دراسة توزع الحقل الكهرطيسي في المحولات الكهربائية

Study of Electromagnetic Field Distribution in Electrical Transformers

إعداد

المهندسة صفاء سليمان الأحمد

بإشراف

المشرف المشارك **المشرف العلمي**

الدكتور محمد عيد المصري **الدكتور عبد الله ساميز**

مقدمة Introduction

تعد المحولات الكهربائية إحدى المكونات الأساسية في الشبكة الكهربائية وهي ذات أهمية وفائدة كبيرين ، إذ تساعد على نقل الطاقة الكهربائية لمسافات طويلة جدا من مواقع توليدها إلى مراكز استهلاكها وبالتوترات المناسبة لأغراض استخدامها ،كما تساعد على المواءمة بين أي جهاز كهربائي مهما يكن التوتر المعمول به ومصدر التغذية الكهربائية الذي لا يمكن تغيير توتره إلا باستخدام المحولة الكهربائية.

ومع التطور العلمي التقني اتسعت مجالات استخدامها وتعددت وظائفها، فهي تستخدم كما في الاستطاعات الضخمة كذلك في مجال الاستطاعات المتوسطة والصغيرة.

وبما إن دراسة الحالة الكهرومغناطيسية للأجهزة والآلات الكهربائية بمختلف مكوناتها تعتبر أمر بالغ الأهمية في مجال التصميم والاستثمار والأداء الأمثل. فقد استخدم لتحقيق هذا الغرض العديد من الطرق التي تتفاوت بدرجة دقتها وسهولة تطبيقها وإمكانياتها . ومع انتشار وتطور طرق النمذجة والبرمجة باستخدام الحاسب أصبح حل معادلات الحقل المغناطيسي(معادلات ماكسويل) عند شروط الدراسة المحددة ممكنا في كل مساحة أو جزء متناه في الصغر للآلة الكهربائية . حيث تمكن هذه الدراسة من تحديد الصورة الكهرومغناطيسية الشاملة لكل جزء مرغوب من الآلة المدروسة مما يمكن من الحصول على تصور تفصيلي شامل عن حالة الآلة.

نظرا للأهمية هذه ، فقد قمنا بدراسة توزع الحقل الكهرطيسي في المحولات الكهربائية .

تقع هذه الدراسة في ثلاثة فصول:في الفصل الأول تم إعداد دراسة مرجعية حول الحقول الكهرطيسية وطرق حسابها .

وخصص الفصل الثاني للشرح المفصل لطريقة العناصر المنهية في حسابات الحقول .

أما في الفصل الثالث فثمة دراسة تطبيقية لحساب الحقل الكهرطيسي في المحولات الاختيارية.

الهدف من البحث

يهدف هذا البحث إلى دراسة توزع الحقول الكهرطيسية باستخدام طريقة العناصر المنتهية و برمجيات متطورة لحساب محددات الحقل وتوزعه في المحولات الكهربائية لأن هذه الحقول تشكل المبدأ الأساسي في آلية عمل المحولات، و إجراء الاختبارات اللازمة لهذه الدراسة.

الفصل الأول

دراسة مرجعية حول الحقول الكهرطيسية وطرق حسابها

تمهيد:

الحقل الكهرطيسي هو نظام فيزيائي متكامل ومستقل ويعتبر شكلا من أشكال تواجد المادة في الطبيعة .يتألف الحقل الكهرطيسي من حقلين :الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي وقد أثبتت التجارب أنه توجد علاقات وروابط متينة بين تغير الحقل الكهربائي في الزمن والبنية الفراغية للحقل المغناطيسي المتولد عن هذا التغير وبين تغير الحقل المغناطيسي في الزمن والبنية الفراغية للحقل الكهربائي .

إن دراسة الحقل الكهرطيسي تتجه نحو مسألة توليد هذا الحقل وظهوره في الخلاء أو الهواء المحيط بالنواقل وهذه هي نظرية الأمواج الكهرطيسية وتتبع لها كافة التطبيقات الممكنة في مجال العلوم الإلكترونية. كما وتتجه نحو توليد هذا الحقل وظهوره في الأوساط الناقلة (النواقل الكهربائية) ويتبع لها كافة تطبيقات مجال العلوم الكهربائية .

إن دراسة الحقل الكهرطيسي تعني تحديد معادلات تعريف هذا النظام الفيزيائي وطريقة حل هذه المعادلات لتحديد قيمة هذا الحقل ضمن مجال محدد بالسطح المغلق . وحل معادلات الحقل الكهرطيسي تأخذ بعين الاعتبار الشروط المساعدة والتي تعطي قيمة الحقل على السطوح الفاصلة بين وسطين متجاورين والمعروفة باسم الشروط الحدية .

1-1: معادلات ماكسويل : Maxwell's Equations

تملك جميع الظواهر في الأنظمة الكهربائية خاصة حلقية لهذا فإن أهم الحسابات التصميمية تعتبر مكرو الكترودينامیكا والتي تعتمد على معادلات ماكسويل.

يمكن استخدام معادلات ماكسويل في الأنظمة الثابتة كذلك للأنظمة المتحركة في الفراغ بسرعة خطية υ .

1-1- 1: معادلات الحقل الكهرطيسي من أجل أنظمة ثابتة في الفراغ :

إن معادلات ماكسويل بالإضافة إلى بعض العلاقات المساعدة تشكل المبادئ الأساسية في نظرية الحقل الكهرطيسي.

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}} \quad (1.2)$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla . \boldsymbol{D} = \rho \quad (1.4)$$

حيث أن:

E شدة الحقل الكهربائي

B كثافة التدفق المغناطيسي

H شدةالحقل المغناطيسي

J كثافة التيار الكهربائي

D كثافة التدفق الكهربائي

- إن معادلة ماكسويل الأولى ما هي إلا عن تعبير عام وشامل لقانون أمبير وان هذه الشمولية تتجلى في أن مصطلح كثافة التيار هنا هي عبارة عن مجموع كثافتين الأولى كثافة تيار الناقلية الناتج عن تحرك حوامل الشحن الحرة والثانية كثافة تيار الإزاحة الناتج عن تغير كثافة الانزياح الكهربائي بالنسبة للزمن أو تغير شدة الحقل الكهربائي بالنسبة للزمن .
- إن معادلة ماكسويل الثانية عبارة عن تعبير عام وشامل لقانون التحريض وهذه الشمولية تتجلى بان أي تغير للحقل المغناطيسي بالنسبة للزمن يعطي حقلا كهربائيا إعصاريا .
- ان معادلة ماكسويل الثالثة تعبر عن استمرارية التدفق المغناطيسي

- إما المعادلة الرابعة تعبر عن نظرية غوص في الحقول الكهرساكنة.

والعلاقات الأساسية بين أشعة الحقل المختلفة هي:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \, \mu_r \, \boldsymbol{H} \qquad (1.5)$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \qquad (1.6)$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \, \boldsymbol{E} \qquad (1.7)$$

حيث: ε ثابت العازلية الكهربائي

ε_0 ثابت عازلية الخلاء

ε_r ثابت العازلية النسبي

μ ثابت النفوذية المغناطيسية

μ_0 ثابت النفوذية المغناطيسية في الخلاء

μ_r ثابت النفوذية المغناطيسية النسبي

σ الناقلية الكهربائية

2-1-1: المعادلات التفاضلية للحقل الكهرطيسي:

إن المعادلات (1.1)إلى (1.7) مبنية على أساس تحويلها إلى علاقة تحتفظ بقيمة واحدة فقط أما **E**أو**H**.من أجل الأوساط الخطية يكون ($\varepsilon, \mu, \sigma = const$) وبالتالي فان المعادلة الأولى لماكسويل تكتب بالشكل التالي بعد اخذ دوار الطرفين:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} \right) \qquad (1.8)$$

بتعويض **J** و **D** من المعادلة(1.6) و(1.7) نحصل على:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times (\sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \qquad (1.9)$$

وبما أن ($\varepsilon, \mu, \sigma = const$) نستطيع أن نكتب:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) \qquad (1.10)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma (\nabla \times \boldsymbol{E}) +$$

وبتعويض $\nabla \times E$ من المعادلة (1.2) نحصل على

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

وبتعويض $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

ونحن نعلم أن لابلاسيان شعاع يعطى بالعلاقة:

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H}$$
$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H} \qquad (1.13)$$

وفي حال غياب المنابع في خط الحقل أي $\nabla \cdot H = 0$ يكون $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = -\nabla^2 \boldsymbol{H}$

فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية التالية والتي تعبر عن الحقل الكهرطيسي في عازل غير مثالي:

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \qquad (1.14)$$

وبشكل مماثل يمكن أن نحصل على معادلات من أجل شدة الحقل الكهربائي في حال غياب الشحنات الحرة ρ أي $\nabla \cdot D = 0$

بأخذ إعصار الطرفين لمعادلة ماكسويل الثانية كما يلي :

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.16)$$

وبتعويض $\nabla \times \mathbf{H}$ و $\boldsymbol{J}$ و $\mathbf{D}$ بما يساويها من معادلة ماكسويل الأولى

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.19)$$

هذه المعادلات (1.14) و (1.19) من نوع (hyperbolic) قطع زائد وتمثل معادلات انتشار للكميات **E**و **H** مع الزمن .

- ومن أجل الحقل الدوري :

$$\underline{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{H}_m e^{j\omega t}, \cdot \boldsymbol{H}_m = |\boldsymbol{H}_m| e^{j\phi H}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{E}_m e^{j\omega t}, \cdot \boldsymbol{E}_m = |\boldsymbol{E}_m| e^{j\phi E} \quad (1.19.a)$$

وبالتالي تأخذ العلاقتين (1. 14) و (1. 19) الشكل التالي:

$$\nabla^2 \mathbf{H}_m = G^2 \mathbf{H}_m \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{E}_m = G^2 \mathbf{E}_m \qquad (1.19.b)$$

حيث أن

$$G = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad = \alpha' + j\beta' \qquad (1.20)$$

حيث أن :

G : الانتشار الثابت في الفراغ.

α' : ثابت التخامد في الفراغ.

β' : ثابت الطورية.

- لأجل الأوساط الناقلة يمكن إهمال كثافة تيار الإزاحة $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ بالمقارنة مع كثافة تيار الناقلية $\sigma \boldsymbol{E}$ وعندها العلاقتين (1. 14) و(1. 19) ومن أجل $\varepsilon = const$ و $\mu = const$ تأخذ الشكل التالي :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\,\sigma\,\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu\,\sigma\,\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (1.21)$$

وتعبر هذه المعادلة عن انتشار الحقل في الوسط الناقل ولهذا تسمى أيضا معادلات الانتشار .

- من أجل الحقل المتغير بشكل دوري (1.19 . a) تأخذ معادلة الانتشار(1.21) الشكل التالي :

$$\nabla^2 \mathbf{H}_m = \alpha^2 \mathbf{H}_m \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{E}_m = \alpha^2 \mathbf{E}_m \qquad (1.22)$$

حيث أن

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)k = \sqrt{2}ke^{j\frac{\pi}{4}} \quad (1.23)$$

ثابت تخامد الموجة في المعدن $K = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

حل المعادلة (1. 11) في حالة مركبات الأمواج الحقلية نسبة لمحاور الإحداثيات x,y,z والتي يعبر عنها بالعلاقات :

$$E_{my} = E_{mz} = 0 \quad , \quad E_{mx} = E_m$$

$$H_{mx} = H_{mz} = 0, H_{my} = H_m$$

$$\frac{\partial H_m}{\partial x} = \frac{\partial H_m}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial H_m}{\partial z} \neq 0$$

تأخذ الشكل :

$$H_m = A_1 e^{az} + A_2 e^{-az} \quad (1.24)$$

- في حالة الوسط العازل المثالي تكون $\sigma = 0$ وبالتالي تصبح المعادلات (1 . 14) و (1 . 19) بالشكل التالي :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \qquad (1.25)$$

حيث أن :

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad , \quad \vartheta = C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{H}{m} \quad , \quad c = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s} \quad ,$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m}$$

وأن الممانعة الموجية الكاملة تساوي :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \mu\vartheta \quad (1.26)$$

من اجل الهواء :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

من أجل زيت المحولات :

Z=343Ω

إن طول الموجة في الهواء ومن أجل f = 50 HZ تساوي:

$$\lambda_{50} = \frac{C}{f} = 6000\text{K}m$$

2-1: شعاع الكمون المغناطيسي:

Magnetic vector potential formulation

إن جميع أشكال الحقول يمكن دراستها بمساعدة شعاع الكمون المغناطيسي، حيث إننا لانستطيع حل معادلات ماكسويل بشكل مباشر بل نحلها عادة بضم المعادلات لإزالة المتغيرات باستخدام التوابع الكمونية التي بواسطتها يمكن أن نشتق الحقل وتطلب فرضيات بسيطة صحيحة للمسالة المدروسة .

يعتمد اختيار الشكل الصحيح على نوع مسألة الحقل فمثلاً يستخدم شعاع الكمون المغناطيسي بشكل شائع لحل الحقول المغناطيسية ثنائية البعد .

في الحقول ثنائية البعد(2D) ،تملك كثافة التيار والكمون المغناطيسي الشعاعي مركبة واحدة تكون على المحور Z عندما يكون الحقل المغناطيسي في المستوي X-Y. وفي حالة التناظر تملك A,J مركبات على المحور ϕ ويكون الحقل المغناطيسي في المستوي r-z.

$(0,0,A_z)$

يعرف شعاع الكمون المغناطيسي بالعلاقة التالية:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \quad (1.27)$$

بالتعويض في المعادلة (1.3) يكون لدينا:

$$\nabla . (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \quad (1.28)$$

وهذا صحيح لان تباعد الدوران يساوي الصفر، عادة تحذف مركبة تيار الإزاحة $\frac{\partial D}{\partial t}$ من المعادلة لأجل الأجهزة الكهربائية التي تعمل بالتوتر المنخفض.ولهذا مسألة المغناطيسية الساكنة توصف باستخدام المعادلة:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \quad (1.29)$$

وباستخدام العلاقات السابقة تكتب بالشكل:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \boldsymbol{J} \qquad (1.30)$$

وباستخدام التحليل الشعاعي:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla (\nabla . \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \qquad (1.31)$$

بالتعويض في المعادلة السابقة تختصر بالشكل التالي:

$$\nabla^2 A = -J \qquad (1.32)\frac{1}{\mu}$$

وعليه لكي نحدد هذا الحقل(A)الذي يسمى حقل الكمون المغناطيسي الشعاعي أو حقل الكمون المغناطيسي (الديناميكي) يجب أن نعرف انتشار هذا الحقل($\nabla . \mathbf{A} = 0$)ويسمى شرط تعيير الكمون المغناطيسي الديناميكي ،وعند تحقق هذا الشرط يصبح لدينا :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \boldsymbol{J} \qquad (1.33)$$

وهذا يكون شعاع الكمون المغناطيسي لأجل الحقول المغناطيسية الساكنة.

أما لأجل الحقول شبه الساكنة لحساب التيارات الإعصارية يجب أن نستخدم التشكيلات المغناطيسية الحركية .

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

(1.34)

بإعادة ترتيب المعادلة وباستخدام تابع الكمون السلمي V ينتج لدينا:

$$\nabla \times \left[\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right] = 0$$

وبما أن دوران التدرج يساوي الصفر يكون لدينا:

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{t}} = -\nabla V \quad (1.36)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

وبما أن $J = \sigma E$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \sigma \left[-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \left[-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla V\right]$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}\right) = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla V \quad (1.37)$$

باستخدام الحساب الشعاعي تؤول المعادلة إلى الشكل :

$$-\nabla . \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}\right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma \nabla V = \boldsymbol{J}_s \quad (1.38)$$

نستطيع استخدام الكمون السلمي لوصف التوتر الخارجي أو التيار في الناقل:

$$-\nabla . \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}\right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma \frac{u}{l} = \boldsymbol{J}_s \quad (1.39)$$

لحل هذه المعادلة يجب أن يعتمد التقسيم الزمني بالإضافة إلى المكاني كما يجب أن نستخدم تقنية الخطوة الزمنية.على أية حال، يمكن تبسيط هذه المعادلة على افتراض أن تغير الحقل جيبي، عند التردد الزاوي ω أو باستخدام التمثيل العقدي كما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial t} A = j \omega \sigma A \quad (1.40)$$

بتطبيق ذلك على المعادلة (1.39) ينتج معادلة تصف مسألة الحقل ذات التوافقيات الزمنية:

$$-\nabla . \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}\right) + j \omega \sigma A = \sigma \frac{u}{l} = \boldsymbol{J}_s \quad (1.41)$$

1-3 : الشروط الحدية: boundary condition

إن الشروط الحدية ضرورية لجعل مسألة القيمة الحدية مسألة سهلة الحل(well posed) بحل وحيد.

لذلك يجب أن تطبق شروط نيومان و ديركلي بطريقة صحيحة لاختصار حجم المسألة بشكل مناسب.

كما تحدد البرامج التي تعتمد طريقة العناصر المنتهية FEM من ناحية أخرى عدد العناصر المتوفرة لتقريب هندسي للمسألة.لذلك فان التطبيق المناسب والصحيح للشروط الحدية يشكل المفتاح الذي يعرف المسألة ويصل إلى حل دقيق بطريقة مناسبة.

1-3-1: شروط ديركليه: Dirichlet boundary condition

إن شروط ديركليه تحدد قيمة شعاع الكمن المغناطيسي على حدود المسألة :

$$A = A_0 \qquad (1.42)$$

يطبق هذا الشرط بشكل أساسي بشكله المتجانس $A = 0$ ليحفظ السيالة من عبور الحد.

أما شرط ديركليه غير المتجانس فيمكن استخدامه لإجبار السيالة بين حدين بالمعادلة التالية بفرض انه لايوجد تغير في السيالة بالاتجاه Z:

$$\Phi = \int_S BdS = \int_l A \cdot dl = L(A_1 - A_2) \qquad (1.43)$$

حيث L المسافة بين الحدين.

1- 3 -2 :شروط نيومان الحدية Neuman Boundary Condition

يحدد هذا الشرط المركبة الناظمية لشعاع الكمون المغناطيسي على طول الحد.الشرط المتجانس ،يكون عندما يكون الحقل عموديا على الحد بالشكل التالي:

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \qquad (1.44)$$

3- 3 -1 : الشرط الحدي المفتوح Open boundary condition

يستخدم هذا الشرط لتقريب الحل على المنطقة الغير محدودة كما يلي:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n} + \frac{c}{\mu_0 r_0} A = 0 \qquad (1.20)$$

حيث أن

C:ثابت يساوي إلى الواحد

r_0 : نصف القطر الخارجي لمنطقة الحل بالأمتار.

4 – 1 : الطرق العددية لحسابات الحقول الكهرطيسية:

Numerical Methods in Calculation Electromagnetic Fields

1–4–1 : طريقة الفروقات المحدودة (التمايز المحدود)

Finite difference method

تستخدم طريقة الفروقات المحدودة لحل المعدلات التفاضلية (معادلات ماكسويل) وربما الطريقة الأبسط لهذا الغرض . إنها تقوم على استبدال الحدود التفاضلية في المعادلة التفاضلية (المعادلة المدروسة) بحدود الفروق المحدودة . . وبعدها تحل المعادلات الجبرية الناتجة .

آلية العمل:

يتم تجزئة مجال الحقل المدروس إلى عناصر حدية صغيرة جداُ أي إلى وحدات عنصرية لها نفس الخواص على شكل مربعات أو مثلثات أو مسدسات أضلاع ، وذلك بحسب ملاءمتها

لإبعاد الحقل المدروس تغطى بشبكة كثيفة جداُ من النقاط التي تبعد عن بعضها أبعاد صغيرة جداُ .

وتوجد طرق متعددة لتحويل الحدود التفاضلية في المعادلة التفاضلية المدروسة إلى حدود فروق لكن أفضل هذه الطرق هي الاستعانة بمنشور تايلور.

إن المعادلات التفاضلية (1.4) و(1.19) و(1.21) و(1.25) مطبقة على أنظمة شديدة التعقيد يمكن حلها بمساعدة الكمبيوتر باستبدال المعادلات التفاضلية بمعادلات فروق باستخدام طريقة الفروقات المحدودة.

لأجل ذلك من اجل إيجاد توزع التابع المدروس مثلا شعاع الكمون المغناطيسي A=A(X,Y) يجب أن نقسم المجال المدروس Ω الموضح في الشكل(1−1) مع شروط حدية معروفة إلى سطوح $S(P \in S)$ تمثل شبكة متعامدة مع خطوة تكامل $\Delta x = \Delta y = h$ تشكل الشبكة بحيث تكون عقدها الزاوية متوضعة على الحدود (S) للمجال المدروس ويكون من الأفضل أن تكون العقد الموجودة على الحدود (S')اقل ما يمكن كما في الشكل السابق (1 . 1) ،

وبالتالي تكون قيمة التابع A(X,Y) في العقد المجاورة وبالتطابق مع منشور تايلور يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$A(X+h) = A(X) + \frac{h}{1!}A'(X) + \frac{h^2}{2!}A''(X) + ... + \frac{h^n}{n!}A^{(n)}(x)$$

$$A(X-h) = A(X) - \frac{h}{1!}A'(X) + \frac{h''}{2!}A''(X) + ... + \frac{h^n}{n!}A^{(n)}(x)$$

بالجمع:

$$A(X+h) + A(X-h) = 2A(X) + h^2 A''(X) + \zeta(h^4) \qquad (1.46)$$

حيث أن $\zeta(h^4)$ هي خطأ التبسيط التي تحوي أس (4) وأعلى من ذلك للخطوة h وبإهمال هذا الخطأ نجد أن:

$$A''(X)=\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\approx\frac{A(X+h)+A(X-h)-2A(X)}{h^2}=\frac{A_{i+1,k}-2A_{i,k}+A_{i-1,k}}{h^2} \qquad (1.47)$$

وبالمثل فأننا نحصل على علاقة للمتحول y :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\approx\frac{A_{i,k+1}-2Ai,k+A_{i,k-1}}{h^2} \qquad (1.48)$$

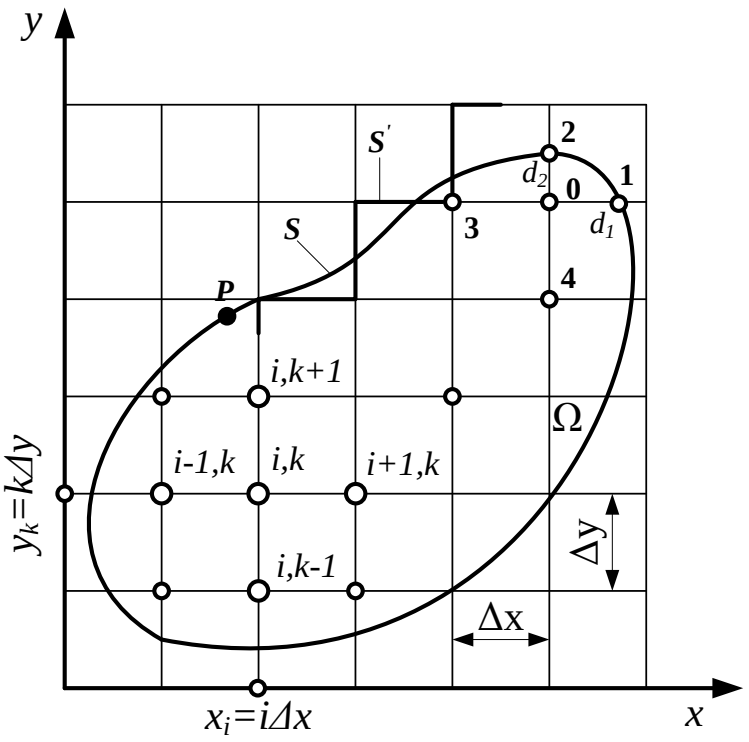
معادلات بواسون :

بتعويض (1.47) و (48 . 1) في المعادلة ($\nabla^2 A=-\mu J(J=\partial E$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}=-\mu J(X_i,Y_k) \qquad (1.49)$$

حيث أن $J(X_i,Y_k)$ هي التوزع المعروف للمركبة J_z وهي مركبة لكثافة التيار وبالتالي نحصل على قيمة التابع في العقدة (i , k) الواضحة في الشكل (1.1) وفق العلاقة التالية :

$$A_{ik}=\frac{1}{4}\left(A_{i+1,k}+A_{i,k+1}+A_{i-1,k}+A_{i,k-1}+\mu h^2 J_{i,k}\right) \qquad (1.50)$$



الشكل(1−1) طريقة الفروقات المحدودة

معادلات لابلاس :

في المجالات التي لا يوجد فيها تيارات (J=0) فإن الجهد الشعاعي يحقق معادلة لابلاس ويعبر عنه كمتوسط حسابي للكمونات في النقطة المجاورة :

$$A_{ik} = \frac{1}{4}\left(A_{i+1,k} + A_{i,k+1} + A_{i-1,k} + A_{i,k-1}\right) \qquad (1.51)$$

قيمة الكمون الشعاعي على حدود المجال أي في النقاط القريبة من الأطراف في نقطة مثل (0) كما في الشكل (1 -1) يمكن حسابها من الاستكمال الداخلي بعلاقة تقريبية كما يلي :

$$Ao = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4}{d_1 d_3 d_2 d_4}\left[\frac{1}{d_1 + d_3}\left(\frac{A_1}{d_1} + \frac{A_3}{d_3}\right) + \frac{1}{d_2 d_4}\left(\frac{A_2}{d_2} + \frac{A_4}{d_4}\right)\right] \qquad (1.52)$$

حيث أن قيمة A_1 و A_2 نجدها من الشروط الحدية وفي كلتا الحالتين فإن التحريض المشكل في النقطة(i , k) يحسب من المعادلة:

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$$

$$B_{yik} = \frac{\partial A_Z}{\partial y} \approx \frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h} \qquad (1.53)$$

$$B_{xik} = -\frac{\partial A_Z}{\partial x} \approx -\frac{A_{i+1,k} - A_{i,k}}{h}$$

معادلات هلموهلتز :

بتعويض (1 . 23) و (1 . 48) في المعادلة (1.23) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 H_m}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H_m}{\partial Y^2} = a^2 H_m \qquad (1.54)$$

ونحصل على شدة الحقل المغناطيسي في النقطة (i , k) من أجل الحقل الدوار :

$$H_{ik} = \frac{1}{4 + a^2 h^2}(H_{i+1,k} + H_{i,k+1} + H_{i-1,k} + H_{i,k-1}) \qquad (1.55)$$

من أجل القيم المركبة كما هو الحال في المعادلة (1. 12) يجب تقسيم وتحليل الجزء الحقيقي والجزء التخيلي .

معادلات الانتشار :

$$\frac{H_{i-1,j+1} - 2H_{i,j+1} + H_{i+1,j+1}}{\Delta X^2} = \partial \mu_d (H_{i,j}) \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta t} \qquad (1.30)$$

ان المعادلات التي حصلنا عليها (1 . 24) و(1 . 25) و (1 . 29) و (1 . 30) تحول المعادلات التفاضلية إلى أجزاء مضاريب في نظام معادلات جبرية خطية . حيث أن عدد هذه المعادلات يساوي عدد العقد للشبكة داخل الخط الحدودي (S) أي أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل .

ومن أجل جملة المعادلات التفاضلية نستخدم بشكل واسع طريقة التقريب التجريبي (الطريقة التكرارية) أو طريقة تبديل المجاهيل (إزالة الكمية المجهولة بضم المعادلات) حيث إن إحداثيات العقد المنفردة تحسب :

$$X_i = X_0 + ih \quad \text{و} \quad Y_k = Y_0 + kh$$

طريقة التكرار: **Iteration method**

من أجل العقد المنفردة للشبكة A_h^0 يستخدم قيمة افتراضية A_h^0 للتابع المجهول مثلاً قيم صفرية أو القيم التي يمكن الحصول عليها من تراكم التجارب .وبعد ذلك نستخدم الشروط الحدية في العقد الحدية وترتب من أجل الحصول على تابع أولي تقريبي A_h^1 للمعادلات

(1 . 50) و(1 . 51) و (55 . 1) و (1 . 56) في كل نقطة وبعد ذلك نعيد العملية حتى الحصول في كل نقطة لكل تابع A_h أعلى دقة له .

$$\max\left|A_h^{(j+1)} - A_h^{(j)}\right| \le \lambda \qquad (1.57)$$

حيث أن

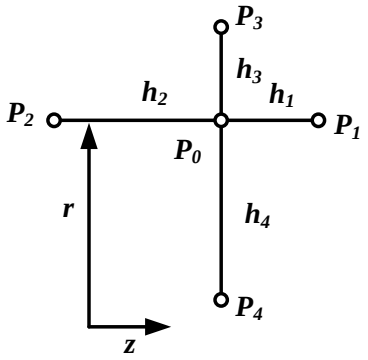
j = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ..... رقم التكرار

تطبيق طريقة الفروقات المحددة من أجل الحقول ثنائية البعد عند الشرح السابق لطريقة الفروقات المحددة اعتبرنا إن الشبكة عبارة عن مربعات بأبعاد متساوية، في الحقل ذي البعد الثنائي يمكن كتابة معادلة بواسون كما يلي :

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} = -\frac{\rho(X.Y)}{\varepsilon} = -f(X,Y)$$

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} = 0 \qquad (1 . 58)$$

لنعتبر الآن إن أبعاد الشبكة ذات أبعاد غير متساوية (أضلاعها غير متساوية) كما في الشكل (1-2) وكما هو واضح يبين هذا الشكل نقطة $P_0(X_0,Y_0)$ مع أربع نقاط مجاورة . هذا يدعى بنجمة الفروق .



الشكل(2-1)

نجد تابع الكمون المغناطيسي الشعاعي المجهول A(X,Y) في النقطة P_0 ذات الكمون المغناطيسي A_0 حيث نحصل بالنشر وفق سلسلة تايلور على مايلي :

$$A(X,Y) = A_0(X_0,Y_0) + \frac{1}{1!}\left[(X-X_0)\frac{\partial A(X_0,Y_0)}{\partial X} + (Y-Y_0)\frac{\partial A(X_0,Y_0)}{\partial Y}\right] + \quad (1\text{-}59)$$

$$\frac{1}{2!}\left[(X-X_0)^2\frac{\partial^2 A(X_0,Y_0)}{\partial X^2} + 2(X-X_0)(Y-Y_0)\frac{\partial^2 A(X_0,Y_0)}{\partial X \partial Y} + (Y-Y_0)\frac{\partial^2 A(X_0,Y_0)}{\partial X^2}\right]$$

ويتوقف النشر عند عدد معين من الحدود وذلك حسب درجة الدقة المطلوبة . إن صيغ الفروق البسيطة تأخذ بعين الاعتبار عناصر الحد الثاني ز إذا توخينا الدقة الكبيرة نأخذ بعين الاعتبار حتى عناصر الحد السادس .

من الشكل (1 - 3) نحصل على الكمون المغناطيسي الشعاعي كما يلي :

$$A_1 = A_0 + h_1\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{2}h_1^2\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} \qquad (1\,.\,60)$$

$$A_2 = A_0 - h_2 \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} \qquad (1.61)$$

$$A_3 = A_0 + h_3 \frac{\partial A}{\partial Y} + \frac{1}{2} h_3^2 \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \qquad (1.62)$$

$$A_4 = A_0 - h_4 \frac{\partial A}{\partial Y} + \frac{1}{2} h_4^2 \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \qquad (1.63)$$

الآن نفرض أن قيم الكمون الشعاعي $A_1 \ldots\ldots A_4$ معلومة ، عندئذ يكون نظام المعادلات مؤلفة من خمسة معادلات بخمسة مجاهيل $A_0, \frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial A}{\partial Y}, \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}$

حيث أن معادلة بواسون التفاضلية تمثل المعادلة الخامسة في نظام المعادلات هذا بحل نظام المعادلات وفق A_0 نحصل على :

$$A_0 = \frac{\frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{A_1}{h_1} + \frac{A_2}{h_2}\right) + \frac{1}{h_3 + h_4}\left(\frac{A_3}{h_3} + \frac{A_4}{h_4}\right) + \frac{1}{2} f(X_0, Y_0)}{\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{h_3 h_4}} \qquad (1.64)$$

من أجل الحالة الخاصة ، كون الشبكة مكونة من مربعات ، عندئذ يكون $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$ وينتج لدينا في هذه الحالة :

$$A_0 = \frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \frac{h^2}{4} f(X_0, Y_0) \qquad (1.65)$$

وفي حال صلاحية معادلة لابلاس ، عند ذلك تكون المعادلة الأخيرة بشكل أبسط ، كون $f(X_0, Y_0)$ في هذه الحالة يساوي الصفر ونحصل على :

$$A_0 = \frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \qquad (1.66)$$

وفي هذه الحالة يمثل كمون مركز نجمة الفرق القيمة الوسطية لكمونات نقاط النجمة .

إذا كان توزع الكمون على جزء من المحيط (الحافة) أو على كامل المحيط (الحافة) لمنطقة الحقل ، هذا يعني أن كمونات نقاط الشبكة معطاة ، عند ذلك يمكن أن نعبر عن الشروط الحدية

(الشروط الحدية من النوع الأول ، أو شروط ديرتشلت الحدية مباشرة بصيغة الفروق . من أجل كمونات نقاط الشبكة تسمى نقاط ديرتشلت الحدية يمكن بسهولة إدراج القيم المعطاة بصيغة الفروق ، ومما يجب الانتباه إليه إنه في نقاط ديرتشلت الحدية ذاتها لايمكن إنشاء صيغة الفروق .

