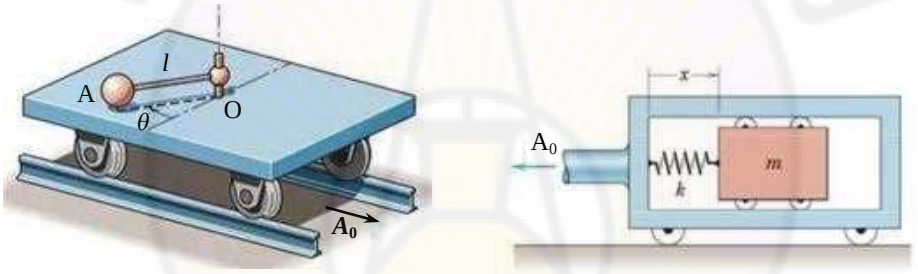
الجواب: $r = 816\ \text{mm}$, $\dot{q} = 5.7\ \text{rad/sec}$

م-3-13

تتألف جملة ميكانيكية من عربة وكرة ذات الكتلة ($m = 2$ kg)، والقضيب المتصل بها ذي الطول ($l = 0.6$ m)، بحيث يكونا قابلين للدوران في مستوى أفقي حول محور عمودي متصل بالعربة، كما هو مبين في a من (الشكل م-3-7).

إذا كانت الجملة ساكنة في البدء، وكانت ($\theta = 0$) عندما أعطيت العربة تسارعاً ثابتاً قدره ($A_0 = 1.2$ m/sec^2). المطلوب إيجاد علاقة قوة الشد T_θ في القضيب بدلالة الزاوية θ ، ومن ثم احسب قيمتها من أجل الوضع ($\theta = \pi/2$).

الجواب: $T_q = 3\,m.A_0.\sin q \quad , \quad T_{(q=p/2)} = 7.2$ N



a b

(الشكل م-3-7)

م-3-14

يربط جسم كتلته m بنابض ثابت صلابته k مثبت بالإطار، بحيث يكون الجسم قابل للحركة دون احتكاك ضمن الإطار. كما هو مبين في b من (الشكل م-3-7).

إذا كان الجسم والإطار في البداية بحالة سكون بحيث كانت ($x = x_0$) تمثل الطول الحر للنابض، وتحرك الإطار بعدها بتسارع A_0 بالاتجاه المبين. المطلوب إيجاد السرعة النسبية العظمى $[(V_{rel})_{\max} = \dot{x}_{\max}]$ للجسم بالنسبة للعربة.

الجواب: $(V_{rel})_{\max} = A_0\sqrt{m/K}$

م-3-15

بفرض أن الكرة الأرضية تدور حول محورها، ونصف قطرها (R = 6370 km)، وأن g تسارع الثقالة في القطب.

المطلوب إيجاد كيفية تحول تسارع الثقالة الأرضية g_1 مع زاوية العرض λ .

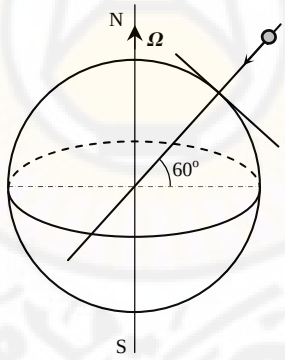
الجواب: $g_1 = g(1-\cos^2 l/289)$

م-3-16

يسقط جسم صغير من ارتفاع (h =500 m) عن سطح الأرض في النصف الشمالي من الكرة الأرضية، كما هو مبين في (الشكل م-3-8).

إذا أخذ دوران الأرض في النصف الشمالي من الكرة الأرضية بعين الاعتبار، وبإهمال مقاومة الهواء، المطلوب إيجاد قيمة انحراف الجسم الساقط x في اتجاه الشرق قبل اصطدامه بالأرض عند زاوية عرض المكان ($\lambda = 60^o$) .

الجواب: $x = 0.1\,\text{m}$



(الشكل م-3-8)

م-3-17

كم ينبغي زيادة السرعة الزاوية لدوران الكرة الأرضية حول محورها ، حيث نصف قطرها (R = 6370 km)، حتى ينعدم وزن جسم في خط الاستواء.

الجواب: ينبغي زيادة دوران الكرة الأرضية، بحيث تصبح 17 دورة في اليوم الواحد.

الفصل الرابع

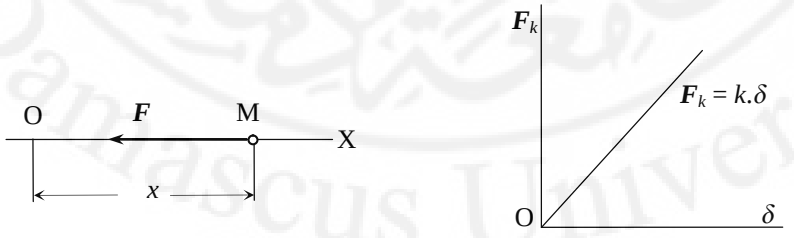
الحركة الاهتزازية *Vibration Motion*

1- مقدمة *Introduction*

تُعَدُّ دراسة الحركة الاهتزازية الأساس لعديد من علوم الفيزياء والهندسة، فعلى الرغم من اختلاف الطبيعة الفيزيائية للاهتزازات؛ التي تدرّس في العلوم المختلفة كعلم الميكانيك والكهرباء واللاسلكي والصوت وغيرها، إلا أن القوانين الأساسية لهذه الحركة تظل في جميع الحالات واحدة، ولذا فإن دراسة الاهتزازات الميكانيكية تعدّ مهمة؛ لا لأن هذه الاهتزازات تحدث غالباً في الأجزاء الميكانيكية المتحركة فحسب، ولكن أيضاً لأن النتائج التي يتم الحصول عليها يمكن أن تستخدم لدراسة ظواهر الاهتزاز في المجالات الأخرى وتوضيحها.

2- أنواع الحركة الاهتزازية *Types of Vibration Motion*

تحصل الحركة الاهتزازية للجسيم المادي M عندما يكون هذا الجسيم مزاحاً عن وضعية توازنه O ، ويتحرك على خط مستقيم تحت تأثير قوة فاعلة $\boldsymbol{F}$ تتجه دوماً نحو المركز O تسعى لإرجاعه إلى الوضعية ($\boldsymbol{F} = 0$)، كما هو مبين في a من (الشكل-4-1)، هذه القوة تكون متغيرة وفق علاقة خطية، وقيمتها تابعة لبعد النقطة عن المركز، في هذه الحالة تكون القوة الفاعلة متناسبة مع الانتقال، فإذا كان الانتقال x موجباً كانت القوة سالبة، والعكس صحيح. يدعى المركز O بـ مركز الحركة الاهتزازية، والقوة $\boldsymbol{F}$ بـ القوة المرجعة (*Restoring Force*).



a- جسيم يتحرك على مستقيم تحت تأثير قوة $\boldsymbol{F}$ تتجه نحو O . b- تناسب القوة F_k مع الاستطالة δ .

(الشكل-4-1)

إن أبسط الأمثلة، وأجدرها بالاهتمام على القوة المرجعة الخطية؛ هي قوة مرونة النابض (*Elastic Spring Force*) ويرمز لها بـــ $\boldsymbol{F_k}$ ، وبما أن النابض يكون قابلاً للشد أو للانضغاط عكس الخيط المرن الذي يكون قابلاً للشد فقط دون أن يكون قابلاً للانضغاط، فإن هذه القوة تكون متناسبة مع الاستطالة، كما هو مبين في b من (الشكل-4-1)، ومع الانضغاط وفق العلاقة:

$$F_k = k \,.\, d$$

حيث δ يمثل انتقال نهاية النابض، و k يمثل - كما ذكرنا سابقاً - عامل التناسب الثابت بين الاستطالة، وقوة الشد الموافق لها، ويدعى بـــ ثابت مرونة النابض، أو عامل صلابة النابض، وهي تابعة لأبعاد النابض، ويعرف بأنه القوة اللازمة لإخضاع النابض؛ حتى يستطيل مقدار واحدة الطول، ويقاس بـــ N/cm .

وتقسم الحركات الاهتزازية إلى ثلاثة أقسام رئيسية:

- الحركة الاهتزازية الحرّة (*Free Vibration Motion*)

وهي التي تحدث تحت تأثير القوة المرجعة فقط، أو مع قوى أخرى أيضاً؛ شريطة أن تكون هذه القوى ثابتة بالشدة والاتجاه، وبدون قوة مقاومة الحركة (*Undamped*).

- الحركة الاهتزازية المتخامدة (*Damped Vibration Motion*)

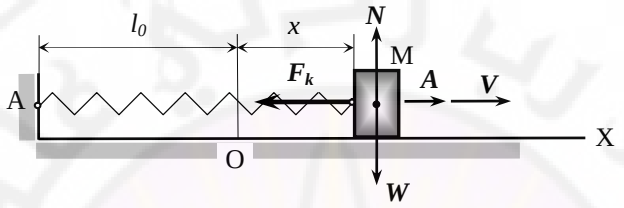
وهي الحركة الاهتزازية الحرّة؛ التي تحدث تحت تأثير القوة المرجعة بالإضافة لقـــوة مقاومة الحركة (*Damped*) التي تتجه عكس الحركة.

- الحركة الاهتزازية القسرية (*Forced Vibration Motion*)

وهي التي تحدث تحت تأثير القوة المرجعة، بالإضافة لقوة أخرى متغيرة تابعة للزمن، والتي في الغالب تكون ذات طبيعة دورية، ويمكن لهذه الحركة أيضـــاً أن تكـــون حـــرة، أو متخامدة.

1-2- الحركة الاهتزازية الحرة *Undamped Free Vibration Motion*

ليكن الجسيم M ذو الكتلة m المستند على سطح أفقي أملس، والمتصل بطرف نابض طوله في الحالة الحرة l_0 ، ومعامل صلابته k ، وطرفه الآخر مثبت بنقطة ثابتة A ، كما هو موضح في (الشكل-4-2).



(الشكل-4-2) جسيم مربوط بنابض.

لنحرك الجسيم على خط مستقيم OX عن وضع التوازن O نحو اليمين إلى الوضع x . عندئذ في هذه اللحظة سيؤثر على الجسيم رد فعل سطح الاستناد $\boldsymbol{N}$ ، ووزنه $\boldsymbol{W}$ ، إضافة لقوة النابض المرجعة $\boldsymbol{F_k}$ التي تتجه نحو المركز الثابت O ، والتي تتناسب مع استطالة النابض، أي: مع بعد النقطة M عن هذا المركز، كما هو موضح في (الشكل-4-2):

$$\boldsymbol{F_k} = -\, k \,.\, \mathbf{OM}$$

ومسقطها على المحور OX :

$$F_{kX} = -\, k \,.\, x \qquad (1\text{-}4)$$

لنفرض أن سرعة الجسيم في لحظة ما كانت $\boldsymbol{V}$ ، واتجاهها الاتجاه الموجب لاستطالة النابض نفسه x ، وأن تسارعه $\boldsymbol{A}$ غير معلوم، لكن من الشكل نلاحظ أن جهة القوة المرجعة تعاكس اتجاه حركة الجسيم، وأن التسارع سيكون سالباً، أي: إن الحركة متباطئة، غير أنه لتسهيل دراسة الحركة تحليلياً يفضل اختيار الاتجاه الموجب كما افترضناه.

لنسقط معادلة التحريك لهذا الجسيم في اللحظة المعينة باتجاه حركته؛ لكي تظهر القوى التحريكية القوة المرجعة للنابض F_{kX} بكامل قيمتها في المعادلة، أما القوى الأخرى N و W فمسقطها على اتجاه الحركة معدوم.

نعين معادلة حركة الجسيم M ، بتكوين المعادلة التفاضلية للحركة من معادلة تحريك الجسيم، بعد إهمال القوى التحريكية لمادة النابض؛ نحصل على:

$$m.\ddot{x} = -k.x \qquad (2\text{-}4)$$

علاقة تناسب التسارع مع الانتقال السالب، وبقسمة طرفي هذه المعادلة على m ، واستخدام الرمز:

$$k/m = p^2 \qquad (3\text{-}4)$$

تتحول المعادلة إلى الصورة التالية:

$$\ddot{x} + p^2.x = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

التي تمثل المعادلة التفاضلية للحركة الاهتزازية الحرة دون مقاومة، وهي معادلة خطية تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة.

يمكن حل هذه المعادلة بأن نجد للمعادلة:

$$\ddot{x} = -p^2.x$$

تابعاً أصلياً للمتغير x يكون مشتقه الثاني بالنسبة للزمن يتناسب مع سالب التابع الأصلي، وأن يكون عامل التناسب p^2 . ومن أنواع هذه التوابع هي $\cos pt$ و $\sin pt$ ، حيث:

$$(\sin pt)' = p.\cos pt \quad \Rightarrow \quad (\sin pt)'' = -p^2.\sin pt$$

و:

$$(\cos pt)' = -p.\sin pt \quad \Rightarrow \quad (\cos pt)'' = -p^2.\cos pt$$

حيث p تمثل عدداً ثابتاً، كما أن أمثال هذه التوابع أو مجموعها يمكن أن تكون توابع أصلية للمعادلة التفاضلية. لذا فالشكل العام للتابع الأصلي هو:

$$x = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt \qquad (5\text{-}4)$$

حيث c_1 و c_2 ثابتا التكامل؛ اللذان يعتمدان على الشكل الذي تبدأ فيه الحركة.

كما يمكن أن يكون حل المعادلة التفاضلية، من الشكل:

$$x = e^{nt}$$

حيث نفرض في المعادلة التفاضلية للحركة، أن:

$$x = e^{nt}$$

فنحصل لتعيين n على ما يسمى بالمعادلة المميزة المساعدة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية، وتكون في هذه الحالة بالشكل التالي:

$$n^2 + p^2 = 0$$

وبما أن جذري هذه المعادلة تخيليان:

$$n_{1,2} = \pm\, i.p$$

فالتابع الأصلي هو:

$$x = A.e^{ipt} + B.e^{-ipt}$$

حيث:

$$e^{ipt} = \cos pt + i.\sin pt$$

و:

$$e^{-ipt} = \cos pt - i.\sin pt$$

نعوض هذه القيم في التابع الأصلي فنحصل على:

$$x = (A+B)\cos pt + i(A-B)\sin pt$$

نرمز لـــ:

$$A + B = c_2 \qquad , \qquad A - B = c_1$$

نحصل على الشكل العام للتابع الأصلي، وإن ثوابت التكامل c_1 و c_2 هي أعداد حقيقية، ولو تم اختيار الأعداد A و B مركبة.

بالنتيجة فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يكون تبعاً لمبادئ المعادلات التفاضلية بالشكل:

$$x = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt$$

إذا تم استبدال c_1 و c_2 ثابتي التكامل بالثابتين a و α بحيث يكون:

$$c_2 = a.\sin a \quad , \quad c_1 = a.\cos a \qquad (6\text{-}4)$$

منه:

$$\tan a = c_2 / c_1 \quad , \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad (7\text{-}4)$$

بالتعويض نحصل على:

$$x = a\,(\sin pt\,.\cos a + \cos pt\,.\sin a)$$

$$x = a.\sin(pt + a) \qquad (8\text{-}4)$$

وهذه صورة أخرى لحل المعادلة التفاضلية يكون فيها a و α هما ثابتا التكامل، ويكون استخدام هذين الثابتين للبحث العام أكثر سهولة.

نلاحظ من المعادلة (4-5) و(4-8) أن علاقة الانتقال x للجسيم M بالنسبة للزمن t هي علاقة جيبية، وأن حركة الجسيم هي حركة نوسية بسيطة.

باشتقاق العلاقات (4-5) و (4-8) بالنسبة للزمن نحصل على سرعة الجسيم وتسارعه في هذه الحركة:

$$V_X = \dot{x} = p(c_1.\cos pt - c_2.\sin pt)$$

$$V_X = \dot{x} = a.p.\cos(pt + a) \qquad (9\text{-}4)$$

$$A_X = \ddot{x} = -p^2(c_1.\sin pt + c_2.\cos pt)$$

$$A_X = \ddot{x} = -a.p^2.\sin(pt + a) \qquad (10\text{-}4)$$

نلاحظ من هاتين المعادلتين أن سرعة الجسيم وتسارعه تتغير دورياً بالنسبة للزمن وفق علاقة جيبية، أو جيب التمام، وتدعى الاهتزازات التي تحدث للجسيم تبعاً للمعادلة (4-8) بـ الاهتزازات التوافقية، والرسم البياني لمخططات كل من الانتقال والسرعة والتسارع بدلالة الزمن؛ التي تمثل هذه الحركة عندما ($\alpha = \pi/2$) موضحة في b من (الشكل-4-3).

باختزال الزمن من المعادلتين (4-8) و(4-9)؛ نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{V_X^2}{a^2.p^2} = 1 \qquad (11\text{-}4)$$

علاقة بين المسافة والسرعة، وتعطى بمعادلة قطع ناقص.

لدراسة الحركة الحقيقية للجسيم، أي: لإيجاد الأعداد الثابتة، فإنه يجب أن نعرف الحالة الحركية للجسيم في لحظة ما، وذلك بعد معرفة الشروط الأولية للحركة، عدا عن معرفة الثوابت الأساسية مثل الكتلة، وعامل صلابة النابض.

إذا فرضنا أن:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = x_0 \quad \text{و} \quad V_X = V_0$$

بتطبيق هذه الشروط الأولية في المعادلات (4-8) و(4-9)؛ نحصل على:

$$V_0 = a \,.\, p.\cos\alpha \quad \text{و} \quad x_0 = a \,.\, \sin\alpha \quad \text{و}$$

بالمقارنة مع العلاقات (4-6)؛ نحصل على:

$$V_0 = p \,.\, c_1 \quad \rightarrow \quad c_1 = V_0 / p \quad \text{و} \quad x_0 = c_2$$

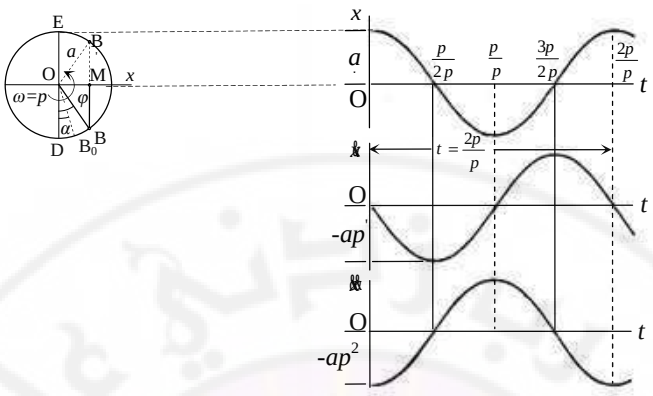
منه نحصل على زاوية الطور الابتدائية α ، وسعة الاهتزاز a :

$$\tan a = \frac{c_2}{c_1} = \frac{x_0 . p}{V_0} \quad , \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{p^2}}$$

ينتج مما سبق أن الحركة الاهتزازية الحرة هي حركة نوسية، وأن سعتها a التي تساوي المسافة بين وضع التوازن وأبعد نقطة يصل إليها الجسيم المتحرك، وزاوية الطور الابتدائية لها α ، تتعلقان بالشروط الابتدائية.

ولتعيين مميزات هذه الحركة تفسيراً حركياً واضحاً، نبين العلاقة بين الحركة الاهتزازية والحركة النوسية بيانياً.

نفرض أن الجسيم B يتحرك حركة منتظمة في دائرة نصف قطرها a ، ومركزها مركز الحركة الاهتزازية O . في لحظة البدء ($t = 0$) كان الجسيم في الموضع B_0 ، الذي تحدده الزاوية ($\alpha = DOB_0$)، كما هو مبين في a من (الشكل-4-3)، ونفرض أن السرعة الزاوية الثابتة لدوران نصف القطر OB تساوي p . عندئذ في اللحظة الزمنية الاختيارية t تصبح الزاوية DOB تساوي إلى ($\varphi = pt + \alpha$)، ويلاحظ بوضوح أن النقطة M مسقط الجسيم B على المحور OX أي: على القطر العمودي على DE يتحرك تبعاً للعلاقة (4-8) حيث ($x = OM$)، أي: أن المسقط M يهتز في حركة توافقية.



b- مخططات الحركة a- جسيم B يتحرك حركة دائرية منتظمة

(الشكل-4-3)

إن المقدار a يساوي أكبر انحراف للنقطة M عن مركز الاهتزازة، ويدعى بـــ سعة الاهتزازة (*Amplitude*)، ويمثل القيمة العددية العظمى للانتقال x بمنحني الانتقال والزمن.

والمقدار α يحدد زاوية طور بداية الاهتزازات، ويدعى بـــ زاوية الطور الابتدائية، فمثلاً عندما ($\alpha = 0$) تحدث الاهتزازة تبعاً لقانون الجيب sin التي تبدأ من المركز O بسرعة تتجه يميناً، وعندما ($\alpha = \pi / 2$) تحدث الاهتزازة تبعاً لقانون جيب التمام cos ؛ التي تبدأ من الموضع ($x = a$) بسرعة ($V_0 = 0$)، كما هو مبين في منحنى الحركة في (الشكل-4-3).

والمقدار ($\varphi = pt+\alpha$) يدعى بـــ زاوية طور الاهتزازة (*Phase*) التي تحدد، على عكس الإحداثي x ، ليس فقط موضع النقطة M في اللحظة الزمنية المعطاة وحسب؛ وإنما اتجاه حركتها التالية أيضاً، فمثلاً من الموضع M المحدد بزاوية الطور φ تتحرك النقطة يميناً، وبزاوية الطور المساوية لـــ (π-φ) تتحرك يساراً، وتعدّ زوايا الطور التي يختلف بعضها عن بعض بمقدار 2π متساوية.

والمقدار p الذي يتفق بوحدة القياس مع السرعة الزاوية ω لدوران نصف القطر الوهمي الدائر في الحركة النوسية OB والموضح في a من (الشكل-4-3)، يدعى بـــ التردد الدائري للاهتزاز، أو بـــ التواتر الزاوي، ويساوي إلى:

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k.g}{W}} \qquad (12\text{-}4)$$

وتدعى الفترة الزمنية τ التي تعمل النقطة M خلالها نوسة أو اهتزازة واحدة ذهاباً وإياباً بـــ الزمن الدوري للاهتزازة، أو دور الاهتزاز (*Period*)، الذي هو دور الحركة النوسية T_s نفسه، وبانقضاء الزمن الدوري للاهتزازة تتغير زاوية الطور بمقدار 2π ، وبالتالي يجب أن يكون ($p.\tau=2\pi$)، ومنها نحصل على الزمن الدوري:

$$t = T_s = \frac{2p}{p} = 2p\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (13\text{-}4)$$

نلاحظ أن زمن الدور يزداد بازدياد الجـــذر التربيعـــي لكتلـــة الجســـيم، ويـــنقص بازديـــاد الجذر التربيعي لصلابة النابض، ولا يتعلق بالشروط الابتدائية.

ويحدد المقدار f_r مقلوب الزمن الدوري عدد الاهتزازات في الثانية الواحدة، ويدعى بـــ تردد الاهتزازة، أو تواتر الاهتزازة (*Frequency*)، ويعبر عنه بالـــ هرتـــز (*Hertz*) والذي يساوي دورة بالثانية.

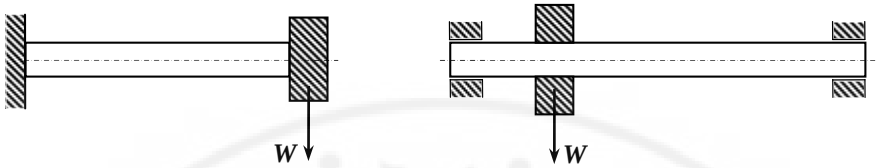
$$f_r = \frac{1}{t} = \frac{p}{2p} \qquad (14\text{-}4)$$

ومن هنا يلاحظ أن المقدار p لا يختلف عن f_r إلا بعامل ثابت 2π ، ولاحقاً سنسمي للاختصار المقدار p بـــ تردد الاهتزازة، كما يلاحظ أن التردد p والزمن الدوري للاهتزازة τ لا يرتبطان بالشروط الابتدائية، وهي مميزات ثابتة للحركة، بالتالي يتعين الزمن الدوري، أو التردد من العلاقة (4-13) بعد تكوين المعادلة التفاضلية للحركة.

يتبين مما سبق أن الحركة الاهتزازية في الشروط المثالية، أي: دون مقاومة احتكـــاك ولا مقاومة هواء ستستمر إلى اللانهاية، غير أن الحقيقة هي خلاف ذلك؛ إذ لابد لهذه الحركة من أن تخمد بعد مدة من الزمن.

هناك أشكال أخرى للحركة الاهتزازية للجسيم عدا الحركة بوساطة نابض، فالجسم في (الشكل-4-4) سوف يهتز ما دام الانفعال في القضيب يتبع قانون هوك ضمن حد المرونة.

ففي a من (الشكل-4-4)، لدينا قضيب مرن مهمل الوزن مثبت من إحدى طرفيـــه، ومعلق بنهايته جسم وزنه W ، بما أن القضيب مرن، فإن مركز ثقل الجسم سيرسم قوســـاً؛ بحيث يمكننا أن نهمل تقوسه، ونعتبره يهتز وفق خط مستقيم؛ إذا كانت الاهتزازات صغيرة.



b- قضيب يرتكز على مسندين. a–قضيب مثبت من إحدى طرفيه.

(الشكل-4-4)

وفي b من (الشكل-4-4)، لدينا قضيب مهمل الوزن يرتكز على مسندين، ويستند عليه جسم وزنه W ، هنا أيضاً يمكن اعتبار مسار حركة الجسم مستقيماً إذا كانت الاهتزازات صغيرة، وإذا كان الجسم في وسط القضيب تماماً؛ فإن الحركة الاهتزازية ستكون حتماً مستقيمة.

في كلتا الحالتين يؤثر في استقامة القوة المرجعة قوى أخرى ثابتة بالقيمة والاتجاه، ومنها وزن الجسم، وسندرس كيف سيظهر تأثير هذه القوى على الحركة الاهتزازية.

ولحل مسائل الاهتزازات بشكل عام؛ لا بد من اتباع الخطوات التالية:

1- تحديد محور الإحداثيات، واعتبار وضع توازن الجسيم المرتبط بالنابض مبدأ له.

2- تحديد الشروط الابتدائية لحركة الجسيم.

3- تحديد القوى الفعلية المؤثرة على الجسيم، وإضافة ردود الأفعال إليها.

4- تحديد المعادلة التفاضلية للحركة؛ وذلك بتمثيل الجسيم في وضع ما يوافق إحداثية موجبة، ويفرض أنه يتحرك باتجاه محور الإحداثيات.

5- حل المعادلة التفاضلية للحركة، وتعيين ثوابت التكامل وفق الشروط البدائية.

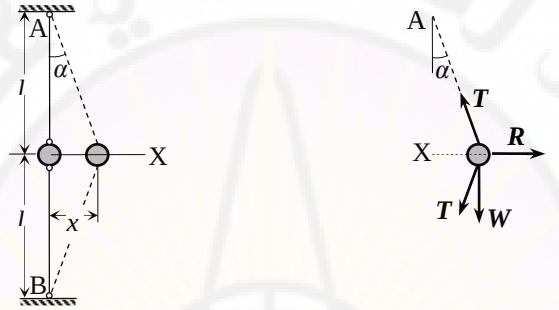
عند حل مسألة الاهتزازات الحرة، لا حاجة لحل المعادلة التفاضلية للحركة لتعيين p التردد الدائري، أي: التواتر الزاوي و τ دور الاهتزاز، وإنما يكفي تعيين التواتر الزاوي على أنه الجذر التربيعي للعامل الثابت لدى إحداثية الحركة، ومن ثم حساب الدور، ولتعيين معادلة الحركة لا بد من متابعة الحل، والوصول إلى النتائج بشكل عام، ومن ثم تعوض المعطيات العددية.

مسألة-4-1

تعلق كرة صغيرة وزنها W بمنتصف سلك AB لين ليونة تامة، ومشدود شداً قوياً، وذي طول يساوي $2l$ ، كما هو موضح في a من (الشكل-4-5).

إذا كانت الانتقالات الجانبية لهذه الكرة صغيرة، وكان الشد الابتدائي في السلك أعظمياً. المطلوب دراسة حركة الكرة بإيجاد معادلة حركتها ومواصفاتها.

الحل:



a- كرة معلقة بمنتصف سلك لين. b- مخطط الجسم الحر للكرة.

(الشكل-4-5)

إذا كان السلك خاضعاً في الأصل لقوة شد كبيرة $\boldsymbol{T}$ ، يمكننا إهمال أي تغير صغير في هذا التوتر ناتج من الانتقال الجانبي للكرة، وإذا انتقلت الكرة انتقالاً صغيراً مقداره x كالانتقال المبين في a من (الشكل-4-5)، فإن الأسلاك تميل ميلاً خفيفاً على الشاقول، فتؤدي بذلك إلى توليد رد فعل أفقي غير موازن في الكرة مبين في b من (الشكل-4-5)، مقداره:

$$R = -2T.\sin a = -\frac{2T}{l}x$$

وتصبح المعادلة التفاضلية عندئذ:

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = -\frac{2T}{l}x$$

أو:

$$\ddot{x} + \frac{2T.g}{W.l}x = 0$$

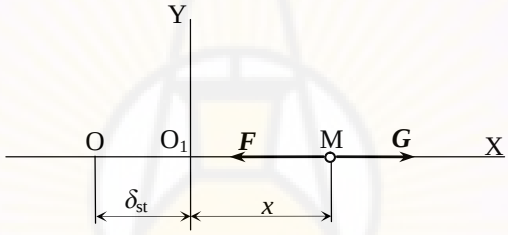
نجد في هذه المعادلة أنها معادلة حركة توافقية بسيطة، وأن العامل الثابت لدى إحداثية الحركة $(2T.g)/(W.l)$ يوافق p^2 في المعادلة (4-4)، فيكون دور اهتزاز الحركة إذاً:

$$t = \frac{2p}{p} = 2p\sqrt{\frac{W.l}{2T.g}}$$

ويتبين لنا من ذلك أنه في كرة وسلك معطيين يتناسب الدور عكساً مع الجذر التربيعي لقوة الشد؛ الذي أخضع له السلك، أي: أنه يمكن تغيير الدور وجعله مساوياً لأي زمن مطلوب ضمن حدود معقولة، وذلك باستخدام جهاز مناسب قادر على تغيير الشد في السلك.

2-1-1- تأثير القوة الثابتة على الاهتزازات الحرة

لنفرض أنه تؤثر على الجسيم M بالإضافة إلى القوة المرجعة $(\boldsymbol{F}=-k.\mathbf{OM})$ المتجهة إلى المركز O ، قوة أخرى ثابتة بالمقدار والاتجاه G ، كما هو مبين في (الشكل-4-6).



(الشكل-4-6) جسيم M خاضع بالإضافة إلى القوة المرجعة $\boldsymbol{F}$ قوة أخرى ثابتة $\boldsymbol{G}$.

ومن الواضح أن القوة $\boldsymbol{G}$ تسبب زلق المركز من O إلى O_1 ، وأن موضع اتزان النقطة M في هذه الحالة سيكون المركز O_1 ، الذي يبعد عن O مسافة $(OO_1 = d_{st})$ ، والتي تتحدد بالعلاقة:

$$G = k\,.\,d_{st} \qquad \Rightarrow \qquad d_{st} = G/k \qquad (15\text{-}4)$$

يسمى المقدار δ_{st} بـــ الانحراف السكوني للجسيم.

نعدّ النقطة O_1 نقطة أصل للقياس، ونمد محور الإحداثيات O_1X في اتجاه تأثير القوة $\boldsymbol{G}$ وعندئذ يكون:

$$G_X = G \qquad , \qquad F_X = -k\,(x + d_{st})$$

والمعادلة التفاضلية لهذه الحركة:

$$m\ddot{x} = -k\,(x + d_{st}) + G = -k.\,x$$

وباعتبار أن ($k/m = p^2$) تكون المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\ddot{x} + p^2.x = 0$$

تنطبق المعادلة الناتجة هذه مع المعادلة (4-4)، ومن هنا نستخلص أن القوة الثابتة G لا تغير طبيعة الحركة الاهتزازية للجسيم تحت تأثير القوة المرجعة F ، وإنما تؤدي فقط إلى إزاحة مركز هذه الاهتزازات باتجاه تأثير القوة G بمقدار الانحراف السكوني δ_{st} .

يمكن أن نعبر عن الزمن الدوري للاهتزازة τ بدلالة δ_{st} من المعادلتين (3-4) و (15-4)، حيث لدينا:

$$p^2 = \frac{G}{m.d_{st}}$$

وعندئذ تعطى المعادلة (13-4) بـــ:

$$t = 2p\sqrt{\frac{m}{G}\,d_{st}} \qquad (16\text{-}4)$$

وهكذا فإن الزمن الدوري للاهتزازة يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي للانحراف السكوني δ_{st} ، وكحالة خاصة عندما تكون القوة G هي قوة الجاذبية الأرضية في حالة الحركة الاهتزازية لثقل مثبت بنهاية نابض رأسي تكون ($G = m\ g$)، وتصبح العلاقة (16-4) على الشكل التالي:

$$t = 2p\sqrt{\frac{d_{st}}{g}} \qquad (17\text{-}4)$$

وبما أن:

$$t = \frac{2p}{p} \qquad \Rightarrow \qquad p = \sqrt{\frac{d_{st}}{g}}$$

مسألة-4-2

جسيم وزنه ($W = m.g$) معلق بنابض لولبي، ولنفرض أن طوله l وهو قابل للشد أو للانضغاط، وملزماً أن يتحرك شاقولياً فقط، كما هو مبين في (الشكل-4-7).

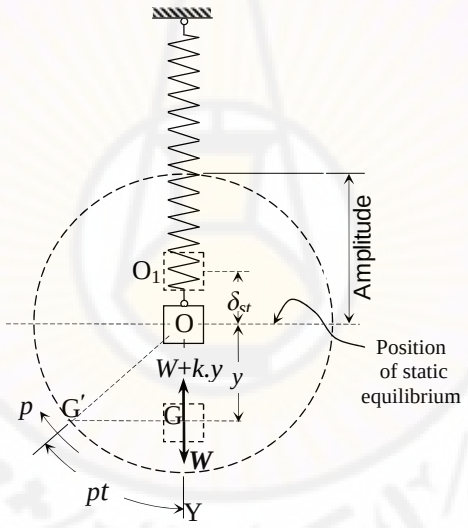
فإذا أزيح الجسيم عن وضع اتزانه في O نحو الأسفل مسافة y ، وترك ضمن شروط معينة؛ بحيث يبدأ الجسيم الحركة نحو الأعلى. المطلوب دراسة حركة الجسيم بعد إهمال مقاومة الهواء، وعطالة النابض.

الحل:

لإيجاد معادلة حركة الجسيم، نفرض أنه في زمن ما t كانت سرعة الجسيم $\boldsymbol{V}$ ، وتسارعه $\boldsymbol{A}$ ، نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الجسيم:

$$m\,.\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F}_k$$

حيث $\boldsymbol{F_k}$ تمثل قوة مرونة النابض، وتحدد على اعتبار أن النابض يستطيل مقدار الانحراف السكوني ($O_1O = \delta_{st}$) بسبب الفعل الساكن للوزن $\boldsymbol{W}$ ، ويتولد من ذلك شد معين في النابض، عندئذ يفعل النابض في الجسيم المعلق به برد فعل شاقولي $\boldsymbol{F_{ks}}$ يوازن قوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ ، وتنعدم القوة الحاصلة الفاعلة في الجسيم؛ فيبقى في حالة التوازن، ومنه ($F_{ks} = W$).



(الشكل-4-7) جسيم معلق بنابض لولبي شاقولي.

ولإيجاد الانحراف السكوني δ_{st} نطبق علاقة قوة مرونة نابض على وضع التوازن؛ حيث قوة المرونة توازن قوة الجاذبية:

$$F_{kst} = W = k\,.\,d_{st}$$

ومنه:

$$d_{st} = W / k$$

وإذا أزحنا بعد ذلك هذا الجسيم عن وضع توازنه الساكن نحو الأسفل، ازداد الشد في النابض، وعندما نطلق الجسيم نرى أنه يبدأ بالحركة نحو الأعلى بفعل القوة F_k التي لم تعد متزنة، هذه القوة هي الشد الكلي للنابض؛ التي تحاول إعادة الجسيم إلى وضع الاتزان O ، واتجاهها عكس اتجاه محور الانتقال Y ، وتتناسب مع استطالة النابض ما دامت غير متجاوزة حد المرونة فيه، وتمثل القوة المرجعة، أو القوة المرنة، وتساوي إلى:

$$F_k = k\,(l - l_0) = k\,(d_{st} + y)$$

فالشد الكلي في النابض الموافق لأي انتقال y من وضع التوازن الساكن يكون طيلة حركة الجسيم معيناً بالعلاقة:

$$F_k = W + k.y$$

بالتالي بإسقاط العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم على محور الحركة وفق (الشكل-4-7):

$$\frac{W}{g}\ddot{y} = W - (W + k.y) = -k.y$$

تدلنا العلاقة هذه على أن التسارع $\ddot{y}$ يصبح سالباً عندما يكون الانتقال موجباً، وأن العكس بالعكس، أي: أن الجسيم يكون متسارعاً دوماً نحو وضع توازنه الساكن بفعل قوة متناسبة مع مقدار انتقاله من هذا الوضع.

يتم تعيين معادلة حركة الجسيم بتكوين المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{y} = -\frac{k\,.\,g}{W}\,y$$

فإذا رمزنا لـــ:

$$k.g/W = k/m = g/d_{st} = p^2$$

تصبح المعادلة عندئذ:

$$\ddot{y} + p^2.y = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية للاهتزازات الحرة للجسيم عند انعدام المقاومة (مقاومة الهواء، وعطالة النابض)، والحل العام لها يكون تبعا لنظرية المعادلات التفاضلية المتبعة عند حل المعادلة (4-4) بالصورة التالية:

$$y = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt \qquad \text{(a)}$$

تمثل هذه العلاقة الحل العام للمعادلة التفاضلية، حيث c_2 و c_1 ثابتا المكاملة الاختياريان، ونحصل عليهم وفق الشروط الابتدائية:

-إذا بدأ الجسيم حركته وشأنه بعد إزاحته من السكون بالمقدار y_0 ، كانت الشروط الابتدائية تمثل بـــ:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad y=y_0 \quad \Rightarrow \quad c_2=y_0$$

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_0=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=0$$

بالتعويض نحصل على معادلة حركة الجسيم ضمن هذه الشروط.

$$y=y_0.\cos pt \qquad \text{(b)}$$

بالتالي حركة الجسيم هي حركة توافقية بسيطة حيث y_0 تمثل سعة الاهتزاز، ومخططات الانتقال، والسرعة، والتسارع بدلالة الزمن لهذه الحركة موضحة في b من (الشكل-4-3). أما دور الاهتزاز فهو:

$$t=\frac{2p}{p}=2p\sqrt{\frac{W}{k.g}}=2p\sqrt{\frac{d_{st}}{g}} \qquad \text{(c)}$$

نلاحظ من الشكل الأول من المعادلة (c)، أن دور الاهتزاز متناسب عكساً مع العامل p ، ويمكننا أن نعطي هذا العامل معنً خاصاً، كما ذكرنا سابقاً؛ لأن أبعاده هي مقلوب بعد الزمن، وهي أيضاً أبعاد w التي هي زاوية الدوران في وحدة الزمن.

لنرسم دائرة مركزها منطبق على وضع التوازن الساكن للجسيم المتحرك W ، وقطرها مساو سعة الاهتزاز، كما هو مبين في (الشكل-4-7)، فيتضح عندئذ أنه عندما يتحرك الجسيم في مساره الشاقولي؛ فإن المسقط الأفقي G' لمركز ثقله على هذه الدائرة يتحرك على محيط الدائرة بسرعة منتظمة مقدارها p راديان في الثانية، ويدور هذا المسقط دورة كاملة حول الدائرة مقابل كل دورة كاملة من دورات اهتزاز الجسيم، نسمي هذه الدائرة دائرة المقارنة. وهكذا نجد أن p تمثل عدد الراديانات بالثانية؛ التي يدورها مسقط الجسيم المتحرك حول دائرة المقارنة عندما يهتز الجسيم نفسه على القطر الشاقولي لهذه الدائرة.

كما نلاحظ من الشكل الثاني من المعادلة (c)، أن دور الاهتزاز يتعلق بمقدار وزن الجسيم W ، وبثابت النابض k ، ولا يتعلق بشيء سواهما، فهو متناسب مباشرةً مع جذر W ، ومتناسب عكساً مع جذر k ، فلا يمكن إذاً أن نغير دور الاهتزاز إلا بتغيير أحد هذين المقدارين أو كليهما، فإذا علقنا وزناً صغيراً بنابض قاس كان ذا دور اهتزاز قصير، وإذا علقنا وزناً كبيراً بنابض شديد الليونة كان ذا دور اهتزاز طويل.

كما نلاحظ من تعريف ثابت النابض k على أن الحد W/k يمثل الاستطالة المتولدة في النابض بالفعل الساكن للوزن W ، وإذا استخدمنا الرمز $(d_{st} = W/k)$ حصلنا على الشكل الثالث للمعادلة (c) الذي يدلنا على أن حساب دور الاهتزاز لا يتطلب منا إلا معرفة الاستطالة الساكنة للنابض بفعل الحمل W ، وكثيراً ما نحصل على هذه الاستطالة بالتجربة المباشرة، فإذا وضعنا هذه القيمة المحددة تجريبياً محلها في المعادلة أمكننا الحصول على الدور τ ، وإذا حصلنا على دور الاهتزاز، أي: على الزمن اللازم للقيام بدورة كاملة، أمكننا الحصول بسهولة على تواتر الاهتزاز، أي: عدد الاهتزازات في الثانية:

$$f_r = \frac{1}{t} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k.g}{W}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{g}{d_{st}}} \qquad \text{(d)}$$

- وإذا تحرك الجسيم بعد تعليقه مباشرةً بحيث يسقط من O_1 دون سرعة ابتدائية، أي: $(F_{kst} = 0)$ كانت الشروط الابتدائية تمثل بـــ:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow \quad y_0 = -d_{st} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -d_{st}$$

بالتعويض نحصل على معادلة حركة الجسيم ضمن هذه الشروط:

$$y = -d_{st}.\cos pt \qquad \text{(e)}$$

يتضح من ذلك أن أكبر استطالة للنابض عند الحركة الاهتزازية للجسيم تساوي إلى $2\delta_{st}$.

يؤكد الحل الناتج أن الفرق بين الحركتين (b) و(e)، هو أن قوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ في حالة السكون في الحركة الأولى؛ لا تغير طبيعة الحركة الاهتزازية الناشئة تحت تأثير القوة المرنة $\boldsymbol{F}_k$ ، وإنما تعمل هذه القوة $\boldsymbol{W}$ كما ذكرنا سابقاً على إزاحة مركز الحركة الاهتزازية في ناحية تأثيرها بمقدار δ_{st} ، أي: أن الحركة الثانية تحدث كما هو واضح في (الشكل-4-7) حول المركز O_1 ، وهكذا يمكن إيجاد معادلات الحركة الاهتزازية للنابض وفق شروط ابتدائية أخرى للحركة.

- وإذا تحرك الجسيم تحت تأثير صدمه شاقولية، أعطته سرعة ابتدائية عندما كان في وضع توازنه الساكن، فيكون لدينا عندئذ في لحظة البدء:

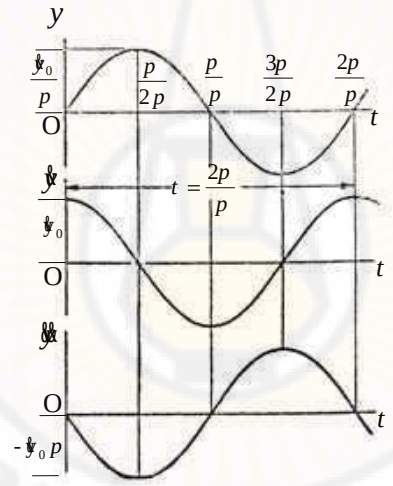
$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \dot{y}_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dot{y}_0 / p$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

ويصبح الحل العام للمعادلة (a) عندئذ هو:

$$y = \frac{\dot{y}_0}{p} \sin pt \qquad \text{(f)}$$

في هذه الحالة مخططات الانتقال، السرعة والتسارع بدلالة الزمن؛ التي تمثل هذه الحركة موضحة في (الشكل-4-8).



(الشكل-4-8) مخططات الحركة.

نلاحظ أن هذه الحركة مازالت حركة توافقية بسيطة، وأن لها دور الاهتزاز السابق نفسه أي:

$$t = 2p / p$$

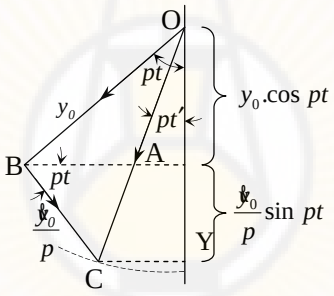
كما نلاحظ أن دور الاهتزاز هذا لا يتعلق بانتقال البدء ولا بسرعة البدء، بل بثابت النابض k والوزن W وحدهما، ولا تتغير في هذه الحالة إلا السعة التي تصبح $(\dot{y}_0 / p)$.

- وإذا تحرك الجسيم بعد إزاحته عن وضع توازنه بمقدار y_0 ، ثم بإعطائه، وهو في هذا الوضع الجديد سرعة ما v_0 ، يصبح الحل العام للمعادلة (a) عندئذ هو:

$$y = y_0.\cos pt + \frac{v_0}{p}\sin pt \qquad (g)$$

وإذا أردنا الحصول على مخطط الانتقال والزمن في هذه الحالة، لم نجد لزاماً علينا إلا أن نجمع ترتيب مخططي الانتقال والزمن في الحالتين السابقتين، ونلاحظ أن نتيجة هذا الجمع هي حركة توافقية بسيطة أيضاً.

ولإيجاد السعة في هذه الحالة العامة نرسم في (الشكل-4-9) متجهاً ($\mathbf{OB} = y_0$) يبتدئ من المبدأ O ، ويميل على محور Y بزاوية قدرها pt ، فيكون عندئذ مسقط هذا المتجه على محور Y ممثلاً للحد الأول من المعادلة (e)، ثم نرسم من النقطة B متجهاً ($\mathbf{BC} = v_0 / p$) عمودياً على **OB** ، فيكون مسقط **BC** على المحور Y ممثلاً للحد الثاني من المعادلة.



(الشكل-4-9) إيجاد السعة لحركة توافقية بسيطة ناتجة من جمع مخططي انتقال.

وبما أن مجموع مسقطي **OB** و **BC** على المحور Y ، يساوي مسقط مجموعهما **OC** ، فإننا نرى أنه يمكن كتابة المعادلة بالشكل التالي؛ الذي يكافئ شكلها الأول:

$$y = A.\cos pt'$$

حيث يرمز بـــ A إلى سعة الاهتزاز، و t' إلى متحول زمني جديد نقيسه منذ اللحظة التي تبلغ فيها الكتلة المهتزة وضعها الأقصى لأول مرة بعد إطلاقها، أي: منذ اللحظة التي ينطبق فيها المتجه الدائر **OC** على المحور Y . ونرى في المثلث القائم OBC ، المرسوم في (الشكل-4-9) أن سعة الاهتزاز في الحالة العامة معطاة بالصيغة:

$$A = \sqrt{(y_0)^2 + (\frac{v_0}{p})^2} \qquad (h)$$

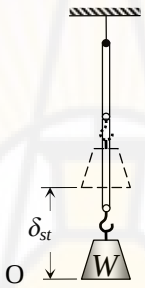
تقودنا هذه المناقشة إلى أن الحركة الناشئة في الحالة العامة، التي يكون فيها للجسيم انتقال بدائي y_0 وسرعة بدائية v_0 ، هي الحركة نفسها التي تحدث لو أننا أعطينا الجسيم انتقالاً بدائياً مقداره A كما في الصيغة (h)، ولم نعطه، أي: سرعة بدائية.

مسألة-4-3

إذا علق ثقل W بنهاية عصا من المطاط كما في (الشكل-4-10)، ولد فيها استطالة ساكنة (δ_{st} = 12.5 cm).

فإذا رفع هذا الثقل حتى أصبح التوتر في العصا معدوماً، ثم أطلق دون سرعة ابتدائية، المطلوب إيجاد الاستطالة العظمى $y_{\max}$ التي تتولد في العصا بفعل هذا التطبيق المفاجئ للحمل، والتواتر f_r الذي يهتز الثقل المعلق W به.

الحل:



(الشكل-4-10) ثقل معلق بنهاية عصا من المطاط.

إذا اتخذنا المبدأ O وضع التوازن الساكن للثقل المعلق، وافترضنا أن الانتقال نحو الأسفل موجب، استنتجنا أن انتقال البدء للثقل في لحظة إطلاقه هو:

$$y_0 = -d_{st}$$

وإن سرعة البدء تساوي الصفر:

$$V_0 = 0$$

تدلنا المعادلة (e) عندئذ على أن الانتقال من وضع التوازن الساكن في أي لحظة t هو:

$$y = -d_{st} . \cos pt$$

وعندما تصبح الزاوية $p\,t$ مساوية لـــ π ، يكون:

$$\cos pt = -1$$

أي: يبلغ الانتقال y قيمته العظمى الموجبة التالية:

$$y_{\max} = +d_{st}$$

إذا قارنا هذه القيمة مع قيمة y_0 استنتجنا أن الاستطالة الكلية المتولدة في العصا بفعل التطبيق المفاجئ للحمل W ، تساوي تماماً ضعف الاستطالة المتولدة من تطبيق الحمل نفسه تطبيقاً تدريجياً، وتدلنا المعادلة (d) على أن تواتر الاهتزاز هو:

$$f_r = \frac{2p}{p} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{g}{d_{st}}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{981}{12.5}} = 1.41\,\sec^{-1}$$

مسألة-4-4

عين زمن دور الحركة الاهتزازية τ لثقل وزنه W معلق في نهاية نابضين متصلين بعضهما مع بعض على التسلسل، كما في a من (الشكل-4-11)، إذا كان عاملا مرونتهما k_2 و k_1 على التوالي.

الحل:



b- ثقل معلق بين نابضين. a- ثقل معلق في نهاية نابضين.

(الشكل-4-11)

في حالة توازن المجموعة سوف يؤثر على النابضين قوة شد قدرها W تعمل على استطالة النابضين، ويشد كل نابض في وضع الاتزان السكوني بقوة W ، وبالتالي فإن الاستطالة الساكنة لكل من النابضين تساوي:

$$d_{2st} = W / k_2 \qquad , \qquad d_{1st} = W / k_1$$

والاستطالة الكلية للنابضين:

$$d_{st} = d_{2st} + d_{1st} = \frac{W(k_1 + k_2)}{k_1 . k_2}$$

ويكون عامل مرونة النابض المكافئ للنابضين:

$$k_{eq} = \frac{k_1 . k_2}{k_1 + k_2}$$

وكحالة خاصة عندما:

$$k_1 = k_2 = k \qquad \Rightarrow \qquad k_{eq} = k/2$$

وبما أن وزن الجسم:

$$W = m.g = k_{eq}.d_{st}$$

منه:

$$\frac{k_{eq}}{m} = \frac{g}{d_{st}} = p^2$$

بالتالي يكون الزمن الدوري للاهتزازة تبعا للمعادلة (4-17)، يساوي إلى:

$$t = 2p\sqrt{\frac{d_{st}}{g}} = 2p\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = 2p\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1.k_2}.\frac{W}{g}}$$

مسألة-4-5

المطلوب حل المسألة السابقة باعتبار أن الثقل معلق بين النابضين، كما هو مبين في b من (الشكل-4-11).

الحل:

في هذه الحالة يشد النابض العلوي بقوة ما W_1 ، ويضغط النابض السفلي بقوة W_2 ، علماً بأن:

$$W_1 + W_2 = W$$

فإن الاستطالة الساكنة لكل من النابضين تساوي:

$$d_{2st} = W_2 / k_2 \quad , \quad d_{1st} = W_1 / k_1$$

ولكن من الواضح أن:

$$d_{2st} = d_{1st} = d_{st}$$

وتبعاً لخواص التناسب يكون:

$$d_{st} = \frac{W_1}{k_1} = \frac{W_2}{k_2} = \frac{W_1 + W_2}{k_1 + k_2} = \frac{W}{k_1 + k_2}$$

ويكون عامل مرونة النابض المكافئ للنابضين:

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

والزمن الدوري للاهتزازة:

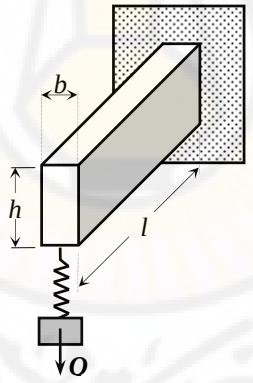
$$t = 2p\sqrt{\frac{d_{st}}{g}} = 2p\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = 2p\sqrt{\frac{W}{g(k_1 + k_2)}}$$

مسألة-4-6

قضيب فولاذي مهمل الوزن أبعاده (l = 500 mm، h = 25 mm، b = 10 mm)، وعامل مرونته في حالة الشد (E = 2.2 10^7 N/cm^2)، مثبت من إحدى نهايتيه بالحائط وتركت نهايته الأخرى سائبة علق فيها حملاً وزنه (Q = 150 N)، كما في (الشكل-4-12). المطلوب إيجاد دور τ ، وذبذبة الاهتزازات f_r في الاتجاه الشاقولي في الحالتين:

1. إذا علق الحمل مباشرة على القضيب.
2. إذا علق عن طريق نابض يستطيل مقدار 0.05 mm تحت تأثير قوة 10 N .

الحل:



(الشكل-4-12) قضيب فولاذي مثبت من إحدى نهايتيه.

1. في الحالة الأولى:

بما أن مقطع القضيب مستطيل، فمن علم مقاومة المواد، ومن العلاقة بين الحمل Q والانفعال Δ :

$$Q = k_1.\Delta = \frac{3E.I}{l^3}.\Delta$$

حيث I تمثل عزم عطالة سطح مقطع القضيب حول المحور الحيادي، ويعطى بالعلاقة:

$$I = \frac{1}{12} b.h^3 = 1.3 \text{ cm}^4$$

و k_1 تمثل عامل صلابة القضيب:

$$k_1 = \frac{3(2.2\,10^7)1.3}{50^3} = 686 \text{ N/cm}$$

منه التواتر الزاوي للقضيب:

$$p_I = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \sqrt{\frac{686 \times 981}{150}} = 67 \text{ sec}^{-1}$$

والزمن الدوري للاهتزازة:

$$t_I = \frac{2p}{p_I} = \frac{2p}{67} = 0.094 \text{ sec}$$

وتردد الاهتزازة:

$$f_{r_I} = \frac{1}{t_I} = \frac{1}{0.094} = 10.65 \text{ sec}^{-1}$$

2. في الحالة الثانية عند اتصال النابض بالقضيب:

يحسب معامل مرونة النابض من علاقة قوة المرونة فيه:

$$F_k = d.k_2 \quad \Rightarrow \quad 10 = 0.05 k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 20 \text{ N/cm}$$

وباعتبار أن النابض والقضيب متصلان على التسلسل، فنحصل على معامل المرونة المكافئ لهما من العلاقة:

$$k_{eq} = \frac{k_1.k_2}{k_1 + k_2} = \frac{686 \times 20}{686 + 20} = 19.43 \text{ N/cm}$$

منه التواتر الزاوي:

$$p_{II} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{19.43}{150/981}} = 11.27 \text{ sec}^{-1}$$

والزمن الدوري للاهتزازة:

$$t_{II} = \frac{2p}{p_{II}} = \frac{2p}{11.27} = 0.55 \text{ sec}$$

وتردد الاهتزازة:

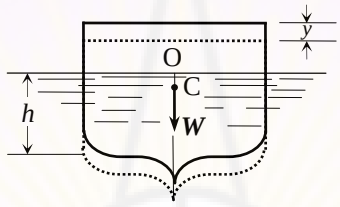
$$f_{r_{II}} = 1/t_{II} = 1/0.557 = 1.8 \text{ sec}^{-1}$$

مسألة-4-7

سفينة عائمة وزنها W يغمرها ماء ساكن الوزن النوعي له هو w_h ، بعمق وسطي مساو لـــ ($h = \delta_{st}$)، وبمساحة مقطع عرضي معرض للماء مساوية لـــ A ، كما هو مبـــين في (الشكل-4-13).

إذا أزيحت السفينة نحو الأسفل إزاحة خفيفة بالنسبة إلـــى وضـــع توازنهـــا بســـرعة شاقولية، ثم أطلقت، فإنها تهتز شاقولياً نحو الأسفل ونحو الأعلى بحركـــة توافقيـــة بســـيطة. المطلوب بإهمال الاحتكاك وعطالة ما يمكن أن يكون قد تحرك من الماء إيجاد معادلة اهتزاز السفينة، ودور هذا الاهتزاز τ .

الحل:



(الشكل-4-13) سفينة عائمة.

بما أن وزن وحدة الحجم من الماء هو w_h ، وأن السفينة تزيح من الماء مقدار وزنها، بالتالي يكون وزن السفينة هو $a.h.w_h$.

وإذا تأملنا في أي انتقال شـــاقولي صـــغير y للســـفينة كالانتقـــال المبـــين فـــي (الشكل-4-13)، وجدنا أن ازدياد قوة العوم مساو لـــ $a.y.w_h$ ، وبما أن هذه القـــوى غيـــر الموازنة تكون موجهة نحو الأعلى إذا تحركت السفينة نحو الأسفل، فـــإن معادلـــة الحركـــة التفاضلية المعادلة (4-2) تصبح:

$$\frac{a.h.w_h}{g}\ddot{y} = -a.w_h.y$$

وتختصر إلى الشكل التالي:

$$\ddot{y} + \frac{g}{h}y = 0$$

فإذا قارنا هذه المعادلة بالمعادلة (4-4)، وجدنا أن العامل الثابت g / h فـــي هـــذه الحالة يقابل p^2 في المعادلة العامة، أي: أن السفينة تهتز بحركة توافقية بسيطة دورها:

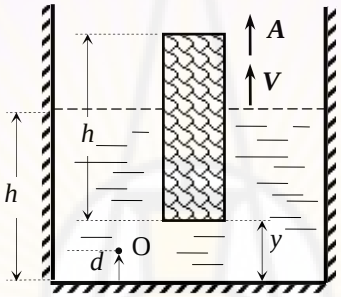
$$t = 2p / p = 2p\sqrt{h/g}$$

مسألة-4-8

قضيب وزنه $m.g$ طوله h ومقطعه a مغموس في خزان واسع ارتفاع الماء فيه h أيضاً وفق (الشكل-4-23).

فإذا ابتدأ القضيب حركته من قاع الخزان بسرعة بدائية تساوي الصفر، وكان الوزن النوعي للقضيب w أصغر من الوزن النوعي للماء w_h ، واتخذت الإجراءات اللازمة؛ بحيث يتحرك القضيب حركة شاقولية فقط. المطلوب دراسة حركة القضيب مع اعتبار أن ارتفاع الماء في الخزان يبقى ثابتاً.

الحل:



(الشكل-4-14) قضيب مغموس في خزان ماء.

نهمل القوى التحريكية لحركة السائل، ولنأخذ فقط بعين الاعتبار قوة دفع الماء للجسم المغموس فيه حسب قانون أرخميدس:

$$F_h = w_h . a\,(h - y)$$

نطبق معادلة التحريك على القضيب بالاتجاه الشاقولي:

$$m . A = w_h . a\,(h - y) - m . g$$

منه المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\ddot{y} + \frac{a . w_h}{m} y + (g - \frac{a . w_h . h}{m}) = 0$$

تكتب بالشكل:

$$\ddot{y} + \frac{a . w_h}{m}(y + \frac{m . g}{a . w_h} - h) = 0$$

باعتبار:

$$a.w_h / m = p^2$$

وليكن المتغير الجديد x ويساوي:

$$y + \frac{m.g}{a.w_h} - h = x \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \ddot{x}$$

بالتعويض نحصل على الشكل الجديد للمعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0$$

هذه المعادلة شبيهة تماماً بمعادلة حركة جسيم معلق في نهاية نابض وحلها، كما سبق، هو:

$$x = a.\sin(p\,t + a)$$

منه بالتعويض:

$$y + \frac{m.g}{a.w_h} - h = a.\sin(\frac{a.w_h}{m}t + a)$$

نحصل على:

$$y = a.\sin(\frac{a.w_h}{m}t + a) + (h - \frac{m.g}{a.w_h})$$

هذا يعني بأن القضيب سوف يهتز حول مركز O مزاح عن القاع نحو الأعلى بمقدار d :

$$d = h - \frac{m.g}{a.w_h}$$

وبما أن وزن القضيب يساوي إلى:

$$m.g = a.h.w$$

بالتعويض نحصل على:

$$d = h - \frac{h.a.w}{a.w_h} = h(1 - \frac{w}{w_h})$$

في هذه الحالة يجب أن نتأكد من أن المعادلة التفاضلية للحركة تناسب كل مجال الحركة، فمثلاً إذا اختلفت السرعة البدائية عن الصفر؛ فإنه يحدث حين رجوع القضيب بأن يصطدم بالقاع، أو إذا كانت السرعة البدائية عالية؛ فإن القضيب يخرج فوق سطح الماء. إلا أن هذه النتيجة لا تتفق اتفاقاً صحيحاً مع التجربة؛ لأننا أهملنا عطالة الماء.

مسألة-4-9

ركبت كرة صغيرة كتلتها m على قضيب خفيف مثقوب، ويدور محورياً عند O ومحمول عند طرفه الآخر B بوساطة نابض معامل صلابته k ، كما هو مبين في a من (الشكل-4-15).

فإذا أزيح الطرف B نحو الأسفل مسافة صغيرة y_{0B} تحت وضع التوازن الأفقي، ثم ترك، المطلوب إيجاد معادلة الاهتزاز للاهتزازات الصغيرة للقضيب وتعيين التردد لها.

الحل:

يمكن كتابة معادلة التحريك لحركة الكرة C :

$$m.\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{R}$$

التي تتضمن القوة $\boldsymbol{R}$ المطبقة عليها من قبل القضيب الخفيف، وتحسب من اعتبار أن كتلة القضيب مهملة؛ فيمكننا معالجة القضيب كأنة متزن، كما هو مبين في b من (الشكل-4-15)، فمن علاقة العزم حول O للقضيب:

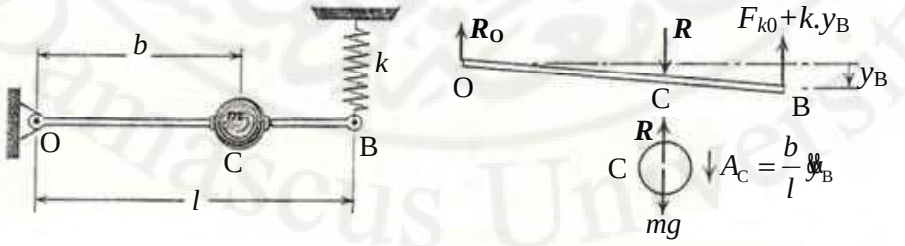
$$R.b = (F_{k0} + k.y_{\mathrm{B}})\, l$$

حيث F_{k0} تمثل قوة النابض الموافقة لتوازن القضيب والكرة عند الوضع الحيادي الأفقي، وتساوي إلى:

$$F_{k0} = m.g.b / l$$

بالتعويض:

$$R = m.g + k.l.y_B / b$$



a b

(الشكل-4-15) دراسة حركة قضيب خفيف يحمل كرة ويهتز.

ويحسب A_C تسارع الكرة من اعتبار أن y تمثل استطالة النابض من الموضع الحيادي الأفقي الموافق لانتقال طرف القضيب B ، وبما أن الانتقالات صغيرة بحيث إن طول القوس الذي خلاله تتحرك B هو تقريباً يساوي المركبة العمودية لانتقال B ، أو التمدد الإضافي y للنابض. منه فإن انتقال الكرة نحو الأسفل من الوضع الحيادي الأفقي يساوي إلى:

$$y_C = (b/l)\, y_B$$

ولهذا فإن تسارع الكرة يكون نحو الأسفل، وقيمته:

$$A_C = (b/l)\ddot{y}_B$$

بالتعويض في معادلة التحريك مع إسقاطها باتجاه التسارع:

$$m(\frac{b}{l})\ddot{y}_B = m.g - R \quad \Rightarrow \quad m\frac{b}{l}\ddot{y}_B = m.g - (m.g + k\frac{l}{b}y_B)$$

أو:

$$\ddot{y}_B + \frac{k}{m}\left(\frac{l}{b}\right)^2 y_B = 0$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل:

$$y_B = y_{0B}.\sin pt$$

وأن التردد الدائري p يمثل الجذر التربيعي لعامل الإحداثي y_B :

$$p = \frac{l}{b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ولهذا يصبح التردد:

$$f_r = \frac{p}{2p} = \frac{l}{2p.b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

كما يمكننا تعيين التردد من تطبيق مبدأ العمل والطاقة على الكرة فقــط؛ لأن كتلــة القضيب مهملة، من موضع الانتقال الأعظم الساكن إلى الموضع الأفقي الحيادي:

$$E_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{C}}^{0} = w_{\boldsymbol{mg}} + w_{\boldsymbol{F_k}}$$

حيث E_{C} تمثل الطاقة الحركية للكرة:

$$\frac{1}{2}m.V_{\mathrm{C}}^{2} = \frac{1}{2}m(\dot{y}_{\mathrm{C}})_{\max}^{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}_{\mathrm{B}\max}\right)^{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}y_{0\mathrm{B}}.p\right)^{2}$$

لأنه من معادلة الحركة لدينا:

$$\dot{y}_{\mathrm{B}\max} = y_{0\mathrm{B}}.p$$

و w_{mg} تمثل عمل قوة الثقالة:

$$w_{mg} = -m.g.y_{0\mathrm{C}} = -m.g\left(\frac{b}{l}y_{0\mathrm{B}}\right)$$

و $w_{\boldsymbol{F_k}}$ تمثل عمل قوة مرونةالنابض:

$$W_{\boldsymbol{F_k}} = \frac{1}{2}k\left[(\Delta l_{in})^{2} - (\Delta l_{fin})^{2}\right] = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{F_{k0}}{k} + y_{0\mathrm{B}}\right)^{2} - \left(\frac{F_{k0}}{k}\right)^{2}\right]$$

بالتعويض في علاقة تغير الطاقة ينتج:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}y_{0\mathrm{B}}\right)^{2}p^{2} = \frac{1}{2}k.y_{0\mathrm{B}}^{2}$$

منه التردد الدائري:

$$p = \frac{l}{b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

والتردد:

$$f_r = \frac{p}{2p} = \frac{l}{2p.b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

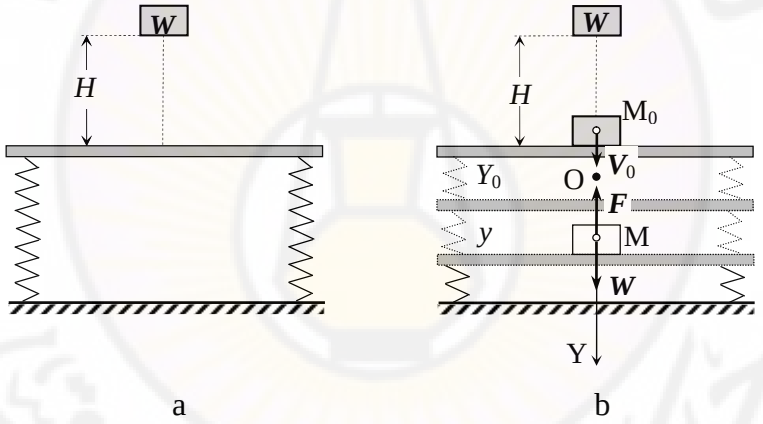
مسألة-4-10

يسقط جسم وزنه ($W = m.g = 19.62$ N) من ارتفاع ($H = 40$ cm) على مركز صفيحة معدنية مربعة أفقية موصولة إلى أربعة نوابض متشابهة ثابت كل منها ($k_1 = 2$ N/cm)، موضوعة بشكل متناظر في زوايا الصفيحة، كما هو مبين في a من (الشكل-4-16)، فبعد أن يمس الجسم الصفيحة يلتصق بها، ويتحركان معاً.

المطلوب ايجاد معادلة الحركة الاهتزازية بإهمال كتلة الصفيحة والنوابض.

الحل:

نوجه محور الحركة Y نحو الأسفل، ونعدّ مبدأ الإحداثيات وضع التوازن السكوني الذي يعين بالعلاقة ($\delta_{st} = W / k$)، حيث ($k = 4\ k_1$).



(الشكل-4-16) جسم يسقط على صفيحة معدنية مربعة أفقية موصولة إلى أربعة نوابض.

والحركة الاهتزازية كما هو مبين في b من (الشكل-4-16)، تبدأ من لحظة تماس الجسيم للصفيحة الموضوعة على النوابض غير المنفعلة وفق الشروط الابتدائية التالية:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -d_{st} = -W / k \quad , \quad V_0 = \dot{y}_0 = \sqrt{2g.H}$$

والقوى المؤثرة على الجسيم هي وزنه $\boldsymbol{W}$ ، وقوة المرونة في النوابض [F_k=-k(δ_{st}+y)]، وتكون معادلة التحريك لهذه الحركة:

$$m.\ddot{y} = \Sigma F_y = -k(d_{st} + y) + W$$

والمعادلة التفاضلية لها:

$$\ddot{y} + p^2.y = 0$$

حيث:

$$p^2 = k/m = g/d_{st} = 981/2.45 = 400\ \sec^{-2}$$

ويكون حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt$$

بالاشتقاق نحصل على معادلة سرعة الحركة:

$$\dot{y} = c_1.p.\cos pt - c_2.p.\sin pt$$

وحسب الشروط الابتدائية تعين قيم الثوابت c_1 و c_2 من المعادلتين السابقتين:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \sqrt{2g.H}/p \qquad , \qquad c_2 = -p/k$$

بالتعويض:

$$c_1 = \sqrt{2g.H}/p = \sqrt{2.981.40}/20 = 14$$

$$c_2 = -p/k = -19.62/8 = -2.45$$

وتصبح معادلة الحركة:

$$y = 14\sin 20t - 2.45\cos 20t$$

ودور هذه الحركة هو:

$$\tau = 2\pi/p = 2\pi/20 = 0.314\ \sec$$

2-2- الحركة الاهتزازية المتخامدة *Damped Vibration Motion*

تحدث الحركة الاهتزازية الحرة المتخامدة تحت تأثير القوة المرجعة بالإضافة لقوة مقاومة الحركة؛ التي تتجه عكس حركة الجسيم، والتي تؤدي إلى تباطئه، ويتناسب مقدارها مع السرعة. هذا النوع من التباطؤ الاحتكاكي يدعى بالتباطؤ اللزج، وهو مُمَثل بفعل مبطئ، أو مبطئ مائع ضمن شروط الجريان الطبقي، ومن الأنواع الأخرى لقوى التباطؤ، مثل الاحتكاك الجاف أو مبطئ كولومب (*Coulomb Friction*)، الذي هو أساساً غير متعلق بالسرعة، ولا بالتباطؤ الداخلي الناتج عن ضياع المادة، ولا بتباطؤ الجريان الهائج الذي فيه قوة التباطؤ متناسبة مع مربع السرعة، ولا بالتباطؤ المغناطيسي.

2-2-1- الحركة الاهتزازية المتخامدة بسبب قوة الاحتكاك

Damped Vibration Motion Caused by Friction Force

عندما يتحرك جسيم وزنه W كتلته m على سطح أفقي خشن وهو موثوق بنابض مثبت في نقطة ثابتة O ، فسوف يؤثر على الجسيم قوة الاحتكاك ($F_f = f.N$)، وهي ثابتة القيمة، وتتجه دوماً عكس اتجاه الحركة، عدا عن وزن الجسيم W ، ورد الفعل الناظمي ($N = W = m.g$)، والقوة المرجعة ($F_k = k\ .\ x$) الموضحة في (الشكل-4-17). في هذه الحالة يمكن كتابة:

معادلة التحريك لحركة الجسيم نحو اليمين:

$$m.\ddot{x} = -k.x - f.W$$

ومعادلة التحريك لحركة الجسيم نحو اليسار:

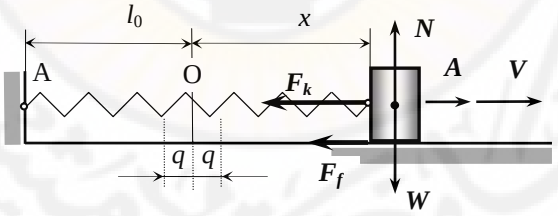
$$m.\ddot{x} = -k.x + f.W$$

هاتان المعادلتان تكتبان بمعادلة واحدة:

$$m.\ddot{x} = -k.x \pm f.m.g$$

بقسمة طرفي العلاقة على m ، وبرمز ($p^2 = k/m$) نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + p^2.x \pm f.g = 0 \qquad (18\text{-}4)$$



(الشكل-4-17) جسيم يتحرك على سطح أفقي خشن وهو موثوق بنابض.

وبحل هذه المعادلة نحصل على حل شبيه بحل معادلة (4-8):

$$x = a.\sin(p\,t + a) \pm q \qquad (19\text{-}4)$$

حيث:

$$q = g\,.\,f\,/\,p^2$$

يمكن توضيح هذه المعادلة بـــ (الشكل-4-18)، الذي يبين العلاقة بين الاســتطالة x والزمن t مع اعتبار شروط الحركة الابتدائية.

لتكن شروط الحركة الأولية:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x=x_0 \quad , \quad V=V_0=0$$

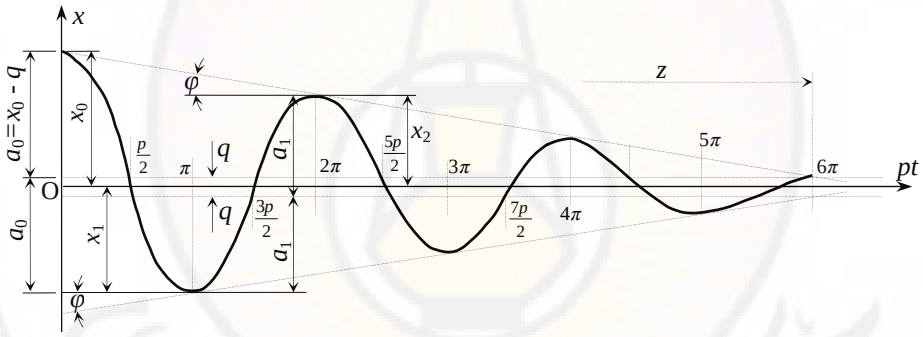
فمن معادلة الحركة (4-19) مع معادلة السرعة:

$$V=a.p.\cos(pt+a)$$

يكون الجسيم في النهاية اليمنى وسيبدأ بعدها حالاً بالتحرك نحو اليسار؛ لذا فإن القســم الأول من هذه الحركة نحو اليسار سيأخذ الإشارة الموجبة من معادلة الحركة، وسيكون:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad V_0=0 \quad \Rightarrow \quad 0=a.p.\cos a \quad \Rightarrow \quad a=90^o$$

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=a.\sin 90^o+q=a+q \quad \Rightarrow \quad a=x_0-q$$



(الشكل-4-18)

منحني العلاقة بين الاستطالة والزمن في الحركة الاهتزازية المتخامدة بسبب قوة الاحتكاك.

وستكون معادلة الحركة من النهاية اليمنى إلى النهاية اليسرى كالتالي:

$$x=(x_0-q)\sin(pt+a)+q$$

$$x=(x_0-q)(\sin pt.\cos a+\cos pt.\sin a)+q$$

$$x=(x_0-q)\cos pt+q \qquad (20\text{-}4)$$

إن هذه الحركة تمثل حركة تجيبية بالنسبة لمحور مزاح نحو الأعلــى بمقــدار q . كذلك يمكن أن نبرهن بأنه حينما يتحرك الجسيم من النهاية اليسرى إلــى النهايــة اليمنــى؛ فإن الحركة تمثل حركة تجيبية بالنسبة لمحور مزاح نحو الأسفل بمقدار q .

في كلتا الحالتين تكون الحركة نوسية ذات تواتر واحد (p = Const.)، إلا أنها تتناوب بالنسبة للمركز المنسحب بمقدار ($\pm q$) عن مركز الحركة الأساسي O ، وأن سعة هذه الحركة تتناقص وفق علاقة مستقيم ذي ميل:

$$\tan j = 2q/p$$

يتوقف الجسيم عن الحركة تماماً، أي: تخمد الحركة كلياً عندما تقع أول قمة لمنحني التجيب في المجال ($\pm q$)، وإن عدد نصف الاهتزازات، أي: نصف النوسات؛ الذي يبدأ الجسيم بالحركة بسرعة ابتدائية معدومة، هو عدد كامل n يحسب من (الشكل-4-18)، كما يلي:

$$\tan j = (x_0 - q)/z \quad \Rightarrow \quad z.\tan j = x_0 - q$$

حيث:

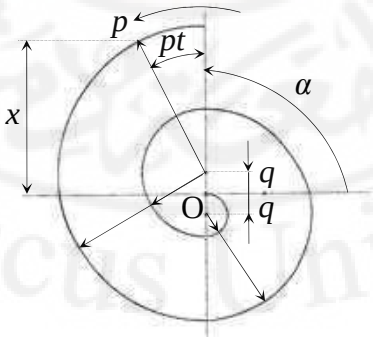
$$z = p\ .n \quad , \quad \tan j = 2q/p$$

بالتعويض:

$$n = (x_0 - q)/2q$$

إذا نتج أن العدد n غير صحيح؛ فإننا نجبره حتى يصبح عدداً كاملاً.

يمكن أن نمثل هذه الحركة بـ (الشكل-4-19) حيث تدور المتجهات الموضعية فيها بالتناوب حول مراكز مزاحة عن المركز الأصلي بمقدار ($\pm q$)، إذ أن في كل عملية انسحاب للمركز من وضع لآخر يتغير طول المتجه الموضعي.



(الشكل-4-19) تمثيل الحركة الاهتزازية المتخامدة.

مسألة-4-11

يوضع قضيب موشوري وزنه W ، وضعاً أفقياً على الحرفين العلويين لقرصين متماثلين، يدوران بسرعتين زاويتين عدديتين متساويتين موجهتين باتجاهين متعاكسين، والبعد بين مركزيهما هو $2a$ ، كما هو مبين في (الشكل-4-20)

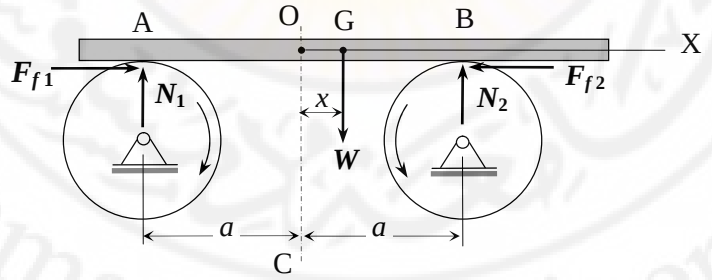
فإذا أزيح مركز ثقل القضيب G عن المستوى المتوسط OC ، ثم أطلق. المطلوب إيجاد البرهان أن القضيب يهتز اهتزازاً توافقياً بسيطاً ذا دور متعلق بالمسافة a ، وبمعامل احتكاك حركي f الذي يفرض ثابتاً بين القضيب والقرصين.

الحل:

نتخذ مبدأ الإحداثيات O في منتصف المسافة بين القرصين، ونعدّ الاتجاه الأيمن موجباً على المحور الـ X المنطبق على مسار حركة القضيب، ويبين (الشكل-4-20) القوى الفاعلة في القضيب عند أي إزاحة x لمركز ثقله G عن المستوى المتوسط، ونجد استناداً إلى علم السكون أن ردي الفعل الشاقوليين N_1 و N_2 هما:

$$M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad W(a-x) = N_1 . 2a \quad \Rightarrow \quad N_1 = W(a-x)/2a$$

$$M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad W(a+x) = N_2 . 2a \quad \Rightarrow \quad N_2 = W(a+x)/2a$$



(الشكل-4-20) قضيب موشوري متوضع أفقياً على الحرفين العلويين لقرصين متماثلين.

فتكون بذلك قوتا الاحتكاك الموافقتان لردي الفعل والموازيتان لمحور القضيب؛ هما:

$$F_{f1} = f.N_1 \quad , \quad F_{f2} = f.N_2$$

وتصبح المعادلة التفاضلية للحركة عندئذ:

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = -F_{f2} + F_{f1}$$

ولما كان وضع القضيب المبين في الشكل يعطينا:

$$F_{f2} > F_{f1}$$

فإن ثمة قوة غير موازنة تفعل في القضيب وتسعى إلى أن تعيده إلى وضعه في المنتصـــف، وبالتعويض بقيم F_{f1} و F_{f2} في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = -\frac{f.W}{a}x$$

أو:

$$\ddot{x} + \frac{f.g}{a}x = 0$$

وحل هذه المعادلة هو معادلة حركة توافقية بسيطة فيها:

$$f.g/a = p^2$$

ودورها:

$$t = \frac{2p}{p} = 2p\sqrt{\frac{a}{f.g}}$$

يمكن استخدام هذه العلاقة لتعيين أمثال الاحتكاك الحركي تجريبياً، فإذا كان قد تم قياس الدور τ بالاختبار المباشر، أمكن حساب f من هذه العلاقة:

$$f = \frac{4.p^2.a}{g.t^2}$$

2-2-2- الحركة الاهتزازية المتخامدة بسبب قوة مقاومة الوسط
Damped Vibration Motion Caused by Medium Friction

عندما يتحرك جسيم وزنه W كتلته m في وسط هواء، أو سائل، تنشأ قوة مقاومة الوسط؛ التي تؤثر على الاهتزازات الحرة، وتتناسب من أجل:

السرعات الصغيرة لها مع سرعة الجسيم وفق العلاقة:

$$\boldsymbol{R} = -m\,.\,\boldsymbol{V}$$

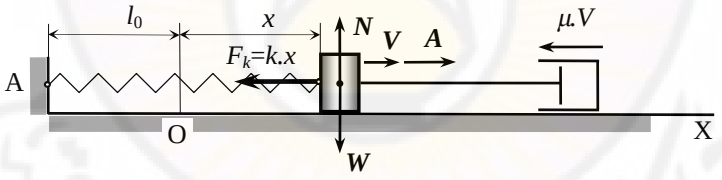
والسرعات الكبيرة لها مع مربع سرعة الجسيم وفق العلاقة:

$$\boldsymbol{R} = -m_1\,.\,\boldsymbol{V}^2$$

حيث μ و μ_1 عامل تناسب ثابت، ويدعى بـــ عامل الإخماد اللزج، وتدل الإشارة الســـالبة على أن القوة $\boldsymbol{R}$ تتجه عكس اتجاه السرعة $\boldsymbol{V}$.

ندرس الحالة الأولى، ونفرض أنه يؤثر على الجسيم في حركته قوة مرجعة $\boldsymbol{F_k}$ ، وقوة المقاومة $\boldsymbol{R}$ الموضحة في (الشكل-4-21). عندئذ فإن:

$$R = -m\,.\,V_X = -m\,.\,\dot{x} \qquad \text{و} \qquad F_{kX} = -k\,.\,x$$



(الشكل-4-21) جسيم يخضع خلال حركته الاهتزازية لقوة مرجعة $\boldsymbol{F_k}$ وقوة المقاومة $\boldsymbol{R}$.

وتكون معادلة التحريك باتجاه الحركة هي:

$$m.\ddot{x} = -k\,.\,x - m.\dot{x}$$

وبقسمة طرفيها على m نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\ddot{x} + 2b.\dot{x} + p^2.x = 0 \qquad (21\text{-}4)$$

حيث:

$$p^2 = k/m \qquad , \qquad 2b = m/m \qquad (22\text{-}4)$$

إن المعادلة (4-21) هي المعادلة التفاضلية للاهتزازات المتخامدة الناتجة عن وجود مقاومة تتناسب مع السرعة، ويبحث عن حلها، كما يبحث عن حل المعادلة (4-4)؛ بأن نفرض:

$$x = e^{nt}$$

بالتعويض بهذه القيمة للمتغير x في المعادلة (4-21)؛ نحصل على المعادلة المميزة:

$$n^2 + 2b.n + p^2 = 0$$

والتي جذراها:

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - p^2} \qquad (23\text{-}4)$$

بما أن وحدات قياس المقدارين b و p واحدة (1/sec) مما يكفل مقارنتهما بعضهما مع بعض؛ بأن نميز الحالات التالية:

1- عندما ($p > b$)، أي: عندما تكون القوة المقاومة صغيرة بالمقارنة مع القوة المرجعة.

نرمز إلى:

$$p_1 = \sqrt{p^2 - b^2} \qquad (24\text{-}4)$$

نجد من (4-23) أن:

$$n_{1,2} = -b \pm i.p_1$$

أي أن جذري المعادلة المميزة مركبتان، وعندئذ لا يختلف الحل العام للمعادلة (4-21) عن حل المعادلة (4-4) إلا بالعامل e^{-bt} ، أي: أن الحل يكون بالصورة التالية:

$$x = e^{-bt}(c_1.\sin p_1 t + c_2.\cos p_1 t) \qquad (25\text{-}4)$$

أو من الشكل:

$$x = a.e^{-bt}\sin(p_1 t + a) \qquad (26\text{-}4)$$

حيث α و a هما ثابتا التكامل، ويتحددان بالشروط الابتدائية.

كما يمكن الحصول على حل المعادلة (4-21) بوساطة متغير جديد z ، حيث:

$$x = z.e^{-bt} \qquad (27\text{-}4)$$

باشتقاق العلاقة:

$$\dot{x} = \dot{z}.e^{-bt} - z.b.e^{-bt}$$

$$\ddot{x} = \ddot{z}.e^{-bt} - \dot{z}.b.e^{-bt} - \dot{z}.b.e^{-bt} + z.b^2.e^{-bt}$$

$$\ddot{x} = e^{-bt}(\ddot{z} - 2\,b.\dot{z} + b^2.z)$$

بوضع هذه القيم في المعادلة (4-21) وإصلاحها؛ نحصل على:

$$\ddot{z} + z(p^2 - b^2) = 0 \qquad (28\text{-}4)$$

نرمز إلى:

$$p_1 = \sqrt{p^2 - b^2} \qquad (29\text{-}4)$$

نعوض هذه القيمة في (4-28):

$$\ddot{z} + p_1^2 z = 0$$

ويكتب حلها على الشكل:

$$z = a \sin(p_1 t + a)$$

بتعويض هذه العلاقة بما تساويها من المعادلة (4-27)؛ نحصل على:

$$x = a.e^{-bt} \sin(p_1 t + a) \qquad (30\text{-}4)$$

أو من الشكل:

$$x = e^{-bt}(c_1.\sin p_1 t + c_2.\cos p_1 t) \qquad (31\text{-}4)$$

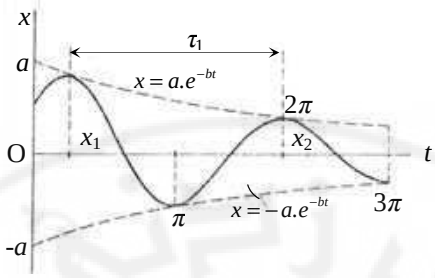
حيث α و a هما ثابتا التكامل، ويتحددان بالشروط الابتدائية.

تسمى الاهتزازات الحادثة تبعاً للعلاقتين (4-25) و (4-26) أو (4-30) و (4-31) بـــ الاهتزازات المتخامدة، نظراً لأن الانتقال الممثل بالمقدار (x = OM) يتناقص تدريجياً بمرور الزمن مقترباً من الصفر نتيجة لوجود عامل التخامد e^{-bt} .

إن المنحنى البياني لهذه الاهتزازات موضح في (الشكل-4-22)، وينحصر بين المنحنيين المتقطعين:

$$x = a.e^{-bt} \quad , \quad x = -a.e^{-bt}$$

لأن القيمة المطلقة للمنحني $\sin(p_1 t + a)$ لا يمكن أن تتعدى الواحد الصحيح، أي: أن النهايات العظمى لهذا المنحني لا تتخطى المنحنيين.



منحنى بياني للاهتزازات المتخامدة عندما تكون القوة المقاومة صغيرة بالمقارنة مع القوة المرجعة.

(الشكل-4-22)

إن مخطط الحركة يبين بأن الاهتزازات ليست دورية، مع أنها تظهر بعض التكرر، وأن الجسيم يهتز حول المركز O ، ويعود للمركز نفسه بعد فترة زمنية τ_1 مساوية للزمن الدوري للمقدار $\sin(p_1 t + a)$ أي: المقدار:

$$t_1 = \frac{2p}{p_1} = \frac{2p}{\sqrt{p^2 - b^2}} \qquad (32\text{-}4)$$

يسمى هذا الزمن الدوري بـــ دور الحركة الاهتزازية المتخامدة، وخلاله يعمل الجسيم اهتزازة كاملة واحدة، فإذا بدأ بالحركة إلى اليمين من الموضع ($x = 0$) (الشكل-4-20)، فإنه يصل إلى هذا الموضع، وهي تتحرك إلى اليمين أيضاً.

وإذا أخذنا بعين الاعتبار المعادلة (4-13) يمكن كتابة المعادلة (4-32) بالشكل التالي:

$$t_1 = \frac{2p}{p\sqrt{1 - b^2/p^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 - b^2/p^2}} \approx t\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{p^2}\right) \qquad (33\text{-}4)$$

يتضح من العلاقات الناتجة أن دور الحركة الاهتزازية المتخامدة أطول من دور الحركة الاهتزازية الحرة ($\tau_1 > \tau$)، أي: أن وجود المقاومة يزيد بعض الشيء الزمن الدوري للاهتزازة.

2-عندما ($b << p$) أي: عندما تكون المقاومة صغيرة جداً بالمقارنة مع القوة المرجعة.

يمكن إهمال المقدار b^2 / p^2 بالمقارنة مع الواحد الصحيح، وعندها يمكن اعتبار أن ($\tau_1 \approx \tau$)، وبالتالي فإن المقاومة الصغيرة لا تؤثر عملياً على الزمن الدوري للاهتزازة.

كما يتضح أن الفترة الزمنية بين وضعين متتاليين للجسيم المهتز إلى اليمين أو إلى اليسار تساوي أيضاً τ_1 ، كما هو مبين في(الشكل-4-22).

وبالتالي إذا حدث أن الإزاحة العظمى x_1 نحو اليمين استغرقت زمناً t_1 ؛ فإن الإزاحة الأخرى x_2 ستحصل بعد زمن ($t_2 = t_1+\tau_1$)، وهكذا.

وعندئذ وتبعاً للمعادلة (4-26)، وباعتبار أن ($p_1\ \tau_1 = 2\ \pi$)؛ نحصل على:

$$x_1 = a\,.e^{-b\,t_1}\ \sin(\ p_1\,t_1 + a\ )$$

$$x_2 = a\,.e^{-b(t_1+t_1)}\ \sin(\ p_1\,t_1 + p_1\,t_{\ 1} + a\ ) = x_1.e^{-b\,t_1}$$

وبالمثل؛ فإنه لأي مرور x_{n+1} يكون:

$$x_{n+1} = x_n.e^{-b\,t_1}$$

وهكذا يتضح أن سعة الاهتزازة x_1 ، x_2 ، x_3 أي: مطال الحركة الاهتزازية يتناقص وفق سلسلة هندسية أساسها هو $e^{-b\,t_1}$ الذي يمثل تناقص الاهتزازة المعطاة، ويدعى بـــ عامل التخامد (*Damping Decrement*)، وتسمى القيمة المطلقة للوغاريتم هذا المقدار أي: $b\ \tau_1$ بـــ العامل اللوغارتمي للتخامد (*Logarithmic Decrement*).

وينتج من كل ما حصلنا عليه أن المقاومة الصغيرة ليس لها أي تأثير على دور الحركة الاهتزازية، إنما تؤدي إلى تخامد حركة الجسيم تدريجياً؛ نتيجة لتناقص سعة الاهتزازة وفق سلسلة هندسية.

3- عندما ($b >> p$) أي: عندما تكون قوة المقاومة كبيرة بالمقارنة مع القوة المرجعة.

نرمز إلى:

$$b^2 - p^2 = r^2$$

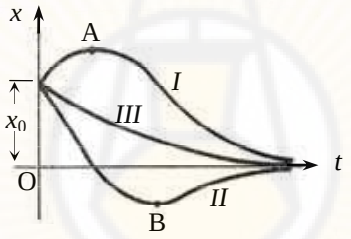
نجد أن جذري المعادلة (4-23) المميزة في هذه الحالة يساويان إلى:

$$n_{12} = b \pm r$$

أي: إنهما جذران حقيقيان وسالبان؛ لأن ($r < b$). وبالتالي فإن حل المعادلة (4-22) الذي يصف حركة الجسيم يكون بالشكل التالي:

$$x = c_1 e^{-(b+r)t} + c_2 e^{-(b-r)t} \qquad (34\text{-}4)$$

وبما أن الدالة e^{-at} ($a > 0$)، تتناقص بمرور الزمن باطراد مقتربة إلى الصفر؛ فإن حركة الجسيم في هذه الحالة لن تكون حركة اهتزازية، ويقترب الجسيم تدريجياً تحت تأثير القوة المرجعة إلى وضع الاتزان ($x = 0$)، والمنحني البياني لهذه الحركة يتبع للشروط الابتدائية، كما هو موضح في (الشكل-4-23)، حيث:



منحنى بياني للاهتزازات المتخامدة عندما تكون القوة المقاومة كبيرة بالمقارنة مع القوة المرجعة.

(الشكل-4-23)

المنحني I يوافق:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 > 0 \quad , \quad V_0 > 0$$

حينئذ يبتعد الجسيم إلى أقصى اليمين، وبعدها يقترب إلى وضع التوازن دون أن تتجاوزه.

المنحني II يوافق:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 > 0 \quad , \quad V_0 < 0$$

كما أن:

$$|V_0| > x_0(b + \sqrt{b^2 - k^2})$$

حينئذ يبتعد الجسيم إلى أقصى اليسار، وبعدها يقترب إلى وضع التوازن دون أن تتجاوزه.

المنحني III يوافق:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x_0>0 \quad , \quad V_0<0$$

كما أن:

$$|V_0| < x_0(b+\sqrt{b^2-k^2})$$

وفي الحالات الثلاث تتخامد الحركة بسرعة.

4- عندما ($b = p$)، أي: الحالة الحدية عندما تكون قوة المقاومة تساوي القوة المرجعة.

يكون للمعادلة المميزة جذر مضاعف، ويصبح الحل العام من الشكل:

$$x=e^{-bt}(c_1+c_2\,t) \qquad (35\text{-}4)$$

نلاحظ أنه عندما تتناهى t إلى اللانهاية؛ فإن x غير معينة، وحل عدم التعيين يعطي:

$$\lim_{t\to\infty} x=0$$

من أجل الشروط الابتدائية:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x-x_0 \quad , \quad V=V_0$$

تكون معادلة الحركة:

$$x=e^{-b}\left[x_0+(V_0+b.x_0)t\right]$$

وشكل التخامد المبين في (الشكل-4-23) يتعلق بالشروط الابتدائية، حيث:

المنحني I يوافق:

$$x_0>0 \quad \text{و} \quad V_0>0$$

المنحني II يوافق:

$$V_0<0 \quad \text{و} \quad x_0>0 \quad \text{كما أن:} \quad |V_0|>b\,x_0$$

المنحني III يوافق:

$$V_0<0 \quad \text{و} \quad x_0<0 \quad \text{كما أن:} \quad |V_0|<b\,x_0$$

عند حل مسألة الاهتزازات المتخامدة حالة قوة المقاومة متناسبة مع سرعة الجسيم، لابد من تعيين كل من التردد الدائري p أي: التواتر الزاوي على أنه الجذر التربيعي للعامل لدى إحداثية الحركة، والنسبة $2b$ العامل لدى مسقط السرعة لحساب الدور، ومن ثم حسب ما يكون تناسب هذين العاملين فيما بينهما يكون حل المعادلة التفاضلية بأحد الأشكال (4-25) أو (4-34) أو (4-35).

مسألة-4-12

يربط جسيم وزنه ($W = m.g = 98$ N) إلى نابض، بحيث يتحرك وسط سائل، كما هو مبين في (الشكل-4-24).

فإذا كان ثابت مرونة النابض ($k = 10$ N/cm)، وقوة مقاومة الحركة متناسبة مع سرعة الجسيم ($R = \mu V$)، حيث ثابت التناسب ($\mu = 1.6$ N.sec/cm)، وكان الجسيم مزاحاً في لحظة البدء عن وضع التوازن السكوني نحو الأسفل بمقدار ($\delta_{st} = 4$ cm)، وأعطي سرعة ابتدائية ($V_0 = 4$ cm/sec) نحو الأسفل. المطلوب ايجاد معادلة حركة الجسيم.

الحل:

نوجه المحور OY وفق الشاقول نحو الأسفل، ونعدّ مبدأ القياس O في وضع التوازن السكوني للجسيم، فتكون الشروط البدائية لحركته:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 = d_{st} = 4 \text{ cm} \quad , \quad V_0 = \dot{y}_0 = 4 \text{ cm/sec}$$

عندما يكون الجسيم على مسافة y عن وضع التوازن السكوني ($y > 0$)؛ فإن القوى المؤثرة عليه تتضمن ثقله ($W_y = W$)، قوة المرونة في النابض [$F_{ky} = -k(\delta_{st} + y)$]، وقوة المقاومة من جهة السائل ($R_y = -m.V_y = -m.\dot{y}$).

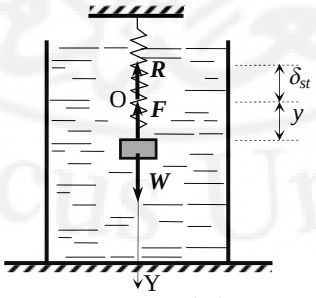
وتكون معادلة التحريك باتجاه الحركة هي:

$$m.\ddot{y} = -k(d_{st} + y) - m.\dot{y} + W$$

بقسمة طرفيها على m نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة كالمعادلة (4-21):

$$\ddot{y} + 2b.\dot{y} + p^2.y = 0 \qquad (1)$$

حيث: $2b = \frac{m}{m} = \frac{m.g}{W} = 16\frac{1}{\sec}$, $p^2 = \frac{k}{m} = \frac{k.g}{W} = 100\ \frac{1}{\sec^2}$



(الشكل-4-24) جسيم مربوط إلى نابض بحيث يتحرك وسط سائل.

بما أن ($p > b$) حالة المقاومة صغيرة بالمقارنة مع القوة المرجعة، يكون حل المعادلة التفاضلية إما كالمعادلة (4-25):

$$y = e^{-bt}\,(c_1.\sin p_1 t + c_2.\cos p_1 t) \qquad (2)$$

حيث:

$$(p_1 = \sqrt{p^2 - b^2}\,)$$

وتكون سرعة الجسيم:

$$V = \dot{y} = e^{-bt}\,(c_2.p_1.\sin p_1 t + c_1.p_1.\cos p_1 t) - b.e^{-bt}\,(c_1.\sin p_1 t + c_2.\cos p_1 t) \quad (3)$$

وتعين الثوابت c_1 و c_2 من (2) و(3)، بوضع:

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{\dot{y}_0 + b.y_0}{p_1} \qquad , \qquad c_2 = y_0$$

بتعويض هذه القيم في (2)، نجد:

$$y = e^{-bt}\,(y_0.\cos p_1 t + \frac{\dot{y}_0 + b.y_0}{p_1}\sin p_1 t)$$

أو كالمعادلة (4-26):

$$y = a.e^{-bt}\sin(p_1 t + a)$$

بالمقارنة بين صيغتي الحل نحصل على:

$$y_0 = a.\sin a \quad , \quad \frac{\dot{y}_0 + b.y_0}{p_1} = \cos a$$

منه نحصل على:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + b.y_0)^2}{p_1^2}} \qquad , \qquad a = \arctan\frac{y_0.p_1}{\dot{y}_0 + b.y_0}$$

وبالتعويض بالقيم العددية وفق معطيات المسألة، نجد:

$$p_1 = 6\ \sec^{-1} \quad , \quad a = 0.59\ \text{rad}$$

وتصبح معادلة الحركة:

$$y = 7.2\ e^{-8t}\ \sin(6\,t + 0.59)\ \text{cm}$$

ويكون دور الاهتزاز:

$$t_1 = 2p\ /\ p_1 = 1.05\ \text{sec}$$

وإذا كانت المقاومة غير موجودة لكان دور الاهتزازات الحرة:

$$t = 2p\ /\ p = 0.628\ \text{sec}$$

وإن سعة الاهتزاز تتناقص وفق سلسلة هندسية أساسها:

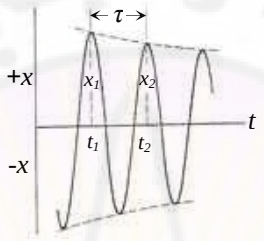
$$e^{-8t_1} = 0.0023$$

مسألة-4-13

كتلة قدرها 2 kg تهتز اهتزازة حرة مع إخماد لزج بحيث تتناقص سعة الاهتـــزاز، كما هو مبين في (الشكل-4-25).

فإذا كان مقدار سعتين متتاليين ($x_1 = 2.10$ mm) و($x_2 = 1.90$ mm)، وكان تـــردد الاهتزاز 2 Hz دورة في الثانية. المطلوب ايجاد قيمة معامل الإخماد اللزج μ .

الحل:



(الشكل-4-25) منحني بياني لاهتزازة حرة مع إخماد لزج.

من المعادلة (4-26) لدينا:

$$x = x_0.e^{-bt}\ \sin(p_1 t + a)$$

بالتعويض للسعة الأولى:

$$x_1 = x_0.e^{-bt_1}\ \sin(p_1 t + a)$$

وللسعة الثانية:

$$x_2 = x_0.e^{-b(t_1+t)}\ \sin(p_1 t + a)$$

حيث الفترة الزمنية:

$$\tau = 1/f_r = 1/2 \text{ sec}$$

والحد $\sin(p_1 t + \alpha)$ له القيمة نفسها من أجل كل انتقال ذروة.

من نسبة الذروات:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0.e^{-bt_1}}{x_0.e^{-b(t_1+t)}} = e^{bt}$$

بالحل:

$$\ln(x_1 / x_2) = b.t\ = (m/2m)t$$

بالتعويض بالقيم العددية ينتج معامل الإخماد اللزج:

$$\mu = 0.801\ \text{N/(m/sec)}$$

3-2- الحركة الاهتزازية القسرية *Forced Vibration Motion*

ندرس حالة مهمة للحركة الاهتزازية، وذلك عندما يؤثر على الجسيم بالإضافة إلى القوة المرجعة $\boldsymbol{F_k}$ قوة أخرى $\boldsymbol{Q}$ دورية مولدة للاضطراب تابعة للزمن تدعى بـــ القوة الاضطرابية (*Disturbing Force*)، والاهتزازات الحادثة تحت تأثير هذه القوة تدعى بـــ الاهتزازات القسرية.

تنشأ هذه الاهتزازات عادة في الآلات، والمحركات نتيجة عدم الدقة في موازنة الأجزاء الدوارة، أو بسبب وجود قوة متغيرة بشكل دوري كضغط الماء أو البخار في أسطوانات المحركات، وتعدّ في الحياة العملية ذات أهمية خاصة عندما تتغير القوة الاضطرابية دورياً بتغير الزمن.

نفرض أنه يوجد محرك وزنه W محمول على نابضين شاقوليين، وملزم بأن يتحرك حركة شاقولية، وهو متوازن بشكل كامل، كما هو مبين a من (الشكل-4-26)، والقوة الوحيدة الفاعلة المطبقة عليه هي وزنه W التي تولد انحرافاً سكونياً يساوي ($\delta_{st} = W / k$)؛ فإذا ضغطنا هذا المحرك إلى الأسفل بدءاً من وضع توازنه الساكن، وأطلقناه فجأةً، فتتولد فيه حركة اهتزازية حرة.



a- محرك متوازن. b- محرك غير متوازن.

(الشكل-4-26)

ولنفرض أن المحرك غير متوازن بشكل كامل، بحيث يثبت على محيطه الجسيم A ، كما هو مبين في b من (الشكل-4-26)، وبما أن كتلة الجسم لامركزية؛ فإنها تولد قوة نابذة $\boldsymbol{Q_0}$ ، والمركبة الشاقولية لها:

$$Q = Q_0 \sin (w\,t + \alpha) \qquad (36\text{-}4)$$

حيث Q هي القوة المولدة للاضطراب و Q_0 تمثل أكبر قيمة للقوة الاضطرابية، و w السرعة الزاوية المنتظمة لدوران محور المحرك؛ التي تمثل تردد القوة الاضطرابية، وتختلف عن السرعة الزاوية للحركة الاهتزازية p بصورة عامة، و α تمثل زاوية الطور الابتدائية.

يمكن أن تتم الحركة الاهتزازية القسرية بقوة مقاومة، أو دون قوة مقاومة، كما يمكن أن تكون القوة الاضطرابية قوة تتغير بتغير الزمن وفقاً لقانون آخر.

2-3-1- الحركة الاهتزازية القسرية الحرة

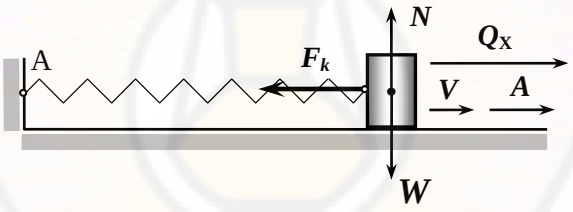
Undamped Forced Vibration Motion

سندرس حركة الجسيم الموضح في (الشكل-4-27) عندما يؤثر عليه بالإضافة إلى القوة المرجعة $\boldsymbol{F_k}$ قوة اضطرابية $\boldsymbol{Q}$ تتغير دورياً بتغير الزمن، ويساوي مسقطها على المحور X :

$$Q_X = Q_0 . \sin(w t + a)$$

في هذه الحالة تدعى القوة الاضطرابية بالتوافقية، ومعادلة التحريك لهذه الحركة هو:

$$m . \ddot{x} = -k . x + Q_0 . \sin(w t + a)$$



(الشكل-4-27) جسيم خاضع بالإضافة إلى القوة المرجعة $\boldsymbol{F_k}$ قوة اضطرابية $\boldsymbol{Q}$.

نقسم طرفي هذه المعادلة على m ونفرض أن:

$$Q_0 / m = q_0 \qquad , \qquad k / m = p^2 \qquad (37\text{-}4)$$

ثم نحول معادلة التحريك إلى الصورة التالية:

$$\ddot{x} + p^2 . x = q_0 . \sin(w t + a) \qquad (38\text{-}4)$$

التي تمثل المعادلة التفاضلية للاهتزازات القسرية عند انعدام المقاومة، وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية، وحلها يتألف من تابعين:

$$x = x_1 + x_2$$

حيث التابع x_1 يمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة أي: دون الطرف الأيمن، وهي معادلة حركة نوسية بسيطة، ويطابق حل المعادلة (4-4) الذي تعطيه العلاقة (4-8):

$$x_1 = a\sin(pt + \alpha)$$

أو:

$$x_1 = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt$$

والتابع x_2 يمثل الحل الخاص (*Particular Solution*) لكل المعادلة (4-38)، وبفرض أن $(p \neq w)$؛ فإن الحل هو من الشكل:

$$x_2 = A\sin(w\,t + \alpha)$$

حيث A عدد ثابت يمثل سعة الحركة، ويجب تعيينه بحيث يحقق التابع x_2 المعادلة (4-38).

باشتقاق معادلة x_2 مرتين:

$$\dot{x}_2 = +A.w\,.\cos(w\,t + a)$$

$$\ddot{x}_2 = -A.w^2.\sin(w\,t + a)$$

وبالتعويض بقيمة x_2 ومشتقاتها الثانية في المعادلة (4-38)، نحصل على:

$$-w^2.A.\sin(w\,t + \alpha) + p^2.A.\sin(w\,t + \alpha) = q_0.\sin(w\,t + \alpha)$$

وتتحقق هذه المتساوية لأي قيمة لـ t إذا كان:

$$q_0 = A(p^2 - w^2)$$

منه:

$$A = q_0/(p^2 - w^2)$$

بالتالي يكون الحل الخاص المطلوب:

$$x_2 = \frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin(w\,t + a) \qquad (39\text{-}4)$$

والحل العام للمعادلة (4-38) يكون أخيراً بإحدى الصورتين:

$$x = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt + \frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin(w\,t + a) \qquad (40\text{-}4)$$

$$x = a.\sin(pt + a) + \frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin(w\,t + a) \qquad (41\text{-}4)$$

تعين ثوابت التكامل c_1 و c_2 في (4-40) أو a و α في (4-41) من الشروط الابتدائية.

يبين الحل في (4-41) أن الحركة الاهتزازية القسرية العامة تتكون من مجموع حركتين توافقيتين:

- الحد الأول

يمثل معادلة لحركة اهتزازية حرة سعتها a ، وترددها p ، ودورها $(\tau = 2\pi / p)$، وترددها الطبيعي $(f_r = p / 2\pi)$، والاهتزازات الناتجة عنها تعتمد على الشروط الابتدائية؛ لاحتوائها ثوابت تكامل، وهي سريعة الزوال نتيجة لوجود الاحتكاك، وتدعى بـ الحركة الاهتزازية الذاتية أو الطبيعية.

- الحد الثاني

يمثل معادلة لحركة اهتزازية قسرية سعتها A ، وترددها w ، ودورها $(\tau_1 = 2\pi / w)$، وترددها المطبق $(f_{r1} = w / 2\pi)$، والاهتزازات الناتجة عنها لا تعتمد على الشروط الابتدائية؛ لعدم احتوائها ثوابت تكامل، وتتولد بالقوة Q وهي مستمرة دون تحديد ما دامت القوة تؤثر، وتدعى بـ الحركة الاهتزازية القسرية.

عملياً تخمد الاهتزازات الذاتية بسرعة ملحوظة؛ نتيجة للوجود الحتمي لهذه المقاومة، ولذا فالاهتزازات القسرية لها أهمية أساسية في الحركة، وعلاقتها معطاة بالمعادلة (4-39).

لتحليل الحركة الاهتزازية القسرية، وكما هو واضح من علاقتها؛ فإن p تردد ودور الاهتزازات القسرية يتفق مع w تردد ودور القوة الاضطرابية:

فعندما $(w < p)$ كما يتضح من مقارنة المعادلتين (4-36) و (4-41) تتفق الاهتزازات القسرية والقوة الاضطرابية بزاوية الطور، وكلتاهما تساوي $w\,t$ ، أي: أن فرق الطور يساوي الصفر، وتسمى الاهتزازات في هذه الحالة الاهتزازات القسرية ذات التواتر الصغير.

وعندما $(w > p)$ فيمكننا إدخال الإشارة السالبة لقيمة الجيب، وتكتب معادلة الحركة الاهتزازية القسرية بالشكل:

$$x_2 = \frac{q_0}{p^2 - w^2} \sin(w\,t + a - p)$$

وتكون الاهتزازات القسرية متأخرة بالطور بمقدار π عن القوة الاضطرابية، وتسمى الاهتزازات في هذه الحالة بـ الاهتزازات القسرية ذات التواتر الكبير.

وهكذا فعندما ($w < p$)؛ فإن الجسيم يكون مزاحاً إلى الجهة المتجهة إليها في اللحظة المعطاة القوة الاضطرابية، أما في حال ($w > p$)؛ فإن الجسيم يكون مزاحاً إلى الجهة المعاكسة لاتجاه القوة الاضطرابية، وفي كلتا الحالتين يكون انحراف الجسيم عن مبدأ الإحداثيات أعظمياً في اللحظة نفسها التي تبلغ القوة الاضطرابية قيمتها العظمى.

يمكن الحصول على علاقة سعة الاهتزازات القسرية بالتواتر الزاوي للقوة الاضطرابية، إذا قسمنا البسط والمقاوم على p^2 في علاقة سعة القوة الاضطرابية:

$$A = \frac{q_0}{\left|p^2 - w^2\right|} = \frac{d_0}{\left|1-(w/p)^2\right|} \qquad (42\text{-}4)$$

حيث من المعادلتين (4-37) يكون:

$$d_0 = q_0 / p^2 = Q_0 / k$$

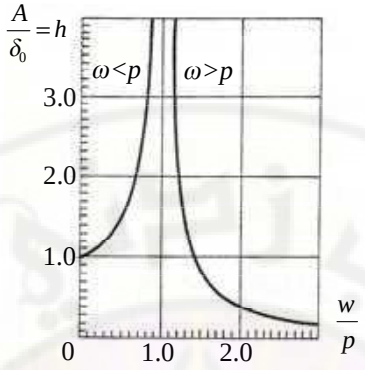
و δ_0 يمثل مقدار الانحراف السكوني للجسيم تحت تأثير القوة $\boldsymbol{Q}_0$ المولدة للاضطراب، والذي يختلف عن الانحراف السكوني $(d_{st} = W/k)$ الناتج بفعل قوة الثقالة W .

إن نسبة السعة A على الانحراف السكوني δ_0 تمثل الفعل التحريكي للقوة المولدة للاضطراب، يرمز لها بـ h وتدعى بـ معامل التكبير، أو سرعة التغير، وتساوي إلى:

$$h = \frac{A}{d_0} = \frac{1}{\left|1-(w/p)^2\right|}$$

نلاحظ أن مقدار هذا المعامل والسعة A من المعادلة (4-42)، لا يتعلقان إلا بالنسبة w/p ، أي: بالنسبة بين تردد القوة المولدة للاضطراب، أو f_{r1} التواتر المطبق، وتردد الاهتزازات الذاتية، أو f_r التواتر الطبيعي، ومنحنى هذا التغير موضح تخطيطياً في (الشكل-4-28).

يتضح من الرسم البياني، أو من المعادلة (4-42) أنه يمكن الحصول على قيم لمعامل التكبير، وعلى اهتزازات قسرية ذات سعات مختلفة؛ باختيار علاقات مختلفة بين w و p .



(الشكل-4-28) رسم بياني يحدد قيم لمعامل التكبير باختيار علاقات مختلفة بين w و p .

نميز الحالات التالية:

عندما تكون ($w = 0$) أو صغيرة بالنسبة إلى p ($w << p$)، أي: عندما يكون التواتر المطبق منخفضاً جداً بالنسبة للتواتر الطبيعي، لا يكون معامل التكبير بعيداً بعداً محسوساً عن الواحد، والسعة A تساوي δ_0 أو تكون قريبة من هذا المقدار.

عندما تقترب w من p ، أي: عندما يقترب التواتر المطبق من التواتر الطبيعي تصبح السعة A كبيرة جداً، ويزداد معامل التكبير ازدياداً سريعاً جداً، حتى يصبح غير محدود ($\eta = \infty$).

عندما تكون ($w = p$)، تدعى هذه الحالة بالطنين، ونستنتج من ذلك أن سعة الاهتزاز القسري في وضع الطنين يمكن أن يزداد من دون حد ولا نهاية، غير أن فعل الاحتكاك يحول دون ازدياد السعة ازدياداً غير محدود.

عندما ($w >> p$) يكون قد تجاوزنا وضع الطنين؛ فإن السعة A تصبح صغيرة جداً قريبة من الصفر، ومعامل التكبير يبدأ في التناقص، ثم يبدأ في السعي إلى الصفر عندما تصبح النسبة w / p أكبر بعدة مرات من التواتر الطبيعي، والاهتزاز يقف.

أما ثوابت التكامل c_1 و c_2 في العلاقة (4-40) فتحدد من شروط بدء الحركة:

- فمن أجل الشروط:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \quad , \quad V_0 = \dot{x}_0$$

نحصل على:

$$c_1 = \frac{V_0}{p} - \frac{q_0.w}{p(p^2 - w^2)}\cos a \quad , \quad c_2 = x_0 - \frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin a$$

بالتعويض يمكن كتابة حل العلاقة (4-40) بالشكل:

$$x = \frac{V_0}{p}\sin\ pt + x_0.\cos\ pt - \frac{q_0}{p^2 - w^2}(\sin a\ .\cos\ pt + \frac{w}{p}\cos a\ .\sin\ pt) +$$

$$\frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin(\ pt + a\ ) \qquad (43\text{-}4)$$

تبين العلاقة (4-43) أن الحركة الاهتزازية القسرية تتكون من مجموع ثلاث حركات:

- الحدين الأوليين من الطرف الأيمن يمثل معادلة لحركة اهتزازية حرة؛ التي كان من الممكن أن تحصل في حال عدم وجود القوة الاضطرابية.

- الحد الثالث يمثل معادلة لحركة اهتزازية ذات تواتر زاوي p ، والناتجة عن القوة الاضطرابية.

- الحد الأخير يمثل معادلة لحركة اهتزازية قسرية.

- ومن أجل الشروط:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = V_0 = 0$$

بالتعويض في المعادلة (4-43) نحصل على:

$$x = \frac{q_0}{p^2 - w^2}[\sin(wt + a\ ) - \sin(\ pt + a\ )]$$

باعتبار العلاقة المثلثية:

$$\sin q - \sin b\ = 2.\sin\frac{q - b}{2}.\cos\frac{q + b}{2}$$

وعندما تكون:

$$w \approx p \quad \Rightarrow \quad w/p \approx 1 \quad \Rightarrow w + p = 2w = 2p$$

نحصل على:

$$x = \frac{2q_0}{p^2 - w^2} \sin(\frac{w-p}{2}t).\cos(wt + a) \qquad (44\text{-}4)$$

أو:

$$x = A(t).\cos(wt + a)$$

حيث:

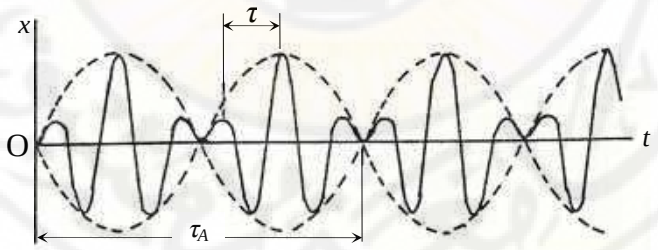
$$A(t) = \frac{2q_0}{p^2 - w^2} \sin(\frac{w-p}{2}t).\cos(wt + a)$$

$$A(t) \approx \frac{q_0}{p(p-w)} \sin(\frac{w-p}{2}t) \qquad (45\text{-}4)$$

تعبر العلاقة (44-4) عن حركة اهتزازية بتواتر زاوي w ، ودور $(\tau = 2\pi/w)$، وذات سعة تتغير وفق العلاقة الدورية (45-4). كما أن دور تغير السعة A هو:

$$t_A = \frac{2p}{\frac{w-p}{2}} = \frac{4p}{w-p} \qquad (46\text{-}4)$$

نلاحظ أن $(\tau_A >> \tau)$، ومخطط هذه الحركة موضح على (الشكل-4-29).



(الشكل-4-29) مخطط الحركة لحركة اهتزازية قسرية.

عند حل مسألة الاهتزازات القسرية يجب تعيين كل من التردد الدائري p ، وتردد القوة المولدة للاضطراب w في المعادلة التفاضلية قبل إجراء التكامل، وذلك لأن الحل الخاص x_2 يتعلق بالنسبة فيما بينهما.

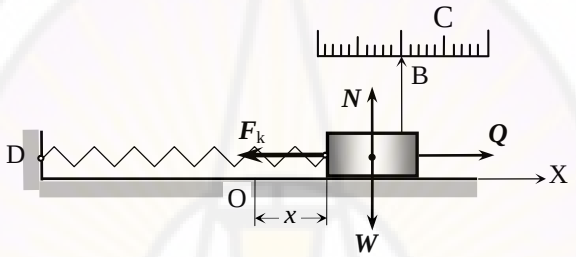
مسألة-4-14

يتألف جهاز لقياس الضغط المبين في (الشكل-4-30) من منزلقة M وزنها ($W=m.g=196$ N) يركب عليها مؤشر B ، وموصولة إلى نهاية نابض عامل صلابته ($k = 2$ kN/cm)، وتتحرك على مستو أفقي صقيل، وخاضعة لتأثير قوة مولدة للاضطراب:

$$Q = Q_0 \,.\, \sin w\, t$$

حيث Q_0 تمثل القيمة العظمى للقوة الاضطرابية وقيمتها ($Q_0 = 1.6$ kN)، و w تمثل تردد القوة الاضطرابية وقيمتها ($w = 60\ \text{sec}^{-1}$)؛ فإذا كانت المنزلقة في لحظة البدء في وضع التوازن السكوني أوجد معادلة حركة المنزلقة، ومعامل التكبير η .

الحل:



(الشكل-4-30) جهاز لقياس الضغط.

نوجه المحور X نحو اليمين ونعدُّ O مبدأ القياس في وضع التوازن السكوني للمنزلقة M ، وتكون شروط بدء الحركة:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad , \quad V_0 = \dot{x}_0 = 0$$

عندما تكون المنزلقة مزاحة عن وضع التوازن بمقدار ($x > 0$) تكون خاضعة لتأثير القوى $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{F_k}$ ، وتكون معادلة التحريك باتجاه الحركة هي:

$$m.\ddot{x} = -k.x + Q_0.\sin w\, t$$

بقسمة طرفيها على m نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة كالمعادلة (4-38):

$$\ddot{x} + p^2.x = q_0.\sin w\, t \qquad (1)$$

حيث:

$$p^2 = \frac{k}{m} = \frac{k.g}{W} = \frac{2000.981}{196} \approx 10^4\ \frac{1}{\text{sec}^2}$$

$$q_0 = \frac{Q_0}{m} = \frac{Q_0.g}{W} = \frac{1600.981}{196} \approx 8000\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

بما أن ($p > w$) يكون حل المعادلة التفاضلية كالمعادلة (4-40):

$$x = c_1.\sin pt + c_2.\cos pt + \frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin wt \qquad (2)$$

وتكون معادلة السرعة:

$$\dot{x} = c_1.p.\cos pt + c_2.p.\sin pt + \frac{q_0.w}{p^2 - w^2}\cos wt \qquad (3)$$

بتعويض شروط بدء الحركة في (2) و(3) نجد قيم الثوابت:

$$c_1 = -\frac{w}{p}.\frac{q_0}{p^2 - w^2} \quad , \quad c_2 = 0$$

وبالتالي تكون معادلة حركة المنزلقة M من الشكل:

$$x = -\frac{w}{p}.\frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin pt + \frac{q_0}{p^2 - w^2}\sin wt$$

أو:

$$x = -0.75\sin 100t + 1.25\sin 60t$$

الحد الأول x_1 يمثل معادلة لحركة اهتزازية حرة للمنزلقة الناتجة عن القوة المولدة للاضطراب Q .

والحد الثاني x_2 يمثل معادلة لحركة اهتزازية قسرية سعتها ($A = 1.25$ cm).

وتعين قوة المرونة في النابض بالعلاقة:

$$F_k = k.x = -1.5\sin 100t + 2.5\sin 60t \quad \text{kN}$$

في حال إذا كانت القوة المقاومة متناسبة مع السرعة، فإن الاهتزازات الحرة تتخامد، وعندها يشير المؤشر B إلى قيمة x_2 ، ويقيس الجهاز القوة Q_1 :

$$Q_1 = k.x_2 = \frac{k.q_0}{p^2 - w^2}\sin wt$$

التي تختلف عن القوة المؤثرة ($Q = Q_0.\sin wt$) فقط بالمقياس؛ الذي يساوي نسبة سعات كل منها:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{k.q_0}{Q_0(p^2 - w^2)} = \frac{p^2}{p^2 - w^2}$$

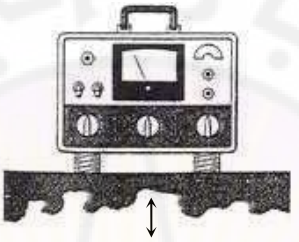
عندما يكون ($p >> \omega$) يصبح المقياس مساوياً الواحد، من أجل ذلك يجب اختيار نابض عامل صلابته k كبيرة، ويكون معامل التكبير η مساوياً لـــ :

$$h = \frac{A}{d_0} = \frac{A}{Q_0 / k} = \frac{1.25}{1.6/2} = 1.56$$

مسألة-4-15

لجهاز الطيف الموضح في (الشكل-4-31) كتلة 20 kg ، ومركب على نابض يستند على قاعدة أفقية، فإذا كانت سعة الاهتزاز الشاقولي للقاعدة هو 0.20 mm . المطلوب إيجاد مدى التردد لاهتزاز القاعدة التي يجب منعها؛ إذا أريد ألا تزداد سعة الاهتزازات الشاقولية للجهاز عن 0.30 mm ، وكان لكل من النوابض الأربعة معامل مرونة قدره 3 kN/m .

الحل:



(الشكل-4-31) جهاز الطيف.

من علاقة نسبة التكبير:

$$h = \frac{A}{d_0} = \frac{1}{\left|1-(w/p)^2\right|}$$

ولهذا تتحكم القيمة المحددة $(A/\delta_0)_{max} = 0.30/0.20 = 1.5$ القيمة المسموح بها w/p .

فمن أجل الجهاز فإن مربع التردد الدائري للاهتزاز الحر هو:

$$p^2 = k/m = 4\times3\times10^3/20 = 600\ (\text{rad/sec})^2$$

ويصبح مربع نسبة التردد:

$$(w/p)^2 = (2p\,.\,f_r/p)^2 = 4p^2.f_r^2/600 = 0.0658\ f_r^2$$

حيث f_r تمثل تردد اهتزاز القاعدة معطاة بالهرتز (دورة بالثانية).

فمن أجل $w < p$:

$$+1.5 = 1/(1-0.0658\ f_r^2) \qquad \Rightarrow \qquad f_r = 2.25\ \text{Hz}$$

ومن أجل $w > p$:

$$-1.5 = 1/(1-0.0658\ f_r^2) \qquad \Rightarrow \qquad f_r = 5.03\ \text{Hz}$$

وعلى هذا فإن المدى المحرم للترددات هو:

$$2.25 < f_r < 5.03$$

2-3-2- الطنين *Resonance*

في الحالة عندما ($p = w$)، أي: عندما يساوى تردد القوة الاضطرابية تردد الاهتزازات الذاتية يحدث ما يسمى بـــ ظاهرة الطنين، أو التردد الحرج، إذ تزداد سعة الاهتزازات بحيث تصبح كبيرة جداً تسبب كسر الجسم المهتز، أو الآلة المهتزة، وتُعَدُّ هذه الظاهرة حالة حرجة لا يمكن وصفها بالمعادلتين (4-39) و (4-42)، وتكون المعادلة التفاضلية للحركة من الشكل:

$$\ddot{x} + w^2 . x = q_0 \sin(w t + a)$$

ويجب البحث عن الحل الخاص لهذه المعادلة بالصورة:

$$x_2 = B \, . \, t \, . \cos(w t + \alpha)$$

وعندئذ يكون:

$$\ddot{x}_2 = -2 B.w.\sin(w t + a) - w^2 .B.t.\cos(w t + a)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

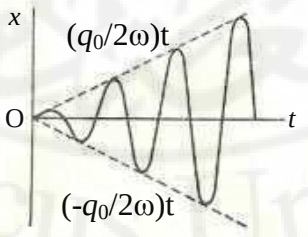
$$-2 B.w.\sin(w t + a) = q_0 .\sin(w t + a) \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{q_0}{2w}$$

ونتيجة لذلك تعين معادلة الاهتزازات القسرية عند الطنين، مع انعدام المقاومة بالعلاقة:

$$x_2 = -\frac{q_0}{2w} \, t \, \cos(w t + a) \qquad (47\text{-}4)$$

أو:

$$x_2 = \frac{q_0}{2w} \, t \, \sin(w t + a - \frac{p}{2})$$



(الشكل-4-32) منحني بياني يبين سعة الاهتزازات القسرية في حالة الطنين.

تدل المعادلة على أن سعة الاهتزازات القسرية في حالة الطنين تزداد بلا حدود بمرور الزمن، كما هو موضح في (الشكل-4-32)، والتي تسبب كسر الجسم المهتز، أو الآلة المهتزة، وتكون الاهتزازات القسرية متأخرة بالصفحة بمقدار $\pi /2$ عن القوة الاضطرابية، أي: أن الفرق بين زاويتي الطور في حالة الطنين يساوي $\pi /2$.

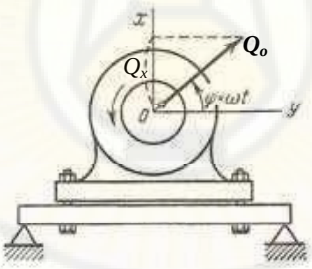
وعند حل المسائل التي يطلب فيها تعيين الشروط التي من أجلها يحصل الطنين، فلا حاجة لمكاملة المعادلة التفاضلية، يكفي فقط تعيين التواتر الزاوي للاهتزازات الحرة والاهتزازات القسرية، ومن ثم المساواة بينهما.

مسألة-4-16

ينثني قضيب مثبت عليه محرك كهربائي الموضح في (الشكل-4-33) نتيجة لوزن المحرك بمقدار (δ_{st} = 1 cm)، وعند دوران المحرك تحدث حركة اهتزازية؛ نظراً لوجود جسيم لا مركزي على محيط محور المحرك.

المطلوب إيجاد عدد دورات محور المحرك n_{cr} في الدقيقة؛ التي تحدث عندها ظاهرة الطنين.

الحل:



(الشكل-4-33) قضيب مثبت عليه محرك كهربائي.

نعلم أن الطنين يحدث عندما يكون p تردد الجسم المهتز يساوي w تردد القوة الاضطرابية المسببة للاهتزاز، أي: عندما ($w = p$) ، حيث الزمن الدوري لاهتزازات القضيب الذاتية هو ($\tau = 2\pi / p$) ، ويحسب على الشكل التالي:

$$d_{st}.k = m.g \quad \Rightarrow \quad d_{st}.k/m = g \quad \Rightarrow \quad d_{st}.p^2 = g \quad \Rightarrow \quad p^2 = g/d_{st}$$

إذن:

$$t = 2p\sqrt{d_{st}/g}$$

فإذا كان مركز ثقل محور المحرك مزاحاً؛ فإنه تؤثر على المحور قوة طاردة مركزية $\boldsymbol{Q}_0$ مسقطها على محور OY ، يساوي إلى:

$$Q_y = Q_0 \sin w\,t$$

الذي يمثل القوة الاضطرابية المؤثرة على القضيب، و w السرعة الزاوية لمحور المحرك. هذه القوة Q_y هي التي تسبب الاهتزاز، وترددها هو w ، وهو تردد الاهتزازات القسرية، والزمن الدوري لها:

$$\tau_1 = 2\,\pi / w$$

لكن عند حدوث الطنين سيكون:

$$\tau_1 = \tau \quad \rightarrow \quad w = p$$

أي:

$$w_{cr} = p = \sqrt{g / d_{st}}$$

منه السرعة الزاوية:

$$w_{cr} = \sqrt{9.81/0.01} = 31.3 \ rad/\sec$$

وعدد الدورات بالدقيقة:

$$n_{cr} = 30\,w_{cr} / p = 300 \ r.p.m$$

حتى لا يحدث الطنين يجب أن يكون عدد دورات التشغيل أكبر من هذا العدد بكثير.

2-3-3- الحركة الاهتزازية القسرية المتخامدة

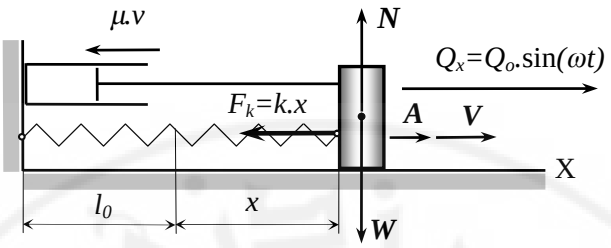
Damped Forced Vibration Motion

سندرس حركة الجسيم عندما تؤثر عليه القوة المرجعة $\boldsymbol{F_k}$ ، وقوة التخامد قوة مقاومة $\boldsymbol{R}$ تتناسب مع السرعة، بالإضافة إلى قوة اضطرابية $\boldsymbol{Q}$ محددة بالمعادلة (4-36) الموضحة في (الشكل-4-34)، ومعادلة التحريك لهذه الحركة هي من الشكل:

$$m.\ddot{x} = -k.x - m.\dot{x} + Q_0.\sin(w\,t + a)$$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على m وأخذ رموز المعادلتين (4-22) و(4-37) بعين الاعتبار، نحصل على:

$$\ddot{x} + 2.b.\dot{x} + w^2.x = Q_0.\sin(w\,t + a) \qquad (48\text{-}4)$$



(الشكل-4-34)

جسيم خاضع لقوة مرجعة $\boldsymbol{F_k}$ وقوة التخامد $\boldsymbol{R}$ بالإضافة إلى قوة اضطرابية $\boldsymbol{Q}$.

هذه هي المعادلة التفاضلية للاهتزازات القسرية المتخامدة لجسيم عند وجود مقاومة، وحلها العام كما نعلم هو من الشكل:

$$x = x_1 + x_2$$

حيث x_1 تمثل الحل العام دون طرفها الأيمن، أي المعادلة (4-21)، وعندما $(p > b)$ يعطى هذا الحل بالمعادلة (4-26):

$$x_1 = a.e^{-bt} \sin(w_1 t + a)$$

و x_2 تمثل الحل الخاص للمعادلة (4-46) كاملة، وهو من الشكل:

$$x_2 = A \sin(w t + a - b)$$

حيث β و A ثابتان يعتمدان على القوة الاضطرابية، ويتم تعيينهما بحيث تتحقق المعادلة (4-48)، وبحساب المشتقات لـ x_2 :

$$\dot{x}_2 = A.w.\cos(w t + a - b) \quad , \quad \ddot{x}_2 = -A.w^2.\sin(w t + a - b)$$

وبالتعويض بقيمتي المشتقتين والمقدار x_2 في الطرف الأيسر للمعادلة (4-48)، ونصطلح للاختصار على أن:

$$w t + a - b = j \qquad \Rightarrow \qquad w t + a = j + b$$

نحصل على:

$$-A.w^2.\sin j + 2.b.w.A.\cos j + p^2.A.\sin j = q_0.\sin(j + b)$$

$$A(p^2 - w^2)\sin j + 2.b.w.A.\cos j = q_0(\cos b.\sin j + \sin b.\cos j)$$

ولكي تتحقق هذه المتساوية لأي φ في أي لحظة زمنية، يجب أن تتساوى معاملات كل من $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ في الطرفين من المعادلة، وبالتالي فإن:

$$A(p^2 - w^2) = q_0.\cos b \qquad , \qquad 2.b.w.A = q_0.\sin b$$

ومن هاتين المعادلتين، بتربيعهما أولاً، وجمعهما، ثم بقسمتهما:

$$q_0^2.\cos^2 b + q_0^2.\sin^2 b = A^2(p^2 - w^2)^2 + (2b.A.w)^2$$

$$q_0^2 = A^2\left[(p^2 - w^2)^2 + (2.b.w)^2\right]$$

نحصل على:

$$A = \frac{q_0}{\sqrt{(p^2 - w^2)^2 + 4.b^2.w^2}} \qquad , \qquad \tan b = \frac{2.b.w}{p^2 - w^2} \qquad (49\text{-}4)$$

وبما أن $(x = x_1 + x_2)$؛ فإننا نحصل أخيرا على الحل العام للمعادلة (4-48)، بالشكل التالي:

عندما $(b < p)$:

$$x = a.e^{-bt}\sin(w_1 t + a) + A\sin(wt + a - b) \qquad (50\text{-}4)$$

عندما $(b > p)$:

$$x = e^{-bt}(c_1.e^{rt} + c_2.e^{-rt}) + A\sin(wt + a - b) \qquad (51\text{-}4)$$

عندما $(b = p)$:

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2) + A\sin(wt + a - b) \qquad (52\text{-}4)$$

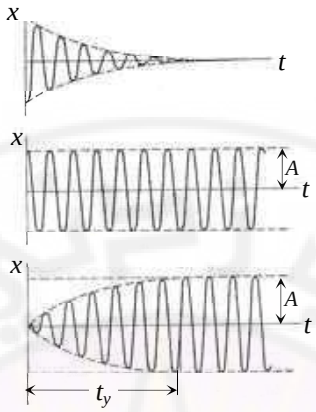
حيث $(r^2=b^2+p^2)$، كما أن a و α أو c_1 و c_2 ثابتا التكامل، فيعينان من الشروط الابتدائية للحركة، وتتعين قيمتا A و β من المعادلتين (4-47) ولا تعتمدان على الشروط الابتدائية.

وعندما $(b = 0)$:

تعطى الحلول الناتجة المعادلات (4-39) و (4-40) و (4-41) التي حصلنا عليهما سابقاً في حالة انعدام المقاومة.

نستنتج أن الاهتزازات الموافقة للمعادلة (4-50) هي اهتزازات مركبة، تتكون من:

- اهتزازات حرة، ممثلة بالحد الأول من المعادلة، وموضحة في a من (الشكل-4-35).
- اهتزازات قسرية، ممثلة بالحد الثاني من المعادلة، وموضحة في b من (الشكل-4-35).



(الشكل-4-35) الاهتزازات المركبة.

حيث الاهتزازات القسرية للجسيم هذه هي عبارة عن اهتزازات توافقية ذات سعة A ، وتواتر زاوي w يساوي التواتر الزاوي للقوة الاضطرابية، أما الاهتزازات الحرة له كما سبق إثباته؛ فإنها تخمد بسرعة ملحوظة بعد مرور فترة زمنية معينة t_y مسماة بـــ زمن الاستقرار، أو زمن الخمود (*Transient Period*)، وبحيث يمكن إهمالها عملياً.

إذا اعتبرنا مثلاً أنه يمكن إهمال الاهتزازات الذاتية ابتداءً من اللحظة عندما تكون سعتها أقل من $0.01\,A$ ؛ فإنه يمكن تعيين المقدار t_y من المعادلة:

$$a\,e^{-bt} = 0.01A \qquad \Rightarrow \qquad t_y = \frac{1}{b}\ln\frac{100a}{A} \tag{53-4}$$

وكما نرى أنه كلما كانت المقاومة أصغر، أي: كلما كان b أصغر كان زمن الاستقرار أكبر.

وتوضح في c من (الشكل-4-35) إحدى الصور المحتملة لاستقرار الاهتزازات الحادثة ابتداء من السكون؛ وفقا للعلاقة (4-50)، ويمكن أن تصبح طبيعة الاهتزازات في الفترة الزمنية $(0 < t < t_y)$ مختلفة للغاية تحت شروط ابتدائية أخرى، وعلاقات أخرى بين الترددين w_1 و p ، إلا أن الاهتزازات الذاتية في كل الحالات تخمد عملياً بعد زمن الاستقرار، ويهتز الجسيم وفقاً للعلاقة:

$$x = A\sin(w\,t + d - b) \tag{54-4}$$

تدعى هذه الاهتزازات بالقسرية، وهي عبارة عن اهتزازات توافقية غير متخامدة تتحدد سعتها A بالمعادلة (4-49)، وترددها w يساوي تردد القوة الاضطرابية، ويحدد المقدار β إزاحة زاوية الطور للاهتزازات القسرية عن زاوية الطور للقوة الاضطرابية.

سندرس ما حصلنا عليه من نتائج، فنصطلح على الرموز التالية:

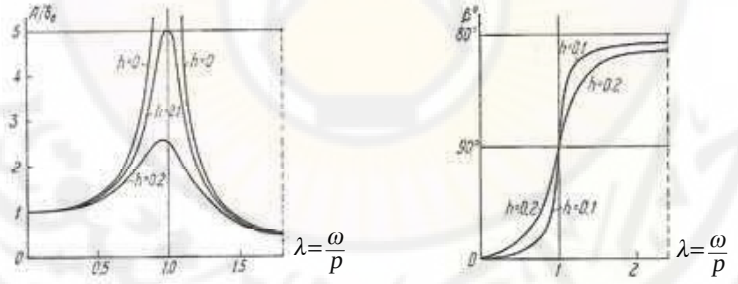
$$\frac{w}{p} = l \quad , \quad \frac{b}{p} = h \quad , \quad \frac{q_0}{p^2} = \frac{Q_0}{k} = d_0 \qquad (55\text{-}4)$$

حيث λ تمثل النسبة بين الترددين، و h تمثل مقدار يحدد المقاومة، أو تأثير التخامد، و δ_0 تمثل مقدار الانحراف السكوني للجسيم تحت تأثير القوة $\boldsymbol{Q}_0$ الموافقة لاهتزاز ثقل معلق في نابض؛ فإن δ_0 تساوى الاستطالة السكونية للنابض الحادثة نتيجة لتأثير القوة $\boldsymbol{Q}_0$.

بقسمة بسطي ومقامي المعادلتين (4-49) على p^2 ، نحصل على:

$$A = \frac{q_0}{\sqrt{(1-l^2)^2 + 4h^2 l^2}} \quad , \quad \tan b = \frac{2h\,l}{1-l^2} \qquad (56\text{-}4)$$

يتضح من هاتين المعادلتين أن β و A يعتمدان على قيمتين ليس لهما أبعاد، وهما h و λ ، ويبين المنحنيان في a و b من (الشكل-4-36)، صورة هذه العلاقة لقيمتين مختلفتين من قيم h ، ويمكن في كل مسألة محددة بدلالة معطياتها حساب المقادير h و λ و δ_0 ، وتتعين قيمتا β و A باستخدام المنحنيات المناظرة، أو المعادلتين (4-56)، ويتضح أيضاً من هذه المنحنيات، أو من المعادلتين أنه يمكن الحصول على اهتزازات قسرية بسعات مختلفة بتغيير العلاقة بين w و p أي λ .



b- إزاحة زاوية الطور للاهتزازات القسرية. a- سعة الاهتزازات التوافقية غير المتخامدة.

(الشكل-4-36)

وعندما تكون المقاومة صغيرة جداً، وتكون قيمة λ غير قريبة من الواحد الصحيح؛ فإنه يمكن في المعادلتين (4-56) اعتبار أن ($h \approx 0$)، وعندئذ نحصل على النتائج التي سبق الحصول عليها في فقرة **(1-3-1)**.وهي:

$$A \approx d_0 / \left|1-l^2\right| \quad , \quad l<1 \;\Rightarrow\; b \approx 0 \quad , \quad l>1 \;\Rightarrow\; b \approx 2p \qquad (57\text{-}4)$$

علاوة على ما سبق سندرس الحالات الخاصة التالية:

1. إذا كانت النسبة بين الترددين λ صغيرة جداً، أي ($\omega << p$)، فإننا بفرض أن ($\lambda \approx 0$) تقريباً، نحصل من العلاقتين (4-56) على ($A \approx \delta_0$)، وتحدث الاهتزازات في هذه الحالة بسعة تساوي الانحراف السكوني δ_0 ، وبإزاحة لزاويتي الطور تساوي ($\beta = 0$).

2. إذا كانت النسبة بين الترددين λ كبيرة جداً، أي ($w >> p$)، فإن سعة الحركة A تصبح صغيرة جداً، وتعدّ هذه الحالة مهمة لمشاكل امتصاص الاهتزازات في المنشآت والأجهزة المختلفة، وغيرها.

عند ذلك باعتبار المقاومة صغيرة، وإهمال λ h 2 والواحد الصحيح، بالمقارنة مع λ^2 في المعادلتين (4-56)، يمكن الحصول على المعادلة التالية لحساب A بصورة تقريبية:

$$A = \frac{d_0}{l^2} = \frac{q_0}{w^2} \qquad (58\text{-}4)$$

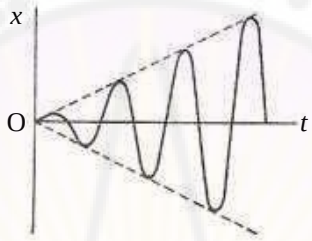
3. في جميع الحالات المهمة تكون قيمة h من وجهة النظر العلمية أقل كثيراً من الواحد الصحيح، وعندئذ يتضح من (4-56)، أنه إذا كانت قيمة λ قريبة من الواحد، فإن سعة الاهتزازات القسرية تصل إلى قيمتها العظمى، وتسمى الظاهرة التي تحدث عند ذلك بـ ظاهرة الطنين، وعند الطنين يمكن أن نعدّ في المعادلتين (4-56) أن ($\lambda = 1$)، وعندئذ:

$$A_r = \frac{d_0}{2h} \quad , \quad b_r = \frac{p}{2} \qquad (59\text{-}4)$$

من هنا يتضح أنه عند مقادير h الصغيرة يمكن ان يصل المقدار A_r إلى قيم كبيرة جداً.

عند حدوث ظاهرة الطنين، لا تستقر الاهتزازات ذات السعة A_r مباشرة مثلهما في ذلك مثل الاهتزازات القسرية بوجه عام، وتشبه عملية استقرار الاهتزازات ما هو موضح في c من (الشكل-4-35). فكلما كانت المقاومة أصغر، أي: كلما كان b أو h أصغر، كلما ازداد مقدار A_r ، وفي الوقت نفسه يكون زمن الاستقرار t_s لهذه الاهتزازات أكبر وفقاً للمعادلة (4-53).

عندما تؤول المقاومة، أي b أو h إلى الصفر، تؤول القيمة النهائية للسعة A_r إلى ما لانهاية كما يتضح عن المعادلة (4-59)، وفي الوقت نفسه يؤول زمن الاستقرار t_s إلى ما لانهاية أيضاً، وهكذا ففي حال انعدام المقاومة استغرقت عملية اهتزاز المجموعة عند الطنين مدة غير محدودة، وتزداد سعة هذه الاهتزازات باستمرار، وتعطى معادلة هذه الاهتزازات بالمعادلة (4-47)، ويوضح (الشكل-4-37) منحنى هذه الاهتزازات، وبالمثل تكون صورة الاهتزازات الرنينية في حالة المقاومات الصغيرة جداً.



(الشكل-4-37) منحنى الاهتزازات عند الطنين.

مسألة-4-17

إذا كان الطرف العلوي A للنابض الموضح في **المسألة-4-2** ، يهتز رأسياً وفق المعادلة:

$$Y = a_0 \sin w\, t$$

المطلوب دراسة الاهتزازات القسرية للجسم المعلق في النابض.

الحل:

نمدّ المحور OY كما في **المسألة-4-2** و (الشكل-4-7). وإذا تصورنا أن الطرف العلوي للنابض مزاحاً عن نقطة التعليق A إلى الأسفل بمقدار Y فإن طول النابض عند ذلك يكون:

$$l = l_0 - Y + d_{st} + y$$

وعندئذ فإن:

$$F_k = -k\,.\Delta l = -k(l - l_0) = -k\,(d_{st} + y - Y)$$

إذا أهملنا مقاومة الهواء، واعتبرنا أن:

$$k\,.d_{st} = W$$

تصبح معادلة التحريك من الشكل:

$$m.\ddot{y} = -k(d_{st} + y - Y) + W = -k.y + k.Y$$

وإذا رمزنا لـــ $(k/m = p^2)$؛ نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\ddot{y} + p^2.y = p^2.a_0.\sin wt$$

وبالتالي فإن الثقل يقوم باهتزازات قسرية؛ لأن المعادلة الناتجة تنطبق على المعادلة (4-38) أو (4-48) إذا اعتبرنا فيها أن:

$$q_0 = p^2.a_0 \qquad , \qquad b = 0$$

ويتضح من المعادلات (4-55) أنه في هذه الحالة يكون:

$$d_0 = a_0 \qquad , \qquad h = 0$$

وتتحدد سعة الذبذبات القسرية وإزاحة زاويتي الطور بالمعادلات (4-57).

