



الميكانيك الفيزيائي (1)





منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الميكانيك الفيزيائي (1)

الدكتور

عبدالعزیز زغبی

مدرس في قسم الفيزياء

1433 - 1434 هـ

2012 - 2013 م

جامعة دمشق



المحتويات

15	مقدمة
17	الفصل الأول القياس والواحدات والأشعة
17	1-1 طبيعة العلم
18	2-1 نماذج ونظريات وقوانين
19	3-1 جمل الواحدات
19	1-3-1 الطول
20	2-3-1 الزمن
20	3-3-1 الكتلة
20	4-1 أنظمة الواحدات
21	5-1 الكميات الأساسية والمشتقة
22	6-1 رتبة القيمة التقدير السريع
24	7-1 الأبعاد وتحليلها
26	8-1 المادة ونموذج البناء
28	9-1 الكثافة والكتلة الذرية
29	10-1 المقادير السلمية والشعاعية
30	11-1 جمع الأشعة
34	12-1 طرح الأشعة
35	13-1 ضرب شعاع بعدد سلمي
36	14-1 جمع الأشعة بوساطة مركبات شعاع
40	15-1 أشعة الواحدة
42	16-1 الجداء السلمي

147	1-11-3 التوتّر في الحبل المرن
157	2-11-3 الحركة على مستوي مائل، المنحدرات
158	12-3 قوى الإحتكاك
169	13-3 قياس عامل الإحتكاك السكوني والحركي
171	14-3 السرعة الحدية والإحتكاك
175	15-3 الحركة الدائرية المنتظمة
181	1-15-3 الطرد المركزي
182	16-3 تحريك الحركة الدائرية المنتظمة
188	17-3 إمالة الطرق عند المنعطفات
192	18-3 الحركة الدائرية اللامنتظمة
195	مسائل
199	الفصل الرابع التوازن السكوني
199	1-4 تمهيد
199	2-4 عزم القوة
205	3-4 شروط التوازن
206	1-3-4 الشرط الأول للتوازن
208	2-3-4 الشرط الثاني للتوازن
210	4-4 اللوح المستند والكبل
214	5-4 الاستقرار والتوازن
216	6-4 الجسور الجملون
223	7-4 الجسر المعلق
224	8-4 الأقواس والقبب
227	مسائل

231	الفصل الخامس العمل والطاقة
231	1-5 تمهيد
231	2-5 العمل المنجز بقوة ثابتة
237	3-5 العمل المنجز بالقوة المتغيرة
241	4-5 العمل المنجز بقوة النابض (قوى المرونة)
246	5-5 الطاقة الحركية - مبدأ العمل والطاقة
255	مسائل
257	الفصل السادس إنحفاظ الطاقة
257	1-6 تمهيد
257	2-6 القوى المحافظة والقوى غير المحافظة
262	3-6 الطاقة الكامنة
262	1-3-6 الطاقة الكامنة للجاذبية
267	4-6 الشكل العام للطاقة الكامنة
268	5-6 الطاقة الكامنة المرونية
269	1-5-6 الطاقة الكامنة المتعلقة بالقوة في بعد واحد
270	2-5-6 الطاقة الكامنة في ثلاثة أبعاد
270	3-5-6 الطاقة الكامنة بشكل عام

273	6-6 الطاقة الميكانيكية وإنحفاظها
278	7-6 قوانين إنحفاظ الطاقة
287	8-6 إنحفاظ الطاقة بوجود قوى الضياع
288	1-8-6
291	9-6 الطاقة الكامنة الثقالية - سرعة الإنفلات من الأرض
294	1-9-6 سرعة الإنفلات من الأرض
296	10-6 القدرة
301	11-6 مخططات الطاقة الكامنة، التوازن المستقر واللامستقر
304	مسائل
307	الفصل السابع الإندفاع الخطي
307	1-7 تمهيد
307	2-7 الإندفاع الخطي وعلاقته بالقوة
310	3-7 إنحفاظ الإندفاع الخطي
317	4-7 التصادم والدفع الخطي للقوة
320	5-7 إنحفاظ الإندفاع الخطي والطاقة في التصادمات
322	6-7 الصدم المرن في بعد واحد (الصدم الراسي)
324	1-6-7 تبادل السرعة
325	2-6-7 الهدف الساكن
327	3-6-7 التصادم النووي
329	7-7 الصدم اللامرن
332	8-7 الصدم في بعدين أو ثلاث أبعاد

336	9-7	الجمل ذات الكتل المتغيرة دفع الصاروخ
342	10-7	مركز الكتلة
355	11-7	مسألة الجسمين
357	12-7	مركز الكتلة والحركة الإنسحابية
362		مسائل
367		الفصل الثامن الموائع
367	1-8	تمهيد
367	2-8	أطوار المادة
368	3-8	الضغط في الموائع
376	4-8	الضغط الجوي وواحدات الضغط
378	5-8	مبدأ باسكال
379	6-8	قياس الضغط ؛ المقاييس والبارومتر
381	7-8	الطفو ومبدأ أرخميدس
386	8-8	حركة الموائع
387	9-8	الإضطراب
388	10-8	معادلة الإستمرارية
391	11-8	معادلة برنولي
395	12-8	تطبيقات على معادلة برنولي
	1-12-8	انبوب فننوري
396	2-12-8	نظريه تورشلي
397	3-12-8	كرة الغولف
398	4-12-8	أجنحة الطائرة
399	5-12-8	انبوب بيتوت
400	13-8	التوتر السطحي

402	14-8	سطح السائل
404	15-8	الخاصة الشعرية
406	16-8	اللزوجة
408	17-8	معادلة بيوزيل
409	18-8	عدد رينولدز
410	19-8	ظاهرة النقل
	20-8	الانتشار
411	21-8	حجم الخلايا والتناضح
412	22-8	الحركة في وسط لزج
414	23-8	الترسيب و الطرد المركزي
417		مسائل
419		الفصل التاسع التجاذب الكوني
419	1-9	تمهيد
	2-9	قانون نيوتن للتجاذب الكوني
423	1-2-9	قوة التجاذب لكرة متجانسة
427	2-2-9	القوة المؤثرة في القمر
428	3-9	الشكل الشعاعي لقانون نيوتن في التجاذب الكوني
430	4-9	الجاذبية بالقرب من سطح الأرض
	5-9	تأثير دوران الأرض في g
432	1-5-9	الأرض كجسم مقارنة عطالية
433	6-9	الأقمار الصناعية وانعدام الوزن
	1-6-9	حركة الأقمار الصناعية
434	2-6-9	القمر الصناعي المواق
436	3-6-9	انعدام الوزن

438	قوانين كبلر 7-9
	القانون الأول 1-7-9
439	القانون الثاني 2-7-9
440	القانون الثالث 3-7-9
442	أين المريخ 4-7-9
443	تحديد كتلة الشمس 5-7-9
445	نقطة لاغرانج 8-9
448	حقل الجاذبية 9-9
449	أنواع القوى في الطبيعة 10-9
450	الجاذبية و إنحناء الفضاء 11-9
457	الكون المغلق والمفتوح 12-9
	الثقوب السوداء 13-9
460	النجوم والمجرات 14-9
465	مسائل
467	مصطلحات
503	المراجع

الفصل الثامن: الموائع وحركتها، معادلة الإستمرارية، معادلة برنولي وتطبيقاتها والتوتر السطحي و ظاهرة النقل.

الفصل التاسع: قانون التجاذب العام وقوانين كبلر وتطبيقاته ومن ثم التطرق إلى علم الفلك بشكل طفيف ومبسط.



الفصل الأول

القياس والواحدات والأشعة

MEASUREMENT- UNITS AND VECTORS

1-1 طبيعة العلم

إن الهدف الأساسي لكل العلوم بما فيها الفيزياء يعد عامة هو البحث في دقة ملاحظتنا للعالم من حولنا، والعديد من البشر يعتقدون أن العلم هو عملية رياضية لمجموعة من الظواهر والأفعال و إبتكار النظريات، و العلم في الواقع هو نشاط إبداعي يشبه في نواحي عديدة نشاطات إبداعية أخرى لفكر الإنسان، أحد الأشياء المهمة في العلم هو ملاحظة الظواهر و تصميم التجارب، الملاحظة والتجربة يتطلبان التخيل و الإبداع، حيث لا يمكن للعلماء أن يحيطوا بكل شيء، لذلك يجب عليهم أن يبحثوا عما هو مناسب لملاحظاتهم وتجاربهم.

لنرى على سبيل المثال كيف أن أرسطو (384 - 322) و غاليليو (1642 - 1564)، فسرا الحركة على سطح مستو (أفقي)، إذ لاحظ أرسطو أنه إذا أعطينا جسماً دفعاً بدئياً لكي يتحرك على سطح طاولة فإنه يتباطأ حتى التوقف، عالج أرسطو المسألة على أساس أن الحالة الطبيعية للجسم هي التوازن أو السكون، من جهته أعاد غاليليو دراسة الحركة على سطح أفقي وفكر بأنه إذا أزلنا قوى الإحتكاك والمقاومة فإن الجسم الذي اكتسب دفعاً بدئياً يستمر في الحركة على سطح أفقي دون توقف، وهكذا يكون غاليليو قد وضع أسس لنظريتنا المعاصرة عن الحركة وأنجز قفزة مهمة في التخيل والإبداع، الجسم يبقى في حالة حركة حتى ولو انعدمت محصلة القوى المؤثرة فيه، الملاحظة والتجربة والقياس هي أحد الجوانب العملية للعلم و الجانب الآخر هو الإبتكار ووضع النظريات لشرح دقة الملاحظات، و النظريات لا تشتق مباشرة من الملاحظات، فالملاحظات يمكن أن تساعد فحسب، في إلهام النظرية وتكون النظريات عادة مقبولة أو مرفوضة اعتماداً على

نتائج الملاحظات والتجارب. النظريات المهمة يمكن مقارنتها بدرجة الإبداع في الأعمال العظيمة في الفن أو الآداب، ولكن هل يختلف العلم عن هذه النشاطات الإبداعية، أحد الاختلافات المهمة هو أن العلم قابل للاختبار لأفكاره و لنظرياته ويمكننا أن نحكم هل تحققت تنبؤاته بالتجربة أم لم تتحقق، إضافة إلى ذلك إن اختبار النظريات يميز العلم عن الحقول الإبداعية الأخرى وهي ليست الطريقة الوحيدة والكافية لبرهان النظرية، لأنه لا يوجد أداة قياس مثالية و كاملة. علاوة على ذلك لا يمكن اختبار النظرية بإمكانية وحيدة، وذلك لأن النظرية لا تتحقق بشكل مطلق! وبالفعل تاريخ العلوم يخبرنا بأن النظريات الجديدة تستبدل دائماً بالقديمة.

النظرية: هي شرح للظاهرة الطبيعية أساسه الملاحظة والمبادئ الأساسية المقبولة، مثال على ذلك نظرية التطور البيولوجي التي جاءت نتيجة لبحوث وملاحظات دقيقة وعظيمة تمخضت عن أفكار مهمة لعلماء البيولوجيا.

2-1 نماذج ونظريات وقوانين

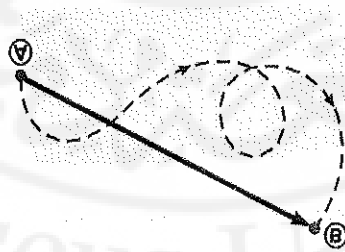
عندما يحاول العلماء فهم الظواهر الطبيعية يفكرون بالنماذج المناسبة، النموذج في رأي العلماء هو نوع من التشبيه بوساطة التخيل الذهني للظاهرة المألوفة، و أحد الأمثلة على ذلك هو نموذج الموجة للضوء، لا يمكن أن نرى أمواج الضوء كما نرى أمواج الماء مثلاً، إنه شيء مهم أن نتخيل الضوء كأنه مكون من أمواج، لأن التجارب تشير إلى أن الضوء يشبه في سلوكه أمواج الماء في كثير من الحالات، والغاية من النموذج، يعطينا تقريباً ذهنياً أو صورة مرئية، شيئاً ما علينا أن نتمسك به عندما لا يمكننا أن نرى ماذا يحدث فعلاً. النماذج تعطينا عادة الفهم العميق بما يتشابه مع النظام المعروف (مثلاً أمواج الماء في المثال السابق). سوف نسأل عن الفرق بين النظرية والنموذج، النموذج يكون عادة بسيطاً نسبياً ويتعلق بالبنية المشابهة للظاهرة المدروسة. أما النظرية فهي أشمل وأكثر تفصيلاً ويمكن أن تعطي تنبؤات عن كمية قابلة للاختبار وتكون عادة عالية الدقة، ومن المهم ألا نخلط بين النظرية والنموذج مع النظام الحقيقي أو الظاهرة نفسها. العلماء يضعون القوانين ويعطون البيانات العامة حول سلوك الطبيعة (مثلاً تحولات الطاقة)، وفي بعض الأحيان تأخذ البيانات شكل العلاقة أو المعادلة (كما الحال في قانون نيوتن الثاني $F = ma$).

10-1 المقادير السلمية والشعاعية

توجد في الفيزياء كميات يمكن تحديدها بعدد وحيد مع ذكر واحدته، مثل درجة الحرارة، وهذه الكميات مستقلة عن الإتجاه، ولا تحتاج جملة إحداثيات لتعيينها تسمى كميات سلمية، إلى جانب ذلك توجد كميات أخرى تحتاج عند تعيينها إلى إعطاء العدد يتطلب تحديد الإتجاه والمنحى (الحامل) تسمى مقادير شعاعية، ويتم تحديدها أيضاً بواسطة مركباتها الثلاث على المحاور الإحداثية الثلاثية المتعامدة، مثل الحقل والقوة، وهناك كميات تحتاج لتحديدها لأكثر من ثلاث مركبات، وتدعى التتسورات أو الممتدات مثل الناقليّة الكهربائية.

إن مصطلح السرعة لا يشير فحسب، إلى قيمة السرعة للجسم المتحرك بل أيضاً إلى إتجاه حركته، إن السرعة هي كمية لها قيمة عددية ولها إتجاه، إذاً هي كمية شعاعية، وهناك كميات أخرى شعاعية مثل الإنزياح والإندفاع الخطي والقوة والحقل.

لنفرض أن جسيماً يتحرك من النقطة A ، إلى النقطة B ، على مسار مستقيم كما في الشكل (1 - 3)، ونعبر عن هذا الإنزياح برسم سهم يبدأ من نقطة الإنطلاق A ، وإتجاهه نحو نقطة النهاية B ، السهم يشير إلى إتجاه الإنزياح إذا سار الجسيم من A ، إلى B ، على مسار غير مباشر، يبقى شعاع الإنزياح موجهاً من A ، إلى B ، ويتعلق فحسب، بوضع البداية و وضع النهاية، وبالتالي لا يتعلق شعاع الإنزياح بالمسار المتبع للذهاب من A ، إلى B .



الشكل (1 - 3)

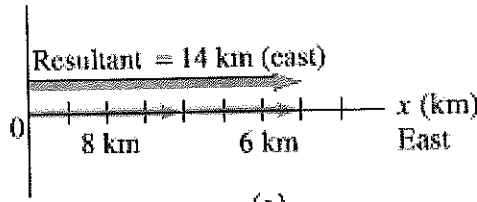
في حين هناك العديد من الكميات ليس لها إتجاه مثل الكتلة والزمن و درجة الحرارة، و تتعين بشكل كامل بالقيمة العددية والواحدة، مثل هذه الكميات تدعى الكميات السلمية، يمثل الشعاع بسهم والسهم يشير دائماً إلى إتجاه الكمية الشعاعية وطول السهم يتناسب مع القيمة العددية للشعاع (طويلة الشعاع) ونرمز لها بالرمز $\vec{A}$ ، عندما نرمز للشعاع سنضع سهماً فوق الرمز سهم، على سبيل المثال شعاع السرعة $\vec{v}$ ، وإذا كنا مهتمين بقيمته فحسب، سنكتبه v ، وكذلك بقية الرموز.

11-1 جمع الأشعة

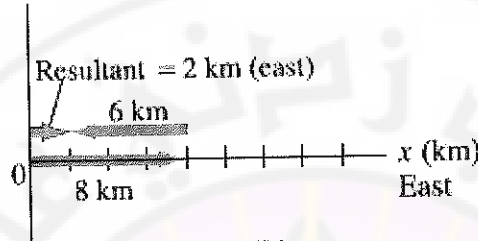
بما أن الكميات الشعاعية لها إتجاه ولها أيضاً قيمة عددية يجب أن تجمع بطريقة خاصة، يمكن استخدام الحساب العادي البسيط للمقادير السلمية لجمع الأشعة التي لها نفس الإتجاه، مثلاً إذا سار شخص في اليوم الأول $8km$ ، بإتجاه الشرق ثم سار في اليوم التالي $6km$ بنفس الإتجاه فإن هذا الشخص يكون قد سار بإتجاه الشرق بدءاً من نقطة الأصل مسافة $8km + 6km = 14km$ ، و نقول أن محصلة الإنزياح هي $14km$ ، بإتجاه الشرق انظر الشكل (1 - 4 - a)، ومن ناحية أخرى إذا سار الشخص $8km$ في اليوم الأول بإتجاه الشرق ثم سار في اليوم التالي $6km$ بإتجاه الغرب (في الإتجاه المعاكس)، فإن الشخص يكون قد سار بدءاً من نقطة الأصل.

$$8km - 6km = 2km$$

الإنزياح الناتج هو $2km$ ، بإتجاه الشرق الشكل (1 - 4 - b).



(a)



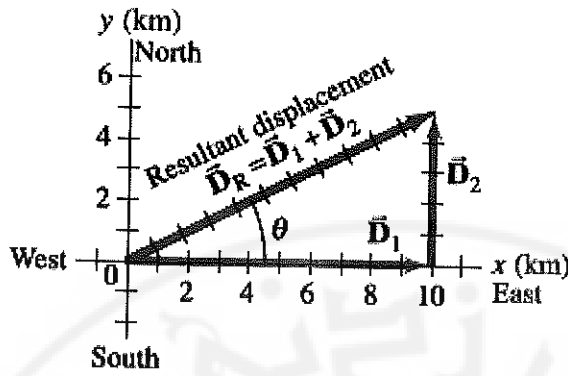
(b)

الشكل (1 - 4)

جمع الأشعة في بعد واحد

هذا الحساب البسيط لا يمكن استخدامه إذا كان الشعاعين غير واقعين على نفس خط العمل (الحامل)، لنفرض تحرك شخص مسافة 10km ، باتجاه الشرق ثم تحرك مسافة 5km ، باتجاه الشمال هذا الإنزياح يمكن أن يمثل على الشكل (1 - 5)، الذي فيه المحور y ، باتجاه الشمال والمحور x ، باتجاه الشرق نرسم السهم $\vec{D}_1$ ، لتمثيل الإنزياح إلى الشرق ونرسم السهم الثاني $\vec{D}_2$ ، لتمثيل الإنزياح باتجاه الشمال والإنزياح الناتج يعبر عنه بسهم $\vec{D}_R$ ، وباستخدام المسطرة والمنقلة نستطيع أن نقيس بمساعدة التدريج عن طريق قياس طول السهم المسافة التي قطعها الشخص لنرى بأنه قطع مسافة 11.2km ، من نقطة الأصل وبزاوية 27° ، باتجاه شرق شمال وبكلمة أخرى شعاع الإنزياح الناتج له قيمة 11.2km ، ويصنع زاوية 27° ، مع المحور x ، قيمة الشعاع $\vec{D}_R$ ، يمكن الحصول عليها أيضاً باستخدام نظرية فيثاغورث

$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10)^2 + (5)^2} = 11.2\text{km}$$



الشكل (1 - 5)

يتحرك شخص شرقاً ثم شمالاً هذان الانزياحان يعبر عنهما بالأشعة $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ ، التي يشار إليهما كسهمين، شعاع الانزياح الناتج $\vec{D}_R$ ، هو حاصل جمع الشعاعين $\vec{D}_1 + \vec{D}_2$ ، شعاع الانزياح الناتج هو حاصل جمع الشعاعين

$$\vec{D}_R = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 \quad (1 - 2)$$

قيمة جمع شعاعين لا يقعان على خط عمل واحد لا يساوي ببساطة مجموع قيمتيهما ولكنه دائماً أصغر من جمعهما ويحقق المتراجحة.

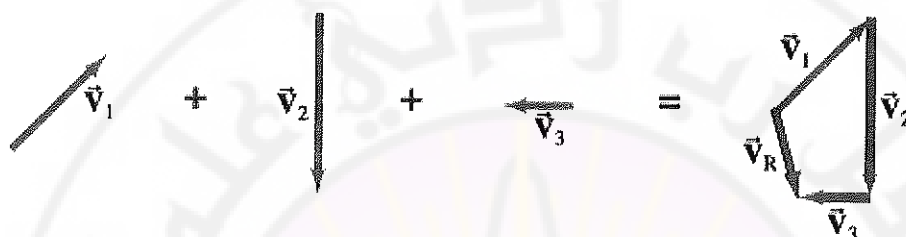
$$D_R \leq D_1 + D_2 \quad (1 - 3)$$

حيث إشارة المساواة تتحقق فحسب، عندما يكون للشعاعين إتجاه واحد، في مثالنا الحالي $D_R = 11.2km$ ، حيث $D_1 + D_2$ ، يساوي $15km$ ، وهي المسافة الكلية المقطوعة ونلاحظ أنه لا يمكننا أن نضع $\vec{D}_R$ ، تساوي $11.2km$ ، لأن $\vec{D}_R$ ، كمية شعاعيه و $11.2km$ ، هو فحسب، جزء من الشعاع الناتج هو قيمته بل يمكننا كتابة شيء مشابه مثل.

$$\vec{D}_R = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = (11.2km, 27^\circ N \text{ of } E)$$

إن طول الشعاع الناتج يعبر عن قيمته ونلاحظ أن الأشعة يمكن أن تتسحب موازية لنفسها محافظة على نفس الطول والزوايا، والطول الناتج يمكن قياسه بالمسطرة والزوايا بالمنقلة،

مثل هذه الطريقة تعرف بطريقة الجمع المتعاقب للأشعة. لا يتعلق جمع الأشعة بطريقة ترتيب الجمع أي أن جمع الأشعة تبديلي مثلاً إنزياح $5km$ ، إلى الشمال ثم $10km$ ، شرقاً يعطي نفس النتيجة $11.2km$ ، وبزاوية 27° ، طريقة الجمع المتعاقب للأشعة يمكن تطبيقها على ثلاث أو أكثر من الأشعة الشكل (1 - 6)، الشعاع المحصل يرسم من بداية الأول إلى رأس الأخير ويمكننا أن نتحقق من صحة الخاصة التجميعية للأشعة.



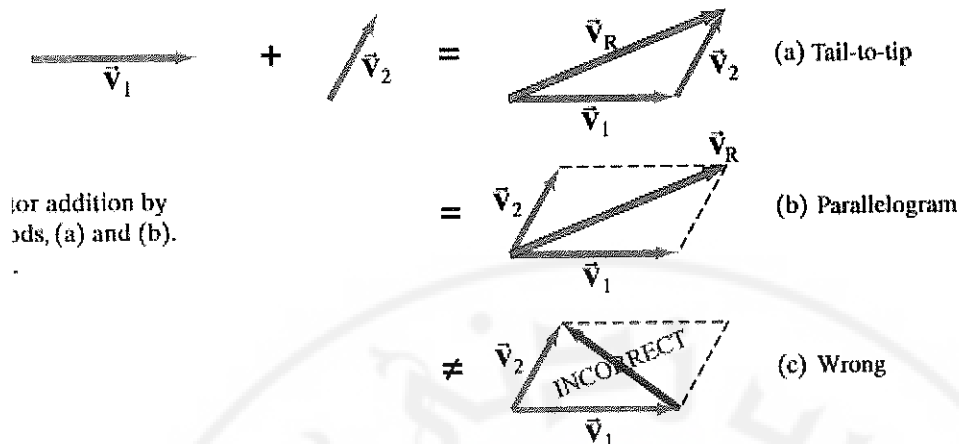
الشكل (1 - 6)

$$\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \quad \text{محصول ثلاث أشعة}$$

الخاصة التجميعية للأشعة، يمكن التأكد من صحتها بطريقة جمع الأشعة المبينة أعلاه.

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

الطريقة الثانية لجمع الأشعة هي قاعدة متوازي الأضلاع وهي مكافئة لقاعدة الجمع المتعاقب للأشعة، يرسم الشعاعان إنطلاقاً من نقطة أصل مشتركة ويرسم متوازي الأضلاع المقام على هذين الشعاعين ويكون أحدهما مجاوراً للآخر الشكل (1 - 7)، و الشعاع المحصل هو القطر المرسوم من نقطة الأصل.



الشكل (7 - 1)

هناك طريقتان مختلفتان لجمع الأشعة a, b أما الطريقة c ، غير صحيحة.

(مثال نموذجي 1-1)

لنفرض أن شعاعين طول كل منهما يساوي 3، وحدات ما إمكانيات جمعها ؟

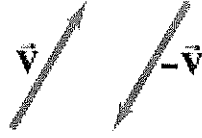
الإجابة :

الطول الناتج يمكن أن يكون $3 + 3 = 6$ ، وحدات عندما يكون الشعاعان في اتجاه واحد، وعلى خط عمل واحد، أو الصفر $3 - 3 = 0$ ، عندما يكون الشعاعان في اتجاهين متعاكسين وعلى خط عمل واحد، وبالتالي إمكانيات الطول الناتج تقع ضمن المجال من الصفر إلى 6 وحدات.

12-1 طرح الأشعة

ليكن لدينا الشعاع $\vec{V}$ ، نعرف سالب هذا الشعاع $(-\vec{V})$ ، بأنه شعاع له نفس الطول (الطويلة) ولكن له عكس الاتجاه الشكل (1 - 8)، نلاحظ أنه لا يوجد شعاع سالب بحكم طويلته التي هي دائماً موجبة بينما إشارة السالب تحدثنا عن جهة الشعاع. يمكننا أن نعرف طرح الأشعة من بعضها بأنه الفرق بين شعاعين.

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1) \quad (1 - 4)$$



الشكل (1 - 8)

سالب شعاع هو شعاع له نفس طول الشعاع ووجهة معاكسة

الفرق بين شعاعين يساوي إلى حاصل جمع الشعاع الأول مع سالب الشعاع الثاني. إن قواعد جمع الأشعة تتم بإستخدام طريقة الجمع المتعاقب للأشعة (الشعاع الناتج عن جمع شعاعين بدايته بداية الأول ونهايته نهاية الثاني الشكل (1 - 9)).

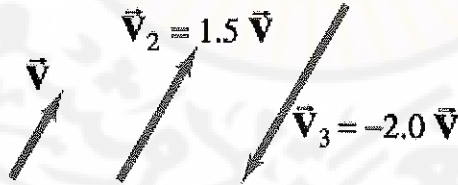


الشكل (1 - 9)

الفرق بين شعاعين: $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$

13-1 ضرب شعاع بعدد سلمي

الشعاع $\vec{V}$ ، يمكن أن يكون مضروباً بمقدار سلمي c ، ونعرفه على أنه شعاع جديد $c\vec{V}$ ، وقيمه $|c\vec{V}|$ ، هذا يعني أن ضرب الشعاع بعدد سلمي موجب يغير من طويلته ولا يغير من اتجاهه، إذا كان $(c > 0)$ ، فإن طويلة الشعاع الناتج تبقى $|c|v$ ، واتجاهه عكس اتجاه $\vec{V}$ ، انظر الشكل (1 - 10).



الشكل (1 - 10)

ضرب شعاع $\vec{V}$ ، بعدد سلمي c ، يعطي شعاع له نفس اتجاه الشعاع $\vec{V}$ ، (أو عكسه إذا كان c سالب).

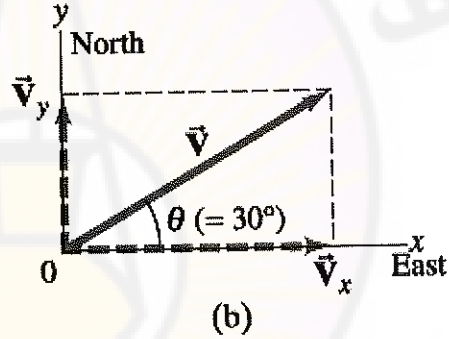
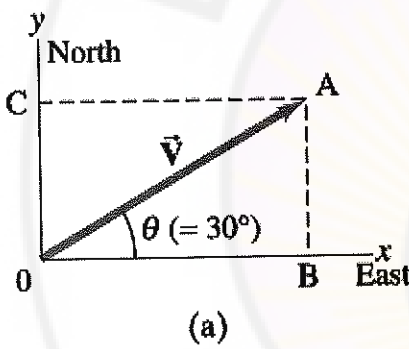
14-1 جمع الأشعة بوساطة مركبات شعاع

لنفرض لدينا الشعاع $\vec{V}$ ، يقع في مستوي معين و يمكن التعبير عنه كمجموع لشعاعين آخرين يدعيان مركبات الشعاع الأصلي $\vec{V}$ ، نختار المركبات عادة لتكون على طول إتجاهين متعامدين كالإتجاهين x و y ، هذه العملية تعرف بتحليل الشعاع إلى مركباته الشكل (1 - 11)

$$\vec{V} = \vec{OA}, \quad \vec{V}_x = \vec{OB}, \quad \vec{V}_y = \vec{OC}$$

حسب قاعدة الجمع المتعاقب للأشعة.

$$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}, \quad \vec{BA} = \vec{OC}$$



الشكل (1 - 11)

تحليل الشعاع $\vec{V}$ ، إلى مركبتين بالنسبة إلى جملة إحداثيات إختيارية.

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad (1 - 5)$$

باستخدام التتابع المثلثية نجد:

$$V_x = V \cos \theta, \quad V_y = V \sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{V_y}{V_x}$$

حسب فيثاغورث.

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (1 - 6)$$

نستطيع أن نجمع شعاعين باستخدام المركبات أو إيجاد قيمة وإتجاه الشعاع المحصل، عن طريق إيجاد مركبات الشكل (1 - 12)، الشعاع المحصل.

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (1 - 7)$$

وكذلك:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{2x} + \vec{V}_{2y} \quad (1 - 8)$$

نعوض في (1 - 7)

$$\vec{V} = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y} + \vec{V}_{2x} + \vec{V}_{2y} = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{2x} + \vec{V}_{1y} + \vec{V}_{2y}$$

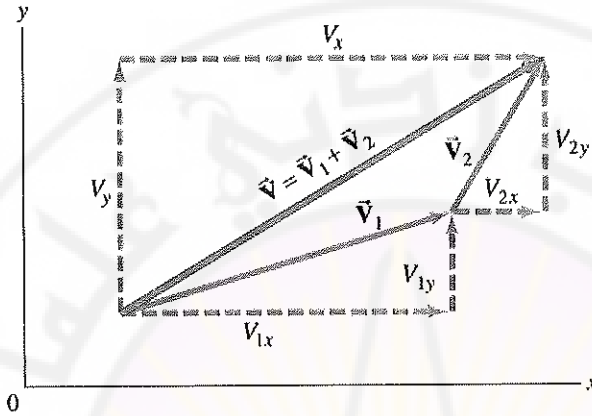
بالمقارنة مع المعادلة (1 - 5) وبالإستعانة بالشكل (1 - 12) نستنتج:

$$V_x = V_{1x} + V_{2x} = \sum_i V_{ix}$$

$$V_y = V_{1y} + V_{2y} = \sum_j V_{jy}$$

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} \quad (1 - 9)$$

بهذا الشكل نكون قد حددنا مسقطي الشعاع $\vec{V}$ ، على المحاور الإحداثية V_x, V_y ، يمكننا أن نحدد طول الشعاع الناتج من المعادلة (6 - 1)، و إتجاهه من المعادلة (8 - 1)، بواسطة هذه العلاقات يمكن إيجاد محصلة عدة أشعة لها نقطة تأثير مشتركة.



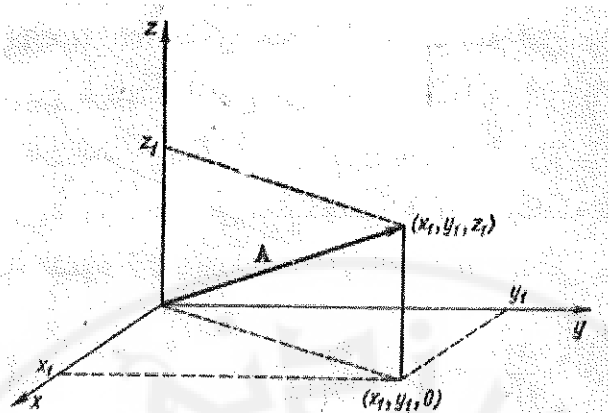
الشكل (1 - 12)

ننوه إلى أن الأشعة لا تتعلق بإختيار جملة الإحداثيات، لنفرض لدينا شعاع $\vec{A}$ ، في جملة إحداثيات ديكارتية متعامدة الشكل (1 - 13)، وإذا فرضنا أن بدايته تنطبق على مبدأ الإحداثيات و رأسه يقع في النقطة التي إحداثياتها (x_1, y_1, z_1) ، وتدعى كذلك مساقط الشعاع $\vec{r}$ ، على المحاور الإحداثية، وعادة يرمز لمثل هذا الشعاع بالرمز $\vec{r}$ ، ويدعى نصف القطر الشعاعي ويمكن تمثيله في جملة إحداثيات ديكارتية متعامدة على الشكل:

$$\vec{r} = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1 \quad (1 - 9)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية x, y, z على الترتيب، و نجد بسهولة أن إحداثيات نهاية الشعاع $\vec{r}$ تتعلق بطويلته $|\vec{r}|$ بالعلاقات:

$$x_1 = r \cos \alpha, y_1 = r \cos \beta, z_1 = r \cos \gamma \quad (1 - 10)$$

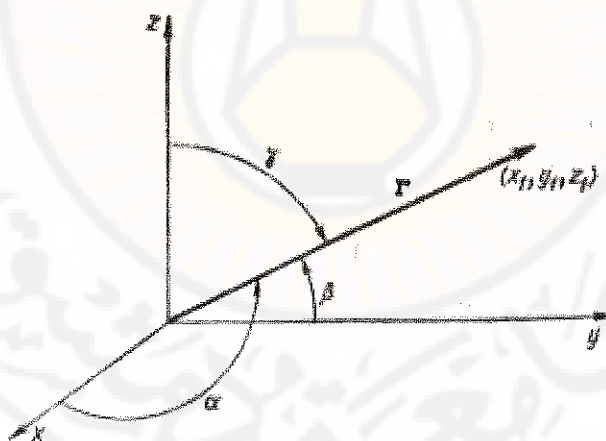


الشكل (13 - 1)

وكذلك :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{r^2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1 - 11)$$



الشكل (14 - 1)

حيث $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ تدعى جيوب التمام الموجهة التي بواسطتها يتم إيجاد علاقات التحويل بين مركبات الشعاع في الجمل الإحداثية $xyz, oxyz$ ، الجديدة والقديمة التي لها نفس المبدأ، α, β, γ ، هي الزوايا بين الشعاع والإتجاه الموجب للمحاور الإحداثية والمقادير x_1, y_1, z_1 تدعى مركبات الشعاع $\vec{r}$ ، أو مساقطه الشكل (1 - 14) ويمكن تحديد إتجاه الشعاع $\vec{r}$ ، باعتماد ثلاث زوايا α, β, γ ، وتدعى جيوب التمام الشكل (15 - 1)

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|\vec{r}|}, \cos \beta = \frac{y_1}{|\vec{r}|}, \cos \gamma = \frac{z_1}{|\vec{r}|} \quad (1 - 12)$$

$$\frac{x_1}{\cos \alpha} = \frac{y_1}{\cos \beta} = \frac{z_1}{\cos \gamma} = |\vec{r}| \quad (1 - 13)$$

15-1 أشعة الواحدة

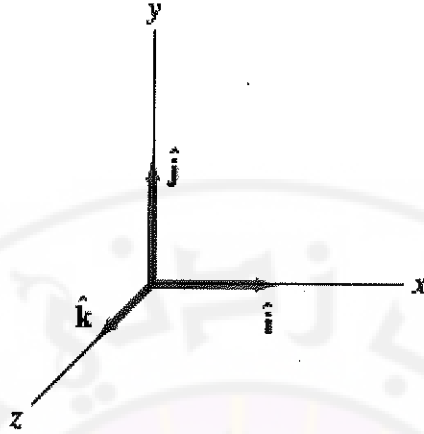
إذا أردنا إيجاد علاقة مباشرة بين الشعاع وقيمه ينبغي علينا البحث عن شعاع آخر له جهة الشعاع نفسه، وله الحامل نفسه ولكن قيمته ليست مهمة، لأننا حصلنا على القيمة العددية للشعاع، لذلك ينبغي أن نختار له قيمة حيادية لا تؤثر في القيمة العددية للشعاع وأفضل قيمة للشعاع، الجديد التي تحقق هذه الرغبات هي الواحد، لذلك نسميه شعاع الواحدة $\vec{u}_A$ للشعاع $\vec{A}$ ، يحقق:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}, \quad |\vec{u}_A| = 1 \quad (1 - 14)$$

$|\vec{A}|$: طول الشعاع $\vec{A}$ أو قيمته العددية.

إن ناتج ضرب شعاع $\vec{A}$ ، بعدد سلمي c ، هو شعاع جديد $c\vec{A}$ ، وإذا اخترنا $0 < c = \frac{1}{|\vec{A}|}$ ، فإننا نحصل على شعاع له إتجاه الشعاع $\vec{A}$ ، ومحمول عليه يسمى شعاع الواحدة $\vec{u}_A$ ، للشعاع $\vec{A}$ ، $\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ، ويمكن كتابة الأشعة بشكل أسهل باستخدام أشعة الواحدة، وتعرف بأن طوليتها تساوي الواحد $|\vec{u}| = 1$ ، ومن المهم أن نحدد أشعة الواحدة الموجهة بالإتجاه الموجب للمحاور الإحداثية الديكارتية x, y, z هي $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ، على الترتيب الشكل (15 - 1)

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \quad (1 - 15)$$



الشكل (1 - 15)

أشعة الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ للمحاور x, y, z على الترتيب.

$\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$: المركبات الشعاعية للشعاع $\vec{A}$ ، على المحاور الإحداثية الديكارتية. A_x, A_y, A_z تدعى مساقط الشعاع $\vec{A}$ ، على المحاور الإحداثية الديكارتية x, y, z على الترتيب.

$$\vec{A}_x = A_x \vec{i}, \quad \vec{A}_y = A_y \vec{j}, \quad \vec{A}_z = A_z \vec{k} \quad (1 - 16)$$

ويمكن كتابة الشعاع $\vec{A}$ ، بدلالة مركباته في الفراغ الثلاثي على الشكل:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (1 - 17)$$

أشعة الوحدة تساعد في جمع الأشعة تحليلياً بوساطة مركباتها على نفس الطريقة السابقة، ومن أجل الحالة الثنائية البعد (في المستوي) مثلاً.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = (A_x) \vec{i} + (A_y) \vec{j} \quad (1 - 18)$$

$$A_x = (A_{1x} + A_{2x}) = \sum_i A_{ix}, \quad A_y = (A_{1y} + A_{2y}) = \sum_j A_{jy}$$

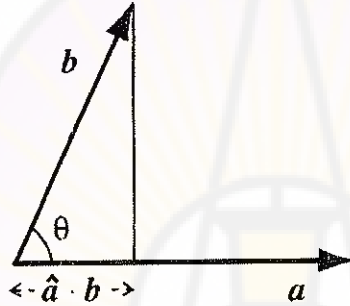
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (1-19)$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \quad (1-20)$$

16-1 الجداء السلمي

لنفرض أن θ ، الزاوية بين شعاعين $\vec{A}, \vec{B}$ ، نعرف الجداء السلمي لشعاعين على أنه حاصل ضرب طولية الشعاع الأول بمركبة الشعاع الثاني على الأول أو العكس بالعكس لذلك :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta \quad (1-21)$$



الشكل (16-1)

عندما $\vec{A} = \vec{B}$ ، فإن.

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos 0^\circ \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 \quad (1-22)$$

يختلف الجداء السلمي لشعاعين عن جداء عددين إذا كان $a \cdot b = 0$ ، إما أحد العددين يساوي الصفر أو كلاهما ولكن في حالة الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ، فهذا يعني أن الشعاعين متعامدان

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \quad (\text{متعامدين})$$

أشعة الواحدة للمحاور الإحداثية تحقق العلاقات.

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \end{cases} \quad (1 - 23)$$

الجداء السلمي تبديلي: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ ، و توزيعي: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

ويمكن تمثيل الجداء السلمي لشعاعين بالشكل الآتي:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) \cdot (\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1 - 24)$$

(A_x, A_y, A_z) مساقط الشعاع $\vec{A}$ ، و (B_x, B_y, B_z) مساقط الشعاع $\vec{B}$ ، يعد الجداء السلمي لامتغير أثناء دوران جملة الإحداثيات، لأنه كمية سلمية، مسقط شعاع $\vec{A}$ على إتجاه الشعاع $\vec{B}$ ، هو A_B ، حاصل الجداء السلمي للشعاع $\vec{A}$ ، بشعاع الواحدة $\vec{u}_B$ ، للشعاع $\vec{B}$.

$$A_B = \vec{A} \cdot \vec{u}_B = A \cdot \cos \theta$$

θ : الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}, \vec{B}$

17-1 إيجاد محصلة شعاعين

لإيجاد محصلة شعاعين كما مبين على الشكل (1 - 7).

$$\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (1 - 25)$$

يمكننا إيجاد قيمة شعاع المحصلة $\vec{V}_R$ ، مباشرة فيما إذا علمنا القربة العددية للشعاعين $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ والزاوية الثنائية التي بينهما $\hat{\theta} = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ ، بتربيع طرفي المعادلة السابقة

(1 - 25)

$$|\vec{V}_R|^2 = |\vec{V}_1 + \vec{V}_2|^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \phi$$

$$|\vec{V}_R| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \phi}$$

18-1 الجداء الشعاعي

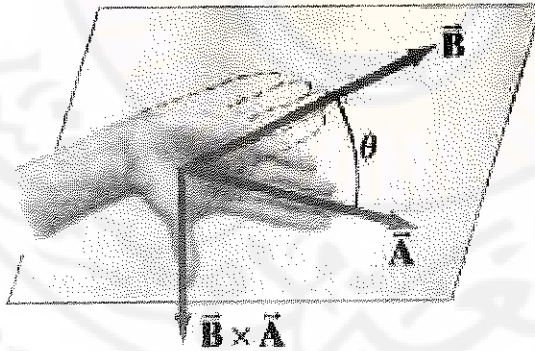
إن أي شعاعين غير متوازيين $\vec{A}, \vec{B}$ ، مرسومين من نقطة واحدة يحددان محوراً وحيداً عمودياً على المستوي الذي يحويهما الشكل (1 - 17)، نعرف الجداء الشعاعي لشعاعين

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (1 - 26)$$

على أنه شعاع قيمته هي مساحة متوازي الاضلاع المرسوم على كل من $\vec{A}, \vec{B}$.

ولتحديد جهة الجداء الشعاعي نتبع قاعدة اليد اليمنى أوقاعدة البزال، و إذا كانت جهة الدوران في المستوي من $\vec{A}$ إلى $\vec{B}$ ، بعكس عقارب الساعة فإن الشعاع الناتج عن الجداء الشعاعي يكون موجباً والعكس بالعكس الشكل (1 - 17)، الجداء الشعاعي لا تبديلي:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



الشكل (1 - 17)

حسب قاعدة الجداء الشعاعي يمكننا أن نلاحظ.

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

و يخضع الجداء الشعاعي لعميلة التبديل الدائري:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

الجداء الشعاعي يكافئ محددًا يتعلق بمركبات الأشعة $\vec{A}, \vec{B}$ على المحاور الإحداثية:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-27)$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

حيث:

$$\begin{cases} C_x = (A_y B_z - A_z B_y) \\ C_y = (A_z B_x - A_x B_z) \\ C_z = (A_x B_y - A_y B_x) \end{cases} \quad (1-28)$$

لنأخذ الجداء السلمي.

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (1-29)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z = A_x (A_y B_z - A_z B_y) + A_y (A_z B_x - A_x B_z) + A_z (A_x B_y - A_y B_x) = 0$$

وكذلك بالمثل نجد:

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (1-30)$$

من المعادلتين (1-29) و (1-30)، نستنتج أن $\vec{C}$ ، عمودي على $\vec{A}$ ، وعلى $\vec{B}$ ، إذاً فهو عمودي على مستوييهما ومن ناحية أخرى.

$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |A|^2 \cdot |B|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \quad (1 - 31)$$

حيث إستخدمنا مركبات الجداء الشعاعي في العبارة (1 - 28) ومن ثم إستخدمنا صيغة الجداء السلمي لنحصل على

$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A \cdot B)^2 - (A \cdot B)^2 \cos^2 \theta = (A \cdot B)^2 \sin^2 \theta$$

ومنه:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |A| \cdot |B| \sin \theta \quad (1 - 32)$$

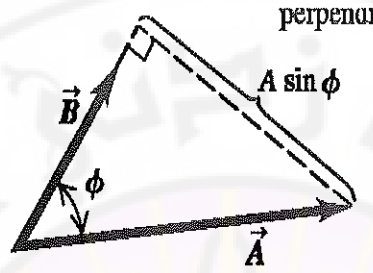
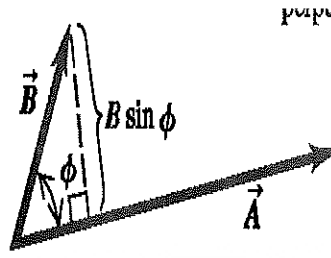
القيمة العددية للشعاع $|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$ هي مساحة متوازي الاضلاع المقام على الأشعة $\vec{A}, \vec{B}$ انظر الشكل (1 - 18)

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \sin \phi = A \cdot h = B \cdot H \quad (1 - 33)$$

$$B \sin \phi = h, \quad A \sin \phi = H$$

لذلك نجد:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = (\vec{A}, \vec{B} \text{ مساحة متوازي الاضلاع})$$



الشكل (1 - 18)

19-1 الجداء المختلط

لقد درسنا نوعين من الجداء الشعاعي ولكن يوجد نوع آخر يدعى (الجداء المختلط) وله نوعان:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}), \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

باستخدام المعادلة (1 - 27) من أجل الجداء الشعاعي والمعادلة (1 - 22) من أجل الجداء السلمي نحصل على

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \end{aligned} \quad (1 - 34)$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = B_x(C_y A_z - C_z A_y) + B_y(C_z A_x - C_x A_z) + B_z(C_x A_y - C_y A_x)$$

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = C_x(A_y B_z - A_z B_y) + C_y(A_z B_x - A_x B_z) + C_z(A_x B_y - A_y B_x)$$

بمقارنة المعادلات الثلاث (34 - 1) نلاحظ أن.

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \\ &= -\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})\end{aligned}\quad (1-35)$$

نحصل على

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (1-36)$$

وبسهولة يمكن ان نعبر عن الجداء المختلط بمحدد كالآتي:

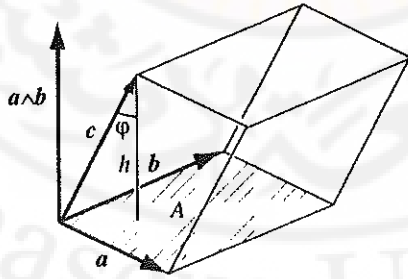
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1-37)$$

ويعبر الجداء المختلط هندسياً عن حجم متوازي السطوح المقام على الأشعة الثلاث $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ الشكل (1-19)

$$D = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{C}| \cdot |\vec{A} \times \vec{B}| \cdot \cos \varphi = (|\vec{C}| \cos \varphi) \cdot (\text{مساحة متوازي الاضلاع } \vec{A}, \vec{B})$$

$$D = h \cdot (\text{مساحة متوازي الاضلاع } \vec{A}, \vec{B}) = \text{حجم متوازي السطوح} \quad (1-38)$$

أي أن قيمة $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ ، هي حجم متوازي السطوح المقام على الأشعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$



الشكل (1-19)

نلاحظ الجداء المختلط ينعدم عندما يتساوى أي شعاعين أو عندما يكونا متوازيين، وعلى العكس إذا كان الجداء المختلط لثلاث أشعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ، معدوماً فإنها تقع في مستو واحد. من ثلاث أشعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ، نستطيع أيضاً أن نشكل الجداء الثلاثي الشعاعي.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

وهو عمود على $\vec{A}$ و على $\vec{B} \times \vec{C}$ ، معاً، إذا الشعاع

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ، يقع في المستوي الذي يحوي $\vec{B}, \vec{C}$ ، أو يوازيه وبالتالي ينبغي أن يكون تركيباً خطياً من هذين الشعاعين. ويمكننا أن نبرهن أن:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1 - 39)$$

20-1 الأشعة المماسية والعمودية على منحن

في الفصول القادمة سوف ندرس شعاعي السرعة والتسارع لجسيم يتحرك في الفضاء الثلاثي البعد، لذلك لا بد أن نعرف أشعة الواحدة المماسية والناظمية لمنحن.

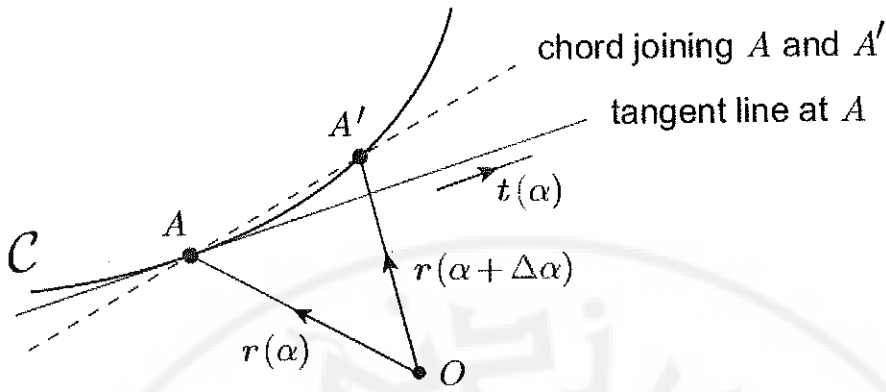
21-1 شعاع الواحدة المماسي

لنفرض أن C ، منحن كما مبين على الشكل (1 - 20)، والمعرف بالمعادلة الوسيطة $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$ لمنحني في الفراغ الثلاثي البعد، لنفرض أن A ، نقطة نوعية من المنحني C ، وفقاً للوسيط α ، وأن A' ، نقطة قريبة وفقاً للوسيط $\alpha + \Delta\alpha$ ، وأن $\overrightarrow{AA'}$ ، يعبر عن الشعاع.

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(\alpha + \Delta\alpha) - \vec{r}(\alpha) \quad (1 - 40)$$

وبالتالي $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{|\Delta \vec{r}|}$ ، هو شعاع الواحدة الموازي للشعاع $\overrightarrow{AA'}$ ، شعاع الواحدة المماسي $\vec{t}_n(\alpha)$ ، عند النقطة A ، يعرف على أنه نهاية $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{|\Delta \vec{r}|}$ ، عندما $\Delta\alpha \rightarrow 0$.

$$\vec{t}_n(\alpha) = \lim_{A \rightarrow A'} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{|\Delta \vec{r}|} \quad (1 - 41)$$



الشكل (1 - 20)

لذلك نجد:

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|} \cdot \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta\alpha} \quad (1 - 42)$$

$$\vec{t}_n(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|}$$

نعوض في (1 - 41)

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = \vec{t}_n(\alpha) \cdot \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta\alpha} = \vec{t}_n(\alpha) \cdot \left| \frac{d\vec{r}}{d\alpha} \right| \quad (1 - 43)$$

$$\vec{t}_n(\alpha) = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\alpha}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\alpha} \right|} \quad (1 - 44)$$

(مثال 4-1):

في الشكل (1 - 21) ، المنحني الدوري

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad z = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

أوجد شعاع الوحدة المماسي للمنحني الدائري عند الوسيط الزاوي θ

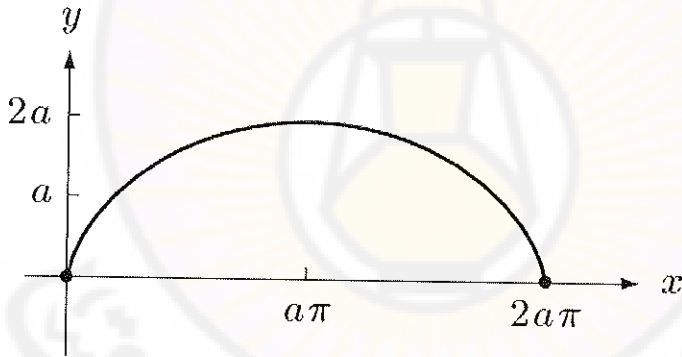
الحل:

$$\vec{dr} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = a(1 - \cos \theta)\vec{i} + (a \sin \theta)\vec{j}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right| = a\sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 2a \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\vec{t}_n(\alpha) = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right|} = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{i} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{j}$$



الشكل (1 - 21)

22-1 شعاع الواحدة الناظمي

لنفرض أن $\vec{t}_n(s)$ هو شعاع الواحدة المماسي للمنحني C ، حيث الوسيط s يعبر عن المسافة على المنحني، وبالتالي $\vec{t}_n$ هو تابع شعاعي للوسيط s ، وله مشتق $\frac{d\vec{t}_n}{ds}$ ، عبارة عن تابع شعاعي آخر للوسيط s .

لدينا:

$$1 = \vec{t}_n(s) \cdot \vec{t}_n(s) \quad (1-45)$$

$$0 = \frac{d}{ds} [\vec{t}_n(s) \cdot \vec{t}_n(s)] = \frac{d\vec{t}_n}{ds} \cdot \vec{t}_n + \vec{t}_n \cdot \frac{d\vec{t}_n}{ds} = 2 \left(\frac{d\vec{t}_n}{ds} \cdot \vec{t}_n \right) \quad (1-46)$$

أي أن الشعاع $\frac{d\vec{t}_n}{ds}$ يعامد الشعاع المماسي $\vec{t}_n$ ، ونكتب:

$$\vec{n} = \left(\frac{\frac{d\vec{t}_n}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}_n}{ds} \right|} \right), \quad k = \left| \frac{d\vec{t}_n}{ds} \right| \quad (1-47)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{k} \left(\frac{d\vec{t}_n}{ds} \right)$$

$\vec{n}$: شعاع الواحدة الناظمي.

k^{-1} : مقدار سلمي موجب ويدعى بنصف قطر تقوس المنحني.

لنفرض أن A ، نقطة على المنحني C ، وأن s المسافة المقاسة حتى النقطة A ، حسب نظرية تايلور فإن شكل المنحني C بالقرب من النقطة A ، يعطى تقريباً :

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(0) + s \left[\frac{d\vec{r}}{ds} \right]_{s=0} + \frac{s^2}{2} \left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right]_{s=0} + \dots \quad (1-48)$$

$$\vec{r}(s) = \vec{a} + s\vec{t}_n + \left(\frac{s^2}{2} k \right) \vec{n} + \dots \quad (1-49)$$

$\vec{a}$: شعاع الموضع عند النقطة A ، و $\vec{t}_n, \vec{n}, k$ ، معينة عند النقطة A ، كذلك بالقرب من النقطة A ، الواقعة على المنحني C ، في مستوي يمر من A ، وبيوازي كلاً من $\vec{n}, \vec{t}_n$ ، شكل المنحني بالقرب من النقطة A ، هو قطع مكافئ تقريباً .

(مثال 5-1):

أوجد الشعاع الناظمي للمنحني الدوري السابق .

الحل:

$$\vec{t}_n(\alpha) = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \bigg/ \left| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right| = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{i} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{t}_n}{ds} = \frac{d\vec{t}_n}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = k\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{t}_n}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{i} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{j} = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{i} - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{j} \right]$$

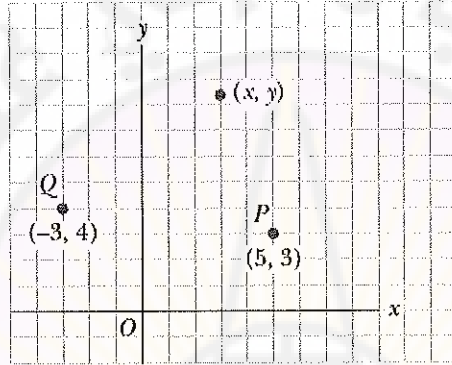
$$\frac{d\vec{t}_n}{ds} = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{i} - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{j} \right] \cdot \frac{1}{2a \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$k(\theta) = \left| \frac{d\vec{t}_n}{ds} \right| = \frac{1}{4a \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}_n}{ds} \bigg/ k(\theta) = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{i} - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{j}$$

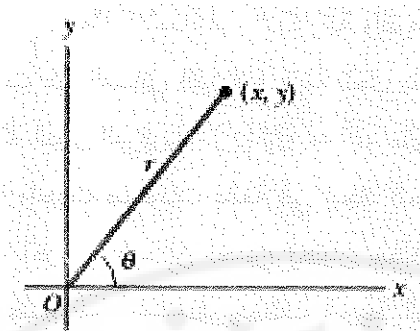
23-1 الجمل الإحداثية

هناك عدة مقادير في الفيزياء تحتاج لتحديد الموضع في الفراغ، وسنرى في الفصول اللاحقة المعالجة الرياضية لحركة الأجسام التي تتطلب إيجاد طريقة لوصف موضع الجسم عند أوقات مختلفة، وهذا الوصف يتحقق باستخدام جمل الإحداثيات. سوف نستخدم جملة الإحداثيات الديكارتية التي فيها المحاور الأفقية والשאوقلية وتدعى أيضاً الإحداثيات المتعامدة، تتقاطع في نقطة واحدة تدعى نقطة الأصل الشكل (1 - 22)



الشكل (1 - 22)

في بعض الأحيان من السهولة أن نعين موضع نقطة في المستوي باستخدام الإحداثيات القطبية المستوية (r, θ) ، كما مبين على الشكل (23 - 1) حيث r هي المسافة بين المبدأ (الأصل) والنقطة المدروسة.

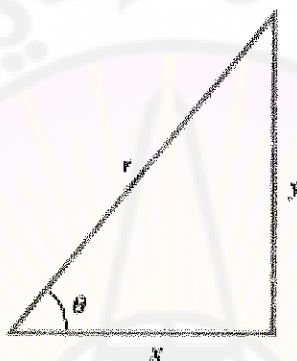


(a)

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



(b)

الشكل (1 - 23)

θ : هي الزاوية بين الخط المرسوم من نقطة الأصل إلى النقطة المدروسة ومحور إحداثيات محدد، هذا المحور عادة يكون المحور x ، الموجب وتكون الزاوية θ ، موجبة عندما تكون جهة الدوران عكس عقارب الساعة، من الشكل (1 - 23)، نستطيع أن نجد العلاقات بين الإحداثيات القطبية المستوية و الإحداثيات الديكارتية.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1 - 50)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (1 - 51)$$

حتى الآن تعاملنا فحسب، مع جملة الإحداثيات الديكارتية وافترضنا أن فيها أشعة الواحدة $\vec{l}, \vec{j}, \vec{k}$ ، لا تتغير ولكن ليست كل المسائل الفيزيائية قابلة للحل باستخدام الجملة الديكارتية، على سبيل المثال في مسألة القوى المركزية. $\vec{F} = \vec{u}f(r)$ ، مثل قوة الثقالة أو قوة كولون، جملة الإحداثيات الديكارتية واجهت صعوبات بالغة في إيجاد الحل: المناسب، لذلك لا بد من اعتماد جملة إحداثيات أخرى. علينا أن نحسن إختيار جملة الإحداثيات التي تناسب شروط المسألة التي نحن بصددھا، واستخدام مختلف شروط التناظر المميزة للمسألة، و الإختيار الجيد لجملة الإحداثيات الذي يسمح بالحصول على الحل، بشكل أسهل. يوجد عدد من جمل الإحداثيات يمكن بواسطتها فصل المتغيرات في المعادلة التالية:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1 - 52)$$

∇^2 : يدعى مؤثر اللابلاسيان وهو عبارة عن مؤثر تفاضلي (نقطي) وله الشكل الآتي:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\psi(x, y, z)$: تابع للإحداثيات.

الثابت k ، في المعادلة (1 - 52)، يؤدي مهمة تحديد طبيعة هذه المعادلة.

• إذا كان $k^2 = 0$ ، نحصل على معادلة بواسون.

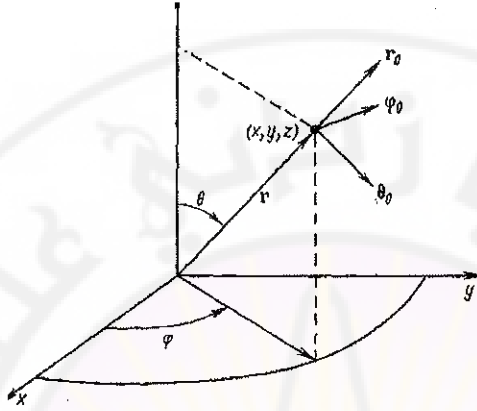
$$\nabla^2 \psi = 0$$

• إذا كان $k^2 = c > 0$ ، فهي معادلة هيلمولتز وعندما $k^2 = c < 0$ ، تعبر عن الجزء الفراغي من معادلة الإنتشار

• إذا كان: الطاقة الحركية $\times k^2 = c$ ، نحصل على معادلة شرودنغر. عدا ذلك هناك جمل إحداثيات تستخدم بشكل واسع، وهي جملة الإحداثيات الكروية و الاسطوانية و القطبية.

24-1 الإحداثيات الكروية r, θ, φ

الشكل (24 - 1)، يوضح الإحداثيات الكروية r, θ, φ ، هناك مجموعة من السطوح الأساسية لجملّة الإحداثيات الكروية.



الشكل (24 - 1)

1- مجموعة الكرات المتمركزة التي لها مركز مشترك في مبدأ الإحداثيات.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$$

2- سطوح مخروطية محورها القطبي z ، ورؤوسها متمركزة في مبدأ الإحداثيات

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \text{const}$$

3- سطوح نصف مستوية تمر من المحور z .

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \text{const}$$

ومعادلات التحويل الإحداثية من الكروية إلى الديكارتية تأخذ الشكل الآتي:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

ويتغير r ، في المجال. $0 \leq r < \infty$

θ : تكون موجبة بدءاً من الإتجاه الموجب للمحور z ، وتتغير في المجال:

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

φ : وتقع في المستوي xy ، من جهة الجزء الموجب من المحور x ، الشكل (1 - 24) وتتغير في المجال.

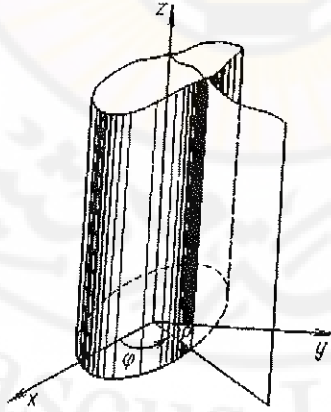
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

25-1 الإحداثيات الاسطوانية ρ, φ, z

يمكن بسهولة إيجاد علاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الاسطوانية، الشكل (1 - 25)

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \quad z = z \end{aligned}$$

حيث ρ ، المسافة النازمية على المحور z و r ، ترمز إلى المسافة من مبدأ الإحداثيات إلى النقطة.



الشكل (1 - 25)

هذه الجملة تتشكل من مجموعة السطوح المحددة على الشكل (1 - 25)

1- سطوح اسطوانية محورها $z : \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}$

2- أنصاف مستويات مارة من المحور $z : \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \text{const}$

3- مستويات متوازية و موازية للمستويات $xy, z = \text{const}$

ومجالات تغير الحدود الاسطوانية

$$0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\infty < z < \infty$$

وهناك عدد من جمل الأحداثيات كما ذكرنا سابقاً.

مسائل.

1-1 الشعاع $\vec{A}$ له ست وحدات من الطول ويصنع زاوية $36^\circ +$ مع الإتجاه الموجب للمحور x ، والشعاع $\vec{B}$ له سبع وحدات من الطول وينطبق على الإتجاه السالب للمحور x والمطلوب :

(a) إيجاد مجموع الشعاعين، (b) فضل الشعاعين .

2-1 أوجد البعد بين النقطتين (6,8,10) و (-4,4,10).

3-1 أوجد مركبات شعاع طوله يساوي 13 وحدة طول ويصنع زاوية $\theta = 22.6^\circ$ مع المحور Z ومسقطه على المستوي xoy يصنع زاوية $\phi = 37^\circ$ مع الإتجاه الموجب للمحور x ، أوجد الزاويتين مع المحورين ox, oy .

4-1 استخرج معادلة المستقيم الموازي للشعاع $\vec{V} = \vec{A}i + \vec{B}j + \vec{C}k$ والمار من النقطة Po .

5-1 أوجد محصلة الأشعة الخمسة :

$$\vec{V}_1 = 4\vec{i} + (-3)\vec{j}, \vec{V}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{V}_3 = 2\vec{i} + (-6)\vec{j},$$

$$\vec{V}_4 = 7\vec{i} + (-8)\vec{j}, \vec{V}_5 = 9\vec{i} + 1\vec{j}$$

6-1 أوجد الزاوية التي يصنعها الشعاعان :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

7-1 استخرج معادلة مستو عمودي على الشعاع المعطى: $\vec{V} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ ومار من النقطة po .

8-1 أوجد مساحة متوازي الأضلاع المعين بالأشعة :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

9-1 أوجد بعد النقطة (4,-1.5) P عن المستقيم المار بالنقطتين (-1,2,0) P₁ و P₂ (1,1,4) .

10-1 شعاعان طولهما 8, 10 وحدات طول يصنعان بينهما زاوية تساوي 90°, 120° 60° أوجد مقدار فضل الشعاعين في كل حالة والزاوية التي يصنعها الفضل مع الشعاع الأكبر .

11-1 أوجد المركبات المتعامدة لشعاع طوله 15 وحدة طول عندما يصنع مع الإتجاه الموجب للمحور x الزوايا 50°, 130°, 310° .

12-1 ثلاثة أشعة تقع في مستو واحد أطوالها على الترتيب هي : 4,5,6 وحدات طول ، يصنع الأول مع الثاني زاوية 50° بينما الثاني مع الثالث زاوية 75°، أوجد مقدار واتجاه المحصلة بالنسبة إلى الشعاع الأكبر.

13-1 برهن أنه إذا تساوى مقداراً جمع وفضل شعاعين كان الشعاعان متعامدين .

14-1 برهن انه إذا تعامد جمع وفضل شعاعين فالشعاعان لهما قيمتان متساويتان .

15-1 ثلاثة أشعة تعطى كمايلي :

$$\vec{A} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}, \vec{B} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{C} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

أوجد مركبات الشعاع $\vec{R}$ المعطى بالعلاقة $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ والزاوية التي يصنعها مع المحور Z .

16-1 ارسم المتجهين $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ على المحورين ox , oy وحدد

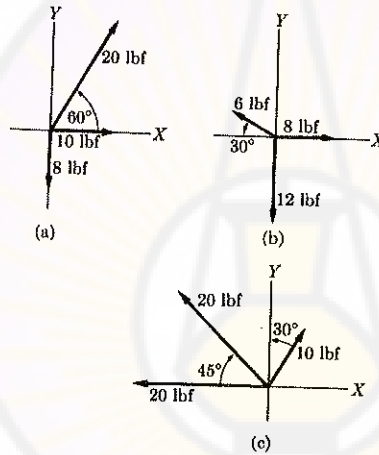
من الرسم قيمة $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$ ثم أوجد النتيجة حسابياً .

17-1 لدينا الشعاع $\vec{A}$ طوله 10 وحدات طول والشعاع $\vec{B}$ طوله 6 وحدات طول

والزاوية بينهما 60° ، أوجد $\vec{A} \cdot \vec{B}$ وكذلك $\vec{A} \times \vec{B}$.

18-1 برهن أن $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ من أجل أي شعاعين $\vec{A}, \vec{B}$.

أوجد مقدار واتجاه محصلة جملة القوى المبينة في الحالات الثلاث من الشكل (1 - 26)



الشكل (1 - 26)

19-1 أربع قوى واقعة في مستو واحد قيمتها (30N, 40N, 20N, 50N) تؤثر في

نفس النقطة على جسم ، والزوايا التي تصنعها هذه القوى فيما بينها هي على التوالي

60° , 30° , 50° ، إحسب قيمة القوة المحصلة والزوايا التي تصنعها مع القوة 30N.

الفصل الثاني

الحركة في بعد واحد وفي بعدين

KINEMATICS IN ONE AND TWO DIMENSIONS

1-2 تمهيد

إن حركة الأجسام مثل السيارات، العداؤون، الشمس والقمر كلها تشكل جزءاً من حياتنا اليومية، قبل القرن السادس عشر كنا نجهل قوانين الحركة ولكن العالمان غاليلو غاليلي (1564 – 1642) واسحق نيوتن (1642 – 1642) قاما بأعمال رائعة أدت إلى فهم طبيعة الحركة، إن دراسة حركة الأجسام والمفاهيم المتعلقة بالقوة والطاقة تشكل حقلاً يدعى الميكانيك ويقسم إلى قسمين الأول الحركة وهي تغير مستمر للموضع و تصف كيف تتحرك الأجسام، و الثاني هو التحريك و يتعلق بالقوة المسببة للحركة.

في هذا الفصل سوف نناقش حركة الأجسام بمعزل عن الحركة الدورانية، مثل هذه الحركة تدعى بالحركة الإنسحابية، أي حركة مسار الجسم يكون خط مستقيم، ندعوها حركة إنسحابية في بعد واحد، وندرس أيضاً حركة الجسم في بعدين. سوف نستخدم مفهوم الجسم النموذجي، الذي ينظر إليه على أنه نقطة رياضية ليس لها أبعاد فراغية (ليس لها حجم)، نموذج الجسم مفيد في العديد من الحالات الواقعية عندما نهتم فحسب، بالحركة الإنسحابية، وحجم الجسم ليس مهماً، على سبيل المثال يمكن اعتبار كرة البليارد أو السفينة الفضائية المسافرة باتجاه القمر جسماً من أجل أهداف مختلفة.

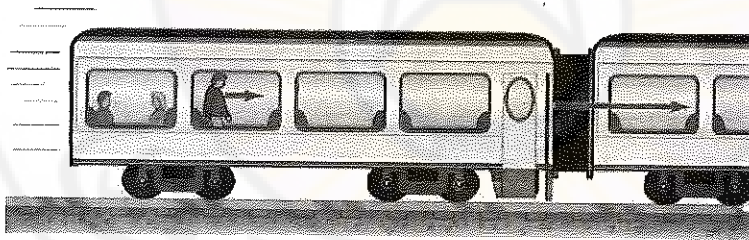
2-2 جمل المقارنة والإنزياح

إن أي قياس للموضع أو المسافة أو السرعة يجب أن يستند إلى جملة مقارنة، على سبيل المثال عندما يتحرك القطار بسرعة 80 km/h ، وأنت داخله وترى شخصاً يتحرك ماراً بجانبك بسرعة 5 km/h ، وهي سرعة الشخص بالقياس إلى القطار (القطار جملة مرجعية) انظر الشكل (2 – 1)، وهذا الشخص يتحرك أيضاً بالقياس إلى الأرض بسرعة

$85 \text{ km/h} = 80 + 5$ ، عندما نتحدث عن السرعة علينا دائماً تعيين جملة مقارنة لأن

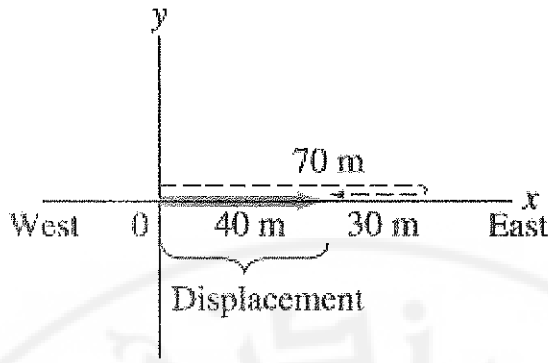
الحركة من طبيعة نسبية، وعندما نريد أن نحدد سرعة الجسم علينا أن نحدد، ليس فحسب، قيمة سرعته بل أيضاً اتجاه حركته. ونستطيع عادة أن نحدد اتجاه الحركة باستخدام النقاط الإحداثية أو الاتجاهات، شمال، شرق، جنوب، غرب، إلى الأعلى، أو إلى الأسفل. في الفيزياء نستخدم عادة مجموعة من المحاور الإحداثية لتمثيل جملة المقارنة. من أجل الحركة في بعد واحد نختار المحور x ، خطاً مستقيماً تتم عليه الحركة وباتجاهه. وبالتالي موضع الجسم في أي لحظة يعطى بإحداثياته x ، وإذا كانت الحركة عمودية (عندما يسقط الجسم من أعلى) نستخدم عادة المحور y .

ينبغي أن نميز بين المسافة التي قطعها الجسم والإنزياح، الذي يعرف على أنه التغير في وضع الجسم، وبالتالي فالإنزياح هو كم يبعد الجسم عن نقطة البداية و من أجل أن نرى الفرق بين المسافة الكلية المقطوعة والإنزياح، لنتخيل شخصاً قطع 70m ، إلى الشرق، و ثم عكس اتجاه حركته وقطع 30m ، إلى الغرب الشكل (2 - 2)، المسافة الكلية المقطوعة. $100\text{m} = 70 + 30$ ، بينما الإنزياح $40\text{m} = 70 - 30$ ، و من نقطة البداية.



الشكل (2 - 1)

يتحرك شخص باتجاه مقدمة القطار بسرعة 5 km/h ، بالنسبة إلى القطار، والقطار يتحرك بالنسبة إلى الأرض بسرعة 80 km/h ، وبالتالي سرعة الشخص بالنسبة إلى الأرض 85 km/h



الشكل (2 - 2)

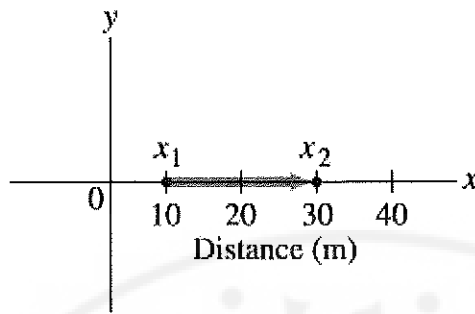
يتحرك شخص $30m$ ، إلى الغرب ثم إلى الشرق $70m$ ، والمسافة الكلية $100m$ ، (المسار مبين بخط منقطع) والإنزياح بالخط المستمر، $40m$ ، باتجاه الشرق.

نعلم بأن الإنزياح هو كمية شعاعيه الشكل (2 - 2)، السهم (الشعاع) يشير إلى الإنزياح، لندرس حركة الجسم خلال مجال زمني معين ولنفرض أنه عند زمن بدئي t_1 ، كان الجسم في الموضع x_1 ، وفي اللحظة t_2 ، تحرك الجسم إلى الموضع x_2 ، يكون الإنزياح $x_2 - x_1$ ، الذي يشير إليه السهم في الشكل (3 - 2) لذلك يمكننا أن نكتب:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2 - 1)$$

حيث الرمز Δx ، يعني التغير في الموضع (الإنزياح)، الوضع النهائي ناقصا الوضع البدئي

$$\text{لنفرض: } x_2 = 30.0m \quad , \quad x_1 = 10.0m$$



الشكل (3 - 2)

السهم يمثل الإنزياح $\Delta x = x_2 - x_1$ بالأمتار

إتجاه الإنزياح Δx ، موجب الشكل (3 - 2)،

$$\Delta x = 30.0 - 10.0 = 20.0m$$

لنفرض أن الجسم إنطلق من الوضع $x_1 = 30.0m$ ، وتحرك بإتجاه اليسار إلى النقطة $x_2 = 10.0m$ ، فالإنزياح في هذه الحالة:

$$\Delta x = 10.0 - 30.0 = -20.0m$$

إشارة السالب تشير إلى إتجاه الانتقال

3-2 السرعة الوسطى

إن السمة الأكثر وضوحاً للجسم المتحرك هي السرعة التي يتحرك بها، ومصطلح السرعة يدل على المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية المعطاة، (بغض النظر عن الإتجاه)، إذا تحركت سيارة وقطعت مسافة $240km$ ، خلال ثلاث ساعات نقول إن سرعتها الوسطية $80 km/h$ ، وبشكل عام تعرف السرعة الوسطى للجسم على أنها المسافة الكلية

المقطوعة على طول المسار مقسومة على الزمن الذي يستغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة كما نعلم هي كمية شعاعية، ولمناقشة حركة الجسم في بعد واحد، لنفرض أنه في اللحظة الزمنية t_1 ، كان الجسم في الوضع x_1 ، وفي اللحظة الزمنية t_2 ، انتقل إلى الموضع x_2 ، وبالتالي فإن الزمن المستغرق $\Delta t = t_2 - t_1$ ، السرعة الوسطى.

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2 - 2)$$

حيث $\bar{v}$: هي السرعة الوسطى.

إذا كان $x_1 > x_2$ ، الجسم يتحرك على المحور x ، باتجاه اليسار. $\Delta x = x_2 - x_1 < 0$ ، وبالتالي إشارة الإنزياح أو السرعة الوسطى تشير إلى اتجاه الحركة، القيمة السالبة للسرعة الوسطى تعني أن الحركة باتجاه اليسار والقيمة الموجبة تعني الحركة باتجاه اليمين على طول المحور x .

(مثال 1-2):

كم هي المسافة التي تقطعها سيارة خلال $2.5h$ ، على طريق مستقيمة إذا كانت سرعتها الوسطى 18 km/h

الحل:

$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = 18 \times 2.5 = 45 \text{ km}$$

2-4 السرعة اللحظية (الآنية)

عندما تقود سيارتك على طريق مستقيمة مسافة 150 km ، لمدة $2.0h$ ، فتكون السرعة الوسطى 75 km/h ، لكن من الصعب القول أنك تقود السيارة بسرعة 75 km/h ، في كل لحظة، ولشرح هذه الحالة سندخل مفهوم السرعة اللحظية، التي تعبر عن السرعة من أجل كل لحظة، وتعرف بأنها السرعة الوسطى من أجل مجال زمني لا متناه في الصغر، لذلك يمكننا أن نكتب عبارة السرعة اللحظية v ، من أجل الحركة في بعد واحد،

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2 - 3)$$

العبارة $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ ، تعني أن النسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، تكون محسوبة عند الإقتراب اللامتناهي Δt ، من الصفر، ولكن لا نكتب ببساطة أن $\Delta t = 0$ ، وبالتالي Δx ، سيكون صفراً و نحصل على

حالة عدم تعيين، لذلك نحن نقصد نهاية النسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، بمجمليها، ولكن النسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، تنتهي إلى قيمة محدودة، هي السرعة اللحظية في اللحظة المعطاة.

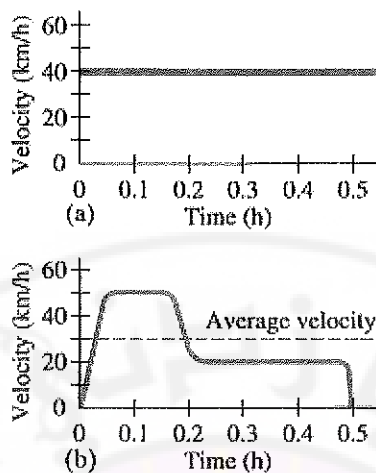
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2-4)$$

السرعة اللحظية هي مشتق الموضع x ، بالنسبة إلى الزمن.

عندما يتحرك جسم بسرعة ثابتة خلال مجال زمني معين فالسرعة اللحظية هي السرعة الوسطى نفسها عند أية لحظة زمنية الشكل (2-4)، إذا إنطلقت سيارة من السكون وازدادت سرعتها حتى 50 km/h ، وحافظت على هذه السرعة لفترة زمنية محددة وبعد ذلك انخفضت إلى 20 km/h ، بسبب الازدحام المروري وأخيراً توقفت بعد أن تكون قد قطعت مسافة 15 km ، خلال 30 دقيقة الشكل (2-4)، الخط المنقط يشير إلى السرعة الوسطى

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15}{0.50} = 30 \text{ km/h}$$

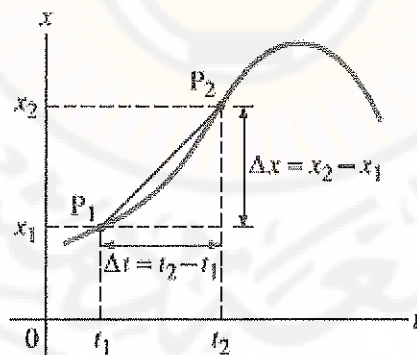
من أجل فهم أفضل للسرعة اللحظية دعنا ندرس الرسم البياني للموضع مع الزمن $x = f(t)$ الشكل (2-5)، الجسم في النقطة P_1 ، الموضع x_1 ، واللحظة t_1 ،



الشكل (2 - 4)

سرعة السيارة كتابع للزمن: (a) عند سرعة ثابتة (b) مع سرعة متغيرة.

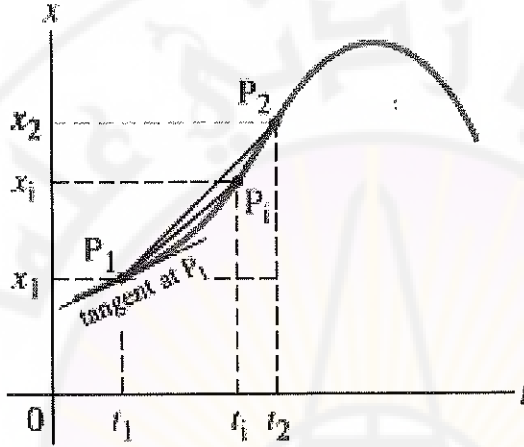
وعندما يكون الجسم في النقطة P_2 ، الموضع x_2 ، واللحظة t_2 ، والخط المستقيم المرسوم بين النقطتين $P_1(x_1, t_1)$ و $P_2(x_2, t_2)$ ، يشكل وتر في المثلث القائم وضلعاه القائمتان Δx ، و Δt ، والنسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، هي ميل المستقيم P_1P_2 ، وهي أيضاً السرعة الوسطى للجسم خلال المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$.



الشكل (2 - 5)

الشكل البياني يبين وضع الجسم x ، مقابل الزمن t ، ميل الخط المستقيم P_1P_2 ، يعبر عن السرعة الوسطى للجسم خلال المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$

ولكن يوجد مستقيم آخر ميله يساوي السرعة الوسطى أيضاً، لمجال زمني آخر Δt ، لنفرض اللحظة t_i ، تتوسط بين t_1 و t_2 ، الجسم عند الموضع x_i ، الشكل (2 - 6)، ميل الخط المستقيم P_1P_i ، أقل من ميل الخط المستقيم P_1P_2 ، السرعة الوسطى خلال المجال الزمني $t_i - t_1$.

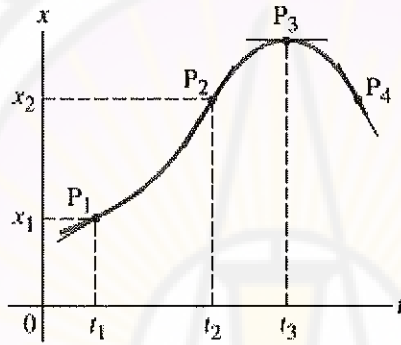


الشكل (2 - 6)

الموضع مقابل الزمن كما في الشكل السابق ولكن ليس السرعة الوسطى خلال مجال الزمن $t_i - t_1$ (الذي ميله P_1P_i) أصغر من السرعة الوسطى على المجال الزمني $t_2 - t_1$ ، ميل الخط الرفيع هو مماس للمنحني عند النقطة P_1 يساوي السرعة اللحظية عند اللحظة الزمنية.

لنتخيل أن النقطة P_i ، في الشكل (2 - 6)، اقتربت أكثر فأكثر باتجاه النقطة P_1 ، والمجال الزمني $\Delta t = t_i - t_1$ ، يصبح أقصر فأقصر وميل الخط الذي يصل هاتين النقطتين يصبح أقرب فأقرب إلى ميل المماس للخط المنحني عند النقطة P_1 ، وبالتالي فالسرعة الوسطى تقترب من ميل المماس للمنحني عند النقطة P_1 ، ومن تعريف السرعة اللحظية بأنها نهاية السرعة الوسطى عندما ينتهي المجال الزمني Δt إلى الصفر وبالتالي فإن السرعة اللحظية في نقطة تساوي ميل المماس للخط المنحني عند تلك النقطة .

يمكننا أن نتعرف على السرعة عند أية لحظة من المنحني البياني، على سبيل المثال الجسم يتحرك من x_1 ، إلى x_2 ، ميل المنحني يستمر في الزيادة والسرعة تزداد أيضاً، بعد اللحظة t_2 ، الميل يبدأ بالتناقص، الشكل (2-7)، وعند اللحظة t_3 ، ($v = 0$)، حيث أن x ، بلغت قيمة عظمى، و بعد هذه النقطة الميل يكون سالباً، x ، تتناقص لأن الجسم يتحرك باتجاه تناقص قيم x . إذا كان الجسم يتحرك بسرعة ثابتة خلال مجال زمني معين، فسرعته اللحظية تساوي سرعته الوسطية، والخط البياني $x = f(t)$ ، سيكون عبارة عن خط مستقيم وميله يساوي سرعة الجسم، نلاحظ في الشكل (2-6) لا يوجد فيه جزء مستقيم وبالتالي لا يوجد مجال زمني تكون فيه السرعة ثابتة.



الشكل (2-7)

الميل عند أربع نقاط مختلفة عند P_3 ، الميل معدوم وبالتالي $v = 0$ وعند P_4 ، الميل سالب وبالتالي $v < 0$.

(مثال 2-2):

محرك نفاث يتحرك على مسار، كما موضح على الشكل (2-8-a)، نعد المحرك النفاث كما لو أنه جسيم، يتعين موضعه مع الزمن وفق العلاقة :

$$x = At^2 + B$$

$$A = 2.10 \text{ m/s}^2, \quad B = 2.80 \text{ m}$$

هذه المعادلة مرسومة على الشكل (2 - 8 - b)، إ حسب:

(a) الإنزياح بين اللحظتين: $t_1 = 3.00 \text{ s}$, $t_2 = 5.00 \text{ s}$.

(b) السرعة الوسطى خلال هذا المجال.

(c) قيمة السرعة اللحظية عند $t_2 = 5.00 \text{ s}$.

الحل:

(a) عندما $t_1 = 3.00 \text{ s}$ ، الوضع (x_1)

$$x_1 = At_1^2 + B = 2.10 \times (3.00)^2 + 2.80 = 21.7 \text{ m}$$

من أجل $t_2 = 5.00 \text{ s}$ ، الوضع (x_2)،

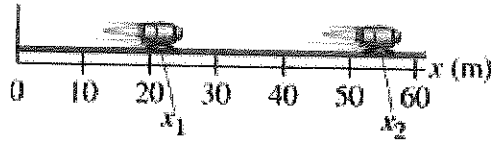
$$x_2 = At_2^2 + B = 2.10 \times (5.00)^2 + 2.80 = 55.3 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 55.3 - 21.7 = 33.6 \text{ m} \quad \text{الإنزياح}$$

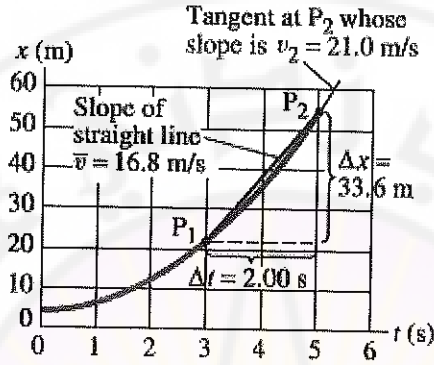
(a) القيمة العددية للسرعة الوسطى يمكن حسابها

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{33.6}{2.00} = 16.8 \text{ m/s}$$

وهي تساوي كما ذكرنا ميل الخط المستقيم الذي يصل النقطتين $P_1 P_2$.



(a)



(b)

الشكل (2 - 8)،

(a) المحرك النفثا يتحرك على مسار خط مستقيم.

(b) المنحني البياني للعلاقة $x = At^2 + B$.

(b) السرعة اللحظية عند $t = t_2$ ، تساوي ميل المماس للمنحني عند النقطة P_2 ، المبينة

على الشكل (2 - 8 - b)، ويمكننا قياس هذا الميل للحصول على v_2 ، ولكن نستطيع

أن نحسب v ، أكثر دقة من أي لحظة t ، باشتقاق العلاقة السابقة

$$v = \frac{dx}{dt} = 2At$$

بتعويض

$$A = 2.10 \text{ m/s}^2, \quad t = t_2 = 5.00 \text{ s}$$

$$v_2 = 2 \times (2.10) \times (5.00) = 21.0 \text{ m/s}$$

5-2 التسارع

نقول عن جسم أنه يتسارع إذا زادت سرعته مع الزمن، على سبيل المثال عندما تزداد سرعة سيارة من الصفر إلى 80 km/h ، نقول أنها تتسارع، فالتسارع يحدد معدل تغير سرعة الجسم مع الزمن.

6-2 التسارع الوسطي

ويعرف على أنه تغير السرعة مقسوماً على الزمن الذي يستغرقه هذا التغير، ونرمز له بالرمز $\bar{a}$ ، ونرمز لتغير السرعة $\Delta v = v_2 - v_1$ ، ولتغير الزمن $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2 - 5)$$

نعلم أن السرعة هي كمية شعاعية والتسارع هو أيضاً كمية شعاعية، ولكن من أجل الحركة في بعد واحد نحتاج فحسب، لإشارة + أو - للدلالة إلى جهة التسارع بالنسبة إلى محور الإحداثيات المختار.

مثال (2-3):

تتسارع سيارة على خط مستقيم من السكون إلى 90 km/h ، خلال 5، ثوان ما قيمة التسارع الوسطي

الحل:

السيارة تتطلق من السكون $v_1 = 0$ ، والسرعة النهائية $v_2 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$ ، والتسارع الوسطي.

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{25 - 0}{5.0} = 5 \text{ m/s}^2$$

نلاحظ أن التسارع يدلنا على معدل تغير السرعة في حين السرعة تدلنا على معدل تغير الموضع.

(مثال نموذجي 1-2)

- A. إذا كانت سرعة جسم تساوي الصفر هل هذا يعني أن التسارع يساوي الصفر.
B. إذا كان التسارع يساوي الصفر هل هذا يعني أن السرعة تساوي الصفر.

الإجابة :

السرعة صفر، هذا لا يعني بالضرورة أن التسارع صفر أيضاً.

- A. على سبيل المثال عندما تقود السيارة من السكون فإنها تتطلق من السرعة صفر، لأنها كانت ساكنة وهذا لا يعني لأن التسارع صفر لأن السرعة تتغير.
B. عندما ينطلق الجسم بسرعة ثابتة على طريق مستقيم فإن التسارع

$$(v \neq 0, \text{ ثابت}, a = 0)$$

(مثال 2-4):

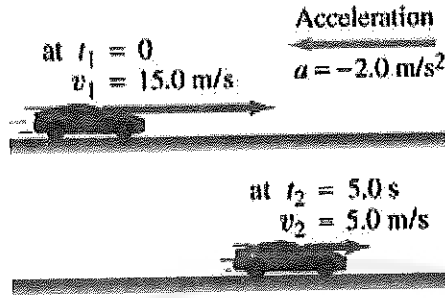
تتحرك سيارة باتجاه اليمين على طول طريق مستقيم نعدده محور x ، الشكل (2-9)، يكبح السائق السيارة عندما تكون سرعتها $v_1 = 15.0 \text{ m/s}$ ، فتتباطأ السيارة إلى السرعة $v_2 = 5.0 \text{ m/s}$ خلال 5.0 s

احسب التسارع الوسطي.

الحل:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5.0 - 15}{5.0} = -2.0 \text{ m/s}^2$$

الإشارة السالبة ظهرت لأن السرعة البدائية أكبر من السرعة النهائية، في هذه الحالة إتجاه التسارع إلى اليسار (في إتجاه السالب x)، على الرغم من أن إتجاه السرعة يشير دائماً إلى اليمين (موجب $v_1, v_2 > 0$) وبالتالي التسارع -2.0 m/s^2 ، إلى اليسار.



الشكل (2 - 9)

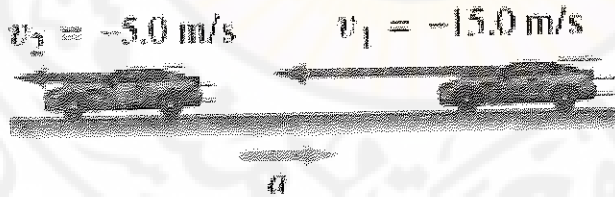
الشكل يبين موضع السيارة عند اللحظتين t_1, t_2 حيث شعاع سرعة السيارة و شعاع التسارع يتجهان إلى اليسار بينما السيارة تتباطأ متحركة إلى اليمين.

7-2 التباطؤ

عندما تتناقص سرعة الجسم نقول إنه يتباطأ ولكن علينا أن نكون حذرين على أن التباطؤ لا يعني أن التسارع بالضرورة سالب، الشكل (2 - 10)، يبين أن شعاع السرعة يتجه إلى اليسار، بينما جهة شعاع التسارع تتجه إلى اليمين، في هذه الحالة السيارة تتباطأ.

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-5) - (-15)}{5} = +2.0 \text{ m/s}$$

في المثال السابق الشكل (2 - 9)، السيارة كذلك تتباطأ أيضاً لأن السرعة والتسارع من جهتين مختلفتين.



الشكل (2 - 10)

شعاع السرعة يتجه نحو اليسار بينما شعاع التسارع يتجه نحو اليمين

• الحركة المتسارعة، السرعة والتسارع لهما نفس الإتجاه.

$$\bar{a} \cdot \bar{v} > 0$$

- الحركة المتباطئة، السرعة والتسارع لهما إتجاهين متعاكسين.

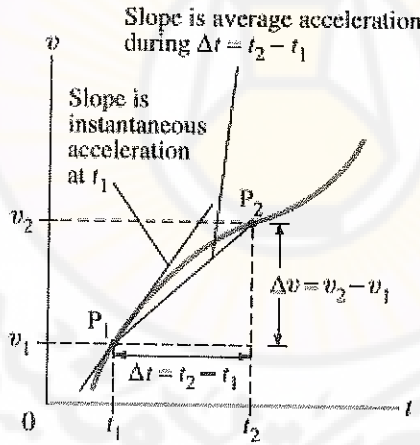
$$\vec{a} \cdot \vec{V} < 0$$

8-2 التسارع اللحظي

التسارع اللحظي يعرف على أنه نهاية التسارع الوسطي عندما تسعى Δt ، إلى الصفر.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (2 - 6)$$

النسبة $\frac{dv}{dt}$ ، هي مشتق السرعة بالنسبة إلى الزمن، سوف نستخدم مصطلح التسارع للإشارة إلى القيمة اللحظية. إذا رسمنا شكل بياني السرعة مقابل الزمن $v = f(t)$ ، الشكل # (2 - 11)، التسارع الوسطي على المجال $\Delta t = t_2 - t_1$ ، يعبر عنه بميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين P_1 و P_2 ، و التسارع اللحظي عند أي لحظة t ، هو ميل المماس للمنحني البياني $v = f(t)$ ، عند تلك اللحظة. عندما نذهب من t_1 ، إلى t_2 ، السرعة تستمر في التزايد بينما التسارع يتناقص لأن ميل الخط البياني يتناقص.



الشكل (2 - 11)

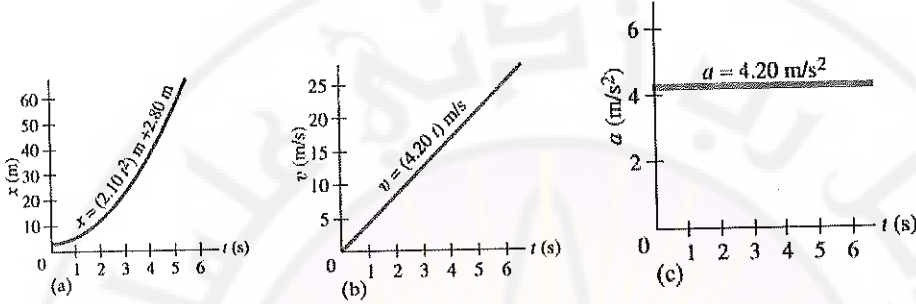
هذا الشكل يوضح ان التسارع الوسطي على المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ ، هو المستقيم P_1P_2 ، والتسارع اللحظي عند اللحظة t_1 ، هو ميل المستقيم المماس للمنحني في تلك اللحظة.

(مثال 2-5):

يتحرك جسم على خط مستقيم ويعطى موضعه بالعلاقة: $x = 2.10 t^2 + 2.80$ الشكل (2-12)، إحصب:

A. التسارع الوسطي خلال مجال زمني $t_1 = 3.00 \text{ s}$, $t_2 = 5.00 \text{ s}$

B. تسارعه اللحظي وتابعيته للزمن.



الشكل (2-12)

لاحظ أن v ، تزداد خطياً مع الزمن والتسارع ثابت والسرعة هي ميل المنحني (a)

الحل:

لتحديد التسارع علينا أولاً إيجاد السرعة عند اللحظة t_1 و t_2 ، وذلك باشتقاق x ، بالنسبة، إلى الزمن، من ثم وباستخدام المعادلة (2-5)، لإيجاد التسارع الوسطي، والمعادلة (2-6)، لإيجاد التسارع اللحظي.

A. السرعة اللحظية

$$v = \frac{dx}{dt} = 4.20t$$

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = 4.20t_1 = 4.20 \times 3.00 = 12.6 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = 4.20t_2 = 4.20 \times 5.00 = 21.0 \text{ m/s}$$

وبالتالي:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{21.0 - 12.6}{5.00 - 3.00} = 4.20 \text{ m/s}^2$$

.B

$$a = \frac{dv}{dt} = 4.20 \text{ m/s}^2$$

التسارع في هذه الحالة ثابت ولا يتعلق بالزمن. من ناحية أخرى السرعة هي تفاضل الإنزياح، والتسارع هو تفاضل السرعة، إذاً فالتسارع يجب أن يكون تفاضلاً لتفاضل الإنزياح، أي أن التسارع هو المشتق الثاني للإنزياح.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2-7)$$

(مثال نموذجي 2-2)

الشكل (2-13)، يمثل السرعة تابعاً للزمن لسيارتين تتسرعان من 0 إلى 100 km/h ،

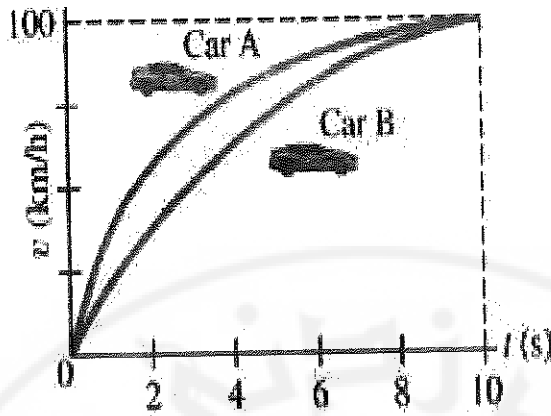
خلال 10.0 s

قارن بين:

A. التسارع الوسطي للسيارتين.

B. التسارع اللحظي للسيارتين.

C. المسافة الكلية المقطوعة للسيارتين.



الشكل (2 - 13)

الإجابة:

A. التسارع الوسطي هو نفسه لكلا السيارتين لأن

$$\Delta t = 10.0s$$

$$\Delta v = 100 \text{ km/h} = 27.78 \text{ m/s}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27.78}{10.0} = 2.78 \text{ m/s}^2$$

P. التسارع اللحظي هو ميل المماس للمنحني البياني للسرعة مقابل الزمن، ونلاحظ أنه من أجل الثواني الأربع الأولى المنحني العلوي أكثر إنحداراً من المنحني السفلي، وبالتالي التسارع اللحظي للسيارة A، أكبر من التسارع اللحظي للسيارة B.