– أما إذا أعطي على جزء من المحيط (الحافة) أو على كامل المحيط (الحافة) تحويل الكمون في الاتجاه الناظمي على الحافة الشروط الحدية ذات النوع الثاني ، أو ما يسمى شروط نيومان الحدية . ولنتناول شروط نيومان الحدية المتجانسة بصيغة الفروق . نستخدم التفكير المعاكس . بسبب التناظر الانعكاسي لمسار خطوط الحقل فستنعدم المركبة الناظمية على مستوي التناظر وبالتالي ستنعدم على الإطار (الحافة) بشكل أوتوماتيكي وذلك بفرض مسار الكمون متناظر انعكاسياً بالنسبة إلى الحافة . نحصل على حالات متعددة حسب موقع محور التناظر. الشكل (3-1) يبين أربع حالات لمحور التناظر (المرسوم بشكل منقط) وبالتالي نحصل على أربع حالات كما يلي :

– الحالة الأولى $A_1 = A_2$

$$A_0 = \frac{1}{4}(2A_1 + A_2 + A_3) \qquad (1.67)$$

- الحالة الثانية

$$A_3 = A_4$$

$$A_0 = \frac{1}{4}(A_1 + A_2 + 2A_4) \qquad (1.68)$$

- الحالة الثالثة

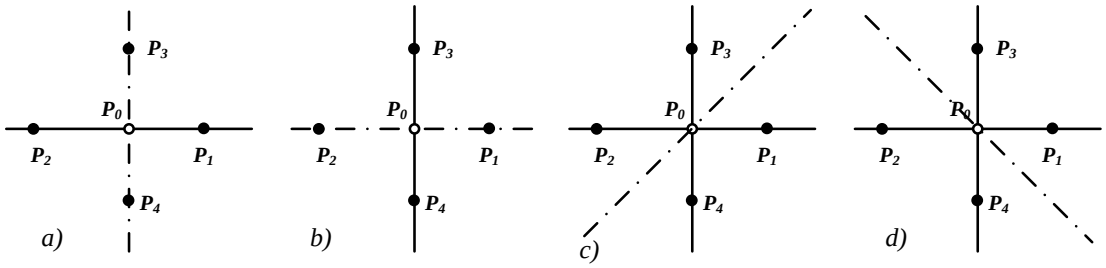
$A_3 = A_4$ و $A_1 = A_2$

$$A_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_3) \qquad (1.69)$$

- الحالة الرابعة

$A_2 = A_3$ و $A_1 = A_4$

$$A_0 = \frac{1}{2}(A_2 + A_4) \qquad (1.70)$$



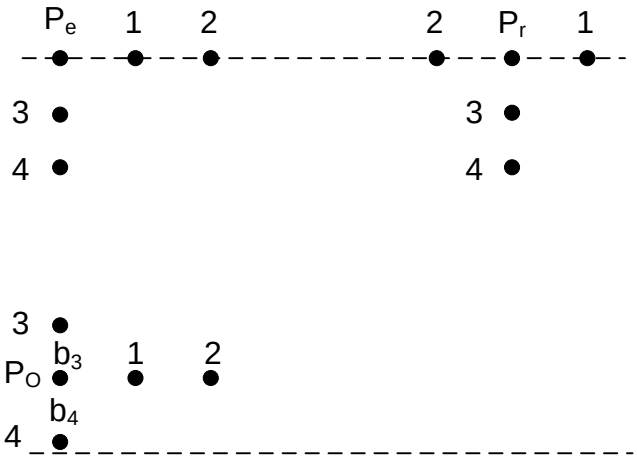
الشكل (3-1)

وهكذا يمكننا وضع نظام المعادلات بحيث يوجد معادلة لكل نقطة من الشبكة كمونها مجهول وذلك وفق كل حالة من حالات التي ذكرناها في المعادلة (1 . 64) أو (1 . 65) وكل معادلات نقاط نيومان الحدية من (1.67) إلى (1.70) .كذلك يعطي كمون نقاط معينة (حالات حدية خاصة) الشكل (1.4) بالعلاقات التالية :

$$A_{pe} = \frac{1}{4}(4A_1 - 2A_2 + 4A_3 - 2A_4)$$

$$A_{pr} = \frac{1}{4}(A_1 - A_2 + 4A_3 - 2A_4) \qquad (1.71)$$

$$A_{po} = \frac{1}{4}(4A_1 - 2A_2) + [(2! + b_4)/2!]A_3 + [(2! - b_3)/2!]A_4$$



الشكل (4-1) يوضح بعض النقاط الحدية

لكن عند دراسة هذه الطريقة في النظم المحورية والاسطوانية والدائرية يوجد صعوبة في تحديد الشروط الحدية والنقط الحدية الواقعة على الحدود ،لذلك فان هذه الطريقة لاتطبق في الأنظمة المعقدة.

1-4-2 : طريقة مونتي –كارلو: Monte-Carlo method

إن هذه الطريقة تعتمد على إيجاد الجهد (V) في العقدة الافتراضية للشبكة (X_i,Y_i)الشكل-1 (5) من خلال شرط أن القيم الحدية معروفة $V(u_i,v_i)$ في النقطة العقدية (u_i,v_i) للخط الحدي C والمحاط بالحيز المعطى لحقل الكمون المغناطيسي.بعد الخروج من العقدة (X_i,Y_i) فإن الحركة تكون على طول خط الشبكة والتي نختار خطوطها عشوائياً بعد كل انزياح للوسط بأربع جهات وهي $\mp\Delta Y,\mp\Delta X$ وبعد الوصول إلى العقدة الافتراضية فأن العملية تعاد وتتكرر . ومن خلال عدد كبير للإعادة وليكن N فإن الانزياح يكون n_1 مرة في النقطة الحدية (u_1,v_1) و n_2 مرة في النقطة (u_2,v_2) حيث أن :

$$n_1 + n_2 + n_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = N$$

إن احتمال هذا أو ذلك المخرج من النقاط (X,Y) بمسار اختياري سوف تقع في النقطة (u_i,v_i) وتكون :

$$= \frac{n_i}{N} \qquad (1.72)\ p(x, y, u_i, v_i)$$

وتكون القيمة الوسطية للجهد $\nabla(u,v)^{x,y}$ في نهاية المسار الاختياري تبدأ في النقطة (X,Y) وتحسب بالعلاقة :

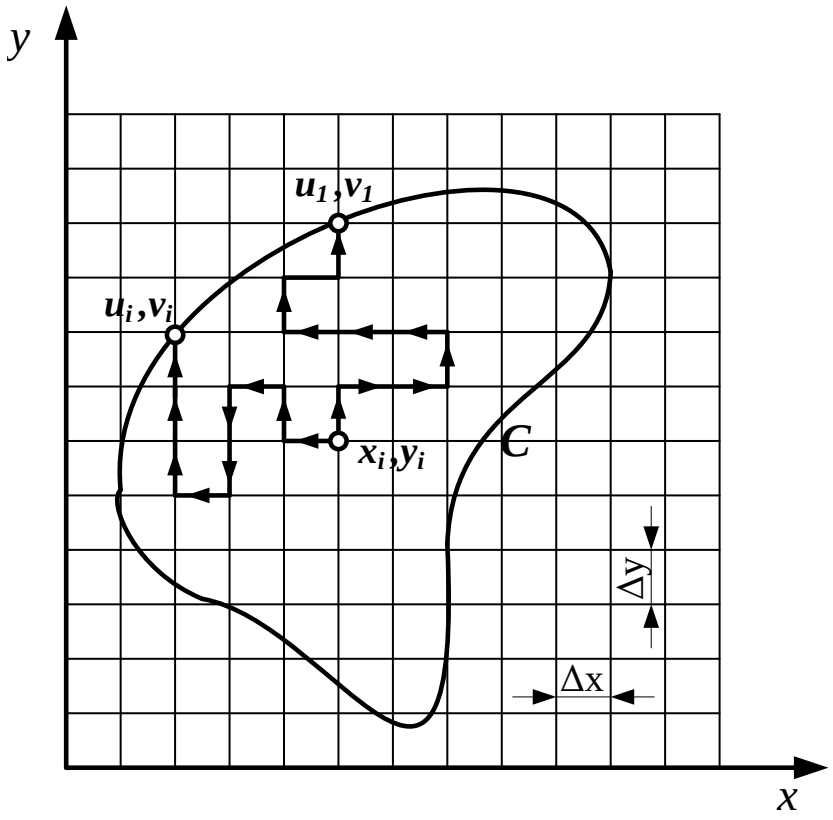
$$\nabla(u,v)^{x,y} = \frac{1}{N}$$

$$[n_1 V(u_1, v_1) + n_{12} V(u_2, v_2) + \cdots + n_1 V(u_1, v_1)] =$$

$$= \sum_i p(x, y, u_i, v_i) = V(u_i, v_i) \qquad (1.73)$$

وتساوي الجهد في النقطة الأولية المدروسة :

$$V(x,y) = \overline{V}(u,v)^{x,y} \qquad (1.74)$$



الشكل(5-1) يوضح طريقة مونتي كارلو

إن طريقة (مونتي – كارلو) غير حقيقية وتتطلب وقت كبير من أجل إجراء الحسابات واستخدام مولد الأعداد الاختيارية . ولكن هذه الطريقة تستخدم من أجل التنعيم التقريبي العددي والجيد للعمليات المعقدة .

3- 4 – 1 : طريقة الدارات المغناطيسية (السلاسل المغناطيسية):

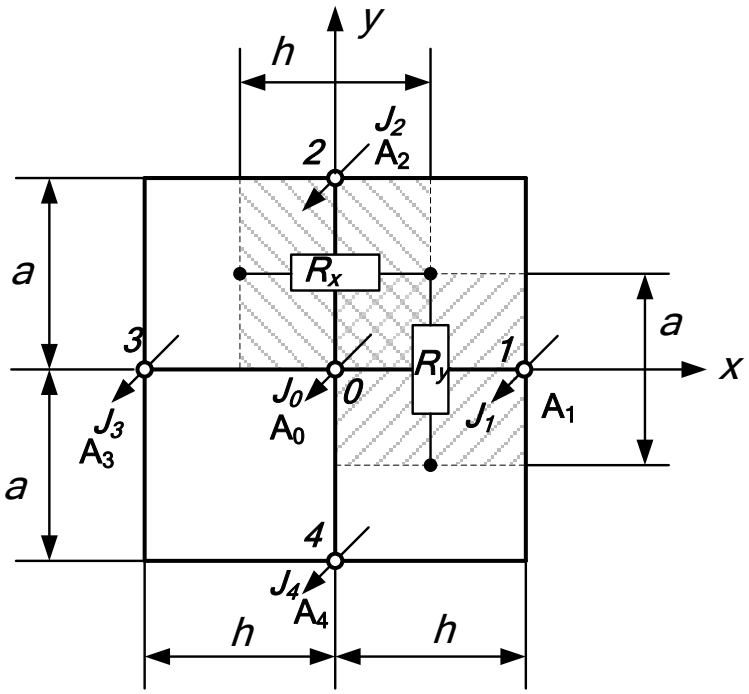
Magnetic circuit method

إن طريقة الدارات المغناطيسية تأتي بشكل مباشر من طريقة الفروق المنتهية (التمايز المحدود).فمثلا لأجل معادلة بواسون التفاضلية :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}=-\mu J(X_i,Y_k) \qquad (1.75)$$

ومن أجل شبكة بخطوات مختلفة في اتجاه المحور X , Y كما في الشكل (1.6) فإن معادلة بواسون تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{A_1-A_0}{h^2}+\frac{A_3-A_0}{h^2}+\frac{A_2-A_0}{a^2}+\frac{A_4-A_0}{a^2}=\mu J_z \qquad (1.76)$$



الشكل (1.6) الربط المتبادل لعناصر السلاسل المغناطيسية والفروق المنتهية

ومن الرسم الواضح في الشكل (1-7) فإن :

$$(A_1 - A_0)R_Y + (A_3 - A_0)R_Y + (A_2 - A_0)R_X + (A_4 - A_0)R_X = -I_0 \qquad (1.77)$$

حيث أن :

$$Ry = \frac{a}{\mu h.I} \quad , \quad R_x = \frac{h}{\mu a.I} \qquad (1.48)$$

وبنفس الوقت :

$$\phi_i = \iint_{si} Bds_i = \iint_{si} rotAds_i = \int_{LI} A_i dl_i$$

وبعد ذلك تحسب الجهود الشعاعية لعقد الشبكة في الشكل (1-6)

$$\phi_1 = A_0 - A_1 \qquad \phi_2 = A_0 - A_2$$

$$\phi_3 = A_0 - A_3 \qquad \phi_4 = A_0 - A_4$$

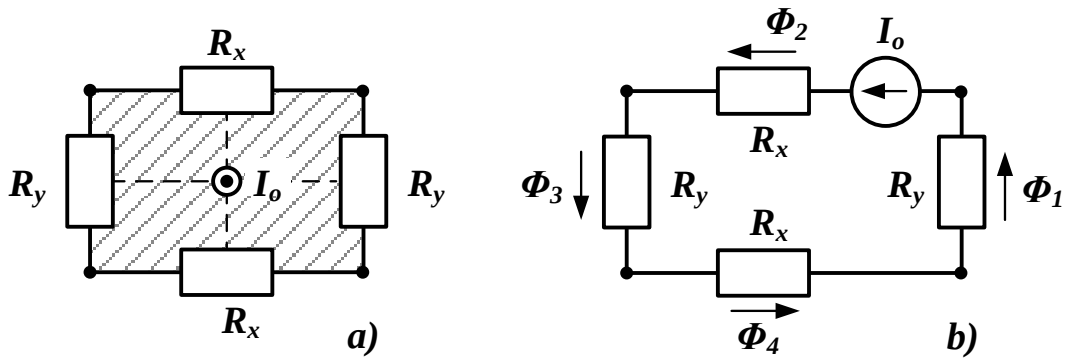
وبالتعويض في المعادلة(1.77) نحصل على قانون كيرشوف المغناطيسي :

$$\phi_1 R_Y + \phi_3 R_Y + \phi_2 R_X + \phi_4 R_X = I_0$$

أو

$$\sum_{i=1}^{4} \phi_i R_i = I_0 \qquad (1.79)$$

وبالتالي مسألة حساب الحقل تؤول بهذه الحالة إلى حساب البارمترات في المعادلة (1.78).



الشكل (7-1) إعادة تشكيل فوارق الشبكة

A –حسب قانون التيار المتكامل b –حسب السلاسل المغناطيسية

4 - 4 - 1 : طريقة المعادلات التكاملية: Method of integrals equations

نواجه أحيانا في بعض مسائل الكهرطيسية صعوبات تحديد بعض الشروط الحدية على حدود الجسم المدروس. وجد حل لهذه الصعوبات باستخدام المعادلات التكاملية لفريدغولم من الدرجة الثانية على الشكل التالي:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,s) y(s) ds \qquad (1.80)$$

حيث أن:y(x)– تابع مجهول.

g(x)– التابع المعطى.

K(x,s) – قلب المعادلة التكاملية من أجل كل زوج من الأعداد المربعة:

$$a \le s \le b, a \le x \le b$$

λ – بارا متر عددي حقيقي أو مركب.

أن معادلة فريدغولم تعتبر بالوقت نفسه معادلة اويلر للتابع المركب:

$$I[y] = \int_a^b [y(s)]^2 ds - \lambda \int_a^b \int k(x,s) y(x) y(s) dx ds - 2\int_a^b g(s) y(s) ds + c \qquad (1.81)$$

وإذا نفذت الشروط:

- g(x) يتكامل في (a,b).

$$\max[k(x,s)] \le \frac{1}{\lambda(b-a)} \qquad (1.82)$$
$$a \le x; s \le b$$

فان المعادلة (1.80) تملك حل وحيد فقط في التكامل(a,b) على شكل مجموع متداخلة نايمن (وتسمى صفوف بورن):

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i g_i(x) \qquad (1.83)$$

حيث أن $g_0(x) = g(x)$ وكذلك

$$g_i(x) = \int_a^b k(x,s) g_{i-1}(s) ds \qquad (1.84)$$

إن المعادلة التفاضلية لفريد غولم تحل عادة بالطرق الحسابية كطريقة التكرار أو طريقة الفروقات المنتهية.

5 - 4- 1: طريقة المجاميع المنتهية: Finite aggregation method

تعتمد هذه الطريقة على أن معادلة فريدغولم (1.80) تكتب على شكل مجموع:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi(x_k) + \rho(\varphi) \qquad (1.85)$$

وبعد ذلك تأخذ المعادلة شكل معادلات جبرية خطية:

$$y(x_{i)} = g(x_i) + \lambda \sum_{k=i}^{n} A_K k(x_i, x_k) y(x_k) + \lambda \rho_i ; i = 1,2,3,..... \qquad (1.86)$$

حيث أن:

$$\rho_i = \lambda \rho \left[k(x_i, s) y(s) \right] -$$

$x_k (k = 1,2,3,....., n)$ نقاط التكامل (a,b).

- $A_K (k = 1,2,3,....., n)$ ثوابت عددية لاتتعلق باختيار التابع $\varphi(x)$

- $\rho(\varphi)$ خطأ المعادلة.

إن القيمة المجهولة ل $\lambda \rho_i$ تحل ونحصل على حل على شكل قيمة عددية $y(x_i)$.

1-4-6: طريقة العناصر المنتهية: The Finite – Element Method

إن طريقة العناصر المنتهية تقنية عامة لحل المعادلات التفاضلية،طبقت هذه الطريقة في البدايات من قبل مهندسي الإنشاء لحل مسائل متعلقة بالتحليل الإنشائي.ولم يتم استخدامها في معالجة مسائل الحقل الكهرطيسي حتى عام1968.

تعتمد طريقة العناصر المنتهية في المجالات الكهرومغناطيسية على حل معادلات ماكسويل عند شروط حدية معينة في كل مساحة أو جزء متناه في الصغر في الموضوع المدروس، هنا في حالتنا هو آلة كهربائية (محولة) ،ويتمثل حساب الحقل الكهرومغناطيسي عند تطبيق طريقة العناصر المنتهية بالحصول عمليا على مختلف القيم الكهربائية والمغناطيسية في كل جزء عنصري من الموضوع المدروس،حيث يمكن إن تشتمل هذه القيم على السيالة وكثافة السيالة المغناطيسية وشدة الحقل المغناطيسي وغير ذلك من القيم المغناطيسية بالإضافة إلى القيم الكهربائية من تيارات و عزوم و ضياعات استطاعة وغيرها.عندا لعمل بطريقة العناصر المنتهية نقوم بما يلي:

- تجزئة حقل المسألة إلى مجموعة من المجالات الجزئية تدعى العناصر المنتهية.
- ربط التوزع الكموني ضمن كل عنصر منتهي بواسطة كثير حدود أو تابع تجريبي.
- وفي النهاية يتم حل جملة المعادلات الخطية الناتجة للكمون.

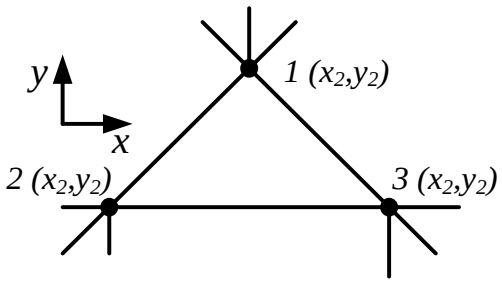
حيث يمكننا استخدام أشكال متعددة للعناصر المنتهية كالمثلث والمربع والأشكال المحنية ويتم اختيار شكل العناصر المنتهية على ضوء الشكل الهندسي للموضوع المدروس (الآلة أو بعض أجزائها) ومرتبة التوليد لكثير الحدود. كما ذكرنا من اجل تطبيق طريقة العناصر المنتهية لابد من تجزئة حقل المسألة إلى مجموعة من المجالات الجزئية تسمى بالعناصر المنتهية ،ويتم القيام بهذه التجزئة بطريقة لاتسمح للعنصر المفرد.وتسمى مجموعة العناصر المنتهية بالشبكة،ويكون حجم وتوجه العناصر في الشبكة غير مقيد.

وقد اخترنا أكثر العناصر المنتهية شيوعا وهو العنصر المثلثي من الدرجة الأولى،نفرض أن الكمون يتغير ضمن هذا العنصر بشكل خطي وفق العلاقة التالية:

$$A(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

(1.87)

لنعتبر المثلث واقعا في المستوي x-y وان رؤوسه مرقمة بالأرقام 1,2,3 كما واضح في الشكل(1.8).وإذا اعتبرنا قيم الكمون المغناطيسي في هذه الرؤوس هي A_1وA_2 و A_3 على التوالي نستطيع اعتمادا على العلاقة السابقة لحساب هذه الكمونات بالعلاقات التالية:



الشكل(1. 8) يمثل عنصر من شبكة مثلثيه

$$A_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1$$
$$A_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \qquad (1.88)$$
$$A_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3$$

من المعادلات الثلاثة السابقة نستطيع حساب الثوابت a_1,a_2, a_3 بحل جملة المعادلات الخطية بطريقة مقلوب المصفوفة فنحصل على مايلي:

$$a_1 = \frac{1}{2D}\begin{vmatrix} A_1 & x_1 & y_1 \\ A_2 & x_2 & y_2 \\ A_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad a_2 = \frac{1}{2D}\begin{vmatrix} 1 & A_1 & y_1 \\ 1 & A_2 & y_2 \\ 1 & A_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \frac{1}{2D}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & A_1 \\ 1 & x_2 & A_2 \\ 1 & x_3 & A_3 \end{vmatrix} \qquad D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

حيث D تساوي مساحة العنصر المثلثي ، وبتعويض قيم الثوابت في المعادلة(1 .2) وبإجراء الاختصارات اللازمة نحصل على:

$$A(X,Y) = \frac{1}{2D}\sum_{k=1}^{3}(p_k + q_k x + r_k y)A_k$$

حيث r_k , q_k , p_k مقادير مرتبطة بإحداثيات رؤوس المثلث ناتجة عن التعويض الذي اشرنا إليه أعلاه وهي تساوي:

$$p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, q_1 = y_2 - y_3, r_1 = x_3 - x_2$$

$$p_2 = x_3 y_1 - y_3 x_1, q_2 = y_3 - y_1, r_2 = x_1 - x_3$$

$$p_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2, q_3 = y_1 - y_2, r_3 = x_2 - x_1$$

وبالتالي نستطيع كتابة المعادلة بالشكل التالي:

$$A(x,y) = \alpha_1(x,y)A_1 + \alpha_2(x,y)A_2 + \alpha_3(x,y)A_3$$

$$\Rightarrow A(X,Y)=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k(x,y)A_k \qquad (1.89)$$

حيث أن:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x,y)&=\frac{1}{2D}(p_1+q_1x+r_1y)\\ \alpha_2(x,y)&=\frac{1}{2D}(p_2+q_2x+r_2y)\\ \alpha_3(x,y)&=\frac{1}{2D}(p_3+q_3x+r_3y)\end{aligned} \qquad (1.90)$$

تدعى هذه التوابع توابع الشكل(shape functions)،لكي تتحقق المعادلة (1.88) يجب أن يتحقق ما يلي:

$$\alpha_1(x_1,y_1)=1,\alpha_2(x_1,y_1)=0,\alpha_3(x_1,y_1)=0$$
$$\alpha_1(x_1,y_1)=0,\alpha_2(x_{2,}y_2)=1,\alpha_3(x_{2,}y_2)=0$$
$$\alpha_1(x_1,y_1)=0,\alpha_2(x_2,y_2)=0,\alpha_3(x_{3,}y_3)=1$$

على سبيل المثال فان $A_1=1A_1+0A_2+0A_3$ ،وهكذا تختلف البارمترات α_k بشكل خطي بين 1 في العقدة الأولى وصفر في العقدتين 2 و3.

لحل المعادلة التفاضلية بطريقة FEM تستخدم عدة تقنيات تقريبية من أهمها:

طرق تقريبية مختلفة Variational method :

تعتمد هذه الطرق على تحديد تكامل التوابع مثل $u_{i(x,y)}$ بواسطة استبدالها بتوابع تأخذ قيم حدية مثلى(أعظمية وقيم دنيا) وفي حالة دراسة الحقل تؤخذ القيم

الدنيا،ويتبع التكامل لمجموعة متحولات في المسائل الكهروميكانيكية والكهرطيسية ويعطى التكامل وفق العلاقة التالية:

$$I = \iint_{\Omega} F(u, u_x, u_y, x, y)dxdy \qquad (1.91a)$$

حيث أن $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ والتابع المجهول $u(x,y)$ ومشتقاته الجزئية غير منقطعة في المجالΩ وينتج على الحدود c للمجال المدروس والمعطى قيمته .

إن حل المعادلة يتم بإنهاء تكامل التابع المركب إلى قيمته الصغرى كما يلي: $I = \iint_{\Omega} F(u, u_x, u_y, x, y)dxdy = \min$ (1.91b)

وتمثل معادلة اويلر Euler equation.

تستخدم هذه المعادلة لإيجاد القيم الحدية للتابع المركب بأساليب تقريبية متعددة مثل طريقة ريتس(Ritze) . حيث تسمح هذه الطريقة على حل تقريبي لمتغيرات المعادلة (1.91b) بإيجاد التركيب الخطي التالي :

(1.92)

حيث نختار سلسلة التوابع $\varphi_0(x,y), \varphi_1(x,y), ...$بشكل خطي للمتحولات في التكامل(o,c) بحيث يتحول التابع في العلاقة السابقة إلى القيمة الصغرى للتابع المركب في العلاقة(1.91b).

عندئذ يكون التابع $\varphi_0(x,y)$محققا للشروط الحدية المعطاة للتابع(u(x,y أي:

$$u(p) = F(p); p \in c$$

والتوابع الباقية تأخذ القيمة الصفرية على الحدود c للحيز المعطى Ω أي أن:

$$\varphi_n(0) = 0; \varphi_n(c) = 0; n = 1,2,3$$

وبهذا تتحول المسألة الأولية إلى إيجاد n بارامتر(ثابت) $a_1, a_2, a_3 ..... a_n$ والتي تحدد حدود التابع المركب ومعبرة بهذا الشكل في علاقة التابع عن العناصر التالية:

$$I = I(a_1, a_2, ... a_n)$$

وكما هو معروف فان القيم الدنيا للتابع تحسب بمساعدة العلاقة التالية:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0; k = 1,2,3,....., n \qquad (1.93)$$

إن هذه العلاقة تعبر عن نظام من n معادلة ب n مجهول.

باعتبار أن مسائل الحقول الكهرطيسي تدرس بواسطة المعادلات التفاضلية المعروفة بمعادلات لابلاس ويواسون فيما يخص الحقول الساكنة وشبه الساكنة والمعادلات الموجية الكهرطيسي في حالة الحقول الكهرطيسي.

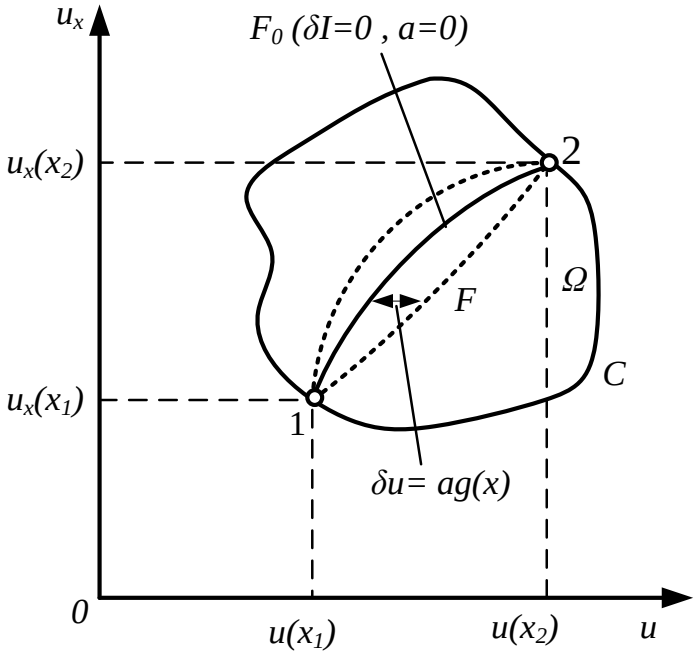
عند إعادة صياغة المعادلة (1.91b) مع الأخذ بعين الاعتبار ماتم الإشارة إليه أعلاه تأخذ الشكل التالي :

$$I = \iint_{\Omega} F(u, u_x, u_y, x, y) dxdy = \min;$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

وبعد ذلك تحل هذه المعادلة بطريقة العناصر المنتهية.يتم اختيار التابع F في هذه الحالة بحيث تشكل العبارات التفاضلية معادلة اويلر لهذا التابع .تفرض معادلات اويلر شروط حدية للقيمة

الدنيا للتكامل (1.61b)،يتم الحصول على القيم الأولية للتابع F_0 من خلال القيم الفراغية للمتحولات u(x,y) كما يبين الشكل (1.10)، إن قيمة F_0 تخضع للشروط الحدية u_c بحيث أن قيمة التكامل في المعادلة (1.61b) اقل مايمكن بالمقارنة مع القيم الأخرى للتكامل والتي تخضع جميعها للشروط الحدية والتي تجاور F_0.



الشكل(1. 9)

بفرض أن تابع المتغيرات عبارة عن تابع خطي إذا :

$$u_a(x,y) = u(x,y) + ag(x,y) \qquad (1.95)$$

حيث أن:

g(x,y) - تابع اختياري يحقق الشروط الحدية g (c) =0

a– مقدار اختياري للتوابع المجاورة للتابع F_0والتي من أجلها التكامل (1.61a) يأخذ الشكل:

$$I(a)=\iint_{\Omega} F\left[(u+ag),\frac{\partial(u+ag)}{\partial x},\frac{\partial(u+ag)}{\partial y},x,y\right]dxdy \qquad (1.96)$$

ومن خلال الشروط التي يملك بها التابع مشتقات دائمة (غير منقطعة) حتى المشتق من الدرجة الثالثة فان هذه المعادلة تشكل سلسلة تايلور:

$$I(a)=I(0)+aI^{'}(0)+\frac{a^2}{2!}I^{"}(0)+a^3k(a) \qquad (1.97)$$

إذا كان التابعF في (1.91a) يملك شكل:

$$F=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \qquad (1.98)$$

فان المعادلة (1.91a) تأخذ الشكل التالي:

$$\iint_{\Omega}\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2\right]dxdy=\min$$

بمراعاة تقريبات اويلر سنحصل على معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

إذا كان التابع تحت التكامل يملك الشكل:

$$F=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2-2u\rho(x,y) \qquad (1.99)$$

فان التابع المركب يملك الشكل التالي:

$$\iint_{\Omega}\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+2u\rho(x,y)\right]dxdy=\min$$

بمراعاة تقريبات اويلر في شكل معادلة بواسون نحصل عليها من تعويض (1.95) في (1.91b):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\rho(x,y) \qquad (1.100)$$

أما إذا كان التابع تحت التكامل يملك الشكل:

$$F=\frac{1}{2\mu}\left[(\frac{\partial A_m}{\partial x})^2+(\frac{\partial A_m}{\partial y})^2+\frac{a^2}{2\mu}A_m^2-J_m A_m\right] \qquad (1.101)$$

فان التابع المركب يملك الشكل:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2\mu}\left[(\frac{\partial A_m}{\partial x})^2+(\frac{\partial A_m}{\partial y})^2\right]+\frac{a^2}{2\mu}A_m^2-J_m A_m\right]dxdy=\min$$

وبعد أن نعوض (1.96) في (1.91b) وبمراعاة تقريبات اويلر من اجل الجهد الشعاعي المتناوب الجيبي تملك الشكل:

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2}=a^2 A_m-\mu J_{ct} \qquad (1.102)$$

الفصل الثاني

استخدام طريقة العناصر المنتهية في حسابات الحقول

تمهيد:

يتم اختيار الطريقة الرقمية المناسبة لحساب الحقول بحيث تكون فعالة وقابلة للتطبيق لآجل المسألة المدروسة، فبعد الاطلاع على كافة الطرق الرقمية الممكنة في الفصل الأول والمقارنة فيما بينها فقد تبين أن أكثر هذه الطرق استخداما في الوقت الحاضر هي طريقة العناصر المنتهية، حيث تتصف هذه الطريقة بأنها قابلة للتطبيق في المسائل التي تمتلك حدودا غير منتظمة على خلاف الطرق الأخرى، إضافة إلى الدقة العالية التي تتمتع بها ، كما أن معظم برمجيات التحليل العددي المتاحة حاليا تعتمد على طريقة العناصر المنتهية. لذا سنعتمدها في دراستنا وسنوضح من خلال هذا الفصل كيفية تطبيقها في موضوع دراسة توزع الحقل الكهرطيسي.

2-1 : استخدام طريقة العناصر المنتهية في حساب الحقول المغناطيسية الساكنة وشبه الساكنة:

1 - 1 – 2 فمن أجل حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعبرة عن الحقل المغناطيسي الساكن من دون منابع إي معادلة لابلاس والتي تكتب بدلالة الكمون المغناطيسي (A) كما يلي :

$$\nabla^2 A = 0$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} = 0 \qquad (2.1)$$

نتبع الخطوات التالية :

الخطوة الأولى : نقسم المجال إلى مجموعة من العناصر المنتهية (ولتكن مثلثات).