- إذا كان ($p << w$) أي: أن الطرف العلوي للنابض يهتز ببطء شديد فإن ($A \approx a_0$) و ($\lambda \approx 0$) ، وإزاحة زاويتي الطور ($\beta = 0$) ، في هذه الحالة يهتز الثقل كما لو كان النابض قضيباً صلباً مما يناظر فيزيائياً الشرط ($w >> p$).
- عندما يكون ($p = w$) تحدث ظاهرة الطنين، وتبدأ سعة الاهتزازات بالازدياد بشدة.
- إذا أصبح التردد ($p > w$) أي ($\lambda > 1$)، فإن الثقل يهتز بحيث يهبط إلى أسفل عندما يرتفع طرف النابض إلى أعلى، والعكس بالعكس، عندئذ تكون إزاحة زاويتي الطور ($\beta = 2\pi$)، وتكون سعة الاهتزازات أصغر كلما كان p أكبر.
- عندما يكون p أكبر كثيراً من k أي ($\lambda >> 1$) فإن السعة ($A \approx 0$) ، ويبقى الثقل عند ذلك في وضع الاتزان السكوني في النقطة O رغم أن الطرف العلوي للنابض يهتز بسعة a_0 ، ويكون تردد هذه الاهتزازات كبيراً للغاية بالقدر الذي يصبح فيه الثقل كما لو كان لا يلاحق هذه الاهتزازات.

2-3-4- الخواص العامة للاهتزازات القسرية

إن للاهتزازات القسرية خواصاً مهمة تميزها عن الاهتزازات الحرة للجسيم، وهي:

1. أن سعة الاهتزازات القسرية لا تعتمد على الشروط الابتدائية للحركة.
2. أن الاهتزازات القسرية لا تخمد في حالة وجود مقاومة.
3. أن تردد الاهتزازات القسرية يساوي تردد القوة الاضطرابية، ولا يعتمد على خواص، أو مميزات المجموعة المهتزة، وإلا فالقوة الاضطرابية تفرض ترددها الخاص على المجموعة.
4. إذا كانت القوة الاضطرابية صغيرة فإنه يمكن الحصول على اهتزازات قسرية كبيرة، وإذا كانت المقاومة صغيرة والتردد p قريباً من w يحدث طنين.
5. إذا كانت القوة الاضطرابية كبيرة، فإنه يمكن الحصول على اهتزازات قسرية قليلة بالقدر المطلوب إذا كان التردد w أكبر بكثير من p .

عند تشغيل الآلات أو المحركات تظهر عادةً قوى دورية بإمكانها أن تولد اهتزازات قسرية لأجزاء الآلة، أو قاعدتها، ويمكن ملاحظة عملية تغيير سعات هذه الاهتزازات لمحرك مثبت على قاعدة اسمنتية يتحرك حركة دورانية بسرعة زاوية w ، ولنجعل هذا المحرك يدور بسرع مختلفة، وبازدياد w تزداد A سعة اهتزازات جزء الآلة، أو القاعدة المهتزة. فعندما تكون $(w = p)$ يحدث الطنين وتصل سعة الاهتزازات القسرية إلى قيمتها العظمى، وعند الزيادة التالية للمقدار w تتناقص السعة A ، وعندما تصبح $(w >> p)$ تكون قيمة A عملياً مساوية للصفر.

فالحركة الاهتزازية وخاصة ظاهرة الطنين كثيراً ما تحدث في الالآت والأجهزة والمنشآت الهندسية المختلفة، وفي كثير من الحالات تؤثر هذه الظاهرة تأثيراً سيئاً، فتسبب الأضرار في قواعد الالآت والمحركات، بالتالي فإن ظاهرة الطنين غير مرغوب فيها إطلاقاً، ويجب تجنبها باختيار العلاقة بين w و p بحيث تصبح سعة الاهتزازات القسرية مساوية عملياً للصفر $(\omega >> p)$.

وعلى عكس ذلك تماماً قد تكون هذه الظاهرة مفيدة جداً كما هو الحال في أجهزة اللاسلكي، حيث تستخدم لفصل إشارات محطة إذاعية ما عن إشارات المحطات الأخرى؛ كضبط جهاز المذياع.

3- التطبيقات الهندسية

يتم اعتماداً على أساس الحركات الاهتزازية القسرية تصميم الكثير من الأجهزة، مثل راسم الاهتزاز، وراسم الهزات الأرضية والهزاز وغيرها من الأجهزة، وفيما يلي وصف وجيز لبعض هذه الأجهزة.

3-1- الحامل النابضي ***Spring Holder***

من المعلوم أن الأجهزة الدقيقة المختلفة الموجودة في المخابر، يجب ألا تتأثر بالاهتزازات التي تنشأ في المبنى من جراء آلات متحركة، ولهذه الغاية يركب الجهاز الدقيق على حامل نابضي؛ كما في a من (الشكل-4-39) لكي يقيه من اهتزاز المبنى.

كذلك إذا وضع محرك على قاعدة إسمنتية بشكل مباشر كما في a من (الشكل-4-38)، فإن القوة الطاردة المركزية Q_0 التي قد تنشأ تنتقل إلى القاعدة، وتؤثر عليها تأثيراً سلبياً.



a- محرك على قاعدة إسمنتية. b- محرك على حامل نابضي.

(الشكل-4-38)

لكن عندما يركب المحرك على حامل نابضي كما في b من (الشكل-4-38)؛ فإن هذا يقلل من تأثير الاهتزاز على الأساس، ونختار النوابض بحيث يكون التردد المطبق؛ الذي يساوي عدد دورات المحرك في الثانية، أكبر من التردد الذاتي الطبيعي ($f_{r1} > f_r$)، والذي يحدد إذا علمنا ثابت النابض k لمجموعة النوابض، ووزن المحرك وقاعدته.

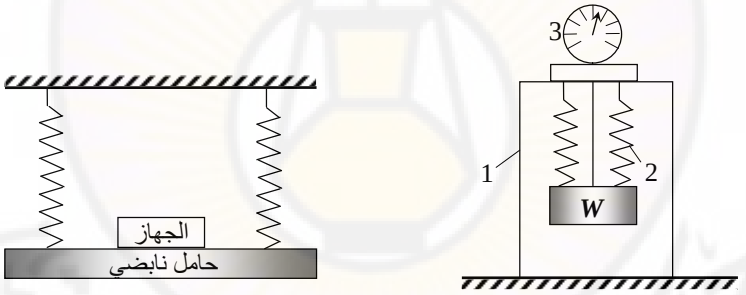
2-3- راسم الاهتزاز (*Vibrograph*) وراسم الهزات الأرضية (*Seismograph*)

إن راسم الاهتزاز الفيبروغراف هو جهاز يستخدم لقياس انحراف الأجسام المهتزة كأجزاء بعض الآلات، والمحركات، وقواعدها، أما راسم الهزات الأرضية السيزموغراف أو راسم الزلازل؛ فهو عبارة عن جهاز يستخدم لتسجيل اهتزاز القشرة الأرضية.

يبين b من (الشكل-4-39) رسماً مبسطاً لجهاز راسم الاهتزاز، أو راسم الهزات الأرضية، ويستخدم في حالة الاهتزاز القسري بعد تخطي الطنين ببعد كاف، أي: إنه يعتمد على الحالة التي يكون فيها:

$$w >> p \quad \rightarrow \quad A_0 = 0 \quad \rightarrow \quad f_{r1} >> f_r$$

يتألف هذا الجهاز من الإطار (1)، وقد علق به الثقل W بوساطة نوابض شاقولية لينة (2)، ويوضع على الإطار جهاز قياس (3) تسجل عليه أية حركة نسبية يتحركها الثقل المعلق بالنسبة إلى الإطار.



b- راسم الهزات الأرضية. a- جهاز دقيق مركب على حامل نابضي.

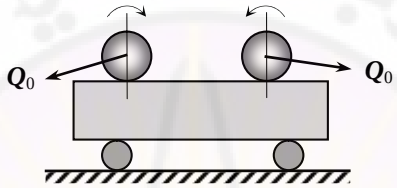
(الشكل-4-39)

يوضع الإطار على الجسم الذي يهتز اهتزازاً شاقولياً، فتتولد في الثقل W حركة اهتزازية قسرية، وبما أن التردد المطبق الممثل بعدد الدورات التي يدورها الجسم في الدقيقة أكبر من التردد الذاتي الطبيعي ($f_{r1} > f_r$)، عندئذ يبدو الثقل W المعلق كأنه ساكن في مكانه، ويشير المقياس (3) إلى القيمة المطلقة للحركة الشاقولية للحوامل؛ التي ثبت بها الإطار بدقة عالية.

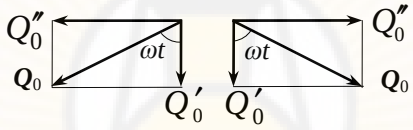
3-3- الهزاز *Vibrator*

يعمل هذا الجهاز وفق خاصة الطنين، ويستخدم لقياس تردد الاهتزاز الطبيعي للمنشآت المختلفة كالجسور، والمباني، وغيرها.

يتألف الجهاز من كتلتين غير متوازنتين لأسطوانتين متماثلتين تدوران في جهتين متعاكستين، وبحيث تتولد فيهما قوتان نابذتان متساويتان Q_0 كما في a من (الشكل-4-40).



a- الهزاز



b- موازنة القوى

(الشكل-4-40)

يتضح في b من (الشكل-4-40) أن المركبتين الأفقيتين Q_O'' متوازنتان، ومجموعهما يساوي الصفر ، ومجموع المركبتين الشاقوليتين يساوي $2\ Q_O''$ 2 ، حيث إن:

$$Q = 2\,Q_0' = 2\ Q_0 \cos \omega t$$

وهذه القوة مولدة للاضطراب، وترددها يعتمد على سرعة الدوران، ويساوي إلى:

$$f_{r1} = w / 2\ \pi$$

يركب هذا الجهاز على الجسر بوساطة إطار خاص، ويدار بسرعة متزايدة حتى يبلغ لحظة الطنين، ويعين التردد الطبيعي للجسر بدلالة عدد دورات الجهاز في الثانية.$w\ t$

* * *

مسائل غير محلولة *PROBLEMS*

م-4-1

يعلق ثقل بنهاية نابض شاقولي، فتحدث فيه استطالة سكونية مقدارها 5 cm . فإذا دفع نحو الأعلى بسرعة أولية مقدارها 28 cm/sec من وضع التوازن السكوني. المطلوب إيجاد معادلة اهتزاز $y_{(t)}$ هذا الثقل ودوره τ .

الجواب: $y_{(t)} = \pm 2\sin 14t \quad , \quad t = 0.45\,\text{sec}$

م-4-2

يعلق ثقل كتلته 20 kg بنهاية نابض شاقولي، فتحدث فيه استطالة سكونية مقدارها 5 cm . ثم يرفع هذا الثقل من وضع التوازن السكوني إلى أعلى بمقدار 2 cm .

إذا ترك الثقل من وضعه الجديد ليتحرك حركة اهتزازية بدون سرعة أولية. المطلوب إيجاد معادلة اهتزاز هذا الثقل $y_{(t)}$ ، ودوره τ ، والتوتر الأعظم $F_{k\max}$ الذي يتولد في النابض.

الجواب: $y_{(t)} = \pm 2\sin(14t + p/2) \quad , \quad t = 0.45\,\text{sec} \quad , \quad F_{k\max} = 27.5\ \text{N}$

م-4-3

يعلق ثقل كتلته 10 kg بنهاية نابض شاقولي، فتحدث فيه استطالة سكونية مقدارها 1 cm .

إذا علق بنهاية هذا النابض المفروض ثقل كتلته 1 kg . المطلوب إيجاد دور الاهتزاز للثقل τ ، وتردده f .

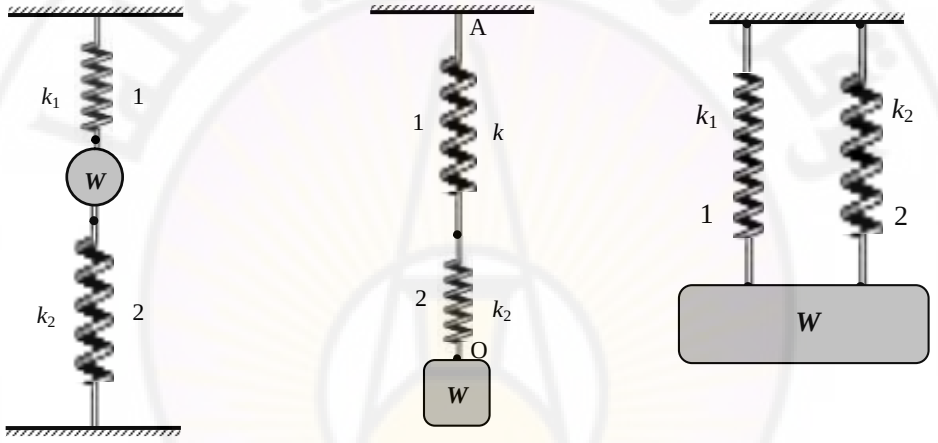
الجواب: $t = 0.063\,\text{sec} \quad , \quad f = 15.76\,\text{sec}^{-1}$

م-4-4

تربط كرة كتلتها 20 kg بين نابضين شاقوليين، كما هو مبين في a من (الشكل م-4-3).

إذا كان ثابت مرونة الأول (k_1 = 10 N/cm)، وثابت مرونة الثاني (k_2 = 5 N/cm)، المطلوب إيجاد دور اهتزاز الكرة τ .

الجواب: $t = 0.23\,\text{sec}$



a b c

(الشكل م-4-3)

م-4-5

يربط نابضان مع بعضهما على التسلسل، فإذا كان ثابت مرونة الأول (k_1=100 N/cm)، وثابت مرونة الثاني (k_2 = 50 N/cm)، المطلوب:

1. تعيين ثابت مرونة النابضين k معاً.
2. إذا ربط بنهاية النابض الثاني ثقل مقداره (W = 400 N)، كما هو مبين في b من (الشكل م-4-3)، أوجد معادلة اهتزازه.
3. أعد حل المسألة إذا كان النابضان مربوطين على التوازي. كما هو مبين في c من (الشكل-4-3).

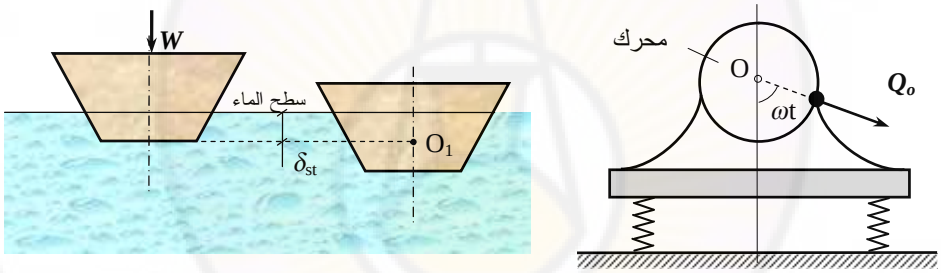
الجواب: $k = 10/3\ \text{N/cm}$, $t = 0.49\,\text{sec}$, $t' = 0.037\,\text{sec}$

م-4-6

سفينة عائمة وزنها ($W = 223.27\times10^6\,\mathrm{N}$) يغمرها ماء ساكن الوزن النوعي لـــه هو ($w_h = 1\ \ \mathrm{tf/m^3}$)، بعمق وسطي مساو لـــ ($h = \delta_{st}$)، وبمساحة مقطع عرضي معرض للماء مساوية لـــ ($A = 2320\ \ \mathrm{m^2}$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-4-5).

إذا أزيحت السفينة نحو الأسفل إزاحة خفيفة بالنسبة إلـــى وضـــع توازنهـــا بســـرعة شاقولية، ثم أطلقت، فإنها تهتز شاقولياً نحو الأسفل ونحو الأعلى بحركـــة توافقيـــة بســـيطة، المطلوب بإهمال الاحتكاك وعطالة ما يمكن أن يكون قد تحرك من الماء إيجاد معادلة اهتزاز السفينة $y_{(t)}$ ، وما هو دور هذا الاهتزاز τ ؟

الجواب: $y_{(t)} = 25\sin t \quad , t = 6.28\,\mathrm{sec}$



a b

(الشكل م-4-5)

م-4-7

يدور المحرك المبين في b من (الشكل م-4-5) بسرعة 1800 r.p.m ، ويولد جسيم قوة نابذة لامركزية على محيطه ($Q_o = 0.1\ \ W$). كما هو مبين في a من (الشكل م-4-5).

إذا حقق وزن المحرك W مع عامل صلابة النابض k العلاقة ($\delta_{st} = W/k = 0.008$ cm). المطلوب إيجاد النسبة (A_o / δ_{st}).

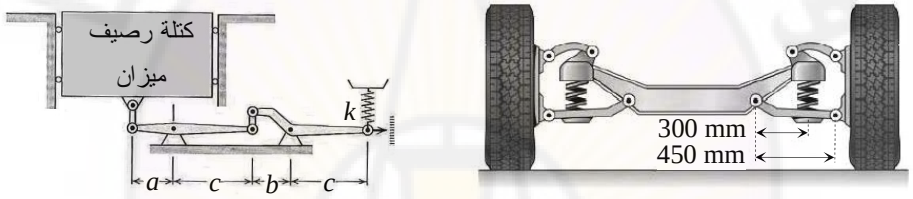
الجواب: $A_o / d_{st} = 0.141$

م-4-8

يرتبط رصيف ميزان القاطرات كتلته m بنابض عامل صلابته k عبر مجموعة من العوائق، كما هو مبين في a من (الشكل م-4-6)

المطلوب بإهمال كتلة العوائق إيجاد المعادلة التفاضلية لاهتزاز رأسي صغير للرصيف، ودور هذا الاهتزاز τ .

الجواب: $t = 2p(\frac{b}{c})^2\sqrt{\frac{m}{k}}$



a b

(الشكل م-4-6)

م-4-9

يعلق الطرف الأمامي لسيارة بنابض حلزوني عامل صلابته 46.8 kN/m ، ، كما هو مبين في b من (الشكل م-4-6).

إذا كانت كتلة هيكل الطرف الأمامي، والجزء المكافئ للجسم المتصل به هو 500 kg . المطلوب إيجاد التردد الطبيعي f للاهتزاز الرأسي للهيكل والجسم عند عدم وجود ماص الصدمات.

إرشاد: لربط انحراف النابض مع انحراف الهيكل والجسم، اعتبر الهيكل ثابتاً ودع الأرض والدواليب تتحرك رأسياً.

الجواب: $f = 1.15\,\text{Hz}$

الفصل الخامس

عزم العطالة الكتلي للأجسام الصلبة المتجانسة
Mass Moment of Inertia of Homogeneous Solids

1- الجملة الميكانيكية *Mechanical Systems*

تتكون الجملة الميكانيكية، أي: المجموعة الميكانيكية من مجموعة من الجسيمات المادية، أو أجسام مادية، تعتمد فيها أوضاع وحركات بعض أجزائها على أوضاع وحركات الأجزاء الأخرى، وننظر عادةً إلى الجملة الميكانيكية، أو الجسم المادي باعتباره مؤلفاً من مجموعة من الجسيمات المادية.

تؤلف الآلات الميكانيكية، والتركيبات الآلية التي تكون الأجسام المكونة لها مرتبطة فيما بينها بواسطة وسائل ربط كالمفاصل، أو وصلات، أو سيور وحبال جملاً ميكانيكية، حيث تخضع أجزاء الجملة في هذه الحالة إلى قوى ضغط، أو قوى شد تنتقل عبر الاتصالات، بالتالي يمكن تقسيم القوى المؤثرة على أجزاء الجملة إلى:

- **قوى خارجية (*External Force*)**

وهي القوى التي تؤثر على أجزاء الجملة من قبل جسيمات أو أجسام لا تعود إلى هذه الجملة ويرمز لها بـــ F^e .

- **قوى داخلية (*Internal Force*)**

وهي القوى المتبادلة بين أجزاء الجملة ذاتها، ويرمز لها بـــ F^i ، وتتصف بالخواص التالية:

- المجموع الهندسي، أو المتجه الرئيسي لكل القوى الداخلية في الجملة يساوي الصفر:

$$\Sigma F_k^i = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

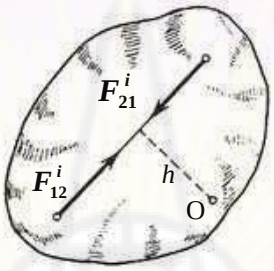
تعود هذه الخاصية إلى قانون الفعل ورد الفعل، حيث يؤثر أي جسيمين من جسيمات الجملة إحداهما على الآخر كما هو مبين في (الشكل-5-1) بقوتين F_{12} و F_{21} متساويتين في المقدار متعاكستين في الاتجاه، ويساوي مجموعهما الصفر.

- مجموع العزوم، أو العزم الرئيسي لكل القوى الداخلية في الجملة بالنسبة لنقطة O ، أو محور Δ يساوي الصفر:

$$\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^i) = 0 \quad , \quad \sum m_{\Delta}(\boldsymbol{F}_k^i) = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

وتعود هذه الخاصة إلى أن العزم المحصل لقوتين متعاكستين مباشرة هو عزم معدوم، كما هو مبين في (الشكل-5-1):

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_{12}^i) + \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_{21}^i) = 0$$



(الشكل-5-1) تحديد خواص القوى الداخلية.

يجب الأخذ بعين الاعتبار أن بإمكان القوى الداخلية التأثير في حركة الجملة، فهذه القوى المتعاكسة لا تؤثر على جسيم واحد، بل يتوزع تأثيرها على مختلف جسيمات الجملة، فهي قد تؤدي إلى تحريك أجزاء الجملة بالنسبة لبعضها البعض.

إذا كانت الجملة المعتبرة جملة متماسكة، أي: جسماً صلباً عُدَّت عندها جملة القوى الداخلية مكافئة للصفر؛ لأنها في مثل هذه الحالة لا تقوم بأي فعل في أجزاء الجملة التي تبقى الأبعاد النسبية بين مختلف جسيماتها ثابتة.

2- مركز كتل الجملة ***Center of Mass of a system***

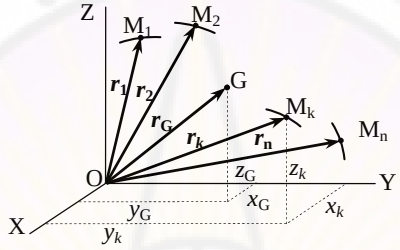
تعتمد حركة الجملة على كتلتها الكلية، وعلى توزيع الكتل فيها علاوة على القوى المؤثرة، وإن كتلة الجملة M تساوي المجموع الحسابي لكتل كل الجسيمات Σm_k ، أو الأجسام المكونة لها، أي ($M = \Sigma m_k$).

إن مركز الكتل لجملة مادية، أو ما يسمى بـــ مركز العطالة لجملة كما هو مبين في (الشكل-5-2)، هو تلك النقطة G من الجملة المعينة بالمتجه الموضعي $\boldsymbol{r}_{\mathbf{G}}$ وفق العلاقة:

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{G}} = \frac{\sum m_k . \boldsymbol{r}_k}{M} \qquad (3\text{-}5)$$

حيث $\boldsymbol{r}_k$ تمثل متجهات مواضع جسيمات الجملة، وتتحدد إحداثيات مركز الكتل بإسقاط العلاقة على جملة محاور ديكارتية:

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{\sum m_k . x_k}{M} \quad ، \quad y_{\mathrm{G}} = \frac{\sum m_k . y_k}{M} \quad ، \quad z_{\mathrm{G}} = \frac{\sum m_k . z_k}{M} \qquad (4\text{-}5)$$



(الشكل-5-2) تحديد مركز الكتل لجملة مادية.

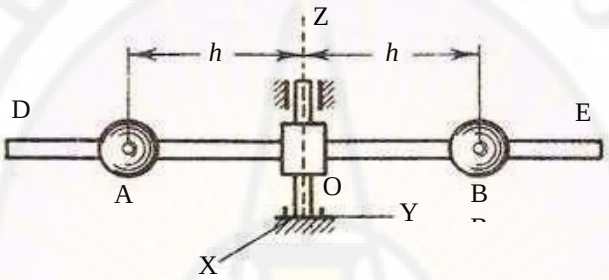
في مجال الجاذبية المتجانس تكون (g = Const.)، ومن علاقة الوزن W لجملة مادية ($W = m.g$) حيث يتناسب وزن أي جسيم من جسيمات الجسم مع كتلته؛ لذا يمكن الحكم على موضع مركز الثقل بواسطة توزيع الكتل، مما ينتج أن G هي أيضاً مركز ثقل الجملة.

على الرغم من أن موضع مركز الكتل ينطبق على مركز ثقل الجسم الموجود في مجال الجاذبية الأرضية المتجانس، إلا أن هذين المفهومين لا يُعدّان متطابقين، فمفهوم مركز الثقل كنقطة يمر من خلالها خط عمل محصلة قوى الجاذبية الأرضية، يكون له في واقع الحال معنى للجسم الصلب فقط الموجود في مجال الجاذبية الأرضية المتجانس. أما مفهوم مركز الكتل كمميزة لتوزيع الكتل في الجملة، فيكون ذا معنى لأية جملة من الجسيمات والأجسام المادية، بالإضافة إلى أن هذا المفهوم يحتفظ بمعناه، سواء وقعت هذه الجملة تحت تأثير قوى أم لم تقع، ولكي نتجنب، أي اختلاط بينهما، فإننا سندعو G بـــ مركز الكتلة (*Center of Mass*) عندما ندرس ونناقش الخواص المرتبطة بكتلة الجملة، وبـــ مركز الثقل (*Center of Gravity*) عندما ندرس ونناقش الخواص المرتبطة بوزن الجملة، أما بالنسبة للجملة المادية الواقعة خارج الجاذبية الأرضية، فسيكون لها كتلة، ولن يكون لها وزن؛ لذا يمكن أن نرجع عندئذ إلى مركز كتلتها، لأنه لا يمكن أن نرجع إلى مركز ثقلها غير الموجود.

3- عزم العطالة لكتلة جسم صلب

Mass Moment of Inertia of Rigid Bodies

إن موضع مركز الكتل لا يحدد توزيع كتل المجموعة تحديداً كاملاً، فعلى سبيل المثال التركيبة الموضحة في (الشكل-5-3) نلاحظ أنه إذا ازداد h بعدا كرتين متساويتين A و B عن المحور OZ كل بالمقدار نفسه؛ فإن موضع مركز الكتل لا يتغير، ويبقى في مكانه على المحور OZ ، في حين يصبح توزيع الكتل مختلفاً مما يؤثر على حركة الجملة، وبالتالي لا بد من إيجاد مميزة أخرى تصف توزيع المادة في الجملة.



(الشكل-5-3) تحديد توزيع الكتل لجملة مادية.

تُستخدم في علم التحريك ميزة لتوزيع الكتل هي عزم العطالة للكتلة حول محور، الذي يدخل في حسابات القوى لأي جسم معرض لدوران بتسارع زاوي ε حول محور ما، فمعادلة العزوم حول محور OZ عمودي على مستوى الحركة لجسم صلب كتلته M في حالة الحركة المستوية المبينة في a من (الشكل-5-4)، تحوي على تكامل يعتمد على توزيع الكتلة نسبة إلى محور العزم، ويحصل هذا التكامل كلما كان للجسم الصلب تسارع زاوي حول محور دورانه. يدعى مقدار التكامل هذا بـــ عزم العطالة للكتلة، ويرمز له بـــ I_Z ، ويعطى بالعلاقة:

$$I_Z = \int r^2 . dm \qquad (5\text{-}5)$$

حيث r تمثل بعد شريحة الكتلة dm من الجسم الصلب عن محور الدوران Z .



a- جسم يتحرك حركة مستوية b- صفيحة تتحرك في المستوى OXY

(الشكل-5-4) تحديد عزم العطالة الكتلي لجسيم مادي.

يستعمل مفهوم عزم العطالة إما للأشكال ذات الأبعاد الفراغية أي: للكتل، (*Mass Moment of Inertia*)، أو للسطوح أي: للمساحة (*Area Moment of Inertia*)، لذا يجب التفريق والتعريف عن اسم عزم العطالة عند استخدامه.

في مسائل الحركة المستوية لجسم يُعرف محور العطالة بكتابة حرف سفلي واحد لـــ I ، حيث يكون الدوران حول محور عمودي على مستوى الحركة، وعليه فإذا كانت حركة الصفيحة المبينة في b من (الشكل-5-4) في المستوى OXY ، عندئذ يشار إلى عزم العطالة للصفيحة حول المحور OZ من خلال النقطة O منه بـــ I_O .

أما في مسائل الحركة الثلاثية الأبعاد، حيث تكون مركبات الدوران حول أكثر من محور واحد، عندئذ يستخدم حرفان سفليان للمحافظة على تناظر الدوران مع حدود حاصل جداء عزم العطالة المذكورة لاحقاً، وعليه يرمز إلى عزم العطالة للكتلة حول المحور Z بـــ I_{ZZ} ، وتميز الحروف السفلى المزدوجة عزم العطالة للكتلة عن نظيراتها للمقاطع I_Z .

يمكن بطريقة أخرى التعبير عن عزم العطالة الكتلي لجسيم مادي، يبعد بمسافة r_k عن محور معطى Z بجداء كتلته m_k بمربع بعده عن ذلك المحور $(I_Z = m_k.r_k^2)$ ، وعزم العطالة لجسم، أو لجملة جسيمات مادية حول المحور Z يساوي مجموع عزوم العطالة لكل أجزائه حول المحور Z ، بالتالي فهو مقدار عددي يساوي مجموع حاصل ضرب كتلة كل جسيم في الجسم، أو في الجملة، بمربع بعده عن المحور.

$$I_Z = \sum m_k.r_k^2 \qquad (6\text{-}5)$$

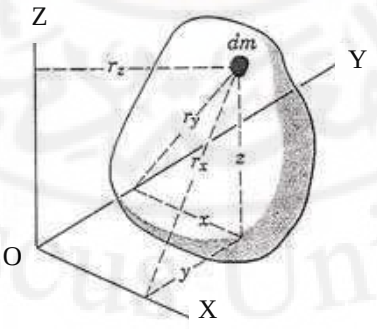
ينتج من التعريف أن عزم العطالة المحوري (*Axial Moment of Inertia*) لجملة يصف توزع كتل الجملة بالنسبة إلى المحور OZ ، ويعبر عن مقدار مقاومة المادة لعوامل تغيير الحركة، وأنه يؤدي عند الحركة الدورانية للجسم الدور نفسه؛ التي تؤديه الكتلة في الحركة الانسحابية، أي: أنه يُعدّ مقياساً لمقاومة الجسم للتسارع الزاوي في الحركة الدورانية حول محور، مثلما تُعَدُّ الكتلة مقياساً لمقاومة الجسم للتسارع الخطي في الحركة الانسحابية، فكلما كبر عزم العطالة للأجسام كلما زادت مقاومتها للحركة الدورانية، وهو مقدار موجب، ولا يساوي الصفر، ووحدة قياسه في مجموعة القياس المطلقة ***SI*** هي $kg.m^2$ ، وفي مجموعة القياس الفنية هي $kgf.m.sec^2$.

باستخدام التعريف السابق يمكن حساب عزم عطالة جسم حول نقطة، أو محور، أو مستوى في جملة إحداثية OXYZ ، بحاصل مجموع جداءات كتل الجسيمات المادية المتكون منها الجسم في مربع بعدها عن النقطة، أو المحور، أو المستوى، ويمكن التعبير عن بعد جسيمات الجسم عن المحاور بدلالة إحداثيات تلك الجسيمات z_k ، y_k ، x_k كما في (الشكل5-5).

فلحساب عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة للمبدأ O أو بالنسبة لقطب O الموضح في (الشكل-5-5)، فهو عبارة عن مقدار عددي يساوي وفق العلاقة (5-6) مجموع جداءات كتلة كل جسيم من جسيمات الجسم في مربع بعده r_k عن القطب:

$$I_O = \sum m_k . r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \qquad (7\text{-}5)$$

يدعى I_O بـــ عزم العطالة القطبي للجسم (*Polar Moment of Inertia*) حول القطب O .



(الشكل-5-5) تحديد احداثيات جسيم من جسم صلب.

ولحساب عزوم عطالة الجسم الصلب بالنسبة لمحاور الجملة الإحداثية OXYZ الموضحة في (الشكل5-5)، فهو عبارة عن مقدار عددي يساوي وفق العلاقة (5-6) مجموع جداءات كتلة كل جسيم من جسيمات الجسم في مربع بعده r عن المحور:

$$I_{XX} = \sum m_k . r_x^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

كذلك بالطريقة نفسها يمكن إيجاد عزوم عطالة الجسم حول محاور الجملة:

$$I_{XX} = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \ , \ I_{YY} = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) \ , \ I_{ZZ} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (8\text{-}5)$$

ولحساب عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة لمستوى محدد بمحورين من محاور الجملة الموضحة في (الشكل-5-5)، فهو عبارة عن مقدار عددي يساوي وفق العلاقة (5-6) إلى مجموع جداءات كتلة كل جسيم من جسيمات الجسم في مربع بعده عن المستوى:

$$I_{OXY} = \sum m_k . z_k^2 \quad , \quad I_{OYZ} = \sum m_k . x_k^2 \quad , \quad I_{OZX} = \sum m_k . y_k^2 \qquad (9\text{-}5)$$

لذا فعزم العطالة بالنسبة لأحد المحاور الإحداثية (الشكل-5-4) يعبر عنه بما يلي:

$$I_{XX} = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) = \sum m_k . y_k^2 + \sum m_k . z_k^2 = I_{OXZ} + I_{OXY}$$

كذلك بالطريقة نفسها يمكن إيجاد عزوم العطالة بالنسبة لمحاور الجملة:

$$I_{XX} = I_{OXZ} + I_{OXY} \quad , \quad I_{YY} = I_{OYX} + I_{OYZ} \quad , \quad I_{ZZ} = I_{OZX} + I_{OZY} \qquad (10\text{-}5)$$

أي: **إن مجموع عزوم العطالة لجسم حول مستويين متعامدين يساوي عزم عطالته حول خط تقاطعهما.**

أيضاً من العلاقة (5-8) التي تربط عزوم العطالة المحورية لجسم، وإحداثيات جسيمات الجسم يمكن أن نكتب:

$$I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ} = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

منه:

$$I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ} = 2[\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)]$$

$$I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ} = 2I_O \qquad (11\text{-}5)$$

أي: **إن مجموع عزوم العطالة لجسم حول ثلاث محاور متعامدة؛ يساوي ضعف عزم عطالته حول نقطة تلاقيها.**

ومن العلاقة (5-10) التي تربط عزوم العطالة المحورية لجسم وعزوم العطالة بالنسبة لمستوى يمكن أن نكتب:

$$I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ} = 2[I_{OYZ} + I_{OZX} + I_{OXY}]$$

منه:

$$I_O = I_{OXY} + I_{OYZ} + I_{OZX} \qquad (12\text{-}5)$$

أي: **إن مجموع عزوم العطالة لجسم حول ثلاث مستويات متعامدة يساوي عزم عطالته حول نقطة تقاطعهم، أي: عزم العطالة القطبي له.**

ويمكن حساب عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور ما، وليكن Z ، باعتبار أن كتلة الجسم M مركزة في جسيم يبعد عن المحور مقدار ρ_z ، على أن يكون عزم العطالة لهذا الجسيم وحده حول المحور يساوي عزم العطالة لكل الجسم حول المحور نفسه.

$$I_Z = M.r_z^2 \qquad (13\text{-}5)$$

وعليه تُعَدُّ ρ_z مقياس لتوزيع الكتلة لجسم معين حول المحور Z ، وتدعى بـــ نصف قطر العطالة (*Radius of Inertia*)، أو نصف قطر الدوران (*Radius of Gyration*) حول المحور Z ، وبمعرفته يمكن بوساطة المعادلة (5-13) تعيين عزم العطالة للجسم، وبالعكس.

كما يمكن حساب عزم عطالة جسم مصمت مستمر كتلته M حول المحور Z ، بعد تقسيمه إلى عناصر جزئية كتلة كل منها dm ، تنتخب هذه العناصر بشكل تكون نقاطها متساوية البعد عن المحور Z ، ويكون عزم عطالة العنصر هو نهاية المجموع في المعادلة (5-5)، التي تؤول إلى إجراء التكامل على الجسم كله.

$$I_Z = \int_M r_z^2.dm$$

وإذا كان الجسم متجانساً؛ يمكن عندها أن نضع:

$$dm = r.dV$$

وذلك باعتبار ρ الكتلة النوعية الثابتة ($\rho = M/V$)، و dV حجم العنصر، ويكون عندها:

$$I_Z = \int_V r.r_z^2.dV \qquad (14\text{-}5)$$

يشمل التكامل هنا كل حجم الجسم V ، وتعتمد الكتلة النوعية ρ والمسافة r_z على إحداثيات جسيمات الجسم.

وبالمثل تأخذ المعادلات (5-8) في حالة الأجسام المصمتة المتجانسة ذات الأشكال الصحيحة، الشكل التالي:

$$I_{ZZ} = r\int_V r_z^2 . dV = r\int_V (x_k^2 + y_k^2)\, dV \qquad (15\text{-}5)$$

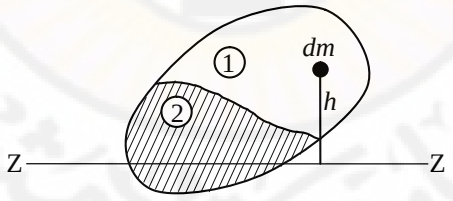
أما لحساب عزم عطالة الأجسام المركبة من أجسام هندسية حول المحور Z ، فيقسم الجسم إلى أجزاء بعدد الأجسام الهندسية المكونة له، ويحسب عزم العطالة لكل جزء منها حول المحور نفسه، ويكون بالتالي عزم عطالة الجسم المركب حول محور ما، يساوي مجموع عزوم العطالة لأجزاء ذلك الجسم حول المحور نفسه كما هي الحال مع عزم العطالة للمساحة، ويعبر في الغالب عن جسم مركب بأحجام موجبة وسالبة، و(الشكل-5-6) يبين جسم مكون من جزءين وعزم عطالته حول المحور Z يساوي:

$$I_{ZZ} = \int_M r_z^2 . dm = \int_{M_1} r_z^2 . dm_1 + \int_{M_2} r_z^2 . dm_2$$

منه:

$$I_{ZZ} = I_{1_{ZZ}} + I_{2_{ZZ}} \qquad (16\text{-}5)$$

أي: إنه لحساب عزم عطالة جسم مركب من أجسام هندسية، لا بد من حساب عزم العطالة لكل منها على حدة.



(الشكل-5-6) تحديد عزم العطالة لجسم صلب مركب.

4- عزم العطالة لجسم حول محاور متعامدة

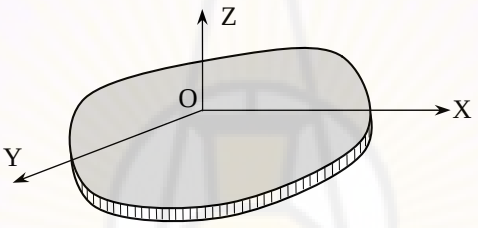
Mass Moment of Inertia about a Vertical Axes

إذا انعدم بعد من أبعاد الجسم، وليكن ($z_k = 0$) بحيث يصبح الجسم صفيحة رقيقة في المستوى OXY كما في (الشكل-5-7)، وينعدم بالتالي عزم عطالتها حول مستواها، أما عزم عطالتها حول كل من المحورين OX و OY فيتحدد وفقاً للعلاقات (5-10) بما يلي:

$$I_{XX} = I_{OXZ} \quad , \quad I_{YY} = I_{OYZ} \quad \Rightarrow \quad I_{XX} + I_{YY} = I_{OXZ} + I_{OYZ}$$

ومنه:

$$I_{XX} + I_{YY} = I_{ZZ} \qquad (17\text{-}5)$$



(الشكل-5-7) تحديد عزم العطالة لجسم حول محاور متعامدة.

أي: **إن مجموع عزمي العطالة لصفيحة رقيقة حول محورين متعامدين في مستواها، يساوي إلى عزم عطالتها حول محور عمودي على مستواها، ومار بنقطة تقاطع المحورين.**

5- عزم العطالة لجسم حول محاور متوازية

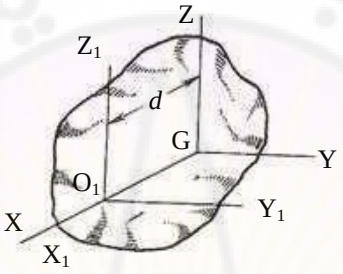
Mass Moment of Inertia about a Parallel Axes

تختلف عزوم العطالة لجسم ما بوجه عام حول المحاور المختلفة المتوازية، وبالتالي لا بد من تعيين عزم عطالة جسم حول أي محور بمعرفة عزم العطالة له حول محور آخر مار فيه، مواز للمحور الأول.

نمد عبر مركز كتل الجسم G جملة محاور اختيارية GXYZ ، وعبر أيّ نقطة O_1 على محور GX ، نمد جملة المحاور $O_1X_1Y_1Z_1$ كما في (الشكل-5-8)، بحيث يكون:

$$O_1Z_1 // GZ \quad , \quad O_1Y_1 // GY$$

ونرمز بـــ d للبعد بين المحورين GZ و O_1Z_1 .



(الشكل-5-8) تحديد عزم العطالة لجسم حول محاور متوازية.

بتطبيق العلاقات (5-8)؛ نحصل على:

$$I_{ZZ} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad , \quad I_{Z_1Z_1} = \sum m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2)$$

لكن كما يتضح من الشكل أنه لأي جسيم M_k من جسيمات الجسم كتلته m_k ، له:

$$y_{1k} = y_k \quad , \quad x_{1k} = x_k - d \quad \Rightarrow \quad x_{1k}^2 = x_k^2 + d^2 - 2d.x_k$$

بالتعويض في علاقة $I_{Z_1Z_1}$ ، وإخراج المعاملين المشتركين $2d$ و d^2 خارج الأقواس؛ نحصل على:

$$I_{Z_1Z_1} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) + d^2 (\sum m_k) - 2d(\sum m_k . x_k)$$

حيث:

$$\sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_{ZZ} \quad , \quad \sum m_k = M \quad , \quad \sum m_k . x_k = M . x_G = 0$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$I_{Z_1Z_1} = I_{ZZ} + M.d^2 \qquad (18\text{-}5)$$

تعبر هذه العلاقة عن نظرية هيوجنس (*Christian Huygens*)، التي تنص على:

إن عزم العطالة لجسم حول محور معطى يساوي عزم عطالة الجسم حول المحور الموازي، والمار بمركز كتل الجسم، مضافاً إليه حاصل جداء كتلة الجسم كله بمربع البعد بين المحورين المتوازيين.

نلاحظ أنه كلما بَعد المحور عن مركز الكتل كلما زاد عزم العطالة حوله، أي أن:

$$I_{Z_1Z_1} > I_{ZZ}$$

بالتالي، فمن جميع المحاور ذات الاتجاه المعلوم يكون أقل عزم للعطالة هو حول المحور المار بمركز الكتل.

تستخدم العلاقة (5-18) في تعيين عزم العطالة للجسم حول محور مفروض Z_1 عندما يكون معلوماً عزم عطالته حول أي محور Z_2 يوازي المحور المفروض، ويتم ذلك من معرفة بعدي d_1 و d_2 كل محور من المحورين عن مركز كتل الجسم، وعندئذ بمعرفة d_2 و $I_{Z_2Z_2}$ نعين I_{ZZ} وفق العلاقة (5-18)، ثم نعين بالعلاقة نفسها عزم العطالة المطلوب $I_{Z_1Z_1}$.

من العلاقة (5-11) يمكن حساب عزم العطالة القطبي بالنسبة لمركز الكتل:

$$I_G = \frac{1}{2}(I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ}) \qquad (19\text{-}5)$$

ومن العلاقة (5-18) ينتج أن أصغر قيمة لعزم العطالة القطبي هي بالنسبة لمركز الكتل. ومن العلاقتين (5-13) و (5-18) يمكن كتابة:

$$M.r^2_{OZ_1} = M.r^2_{GZ} + M.d^2$$

ومنه:

$$r^2_{OZ_1} = r^2_{GZ} + d^2 \qquad (20\text{-}5)$$

تعبر هذه المعادلة عن العلاقة بين نصفي قطري العطالة بالنسبة لمحورين متوازيين.

6- عزم عطالة الأجسام المتجانسة

Moment of Inertia of Homogeneous Solids

6-1- الأشكال الخطية *Linear Shapes*

6-1-1- عزم عطالة قضيب رفيع منتظم

Moment of Inertia of a Thin Slender Rod

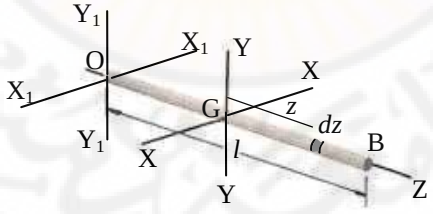
نعدّ قضيب رفيع متجانس منتظم BO طوله l ، وكتلته M ، ولتكن كتلته النوعية ρ ، ومساحة المقطع العرضي له A ، ولتكن جملة المحاور GXYZ المارة من مركز الكتل G ، حيث المحور GZ منطبق على القضيب OB ، كما هو مبين في (الشكل-5-9).

لتعيين I_{YY} عزم عطالة القضيب حول المحور Y المار من مركز كتله G ، والمتعامد على القضيب، نأخذ لهذا الغرض عنصراً من عناصر الطول dz ذا الكتلة $(dm = \rho.dV = \rho.A.dz)$، الذي يبعد بالمقدار $(r_z = z)$ عن المحور GY ، كما هو مبين في (الشكل-5-9)، ووفق العلاقة (5-14)؛ نحصل على:

$$I_{YY} = \int_V r.r_z^2.dV = r\int_{-l/2}^{l/2} z^2.A.dz = r.A.\frac{l^3}{12}$$

بالتعويض عن ($\rho.A.l = \rho.V = M$) بقيمتها، نحصل على عزم العطالة للقضيب بالنسبة للمحور Y ، أي: بالنسبة لمركز كتله G :

$$I_{YY} = I_{GY} = \frac{1}{12}M.l^2 \qquad (21\text{-}5)$$



(الشكل-5-9) تحديد عزم عطالة قضيب رفيع منتظم.

ولتعيين $I_{Y_1Y_1}$ عزم عطالة القضيب حول المحور Y_1 المار من طرفه O الموازي للمحور Y ، والمتعامد على القضيب، نطبق العلاقة (5-18):

$$I_{Y_1Y_1} = I_{YY} + M.d^2$$

في هذه الحالة يكون ($d = l/2$)، وبالتعويض نحصل على عزم العطالة للقضيب بالنسبة للمحور Y_1 ، أي: بالنسبة لأحد أطرافه O :

$$I_{Y_1Y_1} = I_{OY_1} = \frac{1}{12}M.l^2 + M(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3}M.l^2 \qquad (22\text{-}5)$$

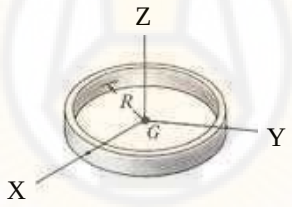
6-1-2- عزم عطالة حلقة دائرية

Moment of Inertia of a Thin Ring

نعدّ حلقة دائرية رقيقة متجانسة مركزها G نصف قطرها R ، وكتلتها M ، ولتكن جملة المحاور GXYZ المارة من مركز الكتل G حيث المحور Z عمودي على مستوى الحلقة، كما في (الشكل-5-10).

لتعيين I_{ZZ} عزم عطالة الحلقة حول المحور Z أي: بالنسبة لمركز كتلته G ، نستخدم العلاقة (5-6) مع اعتبار أن كل جسيمات الحلقة تبعد عن المحور بمسافة ($r_k = R$):

$$I_{ZZ} = \sum m_k.R^2 = R^2 \sum m_k = M.R^2 \qquad (23\text{-}5)$$



(الشكل-5-10) تحديد عزم عطالة حلقة دائرية.

ولتعيين عزم عطالة الحلقة حول محوري مستوى الحلقة X و Y ، والمارة بمركزها G ، لدينا من تناظر الحلقة حول القطرين:

$$I_{XX} = I_{YY}$$

وبتطبيق علاقة المحاور المتعامدة للصفائح الرقيقة؛ نحصل على:

$$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY} = 2I_{XX}$$

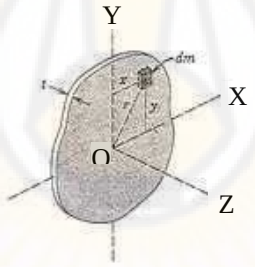
بالتعويض؛ نحصل على:

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{2}I_{ZZ} = \frac{1}{2}M.R^2 \qquad (24\text{-}5)$$

يمكن ملاحظة التشابه بين العلاقات التي تُعرِف عزم العطالة للكتلة وبين عزم العطالة للمساحة، وهناك علاقة مباشرة بين عزمي العطالة في حالة الصفائح المسطحة الرقيقة. فعند دراسة عزم عطالة جسم مادي أحد أبعاده صغير جداً، كصفيحة رقيقة مكونة من مادة متجانسة لها سمك منتظم t صغير جداً كما في (الشكل-5-11)، وكتلة العنصر الجزئي لها تساوي إلى ($dm = \rho.dV = \rho.t.dA$)، نعدّ أن مستوييها المتوسط مستوياً لـــ OXY ، فيكون عزم عطالة الصفيحة I_{ZZ} حول المحور Z العمودي عليها استناداً إلى المعادلة (5-5)، هو:

$$I_{ZZ} = \int r^2.dm = r.t\int r^2.dA = r.t.J_Z \qquad (25\text{-}5)$$

أي: أن عزم عطالة العنصر الجزئي هو نهاية المجموع في المعادلة (5-5)، التي تؤول إلى إجراء التكامل على السطح كله، وهكذا نحصل على أن عزم العطالة لكتلة الصفيحة حول المحور Z ، يساوي جداء كتلة وحدة المساحة $\rho.t$ بعزم العطالة القطبي J_Z لمساحة الصفيحة المتوسط حول المحور Z .



(الشكل-5-11) تحديد عزم عطالة صفيحة رقيقة متجانسة.

إذا كانت السماكة t صغيرة أو الإحداثي z للشريحة مهمل نسبة لأبعاد أخرى في مستوى الصفيحة، كبعد الشريحة عن المحورين X و Y ، يمكن تقريب عزوم العطالة I_{XX} و I_{YY} للصفيحة حول المحاور X و Y ، بالتالي:

$$I_{XX} = \int y^2.dm = r.t\int y^2.dA = r.t.I_X \qquad (26\text{-}5)$$

$$I_{YY} = \int x^2.dm = r.t\int x^2.dA = r.t.I_Y$$

وهكذا نحصل على أن عزم العطالة لكتلة الصفيحة حول محور يساوي جداء كتلة وحدة المساحة $\rho.t$ ، بعزم العطالة للمساحة حول المحور نفسه.

بما أن عزم العطالة القطبي I_Z لمساحة الصفيحة حول المحور، يساوي إلى:

$$I_Z = I_X + I_Y \qquad (27\text{-}5)$$

فإن:

$$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY} \qquad (28\text{-}5)$$

نحصل بذلك على أن عزم العطالة لصفيحة رقيقة حول محور عمودي على مستواها، ومار بنقطة تقاطع محورين متعامدين في مستواها، يساوي مجموع عزمي العطالة للصفيحة حول هذين المحورين. هذا ما تعطيه العلاقة (5-17).

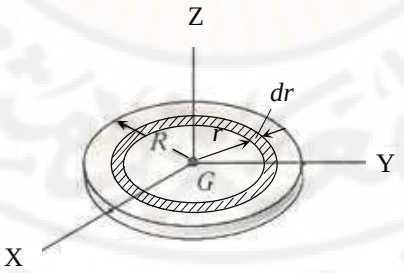
تتجلى أهمية العلاقة (5-28) عندما نتعامل مع كتلة الشريحة التفاضلية، عندما تؤخذ كمقطع بسماكة تفاضلية dz ، في هذه الحالة تتحقق هذه العلاقة بالكامل، وتصبح:

$$dI_{ZZ} = dI_{XX} + dI_{YY} \qquad (29\text{-}5)$$

6-2-1-عزم عطالة صفيحة رقيقة دائرية الشكل

Moment of Inertia of a Thin Circular Disk

نعدّ صفيحة رقيقة متجانسة سمكها t على شكل قرص دائري نصف قطره R ، وكتلته M ، ومركز كتله G ينطبق على مركزه الهندسي، ولتكن جملة المحاور GXYZ المارة من مركز الكتل G ، حيث المحور GZ عمودي على مستوى القرص، والمار بمركزه، كما هو مبين في (الشكل-5-12).



(الشكل-5-12) تحديد عزم عطالة صفيحة رقيقة متجانسة على شكل قرص دائري.

لتعيين I_{ZZ} عزم عطالة القرص حول المحور Z ، نأخذ لهذا الغرض عنصراً على شكل حلقة نصف قطرها r ، وسمكها dr ، ومساحتها ($dA = 2p.r.dr$)، وكتلتها ($dm = \rho\, dV = \rho.t.dA = \rho.t.2p.r.dr$)، وبتطبيق العلاقة (5-5) على العنصر:

$$dI_{ZZ} = r^2.dm = 2p\,.\,r\,.t\,.r^3.dr$$

ولكل القرص:

$$I_{ZZ} = 2p\,.\,r\,.t\int_0^R r^3.dr_k = \frac{1}{2}p\,.\,r\,.t.R^4$$

وبالتعويض عن ($\rho.t.p.R^2 = \rho.V = M$) بقيمتها، نحصل على عزم عطالة القرص بالنسبة للمحور Z ، أي: بالنسبة لمركز كتلته G :

$$I_{ZZ} = I_{GZ} = \frac{1}{2}M.R^2 \qquad (30\text{-}5)$$

ويكون نصف قطر عطالة القرص ρ_z حول المحور GZ ، استناداً للعلاقة (5-13) هو:

$$r_z = \sqrt{\frac{I_{GZ}}{M}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad (31\text{-}5)$$

لتعيين I_{XX} و I_{YY} عزم عطالة القرص حول المحور X أو Y الواقعين في مستوى القرص، والمارين بمركز كتلته G . فبما أن سماكة القرص صغيرة، فيمكن اعتبار أن ($z_k = 0$) لجسيماته كافة، وباستخدام العلاقات (5-8) نحصل على:

$$I_{XX} = \sum m_k.y_k^2 \quad , \quad I_{YY} = \sum m_k.x_k^2 \quad , \quad I_{ZZ} = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2) = I_{YY} + I_{XX}$$

ولتماثل القرص حول قطريه X و Y ينتج أن:

$$I_{XX} = I_{YY}$$

منه نحصل على عزم عطالة القرص حول أحد أقطاره:

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{2}I_{ZZ} = \frac{1}{4}M.R^2 \qquad (32\text{-}5)$$

بما أن الأقطار هي محاور أساسية لعطالة القرص في نقاطه كافة؛ لأنها محاور تناظر، فالقطع الناقص للعطالة للقرص في مركزه G هو دائرة مركزها G ، ونصف قطرها:

$$GN = \frac{1}{\sqrt{I_{XX}}} = \frac{2}{R\sqrt{M}}$$

6-2-2- عزم عطالة صفيحة رقيقة مستطيلة الشكل

Moment of Inertia of a Thin Rectangular Plate

نعدّ صفيحة رقيقة متجانسة مستطيلة الشكل O_1ABC مصمتة طولها ($AB = a$)، وعرضها ($BC = b$)، وكتلتها M ، ولتكن جملة المحاور $GXYZ$ المارة من مركز الكتل G ، حيث المحور GZ عمودي على مستوى الصفيحة، كما في (الشكل-5-13).

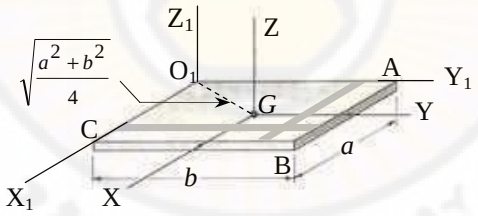
لتعيين I_{YY} عزم عطالة الصفيحة المستطيلة حول المحور Y الموازي لـــ BC ، والمار من مركز كتلتها G ، نقسم لهذا الغرض الصفيحة إلى شرائح على شكل قضبان رفيعة موازية للمحور GX طول كل منها a ، وكتلتها dm ، ويصبح عزم العطالة للشريحة حول المحور Y استناداً للعلاقة (5-21)، هو:

$$dI_{YY} = \frac{1}{12}a^2.dm$$

وللصفيحة المستطيلة كلها يصبح عزم العطالة حول المحور GY ، هو:

$$I_{YY} = \int dI_{YY} = \frac{1}{12}a^2 \int dm$$

$$I_{YY} = \frac{1}{12}M.a^2 \qquad (33\text{-}5)$$



(الشكل-5-13) تحديد عزم عطالة صفيحة رقيقة متجانسة مستطيلة الشكل.

لتعيين I_{XX} عزم عطالة الصفيحة المستطيلة حول المحور X الموازي لـــ AB ، والمار من مركز كتلتها G ، نقسم لهذا الغرض الصفيحة إلى شرائح على شكل قضبان رفيعة موازية للمحور GY طول كل منها b ، وكتلتها dm ، ويصبح عزم العطالة للشريحة حول المحور X استناداً للعلاقة (5-21) هو:

$$dI_{XX} = \frac{1}{12}b^2.dm$$

وللصفيحة المستطيلة كلها يصبح عزم العطالة حول المحور X ، هو:

$$I_{XX} = \int dI_{XX} = \frac{1}{12} b^2 \int dm$$

$$I_{XX} = \frac{1}{12} M.b^2 \qquad (34\text{-}5)$$

ولتعيين I_{ZZ} عزم عطالة الصفيحة المستطيلة حول المحور Z العمودي على مستوى الصفيحة، والمار من مركز كتلتها G ، نستخدم (17-5) علاقة عزم العطالة للصفائح الرقيقة حول محاور متعامدة:

$$I_{ZZ} = I_{YY} + I_{XX} = \frac{1}{12} M(b^2 + a^2) \qquad (35\text{-}5)$$

وبفرض وضع جملة محاور متعامدة $O_1X_1Y_1Z_1$ عند طرف المستطيل O_1 موازية للمحاور GXYZ الموضحة في (الشكل-5-13)، واستخدام العلاقة (18-5) علاقة عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية؛ نحصل على:

$$I_{Y_1Y_1} = I_{YY} + M\frac{a^2}{4} = \frac{1}{3} M.a^2$$

$$I_{X_1X_1} = I_{XX} + M\frac{b^2}{4} = \frac{1}{3} M.b^2 \qquad (36\text{-}5)$$

$$I_{Z_1Z_1} = I_{ZZ} + M(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}) = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$$

كما تتعين عزوم عطالة صفيحة رقيقة مربعة كتلتها M ، وطول ضلعها a حول محاور الجملة GXYZ المارة من مركز كتلتها G ، أو محاور الجملة $O_1X_1Y_1Z_1$ المارة من أحد أطرافها O_1 ، بتعويض كل b بـــ a في العلاقات السابقة ينتج أن:

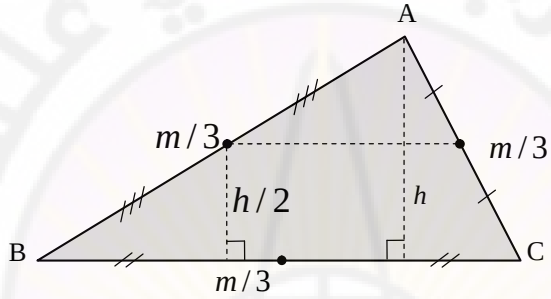
$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{12} M.a^2 \quad ، \quad I_{ZZ} = \frac{1}{6} M.a^2 \qquad (37\text{-}5)$$

$$I_{Y_1Y_1} = I_{X_1X_1} = \frac{1}{3} M.a^2 \quad ، \quad I_{Z_1Z_1} = \frac{2}{3} M.a^2 \qquad (38\text{-}5)$$

6-2-3- عزم عطالة صفيحة مثلثة الشكل

Moment of Inertia of a Thin Triangular Plate

نعدّ صفيحة رقيقة متجانسة مثلثة الشكل ABC المبينة في (الشكل-5-14) ارتفاعها h وكتلتها M ، ولتعيين عزم عطالتها حول أي محور Z ينطبق على أحد أضلاعها، نطبق فكرة أن عزم عطالتها حول أي محور يكافئ مجموع عزوم العطالة حول هذا المحور لثلاث كتل مركزة في منتصفات أضلاعها، وكتلة كل منها تساوي ثلث كتلة الصفيحة، ومنه:



(الشكل5-14) تحديد عزم عطالة صفيحة رقيقة متجانسة مثلثة الشكل.

$$I_{XX} = \frac{M}{3}(0) + \frac{M}{3}(\frac{h}{2})^2 + \frac{M}{3}(\frac{h}{2})^2$$

$$I_{XX} = \frac{1}{6}M.h^2 \qquad (39\text{-}5)$$

يستفاد من هذه الفكرة لإيجاد عزم العطالة لأي صفيحة مستوية مضلعة الشكل، وذلك بتقسيمها إلى مثلثات، والاستعانة بالجسيمات المكافئة لكل مثلث على حدة.

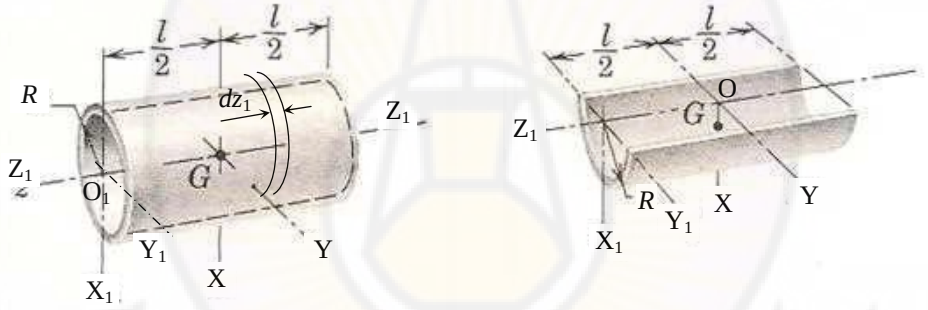
6-2-4- عزم عطالة غلاف اسطواني

Moment of Inertia of a Circular Cylindrical Shell

نعدُّ غلافاً أسطوانياً رقيقاً متجانساً كتلته M ونصف قطره R ، وطوله l ، ولتكن جملة المحاور $O_1X_1Y_1Z_1$ المارة من مركز قاعدته O_1 ، حيث المحور O_1Z_1 عمودي على مستوى القاعدة، كما هو مبين في a من (الشكل-5-15).

لتعيين $I_{Z_1Z_1}$ عزم عطالة الغلاف حول المحور Z_1 ، نقسم لهذا الغرض الغلاف بمقاطع عمودية على محورها، نحصل على مجموعة حلقات دائرية رقيقة، سماكة كل منها dz_1 ، فتكون كتلة كل حلقة تساوي إلى:

$$dm = \frac{M}{l} dz_1$$



b- نصف غلاف أسطواني رقيق متجانس. a- غلاف أسطواني رقيق متجانس.

(الشكل-5-15) تحديد عزم عطالة.

وبما أن عزم عطالة الحلقة حول Z_1 هو:

$$dI_{Z_1Z_1} = R^2 . dm$$

وللغلاف الأسطواني هو:

$$I_{Z_1Z_1} = \int_M R^2 . dm = R^2 \int_M dm$$

$$I_{Z_1Z_1} = M . R^2 \qquad (40\text{-}5)$$

ولتعيين $I_{X_1X_1}$ عزم عطالة الحلقة حول محور X_1 قطر في قاعدة الغلاف الأسطواني، نطبق نتيجة العلاقة (5-24) مع علاقة نقل عزم العطالة بين المحاور المتوازية:

$$dI_{X_1X_1} = \frac{1}{2}R^2.dm + z_1^2.dm$$

بالتعويض بعلاقة dm ؛ نحصل على:

$$dI_{X_1X_1} = \frac{1}{2}R^2.dm + \frac{M}{l}z_1^2.dz_1$$

وبالتكامل نحصل على عزم عطالة الغلاف الأسطواني حول المحور X_1 :

$$I_{X_1X_1} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{M}{3l}\{z_1^3\}_0^H$$

$$I_{X_1X_1} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{1}{3}M.l^2 \qquad (41\text{-}5)$$

وبفرض وضع جملة محاور متعامدة GXYZ في مركز الكتل G موازية للمحاور $O_1X_1Y_1Z_1$ الموضحة في a من (الشكل-5-15)، واستخدام العلاقة (5-18) علاقة عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية؛ نحصل على:

$$I_{XX} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{1}{12}M.l^2 \qquad (42\text{-}5)$$

كما يتعين عزم عطالة نصف غلاف أسطواني (*Half Cylindrical Shell*) الموضح في b من (الشكل-5-15)، كتلته M ، ونصف قطره R ، ومركز كتله محدد بـ ($x_G = OG = 2R/\pi$)، حول المحاور السابقة، بتطبيق (5-16) علاقة عزم العطالة لجسم مركب، ينتج أن:

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{1}{12}M.l^2 \qquad (43\text{-}5)$$

$$I_{X_1X_1} = I_{Y_1Y_1} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{1}{3}M.l^2 \qquad (44\text{-}5)$$

$$I_{Z_1Z_1} = M.R^2 \qquad (45\text{-}5)$$

كما أنه بتطبيق (5-18) عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية، ينتج أن:

$$I_{GZ_0} = (1 - \frac{4}{p^2})M.R^2$$

6-2-5- عزم عطالة غلاف كروي

Moment of Inertia of a Spherical Shell

نعدّ غلافاً كروياً رقيقاً متجانساً نصف قطره R ، وكتلته M ، ومركز كتله G يقع في مركزه الهندسي، ولتكن جملة المحاور GXYZ المارة من مركز كتله G المنطبق على المركز الهندسي للغلاف، كما هو مبين في a من (الشكل-5-16)، باختيار جسيم من الغلاف كتلته dm عندئذ يكون عزم العطالة القطبي للغلاف حول G هو:

$$I_G = \int dm.R^2 = M.R^2$$



b- نصف غلاف كروي رقيق متجانس. a- غلاف كروي رقيق متجانس.

(الشكل5-16) تحديد عزم عطالة.

لتعيين عزم عطالة الغلاف حول المحاور المتعامدة X و Y و Z التي تمثل ثلاث أقطار متعامدة، مارة من مركز الكتل G ، وفقاً لعلاقة التناظر حول هذه الأقطار؛ نحصل على:

$$I_{ZZ} = I_{XX} = J_{YY}$$

ومن (5-11) علاقة مجموع عزوم العطالة لجسم حول ثلاث محاور متعامدة، ينتج أن:

$$3I_{ZZ} = 2I_G$$

منه:

$$I_{ZZ} = I_{YY} = I_{XX} = 2M.R^2/3 \qquad (46\text{-}5)$$

كما يتعين عزم عطالة نصف غلاف الكروي (*Hemispherical Shell*) الموضح في b من (الشكل-5-16)، كتلته M ، ونصف قطره R ، ومركز كتله محدد بـــ (x_G=OG=*R*/2)، حول المحاور السابقة، بتطبيق (5-16) علاقة عزم العطالة لجسم مركب، ينتج أن:

$$I_{ZZ} = I_{YY} = I_{XX} = 2M.R^2/3 \qquad (47\text{-}5)$$

كما أنه بتطبيق (5-18) عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية، ينتج أن:

$$I_{GZ_0} = I_{GY_0} = 5M.R^2/12$$

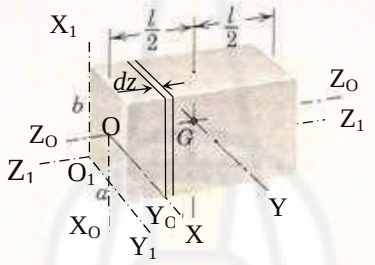
3-6-الأشكال الحجمية *Volume Shapes*

عند دراسة عزوم عطالة الأجسام الصماء المتجانسة ذات الكثافة المنتظمة، والتي لأبعادها الثلاثة مقادير من رتبة واحدة، نلجأ إلى استخدام العلاقة (5-18) علاقة عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية.

6-3-1- عزم عطالة متوازي مستطيلات

Moment of Inertia of a Rectangular Parallelepiped

نعدّ متوازي مستطيلات متجانساً ارتفاعه l ، وطول ضلع قاعدته a ، وعرضها b ، وكتلته M ، ومركز كتله G يقع في مركزه الهندسي، ولتكن جملة المحاور $O_1X_1Y_1Z_1$ المنطبقة على أضلاعه، كما هو مبين في (الشكل-5-17).



(الشكل-5-17) تحديد عزم عطالة متوازي مستطيلات متجانس.

لتعيين عزوم عطالة متوازي المستطيلات حول محاور جملة الإحداثيات $O_1X_1Y_1Z_1$ ، نقسم لهذا الغرض متوازي المستطيلات بمقاطع توازي قاعدته؛ نحصل على مجموعة عناصر حجميه عبارة ألواح مستطيلة رقيقة ذات السماكة المتناهية في الصغر dz ، وكتلة كل منها ($dm = \rho\, dV = \rho.a.b.dz$)، وعزم عطالتها بالنسبة للمستوى $O_1X_1Y_1$ هو:

$$d\,I_{O_1X_1Y_1} = z^2.dm = r\,.a.b.z^2.dz$$

وبالتكامل؛ نحصل على:

$$I_{O_1X_1Y_1} = r\,.a.b\int_0^l z^2.dz = \frac{1}{3}\,r\,.a.b.l^3$$

وبالتعويض عن ($\rho.a.b.l = \rho.V = M$) بقيمتها؛ نحصل على عزم عطالة متوازي المستطيلات بالنسبة للمستوى $O_1X_1Y_1$:

$$I_{O_1X_1Y_1} = \frac{1}{3}M.l^2 \qquad (48\text{-}5)$$

أي: أن عزم عطالة متوازي المستطيلات بالنسبة لأحد الوجوه يساوي ثلث جداء كتلته بمربع الحرف العمودي على الوجه المعتبر، ومنه:

$$I_{O_1Y_1Z_1} = \frac{1}{3}M.a^2 \quad , \quad I_{O_1Z_1X_1} = \frac{1}{3}M.b^2$$

وباستخدام العلاقات (5-10) نحصل على:

$$I_{X_1X_1} = I_{O_1X_1Y_1} + I_{O_1X_1Z_1} = \frac{1}{3}M(b^2 + l^2)$$

$$I_{Y_1Y_1} = I_{O_1Y_1X_1} + I_{O_1Y_1Z_1} = \frac{1}{3}M(a^2 + l^2) \qquad (49\text{-}5)$$

$$I_{Z_1Z_1} = I_{O_1Z_1Y_1} + I_{O_1Z_1X_1} = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

إذا أنشأنا من مركز الكتل G جملة محاور إحداثية GXYZ توازي محاور الجملة $O_1X_1Y_1Z_1$ ، ووفقاً لعلاقة نقل عزم العطالة من محور إلى آخر يوازيه؛ نحصل على:

$$I_{XX} = I_{X_1X_1} - M(\frac{b^2}{4} + \frac{l^2}{4}) = \frac{1}{3}M(b^2 + l^2) - \frac{1}{4}M(b^2 + l^2)$$

$$I_{XX} = M(b^2 + l^2)/12 \qquad (50\text{-}5)$$

وبطريقة مماثلة؛ نحصل على:

$$I_{YY} = M(a^2 + l^2)/12$$

$$I_{ZZ} = M(a^2 + b^2)/12$$

إذا كانت أطوال قاعدة متوازي المستطيلات a و b صغيرة إذا ما قورنت بارتفاعه l ، كان بإمكاننا إهمال الحد a^2 في علاقة I_{YY} ، أو إهمال الحد b^2 في علاقة I_{XX} ، فنحصل بذلك على عزم عطالة قضيب أسطواني نحيل حول مركز كتله؛ الذي تعطيه العلاقة (5-21). أو بإهمال الحد a^2 في علاقة $I_{X_1X_1}$ ، أو إهمال الحد b^2 في علاقة $I_{Y_1Y_1}$ ؛ فنحصل بذلك على عزم عطالة قضيب أسطواني نحيل حول أحد أطرافه، الذي تعطيه العلاقة (5-22).

بما أن الجملة الإحداثية GXYZ هي جملة مركزية للعطالة، فمعادلة مجسم القطع الناقص للعطالة له في G هي من الشكل:

$$I_{XX}.x^2 + I_{YY}.y^2 + I_{ZZ}.z^2 = 1$$

6-3-2- عزم عطالة أسطوانة دائرية

Moment of Inertia of a Circular Cylinder

نعدّ أسطوانة دائرية متجانسة نصف قطر قاعدتها R ، وكتلتها M ، وطولها l ، ومركز كتلتها G يقع في منتصف محورها الهندسي، ولتكن جملة المحاور الإحداثية GXYZ ، حيث المحور Z عمودي على مقطعها، ومار بمركز كتلتها G ، كما هو مبين في a من (الشكل-5-18).



a- أسطوانة دائرية متجانسة. b- نصف أسطوانة دائرية متجانسة.

(الشكل-5-18) تحديد عزم عطالة.

لتعيين I_{ZZ} عزم عطالة الأسطوانة حول المحور Z ، نقسم لهذا الغرض الأسطوانة بمقاطع عمودية على محورها، نحصل على مجموعة صفائح قرصية دائرية رقيقة نصف قطرها R ، وسماكة كل منها dz ، وتكون كتلة كل صفيحة ($dm = \rho.dV = \rho.p.R^2.dz$)، ووفق العلاقة (5-30)، وبما أن I_{ZZ} يساوي مجموع عزوم الصفائح القرصية الرقيقة بالنسبة للمحور نفسه Z ، نحصل على:

$$I_{ZZ} = \sum dI_{ZZ} = \sum \frac{1}{2} dm.R^2$$

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2} M.R^2 \qquad (51\text{-}5)$$

لتعيين I_{XX} نطبق العلاقة (5-32) على الصفيحة القرصية الرقيقة بالنسبة للمحور X_1 المنطبق على أحد أقطارها:

$$dI_{X_1X_1} = \frac{1}{4} R^2.dm$$

ووفق العلاقة (5-18) لدينا:

$$dI_{XX} = dI_{X_1X_1} + dm.z^2$$

ومنه:

$$I_{XX} = \sum dI_{XX} = \sum \frac{1}{4} r.p.R^4.dz + \sum r.p.R^2.z^2.dz$$

ويصبح بذلك عزم عطالة الأسطوانة كلها:

$$I_{XX} = \frac{1}{4} r.p.R^4 \int_{-l/2}^{l/2} dz + r.p.R^2 \int_{-l/2}^{l/2} z^2.dz$$

$$I_{XX} = \frac{1}{4} r.p.R^4.l + \frac{1}{12} r.p.R^2.l^3$$

وبالتعويض عن ($\rho.p.R^2.l = \rho.V = M$) بقيمتها؛ نحصل على علاقة عزم عطالة الأسطوانة بالنسبة للمحور GX :

$$I_{XX} = \frac{1}{4} M.R^2 + \frac{1}{12} M.l^2 \qquad (52\text{-}5)$$

نستنتج من شكل الأسطوانة الدائري أن هذه العلاقة تعطينا أيضاً عزم العطالة بالنسبة إلى المحور Y ، وكذلك بالنسبة إلى أي محور مركزي عمودي على Z المحور الهندسي للأسطوانة.

إذا كان ارتفاع الأسطوانة l صغيراً إذا ما قورن بنصف قطرها R ، كان بإمكاننا إهمال الحد $l^2/12$ في العلاقة (52-5)، فنحصل بذلك على عزم عطالة صفيحة دائرية حول أحد أقطارها الذي تعطيه العلاقة (32-5).

إذا كان نصف قطر الأسطوانة R صغيراً إذا ما قورن بارتفاعها l ، كان بإمكاننا إهمال الحد $R^2/4$ في العلاقة (52-5)، فنحصل بذلك على عزم عطالة قضيب أسطواني نحيل حول مركز كتله الذي تعطيه العلاقة (21-5).

بفرض وضع جملة محاور متعامدة $X_0Y_0Z_0$ موازية للمحاور GXYZ ، ومنطبقة على قاعدة الأسطوانة، والموضحة في (الشكل-5-18)، وباستخدام العلاقة (18-5) علاقة عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية؛ نحصل على:

$$I_{X_0X_0} = \frac{1}{4} M.R^2 + \frac{1}{3} M.l^2 \qquad (53\text{-}5)$$

كما يتعيين عزم عطالة نصف أسطوانة (*Semi cylinder*) الموضحة في b من (الشكل-5-18)، كتلتها M ، ونصف قطرها R ، ومركز كتلتها محدد بـــ ($x_G = OG = 4R/3\pi$) حول المحاور السابقة، بتطبيق (5-16) علاقة عزم العطالة لجسم مركب، ينتج أن:

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{4}M.R^2 + \frac{1}{12}M.l^2 \qquad (54\text{-}5)$$

$$I_{X_0X_0} = I_{Y_0Y_0} = \frac{1}{4}M.R^2 + \frac{1}{3}M.l^2 \qquad (55\text{-}5)$$

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2}M.R^2 \qquad (56\text{-}5)$$

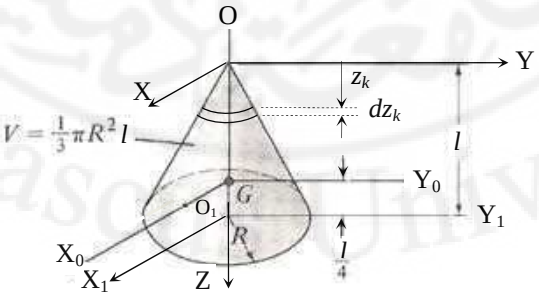
وبتطبيق (5-18) عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية، ينتج أن:

$$I_{GZ} = (\frac{1}{2} - \frac{16}{9p^2})M.R^2$$

6-3-3- عزم عطالة مخروط دائري

Moment of Inertia of a Circular Cone

نعدّ مخروطاً متجانساً دائرياً قائماً مصمتاً كتلته M ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه l ، ولتكن جملة المحاور الإحداثية OXYZ مبدؤها O يقع على رأس المخروط، والمحور OZ ينطبق على محوره الهندسي؛ بحيث يكون عمودي على مقطعه، وماراً بمركز كتلته G المحدد بـــ ($z_G = OG = 3l/4$)، كما فى (الشكل-5-19).



(الشكل-5-19) تحديد عزم عطالة مخروط متجانس دائري قائم مصمت.

لتعيين I_{GZ} عزم عطالة المخروط حول المحور GZ ، نقسم لهذا الغرض المخروط بمقاطع عمودية على محوره، نحصل على مجموعة أقراص دائرية رقيقة، سماكة كل منها dz_k ، ونصف قطرها $[r_k = (R/l)\ z_k]$، فتكون كتلة القرص الواحد $(dm_k = r.p.r_k^2.dz_k)$، وعزم عطالته بالنسبة للمحور OZ :

$$dI_{ZZ} = \frac{1}{2} r_k^2.dm_k = \frac{1}{2} r.p.\frac{R^4}{l^4} z_k^4.dz_k$$

وبالتكامل نحصل على:

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2} r.p.\frac{R^4}{l^4}\int_0^l z_k^4.dz_k = 0.1\, r.p.R^4.l$$

وبالتعويض عن $(\frac{1}{3} r.p.R^2.l = r.V = M)$ بقيمتها؛ نحصل على عزم عطالة المخروط بالنسبة للمحور Z :

$$I_{ZZ} = 0.3 M.R^2 \qquad (57\text{-}5)$$

كذلك بسهولة، نجد أن:

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{3}{20} M.R^2 + \frac{3}{5} M.l^2 \qquad (58\text{-}5)$$

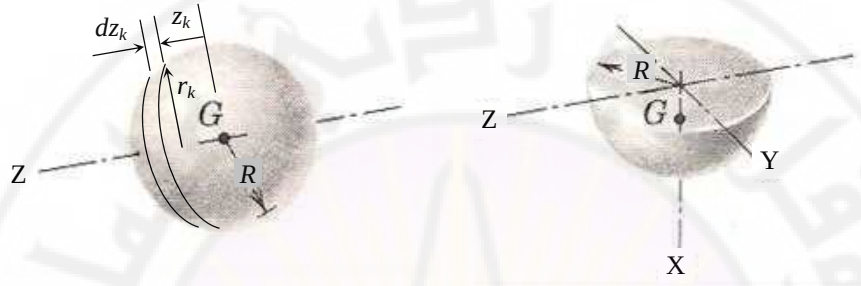
$$I_{X_1X_1} = I_{Y_1Y_1} = \frac{3}{20} M.R^2 + \frac{1}{10} M.l^2$$

وبما أن $(z_G=3l/4)$ وبتطبيق (5-18) عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية، ينتج أن:

$$I_{GY_0} = I_{GX_0} = \frac{3}{20} M.R^2 + \frac{3}{80} M.l^2$$

6-3-4- عزم عطالة كرة *Moment of Inertia of a Sphere*

نعدّ كرة مصمتة متجانسة كتلتها M ، ونصف قطرها R ، ومركز كتلها G يقع في مركزها الهندسي، ولتكن جملة المحاور الإحداثية GXYZ ، حيث المحور GZ عمودي على المستوى XGY المار بمركز كتلها G ، كما في a من (الشكل-5-20).



a- كرة مصمتة متجانسة. b- نصف كرة مصمتة.

(الشكل5-20) تحديد عزم عطالة.

لتعيين I_{ZZ} عزم عطالة الكرة حول أحد أقطارها، وليكن المحور Z ، نقسم لهذا الغرض الكرة بمقاطع عمودية على المحور Z ، نحصل على مجموعة صفائح دائرية رقيقة سماكة كل منها dz_k ، ونصف قطرها $(r_k^2 = R^2 - z_k^2)$، فتكون كتلة كل صفيحة $(dm_k = r.p.r_k^2.dz_k)$، وعزم عطالتها بالنسبة للمحور Z :

$$dI_{ZZ} = \frac{1}{2} r_k^2 . dm_k = \frac{1}{2} r.p.r_k^4 . dz_k$$

يكون:

$$dI_{ZZ} = \frac{1}{2} r.p\,(R^2 - z_k^2)^2\, dz_k$$

بالتكامل:

$$I_{ZZ} = \frac{1}{2} r.p \int_{-R}^{R} (R^2 - z_k^2)^2\, dz_k = \frac{8}{15} r.p.R^5$$

وبالتعويض عن $(r\frac{4}{3}p.R^3 = r.V = M)$ بقيمتها؛ نحصل على عزم عطالة الكرة بالنسبة لقطر من أقطارها Z :

$$I_{ZZ} = 0.4\, M.R^2 \qquad (59\text{-}5)$$

ولتماثل الكرة حول أقطارها الثلاث المتعامدة؛ فإن عزوم عطالتها بالنسبة إليها كلها متساوية:

$$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ}$$

أما عزم عطالة الكرة بالنسبة لمركز كتلها G هو:

$$I_G = \frac{1}{2}(I_{XX} + I_{YY} + I_{ZZ}) = \frac{3}{2} I_{ZZ} = \frac{3}{5} M.R^2 \qquad (60\text{-}5)$$

ويكون نصف قطر العطالة، أو نصف قطر دوران القرص ρ_z حول المحور GZ استناداً للعلاقة (5-13) هو:

$$r_z = \sqrt{\frac{I_{ZZ}}{M}} = \sqrt{0.4R}$$

وبما أن أقطار الكرة هي محاور أساسية للعطالة في كل نقطة من نقاطها؛ لأنها محاور تناظر، وفي مركز الكرة G تكون الأقطار محاور مركزية للعطالة، ومجسم القطع الناقص للعطالة في مركز الكرة هو كرة مركزها G ، ونصف قطرها:

$$GN = \frac{1}{\sqrt{I_{XX}}} = \frac{1}{R\sqrt{0.4M}}$$

لتعيين عزم عطالة نصف كرة مصمتة (*Hemisphere*) كتلتها M ، ومركز قاعدتها O ، ونصف قطرها R ، ومركز كتلتها محدد بـ ($x_G = OG = 3R/8$)، حول المحاور الموضحة في b من (الشكل-5-20)، نطبق (5-16) علاقة عزم العطالة لجسم مركب؛ ينتج أن:

$$I_{ZZ} = I_{YY} = I_{XX} = \frac{2}{5} M.R^2 \qquad (61\text{-}5)$$

وباستخدام العلاقة (5-18) علاقة عزوم العطالة لجسم حول محاور متوازية؛ نحصل على:

$$I_{GZ} = I_{GY} = 0.259 M.R^2 \quad , \quad I_{GX} = \frac{2}{5} M.R^2 \qquad (62\text{-}5)$$

4-6-قاعدة راوث *Routh's Rule*

تنص قاعدة راوث أنه إذا تماثل جسم كتلته M حول ثلاثة محاور X و Y و Z ، وكانت أبعاده المطابقة لهذه المحاور هي $2a$ و $2b$ و $2c$ على الترتيب، فإن عزم عطالته حول هذه المحاور يعطى بالعلاقات التالية:

$$I_X = \frac{1}{n}M(b^2+c^2)\ ,\ I_Y = \frac{1}{n}M(c^2+a^2)\ ,\ I_Z = \frac{1}{n}M(a^2+b^2) \quad (63\text{-}5)$$

حيث n عدد يساوي 3 أو 4 أو 5 تبعاً للحالات التالية:

- تأخذ n القيمة 3 في حالة متوازي المستطيلات، وحالاته الخاصة المكعب، واللوح المستطيل، والمربع، والقضيب الرفيع.
- تأخذ n القيمة 4 في حالة الصفيحة الرقيقة المحاطة بقطع ناقص، وحالاته الخاصة الدائرة.
- تأخذ n القيمة 5 في حالة المجسم الناقصي العام، وحالاته الخاصة المجسم الناقصي الدوراني، والكرة.

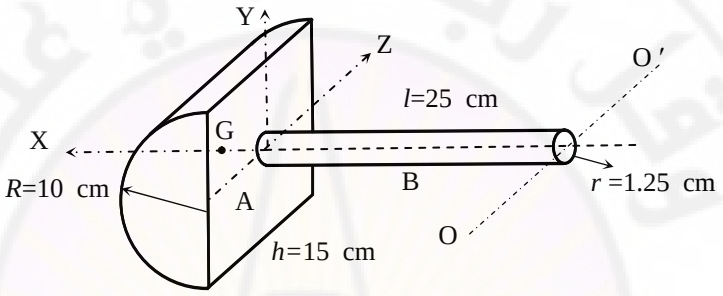
تفيد قاعدة راوث في تذكر نتائج عزوم العطالة للأجسام المتماثلة حول ثلاثة محاور متعامدة، وهي شاملة لعدد كبير من الأجسام الهندسية التي تصادفنا في التطبيقات، وسيترك للطالب أن يحقق بنفسه مطابقة نتائج هذه القاعدة لبعض النتائج التي حصلنا عليها.

ويمكن تعيين عزوم العطالة للأجسام غير المتجانسة، أو للأجسام ذات الأشكال المعقدة عملياً بوساطة أجهزة خاصة معينة.

مسألة-5-1

تتكون مطرقة من نصف أسطوانة خشبية A وزنها النوعي (ρ_w = 7850 N/m^3)، ومن يد فولاذية أسطوانية الشكل B وزنها النوعي (ρ_s = 76800 N/m^3) ، المبينة في (الشكل-5-21).

المطلوب إيجاد عزم عطالة المطرقة I_O حول محور OO' يوازي محور الأسطوانة الخشبية.



(الشكل 5-21) تحديد عزم عطالة مطرقة خشبية بيد فولاذية

الحل:

لإيجاد عزم عطالة المطرقة حول محور OO' نقسم الشكل إلى قسمين هما نصف أسطوانة خشبية A ، وأسطوانة فولاذية B ، ويتم تعيين عزم عطالة كل منهما حول المحور OO' كما يلي:

الأسطوانة الخشبية A

إن المحور OO' يوازي محور دوران الأسطوانة، وعزم عطالتها بالنسبة لمحور دورانها Z ، هو:

$$I_Z^A = M_A.R^2/2$$

حيث R نصف قطر الأسطوانة، و M_A كتلة نصف الأسطوانة، وتساوي:

$$M_A = \frac{W_A}{g} = \frac{V_A.r_w}{g} = \frac{p.R^2.h.r_w}{2g} = \frac{p\times 0.10^2\times 0.15\times 7850}{2g} = 1.885\,\text{kg}$$

منه عزم عطالة الأسطوانة الخشبية A بالنسبة لمحور دورانها Z ، يساوي:

$$I_Z^A = 1.885\times 0.10^2/2 = 0.009425\,\text{kg.m}^2$$

ولإيجاد عزم عطالة الأسطوانة الخشبية A بالنسبة للمحور OO' ، ينبغي إيجاد عزم عطالته بالنسبة لمحور يوازي محور دوران Z ، ويمر من G مركز كتل نصف الأسطوانة الخشبية الذي يعين بالعلاقة:

$$x_{G_A} = 4R/3p = 4\times 0.10/3p = 0.04244 \text{ m} = 4.244 \text{ cm}$$

وعليه يكون عزم عطالة القسم A حول محور يمر من مركز كتله G ، ويوازي المحور OO' يساوي وفقاً لعلاقة هيوجنس بنقل عزم العطالة من محور إلى آخر يوازيه، هو:

$$I_G^A = I_Z^A - M.x_{G_A}^2 = 0.009425 - 2.45(0.04244)^2 = 0.005012 \text{ kg.m}^2$$

ويكون عزم عطالة القسم A حول محور OO' :

$$I_O^A = I_G^A + M.(x_{G_A} + l)^2$$
$$= 0.005012 + 2.45(0.04244 + 0.25)^2 = 0.214539 \text{ kg.m}^2$$

الأسطوانة الفولاذية B

إن عزم عطالة الأسطوانة B بالنسبة للمحور OO' من مستوى قاعدتها، يعطى بالعلاقة:

$$I_O^B = (3r^2 + 4l^2)M_B/12$$

حيث l ارتفاع الأسطوانة الفولاذية، و r نصف قطرها، و M_B كتلتها، وتساوي:

$$M_B = \frac{W_B}{g} = \frac{V_B.r_s}{g} = \frac{p.r^2.l.r_s}{g} = \frac{p\times 0.0125^2\times 0.25\times 76800}{g} = 0.96 \text{ kg}$$

منه عزم عطالة الأسطوانة الفولاذية B بالنسبة لمحور OO' ، يساوي:

$$I_O^B = [3(0.0125)^2 + 4(0.25)^2]0.96/12 = 0.02 \text{ kg.m}^2$$

بالتالي يكون عزم عطالة المطرقة حول المحور OO' يساوي:

$$I_O = I_O^A + I_O^B = 0.214539 + 0.02 = 0.2345 \text{ kg.m}^2$$

7- جداء العطالة *Product of Inertia*

إن عزم عطالة جسم حول محور لا يحدد توزيع كتل المجموعة تحديداً كاملاً؛ فإذا دار القضيب (الشكل-5-3) في المستوى OYZ ، بحيث تصبح الزاوية بينه وبين المحور OZ غير قائمة، وبحيث يبقى h بعدا الكرتين A و B عن محور الدوران ثابتين، وذلك بإزاحة الكرتين باتجاه طرفي القضيب، عند ذلك لا يتغير كل من موضع مركز الكتل، وعزم عطالة الكرتين حول المحور OZ ، في حين يصبح توزيع الكتل مختلفاً بالنسبة للمحور OZ ، مما يؤثر على دوران المجموعة حوله نتيجة ظهور ضغوط جانبية إضافية على مساند الارتكاز.

لذا ينشأ مفهوم جداء العطالة، أو عزوم العطالة بالنسبة لمحورين كمميزات تأخذ في الاعتبار عدم التماثل هذا في توزيع الكتل. كما يدعى جداء العطالة بـــ العزم اللامركزي، أو بـــ عزوم العطالة الطاردة المركزية (*Centrifugal Moment*)، لأنه وجد حين حساب عزم القوى النابذة بالنسبة للمحاور.

إذا مددنا عبر النقطة O محاور الإحداثيات OXYZ ، كما هو مبين في (الشكل-5-8)، فإن جداء العطالة لجسم بالنسبة لمستويين متعامدين هو بالتعريف مجموع جداءات كتلة كل جسيم من الجسم ببعديه عن المستويين، ويؤخذ عادة بالنسبة لمحورين متعامدين من المحاور الإحداثية الثلاثة، وتكون جداءات العطالة بالنسبة لهذه المحاور هي المقادير I_{XY} , I_{YZ} , I_{ZX} التي تتحدد بالعلاقات:

$$I_{XY} = \sum m_k . x_k . y_k \quad , \quad I_{YZ} = \sum m_k . y_k . z_k \quad , \quad I_{ZX} = \sum m_k . z_k . x_k \qquad (64\text{-}5)$$

حيث m_k تمثل كتل الجسيمات و x_k , y_k , z_k تمثل إحداثياتها، ومن الواضح عند ذلك أن ($I_{XY} = I_{YX}$) وهكذا، وقياساً على العلاقات (5-15) تأخذ العلاقات (5-64) الصورة التالية:

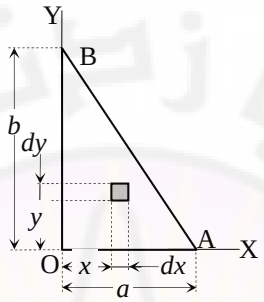
$$I_{XY} = \int_V r . x_k . y_k . dV \ , \ I_{YZ} = \int_V r . y_k . z_k . dV \ , \ I_{ZX} = \int_V r . z_k . x_k . dV \qquad (65\text{-}5)$$

على عكس العزوم المحورية للعطالة يمكن أن تكون جداءات العطالة مقادير موجبة أو سالبة، وقد تساوي الصفر كحالة خاصة في أوضاع معينة لمحاور الإحداثيات المختارة OXYZ ، أو إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لأحد المحاور، ويدعى بـــ المحور الأساسي.

مسألة-5-2

عين جداء العطالة I_{XY} لصفيحة متجانسة رقيقة بشكل مثلث قائم كتلتها M ، وسماكتها t ، بالنسبة للمحاور الموجهة وفق أضلاعها القائمة a و b ، كما هو مبين في (الشكل-5-22).

الحل:



(الشكل-5-22) تحديد جداء العطالة لصفيحة متجانسة بشكل مثلث قائم.

نقسم الصفيحة إلى مستطيلات عنصرية أبعادها dx و dy ، وباعتبار أن الكتلة النوعية للصفيحة ρ ، فتكون كتلتها:

$$dm = r.t.dx.dy$$

ويكون جداء العطالة المطلوب:

$$I_{XY} = \int_M x.y.dm$$

بما أن معادلة الوتر AB في جملة المحاور OXY هي:

$$y = b(1-\frac{x}{a})$$

بالتعويض في علاقة جداء العطالة، وبالتكامل:

$$I_{XY} = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} r.t.x.y.dx.dy = r.t \int_0^a \left[\frac{x.y^2}{2}\right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx$$

$$I_{XY} = r.t \int_0^a b^2.\frac{x}{2}(1-\frac{2}{a}x+\frac{1}{a^2}x^2)\,dx = \frac{1}{24} r.t.a^2.b^2$$

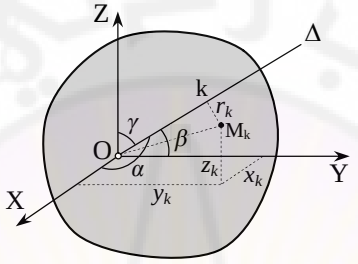
وبالتعويض عن $(r.t\frac{1}{2}a.b = r.t.A = r.V = M)$ بكتلة الصفيحة؛ نحصل على جداء العطالة المطلوب:

$$I_{XY} = M.a.b/12$$

8- عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور ما مار من مبدأ الإحداثيات

لتعيين عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ مار من مبدأ الإحداثيات O ، والمحدد بزوايا التوجيه (α,β,γ) بالنسبة إلى جملة المحاور OXYZ ، الموضحة في (الشكل-5-23)، نختار الجسيم M_k من الجسم، ونستخدم العلاقة (5-6):

$$I_\Delta = \sum m_k.r_k^2 \qquad (66\text{-}5)$$



(الشكل-5-23) تحديد عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور مار من مبدأ الإحداثيات.

لكن:

$$r_k^2 = (\mathrm{OM_k})^2 - (\mathrm{Ok})^2$$

حيث:

$$(\mathrm{OM_k})^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$$

$$\mathrm{Ok} = x_k.\cos a + y_k.\cos b + z_k.\cos g$$

وبالتالي يكون:

$$r_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k.\cos a + y_k.\cos b + z_k.\cos g)^2$$

بضرب الحد الأول من الطرف الأيمن بـــ:

$$(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g) = 1$$

وبالتعويض في (5-66)، وفك القوس المربع والاختصار، واعتبار العلاقات (5-8)، والعلاقات (5-64)؛ نحصل على:

$$\begin{aligned} I_\Delta = {} & I_{XX}.\cos^2 a + I_{YY}.\cos^2 b + I_{ZZ}.\cos^2 g \\ & - 2I_{XY}.\cos a.\cos b - 2I_{YZ}.\cos b.\cos g - 2I_{ZX}.\cos g.\cos a \end{aligned} \qquad (67\text{-}5)$$

منه يمكن تعيين عزم العطالة لجسم بالنسبة لمحور ما مار من مبدأ إحداثيات، من معرفة عزوم العطالة بالنسبة للمحاور، وجداءات العطالة، ووضعية المحور Δ .

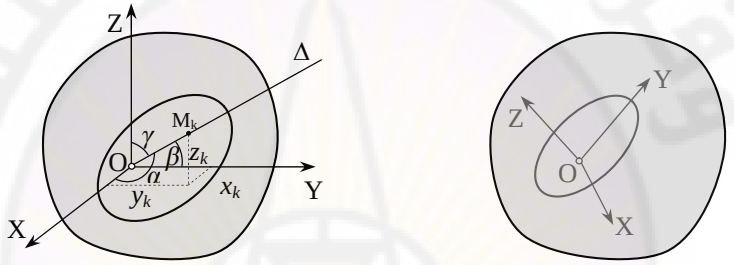
9- مجسم القطع الناقص للعطالة *Ellipsoid of Inertia*

لتعيين تغير عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ المار من مبدأ الإحداثيات O ، بدلالة تغير اتجاه المحور Δ . نختار الجسيم $M_k(x_k , y_k , z_k)$ المعينة بالعلاقة:

$$OM_k = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}$$

حيث التجيبات الموجهة للمحور Δ ، الموضحة في a من (الشكل5-24)، هي:

$$\cos a = \frac{x_k}{OM_k} = x_k\sqrt{I_\Delta} \ , \cos b = \frac{y_k}{OM_k} = y_k\sqrt{I_\Delta} \ , \cos g = \frac{z_k}{OM_k} = z_k\sqrt{I_\Delta}$$



b- محاور العطالة الأساسية. a- تغير عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور بدلالة تغير اتجاهه.

(الشكل-5-24)

لإيجاد المحل الهندسي للجسيم M_k نعوض في العلاقة (5-67)، وبالاختصار نحصل على:

$$I_{XX}.x_k^2 + I_{YY}.y_k^2 + I_{ZZ}.z_k^2 - 2I_{XY}.x_k.y_k - 2I_{YZ}.y_k.z_k - 2I_{ZX}.z_k.x_k = 1 \quad (68\text{-}5)$$

علاقة المحل الهندسي للجسيم عندما يدور المحور Δ حول المبدأ O ، وهي معادلة سطح من الدرجة الثانية مركزه في المبدأ O ، ويتحرك عليه الجسيم M_k بتغير اتجاه المحور Δ حول المبدأ O ، ونلاحظ أنها لا تحوي إحداثية من الدرجة الأولى، ومن الهندسة التحليلية نعلم أن هذه العلاقة هي عبارة عن معادلة مجسم قطع ناقص مركزه مبدأ الإحداثيات O ، ويدعى بـــ القطع الناقص للعطالة (*Ellipsoid of Inertia*) في النقطة O ، وتدعى محاوره بـــ محاور العطالة الأساسية (*Principal Axes of Inertia*)، الموضحة في b من (الشكل5-24)، وعزوم عطالة الجسم بالنسبة لهذه المحاور تدعى بـــ عزوم العطالة الأساسية (*Principal Moment of Inertia*).

باعتبار أن محاور العطالة الأساسية هي المحاور الإحداثية، كما هو مبين في b من (الشكل-5-24)، عندها تصبح العلاقة (5-68) بالشكل:

$$I_{XX}.x_k^2 + I_{YY}.y_k^2 + I_{ZZ}.z_k^2 = 1 \qquad (69\text{-}5)$$

حيث I_{XX} , I_{YY} , I_{ZZ} تمثل عزوم العطالة الأساسية بالنسبة للمحاور الأساسية في النقطة O ، ونلاحظ في هذه العلاقة أن جداءات العطالة بالنسبة لكل زوج من المحاور الإحداثية معدومة.

بصورة أخرى يمكن القول: إنه من كل نقطة من نقاط الجسم يمكن على الأقل رسم ثلاث محاور متعامدة؛ بحيث تكون جداءات العطالة للجسم معدومة، وإن هذه المحاور هي محاور القطع الناقص للعطالة.

فإذا علمت عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الرئيسية، عندها يكون عزم العطالة بالنسبة لأي محور $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ ، معطى بالعلاقة:

$$I_\Delta = I_{XX}.\cos^2 a + I_{YY}.\cos^2 b + I_{ZZ}.\cos^2 g \qquad (70\text{-}5)$$

بالتالي فكل جسيم من الجسم يوافقه مجسم قطع ناقص للعطالة خاص به؛ الذي يعين عزوم عطالة الجسم بالنسبة للمحاور المارة من الجسيم كافة، فإذا أنشأنا اعتباراً من O كمركز مجسم القطع الناقص للعطالة المعين بالمعادلة (5-68)، ثم رسمنا من O المحور Δ ، قطع المحور المجسم في النقطتين المتناظرتين M_k و M'_k ، ويكون:

$$OM_k = OM'_k = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}} \qquad \Rightarrow \qquad I_\Delta = \frac{1}{(OM_k)^2} = \frac{1}{(OM'_k)^2}$$

ويمكن إذاً بمساعدة المجسم في O تعيين قيمة عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور Δ مار من النقطة O ، ومجسم قطع ناقص العطالة الذي يوافق مركز الكتل G يدعى بـــ مجسم العطالة المركزي، ومحاوره تدعى بـــ محاور العطالة الأساسية المركزية.

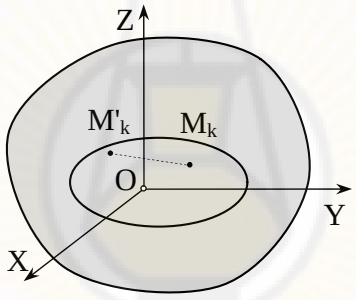
10- االمحاور والمستويات الأساسية للعطالة

Principal Axes and Principal Planes

هي بالتعريف محاور ومستويات تناظر في مجسم القطع الناقص للعطالة، والنقطة O هي مركز تناظر فيه، وعليه يجب أن تمر محاور ومستويات التناظر للمجسم كلها من O .

10-1- المحاور الأساسية للعطالة *Principal Axes of Inertia*

لنفرض جسماً متجانساً ذا محور تناظر ينطبق عل محور الإحداثيات OZ ، والمحاور OX و OY كيفية كما في (الشكل5-25). عندئذ وفقاً للتناظر فلكل جسيم M_k كتلته m_k وإحداثياته x_k , y_k , z_k من مجسم قطع الناقص للعطالة يوافقه جسيم متناظر M'_k له الكتلة نفسها، وإحداثياته $-x_k , -y_k , z_k$.



(الشكل5-25) تحديد المحاور الأساسية للعطالة.

نعوض إحداثيات هذه الجسيمات في العلاقة (5-68)، نحصل من أجل الجسيم M_k على:

$$I_{XX}.x_k^2 + I_{YY}.y_k^2 + I_{ZZ}.z_k^2 - 2I_{XY}.x_k.y_k - 2I_{YZ}.y_k.z_k - 2I_{ZX}.z_k.x_k = 1$$

أما من أجل الجسيم M'_k ؛ فنحصل على:

$$I_{XX}.x_k^2 + I_{YY}.y_k^2 + I_{ZZ}.z_k^2 - 2I_{XY}.x_k.y_k + 2I_{YZ}.y_k.z_k + 2I_{ZX}.z_k.x_k = 1$$

بطرح إحدى العلاقتين الأخيرتين من الأخرى؛ نحصل على:

$$4I_{YZ}.y_k.z_k + 4I_{ZX}.z_k.x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad z_k(I_{YZ}.y_k + I_{ZX}.x_k) = 0$$

بما أن $(y_k \neq 0 \quad , \quad x_k \neq 0)$، فيجب أن يكون:

$$I_{YZ} = 0 \quad , \quad I_{ZX} = 0 \qquad (71\text{-}5)$$

نستنتج أنه عندما يكون أحد المحاور الإحداثية المارة من النقطة المفروضة محوراً أساسياً للعطالة في هذه النقطة، فإن جداءات العطالة التي تحوي في رموزها اسم هذا المحور تكون مساوية إلى الصفر، وهذا الشرط لازم وكافٍ بمعنى أن انعدام جداءي العطالة (71-5) يعني أن المحور OZ هو محور تناظر في مجسم القطع الناقص للعطالة.

بالمثل إذا كان:

$$I_{XZ} = 0 \quad , \quad I_{XY} = 0$$

فإن المحور OX يكون عند النقطة O محوراً أساسياً للعطالة، وهكذا. بالتالي إذا كانت جداءات العطالة كلها تساوي الصفر، أي: إذا كانت:

$$I_{YZ} = 0 \quad , \quad I_{XZ} = 0 \quad , \quad I_{XY} = 0$$

فإن كل محور من جملة محاور الإحداثيات $OXYZ$ يكون محوراً أساسياً للعطالة عند نقطة المبدأ O .

نستنتج أنه إذا كان للجسم محور تناظر؛ فإن هذا المحور يكون محوراً أساسياً لعطالة الجسم عند أي نقطة من نقط هذا المحور. لكن ليس من الضروري أن يكون المحور الأساسي للعطالة محور تناظر، وإذا انطبق المبدأ O على مركز الكتل G دعيت عندها المحاور الأساسية للعطالة في G بـــ المحاور المركزية للعطالة.

2-10- المستويات الأساسية للعطالة *Principal Planes of Inertia*

لنفرض جسماً متجانساً ذا مستوى تناظر، نمد في هذا المستوى المحورين OX و OY ، وآخر عمودياً عليهما OZ ، وعندئذ وفقاً للتماثل فلكل جسيم M_k كتلته m_k وإحداثياته x_k , y_k , z_k يوافقه جسيم متناظر M'_k له الكتلة نفسها، وإحداثياته x_k , y_k ,-z_k ، ونتيجة لذلك، وكما في الحالة السابقة، نجد:

$$I_{YZ} = 0 \quad , \quad I_{XZ} = 0$$

يعني ما تقدم: انعدام جداءات العطالة بالنسبة لمستويات التناظر في المجسم والشرط المذكور أعلاه هو شرط لازم وكافٍ.

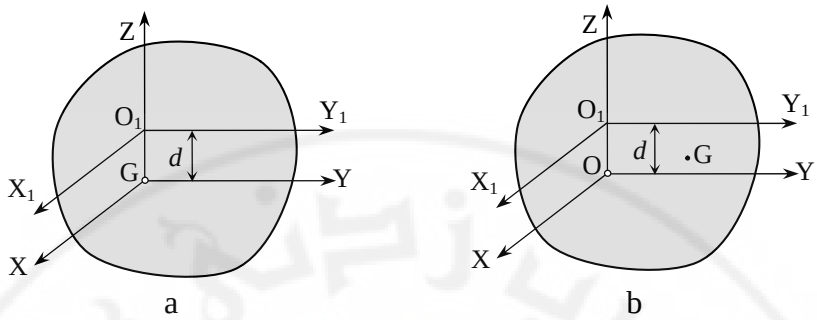
بالتالي إذا انعدمت جداءات عطالة الجسم بالنسبة لثلاثة مستويات متعامدة، ومتلاقية في المبدأ O ، كانت عندها هذه المستويات مستويات تناظر في مجسم القطع الناقص للعطالة في المبدأ O وتدعى بـــ المستويات الأساسية للعطالة، وإذا انطبق المبدأ O على مركز الكتل G سميت عندها مستويات التناظر بـــ المستويات المركزية للعطالة.

كما يعني انعدام جداءات العطالة بالنسبة لمستويات التناظر في المجسم، أنه إذا كان للجسم مستوى تناظر؛ فإن أي محور عمودي على هذا المستوى يكون محوراً أساسياً لعطالة الجسم عند النقطة O التي يقطع فيها المحور المستوى، وتعبر هاتان العلاقتان (5-71) عن الشرط اللازم لكي يكون المحور OZ محوراً أساسياً لعطالة الجسم عند النقطة O .

ينتج مما سبق إثباته أنه إذا كان للجسم محور تناظر؛ فإن هذا المحور يكون أحد المحاور الأساسية المركزية لعطالة الجسم؛ لأن مركز كتل الجسم يقع على محور التناظر، وإذا كان للجسم مستوى تناظر وقع عندها مركز كتل الجسم في هذا المستوى، وكان المحور العمودي على هذا المستوى، والمار بمركز كتل الجسم؛ يكون أيضاً أحد المحاور الأساسية المركزية لعطالة الجسم.

لنفرض الآن أن GZ هو محور أساسي مركزي للعطالة، كما هو مبين في a من (الشكل-5-26)، والمحور OZ محور أساسي للعطالة، كما هو مبين في b من (الشكل-5-26)، وبما أن هذه المحاور أساسية فيكون:

$$I_{YZ} = 0 \quad , \quad I_{ZX} = 0$$



(الشكل-5-26) تحديد المستويات الأساسية للعطالة.

لنأخذ على هذه المحاور النقطة O_1 ، ونمد المحاور O_1X_1 و O_1Y_1 الموازية لـــ OX و OY ، ونحسب جداءات العطالة:

$$I_{Y_1Z} = \sum m_k.y_k(z_k - d) = I_{YZ} - d\sum m_k.y_k$$

منه:

$$I_{Y_1Z} = -d.M.y_G$$

كذلك نجد:

$$I_{X_1Z} = -d.M.x_G$$

في حال كون المحور الأساسي مركزياً كما هو مبين في a من (الشكل-5-26)، يكون:

$$x_G = y_G = 0$$

وتكون جداءات العطالة:

$$I_{Y_1Z} = 0 \quad , \quad I_{ZX_1} = 0$$

بالتالي يكون المحور الأساسي المركزي محوراً أساسياً للعطالة في كل نقطة من نقاطه.

وفي حال كون المحور الأساسي غير مار من مركز الكتل؛ فعندها يكون:

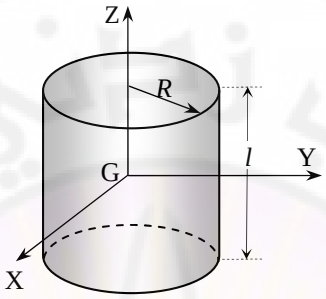
$$I_{Y_1Z} \neq 0 \quad , \quad I_{ZX_1} \neq 0$$

بالتالي لا يكون المحور Z محوراً أساسياً بالنسبة للنقطة O_1 ، أي: عندما لا يمر المحور من مركز الكتل؛ فإنه يكون محوراً أساسياً فقط في نقطة واحدة من نقاطه.

مسألة-5-3

المطلوب إيجاد معادلة مجسم قطع ناقص العطالة بالنسبة لمركز ثقل أسطوانة دائرية متجانسة كتلتها M ، ارتفاعها l ، ونصف قطرها R ، كما هو مبين في (الشكل-5-27).

الحل:



(الشكل-5-27) تحديد معادلة مجسم قطع ناقص العطالة بالنسبة لمركز ثقل أسطوانة دائرية.

نطبق معادلة مجسم قطع ناقص العطالة (5-68) على الأسطوانة:

$$I_{\mathrm{X}}.x_k^2 + I_{\mathrm{Y}}.y_k^2 + I_{\mathrm{Z}}.z_k^2 - 2I_{\mathrm{XY}}.x_k.y_k - 2I_{\mathrm{YZ}}.y_k.z_k - 2I_{\mathrm{ZX}}.z_k.x_k = 1$$

حيث عزوم العطالة حول محاور جملة الإحداثيات المارة من مركز الكتل، هي:

$$I_{\mathrm{GX}} = \frac{1}{4}M.R^2 + \frac{1}{12}M.l^2 \qquad \text{و} \qquad I_{\mathrm{GZ}} = \frac{1}{2}M.R^2$$

وبما أن جملة المحاور X و Y و Z هي محاور أساسية مركزية، يكون:

$$I_{\mathrm{XY}} = I_{\mathrm{YZ}} = I_{\mathrm{ZX}} = 0$$

بالتعويض يكون لدينا:

$$M(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}l^2)x_k^2 + M(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}l^2)y_k^2 + M(\frac{1}{2}R^2)z_k^2 = 1$$

وتكون أنصاف أقطار مجسم قطع ناقص العطالة؛ الذي معادلته من الشكل:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

هي:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{M\left[\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}l^2\right]}} \quad , \qquad c = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2}{M}}$$

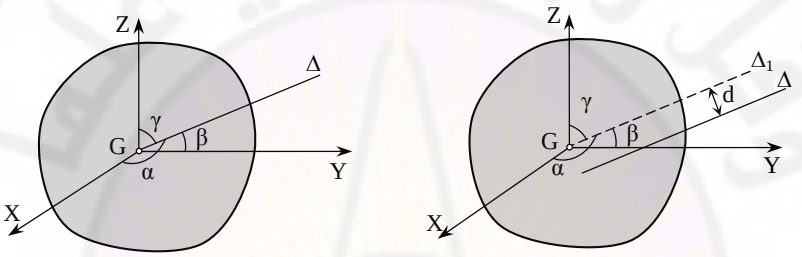
11- عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور كيفي

نميز حالتين:

- المحور Δ مار من مركز الكتل

نعدّ المحاور الإحداثية هي المحاور الأساسية المركزية للعطالة، كما هو مبين في a من (الشكل-5-28)، ونعين I_{GY} , I_{GX} ، I_{GZ} ، وباستخدام العلاقة (5-67) نعين:

$$I_{G\Delta} = I_X.\cos^2 a + I_Y.\cos^2 b + I_Z.\cos^2 g \qquad (72\text{-}5)$$



b- المحور غير مار من مركز الكتل. a- المحور Δ مار من مركز الكتل.

(الشكل5-28) تحديد عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور كيفي.

- المحور Δ غير مار من مركز الكتل

في هذه الحالة، كما هو مبين في b من (الشكل-5-27)، نحسب أولاً عزم العطالة بالنسبة للمحور $G\Delta_1$ بالعلاقة (5-72)، والموازي للمحور المفروض المار من مركز الكتل G ، ومن ثم ننتقل إلى المحور Δ :

$$I_\Delta = I_{G\Delta_1} + M.d^2 \qquad (73\text{-}5)$$

مسألة-5-4

أوجد عزم عطالة صفيحة دائرية على شكل قرص نصف قطره R ، بالنسبة لمحور Δ_1 يصنع زاوية 30^o مع الناظم على سطح الصفيحة، ومسقطه ينطبق على قطرها، والمسافة بين نقطة التقاطع ومركز القرص G هي (GO = R/ 2)، كما هو موضح في (الشكل-5-29).

الحل:

تعدّ المحاور الإحداثية هي محاور مركزية GXYZ ، حيث المحور GY ينطبق على مسقط المحور Δ_1 ، ومن تطبيق العلاقة (5-71) التي تحدد عزم العطالة لجسم حول محور ما:

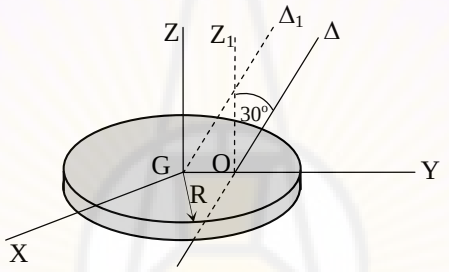
$$I_{\Delta_1} = I_{G\Delta} + M.d^2$$

حيث d تمثل المسافة بين المحورين، وتساوي إلى:

$$d = \frac{1}{2}R.\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

و $I_{G\Delta}$ تمثل عزم العطالة حول محور ما مار من مركز الكتل، ويعطى بالعلاقة (5-72):

$$I_{G\Delta} = I_{GX}.\cos^2 a + I_{GY}.\cos^2 b + I_{GZ}.\cos^2 g$$



(الشكل-5-29) تحديد عزم عطالة صفيحة دائرية بالنسبة للمحور Δ_1 .

حيث لدينا للصفيحة القرصية:

$$I_{GX} = I_{GY} = \frac{1}{4}M.R^2 \quad , \quad I_{GZ} = \frac{1}{2}M.R^2$$

ومن الشكل نجد:

$$a = 90^o \quad , \quad b = 60^o \quad , \quad g = 30^o$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$I_{G\Delta} = \frac{1}{4}M.R^2.\cos^2 60^o + \frac{1}{2}M.R^2\cos^2 30^o = \frac{7}{16}M.R^2$$

ويكون عزم العطالة المطلوب:

$$I_{O\Delta_1} = \frac{7}{16}M.R^2 + \frac{3}{16}M.R^2 = \frac{5}{8}M.R^2$$

* * *

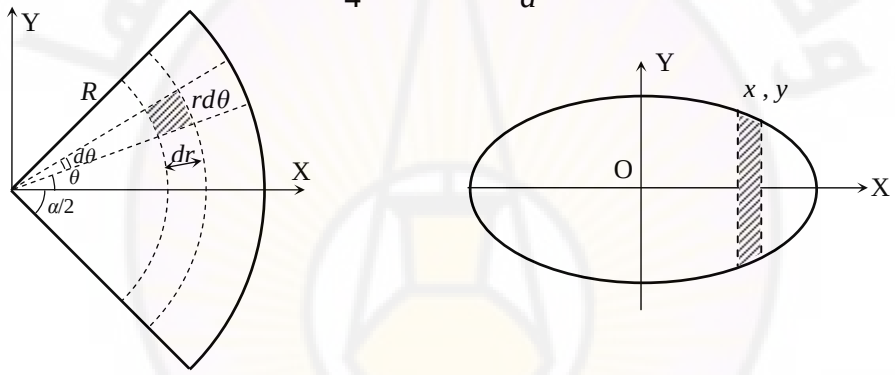
مسائل غير محلولة ***PROBLEMS***

م-5-1

صفيحة رقيقة متجانسة - ذات كثافة منتظمة - على شكل قطاع دائري منتظم كتلته M ، ونصف قطره R ، وزاوية رأسه α ، كما هو مبين في a من (الشكل م-5-1).

المطلوب إيجاد عزم عطالته I_{XX} , I_{YY} حول محور التماثل OX ، وحول المحور OY العمودي على محور التماثل في مستوى الصفحة.

الجواب: $$I_{XX} = I_{YY} = \frac{1}{4} M.R^2 (1 + \frac{\sin a}{a})$$



a b

(الشكل م-5-1)

م-5-2

صفيحة رقيقة على شكل قطع ناقص كتلته M ، ونصف قطره الكبير a ، ونصف قطره الصغير b ، كما هو مبين في b من (الشكل م-5-1)، ومعادلته من الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المطلوب إيجاد عزم عطالة الصفيحة حول محور التماثل المار من قطره الطويل OX ، وحول المحور OY العمودي على محور التماثل في مستوى الصفحة.

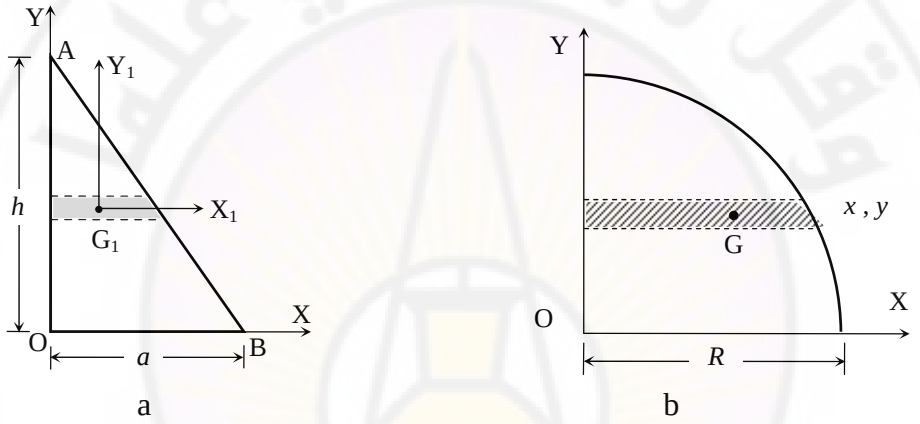
الجواب: $$I_{XX} = M.b^2/4 \quad , \quad I_{YY} = M.a^2/4$$

م-5-3

صفيحة رقيقة منتظمة متجانسة على شكل مثلث قائم الزاوية كتلته M ، وطول قاعدته a ، وارتفاعه h ، كما هو مبين في a من (الشكل م-5-2).

المطلوب إيجاد جداء العطالة I_{XY} بالنسبة إلى المحورين المتعامدين OX و OY المنطبقين على ضلعي المثلث.

الجواب: $I_{XY} = M.a.h/12$



a b

(الشكل م-5-2)

م-5-4

صفيحة رقيقة منتظمة متجانسة على شكل ربع دائرة كتلته M ، ونصف قطره R ، كما هو مبين في b من (الشكل م-5-2). المطلوب إيجاد:

1. عزم عطالة الصفيحة I_{XX} , I_{YY} حول محور تماثلها OX ، والمحور العمودي عليه OY .
2. جداء العطالة I_{XY} بالنسبة إلى المحورين المتعامدين OX و OY .
3. محوري العطالة الرئيسيين OU و OV ، ومن ثم تعيين عزمي العطالة الرئيسيين I_{VV} , I_{UU} .

الجواب:

$$I_{XX} = I_{YY} = M.R^2/4 \ , \ I_{XY} = M.R^2/2 \ , \ I_{UU} = M.R^2(p-2)/4p \ , \ I_{VV} = M.R^2(p+2)/4p$$

م-5-5

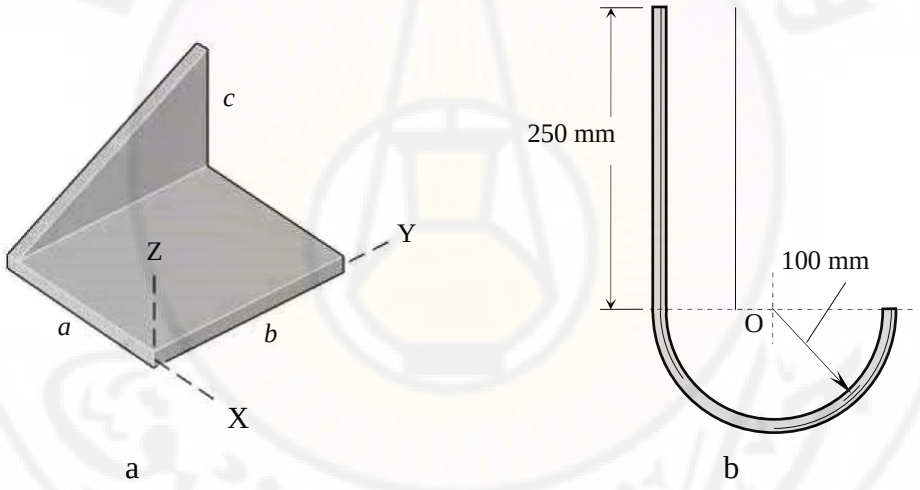
صفيحة رقيقة منتظمة متجانسة مثنية ذات سماكة t منتظمة، كما هو مبين في a من (الشكل م-5-3).

إذا كانت كثافة الصفيحة ρ ، المطلوب إيجاد جداء العطالة للصفيحة I_{XY} , I_{XZ} , I_{YZ} ، بالنسبة للمحاور المختارة في الشكل.

إرشاد: يمكن اهمال السماكة t المنتظمة للصفيحة المثنية مقارنة بأبعادها الأخرى.

الجواب:

$$I_{XY} = -r.t.a.b^2(3a+4c) \quad , \quad I_{XZ} = -r.t.a.b.c^2/6 \quad , \quad I_{YZ} = r.t.b^2.c^2/8$$



(الشكل م-5-3)

م-5-6

قضيب منتظم من النحاس الأصفر على النحو الموضح في b من (الشكل م-5-3). إذا كانت كتلة القضيب 0.6 kg . المطلوب إيجاد عزم عطالته I_{OO} حول محور يمر من O ، وعمودي على مستوى الشكل.

الجواب: $I_{OO} = 11.54 \times 10^{-3}\ \text{kg.m}^2$

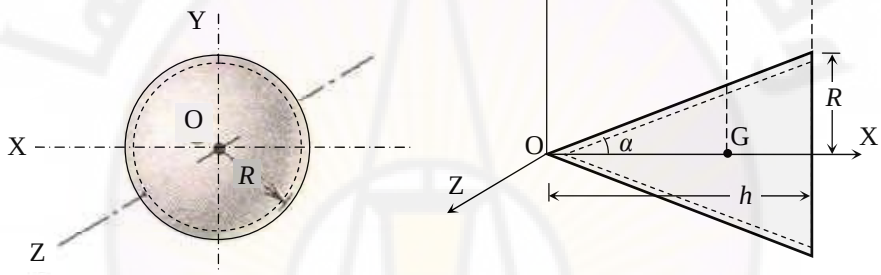
م-5-7

كرة مفرغة كتلتها M ، نصف قطرها R ، ومركز كتلها G يقع في مركزها الهندسي O ، كما هو مبين في a من (الشكل م-5-4).

المطلوب إيجاد عزم عطالة القشرة الكروية I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ} حول المحاور المتعامدة GX , GY , GZ المارة من مركزها O ، و I_O حول مركزها الهندسي O .

إرشاد: معادلة الدائرة هي: $x^2 + y^2 = R^2$

الجواب: $I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = 2M.R^2/3$, $I_O = M.R^2$



a b

(الشكل م-5-4)

م-5-8

مخروط مفرغ كتلته M ، ارتفاعه h ، ونصف قطر قاعدته R ، وزاوية رأسه 2α ، كما هو مبين في b من (الشكل م-5-4).

المطلوب إيجاد عزم عطالة القشرة المخروطية I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ} حول المحاور المتعامدة OX , OY , OZ المارة من رأس المخروط O ، و $I_{Y_2Y_2}$ حول المحور Y_2 المار من قاعدته، و $I_{Y_1Y_1}$ حول المحور Y_1 المار من مركز كتله.

إرشاد: معادلة الخط المستقيم OA هي: $y/x = R/h$

الجواب:

$$I_{XX} = M.R^2/2 \quad , \quad I_{YY} = I_{ZZ} = M.R^2/4 + M.h^2/2$$

$$I_{Y_1Y_1} = M.R^2/4 + M.h^2/18 \quad , \quad I_{Y_2Y_2} = M.R^2/4 + M.h^2/6$$

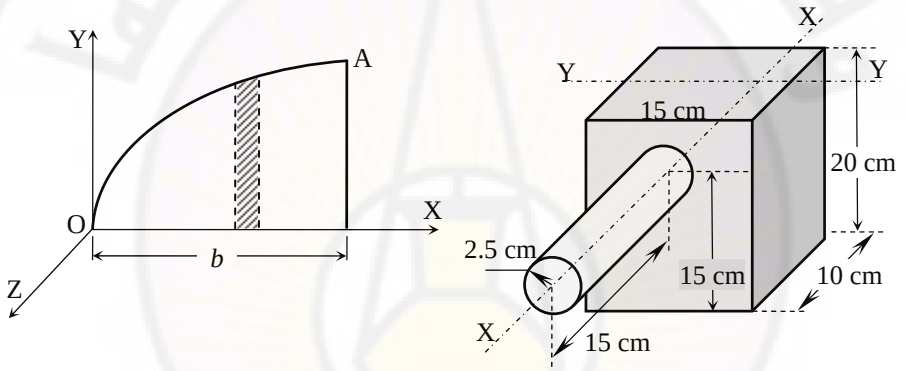
م-5-9

إذا كان جزء من جسم مصمت ارتفاعه b ناتج من دوران قطع مكافئ معادلته:

$$y^2 = 4a.x$$

المطلوب إيجاد عزم عطالة الجسم I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ} حول المحاور المتعامدة OX, OY, OZ ، المبينة في a من (الشكل م-5-5).

الجواب: $I_{XX} = 4M.a.b/3 \quad , \quad I_{YY} = I_{ZZ} = 2M.a.b/3 + M.b^2/2$



a b

(الشكل م-5-5)

م-5-10

إذا كان الوزن النوعي للفولاذ (ρ_s = 76800 N/m^3)، المطلوب إيجاد عزم عطالة الجسم الفولاذي I_{XX}, I_{YY} المبين في b من (الشكل م-5-5) حول كل من المحورين XX و YY .

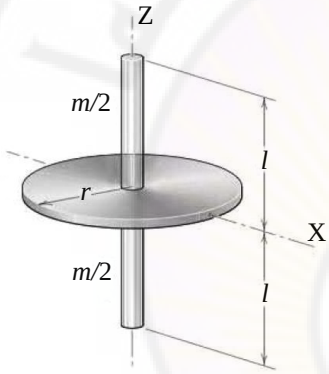
الجواب: $I_{XX} = 0.1817875\,\text{kg.m}^2 \qquad I_{YY} = 0.378775\,\text{kg.m}^2$

م-5-11

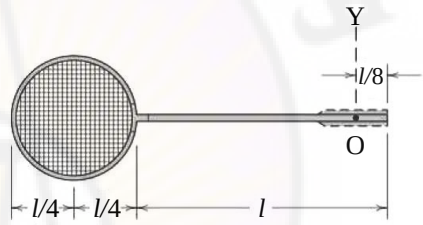
قضيبان رفيعان متجانسان كتلة كل منهما $m/2$ متصلان مركزياً إلى وجهي قرص دائري متجانس صغير السماكة كتلته m ، ونصف قطره r ، كما هو مبين في a من (الشكل م-5-6).

المطلوب تعيين الطول l لكل من القضيبين بحيث يكون عزم العطالة الكتلي للمجموعة حول كل من المحورين X و Z متساويين.

الجواب: $l = \frac{\sqrt{3}}{2} r$



28-131-a



b24-126

(الشكل م-5-6)

م-5-12

يتكون مضرب تنس الريشة من قضبان رفيعة متجانسة محنية ومتصلة بعضها ببعض، كما هو مبين في b من (الشكل م-5-6).

المطلوب بإهمال كتل أسلاك الشبك والمقبض الخشبي، وباعتبار كتلة وحدة الطول لمادة القضيب ρ مقدرة بـــ kg/m ، إيجاد عزم العطالة الكتلي I_{YY} للمضرب حول المحور Y المار من O ، الذي يعدّ موضع يد اللاعب.

الجواب: $I_{YY} = (\frac{43}{192} + \frac{83}{128} p)\, r\, .l^3$

الفصل السادس

المبادئ العامة في تحريك الجملة الميكانيكية
General principles of System Dynamics

1- المعادلات التفاضلية لحركة الجملة الميكانيكية
The Differential Equations of Motion of a System

نعدُّ جملة مؤلفة من n من الجسيمات المادية، نختار منها جسيم M_k كتلته m_k حيث تؤثر عليه مجموعة من القوى الخارجية محصلتها $\boldsymbol{F}_k^e$ ، ومجموعة من القوى الداخلية محصلتها $\boldsymbol{F}_k^i$ ، فإذا اكتسب الجسيم المعتبر تسارعاً $\boldsymbol{A}_k$ ، كان:

$$m_k . \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i \qquad (1\text{-}6)$$

ونحصل على نتيجة مماثلة لكل جسيم من جسيمات الجملة، وبالتالي يكون لكل الجملة:

$$\begin{aligned} m_1 . \boldsymbol{A}_1 &= \boldsymbol{F}_1^e + \boldsymbol{F}_1^i \\ m_2 . \boldsymbol{A}_2 &= \boldsymbol{F}_2^e + \boldsymbol{F}_2^i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n . \boldsymbol{A}_n &= \boldsymbol{F}_n^e + \boldsymbol{F}_n^i \end{aligned} \qquad (2\text{-}6)$$

حيث: $k = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots\ldots n$

تعين هذه المعادلات التفاضلية لحركة الجملة بالشكل الشعاعي معادلة حركة كل جسيم من جسيمات الجملة، وبإسقاطها على جملة محاور إحداثية نحصل على المعادلات التفاضلية لحركة الجملة؛ بدلالة المساقط على المحاور الإحداثية.

بالتالي لدراسة حركة الجملة، يكفي حل المعادلات التفاضلية للحصول على معادلة حركة كل جسيم في الجملة على انفراد، ولكننا لا نتبع هذه الطريقة في حلنا لمسائل تحريك الجملة وذلك؛ لأن الحل طويل ومعقد، وبما أنه لا يطلب منا في حل المسائل إيجاد حركة كل جزء من أجزاء الجملة، أو حركة كل جسيم على انفراد، وإنما يطلب عادةً تعين بعض مميزات حركة الجملة ككل، التي يمكن إيجادها بمساعدة المبادئ العامة لتحريك الجملة الميكانيكية؛ التي تنتج مباشرة من المعادلات التفاضلية.

2- حركة مركز كتل جملة مادية

Motion of the Centre of Mass of a system

في كثير من الحالات يكفي لتعيين طبيعة حركة الجملة خاصة للجسم الصلب، أن نحدد معادلة حركة مركز كتلها، ولتعيين هذه المعادلة نجمع المعادلات (6-2) طرفاً لطرف؛ نحصل على علاقة أساسية لأجزاء الجملة:

$$\sum m_k . \boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F_k^e} + \sum \boldsymbol{F_k^i} \qquad (3\text{-}6)$$

ومن العلاقة (5-3) التي تحدد موضع مركز الكتل G لجملة:

$$\sum m_k . \boldsymbol{r_k} = M . \boldsymbol{r_G} \qquad (4\text{-}6)$$

حيث $\boldsymbol{r_G}$ يمثل المتجه الموضعي لمركز الكتل و $(M = \Sigma m_k)$ كتلة الجملة.

باشتقاق العلاقة مرتين نحصل على:

$$\sum m_k . \boldsymbol{A_k} = M . \boldsymbol{A_G}$$

حيث $\boldsymbol{A_G}$ يمثل تسارع مركز الكتل.

وباعتبار أن مجموع القوى الداخلية $(\sum \boldsymbol{F_k^i} = 0)$، وبالتعويض في العلاقة (6-1)؛ نحصل على:

$$M . \boldsymbol{A_G} = \sum \boldsymbol{F_k^e} \qquad (5\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة حركة مركز الكتل، وهي تطابق حركة جسيم مادي كتلته M يخضع للقوى الخارجية $\sum \boldsymbol{F_k^e}$، ومنه النص التالي:

يتحرك مركز كتل جملة مادية وكأنه جسيم مادي، طبقت فيه كتلة الجملة بكاملها، وخضع هذا الجسيم لتأثير القوى الخارجية المؤثرة على مختلف جسيمات الجملة، الذي يساوي إلى جداء كتلتها المركزة في مركز الكتل بمتجه تسارع هذا المركز.

يمكن أن نوضح هذا المبدأ بصورة أفضل إذا درسنا حركة قذيفة متفجرة، فبإهمال مقاومة الهواء يمكن للقذيفة أن تتحرك على طول مسار بشكل قطع مكافئ، وبعد انفجارها في الجو فإن مركز كتلتها G ، مركز كتل أجزاء القذيفة، سيستمر على متابعة الحركة على طول المسار. في الحقيقة فإن النقطة G يجب أن تتحرك كما لو أن كتل وأوزان جميع الأجزاء كانت قد تجمعت فيها، أي: تتحرك كما لو أن القذيفة لم تنفجر، بالنتيجة يمكن أن نستبدل الجسم الصلب بجسيم مادي له نفس كتلته، وذلك إذا تم الاهتمام في مركز الكتلة لهذا الجسم، وليس بحركة الجسم حول مركز كتلته.

نحصل على المعادلات التفاضلية لحركة مركز الكتل، بإسقاط العلاقة الأخيرة على جملة محاور متعامدة:

$$M.\ddot{x}_G = \sum F^e_{kX} \quad , \quad M.\ddot{y}_G = \sum F^e_{kY} \quad , \quad M.\ddot{z}_G = \sum F^e_{kZ} \qquad (6\text{-}6)$$

يستفاد من مبدأ حركة مركز الكتل في الحالات التالية:

- إذا تحركت الجملة حركة انسحابية اكتسبت كافة أجزائها سرعات مسايرة لسرعة مركز الكتل، وفي هذه الحالة تؤول دراسة حركة الجملة إلى دراسة حركة مركز كتلته فقط.
- إذا تحركت الجملة حركة ما وكانت أوضاع مركز الكتل المختلفة كافية لتحديد الأوضاع المختلفة لهذا المركز.
- إذا كانت القوى الداخلية مجهولة يمكن تطبيق هذا المبدأ لتجاهله هذه القوى، وهنا تكمن قيمتها العملية.

إن تطبيق مبدأ حركة مركز الكتل يساعد في تعيين معادلة حركته بمعرفة القوى الخارجية، بالعكس تعيين المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة إذا ما علمنا حركة مركز الكتل، ومن المفيد في بعض الحالات اختيار اتساع الجملة بشكل مناسب بحيث تصبح بعض القوى الخارجية المؤثرة قوى داخلية للجملة في شكلها الجديد.

مسألة-6-1

مرفق OB طوله l ، ووزنه $(W = m_1.g)$. يدور بسرعة زاوية ثابتة ω ، فيحرك ذراع توصيل مع مكبس D مثبتاً به وزنهما الكلي $(Q = m_2.g)$، كما في (الشكل-6-1).

إذا طبق على المكبس أثناء حركته قوة أفقية ثابتة $\boldsymbol{F}$. المطلوب، بإهمال الاحتكاك بالجدران، تعيين أكبر ضغط أفقي R_X يقع على محور المرفق O .

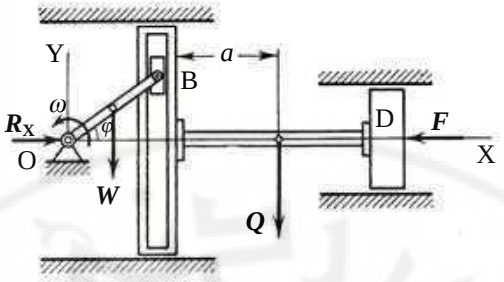
الحل:

حتى نهمل القوى المسببة لدوران المرفق والضغط الواقع علية بواسطة ذراع التوصيل، ندرس حركة الجملة كلها. فإذا رمزنا لرد الفعل الأفقي للمحور المار من O بـ $\boldsymbol{R}_X$ ، نجد بالتعويض في (6-6) علاقة مسقط حركة مركز الكتل على المحور X ، أن:

$$M.\ddot{x} = R_X - F$$

منه:

$$R_X = F + M.\ddot{x}$$



(الشكل-6-1) مرفق يحرك ذراع توصيل مع مكبس D .

بتطبيق علاقة تحديد موضع مركز الكتل:

$$M.x = m_1.x_1 + m_2.x_2$$

حيث:

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos j \qquad , \qquad x_2 = a + l.\cos j$$

وبما أن حركة المرفق دورانية منتظمة:

$$j = w.t$$

بالتعويض:

$$M.x = \frac{l.W}{2g}\cos wt + \frac{Q}{g}(a + l.\cos wt)$$

ومنه:

$$M.x = \frac{Q}{g}a + \frac{l}{2g}(W + 2Q)\cos wt$$

$$M.\ddot{x} = -\frac{w^2.l}{2g}(W + 2Q)\cos wt$$

بالتعويض في علاقة R_X :

$$R_X = F - \frac{w^2.l}{2g}(W + 2Q)\cos wt$$

هذه القيمة تساوي قوة الضغط على المحور في المقدار $|R_X|$، وتتجه في الاتجاه المضاد، ويكون الضغط أعظمياً عندما ($\varphi = 180^o$)، ويساوي عندئذ:

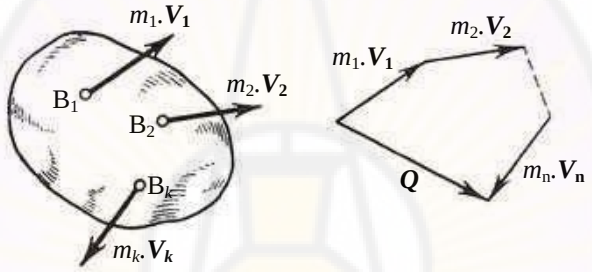
$$R_{X(j=p)} = F + \frac{w^2.l}{2g}(W + 2Q)$$

3- كمية الحركة الخطية لجملة مادية *Linear Momentum of a System*

إن كمية الحركة الخطية لجملة مادية، أو باختصار كمية حركة الجملة هي المتجه $\boldsymbol{Q}$ المساوي للمجموع الهندسي لكمية حركات أجزاء الجملة k ، كما هو مبين في a من (الشكل-6-2):

$$\boldsymbol{Q} = \sum \boldsymbol{q_k} = \sum m_k . \boldsymbol{V_k} \qquad (7\text{-}6)$$

يمكن للمتجه $\boldsymbol{Q}$ أن يأخذ كل القيم الممكنة، حتى ويمكن أن ينعدم في بعض الحالات، وذلك عندما يكون مضلع المتجهات $m_k . \boldsymbol{V_k}$ مغلقاً، كما هو موضح في b من (الشكل-6-2)، بالتالي متجه كمية الحركة الخطية لجملة مادية لا يميز تماماً حركة الجملة.



b- مضلع متجهات لكميات حركة جملة. a- كمية حركات أجزاء جملة.

(الشكل-6-2)

نشتق العلاقة (6-4) التي تحدد موضع مركز الكتل لجملة G بدلالة الزمن:

$$\sum m_k . \boldsymbol{V_k} = M . \boldsymbol{V_G}$$

بالاستناد إلى العلاقة (6-7):

$$\boldsymbol{Q} = M . \boldsymbol{V_G} \qquad (8\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة كمية حركة الجملة، وهي تطابق كمية حركة جسيم مادي كتلته M يخضع للقوى الخارجية $\sum \boldsymbol{F_k^e}$ ، ومنه النص التالي:

إن كمية حركة جملة مادية تساوي إلى كمية حركة مركز كتلتها؛ فيما لو اعتبرنا كتلتها مركزة في هذا المركز، وتساوي إلى جداء كتلتها المركزة في مركز الكتل بمتجه سرعة هذا المركز.

ينتج من العلاقة (6-8) أنه إذا تحركت جملة مادية، وبقي مركز كتلتها ساكناً انعدمت عندها كمية حركتها، ومنه:

- إذا دارت الجملة حول محور مار من مركز كتلتها، لم يكن باستطاعة كمية الحركة تحديد الحركة الدورانية للجملة؛ لانعدام سرعة مركز كتلها.

- إذا تحركت الجملة حركة مستوية عامة؛ فإن كمية الحركة لا تحدد جزء الحركة الدوراني حول مركز الكتل، فكمية حركة دولاب متدحرج تساوي إلى $(\boldsymbol{Q} = M.\boldsymbol{V}_{\mathbf{G}})$ بغض النظر عن كيفية دورانه حول مركز كتله G ، وهكذا ففي الحركة المستوية العامة فإن $\boldsymbol{Q}$ تميز كمية الحركة للجزء الانتقالي فقط من الحركة.

فالفائدة الأساسية من كمية الحركة تكفي في تحديد الحركة الانسحابية فقط للجملة المادية، ومن هنا كانت التسمية كمية الحركة الخطية.

4- مبدأ الدفع وكمية الحركة لجملة مادية

Principle of Impulse and Momentum for a System

من العلاقة الأساسية لحركة أجزاء جملة:

$$\sum m_k.\boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F_k^e} + \sum \boldsymbol{F_k^i}$$

والتي تكتب بالشكل التالي مع اعتبار $(\sum \boldsymbol{F}_k^i = 0)$، بالشكل:

$$\sum m_k.\boldsymbol{A_k} = \frac{d}{dt}\sum m_k.\boldsymbol{V_k} = \sum \boldsymbol{F_k^e}$$

منه:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \sum \boldsymbol{F_k^e} \qquad (9\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة علاقة المشتق بالنسبة للزمن لكمية الحركة لجملة، والتي تنص على:

أن **مشتق كمية حركة جملة مادية بالنسبة للزمن، يساوي المجموع الهندسي للقوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة.**

تستعمل العلاقة (6-9) في حل المسائل على شكل إسقاط على المحاور الإحداثية المتعامدة؛ ينتج:

$$\frac{d}{dt}Q_X = \sum F^e_{kX} \quad , \quad \frac{d}{dt}Q_Y = \sum F^e_{kY} \quad , \quad \frac{d}{dt}Q_Z = \sum F^e_{kZ} \qquad (10\text{-}6)$$

بضرب طرفي العلاقة بـــ dt ، ثم بتكاملها مع اعتبار أن $\boldsymbol{Q}_0$ تمثل كمية حركة الجملة في اللحظة t_0 ، و $\boldsymbol{Q}_1$ كميتها في اللحظة t_1 ، أمكن أن نكتب:

$$\boldsymbol{Q_1 - Q_0} = \int_{t_0}^{t_1} \sum \boldsymbol{F^e_k}.dt$$

حيث الحد الثاني يمثل المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية $\sum \boldsymbol{I}^e_k$ في المجال الزمني t_0 و t_1 ، وبالتالي:

$$\boldsymbol{Q_1 - Q_0} = \sum \boldsymbol{I^e_{k(t_0 \to t_1)}} \qquad (11\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة علاقة مبدأ تغيير كمية الحركة لجملة، والتي تنص على:

أن تغير كمية حركة جملة مادية خلال فترة زمنية محصورة بين t_0 و t_1 يساوي المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية المؤثرة على هذه الجملة؛ خلال الفترة الزمنية المفروضة.

تستعمل هذه العلاقة في حل المسائل على شكل إسقاط على المحاور الإحداثية؛ ينتج:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum I^e_{kX} \quad , \quad Q_{1Y} - Q_{0Y} = \sum I^e_{kY} \quad , \quad Q_{1Z} - Q_{0Z} = \sum I^e_{kZ} \qquad (12\text{-}6)$$

تكتب العلاقة (6-11) بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{Q_1 = Q_0 + \sum I^e_k} \qquad (13\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة علاقة مبدأ الدفع وكمية الحركة لجملة المادية، والتي تنص على:

أن **كمية الحركة النهائية للجملة، يساوي المجموع الهندسي لكمية حركتها الابتدائية، والدفع الكلي للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة؛ خلال الفترة الزمنية المفروضة.**

يستخدم مبدأ الدفع، وكمية حركة الجملة عادة في دراسة حركة الوسط كالسوائل والغازات، ويكفل تطبيقه التخلص من دراسة القوى الداخلية كلها، ولذا يجب اختيار الجملة المدروسة؛ بحيث تكون كل أو بعض القوى غير المعلومة قوى داخلية.

مسألة-6-2

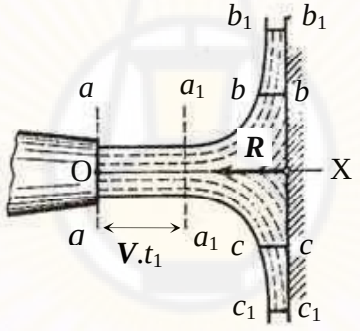
يندفع تيار من الماء من فوهة خرطوم بسرعة (V = 10 m/sec)، فيصطدم بزاوية قائمة بجدار صلب، كما هو مبين في (الشكل-6-3).

إذا كان قطر التيار المندفع (d = 4 cm). المطلوب، بإهمال انضغاط التيار، تعيين قوة ضغطه R على الجدار.

الحل:

لاستبعاد القوى الداخلية، وهي قوى ضغط جسيمات السائل بعضها على بعض عند الاصطدام بالجدار، نطبق على جزء التيار الموجود في الحجم abc علاقة مسقط تغير كمية الحركة على محور الحركة الأفقي OX (6-12)، عند اللحظة المعطاة:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum I^{e}_{kX}$$



(الشكل-6-3) تيار من الماء يصطدم بزاوية قائمة بجدار صلب.

نحسب الطرف الأيسر للحجم المأخوذ خلال فترة زمنية t_1 ، الذي ينتقل خلالها إلى الموضع $a_1b_1c_1$. عند ذلك تقل كمية الحركة ($Q_{0X} - Q_{1X} = Q_X$) بمقدار $m\,.V$ ، حيث m تمثل كتلة الحجم aa_1 .