C. عدا النقطتين $t = 0, t = 10.0s$ ، السيارة A، تتحرك أسرع من السيارة B، وبالتالي فالسيارة A، ستقطع مسافة أكبر من أجل الفترة الزمنية نفسها.

9-2 الحركة الخطية بتسارع ثابت

سندرس الآن الحالة عندما تكون قيمة التسارع ثابتة، والحركة تتم على خط مستقيم، في هذه الحالة التسارع الوسطي واللحظي متساويان، سنقوم بإستنتاج المعادلات التي تربط كلاً من

x, v, a ، بالزمن التي تدعى معادلات الحركة بما أن (ثابت a) هذا يسمح لنا بتحديد هذه المعادلات. نفرض أن الزمن البدئي للحركة يساوي الصفر، الذي يقابله السرعة الابتدائية v_0 ، والوضع البدئي x_0 .

$$t_1 = t_0 = 0, \quad v = v_0, \quad x = x_0$$

وسوف نرمز $t_2 = t$ ، بالزمن المنقضي (الفترة الزمنية)، السرعة الوسطى خلال الفترة الزمنية $t - t_0$.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t} \quad (2-8)$$

عندما يكون التسارع ثابتاً، التسارع اللحظي يساوي التسارع الوسطي

$$\bar{a} = a(t) = \text{ثابت} \quad (2-9)$$

$$\bar{a} = \frac{v - v_0}{t} = \text{ثابت} \quad (2-10)$$

من هذه المعادلة نستطيع تحديد سرعة الجسم بعد إنقضاء زمن قدره t ، الذي تسارعه ثابت

$$v = v_0 + at \quad (2-11)$$

• فإذا بدأ الجسم حركته من السكون $v_0 = 0$ ، وكان تسارعه $a = 4 \text{ m/s}^2$

بعد زمن قدره $t = 6.0 \text{ s}$ ، فإن سرعته اللحظية

$$v = v_0 + at$$

$$v = at = 4.0 \times 6.0 = 24 \text{ m/s}$$

دعنا نبحث عن معادلة الموضع بدلالة الزمن t ، من معادلة السرعة الوسطى (2-8) نجد:

$$x = x_0 + \bar{v}t \quad (2-12)$$

تستخدم هذه المعادلة لحالة الحركة المستقيمة بسرعة ثابتة لأن $v = \bar{v}$

وبما أن السرعة تزداد بمعدل ثابت فإن السرعة الوسطى هي قمة نتوسط كلاً من السرعة الابتدائية والسرعة النهائية.

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \quad (2 - 13)$$

يجب أن ننتبه إلى أن هذه المعادلة تصبح غير صحيحة إذا كان التسارع متغيراً. بتعويض (2 - 12) في (2 - 13) نجد :

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t \quad (2 - 14)$$

وبتعويض (2 - 11)

$$x = x_0 + \left(\frac{v_0 + at + v_0}{2} \right) t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2 - 15)$$

المعادلات الثلاث السابقة هي أحد أهم المعادلات في الحركة المستقيمة بتسارع ثابت

• سنستنتج المعادلة الرابعة وهي مفيدة عندما يكون الزمن مجهول

$$x = x_0 + \bar{v}t$$

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t \quad (2 - 16)$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

وبالتعويض في المعادلة (2 - 16)

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right) \left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (2 - 17)$$

حصلنا على ثلاث معادلات بين الموضع والسرعة والتسارع والزمن عندما يكون التسارع ثابتاً. لاحظ أن x ، تعبر عن الموضع وليس المسافة، و $x - x_0$ ، تعبر عن الإنزياح و t ، تعبر عن الزمن المنقضي.

(مثال 2-6):

نقلع طائرة من السكون بعد أن تقطع مسافة $150m$ ، وتكتسب تسارع $2.00 m/s^2$ ، هل تستطيع الطائرة بلوغ السرعة المطلوبة للإقلاع إذا كان:

$$v_s = 100 km/h = 27.8 m/s$$

إذا كان الجواب لا، ما المسافة الدنيا التي يجب أن نقطعها الطائرة لبلوغ سرعة الإقلاع.

الحل:

من المعادلات أعلاه نجد، باستخدام المعادلة (2 - 17)

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0), \quad v^2 - 0 = 2 \times (2.00) \times (150)$$

$$v = 24.5 m/s = \frac{0.0245 km}{1/3600 h}$$

$$v = 88.2 km/h < v_s$$

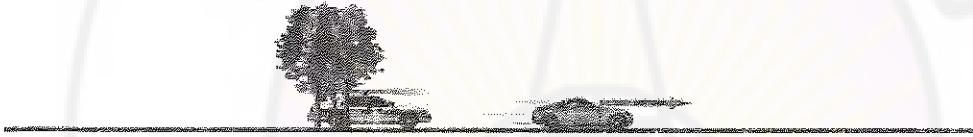
المسافة المقطوعة غير كافية، نريد المسافة الدنيا اللازمة للإقلاع أو لبلوغ السرعة المطلوبة للإقلاع

$$(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(27.8)^2 - 0}{2(2.00)} = 193m$$

لقد إعتبرنا أن الطائرة بمنزلة الجسم لذلك نستطيع أن نقرب الجواب إلى 200m

(مثال 2-7):

تمر سيارة عالية السرعة (s) ، بسرعة ثابتة 150 km/h ، بجانب سيارة الشرطة (p) الواقفة على عند الشجرة، التي تقلع من السكون، حتى تصل سرعتها 100 km/h ، خلال 5s، الشكل (2 - 14)، إحسب كم من الوقت تستغرق (السيارة p) لتتجاوز (السيارة s) وإحسب سرعتها عند التجاوز.



الشكل (2 - 14)

الحل:

نعد مبدأ الإحداثيات على المحور x، عند سيارة الشرطة الواقفة على يمين الطريق و نحدد $x_{0s} = x_{0p} = 0$ ، بإعتبار لحظة مرور (السيارة s) بجانب (السيارة p)، $t = 0$ ، التسارع الوسطي للسيارة p، حسب المعادلة (2 - 11)

$$a_p = \frac{v_p - v_{0p}}{t} = \frac{100 - 0}{5} = 20 \times \frac{1000m/3600s}{s} = 5.6 \text{ m/s}^2$$

لنرمز x_s ، إلى موضع (السيارة s) حسب المعادلة (2 - 12)

$$x_s = v_{0s}t + x_{0s}, \quad a_s = 0$$

$$x_s = v_{0s}t$$

x_p ، موضع سيارة الشرطة نستخدم المعادلة (15 - 2).

$$x_p - x_{0p} = v_{0p}t + \frac{1}{2}a_pt^2, \quad v_{0p} = 0$$

$$x_p = \frac{1}{2}a_pt^2$$

لحساب الزمن الذي تلتحق، سيارة الشرطة بالسيارة السريعة نضع

$$x_s = x_p$$

$$v_{0s}t = \frac{1}{2}a_pt^2$$

لهذه المعادلة حلين الأول

$t = 0$ ، الذي يوافق لحظة إنطلاق سيارة الشرطة

$$t = \frac{2v_{0s}}{a_p} = \frac{2 \times 42}{5.6} \rightarrow t = 15s$$

أما الحل الثاني $t = 15s$ ، يوافق لحظة تجاوز السيارة (p) للسيارة (s) وتكون سرعتها.

$$v_p = v_{0p} + a_pt$$

$$v_p = 0 + 5.6 \times 15 = 84 \text{ m/s} = 300 \text{ km/h}$$

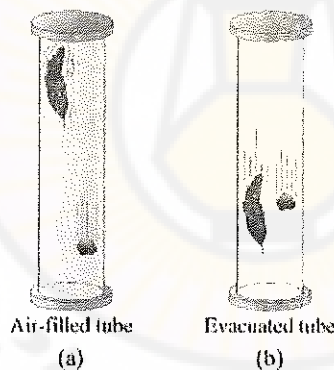
وهذه السرعة هائلة وخطرة.

10-2 السقوط الحر للأجسام

أحد أهم الأمثلة المألوفة والمعروفة للحركة المتسارعة بانتظام هو حركة السقوط الحر للأجسام بالقرب من سطح الأرض، إن سقوط الأجسام كان في البداية غير مفهوم، إذ كانت

الأفكار السائدة قبل غاليلو (1642 – 1564)، إن الأجسام الثقيلة تسقط بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة، وإن سرعة الأجسام تتناسب مع ثقلها. استخدم غاليلو خياله لتصور ما الذي يحصل في الحالة المثالية من السقوط الحر، مفترضا أن كل الأجسام تسقط بتسارع ثابت عند غياب مقاومة الهواء، ويرهن على صحة فرضياته بالنتيجة بسقوط الأجسام من السكون، إذ وجد أن المسافة المقطوعة تتناسب مع مربع الزمن $d \sim t^2$ ، التي نراها من المعادلة (15 – 2) ولكن غاليلو أول من إستنتج هذه العلاقات رياضياً.

لقد قام غاليلو بإجراء تجربة تؤكد صحة فرضياته عندما ألقى حجرا من إرتفاع $2m$ ، ثم ألقى الحجر نفسه من إرتفاع $20cm$ ، ووجد بان أثرها في الأرض أكبر عند إلقاءها من إرتفاع $2m$. أعلن غاليلو بان كل الأجسام ثقيلة أم خفيفة تسقط التسارع نفسه في حال غياب مقاومة الهواء، إذا حملت كرة السلة في يد وقطعة ورق في اليد الأخرى (مع إهمال مقاومة الهواء) وألقيتهما معا إلى الأسفل تجد أنهما يسقطان على الأرض في اللحظة نفسها الشكل (2 – 15).



الشكل (2 – 15)

السقوط الحر للحجر والريشة (a) في الهواء، (b) في الخلاء.

لخص غاليلو قوله عن السقوط الحر للأجسام بما يلي:

في مكان محدد على الأرض وفي غياب مقاومة الهواء تسقط كل الأجسام بنفس التسارع.

وهذا التسارع ناجم عن تسارع الجاذبية الأرضية على سطح الأرض ونرمز له بالرمز g وقيمه تقريباً .

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 32 \text{ ft/s}^2$$

وهو كمية شعاعية وجهته نحو الأسفل باتجاه مركز الأرض، وتتغير قيمته من مكان إلى آخر قليلاً، حسب الارتفاع عن سطح الأرض، يمكن إهمال هذه التغيرات في كثير من الحالات، وكذلك تأثير مقاومة الهواء يكون ضعيفاً، و يمكن إهماله، ولكنه يكون مهماً، على الأجسام الثقيلة، ولاسيما عندما تكون سرعتها كبيرة وتبلغ السرعة الحدية. الحركة تتم على المحور الشاقولي فإننا نستخدم المحور y .

$$v = gt$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}gt^2 \quad (2-18)$$

$$v^2 = 2g(y - y_0)$$

(مثال 2-8):

لنفرض أن جسماً قذف من الأعلى إلى الأسفل بسرعة ابتدائية 3.00 m/s .

A. ما موضعه بعد 2.00 s قارن الموضع مع موضع السقوط الحر ؟

B. ما سرعته بعد 2.00 s قارن السرعة مع سرعة السقوط الحر ؟

الحل:

A. نستخدم معادلات السقوط الحر أعلاه ولكن مع سرعة ابتدائية.

$$y_0 = 0, \quad v_{0y} = 3.00 \text{ m/s}$$

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 3.00 \times 2.00 + \frac{1}{2} \times 9.80 \times (2.00)^2 = 25.6m$$

من أجل السقوط الحر، $v_{0y} = 0$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = \frac{1}{2} \times 9.80 \times (2.00)^2 = 19.6m$$

B. نستخدم المعادلات التي تعطي السرعة مع الزمن.

$$v = v_{0y} + gt$$

$$y = 3.00 + 9.8 \times 2.00 = 22.6 m/s$$

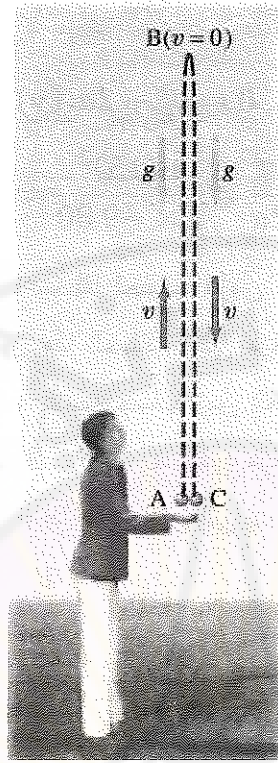
أما في حالة السقوط الحر

$$v = gt = 9.8 \times 2.00 = 19.6 m/s$$

(مثال 2-9):

يقذف شخص كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية $15.0 m/s$ الشكل (2 - 16)، احسب:

- الارتفاع الذي تصل إليه.
- الزمن الذي تستغرقه للعودة إلى يد الشخص.
- الزمن اللازم حتى تصل الكرة إلى نقطة الذروة.
- سرعة الكرة عند العودة إلى يد الشخص.
- حدد اللحظة التي تمر فيها الكرة من النقطة $8.00m$ فوق الشخص القاذف، مع إهمال مقاومة الهواء.



الشكل (2 - 16)

الجسم المقذوف نحو الأعلى يصعد من A ، ويبلغ الذروة عند B ، ويعود إلى نقطة الأصل عند C

الحل:

سوف نهتم بحركة الكرة بعد أن تتطلق من يد الشخص وحتى العودة إليها ثانية، لذلك نختار الاتجاه الموجب للمحور y إلى الأعلى، وبالتالي فإن تسارع الجاذبية الأرضية، كما نعلم موجه إلى الأسفل ويكون سالب.

$$a = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$$

$$t = 0, \quad y_0 = 0$$

الكرة ترتفع إلى الأعلى وسرعتها تتناقص حتى تتعدم عند الذروة .

A. عند الذروة $v = 0$

$$0 = v_0^2 + 2a \cdot (y)$$

$$y = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{-(15)^2}{2 \times -9.80} = 11.5m$$

B. نريد أن نختار مجالاً زمنياً مختلفاً لحساب الزمن الذي تستغرقه الكرة للعودة إلى يد الشخص ثانية، يمكننا أن نجري هذا الحساب على مرحلتين الأولى نحسب الزمن اللازم للكرة كي تصل إلى نقطة الذروة و الثانية حساب زمن العودة، ولكن من الأسهل أن نحسب زمن الحركة كاملاً من A، إلى B، إلى C، على مرحلة واحدة وبما أن y ، تعبر عن الإنزياح وليست المسافة المقطوعة، إذأ عودة الكرة إلى يد الشخص توافق $y = 0$.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$0 = 0 + 15t + \frac{1}{2} (-9.80)t^2$$

وبالحل نجد:

$$t = 0, \quad t = 3.06s$$

إن الحل $t = 0$ ، يقابل نقطة البدء A، و الحل $t = 3.06s$ ، يقابل النقطة C، عندما تعود الكرة ثانية إلى يد الشخص، هذه النتائج تقريبية لأننا أهملنا مقاومة الهواء التي لها تأثير لا بأس به على الحركة.

C. عند نقطة الذروة سرعة الكرة معدومة $v = 0$

$$v = v_0 + at$$

$$0 = v_0 + at$$

$$t = \frac{0 - v_0}{a} = \frac{-15}{-9.80} = 1.53s$$

وهي نصف قيمة الزمن الذي تستغرقه الكرة لإتمام الحركة كاملة من A، إلى B، إلى C.

D. نعلم أنه عند لحظة القذف $t = 0, v_0 = 15.0 \text{ m/s}$

ونعلم أيضاً أنها إستغرقت زمناً قدره $t = 3.06 \text{ s}$ ، للعودة إلى يد الشخص، بالتعويض في المعادلة

$$v = v_0 + at = 15.0 + (-9.80) \times 3.06$$

$$v = -15.0 \text{ m/s}$$

E. نختار المجال الزمني بدءاً من نقطة القذف $t = 0, v_0 = 15.0 \text{ m/s}$

المعطيات $y_0 = 0, v_0 = 15.0 \text{ m/s}$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$8.00 = 0 + 15t + \frac{1}{2} (-9.80)t^2$$

وبالحل نحصل على

$$t = 0.69 \text{ s}, t = 2.37 \text{ s}$$

وكلاهما مقبولان لأن الكرة تمر بالنقطة $y = 8.00 \text{ m}$ عند الصعود $t = 0.69 \text{ s}$

وعند الهبوط $t = 2.37 \text{ s}$

(مثال نموذجي 2-3)

A. هل السرعة والتسارع دائماً من الجهة نفسها ؟

B. هل تسارع الجسم المقذوف إلى الأعلى يكون معدوماً عند نقطة الذروة ؟

الإجابة:

A. السرعة والتسارع ليس من الضروري أن يكونا من نفسه الإتجاه عندما تتحرك الكرة إلى الأعلى فإن سرعتها إلى الأعلى بينما التسارع إلى الأسفل.

B. سرعة الكرة عند الذروة في النقطة B الشكل (2 - 16) تساوي الصفر بينما تسارع الكرة لا يساوي الصفر، إذا كان $a = 0$ عند الذروة هذا يعني أن الكرة ستبقى معلقة هناك وسرعتها ستبقى معدومة.

11-2 التسارع المتغير- معادلات الحركة

فيما سبق قمنا باشتقاق معادلات الحركة من أجل الحركة المستقيمة بتسارع ثابت، لنفرض أن السرعة الابتدائية للجسم v_0 ، عند اللحظة $t = 0$. لدينا:

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{ثابت}$$

$$dv = a dt \quad (2 - 19)$$

نكامل طرفي هذه المعادلة

$$\int_{v=v_0}^v dv = \int_{t=0}^t a dt$$

ومنه

$$v = v_0 + at \quad (2 - 20)$$

وهي المعادلة (2 - 12) وإنطلاقاً من تعريف السرعة اللحظية

$$dx = v dt$$

نعوض قيمة v ، من المعادلة (2 - 20)

$$dx = (v_0 + at)t$$

نكامل طرفي المعادلة

$$\int_{x=x_0}^x dx = \int_{t=0}^t (v_0 + at)dt$$

$$x - x_0 = \int_{t=0}^t v_0 dt + \int_{t=0}^t at dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2 - 21)$$

ويمكن اشتقاق المعادلة المستقلة عن الزمن بدءاً من المعادلة (2 - 19)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{v dv}{dx}$$

$$v dv = a dx$$

نكامل الطرفين

$$\int_{v=v_0}^v v dv = \int_{x=x_0}^x a dx$$

$$(v^2 - v_0^2) = 2a(x - x_0) \quad (2 - 22)$$

مثال 2-10):

تتسارع سيارة من $v_0 = 0$ عند اللحظة $t = 0$ بتسارع يعطى بالعلاقة

$$a = (7.00 \text{ m/s}^3) t$$

ما سرعتها وما إنزياحها بعد فترة قدرها $2s$

الحل:

• السرعة يمكن اشتقاقها من العلاقة

$$\int_0^v dv = \int_{t=0}^t a dt = \int_{t=0}^t 7.00 t dt = 7.00 \times \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$v = \frac{7.00}{2} t^2 = 3.50 t^2$$

$$v = 3.50 \times (2.00)^2 = 14 \text{ m/s}$$

• لحساب الإنزياح نفرض أن $x_0 = 0$ ، وباستخدام العلاقة $dx = v dt$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (3.50 t^2) dt$$

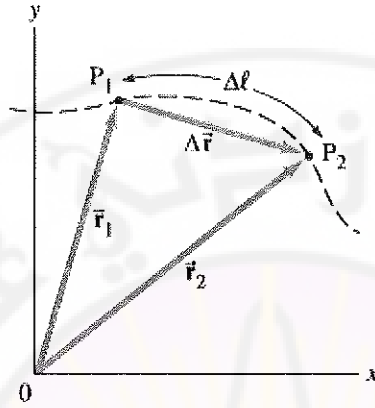
$$x = \frac{3.50}{3} t^3 = \frac{3.50}{3} \times (2.00)^3 = 9.33 \text{ m}$$

2-12 الحركة في بعدين - التمثيل الشعاعي للحركة

الآن سنعمم تعريفنا للسرعة والتسارع على بعدين وثلاثة أبعاد، لنفرض أن الجسم يسلك مساراً يقع في المستوي (xy) ، الشكل (2-17)، في اللحظة t_1 ، الجسم عند النقطة p_1 ، وفي اللحظة t_2 ، الجسم عند النقطة p_2 ، شعاع الإنزياح هو شعاع يعبر عن تغير الموضع ونرمز له $\Delta \vec{r}$.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2-23)$$

الشعاع $\vec{r}_1$ ، هو شعاع الموضع للجسيم عند اللحظة t_1 ، ويعبر عن إنزياح الجسيم عن مبدأ الإحداثيات، و الشعاع $\vec{r}_2$ هو شعاع الموضع عند اللحظة t_2 ، ويقابل هذا الإنزياح مجال زمني $\Delta t = t_2 - t_1$



الشكل (2 - 17)

الشكل يبين مسار الجسيم في المستوي xy ، عند اللحظة t_1 ، الجسيم عند النقطة p_1 ، المعطاة بشعاع الموضع $\vec{r}_1$ ، عند اللحظة t_2 ، الجسيم عند النقطة p_2 ، المعطاة بشعاع الموضع $\vec{r}_2$ ، شعاع الإنزياح من أجل مجال زمني $\Delta t = t_2 - t_1$ ، $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

في جملة الإحداثيات الديكارتية نستطيع أن نعبر عن شعاع الموضع كما رأينا بالشكل:

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad (2 - 24)$$

حيث x_1, y_1, z_1 هي إحداثيات النقطة p_1 وكذلك

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \quad (2 - 25)$$

حيث x_2, y_2, z_2 هي إحداثيات النقطة p_2

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2 - 26)$$

بالتعويض (2 - 24) (2 - 24) نجد:

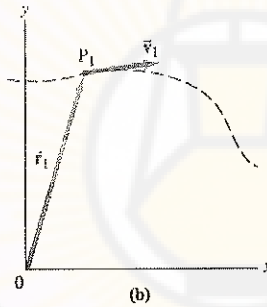
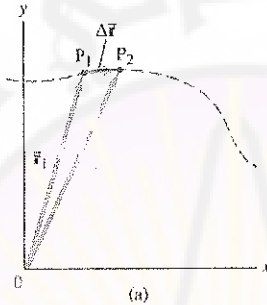
$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k} \quad (2 - 27)$$

نعرف شعاع السرعة الوسطي على المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ ، على أنه

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{شعاع السرعة الوسطى}$$

نفرض أن المجال الزمني Δt ينتهي إلى الصفر، المسافة بين p_1, p_2 تسعى إلى الصفر أيضاً. الشكل (2-18-a)، نعرف شعاع السرعة اللحظية على أنه نهاية شعاع السرعة الوسطى عندما $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2-28)$$



الشكل (2-18)

- (a) اتجاه $\Delta \vec{r}$ ، والسرعة اللحظية عندما $\Delta t \rightarrow 0$.
 (b) السرعة اللحظية هي مماس المنحني عند النقطة p_1 .

إن شعاع السرعة اللحظية $\vec{V}$ ، عند أي لحظة يكون محمولاً على المماس لمنحني المسار عند تلك اللحظة، الشكل (2-18-b)، نلاحظ أن قيمة السرعة الوسطى في الشكل (2-17)، لاتساوي قيمة السرعة الوسطى بالمسافة الحقيقية المقطوعة على المسار Δl ، مقسومة على Δt ، ولكن في بعض الحالات الخاصة تتساوى السرعة الوسطى بالمسافة

والسرعة الوسطى بالإنزياح، كما الحال في الحركة المستقيمة، عندما $\Delta t \rightarrow 0$ ، تقترب Δr ، من $\Delta \ell$ ، وبالتالي السرعة اللحظية بالمسافة تساوي السرعة اللحظية دائماً عند أية لحظة، ويمكن كتابة شعاع السرعة في جملة الإحداثيات الديكارتية.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (2-29)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (2-30)$$

حيث v_x ، v_y ، v_z : مركبات شعاع السرعة على المحاور الإحداثية الموافقة، وأن أشعة الوحدة ثابتة

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

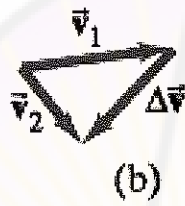
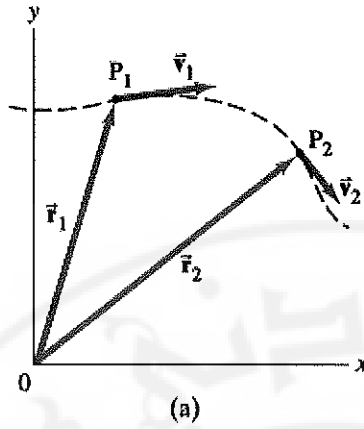
وكذلك الأمر بالنسبة إلى التسارع بالطريقة نفسها نجد شعاع التسارع الوسطي.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (2-31)$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (2-32)$$

$\Delta\vec{v}$ هو التغير في شعاع السرعة اللحظية خلال المجال الزمني Δt ، لاحظ أنه بشكل عام $\vec{v}_2$ ، ليست بنفس اتجاه $\vec{v}_1$ ، الشكل (2-19-a)، في حين التسارع الوسطي يختلف في اتجاهه عن $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ ، الشكل (2-19-b)، علاوة على ذلك $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ ، يمكن أن يكون لهما اتجاهان مختلفان ولهما نفس القيمة، إذا فالتسارع يمكن أن ينشأ من التغير في قيمة السرعة أو من التغير في اتجاه السرعة أو التغير في كليهما. نعرف شعاع التسارع اللحظي بأنه نهاية شعاع التسارع الوسطي عندما ينتهي المجال الزمني إلى الصفر.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2-33)$$



الشكل (2 - 19)

(a) أشعة السرعة $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ عند اللحظتين للجسيم عند النقطتين p_1, p_2

(b) اتجاه التسارع الوسطي هو من اتجاه $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$

وكذلك:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \quad (2 - 34)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad (2 - 35)$$

حيث a_x, a_y, a_z : مركبات شعاع التسارع على المحاور الإحداثية الموافقة.

2-12-1 الحركة بتسارع ثابت

درسنا الحركة بتسارع ثابت في بعد واحد والآن سندرس الحركة في بعدين أو ثلاثة عندما يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في القيمة والاتجاه.

$$a_x = \text{ثابت}, a_y = \text{ثابت}, a_z = \text{ثابت} \quad (2-36)$$

التسارع الوسطي في هذه الحالة يساوي التسارع اللحظي، و المعادلات التي أشقناها من أجل الحركة في بعد واحد يمكننا أن نستنتجها بالنسبة إلى الحركة في بعدين أو ثلاثة أبعاد.

2-13 حركة القذيفة

لقد درسنا حركة جسم يسقط شاقولياً ويخضع لتسارع الثقالة الأرضية والآن سندرس الحركة في المستوي. لنفرض جسماً يتحرك بالقرب من سطح الأرض، حيث مقاومة الهواء مهملة (على الرغم من تأثيرها الواضح في الحركة)، سوف نهتم بحركة الجسم بعد القذف وحتى سقوطه على الأرض، أي أننا سندرس حركة الجسم وهو يتحرك بحرية في الهواء تحت تأثير حقل الجاذبية الأرضية وتسارعه $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ، ونعده ثابتاً.

(الإرتفاع الأقصى الذي يصل إليه الجسم المقذوف صغير بالمقارنة مع نصف قطر الأرض 6400 km). غاليليو أول من درس حركة القذيفة بشكل دقيق، و يمكن فهمها إذا حللناها إلى مركبتين إحداها أفقية والأخرى عمودية، نفرض أن الحركة بدأت في اللحظة $t = 0$ عند مبدأ الإحداثيات O بالتالي $(x_0 = y_0 = 0)$.

2-13-1 القذف الأفقي

دعنا نراقب حركة كرة تتدحرج على سطح مستو أفقي (سطح طاولة) وتسقط عند الحافة إلى الأسفل، الشكل (2-20) بسرعة ابتدائية v_{x0} ، حسب غاليليو سنتعامل مع مركبات السرعة الأفقية والعمودية v_x, v_y ، وبشكل منفصل ونطبق معادلات الحركة على المركبات x, y ، أولاً سندرس مركبة الحركة على (y) نعد اللحظة التي تغادر الكرة حافة الطاولة هي $t = 0$ ، ولها مركبة للسرعة على x ، فحسب، مركبة السرعة الابتدائية العمودية $v_{y0} = 0$

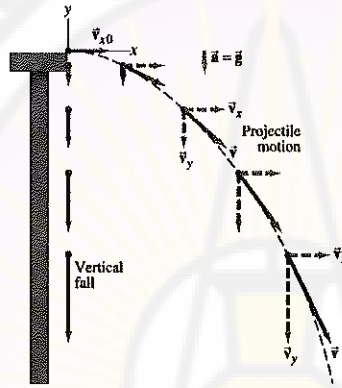
ولكن بعد تلك اللحظة تزداد v_y ، باستمرار متجهة نحو الأسفل (التسارع ينجه إلى الأسفل)،
نفرض ان المحور y ، موجب إلى الأعلى والتسارع.

$$a_y = -g \quad (2-37)$$

ومعادلات الحركة على الإتجاه العمودي

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (2-38)$$

$$v_y = -gt$$



الشكل (20 - 2)

حركة القذيفة لكرة صغيرة مقذوفة أفقياً، الخط المتقطع هو مسار الجسم وإتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$ عند كل نقطة هو إتجاه الحركة وهو المماس للمسار، والاسهم توضح اشعة السرعة ومركباتها، لاحظ ان $\vec{v}_y$ هي نفس سرعة السقوط الحر بينما السرعة $\vec{v}_x$ تبقى ثابتة.

أما دراسة الحركة على الإتجاه الأفقي، نلاحظ أن التسارع معدوم $a_x = 0$ ، (مع إهمال مقاومة الهواء) وبالتالي مركبة السرعة الأفقية تبقى ثابتة $v_x = v_{x0}$ ، فالحركة على المحور الأفقي مستقيمة بسرعة ثابتة والإنزياح.

$$x = v_{x0}t \quad (2-39)$$

أحد هذه النتائج التي تنبأ بها غاليلو هي أن الجسم المقذوف أفقياً سوف يصل إلى الأرض في اللحظة نفسها التي يصلها جسم يسقط عمودياً بشكل حر.

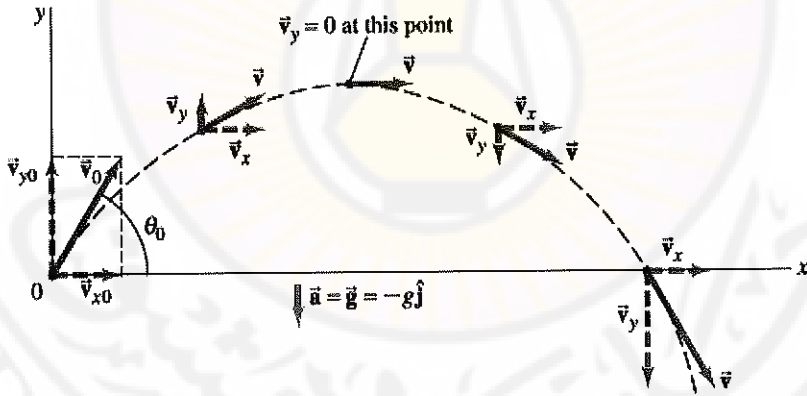
2-13-2 القذف المائل

إذا قذفنا جسماً بشكل مائل بحيث يصنع شعاع السرعة الابتدائية زاوية θ_0 مع المحور الأفقي الشكل (2 - 21)، دراسة هذه الحركة مشابه للحالة السابقة ماعدا حالة وجود مركبة للسرعة الابتدائية على المحور y ، العمودي.

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta_0 \quad (2 - 40)$$

مركبة السرعة على المحور العمودي v_y ، سنتناقص بالتدريج (التسارع يتجه نحو الأسفل)، حتى تنعدم عند الذروة $v_y = 0$ ، ثم يبدأ الجسم بالهبوط وتبدأ v_y بالزيادة بقيم سالبة حتى تصل الأرض أما v_x تبقى ثابتة.

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \quad (2 - 41)$$



الشكل (2 - 21)

مسار قذيفة، قذفت بسرعة ابتدائية v_0 ، وزاوية قذف θ_0 ، مع الأفق، المسار مبين بالخط المتقطع والأسهم تعبر عن أشعة السرعة ومركباتها والتسارع متجه إلى الأسفل.

(مثال 2- 11):

يقذف لاعب كرة بزاوية $\theta_0 = 37.0^\circ$ وبسرعة ابتدائية $v_0 = 20.0 \text{ m/s}$ ، احسب:

- A. الارتفاع الأعظمي عند الذروة.
- B. الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض.
- C. كم تبعد نقطة سقوط الكرة على الأرض عن نقطة القذف؟
- D. أوجد المدى الأعظمي للقذيفة.
- E. عين الزاوية التي يجب أن تتطلق بها قذيفة سرعتها الابتدائية $v_0 = 60.0 \text{ m/s}$ لتصيب هدفا مسافته 60.0 m ، (نفرض أن الكرة قد قذفت عند سطح الأرض، وأن مقاومة الهواء مهملة).

الحل:

سنختار المحور y ، موجهها إلى الأعلى ونعالج مركبات الحركة على x, y بشكل منفصل، مركبة السرعة v_y ، تتغير إذ تكون موجبة في البدء وتتناقص حتى تتعدم عند الذروة، وتصبح سالبة عندما تهبط الكرة إلى الأسفل، مركبات السرعة الابتدائية على الإتجاهين x, y

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 = 20.0 \cos 37.0^\circ = 16.0 \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta_0 = 20.0 \sin 37.0^\circ = 12.0 \text{ m/s}$$

A. نعد بداية الزمن هي لحظة إنطلاق الكرة عند القذف، عند الذروة: $v_y = 0$

$$v_y = v_{y0} - gt_m = 0$$

$$t_m = \frac{v_{y0}}{g} \quad (2 - 42)$$

$$t_m = \frac{12.0}{9.80} \approx 1.22 \text{ s}$$

من المعادلة (2 - 15) ، $(y_0 = 0)$ نجد:

$$\begin{aligned} y &= v_{y0}t_{cl} - \frac{1}{2}g(t_{cl})^2 \\ &= 12.0 \times 1.22 - \frac{1}{2} \times 9.80 \times (1.22)^2 \\ y &= 7.35m \end{aligned}$$

ويمكن استخدام المعادلة (2 - 17) حيث نجد:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} \\ y &= \frac{(12.0)^2 - (0)^2}{2 \times (9.80)} = 7.35m \end{aligned}$$

B. لإيجاد الزمن اللازم حتى تعود الكرة إلى الأرض، $y = 0$.

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t_g - \frac{1}{2}g(t_g)^2 = 0 \\ v_{y0}t_g - \frac{1}{2}g(t_g)^2 &= 0 \end{aligned}$$

يوجد حلان الأول $t_{g1} = 0$ ، الذي يوافق نقطة البدء والثاني.

$$t_{g2} = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2 \times 12.0}{9.80} = 2.45s$$

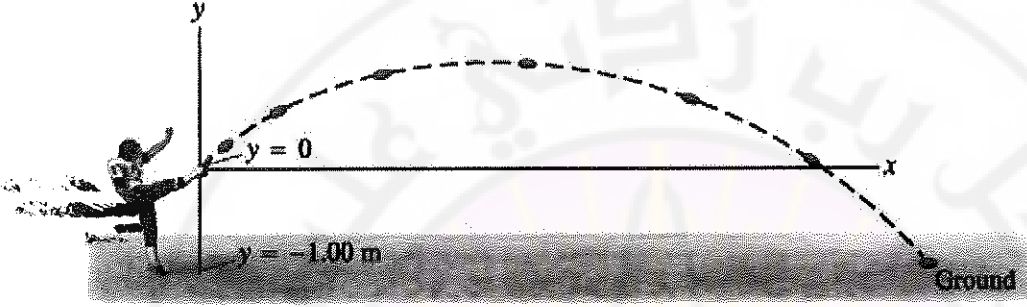
نلاحظ أن الزمن اللازم لكي تعود الكرة إلى الأرض هو ضعف الزمن اللازم للوصول إلى الذروة.

$$t_{g2} = 2t_m$$

C. المسافة الكلية المقطوعة ($x_0 = 0, a_x = 0$)

$$x = v_{x0} t_{g2} = 16.0 \times 2.45 = 39.2m$$

نسمي R ، المدى الأفقي للقذيفة ويعرف بأنه المسافة التي تقطعها القذيفة من نقطة الإنطلاق حتى تصل إرتفاعها الأصلي ($y = y_0$)، انظر الشكل (2 - 22)



الشكل (2 - 22)

الكرة تنطلق من حذاء اللاعب $y = 0$ ، وتبلغ الأرض عند $y = -1.00m$

D. سنوجد الآن العلاقة R ، بدلالة السرعة الابتدائية v_0 ، والزاوية θ_0 .

$$R = v_{x0} t$$

$$R = v_{x0} \left(\frac{2v_{y0}}{g} \right) = \frac{2 v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad (2 - 43)$$

$$R = \frac{(20.0)^2 \sin 74.0^\circ}{9.80} = 39.2m$$

يكون المدى نفسه من أجل القذف الأفقي بنفس السرعة الابتدائية عندما تكون زاوية القذف متتامتين:

$$R = R', \quad \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta_0}{g} = \frac{v_0'^2 \cdot \sin 2\theta_0'}{g}$$

$$\sin 2\theta_0 = \sin 2\theta_0'$$

$$2\theta_0 = \pi - 2\theta_0'$$

$$\theta_0 + \theta_0' = \frac{\pi}{2}$$

E. لإيجاد المدى الأعظمي R_m للقذيفة الذي يوافق.

$$\sin 2\theta_0 = 1$$

$$2\theta_0 = 90^\circ, \quad \theta_0 = 45^\circ$$

حسب العلاقة (2-43)، يكون $R = R_{max}$ من أجل زوايا قذف مختلفة عندما زاوية القذف تساوي 45° توافق أقصى مدى تصل إليه القذيفة من أجل سرعة ابتدائية واحدة.

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

نلاحظ أن المدى يتناسب مع مربع السرعة الابتدائية.

$$\sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{320 \times 9.80}{(60.0)^2}$$

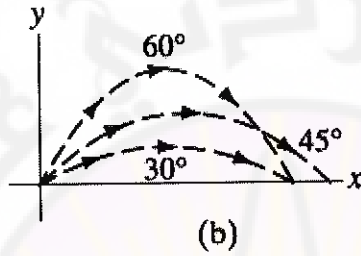
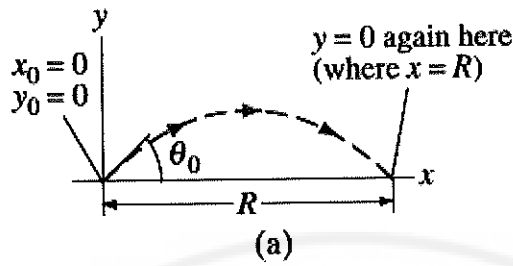
بحل هذه المعادلة.

$$2\theta_0 = 60.6^\circ$$

$$2\theta_0 = 180^\circ - 60.6^\circ = 119.4^\circ$$

$$\theta_0 = 30.3^\circ \text{ or } 59.7^\circ$$

هاتان الزاويتان تعطيان المدى نفسه عندما تنطلق القذيفة بسرعة ابتدائية واحدة الشكل (2-23).



الشكل (2 - 23)

(a) مدى القذيفة R .

(b) بشكل عام يوجد زاويتين تعطي نفس المجال.

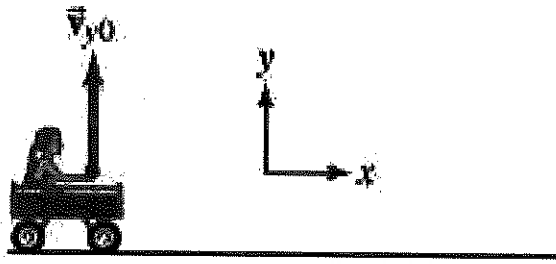
(مثال نموذجي 2-4)

يجلس طفل في عربة تتحرك إلى اليمين بسرعة ثابتة الشكل (2 - 24)، يمد الطفل يده إلى الأمام ويطلق تفاحة باتجاه الأعلى في حين تستمر العربة بالحركة بالسرعة نفسها، فإذا كانت مقاومة الهواء، مهملة أين ستسقط التفاحة؟

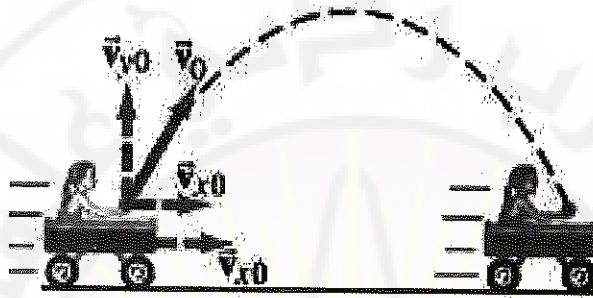
A. خلف العربة

B. في العربة

C. أمام العربة



(a)



(b)

الشكل (2 - 24)

(a) جملة المقارنة في العربة.

(b) جملة المقارنة على الأرض.

الإجابة:

يقذف الطفل التفاحة إلى الأعلى من جملة المقارنة الخاصة به، بسرعة ابتدائية $\vec{V}_{y0}$ ، الشكل (2 - 24 - a)، ويراها الطفل على أنها قذف شاقولي إلى الأعلى، ولكن الناظر من الأرض يرى أن التفاحة تكتسب بالإضافة إلى السرعة الابتدائية العمودية $\vec{V}_{y0}$ ، سرعة ابتدائية أفقية تساوي سرعة العربة، والمحصلة هي سرعة ابتدائية $\vec{V}_0 = \vec{V}_{x0} + \vec{V}_{y0}$ ، تميل عن الأفق بزاوية، وبالتالي تسلك التفاحة مسار القذف المائل.

الشكل (2 - 24 - b)، وسرعة المركبة الأفقية للتفاحة، كما نعلم هي سرعة العربة، لذلك ستسقط التفاحة في يد الطفل ثانية.

3-13-2 مسار القذيفة

سنبين الآن أن المسار الذي تتبعه القذيفة هو مسار قطع مكافئ، إذا أهملنا مقاومة الهواء. وبفرض أن g ، ثابت أيضاً لإجراء ذلك، علينا إيجاد علاقة بين y و x ، وذلك بحذف الزمن بين معادلتَي الحركة، للمركبتين x, y ، ومن أجل التبسيط نفرض $(x_0 = y_0 = 0)$.

$$x = v_{x0}t \quad (i)$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (ii)$$

من المعادلة الأولى (i)، نحصل على $t = \frac{x}{v_{x0}}$ ، نعوض في المعادلة الثانية (ii) :

$$y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^2}\right)x^2 \quad (2 - 44)$$

هذه المعادلة معروفة بأنها معادلة قطع مكافئ والحدود $\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)$ ، $\left(\frac{g}{2v_{x0}^2}\right)$ هي ثوابت لحركة القذيفة، من هذه المعادلة يمكن أن نحدد العديد، من بارامترات حركة القذيفة التي قمنا بتحديددها مسبقاً.

2-14 القذف مع مقاومة خطية

في هذه الحالة يتعرض الجسم لقوة مقاومة خطية تتناسب مع سرعته $(-mkv)$ حيث k ، ثابت موجب.

نفرض أن الجسم قذف بسرعة v_0 ، تصنع زاوية مع الأفق قدرها θ .

$$m\vec{a} = mk\vec{v} + m\vec{g} \quad (2 - 45)$$

بالإسقاط على المحور x :

$$a_x = -kv_x \quad (2-46)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \quad (2-47)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وحلها

$$v_x = v_{0x}e^{-kt} \quad (2-48)$$

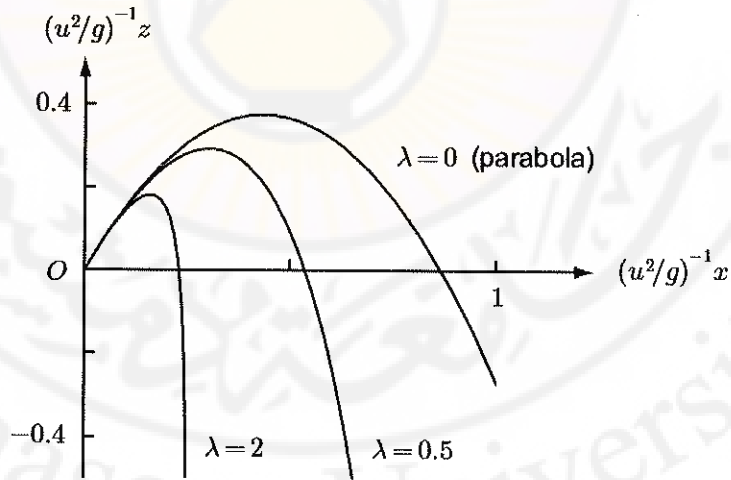
$$v_x = v_0 \cos \theta e^{-kt} \quad (2-49)$$

أما الحركة على المحور y .

$$-\frac{dv_y}{dt} = kv_y + g \quad (2-50)$$

وحلها يعطي

$$v_y = v_0 \sin \theta e^{-kt} - \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \quad (2-51)$$



الشكل (2-25)

أما لإيجاد مواضع الجسيم x ، و y ، علينا أن نجري تكاملاً على المعادلتين (2 - 48) ، (2 - 46) عندما.

$$t = 0, \quad x = y = 0$$

$$x = \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (2 - 52)$$

$$y = \frac{g + kv_0 \sin \theta}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t \quad (2 - 53)$$

الشكل (2 - 25) يبين ثلاث مسارات مختلفة للجسيم عند نفس الشروط من أجل ثلاث قيم لعامل المقاومة

$$\lambda = \frac{kv_0}{g} \quad (2 - 54)$$

لاحظ أنه من أجل $\lambda = 0$ ، تنعدم المقاومة ويكون المسار عبارة عن قطع مكافئ المقاومة لها تأثير كبير على مسار الحركة.

2-15 أشعة السرعة والتسارع على مسار منحنى

لنفرض أن جسيماً P ، يتحرك على قوس منحنى ويقطع مسافة S ، تزداد مع الزمن مقاسه من نقطة ثابتة على المسار.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{t}_n \cdot v \quad (2 - 55)$$

$$\vec{t}_n = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\vec{t}_n$: شعاع الواحدة المماسي و $v = \frac{ds}{dt}$: القيمة العددية للسرعة.

في كل لحظة شعاع السرعة يكون محمول على المماس للمسار، التسارع في الحالة العامة

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{t}_n \cdot v)}{dt} \quad (2 - 56)$$

$$= \frac{dv}{dt} \vec{t}_n + v \frac{d\vec{t}_n}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{t}_n + v \frac{d\vec{t}_n}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{t}_n}{ds} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \vec{n}, \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (2 - 57)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{dv}{dt}\right) \vec{t}_n + \left(\frac{v^2}{\rho}\right) \vec{n} \quad (2 - 58)$$

$\vec{n}$: شعاع الواحدة الناظمي

$\rho = k^{-1}$: نصف قطر تقوس المسار، شعاع التسارع له مركبتين أحدهما مماسية للمسار

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (2 - 59)$$

والمركبة الأخرى ناظمية عليه

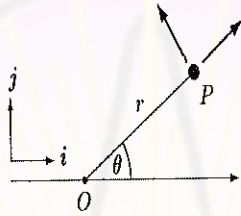
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (2 - 60)$$

قيمة شعاع التسارع

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \quad (2 - 61)$$

16-2 حركة جسيم في الإحداثيات القطبية

عندما يتحرك جسيم في المستوي فإنه من الأسهل دراسة الحركة في الإحداثيات القطبية r, θ ، أفضل مثال على ذلك الحركة الدائرية وكذلك مدارات الكواكب الشكل (2 - 26) يبين الإحداثيات القطبية r, θ ، لنقطة P، وأشعة الواحدة القطبية $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ، على الترتيب، عند النقطة P، تدعى اتجاهات أشعة الواحدة بالقطرية والعرضية على الترتيب عندما تتحرك P، فإن أشعة الواحدة القطبية لا تبقى ثابتة واتجاهها يتعلق بالزاوية θ ، ولا تتعلق بالإحداثي القطري r ، بكلمة أخرى $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ، توابع شعاعيه لمتغير سلمي θ ، من الشكل (2 - 26)



الشكل (2-26)

أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية الديكارتية $\vec{i}, \vec{j}$ ثابتة.

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (2 - 62)$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad (2 - 63)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى المتغير θ .

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{u}_\theta \quad (2 - 64)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} = -\vec{u}_r \quad (2 - 65)$$

لنفرض أن P، هو جسيم يتحرك في الإحداثيات القطبية لذلك r, θ ، تابع للزمن، شعاع الموضع $\vec{r}$ ، للنقطة P، بالنسبة للنقطة O له قيمة $OP = r$ ، تعبر عن المسافة OP.

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad (2 - 66)$$

$\vec{r}$: شعاع الموضع يساوي $\overrightarrow{OP}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \vec{u}_r)}{dt}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right) \vec{u}_r + r \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_r + r \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) \quad (2 - 67)$$

إن $\vec{r}$ ، تابع للزاوية θ ، وبدوره تابع للزمن t .

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad (2 - 68)$$

وبتعويض (2 - 65) في العلاقة (2 - 64):

$$\vec{v} = v \vec{u}_r + r \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad (2 - 69)$$

وهي عبارة السرعة في الإحداثيات القطبية، ومن أجل الحصول على عبارة التسارع نشق عبارة السرعة بالنسبة إلى الزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v\vec{u}_r) + \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right)$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_r + v \frac{d\vec{u}_r}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\vec{u}_\theta) \right) + r \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{u}_\theta + \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d}{dt} (r) \right)$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_r + v \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + v \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\frac{dv}{dt} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_r + \left(2v \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{u}_\theta \quad (2-70)$$

سرعة الجسيم P، هي مجموع شعاعي السرعة القطرية والسرعة العرضية بمعنى آخر السرعة مجموع سرعات الجسيم P، مع العلم أن r, θ ، تتغير بشكل مستقل، وهذا لا ينطبق على التسارع لأنه يضاف إليه الحد $2v \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ ، الذي يسمى تسارع كوريوليس.

17-2 السرعة النسبية

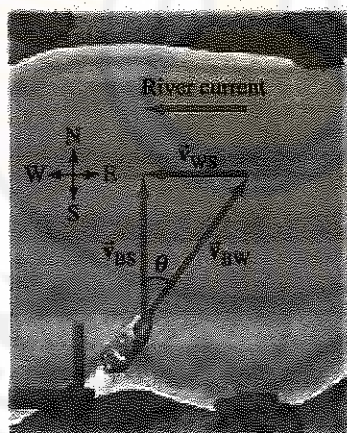
ذكرنا أعلاه أن الحركة نسبية وأنه عندما نتحدث عن السرعة من الضروري تحديد جملة المقارنة التي تنسب إليها هذه السرعة، سوف نرى الملاحظات التي تبديها جمل المقارنة المختلفة وما العلاقة بينها على سبيل المثال لنفرض أنه يقترب قطاران من بعضهم، سرعة كل منهما 80 km/h ، بالنسبة الأرض أو المراقبين على الأرض، بجانب كل قطار و يقيسون سرعة كل قطار، بأنها 80 km/h ، المراقب الموجود في أحد القطارين (جملة مقارنة مختلفة) يقيس سرعة القطار القادم إليه بأنها 160 km/h ، وكذلك عندما تتجاوز

سيارة سرعتها 90 km/h ، لسيارة أخرى تتحرك بالاتجاه نفسه سرعتها 75 km/h ، فسرعة السيارة الأولى بالنسبة إلى الثانية. $90 - 75 = 15 \text{ km/h}$.

عندما تكون السرعتان على الخط نفسه فإن السرعة النسبية هي إما جمعهما أو فرقهما حسب جهة السرعة، ولكن عندما لا تكون السرعات على الخط نفسه نطبق قواعد جمع الأشعة. نرسم للسرعة برمز بأسفله من اليمين دليلان الأول يرمز للجسم والآخر يشير إلى جملة المقارنة التي تنسب إليها السرعة، على سبيل المثال لتخيل مركباً يعبر النهر من الضفة إلى الضفة المقابلة الشكل (2 - 27)، لنرمز $\vec{V}_{BW}$ ، لسرعة المركب بالنسبة إلى الماء، $\vec{V}_{WS}$ ، سرعة جريان ماء النهر بالنسبة إلى الشاطئ فإن سرعة المركبة بالنسبة إلى الشاطئ.

$$\vec{V}_{BS} = \vec{V}_{BW} + \vec{V}_{WS} \quad (2 - 71)$$

لاحظ الشبه بين قانون السرعة النسبية والجمع المتعاقب للأشعة.



الشكل (2 - 27)

من أجل ان يتحرك المركب باتجاه الضفة المقابلة مباشرة عليه ان يتجه بزاوية θ .

نعلم أن سرعة A ، بالنسبة إلى B ، تساوي و تعاكس سرعة B ، بالنسبة إلى A .

$$\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA} \quad (2 - 72)$$

إذا كانت سرعة قطار بالنسبة إلى الأرض 100 km/h ، فإن المراقب الجالس في القطار يلاحظ أن الأجسام الموجودة على جانبيه (الأشجار) تتحرك بسرعة 100 km/h ، ولكن بعكس الإتجاه.

(مثال نموذجي 2-5)

يعبر رجل نهر يتجه تياره المائي إلى الغرب بسرعة $\vec{V}_{WS}$ ، بوساطة مركب ذي محرك يبدأ الرجل حركته من الضفة الجنوبية ليصل إلى النقطة المقابلة على الضفة الشمالية، الشكل (2 - 27). هل ينبغي عليه أن يتجه (من نقطة الإنطلاق) باتجاه الشمال، أم الغرب، أم الشمال الغربي، أم الشمال الشرقي.

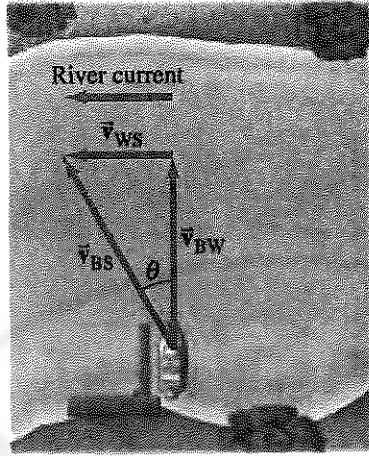
الإجابة:

التيار المائي للنهر سوف يجرف المركب باتجاه الغرب، ولكي يأخذ المركب سرعة محصلة باتجاه الشمال، يجب أن ينطلق المركب بسرعة لها مركبة باتجاه الشرق وأخرى إلى الشمال، إذا فالجواب هو أن ينطلق المركب بسرعة تتجه نحو الشرق الشمالي الشكل (2 - 27)، والزاوية تتعلق بسرعة التيار المائي بالنسبة إلى الشاطئ وسرعة المركب بالنسبة إلى التيار المائي فإذا كان سرعة التيار المائي صغيرة ومحرك المركب قوي فإن الزاوية تكون صغيرة.

$$\sin \theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} \quad (2 - 73)$$

(مثال 2-12):

ينطلق المركب في المثال السابق باتجاه الشمال مباشرة وبسرعة $v_{BW} = 1.85 \text{ m/s}$ ، بالنسبة إلى التيار المائي الذي سرعته $v_{WS} = 1.20 \text{ m/s}$ ، ما سرعة واتجاه المركب بالنسبة إلى الشاطئ، إذا كان عرض النهر 110 m ، كم يستغرق المركب للعبور



الشكل (2 - 28)

الحل:

يتجه المركب نحو الشمال مباشرة التيار المائي يتجه نحو الغرب الشكل (2 - 28). فإن سرعة المركب بالنسبة إلى الشاطئ.

$$v_{BS}^2 = v_{BW}^2 + v_{WS}^2$$

$$v_{BS} = \sqrt{v_{BW}^2 + v_{WS}^2} = \sqrt{(1.85)^2 + (1.20)^2} = 2.21 \text{ m/s}$$

ويمكن حساب زاوية شعاع السرعة وإتجاهها شمال غرب

$$\tan \theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1.20}{1.85} = 0.659, \quad \theta = 33.0^\circ$$

لحساب الزمن الذي استغرقه المركب.

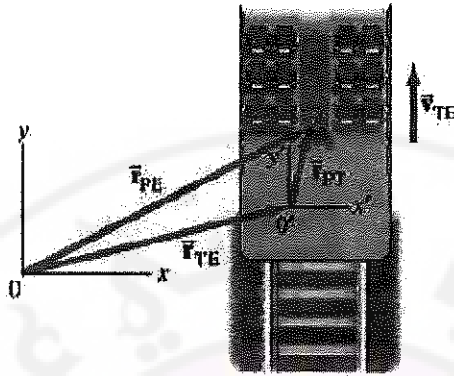
$$t = \frac{d}{v_{BW}} = \frac{110}{1.85} = 59.5 \text{ s}$$

والمركب سيبتعد عن النقطة المقابلة لنقطة الإنطلاق بإتجاه الغرب

$$d = v_{WS} \cdot t = 1.20 \times 59.5 = 71.4 \text{ m}$$

❖ لنفرض أن قطاراً يتحرك لجملة إحداثيات x, y ، مبدؤها O ، مرتبطة بالأرض، وشعاع موضعه في هذه الجملة $\vec{r}_{TE}$ ، نعد أيضاً أن جملة إحداثيات x', y' ، مرتبطة بالقطار

مبدوها O' ، وشعاع موضعه فيها الجملة $\vec{r}_{PT}$ ، ولنفرض أن شخصاً يتحرك في القطار
الشكل (2 - 29).



الشكل (2 - 29)

إشتقاق معادلة السرعة النسبية من أجل شخص يتحرك في ممرالقطار، نحن ننظر إلى
القطار وإلى جملتي المقارنة، الجملة xy و $x'y'$ المثبتة على القطار. من الشكل نلاحظ.

$$\vec{r}_{PE} = \vec{r}_{PT} + \vec{r}_{TE} \quad (2 - 74)$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{PE}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{PT}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{TE})$$

$$\vec{V}_{PE} = \vec{V}_{PT} + \vec{V}_{TE} \quad (2 - 75)$$

هذه المعادلة شبيهة بالمعادلة (2 - 71).

المعادلة (2 - 72)، صحيحة بشكل عام ويمكن تعميمها على ثلاث سرعات أو أكثر،
مثلاً إذا كان صياد سمك يتحرك بالنسبة إلى المركب بسرعة $\vec{V}_{FB}$ ، فإن سرعته بالنسبة إلى
الشاطئ:

$$\vec{V}_{FS} = \vec{V}_{FB} + \vec{V}_{BW} + \vec{V}_{WS} \quad (2 - 76)$$

18-2 تحويلات غاليليو

لنفرض أن قطار يتحرك على المحور x ، (المبدأ o' يقع المحور x) بسرعة ثابتة بالنسبة إلى الأرض $\vec{V}_{TE} = \vec{V}_0$

$$\vec{r}_{PE} = \vec{r}_{PT} + \vec{V}_0 t \quad (2 - 77)$$

نشتقها بالنسبة إلى الزمن

$$\vec{V}_{PE} = \vec{V}_{PT} + \vec{V}_0 \quad (2 - 78)$$

هذه المعادلة تدعى، بتحويلات غاليليه، سرعة الشخص بالنسبة إلى مراقب على الأرض ليست كسرعة نفس الشخص بالنسبة إلى راكب يجلس في القطار أي أن المراقبين الموجودين في كلا الجملتين (o', o) لا يقيسان السرعة نفسها، وحتى يقيسا السرعة نفسها يجب أن يكون $\vec{r}_{TE} = 0$ ، أي أن الجملتين إما ساكنتين أو تتحركان بالسرعة نفسها وكأنهما جملة واحدة. باشتقاق المعادلة (2 - 78) بالنسبة إلى الزمن.

$$\vec{a}_{PE} = \vec{a}_{PT} \quad (2 - 79)$$

تسارع الشخص المقاس بالنسبة إلى شخص جالس في القطار هو نفسه بالنسبة إلى المراقب على الأرض، أي أن التسارع يقاس في كلا الجملتين (o', o) نفسه.

مسائل

1-2 يتحرك جسيم على طول المحور x بحيث يعطى موضعه في كل لحظة بالعلاقة :

$x = 5t^2 + 1$ ، حيث x تقدر بالمتر و t بالثانية ، إحسب سرعته الوسطية في المجال الزمني الواقع بين (a) 2s , 1s (c) 2s , 0.001s (d) 2s , 0.00001s (e) 3s , 2s (b) إحسب أيضاً السرعة الآتية في اللحظة 2s ،

2-2 يعطى تسارع جسيم متحرك على طول المحور x بالعلاقة $a = 4x - 2$ ، m/s^2 حيث x بالمتر وعلى فرض أن $x_0 = 0$ ، $v_0 = 10 \text{ m/s}^2$ أوجد السرعة في أية نقطة أخرى.

3-2 يتحرك جسيم على مسنم تسارعه $a = -2x$ حيث تقدر x بالمتر و a بالمتر/ثانية² ، أوجد العلاقة بين السرعة والمسافة، علماً بأن من أجل $x = 0$ تكون $v_0 = 4 \text{ m/s}$.

4-2 يعطى تسارع جسيم متحرك على مستقيم بالقيمة $a = -kv^2$ حيث k ثابت ، فإذا علمت أنه عندما $t = 0$ تكون $v = v_0$ ، أوجد السرعة والانتقال بدلالة الزمن ، كذلك أوجد علاقة x ، v .

5-2 بتغير بعد سيارة تسير على طريق مستقيمة بالنسبة إلى المراقب بالعلاقة $x = 6t^2 - th$ (a) ، ما بعد السيارة عن المراقب في اللحظة $t = 0$ وما سرعتها اللحظية عندئذ ؟ (b) ما السرعة اللحظية للسيارة عندما $t = 3s$ ؟ (c) ما المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية $t = 0s$ إلى $t = 3s$ (d) ما السرعة الوسطية للسيارة بين هاتين اللحظتين ؟

6-2 يتحرك جسيم في الفضاء بحيث تتغير متجهته سرعته وفق العلاقة : $\vec{v} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} - 3\vec{k}$ (a) ما سرعته في اللحظة $t = 0$ ، (b) ما متجهه موضع

الجسيم في أية لحظة إذا كان على بعد 5m وفي الاتجاه الموجب لمحور السينات عندما $t=0$ ،

7-2 تسير سيارة على خط مستقيم بسرعة 30 m/s عندما يلاحظ سائقها أن هناك سيارة أخرى تسير أمامه على نفس الخط نفسه و بالاتجاه نفسه. بسرعة 10 m/s وتبعد عنه مسافة 200 m فيبدأ السائق بالضغط على مكابح السيارة مؤدياً إلى تباطؤ سيارته بمعدل 1 m/s^2 ، ما سرعة السيارة الأولى عندما تلحق بالسيارة الثانية وما المسافة التي ستكون قد قطعتها عندئذ .

8-2 تقذف كرة شاقولياً نحو الأعلى بسرعة 98 m/s من سطح بناء إرتفاعه 100 m ، أوجد (a) أعلى إرتفاع تصله الكرة، (b) الزمن اللازم للوصول إلى هذا الإرتفاع (c) سرعة الكرة عندما تلامس الأرض، (d) الزمن الكلي المنصرم .

9-2 تعطى حركة جسيم بالمعادلتين $x=8t-4t^2$, $y=6t-3t^2$ حيث x, y بالأمتار و t بالثانية ، عين مسار وسرعة وتسارع الجسيم .

10-2 يرمي رجل من قمة مبنى كرة شاقولياً نحو الأعلى بسرعة 40m/s ، تصل الكرة إلى الأرض بعد مرور 4,25s ، (a) ما الإرتفاع الأعظمي الذي تصل إليه الكرة ، (b) ما إرتفاع المبنى ، (c) بأية سرعة تصل الكرة إلى الأرض .

11-2 يرمى جسمان شاقولياً نحو الأعلى بنفس السرعة الابتدائية 100 m/s إنما بفارق زمني قدره 4s، كم من الزمن بعد رمي الأول يلزم لكي يلتقيا .

12-2 تتحرك كرة معلقة بخيط طوله L إلى نقطة ثابتة على محيط دائرة وفق القانون $S = a \sin kt$ عندما تكون زوايا الانحراف صغيرة حيث a و k- ثابت عين سرعة الكرة وتسارعها المماسي والناظمي والأوضاع التي تساوي فيها المقادير السابقة الصفر .

2-13 يبدأ قطار حركته المنتظمة التسارع في دائرة نصف قطرها 800 m وعندما يقطع مسافة قدرها $s_1 = 600 \text{ m}$ تصل سرعته إلى 10 m/s ، عين سرعة وتسارع القطار في منتصف هذه المسافة .

2-14 نترك جسمًا يسقط سقوطاً حراً، برهن أن المسافة المقطوعة خلال الثانية ذات الرقم n هي $(n-\frac{1}{2})g$.

2-15 تتدحرج كرة على سطح طاولة أفقية إرتفاعها 1 m فتسقط عند نقطة تبعد 1.5 m عن حافتها، (a) ما سرعة الكرة الابتدائية وزمن وصولها للأرض، (b) ما قيمة سرعة وإتجاهها الكرة لحظة وصولها إلى الأرض.

2-16 قذفت نقطة مادية بسرعة أفقية فتحركت بالقانون الذي تحدده المعادلتان :

حيث $y = \frac{1}{2}gt^2$, $x = v_0 t$ ، v_0 مقداران ثابتان ، عين مسار النقطة وسرعتها وتسارعها . وكذلك تسارعها المماسي والناظمي ونصف قطر إنحناء المسار في أي موضع بدلالة سرعة النقطة في هذا الموضع ،

2-17 تطلق قذيفة بزاوية 60° فوق الأفق فتصيب بناء بعده 30 m عند نقطة ترتفع 15 m عن سطح الأرض، (a) ما سرعة إطلاق القذيفة، (b) ما أعلى إرتفاع تصل إليه، (c) ما أبعد نقطة يمكن أن تصيبها القذيفة على الأرض.

2-18 تطلق قذيفة من ذروة هضبة ترتفع 300 m عن سطح السهل المحيط بها بسرعة ابتدائية 20 m/s وتصنع زاوية 30° مع الأفق، (a) أوجد معادلة مسار القذيفة، (b) أعلى إرتفاع تصل إليه، (c) مدى القذيفة (d) أين تصطدم بالسهل المحيط .

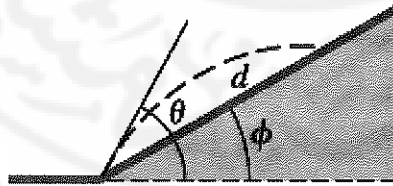
19-2 من نقطة A نترك جسم B يسقط سقوطاً حراً، وفي اللحظة نفسها تقذف قذيفة P بسرعة ابتدائية v_0 من نقطة أخرى ثانية (o) والمطلوب : (a) عين زاوية قذف القذيفة P لكي تلاقي الجسم الساقط B ، (b) عين سرعة كل من الجسم والقذيفة لحظة التلاقي، (c) على أي بعد عن النقطة A يتم تلاقي الجسم مع القذيفة .

20-2 تعطى حركة نقطة في المستوي بالمعادلتين $y=R\sin wt$, $x=R\cos wt$ حيث w, R ثوابت والمطلوب إيجاد مسار النقطة ثم البرهان على أن الجداء السلمي لشعاع سرعة وتسارع النقطة معدوم .

21-2 يتحرك جسم على منحنى معطى بالعلاقة $S = ae^{kt}$ بحيث التسارع الكلي a يصنع زاوية 60° دوماً مع المماس، والمطلوب تحديد السرعة والتسارع المماسي والناظمي ونصف قطر التقوس بدلالة S .

22-2 تعطى حركة جسم في جملة الإحداثيات القطبية بالمعادلات $\varphi = wt$, $r = l(1 + \cos wt)$ حيث w, L ثوابت ، عين مسار الجسم وسرعته وتسارعه في جملة الإحداثيات القطبية في أية لحظة t وفي اللحظة $t = 0$.

23-2 يقف شخص عند أسفل التلة ويقذف جسماً بسرعة ابتدائية v_0 وبزاوية θ الشكل (2 - 30) ، ما قيمة الزاوية θ ، التي من أجلها يصعد الجسم أعظم مسافة d إذا علمت أن شكل التلة هو مستقيم يصنع زاوية ϕ مع الأفق.



الشكل (2 - 30)



الفصل الثالث

التحريك - قوانين نيوتن في الحركة

DYNAMICS - NEWTON'S LAWS OF MOTION

1-3 تمهيد

لقد ناقشنا الحركة بدلالة السرعة والتسارع والآن سنتعامل مع السؤال التالي، (لماذا تتحرك الأجسام؟)، ما الذي يجعل الأجسام تتحرك بدءاً من السكون؟ ما السبب الذي يؤدي إلى تسارعها أو تباطؤها؟ ما الذي يحدث عندما تتحرك الأجسام على مسار منحني، في هذا الفصل سنناقش العلاقة بين القوة والحركة وهذا ما يدعى بعلم التحريك.

2-3 مفهوم القوة

من البديهي أننا عندما نجر أو ندفع جسم فإننا نؤثر فيه بقوة، عندما ندفع عربة أو نرمي الكرة أو نقذفها فإننا نؤثر فيها بقوة، هناك جهد عضلي يرافق هذه القوة ويسبب تغييراً في سرعتها، إلا أن القوة لا تسبب الحركة دائماً. عندما تجلس على السرير تؤثر فيك قوة الثقل، لكنك مع ذلك تبقى في حالة سكون، ويمكنك أن تدفع صخرة كبيرة دون أن تحركها، ما القوى التي تجعل القمر يدور حول الأرض، العالم نيوتن أجاب على هذا السؤال حيث ربط القوة المؤثرة في الجسم بتغير سرعته، سرعة القمر في مداره حول الأرض تتغير بسبب جذب الأرض له، عندما تدوس بقدمك على الأرض وعندما تجر العربة وعندما تقذف الكرة أو تضرب المسمار بالمطرقة هذه القوى تصنف على أنها قوى تماس، هناك قوى لا تحتاج لتماس، ولكنها تؤثر في الجسم، تدعى بقوى الحقل وخير مثال على هذه القوى هو قوة الجاذبية بين جسمين متجاذبين وهي التي تبقى الأجسام مرتبطة بالأرض وتبقى الكواكب في مداراتها حول الشمس، وهناك نوع آخر من قوى الحقل هو القوة الكهربائية والقوة المغناطيسية والتفريق بين هذين الصنفين ليس واضحاً تماماً، إحدى الطرق لقياس شدة القوة يتم باستخدام

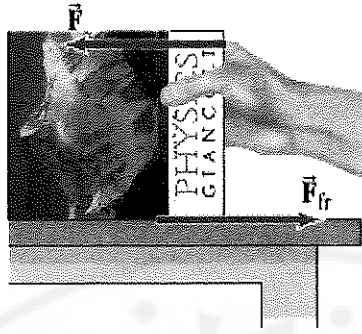
النابض وعادة يستخدم النابض لقياس ثقل الجسم، يختلف تأثير القوة حسب إتجاهها لأنها كمية شعاعية كما نعلم سابقاً، القوة المؤثرة في إتجاهات مختلفة يكون لها تأثير مختلف.

3-3 قانون نيوتن الأول للحركة

السؤال الذي يطرح نفسه هو ما العلاقة بين القوة والحركة؟ حاول أرسطو

(322 – 384)، الإجابة على هذا السؤال مفترضاً أن القوة سرمدية لإبقاء الجسم متحركاً في مستو أفقي، بالنسبة إلى أرسطو الحالة الطبيعية للجسم هي التوازن و القوة ضرورية لإبقاء الجسم في حالة حركة، بل علاوة على ذلك اعتقد أنه كلما زادت القوة زادت سرعة الجسم، ولكن بعد انقضاء (2000)، سنة نقض غاليلو تلك الفرضيات وافترض أن الحالة الطبيعية للجسم هي الحركة بسرعة ثابتة، ولكي نفهم فكرة غاليلو سندرس حركة جسم في مستو أفقي، لكي نسحب جسماً على سطح طاولة خشنة وبسرعة ثابتة نحتاج إلى كمية محددة من القوة، ولجسماً له الثقل نفسه على سطح طاولة ناعم جداً و بالسرعة نفسها سنحتاج إلى قوة أقل وإذا وضعنا مادة زيتية بين السطح المشترك للطاولة و الجسم نرى بأننا قد نكون بحاجة لقوة صغيرة جداً (مهملة) لإبقاء الجسم متحركاً، نلاحظ في كل مرة تنقص القوة اللازمة، حتى لم نعد بحاجة إليها بسبب انعدام الإحتكاك بين الجسم والسطح ونخلص إلى أن : الجسم يتحرك على سطح طاولة دون أن تؤثر فيه أية قوة.

تصور غاليلو العالم المثالي بدون إحتكاك أي عندما لا توجد قوى مطبقة على الجسم فإنه يستمر في الحركة بسرعة ثابتة على خط مستقيم، ومن أجل تحريك الجسم على سطح طاولة بسرعة ثابتة، يتطلب منا ذلك تطبيق قوة بيدنا كي تتعادل مع قوة الإحتكاك الشكل (3 – 1)، وبناء على هذه المعطيات الأساسية وضع اسحق نيوتن نظريته عن الحركة ولخصها في ثلاث قوانين شهيرة في عمله العظيم (1687) بعنوان *principia*



الشكل (3 - 1)

$\vec{F}$ ، تعبر عن القوة المطبقة من الشخص و $\vec{F}_{fr}$ ، تعبر عن قوة الاحتكاك.

قانون نيوتن الأول: يبقى الجسم في حالة السكون (إذا كان ساكن أصلاً) أو في حالة الحركة بسرعة ثابتة على خط مستقيم عندما تكون محصلة القوى المؤثرة فيه معدومة.

(مثال نموذجي 3-1)

تتحرك الحقائب الموجودة في حافلة المدرسة إلى الأمام أثناء التوقف فجأة، ما السبب.

الإجابة:

لا توجد قوة فعلت ذلك وفقاً لقانون نيوتن الأول، الحقائب تستمر في حركتها محافظة على سرعتها إذا لم تؤثر فيها قوى احتكاك، إن ميل الجسم للمحافظة على حالة السكون أو الحركة بسرعة ثابتة على خط مستقيم تدعى العطالة، و قانون نيوتن الأول يدعى قانون العطالة.

1-3-3 جمل المقارنة العطالية

إن قانون نيوتن الأول لا يطبق من أجل جميع جمل المقارنة، على سبيل المثال إذا كانت الجملة مثبتة في سيارة متسارعة، ولنفرض أن جسماً صغيراً موضوعاً على الطاولة أمامك، تلاحظ أن الجسم يتسارع بإتجاهك على الرغم من عدم وجود قوة تؤثر فيه في هذا الإتجاه، وكذلك الأمر في جملة المقارنة للباص المتباطئ المثال النموذجي

(1 - 3)، حيث لا توجد قوة دفعت الحقائق إلى الأمام، الجسم يبقى في حالة توازن طالما بقيت السيارة محافظة على سرعتها. في جمل المقارنة المتسارعة لا يمكن تطبيق قانون نيوتن الأول، جمل المقارنة التي يطبق فيها القانون الأول تدعى جمل المقارنة العطالية (قانون العطالة يكون صالحاً فيها فحسب)، نربط عادة جمل المقارنة مع الأرض ونعدها جمل مقارنة عطالية تقريباً، (بسبب الحركة الدورانية للأرض).

الأجسام التي تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة إلى الجمل العطالية هي أيضاً جمل عطالية، و جمل المقارنة التي لا يطبق فيها قانون العطالة هي الجمل التي تتسارع، وتدعى جمل لا عطالية، وبالتالي يمكننا أن نتأكد من أن جمل المقارنة عطالية أم لا، إذا كان قانون العطالة مطبقاً فهي عطالية.

4-3 الكتلة

إن قانون نيوتن الثاني الذي سنأتي عليه في الفقرة التالية يجعلنا نستخدم مفهوم الكتلة، إستخدام نيوتن مصطلح الكتلة على أنها تركيب لكمية المادة، هذه الفكرة الأولية لكتلة الجسم ليست دقيقة، لأن مفهوم كمية المادة لا يعرف الكتلة بشكل جيد، والتعريف الأكثر دقة أن نقول إن الكتلة هي مقياس لعطالة الجسم، الجسم الذي كتلته أكبر يحتاج لقوة أكبر، لإعطائه تسارعاً معيناً، انه من الصعوبة أن نجعله يتحرك بدءاً من السكون، أو نجعله يتوقف عن الحركة أو نغير شعاع سرعته. الشاحنة لها عطالة أكبر من كرة السلة عندما تتحركان بالسرعة نفسها والشاحنة تحتاج لقوة أكبر لتغيير سرعتها، وبالمعدل نفسه مع كرة السلة، لذلك الشاحنة لها كتلة أكبر من كرة السلة.

في بعض الأحيان هناك خلط بين الكتلة والوزن، ومن أجل التمييز بينهما، الكتلة هي صفة للجسم، أو خاصته الذاتية، أو مقياس لعطالته، أو أنها تقيس كمية المادة، أما الوزن فهو قوة شد الجاذبية المؤثرة في الجسم، ولمعرفة الفرق بينهما نأخذ الجسم إلى القمر، فنجد أن وزن الجسم هو $1/6$ من وزنه على الأرض، لأن قوة الجاذبية للقمر اضعف، ولكن كتلة الجسم تبقى نفسها، وبالتالي العطالة على الأرض هي العطالة نفسها على القمر.

3-5 قانون نيوتن الثاني

إن قانون نيوتن الأول ينص على أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة في جسم معدومة فإنه يبقى ساكناً أو يتحرك بحركة مستقيمة بسرعة ثابتة، ولكن ماذا يحصل إذا كانت محصلة القوى التي تؤثر في الجسم غير معدومة، شعر العالم نيوتن بأن سرعة الجسم سوف تتغير، و محصلة القوى يمكن أن تجعل السرعة تزداد أو تتناقص. إذا كانت محصلة القوى المطبقة عكس اتجاه الحركة نلاحظ أن السرعة تتناقص، وإذا كانت محصلة القوى المطبقة على الجسم المتحرك بشكل جانبي فإن اتجاه السرعة وقيمتها تتغير أيضاً، و التغير في السرعة يعني التسارع وبالتالي يمكننا القول ان محصلة القوى المؤثرة في الجسم تسبب التسارع. ما العلاقة بين التسارع والقوة؟ لعل تجاربنا اليومية تحوي الإجابة، لنفرض أن القوة المطلوبة لدفع عربة عندما يكون الإحتكاك ضعيفاً إلى حد يمكن إهماله، إذا دفعت العربة بقوة ثابتة لمدة محددة من الزمن فإن العربة سوف تتسارع بدءاً من السكون، حتى تكتسب سرعة، ولتكن $3km/h$ ، و إذا دفعناها بقوة تساوي ضعف القوة السابقة ستصل إلى السرعة $3km/h$ ، خلال نصف الزمن السابق، والتسارع سيكون هو الضعف أيضاً، وإذا دفعت بقوة تساوي ثلاثة أضعاف فإن التسارع سيزداد ثلاثة مرات وهكذا، التسارع يتناسب طرذاً مع محصلة القوى المطبقة، و لكن التسارع يتعلق بكتلة الجسم، على سبيل المثال إذا دفعنا عربة فارغة بالقوة نفسها التي ندفع بها عربة ثقيلة، وهي ممثلة سنجد أن العربة الفارغة تتسارع أكثر من الممثلة، وبالتالي من أجل القوة نفسها كلما زادت الكتلة كلما نقص التسارع وهذا يعني أن العلاقة بين الكتلة والتسارع هي علاقة تناسب عكسي "قانون نيوتن الثاني في التحريك"

وينص على ما يلي:

تسارع الجسم يتناسب طرذاً مع محصلة القوى المؤثرة فيه وعكساً مع كتلته و جهته تتبع جهة محصلة القوى المؤثرة فيه.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (3-1)$$

$\vec{a}$: التسارع

m : كتلة الجسم

$\sum \vec{F}$: محصلة القوى المؤثرة، والجمع يؤخذ على كل القوى.

قانون نيوتن الثاني يربط بين وصف الحركة (التسارع) وسبب الحركة (القوة) لذلك يعد أحد القوانين الأساسية في الفيزياء، ومن خلال هذا القانون يمكننا أن نضع تعريفاً دقيقاً للقوة بأنها الفعل القادر على تسريع الجسم وواحدتها في الجملّة الدولية SI، هي النيوتن.

وفي الجملّة السغثية cgs، تقدر بالداين $dyne$ ، وهو القوة المحصلة المطلوبة لكي يكتسب الجسم الذي كتلته $1g$ ، تسارعاً قدره 1 cm/s^2 ، ومن السهولة نجد:

$$1 \text{ dyne} = 10^{-5} \text{ N}$$

القوة كمية شعاعية لها طولية واتجاه، والمعادلة (1 - 3) هي معادلة شعاعية صالحة من أجل أية جملّة مقارنة عطالية، وتكتب على شكل مركبات في جملّة إحداثيات متعامدة:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z \quad (3 - 2)$$

(مثال 1-3):

إحسب القوة المحصلة المطلوبة لكي نكسب:

$$a: \text{سيارة كتلتها } 1000 \text{ kg، بتسارع } 5 \text{ m/s}^2 \approx \frac{9.8}{2} \text{ g}$$

b : تفاحة كتلتها 200 g ، وينفس التسارع.

الحل:

a : نحسب القوة المحصلة من قانون نيوتن الثاني

$$\sum F = ma \approx 1000 \times 5 = 5000N$$

بالنسبة إلى للتفاحة b :

$$\sum F = ma \approx 0.2 \times 5 = 1N$$

(مثال 2-3):

ما القوة المحصلة الوسطى اللازمة لإيقاف سيارة كتلتها $1500kg$ ، عندما كانت سرعتها $100 km/h$ ، علماً بأنها قطعت مسافة $55m$.

الحل:

نفرض أن التسارع ثابت وأن الحركة تتم على مستقيم باتجاه المحور $+x$ ،

$$v_0 = 100 km/h = 27.8 m/s$$

والسرعة النهائية معدومة وأن $x - x_0 = 55m$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{0 - (27.8)^2}{2 \times (55)} = -7.0 m/s^2$$

القوة المحصلة الوسطى اللازمة لإيقاف السيارة

$$\sum F = ma = 1500 \times (-7) = -1.1 \times 10^4 N$$

عندما يكون التسارع غير ثابت فإننا نتحدث عن القوة المحصلة الوسطى.

القانون الثاني لنيوتن يشبه القانون الأول لأنه يصلح من أجل جمل المقارنة العطالية
فحسب، في الجملة اللاعطالية للسيارة المتسارعة، على سبيل المثال، الكأس في السيارة
يبدأ بالإنزلاق ويتسارع على الرغم من أن محصلة القوى المؤثرة فيه معدومة و القانون
 $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، لا يعمل في الجمل المتسارعة.

($\sum \vec{F} = 0$ ، ولكن $\vec{a} \neq 0$ ، في الجمل اللاعطالية).

مما ذكر أعلاه نستطيع أن نحدد مفهوم كمي للكتلة باستخدام تعريفها كمقياس للعطالية،
وتسارع الجسم يتناسب عكساً مع كتلته، لننتصر أن محصلة القوى $\sum \vec{F}$ ، نفسها تؤثر في
جسمين كتلتها m_1, m_2 ، وتكسيهما تسارعين a_1, a_2 ، على الترتيب، وبالتالي نسبة
الكتلتين تساوي نسبة مقلوب تسارعهما.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

إذا قسنا التسارعين a_1, a_2 ، وكانت إحدى الكتلتين معلومة فإنه بوساطة العلاقة السابقة
يمكن حساب الكتلة المجهولة، الكتلة خاصة ذاتية للجسم مستقلة عن تأثير الأجسام المحيطة
به، و كذلك عن الطريقة المستخدمة لقياسها وهي كمية سلمية.

3-6 قانون التأثير المتبادل، الكتلة والقوة

يمكن استخدام أي جملة عطالية لملاحظة حركة الجسم في إطار القانون الثاني لنيوتن.
لنفرض أن زوجاً من الجسيمات التي تتبادل التأثير فيما بينها، كل جسيم يؤثر في الآخر
بقوة، وبالتالي القانون الأول غير مطبق، لأن كل الجسيمات تكتسب تسارعات مستقلة عن
جملة العطالة التي نقيس فيها التسارع. لننتصر أن جسيمين P_1, P_2 ، يؤثران في بعضهما
البعض، الجسيم P_2 ، يحرض تسارع لحظي a_{12} ، على الجسيم P_1 ، في حين الجسيم P_1 ،
يحرض تسارع لحظي أيضاً a_{21} ، على الجسم P_2 ، نلاحظ أن:

1. هذه التسارعات متعكسة في الإتجاه وموازية للحامل الواصل بينهما.

2. نسبة قيمتي التسارعين $\frac{|a_{21}|}{|a_{12}|}$ ، ثابتة ومستقلة عن طبيعة التأثير المتبادل بين الجسيمين P_2, P_1 ، ومستقلة أيضاً عن مواضع وسرعات الجسيمين P_2, P_1 . عندما يتفاعل P_2 مع جسيم ثالث P_3 ، فالتسارعات المتحرضة a_{32}, a_{23} ، وكذلك عندما P_1 يتفاعل مع P_3 ، التسارعات المتحرضة a_{31}, a_{13} ، و تتحقق العلاقة التالية:

$$\frac{|a_{21}|}{|a_{12}|} \cdot \frac{|a_{32}|}{|a_{23}|} \cdot \frac{|a_{13}|}{|a_{31}|} = 1 \quad (3 - 3)$$

إن قانون التأثير المتبادل يقودنا إلى تعريف الكتلة والقوة، التعريف الكمي للكتلة العطالية للجسيم عامة هي القياس العددي لنفور الجسيم من اكتساب تسارع، لذلك عندما يتفاعل جسيماً فإن قيمة التسارعين المتحرضين a_{21}, a_{12} ، يكونان مختلفين لجسيمين كتليهما مختلفتين والنسبة $\frac{|a_{12}|}{|a_{21}|}$ ، و تتعلق بالجسيمين ذاتهما فحسب، ولا تتعلق بوضعيهما أو بسرعتيهما، نعرف نسبة الكتلة $\frac{m_1}{m_2}$ ، لجسيمين P_2, P_1 ، على أنها معكوس قيمتي التسارعين المتحرضين:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|a_{21}|}{|a_{12}|} = m_{12} \quad (3 - 4)$$

يوجد شك في تعريف الكتلة هذا، لنفرض أننا أدخلنا جسيماً ثالثاً P_3 . يمكننا أن نحدد وبشكل مستقل ثلاث نسب للكتلة، ولا يوجد ما يضمن أن جداء نسب الكتل يساوي الواحد، إلا أن صحة العلاقة (3 - 3) يضمن أن هذا الجداء يساوي الواحد وهذا يعني أن التعريف أعلاه يعرف نسبة الكتلة للجسيم بلا شك. من أجل الحصول على قياس عددي للكتلة نختار جسم A بحيث تكون كتلته مرجعية (عياريه) كما الحال في جملة الواحدات SI، كتلة الجسم المرجعي $1kg$ كما تم شرحه سابقاً .

3-7 تعريف القوة

نعلم أن وجود القوة هو سبب نشوء التسارع للجسيم، يمكننا أن نعرف القوة بسبب أن الجسم يتسارع، هذه المعلومات دائرية جداً، وبدون محتوى حقيقي، القوة هي كمية من اختراعنا الخاص، لكنها مفيدة جداً، ومع هذا لها دور أساسي في صياغة ميكانيك نيوتن، مع أن مفهوم القوة ليس له دور أساسي في صياغة لاغرانج أو هاميلتون للميكانيك الكلاسيكي، في التأثيرات المتبادلة، القوى التي تؤثر فيها الجزيئات بعضها في بعض تعطى على الشكل التالي:

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_{21} \quad (3-5)$$

في حالة تفاعل جسيمين، حسب تعريف القوة، القانون الثاني يبقى صحيح، و التسارعان $\vec{a}_{21}$ و $\vec{a}_{12}$ متعاكسان في الإتجاه وعلى حامل واحد.

3-8 قانون التأثير المتبادل المتعدد

في جمل الجسيمات ماذا يحدث عندما يخضع جسيم للتأثير المتبادل من أكثر من جسيم واحد. لنفرض أن الجسيمات $P_0, P_1, \dots, P_n$ ، تتفاعل مع بعضها مع بعض (مع إهمال التأثيرات الأخرى) وبالتالي التسارع المتحرض $\vec{a}_0$ للجسيم P_0 يمكننا التعبير عنه

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_{01} + \vec{a}_{02} + \dots + \vec{a}_{0n} \quad (3-6)$$

هذه النتيجة تنص على أن قوى التأثير المتبادل تؤثر بشكل مستقل بعضها عن بعض، ينتج من ذلك:

$$m_0 \vec{a}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n} \quad (3-7)$$

باستخدام تعريف قوى التأثير المتبادل، القانون الثاني يبقى صحيحاً للتفاعلات المتعددة ويؤيد مفهوم القوة الفعالة $\vec{F}_0$ التي تؤثر في الجسيم P_0 ، يعني بأن المحصلة الشعاعية لقوى التأثير المتبادل المؤثرة في الجسيم P_0 ،

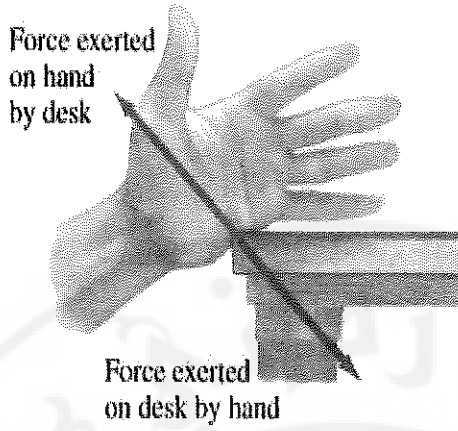
$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n} \quad (3-8)$$

9-3 قانون نيوتن الثالث في الحركة

القانون الثاني لنيوتن يصف كمياً كيف تؤثر القوة في الحركة، ولكن السؤال الذي يثار هنا من أين تأتي القوة؟ الملاحظات تفيد بأن القوة المطبقة على جسم تكون دائماً مطبقة من جسم آخر، الحصان يجر المقطورة، والشخص يدفع بالعربة، والمطرقة تدفع المسمار، والمغناطيس يجذب الدبوس، في كل واحد من هذه الأمثلة القوة تكون مطبقة على جسم واحد من هذه الأجسام، وتلك القوة تكون مطبقة من جسم آخر، مثلاً القوة المطبقة على المسمار مطبقة من المطرقة. لكن نيوتن أدرك أن الأشياء ليست أحادية الجانب كثيراً، صحيح أن المطرقة تؤثر بقوة في المسمار، والشخص يدفع العربة، ولكن من الواضح أن المسمار يؤثر بقوة معاكسة في المطرقة، سرعة المطرقة تنقص بحدّة (تتعدّم عند التماس)، وهذا يعني أن هناك قوة شديدة أدت إلى تباطؤ المطرقة، لذلك لاحظ نيوتن أنه يجب أن يعالج الجسمان على أساس واحد (بنفس القدر)، المطرقة تؤثر بقوة في المسمار والمسمار يؤثر بقوة معاكسة في المطرقة، ومنه نستطيع أن نصيغ قانون نيوتن الثالث:

عندما يؤثر جسم أول بقوة في جسم ثان فإن الجسم الثاني يؤثر في الجسم الأول بقوة تساويها في القيمة وتعاكسها في الاتجاه .

و يصاغ أيضاً كالتالي: لكل فعل يوجد رد فعل يساويه في القيمة ويعاكسه في الاتجاه. ولكن علينا أن نتذكر أن فعل القوة ورد فعلها يؤثران في أجسام مختلفة وكدليل على صحة قانون نيوتن الثالث انظر إلى يدك وهي تضغط على حافة الطاولة الشكل (3 - 2)، تلاحظ أن شكل يدك قد تشوه، ومن الواضح أن هنالك قوة تؤثر فيها وكأن حافة الطاولة تضغط على يدك، وعندما تضغط بيدك على حافة الطاولة أكثر تشعر بالألم أكثر.



الشكل (3 - 2)

إذا ضغطت يدك على حافة الطاولة، كذلك الطاولة تؤثر في يدك.

إن قوة الطاولة المطبقة على يدك هي القوة نفسها التي تؤثر بها يدك في الطاولة، وهذا صحيح ليس فحسب، عندما تكون الطاولة ساكنة ولكن عندما تتسارع بسبب تأثير يدك فيها، مثال آخر على قانون نيوتن الثالث، لنتصور أن متزلجا على الجليد حيث مقاومة الاحتكاك ضعيفة، يدفع الجدار ليبدأ بالحركة إلى الخلف، لأن القوة المباشرة التي طبقها على الجدار لا تجعله يتحرك، وبالتالي هناك قوة جعلته يتحرك، وهذه القوة أتت من الجدار، وهي مساوية ومعاكسة للقوة المطبقة، على الجدار. عندما يقذف شخص أشياء من القارب الساكن، نلاحظ أن القارب يبدأ بالحركة بعكس اتجاه حركة الأشياء، يؤثر الشخص بقوة في الأشياء وهذه الأشياء تؤثر بالقوة نفسها في الشخص ولكن بعكس الاتجاه مما يجعل القارب يتحرك بعكس الاتجاه، حركة الصاروخ تفسر أيضاً على أساس قانون نيوتن الثالث (وليس حسب الاعتقاد السائد أن قوة نفث الغاز على الأرض والجو هي المسؤولة عن دفع الصاروخ) والحقيقة أن الصاروخ يؤثر بقوة في الغاز ويدفعه إلى الخارج وفي الوقت نفسه يؤثر الغاز على الصاروخ ويدفعه إلى الأمام.

والآن دعنا نرى كيف نتحرك نحن على الأرض، الشخص المتحرك يدفع بقدمه إلى الخلف على الأرض، والأرض بدورها تؤثر في القدم بقوة تساويها وتعاكسها بالاتجاه، أي أن الأرض

تؤثر في الشخص بقوة إلى الأمام، وكذلك يستطيع الطير الإندفاع إلى الأمام أثناء الطيران عندما يطبق قوة على الهواء إلى الخلف بواسطة جناحيه والهواء يدفع الجناحين إلى الأمام.

(مثال نموذجي 2-3)

ما القوى المطبقة على السيارة لتجعلها تتحرك؟ ما الذي يجعلها تتحرك إلى الأمام؟

الإجابة:

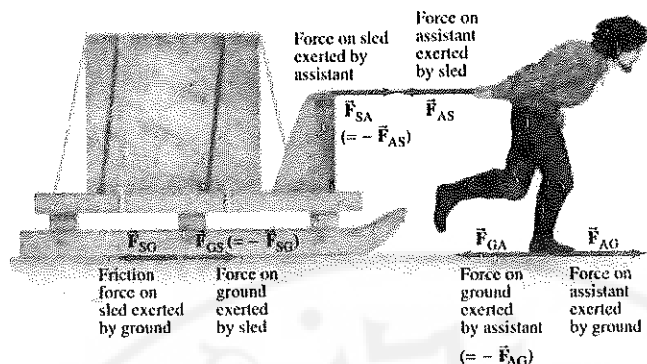
الجواب الشائع أن المحرك يجعلها تتحرك إلى الأمام، ولكن الجواب ليس بهذه البساطة. المحرك يجعل الدواليب تدور، وبفضل الاحتكاك يدفع الدواليب الأرض إلى الخلف، وحسب قانون نيوتن الثالث سوف تدفع الأرض الدواليب إلى الأمام، من الأمثلة الأنفة الذكر علينا أن نميز بين القوة المطبقة على الجسم والقوة المطبقة من الجسم. القوة تسبب حركة الجسم إذا كانت مطبقة عليه، أما القوة المطبقة من الجسم فلا تؤثر فيه فإذا رمزنا للقوة المطبقة من الأرض على الشخص $\vec{F}_{GP}$ ، والقوة المطبقة من الشخص على الأرض $\vec{F}_{PG}$.

$$\vec{F}_{GP} = -\vec{F}_{PG} \quad (3 - 9)$$

$\vec{F}_{GP}$ ، $\vec{F}_{PG}$ ، لهما نفس القيمة وإشارة السالب تعني ان القوتين متعاكستان. ينبغي أن نعلم أن هاتين القوتين لا تظهران معا في العلاقة $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، لأنهما تؤثران في جسمين مختلفين.

(مثال نموذجي 3-3)

كلف مايكل أنجلو مساعده بنقل كتلة من الرخام بواسطة الزلاجة، فاعترض المساعد وقال: عندما أطبق قوة على الزلاجة إلى الأمام فإن الزلاجة تؤثر بقوة مساوية إلى الخلف وبالتالي لا يمكنني أن اجعلها تتحرك مهماً كانت قوة الشد إلى الأمام، وبالتالي محصلة القوى معدومة، وبالتالي لا أستطيع تحريكها أبداً، هل هو على حق؟ الشكل (3 - 3)



الشكل (3 - 3)

الإجابة:

لا، لأنه نسي أن قانون نيوتن الثالث يطبق على الأجسام المختلفة، القوة المطبقة (الفعل) من المساعد تتجه إلى الأمام على الزلاجة، بينما القوة المطبقة (رد الفعل) من الزلاجة على المساعد تتجه إلى الخلف، ولتحديد فيما إذا كان المساعد سيتحرك أم لا يجب علينا أن نلاحظ فحسب، القوى المؤثرة فيه، ومن ثم نطبق $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، يوجد قوتان تؤثران في المساعد، الأولى هي القوة الأفقية $\vec{F}_{AG}$ ، التي تؤثر في المساعد من الأرض التي بدورها ستدفعه إلى الأمام، والثانية هي القوة المؤثرة في المساعد من الزلاجة، $\vec{F}_{SA}$ ، التي تشده إلى الخلف. كلما دفع المساعد الأرض بقدمه بقوة أكبر إلى الخلف، فإن الأرض ستدفعه إلى الأمام بقوة تساويها حتى يتغلب على القوة التي تشده إلى الخلف $\vec{F}_{AS}$ ، وبالتالي تدفعه إلى الأمام.

10-3 الوزن - قوة الجاذبية و رد الفعل الناطمي

وجدنا في الفصل السابق كيف أن غاليليو أعلن بأن كل الأجسام التي تسقط بالقرب من سطح الأرض تسقط بالتسارع نفسه $\vec{g}$ ، في حال إهمال مقاومة الهواء، والقوة الموافقة هي قوة الجاذبية، كيف تؤثر قوة الجاذبية في الجسم؟ إنها القوة المؤثرة من الأرض على الجسم

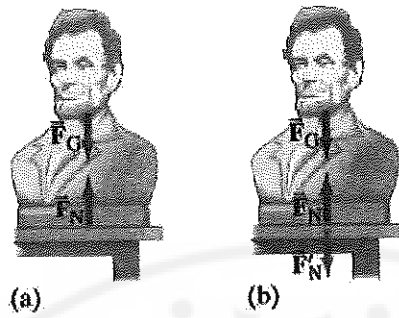
(كما سنرى في الفصول لاحقة) وهي قوة شاقولية متجهة نحو الأسفل باتجاه مركز الأرض، دعنا نطبق قانون نيوتن الثاني على الجسم الذي يسقط إلى الأسفل سقوطاً حراً.

$$\vec{F}_G = m\vec{g} \quad (3 - 10)$$

m : كتلة الجسم.