الخطوة الثانية : وفقاً لطرق التقريب المختلفة *(Variational Methods)* يتم إيجاد تابع مركب متعلق بالطاقة موافق لهذه المعادلة يكتب بالشكل التالي :

$$W_m = \frac{\mu}{2} \int_\Omega |\nabla A|^2 \, ds \qquad (2.2)$$

وتكون الطاقة لكل واحدة طول ناتجة عن عنصر مثلثي e

$$W_e = \frac{\mu}{2}\int_{\text{area of e}} |\nabla A|^2 \, ds \qquad (2.3)$$

$$W_e = \frac{\mu}{2}\int_D (\nabla A_e \,.\, \nabla A_e)\, ds$$

وباستخدام *العلاقة* (89. 1) تصبح المعادلة بالشكل التالي :

$$W_e = \frac{\mu}{2}\int_D \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \nabla\alpha_i \,.\, \sum_{j=1}^{3} A_j \nabla\alpha_j\right) ds$$

$$W_e = \frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_i \left(\int_D \nabla\alpha_i . \nabla\alpha_i ds\right) A_j \qquad (2.4)$$

بتعريف الجزء الواقع ضمن القوسين بالشكل التالي :

$$c_{ij}^{(e)} = \int \nabla\alpha_i \,.\, \nabla\alpha_j ds \qquad (2\,.\,5)$$

نستطيع كتابة المعادلة (2 . 4) بالشكل التالي *:*

$$W_e = \frac{\mu}{2}[A]^T\left[C^{(e)}\right][A]$$

حيث :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

منقول المصفوفة $[A]$:

$$[A]^T = [A_1 \quad A_2 \quad A_3]$$

$$\left[C^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} C_{11}^e & C_{12}^e & C_{13}^e \\ C_{21}^e & C_{22}^e & C_{23}^e \\ C_{31}^e & C_{32}^e & C_{33}^e \end{bmatrix}$$

وتسمى هذه المصفوفة بمصفوفة معاملات العنصر *(Element coefficient matrix)*

لإيجاد عناصرها يتم تعويض (90 . 1) *في المعادلة* (3 . 2) *نحصل على مايلي*

$$C_{11}^{(e)} = \frac{1}{4D}[q_1 q_1 + r_1 r_1] \qquad (2.6a)$$

$$C_{12}^{(e)} = \frac{1}{4D}[q_1 q_2 + r_1 r_2] \qquad (2.6b)$$

$$C_{13}^{(e)} = \frac{1}{4D}[q_1 q_3 + r_1 r_3] \qquad (2.6c)$$

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)} \qquad (2.6d)$$

$$C_{22}^{(e)} = \frac{1}{4D}[q_2 q_2 + r_2 r_2] \qquad (2.6e)$$

$$C_{23}^{(e)} = \frac{1}{4D}[q_2 q_3 + r_2 r_3] \qquad (2.6f)$$

$$C_{13}^{(e)} = C_{31}^{(e)} \qquad (2.6g)$$

$$C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \qquad (2.6h)$$

$$C_{33}^{(e)} = \frac{1}{4D}[q_3 q_3 + r_3 r_3] \qquad (2.6i)$$

أي بشكل عام

$$C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4D}\left[q_i q_j + r_i r_j\right] \qquad (2.7)$$

يلاحظ أن مجموع عناصر كل سطر من المصفوفة $\left[C^{(e)}\right]$ ، ومجموع عناصر كل عمود من هذه المصفوفة يساوي الصفر أي

$$\sum_{i=1}^{(e)} C_{ij}^{(e)} = \sum_{j=1}^{(e)} C_{ij}^{(e)} = 0 \qquad (2.8)$$

الخطوة الثالثة : تجميع العناصر في منطقة الحل :

$$W = \sum_{e=1}^{n} W_e = \frac{\mu}{2}[A]^T[c][A] \qquad (2.9)$$

حيث : $[A]$ مصفوفة الكمونات في العقد

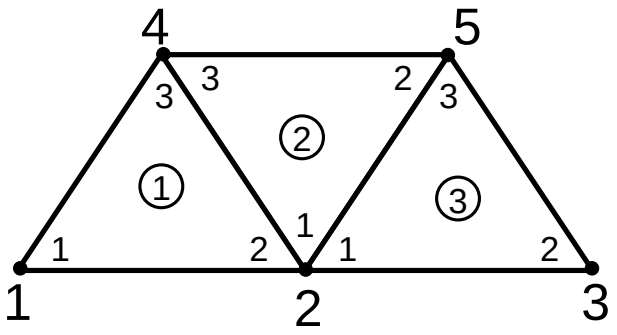
$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

و $[A]^T$ منقول المصفوفة $[A]$

و $[c]$ مصفوفة الامثال العامة (*global coefficient matrix*) وهي تجميع لمصفوفة معاملات العناصر الجزئية .

ولتوضيح عملية تشكيل مصفوفة المعاملات العامة $[c]$ ، نأخذ مثال توضيحي لمجموعة مؤلفة من ثلاثة عناصر موضحة في الشكل (1 . 2) .

لأجل كل عنصر ، تكون أرقام العقد 1,2,3, موجودة داخل المثلث باتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة . وتدعى العقد المحلية Local nodes ، مع إمكانية البدء من أي عقدة في العنصر . بينما عقد المجموعة الكاملة (nodes of assembly) تدعى العقدة العامة (global nodes) وهي القمم خارج المجموعة (Vertices outside assembly) وفي مثالنا تأخذ الأرقام (1 , 2 , 3 , 4, 5) في حين أقام العناصر فتوضع ضمن دوائر داخل العنصر .



الشكل(2.1)

على أساس الترقيم المحدد في الشكل (2 . 1) فان مصفوفة المعاملات العامة تأخذ الشكل :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

أي أن حجم مصفوفة المعاملات العامة له الشكل($n \times n$) حيث n : عدد العقد العامة

في حين أن حجم مصفوفة معاملات العناصر لها دائماً الشكل 3×3 .

وبما أن الطاقة الكلية المعبر عنها بالعلاقة (2 . 9) تكون مجموعة طاقات العناصر المفردة وبالاستفادة من كون توزع الكمون يجب أن يكون مستمراً بين حدود كل عنصرين متجاورين تكون عناصر المصفوفة $[c]$ مرتبطة مع عناصر المصفوفة $[C^{(e)}]$.

بالعودة إلى المثال التوضيحي ، فمثلاً لأجل العقدة العامة (1) تنتمي إلى العنصر الأول فقط وعقدها المحلية هي العقدة (1) أيضاً

$$C_{11} = C_{11}^{(1)}$$

من أجل العقدة العامة (2) فإنها تنتمي إلى العناصر الثلاثة ولها العقدة المحلية (2) من اجل العنصر الأول والعقدة المحلية (1) لأجل العنصر الثاني والعقدة المحلية (1) لأجل العنصر الثالث

$$C_{22} = C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} + C_{11}^{(3)}$$

وبشكل مشابه :

$$C_{33} = C_{22}^{(3)}$$

$$C_{44} = C_{33}^{(1)} + C_{33}^{(2)}$$

من أجل C_{12} : الخط العام الواصل 12 هو نفس الخط المحلي 12 للعنصر الأول

$$C_{12} = C_{12}^{(1)}$$

من أجل C_{23} : الخط العام الواصل 23 هو نفس الخط المحلي 12 للعنصر الثالث

$$C_{23} = C_{12}^{(3)}$$

من أجل C_{24} : الخط العام الواصل 24 فهو مشترك بين العنصرين الأول والثاني وله الخط المحلي 2 3 لأجل العنصر الأول والخط المحلي 1 3 لأجل العنصر الثاني

$$C_{24} = C_{23}^{(1)} + C_{13}^{(2)}$$

وبشكل مشابه :

$$C_{25} = C_{12}^{(2)} + C_{13}^{(3)}$$

وفي حال عدم وجود ترابط (أو وصل مباشر) بين العقد العامة فإننا نضع الصفر

$$C_{13} = 0$$

وبهذه الطريقة نحصل على مصفوفة المعاملات التي تكتب بالشكل التالي :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & 0 & C_{13}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{23}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & C_{12}^{(3)} + C_{13}^{(3)} \\ 0 & C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(3)} & 0 & C_{23}^{(3)} \\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & 0 & C_{33}^{(1)} + C_{33}^{(2)} & C_{32}^{(2)} \\ 0 & C_{21}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{32}^{(3)} & C_{23}^{(2)} & C_{22}^{(2)} + C_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

نلاحظ من مصفوفة المعاملات العامة (عند العقد التي تشترك بها العناصر)إن هناك (9 عناصر لكل عنصر من العناصر الجزئية) . كما أنها تتميز بالخصائص التالية :

1. متناظرة (Symmetric) : أي $c_{ij} = c_{ji}$ كما هي مصفوفة معاملات العناصر .
2. بما أن $c_{ij} = 0$ أي لا يوجد ترابط بين العقدتين j و i فإنه من الواضح من أجل عدد كبير من العناصر تصبح $[c]$ متناثرة (Sparse) ومترابطة (banded)
3. مصفوفة شاذة (Singular) أي أن محددها يساوي الصفر .

الخطوة الرابعة :

حل جملة معادلات الكمون الناتجة .

بعد الحصول على عناصر مصفوفة المعاملات العامة ، نقوم بإيجاد مشتق الطاقة المعطاة في العلاقة (2 .9) بالنسبة إلى كمونات العقد ونساويها بالصفر (إي إرجاع الطاقة إلى نهاياتها الصغرى) .

وبهذا تكون الطاقة الكلية للمجال المدروس :

$$\frac{\partial W}{\partial A_k} = 0 \quad , \qquad For\ K = 1,2,3,4 \dots \dots \dots, n$$

$$\frac{\partial (\frac{\mu}{2}[A]^T[[c]][A])}{\partial A_k} = 0 \quad , \qquad For\ K = 1,2,3,4 \dots \dots \dots, n \quad (2.12)$$

فمثلاً لأجل المثال التوضيحي في الشكل (2 . 1) لأجل العقدة الأولى :

$$\frac{\partial W}{\partial A_1} = 2C_{11}A_1 + C_{12}A_2 + C_{13}A_3 + C_{14}A_4 + C_{15}A_5$$

$$+C_{21}A_2 + C_{31}A_3 + C_{41}A_4 + C_{51}A_5 = 0$$

$$\Rightarrow C_{11}A_1 + C_{12}A_2 + C_{13}A_3 + C_{14}A_4 + C_{15}A_5 = 0$$

وبشكل عام :

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ki}A_i = 0 \ For \quad , \qquad k = 1,2,3, \dots \dots, n$$

وبكتابة المعادلة (2 . 12) لجميع العقد k = 1,2,3,4,…..,n نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية التي بحلها نحصل على كافة قيم كمونات العقد.

2-1-2 :حل معادلة الحقل المغناطيسي الخطية المتجانسة (معادلة بواسون) بطريقة FEM :

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J \qquad (2.13)$$

الخطوة الأولى : نقسم مجال المسألة إلى مجموعة من العناصر المنتهية يكون الكمون المغناطيسي في كل عنصر معطى بالعلاقة :

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i\, \alpha_i(X,Y) \qquad (2.14)$$

الخطوة الثانية : إيجاد التابع المركب *(Functional)* الموافق لهذه المعادلة :

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (|\nabla A|^2 - 2\mu_0 JA)\, d\Omega \qquad (2.15)$$

بإتباع نفس الخطوة السابقة في حل معادلة لابلاس للحقل المغناطيسي نستطيع أن نعبر عن الحد الأول من المعادلة (2 .15) بالشكل :

$$C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4D}\left(q_i q_j + r_i r_j\right) \qquad (2.16)$$

والحد الثاني يكتب بالشكل

$$\int_e J_0^{(e)} \mu_0 \, A d\Omega = \mu_0 \sum_{i=1}^{i=3} J_0^{(e)} A_i \alpha_i = \mu_0 \sum_{i=1}^{3} J_0^{(e)} A_i \frac{D}{3}$$

حيث :

$$T_i^{(e)} = \mu_0 J_0^{(e)} \frac{D}{3} \qquad (2.17)$$

وتسمى T_i المصفوفة الشعاعية للمنابع المغذية .

وتكتب مساهمة العنصر المفرد كما يلي :

$$W^{(e)}(A) = \frac{1}{2}[A]^T[C^{(e)}][A] - [A]^T[T^{(e)}] \qquad (2.18)$$

الخطوة الثالثة : تجميع العناصر في منطقة الحل :

$$W(A) = \sum W^{(e)}(A) = \frac{1}{2}[A]^T[C] - [A]^T T \qquad (2.19)$$

ويتم إيجاد المصفوفة $[C]$ بنفس الطريقة وهي تجميع للمصفوفة $[C^{(e)}]$

الخطوة الرابعة :

حل جملة معادلات الكمون الناتجة .

نحصل على جملة المعادلات الخطية بمساواة المشتق الجزئي للتابع المركب (W) بالنسبة لكمونات العقد إلى الصفر .

$$\frac{\partial W(A)}{\partial A_i} = 0 \qquad ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots,n$$

$$[C][A] = [T] \qquad (2.20)$$

2-2 : طريقة العناصر المنتهية في الحقول الإعصارية :

بناء على طريقة العناصر المنتهية وطرق التقريب الموافقة لها ، أثبت أن حل المعادلات التفاضلية التي تعبر عن الحقل (لابلاس ، بواسون ..... الخ) يمكن أن تستبدل بإيجاد العناصر المكونة لتكامل التابع المركب (تابع التابع) كما في المعادلة (1.61b) والذي من أجله المعادلات السابقة تعتبر معادلات ايلر. لتطبيق ذلك من اجل الحقول الإعصارية والتي لأجلها يكون شعاع الكمون المغناطيسي الشعاعي الجيبي $A = A_Z$ والمكتوب بالمعادلات التفاضلية (1.97) والناتجة من تعويض (1.96) في (1.91b) ، يمكن إيجاد حل من أجل الحقول الإعصارية

$$I = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial A_m}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_m}{\partial Y} \right)^2 \right] + \frac{a^2}{2\mu} A_m^2 - J_m A_m \right\} dxdy \qquad (2.21)$$

من خلال ذلك فإذا كان الفراغ المدروس هو Ω يقسم إلى عناصر منتهية كما في الشكل (2.2) فمن أجل الحصول على قيم الأشعة للجهد A_1, A_2, A_3 في النقاط العقدية 1,2,3 تطبق العلاقة (1.89).

وبالتالي فإذا كان التحريض الأعظمي $B_m = B$ ولدينا :

$$B = \nabla \times A = i \frac{\partial A_Z}{\partial Y} - J \frac{\partial A_Z}{\partial X} \qquad (2.22)$$

بتعويض (1.89) في (2.23) ينتج لدينا :

$$B = \sum_{i=1}^{3} iA_K r_k - jA_K q_K \qquad (2.23)$$

إن المعادلة (2.23) لا تتعلق بالإحداثيات وبهذا التحريض B ويعتبر ثابت بالقيمة في مجال المثلث .إن البحث عن قيمة شعاع الكمون المغناطيسي تنطبق الآن مع حسابه في العقد

A_1, A_2, A_3 ويتم ذلك من خلال إيجاد القيمة الصغرى للتابع المركب (تابع التابع) الممثل في العلاقة (2.24) والتي تعتبر في النهاية الكمونات في العقد 1,2,3 .

ويتم ذلك بتعويض (1.89) في (2.23) بمراعاة أن

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad , \quad \text{k=1,2,3,.....n}$$

فإن وجود القيمة الصغرى للتابع المركب والمساوية للصفر تنتج في كل عقدة للكمون ونحصل عليها من أجل كل عنصر .

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial I^e}{\partial A_K} = \sum_{K=1}^{3} \left\{ \frac{1}{\mu} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial A_K} \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial A_K} \left(\frac{\partial A}{\partial Y} \right) \right] ds + \frac{a^2}{\mu} \iint_{\Omega} A \left(\frac{\partial A}{\partial A_K} \right) ds - \iint_{\Omega} J \left(\frac{\partial A}{\partial A_K} \right) ds \right\} = 0 \tag{2.24}$$

وبعد ترتيب هذه العلاقة نحصل على العلاقة :

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial I^e}{\partial A_K} = \sum_{K=1}^{3} \frac{1}{\mu} \iint_{\Omega} \sum_{1}^{3} \left(q_1 q_2 A_K + r_1 r_2 A_K \right) ds + \frac{a^2}{\mu} \iint_{\Omega} \sum_{1}^{3} \left(p_1 + q_1 X + r_1 y \right) \left(p_2 + q_2 X + c_2 Y \right) ds +$$
$$+ J \iint_{\Omega} \sum_{1}^{3} \left(p_1 + q_1 X + c_1 Y \right) ds \tag{2.25}$$

وهكذا بعد التكامل لكل من المعادلات (2.25) نحصل على معادلة نهائية مصفوفية على الشكل

$$PA + QA = R \tag{2.26}$$

حيث :

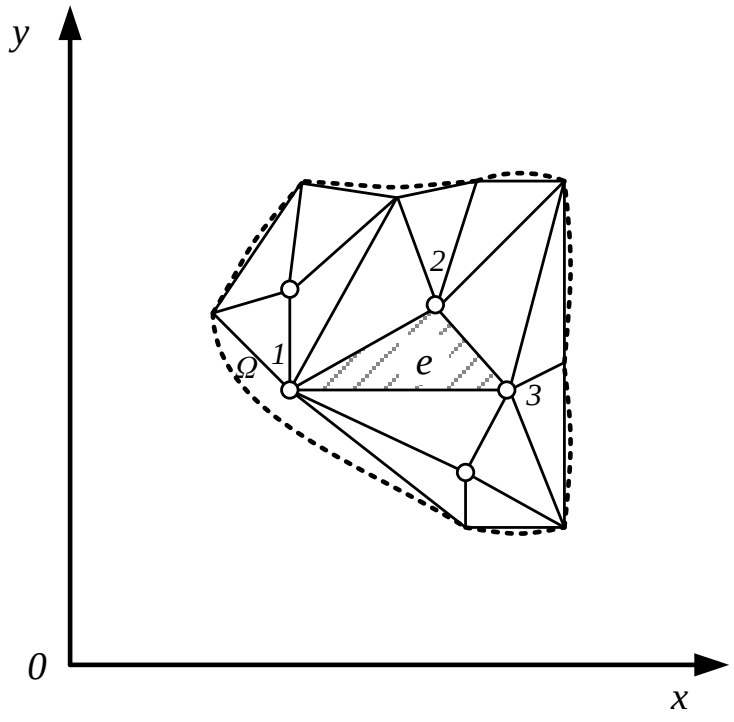
$$P = \frac{1}{4D\mu} \begin{bmatrix} q_1 q_1 + r_1 r_1 & q_1 q_2 + r_1 r_2 & q_1 q_3 + r_1 r_3 \\ q_2 q_1 + r_2 r_1 & q_2 q_2 + r_2 r_2 & q_2 q_3 + r_2 r_3 \\ q_3 q_1 + r_3 r_1 & q_3 q_2 + r r_{23} & q_3 q_3 + r_3 r_3 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$Q=\frac{a^2D}{12\mu}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$R=\frac{JD}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$$

يجب الأخذ بعين الاعتبار بأنه في المعادلة (2.21) I تساوي مجموع كل قيمة في جميع العناصر المثلثية I^e والتي نحصل عليها بواسطة نظام المعادلات لكامل مجموع القيم العقدية A_k حيث K=1,2,3…….n



الشكل(2.2) يبين تقسيم المستوي Ω إلى عناصر منتهية

2-3: برمجيات طريقة العناصر المنتهية:

إن استخدام طريقة العناصر المنتهية من أجل حل المسائل الكهرطيسية بالطرق العددية أصبح اليوم أمرا ممكنا بفضل البرمجيات المتعددة ذات الإمكانيات الكبيرة في التعامل مع مختلف أنواع الدراسة في هذا المجال. وغالبا ما تكون هذه البرمجيات على شكل نظم عامة شاملة لدراسة مجال واسع من المسائل وليس كبرامج محدودة مخصصة لحل مسألة بمفردها. وقد ساهمت عوامل رئيسية بتطوير هذه النظم وهي : تطور تقنيات وبنية الآلات الحاسبة،تطور برمجيات التمثيل البياني ، تطور الطرق الحسابية العددية التقريبية الذي سمح بتطبيق المعادلات الكهرطيسية والجيومترية بالشكل العنصري المجزأ.إن الحزم البرمجية الحديثة هي النظم التي تحتوي على الوحدات المكونة التالية:

1- **وحدة المعالجة الأولية** : التي تساعد على تحديد الأبعاد الهندسية للمسألة وتعيين الشروط الحدية . وتعتبر عملية توليد أو بناء الشبكة من ضمن عمليات المعالجة الأولية ، لذلك فهي تتم في هذه المرحلة ، حيث تتضمن تقسيم موضوع الدراسة إلى مجموعة العناصر المنتهية ذات الشكل المختار كالعنصر المثلثي من الدرجة الأولى وغيره. ويتم في هذه المرحلة تحديد خواص المواد المكونة لموضوع الدراسة كالرقائق الفولاذية أو النواقل النحاسية.....الخ.

2- **وحدة الحل** : التي تقوم بصياغة مجموعة المعادلات الجبرية الممثلة للحالة الفيزيائية المدروسة بطريقة رياضية. تم تقوم هذه الوحدة بحل المعادلات المذكورة بالطرق العددية التقريبية . وتعطي الحل عادة على شكل مجموعة من القيم العائدة لكمونات العقد .

3- **وحدة المعالجة النهائية** : وهي مخصصة لإظهار النتائج وتحليلها . في هذه المرحلة يصبح بالإمكان مراقبة ومعالجة الحقول وإيجاد بارامترات الحقل من شدة الحقل وكثافة التدفق المغناطيسي .....الخ.

سنستعرض فيما يلي بعض البرمجيات التي تعتمد على طريقة العناصر المنتهية:

1-برنامج تسلا TESLA

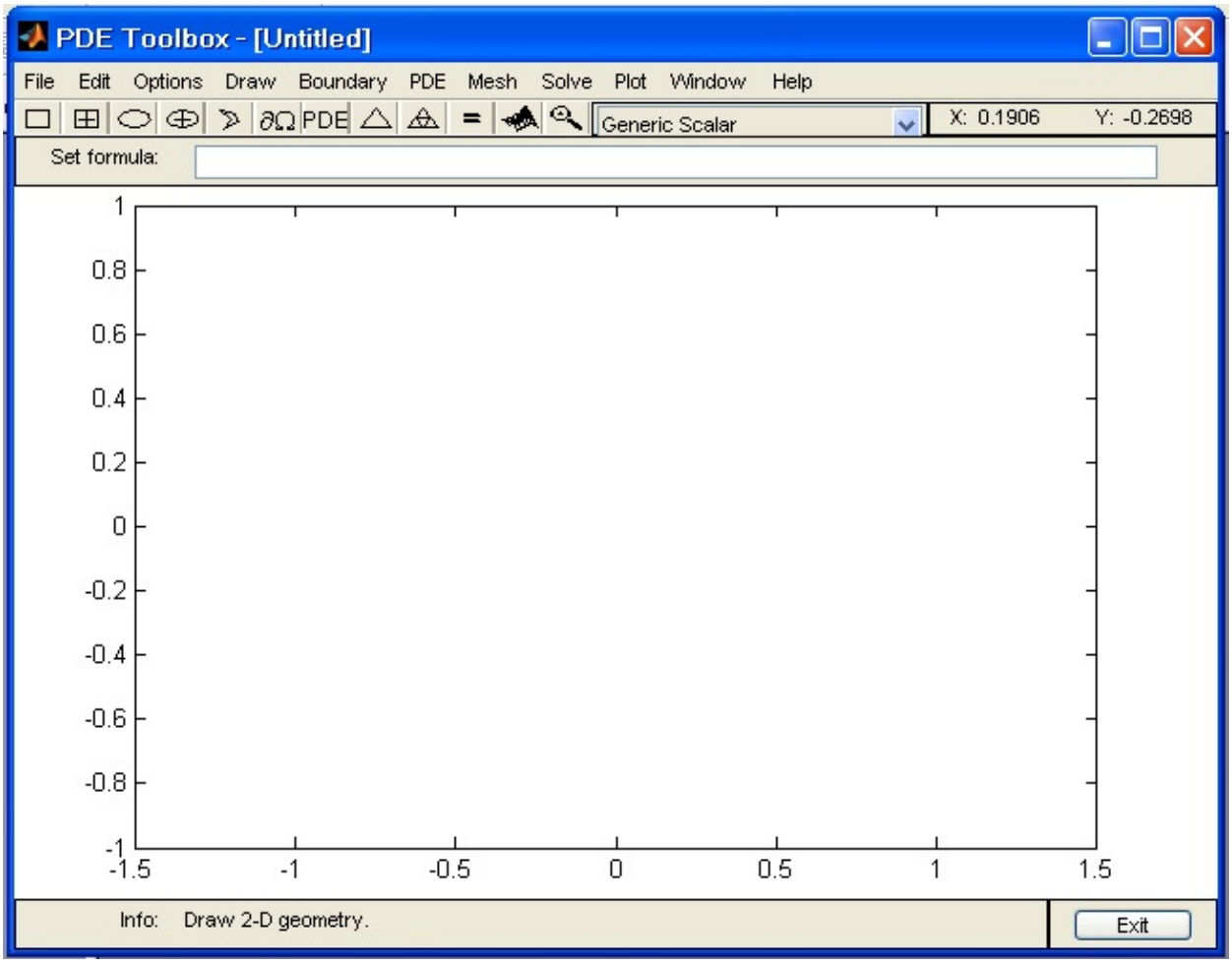
2-برنامج COMSOL MULTI PHISICS

3-برنامج Femm

4- برنامج Quick Field

تجدر الإشارة إلى أن هذه الحزم البرمجية المتوفرة لدينا في الوقت الحالي تعليمية محدودة الإمكانيات ولايمكن استخدامها بشكل واسع لحل المسائل العلمية الموسعة . فمن أجل حل هذه المسائل العلمية لابد من الاستعانة بالحزم البرمجية التجارية ذات الإمكانيات الواسعة.إلا أن هذه البرامج غالية الثمن لذلك فقد تم أثناء دراستنا الاستعاضة عنها ببرنامج Matlab/pde وقد أفاد بالغرض المطلوب . كما سنرى فيما بعد.

5- برنامج Matlab/pde



الشكل (2-3) واجهة MATLAB/PDE

2-3-1 : اختيار البرنامج المناسب :

بعد الاطلاع على برمجيات طريقة العناصر المنتهية والتعرف على إمكانيات كل منها فقد اخترنا في دراستنا برنامج Matlab/pde لأنه الأشمل والأوسع وهو غير مخصص لمسألة بمفردها فهو يعالج كافة أشكال الحقول الكهرطيسية بغض النظر عن تعقيدات البنية الهندسية للآلة المدروسة .على عكس البرامج التعلمية التي تم ذكرناها سابقا.

2-3-1-1- تعريف واجهة برنامج MATLAB/PDE:

عند البدء نقوم بكتابة الأمر PDE tool في نافذة أوامر Matlab الرئيسية فنحصل على الشكل

(2-3) كما هو واضح إنه يتضمن واجهة استعمال بيانية (GUI) للسيطرة على العرض .

في الأعلى ، يظهر مجموعة قوائم menu وكل قائمة تحتوي على قائمة فرعية سنشرح كل منها على حدا لاحقاً ، تحت هذه القوائم يوجد الشريط tool bar يحتوي على أزرار أيقونات تزود وصول سريع وسهل لبعض العمليات الأكثر أهمية ستوضحه لاحقاً أيضاً . وإلى يمين هذا الشريط يوجد قائمة بارزة تشير إلى نمط التطبيق الحالي وتستعمل هذه القائمة لتغير نمط التطبيق .

كما يزود الجزء اليميني الأعلى من واجهة الاستعمال البيانية بإحداثيات X , Y لوضع المؤشر الحالي . إنه يتغير عند تحريك المؤشر داخل منطقة المحاور الرئيسية لواجهة الاستعمال البيانية . كما يحتوي حقل التحرير لصيغة المجموعة على صيغة المجموعة الحالية المدروسة . ترسم البنية الهندسية ثنائية البعد 2D في منطقة المحاور الرئيسية وتبنى الشبكة ويظهر الحل .....الخ

أما في أسفل هذه الواجهة فيزود خط معلومات حول العمل الحالي .

كما أنه يمكن أن يظهر معلومات مساعدة حول أزرار الشريط tool bar buttons .

أ – القوائم The Menus

يوجد إحدى عشر قائمة في واجهة الاستعمال البيانية GUI وهي :

1 . قائمة ملف File :

من هذه القائمة يمكن أن تفتح وتحفظ نموذج ملفات M – Files التي تحتوي الأوامر التي تعيد أنتاج النموذج . كما يمكن أن تطبع الرسومات الحالية ويمكن أن نغلق الواجهة .

1 – قائمة التحرير Edit :

يمكن أن نقص ونوضح وننسخ ونلصق الأشكال المجسمة ، كما يوجد أيضاً هناك أمر اختيار الكل Select All

2 – قائمة خيارات Options :

تحتوي هذه القائمة على أوامر مثل تثبيت شبكة المحور ، وميزة الرسم ضمن الشبكة – Snap to – gard ، وتكبير وتصغر . كما يمكن من خلالها تعديل حدود المحاور واختيار نمط التطبيق وتحديث الواجهة أيضاً

3 – قائمة الرسم draw menu:

نستطيع من خلالها أن نختار الأجسام المجسمة مثل الدوائر والمضلعات .كما يمكننا أن نحدد الأجسام التي نريد أن نرسمها باستخدام الماوس .وأيضا يمكن أن ندور الأجسام وان نصدر البنية الهندسية إلى فراغ العمل الرئيسي لـ**MATLAB** .

4 – قائمة الشروط boundary :

من قائمة الحد نفتح صندوق حوار حيث نريد تعريف الشروط الحدية كما يمكننا تعليم الحواف والمناطق الفرعية . وأيضاً إزالة الحدود بين المناطق الفرعية .

5 – قائمة PDE :

نفتح صندوق حوار خاص لتحديد الثوابت المطلوبة للمعادلة التفاضلية الجزئية التي نريد حلها .

6– قائمة الشبكة Mesh :

من خلالها يتم بناء وتعديل شبكة العناصر المثلثية

7 - قائمة الحل Solve :

يتم حل PDE ، وأيضاً نستطيع فتحج مربع حوار عندما نريد تعديل بارامترات الحل .

8 – قائمة الرسم Plot :

نستطيع من خلالها رسم خواص الحل ، ويظهر مربع نص لاختيار الخاصية التي نريد رسمها .

9 – قائمة النافذة Window : تمنحك اختيار أي نافذة مفتوحة حالياً وتأتي بها إلى المقدمة

10– قائمة المساعدة Help **:** تزود معلومات حول النافذة المفتوحة

الفصل الثالث

الدراسة التطبيقية والاختبارات

مقدمة:

تعرف المحولة بأنها جهاز كهرطيسي ستاتيكي يقوم بتحويل القدرة الكهربائية للتيار المتناوب إلى قدرة كهربائية أخرى مختلفة الصفات والمميزات ، مختلفة في التيار أو التوتر أو التردد أو عدد الأطوار وذلك حسب الغاية المصممة لها.

تحوي المحولة ملفين على الأقل متشابكين مغناطيسيا ومستقرين ميكانيكيا ، يسمى الملف الموصول مع الشبكة بالملف الأولي ، والملف الموصول مع المستهلك بالملف الثانوي.

3.1: المعادلات العامة للمحولة الكهربائية:

تتألف أبسط أنواع المحولات من قلب مغناطيسي يتوضع عليه ملفان منفصلان كهربائيا عدد لفاتهما N_1 وN_2 ومتشابكان مغناطيسيا، نقصد بالمحولة المثالية هي تلك التي يتحقق فيها مايلي:

- تنعدم فيها الضياعات، أي أن المقاومة الداخلية للملفات والحديد مساوية الصفر.
- النفاذية المغناطيسية للحديد لانهائية ($\mu \to \infty$)، أو المقاومة المغناطيسية للحديد معدومة.
- التسرب المغناطيسي مهمل، أي أن الفيض المغناطيسي متشابك كليا مع الملفين، وعامل التبادل يساوي الواحد. يظهر الشكل (3-1) محول مثالي ثنائي الملفات . تنتج التيارات i_1 وi_2 في الملفين الأولي والثانوي على التوالي قوى محركة مغناطيسية (MMF) التي بدورها تنشئ الفيوض . بينما يظهر الشكل (3-1-a) اتجاه هذه الملفات عندما تكون قواهم المحركة المغناطيسية تتجه حول القلب الحديدي بعكس اتجاه عقارب الساعة نسبة إلى الاتجاه المفروض لكلاً من تيارات الملفين .بإهمال المقاومة المغناطيسية للنواة تكون القوة المحركة المغناطيسية اللازمة لمغنطة النواة مساوية الصفر:

$$N_1 \, i_1 + N_2 \, i_2 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = -\frac{i_2}{i_1}$$

كما تشير النقاط في الشكل (3-1-b) على نهاية كل ملف لف حول النواة في نفس الاتجاه .

لذالك تكون النسبة بين التوترات المتحرضة e_1 , e_2 كمايلي :

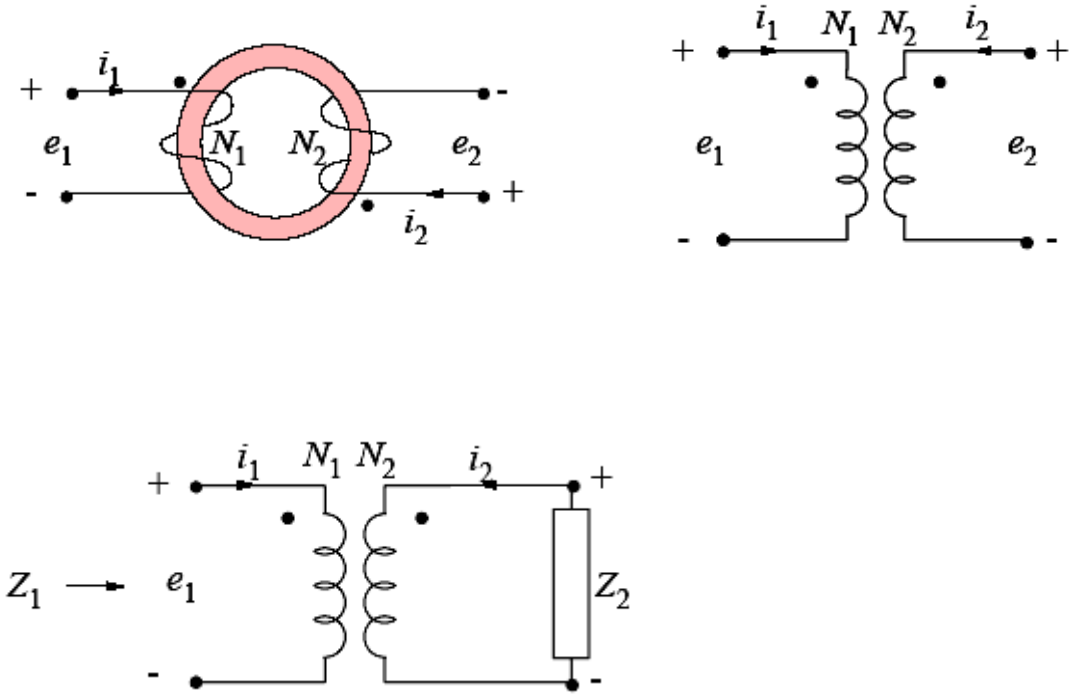
$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1 \frac{d\,\phi_m}{dt}}{N_2 \frac{d\,\phi_m}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (3.2)$$

وبما أنه لا توجد ضياعات في المحول المثالي ، بمعنى آخر يجب أن يكون الجريان مساوياً الصفر:

$$e_1\ i_1 = \left(\frac{N_1\ e_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_2\ e_2}{N_1}\right) = -e_2\ i_2 \qquad (3.3)$$

يظهر الشكل (1-3-c)نموذج الدارة للمحول الثنائي بعلاقات التوتر والتيار المعطاة بالمعادلات (3–1) و (3 –2) . لاحظ أن القطبية الموجبة للتوترات تكون على النهاية المنقطة للملف واتجاه التيارات من النهاية المنقطة لكلا الملفين . بما أن جريان الاستطاعة عادة يدخل من الملف الأول ويخرج من الملف الآخر ، لذلك سيكون الاتجاه الفعلي للتيارات معاكس للاتجاه الظاهر على الشكل

(3.1) . يستخدم نموذج الدارة الموضح بالشكل (3.1.c) في تحليل سلوك المحول ، تنسب بارامترات ومتغيرات الدارة على احد جوانب المحول إلى الجانب الآخر .مثلاً نستخدم P للدلالة إلى معامل اشتقاقي بالنسبة إلى الزمن . ممانعة الخرج للملف الثانوي الشكل (3.1.c) يمكن أن تنسب إلى الملف الأولي باستخدام علاقة التوتر والتيار للمحول المثالي.