أما السائل المتدفق في الحجمين bb_1 و cc_1 فيتحرك عمودياً على المحور OX ، ولا يزيد من قيمة Q_X ، وبما أن لدينا النقص في المقدار Q_X فقط، فإن:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = -m.V$$

والقوة الخارجية المؤثرة على الحجم المأخوذ، التي لها مسقط على المحور OX هي قوة رد فعل الجدار $\boldsymbol{R}$ فقط، وباعتباره ثابتة، نجد أن:

$$\sum I^{e}_{kX} = R_X.t_1 = -R.t_1$$

بالتعويض في العلاقة:

$$m.V = R.t_1 \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{V}{t_1}m$$

وبما أن الانتقال يساوي ($aa_1 = V.t_1$)، فإن كتلة الحجم m ، تساوي:

$$R = \frac{V}{t_1}m = r\,\frac{p.d^2}{4}V.t_1$$

حيث ρ تمثل كتلة وحدة الحجم، أي: كثافة السائل، وبالتعويض بهذه القيمة في علاقة R مع الأخذ بعين الاعتبار أن كثافة الماء ($\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$)، نجد أخيراً أن:

$$R = r\,\frac{p.d^2}{4}V^2 = 125.6\ \text{N}$$

وتساوي قوة ضغط التيار على الجدار المقدار نفسه.

5- حفظ حركة مركز كتل *Conservation of Motion of the Mass Centre*

وحفظ كمية الحركة لجملة مادية *Conservation of Momentum of System*

من علاقة مشتق كمية الحركة الخطية لجملة بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \sum \boldsymbol{F}^{e}_{k}$$

ومن علاقة حركة مركز الكتل:

$$M\,.\,\boldsymbol{A}_G = \sum \boldsymbol{F}^{e}_{k}$$

نلاحظ أن العلاقتين هما صورتان لمبدأ واحد، وتستعمل في دراسة حركة الجملة حالة الجسم الصلب، وإن كانت العلاقة الأكثر صلاحية للتطبيق هي علاقة حركة مركز الكتل، أما في حالة الجمل المستمرة كالجمل المائعة سائلة، أو غازية؛ فإن مفهوم مركز كتل الجملة يفقد معناه عملياً، ويفضل اللجوء عندها لعلاقة مشتق كمية الحركة الخطية لجملة بالنسبة للزمن، أيضاً يكون لهذه العلاقة تطبيق مهم في دراسة التصادم، ودراسة الحركة النفاثة.

كما تساعد العلاقتان في استنتاج ما يلي:

- إذا انعدم المجموع الهندسي للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة المادية:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e = 0$$

نتج من العلاقة الأولى، أن:

$$\boldsymbol{dQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q_0} = \boldsymbol{Q_1}$$

وينتج من العلاقة الثانية، أن:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}})_0 = (\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}})_1$$

حيث $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ تمثل متجهات ثابتة.

بمعنى أن الجملة تحافظ على كمية حركتها، ويتحرك مركز كتلها حركة مستقيمة منتظمة، فإذا كانت الجملة ساكنة قبل تأثير القوى الخارجية بقي مركز الكتل ساكناً.

- إذا كان المجموع الهندسي للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة المادية غير معدوم، وإنما كان مجموع مساقط هذه القوى على محور إحداثي OX معدوماً:

$$\sum F_{k\mathrm{X}}^e = 0$$

نتج من العلاقة الأولى، أن:

$$dQ_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{X}} = \mathrm{Const.} \quad \Rightarrow \quad Q_{0\mathrm{X}} = Q_{1\mathrm{X}}$$

وينتج من العلاقة الثانية، أن:

$$A_{\mathrm{GX}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{\mathrm{GX}} = \mathrm{Const.} \quad \Rightarrow \quad (V_{\mathrm{GX}})_0 = (V_{\mathrm{GX}})_1$$

بمعنى أن مسقط متجه كمية حركة الجملة على المحور OX ثابت، كذلك مسقط سرعة مركز الكتل على المحور الإحداثي ثابت، ويتحرك هذا المسقط على المحور OX حركة مستقيمة منتظمة.

- إذا كان مجموع مساقط القوى الخارجية المؤثرة على الجملة المادية على محور إحداثي OX معدوماً، وكان ($Q_{0\mathrm{X}} = 0$) في البدء، ويبقي معدوماً أثناء الحركة، كان:

$$V_{\mathrm{GX}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{G}} = \mathrm{Const.}$$

بمعنى أن مسقط مركز الكتل يبقى على المحور OX ثابتاً، ويتحرك عندها مركز كتل الجملة في مستوى يعامد المحور OX ويبعد بمقدار الإحداثي x_{G} .

تعرف هذه النتائج بحفظ كمية الحركة، وحفظ حركة مركز الكتل للجملة المادية.

1-5- أمثلة على حفظ حركة مركز كتل الجملة المادية

- حركة مركز كتل المجموعة الشمسية

Motion of the Centre of Mass of the Solar System

يمكن عملياً إهمال جذب النجوم للمجموعة الشمسية، في هذه الحالة لا تخضع المجموعة الشمسية لأي قوة خارجية، بالتالي ففي التقريب الأول يتحرك مركز كتل المجموعة الشمسية في الفراغ الكوني حركة منتظمة في خط مستقيم.

- تأثير الازدواج على الجسم ***Action of a couple on a body***

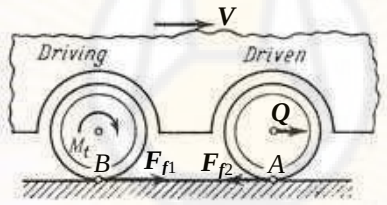
إذا أثر ازدواج $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ على جسم صلب حر كان المجموع الهندسي لهاتين القوتين الخارجيتين معدوماً ($\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_2} = 0$)، فإذا كان مركز كتل الجسم G في البدء ساكناً، فيجب أن يبقى ساكناً بعد خضوع الجسم للازدواج، بالتالي فأينما كان موضع تأثير الازدواج على الجسم الصلب الحر، يبدأ الجسم بالدوران حول مركز كتله.

- الحركة على مستوى أفقي ***Motion on a Horizontal Plane***

عند انعدام الاحتكاك لا يمكن للإنسان أن يتحرك على مستوى أفقي بوساطة قواه العضلية فقط، وهي قوى داخلية، ذلك لأن مجموع مساقط القوى الخارجية المؤثرة على الإنسان، وهي الثقل الشاقولي، ورد الفعل الناظمي معدومة على المستوى الأفقي، فلا يمكن - والحال هذه - لمركز الكتل أن يتحرك موازاة لهذا المستوى، بالتالي لا يتحرك مركز كتل هذا الإنسان في المستوى؛ لأن إحداثية مركز الكتل على المحور OX المار من المستوى الأفقي ثابتة ($x_G = \text{Const.}$).

فإذا خطا الإنسان بقدمه اليمنى إلى الأمام، انزلقت عندها آلياً قدمه اليسرى إلى الوراء، وذلك لكي يبقى مركز كتل الجسم مكانه. أما في حالة وجود احتكاك، فإن قوة الاحتكاك تقاوم حركة انزلاق القدم اليسرى إلى الوراء، وتقع قوة الاحتكاك في المستوى الأفقي، وتتجه إلى الأمام، بالتالي قوة الاحتكاك هذه هي قوة خارجية تؤثر على الجسم، وتؤدي إلى تحريك مركز الكتل في اتجاهها، وعلى منحاها، فيتحرك مركز الكتل إلى الأمام بشكل مُوازٍ للمستوى الأفقي باتجاه قوة الاحتكاك، أي اتجاه حركة قدمه اليمنى أي: اتجاه فعله، بالتالي هذه القوة الخارجية هي التي تكفل للإنسان الحركة في اتجاه تأثيرها.

يحدث بشكل مطابق في حركة السيارة أو القاطرة؛ فإن قوة ضغط البخار في القاطرة أو الغاز في المحرك تكون قوة داخلية، ولا يمكنها بذاتها تحريك القاطرة أو السيارة ككل، أي: تحريك مركز كتل الجملة، إنما يدفع البخار أو الغاز المكبس، وهذا يؤثر بازدواج عزم دوران على العجلة المحركة، ولتكن العجلة الخلفية، عند ذلك تحاول العجلة الدوران في جهة دوران عقارب الساعة، وتحاول النقطة B نقطة تماس العجلة الخلفية على مستوى الأفقي الانزلاق نحو اليسار، فتنشأ فيها قوة احتكاك تتجه إلى اليمين، وقوة الاحتكاك هذه هي قوة خارجية يؤدي تأثيرها إلى تحريك مركز كتل القاطرة نحو اليمين، أي: نحو الأمام كما هو مبين في (الشكل-6-4)، وتؤثر هذه القوة الدافعة على العجلات الأمامية بقوة Q مؤثرة على محور العجلة، وتحت تأثيرها تحاول العجلة كلها بما فيها النقطة A ، وهي نقطة تماس العجلة الأمامية بالأرض أن تتحرك إلى الأمام، وعند ذلك تؤثر على العجلة قوة الاحتكاك المتجهة إلى الخلف؛ التي تسبب توقف الحركة، بالنتيجة تدور العجلات الأمامية أيضاً، وتتم حركة القاطرة باتجاه سيرها.



(الشكل-6-4) القوى المؤثرة على حركة السيارة.

إذا كان المستوى أملس عندئذ لا تنشأ قوة الاحتكاك الدافعة، ولا تحدث الحركة إلى اليمين، وتدور العجلة الخلفية حول محورها دون أي حركة انتقالية.

كذلك الأمر إذا كانت قوة الاحتكاك الناشئة على العجلة الخلفية غير كافية في التغلب على القوى المانعة لحركة دوران العجلات الأمامية، بقيت في هذه الحالة القاطرة في مكانها، ودارت العجلة الخلفية حول محورها دون أي انتقال.

- **التوقف** ***Braking***

لإيقاف القطار أو السيارة يضغط بحذاء التوقف (*Brake Shoe*) على الأسطوانة المثبتة تثبيتاً صلباً بالعجلة المتدحرجة، ولتكن العجلات الأمامية في السيارة، وتكون القوة الناشئة عند ذلك هي قوة احتكاك حذاء التوقف بالأسطوانة وهي قوة داخلية، ولا تغير بذاتها حركة مركز الكتل، أي: لا توقف القطار أو السيارة.

إلا أن احتكاك الحذاء بالأسطوانة يعمل على إعاقة دوران العجلة حول محورها، فتزيد قوة احتكاك العجلة بالقضيب أو بالأرض؛ التي تتجه ضد اتجاه الحركة، وتعمل هذه القوة الخارجية على إبطاء حركة مركز كتل القطار أو السيارة، أي: أنها تسبب التوقف.

كما أنه في الحالات التي يتحقق فيها حفظ حركة مركز الكتل، يمكننا تحديد انتقال أي جزء من أجزاء الجملة إذا علمنا انتقال بعض أجزائها الأخرى.

نفرض للتحديد أن الجملة تتكون من ثلاث أجزاء كتلها هي m_1 , m_2 , m_3 ، والإحداثيات الابتدائية لمركز كتلها G بدلالة المحور OX هي x_1 , x_2 , x_3 ، فإذا أثرت مجموعة من القوى الداخلية والخارجية على أجزاء الجملة؛ تحركت هذه الأجزاء حركة ما بانتقالات مطلقة مساقطها على المحور OX هي $\Delta x_1^a, \Delta x_2^a, \Delta x_3^a$ ، بالتالي تكون الإحداثيات الجديدة لمراكز كتل أجزاء الجملة $x_1 + \Delta x_1^a, x_2 + \Delta x_2^a, x_3 + \Delta x_3^a$.

ويمكن تحديد إحداثية مركز الكتل G للجملة في الحالتين:

قبل الحركة:

$$x_{G_0} = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2 + m_3.x_3}{M}$$

وبعد الحركة:

$$x_{G_1} = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1^a) + m_2(x_2 + \Delta x_2^a) + m_3(x_3 + \Delta x_3^a)}{M}$$

وبما أنه في الحالة التي يكون فيها:

$$\sum F_{kX}^e = 0 \quad , \quad (V_{GX})_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_G = \text{Const.}$$

بالتالي فإن $(x_{G_0} = x_{G_1})$، وتتساوى العلاقتان السابقتان وينتج أن:

$$m_1.\Delta x_1^a + m_2.\Delta x_2^a + m_3.\Delta x_3^a = 0 \qquad (14\text{-}6)$$

أو:

$$W_1.\Delta x_1^a + W_2.\Delta x_2^a + W_3.\Delta x_3^a = 0$$

وهكذا **حينما يتحقق مبدأ حفظ حركة مركز كتل جملة مادية وفق محور إحداثي معين، فإن المجموع الجبري لجداءات كتل أو أوزان أجسام الجملة بمساقط الانتقالات المطلقة لمركز كتلها وفق المحور الإحداثي؛ يكون معدوماً، شرط أن يكون** $[(V_{GX})_0 = 0]$ **في اللحظة الابتدائية**، وعند حساب $\Delta x_1^a, \Delta x_2^a, \Delta x_3^a$ يجب أن تؤخذ إشاراتها بعين الاعتبار.

مسالة-3-6

يجلس شخصان A و B وزن الأول W_A ووزن الثاني W_B على حافتي قارب صغير وزنة W ، وطوله l كما هو مبين في (الشكل-6-5)،

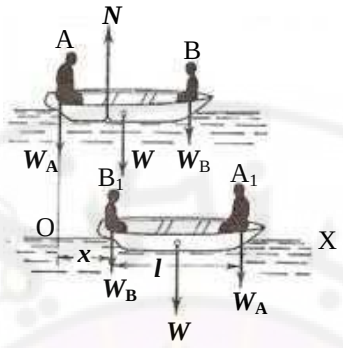
فإذا تبادل الشخصان موضعيهما. المطلوب، بإهمال مقاومة الماء، تعيين كلاً من اتجاه حركة القارب، والمسافة التي يقطعها.

الحل:

نعدُّ الجملة مؤلفة من القارب والشخصين، في هذه الحالة تكون قوى احتكاك أقدام الرجلين بقاع القارب وقواهما العضلية كلها قوى داخلية، وتخضع الجملة عندئذ للقوى الخارجية التي هي الأوزان الشاقولية W_A و W_B و W ورد الفعل الناظمي الشاقولي N .

نعدّ محوراً أفقياً OX كما هو موضح في (الشكل-6-5)، فيكون $(\sum F_{kX}^e = 0)$، ولما كان مركز كتل الأجزاء الثلاث G ساكناً في اللحظة الابتدائية $[(V_{GX})_0 = 0]$، وجب أن يبقى مسقطه على المحور OX ثابتاً $(x_G = \text{Const})$، وبالتالي ترتبط الانتقالات المطلقة لكل أجسام الجملة بالمعادلة (14-6).

برسم القارب والشخصين في الوضعين الابتدائي والنهائي، بحيث القارب انتقل بمن فيه وفق المحور OX مسافة نفرضها موجبة قدرها x ، بصرف النظر عن الاتجاه الفعلي لانتقاله، وينتقل بذلك مركز كتل القارب مسافة قدرها x .



(الشكل-6-5) القارب والشخصين في الوضعين الابتدائي والنهائي.

يكون الانتقال المطلق للشخص الأول، أي: انتقال مركز كتله AA_1 في الحركة المركبة من حركته، وحركة القارب وفق المحور OX ، هي:

$$\Delta A^a = \Delta A^e + \Delta A^r = x + l$$

والانتقال المطلق للشخص الثاني، أي: انتقال مركز كتله BB_1 في الحركة المركبة من حركته، وحركة القارب وفق المحور OX ، هي:

$$\Delta B^a = \Delta B^e + \Delta B^r = x - l$$

وبتطبيق العلاقة (6-14)، يكون:

$$W.x + W_A(x+l) + W_B(x-l) = 0$$

منه انتقال مركز كتل القارب:

$$x = \frac{W_B - W_A}{W + W_A + W_B} l$$

فإذا كان $(W_B > W_A)$ كان عندها $(x > 0)$، ويتحرك القارب في الاتجاه اليمين.

وإذا كان $(W_B < W_A)$ كان عندها $(x < 0)$، ويتحرك القارب في الاتجاه المعاكس.

وعندما $(W_B = W_A)$ كان عندها $(x = 0)$، ويبقى القارب في مكانه.

مسألة-6-4

يوضع محرك على مستوى أفقي أملس المبين في (الشكل-6-6)، حيث m_1 كتلة محوره، و m_2 كتلة أجزاء المحرك الأخرى.

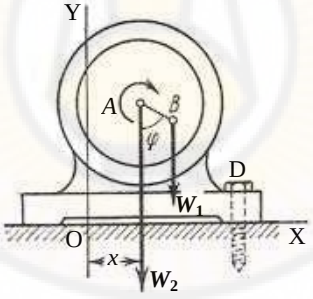
فإذا كان المحور يدور بسرعة زاوية ثابتة، ومركز كتله مزاح عن محور دورانه بمقدار ($AB = a$) ، المطلوب تعيين:

1. معادلة حركة المحرك $x_{(t)}$ على السطح الأملس.
2. قوة الضغط العظمى R_{Xmax} التي يتحملها المسمار D إذا ثبت المحرك بوساطته.

الحل:

لكي نحذف القوى المسببة لدوران المحور بجعلها قوى داخلية، ندرس المحرك والمحور كجملة واحدة.

1. عندما يكون المحرك غير مثبت تكون كل القوى المؤثرة عليه رأسية، وهي W_1 وزن المحور، و W_2 وزن المحرك، وردود أفعال المستوى، ففي هذه الحالة يتحقق مبدأ حفظ حركة مركز الكتل على امتداد المحور OX .



(الشكل-6-6) محرك مركز كتله مزاح عن محور دورانه.

نعدُّ المحرك في وضع اختياري كما في (الشكل-6-6)، والوضع الابتدائي له هو ذلك الوضع الذي تقع فيه النقطتان A و B على خط رأسي واحد، أي: على المحور OY ، وعندئذ يكون في الوضع الاختياري:

$$\Delta A = x \quad , \quad \Delta B = \Delta B^e + \Delta B^r = \Delta A + \Delta B^r = x + a.\sin j$$

حيث:

$$j = w.t$$

ومن المعادلة (6-14)، نجد أن:

$$m_2.x + m_1(x + a.\sin j) = 0$$

ومنه معادلة حركة المحرك:

$$x_{(t)} = -\frac{m_1}{m_2 + m_1} a.\sin wt$$

حيث يهتز اهتزازة توافقية بتردد دائري قدره w .

2. عندما يكون المحرك مثبتاً، وتبعاً للمعادلة الأولى من المعادلات (6-6)، يكون رد الفعل الأفقي $\boldsymbol{R_X}$ للمسمار مساوياً لـــ :

$$R_X = M.\ddot{x}_G$$

حيث:

$$x_G = \frac{m_1.x_A + m_2.x_B}{M}$$

حيث M كتلة الجملة، وفي هذه الحالة تكون النقطة A ثابتة ويكون:

$$x_A = h = \text{Const} \quad , \quad x_B = h + a.\sin j\ t$$

بتفاضل x_G مرتين وضربها في M نحصل على:

$$R_X = M.\ddot{x}_G = m_2.\ddot{x}_B = -m_2.a.w^2.\sin wt$$

وتساوي قوة الضغط على المسمار في المقدار $|R_X|$ ، وتتجه في الاتجاه المضاد، وأكبر قيمة لها تساوي:

$$R_{X\max} = m_2.a.w^2$$

2-5-أمثلة على حفظ كمية الحركة لجملة مادية

- ظاهرة الارتداد *Recoil*

إذا درسنا البندقية والرصاصة كجملة واحدة، فيكون ضغط غازات البارود عند الإطلاق قوة داخلية، ولا يمكن لهذه القوة أن تغير مجموع كمية حركة الجملة. لكن بما أن غازات البارود بتأثيرها على الرصاصة، تكسبها كمية حركة ما متجهة إلى الأمام، فإن هذه الغازات يجب أن تكسب البندقية في الوقت نفسه كمية الحركة نفسها، وإنما في الاتجاه المضاد، وهذا يسبب حركة البندقية إلى الخلف، أي: ما يدعى بالارتداد، والظاهرة نفسها تحدث عند الإطلاق من المدفع.

- المروحة أو الرفاس ***Propeller propulsion***

تُكسب المروحة (أو الرفاس) كتلة من الهواء (أو الماء) حركة على امتداد محورها، وذلك بدفع هذه الكتلة إلى الخلف، فإذا درسنا الكتلة المدفوعة والطائرة (أو الباخرة) كجملة واحدة، فإن قوى التأثير المتبادل بين المروحة والوسط باعتبارها قوى داخلية، لا يمكن أن تغير مجموع كمية حركة هذه الجملة، ولذا فعند دفع كتلة الهواء (أو الماء) إلى الخلف تكتسب الطائرة (أو الباخرة) سرعة مناظرة لحركتها إلى الأمام، بحيث تظل الكمية الكلية لحركة هذه الجملة مساوية للصفر؛ لأنها كانت كذلك قبل بداية الحركة، وتُحدث المجاديف التأثير نفسه.

- الدفع النفاث ***Jet Propulsion***

في القذيفة النفاثة أو الصاروخ تندفع الغازات الناتجة عن احتراق الوقود بسرعة كبيرة من فتحة في ذيل الصاروخ، أو من فوهة المحرك النفاث، وتكون قوى الضغط المؤثرة عند ذلك قوى داخلية لا يمكنها تغيير مجموع كمية الحركة للجملة المكونة من الصاروخ ومنتجات احتراق الوقود، ولكن بما أن للغازات المندفعة كمية حركة معلومة متجة إلى الخلف، فإن الصاروخ يكتسب عند ذلك سرعة مناظرة للحركة إلى الأمام.

نلفت الانتباه إلى أن المحرك المروحي التوربيني (*Engine Turboprop*) يكسب النموذج كالطائرة مثلاً، حركة على حساب دفع جسيمات الوسط الذي تتحرك فيه إلى الخلف، وهذه الحركة غير ممكنة في الفراغ اللاهوائي، أي: دون وجود ضغط جوي، أما المحرك النفاث، فيكسب النموذج حركة على حساب دفع كتل تنتج داخله كمنتجات الاحتراق، وتكون هذه الحركة ممكنة في الهواء، وفي الفراغ اللاهوائي على السواء.

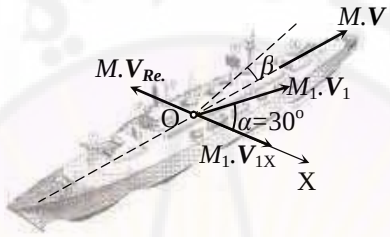
يمكن تطبيق مبدأ حفظ كمية الحركة عندما يكون التغير في السرعة الانتقالية لجزء من الجملة معلوماً، ويطلب تعيين سرعة الجزء الآخر بدلالته، ويستخدم هذا المبدأ بوجه خاص في دراسة التصادم.

مسألة-6-5

سفينة حربية (*Boat*) كتلتها (M = 30000 ton) تسير بسرعة (V = 18 km /h)، أطلقت السفينة مرة واحدة مدافعها الثمانية من جانب واحد عمودياً على اتجاه سيرها.

فإذا كانت كتلة القذيفة (*Projectile*) هي (m = 750 kg)، وسرعة قذفها (V_1 = 700 m/sec)، وتميل بزاوية ($\alpha = 30^o$) على الأفقي. المطلوب ايجاد سرعة ارتداد السفينة V_{Re} ، وزاوية انحرافها β مباشرة بعد الضرب.

الحل:



(الشكل-6-7) سفينة حربية.

نعدّ أن مجموع كتلة القذائف (M_1=8 m =6000 kg)، وكتلة السفينة M ، وأن سرعة الارتداد (*Recession*) التي تكتسبها السفينة نتيجة لإطلاق المدافع هي V_{Re} (الشكل-6-7). نظراً لانعدام القوى الأفقية على الجملة (السفينة + القذائف)؛ وذلك لضعف مقاومة الماء للحركة، فإن مبدأ حفظ كمية الحركة في اتجاه الهدف يعطي:

$$\sum F^e_{kX} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_X = \text{Const.} \quad \Rightarrow \quad Q_{0X} = Q_{1X}$$

وبما أن مسقط كمية الحركة للجملة على المحور OX معدومة قبل إطلاق القذائف، أي:

$$Q_{0X} = 0$$

منه:

$$Q_{1X} = q_{pX} + q_{bX} = M_1.V_{1X} - M.V_{Re} = 0$$

بالتعويض:

$$10^3 \times 30000.V_{Re.} = 6000 \times 700 \cos 30^o$$

نحصل على سرعة ارتداد السفينة:

$$V_{Re.} = 0.12\,\text{m/sec}$$

أما زاوية انحراف السفينة؛ فنظراً لصغر زاويتها β، فإن مقدارها بالتقدير الدائري يعطى بالعلاقة:

$$b = \frac{V_{Re.}}{V}\ \frac{180}{p} = \frac{0.12 \times 3600 \times 180}{18 \times 1000 \times p} = 1.38^o$$

مسألة-6-6

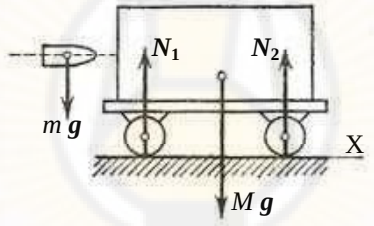
تندفع رصاصة (*Bullet*) كتلتها m أفقياً بسرعة U ، فتصيب صندوقاً فيه رمل موضوع على عربة (*Car*) ساكنة، كتلتها مع الصندوق تساوي M ، كما هو مبين في (الشكل-6-8).

المطلوب إيجاد سرعة العربة U بعد الصدمة.

الحل:

ندرس الرصاصة والعربة كجملة واحدة، ويكفل ذلك عدم اعتبار القوى الداخلية التي تنشأ إثر اصطدام الرصاصة بالصندوق، عندئذ تكون القوى المؤثرة على الجملة (العربة+الرصاصة) هي Mg وزن العربة والصندوق، و mg وزن الرصاصة، و N محصلة ردود الأفعال الشاقولية عند نقاط تماس العربة بالأرض الأفقية. نلاحظ أن مجموع مساقط هذه القوى على المحور الأفقي OX يساوي الصفر، وبالتالي نطبق علاقة مشتق كمية حركة الجملة:

$$\sum F^{e}_{k\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{X}} = \mathrm{Const} \quad \Rightarrow \quad Q_{0\mathrm{X}} = Q_{1\mathrm{X}} \qquad (a)$$



(الشكل-6-8) رصاصة تصيب صندوق موضوع على عربة.

حيث $Q_0 = (q_B + q_C)_0$ تمثل كمية حركة الجملة قبل الصدمة، وبما أن العربة كانت ساكنة قبل الصدمة $(q_{C0} = 0)$ ؛ فإن:

$$Q_{0\mathrm{X}} = q_{B0\mathrm{X}} = m.U$$

و $Q_1 = (q_B + q_C)_1$ تمثل كمية حركة الجملة بعد الصدمة، وبما أن العربة والرصاصة تتحرك بعد الصدمة بسرعة واحدة نرمز لها بالرمز V ، منه:

$$Q_{1\mathrm{X}} = (M + m)V$$

بالتعويض في (a)؛ نحصل على:

$$V = \frac{m}{M + m}U$$

مسألة-6-7

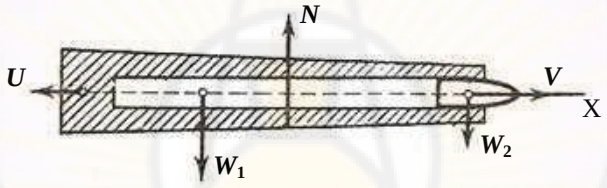
مدفع ماسورته أفقية المبينة في (الشكل-6-9)، حيث كان وزن الأجزاء القابلة فيه للارتداد (*Turncoat*) W_1 ، ووزن القذيفة (*Projectile*) W_2 .

فإذا كانت سرعة القذيفة بالنسبة لقناة الماسورة تساوي V في لحظة الانطلاق. المطلوب تعيين سرعة الارتداد الحر للمدفع U .

الحل:

للتخلص من دراسة القوى المجهولة، وهي قوى ضغط غازات البارود ندرس القذيفة والأجزاء القابلة للارتداد كجملة واحدة، وبإهمال مقاومة الارتداد خلال فترة حركة القذيفة داخل ماسورة المدفع، نجد أن مجموع المساقط على المحور OX للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة يساوي الصفر، وبالتالي نطبق علاقة مشتق كمية حركة الجملة:

$$\sum F^e_{k\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{X}} = \mathrm{Const} \quad \Rightarrow \quad Q_{0\mathrm{X}} = Q_{1\mathrm{X}}$$



(الشكل-6-9) لحظة انطلاق قذيفة من ماسورة مدفع أفقية.

وبما أن الجملة كانت ثابتة قبل إطلاق القذيفة:

$$Q_0 = 0$$

منه في كل لحظة زمنية، يكون:

$$Q_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{TX} + q_{PX} = 0$$

نرمز بـــ U لسرعة الأجزاء المرتدة عند اللحظة النهائية، بفرض أنها تتجه وفق المحور OX ، عندئذ تكون السرعة المطلقة للقذيفة في هذه اللحظة مساوية لـــ:

$$V^a_{\mathrm{X}} = V^e_{\mathrm{X}} + V^r_{\mathrm{X}} = U_{\mathrm{X}} + V_{\mathrm{X}}$$

بالتالي، فإن:

$$Q_{\mathrm{X}} = \frac{W_1}{g}U_{\mathrm{X}} + \frac{W_2}{g}(U_{\mathrm{X}} + V_{\mathrm{X}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{X}} = U = -\frac{W_2}{W_1 + W_2}V_{\mathrm{X}}$$

إذا كانت السرعة المطلقة لانطلاق القذيفة V^a معلومة؛ ندخل المقدار V_X^a مباشرة في علاقة Q_X بدلاً من $(U_X + V_X)$، وفي هذه الحالة نجد أن:

$$U_X = -\frac{W_2}{W_1} V_X^a$$

وتبين الإشارة السالبة في الحالتين أن اتجاه U تتجه في اتجاه مضاد لـــ V .

نؤكد ضرورة أخذ السرعات المطلقة لحركة أجزاء الجملة بنظر الاعتبار عند حساب كمية حركتها الكلية.

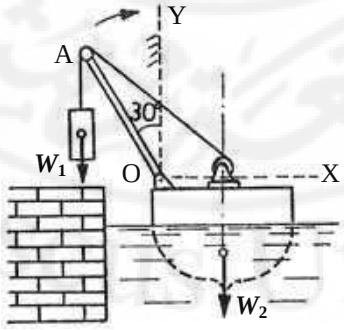
مسألة-6-8

المطلوب، بإهمال مقاومة الماء، تعيين مقدار انتقال Δx_2 رافعة عائمة (*Carrier*) وزنها (W_2=200 kN)، والموضحة في (الشكل-6-10)، عندما ترفع حملاً (*Load*) وزنه (W_1=20 kN) أثناء دوران ذراعها (OA=8 m) بزاوية ($\varphi = 30^o$) حتى الوضع الشاقولي.

الحل:

نعدُّ الجملة مؤلفة من جسمين الثقل والرافعة، ونلاحظ أن القوى المؤثرة عليها هي قوى شاقولية الممثلة بوزن الحمل $(W_1 = m_1.g)$، ووزن الرافعة $(W_2 = m_2.g)$، وقوة دفع الماء الموجهة للأعلى. لذلك وفق العلاقة (6-12)، وبعد اختيار مجموعة المحاور الثابتة OXY ؛ نحصل على:

$$\sum I_X^e = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1X} - Q_{0X} = 0$$



(الشكل-6-10) حمل مربوط بذراع رافعة عائمة.

وباعتبار أن الجملة ساكنة في لحظة البدء؛ نحصل على:

$$Q_{0X} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1X} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{LX} + q_{CX} = 0$$

ومنه:

$$\frac{W_1}{g} V_{1X} + \frac{W_2}{g} V_{2X} = 0$$

وباعتبار أن:

$$V_{1X} = \frac{dx_1}{dt} \quad , \quad V_{2X} = \frac{dx_2}{dt}$$

حيث x_1 و x_2 تمثل إحداثيات الحمل ومركز ثقل الرافعة، وبالتعويض:

$$\frac{W_1}{g}\frac{dx_1}{dt} + \frac{W_2}{g}\frac{dx_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1 . dx_1 + W_2 . dx_2 = 0$$

بالتكامل نجد:

$$W_1 \int_{x_{10}}^{x_{11}} dx_1 + W \int_{x_{20}}^{x_{21}} dx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1 (x_{11} - x_{10}) + W_2 (x_{21} - x_{20}) = 0$$

منه:

$$W_1 . x_{10} + W_2 . x_{20} = W_1 . x_{11} + W_2 . x_{21} = \text{Const.}$$

حيث x_{10} و x_{20} تمثل إحداثيات الحمل ومركز ثقل الرافعة في لحظة البدء، ومنه:

$$x_{10} = -\,\text{OA}.\sin a = -\,4\ \text{m} \quad , \quad x_{20} = 0$$

x_{11} و x_{21} تمثل إحداثيات الحمل ومركز ثقل الرافعة بعد دوران ذراع الرافعة، ومنه:

$$x_{11} = \Delta x_2 \quad , \quad x_{21} = x_{20} + \Delta x_2$$

حيث Δx_2 تمثل انتقال الرافعة. بالتعويض نحصل على:

$$\Delta x_2 = -\frac{4W_1}{W_1 + W_2} = -\,0.36\ \text{m}$$

الإشارة السالبة تدل على أن انتقال الرافعة يتم نحو اليسار عكس اتجاه محور الحركة OX .

مسألة-6-9

يرفع ثقل وزنه W_2 على المستوى AB المائل بزاوية α عن الأفق، والمثبت بسطح عربة وزنها W_1 ، كما هو مبين في (الشكل-6-11).

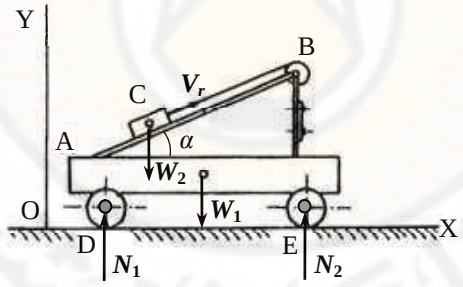
فإذا كانت الجملة ساكنة في لحظة البدء، وكانت حركة الثقل على المستوى AB هي حركة متسارعة بتسارع ثابت قدره $\boldsymbol{A}$ ، عين، بإهمال مقاومة حركة العربة على السطح الأفقي، سرعة العربة V_1 أثناء حركة الحمل.

الحل:

نعدُّ الجملة مؤلفة من جسمين: الثقل والعربة، ونلاحظ أن القوى المؤثرة عليها هي قوى شاقولية الممثلة بوزن الثقل ($W_1 = m_1.g$)، ووزن العربة ($W_2 = m_2.g$)، وردود الأفعال الشاقولية $\boldsymbol{N_1}$ و $\boldsymbol{N_2}$ المؤثرة في نقاط التماس D و E بين الدواليب والسكة الأفقية.

باختيار مجموعة المحاور الثابتة OXY ، وباستخدام مسقط علاقة تغير كمية الحركة للجملة على محور الحركة OX ، نحصل على:

$$\sum F^e_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum I^e_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1\mathrm{X}} - Q_{0\mathrm{X}} = 0$$



(الشكل-6-11) رفع ثقل على مستوى AB مائل مثبت بسطح عربة.

وباعتبار أن الجملة ساكنة في لحظة البدء، نحصل على:

$$Q_{0\mathrm{X}} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{1\mathrm{X}} = 0 \;\Rightarrow\; q_{1\mathrm{X}} + q_{2\mathrm{X}} = 0$$

ومنه:

$$\frac{W_1}{g} V_{1\mathrm{X}} + \frac{W_2}{g} V_{2\mathrm{X}} = 0 \qquad (1)$$

حيث V_{1X} تمثل المسقط على محور الحركة OX لسرعة العربة المطلوبة، وتساوي:

$$V_{1X} = V_1$$

و V_{2X} تمثل المسقط على محور الحركة OX للسرعة المطلقة للحركة المركبة للثقل، وتساوي:

$$V_{2X} = V_{2X}^e + V_{2X}^r = V_{1X} + V_{2X}^r$$

و V_{2X}^r تمثل المسقط على محور الحركة OX للسرعة النسبية لحركة الثقل على المستوى المائل، وتحسب كما يلي:

$$s = \frac{1}{2} A.t^2 \qquad \Rightarrow \qquad V_2^r = \frac{ds}{dt} = A.t \qquad \Rightarrow \qquad V_{2X}^r = A.\cos a\ .t$$

بالتعويض في علاقة السرعة المطلقة للثقل:

$$V_{2X} = A.\cos a\ .t + V_1$$

بالتعويض في العلاقة (1) نحصل على:

$$V_1 = -\frac{W_2}{W_1 + W_2} A.\cos a\ .t$$

الإشارة السالبة تدل على أن العربة تتحرك عكس محور الحركة OX أي: نحو اليسار.

مسألة-6-10- (الفصل الأول-2010-2011)

جسيمان A و B وزناهما على التوالي W_A و W_B ، يتصلان بوساطة حبل غير قابل للاستطالة يمر عبر بكرة مهملة C ، بحيث ينزلق الجسيمان على الجانبين الأملسين لإسفين ECD قائم الزاوية وزنه W ، ومركز كتله G ، ويرتكز بقاعدته DE على مستوى أفقي أملس، كما هو مبين في a من (الشكل-6-12).

المطلوب باعتبار أن الجملة كانت ساكنة في البدء:

1. مقدار واتجاه انتقال الإسفين على المستوى الأفقي Δx_G عند انزلاق الجسيم A لمسافة قدرها Δs_A ، مهملاً كتلة كل من البكرة والحبل.

2. مقدار انتقال الإسفين باستخدام القيم التالية:

$$(W = 4W_A = 16W_B) \quad \text{و} \quad (\Delta s_A = 20\,\text{cm}) \quad \text{و} \quad (q = 30^o)$$

الحل:

1. نلاحظ أن القوى المؤثرة على الجملة، والمكونة من $\boldsymbol{W_A}$ و $\boldsymbol{W_B}$ و $\boldsymbol{W}$ والمركبة الناظمية لقوة الاتصال مع المستوى الأفقي $\boldsymbol{N}$ ، وهي عمودية على محور حركة الإسفين X المفروض من E إلى D ، كما هو مبين في b من (الشكل-6-12)، لذا نستخدم علاقة مسقط تغير كمية الحركة لجملة على محور الحركة X ، لإيجاد انتقال الإسفين، حيث نحصل على:

$$\sum F^e_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum I^e_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1\mathrm{X}} - Q_{0\mathrm{X}} = 0$$

وبما أن:

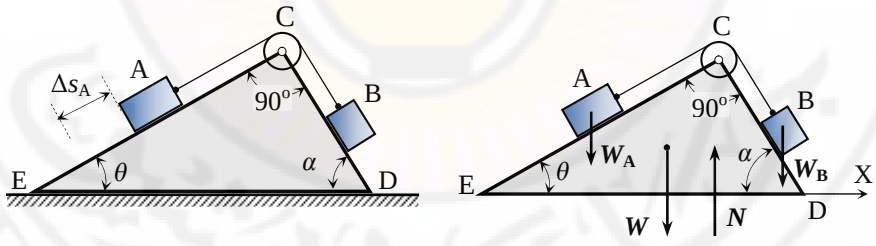
$$Q_{0\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\mathrm{AX}} + q_{\mathrm{BX}} + q_{\mathrm{GX}} = 0$$

بالتعويض؛ نحصل على العلاقة (6-14):

$$m_{\mathrm{A}}.V_{\mathrm{AX}} + m_{\mathrm{B}}.V_{\mathrm{BX}} + m.V_{\mathrm{GX}} = 0$$

التي تكتب بالشكل:

$$\frac{W_{\mathrm{A}}}{g}.\frac{dx_{\mathrm{A}}}{dt} + \frac{W_{\mathrm{B}}}{g}.\frac{dx_{\mathrm{B}}}{dt} + \frac{W}{g}.\frac{dx_{\mathrm{G}}}{dt} = 0$$



a- جسيمان ينزلقان على الجانبين لإسفين. b- القوى المؤثرة على الجملة.

(الشكل-6-12)

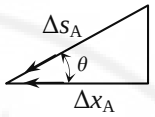
منه؛ نحصل على:

$$W_{\mathrm{A}}.\Delta x_{\mathrm{A}} + W_{\mathrm{B}}.\Delta x_{\mathrm{B}} + W.\Delta x_{\mathrm{G}} = 0$$

حيث Δx_G تمثل الانتقال الأفقي للإسفين، ونفرضه باتجاه محور الحركة.

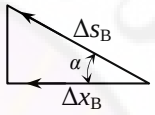
و Δx_A تمثل الانتقال الأفقي المطلق Δx_A^a للجسيم A ، ويساوي:

$$\Delta x_A^a = \Delta x_A^e + \Delta x_A^r$$
$$\Delta x_A^a = \Delta x_G - \Delta s_A . \cos q$$



و Δx_B تمثل الانتقال الأفقي المطلق Δx_B^a للجسيم B ، ويساوي:

$$\Delta x_B^a = \Delta x_B^e + \Delta x_B^r$$
$$\Delta x_B^a = \Delta x_G - \Delta s_B . \cos a$$



وبما أن الخيط لا يمتط:

$$\Delta s_B = \Delta s_A$$

منه:

$$\Delta x_B^a = \Delta x_G - \Delta s_A . \sin q$$

بالتعويض:

$$W_A(\Delta x_G - \Delta s_A . \cos q) + W_B(\Delta x_G - \Delta s_A . \sin q) + W . \Delta x_G = 0$$

$$(W_A + W_B + W)\Delta x_G = (W_A . \cos q + W_B . \sin q)\Delta s_A$$

نحصل على:

$$\Delta x_G = \frac{W_A . \cos q + W_B . \sin q}{W_A + W_B + W} \Delta s_A$$

القيمة موجبة؛ مما يدل على أن اتجاه الحركة هو باتجاه المحور X .

2. بالتعويض بالقيم العددية؛ نحصل على:

$$\Delta x_G = \frac{\frac{W}{4} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{16} . \frac{1}{2}}{\frac{W}{4} + \frac{W}{16} + W} \; 20 = \frac{0.2165 + 0.03125}{0.25 + 0.0625 + 1} \; 20 = 3.78 \text{ cm}$$

6- حركة الجسم ذي الكتلة المتغيرة *Motion of a variable Mass Body*

في الميكانيك التقليدي، تُعَدُّ كتلة كل جسيم من الجملة أثناء الحركة مقداراً ثابتاً. إلا أن تكوين جسيمات الجملة المعطاة أو الجسم يمكن في بعض الحالات أن يتغير بتغير الزمن، حيث يمكن أن تنفصل عن الجسم بعض جسيماته، أو أن تتحد جسيماته من خارجه، ولذا تتغير الكتلة الكلية للجسم.

سنختار في هذه الفقرة حالة أخرى ذات أهمية عملية، وهي عندما تحدث عملية انفصال الجسيمات، أو اتحادها بالجسم بصورة مستمرة، والجسم ذو كتلة M التي تتغير بمرور الزمن نتيجة انفصال جسيمات مادية عنه، أو اتحاد جسيمات أخرى به، يدعى بالجسم ذي الكتلة المتغيرة، وذلك عندما تكون:

$$M = f(t)$$

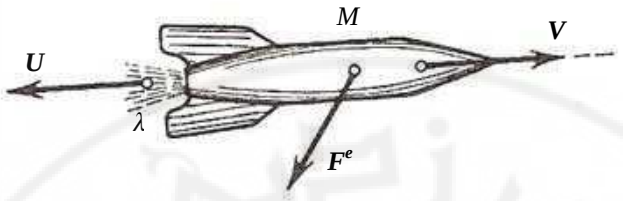
حيث $f(t)$ تمثل تابع مستمر بدلالة الزمن، وتُعَدُّ الصواريخ والطائرات النفاثة التي تتناقص كتلتها عملياً بصورة مستمرة نتيجة لاستهلاك الوقود؛ أمثلة لهذا الأجسام.

وإذا أمكن أثناء الحركة إهمال أبعاد الجسم ذي الكتلة المتغيرة بالمقارنة مع المسافات التي يقطعها، فيمكن دراسته باعتباره جسيماً مادياً متغير الكتلة، ونعين معادلة حركة صاروخ تتناقص كتلته باستمرار مع الزمن، بدراسته من وجهة النظر السابقة كجسيم متغير الكتلة.

نرمز للسرعة النسبية لاندفاع منتجات الاحتراق الخارجة من الصاروخ بالنسبة لهيكل الصاروخ بالرمز U ، كما هو مبين في (الشكل-6-13)، وللتخلص من قوى الضغط التي تدفع منتجات الاحتراق باعتبارها قوى داخلية، ندرس في لحظة زمنية ما t الجملة المكونة من الصاروخ نفسه، والجسيم الذي ينفصل عنه خلال الفترة الزمنية dt ، وكتلة هذا الجسيم λ تساوي المقدار dM ، أي: التغير الحاصل في كتلة الصاروخ بما فيه من مواد ملتهبة خلال الزمن dt ، وبما أن M مقدار متناقص؛ فإن:

$$dM < 0 \quad \Rightarrow \quad l = |dM| = -dM$$

الإشارة السالبة تدل على أن تغير الكتلة الكلية dM سالبة، في حين الكتلة المنفصلة λ موجبة.



(الشكل-6-13) اندفاع منتجات الاحتراق الخارجة من صاروخ.

من تطبيق علاقة تغير كمية الحركة على الجملة:

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}^{e}.dt \qquad (15\text{-}6)$$

حيث $\boldsymbol{F}^{e}$ تمثل المجموع الهندسي للقوى الخارجية المؤثرة على الصاروخ.

وإذا تغيرت سرعة الصاروخ $\boldsymbol{V}$ ، خلال الفترة الزمنية dt بمقدار $d\boldsymbol{V}$ ، فإن كمية حركة الجملة تكتسب عند ذلك الزيادة $M.d\boldsymbol{V}$ ، ويكتسب الجسيم المنفصل عند ذلك الزمن سرعة إضافية $\boldsymbol{U}$ بالنسبة لسرعته السابقة، حيث $\boldsymbol{U}$ - كما سبق ذكره - هي السرعة النسبية لاندفاع منتجات احتراق الوقود، ونتيجة لذلك تزداد كمية حركة الجملة بمقدار:

$$\boldsymbol{U}.l = -\boldsymbol{U}.dM$$

وبالتالي فإن:

$$d\boldsymbol{Q} = M.d\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}.dM$$

وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (6-15)، وقسمة الطرفين على dt ؛ نحصل على:

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}^{e} + \boldsymbol{U}\frac{dM}{dt} \qquad (16\text{-}6)$$

تحدد هذه المعادلة الشعاعية (6-16) المعادلة التفاضلية لحركة جسيم متغير الكتلة، أو معادلة العالم الروسي ميشرسكي (*Meshersky*) (1859-1935).

بما أن الحد الأخير $\boldsymbol{U}.dM/dt$ في الطرف الأيمن من المعادلة (6-16)، هو من حيث وحدات القياس عبارة عن قوة، فنرمز له بالرمز $\boldsymbol{\Phi}$ ، ويمكننا عندئذ كتابتها بالشكل:

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}^{e} + \boldsymbol{\Phi} \qquad (17\text{-}6)$$

وبذلك يؤول التأثير النفاث إلى حدوث تأثير إضافي على الصاروخ أثناء الحركة بوساطة القوة $\boldsymbol{\Phi}$ ، التي تسمى بـــ قوة رد الفعل (*Reaction Effect*)، أو بـــ القوة النفاثة، أو بـــ القوة الدافعة (*Thrust*).

والمقدار dM/dt يساوي عددياً كتلة الوقود المحترقة في وحدة الزمن، أي: الوقود المستهلك خلال ثانية واحدة، ونرمز لهذه الكمية المميزة بـــ G_{sec} ، وبهذا فإذا أخذنا الإشارة بعين الاعتبار، فإن:

$$\frac{M}{dt} = -G_{\text{sec}}$$

ومنها تنتج المعادلة التالية:

$$\boldsymbol{\Phi} = -\boldsymbol{U}.G_{\text{sec}} \qquad (18\text{-}6)$$

أي: أن القوة النفاثة $\boldsymbol{\Phi}$ تساوي بالقيمة المطلقة حاصل ضرب كتلة الوقود المستهلك خلال ثانية واحدة بالسرعة النسبية $\boldsymbol{U}$ لاندفاع منتجات احتراق هذا الوقود، وتتجه في اتجاه مضاد لهذه السرعة النسبية؛ فهي تتجه إذاً في اتجاه السرعة $\boldsymbol{V}$ أي: إلى الأمام إذا ما اندفعت الغازات إلى الخلف.

تكون النتائج التي حصلنا عليها صحيحة تماماً إذا لم تؤثر الجسيمات المنفصلة بعضها عن بعض بأي شكل كان، أما في واقع الأمر فإن منتجات احتراق الوقود تندفع من الصاروخ على شكل غازي مستمر؛ بحيث تؤثر جسيماته بعضها على بعض تأثيرات متبادلة، لذا فأثناء تحليق الصاروخ في الجو تؤثر عليه بالإضافة إلى ما سبق من القوى؛ قوة $(P_g.A)$ متجهة في اتجاه الحركة، وأخرى $(P_a.A)$ متجهة ضد اتجاه الحركة، حيث تمثل A مساحة مقطع فوهة المحرك، و P_g ضغط الغاز في هذا المقطع، و P_a الضغط الجوي، وبما أن $(P_g > P_a)$، فإن القوة النفاثة تكون أكبر من تلك التي تحدد بالمعادلة (6-17) بمقدار $A.\ (P_g - P_a)$، حيث عند التحليق في الفراغ اللاهوائي، أي: دون وجود ضغط جوي يكون $(P_a = 0)$، ويؤخذ هذا الأمر بنظر الاعتبار باستبدال U بسرعة فعالة أخرى U_e أكبر من U ، مثلاً عندما تكون $(U = 1900\ \text{m/sec})$، فإن $(U_e = 2200\ \text{m/sec})$.

لإيجاد معادلة حركة صاروخ يتحرك تحت تأثير القوة النفاثة فقط، مع اعتبار أن القوى الخارجية ($\boldsymbol{F}^e = 0$)، وأن السرعة النسبية للاندفاع الغازات من الصاروخ $\boldsymbol{U}$ ثابتة، وأن محور الإحداثيات OX موجه باتجاه الحركة، وعندئذ يكون:

$$V_X = V \quad , \quad U_X = U$$

وتأخذ المعادلة (16-6) بعد إسقاطها على محور X ، ووضع ($F^e = 0$)، الشكل التالي:

$$M\frac{dV}{dt} = -U\frac{dM}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad dV = -U\frac{dM}{M}$$

وبتكامل هذه المعادلة مع اعتبار أن الكتلة في اللحظة الابتدائية هي ($M = M_0$)، والسرعة ($V = V_0$)، ومتجهة على امتداد OX ، نجد أن:

$$V = V_0 + U.\ln\frac{M_0}{M} \qquad (19\text{-}6)$$

نرمز لكتلة هيكل الصاروخ ومعداته بالرمز M_G ، وكتلة الوقود بالرمز M_f ، وعندئذ من الواضح أن ($M_0 = M_G + M_f$)، وتصبح كتلة الصاروخ عندما يستهلك كل الوقود مساويةً لـــ M_G ، وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (18-6) نحصل على معادلة العالم الروسي تزيولكوفسكي (*Tziolkovsky*) (1857-1935)، التي تحدد سرعة الصاروخ عندما يستهلك كل الوقود، والسرعة في نهاية ما يسمى بـــ المرحلة الفعالة (*Boost Stage*):

$$V = V_0 + U.\ln(1+\frac{M_f}{M_G}) \qquad (20\text{-}6)$$

وتكون هذه النتيجة صحيحة بدقة خارج مجال القوى، وفي الفراغ اللاهوائي، ويتضح من المعادلة (19-6) أن السرعة النهائية للصاروخ، تعتمد على:

- سرعته الابتدائية V_0 .
- السرعة النسبية لاندفاع منتجات الاحتراق U .
- نسبة كتلة مواد الاحتراق إلى كتلة الصاروخ، وتمثل الاحتياطي النسبي للوقود (M_f / M_G)، أو عدد تزيولكوفسكي.

نذكر حقيقة مهمة جداً، وهي أن سرعة الصاروخ في نهاية فترة احتراق الوقود، لا تعتمد على نظام عمل المحرك النفاث، أي: على درجة سرعة أو بطء احتراق الوقود كله.

وتكمن الأهمية العملية لمعادلة تزيولكوفسكي (6-19)، في أنها تبين الطرق المحتملة للحصول على السرعات الكبيرة اللازمة للطيران في الفضاء، ولذلك يجب زيادة (M_f / M_G) ، U ، V_0 ، علماً بأن زيادة V_0 ، U هي طريقة أكثر عملية، وتتعلق زيادة (M_f / M_G) ، U بنوع الوقود، وتصميم الصواريخ ومحركاته، ففي الصواريخ الضخمة التي تعمل على المحروقات السائلة تكون:

$$M_f / M_G = 3 \rightarrow 4 \qquad \text{و} \qquad U = 2000 \rightarrow 2500 \text{ m/sec}$$

ويمكن زيادة V_0 باستخدام الصاروخ المركب (*Multistage Rocket*)، أي: متعدد المراحل الذي تنفصل مراحله آلياً عن المرحلة الأخيرة، بقدر استهلاك الوقود الذي فيها، وتكتسب المرحلة الأخيرة نتيجة لذلك سرعة إضافية ابتدائية.

يبدأ الصاروخ المتعدد المراحل من السكون $(V_0 = 0)$، وتحترق المادة الملتهبة داخله، ويكتسب الصاروخ وفقاً للمعادلة (6-18) في نهاية المرحلة سرعة $[V_1 = U_1 \ln(M_{10} / M_1)]$، وتبلغ هذه السرعة قيمة في أحسن الشروط لا تزيد على 4000 m/sec .

وعندما تنفذ المادة المحترقة في هذه المرحلة ينفصل الهيكل، أو الطابق الحاوي عليها، وعلى المحركات بكامله عن الصاروخ، وعندها تبدأ المرحلة الثانية عملها، ويكتسب الصاروخ في نهاية هذه المرحلة سرعة $[V_2 = V_1 + U_2 \ln(M_{20} / M_2)]$ ، وتبلغ هذه السرعة قيمة تتراوح بين 9000 m/sec و 10000 m/sec.

وينفصل الطابق الثاني، وتبدأ محركات الطابق الثالث عملها، ويكتسب الصاروخ في نهاية مرحلته الثالثة سرعة $[V_3 = V_2 + U_3 \ln(M_{30} / M_3)]$ ، وتكون هذه السرعة كافية ليتحرر معها الصاروخ من الجاذبية الأرضية؛ ليندفع بعدها في رحلته الكونية.

والجدول التالي يبين علاقة (V_1/U) و (M_f / M_G) في حال ابتداء الصاروخ من السكون.

M_f / M_G	1	2	3	4	5	10	20
V_1/U	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	2.40	3.00

فإذا كانت سرعة خروج الغازات بالنسبة لهيكل الصاروخ هي $(U = 2000$ m/sec)، اكتسب الصاروخ في نهاية المرحلة الأولى سرعة $(V_1 = 6000$ m/sec)، وذلك إذا كانت كتلة ما يحويه من مواد محترقة إلى كتلته الخاصة تساوي 20 ، وهذه النسبة مستحيلة في حالة المحروقات السائلة المعروفة.

مسألة-6-11

صاروخ يحرق كمية ثابتة من الوقود بتدفق كتلي قدره m كيلو غرام في الثانية، ويسير في فراغ تام.

إذا كانت الطاقة النوعية لوقوده H ، وهي الطاقة المتولدة من حرق وزن كيلوغرام واحد. المطلوب إيجاد سرعة انبعاث غازات الاحتراق بالنسبة للصاروخ U ، وإيجاد قوة دفع الغاز للصاروخ F .

الحل:

تعين سرعة انبعاث غازات الاحتراق بالنسبة للصاروخ، من المعادلة الشعاعية التفاضلية لحركة الصاروخ في الفراغ:

$$M\frac{\boldsymbol{dV}}{dt}=\boldsymbol{F}^{e}+\boldsymbol{U}\frac{dM}{dt} \qquad (a)$$

حيث $\boldsymbol{F}^{e}$ تمثل المجموع الهندسي للقوى الخارجية المؤثرة على الصاروخ، وتأخذ المعادلة بعد إسقاطها على محور X ، ووضع $(F_{\mathrm{X}}^{e}=0)$، الشكل التالي:

$$M\frac{dV}{dt}=\frac{dM}{dt}U=m.U$$

حيث تمثل M كتلة الصاروخ ومحتوياته في أي لحظة، و $(m = dM/dt)$ كتلة الوقود المحترق في وحدة الزمن، و U سرعة انبعاث غاز الاحتراق بالنسبة للصاروخ، و V سرعة الصاروخ نفسه.

وتعين قوة دفع الغاز للصاروخ من العلاقة.

$$F=m.U \qquad (b)$$

ومن تطبيق علاقة الطاقة على الصاروخ، ومحتوياته في لحظتين متتاليتين، التي تنص على أن الطاقة الحركية في اللحظة الأولى الممثلة بـــ :

[الطاقة الحركية للصاروخ+الطاقة الحرارية المتولدة من حرق وزن من الوقود قدره $m.g.dt$] تساوي الطاقة الحركية في اللحظة التالية الممثلة بـــ :

[الطاقة الحركية للصاروخ بكتلته الجديدة+الطاقة الحركية المتولدة من كتلة الوقود المحترقة]:

$$\frac{1}{2}M.V^{2}+m.g.H.dt=\frac{1}{2}(M-m.dt)(V+dV)^{2}+\frac{1}{2}m.dt[U-(V+dV)]^{2}$$

باختصار المعادلة مع الاحتفاظ بكميات الدرجة الأولى في الصغر فقط؛ نحصل على:

$$m.g.H = M.V.\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}m.U^2 - m.U.V \qquad (c)$$

بالتعويض من (a) في (c)؛ نحصل على سرعة انبعاث غاز الاحتراق بالنسبة للصاروخ:

$$U = \sqrt{2g.H} \qquad (d)$$

ومن العلاقتين (b) و (d)؛ نحصل على قوة الدفع:

$$F = m\sqrt{2g.H}$$

7- العزم الحركي لجملة مادية *Moment of Momentum of a System*

إن العزم الحركي لجملة مادية بالنسبة لنقطة ثابتة O ، أو ما يدعى أيضاً بـــ كمية الحركة الزاوية (*Angular Momentum*) للجملة المادية، هو مقدار المتجه $\boldsymbol{K}_{\mathrm{O}}$ المساوي للمجموع الهندسي لعزوم كمية حركة جسيمات الجملة بالنسبة للنقطة O .

$$\boldsymbol{K}_{\mathbf{O}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}} = \sum(\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge m_k.\boldsymbol{V}_k) \qquad (21\text{-}6)$$

حيث $\boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}$ تمثل عزم كمية حركة ($\boldsymbol{q}_k = m_k.\boldsymbol{V}_k$) الجسيم $\mathrm{M_k}$ بالنسبة للنقطة الثابتة O .

بإسقاط العلاقة على جملة المحاور الإحداثية نحصل على مركبات العزم الحركي للجملة بالنسبة للنقطة الثابتة O على المحاور الإحداثية، وهي تكافئ العزوم الحركية للجملة بالنسبة لهذه المحاور.

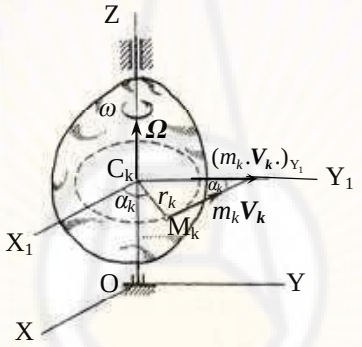
$$\begin{aligned} K_{\mathrm{X}} &= \sum m_{\mathrm{X}} = \sum(\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge m_k.\boldsymbol{V}_k).\boldsymbol{i} \\ K_{\mathrm{Y}} &= \sum m_{\mathrm{Y}} = \sum(\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge m_k.\boldsymbol{V}_k).\boldsymbol{J} \\ K_{\mathrm{Z}} &= \sum m_{\mathrm{Z}} = \sum(\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge m_k.\boldsymbol{V}_k).\boldsymbol{k} \end{aligned} \qquad (22\text{-}6)$$

بالتالي لتحديد المتجه $\boldsymbol{K}_{\mathbf{O}}$ لابد من تعيين مساقطه على المحاور الإحداثية، وكما ذكرنا أن كمية الحركة لجملة هي مميزة لحركة الجملة الانسحابية، فإن العزم الحركي لجملة بالنسبة لمحور ثابت هي مميزة لحركة الجملة الدورانية.

فإذا دار جسم حول محور إحداثي، وليكن OZ ، كما هو مبين في (الشكل-6-14)، بسرعة زاوية w متجهه $\boldsymbol{\Omega}$ ينطبق على المحور OZ ، رسم كل جسيم M_k من الجسم دائرة مركزها C_k تقع على المحور OZ ، ونصف قطرها ($r_k = C_kM_k$)، ويكتسب الجسيم سرعة خطية ($V_k = w.r_k$) تمس الدائرة، ويقع متجهه في مستوى يعامد المحور OZ في النقطة C_k .

إن عزم متجه كمية حركة الجسيم $m_k.\boldsymbol{V_k}$ بالنسبة للنقطة C_k من المحور OZ ، هو متجه ينطبق على المحور OZ ، ويتجه بشكل يدور حوله المتجه $m_k.\boldsymbol{V_k}$ في الجهة المباشرة، فهو يتجه إذاً باتجاه W ، وقيمته العددية:

$$m_C = m_k.V_k.r_k$$



(الشكل-6-14) جسم يدور حول محور ثابت.

ومسقطه على المحور OZ يساويه، وعليه:

$$m_Z = m_C = m_k.w.r_k^2$$

وبالتالي:

$$K_Z = \sum m_Z = \sum w(m_k.h_k^2) = w\sum m_k.r_k^2$$

والمقدار $\sum m_k.r_k^2$ يمثل عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور OZ أي I_Z ومنه:

$$K_Z = I_Z.w \qquad (23\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة علاقة العزم الحركي لجملة بالنسبة لمحور Δ مار من مركز كتله، ويدور حول هذا المحور، ومنه النص التالي:

إن العزم الحركي لجملة بالنسبة لمحور Δ مار من مركز كتله، ويدور حول هذا المحور يساوي إلى جداء عزم عطالة الجملة بالنسبة للمحور Δ بالسرعة الزاوية للدوران.

ولتعيين K_X ، نسقط المتجه $m_k.\boldsymbol{V}_k$ على المستوى OYZ أي: على المحور Y_1 :

$$(m_k.\boldsymbol{V}_k)_{Y_1} = m_k.V_k.\cos a_k$$

وعزم هذا المتجه بالنسبة للمحور OX ، حيث O نقطة من المحور X ؛ نحصل على:

$$K_X = \sum -(m_k.V_k.\cos a_k)\, z_k$$

$$K_X = -\sum m_k.w.r_k.z_k.\cos a_k = -w\sum(m_k.x_k.z_k)$$

حيث $(x_k = r_k.\cos a_k)$، والمقدار المحصور بين قوسين يمثل جداء العطالة I_{XZ} ، والإشارة السالبة تدل على أن العزم سالب؛ لأن اتجاه دورانه معاكس لاتجاه دوران الجسم، ومنه:

$$K_X = -I_{XZ}.w \qquad (24\text{-}6)$$

ونحصل على علاقة مماثلة للمقدار K_Y ، حيث:

$$K_Y = -I_{YZ}.w \qquad (25\text{-}6)$$

بالتالي القيم K_X , K_Y , K_Z تحدد المتجه $\boldsymbol{K_O}$ على المحاور الإحداثية، وكما هو واضح بشكل عام أنه لا يتجه على امتداد محور الدوران OZ .

كحالة خاصة إذا كان محور الدوران OZ ينطبق على محور تناظر الجسم؛ الذي يمر من مركز كتلة، وكان محور التناظر هو المحور الرئيسي لعزم عطالة الجسم بالتالي:

$$I_{XZ} = I_{YZ} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_X = K_Y = 0$$

$$K_O = K_Z = I_Z.w \qquad (26\text{-}6)$$

بالتالي في الحالة الخاصة إذا كان الجسم يدور حول محور تناظره، فإن متجه العزم الحركي له بالنسبة لنقطة من محور الدوران يتجه على امتداد محور الدوران، ويساوي عددياً إلى جداء عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور بالسرعة الزاوية للدوران.

وإذا تألفت جملة مادية من مجموعة من الأجسام تدور حول محور واحد، بسرعات زاوية مختلفة $w_1, w_2, \ldots . w_n$ ، كان لدينا:

$$K_Z = I_{1Z}.w_1 + I_{2Z}.w_2 + \ldots\ldots + I_{nZ}.w_n \qquad (27\text{-}6)$$

بالتالي يمكن أن نؤكد أن كمية الحركة لجملة $M.\boldsymbol{V_G}$ هي مميزة للحركة الانسحابية؛ لأن السرعة الخطية V_G مميزة هذه الحركة، كذلك فإن العزم الحركي لجملة هي مميزة للحركة الدورانية، حيث السرعة الزاوية w مميزة هذه الحركة.

ملاحظة:

إن كمية حركة الجملة المادية تعطي بالعلاقة:

$$\boldsymbol{Q} = M \,.\, \boldsymbol{V}_{\mathbf{G}}$$

فالكتلة M هي من الوجهة الفيزيائية، العامل الممثل لعطالة الجسم المنسحب، فهو العامل الذي يقاوم انسحاب الجسم. فإذا طبقنا على جملة ما قوى خارجية معينة، كانت السرعة الانسحابية التي يكتسبها مركز كتل هذه الجملة، متناسباً عكسياً مع كتلة هذه الجملة، فالكتلة والحال هذه تظهر وكأنها تمانع في زيادة سرعة الانسحاب، فهي تمثل عامل عطالة الانسحاب.

أما العزم الحركي للجملة المادية التي تدور حول محور OZ ، فيعطي بالعلاقة:

$$K_{\mathrm{Z}} = I_{\mathrm{Z}} \,.\, w$$

فعزم العطالة I_{Z} هو من الوجهة الفيزيائية العامل الممثل لعطالة الجسم الدائر، أي: هو العامل الذي يقاوم دوران الجسم. فإذا طبقنا على جملة ما ازدواجاً معيناً كانت السرعة الزاوية؛ التي يكتسبها الجسم في حركته الدورانية متناسبة عكساً مع عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحور الدوران، فعزم العطالة والحال هذه يظهر وكأنه يمانع في زيادة سرعة الدوران، فهو يمثل عامل عطالة الدوران.

8- مبدأ العزوم لجملة مادية *Principle of Moments of a System*

باشتقاق العلاقة (6-21) بدلالة الزمن:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_{\mathbf{O}} = \sum\{(\boldsymbol{V}_k \wedge m_k.\boldsymbol{V}_k) + (\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge m_k.\boldsymbol{A}_k)\}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_{\mathbf{O}} = \sum(\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge \boldsymbol{F}_k^e) + \sum(\mathbf{OM}_{\mathbf{k}} \wedge \boldsymbol{F}_k^i) = \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{F}_k^e) + \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{F}_k^i)$$

حيث الطرف الثاني يمثل المجموع الهندسي لعزوم القوى المؤثرة على مختلف جسيمات الجملة من قوى داخلية وخارجية.

من خواص القوى الداخلية أن المجموع الهندسي لعزومها بالنسبة للنقطة O معدوم، ويكون بالتالي:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_{\mathrm{O}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^e) \qquad (28\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة علاقة المشتق بالنسبة للزمن للعزم الحركي لجملة، والتي تنص على:

إن المشتق بالنسبة للزمن للعزم الحركي المحصل لجملة مادية بالنسبة لنقطة ثابتة O ، يساوى حاصلة عزوم القوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة بالنسبة للنقطة المفروضة.

بإسقاط العلاقة الأخيرة على المحاور الإحداثية T(OXYZ) ؛ نحصل على:

$$\frac{d}{dt}K_{\mathrm{X}} = \sum m_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{F}_k^e)\ ,\ \frac{d}{dt}K_{\mathrm{Y}} = \sum m_{\mathrm{Y}}(\boldsymbol{F}_k^e)\ ,\ \frac{d}{dt}K_{\mathrm{Z}} = \sum m_{\mathrm{Z}}(\boldsymbol{F}_k^e) \quad (29\text{-}6)$$

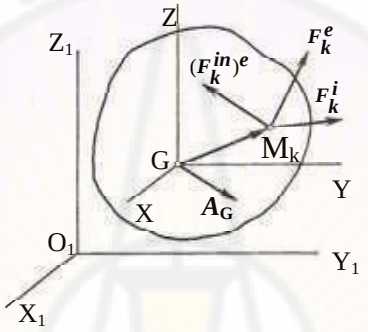
علاقات العزم حول أي محور ثابت، التي تستخدم كثيراً عند دراسة الحركة الدورانية للجسم، كذلك في حركة الجيروسكوب (*Gyroscopic Motion*)، مبدأ التصادم (*Impact Principle*). لكن أهميتها لا تقتصر على ذلك فقط، فقد سبق في علم الحركة أن حركة الجسم الصلب في الحالة العامة تتكون من حركة انتقالية مع قطب ما، وحركة دورانية حول هذا القطب، فإذا اخترنا حركة انتقالية مع القطب في مركز الكتل، فإنه يمكن دراسة الحركة الانتقالية للجسم بوساطة مبدأ حركة مركز الكتل، ودراسة الجزء الدوراني من الحركة بوساطة مبدأ العزوم، وهذا يبين أهمية هذا المبدأ لدراسة حركة الجسم الحر (طائرة محلقة، قذيفة، صاروخ)، وبشكل خاص لدراسة الحركة المستوية العامة.

وتكمن الأهمية العلمية لمبدأ العزوم أيضاً في أنها كمبدأ التغير في كمية الحركة، تكفل حذف القوى الداخلية المجهولة عند دراسة الحركة الدورانية للجملة، وتستخدم لدراسة حركة الجملة التي تتكون من أجسام بعضها يتحرك حركة انسحابية، والآخر حركة دورانية.

9- العزم الحركي لجملة مادية حول مركز الكتل

لكي نطبق مبدأ العزم الحركي في دراسة الحركة المستوية، أو حركة الجسم الحر؛ لابد من الحصول على تعبير عن هذا المبدأ لحركة الجملة حول مركز الكتل.

نعدُّ جملة مادية $T(GXYZ)$ تتحرك بدلالة جملة إحداثية ثابتة $T_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ ، وأنها مرتبطة بمركز الكتل G لجملة تتحرك حركة انسحابية كما هو مبين في (الشكل-6-15)، بالتالي يكون تسارع الجملة المتحركة T يساوي تسارع مركز الكتل $\boldsymbol{A}_G$.



(الشكل-6-15) جملة إحداثية تتحرك بدلالة جملة إحداثية ثابتة مرتبطة بمركز كتل.

استناداً إلى الحركة النسبية يمكن كتابة معادلة التحريك الأساسية لجسيمات الجملة المادية بالنسبة للجملة الإحداثية T ، بطريقة مشابهة لكتابتها بالنسبة لجملة ثابتة T_1 على أن نضيف لمجموع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة على كل جسيم من جسيمات الجملة، قوى العطالة المكتسبة $(\boldsymbol{F}_k^{in})^e$ ، وقوة عطالة كوريوليس $(\boldsymbol{F}_k^{in})^c$ وفق العلاقة (2-3)، أي:

$$m_k.\boldsymbol{A}_k^r = \sum \boldsymbol{F}_k^e + \sum \boldsymbol{F}_k^i + (\boldsymbol{F}_k^{in})^e + (\boldsymbol{F}_k^{in})^c$$

حيث مجموع القوى الداخلية معدوم في الجملة:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^i = 0$$

وبما أن حركة الجملة المتحركة T بالنسبة للجملة الثابتة T_1 هي انسحابية، فإن تسارع كوريوليس معدوم، بالتالي قوة عطالة كوريوليس تكون معدومة:

$$(\boldsymbol{F}_k^{in})^c = 0$$

ومنه بالتطبيق لعلاقة مشتق العزم الحركي للجملة حول مركز الكتل G ، يكون:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_{\mathbf{G}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{F}_k^e) + \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{F}_k^{in})^e$$

حيث $\boldsymbol{K}_{\mathbf{G}}$ تمثل العزم الحركي حول المركز G ، ويعطي بالعلاقة:

$$\boldsymbol{K}_{\mathbf{G}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(m_k.\boldsymbol{V}_k)$$

و $\boldsymbol{V}_k$ تمثل متجه سرعة جسيمات الجملة المادية بالنسبة للجملة T المتحركة.

أما $(\boldsymbol{F}_k^{in})^e$ القوة العطالية المكتسبة، فتعطى بالعلاقة:

$$(\boldsymbol{F}_k^{in})^e = -m_k.\boldsymbol{A}_k^e$$

وبما أن الجملة المتحركة T تتحرك حركة انسحابية، فإن لأي جسيم مرتبط بالجملة له تسارع الجملة:

$$\boldsymbol{A}_k^e = \boldsymbol{A}$$

ومنه قوة العطالة المكتسبة:

$$(\boldsymbol{F}_k^{in})^e = -m_k.\boldsymbol{A}$$

وعزمها حول مركز الكتل:

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{F}_k^{in})^e = \mathbf{GM}_{\mathbf{k}} \wedge -m_k.\boldsymbol{A} = -m_k.\boldsymbol{r}_k \wedge \boldsymbol{A}$$

ومنه:

$$\sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{F}_k^{in})^e = -\sum m_k.\boldsymbol{r}_k \wedge \boldsymbol{A}$$

واستناداً إلى خاصة مركز الكتل العلاقة (4-6):

$$\sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{F}_k^{in})^e = -M.\boldsymbol{r}_{\mathbf{G}} \wedge \boldsymbol{A}$$

ومن الفرض حيث مبدأ الجملة المتحركة ينطبق على مركز كتل الجملة المادية أي ($\boldsymbol{r}_G = 0$)، ومنه عزم قوة العطالة المكتسبة للجملة بالنسبة لمركز الكتل G معدوم، ومنه بالتعويض:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_{\mathbf{G}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{F}_k^e) \qquad (30\text{-}6)$$

وهي تساوي إلى علاقة مشتق العزم الحركي للجملة المادية بالنسبة لنقطة ثابتة، ومنه نستنتج:

أن العزم الحركي حول مركز الكتل بالنسبة لجملة محاور متحركة انسحابياً مع مركز كتل الجملة، تحتفظ بشكلها الرياضي كعلاقة العزم الحركي بالنسبة لمركز ثابت.

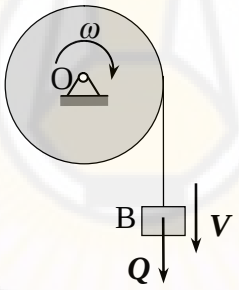
بالمثل تماماً نحصل على علاقات العزم الحركي بالنسبة لمحاور الجملة المتحركة T ، بشكل مماثل لعلاقات العزم الحركي بالنسبة لمحاور الجملة الثابتة.

نشير إلى أنه في أية جملة محاور متحركة أخرى يكون فيها $(\boldsymbol{r}_{\mathbf{G}} \neq 0)$ ، أو أن قوة عطالة كوريوليس غير معدومة، عندئذ لا يكون لمعادلة مشتق العزم بالنسبة لمركز الكتل المذكورة في هذه الحالة تطابق مع معادلة مشتق العزم بالنسبة لنقطة ثابتة.

مسألة-6-11

يتصل طرف سلك خفيف بجسم صلب B وزنه Q ، ويلف طرفه الآخر، كما في (الشكل-6-16) بأسطوانة وزنها W ، ونصف قطرها R ، ونصف قطر عطالتها بالنسبة لمحور دورانها هو ρ_{O} .

فإذا تحرك الجسم B رأسياً من السكون نحو الأسفل مسافة قدرها Δy . المطلوب، بإهمال كتلة السلك والاحتكاك في محور الدوران O ، تعيين زمن حركة الجسم B .



(الشكل-6-16) سلك خفيف يتصل بجسم صلب طرفه الآخر ملفوف بأسطوانة.

الحل:

يحسب زمن الحركة من شروط حركة الجسم B المتسارعة، فمن العلاقة:

$$\Delta y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} A_{\mathrm{B}} . t^2 = \frac{1}{2} A_{\mathrm{C}}^{t} . t^2 = \frac{1}{2} e \, . R . t \qquad \Rightarrow \qquad t = \left(\frac{2}{e \, . R} \Delta y_{\mathrm{B}} \right)^{1/2}$$

حيث ε التسارع الزاوي للأسطوانة، ويحسب من تطبيق مبدأ العزوم حول المحور O :

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{K}_{\mathbf{O}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathbf{O}} (\boldsymbol{F}_{k}^{e})$$

نحسب العزم الحركي للجملة المتحركة $\boldsymbol{K_O}$ ، والمؤلفة من جسمين بالنسبة لمحور الدوران:

$$\boldsymbol{K_O} = \boldsymbol{K_{1O}} + \boldsymbol{K_{2O}}$$

حيث $\boldsymbol{K_{1O}}$ تمثل العزم الحركي للأسطوانة حول محورها الثابت O ، ويساوي إلى:

$$K_{1O} = I_{1O}.w = \frac{W}{g} r_O^2.w$$

و $\boldsymbol{K_{2O}}$ تمثل العزم الحركي حول النقطة O للجسم B الذي يتحرك حركة انسحابية، ويساوي:

$$K_{2O} = \frac{Q}{g} V_B.R = \frac{Q}{g} V_C.R = \frac{Q}{g} R^2.w$$

بالتالي:

$$K_O = \frac{Q.R^2 + W.r_O^2}{g} w$$

بالتعويض في علاقة العزم:

$$\frac{Q.R^2 + W.r_O^2}{g} . \frac{d}{dt} w = Q.R$$

ومنها:

$$e = \frac{dw}{dt} = \frac{Q.R}{Q.R^2 + W.r_O^2} g = \text{Const.}$$

ومنها زمن الحركة:

$$t = \left(\frac{2\,(Q.R^2 + W.r_O^2)}{Q.R^2.g} \Delta y_B \right)^{1/2}$$

10-حفظ العزم الحركي لجملة مادية

Conservation of Moment of Momentum of a System

- إذا انعدم العزم المحصل للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة بالنسبة للنقطة O :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_{\mathrm{O}} = \sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$$

نتج منه:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{a} \qquad (\text{متجه ثابت } \boldsymbol{a})$$

بالتالي العزم الحركي للجملة المادية بالنسبة للنقطة O يبقى ثابتاً في القيمة، والاتجاه.

- إذا انعدم العزم المحصل للقوى الخارجية المؤثرة على الجملة بالنسبة للمحور OZ :

$$\frac{d}{dt}K_{\mathrm{Z}} = \sum m_{\mathrm{Z}}(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$$

نتج منه:

$$K_{\mathrm{Z}} = I_{\mathrm{Z}}.w = \mathrm{Const.}$$

بالتالي العزم الحركي للجملة المادية بالنسبة للمحور Z يبقى ثابتاً، ونستنتج من ذلك ما يلي:

- إذا كانت الجملة صلبة؛ وجب أن يكون:

$$I_{\mathrm{Z}} = \mathrm{Const.} \quad \Rightarrow \quad w = \mathrm{Const.}$$

أي: أن الجسم الصلب المثبت بمحور يدور في هذه الحالة بسرعة زاوية ثابتة.

- إذا كانت الجملة غير صلبة، فإن بعض جسيماتها تحت تأثير القوى الداخلية أو الخارجية يمكن أن تبتعد عن محور الدوران؛ مما يسبب تزايد I_{Z} ، أو تقترب من المحور؛ مما يسبب تناقص I_{Z} ، ولكن بما أن $(I_{\mathrm{Z}}.w = \mathrm{Const.})$ فإن السرعة الزاوية للجملة تقل بازدياد عزم العطالة، وتزيد بتناقص هذا العزم، وهكذا يمكن بتأثير القوى الداخلية تغيير السرعة الزاوية لدوران الجملة، لأن ثبات K_{Z} لا يعني بوجه عام ثبات w .

تعبر هذه النتائج عن حفظ العزم الحركي لكمية حركة الجملة، كما ينتج منها أن القوى الداخلية لا يمكنها أن تغير العزم الحركي لكمية حركة الجملة.

10-1- أمثلة على حفظ العزم الحركي لكمية حركة الجملة المادية

- قرص جوكوفسكي ***Zhukovsky's Platform***

لتوضيح مبدأ حفظ عزم كمية الحركة؛ يفضل استخدام الجهاز المسمى بقرص جوكوفسكي، المؤلف من قرص دائري أفقي؛ بإمكانه الدوران حول محور شاقولي OZ باحتكاك بسيط.

فعندما يقف الشخص على القرص، ويضغط عليه بوزنه، بالتالي يؤثر على جملة القرص والشخص الواقف فوقه قوى خارجية هي ثقل الشخص والقرص، ورد فعل المحور، والعزم المحصل لهذه القوى بالنسبة للمحور OZ معدوم:

$$\sum m_{\mathrm{Z}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K_{\mathrm{Z}} = I_{\mathrm{Z}}.w = \mathrm{Const.}$$

فإذا بسط المرء ذراعيه أثناء دوران القرص، ويتم ذلك بوساطة قوى عضلية، وهي قوى داخلية، ازداد بذلك عزم عطالة الجملة بدلالة المحور OZ ، لابتعاد بعض أجزاء الجملة عن المحور، ونقصت عندها السرعة الزاوية w ، وتعود السرعة الزاوية للازدياد بمجرد إعادة الذراعين إلى محاذاة الجسم، وهذه هي الطريقة التي يلجأ إليها راقصو البالية في زيادة سرعة دورانهم وإنقاصها عند القفزات في الهواء (*Turning Somersaults*).

أما الشخص الواقف على القرص دون دوران، حيث:

$$w = 0 \qquad , \qquad I_{\mathrm{Z}} = 0$$

فإنه يستطيع أن يدور في الجهة التي يريدها، ويكفي لذلك أن يبسط ذراعه الواحدة أفقياً، ثم يحركها بعدئذ في الجهة المعاكسة لجهة الدوران المطلوبة.

ويعلل ما سبق من العلاقة:

$$K_{\mathrm{Z}} = I_{1\mathrm{Z}}.w_1 + I_{2\mathrm{Z}}.w_2 = 0$$

حيث $I_{1\mathrm{Z}}$ تمثل عزم عطالة الذراع بالنسبة للمحور و w_1 سرعته الزاوية.

و $I_{2\mathrm{Z}}$ تمثل عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور و w_2 سرعته الزاوية.

ومنه:

$$w_2 = -\frac{I_{1\mathrm{Z}}}{I_{2\mathrm{Z}}} w_1$$

ونحصل على سرعة زاوية w_2 تخالف w_1 بالإشارة، وهي أصغر منها بكثير؛ لأن I_{1Z} أصغر بكثير من I_{1Z} ، ومتى بدأ الجسم بالدوران بالسرعة الزاوية w_2 أعاد ذراعيه إلى محاذاة جسمه، ونقص عزم العطالة، فتزداد بذلك السرعة الزاوية.

- الأرجوحة ***Riding a Swing***

إذا وقف شخص على الأرجوحة المعلقة بمحور أفقي، لم تتمكن قوته العضلية، وهي قوة داخلية، في جملة الشخص والأرجوحة من تحريكه، ويمكن لهذا الشخص أن يحرك الأرجوحة جيئة وذهاباً، يكفي لذلك أن يدفع ذراعيه الممسكتين بالحبل إلى الأمام، وبذلك يندفع جسمه إلى الخلف مسافة صغيرة، ثم يدفع ذراعية للخلف، ويندفع جسمه إلى الأمام، وذلك عدداً من المرات حتى يكتسب سرعة اهتزاز ملموسة، وتقوم الأرجوحة بحركة اهتزازية حول المحور الأفقي شبيهة بحركة النواس، وتنعدم السرعة في الانحراف الأعظمي عن الشاقول.

فإذا جلس الشخص الواقف عندما تمر الأرجوحة في هذه النقطة، وعاد فوقف فجأة لدى مرور الأرجوحة في الشاقول، اقتربت عندها بعض أجزاء جسمه من المحور، ونقص بذلك عزم عطالته، فتزداد سرعته الزاوية، وترتفع الأرجوحة إلى مسافة أعلى، وفي الانحراف الأعظمي يجلس الشخص، ثم يعود ويقف لدى مروره بالشاقول، وتزداد السرعة الزاوية تدريجياً، ويزداد معها الانحراف ألأعظمي، وإذا رغب الشخص بإيقاف الأرجوحة قام بعملية معاكسة يقف في الانحراف الأعظمي، ويجلس لدى مرور الأرجوحة في الشاقول.

- عزم رد فعل دوران المروحة ***Reaction Moment of a Propeller***

إن المروحة الهوائية في طائرة الهليكوبتر (*Helicopter*) لا تقوم بدفع الهواء إلى أسفل وحسب، وإنما تكسب الكتلة المدفوعة حركة دورانية، والعزم الكلي لكميات حركة المروحة، وكتلة الهواء المدفوعة، والهليكوبتر يجب أن تظل عند ذلك مساوية للصفر، نظراً لأن الجملة كانت ثابتة في البداية، وقوى التأثير المتبادل بين المحرك والمروحة كذلك بين المروحة والوسط ما هي إلا قوى داخلية.

ولذا فإن الهليكوبتر يبدأ بالدوران في الناحية المضادة لدوران المروحة والهواء، ويسمى عزم الدوران المؤثر على الهليكوبتر عند ذلك بـــ عزم رد فعل دوران المروحة، ولتلافي دوران هيكل الهليكوبتر ذي المروحة الواحدة تثبت في نهاية الهيكل مروحة موجهة (دفة)، ويصمم الهليكوبتر المتعدد المراوح؛ بحيث تدور مراوحه في اتجاهات مختلفة.

يمكن استخدام ظهور عزم رد فعل الدوران في تعيين عزم دوران محرك الطائرة بطريقة علمية؛ لأن هذين العزمين متساويان في المقدار، ويمكن قياس عزم رد فعل الدوران بوضع المحرك ذي المروحة الدورانية على موازين معينة.

- دوران القذيفة في ماسورة المدفع

Rotation of a Gun Shell in the Barrel

إذا اعتبرنا ماسورة المدفع والقذيفة جملة واحدة؛ فإن قوى ضغط غازات البارود عند إطلاق القذيفة تكون قوى داخلية، ولا يمكن أن تغير مقدار عزم كميات حركة الجملة الذي كان مساوياً للصفر قبل الإطلاق، بالتالي إذا بدأت القذيفة بعد إطلاقها بالدوران إلى اليمين مثلاً نتيجة لوجود أخاديد (*Grooves*)، فإن الماسورة كلها تحاول عند ذلك الدوران إلى اليسار؛ بحيث يكون في كل لحظة زمنية:

$$I_B.w_B = I_P.w_P$$

حيث (w_B . I_B) السرعة الزاوية، وعزم العطالة لماسورة المدفع (*Barrel*).

و (w_P . I_P) السرعة الزاوية، وعزم العطالة للقذيفة (*Projectile*).

ويعيق هذا الدوران مسند الارتكاز الدوراني للمدفع (*Turn-on*)، الذي تثبت بوساطته الماسورة على عربة المدفع. ونتيجة لذلك تنشأ ضغوط إضافية على مسند الارتكاز.

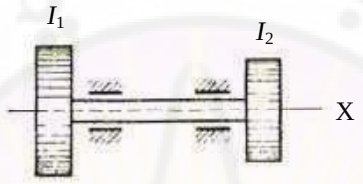
يكفل مبدأ حفظ عزم كميات الحركة تعيين تغير السرعة الزاوية، أو زاوية الدوران لجزء من الجملة بمعرفة سرعة إزاحة جزء آخر من الجملة، أو مقدار هذه الإزاحة، وعند ذلك تستبعد من مجال البحث جميع القوى الداخلية المجهولة، وكذلك القوى الخارجية التي خطوط عملها تقطع محور الدوران، أو توازيه.

مسألة-6-12

قرصان مثبتان على عمود واحد كما هو مبين في (الشكل-6-17)، وفي لحظة معينة يدار العمود قليلاً، ثم يترك.

إذا علمت عند ذلك عزمي العطالة للقرصين I_1 و I_2 بالنسبة إلى محور الدوران X . المطلوب تعيين، بإهمال كتلة العمود، العلاقة بين السرعتين الزاويتين، وزاويتي الدوران لقرصين عند اهتزازهما الدوراني.

الحل:



(الشكل-6-17) قرصان مثبتان على عمود واحد.

لكي نحذف القوى المرنة المجهولة التي تسبب اهتزاز القرصين، ندرس القرصين والعمود كجملة واحدة، والقوى الخارجية المؤثرة على هذه الجملة هي ردود أفعال مساند التحميل، وقوة الجاذبية الأرضية العمودية على المحور X ، عندئذ يكون:

$$\sum m_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K_{\mathrm{X}} = \mathrm{Const.}$$

لكن بما أن ($K_{\mathrm{X}} = 0$) في اللحظة الابتدائية، فيجب أن يبقى مساوياً للصفر طوال وقت الاهتزاز، وبما أن عزم كمية حركة االجملة حول المحور X يساوي مجموع عزمي كميتي حركة كل قرص حول المحور نفسه، أي:

$$K_{\mathrm{X}} = K_{1\mathrm{X}} + K_{2\mathrm{X}} = I_1.w_1 + I_2.w_2 = 0$$

ومنه ينتج:

$$w_1 = -\frac{I_2}{I_1} w_2 \qquad \Rightarrow \qquad j_1 = -\frac{I_2}{I_1} j_2$$

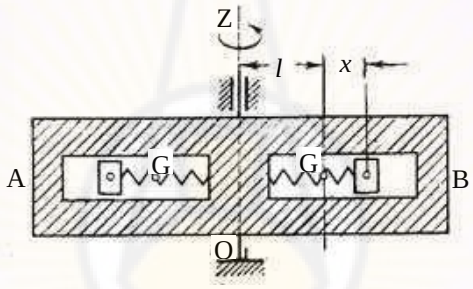
حيث φ_1 و φ_2 زاويتا دوران القرصين المقاستان من الوضع الابتدائي، وهكذا تحدث الاهتزازات في اتجاهين متضادين، وتتناسب السرعتان الزاويتان للاهتزاز تناسباً عكسياً مع عزمي العطالة للقرصين، ويكون المقطع الثابت أقرب إلى القرص الذي يكون عزم عطالته أكبر.

مسألة-6-13

ثقلان كتلة كل منهما m وضعا في وضعين متماثلين في منظم (*Regulator*) AB ، ذي محور دوران رأسي OZ ، وثبت الثقلان بنابضين كما في (الشكل-6-18).

فإذا كانت السرعة الزاوية للمنظم في اللحظة ($t_0 = 0$) مساوية لـــ w_0 ، وبدأ كل ثقل عند ذلك بالاهتزاز اهتزازات مخمدة متماثلة حول المركز C ، الذي يبعد عن المحور OZ مقدار l ، وكان عزم عطالة المنظم حول محوره I_Z معلوماً، المطلوب، بإهمال الاحتكاك في المحور، وباعتبار الثقلين جسيمين ماديين، تعيين كيف تتغير السرعة الزاوية للمنظم بتغير وضع الثقلين.

الحل:



(الشكل-6-18) منظم ثبت الثقلان فيه بنابضين.

لكي نحذف القوى المرنة المجهولة في النابضين ندرس المنظم والثقلين كجملة واحدة، والقوى الخارجية المؤثرة على هذه الجملة هي ردود أفعال مساند التحميل، وقوة الجاذبية الأرضية للثقلين الموازية لمحور الدوران Z ، عندئذ يكون:

$$\sum m_Z(F_k^e) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_Z = \text{Const.} \quad \Rightarrow \quad K_Z = K_{Z0}$$

ففي اللحظة ($t = 0$) يكون ($x = 0$) ، ويكون:

$$K_{Z0} = (I_Z + 2m.l^2)w_0$$

وفي أي لحظة، يكون:

$$K_Z = [I_Z + 2m(l + x)^2]w$$

ومنه ينتج:

$$w = \frac{I_Z + 2m.l^2}{I_Z + 2m(l+x)^2}\, w_0$$

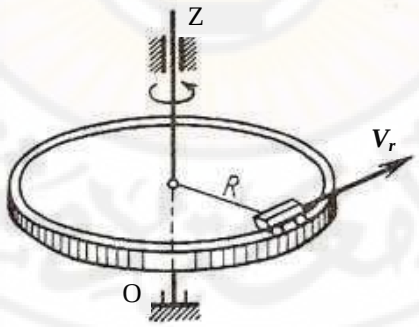
وبالتالي، فعندما تكون $(x > 0)$ تكون قيمة $(\omega_0 > \omega)$ ، وعندما تكون $(x < 0)$ تكون قيمة $(\omega > \omega_0)$. أي: أن السرعة الزاوية ω تتراوح حول القيمة المتوسطة ω_0 ، ومع مرور الزمن عندما يخمد اهتزاز الثقلين تؤول x إلى الصفر، وتؤول ω إلى ω_0 .

مسألة-6-14

عربة صغيرة وزنها Q تستطيع الدوران كما في (الشكل-6-19)، على محيط قرص كبير وزنه $(W = M.g)$، ونصف قطره R ، الذي يدور بدوره مع العربة حول محور شاقولي Z بسرعة زاوية w_0 ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو $(I_Z = M.R^2/2)$.

إذا بدأت العربة في لحظة معينة بالحركة في اتجاه الدوران بسرعة V_r بالنسبة للقرص. المطلوب بين كيفية تغير السرعة الزاوية للقرص.

الحل:



(الشكل-6-19) عربة صغيرة تدورعلى محيط قرص.

لكي نحذف قوى الاحتكاك بين عجلات العربة والقرص، وهي قوى مجهولة، نعدّ مجموعة القرص والعربة كجملة واحدة. أما القوى الخارجية فهي ردود الأفعال في المساند وأوزان الجملة؛ التي نلاحظ أن عزومها معدومة بالنسبة لمحور الدوران Z :

$$\sum m_{\mathrm{Z}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}) = 0$$

ومنه العزم الحركي للجملة بالنسبة للمحور Z ثابت:

$$K_{\mathrm{Z}} = I_{\mathrm{Z}}.w = \mathrm{Const.} \qquad \Rightarrow \qquad (K_{\mathrm{Z}})_0 = (K_{\mathrm{Z}})_1$$

نحسب العزم الحركي للجملة في اللحظة الابتدائية:

$$(K_{\mathrm{Z}})_0 = I_{\mathrm{Z}}.w_0 = (\frac{1}{2}\frac{W}{g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)w_0 \qquad (1)$$

وعندما تبدأ العربة حركتها تكون سرعتها المطلقة:

$$\boldsymbol{V_a} = \boldsymbol{V_e} + \boldsymbol{V_r} \qquad \Rightarrow \qquad V_a = w.R + V_r$$

حيث إن جمع السرعتين تم جبرياً بسبب أنهما باتجاه واحد، وأن w تمثل السرعة الزاوية الجديدة للقرص، بالتالي العزم الحركي للجملة:

$$(K_{\mathrm{Z}})_1 = (\frac{1}{2}\frac{W}{g}R^2)w + \frac{Q}{g}V_a.R = (\frac{1}{2}\frac{W}{g}R^2)w + \frac{Q}{g}(V_r + w.R)R \qquad (2)$$

بمساواة العلاقتين (1) و (2) نحصل على:

$$w = w_0 - \frac{Q}{0.5W + Q} \cdot \frac{V_r}{R}$$

نلاحظ أن السرعة الزاوية تنقص مع حركة العربة باتجاه دوران القرص، أما إذا تحركت العربة في الاتجاه المضاد؛ فإن قيمة w تزداد.

11- الطاقة الحركية لجملة مادية *Kinetic energy of a System*

الطاقة الحركية لجملة مادية هي مقدار سلمي، يساوي المجموع الجبري لطاقات الحركة لمختلف جسيمات الجملة:

$$E_c = \sum E_k = \sum \frac{1}{2} m_k . V_k^2 \qquad (31\text{-}6)$$

فهو مقدار قياسي وموجب دوماً، بالتالي فإن الطاقة الحركية هي مميزة لكلتا الحركتين الانسحابية والدورانية للجملة، ولا يعتمد على اتجاه حركة أجزاء الجملة، وذلك بخلاف مع كمية الحركة لجملة $\boldsymbol{Q}$ والعزم الحركي لجملة حول نقطة ثابتة $\boldsymbol{K_O}$. كذلك القوى الداخلية تؤثر في الطاقة الحركية؛ لأن هذه القوى تؤثر في تحولات سرعة أجزاء الجملة، وتزداد أو تنقص هذه السرعات، بالتالي يتغير المقدار E_c عند ذلك، وتختلف الطاقة الحركية لجملة عن الكميتين $\boldsymbol{Q}$ و $\boldsymbol{K_O}$ في أن تغيرها يعتمد على تأثير القوى الداخلية والقوى الخارجية.

إذا كانت الجملة مكونة من عدة أجسام صلبة؛ فإن طاقة حركتها تساوي - كما هو واضح - مجموع طاقات حركة هذه الأجسام، أما العلاقات التي يمكن بوساطتها حساب الطاقة الحركية لجسم صلب، فنحصل عليها من تعيين قيمة سرعة جسيماته حسب حالات الحركة المختلفة.

11-1- الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة الانسحابية
Kinetic Energy of Rigid Body in Translation Motion

في الحركة الانسحابية تتحرك جسيمات الجسم بسرعات متساوية تساوي سرعة حركة مركز الكتل، وبالتالي فلأي جسيم تكون ($V_k = V_G$)، وبالتعويض في العلاقة (31-6):

$$E^c_{Trans.} = \sum \frac{1}{2} m_k . V_k^2 = \frac{1}{2} V_G^2 \sum m_k \qquad (32\text{-}6)$$

بفرض أن V_G سرعة مركز الكتل، و ($\Sigma m_k = M$) كتلة الجملة، ومنه:

$$E^c_{Trans.} = \frac{1}{2} M . V_G^2 \qquad (33\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة الانسحابية، وهي تطابق الطاقة الحركية لجسيم مادي كتلته M ، ومنه النص التالي:

أنه في الحركة الانسحابية لجسم صلب تكون الطاقة الحركية له مساوية للطاقة الحركية لمركز كتلته، وتساوي إلى نصف جداء كتلة الجسم بعد فرض أنها مركزة في مركز كتلته بمربع سرعة هذا المركز، ولا تعتمد الطاقة الحركية على جهة الحركة الانسحابية.

2-11- الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة الدورانية *Motion*

Kinetic Energy of Rigid Body in Rotation

في الحركة الدورانية لجسم يدور حول محور ما Δ بسرعة زاوية ω ، حيث تتحرك جسيمات الجسم بسرعات تتناسب طرداً مع بعدها عن محور الدوران Δ ، وثابت التناسب هو w ، وبالتالي فلأي جسيم منه M_k سرعة، كما هو مبين في (الشكل-6-20)، تساوي:

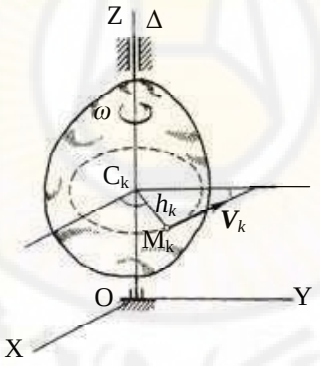
$$V_k = \omega \, . \, h_k$$

حيث h_k تمثل بعد الجسيم M_k عن محور الدوران Δ ، وبالتعويض في العلاقة (6-31):

$$E^c_{Rev.} = \Sigma \frac{1}{2} m_k . V_k^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_k . w^2 . h_k^2 = \frac{1}{2} w^2 \Sigma m_k . h_k^2$$

المقدار $\sum m_k . h_k^2$ يساوي عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور I_Δ ، ومنه:

$$E^c_{Rev.} = \frac{1}{2} I_\Delta . w^2 \qquad (34\text{-}6)$$



(الشكل-6-20) جسم يدور حول محور ثابت.

تحدد هذه العلاقة الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة الدورانية، ومنه النص التالي:

أنه في الحركة الدورانية لجسم صلب يدور حول محور Δ ، تكون الطاقة الحركية له مساوية لنصف جداء عزم عطالة الجسم حول محور الدوران بمربع السرعة الزاوية، ولا تعتمد الطاقة الحركية على اتجاه الدوران.

3-11- الطاقة الحركية لجسم صلب في الحركة المستوية العامة
Kinetic Energy of Rigid Body in General Plane Motion

يمكن استنتاج علاقة الطاقة الحركية لجسم في حركته المستوية العامة؛ استناداً لحساب سرعة جسيماته؛ بدلالة المركز الآني للدوران أو للسرعات I ، أو بدلالة قطب مختار G :

بدلالة المركز الآني للدوران

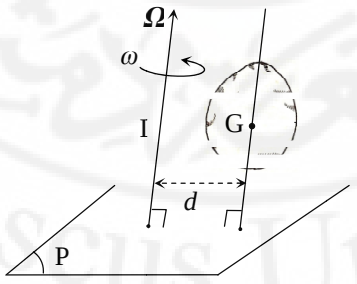
في الحركة المستوية العامة تتوزع السرعات في جسيمات الجسم في كل لحظة زمنية، وكأنه يدور حول محور آني للدوران مار من المركز الآني للدوران I ، ويعامد مستوى الحركة الثابت P ، ومنه بتطبيق العلاقة (6-34):

$$E^{c}_{Plane.} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{I}} . w^{2}$$

حيث ω تمثل السرعة الزاوية للدوران حول المحور الآني للدوران، و I_{I} يمثل عزم عطالة الجسم بالنسبة لهذا المحور؛ الذي يتغير مع وضع المركز الآني I ، أي: مع حركة الجسم، وحسب علاقة هيوجنس بنقل عزم عطالة الجسم من محور إلى محور آخر يوازيه يمر من مركز الكتل G ، كما هو مبين في (الشكل-6-21).

$$I_{\mathrm{I}} = I_{\mathrm{G}} + M . d^{2}$$

حيث I_{G} تمثل عزم عطالة الجسم حول محور يمر من مركز كتله G ، ويوازي المحور الآني للدوران، والعمودي على المستوى الثابت P ، و d تمثل البعد بين المحورين.



(الشكل-6-21) نقل عزم عطالة جسم من محور إلى محور آخر يوازيه يمر من مركز كتلته.

نبدل I_{I} في قيمتها؛ نحصل على:

$$E^{c}_{Plane.} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{G}}.w^2 + \frac{1}{2} M.w^2.d^2$$

القيمة $w\,.\,d$ تساوي سرعة النقطة G في دورانها حول المحور الآني للدوران؛ فيكون:

$$E^{c}_{Plane.} = \frac{1}{2} M.V^2_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2} I_{\mathrm{G}}.w^2 \qquad (35\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة الطاقة الحركية للجسم الصلب في الحركة المستوية العامة، ومنه النص التالي:

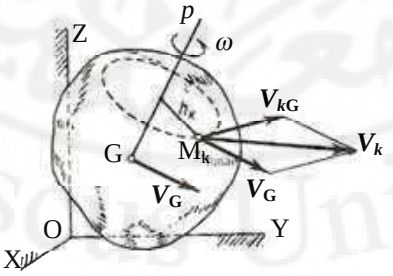
أنه في الحركة المستوية العامة لجسم صلب تكون الطاقة الحركية له مساوية للطاقة الحركية الانسحابية بسرعة مركز الكتل، حيث تركز كتلة الجسم M فيه، مضافاً إليها الطاقة الحركية للجسم في دورانه حول محور يعامد مستوى الحركة الثابت P ، ويمر من مركز الكتل G .

بدلالة قطب مختار

نعلم أن الحركة المستوية العامة هي حاصلة تركيب حركتين، حركة انسحابية بسرعة قطب مختار، وليكن G ، وحركة دورانية حول محور آني مار من القطب G عمودي على مستوى الحركة الثابت (الشكل-6-22).

بالتالي تكون سرعة أي جسيم $\mathrm{M_k}$ من جسيمات الجسم مساوية للمجموع الهندسي لسرعة القطب $\boldsymbol{V_G}$ ، والسرعة النسبية V_{kG} التي يكتسبها الجسيم عند الدوران مع الجسم حول المحور GP العمودي على مستوى الحركة الثابت:

$$\boldsymbol{V_k} = \boldsymbol{V_G} + \boldsymbol{V_{kG}}$$



(الشكل-6-22) جسم يتحرك حركة مستوية عامة.

حيث القيمة العددية للسرعة النسبية $\boldsymbol{V_{kG}}$ تساوي إلى:

$$V_{kG} = w.h_k$$

بفرض w السرعة الزاوية لدوران الجسم حول المحور المار من مركز الكتل G .
و h_k بعد الجسيم عن هذا المحور.

بتربيع العلاقة الشعاعية للسرعة:

$$V_k^2 = V_G^2 + V_{kG}^2 + 2\boldsymbol{V_G}.\boldsymbol{V_{kG}}$$

وبالتعويض في العلاقة (6-31):

$$E^c_{Plane.} = \frac{1}{2}\sum m_k.V_k^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k)V_G^2 + \frac{1}{2}w^2(\sum m_k.h_k^2) + \boldsymbol{V_G}(\sum m_k.\boldsymbol{V_{kG}})$$

حيث محتوى القوس الأول يمثل كتلة الجسم M ، ومحتوى القوس الثاني يمثل عزم العطالة للجسم I_G بالنسبة للمحور الآني المار من G ، أما محتوى القوس الثالث فيمثل كمية الحركة التي يكتسبها الجسم عند دورانه حول المحور الآني للدوران المار من مركز كتل الجسم G فهو مقدار معدوم، وفي النتيجة يكون:

$$E^c_{Plane.} = \frac{1}{2}M.V_G + \frac{1}{2}I_G.w^2 \qquad (6\text{-}36)$$

تحدد هذه العلاقة إذاً الطاقة الحركية للجسم الصلب في الحركة المستوية العامة، ومنه النص التالي:

تكون الطاقة الحركية لجسم صلب في كل لحظة t في حركته المستوية العامة تساوي إلى الطاقة الحركية الانسحابية لمركز كتل الجسم، مضافاً إليها الطاقة الحركية الدورانية للجسم في حركته الدورانية حول المحور المار من مركز الكتل، والعمودي على مستوى الحركة الثابت.

إذا كان القطب غير منطبق على مركز الكتل G ، كأن نختاره في نقطة C مثلاً، وكان المحور الآني للدوران غير مار من مركز الكتل كان عندها المقدار $\sum m_k.\boldsymbol{V_{kG}}$ غير معدوم، ووجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب الطاقة الحركية للجملة.

12- مبدأ العمل والطاقة الحركية لجملة مادية

Principle of Work and Kinetic Energy of a System

إن علاقة التغير الجزئي (2-24) للطاقة الحركية لجسيم هي صحيحة لأي جسيم في الجملة:

$$m_k \,.\, V_k \,.\, dV_k = F_k^t \,.\, ds_k \qquad \Rightarrow \qquad d\,\frac{m_k.V_k^2}{2} = d\,w_k$$

حيث dw_k تمثل مجموع الأعمال الجزئية للقوى الخارجية $\boldsymbol{F_k^e}$، والقوى الداخلية $\boldsymbol{F_k^i}$ المؤثرة على الجسيم المعتبر في هذه الجملة، ويمكن أن نكتب:

$$d\,\frac{m_k.V_k^2}{2} = d\,w_k^e + d\,w_k^i$$

والتي تكتب بالشكل:

$$dE_c = d\,w_k^e + d\,w_k^i \qquad (37\text{-}6)$$

بفرض أن $d\,w_k^e$ تمثل العمل الجزئي للقوة الخارجية $\boldsymbol{F_k^e}$ و $d\,w_k^i$ تمثل العمل الجزئي للقوة الداخلية $\boldsymbol{F_k^i}$ ، وبفرض M_0 وضع الجسيم في اللحظة t_0 ، حيث سرعته V_{k0} ، و M_1 وضع الجسيم في اللحظة t_1 حيث سرعته V_{k1} ، وبتكامل العلاقة الأخيرة تكاملاً محدوداً نحصل على علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية في حالة الجسيم المادية من الجملة:

$$\frac{1}{2}m_k(V_k)_1^2 - \frac{1}{2}m_k(V_k)_0^2 = w^e_{\mathrm{M}_0\to\mathrm{M}_1} + w^i_{\mathrm{M}_0\to\mathrm{M}_1}$$

وإذا اعتبرنا جسيمات الجملة كافة، وجمعنا العلاقات الموافقة لكل منها طرفاً لطرف؛ حصلنا على:

$$\Sigma\frac{1}{2}m_k(V_k)_1^2 - \Sigma\frac{1}{2}m_k(V_k)_0^2 = \Sigma(w_k^e + w_k^i)$$

التي تكتب أيضاً بالشكل:

$$E_c^1 - E_c^0 = \Sigma\, w_k^e + \Sigma\, w_k^i \qquad (38\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة تغير الطاقة الحركية للجملة، ومنه النص التالي:

إن تغير الطاقة الحركية للجملة في انتقال ما، يساوي إلى مجموع أعمال القوى الخارجية والقوى الداخلية المطبقة على مختلف جسيمات هذه الجملة خلال هذا الانتقال.

وما تجدر ملاحظته في هذه الحالة أنه على عكس علاقتي مبدأ تغير كمية الحركة، وتغير العزم الحركي، حيث لا يمكن إهمال القوى الداخلية في علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية؛ لذا ندرس الحالات الخاصة التالية:

- حالة الجملة غير الصلبة

إذا كانت $\boldsymbol{F}_{12}^{i}, \boldsymbol{F}_{21}^{i}$ القوى الداخلية المتبادلة بين الجسيمين B_1 , B_2 من الجملة، وجب أن يكون:

$$\boldsymbol{F}_{12}^{i} + \boldsymbol{F}_{21}^{i} = 0$$

ويمكن أن يتحرك الجسيم B_1 نحو B_2 في حين يمكن أن يتحرك الجسيم B_2 في اتجاه B_1 ، وتقوم كل قوة من القوتين بعمل موجب، ولا ينعدم مجموع العملين.

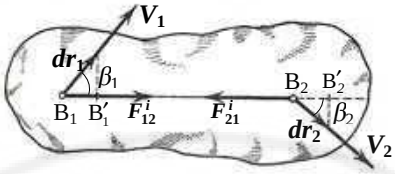
ففي الجملة غير صلبة؛ لا يكون عمل القوى الداخلية معدوماً في الحالة العامة، ويجب أخذه بعين الاعتبار لدى تطبيق علاقة تغير الطاقة الحركية.

كمثال على ذلك نذكر ظاهرة ارتداد مدفع نتيجة القذف، فالقوى الداخلية قوى الضغط المؤثرة على القذيفة وعلى جزء المدفع المرتد، تبذل هذه القوى في هذه الحالة عملاً موجباً، ولا ينعدم مجموع الأعمال، لكنه يسبب تغيراً في الطاقة الحركية للمجموعة من المقدار $(E_c^0 = 0)$ عند بداية إطلاق القذيفة إلى $(E_c^1 = E_{Projectile} + E_{Recoil})$ في النهاية، حيث: $E_{Projectile}$ تمثل طاقة القذيفة و E_{Recoil} تمثل طاقة الارتداد.

- حالة الجملة الصلبة

تتصف الجملة الصلبة بأن الأبعاد بين جسيمات تأثير القوى الداخلية لا تتغير خلال حركتها، وبشكل خاص تتحرك جسيمات الجملة، كما هو مبين في (الشكل-6-23)، بشكل يكون معه مسقط سرعة الجسيم B_1 ، مساوياً لمسقط سرعة الجسيم B_2 على المستقيم الواصل بينهما B_1B_2 ، وتؤثر كل منها على الأخرى بقوتين $\boldsymbol{F}_{12}^{i}, \boldsymbol{F}_{21}^{i}$ ، حيث:

$$(\boldsymbol{F}_{12}^{i} = -\boldsymbol{F}_{21}^{i})$$



(الشكل-6-23) حركة جسيمات جملة صلبة.

عندئذ يحدث لهذين الجسيمين خلال فترة زمنية انتقالان أوليان يقعان على امتداد متجهي السرعة $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ ، هما :

$$\boldsymbol{dr_1} = \boldsymbol{V_1}.dt \quad , \quad \boldsymbol{dr_2} = \boldsymbol{V_2}.dt$$

بما أن الجسم صلب؛ فإن مسقطي السرعتين على المستقيم B_1B_2 متساويان، بالتالي مسقطا الانتقالين $\boldsymbol{dr_1}$ و $\boldsymbol{dr_2}$ على اتجاه المستقيم متساويان أيضاً $(B_1B'_1 = B_2B'_2)$، بالتالي: عمل $\boldsymbol{F^i_{12}}$:

$$dw_{\boldsymbol{F^i_{12}}} = \boldsymbol{F^i_{12}} \,.\, \boldsymbol{dr_1} = F^i_{12}.dr_1.\cos b_1 = F_{12}.B_1B'_1$$

وعمل $\boldsymbol{F^i_{21}}$:

$$dw_{\boldsymbol{F^i_{21}}} = \boldsymbol{F^i_{21}} \,.\, \boldsymbol{dr_2} = F^i_{21}.dr_2.\cos(180 - b_2) = -F_{21}.B_2B'_2$$

ومنه ينتج أن عملي القوتين الداخليتين متساويان في القيمة، ومختلفان في الإشارة، ويكون مجموعهما معدوماً، ويمكن تعميم ما ذكر على القوى الداخلية كافة، إذاً فمجموع أعمال القوى الداخلية المؤثرة في جسم صلب في انتقال ما هو معدوم، ويكون في هذه الحالة:

$$E^1_c - E^0_c = \sum w^e_k \qquad (39\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة تغير الطاقة الحركية لجملة مادية، ومنه النص التالي:

إن تغير الطاقة الحركية لجملة مادية صلبة عند أي انتقال لها؛ يساوي مجموع أعمال القوى الخارجية المؤثرة على هذه الجملة خلال هذا الانتقال.

بترتيب العلاقة السابقة بالشكل:

$$E^1_c = E^0_c + \sum w^e_k \qquad (40\text{-}6)$$

تحدد هذه العلاقة مبدأ العمل والطاقة الحركية لجملة مادية صلبة، ومنه النص التالي:

أن الطاقة الحركية للجملة المادية المتماسكة في الوضع النهائي، يساوي الطاقة الحركية للجملة في الوضع الابتدائي؛ مضافاً إليه مجموع أعمال القوى الخارجية خلال انتقال الجملة.

- حالة الجملة ذات القيود المثالية

ندرس جملة فرضت عليها قيود غير متغيرة بتغير الزمن، ونقسم كل القوى المؤثرة على جسيمات الجملة، سواءً كانت داخلية أم خارجية إلى قوى فاعلة، وردود أفعال للقيود، وعندئذ يمكن كتابة المعادلة (6-37) بالشكل التالي:

$$dE^c = \sum dw_k^a + \sum dw_k^r$$

حيث $\sum dw_k^a$ تمثل العمل الجزئي للقوى الداخلية والخارجية الفاعلة المؤثرة على الجسيم رقم k من جسيمات الجملة، و $\sum dw_k^r$ تمثل العمل االجزئي لردود أفعال القيود الخارجية والداخلية المفروضة على الجسيم نفسه.

وكما نرى يعتمد تغير طاقة حركة الجملة على عمل القوى الفاعلة وردود أفعال القيود، غير أنه يمكن أن نورد مفهوم الجمل الميكانيكية المثالية هذه، والتي لا يؤثر وجود القيود فيها على تغير طاقة حركتها، ولمثل هذه القيود يجب - كما نلاحظ - أن يتحقق الشرط التالي:

$$\sum dw_k^r = 0 \qquad (6\text{-}41)$$

فإذا كان مجموع العمل الذي تبذله كل ردود أفعال القيود غير المتغيرة بتغير زمن الانتقال الجزئي لجملة مساوياً للصفر، فإن هذه القيود تسمى بالقيود المثالية، وفيما يلي الأنواع المعروفة لهذه القيود.

إذا كان القيد سطحاً ثابتاً أو منحنياً يمكن إهمال الاحتكاك به، فإن عمل رد الفعل N يساوي صفراً عند انزلاق الأجسام على هذا السطح، أو المنحني.

وإذا أهملنا التشوهات فإن عمل كل من رد الفعل العمودي $\boldsymbol{N}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_f}$ المركبة المماسية لرد الفعل يساوي صفراً عند تدحرج الجسم، دون انزلاقه على سطح خشن.

وإن عمل رد الفعل المفصل $\boldsymbol{R}$ إذا أهملنا الاحتكاك يكون مساوياً للصفر أيضاً، نظراً لأن نقطة تأثير القوة $\boldsymbol{R}$ تظل ثابتة عند أي انتقال للجملة.

وأخيراً، إذا درسنا النقطتين الماديتين B_1 , B_2 كما هو مبين في (الشكل-6-23)، كقضيب B_1B_2 مثبت تثبيتاً صلباً غير قابل للاستطالة، فإن القوتين $\boldsymbol{F_{21}^i}$ ، $\boldsymbol{F_{12}^i}$ تكونان في هذه الحالة ردي فعل القضيب، ولا يساوي عمل كل من هاتين القوتين صفراً، إلا أن مجموع العملين يساوي صفراً وفقا لما أثبتناه سابقاً، وهكذا يمكن اعتبار القيود السابقة مع مراعاة التنويهات والشروط التي سبق ذكرها، قيوداً مثالية.

وللجملة الميكانيكية التي فرضت عليها قيود مثالية فقط، فإننا نحصل - كما هو واضح - على:

$$dE^c = \sum dw_k^a$$

$$E_1^c - E_0^c = \sum w_k^a \qquad (42\text{-}6)$$

وهكذا فإن التغير في طاقة حركة الجملة ذات القيود المثالية، عند أي انتقال لها، يساوي مجموع العمل الذي تبذله القوى الخارجية والداخلية الفاعلة المؤثرة على الجملة في هذا الانتقال.

ولقد كفلت المبادئ السابقة حذف القوى الداخلية من معادلات الحركة، ولكن بقيت في هذه المعادلات كلا القوى الخارجية؛ بما فيها ردود الأفعال المجهولة للقيود الخارجية، وتكمن القيمة العملية لمبدأ التغير في طاقة حركة الجملة في أنها تكفل في حالة القيود المثالية المفروضة، حذف كل ردود الأفعال المجهولة من معادلات الحركة.

بالتالي تطبق علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية بشكل مفيد على الأجسام الصلبة المقيدة باتصالات صقيلة؛ لأنه في مثل هذه الحالة لا تقوم ردود الأفعال الناظمية على سطوح الاتصال بأي عمل مهما كانت نوعية الانتقال، وفي هذه الحالة يمتاز هذا المبدأ على مبدأ كمية الحركة والعزم الحركي، إذ أنه في كلا المبدأين لا بد من اعتبار قوى الاتصال على أنها قوى خارجية، تؤثر على الجملة، وإدخالها في المعادلات المناسبة.

عندما تحتوي الجملة على عدة أجسام صلبة (*Systems of Rigid Bodies*)، فإنه يمكن دراسة واعتبار كل جسم لوحده بفصله عن بقية الأجسام الصلبة، وتطبيق مبدأ العمل والطاقة عليه، ويمكن أيضاً تطبيق مبدأ العمل والطاقة للجملة ككل، وذلك بجمع الطاقات الحركية لجميع أجزاء الجملة كافة وبأخذ جميع القوى المتضمنة بعين الاعتبار.

كذلك إن مبدأ العمل والطاقة يعدّ مفيداً جداً، وخاصة من أجل حل المسائل التي تتضمن أجزاء متصلة معاً مفصلياً بوساطة محاور، أو كتل أو بكرات مرتبطة معاً بوساطة خيوط وأسلاك غير قابلة للاستطالة، أو أسنان متداخلة، إذ في جميع هذه الحالات تحدث القوى الداخلية على شكل أزواج من القوى المتساوية في القيمة، والمتعاكسة في الاتجاه، وتتحرك نقاط تطبيق كل زوج منها مسافات متساوية، وذلك أثناء انتقال صغير للجملة، وكنتيجة لذلك يكون عمل القوى الداخلية مساوياً الصفر.

كما يجب أن نأخذ بعين – الاعتبار - أيضاً أنه بتطبيق مبدأ تغير الطاقة يتم تكوين المعادلات التفاضلية لحركة المجموعة، وبوجه خاص تسارعات الأجسام المتحركة، وذلك بتفاضل علاقة تغير الطاقة بالنسبة للزمن، ثم بحذف السرعة نحصل على علاقة للتسارع.

13- تطبيقات على حساب العمل

13-1- عمل قوى الثقالة المطبقة على جملة مادية

Work of Gravitational Forces Applied to a System

إن عمل قوة الثقالة W المطبقة على الجملة يساوي إلى مجموع أعمال كل قوى الثقالة Σw_k المؤثرة على جسيمات الجملة.

فعمل قوة الجاذبية المؤثرة على جسيم M_k وزنه W_k ، يساوي:

$$w_{W_k} = W_k(z_{k_0} - z_{k_1})$$

حيث z_{k_0} , z_{k_1} تمثل الإحداثيين اللذين يحددان الوضعين الابتدائي والنهائي للجسيم على المحور Z ، ومنه:

$$w_W = \sum w_k = \sum W_k.z_{k_0} - \sum W_k.z_{k_1}$$

ومن إسقاط العلاقة (6-4) لتحديد مركز الكتل G على محور شاقولي Z ، يكون:

$$\sum W_k.z_{k_0} = W.z_{G_0} \qquad , \qquad \sum W_k.z_{k_1} = W.z_{G_1}$$

حيث z_{G_0}, z_{G_1} تمثل الإحداثيين اللذين يحددان الوضعين الابتدائي والنهائي لمركز الكتل G على المحور Z ، ومنه يكون عمل قوى الثقالة المؤثرة على الجملة في انتقال ما، هو:

$$w_W = W(z_{G_0} - z_{G_1}) = \pm W.\Delta z_G = \pm W.H_G \qquad (43\text{-}6)$$

حيث H_G تمثل الانتقال الشاقولي لمركز الكتل أو الثقل G .

بالتالي **عمل قوى التقالة المؤثرة على الجملة هو العمل الذي تبذله محصلة هذه القوى W في الانتقال الشاقولي لمركز ثقل الجملة.**

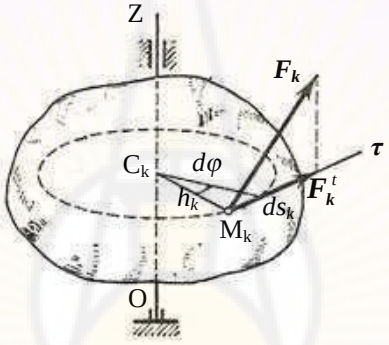
13-2- عمل القوى المؤثرة على جسم قابل للدوران

Work of Forces Applied to a Rotating Body

نعدّ جسماً قابلاً للدوران حول المحور الثابت OZ المار منه، ويؤثر على الجسيم M_k من الجسم القوة $\boldsymbol{F_k}$ ، كما هو مبين في (الشكل-6-24)، فالعمل الجزئي للقوة $\boldsymbol{F_k}$ في انتقال $d\boldsymbol{r_k}$ للجسيم هو:

$$dw_{F_k} = \boldsymbol{F_k}.d\boldsymbol{r_k} = F_k^t.ds_k = F_k^t.h_k.dj$$

حيث $(ds_k = h_k \,.\, d\varphi)$ طول القوس الذي يرسمه الجسيم، و $d\varphi$ زاوية دوران الجسم خلال الفترة الزمنية dt ، و h_k بعد الجسيم M_k عن محور الدوران OZ .



الشكل-6-24)

من جهة أخرى فإن المقدار $[F_k^t.h_k = m_Z(\boldsymbol{F_k})]$ يساوي قيمة عزم القوة $\boldsymbol{F_k}$ بالنسبة للمحور OZ ، ومنه:

$$dw_{F_k} = m_Z(\boldsymbol{F_k}).dj$$

وإذا أثر على الجسم أكثر من قوة $\Sigma\boldsymbol{F_k}$ اعتبرنا عندها المقدار:

$$\sum m_Z(\boldsymbol{F_k}) = M_Z^e$$

حيث M_Z^e تدعى بـــ العزم الدوراني $(Torque)$، وتساوي محصلة عزوم القوى $\Sigma\boldsymbol{F_k}$ بالنسبة لمحور الدوران OZ .

بالتالي عمل القوى ΣF_k في دوران جزئي $d\varphi$ ، يساوي:

$$dw_{\Sigma F_k} = M_Z^e . dj$$

والعمل الكلي عند دوران بزاوية محددة φ ، هو:

$$w_{\Sigma F_k} = \int_0^j M_Z^e . dj \qquad (44\text{-}6)$$

بالتالي فإن **العمل الكلي للقوى ΣF_k عند دوران الجسم بزاوية محددة φ يساوي التكامل المحدود للعزم الدوراني من 0 إلى زاوية دوران الجسم φ .**

فإذا كان العزم الدوراني ثابتاً $(M_Z^e = \text{Const.})$، يكون في هذه الحالة:

$$w_{\Sigma F_k} = M_Z^e . j \qquad (45\text{-}6)$$

وإذا أثر على الجملة ازدواج C واقع في المستوى العمودي على المحور OZ ، فإن M_Z^e في هذه الحالة تعني هذا الازدواج، بالتالي العمل يساوي:

$$w_C = C . j \qquad (46\text{-}6)$$

أما علاقة الاستطاعة في الحركة الدورانية فهي:

$$P = \frac{dw}{dt} = M_Z^e \frac{dj}{dt} = M_Z^e . w \qquad (47\text{-}6)$$

ينتج أن **الاستطاعة في الحركة الدورانية تساوي حاصل ضرب العزم الدوراني بالسرعة الزاوية للجسم**، وإذا كانت الاستطاعة ثابتة يكون العزم الدوراني أكبر كلما قلت السرعة الزاوية.

3-13- عمل القوى الناتجة عن التدحرج

Work of Forces Acting on a Rolling Body

نعدّ عجلة وزنها W نصف قطرها R ، فعندما تتدحرج دون انزلاق على سطح مستوٍ كما هو مبين في a من (الشكل-6-25)، تنشأ مقاومة نتيجة التدحرج تدعى بـــ احتكاك التدحرج، عندئذ تخضع العجلة الحرة إضافة لوزنها $\boldsymbol{W}$ ، لقوة احتكاك $\boldsymbol{F_f}$ تمنع انزلاق نقطة التماس A على السطح المستوى، ولرد فعل ناظمي $\boldsymbol{N}$ يعاكس قوة الثقالة.



a- عجلة غير قابلة للتشوه b- عجلة قابلة للتشوه

(الشكل-6-25)

فالعمل الجزئي لقوة الاحتكاك، هو:

$$dw_{\boldsymbol{F}_f} = -F_f \,.\, ds_{\mathrm{A}}$$

ولكن نقطة التماس A هي المركز الآني للدوران، أي:

$$V_{\mathrm{A}} = 0$$

وبما أن:

$$ds_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}} \,.\, dt = 0$$

إذاً العمل الجزئي لقوة الاحتكاك معدوم:

$$dw_{\boldsymbol{F}_f} = 0$$

بالتالي **في حالة التدحرج دون انزلاق يكون عمل قوة الاحتكاك التي تعيق انزلاق الجسم معدوماً في كل انتقال مفروض للجسم.**

أما عمل رد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N}$ التي تؤثر في نقطة التماس؛ فنميز حالتين:

- الجسم غير قابل للتشوه كما هو مبين في a من (الشكل-6-25)

عندئذ عمل رد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N}$ معدوم.

- الجسم قابل للتشوه كما هو مبين في b من (الشكل-6-25)

عندئذ تنشأ مقاومة التدحرج الناتجة عن تشوه السطوح، بحيث يصبح تلامس الجسمين على امتداد مساحة AB ، وتنزاح نقطة تأثير قوة رد الفعل الناظمي مسافة c إلى B باتجاه معاكس لاتجاه تدحرج العجلة؛ بحيث تولد مزدوجة $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{W}$ عزمها:

$$C = c \,.\, N$$

حيث c مقدار خطي يدعى بعامل احتكاك التدحرج، ويقاس بوحدة الطول.

ومع الأخذ بعين الاعتبار أن زاوية دوران العجلة عند تدحرجها، تساوي:

$$dj = \frac{ds_{\mathrm{G}}}{R}$$

بفرض أن ds_{G} هو الانتقال الجزئي لمركز الكتل G ، بالتالي العمل المبذول لقوى مقاومة التدحرج، أو قوى الاحتكاك الدوراني هو:

$$dw_C = -c.N.dj = -\frac{c}{R}N.ds_{\mathrm{G}}$$

والإشارة سالبة للدلالة على أن العمل مقاوم.

وإذا بقي رد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N}$ ثابتاً، كان العمل الكلي لمقاومة الاحتكاك الدوراني، هو:

$$w_C = -c.N.j = -\frac{c}{R}N.s_{\mathrm{G}} \qquad (48\text{-}6)$$

ولما كان المقدار c/R صغير جداً؛ أمكن بتقريب أول إهمال عمل قوة الاحتكاك الدوراني.

بالتالي لدى تطبيق مبدأ العمل والطاقة الحركية على الأجسام المتدحرجة دون انزلاق على السطوح المستوية، يمكن إهمال عمل قوى الاحتكاك على نوعيها: احتكاك الانزلاق، واحتكاك الدوران.

مسألة-6-15

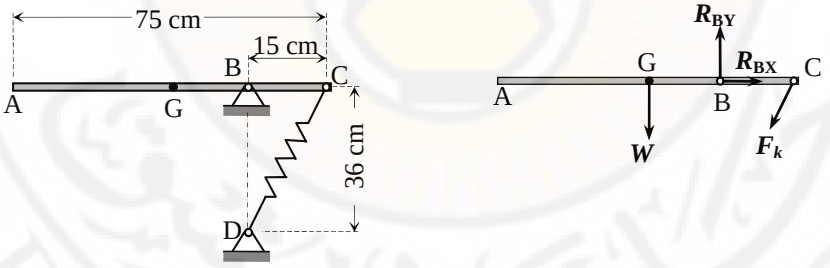
قضيب رفيع AC كتلته (M = 3 kg)، وطوله (l = 75 cm)، وعزم عطالته حول مركز كتله G هو [$I_G = (M.l^2/12)$]، قابل للدوران في مستوى شاقولي حول المفصل الثابت B ، ويتصل طرفه C بنابض عامل مرونته (k = 300 N/m)، وطوله الحر (l = 12 cm)، والمعلق طرفه الآخر في D .

إذا كان للقضيب سرعة زاوية قدرها (w_0 = 4 rad/sec) في الوضع الأفقي المبين في a من (الشكل-6-26). المطلوب إيجاد السرعة الزاوية w_1 له عندما يدور زاوية قدرها $p/2$ باتجاه حركة عقارب الساعة.

الحل:

لإيجاد السرعة الزاوية للقضيب w_1 عند وضعه الشاقولي، نطبق علاقة تغير الطاقة الحركية على القضيب الحر الذي يتحرك حركة دورانية حول B ، من الوضع الابتدائي الأفقي المحدد بالسرعة الزاوية ($w_0 = w$) إلى الوضع الذي يصبح فيه القضيب شاقولياً.

$$E_c^1 - E_c^0 = \sum w_k^e$$



a- قضيب AC يتصل طرفه C بنابض b- مخطط الجسم الحر للقضيب AC

(الشكل-6-26)

تحدد القوى المؤثرة على القضيب من مخطط الجسم الحر له، المبين في b من (الشكل-6-26)، وبالتعويض:

$$\frac{1}{2} I_B . w_1^2 - \frac{1}{2} I_B . w_0^2 = w_{R_{BX}} + w_{R_{BY}} + w_{F_k} + w_W$$

حيث $w_{R_{Bx}}, w_{R_{By}}$ تمثل أعمال قوى قيد القضيب بالمفصل الثابت B ، وهي معدومة:

$$w_{R_{Bx}} = w_{R_{By}} = 0$$

و w_{F_k} تمثل عمل قوة مرونة النابض، ويحسب من العلاقة:

$$w_{F_k} = \frac{k}{2}\left(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2\right)$$

حيث Δl_{in} تمثل الاستطالة الابتدائية:

$$\Delta l_{in} = \mathrm{DC} - l = \sqrt{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{DB}^2} - l = \sqrt{0.15^2 + 0.36^2} - 0.12 = 0.27 \text{ m}$$

و Δl_{fin} تمثل الاستطالة النهائية:

$$\Delta l_{fin} = \mathrm{DC}_1 - l = (\mathrm{DB} - \mathrm{BC}) - l = (0.36 - 0.15) - 0.12 = 0.09 \text{ m}$$

منه عمل قوة مرونة النابض:

$$w_{F_k} = \frac{300}{2}\left(0.27^2 - 0.09^2\right) = 9.72 \text{ N.m}$$

و w_W تمثل عمل قوة الثقالة، ويحسب من العلاقة:

$$w_W = -m.g.H_{\mathrm{G}} = -m.g.\mathrm{BG}_1 = -m.g.\mathrm{BG}$$

بالتعويض:

$$w_W = -m.g(\mathrm{CG} - \mathrm{CB}) = -3 \times 9.81(0.375 - 0.15) = -6.62 \text{ N.m}$$

و I_{B} يمثل عزم العطالة الكتلي للقضيب حول مركز دورانه ويحسب من العلاقة:

$$I_{\mathrm{B}} = I_{\mathrm{G}} + M(\mathrm{BG})^2 = \frac{1}{12}M.l^2 + M(\mathrm{CG} - \mathrm{CB})^2$$

بالتعويض:

$$I_{\mathrm{B}} = \frac{3}{12}(0.75)^2 + 3(0.375 - 0.15)^2 = 0.2925 \text{ kg.m}^2$$

وبالتعويض في علاقة تغير الطاقة:

$$\frac{0.2925}{2}(w_1^2 - 4^2) = 9.72 - 6.62$$

منه:

$$w_1^2 = 37.196 \text{ rad}^2/\text{sec}^2 \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = 6.1 \text{ rad/sec}$$

مسألة-6-16

قضيب رفيع ABD كتلته ($M = 20$ kg)، وطوله ($l = 1200$ mm)، ومركز كتلته يقع في منتصفه عند B ، وعزم عطالته حول مركز كتله B هو [$I_B = M.l^2/12$].

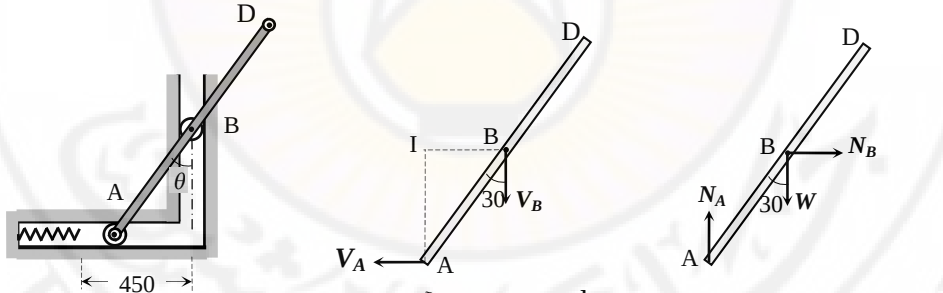
فإذا بدأ القضيب حركته كما هو مبين في a من (الشكل-6-27)، من السكون من الوضع الشاقولي له الذي تكون فيه ($\theta = 0$)، بحيث تكون حركة المنزلقة B مقيدة على الدليل الرأسي الأملس، بينما تتحرك المنزلقة A على الدليل الأفقي الأملس، بحيث تضغط على نابض عامل مرونته ($k = 5$ kN/m) عندما يسقط القضيب على الأرض الأفقية ($\theta = 90^o$). المطلوب إيجاد:

- السرعة الزاوية للقضيب $\omega_{(\theta=30)}$ عند المرور بالوضع ($\theta = 30^o$).
- السرعة الخطية V_B التي تصطدم بها المنزلقة B السطح الأفقي.

الحل:

- لإيجاد السرعة الزاوية للقضيب عند الوضع ($\theta = 30^o$)، نطبق مبدأ العمل والطاقة على القضيب الحر الذي يتحرك حركة مستوية عامة، من الوضع الابتدائي الشاقولي الساكن المحدد بالزاوية ($\theta = 0$) إلى الوضع المحدد بالزاوية ($\theta = 30^o$).

$$E_c^{q=30} = E_c^{q=0} + \sum w_k^e$$



a- قضيب في وضعه الابتدائي ، b- تحديد المركز الآني للدوران ، c- مخطط الجسم الحر للقضيب

(الشكل-6-27)

وتحدد القوى المؤثرة على القضيب من مخطط الجسم الحر له المبين في b من (الشكل-6-27)، لذا لا بد من تحديد الوضع الذي تصله المنزلقة A على السطح الأفقي عند الوضع ($\theta = 30^o$) وفق a من (الشكل-6-27):

$$x_A = l.\sin 30 = 300 \text{ mm} < 450 \text{ mm}$$

مما يدل على أن المنزلقة A لا تمس النابض عند هذا الوضع.

بالتالي تكتب علاقة المبدأ بالشكل التالي:

$$E_c^{q=30} = E_c^{q=0} + w_W + w_{N_A} + w_{N_B}$$

حيث:

$$E_c^{q=0} = 0 \quad , \quad w_{N_A} = 0 \quad , \quad w_{N_B} = 0$$

و:

$$E_c^1 = \frac{1}{2} M.V_B^2 + \frac{1}{2} I_B.w^2 = \frac{1}{2}(M.IB^2.w^2 + I_B.w^2) = \frac{1}{2} I_I.w^2$$

نلاحظ أنه لحساب الطاقة الحركية لأي جسم يتحرك حركة مستوية عامة؛ لا بد من تعيين المركز الآني I للسرعات أو الدوران المبين في b من (الشكل-6-27)، وذلك لتعيين العلاقة التي تربط السرعة الخطية لمركز الكتل مع السرعة الزاوية للجسم المتحرك.

بالتالي:

$$E_c^1 = \frac{1}{2} M(AB.\sin 30)^2.w^2 + \frac{1}{24} M.l^2.w^2$$

بالتعويض:

$$E_c^1 = [\frac{20}{2}(0.6\sin 30)^2 + \frac{20}{24}(1.2)^2]w^2 = 2.1w^2$$

و w_W تمثل عمل قوة الثقالة، ويحسب من العلاقة:

$$w_W = M.g(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos 30)$$

بالتعويض:

$$w_W = 20 \times 9.81 \times \frac{1.2}{2}(1 - \cos 30) = 15.77 \text{ N.m}$$

بالتعويض في علاقة مبدأ العمل والطاقة:

$$2.1\ w^2 = 15.77$$

منه:

$$w^2 = 7.51 \text{ rad}^2/\text{sec}^2 \quad \rightarrow \quad w = 2.74 \text{ rad/sec}$$

- لإيجاد السرعة التي تصطدم بها المنزلقة B على السطح الأفقي، نطبق مبدأ العمل والطاقة على القضيب الحر، من الوضع الابتدائي الشاقولي الساكن المحدد بالزاوية ($\theta = 0$) إلى الوضع النهائي الأفقي المحدد بالزاوية ($\theta = 90^o$):

$$E_c^{q=90} = E_c^{q=0} + \sum w_k^e$$

وتحدد القوى المؤثرة على القضيب خلالها من مخطط الجسم الحر له، المبين في c من (الشكل-6-27)، واستناداً إلى الطلب الأول يمكن كتابة علاقة المبدأ بالشكل التالي:

$$E_c^{q=90} = w_W + w_{F_k}$$

لتحديد علاقة الطاقة الحركية للقضيب عند الوضع الأفقي المحدد بالزاوية ($\theta = 90^o$)، لا بد من معرفة حركته اللحظية عندئذٍ، ففي هذا الوضع الأفقي النهائي ليس للطرف A حركة بالتالي سرعة ($V_A = 0$) ولهذا يدور القضيب حول A فعلاً، وطاقته الحركية هي:

$$E_c^{q=90} = \frac{1}{2} I_A . w^2 = \frac{1}{2}(I_B + M.AB^2) w^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{12} M.l^2 + M\frac{l^2}{4}) w^2$$

$$E_c^{q=90} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} M.l^2) w^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} M.l^2)\frac{V_B^2}{AB^2} = \frac{20}{6}(1.2)^2 \frac{V_B^2}{(0.6)^2} = 13.33 V_B^2$$

و w_{F_k} تمثل عمل قوة مرونة النابض، ويحسب من العلاقة:

$$w_{F_k} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

حيث:

$$\Delta l_{in} = 0 \quad , \quad \Delta l_{fin} = AB - 0.45 = 0.15\,\text{m}$$

بالتعويض:

$$w_{F_k} = -2500\,(0.15)^2 = -56.25\ \text{N.m}$$

و w_W تمثل عمل قوة الثقالة، ويحسب من العلاقة:

$$w_W = M.g.\frac{l}{2} = 20 \times 9.81 \times 0.6 = 117.72\ \text{N.m}$$

بالتعويض في علاقة تغير الطاقة:

$$13.33 V_B^2 = 117.72 - 56.25$$

$$V_B^2 = 4.61\,\text{m}^2/\text{sec}^2 \quad \Rightarrow \quad V_B = 2.15\,\text{m/sec}$$

مسألة-6-17

عجلة مزدوجة وزنها $(W = M.g)$ نصف قطرها الكبير R ، ونصف قطرها الصغير r ، ونصف قطر عطالتها ρ_O بالنسبة لمحورها الهندسي المار من مركزها O .

فإذا بدأت العجلة حركتها بالتدحرج من السكون على سطح مستوٍ أفقي بعامل احتكاك تدحرجي قدره c ، بوساطة شد خيط غير مرن ملفوف حول العجلة الصغيرة، بقوة ثابتة قدرها F تصنع مع الأفق زاوية α كما هو مبين في a من (الشكل-6-28). المطلوب تعيين علاقة سرعة مركز الكتل O خلال انتقاله نحو اليمين مسافة Δx_O ، وتحديد شرط الحركة.

الحل:

تتحدد سرعة مركز الكتل O بتطبيق مبدأ العمل والطاقة على العجلة المتدحرجة الحرة، من الوضع الابتدائي الساكن إلى الوضع العام المحدد بالانتقال Δx_o :

$$E_c^1 = E_c^0 + \sum w_k^e$$

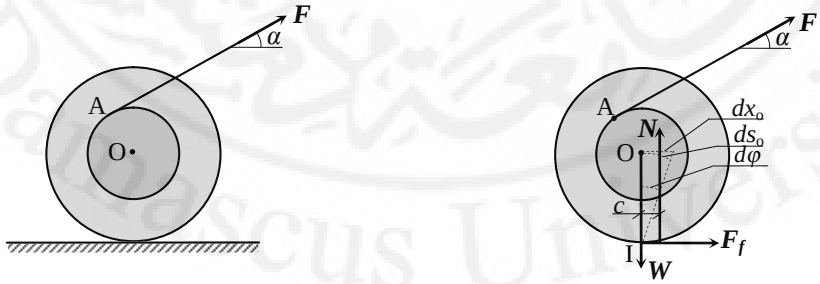
وتحدد القوى المؤثرة على العجلة من مخطط الجسم الحر للبكرة، المبين في b من (الشكل-6-28)، منه:

$$E_c^1 = E_c^0 + w_{F_f} + w_W + w_N + w_F$$

حيث:

$$E_c^0 = 0 \quad , \quad w_{F_f} = 0 \quad , \quad w_W = 0$$

$$E_c^1 = \frac{1}{2} M.V_O^2 + \frac{1}{2} I_O.w^2$$



a- عجلة مزدوجة تتدحرج بوساطة شد الخيط b- مخطط الجسم الحر للعجلة

(الشكل-6-28)

منه:

$$E_c^1 = \frac{1}{2}M.V_O^2 + \frac{1}{2}M.r_O^2.\frac{V_O^2}{(IO)^2} = \frac{W}{2g}(\frac{R^2 + r_O^2}{R^2})V_O^2$$

والعمل الجزئي لقوة رد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N}$:

$$dw_N = -c.N.dj = -\frac{c}{R}N.ds_O$$

حيث نعلم من بحث الحركة، أنه عندما:

$$\Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s_O = \Delta x_O$$

وتحدد القوة $\boldsymbol{N}$ من علاقة حركة مركز الكتل على البكرة:

$$M.\boldsymbol{A_O} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_f$$

بإسقاط العلاقة على منحى عمودي على منحى التسارع:

$$0 = W - F.\sin a - N \quad \Rightarrow \quad N = W - F.\sin a$$

بالتعويض:

$$dw_N = -c.N.dj = -\frac{c}{R}(W - F.\sin a)dx_O$$

أما العمل الجزئي لقوة الشد $\boldsymbol{F}$:

$$dw_F = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr_A}$$

وبما أن حركة البكرة مستوية عامة:

$$\boldsymbol{dr_A} = \boldsymbol{dr_O} + \boldsymbol{dr_{A/O}}$$

منه:

$$dw_F = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr_O} + m_O(\boldsymbol{F})dj$$

$$dw_F = F.dx_O.\cos a + F.r.dj = F.\cos a.dx_O + F.r\frac{dx_O}{R}$$

منه:

$$dw_F = (F.\cos a + F\frac{r}{R})dx_O$$

منه مجموع الأعمال الجزئية:

$$\sum dw = [F.\cos a + F\frac{r}{R} - (W - F.\sin a)\frac{c}{R}]dx_O$$

ومجموع الأعمال الكلية:

$$\sum w = [F.\cos a + F\frac{r}{R} - (W - F.\sin a)\frac{c}{R}]\Delta x_O$$

بالتعويض في علاقة مبدأ العمل والطاقة:

$$\frac{W}{2g}(\frac{R^2 + r_o^2}{R^2})V_O^2 = \frac{1}{R}[F.R.\cos a + F.r + F.c.\sin a - c.W)]\Delta x_O$$

منه علاقة سرعة مركز الكتل:

$$V_O^2 = \{\frac{2g.R}{R^2 + r_O^2}[(r + R.\cos a + c.\sin a)F - c.W]\}\Delta x_O$$

ويتحدد شرط الحركة من أن مركز الكتل يبدأ حركته من السكون بحركة مستقيمة متسارعة ($A_O > 0$)، ويحسب تسارع مركز الكتل من اشتقاق علاقة سرعته:

$$2V_O\frac{dV_O}{dt} = \{\frac{2g.R}{R^2 + r_O^2}[(r + R.\cos a + c.\sin a)F - c.W]\}\frac{dx_O}{dt}$$

بما أن:

$$\frac{dV_O}{dt} = A_O \qquad , \qquad \frac{dx_O}{dt} = V_O$$

منه:

$$A_O = \frac{g.R}{R^2 + r_O^2}[(r + R.\cos a + c.\sin a)F - c.W] = \text{Const.}$$

ويتحقق شرط الحركة ($A_O > 0$) عندما:

$$[(r + R.\cos a + c.\sin a)F \quad > \quad c.W$$

منه الشرط المطلوب:

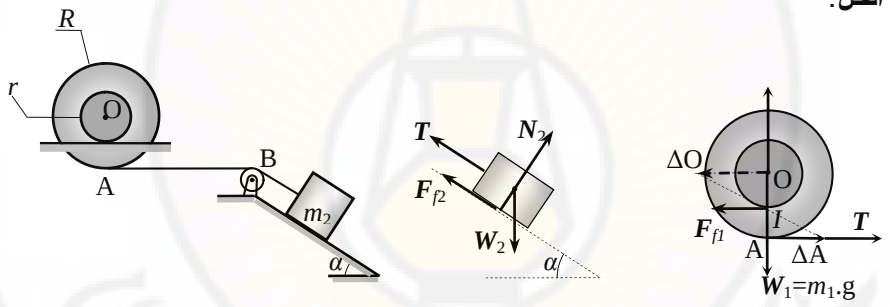
$$F > \frac{c}{r + R.\cos a + c.\sin a}W$$

مسألة(-6-18- (الدورة الامتحانية الثالثة-2010-2011)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرص مزدوج كتلته m_1 ، نصف قطره الصغير r ، ونصف قطره الكبير $(R = 1.5\ r)$، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو $(I_O = 0.5\ m_1.\ r^2)$. القرص الصغير منه قابل للتدحرج على سطح مستوي أفقي ثابت، وحول القرص الكبير منه يلف حبل لا يمتط يمر عبر بكرة مهملة B طرفه الآخر مثبت بكتلة قدرها m_2 قابلة للانزلاق على سطح مستوي مائل بزاوية α ، معامل الاحتكاك لهما هو f . كما هو مبين في a من (الشكل-6-35).