وقيمتها mg ، وتدعى ثقل الجسم في الجملة الدولية $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ، سوف نهتم بشكل أساسي بنقل الأجسام على الأرض، ولكن الثقل على بقية الكواكب يكون مختلفاً على سبيل المثال التسارع على سطح القمر هو سدس التسارع على الأرض، كتلة قدرها 1 kg ، على الأرض تزن (ثقلها) على القمر 1.6 N . قوة الثقل تؤثر في الجسم عندما يتحرك، وعندما يكون ساكناً ولا تختفي، ولكن لماذا لا يتحرك الجسم طالما تؤثر فيه قوة غير معدومة؟ من قانون نيوتن الثاني نعلم أن محصلة القوى المؤثرة في الجسم في حالة السكون تكون معدومة. لا بد أن تكون هناك قوة ثانية تعادل قوة الثقل ليبقى الجسم في حالة السكون، وبالنسبة إلى الجسم الساكن على الطاولة ينبغي على الطاولة أن تؤثر في الجسم بقوة إلى الأعلى.

إن سطح المنضدة ينضغط بعض الشيء تحت الجسم وبسبب مرونتها تدفع الجسم إلى الأعلى، القوة المطبقة من الطاولة تدعى عادة قوة التماس حيث أنها تحدث عندما يكون الجسمان في حالة تماس (عندما تدفع العربة بيدك هذه أيضاً قوة تماس)، عندما تؤثر القوة عمودياً في سطح التماس المشترك تدعى القوة الناعمية ويرمز لها بالرمز $\vec{F}_N$ ، الشكل (3 - 4). القوتان المبينتان على الشكل (3 - 4 - a)، كلاهما تؤثران في الجسم، والجسم يبقى ساكناً، وبالتالي المجموع الشعاعي للقوتين يجب أن يساوي الصفر (القانون الثاني لنيوتن)، ولكن أين قوة رد الفعل، القوة الناعمية $\vec{F}_N$ ، هي قوة تؤثر في الجسم من الطاولة جهتها إلى الأعلى، وهي قوة الفعل، ورد فعلها هي القوة المؤثرة في الطاولة من الجسم $\vec{F}'_N$ ، الشكل (3 - 4 - b)، وقوة الجاذبية $\vec{F}_G$ ، المطبقة من الأرض على الجسم رد فعلها هو قوة الجاذبية التي تؤثر في الأرض من الجسم.



الشكل (3 - 4)

a - القوة المحصلة المؤثرة في الجسم معدومة عند السكون، لذلك قوة النقل $\vec{F}_G$ ، المؤثرة في الجسم تتعادل مع القوة المتجهة نحو الأعلى المؤثرة في الجسم من الطاولة $\vec{F}_N$ ، هي قوة الفعل. b - قوة رد الفعل $\vec{F}_N$ ، تؤثر في الطاولة من الجسم تتجه نحو الأسفل.

(مثال 3-3):

جسم كتلته 10.0kg ، وهو ساكن على سطح طاولة أفقية عديم الاحتكاك الشكل (3 - 5 - a)، إحسب:

- ثقل الجسم والقوة الناعمية المطبقة عليه من الطاولة.
- لو أثرت في الجسم بقوة 40N ، نحو الأسفل الشكل (3 - 5 - b)، ما القوة الناعمية المطبقة على الجسم من الطاولة.
- إذا شديت الجسم بقوة 40N ، إلى الأعلى الشكل (3 - 5 - c)، ما القوة الناعمية المطبقة على الجسم من الطاولة.

الحل:

الجسم على الطاولة في حالة سكون وبالتالي القوة المحصلة المطبقة عليه تساوي الصفر. A . وزن الجسم هو $mg = 10.0 \times 9.80 = 98.0\text{N}$ ، وهي قوة تؤثر إلى الأسفل والقوى الأخرى التي تؤثر في الجسم هي القوة الناعمية فحسب، موجهة إلى الأعلى الشكل (3 - 5 - a).

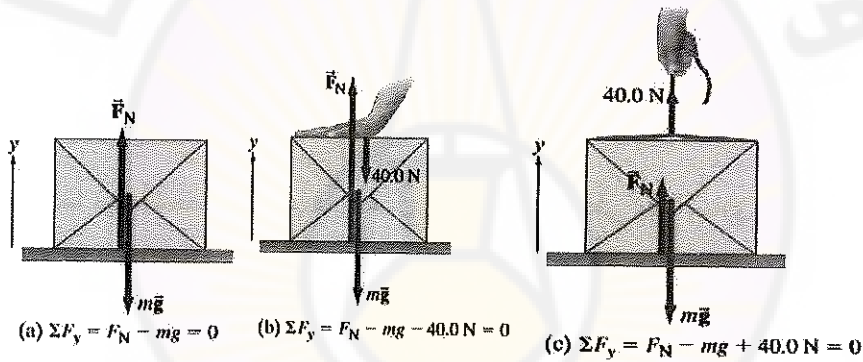
نختار الجهة الموجبة للمحور y ، إلى الأعلى وبالتالي القوة المحصلة $\sum F_y$ ، المؤثرة في الجسم $\sum F_y = F_N - mg$ ، حسب قانون نيوتن الثاني:

$$\sum F_y = ma_y, \quad a_y = 0$$

$$\sum F_y = F_N - mg = 0$$

$$F_N = mg = 98.0N$$

القوة الناعمية المؤثرة في الجسم من الطاولة $98.0N$ ، جهتها إلى الأعلى وقيمتها تساوي ثقل الجسم.



الشكل (3 - 5)

-a الصندوق على الطاولة عند التوازن.

-b يؤثر الشخص على الصندوق بقوة تتجه نحو الأسفل.

-c يشد الشخص الصندوق نحو الأعلى.

B. الشكل (3 - 5 - b) ، الجسم في حالة السكون أيضاً.

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - mg - 40 = 0$$

$$F_N = 98.0 + 40 = 138.0N$$

وهي أكبر من القوة F_N ، في الحالة A ، القوة الناعمية ليست دائماً مساوية لقوة الثقل

C. القوة المحصلة $\sum F_y = F_N - mg + 40$ ، الشكل (3 - 5 - c) ، حيث يظل الجسم في حالة السكون ، طالما أن قوة الشد أقل من ثقله.

$$\sum F_y = 0, F_N - mg + 40 = 0$$

$$F_N = 98.0 - 40 = 58.0N$$

إن القوة الناعمية من أصل مروني، الطاولة تتحني قليلاً تحت تأثير ثقل الجسم، عمودية على الطاولة الأفقية، وهي ليست دائماً شاقولية، عندما تدفع الجدار مثلاً فإن الجدار يدفعك بقوة أفقية، و كذلك القوة الناعمية على مستوي مائل عن الأفق تكون عمودية على المستوي و ليست شاقولية.

مثال 3-4):

ماذا يحدث عندما يرفع شخص الجسم في المثال السابق إلى الأعلى بقوة تساوي ثقل الجسم أو أكبر . $F_p = 100N \geq mg$ ، الشكل (3 - 6)

الحل:

القوة المحصلة المؤثرة في الجسم

$$\sum F_y = F_N - mg + F_p$$

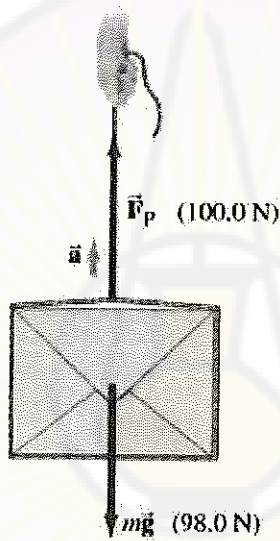
$$\sum F_y = F_N - 98.0 + 100.0$$

إذا وضعنا $\sum F_y = 0$ ، سنحصل على $F_N = -2.0N$ ، القوة النازمية ستكون نحو الأسفل مما يعني أن الطاولة تشد الجسم نحو الأسفل وهذا غير معقول، لأن $F_N \geq 0$ ، دائماً، ولكن في الحقيقة الجسم سيتسارع إلى الأعلى، لذلك محصلة القوى ليست معدومة.

$$\sum F_y = F_P - mg, F_N = 0$$

$$= 100.0 - 98.0$$

$$\sum F_y = 2.0N$$



الشكل (3 - 6)

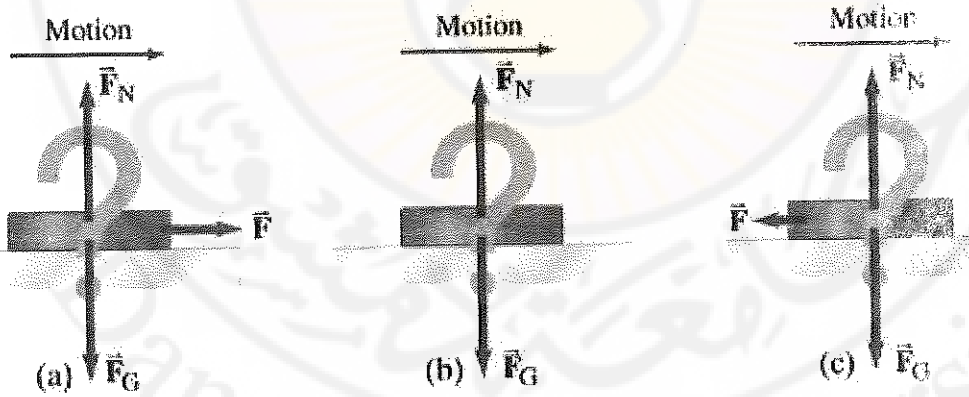
$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{2.0}{10.0} = 0.20 m/s^2$$

11-3 مخططات الجسم الحر

قانون نيوتن الثاني يقول لنا أن تسارع الجسم يتناسب مع القوة المحصلة المؤثرة في الجسم، و نعلم أن قيمة القوة المحصلة هي المجموع الجبري لكل القوى المحصلة والمؤثرة في الجسم، وبالفعل وقد برهن عدد من التجارب على صحة هذا الجمع. عندما نحل المسائل المتعلقة بقوانين نيوتن، من المهم أن نرسم مخططاً يبين كل القوى المؤثرة في الجسم، مثل هذا المخطط يدعى مخطط الجسم الحر أو مخطط القوة، اختر جسماً من الجملة وارسم كافة الأسهم المؤثرة فيه، بما فيه كل القوى المؤثرة في هذا الجسم من الأجسام الأخرى، لا تختار القوى المؤثرة في الجسم الآخر، عليك أن تعزل الجسم إذا كانت الجملة تحوي عدة أجسام مثل هذه القوى (الجاذبية، قوى التماس، القوى الناظمية، قوى الاحتكاك)، وأخيراً علينا أن نأخذ بعين الاعتبار قوة مقاومة الهواء وقوى الممانعة و الطفو والضغط والكهرباء والقوى المغناطيسية.

(مثال نموذجي 3-4)

تتلاقى كرة الصولجان بسرعة ثابتة على سطح مستو أفقي وبدون إحتكاك، كما مبين على الشكل (3 - 7)، أي من هذه المخططات صحيح؟ وما جوابك إذا تباطأت الكرة تحت تأثير قوة الإحتكاك؟



الشكل (3 - 7)
مخططات الجسم الحر

الإجابة:

إذا اخترنا الشكل (3 - 7 - a)، نجد أن القوة $\vec{F}$ ، المؤثرة في الكرة ستزيد من سرعتها، وهذه الحالة غير مناسبة، أما الشكل (3 - 7 - b)، حيث محصلة القوى المطبقة على الكرة تكون معدومة و الكرة تنزلق بسرعة ثابتة على الجليد وهو الجواب المناسب، أما في حال وجود قوة إحتكاك تعيق حركة الكرة وتجعلها تتباطأ فالحالة المناسبة مبينة على الشكل (3 - 7 - c)، عندما نهتم فحسب، بالحركة الإنسحابية، كل القوى المؤثرة في الجسم المعطى يمكن رسمها وكأنها تؤثر في مركز الجسم، حيث يعد الجسم بمنزلة جسيم نقطي، ولكن في المسائل المتعلقة بالدوران والسكون المكان الذي تؤثر فيه القوة يكون مهماً .

(مثال 3-5):

نفرض أن شخصاً يشد جسم كتلته $10kg$ ، بوساطة حبل الشكل (3 - 8)، ينزلق الجسم على سطح طاولة أفقية ناعم، يطبق الشخص قوة $F_p = 40.0N$ ، تصنع زاوية 30° ، مع الأفق إحسب:

- A- تسارع الجسم.
- B- قيمة القوة $\vec{F}_N$ ، المطبقة من الطاولة على الجسم، نفرض أن الإحتكاك مهمل.

الحل:

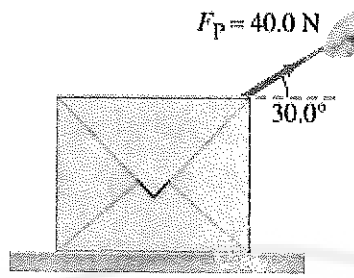
$$\vec{F}_p + \vec{F}_N + m\vec{g} = m\vec{a}$$

• بالإسقاط على المحور x .

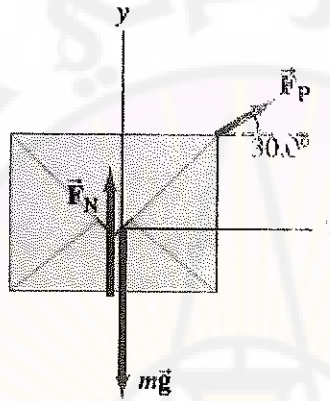
$$F_{Px} + F_{Nx} + mg_x = ma_x$$

$$F \cos \theta^\circ + 0 + 0 = ma_x$$

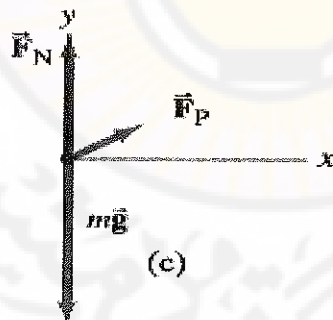
$$a_x = \frac{40}{10} \cos 30^\circ = 3.46 \text{ m/s}^2$$



(a)



(b)



(c)

الشكل (8 - 3)

-a شد الجسم.

-b مخطط الجسم الحر للجسم.

-c مخطط الجسم الحر معتبرين ان كل القوى تؤثر في نقطة الحركة الإنسحابية فحسب.

• بالإسقاط على المحور y .

$$F_{Py} + F_{Ny} - mg_y = ma_y$$

$$F_{Py} = 40 \sin 30^\circ = 20N < (mg = 98N)$$

$$a_y = 0$$

فالجسم لا يتحرك شاقولياً

$$F \sin \theta + F_N - mg = 0$$

$$F_N = mg - F \sin \theta = 10 \times 9.8 - 40 \times 0.5 = 78.0N$$

لاحظ أن $mg > F_N$ ، فالطاولة لا تدفع الجسم إلى الأعلى من أجل قوة الثقل كلها.

1-11-3 التوتر في الحبل المرن

عندما نشد جسماً مربوطاً بحبل مرن، نقول عن الحبل إنه في حالة شد (توتر) والقوة المطبقة على الجسم هي قوة التوتر F_T ، وإذا كانت كتلة الحبل مهملة فالقوة المطبقة على إحدى نهايتي الحبل تنتقل من جزء إلى آخر مجاور له بشكل ثابت على كامل الحبل.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0, \quad m = 0, \quad \vec{a} \neq 0 \quad (3-3)$$

ليس مهماً أياً كان $\vec{a}$ ، لذلك قوى الشد على الحبل عند نهايتيه يجب أن تضاف بحيث تكون محصلتهما معدومة، نلاحظ أن الحبال والأوتار يمكن تشد فحسب، ولا يمكنها أن تدفع.

(مثال 3-6):

نطبق قوة أفقية $F_P = 40.0N$ ، على جسمين A, B ، كتلتيهما $10kg, 12kg$ ، مربوطين بواسطة حبل عديم الكتلة وموضوعين على سطح طاولة عديم الاحتكاك انظر الشكل (3-9)، أوجد:

-A تسارع كل جسم.

-B توتر الحبل المربوط بالجسمين.

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر لكلا الجسمين، الشخص يطبق قوة F_P ، على الجسم A ، و هذا الجسم يمارس قوة F_T ، على الحبل وبالوقت نفسه يمارس الحبل قوة تساويها وتعاكسها في الإتجاه، (قانون نيوتن الثالث). القوتان الأفقيتان المؤثرتان في الجسم A ، بالإضافة لقوة الجاذبية $m_A \vec{g}$ ، والقوة النازمية $\vec{F}_{AN}$ ، مبينة على الشكل (3 - 9 - b)، وبما أن الحبل خفيف فإن كتلته مهملة، وقوة التوتر عند طرفي الحبل هي نفسها، لذلك يؤثر الحبل بالقوة نفس F_T ، على الجسم B ، الحركة أفقية فحسب، لذلك نعد الإتجاه الموجب للمحور x ، نحو اليمين

-A نطبق قانون نيوتن على الجسم A .

$$\sum F_x = m a_x$$

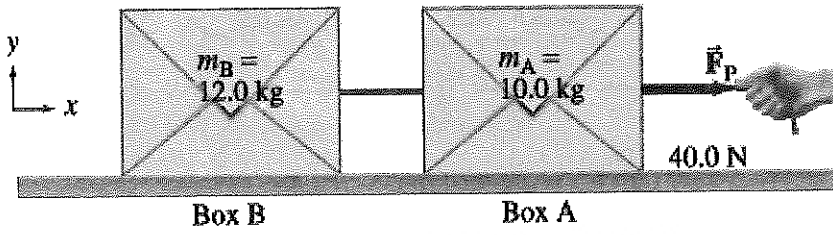
$$\sum F_x = F_P - F_T = m_A a_A$$

أما من أجل الجسم B .

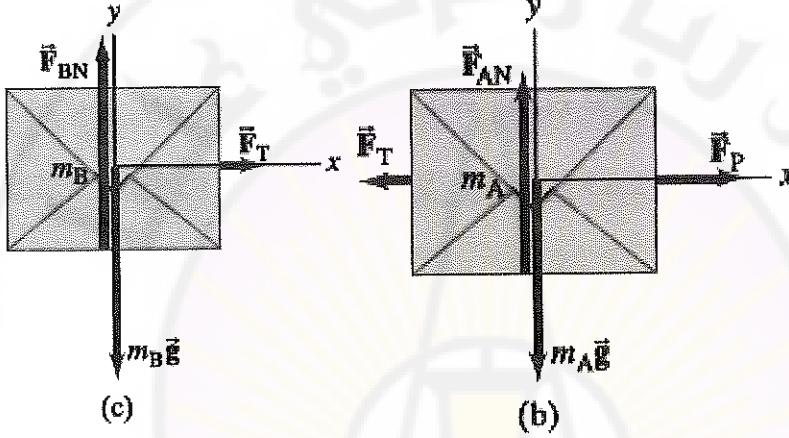
$$\sum F_x = F_T = m_B a_B$$

وإذا كان الحبل عديم الامتطاط يبقى التسارع نفسه لكلا الجسمين.

$$a_A = a_B = a$$



(a)



الشكل (3 - 9)

جسمين A, B متصلين بحبل، الشخص يشد الجسم A ، أفقياً.

-a بقوة $F_P = 40.0 \text{ N}$.

-b مخطط الجسم الحر للجسم A .

-c مخطط الجسم الحر للجسم B .

بجمع كلتا المعادلتين السابقتين.

$$F_P = (m_A + m_B).a$$

$$a = \frac{F_P}{m_A + m_B} = \frac{40.0}{22.0}$$

$$a = 1.82 \text{ m/s}^2$$

يمكننا الحصول على النتيجة نفسها إذا عدنا الجسمين جملة واحدة لها تسارع a ، قوتا التوتر هما قوى داخلية محصلتها معدومة ولا تساهم في محصلة القوى المؤثرة في الجملة.

$$\sum F_x = F_P = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{F_P}{m_A + m_B} = \frac{40.0}{22.0} = 1.82 \text{ m/s}^2$$

B- من إحدى المعادلتين السابقتين نرى أن:

$$F_T = m_B a_B = 12.0 \times 1.82 = 21.8 \text{ N}$$

نلاحظ أن: $F_T < F_P$ ، وهذا كما نتوقع لأن F_T ، تسرع الجسم B ، فحسب.

ملاحظة: القول بأن قوة الشخص F_P ، تؤثر ليس في الجسم A ، بل تؤثر في الجسمين معاً، وهذا غير صحيح، القوة F_P ، تؤثر فحسب، في الجسم A ، و تؤثر في الجسم B ، عن طريق قوة التوتر الحبل F_T ، التي تؤثر في الجسم B ، وتسريه.

(مثال 3-7) - الوزن الظاهري

يهبط شخص كتلته 65 kg ، بواسطة المصعد، وهو واقف على ميزان، يتسارع المصعد 0.20 g ، عند الهبوط إلى الأسفل، الشكل (3 - 10).

A- ما وزن الشخص خلال الهبوط.

B- ما قراءة الميزان عندما يهبط المصعد بسرعة ثابتة .



الشكل (3 - 10)

الحل:

A- من قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-F_N + mg = ma$$

$$F_N = m(g - a) = m(g - 0.20g)$$

$$F_N = 0.80mg$$

القوة الناعمية التي تؤثر في الشخص نحو الأعلى تساوي القوة التي تؤثر في الميزان من

الشخص $F'_N = 0.80mg$ ، إلى الأسفل ويشير الميزان إلى:

$$0.80m = 0.80 \times 65 = 52kg < m$$

-B السرعة ثابتة $a = 0$

$$F_N - mg = 0$$

$$F_N = mg$$

في هذه الحالة قراءة الميزان هي نفسها كتلة الشخص $65kg$.

ملاحظة مهمة: نؤكد أن قراءة الميزان في الحالة (A) $52kg$ ، هي الكتلة الظاهرية وليست الكتلة الحقيقية التي لا تتغير مع التسارع وتبقى ثابتة $65kg$ ، لو فرضنا أن المصعد يتحرك إلى الأعلى بتسارع $0.20g$ ، فما قراءة الميزان.

$$-F_N + mg = -ma$$

$$F_N = m(g + a) = mg + m(0.20g)$$

$$= m(g + 0.20g) = 1.20mg$$

وقراءة الميزان:

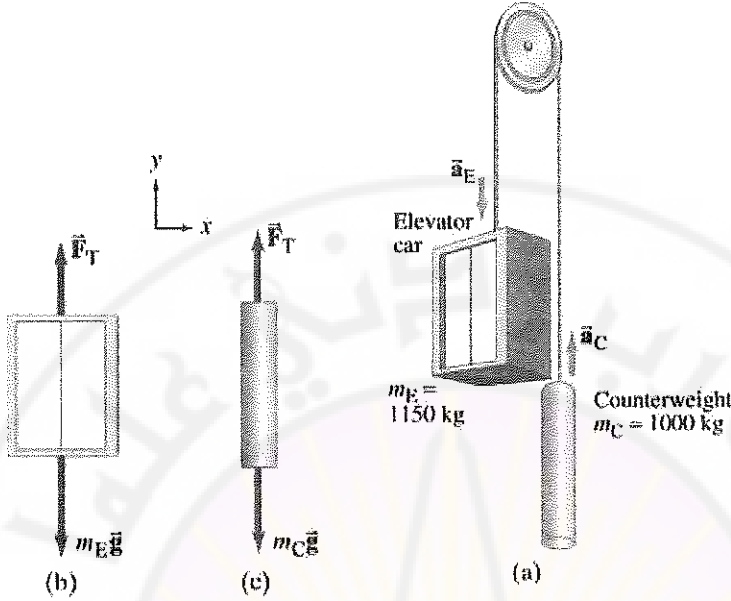
$$1.20m = 1.20 \times 65 = 78kg$$

(مثال 3-8) - ماكينة أتود

وهي عبارة عن جسمين معلقين بوساطة حبل يمر على بكرة الشكل (3-11)، أحد الأجسام عبارة عن حجرة تشبه المصعد كتلتها m_E ، والجسم الآخر كتلته m_C ، نعد أن كتلة البكرة مهملة، وأنها عديمة الاحتكاك، وكتلة الحبل مهملة، وهو عديم الامتطاط أيضاً، هذه الشروط تجعل قوة التوتر F_T ، في الكابل لها نفس القيمة عند طرفي البكرة، نفرض أن $m_E = 1150kg$ ، $m_C = 1000kg$ ، إحسب:

-A تسارع الجسم E .

B-توتر الحبل.



الشكل (3 - 11)

a -ماكينة أتود على شكل مصعد.

b - و c - مخططات الجسم الحر للجسمين.

الحل:

حسب قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، تؤثر في كلا الجسمين قوة الجاذبية وقوة توتر الحبل $\vec{F}_T$ ، وجهتها نحو الأعلى، الشكل (3 - 11 - b - c)، يبين مخطط الجسم الحر للجسم E ، والجسم الآخر C ، و بما أن الجسم E ، أثقل فإنه سيتسارع إلى الأسفل والجسم C ، يتسارع إلى الأعلى بقيمة التسارع لكليهما واحدة (الحبل عديم الامتطاط).

A- نعد الإتجاه الموجب للمحور y ، إلى الأعلى، نطبق قانون نيوتن الثاني

على الجسم E ، $a_C = a_E = a$

$$F_T - m_E g = m_E a_E = -m_E a \quad (i)$$

نطبق قانون نيوتن الثاني على الجسم C

$$F_T - m_C g = m_C a_C = m_C a \quad (ii)$$

ب طرح هاتين المعادلتين نجد:

$$a = \left(\frac{m_E - m_C}{m_E + m_C} \right) \cdot g$$

$$a = \left(\frac{1150 - 1000}{1150 + 1000} \right) \times 9.80 = 0.68 \text{ m/s}^2$$

B- توتر الحبل، بتعويض قيمة التسارع في إحدى المعادلتين (i), (ii):

$$F_T = g \cdot \left(\frac{2m_E m_C}{m_E + m_C} \right)$$

$$F_T = 9.8 \times \left(\frac{2 \times 1150 \times 1000}{1150 + 1000} \right) = 10484 \text{ N}$$

ملاحظة: نستطيع أن نختبر صحة معادلاتنا في حالة تساوي الكتلتين $m_E = m_C$ والتسارع $a = 0$ ، كما متوقع، وإذا كانت إحدى الكتلتين معدومة مثلاً.

$$m_E \neq 0, m_C = 0 \rightarrow a = g$$

(مثال نموذجي 3-5)

يرفع شخصاً جسماً ثقیلاً وزنه 2000 N ، إلى الطابق الثاني الشكل (3 - 12)، باستخدام الرافعة ذات البكرتين، ما القوة التي يجب أن يطبقها الشخص على الحبل ليرفع الجسم الثقيل ببطء.

الإجابة:

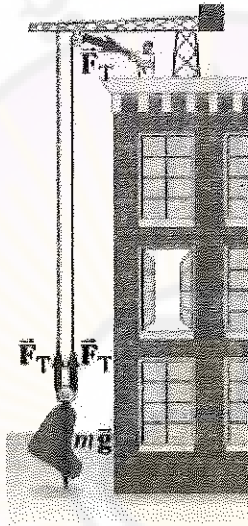
إن قوة التوتر F_T ، هي نفسها في كل نقطة من نقاط الحبل، و إذا فرضنا أن كتلته مهملة، القوى المؤثرة في البكرة السفلية عند الجسم هي وزن الجسم وقوة التوتر من الحبل نطبق قانون نيوتن الثاني على جملة البكرة - جسم كتلتها m .

$$2F_T - mg = ma$$

لرفع الجسم بسرعة ثابتة $a = 0$ ، نحتاج لقوة شد (توتر)

$$F_T = \frac{mg}{2}$$

ينبغي على الشخص تطبيق قوة تعادل نصف ثقل الجسم لرفعه إلى الأعلى، فالبكرة أدت إلى ربح ميكانيكي مضاعف.



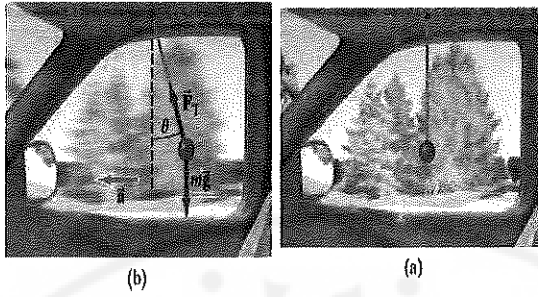
الشكل (3 - 12)

(مثال 3-9) - مقياس التسارع

نربط كرة صغيرة كتلتها m ، بخيط رفيع، يمكنها الترنج كالنواس نعلقها فوق نافذة سيارة، ما الزاوية التي يصنعها الخيط مع الشاقول عندما:

A- تتسارع السيارة $a = 1.20 \text{ m/s}^2$

B- تتحرك السيارة بسرعة ثابتة.



الشكل (3 - 13)

الحل:

إن مخطط الجسم الحر مبين على الشكل (3 - 13) ، النواس يصنع زاوية θ ، والقوى المؤثرة فيه هي قوة الجاذبية $m\vec{g}$ ، وقوة التوتر $\vec{F}_T$ ، هذه القوى لا تساوي عندما $\theta \neq 0$

-A حسب قانون نيوتن الثاني:

$$m\vec{g} + \vec{F}_T = m\vec{a}$$

وبالإسقاط على الإتجاه الأفقي نحصل على

$$F_T \sin \theta = ma$$

وبالإسقاط على الإتجاه الشاقولي:

$$F_T \cos \theta - mg = 0$$

من هاتين العلاقتين نحصل على

$$\tan \theta = \frac{a}{g}$$

$$\tan \theta = \frac{1.20}{9.80} = 0.122, \quad \theta = 7.0^\circ$$

عندما تكون السرعة ثابتة $a = 0$ ، فإن $\tan \theta = 0$ ، والنواس يكون معلقاً شاقولياً

-B $\theta = 0^\circ$

2-11-3 الحركة على مستوي مائل، المنحدرات

سندرس حركة جسم ينزلق على منحدر أو مستوي مائل مثل التلة أو الهضبة، هذا النوع من المسائل مهم لأن التسارع ليس شاقولياً، حل هذه المسائل يكون أسهل إذا اخترنا الإحداثيات xy أحدها هو المحور الذي يشير إلى اتجاه التسارع، والآخر يكون عمودياً على المستوي المائل الشكل (3 - 14 - a)، لاحظ أن القوة الناعمية ليست شاقولية.

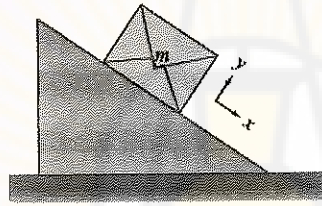
(مثال 3 - 10):

جسم كتلته m ، ينزلق على مستوي يميل عن الأفق بزاوية θ ، نحو الأسفل، الشكل

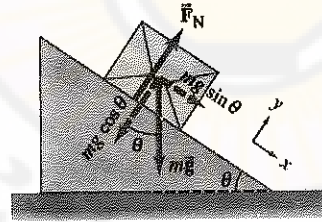
(3 - 14 - b)، يبين القوى المؤثرة في الجسم، قوة الثقل mg ، والقوة الناعمية F_N

A- أوجد القوة الناعمية المؤثرة في الجسم F_N .

B- احسب تسارع الجسم.



(a)



(b)

الشكل (3 - 14)

a- إنزلاق الجسم على مستوي مائل.

b- مخطط الجسم الحر.

مع العلم أن: $m = 10kg, \theta = 30^\circ$

الحل:

A- لا توجد حركة على المحور y ، لذلك $a_y = 0$ ، نطبق قانون نيوتن الثاني.

$$\sum F_y = ma_y$$

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

$$F_N = mg \cos \theta$$

$$F_N = 10 \times 9.8 \cos 30^\circ = 85N$$

حيث F_N ، تساوي مركبة قوة الثقالة على y ، و هي: $(mg \cos \theta)$

B- أما قانون نيوتن الثاني على المحور x .

$$F_x = ma_x, \quad a = a_x$$

$$mg \sin \theta = ma$$

$$a = g \sin \theta$$

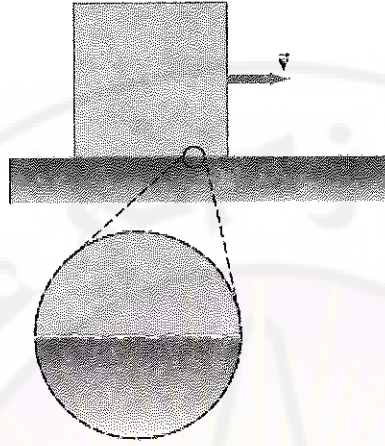
$$a = 9.8 \times \sin 30^\circ = 4.9 \text{ m/s}^2$$

فالتسارع باتجاه ميل المستوي أقل من g ، الحالة $\theta = 90^\circ$ ، عندها $a = g$ ، سقوط شاقولياً أما من أجل $\theta = 0^\circ$ ، المستوي يصبح أفقياً والثقالة لا تسبب تسارعاً $a = 0$ ، ونلاحظ أن التسارع لا يتعلق بالكتلة m .

12-3 قوى الإحتكاك

من الضروري أن نأخذ بعين الاعتبار الإحتكاك. الذي يحدث بين الأجسام الذي حتى الآن أهملناه، في الحالة العملية والتطبيقية يحدث الإحتكاك بين سطحي جسمين بسبب خشونة السطحين، عندما ينزلق سطح جسم على سطح جسم آخر الشكل (3 - 15)، نجد أن الإصطدامات المهجرية تعيق الحركة، ما الذي يحصل على المستوى المجهرى ؟ هذا السؤال

بعد غير مفهوم بشكل كامل حتى يومنا الحالي. الذرات الواقعة على سطح جسم تصبح قريبة من الذرات على سطح الجسم الآخر، تنشأ قوى كهربائية يمكن أن تربط بينها مثل اللحام الصغير جداً بين سطحين.



الشكل (3 - 15)

الجسم يتحرك على سطح طاولة، السطحين على تماس خشن على الأقل بالمقياس الميكروسكوبي.

إن إنزلاق جسم على سطح جسم آخر يكون عادة قفزياً، بسبب كسر هذه الروابط، وعلى الرغم من أن الجسم عندما يتدحرج على جسم آخر يحصل بينهما إحتكاك يدعى الإحتكاك التدحرجي، وهو أقل بكثير من الإحتكاك عندما ينزلق الجسم على السطح، سنركز إهتمامنا على الإحتكاك بالإنزلاق، الذي يدعى الإحتكاك الحركي، عندما ينزلق جسم على سطح خشن فإن قوة الإحتكاك الحركي تؤثر في الإتجاه المعاكس لسرعة الجسم، وقيمة قوة الإحتكاك الحركي تتعلق بطبيعة السطحين المنزلقين، التجارب تؤكد أنه من أجل سطوح معينة تتناسب قوة الإحتكاك طردياً مع القوة الناعمية بين السطحين، العمودية على سطح التماس المشترك، إن قوة الإحتكاك، وفي كثير من الحالات، تتعلق بمساحة السطح المشترك، لكن بشكل ضئيل جداً، لسطحين لهما النعومة نفسها، لنأخذ النموذج البسيط التالي الذي نفرض فيه أن قوة الإحتكاك لا تتعلق بالمساحة، وبعد ذلك نكتب علاقة التناسب بين قيمتي قوة الإحتكاك $\vec{F}_f$ ، والقوة الناعمية $\vec{F}_N$.

$$F_{fr} = \mu_k F_N \quad (3 - 11)$$

μ_k : ثابت التناسب الحركي وقيمته تتعلق بطبيعة السطحين.

هذه العلاقة لا تعبر عن قانون أساسي، وهي علاقة تجريبية وليست شعاعية، لأن قوة الإحتكاك $\vec{F}_{fr}$ ، والقوة النازمية $\vec{F}_N$ ، لهما إتجاهان متعامدان، القيم المقاسة من أجل مختلف السطوح تكون تقريبية، لأن μ_k ، تتعلق بظروف السطحين فيما إذا كانت رطبة ام جافة، ولكن μ_k ، مستقلة تقريباً عن سرعة الإنزلاق وعن المساحة المشتركة. حتى الآن ناقشنا الإحتكاك الحركي عند إنزلاق جسم على آخر، إلا أنه يوجد نوع آخر للإحتكاك ألا وهو الإحتكاك السكوني، الذي ينشأ عندما يكون الجسمان غير منزلقين، لنفرض أن جسماً (قرصاً) موضوعاً على سطح طاولة أفقية، و لنفرض في البداية أنه لا توجد قوة أفقية مطبقة على القرص، وبالمقابل لا توجد قوة إحتكاك تؤثر في الجسم، لنفرض أننا نحاول سحب القرص إلى الأمام، نلاحظ أن القرص لا يتحرك، مما يعني أن هناك قوة أخرى تؤثر في الجسم لكي يبقى ساكناً، تدعى قوة الإحتكاك السكوني. إذا أثّرنا في القرص بقوة شد أكبر، نلاحظ أن الجسم يبقى ساكناً، أي أن قوة الإحتكاك السكوني تزداد، وإذا زدنا قوة الشد أكثر نلاحظ أن الجسم يبدأ بالحركة فجأة، وينشأ الإحتكاك الحركي، وعند تلك النقطة تكون قوة الإحتكاك السكوني قد بلغت قيمتها العظمى وتتحقق العلاقة :

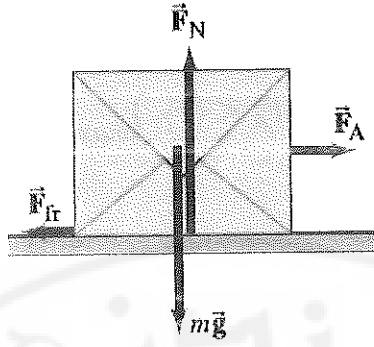
$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N \quad (3 - 12)$$

μ_s : عامل الإحتكاك السكوني، وبما أن قوة الإحتكاك السكوني تتغير من الصفر إلى قيمة عظمى الشكل (3 - 16)، لذلك يمكننا أن نكتب.

$$F_{fr} \leq \mu_s F_N \quad (3 - 13)$$

(مثال 3-11):

يوضع جسم كتلته 10kg على سطح أفقي، عامل الإحتكاك السكوني $\mu_s = 0.40$ ، وعامل الإحتكاك الحركي $\mu_k = 0.30$ ، إحسب قوة الإحتكاك F_{fr} المؤثرة في الجسم. إذا طبقنا عليه قوة شد أفقية F_A قيمها: $0.10, 20, 38, 40\text{N}$.



الشكل (3 - 16)

الحل:

عندما يتحرك الجسم على سطح بوساطة القوة المطبقة ($\vec{F}_A$)، قوة الإحتكاك $\vec{F}_{fr}$ ، تعاكس الحركة وقيمتها تتناسب مع قيمة القوة الناعمية. لا نعلم حقاً إذا كنا نتعامل مع الإحتكاك السكوني أو الإحتكاك الحركي، أو إذا كان الجسم ساكناً، أم متسارعاً، نحتاج أن نرسم مخطط الجسم الحر الشكل (3 - 16)، ونحدد من أجل كل حالة متى يكون الجسم متحركاً أم ساكناً. الجسم يبدأ بالحركة عندما تكون قوة الشد F_A ، أكبر من قوة الإحتكاك السكوني الأعظمية.

• في الإتجاه العمودي لا توجد حركة.

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$F_N - mg = 0$$

$$F_N = mg = 10 \times 9.80 = 98.0N$$

• $F_A = 0$ ، في هذه الحالة الجسم يبقى ساكن، $F_{fr} = 0$

• $F_A = 10N$ ، قوة الإحتكاك السكوني تعاكس القوة المطبقة وقيمتها العظمى

$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = 0.40 \times 98.0 = 39.2N$$

$$F_A < (F_{fr})_{max}$$

الجسم يبقى ساكناً

$$\sum F_x = F_A - F_{fr} = 0$$

$$F_{fr} = F_A = 10N$$

• $F_A = 20N < (F_{fr})_{max}$ ، القوة المطبقة في هذه الحالة غير كافية لتحريك الجسم.

$$F_{fr} = F_A = 20N$$

$$F_A = 38N < (F_{fr})_{max}$$

القوة المطبقة لا تزال غير كافية لتحريك الجسم،

$$F_A = 40N > (F_{fr})_{max}$$

$$F_A > \mu_s F_N$$

الجسم يتحرك.

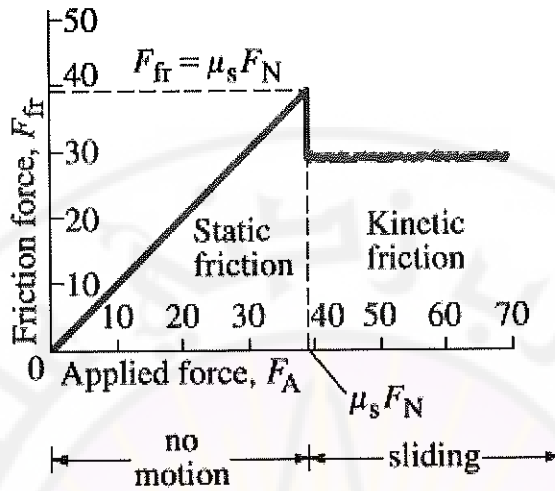
$$F_{fr} = \mu_k F_N = 0.30 \times 98.0 = 29N$$

$$\sum F_x = F_A - F_{fr} = ma_x$$

$$a_x = \frac{F_A - F_{fr}}{m}$$

$$a_x = \frac{40 - 29.2}{10} = 1.08 m/s^2$$

الشكل (3 - 17) يبين العلاقة التي تلخص هذا المثال.



الشكل (3 - 17)

قيمة قوة الإحتكاك كتابع للقوة الخارجية المطبقة على الجسم الساكن في البدء، كلما زادت قيمة القوة المطبقة فإن قوة الإحتكاك الساكن تزداد خطياً حتى تساوي $\mu_s F_N$ ، وإذا زادت القوة المطبقة أكثر فالجسم يبدأ بالحركة وقوة الإحتكاك تهبط بحدّة حتى تبلغ قيمة ثابتة تميز الإحتكاك الحركي.

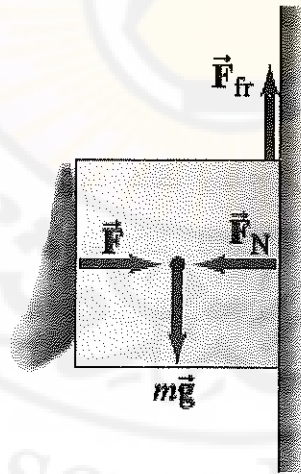
الإحتكاك هو إعاقة حركة الجسم، ويسبب كذلك إرتفاع حرارته، ويمكن تقليلها بواسطة استعمال بعض الزيوت والشحوم، والطريقة الأكثر فاعلية للتقليل من الإحتكاك هي إبقاء طبقة من الهواء أو الغاز بين السطحين، مثل الوسادة الهوائية، وتوجد طرق أخرى لإبقاء الأجسام معلقة بالهواء عن طريق تطبيق حقل مغناطيسي خارجي على مواد فائقة الناقلية، و من ناحية أخرى يمكن أن يكون الإحتكاك مفيداً، مثلاً المشي يتعلق بالإحتكاك بين القدم والأرض، حركة السيارة تتعلق بالإحتكاك بين إطار العجلة والأرض وإذا كان الإحتكاك ضعيفاً كما في حالة الجليد مثلاً فإن قيادة السيارة تكون صعبة.

(مثال نموذجي 3-6)

كيف يمكن أن نطبق قوة أفقية لمنع الجسم من الانزلاق إلى الأسفل بالضغط عليه أفقياً
الشكل (3 - 18).

الإجابة:

الجسم سوف ينزلق إلى الأسفل إذا لم نضغط بقوة كافية، إن القوة الأفقية التي نطبقها سوف تنتج قوة ناظمية على الجسم مطبقة من الجدار (والقوة الأفقية المحصلة معدومة لأن الجسم لا يتحرك أفقياً $F = F_N$)، قوة الثقالة تؤثر إلى الأسفل وتتعاذل مع قوة الإحتكاك السكونية كلما ضغطنا بقوة أفقية أكبر كلما زادت القوة الناظمية F_N ، وبالتالي زادت قوة الإحتكاك السكوني F_{fr} ، والجسم يبقى ساكناً، وإذا لم تضغط بقوة كافية يكون $mg > \mu_s F_N$ ، الجسم يبدأ بالانزلاق إلى الأسفل.



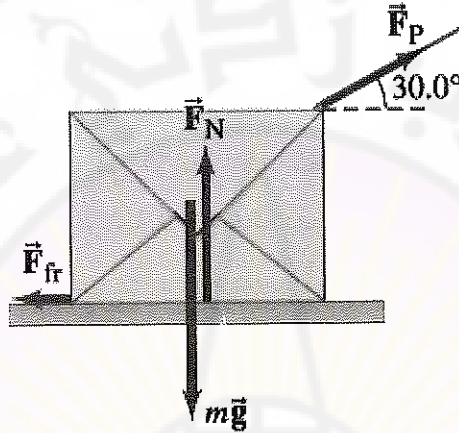
الشكل (3 - 18)

(مثال 3-12):

جسم كتلته 10kg ، يتحرك على سطح أفقي تحت تأثير قوة $F_p = 40\text{N}$ ، ومطبقة بزاوية 30° فوق خط الأفق، نفرض أن معامل الاحتكاك الحركي $\mu_k = 0.30$ ، إحسب تسارعه.

الحل:

إن مخطط الجسم الحر مبين على الشكل (3-19)



الشكل (3-19)

• قانون نيوتن الثاني على المحور الإحداثي (y).

$$F_N - mg + F_{Py} = ma_y = 0$$

$$F_{Py} = F_P \sin 30^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20\text{N}$$

$$F_N - 98.0 + 20.0 = 0$$

$$F_N = 78\text{N}$$

• قانون نيوتن الثاني على المحور الإحداثي (x).

$$F_{Px} - F_{fr} = ma_x$$

$$F_{fr} = \mu_k F_N = (0.30) \times (78) = 23.4N$$

$$F_{Px} = F_P \cos 30^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 34.6N$$

فالجسم سوف يتسارع

$$a_x = \frac{F_{Px} - F_{fr}}{m} = \frac{34.6 - 23.4}{10} = 1.12 \text{ m/s}^2$$

(مثال نمونجي 3-7)

ترغب أختك الصغيرة أن تتركب في الزلاجة على سطح مستو، في أي حالة تكون القوة المطبقة أكبر، هل في حالة شد الزلاجة أم في حالة دفعها، وبالزاوية نفسها مع الأفق في كلتا الحالتين الشكل (3 - 20).

الإجابة:

حسب مخطط الجسم الحر

$$m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_P + \vec{F}_{fr} = m\vec{a}$$

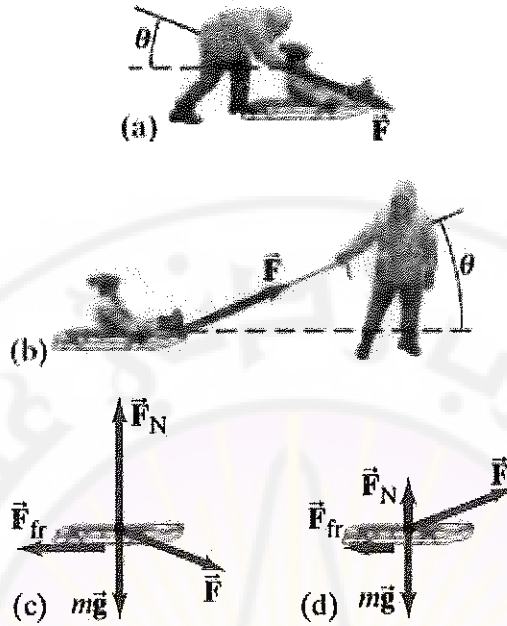
حالة دفع الزلاجة: الشكل (3 - 20 - a)

بالإسقاط على المحور الإحداثي y الموجب نحو الأسفل

$$mg - F_N + F \sin \theta = 0$$

$$F_{fr} = \mu_k F_N$$

$$F_{fr} = \mu_k (mg + |F \sin \theta|) \quad (i)$$



الشكل (3 - 20)

حالة شد الزلاجة: الشكل (3 - 20 - b)

بالإسقاط على المحور الإحداثي y ، الموجب نحو الأسفل

$$mg - F_N - F \sin \theta = 0$$

$$F_{fr} = \mu_k F_N$$

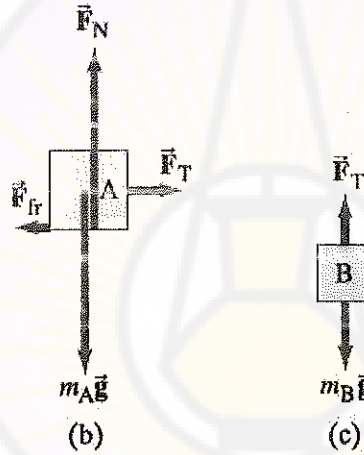
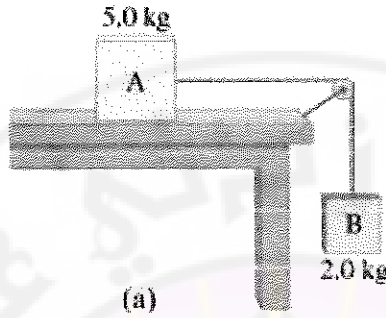
$$F_{fr} = \mu_k (mg - |F \sin \theta|) \quad (ii)$$

بمقارنة (i) مع (ii) ، نجد أن قوة الإحتكاك في حالة الدفع أكبر منها في حال الشد.

(مثال 3-13):

جسمان مربوطان بحبل يمر على بكر، معامل الإحتكاك الحركي بين الجسم و سطح الطاولة الأفقي 0.20، وبإهمال كتلة البكرة، و كتلة الحبل والإحتكاك على البكرة، أي أن قوة التوتر

على طرفي الحبل نفسها، إحسب تسارع الجملة، مع العلم أن الحبل عديم الامتطاط الشكل (3 - 21).



الشكل (3 - 21)

الحل:

مخططات الجسم الحر موضحة على الشكل (3 - 21 - c - b)، القوى المؤثرة في الجسم A، هي قوة شد الحبل F_T ، وقوة الثقل $m_A g$ ، والقوة الناعمية F_N ، وقوة الاحتكاك F_{fr} ، أما القوى المؤثرة في الجسم B، هي قوة شد الحبل F_T وقوة الثقل $m_B g$.

• الجسم A ، لا يتحرك عمودياً

$$F_N = m_A g = 5 \times 9.8 = 49N$$

$a = a_x$ أما في الإتجاه الأفقي

$$F_T - F_{fr} = m_A a$$

• الجسم B

$$m_B g - F_T = m_B a$$

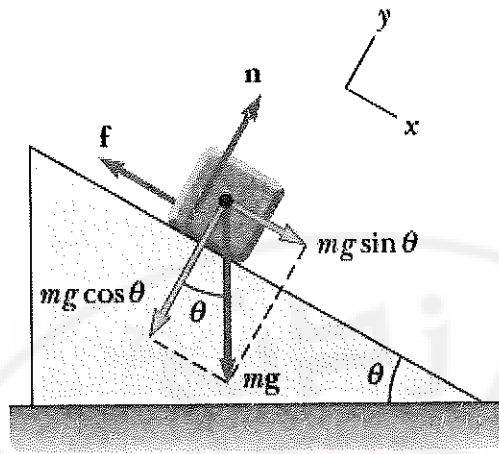
وبالحل نحصل على

$$a = g \frac{m_B - \mu_k m_A}{m_A + m_B} = 9.8 \times \frac{2 - 0.2 \times 5}{5 + 2} = 1.4 \text{ m/s}^2$$

$$F_T = F_{fr} + m_A a = 9.8 + 5 \times 1.4 = 16.8N$$

13-3 قياس عامل الإحتكاك السكوني والحركي

التجربة التالية تستخدم لقياس معاملات الإحتكاك، لنفرض أن جسماً موضوعاً على سطح خشن يميل عن الأفق، كما هو مبين على الشكل (3 - 22)، تزداد زاوية الميلان حتى تصل إلى الزاوية الحرجة θ_c ، التي يتخلص بها الجسم من قوة الإحتكاك السكوني ويبدأ الجسم بالإنزلاق و بمرحلة الإحتكاك الحركي.



الشكل (3 - 22)

مخطط الجسم الحر المبين على الشكل (3 - 22)، القوة المؤثرة $m\vec{g}$ ، ليست عمودية على السطح المائل، وقوة رد الفعل الناطمي $\vec{F}_N$ عمودية على السطح المائل، قوة الإحتكاك الموازية للسطح $\vec{F}_{fr}$ ، نطبق قانون نيوتن الثاني على حالة الجسم المتوازن:

$$\sum F_x = mg \sin \theta - F_{fr} = ma_x = 0 \quad (3 - 14)$$

$$\sum F_y = F_N - mg \cos \theta = ma_y = 0 \quad (3 - 15)$$

من هاتين المعادلتين نحصل على

$$F_{fr} = F_N \tan \theta \quad (3 - 16)$$

عندما تزداد زاوية الميل حتى يبدأ الجسم بالإنزلاق عن السطح تبلغ قوة الإحتكاك السكوني قيمتها الأعظمية $\mu_s F_N$ والزاوية θ ، تصبح الزاوية الحرجة θ_c .

$$\theta = \theta_c \rightarrow F_{fr} = \mu_s F_N \quad (3 - 17)$$

$$\mu_s = \tan \theta_c \quad (3 - 18)$$

نلاحظ أن الجسم يبدأ بالحركة عندما $\theta \geq \theta_c$

وإذا جعلنا زاوية الميل أقل من θ_c ، مرة ثانية فإنه من المحتمل إيجاد زاوية θ_c بحيث يتحرك الجسم من أجلها بسرعة ثابتة ($a_x = 0$)، وفي هذه الحالة تتحقق المعادلتان السابقتان (3-14) و (3-15)، بعد استبدال F_{fr} بقوة الإحتكاك الحركي $F_k = \mu_k F_N$ ، نحصل على معامل الإحتكاك الحركي.

$$\mu_k = \tan \theta_c \quad (3-19)$$

3-14 السرعة الحدية والإحتكاك

عندما يتحرك جسم على سطح خشن فإن قوى الإحتكاك تحاول ممانعة الحركة بشكل مستقل عن سرعة الجسم، ولكن هناك أنواعاً من قوى الممانعة تتعلق بسرعة الجسم، وأفضل مثال على ذلك عندما يتحرك جسم في وسط غازي أو مائع، يبدي المائع قوة مقاومة لحركة الجسم تتعلق بسرعته، إن فهم آلية قوى الممانعة المتغيرة في الحقيقة معقدة ولكن من أجل جسيم صغير ذي سرعة صغيرة جداً يمكننا أن نفرض أن قوة المقاومة F_D ، تتناسب طردياً مع سرعته v ، مثل جسيمات الغبار في الهواء.

$$F_D = -bv \quad (3-20)$$

إشارة السالب تشير إلى أن القوة F_D ، تعاكس الحركة.

b : مقدار ثابت (تقريباً) ويتعلق بلزوجة المائع وحجم وشكل الجسم.

أما من أجل الأجسام التي تسير بسرعة عالية مثل الطائرة عندها يفضل أن نجعل قوة مقاومة الهواء تتناسب مع v^2 .

$$F_D \propto v^2$$

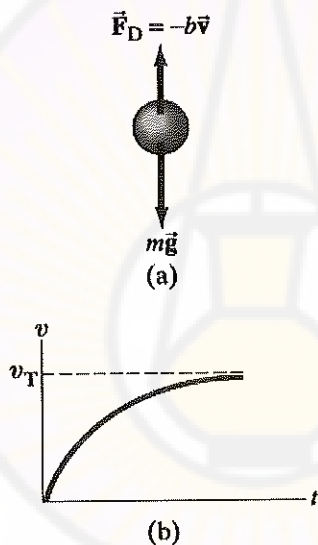
هذه المعادلة تعمل جيداً من أجل الأجسام التي تتحرك في السوائل، و كذلك من أجل كل الأجسام التي تكون سرعتها عادية مثل (قارب في النهر)، لنفرض أن جسماً يسقط في

الهواء، أو في مائع بدءاً من السكون، وتؤثر فيه قوة ثقله ومقاومة المائع تتناسب مع v ، انظر الشكل (3 - 23 - a)، دعنا نختار الإتجاه الموجب نحو الأسفل. القوى المؤثرة هي قوة الثقل $m\vec{g}$ ، وقوة المقاومة $\vec{F}_D$ ، (مع إهمال قوة دافعة أرخميدس $\vec{B} = 0$). حسب قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_D = m\vec{a}$$

$$mg - bv = ma \quad (3 - 21)$$

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt} \quad (3 - 22)$$



الشكل (3 - 23)

a- القوى المؤثرة في الجسم.

b- المنحني البياني لسرعة الجسم الساقط بسبب الجاذبية مع وجود مقاومة الهواء $F_D = -bv$ في البدء $v = 0, \frac{dv}{dt} = g$ ، ولكن مع مرور الزمن يتناقص التسارع بسبب قوة المقاومة، وعندما تقترب السرعة من القيمة العظمى v_T ، تدعى السرعة الحدية وتحدث عندما $F_D = mg$.

في بداية الحركة $F_D = 0$ ، $v = 0$ ، $t = 0$ ، وتسقط الكرة بتسارع بدئي a_0

$$a_0 = \frac{mg}{m} = g \quad (3 - 23)$$

عندما يسقط الجسم وتزداد سرعته ، تزداد قوة المقاومة و تقلل من تسارعه، انظر الشكل (3 - 23 - b)، عند ذلك تستمر السرعة في الزيادة، ولكن بمعدل أبطأ، حتى تصل قيمة عظمى تدعى السرعة الحدية v_T ، وعندها تتوازن قوة المقاومة مع قوة الثقل

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$mg - bv_T = 0 \quad (3 - 24)$$

$$v_T = \frac{mg}{b} \quad (3 - 25)$$

وإذا كانت قوة المقاومة تتناسب مع v^2 ، أو لقوى أعلى من v^2 ، فإن الحادثة تكون مشابهة، و تبلغ السرعة الحدية، ولا تخضع للعلاقة السابقة، وعندها السرعة الحدية

$$v_T = \sqrt{\frac{mg}{b}} \quad (3 - 26)$$

هذه العلاقة تفسر لماذا تميل الأجسام الثقيلة للسقوط بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة. إذا كان لجسمين الحجم الفيزيائي نفسه، ولكن كتلتيهما مختلفتان (كرة التنس وكرة من الرصاص لهما نصف القطر نفسه) لهما القيمة b ، نفسها ولكنهما مختلفتين في m ، الجسم الذي كتلته أكبر، تكون سرعته الحدية أكبر، وبالتالي سرعة سقوطه أكبر وهكذا نستطيع أن نفسر لماذا تسقط ورقة الكتاب بسرعة أكبر عندما تجعلها كالكرة، مع العلم لهما الكتلة نفسها، ولكن الكرة لها حجم أكبر من الورقة، وكذلك السابح في الفضاء يجعل حجمه أقل ليتحكم في سرعة هبوطه.

(مثال 3-14):

أوجد السرعة كتابع للزمن لجسم يسقط عمودياً من السكون عندما تطبق عليه قوة مقاومة تتناسب خطياً مع السرعة v .

الحل:

من المعادلة (22-3).

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{bv}{m} \rightarrow \frac{dv}{v - \frac{m}{b}g} = -\frac{b}{m} dt$$

في هذه المعادلة لدينا متغيران هما v, t ، الآن نكامل عندما $t = 0, v = 0$

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{m}{b}g} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt = \left[\ln \left(v - \frac{m}{b}g \right) \right]_0^v = -\frac{b}{m} t$$

$$\ln \left(v - \frac{m}{b}g \right) - \ln \left(-\frac{m}{b}g \right) = \ln \left(\frac{-\frac{m}{b}g + v}{-\frac{m}{b}g} \right) = -\frac{b}{m} t$$

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) \quad (3-27)$$

كما توقعنا عندما تكون t ، كبيرة فإن ، $v = \frac{mg}{b} = v_T$

هذه العلاقة تعطينا السرعة كتابع للزمن وتتفق مع المنحني في الشكل (3-23-3) ،
والتسارع

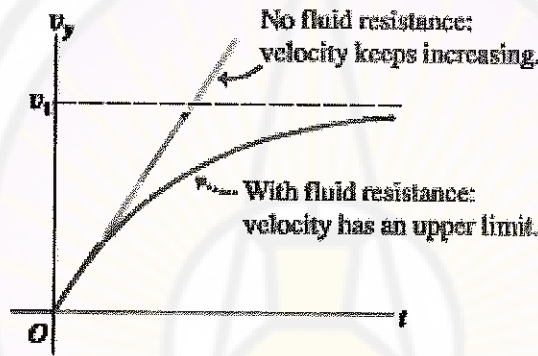
$$a = \frac{dv}{dt} = g e^{-\frac{b}{m}t} \rightarrow a_0 = g$$

بفرض أن . $\tau = \frac{m}{b}$

$$v = v_T \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (3-28)$$

نعرف زمن الاسترخاء $\tau = m/b$ ، الزمن اللازم لتبلغ السرعة 63%، من السرعة الحدية، الشكل (3 - 23)، الزمن τ ، يعبر عن زمن الإسترخاء، لنفرض أن التسارع البدئي a_0 ، يبقى ثابتاً فإنه يمكن تعريف τ ، بأنه الزمن اللازم لبلوغ السرعة الحدية v_T ، بواسطة التسارع الثابت a_0 . انظر الشكل (3 - 24).

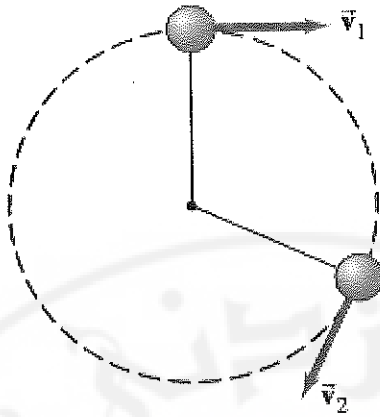
$$\tau = \frac{v_T}{a_0} = \frac{\frac{mg}{b}}{g} = \frac{m}{b}$$



الشكل (3 - 24)

3-15 الحركة الدائرية المنتظمة

نعلم انه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة في جسم تؤثر في إتجاه الحركة فإنه يتحرك وفق خط ، مستقيم، أو إذا كانت محصلة القوى المؤثرة معدومة، فإذا كانت محصلة القوى تصنع زاوية مع إتجاه الحركة عند أية لحظة فإن الجسم يتحرك في مسار منحن، وخير مثال على ذلك ما درسناه سابقاً (حركة القذائف)، ومن الأمثلة الأخرى على ذلك حركة القمر حول الأرض، وحركة جسم مربوط بخيط على مسار دائري



الشكل (3 - 25)

جسم صغير يتحرك على مسار دائري مبينا كيف تتغير السرعة، عند كل نقطة، شعاع السرعة اللحظية هو مماس المسار للدائري.

إن حركة الجسم على مسار دائري ويسرعة ثابتة تدعى حركة دائرية منتظمة، قيمة السرعة تبقى ثابتة، ولكن إتجاهها يتغير باستمرار، الشكل (3 - 25)، وبما أن شعاع التسارع ينتج عن تغير شعاع السرعة مع الزمن فإن التسارع غير معدوم، حتى لو كانت قيمة السرعة ثابتة.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (3 - 29)$$

ينتقل الجسم خلال المجال الزمني Δt ، من A، إلى B، قاطع مسافة $d\ell$ ، على طول قوس يوافق زاوية $\Delta\theta$ ، الشكل (3 - 26 - a - b)، عندما تقترب Δt ، من الصفر $\Delta t \rightarrow 0$ ، تصبح كلاً من $d\ell$ ، $\Delta\theta$ ، صغيرتين جداً الشكل (3 - 26 - c)، $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، تقتربان من بعضهما $\overrightarrow{\Delta V}$ ، يصبح عمودياً عليهما، و يتجه نحو مركز الدائرة، وبالتالي

التسارع $\vec{a}$ ، يتجه نحو مركز المسار الدائري أيضاً، ويدعى التسارع المركزي أو القطري، ونرمز له بالرمز $\vec{a}_R$ ، من تشابه المثلثين في الشكل (3 - 26 - 3) $(a - b - 26 - 3)$.

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{d\ell}{r} \quad (3 - 30)$$

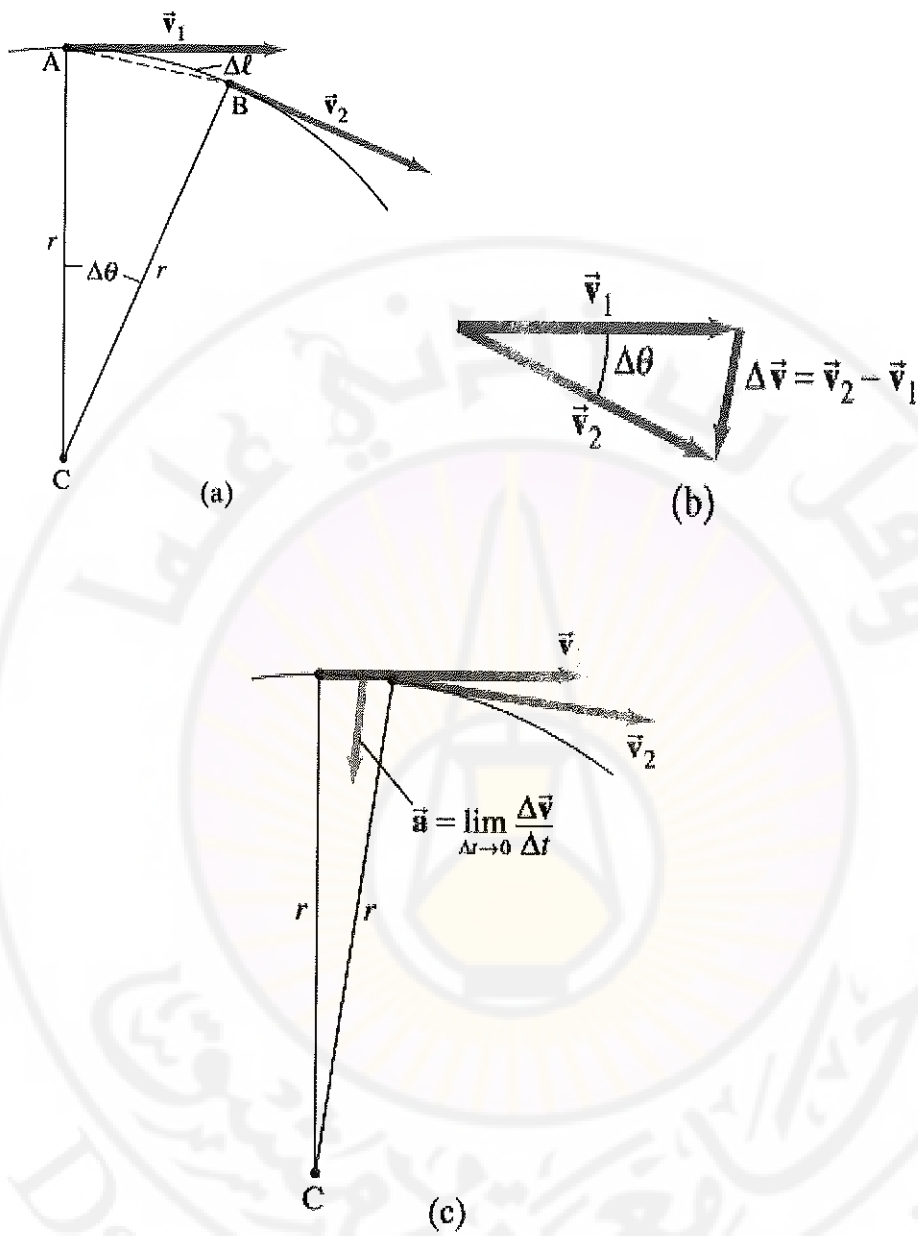
$$\Delta v \approx \frac{v}{r} d\ell$$

التي تتحول إلى مساواة عندما $\Delta t \rightarrow 0$ ، والقوس $d\ell$ ، يساوي الطول AB ، و التسارع اللحظي a_R ،

$$a_R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v d\ell}{r \Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\ell}{\Delta t}$$

$$a_R = \frac{v^2}{r} \quad (3 - 31)$$

وهذه العلاقة صحيحة حتى ولو كانت السرعة غير ثابتة.



الشكل (3 - 26)

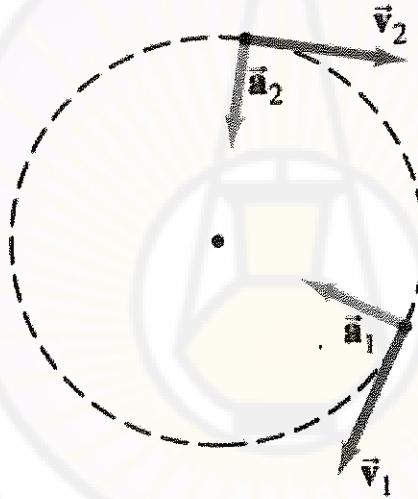
تحديد التغير في السرعة $\Delta \vec{v}$ من أجل جسيم يتحرك على دائرة، الطول $d\ell$ هو المسافة على القوس من A إلى B.

إن التسارع المركزي يتجه دائماً إلى مركز الدائرة، ولكن شعاع السرعة يتجه دائماً باتجاه الحركة، ومحمول على مماس الدائرة، وشعاع السرعة والتسارع متعامدان مع بعضهما في كل نقطة من مسار الحركة الدائرية المنتظمة الشكل (3 - 27)، توصف الحركة الدائرية بأنها دورية.

$$f = \frac{1}{T} \quad (3 - 32)$$

f : تواتر الحركة ويقاس بالهرتز H_z .

T : زمن دورة كاملة ويدعى الدور ويقدر بالثانية.



الشكل (3 - 27)

من أجل الحركة الدائرية المتجانسة $\vec{a}$ ، يتعامد دائماً مع $\vec{v}$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f \quad (3 - 33)$$

(مثال 3- 15):

تربط كرة بنهاية خيط، وتدور بسرعة منتظمة على مسار أفقي دائري نصف قطره $0.600m$ ، كما في الشكل السابق (3 - 25)، ما التسارع المركزي، إذا علمت أن الكرة تدور دورتين في الثانية ؟

الحل:

الكرة تدور دورتين في الثانية ما يعني يلزمها نصف ثانية لإنجاز دورة كاملة واحدة.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 0.600}{0.500} = 7.54 \text{ m/s}$$

والتسارع المركزي

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(7.54)^2}{0.600} = 94.7 \text{ m/s}^2$$

(مثال 3- 16):

إن حركة القمر حول الأرض قريبة من الحركة الدائرية، نصف قطرها $384000km$ ، ودور هذه الحركة 27.3 يوماً، إحسب تسارع القمر.

الحل:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad a_R = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$T = 27.3 \times 24 \times 3600 = 2.36 \times 10^6 \text{ s}$$

$$a_R = \frac{4\pi^2 \times (3.84 \times 10^8)}{(2.36 \times 10^6)^2} = 2.72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

التسارع المركزي للقمر $\frac{2.72 \times 10^{-3}}{9.8} = 2.78 \times 10^{-4} g$ وهو ليس تسارع الجاذبية لجسم على سطح القمر بسبب جاذبية القمر.

3-15 الطرد المركزي

الطرد المركزي العالي السرعة يستخدم من أجل تثقيف المواد (مائع، سائل، غاز، هلام)، أو لفصل المواد لأن جزيئ المادة يحاول الخروج من المسار الدائري، ولكن جزيئات المائع تقاوم حركته. إن الطرد المركزي يؤمن جاذبية فعالة أكثر من الجاذبية العادية بسبب السرعة العالية للدوران ما يسبب تثقيف سريع أكثر.

(مثال 3-17):

يدور جسيم بسرعة 50000 rpm ، (دورة في الدقيقة) و يبعد 6.00 cm ، عن محور الدوران إحسب تسارعه المركزي بدلالة g .

الحل:

$$T = \frac{1}{\frac{50000}{60}} = 1.20 \text{ ms}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 0.06}{1.20 \times 10^{-3}} = 3.14 \times 10^2 \text{ m/s}$$

والتسارع النابذ

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.14 \times 10^2)^2}{0.06}$$

$$a_R = 1.64 \times 10^6 \text{ m/s}^2 = 167000g$$

16-3 تحريك الحركة الدائرية المنتظمة

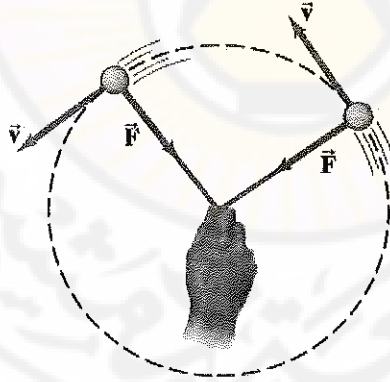
يملك الجسم تسارعاً عندما تكون محصلة القوى المؤثرة فيه غير معدومة، مثلاً الكرة المربوطة بخيط يجب أن تؤثر فيها قوة تجبرها على الحركة على مسار دائري، فالقوة المحصلة ضرورية لإعطائه تسارعاً مركزياً، وقيمة هذه القوة يمكن حسابها باستخدام قانون نيوتن الثاني.

$$\sum F_R = ma_R = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\ell}{\Delta t} \quad (3 - 34)$$

$\sum F_R$: القوة المحصلة في الاتجاه القطري.

$$\sum F_R = ma_R = m \frac{v^2}{r} \quad (3 - 35)$$

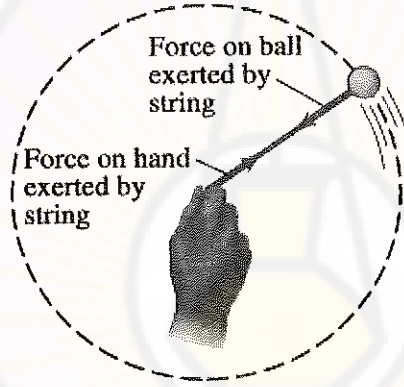
من أجل الحركة الدائرية المنتظمة (ثابت v)، التسارع المركزي a_R ، الموجه بإتجاه مركز الدائرة في أي لحظة، وكذلك القوة المحصلة يجب أن تتجه بإتجاه مركز الدائرة أيضاً الشكل (3 - 28)، وهي ضرورية لأنه عندما لا يكون هناك قوة محصلة تؤثر في الجسم فإنه سوف لن يتحرك على دائرة، ولكن يتحرك على مسار مستقيم.



الشكل (3 - 28)

القوة المطلوبة لبقاء الجسم يتحرك على مسار دائري، إذا كانت السرعة ثابتة فإن جهة القوة هي نحو المركز.

القوة المؤثرة في الكرة متغيرة الإتجاه باستمرار، و متجهة دوماً، إلى المركز، ويمكن تسميتها بالقوة الجاذبة، ولكن ينبغي علينا أن نكون حذرين، القوة الجاذبة لا تعني نوعاً جديداً من القوى، ولكنه مجرد تعبير يصف إتجاه القوة المحصلة المطلوبة للحفاظ على المسار الدائري. القوى يجب أن تطبق بوساطة أجسام أخرى، مثلاً إذا أردنا لكرة مربوطة بخيط أن تترنح على مسار دائري، علينا أن نؤثر في الخيط بقوة، الخيط بدوره سيؤثر في الكرة بقوة، هناك خطأ شائع بأن الجسم المتحرك على مسار دائري تؤثر فيه قوة طرد مركزي، وهذا غير صحيح حيث أنه لا تأثير لهذه القوة في الجسم الذي يتحرك على مسار دائري. لنفرض على سبيل المثال أن شخصاً يحاول تدوير الكرة حول يده بوساطة خيط الشكل (3 - 29)، سيشعر بقوة تشد يده نحو الخارج، والخطأ ينجم إذا اعتقدنا أن هذه القوة هي قوة شد خارجي مؤثرة في الكرة وتنتقل عن طريق الخيط إلى اليد، وهذا لا يحدث البتة.



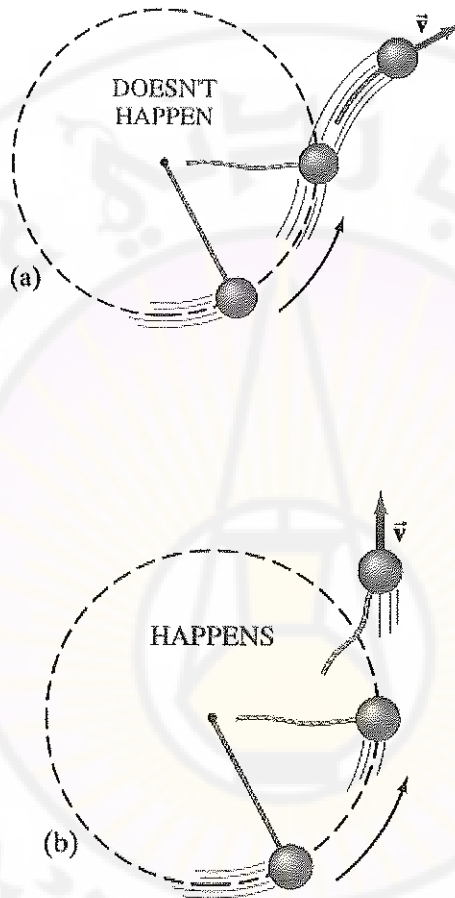
الشكل (3 - 29)

حركة الكرة المربوطة بنهاية الخيط.

من أجل إبقاء الكرة على المسار الدائري علينا أن نؤثر بقوة في الخيط إلى الداخل، والخيط بدوره يؤثر في الكرة، والكرة تؤثر في الوقت نفسه في الخيط بالقوة نفسها، و بجهة معاكسة (القانون الثالث لنيوتن).

إن القوة المؤثرة في الكرة هي قوة جهتها إلى الداخل بوساطة اليد عن طريق الخيط، ومن أجل أن نبين ذلك جلياً بأن القوة الطاردة ليست قوة حقيقية تؤثر في الكرة عند ترك الخيط فإن الكرة لا تسلك المسار المبين على الشكل (3 - 30 - a)، إلى الخارج، وإنما تسلك

مساراً مستقيماً مماساً للدائرة، الشكل (3 - 30 - b)، في إتجاه السرعة لحظة الإفلات، وكذلك لا تؤثر قوة إلى الداخل، لاحظ عامل الحداة عندما يستعمل حجر الجليخ ما جهة الشرارات المتناثرة.



الشكل (30 - 3)

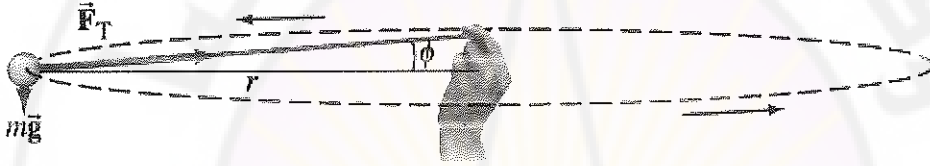
إذا كانت القوة المركزية موجودة فإن الكرة التي تتحرك على مسار دائري يجب ان تتابع حركتها على مسار كما في (a)، عندما تتحرر من الخيط، ولكن في الواقع تسلك المسار (b).

(مثال 3-18):

احسب القوة التي يجب أن يطبقها شخص على خيط في نهايته كرة كتلتها 0.150kg ، لجعلها تدور على دائرة أفقية نصف قطرها 0.600m ، الشكل (3 - 31)، علماً بأن الكرة تدور دورتين في الثانية (كتلة الخيط مهملة).

الحل:

في البداية علينا ان نرسم مخطط الجسم الحر، القوى المؤثرة في الكرة هي قوة الثقالة $m\vec{g}$ ، وقوة توتر الخيط $\vec{F}_T$ ، لأن الخيط يؤثر في اتجاه يد الشخص نحو المركز، نفرض أن وزن الكرة صغير وأن $\phi \approx 0$ ، بحيث أن $\vec{F}_T$ أفقية تقريباً من أجل تأمين القوة اللازمة لإعطاء الكرة التسارع المركزي.



الشكل (3 - 31)

نطبق القانون الثاني على الإتجاه القطري

$$\left(\sum F\right)_R = ma_R, \quad a_R = \frac{v^2}{R}$$

$$F_T = m \frac{v^2}{R} = 0.150 \times \frac{(7.54)^2}{0.600} \approx 14\text{N}$$

(مثال 3-19) - الدائرة الشاقولية

كرة كتلتها 0.150kg ، تربط بنهاية خيط طوله 1.10m ، (كتلته مهملة) تدور على دائرة شاقولية الشكل (3 - 32)، احسب:

- سرعة الكرة عند القمة كي تحافظ على حركتها على الدائرة الشاقولية.
- توتر الخيط عند القاع بفرض أن سرعتها ضعف سرعتها عند القمة.

الحل:

الكرة تتحرك على دائرة شاقولية، وبالتالي تخضع لحركة دائرية ليست منتظمة، لأن سرعة الكرة تتغير بسبب قوة الجاذبية، ان المعادلة (31 - 3) صالحة من أجل كل نقطة من الدائرة، مخطط الجسم الحر مبين على الشكل أدناه.

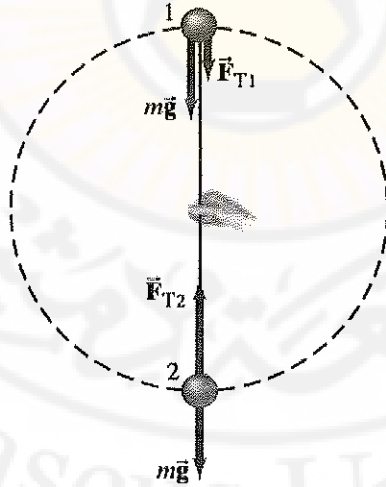
a. تؤثر في الكرة في القمة قوتان هما $m\vec{g}$ و $\vec{F}_{T1}$ ، وكلاهما نحو الأسفل، نطبق القانون الثاني على الإتجاه الشاقولي (الإتجاه الموجب إلى مركز الدائرة).

$$\left(\sum F\right)_R = ma_R$$
$$F_{T1} + mg = m \frac{v_1^2}{R}$$

من هذه العلاقة نرى أن سرعة الكرة تتناسب مع قوة التوتر F_{T1} ، إذا من المتوقع أن تكون F_{T1} ، معدومة عند القمة و السرعة تأخذ قيمة دنيا.

$$mg = m \frac{v_1^2}{R}$$
$$v_1 = \sqrt{Rg} = \sqrt{1.10 \times 9.8} = 3.283 \text{ m/s}$$

السرعة المطلوبة للكرة حتى تستطيع الاستمرار بالحركة على الدائرة الشاقولية.



الشكل (32-3)

مخططات الجسم الحر من أجل الاوضاع 1 و 2

b. عند القاع تؤثر قوتان F_{T2} ، (باتجاه المركز) والأخرى قوة الثقل.

$$F_{T2} - mg = m \frac{v_2^2}{R}$$

$$F_{T2} = mg + m \frac{v_2^2}{R}$$

$$F_{T2} = 0.150 \times \left(9.8 + \frac{(2 \times 3.283)^2}{1.10} \right) = 7.35N$$

(مثال 3- 20) - النواس المخروطي

كرة صغيرة، معلقة بخيط طوله ℓ ، وتدور على مسار دائري نصف قطره r ، الشكل (3- 33)، ويصنع خيطه زاوية θ ، مع الشاقول.

a- ما اتجاه تسارع الكرة.

b- ما سرعة ودور الكرة بدلالة (ℓ, θ, g)

الحل:

من الشكل (3- 33)، نرى أن الكرة تتحرك على دائرة أفقية، وبالتالي تسارعها يكون موجهاً بالإتجاه الأفقي، بإتجاه مركز الدائرة الأفقية، القوة المسؤولة عن التسارع هي القوة المحصلة لقوتي ثقل الكرة $\vec{F}_G = m\vec{g}$ ، وقوة تؤثر الخيط $\vec{F}_T$ ، يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين، الأولى أفقية، $F_T \sin \theta$ ، والأخرى عمودية، $F_T \cos \theta$ ، من الشكل لدينا:

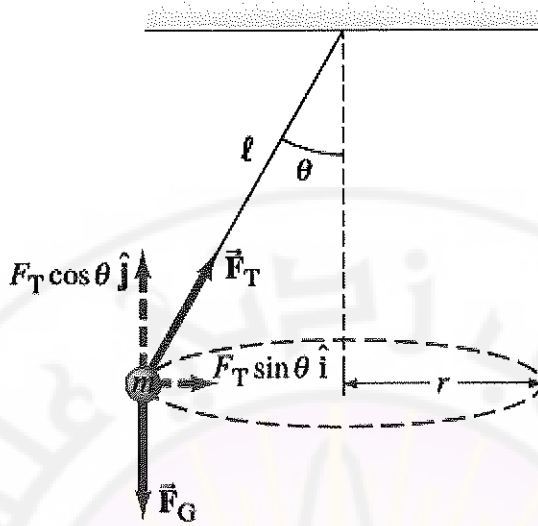
$$r = \ell \sin \theta$$

a- نطبق قانون نيوتن الثاني على الإتجاه الشاقولي، حيث التسارع معدوم.

$$F_T \cos \theta - mg = 0$$

مما يؤكد أن تسارع الكرة بإتجاه مركز الدائرة ومحمول على قطر الدائرة، أما في الإتجاه الشاقولي

$$F_T \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$



الشكل (3 - 33)

النواس المخروطي

-b بحذف F_T ، من المعادلتين نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{\ell g (\sin \theta)^2}{\cos \theta}}$$

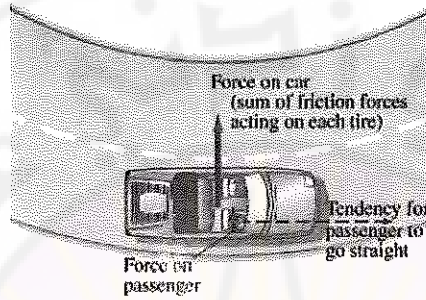
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \ell \sin \theta}{\sqrt{\frac{\ell g (\sin \theta)^2}{\cos \theta}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \theta}{g}}$$

نلاحظ أن السرعة والدور لايتعلقان بالكتلة الكرة.

17-3 إمالة الطرق عند المنعطفات

عندما تتركب في سيارة تسير على طريق منحنية تشعر أن هناك قوة تدفعك إلى خارج المسار، علينا أن نتذكر انه لا توجد قوة مركزية طاردة، هل تميل للسيارة على مسار مستقيم أم على المسار المنحني مع السيارة ؟ إن الذي يجعلك تسير على هذا المسار هو قوة

الإحتكاك أو قوى التماس المباشر الشكل (3 - 34)، إذا كانت إطارات السيارة تتحرك على طريق مستوية دون إنزلاق نرى أن أسفل العجلة تكون في حالة توازن مع الطريق في كل لحظة، لذلك فإن قوة الإحتكاك بين الإطار والطريق هي قوة إحتكاك سكوني، ولكن إذا كانت قوة الإحتكاك غير كافية لموازنة القوة المركزية فإن السيارة تخرج عن الطريق المنحني.



الشكل (3 - 34)

المسار الدائري يمارس قوة إلى الداخل على السيارة، (الإحتكاك يعاكس العجلات) لجعلها تتحرك على دائرة، السيارة تؤثر بقوة إلى الداخل على الراكب.

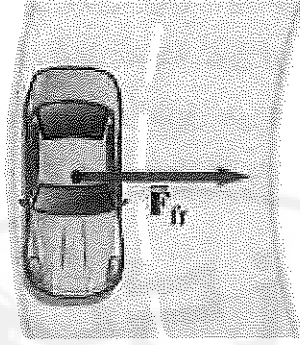
(مثال 3-21):

تتحرك سيارة كتلتها 1000kg ، على مسار دائري مستو نصف قطره 50m ، بسرعة 15 m/s ، هل تسلك السيارة المسار الدائري أم تنزلق في الحالتين التاليتين:

a - الطريق الجاف $\mu_s = 0.60$ ، b - الطريق المنزلقة $\mu_s = 0.2$

الحل:

القوى المؤثرة في السيارة هي قوة الثقل، والقوة الناعظمية وقوة الإحتكاك الأفقية بسبب الطريق الشكل (3 - 35)، يمثل مخطط الجسم الحر للسيارة، السيارة ستسلك الطريق المنحنية إذا كانت قوة الإحتكاك السكونية العظمى أكبر من جداء الكتلة بالتسارع المركزي.



(b)

الشكل (3 - 35)

في الإتجاه العمودي لا يوجد تسارع.

$$F_N = mg = 1000 \times 9.80 = 9800N$$

و في الإتجاه الأفقي القوى المؤثرة هي قوة الإحتكاك فحسب.

$$\left(\sum F\right)_R = ma_R = m \frac{v^2}{r} = 1000 \times \frac{(15)^2}{50} = 4500N$$

علينا حساب قوة الإحتكاك الكلية ومقارنتها فيما إذا كانت كبيرة بشكل كاف لبقاء السيارة على المسار الدائري

a. الإحتكاك السكوني $\mu_s = 0.60$.

$$F_{fr} \leq \mu_s F_N, \quad (F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = (0.60) \times (9800) = 5880N$$

والسيارة تسلك المسار الدائري ولا تنزلق.

b. الإحتكاك السكوني $\mu_s = 0.25$.

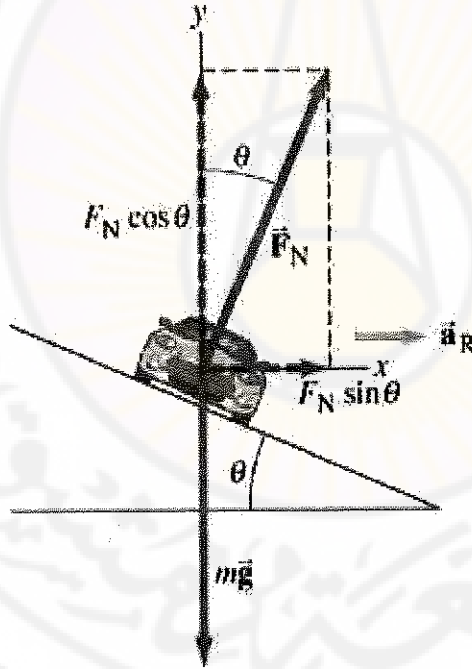
$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = (0.25)(9800) = 2450N$$

السيارة ستنزلق لأن الأرض لن تؤثر بشكل كاف (المطلوب 4500N).

يمكن التقليل من خطر الإنزلاق على الطرق المنحنية أو الدائرية، وذلك بإمالة الطريق بزاوية باتجاه مركز الدائرة، مما يسمح بانتاج مركبة (أفقية) للقوة الناعظمية جهتها إلى مركز الدائرة، هذه الطريقة تقلل من الاعتماد على الإحتكاك المطلوب لتجنب الإنزلاق على الطريق المائل.

(مثال 3-22):

تتحرك سيارة بسرعة v ، على مسار منحن نصف قطره r ، عين الزاوية التي يجب إمالة الطريق بها حتى تجعل الإحتكاك غير مطلوب من أجل تجنب الإنزلاق. الشكل (3-36)



الشكل (3-36)

القوة الناعظمية المؤثرة في السيارة التي تتحرك على منحني دائري يمكن تحليلها إلى مركبتين، التسارع المركزي (لا يوازي الطريق المائل)، قوة الإحتكاك على الاطارات لاتظهر وتتجه إما إلى الأعلى او الأسفل، إحسب سرعة السيارة وهي موازية للطريق.

الحل:

القوى المؤثرة هي قوة النقل mg ، وقوة رد الفعل الناعظمي من الطريق F_N ، (دون الحاجة لقوة الإحتكاك)

$$F_N \cos \theta - mg = 0$$

$$F_N \cos \theta = mg \quad (i)$$

$$F_N \geq mg$$

وبإسقاط هذه العلاقة على الإتجاه الأفقي:

$$F_N \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad (ii)$$

ومنه نحصل بعد تقسيم العلاقتين (i)، (ii)

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg} \quad (3 - 36)$$

3-18 الحركة الدائرية اللامنتظمة

تحدث الحركة الدائرية بسرعة ثابتة عندما تؤثر القوة المحصلة في جسم بإتجاه مركز الدائرة، إذا كانت القوة المحصلة المؤثرة في جسم غير موجهة بإتجاه مركز الدائرة وتضع زاوية كما مبين على الشكل (3 - 37 - a)، تكون للقوة مركبتين:

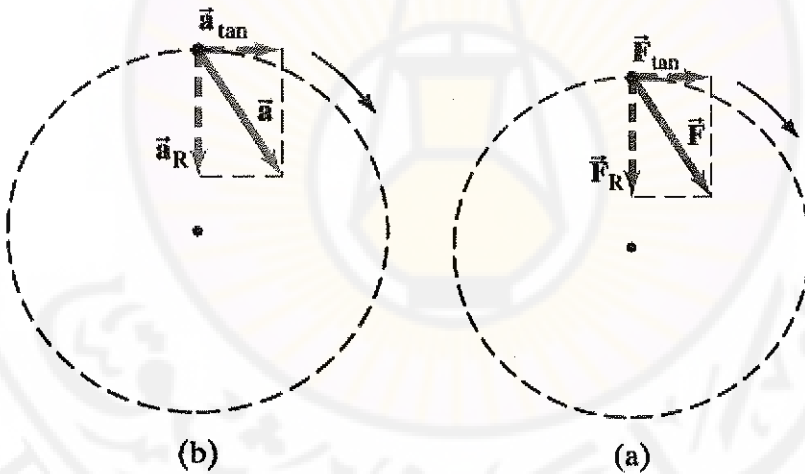
- المركبة الموجهة بإتجاه المركز $\vec{F}_R$ ، المسؤولة عن التسارع المركزي $\vec{a}_R$ ، وتحافظ على حركة الجسم على الدائرة.

• أما المركبة الأخرى وهي المركبة المماسية $\vec{F}_{tan}$ ، تؤدي إلى تزايد أو تناقص سرعة الجسم والمسؤولة عن التسارع المماسي $\vec{a}_{tan}$ ، لاحظ عندما تدور كرة مربوطة بخيط حول رأسك عليك أن تعطيها تسارعاً مماسياً، وتقل ذلك بالشد على الخيط بيدك وتشعر بيدك، تتحرك حول مركز الدائرة، المركبة المماسية لشعاع التسارع المماسي $\vec{a}_{tan}$ ، الشكل (3 - 37 - b)، ولها قيمة تساوي معدل تغير قيمة سرعة الجسم.

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} \quad (3 - 36)$$

$$a_R = \frac{v^2}{r} \quad (3 - 37)$$

التسارع المركزي يزداد بسبب التغير في الاتجاه السرعة، والتسارع المماسي يكون محمولاً دائماً على مماس الدائرة (موازي لشعاع السرعة $\vec{V}$ ، ومماس للدائرة دائماً).



الشكل (3 - 37)

- سرعة الجسم المتحرك على دائرة تتغير إذا كانت القوة المطبقة عليه لها مركبة مماسة F_{tan} .
- a يبين القوة $\vec{F}$ ومركباتها الشعاعية.
- b يبين شعاع التسارع ومركبته الشعاعية.

التسارعين المماسي والناظمي متعامدان وإتجاههما يتغير باستمرار طالما يتحرك الجسم على مسار دائري و شعاع التسارع الكلي.

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{a}_{tan} \quad (3 - 38)$$

وكذلك

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_{tan}^2} \quad (3 - 39)$$

(مثال 3-23):

تبدأ سيارة سباق الحركة من السكون بمعدل سرعة ثابت $35m/s$ ، خلال $11s$ ، تتحرك

على مسار دائري نصف قطره $500m$ ، ولنفرض أن التسارع المماسي ثابت إحسب:

(a) التسارع المماسي.

(b) التسارع القطري في اللحظة التي يكون السرعة $15m/s$.

الحل:

التسارع المماسي يتعلق بتغير سرعة السيارة ويمكن حسابه

$$a_{tan} = \Delta v / \Delta t$$

التسارع المركزي يتعلق بالتغير في إتجاه شعاع السرعة ويحسب من العلاقة.

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

(a) خلال زمن $11s$ ، نفرض أن التسارع المماسي a_{tan} ثابت وقيمه

$$a_{tan} = \Delta v / \Delta t = \frac{35 - 0}{11} = 3.2 m/s^2$$

(b) عندما $v = 15 m/s$ ، فإن التسارع المركزي

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{15^2}{500} = 0.45 m/s^2$$

نلاحظ أن التسارع المركزي يزداد باستمرار بينما التسارع المماسي يبقى ثابتاً

مسائل

3-1 يتحرك جسيم كتلته 2 kg بدءاً من السكون على خط مستقيم بتسارع ثابت، فيقطع مسافة 8 m خلال ثانيتين، ثم يسير بسرعة ثابتة لمسافة 20 m أخرى، ثم يتباطأ إلى أن يقف بعد قطع مسافة 16 m أخرى ، أوجد القوة المؤثرة في الجسيم في كل مرحلة من مراحل الحركة .

3-2 يتحرك جسيم مادي كتلته m في المستوي o x y بحيث تعطى حركته في أية لحظة بالمعادلات الوسيطة التالية :

حيث $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$, k, b, a - ثوابت موجبة ، أوجد القوة التي يخضع لها الجسيم في أية لحظة على مساره .

3-3 يبدأ جسيم كتلته m حركته من السكون على مسار دائري نصف قطره R بتسارع مماسي ثابت a_t ، أوجد القوة المؤثرة في الجسيم في اللحظة التي يكون فيها الجسيم قد قطع مسافة قدرها $R\sqrt{2}$ على مساره .

3-4 جسيم كتلته 10 kg واقع تحت تأثير القوة $F = (120t + 40)N$ يتحرك على خط مستقيم ، فإذا علمت أنه في اللحظة $t=0$ كان في الموضع $x_0 = 5m$ وسرعته $v_0 = 6m/s$ ، أوجد سرعته وموضعه في أية لحظة .

3-5 تصعد سيارة كتلتها 1000 kg طريقاً مائلة بزاوية 20° ، عين القوة التي يولدها المحرك حين تتحرك السيارة (a) بحركة منتظمة (b) بتسارع مقداره $0.2m/s^2$ ، أوجد كذلك القوة التي يؤثر بها الطريق في السيارة في الحالتين السابقتين .

3-6 يتحرك جسيم كتلته 10 kg على طاولة أفقية ملساء تحت تأثير قوة شد وفق حبل يميل بزاوية 45° على الأفق ، أوجد قوة شد الحبل، وكذلك قوة رد فعل الطاولة على الجسم إذا كان تسارعه $2m/s^2$.

3-7 يهبط منطاد كتلته الكلية m بتسارع ثابت a ، أوجد الكتلة التي يجب التخلص منها حتى يبدأ المنطاد حركته بالارتفاع بالتسارع نفسه السابق .

3-8 مصعد كتلته m يبدأ بالصعود بتسارع a ، عين قوة توتر الحبل المعدني الذي يسحب المصعد ، ناقش في حالة الهبوط أيضاً .

3-9 بإهمال قوة الاحتكاك ومقاومة الهواء عين الزمن الذي يستغرقه عبور جسم قناة أفقية محفورة داخل الأرض وعلى مسافة ما من مركزها ، تعطى $R = 6370 \text{ km}$ (نصف قطر الأرض) .