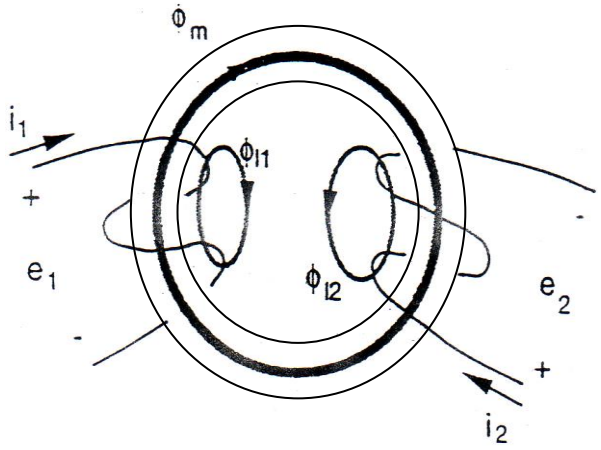


الشكل(3.1) محول مثالي ثنائي الملفات

إلا أن المحولة الحقيقية تختلف عن المحولة المثالية لذلك عند دراستها يجب ان نأخذ بعين الاعتبار المقاومة والسيالة التسربية للملفات والممانعة المغناطيسية للنواة، ة،بالتالي تتكون السيالة المغناطيسية في كل ملف من ملفات المحولة من جزأين إذا ما تم أخذ السيالة التسربية بعين الاعتبار، كما هو مبين في الشكل (3.2) حيث في كل ملف تتكون السيالة الكلية من قسمين أو مركبتين السيالة المتبادلة ϕ_m وهي متساوية لكلا الملفين والتي تربط الملفين معاً ، والسيالة التسربية الخاصة بكل ملف ϕ_L وبالتالي:

$$\phi_1 = \phi_{L1} + \phi_m \quad \phi_2 = \phi_{L2} + \phi_m \quad , \qquad (3.4)$$

حيث ϕ_{L1} و ϕ_{L2}: هما السيالتان التسربيتان للملفين الابتدائي والثانوي على التوالي.



الشكل(3.2)محول مثالي ثنائي الملفات

كما في المحول المثالي الفيض المتبادل ينشأ من القوة المحركة المغناطيسية للملفين والذي يدور بنفس المسار في النواة. بفرض أن N_1 هو عدد لفات الملف الأول (الابتدائي) يربط فعلياً كلٍ من الفيض المتبادل ϕ_m والفيض المتسرب ϕ_{L1}، فإن التشابك المغناطيسي في الملف الأول (الابتدائي) يحدد بأنه عدد لفات الملف الابتدائي مضروباً بالتدفق الكلي ϕ_1 الناتج عن الملف الأول أي:

$$\lambda_1 = N_1 \phi_1 = N_1(\phi_{L1} + \phi_m) \qquad (3.5)$$

إن الطرف الأيمن من المعادلة (3.5) يمكن أن يعبر عنه بدلالة تيارات الملفات باستبدال الفيض المتبادل والفيض المتسرب بالقوى المحركة المغناطيسية(mmf_s) والمسايرات الخاصة بهذه الملفات. الفيض المتسرب ϕ_{L1} تسببه القوة المحركة المغناطيسية (mmf) الناتجة عن الملف الأول وهي $N_1 i_1$، والفيض المتبادل ϕ_m يسببه مجموع القوة المحركة المغناطيسية

$.(N_1 i_1 + N_2 i_2)$

وبالتعويض عن الفيض المتبادل والفيض التسريبي في المعادلة (3.2) يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي:

$$\lambda_1 = N_1\left(N_1 i_1 P_{L1} + (N_1 i_1 + N_2 i_2)P_m\right) = \left(N_1^2 P_{L1} + N_1^2 P_m\right)i_1 + N_1 N_2 P_m i_2 \quad (3.6)$$

حيث:

$$(N_1 i_1 + N_2 i_2)P_m = \phi_m \quad N_1 i_1 P_{L1} = \phi_{L1}$$

$$N_1 N_2 P_m = L_{12} \text{ و } \left(N_1^2 P_{L1} + N_1^2 P_m\right) = L_{11}$$

بشكل مشابه يمكن التعبير عن التشابك المغناطيسي في الملف الثاني (الثانوي) بالعلاقة التالية:

$$\lambda_2 = N_2(\phi_{12} + \phi_m) = N_2\left(N_2 i_2 P_{L2} + (N_1 i_1 + N_2 i_2)P_m\right) = \left(N_2^2 P_{L2} + N_2^2 P_m\right)i_2 + N_1 N_2 P_m i_1 \quad (3.7)$$

حيث:

$$\left(N_2^2 P_{L2} + N_2^2 P_m\right) = L_{22}$$

$$N_1 N_2 P_m = L_{21}$$

وبالتالي تصبح معادلات التشابك المغناطيسي الناتج من أجل الملفين المترابطين مغناطيسياً بدلالة رموز المحارضات بالشكل التالي:

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \text{ و} \lambda_2 = L_{21} i_2 + L_{22} i_2 \quad (3.8)$$

حيث:

L_{11} , L_{22} هي المحارضات الذاتية للملفين الأولي والثانوي على التوالي.

L_{12} , L_{21} هي المحارضات المتبادلة بين الملفين الأولي والثانوي على التوالي.

إن المحارضة الذاتية للملف الأول (الابتدائي) يمكن اعتبارها مكونة من مجموع المحارضة التسربية L_{L1} ومركبة المغنطة L_{m1} الناتجة عن التيار i_1 المار في نفس الملف لذلك عندما يكون $i_2 = 0$ تصبح:

$$L_{11} = \frac{\lambda_{1i2}=0}{i_1} = \frac{N_1(\phi_{L1}+\phi_{m1})}{i_1} = N_1^2 P_{L1} + N_1^2 P_m \qquad (3.9)$$

حيث:

$$N_1^2 P_{L1} = L_{L1} \quad N_1^2 P_m = L_{m1}$$

$$\phi_{m1} = N_1 i_1 P_m$$

$$L_{22} = \frac{\lambda_{2i1}=0}{i_2} = \frac{N_2(\phi_{L2}+\phi_{m2})}{i_2} = N_2^2 P_{L2} + N_2^2 P_m \qquad (3.10)$$

حيث:

$$N_2^2 P_m = L_{m2} \ , N_2^2 P_{L2} = L_{L2}$$

$$\phi_{m2} = N_2 i_2 P_m$$

بأخذ النسبة بين L_{m2} و L_{m1} يمكننا الحصول على العلاقة بين المحارضات المغناطيسية للملفين الابتدائي والثانوي.

$$L_{m2} = \frac{N_2 \phi_{m2}}{i_2} = \frac{N_2 L_{12}}{N_1} = N_2^2 P_m = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 L_{m1} \qquad (3.11)$$

$$N_1 \phi_m = N_1(\phi_{m1}+\phi_{m2}) = L_{m1}\left(i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right) \qquad (3.12)$$

حيث: i'_2 وهو التيار المنسوب للابتدائي $i'_2 = \frac{N_2}{N_1} i_2$

ومن العلاقة السابقة يتضح لنا أن تيار المغنطة المكافئ كما يظهر على أطراف الملف الأول هو مجموع تيار الملف الأول (الابتدائي) والتيار المنسوب في الثانوي i'_2.

ويكون التوتر المتحرض في كل ملف يساوي إلى معدل تغير التشابك المغناطيسي لذلك يُعطى التوتر المتحرض في الملف الأول (الابتدائي) بالعلاقة التالية: (3.5)وباستخدام العلاقة

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \qquad (3.13)$$

وبالتعويض عن (L_{11}) بـ $(L_{L1} + L_{m1})$ و L_{12}بـ $(N_2 L_m i_2/N_1)$ تصبح علاقة التوتر المتحرض في الملف الأول (الابتدائي) مساوية إلى:

$$e_1 = L_{L1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d\left(i_1 + (N_2/N_1)i_2\right)}{dt} \qquad (3.14)$$

وباستخدام رمز التيار المنسوب للأولي تصبح علاقة التوتر المتحرض في الملف الأول (الابتدائي):

$$e_1 = L_{\ell 1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}\left(i + i'_2\right) \qquad (3.15)$$

وبالمثل يكون التوتر المتحرض في الملف الثاني (الثانوي):

$$e_2 = L_{\ell 2} \frac{d_{i2}}{dt} + L_{m2} \frac{d}{dt}\left(\frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2\right) \qquad (3.16)$$

أيضاً يمكن لنا أن ننسب التوتر المتحرض على أطراف الثانوي e_2 إلى الابتدائي لتصبح علاقته مساوية إلى:

$$e'_2 = L'_{\ell 2} + L_{m1} \frac{d}{dt}\left(i_1 + i'_2\right) \qquad (3.17)$$

حيث تم الحصول على العلاقة السابقة من المعادلة (3.16) حيث تم ضرب طرفي المعادلة (3.16) بـ $\frac{N_1}{N_2}$ واستبدال:

$$N_1^2 L_{m2}/N_2^2 = L_{m1} \ , \quad N_1 e_2/N_2 = e_2'$$

وبهذا يصبح التوتر الكلي على أطراف كل ملف هو مجموع التوتر المتحرض في الملف (e) مضافاً إليه هبوط الجهد الناتج عن مرور التيار في مقاومة الملف أي أن التوتر على طرفي الابتدائي هو:

$$v_1 = i_1 r_1 + e_1 = i_1 \cdot r_1 + L_{\ell 1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}(i_1 + i_2') \qquad (3.18)$$

وبالمثل يصبح التوتر على أطراف الملف الثانوي مساوياً إلى:

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{N_1}{N_2 v_2} = \left(\frac{N_2}{N_1} i_2\right)\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 r_2 + e_2' \\ &= i_2' r_2' + L_{\ell 2}' \frac{d i_2'}{dt} + L_{m1} \frac{d}{dt}(i_1 + i_2') \end{aligned} \qquad (3.19)$$

حيث:

$$\left(\frac{N_2}{N_1} i_2\right) = i_2' \text{ ، } \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 r_2 + e_2' = r_2'$$

من الواضح أن المعادلات السابقة كُتبت باعتبار أن قيم الملف الثانوي قد نُسبت إلى الملف الأولي ويمكن بسهولة نسب كميات الملف الأولي إلى الابتدائي وإعادة كتابة المعادلات عند الرغبة بذلك إنما باستبدال رموز الدالة (1) عوضاً عن (2) و(2) عوضاً عن (1) في المعادلتين (3.18) و(3.19).

بناء على شكل معادلات التوتر في المعادلات (3.18) و(3.19) يقرر شكل الدارة المكافئة لمحولة ثنائية الملفات (ابتدائي وثانوي أو أحادية الطور) بشكل حرف T كما هو مبين في

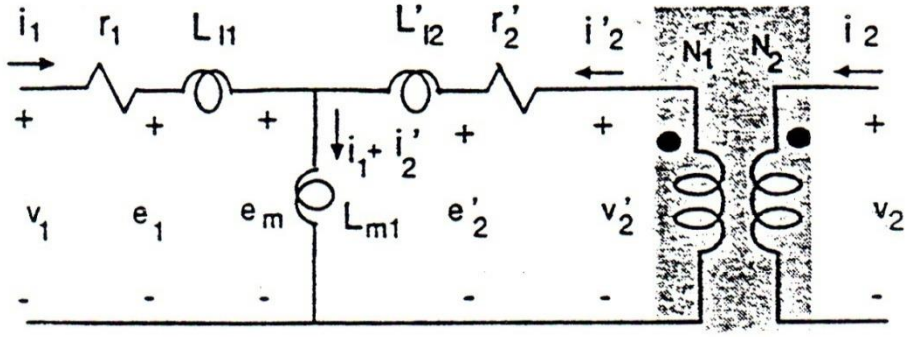
الشكل(3.3). إن إشارة الفتحة (◌َ) تدل على قيم الثانوي منسوبة إلى الطرف الابتدائي فمثلاً i_2' هو التيار المكافئ المار في ملفات لها نفس العدد من اللفات مساوية لعدد اللفات في الابتدائي أي $N_1 i_2' = N_2 i_2$ وهذا واضح من خلال الجزء الذي يمثل المحولة المثالية في الدارة المكافئة المبينة في الشكل(3.3).

وبالمثل التوتر المنسوب (v_2') يوافق علاقة المحولة المثالية $\frac{v_2'}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$ من الناحية العملية لا تماثل المحولة العادية المحولة المثالية، حيث المحارضة المتبادلة محدودة.

ولإنشاء (تحديد) فيض متبادل يمر تيار مغنطة مُحدد $i_1 + i_2'$ في محارضة فرع المغنطة L_{m1} المبين على الدارة المكافئة ومن جهة ملفات الأولى كما هو مبين في الشكل(3.3).

إن قيم محددات أو عناصر الدارة للملف الثانوي منسوبة للملف الأولي تحدد بالعلاقة المعطاة في المعادلة التالية:

$$L_{\ell 2}' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 L_{\ell 2} \text{ و } r_2' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 r_2 \quad (3.20)$$



الشكل (3 - 3): يبين الدارة المكافئة لمحولة ذات ملفين (ابتدائي وثانوي)

2 – 3 : تصميم محولة كهربائية أحادية الطور واختباراتها :

لتصميم محول كهربائي ، لا توجد قاعدة ثابتة موحدة تجعل جميع التصميمات متماثلة تماماً وإنما تتوقف المسألة على رأي وخبرة كل مصمم .

وعند تصميم المحول يجب التعرف أولاً إلى مواصفاته الاسمية وهي :

1- الاستطاعة الظاهرية الاسمية (Sn) مقدرة ب (VA)

Sn =1500 VA

2 – التوتر الاسمي على الطرف الأولي U_{1n}

U_{1n}= 220 V

3 – التوتر الاسمي على الطرف الأولي U_{2n}

U_{2n}= 24 V

4 – عدد الأطوار m

m= 1

5 – تردد الشبكة f

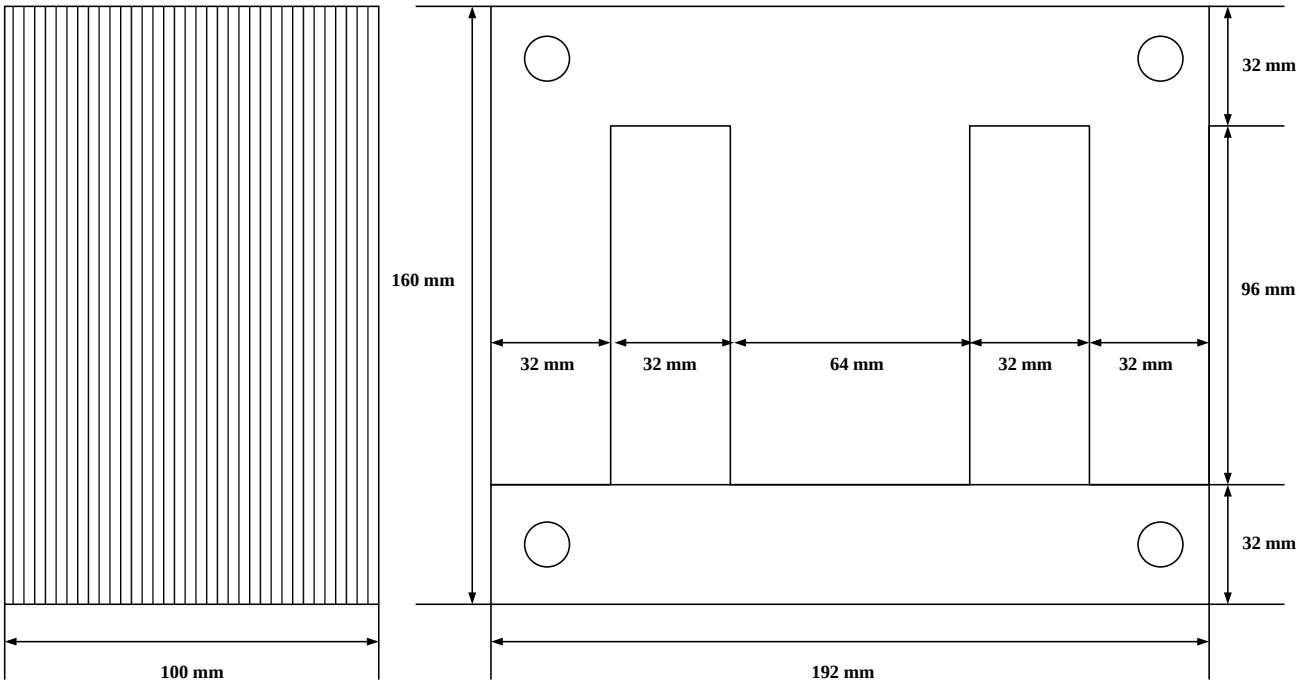
f = 50 HZ

3-2-1 : تحديد الأبعاد العامة للدارة المغناطيسية (القلب الحديدي) :

يعتبر اختيار القلب الحديدي أول خطوة في تصميم المحولات ، وهذا يعني تحديد نوعه ولأبعاده ، وبما أن المحولة التي نريد تصميمها صغيرة الاستطاعة ومن النوع المدرع وبحسب أنواع الصفائح الحديدية المتوفرة في السوق المحلية وللتقليل قدر الإمكان من الثغرة الهوائية نختار القلب الحديدي من النوع EI 192*160 mm وبسماكة 100 mm كما هو موضح في الشكل (3.4)

وبهذا تكون مساحة القلب الحديدي (النواة) :

$$A = 64 \times 100 = 6400\ mm^2 = 64\ cm^2$$



الشكل (3.4) أبعاد المحولة المصممة

3-2-2: حساب عدد اللفات :

انطلاقاً من العلاقات الأساسية :

$$E = U = 4.44 \times f \times N \times B \times A$$

$$\Rightarrow N = \frac{U}{4.44 \times f \times B \times A}$$

من أجل قيمة كثافة التدفق المغناطيسي لا يوجد علاقة ثابتة ونختار عادة بين $(0.7 \div 1.5)Ts$ حسب استطاعة المحول ونوع التبريد وفي المحول المصمم سيكون تبريده هوائي .

وفي السوق السورية الحديد الفيرومغناطيسي المتوفر يباع بدون مميزة خرج لهذا الحديد (بدون منحني مغنطة) وبما أنه يحظر أن تعمل الآلة على الجزء اللاخطي نختار قيمة التحريض المغناطيسي B =1 Ts

وبالتالي يكون عدد لفات الملف الأولي (المرتفع) :

$$N_1 = \frac{220}{4.44 \cdot 50 \cdot 1 \cdot 64 \cdot 10^{-4}} = 154.84 \qquad (\text{لفة})$$

ومن أجل التحميل الزائد وبأخذ عامل أمان مناسب نختار :

$$N_1 = 156 \qquad (\text{لفة})$$

ويكون عدد لفات الملف الثانوي (المنخفض) :

$$N_2 = \frac{N_1}{K} = 156 \cdot \frac{24}{220} = 17.02$$

$$N_2 = 17 \qquad (\text{لفة})$$

3-2-3 : حساب التيارات :

أ- حساب تيار الملف الأولي :

$$I_1 = \frac{S_n}{U_{1n}} = \frac{1500}{220} = 6.8 \qquad (A)$$

ب- حساب تيار الملف الثانوي :

$$I_2 = \frac{S_n}{U_{2n}} = \frac{1500}{24} = 62.5 \qquad (A)$$

3-2-4: حساب مقاطع الأسلاك :

كثافة التيار تأخذ قيمتها من الجدول ولتكن $2.16\ A/mm^2$ وبالتالي يكون مقطع السلك في الملف الابتدائي :

$$S_1 = \frac{I_1}{J_1} = \frac{6.8}{2.16} = 3.14 mm^2$$

وبما أن السلك دائري الشكل يكون نصف قطر السلك :

$$S_1 = \pi r_1^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{3.14}{\pi}} = 1mm$$

وبالتالي قطر السلك للملف الابتدائي :

$$d_1 = 2r_1 = 2 \cdot 1 = 2mm$$

وهذا القطر متوفر في السوق السورية المحلية لذلك يعتمد أثناء اللف .أما بالنسبة للملف الثانوي فنعتمد كثافة التيار $2.21A/mm^2$: من الجدول فيكون مقطع السلك لهذا الملف

$$S_2 = \frac{I_2}{J_2} = \frac{62.5}{2.21} = 28.26mm^2$$

$$S_2 = \pi r_2^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{28.26}{\pi}} = 3mm$$

$$d_2 = 2 \cdot r_2 = 2 \cdot 3 = 6mm$$

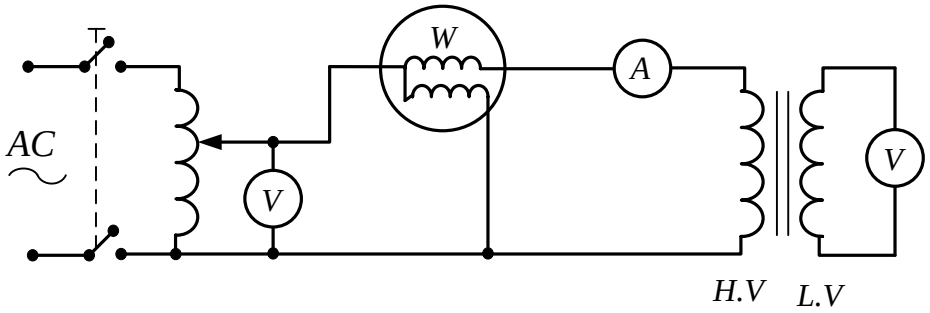
وهذا القطر غير متوفر في السوق المحلية السورية لذلك نعتمد ناقلين على التوازي قطر كل منهما 4.25mm وهذا متوفر في السوق السورية .وبالتالي نحصل على كل مايلزم للف هذه المحولة .

3-2-5: اختبارات المحولة:

لتحقيق المقارنة والتأكد من الطريقة المتبعة في النمذجة الرياضية للمحولات الكهربائية باستخدام MATLAB/PDE ، أجريت الاختبارات التالية لهذه المحولة :

1 – تجربة اللاحمل (العمل على فراغ):

إن الغاية من هذا الاختبار إيجاد منحني المغنطة B-H لحديد المحولة وبالتالي إيجاد النفوذية المغناطيسية μ_r للحديد الفيرومغناطيسي المستخدم .وأيضاً تحديد عناصر سماحية التهييج Y_0 وتحديد تيار اللاحمل المقابل للتوتر الاسمي . يبين الشكل (3.5) دارة التوصيل لهذه التجربة . كما يظهر الجدول (1 – 3) قراءات المقاييس المستخدمة والقيم المحسوبة على أساسها .



الشكل(3.5) دارة توصيل تجربة اللاحمل

حيث إننا ولأجل رسم منحني المغنطة فقد تم إنشاء ملف كاشف حول النواة الحديدية مؤلف من (11) لفة لحساب التحريض المغناطيسي من العلاقة :

$$E = U = 4.44 \cdot f \cdot B \cdot A$$

$$U = 4.44 \cdot 11 \cdot 50 \cdot B \cdot 32 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow U = 7.8B \qquad \Rightarrow B = 0.13U \qquad (3.21)$$

أما حساب شدة الحقل المغناطيسي H :

فإننا نطبق قانون أمبير الدائري :

$$\oint Hdl = N \cdot I$$

$$\Rightarrow H \cdot l = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{l}$$

حيث l طول المسار المغناطيسي

l = 416 mm = 0.416 m

$$\Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{416} \cdot 10^3 \qquad (3.22)$$

ومن النتائج يتم حساب الثوابت الحديدية عند قيمة التوتر الاسمي :

$$Y_0 = \frac{I_0}{U_{10}} = \frac{0.4}{220} = 0.0018 \text{ S}$$

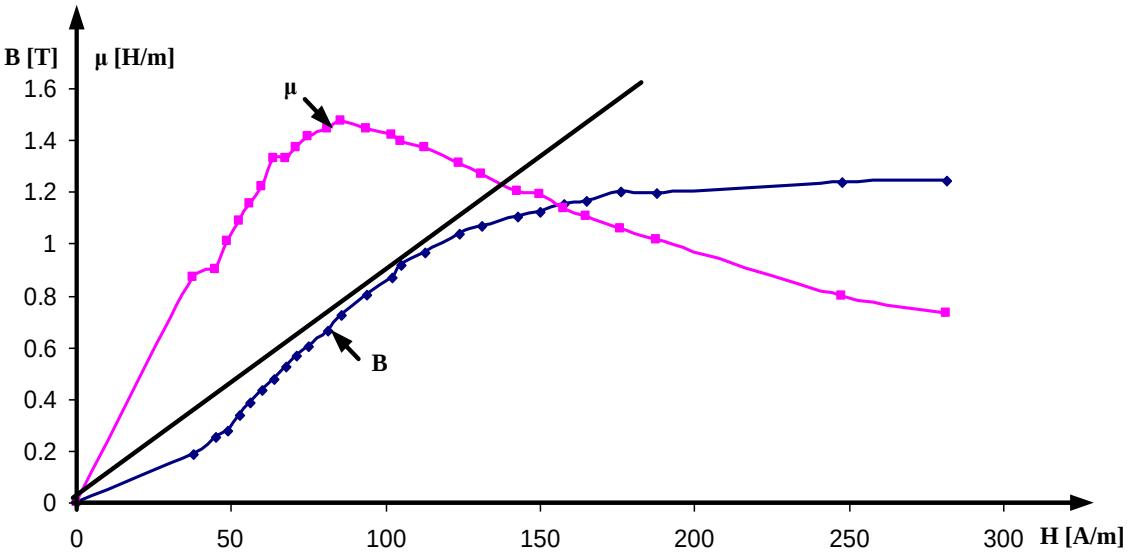
$$G_0 = \frac{P_0}{U_{10}^2} = \frac{46}{220^2} = 0.00095 \text{ S}$$

$$B_0 = \sqrt{Y_0^2 - G_0^2} = \sqrt{(0.0018)^2 - (0.00095)^2} = 0.0015288848 \text{ S}$$

قيم مقاسة				قيم محسوبة			
U[V] التوتر المطبق	U[V] توتر الكاشف	I[A] التيار		μ_r /5000	μ_r	B[T]	H[A/m]
0	0	0		0	0	0	0
40	1.438462	0.1		0.872187	4360.934	0.187	37.5
50	1.95	0.12		0.897028	4485.138	0.2535	45
60	2.153846	0.13		1.010616	5053.078	0.28	48.75
70	2.607692	0.14		1.088262	5441.31	0.339	52.5
80	2.953846	0.15		1.151875	5759.377	0.384	56.25
90	3.346154	0.16		1.217887	6089.437	0.435	60
100	3.692308	0.17		1.330974	6654.87	0.48	63.75
110	4.046154	0.18		1.330974	6654.87	0.526	67.5
120	4.353846	0.19		1.368868	6844.34	0.566	71.25
130	4.661538	0.2		1.413163	7065.817	0.606	75
140	5.130769	0.2168		1.445759	7228.794	0.667	81.3
150	5.561538	0.228267		1.47539	7376.95	0.723	85.6
160	6.184615	0.250133		1.444444	7222.22	0.804	93.8
170	6.68	0.272		1.418259	7091.295	0.8684	102
180	7.06	0.28		1.391872	6959.36	0.9178	105
190	7.45	0.3		1.370842	6854.211	0.9685	112.5
200	7.969231	0.33		1.309786	6548.93	1.036	123.75
205	8.238462	0.35		1.266485	6332.423	1.071	131.25
210	8.515385	0.38		1.202816	6014.08	1.107	142.5
215	8.615385	0.39		1.190375	5951.875	1.12	150
220	8.861538	0.4		1.132949	5664.746	1.152	157.5
225	8.984615	0.44		1.106543	5532.716	1.168	165
230	9.230769	0.47		1.054705	5273.524	1.2	176.25
235	9.21	0.5		1.016815	5084.076	1.1973	187.5
240	9.5	0.66		0.79457	3972.85	1.235	247.5
245	9.561538	0.750667		0.730584	3652.92	1.243	281.5

الجدول (3.1) نتائج دارة اللاحمل

وبالتالي يتم رسم منحني المغنطة ونحصل على الشكل (3 .6)



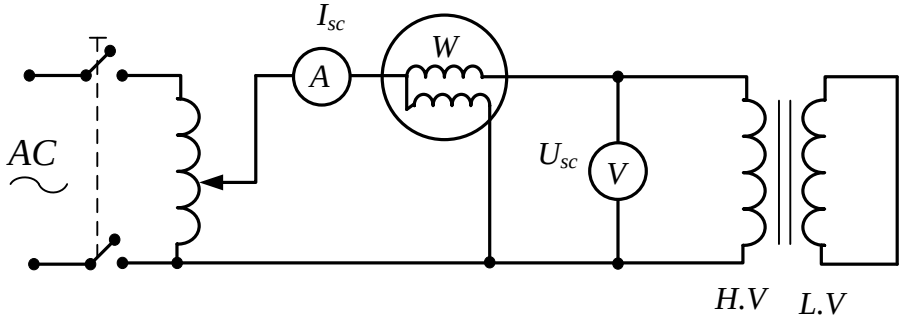
الشكل (3 . 6) منحني المغنطة لمحولة الاختبار

نلاحظ من الشكل إن μ_r تتغير على الجزء الخطي من 3000 – 7000 نأخذ القيمة الوسطية

μ_r=5000

2 – اختبار القصر :

إن الغاية من هذا الاختبار هي إيجاد عناصر ممانعة التسرب z_e و الضياعات النحاسية الاسمية الموافقة لتيار المحولة الاسمي .يبين الشكل (3.7) دارة التوصيل المستخدمة .