إذا تحركت الجملة من السكون بانزلاق الكتلة m_2 نحو الأسفل مسافة قدرها Δs ، خلالها يتدحرج القرص المزدوج على المستوي الأفقي. المطلوب إيجاد بدلالة Δs علاقة سرع أجسام الجملة ω , V_O , V_2 ، وقوة شد الحبل T ، وما هو شرط الحركة المفروضة.

الحل:



a- جملة ميكانيكية , b- مخطط الجسم الحر للقرص , c- مخطط الجسم الحر للكتلة m

(الشكل-6-28)

تحسب سرعات أجسام الجملة، والقوى المؤثرة عليهم، من تطبيق علاقة مبدأ العمل والطاقة الحركية على كل عنصر من الوضع الابتدائي الساكن، وحتى الوضع النهائي المحدد بانتقال الكتلة m_2 مقدار Δs ، التي تتحرك حركة انسحابية، ومخطط الجسم الحر لها مبين في b من (الشكل-6-35):

$$E_2 - E_2^0 = \Sigma w = w_{W_2} + w_T + w_{N_2} + w_{F_{f2}}$$

حيث:

$$E_2^0 = w_{N_2} = 0$$

بالتعويض:

$$\frac{1}{2} m_2 . V_2^2 = W_2 . \sin a \, . \Delta s - (F_{f2} + T) \Delta s \qquad (1)$$

أما القرص، فيتحرك حركة مستوية عامة، ومخطط الجسم الحر له مبين في b من من (الشكل-6-35):

$$E_1 - E_1^0 = \Sigma w = w_{W_1} + w_T + w_{N_1} + w_{F_{f1}}$$

حيث:

$$E_1^0 = w_{N_1} = w_{W_1} = w_{F_{f1}} = 0$$

بالتعويض:

$$\frac{1}{2} m_1 . V_O^2 + \frac{1}{2} I_O . w_1^2 = T . \Delta A \qquad (2)$$

معادلتين بستة مجاهيل $F_{f2}, T, V_2, V_O, w, \Delta A$ ، حيث:

تحسب قوة الاحتكاك F_{f2} من شرط الانزلاق:

$$F_{f2} = f . N_2$$

وتحسب قوة رد الفعل الناظمي N_2 من تطبيق علاقة حركة مركز الكتل على الكتلة m_2 عند وضع عام:

$$m_2 . \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{W}_2 + \boldsymbol{F}_{f_2} + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}$$

باسقاطها على الناظم نحصل على:

$$0 = N_2 - W_2 . \cos a \qquad \Rightarrow \qquad N_2 = W_2 . \cos a$$

منه:

$$F_{f2} = f . W_2 . \cos a \qquad (3)$$

وتحدد مميزات حركة القرص الحركية ΔA , w , V_O بدلالة المميزات الحركية للكتلة V_2 , Δs:

بما أن الخيط لا يمتط، فإن:

$$\Delta A = \Delta s \quad , \quad V_A = V_2 \tag{4}$$

بما أن I مركز لحظي للسرعات، فإن:

$$w = \frac{V_O}{IO} = \frac{V_A}{IA}$$

منه السرعة الزاوية لدوران القرص:

$$w = \frac{V_A}{IA} = \frac{V_2}{R-r} = \frac{V_2}{0.5\,r} = \frac{2}{r}V_2 \tag{5}$$

والسرعة الخطية لمركز كتله:

$$V_O = \frac{IO}{IA}V_A = \frac{r}{R-r}V_2 = \frac{V_2}{0.5} = 2V_2 \tag{6}$$

حل المعادلات:

يتم حل المعادلات بتعويض معادلات الحركة في معادلات التحريك:

$$\frac{1}{2}m_2.V_2^2 = W_2.\sin a\,.\Delta s - f\,.W_2.\cos a\,.\Delta s - T\,.\Delta s \tag{1'}$$

$$\frac{1}{2}m_1.4V_2^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}m_1.r^2.\frac{4}{r^2}V_2^2 = T.\Delta s$$

منه:

$$3m_1.V_2^2 = T.\Delta s \tag{2'}$$

بجمع (1') و (2') نحصل على علاقة تغير الطاقة الحركية للجملة:

$$\frac{1}{2}(m_2 + 6m_1)V_2^2 = W_2.\sin a\,.\Delta s - f\,.W_2.\cos a\,.\Delta s = W_2(\sin a - f.\cos a)\,\Delta s$$

منه علاقة السرعة الخطية للكتلة:

$$V_2^2 = \frac{2W_2}{m_2 + 6m_1}\,(\sin a - f.\cos a)\,\Delta s$$

بالتعويض في (5)؛ نحصل على علاقة السرعة الزاوية للقرص:

$$w^2 = \frac{8W_2}{r^2(m_2 + 6m_1)}(\sin a - f.\cos a)\Delta s$$

بالتعويض في (6)؛ نحصل على السرعة الخطية لمركز كتل القرص:

$$V_O^2 = \frac{8W_2}{m_2 + 6m_1}(\sin a - f.\cos a)\Delta s$$

بالتعويض في (2')؛ نحصل على:

$$3m_1 \frac{2W_2}{m_2 + 6m_1}(\sin a - f.\cos a)\Delta s = T.\Delta s$$

منه قوة الشد في السلك:

$$T = \frac{6m_1}{m_2 + 6m_1} W_2(\sin a - f.\cos a)$$

ويتحدد شرط الحركة من كون أن حركة الكتلة هي حركة متسارعة، ويتحقق ذلك عندما يكون تسارعها باتجاه الحركة وقيمته موجبة:

$$A_2 > 0$$

ويحسب التسارع A_2 من اشتقاق علاقة السرعة V_2 بالنسبة للزمن:

$$2V_2.\frac{d}{dt}V_2 = \frac{2W_2}{m_2 + 6m_1}(\sin a - f.\cos a)\frac{d}{dt}\Delta s$$

بما أن:

$$\frac{d}{dt}V_2 = A_2 \quad , \quad \frac{d}{dt}\Delta s = V_2$$

منه التسارع:

$$A_2 = \frac{W_2}{m_2 + 6m_1}(\sin a - f.\cos a)$$

ويتحقق شرط الحركة عندما:

$$(\sin a - f.\cos a) > 0$$

منه شرط الحركة:

$$\sin a > f.\cos a \quad \Rightarrow \quad \tan a > f$$

مسألة-6-18

تحتوي الجملة الميكانيكية الموضحة في (الشكل-6-29) على عجلتين كتلة كل منهما ($M = 30$ kg)، ونصف قطرها ($R = 150$ mm)، ونصف قطر عطالتها حول مركزها الهندسي O هو ($\rho_O = 100$ mm)، وعلى وصلتين كتلة كل منهما ($m_1 = 10$ kg)، وطولها ($l = 375$ mm)، وعزم عطالتها حول أحد أطرافها هو [$I_O = (1/3)(m_1.l^2)$]، وعلى جلبة كتلتها ($m_2 = 7$ kg)، ونابض عامل مرونته ($k = 30$ kN/m).

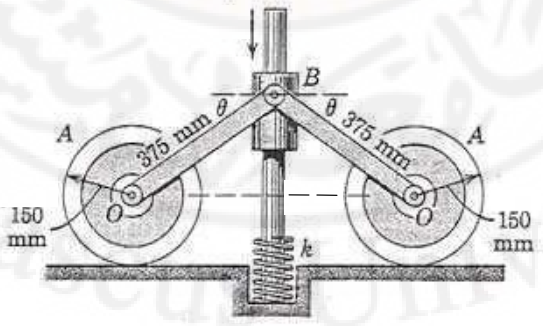
فإذا بدأت الجلبة B بالانزلاق دون احتكاك من السكون من الوضع الابتدائي المحدد بالزاوية ($\theta = 45^o$) على العمود الرأسي الثابت، لتمس النابض عندما تصبح الوصلتين في وضع أفقي ($\theta = 0$)، وكان الاحتكاك كافياً لمنع العجلتين من الانزلاق على السطح الأفقي. المطلوب إيجاد:

- سرعة الجلبة V_B لحظة تماسها النابض.
- الانضغاط الأعظمي Δl_{max} للنابض.

الحل:

لإيجاد سرعة الجلبة لحظة تماسها النابض نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة الحرة، من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بالزاوية ($\theta = 45^o$) إلى الوضع الذي تصبح فيه الوصلتان في وضع أفقي ($\theta = 0$).

$$E_c^{q=0} = E_c^{q=45} + \sum w_k^e$$



(لشكل-6-29) جملة ميكانيكية مكونة من عجلتين ووصلتين وجلبة.

حيث $E_c^{q=45}$ تمثل الطاقة الحركية للجملة عند ($\theta = 45^o$)، وتساوي:

$$E_c^{q=45} = 0$$

و $E_c^{q=0}$ تمثل الطاقة الحركية للجملة عند ($\theta = 0$)، وتساوي:

$$E_c^{q=0} = E_{Wh.}^{q=0} + E_{Li.}^{q=0} + E_{Co.}^{q=0}$$

حيث $E_{Wh.}^{q=0}$ تمثل الطاقة الحركية للعجلات، وتساوي الصفر؛ لأنها تنتهي لحظياً بالسكون عند ($\theta = 0$).

و $E_{Li.}^{q=0}$ تمثل الطاقة الحركية للوصلتين OB ، حيث كل منهما تدور لحظياً بسرعة زاوية w حول النقطة O عند ($\theta = 0$)، وتساوي:

$$E_{Li.}^{q=0} = 2[\frac{1}{2} I_{\mathrm{O}}.w^2] = \frac{1}{3} m_1.l^2.\frac{V_{\mathrm{B}}^2}{l^2} = \frac{1}{3} m_1.V_{\mathrm{B}}^2$$

بالتعويض:

$$E_{Li.}^{q=0} = 3.33 V_{\mathrm{B}}^2$$

و $E_{Co.}^{q=0}$ الطاقة الحركية للجلبة التي تتحرك حركة انسحابية حتى الوضع ($\theta = 0$)، وتساوي:

$$E_{Co.}^{q=0} = \frac{1}{2} m_2.V_{\mathrm{B}}^2 = 3.5 V_{\mathrm{B}}^2$$

و $\sum w_k^e$ تمثل مجموع أعمال القوى المؤثرة على الجملة الحرة:

$$\sum w_k^e = w_{F_f} + w_N + w_{W_{Wh.}} + w_{W_{Li.}} + w_{W_{Co.}}$$

حيث:

$$w_{F_f} = 0 \quad , \quad w_N = 0 \quad , \quad w_{W_{Wh.}} = 0$$

و $w_{W_{Li.}}$ تمثل عمل قوى الثقالة للوصلتين، ويساوي:

$$w_{W_{Li.}} = 2 m_1.g.\mathrm{OG}_1.\sin 45 = 26.01 \mathrm{N.m}$$

و $w_{W_{Co.}}$ تمثل عمل قوة الثقالة للجلبة، ويساوي:

$$w_{W_{Co.}} = m_2.g.\mathrm{OB}.\sin 45 = 18.21 \mathrm{N.m}$$

بالتعويض في علاقة مبدأ العمل والطاقة:

$$3.33 V_{\mathrm{B}}^2 + 3.5 V_{\mathrm{B}}^2 = 26.01 + 18.21$$

منه:

$$V_{\mathrm{B}}^2 = 6.47 \mathrm{m}^2/\mathrm{sec}^2 \quad \Rightarrow \quad V_{\mathrm{B}} = 2.54 \mathrm{m/sec}$$

لإيجاد الانضغاط الأعظمي للنابض $\Delta l_{\max}$ ، التي تساوي المسافة التي تقطعها الجلبة حتى تقف خلال تماسها بالنابض، نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة الحرة من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بـــ (θ=45^o) إلى الوضع النهائي الساكن المحدد بـــ (θ=0):

$$E_c^{Fin.} = E_c^{Ini.} + \sum w_k^e$$

حيث:

$$E_c^{Fin.} = E_c^{Ini.} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum w_k^e = w_{W_{Li.}} + w_{W_{Co.}} + w_{F_k} = 0$$

و w_{F_k} تمثل عمل قوة مرونة النابض، ويحسب من العلاقة:

$$w_{F_k} = \frac{k}{2}\left(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2\right)$$

حيث:

$$\Delta l_{in} = 0 \qquad , \qquad \Delta l_{fin} = \Delta l_{\max}$$

منه بالتعويض:

$$w_{F_k} = -\frac{k}{2}\ \Delta l_{\max}^2 = -15000\ \Delta l_{\max}^2$$

و $w_{W_{Li.}}$ تمثل عمل قوى الثقالة للوصلتين، وتساوي:

$$w_{W_{Li.}} = 2m_1.g(\mathrm{OG_1}.\sin 45 + \frac{\Delta l_{\max}}{2}) = 26.01 + 98.1\,\Delta l_{\max}$$

و $w_{W_{Co.}}$ تمثل عمل قوة الثقالة للجلبة، وتساوي:

$$w_{W_{Co}} = m_2.g\,(\mathrm{OB}.\sin 45 + \Delta l_{\max}) = 18.21 + 68.67\,\Delta l_{\max}$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$15000\,\Delta l^2 - 166.77\,\Delta l_{\max} - 44.22 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية لـــ $\Delta l_{\max}$ بحلها؛ نحصل على:

$$\Delta l_{\max} = 60\ \ \mathrm{mm}$$

14- الطاقة الكامنة لجملة مادية *Potential Energy of a System*

الطاقة الكامنة لجسم صلب أو لجملة مادية هي مقدار سلمي، يساوي المجموع الجبري لطاقات الكامنة لمختلف جسيمات الجسم أو أجسام الجملة:

$$E_p = \sum E_k^p \qquad (31\text{-}6)$$

بالتالي هو مقدار قياسي وموجب دوماً، فإذا كان الجسم مكون من عدة جسيمات، أو إذا كانت الجملة مكونة من عدة أجسام صلبة؛ فإن الطاقة الكامنة تساوي - كما هو واضح - مجموع الطاقات الكامنة لهذه الأجسام.

فمن أجل جملة جسيمات M_1 و M_2 و.....M_n خاضعة لتأثير قوى الثقالة W_1 و W_2 و.....W_n تكون الطاقة الكامنة من الشكل:

$$E_p = W_1.z_1 + W_2.z_2 + ...+ W_n.z_n = \Sigma W_k.z_k$$

ومن علاقة تحديد مركز ثقل جملة جسيمات (2-5):

$$\sum W_k.z_k = W.z_G$$

حيث في هذه العلاقة W تمثل وزن الجملة بالتالي:

$$E_p = W.z_G \qquad (61\text{-}6)$$

أي: **أن الطاقة الكامنة للجملة الواقعة في مجال قوى الثقالة تساوي جداء وزن الجملة في ارتفاع مركز ثقلها عن مستوى المقارنة، مستوى الصفر.**

15- مبدأ تغير الطاقة الكامنة لجملة مادية

Principle of Variation Potential Energy of a System

إذا تحرك جسم مادي في مجال محافظ من الوضع M_1 إلى الوضع M_2 ، وبما أن عمل قوى المجال لا يعتمد على المسار المسلوك، فيمكن أن نكتب:

$$w_{M_1 \to 0} = w_{M_1 \to M_2} + w_{M_2 \to 0}$$

ومنه:

$$w_{M_1 \to M_2} = w_{M_1 \to 0} + w_{M_2 \to 0}$$

وبالتعويض:

$$\Delta E_p = E_p^1 - E_p^2 \qquad (64\text{-}6)$$

فعمل قوى المجال المحافظ في انتقال الجسيم المادي M من الموضع M_1 إلى الموضع M_2 ، يساوي الفرق بين الطاقتين الكامنتين للجسيم في وضعه الابتدائي M_1 ووضعه النهائي M_2 .

وإذا انتقل الجسيم المادي M على خط منحنٍ مغلق دورة كاملة، كان:

$$E_p^1 = E_p^2$$

وكان عمل قوى المجال في الانتقال المذكور معدوماً.

16- مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية *Conservation of Energy*

نفرض أن كل القوى المؤثرة على جملة مادية من خارجية وداخلية هي قوة محافظة؛ لذا يكون عمل القوى المؤثرة في كل جسيم من جسيمات الجملة مساويا لـــ:

$$w_k = E_{kp}^0 - E_{kp}^1$$

وللجملة بكاملها يكون:

$$\sum w_k = \sum E_{kp}^0 - \sum E_{kp}^1 = E_p^0 - E_p^1$$

ومن جهة ثانية لدينا علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية لجملة:

$$\sum w_k = E_c^1 - E_c^0$$

فيكون:

$$E_c^1 - E_c^0 = E_p^0 - E_p^1$$

أي:

$$(E_c + E_p)_0 = (E_c + E_p)_1 = \text{Const.}$$

ومنه نستنتج انه في حركة الجملة الخاضعة فقط لقوى محافظة، يبقى مجموع الطاقتين الحركية والكامنة للجملة ثابتاً، وذلك في أوضاع هذه الجملة كافة، ويمكن للطاقة الحركية أن تتحول إلى طاقة كامنة، وبالعكس، إلا أن الجملة في مجموعها لا تستطيع أن تكتسب أي مقدار منها. يعرف هذا المبدأ بمبدأ حفظ أو مصونية الطاقة الميكانيكية، وهو حالة خاصة من المبدأ الفيزيائي العام لحفظ الطاقة.

يدعى مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة بـــ الطاقة الميكانيكية الكلية للجملة (*Total Mechanical Energy*)، ويرمز له بـــ E_m أي:

$$E_m = E_c + E_p \qquad (65\text{-}6)$$

إذا خضعت الجملة لقوة محافظة وغير محافظة مثل قوى الاحتكاك، وتحركت الجملة بتأثير هذه القوى، فإن الطاقة الميكانيكية الكلية للجملة تتناقص أثناء الحركة، وتتحول الطاقة الميكانيكية المفقودة إلى أنواع أخرى من الطاقة تظهر في أغلب الأحيان على شكل حراري، على أن يبقى مجموع الطاقة الميكانيكية، والطاقة الحرارية للمجموعة ثابت.

بصورة عامة يمكن أيضاً أن تحتوي مجموعة ما على أشكال أخرى من الطاقة مثلاً، يحول المولد الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربائية، ويحول محرك الاحتراق الداخلي الطاقة الكيميائية إلى طاقة ميكانيكية، بينما يحول المفاعل الذري الكتلة إلى طاقة حرارية، فإذا أخذنا جميع هذه الطاقات بعين الاعتبار، يمكننا أن نعدّ أن طاقة أي مجموعة هي ثابتة، بالتالي يبقى مبدأ حفظ الطاقة صحيح تحت جميع الشروط.

يفضل عند حل المسائل الميكانيكية البحتة، وفي جميع الحالات عموماً استخدام مبدأ تغير الطاقة الحركية لجملة مباشرة.

مسألة-6-19

قضيب رفيع AB طوله l ، ووزنه ($W = M.g$)، وعزم عطالته حول مركز كتله G هو ($I_G = M.l^2/12$) تتصل نهاياته بمنزلقتين مهملتي الكتلة، تنزلقان في مجريين أفقي وشاقولي على الترتيب.

فإذا بدأ القضيب حركته من السكون من الوضع الأفقي، كما هو مبين في a من (الشكل-6-34)، المطلوب تعيين علاقة السرعة الزاوية للقضيب ω بعد دورانه زاوية مقدارها θ ، كما هو مبين في b من (الشكل-6-34).

الحل:

تحسب السرعة الزاوية للقضيب عند الوضع θ ، من تطبيق مبدأ حفظ الطاقة على القضيب؛ الذي يتحرك حركة مستوية عامة، من الوضع الابتدائي الأفقي الساكن المحدد بالزاوية ($\theta = 0$) إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ .

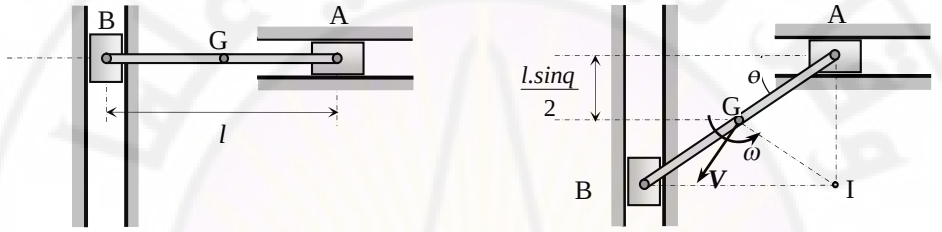
$$E_c^{q=0} + E_p^{q=0} = E_c^q + E_p^q$$

حيث $E_c^{q=0}$ تمثل الطاقة الحركية الابتدائية للقضيب وهي معدومة؛ لأن القضيب كان ساكناً في البدء:

$$E_c^{q=0}=0$$

و $E_p^{q=0}$ تمثل الطاقة الكامنة الابتدائية للقضيب، وهي معدومة بقياسها بالنسبة لمستوى المجرى الأفقي:

$$E_p^{q=0}=0$$



a- قضيب رفيع تتصل نهايتاه بمنزلقتين b- تعيين المركز الآني للدوران I للقضيب

(الشكل-6-34)

حيث $E_c^{q=0}$ تمثل الطاقة الحركية الابتدائية للقضيب وهي معدومة؛ لأن القضيب كان ساكناً في البدء:

$$E_c^{q=0}=0$$

و $E_p^{q=0}$ تمثل الطاقة الكامنة الابتدائية للقضيب، وهي معدومة بقياسها بالنسبة لمستوى المجرى الأفقي:

$$E_p^{q=0}=0$$

و E_c^q تمثل الطاقة الحركية للقضيب عند الوضع θ ويحسب من العلاقة:

$$E_c^1=\frac{1}{2}M.V_G^2+\frac{1}{2}I_G.w^2$$

نعين المركز الآني للدوران I للقضيب كما هو مبين في b من (الشكل-6-34)، ونلاحظ أنه من أجل هذا الوضع أن:

$$\mathrm{IG}=l/2 \qquad \Rightarrow \qquad V_{\mathrm{G}}=w.l/2$$

بالتعويض:

$$E_c^1 = \frac{M}{2}.\frac{l^2}{4}w^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}M.l^2)w^2 = \frac{1}{6}M.l^2.w^2$$

و E_p^q تمثل الطاقة الكامنة للقضيب في الوضع θ ، ويحسب من دوران القضيب زاوية θ ، بالتالي فإن مركز كتله G يبتعد عن مستوى المقارنة الأفقي بالمقدار:

$$y_G = (l.\sin q)/2$$

منه:

$$E_p^q = -\frac{l}{2}W.\sin q = -\frac{l}{2}M.g.\sin q$$

بالتعويض في علاقة مبدأ حفظ الطاقة:

$$0 = \frac{l^2}{6}M.w^2 - \frac{l}{2}M.g.\sin q$$

نحصل على:

$$w_q = (\frac{3g}{l}\sin q)^{1/2}$$

مسألة-6-20

نواس مركب الموضح في (الشكل-6-35) مكون من كتلة B وزنها W ، ووصلة مهملة AB قابل للدوران في مستوى رأسي حول المحور المار من A .

فإذا ترك النواس يسقط دون سرعة ابتدائية من الوضع المحدد بزاوية تميل على الشاقول مقدار φ_o . المطلوب دراسة حركة النواس.

الحل:

لدراسة حركة النواس الذي يتحرك حركة دورانية نعين السرعة الزاوية له بدلالة الزاوية φ ، من تطبيق مبدأ حفظ الطاقة على النواس من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بالزاوية φ_o إلى الوضع العام المحدد بالزاوية φ :

$$E_c^{j_0} + E_p^{j_0} = E_c^j + E_p^j$$

حيث $E_c^{j_0}$ الطاقة الحركية الابتدائية للنواس، وهي معدومة لأن النواس كان ساكناً في البدء:

$$E_c^{j_0} = 0$$

و E_p الطاقة الكامنة للنواس، وتتحدد ببعد مركز الكتل G عن مستوى المقارنة الأفقي X ، ومنه:

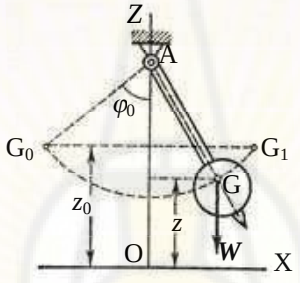
$$E_p^{j_0} = W.z_0 \qquad , \qquad E_p^j = W.z$$

و E_c^j تمثل الطاقة الحركية للنواس عند الوضع العام φ ، وتساوي:

$$E_c^j = \frac{1}{2} I_A.w^2$$

بالتعويض في علاقة مبدأ حفظ الطاقة:

$$W.z_0 = \frac{1}{2} I_A.w^2 + W.z$$



(الشكل-6-35) نواس مركب.

نلاحظ أنه لا يمكن أن يرتفع مركز ثقل النواس أعلى من الموضع z_0 ، وعند هبوط النواس تتناقص طاقة وضعه، وتتزايد طاقة حركته، وعند رفعه يحدث العكس أي تتزايد طاقة وضعه وتتناقص طاقة حركته، وينتج من المعادلة الأخيرة أن:

$$w^2 = \frac{2W}{I_A}(z_0 - z)$$

وهكذا فإن السرعة الزاوية للنواس في أي لحظة زمنية تعتمد فقط على موضع مركز ثقله في هذه اللحظة، وفي الموضع العام يكون لها دائماً نفس القيمة، ولا تصح مثل هذه الارتباطات إلا عند الحركة تحت تأثير القوى المحافظة.

بسبب الاحتكاك في المحور ومقاومة الهواء وهي قوى غير محافظة، لا تتحقق عملياً المعادلات السابقة، والطاقة الميكانيكية الكلية للنواس، تتناقص وتخمد اهتزازاته بمرور الزمن.

* * *

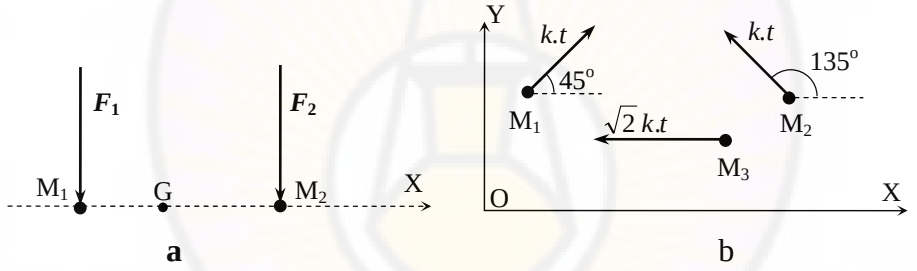
مسائل غير محلولة ***PROBLEMS***

م-6-1

جسيمان كتلة أحدهما ($m_1 = 25$ kg)، وكتلة الثاني ($m_2 = 20$ kg)، تؤثر على الأول قوة شدتها ($F_1 = 10$ N)، وعلى الثاني قوة شدتها ($F_2 = 8.3$ N).

إذا كانت القوتان متوازيتين، ويبعد حاملاهما بعضهما عن بعض بمقدار 3 cm ، وهما عموديتان على الخط الواصل بين الكتلتين، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-1). المطلوب تعيين الوضع x_G لمركز ثقل الجسيمين G ، وتسارعه A_G .

الجواب: $x_G = 1.33\,\text{cm}$, $A_G = 40.66\,\text{cm/sec}^2$



(الشكل م-6-1)

م-6-2

في المستوى OXY يوجد ثلاثة جسيمات مادية. تؤثر على الجسيم M_1 قوة شدتها $k.t$ تميل على المحور OX زاوية 45^o ، وتؤثر على الجسيم M_2 قوة شدتها $k.t$ تميل على المحور OX زاوية 135^o ، وتؤثر على الجسيم M_3 قوة شدتها $\sqrt{2}\,k.t$ توازي المحور OX ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-1).

المطلوب إيجاد حركة مركز ثقل جملة الجسيمات G .

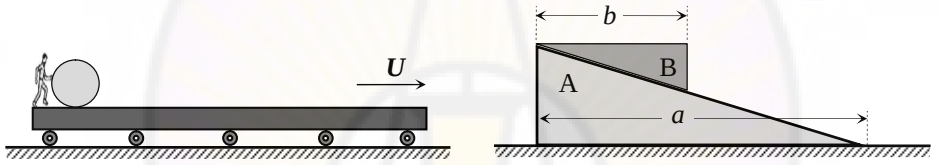
الجواب: إن حركة مركز ثقل جملة الجسيمات G هي حركة منتظمة على مستقيم يميل على المحور OX زاوية 45^o .

م-6-3

عربة مسطحة وزنها W_1 ، وعلى سطحها يقوم عامل بدحرجة أسطوانة من الطرف الأيسر إلى الطرف الأيمن للعربة بحيث تسقط منها بسرعة U ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-2).

إذا كان W_2 الوزن المشترك للأسطوانة والعامل. المطلوب، بإهمال مقاومة حركة العربة، إيجاد مقدار تغير سرعة العربة ΔV في الحالتين إن كانت العربة ساكنة، وإن كانت تتحرك بسرعة V_0 .

الجواب: $\Delta V_{\mathrm{I}} = \dfrac{W_2}{W_1 + W_2} U \quad , \quad \Delta V_{\mathrm{II}} = \dfrac{W_2}{W_1 + W_2} U$



a b

(الشكل م-6-2)

م-6-4

على الموشور المتجانس A الذي يقع على مستو أفقي، وضع موشور متجانس B . المقطعان العرضيان للموشورين عبارة عن مثلثين قائمي الزاوية، وتبلغ كتلة الموشور A ثلاثة أضعاف كتلة الموشور B ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-2).

إذا كان كلا الموشورين والمستوى الأفقي مطلق الملاسة، عين المسافة Δx_{A} التي يتحركها الموشور A على المستوى الأفقي ولأي جهه، عندما يصل الموشور B ، في أثناء هبوطه على A إلى المستوى الأفقي.

إرشاد: يبعد مركز كتل المثلث القائم الزاوية عن قاعدته بمقدار ثلث ارتفاعه.

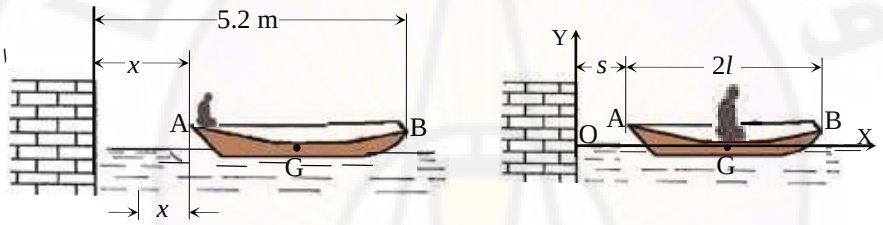
الجواب: $\Delta x_{\mathrm{A}} = (a - b)/4$ نحو اليسار

م-6-5

يقف شخص وزنه 80 kgf في المقدمة A لقارب وزنه 100 kgf ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-3).

إذا سار الشخص نحو مؤخرة القارب B . المطلوب، باعتبار الماء ساكناً، وإهمال مقاومته، تعيين المسافة x بين مقدمة القارب A والرصيف عندما يصل الشخص إلى مؤخرته B .

الجواب: $(x = 1.6\ \text{m})$، أي أن مقدمة القارب تصطدم بالرصيف.



a b

(الشكل م-6-3)

م-6-6- (الفصل الأول-2015-2016)

يجلس شخص وزنه W_2 على المقعد الأوسط لقارب طوله $(AB = 2l)$، ووزنه W_1 ، ومركز ثقله G يقع في منتصفه، موجود في حالة سكون في مجرى نهر، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-3).

باعتبار الماء ساكناً وإهمال مقاومته. المطلوب تعيين في أي اتجاه وإلى أي بعد Δx_2 بدلالة جملة المحاور OXY يجب أن يسير الشخص من مكانه بسرعة V ، حتى يصل القارب الرصيف الذي يبعد عنه مقدار s ، وإيجاد سرعة اصطدام القارب V_1 بالرصيف لحظة التلاقي.

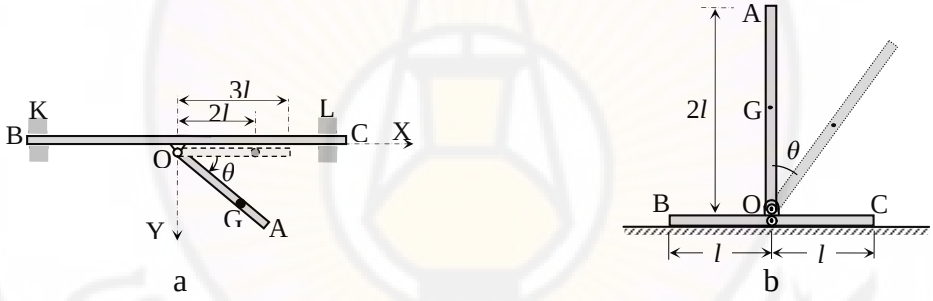
الجواب: $\Delta x_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} s \rightarrow \quad , \quad V_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} V$

م-6-7- (الفصل الأول-2011-2012)

وصلة متجانسة OA طولها $3l$ كتلتها m_1 ، ومركز كتلها G يبعد عن O مقدار ($OG = 2l$)، وتتصل عبر المفصل O بقضيب BC كتلته m_2 ، ومركز كتله يقع في المفصل O ، قابل للحركة أفقياً عبر الدليلين الأملسين K و L . كما هو مبين في a من (الشكل م-6-4).

تبدأ الوصلة حركتها من السكون من وضعها الأفقي بالدوران في المستوي الرأسي حول المفصل O ، بحركة دورانية متسارعة بتسارع زاوي قدره ε وفق المعادلة ($\theta = \varepsilon.t^2/2$). المطلوب باعتبار جملة المحاور OXY ، إيجاد علاقة السرعة الخطية V_2 لمركز كتل القضيب BC ، وعلاقة انتقاله Δx بدلالة زاوية الوضع θ الموضحة في الشكل.

الجواب: $V_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} V_r.\sin q$, $\Delta x_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} l(1-\cos q) \rightarrow$



(الشكل م-6-4)

م-6-8

قضيبان رفيعان منتظمان متجانسان متماثلان OA و BC طول كل منهما $2l$ وكتلته m . يتصلان مفصلياً في O منتصف BC ، بحيث كان القضيب OA تقريباً رأسياً، والقضيب BC ملامساً لمستوى أفقي أملس، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-4).

إذا بدأت الجملة الحركة من السكون ودار القضيب OA حول المفصل O ، المطلوب عندما يصبح القضيب OA أفقياً، تعيين الانتقال الأفقي Δx للقضيب BC ، ومن ثم تعيين سرعة الدوران ω للقضيب OA عند هذا الوضع.

الجواب: $\Delta x = l/2$, $w = \sqrt{3g/2l}$

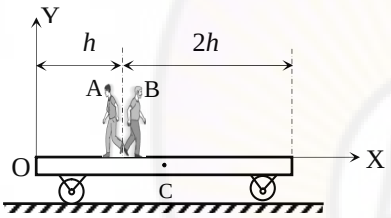
م-6-9- (الفصل الثاني-2015-2016)

يقف شخصان A و B وزناهما W_A و W_B على سطح عربة C ساكنة وزنها W_C ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-5).

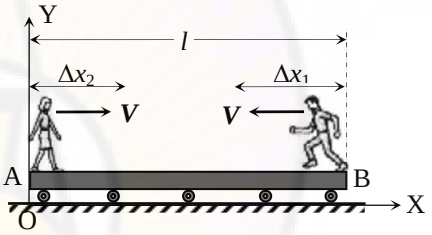
إذا انتقل الشخص A إلى أقصى الطرف الأيسر للعربة مسافة h بسرعة ثابتة U بالنسبة للعربة، وانتقل الشخص B إلى أقصى الطرف الأيمن للعربة مسافة $2h$ ، وبسرعة ثابتة $2U$ بالنسبة للعربة أيضاً. المطلوب بإهمال مقاومة حركة العربة على الطريق، إيجاد بدلالة جملة المحاور OXY ، ما يلي:

1. علاقة انتقال العربة Δx_C بدلالة المسافة h ، ومناقشة احتمال اتجاهها.
2. علاقة سرعة العربة V_C بدلالة السرعة U ، ومناقشة احتمال اتجاهها.

الجواب: $\Delta x_C = \dfrac{W_A - 2W_B}{W_A + W_B + W_C} h \rightarrow$ ، $V_C = \dfrac{W_A - 2W_B}{W_A + W_B + W_C} U$



a



b

(الشكل م-6-5)

م-6-10- (الفصل الأول-2012-2013)

رجل كتلته m_1 ، وامرأة كتلتها m_2 يقفان على طرفي عربة ساكنة AB ، طولها l ، وكتلتها m وقابلة للحركة على سطح أفقي، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-5).

إذا كانت الجملة ساكنة في لحظة البدء، وابتدأ الرجل بالحركة بسرعة $\boldsymbol{V}_1$ بالنسبة للعربة، والمرأة بسرعة $\boldsymbol{V}_2$. المطلوب بإهمال مقاومة حركة العربة على السطح الأفقي، وباعتبار جملة المحاور OXY ، إيجاد ما يلي:

1- علاقة سرعة العربة $\boldsymbol{V}$ بدلالة سرعة كل منهما V_1 و V_2 ، ومناقشة قيمتها واتجاهها.
2- علاقة انتقال العربة Δx بدلالة انتقال كل منهما Δx_1 و Δx_2 .

الجواب: $\Delta x = \dfrac{m_1.\Delta x_2 - m_2.\Delta x_2}{m_1 + m_2 + m} \rightarrow$ ، $V = \dfrac{m_1.V_1 - m_2.V_2}{m_1 + m_2 + m}$

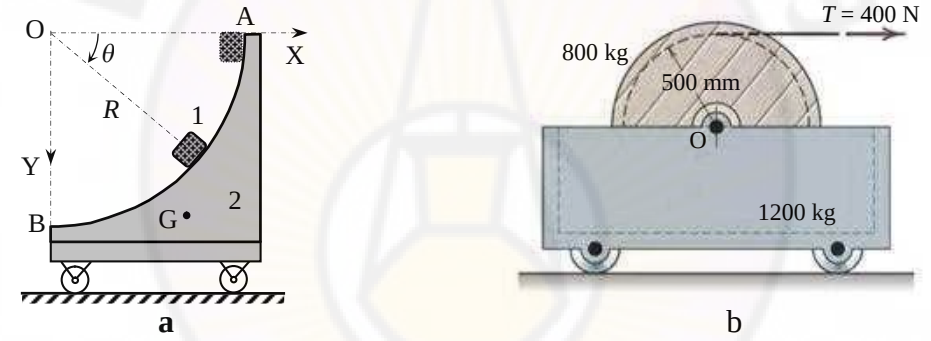
م-6-11- (الفصل الأول-2014-2015)

يتحرك جسم كتلته m_1 على سطح منحني أملس على شكل ربع دائرة نصف قطرها R لعربة كتلتها m_2 قابلة للحركة على سطح أفقي، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-6).

إذا كانت الجملة ساكنة في لحظة البدء، وبدأ الجسم حركته من الوضع A المحدد بـــ ($\theta = 0$) على السطح AB بحركة دائرية متسارعة بانتظام بتسارع زاوي ثابت ε وفق المعادلة ($\theta = ½\ \varepsilon\ t^2$). المطلوب بإهمال مقاومة حركة العربة على السطح الأفقي وباعتبار جملة المحاور OXY، إيجاد علاقة واتجاه كل من سرعة العربة V_2، وانتقالها Δx_2 خلال حركة الجسم على سطحها بدلالة الزاوية θ، والقيم العظمى لكل منهما وموقعهما.

الجواب:

$$V_{2q} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sin q.V_r \ , \ V_{2\max} = V_{(q=90^\circ)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ , \ \Delta x_{2q} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}R(1-\cos q) \ , \ \Delta x_{2\max} = \Delta x_{(q=90^\circ)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}R$$



(الشكل م-6-6)

م-6-12

أسطوانة كابلات كتلتها 800 kg، ونصف قطر عطالتها حول مركز كتلها O هو 480 mm، محمولة على محامل عند O لعربة كتلتها 1200 kg، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-6).

فإذا كانت العربة في لحظة البدء تتحرك نحو اليسار بسرعة 1.5 m/sec، والأسطوانة تدور بسرعة زاوية 3 rad/sec بعكس جهة دوران عقارب الساعة، وعندها أثرت قوة الشد الأفقية ($T = 400$ N) في اللحظة ($t = 0$). المطلوب، بإهمال كتلة عجلات العربة، تعيين قيمة السرعة الخطية $V_{(t=10\text{sec})}$ للعربة واتجاهها، والسرعة الزاوية $\omega_{(t=10\text{sec})}$ للأسطوانة في اللحظة ($t = 10$ sec).

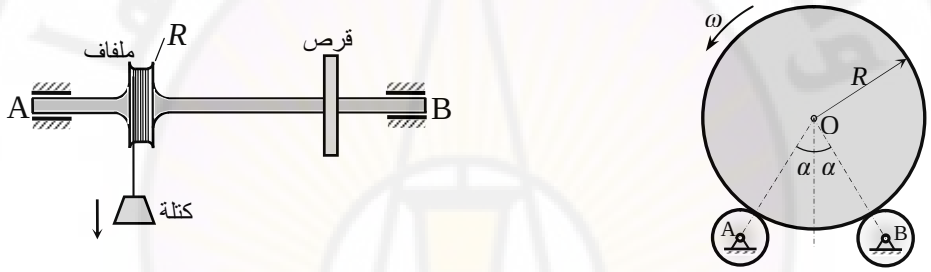
الجواب: $V_{(t=10\text{sec})} = 0.5\ \text{m/sec} \rightarrow$, $w_{(t=10\text{sec})} = 7.85\ \text{rad/sec}\ \ cw$

م-6-13

يركب قرص على محور AB ذو ملفاف نصف قطره R ، وعزم عطالته مع المحور هو I_1 . يلف عليه خيط يربط في نهايته ثقل كتلته m ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-7).

إذا تحرك الثقل من السكون مسافة h خلال زمن t . المطلوب إيجاد عزم عطالة القرص I .

الجواب: $$I = \frac{m.g.R^2}{2h}t^2 - I_1 - m.R^2$$



a b

(الشكل م-6-7)

م-6-14

تدور أسطوانة مصمتة كتلتها M ، ونصف قطرها R ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي المار من O هو ($I_O = M.R^2/2$) بسرعة زاوية ω_0 موضوعة على بكرتين اسطوانيتين A و B تدوران حول محاورهما، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-7).

في لحظة ما تفرمل البكرتان، فإذا كانت الزاوية التي يشكلها قطري البكرتين المارين من O تساوي (AOB = 2α)، وكان معامل الاحتكاك الحركي بين الأسطوانة والبكرتين هو f_k . المطلوب إيجاد الزمن t اللازم حتى تتوقف الأسطوانة.

إرشاد: اعتبر حركة الأسطوانة خلال الفرملة تدحرج مع انزلاق.

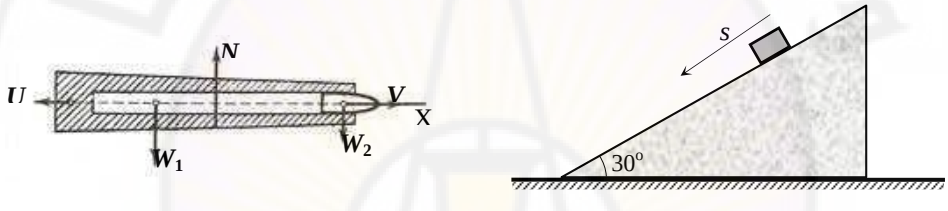
الجواب: $$t = (1 + f_k^2)R.w_0.\cos a / 2f_k.g$$

م-6-15

مدفع كتلته M يطلق قذيفة كتلتها m أفقيا بسرعة V ، بحيث طاقة الانفجار تكفي لإيصال القذيفة إلى ارتفاع h إذا كان القذف رأسياً إلى الأعلى.

المطلوب بإهمال الحركة النسبية في ماسورة المدفع، إيجاد سرعة ارتداد المدفع U في حالة القذف الأفقي، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-8).

الجواب: $$U = \left[\frac{2m^2.g.h}{M(M+m)}\right]^{1/2}$$



a b

(الشكل م-6-8)

م-6-16

ينزلق جسم كتلته (m =1 kg) على الوجه المائل لمنشور أملس كتلته (M =3.5 kg)، ومقطعه مثلث قائم الزاوية، وميل وجهه المائل 30^o على الأفق، والمنشور قابل للانزلاق على مستوى أفقي أملس، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-8).

إذا تحركت الجملة من السكون، فإن الجسم سينزلق على الوجه المائل للمنشور. المطلوب تعيين زمن حركة الجسم $t_{(s=5m)}$ بعد انزلاقه مسافة (s = 5 m).

الجواب: $t_{(s=5m)} = 1.25\,\text{sec}$

م-6-17

جسيمان متساويا الكتلة يربطهما خيط غير مرن طوله l ، وموضوعان على نضد أفقي أملس بحيث يكون الخيط مشدوداً، وأحد الجسيمين على حافة النضد، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-9).

إذا ترك الجسيم الأول ليسقط رأسياً من السكون، المطلوب وصف الحركة التالية للجسيمين، وإيجاد مسار مركز ثقلهما G بعد مغادرة الجسيم الثاني للنضد.

الجواب: مسار G هو قطع مكافئ محوره رأسي ومقلوب إلى الأسفل، وطول وتره البؤري العمودي يساوي $l/2$ وفق المعادلة $(y=-x-2x^2/a)$.



(الشكل م-6-9)

م-6-18

يوضع انبوب أملس نصف دائري في مستوي الرأسي، وتوضع داخله سلسلة لينة وصقيلة يتدلى طرفاها من فتحتي الانبوب A , B بمسافة l ، وتكون بهذا الوضع بحالة توازن، ثم يقص طرفها الأيسر في A ، وتبدأ بالخروج من الفتحة اليمنى B ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-9).

إذا كان وزن وحدة الطول للسلسلة هو γ ، ونصف قطر الانبوب a ، المطلوب، بإهمال أبعاد مقطع الانبوب، إيجاد سرعة السلسلة V في لحظة خروجها نهائياً من الانبوب.

الجواب: $$V=\sqrt{\frac{4a^2+p^2.a^2+2p.a.l}{p.a+l}g}$$

م-6-19- (الفصل الثاني-1996-1997)

أسطوانة وزنها ($W = M.g$) نصف قطرها r ، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O هو ($I_O = M.r^2/2$)، تستطيع الدوران حول محورها المار من O ، وقد لف على محيطها خيط يحمل بنهايته الثانية الثقل Q ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-10).

إذا بدأت الجملة حركتها من السكون. المطلوب، بإهمال الاحتكاك، تعيين السرعة V_y للثقل Q عندما يهبط مسافة قدرها y .

الجواب: $V_y = \sqrt{2g.Q.y/(Q+0.5W)}$



(الشكل م-6-10)

م-6-20

حمل B كتلته ($M = 100$ kg) معلق بواسطة حبل غير مرن ملفوف على محيط بكرة نصف قطرها ($r = 400$ mm) ملحومة بقرص عزم عطالته حول محوره الهندسي المار من O هو ($I_O = 15$ kg m^2)، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-10).

إذا بدأت الجملة حركتها بحركة الحمل B نحو الأسفل بسرعة ($V_B = 2$ m/sec). وكان الاحتكاك عند المحور O يكافئ مزدوجة C مقدارها 80 N.m . المطلوب إيجاد السرعة V_B للحمل B بعد أن يقطع مسافة نحو الأسفل قدرها ($y = 1.2$ m).

الجواب: $V_B = 3.7\ \text{m/sec}\downarrow$

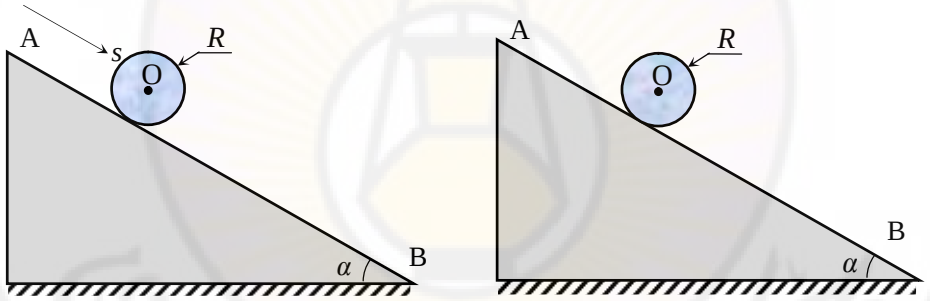
م-6-21- (الفصل الأول-1992-1993)

كرة كتلتها M ، ونصف قطرها R ، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O هو ($I_O = 2M.R^2/5$). تبدأ بالتدحرج بدون انزلاق من السكون متجهة إلى أسفل سطح خشن مائل AB يصنع زاوية ($\alpha = 30^o$) مع الأفق، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-11).

المطلوب تعيين الآتي:

1. تعيين سرعة مركز الكرة V_s بعد تدحرجها مسافة s .
2. الزمن t اللازم لبلوغ هذه السرعة.
3. ما هي سرعة مركز الكرة $V_{O(s=200m)}$ في أسفل المستوى المائل عند B ، إذا كان طوله ($s = AB = 200$ m).

الجواب: $V_s = 5\,s.g/7$, $t = (28\,s/5\,g)^{1/2}$, $V_{O(s=200m)} = 1000\,g/7$



(الشكل م-6-11)

مسألة-6-22

أسطوانة دائرية متجانسة كتلتها M ونصف قطرها R . تتدحرج بدون انزلاق على مستوى مائل يميل على الأفق بزاوية α ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-11).

إذا كان عامل الاحتكاك الدوراني هو c ، المطلوب تعيين علاقة كل من التسارع A_O لمركز كتل الأسطوانة O ، وقوة الاحتكاك F_{fcr} الحدية المانعة للانزلاق.

الجواب: $A_O = \frac{2}{3}(\sin a - \frac{c}{R}.\cos a)/g$, $F_{f_{cr}} = (\frac{1}{3}\sin a + \frac{2}{3}c.\cos a)\,W$

م-6-23- (الفصل الثاني-2003-2004)

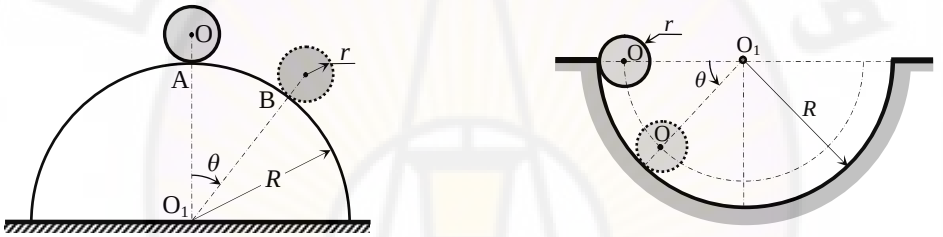
دولاب متجانس وزنه W ، ونصف قطره r ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = M.r^2/2$). يترك ليتدحرج من السكون على سطح خشن ثابت على شكل نصف كرة مركزها O_1 ، ونصف قطرها ($R = 8r$) من الوضع الحرج الشاقولي A المعين بالزاوية ($\theta = 0$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-12).

المطلوب إيجاد عند الوضع العام B المحدد بالزاوي θ ، مايلي:

1.معادلة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ لحركة الدولاب، والسرعة الخطية $V_{O\theta}$ ، والتسارع الخطي $A_{O\theta}$ لمركز الدولاب O .

2.قيمة الزاوية θ التي عندها يترك الدولاب السطح الدائري.

الجواب: $\cos q = 4/7$, $e_q = 2g.\sin q/3r$, $w_q = [12(1-\cos q)\,g/r]^{1/2}$



(الشكل م-6-12)

م-6-24- (الفصل الأول-1987-1988)

دولاب متجانس وزنه W ، ونصف قطره r ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = M.r^2/2$). يترك ليتدحرج من السكون على سطح خشن ثابت على شكل نصف كرة مركزها O_1 ، ونصف قطرها ($R = 8r$) من الوضع الأفقي A المعين بالزاوية ($\theta = 0$)، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-12).

المطلوب، إيجاد عند الوضع العام B المحدد بالزاوي θ ، مايلي:

1.معادلة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ لحركة الدولاب. والسرعة الخطية $V_{O\theta}$ ، والتسارع الخطي $A_{O\theta}$ لمركز الدولاب O .

2.القيم العظمى لكل من السرعة الزاوية $\omega_{\max}$ ، والتسارع الزاوي $\omega_{\max}$ للدولاب وموقعهما.

الجواب:

$$w_q = (40g.\sin q/3r)^{1/2} \quad , \quad e_q = 2g.\cos q/3r$$

$$w_{\max} = w_{(q=p)} = (40g/3r)^{1/2} \quad , \quad e_{\max} = e_{(q=0)} = 2g/3r$$

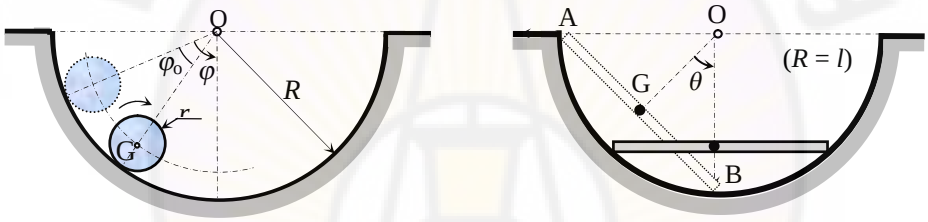
م-6-25

أسطوانة دائرية متجانسة وزنها W ونصف قطرها r . تبدأ بالتدحرج دون انزلاق على السطح الداخلي لأسطوانة ثابتة نصف قطرها R ، ويحدد الوضع الابتدائي للأسطوانة المتدحرجة بالزاوية φ_0 وهي زاوية خط المركزين للدائرتين الكبيرة والصغيرة مع الشاقول، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-13).

المطلوب، بإهمال الاحتكاك الدوراني، إيجاد ما يأتي:

1. معادلة ضغط الأسطوانة الصغيرة N_φ على السطح بدلالة الزاوية φ .
2. معادلة حركة الأسطوانة الصغيرة عندما تكون الزاوية φ_0 صغيرة.

الجواب: $N_j = W(7\cos j - 4\cos j_0)/3$, $\ddot{j} + [2g/3(R-r)]j = 0$



a b

(الشكل م-6-13)

م-6-26- (الفصل الأول-2011-2012)

وصلة متجانسة AB طولها $(AB = \sqrt{2}\, l)$ كتلتها M ، وعزم عطالتها حول مركز كتلها G هو $[I_G = 1/12\ M\ (AB)^2]$، قادرة على الانزلاق تحت تأثير ثقلها على سطح أملس على شكل نصف دائرة نصف قطرها $(R = l)$، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-13).

فإذا بدأت الوصلة حركتها من السكون من الوضع الابتدائي المحدد بالزاوية $(\theta = 45^o)$. المطلوب، عندما تصبح الوصلة في وضع أفقي $(\theta = 0^o)$، إيجاد كل من السرعة الزاوية $\omega_{(\theta\text{-}0)}$ للوصلة AB ، والسرعة الخطية $V_{G(\theta=0)}$ لمركز كتلها G .

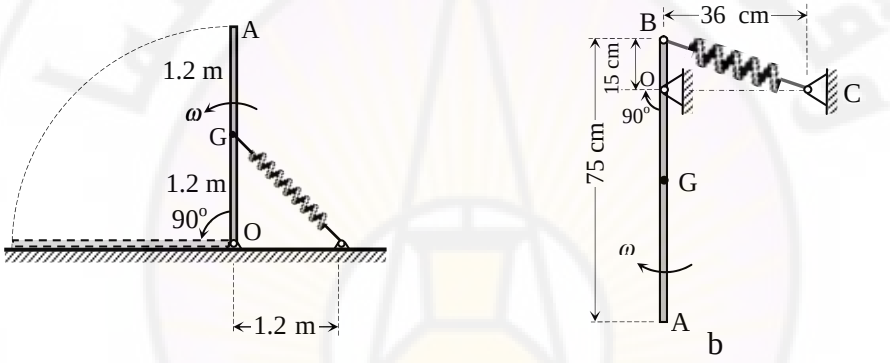
الجواب: $V_{G(q=0)} = [\frac{3(\sqrt{2}-1)}{4}.g.l]^{1/2}$, $w_{(q=0)} = [\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}.\frac{g}{l}]^{1/2}$

م-6-27- (الدورة الامتحانية الثالثة-2009-2010)

قضيب رفيع متجانس OA كتلته ($M = 30$ kg)، وطوله ($l = 2.4$ m). يتمفصل في المسند الثابت O ، ويرتبط مركز ثقله G الذي يقع في منتصفه بنابض عامل صلابته ($k = 3$ kN/m)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-14).

إذا كان النابض بطوله الحر عندما كان القضيب في وضعه الشاقولي، المطلوب إيجاد السرعة الزاوية ω_0 اللازم إعطاؤها للقضيب بحيث تصبح سرعته الزاوية معدومة عندما يصل إلى وضعه الأفقي.

لجواب: $w_0 = 3.67\,\text{rad/sec}$



(الشكل م-6-14)

م-6-28- (الفصل الثاني-2004-2005)

قضيب متجانس AB طوله ($l = 75$ cm)، وكتلته ($M = 3$ kg)، وعزم عطالته حول مركز ثقله G هو ($I_G = M \cdot l^2/12$)، قابل للدوران في مستوي رأسي حول المفصل الثابت O ، ويتصل طرفه B بنابض مشدود عامل صلابته ($k = 300$ N/m)، وطوله الحر ($l_0 = 12$ cm)، وطرفه الآخر مثبت في المسند C . كما هو مبين في b من (الشكل م-6-14).

إذا بدأ القضيب حركته الدورانية باتجاه دوران عقارب الساعة حول O بسرعة زاوية ابتدائية تساوي إلى ($\omega_0 = 4$ r/sec) من الوضع الشاقولي له. المطلوب إيجاد السرعة الزاوية للقضيب $\omega_{(\theta=90)}$ عندما يدور زاوية قدرها ($\theta = 90^o$).

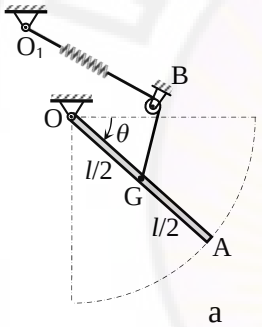
الجواب: $w_{(q=90^o)} = 6.1\,\text{rad/sec}$

م-6-29 (الفصل الثاني-2012-2013)

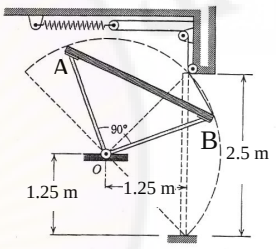
قضيب رفيع منتظم متجانس OA طوله (l = 140 cm)، وكتلته (M = 9 kg)، وعزم عطالته حول أحد أطرافه ($I_O = M \cdot l^2/3$). يتمفصل طرفه O بمفصل ثابت، ويرتبط مركز كتله G بحبل عبر بكرة مهملة ثابتة بنابض معلق في المسند O_1 ، عامل صلابته (k = 20 N/m) بحيث يكون النابض بطوله الحر والقضيب أفقي في الوضع الابتدائي الساكن ($\theta = 0$).

يترك القضيب وشأنه ليسقط تحت تأثير ثقله على المستوي الرأسي كما هو مبين في a من (الشكل-6-15). المطلوب عند الوضع ($\theta = 90^o$)، إيجاد قيمة السرعة الزاوية $\omega_{(\theta=90)}$ للقضيب.

الجواب: $w_{(q=90^o)} = 4.2 \text{ rad/sec}$



a



b

(الشكل م-6-15)

م-6-30

يوضح b من (الشكل م-6-15) مقطعاً عرضياً AB لباب مرآب يتكون من لوح مستطيل أبعاده هي 2.5 m و 5 m ، وسمكه منتظم، وكتلته هي 200 kg . يرتكز الباب على دعامة يمكن إهمال وزنها مثبتة بمفصل عند O . يتم التحكم في حركة الباب بواسطة زوج من جملة حبل معدني ونابض على كل جانب من جانبي الباب، ويكون النابض بطوله الحر عندما يكون الباب في الوضع الأفقي المفتوح.

إذا أعطي الباب عدم توازن صغير من الوضع، وسمح له بالسقوط كما هو مبين في b من (الشكل م-6-15). المطلوب إيجاد قيمة عامل الصلابة k لكل نابض التي تحدد السرعة الزاوية للباب بالقيمة 1.5 rad/sec عندما ترتطم الحافة B بالأرضية.

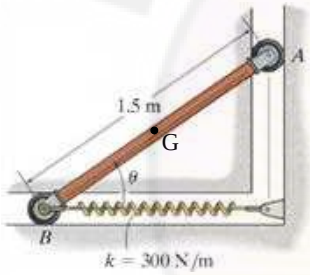
الجواب: $k = 1.27 \text{ kN/m}$

م-6-31- (الدورة الامتحانية الثالثة-2015-2016)

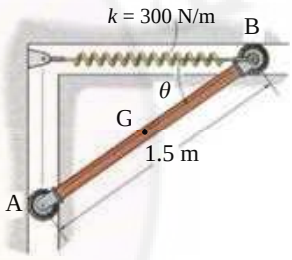
قضيب رفيع متجانس منتظم AB كتلته ($M = 30$ kg)، وطوله ($l = 1.5$ m)، وعزم عطالته حول مركز كتلته G الذي يقع في منتصفه يساوي إلى ($I_G = M.l^2/12$). يرتبط طرفه B بنابض بطوله الحر معامل مرونته ($k = 300$ N/m)، عندما كانت الزاوية ($\theta = 60^o$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-16)

تبدأ حركة القضيب في المستوي الرأسي من السكون بانزلاق طرفه A على الدليل الرأسي الأملس، بينما ينزلق طرفه B على الدليل الأفقي الأملس. المطلوب، عندما تصبح ($\theta = 0^o$)، إيجاد قيمة كل من السرعة الزاوية ω للقضيب AB ، والسرعة الخطية V_A , V_B لطرفيه A و B ، والسرعة V_G لمركز كتلته G .

الجواب: $w = 3.08\,\text{rad/sec}\,, V_B = 0\,, V_A = 4.62\,\text{m/sec}\downarrow, V_G = 2.31\,\text{m/sec}\downarrow$



a



b

(الشكل م-6-16)

م-6-32

قضيب رفيع متجانس منتظم AB كتلته ($M = 30$ kg)، وطوله ($l = 1.5$ m)، وعزم عطالته حول مركز كتلته G الذي يقع في منتصفه يساوي إلى ($I_G = M.l^2/12$). يرتبط طرفه B بنابض بطوله الحر معامل مرونته ($k = 300$ N/m)، عندما كان القضيب بوضع أفقي حيث الزاوية ($\theta = 0^o$).

تبدأ حركة القضيب في المستوي الرأسي من السكون بانزلاق طرفه A على الدليل الرأسي الأملس، بينما ينزلق طرفه B على الدليل الأفقي الأملس. المطلوب، عندما تصبح ($\theta = 60^o$) كما هو مبين في b من (الشكل م-6-16)، إيجاد قيمة كل من السرعة الزاوية ω للقضيب AB ، والسرعة الخطية V_A, V_B لطرفيه A و B ، والسرعة V_G لمركز كتلته G .

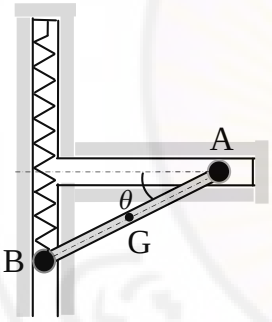
الجواب: $w = 3.08\,\text{rad/sec}\,, V_B = 4\,\text{m/sec}\leftarrow, V_A = 2.31\,\text{m/sec}\downarrow, V_G = 1.15\,\text{m/sec}$

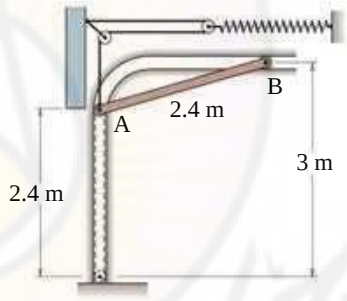
م-6-33

قضيب رفيع متجانس منتظم AB طوله ($l = 0.4$ m)، وكتلته ($M = 10$ kg)، وعزم عطالته حول مركز كتلته G الذي يقع في منتصفه يساوي ($I_G = M.l^2/12$). يرتبط طرفه B عندما يكون القضيب أفقياً ($\theta = 0$)، بنابض بطوله الحر، ومعامل مرونته ($k = 800$ N/m). يسحب الطرف B حتى يشكل القضيب زاوية ($\theta = 30^o$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-17)

يترك الطرف B ليبدأ حركته من السكون، بحيث تتحرك المنزلقة المهملة B ، أي طرفه B على الدليل الرأسي الأملس، بينما تتحرك المنزلقة المهملة A ، أي طرفه A على الدليل الأفقي الأملس. المطلوب، عندما يعود القضيب إلى وضعه الأفقي، إيجاد قيمة كل من السرعة الزاوية ω للقضيب AB ، والسرعة الخطية V_G لمركز كتلته G ، والسرعة الخطية V_A , V_B لكل من طرفيه A و B .

الجواب: $w = 4.82\ \text{rad/sec}\ ,\ V_A = 0\ ,\ V_B = 1.928\ \text{m/sec}\uparrow\ ,\ V_G = 0.964\ \text{m/sec}\uparrow$





(الشكل م-6-17)

م-6-34

يوضح b من (الشكل م-6-17) مقطعاً عرضياً AB لباب مرآب يتكون من لوح مربع أبعاده هي 2.4 m و 2.4 m ، وسمكه منتظم، وكتلته هي 200 kg . يحمل الباب مجموعة من النوابض على كل جانب من جانبيه، حيث النوابض بطولها الحر عندما يكون الباب في الوضع الأفق كما هو مبين في b من (الشكل م-6-15)، وعامل صلابة كل منهم هي ($k = 700$ N/m).

إذا ترك الباب وشأنه من هذا الوضع. المطلوب إيجاد سرعة الحافة A عند ارتطامها بأرضية المرآب.

الجواب: $V_A = 3.04$ m/sec

م-6-36- (الفصل الثاني-2015-2016)

دولاب متجانس كتلته ($M = 15$ kg)، ونصف قطره ($R = 22.5$ cm)، ونصف قطر عطالته حول مركز كتلته G هو ($\rho_G = 18$ cm)، وعزم عطالته بدلالته هو ($I_G = M.\rho^2$). يرتبط مركزه G بنابض طوله الحر ($l_0 = 30$ cm)، وعامل مرونته ($k = 34$ N/m). كما هو مبين في b من (الشكل م-6-18).

إذا كان الدولاب ساكناً في الوضع الابتدائي المعين بالبعد ($GG' = 90$ cm)، وتدحرج في المستوي الرأسي بدون انزلاق على السطح الأفقي نحو اليسار. المطلوب، عندما يصل مركز الكتل G الموقع G′ . قيمة واتجاه كل من السرعة الزاوية ω للقرص، والسرعة الخطية V_G لمركز كتلته.

الجواب: $w = 2.66\ \text{rad/sec}$, $V_G = 0.6\ \text{m/sec} \leftarrow$



a b

(الشكل م-6-18)

م-6-37- (الفصل الأول-2004-2005)

قرص مصمت كتلته ($M = 5$ kg) نصف قطره ($r = 10$ cm)، وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من مركز ثقله O هو ($I_O = M.r^2/2$)، يرتبط مركزه بنابض ثابت صلابته ($k = 235$ N/m) ، وطوله الحر ($l_0 = 4r$)، والمثبت في المسند A .

يبدأ القرص حركته من السكون من الموضع B عندها كان OA أفقياً، ليتدحرج دون انزلاق على السطح الرأسي المبين في a من (الشكل م-6-19).

المطلوب، عندما يصل القرص الموقع D ، إيجاد قيمة كل من السرعة الخطية لمركز القرص V_O ، والسرعة الزاوية ω له عند هذا الموقع.

الجواب: $w = 20.62\ \text{rad/sec}$, $V_O = 2.06\ \text{m/sec} \leftarrow$

م6-38

دولاب مزدوج كتلته (M = 10 kg)، ونصف قطره الكبير (R = 200 mm)، ونصف قطره الصغير (r = 75 mm)، ونصف قطر عطالته (ρ_O = 125 mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي ($I_O = M.\rho_O^2$)، يلف على محيطه الصغير نابض بطوله الحر، معامل مرونته (k = 300 N/m)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-18).

يبدأ الدولاب بالدحرجة من السكون على مستوى خشن مائل بزاوية ($\alpha = 30^o$). المطلوب إيجاد القيمة العددية لما يلي:

1- السرعة الخطية V_O لمركز الدولاب O ، والسرعة الزاوية ω له بعد أن يقطع مركز الدولاب مسافة (ΔO = 90 mm).

2- المسافة الأعظمية التي يقطعها مركز الدولاب ΔO_{max} من وضعية السكون، وحتى يتوقف الدولاب عن الحركة.

الجواب: $w = 3.94\,\text{rad/sec}$, $V_O = 0.788\,\text{m/sec}$, $\Delta O_{max} = 25.9\,\text{cm}$



(الشكل م-6-19)

م-6-39- (الفصل الأول-2012-2013)

دولاب مزدوج كتلته (M = 15 kg)، ونصف قطره الكبير (R = 200 mm)، ونصف قطره الصغير (r = 75 mm)، ونصف قطر عطالته (ρ_O = 125 mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي ($I_O = M.\rho_O^2$)، يلف على محيطه نابض بطوله الحر، معامل مرونته (k = 100 N/m)، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-19).

يبدأ الدولاب بالدحرجة من السكون على مستوى خشن مائل بزاوية ($\alpha = 30^o$). المطلوب إيجاد القيمة العددية لما يلي:

3- السرعة الخطية V_O لمركز الدولاب O ، والسرعة الزاوية له ω بعد أن يقطع مركز الدولاب مسافة (ΔO = 90 mm).

4- المسافة الأعظمية التي يقطعها مركز الدولاب ΔO_{max} من وضعية السكون، وحتى يتوقف الدولاب عن الحركة.

الجواب: $w = 2.7\,\text{rad/sec}$, $V_O = 0.2\,\text{m/sec}$, $\Delta O_{max} = 10.9\,\text{cm}$

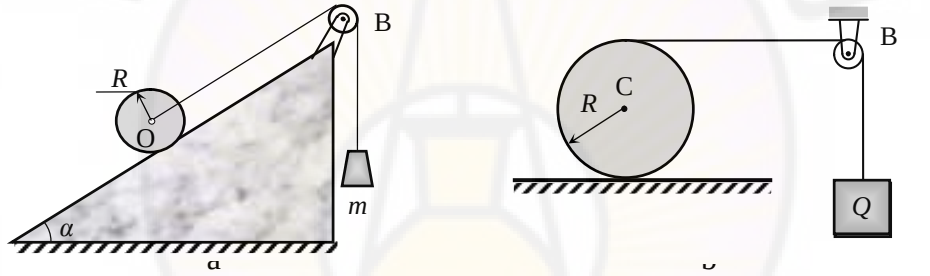
م-6-40

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على بكرة ثابتة مهملة بدون احتكاك B . يمرر أحد طرفي سلك خفيف فوقها يحمل كتلة m شاقولية، أما الطرف الثاني فهو يتصل بمحور قرص O كتلته M ، ونصف قطره R . قابل للتدحرج على مستوى مائل خشن يصنع زاوية α مع الأفق، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-20).

إذا كانت الجملة ساكنة في البدء، المطلوب، بعد أن تتحرك الكتلة m نحو الأسفل مسافة y ، تعيين علاقة كل من السرعات V_O , ω , V ، والتسارعات A_O , ε , A لعناصر الجملة، وما هو شرط الحركة.

الجواب: شرط الحركة هو $m > M.\sin a$

$$V_O = \sqrt{\frac{4g(m - M.\sin a)}{2m + 3M} y} \ , \ w = \sqrt{\frac{4g(m - M.\sin a)}{R^2(2m + 3M)} y} \ , \ A_O = \frac{2(m - M.\sin a)}{2m + 3M} g \ , \ e = \frac{2(m - M.\sin a)}{R(2m + 3M)}$$



(الشكل م-6-20)

م-6-41

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على بكرة ثابتة مهملة بدون احتكاك B . يمرر أحد طرفي سلك خفيف فوقها يحمل وزناً Q ، أما الطرف الثاني فهو يتصل بمحيط أسطوانة نصف قطرها R ، ووزنها W ، ونصف قطر عطالتها حول محورها الهندسي ρ_C ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-20).

إذا كان معامل الاحتكاك الدوراني للأسطوانة c ، وكانت الجملة ساكنة في البدء، المطلوب، بعد أن يكون مركز الأسطوانة قد قطع مسافة x بسقوط الوزن Q ، تعيين علاقة كل من السرعات V_C , ω , V ، والتسارعات A_C , ε , A لعناصر الجملة، وما هو شرط الحركة.

الجواب: شرط الحركة هو $Q > c.W / 2R$

$$V_C = \sqrt{\frac{2g(2Q.R - c.W)}{4Q.R^2 + W(R^2 + r_C^2)} x} \ , w = \sqrt{\frac{4g(m - M.\sin a)}{R^2[4Q.R^2 + W(R^2 + r_C^2)]} x} \ , A_C = \frac{R(2Q.R - c.W)}{4Q.R^2 + W(R^2 + r_C^2)} g \ , e = \frac{(2Q.R - c.W)}{4Q.R^2 + W(R^2 + r_C^2)}$$

م-6-42

يسقط جسم كتلته 20 kg من ارتفاع h من الموضع A على الأرض دون سرعة أولية، فيصل إليها بسرعة 14 m/sec .

المطلوب تعيين الطاقة الكامنة للجسم $E_{p\mathrm{A}}$ ، وهو في هذا الموضع بالنسبة للأرض.

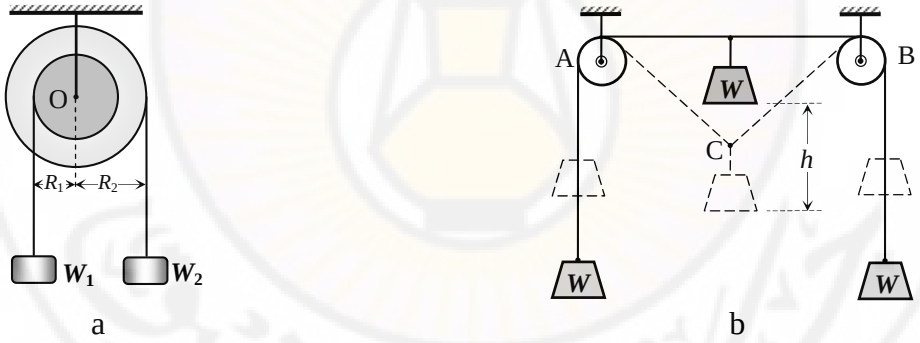
الجواب: $E_{P\mathrm{A}} = 1960\ \mathrm{j}$

م-6-43

تبدأ الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي حركتها من حالة السكون كما هو مبين في a من (الشكل م-6-21).

إذا كان ($M_1 = M_2 = 4$ kg) و ($R_2 = 15$ cm) و ($R_1 = 10$ cm). المطلوب تعيين السرعة V_1 للثقل W_1 عندما يقطع مسافة ($y = 3$ m).

الجواب: $V_1 = 3.68\ \mathrm{m/sec}$



(الشكل م-6-21)

م-6-44

تبدأ الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي حركتها من حالة السكون، كما هو مبين بالخطوط المستمرة في b من (الشكل م-6-21).

المطلوب بإهمال أبعاد البكرتين A و B ، تعيين المسافة العظمى h التي يقطعها الثقل W_1 حتى يقف.

الجواب: $h = 4W_1.W_2.l/(4W_2^2 - W_1^2)$

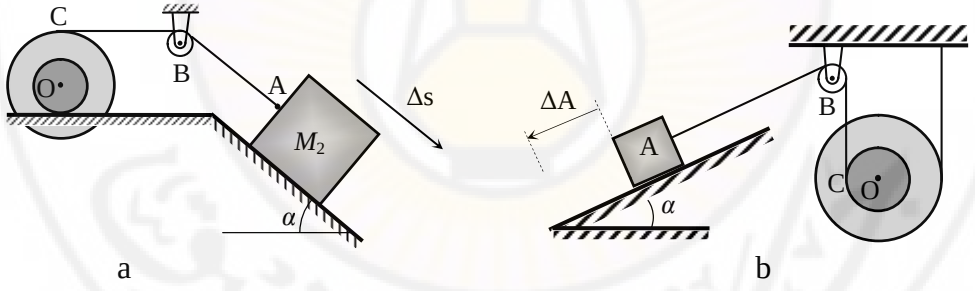
م-6-46- (الفصل الثاني-2014-2015)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرص مزدوج كتلته M_1 ، نصف قطره الصغير r ، ونصف قطره الكبير ($R = 2\ r$)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = 0.5\ M_1.\ r^2$). القرص الصغير منه قابل للتدحرج على سطح مستوٍ أفقي ثابت خشن، وحول القرص الكبير منه يلف حبل لا يمتط يمر عبر بكرة مهملة B ، طرفه الآخر مثبت بكتلة قدرها M_2 قابلة للانزلاق على سطح مستوٍ خشن مائل بزاوية α ، معامل الاحتكاك لهما هو f_k ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-22).

إذا تحركت الجملة من السكون بانزلاق الكتلة M_2 نحو الأسفل مسافة قدرها Δs ، خلالهايتدحرج القرص المزدوج على المستوي الأفقي. المطلوب إيجاد بدلالة Δs علاقة كل من سرعات عناصر الجملة $V_2\ ,\ \omega\ ,\ V_O$ ، وقوة شد الحبل T ، وما هو شرط الحركة المفروضة.

الجواب: $T = \dfrac{M_1}{6M_2 + M_1}(\sin\alpha - f.\cos\alpha)W_2 \quad , \quad \tan\alpha > f$

$$V_2 = \frac{12W_2(\sin\alpha - f.\cos\alpha)}{6M_2 + M_1}\Delta s\ ,\ V_O = \frac{4W_2(\sin\alpha - f.\cos\alpha)}{3(6M_2 + M_1)}\Delta s\ ,\ w = \sqrt{\frac{4W_2(\sin\alpha - f.\cos\alpha)}{3r^2(6M_2 + M_1)}\Delta s}$$



(الشكل م-6-22)

م-6-47- (الفصل الثاني-2012-2013)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على سلك يمر على بكرة B مهملة، يربط بأحد طرفيه جسم A كتلته m قادر على الانزلاق على سطح خشن معامل الاحتكاك له f ، مائل بزاوية α على الأفق، ويلتف طرفه الثاني على قرص مزدوج كتلته M ، نصف قطره الكبير R ، والصغير $R/2$ ، وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من O هو ($I_O = M.R^2/2$)، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-22).

تبدأ الجملة حركتها من السكون بانزلاق الجسم A نحو الأسفل تحت تأثير قوة ثقالته. المطلوب، بعد أن ينتقل مسافة قدرها ΔA ، إيجاد علاقة كل من سرعات عناصر الجملة V_O , ω , V_A ، وما هو شرط الحركة المفروضة.

الجواب: $(\sin a - f.\cos a) > \frac{2M}{3m}$, $w = \sqrt{\frac{8[3m.g(\sin a - f.\cos a) - 2M.g]}{9R^2(3m+2M)}\Delta A}$

$V_O = \sqrt{\frac{8[3m.g(\sin a - f.\cos a) - 2M.g]}{9(3m+2M)}\Delta A}$, $V_A = \sqrt{\frac{2[3m.g(\sin a - f.\cos a) - 2M.g]}{3m+2M}\Delta s}$

م-6-45

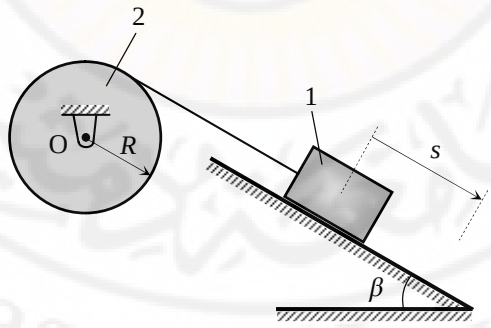
تبدأ الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي المبينة في الشكل حركتها من السكون بتأثير قوى الثقالة بانزلاق الجسم 1 إلى أسفل السطح الخشن المائل بزاوية β على الأفق.

فإذا كان:

$M_1 = M$, $M_2 = 4M$, $f_k = 0.1$, $b = 60^o$, $I_O = 0.5M_2R^2$

المطلوب إيجاد سرعة الجسم 1 بعد أن ينتقل مسافة قدرها ($s = 2$ m).

الجواب: $V_1 = 3.26$ m / sec



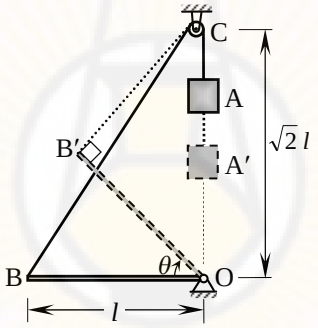
(الشكل م-6-23)

م-6-48- (الفصل الأول-2016-2017)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قضيب رفيع منتظم متجانس أفقي OB طوله l ، وكتلته m ، وعزم عطالته حول أحد أطرافه O هو $[I_O = m.l^2/3]$، قابل للدوران حول طرفه المفصلي O ، ويرتبط طرفه الآخر بحبل غير مرن يلتف على بكرة صغيرة مهملة C ، ومنها إلى جسم A كتلته M . كما هو مبين في (الشكل م-6-24).

تبدأ الجملة حركتها من السكون مع بدء حركة الجسم A بالهبوط نحو الأسفل تحت تأثير وزنه. المطلوب، عند الوضع $(q = 45^o)$، ايجاد مقدار الانتقال ΔA للجسم A ، وسرعته V_A ، والسرعة الزاوية للقضيب ω عندئذ.

الجواب: $V_A = w.l$, $w = [\frac{3(2.928\,M - \sqrt{2}\,m)}{2(m+3M)}]^{1/2}$, $\Delta A = l(\sqrt{3}-1)$



(الشكل م-6-24)

م-6-49- (الفصل الأول-2015-2016)

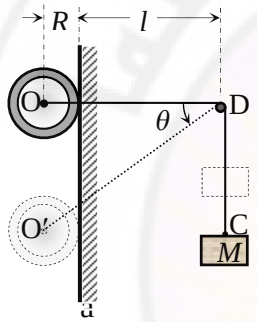
تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرص كتلته m نصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو $(I_O = 0.5\,m.R^2)$، يستند على حاجز رأسي خشن ثابت. يربط مركز القرص بحبل خفيف يمر حول وتد D أملس ثابت على بعد l من الحاجز، ويتدلى من طرفه الآخر كتلة M أكبر من m ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-25).

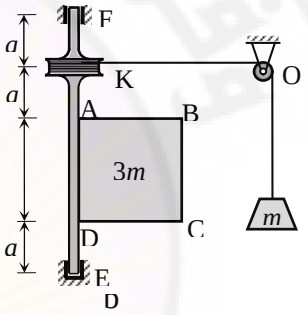
يترك القرص وشأنه من السكون في وضع كان مركزه O على مستوٍ أفقي واحد مع الوتد D ، المطلوب إيجاد ما يأتي:

1.علاقات سرعات عناصر الجملة V_O , ω , V عندما يشكل الحبل OD زاوية $(q = 30^o)$ مع وضعه الابتدائي.

2.باعتبار $(l = 4R)$، أوجد أكبر مسافة y يقطعها مركز القرص O من وضعه الابتدائي حتى يقف.

الجواب: $y = \frac{10m.M.R}{M^2 - m^2}$, $V_O = V_C = \sqrt{\frac{4(l+R)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m - 0.268M}{3m + 2M} g}$, $w = \sqrt{\frac{4(l+R)}{\sqrt{3}R^2} \cdot \frac{m - 0.268M}{3m + 2M} g}$





(الشكل م-6-25)

م-6-50

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على لوحة مربعة ABCD كتلتها $3m$ وضلعها $2a$ مركبة على محور رأسي EF ، وعلى ملفاف خفيف مهمل الكتلة ركب على المحور في K ، ويلف عليه حبل خفيف يمر حول وتد O أملس ثابت، ويتدلى من طرفه الآخر كتلة m ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-25).

تركت الجملة من السكون المطلوب إيجاد علاقة بدلالة زاوية دوران اللوحة θ لكل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ لدوران اللوحة، وشد الحبل T_θ .

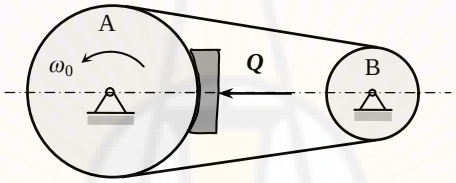
الجواب: $T_q = 0.8\, m.g$, $e_q = g/5a$, $w_q = (0.4g/a)q$

م-6-51

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على بكرتينن A و B وزناهما W_A و W_B ، ونصفا قطريهما R_A و R_B ، تتصلان بحزام وزنه W_C ، وتدوران معاً بواسطة محرك. في لحظة معينة يوقف المحرك عن العمل، وتكون السرعة الزاوية للبكرة A عندئذ ω_0 ، ويضغط في تلك اللحظة على البكرة لجام بقوة Q ، والغاية منه ايقاف حركة الدوران، كما هو مبين في (الشكل م-6-26).

إذا كان معامل احتكاك اللجام بالبكرة A هو f ، المطلوب، بإهمال الاحتكاك عند المحاور، واعتبار البكرات أقراصاً متجانسة، إيجاد عدد الدورات n التي تدورها البكرة A وهي ملجمة قبل أن تقف.

الجواب: $n = (W_A + W_B + 2W_C) R.w_0^2 / 8p\,.g\,.f\,.Q$



(الشكل م-6-26)

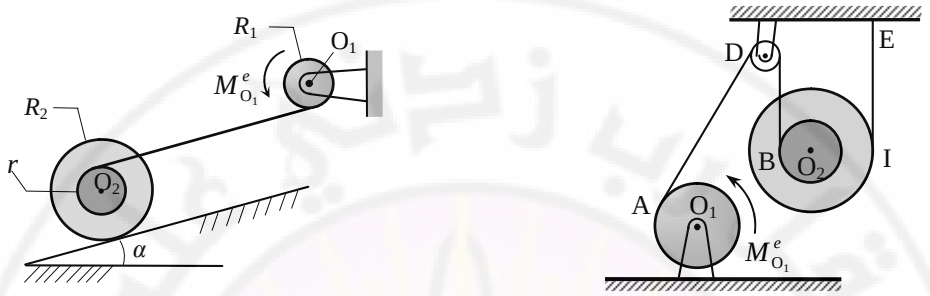
م-6-52- (الدورة الامتحانية الثالثة-2013-2014)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على ملف كتلته m_1 ، ونصف قطره R_1 ، وعزم عطالته حول محوره الهنسي المار من O_1 هو ($I_{O_1} = 0.5 m_1.R_1^2$). يستطيع الدوران تحت تأثير عزم دوراني ثابت $M_{O_1}^e$ ، ليسحب أسطوانة كتلتها m_2 ، ونصف قطرها R_2 ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي المار من O_2 هو ($I_{O_2} = 0.5 m_2.R_2^2$)، بواسطة حبل غير مرن ملتف على بكرة صغيرة مهملة نصف قطرها ($r = 0.5\ R_2$) مثبتة على الأسطوانة، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-27).

إذا تدحرجت الأسطوانة من السكون نحو الأعلى بتسارع خطي ثابت لمركزها O_2 تحت تأثير العزم الدوراني الثابت $M_{O_1}^e$. المطلوب إيجاد علاقة السرعة الزاوية لكل من الملفاف ω_1 والأسطوانة ω_2 ، والسرعة الخطية V_{O_2} ، والتسارع الخطي A_{O_2} لمركز الأسطوانة O_2 بعد انتقاله نحو الأعلى مسافة ΔO_2 . وما هو شرط الحركة المفروضة.

الجواب: $M_{O_1} > \frac{2}{3}W_2.R_1.\sin a$, $T_1 = \left[\frac{2(2m_1+4m_2)(3M_{O_1}-2R_1.W_2.\sin a)}{3R_1(9m_1+12m_2)}\right]$, $w_1 = \frac{3}{2R_1}V_{O_2}$

$w_2 = \frac{1}{R_2}V_{O_2}$, $A_{O_2} = \frac{4(3M_{O_1}-2R_1.W_2.\sin a)}{R_1(9m_1+12m_2)} = \text{Const.}$, $V_{O_2} = \sqrt{\frac{8(3M_{O_1}-2R_1.W_2.\sin a)}{R_1(9m_1+12m_2)}\Delta O_2}$



a b

(الشكل م-6-27)

م-6-53- (الفصل الثاني-2013-2014)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على ملف كتلته m_1 ، ونصف قطره R_1 ، وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من O_1 هو $(I_{O_1} = 0.5m_1.R_1^2)$. يستطيع الدوران دون احتكاك حول محوره المار من O_1 تحت تأثير عزم دوراني $M^e_{O_1}$ ، ليرفع قرص مزدوج كتلته m_2 ، ونصف قطره الكبير R_2 ، ونصف قطره الصغير $(r = 0.5\ R_2)$، وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من O_2 هو $(I_{O_2} = 0.5m_2.R_2^2)$، بواسطة حبل غير مرن يمر على بكرة صغيرة مهملة D ، ثم يلتف حول القرص، بحيث الطرف الثاني له مثبت بعنصر ثابت في E ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-27).

إذا تحرك القرص من السكون نحو الأعلى بتسارع ثابت تحت تأثير عزم دوران قيمته $M^e_{O_1}$. المطلوب إيجاد علاقة كل من سرعات عناصر الجملة V_{O_2}, w_1, w_2 ، وتسارع مركز القرص A_{O_2} ، وقوة شد الحبل T بين الملفاف والقرص بعد انتقال مركزه O_2 نحو الأعلى مسافة ΔO_2 .

الجواب: $A_{O_2} = \frac{2(1.5M_{O_1}-R_1.W_2)}{R_1(2.25m_1+3m_2)} = \text{Const.}$, $V_{O_2} = \sqrt{\frac{4(1.5M_{O_1}-R_1.W_2)}{R_1(2.25m_1+3m_2)}\Delta O_2}$

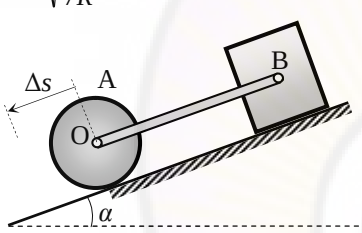
$w_2 = \frac{1}{R_2}V_{O_2}$, $w_1 = \frac{3}{2R_1}V_{O_2}$, $T_1 = \frac{1}{1.5}\left[\frac{3m_2(1.5M_{O_1}-R_1.W_2)}{R_1(2.25m_1+3m_2)} + W_2\right]$

م-6-54- (الدورة الامتحانية الثالثة-2012-2013)

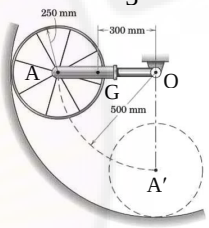
تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي، على أسطوانة A كتلتها ($m_A = m$)، نصف قطرها R ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي المار من O هو ($I_O = m.R^2/2$)، قابلة للتدحرج على سطح خشن معامل الاحتكاك الحركي له f_k ، مائل على الأفق بزاوية α ، وتتمفصل مع قضيب مهمل الكتلة OB ، يتمفصل بدوره مع جسم B كتلته ($m_B = 2m$)، قابل للانزلاق على السطح الخشن، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-28).

تبدأ الجملة حركتها من السكون بتدحرج الأسطوانة A ، وانزلاق الجسم B تحت تأثير قوى الثقالة. المطلوب، بعد انتقال مركز الاسطوانة O مسافة ($\Delta O = \Delta s$)، إيجاد علاقة كل من سرع عناصر الجملة V_B , ω , V_O ، والزاوية α التي عندها يتحقق شرط الحركة المفروضة.

الجواب: $V_B = V_O = \sqrt{\frac{4g}{7}(3\sin a - 2f.\cos a)\Delta s}$, $\tan a > \frac{2}{3}f$, $w = \sqrt{\frac{4g}{7R^2}(3\sin a - 2f.\cos a)\Delta s}$



a



b

(الشكل م-6-28)

م-6-55- (الفصل الثاني-2006-2007)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على دولاب كتلته ($M = 4$ kg) بعد إهمال شبكة قضبانه، ونصف قطره ($R = 250$ mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي A هو ($I_A = M.R^2$). يتمفصل مركزه A بذراع OA كتلته ($m = 3$ kg)، وطوله ($l = 500$ mm)، ومركز كتله G يبعد عن O مقدار ($OG = 300$ mm)، ونصف قطر عطالته حول طرفه O هو ($\rho_O = 300$ mm)، وعزم عطالته حوله ($I_O = M.r_O^2$). قابل للدوران حول المفصل الثابت O ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-28).

إذا تحركت الجملة من السكون من الوضع الأفقي بتدحرج الدولاب على السطح الدائري الثابت. المطلوب إيجاد القيم العددية لسرع عناصر V_A , ω_2 , ω_1 الجملة عندما يصبح الذراع OA شاقولياً.

الجواب: $V_A = 2.45\,\text{m/sec} \rightarrow$, $w_2 = 4.9\,\text{rad/sec}$, $w_1 = 9.8\,\text{rad/sec}$

م-6-56- (الدورة الامتحانية الثالثة-2014-2015)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرص A كتلته m ، نصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو $(I_O = m.R^2/2)$، وعلى قضيب OB طوله l ، وكتلته m أيضاً، مركز ثقله G يقع في منتصفه، وعزم عطالته حوله $(I_G = ml^2/12)$، وعلى جسم B كتلته m أيضاً، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-29).

تبدأ الجملة حركتها من السكون من الوضع $(\theta = 45^o)$ بدحرجة القرص A بدون إنزلاق على مستوٍ شاقولي خشن، وانزلاق الجسم B بدون احتكاك على مستو أفقي أملس. المطلوب، عند الوضع $(\theta = 0^o)$، إيجاد سرع عناصر الجملة فقط V_O , ω_A , ω_{AB} , V_B , V_G .

الجواب: $V_B = 0$, $V_G = 0.289\sqrt{l.g}$, $V_O = 1.157\sqrt{l.g}$, $w_A = 1.157\sqrt{\frac{l.g}{R^2}}$, $w_{AB} = 1.157\sqrt{\frac{g}{l}}$



(الشكل م-6-29)

م-6-57- (الفصل الثاني-2006-2007)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرصين A و B كتلة كل منهما m ، ونصف قطرهما R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي $(I_A = I_B = m.R^2/2)$، وقضيب AB طوله l ، وكتلته m أيضاً، ومركز ثقله G يقع في منتصفه، وعزم عطالته حول مركز ثقله $(I_G = m.l^2/12)$، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-29).

تبدأ الجملة حركتها من السكون من الوضع $(\theta = 45^o)$ بدحرجة القرص A بدون انزلاق على مستوي شاقولي خشن ودحرجة القرص B بدون انزلاق على مستوي أفقي خشن. المطلوب، عند الوضع $(\theta = 0^o)$، إيجاد سرع عناصر الجملة V_O , ω_A , ω_{AB} , ω_B , V_B , V_G .

الجواب: $V_B = w_B = 0$, $V_G = 0.289\sqrt{l.g}$, $V_A = 1.157\sqrt{l.g}$, $w_A = 1.157\sqrt{\frac{l.g}{R^2}}$, $w_{AB} = 1.157\sqrt{\frac{g}{l}}$

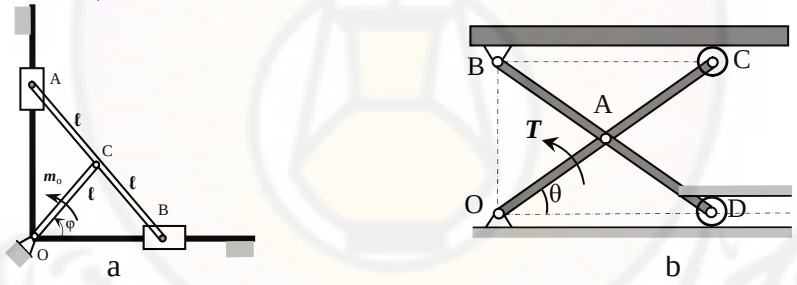
م-6-58- (الفصل الأول-2007-2008)

تتكون آلية رسم قطع ناقص التي تقع في مستوي أفقي من المرفق (OC = l) كتلته مهملة، ومن قضيب (AB = $2l$) كتلته M ، وعزم عطالته حول مركز ثقله C الذي يقع في منتصفه هو ($I_C = M.l^2/3$)، ومن منزلقتين A و B كتلة كل منهما ($m_A = m_B = m$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-30).

يدار المرفق OC حول المسند الثابت O من الوضع الساكن ($\varphi = 0$) بتطبيق عزم ثابت $\boldsymbol{m_O}$ عليه. المطلوب:

1. عند الوضع φ ، أوجد المركز الآني لدوران القضيب AB ، ومن ثم علاقة سرعة كل من طرفيه A و B ، وسرعة مركز ثقله C .
2. عند الوضع ($\varphi=\pi/2$)، أوجد السرعات الزاوية w_{AB}, w_{OC} لكل من المرفق OC ، والقضيب AB ، والسرع الخطية V_A, V_B لكل من المنزلقتين A و B ، وذلك بعد إهمال كتلة المرفق OC ، وقوى الاحتكاك.

الجواب: $V_B = \sqrt{\dfrac{3p}{3m+M}m_O}$, $V_A = 0$, $w_{OC} = w_{AB} = \sqrt{\dfrac{3p}{4l^2(3m+M)}m_O}$



(الشكل-6-30)

م-6-59- (الفصل الأول-2008-2009)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على لوح كتلته (M = 2m)، وعلى قضيبين متشابهين الأول OC ، والثاني DB . يتصف كل منهما بكتلة m وطول l ، وعزم عطالة حول مركز الثقل A قدره ($I_A = m.l^2/12$). يتمفصلان بعضهما مع بعض في مركزهما الهندسي والثقلي A ، ويتمفصل القضيب الأول بأحد أطرافه O مع الأرض الأفقية والطرف الآخر منه C يتمفصل بمركز دولاب صغير مهمل يتدحرج على أسفل اللوح، ويتمفصل القضيب الثاني بأحد أطرافه B مع اللوح والطرف الآخر منه D يتمفصل بمركز دولاب صغير مهمل يتدحرج على الأرض الأفقية، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-30).

يطبق على القضيب OC عزم ثابت قدره $(M_O^e = m.g.l)$ من الوضع $(\theta = 0)$ باتجاه عكس حركة عقارب الساعة. المطلوب إيجاد السرعة الزاوية لكل من القضيبين w_{OC}, w_{BD} ، والسرعة الخطية V_B, V_A لـــ A و B عند الوضع $(\theta = 60^o)$.

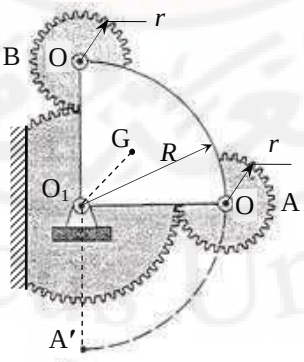
الجواب: $w_{OC} = w_{BD} = 0.632\sqrt{g/l}$, $V_B = V_A = 0.316\sqrt{g.l}$

م-6-60- (الفصل الأول-2010-2011)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على مسننين A و B نصف قطر كل منهما r وكتلته m وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من O هو $(I_O = m.r^2/2)$، يربط مركزاهما بصفيحة على شكل ربع قرص دائري مركزها O_1 ونصف قطرها $(R = 4r)$، وكتلتها $(M = 2m)$، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O_1 هو $(I_{O1} = M.R^2/2)$، ومركز كتلتها G يبعد عن O_1 بمقدار $(O_1G = 4\sqrt{2}R/3p)$ الذي يميل بزاوية 45^o على الأفق، قابلة للدوران حول المحور المار من المركز O_1 لمسنن ثابت يتدحرج عليه كل من المسننين A و B ، كما هو مبين في (الشكل م-6-31).

إذا بدأت الجملة حركتها من السكون عندما كان المسنن A في الوضع الموضح في الشكل. المطلوب إيجاد سرعات عناصرها V_O , ω , ω_1 عندما يصل المسنن A إلى الوضع A' .

الجواب: $V_O = \sqrt{\frac{6p+32}{3p}.g.r}$, $w = \sqrt{\frac{6p+32}{3p}.\frac{g}{r}}$, $w_1 = \sqrt{\frac{3p+16}{24p}.\frac{g}{r}}$



(الشكل م-6-31)

م-6-61- (الدورة الامتحانية الثالثة-2011-2012)

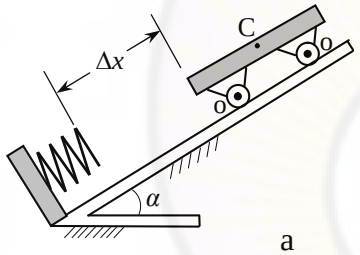
تتحرك عربة من السكون إلى أسفل المستوي الخشن المائل بزاوية α ، بحيث تتدحرج دواليبها الأربعة عليه، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-32).

فإذا كان وزن هيكل العربة يساوي ($W_1 = M.g$)، ووزن كل دولاب من دواليبها الأربعة يساوي ($W_2 = m.g$)، ونصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O يساوي ($I_O = 0.5\ m\ R^2$). المطلوب ايجاد:

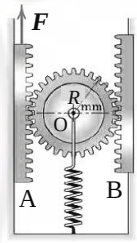
1. علاقة سرعة العربة V لحظة تماسها بالنابض بدلالة المسافة التي تقطعها Δx .
2. القيمة العددية لعامل صلابة النابض k :

إذا كان الانضغاط الأعظمي له ($\Delta l = 10$ cm) الناتج من انضغاط العربة عليه، مع اعتبار ($W_1 = 180$ N) ، ($W_2 = 20$ N) ، ($\alpha = 30^o$) ، ($\Delta x = 4$ m).

الجواب: $V = \sqrt{\dfrac{2g(W_1 + 4W_2)}{W_1 + 6W_2}.\sin a.\Delta x}$, $k = 106.6$ kN/m



a



b

(الشكل م-6-32)

م-6-62- (الفصل الثاني-2003-2004)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على مسنن مستقيم A كتلته m_A قابل للحركة، بينما المسنن المستقيم B فهو ثابت. يتعاشقان مع مسنن دائري كتلته m ، ونصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = 0.5\ m\ R^2$)، ويرتبط مركزه O مع نابض بطوله الحر عامل صلابته k ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-32).

إذا تحرك المسنن المستقيم A من السكون تحت تأثير القوة F . المطلوب إيجاد سرعة كل من مركز المسنن الدائري V_O ، وسرعته الزاوية ω ، والمسنن المستقيم V_A بعد انتقاله مسافة ΔA .

الجواب: $V_A = \sqrt{\dfrac{2}{8m_A + 3m}.[(8F - 8W_A - 4W)\Delta A - k.\Delta A^2]}$, $w = \dfrac{V_A}{2R}$, $V_O = \dfrac{V_A}{2}$

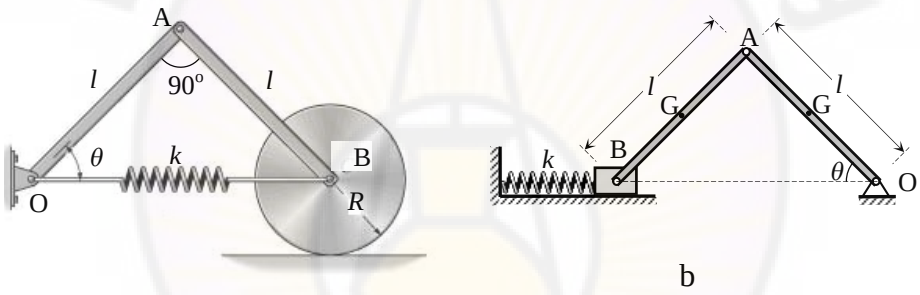
م-6-63- (الفصل الأول-2011-2012)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرص كتلته (M = 30 kg)، ونصف قطره (R =20 cm)، وعلى وصلتين OA و AB كتلة كل منهما (m = 20 kg)، وطولها (l = 60 cm)، وعزم عطالتها حول أحد أطرافها هو $m.l^2/3$ ، وعلى نابض عامل مرونته (k = 1 kN/m)، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-33).

يبدأ القرص بالتدحرج من السكون من الوضع المحدد بالزاوية θ ، عندها كانت الزاوية المحصورة بين الوصلتين في B قائمة، وكان النابض بطوله الحر.

فإذا كان الاحتكاك كافياً لمنع القرص من الانزلاق على السطح الأفقي. المطلوب، عندما تصبح الزاوية (θ =0)، إيجاد القيمة العددية لسرعات عناصر الجملة w_{OA}, w_{AB}, w, V_B.

الجواب: $w_{OA} = w_{AB} = 3\,\text{rad/sec}$, $w = 0$, $V_B = 0$



b

(الشكل م-6-33)

م-6-64 (الفصل الأول-2006-2007)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قضيبين متشابهين كل منهما طوله l ، وكتلته m ، وعزم عطالته حول أحد أطرافه $m.l^3/3$ ، يتمفصلان مع بعض في A ، ويتمفصل الأول بمسند ثابت O ، والآخر بجسسم B كتلته M قابل للانزلاق على مستوى أفقي أملس، ويمس نابض بطوله الحر عامل صلابته k ، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-33).

تبدأ الجملة حركتها من السكون تحت تأثير قوى الثقالة من الوضع المحدد بالزاوية ($\theta = 45^o$). المطلوب عندما يصبح القضيبان في وضع أفقي، إيجاد سرع عناصر الجملة w_{OA}, w_{AB}, V_B.

الجواب: $w_{OA} = w_{AB} = (2.12\, g/l) - (0.52\, k/m)$, $V_B = 0$

م-6-65- (الفصل الأول-2013-2014)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على دولاب كتلته ($m_1 = 30$ kg)، ونصف قطره ($R = 150$ mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = m_1.R^2/2$)، وعلى منزلقة B كتلتها ($m_3 = 7$ kg)، وعلى وصلة متجانسة تصل بين الدولاب والمنزلقة OB كتلتها ($m_2 = 10$ kg)، وطولها (375 mm)، وعلى نابض عامل صلابته ($k = 1$ kN/m). كما هو مبين في a من (الشكل م-6-34).

تبدأ المنزلقة B بالانزلاق من السكون دون احتكاك على الدليل الرأسي الأملس الثابت عندما كانت الوصلة OB محددة بالزاوية ($\theta = 30^o$)، والنابض بطوله الحر. المطلوب فيما إذا كان الاحتكاك بين الدولاب والأرض الأفقية كافياً لمنع الدولاب من الانزلاق، إيجاد القيمة العددية لسرع عناصر الجملة w_{OB}, w, V_B, V_O، عندما تصبح الوصلة OB في وضع أفقي ($\theta = 90^o$).

الجواب: $w_{OB} = 5.33\,\text{rad/sec}$, $V_B = 2\,\text{m/sec}$, $w = 0$, $V_O = 0$



(الشكل م-6-34)

م-6-66- (الفصل الأول-2005-2006)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على دولاب كتلته ($m_1 = 30$ kg)، ونصف قطره ($R = 150$ mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي ($I_O = m_1.R^2/2$)، وعلى جلبة B كتلتها ($m_3 = 7$ kg)، وعلى وصلة متجانسة OB تصل بين الدولاب والجلبة كتلتها ($m_2 = 10$ kg)، وطولها ($l = 375$ mm) ، وعلى نابض عامل صلابته ($k = 30$ kN/m)، كما هو مبين في b من (الشكل م-6-34).

تبدأ الجلبة بالانزلاق من السكون دون احتكاك على العمود الرأسي الثابت من الوضع المحدد بالزاوية ($\theta = 45^o$)، فإذا كان الاحتكاك بين الدولاب والأرض الأفقية الثابتة كافياً لمنع الدولاب من الانزلاق. المطلوب إيجاد:

1. سرعة الجلبة B لحظة تماسها بالنابض عندها تصبح الوصلة OB في وضع أفقي ($\theta = 0^o$).
2. عامل صلابة النابض k إذا كان الانضغاط الأعظمي له هو ($\Delta l = 60$ mm) الناتج من حركة الجلبة عليه.

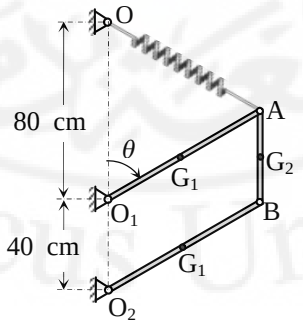
الجواب: $V_O = 0$, $w = 0$, $V_B = 2.46\,\text{m/sec}$, $w_{OB} = 6.56\,\text{rad/sec}$

م-6-67- (الفصل الأول-2014-2015)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قضيبين متجانسين متشابهين يتصف كل منهما بأن كتلته ($m_1 = 4$ kg)، وطوله ($l_1 = 80$ cm)، وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو ($m_1.l_1^2/3$)، وعلى قضيب ثالث متجانس كتلته ($m_2 = 2$ kg)، وطوله ($l_2 = 40$ cm) متمفصل مع القضيبين في A و B ، وعلى نابض طوله الحر ($l_0 = 80$ cm)، وعامل صلابته ($k = 100$ N/m)، مرتبط طرفه عند A ، وطرفه الآخر بالمسند الثابت O . كما هو مبين في (الشكل م-6-35).

تبدأ الجملة حركتها من السكون بتأثير قوى الثقالة عندما كان القضيب O_1A محدد بالزاوية ($\theta = 60^o$)، والنابض بطوله الحر. فإذا علمنا أن مراكز كتل القضبان الثلاثة تقع في منتصف أطوالها، المطلوب إيجاد سرع عناصر الجملة $V_{G_1}, V_{G_2}, w_{O_2B}, w_{O_1A}$ ، عندما يصبح القضيب O_1A بوضع أفقي ($\theta = 90^o$).

الجواب: $V_{G_2} = 2V_{G_1} = 2.782\,\text{m/sec}$ $w_{O_1A} = w_{O_2B} = 3.477\,\text{rad/sec}$



(الشكل م-6-35)

م-6-68

تبدأ الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي المبينة في (الشكل م-6-36) حركتها من السكون بتأثير قوى الثقالة بانزلاق الجسم 1 إلى أسفل السطح الخشن المائل بزاوية β على الأفق. فإذا كان:

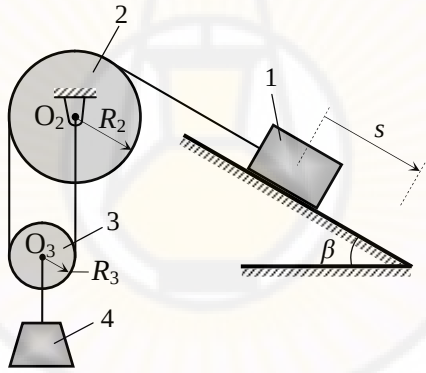
$$M_1 = M \quad , \quad M_2 = 4M \quad , \quad M_3 = M/5 \quad , \quad M_4 = 4M/3$$

وكان:

$$I_{O_2} = 0.5 M_2 R_2^2 \quad , \quad I_{O_3} = 0.5 M_3 R_3^2 \quad , \quad f_k = 0.1 \quad , \quad \beta = 60^o$$

المطلوب إيجاد سرعة الجسم 1 بعد أن ينتقل مسافة قدرها $s = 2$ m .

الجواب: $$V_1 = \sqrt{\frac{12\ g\ .\ s}{409}} = 0.76 \text{ m / sec}$$



(الشكل م-6-36)

الفصل السابع

تحريك الأجسام الصلبة
Kinetics of Rigid Bodies

1- مقدمة *Introduction*

من تطبيق المبادئ العامة على تحريك الجسم الصلب خلال حركته المستوية، يتم إيجاد العلاقات التي تربط بين القوى المؤثرة على الجسم الصلب من جهة وشكل الجسم الصلب وكتلته والحركة الناتجة من جهة ثانية، تدعى هذه العلاقات بـــ معادلات الحركة.

سيقتصر التطبيق على الأجسام الصلبة المتناظرة والمتجانسة ذات الحركة المستوية ثنائية الأبعاد، أي: تلك التي تتحرك نقاطها كافة في مستويات موازية لمستوى إسناد ثابت يدعى مستوى الحركة، وذلك لأن حركة معظم الأجسام هي من هذا النوع. يمكن لهذه الحركة أن تكون انسحابية، أو دورانية حول محور ثابت مار من الجسم أو مستوية عامة، والتي يكفي لدراستها دراسة حركة المقاطع العرضية المستوية لها (*Plane Slabs*).

أما دراسة حركة الأجسام الصلبة الفراغية ذات ثلاثة أبعاد وغير المتناظرة، وبالأصح الشكل الأعم لحركة الأجسام الصلبة في الفراغ بمجموعة الإحداثيات الثلاثية القائمة، فسيتم مناقشتها في إصدارات تعليمية أخرى، مع الإشارة إلى أن أغلب الأسس والمفاهيم المعتمدة في دراسة الحركة المستوية؛ هي ذات فائدة كبيرة في تحليل أنماط الحركة الفراغية.

2- معادلات الحركة المستوية لجسم صلب
Plane Motion Equations for rigid body

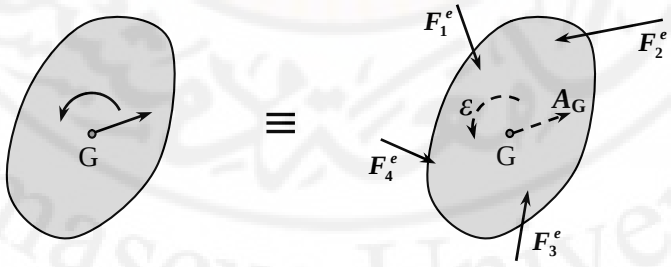
لتحديد موضع جسم صلب في مستوى حركته نحتاج إلى قيم ثلاث إحداثيات، ويتم هذا التحديد بمعرفة موضع كل نقطة على الجسم إذا علم إحداثيات مركز الكتلة، أو أي نقطة أخرى ملائمة، والوضع الزاوي للجسم نسبة إلى النقطة المختارة، بالتالي تتطلب الحركة المستوية لوصفها ثلاث معادلات غير اتجاهية مستقلة.

نعدّ جسماً صلباً يتحرك حركة مستوية تحت تأثير قوى خارجية $\boldsymbol{F}_{\mathbf{n}}^{\boldsymbol{e}},....,\boldsymbol{F}_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{e}},\boldsymbol{F}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{e}}$ فيكتسب كل جسيم مادي منه كتلته m_k تسارع قدرة $\boldsymbol{A_k}$ ، فمن العلاقة الأساسية لتحريك كل جسيم من جسيمات الجسم، وبجمع هذه العلاقات طرفاً لطرف نحصل على:

$$\sum m_k . \boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F}_k^e \qquad (1\text{-}7)$$

فالقوى الخارجية $\sum \boldsymbol{F}_k^e$ تكافئ مجموع القوى الفعالة لمختلف الجسيمات المادية $\Sigma m_k.\boldsymbol{A_k}$ (*Effective Forces*)، وبما أن حركة الجسم مستوية، فدراسة حركة مقطع عرضي منه مار في مركز كتله كافية لدراسة حركته، ويتم ذلك بنقل مجموعة القوى الفعالة المؤثرة في جسيمات الجسم إلى مركز الكتل، وتعويضها بمجموعة مكافئة مؤلفة من متجه ومزدوجة تؤثر في مركز الكتل، حيث المتجه يساوي إلى محصلة مجموع القوى الفعالة كافة الناتجة في مختلف الجسيمات المادية، أما عزم المزدوجة فيساوي محصلة عزوم القوى الفعالة كافة هذه حول مركز الكتل.

يوضح a من (الشكل-7-1) المجموعة المكافئة للقوى الفعالة، ويوضح b من (الشكل-7-1) مخطط الجسم الحر للجسم الصلب في حركة مستوية بتسارع زاوي ε ، وتسارع خطي لمركز الكتل $\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}}$ في لحظة معينة، ويشير (الشكل-7-1) إلى التساوي بين مجموعة القوى الخارجية؛ التي تولد الحركة المستوية للجسم الصلب، ومحصلات المجموعة المكافئة للقوى الفعالة، يمكننا من هذا التساوي كتابة المعادلات اللازمة التي تثبت العلاقات اللحظية بين القوى والتسارع لأي حركة مطلوبة.



المجموعة المكافئة للقوى الفعالة ≡ مجموعة القوى الخارجية

a b

(الشكل-7-1)

ونحصل على العلاقات التي يمكن بواسطتها تحديد معادلات حركة الجسم، من تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع مجموعة القوى الخارجية، وذلك بتطبيق المبادئ العامة على تحريك الجسم الصلب حسب حالات حركته المختلفة:

2-1- معادلات الحركة الانسحابية *Translation Motion Equations*

نعدّ جسماً صلباً يتحرك حركة انسحابية تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية $\boldsymbol{F}_{\mathbf{n}}^{\boldsymbol{e}},....,\boldsymbol{F}_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{e}},\boldsymbol{F}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{e}}$ ، فيكتسب كل جسيم مادي منه كتلته m_k تسارع قدرة $\boldsymbol{A_k}$ ، وفي الحركة الانسحابية تتحرك جسيمات الجسم بتسارعات خطية متساوية تساوي تسارع حركة مركز الكتل.

بالتالي فلأي جسيم من المقطع العرضاني له تكون $(\boldsymbol{A_k} = \boldsymbol{A_G})$، وتكون القوى الفعالة لمختلف الجسيمات المادية متساوية ومسايرة بعضها بعضاً، ونحصل على أن مجموع القوى الفعالة يساوي:

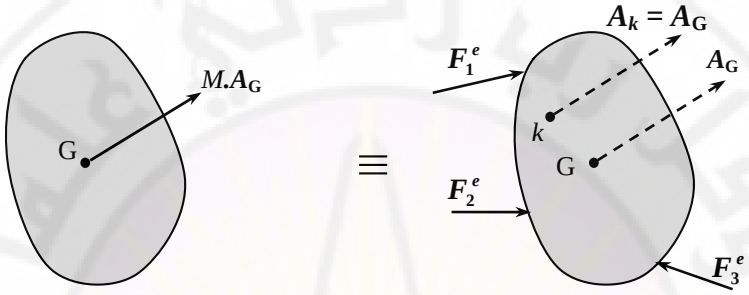
$$\sum m_k.\boldsymbol{A_k} = \sum m_k.\boldsymbol{A_G} = \boldsymbol{A_G}\sum m_k = M.\boldsymbol{A_G}$$

وعلى أن مجموع عزوم القوى الفعالة حول مركز الكتل معدوم، بالتالي تختصر مجموعة القوى الفعالة إلى متجه $M.\boldsymbol{A_G}$ يؤثر في مركز الكتل، وإلى عزم مزدوجة يساوي الصفر. عندئذ تؤول المجموعة المكافئة للقوى الفعالة المؤثرة في جسيمات جسم يتحرك حركة انسحابية إلى قوة وحيدة تدعى بـــ محصلة القوى الفعالة، وتحدد علاقتها استناداً إلى مبدأ حركة مركز الكتل:

$$M.\boldsymbol{A_G} = \sum \boldsymbol{F_k^e} \qquad (2\text{-}7)$$

وهكذا **فإن القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب الذي يتحرك حركة انسحابية، تكافئ فقط محصلة القوى الفعالة $M.\boldsymbol{A_G}$ الذي يمر من مركز الكتل G ، ومجموع عزمها حول مركز الكتل معدوم.**

يمثل (الشكل-7-2) مخطط الجسم الحر، ومخطط محصلة القوى الفعالة لجسم في حركة انسحابية على مسار مستقيم، حيث تتحرك جميع النقاط على خطوط مستقيمة، وكل خط على الجسم المتنقل يبقى موازياً لوضعه الأصلي في جميع الأوقات، وأن لمركز الكتلة G ولجميع الجسيمات k التسارع نفسه.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط محصلة القوى الفعالة

(الشكل-7-2)

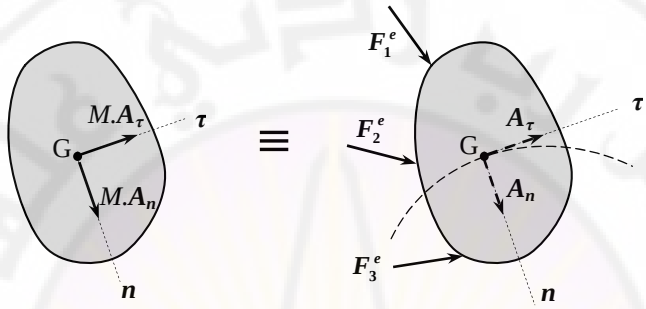
بمساواة المخططين، مع إسقاط العلاقة (7-2) على المحاور الإحداثية GXY لمستوى الحركة؛ نحصل على:

$$M.A_{GX} = \sum F_{kX}^e \quad , \quad M.A_{GY} = \sum F_{kY}^e \quad , \quad 0 = M_G^e \qquad (3\text{-}7)$$

والتي تكتب:

$$M.\ddot{x}_G = \sum F_{kX}^e \quad , \quad M.\ddot{y}_G = \sum F_{kY}^e \quad , \quad 0 = M_G^e \qquad (4\text{-}7)$$

يمثل (الشكل-7-3) مخطط الجسم الحر، ومخطط محصلة القوى الفعالة لجسم في حركة انسحابية على مسار منحن، حيث مركز الكتلة G وجميع الجسيمات تتحرك على مسارات منحنية متطابقة، وتمثل محصلة القوى الفعالة بمركباتها الناظمية $M.\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}}^{\boldsymbol{n}}$ والمماسية $M.\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}}^{\boldsymbol{\tau}}$.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط محصلة القوى الفعالة

(الشكل-7-3)

بمساواة المخططين، مع إسقاط العلاقة (2-7) على المحاور الإحداثية $\mathrm{G}\boldsymbol{\tau n}$ لمستوى الحركة؛ نحصل على:

$$M.A_{\mathrm{G}}^{t}=\sum F_{kt}^{e} \quad , \quad M.A_{\mathrm{G}}^{n}=\sum F_{kn}^{e} \quad , \quad 0=M_{\mathrm{G}}^{e} \qquad (5\text{-}7)$$

والتي تكتب:

$$M.\ddot{S}_{\mathrm{G}}=\sum F_{kt}^{e} \quad , \quad M.\frac{V_{\mathrm{G}}^{2}}{r_{\mathrm{G}}}=\sum F_{kn}^{e} \quad , \quad 0=M_{\mathrm{G}}^{e} \qquad (6\text{-}7)$$

إن أفضل اختيار لمركز العزم ذلك الذي يلغي معظم المجاهيل في معادلة العزم، وتعبر هذه العلاقات عن معادلات حركة الجسم الانسحابية، ويستفاد منها:

- إيجاد معادلات حركة الجسم أو مميزات حركته الخطية (V_G , A_G)، فيما إذا علمنا القوى الخارجية المؤثرة على الجسم.

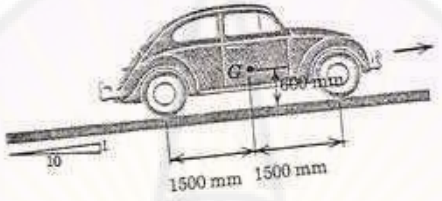
- إيجاد الحاصلة العامة للقوى الخارجية المؤثرة على الجسم، فيما إذا علمنا معادلات الحركة.

مسألة-7-1

سيارة كتلتها 1500 kg ، ومركز ثقلها G يرتفع عن الأرض مقدار 600 mm . وتبلغ سرعة مقدارها 50 km/h من السكون خلال مسافة 36 m متجهة إلى أعلى سطح مائل ذي ميل قدره 10% ، وبتسارع ثابت كما هو مبين في (الشكل-7-4).

فإذا كان معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق لا يقل عن 0.8 ، المطلوب إيجاد القوة العمودية تحت كل زوج من العجلات N_1 , N_2 ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}_{f_2}$ تحت العجلات الخلفية القائدة.

الحل:



(الشكل-7-4) سيارة تسير إلى أعلى سطح مائل.

لإيجاد القوى المؤثرة على العجلات الخلفية للسيارة، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على السيارة.

سنفرض أن كتلة العجلات مهملة مقارنة بالكتلة الكلية للسيارة، وأنه يمكن تمثيل السيارة بجسم صلب واحد حر خاضع للقوى العمودية N_1 و N_2 ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}_{f_2}$ باتجاه يعاكس انزلاق العجلات الخلفية القائدة، والوزن $(\boldsymbol{W}=m.\boldsymbol{g})$ الممثل بمركبتيه $m.\boldsymbol{g}.\cos\theta$ و $m.\boldsymbol{g}.\sin\theta$ ، بعد إهمال قوة الاحتكاك الأمامية $\boldsymbol{F}_{f_2}$ ، حيث:

$$q = \tan^{-1} 1/10 = 5.71^{o}$$

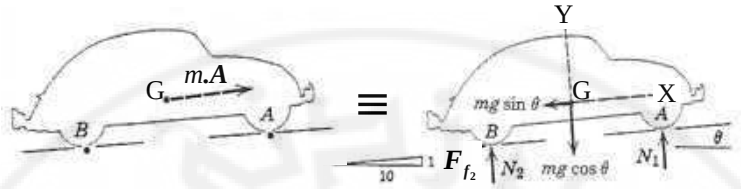
ويتحرك الجسم الصلب حركة انسحابية على مسار مستقيم وفق المعادلات:

$$m.\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F}_{f_2} \qquad \text{و} \qquad 0 = \boldsymbol{M}_{\mathrm{G}}^{e}$$

بتسارع خطي، يحسب من العلاقة:

$$V^2 = 2A.s \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V^2}{2s} = \frac{(50/3.6)^2}{2(36)} = 2.68 \text{ m/sec}^2$$

ويمثل (الشكل-7-4) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للسيارة.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط محصلة القوى الفعالة

(الشكل-7-4)

بمساواة المخططين، وبأخذ عزوم القوى حول نقطة التماس B ؛ نحصل على:

$$\sum M_{\mathrm{B}} \;\Rightarrow\; m.A\times 600 = m.g.\cos q\times 1500 - m.g.\sin\theta\times 600 - N_1\times 3000$$

منه:

$$N_1 = 6.22\times 10^3 \text{ N}$$

وبإسقاط علاقة القوى على المحور Y ؛ نحصل على:

$$0 = \sum F_{\mathrm{Y}} \;\Rightarrow\; 0 = N_2 + N_1 - m.g.\cos q \;\Rightarrow\; N_2 = 8.42\times 10^3 \text{ N}$$

وبإسقاطها على المحور X ؛ نحصل على:

$$m.A = \sum F_{\mathrm{X}} \;\Rightarrow\; m.A = F_{f_2} - m.g.\sin q \;\Rightarrow\; F_{f_2} = 5.48\times 10^3 \text{ N}$$

لمقاومة هذه القيمة من قوة الاحتكاك F_{f_2} ؛ نحتاج إلى معامل احتكاك f لا يقل عن:

$$f = F_{f_2} / N_2 = 5.48\times 10^3 / 8.42\times 10^3 = 0.65$$

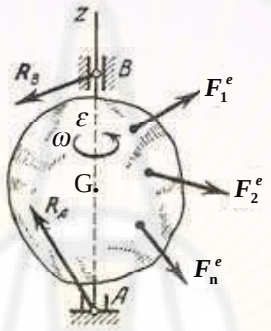
بما أن معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق لا يقل عن 0.8 ، بالتالي فإن خشونة السطح تكفي لتحقيق حالة التدحرج لعجلات السيارة.

أما إذا كان معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق أقل من 0.65 ، عندئذ تصبح قوة الاحتكاك $(F_{f_2} = f.N_2)$، وبالتالي تكون العجلات في حالة انزلاق، أو حالة على وشك الانزلاق، ولا تستطيع السيارة أن تبلغ التسارع $(A = 2.68 \text{ m/sec}^2)$.

2-2- معادلات الحركة الدورانية المركزية

Centroidal Rotation Motion Equations

نعدّ جسماً صلباً قادراً على الدوران بسرعة زاوية w ، وتسارع زاوي ε في لحظة معينة تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}^{e},....,\boldsymbol{F}_{2}^{e},\boldsymbol{F}_{1}^{e}$ ، حول محور ثابت Z مار في مركز كتله G ، عندئذ يقال: إن الجسم الصلب في حالة دوران مركزي، ويؤثر على الجسم إضافة للقوى الخارجية ردا فعل الاتصال $\boldsymbol{R}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{R}_{\mathbf{B}}$ مع المحور في المسندين A و B ، وهما قوتان مجهولتان (الشكل-7-5).



(الشكل7-5) جسم صلب يدور حول محور ثابت.

بما أن مركز الكتل G ثابت بسبب وقوعه على محور الدوران، فإن تسارعه معدوم، بالتالي بتطبيق علاقة حركة مركز الكتل تكون محصلة القوى الفعالة معدومة، ونحصل منها على علاقة توازن قوى $(\sum \boldsymbol{F}_{k}^{e}=0)$ يحسب منها مركبات قوة رد فعل المسند في مركز الكتل $R_{\mathrm{G_X}}, R_{\mathrm{G_Y}}$.

ونحصل على عزم المزدوجة المكافئة لعزم القوى الخارجية، بتطبيق مبدأ العزم الحركي لجملة بالنسبة لمحور الدوران Z ، حيث القوتان $\boldsymbol{R}_{\mathbf{A}}$ و $\boldsymbol{R}_{\mathbf{B}}$ تلاقيان المحور وعزمهما حوله معدومان، ومنه نحصل على:

$$\frac{d}{dt}K_{\mathbf{Z}}=\sum m_{\mathrm{Z}}(\boldsymbol{F}_{k}^{e})$$

بالتعويض ينتج:

$$\frac{d}{dt}(I_Z.w) = M_Z^e$$

$$I_Z.e = M_Z^e \qquad (7\text{-}7)$$

تعني هذه العلاقة أن جداء عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة لمحور الدوران بالتسارع الزاوي، يساوي إلى العزم الدوراني M_Z^e بالنسبة لهذا المحور، والصيغة الشعاعية لها:

$$I_Z.E = \boldsymbol{M_Z^e} \qquad (8\text{-}7)$$

حيث E يمثل متجه التسارع الزاوي؛ الذي ينطبق على محور الدوران باتجاه متجه العزم الدوراني $\boldsymbol{M_Z^e}$.

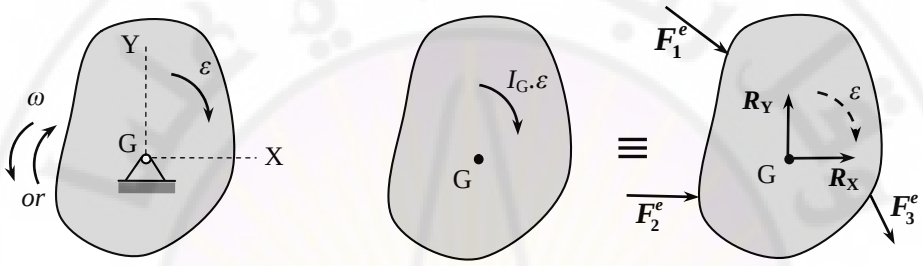
بالطبع لا يوجد أي مشاركة للقوى الداخلية في قيمة العزم؛ لأن عزمها بالنسبة لمحور الدوران معدوم نظراً لتواجدها على شكل قوى فعل ورد فعل بين الجسيمات المتجاورة، كما نلاحظ أن لا تأثير للسرعة الزاوية w على معادلة العزم حول المحور.

بالتالي تختصر مجموعة القوى الفعالة إلى مزدوجة حول محور الدوران المار من مركز الكتل؛ لأن مجموع القوى الفعالة كافة معدوم، بالتالي محصلة القوى الفعالة تساوي الصفر.

عندئذ تؤول **المجموعة المكافئة للقوى الفعالة المؤثرة في نقاط جسم يتحرك حركة دورانية مركزية، إلى عزم وحيد حول محور الدوران المار من مركز الكتل والعمودي على مستوى الحركة، ويدعى بمحصلة عزوم القوى الفعالة حول محور الدوران**، ويحدد استناداً إلى علاقة العزم (7-8).

وهكذا فإن القوى الخارجية المؤثرة على جسم يدور مركزياً، يكون مجموعها معدوماً، وعزمها حول محور الدوران يكون مكافئاً لمزدوجة عزمها $I_Z \,.\, \varepsilon$ حول محور الدوران.

يمثل a من (الشكل-7-6) مقطعاً عرضياً للجسم خلال حركته الدورانية المركزية، ويمثل b من (الشكل-7-6) مخطط الجسم الحر، ومخطط المزدوجة المكافئة للقوى الفعالة في المقطع العرضي للجسم، ويُظهر مخطط الجسم الحر $\boldsymbol{R}_{\mathbf{X}}$ و $\boldsymbol{R}_{\mathbf{Y}}$ مركبات القوة لرد فعل المسند في مركز الكتلة G ، وجميع القوى الخارجية الأخرى المؤثرة على الجسم، بينما يُظهر مخطط المزدوجة المكافئة للقوى الفعالة العزم المحصل حول مركز الكتل.



a-مقطع يتحرك حركة دورانية مركزية ، b- مخطط الجسم الحر≡ مخطط المزدوجة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-6)

وبمساواة المخططين مع إسقاط العلاقات التي تربط بينهما على المحاور الإحداثية؛ نحصل على:

$$I_G.e = M_G^e \quad , \quad 0 = \sum F_{kX}^e \quad , \quad 0 = \sum F_{kY}^e \qquad (9\text{-}7)$$

كما تكتب العلاقة (7-7)، بالشكل:

$$I_Z.\ddot{\varphi} = M_Z^e \qquad (11\text{-}7)$$

هذه العلاقة تمثل المعادلة التفاضلية للحركة الدورانية للجسم، حيث نلاحظ منها أنه في الحالة العامة يكون العزم الدوراني M_Z^e تابعاً للزمن t ، ولزاوية الدوران φ ، والسرعة الزاوية $(w = \dot{\varphi})$، ويستفاد منها ما بإيجاد:

- معادلة حركة دوران الجسم الصلب $[j = f(t)]$ أو مميزات حركته $(w \ , \ \varepsilon)$، إذا علمنا العزم الدوراني M_Z^e حول محور الدوران.

- العزم الدوراني M_Z^e حول محور الدوران، إذا علمت معادلة الحركة $[j = f(t)]$.

وتبين العلاقة (7-11) انه من أجل عزم دوراني ثابت $(M_Z^e = \text{Const.})$، يكون التسارع الزاوي ε كبيراً بقدر ما يكون عزم العطالة I_Z صغيراً، والعكس بالعكس، بالتالي يمثل عزم العطالة في الحركة الدورانية دور الكتلة في الحركة الانسحابية، فهو يقيس إذاً عطالة الجسم في حركته الدورانية.

ونميز الحالتين الخاصتين:

- إذا كان العزم الدوراني معدوماً $(M_Z^e = 0)$ نتج أن التسارع الزاوي معدوم $(\varepsilon = 0)$، ومنه السرعة الزاوية ثابتة $(w = \text{Const.})$، أي: أن الدوران ثابت.

- إذا كان العزم الدوراني ثابتاً $(M_Z^e = \text{Const.})$ نتج أن التسارع الزاوي ثابت $(\varepsilon = \text{Const.})$، ومنه الدوران متغير بانتظام.

كما يمكن أيضاً إيجاد علاقة المزدوجة المكافئة لعزوم القوى الفعالة حول محور الدوران المار من مركز الكتل، بتطبيق علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية على الجسم خلال حركته الدورانية:

$$E_c^1 - E_c^0 = w^e$$

بالتعويض:

$$\frac{1}{2} I_Z . w^2 = \int_0^j M_Z^e . dj$$

بالتعويض فيما إذا كان العزم الدوراني ثابتاً $(M_Z^e = \text{const})$؛ نحصل على:

$$\frac{1}{2} I_Z . w^2 = M_Z^e . j$$

بالاشتقاق بدلالة الزمن؛ نحصل على:

$$I_Z . e = M_Z^e$$

وهي علاقة المزدوجة المكافئة.

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية (7-11) تشبه مثيلتها للحركة المستقيمة لجسيم مادي، وطريقة حلها تماثل تماماً طريقة حل حركة الجسيم المادي، وتستعمل بكثرة في حل المسائل التي تكون فيها الجملة الدائرة مؤلفة من جسم صلب واحد. أما إذا كانت الجملة مؤلفة من عدد من الأجسام الصلبة تدور كلها حول محور ثابت OZ ، وجب عندها استعمال المبادئ العامة لحل المسألة.

مسألة-7-2

تبدأ أسطوانة شاقولية بالدوران من السكون حول محورها الهندسي الثابت OZ تحت تأثير عزم دوار M_Z^e .

إذا كان عزم عطالتها حول محورها هو I_Z ، وكان الهواء يؤثر عليها أثناء الحركة بعزم مقاوم للحركة يتناسب مع السرعة الزاوية وفق العلاقة $(M_Z^r = k.w)$. المطلوب إيجاد معادلة السرعة الزاوية $\omega_{(t)}$ للأسطوانة مع الزمن.

الحل:

تحدد السرعة الزاوية للحركة الدورانية للأسطوانة، من المعادلة التفاضلية لحركتها:

$$I_Z.e = M_Z^e - M_Z^r \qquad \Rightarrow \qquad I_Z \frac{dw}{dt} = M_Z^e - k.w$$

نرمز لـــ $(k/I_Z = n)$، فيكون:

$$-\frac{k}{M_Z^e - k.w} dw = -n.dt$$

نكامل طرفي المعادلة تكاملاً محدوداً بالنهايات المناظرة؛ فنحصل على:

$$-\int_0^w \frac{k}{M_Z^e - k.w}\, dw = -n\int_0^t dt$$

ومنها ينتج أن:

$$\ln\frac{M^e - k.w}{M^e} = -n.t$$

منه:

$$\frac{M^e - k.w}{M^e} = e^{-nt}$$

ومنه؛ نحصل على علاقة السرعة الزاوية:

$$w_{(t)} = \frac{M^e}{k}(1 - e^{-nt})$$

وتزداد السرعة الزاوية ω مع الزمن t ، وتتناهى عندما $(t = \infty)$ إلى قيمة حدية:

$$w_{cr} = \frac{M^e}{k}$$

مسألة-7-3- (الفصل الثاني-1994-1995)

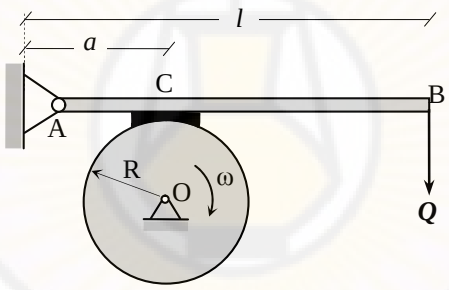
قرص وزنه ($W = m.g$) نصف قطره R وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من O هو ($I_O = M.R^2/2$). يدور محوره الهندسي في O بسرعة زاوية w . توقف حركة القرص بواسطة الذراع المكبحي AB المهمل الوزن الموضح في a من (الشكل-7-7) عن طريق الضغط في B بقوة ثابتة Q .

فإذا كان معامل الاحتكاك للجسمين f . المطلوب إيجاد عدد دورات القرص n حتى يتوقف، مهملاً الاحتكاك في المساند.

الحل:

لإيجاد عدد الدورات n التي يدورها القرص قبل أن يتوقف، نحسب الزاوية θ التي يدورها القرص، التي تعطي بـــ:

$$q = 2p\,.n \qquad \Rightarrow \qquad n = q\,/\,2p$$



(الشكل7-7) قرص مع ذراع مكبحي AB .

ونظراً لأن حركة القرص دورانية متباطئة بانتظام ($\varepsilon_1.w_1 < 0$) خلال الفرملة، فإنه يمكن حساب الزاوية θ من العلاقة:

$$w_1^2 - w_0^2 = -2e_1.q$$

حيث w_0 تمثل السرعة الزاوية لحظة الفرملة $(w_0 = w)$.

و w_1 تمثل السرعة الزاوية في نهاية فترة الفرملة $(w_1 = 0)$.

بالتعويض:

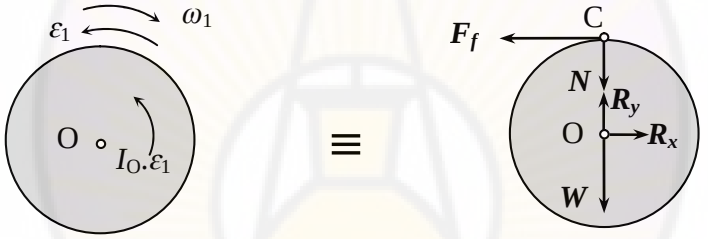
$$q = w^2\,/\,2e_1$$

حيث ε_1 تمثل التسارع الزاوي للقرص بعد الفرملة، ويحسب من تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على القرص بعد تحريره من قيوده، والخاضع عندئذ لوزنه $\boldsymbol{W}$ في مركز ثقله O ، ولقوة رد الفعل في نقطة التماس C التي تحلل إلى قوة ناظمية $\boldsymbol{N}$ وقوة احتكاك $\boldsymbol{F_f}$ ، ورد الفعل $\boldsymbol{R_O}$ الممثل بمركبتيه $\boldsymbol{R_X}$ و $\boldsymbol{R_Y}$ في مركز الدوران O ، والذي يتحرك حركة دورانية مركزية وفق العلاقتين:

$$0 = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F_f} + \boldsymbol{R_X} + \boldsymbol{R_Y}$$

$$I_O.E = \boldsymbol{M}_O^e$$

ويمثل (الشكل-7-8) مخطط الجسم الحر، ومخطط المزدوجة المكافئة للقوى الفعالة للقرص.



مخطط الجسم الحر للقرص ≡ مخطط المزدوجة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-8)

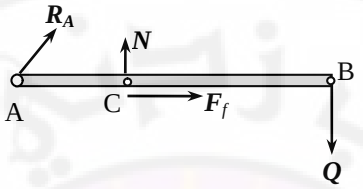
بمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة العزم على محور الدوران، وليكن Z المار من O ، والعمودي على مستوى الحركة؛ نحصل على:

$$\frac{1}{2}M.R^2.e_1 = F_f.R \quad \Rightarrow \quad e_1 = \frac{2F_f}{R.W}g$$

حيث F_f قوة الاحتكاك المماسية الفاعلة في نقطة التماس، وتساوي في حالة التدحرج مع انزلاق:

$$F_f = f_k.N$$

و $\boldsymbol{N}$ القوة الناظميه، وتحسب من دراسة الذراع المكبحي المتزن دوماً خلال الحركة تحت تأثير القوى المؤثرة عليه، وهي رد الفعل $\boldsymbol{R_A}$ في A ، القوة الضاغطة $\boldsymbol{Q}$ ، ومركبتا رد الفعل $\boldsymbol{N}$ و $\boldsymbol{F_f}$ في نقطة التماس C ، كما هي موضحة في (الشكل-7-9).



(الشكل-7-9) مخطط الجسم الحر للذراع المكبحي AB

نحسب $\boldsymbol{N}$ من اتزان الذراع المكبحي:

$$\sum m_{\mathrm{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad N.a - Q.l = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{l}{a} Q$$

ومنه، قوة الاحتكاك المماسية:

$$F_f = f_k.N = \frac{f_k.l}{a} Q$$

ومنه، التسارع الزاوي للقرص بعد الفرملة:

$$e_1 = \frac{2\, f_k.l.Q}{a.R.W} g = \mathrm{Const.}$$

ومنه، عدد الدورات:

$$n = \frac{a.R.w^2.W}{8p\,.\,f_k.l.g.Q}$$

ويمكن إيجاد قيمتي مركبتي رد الفعل في O بإسقاط علاقة القوى على محورين متعامدين:

$$\sum F_{\mathrm{X}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{X}} - F_f = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{X}} = F_f = f\,.N = \frac{f\,.l}{a} Q$$

$$\sum F_{\mathrm{Y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{Y}} - W - N = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{Y}} = W + N = W + \frac{l}{a} Q$$

3-2- معادلات الحركة المستوية العامة *General Plane Motion Equations*

نعدّ جسماً صلباً يتحرك حركة مستوية عامة بسرعة زاوية w ، وتسارع زاوي ε في لحظة معينة تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}^{e},....,\boldsymbol{F}_{2}^{e},\boldsymbol{F}_{1}^{e}$ ، فيكتسب كل جسيم مادي منه كتلته m_k تسارع قدرة $\boldsymbol{A_k}$.

في الحركة المستوية العامة يتحدد وضع المقطع العرضي منه المار من مركز الكتل في كل لحظة t ، بوضع قطب وبزاوية دوران المقطع العرضي حول هذا القطب، ويسهل حل مسائل التحريك عندما نختار القطب منطبقاً على مركز الكتل G ، عندها يتحدد وضع المقطع بالإحداثيات x_{G} و y_{G} ، والزاوية φ لميل أي مستقيم على الأفق مار من مركز الكتل.

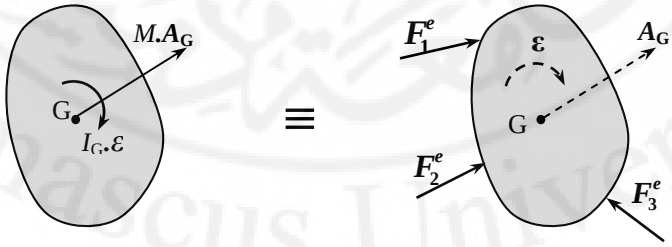
وبالتالي فلأي جسيم من جسيمات المقطع له تسارع خطي لحركته الانسحابية يساوي تسارع حركة مركز الكتل، وتسارع زاوي لحركته الدورانية حوله، عندها تحلل حركة المقطع بـــ حركة انسحابية تتحدد بعلاقة حركة مركز الكتل:

$$M.\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}}=\sum \boldsymbol{F}_{k}^{e}$$

حركة دورانية حول مركز الكتل تتحدد بعلاقة العزم:

$$I_{\mathrm{G}}.E=\boldsymbol{M}_{\mathrm{G}}^{e}$$

عندئذ **تؤول المجموعة المكافئة للقوى الفعالة المؤثرة في جسيمات جسم يتحرك حركة مستوية عامة، إلى قوة وحيدة $M.\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}}$ تؤثر في مركز الكتل $\boldsymbol{G}$ ، وتمثل محصلة القوى الفعالة، وإلى عزم وحيد $I_{\mathrm{G}}.E$ حول محور الدوران الآني المار من مركز الكتل والعمودي على مستوى الحركة، ويمثل محصلة عزوم القوى الفعالة حول هذا المحور.**



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-10)

وهكذا نتوصل إلى النتيجة التالية بأن مجموعة القوى الخارجية تكون مكافئة للمتجه $M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}}$ المؤثر في المركز G ، وإلى المزدوجة $I_G.E$ حول محور الدوران المار منه ، كما هو مبين في (الشكل-7-10).