3-10 جسم كتلته $0,2 \text{ kg}$ موجود على سطح مائل بزاوية 30° ، ما القوة الواجب تطبيقها على الجسم لكي يتحرك (a) نحو الأعلى (b) نحو الأسفل، نفرض في كلتا الحالتين أن الجسم يتحرك حركة منتظمة أولاً؛ ثم بحركة متسارعة بتسارع مقداره $0,1 \text{ m/s}^2$ ، مع العلم أن معامل الاحتكاك على السطح هو $0,3$.

3-11 إحسب القوة الناعمية والمماسية التي تؤثر في قذيفة تطلق أفقياً من سطح بناء بسرعة ابتدائية v_0 .

3-12 تؤثر قوة مقدارها 40 N وتصنع زاوية 37° مع الأفق على صندوق وزنه 50 N موضوع على سطح أفقي خشن ويتحرك بتسارع ثابت 4 m/s^2 ، أوجد قوة الاحتكاك وكذلك معامل الاحتكاك بين الصندوق والسطح .

3-13 أوجد تسارع جسيم ينزلق على مستو يميل على الأفق بزاوية θ في الحالتين (a) بدون احتكاك (b) بوجود احتكاك بين الجسيم والمستوي، علماً أن معامل احتكاك السطوح μ .

3-14 كتلتان $m_1 = 2 \text{ kg}$ ، $m_2 = 3 \text{ kg}$ موضوعتان على سطح أفقي ومتماستان ، أوجد تسارع الجملة علماً أن الكتلة m_1 تدفع بقوة أفقية 10 N ، وما القوة التي يؤثر بها m_1 على m_2 ، تهمل قوة الاحتكاك .

3-15 تسير سيارة بسرعة v حول منعطف نصف قطره r ، أوجد الزاوية التي يجب أن يميل بها الطريق على الأفق؛ حتى تستطيع السيارة الدوران بدون إنزلاق بإهمال الاحتكاك بين العجلات والطريق .

3-16 كرة كتلتها m معلقة بخيط طوله L ، تجعل الكرة تدور في مستو أفقي فترسم دائرة نصف قطرها r توافق انحراف خيط الكرة بزاوية θ عن الشاقول ، أوجد دور الحركة بدلالة r ، L ، g .

3-17 مستوي A ذو سطح خشن يميل على الأفق بزاوية 30° ، ويستند على مستوي خشن آخر B يميل على الأفق بزاوية 60° وله نفس الارتفاع ، تثبت بكرة في أعلى نقطة من المستويين، ويمر عليها خيط مهمل الكتلة وعديم الامتطاط تتصل نهايته بكتلتين الأولى موضوعة على المستوي A وكتلتها $0,2 \text{ kg}$ والأخرى موضوعة على المستوي B وكتلتها $0,6 \text{ kg}$ ، فإذا فرضنا أن معامل الاحتكاك على المستويين هو $1/\sqrt{3}$ ، احسب تسارع الجملة .

3-18 حل المسألة السابقة (17) عندما يكون المستوي B عامودي على الأفق .

3-19 تبلغ كتلة رصاصة $0,05 \text{ kg}$ وتتحرك بسرعة 400 m/s ، تخترق قطعة من الخشب مثبتة جيداً في الأرض لمسافة $0,1 \text{ m}$ ، إذا فرضنا أن التباطؤ الناشئ عن الاحتكاك ثابت احسب :

(a) تباطؤ الرصاص (b) القوة المسببة للتباطؤ (c) زمن التباطؤ (d) دفع القوة خلال الزمن نفسه، قارن دفع القوة مع كمية حركة الرصاصة الابتدائية .

3-20 ينزلق خيط مهمل الكتلة وعديم الامتطاط على بكرة عندما يعلق بطرفيه كتلتان $m_1 = 1 \text{ kg}$ ، $m_2 = 2 \text{ kg}$ احسب تسارع الجملة .

3-21 حلقة ثقيلة كتلتها m تحيط بسلك أملس أفقي على شكل دائرة ، تعطي الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس للدائرة ، وعند الحركة تؤثر في الحلقة قوة $F = km\sqrt{v}$ حيث m - كتلة الحلقة v - سرعتها و k - معامل ثابت ، عين الزمن اللازم لكي تتوقف الحلقة عن الحركة .

3-22 عمود اسطواني يدور بسرعة 90 دورة في الدقيقة ، وبعد إيقاف المحرك يبدأ العمود بالدوران المنتظم التباطؤ حتى يقف بعد 40 s ، عين عدد الدورات التي يدورها العمود خلال هذا الزمن .

3-23 بكرة A نصف قطرها 30 cm ساكنة، تبدأ بالدوران فتزداد سرعتها الزاوية بانتظام بمعدل $0,4\pi \text{ rad/s}^2$ ثم تنقل حركتها بواسطة سيار إلى بكرة أخرى B نصف قطرها 12 cm ، أوجد العلاقة بين سرعتين الزاويتين ونصف قطر البكرتين، وما الزمن اللازم للبكرة B لتصل سرعتها الزاوية إلى 300 دورة / دقيقة .

24-3 تدور الأرض بانتظام حول محورها بسرعة زاوية $7,292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ، أوجد

بدلالة درجة خط العرض سرعة نقطة على سطح الأرض وتسارعها

25-3 أوجد السرعة الزاوية لعقارب الساعة الثلاثة .

26-3 يدور حجر طاحون بتسارع زاوي ثابت بدءاً من السكون زاوية مقدارها 120°

خلال خمس ثوان، (a) أوجد السرعة الزاوية للحجر ، (b) السرعة الزاوية اللحظية في اللحظة $t = 5\text{s}$.

27-3 تزداد السرعة الزاوية لدولاب بانتظام من 20 rad/s إلى 30 rad/s خلال خمس

دقائق ، إحسب التسارع الزاوي والزاوية الكلية التي دارها الدولاب خلال هذا الزمن

الفصل الرابع التوازن السكوني

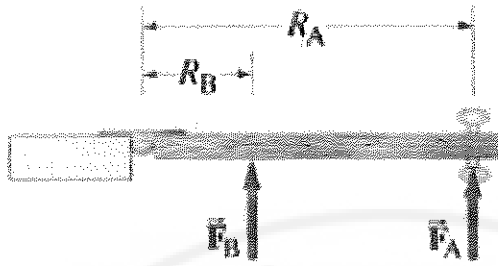
STATIC EQUILIBRIUM

1-4 تمهيد :

نحن الآن بصدد دراسة حالة خاصة في الميكانيك عندما يكون محصلة القوى المؤثرة في جسم أو على جملة وكذلك محصلة العزوم المؤثرة في الجسم أو على الجملة كلاهما يساوي الصفر، في هذه الحالة يكون كلاً من التسارع الخطي والتسارع الزاوي أيضاً معدوم، فالجسم يكون في حالة توازن أو أن مركز كتلته يتحرك بسرعة ثابتة، سوف نهتم الآن بشكل أساسي بالحالة الأولى عندما يكون الجسم في حالة توازن، سنرى كيف يتم تحديد القوى والعزوم التي تؤثر في بنية الجملة، بالضبط كيف وأين تؤثر القوى ؟ يمكن أن يكون سؤالاً هاماً جداً من أجل بناء الجسور والبنائات السكنية و بناء منظومات أخرى مثل جسم الإنسان، السكون هو علم يهتم بحساب القوى المؤثرة في الجملة وهي في حالة توازن.

2-4 عزم القوة

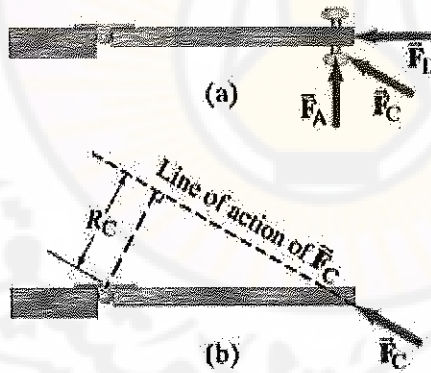
لجعل الجسم يدور حول محور من الواضح أنه يحتاج لتطبيق قوة، ولكن جهة هذه القوة أو مكان تطبيقها له أهمية، و خير مثال على ذلك عندما نطبق قوة خارجية في الباب كما هو واضح على الشكل (4 - 1)، فإنه كلما زادت قيمة القوة $\vec{F}_A$ ، كلما كان دوران الباب أسرع، والآن إذا طبقنا القوة نفسها، ولكن في مكان أقصر $\vec{F}_B$ ، فإن الباب يدور بسرعة أقل، أي أن تأثير القوة أقل، وبالتالي نقطة تأثير وجهتها وقيمتها القوة تحدد سرعة دوران الباب، وكذلك التسارع الزاوي للباب يتناسب ليس مع قيمة القوة فحسب، بل مع البعد بين محور الدوران و حامل القوة (خط عمل القوة)، هذه المسافة تدعى ذراع الرافعة أو ذراع القوة.



الشكل (4 - 1)

منظر علوي للباب، نطبق نفس القوة على أذرع مختلفة R_A, R_B ، حيث $R_A = 3R_B$ ومن أجل الحصول على نفس الفعل (التسارع الزاوي) يجب أن يكون $F_B = 3F_A$

إذا طبقنا القوة نفسها، $\vec{F}_A$ ، ولكن باتجاه $\vec{F}_C$ ، الشكل (4 - 2)، نرى فعلها على الباب أقل من فعل القوة $\vec{F}_A$ ، أما فعل القوة $\vec{F}_D$ ، يكون معدوماً أي أن الباب لا يدور، لذلك عزم القوة $\vec{F}_C$ ، أقل من عزم $\vec{F}_A$ ، لأن ذراع القوة $\vec{F}_A$ ، هو وتر في المثلث القائم بينما حامل القوة $\vec{F}_D$ ، يمر من خلال محور الدوران، وبالتالي ذراعها معدوم.



الشكل (4 - 2)

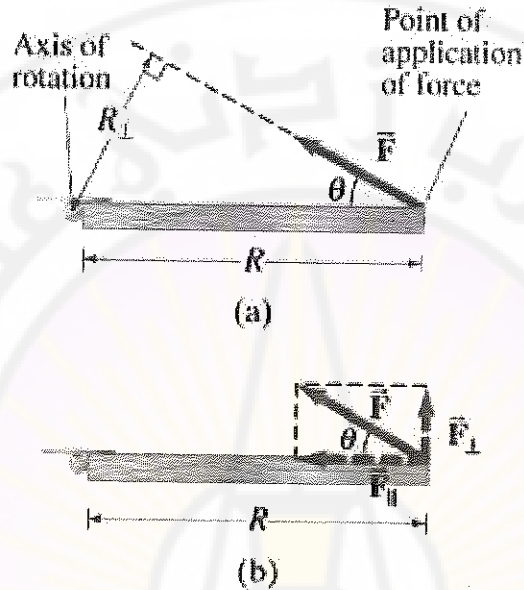
a- القوى تؤثر بزوايا مختلفة عند الحافة.

b- الذراع هو المسافة المقامة من محور الدوران إلى حامل القوة (خط عمل القوة).

$$\tau = R_{\perp} F \quad (4 - 1)$$

$R_{\perp}$: ذراع القوة

بشكل عام يمكن تحليل القوة إلى مركبتين أحدهما عمودية على الخط الواصل بين نقطة تأثير القوة و محور الدوران وأخرى موازية له الشكل (3 - 4).



الشكل (3 - 4).

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} \quad (4 - 2)$$

$$\vec{\tau} = \sum_i^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}(\vec{F}_{\parallel}) + \vec{\tau}(\vec{F}_{\perp}) \quad (4 - 3)$$

عزم القوة المارة من محور الدوران معدوم

$$\vec{\tau}(\vec{F}_{\parallel}) = 0 \quad (4 - 4)$$

$$\tau(F_{\perp}) = RF_{\perp} \quad (4 - 5)$$

من الشكل (4 - 3) لدينا:

$$F_{\perp} = F \sin \theta$$

$$\tau = \tau(F_{\perp}) = RF \sin \theta$$

$$\tau = RF \sin \theta \quad (4 - 6)$$

θ : الزاوية الشائبة $(\vec{F}, \vec{R})$

R : المسافة بين محور الدوران و نقطة تأثير القوة. من الشكل (4 - 3 - a)

$$R_{\perp} = R \sin \theta$$

نعوض في (4 - 6)

$$\tau = R_{\perp} F$$

عزم القوة هو كمية شعاعيه، ونلاحظ من العلاقات السابقة أن قيمة العزم تحقق القيمة المطلقة لجداء شعاعين خارجياً كما مر معنا في، لذلك نستطيع أن نكتب:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} \quad (4 - 7)$$

$\vec{R}$: شعاع الموضع لنقطة تأثير القوة بالنسبة إلى نقطة 0، يدور حولها الجسم.

عزم القوة $\vec{\tau}$ ، يحقق خواص الجداء الشعاعي التي مرت معنا ويقاس $m.N$ في وحدات SI و $cm.dyne$ في وحدات cgs .

(مثال 4-1):

قرصين رقيقين على شكل عجلة نصفاً قطريهما $R_A = 30cm$, $R_B = 50cm$ ، متصلان عند محور العجلة عند مركزي القرصين، الشكل (4 - 4)، إحسب العزم على العجلة المركبة الناجم عن القوتين المبينتين على الشكل، قيمة كل من القوتين $F_B = F_A = 50N$

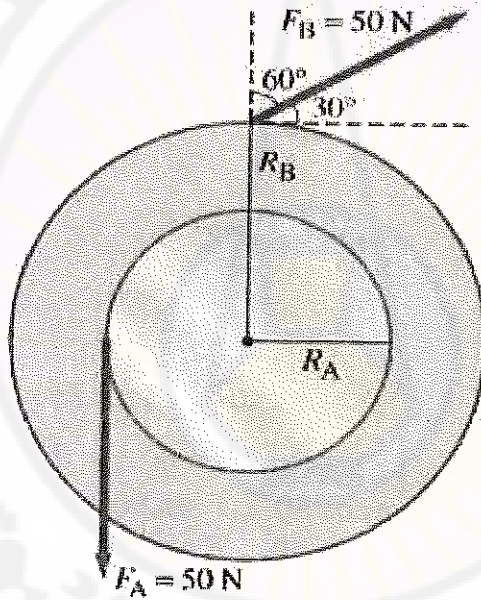
الحل:

نلاحظ أن لكلا القوتين عزمين متعاكسين غير معدومين، نفرض أن الجهة الموجبة هي جهة الدوران، بعكس عقارب الساعة

$$\tau = R_A F_A \sin \theta_A - R_B F_B \sin \theta_B$$

$$\tau = 0.30 \times 50 \times \sin 90^\circ - 0.50 \times 50 \times \sin 60^\circ$$

$$\tau = -6.7 \text{ m.N}$$

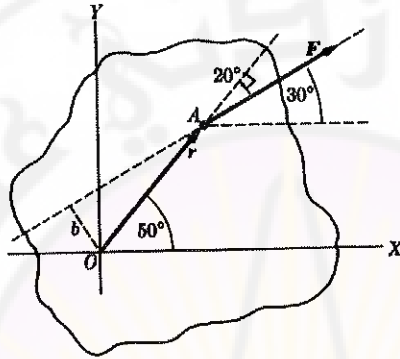


الشكل (4 - 4)

العزم الناجم عن القوة $\vec{F}_A$ ، يسعى لتسريع العجلة عكس إتجاه عقارب الساعة بينما العزم الناجم عن $\vec{F}_B$ يسعى لتسريع العجلة مع إتجاه عقارب الساعة.

(مثال 4-2):

عين العزم المطبق على الجسم المبين في الشكل (4-5)، حيث قيمة القوة F ، تساوي 6N، وتصنع زاوية 30° مع المحور x ، وقيمة r ، هي 45 cm، وتصنع زاوية 50° مع المحور x ، أيضاً.



الشكل (4-5)

الحل:

باستخدام المعادلة (4-7)، نستطيع أن نكتب :

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r \cos 50^\circ & r \sin 50^\circ & 0 \\ F \cos 30^\circ & F \sin 30^\circ & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \vec{k}[(r \cos 50^\circ) \cdot (F \sin 30^\circ) - (r \sin 50^\circ) \cdot (F \cos 30^\circ)]$$

$$\vec{\tau} = \vec{k}[(0.45 \times \cos 50^\circ)(6 \times \sin 30^\circ) - (0.45 \times \sin 50^\circ)(6 \times \cos 30^\circ)] = \vec{k}(-0.925)$$

$$\tau = -0.925 \text{ N.m}$$

نستطيع بطريقة ثانية إيجاد قيمة عزم القوة عن طريق حساب ذراع القوة b ، ثم تطبيق المعادلة (1 - 4)، من الشكل نجد أن ذراع القوة .

$$b = r \sin 20 = (0.45) \times (0.342) = 0.154 \text{ m}$$

$$\tau = b.F = 6 \times 0.154 = 0.924 \text{ N.m}$$

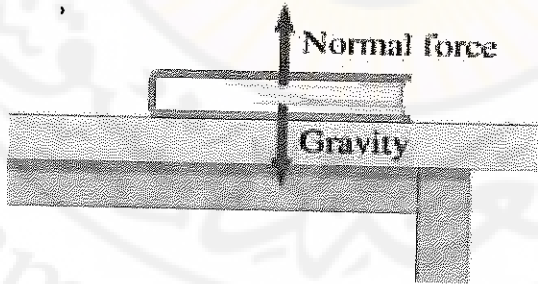
بما أن الدوران حول (0)، هو باتجاه عقارب الساعة فالعزم سالب، وبالتالي تكون

$$\tau = -0.924 \text{ N.m}$$

وهي النتيجة نفسها السابقة.

3-4 شروط التوازن

بشكل عام تؤثر في الأجسام على الأقل قوة واحدة ألا وهي قوة الجاذبية، فإذا كانت الأجسام في حالة سكون فلا بد أن تؤثر فيها قوى أخرى تجعل محصلة القوى المؤثرة فيها معدومة، الكتاب الساكن على الطاولة، على سبيل المثال، تؤثر فيه قوتان، قوة النقل وتتجه نحو الأسفل، و الطاولة تؤثر في الكتاب إلى الأعلى بقوة رد الفعل الناطمي الشكل (4 - 6)، وبما أن الكتاب في حالة سكون فإن قانون نيوتن الثاني يخبرنا بأن محصلة القوى تساوي الصفر، القوة الناطمية إلى الأعلى تساوي قوة النقل المؤثرة في الكتاب نحو الأسفل، مثل هذا الجسم يقال أنه في حالة توازن.



الشكل (4 - 6)

الكتاب في حالة توازن والقوة المحصلة معدومة

1-3-4 الشرط الأول للتوازن

من أجل أن يكون الجسم في حالة توازن وحسب قانون نيوتن الثاني فإن محصلة القوى المؤثرة فيه يجب أن تساوي الصفر

$$\sum_i^n \vec{F}_i = 0 \quad (4 - 8)$$

التي لها ثلاث مركبات نحصل عليها من ثلاث معادلات:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad (4 - 9)$$

نحن سنتعامل بشكل رئيسي مع القوى التي تؤثر في المستوي لذلك نحتاج عادة لمركبتين x, y المعادلات (4 - 4) ، تدعى الشرط الأول للتوازن.

(مثال 3-4):

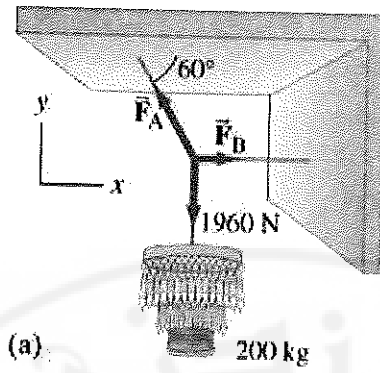
إحسب قوى التوتر $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ على الحبلين المتصلة مع الحبل العمودي الموصول مع الثريا، التي كتلتها 200kg، بإهمال كتلة الحبل.

الحل:

نحتاج مخطط الجسم الحر، ولكن لأي جسم، إذا اخترنا الثريا فإنه تؤثر في الحبل قوة تساوي قوة ثقل الثريا

$$mg = 200 \times 9.8 = 1960N$$

ولكن القوتين $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ ، لم تظهر، لذلك دعنا نختار الجسم حيث نقطة اتصال الحبال الثلاثة (العقدة). مخطط الجسم الحر مبين على الشكل (4 - 7)، تؤثر في هذه النقطة ثلاث قوى أحدهما 1960N و الأخران $\vec{F}_A, \vec{F}_B$



الشكل (4 - 7)

نطبق الشرط الأول للتوازن:

$$\sum_i^n \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{F}_B + \vec{F}_A = 0$$

المركبة على x .

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_{Bx} + (mg)_x = 0$$

$$-F_A \cos 60^\circ + F_B + 0 = 0$$

$$F_B = F_A \cos 60^\circ = 2260 \times 0.5 = 1130N$$

المركبة على y .

$$\sum_i^n F_y = 0$$

$$\sum F_{Ay} + F_{By} + (mg)_y = 0$$

$$F_A \sin 60^\circ - mg = 0$$

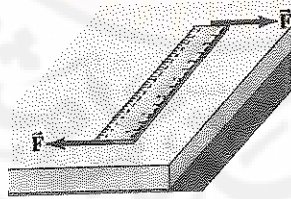
$$F_A = \frac{mg}{\sin 60^\circ} = 2 \times \frac{1960}{\sqrt{3}} = 2260N$$

4-3-2 الشرط الثاني للتوازن

الشرط الأول ليس كافياً للتوازن، الشكل (4 - 8)، يبين جسم محصلة القوة المؤثرة فيه تساوي الصفر، ولكن الجسم يستطيع الدوران تحت تأثير المزدوجة، وهي قوتان متساويتان في القيمة ومتعاكستان في الإتجاه، ولهما نقطة تأثير مختلفة، ينشأ عنهما عزم محصل يؤدي إلى دوران الجسم، و لكي يبقى الجسم، في حالة توازن علينا إضافة الشرط الثاني الذي ينص :

من أجل أن يبقى الجسم في حالة توازن إضافة إلى الشرط الأول يجب أن تكون محصلة العزوم المؤثرة في الجسم (بالنسبة إلى أي محور دوران) يساوي الصفر

$$\sum_i^n \vec{\tau}_i = 0 \quad (4 - 10)$$



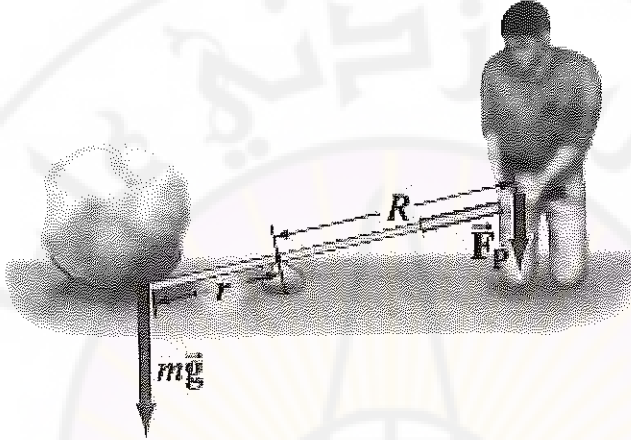
الشكل (4 - 8)

القوة المحصلة معدومة، ومع ذلك المسطرة تدور، زوج من القوى المتساوية والمتعاكسة تؤثر في نقطتين مختلفتين من الجسم تدعى المزدوجة.

لكي يتوازن جسم يجب أن يتحقق الشرطان معاً.

(مثال نموذجي 1-4)

الشكل (4 - 9)، يبين رافعة تستخدم لرفع صخرة كبيرة بواسطة العتلة ونقطة الارتكاز (الحجر الصغير)، ما الذي يجب فعله إذا كانت القوة المطبقة F_P ، غير كافية لرفع الصخرة الكبيرة ؟



الشكل (4 - 9)

زيادة الذراع يكبر العزم

الإجابة:

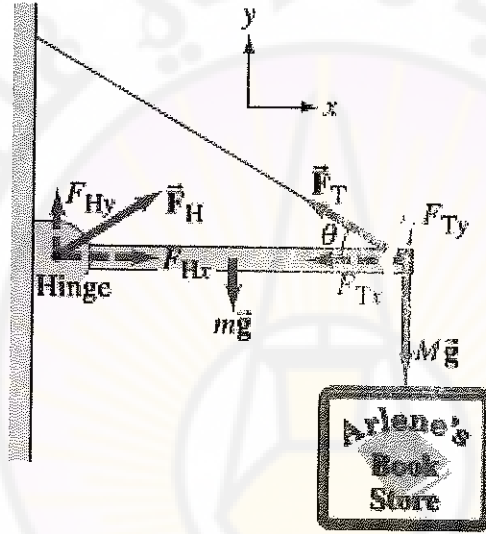
يجب زيادة عزم القوة F_P ، عن طريق زيادة الذراع R ، ويتم ذلك بطريقتين، إما بإدخال انبوب في نهاية العتلة عند نقطة تطبيق القوة F_P ، أو بإزاحة نقطة الإستناد r ، باتجاه الصخرة الكبيرة، حيث تصغر r ، و تزداد R ، عزم القوة F_P ، يساوي عزم القوة mg .

$$mgr = F_P R$$

عندما تكون r ، صغيرة، الوزن mg ، يمكن أن يتوازن بقوة F_P ، أقل، ونسبة قوة الحمل إلى القوة المطبقة $\left(\frac{mg}{F_P}\right)$ ، يدعى بالريح الميكانيكي للجملة ويساوي $\frac{R}{r}$.

4-4 اللوح المستند والكبل

لوح خشبي متجانس طوله $\ell = 2.20\text{m}$ ، وكتلته $m = 25.0\text{kg}$ ، يستند إلى الجدار بواسطة مفصل، الشكل (4 - 10)، بحيث يستقر في وضع أفقي بواسطة كبل يصنع معه زاوية $\theta = 30^\circ$ ، اللوح يستند بكتلة $M = 28.0\text{kg}$ ، معلقة عند نهايته، أوجد مركبات القوة $\vec{F}_H$ ، وقوة التوتر $\vec{F}_T$ ، لكبل التعليق.



الشكل (4 - 10)

الحل:

نطبق شروط التوازن على اللوح.

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \vec{\tau} = 0$$

(a) عندما $\sum F_x = 0$

$$F_{Hx} - F_{Tx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \text{ عندما (b)}$$

$$F_{Hy} + F_{Ty} - mg - Mg = 0 \quad (4 - 11)$$

(c) محصلة العزوم معدومة $\sum \vec{\tau} = 0$ ، حول المحور المار من نقطة تأثير $\vec{F}_T$ و $M\vec{g}$

$$-F_{Hy} \cdot \ell + mg \frac{\ell}{2} = 0 \quad (4 - 12)$$

$$F_{Hy} = \frac{mg}{2} = \frac{25.0 \times 9.80}{2} = 123N$$

من المعادلة (4 - 11) نجد:

$$F_{Ty} = (m + M)g - F_{Hy} = 53.0 \times 9.80 - 123 = 396N$$

من الشكل (4 - 10).

$$F_{Tx} = \frac{F_{Ty}}{\tan \theta} = \frac{396}{0.577} = 687N$$

$$F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2} = \sqrt{(687)^2 + (396)^2} = 793N$$

(مثال 4-4):

سلم طوله $5.0m$ ، وكتلته $12.0kg$ ، يستند على جدار ناعم عند نقطة إرتفاعها $4.0m$ ، فوق الأرض، بفرض أن الجدار عديم الإحتكاك، إحسب القوى المؤثرة في السلم بين الأرض والجدار.

الحل:

الشكل (4 - 11)، يبين مخطط الجسم الحر، الجدار يؤثر في السلم على الجدار بقوة
ناظرية فحسب، $\vec{F}_W$ ، بينما تؤثر الأرض بقوتين $\vec{F}_C$ ، هما قوة رد الفعل $\vec{F}_{Cy}$ ، وقوة
الإحتكاك $\vec{F}_{Cx}$ ، باستخدام شرطي التوازن:

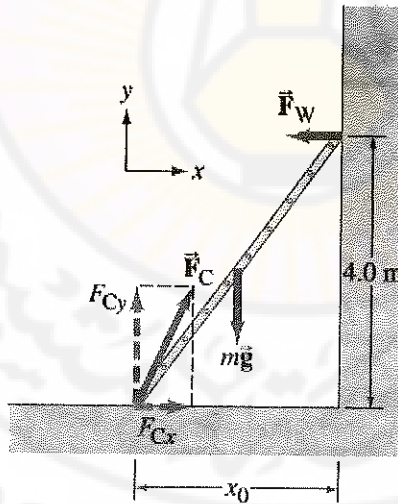
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = 0$$

$$\vec{F}_W + \vec{F}_{Cy} + \vec{F}_{Cx} + m\vec{g} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Cy} - mg = 0$$

$$F_{Cy} = mg = 120 \times 9.8 = 118N$$

$$\sum F_x = 0, \quad -F_W + F_{Cx} = 0$$



الشكل (4 - 11)

السلم يستند على الجدار

لتحديد F_W, F_{Cx} ، نحتاج تطبيق الشرط الثاني: $\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = 0$
 نختار محور الدوران في النقطة التي يستند فيها السلم على الأرض، وبالتالي يكون عزم كلاً
 من $\vec{F}_{Cy}, \vec{F}_{Cx}$ معدوماً لأنهما تمران من محور الدوران أو الذراع معدوم.

$$\vec{\tau}(F_W) + \vec{\tau}(mg) = 0$$

وباعتبار جهة الدوران الموجبة عكس عقارب الساعة

$$\tau(F_W) - \tau(mg) = 0$$

$$4F_W - \frac{x_0}{2}(mg) = 0$$

$$F_W = \frac{\frac{x_0}{2}(mg)}{4}$$

$$x_0 = \sqrt{(5.0)^2 - (4.0)^2} = 3m$$

$$F_W = F_{Cx} = \frac{\frac{x_0}{2}(mg)}{4} = \frac{1.5 \times 118}{4} = 44N$$

$$F_C = \sqrt{44^2 + 118^2} = 126N$$

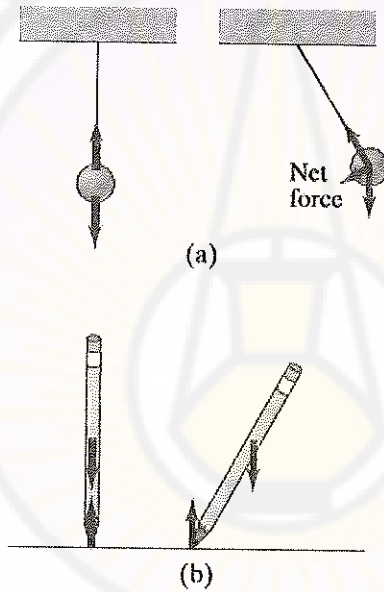
وهي تؤثر بزاوية.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Cy}}{F_{Cx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{118}{44}\right) = 70^\circ$$

القوة $\vec{F}_C$ ، ليست محمولة على طول السلم لأن السلم هو جسم صلب وليس جسماً مرناً
 مثل الحبل.

4-5 الاستقرار والتوازن

- يكون الجسم في حالة توازن سكوني إذا بقي غير مضطرب، ولا يكتسب تسارعاً إنسحابياً أو دورانياً و حيث أن مجموع كل القوى ومجموع كل العزوم المؤثرة فيه يساوي الصفر، في حين إذا أزيح الجسم عن وضع التوازن قليلاً فإن هناك ثلاث احتمالات يمكن أن تحصل :
1. الجسم يعود إلى وضعه الأصلي، الذي ندعوه وضع التوازن المستقر.
 2. الجسم يتحرك بعيداً عن وضعه الأصلي عندها نقول انه في وضع توازن غير مستقر.
 3. الجسم يبقى في وضعه الجديد ونقول انه في حالة توازن حيادي.



الشكل (4 - 12)

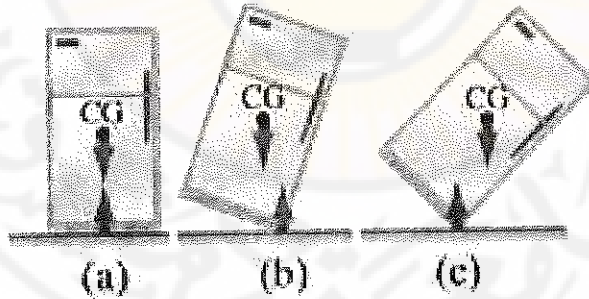
التوازن المستقر من اليسار والتوازن اللامستقر من اليمين.

لنأخذ المثال التالي:

كرة معلقة بشكل حر بواسطة خيط في وضع توازن مستقر، وإذا أزيحت بإتجاه واحد ستعود إلى الوضع الأصلي، الشكل (4 - 12 - a)، بسبب محصلة القوى و محصلة العزوم المؤثرة فيها، ومن ناحية أخرى القلم يقف مستنداً على إبرته في وضع توازن غير مستقر،

إذا كان مركز ثقل القلم يقع مباشرة فوق رأس القلم. الشكل (4 - 12 - b)، فإن القوة المحصلة و العزم المحصل عليه معدومان، لكن إذا أزيح عن وضع التوازن بوساطة اهتزاز بسيط أو تيار هوائي قليل فإنه سيطبق عليه عزم، ويجعل القلم يستمر في الحركة ليسقط باتجاه الإنزياح الأصلي. لنفرض أن كرة ساكنة على سطح أفقي، إذا أزيحت قليلاً إلى جهة واحدة فإنها تبقى في وضعها الجديد، و لا يوجد عزم مؤثر فيها وهذا ما ندعوه بالتوازن الحيادي، إذا كان مركز الثقل يقع تحت نقطة الإستناد مباشرة يكون الجسم في حالة توازن مستقر (الكرة المربوطة بالخيط).

أما إذا كان مركز الثقل يقع فوق قاعدة الإستناد فإن الأمر سيكون معقداً، الثلاجة على سبيل المثال كما في الشكل (4 - 13 - a)، إذا انحرفت الثلاجة قليلاً عن وضع التوازن ستعود إلى وضعها الأصلي، بسبب العزم المطبق عليها، وإذا انحرفت الثلاجة بعيداً الشكل (4 - 13 - c)، فإنها ستسقط، يمكن بلوغ النقطة الحرجة عندما ينزاح CG (مركز الثقل) من ناحية واحدة لنقطة القطب إلى نقطة أخرى، وعندما تكون CG، في ناحية واحدة والعزم يجر الجسم إلى الخلف باتجاه قاعدة الإستناد الأصلية الشكل (4 - 13 - b)، إذا زدنا الانحراف فإن CG، يمضي بعد نقطة القطب والعزم يسبب سقوط الجسم الشكل (4 - 13 - c).



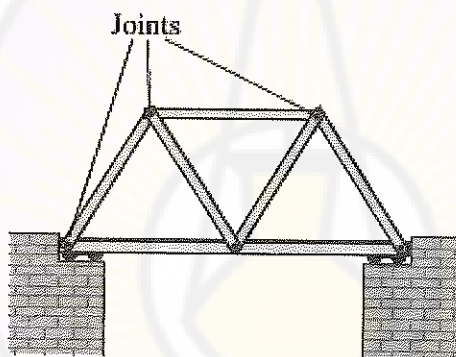
الشكل (4 - 13)

حالات توازن الثلاجة على أرض مستوية.

وبشكل عام الجسم الذي مركز ثقله فوق قاعدة إستانده سيكون مستقراً إذا كان مسقط الخط العمودي المرسوم باتجاه الأسفل من CG ، يمر من قاعدة الإستاند، لأن القوة الناعمية جعتها إلى الأعلى تؤثر في الجسم و تتوازن مع قوة الجاذبية، يمكن أن تؤثر فحسب، على المساحة المشتركة، فإذا كانت قوة الجاذبية تؤثر خلف هذه المساحة فإن العزم سيؤثر من أجل سقوط الجسم.

6-4 الجسور الجملون

تستخدم عادة الألواح الخشبية الكبيرة في بناء الجسور، وهي تتحمل اجهادات عالية من الأنواع الثلاثة، الإنضغاط والشد والقص، و شكل الجملون هو الوسيلة الفعالة لدعم هذه الألواح الشكل (4 - 14).

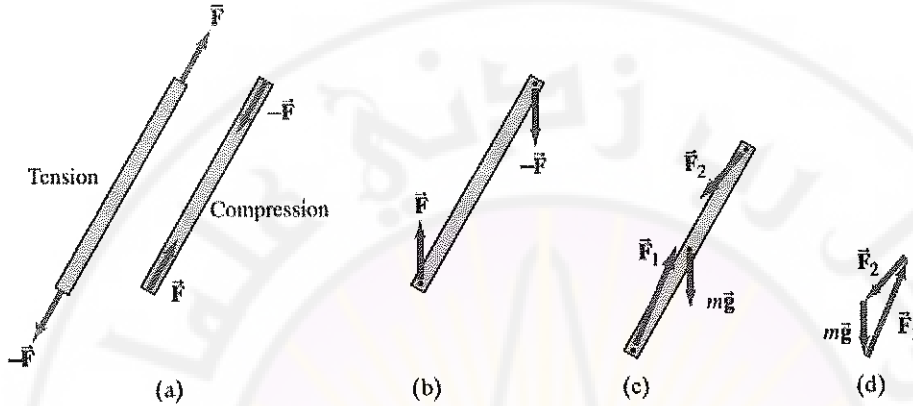


الشكل (4 - 14)

جسر جملون

لقد تم تصميم جسور الجملون بوساطة المعماري العظيم اندريه بولاديو (1518 - 1580) ، ومع إدخال الفولاذ إلى القناطر في القرن التاسع عشر جعلها لا تزال تستخدم في أسقف المنازل، يتشكل الجسر من إطار لقطبان أو دعائم متصلة بعضها مع بعض عند نهايتها بوساطة مسامير، وتكون مرتبة على شكل مثلثات (المثلثات أكثر استقراراً بالنسبة إلى المستطيلات التي تصبح متوازية السطوح بسهولة تحت تأثير القوى الجانبية، مما يؤدي إلى الإنهيار) المكان الذي تتحد (تتصل) عنده الجملونات يدعى المفصل، من الشائع أن الدعامات المقنطرة تخضع إما للشد النقي أو للإنضغاط النقي وبالتالي القوى تؤثر

في طول كل دعامة، الشكل (4 - 15)، هذا شيء مثالي وصحيح عندما لا يكون للدعامة كتلة طولية، في هذه الحالة تؤثر في الدعامة قوتان في نهايتيها، كما موضح على الشكل (4 - 15 - a)، إذا كانت الدعامة في حالة توازن فإن محصلة هاتين القوتين معدومة ($\sum \vec{F} = 0$)



الشكل (4 - 15)

- a كل دعامة عديمة الكتلة في الجسر يفترض انها تحت الشد او الإنضغاط.
- b قوتين متساويتين متعاكستين يجب ان يكون على نفس الخط او ان العزم المحصل سسيكون موجود.
- c الدعامات الحقيقية لها كتلة وبالتالي $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ ، عند المفاصل لا تؤثر تماماً على طول الدعامة عند نقاط الاتصال.
- d مخطط الاشعة للجزء.

أو إذا كان بين القوتين زاوية فتكون محصلة عزوم القوى غير معدومة الشكل (4 - 15 - b)، لذلك لا بد أن تؤثر القوتين في طول الدعامة لتبقى الدعامة في حالة توازن، ولكن في الواقع تؤثر في الدعامة ثلاث قوى، قوة النقل $m\vec{g}$ ، والقوتان $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ الشكل (4 - 15 - c)، الدعامة في حالة توازن.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0 \quad (4 - 13)$$

لاحظ أن كلاً من $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ تتجه فوق الدعامة، هل توجد محصلة لعزوم القوى حول كل نهاية؟ في المثال السابق، الشكل (4 - 10)، القوة $\vec{F}_H$ ، عند المفصل ليست على طول اللوح، ولكنها تؤثر بزاوية إلى الأعلى، إذا كان اللوح عديم الكتلة $m = 0$ ، من المعادلة (12 - 4)، عندما $F_{Hy} = 0$ ، وبالتالي $\vec{F}_H$ ، تصبح موجهة على طول اللوح، إن فرضية أن القوى في كل دعامة من الجسر تكون على طول الدعامة و بشكل نقي، لا تزال مفيدة جداً، في حين تؤثر الحملات فحسب، في المفاصل بقوة أكبر بكثير من وزن الدعامة نفسها.

(مثال 4-5):

أوجد الشد أو الإنضغاط في كل دعامة من الجسر، الشكل (4 - 16)، طول الجسر $64m$ ، ويستند إلى طريق خرساني كتلته $1.40 \times 10^6 kg$ ، إستخدم طريقة المفاصل .
ارسم مخطط الجسم الحر:

(1) للجسر كله.

(2) للمفاصل، مع إهمال كتلة الدعائم.

الحل:

الجسر يحوي على قنطرتين (جملونين) على كل ناحية من الطريق، الشكل

(4 - 16 - a)، وتستند كل واحدة بنصفي كتلتها على كل طرف من الطريق

$M = 7.0 \times 10^5 kg$ ، بسبب التناظر، أولاً لنرسم مخطط الجسم الحر للجسر كوحدة

كاملة ووحيدة، الطريق يؤثر بقوتين متساويتين إلى الأعلى على طرفي الجسر، هما $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ،

الشكل (4 - 16 - b)، بتطبيق شرط التوازن:

$$F_2 \cdot \ell - Mg \frac{\ell}{2} = 0$$

$$F_2 = F_2 = \frac{Mg}{2}$$

ننظر إلى المفصل A، ونطبق عليه $\sum \vec{F} = 0$ ، ندعو القوى المطبقة على مفصل A،

بسبب الدعامة AB، بدليلين، $\vec{F}_{AB}$ ، مثلاً، هذا الرمز يعني أن القوة المؤثرة بالدعامة AB.

القوتان $\vec{F}_{AB}$ ، $\vec{F}_{AC}$ ، تؤثران في طول دعامتهما الخاصة، ولكن من غير المعروف أنها قوى إنضغاط أو قوى للشد.

يوجد أربع مخططات للجسم الحر الشكل (4 - 16 - c)، واحد من جهة اليسار، يتحقق عندما $\sum \vec{F} = 0$ ، وبالتالي نستطيع معرفة اتجاهات $\vec{F}_{AB}$ ، $\vec{F}_{AC}$ ، هذه القوى تؤثر في المفصل A، القوة التي يؤثر بها المفصل A، في الدعامة AB، تعاكس القوة $\vec{F}_{AB}$ ، وبالتالي الدعامة تحت الإنضغاط والدعامة AC، تحت الشد، دعنا نحسب قيمة $\vec{F}_{AB}$ ، $\vec{F}_{AC}$.

$$\sum F_x = F_{AC} - F_{AB} \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = F_1 - F_{AB} \sin 60^\circ = 0$$

لذلك.

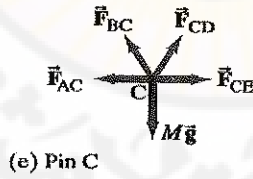
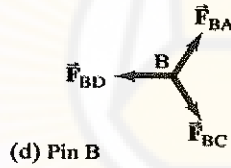
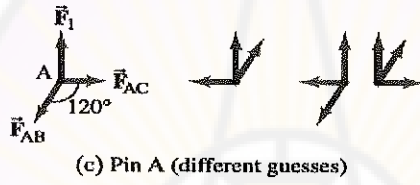
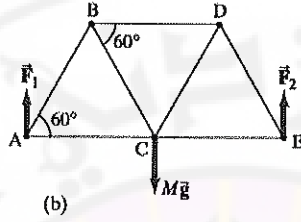
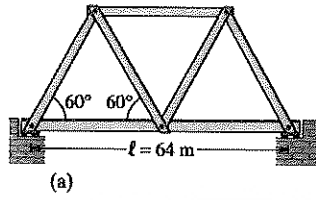
$$F_{AB} = \frac{F_1}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{\frac{Mg}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} Mg$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times 7.0 \times 10^5 \times 9.80$$

$$F_{AB} = 4.0 \times 10^6 N$$

$$F_{AC} = F_{AB} \cos 60^\circ = \frac{1}{2\sqrt{3}} Mg$$



الشكل (4 - 16)

- a- الجسر المثلثي، مخططات الجسم الحر.
- b- من أجل الجسر بالكامل.
- c- من أجل المفصل A ، (احتمالات مختلفة).
- d- من أجل المفصل B.
- e- من أجل المفصل C

أما الآن دعنا ننظر إلى النقطة B ، الشكل (4 - 16 - d) ، الذي يبين مخطط الجسم الحر (إذا كانت القوتان $\vec{F}_{BD}, \vec{F}_{BC}$ ، متعاكستين في الإتجاه ناقش ذلك $\sum \vec{F}$ ، قد لا يساوي الصفر، لاحظ أن $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ ، لأنهما تقعان في نهاية الدعامة AB) ، الدعامة BC ، تقع تحت الشد، أما الدعامة BD ، تحت الإنضغاط (القوى المطبقة على الدعامة تعكس القوى المؤثرة في المفصل) ، لنضع $\sum \vec{F} = 0$.

$$\sum F_x = F_{BA} \cos 60^\circ + F_{BC} \cos 60^\circ - F_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = F_{BA} \sin 60^\circ - F_{BC} \sin 60^\circ = 0$$

بما أن:

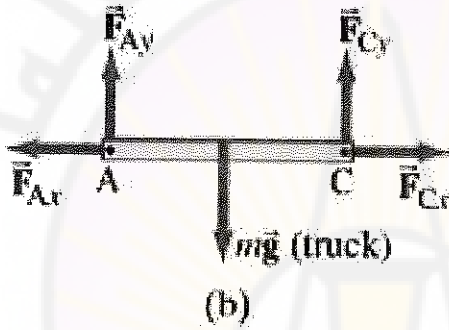
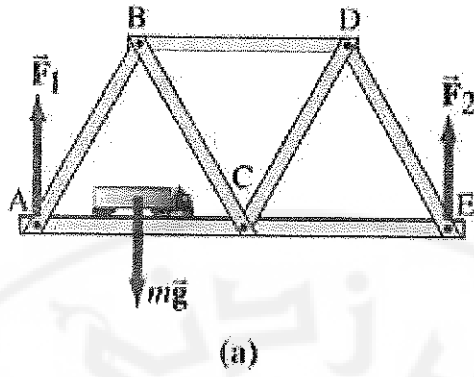
$$F_{BA} = F_{AB}$$

$$F_{BC} = F_{AB} = \frac{Mg}{\sqrt{3}}$$

$$F_{BD} = F_{AB} \cos 60^\circ + F_{BC} \cos 60^\circ = \frac{Mg}{\sqrt{3}}$$

تكملة الحل تأتي حسب التناظر:

$$F_{DE} = F_{AB}, \quad F_{CE} = F_{AC}, \quad F_{CD} = F_{BC}$$



الشكل (4 - 17)

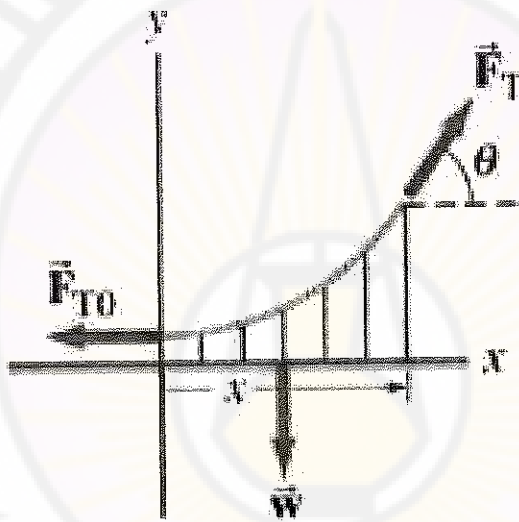
- a- الجسر تسير عليه شاحنة كتلتها m ، عند مركز الدعامة AC.
b- القوى على الدعامة AC.

في هذا المثال وضع حمل الطريق عند المركز C ، الآن لنفرض أن حملاً ثقیلاً، مثل سيارة شحن ثقيلة مستندة على الدعامة AC ، عند الوسط، الشكل (4 - 17 - a)، هذه الدعامة التي تتدلى تحت هذا الحمل وهناك إجهاد قصي على الدعامة، الشكل (4 - 17 - b)، يبين القوى المطبقة على الدعامة AC ، وزن الشاحنة $m\vec{g}$ ، والقوى $\vec{F}_A$ و $\vec{F}_C$ ، المفاصل A ، و C ، تؤثر في الدعامة (لاحظ أن القوة $\vec{F}_1$ ، لا تظهر، لأنها قوة مطبقة بالإستناد الخارجي التي تؤثر في A ، وليس على الدعامة AC)، القوى التي

تؤثر بها المفاصل A و C ، على الدعامات AC ، ستؤثر ليس فحسب، على طول الدعامات وإنما لها مركبات شاقولية عمودية على الدعامات، لتوازن ثقل الشاحنة $m\vec{g}$ ، الدعامات الأخرى لا تحمل وزناً وتبقى تحت الشد أو الإنضغاط النقي.

7-4 الجسر المعلق

أوجد شكل الكابل بين برجين للجسر المعلق الشكل (4 - 18)، مفترضين أن وزن الجسر مسنود بشكل متجانس على كامل طوله، مع إهمال وزن الكبل.



الشكل (4 - 18)

لنأخذ $x = y = 0$ ، في مركز المسافة بين دعائمي الجسر، الشكل (4 - 18)، إن قوة الشد $\vec{F}_{T0}$ ، على الكبل عند $x = 0$ ، وهي تؤثر أفقياً، نفرض أن $x = 0$ ، قوة الشد على الكابل، في نقطة أخرى من الكبل و هذا الجزء من الكبل يسند على مقدار من الجسر وزنه w ، يتناسب مع المسافة x ، حيث الجسر يفترض أن يكون متجانساً .

$$w = \lambda x$$

λ : وزن واحدة الطول

$$\sum F_x = F_T \cos \theta - F_{TO} = 0$$

$$\sum F_y = F_T \sin \theta - w = 0$$

نقسم هاتين المعادلتين على بعضهما

$$\tan \theta = \frac{w}{F_{TO}} = \frac{\lambda x}{F_{TO}}$$

ميل المنحني هو الكبل عند أي نقطة

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda x}{F_{TO}}$$

$$\int dy = \int \frac{\lambda x}{F_{TO}} dx$$

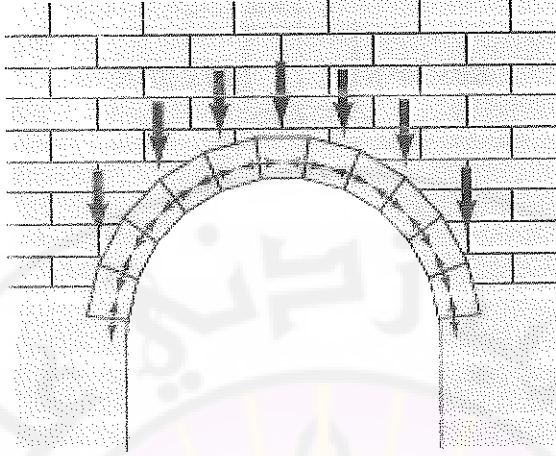
حل هذه المعادلة من الشكل:

$$y = Ax^2 + B$$

B : ثابت التكامل، وهي معادلة قطع مكافئ.

8-4 الأقواس والقُنب

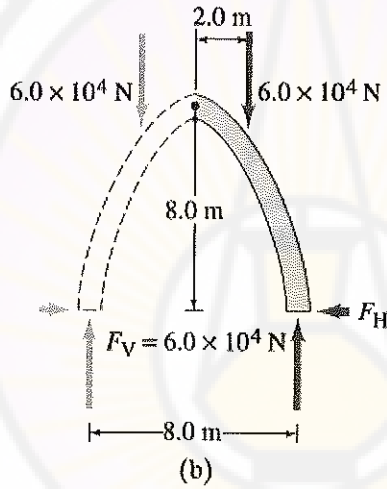
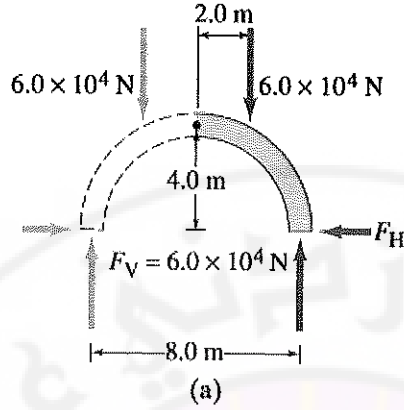
عرفت القوس النصف دائرية في العهد الروماني القديم منذ 2000 سنة، القوس يحول القوى الأفقية والعمودية الى قوى للإسناد، الشكل (4 - 19)



الشكل (4 - 19)

ألواح القرميد حول القوس تكون تحت الضغط بشكل رئيسي.

سنجري تحليلاً نظرياً للقوس القرميدية، إذ يمكننا أن نبين لماذا المركبة الأفقية للقوة عند القاعدة في القوس المدبب أقل من القوس المستدير، الشكل (4 - 20)، يبين النوعين من الأقواس، كل منهما يمسح 8.0 m ، إرتفاع القوس المستدير و 4.0 m ، في حين المدبب 8.0 m ، كلا النوعين يسند $12.0 \times 10^4\text{ N}$ ، التي تقسم إلى



الشكل (4 - 20)

جزأين $6.0 \times 10^4 \text{ N}$ ، و يؤثران في نصفي القوس لكي يتوازن، كل مسند يؤثر بقوة إلى الأعلى قدرها $6.0 \times 10^4 \text{ N}$ ، ومن أجل التوازن الدوراني، كل مسند يؤثر بقوة أفقية F_H ، عند قاعدة القوس التي نريد حسابها:

$$4.0 \times 6.0 \times 10^4 - 2.0 \times 6.0 \times 10^4 - 4.0 \times F_H = 0$$

$$F_H = 3.0 \times 10^4 \text{ N}$$

من أجل القوس المستديرة.

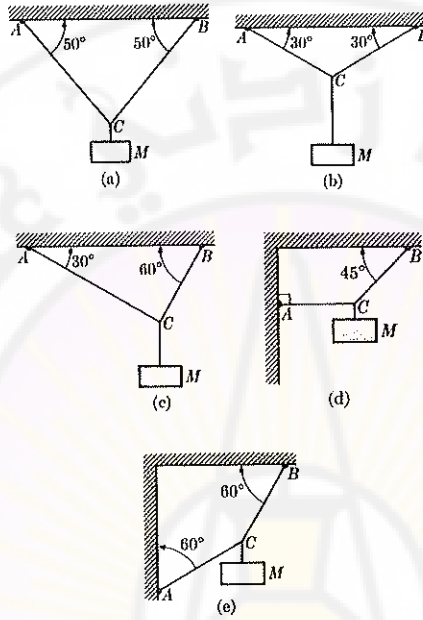
$$4.0 \times 6.0 \times 10^4 - 2.0 \times 6.0 \times 10^4 - 8.0 \times F_H = 0$$

$F_H = 1.5 \times 10^4 \text{ N}$ ، من أجل القوس المدببة وهي نصف F_H ، للقوس المستديرة، قوة الإسناد الأفقي المطلوبة للقوس المدببة أقل بسبب أن القوس أعلى، وبالتالي يملك ذراعا أطول للقوة، القوس الأعلى يحتاج إلى قوة مركبتها الأفقية تكون أقل. القوس تسمح الفراغ الثنائي البعد بينما القبة فهي قوس تدور حول محور عمودي وتمسح الفراغ الثلاثي البعد، الرومان بنوا أول القباب الكبيرة على شكل نصف كرة، وبعضها لا يزال باقيا حتى الآن.

مسائل

1-4 عين توتري الجبلين AC, BC في الأشكال المختلفة ، علماً بأن قيمة الوزن M هي

40 N ، الأشكال (4 - 21)

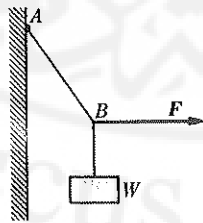


الأشكال (4 - 21)

2-4 وزن جسم 40 kgf ويحافظ على التوازن بواسطة الحبل AB وتحت تأثير القوة

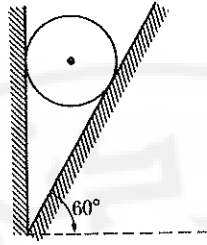
الأفقية $\vec{F}$ ، إذا كان طول AB هو 150cm ، والبعد بين الحائط والجسم هو 40 cm ،

إحسب قيمة القوة F وتوتر الجبل ، الشكل (4 - 22)



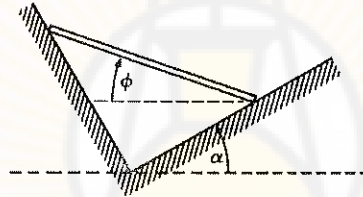
الشكل (4 - 22)

3-4 كرة تزن 50 N تستند بدون إحتكاك إلى حائط وتحافظ على توازنها بواسطة مستو يميل على الأفق بزاوية 60° ، إحسب ردي فعل الحائط والمستوي على الكرة ، الشكل (23 - 4)



الشكل (23 - 4)

4-4 قضيب كتلته 6kg وطوله 0,8m موضوع على الزاوية القائمة المصقولة تماماً المبينة على الشكل، عين وضع التوازن وقوى ردود الفعل وبدلالة الزاوية α ، الشكل (24 - 4)



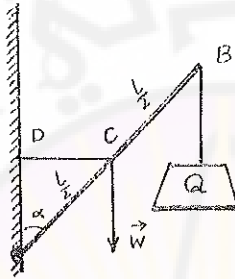
الشكل (24 - 4)

5-4 قضيب متجانس AB وزنه W يرتكز من طرفه A على مستو أفقي أملس، و يبرز D و يرتكز من طرفه B على مستو يميل على الأفق بزاوية α ، فإذا علمت أن القضيب نفسه يميل على الأفق بزاوية β ، عين قوى ضغط القضيب على المستويين والبروز ،

6-4 يثبت عمود معدني متجانس طوله 2 m وكتلته 25kg بحائط شاقولي بواسطة مفصلة ويحفظ بوضع أفقي بربطه بحبل مشدود ومثبت بحائط شاقولي، عين قوى ردود الأفعال وتوتر الحبل إذا علق بطرف العمود جسم كتلته 200kg ، مع العلم أن الزاوية بين الحبل و العمود هي $\theta = 30^\circ$.

7-4 في الشكل (4 - 25) ، يتم فصل قضيب AB مع الجدار الشاقولي في النقطة A ويحمل في نهايته B النّقل Q، كما يربط من منتصفه بالسلك الأفقي CD إلى الجدار،،
إحسب رد الفعل في A وشد السلك في وضع التوازن علماً أن :

$$Q = 20 \text{ kgf} , W = 8 \text{ kgf} \text{ (وزن القضيب) } , L = 4 \text{ m} \text{ (طول القضيب) } , \alpha = \frac{\pi}{4}$$



الشكل (4 - 25)

8-4 لتكن القوى الثلاث التالية :

$$\vec{F}_2 = -200\vec{j} + 100\vec{k} , \vec{F}_1 = 500\vec{i} \text{ N} , \vec{F}_3 = -100\vec{i} + 50\vec{j} + 400\vec{k} \text{ N}$$

عين :

- (a) - مقدار القوة المحصلة وإتجاهها ، (b) - عين العزم المحصل لهذه القوى بالنسبة إلى النقطة (o) مبدأ الإحداثيات؛ إذا كانت جميع القوى مطبقة في النقطة نفسها التي إحداثياتها (4,-3,5) (c) - عزم كل قوة منفصلة.

الفصل الخامس العمل والطاقة

WORK AND ENERGY

1-5 تمهيد

ناقشنا حتى الآن الحركة الإنسحابية للجسم حسب قوانين نيوتن الثلاثة للحركة، إذ أدت القوة الدور المركزي في تحديد طبيعة الحركة، أما في هذا الفصل والفصل القادم سنناقش الحركة الإنسحابية حسب الطاقة والإندفاع الخطي، كميات مصونة، في الحالة العامة الكميات المصونة لا تعطينا فقط فهماً جيداً للطبيعة فحسب، بل تعطينا أيضاً طريقة للإقتراب من حلول المسائل العملية، قوانين إنحفاظ الطاقة والدفع لها أهمية عند التعامل مع مجموعة من عدة جسيمات تكون فيها الدراسة التفصيلية للقوى مستحيلة أو صعبة، هذه القوانين مطبقة على مجالات واسعة من الظواهر، بما فيها الذرة والعالم الذري، إذ أن قوانين نيوتن لا يمكن تطبيقها. لقد كرس هذا الفصل من أجل مفاهيم غاية في الأهمية، مثل الطاقة ومفاهيم ذات صلة وثيقة بالعمل، نحن عادة نركز جل إهتمامنا على النظام (الجملة) الذي هو جزء صغير من الكون - نظام. ونناقش المسائل المتعلقة ببقية الكون خارج الجملة. النظام الصحيح قد يكون جسماً وحيداً أو جسيماً وحيداً، أو تجمع من الجسيمات أو الأجسام، أو منطقة من الفضاء، محرك السيارة في السيارة أو حجم متغير أو شكل ما مثل الكرة المطاطي.

2-5 العمل المنجز بقوة ثابتة

كلمة العمل شائعة في حياتنا اليومية ولها معان عديدة ولكن في الفيزياء لها معنى خاص جداً، ماذا يحصل عندما تؤثر قوة في جسم ويتحرك هذا الجسم من جراء ذلك مسافة معينة، نفرض أن الجسم صلب، ولا توجد في داخله حركة داخلية، لذلك يمكن معالجته كجسيم، يعرف العمل المنجز بالقوة الثابتة على أنه جداء سلمي للشعاعين القوة $\vec{F}$ ، والإنزياح $\vec{d}$ ، و نكتب

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cos \theta \quad (5 - 1)$$

θ : هي الزاوية الحاصلة بين الشعاعين $\vec{F}$, $\vec{d}$ ، فالعمل إذاً هو كمية سلمية وله قيمة موجبة أو سالبة. الحالة التي تكون فيها القوة والإنزياح بالاتجاه نفسه $\cos \theta = 1$

$$W = F \cdot d \quad (5 - 2)$$

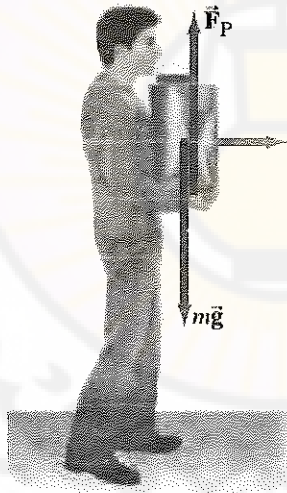
إذا دفعت عربة مسافة $50m$ ، وذلك بتطبيق قوة أفقية عليها $30N$ ، فإنك ستتجز عملاً

$$W = 50 \times 30 = 1500 \text{ N.m}$$

في الجملة الدولية $1N.m = 1Jou:SI$ ، أما في الجملة (cgs) فإن وحدة العمل هي الأرغ و يرمز لها erg .

$$1erg = 1dyne \cdot 1cm, 1Joul = 1N \cdot 1m = 10^5 dyne \cdot 10^2 cm = 10^7 erg$$

هناك قوى يمكن أن تؤثر في الجسم ولا تتجز عملاً، إذا حملت حقيبة ثقيلة بيدك وبقيت في حالة سكون لا تتجز عملاً، على الرغم من أنك أثرت بقوة فيها، لأن الإنزياح يساوي الصفر ($W = 0$)، إذا نحتاج لإنجاز عمل إلى قوة وإنزياح، وإذا حملت الحقيبة بيدك وتحركت أفقياً بسرعة ثابتة، كذلك فإنك لا تتجز عملاً الشكل (5 - 1).



الشكل (5 - 1)

الشخص لا ينجز عملاً على الحقيبة لأن القوة $\vec{F}_P$ عمودية على الإنزياح $\vec{d}$.

يؤثر الشخص بقوة عمودية إلى الأعلى $\vec{F}_p$ ، على الحقيبة مساوية لقوة ثقلها، ولكن هذه القوة عمودية على الإنزياح الأفقي للحقيبة لذلك لا يقوم بعمل $w = 0$ ، لأن θ ، في العلاقة (1 - 5) هي زاوية قائمة. ($\cos \theta = 0$)، عندما نتعامل مع العمل علينا أن نميز بين العمل المنجز بالجسم أو المنجز على الجسم نفسه، وعلينا أن نميز العمل المنجز بوساطة قوة معينة، أو المنجز بالقوة المحصلة على الجسم.

(مثال 5-1):

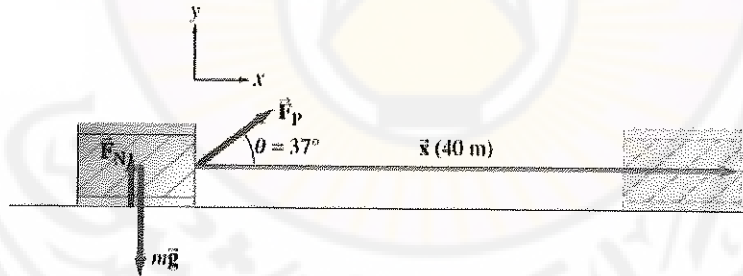
يدفع شخص جسماً كتلته $50kg$ ، لمسافة $40m$ ، أفقياً، بقوة ثابتة $F_p = 100N$ ، تؤثر بزاوية قدرها 37° ، مع الأفق الشكل (5 - 2)، علماً أنه لا توجد قوة احتكاك، إحسب العمل:

(a) المنجز لكل قوة على الجسم.

(b) المحصل على الجسم.

(الحل):

نختار الإحداثيات xy ، كما في الشكل (5 - 2)، القوى المؤثرة في الجسم هي قوة الثقل $m\vec{g}$ وقوة رد الفعل الناظمي $\vec{F}_N$ ، والقوة المطبقة $\vec{F}_p$.



الشكل (5 - 2)

العربة تدفع على أرض ناعمة.

(a) العمل المنجز بقوة الثقل W_G ، و بقوة رد الفعل الناظمي W_N ، يساوي الصفر لأن كليهما عمودي على الإنتقال.

$$W_G = W_N = 0$$

$$W_p = \vec{F}_p \cdot \vec{x} = F_p \cdot x \cos \theta = 100 \times 40 \times \cos 37^\circ = 3200J$$

(b) العمل المحصل يمكن حسابه بطريقتين.

الطريقة الأولى:

$$W_{Net} = W_G + W_N + W_p = 0 + 0 + 3200 = 3200J$$

الطريقة الثانية:

حساب القوة المحصلة وحساب عملها.

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_G + \vec{F}_N + \vec{F}_p$$

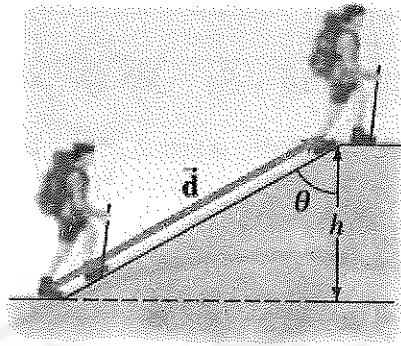
$$W_{Net} = \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot \vec{x} = (\vec{F}_G + \vec{F}_N + \vec{F}_p) \cdot \vec{x}$$

$$= \vec{F}_G \cdot \vec{x} + \vec{F}_N \cdot \vec{x} + \vec{F}_p \cdot \vec{x}$$

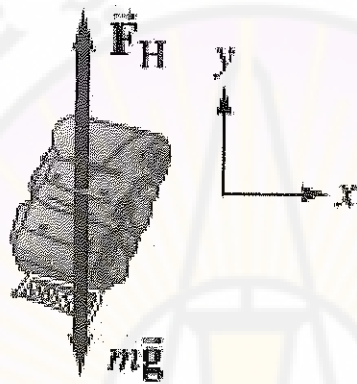
$$W_{Net} = W_G + W_N + W_p = 3200J$$

(مثال 5-2):

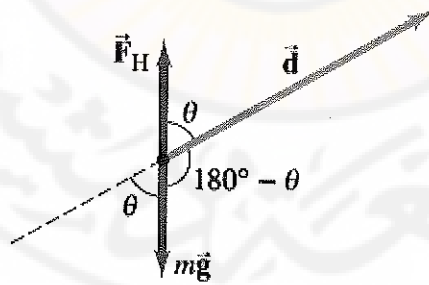
إحسب العمل الذي يقوم به كشاف يحمل حقيبة على ظهره ويرتفع إلى تلة إرتفاعها 10m، كما موضح على الشكل (5 - 3)، وحدد أيضاً العمل المنجز بقوة الثقالة على الحقيبة، والعمل المحصل على الحقيبة، نفرض أن الحركة تتم بدون إحتكاك وبسرعة ثابتة.



(a)



(b)



(c)

الشكل (3 - 5)

مخطط الجسم الحر:

القوى المؤثرة في الحقيبة هي قوة الثقل $\vec{F}_H$ و $m\vec{g}$ ، القوة التي يؤثر بها الكشاف في الحقيبة جهتها إلى الأعلى، التسارع يساوي الصفر وبالتالي القوة الأفقية المؤثرة تكون معدومة.

الحل:

نختار جملة إحداثيات xy ، بحيث يتفق $\vec{F}_H$ مع المحور الشاقولي y ، نطبق قانون نيوتن الثاني على الاتجاه العمودي.

$$\sum F_y = F_H - mg = ma_y, \quad a_y = 0$$
$$F_H = mg = 15 \times 9.8 = 147N$$

(a) حساب العمل المنجز بالقوة F_H .

$$W_H = \vec{F}_H \cdot \vec{d} = F_H \cdot d \cos \theta$$

ولكن:

$$h = d \cdot \cos \theta$$

$$W_H = F_H \cdot h = 147 \times 10.0 = 1470.0J$$

لاحظ أن العمل المنجز يتعلق بالإرتفاع فحسب، ولا يتعلق بالزاوية θ .

(b) العمل المنجز بقوة ثقل الحقيبة.

$$W_G = mg \cdot d \cos(\pi - \theta)$$

$$W_G = -mg \cdot d \cos \theta = -mgh$$

$$W_G = -147 \times 10.0 = -1470J$$

لاحظ أن العمل المنجز بقوة الثقل لا يتعلق بالزاوية θ ، ويتعلق فحسب، بالإرتفاع

لأن قوة الثقالة تؤثر عمودياً لذلك فإن المركبة العمودية للانزياح تساهم في العمل.

(c) العمل المحصل $W_{Net} = 0$ ، لأن القوى المحصلة تساوي الصفر، وكذلك مجموع

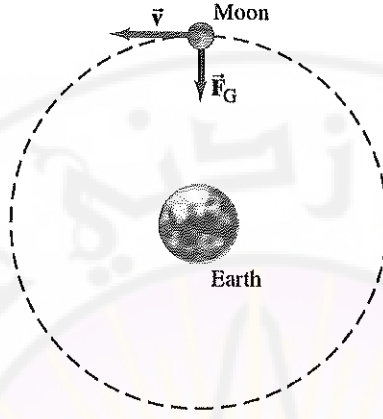
أعمال القوى المؤثرة معدوم.

$$W_{Net} = W_H + W_G = 1470 - 1470 = 0$$

سؤال: هل تقوم الأرض بعمل على القمر؟

يدور القمر حول الأرض على مسار دائري بسرعة ثابتة تقريباً ، قوة الجاذبية $\vec{F}_G$ ، تؤثر في القمر متجهة باتجاه الأرض، الشكل (5 - 4)، وتمده بقوة جاذبية مركزية حاملها نصف

قطر مدار القمر حول الأرض، انتقال القمر على مداره دائماً مماس له وعمودي على نصف القطر، أي على القوة $\vec{F}_G$ ، وبالتالي فالعمل المنجز يساوي الصفر، لأن: $\theta = \pi/2$
 θ : القوة الحاصلة بين شعاع القوة $\vec{F}_G$ وشعاع الانتقال على مسار القمر.



الشكل (5 - 4)

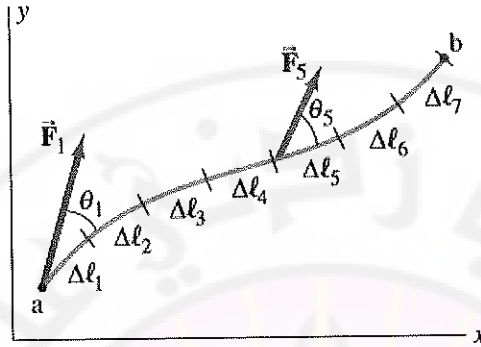
3-5 العمل المنجز بالقوة المتغيرة

إذا كانت القوة المؤثرة في جسم ثابتة فالعمل المنجز يمكن حسابه بالعلاقة (1 - 5)، في العديد من الحالات يمكن أن تكون القوة متغيرة في القيمة والاتجاه أثناء حركة الجسم على المسار، ولا نستطيع تطبيق العلاقة (1 - 5)، على سبيل المثال عند إطلاق صاروخ من الأرض لن تبقى قوة الثقل ثابتة على طول مسار الحركة، لأنها تتناسب عكساً مع مربع المسافة عن مركز الأرض، مثال آخر القوة المطبقة على جسم مربوط بنابض و تزداد بمقدار الإنزياح عن وضع التوازن. الشكل (5 - 5)، يوضح مسار جسم في المستوي xy عندما يتحرك من نقطة a ، إلى b ، على مسار ما، نقسم المسار إلى مجالات قصيرة أطوالها $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \dots, \Delta\ell_7$ ، القوة $\vec{F}_i$ ، تؤثر في كل نقطة من المسار، و يمكن عدها ثابتة تقريباً خلال المجال $\Delta\ell_i$ ، من أجل المجال الأول القوة F_1 ، نتجز عملاً.

$$\Delta W_1 \approx F_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \Delta\ell_1 \quad (5 - 3)$$

وعلى المجال الثاني العمل المنجز .

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \Delta \ell_2 \quad (5 - 4)$$



الشكل (5 - 5)

جسيم يتحرك على مسار ، من نقطة a إلى b ، عندما تؤثر عليه قوة $\vec{F}$ متغيرة.

$$\ell = \sum_{i=1}^7 \Delta \ell_i \quad (5 - 5)$$

فالعامل الكلي المنجز على كامل المسار .

$$W \approx \sum_{i=1}^7 F_i \cdot \cos \theta_i \cdot \Delta \ell_i \quad (5 - 6)$$

يمكننا التأكد من صحة ذلك، وذلك برسم العلاقة $F \cdot \cos \theta = f(\ell)$ ، على طول المسار

الشكل (5 - 6)، حيث قسمنا المسافة ℓ ، إلى سبعة مجالات متساوية، قيمة المقدار

$F \cdot \cos \theta$ ، عند مركز كل مجال مشار لها بالخطوط المتقطعة العمودية، المقدار

نلاحظ أن المقدار $(F_i \cdot \cos \theta_i) \cdot (\Delta \ell_i)$ ، يعبر عن مساحة المستطيل المرسوم بالخطوط

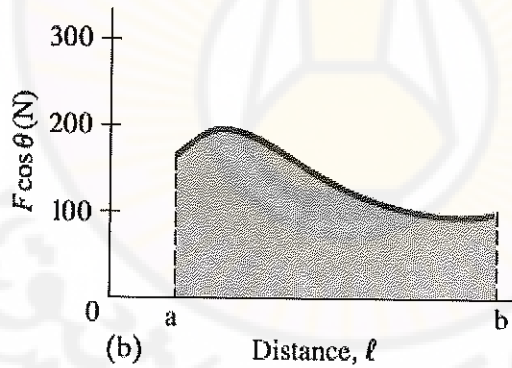
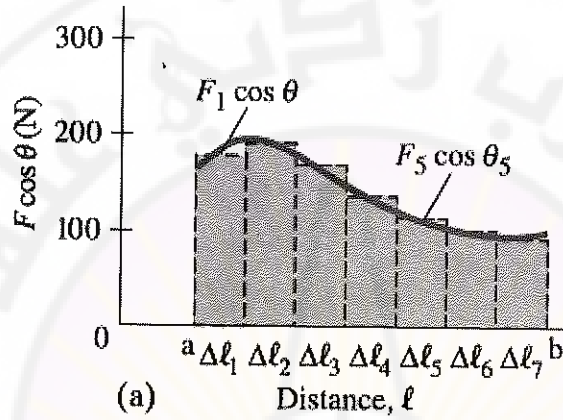
المتقطعة التي عرضها $\Delta \ell_i$ ، العمل المنجز على طول كامل المسار والمعطى بالمعادلة

(5 - 2) يساوي إلى مجموع مساحة المستطيلات عندما نقسم المسافة ℓ ، إلى عدد لا

نهائي من المجالات اللامتناهية في الصغر، فالحمل المنجز .

$$W = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \sum_{i=1}^7 F_i \Delta \ell_i \cdot \cos \theta_i = \int_a^b F \cos \theta \cdot d\ell \quad (5-7)$$

، b إلى a ، وحدوده من a إلى b ، هو تكامل $F \cos \theta \cdot d\ell$ ، $\lim_{\Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^7 F_i \Delta \ell_i \cdot \cos \theta_i$ عندما $\Delta \ell_i \rightarrow 0$ ، المسافة الكلية في الشكل (5 - 6) ، تقترب من المساحة بين المنحني $F \cdot \cos \theta$ ، والمحور ℓ ، من a إلى b .



الشكل (5 - 6)

العمل المنجز بالقوة F .

(a) يساوي مجموع مساحات المستطيلات تقريباً ،

(b) يساوي إلى المساحة تحت المنحني $(F \cos \theta \sim \ell)$ تماماً.

العمل المنجز بالقوة المتغيرة على الجسم المتحرك بين نقطتين يساوي إلى المساحة الواقعة تحت المنحني $(F \cos \theta)$ ومحور الإنزياح المحدد بينهاتين النقطتين.

$d\ell$ ، تساوي قيمة شعاع الإنزياح $\vec{d\ell}$ ، وإتجاهه بإتجاه المماس للمسار عند تلك النقطة، و θ ، هي الزاوية بين $\vec{F}$ و $\vec{d\ell}$ ، لذلك فالمعادلة (3 - 5) تكتب على الشكل:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{d\ell} \quad (5 - 8)$$

وهذا هو التعريف العام للعمل، في هذه المعادلة a و b ، هما نقطتان إحداثياتهما الديكارتية (x_a, y_a, z_a) ، (x_b, y_b, z_b) ، والتكامل (4 - 5)، يدعى بالتكامل الخطي لأن تكامل $\int F \cdot \cos \theta$ ، على طول خط يمثل مسار الجسم وتصبح المعادلة (1 - 5)، حالة خاصة للمعادلة (4 - 5). في جملة إحداثيات ديكارتية.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{d\ell} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$W = \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz$$

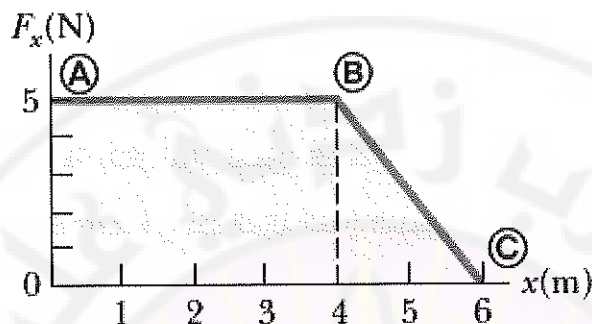
إذا كانت عدة قوى تؤثر في الجسم فإن العمل الكلي المنجز هو العمل المنجز بالقوة المحصلة.

$$W_{net} = \sum_i^n W_i = \int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \vec{d\ell}$$

$$W_{net} = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot \vec{d\ell} = \int_a^b \vec{F}_{net} \cdot \vec{d\ell} \quad (5 - 9)$$

مثال (5-3):

إذا كانت القوة المؤثرة في الجسم تتغير مع x ، كما موضح على الشكل (5-7)، إحسب العمل المنجز لهذه القوة عندما تتغير x من $x = 0$ إلى $x = 6m$.



الشكل (5-7)

الحل:

المساحة تحت المنحنى $ABCO =$ مساحة المستطيل $AB4O$ + مساحة المثلث $B4C$

$$4 \times 5 + \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 25J$$

4-5 العمل المنجز بقوة النابض (قوى المرنة)

دعنا نحسب العمل المطلوب لاستطالة أو إنضغاط نابض، كما موضح على الشكل (5-7)، لكي يستطيع شخص شد النابض أو ضغطه لمسافة x ، بالنسبة إلى موضعه الأصلي عليه تطبيق قوة F_p ، تتناسب مع x .

$$F_p = +kx \quad (5-10)$$

k : ثابت يدعى ثابت النابض، والنابض يؤثر بالقوة نفسها بإتجاه معاكس الشكل (5-7).

$$F_s = -kx \quad (5-11)$$

مثل هذه القوى F_s ، تدعى قوى الإرجاع، و نحاول إعادة النابض إلى طوله الأصلي والمعادلة (11 - 5) تعرف باسم قانون هوك، وهي صحيحة من أجل قيم x ، صغيرة، وبحيث لا يحصل تشوه دائم للنابض.

لنحسب العمل المنجز الناتج عن استطالة أو إنضغاط النابض من طول الأصلي x_a ، إلى الطول الجديد $x = x_b$ ، لنفرض أن عملية الاستطالة تتم ببطء من أجل أن يكون التسارع معدوماً، القوة $\vec{F}_p$ ، مطبقة بشكل مواز لمحور النابض باتجاه المحور x ، وبالتالي $\vec{F}_p$ ، و $\Delta \ell$ ، متوازيان $\cos \theta = 1$ ، في هذه الحالة العمل المنجز من قبل الشخص.

$$W_p = \int_{x_a}^{x_b} F_p(x) dx = \int_{x_a}^{x_b} kx dx$$

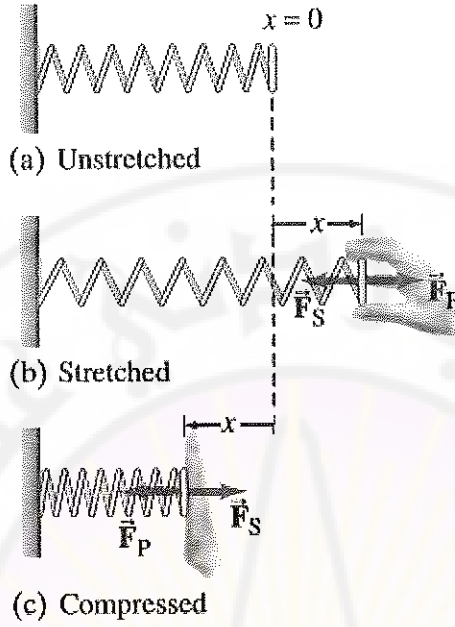
$$W_p = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_a}^{x_b}$$

$$W_p = \frac{1}{2} k(x_b^2 - x_a^2) \quad (5 - 12)$$

$$x = x_b, \quad x_a = 0$$

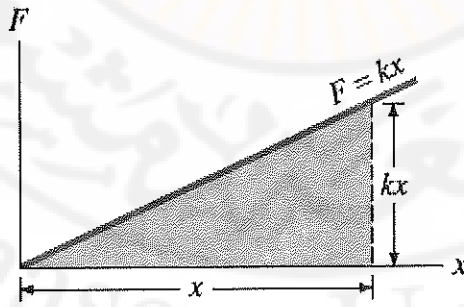
$$W_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5 - 13)$$

نلاحظ أن العمل المنجز يتناسب مع مربع مسافة الاستطالة أو الإنضغاط، ويمكن الحصول على هذه النتيجة بحساب المساحة تحت التابع $F = kx$ كما في الشكل (5 - 8)



الشكل (8 - 5)

- a النابض بطوله الاصلي.
 - b النابض مشدود بوساطة القوة $\vec{F}_P$ لكن النابض يشد بقوة معاكسة $\vec{F}_S$
 - c النابض مضغوط والنابض يدفع بعكس الاتجاه بقوة $\vec{F}_S$
- حيث: $F_s = -kx, x > 0$



الشكل (9 - 5)

مساحة المثلث المظلل في الشكل (5 - 9) ، إرتفاعه kx ، وقاعدته x .

$$W = \frac{1}{2}x \cdot kx = \frac{1}{2}k \cdot x^2 \quad (5 - 14)$$

(مثال 5 - 4):

يشد شخص نابض فيستطيل $3cm$ ، ويتطلب ذلك قوة أعظمية $75 N$ ، الشكل (5 - 8)

(a) ما العمل الذي يقوم به الشخص.

(b) إذا ضغط الشخص النابض مقدار $3cm$ ، ماذا يحصل.

الحل:

(a) القوة $\vec{F}$ ، تؤثر في كل نقطة

$$k = \frac{F}{x} = \frac{75}{3 \cdot 10^{-2}} = 25 \times 10^2 Nm^{-1}$$

$$W = \frac{k}{2}x^2 = \frac{25 \times 10^2}{2} (3 \times 10^{-2})^2 = 1.13J$$

(b) القوة المؤثرة للإنضغاط.

$$F_p = +kx$$

$$W_p = \int_{x=0}^{x=-0.03} F_p \cdot dx$$

$$W_p = \int_{x=0}^{x=-0.03} kx \cdot dx = \left[\frac{k}{2}x^2 \right]_{x=0}^{x=-0.03}$$

$$W_p = \frac{25 \times 10^2}{2} [(-0 \times 03)^2 - 0] = 1.13J$$

(مثال 5-5):

يعلق نابض إلى سقف مصعد ويعلق بنهايته السفلى جسم كتلته $m = 0.55 \text{ kg}$ فيستطيل النابض مسافة $d = 2 \text{ cm}$ ، احسب:

1. ثابت النابض عندما يكون المصعد ساكناً، واحسب العمل المنجز بالنابض.
2. ثابت النابض k' ، عندما يتسارع المصعد $a = 2 \text{ m/s}^2$ ، إلى الأعلى واحسب مقدار الاستطالة (d').

الحل:

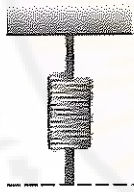
(a) بما أن الجملة في حالة سكون

$$|F_s| = k \cdot d = mg$$

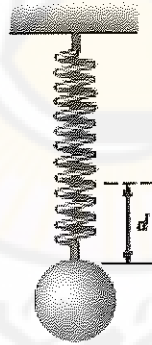
$$k = \frac{mg}{d} = \frac{0.55 \times 9.80}{2.0 \times 10^{-2}} = 2.7 \times 10^2 \text{ N/m}$$

$$W_s = -\frac{1}{2} k \cdot d^2 = -\frac{1}{2} \times 2.7 \times 10^2 \times (2.0 \times 10^{-2})^2$$

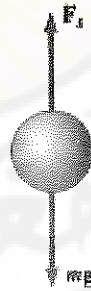
$$W = -5.4 \times 10^{-2} \text{ J}$$



(a)



(b)



(c)

الشكل (5 - 10)

(b) بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$F - mg = ma$$

$$F = mg + ma = kd'$$

$$d' = m \frac{(a + g)}{k}$$

$$d' = 0.55 \frac{(2 + 9.8)}{2.7 \times 10^2} = 2.40 \times 10^{-2} m$$

k : ثابت النابض عندما ($a = 0$) وهو ثابت النابض الحقيقي، والمجرب لا يشعر بالتسارع ويدعي بأن:

$$F = k'd' = mg$$

$$k' = \frac{mg}{d'} = mg \frac{k}{m(a + g)}$$

$$k' = g \frac{k}{a + g} = 9.80 \times \frac{2.7 \times 10^2}{2 + 9.80} = 2.24 \times 10^2$$

أي أن: $k > k'$.

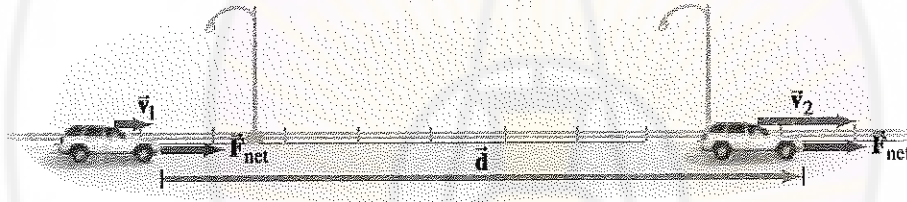
5-5 الطاقة الحركية - مبدأ العمل والطاقة

الطاقة هي إحدى أهم المفاهيم في علم الميكانيك، حتى الآن لا نستطيع أن نعطي تعريفاً بسيطاً و عاماً للطاقة ببضعة كلمات، لأن لكل نوع معين من الطاقة تعريفاً بسيطاً، في هذا الفصل سنعرف الطاقة الإنسحابية الحركية، وفي الفصل التالي سنعرف الطاقة الكامنة، سنعرف أيضاً أنواعاً أخرى من الطاقة مثل الحرارة، الصفة الحاسمة لكل أنواع الطاقة هي مجموعها الذي يبقى على حاله، بعد عدة عمليات، لذلك فالطاقة هي كمية محفوظة.

يمكننا أن نعرف الطاقة بالطريقة العادية على أنها إمكانية قيام الجسم بعمل، هذا التعريف ليس دقيقاً تماماً، وليس صالحاً لكل أنواع الطاقة، إذ أنه يصلح من أجل الطاقة الميكانيكية التي سنناقشها في هذا الفصل والفصل التالي، الآن سنناقش أهم نوع من أنواع الطاقة ألا وهو الطاقة الحركية.

الجسم الذي يتحرك يمكن أن ينجز عملاً، فمثلاً قذيفة المدفع التي تسقط على الجدار تشوهه وتخربه، والمطرقة تتجزر عملاً على المسمار وتجعله ينغرس في الخشب، الجسم المتحرك يؤثر بقوة في جسم آخر، ويجعله ينزاح، هذا يعني أن الجسم المتحرك لديه مقدرة على إنجاز عمل، وبالتالي يمكننا القول أنه يملك طاقة، طاقة ناتجة عن الحركة تدعى الطاقة الحركية. من أجل الحصول على تعريف كمي للطاقة الحركية، دعنا نفرض أن لدينا جسماً (جسيماً) كتلته m ، يتحرك على خط مستقيم بسرعة ابتدائية v_1 ، وتؤثر فيه قوة محصلة $\vec{F}_{net}$ ، ثابتة وموازية لحركته لإكسابه تسارعاً، حتى تصل سرعته إلى v_2 ، ويقطع مسافة وقدرها d ، الشكل (5 - 11) وفي الوقت نفسه العمل المحصل المنجز على الجسم.

$$W_{net} = F_{net} \cdot d \quad (5 - 15)$$



الشكل (5 - 11)

القوة المحصلة الثابتة F_{net} تسرع السيارة من السرعة v_1 إلى v_2 والإنزياح d . لنفرض أن القوة المحصلة المؤثرة في الجسم $\vec{F}_{net}$ ، تتغير في القيمة والإتجاه وأن مسار الجسم هو المنحني في الشكل (5 - 5) فالعمل المحصل المنجز.

$$W_{net} = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{net} = \int F \cos \theta \cdot d\ell = W_{net} = \int F_t \cdot d\ell \quad (5 - 16)$$

F_t : هي مركبة القوة المحصلة على المماس للمنحني في كل نقطة منه،

$$F_t = F \cos \theta = ma_t$$

$$W_{net} = \int ma_t \cdot d\ell \quad (5 - 17)$$

a_t : التسارع المماسي للمنحني في كل نقطة منه.

$$a_t \cdot d\ell = \frac{dv}{dt} d\ell = \frac{dv}{dt/d\ell} = v dv$$

نعوض في (5 - 17)

$$W_{net} = m \int_1^2 v dv$$

$$W_{net} = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 \quad (5 - 18)$$

نسمي المقدار $K = \frac{m}{2} v^2$ بالطاقة الحركية للجسم.

$$W_{net} = K_2 - K_1 = \Delta K \quad (5 - 19)$$

العمل المنجز على الجسم يساوي تغير الطاقة الحركية للجسم وهو مبدأ العمل-طاقة حركية

نلاحظ أننا اشتقينا العلاقة السابقة من أجل مركبة القوة F_t ، الموازية للحركة، وبالفعل مركبة القوة العمودية على شعاع السرعة لا تنجز عملاً لأنها تغير اتجاه شعاع السرعة فحسب، ولا تغير من قيمته.

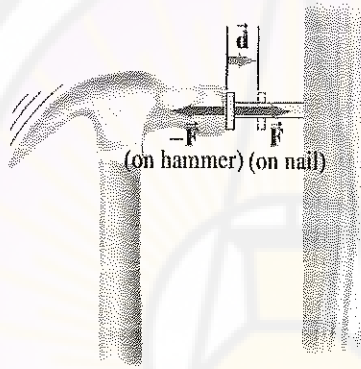
أحد الأمثلة المهمة على ذلك، الحركة الدائرية المنتظمة، أما من أجل الحركة الدائرية اللامنتظمة $W \neq 0$ ، إن مبدأ العمل-طاقة حركية، يعد إعادة صياغة مفيدة جداً لقوانين

نيوتن، إنه يخبرنا إذا كان العمل المنجز على الجسم موجباً فالطاقة الحركية تزداد بمقدار W ، وتنقص بالمقدار نفسه إذا كان العمل سالباً .

المطرقة تضرب المسمار، والقوة المؤثرة فيها هي $-F$ ، يفترض أنها ثابتة وتؤثر باتجاه اليسار، وينزاح المسمار إلى اليمين مسافة d ، وبالتالي العمل المنجز بالمطرقة:

$$W_h = F \cdot d \cos \pi = -F \cdot d$$

وهو سالب، والطاقة الحركية للمطرقة تتناقص حتى الصفر، لأن القوة المؤثرة فيها تعاكس جهة الحركة.



الشكل (5 - 12)

المطرقة تقوم بعمل موجب على المسمار الشكل (5 - 12) عندما تضربه ومن ثم نقف، المطرقة تؤثر بقوة $\vec{F}$ ، على المسمار، وبنفس الوقت المسمار يؤثر في المطرقة بقوة $-\vec{F}$ (حسب قانون نيوتن الثالث) العمل المنجز على المسمار بالمطرقة موجب $(W_n = F \cdot d > 0)$ ، والعمل المنجز على المطرقة بالمسمار $(W_h = -F \cdot d)$.

تتناقص الطاقة الحركية للمطرقة يساوي العمل الذي قامت به على المسمار، يمكننا التوصل إلى المعادلة (5 - 19)، باستخدام القانون الثاني لنيوتن مع المعادلة $a = \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} \right)$ ، وذلك بحذف التسارع.

(مثال 5-6):

تقذف كرة كتلتها 145 g ، لتكتسب سرعة 25 m/s
(a) ما الطاقة الحركية ؟

(b) ما العمل المحصل المنجز على الكرة لتصل إلى تلك السرعة، إذا بدأت حركتها من السكون.

الحل:

(a)

$$K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{145 \times 10^{-3}}{2} (25)^2 = 45 \text{ J}$$

(b) بما أن الكرة بدأت حركتها من السكون فالعمل المحصل المنجز يجب أن يساوي الطاقة الحركية النهائية (45 J)

$$W_{net} = K_2 - K_1$$

$$W_{net} = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2$$

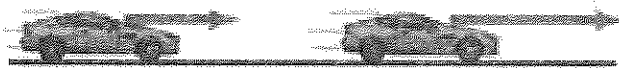
$$W_{net} = \frac{145 \times 10^{-3}}{2} (25)^2 - 0 = 45 \text{ J}$$

(مثال 5-7):

ما العمل المحصل المطلوب لتتسارع سيارة كتلتها 1000 kg ، من 20 m/s ، إلى 30 m/s الشكل (5 - 13)

$$v_1 = 20 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 30 \text{ m/s}$$



الشكل (5 - 13)

الحل:

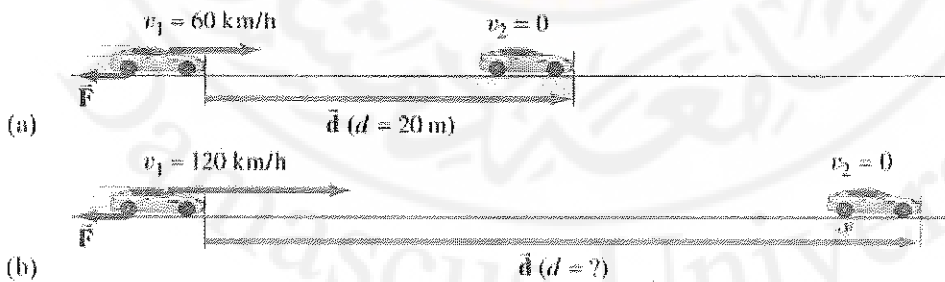
نعد أن السيارة كجسيم، نطبق مبدأ (الطاقة الحركية-عمل).

$$W_{net} = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2$$

$$W_{net} = \frac{1000}{2} (30)^2 - \frac{1000}{2} (20)^2 = 2.5 \times 10^5 \text{ J}$$

(مثال نمونجي 5-1)

تتطلق سيارة بسرعة 60 km/h ، وتتوقف بفعل قوى الفرملة بعد أن قطعت مسافة 20 m ، وإذا سارت السيارة بضعف السرعة السابقة، ما المسافة التي تقطعها حتى تتوقف، الشكل (5 - 14)، نفرض أن قوى الفرملة لا تتعلق بالسرعة تقريباً .



الشكل (5 - 14)

الإجابة

بما أن القوة المحصلة ثابتة تقريباً فالعمل المطلوب لإيقاف السيارة يتناسب مع المسافة المقطوعة.

$$W_{net} = Fd \cos \pi = -F \cdot d$$

$$-F \cdot d = \Delta K = 0 - \frac{m}{2} v_1^2$$

بما أن القوة والكتلة ثابتتان نرى أن مسافة الإيقاف تزداد مع مربع السرعة.

$$-F \cdot d' = 0 - \frac{m}{2} v_1'^2$$

$$\frac{d'}{d} = \left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2$$

$$d' = 20 \times (2)^2 = 80m$$

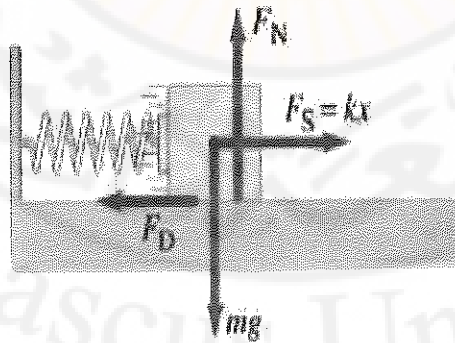
(مثال 5-8):

نابض أفقي ثابتته $k = 360 \text{ N/m}$ ، الشكل (5 - 15).

(a) ما العمل المطلوب لضغطه من الطول $(x = 0)$ إلى $(x = 11 \text{ cm})$

(b) إذا ربطنا جسم كتلته 1.85 kg بالنابض، وضغطناه ثم حررنا النابض، إحسب سرعة الجسم عندما يعود النابض إلى وضعه الأصلي، (مع إهمال قوة الاحتكاك).

(c) كرر الطلب الثاني بوجود قوة مقاومة $F_D = 7 \text{ N}$



الشكل (5 - 15)

الحل:

إن عمل القوة F_N ، والقوة mg ، معدوم.

(a)

$$W = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$W = \frac{360}{2}[(0.11)^2 - 0] = 2.18J$$

(b) عندما يتحرر الجسم من النابض يكون قد إكتسب طاقة حركية قدرها $2.18 J$

$$W = \Delta K = \frac{m}{2}v^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.18}{1.85}} = 1.54 m/s$$

(c) توجد قوتان تؤثران في النابض، هما قوة دفع النابض F_s ، وقوة المقاومة F_D ،

عمل قوة المقاومة.

$$W_D = -F_D \cdot (x_2 - x_1)$$

$$W_D = -7 \times (0.11 - 0) = -0.77J$$

$$W_{net} = W_{FS} + W_D$$

$$W_{net} = 2.18 - 0.77 = 1.41J$$

$$W_{net} = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2 = \frac{m}{2}v^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2W_{net}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.41}{1.85}} = 1.23 m/s$$

وهي سرعة الجسم عندما يعود النابض إلى وضعه الأصلي $x = 0$

مسائل

5-1 إحسب عمل القوة الثابتة 12 N حين تنتقل نقطة تأثيرها مسافة 7 m إذا كانت الزاوية بين منحني القوة والانتقال تأخذ القيم التالية :

$$(a) 0^\circ, (b) 60^\circ, (c) 90^\circ, (d) 145^\circ, (e) 180^\circ$$

5-2 تصعد سيارة كتلتها 1200 kg طريقاً طويلة مائلة بزاوية 5° بسرعة ثابتة مقدارها 36 km / h ، إحسب العمل الذي يقوم به محرك السيارة خلال 5 دقائق، وكذلك استطاعة هذا المحرك ، تهمل قوة الاحتكاك.

5-3 تؤثر القوة $F = 6t$ N في جسيم كتلته 2 kg ، فإذا كان الجسيم ساكناً في البداية، أوجد العمل الذي تقوم به هذه القوة خلال الثانيةين الأوليتين.

5-4 جسم كتلته 4 kg يصعد على مستو مائل بزاوية 20° على الأفق، وتؤثر فيه القوى التالية : قوة أفقية مقدارها 80 N وقوة موازية للمستوي المائل قيمتها 100 N تساعد على الحركة، قوة احتكاك ثابتة مقدارها 10N تعاكس الحركة ، ينزلق الجسم على المستوي مسافة 20m ، إحسب العمل الكلي الذي تتجزه جملة القوى المؤثرة في الجسم ، وإحسب كذلك عمل كل قوة على حدة .

5-5 تتسلق سيارة كتلتها 1600 kg منحدرًا ميله 3° بسرعة ثابتة مقدارها 45 km/h ، ما استطاعة المحرك وما العمل المنجز خلال 10 s ؟ تهمل قوى الاحتكاك .

5-6 إحسب العمل اللازم لشد نابض مثبت شاقولياً لمسافة 2 cm دون تسارع ، علماً أن النابض يزداد طوله بمقدار 1.5 cm عند تعليق كتلة مقدارها 4 kg .

5-7 يجر شخص عربة كتلتها 100kg موضوعة على طريق أفقية بواسطة حبل يميل على الأفق بزاوية 45° لمسافة 30 m بسرعة ثابتة ، إحسب عمل قوة الجر إذا علمت أن معامل الاحتكاك بين العربة والأرض 0,2 .

5-8 يدفع جسم كتلته 10kg على مستو مائل بتأثير قوة ثابتة F موازية للمستوي لمسافة 5 m حتى يصل إلى نقطة إرتفاعها عن المستوي الأفقي 3 m، إحسب عمل القوة F خلال الإنتقال السابق ، تهمل قوى الإحتكاك .

5-9 كرة كتلتها 1kg معلقة بخيط مهمل الكتلة طوله 2m ، يطبق عليها قوة أفقية $\vec{F} = F\vec{i}$ بحيث تجعل سرعة الكرة منتظمة في أية لحظة (يعني القوة $\vec{F}$ متغيرة)، إحسب قيمة العمل الذي تقوم به القوة الأفقية $\vec{F}$ عندما يتحرك النواس بدءاً من وضع الشاقول إلى الوضع الذي يصنع فيه خيط النواس زاوية 60° مع الشاقول.

5-10 طائرة مزودة بأربعة محركات قوة جر كل محرك تساوي 103×10^3 نيوتن ، عين الاستطاعة المفيدة عندما تطير الطائرة بسرعة 864 km/h .

5-11 صندوق كتلته 225 kg موضوع على مستو أفقي ، يسحب من قبل شخص بقوة F_1 قيمتها 10 N وتصنع مع الأفق زاوية 330° ، ويدفع من قبل شخص آخر بقوة F_2 قيمتها 10 N وتصنع مع الأفق زاوية 40° مع الأفق ، وذلك لمسافة 85 m والمطلوب حساب :

(a) العمل الكلي اللازم لنقل الصندوق للمسافة السابقة .

(b) عمل قوة ثقل الصندوق وقوة رد الفعل .

(c) بفرض أن الصندوق ساكن في البداية إحسب سرعته عندما يصل إلى نهاية المسافة السابقة.

5-12 يسقط جسم كتلته m بدون سرعة ابتدائية من إرتفاع h، على نابض شاقولي، إحسب مقدار إنضغاط النابض الناتج؛ إذا علمت أن ثابت النابض هو k .

5-13 إحسب عمل القوة المؤثرة في جسم كتلته 0,5kg عندما تتغير سرعته من $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{j}, m/s$ إلى $\vec{v}_2 = 7\vec{j}, m/s$ خلال ثلاث ثوان.

14-5 إحسب عمل القوة $\vec{F}=3xy\vec{i}-2yz\vec{j}+y\vec{k}$ (N) على طول المنحني $x=t$ ، $y=2t^2$ ، $z=1+t$ ، وذلك من النقطة $t=1$ إلى النقطة $t=2$.

15-5 جسم كتلته 100 g يتحرك حركة منتظمة بسرعة 2m/s على مسار دائري ، عين دفع القوة المؤثرة في الجسم وعملها في الفترة التي يقطع فيها الجسم ربع محيط الدائرة .

16-5 ثقل معلق بخيط طوله L متر ، يدفع فينحرف عن الشاقول بزاوية φ_0 ، ثم يترك ليتحرك بدون سرعة ابتدائية ، عين سرعة النقل في اللحظة التي يصنع فيها خيط النقل زاوية φ مع الشاقول.

الفصل السادس إنحفاظ الطاقة

CONSERVATION OF ENERGY

1-6 تمهيد

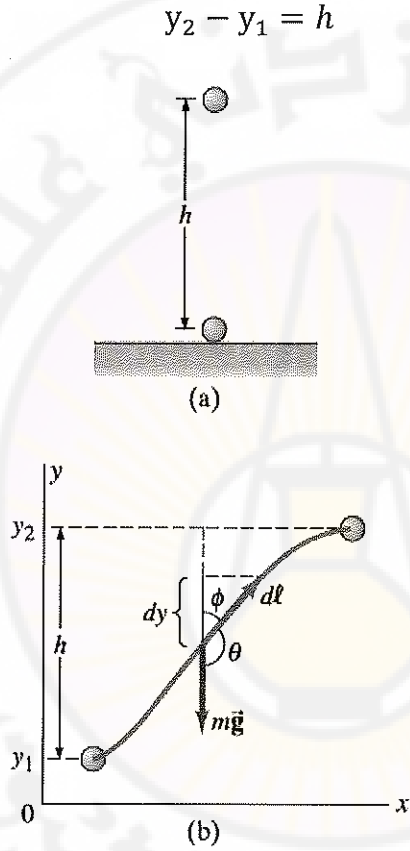
في هذا الفصل نستمر بمناقشة مفهوم العمل والطاقة، وسوف نعرف نوعاً جديداً من الطاقة، ولا سيما الطاقة الكامنة، والآن سوف نرى لماذا مفهوم الطاقة مهم إلى هذا الحد، والسبب بلا شك أن الطاقة هي مقدار مصون، الطاقة الكلية دائماً تبقى ثابتة في أي عملية، وبقدر ما تكون تجاربنا أفضل نحصل على معلومات رائعة عن الطبيعة، ومبدأ إنحفاظ الطاقة هو بلا شك أحد المبادئ العظيمة التي وجدت العلم. قانون إنحفاظ الطاقة يعطي أيضاً أداة بتقريب مختلف لحل المسائل، إذ يوجد العديد من الحالات التي لا يمكن معالجتها باستخدام قوانين نيوتن، القوة مجهولة أحياناً لا نستطيع قياس القوة، ولكن مثل هذه المسائل يمكن معالجتها عن طريق قوانين إنحفاظ الطاقة. في هذا الفصل سنناقش بشكل رئيسي الأجسام كأنها جسيمات أو أجسام صلبة تقوم بحركة إنسحابية وبدون حركة داخلية أو دورانية.

2-6 القوى المحافظة والقوى غير المحافظة

سوف نجد أنه من المهم تصنيف القوى إلى نوعين: محافظة وغير محافظة، وحسب هذا التعريف تكون القوة محافظة إذا كان: العمل المنجز بهذه القوة على جسم يتحرك من نقطة إلى أخرى يتعلق فحسب، بالوضع البدئي والوضع النهائي للجسم ولا يتعلق بالطريق المسلك. القوة المحافظة يمكن أن تكون تابعة فحسب، للموضع ولا تتعلق بمتغيرات أخرى مثل الزمن أو السرعة ويمكننا أن نبرهن بسهولة على أن قوة الجاذبية هي قوة محافظة. قوة الجاذبية المطبقة على جسم قريب من سطح الأرض $\vec{F} = m\vec{g}$ ، حيث، ثابت $\vec{g}$ ، العمل المنجز بهذه القوة على جسم يسقط شاقولياً مسافة h .

$$W_G = F \cdot d = mgh \quad (6 - 1)$$

لنفرض أن الجسم بدلاً من أن يرتفع أو يهبط يسلك مسار في المستوي (xy) ، كما موضح على الشكل (6 - 1)، يبدأ الجسم من الارتفاع y_1 ، (المسافة عن مبدأ الإحداثيات)، ليلغ الارتفاع y_2 .



الشكل (1 - 6)

a- يسقط شاقولياً من ارتفاع h .

b- مرفوع عن طريق مسار عشوائي ثنائي البعد.

ومن أجل حساب العمل المنجز بقوة الجاذبية W_G ، نستخدم المعادلة

$$W_G = \int_1^2 \vec{F}_G \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{\ell}$$

$$W_G = \int_1^2 mg \cdot \cos \theta d\ell \quad (6-2)$$

نفرض الزاوية $\phi = \pi - \theta$ ، هي الزاوية بين $d\vec{\ell}$ ، والمركبة الشاقولية dy ، كما في الشكل (b-1-6)

$$\cos \theta = -\cos \phi, \quad dy = d\ell \cos \phi, \quad d\ell = \frac{-dy}{\cos \theta}$$

$$W_G = - \int_1^2 mg \cdot \cos \phi d\ell = - \int_1^2 mg \cdot dy$$

$$W_G = -mg(y_2 - y_1) = -mgh \quad (6-3)$$

حيث $(y_2 - y_1)$ ، الارتفاع الشاقولي h ، لذلك نرى أن العمل المنجز يتعلق فحسب ، بالارتفاع الشاقولي ، ولا يتعلق بالطريق المسلك وبالتالي قوة الثقالة هي قوة محافظة ، نلاحظ الحالات المبينة على الشكل (b-1-6) .

$y_2 > y_1$: الجسم يرتفع العمل المنجز بقوة الثقالة سالب

$y_2 < y_1$: الجسم يسقط العمل المنجز بقوة الثقالة موجب

يمكننا أن نعطي القوة المحافظة تعريف آخر .

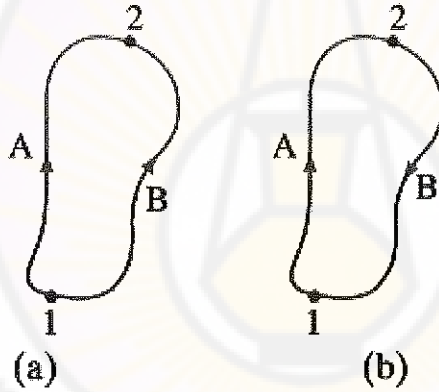
القوة تكون محافظة إذا كان العمل المنجز بها على جسم يتحرك على مسار مغلق يساوي الصفر .

لنفرض جسماً صغيراً يتحرك من النقطة 1 إلى النقطة 2 وبوساطة مسارين A و B ، الشكل (a-2-6) ، إذا فرضنا أن قوة محافظة تؤثر في هذا الجسم ، العمل المنجز بهذه القوة نفسه فيما إذا اتخذ الجسم المسار A ، أو المسار B ، حسب التعريف الأول للعمل ، العمل المطلوب للوصول إلى النقطة 1 ، والنقطة 2 نسميه W ، لنفرض أن مرحلة ذهاب وإياب

الشكل (6 - 2 - b)، الجسم يتحرك من 1 إلى 2 ، عن طريق المسار A، والقوة تتجز عملاً W ، الجسم يعود إلى النقطة 1 عن طريق المسار B، ما العمل المنجز خلال هذه العودة ؟ عند الذهاب من 1 إلى 2، عن طريق B، العمل المنجز هو W ، الذي حسب التعريف يساوي $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ ، وعند الذهاب بالعكس من 2 إلى 1، القوة عند كل نقطة هي نفسها ولكن $d\vec{\ell}$ موجهة باتجاه معاكس، وبالتالي فإن $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ له إشارة معاكسة عند كل نقطة فالعمل المنجز عند مرحلة العودة من 2 $\leftarrow$ 1، يجب أن يكون $(-W)$ ، وبالتالي العمل الكلي عند الحركة من 1 إلى 2، والعودة إلى 1، هو $W + (-W) = 0$ ، وبالتالي نكون قد برهنا على تكافؤ التعريفين السابقين من أجل القوى المحافظة.

(a) في الشكل : $(W_{21}) = -(W_{12})$

(b) في الشكل : $W = W_{12} + W_{21} = W_{12} - (W_{12}) = 0$



الشكل (6 - 2)

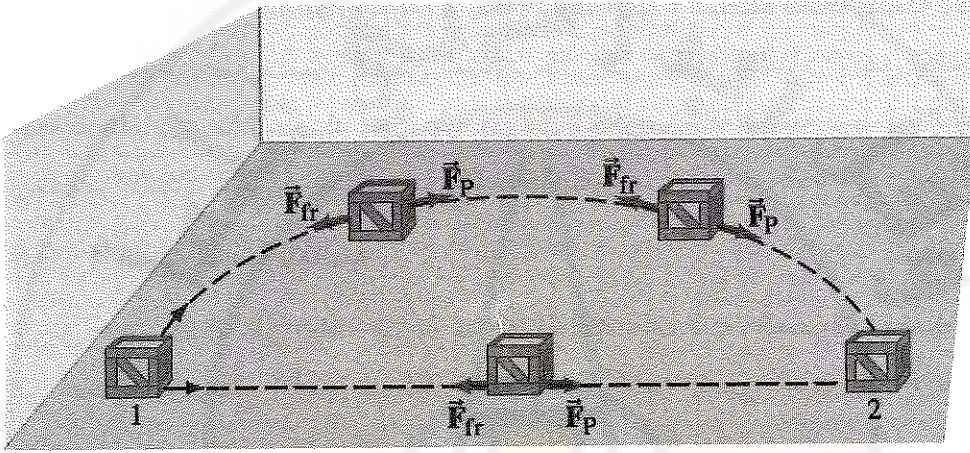
a- جسم يتحرك بين النقطتين 1 ، 2 على مسارين مختلفين A, B

b- الجسم يتحرك على المسار A من 1 إلى 2 وعلى المسار B عائداً إلى النقطة .

التعريف الثاني للقوى المحافظة يبين صفة مهمة لتمثل هذه القوى: العمل المنجز بالقوى المحافظة عكوس بمعنى أنه إذا كان العمل المنجز على الجسم موجباً وعلى إحدى الأجزاء من المسار المغلق، فإن هناك كمية مكافئة لعمل سالب ستجز بواسطة الجسم عند العودة. لقد رأينا أعلاه أن قوة الجاذبية محافظة ومن السهولة أن نجد أن قوة المرونة

$F = -kx$ ، هي أيضاً محافظة.

العديد من القوى مثل قوة الإحتكاك وقوة الدفع والشد المطبقة من قبل الشخص هي قوى لا محافظة، لأن العمل المنجز بها يتعلق بالمسار، على سبيل المثال إذا دفعت عربة على الأرض من نقطة إلى أخرى فالعمل الذي أنجزته يتعلق بطبيعة المسار، هل هو مستقيم أم خط منحني كما موضح على الشكل (6 - 3)



الشكل (6 - 3)

تدفع العربة بسرعة ثابتة على سطح خشن من الوضع 1 ، إلى الوضع 2، عن طريق مسارين، أحدهما خط مستقيم، والآخر منحنى، القوة الدافعة $\vec{F}_p$ ، دائماً باتجاه الحركة، (قوة الإحتكاك تعاكس الحركة) ولكن من أجل قيمة ثابتة لقوة الدفع فالعمل المنجز $W = \vec{F}_p \cdot \vec{d}$ ، بالتالي كلما ان d ، أكبر (كما الحال في المسار المنحني) كان W ، أكبر، فالعمل المنجز لا يتعلق فحسب، بالوضع البدئي والوضع النهائي ولكنه يتعلق بالمسار المتبع.

إذا دفعنا العربة ببطء من النقطة 1، إلى النقطة 2، على مسار نصف دائرة ستقوم بعمل أكثر للتغلب على قوى الإحتكاك فيما إذا دفعناها على مسار خط مستقيم لأن المسافة أكبر على عكس قوة الثقالة قوه الدفع $\vec{F}_p$ ، في جهة الحركة عند كل نقطة، العمل المنجز من قبل الشخص في الشكل (6 - 3) ، لا يتعلق فحسب، بنقطة البداية 1 والنهائية 2 بل

يتعلق بالمسار المسلوك، قوة الاحتكاك الحركية تعاكس الحركة دائماً، وهي أيضاً قوة لا محافظة. يوضح بعض القوى المحافظة والقوة اللامحافظة.

3-6 الطاقة الكامنة

في الفقرة السابقة ناقشنا الطاقة المرافقة لحركة الجسم و هي الطاقة الحركية $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، والآن سنتعرف على الطاقة الكامنة التي هي الطاقة المرافقة للقوى التي تتعلق بالموضع، أو بشكل الإحاطة بالجسم *configuration*، يمكن معرفة الأنواع المختلفة للطاقة الكامنة وكل نوع يرافق قوة محافظة خاصة. النابض المشدود مثال على الطاقة الكامنة، النابض يكتسب طاقة كامنة، لأن هناك عمل قد أنجز عليه من قبل شخص، الطاقة الكامنة توجد في الكون وبمختلف الأشكال الجاذبية والكهرطيسية والكيميائية والنوية.

1-3-6 الطاقة الكامنة للجاذبية

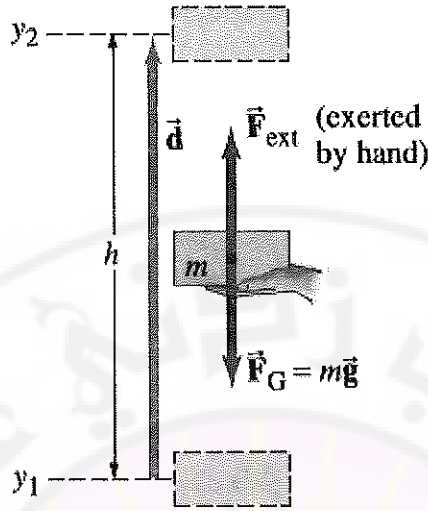
إن من أشهر الأمثلة على الطاقة الكامنة هو الطاقة الكامنة للجاذبية، الجسم الثقيل المحمول إلى الأعلى فوق سطح الأرض له طاقة كامنة بسبب وضعه النسبي بالنسبة إلى الأرض، لنفرض أن جسماً كتلته m ، بالقرب من سطح الأرض، وأنها رفعناه بشكل عمودي، علينا تطبيق قوة عمودية تساوي على الأقل قوة ثقله $m \cdot g$ ، يجب أن تطبق عليه لنقله بواسطة يد الشخص لرفعه بدون تسارع مسافة h ، من الوضع y_1 ، إلى الوضع y_2 ، الشكل (6-4)، (نختار الاتجاه الموجب إلى الأعلى) يجب على الشخص أن يقوم بعمل يساوي إلى جداء القوة الخارجية المطبقة $F_{ext} = mg$ ، بالإنزياح العمودي.

$$W_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d} \quad (6-4)$$

$$= mgh \cos 0^\circ = mgh$$

$$W_{ext} = mg(y_2 - y_1) \quad (6-5)$$

حيث: $\vec{F}_{ext} \cdot \vec{d}$ يتجهان إلى الأعلى



الشكل (4 - 6)

الشخص يؤثر بقوة إلى الأعلى $F_{ext} = mg$ ، لرفع الجسم من y_1 ، إلى y_2 .

الجاذبية أيضاً تؤثر في الجسم عندما ينتقل من y_1 ، إلى y_2 ، وتتجز عملاً على الجسم .

$$W_G = \vec{F}_G \cdot \vec{d}$$

$$W_G = mgh \cos \pi$$

$$W_G = -mg(y_2 - y_1)$$

حيث $\theta = \pi$ ، لأن $\vec{F}_G \cdot \vec{d}$ ، لهما اتجاهان متعاكسان.

وإذا كان الجسم يتحرك على مسار عشوائي، كما في الشكل (6 - 1 - b)، العمل المنجز بوساطة قوة الجاذبية سيبقى متعلقاً فحسب، بتغير الارتفاع. من المعادلة (6 - 1).

$$W_G = mg(y_2 - y_1) = -mgh \quad (6 - 6)$$

إذا سمحنا للجسم أن يبدأ الحركة من السكون ليسقط سقوطاً حراً تحت تأثير الجاذبية فإنه يكتسب سرعة $v^2 = 2gh$ ، وبعد سقوطه الإرتفاع h ، نجد أنه قد اكتسب طاقة حركية

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh \quad (6 - 7)$$

وإذا صدم (ضرب) بجسم آخر فإنه يُنجز عليه عملاً يساوي mgh .

عند رفع جسم كتلته m ، إلى الإرتفاع h ، يتطلب عملاً قدره mgh ، وعند الإرتفاع h ، (يملك الجسم مقدرة للقيام بعمل وقدره mgh ، وبذلك يمكننا القول أن العمل المنتج عند رفع الجسم إلى الأعلى قد اختزن طاقة على شكل طاقة كامنة بسبب الجاذبية ، وبالفعل نستطيع أن نعرف التغير في الطاقة الكامنة للجاذبية U ، عندما يتحرك جسم من إرتفاع y_1 ، إلى إرتفاع y_2 ، العمل المنجز بمحصلة بالقوة الخارجية لإنجازه بدون تسارع.

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

$$\Delta U = W_{ext}$$

$$\Delta U = mg(y_2 - y_1) \quad (6 - 8)$$

نعرف التغير في الطاقة الكامنة للجاذبية يساوي العمل المنجز بالجاذبية ولكن بالإشارة السالبة.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W_G = mg(y_2 - y_1) \quad (6 - 9)$$

هذه المعادلة تحدد التغير في الطاقة الكامنة للجاذبية عند تحرك جسم كتلته m ، بين نقطتين قريبتين من سطح الأرض ، الطاقة الكامنة للجاذبية U ، عند أية نقطة إرتفاعها y ، فوق نقطة مرجعية (نقطة الأصل في الإحداثيات) يمكن تحديدها.

$$U_{grav} = mgy \quad (6 - 10)$$

نلاحظ أن الطاقة الكامنة المرافقة لقوة الجاذبية بين الأرض والكتلة m ، لذلك U_{grav} ، تمثل الطاقة الكامنة للجاذبية وليس ببساطة للكتلة m ، لوحدها ولكن للنظام كتلة - أرض. الطاقة الكامنة للجاذبية تتعلق بالإرتفاع الشاقولي للجسم عن سوية مرجعية.

$$U = mgy \quad (6 - 11)$$

الطاقة الكامنة للجاذبية لكتاب موضوع فوق الطاولة يتعلق بقياس الإرتفاع، و يتعلق بكيفية قياس y ، من سطح الطاولة، أو من سطح الأرض أو من نقطة مرجعية أخرى، التغير في الطاقة الكامنة بين نقطتين لا يتعلق بإختيار النقطة المرجعية. الطاقة الكامنة هي طاقة الجملة وليست طاقة جسيم واحد، والطاقة الكامنة تكون مرافقة للقوة، والقوى المؤثرة في جسم هي قوة خارجية ناتجة عن تأثير جسم آخر، لذلك فالطاقة الكامنة هي خاصة من خواص الجملة كلها، من أجل الجسم المرفوع إلى إرتفاع y ، فوق سطح الأرض التغير في الطاقة الكامنة للجاذبية هو mgy ، والجملة هنا هي الجسم _ الأرض، ومميزات كليهما موجودة، الجسم (m)، والأرض (g)، وبشكل عام الجملة هي جسيم واحد أو عدة أجسام، نحن اخترناها من أجل الدراسة.

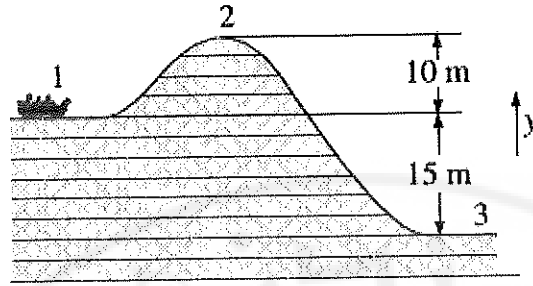
(مثال 6-1):

تغير الطاقة الكامنة من أجل العربة المتدحرجة (السيارة السريعة) الشكل (6-5)، كتلتها 1000kg ، تتحرك من الموضع $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$.

(a) ما الطاقة الكامنة للجاذبية عند الموضعين 2 و 3 بالنسبة إلى الموضع 1، (نعد $y = 0$ عند الموضع 1).

(b) ما التغير في الطاقة الكامنة عندما تتحرك القاطرة من الموضع 2 إلى الموضع 3.

(c) كرر (a) و (b)، ولكن بأخذ النقطة المرجعية عند $y = 0$ ، عند الموضع 3.



الشكل (5 - 6)

الحل:

الطاقة الكامنة للجملة: أرض- سيارة، نختار الإتجاه الموجب إلى الأعلى ونستخدم تعريف الطاقة الكامنة للجاذبية.

(a) الارتفاع عن الموضع 1، $(y_1 = 0)$ مما يعني أن الطاقة الكامنة للجاذبية البدئية

$$U_1 = 0 \text{ ، معدومة}$$

• عند الموضع 2 ، $y_2 = +10m$

$$U_2 = mgy_2 = 10^3 \times 9.8 \times 10 = 9.8 \times 10^4 J$$

• عند الموضع 3 ، $y_3 = -15m$

$$U_3 = mgy_3 = 10^3 \times 9.8 \times (-15) J \approx -1.5 \times 10^5 J$$

عندما تنتقل السيارة من الموضع 2، إلى الموضع 3، فرق الطاقة الكامنة:

$$U_3 - U_2 = -1.5 \times 10^5 - 9.8 \times 10^4 = -2.5 \times 10^5 J$$

الطاقة الكامنة للجاذبية تتناقص بمقدار $-2.5 \times 10^5 J$

(b) إذا عددنا $y_3 = 0$ ، وبالتالي: $y_1 = +15m$

$$U_1 = 10^3 \times 9.8 \times 15J = 1.5 \times 10^5 J$$

عند الموضع 2 ، $y_2 = +25m$

$$U_2 = 2.5 \times 10^5 J$$

عند الموضع $y_3 = 0.3$ ، وبالتالي الطاقة الكامنة معدومة والتغير في الطاقة الكامنة بين الموضعين 2 و 3

$$U_3 - U_2 = 0 - 2.5 \times 10^5 J = -2.5 \times 10^5 J$$

التي هي نفسها في الطلب (b).

نلاحظ أن العمل المنجز بقوة الثقالة يتعلق فحسب، بالإرتفاع الشاقولي وبالتالي فالتغير في الطاقة الكامنة لا يتعلق بالمسار.

4-6 الشكل العام للطاقة الكامنة

لقد وجدنا أن التغير في الطاقة الكامنة الجاذبية المعادلة (4 - 6)، تساوي سالب العمل المنجز بالجاذبية عندما يتحرك الجسم من الإرتفاع y_1 ، إلى y_2 .

$$\Delta U = -W_G = - \int_1^2 \vec{F}_G \cdot d\vec{\ell} \quad (6 - 12)$$

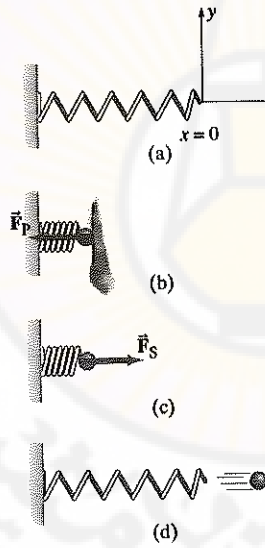
إلى جانب الطاقة الكامنة الجاذبية يوجد أنواع أخرى، بشكل عام نجد أن التغير في الطاقة الكامنة المرافق للقوة المحافظة $\vec{F}$ بأنه سالب العمل المنجز بهذه القوة.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -W \quad (6 - 13)$$

إلا أننا لا نستخدم هذا التعريف، لتعريف الطاقة الكامنة من أجل كل القوى الممكنة، إنه يعطينا شعوراً من أجل القوى المحافضة فحسب، مثل الجاذبية التي من أجلها التكامل يتعلق بنقطة البداية ونقطة النهاية، ولا يتعلق بالطريق المسلك ولا يطبق من أجل القوى اللامحافضة، مثل الإحتكاك لأن هذا التكامل لن يكون وحيد التعيين، ومفهوم الطاقة الكامنة من تلك القوى (اللامحافضة) ليس له معنى.

5-6 الطاقة الكامنة المرونية

سوف ندرس الطاقة الكامنة الناجمة عن مرونة الأجسام التي لها تطبيقات عملية مهمة. لنفرض لدينا نابضا بسيطاً، كتلته صغيرة جداً يمكن إهمالها الشكل (6 - 6)، يضغط النابض، بوساطة كرة كتلتها (m)، ثم يحرر. ينجز النابض عملاً على الكرة، حيث أن النابض - كرة، جملة لها طاقة كامنة عندما يكون النابض مضغوطاً أو مشدوداً، كما في كل الأجسام المرنة التي تخضع إلى قانون هوك.



الشكل (6 - 6)

a- النابض يمكنه أن يخزن طاقة (طاقة كامنة مرونية)

b- عندما يكون مضغوطاً.

c-d- النابض يستخدم لإنجاز عمل عندما يتحرر.

نفرض أن الإنزياح x ، ليس كبيراً، وأن مبدأ الإحداثيات مأخوذ في نهاية النابض الحر عند الموضع $x = 0$ ، الشكل (6 - 6)، يؤثر الشخص على النابض بقوة $F_p = kx$ ، الشكل (6 - 6 - b)، حيث k ، ثابت النابض. النابض يدفع الشخص بقوة باتجاه معاكس بقوة رد فعل.

$$F_s = -kx \quad (6 - 14)$$

الشكل (6 - 6 - c)، يوضح أن الإشارة السالبة تظهر بسبب القوة F_s ، تكون مخالفة في الاتجاه للإنزياح من المعادلة (6 - 13)، نرى أن التغير في الطاقة الكامنة عند ضغط أو شد النابض من $x_1 = 0$ ، إلى $x_2 = x$.

$$\Delta U = U(x) - U(0)$$

$$\Delta U = - \int_1^2 \vec{F}_s \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta U = - \int_0^x -kx \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (6 - 15)$$

حيث $U(x)$ ، الطاقة الكامنة عند x ، و $U(0)$ ، هي الطاقة الكامنة عند $x = 0$ ، ومن السهولة أن نختار الطاقة الكامنة $U(0) = 0$ ، وبالتالي فالطاقة الكامنة للنابض (المضغوط أو الممدود) تتعلق بالمقدار x ، المسافة عن وضع التوازن.

$$U_{el} = \frac{1}{2} kx^2 \quad (6 - 16)$$

6-5-1 الطاقة الكامنة المتعلقة بالقوة في بعد واحد

في بعد واحد يمكن أن نكتب القوة المحافضة تكتب بدلالة x ، والطاقة الكامنة يمكن أن نكتبها على شكل تكامل غير محدود

$$U(x) = - \int_0^x F(x) \cdot dx + C \quad (6 - 17)$$

حيث C ، يعبر عن U ، عندما $x = 0$ ، وفي بعض الأحيان نختار $C = 0$ ، المعادلة (6-17) ، توحي لنا كيف نختار $U(x)$ ، عندما تكون $F(x)$ ، معلومة ، وعلى العكس إذا أعطينا $U(x)$ ، نختار $F(x)$ ، بأخذ مشتق طرفي المعادلة.

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (6-18)$$

تمرين: أو جد $F(x)$ ، من التابع $U(x)$ ، حيث:

$$U(x) = -ax/(b^2 + x^2)$$

$$F(x) = \frac{d \left[-ax/(b^2 + x^2) \right]}{dx} = \frac{a}{(b^2 + x^2)^2} (b^2 - x^2)$$

a, b : ثوابت.

2-5-6 الطاقة الكامنة في ثلاثة أبعاد

في الفراغ الثلاثي نستطيع أن نكتب $F(x, y, z)$.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (6-19)$$

أو:

$$F(x, y, z) = -\left(\vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (6-20)$$

هنا $\partial x, \partial y, \partial z$ ، تدعى المشتقات الجزئية، و $\partial/\partial x$ ، تعني أن U ، تابع أيضاً لـ x, y, z ، أيضاً وتكتب عادة $U(x, y, z)$.

3-5-6 الطاقة الكامنة بشكل عام

لقد عرفنا التغير في الطاقة الكامنة U ، يساوي سالب العمل المنجز بقوة الجاذبية عندما يتحرك الجسم من إرتفاع y_1 ، إلى إرتفاع y_1 .

$$\Delta U = -W_G = \int_1^2 \vec{F}_G \cdot d\vec{l} \quad (6-21)$$

يوجد نوع آخر من الطاقة الكامنة إلى جانب الطاقة الكامنة التجاذبية، وبشكل عام نعرف التغير في الطاقة الكامنة الناجم عن القوى المحافظة $\vec{F}$ ، بأنه سالب العمل المنجز بهذه القوى.

$$\Delta U = -W_G = -\int_1^2 \vec{F}_G \cdot d\vec{l} \quad (6-22)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -W \quad (6-23)$$

في حين لا نستطيع أن نستخدم هذا التعريف للطاقة الكامنة من أجل جميع القوى وأنه معقول فحسب، من أجل القوى المحافظة مثل الجاذبية التي من أجلها يتعلق التكامل فحسب، بنقطة البداية والنهاية، وليس على كل المسار، وأنه لا يمكن تطبيقه على القوى اللامحافظة، مثل قوة الاحتكاك، لأن التكامل سوف لا يملك قيمةً وحيدة تتعلق بنقاط النهاية (1) و(2)، حيث أن مفهوم الطاقة الكامنة لا يمكن تحديده على أن يكون محدداً وله معنى من أجل القوى اللامحافظة. ليست كل القوى محافظة، لنأخذ على سبيل المثال قوة الاحتكاك التي تؤثر في عربة تنزلق على منحدر، عندما نجر العربة إلى الأعلى وتعود إلى نقطة الإنطلاق، نلاحظ أن العمل الكلي المنجز على العربة بقوة الاحتكاك لا يساوي الصفر، لأن العمل هو مقدار سالب في كلا الاتجاهين، وعندما نكبج سرعة سيارة بواسطة الفرامل فإن هناك جزءاً من الطاقة الحركية قد ضاع ولا يمكن استعادته، بالسير عكس جهة الحركة أو أي طريق آخر، والطاقة الكلية لا تكون في هذه الحالة محفوظة ولا يوجد تابع طاقة كامنة لقوة الاحتكاك.

(مثال 6-2):

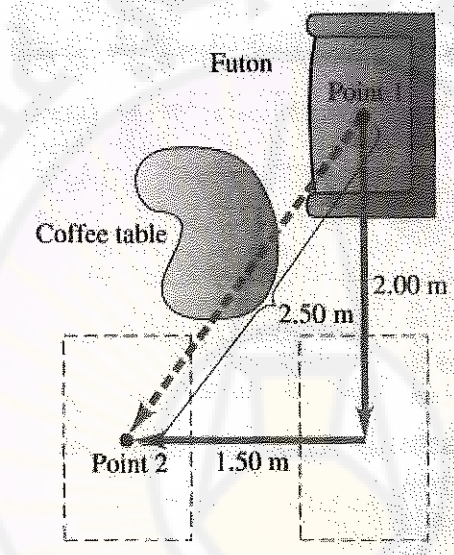
نريد تحريك جسم كتلته 40 kg ، مسافة 2.50 m ، الشكل (6-7)، المسار المباشر غير ممكن بسبب وجود طاولة على المسار، لذلك ندفع الجسم على مسار غير مباشر. قارن بين المسارين من حيث العمل المبذول لدفع الجسم إذا علمت أن معامل الاحتكاك الحركي $\mu_k = 0.2$.

الحل:

الجسم يكون عند السكون في النقطتين (1) و(2)، الطاقة الكامنة للعربة لا تتغير لان
الاجسم يتحرك على سطح افقي لذلك. $K_1 = K_2 = 0$ ، المسار المباشر.

$$W_p + W_{fr} = K_1 - K_2 = 0$$

$$W_p = -(-F_k \cdot S) = \mu_k \cdot mg \cdot S$$



الشكل (6 - 7)

$$W_p = 0.2 \times 40 \times 9.8 \times (2.5) = 196J$$

أما المسار اللامباشر.

$$W_p = 0.2 \times 40 \times 9.8 \times (2 + 1.5) = 274J$$

والعمل الزائد

$$274 - 196 = 78J$$

6-6 الطاقة الميكانيكية وإنحفاظها

دعنا نعد جملة محفوظة (نعني بذلك القوى المحافظة هي التي تقوم بعمل فقط)، التي فيها الطاقة تتحول من الحركية إلى الكامنة أو على العكس، مرة أخرى يجب علينا أن نتذكر أن الطاقة الكامنة غير موجودة للجسم المعزول. لنفرض أن الجملة هي كتلة m ، مربوطة بنهاية نابض، وتتحرك بحركة اهتزازية، أو أنها تتحرك في حقل الجاذبية الأرضية، بحسب مبدأ الطاقة الحركية- عمل، فإن العمل المنجز W_{net} ، على الجسم m ، يساوي تغير طاقته الحركية:

$$W_p = \Delta K \quad (6 - 24)$$

وإذا كانت الجملة تتألف من أكثر من جسم فإن العمل المنجز عليها يساوي إلى مجموع تغيرات الطاقة الحركية لكل الأجسام. وبما أننا نفرض أن الجملة محافظة نستطيع أن نكتب أن العمل المحصل المنجز عليها بدلالة التغير في الطاقة الكامنة بين الوضعين (1) و(2).

$$\Delta U = - \int_1^2 \vec{F}_{net} \cdot d\vec{l} = -W_{net} \quad (6 - 25)$$

بجمع المعادلتين (6 - 24) و (6 - 25) الطاقة الكامنة الكلية

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (6 - 26)$$

$$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0 \quad (6 - 27)$$

لنعرف الكمية E ، التي تدعى الطاقة الميكانيكية الكلية للجملة، وهي عبارة عن مجموع الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة للجملة عند أي لحظة.

$$E = K + U \quad (6 - 28)$$

والعبارة (6 - 27) ، يمكن كتابتها.

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \quad (6 - 29)$$

$$E_1 = E_2 = \text{Constant} \quad (6 - 30)$$

المعادلات تعبر عن مبدأ مفيد وعميق، الطاقة الميكانيكية الكلية كمية محفوظة طالما أنه لا يوجد قوى لا محافظة تقوم بعمل فإن الكمية $E = K + U$ ، عند الزمن البدئي (1) تساوي $K + U$ ، عند الزمن النهائي (2). أو بطريقة مختلفة لناخذ بعين الاعتبار المعادلة $\Delta U = -\Delta K$ ، إذا ازدادت الطاقة الحركية K ، فإن الطاقة الكامنة U ، سوف تنقص، وبالتالي فالطاقة الكامنة يجب أن تنقص بالكمية نفسها التي زادت بها الطاقة الحركية، بحيث أن $K + U$ ، تبقى ثابتة، وهو مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية من أجل القوى المحافظة.

إذا كانت القوى المحافظة هي التي تقوم بعمل فحسب، فإن الطاقة الميكانيكية للجملة لا تزيد ولا تنقص في أي عملية، وتبقى محفوظة، من أجل جسيم واحد فإن المعادلة (28 - 6)، تصبح على الشكل التالي:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{Constant} \quad (6 - 31)$$

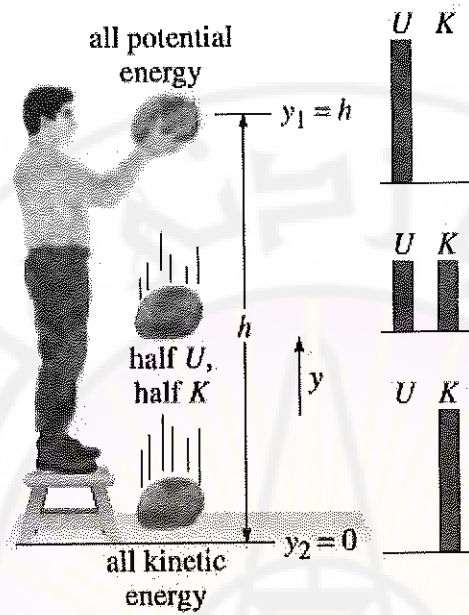
إذا فرضنا أن v_1 و U_1 ، هي السرعة والطاقة الكامنة في لحظة ما و أن v_2 و U_2 ، تعبر عن السرعة والطاقة الكامنة في لحظة أخرى على الترتيب لذلك يمكن أن نكتب:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U_2 \quad (6 - 32)$$

من هذه المعادلة نرى أنه لا يوجد فرق أين نختار الطاقة الكامنة لتكون صفراً بإضافة ثابت إلى U ، عملياً يضاف الثابت نفسه لكلا طرفي المعادلة، وهذا الثابت لا يؤثر في القوة الناتجة لأن $\left(F = -dU/dx\right)$.

المثال البسيط حول إنحفاظ الطاقة الميكانيكية (مع إهمال مقاومة الهواء) سقوط حجر تحت تأثير قوة الجاذبية الأرضية من إرتفاع h ، على سطح الأرض كما في الشكل (6 - 8)، إذا بدأ الحجر حركته بدءاً من السكون عندها كل الطاقة البدئية هي طاقة كامنة وأثناء سقوط الحجر تنقص الطاقة الكامنة mgy ، لأن y ، تنقص، ولكن في الوقت نفسه تزداد الطاقة الحركية من الصفر $K = 0$ ، (عند البدء)، بالمقدار نفسه تنقص الطاقة الكامنة

وبالتالي مجموع الطاقة الكامنة والحركية يبقى ثابت من أجل أي نقطة على المسار والطاقة الكلية:



الشكل (6 - 8)

الطاقة الكامنة للحجر تتحول إلى طاقة حركية.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

y : إرتفاع الحجر فوق الأرض عند اللحظة المعطاة و v سرعته عند تلك النقطة.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad (6 - 33)$$

عندما تسقط الحجر على الأرض حيث اخترنا $y = 0$ ، فتكون كل الطاقة هي طاقة حركية لأن $(U = 0)$ ، وقد تحولت كل الطاقة الكامنة إلى حركية.

(مثال 3-6):

احسب سرعة الحجر عند $y = 1m$ ، فوق سطح الأرض إذا كان الحجر في الأصل على ارتفاع $h = 3m$

الحل:

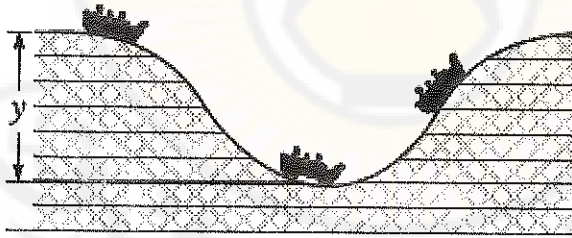
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy$$

$$9.8 \times 3 = \frac{1}{2}v_2^2 + 9.8 \times 1$$

$$v_2 = 6.3 \text{ m/s}$$

لاحظ أن سرعة الحجر لا تتعلق بكتلته.

المعادلة (33 - 6)، يمكن أن تطبق على جسم يتحرك بدون احتكاك تحت تأثير ثقله الشكل (6 - 9)، يبين سيارة التدرج السريعة تبدأ حركتها من السكون عند قمة الهضبة وتنزل بدون احتكاك إلى القاع ثم تصعد إلى القمة في الناحية الأخرى.



الشكل (6 - 9)

سيارة التدرج تتحرك بدون احتكاك، تبين إنحفاظ الطاقة الميكانيكية.

صحيح أنه يوجد قوة أخرى إلى جانب قوة الثقل تؤثر في السيارة، وهي القوة النازمة على المسار (قوة القيد)، وهي عمودية على اتجاه الحركة في كل نقطة من نقاط الحركة، وبالتالي

عملها يساوي الصفر، وبإهمال الحركة الدورانية لعجلات السيارة، وعد السيارة تتحرك حركة انتقالية فحسب، وعندما تصل إلى القاع تكون طاقتها الكامنة صفر، وطاقاتها الحركية أعظمية، بحيث يكون مجموعها يساوي الطاقة الميكانيكية التي تساوي الطاقة الكامنة عند بدء الحركة (من السكون)، وبعد أن تجتاز السيارة القاع تبدأ الطاقة الحركية بالتناقص، وتزداد الطاقة الكامنة بالمقدار نفسه، حتى تعود الطاقة الحركية إلى الصفر، وتكون الطاقة الكامنة هي نفسها الطاقة الميكانيكية، وعندها تقف السيارة عند الارتفاع نفسه الذي بدأت منه.

(مثال 6-4):

سيارة التدرج الشكل (6-9) ، حيث: $y_1 = 40m$ ، السيارة تبدأ الحركة من السكون (نعد $y = 0$ عند القاع). إحسب سرعة السيارة عند قاع الهضبة. عند أي إرتفاع ستكون سرعتها النصف.

الحل:

$$mgy_1 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v_2 = \sqrt{mgy_1} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 40} = 28 \text{ m/s}$$

$$mgy = mgy_1 - m\frac{v^2}{2}$$

$$y = y_1 - \frac{v^2}{2} = 40 - \frac{\left(\frac{28}{2}\right)^2}{2 \times 9.8} = 30m$$

سنأخذ في الحسبان القوة اللامحافطة مثل الإحتكاك لطالما أنها مصنونة، في واقع الحال لنفرض أنه تؤثر في السيارة المتدحرجة قوة إحتكاك، السيارة سوف لن تصل إلى الإرتفاع نفسه الذي بدأت منه كما في الحالة السابقة (غياب قوة الإحتكاك) في هذه الحالة، الطاقة الميكانيكية لن تبقى ثابتة (الطاقة الكلية تبقى ثابتة) وتدعى هذه القوى بقوة التبديد. يتحول عمل قوة الإحتكاك إلى حرارة وبالتالي الطلقة الكلية مصنونة في أية عملية، فمثلاً الكتلة التي تنزلق بشكل حر على سطح طاولة ستقف بسبب الإحتكاك، لأن الطاقة الحركية البدئية قد تحولت إلى طاقة حرارية. وبحسب النظرية الذرية تعد الطاقة الحرارية هي الطاقة الحركية للجزيئات المتحركة بسرعة، وأن إرتفاع درجة الحرارة يؤدي إلى زيادة الطاقة الحركية الوسطى لهذه الجزيئات، وهذا ما يشكل الطاقة الداخلية. من وجهة النظر الذرية الطاقة الداخلية يقصد بها طاقة الجسيمات الحركية والكامنة (عادة كهربائية) بسبب الأوضاع النسبية للذرات في الجزيئة، على سبيل المثال الطاقة المخزنة في الطعام أو في الفول، مثل الغازولين، تعد طاقة كامنة كهربائية (روابط كيميائية)، الطاقة الناتجة عن التفاعلات الكيميائية تشبه طاقة النابض المضغوط الذي ينجز عملاً عندما يتحرر، كي نتوصل إلى القانون العام لإنحفاظ الطاقة ميز الفيزيائيون في القرن التاسع عشر أنواع الطاقة الكهربائية والكيميائية والحرارية، من أجل كل نوع من القوى محافظ أو لا محافظ كان دائماً هناك إمكانية مع أنواع من الطاقات التي توافق العمل المبذول ووجد تجريبياً أن الطاقة الكلية E ، دائماً تبقى ثابتة.

$$\Delta E = 0 = \Delta K + \Delta U + \text{أنواع الطاقة الأخرى} \quad (6-34)$$

وهو من أهم القوانين الفيزيائية على الإطلاق ويدعى قانون إنحفاظ الطاقة، ويمكن أن ينص: الطاقة الكلية لا تزيد ولا تنقص في أي عملية والطاقة يمكن أن تتحول من شكل إلى آخر وتتحول من جسم إلى آخر ولكن الكمية الكلية تبقى ثابتة. من أجل الجملة الميكانيكية المحفوظة هذا القانون يمكن أن يشتق من قوانين نيوتن ويكافئهم، ولكن صلاحية قانون إنحفاظ الطاقة يبقى لمراقبة المجرب. على الرغم من أن

قوانين نيوتن قد أخفقت في تفسير الظواهر التي تجري في العالم الذري، ما تحت العالم الميكروي في حين قانون إنحفاظ الطاقة لا يزال يستخدم، وقد تم إثبات ذلك بالتجارب العملية.

(مثال 6-5):

إحسب السرعة المطلوبة لشخص يقفز بالزانة لإرتفاع $5m$ ، فوق الخط، نفرض أن مركز كتلة الشخص على إرتفاع $0.9m$ ، من الأرض في البدء.

الحل:

نطبق قانون إنحفاظ الطاقة الميكانيكية:

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgy$$

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$y = y_2 - y_1 = 5 - 0.9 = 4.1m$$

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.1} = 8.96 m/s$$

(مثال 6-6):

نابض في لعبة أطفال الشكل (6 - 10) ، يضغط لمسافة $6.0cm$ ، وثابته $250 N/m$ ،

وكتلته مهملة يطلق كتلة مقدارها $0.100 kg$ ، عند تحرير النابض (يعود النابض إلى الوضع الأصلي) ، إحسب السرعة التي تكتسبها الكتلة مع إهمال الإحتكاك.

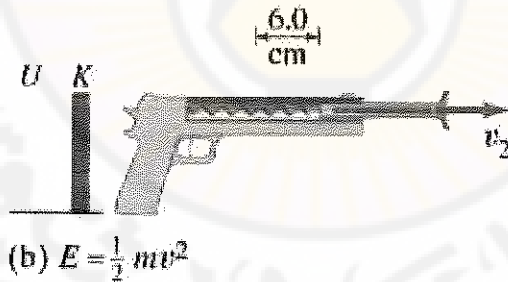
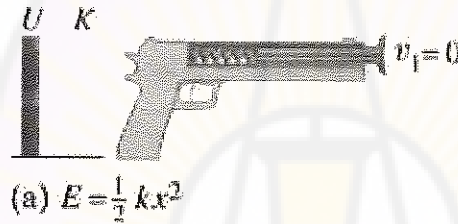
الحل:

النايـض في حالة إسترخاء $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$ ، نهمل الإحتكاك.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$0 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{kx_1^2}{m}} = \sqrt{\frac{250 - (0.06)^2}{0.10}} = 3.0 \text{ m/s}$$



الشكل (6 - 10)

-a السهم يضغط النايـض

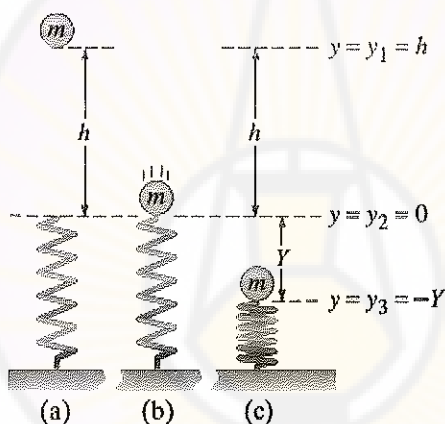
-b السهم يتحرر ويغادر النايـض بسرعة v_2

(مثال 6-7):

كرة كتلتها $m = 2.6 \text{ kg}$ ، و تبدأ الحركة من السكون وتسقط عمودياً مسافة $h = 55 \text{ cm}$ ، على نابض شاقولي وينضغط مسافة $y = 15 \text{ cm}$ ، الشكل (6-11)،
إحسب ثابت النابض (كتلة النابض مهملة).

الحل:

القوى المؤثرة في الكرة هي قوى الجذب الثقالي، وقوة الإرجاع النابضي، وكتاهما محافظتان لذلك نستطيع أن نطبق قانون إنحفاظ الطاقة الميكانيكية. نفرض الوضع البدئي ($y = 0$)، عندما يكون النابض في حالة استرخاء.



الشكل (6-11)

نطبق قانون إنحفاظ الطاقة الميكانيكية على الكرة.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 55 \times 10^{-2}} = 3.28 \text{ m/s}$$

نطبق قانون إنحفاظ الطاقة على النابض

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = -mgy + \frac{1}{2}k(y)^2$$

$$k = \frac{2}{y} \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy \right)$$

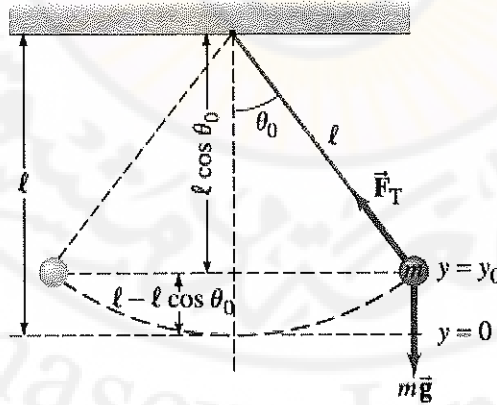
$$k = \frac{2,60}{y} \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy \right)$$

$$k = 1590 \text{ N/m}$$

(مثال 6-8):

نواس بسيط الشكل (6-12)، يتألف من كرة صغيرة كتلتها m ، ومعلقة بخيط عديم الكتلة وطوله (ℓ) ، عند اللحظة $t = 0$ ، الخيط يصنع زاوية θ_0 ، بالنسبة إلى الشاقول فسر طبيعة الحركة على أساس الطاقة الحركية والكامنة وأوجد سرعة الكرة:

- كتابع للموضع عندما يترنح ذهاباً وإياباً.
- عند النقطة الدنيا.
- أوجد توتر الخيط F_T ، مع إهمال الاحتكاك ومقاومة الهواء.



الشكل (6-12)
النواس البسيط

الحل:

نستخدم قانون إنحفاظ الطاقة الكلية عدا الحالة (c)، لأن F_T ، ليست قوة محافظة لذا نطبق قانون نيوتن الثاني:

a) عندما نحرر الكرة تترنح ذهاباً و إياباً، والمعادلات التالية تعبر عن الحالات الطاقية التي يمر بها النواس أثناء الترنح.

$$\theta = +\theta_0, \quad K = 0, \quad U = U_{Max}$$

$$\theta = 0, \quad K = K_{Max}, \quad U = U_{Min}$$

$$\theta = -\theta_0, \quad K = 0, \quad U = U_{Max}$$

وتبقى كرة النواس تترنح ضمن المجال

$$-\theta_0 \leq \theta \leq +\theta_0.$$

b) الخيط عديم الكتلة لذلك يلزمنا التعامل مع الكرة فحسب، القوى المطبقة على الكرة هي

قوة الثقل وقوة الشد F_T ، وهي من قوى التقييد، وعملها يساوي الصفر، لذلك نهتم فحسب، بقوة الجاذبية.

الطاقة الميكانيكية:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$y = y_0 = \ell(1 - \cos \theta_0)$$

عند البدء ، $\theta = \theta_0 = 0$.

$$E = mgy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0$$

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

$$y_0 - y = \ell(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

وبالتالي:

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

(c) في الوضع (1) لدينا، $y = 0$

$$v = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_0)}$$

(d) قوة توتر الخيط لا تتجز عملاً لذلك نستطيع أن نطبق قانون نيوتن الثاني

نلاحظ أن التسارع عند أي نقطة يتجه باتجاه الداخل محمولاً على القطر وقيمه

$$\left(\frac{v^2}{\ell} \right) \text{ لأن الكرة مقيدة وتتحرك على قوس من دائرة.}$$

$$m \frac{v^2}{\ell} = F_T - mg \cos \theta$$

$$F_T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \cos \theta \right)$$

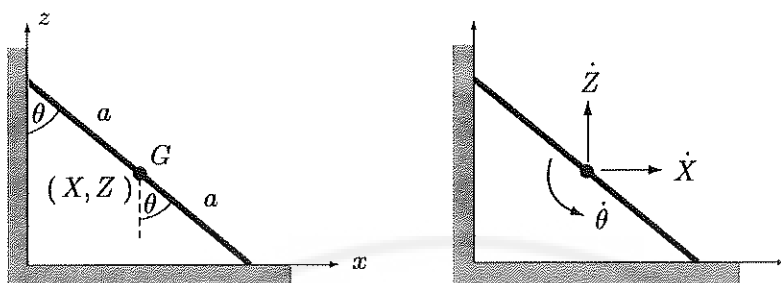
$$F_T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

(مثال 6-9):

نفرض لدينا سلماً متجانساً طوله $2a$ ، وكتلته M ، يستند على أرض أفقية، ويميل على جدار عمودي ناعم، كما موضح على الشكل (6-12)، يتحرك السلم من السكون صانعاً زاوية $\theta = 30^\circ$ مع الشاقول.

A- أوجد معادلة إنحفاظ الطاقة لحركة السلم.

B- استنتج أن السلم يفقد الارتباط مع الجدار عندما، $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$.



الشكل (6 - 12)

الحل:

A- لنفرض أن الزاوية بين السلم و الشاقول من الجهة السفلية θ ، الشكل (6 - 12) ،
تتغير مع الزمن الإحداثيات مركز الكتلة (x, z)

$$x = a \sin \theta, \quad z = a \cos \theta \quad (6 - 35)$$

مركبات شعاع السرعة الموافقة:

$$V_x = \frac{dX}{dt} = a(\cos \theta) \cdot \omega, \quad V_z = \frac{dZ}{dt} = -a(\sin \theta) \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad \text{السرعة الزاوية}$$

الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2} M (V_x^2 + V_z^2) + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} (Ma^2 + I)$$

I : عزم العطالة حول المحور الأفقي المار من G

$$I = \frac{M}{3} a^2$$

الطاقة الكامنة للسلم

$$U = MgZ = Mga \cos \theta + \frac{\omega^2}{2} (Ma^2 + I)$$

علينا أن نتخلص من قوى القيد مثل قوى رد الفعل العمودية عن الأرض وعن الجدار ليس لها عمل

$$E = Mga \cos \theta + \frac{2M}{3} a^2 \omega^2$$

حيث E : الطاقة الكلية

الشروط البدئية: $t = 0, \omega = 0, \theta = 60^\circ$

$$E = \frac{Mga}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{4a} (1 - 2 \cos \theta) \quad (6 - 36)$$

B- لنفرض أن القوى الناعمة المؤثرة في السلم بواسطة الأرض الناعمة والجدار. F_{NW}, F_{NF} ، مركبات قانون نيوتن

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{NW}$$

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = F_{NF} - Mg$$

باشتقاق العلاقات (6 - 35) مرتين بالنسبة إلى الزمن:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -a(\sin \theta) \cdot \omega^2 + a(\cos \theta) \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -a(\cos \theta) \cdot \omega^2 - a(\sin \theta) \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$F_{NF} = -M a \left[(\cos \theta) \cdot \omega^2 - (\sin \theta) \cdot \frac{d\omega}{dt} \right] + Mg$$

$$F_{NW} = M a \left[-(\sin \theta) \cdot \omega^2 + (\cos \theta) \cdot \frac{d\omega}{dt} \right]$$

من أجل التعبير عن هاتين العلاقتين بدلالة θ ، لذلك نشق العلاقة (36 - 6)، بالنسبة إلى الزمن

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{4a} \sin \theta$$

نعوض نحصل على

$$F_{NF} = \frac{Mg}{4} (1 - 3 \cos \theta + 9 \cos^2 \theta)$$

$$F_{NW} = \frac{3Mg}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 1)$$

نلاحظ F_{NW} ، تنعدم عندما $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$ ، لا يمكن أن تكون سالبة، لأن الجدار

يدفع السلم فحسب، نستنتج : الشرط أن السلم يبقى مرتبطاً بالجدار غير محقق من أجل

$$\theta > \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) ، \text{ السلم يغادر الجدار عندما } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$$

8-6 إنحفاظ الطاقة بوجود قوى الضياع

كنا قد ناقشنا في الفقرة (20)، إنحفاظ الطاقة الميكانيكية بعض الأمثلة لقوانين الإنحفاظ الطاقة من أجل الجمل المحافظة، والآن لنناقش بعض الأمثلة التي تتضمن قوى لا محافظة.

لنفرض على سبيل المثال سيارة التدرج، وهي تتدرج من التلة الشكل (6 - 9)، و تخضع لقوى إحتكاك، تتحرك على مسار من النقطة (1) إلى النقطة (2) الطاقة الضائعة بقوة الإحتكاك $\vec{F}_{fr}$ ، التي تؤثر في السيارة (التي نعدّها جسيماً) هي $\int_1^2 \vec{F}_{fr} \cdot d\vec{\ell}$ ، إذا كانت قيمة $\vec{F}_{fr}$ ثابتة فإن قيمة الطاقة الضائعة $W_{fr} = -F_{fr} \cdot \ell$ ، حيث ℓ ، المسافة الحقيقية

على طول المسار من النقطة (1) إلى النقطة (2) (وإشارة السالب بسبب أن $\vec{F}_{fr}$ و $d\ell$ متعاكستان في الاتجاه). لنكتب معادلة إنحفاظ الطاقة المعادلة (6 - 34)

$$\Delta K + \Delta U + F_{fr} \cdot \ell = 0 \quad (6 - 37)$$

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) + mg(y_2 - y_1) + F_{fr} \cdot \ell = 0 \quad (6 - 38)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + F_{fr} \cdot \ell \quad (6 - 39)$$

القوى المؤثرة هي قوة الإحتكاك والجاذبية

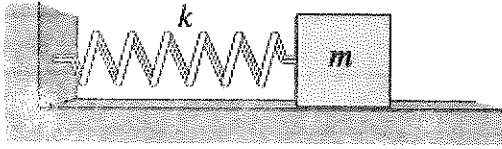
$$\vec{E}_1 = E_2$$

الطاقة البدئية تساوي الطاقة النهائية بما فيها الطاقة الحرارية في الطرف الأيسر الطاقة الميكانيكية للجملة في البدء وتساوي الطاقة النهائية في أي نقطة لاحقة على طول المسار بالإضافة لكمية من الطاقة الحرارية أو (الداخلية) تنتج أثناء العملية.

1-8-6 مبدأ الطاقة - عمل وإنحفاظ الطاقة

إن قانون إنحفاظ الطاقة أعم وأشمل وأكثر فائدة من مبدأ الطاقة - عمل، وبالفعل مبدأ الطاقة - عمل يجب أن ينظر إليه كقانون إنحفاظ الطاقة، و هو مع هذا مفيد من أجل بعض المسائل الميكانيكية، قانون إنحفاظ الطاقة يمكن أن يتعلق بإختيارك للجملة المدروسة.

لنفرض على سبيل المثال أن كتلة مربوطة بنهاية نابض جسم موضوعة على طاولة أفقية تتحرك بدون إحتكاك الشكل (6 - 13)، إذا اخترت الكتلة كجملة فإن العمل المنجز على الكتلة بالنابض يساوي إلى التغير في الطاقة الحركية للجسم، مبدأ الطاقة - عمل (إنحفاظ الطاقة غير مطبق على هذه الجملة - لأن طاقة الجسم تتغير)، بدلاً عن ذلك، إذا اخترت الكتلة + النابض كجملة، لا يوجد عمل للقوى الخارجية (حيث أن النابض جزء من الجملة المختارة)، عندئذ يمكن تطبيق قانون إنحفاظ الطاقة على الجملة.



الشكل (6 - 13)

الجسم مربوط بالنابض على طاولة عديمة الاحتكاك إذا اخترنا الجملة جسم - نابض، وبالتالي

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \text{ محفوظة.}$$

(مثال 6-10):

سيارة التدرج كتلتها 1000 kg ، تصل إلى إرتفاع 25 m ، في التلة الثابتة قبل أن تتوقف، الشكل (6 - 14)، وتتحرك مسافة كلية (400 m) ، إحسب الطاقة الحرارية الناتجة وقوة الإحتكاك الوسطى (نفرض أنها ثابتة) على السيارة حيث أن:

• الجملة هي سيارة التدرج والأرض (التي تؤثر بقوة الثقل) القوى المؤثرة في السيارة الثقل والإحتكاك، (قوة رد الفعل الناظمي تؤثر في السيارة ولكن لا تعمل).

• نختار الأوضاع البدئية والنهائية: لنأخذ النقطة (1) قمة الهضبة الأولى والنقطة (2) على الهضبة الثانية عندما تتوقف السيارة.

• نختار جملة المقارنة، مثل أخفض نقطة في المسار $y = 0$ ، من أجل الطاقة الكامنة الثقالية.

• هل الطاقة الميكانيكية محفوظة ، لا (لأن الإحتكاك موجود).

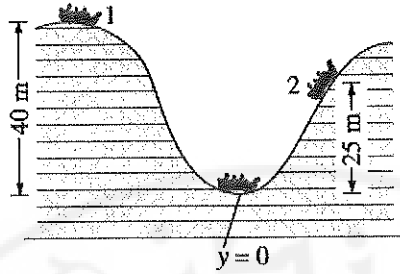
• يوجد إحتكاك يؤثر في السيارة، لذلك سنستخدم قانون إنحفاظ الطاقة على الشكل :

$$0 + (1000) \times (9.8) \times (40) = 0 + (1000) \times (9.8) \times (25) + F_{fr} \times (400)$$

$$F_{fr} = 370 \text{ N}$$

وهي قوة الإحتكاك الوسطى التقريبية لأن قوة الإحتكاك عند نقاط مختلفة تتعلق بالقوة الناظمية التي تتغير مع الميل، حيث:

$$v_1 = 0, y_1 = 40m, v_2 = 0, y_2 = 25m, \ell = 400m$$

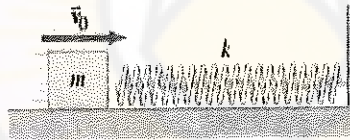


الشكل (6 - 14)

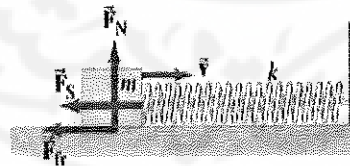
سيارة التدرج لا تبلغ الإرتفاع الأصلي للهضبة بسبب الإحتكاك.

(مثال 6-11):

جسم كتلته m ، ينزلق على سطح أفقي خشن ويتحرك بسرعة v_0 ، عندما يضرب بنابض رأسياً الشكل (6 - 15)، ويضغط على النابض لمسافة عظمية x ، إذا كان ثابت النابض k ، حدد معامل الإحتكاك الحركي بين الجسم والسطح الأفقي.



(a)



(b)

الشكل (6 - 15)

الحل:

عند لحظة التصادم طاقة الكتلة $K = \frac{1}{2}mv_0^2$ ، والناض غير مضغوط، الطاقة الميكانيكية البدئية للجهة هي $\frac{1}{2}mv_0^2$ و $U = 0$ ، بعد مرور فترة من الزمن الناض ينضغط أعظما $K = 0$ و $U = \frac{1}{2}kx^2$ ، لمسافة عظمى. والطاقة المتحولة إلى طاقة حرارية هي:

$$F_{fr} \cdot x = \mu_k \cdot mg \cdot x$$

الطاقة النهائية = الطاقة البدئية

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu_k mg \cdot x$$

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2gx} - \frac{kx}{2mg}$$

9-6 الطاقة الكامنة الثقالية - سرعة الإنفلات من الأرض

لقد تعاملنا مع الطاقة الكامنة، بفرض أن قوة الثقالة هي قوة ثابتة $\vec{F} = m\vec{g}$ ، وهذا الافتراض يبقى صحيحاً بالنسبة إلى الجسم القريب من سطح الأرض، لكن التعامل مع الثقالة أكثر عمومية من أجل نقاط ليست قريبة من سطح الأرض، يجب علينا أن نفترض أن قوة الثقل (من الأرض) المطبقة على الجسم الذي كتلته m ، تتناسب عكساً مع مربع البعد عن مركز الأرض r ، العلاقة البسيطة الدقيقة تعطى حسب قانون نيوتن للتجاذب العام.

$$\vec{F} = -G \frac{mM_E}{r^2} \vec{u}_r, \quad r > r_E \quad (6-40)$$

حيث M_E ، كتلة الأرض و $\vec{u}_r$ ، شعاع الواحدة (عند مكان m) والموجهة قطرياً من مركز الأرض وإشارة السالب تشير إلى أن القوة المطبقة على الجسم m ، متجهة بإتجاه مركز الأرض في إتجاه معاكس لـ $\vec{u}_r$ ، هذه العلاقة يمكن أن تستخدم لشرح قوة الثقل على الكتلة m ، في منطقة من الأجرام السماوية الأخرى، كالقمر والكوكب والشمس، في هذه الحالة M_E ، يجب أن تستبدل بكتل تلك الأجسام. لنفرض أن جسماً كتلته m ، يتحرك من وضع

إلى آخر على طول مسار الشكل (6 - 16)، أي أن المسافة من مركز الأرض تتغير من r_1 إلى r_2 ، والعمل المنجز بقوة الثقل.

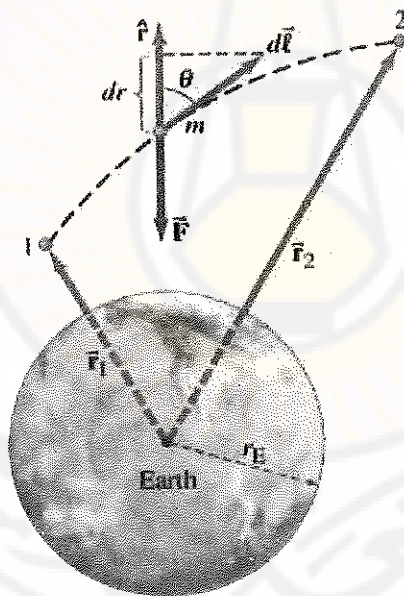
$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -GmM_E \int_1^2 \frac{d\ell}{r^2} \vec{u}_r \quad (6 - 41)$$

حيث $d\vec{\ell}$ ، تمثل انزياحاً عنصرياً.

وبما أن $dr = \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell}$ ، مركبة $d\vec{\ell}$ على اتجاه $\vec{u}_r$:

$$W = -GmM_E \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = GmM_E \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6 - 42)$$

$$W = G \frac{mM_E}{r_1} - G \frac{mM_E}{r_2} \quad (6 - 43)$$



الشكل (6 - 16)

مسار عشوائي لجسيم كتلته m يتحرك من نقطة 1 إلى نقطة 2.

لأن قيمة التكامل تتعلق فحسب، بوضع النقاط (r_1, r_2) ، ولا تتعلق بالمسار، إذاً قوة الثقالة هي قوة محافظة. لذلك يمكننا استخدام مفهوم الطاقة الكامنة لقوة الثقالة، حتى أن التغير في الطاقة الكامنة يعرف دائماً على أنه سالب العمل المنجز بالقوة:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = G \frac{mM_E}{r_2} + G \frac{mM_E}{r_1} \quad (6 - 44)$$

الطاقة الكامنة عند أي مسافة r ، من مركز الأرض .

$$U(r) = -G \frac{mM_E}{r} + C, \quad r > r_E \quad \text{تجاذب} \quad (6 - 45)$$

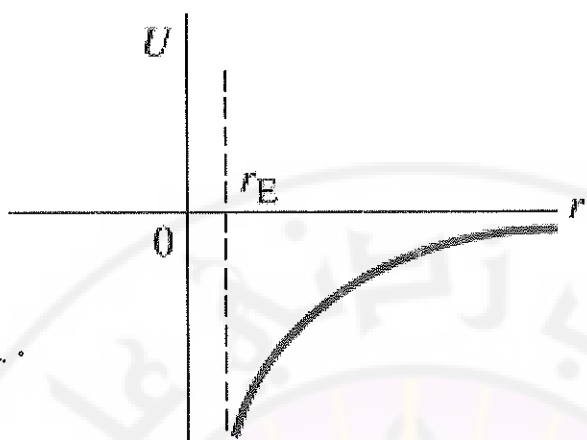
c : ثابت

وبإختبار ، $U = C = 0$ ، عند $r = \infty$ ، عندما يقرب الجسم من الأرض فإن طاقته الكامنة تتناقص وتبقى سالبة، الشكل (6 - 17)، المعادلة (6 - 44)، يمكن إختزالها إلى المعادلة $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$ ، من أجل الجسيمات القريبة من سطح الأرض. من أجل الجسم الذي كتلته m ، الذي تؤثر فيه فحسب، قوة تجاذب الأرض والطاقة الكلية تكون محفوظة.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G \frac{mM_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G \frac{mM_E}{r_2} = Constant \quad (6 - 46) \quad \text{تجاذب فحسب.}$$

(مثال 6-12):

تسقط أمتعة من طائرة بسرعة 1800 m/s ، على إرتفاع 1600 km ، من سطح الأرض، إحسب سرعتها عند إصطدامها بالأرض.



الشكل (6 - 17)

علاقة الطاقة الكامنة للجاذبية كتابع للمتغير r المسافة من مركز الأرض، صالحة من أجل النقاط

$$r > r_E$$

الحل:

نطبق قانون إنحفاظ الطاقة، سرعة الأمتعة بالنسبة إلى الأرض هي سرعة الطائرة التي سقطت منها الأمتعة، قانون إنحفاظ الطاقة في هذه الحالة.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G \frac{mM_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G \frac{mM_E}{r_2}$$

$$\text{حيث: } v_1 = 1.80 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$r_1 = 1.66 \times 10^6 + 6.38 \times 10^6 \text{ m}, r_2 = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2GmM_E \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$= \sqrt{(1.80 \times 10^3)^2 - 2 \times (6.7 \times 10^{-11}) \times (5.98 \times 10^{24}) \times \left(\frac{1}{7.08 \times 10^6} - \frac{1}{6.38 \times 10^6} \right)}$$

$$v_2 = 5320 \text{ m/s}$$

بلا شك السرعة ستكون أقل فيما إذا عددنا مقاومة الهواء ، ونلاحظ أيضاً إتجاه السرعة لم يدخل في الحسابات، وهو أحد فوائد طريقة إنحفاظ الطاقة.

1-9-6 سرعة الإنفلات من الأرض

عندما ينطلق الجسم من الأرض في الهواء يعود الجسم إلى الأرض ثانية لأن سرعته لبست عالية جداً ، ولكن إذا كانت سرعة كبيرة بما فيه الكفاية فإنه يستمر في الحركة إلى الفضاء، ولا يعود إلى الأرض (السرعة البدائية الدنيا المطلوبة لمنع الجسم من العودة إلى الأرض تدعى سرعة الإنفلات من الأرض v_{esc} ، ولتحديد v_{esc} ، من سطح الأرض (مع إهمال مقاومة الهواء) نستخدم المعادلة (46 - 6)، حيث $v_1 = v_{esc}$ ، $r_1 = r_E$ ، لكننا نزيد السرعة الدنيا للإنفلات، عندما يبلغ الجسم $r_2 = \infty$ ، مع سرعة معدومة $v_2 = 0$ ،

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G \frac{mM_E}{r_E} = 0 + 0 \quad (6 - 47)$$

$$v_{esc} = \sqrt{2G \frac{mM_E}{r_E}} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (6 - 48)$$

من المهم أن نلاحظ أن الجسم يمكن أن يفلت من الأرض (أو المجموعة الشمسية) ولا يعود القوة المؤثرة فيه بسبب جاذبية الأرض ليست في الواقع معدومة عند قيمة محدودة r .

(مثال 6-13):

(a) قارن سرعة الإنفلات لصاروخ من الأرض والقمر.

(b) قارن الطاقات المطلوبة لتغذية الصواريخ.

• من أجل القمر:

$$M_M = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg} , \quad r_M = 1.74 \times 10^6 \text{ m}$$

$$M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg} , \quad r_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m} \quad \bullet \text{ من أجل الأرض:}$$

سنستخدم المعادلة (48 - 6)، ونستبدل r_E ، M_M ، r_M ، لإيجاد v_{esc} من الأرض ،
 (a) باستخدام المعادلة نسبة سرعة الانفلات.

$$\frac{v_{esc}(\text{الأرض})}{v_{esc}(\text{القمر})} = \sqrt{\frac{r_M M_E}{r_E M_M}} = 4.7$$

للانفلات من الأرض تتطلب سرعة تعادل أكبر مرة (4.7) مرة من السرعة المطلوبة للانفلات من القمر.

(b) الوقود المحروق يجب أن يزود الصاروخ بطاقة تتناسب مع $(K = \frac{1}{2}mv^2)$ ، إذاً للانفلات من الأرض يجب أن نغذي الصاروخ بطاقة أكبر بمقدار $(4.7)^2 = 22$ مرة من الطاقة اللازمة للانفلات من القمر.

10-6 القدرة

تعرف القدرة بأنها معدل تغير العمل المنجز، وتعرف أيضاً القدرة الوسطى $\bar{P}$ ، بأنها تساوي العمل المنجز مقسوماً على الزمن الذي استغرقه

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \quad (6 - 49)$$

بما أن العمل المنجز في عملية يتضمن تحويل الطاقة من نوع، أو جسم إلى آخر، فالقدرة يمكن تعريفها على أنها معدل تغير الطاقة المتحولة

$$\bar{P} = \frac{\text{الطاقة المتحولة}}{\text{الزمن}} = \frac{W}{t} \quad (6 - 50)$$

الطاقة اللحظية (الآنية) P

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (6 - 51)$$

العمل المنجز خلال عملية يساوي الطاقة المتحولة من جسم إلى آخر، على سبيل المثال. الطاقة الكامنة المخزونة في النابض الشكل (6 - 6) والمتحولة إلى طاقة حركية للكرة، النابض قد أنجز عملاً على الكرة وبالمثل عندما نقذف الكرة أو ندفع العربة، في أي لحظة العمل المنجز هو الطاقة المتحولة من جسم إلى آخر، إذ يمكننا أيضاً القول أن القدرة هي معدل تغير الطاقة المتحولة.

$$P = \frac{dE}{dt} \quad (6 - 52)$$

قدرة الحصان تشير إلى أنه كم من العمل يمكنه أن ينجز في واحدة الزمن، قدرة المحرك تشير إلى أنه كم من الطاقة الكيميائية أو الكهربائية يمكن أن تتحول إلى طاقة ميكانيكية في واحدة الزمن وتقاس في الجملة الدولية SI بالجول/ثانية ولها اسم خاص وهو الواط.

$$1W = 1 J/s$$

وهي واحدة مألوفة بالنسبة إلينا معدل تغير الطاقة الكهربائية بواسطة اللمبة أو السخان إلى ضوء أو حرارة، وتقاس القدرة في النظام البريطاني (ft.lb/s) ومن أجل القدرات الكبيرة يستخدم الحصان (hp) ويساوي 746 watts، لمعرفة الاختلاف بين الطاقة والقدرة لنأخذ المثال التالي:

شخص عمله محدود يستطيع أن يقوم بعمل ليس فحسب، عن طريق الطاقة الكلية، ولكن أيضاً ما سرعة الطاقة المتحولة. شخص قادر على السير مسافة، أو على تسلق الدرج قبل أن يتوقف لأنه يكون قد صرف المزيد من الطاقة، من ناحية أخرى الشخص الذي يركض بسرعة كبيرة على الدرج يشعر بأنه منهك بعد رحلة أو رحلتين لأن مقدرة محدودة. معدل التغير في جسمه لتحويل الطاقة الكيميائية إلى طاقة ميكانيكية.

(مثال 6-14):

يصعد عداء كتلته 60 kg، على السلم خلال (4 s) ليصل إلى إرتفاعاً قدره 4.5 m

(a) احسب استطاعة العداء بالواط أو الحصان.

(b) كم من الطاقة يحتاج.

الحل:

العمل المنجز ضد قوة الجاذبية

$$W = mgy$$

$$\bar{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgy}{t} = \frac{60 \times 9.8 \times 4.5}{4} = 660w$$

$$\bar{P} = 660w = \frac{660}{1000} \left(1\frac{1}{3}\right) hp$$

$$\bar{P} = 0.8hp$$

$$E = \bar{P} \cdot t = 660.4 = 2640J = mgy$$

السيارة تنجز عملاً للتغلب على قوة الإحتكاك (قوة المقاومة الهواء) للصعود على المرتفع، السيارة تحتاج قدرة أكثر عندما تصعد مرتفع أو تتسارع، على الرغم من أن السيارة تسير على طريق مستوي وبسرعة ثابتة للتغلب على قوة الإحتكاك ومقاومة الهواء، القدرة يمكن أن نكتب بدلالة قوة المحصلة $\vec{F}$ ، المطبقة على الجسم.

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\ell}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (6 - 53)$$

(مثال 6-15):

إحسب القدرة اللازمة لسيارة كتلتها 1400 kg، عند الشروط التالية

انظر الشكل (6 - 18)

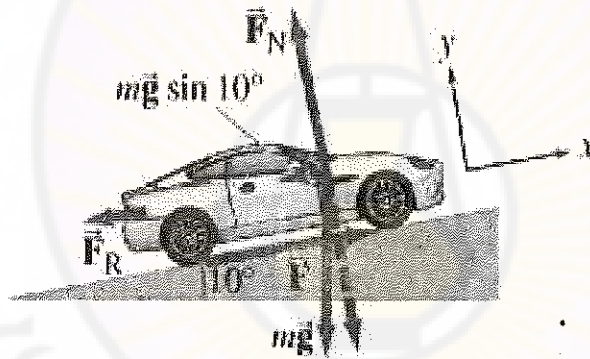
(a) السيارة تصعد مرتفعاً 10° بسرعة ثابتة 80 km/h .

- (b) السيارة تتسارع على طول طريق مستوي من 90 km/h ، إلى 110 km/h ، خلال 6 s . (بفرض أن قوة المقاومة $F_R = 700 \text{ N}$)

الحل:

- (a) من أجل الصعود بسرعة ثابتة، حسب القانون الثاني يجب على السيارة أن تؤثر بقوة F ، تساوي مجموع قوى الممانعة.

$$\begin{aligned} F &= 700 + (mg) \sin 10^\circ \\ &= 700 + (1400) \times (9.80) \times (0.174) \\ F &= 3100 \text{ N} \end{aligned}$$



الشكل (6 - 18)

الطاقة هنا مطلوبة للسيارة كي تصعد التلة.

السرعة $\vec{v} = 22 \text{ m/s}$ ، توازي القوة $\vec{F}$ ، حسب المعادلة (53 - 6).

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v$$

$$P = 3100 \times (22 \text{ m/s}) = 68.0 \text{ kW} = 91 \text{ hp}$$

(b) السيارة تتسارع من 25 m/s ، إلى 30.6 m/s ، يجب أن تطبق على السيارة قوة بحيث تتغلب على قوة الممانعة.

$$\bar{a}_x = \frac{30.6 \text{ m/s} - 25 \text{ m/s}}{6} = 0.39 \text{ m/s}^2$$

نطبق قانون نيوتن الثاني.

$$\sum F_x = ma_x = F - F_R$$

$$F = m \cdot a_x + F_R$$

$$F = 1400 \times 0.93 + 700 = 2000 \text{ N}$$

القدرة المطلوبة تزداد مع السرعة، ويجب أن تكون قدرة المحرك الأعظمية

$$\bar{P} = 2000 \times 30.6 = 61.2 \text{ kW} = 82 \text{ hp}$$

ملاحظة:

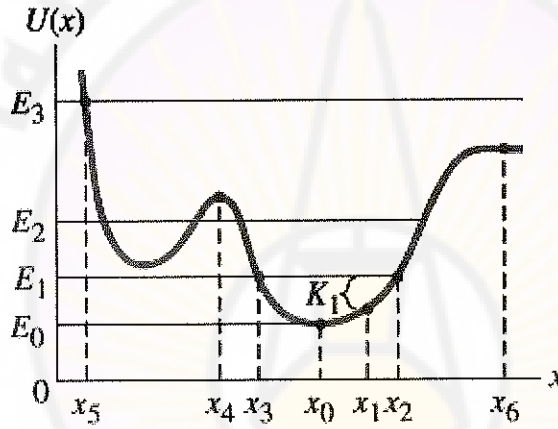
حوالي 60% إلى 80% من قدرة المحركات تصل إلى العجلات، ذكرنا في المثال أعلاه جزءاً من الطاقة فحسب، الناتجة عن محرك السيارة يصل إلى العجلات، بعض الطاقة الضائعة في المحرك نفسه (من الوقود)، لا تؤدي إلى عمل مفيد، الفعالية الكلية e ، للمحرك تعطي نسبة الطاقة المفيدة الناتجة من المحرك P_{out} إلى الطاقة الداخلة P_{in} .

$$e = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (6 - 54)$$

هذه الفعالية هي دائماً أقل من الواحد، لأنه لا يوجد محرك يستطيع أن يحول كامل الطاقة من شكل إلى شكل آخر بدون جزء يذهب إلى الإحتكاك أو طاقة حرارية، أو شكل غير مفيد من الطاقة. وهذا يتفق مع المبدأ الثاني في الترموديناميك.

11-6 مخططات الطاقة الكامنة التوازن المستقر واللامستقر

إذا كانت القوة المحافظة تنجز عملاً على الجسم فإننا نستطيع أن نتوصل إلى أشياء مهمة عن الحركة بدراسة مخطط الطاقة الكامنة- المنحني البياني $U(x) = f(x)$ ، أحد الأمثلة على مخطط الطاقة الكامنة مبين على الشكل (6 - 19)، الطاقة الكلية ثابتة. $E = K + U$ ، و يمكن التعبير عنها بخط أفقي على المخطط، أربع قيم ممكنة محتملة تدعى E_0, E_1, E_2, E_3 ، ما القيم الفعلية لـ E ، من أجل هذه الجملة التي تتعلق بالشروط البدئية (على سبيل المثال الطاقة الكلية E لكنتلة الاهتزاز المربوطة بنهاية نابض تتعلق بمقدار إنضغاط أو استطالة النابض) ؟



الشكل (6 - 19)

مخطط الطاقة الكامنة.

الطاقة الحركية $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، لا يمكن أن تكون أقل من الصفر، وبما أن ثابت $E = U + K$ ، وبالتالي $U(x)$ ، يجب أن تكون أقل أو تساوي E ، من أجل كل الحالات $U(x) \leq E$ ، إذ أن القيمة الدنيا للطاقة الكامنة المأخوذة من أجل الطاقة الكلية المبينة على الشكل (6 - 19)، هي E_0 . من أجل قيمة E ، الجسم يمكن أن يكون في حالة التوازن (الاستقرار) عند $x = x_0$ ، الجملة لها طاقة كامنة ولكن ليس لها طاقة حركية

عند هذا الوضع، إذا كانت الطاقة الكلية للجملة E ، أكبر من E_0 ، مثل E_1 ، إذ يكون للجملة طاقة كامنة وطاقة حركية، وبما أن الطاقة E ، محفوظة.

$$K = E - U(x) \quad (6 - 55)$$

المنحني في الشكل (6 - 19)، يعبر عن $U(x)$ ، عند كل نقطة x ، فالطاقة الحركية للجسم عند x_1 ، هي K_1 ، في الحالة E_1 ، الجسم يمكن أن يتأرجح بين النقاط x_2, x_3 ، لأنه إذا $x > x_2$ ، أو $x < x_3$ ، الطاقة الكامنة ستكون أكبر من E ، أي أن هذا يعني أن $K > 0$ ، والسرعة ستكون عدد تخيلي $K = \frac{1}{2}mv^2 > 0$ ، وهذا مستحيل. عند x_2 و x_3 ، السرعة تكون صفر، لذلك $E = U$ ، حيث ندعو النقاط x_2 و x_3 ، نقاط التحول للحركة.

إذا كان الجسم عند x_0 ، يتحرك إلى اليمين، وطاقته الحركية (وسرعته) تتناقص حتى تبلغ الصفر عند x_2 ، الجسم يعكس الإتجاه إلى اليسار، وتزداد سرعته حتى يمر بـ x_0 ، مرة أخرى، ويستمر بالحركة متناقصاً في السرعة حتى يبلغ $x = x_3$ ، حيث $v = 0$ ، الجسم يعكس إتجاهه مرة أخرى.

إذا كان لدى الجسم طاقة $E = E_2$ ، يوجد أربع نقاط تحول يستطيع الجسم الحركة فحسب، في أحد الطاقنتين الكامنتين، "القاع" تتعلق بوضعه البدئي، إنه لا يستطيع أن ينتقل من قاع إلى آخر، لوجود حاجز بينهم، على سبيل المثال عند نقطة مثل x_4 ، $U(x) > E_2$ ، التي تعني أن v ، يجب أن يكون تخيلاً.

أما من أجل الطاقة E_3 ، يوجد فحسب، نقطة تحول واحدة، حيث $U(x) < E_3$ ، من أجل $x > x_5$ ، إذا بدأ الجسم بالحركة بإتجاه اليسار، يمر من القيعان ولكن يتوقف فجأة عند $x = x_5$ ، ثم يرتد إلى اليمين و يستمر بالحركة بشكل غير محدود ولا يعود.

كيف لنا أن نعرف أن الجسم يعكس إتجاهه عند نقاط التحول؟ لأنه بسبب القوة المطبقة عليه، القوة F ، تتعلق بالطاقة الكامنة بالمعادلة $F = -\frac{dU}{dx}$ ، القوة F ، إلى سالب ميل المنحني $U(x)$ ، عند $x = x_2$ ، على سبيل المثال الميل موجب، القوة سالبة مما يعني أنها تؤثر إلى اليسار (بإتجاه تناقص x).

عندما $x = x_0$ ، الميل صفر وبالتالي $F = 0$ ، عند هذه النقطة الجسم يمكن القول بأنه في حالة توازن هذا يعني ببساطة أن القوة المحصلة المؤثرة في الجسم صفر، وبالتالي تسارعه صفر، وضعه البدئي يبقى في حالة راحة. إذا كان الجسم عند الراحة أي عند $x = x_0$ ، يتحرك الجسم قليلاً إلى اليسار أو اليمين، هناك قوة غير معدومة ستؤثر عليه في اتجاه الحركة لتقيده باتجاه x_0 ، أي أن الجسم يعود باتجاه نقطة التوازن عند الإنزياح القليل، حالة توازن مستقر، القيمة الصغرى في منحنى الطاقة الكامنة يمثل نقطة توازن مستقر.

إذا كان الجسم عند $x = x_4$ ، ستكون أيضاً نقطة توازن حيث $F = -\frac{dU}{dx} = 0$ ، إذا انزاح الجسم قليلاً لأي جانب، القوة تؤثر لسحب الجسم بعيداً عن نقطة التوازن. النقاط مثل x_4 ، حيث أن منحنى الطاقة الكامنة له قيمة أعظمية هي نقاط توازن لا مستقر، الجسم سوف لا يعود إلى التوازن إذا انزاح قليلاً، وسيتحرك بعيداً. عندما يكون الجسم في منطقة أعلى من U ، الثابتة بالقرب مثلاً من $x = x_6$ ، القوة صفر على مسافة قليلة، الجسم في توازن. وإذا انزاح قليلاً إلى جهة واحدة فالقوة تبقى صفر والجسم يدعى في حالة توازن حيادي في هذه النقطة.

مسائل

6-1 مسطرة خشبية طولها متر واحد وكتلتها 300g ، تعلق من نهايتها العليا بشكل شاقولي، ثم تراح بزاوية مقدارها 60° ، أوجد مقدار الزيادة في طاقتها الكامنة نتيجة الإنزاح .

6-2 كرة كتلتها m توجد على إرتفاع 2,2 m عن سطح الأرض حيث سرعتها في هذه النقطة 10m/s ، إحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى سطح الأرض ،

6-3 بفرض أن الطاقة الكامنة لجسم تعطى بالعلاقة $V(x) = -a x / (b^2 + x^2)$ حيث a و b ثابت، أوجد القوة التي يخضع لها الجسم .

6-4 يصطدم جسيم $\propto$ إصطداماً مرناً بنواة ذرة ذهب ساكنة ، ما معدل الطاقة التي يخسرها هذا الجسيم بالمقارنة مع طاقته الابتدائية إذا تم التصادم على خط مستقيم؟ علماً أن كتلة جسيم $\propto$ تعادل أربع وحدات ذرية، بينما تعادل كتلة ذرة الذهب 197 وحدة ذرية .

6-5 تخترق رصاصة كتلتها 10g وسرعتها 150m/s قطعة خشبية كتلتها 500g ومثبتة بالمسقف بوساطة حبل خفيف طوله 1m، بحيث تستقر الرصاصة فيه، ويتحرك الاثنان معاً كنواس بسيط ويرتفعان لمسافة h ، ما مقدار الطاقة الضائعة في هذا الصدم وما الإرتفاع h؟

6-6 يصطدم جسيم $\propto$ سرعته 2×10^7 m/s بنواة ذهب ساكنة ويتحرك مبتعداً عنها بإتجاه يصنع زاوية 30° بالنسبة إلى إتجاه الحركة الأصلي ، ما سرعة كل من جسيم $\propto$ ونواة الذهب بعد التصادم ؟ وما معدل الطاقة التي يخسرها جسيم $\propto$ إذا افترضنا أن كتلة الذهب تساوي 50 من كتلة جسيم $\propto$ ؟

6-7 تصطدم كرة كتلتها m إصطداماً مرناً بأخرى ساكنة؛ فترتد عنها للخلف بسرعة تساوي ثلث سرعتها الأصلية ، إحسب كتلة الكرة الثانية .

6-8 تتحرك كتلة $m_1 = 2,5$ kg على طاولة أفقية ملساء بسرعة 8m/s بإتجاه كتلة ثانية $m_2 = 6$ kg ساكنة، ويرتبط بها نابض أفقي ثابت صلابته $k=750$ N/m بحيث

يمكن أن ينضغط عند إصطدام m_1 به ، ما السرعة النهائية التي ستتحرك بها الكتلتان الملتصقتان بعد التصادم والمسافة التي سينضغطها نابض ؟
 9-6 تهوي كرة نواس بسيط كتلته $0,5 \text{ kg}$ وطوله 70 cm من وضع أفقي تماماً ، وتصطدم عند وصولها إلى وضع الشاقول إصطداماً مرناً بكتلة ساكنة مقدارها $2,5 \text{ kg}$ موضوعة على سطح أملس أفقي ، أوجد سرعة كل جسم بعد الصدم .

10-6 تصطدم رصاصة كتلتها $2,5 \text{ g}$ وسرعتها 400 m/s مع حجر ساكن كتلته $0,1 \text{ kg}$ فترتد عنه باتجاه عامودي على حركتها الأصلية وبسرعة 300 m/s ، أوجد سرعة الحجر بعد الصدم وكذلك ما نوع الصدم ؟

11-6 تتحرك قطعتان B,A كتلة الأولى 300 g والثانية 200 g باتجاه بعضها البعض على منضدة أفقية دون احتكاك فإذا كانت سرعة الأولى 500 cm/s وسرعة الثانية 100 cm/s المطلوب :

(a) إذا إصطدمت القطعتان ببعضهما ، والتصقتا بعد الصدم أوجد سرعتيهما النهائية.

(b) أوجد الخسارة في الطاقة الحركية نتيجة التصادم .

(c) أوجد السرعة النهائية لكل قطعة إذا كان التصادم مرناً.

12-6 تتحرك جزيئة غاز كتلتها m بسرعة v وتصطدم إصطداماً مرناً مع جزيئة ساكنة من النوع نفسه، وتتحرك الجزيئة الواردة بعد التصادم بحيث تصنع زاوية θ_1 مع خط سيرها الأصلي ، فإذا كانت θ_2 هي الزاوية بين الإتجاه الذي تنطلق به الجزيئة الثانية وإتجاه ورود الجزيئة الأولى المطلوب :

(a) برهن أن $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ، (b) بفرض $\theta_1 = 30^\circ$ ، $V = 5 \text{ m/s}$ ، إحسب v'_1, v'_2 ،

13-6 تتدحرج كرة مصمتة واسطوانة مصمتة واسطوانة فارغة على مستو مائل بدون سرعة ابتدائية، وبدون إنزلاق من إرتفاع h عن سطح الأرض الأفقي ، إحسب السرعات

التي تصل بها الأجسام الثلاثة إلى أسفل المستوي المائل، قارن النتائج مع سرعة جسم يسقط سقوطاً حراً من الارتفاع نفسه.

14-6 تسير عربة قطار على طريق مستقيم أفقي وتصل إلى قطار مؤلف من عشر عربات متماثلة وتلتصق به ، فتصبح سرعة الجملة $0,1\text{m/s}$ إ حسب سرعة العربة الأولى.



الفصل السابع الإندفاع الخطي

LINEAR MOMENTUM

1-7 تمهيد

إن قوانين (إنحفاظ) الطاقة، التي ناقشناها في الفصل السابق هي إحدى القوانين العظيمة في الفيزياء، ومن بين المقادير المحفوظة أيضاً الإندفاع الخطي والإندفاع الزاوي والشحنة الكهربائية، قوانين الإنحفاظ هي مقادير أكثر أهمية. إن قانون إنحفاظ الإندفاع الخطي هو إعادة إنتاج لقانوني نيوتن اللذين يعطينا حافزاً فيزيائياً وقدرة لحل المسائل الفيزيائية. سوف نستخدم قوانين إنحفاظ الإندفاع الخطي والطاقة لدراسة مسائل التصادم، بالفعل إن قوانين إنحفاظ الإندفاع الخطي مفيدة من أجل دراسة التأثير المتبادل بين جسيمات منظومة مثل التصادم بين الأجسام العادية أو الجسيمات النووية.

2-7 الإندفاع الخطي وعلاقته بالقوة

الإندفاع الخطي لجسم يعرف على أنه جداء كتلة الجسم بسرعه والإندفاع الخطي يعبر عنه بالرمز $\vec{p}$ ، إذا فرضنا أن m ، هي كتلة الجسم و $\vec{v}$ ، سرعة الجسم، فإن اندفاعه.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (7-1)$$

السرعة هي مقدار شعاعي، وبالتالي فالإندفاع الخطي هو شعاع أيضاً، وإتجاهه يوافق إتجاه شعاع السرعة، وقيمته $p = mv$ ، وبما أن الاستعمال اليومي لهذه الكلمة يوافق التعريف السابق للمعادلة، أي أن سيارة التدرج السريعة لها اندفاع أكبر من السيارة البطيئة، التي لها الكتلة نفسها والسيارة الثقيلة لها اندفاع أكبر من السيارة الصغيرة عندما كلتاها تسيران بالسرعة نفسها. الجسم الذي يملك إندفاعاً أكبر يكون إيقافه أصعب، ويكون له تأثير في

الجسيمات الأخرى التي تحاول إيقافه عن طريق الصدم. فمثلاً لاعب كرة القدم يتلقى دفعا أكبر إذا كان خصمه سريعا وكتلته كبيرة، فيما إذا اعترضه لاعب صغير الكتلة وبطيء السرعة، السيارة الثقيلة والسريعة تحدث تخريبا أكبر من الدراجة النارية البطيئة، إذا فالقوة مطلوبة لتغير الإندفاع الخطي لجسم في القيمة والاتجاه. درس نيوتن في هذه الظاهرة، ووضع قانونه الثاني بدلالة الإندفاع الخطي وسمى المقدار (mv) ، بالإندفاع الخطي. القانون الثاني للحركة يترجم إلى لغة حديثة ويصبح كالتالي: معدل تغير الإندفاع الخطي للجسم يساوي محصلة القوى الخارجية المطبقة عليه لذلك نستطيع أن نكتب:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7-2)$$

$\sum \vec{F}$ ، هو محصلة القوى المطبقة على الجسم (المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة في الجسم) نستطيع بسهولة إستنتاج صيغة مشابهة للقانون الثاني لنيوتن $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، من المعادلة (7-2) إذا كانت الكتلة ثابتة و $\vec{v}$ ، سرعة الجسم عند أية لحظة.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (7-3)$$

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (7-4)$$

المعادلة (7-3) مألوفة وشائعة أكثر، لأنها تضم الحالة التي تكون فيها الكتلة متغيرة، النظرية النسبية و الصاروخ الذي يفقد جزءاً من كتلته عند احتراق الوقود.

(مثال 7-1):

عين القوة (الوسطى) المطبقة على كرة التنس عند الإرسال كتلتها 0.060 kg ، بسرعة 55 m/s ، وتضرب بالمضرب خلال 4 ms .

الحل:

حسب قانون نيوتن الثاني .

$$\sum F_{ave} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} \quad (7 - 5)$$

mv_1 و mv_2 ، الإندفاع الخطي البدئي و النهائي، السرعة الابتدائية v_1 قريبة من الصفر عند بدء الإرسال

$$v_1 = 0, v_2 = 55 \text{ m/s}$$

وبإتجاه أفقي، وبإهمال كل القوى الأخرى المطبقة على الكرة، مثل قوة الثقل بالمقارنة مع القوة المطبقة من قبل المضرب

$$F_{ave} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (7 - 6)$$

$$F_{ave} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = \frac{0.06055 - 0}{0.004} \approx 800 \text{ N}$$

إنها قوة كبيرة، أكبر من قوة الثقل لشخص كتلته 60 kg الذي قوة ثقله $600 \text{ N} \approx$ نلاحظ: قوة ثقل كرة التنس $0.59 \text{ N} = 0.66 \times 9.8 = mg$ ، وهي مهمة مقابل القوة الناتجة عن المضرب.

(مثال 7-2):

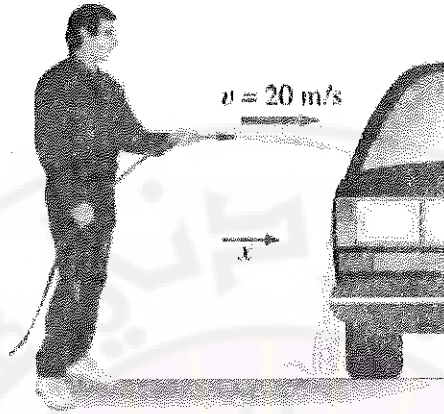
يتدفق الماء بمعدل 1.5 kg/s ، وبسرعة 20m/s ، يصدم بجانب السيارة ثم يتوقف سيل الماء، الشكل (7 - 1)

ما القوة المطبقة من الماء على السيارة ؟

الحل:

الماء المتدفق من الخرطوم له كتلة وسرعة إذاً له اندفاع بدئي $p_{initial}$ ، في إتجاه أفقي (x) ، ونفرض أن الجاذبية لا تشد الماء إلى الأسفل، عندما يصطدم الماء بالسيارة يتوقف ويفقد اندفاعه $p_{final} = 0$ ، نستخدم قانون نيوتن الثاني بدءاً من تطبيق القوة على الماء حتى إيقافه بواسطة السيارة، وحسب قانون نيوتن الثالث القوة المطبقة بواسطة الماء على

السيارة تساوي وتعاكس القوة السابقة، لدينا عملية مستمرة، 1.5kg ، تغادر الخرطوم خلال ثانية واحدة.



الشكل (7 - 1)

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{final} - p_{initial}}{1} = \frac{0 - 30}{1} = -30\text{N}$$

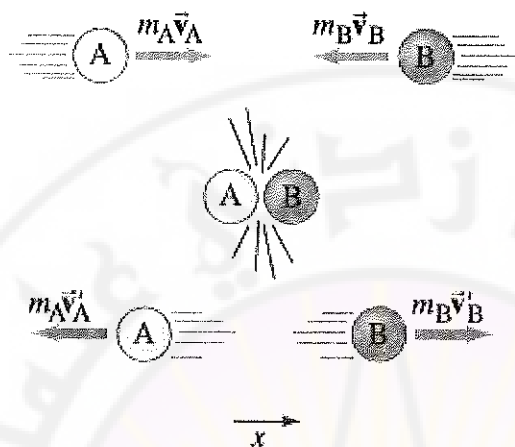
وبفرض أنها مستمرة. إشارة السالب تعني أن القوة التي تؤثر في الماء بواسطة السيارة تنعكس السرعة الأصلية للماء، السيارة تؤثر بقوة 30 N إلى اليسار لإيقاف الماء، حسب القانون الثالث الماء يؤثر بقوة 30 N ، على السيارة إلى اليمين.

3-7 إنحفاظ الإندفاع الخطي

إن مفهوم الإندفاع الخطي مهم، لأنه إذا لم يكن هناك قوة خارجية (محصلة القوى) تؤثر في المنظومة (الجملة) فإن الإندفاع الخطي الكلي للجملة يكون محفوظ.

نعد على سبيل المثال التصادم الرأسي لكرتي بلياردو كما موضح على الشكل (7 - 2)، نفرض أن القوى الخارجية المؤثرة في الجملة المؤلفة من كرتي بلياردو معدومة، وبالتالي القوى المؤثرة خلال التصادم هي أن كل كرة تؤثر في الأخرى، الإندفاع الخطي لكلا الكرتين

يتغير نتيجة للتصادم، ومجموع الإندفاع الخطي هو نفسه مجموع الإندفاع الخطي قبل وبعد التصادم.



الشكل (7 - 2)

الإندفاع الخطي يكون محفوظ عند تصادم كرتين A ، B

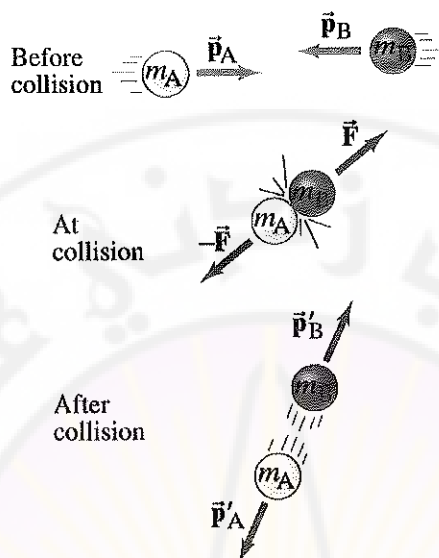
إذا كان $m_A \vec{v}_A$ هو اندفاع الكرة A، و $m_B \vec{v}_B$ هو اندفاع الكرة B، قبل الصدم وبالتالي الإندفاع الخطي الكلي للكرتين قبل الصدم، $m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$ ، ولكن بعد الصدم كلاهما يأخذ إندفاعاً مختلفاً (سرعاً مختلفة) $m_A \vec{v}'_A$ ، $m_B \vec{v}'_B$ ، والإندفاع الخطي الكلي بعد الصدم هو $m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B$ ، التجربة بينت أن الإندفاع الخطي هو نفسه قبل الصدم وبعده.

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B \quad , \quad \sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad (7 - 7)$$

$$Constant = \text{الإندفاع الخطي الكلي بعد} = \text{الإندفاع الخطي الكلي قبل} \quad (7 - 8)$$

لنفرض لدينا جسمين لهما كتلتان m_A و m_B ، واندفاعهما الخطي $\vec{p}_A$ ، $\vec{p}_B$ قبل الصدم و $\vec{p}'_A$ ، $\vec{p}'_B$ بعد الصدم، كما على الشكل (7 - 3)، خلال التصادم لنفرض أن القوة المطبقة على الجسم B من الجسم A عند أي لحظة هي $\vec{F}$ ، بالتالي حسب قانون نيوتن

الثالث القوة المطبقة على الجسم A، من قبل الجسم B ، هي $-\vec{F}$ خلال فترة التصادم ،
نفترض أنه لا تؤثر قوة خارجية، (F أكبر من أي قوة خارجية تؤثر في الجملة).



الشكل (7 - 3)

عند أية لحظة خلال التصادم تؤثر في كلا الجسمين قوة متساوية في القيمة ومتعاكسة في الاتجاه.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}, \quad -\vec{F} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \quad (7 - 9)$$

$$\frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0, \quad \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{Constant} \quad (7 - 10)$$

فالإندفاع الخطي الكلي محفوظ.

بما أنه لا توجد قوى خارجية مؤثرة في الجملة فإن هذا القانون يبقى صالح من أجل أي مجال زمني، إنحفاظ الإندفاع الخطي يكون ساري المفعول طالما لا توجد قوى خارجية مؤثرة، قوة الاحتكاك المؤثرة في كرة البليارد، قوة الثقالة المؤثرة في كرة التنس، يبدو أن إنحفاظ الإندفاع الخطي لا يطبق، أم أنه يطبق؟

عند التصادم، قوة كل جسم تطبق على الآخر، وتطبق خلال زمن قصير جداً ، وتنتج قوى شديدة جداً تؤثر بعضهما على بعض، إذا ناقشنا الإندفاع الخطي مباشرة قبل وبعد الصدم نرى أنه سيكون قريباً جداً من المحفوظ، ولا نستطيع الانتظار حتى تبدأ القوى الخارجية بإنتاج تأثيرها قبل قياس $\vec{p}_A, \vec{p}_B$. على سبيل المثال عندما تصدم الكرة بالمضرب، تتحرك الكرة على مسار تحت تأثير ثقلها ومقاومة الهواء، ولكن عندما تصدم الكرة بالمضرب تؤثر قوة كبيرة خلال زمن قصير، مما يجعل تلك القوى مهمة أمام قوة الصدم بين المضرب والكرة الإندفاع الخطي محفوظ (أو قريب جداً من المحفوظ) طالما نقيس $\vec{p}_A, \vec{p}_B$ قبل الصدم مباشرة، وكذلك $\vec{p}_A, \vec{p}_B$ ، بعد الصدم مباشرة. إنحفاظ الإندفاع الخطي يمكن تعميمه ليشمل أي عدد من الأجسام المتفاعلة، فإذا كان $\vec{p}$ ، يعبر عن الإندفاع الخطي الكلي لجملة مؤلفة من n جسم متفاعل.

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \sum \vec{p}_i \quad (7 - 11)$$

نشق بالنسبة إلى الزمن

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad (7 - 12)$$

حيث $\vec{F}_i$ ، هي القوة المحصلة المؤثرة في الجسم i ، وهذه القوى نوعان:

- (1) قوة خارجية: تؤثر في الجملة من خارج الجملة، أو جسم خارج الجملة يؤثر في الجملة.
- (2) قوى داخلية: جسم من داخل الجملة يؤثر في آخر وحسب قانون نيوتن الثالث هذه القوى تلغي بعضها بعضاً (مثلى - مثلى)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (7 - 13)$$

$\sum \vec{F}_{ext}$: مجموع كل القوى الخارجية المؤثرة في الجملة، إذا كانت محصلة القوة الخارجية تساوي الصفر.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (7 - 14)$$

وبالتالي:

$$\Delta \vec{p} = 0 \quad Or \quad \vec{p} = Constant \quad (7 - 15)$$

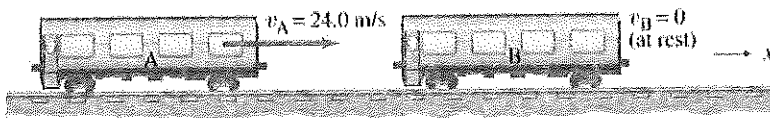
إذا كانت محصلة القوة المؤثرة في جملة مكونة من عدة أجسام تساوي الصفر فإن الإنذفاع الخطي الكلي للجملة يبقى ثابت. وهو قانون إنحفاظ الإنذفاع الخطي ويمكن صياغته على الشكل: الإنذفاع الخطي الكلي لجملة معزولة يبقى ثابت. الجملة المعزولة نعني هنا الجملة التي لا تؤثر فيها قوة خارجية.

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة في جسم لا تساوي الصفر وبالتالي قانون إنحفاظ الإنذفاع الخطي لا يمكن تطبيقه، ولكن إذا أضفنا إلى الجملة أجسام أخرى مؤثرة بنفس القوة فإن قانون الإنحفاظ يبقى صالحاً، مثال على ذلك، عندما تسقط حجر من الأعلى، الإنذفاع الخطي ليس محفوظاً، لأن قوة الثقل تؤثر في الحجر، قوة خارجية، وإذا أضفنا الأرض مع الحجر فإن الإنذفاع الخطي يبقى ثابتاً لجملة (الحجر - أرض)، وكان الأرض تأتي لتتلاقى الحجر، وبما أن كتلتها كبيرة جداً فإنه يمكن إهمال سرعتها.

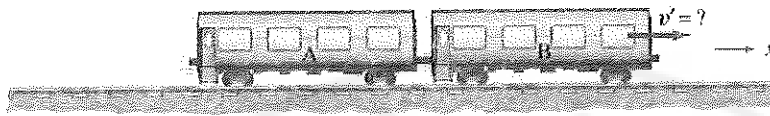
قانون إنحفاظ الإنذفاع الخطي يأتي من قانون نيوتن الثاني كما رأينا، إنه أكثر تعميماً من قانون نيوتن الثاني قانون الثاني يفشل في العالم الذري، ولكن قانون إنحفاظ الطاقة والإنذفاع الخطي والشحنة تبقى ثابتة في كل التجارب المدروسة، ولهذه الأسباب تعد قوانين الإنحفاظ أساسية أكثر من قوانين نيوتن.

(مثال 7-3):

عربة قطار A، تتحرك بسرعة 24 m/s ، وتصطدم بعربة مماثلة B، واقفة. ما السرعة المشتركة عند الصدم الشكل (7 - 4)



(a) Before collision



(b) After collision

الشكل (4 - 7)

الحل:

الجملة تتألف من عربتين ونعد أن المجال الزمني قبل وبعد الصدم قصير جداً، وبالتالي يمكن إهمال قوة الاحتكاك، نطبق إنحفاظ الإندفاع الخطي.

$$p_{initial} = p_{final}$$

$$p_{initial} = m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A, \quad v_B = 0$$

والإتجاه هو $(+x)$ ، بعد الصدم بالعربتين، العربتان تلتحمان وتصبح لهما سرعة مشتركة:

$$p_{final} = (m_A + m_B) \cdot \dot{v}$$

لقد فرضنا أنه لا توجد قوى خارجية.

$$m_A v_A = (m_A + m_B) \cdot \dot{v}$$

$$v_A = 2 \cdot \dot{v}$$

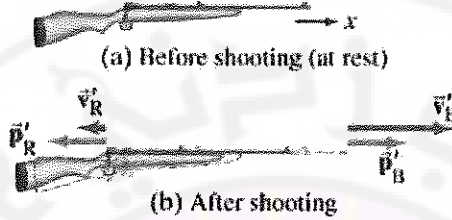
$$\dot{v} = \frac{1}{2} v_A = \frac{1}{2} \times 24 = 12 \text{ m/s} \quad \text{بإتجاه اليمين}$$

السرعة المشتركة هي نصف سرعة العربة A، لأن كتلتيهما متساوية.

نلاحظ أننا أهملنا قوة الاحتكاك، لأننا حسبنا السرعة قبل فترة الصدم وبعدها مباشرة، وتأثير قوة الاحتكاك يكون قليلاً أو مهملاً في تلك الحالة، أما من أجل فترة طويلة فإن العربتين سوف تتباطأ بسبب الاحتكاك.

(مثال 7-4):

احسب سرعة إرتداد بندقية كتلتها 5 kg، عندما تطلق طلقة 0.02 kg، وبسرعة 620 m/s، الشكل (7 - 5)



الشكل (7 - 5)

الحل:

الجملة المدروسة هي البندقية والطلقة، وكلاهما في حالة سكون، في البدء تماماً قبل الضغط على الزناد عندما يحدث الانفجار، ننظر إلى البندقية عندما تخرج الطلقة من الفوهة بالإتجاه $(+x)$ ، البندقية ترتد إلى اليسار، وخلال زمن قصير جداً من الانفجار، نفرض أن القوى الخارجية صغيرة مقارنة مع القوى المطبقة الناجمة عن الانفجار وبالتالي يمكننا أن نطبق قانون إنحفاظ الإندفاع الخطي.

الإندفاع الخطي الكلي قبل = الإندفاع الخطي الكلي بعد

$$m_B v_B + m_R v_R = m_B \dot{v}_B + m_R \dot{v}_R$$

$$0 + 0 = m_B \dot{v}_B + m_R \dot{v}_R$$

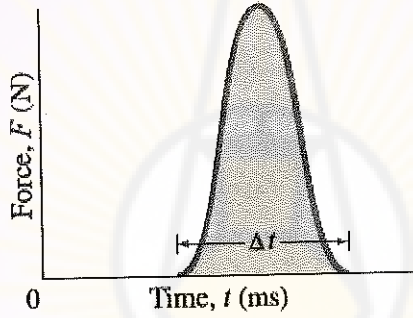
$$\dot{v}_R = -\frac{m_B \dot{v}_B}{m_R} = -\frac{0.02 \times 620}{5} = -2.5 \text{ m/s}$$

وبما أن كتلة البندقية أكبر بكثير من كتلة الطلقة، فإن سرعة ارتدادها تكون قليلة بالنسبة إلى سرعة الطلقة، وإشارة السالب تشير إلى أن سرعة البندقية وإندفاعها في إتجاه $(-x)$ بالإتجاه المعاكس لإتجاه الطلقة.

4-7 التصادم والدفع الخطي للقوة

إنحفاظ الإندفاع الخطي هو أداة مهمة للتعامل مع عمليات التصادم التي تحدث في معظم الأحيان، مثل المضرب والكرة، تصادم كرتين، المطرقة تضرب المسار. يحاول العلماء دراسة بنية النواة ومكوناتها، وطبيعة القوى النووية، عن طريق دراسة التصادمات بين النواة والجسيمات العنصرية، عندما يتصادم جسمان فإنهما يتشوهان و القوة المطبقة بينهما تقفز مباشرة من الصفر عند بدء الصدم إلى قيمة كبيرة جداً، خلال زمن قصير جداً، وفجأة تعود إلى الصفر ثانية، انظر الشكل (7 - 6)، حسب قانون نيوتن الثاني، القوة المحصلة المطبقة على الجسم تساوي معدل تغير الإندفاع الخطي.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7 - 16)$$



الشكل (6 - 7)

قوة التصادم كتابع للزمن، أثناء التصادم هذه القوة تصبح كبيرة جداً حيث Δt ، يقدر بالميلي ثانية من أجل التصادم الماكروسكوبي.

وهذه القوة $\vec{F}$ ، ناجمة بشكل كامل عن تأثير متبادل كبير خلال زمن التصادم، المعادلة (7 - 16)، أعلاه تطبق على كل الأجسام الداخلة في التصادم خلال مجال زمني متناه في الصغر dt ، الإندفاع الخطي يتغير.

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$$

p_i و p_f ، الإندفاع الخطي البدئي والنهائي للجسم قبل الصدم تماماً و بعد الصدم تماماً على الترتيب والتكامل على القوة المحصلة خلال المجال الزمني $t_i - t_f$ ، يدعى بالدفع الخطي $\vec{J}$.

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt \quad (7 - 17)$$

إذاً:

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \vec{J} \quad (7 - 18)$$

واحدة الدفع هي نفسها واحدة الإندفاع الخطي في الجملة الدولية SI : $\frac{kg.m}{s}$ ، الدفع الخطي للقوة $\vec{J} = \int \vec{F} dt$ ، يساوي مساحة السطح المحصور بين المنحني $F(t)$ ، و t ، ومحور الزمن، وهو الجزء المظلل في الشكل (7 - 6)، المعادلة (7 - 17)، صحيحة فحسب، إذا كانت $\vec{F}$ ، هي محصلة القوى المؤثرة في الجسم، وهي صالحة من أجل أية محصلة قوى $\vec{F}$ ، ولكن مفهوم الدفع الخطي للقوة، هو بالحقيقة الأكثر فائدة ولا سيما فيما يتعلق بقوى الدفع، وهذه القوى تتميز بأن لها قيمة كبيرة جداً خلال مجال زمني قصير جداً ، وعادة تكون معدومة خارج هذا المجال من أجل حالات التصادم هذه القوة أكبر من أية قوة أخرى تؤثر في الجسم لذلك تهمل مثل هذه القوى.

إذا أخذنا حدود التكامل خارج المجال $t_i - t_f$ ، تكون المسافة بين الأجسام طويلة و القوى الأخرى تؤخذ بعين الاعتبار مثل كرة التنس بعد أن تضرب بالمضرب وتأخذ مسارها ثم تسقط تحت تأثير ثقلها. في بعض الأحيان يتم الحديث عن القوة الوسطية F_{avg} ، خلال التصادم، وتعرف بأنها قوة ثابتة تؤثر خلال نفس المجال الزمني $t_i - t_f = \Delta t$ ، لها نفس الدفع والتغير في الإندفاع الخطي. الشكل (7 - 7) ، يبين قوة الدفع هي مساحة المستطيل وتساوي $F_{avg} \cdot \Delta t$.

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = F_{avg} \cdot \Delta t$$

(مثال 7-5):

إحسب دفع القوة والقوة الوسطى للاعب الكاراتيه من أجل كسر عدد من الألواح، نفرض أن سرعة اليد حوالي 10 m/s ، عند ضرب الألواح، وإذا كانت كتلة اليد 1 kg ، والعمق $\Delta x = 12 \text{ cm}$.

الحل:

باستخدام معادلة الدفع والإندفاع الخطي، اليد ستقف بعد عملية الضرب على مسافة معينة.

$$J = \Delta p$$

$$\Delta p = 1 \times (10 - 0) = 10 \text{ m/s}$$

السرعة الوسطى خلال الضرب

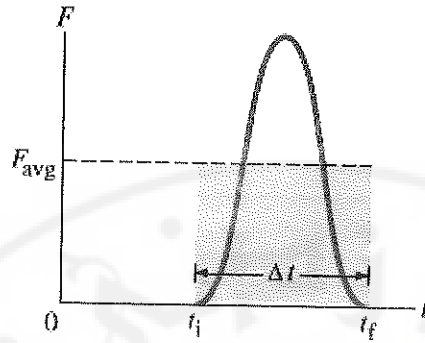
$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 5 \text{ m/s}$$

إذا فرضنا أن العمق $\Delta x = 1 \text{ cm}$

$$\bar{v} = , \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}}$$

$$\Delta t = \frac{0.01}{5} = 0.002 \text{ s}$$

$$F_{avg} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{10}{0.002} = 5 \text{ kN}$$



الشكل (7)

القوة الوسطى F_{avg} ، تؤثر خلال زمن قصير جداً Δt ، تعطي الدفع نفسه كقوة حقيقية $F_{avg} \cdot \Delta t$.

5-7 إنحفاظ الإندفاع الخطي والطاقة في التصادمات

خلال عملية الصدم من الصعب أن نعرف كيف تتغير قوة الصدم مع مرور الزمن، ودراستها باستخدام القانون الثاني يصبح أكثر صعوبة، بل مستحيلًا، ولكن باستخدام قوانين إنحفاظ الدفع والطاقة نستطيع أن نحدد الكثير عن الحركة بعد الصدم، ولقد رأينا أن الإندفاع الخطي الكلي هو مقدار مصون.

لنفرض لدينا جسمان صلبان يتصادمان بدون أن يتحول جزء من الطاقة إلى حرارة نتيجة الصدم وبالتالي فإن الطاقة الحركية تبقى نفسها قبل وبعد الصدم، خلال زمن التصادم القصير (عندما يكون الجسمان على تماس) بعض أو كل الطاقة تخزن لحظياً على شكل طاقة كامنة مرونية، وإذا كانت الطاقة الحركية الكلية قبل الصدم تساوي الطاقة الحركية الكلية بعد الصدم مثل هذا الصدم يدعى بالصدم المرن.

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A \dot{v}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{v}_B^2 \quad (7-19)$$

(١) يعني السرعة بعد الصدم.

يعرف الصدم المرن بين الجسيمات إذا كانت الطاقة الحركية للجسيمات محفوظة أثناء التصادم، وهذا له مغزى فيزيائي مهم. الصدم الملاحظ يكون مرناً في جملة عطالة واحدة ينبغي أيضاً أن يكون كذلك عندما يلاحظ في أي جملة أخرى، من الواضح أن هذا ليس صحيحاً، لأن الطاقة الحركية الكلية ليست كمية خطية. إن أي ربح أو خسارة في الطاقة الحركية أثناء الصدم مستقل عن جملة العطالة التي يلاحظ منها الصدم.

على المستوى الذري التصادم بين الذرات والجزيئات يكون عادة صدماً مرناً، ولكن في العالم الماكروسكوبي للأجسام العادية الصدم المرن هو مثالي (لم يحصل ذلك أبداً) حيث أنه على الأقل توجد طاقة حرارية (أحياناً صوت أو أي شكل آخر) يتم إنتاجها عند الصدم، التصادم بين كرتين مرنتين مثل كرتي البليارد قريب جداً من الصدم المرن.

في التصادم الذي تكون فيها الطاقة الحركية غير محفوظة تدعى بالصدم اللا المرن، الطاقة الحركية الضائعة تتحول عادة إلى شكل حراري ولكن لنتذكر أن الطاقة الكلية تبقى ثابتة،

$$K_A + K_B = \dot{K}_A + \dot{K}_B + \text{طاقة حرارية أو أي شكل آخر للطاقة} \quad (7 - 20)$$

الشكل (7 - 8) يوضح جسيمين كتلتيهما متساويتين و تقتربان من بعضهما بسرعات متساوية (a)، تصادمان وترتدان (b)، بسرعات متساوية في إتجاهين متعاكسين، إذا كان التصادم مرناً. (c) أو ترتدان بسرعات أقل أو ان التصادم لا مرن (d).



(a) Approach



(b) Collision



(c) If elastic



(d) If inelastic

الشكل (7 - 8)

جسمان متساويان في الكتلة

a - يقتريان من بعضهما بسرعتين متساويتين.

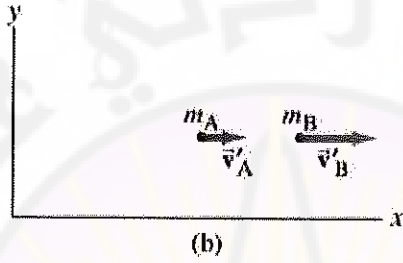
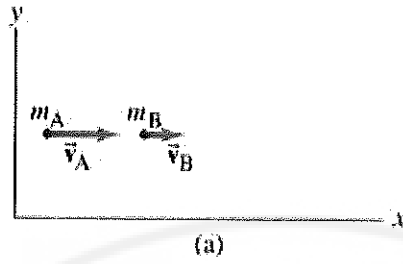
b - حالة الصدم.

c - الارتداد بسرعتين متساويتين في اتجاهات متعاكسة إذا كان الاصدم مرناً.

d - الارتداد بسرعتين مختلفتين إذا كان الاصدم لاً مرناً.

6-7 الصدم المرن في بعد واحد (الصدم الرأسى)

سنطبق قوانين إنحفاظ الطاقة الحركية والإندفاع الخطى على حالة صدم مرن لجسمين صغيرين يتصادمان رأسياً ، لذلك فالحركة على خط واحد.



الشكل (7 - 9)

جسمان صغيران كتلتهما m_A, m_B

$-a$ قبل التصادم

$-b$ بعد الصدم

دعنا نفرض أن جسمين يتحركان بسرعة v_A و v_B ، على طول المحور x ، قبل الصدم
الشكل (7 - 9)، وسرعتاهما بعد الصدم $\dot{v}_A$ و $\dot{v}_B$.
 $v > 0$ ، هذا يعني أن الجسم يتحرك إلى اليمين، $v < 0$ ، هذا يعني أن الجسم يتحرك
إلى اليسار. حسب إنحفاظ الدفع.

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{\dot{v}}_A + m_B \vec{\dot{v}}_B$$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A \dot{v}_A + m_B \dot{v}_B$$

$$m_A (v_A - \dot{v}_A) = -m_B (v_B - \dot{v}_B) \quad (7 - 21)$$

الصدم مرن. فالطاقة الحركية محفوظة أيضاً:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A \dot{v}_A^2 + \frac{1}{2}m_B \dot{v}_B^2$$

$$m_A(v_A^2 - \dot{v}_A^2) = m_B(\dot{v}_B^2 - v_B^2)$$

$$m_A(v_A - \dot{v}_A)(v_A + \dot{v}_A) = m_B(\dot{v}_B - v_B)(\dot{v}_B + v_B)$$

لدينا معادلتان بمجهولين، إذا علمنا الكتل والسرع قبل الصدم نحصل على

$$v_A + \dot{v}_A = \dot{v}_B + v_B$$

$$v_A - v_B = \dot{v}_B - \dot{v}_A$$

$$v_A - v_B = -(\dot{v}_A - \dot{v}_B) \quad (7-22)$$

$$v_B \neq \dot{v}_B, \quad v_A \neq \dot{v}_A \quad \text{بشرط}$$

إنها نتيجة مهمة من أجل التصادم الرأسي المرن، السرعة النسبية للجسيم قبل الصدم، تساوي السرعة النسبية للجسيم بعد الصدم (بإشارة معاكسة) بغض النظر عن كتلتيهما المعادلة. نسمي النسبة

$$e = \frac{v_A - v_B}{\dot{v}_A - \dot{v}_B} \quad \text{عامل الصدم}$$

إذا كان $e = 1$ ، الصدم تام المرونة. أما إذا كان $e = 0$ ، الصدم تام اللينة.

7-6-1 تبادل السرع

كرة البليارد A، كتلتها m ، وسرعتها v_A ، تصدم رأسياً بكرة B، لها نفس الكتلة m ، ما سرعة الكرتين بعد الصدم $\dot{v}_A, \dot{v}_B$ ، مفترضين أنه صدم مرن في الحالتين التاليتين:

$$(a) \quad \text{السرع قبل الصدم } v_A, v_B.$$

$$(b) \quad \text{الكرة (B) ساكنة قبل الصدم.}$$

سنركز إهتمامنا على الفترة الزمنية للصدم، ولا توجد قوى خارجية تؤثر في الكرتين (قوة الثقل والقوة العمودية الناظرية) وبالتالي فالإندفاع الخطي محفوظ، وكذلك الطاقة الحركية.

$$m_A = m_B = m$$

(a)

$$v_A + v_B = \dot{v}_A + \dot{v}_B \quad \text{مبدأ إنحفاظ الإندفاع الخطي}$$

$$v_A - v_B = \dot{v}_B - \dot{v}_A \quad \text{حسب مبدأ السرعة النسبية:}$$

بالحل المشترك.

$$\dot{v}_B = v_A, \quad \dot{v}_A = v_B$$

في حال تصادم كرتين لهما الكتلة نفسها رأسياً ومرناً، الكرات تبادلا السرع بعد التصادم، الكرة B، تكتسب سرعة الكرة A، قبل الصدم، والعكس بالعكس.

$$(b) \text{ الكرة (B)، ساكنة قبل الصدم } v_B = 0$$

$$\dot{v}_B = v_A, \quad \dot{v}_A = 0$$

وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها في المثال السابق في تبادل السرع.

2-6-7 الهدف الساكن

يصدم جسم m_A ، بآخر m_B ، صدماً رأسياً مرناً، الهدف ساكن $v_B = 0$ ، ويفرض أن كتلة الجسمين غير متساوية، أوجد عبارة:

$$(a) \quad \dot{v}_A, \dot{v}_B, \text{ بدلالة } v_A \text{ و } m_A, m_B.$$

$$(b) \quad \text{السرع النهائية للجسم المتحرك عندما } m_A \gg m_B.$$

$$(c) \quad \text{السرع النهائية للجسم المتحرك عندما } m_A \ll m_B.$$

معادلة إنحفاظ الإندفاع الخطي $v_B = 0$.

$$m_B \dot{v}_B = m_A (v_A - \dot{v}_A)$$

الطاقة الحركية محفوظة أيضاً.

$$\dot{v}_A = \dot{v}_B - v_A$$

(a) نعوض هذه المعادلة في معادلة الإندفاع الخطي السابقة

$$\dot{v}_B = v_A \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} \right)$$

$$\dot{v}_A = v_A \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right)$$

ومن أجل التأكد من صحة هذه العبارة نضع.

$$m_A = m_B \rightarrow \dot{v}_B = v_A, \quad \dot{v}_A = 0$$

وهذه النتيجة تتفق مع النتيجة السابقة.

(b) لدينا $v_B = 0$ و $m_A \gg m_B$ وهذا يعني أن جسماً ثقيلًا جداً يصدم جسماً خفيفاً ساكناً نحصل على

$$\dot{v}_B \approx 2v_A$$

$$\dot{v}_A \approx v_A$$

سرعة الجسم الثقيل المتحرك تقريباً لا تتغير بينما سرعة الجسم الخفيف الساكن ضعف سرعة الجسم الثقيل.

(c) لدينا $v_B = 0$ و $m_A \ll m_B$ الجسم المتحرك الخفيف يصدم جسماً ثقيلًا جداً ساكناً، نحصل على

$$\dot{v}_B = 0$$

$$\dot{v}_A \approx -v_A$$

الجسم الثقيل يبقى ساكناً والجسم الخفيف جداً يرتد بالسرعة نفسها، ولكن باتجاه معاكس، ويمكننا أن نبين أنه من أجل التصادم بين جسمين صدماً رأسياً ومرناً ، وذلك بحل جملة المعادلتين:

$$m_A(v_A - \dot{v}_A) = m_B(-v_B + \dot{v}_B) \quad (7-23)$$

$$v_A + \dot{v}_A = \dot{v}_B + v_B \quad (7-24)$$

ونحصل على المعادلتين المتناظرتين الهامتين

$$\dot{v}_A = v_B \left(\frac{2m_B}{m_A + m_B} \right) + v_A \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right) \quad (7 - 25)$$

$$\dot{v}_B = v_A \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} \right) + v_B \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} \right) \quad (7 - 26)$$

$$\dot{v}_B = v_A + \dot{v}_A - v_B$$

$$m_A(v_A - \dot{v}_A) = m_B[-v_B + v_A + \dot{v}_A - v_B]$$

$$(m_A v_A - m_A \dot{v}_A) = m_B v_A + m_B \dot{v}_A - 2m_B v_B$$

$$(m_B \dot{v}_A + m_A \dot{v}_A) = -m_B v_A + m_A v_A + 2m_B v_B$$

$$(m_A + m_B) \dot{v}_A = (m_A - m_B) v_A + 2m_B v_B$$

$$\dot{v}_A = v_B \left(\frac{2m_B}{m_A + m_B} \right) + v_A \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right)$$

$$\dot{v}_B = v_A + \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_A + \frac{2m_B}{(m_A + m_B)} v_B - v_B$$

$$\dot{v}_B = v_A \left[\frac{(m_A - m_B + m_A + m_B)}{(m_A + m_B)} \right] + v_B \left[\frac{2m_B - m_A - m_B}{(m_A + m_B)} \right]$$

$$\dot{v}_B = v_A \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B} \right) + v_B \left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} \right)$$

3-6-7 التصادم النووي

بروتون (P) كتلته $1.01u$ ، (وحدة الكتلة الذرية) يتحرك بسرعة $3.6 \times 10^4 \text{ m/s}$ ، ويتصادم رأسياً مع نوى الهيليوم تصادماً مرناً، $m_{\text{He}} = 4u$ ، كانت ساكنة في البدء، الشكل ((7 - 10)، ما سرعة البروتون ونوى الهيليوم بعد الصدم $(1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg})$ ، نفرض أن التصادم يحدث فعلاً في الخلاء تقريباً.

حالة تصادم مرن- رأسي، القوى الخارجية المؤثرة هي قوة الثقالة ولكنها مهمة مقارنة مع القوة المؤثرة أثناء الصدم، لذلك يمكننا تطبيق قانوني إنحفاظ الإندفاع الخطي والطاقة الحركية.

$$m_P \vec{v}_P + 0 = m_P \vec{v}_P' + m_{He} \vec{v}_{He}'$$

هذه العلاقة الخطية بين الأشعة $\vec{v}_{He}$, $\vec{v}_P$, $\vec{v}_P'$ ، تعني أن هذه السرعات الثلاث يجب أن تقع في مستوى واحد، وبالتالي عمليات الإنتثار هي ثنائية البعد.

$$m_P v_P + 0 = m_P v_P' + m_{He} v_{He}'$$

الطاقة الحركية محفوظة.

$$v_P - 0 = v_{He}' - v_P'$$

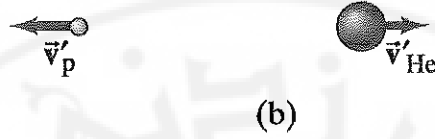
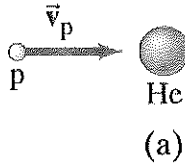
بالطرح نجد:

$$m_P v_P = m_P v_{He}' - m_P v_P' + m_{He} v_{He}'$$

$$\begin{aligned} v_{He}' &= \frac{2m_P v_P}{m_P + m_{He}} = \frac{(2 \times 1.01u) \times (3.6 \times 10^4 \text{ m/s})}{5.01u} \\ &= 1.45 \times 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$v_P' = v_{He}' - v_P = 1.45 \times 10^4 - 3.6 \times 10^4 = -2.15 \times 10^4 \text{ m/s}$$

إشارة السالب تعني أن البروتون (يعكس اتجاهه) بعد التصادم وأن سرعته أقل من سرعته عند البدء الشكل (7 - 10)



الشكل (7 - 10)

7-7 الصدم اللامرن

ذكرنا أن التصادمات التي تكون فيها الطاقة الحركية غير محفوظة تدعى بالتصادمات اللامرنة (الغير مرنة)، جزء من الطاقة الحركية يتحول إلى نوع آخر من أنواع الطاقة، مثل الطاقة الحرارية أو الطاقة الكامنة، وبالتالي فإن الطاقة الحركية الكلية بعد التصادم أقل من الطاقة الحركية الكلية قبل التصادم، وعلى العكس عندما تتحرر الطاقة الكامنة (الطاقة الكيميائية أو الطاقة النووية) وتصبح الطاقة الحركية بعد التفاعل أكبر منها عند البدء، مثال على ذلك النوع الانفجارات.

التصادمات الماكروية هي لا مرنة، إذا التصق جسمان مع بعضهما نتيجة للتصادم فالتصادم يكون لا مرناً بالكامل. كرتان من المعجون تلتصقان بعد التصادم أو عربتا قطار تلتحمان مع بعضهما بعد الصدم، هي أمثلة على الصدم اللامرن بشكل كامل، الطاقة الحركية في بعض الحالات تتحول بشكل كامل إلى أنواع أخرى من الطاقة في التصادم اللامرن وفي بعض الحالات فحسب، جزء منها في المثال السابق، بالمثل وجدنا أنه عندما تتحرك عربة القطار وتصطدم بالأخرى الساكنة، العربات الملتحمة تتحرك ببعض الطاقة الحركية في التصادم اللامرن الكامل، الكمية العظمى من الطاقة الحركية تتحول إلى أشكال تتضمن إنحفاظ الإندفاع الخطي، عندما تكون الطاقة الحركية ليست محفوظة في الصدم اللامرن الطاقة الكلية تكون محفوظة دائماً والإندفاع الخطي الكلي يكون محفوظاً.

(مثال 7-6):

من أجل تصادم لا مرّن كامل لعربتي القطار في المثال السابق، إحسب كم من الطاقة الحركية البدئية قد تتحول إلى طاقة حرارية أو شكل آخر من الطاقة.

الحل:

العربتان تلتصقان بعد التصادم، إذاً هو تصادم لا مرّن بشكل كامل، نأخذ الفرق بين الطائقتين الحركيتين بعد التصادم وقبل التصادم، نحصل على الطاقة الحرارية الناتجة:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}(10000) \times (24.0)^2 = 2.88 \times 10^6 J \quad A \text{ الطاقة الحركية البدئية للعربة}$$

كلا العربتين بعد التصادم تتحركان بسرعة 12.0 m/s الطاقة الحركية بعد التصادم

$$\frac{1}{2}(20000) \times (12.0)^2 = 1.44 \times 10^6 J$$

فالطاقة الحركية المتحولة إلى طاقة حرارية وهي

$$2.88 \times 10^6 - 1.44 \times 10^6 = 1.44 \times 10^6 J$$

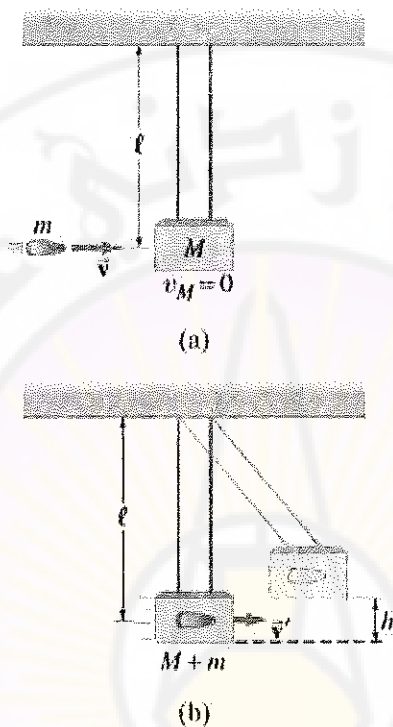
(مثال 7-7):

النواس البالسني هو جهاز لقياس سرعة القذيفة، كالطلقة القذيفة كتلتها (m)، وتصوب نحو كتلة كبيرة (من الخشب أو مادة أخرى)، كتلتها (M)، ومعلقة تشبه البندول ($M > m$)، وكنتيجة للصدم، الطلقة مع الكتلة ترتفع إلى مسافة h ، الشكل (7 - 11)، ما العلاقة بين السرعة الأفقية البدئية للقذيفة v ، والإرتفاع الأعظمي h .

الحل:

يمكننا تقسيم العملية إلى مرحلتين، (1) مرحلة ما قبل الصدم مباشرة، (2) المرحلة التالية مباشرة عندما ينزاح النواس الحركة من الوضع الشاقولي إلى أن يصل إلى الإرتفاع الأعظمي h .

المرحلة الأولى: موضحة على الشكل (7 - 11 - a)، نفرض أن زمن التصادم قصير جداً، وبالتالي القذيفة تستقر في الكتلة، والكتلة تتحرك و لا توجد قوى خارجية مؤثرة ويمكننا تطبيق قانون الإنحفاظ الإندفاع الخطي لصدمة لا مرنة كاملة.



الشكل (7 - 11)

المرحلة الثانية: الشكل (7 - 11 - b)، البندول يبدأ الحركة والقوى المؤثرة فيه قوة الثقل، إذاً بالنسبة إلى المرحلة الثانية لا نستطيع تطبيق قانون إنحفاظ الدفع، ولكن نستطيع تطبيق قانون إنحفاظ الطاقة الميكانيكية، لأن قوة الثقل هي قوة محافظة، الطاقة الحركية بعد الصدمة قد تحولت بالكامل إلى طاقة كامنة ثقالية عندما يبلغ النواس الإرتفاع الأعظمي h ، إذاً في المرحلة الأولى.

الإندفاع الخطي الكلي (بعد) = الإندفاع الخطي الكلي (قبز)،

$$mv = (M + m) \cdot v'$$

حيث $\dot{v}$: سرعة الكتلة مع القذيفة بعد الصدم.

و في المرحلة الثانية. الطاقة الميكانيكية تكون محفوظة نختار الوضع الصفري عندما يكون النواس في الوضع الشاقولي ($y = h$)، عندما النواس يبلغ الإرتفاع الأعظمي لذلك نستطيع أن نكتب:

$$(K + U) \text{ قبل الصدم مباشرة} = (K + U) \text{ بعد الصدم مباشرة}$$

$$\frac{1}{2}(M + m).\dot{v}^2 + 0 = 0 + (M + m)gh$$

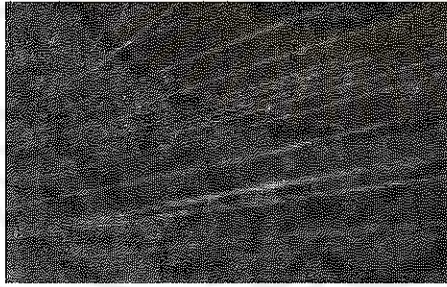
$$\dot{v} = \sqrt{2gh}$$

بعد الحل نجد:

$$v = \frac{M + m}{m}.\dot{v} = \frac{M + m}{m}.\sqrt{2gh}$$

8-7 الصدم في بعدين أو ثلاث أبعاد

إنحفاظ الدفع والطاقة يمكن أيضاً أن يطبق على الصدم في بعدين أو ثلاثة أبعاد لأن الطبيعة الشعاعية للاندفاع له أهمية خاصة. كما يبين الشكل (7 - 12).



الشكل (7 - 12)

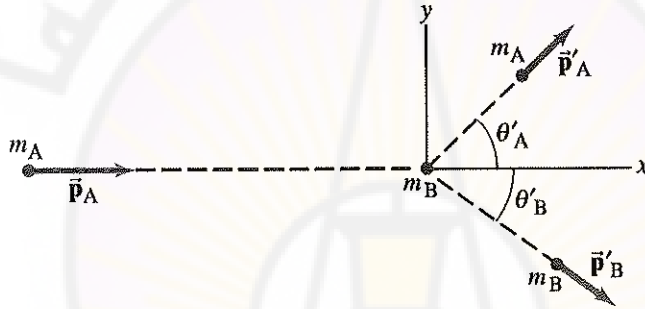
من الامثلة المعروفة على الصدم اللا رأسي هو تصادم قذيفة مع جسم آخر ساكن يدعى (الهدف)، كما يحدث في لعبة البليارد، أو كما يحدث في الفيزياء النووية والذرية، القذائف

ناتجة من عملية التفكك الإشعاعي أو من مسرعات الطاقة العالية، عندما تصدم النواة الهدف المستقر. الشكل (7 - 13)، يبين القذيفة الساقطة m_A ، على طول المحور x ، باتجاه الهدف m_B ، في البدء عند السكون، إذا كانت كرات البليارد m_A ، تصدم m_B ، وتتحرف بزاوية θ_A و θ_B ، على الترتيب، دعنا نطبق قانون إنحفاظ الإندفاع الخطي، نختار المستوي (xy) ، الذي يحوي الإندفاع الخطي البدئي والنهائي. بالإسقاط على المحاور الإحداثية نحصل على مركبات الإندفاع الخطي.

$$p_{Ax} + p_{Bx} = p'_{Ax} + p'_{Bx} \quad (7 - 27)$$

$$p_{Bx} = m_B v_{Bx} = 0$$

$$m_A v_A = m_A v'_A \cos \theta_A + m_B v'_B \cos \theta_B$$



الشكل (7 - 13)

الجسم A يصدم الجسم B (الهدف) ويتحركان بعد التصادم باندفاع خطي p'_A, p'_B وبزاوية θ_A, θ_B .

في البدء لا توجد حركة على المحور y لذلك.

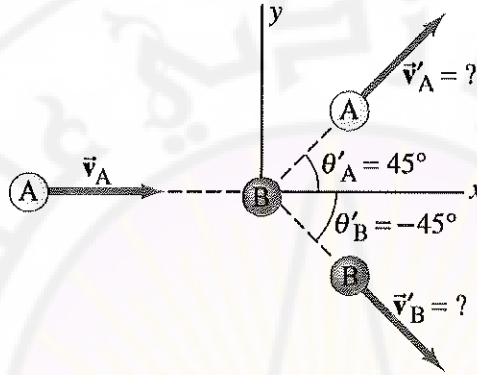
$$p_{Ay} + p_{By} = p'_{Ay} + p'_{By} \quad (7 - 28)$$

$$0 = m_A v'_A \sin \theta_A + m_B v'_B \sin \theta_B$$

لدينا معادلتان نحلها بالنسبة إلى المجاهيل.

(مثال 7-8):

تتحرك كرة البليارد A ، بسرعة $v_A = 3.0 \text{ m/s}$ ، في الإتجاه $(+x)$ الشكل (7 - 14) ، تصدم بكرة أخرى B تساويها في الكتلة ساكنة، كلا الكرتين تتحركان בזواوية 45° ، بالنسبة إلى المحور x ، إحسب سرعة الكرتين بعد التصادم.



الشكل (7 - 14)

الحل:

لا يوجد قوى خارجية مفترضين أن سطح الطاولة مستو وأن (القوى النازمية تتعادل مع قوة الثقالة)، لذلك نطبق إنحفاظ الإندفاع الخطي، من التناظر يمكننا أن نتوقع أن لهما السرعة نفسها، على الرغم من أن الصدم مرن أو لا مرن، نستطيع أن نطبق قانون إنحفاظ الإندفاع الخطي وبالإسقاط على المحورين الإحداثيين.

$$x: \quad mv_A = mv'_A \cos(45^\circ) + mv'_B \cos(-45^\circ) \quad (i)$$

$$y: \quad 0 = mv'_A \sin(45^\circ) + mv'_B \sin(-45^\circ) \quad (ii)$$

من المعادلة (ii) نجد:

$$v'_B = -v'_A \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(-45^\circ)} = v'_A$$

$$v_A = 2v'_A \cos(45^\circ)$$

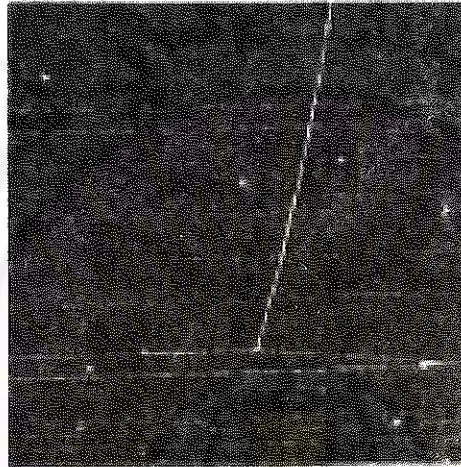
$$v'_A = v'_B = \frac{v_A}{2 \cos(45^\circ)} = \frac{3}{2 \times (0.707)} = 2.1 \text{ m/s}$$

(مثال 7 - 9):

يتحرك بروتون بسرعة $v_A = 8.2 \times 10^5 \text{ m/s}$ ، ويصدم صدماً مرئياً مع بروتون ساكن لهدف هيدروجيني، كما في الشكل (7 - 15)، زاوية الإنتثار هي الزاوية التي ينحرف بها البروتون الهيدروجيني قيمتها 60° ، ما سرعة البروتون بعد التصادم.

الحل:

الصدم مرن، إذا نطبق قانوني إنحفاظ الدفع والطاقة الحركية:



الشكل (7 - 15)

$$m_A = m_B, \quad v_B = 0$$

$$v_A = v'_A \cos \theta'_A + v'_B \cos \theta'_B \quad (i)$$

$$0 = v'_A \sin \theta'_A + v'_B \sin \theta'_B \quad (ii)$$

$$v_A^2 = v_B'^2 + v_A'^2 \quad (iii)$$

حيث:

$$\theta'_A = 60^\circ, \quad v_A = 8.2 \times 10^5 \text{ m/s}$$

من المعادلة (i) بعد تربيع الطرفين نحصل على

$$v_A^2 + v_A'^2 \cos^2 \theta_A - 2v_A v_A' \cos \theta_A = v_B'^2 \cos^2 \theta_B$$

وبترتيب طرفي المعادلة (ii):

$$v_A'^2 \sin^2 \theta_A = v_B'^2 \sin^2 \theta_B$$

بالجمع نحصل على

$$v_A^2 - 2v_A v_A' \cos \theta_A + v_A'^2 = v_B'^2$$

وبتعويض المعادلة (iii) نحصل على

$$v_A' = v_A \cos \theta_A = 8.2 \times 10^5 \cos 60^\circ$$

$$v_A' = 4.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$v_B' = \sqrt{v_A^2 - v_A'^2} = \sqrt{(8.2 \times 10^5)^2 - (4.1 \times 10^5)^2} = 7.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

وأخيراً من المعادلة (ii)

$$\sin \theta_B' = -\frac{v_A'}{v_B'} \sin \theta_A = -\frac{4.1 \times 10^5}{7.1 \times 10^5} \times (0.866) = -0.5$$

$$\theta_B' = -30^\circ$$

إشارة السالب تعني الجسم B، يتحرك تحت المحور x، كما في الشكل (7 - 14).

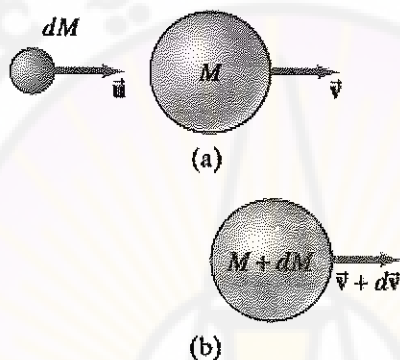
9-7 الجمل ذات الكتل المتغيرة دفع الصاروخ

سنعالج الآن الأجسام أو الجمل التي كتلتها متغيرة، مثل هذه الجمل تعالج كنوع من الصدم اللامرئ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ ، حيث: $\vec{p}$ ، الإندفاع الخطي الكلي للجمل و $\sum \vec{F}_{ext}$ ، محصلة القوى الخارجية المطبقة عليه، يجب أن ننتبه إلى تحديد الجمل، وكل التغيرات في الإندفاع الخطي ومن أهم التطبيقات. الصواريخ التي تندفع إلى الامام كرد فعل ناجم عن الغاز

المطروود، وتؤدي إلى تسارع الصاروخ، إن كتلة الصاروخ تتناقص بسبب طرد الغاز:

$$\frac{dM}{dt} < 0$$

لمعالجة الحالة العامة للكتل المتغيرة دعنا نتأمل الجملة المبينة على الشكل (7 - 16) عند لحظة زمنية t ، لدينا جملة كتلتها M ، وإندفاعها $M \vec{v}$ ، بعد زمن لا متناه في الصغر dt تتضمن كتلة لا متناهية في الصغر قدرها dM ، إلى جملة سرعتها $\vec{u}$ ، ومن أجل التبسيط نعد هذه العملية كالصدم، لأن كتلة الجملة تتغير من M إلى $M + dM$ ، خلال زمن قدره dt ، dM ، يمكن أن تكون أقل من الصفر لأن كتلة الصاروخ تتناقص).



الشكل (7 - 16)

-a عند اللحظة t الكتلة dM ستضاف إلى الجملة M

-b عند اللحظة $t + dt$ الكتلة dM ، أضيفت إلى الجملة

لتطبيق المعادلة $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ ، علينا أن نعد الجملة مكونة من جسيمات محدودة، والتغير في الإندفاع الخطي $d\vec{p}$ ، هو التغير في إندفاع الجسيمات نفسها في البداية والنهاية في اللحظة t ، الإندفاع الخطي الكلي هو $M \vec{v} + \vec{u}dM$ ، وعند اللحظة $t + dt$ ، وبعد أن انضمت الكتلة dM ، إلى M ، سرعة الجملة $\vec{v} + d\vec{v}$ ، و الإندفاع الخطي الكلي $(\vec{v} + d\vec{v})(M + dM)$ ، الشكل (7 - 16)، وبالتالي التغير في الإندفاع الخطي.

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= (\vec{v} + d\vec{v})(M + dM) - (M \vec{v} + \vec{u}dM) \\ &= M d\vec{v} + \vec{v}dM + dM d\vec{v} - \vec{u}dM \end{aligned} \quad (7 - 29)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{M d\vec{v} + \vec{v} dM - \vec{u} dM}{dt}$$

الحد $dM d\vec{v}$ ، حاصل جداء مقدارين تفاضليين وهو صغير .

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} \quad (7 - 30)$$

$$\vec{v}_{rel} = (\vec{u} - \vec{v}) \quad (7 - 31)$$

$\vec{v}_{rel}$: السرعة النسبية ل dM ، بالنسبة إلى M ، أو سرعة الكتلة الداخلة dM ، كما يراها المراقب على M .

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (7 - 32)$$

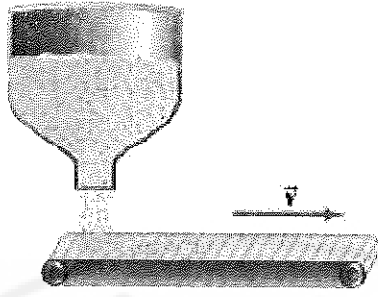
$M \frac{d\vec{v}}{dt}$: الكتلة مضروبة بتسارع الكتلة M . يمكننا شرح هذه المعادلة كالتالي:
الحد الأول من الطرف الايمن $\sum \vec{F}_{ext}$ ، يشير إلى القوة الخارجية المؤثرة في الكتلة M ، (من أجل الصاروخ يتضمن قوة الجاذبية ومقاومة الهواء)، وهو لا يتضمن قوة dM ، المؤثرة في M ، كنتيجة لتصادمهم. وهذا مأخوذ بعين الاعتبار من خلال الحد الثاني في الطرف الايمن $\vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt}$ ، الذي يعبر عن معدل تغير الإندفاع الخطي عندما يتحول إلى (أو من) الكتلة M ، بسبب الكتلة المضافة أو المغادرة منها، ويمكن أيضاً عده كقوة مؤثرة في الكتلة M ، بسبب إضافة الكتلة أو نفثها، القوة المؤثرة في الصاروخ بالغاز المنفوث (المطرود).

(مثال 7-10):

تسقط الحصى من وعاء بمعدل 75.0 kg/s ، إلى حزام النقل الذي يتحرك بسرعة ثابتة 2.20 m/s ، الشكل (7 - 17)

1) أوجد القوة الإضافية، بالإضافة إلى قوة الاحتكاك الداخلي المطلوبة للحفاظ على حركة حزام النقل و الحصى تسقط عليه.

2) ما القدرة الخارجة من المحرك المطلوبة من المحرك لتحريك حزام النقل؟



الشكل (7 - 17)

الحصى تسقط من الوعاء على الحزام المتحرك.

الحل:

نفرض أن الوعاء ساكن $u = 0$ ، وأنه الآن قد بدأ بتفريغ الحصى.
 (1) سرعة حزام النقل ثابتة $dv/dt = 0$ ، المعادلة (32 - 7) ، من أجل بعد

واحد تكتب:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 - (0 - v) \frac{dM}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = v \frac{dM}{dt} = 2.20 \times 75.0 = 165N$$

(2) هذه القوة تعمل في حالة:

$$\frac{dw}{dt} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = v^2 \frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = (2.20)^2 \times 75.0 = 363W$$

ملاحظة: هذا العمل لا يذهب كله إلى طاقة حركية للحصى لأن:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2$$

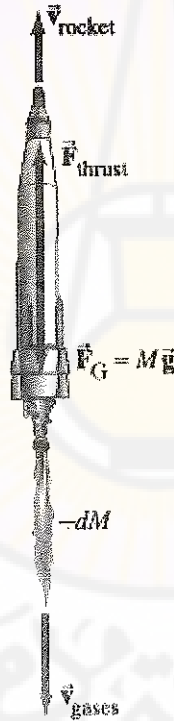
وهو نصف العمل المنجز بالقوة $\vec{F}_{ext}$ ، والنصف الآخر يتحول إلى طاقة حرارية الناتجة عن الاحتكاك بين الحصى والحزام.

(مثال 7 - 11):

صاروخ كتلته 21000kg ، منها كتلة وقود 15000kg ، الوقود المحروق يفرغ بمعدل 190 kg/s ، ويسرعة 2800 m/s ، بالنسبة إلى الصاروخ، إذا إنطلق الصاروخ عمودياً

إلى الأعلى الشكل (7 - 18) ، إحسب:

1. قوة دفع الصاروخ.
2. القوة المحصلة على الصاروخ عند بدء الإنطلاق ، قبل الإحتراق تماماً.
3. سرعة الصاروخ كتابع للزمن.
4. سرعته النهائية عند الإحتراق بإهمال مقاومة الهواء.



الشكل (7 - 18)

كتلة الصاروخ عند أية لحظة تتناقص، حتى الإحتراق. $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{gases} - \vec{v}_{rocket}$ ، M :

الحل:

إن قوة الدفع $\vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt}$ والقوة المحصلة من أجل (2) هي المجموع الشعاعي لقوتي الدفع و الجاذبية

1. قوة الدفع:

$$F_{thrust} = v_{rel} \frac{dM}{dt} = -2800 \times -190 = 5.3 \times 10^5 N$$

السرعة v_{rel} ، سالبة لأن الجهة الموجبة إلى الأعلى وأن $\frac{dM}{dt}$ ، سالبة لأن كتلة الصاروخ متناقصة.

2. القوة عند بدء الإنطلاق:

$$F_{ext} = mg = 2.1 \times 10^4 \times 9.80 = 2.1 \times 10^5 N$$

وعند:

$$F_{ext} = mg = 6.0 \times 10^3 \times 9.80 = 5.9 \times 10^4 N$$

إلا أن القوة المحصلة على الصاروخ عند الإنطلاق:

$$F_{net} = 5.3 \times 10^5 - 2.1 \times 10^5 = 3.2 \times 10^5 N$$

وقبل الإحتراق تماماً:

$$F_{net} = 5.3 \times 10^5 - 5.9 \times 10^4 = 4.7 \times 10^5 N$$

وبعد الإحتراق القوة المحصلة هي قوة الجاذبية طبعاً $5.9 \times 10^4 N$

3. من المعادلة (32 - 7) لدينا

$$dv = \frac{F_{ext}}{M} dt + v_{rel} \frac{dM}{M}$$

حيث: $F_{ext} = -Mg$ ، و M ، هي كتلة الصاروخ وهي تابعة للزمن وبما أن

$$v_{rel} = \text{constant}$$

وبالتكامل.

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_0^t g dt + v_{rel} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

$$v(t) = v_0 - gt + v_{rel} \ln \frac{M}{M_0}, M < M_0, \quad v_{rel} < 0 \quad (7 - 33)$$

4. الزمن اللازم للوصول الى الاحتراق هو الزمن اللازم لاستنفاد كامل الوقود بمعدل 190 kg/s

$$t = \frac{1.50 \times 10^4}{190} = 79s$$

إذا أخذنا $v_0 = 0$

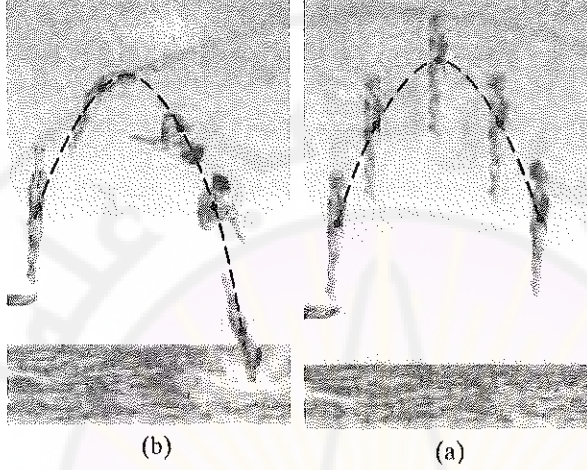
$$v = -9.80 \times 79 - 2800 \ln \frac{6000}{21000}$$

$$v = 2700 \text{ m/s}$$

7-10 مركز الكتلة

الإندفاع الخطي هو مفهوم قوة وليس لتحليل عمليات التصادم فحسب، ولكن أيضاً يستخدم من أجل تحليل الحركة الإنسحابية للأجسام العادية. حتى الآن قد تعاملنا مع حركة الجسم العادي (الجسم الذي يملك حجم)، لقد فرضنا أنه يمكن أن نقربه إلى جسيم نقطي أو أنه

يقوم بحركة إنسحابية فحسب، ولكن الجسم العادي يمكنه أن يقوم بحركة دورانية، وأنواع أخرى من الحركات، على سبيل المثال الغطاس في الشكل (7 - 19)، لا يقوم بحركة إنسحابية فحسب، (كل أجزاء الجسم تتبع نفس المسار)، ولكن الغطاس يقوم بحركة إنسحابية ودورانية، وسوف نشير إلى الحركة التي ليست إنسحابية فحسب، بأنها حركة عامة.



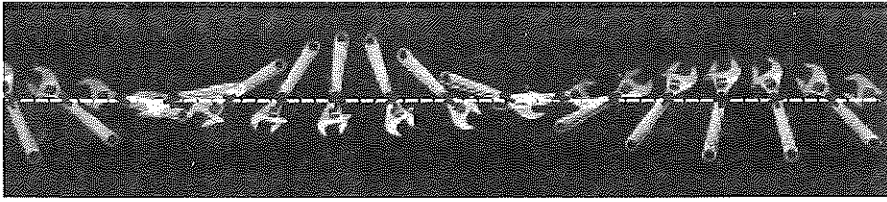
الشكل (7 - 19)

-a- حركة الغطاس هي إنسحابية صرفة.

-b- النقاط السوداء تعبر عن مركز كتلة الغطاس في كل لحظة.

إذا كان الجسم يدور أو بعض الأجزاء من الجسم تتحرك بالنسبة إلى أحدها الآخر، يوجد نقطة واحدة تتحرك على المسار نفسه الذي سوف يتحرك على الجسم إذا أثرت فيه محصلة القوى نفسها، هذه النقطة تدعى مركز الكتلة وتختصر بـ CM، الحركة العامة للجسم العادي (أو مجموعة أجسام) يمكن عدها مجموعاً للحركة الإنسحابية لمركز الكتلة إضافة إلى الحركة الدورانية والاهتزازية أو أي نوع آخر من الحركة حول CM، مركز الكتلة.

مركز الكتلة يتبع مسار قطع مكافئ، على الرغم من أن الغطاس يدور، إنه نفس مسار القطع المكافئ للجسيم المقذوف عندما يخضع لقوة الجاذبية، النقاط الأخرى للغطاس مثل القدم أو الرأس تتبع مسار أكثر تعقيداً.



الشكل (7 - 20)

الإنسحاب والدوران: مفتاح الرنش يتحرك على سطح أفقي، مركز الكتلة يتحرك على خط مستقيم.

الشكل (7 - 20)، يبين مفتاح العزقة، الذي محصلة القوى عليه صفر، ينسحب ويدور على سطح أفقي، نلاحظ أن مركز الكتلة يتحرك على خط مستقيم، سوف نبين أن الخواص المهمة لمركز الكتلة تأتي من قوانين نيوتن لمركز الكتلة وهو معرف بالطريقة التالية:

نستطيع أن نفرض أن الجسم العادي يكون مؤلفاً من عدد كبير من الجسيمات الصغيرة جداً، ولكن أولاً سنفترض أن الجسم مؤلف من جسيمين (أو أجسام صغيرة) لكتل m_A, m_B ، نختار جملة الإحداثيات بحيث أن يقع الجسمان على المحور x ، عند الوضعية x_A و x_B ، الشكل (7 - 21)، مركز الكتلة للجملة.

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \quad (7 - 34)$$

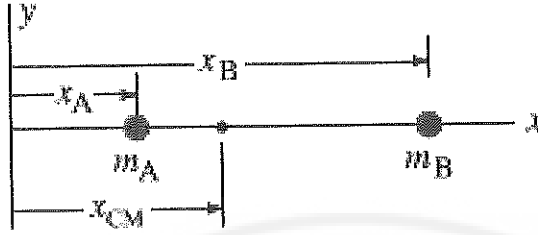
$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{M} \quad (7 - 35)$$

حيث $M = m_A + m_B$ ، وهي الكتلة الكلية للجملة، مركز الكتلة على الخط الواصل بين m_A, m_B . إذا كانت الكتلتان متساويتين.

$$x_{CM} = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (7 - 36)$$

إذا كانت إحدى الكتلتين أكبر فإن CM ، أقرب إلى الكتلة الأكبر، إذا كانت كل الكتلة مركزة في x_B فإن $m_A \approx 0$ وبالتالي:

$$x_{CM} = \frac{0 + m_B x_B}{m_B} = x_B$$



الشكل (7 - 21)

مركز الكتلة لجسمين.

والآن دعنا نفرض أن الجملة تتألف من n ، جسم حيث n ، يمكن أن تكون مقداراً كبيراً جداً ، ويمكن أن تكون هذه الجملة عبارة عن جسم ممتد الذي نعدّه مكوناً من n ، جسم صغير ، إذا كانت هذه الجسيمات على خط واحد ، وليكن على طول المحور x ، نعرف مركز الكتلة CM ، لجملة.

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad (7 - 37)$$

حيث: $m_1, m_2, \dots, m_n$ ، هي كتل الجسيمات التي مواضعها: $x_1, x_2, \dots, x_n$

(مثال 7 - 12):

يمتطي ثلاثة أشخاص كتلهم متقاربة m ، مركباً عبارة عن بالون مملوء بالهواء يأخذون المواضع التالية:

$$x_A = 1.0m, \quad x_B = 5.0m, \quad x_C = 6.0m$$

أوجد موضع مركز الكتلة مع إهمال كتلة المركب.

الحل:

$$x_{CM} = \frac{mx_A + mx_B + mx_C}{3m} = \frac{1.0 + 5.0 + 6.0}{3} = 4.0m$$

إنها أقرب إلى الشخصين في الموضعين $x_B = 5.0m$ ، $x_C = 6.0m$ ، نلاحظ أن إحداثيات مركز الكتلة تتعلق بإحداثيات جملة المقارنة المختارة ولكن الموضع الفيزيائي مستقل عن هذا الاختيار.

❖ احسب مركز الكتلة لثلاث اشخاص في المثال السابق آخذين بعين الاعتبار المبدأ عند السائق (الشخص الذي يجلس أقصى اليمين $x_C = 0$ ، هل الموضع الفيزيائي نفسه:

$$x_{CM} = \frac{mx_A + mx_B + mx_C}{3m} = \frac{5.0 + 1.0 + 0}{3} = 2m$$

نلاحظ أن الموضع الفيزيائي لمركز الكتلة نفسه.

إذا كانت الجسيمات منتشرة في ثلاث أبعاد كما الحال في الجسم العادي الممتد نعرف مركز الكتلة كالتالي:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (7-38)$$

حيث: x_i, y_i, z_i ، إحداثيات الجسيم الذي كتلته m_i .

$$M = \sum m_i$$

الكتلة الكلية وشعاع الموضع لمركز الكتلة

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (7-39)$$

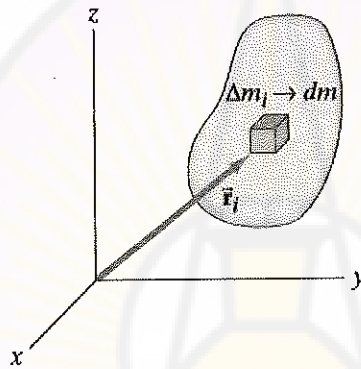
من المفيد عادة أن ندرس الجسم الممتد الذي نعه توزع مستمر للمادة، من أجل ذلك نعه مكوناً من عدد من الجسيمات قدره n ، كتلتها Δm_i ، في حجم صغير حول النقطة

x_i, y_i, z_i ، لئأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ ، الشكل (7 - 22) فإن Δm_i ، تصبأ لانهائية في الصغر عند النقطة x, y, z .

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\Delta m_i \rightarrow 0$$

$$M = \sum_i^n \Delta m_i, \quad M = \int_0^M dm$$



الشكل (7 - 22)

الجسم الممتد مبين في بعدين، ويمكن إعتبار أنه مؤلف من عدة جسيمات دقيقة n ، كتلة كل منها Δm_i ، وتقع في النقطة $\vec{r}_i$ ، ويأخذ نهاية عندما $n \rightarrow \infty$ ، وبالتالي Δm_i ، تصبأ لانهائية في الصغر dm .

في هذه الحالة المجموع في (7 - 38) و (7 - 39)، يتأول من المجموع إلى تكامل.

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm, \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm \quad (7 - 40)$$

$$dm = \rho dV$$

dV : حجم عنصري من الجسم. وإذا كانت الكثافة الحجمية للجسم متجانسة

$$M = \rho \cdot V$$

أما شعاع الموضع لمركز الكتلة.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dV \quad (7-41)$$

وإذا كانت كتلة الجسم موزعة على سطحه بكثافة سطحية σ ، (صفحة معدنية) وبالتالي. ds : مساحة سطح عنصري من الجسم.

$$dm = \sigma \cdot ds$$

وإذا كانت الكثافة السطحية للجسم متجانسة.

$$M = \sigma \cdot S$$

S : مساحة سطح الجسم.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \sigma \cdot ds \quad (7-42)$$

وكذلك الأمر بالنسبة إلى الجسم الذي توزع عليه الكثافة الكتلة بشكل طولي λ ، (قضيب رفيع).

$$dm = \lambda \cdot d\ell$$

$d\ell$: طول عنصري من الجسم

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \lambda \cdot d\ell \quad (7-43)$$

المفهوم المشابه لمركز الكتلة هو مركز الثقل CG، نقطة تأثير قوة الثقل، أن قوة الثقل تؤثر عادة في مختلف أجزاء الجسم، أو الجسيمات المكونة للجسم، ولكن من أجل تحديد الحركة الإنسحابية للجسم كاملاً يمكننا أن نفرض أن وزن الجسم ككل (وهو مجموع أوزان مختلف

أجزائه) يؤثر في (CG)، يوجد مفهوم مختلف بين (CG)، و مركز الكتلة، ولكن تقريباً ومن أجل كل الأغراض التطبيقية يكون لهما النقطة نفسها.

(مثال 7-13):

عين إحداثيات مركز ثقل قوس دائريمتجانس نصف قطر R ، وزاويته المركزية 2α ، كما في الشكل (7 - 23)، ناقش حالة كون القوس نصف دائرة. .

الحل:

مركز ثقله يقع على محور التناظر كما وجدنا سابقاً أي على المحور x .

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \lambda \cdot d\ell \quad (7 - 44)$$

بما أن كتلة القوس متجانسة (الكثافة الطولية للكتلة)

$$\lambda = \frac{dm}{dx}, \quad M = \lambda L$$

$$x_{CM} = \frac{1}{L} \int_A^B x d\ell$$

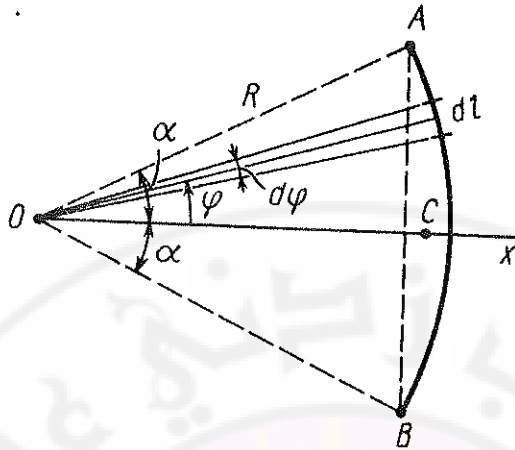
لكن من الشكل نجد أن :

$$L = R \cdot 2\alpha, \quad x = R \cos \varphi, \quad d\ell = R d\varphi$$

بالتعويض في معادلة x_C ، نجد أن :

$$x_{CM} = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{R}{2\alpha} [\sin \alpha]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$x_{CM} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$



الشكل (7 - 23)

عندما يكون طول القوس هو نصف دائرة فإن $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$x_{CM} = \frac{7}{11}R, \quad x_{CM} > \frac{R}{2}$$

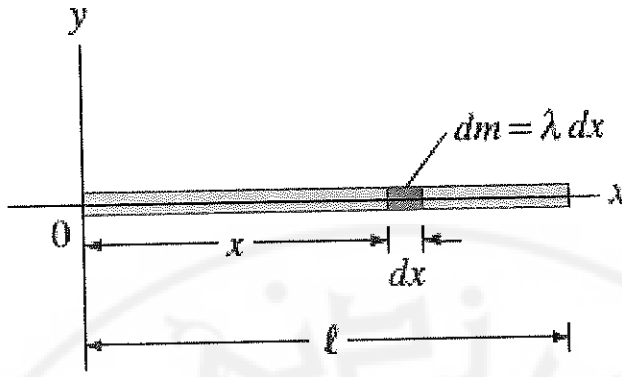
(مثال 7 - 14):

أوجد مركز الكتلة لقضيب رفيع متجانس طوله ℓ ، وكتلته M ، الشكل (7 - 24)
(a)

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_{x=0}^{\ell} x dm$$

بما أن كتلة القضيب متجانسة (الكثافة الطولية لكتلة القضيب $\lambda = \frac{dm}{dx}$)

$$\lambda = M/\ell$$



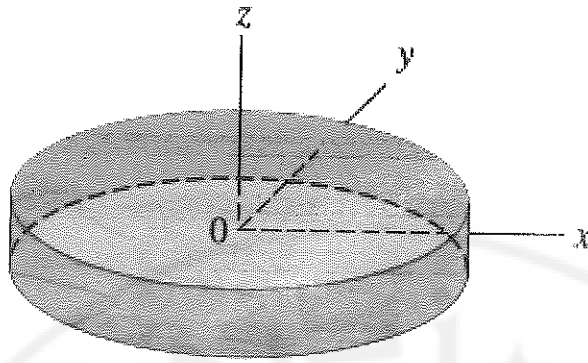
الشكل (7 - 24)

$$x_{CM} = \frac{1}{\ell} \int_{x=0}^{\ell} x dx = \frac{1}{\ell} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\ell} = \frac{\ell}{2}$$

$$x_{CM} = \frac{\ell}{2}$$

من أجل أجسام أشكالها متناظرة وتركيبها متجانس مثل الكرة الاسطوانة والمستطيل، مركز الكتلة يكون واقعاً في المركز الهندسي لهذه الأجسام، لنفرض لدينا اسطوانة دائرية متجانسة مثل القرص فإننا نتوقع أن مركز الكتلة يكون واقعاً في مركز الدائرة، من أجل التأكد من ذلك نختار جملة إحداثيات مبدؤها في مركز الدائرة، والمحور z ، عمود على القرص الشكل (7 - 25)، عندما نأخذ المجموع في المعادلة $\sum m_i x_i$ ، يكون معدوماً بسبب تناظر المحور x حول نقطة المبدأ 0 ، $x_{CM} = 0$ ، وكذلك الشيء نفسه بالنسبة إلى المحور y ، $y_{CM} = 0$.

أما بالنسبة إلى المحور z ، فإن مركز الكتلة يجب أن يقع في المنتصف، بين الوجهين العلوي والسفلي للقرص، فإذا اخترنا نقطة المبدأ 0 ، عند تلك النقطة فإن $z_{CM} = 0$ ، أما من أجل أجسام متجانسة لها أشكال متناظرة يمكننا بالطريقة نفسها أن نبين أن مركز الكتلة يقع على خط التناظر.

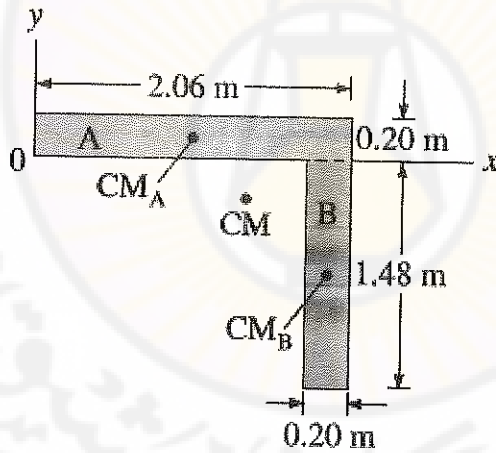


الشكل (7 - 25)

قرص اسطواني يقع مركزه الهندسي في مركز الإحداثيات.

(مثال 7 - 15) - مركز الكتلة لصفحة على شكل L.

حدد مركز الكتلة للصفحة علماً بأنها متجانسة ورقيقة الشكل (7 - 26).



الشكل (7 - 26)

جسم له شكل حرف L ، وسماكة t ، غير معروضة في هذا الشكل.

الحل:

نفرض أن الجسم عبارة عن مستطيلين ونختار مبدأ الإحداثيات O و A : سماكة الصفحة t .

مركز الكتلة للمستطيل: A

$$x_A = 1.03m, \quad y_A = 0.10m$$

مركز الكتلة للمستطيل: B

$$x_B = 1.96m, \quad y_B = -0.74m$$

كتلة الصفحة: A

$$M_A = (2.06) \times (0.20) \times (t)(\rho) = 0.412(\rho t)$$

ρ : الكثافة الحجمية

$$M_B = (1.48) \times (0.20) \times (t)(\rho) = 0.296(\rho t)$$

والكتلة الكلية:

$$M = (1.48) \times (0.20)(t)(\rho) = 0.708(\rho t)$$

$$x_{CM} = \frac{M_A x_A + M_B x_B}{M} = \frac{0.412 \times 1.03 + 0.296 \times 1.96}{0.708} = 1.42m$$

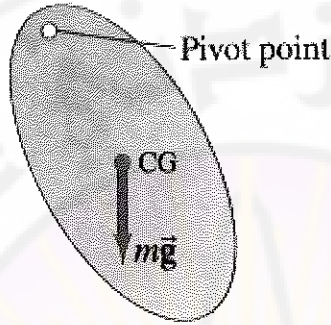
$$y_{CM} = \frac{M_A y_A + M_B y_B}{M} = \frac{0.412 \times 0.10 + 0.296 \times -0.74}{0.708} = -0.25m$$

وبما أن الصفحة متجانسة ، سماكتها t .

$$z_{CM} = t/2$$

نلاحظ في هذا المثال أن مركز الكتلة يقع خارج الجسم، و مركز الكتلة للكعة يقع في الفتحة.

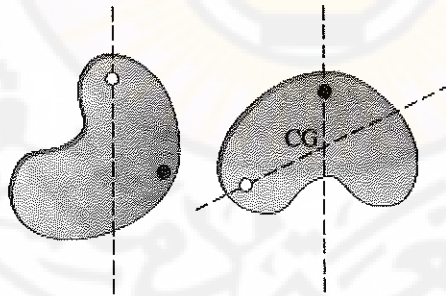
يتم عادة تعيين مركز الكتلة (CG) تجريبياً إذا علق الجسم من أية نقطة فإنه سيترنج، الشكل (7 - 27)، وبسبب قوة الجاذبية عليه حاملها يمر من (CG) وإذا كان الجسم مستوياً أو يملك مستوي تناظر نحتاج لتعليق الجسم من نقطة أخرى (قطبية) لا يمر المحور منها، في المرة الأولى وتكون (CG) هي نقطة تقاطع المحورين، إذا كان الجسم لا يملك مستوي تناظر نحتاج لتعليق الجسم من نقطة ثالثة الشكل (7 - 28).



الشكل (7 - 27)

تحديد CM لجسم مستوي متجانس

حيث خطها لا يقع في مستو واحد مع الخطين السابقين، ومن أجل الأجسام المتناظرة مركز الكتلة يقع في المركز الهندسي للجسم.



الشكل (7 - 28)

إيجاد CG

11-7 مسألة الجسمين

لننصّر منظومة مؤلفة من جسمين معزولين The Two-Body Problem، يخضع كلاهما لقوة التأثير المتبادل، وهما موجودان في حقل الجاذبية المتجانس. نفرض أن أوضاع الجسمين محددة $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ، وكتلتيهما m_1, m_2 ، وأن $\vec{F}_{21}$ ، القوة التي يؤثر بها الجسم الثاني على الجسم الأول، معادلات الحركة للجسمين.

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{21} \quad (7-44)$$

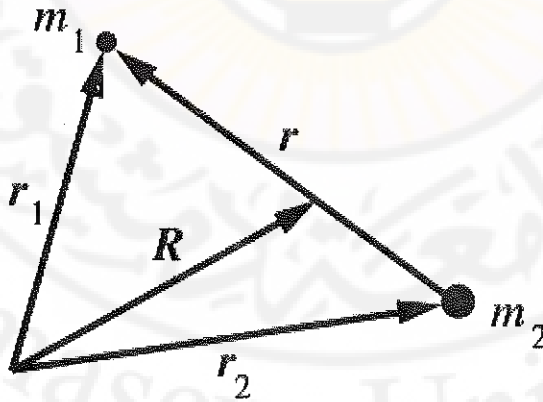
$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2 = m_2 \vec{g} - \vec{F}_{12} \quad (7-45)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{حيث:}$$

المعادلة (7-39) لجسمين معزولين.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (7-46)$$

حيث: $M = m_1 + m_2$ ، والوضع النسبي للجسمين الشكل (7-29).



الشكل (7-29)

$$\mathbf{R} = \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (7-47)$$

من المعادلتين (7-44)، (7-45).

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 = \vec{g} + \vec{F}/m_1 \quad (7-48)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2 = \vec{g} - \vec{F}/m_2 \quad (7-49)$$

بتعويض هاتين المعادلتين في المعادلة التي تعطي التسارع

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 - \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \vec{F} = \frac{\vec{F}}{\mu}$$

μ : تسمى الكتلة المختزلة

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad (7-50)$$

وهي أصغر من m_1, m_2 ، ومعادلة الحركة بالنسبة لـ CM .

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM} = M \vec{g} \quad (7-51)$$

هذه المعادلة تبين أن مركز الكتلة يتحرك بتسارع ثابت $\vec{g}$ ، وعندما $\vec{g} = 0$ ، فإنه يتحقق

قانون إنحفاظ الإندفاع الخطي

$$M \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_2 = \text{Const.}$$

7-12 مركز الكتلة والحركة الإنسحابية

كما ذكرنا أن السبب الرئيسي لأهمية مفهوم مركز الكتلة هو الحركة الإنسحابية لجملة جسيمات أو جسم عادي (ممتد)، وهو متعلق مباشرة بالقوة المحصلة المؤثرة في الجملة ككل، سنبرهن هذا بدراسة حركة جملة جسيمات n ، ولها كتلة كلية M ، وسنفرض أن كل الكتل تبقى ثابتة سنكتب المعادلة (39 - 7) كما يلي:

$$M \cdot \vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i \quad (7 - 52)$$

نفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن.

$$M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M \vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i \quad (7 - 53)$$

$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ سرعة الجسيم i الذي كتلته m_i ، $\vec{v}_{CM}$ سرعة CM، نشق بالنسبة إلى الزمن مرة ثانية:

$$M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i \quad (7 - 54)$$

$\vec{a}_i$: تسارع الجسيم و $\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$ ، تسارع CM، ونرمز له $\vec{a}_{CM}$.

قانون نيوتن الثاني $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ ، هو $\vec{F}_i$ ، قوة المحصلة المؤثرة في الجسيم i ، إذا:

$$M \vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i \quad (7 - 55)$$

المجموع الشعاعي لكل القوى المؤثرة في الجملة يساوي الكتلة الكلية للجملة مضروباً بتسارع مركز كتلتها، نلاحظ أن جملتنا المؤلفة من n ، جسيم يمكن أن تؤلف جسم مؤلف من عدة أجسام. القوى المؤثرة في الجسيمات يمكن تقسيمها إلى نوعين:

1- قوى خارجية تؤثر بواسطة جسيمات من خارج الجملة.

2- قوى داخلية حيث أن الجسيمات داخل الجملة يؤثر بعضها في بعض.

حسب قانون نيوتن الثالث الجسيمات تؤثر في بعضها كأزواج فإذا أثر جسيم في آخر فإن على الجسم الآخر أن يؤثر فيه بالقوة نفسها ويعكس الاتجاه، والجمع الكلي لهذه القوى يكون معدوماً (تلغي بعضها مثنى مثنى)، الطرف الأيمن في المعادلة (55 - 7)، يمكن تعديلها على الشكل:

$$M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}, \quad M = \text{Const.} \quad (7 - 56)$$

$\sum \vec{F}_{ext}$ ، مجموع كل القوى الخارجية المؤثرة في الجملة التي هي القوة المحصلة المؤثرة في الجملة، إذاً: مجموع كل القوى المؤثرة في الجملة يساوي الكتلة الكلية للجملة مضروباً بتسارع مركز كتلتها. وهو قانون نيوتن الثاني لجملة جسيمات، وهو يطبق أيضاً على جسم عادي (يمكن عده تجمعاً من الجسيمات) وعلى جملة أجسام أيضاً:

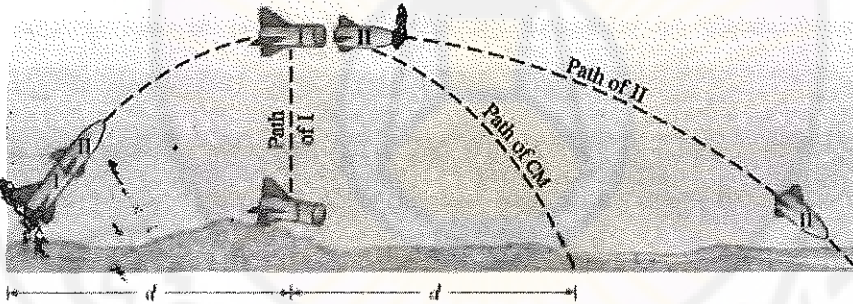
مركز الكتلة لجملة جسيمات (أو أجسام) كتلتها الكلية M ، يتحرك كجسيم واحد كتلته M ، ويخضع للقوى المحصلة الخارجية نفسها. الجملة تنتقل كما لو أن كتلتها كلها متمركزة في مركز ثقلها CM ، كل القوى الخارجية تؤثر فيها، نستطيع أن نعالج الحركة الإنسحابية لكل جسم أو جملة لأجسام كحركة الجسيم، هذه النتيجة تعني ببساطة أن تحليلنا لحركة الجمل المركبة والأجسام العادية وأيضاً حركة مختلف أجزاء الجملة يمكن أن يكون معقداً، نحن نكون مكتفين بحركة مركز الكتلة، هذه النتيجة تسمح لنا بحل أنواع من المسائل بسهولة جداً كما موضح في المثال التالي:

(مثال نموذجي 1-7)

يقذف صاروخ في الهواء كما موضح على الشكل (7 - 30)، عندما يصل إلى إرتفاعه الأعظمي، وعلى مسافة أفقية d ، من نقطة إنطلاقه ينفصل إلى جزأين متساويين في الكتلة، الجزء I، يتوقف في الجو ويسقط عمودياً إلى الأرض، هل يسقط الجزء II، بفرض $(\vec{g} = \text{ثابت})$.

الإجابة:

بعد أن ينطلق الصاروخ، فإن مسار مركز الكتلة للجملة يستمر على مسار قطع مكافئ، خاضعاً لقوة ثقله الثابتة، و مركز الكتلة يسقط عند النقطة $2d$ ، من نقطة إنطلاقه، بما أن الكتل (II) و (I) متساويتان، فإن مركز الكتلة، يجب أن تتوسط بينهما، لذلك الجزء (II) يهبط على مسافة $(3d)$ من نقطة الإنطلاق.



الشكل (7 - 30)

ملاحظة: إذا أعطينا ركلة (ضربة) للجزء (I) إلى الأعلى أو إلى الأسفل بدلاً من السقوط فإن الحل سيكون أكثر تعقيداً، نستطيع أن نكتب المعادلة (56 - 7)، بدلالة الإندفاع الخطي $\vec{p}$ ، لجملة مؤلفة من عدة جسيمات.

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \sum \vec{p}_i \quad (7 - 57)$$

من المعادلة (52 - 7) نحصل:

$$\vec{p} = M\vec{v}_{CM} \quad (7 - 58)$$

الإندفاع الخطي الكلي لجملة جسيمات يساوي حاصل ضرب الكتلة الكلية بسرعة مركز الكتلة للجملة أو أن الإندفاع الخطي للجسم (الممتد) هو جداء كتلة الجسم بسرعة مركز ثقله. إذا فاضلنا المعادلة $\vec{p} = M\vec{v}_{CM}$ ، بالنسبة إلى الزمن (بفرض الكتلة الكلية ثابتة) .

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} \quad (7 - 59)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (7 - 60)$$

وهي المعادلة (55 - 7) نفسها.

حيث $\sum \vec{F}_{ext}$ ، هي القوة المحصلة الخارجية المؤثرة في الجملة، هذه هي بالضبط المعادلة (13 - 7) والمحصول عليها سابقاً القانون الثاني لنيوتن لجملة جسيمات ، وهي صالحة من أجل أي مجموعة (معرفة) لجملة ثنائية من الجسيمات، أو الأجسام إذا عرفنا أن $\sum \vec{F}_{ext}$ ، نستطيع أن نحدد تغيرات الإندفاع الخطي الكلي.

(مثال 7-16):

ينطلق صاروخ إلى الأعلى، ويبلغ الذروة عندما تكون سرعته 300 m/s ، ثم ينفجر إلى ثلاثة أجزاء متساوية الكتلة، أحدها يتابع سيره إلى الأعلى بسرعة 450 m/s ، والجزء الثاني سرعته 240 m/s ، إلى الشرق مباشرة بعد الانفجار، ما سرعة الجزء الثالث مباشرة بعد الانفجار.

الحل:

إنحفاظ الإندفاع الخطي الكلي بعد الانفجار مباشرة:

$$\vec{p} = Mv_{CM} \cdot \vec{i} \quad (7 - 61)$$

$$\vec{p}' = M_1 v'_1 \cdot \vec{j} + M_2 v'_2 \cdot \vec{i} + M_3 v'_3$$

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

$$Mv_{CM}\vec{i} = M_1v'_1\vec{j} + M_2v'_2\vec{i} + M_3\vec{v}'_3$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{M}{3}$$

$$\vec{v}'_3 = (3v_{CM} - v'_1)\vec{j} - v'_2\vec{i}$$

$$\vec{v}'_3 = 300\vec{j} - 240\vec{i}$$

$$v_3 = \sqrt{(300)^2 + (-240)^2}$$

$$v_3 = 384.19 \text{ m/s}$$

مسائل

1-7 بندقية كتلتها 0,8 kg تطلق رصاصة كتلتها 0,016 kg ذات سرعة 700 m/s ،
إحسب سرعة ارتداد البندقية.

2-7 يتحرك جسم كتلته 8 kg على خط مستقيم بسرعة ثابتة 2 m/s دون أن تؤثر عليه
أية قوة ، وفي لحظة معينة ينشطر إلى قسمين كتلة أحدهما 3 kg، ويتحرك بسرعة 6 m/s
بنفس إتجاه الحركة الأصلية للجسم ، ما سرعة القسم الثاني وإتجاهه .

3-7 يبدأ رجل كتلته 70 kg بالسير على عربة ساكنة كتلتها 1000 kg بسرعة 1 m/s
بالنسبة إلى عامل يقف على رصيف المحطة، ويتوقف بعد قطع مسافة 10m على العربة،
كيف تتحرك العربة وما المسافة التي تقطعها بالنسبة إلى عامل بفرض أن الاحتكاك بين
العربة والأرض مهمل .

4-7 جسم كتلته 3,2 kg يتحرك نحو الغرب بسرعة 6 m/s وجسم آخر كتلته 1,6 kg
يتحرك نحو الشمال بسرعة 5 m/s ، يدخل الجسمان في تأثير متبادل أحدهما مع الآخر،
وبعد ثانيتين تصبح حركة الأول نحو 30°EN (بالإتجاه شمال شرق بزاوية 30 مع
الشمال) وبسرعة 3 m/s ، أوجد (a) مقدار وإتجاه سرعة الجسم الثاني، (b) الإندفاع
الخطي الكلي للجسمين في البداية وبعد انقضاء ثانيتين، (c) تغير الإندفاع الخطي لكل من
الجسمين .

5-7 تتطلق قذيفة بحيث تصنع زاوية 60° فوق الأفق وبسرعة ابتدائية 1200 m/s وفي
أعلى نقطة من مسارها تنفجر؛ فتنشطر إلى شطرين متساويين يسقط أحدهما شاقولياً بدون
سرعة ابتدائية ، على أي بعد من نقطة الإطلاق يصطدم الشطر الثاني بالأرض بافتراض
أنها أفقية .

6-7 يندفع الوقود من صاروخ كتلته في لحظة معينة 850 kg بمعدل $2,3 \text{ kg/s}$ وبسرعة
 2800 m/s بالنسبة إلى صاروخ، أوجد نفث الصاروخ وتسارعه في تلك اللحظة.

7-7 إحسب عزم الإندفاع للأرض حول الشمس، وكذلك عزم كمية حركة الإلكترون حول النواة في ذرة الهيدروجين، بفرض أن المدارات دائرية في كلتا الحالتين ، تعطى $M=5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ (كتلة الأرض)، بعد الأرض عن الشمس $1.49 \times 10^{11} \text{ m}$ ، $m=9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (كتلة الإلكترون)، بعد الإلكترون عن النواة $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ وسرعته الزاوية $4.13 \times 10^{16} \text{ rad/s}$.

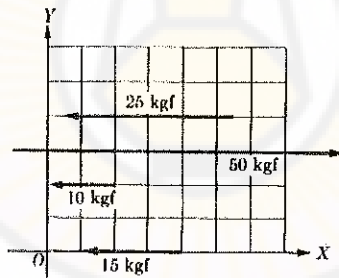
8-7 يعطى شعاع الموضع $\vec{r}$ لجسيم كتلته 6 kg كما يلي :

$$\vec{r} = \vec{i}(3t^2 - 6t) + \vec{j}(-4t^3) + \vec{k}(3t + 2)$$

أوجد (a) القوة المؤثرة في الجسيم (b) عزم القوة بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات (c) كمية حركة الجسيم وعزم حركته بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات (d) تحقق من أن :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

9-7 أوجد محصلة ونقطة تطبيق جملة القوى المبينة على الشكل (7 - 31) ، علماً أن مساحة كل مربع هي 1 cm^2 .

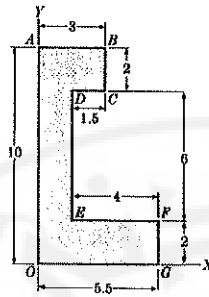


الشكل (7 - 31)

10-7 برهن انه إذا كانت $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ هي محصلة جملة قوى متلاقية و $\vec{\tau}_o$ هو عزمها بالنسبة إلى النقطة (o) فعزمها بالنسبة إلى نقطة أخرى A هو :

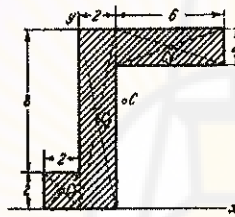
$$\vec{\tau}_A = \vec{\tau}_o + \vec{r}_{Ao} \times \vec{R}$$

7-11 أوجد إحداثيات مركز ثقل الجسم المتجانس الممثل على الشكل (7-32) علماً أن أبعاده مبينة على الشكل ومقدرة بالسـم .



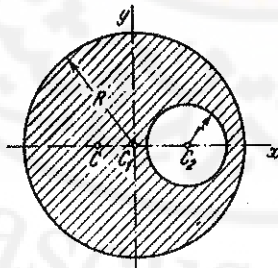
الشكل (7-32)

7-12 عين إحداثيات مركز ثقل الصفيحة المتجانسة المبينة في الشكل (7-33)، مع العلم بأن أبعادها مبينة على الشكل ومقدرة بالسـم .



الشكل (7-33)

7-13 عين مركز ثقل صفيحة متجانسة دائرية نصف قطرها R ، ومقطوع منها جزء دائري نصف قطره r الشكل (7-34) علماً بأن المسافة $c_1 c_2 = a$.



الشكل (7-34)

7-14 عين إحدائيات مركز ثقل جسم على شكل نصف كرة نصف قطرها R .

7-15 عين إحدائيات مركز ثقل جسم على شكل مخروط دوراني إرتفاعه h ومساحة قاعدته S .





الفصل الثامن الموائع

FLUIDS

1-8 تمهيد

درسنا في الفصول السابقة أن الأجسام الصلبة تحافظ على شكلها، وحتى من أجل التشوهات القليلة وكنا في بعض الأحيان نتعامل مع الأجسام على أنها نقاط مادية، والآن سنركز إهتمامنا على الأجسام التي تقبل التشوه، و يمكننا أن نتدفق مثل الموائع، بما فيها السوائل والغازات، وسندرس الموائع في كلا الحالتين الساكنة والمتحركة.

2-8 أطوار المادة

يوجد ثلاثة أطوار معروفة للمادة، هي الصلبة والسائلة والغازية، ونستطيع أن نميز هذه الأطوار، فالحالة الصلبة تحافظ على شكلها وحجمها على الرغم من تأثير القوى الكبير، بينما السائل لا يحافظ على شكله ويأخذ شكل الوعاء، ولكنه كالحالة الصلبة لا يقبل الإنضغاط، وحجمه يتغير تحت تأثير القوى الكبيرة فحسب، أما الحالة الغازية فلا تملك شكلاً أوحجماً ثابتاً، والغاز يتمدد ليملأ الوعاء الذي يحويه، والهواء يملأ كامل إطار عجلة السيارة، ولا يتركز في أسفله مثل السائل، في حين يتميز الغاز والسائل بأن كلاهما قابل للتدفق.

إن تقسيم المادة إلى ثلاث أطوار ليس دائماً بالأمر البسيط إذ يوجد طور آخر رابع هو البلازما، الذي يحدث عند درجات حرارة عالية جداً، ويتألف من ذرات مؤينة، بعض العلماء يعتقد أن الكولويدات (معلقات من جسيمات صغيرة في السائل) ينبغي أن تكون طوراً منفصلاً، هناك أيضاً البلورات السائلة التي تستخدم في شاشات التلفزيون والكمبيوتر يمكن أن تعد طوراً يتوسط السائل والصلب، ولكننا في هذا الفصل سنركز إهتمامنا على الأطوار الثلاثة العادية.

3-8 الضغط في الموائع

الضغط والقوة يرتبطان ببعضهما البعض، ولكنهما مفهومان مختلفان، الضغط يعرف على أنه القوة المؤثرة في وحدة المساحة، و القوة F ، تفهم على أنها قيمة القوة المؤثرة العمودية في المساحة A .

$$P = \frac{F}{A} \quad (8-1) \quad \text{الضغط}$$

الضغط هو كمية سلمية وواحدته في الجملة SI ، هي N/m^2 ، وتدعى الباسكال ويرمز لها Pa ، وفي الجملة $dyne/cm^2$.cgs

(مثال 8-1):

إذا كانت قدما شخص كتلته $60kg$ ، تغطي مساحة $500cm^2$ ، إحسب الضغط:

1. المطبق بوساطة القدمين على الأرض

2. إذا وقف الشخص على قدم واحدة

الحل:

1. نفرض أن الشخص ساكن، وهو يؤثر في الأرض بوساطة قدميه بقوة تساوي وزنه mg

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{60 \times 9.80}{500 \times 10^{-4}} = 12 \times 10^3 N/m^2$$

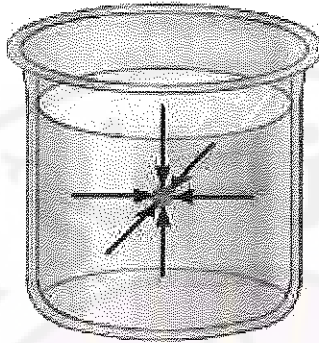
2. الشخص يقف على قدم واحدة القوة المؤثرة تبقى على حالها ولكن الضغط ينخفض إلى

النصف

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{60 \times 9.80}{0.5 \times 500 \times 10^{-4}} = 24 \times 10^3 N/m^2$$

الضغط أكبر عندما يقف على قدم واحدة.

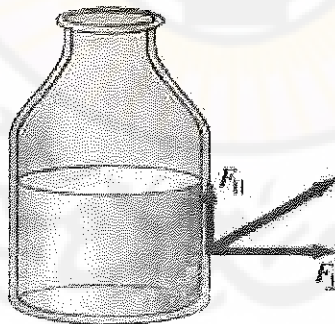
لقد وجد تجريبياً أن المائع يمارس ضغطاً في كل الإتجاهات، وهذا معروف بالنسبة إلى السباحين والغطاسين الذين يشعرون بضغط الماء على كل أجزاء جسمهم، ومن أجل عمق معين للمائع يكون الضغط واحداً في كل الإتجاهات، دعنا نرى لماذا.



الشكل (8 - 1)

الضغط نفسه في كافة الإتجاهات في المائع اللامتحرك على إرتفاع معين والا لكان المائع متحرك.

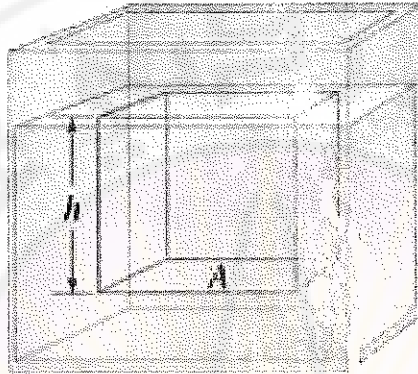
لنأخذ مكعباً صغيراً من مائع ساكن، الشكل (8 - 1) نعهه نقطة مادية مع إهمال قوة الجاذبية الأرضية عليه، الضغط على أحد جوانبه يجب أن يساوي الضغط على الجانب المقابل، وإذا كان ذلك ليس صحيحاً، فإنه يجب أن تكون هناك محصلة قوى على المكعب، الذي ينبغي عليه، أن يبدأ بالحركة، ولكن المائع غير متدفق مما يعني أن الضغوط متساوية.



الشكل (8 - 2)

لو كانت مركبة القوة الموازية للمسطح الصلب للوعاء موجودة، لتحرك السائل استجابة لتلك المركبة.

القوة الناجمة عن المائع الساكن تكون دائماً عمودية على أي سطح صلب تلامسه، الشكل (8 - 2)، إذا كان هناك مركبة لقوة موازية للسطح الصلب، طبقاً لقانون نيوتن الثالث فإن السطح الصلب يؤثر في المائع أيضاً بقوة تنتج ضغطاً يؤدي إلى تدفقه، وهذا يعاكس الفرض بأن المائع ساكن. وبالتالي القوة الناجمة عن الضغط التي يؤثر بها المائع الساكن في السطح الصلب هي قوة عمودية فحسب.



الشكل (8 - 3)

حساب كمية الضغط في سائل كثافته متجانسة، لנأخذ نقطة على عمق h ، تحت سطح السائل. لنرى كيف يتغير الضغط في سائل كثافته متجانسة مع العمق، لنفرض نقطة من السائل تقع على عمق h ، تحت سطح السائل الشكل (8 - 3)، أي أن السطح على إرتفاع h ، فوق تلك النقطة. الضغط الناجم عن السائل عند عمق h ، ناجم عن عمود السائل فوقه، وهو قوة تقل السائل المطبقة على المساحة A .

$$F = mg = (\rho V)g = \rho(Ah)g \quad (8 - 2)$$

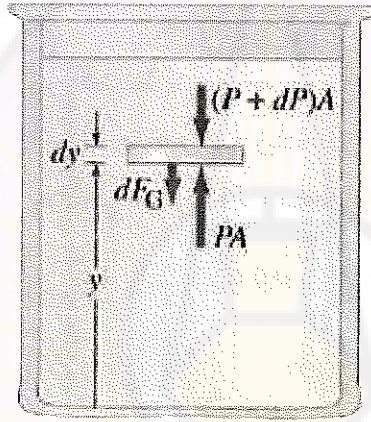
حيث (Ah) ، هو حجم عمود من السائل، و ρ ، هي كثافة السائل نفرض أنها ثابتة. الضغط الناتج عن وزن السائل.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho Ahg}{A}$$

$$P = \rho gh \quad (8 - 3)$$

نلاحظ أن المساحة A ، لا تؤثر على الضغط عند عمق معين.

إن ضغط المائع يتناسب طردياً مع كثافة السائل، ومع العمق ضمن السائل، وبشكل عام نقول إن الضغط على عمق واحد وضمن سائل متجانس يكون نفسه. المعادلة (3 - 8) نقول لنا ما الضغط على عمق h ، الناتج عن السائل نفسه، ولكن كيف إذا طبقنا ضغطاً إضافياً على سطح السائل، مثل الضغط الجوي أو ضغط المكبس، وماذا أيضاً إذا كانت كثافة المائع غير ثابتة. الغازات عادة قابلة للانضغاط قليلاً، وكثافتها يمكن أن تتغير بشكل واضح مع العمق، السوائل يمكن أن تتضغط ولكن نهمل تغيرات الكثافة، ماعدا في حال أعماق المحيطات، حيث أن هناك كتلة هائلة من الماء، مما يؤدي إلى زيادة الكثافة، سنعالج الحالة العامة، كيف يتغير ضغط المائع مع العمق.



الشكل (8 - 4)

القوى المؤثرة في شريحة من السائل لتحديد الضغط على ارتفاع y .

دعنا نحدد الضغط عند ارتفاع y ، فوق نقطة مرجعية، نتصور شريحة رقيقة مستوية مساحتها A ، سماكتها dy ، كما مبين على الشكل (8 - 4)، لنفرض أن الضغط المؤثر في السطح العلوي للشريحة على ارتفاع $y + dy$ ، و الضغط هو $P + dP$ ، والضغط المؤثر في السطح السفلي للشريحة عند الإرتفاع y ، هو P . ضغط المائع المؤثر في السطح العلوي يؤثر بقوة قدرها $(P + dP)A$ ، أما ضغط المائع في السطح السفلي للشريحة يؤثر بقوة PA ، جهتها إلى الأعلى، تؤثر في الشريحة بقوة.

$$dF_G = (dm)g = \rho g dV = \rho g A dy \quad (8-4)$$

ρ : كثافة المائع عند إرتفاع y

dm : كتلة الشريحة

وبفرض أن المائع ساكن، الشريحة في حالة توازن، ومحصلة القوى المؤثرة في الشريحة تساوي الصفر.

$$PA - \rho g A dy - (P + dP)A = 0 \quad (8-5)$$

وبتبسيط هذه العلاقة نحصل على

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad (8-6)$$

هذه العلاقة تقول لنا كيف يتغير الضغط ضمن المائع، مع الإرتفاع فوق النقطة المرجعية، وإشارة السالب تشير إلى أن الضغط يتناقص مع زيادة الإرتفاع، و يزداد مع زيادة العمق. إذا كان الضغط عند إرتفاع y_1 ، في المائع P_1 ، وعند إرتفاع y_2 ، هو P_2 ، بالتكامل

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy \quad (8-7)$$

$$P_2 - P_1 = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy \quad (8-8)$$

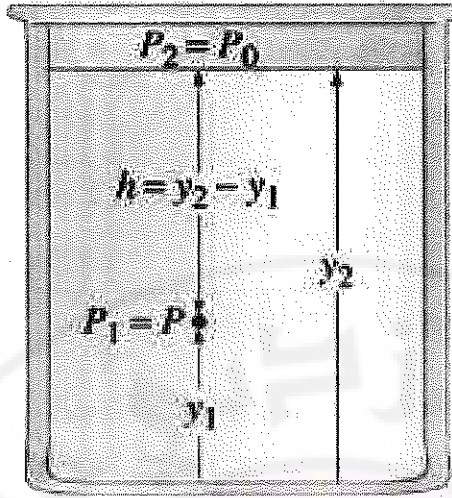
إذ نفرض أن الكثافة تابعة للإرتفاع $\rho(y)$ ، و يمكننا أن نميز حالتين خاصيتين لها.

1. الضغط في السوائل التي كثافتها متجانسة.

2. تغيرات ضغط الغلاف الجوي الأرضي.

من أجل السوائل التي تهمل فيها تغيرات الكثافة $\rho = const$ ، المعادلة (8-8) ، تأخذ الشكل التالي:

$$P_2 - P_1 = -\rho g \cdot (y_2 - y_1) \quad (8-9)$$



الشكل (8 - 5)

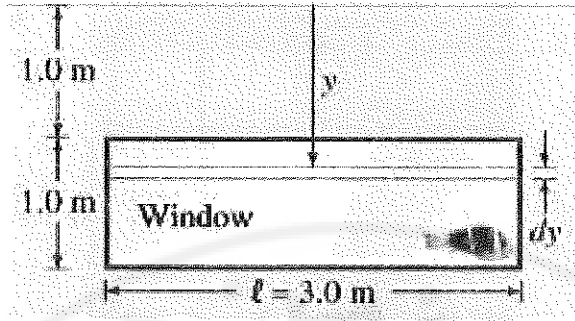
الضغط عند عمق h ، في سائل كثافته ρ ، هو $P = P_0 + \rho gh$

سطح السائل يكون عادة معرضاً للضغط الجوي P_0 ، ولنفرض أن العمق $h = y_2 - y_1$ ، كما مبين على الشكل (8 - 5)، إذا كانت y_2 عند السطح العلوي للماء فإن P_2 ، تعبر عن الضغط الجوي P_0 ، وإذا فرضنا الضغط $P = P_1$ ، عند العمق h ، في داخل المائع يكون لدينا.

$$P = P_0 + \rho gh \quad (8 - 10)$$

(مثال 2-8):

احسب القوة الناجمة عن ضغط الماء المطبق على نافذة السمك $1.0m \times 3.0m$ ، التي حافتها العليا تقع $1.0m$ ، تحت سطح الماء، الشكل (8 - 6).



الشكل (8 - 6)

الحل:

نجزئ النافذة إلى أشرطة أفقية رقيقة طولها $\ell = 3.0\text{ m}$ ، وعرضها dy ، سنختار جملة الإحداثيات عند $y = 0$ ، على سطح الماء، وتكون y الموجبة إلى الأسفل، القوة الناجمة عن ضغط الماء على الشريط.

$$dF = PdA = \rho gy(\ell dy)$$

بالتكامل.

$$F = \int_{y_1=1,0}^{y_2=2,0} \rho gy(\ell dy) = \frac{1}{2} \rho g \ell (y_2^2 - y_1^2)$$

$$F = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.8 \times 3.0 \times [(2.0)^2 - (1.0)^2] = 44000\text{ N}$$

وللتأكد من صحة الجواب وذلك بضرب مساحة النافذة بوسطي عمق النافذة $h = 1.5\text{ m}$

$$F = PA = \rho ghA \approx 1000 \times 9.8 \times 1.5 \times 3.0 \approx 45000\text{ N}$$

دعنا الآن نطبق المعادلة (8 - 2) أو (8 - 3)، على الغازات، إن كثافة الغازات تكون عادة قليلة نوعاً ما، وبالتالي الاختلاف في الضغط عند ارتفاعات مختلفة يمكن إهمال، إذا كانت $(y_2 - y_1)$ ، ليست كبيرة، وبالفعل ومن أجل كل أوعية الغاز نفرض بأن الضغط نفسه في كافة الأنحاء، في حين إذا كان $(y_2 - y_1)$ ، كبيراً جداً لا نستطيع أن

نفرض ذلك، مثال على ذلك هواء الغلاف الجوي الذي ضغطه عند سطح البحر $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ، الذي يتناقص ببطء مع زيادة الارتفاع.

(مثال 3-8):

1. أوجد تغير الضغط في الغلاف الجوي كتابع للارتفاع y ، فوق سطح البحر، بفرض أن g ، ثابت. وأن كثافة الهواء تتناسب مع الضغط بفعل الحرارة.
2. عند أي سوية الضغط يساوي نصف الضغط عند سطح البحر.

الحل:

نبدأ من المعادلة (3 - 8)، ونكاملها من سطح الأرض ($y = 0, P = P_0$)، إلى ارتفاع (y, P)

1. نفرض أن ρ ، تتناسب مع الضغط P .

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0}$$

حيث: $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ، الضغط الجوي عند سطح البحر

$\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ، كثافة الهواء كذلك عند سطح البحر عند الدرجة 0°C .

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g = -P \left(\frac{\rho_0}{P_0} \right) g$$

$$\frac{dP}{P} = - \left(\frac{\rho_0}{P_0} \right) g dy$$

نكامل طرفي المعادلة.

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_0^y dy$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = - \left(\frac{\rho_0}{P_0} \right) gy$$

$$P = P_0 e^{-\left(\frac{\rho_0}{P_0} g\right)y}$$

نلاحظ أن ضغط الهواء في الغلاف الجوي يتناقص أسياً تقريباً مع الارتفاع .

2. المقدار الثابت في العلاقة الأسية.

$$\frac{\rho_0}{P_0} g = \frac{1.29 \times 9.80}{1.013 \times 10^5} = 1.25 \times 10^{-4} m^{-1}$$

$$P = \frac{P_0}{2} \quad \text{نضع :}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-(1.25 \times 10^{-4})y}, \quad y = 5550m$$

4-8 الضغط الجوي ووحدات الضغط

إن ضغط الهواء عند مكان معين على سطح الأرض يتغير ببطء، ويتبع حالة الطقس، فمثلاً عند سطح البحر يعادل وسطياً $1.013 \times 10^5 N/m^2$ ، وهذه القيمة تسمح لنا أن نعرف

واحدة للضغط شائعة ألا وهي الضغط الجوي. *atmosphere*

$$1atm = 1.013 \times 10^5 N/m^2 = 101.3Pa$$

وهناك واحدة أخرى شائعة وهي البار *bar*

$$1bar = 1.000 \times 10^5 N/m^2$$

الضغط الناجم عن ثقل الغلاف الجوي يؤثر في كل الأجسام المغمورة في هذا البحر العظيم من الهواء، بما فيها أجسامنا، والسؤال هو كيف تتحمل أجسامنا هذا الضغط ؟ والجواب على ذلك انه يبقى في داخل الخلية ضغط يكافئ تقريباً الضغط الخارجي، تماماً كما في حال البالون او اطار العجلة المنفوخ.

(مثال نموذجي 1-8)

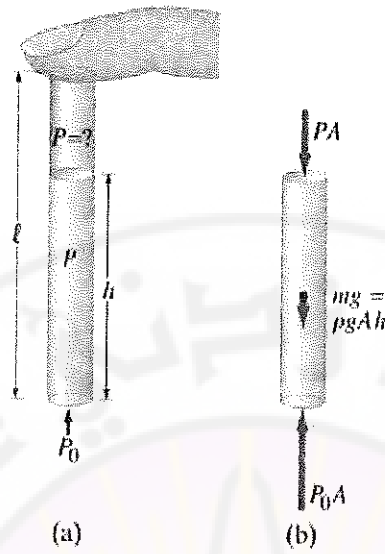
ادخل قصبية طولها l ، في انبوب زجاجي فيه ماء، ضع إصبعك على قمة القصبية حاجزاً بعض الهواء فوق سطح الماء، ولا تسمح له بالتسرب، ثم إسحب القصبية من الماء ستجد أن القصبية ستحتفظ بمعظم كمية الماء فيها، الشكل (8 - 7 - a)، هل ضغط الهواء P ، بين سوية الماء وإصبعك هو نفسه الضغط الجوي P_0 ، أم أكبر أم أصغر منه ؟

الإجابة :

لنحدد القوى المؤثرة في عمود الهواء الشكل (8 - 7 - b)، إن الضغط الجوي خارج القصبية يدفع الماء عند قاع القصبية إلى الأعلى والتقالة تشد الماء إلى الأسفل، وضغط الهواء بين الماء والإصبع يشد بقوة إلى الأسفل، وبما أن الماء في حالة توازن. إن قوة الضغط الجوي P_0 ، تدفع الماء إلى الأعلى، يجب أن توازن قوة ثقل الماء في القصبية إضافة للقوة الناجمة عن الضغط P ، ما يؤدي إلى أن الضغط داخل الهواء في القصبية أصغر من الضغط الخارجي.

$$P_0 \cdot A = P \cdot A + \Delta m \cdot g \geq \Delta m \cdot g$$

$$P_0 \geq P$$

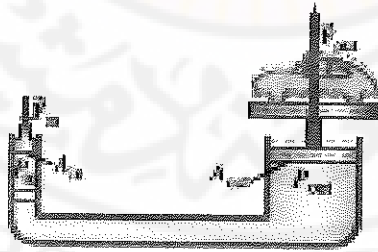


الشكل (7 - 8)

5-8 مبدأ باسكال

إن الضغط الجوي يؤثر في كل الأجسام، بما فيها تلك التي تكون في تماس مع بعضها، ونلاحظ أن الضغط الخارجي يؤثر في الموائع منتقلا من مائع إلى آخر، الضغط الناجم عن الماء على عمق $100m$ ، تحت سطح ماء بحيرة.

$$P = \rho gh = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.80 \times 100 = 9.7 \text{ atm} + 1 \text{ atm} = 10.7 \text{ atm}$$



الشكل (8 - 8)

تطبيقات مبدأ باسكال في الرفع الهيدروليكي.

هذا مبدأ عام يعزى إلى العالم الفرنسي باسكال (1662 – 1623)، وينص على أنه إذا كان الضغط الخارجي المطبق على مائع محصور فإن الضغط عند كل نقطة ضمن المائع يزداد بنفس الكمية. هناك عدد من التطبيقات العملية التي تستخدم مبدأ باسكال، أحد الأمثلة على ذلك الرافع الهيدروليكي. الشكل (8 – 8)، نطبق قوة صغيرة لنحصل على قوة كبيرة، وذلك بجعل مساحة الخروج أكبر من مساحة الدخول، لمعرفة كيف يعمل هذا الجهاز نفرض أن الدخول والخروج على السوية نفسها، لذلك قوة الدخول الخارجية F_{in} ، تزداد لأن الضغط ثابت عند السويتين.

$$P_{out} = P_{in} \quad (8 - 11)$$

أي أن.

$$\frac{F_{out}}{A_{out}} = \frac{F_{in}}{A_{in}}, \quad \frac{F_{out}}{F_{in}} = \frac{A_{out}}{A_{in}} \quad (8 - 12)$$

النسبة $\frac{F_{out}}{F_{in}}$ تدعى الريح الميكانيكي للرافعة الهيدروليكية وتساوي نسبة المساحتين.

8-6 قياس الضغط ؛ المقاييس والبارومتر

هناك أجهزة عديدة اخترعت من أجل قياس الضغط، بعضها مبين على الشكل (8 – 9)، والأبسط هو المانومتر الشكل (8 – 9 – a)، شكله حرف U، يملأ بسائل مثل الزيت أو الماء، حيث الضغط المقاس P ، يتعلق بفرق الارتفاع Δh ، بين السويتين حسب العلاقة.

$$P = P_0 + \rho g \Delta h \quad (8 - 13)$$

حيث P_0 ، الضغط الجوي المؤثر في قمة السائل من الناحية اليسرى للقضيب و ρ ، كثافة السائل، نلاحظ أن القيمة $\rho g \Delta h$ ، هي معيار الضغط. وهي القيمة التي تزيد عن الضغط الجوي P_0 ، إذا كان عمود السائل في الجهة اليسرى أخفض من عمود السائل في الجهة اليمنى فإن الضغط P ، يجب أن يكون أقل من الضغط الجوي (Δh مقدار سالب)

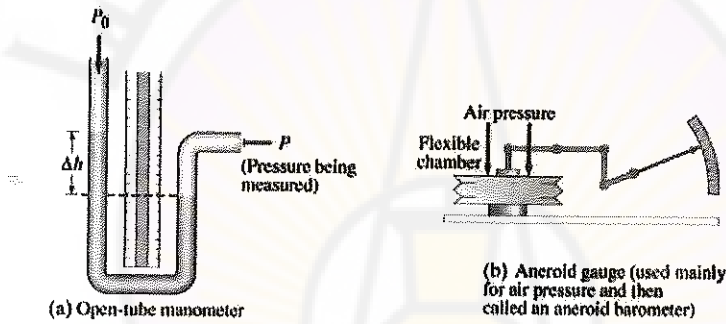
عوضاً عن حساب الجداء $\rho g \Delta h$ ، في بعض الأحيان نعد التغير في إرتفاع عمود من الزئبق مثلاً $(mm - Hg)$ ، أو عمود الماء $(mm - H_2O)$.

$$1mm - Hg = \rho g \Delta h$$

$$1mm - Hg = 13.6 \times 10^3 \times 9.80 \times 1.00 \times 10^{-3} = 1.33 \times 10^2 N/m^2$$

الواحدة $mm - Hg$ تدعى التور $Torr$

$$1Torr = 1.33 \times 10^2 N/m^2$$

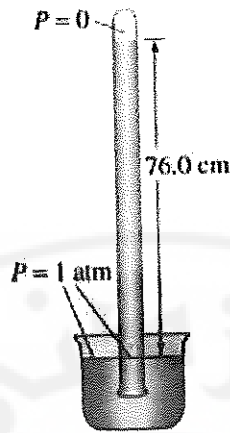


الشكل (8 - 9)

a - مقاييس الضغط ، مونومتر الانبوب المفتوح.

b - الباروميتر الجاف.

وهناك أنواع أخرى لمقاييس الضغط، وهي مقياس انيروئيد، الشكل (8 - 9 - *b*)، الذي فيه المؤشر متصل بنهاية حجرة معدنية رقيقة مخلاة، أما في المقاييس الإلكترونية، حيث يحول الضغط المطبق على الحجرة المعدنية إلى إشارة كهربائية.



الشكل (8 - 10)

البارومتر الزئبقي الذي اخترعه تورشلي عند الضغط الجوي النظامي 76.0 cm - Hg

يمكن قياس الضغط الجوي بوساطة نوع معدل من المانومتر ذي النهاية الواحدة والمغلقة، ويدعى بالبارومتر الزئبقي الشكل (8 - 10)، عند قلب انبوب زجاجي مملوء بشكل كامل بالزئبق في وعاء فيه زئبق، إذا كان الانبوب الزجاجي طويلاً بشكل كاف فإننا نلاحظ أن مستوى الزئبق فيه ينخفض إلى الأسفل، ويستقر عمود الزئبق في الانبوب عندما يتعادل الضغط الجوي مع ضغط عمود الزئبق في الانبوب وقد وجد على أن إرتفاعه يبلغ 76.0 cm

$$P = \rho g \Delta h$$

$$= 13.6 \times 10^3 \times 9.80 \times 0.760$$

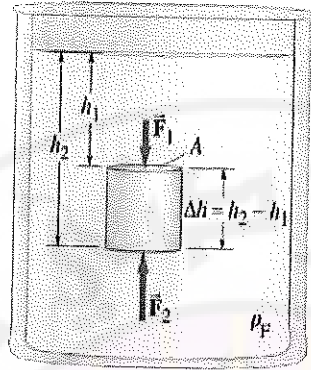
$$P = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.00 \text{ atm}$$

$$P = P_0$$

7-8 الطفو ومبدأ ارخميدس

الأجسام المغمورة في مائع تبدي وزناً أقل من وزنها الحقيقي عندما تكون خارجه، مثلاً الحجر التي لا تستطيع أن تحملها يمكن بسهولة أن ترفعها من قاع المائع، العديد من المواد تطفو فوق سطح الماء (الخشب)، هذان مثالان عن حالة الطفو، نلاحظ أن قوة الثقل وقوة

الطفو إلى الأعلى بواسطة السائل تؤثران في الجسم وهما اللتان تجعلان الغطاس أو السمك داخل السائل في حالة توازن.



الشكل (8 - 11)

تحديد قوة الطفو

إن سبب قوة الطفو هو أن الضغط يزداد مع زيادة العمق، الضغط إلى الأعلى على السطح السفلي أكبر من الضغط إلى الأسفل على السطح العلوي للجسم المغمور، ولدراسة هذا المفعول نأخذ جسماً اسطوانياً إرتفاعه Δh ، مساحة السطح العلوي والسفلي A ، و مغمور بشكل كامل في مائع كثافته ρ_F ، كما في الشكل (8 - 11)، المائع يؤثر بضغط في السطح العلوي $P_1 = \rho_F g h_1$ ، وتقابله قوة على السطح العلوي.

$$F_1 = P_1 A = \rho_F g h_1 A$$

جهتها إلى الأسفل، وبالمثل المائع يؤثر في السطح السفلي بقوة إلى الأعلى على قاع الاسطوانة.

$$F_2 = P_2 A = \rho_F g h_2 A$$

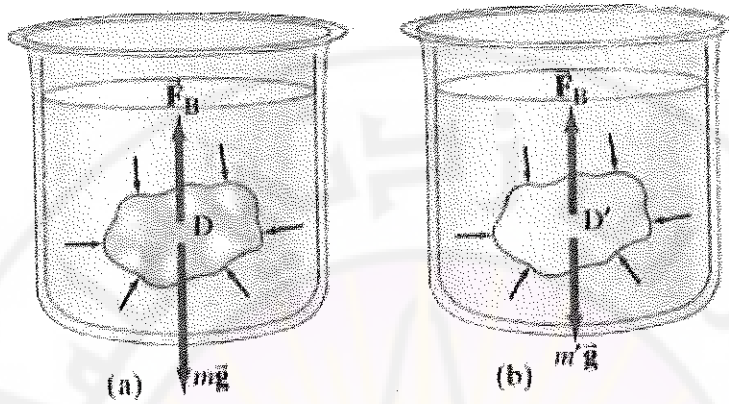
محصلة القوى المؤثرة في الجسم بواسطة ضغط السائل هي قوة الطفو جهتها إلى الأعلى $\vec{F}_B$.

$$F_B = F_2 - F_1 = \rho_F g A \cdot (h_2 - h_1)$$

$$F_B = \rho_F g A (\Delta h) = \rho_F g V = m_F g \quad (8 - 14)$$

$m_F g$: وزن المائع الذي حجمه يساوي حجم الاسطوانة، أي أن قوة الطفو على الاسطوانة تساوي وزن المائع المزاح، وهذه النتيجة صحيحة، ولا تتعلق بشكل الجسم، وقد تم إكتشافها

بوساطة أرخميدس (212 – 278) وتنص: قوة الطفو على جسم مغمور بالمائع تساوي وزن المائع المزاح بوساطة هذا الجسم.



الشكل (8 - 12)

مبدأ أرخميدس

نفرض أن جسماً D ، شكله غير منتظم كما مبين على الشكل (8 - 12 - a)، تؤثر فيه قوة ثقله $\vec{W}$ ، وقوة الطفو $\vec{F}_B$ ، إلى الأعلى، ونرغب بتحديد F_B ، ومن أجل هذا نتخيل جسماً D' ، الشكل (8 - 12 - b)، من الماء له نفس حجم الجسم الأصلي D ، وشكله، وموضوع على نفس العمق، يمكننا أن نتخيل أن هذا الجسم معزول عن بقية المائع بوساطة غشاء مطاطي، قوة الرفع على هذا الجسم هي نفسها، كما لو أن الجسم الأصلي D ، لأن إحاطة بقية المائع التي تؤثر بقوة F_B ، لها الشكل نفسه تماماً، الجسم المائع D' ، هو في حالة توازن (المائع كله في حالة سكون).

$$F_B = m'g \quad (8 - 15)$$

$m'g$: وزن المائع الذي حجمه يساوي حجم الجسم المغمور الأصلي.

(مثال نموذجي 2-8)

لنفرض أن دلوين متماثلين تماماً مملوئين بالماء حتى الحافة، أحدهما يحوي ماء فحسب، والآخر يحوي قطعة طافية من الخشب، أي من الدلوين أثقل ؟

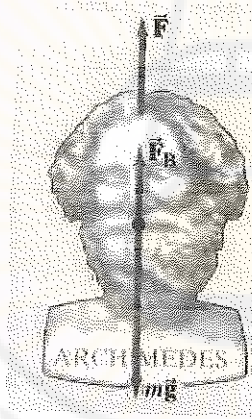
الإجابة :

حسب مبدأ أرخميدس، الخشب يزيح حجماً من الماء وزنه يساوي وزن الخشب، لذلك يكون لكلا الدلوين نفس الوزن.

(مثال 4-8) :

جسم كتلته 70kg ، يقع في قاع البحر، حجمه $3.0 \times 10^4 \text{cm}^3$ الشكل (8 - 13)، ما القوة اللازمة لرفعه.

الحل:



الشكل (8 - 13)

القوة المطلوبة لرفع التمثال $\vec{F}$

القوة اللازمة لرفع الجسم = وزن الجسم (mg) - قوة الطفو (F_B)

$$F_B = m_{H_2O}g = \rho_{H_2O}Vg = 1.025 \times 10^3 \times 3.0 \times 10^{-2} \times 9.8$$

$$F_B = 3.0 \times 10^2 \text{N}$$

وزن الجسم.

$$mg = 70 \times 9.80 = 6.9 \times 10^2 N$$

$$6.9 \times 10^2 - 3.0 \times 10^2 = 390 N \quad \text{القوة اللازمة لرفع الجسم.}$$

$$\text{والكتلة المكافئة } \frac{390}{9.80} = 39.8 kg \text{ ، بينما كتلة الجسم } 70 kg \text{ ، على الأرض.}$$

(مثال 5-8):

ما حجم الهيليوم المطلوب لرفع بالون حمولته $180 kg$ ، بما فيه وزن البالون فارغاً، كثافة الهيليوم $0.179 kg/m^3$



الشكل (8 - 14)

الحل:

إن قوة رفع البالون إلى الأعلى F_B ، التي تعادل وزن الهواء المزاح الذي على الأقل يعادل وزن الهيليوم والبالون والحمولة الشكل (8 - 14)، القيمة الصغرى لقوة الرفع.

$$F_B = (m_{He} + 180)g$$

هذه القوة يمكن أن نكتبها بدلالة الكثافة باستخدام مبدأ أرخميدس.

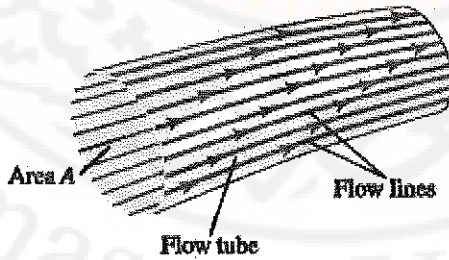
$$\rho_{air}Vg = (\rho_{He}V + 180)g$$

$$V = \frac{180}{\rho_{air} - \rho_{He}} = \frac{180}{1.29 - 0.179} = 160m^3$$

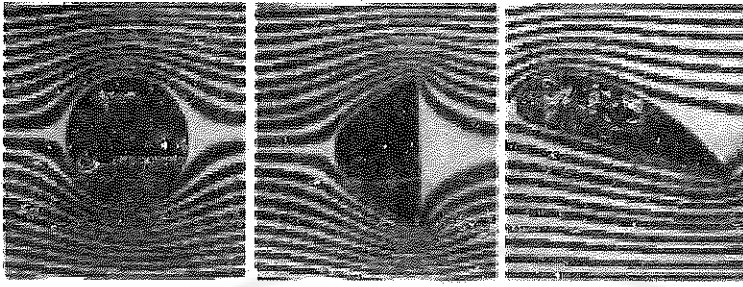
8-8 حركة الموائع

سندرس الآن حركة الموائع، أو ما يسمى ديناميك الموائع، أو الهيدروديناميك، ونميز نوعين من تدفق المائع، التدفق الإنسيابي (الأملس)، و التدفق المضطرب، إذا كان نمط التدفق الكلي لا يتغير مع الزمن فإن مسار الجسيم يدعى بخطوط التدفق الشكل (8 - 15)، نقول عن التدفق أنه إنسيابي إذا كان كل جسيم يمر من نقطة معينة، ويتحرك على المسار نفسه للجسيمات السابقة المارة من النقطة نفسها الشكل (8 - 16)، وفي حالة التدفق الأملس تنزلق الطبقات المجاورة بعضها على البعض بنعومة، المائع المثالي هو الذي يحقق الشروط التالية:

- 1- عديم اللزوجة لا يوجد إحتكاك داخلي بين الطبقات.
- 2- غير قابل للانضغاط، أي أن كثافته ثابتة.
- 3- حركته مستقرة، أي أن السرعة والكثافة والضغط لا تتغير عند كل نقطة مع الزمن.
- 4- عدم وجود تيارات دوامة، يتحرك المائع بدون إضطراب وهذا يعني أن كل عنصر من المائع له سرعة زاوية معدومة حول مركزه.



الشكل (8 - 15)



الشكل (8 - 16)

التدفق الإنسيابي

9-8 الإضطراب

نقول عن التدفق بأنه مضطرب عندما تكون السرعة أعلى من حد معين، أو عند أي ظرف يمكن أن يسبب تغيرات مفاجئة في السرعة، ويتميز التدفق المضطرب بتشكيل تيارات دوارة، عندما تزيد سرعة التدفق عن حد معين فإن التدفق لا يعدو رقائقي الشكل (8 - 17)، يبين التباين بين التدفق الرقائقي وتدفق الإضطراب لدخان السيارة في الهواء و معادلة برنولي لا تطبق على المنطقة التي يوجد فيها إضطراب لأن التدفق غير مستقر.



الشكل (8 - 17)

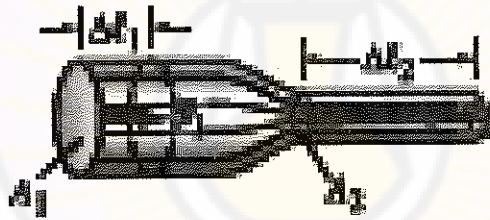
التدفق اللاإنسيابي (المضطرب)

إن نمط التدفق يكون مستقراً عند السرعات البطيئة، وفجأة يصبح غير مستقر عندما يبلغ سرعة الحدية، عدم الاستقرار هذا يمكن أن يكون سببه جدران الانبوب، أو تغيرات في كثافة المائع عند سرعة تدفق منخفضة، هذه الاضطرابات تتخامد، ونمط التدفق يعود إلى طبيعته الرقائعية، ولكن عند بلوغ السرعة الحدية فإن نمط التدفق يصبح غير مستقر، والاضطرابات لا تتخامد، وتزداد حتى تخرب كل الرقائق. التدفق الطبيعي للدم في شرايين الإنسان رقائعي، لكن اضطراباً صغيراً مثل (مرض قلبي) يسبب تدفقاً مضطرباً يشكل ضجيجاً يمكن سماعه بوساطة السماعة.

10-8 معادلة الإستمرارية

نفرض أن مائعاً يتدفق بشكل إنسيابي ومستقر من خلال انبوب مفتوح الشكل (8-18)، سنحدد كيف تتغير سرعة المائع عندما يتغير حجم المائع، سوف نعرف معدل تدفق كتلة المائع Δm ، بأنها الكتلة المارة من خلال نقطة في واحدة الزمن Δt .

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{معدل تدفق كتلة}$$



الشكل (8 - 18)

تدفق المائع خلال انبوب قطره متغير.

حجم المائع المار خلال النقطة 1، (خلال المقطع A_1)، خلال الزمن Δt ، هو $A_1 \Delta \ell_1$ ، حيث $\Delta \ell_1$ ، المسافة التي يقطعها المائع خلال الزمن Δt ، في حين السرعة المائع خلال النقطة.

$$v_1 = \Delta \ell_1 / \Delta t$$

ومعدل تدفق الكتلة خلال A_1 .

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \Delta V_1}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 \Delta \ell_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 \quad (8 - 16)$$

حيث : $\Delta V_1 = A_1 \Delta \ell_1$ ، حجم الكتلة Δm_1 و ρ_1 ، هي كثافة المائع وبالمثل النقطة 2، (خلال المقطع A_2) ، معدل التدفق $\rho_1 A_1 v_1$ ، في حين لا يوجد تدفق داخل إلى أو خارج من جهتي الانبوب، معدل تدفق خلال A_1 و A_2 ، يجب أن يكون متساوياً.

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \quad (8 - 17)$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (8 - 18)$$

وتدعى معادلة الإستمرارية.

إذا كان المائع غير قابل للانضغاط ρ ، ثابت، و تكون في بعض الأحيان صحيحة من أجل الغازات أيضاً فإن معادلة الإستمرارية.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (8 - 19)$$

$$\Delta V / \Delta t = A \Delta \ell / \Delta t = A v \quad (8 - 20)$$

إن الكمية Av ، تعبر عن معدل التدفق الحجمي (حجم المائع المار في نقطة معطاة في واحدة الزمن) هذه المعادلة تقول لنا إذا كانت مساحة المقطع كبيرة فإن السرعة صغيرة، والعكس بالعكس، لذلك نشاهد النهر يكون غزيراً في الممر الضيق.

(مثال 6-8):

يتدفق الدم في جسم الإنسان من القلب إلى الشريان الأبهر، ومنه إلى الشرايين الرئيسية، ثم إلى الأوعية الشعرية، ثم يعود إلى القلب، عن طريق الوريد إذا كان نصف قطر الشريان 1.2 cm ، والدم يمر من خلاله بسرعة 40 cm/s ، نصف قطر الوعاء الشعري $4 \times 10^{-4}\text{ cm}$ ، والدم يجري فيه بسرعة $5 \times 10^{-4}\text{ cm/s}$ ، إحصب عدد الشعيرات الدموية في جسم الإنسان.

الحل:

نفرض أن كثافة الدم لا تتغير عند الانتقال من الشريان إلى الشعيرات الدموية، حسب معادلة الإستمرارية معدل التدفق الحجمي للشريان يساوي معدل التدفق الحجمي خلال كل الشعيرات الدموية. لنفرض أن A_1 ، مساحة الشريان و A_2 ، مساحة كل الشعيرات الدموية التي يتدفق منها الدم.

$$A_2 = N\pi r_{cap}^2$$

$$v_2 N\pi r_{cap}^2 = v_1 \pi r_{aorta}^2$$

$$N = \frac{v_1 r_{aorta}^2}{v_2 r_{cap}^2} = \frac{0.40}{5 \cdot 10^{-4}} \left(\frac{1.2 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 7 \times 10^9$$

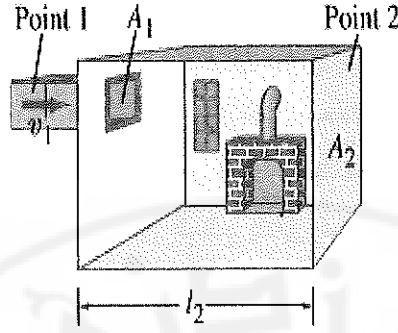
(مثال 7-8):

ما المساحة المطلوبة لانبوب التسخين يتدفق منه الهواء بسرعة 3 m/s ، ليملأ غرفة حجمها 300 m^3 كل 15 دقيقة، بفرض أن كثافة الهواء ثابتة.

الحل:

نطبق معادلة الإستمرارية على الهواء المتدفق خلال الانبوب الشكل (8 - 19)، النقطة (1) وعلى الغرفة النقطة (2)

$$v_2 = \ell_2 / t \text{ و } A_2 v_2 = A_1 \ell_1 / t = V_1 / t$$



الشكل (8 - 19)

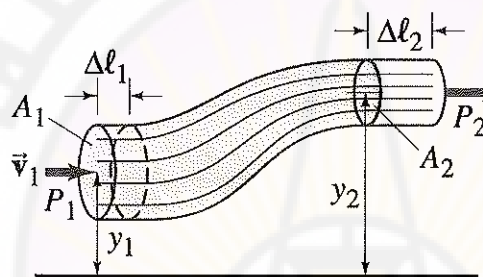
V_2 : حجم الغرفة، وبالتالي معادلة الإستمرارية تأخذ الشكل.

$$A_1 = V_2 / v_1 t = \frac{300}{3.0 \times 900} = 0.11 m^2$$

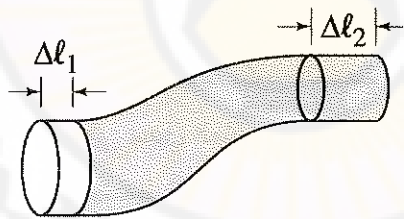
11-8 معادلة برنولي

هل تساءلت في يوم ما لماذا تطير الطائرة، أو لماذا يتحرك الشراع ضد الريح، هذه الظواهر يجيب عليها مبدأ قام بانجازه دانييل برنولي (1700 - 1782)، إن مبدأ برنولي في الحقيقة ينص بأن سرعة المائع تكون كبيرة عندما يكون الضغط قليلاً و أيضاً حيث السرعة صغيرة حينما يكون الضغط عالياً، على سبيل المثال الضغط في المائع عند النقطة (1) و (2) الشكل (8 - 20)، نرى بأن الضغط أقل عند النقطة (2)، حيث تكون السرعة أعلى من السرعة في النقطة (1)، حيث السرعة أصغر، للوهلة الأولى يبدو هذا غريباً، حيث أن السرعة العالية تعني الضغط الكبير، ولكن إذا كان ضغط المائع عند النقطة (2) أعلى من الضغط عند النقطة (1) هذا الضغط الأعلى سيخفض سرعة المائع، و لكن في الحقيقة يؤدي إلى تسريع المائع من النقطة (1) إلى النقطة (2)، وكذلك الضغط عند النقطة (2)، يجب أن يكون أقل من الضغط عند النقطة (1)، لكي ينسجم، مع أن المائع يتسارع ومن أجل أي توضيح أو أي لبس في فهم أن المائع الأسرع سيؤثر بقوة أكبر في أي عقبة، في طريقه، ولكن هذا ليس بالضغط الذي نقصده في المائع و إلى جانب ذلك نحن لا ندرس

العقبة التي تعيق، التدفق ولكن نحن ندرس التدفق الإنسيابي الأملس، إن ضغط المائع المؤثر هو الضغط على جدران الانبوب، أو على سطح أي مادة للمائع الذي يجري فوقه. طور برنولي معادلة لشرح هذا المبدأ كميًا، ولإشتقاق معادلة برنولي نفرض بأن تدفق المائع مستقر، أو على شكل طبقات، والمائع غير قابل للانضغاط، واللزوجة صغيرة بشكل كاف لإهمالها، ومن أجل التعميم نفرض أن المائع يتدفق في انبوب مقطعه غير متجانس، وارتفاعه متغير فوق سوية مرجعية معينة، سنعد حجم المائع هو الجزء المبين في الشكل (8 - 20)، ونحسب العمل المنجز لتحريكه من الوضعية المبينة على الشكل (8 - 20 - a)، إلى تلك الوضعية المبينة على الشكل (8 - 20 - b).



(a)



(b)

الشكل (8 - 20)

تدفق المائع : انبوب برنولي.

في هذه العملية المائع يدخل المقطع الذي مساحته A_1 ، وينزاح مسافة $\Delta\ell_1$ ، ويندفع عند المقطع الذي مساحته A_2 ، وينزاح مسافة $\Delta\ell_2$ ، المائع يغادر المقطع A_1 ، ويؤثر بقوة ضغطها P_1 ، على هذا الجزء من المائع، وينجز مقدار من العمل قدره.

$$W_1 = F_1 \Delta\ell_1 = P_1 A_1 \Delta\ell_1 \quad (8 - 21)$$

العمل المنجز A_2 ، عند المساحة

$$W_2 = -P_2 A_2 \Delta\ell_2 \quad (8 - 22)$$

إشارة السالب لأن جهة القوة تعاكس جهة الانتقال لأن المائع ينجز عملاً على المائع إلى يمين النقطة (2)، العمل المنجز المحصل بقوة الجاذبية، للعملية. مبين على الشكل - (20) (8)، وهو يمثل إنتقال كتلة قدرها m ، حجمها

$$A_2 \Delta\ell_2 = A_1 \Delta\ell_1$$

(حيث أن المائع غير قابل للانضغاط) من النقطة (1) إلى النقطة (2) ، فإن العمل المنجز بالجاذبية.

$$W_3 = -mg(y_2 - y_1) \quad (8 - 23)$$

حيث y_2, y_1 ، هي الارتفاعات عن مركز الانبوب فوق سوية مرجعية معينة، في هذا الحد سالب لأن الحركة صاعدة ضد قوة الجاذبية، العمل المحصل المنجز على المائع.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \quad (8 - 24)$$

$$W = P_1 A_1 \Delta\ell_1 - P_2 A_2 \Delta\ell_2 - mgy_2 + mgy_1 \quad (8 - 25)$$

وحسب مبدأ العمل - طاقة فإن العمل المحصل المنجز على الجملة يساوي تغير الطاقة الحركية.

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = P_1 A_1 \Delta\ell_1 - P_2 A_2 \Delta\ell_2 - mgy_2 + mgy_1 \quad (8 - 26)$$

الكتلة m ، لها حجم $A_1\Delta\ell_1 = A_2\Delta\ell_2$ ، من أجل المائع الغير قابل للانضغاط لذلك يمكننا أن نعوض $m = \rho A_1\Delta\ell_1 = \rho A_2\Delta\ell_2$ ، ومن ثم أن نقسم على $A_1\Delta\ell_1 = A_2\Delta\ell_2$ للحصول على.

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_1 - P_2 - \rho g y_2 + \rho g y_1 \quad (8-27)$$

التي تأخذ الشكل:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (8-28)$$

وهي معادلة برنولي، حيث النقطة (1) و (2) يمكن أن تكون أي نقطتين على طول انبوب التدفق ويمكن كتابتها على الشكل:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{ثابت} \quad (8-29)$$

من أجل اية نقطة من المائع y ، هو إرتفاع مركز الانبوب فوق سوية مرجعية معينة، نلاحظ أنه إذا كان التدفق معدوماً ($v_1 = v_2 = 0$)، المعادلة (8-9) ، تختصر إلى المعادلة الهيدروستاتيكية (8-29)

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad (8-30)$$

معادلة برنولي تعبر عن قانون إنحفاظ الطاقة لاننا استقيناها من مبدأ الطاقة - عمل.

(مثال 8-8):

يضخ الماء في نظام التدفئة البيوت بسرعة 0.50 m/s ، بواسطة انبوب السرداب قطره 4.0 cm ، عند ضغط 3.0 atm ، ما سرعة التدفق والضغط في انبوب قطره 2.6 cm ، إلى طابق ثان إرتفاعه 5.0 m ، إذا علمت أن الأنابيب لا تتفرع.

الحل:

باستخدام معادلة الإستمرارية عند كثافة ثابتة، لتحديد سرعة تدفق التدفق إلى الطابق الثاني،
نستخدم معادلة برنولي لإيجاد الضغط المطلوب، نعد v_2 ، سرعة التدفق إلى الطابق الثاني
و v_1 ، سرعة التدفق في السرداب.

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{v_1 \pi r_1^2}{\pi r_2^2} = 0.50 \times \frac{(0.020)^2}{(0.013)^2} = 1.2 \text{ m/s}$$

ولإيجاد الضغط في الطابق الثاني نستخدم معادلة برنولي (29 - 8)

$$P_2 = P_1 + \rho g(y_1 - y_2) + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

$$P_2 = 3.0 \times 10^5 + 1.0 \times 10^3 \times 9.8 \times (-5.0) + \frac{1}{2} \times 1.0 \times 10^3 \times [(0.50)^2 - (1.2)^2]$$

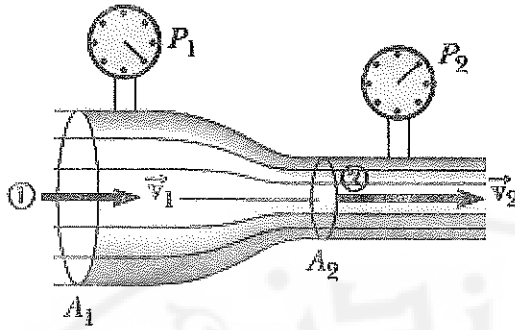
$$P_2 = 2.5 \text{ atm}$$

12-8 تطبيقات على معادلة برنولي

1-12-8 انبوب فنتوري

انبوب فنتوري هو انبوب منتظم المقطع، يتخلله إختناق في حيز صغير منه يكون أصغر من
مقطع الانبوب الأساسي، ليكن A_1 ، مساحة المقطع الأساسي للانبوب؛ و A_2 ، مساحة
الإختناق الشكل (8 - 21)، فإذا كانت v_1 ، سرعة جريان السائل في المقطع A_1 ، v_2 ،
سرعة الجريان عند الإختناق A_2 ، و بتطبيق معادلة برنولي على الانبوب في مقطعين
مختلفين، مثل A_1, A_2 ، الواقعين على الإرتفاع نفسه عن سوية محددة.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (8 - 31)$$



الشكل (8 - 21)

البوب فنطوري

وبما أن $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ، حسب معادلة الإستمرارية.

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) v_1^2 \quad (8 - 32)$$

ومنه نستطيع حساب السرعة v_1 .

$$v_1 = A_2 \sqrt{2 \times \frac{P_1 - P_2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \quad (8 - 33)$$

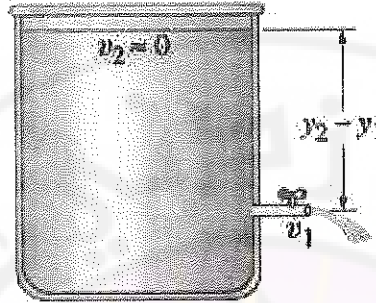
وأشهر تطبيق لهذه الحالة هو جريان الدم في الشرايين، عند تراكم الشحوم في الشرايين مما يسبب نشوء إختناقات في مناطق معينة من الشريان.

8-12-2 نظريه تورشلي

معادلة برنولي يمكن أن تطبق على العديد من الحالات، أحد الأمثلة هو حساب سرعة المائع المتدفق من الصنبور من قاع الخزان النقطة (1)، الشكل (8 - 22)، نختار النقطة (2)، عند قمة السطح. لنفرض أن قطر الخزان كبير بالمقارنة مع قطر الصنبور ($v_2 = 0$)، النقطتان (1) و (2) ، مفتوحتان على الوسط الخارجي $P_1 = P_2$ ، فإن معادلة برنولي.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2$$

$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} \quad (8 - 34)$$



الشكل (8 - 22)
نظرية تورشلي

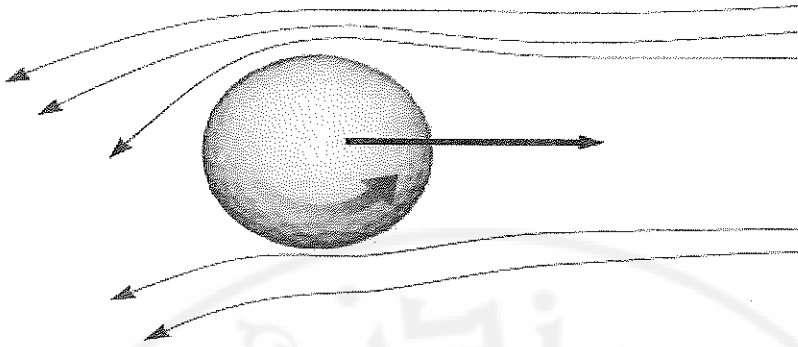
هذه النتيجة تدعى، بنظرية تورشلي، وهي حالة خاصة من معادلة برنولي. المعادلة (8 - 34)، تقول لنا إن السائل يترك الصنبور بسرعة السقوط الحر نفسه للجسم الساقط من الارتفاع نفسه، وهذا ليس غريباً طالما أن معادلة برنولي تخضع لقانون الإنحفاظ الطاقة حالة خاصة أخرى لمعادلة برنولي وهي حالة التدفق الأفقي ($y_1 = y_2$).

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (8 - 35)$$

التي تقول لنا (كمياً)، إن سرعة تدفق المائع، تكون عالية حين يكون الضغط قليلاً، والعكس بالعكس، وتشرح لنا العديد من الظواهر.

3-12-8 كرة الغولف

عند ضرب كرة الغولف بالإتجاه المعاكس لجهة جريان تيار الهواء، فإنها تدور حول نفسها، مما يؤدي إلى زيادة سرعة طبقة الهواء، بسبب النتوءات الموجودة على سطح الكرة، الشكل (8 - 23)، وهذا ما يؤدي إلى نشوء محصلة قوى تؤدي إلى إنحراف الكرة بإتجاه الأعلى.

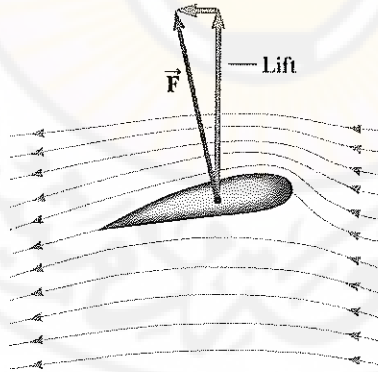


الشكل (8 - 23)

دوران كرة الغولف يؤدي إلى قوة رفع تسمح بدورها للكرة بالحركة لمسافة أبعد.

4-12-8 أجنحة الطائرة

إن أجنحة الطائرة مصممة لكي تكون سرعة تدفق المائع فوق الجناح أكبر منها تحته، وبالتالي الضغط تحت الجناح أكبر منه فوقه، مما يؤدي إلى نشوء قوة رفع، ولكن يوجد قوة ممانعة أفقية، وكذلك ميلان الجناح إلى الأعلى يؤدي إلى رفع الجناح، إذ تصدم جزيئات الهواء بالجناح، عندما تزداد سرعة الهواء، يصبح التدفق مضطرب (لا إنسيابي) فوق الجناح العلوي مما يؤدي إلى توقف الطائرة.

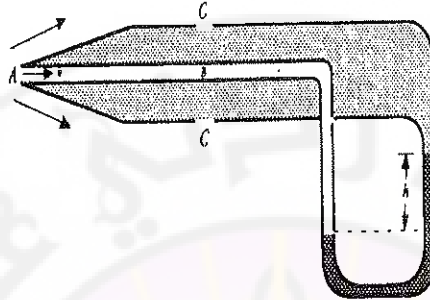


الشكل (8 - 24)

التدفق الإنسيابي حول جناح الطائرة، الضغط فوق الجناح أقل من الضغط تحته.

5-12-8 أنبوب بيتوت

يسمح هذا الجهاز بقياس سرعة الغازات أو السوائل، وهو يتألف من أنبوب واحد الشكل (8 - 25)، حيث يفترض أن الفتحة C ، موازية لإتجاه الجريان، بينما الفتحة A ، عامودية على إتجاه الجريان.



الشكل (8 - 25)

فعند مرور السائل أو الغاز في هذا الأنبوب سوف يختلف مستوي السائل في فرعي الأنبوب بالمقدار h ، بتطبيق معادلة برنولي على النقطتين B, C نحصل على.

$$P_c + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_B \quad (8 - 36)$$

حيث : $P_B > P_c$ ، كما واضح من الشكل (8 - 25)، وبما أن h ، هو فرق سويتي السائل في فرعي الأنبوب، لذلك نستطيع ان نكتب أيضاً.

$$P_B - P_c = \rho' gh \quad (8 - 37)$$

ρ : كثافة السائل في فرعي الأنبوب، من المعادلتين (8 - 13) و (8 - 14) نحصل على.

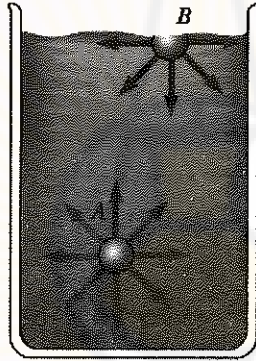
$$v = \sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho}} \quad (8 - 38)$$

هذه المعادلة تسمح بحساب سرعة الغاز أو السائل.

13-8 التوتر السطحي

إذا وضعت إبرة خياطة بعناية كبيرة على سطح كرة الماء سترى الإبرة تعوم على الرغم من أن كثافتها أكبر بثمان مرات من الماء، هذه الظاهرة يمكن تفسيرها أيضاً حسب ظاهرة التوتر السطحي، الدراسة الدقيقة للإبرة تبين أنها تعتمد على إنخفاض سطح السائل كما يبين الشكل (8 - 26)، إن سطح السائل يعمل كغشاء مرن مشدود، وزن الإبرة ينتج إنخفاضاً، في سطح السائل يزيد من مساحة سطح السائل القوى الجزيئية، تؤثر في كل النقاط على طول الإنخفاض محاولة الحفاظ على وضعية السطح الأفقية للسائل، المركبات العمودية لهذه القوى تحاول التوازن مع قوة ثقل الإبرة.

الإبرة العائمة يمكن أن تغطس بإضافة قليل من مادة المنظف إلى الماء التي تنقص من التوتر السطحي.



الشكل (8 - 26)

إن القوة المحصلة على جزيئة مثل A، يساوي الصفر لأن هذه الجزيئة تحاط بشكل كامل بالجزيئات الأخرى، والقوة المحصلة على الجزيئة السطحية B، ليست معدومة، لأنها ليست محاطة بالكامل بالجزيئات الأخرى، التوتر السطحي γ ، في طبقة رقيقة لسائل هو القوة في واحدة الطول، المؤثرة عمودياً على الطول L، من سطح السائل

$$\gamma = F/L \quad (8 - 39)$$



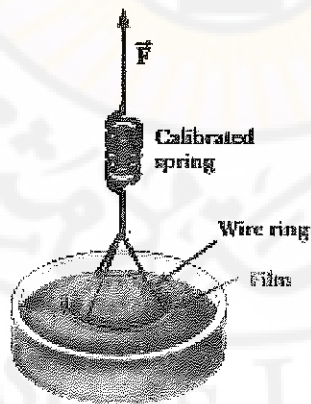
واحدة التوتر السطحي في الجملة الدولية N/m ، يمكن عد التوتر السطحي بأنه محتوى المائع من الطاقة على سطحه في واحدة المساحة.

$$N/m = N \cdot m / m^2 = J / m^2 \quad (8 - 40)$$

ولكن وبشكل عام إذا كان الجسم في أي شكل من أشكال التوازن ، تكون طاقته أصغرية، وبالتالي فالمائع يأخذ شكلاً تكون مساحة سطحه أصغر ما يمكن، من أجل حجم معين، مثال الشكل الكروي له مساحة سطح أصغرية لذلك قطرة الماء تأخذ هذا الشكل. الجهاز الذي يقيس التوتر السطحي للسائل الشكل (8 - 27)، عبارة عن سلك دائري محيطه L ، عند رفع السلك من السائل، يتشكل على سطح السلك غشاء من السائل، سطح الغشاء يلتصق بالوجهين الداخلي والخارجي للسلك محاولاً إعادة السلك إلى الأسفل، مما يؤدي إلى استطالة النابض، وبالتالي القوة اللازمة للتغلب على قوة التوتر السطحي للسائل يمكن قياسها، والتوتر السطحي يعطى بالعلاقة.

$$\gamma = F / 2L \quad (8 - 41)$$

$2L$: لأن قوة التوتر السطحي تؤثر على وجهي السلك.

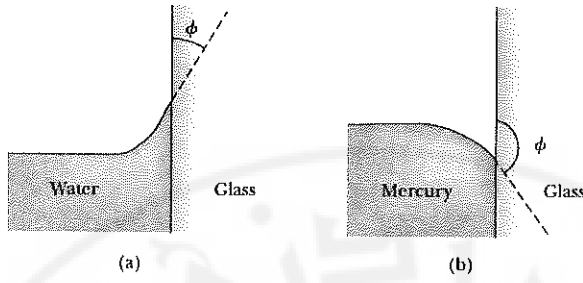


الشكل (8 - 27)

التوتر السطحي للسوائل ينقص مع زيادة درجة الحرارة لأن الجزيء المتحرك في السائل الحار لا يرتبط بشدة مع الجزيئات المحيطة به، كما هو الحال بالنسبة إلى الجزيء في السائل البارد، وكذلك إضافة بعض المواد إلى السوائل سينقص التوتر السطحي، الصابون ينقص التوتر السطحي للماء ويجعله أسهل على الماء الصابوني لإختراق والتغلغل في الملابس الملوثة أفضل من الماء العادي من أجل تنظيفها. إذا كان التوتر السطحي للمائع الموجود في الحويصلات الرئوية عالي 0.050 N/m ، مما يجعل عملية الشهيق صعبة ولكن أثناء عملية الشهيق تضاف مادة تجعل التوتر السطحي يتناقص تدريجياً إلى أقل من 0.005 N/m .

14-8 سطح السائل

إذا تفحصت سطح الماء في وعاء زجاجي فإنك تلاحظ سطح الماء القريب من جدران الوعاء ينحني نحو الأعلى، الشكل (8 - 28 - a)، في حين إذا وضعنا الزئبق بدلاً عن الماء، فإننا نلاحظ أن سطح الزئبق سوف ينحني نحو الأسفل، الشكل (8 - 28 - b)، هذا المفعول السطحي يمكن دراسته إذا أخذنا بعين الاعتبار قوى التأثير المتبادل بين الجزيئات، ولا سيما سندرس جزيئات السائل المؤثرة في الزجاج و كذلك جزيئات الزجاج المؤثرة في السائل، عند سطح التماس بينهما. وبشكل عام ندعو القوى بين جزيئات المادة نفسها كالقوى بين جزيئات الماء مثلاً بقوى التماسك، والقوى بين جزيئات المواد المختلفة كالقوى بين جزيئات الماء والزجاج بقوى التلاصق. الماء يميل إلى الإلتصاق بجدران الوعاء الزجاجي، لأن قوى التلاصق بين جزيئات السائل والزجاج أكبر من القوى بين جزيئات الماء نفسها، في الحقيقة ان جزيئات الماء تعلق بسطح الزجاج أكثر من السقوط في السائل، في هذه الحالة يقال إن السائل يببل الزجاج الشكل (8 - 29 - a) .



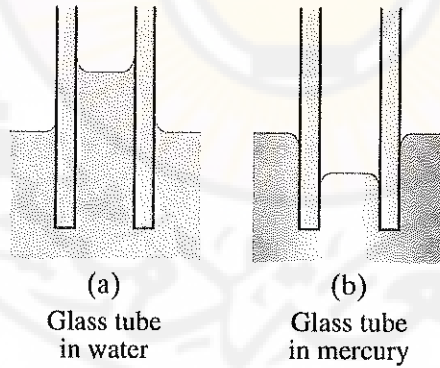
الشكل (8 - 28)

السائل على تماس مع السطح الصلب.

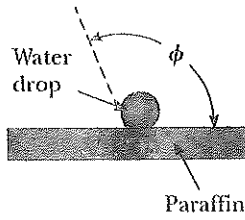
-a من أجل الماء قوى التلاصق أكبر من قوى التماسك.

-b من أجل الزئبق قوى التلاصق أصغر من قوى التماسك.

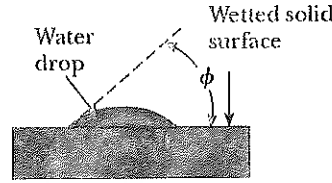
سطح الزئبق ينحني نحو الأسفل بالقرب من جدران الوعاء بسبب أن قوى التماسك بين ذرات الزئبق أكبر من قوى التلاصق بين الزئبق والزجاج، ذرة الزئبق بالقرب من السطح تكون مسحوبة بقوة أكبر باتجاه ذرات الزئبق الأخرى أكثر من قوة شد ذرات سطح الزجاج وبالتالي الزئبق لا يبيلل سطح الزجاج الشكل (8 - 29 - b) .



الشكل (8 - 29)



(a)



(b)

الشكل (30 - 8)

a- زاوية التماس بين الماء والبارافين حوالي 107° في هذه الحالة قوى التماسك أكبر من قوة التلاصق،

b- إذا أضفنا مادة مبللة إلى الماء فإنه يبلل البارافين $90^\circ < \phi$ وفي هذه الحالة قوى التلاصق أكبر من قوى التماسك.

الزاوية ϕ ، بين السطح الصلب والخط المرسوم المماس للسائل عند السطح يدعى زاوية التماس، والزاوية ϕ ، أقل من 90° ، من أجل كل مادة فيها قوى التلاصق أكبر من قوى التماسك وأكبر من 90° ، إذا كانت قوى التماسك هي السائدة، إذا وضعنا قطرة ماء على البرافين زاوية التماس 107° ، الشكل (30 - 8 - a) ، وعندما يضاف إليها المنظفات الكيميائية زاوية التماس تصبح أقل من 90° ، الشكل (30 - 8 - b).

15-8 الخاصة الشعرية

يقصد بالانبوب الشعري الذي قطره من أبعاد قطر الشعرة من رتبة 0.01cm ، إذا وضعنا مثل هذا الانبوب في مائع بحيث تكون قوى التلاصق أكبر من قوى التماسك فإن السائل يرتفع في الانبوب الشكل (31 - 8)، عند نقطة التماس بين السائل والصلب قوة التوتر السطحي تكون متجهة نحو الأعلى.

$$F = \gamma L = \gamma(2\pi r) \quad (8 - 42)$$

$L = 2\pi r$: محيط سطح السائل الذي يمس الانبوب.

المركبة العمودية لهذه القوة

$$F_v = \gamma(2\pi r) \cdot (\cos \phi) \quad (8 - 43)$$

وفي حالة التوازن القوة العمودية يجب أن تساوي وزن عمود السائل إرتفاعه h ، داخل الأنبوب الشعري

$$w = \rho V g = \rho g \pi r^2 h \quad (8 - 44)$$

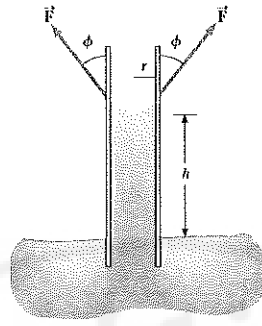
إذاً:

$$\gamma(2\pi r)(\cos \phi) = \rho g \pi r^2 h \quad (8 - 45)$$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} \cos \phi \quad (8 - 46)$$

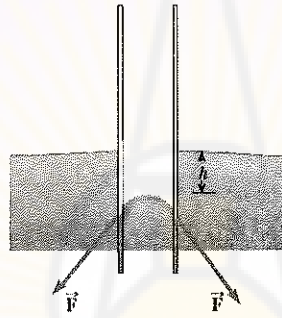
إذا غمسنا الأنبوب الشعري في سائل، بحيث كانت قوى التماسك أكبر من قوى التلاصق فإن سوية السائل تكون تحت سطح الصلب المحيط، وعلى العكس من ذلك تكون سوية السائل فوق سطح الصلب المحيط انظر الشكل (8 - 31 - a - b)، ولهذه الخاصة

تطبيقات عديدة، أهمها سحب كمية صغيرة من الدم، بناء خرسانات الأبنية التي تطل بمادة مانعة للتبلل، لمنع رشح الماء، النباتات تستخدم الخاصة الشعرية لنقل الماء والغذاء، الإسفنج والمناشف الورقية تمتص الماء اعتماداً على الخاصة الشعر



(a)

السائل يرتفع في الأنابيب الشعرية بسبب مفعول الأنابيب الشعرية والناجم عن التوتر السطحي و قوى التلاصق.



(b)

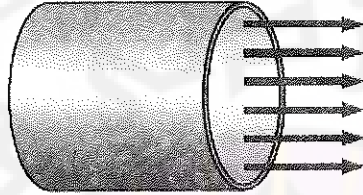
الشكل (8 - 31)

عندما تتغلب قوى التماسك على قوى التلاصق بين الجزيئات فإن سوية السائل في الانبوب الشعري تقع تحت سطح الانبوب الذي يحيط بالسائل.

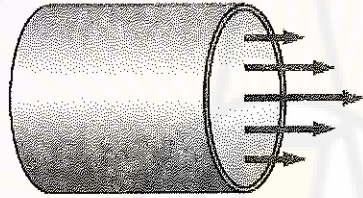
16-8 اللزوجة

ان صب الماء أسهل بكثير من العسل، لأن العسل له لزوجة أكبر من الماء، وبشكل عام اللزوجة تتعلق بالإحتكاك الداخلي في المائع، لذلك من الصعب جداً، أن تنزلق طبقات المائع اللزج على بعضها، على غرار ذلك من الصعوبة لسطح صلب أن ينزلق على آخر، إذا كان بينهم مائع لزج جداً.

عندما يتدفق مائع مثالي غير لزج، من خلال انبوب فإن طبقات المائع تنزلق على بعضها بدون إحتكاك، وإذا كان للانبوب مقطع عرضي متجانس يكون كل طبقة لها السرعة نفسها، الشكل (8 - 32 - a)، وبالعكس طبقات المائع اللزج لها سرعات مختلفة، الشكل (8 - 32 - b)، للمائع سرعة عظمى في مركز الانبوب، بينما الطبقة التي تلي جدران الانبوب لا تتحرك بسبب قوى التلاصق بين الجزيئات و سطح الانبوب.



(a)



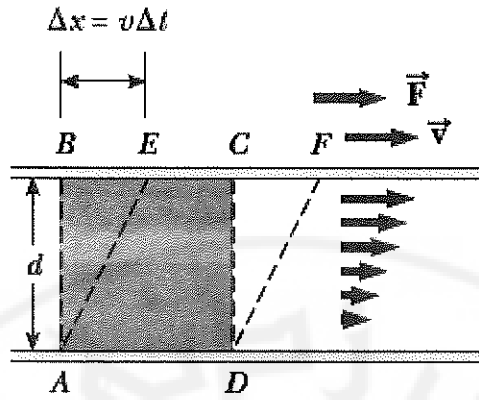
(b)

الشكل (8 - 32)

a- الجسيمات في مائع غير لزج تتحرك كلها بنفس السرعة.

b- في المائع اللزج سرعة الجسيمات عند سطح الانبوب صفر وتزداد حتى تبلغ قيمة عظمتها العظمى عند المركز.

من أجل فهم أفضل لمفهوم اللزوجة لنتخيل طبقة سائل بين سطحين صليبين، الشكل (8 - 33)، السطح السفلي في وضعية ثابتة، والسطح العلوي يتحرك إلى اليمين بسرعة v ، تحت تأثير قوة خارجي $\vec{F}$ ، ويسبب هذه الحركة فإن جزءاً من السائل ينشوه من الشكل البدئي ABCD، إلى الشكل النهائي AEFD، القوة المطلوبة لتحريك الطبقة العلوية تتناسب مع كلاً من مساحة المشتركة مع المائع وسرعة المائع.



الشكل (8 - 33)

طبقة السائل بين سطحين صلبين السفلى منها ثابتة والعليا متحركة إلى اليمين بسرعة ثابتة $\vec{v}$.

وتتناسب القوة عكساً مع المسافة d ، بين الطبقتين

$$F = \eta \frac{Av}{d} \quad (8 - 47)$$

η : عامل اللزوجة ووحدته في الجملة الدولية SI : $N \cdot s / m^2$ ، ولكن أغلبية المراجع

تستخدم الوحدة $dyne \cdot s / cm^2$ ، التي تدعى بالبواز تكريماً للعالم الفرنسي J. L.

Poiseuille (1869 - 1799)

$$1 \text{ poise} = 10^{-1} N \cdot s / m^2 \quad (8 - 48)$$

والمقدار $\frac{v}{c}$ ، يدعى تدرج السرعة.

17-8 معادلة بيويزيل

لننتصور مائعاً يتدفق في انبوب طوله L ، وقطره R ، والضغط المطبق عليه من الطرفين

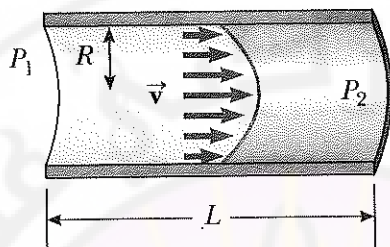
الشكل (8 - 34) معدل التدفق (حجم خلال واحدة الزمن) يتعلق بفرق الضغط وأبعاد

الانبوب وسرعة المائع

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L} \quad (8 - 49)$$

ويدعى قانون بيويزيل ويقول لنا أن معدل التدفق يتناسب مع تدرج الضغط $(P_1 - P_2)/L$.

وعكساً مع اللزوجة، ولكن قد نتفاجأ بأن معدل التدفق يتناسب مع المرتبة الرابعة R ، وهذا يعني أن معدل التدفق يتأثر كثيراً بتغيرات R ، إذا ما أردنا إبقاء التدفق ثابتاً عند تدرج معين للضغط يجب أن تكون تغيرات R ، طفيفة.



الشكل (8 - 34)

منظر جانبي لمائع يتدفق خلال انبوب متجانس مقطعه دائري معدل التدفق يعطى حسب قانون بيويزيل، لاحظ ان سرعة العظمى للمائع عند مركز الانبوب.

18-8 عدد رينولدز

عند السرعات المرتفعة بشكل كاف تدفق المائع يتغير من التدفق البسيط الإنسيابي التدفق المضطرب الذي يتميز بالحركة اللا نظامية العالية للمائع، وقد وجد تجريبياً بداية الإضطراب في الانبوب تحدد بالعامل البعدي الذي يدعى بعدد رينولد RN ، يحدد على الشكل التالي:

$$RN = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (8 - 50)$$

v : السرعة الوسطى للمائع على طول إتجاه التدفق.

d : قطر الانبوب.

η : لزوجة المائع.

إذا كان RN أقل من 2000، فإن التدفق خلال الانبوب يكون إنسيابياً، والإضطراب يمكن أن يحدث إذا كان RN فوق 3000، في المجال بين 3000 - 2000 ، التدفق يكون

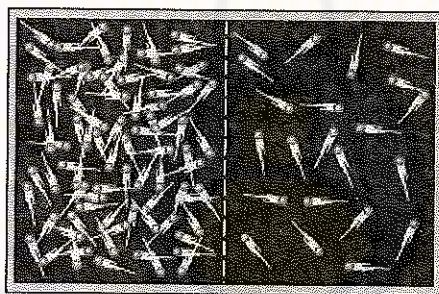
غير مستقر مما يعني أن التدفق يكون إنسيابياً ولكن أي اضطراب صغير يسبب تغييره باتجاه التدفق المضطرب.

19-8 ظاهرة النقل

عند تدفق مائع من خلال انبوب فإن السبب الأساسي للتدفق هو فرق الضغط على طرفي الانبوب والمسؤول عن نقل كتلة من المائع من مكان إلى آخر (الانتشار)، ويمكن أيضاً للمائع أن ينتقل من مكان إلى آخر، بسبب فرق التركيز بين نقطتين للمائع المائع يتدفق من مكان حيث التركيز أعلى إلى مكان حيث التركيز أقل (التناضح).

20-8 الانتشار

في عملية الانتشار تتحرك الجزيئات من منطقة حيث التركيز عال إلى منطقة حيث التركيز منخفض، ولفهم لماذا يحدث الانتشار لنعد الشكل (8 - 35)، حيث يبين وعاء فيه تركيز عالي من الجزيئات، الجزء اليساري منه.



الشكل (8 - 35)

عندما يكون تركيز الغاز في اليسرى من الوعاء يفوق تركيزه من الجهة اليمنى يحدث انتشار للجزيئات من اليسار إلى اليمين.

الخط المنقط في الشكل يعبر عن الحاجز الخيالي لعزل المنطقتين، وبما أن الجزيئات تتحرك بسرعة عالية وعشوائية في كافة الإتجاهات، فالعديد منهم يجتاز الحاجز الخيالي، ويتحرك من اليسار إلى اليمين، وقليل جداً من الجزيئات يتحرك من اليمين إلى اليسار، لأن عددها قليل في الجهة اليمنى من الوعاء، وفي المحصلة سيكون هناك حركة من المنطقة التي تحوي جزيئات كثيرة إلى المنطقة التي فيها جزيئات قليلة ولهذا السبب التركيز في

الناحية اليسرى من الوعاء سيتناقص وفي الجهة اليمنى سيزداد مع الزمن، حتى بلوغ التركيز التوازني، وعندها لا توجد حركة محصلة، أي أن معدل حركة الجزيئات من اليسار إلى اليمين يساوي معدل حركة الجزيئات من اليمين إلى اليسار، المعادلة الأساسية للانتشار هي معادلة فيك *Fick*

$$\text{معدل الانتشار} = \frac{\text{الكتلة}}{\text{الزمن}} = \frac{\Delta M}{\Delta t} = D.A. \left(\frac{C_1 - C_2}{L} \right) \quad (8-51)$$

D : ثابت التناسب أو ثابت الانتشار.

الجهة اليسرى من المعادلة تدعى معدل الانتشار، ونقيس مقدار الكتلة المنقولة خلال واحدة الزمن والمعادلة تقول بأن معدل الانتشار يتناسب مع مساحة المقطع العرضي A ، ومع تغير التركيز في واحدة المسافة $(C_2 - C_1)/L$ ، الذي يدعى تدرج التركيز.

21-8 حجم الخلايا والتناضح

الانتشار من خلال غشاء الخلية الحية ضروري لنقل الأوكسجين إلى خلايا الجسم وإزالة ثاني أوكسيد الكربون والنواتج الأخرى، تتطلب خلايا الجسم أوكسجين لإجراء عمليات الهدم والبناء، الأوكسجين ينتشر من الدم إلى الخلية، لأن تركيزه عال في الدم، وقليل في الخلية، والعكس بالنسبة إلى ثاني أوكسيد الكربون، الماء الأيونات، المواد المغذية تجتاز داخلة وخارجة من الخلايا بواسطة الانتشار، سطح الخلية يجب أن يكون كبيراً بشكل كاف، وبالتالي مساحة الغشاء يمكنها تبادل المواد بشكل فعال أكثر في حين الحجم يجب أن يكون صغيراً بشكل كاف، وبالتالي المواد تصل أو تغادر أماكن معينة بسرعة، وهذا يتطلب أن تكون نسبة مساحة السطح إلى الحجم كبيرة، الخلية المكعبية التي طول ضلعها L ، نسبة سطحها إلى حجمها.

$$\frac{\text{مساحة السطح}}{\text{الحجم}} = \frac{6L^2}{L^3} = \frac{6}{L} \quad (8-52)$$

كلما كان الجسم صغيراً كان نقل المواد الغذائية والفضلات عبر غشاء الخلية أكثر فاعلية، تقدر نسبة مساحة سطح الخلية إلى حجمها 10^6 ، إن انتشار المادة من خلال الغشاء يحدد جزئياً بحجم المسامات في جدران الغشاء، جزيئة الماء صغيرة يمكنها أن تعبر من المسامات بسهولة، في حين الجزيئات الكبيرة مثل السكر، لا تعبر بسهولة أو لا تستطيع اجتياز الغشاء الذي يسمح بالعبور لبعض الجزيئات ولا يسمح لغيرها يدعى غشاء نفوذياً انتقائياً، التناضح هو إنتشار الماء عبر غشاء نفوذى إنتقائى، من التركيز العالي للماء إلى التركيز المنخفض، كما في حالة الانتشار، التناضح يستمر حتى يصبح التركيز عند طرفي الغشاء متساوياً. وفهم أثر التناضح في الخلايا الحية لنفرض لدينا خلية معينة في الجسم، وتحتوي على سكر تركيزه 1% ، ولنفرض هذه الخلية مغمورة في محلول السكر تركيزه 5%، وعليه الماء سوف ينتشر من داخل الخلية ما يؤدي إلى نقص الماء في الخلية وهذا ما يسبب لها التخريب بسبب الجفاف، وإذا انعكس تركيز الماء فإن الماء ينتشر إلى الخلية، و يؤدي إلى إنتفاخها أو انفجارها. عند الحقن الوريدي يجب أن نأخذ بعين الإعتبار عدم الإخلال بالتوازن التناضحي للجسم أو خلاف ذلك نسبب ضرراً لخلايا الجسم.

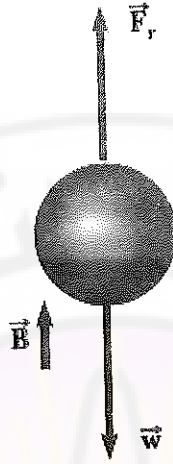
8-22 الحركة في وسط لزج

عندما يسقط الجسم في الهواء فإن حركته تعاق بقوة مقاومة الهواء، وبشكل عام هذه القوة تتعلق بشكل الجسم وبسرعته، إن قوة مقاومة الهواء تؤثر في الجسم الساقط، لنفرض أن الجسم له شكل بسيط مثل الكرة مثلاً، في عام 1845، وجد العالم ستوكس أن قيمة قوة مقاومة على جسم كروي صغير جداً نصف قطره r ، يسقط ببطء في مائع لزوجه بسرعة v .

$$F_r = 6\pi\eta r v \quad (8-53)$$

هذه المعادلة تدعى معادلة ستوكس، ولها تطبيقات عديدة على سبيل المثال تفسر ترسيب جسيمات المادة في الدم، التي إستخدمها العالم روبرت ميليكان (1866 - 1952)، في تجربته عند قياس نصف قطر قطرات الزيت المشحون الساقطة في الهواء ومنه استطاع ميليكان تحديد الشحنة على الإلكترون وحاز على جائزة نوبل في عام 1927، لعمله الرائد

في الشحنات العنصرية. هناك ثلاث قوى تؤثر في الكرة الساقطة في الوسط اللزج كما هو موضح على الشكل (8 - 36)



الشكل (8 - 36)

كرة تسقط في وسط لزج، القوى المؤثرة هي قوة الثقل وقوة مقاومة الإحتكاك.

• القوة الإحتكاك $\vec{F}_r$

• قوة دفع المائع $\vec{B}$

• قوة ثقل الجسم $\vec{w}$

$$w = \rho g V = \rho g \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \quad (8 - 54)$$

وحسب مبدأ أرخميدس فإن قوة الدفع تساوي وزن المائع المزاح الذي حجمه يساوي حجم الكرة.

$$B = \rho_f g V = \rho_f g \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \quad (8 - 55)$$

ρ_f : لزوجة المائع

في اللحظة التي يكون فيها الجسم في بدء السقوط، قوة الإحتكاك تكون معدومة لأن سرعته معدومة، وعندما يتسارع الجسم تظهر قوة الإحتكاك $\vec{F}_r$ ، حتى يصل إلى السرعة الحدية v_T ، عندما تكون محصلة القوى المؤثرة فيه تساوي الصفر.

$$F_r + B = w \quad (8 - 56)$$

$$6\pi\eta r v_T + \rho_f g \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \rho g \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \quad (8 - 57)$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة إلى v_T .

$$v_T = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho - \rho_f) \quad (8 - 58)$$

8-23 الترسيب و الطرد المركزي

في حال كان شكل الجسم غير كروي فإنه لا يمكننا أن نستخدم قانون ستوكس لتحديد السرعة الحدية، الاختلاف الوحيد هو أننا لا نستطيع أن نطبق قانون ستوكس بما يتعلق بقوة المقاومة، لذلك نفرض أن قيمة المقاومة تأخذ الشكل.

$$F_r = kv \quad (8 - 59)$$

k : عامل يتحدد تجريبياً.

كما ذكرنا سابقاً أن الجسم يبلغ سرعته الحدية عندما تتعادل قوى الجاذبية المتجهة إلى الأسفل مع قوة المقاومة المتجهة إلى الأعلى.

$$w = F_r + B \quad (8 - 60)$$

$$B = \rho_f g \bar{V} \quad \text{قوة دفع الماء.}$$

$V = m/\rho$ حجم المائع المزاح يتعلق بالكثافة للجسم الساقط ρ ، لذلك القوة B .

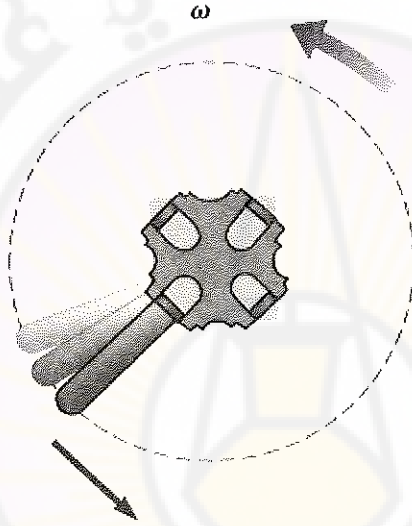
$$B = \frac{\rho_f}{\rho} mg \quad (8 - 61)$$

نعوض من أجل $F_r = kv$ في المعادلة (8 - 60)

$$mg = \frac{\rho_f}{\rho} mg + kv_t \quad (8 - 62)$$

$$v_t = \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \quad (8 - 63)$$

السرعة الحدية في الأجسام الحية عادة صغيرة، على سبيل المثال السرعة الحدية للخلايا التي تسقط في البلازما حوالي، 5 cm/h ، في مجال الجاذبية الأرضية، السرعات الحدية للجزيئات المشكلة للخلايا أصغر بعدة مراتب بسبب صغر كتلتها، السرعة التي من أجلها تسقط المادة في مائع تدعى معدل الترسيب.



الشكل (8 - 37)

وهي مهمة في التحليل السريري، معدل الترسيب يمكن زيادته بزيادة تسارع الجاذبية الأرضية الفعال، الذي يظهر في المعادلة (8 - 63)، المائع الذي يحوي جزيئات فيروس حيوي يوضع في وعاء للطرد المركزي ويدور بسرعة عالية جداً، الشكل (8 - 37) عند هذه الشروط تكتسب الجسيمات تسارعاً مركزياً كبيراً $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ ، أكبر بكثير من تسارع السقوط الحر، لذلك يمكننا إستبدال g ، في المعادلة (8 - 63).

$$v_t = \frac{m\omega^2 r}{k} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \quad (8 - 64)$$

هذه المعادلة تشير إلى أن معدل الترسيب يسرع جداً.

$$\omega^2 r \gg g$$

إن الجسيمات التي كتلتها أكبر يكون لها سرع حدية أكبر، وبالتالي الجسيمات الضخمة ستحتل قاع انبوع الإختبار أولاً.



مسائل

- 1-8 يعلق جسم كتلته 500 kg بنهاية سلك من الفولاذ طوله 3m ومساحة مقطعه 0,15 m^2 ، أوجد مقدار استطالة السلك .
- 2-8 ما مقدار تغير حجم كرة رصاصية حجمها $0,5 m^3$ إذا أثر عليها ضغط قدره $2 \times 10^7 pa$ ، مع العلم أن معامل الحجم للرصاص هو $B = 7,7 \times 10^9$ ؟
- 3-8 قطعة خشبية كثافتها $0,6 g/cm^3$ وكتلتها 180 g تنقل بقطعة من الرصاص كثافتها $11,3 g/cm^3$ ، ما كتلة قطعة الرصاص التي تجعل خمس الجسم التلي طافياً فوق سطح سائل كثافته $0,9 g/cm^3$.
- 4-8 يربط قضيب نحاسي طوله $L' = 3m$ ومساحة مقطعه $A' = 0,5 mm^2$ بقضيب فولاذي طوله L ومساحة مقطعه $A = 0,2 mm^2$ ، تخضع جملة القضيبين إلى قوتي شد متعاكستين قيمة شدة كل منهما $F = 6000 N$ مطبقين عند نهايتي الجملة، والمطلوب :
- (a) أوجد طول قضيب الفولاذ إذا كانت استطالة القضيبين واحدة ، (b) الاجهاد في كل من القضيبين .
- 5-8 تزن خليطة من الذهب والألمنيوم 10 kg، ولدى تعليق الخليطة بميزان ذي نابض وغمرها بالماء يشير الميزان إلى 8 kg، ما وزن كل من الذهب والألمنيوم في الخليطة إذا علمت أن الكثافة النسبية للذهب 19,3 والكثافة النسبية للألمنيوم 2,5.
- 6-8 قطعة من الذهب المزيف وزنها في الهواء 5,98 N وبينما وزنها في الماء العذب 5 N بين ان هذه القطعة مزيفة علماً أن كثافة الذهب هي $19,3 \times 10^3 kg/m^3$.
- 7-8 انبوب أفقي قطر مقطعه في النقطة A يساوي 6 cm، فيه اختناق قطر مقطعه عند النقطة B 2cm، فإذا علمت أن سرعة جريان الماء في الانبوب الأصلي تساوي 2m/s والضغط فيه $15 N/m^2$ ، أوجد سرعة الجريان في الاختناق B، وكذلك الضغط فيه.
- 8-8 أوجد سرعة خروج الماء من فتحة صغيرة نصف قطرها 2 cm، وتقع على إرتفاع 60cm من قعر وعاء وموجودة بجدار هذا الوعاء ؛ علماً ان إرتفاع السائل في الوعاء 1m وما معدل تدفق السائل من الفتحة.

8-9 يستند خزان ماء إلى سطح أفقي و مفتوح من الأعلى للضغط الجوي، ويحتوي في جانبه فتحة تبعد 80 cm عن السطح الأفقي الأسفل و 20 cm عن سطح الماء العلوي، والمطلوب :

(a) حساب سرعة تدفق السائل (b) بعد نقطة سقوط الماء على مستوي أرض الخزان عن جدار الخزان .

8-10 إذا كانت سرعة تدفق السائل في نقطة a من انبوب هي 4m/s، وكان الضغط القياسي في هذه النقطة هو $2N/m^2$ فوق الضغط الجوي ، إحسب الضغط القياسي في نقطة ثابتة b من الانبوب أخفض من النقطة الأولى ب 20cm، علماً أن مساحة مقطع الانبوب في النقطة الثانية أصغر منه في الأولى بمرتين وكثافة السائل المتدفق هي ρ' .

8-11 وعاء اسطواني مساحة قاعدته A مملوء بالماء حتى إرتفاع h ، يحدث في أسفله ثقب قطره d ، برهن أن الزمن اللازم لانفراغ الوعاء من الماء يعطى بالعلاقة :

$$t = \frac{A}{\pi} \sqrt{h} / d^2$$

وذلك بفرض أن إحتكاك الماء بجدران الوعاء مهمل وكذلك اللزوجة .

8-12 انبوب منتظم المقطع على شكل حرف V، يسكب الماء في أحد فرعيه، وفي الفرع الثاني يسكب سائل غير قابل للامتزاج مع الماء؛ حتى يبلغ إرتفاع سطحه مسافة d عن سوية سطح الماء في الفرع الأول ، فإذا علمت أن إرتفاع الماء في الفرع الأول L ، أوجد كثافة السائل الثاني بالنسبة إلى كثافة الماء.

8-13 يدخل زيت محرك في انبوب ضيق قطره 1,8 mm وطوله 5,5 cm ، فكم يجب أن يكون فرق الضغط بين طرفي الانبوب لكي يبقى معدل تدفق الزيت مساوياً 5,6 mL/min .

الفصل التاسع التجاذب الكوني

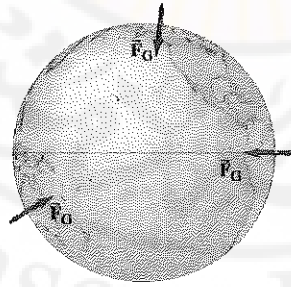
UNIVERSAL GRAVITATION

1-9 تمهيد

لم يضع إسحق نيوتن القوانين الثلاثة العظيمة للحركة فحسب، التي تعد أساساً لدراسة الديناميك، وإنما وضع أيضاً قانوناً أساسياً آخر يشرح إحدى القوى الأساسية في الطبيعة، إنه قانون التجاذب الذي يمكننا من فهم حركة الكواكب، هذا القانون الجديد نشر في عام 1687، في كتاب فلسفة الطبيعة ومبدأ الرياضيات، ويدعى قانون نيوتن للتجاذب الكوني، لقد كان نقطة الإنطلاق لتحليل عالم الفيزياء بواسطة نيوتن، وبالفعل الميكانيك النيوتوني بقوانينه الثلاث للحركة وقانون التجاذب الكوني كان مقبولاً لجهود كأساس لعلم الميكانيك و لدراسة الكون.

2-9 قانون نيوتن للتجاذب الكوني

درس السيد إسحق نيوتن حركة الأجسام الثقيلة مثل الكواكب والقمر، وبشكل واهتم خاصة بطبيعة القوة التي يجب أن تؤثر في القمر، لتبقيه على مساره الدائري حول الأرض. فكر نيوتن أيضاً بمسألة الثقالة، حيث أنه عندما يسقط جسم فإنه يتسارع وإستنتج بأنه من الضروري أن تؤثر فيه قوة تدعى قوة الثقالة، لذلك إعتقد بأن هناك قوة تؤثر في الجسم ناجمة عن باقي الأجسام المحيطة به، ولكن كيف تؤثر قوة الجاذبية.



الشكل (9 - 1)

في أي مكان على الأرض قوة الثقالة تؤثر إلى الأسفل بإتجاه مركز الأرض.

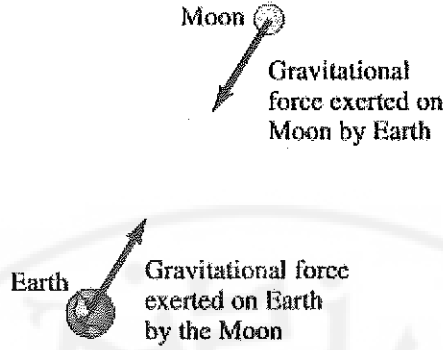
كل جسم على سطح الأرض يشعر بقوة الجاذبية، وليس مهماً أين يكون الجسم، القوة موجهة باتجاه مركز الأرض الشكل (9 - 1)، إستنتج نيوتن بأن الأرض تؤثر بقوة جذب على الأجسام الأخرى التي تقع على سطحها، بالقرب من سطح الأرض قوة الجاذبية تسرع الجسم إلى 9.8 m/s^2 ، إن التسارع المركزي للقمر حول الأرض.

$$a_R = \frac{V^2}{R} = 0.00272 \text{ m/s}^2 \approx \frac{1}{3600} g \quad (9 - 1)$$

لأن تسارع القمر باتجاه الأرض أقل بحوالي $\frac{1}{3600}$ ، من تسارع الجسم عند سطح الأرض، يبعد القمر عن الأرض مسافة 384000 km ، وهي أكبر من نصف قطر الأرض بحوالي 60 مرة، أي أنه يبعد عن مركز الأرض 60 مرة، بالنسبة إلى جسم على سطح الأرض. حسب العلاقة (1 - 9)، إستنتج نيوتن بأن قوة الجاذبية المؤثرة بوساطة الأرض في الجسم تتناقص مع مربع المسافة بينهما r .

$$F \sim \frac{1}{r^2} \quad (9 - 2)$$

يبعد القمر عن الأرض 60 مرة من نصف قطر الأرض، ويشعر بقوة جاذبية 3600 مرة أشد فيما إذا لو كان على سطح الأرض، أدرك نيوتن أن قوة الجاذبية المؤثرة في جسم لا تتعلق فحسب، بالمسافة بينهما، بل تتعلق أيضاً بكتلة الجسم وتتناسب طردياً معها. كما رأينا وبناء على قانون نيوتن الثالث عندما تؤثر الأرض بقوة الجاذبية في الجسم، مثل القمر فإن الجسم يؤثر فيها بالقوة نفسها وباتجاه معاكس الشكل (9 - 2)، وبسبب التناظر أعطى نيوتن قوة الجاذبية قيمة تتناسب مع كل من كتلتي الجسمين.



الشكل (9 - 2)

قوة التجاذب، احد الأجسام يؤثر على جسم ثاني بقوة موجهة بإتجاهه ، تساوي وتعاكس القوة المؤثرة فيه بوساطة الجسم الثاني.

$$F \sim \frac{m_E m_B}{r^2} \quad (9 - 3)$$

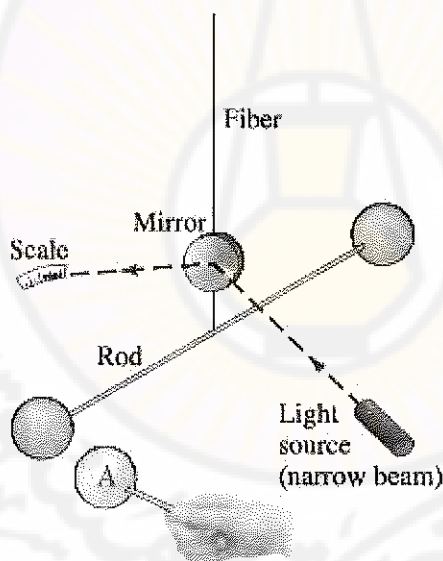
حيث m_E كتلة الأرض و m_B كتلة الجسم و r ، المسافة بين مركز الأرض ومركز الجسم، وقد لاحظ نيوتن القوة اللازمة لإبقاء مختلف الكواكب على مساراتها حول الشمس، إنها تتعدم كمقلوب مربع المسافة عن الشمس، مما دعاه إلى التفكير في قوة الجاذبية التي تؤثر بين الشمس وبقية الكواكب لإبقائها على مداراتها، وإذا كانت الجاذبية تؤثر بين مثل هذه الأجسام. لماذا ليس كل هذه الأجسام، إلا أنه إخترع قانون التجاذب الكوني الذي ينص:

كل جسيم في الكون يجذب كافة الجسيمات الأخرى، بقوة تتناسب مع جداء كتلتيهما، وتتناسب عكساً مع مربع المسافة بينهما هذه القوة تؤثر في طول الخط الواصل بين كل إثنين منها.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (9 - 4)$$

حيث m_1 و m_2 ، كتلة الجسمين و r ، المسافة بينهما و G ، الثابت الكوني الذي يقاس تجريبياً وله قيمة واحدة من أجل كل الأجسام. إن قيمة الثابت G ، يجب أن تكون صغيرة جداً، كوننا غير مدركين لأية قوة تجاذب بين جسمين عاديين ككرتي البيسبول، وقد قام العالم هنري كافندش في عام 1798، بقياس القوة بين جسمين عاديين بعد 100 سنة، بعد أن نشر نيوتن قوانينه، ولقياس القوة الصغيرة بين الأجسام العادية إستخدم مجموعة النظام المبين على الشكل (9 - 3)، أكد كافندش صحة فرضية نيوتن حول الجسمين المتجاذبين حسب المعادلة (1 - 9)، وتمكن من قياس كل من F, m_1, m_2, r ، بدقة و استطاع حساب الثابت G .

$$G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot \left(\frac{m}{kg} \right)^2 \quad (9 - 5)$$



الشكل (9 - 3)

مخطط جهاز كافندش عبارة عن كرتين متصلتين بواسطة قضيب أفقي خفيف ومعلق من مركزه بواسطة ليف رفيع.

يمكن القول بدقة أكثر أن المعادلة (1 - 9)، تعطي قيمة لقوة التجاذب لجسيم يؤثر في جسم آخر، والمسافة بينهما r ، أما من أجل الأجسام الممتدة (ليس النقطي)، علينا أن نعرف كيف نقيس المسافة r ، يمكن أن نعددها المسافة بين مركزي الجسمين وهذا صحيح فحسب، إذا كان الجسمان عبارة عن كرتين، وهو تقريب جيد للأجسام الأخرى، الحساب الجيد يعالج كل جسم ممتد على أنه مجموعة من الجسيمات، والقوة الكلية هي المجموع على كل الجسيمات. المجموع على كل الجسيمات يكون عادة أسهل باستخدام الحساب التكاملية.

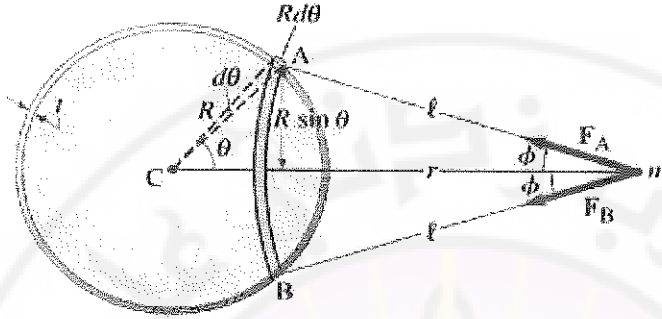
عندما تكون الجسيمات صغيرة بالمقارنة مع المسافة بينها يكون هناك انحراف بسيط عن النقطة أو الجسيم، لقد برهن نيوتن على أن قوة التجاذب المؤثرة في جسيم كتلته m ، يقع خارج كرة متجانسة، (كتلتها موزعة عليها بانتظام) هي نفسها فيما إذا كانت كتلة الكرة M ، متجمعة كلها في مركز الكرة.

9-2-1 قوة التجاذب لكرة متجانسة

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (9 - 6)$$

لنأخذ قشرة كروية كتلتها M ، متجانسة رقيقة سماكتها t ، صغيرة بالمقارنة مع نصف قطرها R ، القوة المؤثرة في الجسيم m ، الذي يبعد مسافة r ، عن مركز القشرة الكروية هي المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة من أجزاء القشرة، لتخيل أن الكرة مقسمة إلى شرائح دائرية رقيقة لا متناهية في الصغر، هذا يعني أن نقاط الشريحة متساوية البعد عن الجسيم m ، أحد هذه الشرائح الدائرية AB ، عرضه $Rd\theta$ ، انظر الشكل (9 - 4)، وسماكتها t ، وله نصف قطر $R \sin \theta$ ، القوة الناجمة عن هذا الشريط عند النقطة A ، والمؤثرة في الجسيم m ، يعبر عنها $\vec{F}_A$ ، وعن النقطة B ، المقابلة قطريا A ، هي $\vec{F}_B$ ، لنأخذ قطعتين عند A, B ، متساويتين في الكتلة وبالتالي $F_A = F_B$ ، المركبة الأفقية للقوتين $\vec{F}_A$ و $\vec{F}_B$ ، تساويان $F_A \cos \theta$ ، وموجّهتان باتجاه مركز القشرة والمركبتان العموديتان متساويتان في القيمة ومتعاكستان في الاتجاه، لذلك محصلتهما معدومة، وبما أن لكل نقطة من الشريط

نقطة تتأثرها قطريا مثل A, B ، لذلك سنرى بأن القوة المحصلة الناجمة عن كامل نقاط الشريط موجهة باتجاه المركز القشرة وقيمتها.



الشكل (9 - 4)

حساب قوة الجاذبية على جسيم كتلته m ، بسبب قشرة كروية متجانسة نصف قطرها R ، وكتلتها M .

$$dF = G \frac{mdM}{\ell^2} \cos \phi \quad (9 - 7)$$

حيث dM كتلة كامل الشريط الدائري و ℓ ، هي المسافة من كل نقاط الشريط إلى m .

$$\rho = \frac{dM}{dV} \quad (9 - 8)$$

الكثافة الكتلية الحجمية للشريط ρdV ،

حجم الشريط

$$dV = (2\pi R \sin \theta)(t)(Rd\theta) \quad (9 - 9)$$

نعوض في (9 - 7)

$$dF = G \frac{m\rho 2\pi R^2 t \sin \theta d\theta}{\ell^2} \cos \phi \quad (9 - 10)$$

من أجل الحصول على كامل القوة المؤثرة في الجسم نكامل على كل الأشرطة الدائرية حيث أن الزاوية تسمح المجال من $\theta = 0$ ، إلى $\theta = \pi$ ، لكن العلاقة (9 - 10) ، تحوي المتغيرين ϕ ، و ℓ ، وكلاهما يتبع θ ، من الشكل (9 - 4) نجد:

$$\ell \cos \phi = r - R \cos \theta \quad (9 - 11)$$

$$\vec{r} - \vec{R} = \vec{\ell} \quad (9 - 12)$$

$$\cos \theta = \frac{r^2 + R^2 - \ell^2}{2rR} \quad (9 - 13)$$

بهاتين العبارتين نستطيع أن نختصر المتغيرات الثلاثة (ℓ, θ, ϕ) إلى عبارة واحدة تحوي المتغير ℓ .

$$\cos \phi = \frac{(r - R \cos \theta)}{\ell} = \frac{r^2 + \ell^2 - R^2}{2r\ell} \quad (9 - 14)$$

نفاضل العلاقة (9 - 13) حيث R, r لامتغيرين

$$-\sin \theta d\theta = -\frac{\ell}{rR} d\ell \quad (9 - 15)$$

نعوض في العلاقة (9 - 10) و نكامل علماً بأن:

الزاوية θ ، تتحول في المجال $\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi$ ، والمسافة ℓ ، تتحول في المجال.

$$\ell = r - R \rightarrow \ell = r + R$$

$$\int_0^F dF = Gm\rho\pi t \frac{R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(\ell + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2} \right) . d\ell \quad (9 - 16)$$

$$F = Gm\rho\pi t \frac{R}{r^2} \left[\ell - \frac{r^2 - R^2}{\ell} \right]_{\ell=r-R}^{\ell=r+R} \quad (9-17)$$

$$F = Gm\rho\pi t \frac{R}{r^2} (4R) \quad (9-18)$$

ولكن $M = \rho V = 4\pi\rho R^2 t$ ، نعوض لحذف t .

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (9-19)$$

هذه النتيجة تعطي قوة الجاذبية لقشرة كروية رقيقة تؤثر في جسيم كتلته m ، ويبعد مسافة r عن مركزها ويقع خارجها، نلاحظ أن هذه العلاقة، هي النتيجة نفسها لقوة الجاذبية بين جسيم كتلته m ، وجسيم آخر كتلته M ، يقع في مركز القشرة الكروية، بمعنى آخر قوة الجاذبية لقشرة كروية رقيقة متجانسة يمكن عدها لجسيم كتلته هي كتلة القشرة الكروية نفسها متركزة في مركزها.

• حالة الكرة صلبة أو ممتلئة

يمكن اعتبار الكرة الصلبة مؤلفة من عدة قشرات متركزة أنصاف أقطارها تتغير من $R = 0$ إلى $R = R_0$ ، حيث أن R_0 هو نصف قطر الكرة الصلبة لأن كتلة القشرة dM

$$dF = G \frac{mdM}{r^2} \quad (9-20)$$

r ، المسافة من المركز C ، إلى الجسيم الذي يقع خارجها، وهي نفسها من أجل كل القشرات لذلك القوة الكلية تساوي.

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (9-21)$$

هذه العلاقة صحيحة عندما يكون الجسيم خارج الكرة لنفرض أن نقطة داخل القشرة الكروية كتلتها m ، نلاحظ هنا أن $r < R$ ، ℓ تتغير $\ell = R + r \rightarrow \ell = R - r$ ، وبالتالي.

$$\left[\ell - \frac{r^2 - R^2}{\ell} \right]_{\ell=R-r}^{\ell=R+r} = 0 \quad (9-22)$$

فالقوة المؤثرة في أي كتلة داخل القشرة يساوي الصفر، هذه النتيجة مهمة في الكهرياء الساكنة، حيث قوة كولون تربيعية عكسية.

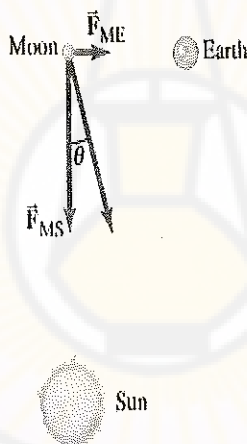
2-2-9 القوة المؤثرة في القمر

القوة المؤثرة في القمر الناجمة عن جذب الأرض والشمس، بفرض أن (الأرض والشمس والقمر)، تقع على رؤوس مثلث قائم عند القمر، الشكل (9 - 5).

$$m_{Moon} = 7.35 \times 10^{22} kg, \quad m_{Sun} = 1.99 \times 10^{30} kg$$

$$m_{Earth} = 5.89 \times 10^{24} kg$$

$$r_{ME} = 3.84 \times 10^8 m, \quad r_{MS} = 1.50 \times 10^{11} m$$



الشكل (9 - 5)

الشمس والقمر والأرض تقع رؤوس مثلث قائم.

القوى المؤثرة في القمر هي قوة الجاذبية المؤثرة من الأرض F_{ME} ، وقوة الجاذبية من الشمس F_{MS} ، نستخدم قانون نيوتن التجاذبي.

$$F_{ME} = G \frac{m_{Moon} \cdot m_{Earth}}{r_{ME}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{(7.35 \times 10^{22}) \cdot (5.89 \times 10^{24})}{(3.84 \times 10^8)^2}$$

$$F_{ME} = 1.99 \times 10^{20} N$$

$$F_{MS} = G \frac{m_{Moon} \cdot m_{Sun}}{r_{MS}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{(7.35 \times 10^{22}) \cdot (1.99 \times 10^{30})}{(1.50 \times 10^{11})^2}$$

$$F_{MS} = 4.34 \times 10^{20} N$$

$$F = \sqrt{(1.99 \times 10^{20})^2 + (4.34 \times 10^{20})^2} = 4.77 \times 10^{20} N$$

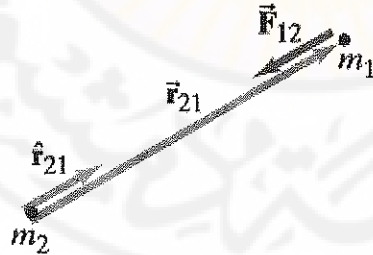
القوتين F_{MS}, F_{ME} . لهما المرتبة نفسها لأن الشمس أبعد من الأرض عن القمر إلا أن كتلة الشمس أضخم بكثير من الأرض.

9-3 الشكل الشعاعي لقانون نيوتن في التجاذب الكوني

نستطيع أن نكتب قانون نيوتن في التجاذب الكوني بالشكل

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21} \quad (9-23)$$

$\vec{F}_{12}$ ، شعاع القوة للجسيم 1 و كتلته m_1 ، و يؤثر في الجسيم 2 الذي كتلته m_2 ، والمسافة بينهم r_{21} ،



الشكل (9-6)

شعاع الإنزياح $\vec{r}_{21}$ ، يتجه من الجسيم الذي كتلته m_1 ، إلى الجسيم الذي كتلته m_2 ، وشعاع الوحدة $\vec{r}_{21}$ و يوازي الشعاع $\vec{F}_{12}$.

$\vec{r}_{21}$: شعاع الواحدة الموجه من النقطة 2 إلى النقطة 1 على طول الخط الواصل بينهما.

$$\vec{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \quad (9 - 24)$$

$\vec{r}_{21}$: شعاع الإنزياح الشكل (9 - 6)، القوة على الجسم 1، من الجسم 2، باتجاه m_2 تعاكس $\hat{r}_{21}$.

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \quad (9 - 25)$$

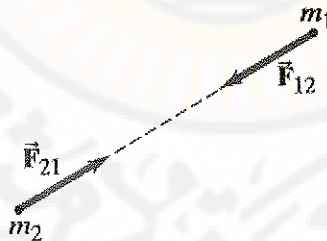
وحسب قانون نيوتن الثالث القوة التي يؤثر بها الجسم 2 في الجسم 1 تساوي وتعاكس القوة التي يؤثر بها الجسم 1 في الجسم 2، الشكل (9 - 7).

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad (9 - 26)$$

عندما تؤثر مجموعة جسيمات في جسيم فإن القوة الكلية المؤثرة في جسيم هي المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة من الجسيمات كلها في هذا الجسيم.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i} \quad (9 - 27)$$

$\vec{F}_{1i}$: القوة التي يؤثر بها الجسيمات i ، في الجسم 1.



الشكل (9 - 7)

بوساطة قانون نيوتن الثالث قوة التجاذب المؤثرة في الجسم 1، بوساطة $\vec{F}_{12}$ ، تساوي وتعاكس القوة

المؤثرة في الجسم 2، و بوساطة الجسم 1، $\vec{F}_{21}$ ، $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

4-9 الجاذبية بالقرب من سطح الأرض

المعادلة (1 - 9)، تكون مطبقة من أجل قوى التجاذب بين الأرض m_E والجسم m ، عند سطحها، المسافة بينهما هي المسافة بين مركز الأرض والجسم الموجود عند سطح الأرض r_E ، قوة التجاذب بين الأرض والجسم هي قوة ثقل الجسم.

$$g = G \frac{m_E}{r_E^2} \quad (9 - 28)$$

إذا علمنا أن $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ، يمكننا أن نحسب كتلة الأرض.

$$m_E = \frac{g r_E^2}{G} = \frac{(9.80)(6.38 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

تطبيق - الجاذبية على إفرست

إحسب القيمة الفعالة لتسارع الجاذبية الأرضية g ، على قمة إفرست 8850 m ، فوق سطح البحر.

إن قوة الجاذبية الأرضية على الأجسام تتعلق بالمسافة عن مركز الأرض، لدينا

$$r \approx (6380 + 8.9)10^3 \text{ m} = 6.389 \times 10^6 \text{ m}$$

$$g' = G \frac{m_E}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{(6.389 \times 10^6)^2} = 9.77 \text{ m/s}^2$$

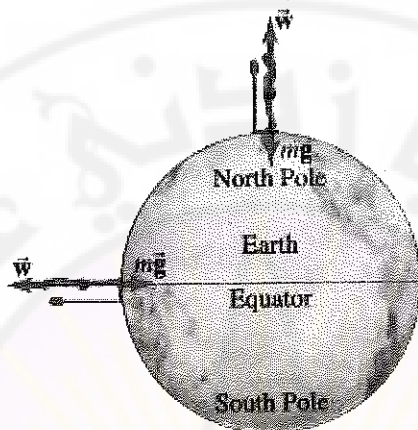
العلاقة (28 - 9)، لا تعطي قيمة دقيقة ل g ، عند مختلف الأماكن لأن الأرض ليست كروية بشكل كامل وكتلتها ليست موزعة بشكل متجانس.

5-9 تأثير دوران الأرض في g

لنفرض أن الأرض كروية تماماً كيف يؤثر دوران الأرض في g ، لننتصر أن شخصاً ساكناً عند القطب الشمالي، و كتلته m ، ويقف على ميزان، تؤثر في الشخص قوتان قوة الجاذبية

$F_G = mg$ ، والقوة التي يدفع الميزان بها الشخص إلى الأعلى w سنسميها وزن الشخص، حسب قانون نيوتن الثالث تكون هاتان القوتان متساويتين.

$$mg - w = 0, \quad g = g' \quad (9 - 29)$$



الشكل (8 - 9)

الأرض تدور عند خط الاستواء، و الميزان سوف يدفع الشخص إلى الأعلى، ولكن بقوة مختلفة w' ، فيما تبقى قوة الجاذبية على حالها $F_G = mg$ ، وتؤثر إلى الأسفل الشكل (8 - 9).

$$mg - w' = ma_R = m \frac{v^2}{r} \quad (9 - 30)$$

الوزن الفعال $w' = mg'$ ، حيث g' ، القيمة الفعالة ل g

$$w' = m \left(g - \frac{v^2}{r_E} \right)$$

$$g' = w'/m = g - \frac{v^2}{r_E}$$

$$\Delta g = g - g' = \frac{v^2}{r_E} \quad (9 - 31)$$

سرعة الجسم v ، عند خط الاستواء.

$$v = \frac{2\pi r_E}{1 \text{ day}} = \frac{6.283 \times 6.38 \times 10^6}{8.64 \times 10^4} = 4.640 \times 10^2 \text{ m/s}$$

$$\Delta g = g - g' = \frac{v^2}{r_E} = \frac{(4.640 \times 10^2)^2}{6.38 \times 10^6} = 0.0337 \text{ m/s}^2$$

ونرى أن $\Delta g/g \approx 0.003$ ، والفرق هو 3%

$$g - w'/m = a_R = \frac{v^2}{r}$$

ملاحظات:

1. الاختلاف g ، عند القطب وخط الاستواء، ويساوي تقريباً 0.052 m/s^2 ، وذلك بسبب أن الأرض أكثر إنتفاخاً عند الاستواء بمقدار 21 km
2. حساب القيمة الفعالة g ، عند خطوط العرض يختلف عنه عند خط الاستواء والقطب، لأن $\vec{F}_G$ ، يؤثر قطرياً باتجاه مركز الأرض، بينما التسارع المركزي موجه عمودياً على محور الدوران، وهذا يعني أن $\vec{g}$ ، ليس عمودياً تماماً عدا القطب وخط الاستواء.

$$3. \text{ نلاحظ حالة انعدام الوزن عندما } a_R = g \quad w' = 0 \quad (9 - 32)$$

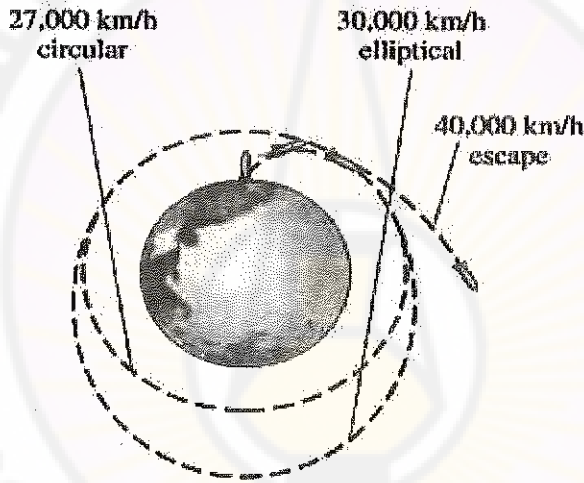
1-5-0 الأرض كجسملة مقارنة عطالية

عادة نفترض بأن جسم المقارنة تكون مثبتة بالأرض، وهي جسم مقارنة عطالية، وقد وجدنا سابقاً أن هذا الافتراض يؤدي إلى خطأ لا يتجاوز 3% ، عند استخدام قانون نيوتن الثاني

6-9 الأقمار الصناعية وانعدام الوزن

1-6-9 حركة الأقمار الصناعية

يوضع القمر الصناعي على مداره، وذلك عندما يكتسب سرعة مماسية عالية بشكل كاف، الشكل (9 - 9)، فإذا كانت سرعة المركبة الفضائية عالية جداً، فإنها لن ترتبط بجاذبية الأرض، لذلك سوف تفلت ولن تعود إليها. وإذا كانت سرعتها قليلة جداً، فإنها سوف تعود إلى الأرض ثانية، توضع عادة الأقمار الصناعية على مدارات شبه دائرية لأن المدار يتطلب أقل سرعة إقلاع كافية.



الشكل (9 - 9)

القمر الصناعي ينطلق بعدة سرعات مختلفة.

ما الذي يجعل القمر الصناعي يبقى على مداره، الجواب السرعة، لأنه إذا توقف القمر عن الحركة فإنه سوف يسقط على الأرض، ولكن في حالة السرعة العالية، هذه السرعة تجعله يفلت إلى الفضاء، والتسارع المطلوب هو $\frac{v^2}{r}$ ، الذي يمنحه القوة هي الجاذبية المطبقة عليه من الأرض، حسب قانون التجاذب الكوني لنيوتن.

$$G \frac{mm_E}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{G \frac{m_E}{r}} \quad (9 - 33)$$

حيث m ، كتلة القمر الصناعي، وهذه المعادلة تتعلق بمسافة القمر عن مركز الأرض r ويسرعه v ، نلاحظ أن هناك قوة وحيدة تؤثر في القمر ألا وهي قوة الجاذبية

$$r = r_E + h \quad (9 - 34)$$

h : إرتفاع القمر عن سطح الأرض.

2-6-9 القمر الصناعي المواقف

يستخدم القمر الصناعي المواقف للنقل التلفزيوني و الراديوي و لتوقعات الأرصاد الجوية والاتصالات. يستقر القمر الصناعي فوق نقطة محددة من الأرض، وهذا ممكن فوق نقطة من خط الاستواء، القمر الصناعي له دور يساوي 24 ساعة.

(مثال 9-1):

يدور قمر صناعي حول الأرض، على مدار r ، $m_E = 5.98 \times 10^{24} kg$ أوجد:

- المسافة بين مركز الأرض والقمر r .
- سرعة القمر الصناعي.
- سرعة القمر على مدار يبعد $200km$ ، عن سطح الأرض.

الحل:

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على فرض أن المدار دائري تماماً.

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} \quad (9 - 35)$$

(a) القوى المؤثرة في القمر هي قوة الجاذبية الأرضية.

$$G \frac{m_{Sat} m_E}{r^2} = m_{Sat} \frac{v^2}{r} \quad (9 - 36)$$

هذه المعادلة تحوي على مجهولين r ، و v ، القمر يدور بنفس دور الأرض $T = 24h$ ، الذي تدور به حول محورها.

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = 1\text{day} = 86400\text{s}$$

نعوض في العلاقة (36 - 9) نحصل

$$G \frac{m_E}{r^2} = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2}$$

$$r^3 = G \frac{m_E}{4\pi^2} T^2 = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{4\pi^2} \times (86.400)^2$$

$$r^3 = 7.54 \times 10^{22} \text{m}^3$$

$$r = 4.23 \times 10^7 \text{m}$$

أي أن بعد القمر عن الأرض يعادل $6r_E$ ،

(b) من المعادلة (33 - 9)

$$v = \sqrt{G \frac{m_E}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11}}{4.23 \times 10^7} \times 5.98 \times 10^{24}} = 3070 \text{ m/s}$$

ونحصل على النتيجة نفسها عندما نستخدم العلاقة:

$$v = 2\pi r / T$$

(c) المعادلة (33 - 9) توحى بأن v ، تتناسب مع $\sqrt{1/r}$ ، وبالتالي:

$$r = r_E + h = 6380 + 200 = 6580 \text{km}$$

$$\dot{r} = v \sqrt{\frac{r}{r_E}} = 3070 \sqrt{\frac{42300}{6580}} = 7780 \text{ m/s}$$

نلاحظ أن مركز مدار القمر دائماً عند مركز الأرض، وبالتالي من غير الممكن أن يبقى

مدار القمر فوق نقطة معينة على الأرض عند أي خط عرض $\theta \neq 0^\circ$

(مثال نموذجي 9-1)

تخيل أنك رائد فضاء في مكوك فضائي لمتابعة قمر تريد إصلاحه، وقد وجدت نفسك في مدار دائري له نصف قطر مدار القمر نفسه ولكنك خلفه مسافة 30km ، كيف يمكنك أن تلحق به ؟

الإجابة:

من المعادلة (33 - 9) ، السرعة تتناسب مع $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ، إذاً يجب أن تنتقل إلى مدار أصغر من أجل زيادة سرعتك، لاحظ بأنه لا يمكنك أن تغير سرعتك دون تغيير المدار.

9-6-3 إنعدام الوزن

الناس وأجسام أخرى تدور حول الأرض يقال عنها بأنها تعاني إنعداماً في الوزن، دعنا في البداية ننظر إلى الحالة الأبسط وهي المصعد، في الشكل (9 - 10 - a)، المصعد في حالة سكون ويدخله كيس معلق بوساطة نابض مدرج يدل على شدة القوة، وهذه القوة تساوي وتعاكس القوة المطبقة على الكيس من النابض جهتها إلى الأعلى ندعوها w ، بما أن الكيس لا يتسارع.

$$w - mg = 0 \quad (9 - 37)$$

حيث أن mg ، هي وزن الكيس.

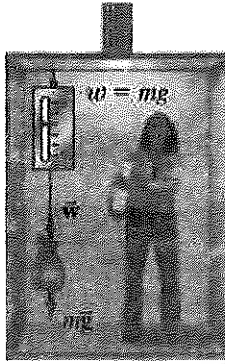
$$w = mg \quad (9 - 38)$$

قوة الشد تساوي قوة ثقل الكيس.

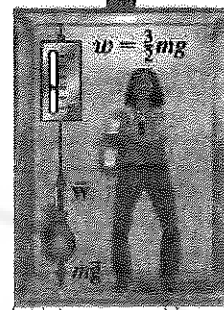
• لنفرض أن المصعد يصعد نحو الأعلى بتسارع a ، الشكل (9 - 10 - b)، نطبق قانون نيوتن الثاني كما يبدو من جملة مقارنة عطالية (المصعد نفسه ليس جملة عطالية)

$$w = mg + ma \quad (9 - 39)$$

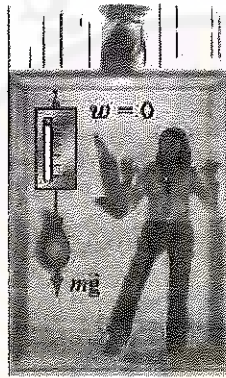
حيث اخترنا الإتجاه الموجب إلى الأعلى و w ، قد أصبحت أكثر من mg ، ندعو w بالوزن الظاهري للكيس هو في هذه الحالة أكبر من وزنه الحقيقي mg .



(a) $\vec{a} = 0$



(b) $\vec{a} = \frac{1}{2} \vec{g}$ (up)



(c) $\vec{a} = \vec{g}$ (down)

الشكل (9 - 10)

-a الجسم في المصعد عند السكون يؤثر بقوة على تدريج النابض يساوي وزنه.

-b في المصعد عند التسارع إلى الأعلى بتسارع $\frac{g}{2}$ ، الثقل الظاهري أكبر بمرة ونصف من الثقل الحقيقي.

-c عندما يسقط المصعد سقوطاً حراً ، الجسم يعاني انعدام الوزن ونقرأ على التدريج صفر.

• إذا هبط المصعد نحو الأسفل بتسارع a ، الشكل (9 - 10 - c)

$$w = mg - ma \quad (9 - 40)$$

فالثقل الظاهري أقل من w ، واتجاه السرعة $\vec{v}$ ، غير مهم المهم فحسب ، هو اتجاه التسارع

وقيمته ، لنفرض على سبيل المثال أن تسارع المصعد $\frac{g}{2}$ ، إلى الأعلى.

$$w = mg + m \left(\frac{g}{2} \right) = \frac{3}{2} mg$$

تدرج النابض يشير إلى 1.5، مرة من الوزن الحقيقي للكيس، الشكل (9 - 10 - b)،
والشيء نفسه بالنسبة إلى شخص وزنه الظاهري (يساوي القوة الناعمية المؤثرة فيه من
أرض المصعد) ويساوي 1.5، مرة من وزنه الحقيقي، نستطيع القول أنها تعاني $1.5g$ ،
وكذلك رائد الفضاء يعاني من عدة g . بدلاً عن ذلك إذا هبط المصعد نحو الأسفل بتسارع

$$a = -\frac{1}{2}g$$

$$w = mg - m\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{1}{2}mg \quad (9 - 41)$$

وبالتالي تدرج النابض يشير إلى نصف الوزن الحقيقي، وإذا سقط المصعد سقوطاً حراً
وبالتالي $a = -g$

$$w = mg - mg = 0 \quad (9 - 42)$$

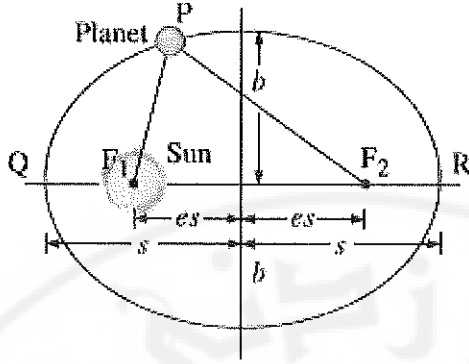
التدرج يشير إلى الصفر، الشكل (9 - 10 - c) الكيس يبدو بلا وزن، ولا يسقط قلم
الرصاص ويبقى معلقاً، وتدعى هذه الظاهرة بانعدام الوزن الظاهري لأن في جملة المقارنة
للشخص الأجسام لا تسقط أو تبدو كأن لها وزناً على الرغم من الجاذبية، الجاذبية لا تختفي
بل تبقى مؤثرة في كل جسم حيث أن وزنه ما يزال mg ، الشخص والأجسام الأخرى تبدو
بدون وزن فحسب، بسبب أن المصعد يتسارع في حالة السقوط الحر، ولا يوجد قوى تماس
على الشخص تجعله يشعر بالوزن.

7-9 قوانين كبلر

قبل نصف من وضع قوانين نيوتن الثلاثة للحركة وقانون التجاذب الكوني، أنجز العالم
الألماني جوهانس كبلر (1630 - 1571)، شرحاً مفصلاً لحركة الكواكب حول الشمس
بثلاثة قوانين.

1-7-9 القانون الأول

مسار كل كوكب حول الشمس هو قطع ناقص، وتكون الشمس أحد محارقه. الشكل
(9 - 11).

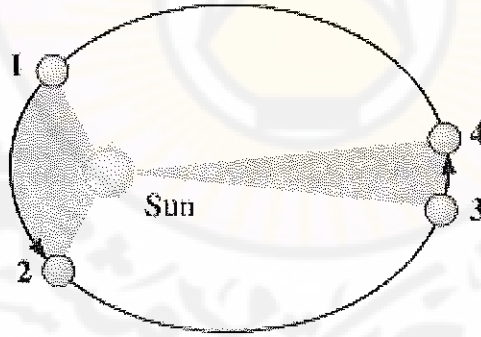


الشكل (9 - 11)

قانون كبلر الأول

2-7-9 القانون الثاني

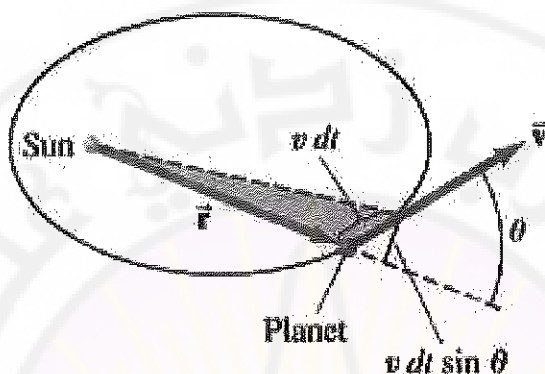
كل كوكب يتحرك فإن الخط الوهمي المرسوم من الشمس إلى الكوكب يمسح مساحات متساوية خلال أدوار متساوية الشكل (9 - 12)



الشكل (9 - 12)

قانون كبلر الثاني، مساحة المنطقتين المظللتين متساوية، الكوكب يتحرك من النقطة 1 إلى النقطة 2 ويستغرق نفس الزمن للحركة من النقطة 3 إلى النقطة 4 ، الكواكب تتحرك بسرعة

أكبر كلما كانت أقرب إلى الشمس. سوف نحدد الإندفاع الزاوي للكوكب بدلالة المساحة الممسوحة. الشكل (9 - 13)، الكوكب يتحرك على اهليلج (قطع ناقص)، ويمسح مساحة مقدارها dA ، خلال زمن dt ، و يقطع مسافة قدرها vdt ، مساحة المثلث القائم الذي قاعدته r ، وارتفاعه $vdt \sin \theta$.



الشكل (9 - 13)

$$dA = \frac{1}{2}(r) \cdot (vdt \sin \theta) \quad (9 - 43)$$

$$dA/dt = \frac{1}{2}rv \sin \theta \quad (9 - 44)$$

قيمة شعاع الإندفاع الزاوي $\vec{L}$ ، حول الشمس

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mrv \sin \theta \quad (9 - 45)$$

وبالتالي:

$$dA/dt = L/2m \quad (9 - 46)$$

ولكن $L = \text{const.}$ ، لأن قوة الجاذبية $\vec{F}$ ، موجهة باتجاه الشمس، وبالتالي فإن عزمها معدوم (مع إهمال تأثير بقية الكواكب)، إذاً:

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.} \quad (9 - 47)$$

3-7-9 القانون الثالث

نسبة مربع الأدوار لأي كوكبين يدوران حول الشمس تساوي نسبة مكعب أنصاف المحاور الرئيسية، نصف المحور الرئيسي هو نصف طول المحور الرئيسي للمدار كما مبين على الشكل (9 - 11)، ويمثل المسافة الوسطى من الشمس، لذلك إذا كان T_1 و T_2 ، يعبران عن الأدوار (الزمن المطلوب لدورة واحدة حول الشمس) من أجل أي كوكبين s_1, s_2 ، تمثل أنصاف محاورها الرئيسية وبالتالي:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^3 \quad (9 - 48)$$

$$\frac{s_1^3}{T_1^2} = \frac{s_2^3}{T_2^2} \quad (9 - 49)$$

وهذا يعني $\frac{s^3}{T^2}$ ينبغي أن تكون نفسها من أجل كل كوكب.

توصل كبلر إلى قوانينه من خلال تحليل النتائج التجريبية بعد خمسين عاماً برهن نيوتن على صحة قوانين كبلر رياضياً، إنطلاقاً من قانون التجاذب الكوني وقوانين الحركة، وإستخدم قوانين كبلر للبرهان على صحة قانون الجاذبية المعادلة (1 - 9)، سنشتق قانون كبلر الثالث من أجل الحالة الخاصة (المدار الدائري) حيث نصف المحور هو نصف القطر r ، (معظم مدارات الكواكب قريبة من دائرة). إن نصف المحور الرئيسي يساوي المسافة الوسطى للكوكب عن الشمس الذي يساوي نصف مجموع مسافة أقرب كوكب وأبعد كوكب عن الشمس الشكل (9 - 11)، في النقاط Q, R ، معظم مدارات الكواكب دائرية تقريباً ونصف المحور هو نصف قطر الدائرة، نكتب أولاً قانون نيوتن الثاني ونأخذ قانون التجاذب العام بعين الاعتبار والتسارع المركزي، نفرض أن كتلة الشمس M_s ، أكبر بكثير من كتلة الكوكب m_1 ، وبالتالي سنهمل تأثير الكواكب على بعضها حسب قانون نيوتن الثاني.

$$G \frac{m_1}{r_1^2} M_s = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \quad (9 - 50)$$

r_1 : مسافة الكوكب عن الشمس.

v_1 : السرعة الوسطى للكوكب على مداره.

قوة جذب الشمس للكوكب التي تبقى على مساره والزمن الدوري للكوكب T_1 ، هو الزمن اللازم لإنجاز دورة كاملة واحدة فحسب، ليقطع مسافة تساوي $2\pi r_1$.

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} \quad (9 - 51)$$

نعوض هذه العلاقة في المعادلة أعلاه.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \quad (9 - 52)$$

هذا من أجل الكوكب 1، وليكن (المريخ) مثلاً، و الإشتقاق نفسه يطبق من أجل الكوكب 2، وليكن (زحل) و كلاهما يدور حول الشمس.

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} \quad (9 - 53)$$

T_2 و r_2 ، هو الزمن الدوري ونصف القطر المدار على الترتيب، من أجل الكوكب

الثاني إلا أن الطرفين الأيمنين من المعادلتين السابقتين متساويان:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \quad (9 - 54)$$

وهو قانون كبلر الثالث، المعادلات (9 - 53)، (9 - 54)، صالحة أيضاً من أجل المدارات الإهليلجية إذا استبدلنا r ، بنصف المحور الرئيسي s .

اشتقاق المعادلات (9-53)، (9-54)، (القانون الثالث لكبلر) عن طريق مقارنة كوكبين يدوران حول الشمس، ولكنهما عامان بما فيه الكفاية ليطبقا على جمل أخرى، على سبيل المثال نستطيع أن نطبق المعادلة (9-53)، على القمر الذي يدور حول الأرض، أونستطيع أن نطبق المعادلة (9-54)، لمقارنة قمرين يدوران حول المشتري، ولكن قانون كبلر الثالث المعادلة (9-54)، يطبق فحسب، على الأجسام التي لمداراتها مركز الجذب نفسه، لا يمكن أن نطبق المعادلة (9-54)، بمقارنة مدار القمر حول الأرض إلى مدار المريخ حول الشمس لأنهما يرتبطان بمركزي جذب مختلفين، في المثال التالي نفرض أن المدارات دائرية، وهذا ليس صحيح بشكل عامة.

4-7-9 أين المريخ

قام العالم كبلر بقياس دور المريخ فوجد أنه حوالي 687 يوماً (يوم الأرض)، هل يمكن حساب المسافة الوسطى بين المريخ والشمس باستخدام الأرض كجملة مقارنة. لدينا دور كل من المريخ والأرض و يمكننا إيجاد المسافة بين المريخ والشمس باستخدام قانون كبلر الثالث، المسافة بين الأرض والشمس $r_{ES} = 1.50 \times 10^{11}m$ ، لنفرض أن المسافة من المريخ إلى الشمس r_{MS} ، وأن المسافة بين الأرض-شمس r_{ES} ، من قانون كبلر الثالث المعادلة (9-54).

$$\frac{r_{MS}}{r_{ES}} = \left(\frac{T_M}{T_E}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1.88yr}{1yr}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.52$$

$$r_{MS} = 1.52 \times 1.50 \times 10^{11}m = 2.28 \times 10^{11}m$$

5-7-9 تحديد كتلة الشمس

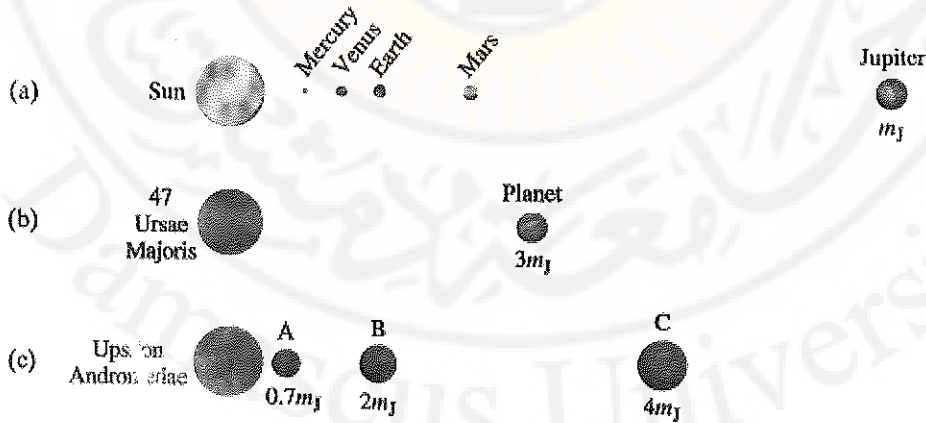
إن مسافة الأرض عن الشمس $r_{ES} = 1.50 \times 10^{11}m$ ، المعادلة (9-53) تربط كتلة الشمس M_S ، ودور حركتها ببعدها عن أي كوكب، كالأرض مثلاً، دور الأرض $T_E = 1yr = 3.16 \times 10^7s$

نحل المعادلة (9-53) من أجل.

$$M_s = \frac{4\pi^2 r_{ES}^3}{GT_E^2} = \frac{4\pi^2 (1.50 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (3.16 \times 10^7)^2} = 2.0 \times 10^{30} kg$$

القياسات الدقيقة لمدارات الكواكب تشير إلى أنها لا تتبع قوانين كبلر، على سبيل المثال ملاحظة الانحراف القليل عن كونها مدارات إهليلجية كاملة قد حذر منه نيوتن وعزا ذلك إلى أن الأرض تنجذب ليس فحسب، إلى الشمس، ولكن أيضاً إلى كواكب أخرى، مثل هذا الانحراف أو الإضطراب في مدار زحل كان بمنزلة تلميح ساعد نيوتن لصياغة قانون التجاذب الكوني، كل الأجسام تتأثر بالجاذبية، هذه الملاحظات عن الانحرافات والإضطرابات أدت إلى إكتشاف نبتون وبلوتو، الانحرافات في مدار أورانوس، على سبيل المثال لا يمكن أن تكون محسوبة من أجل الإضطرابات الناجمة عن كواكب أخرى معروفة، الحسابات الدقيقة في القرن التاسع عشر أشارت إلى هذه الانحرافات، يمكن أن تكون صحيحة إذا كان هناك كوكب آخر بعيد موجود في المجموعة الشمسية.

أوضاع هذا الكوكب قد تم التنبؤ بها من الانحرافات في مدار أورانوس، وبالمثل تمت التعرف على بلوتو في عام 1930، من الإضطراب الصغير في مدار نبتون، بدءاً من منتصف 1990، وجد أن الكواكب تدور حول النجوم البعيدة، وتم إستنتاج ذلك من الترنح النظامي لكل نجم، بسبب جذب الكواكب الدوارة، وقد تمت معرفة العديد من الكواكب الزائدة في المجموعة الشمسية الشكل (9 - 14).



الشكل (9 - 14)

إن التطور في قوانين نيوتن للتجاذب الكوني والقوانين الثلاثة للحركة لنيوتن كانت بمنزلة الإنجاز المنطقي. بمساعدة هذه القوانين تم شرح حركة الأجسام على الأرض وفي السماء، إن حركات الأجسام الثقيلة السماوية والأجسام على الأرض وجدت لتتبع القوانين نفسها (والغير معروفة مسبقاً)، من أجل هذا السبب وبما أن نيوتن جمع نتائج العلماء إلى نظامه، حتى سمي تركيب أو (نظام) نيوتن، القوانين التي صيغت من قبل نيوتن إستنتجت بوساطة قوانين السببية، ونعني بالسببية على أنها فكرة حدث واحد يستطيع أن يسبب الآخر، عندما تضرب الحجر النافذة نستدل بأن الحجر كسرت النافذة هذه فكرة عن السبب والفعل وتعلق بقوانين نيوتن.

لوحظ تسارع الجسم بسبب محصلة القوى المؤثرة فيه. و نتيجة لنظريات نيوتن، الكون يبدو للعديد من العلماء والفلاسفة كآلة الكبيرة التي تتحرك أجزاؤها بطريقة حتمية، هذه هي النظرة الحتمية للكون وقد عدلت بوساطة علماء في القرن العشرين.

8-9 نقطة لاغرانج

إشتق الرياضي جوزيف لويس لاغرانج خمس نقاط خاصة في منطقة مدار الأرض حول الشمس حيث أن قمراً صناعياً صغيراً كتلته m ، يمكن أن يدور حول الشمس بدور الأرض نفسه الذي يساوي سنة واحدة، أحد هذه النقاط هي "نقاط لاغرانج" التي تدعى L_1 ، وتقع بين الأرض والشمس، على الخط الواصل بينهما الشكل (9 - 15)، وبذلك تكون الأرض والقمر الصناعي مفصولين دائماً عن بعضهما مسافة d ، نصف قطر مدار القمر: $R_{ES} - d$.

يمكننا إيجاد d ، باستخدام قانون نيوتن التجاذبي وجعله يساوي حاصل ضرب الكتلة بالتسارع المركزي. ولكن كيف يمكن لجسم مداره أصغر من مدار الأرض أن يكون له دور الأرض نفسه، قانون كبلر الثالث ينص على أن المدار الصغير حول الشمس يكون له دور صغير أيضاً، ولكن هذا القانون يتبع فحسب، لجاذبية الشمس، إن الكتلة m ، تتجذب بالأرض والشمس، بما أن كتلة القمر الصناعي صغيرة مقارنة مع كتلة الأرض والشمس

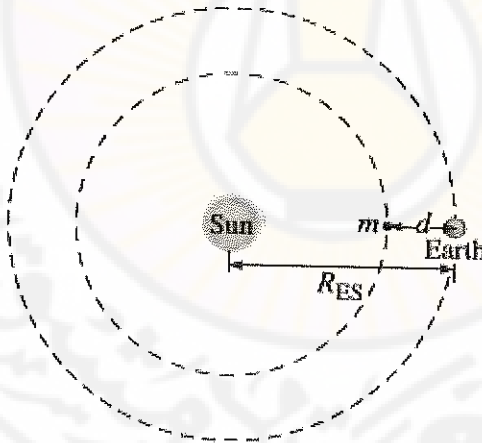
ومن أجل التقريب الأفضل مدار الأرض سوف يحدد فحسب، بالشمس، نطبق قانون نيوتن الثاني على الأرض.

$$G \frac{M_E M_S}{R_{ES}^2} = M_E \frac{v^2}{R_{ES}} = \frac{M_E (2\pi R_{ES})^2}{R_{ES} T^2} \quad (9 - 55)$$

$$G \frac{M_S}{R_{ES}^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{ES} \quad (9 - 56)$$

نطبق قانون نيوتن الثاني على القمر الصناعي m ، (الذي له دور الأرض نفسه T) بما فيه جذب الأرض والشمس

$$G \frac{M_S}{(R_{ES} - d)^2} - G \frac{M_E}{d^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} (R_{ES} - d) \quad (9 - 57)$$



الشكل (9 - 15)

إيجاد موضع نقطة لاغرانج L_1 ، من أجل القمر الصناعي الذي يبقى على طول خط الدوران بين الشمس والأرض عند مسافة d ، من الأرض حيث ان الكتلة m ، عند L_1 ، لها نفس الدور الأرض حول الشمس.

$$G \frac{M_S}{R_{ES}^2} \left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right)^{-2} - G \frac{M_E}{d^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{ES} \left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right) \quad (9-58)$$

وباستخدام منشور ثنائي الحد لنيوتن.

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad x \ll 1$$

$$G \frac{M_S}{R_{ES}^2} \left(1 + 2 \frac{d}{R_{ES}}\right) - G \frac{M_E}{d^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{ES} \left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right) \quad (9-59)$$

نعوض $G \frac{M_S}{R_{ES}^2}$

$$G \frac{M_S}{R_{ES}^2} \left(1 + 2 \frac{d}{R_{ES}}\right) - G \frac{M_E}{d^2} = G \frac{M_S}{R_{ES}^2} \left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right) \quad (9-60)$$

بالحل نجد

$$d = \left(\frac{M_E}{3M_S}\right)^{\frac{1}{3}} R_{ES}, \quad d = 1.5 \times 10^6 km$$

ملاحظة (1): بما أن $x = \frac{d}{R_{ES}} = 10^{-2}$ ، هذا ما يبرر استخدام نشر ثنائي الحد.

ملاحظة (2): وجود القمر الصناعي في L_1 له فائدتان، منظر القمر من الشمس لا ينخسف بالأرض. وبالتالي يكون دائماً قريباً من الأرض، لنقل المعلومات بسهولة.
النقطة L_1 ، في النظام (شمس - أرض) عادة هي نقطة مرجعية بالنسبة إلى نقطة المراقبة الشمسية والهيليوسفيرية (*Heliospheric*) (SOHO) للقمر الصناعي.

3. القوى النووية الشديدة

4. القوى النووية الضعيفة

في هذا الفصل ناقشنا قوة الجاذبية بشكل مفصل، القوى النووية والضعيفة تعمل في النوى الذرية، وتظهر آثارها أيضاً في ظاهرة النشاط الإشعاعي والطاقة النووية، إنها أقل وضوحاً في حياتنا اليومية.

حاول الفيزيائيون العمل على نظرية توحيد القوى الأربع، التي تعد بعض أو كل هذه القوى على أنها أشكال مختلفة للقوة الأساسية نفسها، وبالتالي القوى النووية الضعيفة والكهرطيسية نظراً يمكن توحيدها إلى نظرية الالكترو ضعيفة، التي تعد فيها القوى الكهرطيسية والضعيفة متحدة نظرياً، تشكل نظرية الالكترو ضعيفة، التي تبدو فيها القوتان الكهرطيسية والضعيفة شكلين مختلفين لقوة الكتروضعيفة وحيدة، محاولة الذهاب أبعد من ذلك في توحيد القوى مثل نظريات التوحيد الرئيسية (GUT)، تعد مواضيع بحث ساخنة في هذه الأيام. القوى العادية و قوى أخرى مثل الجاذبية والشد والدفع، وقوى أخرى أيضاً مثل قوة الإحتكاك، تعد اليوم إحدى القوة الكهرطيسية المؤثرة في الذرات، على سبيل المثال قوة أصابعك تؤثر في قلم الرصاص ناتجة عن رد الفعل بين الإلكترونات الخارجية للذرات لإصبعك وتلك التي في قلم الرصاص.

9-11 الجاذبية و إنحناء الفضاء

لقد وجدنا أن قوة الجاذبية تؤدي وظيفة مهمة في العملية التي تحدث بين النجوم، الجاذبية مهمة أيضاً في تطور الكون بشكل كامل، ليست إحدى القوى الأربع الأخرى في الطبيعة، إن أسباب نشوء الجاذبية تؤدي الوظيفة المهيمنة في الفضاء.

1. لمجالها الطويل.

2. وهي جاذبة دائماً.

إن القوى النووية القوية والضعيفة تؤثر في مسافات قصيرة جداً فحسب، تبعاً لأبعاد حجم النواة، إلا أنها لا تؤثر في المسافات الفلكية (إنها تؤثر بين النوى في النجوم لإنتاج التفاعلات النووية).

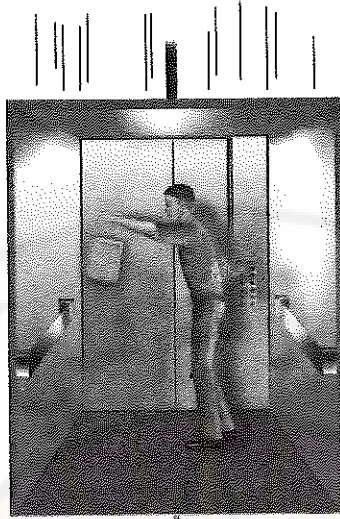
القوة الكهروستاتيكية تشبه الجاذبية، التي تؤثر في مسافات طويلة، ولكنها يمكن أن تكون جاذبة ونافرة، وبما أن الكون لا يبدو أنه يحوي مساحات كبيرة للشحنة الكهربائية المحصلة، ولكن الجاذبية تؤثر كقوة جذب بين كل الكتل، ويوجد تجمع كبير في الكون للكتلة بدون إشارة (ليس + و - كما الشحنة الكهربائية)، قوة الجاذبية كما يشرحها نيوتن في قانونه للتجاذب الكوني، تم تعديلها من قبل أينشتاين، في النظرية النسبية العامة، لقد طورها أينشتاين لتشكيل أساساً لعلم الفضاء الديناميكي، في النظرية النسبية الخاصة إستنتج أينشتاين بأنه لا يمكن لمراقب تحديد سواء كانت جملة المقارنة ساكنة أو متحركة بسرعة ثابتة، وهكذا قوانين الفيزياء يجب أن تكون ذاتها في كل جمل المقارنة العطالية، ولكن ماذا حول الحالة الأكثر عمومية للحركة حيث جمل المقارنة يمكن أن تتسارع. عالج أينشتاين مسألة تسارع جمل المقارنة في النظرية النسبية العامة، وفيها أيضاً تم تطوير نظرية الجاذبية، إن رياضيات النظرية النسبية معقدة لذلك فإن المناقشة الرئيسية ستكون بشكل كمي، سنبدأ بمبدأ أينشتاين للتكافؤ الذي ينص:

لا يوجد تجربة يمكن إنجازها، للتمييز بين الحقل التجاذبي المتجانس والتسارع المكافئ المتجانس.

إذا شعر المراقبون أنهم يتسارعون (سيارة تتسارع على منحني)، لا يمكنهم أن يبرهنوا تجريبياً، أنهم لا يخضعون إلى جذب حقل الجاذبية، وبالعكس يمكننا أن نعتقد بأننا مجذوبون بواسطة الجاذبية حيث أننا في الحقيقة نخضع لتسارع ليس له علاقة بالجاذبية. كتجربة ذهنية لنفرض أن شخصاً في مصعد يسقط سقوطاً حراً قريباً من سطح الأرض، إذا كان مراقبنا يحمل كتاباً في يده ثم تركه ماذا يحصل ؟ الجاذبية سوف تشده نحو الأسفل باتجاه الأرض، ولكن بنفس المعدل (9.8 m/s^2) ، الذي يسقط فيه الشخص والمصعد معاً، وبالتالي الكتاب سيحوم إلى جانب يد الشخص انظر الشكل (9 - 17)، ونفس المفعول سيحصل تماماً إذا كانت جملة المقارنة في حالة سكون، حيث لا يوجد قوى مؤثرة، ومن ناحية أخرى إذا كان المصعد خارج الفضاء حيث لا يوجد حقل للجاذبية الأرضية، الكتاب سيعوم.

كما في الشكل (9 - 17 - a). إذا كان المصعد يتسارع إلى الأعلى بتسارع $(9.8 m/s^2)$ فإن الكتاب سيسقط إلى الأسفل باتجاه الأرض، والسبب حسب مبدأ التكافؤ، لا يستطيع المراقب التمييز بأن الكتاب سقط بسبب صعود المصعد إلى الأعلى أم بسبب الحقل التجاذبي الذي يؤثر إلى الأسفل والمصعد عند السكون، إن كلا الحالتين متكافئتان.

مبدأ التكافؤ يمكن أن يستخدم للبرهان، بأن الضوء يجب أن ينحرف بسبب قوة الجاذبية لجسم ضخم، دعنا نتخيل التجربة التالية في مصعد في الفضاء الحر، من المفترض ألا توجد جاذبية تؤثر، إذا كانت حزمة الضوء تدخل في ثقب داخل المصعد. الحزمة تسلك مسار مستقيم خلال المصعد، وتظهر بقعة في الجهة المقابلة للمصعد إذا كان المصعد في حالة سكون الشكل (9 - 18 - a).



g
(a) *Principi
equivalente*



g
(b)

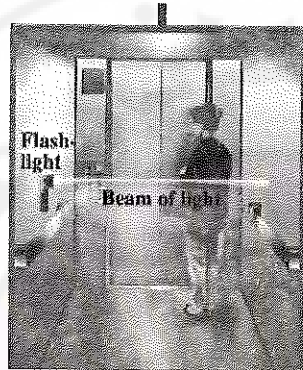
الشكل (9 - 17)

سقوط حر بتأثير الجاذبية للمصعد والشخص

a- شخص يحرر كتاب.

b- بعد بضعة دقائق ، الكتاب المحرر يحوم حول يد صاحبه.

إذا كان المصعد متسارعاً إلى الأعلى كما في الشكل (9 - 18 - b)، الحزمة الضوئية تستمر في الحركة بخط مستقيم، كما يلاحظها المراقب في جملة المقارنة الأصلية، عند التسارع إلى الأعلى حيث الحزمة الملاحظة تنحرف إلى الأسفل، لماذا، لأن خلال مسير الضوء من ناحية لأخرى من المصعد يتحرك المصعد إلى الأعلى حتى لو بسرعة متزايدة.



(a)



(b)

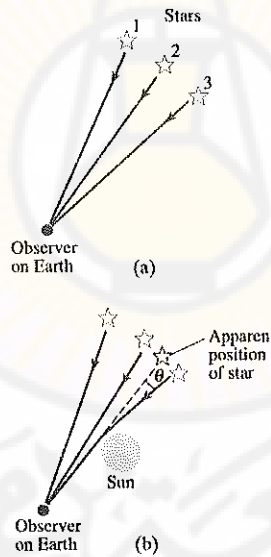
الشكل (9 - 18)

a- حزمة الضوء تسير وفق مستقيم خلال مصعد لا يتسارع.

b- حزمة الضوء تنحني في مصعد متسارع الذي سرعته تزداد إلى الأعلى، كلاً المنظرين يمكن رؤيتهم من خلال مراقب خارجي في جملة مراقبة عطالية.

دعا ألبرت اينشتاين (1879 – 1955)، هذا التكافؤ بين الجاذبية والكتلة العطالية بمبدأ التكافؤ، وإستخدامه أساساً للنظرية النسبية العامة (1916)، بطريقة أخرى في مبدأ التكافؤ لا يوجد ملاحظين تجريبيين يمكنهم التمييز فيما إذا كان التسارع ينشأ بسبب قوة الجاذبية أو بسبب أن جملهم المقارنة تتسارع، إذا كنت بعيداً في الفضاء والتفاحة سقطت على أرض مركبتك فإنه يمكنك أن تفترض بأن قوة الجاذبية كانت تؤثر في التفاحة، ولكن من الممكن أيضاً أن التفاحة سقطت بسبب أن سفينتك تسارعت إلى الأعلى (بالنسبة إلى جملة العطالة)، إن المفاعيل ستكون غير ملاحظة حسب مبدأ التكافؤ بسبب عطالة التفاحة، و الكتل التجاذبية التي تحدد كيف يتفاعل الجسم مع التأثير الخارجي الغير ملاحظ.

النظرية النسبية العامة تتوقع بأن الضوء يتأثر بالجاذبية، لقد تم البرهان بأن الضوء الصادر عن النجم البعيد سينحرف عندما يمر بالقرب من الشمس، كما مبين على الشكل (9 – 19)، كالإنحراف المقاس في عام 1919، خلال كسوف الشمس (الكسوف يختزل ضوء الشمس وبالتالي النجوم على خط واحد عند أثناء المشاهدة).



الشكل (9 – 19)

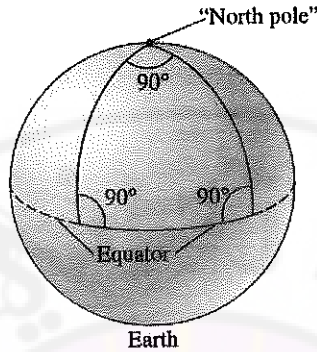
- a* - ملاحظة ثلاث نجوم في السماء من الأرض.
- b* - إذا مر الضوء الصادر من احدهما بالقرب من الشمس ينحني مسار هذه الحزمة بفضل جاذبية الشمس فالنجم يبدو كأنه صادر عن مكان أعلى من المكان الحقيقي.

حسب مبدأ التكافؤ جملة المقارنة المتسارعة إلى الأعلى تكافئ حقل الجاذبية إلى الأسفل، حيث نستطيع رسم مسار ضوئي منحني في الشكل (9 - 19 - b)، بسبب تأثير حقل الجاذبية وهكذا نتوقع قوة تؤثر في حزمة الضوء وتحرفها عن مسار الخط المستقيم، مبدأ التكافؤ مرتبط بمفهوم وجود نوعين من الكتلة، قانون نيوتن الثاني $F = ma$ ، يستخدم الكتلة العطالية، يمكننا القول أن الكتلة العطالية تعبر عن مقاومة أي نوع من القوى، والنوع الثاني من الكتلة هو الكتلة التجاذبية، عندما يجذب جسم جسمًا آخر بقوة الجاذبية (قانون نيوتن للتجاذب الكوني، $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$)، شدة هذه القوة يتعلق بجاء الكتل التجاذبية للجسمين. إنه شبيه جداً بقانون كولون في الكهرباء الساكنة، ولكن الشحنة الكهربائية للجسم لا تتعلق بكتلته العطالية، لذلك لماذا ينبغي علينا أن نتوقع بأن الكتلة التجاذبية للجسم (الشحنة التجاذبية إن شئت) تتعلق بالكتلة العطالية، لقد افترضنا بأنهم نفس الشيء لماذا؟ والسبب أنه لا توجد تجربة ولا توجد حادثة عالية الدقة أوجدت الفرق بين الكتلة العطالية و الكتلة التجاذبية، على سبيل المثال (عند غياب مقاومة الهواء تسقط كل الأجسام بتسارع واحد g ، على الأرض)، هذه طريقة أخرى للقول أن الكتلة التجاذبية تكافئ الكتلة العطالية، فيرمات أوضح أن الظواهر الضوئية بما فيها الانعكاس والانكسار والتمحرق تكون قابلة

للإشتقاق من المبدأ البسيط التالي:

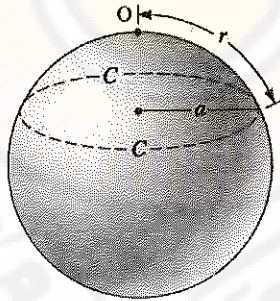
الضوء يسافر بين نقطتين في الفضاء، يتبع المسار الأصغري في الفضاء لذلك إذا كانت الجاذبية تحني المسار الضوئي وبالتالي الجاذبية يجب كذلك أن تحني الفضاء نفسه، وكذلك الفضاء نفسه يمكن أن يكون منحنياً وكتلته التجاذبية تسبب الإنحناء. ماذا نقصد بالفضاء المنحني؟ لفهم ذلك دعنا ننظر في الهندسة الإقليدية المستوية، حيث هناك العديد من الفرضيات والنظريات، مثل مجموع زوايا المثلث هو 180° ، أما في الهندسة الإقليدية التي تشمل الفضاء المنحني من الصعب أن نتخيل الفضاء المنحني الثلاثي الأبعاد، لفهم فكرة الفضاء المنحني باستخدام السطوح الثنائية البعد مثلاً، السطح الثنائي البعد للكرة، من الواضح منحنى الشكل (9 - 20)، نلاحظ أن مجموع زوايا المثلث لم يعد 180° ، والخط المستقيم المكافئ هو أقصر مسافة بين نقطتين و يدعى الجيوديسي وهو (على كرة) قوس

لدائرة كبيرة مثل خط الاستواء و خطوط الطول وإذا كان المثلث صغير بالمقارنة مع نصف قطر الكرة فإن الفضاء يبدو كالمستوي.



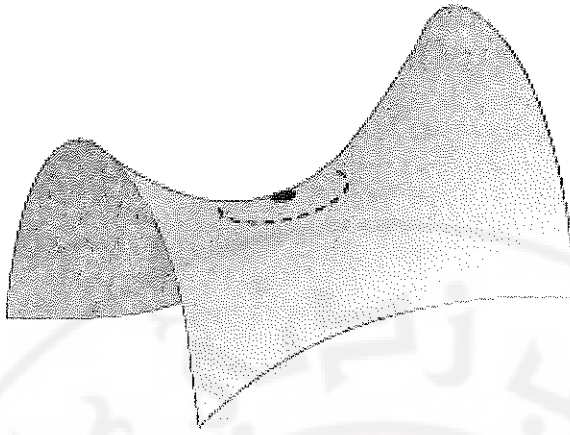
الشكل (9 - 20)

على السطح المنحني الثنائي البعد مجموع الزوايا الثلاث للمثلث قد لا يساوي 180° الطريقة الأخرى لإختبار إنحناء الفضاء هي قياس أنصاف الأقطار r ، والمحيط C ، لدائرة كبيرة، على السطح المستوي $C = 2\pi r$ ، ولكن على السطح الكروي الثنائي البعد C ، أقل من $2\pi r$ ، الشكل (9 - 21)، والتناسب بين المحيط ونصف القطر أقل من 2π ، والسطح يعد موجب الإنحناء، وعلى السطح الذي يشبه سرج الحصان الشكل (9 - 22)، محيط الدائرة أكبر من $2\pi r$ ، ومجموع الزوايا أقل من 180° ، ويدعى السطح سالب الإنحناء.



الشكل (9 - 21)

على السطح الكروي الثنائي البعد محيط الدائرة C ، حول النقطة O ، كمركز، ان نصف قطر الدائرة وليس الكرة هي المسافة r ، على السطح $C = 2\pi a < 2\pi r$



الشكل (9 - 22)

مثال على السطح الثنائي البعد له إنحناء سالب.

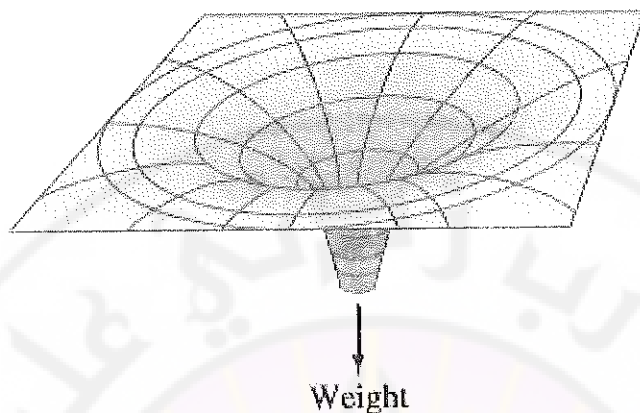
12-9 الكون المغلق والمفتوح

ماذا عن كوننا ليس فحسب، بالقرب من الكتل الضخمة ما الإنحناء الإجمالي للكون؟ هل له إنحناء موجب أم سالب أم إنه مستو (إنحناء معدوم)، نحن ندرك أن عالمنا أقلّيدي (مستوي)، ولكننا لانستطيع أن نستثني إمكانية أن للفضاء إنحناء صغيراً جداً لا نلاحظه، ببساطة، إنه سؤال مهم وحاسم في علم الفضاء والإجابة عليه تتطلب تجارب علمية دقيقة، إذا كان للكون إنحناء موجباً فإنه سيكون مغلقاً أو يكون محدود الحجم، هذا لا يعني أن النجوم والمجرات تمتد خارج حد معين، فوراء الفضاء الفارغ لا يوجد حد أو حافة لمثل هذا الكون، لأن الكون موجود في كل مكان، إذا سار الجسيم على خط مستقيم في إتجاه معين فإنه سيعود إلى نقطة الأصل ولو بعد حقبة من الزمن، وإذا كان انحناءه سالباً أو صفراً فالكون سيكون مفتوحاً وسيستوعب باستمرار، في هذه الأوقات الدليل القوي على أن الكون مغلق على مسافات كبيرة جداً لكونه مستوياً حتى لا نستطيع القول أنه موجب أم سالب الإنحناء.

13-9 الثقوب السوداء

اعتماداً على نظرية اينشتاين الفضاء- الزمن هو منحن، بالقرب من الأجسام الضخمة يمكننا أن نتخيل أن الفضاء كغشاء مطاطي رقيق، وكان جسماً ثقیلاً مغلقاً به الشكل (9 - 23)، الوزن يوافق كتلة ضخمة تسبب إنحناء الفضاء، لذلك في نظرية اينشتاين لا

نتحدث عن القوة الجاذبية المؤثرة في الأجسام، و بدلاً عن ذلك نقول أن الأجسام والأشعة الضوئية تتحرك كما يحلو لها لأن الفضاء - الزمن منحني.



الشكل (9 - 23)

غشاء مطاطي يشبه الزمن - فضاء المنحني بواسطة المادة.

الجسم يبدأ من السكون أو يتحرك ببطء بالقرب من الكتلة الكبيرة، متتبعاً الجيوديسي *geodesi* باتجاه الكتلة الضخمة، الانحناء الأقصى للفضاء- الزمن مبين على الشكل (9 - 23)، ومنشأ الثقوب الأسود، كثافته عالية، والضوء لا يستطيع الهروب منه، والجسم الذي كتلته M ، يخضع لإنهيار تجاذبي، متقلصاً بسبب الجاذبية إلى حجم نصف قطره يدعى نصف قطر سوارزشيلد

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (9 - 63)$$

وينهار بسرعة حوالي $10^{-5}s$ ، إلى النقطة $r = 0$ ، مشكلاً كثافة غير محدودة، هذا ما نتوقعه النظرية النسبية العامة، ولكنه غير حتمي، لأننا نحتاج إلى توحيد ميكانيك الكم مع الجاذبية .

تمرين: ما نصف قطر سوارزشيلد من أجل جسم كتلته ضعف كتلة الشمس. إن نصف قطر سوارزشيلد يمثل حادثة الأفق للجسم الأسود، ونعني ما وراء السطح الذي لا يمكن للإشارات المنبعثة أن تصل إلينا، لذلك تخبرنا بالحوادث التي تحصل وراء هذا

السطح، كالنجم ينهار باتجاه الثقب الأسود. الضوء المنبعث عنه يتأثر أكثر فأكثر بالجاذبية، ولكن ما نزال نستطيع رؤيته، ولكن عندما يمر الجسم خلال حادثة الأفق فإن الضوء المنبعث لا يفلت، وينسحب إلى الخلف بفعل الجاذبية، كل ما نستطيع أن نعرفه عن الثقب الأسود هو كتلته، وإندفاعه الزاوي، وشحنه الكهربائي، ولا توجد معلومات أخرى، ولا تفصيل عن بنيته أو طبيعة مادته، لأنه لا توجد معلومات. ولكن كيف نلاحظ الثقب الأسود ؟ إنها تؤثر بقوة الجاذبية في الأجسام القريبة.

يعتقد أن الثقب الأسود في مركز مجرتنا $M \approx 2 \times 10^6 M_{Sun}$ ، قد اكتشف بملاحظة حركة المادة في منطقته، والتقنية الأخرى هي بمراقبة النجوم التي تظهر حركتها عندما يتكون أحد عناصر النظام الثنائي (نجمان يدوران حول مركز الكتلة العام)، ولكن بدون رؤية الرفيق الآخر من المحتمل أن يكون مسحوباً من الرفيق المرئي ، مما يدل على أنه ثقب أسود، عندما تقترب المادة من الثقب الأسود فإنها تتسارع وتصدر أشعة سينية قبل الوقوع في حادثة الأفق، مثل هذه الأشعة السينية و الكتلة الهائلة المحسوبة من الحركة الدورانية هي إثبات على وجود الثقب الأسود، أحد المرشحين ليكون ثقباً أسود في المجموعة الثنائية سيغفوس 1 - X، إنه شائع جداً أن مركز أغلب المجرات مشغول بالثقب الأسود، بكتلة تقدر $10^6 - 10^9$ مرة من كتلة شمس مثل شمسنا.

تمرين: ثقب أسود نصف قطره R ، كتلته تتناسب مع R, R^2, R^3 ، حدد إجابتك،

9-14 النجوم والمجرات

إن أصغر الأجسام في الكون - الجسيمات الأولية، والآن سنتعرف إلى أكبرها ضخامة، النجوم والمجرات، وتجمعات من المجرات هذان النوعان من العوالم الحدية، الجسيمات الأولية والكون مواضيع أكثر متعة وإثارة في العلم. إستخدام التقانات والأفكار الفيزيائية لدراسة السماوات يختص به الفيزياء الفلكية، الفهم الأساسي النظري للكون يعتمد على نظرية إنشتاين العامة التي تعرض مفاهيم أكثر كمالاً عن الجاذبية، وهي تخدم في فهم علم الفلك الحديث الذي يختص بالبحث في الاطار النظري لفهم الملاحظات حول الكون واصله ومستقبله، هذه الاسئلة المثارة صعبة وعميقة، إن الأجوبة الممكنة تشد الخيال، إنها أسئلة مثل هل للكون وجود دائم أم أن له بداية في وقت ما، أما البديل فهو صعب التخيل، الزمن

يعود إلى الخلف بشكل غير محدد، في الماضي أو في لحظة حقيقية عندما بدأ الكون، ولكن ماذا كان قبل ذلك، وماذا أيضاً عن حجم الكون، هل هو غير محدود، حسب العهود القديمة النجوم ما عدا بعضها التي تبدو تتحرك بالنسبة إلى بعض الكواكب كانت مثبتة على كرة خلف الكوكب الأخير، الكون كان محتوى في ذاته تقريباً، و نحن على الأرض كنا عند أو بالقرب من مركزها، ولكن في القرون التي تلت أول تلسكوب لغاليليو في عام 1610 تغيرت نظرتنا إلى الكون رأساً على عقب، لن نضع أنفسنا في المركز ونرى الكون على أنه كبير وواسع جداً والمسافات تدعى بالمسافات الضوئية.

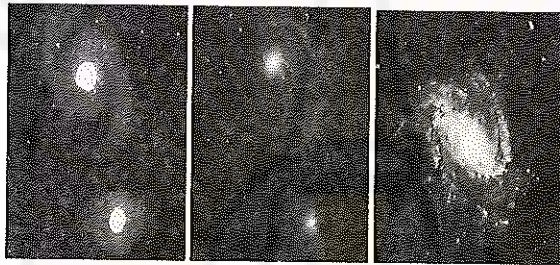
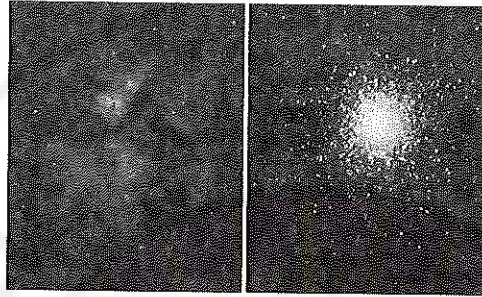
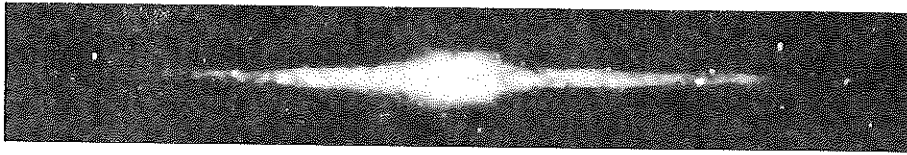
$$1 \text{ ثانية ضوئية} = 300000 \text{ كم}$$

المسافة بين الأرض والقمر = 1.28 ثانية ضوئية و المسافة بين الأرض والشمس = 8.30 دقيقة ضوئية.

في ليلة غير مغمرة نرى آلاف النجوم تتغير في درجة لمعانها، كشريط طويل وغائم يعرف بدرب التبانة، حسب تلسكوب غاليليو درب التبانة يتألف من عدد غير محدود من النجوم، حوالي عام 1750، أعلن توماس أن درب التبانة عبارة عن قرص مستوي من النجوم الممتدة إلى مسافات عظيمة ندعوها بالمجرات،

إن مجرتنا لها قطر حوالي 100000 سنة ضوئية، وسماكتها حوالي 2000 Ly، لها إنتفاخ مركزي ورأذرع لولبية، الشكل (9 - 24)، شمسنا هي نجم يشبه العديد من النجوم، ويقع في منتصف المسافة من مركز المجرة إلى الحافة 26000 Ly، من المركز، تحوي مجرتنا حوالي 100، بليون (10^{11}) نجم، الشمس تدور حول مركز المجرة خلال 250 مليون سنة تقريباً، وبالتالي سرعتها 200 km/s ، بالنسبة إلى مركز المجرة، والكتلة الكلية

لكل النجوم في مجرتنا يقدر بحوالي $3 \times 10^{41} \text{ kg}$ ، إلى جانب ذلك يوجد دليل قوي بأن مجرتنا محاطة بمادة سوداء (ثقوب).



الشكل (9 - 24)

(مثال 2-9):

إحسب الكتلة الكلية لمجرتنا باستخدام النتائج المدارية أعلاه من أجل الشمس حول مركز المجرة، نفرض أن معظم كتلة المجرة تتركز بالقرب من مركزها..

الحل:

نفرض أن المجموعة الشمسية لها كتلة كلية m تتحرك على مدار دائري حول مركز المجرة (كتلتها الكلية M) بتطبيق قانون نيوتن الثاني وقانون التجاذب الكوني:

$$F = ma$$

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

وبالتالي:

$$M = \frac{rv^2}{G} \approx \frac{(26000\text{Ly}) \left(10^{16} \text{m/Ly}\right) (2 \times 10^5 \text{m/s})}{6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2} \approx 2 \times 10^{41} \text{kg}$$

أي أنها تعادل كتلة قدرها 100 ، بليون من كتلة شمسنا ، إضافة إلى ذلك يمكن أن نرى بوساطة التلسكوب داخل وخارج درب التبانة في السماء ما يشبه حبات الخوخ كالغيم، مشكلة ما يسمى السدم، وقلة منها كالأبراج والجوزاء يمكن تمييزه كالعين الفارغة، بعض منها هي تجمعات عنقودية نجمية، مجموعات من النجوم تظهر كالغيم و بعضها الآخر تتوهج كالغاز أو الغبار، الشكل (9 - 24)، من أجل ذلك نسميه بالسديم.

العديد من المجرات تميل لتتجمع في عناقيد المجرات *galaxy cluster*، بوساطة التجاذب المتبادل بينها، وعادة يحوي كل عنقود بضعة آلاف من المجرات، وتتجمع العناقيد لتشكل العناقيد الضخمة، إلى جانب النجوم والعناقيد النجوم والمجرات والعناقيد الضخمة لمجرات الكون يحوي العديد من الأجسام المثيرة مثل، النجم العملاق الأحمر، والقزم الأبيض، النجوم النيوترونية، النجوم المنفجرة وتدعى النوبا و السوبرنوبا، الثقوب السوداء التي جاذبيتها شديدة جداً لا تسمح للضوء بالهروب منها، إضافة إلى ذلك يوجد إشعاع كهرومغناطيسي يصل إلى الأرض، ولكن لا يصدر عن نقطة اللمعان للأجسام ندعواها النجوم.

أخيراً هناك النشاط النووي المجري (AGN)، الذي هو عبارة عن منبع شبه نقطي للضوء شديد اللمعان، يحدث في مركز المجرات البعيدة، المثال الأكثر إثارة على AGN الكوازارات (QSO) الشديدة اللمعان ويعتقد ان هذا اللمعان قادم من مادة سقطت في ثقب أسود عملاق عند مركز المجرة.

(مثال نمونجي 2-9) - نظرة إلى الوراء في الزمن

الفلكيون ينظرون عادة إلى تلسكوباتهم كألة للزمن، نظرة إلى الخلف إلى أصل الكون، إذاً كم يستطيعون أن ينظروا إلى الخلف.

الإجابة:

المسافة بالسنين الضوئية تقيس (بالسنوات)، كم على الضوء المسير لبلوغنا، يبدو لنا في نفس الوقت أيضاً كم ننظر إلى الخلف في الزمن، على سبيل المثال إذا نظرنا إلى بروكسيما تنفجر إلى سوبر نوبا اليوم، وبالتالي الحادثة حدثت فعلاً قبل 4.3 سنة، الإصدار المنبعث من أبعد المجرات نراه الآن بعد مرور حوالي 10^{10} سنة ما نراه كيف كان قبل 10^{10} سنة أو 10^9 سنة بعد ولادة الكون في الانفجار الأعظم.

تمرين: لنتخيل أننا إستطعنا وضع مرآة ضخمة تبعد عنا 1Ly ، ماذا يمكننا أن نرى في هذه المرآة إذا التقطنا بها على الأرض، أين يمكن أن يحصل ذلك (هذا ما يدعى آلة الزمن).

مسائل

- 1-9 إحسب قوة الجذب الثقالية الحاصلة بين كوكب الأرض وكل من : (a) القمر، (b) الشمس، أوجد كذلك نسبة القوتين .
- 2-9 إحسب قوة الجذب الثقالية بين بروتين في جزئي الهيدروجين، علماً أن المسافة بينهم هي : $0,74 \times 10^{-10} \text{ m}$ ، عين قوة الجذب الثقالية بين كل من البروتون والإلكترون في ذرة الهيدروجين، بفرض أن الإلكترون يوجد على مدار دائري حول البروتون نصف قطره : $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$
- 3-9 قارن الجذب الثقالي المؤثر في جسيم كتلته m موجود على سطح الكرة الأرضية من كل من (a) القمر، (b) الشمس مع الجذب الواقع عليه من خلال الكرة الأرضية نفسها .
- 4-9 إحسب تسارع الجاذبية على سطح الشمس، علماً أن نصف قطر الشمس أكبر من نصف قطر الأرض بمقدار 110 مرات، وكذلك كتلة الشمس أكبر من كتلة الأرض بـ 330000 مرة، أعد الحسابات السابقة من أجل كواكب الزهرة والمشتري وكذلك القمر.
- 5-9 حدد العلاقة التي تربط بين تسارع الجاذبية الأرضية؛ وكتلة الأرض لكتلة موجودة على سطح الأرض، إستخدم الجواب لتحديد كتلة الأرض .
- 6-9 إحسب كتلة أي كوكب من كواكب المجموعة الشمسية يحتوي على قمر واحد .
- 7-9 سرعة الفرار هي السرعة الدنيا التي يجب أن يطلق بها جسم من الأرض حتى يبلغ اللانهاية ، إحسب سرعة فرار جسم من الأرض .
- 8-9 حدد العلاقة التي تربط كل من الطاقة الكلية والإندفاع الزاوي بنصف القطر الرئيسي؛ والتباعد المركزية e في حالة الحركة على مدار إهليلجي.
- 9-9 تحقق من أن قانون كبلر الثالث يبقى صحيحاً من أجل المدارات الإهليلجية.

9-10 أوجد كل من كمون الجاذبية وحقل الجاذبية المتولد عن كتلتين متساويتين منفصلتين بمسافة مقدارها $2a$

9-11 أوجد قيمة حقل الجاذبية المتولد عن طبقة مادية رقيقة مفصولة من مستو لانهائي.



قائمة المصطلحات

-A-

Absolute	مطلق
Absolute Zero	الصفر المطلق
Acceleration	تسارع
Angular Acceleration	تسارع زاوي
Coriolis Acceleration	تسارع كوريولس
Constant Acceleration	تسارع ثابت
Centripetal Acceleration	تسارع جاذب
Normal Acceleration	تسارع ناظمي
Relative Acceleration	تسارع نسبي
Resultant Acceleration	تسارع محصل
Tangential Acceleration	تسارع مماسي
Average Acceleration	تسارع وسطي
Action	فعل

Contact Action	فعل التماس
Air	هواء
Air Resistace	مقاومة الهواء
Areas Law	قانون السطوح
Altitude	ارتفاع
Amplitude	مطال، سعة
Angular	زاوي
Angular Velocity	سرعة زاوية
Archmides Principle	مبدأ أرخميدس
Atmosphere	جو
Atom	ذرة
Atwoods machine	آلة أتود
Axis fixed	محور ثابت
Attraction	تجاذب
Anisotropic	لا متناحي

Analytic

تحليلي

- B -

Balance

ميزان

Bar

قضيب

Base

قاعدة

Bernoullis equation

معادلة برنولي

Barycenter

مركز الفعل

Branch

فرع

Boltzmann constant

ثابت بولتزمان

Boyles Law

قانون بويل

Buoyan force

قوة الطفو

- C -

Calculus

حساب

Calorie

حريرة

Capillarity

خاصة شعرية

Tube Capillarity

أنبوب شعري

Center	مركز
Mass Center	مركز الكتلة
Gravity Center	مركز الثقل
Inertia Center	مركز العطالة
Center field	حقل مركزي
Center farce	قوة مركزية
Centrifugal force	قوة جاذبة
Change of state	تغير الحالة
Collision	تصادم
Elastic Collision	تصادم مرن
Inelastic Collision	تصادم غير مرن
Conservation	انحفاظ
Conservation of angular momontum	انحفاظ كمية الحركة الزاوية
Conservation of energy	انحفاظ الطاقة
Conservation theorems	نظريات الإنحفاظ
Classical	تقليدي

Classical Mechanics	ميكانيك تقليدي
Critical	حرج
Coefficient	معامل
Friction Coefficient	معامل الاحتكاك
Viscous Coefficient	معامل اللزوجة
Conductor	ناقل
Continuity	استمرار
Constant	ثابت
Components	مركبات
Couple	مزدوجة
Cross	مقطع
Cycle	حلقة، دورة
Coordinates	إحداثيات
Cartesian Coordinates	إحداثيات ديكارتية
Cylindrical Coordinates	إحداثيات اسطوانية
Polar Coordinates	إحداثيات قطبية

Spherical Coordinates

إحداثيات كروية

Curve

منحني

– D –

Density

كثافة

Depth

عمق

Displacement

إزاحة

Displacement Vector

شعاع الإزاحة

Dynamic

تحريك

Dynamic of Particles

تحريك الجسيمات

Diffraction

إنعراج

Dimension

بعد

Direction

اتجاه

Disk

قرص

Distribution

توزع

Distribution of velocities

توزع السرعة

Distribution of kinetic energy

توزع الطاقة الحركية

Division	قسمة
Vectorial Division	قسمة شعاعية
Divergence	تفرق
Data	معطيات
Double	مضاعف
Dyne	دنية
Dispersion	تبديد
Differential	تفاضل
Differential element	عنصر تفاضلي
Direction cosines	جيب تمام الاتجاه
- E -	
Ecliptic	مدار الشمس
Effective	فعال
Elastic	مرن
Ellipse	قطع ناقص
Energy	طاقة

Kinetic Energy	طاقة حركية
Internal Energy	طاقة داخلية
Potential Energy	طاقة كامنة
Total Energy	طاقة كلية
Mechanical Energy	طاقة ميكانيكية
Rotational Energy	طاقة دورانية
Entropy	انتروبية
Equation	معادلة
Equation of state	معادلة الحالة
Equation of Propagation	معادلة الانتشار
Equilibrium	توازن
Equilibrium of bodies	توازن الجسام
Equilibrium of Particle	توازن الجسيم
Equilibrium Position	وضع التوازن
Stability Equilibrium	توازن مستقر
Equivalent	مكافئ

Equinox

نقطة الاعتدال

Erg

الأرعة

- F -

Fluid

سائل

Real Fluid

سائل حقيقي

Ideal Fluid

سائل مثالي

Incompressible Fluid

سائل غير قابل للانضغاط

Viscous Fluid

سائل لزج

Fluid Pressure

ضغط السائل

Field

حقل

Filter

مرشح

Gravitaitonal Field

حقل الثقالة

Force

قوة

Nonconervative Force

قوة غير محافظة

Moment of Force

عزم القوة

Attraction Force

قوة جاذبة

Central Force	قوة مركزية
Centrifugal Force	قوة نابذة
Elastic Force	قوة مرنة
Friction Force	قوة احتكاك
Internal Force	قوة داخلية
Binding Force	قوة ترابط
Nuclear Force	قوة نووية
Force of interaction	قوة تفاعل
Frequency	تواتر
Angular Frequency	تواتر زاوي
Frame	جملة
Frame of reference	جملة مقارنة
Friction	احتكاك
Kinetic Friction	احتكاك حركي
Static Friction	احتكاك سكوني
Sliding Friction	احتكاك بدون انزلاق

Flux	تدفق
Factor	عامل
Formation	تشكيل
Function	تابع
Free	حر
Fuse	صاروخ
- G -	
Gas	غاز
Real Gas	غاز حقيقي
Galaxy	مجرة
Gradient	تدرج
Gradient vector	شعاع التدرج
Gravitational	ثقالي
Gyroscope	جيروسكوب

Harmonic	توافقي
Harmonic motion	حركة توافقية
Head – on collision	تصادم أسي
Heat	حرارة
Specific Heat	حرارة نوعية
Hook's Law	قانون هول
Hydro static	توازن السوائل
Hypothese	فرض
Heavy	ثقيل
Height	ارتفاع
Helical	لولبي
Helical motion	حركة لولبية
Helical orbit	مدار لولبي
Helicoidal Path	مسار لولبي
Hertz	هرتز

Hole	ثقب
Hollow	أجوف
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي
- 1 -	
Ideal gas	غاز كامل
Impulse	الدفع
Inelastic	غير مرن
Inertia	العطالة
Interaction	تفاعل متبادل
Ions	إيونات
Isotopes	نظائر
Index	دليل
Isotropic	متناهي
Inter Polation	استقراء داخلي
Incertitude	ارتباب

Kilo	كيلو
Kilo bar	كيلو بار
Kilo gram	كيلو غرام
Kilo meter	كيلو متر
Kilo calorie	كيلو حريرة
Kelvin	كلفن
Kinematics	علم الحركة
– behaviour	سلوك حركي
Kinetic energy	طاقة حركية
Kinetic equation	معادلة حركية
Kinetic pressure	ضغط حركي
Kinetic theory	نظرية حركية
- L -	
Lability	قابل للتغيير
Laboratory	مختبر
Lacuna	فجوة

Lanching	قذف، إطلاق
Landslide	انزلاق
Laplace	لابلاس
Laser	لايزر
Latent	كامن
Latent energy	طاقة كامنة
Latent Heat	حرارة كامنة
Lateral	جانبى
Lateral collision	تصادم جانبى
Latitude	خط العرض
Lattice	شبكة
Law	قانون
Law of conservation	قانون الإنحفاظ
Layer	طبقة
Length	طول
Lens	عدسة

Level	مستوى
Light	ضوء
Light source	منبع ضوئي
Limit	حد
Limited	محدود
Lines	خطوط
Lines of force	خطوط القوة
Lines of field	خطوط الحقل
Linear	خطي
Linear equation	معادلة خطية
Linear momentum	اندفاع خطي
Linear accelerator	مسرع خطي
Linear correlation	ارتباط خطي
Linear dependence	تابعية خطية
Line of action	خط الفعل
Line of force	خط القوة

Liquid	سائل
Liquid fuel	وقود سائلة
Local	موضعي
Location	موضع
Logarithmic	لوغاريتمي
Loss	ضباغ
Low	منخفض
- M -	
Machine	آلة
Macroscopic	جهرى
Macroscopy	دراسة جهرية
Magnetic	مغناطيسي
Main	رئيسي
Main path	مسار رئيسي
major axis	المحور الكبير
major diameter	القطر الأكبر

Mars	المريخ
Mass	كتلة
Mass center	مركز الكتلة
Mass density	كثافة الكتلة
Mass spectrum	طيف الكتلة
Mass Less	عديم الكتلة
Mass Velocity	سرعة الكتلة
Material	مادي، مادة
Matrice	مصفوفة
Maximum	أعظمي
Mean	وسطي
Mean energy	طاقة وسطية
Mean velocity	سرعة وسطية
Mean value	قيمة وسطية
Measure	قياس
Mechanic	ميكانيك

Mechanical	ميكانيكي
Mechanical force	قوة ميكانيكية
Mechanical stress	إجهاد ميكانيكي
Mega hertz	ميغا هيرتز
Meridian	خط الزوال
Metal	معدن
Metastable	شبه مستقر
Metastable equilibrium	توازن شبه مستقر
Metric	متري
Metric system	نظام متري
Metrology	علم القياس
Microscope	مجهر
Microscopic	مجهرى
Milli liter	ملي لتر
Mini mum	أصغري
Minute	دقيقة

Missile	صاروخ
Mixed	مختلط
Mobile	متحرك
Mode	نمط
Model	نموذج
Moll	مول
Molecular	جزيئي
Moment	عزم
Moment of force	عزم القوة
Moment of Inertia	عزم العطالة
Moment of momentum	عزم الإندفاع
Momentum	الاندفاع
Momentum conservation	انحفاظ الاندفاع
Momentum vector	متجهة الإندفاع
Moon	قمر
Motion	حركة

Mounting

تركيب

- N -

Nabla

نبلا

Nano meter

نانو متر

Natural

طبيعي

Natural logarithm

لغاريتم طبيعي

Natural numbers

أعداد طبيعية

Nautical mile

ميل بحري

Negative

سلبي

Negligence

اهمال

Network

شبكة

Newton

نيوتن

Newton's laws

قوانين نيوتن

Newtonian mechanics

ميكانيك نيوتن

Noise

ضجيج

Non – central force

قوة لا مركزية

Non – centrosymmetric	تناظر لامركزي
Non – equilibrium state	حالة لا متوازنة
Non – conservative	لا محافظة
Non – inertial	لا عطالي
Non – linear	لا خطي
Nonlinear equation	معادلة لاخطية
Non – relativistic	لا نسبوي
Non – stationary	غير مستقر
Non – uniform	غير منتظم
normal	عادي، عمودي، ناظمي
Normal component	مركبة ناظمية
Normal distribution	توزع نظامي
Normal stress	إجهاد نظامي
Nucleus	نواة
Number	عدد
Numerical constant	ثابت عددي

Numerical value

قيمة عددية

Object

جسم

Oblique

مائل

Oblique coordinates

إحداثيات مائلة

Octahedral

ثمانى وجوه

Odd

فردى

Odd function

تابع فردى

Odd number

عدد فردى

Ohm

أوم

One dimensional

أحادى البعد

Orbit

مدار

Orbital angular momentum

اندفاع زاوى مدارى

Orbital moment

عزم مدارى

Orbital velocity

سرعة مدارية

Ordinary

عادى

Ordinary ray	شعاع عادي
Ordinate	ترتيب
Origin	مبدأ
Orthogonal	متعامد
Oscillation	اهتزاز
Oscillating motion	حركة اهتزازية
Oval	بيضوي
Ozone	أوزون
Parabola	قطع مكافئ
Parallel	موازي
Parametric	وسطي
Parametric equation	معادلة وسيطية
Partial	جزئي
Partial pressure	ضغط جزئي

Particle	جزيئي
Particle mass	كتلة الجسيم
Path	مسار
Pendulum	نواس
Perihelion	نقطة الرأس
Perimeter	محيط
Period	دور
Periodic	دوري
Periodic oscillation	اهتزاز دوري
Phase	طور، مرحلة
Phase difference	فرق الطور
Plane	مستوي
Planet	كوكب
Plasma	بلازما
Polar	قطبي
Polar axis	محور قطبي

Polar coordinates	إحداثيات قطبية
Polar vector	شعاع قطبي
Position	موضع
Position vector	شعاع الموضع
Potential	كمون، كامن
Potential energy	طاقة كامنة
Power	استطاعة، قدرة
Potential field	حقل كمون
Pressure	ضغط
Pressure difference	فرق الضغط
Principle	مبدأ
Projectile	قذيفة
Projection	مسقط
Proportion	تناسب

Quadrangle	رباعي الأضلاع
Qualitative	كيفي
Quantitative	كمي
Quantity	كمية
Quantity of motion	كمية حركة
Scalar quantity	مقدار سلمي
Vectoral quantity	مقدار شعاعي
Quasi – particle	شبه جسيم
Quasi static	شبه سكوني

Radian	راديان
Radius	نصف قطر
Randon	عشوائي
Randon motion	حركة عشوائية
Rate	سرعة , معدل

Rate of approach	سرعة الاقتراب
Ratio	نسبة
Rectangle	مستطيل
Rectilinear motion	حركة مستقيمة
Rectangular projection	اسقاط قائم
Reduced mass	كتلة مختزلة
Regular	منتظم
Relative	نسبي
Relative velocity	سرعة نسبية
Relativity	النسبية
Relation	علاقة
Resistance	مقاومة
Air Resistance	مقاومة الهواء
Referance	مرجع
Resultant	ناتج
Ring	حلقة

Rocket	صاروخ
Rotary	دوار
Rotation	دوران
Rough	خشن
Rule	قاعدة
- S -	
Sample	عينة
Scalar	سلمي
Scalar quantity	كمية سلمية
Scalar field	حقل سلمي
Scalar potential	كمون سلمي
Scale	سلم
Scattering	تبعثر
Sciences	علوم
Scientific	علمي
Screen	شاشة، حاجز

Sea level	مستوى البحر
Second	ثانية
Self – energy	طاقة ذاتية
Self – field	حقل ذاتي
Shape	شكل
Shearing	قص
Shear modulus	معامل القص
Shear strain	انفعال القص
Shear stresses	إجهاد القص
Sidereal	نجمي
Simple	بسيط
Simulation	محاكاة
Software	برمجيات
Solar	شمسي
Solar day	يوم شمسي
Solar eclipse	كسوف شمسي

Solar system	المنظومة الشمسية
Solid	صلب
Space	فضاء، مكان
Specific	نوعي
Specific Heat	حرارة نوعية
Speed	سرعة
Sphere	كرة
Spherical	كروي
Spherical coordinates	إحداثيات كروية
Spiral	لولبي
Spiral path	مسار لولبي
Spring	نابض
Spring constant	ثابت المرونة
Stability	استقرار، ثبات
Stable	مستقر
Stable orbit	مدار مستقر

Stand	حامل، منصب
Sum	مجموع
Surface	سطح
Surface tension	توتر سطحي
Symmetry	تناظر، تماثل
System	منظومة، مجموعة
- I -	
Table	جدول، قائمة
Tangent	مماس
Tangential	مماسي
Technology	تقانة
Temperature	درجة الحرارة
Tensile	شد
Tensile strain	انفعال الشد
Tensile strength	مقاومة الشد
Tensile stress	إجهاد الشد

Tension	توتر
Theoretical	نظري
Theory	نظرية
Time	زمن
Time dilation	تمدد الزمن
Timer	موقت
Torque	عزم الفتل
Torsion	فتل
Track	مسار، أثر
Trajectory	مسار
Transformation	تحويل، تحول
Triangle	مثلث
Tube	أنبوب
- U -	
Ultrasonic	فوق صوتي
Undetermined	غير محدد

Uniform	منتظم
Uniform acceleration	تسارع منتظم
Uniform velocity	سرعة منتظمة
Unit	وحدة
Universal	عام، شامل
- V -	
Vacancy	شاغر، ثغرة
Vacuum	فراغ، خلاء
Vapor	بخار
Variable	متحول، متغير
Vector	شعاع، متجه
Velocity	سرعة
Vibration	اهتزاز
Viscosity	لزوجة
Viscosity coefficient	معامل اللزوجة
Volume	حجم

المراجع:

اللغة العربية:

1. كنج الشوفي. الميكانيك الفيزيائي (1) ، 2004 - 2005 .
2. توفيق قسام، بسام معصراني. الفيزياء العامة (1) ، 1978 - 1988 . مطبعة رياض - دمشق.
3. سلسلة مشوم الميكانيكا العامة وتطبيقاتها. تأليف موراى ر شبيجل.

اللغة الانكليزية:

1. DOUGLAS C. GIANCOLI, PHYSICS for SCIENTISTS and ENGINEERS, with Modern Physics. 4th Edition.
2. Serway, Jewett. Physics for Scientists and Engineers. 6th Edition.
3. Classical Mechanics R. DOUGLAS GREGORY University of Manchester.
4. Classical Mechanics, Tom W.B.Kibble, Frank H. Berkshre. 5th Edition.
5. UNIVERSITY PHYSICS with Modern Physics. Young and Freedman. 11th Edition.
6. Classical Mechanics, An introductory course, Richard Fitzpatrick Associate Professor of Physics The University of Texas at Austin.
7. Goldstein, H., Poole, C. & Safko, J., *Classical Mechanics*, third edition, Addison-Wesley, 2002.
8. COLLEGE PHYSICS FRANCIS WESTON SEARS, MARK W. ZEMZNSKY. 3th EDITION
9. MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICITS. GEORGE ARFKEN.in Russian Language.1970

10. Khaekin C E., Fundamental Physics of Mechanics,
Moscow, 1963.



اللجنة العلمية :

أ.د. سعيد محاسنة

أم.د. عصام الجفامي

أم.د. كنز الشوفي

المدقق اللغوي:

د. لؤي خليل

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات