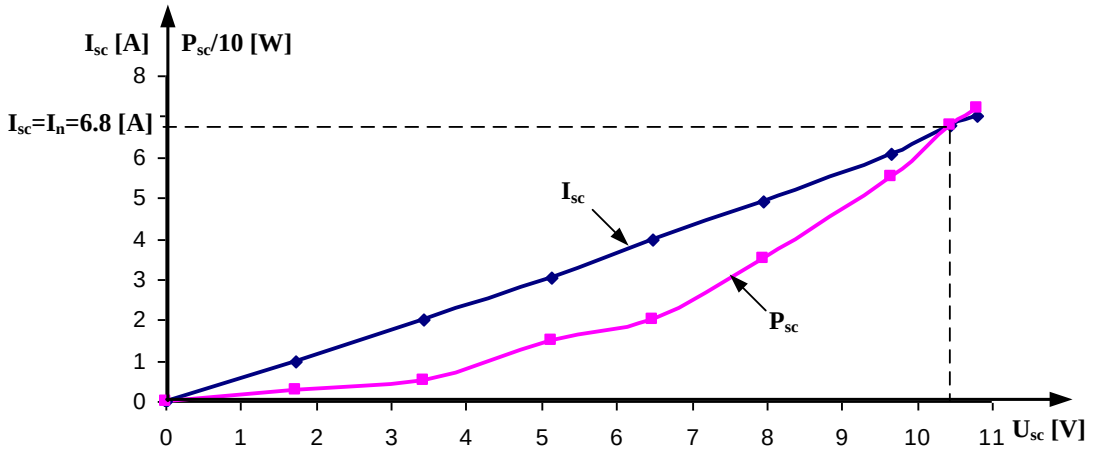


الشكل(3.7) دارة التوصيل اختبار القصر

يبين الجدول (3.2) القيم المقاسة :

$P_{sc}/10$	P_{sc}[w]	I_{sc}[A]	U_{sc}[v]
0	0	0	0
0.3	3	1	1.73
0.5	5	2.02	3.42
1.5	15	3.06	5.12
2	20	3.97	6.47
3.5	35	4.9	7.94
5.5	55	6.1	9.65
6.8	68	6.8	10.45
7.2	72	7.02	10.79

الجدول (3.2) نتائج دارة القصر



الشكل (3.8) خصائص القصر للمحولة

وفقا للقيم المقاسة فإننا نحد عند قيم موافقة للتيار الاسمي :

$$z_e = \frac{U_{SC}}{I_{SC}} = \frac{10.45}{6.8} = 1.54\,\Omega$$

$$R_e = \frac{P_{SC}}{I_{SC}} = \frac{60}{46.24} = 1.3\Omega$$

$$X_e = \sqrt{Z_e^2 - R_e^2}$$

$$X_e = \sqrt{(1.54)^2 - (1.3)^2} = 0.8256\Omega$$

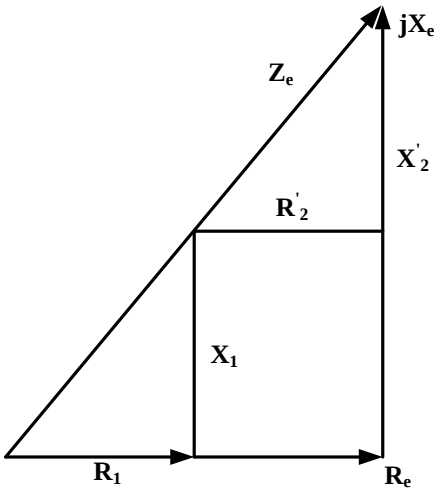
لتحديد قيمة كل من X_2, X_1, R_2, R_1 نرسم مثلث الممانعة لدارة القصر الشكل (3 . 9)

وبعد تحديد قيمة المقاومة الأومية R_1 لملفات الأولي بواسطة منبع تيار مستمر مع مقياسي فولت وتيار مستمرين نجد :

$$\begin{matrix} I = 1.92A \\ U = 0.98 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Rdc = \frac{U}{I} = \frac{0.98}{1.92} = 0.51\ \Omega$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار ارتفاع درجة حرارة الملفات نجد أن :

$$R_1 = 1.2 \cdot R_{dc} = 1.2 \cdot 0.51 = 0.612\ \Omega$$



الشكل (3 . 9) مثلث الممانعة لدارة القصر

ومن الشكل(3 .9) نجد :

$$\frac{R_1}{\mathrm{Re}} = \frac{X_1}{Xe}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = Xe \cdot \frac{R_1}{\mathrm{Re}} = \frac{0.612}{1.3} = 0.47067923076\,[\Omega]$$

وبعدها يتم حساب قيم $X_2^{`}, R_2^{`}$ من العلاقتين :

$$R_2^{`} = R_e - R_1 = 1.3 - 0.612 = 0.688\,[\Omega]$$

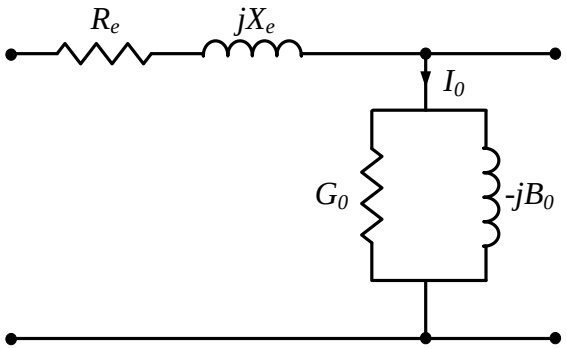
$$X_2^{`} = X_e - X_1 = 0.825 - 0.470 = 0.355\,[\Omega]$$

وبمعرفة نسبة التحويل K ينتج :

$$R_2 = \frac{R_2^{`}}{K^2} =$$

$$X_2 = \frac{X_2^{`}}{K^2} =$$

وعند رسم الدارة المكافئة بناء على نتائج الاختبارات نحصل على الشكل (3-10)



الشكل(3.10) الدارة المكافئة بناء على نتائج الاختبارات

3-3 : توزع الحقل الكهرطيسي باستخدام MATLAB / PDE على المحولة المصممة:

يتم توليد الحقل المغناطيسي في المحولة أحادية الطور بتيار متناوب 50HZ وينشأ حقل مغناطيسي بطول موجة 6000Km وعليه يمكن اعتبار الحقل المغناطيسي حقل مغناطيسي شبه ساكن لان طول الموجة كبير جدا مقارنة مع الأبعاد الهندسية للمحولة، انطلاقا من ذلك وباستخدام(FEM) وبمساعدة بيئة MATLAB/PDE تم دراسة الحقل المغناطيسي بهذه الطريقة بمراعاة المعادلات الأساسية والشروط الحدية.

انطلاقا من معادلات ماكسويل :

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0 \qquad (3.23)$$

باعتبار أن تردد العمل منخفض فان المعدل الزمني للتغير صغيرجداً أي $\frac{\partial D}{\partial t}$ يهمل بالمقارنة مع J تيار الناقلية وبالتالي تصبح المعادلة بالشكل التالي:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = \qquad (3.24) 0$$

بمراعاة أن تفرق الحقل المغناطيسي يساوي الصفر فان كثافة الفيض المغناطيسي يمكن أن يوصف بمساعدة شعاع الكمون المغناطيسي:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \qquad (3.25)$$

وباستخدام العلاقات السابقة نستطيع أن نكتب:

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{J} \qquad (3.26)$$

تكون كثافة التيار في الحقول المستوية ثنائية البعد(2-D) وشعاع الكمون المغناطيسي بمركبة واحدة منطبقة على المحور Z.

$$A = (0,0,A), J = (0,0,J)$$

وبالتالي يمكن تبسيط المعادلة السابقة إلى الصيغة التالية:

$$-\nabla . (\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}) = \boldsymbol{J} \qquad (3.27)$$

فيما يخص الحقول المستوية فإنها تساوي:

$$B = f\left(\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial x}, 0\right) \qquad (3.28)$$

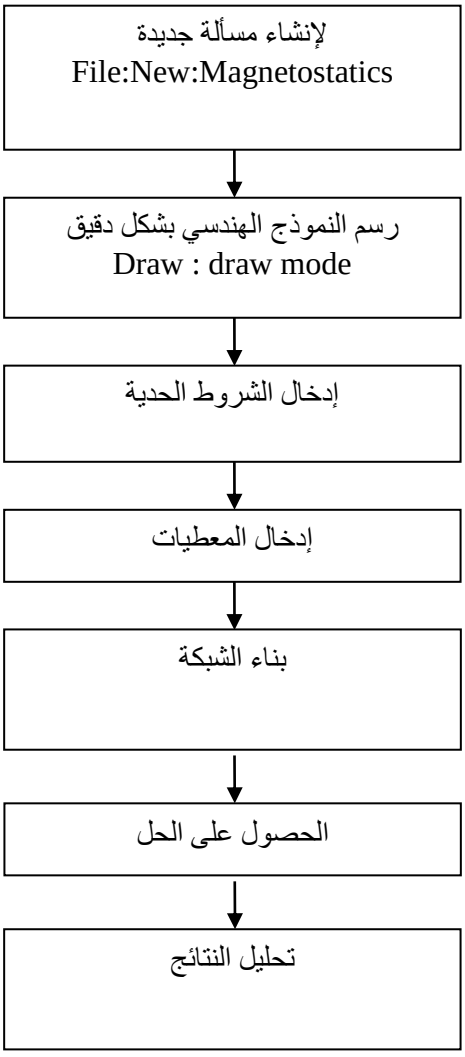
وشدة الحقل المغناطيسي H تعطى كما يلي:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{B} \qquad (3.29)$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الجزئية PDE التي سيتم حلها لإيجاد الحقل في المحولة الأحادية الطور الصيغة التالية :

$$-\nabla.\left(\frac{1}{\mu}\,\nabla\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{J} \qquad (3.30)$$

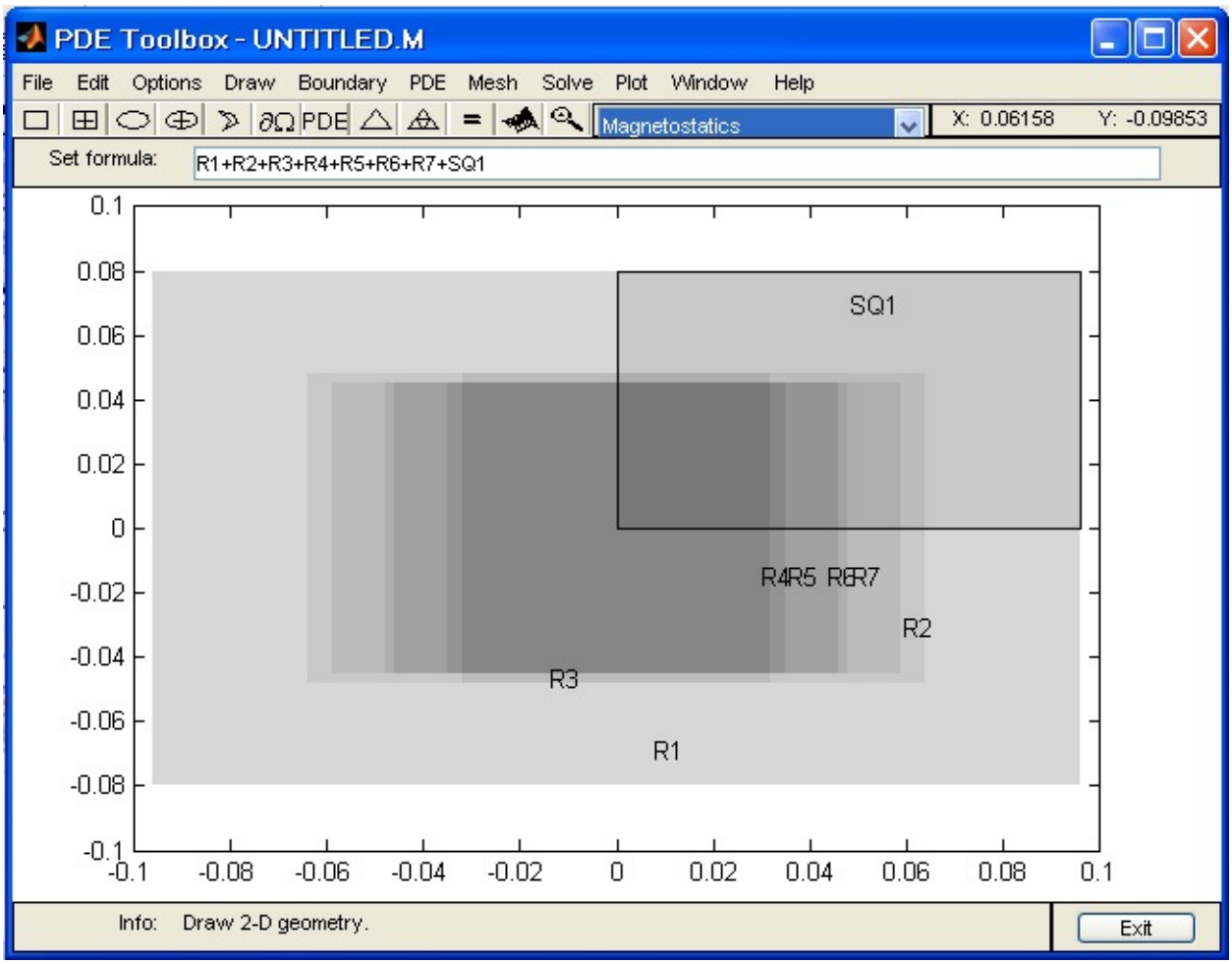
لحل هذه المعادلة باستخدام برنامج MATLAB/PDE نتبع الخطوات وفق المخطط الانسيابي لخوارزمية الحل :



بناءً على الخوارزمية السابقة سيتم حساب الحقول المغناطيسية في المحولة المصممة على النحو التالي :

الخطوة الأولى : يرسم النموذج الهندسي بالأبعاد الحقيقية،ويؤخذ المجال [0.1,0.1-] على المحاور x,y ويدرس الحقل وفق ال magnetostatic ، بإدخال الأوامر التالية في نافذة MATLAB :

```
pderect  ([-0.096  0.096 -0.08 0.08],'R1')
pderect([-0.064 0.064 -0.048 0.048],'R2')
pderect([-0.032 0.032 -0.048 0.048],'R3')
pderect([-0.035 0.035 -0.045 0.045],'R4')
pderect([-0.046 0.046 -0.045 0.045],'R5')
pderect([-0.048 0.048 -0.045 0.045],'R6')
pderect([-0.059 0.059 -0.045 0.045],'R7')
pderect([0 0.096 0 0.08],'SQ1')
```



الشكل(3.11) النموذج الهندسي للمحولة

الخطوة الثانية: لتخفيض حجم العمل والحسابات يقسم النموذج إلى أربع أقسام متناظرة يكفي دراسة جزء واحد والتصميم وفق ما يلي :

(R1+R2+R3+R4+R5+R6+R7)*SQ1

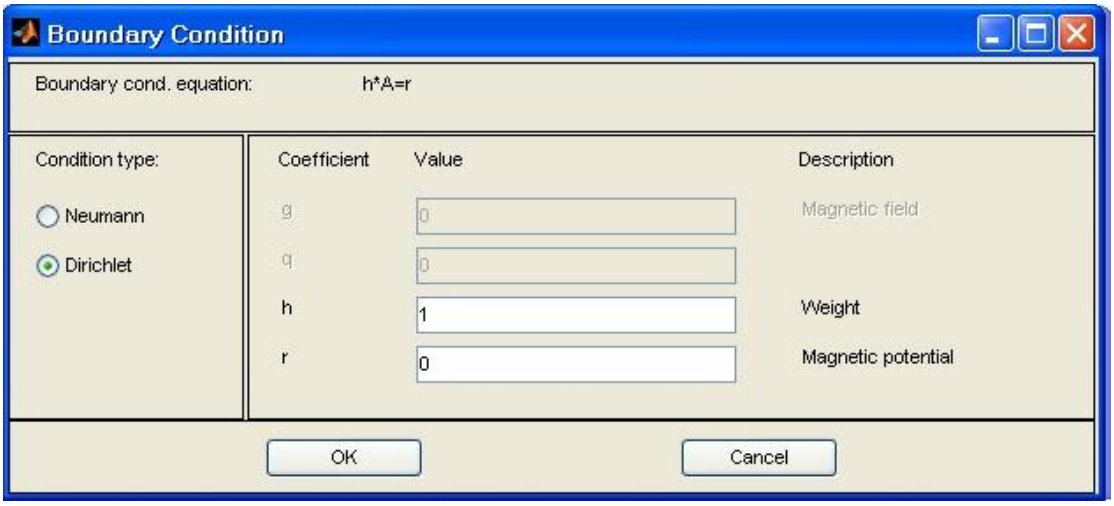
ثم ننتقل إلى قائمة نمط الشروط الحدية (Boundary mode) لتوصيفها .

وهكذا نحصل على النموذج الهندسي للمحولة والمكون من أربعة مناطق فرعية وهي :

القلب الحديدي ، الملف الأولي والملف الثانوي ، الثغرة الهوائية.

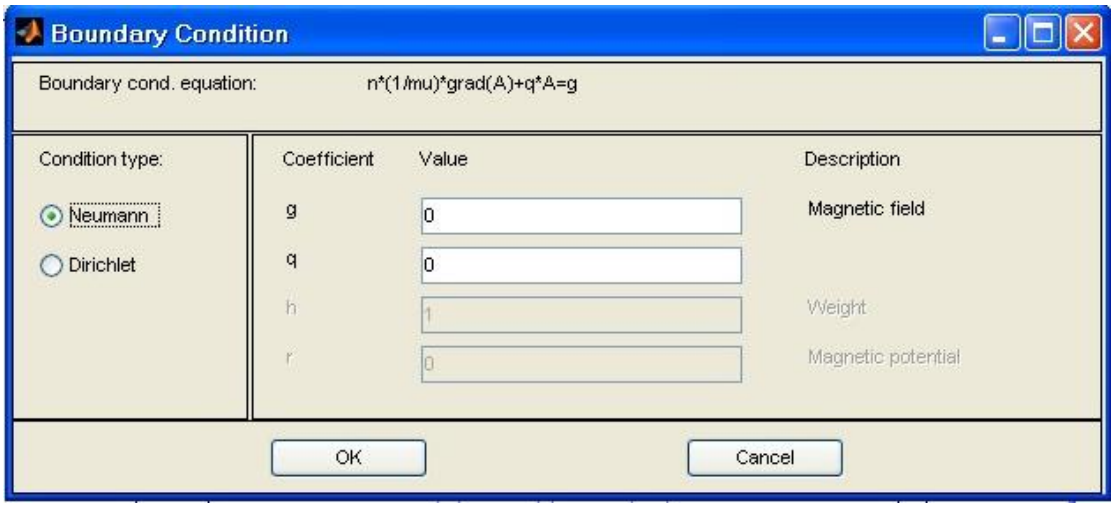
تتطلب الدراسة تحديد المناطق المذكورة والمنفصلة وفق الشروط الحدية.

يطبق أولاً شروط ديركلي على الحدود الخارجية ومحور التناظر الشاقولي ، باختيار الأمر specify boundary condition من قائمة Boundary فيظهر مربع الحوار التالي نختار Dirichlet .



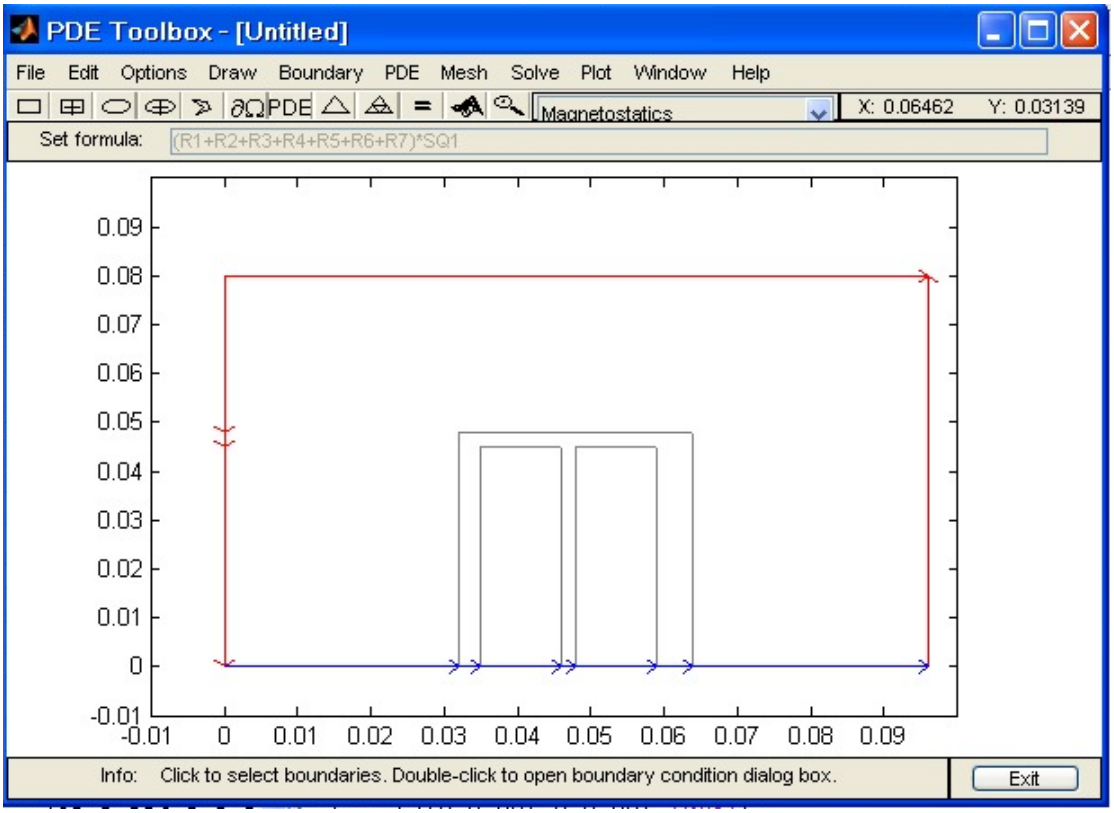
الشكل(3.11) مربع الحوار لاختيار الشوط الحدية

ونطبق لاحقاً شروط نيومان على محور التناظر الأفقي ، بنفس الطريقة السابقة فنحصل على مربع الحوار التالي ،نختار نيومان .



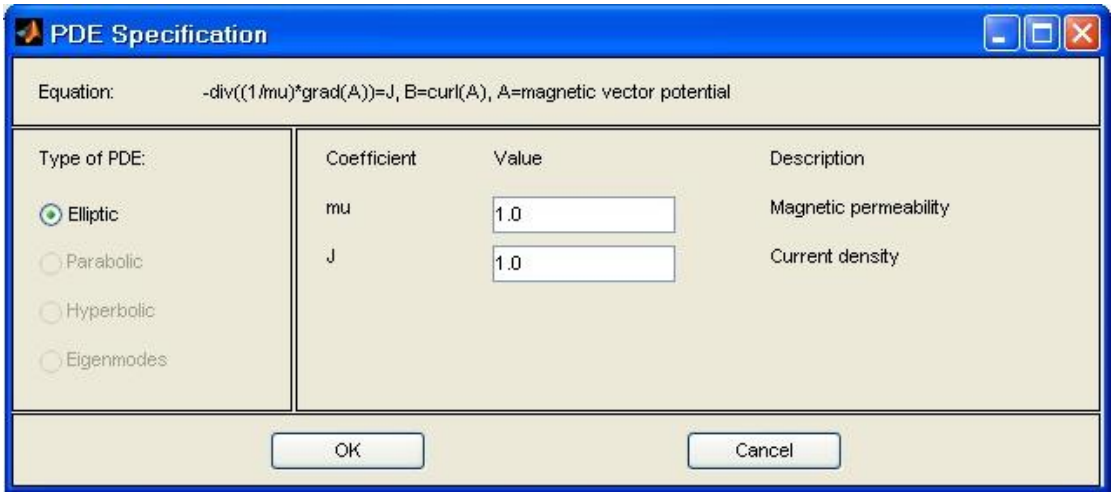
الشكل(3.12) مربع الحوار واختيار الشوط الحدية

فنحصل على نموذج الدراسة المبين في الشكل (3.13):



الشكل (3.13) الشروط الحدية

الخطوة الثالثة : إدخال البارامترات المميزة لكل منطقة فرعية والمتمثلة μ ، J . نضغط الأمر Boundary mode في قائمة PDE ، يظهر مربع الحوار التالي الشكل (3.14) :



الشكل (3.14) مربع حوار إدخال القيم المميزة

ومن ثم يتم إدخال البارامترات المذكورة للمناطق الفرعية كلاً على حدة :

- القلب الحديدي : $\mu = 5000$ و $J = 1$

- الثغرة الهوائية : $\mu = 1$ و $J = 1$

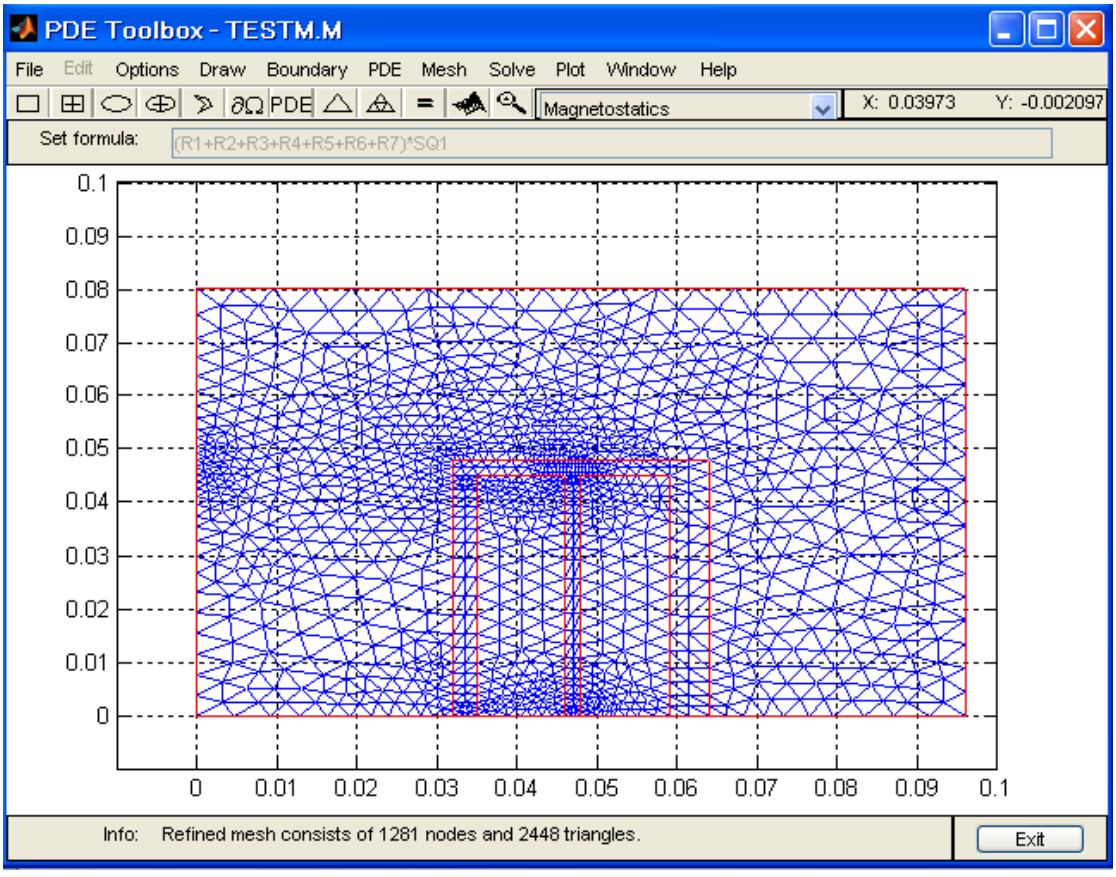
- الملفات : يتم إدخال القيم الاسمية للتيارات

$$J_1 = 0.06A/mm^2$$

$$J_2 = 0A/mm^2$$

النفاذية المغناطيسية تساوي الواحد

الخطوة الرابعة : نقوم ببناء الشبكة للمجال المدروس بمساعدة قائمة Mesh ، نحصل على شبكة من العناصر المنتهية تحتوي على 1281 عقدة و 2448 مثلث ، كما يبين الشكل التالي:

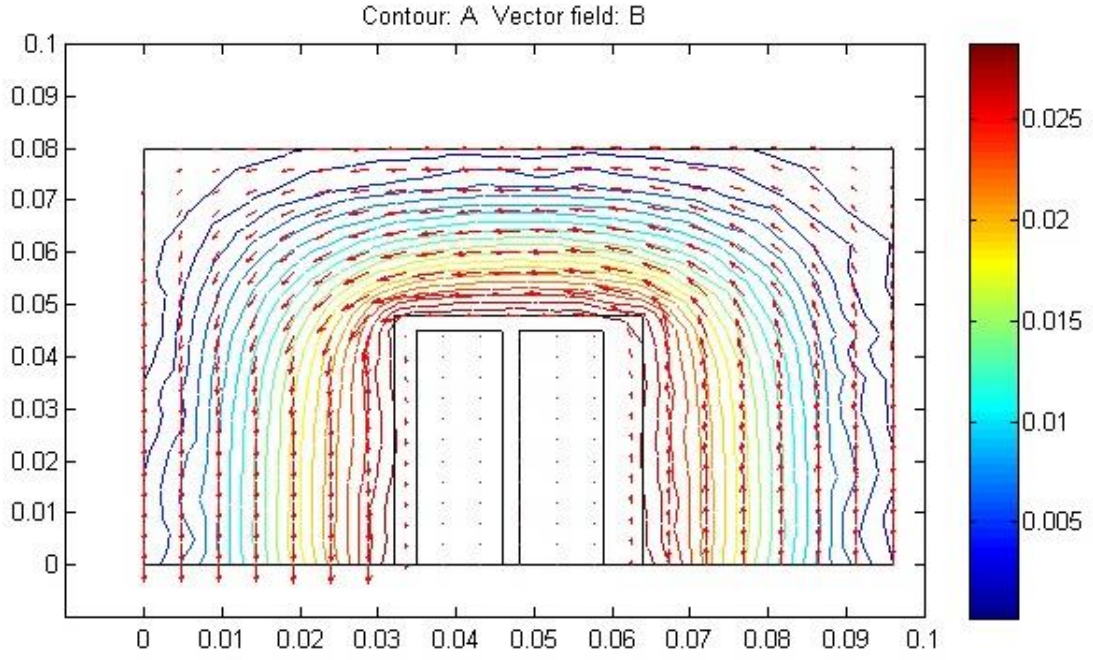


الشكل (3.15) شبكة العناصر المنتهية

الخطوة الخامسة : حل المسألة الهندسية

بهذه الحالة أصبحت المسألة جاهزة للحل ، حيث يبدأ البرنامج بذلك بعد تلقيه للأمر من قائمة Solve . وهنا نشير إلى أن الزمن اللازم للحل يتعلق بحجم المسألة وحجم العناصر المنتهية المستخدمة في شبكة التجزئة . يتم استعراض النتائج وفق الشكل (3.16) ،

حيث نحصل على صورة كاملة لتوزع الحقل المغناطيسي مع إمكانية إيجاد بارامترات من قائمة (Plot) نختار بارامترات فيظهر لدينا مربع حوار نختار Contour لإظهار خطوط الكمون المغناطيسيMagnetic Potential وباختيار Arrows يتم إظهار خطوط الفيض المغناطيسي Magnetic Flux density كما هو مبين في الشكل (3.16)

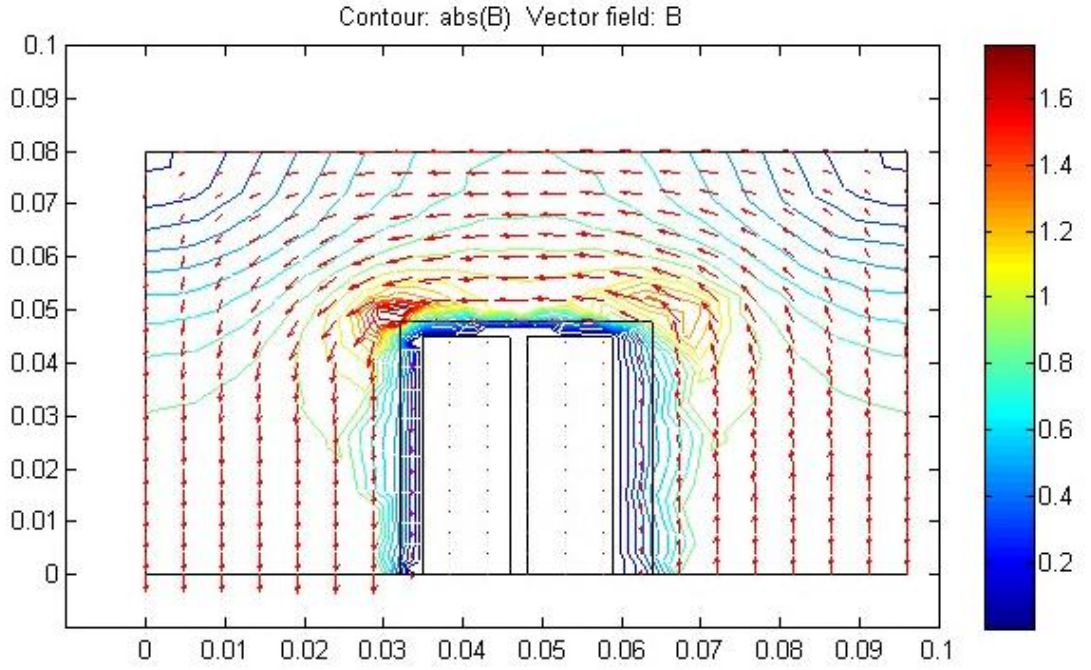


الشكل (3.16) خطوط توزع الكمون المغناطيسي و كثافة الفيض المغناطيسي .

يتضح من الشكل (3.16) أن خطوط توزع الكمون تتكاثف حول الزوايا القائمة لنافذة النواة المغناطيسية وبالتالي فان كثافة الفيض المغناطيسي تأخذ قيم عالية حول تلك الزوايا بعبارة أخرى فان لخطوط كثافة الفيض كثافة أعظمية حول الزوايا القائمة للنافذة الشكل (3.16) .

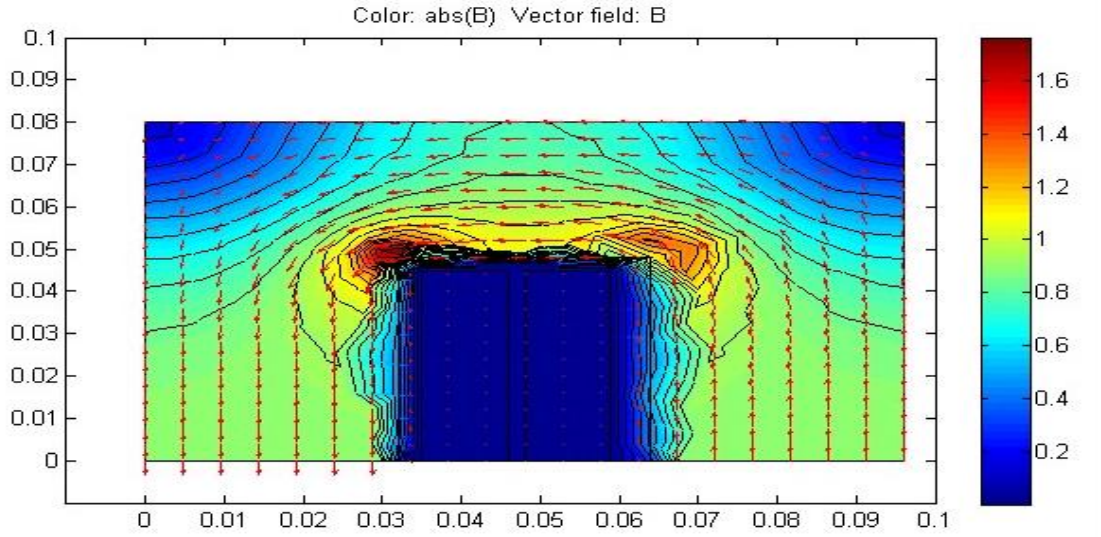
و يمكننا الحصول على صورة كاملة لخطوط توزع كثافة الفيض المغناطيسي وإيجاد قيمها في كل نقطة في الآلة كما أشرنا سابقاً. نختار Contour لرسم Magnetic Potential ونرسم خطوط كثافة الفيض المغناطيسي باستخدام Arrows وفق الشكل (3.17) .

عند حساب كثافة الفيض المغناطيسي عند الزوايا الداخلية فان .....=B_1 وبمقارنتها مع كثافة الفيض عند الزوايا الخارجية المقابلة لها تساوي .....=B_2 بمقارنة هذين الفيضيين نجد ان B_1 تزيد ..... مرة عن B_2 .



الشكل (3.17) توزع كثافة الفيض المغناطيسي في الآلة

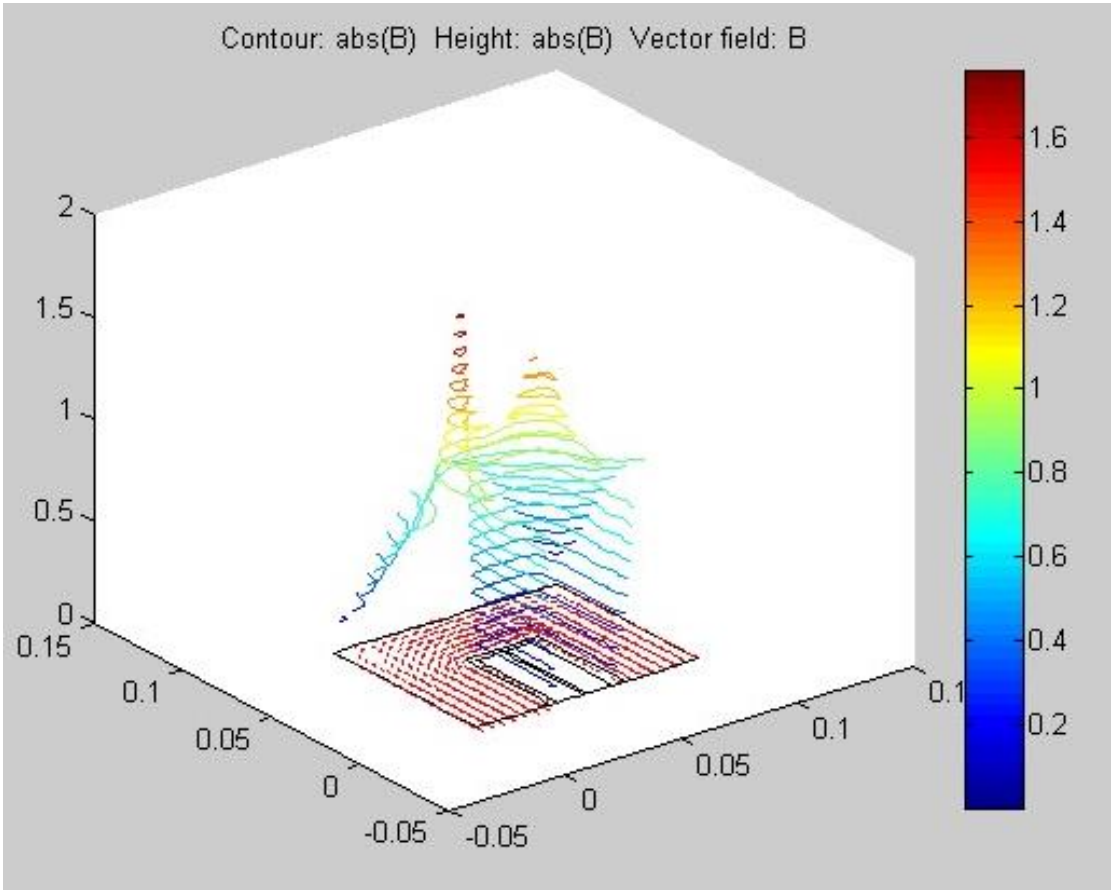
ويمكن التعبير عن الخصائص السابقة بطريقة التمييز اللوني عن طريق Color من Magnetic Flux density، أو أن يعتمد سلم التقويم على التدرج اللوني المضاف إلى تدريجات مجال القياس كما يتضح في الشكل (3.18).



الشكل (3.18) يبين التمييز اللوني لكثافة الفيض المغناطيسي .

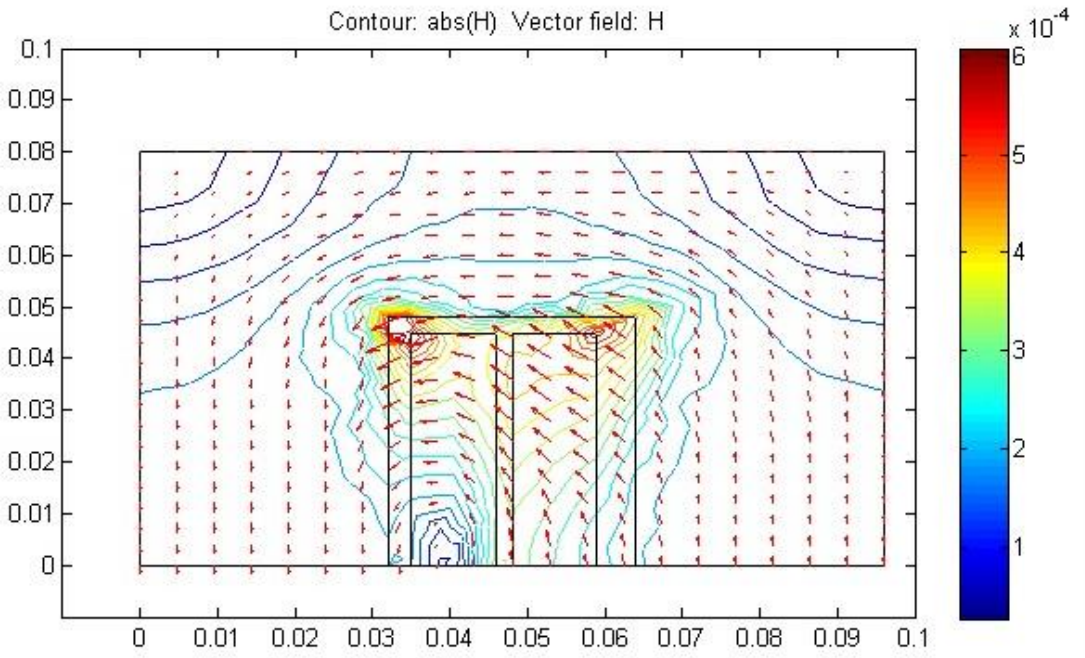
يمكننا من جهة أخرى إيجاد التوزع الفراغي لكثافة الفيض المغناطيسي باستخدام

POLT (3D) كما هو مبين في الشكل (3.19)

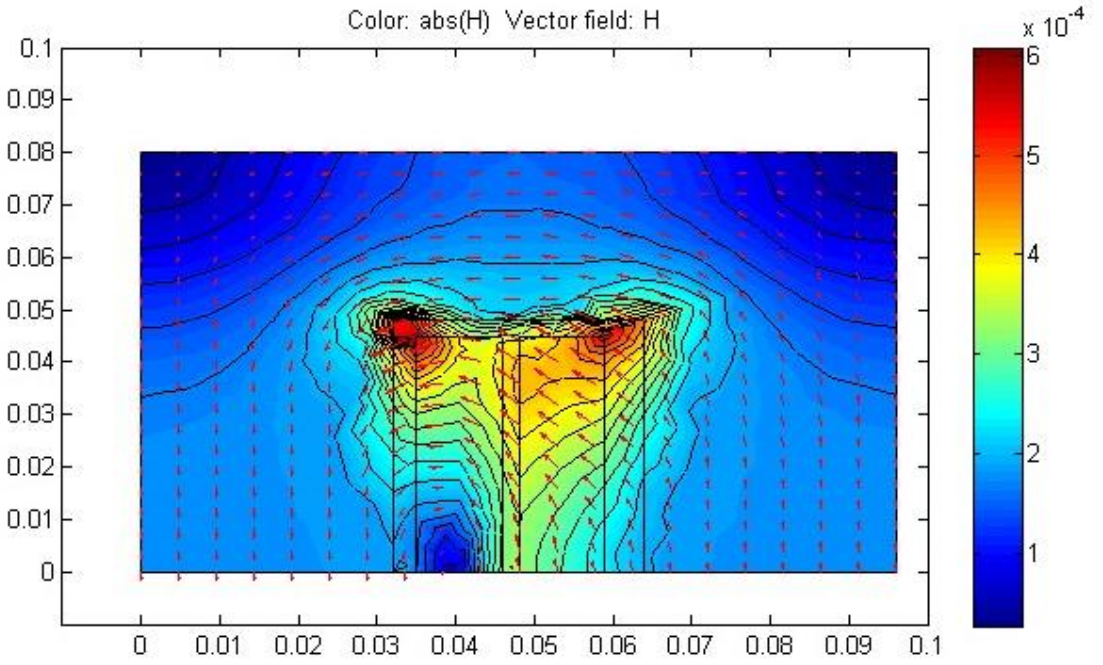


الشكل (3.19) التوزع الفراغي كثافة الفيض المغناطيسي .

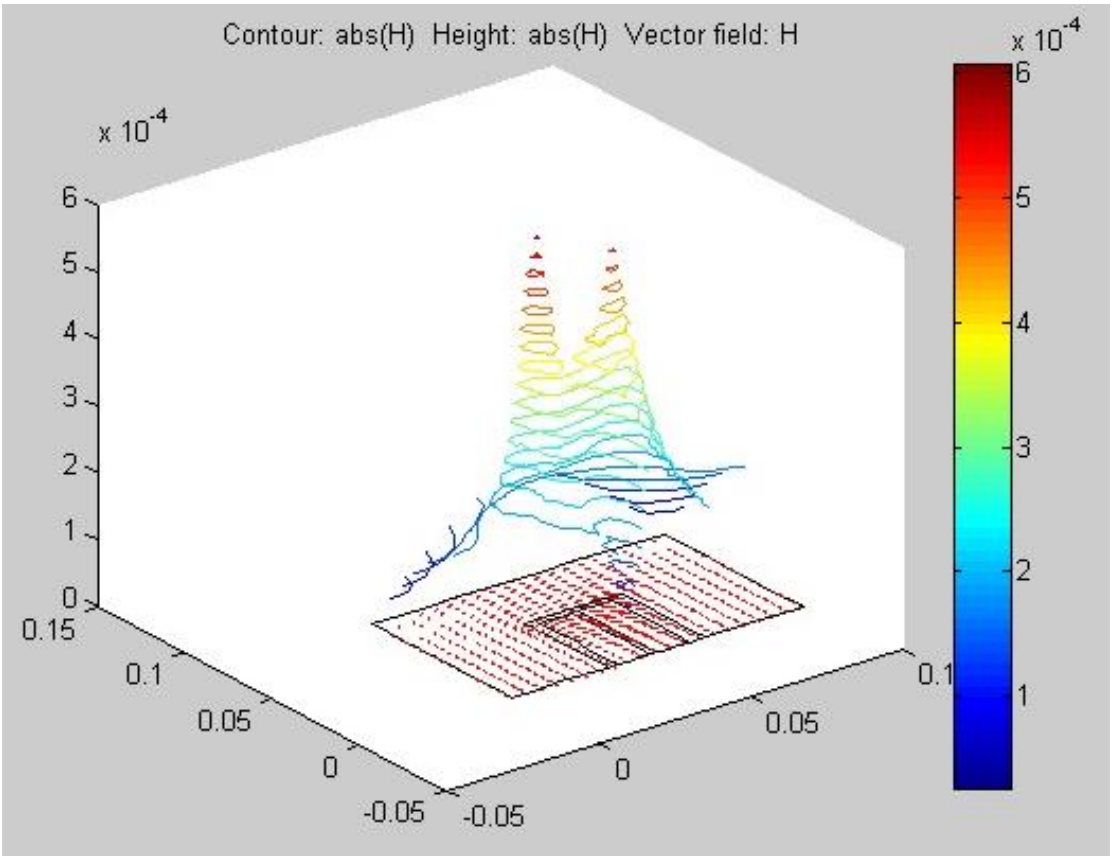
يمكننا الحصول على شدة الحقل المغناطيسي Magnetic Field في كل نقاط المحولة ومعرفة نقاط توزعه الأعظمية بإتباع الخطوات السابقة كما في الشكل (3.20)



الشكل (3.20) توزع شدة الحقل المغناطيسي في الآلة



الشكل(3.21) التمييز اللوني لشدة الحقل المغناطيسي



الشكل (3.22) التوزع الفراغي لشدة الحقل المغناطيسي

نستنتج من الدراسة العملية التي أجريت على محولة أحادية الطور بالقياسات المخبرية العملية والحسابات بمساعدة MATLAB/PDE أنه يمكن حساب الحقل المغناطيسي الإجمالي بمراعاة الشروط الحدية الناتج في النواة الحديدية والمتبادل بين ملفي المحولة .

تشير النتائج إلى أن مقدار كثافة الفيض المغناطيسي في النواة الحديدية بحدود [T] 1 في القياسات العملية ووفق MATLAB/PDE .

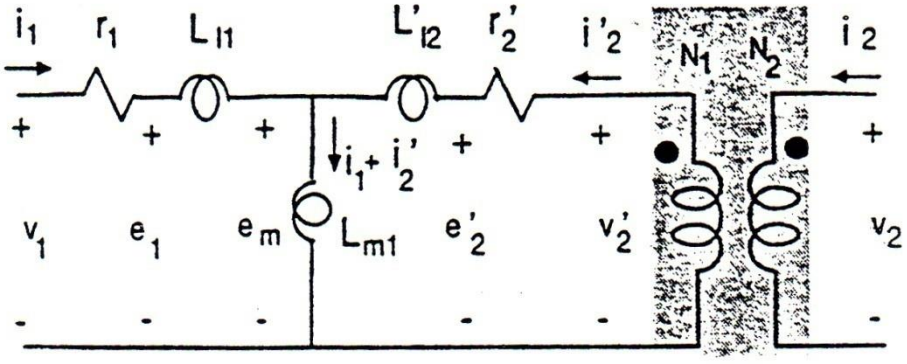
إن برنامج PDE لا يفصل بين السيالات المغناطيسية المتبادلة المتولدة عن كل ملف على حدة في الزمن الحقيقي علماً أنه يمكن أن يدرس السيالة الإجمالية المتبادلة من المخططات والمنحنيات الناتجة عن PDE .

إن دراسة المحولات ثلاثية الطور تتطلب إجراء النمذجة الفيزيائية بمساعدة MATLAB من أجل إمكانية تطبيق PDE عليها .

4 – 3 : نمذجة المحولات الكهربائية في بيئة MATLAB :

Simulation of Electrical Transformers in MATLAB/ Smulnik

سندرس أولاً محولاً بملفين بدارة مكافئة مبينة على الشكل (23 - 3)



ررؤ

الشكل (23 - 3) الدارة المكافئة لمحولة بملفين

يمكن معالجتة معادلات التوتر والسيالة المغناطيسية لمحولة ذات ملفين أولي وثانوي، بواسطة الحاسب . باتباع إحدى الطرق المعروفة في هذا المجال ، فعلى سبيل المثال عند استعمال النموذج موضع الدراسة يمكن تمثيله بواسطة السيالات المغناطيسية أو التيارات كمتغيرات حالة (State variable). وهي مترابطة فيما بينها كما هو مبين في الشكل (23 - 3) . تحتوي ثلاثة محارضات L_{L1} ,L'_{L2} L_m .

بمراعاة التشابك المغناطيسي الكلي للملفين تمكن كتابة معادلات التوتر للمحولة كما يلي :

$$v_1 = i_1 r_1 + \frac{1}{\omega_b}\frac{d\psi_1}{dt} \qquad (3.31)$$

$$v'_2 = i'_2 r'_2 + \frac{1}{\omega_b}\frac{d\psi'_2}{dt} \qquad (3.32)$$

حيث $\psi_1 = w_b \lambda_1$ ، $\psi_2 = w_b \lambda_2$: الترابط المغناطيسي بالثانية لكل ملف.

والتي تأخذ الصورة التالية في صيغتها العقدية :

$$\psi_1 = \omega_b \lambda_1 = X_{\ell 1} i_1 + \psi_m \qquad (3.33)$$

$$\psi'_2 = \omega_b \lambda'_2 = X'_{\ell 2} i'_2 + \psi_m \qquad (3.34)$$

$$\psi_m = \omega_b L_{m1}\left(i_1 + i'_2\right) = X_{m1}\left(i_1 + i'_2\right) \qquad (3.35)$$

نلاحظ من هذه المعادلات أن ψ_m تتوقف على محارضة فرع المغنطة يمكن التعبير عن التيار i_1 بواسطة السيالات المغناطيسية ψ_1 و ψ_m بلإضافة إلى التيار i'_2 بواسطة السيالات المغناطيسية ψ'_2 و ψ_m وفق التالي :

$$i_1 = \frac{\psi_1 - \psi_m}{X_{\ell 1}} \qquad (3.36)$$

$$i'_2 = \frac{\psi'_2 - \psi_m}{X'_{\ell 2}} \qquad (3.37)$$

نعويض i_1 و i'_2 من المعادلتين السابقتين في المعادلة (3.35) نحصل على:

$$\frac{x_m}{X_{m1}} = \frac{\psi_1 - \psi_m}{X_{\ell 1}} + \frac{\psi'_2 - \psi_m}{X'_{\ell 2}} \qquad (3.38)$$

التي تختزل إلى الصيغة التالية :

$$\psi_m \left(\frac{1}{X_{m1}} + \frac{1}{X_{\ell 1}} + \frac{1}{X'_{\ell 2}} \right) = \frac{\psi_1}{X_{\ell 1}} + \frac{\psi'_2}{X'_{\ell 2}} \qquad (3.39)$$

بفرض أن $\frac{1}{X_M} = \left(\frac{1}{X_{m1}} + \frac{1}{X_{\ell 1}} + \frac{1}{X'_{\ell 2}} \right)$ فإن المعادلة (3.39) تؤول إلى ما يلي :

$$\psi_m = X_M \left(\frac{\psi_1}{X_{\ell 1}} + \frac{\psi'_2}{X'_{\ell 2}} \right) \qquad (3.40)$$

باستخدام المعادلتين (3.34) و(3.35) للتعويض عن التيارات في المعادلتين (3.32) و(3.31) يمكن الحصول على معادلتي التشابك المغناطيسي بالصيغة التكاملية التالية:

$$\psi_1 = \int \left[\omega_b v_1 - \omega_b r_1 \left(\frac{\psi_1 - \psi_m}{X_{\ell 1}} \right) \right] dt \qquad (3.41)$$

$$\psi'_2 = \int \left[\omega_b v'_2 - \omega_b r'_2 \left(\frac{\psi'_2 - \psi_m}{X'_{\ell 2}} \right) \right] dt \qquad (3.42)$$

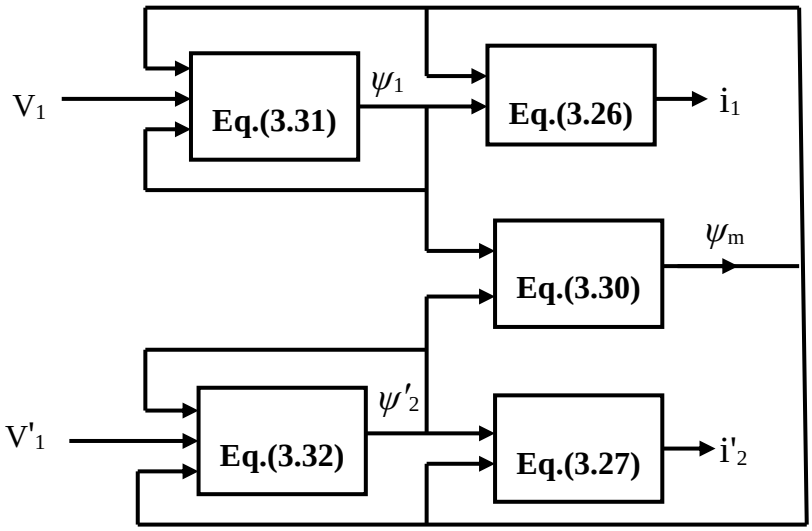
تشكل مجموع المعادلات (3.42)، (3.41) ،(3.40) و(3.37)، (3.36)، (3.32)، (3.31) نظام النموذج الديناميكي الأساسي لمحولة ذات ملفين أولي وثانوي.

يتم مراعاة الاعتبارات التالية في النموذج موضع الاهتمام :

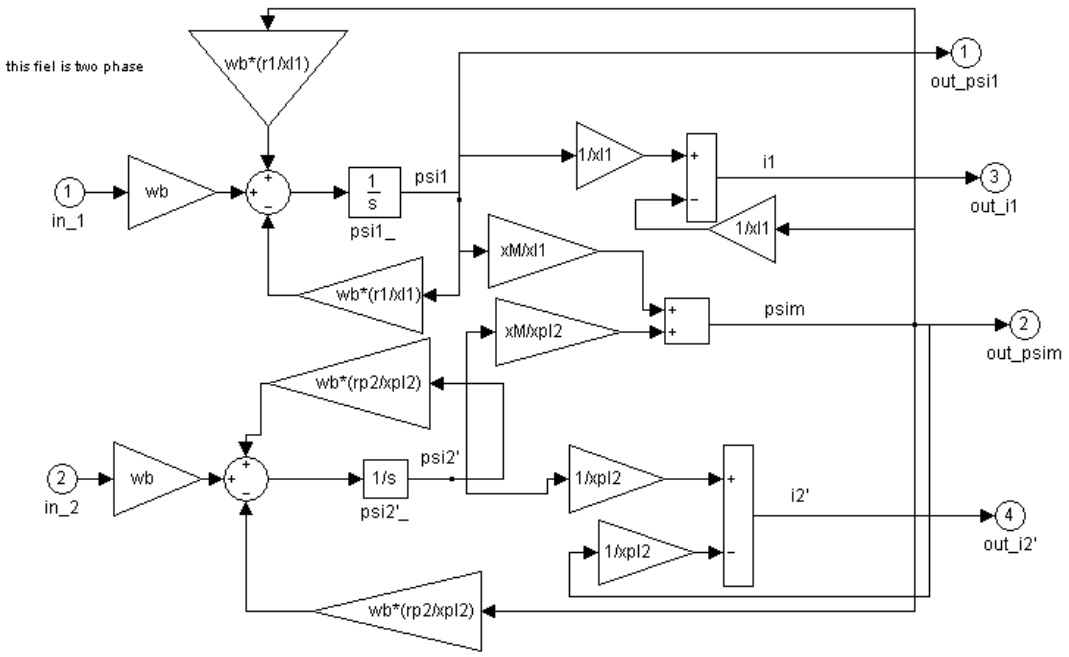
- السيالة المغناطيسية المتبادلة كمتغيرات داخلية Internal Variables.
- توترات النهايات كمعطيات الدخل المطلوبة.
- تيارات الملفات كمعطيات الخرج الرئيسية.

يبين الشكل (3.24) المخطط الصندوقي لعملية النمذجة لمحولة بملفين . حيث القيم الآنية للتوترات على أطراف كلا الملفين تمثل معطيات دخل للنمذجة . وعليه تم إنشاء نظام مكافئ لهذا المخطط باستخدام المكتبة Simulink وتم تسميته بالملف Sla وفقاً للمخطط المبين في الشكل(3.24)

ويتضح من هذا النظام أن المتغيرات الداخلية ψ_1 و ψ'_2 و ψ_m تمثل خرجاً (output) لهذه النظام .



الشكل(3.24) : المخطط الصندوقي لمتغيرات المحولة أحادية الطور (حالة خطية)



الشكل(3.25) النموذج Sla للمحولة أحادية الطور

5 - 3 : ربط في المحولات ثلاثية الطور:

Three – Phase Connections

غالباً ما يكون التوليد والتوزيع للقدرة الكهربائية المتناوبة هو ثلاثي الطور. فعندما يعمل النظام الثلاثي الطور تحت ظروف عمل متوازنة يمكن تمثيله أثناء الدراسة بنظام أحادي الطور مكافئ. لذلك وهذا ما يقدم توفيراً للوقت أثناء الحسابات.

سوف نختبر الطرق التي يمكن استعمالها لتمثيل ربط المحولات الثلاثية الطور الشائعة. بشكل عاملا تعتمد خواص التشغيل في المحولات الثلاثية الطور على طريقة ربط الملفات فحسب بل إنما على الدارة المغناطيسية .

يفضل الربط النجمي للمحولات على المثلثي عند مستويات التوتر العالي بينما يفضل الربط المثلثي عند التيار العالي. وهناك إجراءات أخرى يمكن أخذها بعين الاعتبار مثل التأريض لتوفير الأمان والحماية ومسارات التيارات التوافقية والسيالات تقليل تشوه موجة التوتر.

نعرض حالة الربط (نجمي – نجمي) بما يخدم النمذجة وفق الدارات المكافئة المبين على الشكل (3 - 26).

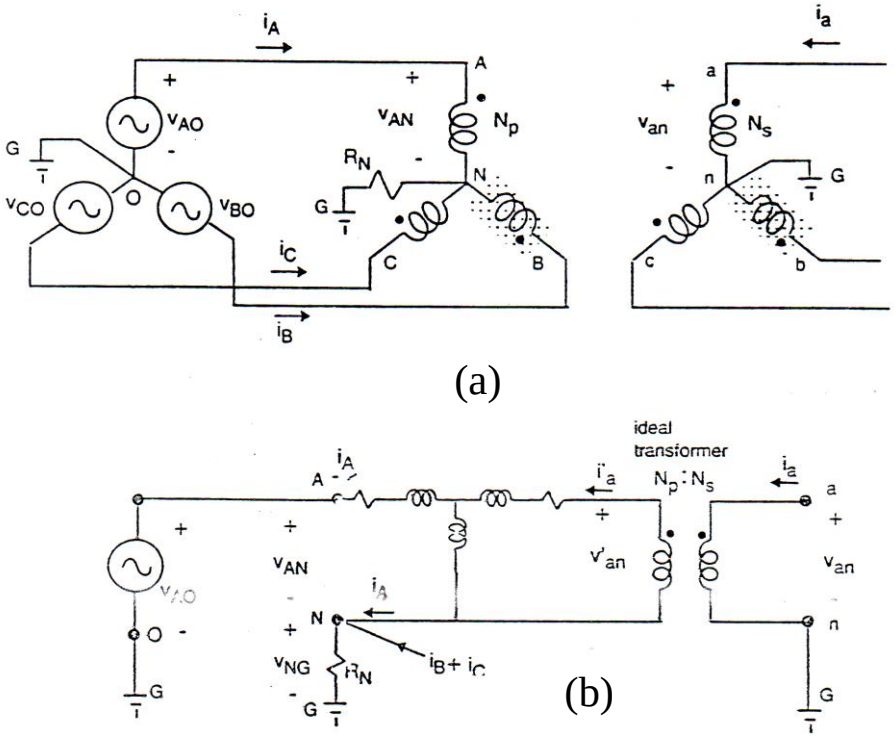
تم تأريض نقطة النجمة في الملف الابتدائي من خلال مقاومة R_N أما نقطتي النجمة لكلٍ من الطرف الثانوي والمنبع فقد تم تأريضهما بشكل مباشر إلى الأرض. من هنا فإن لنقطة الحيادي للملف الابتدائي توتراً عائماً تبعاً لقيمة المقاومة R_N . تعتمد نقطة الأرض G على شروط التشغيل أو ظروف عمل المحولة فيما إذا كانت متوازنة أم لا. عندئذ توصف توترات الأطوار وفق ما يلي :

$$v_{AN} = v_{AG} - v_{NG}$$

$$v_{BN} = v_{BG} - v_{NG}$$

$$v_{Cn} = v_{CG} - v_{NG} \qquad (3.43)$$

حيث: $v_{AG} = v_{AO}$ ، $v_{BG} = v_{BO}$ ، $v_{CG} = v_{CO}$



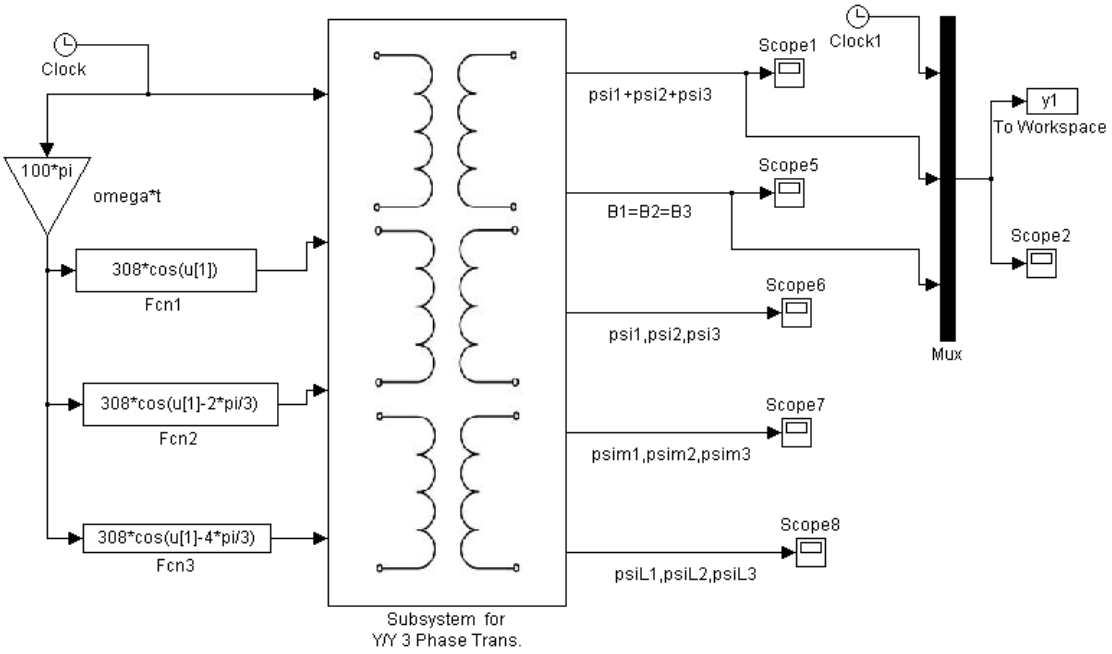
الشكل(3.26) : النجمي – نجمي للمحولة .

a – الدارة المكافئة b– المنبع مع التوصيل إلى المحول.

تبين الدارة المكافئة لتمثيل فقط طور واحد من الأطوار الثلاث للمحول كما أشرنا سابقاً (تمثيل المحولة في الحالة المتوازنة بطور واحد) ، تم اعتبار توترات الابتدائي والثانوي إشارات الدخل وتيارات الابتدائي والثانوي إشارات الخرج في مخطط النمذجة.

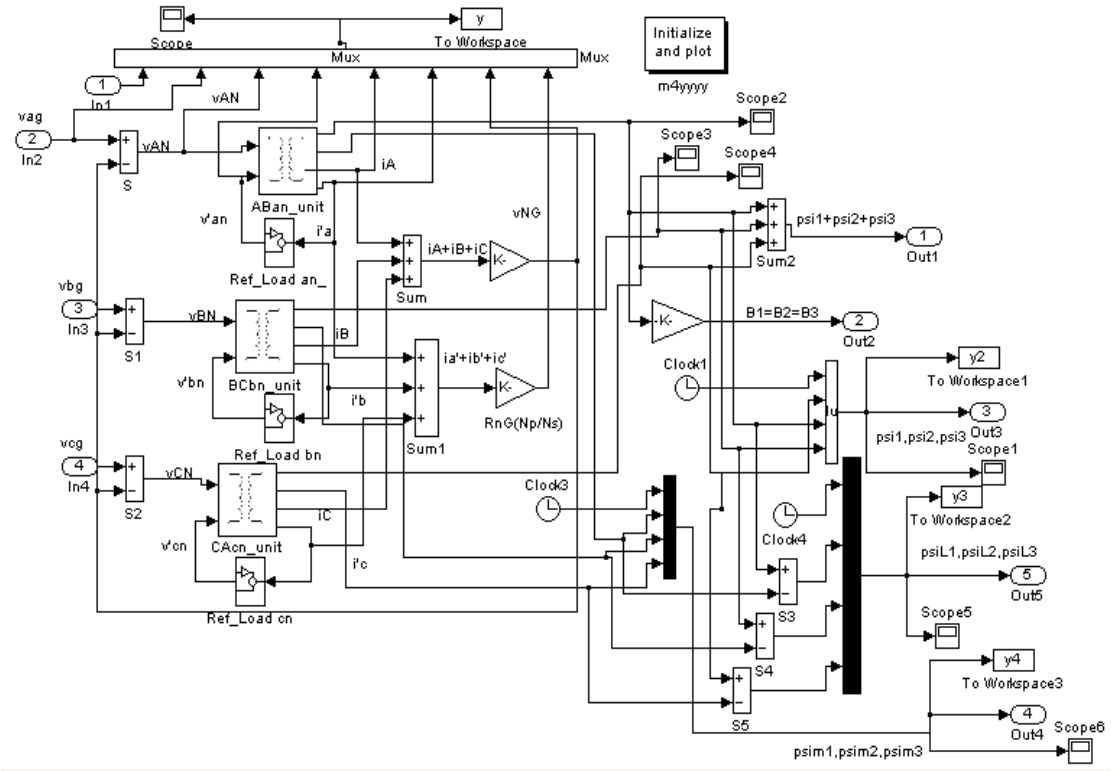
يحسب التوتر v_{NG} من علاقة هبوط التوتر على R_N كما يلي:

$$v_{NG} = (i_A + i_B + i_C) R_N \qquad (3.44)$$



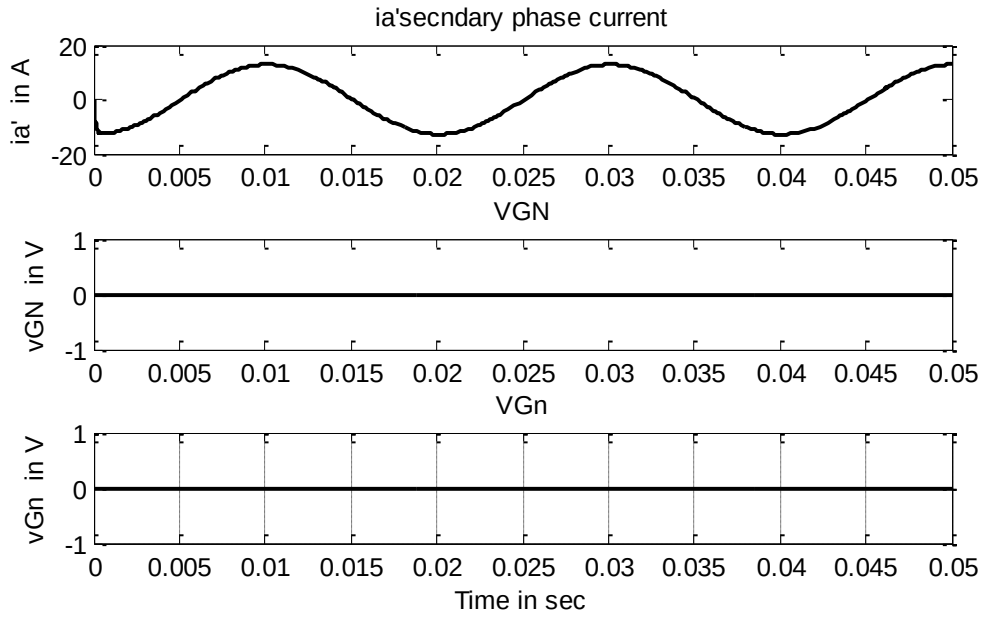
الشكل (3.27) مخطط صندوقي لنمذجة محول موصول بشكل Y-Y

يبين الشكل (3.27) مخطط صندوقي لنمذجة محولة ثلاثية الطور مربوطة نجمياً كما في الشكل(3.26a) . وهكذا يمكن مكافئة المحولة الثلاثية الطور بثلاث محولات أحادية الطور متماثلة ومستقلة تلائم مخطط النمذجة .. كما في الشكل (3.28) حيث يوضح الشكل محتويات الوحدة التي تمثل محول ثلاثي الطور مربوط بشكل نجمي –نجمي .

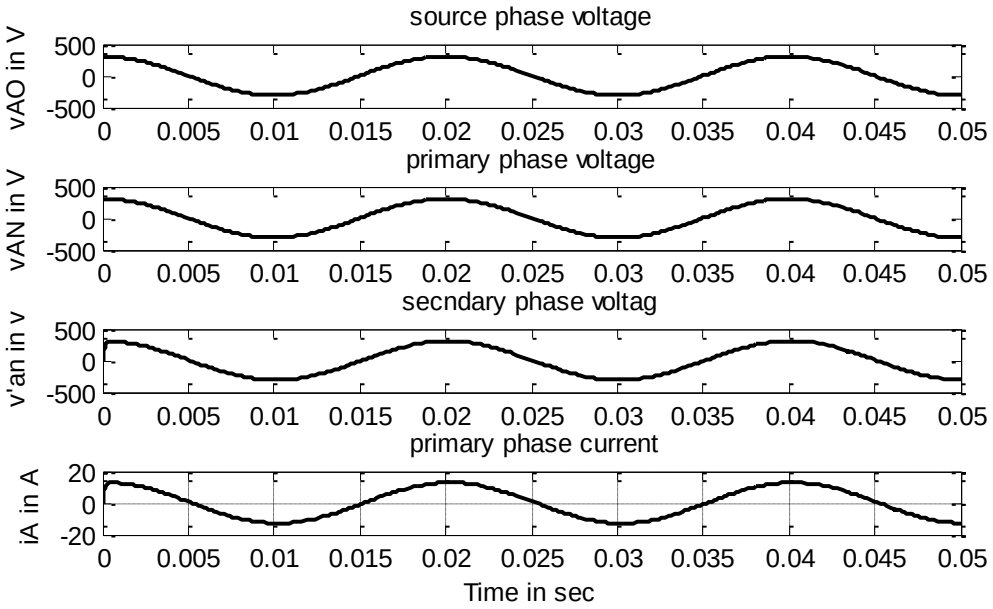


الشكل (3-28) محتويات المحول ثلاثي الأطوار

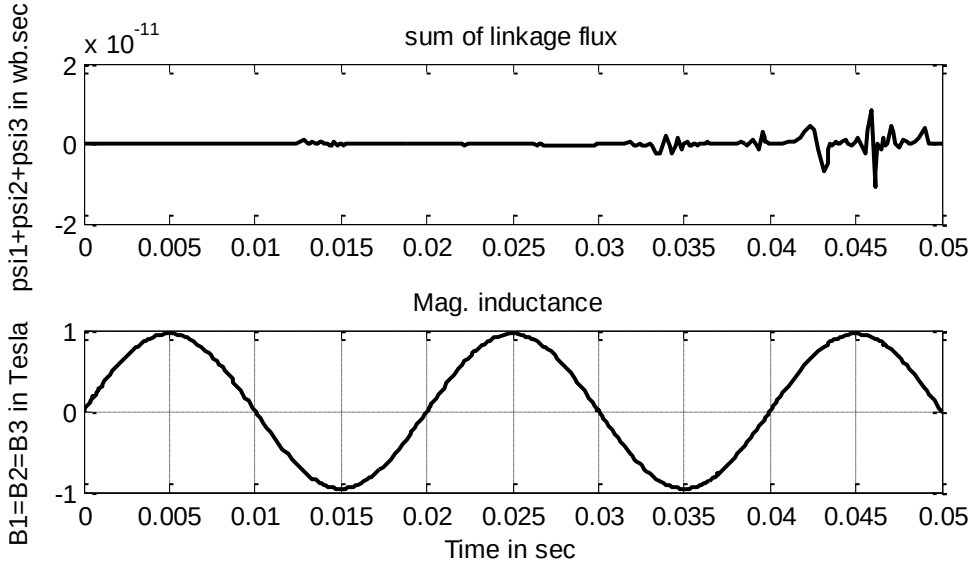
وهكذا تم الحصول على نتائج التمثيل المبين فب الشكل



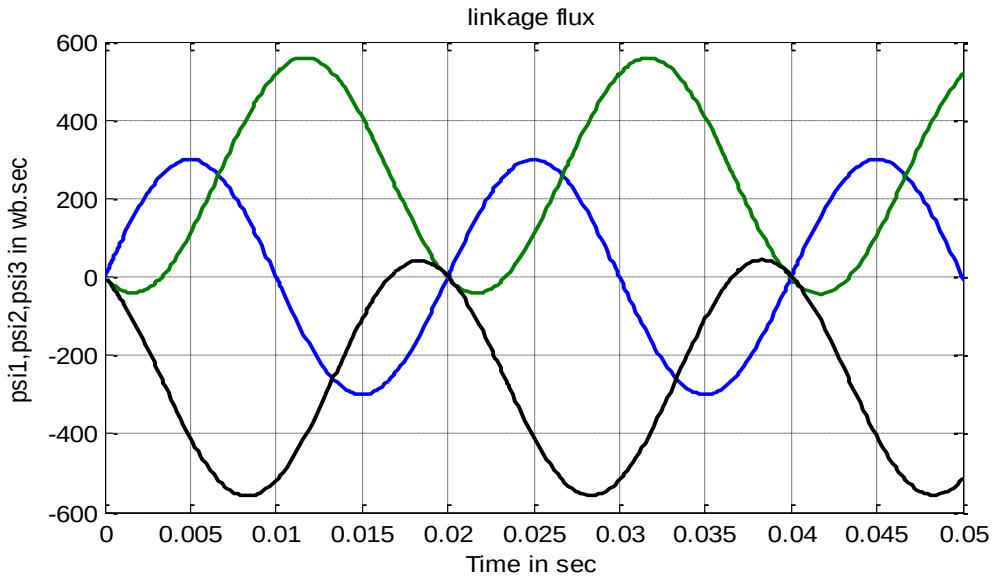
الشكل .....(3-29)



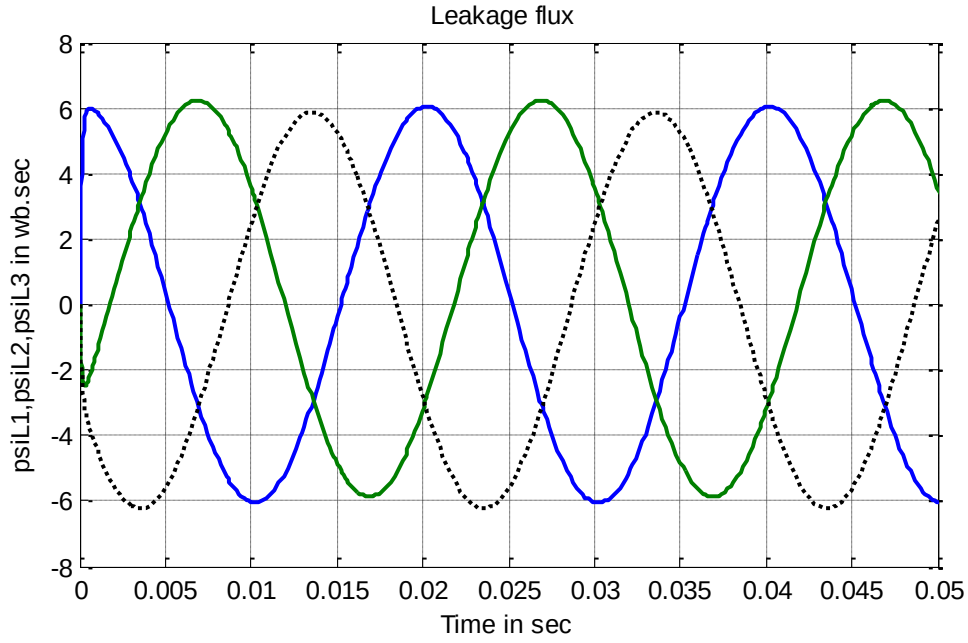
الشكل (3-30) .....



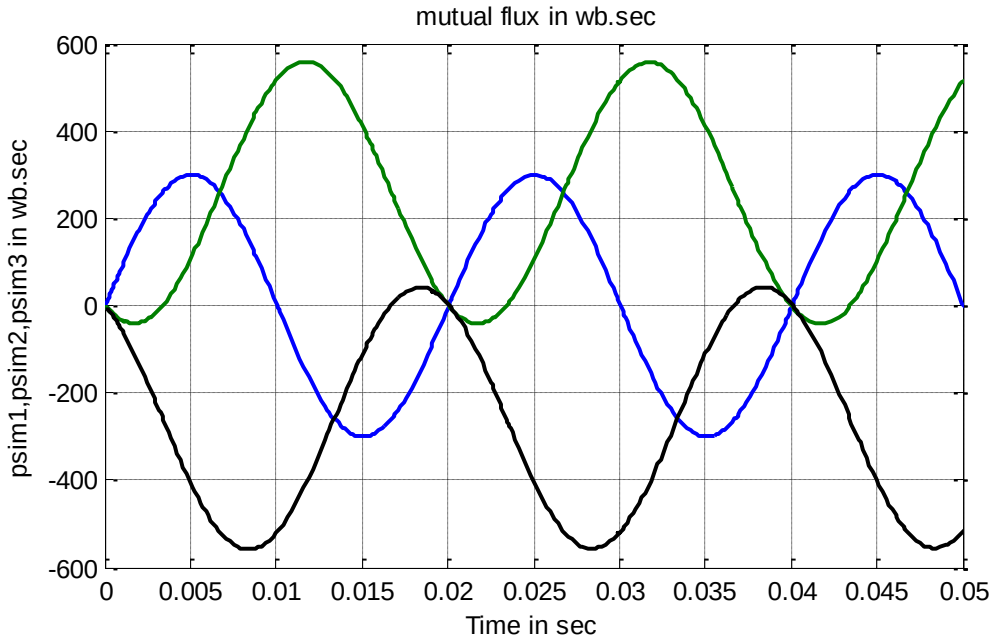
الشكل (3-31) السيالة المغناطيسية الكلية والتحريض المغناطيسي في كل طور



الشكل (3-32) السيالات المغناطيسية في كل طور

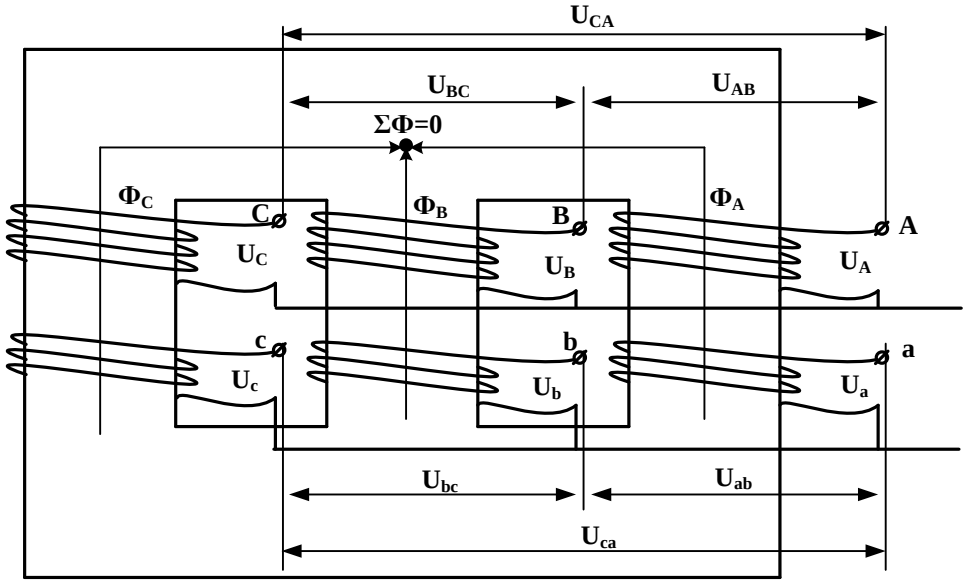


الشكل (3-33) الفيض التسريبي في كل طور

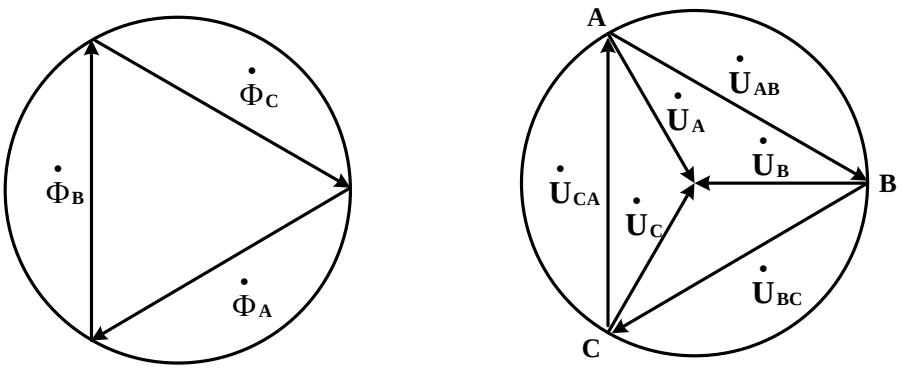


الشكل (34-3) الفيض المتبادل في كل طور

تبين نتائج النمذجة إن التحريض المغناطيسي في النواة يساوي الواحد تقريبا وهذا يتوافق مع نتائج النمذجة Matlab / pde ، وأن مجموع السيالات المغناطيسية تساوي الصفر تقريباً في المحولة ثلاثية الأطوار.



الشكل (35– 3) مسار الفيض المغناطيسي في الأطوار الثلاثة



الشكل (36 – 3) مخطط الفيض المغناطيسي في الأطوار الثلاثة

يمكن الاعتماد على النظرية العامة للآلات الكهربائية وتطبيقها على المحولات ثلاثية الطور .

لدراسة الحقول المغناطيسية الناتجة في المحولات أحادية و ثلاثية الطور : الحقول المغناطيسية في النواة الحديدية وفي الثغرات الهوائية والحقول التسريبية كذلك يمكن دراسة الحقول الذاتية للملفات والحقول المغناطيسية المتبادلة .

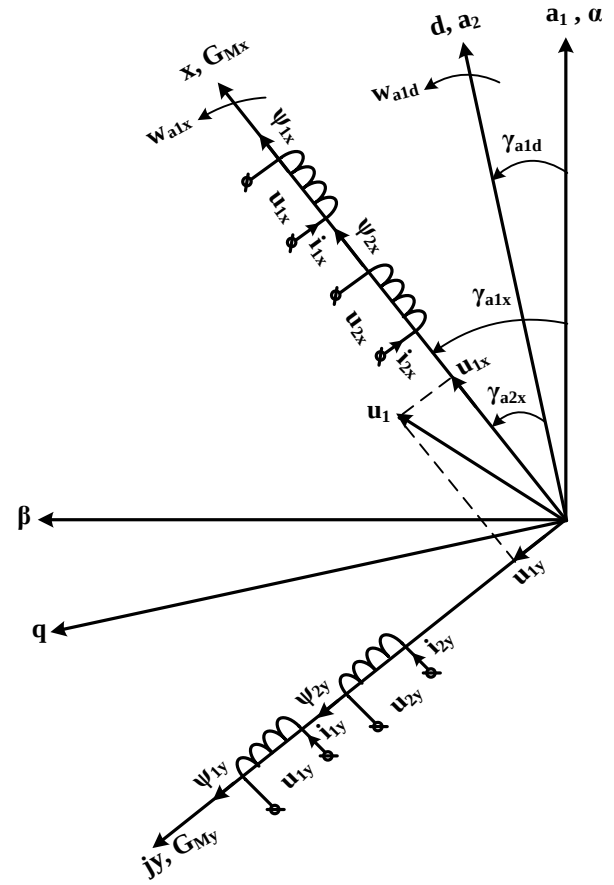
يمكننا الاستفادة من هذه الدراسة لإثبات أن النظرية العامة للآلات الكهربائية قابلة للتطبيق على الآلات المتحركة وكذلك الآلة الساكنة (المحولة).

7 – 3 – الموديل الرياضي العام التحويلي للآلة الكهربائية المثالية ثنائية الطور المكافئة:

بافتراض انه لدينا ملفين موضوعان في الفراغ بشكل عشوائي مطبق عليهما توترات U_1 و U_2 وعند بإسقاطهم على المحاور X,Y كما في الشكل (37 – 3) اخذين بعين الاعتبار السرعة الزاوية :

$$W_{a1\,x} = W_{\alpha x} = \frac{d\gamma_{a1\,x}}{dt} \quad (3 - 45)$$

$$W_{a2x} = W_{dx} = \frac{d\gamma_{a2x}}{dt} \quad (3 - 46)$$



الشكل (3 – 37) توضع الملفات على المحاور X,Y

نحصل على المعادلات التالية :

$$\mathbf{U}_1 = U_{1x} + \mathrm{j}U_{1y} = r_1\mathbf{i}_1 + \frac{d\psi_1}{dt} + jW_{a1x}\boldsymbol{\psi}_1 \quad (3-47)$$

$$\mathbf{U}_2 = U_{2x} + \mathrm{j}U_{2y} = r_2\mathbf{i}_2 + \frac{d\psi_2}{dt} + jW_{a2x}\boldsymbol{\psi}_2 \quad (3-48)$$

$$\mathrm{U}_{1x} = r_1\mathbf{i}_{1x} + \frac{d\psi_{1x}}{dt} - W_{a1x}\psi_{1y} \quad (3-49)$$

$$\mathrm{U}_{1y} = r_1\mathbf{i}_{1y} + \frac{d\psi_{1y}}{dt} + W_{a1x}\psi_{1x} \quad (3-50)$$

$$\mathrm{U}_{2x} = r_2\mathbf{i}_{2x} + \frac{d\psi_{2x}}{dt} - W_{a2x}\psi_{2y} \quad (3-51)$$

$$\mathrm{U}_{2y} = r_2\mathbf{i}_{2y} + \frac{d\psi_{2y}}{dt} + W_{a2x}\psi_{2x} \quad (3-52)$$

تدعى هذه المعادلات بمعادلات التوازن الكهربائي حيث :

$r_1\mathbf{i}_1$:تمثل هبوط الجهد على المقاومة r_1

$\frac{d\boldsymbol{\psi}_1}{dt}$: القوة المحركة الكهربائية التحويلية.

$jW_{\mathbf{a}1x}\boldsymbol{\psi}_1$: القوة المحركة الكهربائية الدورانية.

$\boldsymbol{\psi}_1$: الفيض المغناطيسي الكلي للملف الأول.

$\boldsymbol{\psi}_2$: الفيض المغناطيسي الكلي للملف الثاني.

ومنه :

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\psi}_{1\Sigma} + \boldsymbol{\psi}_{1l} \quad (3 - 53)$$

$$\boldsymbol{\psi}_2 = \boldsymbol{\psi}_{2\Sigma} + \boldsymbol{\psi}_{2l} \quad (3 - 54)$$

بالتعويض في معدلات التوازن (3 - 47)..... (3 - 52) ينتج مايلي:

$$\mathbf{U}_1 = U_{1x} + \mathrm{j}U_{1y} = r_1\mathbf{i}_1 + \frac{d(\boldsymbol{\psi}_{1\Sigma}+\boldsymbol{\psi}_{1l})}{dt} + jW_{\mathbf{a}1x}(\boldsymbol{\psi}_{1\Sigma} + \boldsymbol{\psi}_{1l}) \quad (3 - 55)$$

$$\mathrm{U}_{1x} = r_1\mathbf{i}_{1x} + \frac{d\psi_{1\Sigma x}+\psi_{1lx}}{dt} - W_{\mathbf{a}1x}(\psi_{1\Sigma y} + \psi_{1ly}) \quad (3 - 56)$$

$$\mathrm{U}_{1y} = r_1\mathbf{i}_{1y} + \frac{d(\psi_{1\Sigma y}+\psi_{1ly})}{dt} + W_{\mathbf{a}1x}(\psi_{1\Sigma x} + \psi_{1lx}) \quad (3 - 57)$$

وبالمثل نجد:

$$\mathbf{U}_2 = U_{2x} + \mathrm{j}U_{2y} = r_2\mathbf{i}_2 + \frac{d(\boldsymbol{\psi}_{2\Sigma}+\boldsymbol{\psi}_{2l})}{dt} + jW_{\mathbf{a}2x}(\boldsymbol{\psi}_{2\Sigma} + \boldsymbol{\psi}_{2l}) \quad (3 - 58)$$

$$\mathrm{U}_{2x} = r_2\mathbf{i}_{2x} + \frac{d\psi_{2\Sigma x}+\psi_{2lx}}{dt} - W_{\mathbf{a}2x}(\psi_{2\Sigma y} + \psi_{2ly}) \quad (3 - 59)$$

$$\mathrm{U}_{2y} = r_2\mathbf{i}_{2y} + \frac{d(\psi_{2\Sigma y}+\psi_{2ly})}{dt} + W_{\mathbf{a}2x}(\psi_{2\Sigma x} + \psi_{2lx}) \quad (3 - 60)$$

الموديل الرياضي للآلات الكهربائية في المحاور المغناطيسية الذاتية للملفات

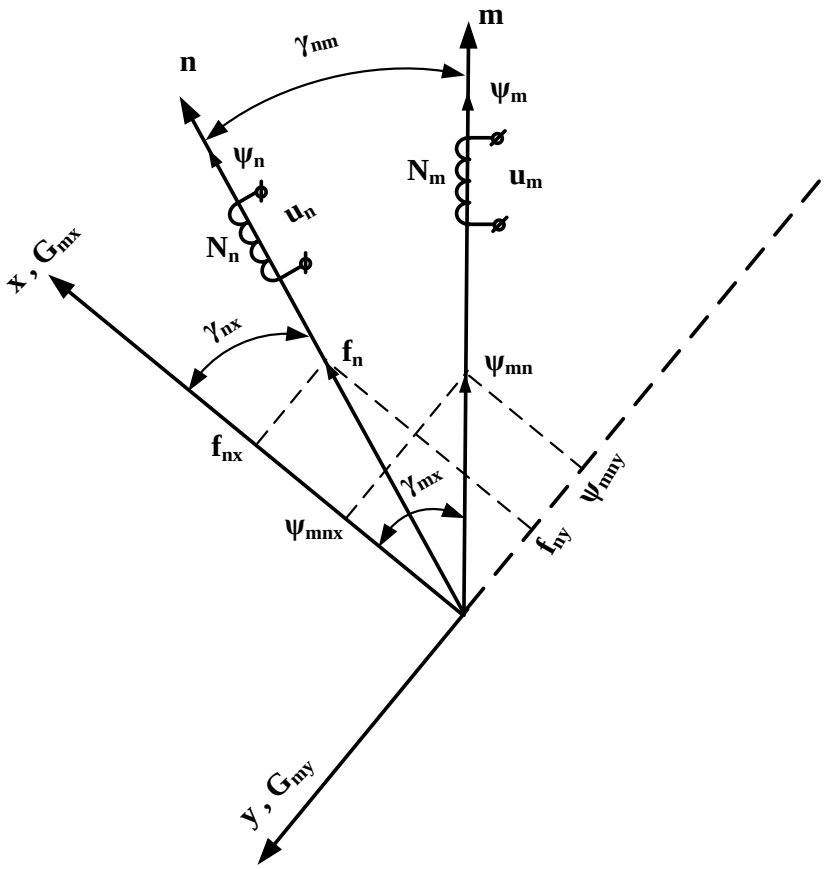
وتحولاتهم للمحاور:

الغاية من هذا الموديل هو إيجاد المحارضة المغناطيسية المتبادلة بين الملفين .

ليكن لدينا ملفان متوضعان بشكل عشوائي عدد لفاتهم N_m وN_n ولهم المحاور المغناطيسية m,n بينهم وبين المحور x الزوايا γ_{mx} وγ_{nx} ومنه فان هذه الملفات تمتلك الترددات الزاوية التالية:

$$W_{nx} = \frac{d\gamma_{nx}}{dt}$$

$$W_{mx} = \frac{d\gamma_{mx}}{dt}$$



الشكل (38 – 3) التوضع العشوائي للملفات

على افتراض أن التيار في الملف N_m يساوي الصفر وفي الملف N_n له قيمة I_n هذا يعني إن الفيوض المغناطيسية للملف N_n على المحاور x,y هي :

$$\phi_{nx} = f_{nx}.G_{nx} \quad (3 - 61)$$

$$\phi_{mx} = f_{mx}.G_{mx} \quad (3 - 62)$$

حيث مساقط القوة المحركة المغناطيسية الناتجة عن الملف N_n :

$$f_{nx} = N_n . i_n . \cos \gamma_{nx} \quad (3 - 63)$$

$$f_{ny} = -N_n . i_n . \sin \gamma_{ny} \quad (3 - 64)$$

وبما أن هناك علاقة مغناطيسية بين الملفين N_m وN_n يكون بالتالي فيض كلي متبادل بينهما يكون متجها حسب المحور المغناطيسي ل m فمساقطه على x,y :

$$\Psi_{mnx} = \phi_{nx} . N_m . \cos \gamma_{mx} \quad (3 - 65)$$

$$\Psi_{mny} = -\phi_{ny} . N_m . \sin \gamma_{my} \quad (3 - 66)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{mn} &= \Psi_{mnx} + \Psi_{mny} \\ &= (N_n . N_m . G_{nx} . \cos \gamma_{mx} \ . \cos \gamma_{nx} \\ &\quad + N_n . N_m . G_{nx} . \sin \gamma_{mx} \ . \sin \gamma_{nx}) i_n \end{aligned}$$

$$\Psi_{mn} = L_{mn} . i_n \quad (3 - 67)$$

$$L_{mn} = N_n . N_m . G_{nx} . \cos \gamma_{mx} \ . \cos \gamma_{nx} + N_n . N_m . G_{nx} . \sin \gamma_{mx} \ . \sin \gamma_{nx} \quad (3 - 68)$$

بتطبيق النظرية العامة للآلات على المحولة الكهربائية ثلاثية الطور:

لدينا في المحولة ثلاثية الأطوار لدينا ملفين على كل طور الأول ابتدائي عدد لفاته N_1 والثاني ثانوي عدد لفاته N_2 وكل طور مزاح عن الآخر (120^o) كما هو مبين في الشكل الشكل (39 – 3) ولا يوجد لدينا حركة (الآلة ساكنه) وبالتالي عند كتابة معادلات التوازن للمحولة اعتمادا على النظرية العامة للآلات فان مركبة القوة المحركة الكهربائية الدورانية تساوي الصفر وتكون معادلات التوازن عند تحويلهم (إسقاطهم) على المحاور α , β (تم اختيار هذه المحاور للآلة الساكنة) كما هو مبين في الشكل (39 - 3) كما يلي :

$$\mathbf{U}_A = U_{A\alpha} + jU_{A\beta} = r_A \mathbf{i}_1 + \frac{d\psi_A}{dt} \quad (3 - 69)$$

$$U_{A\alpha} = r_A \mathbf{i}_{1\alpha} + \frac{d\psi_{A\alpha}}{dt} \quad (3 - 70)$$

$$U_{A\beta} = r_A \mathbf{i}_{1\beta} + \frac{d\psi_{A\beta}}{dt} \quad (3 - 71)$$

$$(3-72)\boldsymbol{U}_{\mathbf{a}} = U_{\mathbf{a}\alpha} + jU_{\mathbf{a}\beta} = r_{\mathbf{a}}\boldsymbol{i}_2 + \frac{d\psi_{\mathbf{a}}}{dt}$$

$$(3-72)\ U_{\mathbf{a}\alpha} = r_{\mathbf{a}}\boldsymbol{i}_{2\alpha} + \frac{d\psi_{\mathbf{a}\alpha}}{dt}$$

$$(3-73)\ U_{a\beta} = r_a\boldsymbol{i}_{2\beta} + \frac{d\psi_{a\beta}}{dt}$$

$$(3-74)\mathbf{U}_{\mathrm{B}} = U_{\mathrm{B}\alpha} + \mathrm{j}U_{\mathrm{B}\beta} = r_{\mathrm{B}}\mathbf{i}_1 + \frac{d\psi_B}{dt}$$

$$(3-75)U_{\mathrm{B}\alpha} = r_{\mathrm{B}}\mathbf{i}_{1\alpha} + \frac{d\psi_{B\alpha}}{dt}$$

$$(3-76)U_{\mathrm{B}\beta} = r_{\mathrm{B}}\mathbf{i}_{1\beta} + \frac{d\psi_{B\beta}}{dt}$$

$$(3-77)\ \boldsymbol{U}_b = U_{b\alpha} + jU_{b\beta} = r_b\boldsymbol{i}_2 + \frac{d\psi_b}{dt}$$

$$(3-78)\ U_{b\alpha} = r_b\boldsymbol{i}_{2\alpha} + \frac{d\psi_{b\alpha}}{dt}$$

$$(3-79)\ U_{b\beta} = r_b\boldsymbol{i}_{2\beta} + \frac{d\psi_{b\beta}}{dt}$$

$$(3-80)\ \boldsymbol{U}_C = U_{C\alpha} + jU_{C\beta} = r_a\boldsymbol{i}_1 + \frac{d\psi_C}{dt}$$

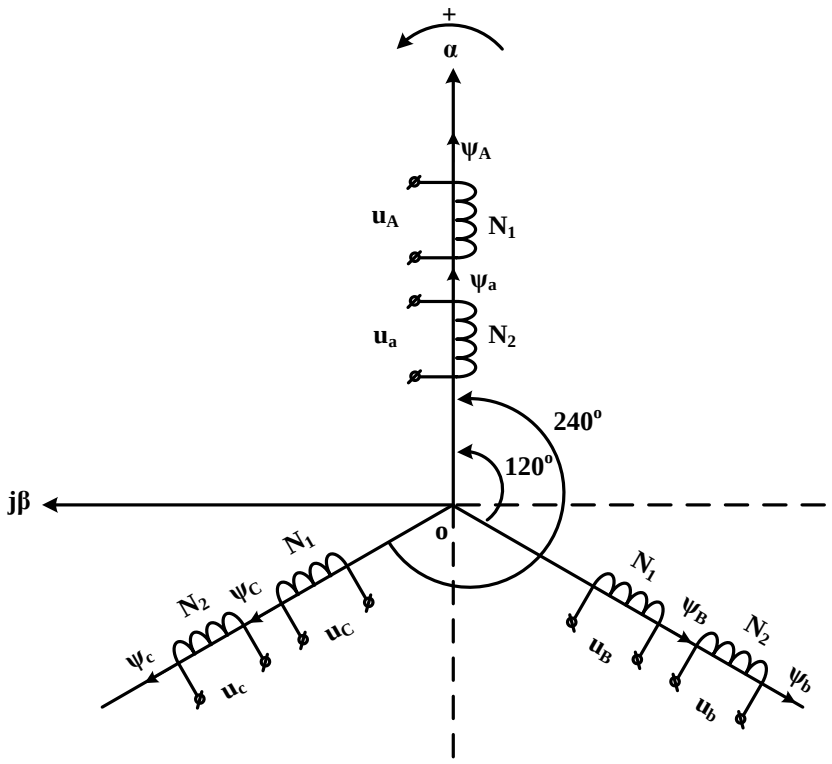
$$(3-81)\ U_{C\alpha} = r_a\boldsymbol{i}_{1\alpha} + \frac{d\psi_{C\alpha}}{dt}$$

$$(3-82)U_{C\beta} = r_a\boldsymbol{i}_{1\beta} + \frac{d\psi_{C\beta}}{dt}$$

$$(3-83)\ \boldsymbol{U}_c = U_{c\alpha} + jU_{c\beta} = r_c\boldsymbol{i}_2 + \frac{d\psi_c}{dt}$$

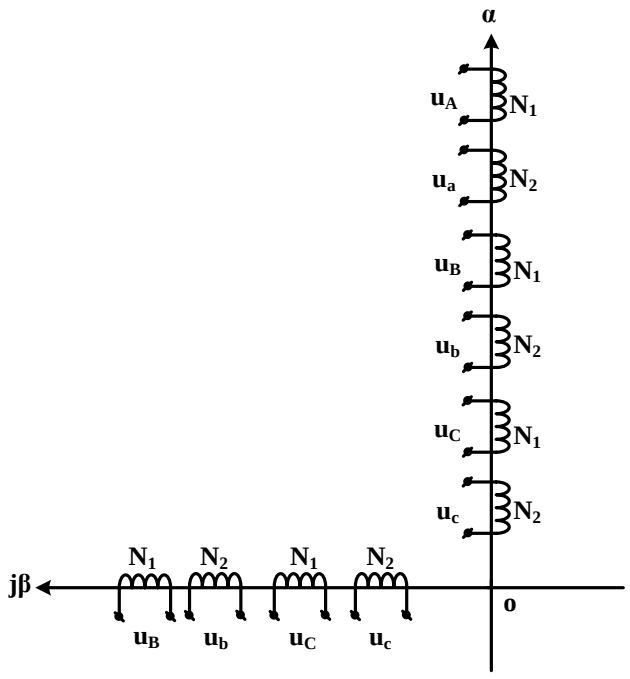
$$(3-84)\ U_{c\alpha} = r_c\boldsymbol{i}_{2\alpha} + \frac{d\psi_{c\alpha}}{dt}$$

$$(3-85)\ U_{c\beta} = r_c\boldsymbol{i}_{2\beta} + \frac{d\psi_{c\beta}}{dt}$$



الشكل (39 – 3) توضع الملفات في كل طور مزاح عن الآخر (120^{o})

بالإسقاط على الموديل العام الشكل (37 – 3) على المحاور β , α نحصل على مساقط ملفات المحولة :



الشكل (40 – 3) مساقط الملفات على المحاور α و β

إن الغاية من هذه الدراسة هي إيجاد مساقط كافة الفيوض على المحور α وبالتالي إيجاد محصلتهم .

لدينا ستة فيوض للطور الأول Ψ_A للأولي و Ψ_a للثانوي

للطور الثاني Ψ_B للأولي و Ψ_b للثانوي

للطور الثالث Ψ_C للأولي و Ψ_c للثانوي

ولدينا :

$$\Psi_{A\alpha} = \Psi_{Al_\alpha} + \Psi_{AA_\alpha} + \Psi_{Aa_\alpha} + \Psi_{AB_\alpha} + \Psi_{Ab_\alpha} + \Psi_{AC_\alpha} + \Psi_{Ac_\alpha} \quad (3-86)$$

حيث :

Ψ_{Al_α} : الفيض الكلي التسريبي للطور A على المحور α .

Ψ_{AA_α} : الفيض الكلي الذاتي للطور A على المحور α .

Ψ_{Aa_α} : الفيض الكلي المتبادل بين A و a حيث يتم إيجاده باستخدام الموديل الرياضي للآلة في المحاور الذاتية كما ذكر سابقاً .

Ψ_{AB_α} : الفيض الكلي المتبادل بين A و B حيث يتم إيجاده باستخدام الموديل الرياضي للآلة في المحاور الذاتية أيضاً .

Ψ_{Ab_α} : الفيض الكلي المتبادل بين A و b حيث يتم إيجاده باستخدام الموديل الرياضي للآلة في المحاور الذاتية أيضاً .

Ψ_{AC_α} : الفيض الكلي المتبادل بين A و C حيث يتم إيجاده باستخدام الموديل الرياضي للآلة في المحاور الذاتية أيضاً .

Ψ_{Ac_α} : الفيض الكلي المتبادل بين A و c حيث يتم إيجاده باستخدام الموديل الرياضي للآلة في المحاور الذاتية أيضاً .

$$\Psi_{A\alpha} = L_{Al_\alpha}.i_{A\alpha} + L_{AA_\alpha}.i_{A\alpha} + L_{Aa_\alpha}.i_{a\alpha} + L_{AB_\alpha}.i_{B\alpha} + L_{Ab_\alpha}.i_{b\alpha} + L_{AC_\alpha}.i_{C\alpha} + L_{Ac_\alpha}.i_{c\alpha}$$

$$(3-87)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{A\alpha} = {} & L_{Al_\alpha}.i_{A\alpha} + N_A{}^2.G_m.i_{A\alpha} \\ & + [(N_A N_a G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{a\alpha} + N_A N_a G_m sin\gamma_{A\alpha} sin\gamma_{a\alpha})]i_{a\alpha} \\ & + [(N_A N_B G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{B\alpha} + N_A N_B G_m sin\gamma_{A\alpha} sin\gamma_{B\alpha})]i_{B\alpha} \\ & + [(N_A N_b G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{b\alpha} + N_A N_b G_m sin\gamma_{A\alpha} sin\gamma_{b\alpha})]i_{b\alpha} \\ & + [(N_A N_C G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{C\alpha} + N_A N_C G_m sin\gamma_{A\alpha} sin\gamma_{C\alpha})]i_{C\alpha} \\ & + [(N_A N_c G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{c\alpha} + N_A N_c G_m sin\gamma_{A\alpha} sin\gamma_{c\alpha})]i_{c\alpha}\end{aligned}$$

$$\Psi_{A\alpha} = L_{Al_\alpha}.i_{A\alpha} + {N_1}^2.G_m.i_{A\alpha}$$
$$+ [(N_1N_2G_m\cos(0)\cos(0) + N_1N_2G_m\sin(0)\sin(0)]i_{a\alpha}$$
$$+ \left[\left({N_1}^2G_m\cos(0)\cos(120) + {N_1}^2G_m sin(0)sin(120)\right.i_{B\alpha}\right.$$
$$+ [(N_1N_2G_m cos(0)cos(120)$$
$$+ N_1N_2G_m sin(0)sin(120))]i_{b\alpha}$$
$$+ \left[\left({N_1}^2G_m cos(0)cos(240) + {N_1}^2G_m sin(0)sin(240)\right)\right]i_{C\alpha}$$
$$+ [(N_1N_2G_m cos(0)cos(240)$$
$$+ N_1N_2G_m sin(0)sin(240))]i_{c\alpha}\Big)\Big]$$

$$\Psi_{A\alpha} = L_{Al_\alpha}.i_{A\alpha} + {N_1}^2.G_m.i_{A\alpha} + N_1N_2G_m i_{a\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_m i_{B\alpha} -$$
$$\frac{1}{2}N_1N_2G_m i_{b\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_m i_{C\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_m i_{c\alpha}$$

(3 – 88)

$$\Psi_{B\alpha} = \Psi_{B_\alpha} + \Psi_{BB_\alpha} + \Psi_{Ba_\alpha} + \Psi_{BA_\alpha} + \Psi_{Bb_\alpha} + \Psi_{BC_\alpha} + \Psi_{Bc_\alpha} \qquad (3 - 89)$$

$\Psi_{B\alpha}$: الفيض الكلي للطور B على المحور α يتم حسابه كما للطور A .

$$\Psi_{B\alpha} = L_{Bl_\alpha}.i_{B\alpha} + L_{BB_\alpha}.i_{B\alpha} + L_{BA_\alpha}.i_{A\alpha} + L_{Ba_\alpha}.i_{a\alpha} + L_{Bb_\alpha}.i_{b\alpha}$$
$$+ L_{BC_\alpha}.i_{C\alpha} + L_{Bc_\alpha}.i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{B\alpha} = L_{Bl_\alpha}.i_{A\alpha} + {N_B}^2.G_m.i_{B\alpha}$$
$$+ [(N_BN_aG_m cos\gamma_{B\alpha}cos\gamma_{a\alpha} + N_BN_aG_m sin\gamma_{B\alpha}sin\gamma_{a\alpha})]i_{a\alpha}$$
$$+ [(N_BN_AG_m cos\gamma_{B\alpha}cos\gamma_{A\alpha} + N_BN_AG_m sin\gamma_{B\alpha}sin\gamma_{A\alpha})]i_{A\alpha}$$
$$+ [(N_BN_bG_m cos\gamma_{B\alpha}cos\gamma_{b\alpha} + N_BN_bG_m sin\gamma_{B\alpha}sin\gamma_{b\alpha})]i_{b\alpha}$$
$$+ [(N_BN_CG_m cos\gamma_{B\alpha}cos\gamma_{C\alpha} + N_BN_CG_m sin\gamma_{B\alpha}sin\gamma_{C\alpha})]i_{C\alpha}$$
$$+ [(N_BN_cG_m cos\gamma_{B\alpha}cos\gamma_{c\alpha} + N_BN_cG_m sin\gamma_{B\alpha}sin\gamma_{c\alpha})]i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{B\alpha} = L_{Bl_\alpha}.i_{A\alpha} + {N_B}^2.G_m.i_{B\alpha}$$
$$+ [(N_BN_aG_m cos(120)cos(0)$$
$$+ N_BN_aG_m sin(120)sin(0))]i_{a\alpha}$$
$$+ [(N_BN_AG_m cos(120)cos(0)$$
$$+ N_BN_AG_m sin(120)sin(0))]i_{A\alpha}$$
$$+ [(N_BN_bG_m cos(120)cos(120)$$
$$+ N_BN_bG_m sin(120)sin(120))]i_{b\alpha}$$
$$+ [(N_BN_CG_m cos(120)cos(240)$$
$$+ N_BN_CG_m sin(120)sin(240))]i_{C\alpha}$$
$$+ [(N_BN_cG_m cos(120)cos(240)$$
$$+ N_BN_cG_m sin(120)sin(240))]i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{B\alpha} = L_{Bl_\alpha}.i_{B\alpha} + {N_1}^2.G_m.i_{B\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_m i_{a\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2 G_m i_{A\alpha} + N_1N_2G_m i_{b\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2 G_m i_{C\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_m i_{c\alpha}$$

(3 - 90)

$$\Psi_{C\alpha} = \Psi_{Cl_\alpha} + \Psi_{CC_\alpha} + \Psi_{CA_\alpha} + \Psi_{Ca_\alpha} + \Psi_{CB_\alpha} + \Psi_{Cb_\alpha} + \Psi_{Cc_\alpha} \quad (3 - 91)$$

$\Psi_{C\alpha}$: الفيض الكلي للطور C على المحور α يتم حسابه كما للطور A .

$$\begin{aligned}
\Psi_{C\alpha} &= L_{Cl_\alpha}.i_{C\alpha} + {N_C}^2.G_m.i_{C\alpha} \\
&+ [(N_C N_A G_m cos\gamma_{C\alpha} cos\gamma_{A\alpha} + N_C N_A G_m sin\gamma_{C\alpha} sin\gamma_{A\alpha})]i_{A\alpha} \\
&+ [(N_C N_a G_m cos\gamma_{C\alpha} cos\gamma_{a\alpha} + N_C N_a G_m sin\gamma_{C\alpha} sin\gamma_{a\alpha})]i_{a\alpha} \\
&+ [(N_C N_B G_m cos\gamma_{C\alpha} cos\gamma_{B\alpha} + N_B N_C G_m sin\gamma_{C\alpha} sin\gamma_{B\alpha})]i_{B\alpha} \\
&+ [(N_C N_b G_m cos\gamma_{C\alpha} cos\gamma_{b\alpha} + N_C N_b G_m sin\gamma_{C\alpha} sin\gamma_{b\alpha})]i_{b\alpha} \\
&+ +[(N_C N_c G_m cos\gamma_{C\alpha} cos\gamma_{c\alpha} + N_C N_c G_m sin\gamma_{C\alpha} sin\gamma_{c\alpha})]i_{c\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{C\alpha} &= L_{Cl_\alpha}.i_{C\alpha} + {N_1}^2.G_m.i_{C\alpha} \\
&+ \left[\left({N_1}^2 G_m cos(240)cos(0) + {N_1}^2 G_m sin(240)sin(0)\right)\right]i_{A\alpha} \\
&+ \left[\left(N_1N_2G_m cos(240)cos(0)\right.\right. \\
&\left.\left. + N_1N_2G_m sin(240)sin(0)\right)\right]i_{a\alpha} \\
&+ \left[\left({N_1}^2 G_m cos(240)cos(120)\right.\right. \\
&\left.\left. + {N_1}^2 G_m sin(240)sin(120)\right)\right]i_{B\alpha} \\
&+ \left[\left(N_1N_2G_m cos(240)cos\gamma_{b\alpha}(120)\right.\right. \\
&\left.\left. + N_1N_2G_m sin(240)sin(120)\right)\right]i_{b\alpha} \\
&+ +\left[\left(N_1N_2G_m cos(240)cos(240)\right.\right. \\
&\left.\left. + N_1N_2G_m sin(240)sin(240)\right)\right]i_{c\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Psi_{C\alpha} = L_{Cl_\alpha}.i_{B\alpha} + {N_1}^2.G_m.i_{C\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2 G_m i_{A\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_m i_{a\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2 G_m i_{B\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_m i_{b\alpha} + N_1N_2G_m i_{c\alpha}$$

(3 - 92)

$$\Psi_{a\alpha} = \Psi_{al_\alpha} + \Psi_{aa_\alpha} + \Psi_{aA_\alpha} + \Psi_{aB_\alpha} + \Psi_{ab_\alpha} + \Psi_{aC_\alpha} + \Psi_{ac_\alpha} \quad (3 - 93)$$

$\Psi_{a\alpha}$: الفيض الكلي للطور a على المحور α يتم حسابه كما للطور A .

$$\begin{aligned}
\Psi_{a\alpha} &= L_{al_\alpha}.i_{a\alpha} + L_{aa_\alpha}.i_{a\alpha} + L_{aA_\alpha}.i_{a\alpha} + L_{aB_\alpha}.i_{B\alpha} + L_{ab_\alpha}.i_{b\alpha} + L_{aC_\alpha}.i_{C\alpha} \\
&+ L_{ac_\alpha}.i_{c\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Psi_{a\alpha} = L_{al_\alpha}.i_{a\alpha} + N_a{}^2.G_m.i_{a\alpha}$$
$$+ [(N_a N_A G_m cos\gamma_{a\alpha} cos\gamma_{A\alpha} + N_a N_A G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{A\alpha})]i_{A\alpha}$$
$$+ [(N_a N_B G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{B\alpha} + N_a N_B G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{B\alpha})]i_{B\alpha}$$
$$+ [(N_a N_b G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{b\alpha} + N_a N_b G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{b\alpha})]i_{b\alpha}$$
$$+ [(N_a N_C G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{C\alpha} + N_a N_C G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{C\alpha})]i_{C\alpha}$$
$$+ [(N_a N_c G_m cos\gamma_{A\alpha} cos\gamma_{c\alpha} + N_a N_c G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{c\alpha})]i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{a\alpha} = L_{al_\alpha}.i_{a\alpha} + N_a{}^2.G_m.i_{a\alpha}$$
$$+ [(N_a N_A G_m cos\gamma_{a\alpha} cos\gamma_{A\alpha} + N_a N_A G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{A\alpha})]i_{A\alpha}$$
$$+ [(N_a N_B G_m cos\gamma_{a\alpha} cos\gamma_{B\alpha} + N_a N_B G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{B\alpha})]i_{B\alpha}$$
$$+ [(N_a N_b G_m cos\gamma_{a\alpha} cos\gamma_{b\alpha} + N_a N_b G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{b\alpha})]i_{b\alpha}$$
$$+ [(N_a N_C G_m cos\gamma_{a\alpha} cos\gamma_{C\alpha} + N_a N_C G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{C\alpha})]i_{C\alpha}$$
$$+ [(N_a N_c G_m cos\gamma_{a\alpha} cos\gamma_{c\alpha} + N_a N_c G_m sin\gamma_{a\alpha} sin\gamma_{c\alpha})]i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{a\alpha} = L_{al_\alpha}.i_{a\alpha} + N_2{}^2.G_m.i_{a\alpha}$$
$$+ [(N_2 N_1 G_m \cos(0)\cos(0) + N_2 N_1 G_m \sin(0)\sin(0)]i_{A\alpha}$$
$$+ \Big[[\Big(N_2 N_1 G_m \cos(0)\cos(120)$$
$$+ N_2 N_1 G_m sin(0)sin(120)]\, i_{B\alpha}$$
$$+ \Big[\Big(N_2{}^2 G_m cos(0)cos(120) + N_2{}^2 G_m sin(0)sin(120)\Big)\Big]\, i_{b\alpha}$$
$$+ \Big[\Big(N_2 N_1 G_m cos(0)cos(240)$$
$$+ N_2 N_1 G_m sin(0)sin(240)\Big)\Big] i_{C\alpha}$$
$$+ \Big[\Big(N_2{}^2 G_m cos(0)cos(240)$$
$$+ N_2{}^2 G_m sin(0)sin(240)\Big)\Big]\, i_{c\alpha}\Big)\Big]$$

$$\Psi_{a\alpha} = L_{al_\alpha}.i_{a\alpha} + N_2{}^2.G_m.i_{a\alpha} + N_1 N_2 G_m i_{A\alpha} - \frac{1}{2} N_1 N_2 G_m i_{B\alpha} -$$
$$\frac{1}{2} N_2{}^2 G_m i_{b\alpha} - \frac{1}{2} N_1 N_2 G_m i_{C\alpha} - \frac{1}{2} N_2{}^2 G_m i_{c\alpha}$$

(3 - 94)

$$\Psi_{b\alpha} = \Psi_{b_\alpha} + \Psi_{bb_\alpha} + \Psi_{ba_\alpha} + \Psi_{bA_\alpha} + \Psi_{bB_\alpha} + \Psi_{bC_\alpha} + \Psi_{bc_\alpha} \qquad (3 - 95)$$

$\Psi_{b\alpha}$: الفيض الكلي للطور b على المحور α يتم حسابه كما للطور A .

$$\Psi_{b\alpha} = L_{bl_\alpha}.i_{A\alpha} + N_b{}^2.G_m.i_{B\alpha}$$
$$+ [(N_b N_a G_m cos\gamma_{b\alpha} cos\gamma_{a\alpha} + N_b N_a G_m sin\gamma_{b\alpha} sin\gamma_{a\alpha})]i_{a\alpha}$$
$$+ [(N_b N_A G_m cos\gamma_{b\alpha} cos\gamma_{A\alpha} + N_b N_A G_m sin\gamma_{b\alpha} sin\gamma_{A\alpha})]i_{A\alpha}$$
$$+ [(N_b N_B G_m cos\gamma_{b\alpha} cos\gamma_{b\alpha} + N_b N_b G_m sin\gamma_{b\alpha} sin\gamma_{b\alpha})]i_{B\alpha}$$
$$+ [(N_b N_C G_m cos\gamma_{b\alpha} cos\gamma_{C\alpha} + N_b N_C G_m sin\gamma_{b\alpha} sin\gamma_{C\alpha})]i_{C\alpha}$$
$$+ [(N_b N_c G_m cos\gamma_{b\alpha} cos\gamma_{c\alpha} + N_b N_c G_m sin\gamma_{b\alpha} sin\gamma_{c\alpha})]i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{b\alpha} = L_{bl_\alpha}.i_{A\alpha} + {N_b}^2.G_m.i_{b\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_b N_a G_m cos(120)cos(0)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_b N_a G_m sin(120)sin(0)\right)\right] i_{a\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_b N_A G_m cos(120)cos(0)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_b N_A G_m sin(120)sin(0)\right)\right] i_{A\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_b N_B G_m cos(120)cos(120)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_b N_B G_m sin(120)sin(120)\right)\right] i_{B\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_B N_C G_m cos(120)cos(240)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_b N_C G_m sin(120)sin(240)\right)\right] i_{C\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_b N_c G_m cos(120)cos(240)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_B N_c G_m sin(120)sin(240)\right)\right] i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{b\alpha} = L_{bl_\alpha}.i_{A\alpha} + {N_2}^2.G_m.i_{b\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_1 N_2 G_m cos(120)cos(0)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_1 N_2 G_m sin(120)sin(0)\right)\right] i_{a\alpha}$$
$$+ \left[\left({N_1}^2 G_m cos(120)cos(0) + {N_1}^2 G_m sin(120)sin(0)\right)\right] i_{A\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_1 N_2 G_m cos(120)cos(120)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_1 N_2 G_m sin(120)sin(120)\right)\right] i_{B\alpha}$$
$$+ \left[\left({N_1}^2 G_m cos(120)cos(240)\right.\right.$$
$$\left.\left. + {N_1}^2 G_m sin(120)sin(240)\right)\right] i_{C\alpha}$$
$$+ \left[\left(N_1 N_2 G_m cos(120)cos(240)\right.\right.$$
$$\left.\left. + N_1 N_2 G_m sin(120)sin(240)\right)\right] i_{c\alpha}$$

$$\Psi_{b\alpha} = L_{bl_\alpha}.i_{B\alpha} + {N_2}^2.G_m.i_{b\alpha} - \frac{1}{2}\,{N_2}^2 G_m i_{a\alpha} - \frac{1}{2} N_1 N_2 G_m i_{A\alpha} +$$
$$N_1 N_2 G_m i_{B\alpha} - \frac{1}{2} N_1 N_2 G_m i_{C\alpha} - \frac{1}{2}\,{N_2}^2 G_m i_{c\alpha}$$

(3 - 96)

$$\Psi_{c\alpha} = \Psi_{cl_\alpha} + \Psi_{cc_\alpha} + \Psi_{cA_\alpha} + \Psi_{ca_\alpha} + \Psi_{cB_\alpha} + \Psi_{cb_\alpha} + \Psi_{cC_\alpha} \qquad (3 - 97)$$

$\Psi_{c\alpha}$: الفيض الكلي للطور c على المحور α يتم حسابه كما للطور A .

$$\Psi_{c\alpha} = L_{cl_\alpha}.i_{c\alpha} + {N_c}^2.G_m.i_{c\alpha}$$
$$+ [N_c N_A G_m cos\gamma_{c\alpha} cos\gamma_{A\alpha} + N_c N_A G_m sin\gamma_{c\alpha} sin\gamma_{A\alpha})] i_{A\alpha}$$
$$+ [N_c N_a G_m cos\gamma_{c\alpha} cos\gamma_{a\alpha} + N_c N_a G_m sin\gamma_{c\alpha} sin\gamma_{a\alpha})] i_{a\alpha}$$
$$+ [N_c N_B G_m cos\gamma_{c\alpha} cos\gamma_{B\alpha} + N_B N_c G_m sin\gamma_{c\alpha} sin\gamma_{B\alpha})] i_{B\alpha}$$
$$+ [N_c N_b G_m cos\gamma_{c\alpha} cos\gamma_{b\alpha} + N_c N_b G_m sin\gamma_{c\alpha} sin\gamma_{b\alpha})] i_{b\alpha}$$
$$+ [N_c N_C G_m cos\gamma_{c\alpha} cos\gamma_{C\alpha} + N_c N_C G_m sin\gamma_{c\alpha} sin\gamma_{C\alpha})] i_{C\alpha}$$

$$\Psi_{c\alpha} = L_{cl_\alpha}.i_{c\alpha} + {N_2}^2.G_m.i_{c\alpha} + \left[\left(N_2 N_1 G_m cos(240)cos(0) + N_2 N_1 G_m sin(240)sin(0)\right)\right]i_{A\alpha} + \left[\left({N_2}^2 G_m cos(240)cos(0) + {N_2}^2 G_m sin(240)sin(0)\right)\right]i_{a\alpha} + \left[\left(N_2 N_1 G_m cos(240)cos(120) + N_2 N_1 G_m sin(240)sin(120)\right)\right]i_{B\alpha} + \left[\left({N_2}^2 G_m cos(240)cos\gamma_{b\alpha}(120) + {N_2}^2 G_m sin(240)sin(120)\right)\right]i_{b\alpha} + \left[\left(N_2 N_1 G_m cos(240)cos(240) + N_2 N_1 G_m sin(240)sin(240)\right)\right]i_{C\alpha}$$

$$\Psi_{c\alpha} = L_{cl_\alpha}.i_{c\alpha} + {N_2}^2.G_m.i_{c\alpha} - \frac{1}{2}N_1 N_2 G_m i_{A\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2 G_m i_{a\alpha} - \frac{1}{2}N_1 N_2 G_m i_{B\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2 G_m i_{b\alpha} + N_1 N_2 G_m i_{C\alpha} \quad (3 - 98)$$

بجمع مساقط فيوض الأطوار الثلاثة على المحور α نحصل على Ψ_α :

$$\Psi_\alpha = \Psi_{A\alpha} + \Psi_{B\alpha} + \Psi_{C\alpha} + \Psi_{a\alpha} + \Psi_{b\alpha} + \Psi_{c\alpha}$$

$$\Psi_{\alpha} = L_{Al_{\alpha}}.i_{A\alpha} + {N_1}^2.G_m.i_{A\alpha} + N_1N_2G_mi_{a\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_mi_{B\alpha}$$
$$- \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{b\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_mi_{C\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{c\alpha} + L_{Bl_{\alpha}}.i_{B\alpha}$$
$$+ {N_1}^2.G_m.i_{B\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{a\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_mi_{A\alpha}$$
$$+ N_1N_2G_mi_{b\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_mi_{C\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{c\alpha} + L_{Cl_{\alpha}}.i_{B\alpha}$$
$$+ {N_1}^2.G_m.i_{C\alpha} - \frac{1}{2}{N_1}^2G_mi_{A\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{a\alpha}$$
$$- \frac{1}{2}{N_1}^2G_mi_{B\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{b\alpha} + N_1N_2G_mi_{c\alpha} + L_{al_{\alpha}}.i_{a\alpha}$$
$$+ {N_2}^2.G_m.i_{a\alpha} + N_1N_2G_mi_{A\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{B\alpha}$$
$$- \frac{1}{2}{N_2}^2G_mi_{b\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{C\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2G_mi_{c\alpha} + L_{bl_{\alpha}}.i_{b\alpha}$$
$$+ {N_2}^2.G_m.i_{b\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2G_mi_{a\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{A\alpha}$$
$$+ N_1N_2G_mi_{B\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{C\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2G_mi_{c\alpha} + L_{cl_{\alpha}}.i_{c\alpha}$$
$$+ {N_2}^2.G_m.i_{c\alpha} - \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{A\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2G_mi_{a\alpha}$$
$$- \frac{1}{2}N_1N_2G_mi_{B\alpha} - \frac{1}{2}{N_2}^2G_mi_{b\alpha} + N_1N_2G_mi_{C\alpha} = 0$$

بهذه النتيجة تم اثبات ان محصلة الفيوض على المحور α تساوي الصفر ، وبتكرار هذه العملية على المحور β نجد ان محصلة الفيوض على المحور β تساوي الصفر أيضاً

أي أن شعاع فيض المحصلة للمحورين α و β يساوي الصفر .

النتائج:

1 - لقد تم تنفيذ محولة كهربائية بمواصفات:

Sn =1500 VA

U_{1n}= 220 V

U_{2n}= 24 V

m= 1

f = 50 HZ

وتم دراسة منحنيات خواصها لاعتمادها كقيم مرجعية لتحقيق المقارنة مع بارامترات المحولة التي تدرس بطريقة النمذجة بمساعدة MATLAB/PDE

2- دراسة الحقل المغناطيسي وتوزعه في المحولة الكهربائية الاختيارية داخل النواة الحديدية وفي النافذة الهوائية لهذه المحولة بطريقة النمذجة ومراعاة الشروط الحدية واستخدام المعادلات الملائمة للحقل المغناطيسي الساكن .

3- بينت نتائج النمذجة وبعد مقارنتها مع منحنيات الخواص العملية التي تم قياسها في مخبر الآلات والقياسات الكهربائية أنها متقاربة ، على سبيل المثال دلت التجربة ان كثافة الفيض المغناطيسي المقاسة بتقنية الملف الكاشف تساوي 1.15تسلا بينما عند حساب هذه القيمة من النموذج المقترح باستخدامMATLAB/PDE تساوي وسطيا 1.1تسلا .

4- تتيح النمذجة إمكانيات تقنية عالية لتمثيل الحقول في الأجزاء المختلفة للآلات وبدقة عالية نسبيا متوقفة على دقة أجهزة القياس بما فيها دقة الحاسب ، تخفيض الأخطاء كما وجدنا باستخدام تقنية التكرار.

5- تم الاعتماد على النمذجة الفيزيائية الشكل)(وعلى النمذجة الرياضية وبعض الاختبارات العملية للتأكد من صحة النتائج .

حيث تشير هذه النتائج ان التقنية المتبعة في نمذجة الحقل باستخدام MATLAB/PDE يمكن أن تستخدم في المحولات الكهربائية بمراعاة التعديلات التي تم اعتمادها في هذا البحث .

6- يمكن الاستناد على هذه الدراسة كقاعدة علمية مع البرمجيات الملائمة لمتابعة أبحاث معمقة في مجال حساب وتجسيد الحقول المغناطيسية في الآلات الكهربائية عند التشغيل المباشر.

المراجع العلمية

المراجع العربية:

1- نظرية الحقول، الدكتور محمد موسى والدكتور فاروق دريعي- كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية 1996 – منشورات جامعة دمشق.

2- نظرية الحقول ، الدكتور سميح الجابي –أملية لطلاب السنة الثالثة 1987 – جامعة دمشق.

3- نظرية الحقول، الدكتور محسن الخطيب – منشورات جامعة تشرين 1994.

4- تصميم الآلات الكهربائية، الدكتور عبد المطلب أبو سيف- كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – منشورات جامعة دمشق 2005 .

5- تصميم المحولات الكهربائية، الدكتور مالك العلي – منشورات جامعة حلب 2000.

6- المحولات الكهربائية، الدكتور هاشم ورقوزق والدكتور هاكوب بوغوص- منشورات جامعة دمشق2003.

7- الآلات الكهربائية ونظم التغذية ،الدكتور عيد الحنون والدكتور محمد عيد المصري- منشورات جامعة دمشق 2007.

8- برمجة (3) ،الدكتور علي الجازي والدكتور مصطفى الحزوري – منشورات جامعة دمشق 2008.

المراجع الأجنبية:

9- Evaluation Of Power System Harmonic Effects On Transformer, Assad A. Elmoudi -Helsinki University of Technology 2006.

10 -Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods, *Joao Pedro A. Bastos and Nelson Sadowski-Brazil* 2003.

11 - Astudent's Guide to Maxwell's Equations ,Danial Fleisch – Cambridge University 2008.

12- Introductory Electromagnetics,Herbert P.Neff ,Jr- University of Tennessee 1991.

13-Elements of Electromagnetic, Mathew No.Sadiko- University Oxford 2005.

14- Help of(Matlab/pde) ver 7.1-

14 - Electro-Magnetic Calculation for elements used in electrical machine ,Yanus Turouski – warso 1986.

15-Dynamic simulation of electric machine using matlab/simulink, chee-mun ong- school of electrical and computer engineering –purdue university ,West Lafayatte,Indiana.

16- Elements Of Engineering Electomagnetics,Nannapaneni Narayana Rao ,fifth edition-Newdelhi 2002.

17- Mathematical Models of Electric Machines , P.S.Ivanov-1980 .

الفهرس

مقدمة Introduction 2
الفصل الأول 5
دراسة مرجعية حول الحقول الكهرطيسية 5
وطرق حسابهاتمهيد: 5
تمهيد: 6
1-1: معادلات ماكسويل : Maxwell's Equations 6
1-1- 1: معادلات الحقل الكهرطيسي من أجل أنظمة ثابتة في الفراغ : 7
1-1-2: المعادلات التفاضلية للحقل الكهرطيسي: 8
1-2: شعاع الكمون المغناطيسي: 13
1-3 : الشروط الحدية:boundary condition 17
1-3-1: شروط ديركليه: Dirichlet boundary condition 17
1 - 4 : الطرق العددية لحسابات الحقول الكهرطيسية: 18
1-4-1 : طريقة الفروقات المحدودة (التمايز المحدود) 18
1-4-2 : طريقة مونتي –كارلو :Monte-Carlo method 28
1 – 4 -3 : طريقة الدارات المغناطيسية (السلاسل المغناطيسية): 30
1-4-6: طريقة العناصر المنتهية:The Finite – Element Method 34
2-1 : استخدام طريقة العناصر المنتهية في حساب الحقول المغناطيسية الساكنة وشبه الساكنة: 45
2-2 : طريقة العناصر المنتهية في الحقول الإعصارية : 53
2-3: برمجيات طريقة العناصر المنتهية: 56
5- برنامج Matlab/pde 58
2-3-1 : اختيار البرنامج المناسب : 58
2-3-1-1- تعريف واجهة برنامج MATLAB/PDE: 58
3.1: المعادلات العامة للمحولة الكهربائية: 63
3 – 2 : تصميم محولة كهربائية أحادية الطور واختباراتها : 72
3-2-1 : تحديد الأبعاد العامة للدارة المغناطيسية (القلب الحديدي) : 72
3-2-2: حساب عدد اللفات : 73
3-2-3 : حساب التيارات : 74
3-2-4: حساب مقاطع الأسلاك : 74

3-2-5: اختبارات المحولة: 75
3-3 : توزع الحقل الكهرطيسي باستخدام MATLAB / PDE على المحولة المصممة:... 81
4 – 3 : نمذجة المحولات الكهربائية في بيئة MATLAB :..... 94
5 - 3 : ربط في المحولات ثلاثية الطور:..... 98
7 – 3 – الموديل الرياضي العام التحويلي للآلة الكهربائية المثالية ثنائية الطور المكافئة:. 106
النتائج:..... 119
المراجع العلمية 121
المراجع الأجنبية:..... 122

مقدمة:.....

الغاية من

البحث:.....

الفصل الأول: دراسة مرجعية للحقول الكهرطيسي وطرق حسابها

1- 1 تمهيد:

1-2 معادلات ماكسويل

1-2-1 معادلات الحقل الكهرطيسي من أجل أنظمة ثابتة في الفراغ

1-2-2 المعادلات التفاضلية للحقل الكهرطيسي

1-3 شعاع الكمون المغناطيسي

1-4 الشروط الحدية

1-5 الطرق الرقمية لحساب الحقول الكهرطيسية

1-5-1 طريقة الفروقات المحدودة

1-5-2 طريقة مونتي –كارلو

1-5-3 طريقة الدارات المغناطيسية

1-5-4 طريقة المعادلات التكاملية

1-5-5 طريقة المجاميع النهائية

1-5-6 طريقة العناصر المنتهية

الفصل الثاني: استخدام طريقة العناصر المنتهية في حسابات الحقول

تمهيد:

2-1 : استخدام طريقة العناصر المنتهية في حساب الحقول المغناطيسية الساكنة وشبه الساكنة

2-2 : طريقة العناصر المنتهية في الحقول الإعصارية

2-3: برمجيات طريقة العناصر المنتهية

الفصل الثالث: الدراسة التطبيقية

تمهيد

3-1: المعادلات العامة للمحولة الكهربائية

3-2 : نمذجة المحولة (أحادية الطور)

3-3: التوصيلات في المحولات ثلاثية الطور:

3-4: تصميم محولة كهربائية أحادية الطور واختباراتها :

3-4-1 تحديد الأبعاد العامة للدارة المغناطيسية

3-4-2 حساب عدد اللفات

3-4-3 حساب التيارات

3-4-5 حساب مقاطع الأسلاك

3-4-6 اختبارات المحولة

3-5 تطبيق MATLAB/PDE على المحولة المصممة

3-6 النتائج والخاتمة

الفهرس

المراجع