في الحركة المستوية العامة يجب ملاحظة فيما إذا كانت الحركة مقيدة أو غير مقيدة، ففي حالة الحركة غير مقيدة يمكن إيجاد التسارع الخطي والزاوي بشكل مستقل لا يعتمد أحدهما على الآخر، وبعد إسقاط العلاقة الأولى على محوري مستوى الحركة X و Y، والعلاقة الثانية على محور الدوران Z العمودي على مستوى الحركة؛ نحصل على:

$$M.A_{GX}=\sum F^{e}_{kX}\quad ,\quad M.A_{GY}=\sum F^{e}_{kY}\quad ,\qquad I_G.e=M^{e}_{G} \tag{12-7}$$

وتكتب بشكل آخر:

$$M.\text{[illegible]}_{G}=\sum F^{e}_{kX}\quad ,\quad M.\text{[illegible]}_{G}=\sum F^{e}_{kY}\quad ,\qquad I_G.\text{[illegible]}=M^{e}_{G} \tag{13-7}$$

وفي حالة الحركة المقيدة حيث نعلم مسار مركز الكتل، فمن الضروري إيجاد علاقة حركية بين التسارع الخطي والزاوي، وإدخالها في معادلات القوة والعزم للحركة، التي تنتج بإسقاط العلاقة الأولى على المماس والناظم الأساسي من الثلاثية المتحركة، والعلاقة الثانية على محور الدوران Z العمودي على مستوى الحركة؛ نحصل على:

$$M.A^{t}_{G}=\sum F^{e}_{kt}\quad ,\quad M.A^{n}_{G}=\sum F^{e}_{kn}\quad ,\qquad I_G.e=M^{e}_{G} \tag{14-7}$$

وتكتب بشكل آخر:

$$M\frac{dV_G}{dt}=\sum F^{e}_{kt}\quad ,\quad M\frac{V^2_G}{r_G}=\sum F^{e}_{kn}\quad ,\qquad I_G.\text{[illegible]}=M^{e}_{G} \tag{15-7}$$

حيث يتضمن الطرف الأيمن من هذه العلاقات ردود الأفعال المجهولة، التي ينبغي تعيينها من شروط الحركة، كما يفضل بعض الأحيان اللجوء إلى علاقة تغير الطاقة الحركية؛ بدلاً من العلاقات الأخيرة في إيجاد معادلات الحركة المستوية العامة للجسم الصلب المقيد.

تعبر هذه العلاقات عن معادلات حركة الجسم المستوية العامة، ويستفاد منها:

- إيجاد معادلات حركة الجسم أو مميزات الحركة، فيما إذا علمنا القوى الخارجية المؤثرة على الجسم.

- إيجاد المحصلة العامة للقوى، وعزمها المحصل بالنسبة للمحور الآني للدوران، فيما إذا علمنا معادلات الحركة.

إن النتائج التي حصلنا عليها تبقى صحيحة في حالة الجسم الصلب المتناظر بالنسبة للمستوى، ولكن هذه النتائج لا تكون صحيحة في حالة الجسم الصلب ذي الأبعاد الثلاثة، وغير المتناظرة.

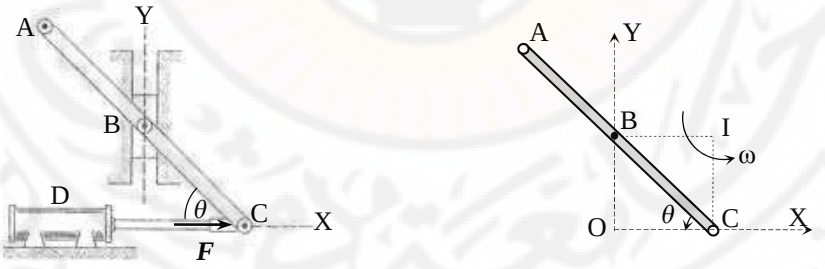
مسألة-7-4- (الفصل الثاني-2008-2007)

قضيب رفيع متجانس AC طوله (l = 1.2 m)، وكتلته (M = 20 kg)، وعزم عطالته حول مركز كتله الذي يقع في منتصفه في المنزلقة B هو ($I_B = M.l^2/12$). يتمفصل طرفه C بذراع مكبس هيدروليكي D كما في a من (الشكل-7-11).

يسلط المكبس D على الطرف C من القضيب قوة ثابتة (F=600 N)، عندما يكون القضيب في وضع السكون، وهو شاقولي يوازي الدليل الرأسي الأملس. خلالها تتحرك المنزلقة B حركة مقيدة على الدليل الرأسي، بينما يتحرك الطرف C على مسار أفقي ينطبق على ذراع المكبس.

المطلوب تعيين التسارع الزاوي ε للقضيب، والتسارع الخطي لمركز ثقله A_B ، وقوى القيد المؤثرة عليه N_B و N_C عند وضع للقضيب محدد بالزاوية ($\theta = 60^o$) .

الحل:



b-دراسة حركة القضيب بدلالة OXY , a- مكبس D يسلط قوة على الطرف C من قضيب (الشكل-7-11)

لإيجاد التسارع الخطي والزاوي للقضيب والقوى المؤثرة عليه، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على القضيب.

ندرس حركة القضيب بعد عزله عن قيوده، والخاضع في أي وضع له لوزنه ($W=m.g$) في مركز ثقله B الذي يتحرك حركة مستقيمة على الدليل الرأسي، وردي الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_B}$ و $\boldsymbol{N_C}$ في B و C ، وقوة المكبس $\boldsymbol{F}$ في الطرف C ، وبما أن حركة القضيب مستوية فمعادلات الحركة تعطى لــ:

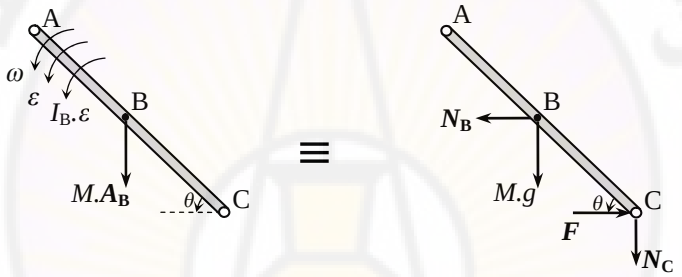
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$M.\boldsymbol{A_B}=\sum \boldsymbol{F}=W+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N_B}+\boldsymbol{N_C}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_B.\boldsymbol{E}=\boldsymbol{M_B}$$

ويمثل (الشكل-7-12) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للقضيب.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-12)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى:

على منحى اتجاه تسارع مركز الكتل B الذي فرض نحو الأسفل:

$$M.A_B=N_C+M.g \qquad (1)$$

وعلى الناظم عليه:

$$0=F-N_B \qquad (2)$$

وبتطبيق علاقة العزم حول النقطة I :

$$I_B.e+M.A_B.\mathrm{IB}=F.\mathrm{IC}+M.g.\mathrm{IB} \qquad (3)$$

من دراسة حركة القضيب حصلنا على ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل، وهي:

$$N_C, N_B, A_B, e$$

يمكن الاستعانة بمعادلة حركة تربط A_B بـــ ε ، ويتم ذلك بتحديد التسارع الخطي لمركز الكتل B ، الذي يتحرك على مسار خط مستقيم ينطبق على الدليل الرأسي بدلالة جملة المحاور OXY الموضحة في b من (الشكل-7-11).

$$y_B = \frac{l}{2}\sin q \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}_B = \frac{l}{2}\cos q.\dot{q}$$

بما أن:

$$\dot{y}_B = V_B \ , \ \dot{q} = -w \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}_B = V_B = -\frac{l}{2}w.\cos q$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه V_B معاكس لمحور الحركة OY ، وقيمته العددية:

$$V_B = \frac{l}{2}w.\cos q$$

وباشتقاق علاقة السرعة بدلالة الزمن:

$$\ddot{y}_B = \dot{V}_B = -\frac{l}{2}(\dot{w}.\cos q - w.\sin q.\dot{q})$$

بما أن:

$$\ddot{y}_B = A_B \ , \ \dot{w} = e \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y}_B = A_B = -\frac{l}{2}(e.\cos q + w^2.\sin q)$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه A_B معاكس لمحور الحركة OY ، وقيمته العددية:

$$A_B = \frac{l}{2}(e.\cos q + w^2.\sin q)$$

تحسب ω السرعة الزاوية للقضيب؛ الذي يتحرك حركة مستوية عامة، بتطبيق علاقة تغير الطاقة الحركية عليه من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بـــ $(\theta = 0)$ إلى الوضع النهائي المحدد بـــ $(\theta = 60^o)$.

$$E_c^{(q=60)} = \sum w_{q_0 \to q_{60}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}M.V_B^2 + \frac{1}{2}I_B.w^2 = w_W + w_F$$

حيث سرعة مركز الكتل B :

$$V_B = |\dot{y}_B| = \text{IB}.w = \frac{1}{2}l.\cos q.w = 0.3\,w$$

وعمل قوة الثقالة w_W :

$$w_W = W.\Delta y_{\mathrm{B}} = M.g(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sin q) = 15.77 \text{ N.m}$$

وعمل القوة الثابتة w_F :

$$w_F = W.\Delta x_{\mathrm{C}} = F.\frac{l}{2}\cos q = 180 \text{ N.m}$$

بالتعويض في علاقة تغير الطاقة؛ نحصل على:

$$w^2 = 93.23 \sec^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad w_{(q=60)} = 9.66 \sec^{-1}$$

واتجاهها الذي يمثل اتجاه دوران القضيب حول المركز اللحظي للدوران I ، أو اتجاه دوران القضيب حول أي نقطة منه هو باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة.

بالتعويض في علاقة القيمة العددية لتسارع مركز الكتل B ، نحصل على:

$$A_{\mathrm{B}} = 0.3e + 48.44 \qquad (4)$$

وبحل المعادلات الأربع؛ نحصل بتعويض المعادلة (4) في (3) على:

$$e_{(q=60)} = 18.91 \sec^{-2}$$

الإشارة الموجبة لـــ ε تدل على أن اتجاهه معاكس لاتجاه حركة عقرب الساعة، كما فرض في (الشكل7-12)، وأن حركة القضيب حتى هذا الوضع هي حركة متسارعة.

بالتعويض في العلاقة (4)؛ نحصل على القيمة العددية لتسارع مركز الكتل B:

$$A_{\mathrm{B}(q=60)} = 54.11 \text{ m}/\sec^2$$

وبالتعويض في العلاقة (2)؛ نحصل على رد الفعل الناظمي في C :

$$N_{\mathrm{C}(q=60)} = 886 \text{ N}$$

ومن العلاقة (1)؛ نحصل على رد الفعل الناظمي في B :

$$N_{\mathrm{B}(q=60)} = 600 \text{ N}$$

3- حركة جملة من الأجسام الصلبة *Motion of Systems of Rigid Bodies*

إن دراسة جملة الأجسام التي تحتوي على أجسام صلبة، تتصل بعضها مع بعض بوساطة وسائل ربط كالمفاصل، أو حبال التوصيل، تتم بتجزئة أجزاء الجملة والتحليل الحركي لكل جزء منها، ثم تطبيق معادلات الحركة لكل منها استناداً لنوع حركته، على أن يحتوي كل جزء على القوى الخارجية المؤثرة عليه وقوى الاتصال، أي: القوى الداخلية التي تنشأ في المفاصل، وحبال التوصيل.

كما يمكن في بعض الجمل دراستها مباشرة دون تجزئة، باستعمال علاقات الحركة المستوية بعد توضيح القوى الخارجية في نقاط تأثيرها، وحذف القوى الداخلية في الجملة، ومساواتها بالمجموعة المكافئة للقوى الفعالة، غير أن معادلة الأجسام المتصلة داخلياً كجملة لا يغنينا عن الحاجة لإيجاد العلاقات الحركية بين التسارع الخطي، والزاوي للأجسام.

وتقابل أحياناً في جملة الأجسام حركتين إضافيتين في الحركة المستوية لهما أهمية خاصة، وهما الدوران غير المركزي، والحركة التدحرجية.

3-1- معادلات الحركة الدورانية اللامركزية

Noncentroidal Rotation Motion Equations

عندما يجبر الجسم الصلب الذي كتلته M على الدوران حول محور ثابت مار من O بسرعة زاوية w ، وتسارع زاوي ε في لحظة معينة تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}^{\boldsymbol{e}},....,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{e}},\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{e}}$ ، تدعى حركته هذه بالدوران غير المركزي، كما هو مبين في a من (الشكل7-13). في هذه الحالة يتحرك مركز الكتل G للجسم الصلب على محيط دائرة نصف قطرها (a = OG)، ومركزها يقع في النقطة O في محور الدوران، فتكون مركبتا التسارع لمركز الكتل، اللتان تقعان في مستوى حركة مركز الكتل العمودي على محور الدوران، وهما:

المركبة المماسية:

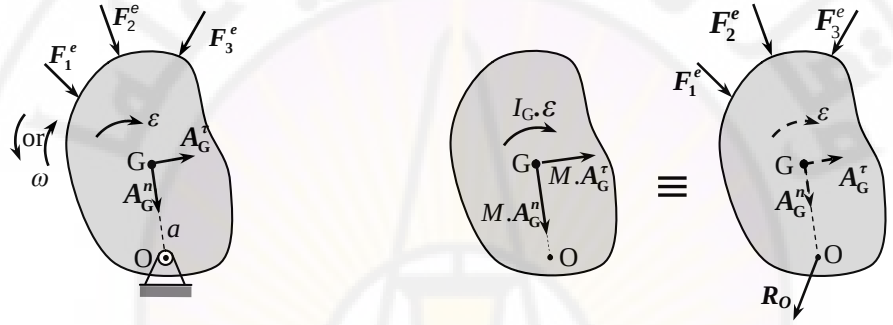
$$A_{\mathrm{G}}^{t} = a.e$$

المركبة الناظمية:

$$A_{\mathrm{G}}^{n} = a.w^{2}$$

بالتالي لا يمكن تطبيق معادلة الحركة الدورانية المركزية، ولدراسة هذه الحركة يجب إضافة محصلة القوى الفعالة لمركز الكتل عند التكافؤ مع القوى الخارجية.

يُمثل في b من (الشكل7-13) مخطط الجسم الحر، ويُظهر جميع القوى المطبقة على الجسم بما في ذلك القوة $\boldsymbol{R_O}$ المؤثرة من قبل المسند على الجسم في O ، والوزن W إذا لم تكن الحركة في المستوى الأفقي، كما يُمثل الشكل مخططاً يُظهر القوة المحصلة $M.\boldsymbol{A}_G$ والعزم المحصل $I_G.E$ المكافئة لمجموعة القوى الفعالة، وتستبدل هنا محصلة القوى الفعالة بمركباتها الناظمية $(M.A_G^n = M.a.w^2)$ والمماسية $(M.A_G^t = M.a.e)$ ، التي تعمل من خلال G في اتجاه تسارعها الناظمي والمماسي. يكفي التكافؤ بين مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة لحل أي سؤال يتعلق بالدوران حول محور ثابت.



b- مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة , a- دوران غير مركزي

(الشكل7-13)

بأخذ العزوم حول O ؛ فإننا نحصل على:

$$I_G.e + (M.a.e)\,a = (I_G + M.a^2)e = M_O^e$$

ولكن وفقاً بنقل عزم العطالة بين المحاور المتوازية، لدينا:

$$I_G + M.a^2 = I_O$$

حيث I_O تمثل عزم عطالة الجسم حول محور الدوران الثابت المار من O ، ومنه:

$$I_O.e = M_O^e \qquad (16\text{-}7)$$

تعبر هذه المعادلة عن علاقة مهمة بين محصلة عزوم القوى الخارجية بالنسبة لنقطة ثابتة O تسارعها معدوم واقعة على الجسم، وبين الجداء $I_O.\varepsilon$ لحركة الجسم الدورانية اللامركزية، وتمثل معادلة الحركة له، وتنص على:

أن جداء عزم عطالة الجسم حول محور دوران ثابت لا يمر من مركز كتله بالتسارع الزاوي له؛ يساوي إلى مجموع عزوم القوى المؤثرة عليه حول هذا المحور.

من التساوي بين مخطط الجسم الحر، ومخطط محصلة عزوم القوى الفعالة، يمكن كتابة المعادلات الثلاث للحركة الدورانية اللامركزية:

$$M.\mathrm{OG}.e = \sum F^e_{kt} \quad , \quad M.\mathrm{OG}.w^2 = \sum F^e_{kn} \quad , \quad I_{\mathrm{O}}.e = M^e_{\mathrm{O}} \qquad (17\text{-}7)$$

يمكن ضم العزم المحصل $I_{\mathrm{G}}.\varepsilon$ ، والمركبة المماسية لمحصلة القوى الفعالة $(M.A^t_{\mathrm{G}} = M.a.e)$، وذلك بنقل المركبة المماسية إلى وضع مواز إلى نقطة K على مسافة l_1 من مركز الدوران O ، وعلى خط واحد مع G و O ، كما هو مبين في (الشكل7-14)، وذلك كطريقة بديلة، ويحسب البعد $(l_1 = \mathrm{OK})$ للمحافظة على عزم المحصلة نفسه حول O ، وعليه:

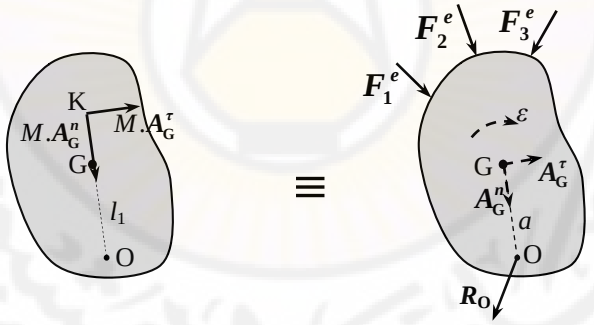
$$I_G.e + (M.a.e)a = M.a.e.l_1$$

$$M.r^2_{\mathrm{G}}.e + M.a^2.e = M.a.e.l_1 \qquad \Rightarrow \qquad r^2_{\mathrm{G}} + a^2 = a.l_1$$

منه:

$$l_1 = (r^2_{\mathrm{G}} + a^2)/a = r^2_{\mathrm{O}}/a \qquad (18\text{-}7)$$

حيث ρ_{O} تمثل نصف قطر عطالة (دوران) الجسم حول O .



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-14)

نستنتج أنه إذا مثلت المجموعة المكافئة للقوى الفعالة بمحصلة القوى الفعالة $M\,.\,A_{\mathrm{G}}$ ، عندئذ يجب أن تمر هذه المحصلة من خلال النقطة K ، كما هو مبين في (الشكل-7-14)، التي تمثل نقطة فريدة لجسم ما مع نقطة ثابتة O ، وتسمى بـــ مركز الصدم.

نلاحظ من التكافؤ بين مخطط الجسم الحر، وأي من مخططي محصلة القوى الفعالة (الشكل-7-13) و (الشكل-7-14) أنه يمكن اختيار المركز الملائم للعزوم لأي سؤال معين.

كما يمكن الملاحظة بسهولة من (الشكل-7-14)، أن مركز الصدم K هو مركز عزم مهم طالما مجموع العزوم حوله يجب أن يساوي الصفر، وتكون معادلات العزوم حول الثلاث نقاط الخاصة K و O و G ، هي كالتالي:

$$I_G.e = M_G^e \quad , \quad I_O.e = M_O^e \quad , \quad 0 = M_K^e \qquad (19\text{-}7)$$

وليست هذه المعادلات مستقلة، بل يمكن استخدام أي اثنين منها.

وكتطبيق ندرس حركة النواس المركب.

3-1-1- حركة النواس المركب *Compound Pendulum Motion*

النواس المركب أو ما يدعى بـــ النواس الفيزيائي هو كل جسم صلب كتلته M يخضع فقط لثقله $\boldsymbol{W}$ ، ويدور بحرية حول محور أفقي ثابت مار من أي نقطة من نقاطه O ، وناظمي على مستوى الحركة الشاقولي OXY ، وعندما يكون في وضع توازنه، فإنه يتدلى تدلياً يكون فيه مركز ثقله G واقعاً على الشاقول الهابط من نقطة استناده O ، ويبين a من (الشكل-7-15) مقطع عرضاني للنواس؛ الذي يعامد محور التعليق المار من O .

للحصول على معادلة حركة النواس، وهي المعادلة التي تحدد وضع النواس بالزاوية φ المحصورة بين انحراف المستقيم ($OG = a$) والشاقول، نستخدم المعادلة (7-16) لحركة دوران الجسم الصلب حول المحور المار في O، حيث عادة يهمل الاحتكاك في المسند O ، ويخضع النواس للقوة الخارجية، وهي وزنه $\boldsymbol{W}$ المؤثرة في مركز الكتل G ، ولفعل المحور $\boldsymbol{R_O}$ المؤثرة في مركز التعليق O ، الموضحة في b من (الشكل-7-15).

$$I_O.\ddot{\varphi} = M_O^e = -W.a.\sin j$$

الإشارة السالبة تدل على الدوران العكسي للقوة الفاعلة في الجسم $\boldsymbol{W}$ حول O بالنسبة لتزايد الزاوية φ ، حيث يكون العزم سالباً عند ($\Delta\varphi > 0$) وموجباً عند ($\Delta\varphi < 0$).

بوضع $(\frac{W.a}{I_O} = k^2)$ ؛ نحصل على:

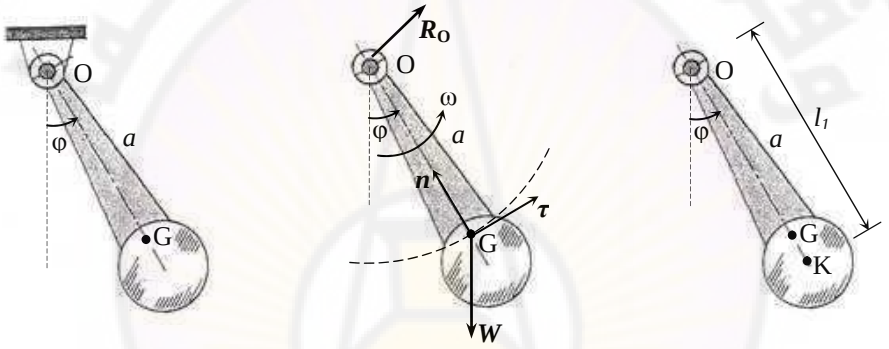
$$\ddot{j} + k^2.\sin j = 0$$

هذه المعادلة تشبه المعادلة التفاضلية للنواس البسيط، فاهتزاز النواس المركب يطابق اهتزاز النواس البسيط، وإذا اقتصرنا على السعات الصغيرة كان:

$$\sin j \cong j \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{j} + k^2.j = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة، حركة النواس البسيط، وحلها من الشكل:

$$j = j_0.\cos kt$$



c- K مركز اهتزاز أو مركز صدم ، b- مخطط الجسم الحر للنواس ، a- مقطع عرضاني للنواس المركب

(الشكل-7-15)

بالتالي يتحرك النواس المركب الذي يهتز بسعات صغيرة، حركة توافقية بسيطة دورها يعطي بالعلاقة:

$$T_c = \frac{2p}{k} = 2p\sqrt{\frac{I_O}{W.a}} \qquad (20\text{-}7)$$

وبمقارنتها مع دور الحركة للنواس البسيط المعطى بالعلاقة:

$$T_s = 2p\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (21\text{-}7)$$

نجد أنه من أجل طول l_1 :

$$l_1 = \frac{I_O.g}{W.a} = \frac{I_O}{M.a} = \frac{r_O^2}{a} \qquad (22\text{-}7)$$

يكون دور النواس البسيط الذي طوله l_1 ويدعى بـــ الطول المكافئ للنواس المركب مساوياً لدور النواس المركب المفروض (*Equivalent Length Compound Pendulum*)، ويحدد بعده على النواس المركب بالنقطة K التي تدعى بـــ مركز الاهتزاز، أو مركز الصدم وفق العلاقة (7-18)، والتي تبعد عن O بالمقدار ($OK = l_1$)، الموضحة في c من (الشكل-7-15)، ويتحدد بعدها عن G كما يلي.

وفقا لعلاقة هويجنس لدينا:

$$I_O = I_G + M.a^2$$

بالتعويض في قيمة الطول المكافئ:

$$OK = l_1 = \frac{I_G + M.a^2}{M.a} = a + \frac{I_G}{M.a} = a + \frac{r_G^2}{a}$$

وعليه يكون OK دوماً أكبر من ($OG = a$)، أي: أن مركز الاهتزاز K للنواس المركب يقع دوماً أسفل مركز الكتل G ، ويبعد عنه بالمقدار:

$$GK = \frac{I_G}{M.a} = \frac{r_G^2}{a}$$

للحصول على القيمة الصغرى للطول المكافئ للنواس المركب، نحدد المشتق الأول للطول المكافئ بالنسبة إلى a ، ونعدمه فنحصل على:

$$l_1' = 1 + \frac{-r_G^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = r_G$$

يتضح من المعادلة (7-21) أن الدور في هذه الحالة أصغر ما يمكن، وبالتالي يكون التردد أعظم ما يمكن، أي:

يكون تردد النوسان للنواس المركب أعظمياً إذا وقع مركز تعليقه على مسافة من مركز ثقله a ، تساوي نصف قطر عطالته حول مركز ثقله ρ_G .

ولحساب دور النواس المركب؛ فيما إذا تم تعليق النواس بمحور مار من النقطة K ، حيث في هذه الحالة يكون عزم عطالة النواس بالنسبة لمحور التعليق الجديد، هو:

$$I_K = I_G + M(GK)^2 = I_G + \frac{(I_G)^2}{M.a^2} = \frac{I_G}{M.a^2}(I_G + M.a^2) = \frac{I_G}{M.a^2} I_O$$

بالتالي يكون دور النواس المركب:

$$T_K = 2p\sqrt{\frac{I_K}{W(GK)}} = 2p\sqrt{\frac{\frac{I_G}{M.a^2}I_O}{W\frac{I_G}{M.a}}} = 2p\sqrt{\frac{I_O}{W.a}}$$

أي: أن دور النواس المركب حول محور يمر من مركز الاهتزاز K ، يساوي دوره حول محور التعليق O ، أي: أن النقطتين O و K متبادلتان.

تعرف هذه الخاصة بنظرية هيوجنس، ويستفاد من هذه الخاصة في قياس تحولات تسارع الجاذبية g وذلك كما يلي:

يترك النواس المركب ليهتز حول محور التعليق O بسعات صغيرة، ويقاس الدور T_c ، وكذلك بعد مركز الكتل G عن مركز التعليق O ، ثم يقلب النواس ليهتز حول محور التعليق الجديد؛ الذي يقع في الطرف الآخر بالنسبة لمركز الكتل G ، ونعين النقطة K التي يكون فيها دور الاهتزاز حولها مساوياً T_c ، ثم يقاس البعد GK ويكون بالتالي طول النواس البسيط المكافئ للنواس المركب هو:

$$l = \mathrm{OG} + \mathrm{GK} = \mathrm{OK}$$

ومتى علمنا T_s و l أمكن حساب g من العلاقة (7-21).

مسألة-7-5

ثبتت كتلتان ($m_1 = 1$ kg) و ($m_2 = 2$ kg) في طرفي قضيب خفيف مهمل الوزن طوله ($l = 3$ m)، قابل للدوران في مستوى رأسي حول محور أفقي مار بمنتصفه في O .

فإذا بدأ القضيب بالدوران من السكون من الوضع الأفقي. المطلوب إيجاد:

1. ردي فعل المحور $\boldsymbol{R_X}$ و $\boldsymbol{R_Y}$ عند الوضع الأفقي والرأسي للقضيب.
2. طول النواس البسيط l_1 المكافئ له.

الحل:

من هندسة الكتل ومن العلاقة (5-2) يقع مركز الكتل G ، كما هو مبين في a من (الشكل-7-15) على بعد من المسند الثابت O بالمقدار:

$$\mathrm{OG} = r_{\mathrm{G}} = \frac{\sum m_k . r_k}{\sum m_k} = \frac{(2\times l/2)-(1\times l/2)}{2+1} = 0.5\ \mathrm{m}$$

بالتالي يمكن اعتبار القضيب والكتلتين جسماً متماسكاً واحد كتلته (M = 3 kg)، وعزم عطالته حول O يساوي وفق العلاقة (5-4):

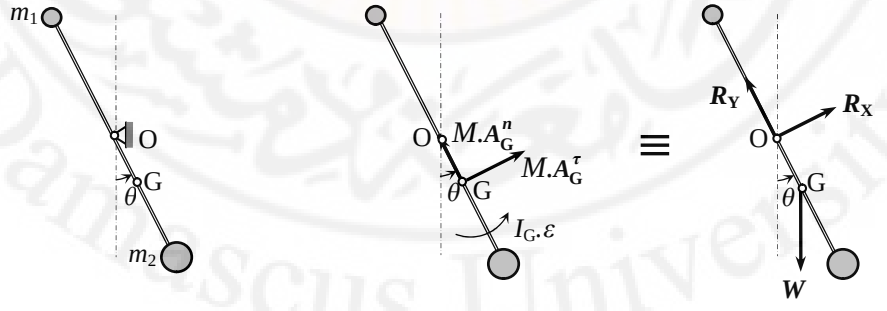
$$I_{\mathrm{O}} = \sum m_k . h_k^2 = 1(1.5)^2 + 2(1.5)^2 = 6.75\,\mathrm{kg.m}^2$$

1. لتعيين مركبات رد الفعل $\boldsymbol{R}_{\mathbf{X}}$ و $\boldsymbol{R}_{\mathbf{Y}}$ في المسند O للقضيب عند الوضع العام المحدد بالزاوية θ ، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على القضيب بعد تحريره من قيوده، والخاضع عندئذ لوزنه ($\boldsymbol{W} = M.\boldsymbol{g}$) في مركز كتله G الذي يتحرك على مسار دائري حول O ، ورد الفعل $\boldsymbol{R}$ مع محوره والممثل بمركبتيه $\boldsymbol{R}_{\mathbf{X}}$ و $\boldsymbol{R}_{\mathbf{Y}}$ في مركز الدوران O ، وأن القضيب يتحرك حركة دورانية لامركزية وفق العلاقتين:

$$M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} = M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}}^{\boldsymbol{n}} + M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}}^{\boldsymbol{\tau}} = \sum \boldsymbol{F} = M.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_{\mathbf{X}} + \boldsymbol{R}_{\mathbf{Y}}$$

$$I_{\mathrm{G}}.E = \boldsymbol{M}_{\mathbf{G}}^{\boldsymbol{e}}$$

ويمثل b من (الشكل-7-15) مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للقضيب.



b- مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة , a- كتلتان مثبتتان في طرفي قضيب

(الشكل-7-16)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى:

على منحى المتجه الواحدي $\boldsymbol{\tau}$:

$$M.A_{\mathrm{G}}^{t} = R_{\mathrm{X}} - M.g.\sin q \qquad (1)$$

على منحى المتجه الواحدي $\boldsymbol{n}$:

$$M.A_{\mathrm{G}}^{n} = R_{\mathrm{Y}} - M.g.\cos q \qquad (2)$$

واستخدام معادلة العزوم حول المسند O :

$$I_{\mathrm{G}}.e + M.A_{\mathrm{G}}^{t}.\mathrm{OG} = -M.g.\mathrm{OG}.\sin q \qquad (3)$$

نحصل على ثلاث معادلات بخمسة مجاهيل، هي: $R_{\mathrm{X}}, R_{\mathrm{Y}}, A_{\mathrm{G}}^{t}, A_{\mathrm{G}}^{n}, e$

نستعين بمعادلات الحركة، حيث:

$$A_{\mathrm{G}}^{t} = \mathrm{OG}.e \qquad (4)$$

$$A_{\mathrm{G}}^{n} = \mathrm{OG}.w^{2} \qquad (5)$$

حيث w تمثل السرعة الزاوية للقضيب الذي يتحرك حركة دورانية حول O ، وتحسب من تطبيق علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية عليه من الوضع الابتدائي الأفقي الساكن إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ :

$$\frac{1}{2} I_{\mathrm{O}}.w^{2} - 0 = M.g.\mathrm{OG}.\cos q$$

ومنه:

$$w^{2} = \frac{2\times 3\times 9.81}{6.75}\cos q = 8.72\cos q$$

فالسرعة الزاوية تابعة لـــ θ أي: لوضع القضيب خلال حركته، والقيمة العظمى لها:

$$w_{\max} = 2.95\ \mathrm{sec}^{-1}$$

ولتعيين التسارع الزاوي ε ، نلاحظ أنه يمكن أن نكتب الطرف الثاني من العلاقة (3) مع العلاقة (4) بالشكل:

$$I_{\mathrm{G}}.e + M.A_{\mathrm{G}}^{t}.\mathrm{OG} = I_{\mathrm{G}}.e + M(\mathrm{OG})^{2}.e = [I_{\mathrm{G}} + M(\mathrm{OG})^{2}]e = I_{\mathrm{O}}.e$$

هذه المزدوجة تكافئ القوى الخارجية للجسم؛ الذي يدور حول محور لا يمر من مركز كتله، ومنه:

$$I_{\mathrm{O}}.e = -M.g.\mathrm{OG}.\sin q$$

بالتعويض:

$$e = -\frac{3\times 9.81\times 0.5}{6.75}\sin q = -2.18\ \sin q$$

فالتسارع الزاوي له علاقة بـــ θ أي: بوضع القضيب خلال حركته، والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه ε معاكس للاتجاه المفروض.

كما يمكن إيجاد علاقة التسارع الزاوي أيضاً، من اشتقاق علاقة السرعة الزاوية بدلالة الزمن:

$$2w\frac{dw}{dt} = -4.36\ \sin q.\frac{dq}{dt} = -4.36\sin q.w$$

ومنه:

$$e = -2.18\sin q$$

والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه ε معاكس للاتجاه تزايد الزاوية θ .

بالتعويض في العلاقة (1)؛ نحصل على:

$$R_{\mathrm{X}} = M.\mathrm{OG}.e + M.g.\sin q = 26.16\sin q$$

وبالتعويض في العلاقة (2)؛ نحصل على:

$$R_{\mathrm{Y}} = M.\mathrm{OG}.w^2 + M.g.\cos q = 42.51\cos q$$

فعند الوضع الأفقي:

$$q = 90^{\mathrm{o}} \ \Rightarrow\ R_{\mathrm{X}} = 26.16\,\mathrm{N}\ ,\ R_{\mathrm{Y}} = 0$$

وعند الوضع الشاقولي:

$$q = 0 \ \Rightarrow\ R_{\mathrm{X}} = 0\ ,\ R_{\mathrm{Y}} = 42.51\,\mathrm{N}$$

2. لحساب طول خيط النواس البسيط المكافئ، نكتب علاقة ε بالشكل التقريبي التالي:

$$\ddot{q} = -2.18\sin q \approx -2.18q \approx -k^2.q$$

فهي تمثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري:

$$T = 2p\sqrt{\frac{l}{g}} = 2p\sqrt{\frac{1}{k^2}}$$

ومنه :

$$l_1 = \frac{I_O}{M.OG} = \frac{g}{k^2} = \frac{9.81}{2.18} = 4.5\,\text{m}$$

3-2-الحركة التدحرجية *Rolling Motion*

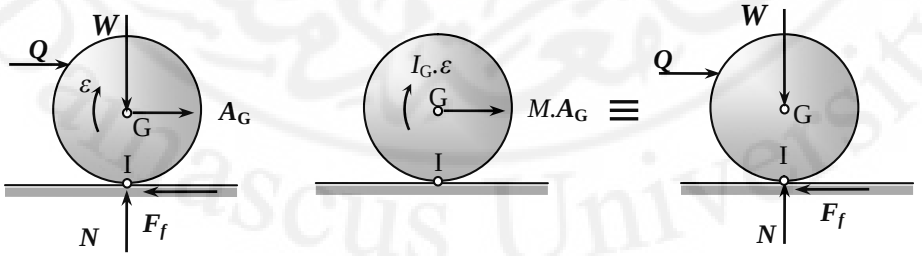
عندما يجبر قرص نصف قطره R ، وكتلته M على التدحرج بدون انزلاق على مستوى أفقي تحت تأثير قوة $\boldsymbol{Q}$ ، كما هو مبين في a من (الشكل7-17)، فإن تسارع مركز كتلته $\boldsymbol{A_G}$ ، وتسارعه الزاوي ε لا يكونان مستقلين، وإنما هناك علاقة تربط بينهما.

نفرض أن القرص متوازن، أي: أن مركز كتلته ومركزه الهندسي منطبقان، فعندما يدور القرص حول نقطة التدحرج I المركز الآني للدوران بزاوية مقدارها θ راديان، تكون المسافة التي انتقلها المركز G تساوي:

$$S_G = R.q$$

باشتقاق علاقة الانتقال هذه مرتين نكتب:

$$A_G^t = A_G = R.e$$



b- مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة ، a- قرص يتدحرج بدون انزلاق

(الشكل-7-17)

فعندما يتدحرج القرص دون انزلاق، لا توجد حركة نسبية بين نقطة في القرص I ، والتي تمس الأرض وبين الأرض نفسها، وقيمة قوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_f}$ التي تنشأ في هذه الحالة بين القرص والأرض نحصل عليها بمقارنة القرص المتدحرج بكتلة مستقرة على سطح أفقي، هذا ويمكن أن تأخذ قوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_f}$ أي قيمة، طالما أنها لا تتجاوز القيمة العظمى لها $\boldsymbol{F_{fm}}$ ، التي تعطى بـــ:

$$F_{fm} = f_s . N$$

حيث f_s تمثل معامل الاحتكاك السكوني و N قيمة المركبة الناظمية لقوة الاتصال.

بالتالي في حالة القرص المتدحرج المبين في b من (الشكل-7-17)؛ فإن قيمة $\boldsymbol{F_f}$ قوة الاحتكاك ينبغي تعيينها بصورة مستقلة عن قيمة المركبة الناظمية N ، لكن قوة الاحتكاك F_f تصل إلى قيمتها العظمى عندما يكون الانزلاق وشيك الحدوث، عند ذلك فقط يمكن الحصول على قوة الاحتكاك بدلالة المركبة الناظمية $\boldsymbol{N}$.

وعندما يتدحرج القرص، وينزلق في الوقت نفسه، تنشأ حركة نسبية بين نقطة في القرص I ، والتي تمس الأرض وبين الأرض نفسها، وقيمة قوة الاحتكاك في هذه الحالة تساوي:

$$F_f = f_k . N$$

حيث ($f_k = f$) تمثل معامل الاحتكاك التحريكي.

بالتالي في هذه الحالة فقط؛ فإن حركة G مركز كتل القرص ودوران القرص حول مركز كتلته، تكون مستقلتين بعضهما عن بعض، وفي هذا النوع من الحركة التدحرجية مع انزلاق يكون $(A_G \neq R.e)$.

بالتالي يمكننا تلخيص الحالات الثلاث المختلفة كالتالي:

حالة تدحرج دون انزلاق:

$$F_f \leq f_s . N \quad , \quad A_G = R.e \qquad (23\text{-}7)$$

حالة تدحرج على وشك الانزلاق:

$$F_f = f_s . N \quad , \quad A_G = R.e \qquad (24\text{-}7)$$

حالة تدحرج مع انزلاق:

$$F_f = f_k . N \quad , \quad A_G \neq R.e \qquad (25\text{-}7)$$

في حل المسائل عندما لا نعلم إن كان القرص يتدحرج دون انزلاق، أو مع انزلاق، نفترض أولاً أن القرص يتدحرج دون انزلاق:

- فإذا وجد أن قيمة قوة الاحتكاك الناتجة من الحساب:

$$(F_f \le f_s.N)$$

فيكون ذلك برهاناً على صحة الافتراض.

- أما إذا وجد أن قيمة قوة الاحتكاك:

$$F_f > f_s.N$$

فهذا يبرهن على عدم صحة الافتراض، وعندها يجب إعادة حل المسألة من البداية، مع الأخذ بعين الاعتبار هذه المرة وجود الانزلاق مع التدحرج.

ونعلم أن مجموعة القوى الفعالة في الحركة المستوية العامة تستبدل بالمتجه $M.\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}}$ والمزدوجة $I_{\mathrm{G}}.E$ ، لكن في الحالة الخاصة عندما تكون الحركة المستوية حركة تدحرجية لقرص متوازن؛ فإن مجموعة القوى الفعالة تستبدل بمتجه قيمته $M.R.\varepsilon$ يؤثر في المركز G ، ومزدوجة قيمتها $I_{\mathrm{G}}.\varepsilon$ حول G ، بالتالي في هذه الحالة؛ فإن القوى الخارجية تكون مساوية ومكافئة إلى المتجه والمزدوجة الموضحة في b من (الشكل-7-17).

من التساوي بين مخطط الجسم الحر ومخطط محصلة عزوم القوى الفعالة، يمكن أخذ العزوم حول I ؛ فإننا نحصل على:

$$I_{\mathrm{G}}.e + (M.R.e)R = (I_{\mathrm{G}} + M.R^2)e = M_{\mathrm{I}}^{e}$$

ولكن وفقاً لنقل عزم العطالة بين المحاور المتوازية، لدينا:

$$I_{\mathrm{G}} + M.R^2 = I_{\mathrm{I}}$$

حيث I_{I} تمثل عزم عطالة الجسم حول محور الدوران الآني المار من I ، ومنه:

$$I_{\mathrm{I}}.e = M_{\mathrm{I}}^{e} \qquad (26\text{-}7)$$

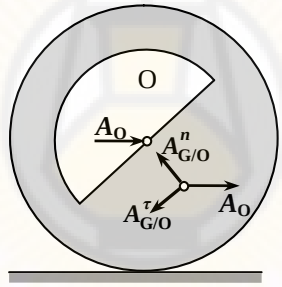
تعبر هذه المعادلة عن علاقة مهمة بين محصلة عزوم القوى الخارجية بالنسبة لنقطة التدحرج I واقعة على الجسم، وبين الجداء $I_{\mathrm{I}}.\varepsilon$ للجسم الدوراني، وتنص على:

أن جداء عزم عطالة الجسم حول محور الدوران الآني بالتسارع الزاوي له؛ يساوي إلى مجموع عزوم القوى المؤثرة عليه حول هذا المحور.

يتم ذلك لقرص يتدحرج ومركز كتله G يقع في مركزه الهندسي، وأن للمركز الآني للسرع I تسارع موجه نحو مركز الكتلة، وعليه فإن المعادلة (7-26) يمكن استخدامها لمعادلة العزم طالما أن القرص لا ينزلق، أما إذا كان القرص ينزلق، أو إذا لم ينطبق مركز الكتلة على المركز الهندسي، عندئذ لا يمر تسارع نقطة التماس I عموماً من خلال G ، ولا تتحقق المعادلة (7-26).

وعندما يكون القرص غير متوازن، أي: عندما لا تنطبق G مركز الكتلة مع المركز الهندسي O (الشكل-7-18). في هذه الحالة العلاقة ($A_G = R.\varepsilon$) لا تبقى صحيحة بين A_G و ε ، ولكن توجد علاقة شبيهة بين A_O تسارع المركز الهندسي والتسارع الزاوي ε ، حيث ($A_O = R.\varepsilon$)، وبالتالي يمكننا باستعمال علاقة التسارع في الحركة المستوية العامة، وتعيين A_G بدلالة التسارع الزاوي ε ، والسرعة الزاوية w للقرص، حيث يكون:

$$\boldsymbol{A_G = A_O + A_{GO} = A_O + A^{\tau}_{GO} + A^{n}_{GO}}$$



(الشكل-7-18)

عندها يكون لتسارع G بدلالة تسارع O المركبات الثلاث التالية:

$$\boldsymbol{A_O} \quad , \quad \boldsymbol{A^t_{GO}} \quad , \quad \boldsymbol{A^n_{GO}}$$

ويبين (الشكل-7-18) اتجاه المركبات الثلاث للتسارع التي حصلنا عليها، وقيمها هي:

$$A_O = R.e \quad , \quad A^t_{GO} = OG.e \quad , \quad A^n_{GO} = OG.w^2$$

ويكون لمحصلة القوى الفعالة المركبات الثلاث التالية:

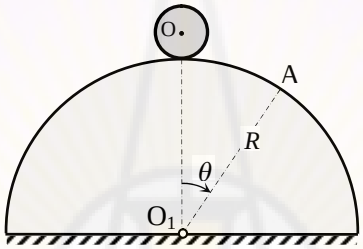
$$M.A_O \quad , \quad M.OG.e \quad , \quad M.OG.w^2$$

مسألة-7-6- (الفصل الثاني-2003-2004)

دولاب متجانس كتلته m ، ونصف قطره r ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = m.r^2/2$). يترك ليتدحرج من السكون على سطح خشن ثابت على شكل نصف كرة مركزها O_1 ، ونصف قطرها ($R = 8r$)، من الوضع الحرج الشاقولي المعين بـــ ($\theta_0 = 0$) نحو اليمين، كما في (الشكل-7-19).

المطلوب إيجاد، بدلالة الوضع الزاوي θ ، علاقة كل من التسارع الزاوي للدولاب ε ، والتسارع الخطي لمركز ثقله A_O ، ومركبتي رد الفعل الناظمية N_θ ، والمماسية $\boldsymbol{F_{f\theta}}$ ، والموقع الذي يترك فيه الدولاب السطح الدائري.

الحل:



(الشكل-7-19)

لتعيين التسارع الخطي والزاوي للدولاب، وقوى الاتصال المؤثرة عليه، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على القضيب.

ندرس حركة الدولاب بعد عزله عن قيوده، والخاضع عند الوضع العام المحدد بالزاوية θ ، لوزنه ($\boldsymbol{W}=m.\boldsymbol{g}$) في مركز ثقله O ، الذي يتحرك على مسار دائري حول مركز الكرة O_1 ، وقوة القيد مع السطح الكروي في نقطة التماس A ، الذي يتحلل إلى مركبة شاقولية $\boldsymbol{N_\theta}$ تدعى برد الفعل الناظمي، ومركبة أفقية $\boldsymbol{F_{f\theta}}$ تمثل قوة الاحتكاك تتجه باتجاه يعاكس انزلاق الدولاب، وبما أن الدولاب يتدحرج بحركة مستوية، فمعادلات الحركة تعطى لـــ:

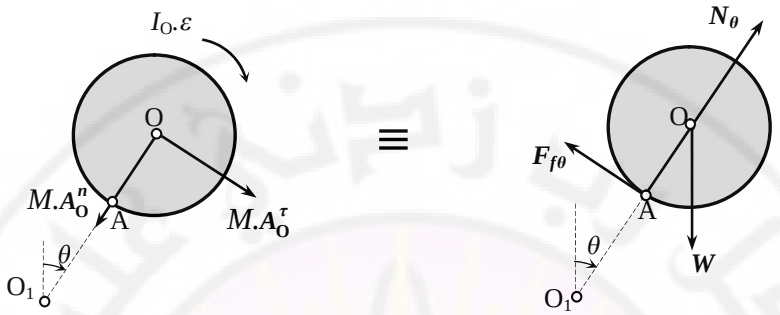
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$m.\boldsymbol{A_O} = m.\boldsymbol{A_O^n} + m.\boldsymbol{A_O^\tau} = \sum \boldsymbol{F} = W + \boldsymbol{F_{f\theta}} + \boldsymbol{N_\theta}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_O.E = \boldsymbol{M_O^e}$$

يمثل (الشكل-7-20) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للدولاب.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-20)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى:

على منحى المتجه الواحدي $\boldsymbol{\tau}$:

$$m.A_O^t = W.\sin q - F_{fq} \qquad (1)$$

على منحى المتجه الواحدي $\boldsymbol{n}$:

$$m.A_O^n = W.\cos q - N_q \qquad (2)$$

واستخدام علاقة العزوم حول A :

$$I_O.e + m.A_O^t.r = W.r.\sin q \qquad (3)$$

من دراسة حركة الدولاب حصلنا على ثلاث معادلات بخمسة مجاهيل، هي:

$$F_{fq}, N_q, A_O^n, A_O^t, e$$

يمكن الاستعانة بمعادلات الحركة، حيث مركز كتل الدولاب O يتحرك على مسار دائري حول مركز السطح الكروي الثابت O_1 ، منه:

$$A_O^t = O_1O.e_1 = (R+r)e_1 = 9r.e_1 \qquad (4)$$

$$A_O^n = O_1O.w_1^2 = (R+r)w_1^2 = 9r.w_1^2 \qquad (5)$$

حيث w_1 و ε_1 تمثلان السرعة الزاوية والتسارع الزاوي لدوران O حول O_1 ، ويمكن تعينهما من دوران O حول كل من المركز الآني للدوران A ومركز السطح الدائري O_1 ، منه:

$$V_O = V_{OO_1} = V_{OA} \Rightarrow O_1O.w_1 = OA.w \Rightarrow (R+r)w_1 = r.w \Rightarrow w_1 = \frac{1}{9}w$$

بالاشتقاق بدلالة الزمن:

$$A^t_{OO_1} = A^t_{OA} \Rightarrow O_1O.e_1 = OA.e \Rightarrow (R+r)e_1 = r.e \Rightarrow e_1 = \frac{1}{9}e$$

حيث w و ε تمثلان السرعة الزاوية، والتسارع الزاوي لدوران O حول A ، أي: دوران الدولاب وكل جسيماته حول A .

ويمكن تعين ω من تطبيق علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية على الدولاب، من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بالزاوية θ_0 إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ ، والذي يتحرك خلالها حركة مستوية عامة:

$$\frac{1}{2}I_A.w^2 - 0 = \frac{1}{2}m.V_O^2 + \frac{1}{2}I_O.w^2 = w_{F_{f\theta}} + w_{N_\theta} + w_W$$

حيث:

$$V_O = w.r \quad , \quad w_{F_{f\theta}} = 0 \quad , \quad w_{N_\theta} = 0 \quad , \quad w_W = m.g(R+r)(1-\cos q)$$

ومنه؛ نحصل على علاقة السرعة الزاوية للدولاب:

$$w^2 = 12\frac{g}{r}(1-\cos q)$$

ومنه؛ علاقة السرعة الزاوية لدوران O حول O_1 :

$$w_1^2 = \frac{4}{27}\frac{g}{r}(1-\cos q)$$

باشتقاق علاقة السرعة الزاوية w بدلالة الزمن؛ نحصل على علاقة التسارع الزاوي ε :

$$2w\frac{dw}{dt}=12\frac{g}{r}(\sin a)\frac{dq}{dt}$$

حيث:

$$\frac{dw}{dt}=e \quad , \quad \frac{dq}{dt}=w_1=\frac{1}{9}w$$

بالتعويض:

$$e=\frac{2}{3}\frac{g}{r}\sin a$$

ومنه، علاقة التسارع الزاوي لدوران O حول O_1:

$$e_1=\frac{2}{27}\frac{g}{r}\sin a$$

بالتعويض في علاقات الحركة (4) و(5)؛ نحصل على مركبات التسارع الخطي لمركز الكتل:

$$A_O^t=\frac{2}{3}g.\sin q \quad , \quad A_O^n=\frac{4}{3}g(1-\cos q)$$

وبالتعويض في علاقات التحريك (1) و (2)؛ نحصل على مركبات قوة القيد:

$$F_{fq}=\frac{1}{3}W.\sin q \quad , \quad N_q=\frac{1}{3}W(7\cos q-4)$$

وبالتعويض في علاقة التحريك (3)؛ نحصل على علاقة التسارع الزاوي:

$$e=\frac{2}{3}\frac{g}{r}\sin a$$

وهذا ما حصلنا عليه باشتقاق علاقة السرعة الزاوية w بدلالة الزمن.

يترك الدولاب السطح الدائري عندما تصبح ($N_\theta = 0$)، ويتحقق ذلك عند الوضع المحدد بالزاوية:

$$7\cos q=4 \quad \Rightarrow \quad \cos q=4/7 \quad \Rightarrow \quad q=55.15^o$$

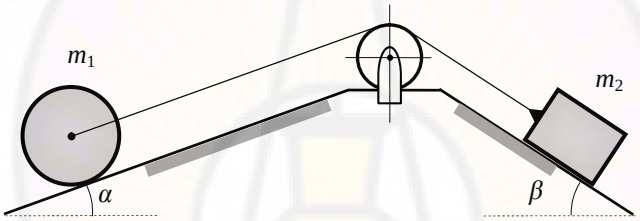
مسألة-7-7

تبدأ الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي، والموضحة بـــ (الشكل-7-21) حركتها دون سرعة ابتدائية، حيث معامل الاحتكاك لكل من الكتل m_1 و m_2 على المستويات المائلة هو نفسه، أي:

$$f_1 = f_2 = f = \tan a$$

المطلوب إيجاد الشروط اللازمة حتى يستطيع الجسم m_2 بالصعود بحركة متسارعة عندما يتدحرج القرص m_1 دون انزلاق نحو الأسفل.

الحل:



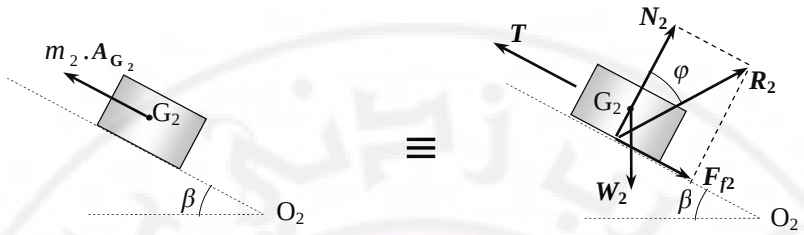
(الشكل-7-21) جملة الميكانيكية

لتحديد الشروط اللازمة حتى يتم صعود الكتلة m_2 نحو الأعلى بحركة متسارعة، وتدحرج القرص m_1 نحو الأسفل دون انزلاق على المستويات المائلة، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على كل كتلة على حده.

ندرس حركة الكتلة m_2 بعزلها عن الجملة، والخاضعة عندئذ لوزنها $(\boldsymbol{W_2} = m_2.\boldsymbol{g})$، ورد الفعل $\boldsymbol{R_2}$ الذي يتحلل إلى مركبة $\boldsymbol{N_2}$ شاقولية تدعى برد الفعل الناظمي، ومركبة $\boldsymbol{F_{f2}}$ تمثل قوة الاحتكاك، وشد الخيط $\boldsymbol{T}$ ، وبما أنها تنزلق على المستوى المائل فحركتها انسحابية وفق المعادلة:

$$m_2.\boldsymbol{A}_{G_2} = \sum \boldsymbol{F}^{e} = \boldsymbol{W}_2 + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{F}_{f2}$$

يمثل (الشكل-7-22) مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للكتلة m_2 .



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-22)

بمساواة المخططين، وبإسقاط العلاقة على منحى اتجاه تسارع مركز الكتل G_2 ، الذي فرض نحو الأعلى:

$$m_2.A_{G_2} = T - m_2.g.\sin b - F_{f2} \qquad (1)$$

وعلى الناظم عليه:

$$0 = N_2 - m_2.g.\cos b \qquad (2)$$

ومن شرط الانزلاق:

$$F_{f2} = f.N_2 \qquad (3)$$

أما حركة القرص بعد عزله عن الجملة، فهي حركة مستوية حيث يتدحرج دون انزلاق على المستوى المائل، والخاضع عندئذ لوزنه $(\boldsymbol{W_1}=m_1.\boldsymbol{g})$، ورد الفعل $\boldsymbol{R_1}$ الذي يتحلل إلى مركبة $\boldsymbol{N_1}$ تدعى برد الفعل الناظمي، ومركبة $\boldsymbol{F_{f1}}$ تمثل قوة الاحتكاك، وشد الخيط $\boldsymbol{T}$ ، وبما أن حركة القرص مستوية فمعادلات الحركة تعطى لـــ:

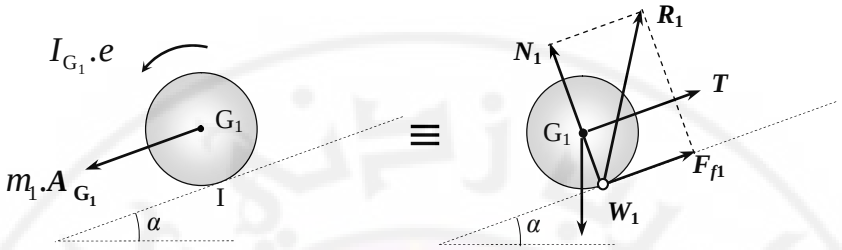
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$m_1.\boldsymbol{A}_{G_1} = \sum \boldsymbol{F}^{e} = \boldsymbol{W_1} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N_1} + \boldsymbol{F_{f1}}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_{G_1}.E = \boldsymbol{M}^{e}_{G_1}$$

يمثل (الشكل-7-23) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للكتلة m_2 .



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-23)

بمساواة المخططين، وبإسقاط المعادلات على ثلاثة محاور متعامدة.

على منحى اتجاه تسارع مركز الكتل G_1 الذي فرض نحو الأسفل:

$$m_1.A_{G_1} = m_1.g.\sin a - F_{f1} - T \qquad (4)$$

وعلى الناظم عليه:

$$0 = N_1 - m_1.g.\cos a \qquad (5)$$

وعلى المحور العمودي على مستوى الحركة:

$$\frac{1}{2}m_1.R^2.e = F_{f1}.R \qquad (6)$$

من دراسة حركة الكتلتين حصلنا على ست معادلات فيها ثمانية مجاهيل، وهي:

$$F_{f1}, F_{f2}, N_1, N_2, T, A_{G_1}, A_{G_2}, e$$

يمكن الاستعانة بمعادلات الحركة، حيث المركز G_1 والمركز G_2 نقطتان من الخيط الذي لا يمتط ويتحرك حركة انسحابية، منه:

$$A_{G_1} = A_{G_2} = A \qquad (7)$$

وبما أن القرص يتدحرج، وحركة مركزه هي حركة دورانية حول المركز الآني I ، ومنه:

$$R.e = A_{G_1} = A \qquad (8)$$

بالتالي يمكن إيجاد المجاهيل من المعادلات الثمانية، وذلك بحل معادلات التوازن.

من (2)؛ نحصل على:

$$N_2 = m_2.g.\cos b$$

من (3)؛ نحصل على:

$$F_{f2} = f.m_2.g.\cos b$$

من (5)؛ نحصل على:

$$N_1 = m_1.g.\cos a$$

ومن ثم نعوض في علاقات التحريك:

$$m_2.A = T - m_2.g(\sin b + f.\cos b) \qquad (1')$$

$$m_1.A = m_1.g.\sin a - F_{f1} - T \qquad (4')$$

$$m_1.A/2 = F_{f1} \qquad (6')$$

بجمع هذه العلاقات؛ نحصل على:

$$A = \frac{2[m_1.g.\sin a - m_2.g(\sin b + f.\cos b)]}{3m_1 + 2m_2}$$

بالتعويض في (1')؛ نحصل على:

$$T = \frac{m_1.m_2.g(2\sin a + 3\sin b + 3f.\cos b)}{3m_1 + 2m_2}$$

بالتعويض في (8)؛ نحصل على:

$$e = \frac{2[m_1.g.\sin a - m_2.g(\sin b + f.\cos b)]}{R(3m_1 + 2m_2)}$$

بالتعويض في (6')؛ نحصل على:

$$F_{f1} = \frac{m_1^2.g.\sin a - m_1.m_2.g(\sin b + f.\cos b)}{3m_1 + 2m_2}$$

بالتعويض في (4')؛ نحصل على تطابق في القيم.

أما شروط الحركة المطلوبة حتى يتم صعود الكتلة m_2 نحو الأعلى بحركة متسارعة، وتدحرج القرص m_1 نحو الأسفل دون انزلاق على المستويات المائلة، فهي:

الشرط الأول الممثل بصعود الكتلة m_2 نحو الأعلى بحركة متسارعة: $A > 0$

الشرط الثاني الممثل بتدحرج القرص m_1 نحو الأسفل دون انزلاق: $F_{f1} < f.N_1$

من الشرط الأول نحصل على أن:

$$m_1.\sin a > m_2(\sin b + f.\cos b)$$

منه:

$$f < \frac{m_1.\sin a - m_2.\sin b}{m_2.\cos b}$$

ومن الشرط الثاني نحصل على أن:

$$m_1(\sin a - 3f.\cos a) < m_2(\sin b + f.\cos b + 2f.\cos a)$$

منه:

$$f > \frac{m_1.\sin a - m_2.\sin b}{m_2.\cos b + (3m_1 + 2m_2)\cos a}$$

بالتالي الشرط اللازم لتحقيق الحركة هو:

$$\frac{1}{m_2.\cos b} > f > \frac{1}{m_2.\cos b + (3m_1 + 2m_2)\cos a}$$

مسألة-7-8- (الدورة الثالثة-2013-2014)

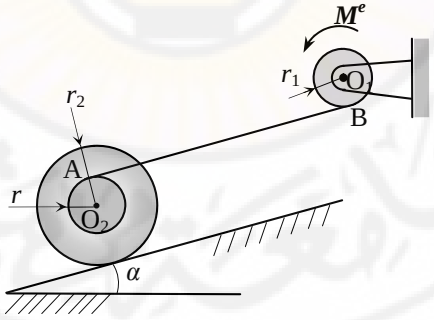
تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على ملفاف كتلته m_1 ، ونصف قطره r_1 ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O_1 هو $(I_{O_1} = m_1.r_1^2)$، يستطيع الدوران دون احتكاك حول محور ثابت مار من O_1 تحت تأثير عزم دوراني $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{O_1}}$ ، ليسحب أسطوانة كتلتها m_2 ، ونصف قطرها r_2 ، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O_2 هو $(I_{O_2} = m_2.r_2^2/2)$، بوساطة حبل ملتف على بكرة صغيرة مهملة نصف قطرها r مثبتة على الأسطوانة كما في (الشكل-7-24).

المطلوب تعيين التسارع الزاوي لكل من الأسطوانة ε_2 ، والملفاف ε_1 ، والقوى المؤثرة عليهم، وما هي قيمة العزم الدوراني $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{O_1}}$ الذي يجب تطبيقه على الملفاف، حتى تستطيع الأسطوانة التدحرج دون انزلاق على سطح مائل بزاوية α مع الأفق، وليتحرك مركز كتلها O_2 حركة متسارعة بانتظام بتسارع قدره A . معتبراً f معامل احتكاك بين الأسطوانة والسطح المائل.

تطبيق عددي

$m_1 = 50$ kg	$r = 0.2$ m	$A = 1$ m/sec
$m_2 = 200$ kg	$r_1 = 0.5$ m	$g = 10$ m/sec^2
$f = 0.2$	$r_2 = 1$ m	$\alpha = 30^o$

الحل:



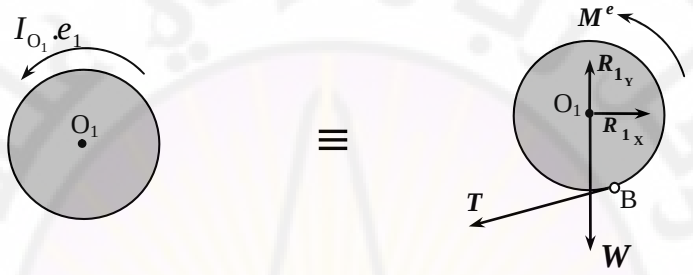
(الشكل-7-24) جملة الميكانيكية

لإيجاد قيمة العزم الدوراني $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{O_1}}$ اللازم تطبيقه على الملفاف لتحقيق الحركة المطلوبة، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة، مع القوى المؤثرة على كل من الملفاف والأسطوانة على حده.

ندرس حركة الملفاف بعد عزله عن الجملة، والخاضع عندئذ لوزنه $m_1.\boldsymbol{g}$ ، ورد الفعل في محور دورانه $\boldsymbol{R_1}$ الممثل بمركبتيه $\boldsymbol{R_{1_X}}, \boldsymbol{R_{1_Y}}$ ، وشد الخيط $\boldsymbol{T}$ ، والعزم الدوراني $\boldsymbol{M^e_{O_1}}$ ، والذي يتحرك حركة دورانية حول محوره الثابت وفق المعادلات:

$$0 = \sum \boldsymbol{F} = m_1.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{T} \quad , \quad I_{O_1}.E_1 = \boldsymbol{M^e_{O_1}}$$

ويمثل (الشكل-7-25) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للملفاف.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-25)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى على محورين متعامدين:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = R_{1_X} - T.\cos a \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = R_{1_Y} - T.\sin a - m_1.g \qquad (2)$$

وبتطبيق معادلة العزم:

$$m_1.r_1^2.e_1 = M^e_{O_1} - T.r_1 \qquad (3)$$

أما حركة الأسطوانة فهي حركة مستوية، وتتم دراستها بعد عزلها عن الجملة، والخاضعة عندئذ لوزنها $m_2.\boldsymbol{g}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_{f2}}$ التي من دونها لا تتدحرج الأسطوانة، ورد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_2}$ ، وشد الخيط $\boldsymbol{T}$ ، ومعادلات حركتها تعطى لـــ:

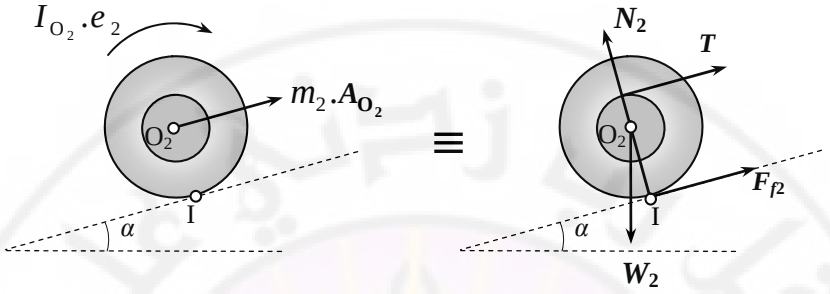
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$m_2.\boldsymbol{A_{O_2}} = \sum \boldsymbol{F} = m_2.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N_2} + \boldsymbol{F_{f2}}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_{O_2}.E_2 = \boldsymbol{M_{O_2}}$$

يمثل (الشكل-7-26) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للأسطوانة.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-26)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى على منحى تسارع $\boldsymbol{A}_{O_2}$، والذي يتجه نحو الأعلى؛ نحصل على:

$$m_2.A_{O_2} = T + F_{f2} - m_2.g.\sin a \qquad (4)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى $\boldsymbol{A}_{O2}$ ؛ نحصل على:

$$0 = N_2 - m_2.g.\cos a \qquad (5)$$

وبتطبيق معادلة العزم حول O_2 ؛ نحصل على:

$$\frac{1}{2}m_2.r_2^2.e_2 = T.r - F_{f2}.r_2 \qquad (6)$$

نحصل على ست معادلات بثمانية مجاهيل، هي:

$$R_{1_X}, R_{1_Y}, F_{f2}, N_2, T, M^e_{O_1}, e_1, e_2$$

نستعين بمعادلات الحركة بإيجاد علاقات لمميزات الحركة المجهولة؛ بدلالة التسارع الخطي المعلوم، حيث:

تتدحرج الأسطوانة، وحركة مركزها هي حركة دورانية حول المركز الآني I ، ومنه:

$$r_2.e_2 = A_{O_2} = A \quad \Rightarrow \quad e_2 = \frac{1}{r_2}A \qquad (7)$$

وبما أن A و B نقطتين من الخيط الذي لا يمتط، ويتحرك حركة انسحابية، يكون:

$$A_B^t = A_A^t \quad \Rightarrow \quad r_1.e_1 = (r_2 + r)e_2 \quad \Rightarrow \quad e_1 = \frac{r_2 + r}{r_1}e_2 = \frac{r_2 + r}{r_1.r_2}A \qquad (8)$$

بحل علاقات التوازن:

من العلاقة (1)؛ نحصل على:

$$R_{1_X} = T.\cos a \qquad (1')$$

ومن العلاقة (2)؛ نحصل على:

$$R_{1_Y} = T.\sin a + m_1.g \qquad (2')$$

ومن العلاقة (5)؛ نحصل على:

$$N_2 = m_2.g.\cos a$$

وبالتعويض في علاقات التحريك؛ نحصل على:

$$\frac{r_2 + r}{r_2}m_1.A = \frac{1}{r_1}M_{O_1}^e - T \qquad (3')$$

$$m_2.A = T + F_{f2} - m_2.g.\sin a \qquad (4')$$

$$\frac{1}{2}m_2.A = \frac{r}{r_2}T - F_{f2} \qquad (6')$$

بجمع العلاقتين ('6) و ('4)؛ نحصل على:

$$T = \frac{r_2}{2(r_2 + r)} m_2(3A + 2g.\sin a)$$

وبالتعويض في ('6)؛ نحصل على:

$$F_{f2} = \frac{1}{2(r_2 + r)} m_2[(2r - r_2)A + 2r.g.\sin a]$$

وبالتعويض في ('3)؛ نحصل على:

$$M^e_{O_1} = \frac{r_1.r_2}{2(r_2 + r)} m_2[3A + 2.g.\sin a] + \frac{r_1(r_2 + r)}{r_2} m_1.A$$

وبالتعويض في ('1)؛ نحصل على:

$$R_{1_X} = \frac{r_2}{2(r_2 + r)} m_2(3A + 2g.\sin a)\cos a$$

وبالتعويض في ('2)؛ نحصل على:

$$R_{1_Y} = \frac{r_2}{2(r_2 + r)} m_2(3A + 2g.\sin a)\sin a + m_1.g$$

التطبيق العددي يتم بالتعويض بالقيم المعطاه نحصل على:

$F_{f2} = 116.7$ N	$T = 1083$ N
$R_{1_X} = 937.9$ N	$N_2 = 1699$ N
$R_{1_Y} = 1041.5$ N	$M^e = 571.6$ N.m

لمقاومة هذه القيمة من قوة الاحتكاك F_{f2} نحتاج إلى معامل احتكاك f لا يقل عن:

$$f = F_{f2} / N_2 = 116.7/1699 = 0.069$$

بما أن معامل الاحتكاك بين الأسطوانة والسطح المائل لا يقل عن 0.2 ، بالتالي فإن خشونة السطح تكفي لتحقيق حالة التدحرج للأسطوانة.

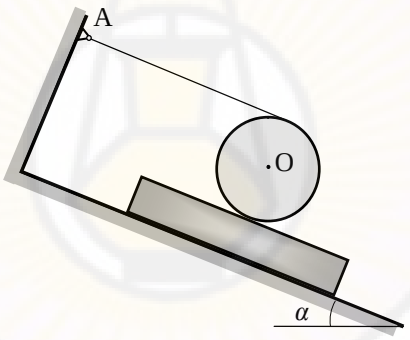
أما إذا كان معامل الاحتكاك بين الأسطوانة والسطح المائل أقل من 0.069 عندئذ تصبح قوة الاحتكاك ($F_{f2} = f.N_2$)، وبالتالي تكون الأسطوانة في حالة انزلاق، أو حالة على وشك الانزلاق، ولا تستطيع التدحرج نحو الأعلى.

مسألة-7-9- (الفصل الأول-2006-2007)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على قرص كتلته m_1 ، ونصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو $(I_O = m_1.R^2/2)$. يلف خيط حوله طرفه الآخر مثبت في المسند الثابت A ، ويستند القرص على السطح الخشن من لوح كتلته m_2 يستند بدوره بسطحه الآخر على مستوى خشن مائل بزاوية α على الأفق كما في (الشكل-7-27).

فإذا كان معامل الاحتكاك بين اللوح والمستوى هو f ، وأن الحركة بدأت من السكون بانزلاق اللوح نحو الأسفل، وتدحرج القرص عليه. المطلوب تعيين التسارع الخطي A للوح، والتسارع الخطي A_O والزاوي ε للقرص، والقوى المؤثرة عليهم.

الحل:



(الشكل-7-27) جملة ميكانيكية

لإيجاد التسارع الخطي للوح، والتسارع الخطي والزاوي للقرص، والقوى المؤثرة عليهم، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة، مع القوى المؤثرة على كل من القرص، واللوح على حده.

ندرس حركة القرص بعد عزله عن الجملة والخاضع في أي وضع له لوزنه ($\boldsymbol{W_1}=m_1\,\boldsymbol{g}$) في مركز ثقله O ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}_{f_1}$ التي من دونها لا يتدحرج القرص، ورد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_1}$ في نقطة التماس مع اللوح B ، وشد الخيط $\boldsymbol{T}$ في I نقطة من محيط القرص، وبما أن حركة القرص مستوية، فمعادلات الحركة تعطى لـــ:

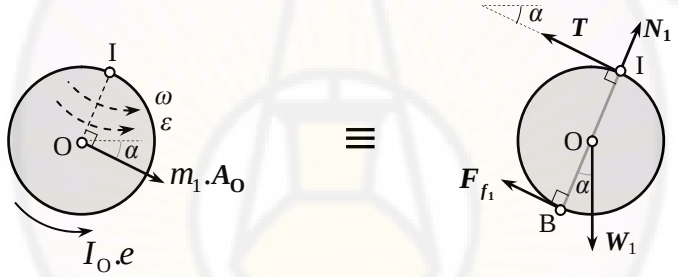
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$m_1.\boldsymbol{A}_{\mathrm{O}}=\sum \boldsymbol{F}=\boldsymbol{W_1}+\boldsymbol{T}+\boldsymbol{N_1}+\boldsymbol{F}_{f_1}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_{\mathrm{O}}.E=\boldsymbol{M_O}$$

يمثل (الشكل-7-28) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للقرص.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-28)

وبمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع $\boldsymbol{A}_{\mathrm{O}}$ الذي يتجه نحو الأسفل؛ نحصل على:

$$m_1.A_{\mathrm{O}}=W_1.\sin a-T-F_{f_1} \qquad (1)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى $\boldsymbol{A}_{O1}$ ؛ نحصل على:

$$0=N_1-W_1.\cos a \qquad (2)$$

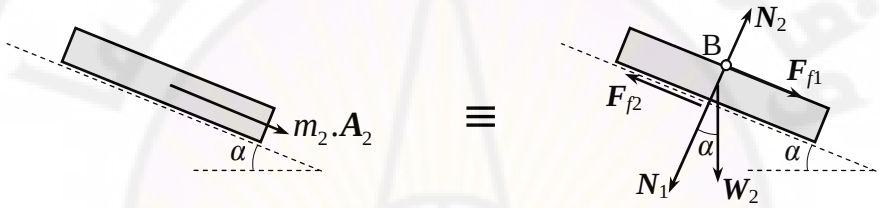
وبتطبيق علاقة العزم؛ نحصل على:

$$I_{\mathrm{O}}.e=T.R-F_{f_1}.R \qquad (3)$$

ويتحرك اللوح حركة انسحابية، وبعد عزله عن الجملة يخضع عندئذ في الوضع المختار لوزنه ($\boldsymbol{W_2}=m_2\,\boldsymbol{g}$)، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}_{f_1}$ ، ورد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_1}$ في نقطة التماس مع القرص B ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}_{f_2}$ ، ورد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_2}$ المار من مركز ثقله، ومعادلة حركته تعطى بـــ:

$$m_2.\boldsymbol{A_2}=\sum \boldsymbol{F}=\boldsymbol{W_2}+\boldsymbol{N_1}+\boldsymbol{F}_{f_1}+\boldsymbol{N_2}+\boldsymbol{F}_{f_2}$$

ويمثل (الشكل-7-29) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للوح.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-29)

بمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع $\boldsymbol{A}_2$ الذي يتجه نحو الأسفل؛ نحصل على:

$$m_2.A_2=W_2.\sin a-F_{f2}+F_{f1} \qquad (4)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى $\boldsymbol{A}_2$ ؛ نحصل على:

$$0=N_1-N_2+W_2.\cos a \qquad (5)$$

ومن شرط الانزلاق؛ نحصل على:

$$F_{f2}=f\,.N_2 \qquad (6)$$

نحصل على ست معادلات بثمانية مجاهل هي:

$$F_{f1},F_{f2},N_1,N_2,A_O,A_2,e$$

نستعين بمعادلات الحركة، بإيجاد علاقات لمميزات الحركة المجهولة بدلالة التسارع الخطي A_2 ، حيث القرص يتدحرج وحركته دورانية حول المركز الآني I ، بالتالي:

$$\mathrm{IB}.e = A_{\mathrm{B}} = A_2 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{2R} A_2 \qquad (7)$$

$$A_{\mathrm{O}} = \mathrm{IO}.e = R.\frac{1}{2R} A_2 = \frac{1}{2} A_2 \qquad (8)$$

حل المعادلات يتم بحل علاقات التوازن:

من العلاقة (2)؛ نحصل على:

$$N_1 = W_1.\cos a$$

ومن العلاقة (5)؛ نحصل على:

$$N_2 = W_2.\cos a + W_1.\cos a = (W_1 + W_2)\cos a$$

ومن العلاقة (6)؛ نحصل على:

$$F_{f_2} = f(W_1 + W_2)\cos a$$

بالتعويض في علاقات التحريك؛ نحصل على:

$$\frac{1}{2} m_1.A_2 = W_1.\sin a - T - F_{f1} \qquad (1')$$

$$\frac{1}{4} m_1.A_2 = T - F_{f1} \qquad (3')$$

$$2m_2.A_2 = 2W_2(\sin a - f.\cos a) - 2W_1.f.\cos a + 2F_{f1} \qquad (4')$$

بجمع علاقات التحريك؛ نحصل على:

$$(\frac{3}{4} m_1 + 2m_2)A_2 = (W_1 + 2W_2)\sin a - 2f(W_1 + W_2)\cos a$$

$$A_2 = \frac{4}{3m_1 + 8m_2}[(W_1 + 2W_2)\sin a - 2f(W_1 + W_2)\cos a]$$

نعوض في علاقات الحركة (7) و (8)، نحصل على:

$$e = \frac{2}{R(3m_1 + 8m_2)}[(W_1 + 2W_2)\sin a - 2f(W_1 + W_2)\cos a]$$

$$A_{\mathrm{O}} = \frac{2}{3m_1 + 8m_2}[(W_1 + 2W_2)\sin a - 2f(W_1 + W_2)\cos a]$$

وبجمع (1′) مع (3′)؛ نحصل على:

$$F_{f_1} = \frac{1}{8} m_1 (4g.\sin a - 3A_2)$$

وبجمع (3′) مع (4′)؛ نحصل على:

$$T = \frac{1}{4}(m_1 + 4m_2)A_2 - W_2.\sin a - f\ (W_1 + W_2)\cos a$$

أما شرط الحركة فيحدد:

من شرط أن حركة الجملة متسارعة:

$$A_2 > 0$$

ويتحقق ذلك، عندما:

$$(W_1 + 2W_2)\sin a > 2 f\ (W_1 + W_2)\cos a$$

منه:

$$f < \frac{W_1 + 2W_2}{2(W_1 + W_2)} \tan a$$

ومن، شرط التدحرج:

$$F_{f1} \le f\ .N_1$$

ويتحقق ذلك، عندما:

$$\frac{1}{8} m_1 (4g.\sin a - 3A_2) \le f\ .m_1.g.\cos a$$

منه:

$$f \ge \frac{1}{2}\tan a + \frac{3}{8}\frac{A_2}{g}\sec a$$

بالتالي يكون شرط الحركة:

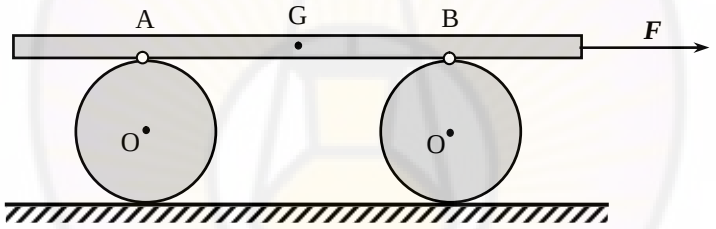
$$\frac{W_1 + 2W_2}{2(W_1 + W_2)} \tan a > f \ge \frac{1}{2}\tan a + \frac{3}{8}\frac{A_2}{g}\sec a$$

مسألة-7-10- (الفصل الثاني-2000-2001)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على لوح متجانس كتلته M يستند على أسطوانتين مصمتتين خشنتين متشابهتين كتلة كل منهما m ، ونصف قطر كل منهما r ، وعزم عطالتهما حول محورهما الهندسي المار من O هو ($I_O = m.r^2/2$).

إذا سحب اللوح بوساطة قوة ثابتة قدرها F نحو اليمين، ليتحرك دون انزلاق على الأسطوانتين مؤدياً لتدحرجهما دون انزلاق أيضاً على السطح الأفقي الخشن. المطلوب عندما يصبح مركز كتل الجائز G في منتصف البعد بين نقطتي التماس A و B ، كما في (الشكل-7-30)، إيجاد التسارع الخطي A للوح، والتسارع الخطي A_O ، والزاوي ε للأسطوانتين، والقوى المؤثرة عليهم.

الحل:



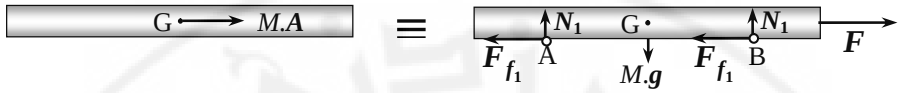
(الشكل-7-30) جملة الميكانيكية

لإيجاد التسارع الخطي للوح، والتسارع الخطي والزاوي للأسطوانتين، والقوى المؤثرة عليهم، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة، مع القوى المؤثرة على كل وصلة على حده.

ندرس حركة اللوح بعد عزله عن المجموعة، والخاضع في الوضع المطلوب لوزنه $M\,\boldsymbol{g}$ في مركز ثقله G ، وقوة القيد في كل من نقطتي التماس A و B مع الأسطوانتين المتشابهتين، والممثلة بالمركبتين $\boldsymbol{F_{f1}}$ قوة الاحتكاك، و $\boldsymbol{N_1}$ رد الفعل الناظمي، وبما أنه يمس الأسطوانتين طوال الحركة، فحركته انسحابية وفق المعادلة:

$$M.\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{F} = M.\boldsymbol{g} + 2\boldsymbol{N_1} + 2\boldsymbol{F_{f_1}} + \boldsymbol{F}$$

يمثل (الشكل-7-31) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للوح.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-31)

بمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع $\boldsymbol{A}$ ؛ نحصل على:

$$M.A = F - 2F_{f1} \qquad (1)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى $\boldsymbol{A}$ ؛ نحصل على:

$$0 = 2N_1 - M.g \qquad (2)$$

ندرس حركة إحدى الأسطوانتين المتشابهتين بعد عزلها عن الجملة التي تتدحرج على كل من الجائز والسطح الأفقي، والخاضعة في الوضع المطلوب لوزنها $\boldsymbol{m.g}$ في مركز ثقلها O ، وقوة القيد في نقطة التماس A' مع السطح الأفقي الممثلة برد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_2}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_{f2}}$ التي من دونها لا تتدحرج على السطح، وقوة القيد في نقطة التماس A مع الجائز الممثلة برد الفعل الناظمي $\boldsymbol{N_1}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_{f1}}$ التي من دونها لا تتدحرج على الجائز، وبما أن حركة الأسطوانة مستوية، فمعادلات الحركة تعطى لـــ:

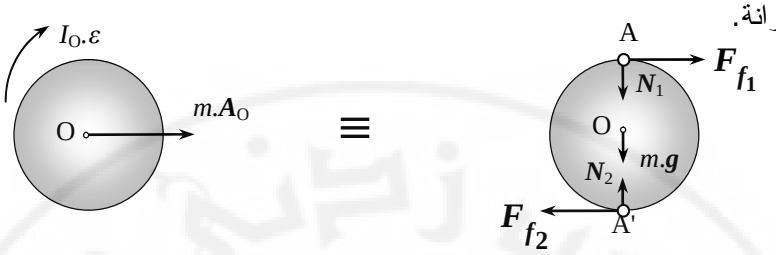
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$m.\boldsymbol{A}_O = \sum \boldsymbol{F} = m.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N_2} + \boldsymbol{N_1} + \boldsymbol{F_{f2}} + \boldsymbol{F_{f1}}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_O.E = \boldsymbol{M_O}$$

يمثل(الشكل-7-32) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للأسطوانة.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-32)

بمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع A_O :

$$m.A_O = F_{f_1} - F_{f_2} \qquad (3)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى A_O ؛ نحصل على:

$$0 = N_1 + m.g - N_2 \qquad (4)$$

وبتطبيق علاقة العزم؛ نحصل على:

$$I_O.e = (F_{f_1} + F_{f_2})r \qquad (5)$$

نحصل على خمس معادلات بسبعة مجاهيل، هي: $F_{f_1}, F_{f_2}, N_1, N_2, A, A_O, e$

نستعين بمعادلات الحركة بإيجاد علاقات لمميزات الحركة المجهولة بدلالة إحداهن، وليكن التسارع الخطي للجائز A .

بما أن حركة الأسطوانة هي حركة دورانية آنية حول المحور الآني المار من A′ ، بالتالي:

$$\frac{A_O}{r} = \frac{A_A}{2r} = e$$

وبما أن حركة الجائز هي حركة انسحابية، بالتالي:

$$A_A = A_B = A$$

منه:

$$A_O = \frac{1}{2}A \qquad (6)$$

$$e = \frac{1}{2r}A \qquad (7)$$

حل المعادلات يتم بحل علاقات التوازن:

من العلاقة (2)؛ نحصل على:

$$N_1 = M.g/2$$

من العلاقة (4)؛ نحصل على:

$$N_2 = g(M+2m)/2$$

وبتعويض علاقات الحركة في علاقات التحريك؛ نحصل على:

$$M.A = F - 2F_{f1} \qquad (1')$$

$$m.A/2 = F_{f1} - F_{f2} \qquad (3')$$

من (5):

$$\frac{1}{2}m.r^2.\frac{1}{2r}A = (F_{f1} + F_{f2})r$$

$$m.A/4 = F_{f1} + F_{f2} \qquad (5')$$

بجمع العلاقات (1′) و (3′) و (5′)؛ نحصل على:

$$(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}m + M)A = F$$

منه:

$$A = \frac{4}{3m+4M}F$$

نعوض في (6)؛ نحصل على:

$$A_O = \frac{2}{3m+4M}F$$

نعوض في (7)؛ نحصل على:

$$e = \frac{2}{r(3m+4M)}F$$

نعوض في (1′)؛ نحصل على:

$$F_{f_1} = \frac{3m}{2(3m+4M)}F$$

نعوض في (3′) نحصل على:

$$F_{f_2} = -\frac{m}{2(3m+4M)}F$$

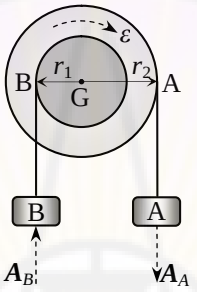
الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه F_{f2} معاكس للاتجاه المفروض في مخططات الجسم الحر.

نعوض في (5′) نحصل على تطابق بالقيم.

مسألة-7-11

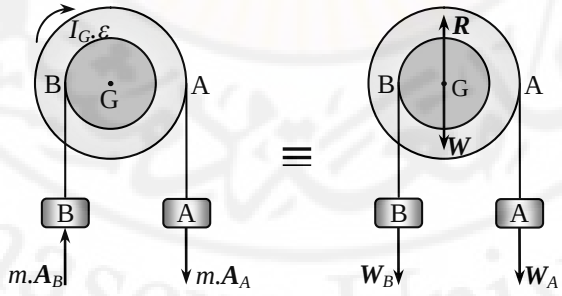
تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على بكرة مزدوجة وزنها ($W_1 = 2000$ N) تدور حول محور أفقي ثابت أملس مطابق لمحورها الهندسي المار من G ، ونصفا قطري جزئيها ($r_1 = 25$ cm) و ($r_2 = 35$ cm)، ونصف قطر عطالتها ($\rho_G = 20$ cm). لف خيط خفيف يحمل كتلتين A و B وزن كل منهما ($W = 250$ N)، كما هو مبين في (الشكل-7-33). المطلوب إيجاد تسارع هبوط الكتلة اليمنى A_A .

الحل:



(الشكل-7-33) جملة ميكانيكية

يمكن دراسة الجملة المؤلفة من ثلاثة أجزاء مباشرة، بتطبيق تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة لأجزاء الجملة مع القوى الخارجية، وذلك للتخلص من القوى الداخلية، وقوى شد الخيط، كما في (الشكل-7-31).



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-34)

بأخذ العزوم حول المركز G ، نحصل على:

$$m.g.r_2 - m.g.r_1 = m.A_B.r_1 + m.A_A.r_2 + I_G.e$$

حيث تسارع الكتلة اليسرى:

$$A_B = A_B^t = r_1.e$$

وتسارع الكتلة اليمنى:

$$A_A = A_A^t = r_2.e$$

بالتعويض:

$$m.g(r_2 - r_1) = m.e(r_1^2 + r_2^2) + I_G.e$$

منه:

$$e = \frac{m.g(r_2 - r_1)}{m(r_1^2 + r_2^2) + I_G}$$

حيث عزم عطالة البكرة:

$$I_G = M.r_G^2 = \frac{2000}{9.81}(0.2)^2 = 8.15\ \text{kg.m}^2$$

بالتعويض:

$$e = 1.94\ \text{rad/sec}^2$$

ومنه، تسارع الكتلة اليمنى:

$$A_A = r_2.e = 0.35 \times 1.94 = 0.68\ \text{m/sec}^2$$

مسألة-7-12 (الفصل الأول-1999-2000)

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على جسمين A و B كتلة كل منهما m يتصلان بطرفي قضيب خفيف AB مهمل الكتلة طوله l ، بحيث تستند الكتلة A على جدار شاقولي أملس، بينما تستند الكتلة B على سطح أفقي أملس.

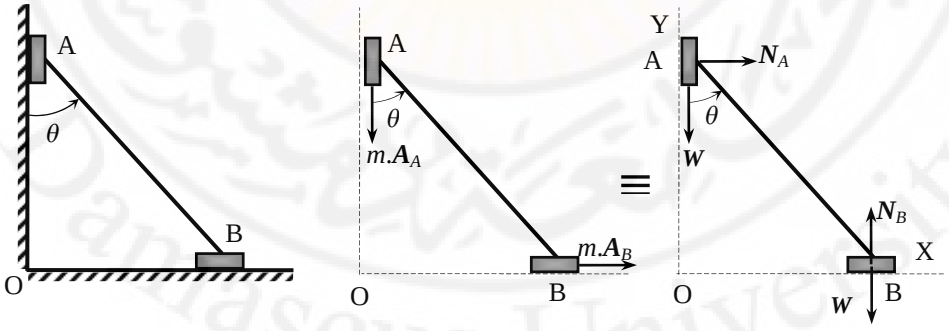
فإذا بدأ القضيب حركته من السكون عندما كان شاقولياً وموازياً للجدار. المطلوب، إيجاد بدلالة الزاوية θ الموضحة في a من (الشكل-7-35)، علاقة كل من التسارع الخطي لكل من الكتلتين A و B ، والتسارع الزاوي ε للقضيب، ورد فعل كل من الجدار N_A ، والسطح الأفقي N_B على الجسمين، ومن ثم إيجاد الوضع الزاوي θ ؛ التي يترك عنده القضيب الجدار الشاقولي.

الحل:

يمكن دراسة الجملة المؤلفة من ثلاثة أجزاء مباشرة، بتطبيق تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة لأجزاء الجملة مع القوى الخارجية، وذلك للتخلص من تحديد القوى الداخلية، وقوى القيد بين القضيب وكل من الكتل A و B وفق المعادلة التالية.

$$m.\boldsymbol{A}_A + m.\boldsymbol{A}_B = \sum \boldsymbol{F} = m.\boldsymbol{g} + m.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B$$

ويمثل b من (الشكل-7-35) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للجملة.



b- مخطط الجسم الحر≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة , a- جسمان A و B يتصلان بطرفي قضيب (الشكل-7-35)

بمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع A_A ؛ نحصل على:

$$m.A_A = 2m.g - N_B \qquad (1)$$

وبإسقاطها على منحى تسارع A_B ؛ نحصل على:

$$m.A_B = N_A \qquad (2)$$

نحصل على معادلتين بأربعة مجاهيل، هي: N_A, N_B, A_A, A_B

نستعين بمعادلات الحركة بإيجاد علاقات لمميزات الحركة A_A و A_B بدلالة الزاوية θ ، وذلك باختيار جملة المحاور OXY المنطبقة على السطح الأفقي، والجدار العمودي عليه.

بما أن حركة الكتلة A انسحابية على مسار مستقيم ينطبق على المحور OY ، منه:

$$y_A = l.\cos q \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_A = V_A = -l.\sin q.\dot{q} = -l.\sin q.w$$

حيث $(\dot{q} = w)$ والإشارة السالبة تدل أن اتجاه V_A معاكس لاتجاه محور الحركة OY .

بالاشتقاق لعلاقة السرعة بدلالة الزمن؛ نحصل على:

$$\ddot{y}_A = \dot{V}_A = A_A = -l(\cos q.\dot{q}.w + \sin q.\dot{w}) = -l(\cos q.w^2 + \sin q.e) \qquad (3)$$

حيث $(\dot{w} = e)$ والإشارة السالبة تدل أن اتجاه A_A معاكس لاتجاه محور الحركة OY .

وبما أن حركة الكتلة B انسحابية على مسار مستقيم ينطبق على المحور OX ، منه:

$$x_B = l.\sin q \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_B = V_B = l.\cos q.\dot{q} = l.\cos q.w$$

حيث $(\dot{q} = w)$ والإشارة الموجبة تدل أن اتجاه V_B باتجاه محور الحركة OX .

بالاشتقاق لعلاقة السرعة بدلالة الزمن نحصل على:

$$\ddot{y}_B = \dot{V}_B = A_B = l(-\sin q.\dot{q}.w + \cos.\dot{w}) = l(-\sin q.w^2 + \cos q.e) \qquad (4)$$

حيث $(\dot{w} = e)$ وبفرض الإشارة موجبة تدل أن اتجاه A_B باتجاه محور الحركة OX .

بما أن ω تمثل السرعة الزاوية للقضيب؛ فيمكن تعيينها من تطبيق علاقة مبدأ العمل والطاقة عليه من الوضع الابتدائي المحدد بـــ $(\theta_0 = 0)$ إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ.

$$\frac{1}{2}m.V_A^2 + \frac{1}{2}m.V_B^2 = \sum w = w_{N_A} + w_{N_B} + w_{W_B} + w_{W_A}$$

حيث:

$$w_{N_A} = w_{N_B} = w_{W_B} = 0$$

و : $w_{W_A} = W_A.\Delta y_A = W_A(y_{A_0} - y_A) = m.g(l - l.\cos q) = m.g.l(1-\cos q)$

بالتعويض:

$$\frac{1}{2}m.l^2.\sin^2 q.w^2 + \frac{1}{2}m.l^2.\cos^2 q.w^2 = m.g.l(1-\cos q)$$

وبعد الاختصار؛ نحصل على علاقة السرعة الزاوية:

$$w^2 = 2.\frac{g}{l}(1-\cos q)$$

بالاشتقاق لعلاقة السرعة الزاوية بدلالة الزمن؛ نحصل على علاقة التسارع الزاوي:

$$2w.\dot{w} = 2.\frac{g}{l}\sin q.\dot{q} \qquad \Rightarrow \qquad e = \frac{g}{l}\sin q$$

بالتعويض في العلاقة (3)؛ نحصل على علاقة التسارع الخطي للكتلة A :

$$A_A = l[\cos q.2\frac{g}{l}(1-\cos q) + \sin q\,\frac{g}{l}\sin q]$$

$$A_A = (1 + 2\cos q - 3\cos^2 q)\,g$$

بالتعويض في العلاقة (4)؛ نحصل على علاقة التسارع الخطي للكتلة B :

$$A_B = l[-\sin q\,\frac{2g}{l}(1-\cos q) + \cos q\,\frac{g}{l}\sin q] \qquad (4)$$

$$A_B = \sin q\,(3\cos q - 2)g$$

بالتعويض في العلاقة (1)؛ نحصل على علاقة رد فعل السطح الأفقي على الكتلة B :

$$N_B = (1 - 2\cos q + 3\cos^2 q)\,m.g$$

بالتعويض في العلاقة (2)؛ نحصل على علاقة رد فعل الجدار الشاقولي على الكتلة A :

$$N_A = \sin q(3\cos q - 2)m.g$$

ويترك القضيب الجدار الشاقولي عندما يصبح رد فعل الجدار على الكتلة A معدوم، أي:

$$N_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin q\,(3\cos q - 2) = 0$$

إما:

$$\sin q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

ويمثل الوضع الابتدائي

أو :

$$3\cos q - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos q = 2/3 \quad \Rightarrow \quad q = 48.2^{o}$$

4- الحركة الابتدائية

يتم اتزان الأجسام المتماسكة بدراسة العلاقة بين القوى الخارجية المؤثرة على جسم ما، وقوى القيود المسببة للاتزان؛ كردود أفعال المساند التي يستند عليها الجسم.

فإذا أزيل فجأة قيد من قيود الاتزان فقد الجسم اتزانه، وبدأ في الحركة من وضع اتزانه السابق؛ الذي أصبح وضعاً ابتدائياً للحركة، ودراسة حركة الجسم في هذا الوضع بالذات تتم بالطرق المتبعة نفسها سابقاً بفارق بسيط يُيَسر الحل لهذا الوضع للجسم، وهو أنه في هذا الوضع تنعدم السرعة الزاوية للجسم، وبالتالي تنعدم مركبة تسارع مركز كتل الجسم؛ التي يدخل في حسابها مقدار السرعة الزاوية، وتنعدم أيضاً عندئذ مركبة محصلة القوى الفعالة التابعة لهذه المركبة للتسارع.

مسألة-7-13

لوح مربع الشكل BCDE طول ضلعه $2l$ ، وكتلته M ، وعزم عطالته حول مركز كتله G هو ($I_G=2Ml^2/3$)، حمل من رأسين متجاورين B و C فيه بوساطة حبلين رأسيين OC و O_1B طول كل منهما يساوي طول ضلع المربع، بحيث كان ضلعان متقابلان من المربع أفقيين كما في a من (الشكل-7-33).

قطع أحد الحبلين فجأة، المطلوب إيجاد قوة الشد T في الحبل الآخر بعد قطع الأول مباشرة، والتسارع الزاوي لكل من الحبل ε_2 ، واللوح ε_1 عندئذ.

الحل:

قبل قطع الحبل الأول O_1B يتزن اللوح، وبعد قطعه يبدأ اللوح الحركة من السكون، ولدراسة الحركة:

-نفرض أن الحبل OC يبدأ في الدوران حول O بتسارع زاوي ابتدائي ε_1 لأن $(\omega_1 = 0)$، ومنه تسارع الطرف C هو:

$$A_C = A_C^t = 2l.e_1$$

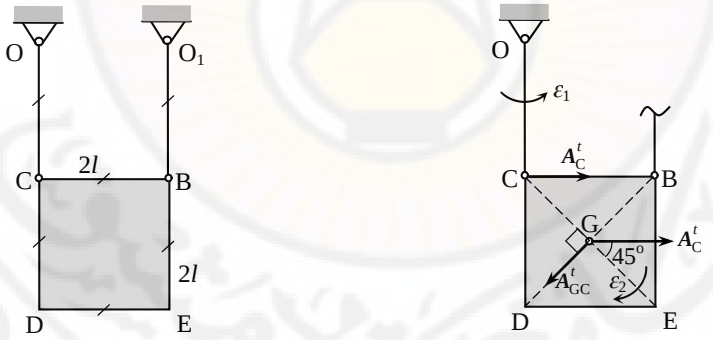
- نفرض أن التسارع الزاوي الابتدائي للوح هو ε_2 ، وباعتبار C قطب لحركة اللوح عندئذ يمكن تعيين تسارع مركز ثقل اللوح G بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A_G} = \boldsymbol{A_C^\tau} + \boldsymbol{A_{GC}^\tau}$$

حيث:

$$A_{GC}^t = \sqrt{2}\, l.e_2$$

ومركباته موضحة في b من (الشكل-7-33).



a- لوح مربع محمول من رأسين متجاورين b- حركة اللوح الابتدائية

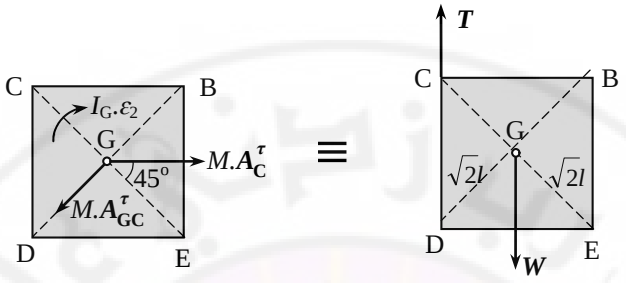
(الشكل-7-33)

وبما أن حركة اللوح الابتدائية دورانية لامركزية؛ فمعادلات الحركة تعطى بـــ:

$$M.\boldsymbol{A_G} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}$$

$$I_G.\boldsymbol{E} = \boldsymbol{M_G^e}$$

ويمثل (الشكل-7-34) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للوح.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-34)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى في الاتجاه الأفقي؛ نحصل على:

$$2M.l.e_1 - \sqrt{2}\ M.l.e_2.\cos 45^o = 0 \qquad (1)$$

وبإسقاط معادلة القوى في الاتجاه الراسي؛ نحصل على:

$$\sqrt{2}M.l.e_2.\sin 45^o = M.g - T \qquad (2)$$

وبتطبيق علاقة العزم حول C ؛ نحصل على:

$$I_G.e_2 + \sqrt{2}\ M.l.e_2(\sqrt{2}l) - 2M.l^2.e_1 = M.g.l \qquad (3)$$

بحل المعادلة الأولى؛ نحصل على:

$$e_2 = 2e_1$$

وبحل المعادلة الثالثة؛ نحصل على:

$$\frac{8}{3}e_2 - 2e_1 = \frac{g}{l}$$

وبحلهما نحصل؛ على:

$$e_2 = \frac{3g}{5l} \quad , \quad e_1 = \frac{3g}{10l}$$

وبالتعويض بقيمة ε_2 في المعادلة الثانية؛ نحصل على:

$$T = 2M.g/5$$

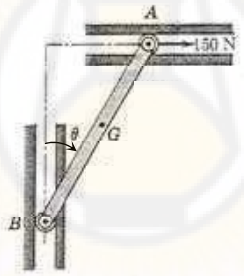
مسألة-7-14

قضيب رفيع متجانس AB طوله (l = 1.2 m)، وكتلته (M = 30 kg)، وعزم عطالته حول مركز كتله G الذي يقع في منتصفه هو ($I_G = M.l^2/12$)، يمكنه الحركة في المستوى الرأسي، بحيث نهايتاه يتبعان الدليلين الأملسين الأفقي والرأسي.

فإذا سلطت القوة (F = 150 N) في الطرف A من القضيب عندما يكون في وضع السكون، ويميل بزاوية ($\theta = 30^o$) على الشاقول كما في (الشكل-7-35). المطلوب إيجاد التسارع الزاوي ε ، والخطي A_G الناتج للقضيب، والقوى N_A , N_B المؤثرة على أسطوانات التدحرج الصغيرة في طرفي القضيب A و B .

الحل:

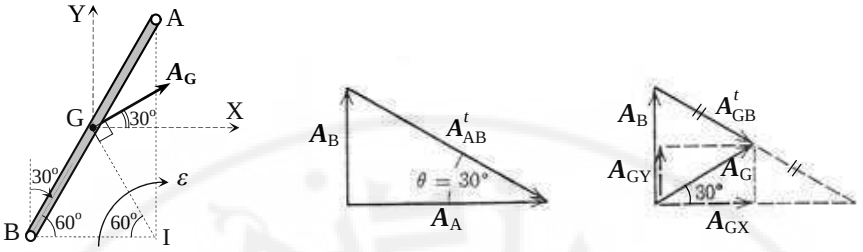
لإيجاد التسارع الزاوي والخطي للقضيب، والقوى المؤثرة عليه، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ القوى المؤثرة على القضيب مع المجموعة المكافئة للقوى الفعالة؛ التي تحدد بتحديد التسارع الخطي لمركز الكتل والتسارع الزاوي للقضيب.



(الشكل-7-35)

نلاحظ أن بعد مركز كتل القضيب G عن المركز الآني للدوران I يبقى ثابتاً، ويساوي إلى (IG = l/2)، بالتالي سيبدأ القضيب حركته في اللحظة الابتدائية له بحركة دورانية آنية حول المركز الآني للدوران I بتسارع زاوي قدره ε باتجاه دوران حركة عقارب الساعة، ويكون عندئذ لمركز الكتل مركبة وحيدة للتسارع عمودية على نصف قطر الدوران IG تميل على الأفق بزاوية 30^o ، الموضحة في a من (الشكل-7-36)، وقيمتها العددية:

$$A_G = A^t_{GI} = \text{IG}.e = l.e/2 \qquad \text{(a)}$$



a- حركة القضيب الدورانية الآنية b- مثلث التسارع لـــ A_A c- مثلث التسارع لـــ A_A

(الشكل-7-36)

كما يمكن إيجاد تسارع مركز الكتل G بحل أولاً العلاقة الشعاعية للتسارع:

$$A_A = A_B + A_{AB}$$

برسم مثلث التسارع وفق هذه العلاقة الموضح بـــ (الشكل-7-36b)، حيث لدينا:

$$A_{AB} = A_{AB}^t = AB.e = l.e$$

يمكن عندئذ تحديد تسارع مركز الكتل بالعلاقة الشعاعية للتسارع:

$$A_G = A_B + A_{GB} = A_B + A_{GB}^\tau \qquad (b)$$

برسم مثلث التسارع وفق هذه العلاقة على مثلث التسارع السابق، والموضح في c من (الشكل-7-36)، حيث لدينا:

$$A_{GB}^t = GB.e = \frac{l}{2}.e$$

بالتالي يمكن تحديد تسارع مركز الكتل بمركبتين، وذلك بإسقاط العلاقة (b) على محورين متعامدين X و Y ؛ نحصل على:

$$A_{GX} = A_{GB}^t.\cos 30^o = \frac{l}{2}e.\cos 30^o = 0.52e \ \mathrm{m/sec^2} \qquad (1)$$

$$A_{GY} = A_{GB}^t.\cos 60^o = \frac{l}{2}e.\cos 60^o = 0.3e \ \mathrm{m/sec^2} \qquad (2)$$

كما نحصل على هاتين المركبتين أيضاً بإسقاط العلاقة (a) على المحورين المتعامدين نفسيهما.

ندرس حركة القضيب بعد عزله عن قيوده، والخاضع في اللحظة الابتدائية له لوزنه ($W = m.g$) المؤثر في مركز ثقله G ، وردي الفعل الناظمي N_B و N_A المؤثرة على أسطوانات التدحرج في B و A ، والقوة المسلطة F في الطرف A ، وبما أن حركة القضيب مستوية فمعادلات الحركة تعطى لــ:

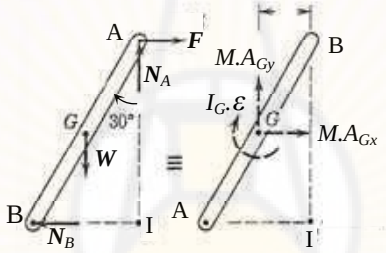
الجزء الانسحابي من الحركة:

$$M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} = M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{GX}} + M.\boldsymbol{A}_{\mathbf{GY}} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{N}_{\mathbf{C}}$$

الجزء الدوراني من الحركة:

$$I_{\mathrm{G}}.\boldsymbol{E} = \boldsymbol{M}_{\mathbf{G}}$$

ويمثل (الشكل-7-37) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للقضيب.



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

(الشكل-7-37)

بمساواة المخططين، وبإسقاط معادلة القوى على المحورين X و Y :

$$M.A_{\mathrm{GX}} = \sum F_{\mathrm{X}} \quad \Rightarrow \quad M.A_{\mathrm{GX}} = F - N_{\mathrm{B}} \qquad (3)$$

$$M.A_{\mathrm{GY}} = \sum F_{\mathrm{Y}} \quad \Rightarrow \quad M.A_{\mathrm{GY}} = N_{\mathrm{A}} - W \qquad (4)$$

وبتطبيق علاقة العزم حول النقطة I :

$$I_{\mathrm{G}}.e + M.A_{\mathrm{GX}}.d_{\mathrm{Y}} + M.A_{\mathrm{GY}}.d_{\mathrm{X}} = F.\mathrm{IA} - M.g.d_{\mathrm{X}} \qquad (5)$$

من دراسة حركة القضيب حصلنا على خمس معادلات بخمسة مجاهيل، وهي:

$$N_{\mathrm{A}}, N_{\mathrm{B}}, A_{\mathrm{GX}}, A_{\mathrm{GY}}, e$$

بحل هذه المعادلات نحصل على قيم هذه المجاهيل في اللحظة الابتدائية للحركة.

بالتعويض في المعادلة (5):

$$\frac{30}{12}(1.2)^2.e + 30(0.52e)(0.6\cos 30^o) + 30(0.3e)(0.6\sin 30^o) =$$
$$150(1.2\cos 30^o) - 30(9.81)(0.6\sin 30^o)$$

نحصل على قيمة التسارع الزاوي للقضيب:

$$e = 4.69\,\text{rad/s}^2$$

بالتعويض في المعادلة (1)؛ نحصل على قيمة المركبة الأفقية للتسارع الخطي لمركز الكتل:

$$A_{GX} = 0.52e = 0.52(4.69) \approx 2.44\,\text{m/sec}^2$$

بالتعويض في المعادلة (2)؛ نحصل على قيمة المركبة العمودية للتسارع الخطي لمركز الكتل:

$$A_{GY} = 0.3e = 0.3(4.69) \approx 1.41\,\text{m/sec}^2$$

منه تسارع مركز كتل القضيب:

$$A_G = [(A_{GY})^2 + (A_{GX})^2]^{1/2} = \frac{l}{2}e = 0.6(4.69) \approx 2.81\,\text{m/sec}^2$$

بالتعويض في المعادلة (3)؛ نحصل على القوة المؤثرة على أسطوانة التدحرج في B :

$$30(0.52e) = 150 - N_B \quad \Rightarrow \quad N_B = 76.8\,\text{N}$$

بالتعويض في المعادلة (3)؛ نحصل على القوة المؤثرة على أسطوانة التدحرج في B :

$$30(0.3e) = N_A - 30(9.81) \quad \Rightarrow \quad N_A = 337\,\text{N}$$

* * *

مسائل غير محلولة *PROBLEMS*

م-7-1

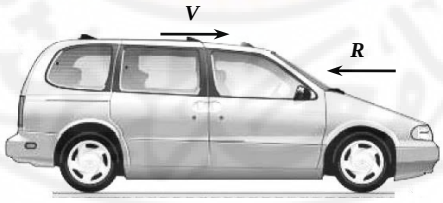
تزن السيارة الموضحة في (الشكل م-7-1) مع عجلاتها الأربعة W ، ووزن كل عجلة هو Q ، ونصف قطرها r ، ونصف قطر التأرجح العطالي حول مركزها الهندسي هو ρ_O . ويؤثر على العجلتين الخلفيتين المحركتين عزم دوار M_τ حول محاورهما، وتخضع كل عجلة لعزم احتكاك M_f حول محورها، وتتعرض أثناء سيرها لمقاومة الهواء R ، التي تتناسب طرداً مع مربع السرعة الانسحابية $(R = a\,.V^2)$، حيث a يمثل عامل تناسب ثابت.

اذا بدأت السيارة حركتها من السكون. المطلوب، بإهمال الاحتكاك الدوراني، إيجاد ما يأتي:

1. السرعة العظمى للسيارة $V_{\max}$.
2. الاحتكاك الانزلاقي المؤثر على العجلات الأربع أثناء الحركة F_{f_1}, F_{f_2} .

الجواب:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{(M_t - 4M_f)}{a.r}} \quad , \quad F_{f_1} = \frac{0.5M_t - M_f}{r} - \frac{r_O^2}{r^2}.\frac{Q}{g}A \quad , \quad F_{f_2} = \frac{M_f}{r} + \frac{r_O^2}{r^2}.\frac{Q}{g}A$$



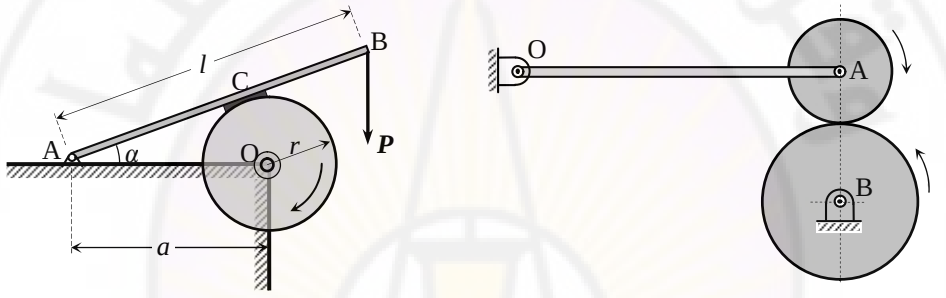
(الشكل.م-7-1)

م-7-2

يدور دولاب مكبح كتلته (m = 160 kg)، ونصف قطره (r = 38 cm)، المبين في a من (الشكل م-7-2) بسرعة (n = 600 r.p.m).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي (f_k = 0.25) بين الدولاب والقضيب الكابح AB الذي طوله (l = 120 cm)، وكان البعد (a = 75 cm)، والقوة (P = 392.4 N). المطلوب تعيين الزمن t اللازم لإيقافه.

الجواب: $t = 12.2 \sec$



(الشكل م-7-2)

م-7-3

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على أسطوانة مصمتة A كتلتها ($m_A = 15\,\text{kg}$)، ونصف قطرها ($R_A = 25\,\text{cm}$)، تدور بسرعة زاوية ثابتة قدرها ($w_A = 100\,\text{rad/sec}$). تركت تستند بكامل وزنها فجأةً على أسطوانة أخرى ساكنة B كتلتها ($m_B = 30\,\text{kg}$)، ونصف قطرها ($R_A = 37.5\,\text{cm}$). مركبة على محور ثابت مطابق لمحورها الهندسي، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-2).

في البداية يحدث انزلاق عند نقطة التماس، وبدأت تتناقص سرعة الأولى بالتدريج بينما تزداد سرعة الثانية إلى أن يتوقف الانزلاق.

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين سطحي الأسطوانتين مساوياً لـــ (f_k = 0.25). المطلوب؛ بإهمال احتكاك المحاور، تعيين الزمن t المنقضي قبل الوصول إلى هذه الحالة.

الجواب: $t = 3.4 \sec$

م-7-4

يدور دولاب معدل حول محوره الهندسي بسرعة 100 r.p.m ، ثم يتباطأ دورانه حتى يقف بعد مضي زمن قدره 52 sec .

إذا كان عزم عطالته بالنسبة لمحوره الهندسي هو ($I_O = 58\ kg.m^2$). المطلوب تعيين العزم المقاوم T_r الذي سبب هذا التباطؤ.

الجواب: $T_r = -11.6\ N.m$

م-7-5

تدور كرة متجانسة كتلتها 40 kg ، ونصف قطرها ($R = 25\ cm$) حول محورها الهندسي، وعزم عطالتها حول محور Z مار من مركز كتلتها هو ($I_Z = 0.4\ kg.m^2$) .

إذا بدأت هذه الكرة حركتها من حالة السكون، وتسارعت بانتظام، ودارت 12 دورة حتى أصبحت سرعتها 180 r.p.m . المطلوب تعيين العزم الذي سبب هذا الدوران T^e .

الجواب: $T^e = 2.35\ N.m$

م-7-6

تدور أسطوانة نصف قطرها r بسرعة زاوية ω حول محورها الهندسي، وتستند إلى مساند معامل الاحتكاك فيها f .

إذا تم رفع المزدوجة المحركة عنها. المطلوب تعيين مقدار زاوية الدوران φ التي تدورها الأسطوانة حتى تقف.

الجواب: $j = w^2.r/4f.g$

م-7-7- (الدورة الامتحانية الثالثة-2010-2011)

قضيب رفيع متجانس AB طوله (l = 1.2 m)، وكتلته (M = 20 kg)، ومركز كتلته G يقع في منتصفه، وعزم عطالته حوله هو ($I_G = M.l^2/12$).

إذا بدأ القضيب حركته من السكون من الوضع الذي تكون فيه ($\theta = 90^o$)، بحيث تكون حركة مركز الكتل مقيدة على الدليل الرأسي الأملس، بينما يتحرك الطرف A على الدليل الأفقي الأملس. المطلوب عند الوضع ($\theta = 30^o$)، الموضح في a من (الشكل.م-7-3)، إيجاد قيمة واتجاه كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي ε للقضيب، والتسارع الخطي لمركز كتله A_G ، وقوى القيد المؤثرة عليه N_A و N_G .

الجواب: $w = 3.885\,\text{rad/sec}, e = 7.04\,\text{rad/sec}^2, A_G = 8.18\,\text{m/sec}^2, N_G = 0, N_A = 32.6\,\text{N}$



(الشكل.م-7-3)

م-7-8- (الفصل الأول-2003-2004)

قضيب رفيع متجانس AC طوله (l = 1.2 m)، وكتلته (M = 20 kg)، ومركز كتلته B يقع في منتصفه، وعزم عطالته حوله هو ($I_B = M.l^2/12$).

إذا سلطت القوة (F = 600 N) في الطرف A عندما يكون القضيب في وضع السكون، وهو شاقولي يوازي الدليل الرأسي الأملس. عندها يتحرك مركز الكتل B حركة مقيدة على الدليل الرأسي الأملس، بينما يتحرك الطرف A على الدليل الأفقي الأملس. المطلوب، عند الوضع ($\theta = 30^o$) الموضح في b من (الشكل.م-7-3)، إيجاد قيمة واتجاه كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي ε للقضيب، والتسارع الخطي لمركز كتله A_B ، والقوى المؤثرة عليه N_A و N_B .

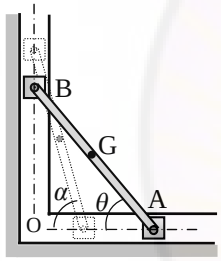
الجواب: $w = 8.05\,\text{rad/sec}, e = 15.88\,\text{rad/sec}^2, A_B = 11.17\,\text{m/sec}^2 \downarrow, N_B = 600\,N \rightarrow, N_A = 27.2\,\text{N} \downarrow$

م-7-9- (الفصل الأول-1989-1990)

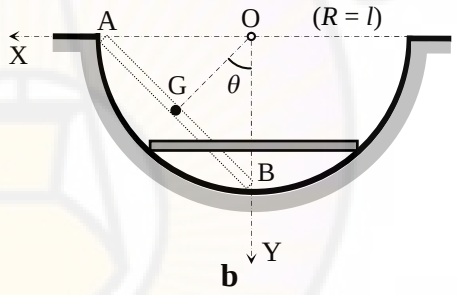
قضيب متجانس AB طوله l ، وكتلته M ، ومركز كتلته G يقع في منتصفه، وعزم عطالته حوله هو ($I_G = M.l^2/12$). يتمفصل في نهايتيه بمنزلقتين A و B مهملتي الكتلة، بحيث تكون حركة المنزلقة A مقيدة بالدليل الأفقي الأملس، بينما تكون حركة المنزلقة B مقيدة بالدليل الأفقي الأملس.

إذا بدأ حركته من السكون بالانزلاق من الوضع المحدد بالزاوية α ، تحت تأثير قوة الثقالة، كما هو موضح في a من (الشكل.م-7-4). المطلوب، بدلالة زاوية الوضع العام θ ، إيجاد علاقة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ للقضيب، والتسارع الخطي لمركز كتله A_{G_q} ، والقوى المؤثرة عليه N_A و N_B .

الجواب: $w_q = \sqrt{3g(\sin a - \sin\theta)/l}$, $e = 3g.\cos q/2l$



a



b

(الشكل.م-7-4)

م-7-10- (الفصل الأول-2011-2012)

وصلة متجانسة AB طولها ($AB = \sqrt{2}\, l$)، وكتلتها M ، وعزم عطالتها حول مركز كتلها G هو [$I_G = M\,(AB)^2/12$]، قادرة على الانزلاق تحت تأثير ثقلها على سطح أملس على شكل نصف دائرة نصف قطرها ($R = l$).

إذا بدأت الوصلة حركتها من السكون من الوضع الابتدائي المحدد بالزاوية ($\theta = 45^o$)، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-4). المطلوب عندما تصبح الوصلة في وضع أفقي ($\theta = 0^o$)، إيجاد قيمة واتجاه كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي ε للوصلة، والتسارع الخطي لمركز كتلتها A_G ، وردود الأفعال N_A و N_B في الطرفين A , B .

الجواب: $w_{(q=0)} = 0.79\sqrt{g/l}\ \text{rad/sec}$, $e_{(q=0)} = 0$, $A_G^n = 0.44g\ \text{m/sec}^2$, $N_A = N_B = 1.02\,M.g\ \text{N}$

م-7-11- (الدورة الاستثنائية-2009-2010)

قضيب رفيع منتظم متجانس OA طوله l ، وكتلته M ، وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو $(I_O = M.l^2/3)$. قابل للدوران في المستوى الرأسي حول المفصل الثابت O .

يترك القضيب وشأنه من وضع ابتدائي محدد بالزاوية α ، ليسقط على المستوى الأفقي الثابت.

المطلوب عند الوضع العام للقضيب المحدد بالزاوية θ ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-5)، إيجاد علاقة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي للقضيب ε_θ ، ومركبات رد الفعل R_{OX} , R_{OY} في المفصل O .

الجواب: $w_q = \sqrt{3g(\sin a - \sin q)/l}$, $e_q = 3g.\cos q/2l$



a b

(الشكل.م-7-5)

م-7-12- (الدورة الامتحانية الثالثة-2012-2013)

قضيب رفيع منتظم غير متجانس OA طوله l ، وكتلته M ، ومركز كتله G يبعد عن O مقدار $(OG = 3l/4)$، ونصف قطر عطالته $(\rho_G = l/4)$، وعزم عطالته حول مركز كتله $(I_G = M.r_G^2)$. يتمفصل طرفه O بمفصل ثابت، ويرتبط طرفه الآخر A بحبل معلق في المسند الثابت O_1 ، بحيث يصنع القضيب زاوية α مع المستوي الأفقي الثابت. كما هو مبين في b من (الشكل م-7-5).

إذا ما قطع الحبل، وترك القضيب وشأنه ليسقط تحت تأثير ثقله في المستوي الرأسي. المطلوب، عند الوضع العام للقضيب المحدد بالزاوية θ ، إيجاد علاقة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ للقضيب، ومركبات رد الفعل R_{OX} , R_{OY} في المفصل O .

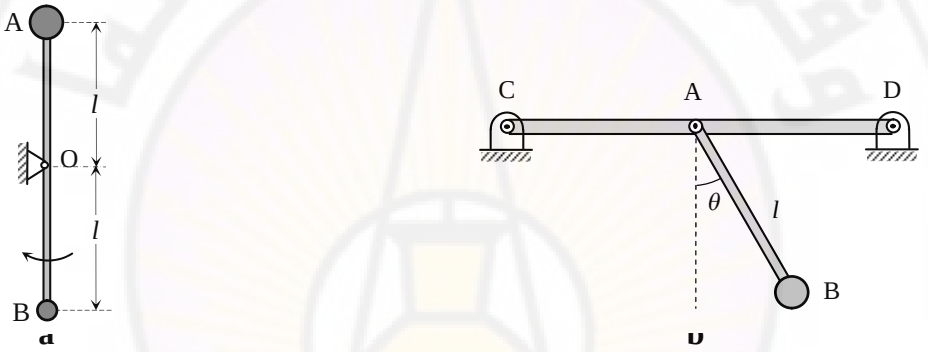
الجواب: $w_q = \sqrt{12g(\sin q - \sin a)/5l}$, $e_q = 6g.\cos q/5l$

م-7-13

قضيب رفيع AB مهمل الوزن متمفصل في منتصفه بالمفصل الثابت O ، وثبت في نهايتيه A , B كتلتان (M_1=2 kg) و (M_2=1.2 kg)، بحيث يكون القضيب في لحظة البدء ساكناً وهو في الوضع الشاقولي، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-6).

إذا أعطي للقضيب انحرافاً صغيراً بحيث يبدأ بالدوران في المستوي الرأسي حول المفصل O ، المطلوب عندما يكون القضيب في الوضع الأفقي تعيين قيمة كل من السرعة الزاوية ω ،والتسارع الزاوي ε للقضيب، ومركبتي رد الفعل R_{OX}, R_{OY} في المفصل O .

الجواب: $R_{OY} = 29.43\,\mathrm{N}$, $R_{OX} = 3.924\,\mathrm{N}$, $e = 0.25g/l$, $w = 0.5g/l$



(الشكل.م-7-6)

م-7-14

قضيب منتظم AB طوله l ، وكتلته M . يحمل في طرفه B جسيماً مساوياً له في الكتلة، ويدور حول طرفه الثاني A عبر مفصل يقع في منتصف جائز بسيط CD طوله $2l$ ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-6).

إذا ترك القضيب من وضع أفقي على يمين A . المطلوب إيجاد ما يأتي:

1. أقصى ضغط أفقي ورأسي R_{AXmax}, R_{AYmax} على المفصل A ، وأوضاع القضيب المناظرة لذلك.
2. أقصى ردود فعل الجائز R_C, R_D على مرتكزيه D و C .

الجواب: $R_{C(q=0)} = R_{D(q=0)} = (43/16)\, m.g$

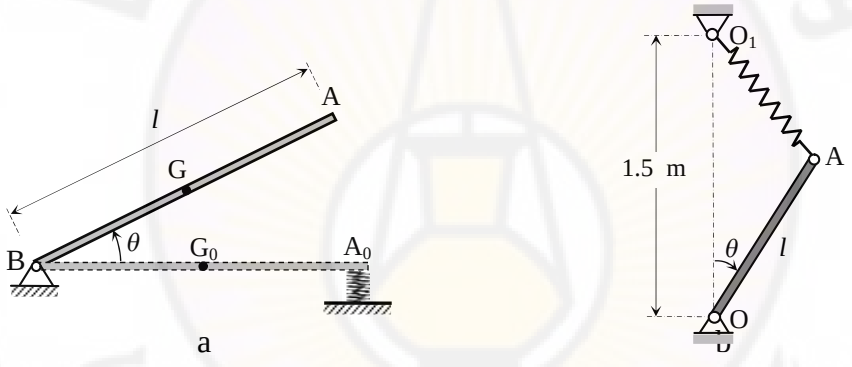
$$R_{Xmax} = R_{X(q=0)} = (81/32)m.g \quad , \quad R_{Ymax} = R_{Y(q=0)} = (43/8)m.g$$

م-7-15- (الدورة الامتحانية الثالثة-2014-2015)

قضيب متجانس AB طوله l ، وكتلته M ، وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو $M\,l^2/3$ ، ومركز كتلته G يقع في منتصفه. يتمفصل طرفه B بمسند ثابت، ويستند طرفه الآخر A_0 على نابض عامل صلابته k ، ومضغوط بمقدار صغير Δl ، بحيث يكون القضيب في وضعه الابتدائي أفقياً، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-7).

إذا ترك القضيب وشأنه ليتحرك في المستوي الرأسي. المطلوب، عند الوضع الزاوي له θ ، إيجاد علاقة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ للقضيب، ومركبات قوى القيد R_{BX}, R_{BY} في المفصل B .

الجواب: $w_q^2 = 3\frac{\Delta l^2}{l^2}.\frac{k}{M} - \frac{3g}{l}\cos q \quad , \quad e_q = \frac{3g}{2l}.\cos q$



(الشكل.م-7-7)

م-7-16- (الدورة الامتحانية الثالثة-2011-2012)

قضيب رفيع منتظم متجانس طوله (OA = l = 1.2 m)، وكتلته (m = 7.5 kg)، وعزم عطالته حول أحد أطرافه ($I_O = m\,.\,l^2/3$). يتمفصل طرفه O بمفصل ثابت، ويرتبط طرفه الآخر A بنابض عامل صلابته (k = 20 N/m) معلق في المسند O_1 ، بحيث يكون القضيب مع النابض بطوله الحر شاقولياً في الوضع الابتدائي الساكن ($\theta = 0$).

إذا ترك القضيب وشأنه ليسقط، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-7) تحت تأثير ثقله على المستوي الأفقي. المطلوب، عند الوضع ($\theta = 90^o$)، إيجاد قيمة كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي ε للقضيب، ومركبات رد الفعل R_{OX}, R_{OY} في المفصل O .

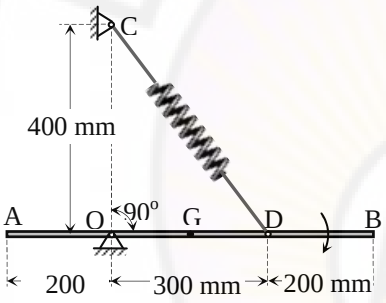
الجواب: $w = 3.31\,\text{rad/sec}$, $e = 3.59\,\text{rad/sec}^2$, $R_{OX} = 31.92$ N , $R_{OY} = 31.4$ N

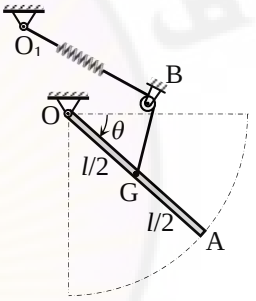
م-7-17- (الدورة الامتحانية الثالثة-2013-2014)

قضيب متجانس AB طوله ($l = 700$ mm)، وكتلته ($M = 10$ kg)، ومركز كتلته G يقع في منتصفه، وعزم عطالته حوله هو ($I_G = M \cdot l^2/12$). يتمفصل بالمسند الثابت في O ، ويرتبط في D بنابض عامل صلابته ($k = 600$ N/m)، معلق بطوله الحر في المسند الثابت C عندها يكون القضيب أفقياً ($\theta = 90^o$)، كما هو مبين في a من (الشكل م-7-8).

يترك القضيب وشأنه ليدور حول المفصل O في المستوي الرأسي. المطلوب، عند الوضع الزاوي ($\theta = \pi$)، إيجاد قيمة واتجاه كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي للقضيب ε ، وقوى القيد R_{OX}, R_{OY} في المفصل O .

الجواب: $w = 2.93\,\text{rad/sec}$, $e = 0$, $R_{OX} = 0$, $R_{OY} = 9\,\text{N}$





(الشكل.م-7-8)

م-7-18- (الفصل الثاني-2012-2013)

قضيب رفيع منتظم متجانس OA طوله ($l = 140$ cm)، وكتلته ($M = 9$ kg)، وعزم عطالته حول أحد أطرافه ($I_O = M \cdot l^2/3$). يتمفصل طرفه O بمفصل ثابت، ويرتبط مركز كتله G بحبل عبر بكرة مهملة ثابتة بنابض معلق في المسند O_1 ، عامل صلابته ($k = 20$ N/m)، بحيث يكون النابض بطوله الحر، والقضيب أفقي في الوضع الابتدائي الساكن ($\theta = 0$).

يترك القضيب وشأنه ليسقط تحت تأثير ثقله على المستوي الرأسي كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-8). المطلوب، عند الوضع ($\theta = 90^o$)، إيجاد قيمة كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي ε للقضيب، ومركبات رد الفعل R_{OX}, R_{OY} في المفصل O .

الجواب: $w = 4.21\,\text{rad/sec}$, $e = 6.67\,\text{rad/sec}^2$, $R_{OX} = 28\,\text{N}$, $R_{OY} = 32.14\,\text{N}$

م-7-19

نواس مركب عبارة عن أسطوانة متجانسة طولها l ، ونصف قطرها R . يهتز حول محور ينطبق على أحد أقطار القاعدة وهو محور أفقي.

المطلوب تعيين دور النواس المركب T_k .

الجواب: $T_k = 2p\sqrt{(3R^2 + 4l^2)/6g.l}$

م-7-20

يعلق قرص دائري متجانس وزنه W ، ونصف قطره r ، قادر على الدوران في المستوي الرأسي حول محور ثابت مار من O نقطة من محيطه، كما هو مبين في a (الشكل.م-7-9).

المطلوب تعيين دور الاهتزازات الصغيرة τ لهذا النواس.

الجواب: $t = 2p\sqrt{3r/2g}$



(الشكل.م-7-9)

م-7-21

قرص كتلته 1 kg ونصف قطره 15 cm معلق من نقطة O على محيطه، ويهتز في مستواه بزاوية قدرها ($\theta = 60^o$) على جانبي الرأسي المار بنقطة التعليق، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-9).

المطلوب إيجاد أقصى ضغط على محور التعليق R_{OY} , R_{OX} ، وزمن ذبذباته الصغيرة T_k .

الجواب: $R_{OY(q=90^o)} = R_{OY\max} = 16.35\,\text{N}$, $R_{OX} = 0$, $T_k = 0.96\,\text{sec}$

م-7-22

صفيحة مستوية ومتجانسة شكلها قطع ناقص محوره الكبير $2\ a$ ، ومحوره الصغير $2\ b$ ، والبعد بين محرقيها $2\ c$. تهتز حول محور في مستويها يمر من أحد محرقيها، ويعامد المحور الكبير.

إذا كان المحرق الثاني هو مركز الاهتزاز. المطلوب إيجاد التباعد المركزي للقطع الناقص $(e = c/a)$.

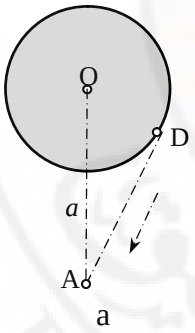
الجواب: $e = c/a = 1/2$

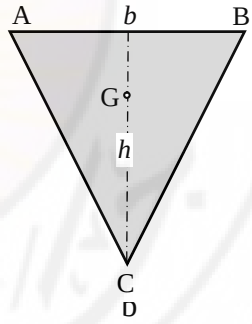
م-7-23

قرص دائري متجانس مركزه O كتلته M ، ونصف قطره R . يستطيع الدوران حول محور عمودي على مستويه مار من O . نقطة D من محيطه تقع تحت تأثير قوة جاذبة من قبل مركز جذب A ثابت يقع على شاقول المركز O ، وعلى سوية أوطى، ويبعد عنه مسافة a ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-10).

إذا كانت قيمة القوة $(F=h\ .\ DA)$، حيث h عامل ثابت التناسب. المطلوب بّين أن حركة القرص هي حركة اهتزازية تشبه حركة نواس بسيط، وأوجد طول النواس البسيط المكافئ له l .

الجواب: $l = M.R.g/2h.a$





(الشكل م-7-10)

م-7-24

صفيحة مستوية ومتجانسة شكلها مثلث متساوي الساقين ABC قاعدته $(AB = b)$، وارتفاعه $(h = 2\ \text{m})$، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-10).

المطلوب إيجاد طول النواس البسيط المكافئ للنواس المركب l ، الذي يؤلفه هذا السطح عندما يدور حول قاعدته الأفقية، ودوره كنواس مركب T_k .

الجواب: $l = 1\,\text{m}\ ,\ T_k = 2\,\text{sec}$

م-7-25

تهتز أسطوانة متجانسة طولها l ، ونصف قطرها R حول محور ينطبق على أحد أقطار القاعدة. في الوضع الابتدائي تكون الأسطوانة ساكنة، ومركز ثقلها G على الشاقول، وأعلى من مركز التعليق، ثم تترك الأسطوانة وشأنها لتتحرك.

المطلوب تعيين السرعة الزاوية $w_{(q=2p/3)}$ عندما تكون الأسطوانة قد دارت زاوية ($\theta = 2\pi/3$)، وعندما تصبح الأسطوانة شاقولية $w_{(q=0)}$ ، ومركز ثقلها تحت مركز التعليق.

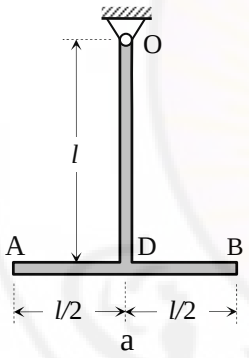
الجواب: $w^2_{(q=2p/3)} = 18g.l/(3R^2+4l^2)$, $w^2_{(q=0)} = 24g.l/(3R^2+4l^2)$

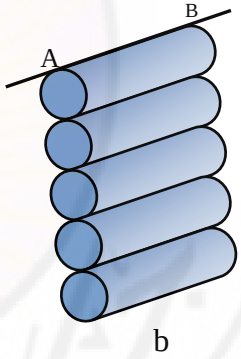
م-7-26

يتكون النواس المركب المبين في a من (الشكل.م-7-11) من قضيبين OD , AB رفيعين ومتجانسين ولهما المقطع العرضي نفسه.

المطلوب تعيين دور الاهتزازات الصغيرة τ لهذا النواس.

الجواب: $t = 2p\sqrt{17l/18g}$





(الشكل.م-7-11)

م-7-27

يتألف نواس مركب من خمسة أنابيب أفقية مفرغة وأسطوانية، قطرها (d = 12 cm)، وطولها (l = 60 cm)، ومتساوية بالكتلة (m = 800 gr)، وسمكها مهمل. علقت هذه الأنابيب فوق بعضها بحيث تتماس بمولد من مولداتها، وهذه المولدات تقع كلها في مستوى واحد، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-11).

إذا تم هز النواس حول المولد العلوي AB . المطلوب إيجاد دور النواس المركب T_k .

الجواب: $T_k = 1.28\,\text{sec}$

م-7-28

تهتز صفيحة مستوية ومتجانسة دائرية الشكل نصف قطرها R حول:

a. مماس للدائرة في مستوى الصفيحة.

b. محور عمودي على الصفيحة مار من نقطة على محيطها.

المطلوب تعيين في كل من الحالتين طول النواس البسيط المكافئ l .

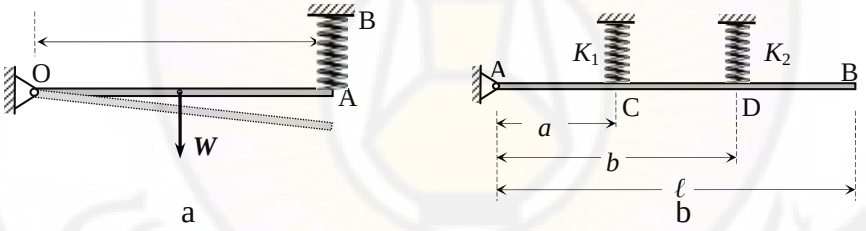
الجواب: $\text{a} \Rightarrow l = 5R/4$, $\text{b} \Rightarrow l = 3R/2$

م-7-29

جائز متجانس OA وزنه ($W = M.g$)، وطوله l ، وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو ($I_O = M.l^2/3$)، ربط طرفه A بنابض شاقولي عامل مرونته k ، وطرفه الثاني بالمفصل O ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-29).

إذا شد الطرف A نحو الأسفل ثم ترك، فإن الجائز سيدور حول المفصل O دوراناً اهتزازياً، المطلوب إيجاد معادلته الاهتزازية، ودور الاهتزاز الدوراني τ .

الجواب: $\ddot{\varphi} + (3k/M)\varphi = 0$, $t = 2p\sqrt{M/3k}$



(الشكل.م-7-12)

م-7-30

جائز متجانس AB كتلته ($M = 16$ N) وطوله ($l = 0.9$ m) وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو ($I_A = M.l^2/3$)، يتمفصل طرفه A مع جدار شاقولي، ويربط بنابضين عامل مرونتهما ($k_1 = k_2 = 19.62$ N/cm) ، وطرفه الثاني بالمفصل O ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-12).

إذا كانت الأبعاد ($a = 0.3$ m) و ($l = 0.6$ m). المطلوب إيجاد معادلته الاهتزازية، ودور الاهتزاز الدوراني τ الواقع في مستوى الرأسي.

الجواب: $\ddot{\varphi} + \dfrac{3k(a^2+b^2)}{M.l^2}\varphi = 0$, $t = 2p\sqrt{\dfrac{M.l^2}{3k(a^2+b^2)}} = 0.139\,\text{sec}$

م-7-31

يدفع قرص كتلته (m =80 kg)، ونصف قطره (R = 200 mm)، ونصف قطر عطالته (ρ = 175 mm)، وعزم عطالته حول مركز ثقله G هو ($I_G = m.\rho^2$)، إلى الأمام بقوة ثابتة (T = 200 N) تميل على الأفق بزاوية (α =45^o)، ليتدحرج على سطح أفقي خشن، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-13).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين القرص والسطح هو (f_k = 0.12). المطلوب إيجاد قيمة كل من التسارع الزاوي للقرص ε ، والتسارع الخطي لمركز ثقله A_G ، والتحقق من شرط التدحرج مع عدم الانزلاق ($F_f = f_k.N$).

الجواب: $e = 5.1\,\text{rad/sec}^2$, $A_G = 1.02\,\text{m/sec}^2$



(الشكل.م-7-13)

م-7-32- (الفصل الثاني-2008-2009)

يسحب قرص كتلته m ، ونصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركز ثقله G هو ($I_G = m.R^2/2$)، بواسطة خيط غير مرن ملفوف على محيطه، بقوة T ثابتة تميل على الأفق بزاوية α ، ليتحرج على سطح خشن مائل بزاوية α نحو الأعلى، بتسارع ثابت قدره A_G لمركز ثقله.

المطلوب في الوضع العام للقرص الموضح في b من (الشكل م-7-13):

1. إيجاد علاقة كل من قوة شد الخيط T اللازمة لتحقيق هذه الحركة، ومركبات القوة المسلطة N و F_f من الارض على القرص في C ، والتسارع الزاوي للقرص ε .
2. تطبيق عددي: إذا كان (m = 80 kg)،(R = 200 mm)،(α = 45^o)،(A_G = 1 m/sec^2)، وكان معامل الاحتكاك الحركي (f_k = 0.12). تحقق من شرط التدحرج ($F_f = f_k.N$).

الجواب: $T = 337.5\,\text{N}$, $F_f = 297.5\,\text{N}$, $N = 555\,\text{N}$, $e = 5\,\text{rad/sec}^2$

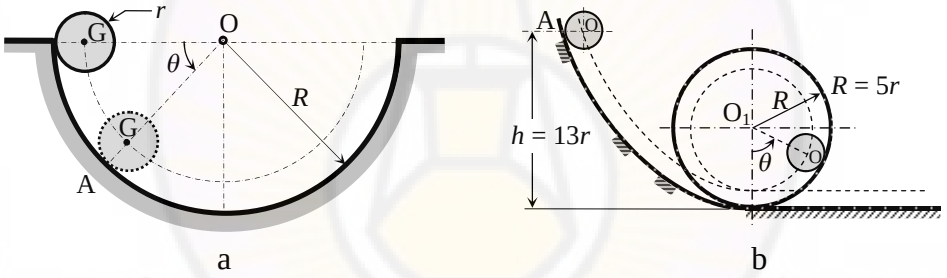
م-7-33- (الفصل الأول-1987-1988)

قرص مصمت متجانس كتلته M ، ونصف قطره r . وعزم عطالته حول محور مار من مركزه الهندسي G هو ($I_G = m.R^2/2$)، يترك ليتدحرج دون انزلاق من السكون على سطح خشن ثابت على شكل ربع دائرة نصف قطرها ($R = 11r$) من الوضع الأفقي ($\theta_0 = 0$).

المطلوب عند الوضع العام في نقطة التماس A ، والمحدد بالزاوية θ ، كما هو مبين في a من (الشكل م-6-13)، ما يأتي:

1. علاقة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي للقرص ε_θ ، والتسارع الخطي لمركزه الهندسي A_G^q .
2. علاقة كل من مركبتي رد الفعل الناظمية والمماسية $N_\theta , F_{f\theta}$.

الجواب: $w=\sqrt{40\,g.\sin q/r}$ ، $e=3g.\cos q/2r$ ، $N_q=7W.\sin q/3$ ، $F_{fq}=W.\cos q/3$



(الشكل م-7-14)

م-7-34- (الفصل الأول-2004-2005)

قرص مصمت متجانس كتلته M ، ونصف قطره r . وعزم عطالته حول محور مار من مركزه الهندسي O هو ($I_O = m.R^2/2$)، يترك من الموقع A ليتدحرج دون انزلاق من السكون على السطح المنحني الرأسي الخشن الثابت.

إذا كان ($h = 13r$) و ($R = 5r$). المطلوب عند الوضع العام في نقطة التماس A ، والمحدد بالزاوية θ ، والموضح في a من (الشكل م-6-13)، إيجاد علاقة كل من السرعة الزاوية ω_θ ، والتسارع الزاوي ε_θ للقرص، والتسارع الخطي لمركزه الهندسي A_O^q . وعلاقات القوى المؤثرة عليه $N_\theta , F_{f\theta}$.

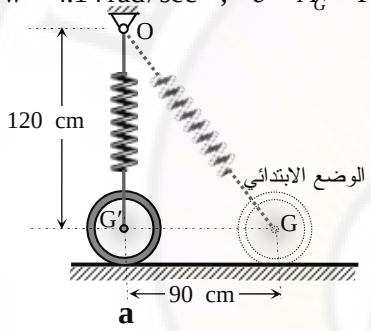
الجواب: $w_q=4\sqrt{g(2+\cos q)/3r}$ ، $e_q=2g.\sin q/3r$ ، $N_q=W.(8-\cos q)/3$ ، $F_{f_q}=W.\sin q/3$

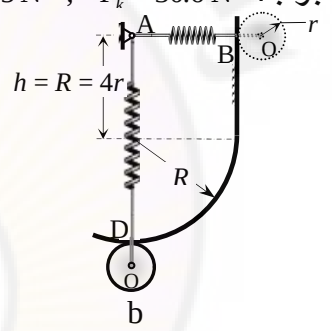
م-7-35- (الفصل الثاني-2015-2016)

دولاب متجانس كتلته ($M = 15$ kg)، ونصف قطره ($R = 22.5$ cm)، ونصف قطر عطالته حول مركز كتلته G هو ($\rho_G = 18$ cm)، وعزم عطالته بدلالته هو ($I_G = M.\rho^2$). يرتبط مركزه G بنابض طوله الحر ($l_0 = 30$ cm)، وعامل مرونته ($k = 34$ N/m). كما هو مبين في a من (الشكل م-7-15).

إذا كان الدولاب ساكناً في الوضع الابتدائي المعين بالبعد ($GG' = 90$ cm)، وتدحرج في المستوي الرأسي دون انزلاق على السطح الأفقي نحو اليسار. المطلوب، عندما يصل مركز الكتل G الموقع G′ ، قيمة واتجاه كل من السرعة الزاوية ω ، والتسارع الزاوي ε للقرص، والتسارع الخطي لمركز كتلته A_G ، والقوى المؤثرة عليه N, F_f, F_k .

الجواب: $w = 4.14\,\text{rad/sec}$, $e = A_G = F_f = 0$, $N = 116.55\,\text{N}$, $F_k = 30.6\,\text{N}$





(الشكل م-7-15)

م-7-36- (الفصل الأول-2004-2005)

قرص مصمت كتلته ($M = 5$ kg) نصف قطره ($r = 10$ cm)، وعزم عطالته حول محوره الهندسي المار من مركز ثقله O هو ($I_O = M.r^2/2$)، يرتبط مركزه بنابض ثابت صلابته k ، وطوله الحر ($l_0 = 4r$)، والمثبت في المسند A .

يبدأ القرص حركته من السكون من الموضع B عندها كان OA أفقياً، ليتدحرج دون انزلاق على السطح الرأسي المبين في a من (الشكل م-7-15).

المطلوب، عندما يصل القرص الموقع D ، إيجاد:

1. أقل قيمة لعامل صلابة النابض k_{min} حتى يبقى القرص ملامساً للسطح حتى الموقع D .
2. قيمة كل من التسارع الزاوي للقرص ε ، والتسارع الخطي لمركز كتلته A_O ، والقوى المؤثرة عليه N, F_f, F_k عند هذا الموقع.

الجواب: $k > 203.37\,\text{N/m}, w = 22.9\,\text{rad/sec}, V_O = 2.29\,\text{m/sec} \leftarrow, F_f = 0, F_k = 101.7\,\text{N}$

م-7-37

دولاب مزدوج كتلته (M = 10 kg)، ونصف قطره الكبير (R = 200 mm)، ونصف قطره الصغير (r = 75 mm)، ونصف قطر عطالته (ρ_O = 125 mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي ($I_O = M.\rho_O^2$)، يلف على محيطه الصغير نابض بطوله الحر، معامل مرونته (k = 300 N/m)، كما هو مبين في a من (الشكل م-7-16).

إذا بدأ الدولاب بالدحرجة من السكون على مستوى خشن مائل بزاوية ($\alpha = 30^o$). المطلوب بعد أن يقطع مركز الدولاب مسافة (Δ_O = 90 mm)، إيجاد قيمة كل من التسارع الخطي A_O لمركز الدولاب O ، والتسارع الزاوي له ε ، والقوى المؤثرة عليه N . F_f , F_k .

الجواب: $A_O = 0.143 \text{m/sec}^2$, $e = 0.717 \text{rad/sec}^2$, $N = 84.95 \text{N}$, $F_f = 13.355 \text{N}$, $F_k = 37.125 \text{N}$



(الشكل م-7-16)

م-7-38

دولاب مزدوج كتلته (M = 15 kg)، ونصف قطره الكبير (R = 200 mm)، ونصف قطره الصغير (r = 75 mm)، ونصف قطر عطالته (ρ_O = 125 mm)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي ($I_O = M.\rho_O^2$)، يلف على محيطه نابض بطوله الحر، معامل مرونته (k = 100 N/m)، كما هو مبين في b من (الشكل م-7-16).

يبدأ الدولاب بالدحرجة من السكون على مستوى خشن مائل بزاوية ($\alpha = 30^o$). المطلوب بعد أن يقطع مركز الدولاب مسافة (Δ_O = 90 mm)، إيجاد كل من التسارع الزاوي ε للدولاب، والتسارع الخطي لمركزه O ، والقوى المؤثرة عليه N . F_f , F_k .

الجواب: $A_O = 0.837 \text{m/sec}^2$, $e = 11.16 \text{rad/sec}^2$, $N = 127.43 \text{N}$, $F_f = 53.13 \text{N}$, $F_k = 33 \text{N}$

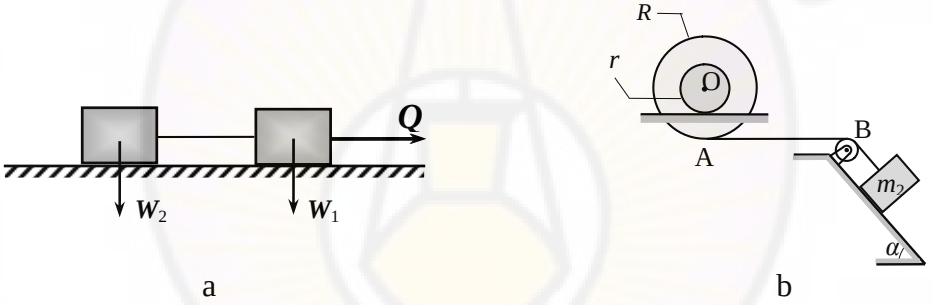
م-7-39- (الفصل الثاني-2014-2015)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من جسمين وزناهما W_1 و W_2 يصل بينهما سلك غير قابل للتمدد، وتتحرك على مستو أفقي خشن، تحت تأثير القوة $\boldsymbol{Q}$ المؤثرة على الجسم الأول، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-17).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي للجسمين بالمستوى هو f_k . المطلوب:

1. إيجاد التسارع الخطي A_1 و A_2 لكل من الجسمين، والشد في السلك T .
2. شرط الحركة المفروضة.
3. إذا كان ($W_1 = 100$ N) و ($W_2 = 60$ N) و ($f = 0.25$)، المطلوب إيجاد أقل قيمة للقوة $Q_{\min}$ قادرة على تحريك الجسمين W_1 و W_2 من السكون.

الجواب: $Q > 40$ N , $T = \frac{W_2}{W_1 + W_2}.Q$, $A_1 = A_2 = (\frac{Q}{W_1 + W_2} - f)g$



(الشكل.م-7-17)

م-7-40- (الفصل الثاني-2006-2007)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قرص مزدوج كتلته m_1 ، ونصف قطره الصغير r ، ونصف قطره الكبير ($R = 1.5\ r$)، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو ($I_O = 0.5\ m_1.r^2$). القرص الصغير منه قابل للتدحرج على سطح مستوي أفقي ثابت، وحول القرص الكبير منه يلف خيط لا يمتط يمر عبر بكرة مهملة B طرفه الآخر مثبت بكتلة قدرها m_2 قابلة للانزلاق على سطح مستوي مائل بزاوية α معامل الاحتكاك الحركي لهما هو f_k ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-17).

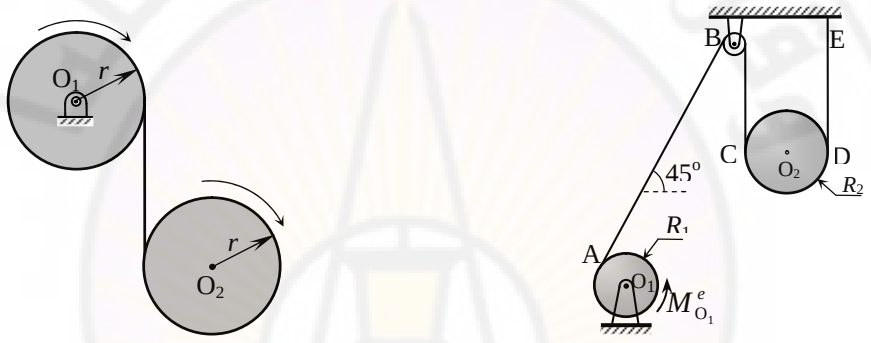
إذا تحركت الجملة من السكون بانزلاق الكتلة m_2 نحو الأسفل، خلالها يتدحرج القرص المزدوج على المستوي الأفقي. المطلوب إيجاد علاقة كل من تسارعات أجسام الجملة A_O, A_2, e ، والقوى المؤثرة عليها، ومن ثم أوجد شرط الحركة.

م-7-41

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قرصين متساويين في الكتلة M ، ونصف القطر R ، ويلفهما خيط خفيف. أحدهما يدور حول محور أفقي ثابت مار بمركزه O_1 ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-18).

إذا هبط القرص الثاني رأسياً ومركزه O_2 ، المطلوب في أي لحظة إيجاد تسارعات القرصين ε_1 و ε_2 و A_{O_2} ، وقوة شد الخيط T .

الجواب: $A_{O_2} = 0.8\,g \quad , \quad e_1 = e_2 = 0.4\,g/R \quad , \quad T = 0.2M.g$



a b

(الشكل.م-7-18)

م-7-42- (الدورة الامتحانية الثالثة-2015-2016)

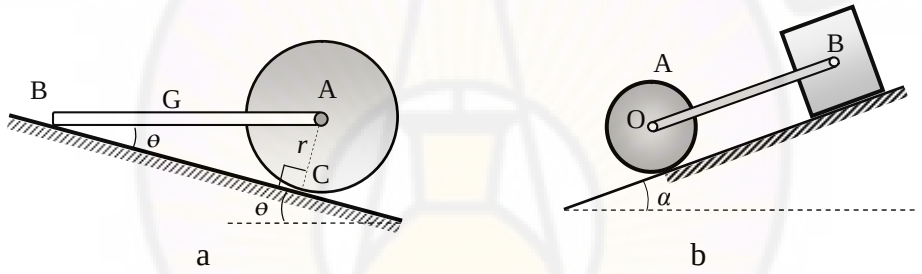
تستخدم الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي لرفع قرص كتلته m_2 ، ونصف قطره R_2 ، وعزم عطالته بالنسبة لمركزه الهندسي O_2 هو $(I_{O_2} = m_2.R_2^2/2)$ ، بواسطة ملفاف كتلته m_1 ، ونصف قطره R_1 ، وعزم عطالته بالنسبة لمحوره الهندسي O_1 هو $(I_{O_1} = m_1.R_1^2/2)$. يستطيع الدوران دون احتكاك حول محور ثابت مار من O_1 تحت تأثير عزم دوراني $M^e_{O_1}$ ، وذلك بواسطة حبل يمر على بكرة صغيرة مهملة B ، طرفه الثاني مثبت بعنصر ثابت في E . كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-18).

المطلوب تعيين علاقة كل من العزم $M^e_{O_1}$ اللازم تطبيقه على الملفاف حتى يتم رفع القرص نحو الأعلى بتسارع ثابت لمركزه وقدره A_{O_2} ، وقوى الشد في أجزاء الحبل، وقوى القيد في المحور الثابت O_1 ، والتسارعات الزاوية لكل من الملفاف والقرص ε_1 و ε_2 .

م-7-43- (الفصل الأول-2010-2011)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قرص كتلته m_1 ، ونصف قطره r ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي A هو ($I_A = m.r^2/2$)، ومن قضيب AB طوله l ، وكتلته m_2 ، ومركز كتله G يقع في منتصفه. يتمفصل طرفه A في مركز القرص، ويستند طرفه الآخر B على سطح خشن مائل بزاوية θ على الأفق، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-19).

إذا بدأت الحركة بتدحرج القرص دون انزلاق على السطح المائل، وانزلاق طرف القضيب عليه. المطلوب، خلال حركة الجملة وبإهمال الاحتكاك في B ، إيجاد علاقة كل من قوى القيد في مركز الاتصال A ، وعند نقاط التماس C و B ، وتسارعات أجسام الجملة ε و A_A و A_G .



a b

(الشكل.م-7-19)

م-7-44- (الفصل الأول-2009-2010)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من أسطوانة A كتلتها m ، ونصف قطرها R ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي المار من O هو ($I_O = m.R^2/2$)، قابلة للتدحرج على سطح خشن معامل الاحتكاك الحركي له f_k ، مائل على الأفق بزاوية α ، وتتمفصل مع قضيب مهمل الكتلة OB ، يتمفصل بدوره مع جسم B كتلته $2m$ ، قابل للانزلاق على السطح الخشن، كما هو مبين في b من (الشكل م-7-19).

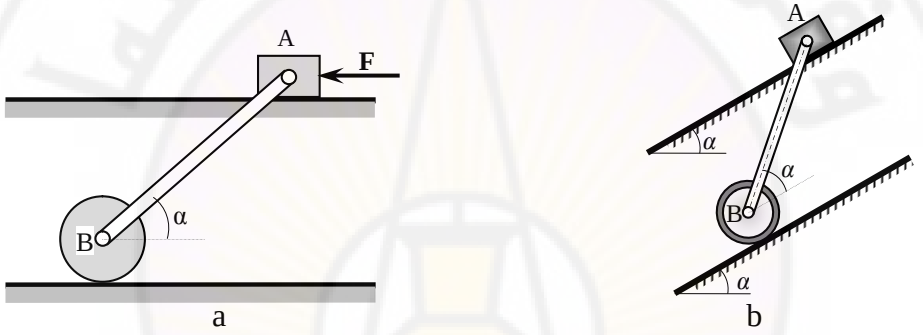
إذا بدأت الجملة حركتها من السكون بتدحرج الأسطوانة A ، وانزلاق الجسم B تحت تأثير قوى الثقالة. المطلوب إيجاد علاقة كل من تسارعات أجسام الجملة ε و A_B و A_A ، والقوى المؤثرة عليهم، والزاوية α التي عندها يتحقق كل من شرط الحركة المفروضة، وشرط تدحرج الأسطوانة.

م-7-45- (الفصل الأول-2007-2008)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قرص كتلته m ، ونصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركز ثقله B هو ($I_B = mR^2/2$). يرتبط بمنزلقة كتلتها $2m$ بواسطة قضيب ($AB = l$) مهمل الكتلة يميل على الأفق بزاوية α ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-20).

إذا تحركت الجملة بتأثير القوة الثابتة F . المطلوب إيجاد علاقة كل من تسارعات أجسام الجملة ε و A_B و A_A ، والقوى المؤثرة عليهم.

الجواب: $A_B = A_A = 2F/7m$, $e = 2F/7m.R$, $T = 3F/7\cos a$, $F_f = F/7$



(الشكل.م-7-20)

م-7-46- (الفصل الأول-2012-2013)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قرص كتلته m ، ونصف قطره R يساوي نصف قطر عطالته، وعزم عطالته حول مركز ثقله B هو ($I_B = mR^2$). يرتبط بمنزلقة كتلتها أيضاً m ، بواسطة قضيب AB مهمل الكتلة طوله l ، ويميل بزاوية α عن المستويين المتوازيين المائلين بدورهما عن الأفق بزاوية α ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-20).

إذا بدأت الجملة حركتها من السكون بتأثير قوى الثقالة بحيث يتدحرج القرص بدون انزلاق على السطح الخشن السفلي، وتنزلق المنزلقة على السطح العلوي الأملس. المطلوب إيجاد علاقة كل من تسارع المنزلقة وتسارعات القرص المتدحرج ε و A_B و A_A ، والقوى المؤثرة عليهم، وقوة الشد أو الضغط T المؤثرة على القضيب خلال الحركة.

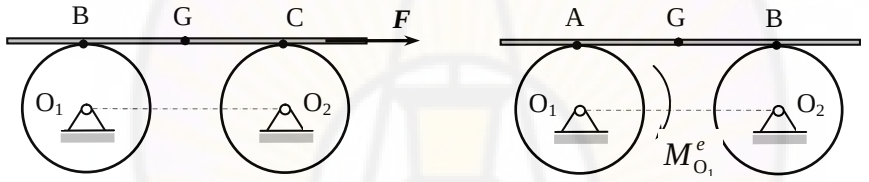
الجواب: $e = 2g.\sin a/3R$, $A_A = A_B = 2g.\sin a/3$, $T = m.g.\tan a/3$

م-7-48- (الفصل الأول-1996-1997)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من لوح خشبي متجانس كتلته M يستند على أسطوانتين مصمتتين متشابهتين قابلتين للدوران حول المحاور O_1 و O_2 ، وتتصف كل منهما بكتلة m ، ونصف قطر R ، وعزم عطالة حول محورها الهندسي $(I_O = 0.5\, m.R^2)$ ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-21).

إذا سحب اللوح بقوة ثابتة F نحو اليمين بحيث يتدحرج على الأسطوانتين بدون انزلاق. المطلوب عندما يصبح مركز ثقل اللوح G في منتصف البعد بين نقطتي التدحرج A و B ، إيجاد علاقة كل من التسارع الخطي للوح A ، والتسارع الزاوي لكل من الأسطوانتين ε_1 و ε_2 ، والقوى المؤثرة عليهم.

الجواب: $e_1 = e_2 = F/R(M+m)$, $A_A = F/(M+m)$



a b

(الشكل.م-7-21)

م-7-48- (الفصل الأول-2008-2009)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من لوح خشبي متجانس كتلته M يستند على أسطوانتين مصمتتين متشابهتين قابلتين للدوران حول المحاور O_1 و O_2 ، وتتصف كل منهما بكتلة m ، ونصف قطر R ، وعزم عطالة حول محورها الهندسي $(I_O = 0.5\, m.R^2)$ ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-21).

إذا طبق على الأسطوانة الأولى عزم ثابت $M^e_{O_1}$ باتجاه حركة عقارب الساعة، بحيث تتدحرج الصفيحة على الاسطوانتين بدون انزلاق. المطلوب، عندما يصبح مركز ثقل اللوح G في منتصف البعد بين نقطتي التدحرج A و B ، إيجاد علاقة كل من التسارع الخطي للوح A ، والتسارع الزاوي لكل من الأسطوانتين ε_1 و ε_2 ، والقوى المؤثرة عليهم.

الجواب: $e_1 = e_2 = M^e/R^2(M+m)$, $A_A = M^e/R(M+m)$

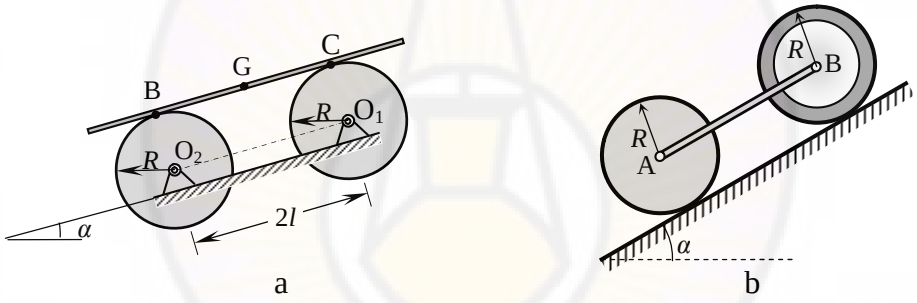
م-7-49- (الفصل الأول-2016-2017)

تنقل الجوائز المعدنية في أحد المعامل بواسطة جهاز نقل ميكانيكي مؤلف من أسطوانتين مصمتتين خشنتين متشابهتين قابلتين للدوران حول محاورهما الهندسية المارة من المسندين O_1 و O_2 ، واللذين يبعدان بعضهما عن بعض مقدار $2l$ ، وتتصف كل أسطوانة بأن لها كتلة M ، ونصف قطر R ، وعزم عطالة حول محورها الهندسي $(I_O = M.R^2/2)$ ، ويتم النقل بدحرجة الجائز وكتلته m على الأسطوانتين بدون انزلاق تحت تأثير قوة ثقالته.

المطلوب عندما يصبح مركز ثقل الجائز G في منتصف البعد بين نقطتي التدحرج C و B ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-22)، إيجاد علاقة كل من التسارع الخطي للجائز A ، والتسارع الزاوي للأسطوانتين ε_1 و ε_2 ، والقوى المؤثرة عليهم.

إرشاد: بما أن الأسطوانتين متشابهتان حركياً وتحريكياً، يكفي تحليل القوى لإحداهما.

الجواب: $e = m.g.\sin a / R(M+m)$, $F_f = m.W_1.\sin a / 2(M+m)$, $N = W.\cos a / 2$



(الشكل-7-22)

م-7-50- (الفصل الثاني-2006-2007)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من أسطوانتين A و B نصف قطر كل منهما R ، الأسطوانة الأولى A مصمتة كتلتها $2m$ ، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي A هو $(I_A = m\,R^2)$، والأسطوانة الثانية B مفرغة كتلتها m ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي B هو $(I_B = m\,R^2)$، ومن قضيب خفيف AB كتلته مهملة يربط محاورها الملساء. كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-22).

إذا تحركت الجملة بدحرجة الأسطوانتين من السكون بدون انزلاق على مستوي مائل خشن يميل على الأفق بزاوية α . المطلوب إيجاد تسارعات حركة الأسطوانتين A_A, e_A, A_B, e_B ، والشد أو الضغط T في القضيب AB ، ومن ثم القوى المؤثرة عليهما.

الجواب: $e_A = e_B = 3g.\sin a / 5R$, $T = m.g.\sin a / 5$, $A_A = A_B = 3g.\sin a / 5$

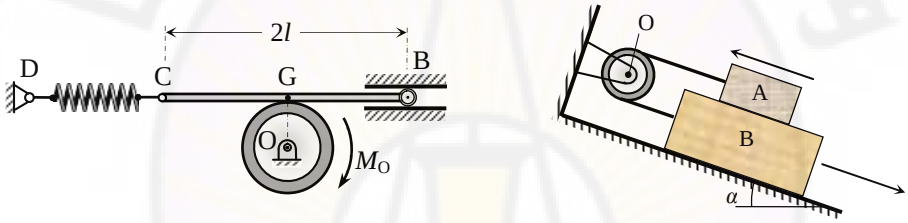
م-7-51- (الفصل الأول-2015-2016)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قرص كتلته m ، ونصف قطره R ، وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو $(I_O = 0.5\,m.R^2)$، يستند عليه قضيب رفيع متجانس BC كتلته M ، وطوله $2l$ ، موصول طرفه C بنابض ثابت صلابته k ، واستطالته في الوضع المبين في الشكل هو $l/2$ ، وطرفه الآخر B ينزلق في مجرى أفقي أملس، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-23)

تبدأ الحركة عندما كان النابض بطوله الحر بتطبيق عزم دوراني ثابت M_O^e على القرص، يؤدي إلى دحرجة القضيب على محيطه دون انزلاق.

المطلوب عندما ينطبق مركز كتل القضيب G على نقطة التدحرج، إيجاد كل من التسارع الزاوي ε للقرص، والتسارع الخطي A للقضيب، والقوى المؤثرة عليهما،

الجواب: $A_A = (2M_O^e - l.R.k)/R(m+2M)$ ، $e = (2M_O^e - l.R.k)/R^2(m+2M)$



a b

(الشكل.م-7-23)

م-7-52- (الفصل الأول-2014-2015)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من صندوقين A و B كتلتاهما m_A و m_B موضوعين فوق بعضهما، ومربوطين بحبل غير مرن ملتف على بكرة كتلتها m_O ، ونصف قطرها r ، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O هو $(I_O = m_O.r^2/2)$. كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-23).

تبدأ الجملة حركتها من السكون بتأثير قوى الثقالة، بانزلاق الصندوق B نحو الأسفل دون احتكاك على السطح الأملس المائل بزاوية α على الأفق، خلالها ينزلق الصندوق A على السطح العلوي الخشن للصندوق B .

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينهما f_k . المطلوب إيجاد التسارع الخطي لكل من الصندوقين A_A و A_B ، والتسارع الزاوي للبكرة ε ، والقوى المؤثرة عليهم، وشرط الحركة المفروضة

ملاحظة: اعتبر عند التعويض في المعادلات وحلها أن: $(m_B = 2m)$ و $(m_A = m_O = m)$.

الجواب: $A_A = 2g(\sin a - 2f.\cos a)/7r$ ، $e = 2g(\sin a - 2f.\cos a)/7r$

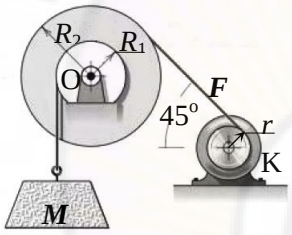
م-7-53- (الفصل الثاني-1993-1994)

تستخدم الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي لرفع كتلة إسمنتية كتلتها M ، بوساطة أسلاك ملفوفة بصورة محكمة حول بكرة مزدوجة خاصة بها، التي تدور كوحدة واحدة حول مركز كتلتها O ، والتي تتصف بأن كتلتها m ، ونصف قطرها الصغير r ، ونصف قطرها الكبير $(R_2 = 2R_1)$، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O هو $(I_O = 3m\,r^2/2)$، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-24).

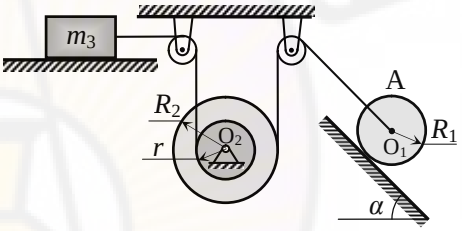
إذا كانت قوة الشد F ثابتة وناتجة عن محرك كهربائي K ذو استطاعة P ، وعدد دوراته n ، ونصف قطر بكرته r . المطلوب إيجاد:

1- علاقة كل من تسارع الكتلة الإسمنتية A ، وقوة شد السلك الذي يحملها T ، والتسارع الزاوي للبكرة المزدوجة ε ، والقوة المحصلة التي يتحملها المسند O .

2- تطبيق عددي: $M = 300\,\text{kg}, m = 150\,\text{kg}, R_1 = 30\,\text{cm}, r = 50\,\text{cm}, P = 14\,\text{kW}, n = 1500\,\text{r.p.m}$



a



b

(الشكل.م-7-24)

م-7-54- (الفصل الثاني-1988-1989)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من أسطوانة A كتلتها m_1 ، ونصف قطرها R_1 ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي المار من O_1 هو $(I_{O_1} = 0.5\,m_1.R_1^2)$. قابلة للتدحرج على سطح خشن معامل الاحتكاك الحركي له f_k ، مائل على الأفق بزاوية α ، مركزها مربوط بطرف سلك ملفوف بصورة محكمة حول بكرة مزدوجة تدور كوحدة واحدة حول مركز كتلتها O_2 ، التي تتصف بأن كتلتها m_2 ، ونصف قطرها الصغير r ، ونصف قطرها الكبير $(R_2 = 2r)$، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي O_2 هو $(I_{O_2} = 1.5\,m_2.r^2)$، والطرف الثاني من السلك يربط بكتلة m_3 ، كما هو مبين في b من (الشكل م-7-24).

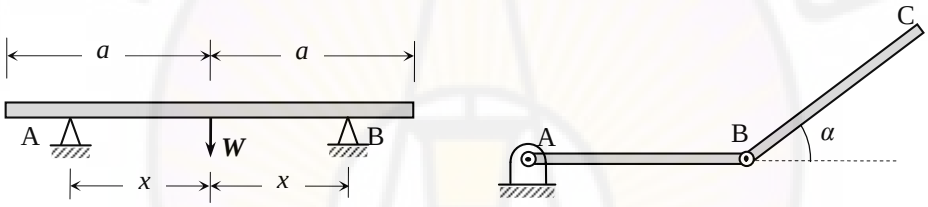
إذا بدأت الجملة بالحركة من السكون بتدحرج الأسطوانة A نحو الأسفل. المطلوب إيجاد علاقة كل من تسارعات أجسام الجملة ε_1 و ε_2 و A_3 و A_{O1} ، والقوى المؤثرة عليهم.

م-7-55

جائز متجانس منتظم وزنه W ، وطوله $2a$ محمول على حاملين A و B ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-25).

إذا أزيل الحامل B فجأةً، المطلوب إيجاد المسافة x بحيث يكون رد الفعل الابتدائي على الحامل A مساوياً لـــ $W/2$.

الجواب: $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$



a b

(الشكل.م-7-25)

م-7-56

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قضيبين منتظمين متجانسين متساويين AB و BC طول الواحد (l = 60 cm)، ووزنه W . مرتبطان مفصلياً في B ، والمفصل A ثابت، ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-25).

إذا تركت الجملة لتبدأ الحركة من الوضع حيث ($\tan\alpha$ = ¾). المطلوب إيجاد ردود الفعل في المفاصل A و B ، والتسارعات الزاوية الابتدائية للقضيبين e_{BC} , e_{AB} .

الجواب: $R_{AX} = R_{BX} = 0.7\,W$, $R_{AY} = 29\,W$, $R_{BY} = 19\,W$

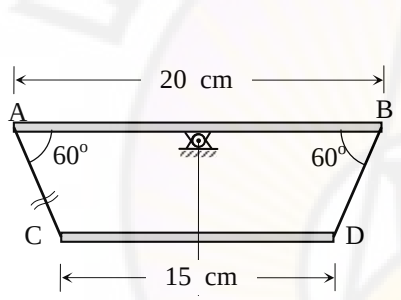
$e_{AB} = 19.6\ \text{rad/sec}^2$, $e_{BC} = 3.9\ \text{rad/sec}^2$

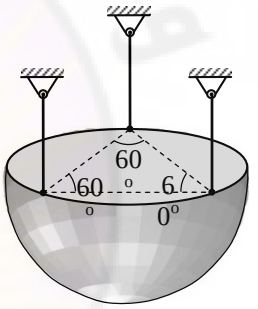
م-7-57

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من قضيبين منتظمين متجانسين AB و CD وزناهما (W_{AB} = 2 kg) و (W_{CD} = 1.5 kg)، وطولهما (l_{AB} = 20 cm) و(l_{CD} = 15 cm)، يربطهما خيطان خفيفان يميلان بزاوية ($\alpha = 60^o$)، والجملة محمولة من O منتصف AB وهي في حالة اتزان، كما هو مبين في a من (الشكل.م-7-26).

إذا قطع الخيط AC فجأةً، المطلوب تعيين الشد الابتدائي في الخيط الآخر T_{AC} .

الجواب: $T_{AC} = [24\sqrt{3}/79]\, g$





(الشكل.م-7-26)

م-7-58

نصف كرة مصمتة معلقة بثلاثة خيوط رأسية متساوية مربوطة إلى ثلاث نقط في محيط قاعدتها الدائرية الأفقية، وبحيث نقط التعليق على أبعاد متساوية بعضها عن بعض. كما هو مبين في b من (الشكل.م-7-26).

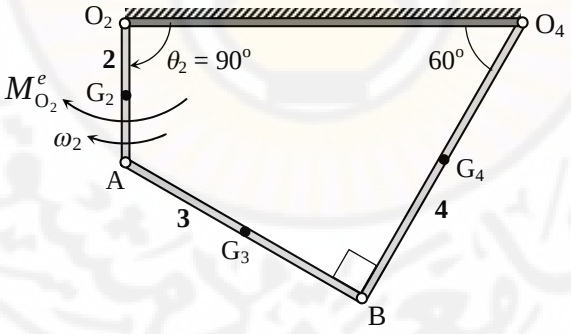
إذا قطع أحد الخيوط الثلاث فجأةً، المطلوب إيجاد نسبة قوة الشد T في أي من الخيطين الآخرين إلى قيمته T_0 قبل قطع الخيط.

الجواب: $T/T_0 = 249/326$

م-7-59

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من أربع وصلات منتظمة متجانسة مراكز كتلها G_4 , G_3 , G_2 تقع في منتصفها. الوصلة 2 فيها يمثل مرفق O_2A يدور حول المسند الثابت O_2 بعدد دورات قدره $(n_2 = 50 \text{ r.p.m})$ ، باتجاه حركة عقارب الساعة لينقل الحركة إلى الوصلة 4 ذراع متأرجح O_4B عبر الوصلة 3 ذراع توصيل الحركة AB ، كما هو مبين في (الشكل.م-7-27).

إذا كان أطوال الوصلات هي $(l_2 = 17.5 \text{ cm})$ و $(l_3 = 35 \text{ cm})$ و $(l_4 = 40 \text{ cm})$، وكتلها هي $(M_2 = 1.75 \text{ kg})$ و $(M_3 = 3.5 \text{ kg})$ و $(M_4 = 4 \text{ kg})$، وعزوم عطالتها حول مراكز كتلها هي $(I_{G_2} = 0.0045 \text{ kg.m}^2)$ و $(I_{G_3} = 0.036 \text{ kg.m}^2)$ و $(I_{G_4} = 0.053 \text{ kg.m}^2)$. المطلوب دراسة حركة الجملة لإيجاد مميزات الحركة لعناصرها، ومن ثم إيجاد قيمة كل من القوى المؤثرة في مفاصل الجملة واتجاهها، وكذلك العزم الخارجي $M^e_{O_2}$ اللازم تطبيقه على المرفق 2 للتغلب على عطالة وصلات الجملة حتى تتحرك بمميزاتها الحركية عند الوضع $(\theta_2 = 90^o)$، وذلك بطريقة تحليل القوى في الوصلات بعد اهمال الاحتكاك في مفاصلها.



(الشكل.م-7-27)

الفصل الثامن

التصادم *Impact*

1- ظاهرة التصادم *Impact Phenomenon*

تنشأ ظاهرة التصادم عند حدوث اصطدام جسمين بعضهما ببعض خلال فترة زمنية صغيرة جداً، أجزاء من ألف من الثانية، حيث تكون قوى التأثير المتبادل بين الجسمين كبيرة نسبياً، وتتعلق مقادير القوى المتولدة، ومدة التصادم بشكل الجسمين، وسرعتيهما، وصفات المرونة فيهما، وقد كان تحقيق ظاهرة التصادم فيما مضى صعب التحقيق تجريبياً؛ بسبب عدم توافر أجهزة لقياس الفترات الزمنية القصيرة جداً، ولكن مع تقدم الصناعات الإلكترونية الحديثة أصبح من الممكن الحصول على معلومات يعتمد عليها في تحليل عدد من مسائل التصادم.

دلت التجارب التي أجريت على كرات نحاسية على أنه إذا كان قطر الكرة 25 mm ، وكانت سرعة الاصطدام من مرتبة 0.3 m/sec ، فإن مدة الاصطدام تساوي 0.15×10^{-3} sec تقريباً. وتفقد الكرة الصادمة خلال هذه الفترة الزمنية القصيرة كامل سرعتها؛ مما يبين أن التباطؤ المتولد أثناء الصدم كبير جداً، ويدل ذلك على أن القوى المتولدة عند نقطة الاصطدام لها مقادير كبيرة جداً بالمقارنة مع وزني الكرتين التي يمكن اهمالها.

لقد تم التوصل إلى النتائج السابقة من خلال دراسة التشوهات الصغيرة جداً المتولدة عند نقطة التماس. أما في حالة إهمال هذا التشوه، وافتراض أن الجسمين صلبين صلابة تامة، فإنه يمكن الاستنتاج أن القوى المتولدة عند نقطة التماس تكون ذات قيم غير محدودة، وأن الفترة الزمنية للاصطدام غير متناهية في الصغر، وعند دراسة تأثير قوى التصادم (*Forces of Impact*) على حركة الأجسام؛ فإن الاهتمام يتركز على النتيجة النهائية لأفعال هذه القوى، وليس على طريقة تغير القوى خلال زمن التصادم اللانهائي في الصغر.

بالتالي تمثل ظاهرة التصادم باصطدام جسمين خلال فترة زمنية قصيرة جداً؛ بحيث يؤثر أثناءها كل جسم على الجسم الأخر بقوة كبيرة نسبياً، ويسمى المحور الناظمي على سطحي التماس أثناء التصادم بـــ محور التصادم (*Line of Impact*)، وبالتالي يمكن تمييز الأنواع التالية للتصادم:

- التصادم المركزي (*Central Impact*)

ويتم إذا وقع مركزا كتلتي الجسمين المتصادمين على محور التصادم.

- التصادم غير المركزي (*Eccentric Impact*)

ويتم إذا لم يقع مركزا كتلتي الجسمين المتصادمين على محور التصادم.

- التصادم المركزي المباشر (*Direct Central Impact*)

ويتم إذا اتجهت سرعتا المركزين على امتداد محور التصادم.

- التصادم المائل (*Oblique Impact*)

أو التصادم غير المباشر، ويتم إذا تحرك أحد الجسمين، أو كلاهما على امتداد محور غير محور التصادم.

2- العلاقة الأساسية للتصادم *The Fundamental Equation of Impact*

عندما يتحرك جسم مادي بتأثير مجموعة من القوى الخارجية؛ تتحول سرعة كل من نقاطه باستمرار مع الزمن، ويقابل ازدياد dt للزمن ازدياد $\boldsymbol{dV}$ للسرعة، ومن الواضح أنه عندما يتناهى الزمن dt إلى الصفر؛ فإن تغير السرعة $\boldsymbol{dV}$ يتناهى إلى الصفر أيضاً.

ففي فترات زمنية قصيرة جداً يكون تحول السرعة صغيراً جداً أيضاً، غير أنه في بعض الحالات يكون تحول السرعة؛ الذي يعانيه جسيم مادي تحولاً محدوداً غير صغير في فترة زمنية لا متناهية في الصفر تحت تأثير قوة كبيرة جداً.

فإذا اعتبرنا مجموعة القوى المؤثرة على جسيم كتلته m_k هي $\Sigma \boldsymbol{F_k}$ ، وكانت قيمتها الوسطية $\sum F_k^{av}$ في فترة زمنية قصيرة جداً t كان تغير كمية حركة الجسيم معطى بـــ:

$$m_k(V_1 - V_0) = \sum F_k^{av}.t \qquad (1\text{-}8)$$

فإذا أثرت قوة كبيرة جداً على الجسيم المادي خلال فترة زمنية قصيرة جداً، نتج من ذلك تغير واضحٌ في كمية الحركة، بمعنى أنه إذا تضمنت القوى المؤثرة على الجسيم بعض القوى الكبيرة؛ التي هي من مرتبة المقدار $1/t$ ؛ فإن التغير في السرعة $\Delta \boldsymbol{V}$ سيكون مقداراً محدوداً، تسمى الظاهرة التي تعاني فيها جسيمات الجسم تحولاً ملحوظاً في السرعة في فترات زمنية صغيرة جداً بـــ ظاهرة التصادم أو الصدمة، في حين نسمي القوى المتسببة في التصادم بـــ قوى التصادم، أو القوى الدافعة (*Impulsive Forces*) ونرمز لها بـــ $\boldsymbol{F}_{imp}$ ، ونسمي أخيراً الفترة الزمنية القصيرة جداً t بـــ زمن التصادم، أو فترة التصادم.

إن مقادير قوى التصادم تكون عادة كبيرة جداً، وتتحول بسرعة في زمن التصادم، وتقاس الأفعال المتبادلة بين الأجسام المتصادمة بحساب دفع قوى التصادم:

$$I_{imp} = \int_0^t F_{imp}.dt = F_{imp}^{av}.t \qquad (2\text{-}8)$$

أما قيمة دفع القوى غير الصادمة، أي: غير الدافعة (*No impulsive Forces*) خلال فترة التصادم القصيرة t ، فهي مقادير صغيرة جداً لا متناهية في الصغر؛ بحيث يمكن إهمالها عملياً نظراً لصغر قيمة هذه القوى، ومن القوى غير الدافعة كالوزن، أو قوة مرونة نابض، أو أي قوة أخرى تكون صغيرة بالمقارنة مع القوى الدافعة.

أما القوى الناتجة عن ردود الأفعال المختلفة المجهولة، فيحتمل أن تكون قوة دافعة أو لا تكون، فلذلك يجب أن نأخذ مقدار دفعها بعين الاعتبار ما لم يبرهن على أنها مهملة.

تدعى سرعة الجسيم في بداية الصدمة بـــ سرعة الاقتراب، ويرمز لها عادة بـــ $\boldsymbol{V}$ ، في حين تدعى سرعة الجسيم في نهاية الصدمة بـــ سرعة الارتداد أو الانفصال، ويرمز لها عادة بـــ $\boldsymbol{U}$ ، وعندها تأخذ علاقة مبدأ الدفع وكمية الحركة للجسيم المادي عند التصادم الشكل التالي:

$$m_k(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}) = \sum \boldsymbol{I}_k \qquad (3\text{-}8)$$

تنص هذه العلاقة بأن **تغير كمية حركة الجسيم المادي في فترة التصادم يساوي مجموع دفع قوى التصادم المؤثرة على الجسيم.**

كما تُعَدُّ على أنها المعادلة الأساسية لظاهرة التصادم، وتقابل دور العلاقة الأساسية في التحريك $[m_k.\boldsymbol{A_k} = \boldsymbol{F_k}]$ في دراسة حركة الجسيم الناتجة عن قوى غير صادمة.

أما انتقال الجسيم المادي في فترة التصادم فيساوي ($V^{av}.\ t$)، وهو مقدار صغير جداً لصغر t بحيث يمكن إهماله، حيث V^{av} تمثل السرعة الوسطية في فترة التصادم.

نستنتج مما سبق ذكره أنه لدراسة ظاهرة التصادم، ولإيجاد العلاقة التي تربط بين دفعي قوتي الاصطدام، وبين التغيرات المتولدة في سرعتي الجسمين المصطدمين؛ يمكن قبول الفرضيات التالية:

- إهمال تأثير القوى غير الدافعة خلال زمن التصادم كقوى الثقالة مثلاً.
- إهمال انتقال جسيمات الجسم خلال فترة التصادم، واعتبار الجسم ثابتاً.
- استخدام المعادلة الأساسية للتصادم؛ لتعيين التغيرات في سرعات جسيمات الأجسام المتصادمة خلال فترة التصادم.

3- المبادئ الأساسية للتصادم *The Fundamental Principles of Impact*

نلجأ عند دراسة ظاهرة التصادم لمجموعة من الجسيمات المادية إلى عدد من المبادئ الأساسية التالية:

- مبدأ تغير كمية الحركة للجملة المتصادمة

لندرس حالة جملة مؤلفة من n جسيم مادي، فإذا رمزنا لمحصلة دفع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على الجسيم الذي كتلته m_k بـ $\sum \boldsymbol{I}_k^e$ ، ولمحصلة دفع القوى الصادمة الداخلية بـ $\sum \boldsymbol{I}_k^i$ ، وطبقنا مبدأ تغير كمية حركة الجسيم من جراء الصدمة على جسيم كتلته m_k من الجملة نحصل على العلاقة:

$$m_k(\boldsymbol{U}_k - \boldsymbol{V}_k) = \boldsymbol{I}_k^e + \boldsymbol{I}_k^i$$

بتطبيق هذه العلاقة على كافة جسيمات الجملة؛ نحصل بعد جمعها على العلاقة:

$$\sum m_k.\boldsymbol{U}_k - \sum m_k.\boldsymbol{V}_k = \sum \boldsymbol{I}_k^e + \sum \boldsymbol{I}_k^i$$

التي تكتب بالشكل:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \boldsymbol{I}_k^e + \sum \boldsymbol{I}_k^i$$

حيث يرمز بـ $\boldsymbol{Q}$ لكمية حركة الجملة.

بما أن الدفع المحصل للقوى الداخلية في الجملة هو دفع معدوم $[\sum \boldsymbol{I}_k^i = 0]$، بذلك يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \boldsymbol{I}_k^e \qquad (4\text{-}8)$$

نستنتج **أن تغير كمية حركة الجملة في فترة التصادم يساوي إلى محصلة دفع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على جسيمات الجملة**.

بإسقاطها على محور إحداثي نحصل على:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum I_{kX}^e \qquad (5\text{-}8)$$

ويمكن كتابتها بدلالة كتلة الجملة M وسرعات مركز الكتل G :

$$M.\boldsymbol{U}_G - M.\boldsymbol{V}_G = \sum \boldsymbol{I}_k^e \qquad (6\text{-}8)$$

من المعادلتين (4-8) و(6-8) نجد أنه عندما:

$$\sum \boldsymbol{I}_k^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{Q}_1 \quad , \quad \boldsymbol{U}_G = \boldsymbol{V}_G$$

تدل هذه العلاقات على أنه إذا كانت الجملة المادية المعتبرة معزولة أثناء الاصطدام من كل تأثير خارجي، فإن تغير كمية الحركة للجملة يكون معدوماً، ومنه نستنتج **أن كمية حركة الجملة قبل الاصطدام تساوي لكمية حركتها بعد الاصطدام**.

- مبدأ تغير العزم الحركي للجملة أثناء الاصطدام

لندرس حالة جملة مادية مؤلفة من n جسيم مادي، حيث نأخذ بالاعتبار أن جسيمات الجملة لا تتحرك أثناء التصادم. فإذا طبقنا مبدأ تغير كمية الحركة الجسيم من جراء الصدمة على جسيم كتلته m_k من الجملة، نحصل على العلاقة:

$$m_k.\boldsymbol{U}_k = m_k.\boldsymbol{V}_k + \boldsymbol{I}_k^e + \boldsymbol{I}_k^i$$

إن متجهات هذه العلاقة التي تؤثر على الجسيم تبقى ثابتة خلال فترة التصادم، فإذا أخذنا عزومها بالنسبة لمركز ما O كان عزم المتجه الموجود في الطرف الأيسر من العلاقة مساوياً لمحصلة عزوم المتجهات الموجودة في الطرف الأيمن من العلاقة ذاتها:

$$\boldsymbol{m}_O(m_k.\boldsymbol{U}_k) = \boldsymbol{m}_O(m_k.\boldsymbol{V}_k) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{I}_k^e) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{I}_k^i)$$

وينتج بالتالي:

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(m_k.\boldsymbol{U}_k)-\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(m_k.\boldsymbol{V}_k)=\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{I}_k^e)+\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{I}_k^i)$$

بتطبيق هذه العلاقة على كل جسيمات الجملة، وجمعها حداً حداً؛ ينتج:

$$\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(m_k.\boldsymbol{U}_k)-\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(m_k.\boldsymbol{V}_k)=\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{I}_k^e)+\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{I}_k^i)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يمثل التغير في العزم الحركي للجملة بالنسبة للمركز O خلال فترة التصادم، ويرمز له $\boldsymbol{K_0}$ و $\boldsymbol{K_1}$ ، وبما أن مجموع عزوم دفوع القوى الصادمة الداخلية في الطرف الأيمن يساوي الصفر تبعاً لخواص القوى الداخلية $[\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{I}_k^i)=0]$، بذلك يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{K_1}-\boldsymbol{K_0}=\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{I}_k^e) \qquad (7\text{-}8)$$

نستنتج **أن تغير العزم الحركي للجملة المادية بالنسبة لمركز ما خلال فترة التصادم، يساوي محصلة عزوم الدفوع الصادمة الخارجية بالنسبة للمركز نفسه.**

إذا أسقطنا العلاقة (7-8) على محور إحداثي ما، وليكن OX ينتج:

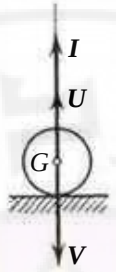
$$K_{1\mathrm{X}}-K_{0\mathrm{X}}=\sum m_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{I}_k^e) \qquad (8\text{-}8)$$

نستنتج من العلاقتين الأخيرتين أنه إذا كانت محصلة عزوم الدفوع الصادمة الخارجية بالنسبة لمركز ما أو لمحور ما معدومة؛ فإن العزم الحركي للجملة بالنسبة للمركز نفسه، أو المحور، يبقى ثابتاً طيلة فترة التصادم، وهذا يعني أنه لا يمكن للدفوع الصادمة الداخلية أن تسبب أي تغير في قيمة العزم الحركي للجملة.

- مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية

إن معظم المواد تتمتع بخاصتي المرونة واللدونة، أي: أنها قابلة للتشوه تحت تأثير القوى، ولا ترجع كلياً لشكلها الأول بعد إزالة القوى الخارجية، وإنما تبقى مشوهة جزئياً، أي: أن التشوه الذي يحدث يتألف من قسمين تشوه مرن، وتشوه دائم، وبزوال القوى المؤثرة؛ فإن التشوه المرن يزول، ويبقى التشوه الدائم.

لندرس حالة السقوط الشاقولي لكرة كتلتها M على لوح صلب أفقي ثابت كما هو مبين في (الشكل-8-1)، حيث يمكن تقسيم فترة الاصطدام إلى مرحلتين:



(الشكل-8-1) السقوط الشاقولي.

في المرحلة الأولى، وتسمى بـــ مرحلة تغير الشكل (*Deformation*)؛ فإذا افترضنا أن سرعة جسيمات الكرة في لحظة بداية الاصطدام V ، على اعتبار أن حركة الكرة انسحابية؛ فإن السرعة تتناقص من القيمة V إلى الصفر، ويحدث في مكان اصطدام الكرة بالمستوى الأفقي تشوه، وتتحول الطاقة الحركية الكلية للكرة، وقيمتها $(M.V^2/2)$ بكاملها إلى طاقة كامنة داخلية في الكرة، وتصرف جزئياً على رفع درجة حرارة الكرة.

وفي المرحلة الثانية، وتسمى بـــ مرحلة التعويض، أو الارتداد (*Restitution*)، حيث تعمل قوة المرونة في داخل الكرة على إعادة الشكل إلى ما كان عليه، وخلال ذلك تتحول طاقتها الكامنة الداخلية إلى طاقة حركية لجسيماتها، وفي نهاية المرحلة تكتسب جسيمات الكرة سرعة قيمتها U ، وتصبح الطاقة الحركية الكلية للكرة مساوية لـــ $(M.U^2/2)$.

وفي الواقع العملي لا يوجد حفظ في الطاقة الميكانيكية الكلية للكرة، حيث يصرف قسم من هذه الطاقة على إحداث تغير في شكل الكرة المصدومة، وذلك بشكل حرارة منتشرة، وعليه فإن سرعة الارتداد أو الانفصال U هي دوماً أصغر من سرعة الاقتراب V .

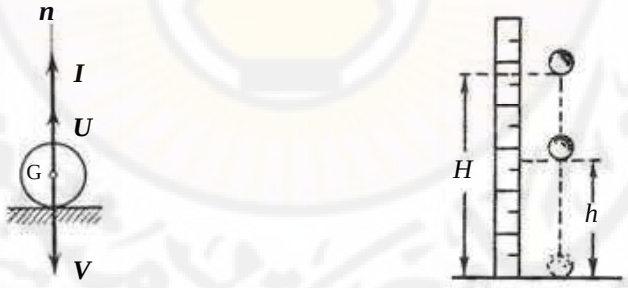
لا تستخدم علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية في ظاهرة التصادم لحل المسألة الأساسية في التحريك نظراً لأن جسيمات الجسم تُعَدُّ ثابتة خلال زمن الصدمة، وتؤخذ الدفوع الصادمة في الاعتبار بدلاً من القوى نفسها، ولذا فلا يمكن حساب عمل القوى الدفعية مباشرة بوساطة القوة والانتقال.

4- معامل الارتداد *Coefficient of Restitution*

لا يعتمد الدفع الصادم الناشئ عند تصادم جسمين على سرعتيهما وكتلتيهما قبل التصادم فقط؛ وإنما تعتمد أيضاً على خواص مرونة الجسمين المتصادمين، وتتحدد هذه الخواص بمقدار يسمى بـــ معامل الارتداد عند الصدمة، ويرمز له بـــ e ، فعند اصطدام جسم بحاجز ثابت اصطداماً مباشراً كما هو مبين في a من (الشكل-8-2)؛ فإنه يساوي النسبة بين مقداري سرعتي الجسم في نهاية الاصطدام وبدايته:

$$e = \frac{U}{V} \tag{9-8}$$

وتدل التجارب أن المعامل e يعتمد على المواد المصنوعة منها الأجسام المتصادمة، وذلك إذا كانت سرعة الاقتراب صغيرة، أو أنها لا تتغير بمقادير كبيرة جداً. ففي الأجسام المرنة تماماً يكون ($e = 1$)، بالتالي سرعة الانفصال U تساوى سرعة الاقتراب V ، وتستعاد عندها الطاقة الميكانيكية تماماً بعد الصدمة. في حين في الأجسام العديمة المرونة يكون ($e = 0$) بالتالي ($U = 0$)، وفي هذه الحالة تنتهي الصدمة في المرحلة الأولى، حيث يتم صرف الطاقة الميكانيكية للجسم على تشوه الشكل، وانتشار الحرارة.



a- اصطدام مباشر لجسم بحاجز ثابت. b- تعيين معامل الارتداد تجريبياً.

(الشكل-8-2)

ويعين معامل الارتداد تجريبياً للأجسام المختلفة بدراسة حركة سقوط كرة من ارتفاع H على مستوى أفقي ثابت، ويقاس الارتفاع h الذي تعود إليه الكرة بعد ارتدادها عن المستوى بوساطة مسطرة عمودية خاصة كما هو مبين في b من (الشكل-8-2).

فإذا كان الاصطدام مرناً تماماً ($e = 1$) فالكرة ترجع إلى موضعها الأصلي، وإذا كان لدناً تاماً ($e = 0$) فالكرة لا ترتد أبداً، وتبقى على المستوى، وفي الحالة العادية ($1 > e > 0$) ترتد إلى ارتفاع h ، وفي هذه الحالة يمكن تعيين معامل الارتداد من العلاقة:

$$e = \sqrt{h/H} \qquad (10\text{-}8)$$

لأن:

$$V = \sqrt{2g.H} \quad , \quad U = \sqrt{2g.h}$$

فمثلاً عندما تكون السرعة بحدود 3 m/sec ؛ فإن ($e = 1/2$) لخشب على خشب، و($e = 5/9$) لفولاذ على فولاذ، و($e = 15/16$) لزجاج على زجاج، و($e = 5/9$) لفلين على فلين.

5- اصطدام جسم بحاجز ثابت

نعدّ كرة كتلتها M تصطدم بمستوى ثابت، فالقوة الصادمة المؤثرة على الكرة هي قوة رد فعل الحاجز، وليكن $\boldsymbol{I}$ دفع هذه القوة في فترة الاصطدام، ويكون الاصطدام اصطداماً مركزياً إذا مر الناظم $\boldsymbol{n}$ على سطح الجسم في نقطة تماسه مع الحاجز من G مركز كتل هذا الجسم، وبالتالي فإن اصطدام الكرة بحاجز ما هو دوماً اصطدام مركزي.

ندرس الحالتين:

5-1- حالة الاصطدام المباشر ***Direct Impact***

في هذه الحالة تنطبق سرعة مركز الكرة، أي: سرعة الاقتراب V على اتجاه الناظم المذكور للاصطدام، كما هو مبين في a من (الشكل-8-2).

فمن علاقة تغير كمية الحركة:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$$

وبإسقاطها على الناظم $\boldsymbol{n}$:

$$M(U_n - V_n) = I_n$$

وفي الاصطدام المباشر يكون:

$$I_n = I \quad , \quad V_n = -V \quad , \quad U_n = U$$

وبالتالي:

$$M(U+V)=I \qquad (11\text{-}8)$$

ومن علاقة معامل الارتداد:

$$U=e.V \qquad (12\text{-}8)$$

فإذا علمنا M و V و e أمكن حساب من العلاقتين (11-8) و(12-8) المقدارين المجهولين U و I ومنها:

$$I = M\,(e+1)\,V \qquad (13\text{-}8)$$

نلاحظ أنه كلما كان معامل الارتداد كبيراً ($e \leq 1$) كلما كان الدفع كبيراً، ولتعيين القيمة الوسطية للقوة الصادمة ينبغي معرفة زمن الاصطدام t الذي يتم قياسه تجريبياً.

مسألة-8-1

تسقط كرة فولاذية ثقلها (W =10 N) من ارتفاع (H = 3 m) على صفيحة ثابتة من الفولاذ.

إذا كان معامل الارتداد (e = 5/9)، وزمن الاصطدام (t = 0.0005 sec). المطلوب تعيين رد الفعل الصفيحة.

الحل:

لدينا سرعة الاقتراب:

$$V = \sqrt{2g.H} = 7.672 \text{ m/sec}$$

وسرعة الارتداد:

$$U = e.V = 4.262 \text{ m/sec}$$

أما دفع قوة رد الفعل في هذه الحالة فهي:

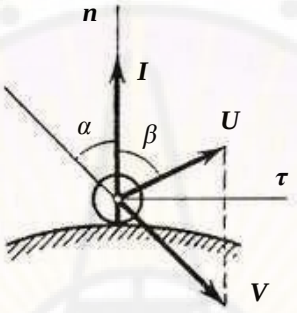
$$I = \frac{W}{g}(e+1)\,V = 12.165 \text{ N.sec}$$

ومنه القيمة الوسطية للقوة الصادمة، أي: رد الفعل الصفيحة:

$$N_{av} = I/t = 2433 \text{ N}$$

5-2- حالة الاصطدام المائل *Oblique Impact*

في هذه الحالة لا تنطبق سرعة مركز كتل الجسم V في بداية التصادم، أي: سرعة الاقتراب مع الناظم $\boldsymbol{n}$ للسطح الثابت، بالتالي نفترض أن متجه سرعة الاقتراب V يميل بزاوية α على الناظم للسطح الثابت، بينما يميل متجه سرعة الانفصال U بزاوية β على الناظم نفسه كما هو مبين في (الشكل-8-3).



(الشكل-8-3) الاصطدام المائل.

فمن علاقة تغير كمية الحركة للجملة المادية:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{I}$$

بإسقاطها على الناظم للسطح $\boldsymbol{n}$:

$$Q_{1n} - Q_{0n} = I_n \quad \Rightarrow \quad M(U_n - V_n) = I \qquad (14\text{-}8)$$

وبإسقاطها على المماس للسطح $\boldsymbol{\tau}$:

$$Q_{1t} - Q_{0t} = I_t \quad \Rightarrow \quad M(U_t - V_t) = 0 \qquad (15\text{-}8)$$

حيث $(I_\tau = 0)$ لأن الدفع I يتجه في اتجاه القوة الصادمة باتجاه رد الفعل، أي: في اتجاه الناظم $\boldsymbol{n}$ ، وذلك لأن الاصطدام يحدث في اتجاه الناظم على السطح بسبب إهمال تأثير الاحتكاك.

ومن علاقة معامل الارتداد في هذه الحالة التي تساوي النسبة:

$$e = |U_n| / |V_n| \qquad (16\text{-}8)$$

نحصل في النتيجة من العلاقات (8-14) و(8-15) و(8-16)، على:

$$U_t = V_t \quad , \quad U_n = -e.V_n \quad , \quad I = M|V_n|(1+e) \qquad (17\text{-}8)$$

تساعد العلاقات (8-17) في إيجاد قيمة سرعة الارتداد U واتجاهها، ودفع قوة الاصطدام I ، إذا ما علمنا المقادير M و V و α و e .

وتكون قيمة سرعة الكرة بعد التصادم:

$$U = (U_t^2 + U_n^2)^{1/2} = V(\sin^2 a + e^2.\cos^2 a)^{1/2} \qquad (18\text{-}8)$$

وتكون العلاقة بين زاوية الورود α ، وزاوية الارتداد β إذا لاحظنا أن:

$$V_t = |V_n| \tan a \quad , \quad U_t = |U_n| \tan b \qquad \Rightarrow \qquad |V_n| \tan a = |U_n| \tan b$$

وعليه:

$$e = \frac{|U_n|}{|V_n|} = \frac{\tan a}{\tan b} \qquad (19\text{-}8)$$

هذا يعني أنه عند الاصطدام المائل تكون نسبة ظل زاوية الاقتراب إلى ظل زاوية الارتداد (*Rebound*) مساوية لمعامل الارتداد، ولما كان ($e < 1$) وجب ان يكون ($\alpha > \beta$)، منه زاوية الارتداد β هي دوماً أكبر من زاوية الورود α .

وفي حالة الاصطدام المرن فإن:

$$e = 1 \quad \Rightarrow \quad |V_n| = |U_n|$$

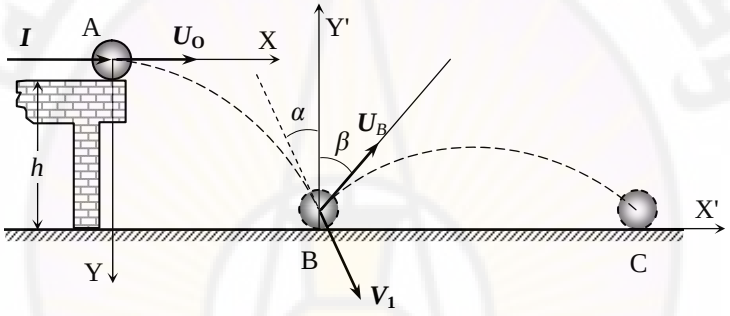
بالتالي زاوية الانعكاس β تساوى زاوية الورود α ، أضف إلى ذلك أن سرعة الانفصال تكون مساوية بالقيمة العددية لسرعة الاقتراب.

مسألة-8-2

كرة صغيرة كتلتها M ساكنة في الموقع A على حافة طاولة ارتفاعها h عن الأرض الأفقية. في لحظة ما تؤثر عليها قوة صدمية دفعها $\boldsymbol{I}$ ذو اتجاه أفقي، كما هو مبين في (الشكل-8-4).

إذا كان معامل الارتداد هو e . المطلوب، تعيين بإهمال مقاومة الهواء، المسافة ما بين الاصطدامين الأوليين بالأرض.

الحل:



(الشكل-8-4) قوة صدمية تؤثر على كرة.

تنطلق الكرة من الموقع A على شكل قذيفة بسرعة أفقية $\boldsymbol{U}_0$ تتجه باتجاه الدفع I ، وقيمتها تحدد من العلاقة الأساسية لظاهرة التصادم (8-3):

$$M(\boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{I}$$

بإسقاطها على منحى واتجاه $\boldsymbol{I}$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$M(U_0 - 0) = I \quad \Rightarrow \quad U_0 = I/M$$

تتحرك الكرة عندئذ تحت تأثير ثقلها بدلالة جملة المحاور AXY ، بالمعادلات التالية:

$$x = U_0.t \qquad , \qquad y = \frac{1}{2} g.t^2$$

وتعين لحظة اصطدام الكرة بالأرض في B ، من الشرط:

$$y_B = h \quad \Rightarrow \quad t_B = \sqrt{2h/g}$$

بسرعة:

$$V_B = (x_B^2 + y_B^2)^{1/2} = (U_0^2 + 2g.h)^{1/2}$$

التي تميل على الشاقول BY' بزاوية α ، تحدد بالعلاقة:

$$\tan a = \frac{x_B}{y_B} = \frac{U_0}{\sqrt{2g.h}}$$

وترتد الكرة بسرعة U_B تحدد بالعلاقة (8-18):

$$U_B = (U_{Bt}^2 + U_{Bn}^2)^{1/2} = V_B(\sin^2 a + e^2.\cos^2 a)^{1/2} = (U_0^2 + 2e^2.g.h)^{1/2}$$

التي تميل بزاوية β على الشاقول BY' تحدد بالعلاقة (8-19):

$$\tan b = \frac{U_0}{e\sqrt{2g.h}}$$

ولتتحرك بعدئذ بدلالة جملة المحاور BX'Y' ، بالمعادلات التالية:

$$x' = U_B.\cos b.t \qquad , \qquad y' = U_B.\sin b.t - \frac{1}{2} g.t^2$$

وتعين لحظة اصطدام الكرة بالأرض مرة ثانية في C ، من الشرط:

$$y'_C = 0 \quad \Rightarrow \quad t_C = \frac{2U_B.\sin b}{g}$$

بعدما يقطع المسافة المطلوبة BC ، التي تساوي:

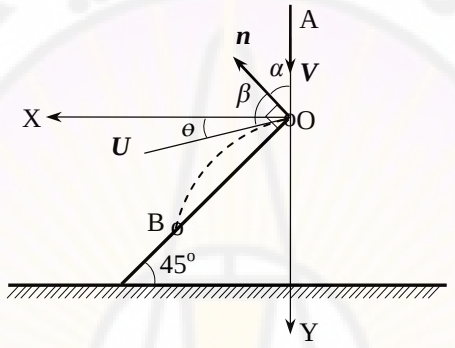
$$BC = x'_C = U_B.\cos b\,\frac{2U_B.\sin b}{g} = \frac{2U_B^2.\tan b}{g(1+\tan^2 b)} = 4e.U_0\sqrt{h/2g}$$

مسألة-8-3

تسقط كرة صغيرة دون سرعة ابتدائية من موقع A يقع على ارتفاع ($h = 5$ m) على مستوى مائل يميل بزاوية ($\gamma = 45^o$) على الأفق كما هو مبين في (الشكل-8-5).

فإذا كان معامل الارتداد ($e = 0.5$). المطلوب تعيين بعد نقطة الاصطدام الثانية عن نقطة الاصطدام الأولى.

الحل:



(الشكل-8-5) سقوط كرة على مستوى مائل.

نعدُّ أن الكرة التي تسقط من A تصطدم بالمستوى المائل في O بسرعة V ، تحسب من العلاقة:

$$V^2 - V_0^2 = 2g.h$$

بما أن ($V_0 = 0$)، ومنه سرعة الاقتراب:

$$V = \sqrt{2g.h} = \sqrt{10g} \text{ m/sec}$$

وتشكل مع الناظم على المستوى زاوية ورود ($\alpha = \gamma = 45^o$) حيث ($\tan \alpha = 1$).

بعد الاصطدام ترتد الكرة عن السطح على مسار الانعكاس، حيث يصنع هذا المسار مع الناظم زاوية β ، تعطى بالعلاقة:

$$\tan \beta = \tan \alpha / e = 2$$

أما سرعة الارتداد U حيث مركبتها على الناظم، تعطى بالعلاقة:

$$U_n = e.V_n = e.V.\cos 45 = \sqrt{1.25g} \text{ m/sec}$$

ومركبتها وفق المستوى المماس تساوي لمركبة V وفق المستوى:

$$U_t = V_t = V.\sin 45 = \sqrt{5g} \text{ m/sec}$$

وعليه:

$$U = (U_t^2 - U_n^2)^{1/2} = (1.25g + 5g)^{1/2} = 2.5\sqrt{g} \text{ m/sec}$$

وتتجه هذه السرعة كما هو واضح على (الشكل-8-5)، بحيث تصنع مع الناظم زاوية ($\beta > 45^o$)، وعليه يقع المتجه $\boldsymbol{U}$ تحت الأفق المار من O .

تتابع الكرة بعد اصطدامها بالمستوى المائل في O على شكل قذيفة في الفراغ بسرعة ابتدائية U تميل على الأفق بزاوية ($\theta = \beta - 45^o$)، ومنه:

$$\tan q = \tan(b - 45) = \frac{\tan b - 1}{\tan b + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

نمرر في O محورين متعامدين OX أفقي و OY شاقولي نحو الأسفل، فتكون معادلة مسار القذيفة:

$$y = \tan q.x + \frac{g}{2U^2.\cos^2 q}x^2$$

بالتعويض نحصل على:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{45}x^2$$

والنقطة B هي نقطة تلاقي المستوى المائل الذي معادلته ($y = x$) مع المسار، وفاصلتها هي:

$$x_B = \frac{1}{3}x_B + \frac{4}{45}x_B^2 \quad \Rightarrow \quad x_B = \frac{15}{2} \text{ m}$$

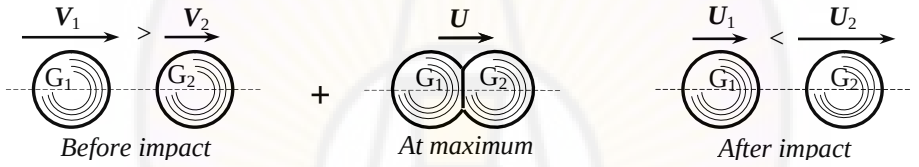
ومنه نقطة الاصطدام الثانية:

$$OB = \frac{x_B}{\cos 45} = \sqrt{2}\ x_B = \frac{15}{\sqrt{2}} \text{ m}$$

6- التصادم المركزي المباشر *Direct Central Impact*

يكون تصادم جسمين مباشراً ومركزياً إذا مر الناظم المشترك لسطحي الجسمين المتصادمين في نقطة تماسهما بمركزي كتل الجسمين، وانطبقت سرعتا اقتراب مركزي كتل الجسمين على الناظم المشترك، وكمثال على التصادم المركزي المباشر هو تصادم كرتين متجانستين يتحرك مركزاهما قبل التصادم على امتداد خط المركزين.

نعدُّ أن الكرتين تتحركان إلى جهة اليمين كما هو مبين في a من (الشكل-8-6)، ولتكن M_1 و M_2 كتلتي الكرتين، و V_1 و V_2 سرعتيهما لحظة التصادم، ونعدُّ محور الإحداثيات OX ينطبق على خط مركزي الكرتين G_1 و G_2 ويتجه دوماً من G_1 إلى G_2 .



قبل التصادم　　لحظة التشوه الأعظمي　　بعد التصادم

a　　b　　c

(الشكل-8-6) الاصطدام المركزي المباشر.

لكي يحدث التصادم لا بد من تحقيق الشرط ($V_1 > V_2$)، وإذا لم يتحقق هذا الشرط؛ فإن الكرة الأولى لن تتمكن من صدم الكرة الثانية، من ناحية أخرى يجب أن يتحقق الشرط ($U_1 < U_2$)، لأن الكرة الأولى الصادمة لا يمكن أن تسبق الكرة الثانية المصدومة، وكذلك لكي تنفصل الكرتان بعد التصادم.

يؤدي تصادم الكرتين إلى تشوه سطحيهما في موضع التماس بدءاً من لحظة التماس، وخلال فترة التشوه تتحرك الكرتان معاً بسرعة واحدة U ، كما هو مبين في b من (الشكل-8-6). بعد ذلك هناك احتمالان لحركة الكرتين تبعاً لبعض العوامل الخاصة، مثل طبيعة المواد الأولية للكرتين؛ التي تحدد مرونة الجسم، وأيضاً مقادير قوى التصادم الفعلية.

فإذا كانت الكرتان ذات مرونة قليلة، وكانت قوى التصادم كبيرة نسبياً، فإنه من الممكن حدوث تشوه لدن دائم في الجسمين عند نقطة التماس، وعندها تتحرك الكرتان كجسم واحد، وبسرعة واحدة U .

وإذا كانت الكرتان ذات مرونة عالية، وكانت قوى التصادم محدودة؛ فإنه اعتباراً من لحظة تساوي سرعتي الكرتين تبدأ الكرتان تستعيدان شكلهما الأصلي على حساب الطاقة الكامنة لقوى المرونة، ونسمي ذلك مرحلة الارتداد.

غايتنا هنا تعيين قيمتي السرعتين للكرتين U_1 و U_2 في نهاية فترة استرجاع الشكل الأصلي؛ التي هي فترة الارتداد الموضحة في c من (الشكل-8-6).

أثناء التصادم تتولد عند نقطة التماس قوتان متساويتان ومتعاكستان، وبالتالي نعدُّ جملة الكرتين معزولة في هذه الحالة، وتكون قوى التصادم القوى الدافعة؛ التي تعمل خلال فترة التصادم هي قوى داخلية ومنه:

$$\Sigma \boldsymbol{I}^{\boldsymbol{e}} = 0$$

وعليه فإن كمية حركة الجملة تكون في أي لحظة ثابتة ويمكن كتابة ما يلي:

$$\boldsymbol{Q_1 = Q_0}$$

ينتج من ذلك **أن كمية حركة الجملة مصانة، أي: أن كمية الحركة للجملة قبل التصادم تساوي كمية الحركة للجملة بعد التصادم**، ويمكن كتابة ما يلي:

$$M_1.\boldsymbol{U_1} + M_2.\boldsymbol{U_2} = M_1.\boldsymbol{V_1} + M_2.\boldsymbol{V_2}$$

وتتجه السرعات كافة وفق محور التصادم وهو المحور OX نفسه، لذا يمكن استبدال القيم الشعاعية بقيم عددية، حيث نحصل على المعادلة العددية التالية:

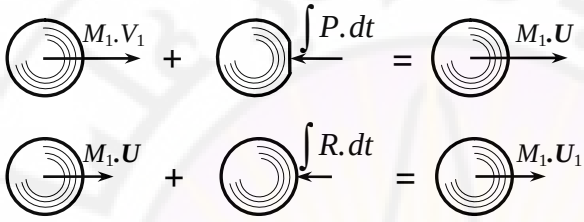
$$M_1.U_1 + M_2.U_2 = M_1.V_1 + M_2.V_2 \qquad (20\text{-}8)$$

يبدأ التشوه عند نقطة التماس في لحظة بدء التصادم، فتتناقص سرعة الجسم الصادم تدريجياً؛ بسبب رد فعل الجسم المصدوم، وفي الوقت نفسه تزداد سرعة الجسم المصدوم بسبب فعل الجسم الصادم.

وبتطبيق مبدأ الدفع وكمية الحركة على الكرة الأولى خلال فترة التشوه (*Period of Deformation*)، حيث قوة الدفع الوحيدة المؤثرة علية خلال هذه الفترة هي $\boldsymbol{P}$ الناتجة عن الجسم الثاني، كما هو مبين في a من (الشكل-8-7)، فيكون:

$$M_1.V_1 - \int P.dt = M_1.U \qquad (21\text{-}8)$$

حيث يمتد التكامل على كامل فترة التشوه.



(الشكل-8-7)

وإذا أخذنا بعين الاعتبار حركة الجسم الأول خلال فترة الارتداد (*Period of Restitution*)، ورمزنا بـــ $\boldsymbol{R}$ لقوة تأثير الجسم الثاني على الجسم الأول خلال هذه الفترة، كما هو مبين في b من (الشكل-8-7)، نكتب:

$$M_1.U - \int R.dt = M_1.U_1 \qquad (22\text{-}8)$$

حيث يمتد التكامل على فترة الارتداد.

لقد اصطلح على أن حاصل تقسيم أو نسبة قيمة الدفع الذي يوافق فترة الاسترجاع على قيمة الدفع الذي يوافق فترة التشوه، يمثل بمعامل الارتداد e :

$$e = \frac{\int R.dt}{\int P.dt} \qquad (23\text{-}8)$$

وقيمتة تتعلق في هذه الحالة بصورة كبيرة بنوع المادة الأولية للجسمين المتصادمين، وبالفرق بين سرعتيهما، وكذلك بشكل وحجم الجسمين، وتنحصر بين الصفر والواحد ($0 \le e \le 1$)، وهذا يعود إلى أن القوة $\boldsymbol{R}$ التي تؤثر أثناء فترة الاسترجاع تختلف عن القوة $\boldsymbol{P}$ التي تؤثر أثناء فترة التشويه، كما أن القيمة العددية لدفعها $\int R.dt$ تكون أصغر من القيمة العددية $\int P.dt$ لدفع القوة $\boldsymbol{P}$.

بتعويض قوتي الدفع خلال فترتي التشوه والارتداد من المعادلتين (8-21) و(8-22) في المعادلة (8-23)؛ نحصل على العلاقة:

$$e=\frac{U-U_1}{V_1-U} \tag{24-8}$$

وبدراسة مشابهة من أجل الجسم الثاني؛ نحصل على العلاقة التالية:

$$e=\frac{U_2-U}{U-V_2} \tag{25-8}$$

وبما أن قيمة المعامل e واحدة في الجسمين، وبالتالي من تساوي العلاقتين (8-24) و(8-25) وتساويان أيضاً الكسر الذي ينتج عن جمع البسوط والمقامات لهما على الترتيب، بذلك ينتج لدينا:

$$e=\frac{(U-U_1)+(U_2-U)}{(V_!-U)+(U-V_2)}$$

$$e=\frac{U_2-U_1}{V_1-V_2}=-\frac{U_1-U_2}{V_1-V_2} \tag{26-8}$$

ومنه:

$$U_2-U_1=e(V_1-V_2) \tag{27-8}$$

التي تكتب بالشكل:

$$U_1-U_2=-e(V_1-V_2)$$

هذه العلاقة تربط بين السرعة النسبية للجسمين بعد التصادم $(U_2\text{-}U_1)$، والسرعة النسبية لهما قبل التصادم $(V_1\text{-}V_2)$، وتستخدم من أجل تعيين قيمة معامل الارتداد تجريبياً.

وهكذا باستعمال مبدأ حفظ كمية الحركة بالعلاقة (8-20)، ومفهوم معامل الارتداد بالعلاقة (8-27)، يمكننا تعيين سرعتي الكرتين بعد التصادم U_1 و U_2 على أن تكون القيم (e,V_2,V_1,M_2,M_1) كلها معلومة.

أما دفع قوى التصادم فيمكن حسابه من تطبيق مبدأ تغير كمية الحركة على احد الجسمين المتصادمين:

$$\boldsymbol{I_1}=M_1(\boldsymbol{U_1}-\boldsymbol{V_1}) \tag{28-8}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{I_2}=-\boldsymbol{I_1}$$

أما إذا كانت الكرة الثانية تتحرك إلى الجهة اليسرى، فينبغي اعتبار الكمية القياسية V_2 سالبة، ونطبق اصطلاح الإشارة هذه نفسه على السرعات الناتجة بعد التصادم، أي: أن الإشارة الموجبة للسرعة U_1 تشير إلى أن الكرة الأولى تتحرك إلى الجهة اليمنى بعد التصادم، أما الإشارة السالبة فتشير إلى أنها تتحرك في الاتجاه المعاكس إلى اليسار.

بما أنه في حال التصادم المركزي المباشر يكون $(0 < e > 1)$، فإن الطاقة الحركية غير مصانة، ويضيع جزء من الطاقة في أثناء التصادم، وتصبح السرعة النسبية بعد التصادم أصغر منها قبل التصادم، ويمكن البرهان على عدم مصونية الطاقة الحركية لجملة الجسمين المتصادمين بمقارنة الطاقة الحركية قبل التصادم وبعده، وفي الواقع يضيع جزء من الطاقة الحركية على التشوه الدائم؛ الذي نشأ في الجسمين يظهر في أغلب الأحيان على شكل حراري.

ينتج لدينا من الدراسة السابقة حالتان خاصتان:

1-6- تصادم عديم المرونة *Perfectly Inelastic Impact*

أو ما يدعى بـــ **التصادم اللدن التام** (*Perfectly Plastic Impact*)، حيث تكون مادة الكرتين ذات مرونة معدومة، أي: لدنة تماماً كالمعجون، أو الطين، ويقال لمادة بأنها مطلقة اللدونة إذا تغير شكلها تحت تأثير القوى، بحيث إذا أزيل تأثير هذه القوى عنها؛ فإنها تحافظ تماماً على شكلها المنفعل الجديد، ولا تعود لشكلها الحقيقي.

فإذا كانت الكرتان ذات مرونة معدومة وكانت قوى التصادم كبيرة نسبياً؛ فإنه من الممكن حدوث تشوه لدن دائم في الجسمين عند نقطة التماس، حيث تتناقص سرعة الكرة الصادمة تدريجياً بسبب رد فعل الكرة المصدومة فيها، وفي الوقت نفسه تزداد سرعة الكرة المصدومة بسبب فعل الكرة الصادمة فيها، ويتم ذلك بالشكل الذي يجعل السرعة النسبية $(U_1\text{-}U_2)$ التي تسبب التشوه اللدن عند سطح التماس تتناقص تناقصاً تدريجياً، وأخيراً تصبح سرعتا الكرتين متساويتين وتتحقق المساواة $(U_1=U_2)$ فيتوقف التشوه اللدن، وعندها تتحرك الكرتان كجسم واحد، وبسرعة واحدة U وهما محتفظتان ببعض التشوه الدائم، ولما كانت الكرتان خاليتين من أي قوة مرونة؛ فإنهما لا تسعيان إلى أن ترتد إحداهما عن الأخرى.

وفي التصادم عديم المرونة يكون فيه ($e = 0$)، وبالتعويض في العلاقة (8-27)؛ نحصل على:

$$U_1 - U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1$$

نبدل U_2 بقيمتها في (8-20)، ينتج:

$$(M_1 + M_2)U_1 = M_1.V_1 + M_2.V_2$$

ومنه:

$$U_1 = U_2 = \frac{M_1.V_1 + M_2.V_2}{M_1 + M_2} \qquad (29\text{-}8)$$

وتكتسب الكرتان بعد التصادم سرعتين متساويتين، فهما تتحركان معاً وكأنهما جسم واحد، أي: لا يوجد فترة ارتداد.

ويكون دفع القوى الصادمة المؤثرة على كل من الكرتين:

$$I_2 = -I_1 = \frac{M_1.M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2) \qquad (30\text{-}8)$$

مسألة-8-4

يركض رجل وزنه ($W_1 = 70$ kgf) بسرعة ($V_1 = 8$ m/sec)، ويقفز على عربة ساكنة وزنها ($W_2 = 210$ kgf)، ومن ثم يقف مباشرة بعد القفز مما يؤدي إلى حركتها.

المطلوب إيجاد سرعة العربة بعد التصادم، ومردود هذه الطريقة في تحريك العربة.

الحل:

بإهمال مقاومات الاحتكاك بين الدواليب والسكة وفي المحاور، يمكن عّد هذه الحالة كتصادم جسمين غير مقيدين مطلقي اللدونة.

وبما أن العربة ساكنة في البدء ($V_2 = 0$)؛ فإن سرعة الجسمين بعد التصادم ستكون واحدة ($U_1 = U_2 = U$)، وتحسب من العلاقة (8-30):

$$U_1 = U_2 = \frac{M_1.V_1 + M_2.V_2}{M_1 + M_2}$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$U = \frac{W_1/g}{(W_1+W_2)/g} V_1 = \frac{70/g}{280/g}\, 8 = 2\,\mathrm{m/sec}$$

ويمثل مردود هذه الطريقة في تحريك العربة نسبة الطاقة الحركية المستفادة على الطاقة الحركية المعطاة:

$$h = \frac{U^2(W_1+W_2)/2g}{V_1^2(W_1/2g)} = \frac{W_1+W_2}{W_1}\,\frac{U^2}{V_1^2} = \frac{280}{70}\,\frac{4}{64} = 0.25$$

6-2- تصادم كامل المرونة *Perfectly Elastic Impact*

أو ما يدعى بـــ **الاصطدام المرن التام**، حيث تكون مادة الكرتين ذات مرونة عالية، أي: مرنة تماماً كالفولاذ القاسي، ويقال لمادة بأنها مطلقة المرونة إذا تغير شكلها تحت تأثير القوى، وبعد إزالة تأثير القوى عنها فإنها ترجع تماماً لشكلها الحقيقي.

فإذا كانت الكرتان ذات مرونة عالية وكانت قوى التصادم محدودة، ففي هذه الحالة لا تكون سرعات الكرات بعد التصادم واحدة؛ لأنهما يرتدان بعضهما عن بعض بعد التصادم، فالسرعة U_2 سوف تزداد والسرعة U_1 سوف تقل، أو تأخذ اتجاهاً معاكساً.

وفي التصادم كامل المرونة يكون فيه ($e = 1$)، وتستعيد الكرتان شكليهما الأصليين تماماً بعد التصادم، وتعطينا العلاقة (8-24) في هذه الحالة:

$$U_1 - U_2 = -(V_1 - V_2) \qquad (31\text{-}8)$$

تشير هذه النتيجة إلى أن السرعة النسبية بعد التصادم تساوي في المقدار السرعة النسبية قبل التصادم، ولكنها تخالفها في الإشارة، بذلك نستنتج أيضاً أن دفع القوى الصادمة الذي تكتسبه كل كرة أثناء فترتي التشوه والارتداد يكون متساوياً، بالتالي فإن الكرتين تبتعدان بعضهما عن بعض بالسرعة نفسها؛ التي تقترب بها من بعضهما بعض قبل التصادم.

ويمكن من العلاقتين (8-31) و(8-20) الحصول على سرعة ارتداد كل من الكرتين:

$$U_1 = V_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2) \qquad (32\text{-}8)$$

$$U_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2) \qquad (33\text{-}8)$$

ودفع القوى الصادمة المؤثرة على كل من الكرتين:

$$I_2 = -I_1 = \frac{2M_1.M_2}{M_1 - M_2}(V_1 - V_2) \qquad (34\text{-}8)$$

بالتالي الدفع في التصادم المرن يساوي ضعفي الدفع في التصادم عديم المرونة.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها ($M_1 = M_2$) ينتج من العلاقتين (8-32) و(8-33) أن:

$$U_2 = V_1 \quad , \quad U_1 = V_2$$

منه في التصادم المرن بين كرتين متساويتين في الكتلة؛ يحدث تبادل بين سرعتي الكرتين.

إذا أعدنا كتابة العلاقتين (8-31) و(8-20)على الشكل التالي:

$$M_1(V_1 - U_1) = M_2(U_2 - V_2)$$

$$V_1 + U_1 = V_2 + U_2$$

بضرب العلاقتين السابقتين معاً؛ فإننا نحصل على:

$$M_1(V_1 - U_1)(V_1 + U_1) = M_2(U_2 - V_2)(V_2 + U_2)$$

بالحل مع إعادة ترتيب حدود العلاقة السابقة؛ فإنه ينتج بعد ضربها بـــ (1/2) على:

$$\frac{1}{2}M_1.V_1^2 + \frac{1}{2}M_2.V_2^2 = \frac{1}{2}M_1.U_1^2 + \frac{1}{2}M_2.U_2^2 \qquad (35\text{-}8)$$

أي: أن قدرة جملة الجسمين المتصادمين تكون محفوظة تماماً مثل كمية الحركة، وذلك في حالة التصادم كامل المرونة.

مسألة-8-5

كرتان من مادتين كاملتي المرونة، كتلتاهما M_1 و M_2 ، تسير احداهما تجاه الأخرى بسرعة واحدة، فبعد التصادم بقيت الكرة ذات الكتلة M_2 ساكنة.

المطلوب إيجاد النسبة بين كتلتيهما.

الحل:

في التصادم كامل المرونة حيث يكون فيه ($e = 1$)، ولدينا:

$$U_2 = 0 \quad , \quad V_1 = V_2 = V$$

فمن العلاقة (8-33) في هذه الحالة:

$$U_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2) \quad \Rightarrow \quad 0 = V - \frac{2M_1}{M_1 + M_2}2V$$

منه النسبة بين الكتلتين:

$$M_2 - 3M_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 / M_2 = 1/3$$

نحصل على النتيجة نفسها إذا استعملنا العلاقة (8-20):

$$M_1.U_1 + M_2.U_2 = M_1.V_1 + M_2.V_2 \quad \Rightarrow \quad M_1.U_1 = (M_1 - M_2)V$$

والعلاقة (8-27):

$$U_1 - U_2 = -e(V_1 - V_2) \quad \Rightarrow \quad U_1 = -2V$$

منه النسبة بين الكتلتين:

$$M_2 = 3M_1 \quad \Rightarrow \quad M_1 / M_2 = 1/3$$

مسألة-8-6

كرة كتلتها ($M_1 = 20$ kg) تسير بسرعة ($V_1 = 10$ m/sec) متجهه إلى الشرق، تصطدم بكرة ثانية كتلتها ($M_2 = 10$ kg) تسير بسرعة ($V_2 = 5$ m/sec) متجهه إلى الغرب، كما هو مبين في a من (الشكل-8-8).

إذا كان معامل الارتداد (e = o.8). المطلوب تعيين السرعة المشتركة للكرتين في مرحلة الانضغاط أو التشوه، وسرعتهما بعد الارتداد.

الحل:

بما أن متجهي السرعتين V_1 و V_2 توازيان الناظم المشترك O_1O_2 ، ففي حالة الانضغاط تكتسب جملة الكرتين سرعة U توازي خط المركزين، وتتحقق خلال هذه الفترة مصونية كمية الحركة وفق الناظم المشترك:

$$M_1.V_1 - M_2.V_2 = (M_1 + M_2)U$$

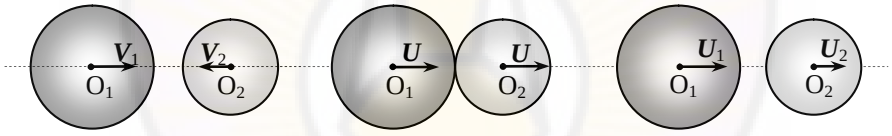
بالتعويض:

$$20\times10-10\times5=(20+10)U$$

ومنه:

$$U = 5\,\mathrm{m/sec}$$

وتتجه السرعة U إلى الشرق مثل اتجاه السرعة V_1 ، كما هو مبين في b من (الشكل-8-8)، ولتكن U_1 سرعة ارتداد الكرة الأولى و U_2 سرعة ارتداد الكرة الثانية، وهما توازيان أيضاً خط المركزين.



a b c

(الشكل-8-8) تصادم كرتان من مادتين كامل المرونة.

من علاقة معامل الارتداد بدلالة السرعة النسبية (8-27):

$$U_1 - U_2 = -e\,(V_1 - V_2)$$

بالتعويض:

$$U_1 - U_2 = -0.8\,(10+5) = -12\,\mathrm{m/sec} \qquad (1)$$

ومن علاقة مصونية كمية الحركة للمجموعة وفق الناظم المشترك 8-20)؛ نحصل على:

$$M_1.U_1 + M_2.U_2 = M_1.V_1 + M_2.V_2$$

بالتعويض:

$$20\,U_1 + 10\,U_2 = 20\times10+10(-5) = 150\,\mathrm{m/sec} \qquad (2)$$

العلاقتان (1) و (2) تعطيان U_1 و U_2 ، ويتم حلهما بضرب العلاقة (1) بـــ 10 :

$$10U_1 - 10U_2 = -120\text{m/sec}$$

وبجمعها مع العلاقة (2)؛ نحصل على:

$$30U_1 = 30 \;\Rightarrow\; U_1 = 1\text{m/sec}$$

أما سرعة ارتداد الكرة الثانية، فمن العلاقة (1):

$$U_2 = U_1 + 12 = 13\text{m/sec}$$

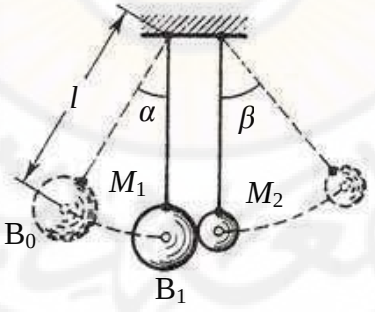
وتتجه السرعتان U_1 و U_2 إلى الشرق مثل اتجاه السرعة V_1 ، كما هو مبين في c من (الشكل-8-8).

مسألة-8-7

تعلق كرتان فولاذيتان صغيرتان مصقولتان، كتلتاهما M_1 و M_2 بخيطين دقيقين، طول كل منهما l ، بحيث تمس إحداهما الأخرى عندما تكونان في وضعي توازنهما، كما هو مبين في (الشكل-8-9)، تزاح الكرة M_1 عن وضع اتزانها زاوية α وتترك وشأنها، بعد التصادم ترتفع الكرة M_2 إلى زاوية β .

المطلوب إيجاد معامل الارتداد e .

الحل:



(الشكل-8-9) تصادم كرتين فولاذيتين.

يحسب معامل الارتداد e من العلاقة (8-26):

$$e = -\frac{U_1 - U_2}{V_1 - V_2}$$

بإسقاطها على خط المركزين، وليكن المحور X :

$$e = -\frac{U_{1X} - U_{2X}}{V_{1X} - V_{2X}}$$

حيث V_1 تمثل سرعة اقتراب الكرة M_1 ، وتحسب من علاقة تغير الطاقة الحركية:

$$\frac{1}{2} M_1 . V_1^2 = W_1 . h_1 = M_1 . g . l (1 - \cos a)$$

و l بعد مركز كتل الكرة M_1 عن نقطة التعليق، ومنه:

$$V_1 = 2\sqrt{g.l} . \sin \frac{a}{2}$$

وهي مماسة للقوس، أي: أنها توازي خط المركزين:

$$V_1 = V_{1X}$$

و U_2 سرعة انفصال الكرة M_2 ، وتحسب بطريقة مماثلة من علاقة تغير الطاقة الحركية:

$$U_2 = 2\sqrt{g.l} . \sin \frac{b}{2}$$

وهي مماسة للقوس، أي: أنها توازي خط المركزين:

$$U_2 = U_{2X}$$

وعند التصادم كانت الكرة M_2 ساكنة، أي:

$$V_2 = 0$$

و U_1 سرعة انفصال الكرة M_1 ، وتحسب من علاقة حفظ كمية الحركة أثناء التصادم، وهي:

$$M_1 . \boldsymbol{U}_1 + M_2 . \boldsymbol{U}_2 = M_1 . \boldsymbol{V}_1 + M_2 . \boldsymbol{V}_2$$

نسقط العلاقة (3) على خط المركزين:

$$M_1 . U_{1X} + M_2 . U_{2X} = M_1 . V_{1X} + M_2 . V_{2X}$$

ولما كان ($V_{2X} = 0$) ينتج:

$$U_{1X} = \frac{M_1 . V_{1X} - M_2 U_{2X}}{M_1}$$

بالتعويض:

$$U_{1X} = \frac{2M_1\sqrt{g.l}.\sin\frac{a}{2} - 2M_2\sqrt{g.l}.\sin\frac{b}{2}}{M_1}$$

ومنه:

$$U_{1X} = \frac{2\sqrt{g.l}}{M_1}(M_1.\sin\frac{a}{2} - M_2.\sin\frac{b}{2})$$

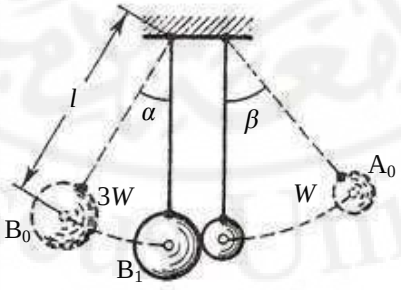
نبدل في علاقة معامل الارتداد e :

$$e = \frac{(M_1 + M_2)\sin\frac{b}{2}}{M_1.\sin\frac{a}{2}} - 1$$

مسألة-8-8

تعلق كرتان فولاذيتان صغيرتان مصقولتان، وزناهما W و $3W$ بخيطين دقيقين، طول كل منهما l ، بحيث تمس إحداهما الأخرى؛ عندما تكونان في وضعي توازنهما، كما هو مبين في (الشكل-8-10). تزاح الكرة الصغيرة W عن وضع اتزانها إلى الوراء حتى تبلغ الوضع A_0 ثم تترك وشأنها.

إذا كان التصادم بين الكرتين هو اصطدام مرن ($e = 1$). المطلوب إجراء مناقشة ما يحدث.



(الشكل-8-10) تصادم كرتين فولاذيتين.

الحل:

لنرمز بـــ V إلى السرعة التي تكتسبها الكرة الصغيرة عندما تعود بعد إطلاقها إلى نقطة التصادم، فيكون لدينا عندئذ في اللحظة؛ التي تسبق االتصادم مباشرة:

$$(V_2)_1 = 0 \quad , \quad (V_1)_1 = V$$

بالتعويض في العلاقة (8-20):

$$M_1.U_1 + M_2.U_2 = M_1.V_1 + M_2.V_2$$

نحصل على:

$$U_1 + 3U_2 = V \qquad (1)$$

بالتعويض في العلاقة (8-27):

$$U_2 - U_1 = e(V_1 - V_2)$$

نحصل على:

$$U_1 - U_2 = -V \qquad (2)$$

بحل العلاقتين (1) و (2)؛ نحصل على:

$$U_2 = +V/2 \quad , \quad U_1 = -V/2$$

نستنتج من أن التصادم يؤدي إلى أن ترتد الكرة الصغيرة بسرعة تساوي نصف سرعتها قبل التصادم، وإلى أن تكتسب الكرة الكبيرة السرعة نفسها نحو الجهة اليسرى.

نتيجة هاتين السرعتين تهتز الكرتان مبتعدة إحداهما عن الأخرى كنواسين صغيرين، ولما كان طولا هذين النواسين متساويين، فإن الكرتين تحتاجان إلى زمن واحد للعودة إلى نقطة التصادم بالسرعتين:

$$(V_2)_2 = -V/2 \quad , \quad (V_1)_2 = +V/2$$

فتصطدم عندئذ الكرتان اصطداماً ثانياً، وتصبح فيه العلاقتان (8-20) و (8-31) كما يلي:

$$(U_1)_2 + 3(U_2)_2 = -V \quad \text{و} \quad (U_1)_2 - (U_2)_2 = -V$$

نجد من هاتين العلاقتين أن سرعتي الكرتين بعد التصادم الثاني هما:

$$(U_2)_2 = +0 \quad , \quad (U_1)_2 = -V$$

أي: أن الكرة الصغيرة ترتد بعد التصادم الثاني بسرعة V ، بينما تقف الكرة الكبيرة ساكنة لا تتحرك.

نتيجة هذا التصادم تهتز الكرة الصغيرة حتى تبلغ الوضع A_0 الذي انطلقت في البدء منه، وتعيد الحادثة كرتها الأولى.

بالرغم أنه لا بد من ضياع بعض الطاقة إذا أجريت هذه التجربة فعلاً، فإنه يمكن مشاهدة هذا السلوك الدوري إذا تم صنع النموذج بإتقان.

7- فقدان الطاقة الحركية في التصادم عديم المرونة

Loss of Kinetic Energy in Perfectly Inelastic Impact

في التصادم غير المرن تفقد الأجسام المتصادمة قدراً من طاقتها الحركية؛ تصل إلى قيمتها العظمى عند التصادم منعدم المرونة.

لحساب قيمة الطاقة الحركية التي تفقدها جملة جسمين متصادمين تصادماً عديم المرونة. نفترض أن الجسمين المتصادمين في حركة انسحابية، ونرمز لسرعتهما المشتركة بـــ U ، فتكون الطاقة الحركية للمجموعة في بداية التصادم، ونهايته:

$$E_c^0 = \frac{1}{2}(M_1.V_{1X}^2 + M_2.V_{2X}^2) \qquad (36\text{-}8)$$

$$E_c^1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\,U_X^2 \qquad (37\text{-}8)$$

فالطاقة الحركية الضائعة في التصادم هي:

$$\Delta E_c = E_c^0 - E_c^1$$

نكتب الفارق أعلاه على الشكل:

$$E_c = E_c^0 - E_c^1 = E_c^0 - 2E_c^1 + E_c^1 \qquad (38\text{-}8)$$

ولدينا من العلاقة (8-20):

$$(M_1 + M_2)U_X = M_1.V_{1X} + M_2.V_{2X}$$

وعليه يكون من العلاقة(8-36):

$$2E_c^1 = (M_1 + M_2)U_X^2 = (M_1.V_{1X} + M_2.V_{2X})U_X \qquad (39\text{-}8)$$

نبدل في الطرف الأيمن من (8-38) قيمتي E_c^0 و E_c^1 كما وردت في العلاقتين (8-36) و (8-37)، وقيمة $2E_c^1$ كما وردت في (8-39)، ينتج:

$$E_c = \frac{1}{2}(M_1.V_{1X}^2 + M_2.V_{2X}^2 - 2M_1.V_{1X}.U_X - 2M_2.V_{2X}.U_X + M_1.U_X^2 + M_2.U_X^2)$$

وبالتالي بعد الإصلاح؛ نحصل على علاقة الطاقة الضائعة:

$$E_c = \frac{1}{2}M_1(V_{1X} - U_X)^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2X} - U_X)^2 \qquad (40\text{-}8)$$

يبين الفرقان $(V_{1X} - U_X)$ و$(V_{2X} - U_X)$ مقدار تناقص سرعة كل جسم عند التصادم، ويمكن تسميتهما بـــ السرعتين المفقودتين، وتعرف العلاقة بعلاقة نظرية كارنو (*Carnot's Theorem*) والتي تنص على:

أن الطاقة الحركية المفقودة في تصادم عديم المرونة بين جسمين يساوي الطاقة الحركية للجملة؛ فيما لو تحرك الجسمان بسرعتهما المفقودتين.

وإذا لم يكن التصادم عديم المرونة $(e \neq 0)$؛ فإنه يمكن بالطريقة نفسها معرفة أن الطاقة الحركية المفقودة عند تصادم جسمين تتعين بالعلاقة:

$$E_c = \frac{1-e}{1+e}\{\frac{1}{2}M_1(V_{1X} - U_{1X})^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2X} - U_{2X})^2\} \qquad (41\text{-}8)$$

ندرس كحالة خاصة اصطدام جسم بآخر ساكن:

في هذه الحالة:

$$V_2 = 0$$

والطاقة الحركية للجملة في بداية الاصطدام:

$$E_c^0 = \frac{1}{2} M_1 . V_1^2$$

ومن العلاقة (8-29):

$$U = \frac{M_1 . V_1}{M_1 + M_2}$$

وتكون الطاقة الحركية للجملة في نهاية الاصطدام:

$$E_c^1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) U^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 . V_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \frac{M_1 . V_1^2}{2}$$

أي:

$$E_c^1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} E_c^0$$

وتعطينا العلاقة الأخيرة الطاقة الحركية المتبقية في الجملة بعد الاصطدام، وبالتالي يكون فقدان الطاقة الحركية:

$$E_c = E_c^0 - E_c^1 = E_c^0 - \frac{M_1}{M_1 + M_2} E_c^0 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} E_c^0$$

نعدُّ حالتين خاصتين:

- حالة كتلة الجسم الصادم M_1 أكبر بكثير من كتلة الجسم المصدوم M_2 :

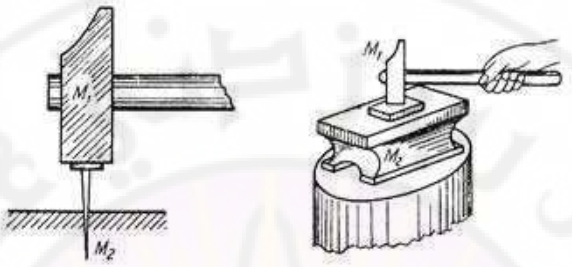
في هذه الحالة ($M_1 >> M_2$)، يمكن أن نَعُدَّ:

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad E_c^1 \approx E_c^0$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad E_c \approx 0$$

وفي هذه الحالة وإن كان الاصطدام عديم المرونة، فلا يحدث ضياع يذكر في الطاقة الحركية للجملة نتيجة الاصطدام، وتتحرك الجملة بعد الاصطدام بالطاقة الحركية نفسها تقريباً التي كانت لها في بداية التصادم.

لهذه الظاهرة أهمية كبيرة في الحياة العملية، وذلك عند طرق المسامير والأسافين وغيرها، فمن الواضح يجب أن تكون كتلة المطرقة M_1 في هذه الحالة أكبر كثيراً من كتلة المسمار M_2 ، كما هو مبين في a من (الشكل-8-11).



$(M_1 >> M_2)$ -a $(M_2 >> M_1)$ -b

(الشكل-8-11) اصطدام عديم المرونة بين جسم بآخر ساكن.

- حالة كتلة الجسم الصادم M_1 أصغر بكثير من كتلة الجسم المصدوم M_2 : في هذه الحالة $(M_2 >> M_1)$، يمكن أن نَعُدَّ:

$$\frac{M_1}{M_1+M_2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad E_c^1 \approx 0$$

$$\frac{M_2}{M_1+M_2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad E_c \approx E_c^0$$

وفي هذه الحالة تفقد الجملة طاقتها الحركية بكاملها، وتصرف على تشوه الجسم، وتبقى الجملة ساكنة بعد الاصطدام.

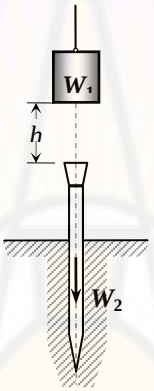
لهذه الظاهرة أهمية كبيرة أيضاً في الحياة العملية عند طرق الحديد (*Forge*)، أو عند البرشمة (*Riveting*) وغيرها، حيث يجب أن تكون كتلة السندان والنموذج M_2 ، أو كتلة الساندة (*Rivet*) والبرشامة أكبر كثيراً من كتلة المطرقة M_1 ، كما هو مبين في b من (الشكل-8-11).

مسألة-8-9

يغرس وتد خشبي وزنه (W_2 = 3900 N) في الأرض بضربات متتالية من مطرقة آلية وزنها (W_1 = 14700 N)، تسقط على رأسه من ارتفاع قدره (h = 2 m) ليلج في الأرض بفعل الضربة الواحدة مسافة (δ = 4 cm)، كما هو مبين في (الشكل-8-12).

إذا كان الاصطدام بين المطرقة والوتد لدناً. المطلوب إيجاد مقاومة الولوج الكلية R ، بفرض أنها ثابتة، وتعيين مردود المطرقة.

الحل:



(الشكل-8-12) اصطدام بين مطرقة ووتد.

من فرض أن الاصطدام بين المطرقة والوتد هو اصطدام لدن لدانة تامة، أي: أن المطرقة لا ترتد عن الوتد أي ارتداد. عندئذ يمكن تقسيم الضربة الواحدة إلى ثلاث مراحل:

- مرحلة سقوط المطرقة سقوطاً حراً من ارتفاع h ، وفيها تكون الطاقة المبذولة من المطرقة $W_1.h$ وسرعتها في نهاية هذه المرحلة، أي: عند بدء لحظة الاصطدام هي:

$$V_1 = \sqrt{2g.h}$$

أما الوتد فتكون سرعته عندئذ:

$$V_2 = 0$$

- مرحلة الاصطدام اللدن، وفيها يكون للمطرقة وللوتد سرعة واحدة، فخلال مجال الاصطدام الزمني القصير جداً تتباطأ المطرقة تباطؤاً سريعاً، بينما يتسارع الوتد حتى يبلغا سرعة مشتركة U مقدارها يتحدد بالاستناد إلى العلاقة (27-8):

$$U = \frac{W_1}{W_1 + W_2}\sqrt{2g.h}$$

ولما كانت مدة الاصطدام قصيرة جداً، فإنه يحق لنا أن نفترض - دون أن نرتكب خطأ محسوساً - أن المطرقة والوتد يبلغان هذه السرعة المشتركة U قبل أن يتاح للوتد أن يلج الأرض أي ولوج إضافي.

- مرحلة اختراق الوتد للتربة، وفيها تتحرك الجملة المكونة من المطرقة والوتد حركة جسم صلب واحد، وتتباطأ حتى تقف بفعل قوة المقاومة R الفاعلة خلال الانتقال δ ، فإذا طبقنا علاقة تغير الطاقة الحركية للجملة المساوي للعمل؛ الذي تقوم به القوى الفاعلة كلها، وجدنا أن:

$$\frac{W_1 + W_2}{2g}U'^2 - \frac{W_1 + W_2}{2g}U^2 = (W_1 + W_2)d - R.d$$

حيث $(\frac{W_1 + W_2}{2g}U'^2)$ تمثل الطاقة الحركية للجملة في نهاية مرحلة الاختراق، وتساوي الصفر لأن $(U'^2 = 0)$.

و $(\frac{W_1 + W_2}{2g}U^2)$ تمثل الطاقة الحركية للجملة في بدء مرحلة الاختراق.

بالتعويض ينتج:

$$-\frac{W_1 + W_2}{2g}.\frac{W_1^2(2g.h)}{(W_1 + W_2)^2} = (W_1 + W_2)d - R.d$$

$$R = \frac{W_1^2.h}{(W_1 + W_2)d} + (W_1 + W_2) = \frac{2(14700)^2}{0.04(18600)} + 18600 = 599487\ \text{N}$$

أما مردود المطرقة h فيساوي نسبة العمل المفيد $R.\delta$ على الطاقة المبذولة $W_1.h$ ، ولتحديدها نلاحظ في علاقة R ، أن مجموع قوتي الثقالة (W_1+W_2) صغير جداً عادة إذا ما قورن بمقاومة الولوج R ، فيمكننا إذاً أن نهمل الحد الثاني في الطرف الأيمن من العلاقة إهمالاً تاماً؛ دون أن نرتكب خطأ يذكر، منه نحصل على:

$$R = \frac{W_1^2}{(W_1 + W_2)}.\frac{h}{d}$$

التي تكتب بالشكل التالي:

$$R.d = \frac{W_1}{W_1 + W_2}(W_1.h)$$

نلاحظ أن العمل $R.\delta$ الذي يمثل العمل المفيد أصغر من الطاقة المبذولة $W_1.h$ ، وأن نسبتهما تمثل المردود:

$$h = \frac{R.d}{W_1.h} = \frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{14700}{18600} = 79\%$$

ومنه نستنتج نسبة الطاقة الضائعة أثناء الاصطدام $(W_1.h - R.\delta)$ إلى الطاقة الكلية المبذولة:

$$1 - \frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{W_2}{W_1 + W_2}$$

ولكي تكون هذه النسبة صغيرة يجب أن يكون وزن المطرقة W_1 كبيراً جداً إذا ما قورن بوزن الوتد W_2 .

يتبين لنا من ذلك أننا إذا استخدمنا مطرقة ضخمة استطعنا أن ندق في الأرض عموداً أو وتداً بنفقة من الطاقة أقل من التي نحتاج إليها؛ لو أننا استعملنا مطرقة خفيفة.

مسألة-8-10

أعد المسألة السابقة باستخدام المعطيات التالية:

$W_1 = 9800$ N و $W_2 = 4900$ N و $h = 3$ m

إذا كان الاصطدام مرن عادي (e=0.25)، ومقاومة الاختراق منتظمة (R=300000 N).

المطلوب تعيين عدد ضربات المطرقة حتى يخترق الوتد التربة بمسافة (y = 30 cm).

الحل:

لإيجاد المسافة δ التي يدخلها الوتد في التربة عند كل ضربة، نطبق علاقة مبدأ العمل والطاقة الحركية على الوتد في مرحلة الاختراق:

$$\frac{W_2}{2g}U_2'^2 - \frac{W_2}{2g}U_2^2 = W_2.d - R.d$$

حيث $(U_2'^2 = 0)$ تمثل سرعة الوتد في لحظة توقفه، وتساوي الصفر.

و U_2 تمثل سرعة الوتد في لحظة بدء الاختراق، وتحسب من علاقة مصونية كمية حركة الجملة الوتد والمطرقة (8-20):

$$M_1.U_1 + M_2.U_2 = M_1.V_1 + M_2.V_2$$

من الملاحظ أنه يمكن أن نعوض الكتلة بالوزن:

$$9800.U_1 + 4900.U_2 = 9800.V_1 + 0$$

حيث V_1 تمثل سرعة المطرقة عند بدء لحظة الاصطدام، وتساوي:

$$V_1 = \sqrt{2g.h} = \sqrt{2\times 9.81\times 3} = 7.672 \text{ m/sec}$$

بالتعويض:

$$U_1 + U_2/2 = 7.672 \qquad (1)$$

ومن علاقة (8-26) لتعيين معامل الارتداد:

$$e = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2}$$

بالتعويض:

$$\frac{U_2 - U_1}{7.672} = 0.25 \qquad (2)$$

من العلاقتين نحسب:

$$U_2 = 6.393 \text{m/sec}$$

بالتعويض في علاقة تغير الطاقة:

$$-\frac{4900}{2\times 9.81}(6.393)^2 = 4900.d - 300000.d \quad \Rightarrow \quad d = 0.0335\text{m} = 3.35\text{cm}$$

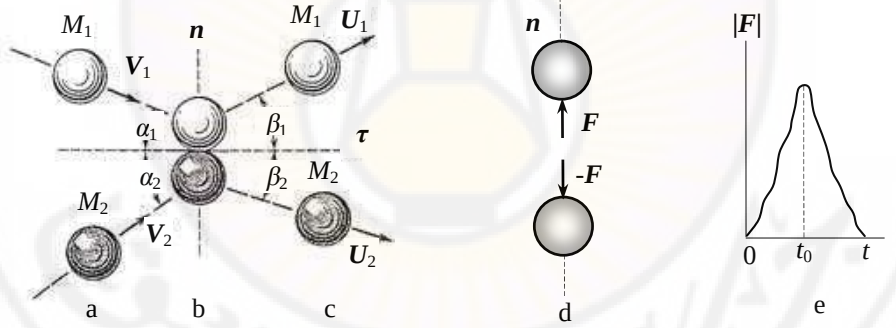
منه عدد ضربات المطرقة:

$$n = 30/3.35 = 8.955 \approx 9$$

8- التصادم المركزي المائل *Oblique Central Impact*

يحدث التصادم المركزي المائل عندما لا تقع سرعتا الجسمين على محور التصادم؛ لذا لدراسة هذه الحالة ندرس تصادم كرتين كتلتاهما M_1 و M_2 تقع سرعتاهما قبل التصادم V_1 و V_2 في مستوى واحد، وتقتربان من بعضهما في مجال التصادم، كما هو مبين في الجزء a من (الشكل-8-13)، وحددت اتجاهات السرعة اختيارياً في اتجاه مماس السطوح المتلامسة $\boldsymbol{\tau}$ بحيث تصنعان قبل التصادم الزاويتين α_1 و α_2 والزاويتين β_1 و β_2 بعد التصادم على الترتيب كما هو مبين في الجزء b ، وعينت شروط الارتداد النهائية في الجزء c ، وقوى التصادم $(-\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})$ موضحة في الجزء d وهي تتغير من الصفر إلى قيمتها العظمى خلال جزء التشوه للتصادم، وترتد ثانية إلى الصفر خلال فترة التعويض، كما هو مبين في الجزء e من (الشكل-8-13) حيث ترمز t إلى مدة فترة التصادم.

بفرض أن معامل الارتداد e معطى، فتكون غايتنا إيجاد قيمة سرعتي الكرتين U_1 و U_2 ، واتجاههما بعد التصادم.



(الشكل-8-13) التصادم المركزي المائل.

لنختار محوري الإحداثيات $\boldsymbol{\tau}$ و $\boldsymbol{n}$ بحيث ينطبق المحور $\boldsymbol{n}$ على محور التصادم والمحور $\boldsymbol{\tau}$ باتجاه المماس على سطح التصادم، وبفرض أن الجسمين صقيلان تماماً، وأن التصادم يحدث دون احتكاك، فتكون بالتالي القوى الدافعة التي تؤثر على الجسمين أثناء التصادم هي قوى داخلية فقط، تتجه كما ذُكر على طول المحور $\boldsymbol{n}$ ، ومنه لا توجد قوى دفع باتجاه المحور $\boldsymbol{\tau}$ ، بالتالي لا يحدث أي تغير للسرعة في هذا الاتجاه في كلتا الكرتين؛ لأن مركبات كمية الحركة للكرتين في هذا الاتجاه تكون محفوظة، ومنه بالتطبيق:

على الكرة الأولى؛ نحصل على:

$$V_1.\cos a_1 = U_1.\cos b \qquad (42\text{-}8)$$

وعلى الكرة الثانية؛ نحصل على:

$$V_2.\cos a_2 = U_2.\cos b_2 \qquad (43\text{-}8)$$

وبما أن القوى التي تعمل أثناء التصادم هي قوى داخلية، لذا تكون مركبات كمية الحركة للكرتين محفوظة في اتجاه المحور $\boldsymbol{n}$:

$$M_1.V_1.\sin a_1 - M_2.V_2.\sin a_2 = -M_1.U_1.\sin b_1 + M_2.U_2.\sin b_2 \qquad (44\text{-}8)$$

ويتم الحصول على مركبة السرعة النسبية للكرتين في اتجاه المحور $\boldsymbol{n}$ بعد التصادم، بضرب مركبة السرعة النسبية لهما في الاتجاه نفسه قبل التصادم بمعامل الارتداد e ، أي:

$$e\,(V_1.\sin a_1 + V_2.\sin a_2) = -U_1.\sin b_1 + U_2.\sin b_2 \qquad (45\text{-}8)$$

وهكذا أصبح لدينا أربع معادلات نستعملها من أجل تعيين المجاهيل الأربعة:

$$U_1 \text{ و } U_2 \text{ و } \beta_1 \text{ و } \beta_2 \text{ .}$$

مسألة-8-11

كرة كتلتها ($M_1 = 4$ kg) تتحرك بسرعة ($V_1 = 20$ m/sec) لتصطدم بصورة مائلة بكرة ساكنة كتلتها ($M_2 = 5$ kg)، بحيث تميل حركة الكرة الأولى بزاوية ($\alpha_1 = 30^o$) مع اتجاه خط المركزين في لحظة التصادم كما هو مبين في a من (الشكل-8-14).

إذا كان معامل الارتداد ($e = 0.5$). المطلوب تعيين سرعة الكرتين في مرحلة الارتداد، وإيجاد الخسارة في الطاقة الحركية.

الحل:

نعدّ مجموعة الكرتين جملة معزولة في هذه الحالة؛ فتكون قوى التصادم قوى داخلية، وعليه:

$$\Sigma I^e = 0$$

ومنه تكون كمية حركة الجملة وفق خط المركزين $\boldsymbol{n}$ مصانة، وعليه:

$$M_1.U_1^n + M_2.U_2^n = M_1.V_1^n$$

بالتعويض:

$$4U_1^n + 5U_2^n = 4V_1.\cos 30 = 40\sqrt{3} \qquad (1)$$

وعلاقة السرعة النسبية قبل التصادم وبعده تعطى بالعلاقة:

$$U_1^n - U_2^n = -e(V_1^n - V_2^n)$$

بالتعويض:

$$U_1^n - U_2^n = -0.5V_1.\cos 30 = -5\sqrt{3} \qquad (2)$$

بحل العلاقتين (1) و(2) نحصل على المجاهيل U_1^n, U_2^n ، وذلك بضرب المعادلة (2) بـــ 5 ؛ نحصل على:

$$5U_1^n - 5U_2^n = -25\sqrt{3}$$

ثم بجمعها مع العلاقة (1)؛ نحصل على:

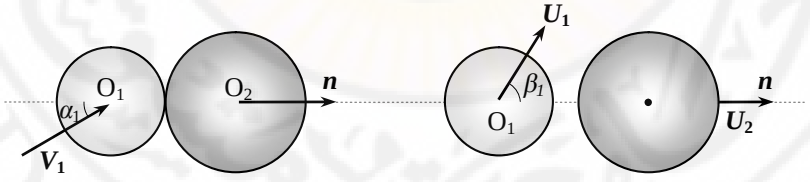
$$9U_1^n = 15\sqrt{3}$$

ومنه:

$$U_1^n = 5\sqrt{3}/3 \text{ m/sec}$$

وتحسب U_2^n من إحدى العلاقتين (1) أو(2)؛ نحصل على:

$$U_2^n = 20\sqrt{3}/3 \text{ m/sec}$$



(الشكل-8-14) التصادم المركزي المائل.

وبما أن التصادم أملس فتنعدم قوى الدفع باتجاه المماس، ولا يحدث أي تغير في الاتجاه في كلتا الكرتين؛ لأن مركبات كمية الحركة في هذا الاتجاه تكون محفوظة، ومنه بالتطبيق:

على الكرة المتحركة:

$$U_1^t = V_1^t = V_1.\sin a_1 = V_1.\sin 30 = 10 \text{ m/sec}$$

على الكرة الثابتة:

$$U_2^t = V_2^t = 0$$

ومنه نحسب:

$$U_1 = [(U_1^t)^2 - (U_1^n)^2]^{1/2} = 10.4 \text{ m/sec}$$

وتصنع $\boldsymbol{U}_1$ مع خط المركزين زاوية β_1 ، تعطى بالعلاقة:

$$\beta_1 = \arctan(U_1^t / U_1^n) = \arctan 3.65 = 74^o$$

كذلك نحسب:

$$U_2 = U_2^n = 11.55 \text{ m/sec}$$

وتصنع $\boldsymbol{U}_2$ مع خط المركزين زاوية β_2 معدومة، فهي توازي خط المركزين، كما هو مبين في b من (الشكل-8-14).

لتعيين الخسارة في الطاقة:

$$\Delta E_c = E_c^0 - E_c^1$$

حيث الطاقة قبل التصادم:

$$E_c^0 = \frac{1}{2} M_1.V_1^2 = \frac{4}{2}(20)^2 = 800 \text{ N.m}$$

والطاقة بعد التصادم:

$$E_c^1 = \frac{1}{2} M_1.U_1^2 + \frac{1}{2} M_2.U_2^2 = \frac{4}{2}(10.4)^2 + \frac{5}{2}(11.55)^2 = 500 \text{ N.m}$$

ومنه الخسارة في الطاقة:

$$\Delta E_c = 800 - 500 = 300 \text{ N.m}$$

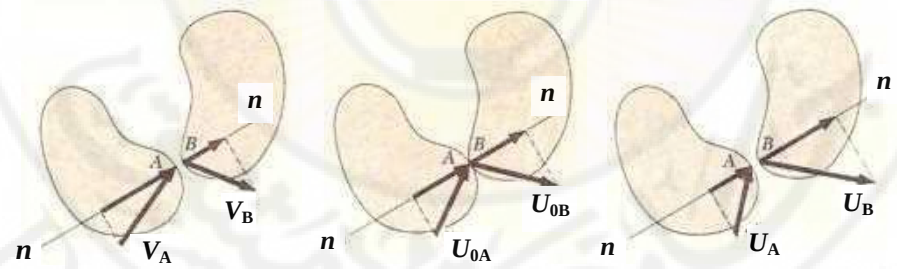
9- التصادم غير المركزي *Eccentric Impact*

في حالة التصادم غير المركزي لا ينطبق مركزا كتلتي الجسمين المتصادمين على محور التصادم. لنفرض أن الجسمين صلبان وصقيلان، وأن كتلتاهما M_1 و M_2 ، وأن تماس الجسمين يتم في النقطتين A و B .

قبل التصادم تكون سرعتا نقطتي التماس $\boldsymbol{V}_A$ و $\boldsymbol{V}_B$ على الترتيب، كما هو مبين في a من (الشكل-8-15)، ويلاحظ أنه في الحالة العامة لا يكون مسقطا سرعتي نقطتي التماس قبل التصادم على محور التصادم $\boldsymbol{n}$ متساويين.

تحت تأثير التصادم، فإن كلا الجسمين سيتشوهان، وفي نهاية فترة التشويه ستصبح سرعتاهما على الترتيب $\boldsymbol{U}_{OA}$ و $\boldsymbol{U}_{OB}$ ، وتكون مساقطهما على محور التصادم $\boldsymbol{n}$ متساوية، كما هو مبين في b من (الشكل-8-15).

بعد ذلك تبدأ فترة الاسترجاع، أو الارتداد، حيث يسترجع الجسمان شكلهما الأصلي، وفي نهاية فترة الارتداد يكون لنقطتي التماس A و B السرعتين $\boldsymbol{U}_A$ و $\boldsymbol{U}_B$ على الترتيب، كما هو مبين في c من (الشكل-8-15).



a b c

(الشكل-8-15) مراحل التصادم غير المركزي.

بما أننا افترضنا أن الجسمين صقيلان تماماً، فتكون القوى الدفعية التي تؤثر كل منها على الآخر منطبقة على محور التصادم $\boldsymbol{n}$.

ومن تعريف معامل الارتداد e أنه يمثل نسبة دفع قوى استرجاع الشكل الأصلي $\int R.dt$ على دفع قوى التشوه $\int P.dt$ أي:

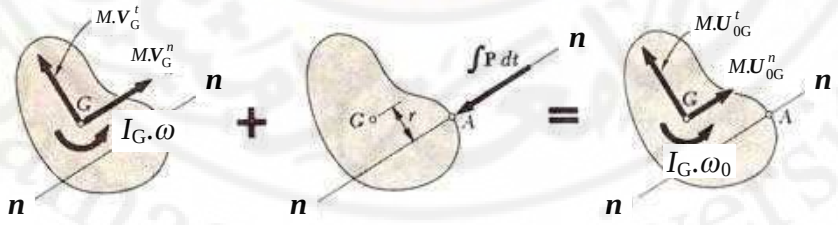
$$e=\frac{\int R.dt}{\int P.dt} \tag{46-8}$$

هذه العلاقة تبقى أيضاً صحيحة بين مركبات السرعات النسبية لنقطتي التماس A و B على محور التصادم قبل التصادم وبعده، حيث ينتج بتطبيقها على هذه الحالة، أن:

$$e\,(V_{\mathrm{A}}^{n}-V_{\mathrm{B}}^{n})=U_{\mathrm{B}}^{n}-U_{\mathrm{A}}^{n} \tag{47-8}$$

لكي نبرهن على صحة العلاقة السابقة، سنعتبر أن شروط الحركة الحرة غير المقيدة تسري على حركة كل من الجسمين المتصادمين (الشكل-8-15)، بذلك فإن قوى الدفع المؤثرة في الجسمين خلال فترة التصادم تكون مطبقة في النقطتين A و B على الترتيب.

عند رسم مخططات قوى الدفع، وكمية الحركة خلال فترة التشوه للجسم الأيسر، حيث تشكل النقطة A نقطة منه، فإنه يمكن اعتبار أن $\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}}$ و $\boldsymbol{U}_{0\mathrm{G}}$ تمثلان على الترتيب سرعة مركز الكتل للجسم في بداية فترة التشوه ونهايتها، وبـ W و W_0 السرعة الزاوية للجسم في الفترة الزمنية نفسها على الترتيب، كما هو مبين في (الشكل-8-16).



(الشكل-8-16) مخططات قوى الدفع وكمية الحركة في التصادم غير المركزي.

بتطبيق مبدأ الدفع وكمية الحركة في اتجاه محور التصادم $\boldsymbol{n}$ ، ينتج:

$$M.V_{\mathrm{G}}^{n} - \int P.dt = M.U_{0\mathrm{G}}^{n} \qquad (48\text{-}8)$$

وبتطبيق مبدأ العزم الحركي للجسم الصلب حول مركز الكتل G ، ينتج أيضاً:

$$I_{\mathrm{G}}.w - r\int P.dt = I_{\mathrm{G}}.w_0 \qquad (49\text{-}8)$$

حيث تمثل r المسافة العمودية من G إلى محور التصادم.

لندرس الآن فترة استرجاع الشكل الأصلي، فنحصل في طريقة مشابهة على ما يلي:

$$M.U_{0\mathrm{G}}^{n} - \int R.dt = M.U_{\mathrm{G}}^{n} \qquad (50\text{-}8)$$

$$I_{\mathrm{G}}.w_0 - r\int R.dt = I_{\mathrm{G}}.w_1 \qquad (51\text{-}8)$$

حيث تمثل كل من $\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}$ و w_1 على الترتيب سرعة مركز الكتلة والسرعة الزاوية للجسم بعد التصادم.

بحل العلاقتين (48-8) و(50-8) من أجل دفع قوة التشوه وقوى استرجاع الشكل الأصلي، ثم تعويض النتائج في العلاقة (46-8)، وكذلك حل العلاقتين (49-8) و(51-8) من أجل دفع القوتين نفسيهما، ومن ثم تعويض النتائج في العلاقة (46-8) ثانية؛ فنحصل بالتالي على علاقتين بصورتين مختلفتين تعطيان معامل الارتداد:

$$e = \frac{U_{0\mathrm{G}}^{n} - U_{\mathrm{G}}^{n}}{V_{\mathrm{G}}^{n} - U_{0\mathrm{G}}^{n}} \quad , \quad e = \frac{w_0 - w_{_1}}{w - w_0} \qquad (52\text{-}8)$$

بضرب بسط ومقام العلاقة الثانية التي حصلنا عليها من أجل e بـ r ، ثم نجمع الناتج مع العلاقة الأولى بسط مع بسط، ومقام مع مقام، فينتج:

$$e = \frac{U_{0\mathrm{G}}^{n} + r.w_0 - (U_{\mathrm{G}}^{n} + r.w_1)}{V_{\mathrm{G}}^{n} + r.w - (U_{0\mathrm{G}}^{n} + r.w_0)}$$

وبملاحظة ان المقدار $(V_G^n + rw)$ يمثل المركبة V_A^n لسرعة نقطة التماس A على اتجاه المحور $\boldsymbol{n}$ ، وبشكل مشابه $(U_{0G}^n + rw_0)$ و $(U_G^n + rw_1)$ تمثلان على الترتيب مركبات U_{0A}^n و U_A^n على اتجاه المحور نفسه، فتصبح علاقة معامل الارتداد e السابقة:

$$e = \frac{U_{0A}^n - U_A^n}{V_A^n - U_{0A}^n} \tag{53-8}$$

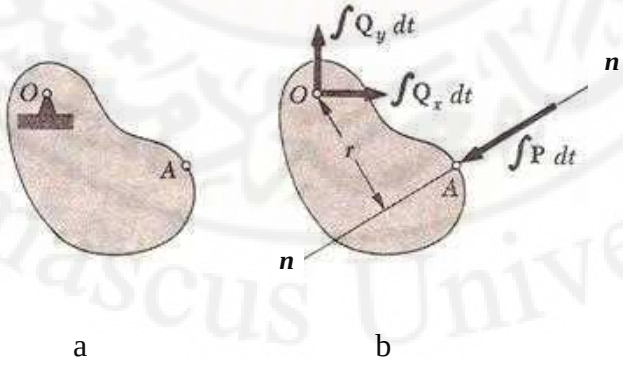
ولنأخذ الآن الجسم الأيمن التي تشكل B نقطة منه، ولنقم بتحليل حركته بطريقة مشابهة للجسم الأيسر، فنصل إلى عبارة مشابهة لمعامل الارتداد e في حدود تحتوي على المركبات في اتجاه المحور $\boldsymbol{n}$ للسرع المتتالية للنقطة B .

وبما أن:

$$U_{0A}^n = U_{0B}^n$$

فإنه يمكن حذف مركبتي هاتين السرعتين من عبارتي معامل الارتداد e العائد لكلا الجسمين بعمليات تشبه تلك التي نفذت في الفقرة [8-6- الاصطدام المركزي المباشر]؛ فنحصل على العلاقة (8-47) المطلوبة.

في الحالة الخاصة إذا كان أحد الجسمين أو كلاهما مجبراً على الدوران حول نقطة ثابتة O . مثلاً كما في حالة النواس المركب الموضح في a من (الشكل-8-17)، فينشأ عند النقطة O قوة رد فعل دافعة كما هو مبين في b من (الشكل-8-17).



a b

(الشكل-8-17) تطبيق على النواس المركب

سنبرهن أن العلاقتين (8-47) و (8-53) ستبقيان صحيحتين؛ على الرغم من أن طريقة استخراجهما تعدلت بسبب وجود تقييد الحركة ورد الفعل الناشئ عن ذلك.

لنطبق ثانيةً العلاقة (8-49) حول O على فترة التشوه، وعلى فترة استرجاع الشكل الأصلي، نكتب:

$$I_{\mathrm{O}}.w - r\int P.dt = I_{\mathrm{O}}.w_0 \qquad (54\text{-}8)$$

$$I_{\mathrm{O}}.w_0 - r\int R.dt = I_{\mathrm{O}}.w_1 \qquad (55\text{-}8)$$

حيث تمثل r المسافة العمودية من النقطة الثابتة O إلى محور التصادم. بحل المعادلتين (8-54) و(8-55) من أجل دفع قوتي التشوه والارتداد، ومن ثم تعويض النتائج في (8-46) مع ملاحظة أن كل من $r.w$ و $r.w_0$ و $r.w_1$ تمثل مركبات السرعات المتتالية للنقطة A على المحور $\boldsymbol{n}$ ، فنحصل أخيراً على علاقة لمعامل الارتداد مماثلة للعلاقة (8-53).

$$e = \frac{w_0 - w_{_1}}{w - w_0} = \frac{r.w_0 - r.w_1}{r.w - r.w_0} = \frac{U_{0\mathrm{A}}^n - U_{\mathrm{A}}^n}{V_{\mathrm{A}}^n - U_{0\mathrm{A}}^n}$$

نلاحظ أن العلاقة (8-53) لا تزال صحيحة، وكذلك العلاقة (8-47) عندما يكون أحد الجسمين المتصادمين، أو كلاهما، مجبراً على الدوران حول النقطة الثابتة O ، ولكي نعين سرعات الجسمين المتصادمين بعد حدوث التصادم، يجب استعمال العلاقة (8-47) مع العلاقة أو العلاقات التي حصلنا عليها بتطبيق مبدأ الدفع وكمية الحركة.

10- الاصطدام بجسم صلب *Impact With a Rigid Body*

من أجل دراسة تأثير قوى التصادم على جسم صلب، ندرس حالة اصطدام قوة بجسم يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت، أو حالة اصطدام قوة بجسم يتحرك حركة مستوية عامة.

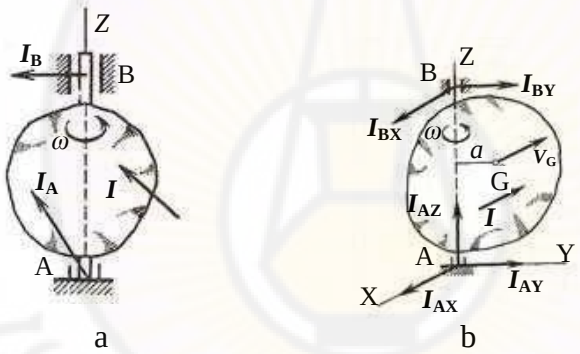
1-10- الاصطدام بجسم دائر *Impact With a Rotating Body*

ندرس جسماً يدور حول المحور Z ، ونفترض أنه في لحظة زمنية ما أثر على الجسم قوة صادمة $\boldsymbol{F}$ نتج عنها دفع $\boldsymbol{I^e}$ ، كما هو مبين في a من (الشكل-8-18). بتطبيق مبدأ تغير العزم الحركي على الجسم حول المحور Z ينتج:

$$K_{1Z} - K_{0Z} = m_Z(\boldsymbol{I^e})$$

وبما أن الجسم الدائر يستند على المسندين A و B ، ويؤدي تأثير الدفع $\boldsymbol{I}$ عليه إلى نشوء دفعي رد الفعل $\boldsymbol{I_A}$ و $\boldsymbol{I_B}$ ، وتخضع عندئذ جملة الجسم والمحور إلى الدفوع $\boldsymbol{I}$ و $\boldsymbol{I_A}$ و $\boldsymbol{I_B}$ ، إلا أن عزمي ردي الفعل الدفعيين الناشئين في المسندين A و B حول المحور Z يساويان الصفر.

$$m_Z(\boldsymbol{I_A}) = 0 \quad , \quad m_Z(\boldsymbol{I_B}) = 0$$



a b

(الشكل-8-18) الاصطدام بجسم دائر.

وإذا كانت السرعة الزاوية للجسم الدائر w_0 قبل الاصطدام، وأصبحت w_1 بعد الاصطدام كان عندها:

$$K_{1Z} = w_1 . I_Z \quad , \quad K_{0Z} = w_0 . I_Z$$

ويكون بالتعويض:

$$(w_1 - w_0) I_Z = m_Z(\boldsymbol{I^e})$$

وبالتالي:

$$w_1 - w_0 = \frac{m_Z(\boldsymbol{I^e})}{I_Z} \qquad (56\text{-}8)$$

تعطينا العلاقة (8-56) تغير السرعة الزاوية للجسم الدائر عند التصادم بتأثير الدفع $\boldsymbol{I}$ ، ويساوي هذا التغير ناتج قسمة عزم الدفع على عزم العطالة للجسم حول محور الدوران.

ولتعيين ردي الفعل الدفعيين للمسند A ومسند التحميل B عند التصادم، نمدد المحاور AXYZ بحيث يقع مركز كتل الجسم G في المستوى AYZ ، كما هو مبين في b من (الشكل-8-18)، أما ردود الأفعال الدفعية المطلوبة؛ فقد تم تمثيلها بوساطة مركباتها على المحاور الإحداثية.

نفرض أن البعد بين المسندين (AB = l) وأن المسافة بين مركز الكتل G والمحور Z تساوي a ، وبما أن الجسم لا يتحرك خلال زمن التصادم فإن المتجهين $\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}}$ و $\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}$ يكونان موازيين للمحور AX ، بالتالي:

$$Q_{0\mathrm{X}} = -M.V_{\mathrm{G}} = -M.a.w_0$$

$$Q_{1\mathrm{X}} = -M.U_{\mathrm{G}} = -M.a.w_1$$

$$Q_{\mathrm{Y}} = Q_{\mathrm{Z}} = 0$$

بالتعويض في علاقات إسقاط علاقة تغير كمية الحركة الجسم (8-4) على المحاور الثلاثة:

المحور AX : $-M.a(w_1 - w_0) = I_{\mathrm{AX}} + I_{\mathrm{BX}} + I^e_{\mathrm{X}}$

المحور AY : $0 = I_{\mathrm{AY}} + I_{\mathrm{BY}} + I^e_{\mathrm{Y}}$

المحور AZ : $0 = I_{\mathrm{AZ}} + I^e_{\mathrm{Z}}$

أيضاً بالتعويض في علاقات إسقاط علاقة تغير العزم الحركي للجسم (8-7)، مع استخدام العلاقات (6-24) و (6-25) على المحورين:

المحور AX : $-I_{\mathrm{XZ}}(w_1 - w_0) = -I_{\mathrm{BY}}.l + m_{\mathrm{X}}(I^e)$

المحور AY : $-I_{\mathrm{YZ}}(w_1 - w_0) = I_{\mathrm{BX}}.l + m_{\mathrm{Y}}(I^e)$

تستخدم هذه العلاقات الخمس (8-57) في تعيين ردود الأفعال الدفعية المجهولة I_{BY} و I_{BX} و I_{AZ} و I_{AY} و I_{AX} ، أما الفرق (w_1 - w_0) فيعين من العلاقة (8-56).

2-10- الاصطدام بجسم يتحرك حركة مستوية عامة

Impact with a Body In General Plane Motion

من أجل دراسة تأثير قوى التصادم على الحركة المستوية العامة للجسم الصلب؛ التي تُعَدُّ كمجموع حركة انسحابية مع مركز الكتل وحركة دورانية حول محور آني مار من مركز الكتل عمودي على مستوى الحركة. نعدّ المحورين X و Y في مستوى حركة مركز الكتل، ولنفرض أنه في لحظة بدء تأثير القوة الصادمة كانت سرعة مركز الكتل هي V_G ، والسرعة الزاوية للجسم هي w ، فيكون لدينا وفق العلاقة (8-5):

$$M(U_{GX} - V_{GX}) = \sum I_X^e \qquad (58\text{-}8)$$

$$M(U_{GY} - V_{GY}) = \sum I_Y^e$$

ويعين تغير السرعة الزاوية، بالعلاقة (8-56):

$$I_{GZ}(w_1 - w_0) = m_Z(I^e) \qquad (59\text{-}8)$$

أي: أن تأثير قوى التصادم الخارجية على جسم يتحرك حركة مستوية عامة يقود إلى تغيير محدود في سرعة مركز كتلته، وفي سرعته الزاوية.

بالتالي يمكن استنتاج طريقة منهجية لحل مسائل تحريك جسم متماسك خاضع لدفوع خارجية تتلخص بما يلي:

- يرسم شكلان أحدهما لدفوع القوى الخارجية على الجسم، وثانيهما للتغيير في كمية الحركة الزاوية، أي: العزم الحركي حوله.
- بتطبيق قانون التكافؤ على الشكلين يمكن كتابة ثلاث معادلات للجسم الواحد، وتعين حركته بعد انتهاء تأثير القوى الدفعية مباشرة.
- تهمل دفوع الأوزان لصغرها نسبياً، وكذلك يهمل التغير الصغير في أوضاع الأجسام أثناء فترة الدفع القصيرة.
- عند اصطدام جسمين يؤثر أولهما على الآخر بدفع I مثلاً، ويؤثر الثاني على الأول برد فعل دفعي مساو ومعاكس للأول. تطبق الفقرات السابقة على كل من الجسمين، ثم تطبق علاقة معامل الارتداد بدلالة سرعات نقطتي تلامس الجسمين قبل التصادم مباشرة وبعده، محللة في الاتجاه العمودي، وعلى المماس المشترك عند نقطة التلامس.

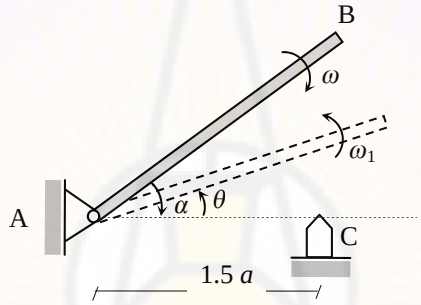
مسألة-8-12

قضيب رفيع منتظم AB كتلته m ، وطوله $2a$ ، وعزم عطالته بالنسبة لمركز الكتلة G هو ($I_G = a^2.m/3$) مثبت في المفصل الثابت A .

ترك القضيب يهبط من السكون في وضع يميل ($\alpha = 60^o$) على الأفقي، وعندما أصبح أفقياً صدم وتداً ثابتاً مرناً C في المستوى الأفقي نفسه المار بالمفصل A ، ثم ارتد فبلغ أقصى ميله ($\theta = 30^o$) على الأفقي كما هو مبين في (الشكل-8-19).

المطلوب إيجاد دفع الوتد، ومعامل الارتداد.

الحل:



(الشكل-8-19) قضيب AB يهبط من السكون ليصدم وتد ثابت C .

إن السرعة الزاوية w لدوران القضيب باتجاه حركة عقارب الساعة قبل اصطدامه بالوتد مباشرة يعينها مبدأ تغير الطاقة الحركية:

$$\frac{1}{2} I_A . w^2 - 0 = m.g.a.\sin a$$

بالتعويض:

$$\frac{1}{2}(\frac{a^2}{3}m + a^2.m)w^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a.m.g$$

ومنه:

$$w = (\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{a})^{1/2}$$

أما السرعة الزاوية w_1 لدوران القضيب بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة بعد اصطدامه بالوتد مباشرة، وحتى موضع الارتداد إلى ($\theta=30^o$)؛ يعينها مبدأ تغير الطاقة كذلك:

$$0-\frac{1}{2}I_A.w_1^2=-m.g.a.\sin q$$

بالتعويض:

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3}a^2.m.w_1^2=\frac{1}{2}a.m.g$$

ومنه:

$$w_1=(\frac{3}{4}\frac{g}{a})^{1/2}$$

ندرس ظاهرة التصادم

نرمز بـــ $\boldsymbol{I}$ لدفع قوة رد الفعل في C ، وبتطبيق علاقة تغير العزم الحركي، وذلك بأخذ العزوم حول A للمتجهات الموضحة في (الشكل-8-20) نحصل على:

$$1.5a.I=m.a^2(w_1+w)+I_G(w_1+w)$$

ومنه:

$$I=\frac{4}{3}m(1+\sqrt[4]{3})(\frac{a.g}{3})^{1/2}$$



(الشكل-8-20) متجهات علاقة تغير العزم الحركي

ثم بتطبيق علاقة معامل الارتداد على سرعتي نقطة الاصطدام C من القضيب قبل التصادم وبعده:

$$1.5a.w_1=e(1.5a.w)$$

ومنه:

$$e=\frac{w_1}{w}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=0.76$$

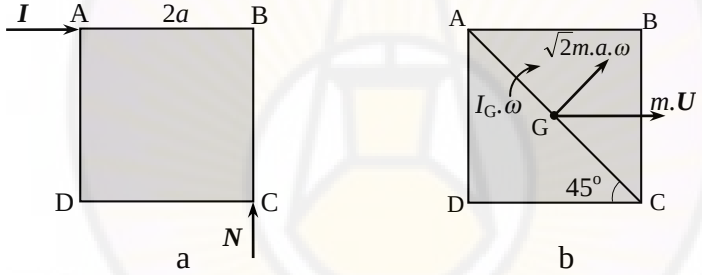
مسألة-8-13

مكعب منتظم كتلته m طول ضلعه $2a$ ، وعزم عطالته حول مركز كتلته G هو (I_G= ⅔ $m.a^2$)، موضوع على مستوى أفقي أملس. ضرب بدفع أفقي قدره $\boldsymbol{I}$ ، كما هو مبين في a من (الشكل-8-21).

المطلوب إيجاد الحركة التالية، ورد الفعل الدفعي على المستوى على فرض أنه يمر بالنقطة C .

الحل:

بعد التصادم تنزلق النقطة C أفقياً بسرعة ولتكن $\boldsymbol{U}$ ، ويدور الجسم حولها بسرعة w ، بالتالي حركة المكعب بعد الصدم هي حركة مستوية عامة، وباعتبار C قطب الحركة فنعين بها مركبات سرعة مركز الكتل G ، كما هو مبين في b من (الشكل-8-21).



(الشكل-8-21) مكعب موضوع على مستوى أفقي أملس خاضع لدفع أفقي.

بتطبيق علاقة تغير العزم الحركي بالنسبة لنقطة:

$$\boldsymbol{K_1 - K_0 = m_O(I^e)}$$

بأخذ العزوم حول C مع الاعتبار أن الحركة الابتدائية معدومة؛ نحصل على:

$$2a.I = m.U.a + \sqrt{2}m.a.w\,(\sqrt{2}a) + I_G.w$$

$$2a.I = m.U.a + 2m.a^2.w + \frac{2}{3}m.a^2.w \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}m.U + \frac{4}{3}m.a.w \quad (1)$$

وبالتحليل الأفقي لعلاقة تغير كمية الحركة للجسم؛ نحصل على:

$$I = m.U + \sqrt{2}\,m.a.w.\cos 45 = m.U + m.a.w \quad (2)$$

بحل العلاقتين (1) و(2)؛ نحصل على:

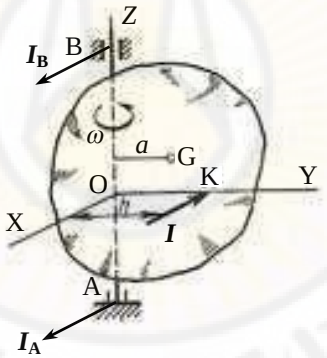
$$w = \frac{3I}{5m.a} \quad , \quad U = \frac{2I}{5m}$$

وبالتحليل الرأسي لعلاقة تغير كمية الحركة؛ نحصل على:

$$N = \sqrt{2}\, m.a.w.\sin 45 = \frac{3}{5} I$$

11- مركز الصدم *Centre of Impact*

إن ظهور ردود الأفعال الدفعية عند التصادم تؤدي إلى سرعة استهلاك أجزاء معينة من المعدات والآلات، أو إلى تلفها وتعطيلها بشكل كامل، مثل نقاط ارتكاز الأعمدة الدوارة والأعمدة الدوارة ذاتها. لهذا السبب نهدف لتحديد الشروط؛ التي لا يؤدي فيها صدم الجسم الدوار إلى نشوء ردود أفعال دفعية في المساند، والارتكازات.



(الشكل-8-22)

لهذا يجب أن يكون:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{A}} = \boldsymbol{I}_{\mathbf{B}} = 0$$

أي: أن يكون استناداً إلى العلاقتين الثانية والثالثة من (8-57)، أن:

$$I_Z = I_Y = 0$$

ولتحقيق ذلك يجب توجيه الدفع $\boldsymbol{I}^e$ عمودياً على المستوى AYZ ، أي: عمودياً على المستوى المار بمحور دوران الجسم، ومركز كتلته G ، كما هو مبين في (الشكل-8-22).

كذلك يجب أن يكون استناداً إلى العلاقتين الأخيرتين من (8-57)، أن:

$$m_{\mathrm{X}}(\boldsymbol{I}^e) = m_{\mathrm{Y}}(\boldsymbol{I}^e) = 0$$

ولتحقيق ذلك يجب أن نمرر المستوى OXY بحيث يقع فيه متجه الدفع $\boldsymbol{I}^e$ ، ويتم ذلك لأن العلاقات (8-57) لا تعتمد على اختيار مبدأ الإحداثيات على المحور OZ ، وبالتعويض في العلاقتين الأخيرتين من (8-57)، ينتج:

$$I_{\mathrm{XZ}} = I_{\mathrm{YZ}} = 0$$

هذا يعني أن المستوى OXY حيث يقع فيه متجه الدفع $\boldsymbol{I}^e$ يجب أن يمر بالنقطة O ، التي يكون عندها المحور OZ محوراً رئيسياً للعزم العطالي للجسم، ويتحقق ذلك عندما يكون المستوى OXY مستوى تناظر للجسم، بالتالي باستخدام العلاقة الأولى من العلاقات (8-57)، مع تعويض القيم الموضحة في (الشكل-8-22)؛ نحصل على:

$$M.a(w_1 - w_0) = I^e$$

ومن علاقة تغير العزم الحركي حول المحور OZ ؛ نحصل على:

$$I_{\mathrm{Z}}(w_1 - w_0) = I^e.h$$

بحذف الفرق $(w_1 - w_0)$ من العلاقتين، ينتج:

$$h = \frac{I_{\mathrm{Z}}}{M.a}$$

تعطينا هذه العلاقة المسافة h بعد نقطة تأثير الدفع الصادم $\boldsymbol{I}^e$ عن محور الدوران AB .

وعليه حتى لا تتولد ردود أفعال دفعية في المسندين A و B من محور دوران الجسم، ينبغي أن تتحقق الشروط التالية:

- ان يقع الدفع $\boldsymbol{I}^e$ في المستوى OXY العمودي على محور الدوران OZ ، وأن يكون المستوى هو مستوى تناظر في الجسم، أو يكون محور الدوران OZ محوراً أساسياً للعطالة بالنسبة لنقطة تقاطعه مع المستوى، أي: في O .

- أن يتجه الدفع الصادم $\boldsymbol{I}^e$ عمودياً على المستوى المار بمحور الدوران AB ، ومركز الكتل G .

- أن يؤثر الدفع الصادم $\boldsymbol{I}^e$ في نقطة K تبعد مسافة ($h = I_Z /M.a$) عن محور الدوران، وأن يكون OK في اتجاه OG .

تدعى النقطة K التي يمر بها الدفع الصادم $\boldsymbol{I}^e$ ، دون أن يسبب ظهور ردود أفعال صادمة في مساند تثبيت المحور بمركز الصدم.

وكمقارنة مع مركز الاهتزاز K الذي تم استنتاجه لدى دراسة النواس المركب، أنه يبعد عن مركز التعليق O مسافة:

$$OK = I_O / M.a$$

فمركز الصدم ينطبق إذاً على مركز الاهتزاز.

ولما كان مركز الاهتزاز يبعد عن مركز التعليق أكثر من بعد مركز الكتل عنه، وجب إذاً أن يكون ($h > a$)، أي أن بعد مركز الصدم K عن محور الدوران أكبر من بعد مركز الكتل G عن هذا المحور.

وإذا مر محور الدوران من مركز الكتل كان عندها ($a = 0$)، ومنه ($h = \infty$)، وفي هذه الحالة يقع مركز الصدم في اللانهاية، عندئذ كل صدمة يعانيها الجسم تنتقل إلى المساند.

لهذه النتيجة أهمية كبيرة في الحياة العملية، وذلك عند تطبيق النتائج؛ التي حصلنا عليها بالأمثلة التالية:

- عند ضرب مسمار بمطرقة ينبغي أن نمسك مقبض المطرقة في نقطة تبعد عن مركز الصدم، أي: رأس المطرقة مسافة:

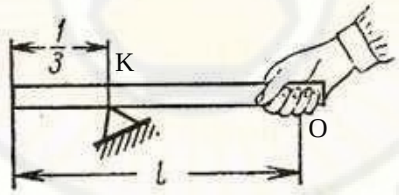
$$h = I_Z / M.a$$

حيث ترمز I_Z إلى عطالة المطرقة بالنسبة لمحور Z يمر باليد و M إلى كتلة المطرقة، و a إلى بعد مركز كتلتها عن اليد.

- فالمطرقة والحال هذه تشكل نواساً مركباً يهتز حول اليد، ومركز الصدم ينبغي أن ينطبق على مركز الاهتزاز، وبهذه المطرقة تشعر اليد برد فعل ناتج عن الصدم لعدم نشوء دفع على المحور أي اليد.

- عند ضرب قضيب مستقيم على وتد (الشكل-8-23) تشعر اليد بصدمة رد الفعل، ولزوال هذا الدفع ينبغي صدم القضيب بالوتد في نقطة K تبعد عن اليد الممسكة بطرف القضيب مسافة:

$$h = I_O / M.a$$



(الشكل-8-23) ضرب قضيب مستقيم على وتد.

فإذا كان l طول القضيب المتجانس كان ($a = l/2$) و($I_O = M.l^2/3$)، وبالتعويض يكون:

$$h = 2\,l/3$$

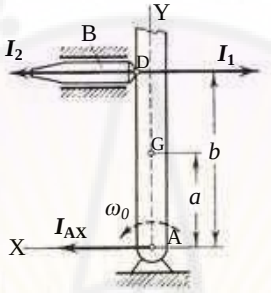
أي: ينبغي أن يتم الاصطدام في النقطة K التي تبعد مسافة ($h = 2l/3$) عن اليد الممسكة بطرف القضيب، أو مسافة $l/3$ عن الطرف الآخر للقضيب.

مسألة-8-14

زناد AD كتلته M قابل للدوران تكون له في بداية اصطدامه بإبرة الطرق B (*Strainer Pin*) وكتلتها m ، سرعة زاوية ω كما مبين في (الشكل-8-24).

المطلوب تعيين سرعة إبرة الطرق في نهاية الصدمة، والضغط الدفعي على المحور A .

الحل:



(الشكل-8-24) زناد AD قابل للدوران يصطدم بإبرة الطرق B .

لتعيين سرعة إبرة الطرق في نهاية الصدمة نطبق العلاقة (8-27)، التي تحدد معامل الارتداد عند التصادم المباشر لجسمين، فيكون:

$$U_1 - U_2 = -e(V_1 - V_2) \;\Rightarrow\; U_D - U_B = -e(V_D - V_B)$$

حيث النقطة D من نقط الزناد الذي يتحرك حركة دورانية حول A ، تكون سرعتها في بداية الصدمة:

$$V_D = w_0 . b$$

وسرعتها في نهاية الصدمة:

$$U_D = w_1 . b$$

و B إبرة الطرق، تكون سرعتها في بداية الصدمة:

$$V_B = 0$$

وسرعتها في نهاية الصدمة تحسب من العلاقة (8-4):

$$m.U_B = I_2$$

حيث $\boldsymbol{I_2}$ و $\boldsymbol{I_1}$ الدفعان الصادمان المؤثران على كل من الإبرة والزناد، وقيمته للزناد تحسب وفق العلاقة (8-56):

$$(w_1 - w_0) I_A = -I_1 . b$$

الإشارة السالبة ناتجة من أن اتجاه دوران العزم بعكس اتجاه دوران الزناد.

باعتبار:

$$I_2 = I_1 = I$$

والتعويض في علاقة معامل الارتدادP نحصل على:

$$w_1 . b - U_B = -e . w_0 . b$$

وبالتعويض هنا بقيمتي ω_1 بدلالة الدفع I نعين سرعة الإبرة في نهاية الصدمة:

$$U_B = \frac{I_A . b(1+e)}{I_A + m . b^2} w_0$$

لتعيين رد الفعل الدفعي I_A المؤثر من ناحية المحور على الزناد، نطبق العلاقة (8-4) على الزناد:

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \sum \boldsymbol{I}$$

وبإسقاط طرفيها، على المحور AY :

$$Q_{1Y} - Q_{0Y} = I_{AY}$$

حيث:

$$Q_{1Y} = Q_{0Y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_{AY} = 0$$

وعلى المحور AX :

$$Q_{1X} - Q_{0X} = -I + I_{AX}$$

حيث:

$$Q_{1X} = M . U_{GX} = M . w_1 . a \qquad , \qquad Q_{0X} = M . V_{GX} = M . w_0 . a$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$M . a (w_1 - w_0) = -I + I_{AX}$$

ولكن لدينا من العلاقات السابقة أن:

$$I = m.U_{\mathrm{B}} \qquad , \qquad (w_{1} - w_{0}) = -\frac{m.b}{I_{\mathrm{A}}} U_{\mathrm{B}}$$

وبالتعويض بهاتين القيمتين في العلاقة السابقة، ومع التعويض بقيمة U_B الناتجة؛ نحصل أخيراً على:

$$I_{\mathrm{AX}} = \frac{I_{\mathrm{A}} - M.a.b}{I_{\mathrm{A}} + m.b^{2}} m.b(1+e)w_{0}$$

يتضح من هنا أن المقدار:

$(I_{\mathrm{A}} = 0)$ عندما يكون $(b = I_{\mathrm{A}} / M.a)$، أي: عندما تكون النقطة D هي مركز الصدمة.

$(I_{\mathrm{AX}} > 0)$ عندما يكون $(M.a.b < I_{\mathrm{A}})$، أي: أن الضغط الدفعي على الزناد يتجه يساراً، والضغط على المحور يتجه يميناً.

وعندما يكون $(M.a.b > I_{\mathrm{A}})$، يتجه الضغط على المحور يساراً.

* * *

مسائل غير محلولة *PROBLEMS*

م-8-1

تقع كرة بليارد في منتصف الضلع الصغير لطاولة البليارد (*Billiard*)، ويراد من هذه الكرة أن تصطدم أولاً بالضلع المجاور الذي طوله يساوي b ، ثم بعدها بمنصف الضلع المقابل الذي قذفت منه، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-1).

إذا كان معامل الارتداد e . المطلوب تعيين x بعد النقطة التي تصطدم فيها من الضلع المجاور عن الضلع الذي كانت عليه.

الجواب: $x = b.e/(1+e)$



a b

(الشكل م-8-1)

م-8-2

تسقط كرة كتلتها ($m = 1$ kg) على مستوى أفقي ثابت بسرعة ($V = 10$ m/sec)، تميل بزاوية ($\alpha = 30^o$) على الشاقول، كما هو مبين في b من (الشكل-8-1).

إذا كان معامل الارتداد ($e = 0.7$). المطلوب تعيين:

1. سرعة ارتداد الكرة U عن المستوى، والزاوية β التي تصنعها مع الشاقول.
2. الخسارة في الطاقة الحركية ΔE_c .

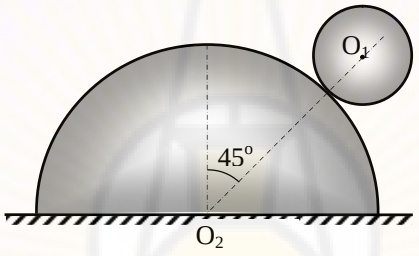
الجواب: $U = 7.858\,\text{m/sec}$, $b = 39.5^o$, $\Delta E_c = 19.13\,\text{N.m}$

م-8-3

تسقط كرة كتلتها m على نصف كرة ملساء ساكنة كتلتها M تستند بسطحها المستوي على مستوي أفقي أملس، وفي لحظة الاصطدام يصنع خط المركزين $O_1\ O_2$ زاوية ($\alpha = 45^o$) مع الشاقول، كما هو مبين في (الشكل م-8-2).

إذا كانت سرعة نصف الكرة بعد الاصطدام تساوي سرعة الكرة m قبل الاصطدام. المطلوب تعيين e معامل الارتداد.

الجواب: $e = 2M / m$



(الشكل م-8-2)

م-8-4

تقف عربة A كتلتها ($M_A = 300\ kg$) على سكة حديدية، وتتحرك نحوها عربة أخرى B كتلتها ($M_B = 150\ kg$)، وبعد التصادم تتحرك العربتان معاً. المطلوب إيجاد:

1. سرعة العربتين U' التي تتحركان بها بعد التصادم.
2. سرعة كل من العربتين بعد التصادم U_A و U_B ، إذا كان التصادم تام المرونة.

الجواب: $U' = 1/3\ \mathrm{m/sec}\ ,\ U_A = -1/3\ \mathrm{m/sec}\ ,\ U_B = 2/3\ \mathrm{m/sec}$

م-8-5

يتحرك جسم A كتلته ($M_A = 20$ kg) بسرعة ($V_A = 0.5$ m/sec)، فيصطدم بجسم آخر ساكن B كتلته ($M_B = 35$ kg) تصادماً مركزياً مباشراً.

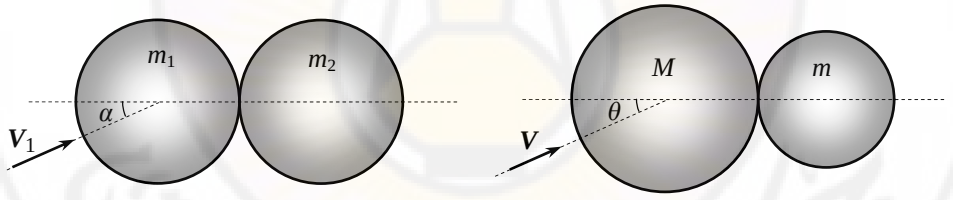
إذا تحرك الجسم B بعد التصادم بسرعة ($U_B = 0.3$ m/sec). المطلوب تعيين معامل الارتداد e .

الجواب: $e = 0.65$

م-8-6

كرة ملساء كتلتها m_1 تسير بسرعة V_1 تميل عن الأفق زاوية α . صدمت كرة أخرى ساكنة كتلتها m_2 ، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-3).

إذا كان اتجاها حركتهما بعد التصادم مباشرة متعامدين، وكان التصادم تام المرونة. المطلوب أثبت أن الكتلتين متساويتان.



a b

(الشكل م-8-3)

م-8-7

كرة ملساء كتلتها m ساكنة فوق سطح أفقي أملس صدمتها كرة أخرى كتلتها M تسير بسرعة V ، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-3).

إذا اندفعت الكرة m أثر التصادم في اتجاه يميل بزاوية θ على الاتجاه الأصلي لحركة الكرة M ، وكان التصادم تام المرونة. المطلوب تعيين السرعة V_1 للكتلة m .

الجواب: $V_1 = 2M.V.\cos q\,/(M+m)$

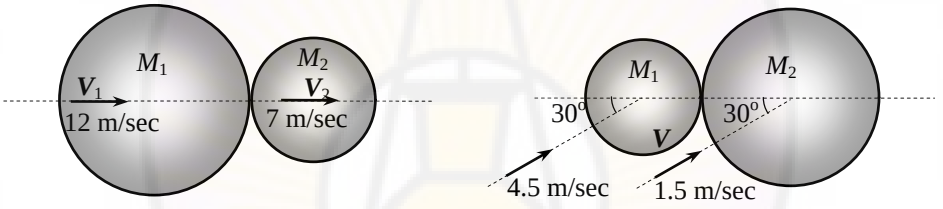
م-8-8

كرة ملساء كتلتها ($M_1 = 12$ kg) تتحرك نحو الشرق بسرعة ($V_1 = 12$ m/sec)، وتصطدم بكرة كتلتها ($M_2 = 8$ kg) تتحرك نحو الشرق أيضاً بسرعة ($V_2 = 7$ m/sec)، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-4).

إذا كان معامل الارتداد ($e = 0.8$). المطلوب إيجاد:

1. السرعة التي تكتسبها الكرتان V لحظة التصادم.
2. سرعة الكرتين بعد الاصطدام U_1 , U_2 .

الجواب: $V = 7.858\,\text{m/sec}$, $U_1 = 3.6\,\text{m/sec}$, $U_2 = 7.6\,\text{m/sec}$



(الشكل م-8-4)

م-8-9

كرة ملساء كتلتها (m_1=5 kg) تسير بسرعة (V_1=15 m/sec)، صدمت كرة أخرى ملساء كتلتها (m_2=10 kg) تسير بسرعة موازية للأولى مقدارها (V_2=5 m/sec)، بحيث كان اتجاه حركتهما قبل التصادم يميل بزاوية ($\alpha = 30^o$) مع خط مركزيهما، كما هو مبين في b من (الشكل-8-4).

إذا كان معامل الارتداد ($e = 0.5$). المطلوب تعيين سرعة كل من الكرتين U_1 , U_2 بعد الاصطدام مباشرةً.

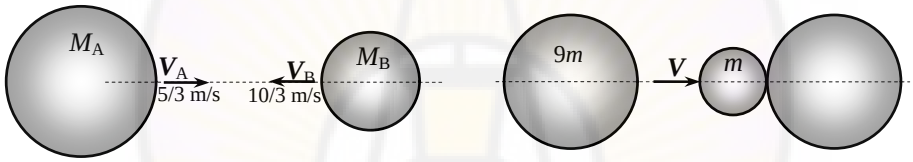
الجواب: $U_1 = 4.5\sqrt{3}\,\text{m/sec}$, $U_2 = 2.25\sqrt{13}\,\text{m/sec}$

م-8-10

تتحرك الكرة A وكتلتها ($M_A = 5$ kg) بسرعة ($V_A = 5/3$ m/sec)، والكرة B وكتلتها ($M_B = 3$ kg) بسرعة ($V_B = 10/3$ m/sec)، باتجاهين متعاكسين على المحور الأفقي X ، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-5).

إذا ارتدت الكرة A بعد التصادم مع الكرة B بسرعة ($U_A = 5/3$ m/sec). المطلوب إيجاد السرعة U_B للكرة B بعد التصادم.

الجواب: $(U_B = 20/9\ \text{m/sec})$



a b

(الشكل م-8-5)

م-8-11

كرتان صقيلتان متساويتان كتلة الواحدة $9m$ ساكنتان فوق نضد أفقي أملس. كرة أخرى كتلتها m تتحرك بينهما وعلى خط مركزيهما، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-5).

إذا كانت التصادمات التي ستحدث تامة المرونة، المطلوب تعيين عددها.

الجواب: ثلاث مرات

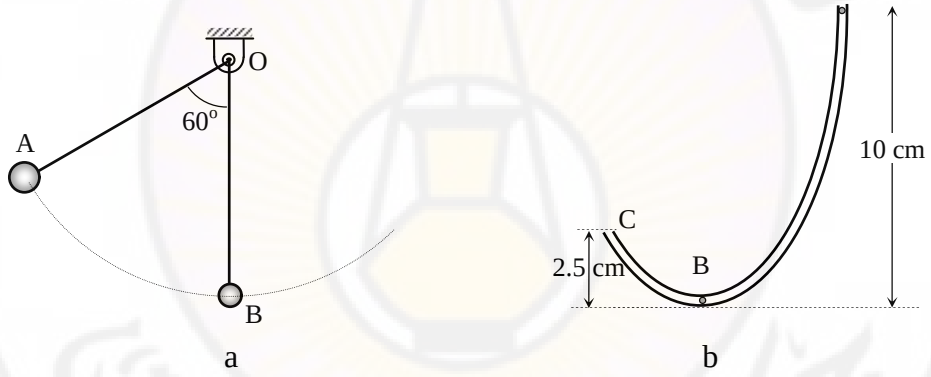
م-8-12

تعلق كرتان فولاذيتان صغيرتان مصقولتان كتلتهما (m_1 =1 kg) و (m_2 =0.5 kg) بخيطين دقيقين طول كل منها 60 cm ، معلقتين في نقطة O بحيث تمس إحداهما الأخرى عندما تكونان في وضعي توازنهما، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-6).

إذا أزيحت الكتلة m_1 عن وضع اتزانها الى الوراء زاوية 60^o ثم تترك وشأنها. المطلوب إيجاد في كل من حالتي الاصطدام التام المرونة (e = 1)، والاصطدام العديم المرونة (e = 0)، الطاقة الحركية المفقودة ΔE_c ،وأقصى شد T_1 , T_2 في كل من الخيطين.

الجواب: $e=1 \Rightarrow \quad \cos b = 1/9 \quad , \quad \Delta E_c = 0 \quad , \quad T_1 = 19.62 \text{ N} \quad , \quad T_2 = 13{,}62 \text{ N}$

$e=0 \Rightarrow \quad \cos b = 7/9 \quad , \quad \Delta E_c = 2/3 \text{ N.m} \quad , \quad T_1 = 19.62 \text{ N} \quad , \quad T_2 = 7.08 \text{ N}$



(الشكل م-8-6)

م-8-13

أنبوب دقيق أملس على شكل منحنٍ ABC يقع في مستوى رأسي. تركت الكتلة M وشأنها من أعلى نقطة لتنزلق داخل الأنبوب، فصدمت كتلة m مقدارها 0.450 gr في أوطأ نقطة من الأنبوب، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-6).

المطلوب إيجاد في حالة ما يكون معامل الارتداد (e =0) و (e =0)، أصغر قيمة للكتلة M تكفي لإخراج الكتلة الأخرى m من الفوهة C .

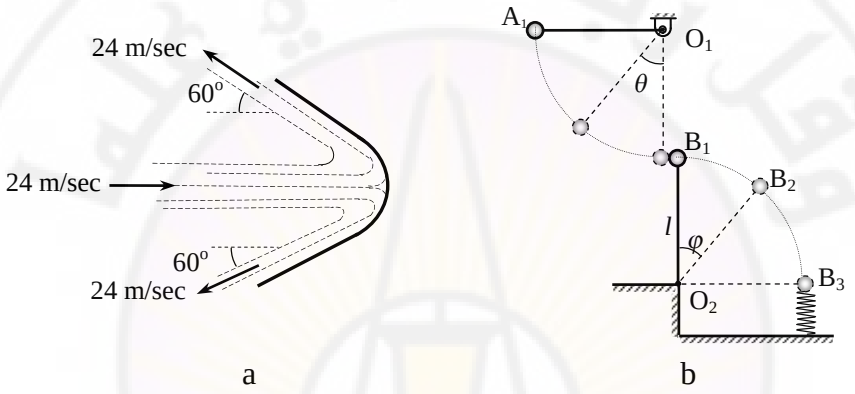
الجواب: $e=0 \quad \Rightarrow \quad M = 0.5 \text{ kg} \quad , \quad e=0.5 \quad \Rightarrow \quad M = 0.25 \text{ kg}$

م-8-14

تسلط نافورة المياه على اللوح المنحني الثابت حيث كانت سرعة الاصطدام والانعكاس تساوي ($V = 24$ m/sec)، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-7).

إذا كانت كمية المياه المصطدمة باللوح هي 0.0675 m^3/sec ، وأن وزن المتر المكعب من المياه هو 9810 N . المطلوب إيجاد ضغط النافورة N على اللوح.

الجواب: $N = 2430$ N



(الشكل م-8-7)

م-8-15

ترك نواس بسيط وشأنه من الوضع الأفقي O_1A_1 ، وعندما صار رأسياً صدمت كرته وكتلتها ($m_1 = 0.5$ kg) كرة نواس آخر رأسي O_2B_2 كتلته ($m_2 = 1$ kg)، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-7).

إذا كان الاصطدام تام المرونة. المطلوب إيجاد الآتي:

1. قيمة الزاوية φ في الوضع O_2B_2 الذي تتغير عندها القوة في النواس O_2B_2 من الضغط إلى الشد.
2. قيمة الزاوية θ التي تحدد الارتداد الكلي للنواس O_1A_1 ، بعد اصطدامه بكرة النواس O_2B_2 .
3. أقصى انضغاط يحدث في النابض B_3 ، إذا كان عامل مرونته 1200 N/m ، نتيجة التصادم.

الجواب: $j = 16^o15'$, $q = 27^o13'$, $\Delta l = 9.3$ cm

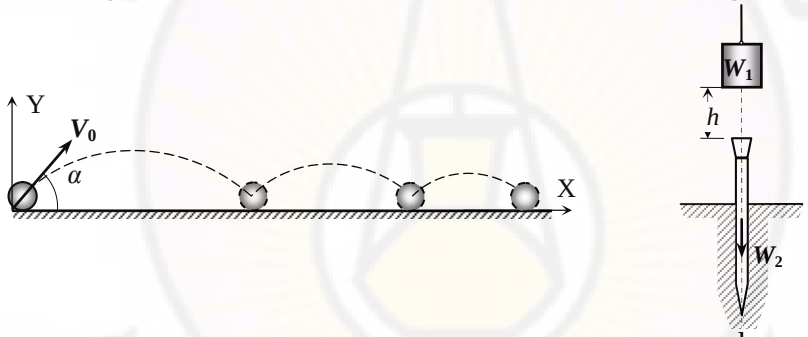
م-8-16

قذف جسيم من نقطة على مستوى أفقي أملس بسرعة V_0 تميل بزاوية α على المستوى الأفقي، بعد القذف بدأ الجسيم يصطدم بالمستوى ثم يرتد، وهكذا، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-8).

إذا كان e معامل الارتداد. المطلوب إيجاد الآتي:

1. مدى المقذوف B على التعاقب.
2. المسافة الأفقية الكلية التي يقطعها الجسيم ΣB .
3. الزمن الكلي t لحركة الجسيم.

الجواب: $B=\frac{V_0^2.\sin 2a}{g}$, $e.B$, $e^2.B$ .... , $\Sigma B=\frac{B}{(1-e)}$, $t=\frac{2V_0.\sin a}{g(1-e)}$



a b

(الشكل م-8-8)

م-8-17

يغرس وتد خشبي كتلته (W_2 = 400 kg) في أساس بناء بضربات متتالية من مطرقة آلية وزنها (W_1=15000 N)، تسقط على رأسه من ارتفاع قدره (h=2 m)، ليلج في الأرض بفعل الضربة الواحدة مسافة (δ = 4 cm)، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-8).

فإذا كان التصادم بين المطرقة والوتد لدناً. المطلوب إيجاد مقاومة التربة لدخول الوتد الكلية R ، بفرض أنها ثابتة، وعين مردود المطرقة η .

الجواب: $R=611100\,N$, $h=79\%$

م-8-18

أعد المسألة السابقة باستخدام المعطيات التالية:

$W_1 = 1000\ \text{kg}$ و $W_2 = 500\ \text{kg}$ و $h = 3\ \text{m}$

وأن التصادم مرن عادي ($e = 0.25$) ومقاومة الاختراق منتظمة ($R = 30000\ \text{N}$).

المطلوب إيجاد عدد ضربات المطرقة حتى يخترق الوتد التربة بمسافة ($y = 30\ \text{cm}$).

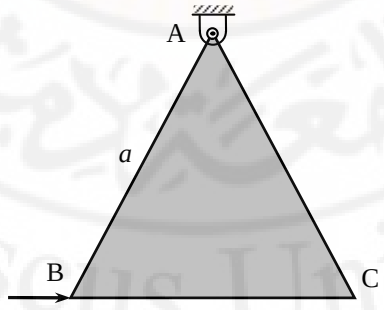
الجواب: $n = 8.82$

م-8-19

لوح على شكل مثلث متساوي الأضلاع ABC كتلته m وضلعه a ، واللوح قابل للدوران حول محور أفقي متعامد على مستواه ومار بالرأس A ، كما هو مبين في (الشكل م-8-9).

إذا كان اللوح ساكناً في وضع اتزانه المستقر، ثم ضرب في B بدفع $\boldsymbol{I}$ في اتجاه BC ، المطلوب إيجاد الحركة الناشئة ورد الفعل الدفعي على المحور.

الجواب: $w = 6I/5\sqrt{3}\ m.a$ ، $R_{IX} = I/5$ ، $R_{IY} = 0$

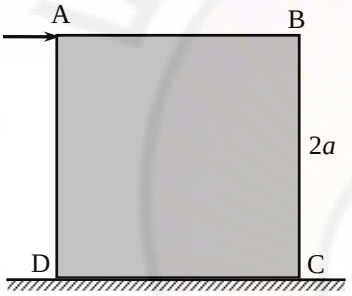


(الشكل-8-9)

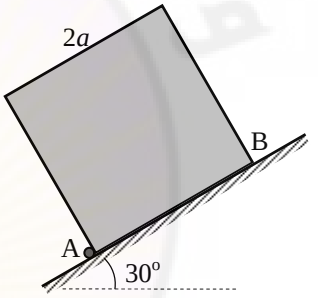
م-8-20

لوح مربع ABCD كتلته m وضلعه $2a$ موضوع أفقياً على نضد أفقي أملس. إذا سحب رأسه A فجأة بسرعة V في اتجاه الضلع BA ، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-10). المطلوب ايجاد السرعة الزاوية ω الناتجة لحركة اللوح.

الجواب: $w = 3V/8a$



2-222-a



b-6-224

(الشكل م-8-10)

م-8-21

مكعب ABCD ضلعه 10 cm ينزلق بتأثير وزنه على مستوى مائل أملس ميله ($\alpha = 30^o$) على الأفقي. اصطدم المكعب في منتصف ضلعه الأمامي الأسفل بوتد ثابت صدمة كانت كافية لقلبه، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-10).

المطلوب تعيين المسافة s التي انزلقها المكعب قبل الصدمة.

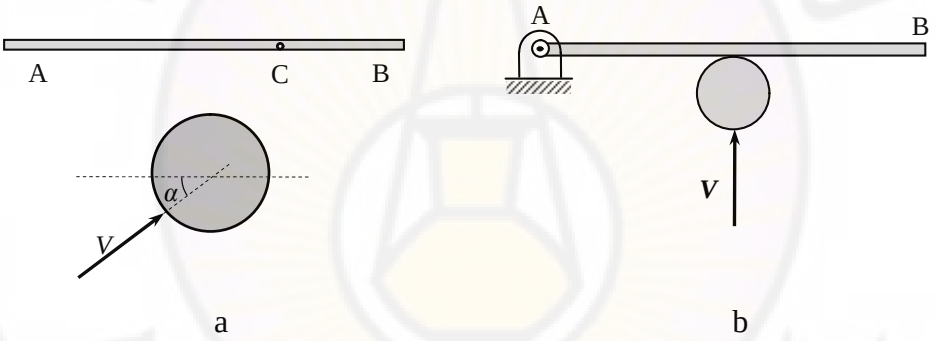
الجواب: $s = 40(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)/3 \text{ cm}$

م-8-22

كرة كتلتها m وقضيب AB كتلته $2m$ وطوله ($l = 60$ cm) موضوعان على نضد أفقي أملس. دفعت الكرة بسرعة ($V = 5$ m/sec) تصنع زاوية مع القضيب قدرها ($\tan\alpha = ¾$)، فصدمته في نقطة C تبعد ($AC = 40$ cm) عن طرفه A ، كما هو مبين في a من (الشكل م-8-11).

إذا كان التصادم أملس وتام المرونة، المطلوب إيجاد الحركة التالية للتصادم مباشرةً.

الجواب: $V_G = 1.3\,\text{m/sec}$, $w = 0.6\,\text{rad/sec}$, $V = 6\,\text{m/sec}$



(الشكل م-8-12)

م-8-23

بوابة AB عرضها l تدور حول محور رأسي مار من A ، ولما كانت في وضع ساكن صدمتها في منتصفها كرة كتلتها m وسرعتها V عمودية على البوابة، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-11).

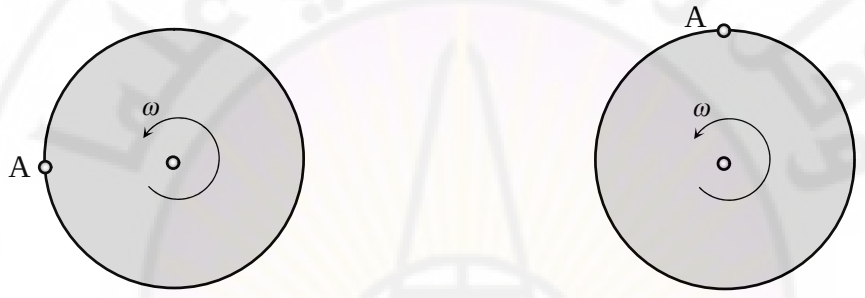
إذا كان عزم عطالة البوابة حول محورها ($I_A = m \cdot l^2/8$)، ومعامل الارتداد يساوي 0.5 . المطلوب إيجاد سرعة الكرة V ، والسرعة الزاوية ω للبوابة بعد التصادم.

الجواب: $U = 0.5V$, $w = 2V/l$

م-8-24

يدور قرص كتلته m موضوع على نضد أفقي أملس حول مركزه بسرعة زاوية ω ، إذا ثبتت نقطة A من محيطه فجأة. المطلوب إيجاد السرعة الزاوية الجديدة ω' حول نقطة التثبيت.

الجواب: $w' = w/3$



a b

(الشكل م-8-13)

م-8-25

قرص دائري منتظم كتلته M نصف قطر a . يتدحرج دون انزلاق على مستوى أفقي أملس، وعندما كان مركزه يتحرك بسرعة V ثبتت فجأةً أعلى نقطة فيه، كما هو مبين في b من (الشكل م-8-13).

المطلوب تعيين قيمة السرعة V اللازمة حتى يتم القرص دورة كاملة حول نقطة التثبيت.

الجواب: $V > 24\,a.g$

الفصل التاسع

التوازن التحريكي *Dynamic Equilibrium*

1- مقدمة *Introduction*

تعتمد كل طرق حل مسائل التحريك التي درسناها حتى الآن في أساسها على معادلات مستنبطة بصورة مباشرة من قوانين نيوتن، أو من المبادئ العامة في التحريك التي تعدّ نتاجاً لهذه القوانين، غير أن هذه الطريقة ليست الوحيدة، فقد اتضح أنه يمكن الحصول على معادلات حركة، أو شروط اتزان الجملة الميكانيكية؛ انطلاقاً من أسس وعلاقات أخرى غير قوانين نيوتن تسمى بمبادئ الميكانيك، ويكفل تطبيق هذه المبادئ في حالات كثيرة إيجاد طرق أكثر فاعلية لحل المسائل المناظرة، وسنتناول في هذا الفصل أحد مبادئ الميكانيك، وهو مبدأ التوازن التحريكي، أو مبدأ دالمبير (*D'Alembert's Principle*)، الذي وضعه العالم الرياضي الفرنسي جان لو روند دالمبير (*Jean le Rond D'Alembert*) (1717-1783)، الذي اقترح مبدأه الشهير في كتابه مبادئ الميكانيك المنشور سنة 1743 ؛ الذي يسمح بمعالجة مسائل التحريك بطرق التوازن.

2- التوازن التحريكي لجسيم مادي *Dynamic Equilibrium of a Particle*

نعدّ جسيماً مادياً M_k كتلته m_k يتحرك على منحنٍ ثابت، أو سطح تحت تأثير مجموعة من القوى الفاعلة محصلتها $\sum \boldsymbol{F}_k^a$ ، ويؤثر عليه القيد بقوة رد الفعل $\boldsymbol{N_k}$ ، فيكتسب تسارع $\boldsymbol{A_k}$ وفق العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد:

$$m_k.\boldsymbol{A_k} = \sum \boldsymbol{F}_k^a + \boldsymbol{N}_k$$

يمكن اعتبار الجسيم المادي بمثابة جسيم حر يخضع للقوتين المفروضتين $\sum \boldsymbol{F}_k^a$ و $\boldsymbol{N_k}$ ، ولتكن محصلتهما $\boldsymbol{R_k}$:

$$\boldsymbol{R_k} = \sum \boldsymbol{F}_k^a + \boldsymbol{N}_k$$

لنطبق على الجسيم قوة جديدة وهمية $\boldsymbol{F}_k^{in}$ ، حيث:

$$\boldsymbol{F}_k^{in} = -\boldsymbol{R}_k$$

فإذا خضع الجسيم المادي لتأثير القوى $\boldsymbol{F}_k^{in}, \sum \boldsymbol{F}_k^{a}, \boldsymbol{N}_k$ اتزن هذا الجسيم وفق العلاقة:

$$\boldsymbol{F}_k^{in} + \boldsymbol{N}_k + \sum \boldsymbol{F}_k^{a} = 0 \qquad (1\text{-}9)$$

بالعودة إلى العلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المقيد؛ نحصل على:

$$\boldsymbol{F}_k^{in} = -m_k.\boldsymbol{A}_k \qquad (2\text{-}9)$$

تدعى $\boldsymbol{F}_k^{in}$ بـــ قوة دالمبير للعطالة، أو بتعبير آخر بـــ قوة العطالة (*Inertia Force*)، أو بـــ القوة الفعالة المعاكسة المطبقة على الجسيم المادي، وهي كمية شعاعيه قيمتها العددية تساوي حاصل ضرب كتلة الجسيم بتسارعه الخطي، وتتجه في اتجاه معاكس لهذا التسارع، وبالتعريف هي القوة التي تقيس المقاومة؛ التي يبديها الجسيم المادي عندما نحاول تحريكه إذا كان ساكناً، أو يغير شروط حركته إن كان متحركاً.

تؤثر قوى العطالة والقوى الفاعلة كقوى الثقالة في حواسنا بنفس الطريقة، ولا يمكن تمييزها بالقياسات الفيزيائية، فالشخص الموجود داخل مصعد يرتفع متسارعاً سيشعر كما لو أن وزنه قد ازداد فجأة، ولا يمكن إجراء قياسات داخل المصعد لمعرفة فيما إذا المصعد قد تسارع فعلاً، أو أن قوى الجاذبية الأرضية قد ازدادت فجأةً.

تعرف العلاقة (1-9) بـــ علاقة دالمبير في توازن الجسيم المادي، ويؤدي هذا إلى المبدأ التالي الذي يعرف بـــ مبدأ دالمبير، وينص على ما يلي:

إذا أضفنا في كل لحظة t من لحظات الحركة للقوى الفاعلة $\sum \boldsymbol{F}_k^{a}$ ، وقوى القيد $\boldsymbol{N}_k$ قوة عطالة الجسيم $\boldsymbol{F}_k^{in}$ ، كانت جملة القوى الناتجة متزنة في هذه اللحظة، ويتزن الجسيم الخاضع لهذه القوى اتزاناً تحريكياً.

في الواقع لا يعطي مبدأ دالمبير قانوناً جديداً في علم التحريك بل هو طريقة جديدة للتعبير عن القانون الأساسي بعلم التحريك وذلك بإدخال مفهوم قوة العطالة.

إذاً يساعد مبدأ دالمبير في تحويل مسائل التحريك إلى مسائل توازن، عندئذ يمكن حل المسألة المعتبرة باستخدام طرق الحل المتوافرة في علم السكون.

عند تطبيق مبدأ دالمبير ينبغي أن لا يغيب عن أذهاننا أن الجسيم المدروس خاضع فقط للقوى الفاعلة، وقوى القيد، وهو جسيم متحرك وليس ساكناً، ولا يخضع الجسيم المتحرك لقوة العطالة، وإنما وجدت هذه القوة فقط لتحويل العلاقة الأساسية للتحريك إلى علاقة توازن، ويتم ذلك إذا انتخبنا ثلاثية متحركة $M\tau nb$ مقيدة بالجسيم المادي M_k عندها يكون الجسيم ساكناً بدلالة الثلاثية المقيدة به.

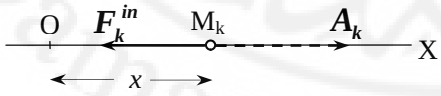
وحتى يتم اتزان الجسيم المادي بدلالة الثلاثية المقيدة به، ينبغي أن نضيف للقوى الفاعلة وقوى القيد المؤثرة على الجسيم المادي قوة العطالة، ولتعيين قوة العطالة ينبغي معرفة تسارع الجسيم المادي في حركته بدلالة الجملة الساكنة.

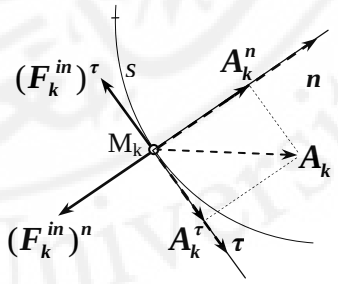
فإذا كانت حركة الجسيم المادي M_k بدلالة الجملة الساكنة حركة مستقيمة، كان منحى التسارع معلوماً ويكون عندها منحى $\boldsymbol{F}_k^{in}$ معلوماً أيضاً، كما هو مبين في a من (الشكل-9-1).

أما إذا كانت حركة الجسيم المادي M_k المقيد بدلالة الجملة الساكنة حركة منحنية مستوية، وأسقطنا التسارع على المماس، والناظم الأساسي للمسار المنحني كما هو مبين في b من (الشكل-9-1)، كان:

$$(\boldsymbol{F}_k^{in})^n = -m_k . \boldsymbol{A}_k^n = -m_k \frac{V_k^2}{r_k} \boldsymbol{n} \qquad (3\text{-}9)$$

$$(\boldsymbol{F}_k^{in})^\tau = -m_k . \boldsymbol{A}_k^\tau = -m_k \frac{dV_k}{dt} \boldsymbol{\tau}$$





a - حركة جسيم حركة مستقيمة. b - حركة جسيم حركة منحنية.

(الشكل-9-1)

حيث المركبة المماسية تمثل المقاومة التي يبديها الجسيم المادي لتغير سرعته، بينما المركبة الناظمية، وتسمى بـــ القوة الطاردة المركزية (*Centrifuge Force*) أو بـــ القوة النابذة، فإنها تمثل ميل الجسيم المادي لترك مساره المنحني.

إن إحدى هاتين المركبتين يمكن أن تساوي الصفر، وذلك تحت شروط معينة:

- إذا ابتدأ الجسيم المادي الحركة من السكون حيث سرعته الابتدائية معدومة، في هذه الحالة المركبة الناظمية معدومة.
- إذا تحرك الجسيم المادي بسرعة ثابتة على طول مساره، تكون المركبة المماسية معدومة، ولا يبقى سوى المركبة الناظمية.

يستفاد من مبدأ دالامبير في حساب ردود فعل القيد بالتالي تسارع الجسيم المتحرك، كذلك يساعد في حل مسائل تحريك الجسيم من النوع الأول، حيث يكون المطلوب تعين القوى المؤثرة على الجسيم المتحرك إذا علم تسارعه، كما يستفاد منه في حل مسائل الجسيم الحر، وفائدته ستكون عظمى عند دراسة تحريك الجملة الميكانيكية.

إن اهتمامنا الرئيسي في هذا الفصل ليس التفسير الفلسفي لمبادئ فيزيائية، وإنما لتطبيق هذه المبادئ على حلول المسائل الهندسية، من وجهة النظر هذه؛ فإنه لا يوجد فرق كبير إن استعملنا العلاقة الأساسية للتحريك، أو علاقة التوازن التحريكي للجسيم للتعبير عن شروط حركة الجسيم المادي.

مسألة-9-1- (الفصل الأول-2009-2010)

يستند جسيم كتلته m على جدار شاقولي عند A ، ويرتبط بطرف حبل غير مرن طوله l ، طرفه الآخر مثبت بالمسند O ، كما هو مبين في a من (الشكل-9-2).

يترك الجسيم وشأنه ليتأرجح في مستوى شاقولي تحت تأثير ثقله. المطلوب إيجاد:

1. القيمة العظمى لقوة الشد المؤثرة على الحبل.
2. الموضع الذي ينقطع عنده الحبل إذا تم تبديل الجسيم بجسيم آخر كتلته ($M = 2m$)، علماً أن الحبل يتحمل قوة شد قدرها مرة ونصف من قوة الشد العظمى.

الحل:

1. لإيجاد القيمة العظمى لقوة الشد نحدد علاقتها من تطبيق علاقة التوازن التحريكي على الجسيم عند الوضع العام B المحدد بالزاوية θ ، كما هو مبين في b من (الشكل-9-2).

$$\boldsymbol{F}_{\theta}^{in} + \boldsymbol{T}_{\theta} + \boldsymbol{W} = 0$$



a b

(الشكل-9-2)

حيث $\boldsymbol{F}_{\theta}^{in}$ هي قوة العطالة التي تنتج من حركة الجملة المقيدة بالجسيم بدلالة الجملة الساكنة، وتساوي:

$$\boldsymbol{F}_{\theta}^{in} = -m.\boldsymbol{A}_{\theta} = -m.\boldsymbol{A}_{\theta}^{\tau} - m.\boldsymbol{A}_{\theta}^{n} = (\boldsymbol{F}_{\theta}^{in})^{\tau} + (\boldsymbol{F}_{\theta}^{in})^{n}$$

وتصبح علاقة التوازن:

$$(\boldsymbol{F}_{\theta}^{in})^{\tau} + (\boldsymbol{F}_{\theta}^{in})^{n} + \boldsymbol{T}_{\theta} + \boldsymbol{W} = 0$$

وبإسقاط علاقة التوازن على الناظم في B وفق المخطط b من (الشكل-9-2):

$$T_q - W.\sin q - (F_q^{in})^n = 0$$

ومنه علاقة قوة الشد بدلالة سرعة الجسيم V_θ :

$$T_q = m.g.\sin q + m.A_q^n = m.g.\sin q + m\,\frac{V_q^2}{l}$$

ولإيجاد علاقة سرعة الجسيم V_θ نسقط علاقة التوازن على المماس في B :

$$W.\cos q - (F_q^{in})^t = 0$$

منه:

$$m.A_q^t = m.g.\cos q \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_q}{dt} = g.\cos q$$

تكتب بالشكل:

$$\frac{dV_q}{ds_q}.\frac{ds_q}{dt} = g.\cos q \quad \Rightarrow V_q.dV_q = g.\cos q.d(l.q) = g.l.\cos q.dq$$

بالتكامل:

$$\int_{V_A=0}^{V_q} dV_q = g.l\int_{q_0=0}^{q} \cos q.dq \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}V_q^2 = g.l.\sin q$$

منه نحصل على:

$$V_q^2 = 2g.l.\sin q$$

علاقة سرعة الجسيم التي يمكن الحصول عليها بتطبيق علاقة مبدأ العمل والطاقة على الجسيم من الوضع الابتدائي الساكن إلى الوضع العام.

بالتعويض في علاقة قوة الشد بدلالة سرعة الجسيم V_θ :

$$T_q = 3m.g.\sin q$$

نحصل على علاقة قوة الشد، ويكون أعظمياً عندما:

$$\sin q = 1 \quad \Rightarrow \quad q = 90^o$$

وقيمته:

$$T_{q=90^o} = T_{\max} = 3m.g$$

2. يلاحظ من علاقة السرعة أن سرعة الجسيم لا علاقة لها بكتلة المتحرك، بعكس علاقة قوة الشد فإنها تتغير، ففي حالة الجسيم الجديد:

$$T_{q^*} = 3M.g.\sin q^*$$

حيث:

$$T_{q^*} = 1.5T_{\max} = 4.5\ m.g$$

بالتعويض في علاقة قوة الشد، نحصل على الموضع الذي ينقطع عنده الحبل:

$$4.5m.g = 6m.g.\sin q^* \quad \Rightarrow \quad \sin q^* = 0.75 \quad \Rightarrow \quad q^* = 48.6^o$$

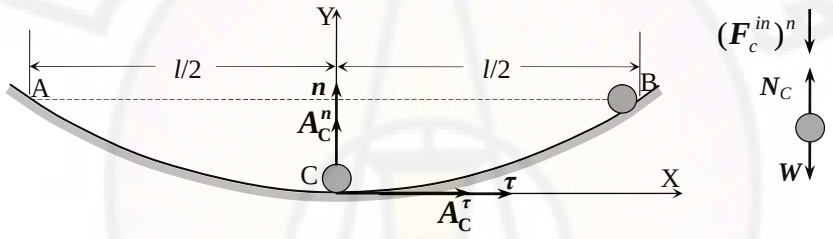
مسألة-9-2- (الفصل الثاني-2003-2004)

تبدأ كرة صغيرة وزنها $\boldsymbol{W}$ من السكون من الموضع A بالحركة على منحني أملس ACB كما هو مبين في a من (الشكل-9-3)، معادلته:

$$y = \frac{4\,a}{l^2}\,x^2$$

حيث a ثابت التناسب. المطلوب تعيين رد الفعل $\boldsymbol{N}$ المؤثر على الكرة في الموضع C من مسارها.

الحل:



a b

(الشكل-9-3)

يلاحظ أن المسار المنحني هو قوس من قطع مكافئ محوره ينطبق على OY وذروته C ، ويمكن إيجاد رد الفعل $\boldsymbol{N}_C$ ، بدراسة حركة الكرة بدلالة الجملة الإحداثية المقيدة بها، وذلك بتطبيق علاقة التوازن التحريكي على الكرة في الوضع C ، كما هو مبين في b من (الشكل-9-3):

$$\boldsymbol{F}_C^{in} + \boldsymbol{N}_C + \boldsymbol{W} = 0$$

حيث $\boldsymbol{F}_C^{in}$ هي قوة العطالة التي تنتج من حركة الجملة المقيدة بالكرة بدلالة الجملة الساكنة، وتساوي:

$$\boldsymbol{F}_C^{in} = -m.\boldsymbol{A}_C = -m.\boldsymbol{A}_C^\tau - m.\boldsymbol{A}_C^n = (\boldsymbol{F}_C^{in})^\tau + (\boldsymbol{F}_C^{in})^n$$

وتصبح علاقة التوازن:

$$(\boldsymbol{F}_{\mathbf{C}}^{in})^{t} + (\boldsymbol{F}_{\mathbf{C}}^{in})^{n} + \boldsymbol{N}_{\mathbf{C}} + \boldsymbol{W} = 0$$

وبإسقاط علاقة التوازن على الناظم في C (الشكل-9-3b):

$$N_{\mathrm{C}} - W - (F_{\mathrm{C}}^{in})^{n} = 0$$

ومنه علاقة رد الفعل $\boldsymbol{N}_{\mathbf{C}}$ بدلالة سرعة الكرة V_{C}:

$$N_{\mathrm{C}} = m.g + m.A_{\mathrm{C}}^{n} = m.g + m\,\frac{V_{\mathrm{C}}^{2}}{r_{\mathrm{C}}}$$

حيث r_{C} هو نصف قطر الانحناء في C ، ويحسب من العلاقة الرياضية:

$$\frac{1}{r^{2}} = \frac{y''^{2}}{(1+y'^{2})^{3}}$$

ويكون:

$$x_{\mathrm{C}} = y_{\mathrm{C}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{\mathrm{C}}^{2}} = (\frac{8\,a}{l^{2}})^{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{\mathrm{C}}} = \frac{8\,a}{l^{2}}$$

وبما أن القوى الفاعلة المؤثرة على الكرة هي ثابتة، فحركتها متسارعة على المسار المنحني الأملس، ويمكن حساب V_{C} من علاقة تغير مربعي السرعة للكرة بين وضعين خلال حركتها المتسارعة:

$$V_{\mathrm{C}}^{2} - V_{\mathrm{A}}^{2} = 2\,g\,(y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{C}})$$

حيث:

$$y_{\mathrm{A}} = y_{(x=l/2)} = a \quad , \quad y_{\mathrm{C}} = 0 \quad , \quad V_{\mathrm{A}} = 0$$

ومنه:

$$V_{\mathrm{C}}^{2} = 2\,g\,a$$

بالتعويض في علاقة رد الفعل N_{C} ؛ نحصل على:

$$N_{\mathrm{C}} = m.g + 2\,m.g\,\frac{8\,a}{l^{2}} = m.g\,(1 + \frac{16\,a^{2}}{l^{2}})$$

مسألة-9-3

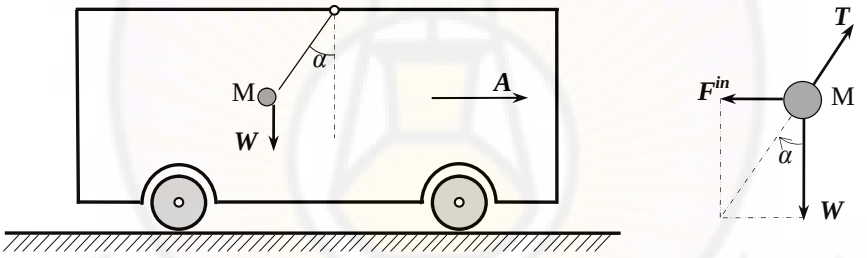
يعلق ثقل M وزنه $\boldsymbol{W}$ بطرف سلك طويل ثبت طرفه الآخر بسقف عربة قطار يتحرك حركة متسارعة، وأثناء الحركة ينحرف الثقل عن الشاقول بزاوية α ، كما هو مبين في a من (الشكل-9-4).

المطلوب إيجاد تسارع القطار بدلالة الزاوية α .

الحل:

يخضع الثقل M لثقله $\boldsymbol{W}$ ، وشد الخيط $\boldsymbol{T}$ ، وهو يتبع حركة القطار بتأثير هاتين القوتين، وإذا رددنا حركة الثقل لثلاثية $\mathrm{M}\boldsymbol{\tau nb}$ مقيدة به كان متزناً بدلالة هذه الثلاثية، وخضع عندها بالإضافة للقوتين $\boldsymbol{W}$ و $\boldsymbol{T}$ لقوة العطالة $\boldsymbol{F^{in}}$ التي تعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F}^{in} = -m.\boldsymbol{A}$$



a b

(الشكل-9-4)

والقوى الثلاثة الموضحة في (الشكل-9-4b) متزنة في النقطة M وفق العلاقة:

$$\boldsymbol{W} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}^{in} = 0$$

برسم مثلث القوى المغلق المبين في b من (الشكل-9-4) نجد أن:

$$\mathrm{tg}\,a = \frac{F^{in}}{W} = \frac{m.A}{m.g} = \frac{A}{g}$$

منه تسارع القطار:

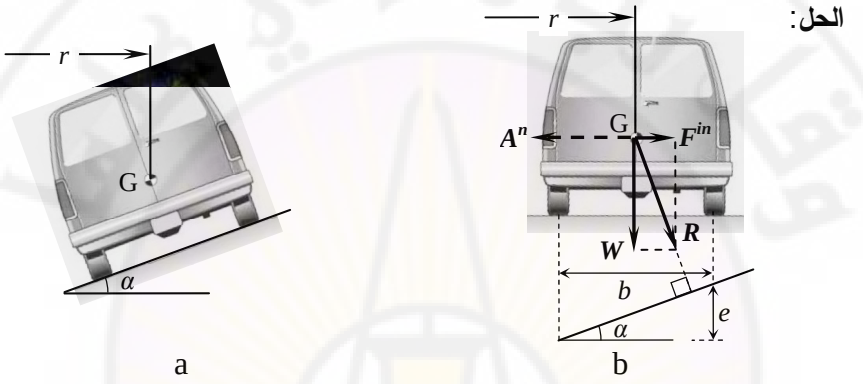
$$A = g.\tan a$$

مسألة-9-3

تتحرك آلية وزنها ($W = m.g$) على طريق دائرية نصف قطرها ($r = 200$ m) وعرضها ($b = 5$ m) بسرعة ($V = 72$ km/h)، كما هو مبين في a من (الشكل-9-4).

المطلوب تعيين زاوية ميل الطريق α باتجاه العرض، وارتفاعه h من الحرف المقابل، وذلك لتفادي خطر انقلاب الآلية.

الحل:



a b

(الشكل-9-4)

عندما تتحرك آلية على طريق أفقية، فإنها تتعرض للقوة النابذة $\boldsymbol{F}^{in}$ التي تسعى لقلبها، وتشكل هذه القوة مع قوة الثقالة $\boldsymbol{W}$ المحصلة $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}^{in} + \boldsymbol{W}$$

لتفادي خطر انقلاب الآلية يجب أن يكون سطح الطريق عمودياً على حامل المحصلة $\boldsymbol{R}$ ، كما هو مبين في b من (الشكل-9-4)، ويتعين ميل الطريق α بالعلاقة التالية:

$$\tan a = \frac{F_n^{in}}{W} = \frac{m.A^n}{m.g} = \frac{V^2}{r.g}$$

بالتعويض بالقيم العددية نحصل على زاوية ميل الطريق:

$$\tan a = (72\times 1000/3600)^2/(200\times 9.81) = 0.204 \quad \Rightarrow \quad a = 11^o 52'$$

أما ارتفاع حرف الطريق h ، فيتعين بدلالة عرضه b وزاوية ميله α بالعلاقة التالية:

$$h = b.\tan a = 4\times 0.204 = 0.8 \text{ m}$$

3- التوازن التحريكي لجملة مادية *Dynamic Equilibrium of a System*

نعدّ جملة مادية متحركة مؤلفة من n جسيم مادي، نختار جسيماً منها كتلته m_k خاضعاً لقوى خارجية $\boldsymbol{F}_k^e$ وقوى داخلية $\boldsymbol{F}_k^i$ ، التي تضم كلاً من القوى الفاعلة وردود أفعال القيود، فإذا أضفنا للقوى المؤثرة على الجسيم المادي قوة عطالة الجسيم $\boldsymbol{F}_k^{in}$ التي تساوي:

$$\boldsymbol{F}_k^{in} = -m_k.\boldsymbol{A}_k$$

نحصل على:

$$\boldsymbol{F}_k^{in} + \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i = 0 \qquad (4\text{-}9)$$

عندئذ يعطينا مبدأ دالمبير في حالة الجسيم المادي من جملة على ما يلي:

إذا أضفنا في كل لحظة t من لحظات الحركة قوة عطالة الجسيم من جملة إلى القوى الخارجية والقوى الداخلية المؤثرة فعلياً على الجسيم، فإن مجموعة القوى الناتجة تكون مجموعة متوازنة في هذه اللحظة.

بمناقشة مماثلة على كافة جسيمات الجملة نصل إلى النتيجة التالية التي تعرف بـــ مبدأ دالمبير لجملة مادية:

إذا أضفنا في كل لحظة t من لحظات الحركة للقوى الخارجية والقوى الداخلية المؤثرة على كل جسيم من جسيمات الجملة، قوة العطالة الموافقة لهذا الجسيمات، كانت جملة القوى المؤثرة على الجملة في حالة اتزان في هذه اللحظة.

بتطبيق علاقات التوازن كافة على الجملة المدروسة؛ نحصل على:

علاقة القوى:

$$\sum(\boldsymbol{F}_k^{in} + \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i) = 0$$

علاقة العزوم:

$$\sum[\boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^{in}) + \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^i)] = 0$$

حيث O نقطة في الفراغ.

نرمز لـــ:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^{in} = \boldsymbol{R}^{in} \quad , \quad \sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^{in}) = M_{\mathrm{O}}^{in} \qquad (5\text{-}9)$$

حيث تمثل $\boldsymbol{R}^{in}$ محصلة قوى العطالة، أو محصلة القوى الفعالة المعاكسة، والمسماة بـــ المتجه الرئيسي لقوى العطالة.

وتمثل $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}^{in}$ العزم المحصل لقوى العطالة حول النقطة O ، أو العزم الفعال المعاكس، والمسماة بـــ العزم الرئيسي لقوى العطالة.

أي: أنه يمكن استبدال مجموعة قوى العطالة الموزعة على جسيمات الجملة بمجموعة عطالية مكونة من قوة وحيدة تساوي إلى $\boldsymbol{R}^{in}$ تؤثر في النقطة O ، ومن ازدواج حول النقطة O عزمه يساوي إلى $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}^{in}$.

ولدينا من جهة أخرى:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^{i} = 0 \quad , \quad \sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^{i}) = 0$$

ونرمز لـــ:

$$\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{F}_k^{e}) = \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}^{e}$$

ونحصل بالنتيجة على علاقات التوازن التحريكي:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^{e} + \boldsymbol{R}^{in} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}^{e} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}^{in} = 0 \qquad (6\text{-}9)$$

التي تنص على أن مجموع القوى الخارجية المؤثرة على جسيمات الجملة والمتجه الرئيسي لقوى العطالة الناشئة في تلك الجسيمات تكون معدومة، وكذلك مجموع عزوم القوى الخارجية حول أي نقطة معينة في الفراغ O والعزم الرئيسي لقوى العطالة الناشئة في تلك الجسيمات تكون معدومة.

لا تحوى العلاقات (6-9) على القوى الداخلية، وتساهم في حل مسائل التحريك بعد تحويلها إلى توازن، ويستفاد بشكل خاص في دراسة حركة جسم صلب، أو مجموعة من الأجسام الصلبة، ويجب عند استعمال هذه العلاقات في حل المسائل أن نعلم مسبقاً أن المتجه الرئيسي لقوى العطالة $\boldsymbol{R}^{in}$ لا يعتمد على وضع النقطة الثابتة O ، بينما العزم الرئيسي لهذه القوى $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}^{in}$ فإنه يعتمد على وضع النقطة O في حركات الجسم الصلب.

- الحركة الانسحابية

تتصف الحركة الانسحابية لجسم صلب كتلته M ، بأن تسارع نقاطه $\boldsymbol{A_k}$ واحدة، وتساوي إلى تسارع مركز كتله $\boldsymbol{A_G}$ ، فعندما يكون مسار الحركة مستقيماً يعطى المتجه الرئيسي لقوى العطالة بـــ:

$$\boldsymbol{A_G} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R^{in}} = -\sum m_k . \boldsymbol{A_k} = -M . \boldsymbol{A_G} \tag{7-9}$$

وعندما يكون مسار الحركة منحنياً، يمكن تحليل تسارع مركز الكتل $\boldsymbol{A_G}$ إلى مركبتين مماسية وناظمية، وبالتالي يعطى المتجه الرئيسي لقوى العطالة بالمركبتين:

$$\boldsymbol{R_n^{in}} = -M . \boldsymbol{A_G^n} \qquad , \qquad \boldsymbol{R_\tau^{in}} = -M . \boldsymbol{A_G^\tau} \tag{8-9}$$

أما العزم الرئيسي لقوى العطالة، فبما أنه في هذه الحركة لا يدور الجسم حول مركز كتله G أي ($w = 0$) ومنه:

$$\boldsymbol{\Omega} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M_G^e} = I_G . E = 0$$

بالتعويض في علاقة التوازن للعزوم بعد تحويلها بالنسبة لمركز الكتل G :

$$\boldsymbol{M_G^e} + \boldsymbol{M_G^{in}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M_G^{in}} = 0$$

نستنتج أنه **في الحركة الانسحابية للجسم الصلب، تؤول المجموعة العطالية إلى قوة محصلة فقط ممثلة بالمتجه الرئيسي لقوى العطالة** $\boldsymbol{R^{in}}$.

يتحدد المتجه الرئيسي لقوى العطالة بالمعادلة (7-9)، الذي يؤثر في مركز كتل الجسم G ، ومنحاه هو منحى تسارع مركز كتله $\boldsymbol{A_G}$ ، وتبين الإشارة السالبة فيها أن اتجاهه معاكس لاتجاه التسارع الخطي لهذا المركز، ومركباته بقدر مركبات متجه التسارع.

- الحركة الدورانية المركزية

نفرض أن الجسم يقبل مستوى تناظر، وأن محور الدوران GZ عمودي على هذا المستوى في مركز الكتل G أي ($\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} = 0$)، فيكون المتجه الرئيسي لقوى العطالة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R}^{in} = -\sum m_k . \boldsymbol{A}_k = -M . \boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} = 0$$

أما العزم الرئيسي لقوى العطالة بالنسبة لمركز الكتل فمن معادلة الحركة الدورانية:

$$\boldsymbol{\Omega} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M}^{e}_{\mathbf{G}} = I_{\mathrm{G}} . \boldsymbol{E}$$

ومن علاقة توازن العزوم:

$$\boldsymbol{M}^{e}_{\mathbf{G}} + \boldsymbol{M}^{in}_{\mathbf{G}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M}^{in}_{\mathbf{G}} = -\boldsymbol{M}^{e}_{\mathbf{G}}$$

ومنه بالتعويض:

$$\boldsymbol{M}^{in}_{\mathbf{G}} = -I_{\mathrm{G}} . \boldsymbol{E} \qquad (9\text{-}9)$$

نستنتج أنه **في الحركة الدورانية المركزية للجسم الصلب، تؤول المجموعة العطالية إلى ازدواج وحيد ممثل بالعزم الرئيسي** $\boldsymbol{M}^{in}_{\mathbf{G}}$.

يتحدد العزم الرئيسي بالمعادلة (9-9)، الذي ينطبق مستويه على مستوى التناظر المار من G ، وتبين الإشارة السالبة فيها أن اتجاه دورانه معاكس لاتجاه دوران التسارع الزاوي للجسم، وينطبق محور متجهه على محور الدوران ويتجه وفق حركة اليد اليمنى.

أما حالة الحركة الدورانية غير المركزية للجسم الصلب، حيث ($\boldsymbol{\Omega} \neq 0$) و($\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} \neq 0$)، فإن المجموعة العطالية تؤول إلى قوة ممثلة بالمتجه الرئيسي لقوى العطالة تساوي $\boldsymbol{R}^{in}$ تؤثر في مركز كتل الجسم G ، ويعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R}^{in} = -M . \boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} \qquad (10\text{-}9)$$

وإلى عزم ازدواج ممثل بالعزم الرئيسي لقوى العطالة ينطبق مستويه على المستوى المار من G والعمودي على محور الدوران، ويعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\Omega} \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M}^{in}_{\mathbf{G}} = -I_{\mathrm{G}} . \boldsymbol{E} \qquad (11\text{-}9)$$

- الحركة المستوية العامة

نفرض أن الجسم الصلب يقبل مستوى تناظر، وإنه يتحرك في مستوى ينطبق على مستوى التناظر أو يوازيه؛ لذلك يقع مركز الكتل في مستوى التناظر، ويتحرك في هذا المستوى أو في مستوى يوازيه ويكون $(\boldsymbol{\Omega} \neq 0)$و$(\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}} \neq 0)$.

بالتالي يقع المتجه الرئيسي لقوى العطالة في مستوى التناظر، ويعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{R}^{in} = -M.\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}} \qquad (12\text{-}9)$$

ويكون متجه العزم الرئيسي لقوى العطالة بالنسبة لـــ G ناظمياً على مستوى التناظر، ويعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{G}}^{in} = -I_{\mathrm{G}}.E \qquad (13\text{-}9)$$

وهكذا **في الحركة المستوية العامة للجسم الصلب؛ الذي يقبل مستوى تناظر، ويتحرك مركز كتله في هذا المستوى، تؤول المجموعة العطالية له إلى قوة ممثلة بالمتجه الرئيسي تساوي $\boldsymbol{R}^{in}$ ، وإلى ازدواج ممثل بالعزم الرئيسي $\boldsymbol{M}_{\mathrm{G}}^{in}$** .

يتحدد المتجه الرئيسي لقوى العطالة بالمعادلة (9-12)، الذي يؤثر في مركز كتل الجسم G ، وتبين الإشارة السالبة فيها أن اتجاهه معاكس لاتجاه التسارع الخطي لمركز كتل الجسم $\boldsymbol{A}_{\mathrm{G}}$ ، كما يتحدد العزم الرئيسي بالمعادلة (9-13)، الذي ينطبق مستويه على مستوى التناظر المار من G . وتبين الإشارة السالبة فيها أن اتجاه العزم الرئيسي معاكس لاتجاه التسارع الزاوي للجسم.

يعطي مبدأ دالامبير طريقة موحدة لتكوين معادلات حركة أي مجموعة مقيدة، فبوساطته تحل ببساطة ووضوح المسائل التالية:

في الحالات التي يطلب فيها تعيين ردود أفعال القيود المفروضة بمعرفة حركة المجموعة، عند ذلك تستبعد جميع القوى الداخلية المجهولة من مجال الدراسة.

أما الحالات التي يطلب فيها تعيين ردود أفعال القيود الداخلية، فيجب تقسيم الجملة إلى عدة أجزاء تكون ردود الأفعال المطلوبة بالنسبة إليها قوى خارجية.

إضافة إلى ذلك يمكن استخدام مبدأ دالامبير في تكوين المعادلات التفاضلية للحركة، وبوجه خاص لتعيين تسارعات الأجسام المتحركة.

مسألة-9-4- (الدورة الأولى-1976-1977)

سيارة كتلتها M تتحرك حركة متسارعة بتسارع قدره $\boldsymbol{A}$ نتيجة دفع العجلات الخلفية من عزم مطبق عليها.

فإذا كانت الأبعاد كما هي مبينة في (الشكل-9-5)، حيث:

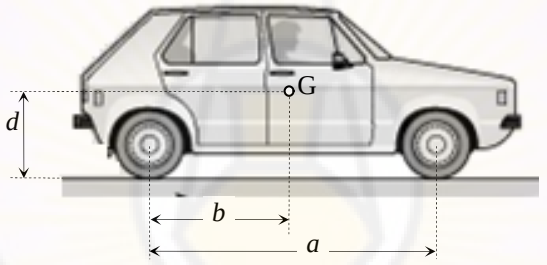
a :البعد بين المحاور الأمامية والخلفية. و f :معامل الاحتكاك بين العجلات الخلفية والأرض.

و b :بعد مركز الكتل G عن العجلات الخلفية. و d :ارتفاع مركز الكتل G عن الأرض.

المطلوب بإهمال عامل الاحتكاك بين العجلات الأمامية والأرض، إيجاد ما يلي:

- ردود الأفعال والتسارع الأعظمي.

- ردود الأفعال وأقصر مسافة لازمة لتوقف السيارة؛ نتيجة فرملة العجلات الخلفية لها إذا كانت سرعة السيارة عند بدء الفرملة هي V_0 .

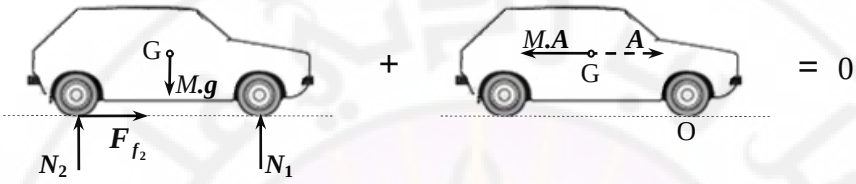


(الشكل-9-5)

الحل:

بما أن العجلات الخلفية مدفوعة نتيجة عزم مطبق عليها، عندئذ تظهر القوة المحركة الممثلة بقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F}_{f_2}$ ، وردود الأفعال الناظمية في نقاط تماس العجلات الخلفية مع أرض الطريق $\boldsymbol{N_2}$ ، وبما أن العجلات الأمامية تدور دون احتكاك؛ فإن ردود الأفعال الناظمية $\boldsymbol{N_1}$ فقط تؤثر في نقاط التماس العجلات الأمامية مع أرض الطريق.

بتطبيق مبدأ دالامبير حيث القوى الخارجية تتوازن مع قوى العطالة التي ترد إلى قوة وحيدة $(\boldsymbol{R}^{in} = -M.\boldsymbol{A}_G = -M.\boldsymbol{A})$ مركزة في مركز الكتل G ، كما هو مبين في (الشكل-9-6)، لأن حركة السيارة هي حركة انسحابية، ومنه بتطبيق علاقات التوازن التحريكي:



مخطط الجسم الحر + مخطط المجموعة العطالية = 0

(الشكل-9-6)

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_{f_2} - M.A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2N_1 + 2N_2 - M.g = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_O(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad M.g(a-b) - 2N_2.a + M.A.d = 0 \qquad (3)$$

حيث O نقطة تقاطع المستوى العرضي المار من مركز كتل السيارة G مع المستقيم الواصل بين نقاط تماس العجلات الأمامية.

وبما أن السيارة تتحرك بتسارع أعظمي نحو الأمام، فإن قوة الاحتكاك للعجلات الخلفية تأخذ قيمة عظمى قدرها:

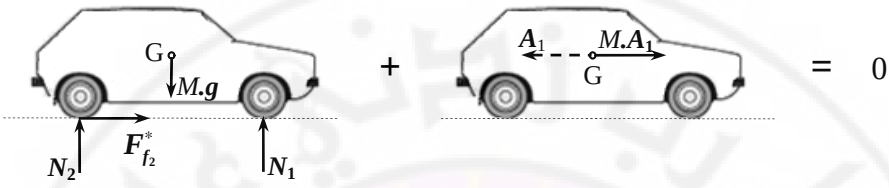
$$F_{f_2} = f.N_2 \qquad (4)$$

بحل المعادلات الأربع نحصل على:

$$N_1 = \frac{a-b}{2(a-f.d)}M.g \quad , \quad F_{f_2} = \frac{f(a-b)}{2(a-f.d)}M.g$$

$$N_2 = \frac{b-f.d}{2(a-f.d)}M.g \quad , \quad A = \frac{f(a-b)}{a-f.d}\,g$$

عندما تفرمل العجلات الخلفية فقط، يحدث تباطؤ بالتسارع قدره $\boldsymbol{A}_1$ باتجاه معاكس لاتجاه حركة السيارة، والقوة المؤثرة على السيارة عندئذ موضحة في (الشكل-9-7)، ووفق مبدأ دالامبير يمكن أن نعين معادلات التوازن التحريكي:



مخطط الجسم الحر + مخطط المجموعة العطالية = 0

(الشكل-9-7)

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F^*_{f_2} + M.A_1 = 0 \qquad (5)$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2N_1 + 2N_2 - M.g = 0 \qquad (6)$$

$$\sum m_O(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad M.g(a-b) - 2N_2.a - M.A_1.d = 0 \qquad (7)$$

ومن علاقة شرط التدحرج على وشك الانزلاق للعجلات الخلفية:

$$F^*_{f_2} = f\,.N_2 \qquad (8)$$

من هذه المعادلات نحصل على:

$$N_1 = \frac{b + f\,.d}{2(a + f\,.d)} M.g \quad , \quad F^*_{f_2} = \frac{f\,(a-b)}{2(a - f\,.d)} M.g$$

$$N_2 = \frac{a-b}{2(a + f\,.d)} M.g \quad , \quad A_1 = \frac{f\,(a-b)}{a + f\,.d}\, g$$

بما أن القوى المؤثرة ثابتة، وحركة السيارة متباطئة فالمسافة المقطوعة أثناء الفرملة x تعين من العلاقة:

$$V^2 - V_0^2 = -2\,A_1.x$$

حيث $(V = 0)$ لأنها تمثل السرعة النهائية للسيارة، ومنه:

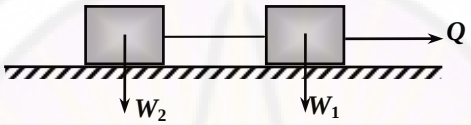
$$x = \frac{V_0^2}{2A_1} = \frac{a + f\,.d}{2\,f\,(a-b)}.\frac{V_0^2}{g}$$

مسألة-9-5- (الفصل الثاني-2014-2015)

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من جسمين وزناهما W_1 و W_2 يصل بينهما خيط، ويتحرك الجسمان على مستوى أفقي تحت تأثير القوة Q المؤثرة على الثقل الأول كما هو مبين في (الشكل-9-8).

فإذا كان معامل احتكاك الجسمين بالمستوى يساوي f . المطلوب تعيين التسارع الخطي A_1 , A_2 لهما، والشد T في الخيط.

الحل:



(الشكل-9-8)

لإيجاد تسارع الجسمين نطبق مبدأ دالامبير على الجملة، وذلك بأن يكون مجموع كل القوى الخارجية المؤثرة على الجملة، وقوى العطالة الموضحة في (الشكل-9-9) في حالة اتزان:

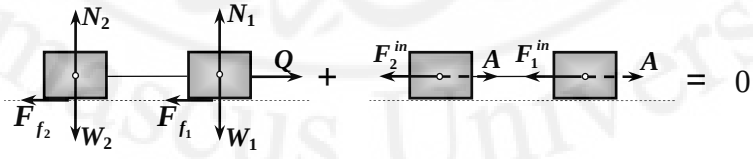
$$\boldsymbol{W_1 + W_2 + N_1 + N_2 + F_{f_1} + F_{f_2} + Q + F_1^{in} + F_2^{in} = 0}$$

حيث قوتا الاحتكاك:

$$F_{f_1} = f\,.N_1 = f\,.W_1 \qquad , \qquad F_{f_2} = f\,.N_2 = f\,.W_2$$

وبما أن كلا الجسمين يتحركان حركة انسحابية بتسارع واحد $\boldsymbol{A}$ ، فإننا نحصل على قوتي العطالة:

$$F_1^{in} = \frac{W_1}{g}A \qquad , \qquad F_2^{in} = \frac{W_2}{g}A$$



مخطط المجموعة العطالية + مخطط الجسم الحر = 0

(الشكل9-9)

ووفقاً لمبدأ دالامبير بتكوين معادلة الاتزان في المساقط على المحور الأفقي، نجد أن:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad Q - f\,(W_1 + W_2) - \frac{1}{g}(W_1 + W_2)\,A = 0$$

ومنه:

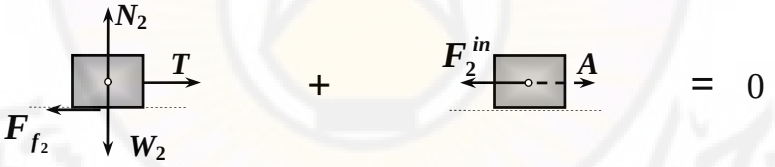
$$A = (\frac{Q}{W_1 + W_2} - f\,)g$$

ومن الواضح أن الجسمين يتحركان إذا كان:

$$A > 0 \quad \Rightarrow \quad f < \frac{Q}{W_1 + W_2}$$

وتعدّ قوة الشد المطلوبة في هذه الحالة قوى داخلية في الجملة، ولتعيين هذه القوة نقسم الجملة، ونطبق مبدأ دالامبير على أحد الجسمين، وليكن مثلاً الجسم الثاني، حيث يؤثر على هذا الجسم وزنه $\boldsymbol{W_2}$ ،ورد الفعل العمودي $\boldsymbol{N_2}$ ، وقوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_{f_2}}$ ،والشد في الخيط $\boldsymbol{T}$ ، ونضيف إلى هذه القوى قوة العطالة $\boldsymbol{F_2^{in}}$ الموضحة في(الشكل-9-10) في حالة الاتزان:

$$\boldsymbol{W_2} + \boldsymbol{N_2} + \boldsymbol{F_{f_2}} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F_2^{in}} = 0$$



مخطط المجموعة العطالية + مخطط الجسم الحر = 0

(الشكل9-10)

ومن إسقاط معادلة الاتزان على المحور الأفقي؛ نحصل على:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad T - f\,.W_2 - \frac{W_2}{g}A = 0$$

وبالتعويض في هذه المعادلة بقيمة A ؛ نحصل أخيراً على:

$$T = \frac{W_2}{W_1 + W_2}Q$$

ومن الجدير بالذكر أن قوة الشد في الخيط في هذه الحالة لا تعتمد على قوى الاحتكاك، وعند تثبيت الوزن الكلي للجملة يقل الشد كلما قل وزن الجسم الثاني؛ ولذا يكون من الأنفع في قطارات السكك الحديدية مثلاً، وصل العربات الثقيلة في المقدمة والأخف في المؤخرة.

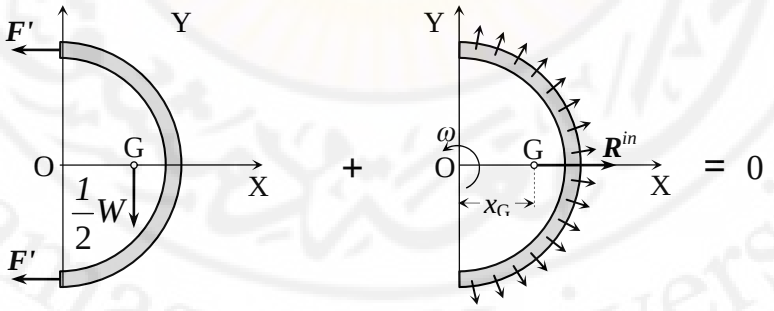
مسألة-9-6

حذافة (دولاب معدل) نصف قطرها R ، وكتلتها M موزعة على إطارها، كما هو مبين في (الشكل-9-11).

المطلوب تعيين القوة التي تحاول تحطيمها عندما تدور بانتظام بسرعة زاوية w .

الحل:

تُعَدُّ القوى المطلوبة قوة داخلية، فلتعيينها نقسم إطار الحذافة إلى نصفين، ونطبق مبدأ التوازن التحريكي على أحدهما كما هو مبين في (الشكل-9-11)، ونستبدل تأثير النصف الآخر بقوتين متساويتين $\boldsymbol{F'}$ تساوي في المقدار القوة المطلوبة $\boldsymbol{F}$ ، وتتجه قوة العطالة القوة الطاردة المركزية لكل عنصر من عناصر الإطار على امتداد نصف قطر الحذافة، ويكون لهذه القوى المتلاقية في نقطة O محصلة تساوي المتجه الرئيسي لقوى العطالة $\boldsymbol{R^{in}}$ ، وتتجه نتيجة للتماثل على امتداد المحور OX .



0 = مخطط المجموعة العطالية + مخطط الجسم الحر

(الشكل-9-11)

وتبعاً لشروط التوازن (9-6) تكون:

$$-2F' + R^{in} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F' = R^{in}$$

حيث المتجه الرئيسي لقوى العطالة $\boldsymbol{R}^{in}$ يساوي:

$$R^{in} = 0.5M.A_{\mathrm{G}} = 0.5M.x_{\mathrm{G}}.w^2$$

و x_{G} إحداثي مركز كتل قوس نصف الدائرة، الذي يساوي:

$$x_{\mathrm{G}} = 2R/p$$

وبالتالي:

$$F' = \frac{M.R}{2p}\,w^2$$

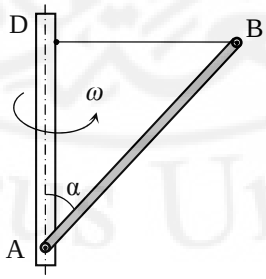
يمكن بوساطة هذه المعادلة أن نعين السرعة الزاوية النهائية؛ التي إذا تجاوزنها أصبحت الحذافة المصنوعة من المادة المعطاة مهددة بالتحطيم.

مسألة-9-7

قضيب متجانس AB طوله l وزنه W . مثبت بوساطة مفصلة A بعمود رأسي AD يدور بسرعة زاوية ثابتة w (الشكل-9-12).

المطلوب تعيين قوة الشد T في الخيط الأفقي الذي يحفظ القضيب مائلاً على العمود بزاوية α .

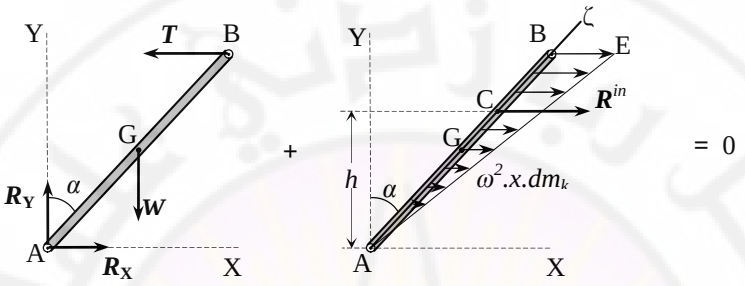
الحل:



(الشكل9-12) قضيب AB مثبت بعمود رأسي AD .

لتعيين قوة الشد نطبق مبدأ دالامبير، باستخدام علاقة توازن قوى العطالة مع القوى الخارجية المؤثرة على القضيب الموضحة في (الشكل-9-13):

$$\boldsymbol{T}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{X}}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{Y}}+\boldsymbol{W}+\boldsymbol{R}^{in}=0 \qquad (1)$$



مخطط المجموعة العطالية + مخطط الجسم الحر = 0

(الشكل9-13)

بما أن حركة القضيب دورانية منتظمة فقوة العطالة الطاردة المركزية لكل عنصر k من عناصر القضيب كتلته Δm_k يساوي:

$$F_k^{in}=\Delta m_k.w^2.x_k$$

حيث x_k يمثل بعد العنصر k عن محور الدوران AY ، وبما أن قوى العطالة هذه تتناسب طرداً مع بعد نقاط تأثيرها عن محور الدوران، فإن محصلة هذه القوى المتوازية الموزعة وفقاً لعلاقة خطية تمر بالنقطة C مركز ثقل المثلث ABE ، ويبعد خط عملها عن المحور AX بمسافة:

$$y_{\mathrm{C}}=h=\frac{2}{3}l.\cos a$$

وبما أن هذه المحصلة تساوي المتجه الرئيسي لقوى العطالة؛ فإننا نحصل على:

$$R^{in}=M.A_{\mathrm{G}}=M.w^2.x_{\mathrm{G}}=\frac{W.l}{2g}w^2.\sin a$$

وباستخدام علاقة توازن عزوم قوى العطالة وعزوم القوى الخارجية حول أيّ نقطة نحصل على:

$$\sum m_{\mathrm{A}}(F_k)=0 \quad \Rightarrow \quad T.l.\cos a - W\frac{l}{2}\sin a - R^{in}.h = 0$$

وبالتعويض هنا بقيمتي h و R^{in} نجد أخيراً أن:

$$T = W(\frac{l.w^2}{3g}\sin a + \frac{l}{2}\tan a)$$

حل آخر:

يمكن حل المسألة أيضاً بحساب مجموع عزوم قوى العطالة حول النقطة A بوساطة التكامل مباشرة. نمد المحور Aζ على امتداد القضيب AB ، وتؤثر على كل عنصر $d\zeta$ من القضيب إحداثيته ζ قوة عطالة تساوي $w^2.x.dm_k$ ، ويكون عزم هذه القوة حول المركز A مساوياً لـــ $(-y.w^2.x.dm_k)$، وعندئذ نحصل من معادلة العزوم على:

$$\sum m_{\mathrm{A}}(F_k)=0 \quad \Rightarrow \quad T.l.\cos a - W\frac{l}{2}\sin a - \int_0^l w^2.y.x.dm_k = 0$$

وبالتعبير عن كل المقادير داخل حد التكامل بدلالة ζ ، نجد أن:

$$x = z.\sin a \quad , \quad y = z.\cos a \quad , \quad dm_k = \frac{M}{l}dz$$

فنحصل أخيراً على:

$$\int_0^l w^2.y.x.dm_k = \frac{M}{l}w^2.\sin a.\cos a\int_0^l z^2.dz = \frac{W}{3g}l^2.w^2.\sin a.\cos a$$

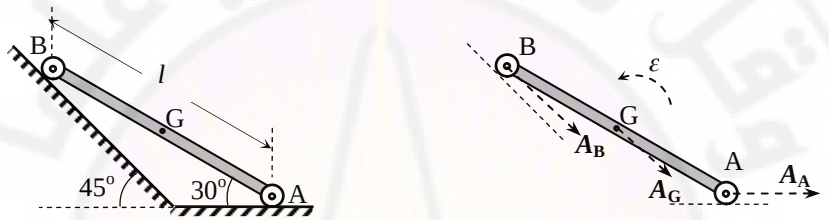
وبالتعويض بهذه القيمة للتكامل في علاقة العزم نحصل على الصيغة نفسها؛ التي نتجت في الحل السابق.

مسألة-9-8

قضيب متجانس AB وزنه ($W = M.g = 50$ N)، طوله ($l = 4$ m)، وعزم عطالته بالنسبة لمركز كتله G يساوي ($I_G = M.l^2/12$).

فإذا بدأ القضيب حركته بالانزلاق دون احتكاك بتسارع زاوي ثابت قدره ε ، كما هو مبين في a من (الشكل-9-14). المطلوب عندئذ إيجاد ردود الأفعال في الطرفين A و B .

الحل:



a b

(الشكل-9-14) قضيب AB ينزلق دون احتكاك.

يمكننا تعيين ردود الأفعال عند طرفي القضيب لحظة بدء حركته، بتطبيق علاقات التوازن التحريكي على القضيب في هذه اللحظة الابتدائية:

$$\sum \boldsymbol{F}^{e} + \boldsymbol{R}^{in} = 0 \qquad , \qquad \sum \boldsymbol{m}_{G}(\boldsymbol{F}^{e}) + \boldsymbol{M}_{G}^{in} = 0$$

لتحديد المجموعة العطالية ندرس حركة القضيب لتعيين تسارع مركز الكتل G ، وذلك باتخاذ الطرف A قطب يكون لدينا:

$$\boldsymbol{A}_{B} = \boldsymbol{A}_{A} + \boldsymbol{A}_{BA} = \boldsymbol{A}_{A} + \boldsymbol{A}_{BA}^{n} + \boldsymbol{A}_{BA}^{\tau}$$

نرسم مخطط التسارع وفق العلاقة السابقة، والمبين في a من (الشكل-9-15)، واستناداً للمخطط b من (الشكل-9-14)، لدينا:

التسارع $\boldsymbol{A}_{B}$ مجهول القيمة، ويتجه نحو الأسفل باتجاه الحركة، أي: باتجاه المستوى المائل.

والتسارع $\boldsymbol{A}_{A}$ مجهول القيمة، ويتجه أفقياً نحو اليمين باتجاه الحركة.

والتسارع الناظمي النسبي $\boldsymbol{A}_{BA}^{n}$ في اللحظة الابتدائية معدوم.

أما التسارع المماسي النسبي $\boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{BA}}$ فمنحاه عمودي على القضيب، ويعين اتجاهه من مخطط التسارع المبين في a من (الشكل-9-15)، وقيمته العددية:

$$A^{t}_{\mathrm{BA}} = l.e = 4\,e$$

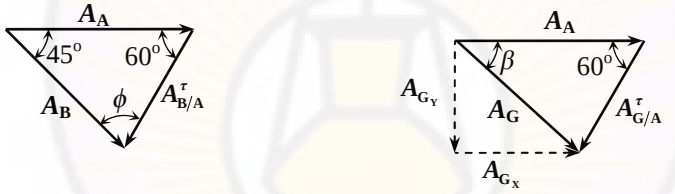
من مخطط التسارع المبين في (الشكل-9-15a) نكتب:

$$\frac{A_{\mathrm{A}}}{\sin 75^{o}} = \frac{A_{\mathrm{B}}}{\sin 60^{o}} = \frac{A^{t}_{\mathrm{BA}}}{\sin 45^{o}}$$

ومنه:

$$A_{\mathrm{A}} = \frac{\sin 75^{o}}{\sin 45^{o}} A^{t}_{\mathrm{BA}} = 5.46\,e$$

$$A_{\mathrm{B}} = \frac{\sin 60^{o}}{\sin 45^{o}} A^{t}_{\mathrm{BA}} = 4.9\,e$$



a b

(الشكل-9-15) مخططات تسارع.

ولحساب تسارع مركز الكتل G لدينا:

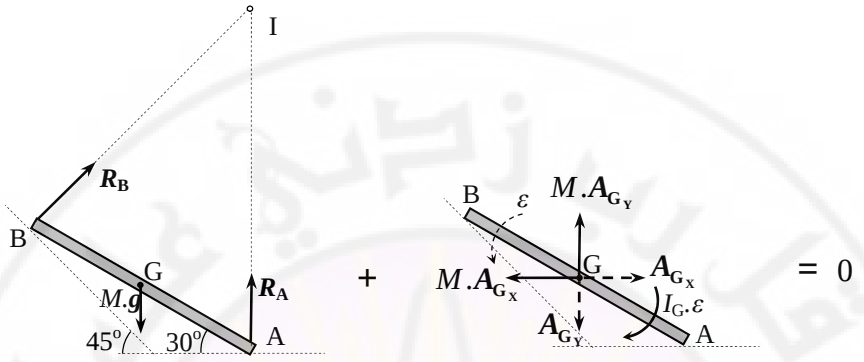
$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{G}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}_{\mathbf{GA}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}^{n}_{\mathbf{GA}} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{GA}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{A}^{\tau}_{\mathbf{GA}}$$

نرسم مخطط التسارع وفق العلاقة السابقة والمبين في b من (الشكل-9-15)، ونسقطها استناداً للمخطط على المحورين OX أفقي و OY شاقولي:

$$\rightarrow \quad A_{\mathrm{G_X}} = A_{\mathrm{A}} - A^{t}_{\mathrm{GA}}.\cos 60 = 4.46\,e$$

$$\downarrow \quad A_{\mathrm{G_Y}} = A^{t}_{\mathrm{GA}}.\sin 60 = 1.73\,e$$

ويمثل (الشكل-9-15) مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة العطالية للقضيب بعد تعيين مركبات تسارع مركز كتل القضيب.



مخطط الجسم الحر + مخطط المجموعة العطالية = 0

(الشكل-9-15)

بإسقاط علاقتي التوازن التحريكي على محاور الحركة نحصل على:

$$\rightarrow \quad \sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \qquad R_B.\sin 45 - M.A_{G_X} = 0$$

$$\uparrow \quad \sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \qquad R_B.\cos 45 + R_A + M.A_{G_Y} - M.g = 0$$

$$\sum m_I(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad M.A_{G_X}(4.46) + M.A_{G_Y}(1.73) - M.g(1.73) + I_G.e = 0$$

ولدينا عزم عطالة القضيب:

$$I_G = \frac{1}{12}.\frac{50}{9.81}(4)^2 = 6.8 \text{ kg.m}^2$$

فمن المعادلة الثالثة نحصل على:

$$e = 0.7 \text{ rad/sec}^2$$

ومن المعادلة الأولى نحصل على:

$$R_B = 7.2 \text{ N}$$

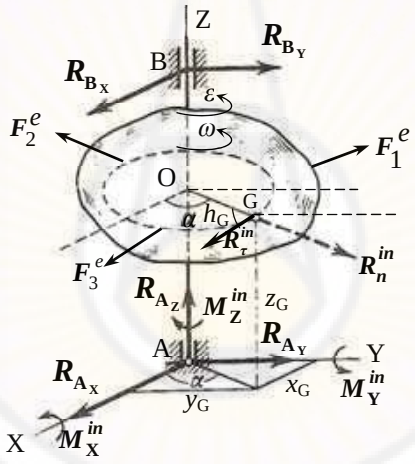
ومن المعادلة الثانية نحصل على:

$$R_A = 18.4 \text{ N}$$

4- الضغوط التحريكية المؤثرة على محور دوران الجسم الصلب

ندرس جسماً صلباً يدور تحت تأثير القوى الخارجية المعطاة $\boldsymbol{F}_1^e, \boldsymbol{F}_2^e, \ldots\ldots \boldsymbol{F}_n^e$ حول محور AB لا يمر من مركز كتله G طوله l يقع بين مسندي محور الدوران A و B ، ولنفرض أن الجسم يدور في اللحظة المعطاة بسرعة زاوية w وتسارع زاوي ε بدلالة جملة محاور الإحداثيات AXYZ ؛ التي تدور مع الجسم حول المحور AZ المنطبق على محور الدوران AB (شكل-9-16).

نرمز بـــ R_X^e, R_Y^e, R_Z^e لمساقط المتجه الرئيسي للقوى المؤثرة على محاور الإحداثيات، وبـــ M_X^e, M_Y^e, M_Z^e لعزومها الرئيسية حول المحاور نفسها.



(الشكل-9-16) جسم صلب يدور حول محور تحت تأثير قوى خارجية.

لتعيين ردود الأفعال التحريكية $R_{A_X}, R_{A_Y}, R_{A_Z}, R_{B_X}, R_{B_Y}$ لمسندي محور الدوران A و B المؤثرة على المحور، أي: ردود الأفعال الناشئة عند دوران الجسم. نطبق علاقات التوازن التحريكي (9-6) أي: علاقات مبدأ دالامبير على الجسم في وضع عام، وذلك بإضافة المجموعة العطالية $\boldsymbol{R}^{in}$ و M_G^{in} إلى القوى المؤثرة على كل جسيمات الجسم.

وبإسقاط علاقات التوازن التحريكي (9-6) على المحاور؛ نحصل على:

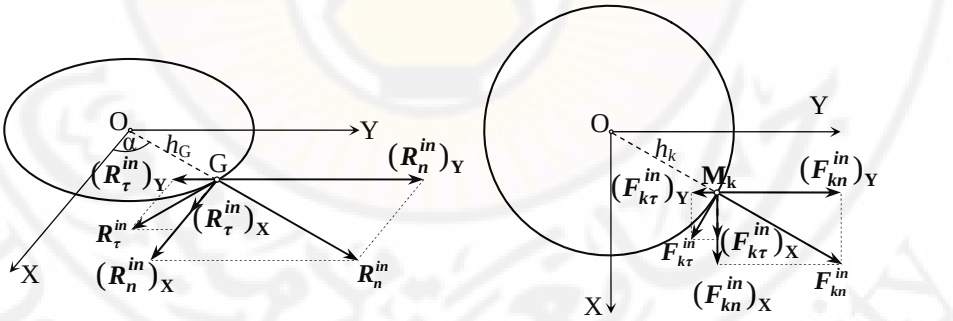
$$
\begin{aligned}
R_{A_X} + R_{B_X} + R^e_X + R^{in}_X &= 0 \\
R_{A_Y} + R_{B_Y} + R^e_Y + R^{in}_Y &= 0 \\
R_{A_Z} + R^e_Z + R^{in}_Z &= 0 \\
-R_{B_Y}.l + M^e_X + M^{in}_X &= 0 \\
R_{B_X}.l + M^e_Y + M^{in}_Y &= 0 \\
M^e_Z + M^{in}_Z &= 0
\end{aligned}
\qquad (14\text{-}9)
$$

لتعيين المركبات $R^{in}_X, R^{in}_Y, R^{in}_Z$ للمتجه الرئيسي لقوى العطالة $\boldsymbol{R^{in}}$ الموضح في a من (الشكل-9-17)، فإن:

$$\boldsymbol{R^{in}} = -M.\boldsymbol{A_G} = -M(\boldsymbol{A^n_G} + \boldsymbol{A^\tau_G})$$

$$R_n^{in} = M.A^n_G = M.w^2.h_G \quad , \quad R^{in}_t = M.A^t_G = M.e.h_G$$

حيث h_G بعد مركز الكتل G عن محور الدوران.



(الشكل-9-17)

وينطبق اتجاه المتجه $\boldsymbol{R}_n^{in}$ مع اتجاه OG ، ومنه:

$$(R_n^{in})_X = M.w^2.h_G.\cos a = M.w^2.x_G$$
$$(R_n^{in})_Y = M.w^2.h_G.\sin a = M.w^2.y_G \qquad (15\text{-}9)$$
$$(R_n^{in})_Z = 0$$

حيث x_G و y_G تمثلان إحداثيتي مركز الكتل.

وينطبق اتجاه المتجه $\boldsymbol{R}_\tau^{in}$ بشكل عمودي على OG وباتجاه دوران حول O معاكس لدوران ε ، ومنه:

$$(R_t^{in})_X = M.e.h_G.\sin a = M.e.y_G$$
$$(R_t^{in})_Y = -M.e.h_G.\cos a = -M.e.x_G \qquad (16\text{-}9)$$
$$(R_t^{in})_Z = 0$$

ويكون مجموع مساقط المتجه الرئيسي لقوى العطالة على المحاور X و Y :

$$R_X^{in} = M.x_G.w^2 + M.y_G.e \qquad (17\text{-}9)$$
$$R_Y^{in} = M.y_G.w^2 - M.x_G.e$$

ولتعيين M_Y^{in} و M_X^{in} ، ندرس جسيماً من جسيمات الجسم M_k كتلته m_k يبعد عن محور الدوران بمسافة h_k ، فإن لقوة عطالته الموضحة في b من (الشكل-9-17):

- مركبة طاردة مركزية $(F_{kn}^{in} = m_k.w^2.h_k)$، مساقطها على المحاور كمساقط المتجه $\boldsymbol{R}_n^{in}$ ، وتساوي:

$$(F_{kn}^{in})_X = m_k.w^2.x_k \quad , \quad (F_{kn}^{in})_Y = m_k.w^2.y_k \quad , \quad (F_{kn}^{in})_Z = 0$$

- مركبة مماسية $(F_{kt}^{in} = m_k.e.h_k)$، مساقطها على المحاور كمساقط المتجه $\boldsymbol{R}_\tau^{in}$ ، وتساوي:

$$(F_{kt}^{in})_X = m_k.e.y_k \quad , \quad (F_{kt}^{in})_Y = -m_k.e.x_k \quad , \quad (F_{kt}^{in})_Z = 0$$

وعندئذ يكون:

$$m_X(F_k^{in}) = -(F_{kn}^{in})_Y.z_k + (F_{kt}^{in})_Y.z_k = -m_k.w^2.y_k.z_k + m_k.e.y_k.z_k$$
$$m_Y(F_k^{in}) = (F_{kn}^{in})_X.z_k + (F_{kt}^{in})_X.z_k = m_k.w^2.x_k.z_k + m_k.e.y_k.z_k$$

نُكوِّن مثل هذه العلاقات لكل جسيمات الجملة ثم نجمع العلاقات الناتجة، مع إخراج العامل المشترك خارج الأقواس؛ فنحصل على:

$$M_{\mathrm{X}}^{in} = -(\sum m_k.y_k.z_k)w^2 + (\sum m_k.x_k.z_k)e = -I_{\mathrm{YZ}}.w^2 + I_{\mathrm{XZ}}.e \qquad (18\text{-}9)$$

$$M_{\mathrm{Y}}^{in} = (\sum m_k.x_k.z_k)w^2 + (\sum m_k.y_k.z_k)e = I_{\mathrm{XZ}}.w^2 + I_{\mathrm{YZ}}.e$$

ولدينا:

$$M_{\mathrm{Z}}^{in} = -I_{\mathrm{Z}}.e$$

حيث I_{YZ} و I_{XZ} هما حاصلا جداء عزم العطالة.

وبالتعويض بكل القيم الناتجة في علاقات التوازن (9-14)؛ نحصل على:

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{AX}} + R_{\mathrm{BX}} &= -R_{\mathrm{X}}^{e} - M.x_{\mathrm{G}}.w^2 - M.y_{\mathrm{G}}.e \\
R_{\mathrm{AY}} + R_{\mathrm{BY}} &= -R_{\mathrm{Y}}^{e} - M.y_{\mathrm{G}}.w^2 + M.x_{\mathrm{G}}.e \\
R_{\mathrm{AZ}} &= -R_{\mathrm{Z}}^{e} \qquad (19\text{-}9) \\
R_{\mathrm{BY}}.l &= M_{\mathrm{X}}^{e} - I_{\mathrm{YZ}}.w^2 + I_{\mathrm{XZ}}.e \\
R_{\mathrm{BX}}.l &= -M_{\mathrm{Y}}^{e} - I_{\mathrm{XZ}}.w^2 - I_{\mathrm{YZ}}.e \\
0 &= M_{\mathrm{Z}}^{e} - I_{\mathrm{Z}}.e
\end{aligned}$$

وتحدد هذه المعادلات ردود الأفعال التحريكية المؤثرة على محور الجسم الصلب، التي تتعلق بقوى العطالة، أي: بـــ w و ε ، إذا كان محور الدوران هو المحور OZ .

إذا فرضنا في المعادلات (9-19) أن ($w = 0$)؛ فإننا نحصل على معادلات لتعيين ردود أفعال التوازن السكوني؛ التي تؤثر على المحور AB ، عندما يكون الجسم في حالة سكون تحت تأثير القوى نفسها $\boldsymbol{F}_1^{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{F}_2^{\boldsymbol{e}}, \ldots\ldots \boldsymbol{F}_{\mathbf{n}}^{\boldsymbol{e}}$.

وعند دوران الجسم فإن ردود الأفعال التحريكية يمكن أن تكون أكبر كثيراً من ردود أفعال التوازن السكوني، علماً بأن هذا يعتمد ليس فقط على قيمة w و ε وحسب؛ وإنما أيضاً على المقادير I_{YZ}، I_{XZ} ، y_{G}، x_{G} التي تحدد توزيع كتل الجسم بالنسبة لمحور الدوران.

للحصول على الشروط الواجب تحققها لكي تنعدم ردود الأفعال التحريكية، نضع مجموع الحدود التابعة لقوى العطالة في كل من المعادلات السابقة مساوياً إلى الصفر نحصل على:

$$M.x_G.w^2 + M.y_G.e = 0 \qquad (20\text{-}9)$$

$$M.y_G.w^2 - M.x_G.e = 0$$

$$-I_{YZ}.w^2 + I_{XZ}.e = 0$$

$$I_{XZ}.w^2 + I_{YZ}.e = 0$$

حل هاتين المجموعتين يعطي:

$$x_G = 0 \quad , \quad y_G = 0 \qquad (21\text{-}9)$$

$$I_{XZ} = 0 \quad , \quad I_{YZ} = 0 \qquad (22\text{-}9)$$

تعبر المعادلات (9-21) و (9-22) عن شروط تساوي ردود الأفعال التحريكية المؤثرة على محور الجسم الدائر لردود أفعال التوازن السكوني، أو كما يقال شروط التوازن التحريكي، أو الموازنة التحريكية لكتل الجسم أثناء دورانها حول المحور Z .

ويعني الشرطان (9-21) أن مركز كتل الجسم يجب أن يقع على محور الدوران، ويعني الشرطان (9-22) أن محور الدوران يجب أن يكون محوراً رئيسياً لعطالة الجسم عند نقطة الأصل A ، وعند تحقق هذه الشروط (9-21) و (9-22) في آن واحد يكون المحور AZ محوراً رئيسياً لعطالة الجسم، وهكذا تكون ردود الأفعال التحريكية المؤثرة على محور الجسم الدائر مساوية لردود أفعال التوازن السكوني؛ إذا كان محور الدوران أحد المحاور الرئيسية المركزية لعطالة الجسم، وتبقى هذه النتيجة صحيحة في حال دوران الجسم بصورة منتظمة.

تكفل المسألة المدروسة في نفس الوقت تفسير المعنى الميكانيكي للمقدارين I_{XZ} و I_{YZ} حيث يحددان درجة عدم التوازن التحريكي لكتل الجسم أثناء دورانه حول المحور Z .

ولتعيين الضغوط على المحور في كل مسألة معينة لا تستخدم عادة المعادلات الجاهزة (9-19)، وإنما يطبق مباشرة مبدأ دالامبير كل مرة.

5- موازنة الأجسام الدوارة *Balancing of Rotating Bodies*

تعتمد الضغوط التحريكية على توزع كتل الجسم الصلب بالنسبة لمحور الدوران، وللتخلص من هذه الضغوط ينبغي أولاً أن نجعل مركز كتل الجسم واقعاً على محور الدوران، ولا تزول في هذه الحالة الضغوط، بل تؤلف مزدوجة تدور مع الجسم تؤدي إلى اهتزاز محور الدوران؛ الذي بدوره يسبب قطعاً، أو قصاً في المساند، يؤدي على كثرة الاستعمال إلى عطبها.

ومن الأفضل التخلص أيضاً من جداءات العطالة؛ لذا وجب أن يكون محور الدوران محوراً أساسيا للعطالة في مركز الكتل، أي: محوراً مركزياً للعطالة.

فإذا دار جسم صلب حول محور مركزي للعطالة انعدمت عندها الضغوط التحريكية على محور الدوران، والتوازن التحريكي للكتل، أو كما يقال أيضاً توازن قوى العطالة هو مسألة تقنية هامة تتلخص في تعيين محاور العطالة الأساسية المركزية، وقد سبق أن أوضحنا أنه لكل جسم ثلاثة محاور أساسية مركزية متعامدة على الأقل.

سنثبت مبدأ آخر لا يقل أهمية عما سبق من الناحية العلمية، ويستخدم في التطبيقات العملية في الأجزاء الدائرة من الآلات، حيث يمكن التخلص من الضغوط التحريكية الضارة بجعل أي محور يمر في الجسم محور عطالة أساسياً مركزياً، وذلك بإضافة كتلتين مركزيتين إلى نقطتين من نقط هذا الجسم.

إذا فرضنا أن المقادير I_{YZ} ، I_{XZ} ، y_G ، x_G معلومة، ولا تساوي صفراً لجسم كتلته M ، ونضيف إلى الجسم كتلتين m_1 و m_2 في نقطتين إحداثياتهما (x_1 , y_1 , z_1) و (x_2 , y_2 , z_2)، وعندئذ ينتج من المعادلات (9-21) و (9-22)، أنه إذا كان:

$$M.x_G + m_1.x_1 + m_2.x_2 = 0 \quad , \quad M.y_G + m_1.y_1 + m_2.y_2 = 0 \qquad (23\text{-}9)$$

$$I_{XZ} + m_1.x_1.z_1 + m_2.x_2.z_2 = 0 \quad , \quad I_{YZ} + m_1.y_1.z_1 + m_2.y_2.z_2 = 0$$

فيكون للجسم الناتج:

$$x'_G = y'_G = I'_{XZ} = I'_{YZ} = 0$$

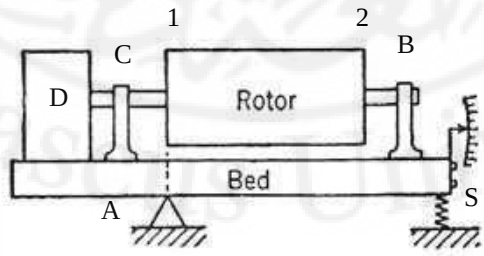
أي: إن المحور OZ يكون محوراً رئيسياً مركزياً للعطالة، وباختيار الكتلتين m_1 و m_2 وموضعيهما بحيث تتحقق المعادلات (9-23)، فإننا نحصل على حل للمسألة الموضوعة، ويجب بالطبع عند ذلك إعطاء بعض المقادير مسبقاً، فعلى سبيل المثال يمكن إعطاء قيم لـــ m_1 ، m_2 و z_1 ، z_2 ، بحيث تكون $(z_1 \neq z_2)$، ويتم تعيين x_1 ، y_1 و x_2 ، y_2 من المعادلات (9-23) وهكذا.

وتستخدم طريقة موازنة الكتل هذه بكثرة في التقنيات لموازنة الأعمدة المرفقية (*Crank Shafts*)، والمرافق، والوصلات القارنة (*Coupling Members*) وغيرها، وتتم عملية الموازنة النهائية في آلات الموازنة (*Balancing Machines*).

6- آلات الموازنة *Balancing Machines*

تدور الأجسام المصمتة عادة مثل الحذافات (الدولاب المعدل) وغيرها حول محور رئيسي منطبق على محورها الهندسي، ونتيجة لعدم تجانس المادة، وسوء في دقة الصنع؛ يؤدي دوماً إلى احتمال انحراف بسيط في محور الدوران عن المحور الرئيسي للعطالة؛ لذا تتواجد القوى التحريكية الواجب موازنتها، بإضافة أوزان تصحيح بعد صب الجسم، وتسويته.

تتم عملية الموازنة بآلات خاصة، و(الشكل-9-18) يبين جهاز يتألف من قاعدة أفقية محمولة على مسند A ، ونابض S ، بحيث يسمح ذلك باهتزازات دورانية صغيرة حول المحور المار بالمسند A العمودي على مستوى الشكل، وكرسيين حوامل B و C يمكن ضبط موضعهما على القاعدة؛ بحيث يركب عليهما الجسم المطلوب موازنته، ومن محرك كهربائي M سرعته قابلة للتغير.



(الشكل-9-18)

يوضع الجسم وليكن أسطوانة على الحوامل بحيث يقع أحد مستويي التصحيح فوق المسند A مباشرة، وتضبط سرعة المحرك إلى أن يصل تردد اهتزاز الأسطوانة غير المتوازنة إلى الطنين، مع تردد الطبيعي للمجموعة، وتعرف هذه الحالة بالسعة الكبيرة لاهتزاز القاعدة.

يوضع وزن تصحيح W_2 في مستوى التصحيح 2 ، ويضبط من ناحية المقدار والوضع الزاوي إلى أن يتم الدوران دون أي اهتزاز في القاعدة. هذا يشير إلى أن التصحيح المناسب في المستوى 2 قد تم، أي: أن المركبة الرئيسية لقوة العطالة الدوارة F_2^{in} التي تنشأ عن وزن التصحيح الذي اخترناه، يوازن تأثيرها تماماً تأثير مجموعة قوى العطالة؛ التي تنشأ عن الأسطوانة ذاتها.

ينقل طرفا الأسطوانة كل محل للآخر، وتكرر العملية إلى أن يعين وزن التصحيح المناسب W_1 ، ونظراً لأن وزن التصحيح W_2 السابق وضعه يؤثر الآن بقوة عطالة F_2^{in} في المستوى الذي يقع فيه المسند A فلا يكون له أي تأثير على اختيار الوزن W_1 .

افترضنا في الدراسة السابقة أن الجسم يدور بسرعة زاوية منتظمة، ومع ذلك يمكن إثبات أن التوازن التحريكي صحيح، ولو كانت السرعة الزاوية متغيرة أيضاً.

مسألة-9-9

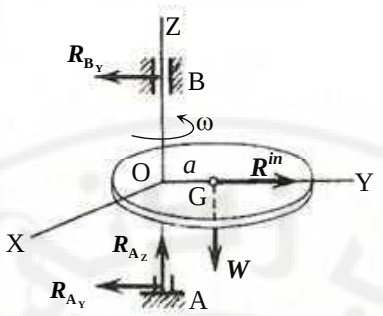
يدور قرص وزنه W بسرعة زاوية ثابتة w حول محور AB طوله $2l$ عمودي على مستوى القرص، والمار من O بحيث (OA= OB = l)، ويبعد عن مركز ثقله G بمسافة a ، كما هو مبين في (الشكل-9-19).

المطلوب تعيين ردود الأفعال التحريكية لمسندي الدوران A و B .

الحل:

نمد جملة المحاور OXYZ التي تدور مع الجسم؛ بحيث يمر المحور OY بمركز كتل القرص G كما في (الشكل-9-14)، ويكون المحور OZ محوراً رئيسياً للعطالة عند النقطة O نظراً لأن المستوى OXY يمثل المستوى العرضي للقرص، وعندئذ يكون:

$$I_{XZ} = I_{YZ} = 0$$



(الشكل-9-19) قرص يدور حول محور ثابت.

ومن المعادلات (9-18) وبما أن (w = Const.) ينتج أن ($M_O^{in} = 0$)، أي: أن قوى العطالة تؤول إلى محصلة واحدة تمر بالنقطة O ، وتتجه على امتداد المستقيم OG ، أي: على امتداد المحور OY ، وقيمتها العددية:

$$R^{in} = M.A_G^n = \frac{W}{g} a.w^2$$

وبما أن القوتين $\boldsymbol{W}$ و $\boldsymbol{R^{in}}$ تقعان في المستوى OYZ ، فإن ردي فعل مسندي الدوران يقعان في المستوى نفسه، أي يكون لكل منهما مركبتان $\boldsymbol{R}_{A_Y}, \boldsymbol{R}_{A_Z}$ في المسند A ، ومركبة $\boldsymbol{R}_{B_Y}$ في المسند B .

وبتكوين معادلات الاتزان التحريكي لمساقط كل القوى المؤثرة، وقوى العطالة على المحورين OX و OY ، ومعادلة العزوم حول المسند A ، وذلك على أساس مبدأ دالمبير؛ نحصل على:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad R^{in} - R_{A_Y} - R_{B_Y} = 0$$

$$\sum F_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A_Z} - W = 0$$

$$\sum m_A(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{B_Y}.2l - W.a - R^{in}.l = 0$$

وبحل هذه المعادلات، نجد أن:

$$R_{B_Y} = (\frac{a.w^2}{2g} + \frac{a}{2l})W \quad , \quad R_{A_Y} = (\frac{a.w^2}{2g} - \frac{a}{2l}) \quad , \quad R_{A_Z} = W$$

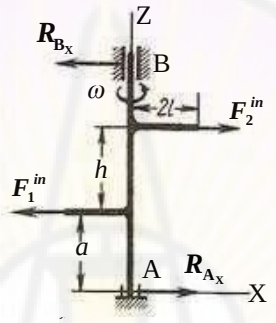
ويقع ردا الفعل $\boldsymbol{R}_{B_Y}$ و $\boldsymbol{R}_{A_Y}$ دائماً في المستوى OYZ الذي يدور مع القرص.

مسألة-9-10

قضيبان متساويان، طول كل منهما $2l$ ، وكتلة m ، لُحما بعمود AB طوله b ، بحيث يصنع كل منهما زاوية قائمة مع العمود، ويبعدان بعضهما عن بعض مسافة h ، ويقعان في مستوى واحد كما في (الشكل-9-20).

إذا دار العمود بسرعة زاوية ثابتة. المطلوب، بإهمال تأثير قوى الجاذبية، تعيين الضغوط التحريكية المؤثرة عليه.

الحل:



(الشكل-9-20) قضيبان متساويان لَحما بعمود الدوران AB.

وفقاً لمبدأ دالمبير تكون ردود أفعال مسندي الدوران وقوى العطالة مجموعة متوازنة من القوى.

حيث قوى العطالة لكل قضيب تساوي إلى:

$$F_1^{in} = F_2^{in} = m.l.w^2$$

فتكون ازدواجاً يتوازن بازدواج آخر $\boldsymbol{R}_{A_X}, \boldsymbol{R}_{B_X}$ ، ويكون عزما هذين الازدواجين متساويين، وبالتالي فإن:

$$R_{A_X}.b = F_1^{in}.h$$

ومنه:

$$R_{A_X} = R_{B_X} = \frac{h}{b} F_1^{in} = \frac{m.l.h}{b} w^2$$

ويقع هذا الازدواج طوال الوقت في المستوى AXZ الذي يدور مع الجسم.

يمكن الحصول على النتيجة نفسها من المعادلات (9-19)، حيث لدينا ما يلي:

بما أن المستوى AXZ مستوى تماثل، فإن:

$$I_{YZ} = 0 \quad , \quad x_G = y_G = 0$$

وجداء العطالة I_{XZ} يساوي مجموع حاصلي جداء العطالة لكل قضيب:

$$I_{XZ} = I'_{XZ} + I'_{XZ}$$

وبما أن الإحداثية z_k للقضيب السفلي تكون مساوية لـــ:

$$z_k = a$$

وللقضيب العلوي تكون مساوية لـــ :

$$z_k = a + h$$

منه ينتج:

$$I'_{XZ} = (\sum m_k . x'_k)\, z'_k = m.x'_G.a = -m'.l.a$$

$$I''_{XZ} = (\sum m_k . x''_k)\, z''_k = m.x''_G(a+h) = m.l(a+h)$$

بالتعويض:

$$I_{XZ} = m.l.h$$

وبالتعويض بالقيم الناتجة في المعادلات (9-19)، نجد أن:

$$R_{A_Y} = R_{B_Y} = 0 \quad , \quad R_{A_X} = -R_{B_X} = \frac{l}{b} m.w^2$$

وتنتج الإشارة السالبة أمام R_{B_X} لأن اتجاهها في (الشكل-9-16) و(الشكل-9-20) متضادان.

مسألة-9-11

عمود مرفقي لمحرك ذي أسطوانة واحدة الموضح في (الشكل-9-21)، يحمل حذافتين (دولاب معدل) متساويتين A و B نصف قطر كل منهما (r =0.5 m)، باعتبار الخد (*Cheek*) والطرف المحمل لمرفق العمود ثقلاً وزنه (P = 210 N)، موجوداً على مسافة (h = 0.2 m) من المحور.

إذا كان (b = 1.4 m و a = 0.6 m). المطلوب تعيين وزني الثقلين W_A و W_B الواجب وضعهما على إطاري الحذافتين لكي تتوازن المجموعة.

الحل:

نمد جملة محاور الإحداثيات OXYZ التي تدور مع الجسم، بحيث يقع مرفق العمود في المستوى OXZ ، وعندئذ يكون هذا المستوى مستوى التماثل، وبالتالي فإن:

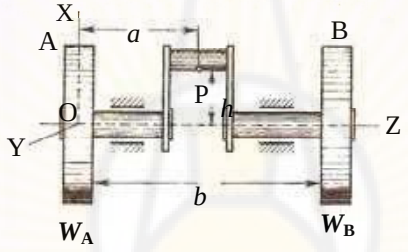
$$y_G = 0$$

وبما أن المحور OY عند ذلك هو محور رئيسي عند النقطة O ؛ فإن:

$$I_{YZ} = 0$$

وعلاوة على ذلك، فإذا رمزنا لوزن كل المجموعة بالرمز W فيكون بالنسبة إليها:

$$I_{XZ} = \frac{P}{g}.a.h \qquad , \qquad x_G = \frac{P.h}{W}$$



(الشكل-9-21) عمود مرفقي لمحرك ذي أسطوانة واحدة.

وتنتج العلاقة الأخيرة من أن حاصل جداء العطالة للمجموعة يساوي المجموع الجبري لحاصل جداء العطالة لأجزائها، وللحذافتين، وأجزاء العمود الملاصقة لهما، ويكون مجموعها مساوياً للصفر لأن المحور OZ محور تماثل.

وعندئذ وكما يتضح من المعادلات (9-23) يجب أن تساوي إحداثيتا الثقلين المضافين صفراً:

$$y_A = y_B = 0$$

ويجب أن يحقق وزناهما W_A و W_B المعادلتين التاليتين:

$$I_{XZ} + \frac{W_A}{g} x_A.z_A + \frac{W_B}{g} x_B.z_B = 0 \qquad , \qquad W.x_G + W_A.x_A + W_B.x_B = 0$$

وبما أن الثقلين يوضعان على إطاري الحذافتين فإن:

$$x_A = x_B = -r \quad , \quad z_B = b \quad , \quad z_A = 0$$

إذا أخذنا الإشارة موجبة لا يكون للمعادلتين أي حل، وبالتالي يجب أن يوضع الثقلان في الناحية السفلى، وبحل المعادلتين نجد أن:

$$W_A = \frac{(b-a)h}{r.b} P = 48\ \mathrm{N} \quad , \quad W_B = \frac{a.h}{r.b} P = 36\ \mathrm{N}$$

وإضافة هذين الثقلين تجعل المجموعة متوازنة، والمحور OZ محوراً رئيسياً مركزياً للعطالة للجسم، ولكنه لا يكون عندئذ محور تناظر.

* * *

مسائل غير محلولة ***PROBLEMS***

م-9-1

سلك طوله ($l = 20$ m) ثبت أحد طرفيه في نقطة O ، وعلق في طرفه الآخر A ثقل ($W = 100$ kg)، بحيث الوضع الابتدائي للثقل هو الوضع الأفقي.

إذا ترك الثقل ليسقط وشأنه من الوضع الأفقي. المطلوب تعيين قوة الشد $T_{(q=90^o)}$ في السلك عندما يكون في الوضع الشاقولي.

الجواب: $T_{(q=90^o)} \cong 3000$ N

م-9-2

تعلق كتلة ($m = 1$ gr) بسلك طوله ($l = 1$ m) في طرفه الحر تهتز الكتلة كـــ نواس بسيط على قوس زاويته راديان واحد.

المطلوب تعيين التسارع الناظمي للكتلة $A^n_{(q=90^o)}$ ، وقوة شد السلك $T_{(q=90^o)}$ عندما تمر الكتلة بالوضع الشاقولي وهي متحركة.

الجواب: $T_{(q=90^o)} = 1225$ Dynes , $A^n_{(q=90^o)} = 245\,\text{cm/sec}^2$

م-9-3

تعلق كتلة m بسلك طوله l في طرفه الحر، تهتز الكتلة كـــ نواس بسيط بزاوية طور φ .

المطلوب تعيين وضع الكتلة θ حيث يكون شد الخيط مساوياً لشده عندما تكون الكتلة ساكنة في الوضع الشاقولي $(q = 0)$.

الجواب: $\cos q = (1 + 2\cos j)/3$

م-9-4

يرفع ثقل W كتلته 10 kg شاقولياً إلى أعلى بتسارع $5\ m/sec^2$ بواسطة حبل، كما هو مبين في a من (الشكل م-9-1).

المطلوب تعيين قوة الشد في الحبل T ، وكيف تصبح هذه القوة في حالة السكون $T_{(A=0)}$ ؟ وكذلك عندما يكون التسارع متجهاً نحو الأسفل $T_{(A\downarrow)}$.

الجواب: $T = 151\,\mathrm{N}$, $T_{(A=0)} = 100\,\mathrm{N}$, $T_{(A\downarrow)} = 49\,\mathrm{N}$



a b

(الشكل م-9-1)

م-9-5

يتحرك جسيم وزنه W على مستوٍ مائل خشن زاويته α وذلك بفعل قوة الثقالة، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-1).

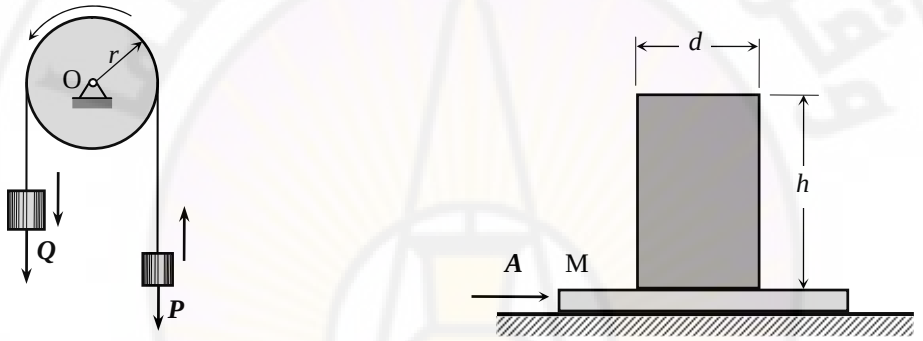
إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الجسيم وبين المستوي المائل هو f_k . المطلوب تعيين علاقة تسارع الجسيم $A^q_{(f_k \neq 0)}$ ، ومن ثم تعيين علاقة تسارعه بفرض أن المستوي المائل أملس $A^q_{(f_k = 0)}$.

الجواب: $A_{(f_k \neq 0)} = g(\sin a - f\cos a)$, $A_{(f_k=0)} = g.\sin a$

م-9-6

يعلق في تركيبة أتود الثقلان P و Q ، كما هو مبين في a من (الشكل م-9-2)، فإذا كان ($P > Q$). المطلوب بإهمال وزن البكرة تعيين كل من التسارع A الذي يتحرك به هذان الثقلان، وقوة ضغط البكرة R على المسند، وكذلك قوة الشد T في الخيط.

الجواب: $A = \dfrac{P-Q}{P+Q}g \quad , \quad R = \dfrac{4P.Q}{P+Q} \quad , \quad T = \dfrac{2P.Q}{P+Q}$



a b

(الشكل م-9-2)

م-9-7

تتحرك الصفيحة M على مستوٍ أفقي بتسارع ثابت $\boldsymbol{A}$ ، وتوضع عليها جسم على شكل متوازي مستطيلات وزنه W وعرضه d وارتفاعه h ، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-2).

إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بينهما هو f_k . المطلوب ما يأتي:

1. تعيين قيمة التسارع A_1 التي يبدأ عندها الجسم بالانزلاق على الصفيحة.
2. بفرض أن الاحتكاك بين الجسم والصفيحة كاف لمنع الانزلاق، فما هي قيمة التسارع A_2 الذي يشرع عنده الجسم بالانقلاب.

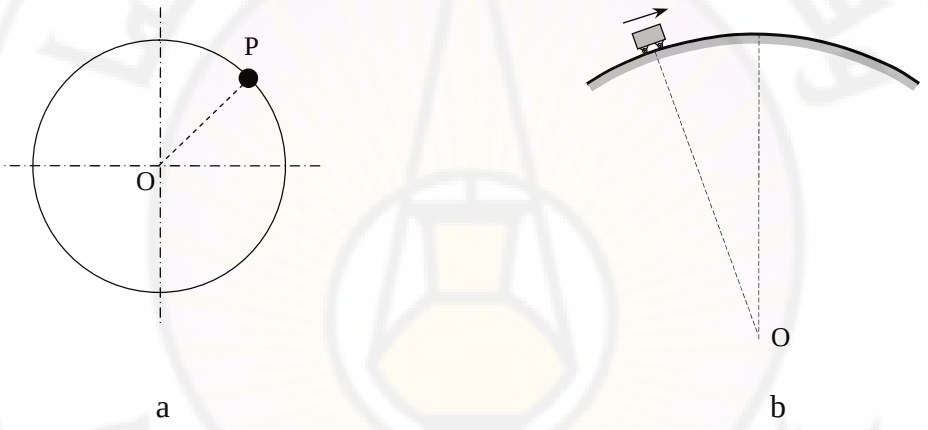
الجواب: $A_1 = f_k.g \quad , \quad A_2 = (d/h)g$

م-9-8

يتحرك جسيم كتلته (m = 200 kg) حركة منتظمة على محيط دائرة قطرها (D = 5 m)، فتدور دورة واحدة خلال 3 sec ، كما هو مبين في a من (الشكل م-9-3).

المطلوب تعيين مقدار القوة F التي تحفظ الجسيم على محيط الدائرة.

الجواب: $F = 2333.5$ N



(الشكل م-9-3)

م-9-9

تتحرك آلية كتلتها 3000 kg على طريق دائرية محدبة نصف قطرها 25 m ، وبسرعة ثابتة مقدارها 36 km/h ، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-3).

المطلوب تعيين الضغط الأعظم للآلية R_{max} على الطريق.

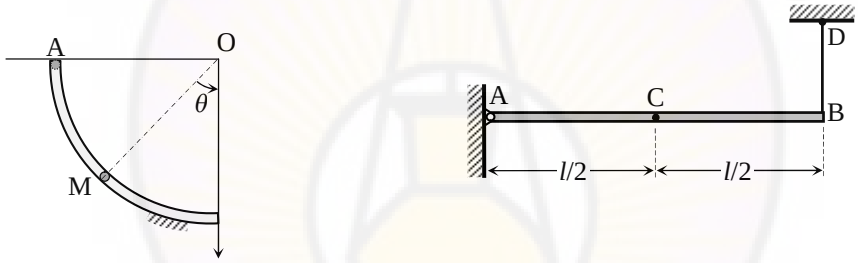
الجواب: $R_{max} = 17760$ N

م-9-10

كتلة صغيرة m تستطيع أن تتحرك داخل أنبوب ربع دائري صقيل أجوف AB ، نصف قطره R ، والكتلة في حالة اتزان في أعلى نقطة منه A .

إذا تركت الكتلة لتسقط وشأنها من الوضع الأفقي ($q = 90^o$)، المبين في a من (الشكل م-9-4) . المطلوب تعيين ضغط الكتلة N_θ على الأنبوب في الوضع θ ، ومركبة التسارع A_y على الشاقول OY في الوضع ($q = 60^o$).

الجواب: $N_q = 3m.g.\cos q \quad , \quad A_y = g/4$



a b

(الشكل م-9-4)

م-9-11

قضيب موشوري رفيع وزنه W ، وطوله l ، يثبت طرفه A بمفصل ويربط طرفه الآخر B بخيط لين BD ، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-4).

المطلوب إيجاد رد الفعل R_A في A لحظة قطع الخيط مباشرة، وقبل أن يتمكن القضيب من الدوران دوراناً محسوساً.

الجواب: $R_A = W/4$

م-9-12

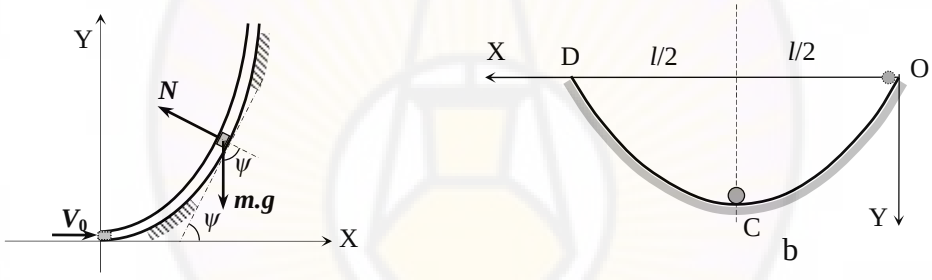
ينزلق جسيم صغير كتلته m داخل أنبوب ثابت على هيئة قطع مكافئ موضوع في مستوى رأسي كما هو مبين في a من (الشكل م-9-5)، ومعادلته:

$$y = 2a.x^2$$

إذا قذف الجسيم من رأس هذا القطع بسرعة V_0 ، وواصل سيره داخل الأنبوب. المطلوب إيجاد علاقة ضغط الجسيم $N\rho$ على الأنبوب خلال مرورها فيه.

إرشاد : استعمل علاقة نصف قطر الانحناء التالية $r = (1+y'^2)^{3/2} / y''$

الجواب: $N_r = m.V_0^2 + m.g/4a$



(الشكل م-9-5)

م-9-13

كرة صغيرة كتلتها (m=2.5 kg)، تتحرك بدافع ثقلها على الخط الأملس OCD ، المبين في b من (الشكل م-9-5)، معادلته:

$$y = h.\sin\frac{x}{l} \quad \text{حيث} \quad h = \frac{l}{3} = 1\,\text{m}$$

إذا بدأت الكرة حركتها من السكون من الوضع O . المطلوب إيجاد رد الفعل R_C في الوضع C .

إرشاد: استعمل علاقة نصف قطر الانحناء التالية: $r = (1+y'^2)^{3/2} / y''$

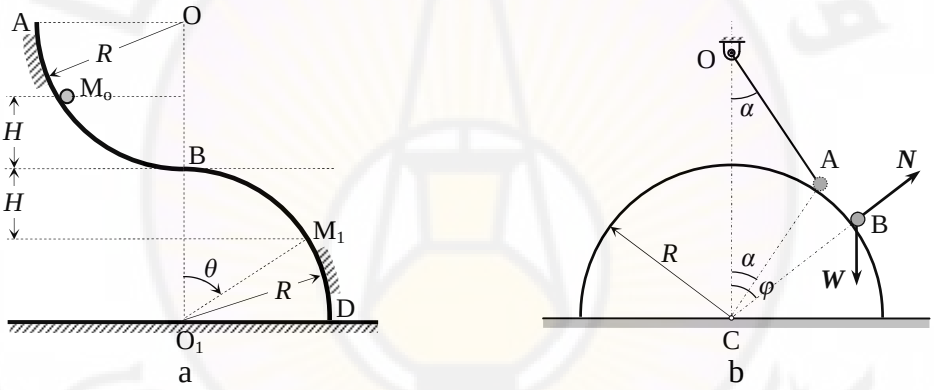
الجواب: $R_C \approx 78\ \text{N}$

م-9-14- (الفصل الأول-1997-1998)

سلك أملس مؤلف من قوسين دائريين $(R_1 = R_2 = R)$. المماس المشترك للدائرتين في نقطة الانعطاف B أفقي، ويقع مركزا الدائرتين (O_1, O_2) على الشاقول المار من B ، كما هو مبين في a من (الشكل م-9-6).

توضع كرة صغيرة كتلتها m على القوس العلوي من السلك في الوضع M_0 التي تعلو الأفق بمسافة h بدون سرعة ابتدائية. المطلوب كم ينبغي أن تكون قيم h حتى تنفصل الكرة من القوس السفلي في الوضع M_1 التي تقع تحت الأفق بمسافة h أيضاً.

الجواب: $h = R/5$



(الشكل م-9-6)

م-9-15- (الدورة الامتحانية الثالثة-2011-2012)

تعلق كرة A صغيرة ثقلها W بخيط غير مرن طوله a يثبت طرفه الآخر بنقطة O . تستند الكرة على سطح أسطوانة ملساء نصف قطرها يساوي a ، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-6).

إذا ما قطع الخيط وهي في وضع يصنع OA مع الشاقول زاوية α . المطلوب تعيين قيمة الزاوية φ المحددة للوضع الذي تترك فيه الكرة سطح الأسطوانة.

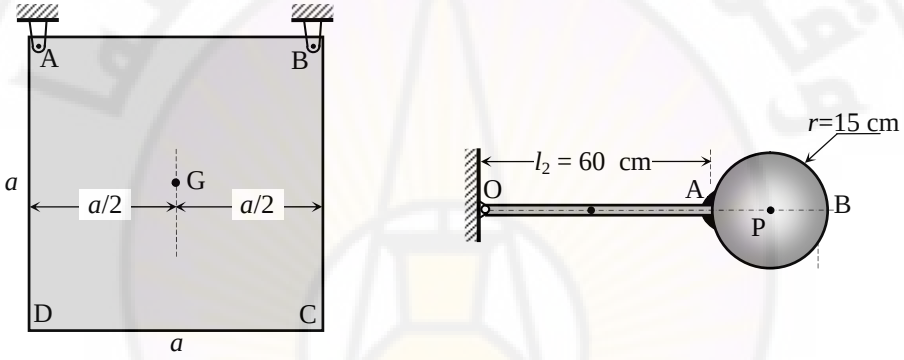
الجواب: $\cos j = (2/3)\cos a$

م-9-16

تعلق صفيحة متجانسة وزنها W ومربعة الشكل طول ضلعها a في المستوي الرأسي بواسطة المفصلين A , B ، كما هو مبين في a من (الشكل م-9-7).

المطلوب إيجاد مركبات رد الفعل R_A في المسند A في اللحظة التي تلي إزالة الوتد من المفصل B مباشرة.

الجواب: $R_{AX} = 3W/8$, $R_{AY} = 5W/8$



a b

(الشكل م-9-7)

م-9-17

تتصل كرة مصمتة متجانسة وزنها (W_1=1200 N)، ونصف قطرها (r=15 cm)، وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي P هو ($I_P = 0.4M_1 r^2$)، اتصالاً صلداً مع قضيب رفيع OA وزنه (W_2 = 250 N) وطوله (l_2 = 60 cm)، وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو ($I_O = M_2.l_2^2/3$)، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-7).

إذا كانت السرعة الزاوية للقضيب في الوضع الأفقي له تساوي (ω = 8 rad/sec). المطلوب إيجاد مقدار التسارع الزاوي للجملة ε ، ومركبات رد الفعل التحريكي R_O في المفصل O .

الجواب: $\varepsilon = 13.36\ \text{rad/sec}^2$, $R_{OX} = 6360.7$ N , $R_{OY} = 122.2$ N

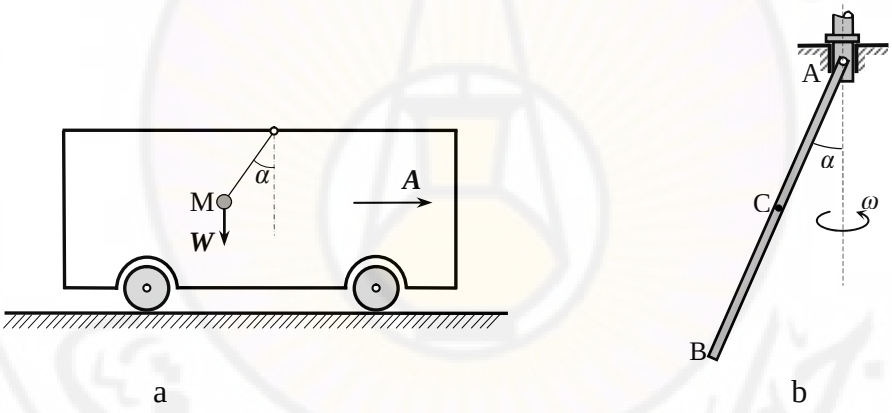
م-9-18

يعلق ثقل نواس بطرف سلك طويل ثبت طرفه الآخر بسقف عربة قطار، بحيث يكون النواس ساكناً قبل حركة القطار. يتحرك القطارعلى خط مستقيم أفقي حركة متسارعة ، وأثناء الحركة ينحرف الثقل عن الشاقول بزاوية α ، كما هو مبين في a من (الشكل م-9-8)، ويهتز النواس ويقوم بحركة اهتزازية.

إذا كانت سعة الحركة الاهتزازية ($\alpha = 6^o$). المطلوب تعيين:

1. تسارع حركة القطار A .
2. الفارق بين دوري النواس وذلك بين حالة سكون القطار وحالة حركته.

الجواب: $A = 102.6\ \text{cm/sec}^2$, $T_s - T_{s_1} = 0.00265\ \text{sec}$



a b

(الشكل م-9-8)

م-9-19

يتألف نواس مخروطي من القضيب الموشوري الرفيع AB الذي وزنه W وطوله l ، ويتصل هذا القضيب مع محور شاقولي يدور بسرعة ثابتة ω ، كما هو مبين في b من (الشكل م-9-8).

المطلوب تعيين زاوية المخروط α التي يشكلها القضيب.

الجواب: $\cos a = 3g / 2l.w^2$

م-9-20

جسيم M وزنه W يعلق بطرف سلك غير مرن طوله l ، ويثبت الطرف الثاني منه بمسند ثابت O ، ويتزن الثقل مع السلك في وضع شاقولي.

المطلوب ما هي أصغر سرعة ابتدائية عمودية على السلك وواقعة في المستوى الشاقولي ينبغي إعطاؤها للجسيم M حتى يتمكن من رسم دائرة كاملة.

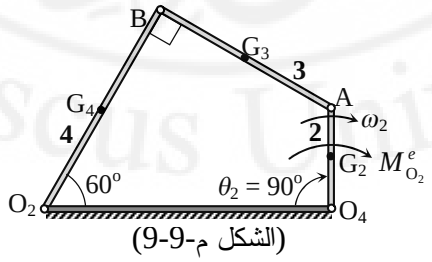
ارشاد: إذا تم تعليق الجسيم بقضيب خفيف جداً طوله l عوضاً عن السلك لإهمال وزنه، لعمل القضيب في الاتجاهين شداً وضغطاً، وأمكن للجسيم أن يقوم بدورة كاملة ولو كان الشد سالباً، أي حتى ولو تحول إلى ضغط، وبالتالي فإن أصغر سرعة V_0 تعطى للجسيم M وهو في الوضع $(j = 0)$ ينبغي أن تكفي لرفع الجسيم حتى أعلى نقطة من الدائرة، ويعني ذلك إمكانية انعدام السرعة V في النقطة $(j = p)$.

الجواب: $V_0 = \sqrt{5g.l}$

م-9-21

تتكون الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي من أربع وصلات منتظمة متجانسة مراكز ثقلها G_2 , G_3 , G_4 تقع في منتصفها. الوصلة 2 فيها يمثل مرفق O_2A يدور حول المسند الثابت O_2 بعدد دورات قدره $(n_2 = 50 \text{ r.p.m})$ باتجاه حركة عقارب الساعة لينقل الحركة إلى الوصلة 4 ذراع متأرجح O_4B عبر الوصلة 3 ذراع توصيل الحركة AB ، كما هو مبين في (الشكل.م-9-9).

إذا كان أطوال الوصلات هي $(l_2 = 17.5 \text{ cm})$ و $(l_3 = 35 \text{ cm})$ و $(l_4 = 40 \text{ cm})$، وكتلها هي $(M_2 = 1.75 \text{ kg})$ و $(M_3 = 3.5 \text{ kg})$ و $(M_4 = 4 \text{ kg})$، وعزوم عطالتها حول مراكز كتلها هي $(I_{G_2} = 0.0045 \text{kg.m}^2)$ و $(I_{G_3} = 0.036 \text{ kg.m}^2)$ و $(I_{G_4} = 0.053 \text{kg.m}^2)$. المطلوب دراسة حركة الجملة لإيجاد مميزات الحركة لعناصرها، ومن ثم إيجاد قيمة واتجاه كل من القوى المؤثرة في مفاصل الجملة، وكذلك العزم الخارجي $M^e_{O_2}$ اللازم تطبيقه على المرفق 2 للتغلب على عطالة وصلات الجملة حتى تتحرك بمميزاتها الحركية عند الوضع $(\theta_2 = 90^o)$، وذلك بطريقة تحليل القوى في الوصلات بعد اهمال الاحتكاك في مفاصلها.



(الشكل م-9-9)

الفصل العاشر

العمل الافتراضي *Virtual Work*

1- مقدمة *Introduction*

سندرس في هذا الفصل مبدأ عاماً آخر من مبادئ الميكانيك، وهو مبدأ العمل الافتراضي (*Principle of Virtual Work*)، الذي يضع في صورة أكثر تعميماً شروط اتزان جملة ميكانيكية أي: مجموعة ميكانيكية، ويعتمد على الدراسة الحركية للجسم المتماسك، والهدف العام من استخدامه هو الحصول على بعض مجاهيل الأجسام المتزنة، فهدف المبدأ إذاً هدف توازن وسيلته حركية كما سيتضح الآن، وأهم تطبيقاته هي حل المسائل غير المحددة سكونياً التي تصادف المهندسين كثيراً، إلا أن التطبيقات التي سنوردها فيما يلي سنختارها من بين المسائل المحددة سكونياً؛ حتى نبين للقارئ كيف يستخدم المبدأ بصورة مبسطة، ونعطي في الوقت نفسه الشرح العام القابل للتطبيق في الحالات الأصعب.

ولقد وضع هذا المبدأ لأول مرة دون برهان من قبل العالم الرياضي السويسري الشهير جان برنوللي (*Jean Bernoulli*) (1667-1748)، وقد صاغ من بعده العالم الفرنسي جوزيف لاغرانج (*Joseph Lagrange*) هذا المبدأ في صورة عامة، وأثبته سنة 1788 ، وبرهن على فعاليته وخصوصاً عند معالجة الأنواع المعينة من مسائل علم التوازن، وقد عمم الباحث استروجرادسكي في أبحاثه في الفترة من (1838 إلى 1842) هذا المبدأ على حالة القيود غير الثابتة، أي: القيود التي يمكن أن يتخلص منها الجسم.

2- مبدأ العمل الافتراضي *Principle of Virtual Work*

لقد اضطررنا عند دراسة اتزان مجموعة الأجسام بطرق علم التوازن إلى دراسة اتزان كل جسم على حدة؛ باستبدال القيود المفروضة بردود أفعالها المجهولة مسبقاً، واعتبار أن مجموعة القوى الخارجية التي تؤثر على هذا الجزء تكون متزنة، أي: محصلتها معدومة، وبالتالي يمكن كتابة علاقات التوازن في اتجاه محاور الإحداثيات T(OXYZ) على الشكل:

$$\sum F_X = 0 \quad , \quad \sum F_Y = 0 \quad , \quad \sum F_Z = 0 \qquad (1\text{-}10)$$

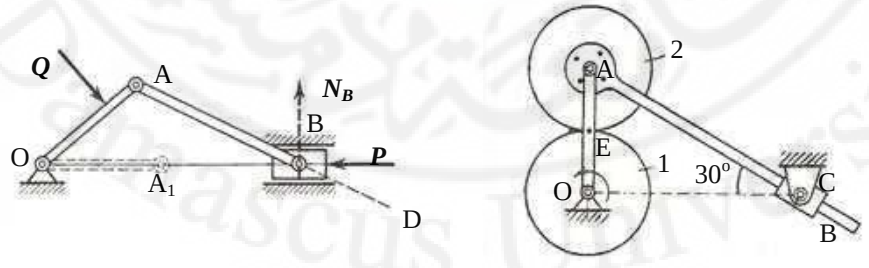
بحل هذه العلاقات يمكن إيجاد المجاهيل المطلوبة. لكن عندما يكون عدد الأجسام في الجملة كبيراً، تصبح هذه الطريقة مطولة للغاية، ومرتبطة بضرورة حل عدد كبير من العلاقات ذات المجاهيل الكثيرة.

أما طريقة العمل الافتراضي لحل هذا النوع من المسائل، فإنها تضع شروط اتزان الجملة الميكانيكية بصورة أكثر تعميماً، بشكل تساعد على حلها، وحل جميع المسائل التي يستحيل حلها بالاستناد إلى المفاهيم القديمة، وفي تبسيط الحل، واختصار الطرق المؤدية إليه.

وتكمن الصفة المميزة للطريقة المستنبطة من مبدأ العمل الافتراضي في أنه عند تطبيق هذا المبدأ يؤخذ بعين الاعتبار تأثير القيود، لا بإدخال ردود الأفعال المجهولة مسبقاً، ولكن بوساطة دراسة الانتقالات التي يمكن أن تكتسبها جسيمات الجملة بشرط ألا تغير الجملة من وضعها، ومن ثم تطبيق مفهوم عمل القوة.

تدعى هذه الانتقالات في الميكانيك بـــ الانتقالات الافتراضية، أو الممكنة، أو الانتقالات المحتملة (*Virtual Displacement*)، ويجب أن تحقق هذه الانتقالات خطية كانت، أو زاوية لجسيمات الجملة الشرطين التاليين:

- أن تكون هذه الانتقالات متناهية في الصغر من المرتبة الأولى، وذلك لأن الجملة عند الانتقالات المحدودة تنتقل إلى موضع آخر، حيث يمكن أن تكون شروط الاتزان مختلفة.
- أن تكون هذه الانتقالات بشكل تحتفظ فيه الجملة بكل القيود المفروضة عليها؛ وإلا فإننا نغير شكل الجملة الميكانيكية المدروسة، بحيث نحصل على جملة أخرى.



a b

(الشكل-10-1) مجموعة آليات مرفقية.

فمثلاً في الآلية المرفقية المبينة في a من (الشكل-10-1) لا يمكن اعتبار انتقالات نقط المرفق OA إلى الموضع OA_1 انتقال افتراضي؛ لأن شروط اتزان الآلة في هذا الوضع تحت تأثير القوتين $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ تكون مختلفة عن الموضع الأول.

وبالمثل لا يمكن اعتبار حتى الانتقال المتناهي في الصغر للنقطة B على امتداد المستقيم BD انتقال افتراضي، فهذا الانتقال قد يكون ممكناً إذا كانت في النقطة B جلبة (*Muff*) متأرجحة بدلاً من المنزلقة كما في الآلية المرفقية المبينة في b من (الشكل-10-1)، أي: إذا كانت الآلية المرفقية مختلفة عن تلك التي ندرسها.

وهكذا فالانتقالات الافتراضية للجملة هي أيّ مجموعة من الانتقالات المتناهية في الصغر لجسيمات الجملة التي تسمح بها في اللحظة المعطاة كل القيود المفروضة على الجملة، وسنمثل الانتقال الافتراضي لأيّ جسيم من جسيمات الجملة بمتجه أولي يرمز له بـــ $\boldsymbol{\delta r_k}$ ويتجه في ناحية الانتقال.

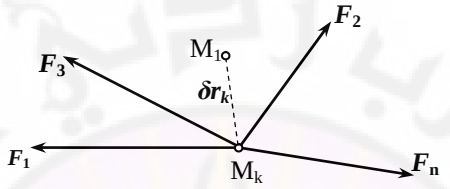
هذا الرمز يمثل تفاضل من الدرجة الأولى، ويستعمل للتمييز بين الانتقال الافتراضي والانتقال الحقيقي $\boldsymbol{dr_k}$ الذي يحدث فعلاً عند كون الجسيم المادي في حالة الحركة.

في الحالة العامة قد يوجد لجسيمات ولأجسام الجملة العديد من الانتقالات الافتراضية على أن لا نعتبر الانتقالين $\boldsymbol{\delta r_k}$ و $\boldsymbol{-\delta r_k}$ مختلفتين، كما يمكن الحصول على أي انتقال افتراضي $\boldsymbol{\delta r_k}$ كمجموع لانتقالين $\boldsymbol{\delta r_{1k}}$ و $\boldsymbol{\delta r_{2k}}$ على امتداد محورين متعامدين واقعين في المستوى ($\boldsymbol{\delta r_k = \delta r_{1k} + \delta r_{2k}}$).

ويمكن أن يكون لكل جملة حسب طبيعة القيود المفروضة عليها، عدداً معيناً من الانتقالات المستقلة بعضها عن بعض، ويدعى عدد الانتقالات الافتراضية المستقلة هذه بـــ عدد درجات الطلاقة للجملة، أو درجات حرية الجملة، ومن الواضح أن للجسيم المادي الحر ثلاث درجات للطلاقة لأن عدد الانتقالات الافتراضية المستقلة ثلاثة على امتداد ثلاثة محاور متعامدة، وللجسيم المادي المقيد عندما يتحرك في مستوى أو على سطح درجتين للحرية، ويكون للجسم الصلب الحر ست درجات للطلاقة، ثلاثة انتقالات انسحابية مستقلة على امتداد محاور الإحداثيات، وثلاثة انتقالات دورانية مستقلة حول هذه المحاور.

2-1- مبدأ العمل الافتراضي للجسيم المادي الحر

نعدّ جسيماً مادياً حراً M_k ينتقل في الاتجاهات كافة، ويخضع لتأثير مجموعة من القوى المتلاقية $\boldsymbol{F_1}$، $\boldsymbol{F_2}$ ، $\boldsymbol{F_3}$ ،.....، $\boldsymbol{F_n}$ كما هو مبين في (الشكل-10-2)، بحيث إذا انعدمت محصلة هذه القوى ($\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} = 0$) اتزن الجسيم المادي.



(الشكل-10-2) جسيم مادي حر يخضع لتأثير مجموعة من القوى المتلاقية.

نفرض أن الجسيم M_k المتزن انتقل انتقالاً صغيراً من موضع M إلى آخر M_1 ، وبصورة عامة يمكن لهذا الجسيم أن ينتقل من موضعه إلى موضعه الجديد، ومع ذلك ليس من الضروري أن يحدث هذا الانتقال؛ لأن القوى المعطاة متزنة، وبالتالي الجسيم في حالة توازن، أو أنه يتحرك بتأثير القوى المطبقة في اتجاه يخالف الاتجاه $\mathbf{MM_1}$ ؛ فلذا فالانتقال المفروض هو انتقال تخيلي، وهو ما يدعى بـــ الانتقال الافتراضي، وتقوم كل قوة $\boldsymbol{F}$ بعمل خلال الانتقال الافتراضي يدعى بـــ العمل الافتراضي الجزئي، ويرمز له بـــ δw ، ومنه:

$$d\,w = \boldsymbol{F}\,.\,\boldsymbol{\delta r_k} \qquad (2\text{-}10)$$

وبما أن الجسيم حر فيمكن حساب العمل تحليلياً بدلالة ثلاثية قائمة، ومباشرة T(OXYZ) نحصل على:

$$d\,w = (F_{\mathrm{X}}.d\,x_k + F_{\mathrm{Y}}.d\,y_k + F_{\mathrm{Z}}.d\,z_k)$$

وتمثل δx_k ، δy_k ، δz_k مساقط الانتقال الافتراضي للجسيم على محاور الإحداثيات، وهي تساوي عناصر تغير إحداثيات هذا الجسيم عند انتقاله، وتحسب كما يحسب تفاضل الإحداثيات، وتكون محصلة أعمال القوى المؤثرة في الجسيم هي:

$$d\,w = (\boldsymbol{F_1}\,.\,\boldsymbol{\delta r_{1k}} + \boldsymbol{F_2}\,.\,\boldsymbol{\delta r_{2k}} + \boldsymbol{F_3}\,.\,\boldsymbol{\delta r_{3k}} + \ldots\ldots + \boldsymbol{F_n}\,.\,\boldsymbol{\delta r_{nk}})$$

$$d\,w = (\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \ldots\ldots + \boldsymbol{F_n})\,\boldsymbol{\delta r_k}$$

$$d\,w = \boldsymbol{R}\,.\,\boldsymbol{\delta r_k} \qquad (3\text{-}10)$$

نستنتج أن مجموع الأعمال الافتراضية للقوى المؤثرة يكون مساوياً للعمل الافتراضي لمحصلتهم $\boldsymbol{R}$ ، والانتقال الافتراضي $\boldsymbol{\delta r_k}$ واحد لهذه القوى كافة، ومساقطه على المحاور الإحداثية واحدة في الأعمال الجزئية كافة، وعليه يمكن كتابة العلاقة أعلاه تحليلياً بالشكل:

$$dw = (R_X.dx_k + R_Y.dy_k + R_Z.dz_k) \qquad (4\text{-}10)$$

وإذا اتزن الجسيم انعدمت محصلة القوى المؤثرة عليه ($\boldsymbol{R} = 0$)، وانعدمت مساقطها على المحاور الإحداثية وفق العلاقة (10-1) ويكون بالتالي:

$$dw = 0 \qquad (5\text{-}10)$$

وذلك مهما كانت قيمة كل من δx_k ، δy_k ، δz_k أي: مهما كانت عناصر متجه الانتقال الافتراضي $\boldsymbol{\delta r_k}$.

فالعمل الافتراضي الكلي لجميع القوى الموافق لجسيم مادي حر، ومتزن، يكون معدوماً مهما كان منحى انتقاله الافتراضي واتجاهه وقيمته. كما أن النتيجة العكسية صحيحة أيضاً، أي: أنه يمكن القبول باتزان جسيم مادي حر تحت تأثير مجموعة من القوى عندما ينعدم العمل الافتراضي لهذه القوى؛ إذا ما انتقل هذا الجسيم انتقالاً افتراضياً ما قدره $\boldsymbol{\delta r_k}$ ، ومركباته δx_k ، δy_k ، δz_k هي مقادير جبرية غير معدومة؛ بحيث يمكن اختيارها دون تحديد، وعليه:

$$dw = (R_X.dx_k + R_Y.dy_k + R_Z.dz_k) = 0 \qquad (6\text{-}10)$$

لا يمكن أن تكون العلاقة هذه محققة من أجل قيم غير معينة لمركبات $\delta\, \boldsymbol{r}_k$ ؛ إلا إذا تحققت العلاقات (10-1)، أي: بانعدام محصلة القوى المؤثرة ($\boldsymbol{R} = 0$) في الجسيم، ويعني ذلك اتزان الجسيم، ومنه نص مبدأ العمل الافتراضي في حالة جسيم حر:

إن الشرط اللازم والكافي حتى يكون جسيم مادي حر في حالة اتزان؛ هو أن يكون مجموع أعمال القوى المؤثرة في الجسيم معدوماً، وذلك في انتقال افتراضي ما لهذا الجسيم.

2-2- مبدأ العمل الافتراضي للجسيم المادي المقيد

في حالة كون الجسيم المادي المقيد؛ فإنه لا يتصف بالحركة في الاتجاهات كافة، لأنه يبقى ملازماً خلال حركته لمساره المقيد تحت تأثير مجموعة من القوى الفاعلة $\boldsymbol{F_1^a, F_2^a, F_n^a}$.

نورد مفهوم العمل الافتراضي الأولي؛ الذي تبذله كل من القوى الفاعلة $\boldsymbol{F^a}$ ، ورد فعل القيد $\boldsymbol{N}$ على الجسيم المادي في انتقاله انتقال مطابق للانتقال الافتراضي $\boldsymbol{\delta r_k}$ لهذا الجسيم، حيث:

$$dw^a = \boldsymbol{F^a}.\boldsymbol{\delta r_k} = F^a.ds_k.\cos a$$

α الزاوية المحصورة بين اتجاهي القوة والانتقال، ونرمز للعمل الافتراضي لرد الفعل $\boldsymbol{N}$ بالرمز δw^r .

ولقد ورد في الفقرة (12) من الفصل السادس مفهوم مهمّ حول الجملة ذات القيود المثالية، وتبعاً للمعادلة (6-40) تكون القيود المفروضة على الجملة قيوداً مثالية، إذا كان مجموع عناصر العمل الذي تبذله ردود أفعال هذه القيود؛ في أي انتقال افتراضي مساوياً للصفر، أي:

$$\sum dw_k^r = 0 \qquad (7\text{-}10)$$

ولندرس جملة من الجسيمات المادية؛ التي تكون متزنة تحت تأثير كل القوى المؤثرة عليها، والقيود المفروضة عليها، وسنعدُّ جميع قيود الجملة عند ذلك مثالية.

نأخذ جسيماً اختيارياً M_k من جسيمات الجملة، ونرمز لمحصلة جميع القوى الفاعلة المؤثرة عليها الداخلية والخارجية بالرمز $\boldsymbol{F_k^a}$ ، ولمحصلة جميع ردود أفعال القيود الداخلية والخارجية أيضاً بالرمز $\boldsymbol{N_k}$ ، وعندئذ بما أن الجسيم M_k يكون مع كل الجملة في حالة اتزان؛ فإن:

$$\boldsymbol{F_k^a + N_k = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{N_k = -F_k^a}$$

وبالتالي فعند أي انتقال افتراضي للجسيم M_k يكون العملان الافتراضيان $\sum dw_k^a$ و $\sum dw_k^r$ ، للقوى المؤثرة على هذا الجسيم $\boldsymbol{F_k^a}$ ، $\boldsymbol{N_k}$ متساويين في المقدار، ومختلفين في الإشارة، ويساوي مجموعهما صفراً، أي: يكون:

$$dw_k^a + dw_k^r = 0$$

وبتكرار العملية نفسها نحصل على علاقات مماثلة لكل جسيمات الجملة، وبجمعها حداً حداً نحصل على:

$$\sum dw_k^a + \sum dw_k^r = 0$$

ولكن إذا كانت القيود المفروضة على الجملة مثالية، فإن المجموع الثاني وفقاً للعلاقة (7-10) يكون مساوياً للصفر، وبالتالي يكون:

$$\sum dw_k^a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum (F_k^a . ds . \cos a) = 0 \qquad (8\text{-}10)$$

وهكذا فقد أثبتنا أنه إذا كانت الجملة الميكانيكية ذات القيود المثالية في حالة اتزان، فإن القوى الفاعلة المؤثرة عليها تحقق الشرط (8-10).

كما أن النتيجة العكسية صحيحة أيضاً، أي: أنه إذا حققت القوى الفاعلة المؤثرة على الجملة الميكانيكية الشرط (8-10)، فإن الجملة تكون في حالة اتزان، ومنه نص مبدأ العمل الافتراضي حالة جملة ميكانيكية:

إن الشرط اللازم والكافي لاتزان جملة ميكانيكية ذات قيود مثالية، أن يكون مجموع العمل الأولي؛ الذي تبذله كل القوى الفاعلة المؤثرة عليها في أي انتقال افتراضي للجملة مساوياً الصفر، غير آبهين بقوى القيد أو الاتصال.

يعبر رياضياً عن الشرط الضروري والكافي لاتزان أيّ جملة ميكانيكية بالعلاقة (8-10) التي تسمى بـــ علاقة العمل الافتراضي.

2-3- مبدأ العمل الافتراضي للجسم المادي الصلب

يتزن الجسم الصلب إذا كافأت جملة القوى المستوية المؤثرة في نقاطه الصفر، وترد جملة القوى المستوية المؤثرة في الجسم الصلب في نقطة ما من مستوى هذا الجسم إلى محصلة عامة $\boldsymbol{R}$ وازدواج $\boldsymbol{C}$ ، ويتزن عندئذ الجسم الصلب إذا انعدمت هذه المحصلة، وانعدم الازدواج.

ويعني تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على الجسم الصلب المستوى، نقل هذا الجسم المتزن من وضع اتزانه إلى وضع آخر؛ على أن تتم عملية الانتقال في المستوى ذاته. هذا الانتقال الصغير $\Delta \boldsymbol{r}$ في المستوى يكافئ دوراناً صغيراً قدره $\delta\varphi_k$ وانسحاباً صغيراً قدره $\boldsymbol{\delta r_k}$ ، ففي الجزء الدوراني من الحركة لا تقوم المحصلة بأي عمل، وما يعمل هو الازدواج فقط، كذلك لا يقوم الازدواج بأي عمل في الجزء الانسحابي من الحركة، وما يعمل هو المحصلة فقط.

في الجزء الانسحابي من الحركة، حيث تنسحب جسيمات الجسم كافة وفق المتجه الطليق $\boldsymbol{\delta r_k}$ ، والعمل في هذه الحركة يعطى بـــ:

$$dw_1 = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{\delta r_k} = R_X.dx_k + R_Y.dy_k \qquad (9\text{-}10)$$

وفي الجزء الدوراني من الحركة، حيث تدور جسيمات الجسم كافة حول محور عمودي على مستوى الجسم المار من النقطة O مبدأ المحاور XY ، والعمل في هذه الحركة يعطى بـــ:

$$dw_2 = C.dj_k \qquad (10\text{-}10)$$

والعمل الافتراضي الكلي هو إذاً:

$$dw = dw_1 + dw_2 = R_X.dx_k + R_Y.dy_k + C.dj_k$$

فإذا كان الجسم متزناً كافأت عندها جملة القوى المستوية المؤثرة عليه الصفر، وانعدمت محصلتها العامة وعزمها المحصل في نقطة ما O ، أي:

$$C = 0 \quad , \quad R_X = 0 \quad , \quad R_Y = 0 \qquad (11\text{-}10)$$

ويكون بالتالي:

$$dw = 0 \qquad (12\text{-}10)$$

وذلك مهما كانت قيم dx_k, dy_k, dj_k ، أي: مهما كان الانتقال الافتراضي للجسم شرط أن يتم الانتقال في مستوى القوى.

فالعمل الافتراضي الكلي لجميع القوى الموافق لجسم صلب ومتزن؛ يكون معدوماً مهما كان منحى واتجاه وقيمة الانتقال الافتراضي لجسيماته. كما أن النتيجة العكسية صحيحة أيضاً، أي: إذا انعدم العمل الافتراضي للقوى المستوية في انتقال ما للجسم، وجب عندها أن تكون القيم dx_k , dy_k , dj_k معدومة، أي: أن جملة القوى المستوية المؤثرة في الجسم تكافئ الصفر، وبالتالي يجب أن يكون الجسم متزناً، ومنه نص مبدأ العمل الافتراضي حالة الجسم الصلب:

إن الشرط اللازم والكافي حتى يتزن جسم صلب يقع تحت تأثير جملة من القوى المستوية، هو أن ينعدم العمل الافتراضي لهذه القوى في انتقال افتراضي ما، مقيد بمستوى الجملة.

إذا كان الجسم الصلب المتزن مؤلفاً من أجزاء يتصل بعضها ببعض، وجب عندها أن يكون الانتقال الافتراضي موافقاً لشروط المسألة، أي: أن يحافظ الجسم على شكله الهندسي في انتقاله المفروض، والأجزاء المتصلة تخضع لتأثير قوى داخلية، تدعى بـــ قوى الاتصال، تنشأ في مواضع الاتصالات، وتكون هذه القوى متعاكسة مباشرة مثنى مثنى، عندئذ لا فائدة في أخذ هذه القوى بعين الاعتبار عند حساب الأعمال الافتراضية.

وإذا لازم الجسم الصلب مستوياً صقيلاً، أو عدداً من المستويات الصقيلة، أثرت عليه هذه المستويات بردود أفعال ناظميه على هذه المستويات، ولا تقوم ردود الفعل هذه بعمل في الانتقال الافتراضي المقترح؛ لأنها تبقى عمودية على الانتقال، فلا فائدة إذاً من أخذ هذه القوى بعين الاعتبار عند حساب الأعمال الافتراضية.

وما قيل عن قوى الاتصال وقوى رد الفعل يمكن أيضاً أن يقال عن قوى الضغط والشد في القضبان، والأسلاك الخفيفة، إذا ما شكلت هذه القضبان، أو الأسلاك أجزاء من الجسم الصلب المعتبر.

بالتالي يمكن أن يعمم مبدأ العمل الافتراضي على حالة جملة من الأجسام المتصلة بعضها مع بعض، فإذا بقيت هذه الجملة متصلة بعضها ببعض أثناء العمل الافتراضي، فيؤخذ عندئذ عمل القوى الخارجية على الجملة فقط بعين الاعتبار.

يكون مبدأ العمل الافتراضي فعالاً بصورة خاصة عند تطبيقه؛ من أجل حل مسائل تتضمن جملة ميكانيكية تتألف من مجموعة من الأجسام الصلبة المرتبطة بعضها ببعض، حيث يفرض عادة في مثل هذه الجمل أن الاحتكاك معدوم في المفاصل، أو مقاعد المحاور، أو على سطوح الانزلاق، كما نفرض أن أجزاء الجملة كلها صلبة، عندئذ نسمي هذه الجملة بـــ الجملة المثالية، وتكمن قيمة مبدأ العمل الافتراضي في أنه يعطي بشكل عام شرط اتزان أي جملة ميكانيكية، في حين تتطلب طرق علم التوازن البيانية دراسة اتزان كل جسم من أجسام الجملة على انفراد.

3- تطبيق مبدأ العمل الافتراضي في حل المسائل

تعطي العلاقتان (10-6) أو (10-8) مباشرة شرط اتزان جملة ذات درجة طلاقة واحدة، أو درجة حرية واحدة، وإذا كانت للجملة بضع درجات طلاقة، فيجب تكوين هذين الشرطين لكل انتقال من الانتقالات المستقلة للجملة على حدة، وعندئذ نحصل للجملة على عدد من شروط الاتزان مساو لعدد درجات حريتها.

ويمكن عند حل المسائل تحديد درجات طلاقة الجملة المستوية المختلفة عملياً، وذلك بأن نفرض أن الجملة تتحرك، فإذا أوقفنا الحركة الانسحابية، أو الدورانية لوصلة ما من الجملة، وتوقفت حركة الجملة كلها في آن واحد، كانت للجملة درجة واحدة للطلاقة. أما إذا أمكن للجملة الاستمرار في حركتها على الرغم من إيقاف الحركة الدورانية، أو الانسحابية لوصلة واحدة، ولكنها تتوقف بعد ذلك عند إيقاف حركة وصلة ما أخرى، فإنه تكون للجملة في هذه الحالة درجتان للطلاقة، وهكذا.

لحل المسألة بطريقة بيانية لا بد من:

1. أن نمثل في الرسم كل القوى الفاعلة المؤثرة على الجملة.

2. إكساب الجملة انتقالاً افتراضياً، ثم رسم متجهات الانتقالات الأولية δr_k لنقط تأثير القوى، أو الزوايا الأولية، أي: عناصر الزوايا $\delta\varphi_k$ لدورانات الأجسام التي تؤثر عليها القوى، وإذا كانت للجملة عدة درجات طلاقة؛ فيجب إكسابها أحد الانتقالات الافتراضية المستقلة.

3. حساب العمل الأولي؛ الذي تبذله جميع القوى الفاعلة، وتطبيق الشرط اللازم لاتزان الجملة:

$$dw = 0$$

ويمكن تطبيق هذا الشرط بالطريقة التحليلية، وذلك باختيار محاور الإحداثيات مثبتة بالجسم؛ الذي يظل ثابتاً عند الانتقالات الافتراضية للجملة ثم يتم حساب مساقط جميع القوى الفاعلة على المحاور المختارة، وتعيين الإحداثيات x_k، y_k، z_k لنقط تأثير هذه القوى بالتعبير عنها بدلالة متغير كالزاوية مثلاً، وبعد ذلك نعين الإزاحات الانتقالية δx_k، δy_k، δz_k بتفاضل إحداثيات نقط تأثير القوى بالنسبة للمتغير، وإذا لم يكن التعبير مباشرة عن الإحداثيات x_k , y_k , z_k بدلالة متغير واحد، فيجب إدخال عدة متغيرات، ثم إيجاد العلاقات فيما بينهم.

4. إيجاد العلاقات بين قيم الانتقالات الأولية δr_k ، وقيم الزوايا الأولية $\delta\varphi_k$ ، التي يحتويها شرط اتزان الجملة وفق علاقات هندسية أو حركية، والتعبير عن هذه القيم بدلالة إحداها، ويمكن إجراء ذلك دائماً نظراً؛ لأن الجملة اكتسبت انتقالاً افتراضياً مستقلاً، ومنه نحصل على علاقة يمكن منها تعيين المقدار، أو الارتباط المطلوب في المسألة، وإذا كان للجملة التي لها عدة درجات طلاقة يتكرر الحساب المذكور لكل انتقال افتراضي مستقل.

ويمكن تعيين العلاقات بين المقادير δr_k و $\delta\varphi_k$:

- بطريقة بيانية بحتة.
- بطريقة حركية بتعيين العلاقة بين السرعات الخطية V_k أو الزاوية ω_k المناظرة التي تكتسبها جسيمات، أو أجسام الجملة لو أن الجملة تحركت، ومن ثم باعتبار أن:

$$dj_k = w_k.dt \qquad , \qquad ds_k = V_k.dt$$

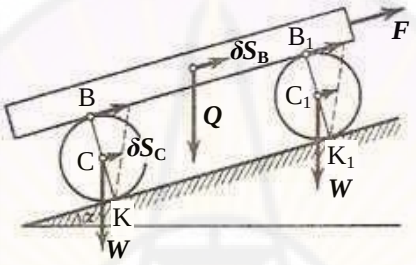
ونشير في النهاية إلى أنه يمكن استخدام الشرط (10-6) أو (10-8) لحل المسائل في حالة وجود احتكاك، وذلك باعتبار قوة الاحتكاك ضمن القوى الفاعلة، وبهذه الطريقة أيضاً يمكن تعيين ردود أفعال القيود؛ إذا ما استبدلنا القيد بعد التخلص منه برد فعله، ثم اعتبرنا رد الفعل هذا قوة ضمن القوى الفاعلة أيضاً.

مسألة-10-1

جذع شجرة وزنه Q ووزن كل من الأسطوانتين؛ اللتين يوضع عليهما هذا الجذع يساوي W .

المطلوب تعيين القوة F التي يجب التأثير بها على جذع الشجرة هذا؛ لكي يحتفظ بوضع اتزانه على مستوى مائل بزاوية معطاة α كما هو مبين في (الشكل-10-3)، وبحيث يكفل احتكاك الأسطوانتين بالمستوى وجذع الشجرة انعدام الانزلاق.

الحل:



(الشكل-10-3) جذع شجرة موضع على أسطوانتين.

إذا أهملنا مقاومة التدحرج يكون المستوى المائل قيداً مثالياً بالنسبة للأسطوانتين، وبإكساب المجموعة انتقال افتراضي نحصل تبعاً لمعادلة العمل الافتراضي على:

$$F.ds_{\mathrm{B}} - Q.\sin a\,.ds_{\mathrm{B}} - 2W.\sin a\,.ds_{\mathrm{C}} = 0$$

حيث δs_{B} تمثل الانتقال الافتراضي لجذع الشجرة، الذي ينطبق مع انتقال النقطة B .

وتُعَدُّ نقطة التماس K مركزاً لحظياً لدوران الأسطوانة، وبالتالي فإن:

$$V_{\mathrm{B}} = 2V_{\mathrm{C}} \qquad \Rightarrow \qquad ds_{\mathrm{B}} = 2ds_{\mathrm{C}}$$

وذلك لأن:

$$ds_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{B}}.dt \qquad , \qquad ds_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{C}}.dt$$

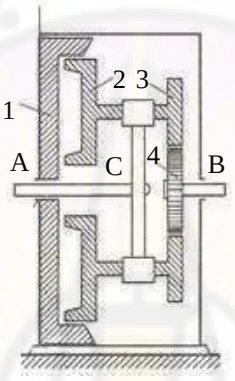
وبالتعويض بقيمة δs_{B} هذه في المعادلة السابقة نحصل أخيراً على:

$$F = (Q+W)\sin a$$

مسألة-10-2

المطلوب تعيين العلاقة بين عزم الدوران $\boldsymbol{M_A^a}$ المؤثر على المحور القائد A وعزم المقاومة $\boldsymbol{M_B^r}$ المؤثر على محور التابع B في مجموعة المسننات (*Reduction Gear*) لتخفيض السرعة المبين في (الشكل-10-4)، عندما يكون دوران المحورين منتظماً.

الحل:



(الشكل-10-4) مخفض سرعة.

إن العلاقة بين M_A^a و M_B^r في حالة الدوران المنتظم؛ كالعلاقة بينهما في حالة الاتزان، وبالتالي وفقاً لمعادلة العمل الافتراضي نحصل على:

$$M_A^a.dj_A - M_B^r.dj_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A^a.w_A = M_B^r.w_B$$

وذلك لأن:

$$dj_B = w_B.dt \qquad , \qquad dj_A = w_A.dt$$

ومنه نحصل على:

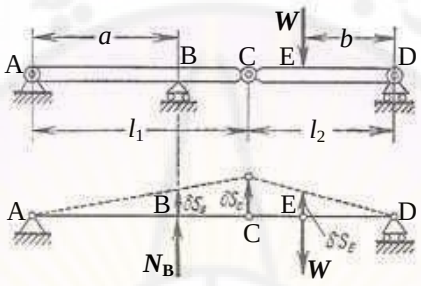
$$M_A^a = \frac{w_B}{w_A} M_B^r$$

مسألة-10-3

جائز يتكون من قضيبين AC و CD متصلين بمفصل C ويحمل الثقل W ، كما هو مبين في a من (الشكل-10-5).

فإذا كانت أبعاد الجائز ومواضع مساند الارتكاز مبينة في الشكل. المطلوب، بإهمال وزن الجائز، تعيين مقدار الضغط N_B على مسند الارتكاز B .

الحل:



a

b

(الشكل-10-5) جائز يتكون من قضيبين AC و CD متصلين بالمفصل C .

للحصول على جملة قابلة للحركة ذات درجة واحدة من درجات الطلاقة، يتم باستبدال المسند B برد فعله N_B الذي يساوي في المقدار الضغط المطلوب، كما هو مبين في b من (الشكل-10-5)، وبإكساب الجملة الموافق لما بقي لها من قيود انتقال افتراضي شاقولي متناه في الصغر δs_C للمفصل C ، تصبح معادلة العمل الافتراضي بالشكل:

$$N_B.ds_B - W.ds_E = 0$$

نعين العلاقة بين δs_E و δs_B من التناسب:

$$\frac{ds_E}{b} = \frac{ds_C}{l_2} \quad , \quad \frac{ds_C}{l_1} = \frac{ds_B}{a} \Rightarrow \quad ds_E = \frac{b.l_1}{a.l_2} ds_B$$

ومنه بالتعويض نحصل على:

$$N_B = (b.l_1 / a.l_2) P$$

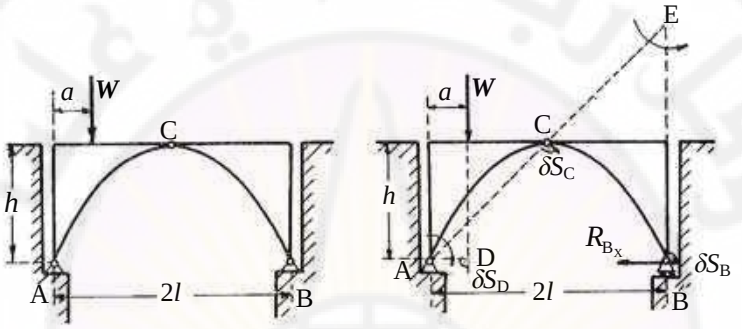
ويتضح أن الحل يكون أكثر طولاً عند تطبيق طرق علم التوازن البياني، إذ نضطر آنذاك إلى دراسة اتزان أجزاء الجائز، وإدخال ردود أفعال القيود الأخرى، ثم حذفها من مجموعة معادلات الاتزان الناتجة.

مسألة-10-4

ليكن الهيكل المعدني المكون من القوس الثلاثي المفاصل ACB المحمل بالقوة W المبين في a من (الشكل-10-6).

المطلوب تعيين المركبة الأفقية لرد الفعل R_{B_x} في المسند B .

الحل:



a b

(الشكل-10-6) هيكل معدني مكون من قوس ثلاثي المفاصل.

نستعيض عن المسند المفصلي الثابت في B بمسند مفصلي متحرك، ونعوض عن القيد المهمل بقوة أفقية R_{B_x} والتي نعدّها في عداد القوى الفاعلة، نتيجة لذلك تصبح الجملة ذات درجة حرية واحدة.

بالتالي تكون الانتقالات الافتراضية للجملة هي دوران حول النقطة الثابتة A للنصف الأيسر، وتحصل عندئذ النقطة C على انتقال δs_C عمودي على AC . أما الانتقال الافتراضي للنصف الأيمن δs_B فهو انتقال صغير في مستوى الشكل؛ الذي يمكن اعتباره كدوران صغير حول المحور الآني E ، ولتبسيط معادلة العمل الافتراضي تُنقل القوة W على خط تأثيرها حتى D المبين في b من (الشكل-10-6)، عندئذ نحصل على المعادلة:

$$W.ds_D - R_{B_x}.ds_B = 0$$

نعين الانتقالات δs_B و δs_D بدلالة δs_C كما يلي:

$$\frac{ds_D}{ds_C}=\frac{AD}{AC}=\frac{a}{(l^2+h^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad ds_D=\frac{a}{(l^2+h^2)^{1/2}}ds_C$$

$$\frac{ds_B}{ds_C}=\frac{EB}{EC}=\frac{2h}{(l^2+h^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad ds_B=\frac{2h}{(l^2+h^2)^{1/2}}ds_C$$

بالتعويض في معادلة العمل الافتراضي نحصل على:

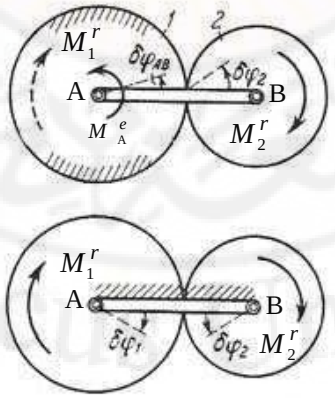
$$R_{B_x}=\frac{a}{2h}W$$

مسألة-10-5

في مجموعة من المسننات الكوكبية ذات التعشيق التفاضلي، ثبت على المحور A مسنن 1 نصف قطره R_1 ومرفق AB مستقلين كل عن الآخر، ويحمل المرفق AB المحور B لمسنن 2 نصف قطره R_2 ، كما هو مبين في a من (الشكل-10-7).

يؤثر على المرفق عزم دوراني $\boldsymbol{M}_A^e$ ، ويؤثر على المسننين 1 و 2 عزما المقاومة $\boldsymbol{M}_1^r$ و $\boldsymbol{M}_2^r$. المطلوب تعيين قيمتي M_1^r و M_2^r في حال اتزان المجموعة.

الحل:



(الشكل-10-7) مجموعة من المسننات الكوكبية ذات التعشيق التفاضلي.

يكون للمجموعة درجتا طلاقة نظراً لإمكانية حدوث انتقالين افتراضيين مستقلتين لها، هما دوران المرفق AB عند المسنن الثابت 1 ، ودوران المسنن 1 عند المرفق الثابت AB .

نكسب المجموعة في البداية الانتقال الافتراضي؛ الذي يبقى خلاله المسنن 1 ثابتاً، كما في a من (الشكل-10-7)، وتعطى معادلة العمل الافتراضي لهذا الانتقال بـــ :

$$M^e_{\mathrm{A}}.dj_{\mathrm{AB}} - M^r_2.dj_2 = 0$$

ولكن عندما يكون المسنن 1 ثابتاً، تكون نقطة تماس المسننين هي المركز اللحظي لسرعات المسنن 2 ، ومنه:

$$V_{\mathrm{B}} = w_{\mathrm{AB}}(R_1 + R_2) = w_2.R_2 \qquad \Rightarrow \qquad dj_2.R_2 = dj_{\mathrm{AB}}(R_1 + R_2)$$

بالتعويض؛ نحصل على:

$$M^r_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} M^e_{\mathrm{A}}$$

والآن نكسب المجموعة الانتقال الافتراضي الآخر المستقل عن الأول، الذي يبقى خلاله المرفق AB ثابتاً كما في b من (الشكل-10-7)، وتعطي معادلة العمل الافتراضي لهذا الانتقال بـــ:

$$M^r_1.dj_1 - M^r_2.dj_2 = 0$$

ولكن عندما يكون المرفق ثابتاً؛ فإن:

$$\frac{dj_2}{dj_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad M^r_1 = \frac{R_1}{R_2} M^r_2$$

فنجد أخيراً، أن:

$$M^r_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} M^e_{\mathrm{A}} \qquad , \qquad M^r_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} M^e_{\mathrm{A}}$$

4- تطبيق مبدأ العمل الافتراضي في توازن الآلات البسيطة

تعرف الآلة البسيطة بأنها عبارة عن جملة ذات صلابة تامة، وذات درجة طلاقة واحدة. يؤثر فيها قوتان $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{P}$، أو عزمان $\boldsymbol{M_P}$ ، $\boldsymbol{M_F}$ ، القوة $\boldsymbol{F}$ تدعى بـــ القوة المحركة، والعزم $\boldsymbol{M_F}$ يدعى بـــ العزم المحرك، والقوة $\boldsymbol{P}$ تدعى بـــ القوة المقاومة، والعزم $\boldsymbol{M_P}$ يدعى بـــ العزم المقاوم.

لنفرض أن القوى وردود أفعال القيود متوازنة، فمن شرط التوازن:

$$dw = dw_P + dw_F = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{P}.\boldsymbol{\delta r_P} + \boldsymbol{F}.\boldsymbol{\delta r_F} = 0$$

حيث $\boldsymbol{\delta r_P}$, $\boldsymbol{\delta r_F}$ تمثل الانتقال الافتراضي للمتجه الموضعي لنقطة تـــأثير كل من $\boldsymbol{F}$،$\boldsymbol{P}$ على التتالي، التي تحصل من وضع التوازن خلال فترة زمنية صغيرة δt ، وبتقسيم العلاقة على هذه الفترة نحصل على:

$$\boldsymbol{P}.\frac{\boldsymbol{\delta r_P}}{dt} + \boldsymbol{F}.\frac{\boldsymbol{\delta r_F}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{P}.\boldsymbol{V_P} + \boldsymbol{F}.\boldsymbol{V_F} = 0$$

حيث $\boldsymbol{V_P}, \boldsymbol{V_F}$ تمثل سرعات نقاط تطبيق القوى، وتدعى بـــ السرعات الافتراضية، وبالحل نجد:

$$P'.V_P + F'.V_F = 0$$

حيث P', F' تمثل مساقط القوى $\boldsymbol{F}$ و $\boldsymbol{P}$ على اتجاه سرعات نقاط تطبيقها، وإذا اتفقت $\boldsymbol{F'}$ و $\boldsymbol{V_F}$ بالاتجاه تكون اتجاهات $\boldsymbol{P'}$ و $\boldsymbol{V_P}$ مختلفة بالاتجاه، وباستخدام القيم المطلقة نحصل على:

$$\frac{|F'|}{|P'|} = \frac{V_P}{V_F} \qquad (13\text{-}10)$$

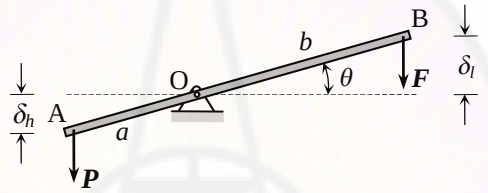
هذه العلاقة تعبر عن الصيغة الذهبية في علم الميكانيك، التي صاغها غاليلي بالقول:

"ما نكسبه في القوة نخسره بالسرعة".

وتتغلب الآلة بفضل القوة المحركة على القوة المقاومة، ونسبة القوة المقاومة إلى القوة المحركة تدعى بـــ مردود الآلة، ويرمز له بـــ η ، وتكون هذه النسبة غالباً أكبر من الواحد، ويستفاد من هذه الآلات البسيطة بنقل أو رفع الأجسام الثقيلة ببذل قوى ضئيلة نسبياً، أو عزم ضئيل نسبياً، وهناك أنواع مختلفة من هذه الآلات؛ سنكتفي بوصف أهمها مع دراسة مقتضبة لتوازنها، وفوائدها.

الرافعة

هي عبارة عن قضيب صلب ومتين يمكنه أن يدور حول نقطة ثابتة من نقاطه، يمثل بمفصل، تدعى نقطة الاستناد، يجعل لها حرية الدوران حول المحور Z الناظم على مستوى الشكل، والمار من المفصل، بتعليق الثقل $\boldsymbol{P}$ الممثل بالقوة المقاومة والمراد رفعه في أحد طرفي الرافعة، وبعده عن نقطة الاستناد يدعى بـــ الذراع المقاوم، والضغط بقوة $\boldsymbol{F}$ الممثل بالقوة المحركة، وبعدها عن نقطة الاستناد يدعى بـــ الذراع المحرك، ويمكن دراسة توازن الرافعة إما وفق مبدأ أرخميدس (*Archimedes*) مبدأ العزوم، أو وفق مبدأ العمل الافتراضي.



(الشكل-10-8) وضع رافعة معين بالزاوية θ .

نلاحظ من (الشكل-10-8) أن وضع الرافعة يتعين تعيناً كاملاً بالزاوية θ الكائنة بين القضيب والمحور X ؛ وبما أن الحركة الوحيدة الممكنة لهذا القضيب هي دورانه حول المحور Z ، بالتالي له درجة واحدة من درجات الطلاقة؛ فإذا دارت الرافعة دوراناً افتراضياً لا متناهياً في الصغر $\delta\theta$ حول نقطة الاستناد O ارتفع الثقل $\boldsymbol{P}$ مسافة δh ، وهبطت القوة المحركة $\boldsymbol{F}$ مسافة δl ، وبما أن مجموع الأعمال الافتراضية معدوم، حيث:

عمل القوة $\boldsymbol{P}$ سالب؛ لأن الانتقال δh معاكس للقوة:

$$dw_{\boldsymbol{P}} = -P.dh$$

عمل القوة $\boldsymbol{F}$ موجب؛ لأن الانتقال δl يتجه باتجاه القوة:

$$dw_{\boldsymbol{F}} = F.dl$$

وينعدم العمل الافتراضي إذا كانت الجملة متزنة، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P.dh + F.dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{F} = \frac{dl}{dh}$$

غير أن:

$$\sin q = \frac{dh}{a} = \frac{dl}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dl}{dh} = \frac{b}{a}$$

بالتعويض نحصل على المردود:

$$h = \frac{P}{F} = \frac{b}{a}$$

وتكون قيمة المردود كبيرة بقدر ما تكون نقطة الاستناد بعيدة عن القوة المحركة، وقريبة من القوة المقاومة.

وتكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$a.P = b.F$$

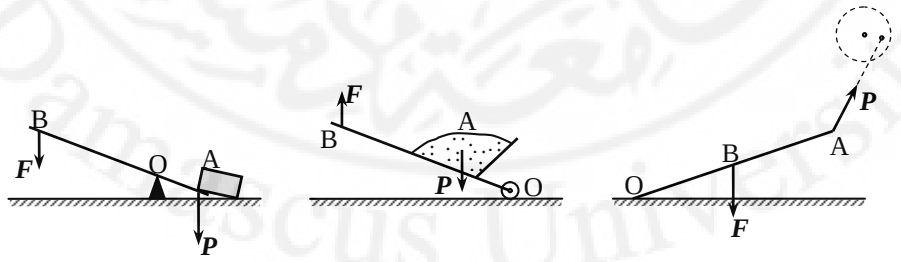
وتتزن الرافعة عندما يكون جداء القوة المحركة بذراعها يساوي جداء القوة المقاومة بذراعها.

ويمكن أن نميز ثلاثة أنواع للروافع، وذلك حسب توزيع نقطة تأثير القوة بالنسبة لبعضها:

- عندما تقع نقطة الاستناد، بين نقطتي تأثير القوة المحركة والمقاومة، كرافعة الأحجار المبينة في a من (الشكل-10-9).

- عندما تقع نقطة تأثير القوة المقاومة، بين نقطة تأثير القوة المحركة ونقطة الاستناد، كعربة البستاني المبينة في b من (الشكل-10-9).

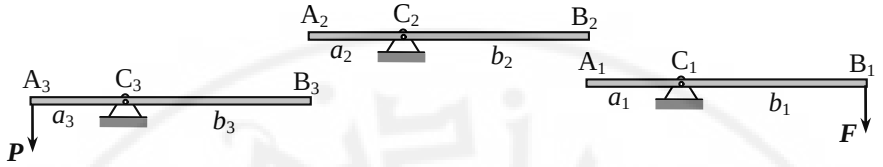
- عندما تقع نقطة تأثير القوة المحركة، بين نقطة تأثير القوة المقاومة ونقطة الاستناد، كرجل آلة الخياطة المبينة في c من (الشكل-10-9).



a- رافعة الأحجار. b- عربة البستاني. c- رجل آلة الخياطة.

(لشكل-10-9) أنواع الروافع.

أما الرافعة المركبة الموضحة في (الشكل-10-10)، فإنها تتألف من عدد من الرافعات بحيث تصبح القوة المقاومة في الرافعة الأولى قوة محركة للرافعة الثانية، وهكذا:



(الشكل-10-10) الرافعة المركبة.

تؤثر القوة $\boldsymbol{F}$ في الطرف B_1 من الرافعة الأولى، ويعلق الثقل $\boldsymbol{P}$ في الطرف A_3 من الرافعة الثالثة.

فإذا انخفضت B_1 بالمقدار δl ارتفعت A_1 بالمقدار:

$$dh_1 = \frac{a_1}{b_1} dl$$

ويؤدي هذا إلى ارتفاع B_2 بالمقدار δh_1 أيضاً، فينخفض بذلك A_2 بالمقدار:

$$dh_2 = \frac{a_2}{b_2} dh_1 = \frac{a_1.a_2}{b_1.b_2} dl$$

ويؤدي إلى انخفاض B_3 بالمقدار δh_2 أيضاً، فيرتفع بذلك A_3 بالمقدار:

$$dh_3 = \frac{a_3}{b_3} dh_2 = \frac{a_1.a_2.a_3}{b_1.b_2.b_3} dl$$

وعلاقة العمل الافتراضي في حالة الاتزان هي:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P.dh_3 + F.dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{P} = \frac{dh_3}{dl}$$

ويكون بالتالي:

$$F = \frac{a_1.a_2.a_3}{b_1.b_2.b_3} P$$

وفي حالة الرافعة المركبة من n رافعة، يكون:

$$F = \frac{a_1.a_2.a_3.....a_n}{b_1.b_2.b_3.....b_n} P \qquad (14\text{-}10)$$

ويظهر من العلاقة أعلاه، أن الجهد F يتناقص كثيراً بازدياد عدد الرافعات بشرط أن يكون الذراع المحرك أكبر من الذراع المقاوم في كل منها.

البكرة

تدور البكرة عادة حول محور عمودي على مستواها ماراً من مركزها، ويفترض عادة أن البكرة تدور دون احتكاك حول المحور، وأن الحبل الخفيف والمرن ينسحب دون أن ينزلق على محز البكرة، فيدير البكرة بحركته.

لقد أجريت التطبيقات الأولى على مبدأ العمل الافتراضي لدراسة شروط توازن جمل من البكرات كالجمل المبينة في (الشكل-10-11)، من قبل ستيفنوس (*Stivnos*) (1548-1630) الذي استنتج أن النسبة في كل منها بين الحملين F و P لا تتعلق إلا بعكس نسبة الانتقالين الشاقوليين لنقطتي تطبيقهما.

ففي المخطط a من (الشكل-10-11)، فإنه يبين لنا بكرة ثابتة، حيث يكون محور دورانها ثابت، فعندما يعلق بطرف الحبل الثقل $\boldsymbol{P}$ ، فلا بد من وجود القوة المحركة المجهولة $\boldsymbol{F}$ من الطرف الثاني لاتزان الجملة.

فإذا انخفضت القوة $\boldsymbol{F}$ المسافة δl ارتفع الثقل $\boldsymbol{P}$ بذات المسافة:

$$dh = dl$$

فيكون عمل الثقل P سالباً؛ لأن الانتقال δh معاكس للقوة:

$$dw_{\boldsymbol{P}} = -P.dh$$

وعمل القوة F موجب؛ لأن الانتقال δl يتجه باتجاه القوة:

$$dw_{\boldsymbol{F}} = F.dl$$

ونحصل على توازن الجملة بانعدام العمل الافتراضي، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P.dh + F.dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{P} = \frac{dh}{dl}$$

نستنتج أن النسبة بين القوتين F و P لا تتعلق إلا بعكس نسبة الانتقالين الشاقوليين لنقطتي تطبيقهما، وبالتعويض نحصل على:

$$F = P$$

وتتوازن البكرة إذا كانت القوة المحركة مساوية للقوة المقاومة.

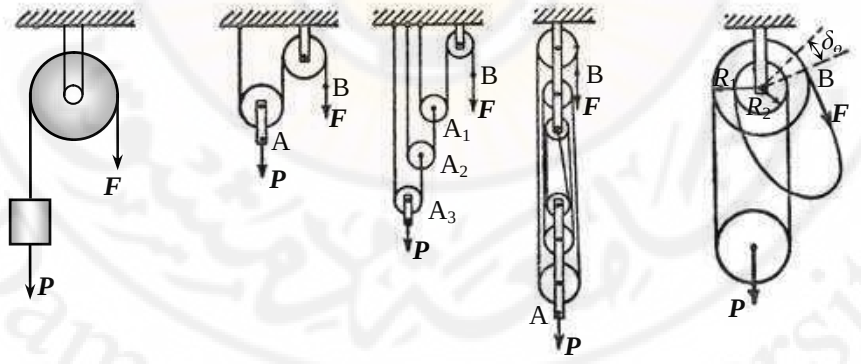
وفي المخطط b من (الشكل-10-11)، فإنه يبين لنا البكرة المتحركة، حيث تستند البكرة على الحبل الذي يربط طرفه الأول بنقطة ثابتة، ويترك طرفه الآخر حراً لتؤثر عليه القوة المحركة $\boldsymbol{F}$ في B ، أما الثقل $\boldsymbol{P}$ فهو يعلق بمحور البكرة المتحركة A ، وهذا النوع من البكرات يخضع كما يظهر من الشكل لنوعين من الحركة، دورانية حول محور البكرة والثانية حركة انتقالية ترتفع بموجبها البكرة المتحركة إلى الأعلى مع الثقل المعلق بها.

فإذا انخفضت القوة $\boldsymbol{F}$ المسافة δl ارتفع الثقل $\boldsymbol{P}$ بمسافة dh ؛ ونحصل على توازن الجملة بانعدام العمل الافتراضي، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P.dh + F.dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{P} = \frac{dh}{dl}$$

وبما أن الطول المسحوب δl يتوزع بالتساوي على قسمي الحبل، الكائنين على جانبي البكرة المتحركة، منه نحصل على:

$$dh = \frac{1}{2}dl \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{1}{2}P$$



a b c d e

(الشكل-10-11) أنواع البكرات.

وفي المخطط c من (الشكل-10-11)، فإنه يبين لنا ثلاث بكرات متماثلة قابلة للحركة؛ لذا تتم المناقشة نفسها تباعاً على كل بكرة من البكرات الثلاث.

فإذا انخفضت القوة $\boldsymbol{F}$ المسافة δl ارتفعت البكرة A_1 بمقدار:

$$dh_1 = \frac{1}{2} dl$$

وارتفعت البكرة A_2 بمقدار:

$$dh_2 = \frac{1}{2} dh_1 = \frac{1}{2^2} dl$$

وارتفعت البكرة A_3 حاملة الثقل P بمقدار:

$$dh_3 = \frac{1}{2} dh_2 = \frac{1}{2^2} dh_1 = \frac{1}{2^3} dl$$

ونحصل على توازن الجملة بانعدام العمل الافتراضي، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P.dh_3 + F.dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{P} = \frac{dh_3}{dl}$$

ويكون بالتالي:

$$F = \frac{1}{2^3} P = \frac{1}{8} P$$

وفي حالة آلة مؤلفة من n بكرة خفيفة، يكون:

$$F = \frac{1}{2^n} P \qquad (15\text{-}10)$$

أما المخطط d من (الشكل-10-11)، فيمثل نوعاً جديداً في تركيب البكرات، بحيث القسم العلوي يتألف من عدد من البكرات المثبتة بحامل واحد ثابت، أما القسم السفلي فهو يتألف من ذات العدد من البكرات المثبتة بحامل حر يعلق به الثقل $\boldsymbol{P}$ ، ويمر حبل واحد على محزات البكرات كافة.

يثبت أحد طرفي الحبل بالحامل الثابت، بينما يبقى الطرف الثاني حراً لتؤثر فيه القوة المحركة $\boldsymbol{F}$ ، ويتوزع الثقل $\boldsymbol{P}$ بالتساوي على أقسام الحبال الحاملة للقسم السفلي من الآلة، فإذا كان عدد البكرات $2n$ بحيث يكون n بكرة في كل قسم، حصلنا على $2n$ حبل، وتكون القوة المحركة اللازمة لتوازن الآلة هي:

$$F = \frac{1}{2^n} P \qquad (16\text{-}10)$$

والمخطط e من (الشكل-10-11) فيمثل البكرة المزدوجة، وتدعى أيضاً بـــ البكرة التفاضلية، وتتكون من قسمين، قسم متحرك وهو عبارة عن بكرة متحركة تحمل الثقل $\boldsymbol{P}$ ، وقسم مثبت يتألف من بكرتين ثابتتين مشتركتين بمحور الدوران. يلف حبل لا أطراف له على قسمين، وتؤثر القوة الشد $\boldsymbol{F}$ في النقطة B من الحبل المار في محز البكرة الثابتة ذات القطر الكبير.

فإذا دارت البكرة العلوية الثابتة زاوية دوران متناهية في الصغر $\delta\theta$ باتجاه دوران عقارب الساعة، التف على البكرة العلوية الثابتة قسم من الحبل طوله:

$$dl = R_1.dq$$

وانحل في الوقت ذاته عن البكرة الصغيرة الدائرة معها قسم من الحبل طوله:

$$R_2.dq$$

ونتيجة لهذا الدوران ينقص طول الحبل بالمقدار:

$$(R_1 - R_2)dq$$

ويرتفع الثقل P المعلق بالبكرة المتحركة مقدار:

$$dh = (R_1 - R_2)dq / 2$$

وذلك لأن فارق الطول يتوزع بالتساوي على قسمي الحبل الحاملين للبكرة المتحركة.

فيكون عمل الثقل $\boldsymbol{P}$ سالباً؛ لأن الانتقال δh معاكس للقوة، وقيمته:

$$dw_{\boldsymbol{P}} = -P.dh = -P(R_1 - R_2)dq / 2$$

وعمل القوة $\boldsymbol{F}$ موجب؛ لأن الانتقال δl يتجه باتجاه القوة:

$$dw_{\boldsymbol{F}} = F.dl = F.R_1.dq$$

وفي حالة اتزان الجملة يكون العمل الافتراضي معدوماً، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P(R_1 - R_2)dq / 2 + F.R_1.dq = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{P} = \frac{R_1 - R_2}{2R_1}$$

$$F = \frac{R_1 - R_2}{2R_1} P \qquad (17\text{-}10)$$

ويكون جهد المحرك F صغيراً بقدر ما يكون الفرق بين قطري البكرتين المثبتتين صغيراً.

الملفاف

هو عبارة عن أسطوانة نصف قطرها r صغير نسبياً، بإمكانها الدوران حول محورها الأفقي OO_1 الذي يستند على المسندين O_1 و O ، والذي يدور بوساطة اليد B التي تتصل به، وتبعد عنه بالمقدار R كما هو مبين في a من (الشكل-10-12).

يثبت طرف حبل بسطح الأسطوانة ويعلق بطرفه الثاني الثقل P ، وتؤثر القوة المحركة $\boldsymbol{F}$ على اليد B بشكل مماسي تعمل على إدارة محور الأسطوانة، ويؤدي دوران الأسطوانة حول محورها إلى التفاف الحبل عليها، فيرتفع الثقل $\boldsymbol{P}$ إلى الأعلى.

فإذا دارت اليد B بزاوية دوران متناهية في الصغر $\delta\theta$ باتجاه دوران عقارب الساعة، التف قسم من الحبل على الأسطوانة طوله $r.\delta\theta$ ، وارتفع عندها الثقل $\boldsymbol{P}$ إلى الأعلى بهذا المقدار:

$$dh = r.dq$$

فيكون عمل الثقل $\boldsymbol{P}$ سالباً؛ لأن الانتقال δh معاكس للقوة، وقيمته:

$$dw_{\boldsymbol{P}} = -P.dh = -P.r.dq$$

وعمل القوة $\boldsymbol{F}$ موجب؛ لأن اتجاه عزمها حول محور الدوران باتجاه زاوية الدوران، وقيمته:

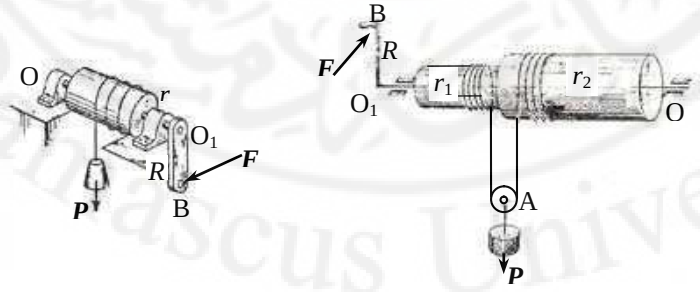
$$dw_{\boldsymbol{F}} = M_{\mathrm{O}}(F).dq = F.R.dq$$

وفي حالة اتزان الجملة يكون العمل الافتراضي معدوماً، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P.r.dq + F.R.dq = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{P} = \frac{r}{R}$$

$$F = \frac{r}{R}P \qquad (18\text{-}10)$$

وهو شرط توازن الملفاف البسيط.



a- الملفاف المزدوج. b- الملفاف البسيط.

(الشكل-10-12) أنواع الملفاف.

أما (الشكل-10-b12) فيمثل الملفاف المزدوج، ويدعى أيضاً ب الملفاف التفاضلي، حيث يتكون من أسطوانتين قطر إحداهما R_2 أكبر بقليل من قطر الثانية R_1 ، اتصلتا بعضهما ببعض اتصالاً وثيقاً، ولهما محور مشترك OO_1 يستند على المسندين O و O_1 ، ويدار باليد B التي تبعد عنه بالمقدار R .

يعلق الثقل $\boldsymbol{P}$ ببكرة متحركة A ثبت أحد طرفي حبلها بالأسطوانة الكبيرة، وثبت طرفه الآخر بالأسطوانة الصغيرة بحيث يلف الحبل على الأسطوانتين باتجاهين متعاكسين.

فإذا دارت اليد B بزاوية دوران متناهية في الصغر $\delta\theta$ باتجاه دوران عقارب الساعة، التف قسم من الحبل على الأسطوانة الكبيرة طوله:

$$R_2.dq$$

وانحل قسم منه عن الأسطوانة الصغيرة بطول:

$$R_1.dq$$

ولما كان $R_2 > R_1$ كان طول الحبل الملتف أكبر من القسم المحلول. ويرتفع عندها الثقل P إلى الأعلى بالمقدار:

$$dh = (r_1 - r_2)dq / 2$$

وذلك لأن فارق الطول يتوزع بالتساوي على قسمي الحبل الحاملين للبكرة المتحركة.

فيكون عمل الثقل $\boldsymbol{P}$ سالباً؛ لأن الانتقال δh معاكس للقوة، وقيمته:

$$dw_{\boldsymbol{P}} = -P.dh = -P(r_2 - r_1)dq / 2$$

وعمل القوة $\boldsymbol{F}$ موجب، وقيمته:

$$dw_{\boldsymbol{F}} = F.dl = M_O(F).dq = F.R.dq$$

وفي حالة اتزان الجملة يكون العمل الافتراضي معدوماً، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -P(r_2 - r_1)dq / 2 + F.R.dq = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{P} = \frac{r_2 - r_1}{2R}$$

$$F = \frac{r_2 - r_1}{2R} P \qquad (19\text{-}10)$$

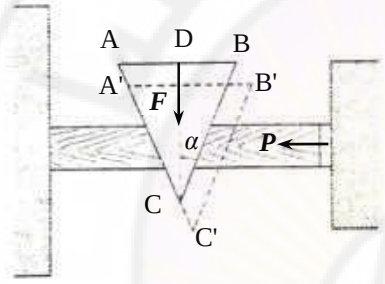
ويكون جهد المحرك F صغيراً بقدر ما يكون الفرق بين قطري الاسطوانتين صغيراً.

المكبس

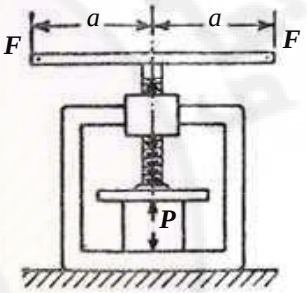
هناك أنواع كثيرة من المكابس، نذكر منها:

المكبس الموشوري

يستعمل المكبس الموشوري، أو ما يدعى بـــ المكبس الإسفيني الموضح في a من (الشكل-10-13) لإزاحة الأجسام باتجاه أفقي، ويتألف من موشور ثلاثي الأضلاع متساوي الساقين، ينزلق بسطحيه الجانبيين المتساويين على سطحي جذعين أحدهما ثابت، والآخر متحرك متماسك مع الجسم الذي يراد إزاحته.



b- مكبس إسفيني.



b- مكبس لولبي.

(الشكل-10-13) أنواع المكابس.

فالقوة المحركة $\boldsymbol{F}$ هي قوة ضغط تؤثر به شاقولياً على الوجه العلوي؛ الذي نفرضه أفقياً في النقطة D ، والقوة المقاومة $\boldsymbol{P}$ هي القوة الأفقية؛ التي تعاكس انتقال الجذع المتحرك.

لنعدّ انتقالاً افتراضياً ينسحب المكبس به من الوضع ABC إلى الوضع $A'B'C'$ ، فيهبط بالتالي شاقولياً بقدر δl ، أما انتقال الجذع المتحرك δh ، فيتعين بسهولة من العلاقة:

$$dh = 2\tan a.dl$$

فيكون عمل قوة المقاومة $\boldsymbol{P}$ سالباً؛ لأن الانتقال δh معاكس للقوة، وقيمته:

$$dw_P = -P.dh = -2P.\tan a.dl$$

وعمل القوة $\boldsymbol{F}$ موجب، وقيمته:

$$dw_F = F.dl$$

وفي حالة اتزان الجملة يكون العمل الافتراضي معدوماً، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F}} = -2P.\tan a.dl + F.dl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{P} = 2\tan a$$

ويكون بالتالي:

$$F = 2\tan a.P$$

أما المردود:

$$h = \frac{P}{F} = \frac{1}{2\tan a} \qquad (20\text{-}10)$$

ويكون المردود أعظم ما يمكن بقدر ما تكون α صغيرة، بمعنى أنه يمكن التغلب على مقاومة كبيرة بقوة متحركة صغيرة؛ حين تكون زاوية الموشور 2α صغيرة.

المكبس اللولبي

يمتاز المكبس اللولبي الموضح في b من (الشكل-10-13) بانعدام الاحتكاك في لولبه، حيث يؤثر عليه عزم المزدوجة ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}$) الواقعة في المستوى العمودي على محور اللولب، أما المقاومة فتمثل رد الفعل للجسم المضغوط. نعوض عن الجسم المضغوط بالقوتين $\boldsymbol{P}$ اللتين يضغط بهما هذا الجسم على اللولب، وعلى الإطار، بالتالي يجب اعتبار هاتين القوتين من القوى الفاعلة في الجملة المثالية الممثلة بالإطار واللولب؛ اللذين نفرض أنهما جسمان صلبان.

نلاحظ في هذه الجملة أن الانتقال الافتراضي للقيود هو دوران اللولب زاوية متناهية في الصغر مقدارها $\delta\theta$ ، ويصبح ذلك العمل الذي تقوم به المزدوجة التي عزمها $2a.F$ يساوي:

$$dw_{\boldsymbol{F}} = 2F.a.dq$$

وإذا رمزنا بـــ B لخطوة اللولب كان الانتقال الافتراضي لنهاية اللولب هو:

$$B.dq/2p$$

وكان العمل الذي تقوم به القوة المطبقة في نهاية اللولب خلال هذا الانتقال، يساوي:

$$dw_{\mathrm{P}} = -P.B.dq/2p$$

أما القوة $\boldsymbol{P}$ الفاعلة في الإطار، فلا تقوم بأي عمل.

وفي حالة اتزان الجملة يكون العمل الافتراضي معدوماً، ومنه:

$$dw = dw_P + dw_F = -P.B.dq/2p + 2F.a.dq = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{P} = \frac{B}{2p.a}$$

وبما أن الخطوة المختزلة للولب تساوي:

$$b = B/2p$$

ويكون بالتالي:

$$F = \frac{b}{a}P$$

أما المردود:

$$h = \frac{P}{F} = \frac{a}{b} \qquad (21\text{-}10)$$

ويكون أعظم ما يمكن بقدر ما يكون البعد a كبيراً، والخطوة المختزلة b صغيرة.

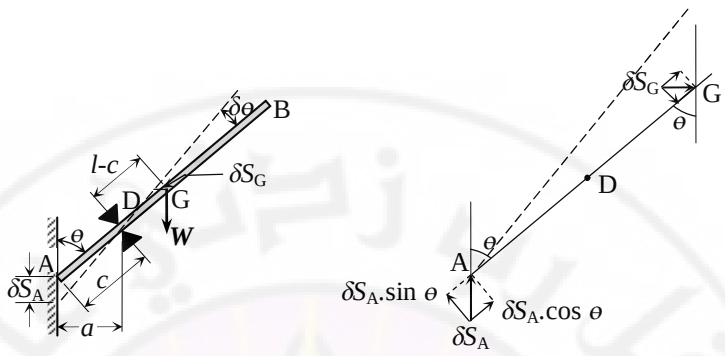
مسألة-10-6

يمر قضيب AB طوله $2l$ ووزنه W عبر حلقة صقيلة D ، بحيث يضغط على جدار شاقولي صقيل في النقطة A الواقعة على بعد a من الحلقة، كما هو مبين في a من (الشكل-10-14).

المطلوب تعيين بإهمال الاحتكاك وضع توازن القضيب بدلالة الزاوية θ الكائنة بين القضيب والجدار.

الحل:

بإكساب القضيب في وضع توازنه انتقالاً افتراضياً موافقاً لقيوده، كالانتقال الافتراضي δs_A للطرف A ، فإننا نستنتج فوراً أن الانتقال الافتراضي δs_G لمركز ثقل القضيب G يجب أن يكون أفقياً؛ ذلك لأن وزن القضيب هو القوة الفاعلة الوحيدة في هذه الجملة.



a b

(الشكل-10-14) قضيب AB يمر عبر حلقة D ويضغط على جدار شاقولي في A.

ولو فرقنا الانتقال الافتراضي δs_A كما في b من (الشكل-10-14) إلى مركبتين إحداهما $\delta s_A.\sin\theta$ عمودية على محور القضيب، والأخرى $\delta s_A.\cos\theta$ موازية له، لوجدنا أن المركبة الأولى ناشئة من دوران القضيب حول D ، والمركبة الثانية ناشئة من انزلاق القضيب على محوره.

أما مركبتا الانتقال الافتراضي δs_G الموافقتان لهاتين الحركتين فهما:

$$ds_A.\cos q \quad , \quad \frac{l-c}{c} ds_A.\sin q$$

وبما أن المجموع الجبري لمسقطي هاتين المركبتين على الشاقول يجب أن يكون معدوماً؛ لأنه يساوي لمسقط الانتقال الافتراضي δs_G لمركز ثقل القضيب عليه. منه نحصل على:

$$\frac{l-c}{c}\sin^2 q - \cos^2 q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{c}\sin^2 q = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 q = \frac{c}{l}$$

وإذا عوضنا لـــ c في العلاقة الأخيرة قيمتها $(a/\sin\theta)$، نحصل أخيراً على:

$$\sin^3 q = a/l \quad \Rightarrow \quad \sin q = (a/l)^{1/3}$$

نلاحظ من هذه العلاقة أن توازن القضيب لا يتحقق إلا إذا كان $(a \le l)$.

مسألة-10-7

إذا كانت التركيبة الآلية المبنية في a من (الشكل-10-15) في حالة اتزان. المطلوب إيجاد العلاقة بين القوتين P و Q .

الحل:

إذا أكسبنا المجموعة إزاحة افتراضية؛ فإن جميع أقطار متوازيات الأضلاع المكونة من القضبان تستطيل بمقدار واحد قدره δs ، وعندئذ يكون:

$$ds_A = ds \qquad , \qquad ds_B = 3ds$$

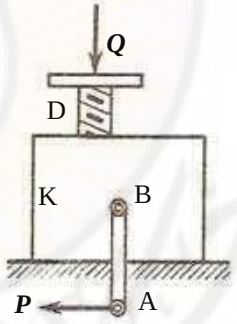
بتكوين شرط الاتزان $(dw_k^a = 0)$ نحصل على:

$$P.ds_B - Q.ds_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (3P - Q)ds = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q = 3P$$

ونحصل على الحل بمنتهى البساطة.



a- تركيبة آلية.



b- آلة رافعة.

(الشكل-10-15)

مسألة-10-8

وضعت أجزاء الآلة الرافعة الموضحة في b من (الشكل-10-15) في العلبة K . فإذا كان اللولب (*Screw*) D يرتفع بمسافة h عند كل دورة للذراع AB الذي طوله يساوي l . المطلوب إيجاد العلاقة بين القوتين P و Q .

الحل:

باستخدام شرط الاتزان $(dw_k^a = 0)$ نحصل على:

$$P.l.dj_{\text{AB}} - Q.ds_{\text{D}} = 0$$

وباعتبار أن اللولب يدور بانتظام عندما يدور الذراع دوراناً منتظماً نجد أن:

$$\frac{dj_{\text{AB}}}{2p} = \frac{ds_{\text{D}}}{h} \qquad \Rightarrow \qquad dj_{\text{AB}} = \frac{2p}{h} ds_{\text{D}}$$

وبالتعويض بقيمة $\delta\varphi_{\text{AB}}$ هذه في المعادلة السابقة نجد أن:

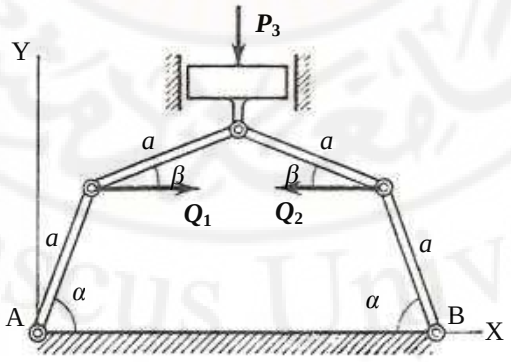
$$Q = \frac{2p.l}{h} P$$

ونشير إلى أنه لا يمكن على الإطلاق حل هذه المسألة البسيطة بوساطة طرق علم التوازن البيانية، نظراً لأن أجزاء الآلة غير معلومة.

مسألة-10-9

المطلوب، بإهمال أوزان القضبان في المكبس (*Press*) المبين في (الشكل-10-16)، تعيين العلاقة بين القوى $\boldsymbol{P_3}$ ، $\boldsymbol{Q_2}$ ، $\boldsymbol{Q_1}$ في حالة الاتزان، إذا كانت الزاويتان α ، β معلومتين، واعتبار أن:

$$P_3 = P \qquad , \qquad Q_1 = Q_2 = Q$$



(الشكل-10-16) تركيبة مكبس.

الحل:

باستخدام شرط الاتزان التالي:

$$dw = (\sum F_X.dx_k + \sum F_Y.dy_k + \sum F_Z.dz_k) = 0$$

لكي نعطي مثالاً على تطبيق الطريقة التحليلية، نختار نقطة أصل الإحداثيات في النقطة الثابتة A ونمد المحورين X،Y فنحصل على:

$$Q_{1_X}.dx_1 + Q_{2_X}.dx_2 + P_{3_Y}.dy_3 = 0 \qquad (a)$$

وذلك لأن المساقط الأخرى للقوى تساوي الصفر.

ولتعيين δx_1 ، δx_2 ، δy_3 نحسب الإحداثيات x_1 ، x_2 ، y_3 لنقط تأثير القوى بالتعبير عنها بدلالة الزاويتين α ، β ؛ فنحصل إذا رمزنا لطول كل قضيب بالرمز a على:

$$x_1 = a.\cos a \quad , \quad x_2 = a.\cos a + 2a.\cos b \quad , \quad y_3 = a(\sin b + \sin a)$$

وبتفاضل هذه العلاقات؛ نحصل على:

$$dx_1 = -a.\sin a\ .da$$

$$dx_2 = -a(\sin a\ .da + 2\sin b\ .db)$$

$$dy_3 = a(\cos b\ .db + \cos a\ .da)$$

وبالتعويض في المعادلة (a) مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$Q_{1_X} = Q \quad , \quad .Q_{2_X} = -Q \quad . \quad P_{3_Y} = -P$$

نحصل على:

$$2Q.\sin b.db - P(\cos b.db + \cos a.da) = 0 \qquad (b)$$

ولتعيين العلاقة بين $\delta\alpha$ و $\delta\beta$ نستفيد من كون المسافة (AB = Const.) في حالتنا هذه ، وبالتالي:

$$2a(\cos a + \cos b) = \text{const.}$$

وبتفاضل هذه المعادلة نحصل على:

$$\sin a\ .da + \sin b\ .db = 0 \qquad \Rightarrow \qquad da = \frac{\sin b}{\sin a} db$$

وبالتعويض بقيمة $\delta\alpha$ في المعادلة (b) نحصل على:

$$2Q.\sin b - P(\cos b + \cot a\ .\sin b) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{2}{\cot b - \cot a} Q$$

ويكون الضغط P كبيراً للغاية عندما تكون الزاوية β قريبة من الزاوية α .

5- المردود الميكانيكي *Mechanical Efficiency*

لم نأخذ بالاعتبار في التطبيقات السابقة لمبدأ العمل الافتراضي، إلا الجمل المثالية التي هي عديمة الاحتكاك، والتي يكون فيها العمل الافتراضي الناتج (*Output Work*) يساوي العمل الافتراضي المعطى (*Input Work*)، لكن بالرغم من أن كثيراً من الآلات والأجهزة الميكانيكية التي نستعملها قد أنشأت على نحو يسمح لنا بأن نهمل الاحتكاك بين أجزائها، فإننا نجد أحياناً بعض الحالات التي نرغب فيها أخذ الاحتكاك بالاعتبار، ولذا كان لزاماً علينا حين نطبق مبدأ العمل الافتراضي على هذه الحالات، أن نأخذ باعتبارنا عمل قوى الاحتكاك بالإضافة إلى عمل القوى الفاعلة المطبقة على الجملة، بالتالي لن يكون العمل الناتج مساوياً للعمل المعطى، وإنما أصغر منه.

ويتم تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على الجمل غير المثالية بعد تعيين رد الفعل الناظمي N وقوة الاحتكاك ($F_f = f_s.N$) التي تعد قوة خارجية معلومة، والتي يكون اتجاهها دائماً بعكس اتجاه الحركة الحقيقية للكتلة المتحركة، وبالتالي يجب التمييز بين الحركة الحقيقية التي يتبع لها اتجاه قوة الاحتكاك وبين اتجاه الحركة الافتراضية التي يتبع لها العمل الافتراضي.

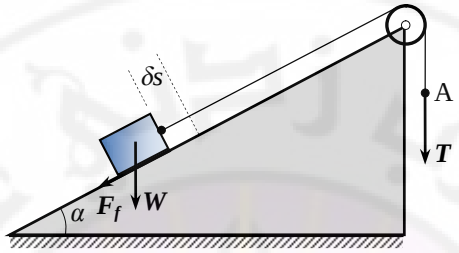
ويعطى مردود الآلة الميكانيكي بنسبة العمل الناتج إلى العمل المعطى، أي بنسبة العمل المفيد إلى العمل المبذول، أي:

$$\eta = \frac{output\ work}{input\ work} = \frac{\text{العمل الناتج}}{\text{العمل المعطى}} = \frac{\text{العمل المفيد}}{\text{العمل المبذول}} \qquad (22\text{-}10)$$

ومنه قيمة المردود الميكانيكي لآلة حقيقية (*Real Machine*) يكون أقل من الواحد، بينما الآلة المثالية (*Ideal Machine*) حيث العمل المفيد أي العمل الناتج يساوي العمل المبذول، أي: العمل المعطى فإنه يساوي الواحد.

مسألة10-10

المطلوب إيجاد المردود الميكانيكي η للجهاز البسيط المؤلف من مستوى مائل خشن، وبكرة، وحبل، كما هو مبين في (الشكل-10-17)، والمستعمل لرفع كتلة وزنها W .



(الشكل-10-17) جهاز ميكانيكي مؤلفة من مستوى مائل خشن، وبكرة، وحبل.

الحل:

إذا لم يكن هذا المستوى صقيلاً، فيجب أثناء حساب القوة $\boldsymbol{T}$ اللازمة لإحداث بدء حركة الكتلة على المستوى، أن نأخذ بالاعتبار الاحتكاك بين الكتلة والمستوى، وتصبح بذلك معادلة العمل الافتراضي كما يلي:

$$T.ds - W.\sin a\ .ds - F_f\ .ds = 0$$

حيث يرمز بـــ δs إلى الانتقال الشاقولي لنهاية الحبل في A ، وبـــ $\boldsymbol{F_f}$ إلى قوة الاحتكاك بين الكتلة والمستوى، علماً بأننا فرضنا أن الاحتكاك في البكرة نفسها مهمل.

وإذا رمزنا بـــ f إلى معامل الاحتكاك، ولاحظنا أن الضغط الناظمي N بين الكتلة والمستوى هو $(W.\cos\alpha)$، أصبحت معادلة العمل الافتراضي على الشكل التالي:

$$T.ds - W.\sin a\ .ds - f\ .W.\cos a\ .ds = 0$$

ومنها:

$$T = W\,(f\ .\cos a + \sin a\,)$$

نلاحظ من معادلة العمل الافتراضي، أن العمل $(T.\delta s)$ الناشئ عن القوة الفاعلة $\boldsymbol{T}$ خلال الانتقال الافتراضي δs ، لا يستهلك كله لرفع الكتلة W مقدار $(\delta s.\sin\alpha)$ فقط، ولكنه يستهلك أيضاً للتغلب على قوة الاحتكاك.

يمثل الحد ($W.\sin\alpha.\delta s$) العمل الناتج، أو العمل المفيد، ويمثل الحد ($T.\delta s$) العمل المبذول، أو العمل المعطى، ومنه يكون مردود المستوى المائل:

$$h = \frac{\sin a}{\sin a + f\,.\cos a}$$

ويلاحظ أن هذا المردود يصبح مساوياً الواحد عندما تكون ($f = 0$)، أي: في الحالة المثالية التي تنعدم فيها قوة الاحتكاك، وأنه يتناقص كلما تزايد معامل الاحتكاك.

ولو كنا ندفع الحمل W ليهبط على المستوى بدلاً من أن يصعد عليه، وذلك بالقوة T الموازية لهذا المستوى، لحصلنا على مقدار القوة اللازمة؛ لإحداث الشروع في الحركة ، من المعادلة:

$$T.ds + W.\sin a.ds - F_f.ds = 0$$

التي هي مشابهة لمعادلة العمل الافتراضي المذكورة آنفاً، والتي إذا استبدلنا فيها بالقوة $\boldsymbol{F_f}$ قيمتها ($f.W.\cos\alpha$)؛ حصلنا على:

$$T = W(f\,.\cos a - \sin a)$$

فعندما تكون ($f\,.\cos a - \sin a = 0$) أي: عندما يكون ($\tan\alpha = f$)، أو بمعنى آخر عندما تكون زاوية ميل المستوى المائل α مساوية زاوية الاحتكاك φ ؛ فإن القوة اللازمة لبدء الحركة تصبح معدومة.

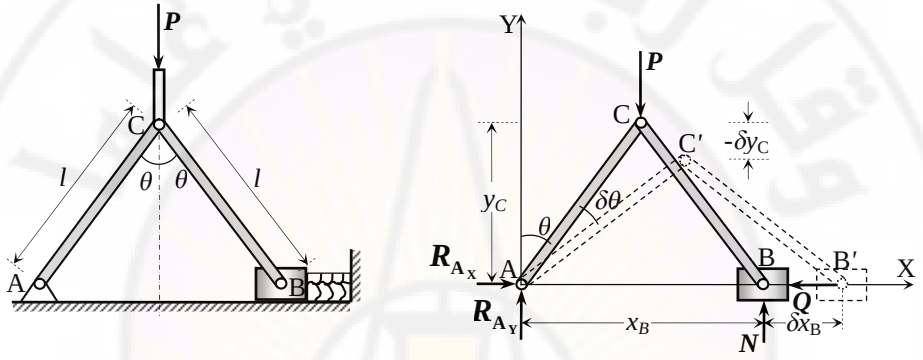
أما عندما تكون ($\alpha > \varphi$)، فإن الحمل ينزلق هابطاً على المستوى المائل، دون أن تطبق عليه أي قوة دافعة.

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها ($\alpha = \varphi$)، يمكننا الحصول على مردود المستوى المائل كجهاز ميكانيكي لرفع الحمل W كما في (الشكل-10-17)، بوضع $\tan\varphi$ مكان f في علاقة المردود السابقة؛ فنحصل عندئذ على:

$$h = \frac{\sin a}{\sin a + \tan j\,.\cos a}$$

مسألة-10-11

المطلوب تعيين القوة التي تؤثر بها الملزمة المفصلية ACB (*Toggle Vise*) الموضحة في a من (الشكل-10-18)، على قطعة الخشب B في حال تطبيق القوة $\boldsymbol{P}$ في المفصل C وبفرض عدم وجود أي احتكاك، ومن ثم تعيين المردود الميكانيكي للآلة إذا كان معامل الاحتكاك هو f .



(الشكل-10-18) تعيين القوة Q التي تؤثر بها ملزمة مفصلية بفرض عدم وجود أي احتكاك.

الحل:

بفرض R تمثل قوة رد فعل قطعة الخشب على الملزمة، وبرسم جملة الإحداثيات AXYZ بحيث تقع فيها نقطة الأصل في A ، ويقع المستوى AXY في مستوى الحركة، بالتالي يكون المحور Z عمودياً على مستوى الشكل في النقطة A .

نلاحظ أن اليد AC قادرة على الدوران حول المحور Z ، كما نلاحظ أن هيئة توازن هذه الجملة تتعين تعيناً كاملاً بالزاوية θ الكائنة بين اليد AC والمحور Y الثابت، ولذا فإن لهذه الجملة درجة واحدة من درجات الطلاقة، ويمكننا أن نعتبر θ وسيطاً لهذه الجملة.

نرسم مخطط الجسم الحر للملزمة، وندرس الانتقالات الافتراضية للنقاط المختلفة التي نحصل عليها، فعند إعطاء الوسيط θ تزايداً موجباً متناهياً في الصغر $\delta\theta$ ، الموضح في b من (الشكل-10-18)، نلاحظ أن x_B تزداد، بينما تنقص y_C الأمر الذي أشير إليه في المخطط بتغير الطولين δx_B بإشارة موجبة، و $-\delta y_C$ بإشارة سالبة.

أثناء الانتقال الافتراضي المذكور، لن يكون لردود الأفعال $\boldsymbol{R}_{A_Y}$ $\boldsymbol{R}_{A_X}$ و $\boldsymbol{N}$ أي عمل؛ لذا نحتاج فقط إلى حساب عمل القوة $\boldsymbol{P}$ ورد الفعل $\boldsymbol{Q}$ ، ومن الشكل نلاحظ:

- أن لكل من القوة $\boldsymbol{Q}$ والتغير δx_B اتجاهين متعاكسين، فالعمل الافتراضي للقوة $\boldsymbol{Q}$ يساوي:

$$dw_{\boldsymbol{Q}} = -Q.dx_B$$

- أن للقوة $\boldsymbol{P}$ والتغير $-\delta y_C$ الاتجاه نفسه، فالعمل الافتراضي للقوة $\boldsymbol{P}$ يساوي:

$$dw_{\boldsymbol{P}} = P(-dy_C) = -P.dy_C$$

ويمكن التأكد من الإشارات السالبة الناتجة بسهولة، وذلك إذا لاحظنا أن اتجاه كل من القوتين $\boldsymbol{Q}$ و $\boldsymbol{P}$ يعاكس الاتجاه الموجب للمحورين X و Y على الترتيب.

بتحديد الإحداثيات x_B و y_C بدلالة الزاوية θ :

$$x_B = 2l.\sin q \qquad , \qquad y_C = l.\cos q$$

فالتغير الحاصل فيهما نتيجة تزايد θ بمقدار $\delta\theta$ هو:

$$dx_B = 2l.\cos q.dq \qquad , \qquad dy_C = -l.\sin q.dq$$

وفي حالة اتزان الجملة يكون العمل الافتراضي معدوماً، ومنه:

$$dw = dw_{\boldsymbol{Q}} + dw_{\boldsymbol{P}} = -Q.dx_B - P.dy_C = -2Q.l.\cos q.dq + P.l.\sin q.dq = 0$$

$$2Q.l.\cos q.dq = P.l.\sin q.dq$$

ومنه:

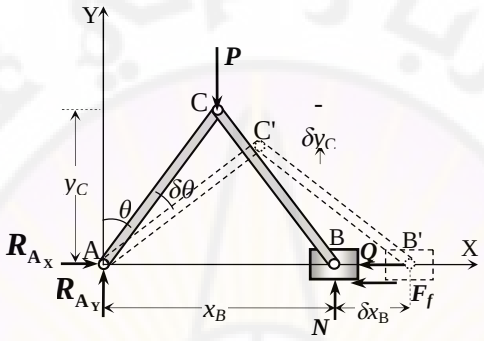
$$Q = P.\tan q/2$$

نفرض الآن وجود قوة الاحتكاك $\boldsymbol{F_f}$ بين القطعة المنزلقة B ، والمستوى الأفقي الموضحة في (الشكل10-19)، وبأخذ العزم لجميع القوى حول A ؛ نحصل على:

$$N = P/2$$

وبما أن f معامل الاحتكاك بين القطعة المنزلقة B والمستوى الأفقي، ومنه تكون قوة الاحتكاك:

$$F_f = f\,.N = f\,.P/2$$



(الشكل-10-19) تعيين القوة Q التي تؤثر بها ملزمة مفصلية بفرض وجود قوة احتكاك.

نحسب العمل الافتراضي للقوى $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{Q}$ و $\boldsymbol{F_f}$ من أجل الانتقال الافتراضي المبين في الشكل:

$$dw = dw_{\boldsymbol{Q}} + dw_{\boldsymbol{P}} + dw_{\boldsymbol{F_f}} = -Q.dx_B - P.dy_C - F_f.dx_B$$

وفي حالة توازن الجملة ينعدم العمل الافتراضي، ومنه:

$$dw = -2Q.l.\cos q.dq + P.l.\sin q.dq - f\,.P.l.\cos q.dq = 0$$

نحصل على:

$$2Q.l.\cos q.dq = P.l.\sin q.dq - f\,.P.l.\cos q.dq$$

تبين العلاقة أن العمل الناتج يساوي العمل المعطى مطروحاً منه عمل قوة الاحتكاك، وبحلها من أجل Q ينتج:

$$Q = P(\tan q - f\,)/2$$

بدراسة العلاقة هذه نلاحظ أن $(Q = 0)$ من أجل $(\tan\theta = f\,)$، أي: من أجل الحالة التي تكون فيها الزاوية θ مساوية لزاوية الاحتكاك φ ، وأن $(Q < 0)$ عندما تكون $(\theta < \varphi)$.

نستنتج مما سبق أنه يمكن استخدام الملزمة المفصلية فقط من أجل قيم للزاوية θ الأكبر من زاوية الاحتكاك φ .

ويتعين المردود الميكانيكي للآلة من العلاقة:

$$\eta = \frac{output\ work}{input\ work} = \frac{\text{العمل الناتج}}{\text{العمل المعطى}} = \frac{\text{العمل المفيد}}{\text{العمل المبذول}} \qquad (22\text{-}10)$$

بالتعويض:

$$h = \frac{Output\ Work}{Input\ Work} = \frac{2Q.l.\cos q.dq}{P.l.\sin q.dq} = \frac{2Q}{P}\cot q = 1 - f.\cot q$$

بالتالي قيمة المردود للآلة الحقيقية أقل من الواحد.

أما في حالة غياب قوة الاحتكاك، للآلة المثالية يكون لدينا ($f = 0$)، ومنه:

$$h = 1$$

وفي الحالة العامة عندما ($h \neq 0$)، فإن قيمة المردود يصبح مساوياً الصفر من أجل:

$$f.\cot q = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan q = f \quad \Rightarrow \quad q = \tan^{-1} f = j$$

ونتحقق مرة ثانية من أن الملزمة المفصلية أن تستخدم فقط من أجل قيم الزاوية θ الأكبر من قيم زاوية الاحتكاك φ .

نلاحظ في المسائل السابقة، أنه عندما نأخذ الاحتكاك بالاعتبار؛ يصبح لزاماً علينا أن نطبق بعض علاقات التوازن، بالإضافة إلى علاقة العمل الافتراضي، ونحصل أخيراً على عدة علاقات تحتوي على عدد من المجاهيل. هذه النتيجة تقودنا أحياناً إلى صعوبة كبيرة، ولذا فإننا نعمد في أكثر الحالات التي يكون فيها الاحتكاك صغيراً في المساند والمفاصل وغيرها، إلى تسهيل المسألة بإجراء سلسلة من التقريبات، فنبدأ بإهمال الاحتكاك إهمالاً كلياً، وكتابة علاقة العمل الافتراضي كما لو كانت الجملة مثالية، فنجد بهذه الطريقة العلاقة بين القوى الفاعلة المطبقة على الجملة، ومن ثم نعين الضغوط الناظمية الواقعة عند المفاصل والمساند استناداً إلى هذه العلاقة، فإذا ضربنا الضغوط التي حصلنا عليها بهذه الطريقة بمعامل الاحتكاك العائد لها، حصلنا على قيم تقريبية لقوى الاحتكاك، فنعدّها عندئذ قوى فاعلة إضافية مطبقة على الجملة، ونستطيع عندئذ استناداً إلى هذه القوى الإضافية، كتابة علاقة للعمل الافتراضي أكثر دقة من العلاقة الأولى، ومن ثم نكرر الطريقة السابقة حتى نحصل على درجة الدقة التي نتوخاها.

6- الطاقة الكامنة *Potential Energy*

إن تطبيق مبدأ العمل الافتراضي يصبح سهلاً عندما تكون القدرة الكامنة للجملة معلومة، ولذا فعند دراسة الانتقال الافتراضي، يمكن كتابة علاقة الطاقة الكامنة، والعمل على الصورة التالية:

$$dw = -dE_P$$

إضافة إلى ذلك، إذا تم تعيين موضع المجموعة بدلالة متغير واحد مستقل θ ، نكتب:

$$dE_P = \frac{dE_P}{dq} dq$$

شرط أن $\delta\theta$ لا تساوي الصفر $(dq \neq 0)$ ، وبالتالي شرط توازن الجملة يصبح:

$$\frac{dE_P}{dq} = 0 \qquad (23\text{-}10)$$

لذا فإن مبدأ العمل الافتراضي ينص على ما يلي:

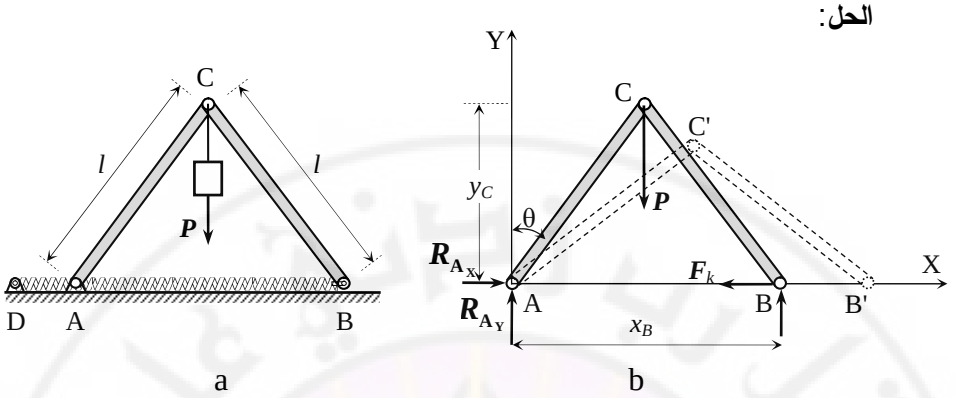
إذا كانت الجملة في حالة توازن؛ فإن مشتق قدرتها الكامنة الكلية يكون معدوماً، أما إذا اعتمد موضع الجملة على عدة متغيرات مستقلة، كأن تكون الجملة ذات عدة درجات من الطلاقة، فيجب أن يساوي المشتق الجزئي لـــ E_P بالنسبة لكل من المتغيرات المستقلة المذكورة، الصفر.

مسألة10-12

جملة ميكانيكية مؤلفة من قضيبين CA و CB تحمل الحمل P في المفصل C ، وتستند بوساطة وصلة مفصلية ثابتة في A وأسطوانة صغيرة يمكنها التدحرج في B ، بحيث يوصل النابض BD الطرف B إلى المسند الثابت D ، كما هو مبين في a من (الشكل-10-20).

إذا فرض أن ثابت مرونة النابض k ، وأن الطول الابتدائي دون إجهاد يساوي AD ، أي: أن النابض يكون بطوله الحر عندما تنطبق النقطة B مع النقطة A . المطلوب تعيين أوضاع توازن الجملة عند إهمال قوى الاحتكاك، وأوزان وصلات الجملة.

الحل:



(الشكل-10-20) جملة ميكانيكية مؤلفة من قضيبين.

إن القوى التي تقوم بعمل أثناء انتقال وصلات الجملة هي وزن الحمل $\boldsymbol{P}$ ، وقوة مرونة النابض $\boldsymbol{F_k}$ التي يؤثر بها النابض في النقطة B ، وعلى ذلك نحصل على القدرة الكامنة الكلية بجمع القدرة الكامنة $E_{\boldsymbol{P}}^{P}$ الموافقة لقوة الثقالة $\boldsymbol{P}$ ، والقدرة الكامنة $E_{\boldsymbol{F}}^{P}$ الموافقة لقوة مرونة النابض $\boldsymbol{F_k}$ ، وتحسب كما يلي.

نحدد محاور الإحداثيات بحيث تنطبق نقطة الأصل على المفصل A ، كما هو مبين في b من (الشكل-10-20)، بالتالي يكون:

$$E_{\boldsymbol{P}}^{P} = P.y_{\mathrm{C}} \qquad , \qquad E_{\boldsymbol{F}}^{P} = \frac{1}{2}k.x_{\mathrm{B}}^{2}$$

حيث x_{B} تمثل مقدار تغير طول النابض؛ الذي يقاس اعتباراً من طوله الابتدائي، أي: عندما لا يكون محملاً، ويساوي إلى ($x_{\mathrm{B}} = \mathrm{AB}$).

وبتحديد الإحداثيات x_{B} و y_{C} بدلالة الزاوية θ ؛ نحصل على:

$$y_{\mathrm{C}} = l.\cos q \qquad , \qquad x_{\mathrm{B}} = 2l.\sin q$$

بالتعويض:

$$E_{\boldsymbol{P}}^{P} = P.l.\cos q \qquad , \qquad E_{\boldsymbol{F}}^{P} = 2k.l^{2}.\sin^{2} q$$

والطاقة الكامنة الكلية:

$$E^{P} = E_{\boldsymbol{P}}^{P} + E_{\boldsymbol{F}}^{P} = P.l.\cos q + 2k.l^{2}.\sin^{2} q$$

ونحصل على مواضع التوازن لهذه التركيبة الآلية، بأخذ مشتق الطاقة الكامنة الكلية بالنسبة للمتغير θ ومساواتها بالصفر:

$$\frac{dE^P}{dq} = 4k.l^2.\sin q.\cos q - P.l.\sin q = 0$$

ومنه إما:

$$4k.l.\cos q - P = 0 \qquad \text{أو} \qquad \sin\theta = 0$$

أي: ينتج لدينا موضعين تكون فيهما التركيبة في حالة التوازن، وهذان الموضعان هما عند:

$$q = \cos^{-1}(P/4k.l) \qquad , \qquad q = 0$$

وعندما تكون $(P > 4k.l)$ فلا يوجد عندئذ موضع ثانٍ للتوازن.

7- استقرار التوازن *Stability of Equilibrium*

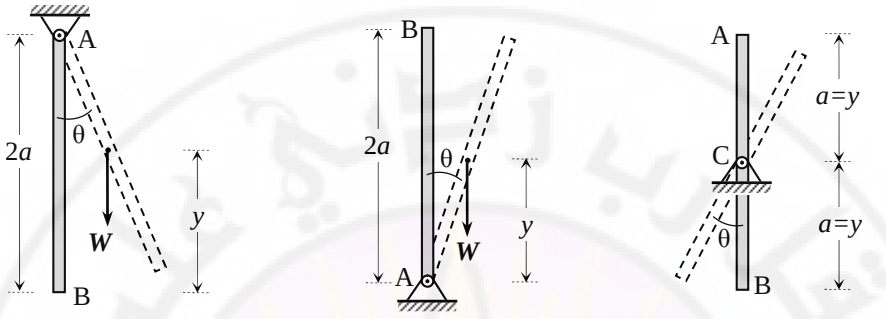
إن لمبدأ العمل الافتراضي فائدة أخرى أبعد مدى من إقامة شروط توازن جسم طبقت عليه قوى فاعلة، وهي البحث في هيئة توازن جملة مثالية لمعرفة ما إذا كان توازنها هذا مستقراً، أم غير مستقر.

والصفة المميزة لهيئة التوازن المستقر (*Stable Equilibrium*) لجملة ما، هي أنه إذا فعلت فيها لمدة وجيزة قوة ضئيلة، فأزاحتها قليلاً عن هذه الهيئة، عادت الجملة إلى هيئتها الأصلية فور إلغاء القوة المزيحة.

أما في هيئة التوازن غير المستقر أو التوازن القلق (*Unstable Equilibrium*)، فإن فعلت القوة المزيحة لبرهة وجيزة يمكن أن يسبب اضطراب في شروط التوازن، فتتابع الجملة ابتعادها عن هيئة التوازن، حتى بعد إلغاء القوة المزيحة.

وفي بعض الأحيان، عندما تلغى القوة المزيحة لا تبدي الجملة أي سعي نحو العودة إلى هيئتها الأصلية، ولا إلى متابعة الحركة بالابتعاد عن هذه الهيئة، فتدعى هيئة التوازن عندئذ بهيئة التوازن المحايد (*Neutral Equilibrium*).

لندرس ثلاثة قضبان معدنية متماثلة، طول كل منها $2a$ ، ووزنه W ، ومرتبط مفصلياً من ثلاثة أماكن مختلفة، كما في (الشكل-10-21).



c- الة توازن حيادي. b- حالة توازن غير مستقر. a- حالة توازن مستقر.

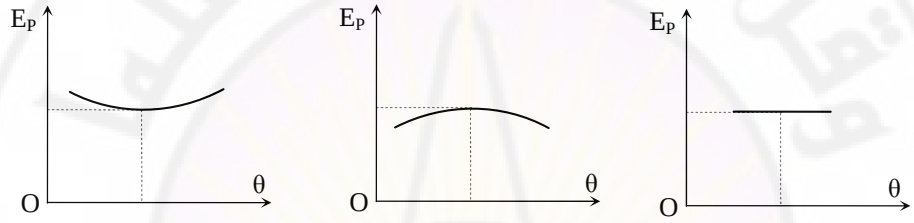
(الشكل-10-21) استقرار التوازن لثلاثة قضبان معدنية متماثلة.

على الرغم من كون القضبان الثلاثة في حالة توازن، إلا أن هناك اختلافاً عاماً بين حالات التوازن الثلاث لكل منهم. لنفرض أن كلاً منهم أزيح عن موضع توازنه بمقدار بسيط، ثم ترك بعد ذلك، فسوف نلاحظ أن القضيب الموضح في a من (الشكل-10-21) سيعود إلى موضع توازنه الابتدائي، بالتالي فهو في حالة توازن مستقر، والقضيب الموضح في b من (الشكل-10-21) سيتابع حركته مبتعداً عن موضع توازنه الابتدائي، وبالتالي فهو في حالة توازن غير مستقر، والقضيب الموضح في c من (الشكل-10-21) سيبقى في موضع توازنه الجديد، وبالتالي فهو في حالة توازن حيادي.

نعلم أن الطاقة الكامنة E_W^P بالنسبة لقوة الثقالة W تساوي إلى $(W.y)$، حيث y تمثل الارتفاع الشاقولي لنقطة تطبيق قوة الثقالة مقاسه من أي مستوى اختياري، وبالتالي تكون الطاقة الكامنة في موضع توازن القضيب الموضح في a من (الشكل-10-21) أصغرية، وللقضيب الموضح في b من (الشكل-10-21) أعظمية، وتبقى ثابتة بالنسبة للقضيب الموضح في c من (الشكل-10-21)، ومنه نستنتج:

أن توازن القضيب المعدني يكون مستقراً عندما تكون الطاقة الكامنة أصغرية، وغير مستقر عندما تكون الطاقة الكامنة أعظمية، وحيادية عندما تكون الطاقة الكامنة ثابتة.

هذه النتيجة تقودنا إلى نتيجة مهمة تفسر باعتبار أن القوى تميل بصورة عامة بأن تقوم دوماً بعمل موجب، وبالتالي تخفيض الطاقة الكامنة للمجموعة التي تطبق عليها؛ لذا فعند إزاحة الجملة قليلاً عن موضع توازنها، فإن القوى المؤثرة تعمل على إعادتها إلى موضع توازنها الابتدائي إذا كانت E^P أصغرية كما في a من (الشكل-10-22)، أو تعمل على زيادة إزاحتها عن موضعها الابتدائي إذا كانت E^P أعظمية كما في b من (الشكل-10-22)، أما عندما تكون E^P ثابتة كما في c من (الشكل-10-22) فلن تعمل القوى على تحريك المجموعة إلى أي من الجهتين.



a b c

(الشكل-10-22) استقرار التوازن عندما القوى تقوم بعمل موجب.

ومن خواص التوابع نعلم بأن التابع يكون بقيمة صغرى أو بقيمة عظمى، وذلك وفقاً لإشارة المشتق الثاني إن كان موجباً أو سالباً، وهكذا يمكن أن نلخص مما سبق شروط توازن جملة ذات درجة طلاقة واحدة؛ كما يلي:

$$\frac{dE_P}{dq}=0 \quad , \quad \frac{d^2E^P}{dq^2}>0 \qquad \text{توازن مستقر} \qquad (24\text{-}10)$$

$$\frac{dE_P}{dq}=0 \quad , \quad \frac{d^2E^P}{dq^2}<0 \qquad \text{توازن غير مستقر} \qquad (25\text{-}10)$$

أما إذا كان كلا المشتقين الأول والثاني معدومين، فمن الضروري أن نفحص إشارة مشتقات ذات درجات أعلى، وذلك من أجل التأكد إذا كان التوازن مستقراً، أو غير مستقر، أو حيادياً، فيكون توازن الجملة حيادياً عندما تكون المشتقات كافة معدومة، الذي يبين أن قيمة الطاقة الكامنة تبقى ثابتة، والتوازن سيكون مستقراً إن كان المشتق لا يساوي الصفر لأي درجة، وكان هذا المشتق موجباً، ويكون التوازن غير مستقر من أجل جميع الحالات الأخرى.

أما إذا كان للجملة عدة درجات من الطلاقة، فإن الطاقة الكامنة E^P تعتمد عندئذ على عدة متغيرات، وذلك من أجل تحديد فيما إذا كانت E^P ذات قيمة صغرى.

مثلاً يمكن أن نتحقق من أن جملة ذات درجتي طلاقة ستكون مستقرة، إذا كانت الطاقة الموافقة لـــ $E^P(\theta_1\ ,\ \theta_2)$، ذات قيمة صغرى، وإذا تحققت العلاقات التالية في الوقت نفسه.

$$\frac{dE^P}{dq_1}=\frac{dE^P}{dq_2}=0$$

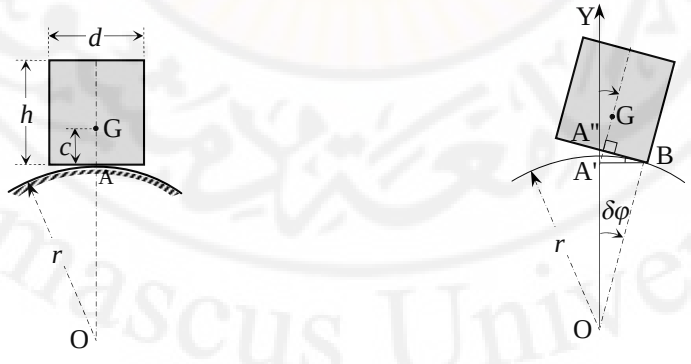
$$\left(\frac{d^2E^P}{dq_1.dq_2}\right)^2-\frac{d^2E^P}{dq_1^2}.\frac{d^2E^P}{dq_2^2}<0 \qquad (26\text{-}10)$$

$$\frac{d^2E^P}{dq_1^2}>0 \qquad \text{أو} \qquad \frac{d^2E^P}{dq_2^2}>0$$

مسألة-10-13

علبة أسطوانية مفتوحة قطرها d وارتفاعها h ومركز ثقلها G يبعد عن قاعدة العلبة مقدار c ، تستند إلى ذروة سطح كروي، نصف قطره r كما هو مبين في a من (الشكل-10-23).

إذا فرضنا أن الاحتكاك كاف لمنع الانزلاق. المطلوب إيجاد العلاقة بين c و r التي تحقق الاستقرار.



a b

(الشكل-10-23) استقرار علبة أسطوانية.

الحل:

عندما تكون العلبة مستقرة؛ فإن طاقتها الكامنة يجب أن تكون صغرى، ويجب أن يرتفع مركز الثقل G في أي انتقال افتراضي متناه في الصغر معين بالزاوية $\delta\varphi$ ، كما هو مبين في b من (الشكل-10-23). أثناء هذا الانتقال تتدحرج العلبة على السطح الكروي دون انزلاق، ويكون طول المستقيم A'B يساوي تقريباً طول القوس AB ، بالتالي يكون ارتفاع G عن مركز الكرة O هو:

$$y_G = (\mathbf{OA'} + \mathbf{A'A''} + \mathbf{A''G})_Y = r.\cos dj + r.dj.\sin dj + c.\cos dj$$

وارتفاع G عن O في وضع التوازن هو $(r + c)$، فلكي يتحقق الاستقرار لا بد أن يكون لدينا الشرط الكافي بأن:

$$r.\cos dj + r.dj.\sin dj + c.\cos dj > r + c$$

ولما كانت $\delta\varphi$ صغيرة جداً، بحيث يمكن أن نعدّ:

$$\sin dj \approx dj \quad , \quad \cos dj \approx 1 - \frac{dj^2}{2}$$

والشرط يختصر عندئذ إلى:

$$r.dj^2 > (r + c)\frac{dj^2}{2}$$

ونجد من ذلك $(r > c)$ وهو شرط الاستقرار المطلوب.

8- المعادلة العامة للتحريك *General Equation of Dynamics*

يعطي مبدأ العمل الافتراضي الطريقة العامة لحل مسائل علم التوازن، ومن ناحية أخرى يكفل مبدأ دالمبير استخدام طرق التوازن لحل مسائل التحريك، وبالتالي فبتطبيق هذين المبدأين في آن واحد؛ يمكننا أن نحصل على الطريقة العامة لحل مسائل التحريك.

لندرس جملة من الجسيمات المادية فرضت عليها قيود مثالية، فإذا أضفنا إلى كل جسيمات الجملة قوى العطالة المناظرة $(\boldsymbol{F_k^{in}} = -m_k.\boldsymbol{A_k})$، علاوة على القوى الفاعلة $\boldsymbol{F_k^a}$ ، وردود أفعال القيود $\boldsymbol{N_k}$ المؤثرة عليها، فإن مجموعة القوى الناتجة تكون وفقاً لمبدأ دالمبير في حالة اتزان، وعندئذ بتطبيق مبدأ العمل الافتراضي لهذه القوى نحصل على:

$$\sum dw_k^a + \sum dw_k^{in} + \sum dw_k^r = 0$$

ولكن المجموع الأخير معدوم وفقاً للمعادلة (10-7)، فنحصل أخيراً على:

$$\sum dw_k^a + \sum dw_k^{in} = 0 \qquad (27\text{-}10)$$

هذه العلاقة هي عبارة عن العلاقة العامة للتحريك، ومنها مبدأ دالمبير – لاغرانج التالي:

عند حركة الجملة ذات القيود المثالية يكون في كل لحظة زمنية معطاة مجموع العمل الأولي؛ الذي تبذله كل القوى الفاعلة وقوى العطالة في أي انتقال افتراضي للجملة معدوم.

وتكتب الصورة التحليلية للمعادلة (10-27) على الشكل التالي:

$$\sum[(F_{k_X}^a + F_{k_X}^{in})dx_k + (F_{k_Y}^a + F_{k_Y}^{in})dy_k + (F_{k_Z}^a + F_{k_Z}^{in})dz_k] = 0 \qquad (28\text{-}10)$$

وتكفل المعادلة (10-27) أو (10-28) تكوين المعادلات التفاضلية لحركة أي جملة ميكانيكية.

وإذا كانت الجملة عبارة عن مجموعة من الأجسام الصلبة، فلا بد لتكوين المعادلات من إضافة قوى مؤثرة في أي مركز تساوي المتجه الرئيسي لقوى العطالة، وازدواج عزمه يساوي العزم الرئيسي لقوى العطالة حول هذا المركز، وذلك إلى القوى الفاعلة المؤثرة على كل جسم، ثم يطبق بعد ذلك مبدأ العمل الافتراضي.

مسألة-10-14

منظم طارد مركزي موضح في (الشكل-10-24)، يدور بانتظام حول المحور الرأسي بسرعة زاوية ω .

إذا كان وزن كل من كرتيه A_1 و A_2 يساوي W ، ووزن الجلبة C_1C_2 يساوي Q . وأن:

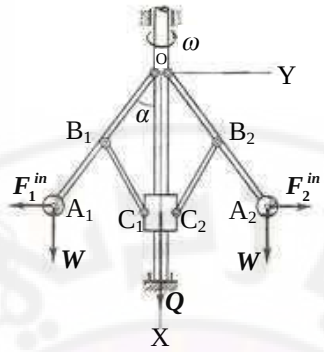
$$OA_1 = OA_2 = l \quad , \quad OB_1 = OB_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = a$$

المطلوب، بإهمال أوزان القضبان، تعيين قيمة الزاوية α .

الحل:

نضيف إلى القوى الفاعلة $\boldsymbol{W_1}$ ، $\boldsymbol{W_2}$ و $\boldsymbol{Q}$ ، قوتي العطالة الطاردتين المركزيتين $\boldsymbol{F_1^{in}}, \boldsymbol{F_2^{in}}$ للكرتين فقط؛ لأن قوة العطالة للجلبة معدومة، وبتكوين المعادلة العامة للتحريك ، كما في العلاقة (10-28)، عندئذ بحساب مساقط كل القوى على محاور الإحداثيات؛ نحصل على:

$$W_1.dx_1 + W_2.dx_2 - F_1^{in}.dy_1 + F_2^{in}dy_2 + Q_3.dx_3 = 0$$



(الشكل-10-24) منظم طارد مركزي.

وعند ذلك يكون:

$$W_1 = W_2 = W \quad , \quad Q_3 = Q \quad , \quad F_1^{in} = F_2^{in} = \frac{W}{g} A_{\mathrm{A}}^n = \frac{W}{g} w^2 .l.\sin a$$

وإحداثيات نقط تأثير القوى تساوي:

$$x_1 = x_2 = l.\cos a \quad , \quad y_2 = -y_1 = l.\sin a \quad , \quad x_3 = 2a.\cos a$$

وبتفاضل هذه المعادلات نجد أن:

$$d x_1 = d x_2 = -l.\sin a \, .da \quad , \; d y_2 = -d y_1 = l.\cos a \, .da \quad , \; dx_3 = -2a.\sin a \, .da$$

وبالتعويض في المعادلة العامة للتحريك بكل القيم الناتجة؛ نحصل على:

$$(-2W.l.\sin a + 2\frac{W}{g} l^2 .w^2 .\sin a .\cos a - 2Q.a.\sin a)da = 0$$

من هنا نحصل أخيراً على:

$$\cos a = \frac{W.l + Q.a}{W.l^2 .w^2} g$$

وبما أن $(\cos a \leq 1)$ فإن الكرتين تتحركان، وعند ذلك يكون:

$$w^2 > \frac{W.l + Q.a}{W.l^2} g$$

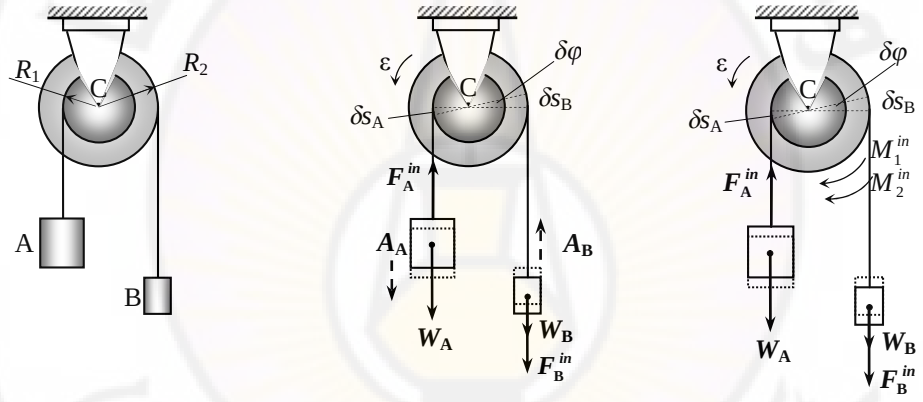
وبازدياد ω تزداد الزاوية α وتؤول إلى 90^o عندما تؤول $(w \to \infty)$.

مسألة-10-15

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على ثقل A وزنه W_A ، وثقل B وزنه W_B معلقان إلى حبال غير قابلة للشد. تلتف على أسطوانتين متحدتين بالمحور بشكل متين، كما هو مبين في a من (الشكل-10-25).

فإذا كان نصف قطري الأسطوانتين R_1 و R_2 ، وأن الجملة تتحرك بفعل الثقالة. المطلوب، بإهمال كتل الحبال، تعيين التسارع الزاوي للأسطوانتين في الحالتين:

1. بإهمال كتل الأسطوانتين.
2. باعتبار Q_1 وزن الأسطوانة الصغيرة، و Q_2 وزن الأسطوانة الكبيرة، وأن كتلة كل منهما موزعة بانتظام على السطح الخارجي.



a b c

(الشكل-10-25) ثقلان معلقان إلى حبال تلتف على أسطوانتين متحدتين بالمحور.

الحل:

1.لنعدّ أن تناسب الثقلين يؤمن للجملة حركة باتجاه عكس حركة عقارب الساعة، كما في الشكل، وأن الجملة تتألف من الثقلين اللذين يتحركان حركة انتقالية، ومن الأسطوانتين والحبال التي كتلهم مهملة. كما أن الجملة ذات درجة طلاقة واحدة، والقوى المؤثرة عليها هي الأوزان W_A و W_B التي تمثل القوى الفاعلة، ونضيف إليها قوى العطالة لكل من الثقلين المبينة في b من (الشكل-10-25)، والتي تعين قيمها بسهولة:

$$F_A^{in} = m_A . A_A = \frac{W_A}{g} R_1 . e \qquad , \qquad F_B^{in} = m_B . A_B = \frac{W_B}{g} R_2 . e$$

باعطاء الجملة انتقال افتراضي عبارة عن دوران الأسطوانتين بزاوية صغيرة $\delta\varphi$ باتجاه الحركة، بالتالي تكون الانتقالات لكل من الثقلين:

$$ds_A = R_1.dj \qquad , \qquad ds_B = R_2.dj$$

وبتطبيق العلاقة العامة في التحريك:

$$W_A.ds_A - F_A^{in}.ds_A - F_B^{in}.ds_B - W_B.ds_B = 0$$

وبالتعويض؛ نحصل على:

$$W_A.R_1.dj - \frac{W_A}{g}R_1.e.R_1.dj - \frac{W_B}{g}R_2.e.R_2.dj - W_B.R_2.dj = 0$$

ومنه علاقة التسارع الزاوي المطلوب:

$$e = \frac{W_A.R_1 - W_B.R_2}{W_A.R_1^2 + W_B.R_2^2}\,g$$

ويكون اتجاهه وفق الاتجاه المفروض إذا كان:

$$e > 0 \qquad \Rightarrow \qquad W_A > \frac{R_2}{R_1}W_B$$

2. بما أن مراكز ثقل الأسطوانتين تقع على محور الدوران المار من C ، فإن المجموعة العطالية لكل منهما تؤول إلى مزدوجة، اتجاهها عكس اتجاه التسارع الزاوي، والمبينة في c من (الشكل-10-25)، وقيمتها تعطى بالعلاقة:

$$\left|M_1^{in}\right| = I_{1_C}.e = \frac{Q_1}{g}R_1^2.e \qquad , \qquad \left|M_2^{in}\right| = I_{2_C}.e = \frac{Q_2}{g}R_2^2.e$$

بإعطاء الجملة انتقال افتراضي عبارة عن دوران الأسطوانتين بزاوية صغيرة $\delta\varphi$ ، كما في الطلب الأول، تكتب العلاقة العامة في التحريك بالشكل:

$$W_A.ds_A - F_A^{in}.ds_A - F_B^{in}.ds_B - W_B.ds_B - \left|M_1^{in}\right|dj - \left|M_2^{in}\right|dj = 0$$

اعتبرنا عمل مزدوجة العطالة سالباً؛ لأن اتجاهها يعاكس اتجاه الانتقال الزاوي $\delta\varphi$ ، وبعد التعويض بقيم مزدوجتي العطالة، واعتبار القيم الواردة في الطلب الأول نجد بسهولة علاقة التسارع الزاوي المطلوب:

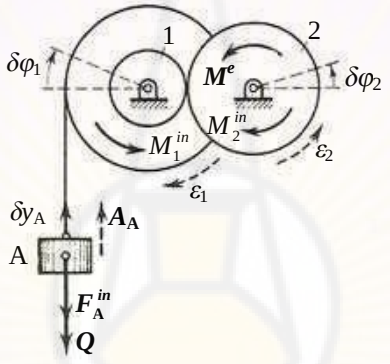
$$e = \frac{W_A.R_1 - W_B.R_2}{(W_A + Q_1)R_1^2 + (W_B + Q_2)R_2^2}\,g$$

مسألة-10-16

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على مسنن 2 وزنه W_2 ، ونصف قطر عطالته ρ_2 ، وعلى بكرة نصف قطرها r لف عليها حبل، ومثبت بها المسنن 1 تثبيتاً صلباً وزنهما معا يساوي W_1 ، ونصف قطر عطالتهما معا يساوي ρ_1 ، ونصفا قطري المسننين يساويان r_2،r_1 ، كما هو مبين في (الشكل-10-26).

إذا طبق على المسنن 2 عزم دوران $\boldsymbol{M^e}$. المطلوب تعيين تسارع الثقل المرفوع A ، والذي وزنه Q ، مع إهمال وزن الحبل والاحتكاك في المحاور.

الحل:



(الشكل-10-26) آلة رافعة.

نمثل في الشكل القوة الفاعلة $\boldsymbol{Q}$ المؤثرة على الجملة وعزم الدوران $\boldsymbol{M^e}$ ، علماً بأن القوتين $\boldsymbol{W_1}$ ، $\boldsymbol{W_2}$ لا تبذلان عملاً، ثم نضيف إليهما قوة العطالة للثقل $\boldsymbol{F_A^{in}}$ ، وازدواجين عزمهما M_1^{in}, M_2^{in} تؤول إليهما قوى العطالة للأجسام الدائرة، وتساوي هذه الكميات في المقدار:

$$F_A^{in} = \frac{Q}{g} A_A \quad , \quad \left|M_1^{in}\right| = \frac{W_1}{g} r_1^2 . e_1 \quad , \quad \left|M_2^{in}\right| = \frac{W_2}{g} r_2^2 . e_2$$

وتبين في الشكل اتجاهات جميع هذه الكميات، وبإكساب الجملة انتقالاً افتراضياً، وتكوين العلاقة العامة للتحريك؛ نحصل على:

$$-(Q + F_A^{in}) dy_A - M_1^{in} . dj_1 + (M^e - M_2^{in}) dj_2 = 0$$

ومن علاقات الحركة يمكن التعبير عن جميع الانتقالات بدلالة $\delta\varphi_1$ ، نجد أن:

$$dy_A = r.dj_1 \quad , \quad \frac{dj_2}{dj_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \Rightarrow \quad dj_2 = \frac{r_1}{r_2} dj_1$$

وتأخذ معادلة الحركة الصورة التالية:

$$Q(1+\frac{A_A}{g})r + \frac{W_1}{g} r_1^2.e_1 + \frac{W_2}{g} r_2^2.e_2 \frac{r_1}{r_2} - M^e \frac{r_1}{r_2} = 0$$

كما يمكن التعبير عن التسارعات الزاوية ε_2،ε_1 بدلالة التسارع الخطي المطلوب A_A ، بالاشتقاق مرتين بالنسبة للزمن لمعادلات الانتقال.

$$A_A = r.e_1 \quad \Rightarrow \quad e_1 = \frac{1}{r} A_A \quad , \quad e_2 = \frac{r_1}{r_2} e_1 = \frac{r_1}{r_2.r} A_A$$

ونتيجة لذلك نجد أخيراً:

$$A_A = \frac{\frac{r_1}{r_2} M^e - r.Q}{r.Q + \frac{r_1^2}{r} W_1 + \frac{r_2^2}{r}.\frac{r_1^2}{r_2^2} W_2} \quad g$$

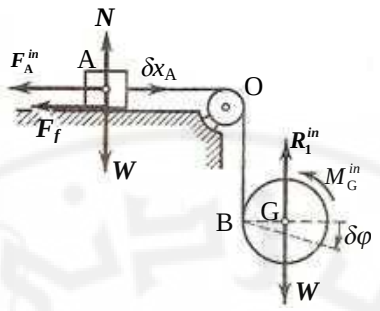
كان من الممكن حل هذه المسألة بتطبيق مبدأ تغير الطاقة الحركية على الجملة.

مسألة-10-17

تحتوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي على أسطوانة مصمتة وزنها W_1 ، ونصف قطرها r ، وعزم عطالتها حول محورها الهندسي المار من مركز كتلها هو ($I_O = m.r^2/2$)، لف عليها خيط يمر فوق البكرة O ، وربط طرفه الآخر بثقل A وزنه W_2 يمكنه الانزلاق على مستوى أفقي، كما هو مبين في (الشكل-10-27).

فإذا كان معامل احتكاك الثقل بالمستوى يساوي f . المطلوب، بإهمال كتلتي البكرة والخيط، تعيين تسارع الثقل، والتسارع الخطي والزاوي للأسطوانة أثناء حركة الجملة.

الحل:



(الشكل-10-27) جملة ميكانيكة.

إذا ابتدأت الحركة من السكون؛ فإن مركز الأسطوانة يتحرك رأسياً، ويكون للجملة درجتان للطلاقة؛ لأن الانتقالات المستقلة هي دوران الأسطوانة بالنسبة إلى الخيط حول B عندما يكون الثقل ثابتاً، وانتقال الثقل عند عدم دوران الأسطوانة.

ونضيف إلى القوى المؤثرة $\boldsymbol{F_f}$ ، $\boldsymbol{W_1}$ ، $\boldsymbol{W_2}$ المجموعة العطالية للأسطوانة التي تؤول إلى متجه رئيسي $\boldsymbol{R_1^{in}}$ وازدواج عزمه M_G^{in} ، وقوة العطالة للثقل $\boldsymbol{F_A^{in}}$. وعند ذلك تكون هذه القوى في المقدار مساوية إلى:

$$F_A^{in} = \frac{W_2}{g} A_A \quad , \quad R_1^{in} = \frac{W_1}{g} A_G \quad , \quad \left|M_G^{in}\right| = I_G.e = \frac{W_1}{2g} r^2.e$$

ومن علاقات الحركة يمكن إيجاد العلاقة بين التسارع الزاوي ε للأسطوانة، والتسارع الخطي لمركز كتلها A_G ، وذلك من علاقة السرعة النسبية:

$$\boldsymbol{V}_{GB} = \boldsymbol{V}_G - \boldsymbol{V}_B$$

وبما أن متجهات السرعة في هذه العلاقة هي دوماً على منحى واتجاه شاقولي نحو الأسفل، وبما أن $(V_B = V_A)$ ، وبإسقاط علاقة السرعة على منحى الحركة، واشتقاقها؛ نحصل على:

$$w.GB = V_G - V_A \quad \Rightarrow \quad w = (V_G - V_A)/r \quad \Rightarrow \quad e = (A_G - A_A)/r$$

نكسب الآن الجملة انتقالاً افتراضياً δx_A لا تدور أثناءها الأسطوانة، وإنما تتحرك حركة انسحابية مع الثقل، ولا يبذل الازدواج ذو العزم $\boldsymbol{M_G^{in}}$ عملاً في هذا الانتقال، ونحصل تبعاً لعلاقة العامة للتحريك على:

$$(-F_f - F_A^{in} - R_1^{in} + W_1)dx_A = 0$$

ومن شرط الانزلاق:

$$F_f = f\,.N$$

وبالتعويض من علاقة التوازن على منحى N نجد أن:

$$F_f = f\,.W_2$$

وبالتعويض في العلاقة العامة للتحريك نجد أن:

$$\frac{W_1}{g}A_{\mathrm{G}} + \frac{W_2}{g}A_{\mathrm{A}} = W_1 - f\,.W_2 \qquad \text{(a)}$$

والآن نكسب الجملة انتقالاً افتراضياً آخر مستقلاً عن الأول، يظل أثناءها الثقل A ثابتاً، وتدور الأسطوانة بزاوية $\delta\varphi$ حول النقطة B التي تكون لهذا الانتقال مركزاً لحظياً للدوران. وتعطى العلاقة العامة للتحريك لهذا الانتقال:

$$(W_1 - R_1^{in})\,r.dj - M_{\mathrm{G}}^{in}.dj = 0$$

وبالتعويض بقيمتي $\boldsymbol{R_1^{in}}$ و $\boldsymbol{M_{\mathrm{G}}^{in}}$ في هذه العلاقة؛ نحصل أخيراً على:

$$3A_{\mathrm{G}} - A_{\mathrm{A}} = 2g \qquad \text{(b)}$$

وبحل مجموعة المعادلتين (a) و (b) نعين التسارعين الخطيين المطلوبين:

$$A_{\mathrm{G}} = \frac{W_1 + (2-f)W_2}{W_1 + 3W_2}g \qquad , \qquad A_{\mathrm{A}} = \frac{W_1 - 3f\,.W_2}{W_1 + 3W_2}g$$

ويتضح من الحل الناتج أن الحركة السابقة تكون ممكنة الحدوث عندما يكون:

$$A_{\mathrm{A}} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f \le W_1 / 3W_2$$

وإذا كان معامل الاحتكاك أكبر من هذا المقدار؛ فإن الثقل A يكون ثابتاً، وعندئذ لا يصبح الانتقال δx_{A} للجملة ممكناً، وبالتالي لا نحصل على العلاقة (a)، وفي هذه الحالة يتحرك مركز الأسطوانة G وفقاً للعلاقة (b) إذا ما عوضنا فيها $(A_{\mathrm{A}} = 0)$، عندئذ العلاقة (b) تصف حركة المركز G .

وبالتالي فعندما يكون $(f > W_1/3W_2)$ لا يتحرك الثقل A ، ويهبط مركز الأسطوانة G بتسارع $(A_{\mathrm{G}} = 2g/3)$.

* * *

مسائل غير محلولة ***PROBLEMS***

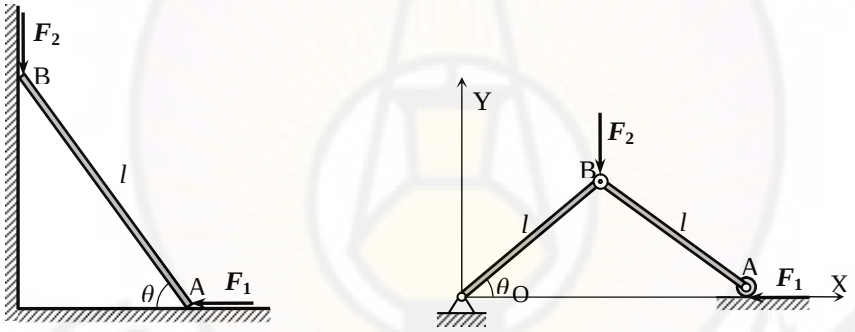
تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على الجمل الميكانيكية المثالية وذات الوسيط الواحد.

م-10-1

يستند قضيب AB مهمل الوزن وطوله l إلى جدار شاقولي وعلى أرض أفقية، كما هو مبين في a من (الشكل.م-10-1).

إذا طبقت على نهايتيه القوتان $\boldsymbol{F_1}$ و $\boldsymbol{F_2}$. المطلوب، بإهمال الاحتكاك، إيجاد الزاوية θ في حالة التوازن بدلالة هاتين القوتين.

الجواب: $\tan q = F_2 / F_1$



a b

(الشكل.م-10-1)

م-10-2

تتكون الجملة الميكانيكية المثالية المتوضعة في المستوي الشاقولي من وصلتين OB و AB طول كل منهما l ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-10-1).

إذا طبق عليهما القوتان $\boldsymbol{F_1}$ و $\boldsymbol{F_2}$. المطلوب، بإهمال الاحتكاك وأوزان الوصلات، إيجاد الزاوية θ في حالة توازن الجملة بدلالة هاتين القوتين.

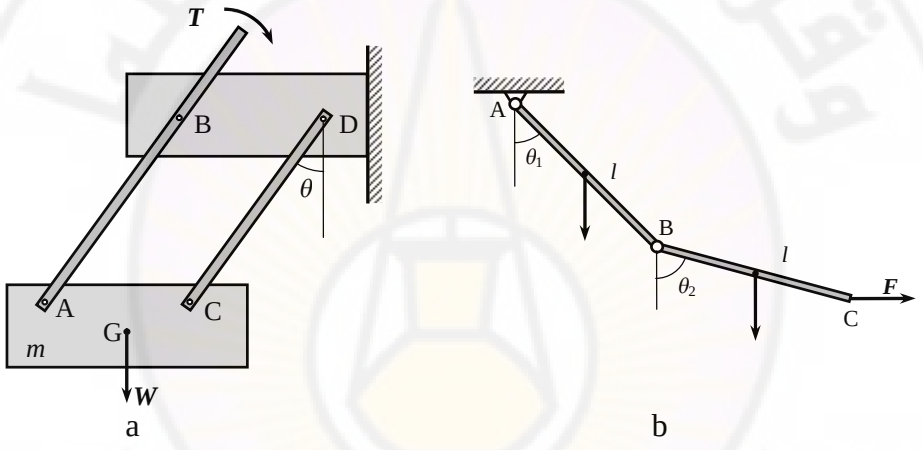
الجواب: $\tan q = F_2 / 2F_1$

م-10-3

تتكون الجملة الميكانيكية المثالية المتوضعة في المستوي الشاقولي من وصلتين، حيث (AB = CD = l) و (AB // CD)، ومن كتلة متجانسة وزنها W ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-10-2).

إذا طبق العزم T على الطرف B من الوصلة AB . المطلوب، بإهمال الاحتكاك وأوزان الوصلات، إيجاد الزاوية θ في حالة توازن الجملة.

الجواب: $\tan q = T / l.W$



(الشكل.م-10-2)

تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على الجمل الميكانيكية المثالية وذات وسيطين.

م-10-4

تتكون الجملة الميكانيكية المثالية المتوضعة في المستوي الشاقولي من وصلتين AB و BC وزنهما W_1،W_2 ، وطول كل منهما l ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-10-2).

إذا طبقت القوة F على الطرف C من الوصلة BC . المطلوب تعيين الزاويتين θ_1 , θ_2 في حالة توازن الجملة.

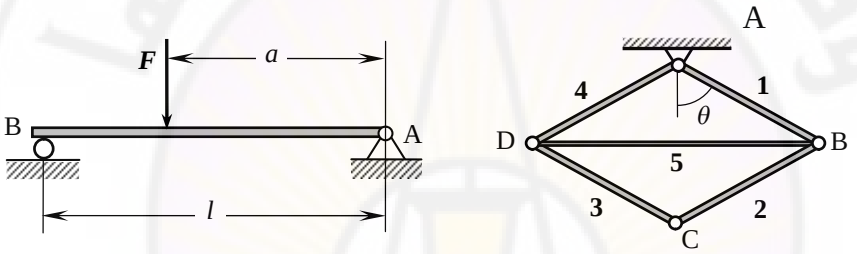
الجواب: $\tan q_1 = 2F / W_2$, $\tan q_2 = 2F / (W_1 / 2W_2)$

تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على الجمل الميكانيكية المثالية والمقيدة تقييداً تاماً.

م-10-5

جائز AB طوله l ، ويخضع للقوة F ، كما هو مبين في a من (الشكل.م-10-3). المطلوب، بإهمال وزن الجائز، تعيين رد فعل المتدحرج B .

الجواب: $R_B = a.F/l$



a b

(الشكل.م-10-3)

م-10-6

جائز شبكي ABCD مؤلف من خمسة قضبان موصولة على شكل معين طول ضلعه $2a$ ، كما هو مبين في b من (الشكل.م-10-3).

إذا كان وزن القضيب 5 مهمل، ووزن كل قضيب من القضبان الأربعة هو W . المطلوب إيجاد القوة المحورية Q التي تنشأ في القضيب 5 ، وبين حالته.

الجواب: القضيب 5 هو في حالة ضغط و $(Q = 2W.\tan q)$

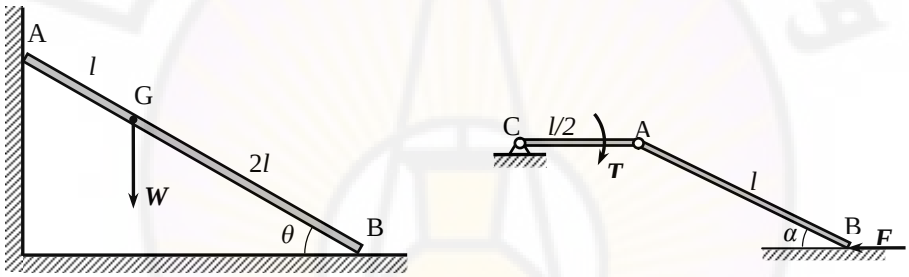
تطبيق مبدأ العمل الافتراضي على الجمل الميكانيكية غير المثالية.

م-10-7

قضيب غير متجانس AB وزنه W يستند بطرفه A الى جدار شاقولي خشن، وبطرفه B إلى أرض أفقية خشنة، كما هو مبين في a من (الشكل.م-10-4).

إذا كان عامل الاحتكاك بين السطوح المتماسة هو f . المطلوب إيجاد الزاوية θ في حالة التوازن.

الجواب: $\tan q = (2 - f^2)/3f$



a b

(الشكل.م-10-4)

م-10-8

تتكون جملة ميكانيكية غير مثالية متوضعة في مستو شاقولي من قضيب، كما هو مبين في b من (الشكل.م-10-4)، حيث ينزلق الطرف B للقضيب AB على مستوٍ أفقي خشن، ويستطيع القضيب CA الدوران حول المفصل C .

إذا طبقت القوة F على الطرف B من الوصلة AB ، وطبق العزم T على الذراع CA ، وكان عامل الاحتكاك بين القضيب والمستوي الأفقي هو f . المطلوب تعيين العزم T في حالة توازن الجملة.

الجواب: $T = F.l.\tan a \,/\, 2(1 - f.\tan a)$

Bibliography المراجع العلمية

Alais, Pierre - *Mécanique* (*Cinématique-Dynamique*)
Second Edition - 1969 - *Librairie Armand Colin*

Beer / Johnston - *Vector Mechanics for Engineers - Dynamics*
Second Edition - 1990 – *Mc.Graw.Kogakusha*

Giet, A. - *Problémes de Mécanique*
Dunod - 1965 - *Paris*

Hibbele, R.C. - *Engineering Mechanics* (*Dynamics*)
Sixth Edition - 1992 - *Maxwell Macmillan Internationa*

Mc Lean / Nelson - *Engineering Mechanics* (*Statics and Dynamics*)
Forth Edition - 1988
Schaum's Outline Series in Engineering
McGraw-Hill Book Company

Meriam, J.L. - *Dynamics*
Third Edition - 1993 - *John Wiley & Sons,Inc.*

Murray R.Spiegel - *Theoretical Mechanics*
1967 - *Schaum's Outline Series in Science*
McGraw - Hill Book Company

س. تارج – الميكانيكا- النظرية
ترجمة الدكتور أحمد صادق القرماني
الطبعة الخامسة - 1986
دار مير للطباعة والنشر – الاتحاد السوفييتي – موسكو

تيموشنكو س – د.ه .يونغ – ميكانيك الهندسة – علم التحريك
ترجمة : وجيه القدسي – عبد الرزاق قدورة – الوليد ملحس
مطابع الشركة العربية – 1967

ج. ل. ميريام - الميكانيكا الهندسية - الديناميكا
ترجمة : ف. أ. ر. الصالحي – م. فوزي حمد – صالح العذل
دار جون وايلي وأبنائه - 1982

وجيه القدسي – موجز الميكانيك
الطبعة الثانية – 1962
مطبعة جامعة دمشق

د. مطانس شحادة زلمة – الميكانيك الهندسي – الحركة والتحريك
منشورات جامعة حلب – 1981
مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

د. وليد مصطفى خرطبيل – الميكانيك الهندسي – 3
منشورات جامعة دمشق – 1989
مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

List of Symbols		جدول الرموز
$\boldsymbol{A}$	*- Acceleration Vector*	- التسارع الخطي
$\boldsymbol{A}_G$	*- Acceleration of Mass Center*	- تسارع مركز الكتل
A_{av}	*- Average Acceleration*	- التسارع الوسطي
$\boldsymbol{A}_a$	*- Absolute Acceleration*	- التسارع المطلق
$\boldsymbol{A}_c$	*- Coriolis Acceleration*	- تسارع كوريوليس
$\boldsymbol{A}_e$	*- Transport Acceleration*	- التسارع المكتسب
$\boldsymbol{A}_r$	*- Relative Acceleration*	- التسارع النسبي
$\boldsymbol{A}_{B/A}$, $\boldsymbol{A}_{BA}$	*- Relative Acceleration of* B *with Respect to* A	- التسارع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A
A	*- Section Area*	- مساحة المقطع
A , B, C ,	*- Points*	- نقاط
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$	*- Constant Vector*	- متجه ثابت
$\boldsymbol{b}$	*- Unitary Vector for Binomial Direction - Binomial Direction*	- المتجه الواحدي للناظم الثانوي - اتجاه الناظم الثانوي
a	*- Amplitude* *- Semi major axis of ellipse*	- سعة الاهتزاز - نصف المحور الكبير لقطع ناقص
b	*- Semi major axis of ellipse*	- نصف المحور الصغير لقطع ناقص
$\boldsymbol{C}$	*- Couple*	- مزدوجة
C	*- Path – Centroidal*	- مسار – المركز المتوسط
c	*- Coefficient of Rolling Friction*	- معامل الاحتكاك التدحرجي
c_1 , c_2 ,….	*- Constants*	- ثوابت
D , d	*- Diameter*	- قطر الدائرة
a , b, c, d	*- Distance*	- مسافة
E_k	*- Kinetic Energy of a Particle*	- الطاقة الحركية لجسيم
E_c	*- Kinetic Energy of a System*	- الطاقة الحركية لجملة مادية
E_m	*- Mechanical Energy*	- الطاقة الميكانيكية
E_p	*- Potential Energy*	- الطاقة الكامنة

e	- *Coefficient of Restitution* - *Base of natural logarithms*	- معامل الارتداد - أساس اللوغاريتم الطبيعي
$\boldsymbol{F}$	- *Force*	- قوة
$\boldsymbol{F}^a$	- *Active Force*	- القوة الفاعلة
$\boldsymbol{F}^e$	- *External Force*	- القوة الخارجية
$\boldsymbol{F}^i$	- *Internal Force*	- القوة الداخلية
$\boldsymbol{F}_{at}$	- *Attraction Force*	- قوة الجذب
$\boldsymbol{F}_f$	- *Friction Force*	- قوة الاحتكاك
$\boldsymbol{F}_k$	- *Elastic Force*	- قوة المرونة لنابض
$\boldsymbol{F}^{in}$	- *Inertia Force*	- قوة العطالة
$\boldsymbol{F}_c^{in}$	- *Coriolis Inertia Force*	- قوة عطالة كوريوليس
$\boldsymbol{F}_e^{in}$	- *Transport Inertia Force*	- قوة العطالة المكتسبة
$f_k = f$	- *Coefficient of Kinetic Friction*	- معامل الاحتكاك الحركي (التحريكي)
f_r	- *Frequency*	- تردد الاهتزاز
f_s	- *Coefficient of Static Friction*	- معامل الاحتكاك السكوني
G	- *Center of Gravity - Mass Center* - *Constant of Gravitation*	- مركز الثقالة – مركز الكتل – ثابت الجاذبية
g	- *Acceleration of Gravity*	- تسارع الجاذبية
H - h	- *Height*	- ارتفاع
$\boldsymbol{I}$	- *Impulse of a Force*	- دفع القوة
I	- *Instantaneous Center of Rotation*	- المركز الآني للدوران
I_O	- *Polar Moment of Inertia of a Body Mass about point* O	- عزم العطالة القطبي لكتلة جسم حول نقطة O
I_Z - I_O	- *Mass Moment of plate about Axis* OZ *in plane motion*	- عزم العطالة لكتلة صفيحة حول محور OZ في الحركة المستوية
I_X	- *Aria Moment of Inertia of plate about Axis* X	- عزم العطالة لمساحة صفيحة حول محور X
I_{ZZ}	- *Mass Moment of Inertia of a Three-Dimensional Body about Axis* ZZ	- عزم العطالة لكتلة جسم ثلاثي الأبعاد حول محور ZZ
I_{XZ}	- *Product of Inertia about Axis* Z *and* X	- جداء العطالة بالنسبة لمحورين X و Z

I_{OXY}	- *Mass Moment of Inertia about Plain* OXY	- عزم العطالة لكتلة جسم بالنسبة لمستوى OXY
J_Z	- *Polar Moment of Inertia of the Plate Area about Axis* Z	- عزم العطالة القطبي لمساحة صفيحة حول محور Z عمودي عليها
$\boldsymbol{K_O}$	- *Moment of Momentum of a System about point* O (*Angular Momentum*)	- العزم الحركي لجملة مادية حول نقطة O (العزم الزاوي)
K_X,K_Y,K_Z	- *Moment of Momentum of a System about Axis* X , Y , Z (*Angular Momentum*)	- العزم الحركي لجملة مادية حول المحاور X , Y , Z (العزم الزاوي)
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	- *Unitary Vector for Axis* X , Y , Z	- المتجه الواحدي للمحاور الإحداثية
k	- *Spring Constant* - *Proportion Factor*	- ثابت المرونة لنابض- عامل تناسب
L , l	- *Length*	- طول
M	- *Mass of System*	- كتلة جملة مادية
M_k	- *Particle*	- جسيم مادي
M_O	- *Total Moment about Point* O	- العزم الحاصل حول نقطة O
M_X,M_Y,M_Z	- *Total Moment about Axis* X,Y,Z	- العزم الحاصل حول المحاور X , Y , Z
$\boldsymbol{M^e}$	- *External Torque*	- العزم الدوراني الخارجي
M_G^{in}	- *Resultant Couple of the Inertia Forces*	- العزم الرئيسي لقوى العطالة
m_k	- *Mass of Particle*	- كتلة جسيم مادي
$\boldsymbol{m_O}$	- *Moment of Momentum of a Particle about Point* O (*Angular Momentum*)	- العزم الحركي لجسيم حول نقطة ثابتةO (العزم الزاوي)
m_X,m_Y,m_Z	- *Moment of Momentum of a Particle about Axis* X , Y , Z (*Angular Momentum*)	- العزم الحركي لجسيم حول المحاور X,Y,Z (العزم الزاوي)
$\boldsymbol{N}$	- *Normal Component of Reaction*	- مركبة رد الفعل الناظمي
$\boldsymbol{n}$	- *Unitary Vector for Principal Normal Direction* - *Principal Normal Direction*	- المتجه الواحدي للناظم الرئيسي - اتجاه الناظم الرئيسي
n	- *Number of Revolution per Minute*	- عدد الدورات في الدقيقة
O	- *Origin of Coordinates*	- مبدأ الإحداثيات - قطب
$\boldsymbol{P}$	- *Impulse Force*	- قوة الدفع

P	*- Power*	- القدرة - الاستطاعة
p	*- Circular Frequency of the Vibration*	-التردد الدائري للاهتزاز
$\boldsymbol{Q}$	*- Linear Momentum of a System*	- كمية الحركة الخطية لجملة مادية
$\boldsymbol{q}_k$	*- Linear Momentum of a Particle*	- كمية الحركة الخطية لجسيم
$\boldsymbol{R}$	*- Reaction at Supports and Connections* *- Resultant Force*	- رد فعل مسند وقوة قيد - محصلة القوى
$\boldsymbol{R}^{in}$	*- Resultant Vector of the Inertia Forces*	- المتجه الرئيسي لقوى العطالة
R , r	*- Radius*	- نصف القطر
$\boldsymbol{r}$	*- Radius Vector* *- Position Vector*	- نصف قطر الموجه - متجه الموضع
$\boldsymbol{r}_G$	*- Position of a Center of Mass*	- موضع مركز الثقل
S	*- Section*	- مقطع
$\boldsymbol{s}$	*- Distance - Length of Arc* *- Curved Coordinate*	- المسافة – طول القوس – الفاصلة المنحنية
$\boldsymbol{T}$	*- Force - Tension in the String*	- قوة - شد السلك
T	*- Period of the Oscillations of a Pendulum - Frame of Reference*	- دور الحركة النوسية - جملة إحداثية
t	*- Time - Thickness*	- زمن - سماكة
$\boldsymbol{V}$	*- Velocity Vector*	- متجة السرعة
V	*- Volume*	- الحجم
$\boldsymbol{V}_a$	*- Absolute velocity*	- السرعة المطلقة
$\boldsymbol{V}_e$	*- Transport Velocity*	- السرعة المكتسبة
$\boldsymbol{V}_r$	*- Relative Velocity*	- السرعة النسبية
$\boldsymbol{V}_G$	*- Velocity of Mass Center*	- سرعة مركز الكتل
V_0	*- Initial Velocity*	- السرعة الابتدائية
V_{av}	*- Average velocity*	- السرعة الوسطية
V_{lim}	*- Limit velocity*	- السرعة الحدية
$\boldsymbol{V}_{B/A}$, $\boldsymbol{V}_{BA}$	*- Relative Velocity of* B *with Respect to* A	- السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A
$\boldsymbol{W}$	*- Weight*	- الوزن – قوة الثقالة
w	*- Work – Specific Weight*	- العمل – الوزن النوعي

X , Y , Z	- *Rectangular Cartesian*	- جملة محاور إحداثية
x , y , z	- *Rectangular Cartesian Coordinates - Distance*	- الإحداثيات الديكارتية القائمة - المسافة
x_0 , y_0 , z_0	- *Initial Cartesian Coordinates*	- الإحداثيات الديكارتية الابتدائية
$\dot{x} , \dot{y} , \dot{z}$	- *First Time derivative of Coordinates x , y , z*	- المشتق الأول للإحداثيات الديكارتية
$\ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z}$	- *Second Time Derivative of Coordinates x , y , z*	- المشتق الثاني للإحداثيات الديكارتية
$\boldsymbol{U}$	- *Velocity of Restitution*	- سرعة الارتداد
$\boldsymbol{u}$	- *Unitary Vector of Axis*	- متجه واحدي لمحور
θ	- *Angular Coordinate*	- إحداثي زاوي
α	- *Initial Phase Angle*	- زاوية الطور الابتدائية
φ	- *Phase Angle*	- زاوية الطور
Φ	- *Angle of Fraction*	- زاوية الاحتكاك
$\alpha , \beta , \gamma , \theta , \varphi$	- *Angles*	- زوايا
δ	- *Elongation*	- استطالة نابض
Δ	- *Interval*	- تغير
ρ	- *Radius of Curvature* - *Radius of Inertia - Density*	- نصف قطر الانحناء - نصف قطر العطالة - الكثافة (الكتلة النوعية)
$\boldsymbol{\tau}$	- *Unitary Vector for Tangential Direction - Tangential Direction*	- المتجه الواحدي للمماس - اتجاه المماس
τ	- *Period - Periodic Time*	- الدور – الزمن الدوري
$\boldsymbol{\Omega}$	- *Angular Velocity Vector*	- متجه السرعة الزاوية
ω	- *Angular Velocity*	- السرعة الزاوية
ω_e	- *Transport Angular Velocity*	- السرعة الزاوية المكتسبة
E	- *Angular Acceleration Vector*	- متجه التسارع الزاوي
ε	- *Angular Acceleration*	- التسارع الزاوي
μ	- *Coefficient of Viscous Damping* - *Proportion Factor*	- عامل الإخماد اللزج – عامل تناسب
η	- *Efficiency* - *Factor of Amplification*	- الفعالية – المردود - عامل التكبير

الوحدات الأساسية للنظام العالمي المستخدمة في الميكانيك

Principal SI Units Used in Mechanics

Formula الصيغة	*Unit* الوحدة	*Symbol* الرمز	*Quantity*	الكمية
†	*Radian*	Rad	*Angle*	الزاوية
rad/sec^2	*Radian per second squared*		*Angular acceleration*	التسارع الزاوي
rad/sec	*Radian per second*		*Angular velocity*	السرعة الزاوية
m^2	*Square meter*		*Area*	المساحة
m^4	*Double square meter*		*Area Moment of Inertia*	عزم العطالة للسطح
kg/m^3	*Kilogram per cubic meter*		*Density*	الكثافة - الكتلة النوعية
N.m	*Joule*	J	*Energy*	الطاقة
$kg.m/sec^2$	*Newton*	N	*Force*	القوة
sec^{-1}	*Hertz*	Hz	*Frequency*	التردد (التواتر)
N.sec	*Newton second*		*Impulse*	الدفع
‡	*Meter*	m	*Length*	الطول
m/sec^2	*Meter per squared second*		*Linear acceleration*	التسارع الخطي
kg.m/sec	*Kilogram meter per second*		*Linear Momentum*	كمية الحركة الخطية
m/sec	*Meter per second*		*Linear Velocity*	السرعة الخطية
‡	*Kilogram*	kg	*Mass*	الكتلة
$Kg.m^2$	*Kilogram squared meter*		*Mass Moment of Inertia*	عزم العطالة للكتلة
N.m	*Newton meter*		*Moment of force*	عزم القوة
$kg.m^2/sec$	*Kilogram squared meter per second*		*Moment of Momentum* (*Angular Momentum*)	العزم الحركي (العزم الزاوي)
J/sec	*Watt*	W	*Power*	القدرة - الاستطاعة
N/m^2	*Pascal*	Pa	*Pressure*	الضغط
N/m^3	*Newton per cubic meter*		*Specific weight*	الوزن النوعي
N/m^2	*Pascal*	Pa	*Stress*	الإجهاد
‡	*Second*	sec	*Time*	الزمن
M^3	*Cubic meter*	…	*Volume* (*solids*)	الحجم(مادة صلبة)
$10^{-3}m^3$	*Liter*	l	*Volume* (*liquids*)	الحجم(مادة سائلة)
N.m	*Joule*	J	*Work*	العمل

†وحدة إضافية (1 *revolution* = 2π rad = 360^o) ‡وحدة أساسية

القيم النموذجية لمعامل الاحتكاك

Typical Values of Coefficient of Friction

Contacting Surface	*Kinetic* حركي	*Static* سكوني	سطح الاحتكاك
Steel on Steel (*Dry*)	0.6	0.4	فولاذ على فولاذ (جاف)
Steel on Steel (*Greasy*)	0.1	0.05	فولاذ على فولاذ (مشحم)
Teflon on Steel	0.04	0.04	تفلون على فولاذ
Steel on Babbitt (*Dry*)	0.4	0.3	فولاذ على سطح مبطن بمعدن(جاف)
Steel on Babbitt (*Greasy*)	0.1	0.07	فولاذ على سطح مبطن بمعدن(مشحم)
Brass on Steel (*Dry*)	0.5	0.4	نحاس على فولاذ(جاف)
Brake lining on Cast iron	0.4	0.3	بطانة مكبح على حديد
Rubber tires on Smooth Pavement(*Dry*)	0.9	0.8	إطار مطاطي على سطح ناعم (جاف)
Wire rope on Iron pulley (*Dry*)	0.2	0.15	سلك معدني ملفوف على بكرة حديد (جاف)
Hemp rope on Metal	0.3	0.2	حبل قنب على معدن
Metal on Ice	-	0.02	معدن على ثلج

Values of Material Density (ρ) قيم كثافة المواد

Material	المادة	*Density kg/m*^{3}	*Material*	المادة	*Density kg/m*^{3}
Aluminum	ألمونيوم	2 690	*Lead*	رصاص	11 370
Concrete (*av.*)	إسمنت	2 400	*Mercury*	زئبق	13570
Copper	نحاس	8 910	*Oil* (*av.*)	زيت نفط	900
Earth (*wet, av.*)	تراب (رطب)	1 760	*Titanium*	تيتانيوم	3 080
Earth (*dry, av.*)	تراب (جاف)	1 280	*Steel*	فولاذ	7 830
Glass	زجاج	2 590	*Water* (*fresh*)	ماء (عذب)	1 000
Gold	ذهب	19 300	*Water* (*salt*)	ماء (مالح)	1 030
Ice	ثلج	900	*Wood* (*Soft pine*)	خشب الصنوبر(أملس)	480
Iron (Cast)	حديد	7 210	*Wood* (*Hard oak*)	خشب السنديان(قاس)	800

عوامل الجداء للنظام العالمي المستخدمة في الميكانيك

SI Prefixes Used in Mechanics

البادئة	*Prefix*	الرمز *Symbol*	عامل الجداء *Multiplication Factor*
تيرا	*tera*	T	$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$
جيغا	*giga*	G	$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$
ميغا	*mega*	M	$1\ 000\ 000 = 10^{6}$
كيلو	*kilo*	k	$1\ 000 = 10^{3}$
هيكتو	*hecto*	h	$100 = 10^{2}$
ديكا	*deka*	da	$10 = 10^{1}$
ديسي	*deci*	d	$0.1 = 10^{-1}$
سنتي	*centi*	c	$0.\ 01 = 10^{-2}$
ميلي	*milli*	m	$0.\ 001 = 10^{-3}$
ميكرو	*micro*	μ	$0.\ 000\ 001 = 10^{-6}$
نانو	*nano*	n	$0.\ 000\ 000\ 001 = 10^{-9}$
پيكو	*pico*	p	$0.\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$
فمتو	*femto*	f	$0.\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$
آتو	*atto*	a	$0.\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$

يستعمل هذا الجدول في قياس السطوح والحجم والاستعمالات غير التقنية.

اللجنة العلمية

الأستاذ الدكتور سيمون عبيد

الأستاذ الدكتور محمد علي سلامة

الأستاذ الدكتور وعد عمران

المدقق اللغوي

الأستاذة الدكتورة سميرة سلامي

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات