مقدمة في الهندسة الجبرية

لطلاب السنة الرابعة

قسم الرياضيات

(كلية العلوم)

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم



مقدمة في الهندسة الجبرية

الدكتور

يوسف الوادي

أستاذ في قسم الرياضيات

الدكتور

شوقي محمد الراشد

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

١٤٤١ – ١٤٤٢ هـ

جامعة دمشق

٢٠١٩ – ٢٠٢٠ م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

المقدمة. ٩

لمحة تاريخية ١١

الفصل الأول (١) ١٧

مقدمة جبرية

١ — ١ — الحلقة والحقل. ١٧

١ — ٢ — المثاليات. ١٨

١ — ٣ — التشاكل الحلقي وحلقة الخارج. ٢٠

١ — ٤ — المودولات. ٢١

١ — ٥ — الحلقة النيوثرية. ٢٥

١ — ٦ — حلقة الحدوديات. ٢٦

الفصل الثاني (٢) ٣٩

المتنوعات الأفينية

٢ — ١ — الفضاء الأفيني وحلقة الحدوديات. ٣٩

٢ — ٢ — المتنوعات الأفينية. ٤٣

٢ — ٣ — توسيط المتنوعات الأفينية (الشكل الوسيطي). ٤٦

٢ — ٤ — المثاليات في حلقة الحدوديات. ٤٩

٢ — ٥ — مبرهنة الأصفار لـ هيلبرت. ٥٩

٢ — ٦ — المثاليات الجذرية والمتنوعات. ٦٥

٢ — ٧ — العمليات على المثاليات. ٧١

٢ — ٨ — المتنوعات اللاخزولة والمثاليات الأولية. ٧٧

٢ — ٩ — قاموس جبر — هندسة. ٨٢

٢ — ١٠ — الفضاء الأفيني من وجهة نظر أخرى. ٨٩

الفصل الثالث (3)

التطبيقات، حلقة الإحداثيات، فضاءات التماس والبعد ٩٥

٣ — ١ — التطبيقات الحدودية أو التشاكلات. ٩٥

٣ — ٢ — الدوال النسبية وحقل الدوال. ٩٩

٣ — ٣ — الفضاء المماس. ١٠١

٣ — ٤ — بعد متنوعة. ١٠٨

٣ — ٥ — النفخ. ١١٢

الفصل الرابع (٤)

الفضاء الإسقاطي والمتنوعات الإسقاطية ١٢١

٤ — ١ — المستوي الإسقاطي. ١٢١

٤ — ٢ — معادلة المستقيم في P^2. ١٢٤

٤ — ٣ — الفضاء الإسقاطي (وجهة نظر أخرى). ١٢٦

٤ – ٤ — الفضاء الإسقاطي من البعد n. ١٢٨

٤ — ٥ — المتنوعات الإسقاطية. ١٣٣

٤ — ٦ — المثاليات والمتنوعات الإسقاطية. ١٤١

٤ — ٧ — اللصاقة الإسقاطية لمتنوعة أفينية. ١٥٠

٤ — ٨ — التحويلات الإسقاطية. ١٥٣

٤ — ٩ — نظرية بيزو. ١٥٩

الفصل الخامس (٥)

قواعد غروبينر، الناتج، نظرية الحذف ١٧٣

٥ — ١ — علاقات الترتيب على الحدوديات. ١٧٤

٥ — ٢ — القسمة في $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. ١٧٨

٥ — ٣ — حل جملة معادلات كثيرات حدود. ١٩٢

٥ — ٤ — الناتج (Resultant). ٢٠٠

٥ — ٥ — الناتج لكثيري حدود متجانسين. ٢١٥

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مقدمة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴾

تعد الهندسة الجبرية من العلوم القديمة – الحديثة فهي العلم القادر على تطوير آلياته ووسائله بما يواكب تطور العلوم الأخرى.

يغطي هذا الكتاب مفردات مقرر الهندسة الجبرية لطلاب السنة الرابعة في فرع الجبر والهندسة وتتوزع هذه المفردات على خمسة فصول:

تتناول مقدمة في الجبر التبادلي وحلقة الحدوديات والفضاء الأفيني والمتنوعات الأفينية وكذلك الفضاء الإسقاطي والمتنوعات الإسقاطية وتقدم مفاهيم الفضاء المماس والتطبيقات الحدودية والبعد.

ترتبط مفاهيم المتنوعات الإسقاطية بالحدوديات المتجانسة والمثاليات المتجانسة وقد تمت معالجة هذا الموضوع بشكل كافٍ.

أدرجت قواعد غروبنر في هذا الكتاب كونها تقدم تقنية فعالة في مختلف مواضيع الهندسة الجبرية وهو ما ينطبق على الناتج ونظرية الحذف ولذلك خصصنا لها فصلاً خاصاً.

استخدمنا عبارة المجموعة الجبرية في مواضع عدة وفي مواضع أخرى عبارة المتنوعة الجبرية للدلالة على الكائن ذاته تماشياً مع العديد من المصادر في حين أن هناك مصادر أخرى تميز بين هذين المفهومين وهو ما نوضحه في متن الكتاب.

المراجع العربية في مجال الهندسة الجبرية نادرة إن لم تكن معدومة لذلك نأمل أن نكون قد زودنا المكتبة العربية ببداية متواضعة كما نأمل أن يتم تطوير هذا المرجع وتقديم ما يخدم الباحثين عن المعرفة.

والله ولي التوفيق

المؤلفان

د. يوسف الوادي **د. شوقي الراشد**

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

لمحة تاريخية

تعود بعض جذور الهندسة الجبرية إلى أعمال الإغريق (اليونان) في القرن الخامس قبل الميلاد. أمثال (Menaechmus) وفي القرن الثالث قبل الميلاد، درس كل من Archimedes و Apollonius بشكل أكثر منهجية مسائل القطوع المخروطية كما استخدما الإحداثيات.

تمكن علماء الرياضيات العرب في قرون لاحقة (المرحلة الذهبية للحضارة الإسلامية) من حل معادلات جبرية بحتة (معادلات تكعيبية معينة)، وقاموا بتفسير النتائج هندسياً. وقد تم ذلك، على سبيل المثال، من قبل ابن الهيثم في القرن العاشر الميلادي. بعد ذلك، اكتشف عالم الرياضيات عمر الخيام (من مواليد ١٠٤٨م) طريقةً لحل المعادلات التكعيبية من خلال تقاطع قطع مكافئ مع دائرة ويبدو أنه كان أول من تصور نظرية عامة للمعادلات التكعيبية بعد بضع سنوات من أعمال عمر الخيام. وُصفت أطروحة شرف الدين الطوسي حول المعادلات بأنها «تدشين لبداية الهندسة الجبرية».

تم تبني أساليب تطبيق الإنشاءات الهندسية على المسائل الجبرية من قبل عدد من علماء الرياضيات في عصر النهضة الأوروبية مثل Gerolamo Cardano & Niccolo «Tartaglia» Fontana في دراستهم للمعادلة التكعيبية. وكان النهج الهندسي لمسائل الإنشاءات، بدلاً من النهج الجبري، مفضلاً لدى معظم علماء الرياضيات في القرنين السادس عشر والسابع عشر، ولا سيما (Pascal) الذي عارض استخدام الأساليب الجبرية والتحليلية في الهندسة.

ثار فيما بعد كل من علماء الرياضيات الفرنسيين Vieta، وفي وقت لاحق Descartes و Fermat على الطريقة التقليدية للتفكير في مشاكل الإنشاءات من خلال إدخال هندسة الإحداثيات. حيث انصب اهتمامهم في المقام الأول على خصائص المنحنيات الجبرية، مثل تلك المحددة في معادلات Diophantine (في حالة فيرما)، وإعادة

الصياغة الجبرية للأعمال اليونانية الكلاسيكية في المخروط والمكعبات (في حالة ديكارت) خلال الفترة نفسها، تناول Pascal and Desargus الهندسة من منظور مختلف، حيث طورا المفاهيم المركبة للهندسة الإسقاطية. كما درسا المنحنيات، ولكن من وجهة نظر هندسية بحتة وهو ما يشبه الهندسة التحليلية لديكارت وفيرما، لأنها زوّدت علماء الرياضيات في القرن الثامن عشر بالأدوات الكمية المادية اللازمة لدراسة المشكلات باستخدام حساب التفاضل والتكامل الجديد لنيوتن وليبنيز. ومع ذلك، وبحلول نهاية القرن الثامن عشر، كانت معظم الخصائص الجبرية للهندسة الإحداثية تندرج تحت حساب التفاضل والتكامل.

في القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين أسهم كل من Laguerre و Cayley في تطوير الهندسة اللاإقليدية وفي التكاملات الآبلية وسعياً من أجل إعادة الأفكار الجبرية إلى الهندسة حيث قدم Cayley مفهوم الحدودية المتجانسة وبالأخص الأشكال التربيعية على الفضاء الإسقاطي. بعد ذلك درس F. Klein الهندسة الإسقاطية جنباً إلى جنب مع أنواع أخرى من الهندسة وذلك من وجهة نظر التحويلات (Transformations) الهندسية.

في النصف الثاني من القرن التاسع عشر قاد التكامل الآبلي العالم Riemann لتطوير ما سمي سطوح ريمان، وفي ذات الوقت بدأت لغة الجبر تطغى على الهندسة الجبرية من خلال الجبر التبادلي (algebraization of Algebraic Geometry) وكانت النتائج الأبرز في هذا الإطار مبرهنات هيلبرت (مبرهنة الأساس ومبرهنة الأصفار) والتي تعد الرابط بين الجبر التبادلي والهندسة الجبرية.

دخل على أبحاث الهندسة الجبرية في هذه الآونة مفهوم الناتج (Resultant) ونظرية الحذف (Elimination Theory) والتي كادت تنسى في منتصف القرن العشرين، ولكن نظرية الشذوذات (Singularity Theory) أعادت لها ألقها من جديد.

في القرن العشرين طوّر كل من Zariski و Van der Waerden و Weil أسس الهندسة الجبرية المستندة إلى الجبر التبادلي بما فيه من نظرية التقييم (Valuation Theory) ونظرية المثاليات وكان للمدرسة الإيطالية دور مهم في هذا السياق. في الخمسينات والستينات من القرن الماضي أدخل كل من Serre و Grothendieck مفاهيم الـ Sheaf و Scheme واستخدمت تقنية الجبر الهومولوجي.

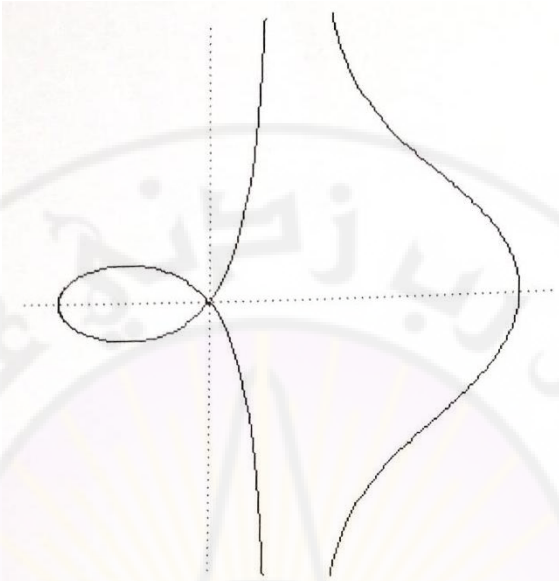
بعد ركود بسيط في السبعينات عادت الهندسة الجبرية تنتفض من جديد وبخاصة بعد التطور الكبير في عالم البرمجة ولا تزال تشهد تطورات هائلة بعد إدخال قواعد غروبينر من قبل تلميذه العالم Buchberger وتشهد الهندسة الجبرية اليوم تطبيقات في التشفير وفي مجالات فيزيائية وغيرها.

آملين بأن نكون قدمنا لمحة سريعة عن مراحل تطور هذا العلم.

يمكن للمهتمين العودة إلى المراجع ذات الصلة للتزود بمعلومات أوسع.

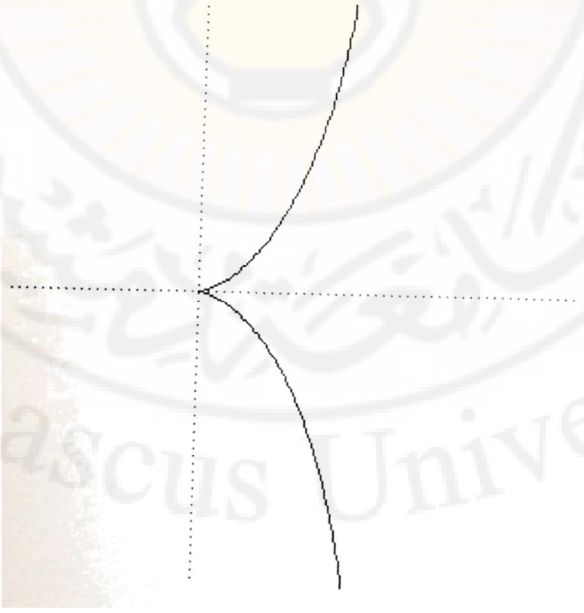
نعرض بعضاً من المتنوعات الجبرية على شكل رسومات أو خطوط بيانية مع ذكر معادلة كل منها:

Conchoid



$$(x - b)^2 (x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0$$

Cissoid of Diocles



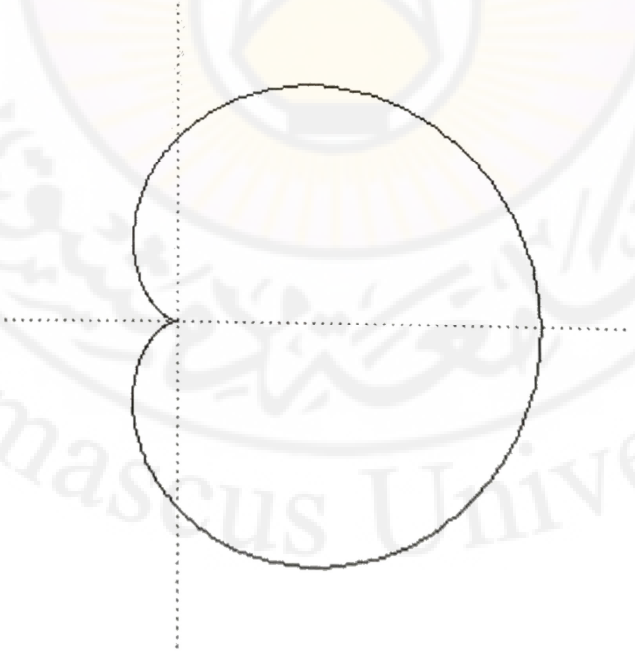
$$y^2(2a - x)$$

Folium of Descartes



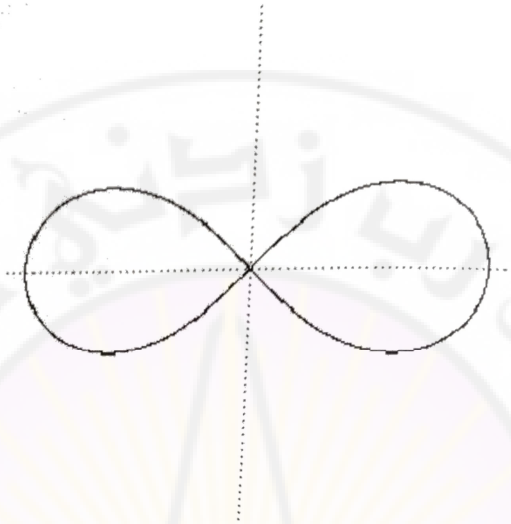
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Cardioid

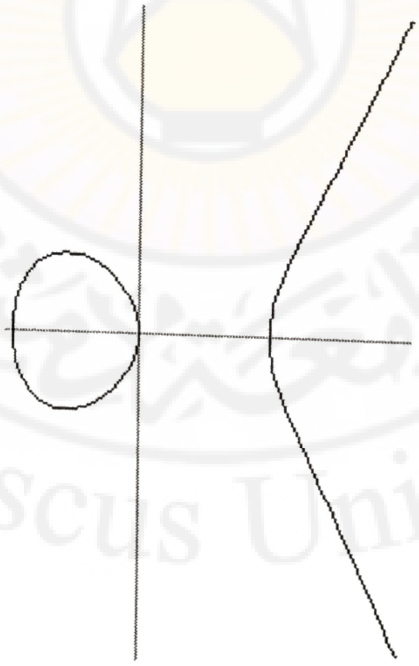


$$(x^2 + y^2 - axy)^2 = 4a^2 (x^2 + y^2)$$

Lemniscate of Bernoulli



$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$



$$y^2 = x^3 - x$$

الفصل الأول (١)

مقدمة جبرية Algebraic Introduction

الهندسة الجبرية هي العلم الذي يربط الهندسة بالجبر والذي يهتم بشكل أساسي بدراسة حلول جمل معادلات كثيرات حدود، لذلك لا بد لمن يدرس الهندسة الجبرية أن يكون على معرفة كافية بقضايا الجبر وبخاصة الجبر التبديلي، وعليه فإنه من الواجب المرور سريعاً في هذا الفصل لتذكير القارئ ببعض المفاهيم الأساسية مثل: الحلقة، الحقل، المثالي، المودول وحلقة الحدوديات وغيرها دون التطرق للتفاصيل.

١ – ١ – الحلقة والحقل Ring and field:

١ – ١ – ١ – تعريف:

الحلقة هي مجموعة R غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين الأول (+) والثاني (.) ويحققان الشروط الآتية:

(١) $(R, +)$ زمرة تبديلية حياديها يسمى صفر الحلقة ويرمز له بـ 0_R.

(٢) القانون (.) تجميعي ويقبل التوزيع على (+) من اليمين واليسار.

ملاحظة وتعريف:

أ – إذا وجد في R عنصر $e \in R$ بحيث $e \cdot a = a \cdot e$ لكل $a \in R$ فإن الحلقة تدعى حلقة واحدية، ويرمز $e = 1$، ويسمى واحد الحلقة.

ب – إذا كانت $(R, +, .)$ حلقة وكان $a \cdot b = b \cdot a$ لكل $a, b \in R$ فإنها تدعى حلقة تبديلية.

ج – تسمى الحلقة التبديلية التي تملك حيادي ضربي أي $1 \in R$ بالحلقة الواحدية التبديلية. وهذا النوع من الحلقات هو ما يتم التعامل معه في الهندسة الجبرية.

١ – ١ – ٢ – تعريف:

إذا كانت $(R, +, .)$ حلقة واحدية تبديلية وخالية من قواسم الصفر فإنها تدعى منطقة تكاملية (Integral Domain).

١ – ١ – ٣ – تعريف (الحقل):

إذا كانت K مجموعة غير خالية وزودناها بقانوني تشكيل داخليين (+) و (.)، فإن $(K, +, .)$ تدعى حقلاً إذا تحقق ما يلي:

(١) $(K, +)$ زمرة تبديلية حياديها الصفر 0.

(٢) $(K^*, .)$ زمرة تبديلية حياديها واحد الحلقة 1 حيث $K^* = K - \{0\}$.

(٣) العملية (.) توزيعية على العملية (+).

ملاحظة: تشكل الحلقة الواحدية التبديلية R حقلاً إذا وفقط إذا تحقق الآتي حصراً:

لكل $0 \neq x \in R$ يوجد $0 \neq x^{-1} \in R$ بحيث $x.x^{-1} = 1$.

ملاحظة: كل حقل هو منطقة تكاملية.

١ – ٢ – المثاليات Ideals:

١ – ٢ – ١ – تعريف وملاحظات:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية ولتكن I مجموعة جزئية غير خالية من R $(\phi \neq I \subseteq R)$.

نسمي المجموعة I مثالي في الحلقة R إذا تحقق الآتي: $\forall a, b \in I, \forall r \in R$:

(١) $0 \in I$ (٢) $a + b \in I$ (٣) $-a \in I$ (٤) $ra \in I$.

أي إن I يكون مثالياً في R إذا كانت $(I, +)$ زمرة جزئية من $(R, +)$ وكان $ra \in I$ لكل $a \in I$ ولكل $r \in R$.

ويقال إن I مثالي فعلي (proper) في R إذا كان $I \neq R$.

وهذا يتحقق إذا كان $1 \notin I$ أي:

I مثالي فعلي في R $\Leftrightarrow 1_R \notin I$.

يمكن إثبات صحة القضية الآتية بسهولة:

١ – ٢ – ٢ – قضية:

إذا كانت $R \neq \{0\}$ حلقة واحدية تبديلية، فإن R تشكل حقلاً إذا وفقط إذا كانت المثاليات الوحيدة فيها هي R، {0} حصراً.

١ – ٢ – ٣ – ملاحظات وتعاريف:

(١) إن تقاطع أسرة مثاليات في حلقة R هو مثالي في R.

(٢) **تعريف:** لتكن X مجموعة جزئية من حلقة R، يُعرف المثالي المولّد بالمجموعة X على أنه تقاطع جميع المثاليات التي تحوي X وبذلك فهو أصغر مثالي في R يحوي X.

(٣) إذا كانت R حلقة ولتكن المجموعة الجزئية المنتهية $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\} \subseteq R$، نرمز للمثالي I المولد بهذه المجموعة بالرمز $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ ونقول إن I منتهي التوليد (finitely generated).

(٤) لتكن R حلقة (دوماً هنا نقصد حلقة واحدية تبديلية) ولتكن X مجموعة جزئية من R عندئذ:

المثالي المولد بـ X يساوي مجموعة عناصر R ذات الشكل $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ حيث $x_i \in X$، $r_i \in R$.

(لاحظ أن المجموع منتهٍ).

(٥) **مثال:** كل مثالي I في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ يتولد بواسطة عدد صحيح غير سالب أي:

$$I = \langle n \rangle = n\,.\,\mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,\ n \geq 0$$

أي إن هذا المثالي يتكون من الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على n.

١ – ٣ – التشاكل الحلقي وحلقة الخارج:

Ring Homomorphism and Factor Ring (Quotient Ring):

١ – ٣ – ١ – حلقة الخارج:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية وليكن I مثالي في R. إن (+ ,R) زمرة تبديلية وبالتالي (+ ,I) زمرة جزئية (ناظمية) من (+ ,R) وبالتالي يمكن تكوين زمرة الخارج R/I والتي عناصرها المجموعات المرافقة لـ I في R أي إنّ عناصر R/I من الشكل I + x حيث $x \in R$ وإن:

$$x - x' \in I \Leftrightarrow I + x = I + x'$$

ونعرّف عمليتي الجمع (+) والضرب (.) على R/I كما يلي:

$$(I + x) + (I + y) = I + (x + y)$$
$$(I + x) \,.\, (I + y) = I + (x \,.\, y)$$

وذلك $\forall\, x, y \in R$.

ويمكن التحقق بسهولة أن (R/I, +, .) حلقة تدعى حلقة الخارج.

مثال:

بفرض $\mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ عندئذ $\mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$ حلقة خارج وعناصرها هي صفوف التكافؤ بالمقاس n وتملك n عنصراً، وإذا كان n أولياً فإن $\mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$ تشكل حقلاً.

١ – ٣ – ٢ – التشاكل الحلقي:

لتكن الحلقتان R, S، وليكن التطبيق $f: R \to S$ نقول إن f تشاكل حلقي إذا تحقق الآتي:

(١) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(٢) $f(x.y) = f(x) \,.\, f(y)$

وذلك $\forall\, x, y \in R$.

١ – ٣ – ٣ – نواة التشاكل الحلقي وصورته:

(١) إذا كان $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً فإن نواة هذا التشاكل هي المجموعة:

$$\text{Ker } f = \{x \in R : f(x) = 0\}$$

(٢) تعرف صورة التشاكل f على أنها المجموعة:

$$\text{Im } f = f(R) \subseteq S$$

$$\text{Im } f = \{y \in S: y = f(x) , \forall x \in R\} \text{ أو}$$

(٣) إن نواة التشاكل kerf تشكل مثالياً في R. (تحقق من ذلك)

(٤) Im f حلقة جزئية من الحلقة S (تحقق من ذلك)، في حين أن Im f ليس مثالياً في S بشكل عام (وضح ذلك).

(٥) ليكن التشاكل $f: R \to R/I$ حيث $f(x) = x + I$ فيكون $\ker f = I$.

(٦) إذا كان $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً عندئذ نسمي f تماثلاً حلقياً إذا كان f تقابلاً (متبايناً وغامراً). ونقول عندئذ إن الحلقتين R, S متماثلتان ونكتب $R \cong S$.

(٧) إذا كان $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً فإن:

$$\text{Im } f \cong R/\ker f$$

١ – ٤ – الموديولات Modules:

١ – ٤ – ١ – تعريف:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية، ولتكن M مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل أحدهما داخلي (+) والآخر خارجي (.) مجموعة مؤثراته الحلقة R.

تسمى المجموعة M موديولاً على R إذا تحققت الشروط الآتية:

(١) $(M, +)$ زمرة تبديلية.

(٢) $\forall x, y \in M$ و $\forall r, s \in R$ فإن:

$$r(x + y) = rx + ry$$
$$(r + s) . x = r . x + s . x$$

$$(rs) \cdot x = r(sx)$$
$$1_R \cdot x = x$$

ملاحظة: كل حلقة واحدية تبديلية تُعد مودولاً على نفسها.

١ – ٤ – ٢ – تعريف:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية، وليكن M مودولاً على R ولتكن $\phi \neq N \subseteq M$.

يسمى N مودولاً جزئياً من M إذا تحقق الآتي:

(i) $x + y \in N$ لكل $x, y \in N$.

(ii) $r \cdot x \in N$ لكل $x \in N$ ولكل $r \in R$.

١ – ٤ – ٣ – قضية:

لتكن I مجموعة جزئية من الحلقة الواحدية التبديلية R عندئذ:

I مودول جزئي من R $\Leftrightarrow$ I مثالي في R.

(يترك الإثبات للقارئ).

١ – ٤ – ٤ – مودول الخارج:

إذا كان M مودولاً على الحلقة الواحدية التبديلية R، وكان N مودولاً جزئياً من M فإن:

$$M/N = \{x + N : x \in M\}$$

تشكل مودولاً على R حيث:

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$$

و

$$r \cdot (x + N) = r \cdot x + N$$

وذلك $x + N, y + n \in M/N$ و $\forall r \in R$

ويدعى M/N مودول الخارج.

١ – ٤ – ٥ – التشاكل المودولي Module Homomorphism:

ليكن M, N مودولين على حلقة R نسمي التطبيق $f: M \to N$ تشاكلاً مودولياً إذا كان:

(أ) $f(x + y) = f(x) + f(y)$، لكل $x, y \in M$.

(ب) $f(rx) = rf(x)$ لكل $x \in M$ وكل $r \in R$.

ملاحظة:

أ – يكون التشاكل المودولي f تماثلاً مودولياً إذا كان f قلوباً أي إذا كان f تقابلاً.

ب – إن كل من $\ker f$، $\text{Im } f$ مودول جزئي الأول من M والثاني من N على الحلقة R.

١ – ٤ – ٦ – المجموع المباشر:

لتكن $M_1, M_2, \ldots, M_k$ مودولات على الحلقة الواحدية التبديلية R. نعرف (direct sum) لهذه المودولات على الشكل:

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in M_i, i = 1,2,\ldots,k\}$$

ويبرهن بسهولة أن هذا المجموع يشكل مودولاً على R بالنسبة للعمليتين الآتيتين:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) + (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k)$$
$$r(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_k)$$

لكل $x_i, y_i \in M_i$ وكل $r \in R$، $i = 1,2,\ldots,k$

بالحقيقة هذا المجموع المباشر هو الجداء الديكارتي.

١ – ٤ – ٧ – تعريف:

إذا كان M مودولاً على حلقة واحدية تبديلية R وكانت X مجموعة جزئية من M، فإننا نعرف المودول الجزئي من M المولّد بالمجموعة X على أنه تقاطع جميع المودولات الجزئية من M التي تحوي X وبالتالي فهو أصغر مودول جزئي من M يحوي X.

ملاحظة:

يقال إن المودول M منتهي التوليد finitely generated إذا تولّد بمجموعة جزئية S منه ($S \subseteq M$) منتهية أي إن عناصره من الشكل: $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n$ حيث: $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، وحيث $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$.

١ – ٤ – ٨ – (المودول النيوثري) Neotherian Module:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية، وليكن M مودولاً على R. نقول إن M مودول نيوثري إذا كان كل مودول جزئي من M منتهي التوليد.

١ – ٤ – ٩ – مبرهنة:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية، وليكن M مودولاً على R. عندئذ تكون القضايا الآتية متكافئة.

(i) (A.C.C) شرط السلسلة المتزايدة Ascending chain condition إذا كانت $L_1 \subset L_2 \ldots \subset L_k \subset \ldots$ سلسلة مودولات جزئية من M متزايدة فإنه يوجد $n \in \mathbb{Z}$ بحيث $L_k = L_n$ لكل $k \geq n$.

(ii) شرط العنصر الأعظمي Maximal condition (MC). كل أسرة مودولات جزئية من M تملك عنصراً أعظمياً.

(iii) كل مودول جزئي من M يكون منتهي التوليد (M نيوثري).

ملاحظات:

أ – يدعى الشرط الأول في هذه المبرهنة أيضاً شرط انقطاع السلسلة المتزايدة.

ب – يدعى الشرط الثالث في هذه المبرهنة شرط الأساس المنتهي.

١ – ٤ – ١٠ – مبرهنة:

ليكنM مودولاً على الحلقة الواحدية التبديلية R، وليكن L مودولاً جزئياً من M، عندئذ:

يكون M نيوثرياً إذا وفقط إذا كان كلٌّ مِنْ L و M/L نيوثرياً.

١ – ٤ – ١١ – مبرهنة:

إذا كانت $M_1, M_2, \ldots, M_k$ مودولات نيوثرية على حلقة واحدية تبديلية R، فإن المجموع المباشر $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$ نيوثري.

١ – ٥ – الحلقة النيوثرية Neotherian Ring:

إذا كانت R حلقة واحدية تبديلية، فإن R كما أسلفنا سابقاً تُعد مودولاً على نفسها، وبالتالي فإن أي مجموعة جزئية من R تكون مثالياً في R إذا وفقط إذا كانت مودولاً جزئياً من R.

١ – ٥ – ١ – مبرهنة:

لتكن R حلقة واحدية تبديلية عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

(i) شرط انقطاع السلسلة المتزايدة (ACC):

إذا كانت $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_k \subset \ldots$ سلسلة مثاليات متزايدة في الحلقة R فإنه يوجد $n \in \mathbb{Z}$ بحيث $I_k = I_n$ لكل $k \geq n$.

(ii) كل أسرة غير خالية من مثاليات الحلقة R تملك عنصراً أعظمياً.

(iii) كل مثالي في R منتهي التوليد.

١ – ٥ – ٢ – تعريف (الحلقة النيوثرية):

إذا كانت R حلقة واحدية تبديلية فإن R تُدعى حلقة نيوثرية إذا كان كل مثاليّ فيها منتهي التوليد.

نلحظ أن أي حلقة واحدية تبديلية تكون نيوثرية إذا حققت أياً من شروط المبرهنة الأخيرة.

١ – ٥ – ٣ – نتيجة:

إذا كان M مودولاً منتهي التوليد على حلقة نيوثرية R، فإن M يكون نيوثرياً على R.

١ – ٥ – ٤ – مبرهنة:

إذا كانت R حلقة نيوثرية وكان I مثالياً في R، عندئذ تكون الحلقة R/I نيوثرية.

١ – ٦ – حلقة الحدوديات Polynomial Ring:

١ – ٦ – ١ – تعريف (وحيد الحد monomial):

يُعرف وحيد الحد بالمتحولات المستقلة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ على أنه تركيب (جداء) من الشكل $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ حيث إنّ كلاً من α_i عدد صحيح موجب:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ، } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

α_i أعداد صحيحة غير سالبة من أجل $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

وتعرف درجة وحيد الحد على أنها: $\deg x^\alpha = |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ كما تسمى هذه الدرجة الكلية لوحيد الحد (total degree).

١ – ٦ – ٢ – أمثلة:

(١) إنّ $x^\alpha = x_1^2 \cdot x_2^4 \cdot x_3$ هو وحيد حد بالمتحولات x_1,x_2,x_3 و إنّ $x = (x_1,x_2,x_3)$، $\alpha = (2,4,1)$، ودرجته الكلية $\deg x^\alpha = 2 + 4 + 1 = 7$.

(٢) إنّ $x^\alpha = x^3y^5z^2$ وحيد حد بالمتحولات x, y, z أي $x = (x, y, z)$ و $\alpha = (3,5,2)$ ودرجته الكلية $\deg x^\alpha = 3 + 5 + 2 = 10$.

١ – ٦ – ٣ – ملاحظة:

تتم عمليات جمع وضرب وحيدات الحد بالشكل المألوف، فمثلاً تتم عملية الضرب كما يلي:

$$x^\alpha \cdot x^\beta = \left(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}\right) \cdot \left(x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}\right)$$
$$= x_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot x_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n+\beta_n}$$

١ – ٦ – ٤ – تعريف (الحدودية أو كثيرة الحدود polynomial):

تعرف الحدودية بالمتحولات المستقلة $x_1, x_2, .., x_n$ على أنها تركيب خطي لوحيدات حد، أي إنها من الشكل:

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$$

حيث a_α عنصر من حلقة ما R ($a_\alpha \in R$)، وفي هذه الحالة نقول إن الحدودية f معرفة على الحلقة R.

إن عملية الجمع السابقة تتم على عدد منتهٍ أي إن $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ وبالتالي فالحدودية f تأخذ الشكل: $f = a_1.m_1 + a_2m_2 + \ldots + a_nm_n$ حيث $a_1,a_2,\ldots, a_n \in R$ وحيث $m_1, m_2, \ldots, m_n$ وحيدات حد بالمتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

١ – ٦ – ٥ – ملاحظات:

(١) نرمز لمجموعة الحدوديات بالمتغيّرات $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ والتي تقع معاملاتها a_i في الحلقة R بالرمز:

$$R[x] = R[x_1,x_2,\ldots,x_n]$$

ونقول عندئذ إن الحدودية $f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ معرفة على R أو إنها عنصر من R[x].

(٢) تتم عمليتا الجمع والضرب على الحدوديات بالشكل المألوف حيث يتم الضرب بالشكل:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} r_i m_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\ell} s_j \cdot m'_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} (r_i s_j) \cdot (m_i \cdot m'_j)$$

(٣) يمكن التحقق من أن المجموعة $R[x] = R[x_1,\ldots,x_n]$ المزودة بعمليتي الجمع والضرب المألوفتين تشكل حلقة الحيادي الجمعي فيها هو الحدودية الصفرية.

(٤) إذا كانت $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ وحيدة حد وكان $\alpha = (0,0,\ldots,0)$ فإن x^α تصبح $x^\alpha = 1$.

(٥) إذا كانت الحلقة R واحدية، فإنّ R[x] حلقة واحدية أيضاً.

(٦) إذا كانت R تبديلية، فإنّ R[x] تبديلية.

(٧) إذا كانت R منطقة تكاملية، فإنّ R[x] منطقة تكاملية.

(٨) في الهندسة الجبرية يتم التعامل مع حلقة حدوديات معرفة على حقل k، أي مع الحلقة $K[x] = K[x_1,\ldots,x_n]$.

١ – ٦ – ٦ – تعريف:

لتكن $f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ حدودية من الحلقة $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ عندئذ:

(i) ندعو a_α معامل أو أمثال وحيد الحد x^α (coefficient).

(ii) إذا كان $a_\alpha \neq 0$ فإن $a_\alpha x^\alpha$ يسمى حد (Term) في f.

(iii) درجة f الكلية هي $\deg f = \max |\alpha|$ حيث $a_\alpha \neq 0$.

١ – ٦ – ٧ – مثال:

لتكن الحدودية $f = 2x^3y^2z + \frac{3}{2}y^3z^3 - 3xyz + y^2$

إن f حدودية من الحلقة Q[x,y,z] وإن X = (x,y,z) وإن f تملك أربعة حدود هي: $2x^3y^2z$, $\frac{3}{2}y^3z^3$, $-3xyz$, y^2 حيث:

$$\alpha_1 = (3,2,1),\ \alpha_2 = (0,3,3),\ \alpha_3 = (1,1,1),\ \alpha_4 = (0,2,0)$$

وبالتالي فإن:

$$|\alpha_1| = 6,\ |\alpha_2| = 6,\ |\alpha_3| = 3,\ |\alpha_4| = 2$$

وعليه فإن درجة f هي: $\deg f = \max |\alpha| = 6$.

١ – ٦ – ٨ – تعريف:

ليكن k حقلاً ولتكن $f \in k[x]$ حدودية بمتحول واحد x عندئذ تُكتب f(x) بالشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

وعندئذ:

(i) إذا كان $a_n \neq 0$ فإن $\deg(f) = n$.

(ii) نسمي a_n المعامل القائد ($a_n \neq 0$) ورمزه $LC(f) = a_n$ (Leading coefficient).

(iii) يسمى x^n وحيد الحد القائد $LM(f) = x^n$ (Leading Monomial).

(iv) نسمي anxn الحد القائد (Leader Term) أي أن $LT(f) = a_n x^n$.

١ – ٦ – ٩ – خوارزمية القسمة في [K[x]:

بفرض $f, g \in K[x]$ حيث $f \neq 0, g \neq 0$ عندئذ توجد حدوديتان وحيدتان $q,r \in K[x]$ بحيث $f = q.g + r$ حيث $r = 0$ أو $\deg(r) < \deg(g)$ ونسمي q حاصل أو ناتج قسمة f على g كما نسمي r باقي القسمة.

وإذا كان $r = 0$ فنقول إن g تقسم f ونكتب $g \mid f$.

مثال:

بفرض $f = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ و $g = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$

نلحظ أن $\deg(f) = 3, \deg(g) = 2$، $LC(f) = 2, LC(g) = 1$، $LM(f) = x^3$،
$LM(g) = x^2$، $LT(f) = 2x^3, LT(g) = x^2$.

وبتقسيم f على g نجد: $q(x) = 2x + 1$ حاصل القسمة.

$r(x) = x + 1$ باقي القسمة.

وبالتدقيق في عملية القسمة هذه نلحظ أنها جرت على النحو الآتي:

(١) قسّمنا LT(f) على LT(g) ثم ضربنا ناتج القسمة بـ g وبعد ذلك طرحنا هذا من f فحصلنا على الباقي الأول وليكن h_1 أي: $h_1 = f - \frac{LT(f)}{LT(g)} \cdot g = x^2 + x + 2$ (الباقي الأول).

(٢) قسمنا $LT(h_1)$ على $LT(g)$ وضربنا الناتج بـ g، ثم طرحنا ذلك من h_1 فحصلنا على الباقي الثاني وليكن h_2 أي:

$$h_2 = h_1 - \frac{LT(h_1)}{LT(g)} \cdot g = x + 1 \quad \text{(الباقي الثاني)}$$

وهذا الباقي لا يقبل القسمة على g لأن درجته أصغر من درجة g وبالتالي فهو الباقي النهائي أي إن $h_2 = r$ ويمكن التعبير عن هذه الخطوات بالشكل:

$$f \xrightarrow{g} h_1 \xrightarrow{g} h_2 \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} r$$

١ – ٦ – ١٠ – الترتيب في الحلقة $K[x_1, \dots, x_n]$:

إذا تفحصنا خوارزمية القسمة في الحلقة $K[x]$ نجدها تتضمن ترتيباً لحدود كل من المقسوم والمقسوم عليه حسب قوى هذه الحدود وبشكل متناقص أي إننا نرتب الحدود حسب درجة كل حد في حلقة الحدوديات هذه ذات المتغير الواحد أي إننا نرتبها بالشكل: $x^{m+1} > x^m > \dots > x^2 > x > 1$.

لكن عندما تكون الحدوديات من الحلقة $K[x_1, \dots, x_n]$ فإننا نحتاج إلى قاعدة ترتيب مختلفة أي إلى معيار مختلف، وفي هذه الحالة تبرز أكثر من طريقة أو معيار لترتيب وحيدات الحد.

سوف نستخدم الرمز $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ للدلالة على أنّ كلّ α_i عدد صحيح موجب أو صفر.

١ – ٦ – ١١ – تعريف:

الترتيب المعجمي ورمزه "lex" Lexicographic ordering

ليكن: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$

نقول إن $\alpha >_{lex} \beta$ إذا كانت أول مركبة غير صفرية من اليسار في حاصل الطرح $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ موجبة ونكتب عندئذ $x^\alpha >_{lex} x^\beta$.

أمثلة:

(١) لتكن $\alpha = (1,2,0), \beta = (0,3,4)$

نحسب $\alpha - \beta = (1,-1,-4)$ فنجد أول مركبة غير صفرية من اليسار موجبة، لذلك نقول إن $\alpha >_{lex} \beta$.

(٢) لتكن $\alpha = (3,2,4), \beta = (3,2,1)$

نحسب $\alpha - \beta = (0,0,3)$ فنجد أول مركبة غير صفرية من اليسار موجبة، وبالتالي فإن $\alpha >_{lex} \beta$.

(٣) رتب وحيدتي الحد $m_1 = x^2yz , m_2 = xy^3z^4$ بالنسبة للمعيار $x >_{lex} y >_{lex} z$.

الحل:

إن $x = (x,y,z)$ وإن $\alpha = (2,1,1), \beta = (1,3,4)$ وعليه فإن $\alpha - \beta = (1,-2,-3)$ إذن $\alpha >_{lex} \beta$ إذن $m_1 >_{lex} m_2$.

(٤) رتب وحيدتي الحد $m_1 = x^2yz, m_2 = x^2y^2z^3$ بالنسبة لـ: $x >_{lex} y >_{lex} z$.

الحل:

$\alpha = (2,1,1), \beta = (2,2,3)$ لذلك فإن $\alpha - \beta = (0,-1,-2)$ إذن $\beta >_{lex} \alpha$ أي إن $m_2 >_{lex} m_1$.

١ – ٦ – ١٢ – تعريف:

الترتيب المعجمي المدرج ورمزه "g lex" Graded lexicographic ordering

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ نقول إن $\alpha >_{glex} \beta$

إذا كان $|\alpha| > |\beta|$ حيث $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ , |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$

وإذا كان $|\alpha| = |\beta|$ فإننا نعود للمعيار السابق $>_{lex}$.

مثال (١):

ليكن $\alpha = (1,2,3), \beta = (3,2,0)$

نحسب كلاً من $|\alpha|, |\beta|$ فنجد $|\alpha| = 1 + 2 + 3 = 6$، $|\beta| = 3 + 2 + 0 = 5$

وبالتالي $|\alpha| > |\beta|$ أي إن $\alpha >_{glex} \beta$.

مثال (٢):

ليكن $\alpha = (1,2,4), \beta = (1,1,5)$ نحسب:

$|\alpha| = 1 + 2 + 4 = 7$، $|\beta| = 1 + 1 + 5 = 7$ فنجد $|\alpha| = |\beta|$ لذلك نعود للمعيار السابق "lex" ونجد:

$\alpha - \beta = (0,1,-1)$ وبالتالي $\alpha >_{lex} \beta$.

١ – ٦ – ١٣ – تعريف:

الترتيب المعجمي المدرج العكسي ورمزه "gr lex"

graded reverse lexicographic ordering

إذا كانت $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n}$ فنقول إن $\alpha >_{grlex} \beta$

إذا كان $|\alpha| > |\beta|$ وعندما يكون $|\alpha| = |\beta|$ فإن أول مركبة غير صفرية من اليمين في حاصل الطرح $\alpha - \beta$ تكون سالبة.

مثال (١):

لتكن $\alpha = (4,7,1)$، $\beta = (4,2,3)$

بما أن $|\alpha| = 12$، $|\beta| = 9$ أي $|\alpha| > |\beta|$ وبالتالي $\alpha >_{grlex} \beta$.

مثال (٢):

لتكن $\alpha = (1,5,2)$، $\beta = (4,1,3)$

أي إن $|\alpha| = |\beta| = 8$ لذلك نحسب $\alpha - \beta$ فنجد $\alpha - \beta = (-3,4,-1)$ فتكون أول مركبة غير صفرية من اليمين سالبة وبالتالي $\alpha >_{grlex} \beta$.

١ – ٦ – ١٤ – تعريف:

لتكن الحدوديات $f,g,h \in K[x_1,\ldots,x_n]$ حيث $g \neq 0$ (نثبت معيار ترتيب ما من المعايير السابقة) ونقول إن f تنتقل إلى h عبر g إذا وُجد حد ما m من الحدودية f يقبل القسمة على LM(g) بحيث:

$$h = f - \frac{m}{LT(g)} \cdot g$$

ونسمي h باقي القسمة الأول ونكرر هذه العملية حتى الوصول إلى حدودية $r \in K[x_1,\ldots,x_n]$ بحيث لا يقبل أي من حدود r القسمة على LM(g) أي:

$$f \xrightarrow{g} h_1 \xrightarrow{g} h_2 \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} r$$

ويسمى r باقي القسمة النهائي وإذا كان $r = 0$ فإن f تقبل القسمة على g.

تمرين:

لتكن الحدوديتان $f, g \in \mathbb{R}\ [x,y]$ حيث:

$$f = x^4 + y^4 + x^3y^3 \ , \ g = 2x^3 + 3y^3 + 4x^2y^2$$

أوجد r باقي قسمة f على g بالنسبة للترتيب $x >_{lex} y$ ثم بالنسبة للمعيار $y >_{glex} x$.

١ – ٦ – ١٥ – تعميم:

بفرض $f, f_1, f_2, \ldots, f_s$ حدوديات غير صفرية في الحلقة $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

نرتب الحدوديات $f_1, f_2, \ldots, f_s$ بشكل ما وليكن $[f_1, f_2, \ldots, f_s]$ الشكل الذي اخترناه عندئذ توجد حدوديات $q_1, q_2, \ldots, q_s, r \in K[x_1,\ldots,x_n]$ بحيث:

$$f = f_1q_1 + f_2q_2 + \ldots + f_sq_s + r$$

حيث $q_i = 0$ أو $LM(f) \geq LM(f_i.q_i)$ من أجل $i = 1,2,\ldots,s$ و $r = 0$ أو أن كل حد من r لا يقبل القسمة على أي من $LM(f_1), LM(f_2),\ldots,LM(f_s)$.

وتتم هذه العملية بتقسيم f على f_1 أولاً، ثم نقسم الباقي الأول على f_2 وهكذا حتى نحصل على الباقي الأخير r.

مثال:

لتكن الحدوديات $f = xy^2 + 1, f_1 = xy + 1, f_2 = y + 1 \in \mathbb{R}\ [x,y]$ طبق خوارزمية القسمة وذلك بإجراء قسمة f على $[f_1, f_2]$.

الحل:

نقسم f على f_1 فنجد $q_1 = y$، $r_1 = -y + 1$

ثم نقسم الباقي الأول r_1 على f_2 فنجد $q_2 = -1, r_2 = 2$

وبالتالي فإن: $f = q_1 . f_1 + q_2 . f_2 + r_2$

أي: $f = xy^2 + 1 = y . (xy + 1) + (-1) . (y + 1) + 2$

وهو المطلوب.

مثال:

بفرض $f, f_1, f_2 \in \mathbb{R}\ [x,y]$ حيث:

$$f = x^2y + 3x + 2xy + x^3 + 2 , f_1 = x^2 + y + 1, f_2 = xy + 2$$

من أجل المعيار $x >_{lex} y$ أوجد باقي قسمة f على $[f_1,f_2]$ ثم على $[f_2,f_1]$.

الحل:

عندما نقسم f على المرتبة $[f_1,f_2]$ نجد الباقي $r = 2x - y^2 - y$.

وعندما نقسم f على المرتبة $[f_2,f_1]$ فإن الباقي $r = -xy - 2 = -f_2$.

خاتمة:

إن معايير الترتيب المذكورة وعمليات القسمة تعد أدوات لمعرفة ما إذا كانت حدودية ما تنتمي إلى مثالي مولد بمجموعة حدوديات، كما تفيدنا في دراسة قواعد غروبنر (Groebner) والتي نتطرق لها لاحقاً.

تجدر الإشارة أيضاً إلى مبرهنة أساسية في الجبر التبديلي وبالتالي فهي تعد أساسية في الهندسة الجبرية وهي المبرهنة التي تسمى مبرهنة الأساس لـ هيلبرت Hillbrt's Basis Theorem.

١ – ٦ – ١٦ – مبرهنة:

إذا كانت R حلقة نيوثرية فإن $R[x_1,\ldots,x_n]$ نيوثرية.

ملاحظة: بما أن أي حقل k يُعد حلقة نيوثرية فإن $K[x_1,\ldots,x_n]$ نيوثرية.

ملاحظة: يرد إثبات هذه المبرهنة إلى الجبر التبديلي حيث يمكن العودة إلى أي مرجع في الجبر التبديلي للاطلاع على ذلك.

ملاحظة: في الفصل الخاص بقواعد غروبنبر سوف يتكرر ورود عدد من القضايا الخاصة بمعايير الترتيب والقسمة وغير ذلك.

*** انتهى الفصل الأول ***

تمارين الفصل الأول

١ – لتكن $J_1, \ldots, J_n, I$ مثاليات في الحلقة التبديلية الواحدية R. أثبت أن:

$$I : \sum_{i=1}^{n} J_i = \bigcap_{i=1}^{n} (I : J_i)$$

٢ – لتكن $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ كثيرة حدود مُعرَّفة على حقل K. إذا وجد عدد صحيح موجب m يحقق $f^m = 0$، فأثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب m' يحقق $a_n^{m'} = 0$، ثم بيّن أن العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

٣ – لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $R = \langle f,g \rangle$ مولدة بالعنصرين f و g، وليكن $I \leq R$ مثالي في R حيث $f \cdot g \in I$. أثبت أن:

$$I = \langle I, f \rangle \cap \langle I, g \rangle$$

٤ – إذا كان M هو R – module مودول معرَّف على حلقة واحدية تبديلية R، فأثبت أن $M \cong Hom(R,M)$، حيث Hom(R,M) مجموعة كل التشاكلات المودولية التي منطلقها R ومستقرها M. بيَّن فيما إذا كان $M \cong Hom(M,R)$ حيث Hom(M,R) مجموعة كل التشاكلات المودولية التي منطلقها M ومستقرها R.

٥ – ليكن M هو R – module منتهي التوليد و N مودول جزئي من M. المطلوب:

١) بيّن فيما إذا كان N منتهي التوليد.

٢) إذا كان $\varphi: M \to R^n$ تشاكل مودولي غامر، فأثبت أن نواته $\ker \varphi$ منتهية التوليد.

٦ – ليكن M هو R – module معرَّف على حلقة واحدية تبديلية R، و $\varphi: M \to M$ تشاكلاً مودولياً. المطلوب:

١) إذا كان φ غامراً، فبيّن فيما إذا كان φ تماثلاً.

٢) إذا كان φ غامراً و M مودول نوثري، فأثبت أن φ تماثلاً.

٧ – لتكن $R[x] = R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ حلقة كثيرات حدود معرَّفة على الحلقة الواحدية التبديلية Rن و:

$$I = \langle x^{\alpha}.e_i : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \, , \, i \in \mathbb{N} \rangle$$
$$J = \langle x^{\beta}.e_j : \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n \, , \, i \in \mathbb{N} \rangle$$

مثاليات في الحلقة $R[x]$ أثبت أن:

$$I \cap J = \langle lcm(x^{\alpha} \, . \, e^i, x^{\beta} \, e_j \rangle$$

حيث (مثلاً) $e_1 = (1,0,\ldots,0)$، $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$ أشعة الواحدة و lcm المضاعف المشترك الأصغر.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني (٢)

المتنوعات الأفينية Affine varieties

٢ – ١ – الفضاء الأفيني وحلقة الحدوديات:

٢ – ١ – ١ – تعريف:

ليكن K حقلاً، نعرف الفضاء الأفيني ذي البعد n على الحقل K على أنه المجموعة:

$$A_k^n = K^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in K, \quad 1 \le i \le n\}$$

وقد يرمز له أيضاً بـ A^n فقط إذا كان الحقل مفهوماً.

ملاحظة:

إذا كان $K = \mathbb{R}$ فإن $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n$ ما هو إلا الفضاء الحقيقي المألوف في كل من الجبر الخطي والتحليل.

وعندما $n = 1$ فإن $\mathbb{A}^1 = K^1$ يدعى المستقيم الأفيني، وإذا كان $n = 2$ فإن $\mathbb{A}^2 = K^2$ يدعى المستوي الأفيني على الحقل K.

٢ – ١ – ٢ – العلاقة بين حلقة الحدوديات والفضاء الأفيني:

- ليكن K حقلاً، ولتكن $K[x_1,\ldots,x_n]$ حلقة الحدوديات في المتغيرات المستقلة $x_1,\ldots,x_n$، فإذا كانت $f \in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ حدودية من هذه الحلقة فإن f تعطي دالة $f: K^n \to K$ (function) معرفة على النحو الآتي: إذا كانت $P = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in K^n$ فإنه بتبديل كل x_i بـ a_i نحصل على قيمة هذه الدالة $f(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in K$ أي إننا نحسب قيم الدالة في كل نقطة $p \in K^n$ من خلال التعويض في الحدودية f.
- هذه النظرة إلى الحدودية f على أنها دالة تشكل وسيلة الربط بين الجبر والهندسة.
- من جهة أخرى يترتب على الطبيعة المزدوجة للحدوديات (أي إنها حدوديات من جهة ودوال من جهة ثانية) بعض النتائج غير المتوقعة.

فعندما نقول مثلاً $f = 0$ فإن لذلك معنيين:

١) قد يُقصد بذلك أن f حدودية صفرية وهذا معناه أن جميع معاملاتها أصفار.

٢) وقد يُقصد بذلك أن f دالة صفرية وهذا يعني أن $f(p) = 0$ لكل $p \in \mathbb{A}^n = K^n$.

إن ١) و ٢) غير متكافئتين ويتضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١):

ليكن الحقل $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ ولتكن حلقة الحدوديات بمتغير واحد $\mathbb{Z}_2[x]$، نأخذ الحدودية $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ حيث $f(x) = x^2 - x$.

إن هذه الحدودية ليست صفرية لأن معاملاتها ليست أصفاراً.

لنحسب الآن قيم الدالة التي تعرفها هذه الحدودية أي الدالة:

$f: \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}_2$ حيث نجد $f(1) = 0, f(0) = 1$ أي إن f دالة صفرية.

مثال (٢):

لتكن الحدودية: $g(x,y) = x^2y + y^2 \in \mathbb{Z}_2[x,y]$. أثبت أن g دالة صفرية.

الحل:

الفضاء $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}^2_2$ أي $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

نحسب قيمة $g(x,y)$ عند كلّ نقطة من $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}_2}$ فنجد:

$$g(0,0) = 0\ ,\ g(0,1) = 0,\ g(1,0) = 0,\ g(1,1) = 1 + 1 = 0 \text{ in } \mathbb{Z}_2$$

إذن g كدالة صفرية في حين أنها ليست كذلك كحدودية.

والمبرهنة الآتية توضح العلاقة بين الحدوديات والدوال بشكل دقيق.

٢ – ١ – ٣ – مبرهنة:

إذا كان K حقلاً غير منتهٍ (infinite) ولتكن f حدودية من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ:

«f حدودية صفرية $\Leftrightarrow$ $f: K^n \to K$ دالة صفرية».

الإثبات:

($\Leftarrow$) بفرض f حدودية صفرية عندئذ تكون جميع معاملاتها أصفاراً وبالتالي فإنها تعرف دالة صفرية وضوحاً.

($\Rightarrow$) إذا فرضنا أن $f: K^n \to K$ دالة صفرية، فيكون $f(a_1,a_2,..,a_n) = 0$ لكل $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in K$ وانطلاقاً من ذلك لنبرهن أن f حدودية صفرية، ويتم ذلك بالاستقراء الرياضي على n (عدد التغيرات في حلقة الحدوديات).

عندما $n = 1$ فإن f تكون حدودية ذات متغير واحد وليكن x أي إن $f \in K[x]$، وبما أن f دالة صفرية فرضاً فإن $f(a) = 0$ لكل $a \in K^1$ (أو $a \in \mathbb{A}_k^1$) وبما أن K غير منتهٍ فإن f تملك عدداً غير منتهٍ من الأصفار (الجذور)، وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت f حدودية صفرية، لأنه كما نعلم إن أي حدودية تملك عدداً من الأصفار يساوي درجة تلك الحدودية على الأكثر، ومن ثمّ في هذه الحالة ($n = 1$) الدالة الصفرية تعطي حدودية صفرية.

والآن لنفرض أن القضية صحيحة من أجل $n - 1$ ولتكن $f \in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ حدودية تنعدم عند جميع نقاط الفضاء $\mathbb{A}^n = K^n$ بتجميع قوى المتغير x_n المختلفة يمكن كتابة f بالشكل:

$$f = \sum_{i=0}^{N} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^i \qquad (*)$$

حيث $g_i \in K[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]$ ولنبين أن كلاً من g_i حدودية صفرية، وهذا بدوره يؤدي إلى أن f حدودية صفرية في الحلقة $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$.

نثبت نقطة ما $(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) \in K^{n-1}$ وعند هذه النقطة نحصل على الحدودية $f(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},x_n) \in K[x_n]$ ذات المتغير x_n، وكونها حدودية بمتغير واحد فإن f تنعدم عند كل $a_n \in K$.

ومن الحالة $n = 1$ ينتج أن $f(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},x_n)$ حدودية صفرية في الحلقة $K[x_n]$.

بالعودة إلى (*) نرى أن معاملات الحدودية $f(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},x_n)$ هي $g_i(a_1,a_2,\ldots a_{n-1})$، أي $g_i(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) = 0$ لكل i، وبما أننا اخترنا $(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) \in K^{n-1}$ عشوائياً فإن g_i تعطي دالة صفرية منطلقها K^{n-1} وبالتالي فإن كلاً من $g_i \in K[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ كلاً من $K[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]$، وهذا يجعل من f حدودية صفرية في الحلقة $K[x_1,x_2,\ldots x_n]$ وبالتالي يكتمل الإثبات.

٢ – ١ – ٤ – نتيجة:

إذا كان K حقلاً غير منتهٍ وكانت $f, g \in K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ:

$f = g$ في $K[x_1,\ldots,x_n]$ $\Leftrightarrow$ $f,g: K^n \to K$ دالتان متساويتان.

الإثبات:

($\Leftarrow$) لنفرض $f = g$ في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ أي إنّ f,g حدوديتان متساويتان فيكون $f - g = 0$ في $K[x_1,\ldots x_n]$ أي إنّ $f - g$ حدودية صفرية، وبحسب المبرهنة الأخيرة تكون الدالة: $f - g: K^n \to K$ صفرية وعليه فإن الدالتين f, g متساويتين ($f = g$ كدوال).

($\Rightarrow$) بفرض أن الحدوديتين f, g تعرفان الدالة نفسها من K^n إلى K أي إنّ $f - g: K^n \to K$ تنعدم عند جميع نقاط الفضاء $\mathbb{A}^n = K^n$، فهذا يقتضي وبحسب المبرهنة السابقة أيضاً أن $f - g$ حدودية صفرية ومنه فإن $f = g$ في $K[x_1,..,x_n]$.

٢ – ١ – ٥ – تعريف:

لتكن $V \subseteq \mathbb{A}^n$ مجموعة جزئية من الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^n$، إن المثالي:

$$I(V) = \{f \in K[x]: f(p) = 0, \forall\, p \in V\}$$

يسمى مثالي مولّد بالمجموعة V. حيث $\mathbb{A}^n = K^n$ و K حقل ما.

٢ – ٢ – المتنوعات الأفينية Affine varieties:

٢ – ٢ – ١ – تعريف:

ليكن K حقلاً ولتكن $f_1, f_2, .., f_s$ حدوديات في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$. نسمي مجموعة الأصفار المشتركة لهذه الحدوديات، مجموعة جبرية أفينية وتعطى بـ:

$$V(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : f_i(a_1,\ldots,a_n) = 0, \forall\ 1 \le i \le s\}$$

وقد ندعو هذه المجموعة أيضاً متنوعة أفينية معرفة بالحدوديات المذكورة.

٢ – ٢ – ٢ – تعريف:

ليكن I مثالياً في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$. سوف نرمز بـ V(I) للمجموعة:

$$V(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : f(a_1,\ldots,a_n) = 0, \forall\ f \in I\}$$

• على الرغم من أن المثالي غير الصفري I يحوي عدداً غير منتهٍ من الحدوديات المختلفة فإن المجموعة V(I) تُعرّف بمجموعة منتهية من المعادلات الحدودية (معادلات حدودية يقصد بها: إنها مجموعة معادلات كل منها على شكل حدودية والمعادلات الخطية الواردة في الجبر الخطي حالة خاصة منها).

٢ – ٢ – ٣ – مبرهنة:

المجموعة V(I) هي مجموعة جبرية أفينية (متنوعة أفينية)، أي إنّه إذا كان $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ فإن $V(I) = V(f_1, \ldots, f_s)$.

الإثبات:

بما أن I مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فهو حسب مبرهنة الأساس لـ هيلبرت يتولد بمجموعة منتهية أي $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$، ولنبرهن أن $V(I) = V(f_1,\ldots,f_s)$.

بما أن $f_i \in I$ لكل $1 \le i \le s$ فإذا كان f(a1, a2, …, an) لكل $f \in I$ فإن $f_i(a_1,\ldots,a_n) = 0$ وهذا يعني أن:

$$V(I) \subseteq V(f_1,\ldots,f_s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولنبرهن الاحتواء الآخر: ليكن $(a_1,\ldots,a_n) \in V(f_1,\ldots,f_s)$ وليكن $f \in I$ وبما أن $I=<f_1,\ldots,f_s>$ فيمكن أن نكتب $f=\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ حيث $h_i \in K[x_1,\ldots,x_n]$، وبالتالي فإن:

$$f(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{s} h_i(a_1,\ldots,a_n)\cdot f_i(a_1,\ldots,a_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{s} h_i(a_1,\ldots,a_n)\cdot 0=0$$

إذن: $V(f_1,\ldots,f_s) \subseteq V(I)$ .....(2)

من (1) و (2) نجد $V(I)=V(f_1,\ldots,f_s)$.

- أهم ما ينتج عن هذه المبرهنة هو أن المتنوعات الجبرية (المجموعات الجبرية) تتعين بمثاليات أو تحدد بواسطة مثاليات.
- من الأمثلة على المجموعات الجبرية الأفينية (المتنوعات الأفينية) القطوع المخروطية في الفضاء $\mathbb{R}^2$.
- المخروط الدوراني هو أيضاً متنوعة أفينية في $\mathbb{R}^3$ معرفة بـ $V(z-x^2-y^2)$.

٢ – ٢ – ٤ – تمهيدية:

إذا كانت $V, W \subset \mathbb{A}^n = K^n$ متنوعتين أفينيتين فإن كلاً من $V \cup W$ و $V \cap W$ متنوعات أفينية أيضاً.

الإثبات:

نفرض أن $V=V(f_1,f_2,\ldots,f_s)$ و $W=V(g_1,g_2,\ldots,g_t)$

ولنبرهن أن:

(1) $V \cap W = V(f_1,f_2\ldots,f_s, g_1,g_2,\ldots,g_t)$

(2) $V \cup W = V(f_i\, g_i: 1 \le I \le s\ ,\ 1 \le j \le t)$

المساواة (1) واضحة لأنه كي تقع نقطة ما في $V \cap W$ يجب أن تنعدم كلاً من الحدوديات $f_1,\ldots,f_s$ والحدوديات $g_1,\ldots,g_t$ وهذا يعني أن:

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_s = g_1 = g_2 = \ldots = g_t = 0$$

أي: $V \cap W = V(f_1,f_2,\ldots,f_s, g_1,g_2,\ldots,g_t)$

بالنسبة للمساواة (2) فالأمر يتطلب مزيداً من العمل.

إذا كان $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in V$ فإن:

$$f_1(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \ldots = f_s(a_1,\ldots,a_n) = 0$$

وهذا يعني أن كلاً من $f_i \cdot g_j = 0$ عند النقطة $(a_1,\ldots,a_n)$

وبالتالي $V \subseteq V(f_ig_j)$ وبشكل مشابه نجد أن $W \subseteq V(f_ig_j)$

ومنه فإن: $V \cup W \subseteq V(f_ig_j)$ (3)

ولنثبت الاحتواء الآخر: نختار $(a_1,\ldots,a_n)$ فإذا وقعت هذه النقطة $(a_1,\ldots,a_n)$ في V فإن $V(f_ig_j) \subseteq V$.

ومنه فإن: $V(f_ig_j) \subseteq V \cup W$ (4)

من (3) و (4) تتحقق المساواة المطلوبة.

أما إذا لم تقع النقطة $(a_1,\ldots,a_n)$ في V فإنه يوجد f_{i0} بحيث $f_{i0}(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$ وبما أن $f_{i0}g_{j0}$ عند $(a_1,\ldots a_n)$ لكل $1 \leq j \leq t$ فإن g_j تنعدم في هذه النقطة.

أي إن $(a_1,\ldots,a_n) \in W$ وهذا بدوره يعني أن $V(f_ig_j) \subseteq W \cup V$ أي في كل من الحالتين نحصل على المساواة المطلوبة: $V \cup W = V(f_ig_j)$.

تخبرنا هذه التمهيدية أن تقاطع واجتماع عدد منتهٍ من المتنوعات الأفينية هو متنوعة أفينية.

فإذا أخذنا اجتماع المستوي (x,y) والمحور z في الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^3$، فإنه باعتماد التمهيدية الأخيرة نجد: $V(z) \cup V(x,y) = V(zx,zy)$.

إن ما ورد في هذا المقطع يقودنا إلى بعض الأسئلة المهمة حول المتنوعات، فإذا فرضنا $f_1,f_2,\ldots,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ تطرح الأسئلة الآتية نفسها:

- هل يمكن معرفة ما إذا كان $V(f_1,\ldots,f_s) \neq \phi$ وهذا معناه هل للمعادلات:

$f_1 = f_2 = \ldots = f_s = 0$ حلاً مشتركاً؟

- هل يمكن بيان ما إذا كانت $V(f_1,\ldots,f_s)$ منتهية؟ وإذا كانت كذلك فهل يمكن إيجاد كل الحلول؟
- هل يمكن تعيين «بعد» $V(f_1,\ldots,f_s)$؟

والإجابة على كل منها هي نعم، ولكن يجب أخذ الحيطة عند اختيار الحقل K. والصعوبة في الإجابة على السؤال المتعلق بالبعد أكثر من سابقاتها.

تمارين

ارسم في $\mathbb{R}^2$ كلاً من المتنوعات الآتية:

a) $V(x^2 + 2y^2 + 2x - 16y + 1)$
b) $V(x^2 - y^2)$
c) $V(zx + y - 1, 3x - y + 2)$
d) $V(x^2 + y^2 - 4) \cap V(xy - 1) = V(x^2 + y^2 - 4, xy - 1)$

أوجد نقط التقاطع.

٢ – ٣ – توسيط المتنوعات الأفينية (الشكل الوسيطي):

نناقش في هذا المقطع مسألة وصف نقاط متنوعة أفينية ما $V(f_1,\ldots,f_s)$، وهذا معناه هل توجد طريقة لكتابة حلول جملة المعادلات:

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_s = 0$$

فإذا وجد عدد منتهٍ من الحلول، فالأمر بسيط لكتابة جميع الحلول، لكن ما العمل إذا كان عدد الحلول غير منتهٍ؟. وهذا السؤال يقودنا إلى مفهوم الشكل الوسيطي للمتنوعة، أو ما يمكن تسميته توسيط متنوعة أفينية. من أجل هذا الغرض سنأخذ مثالاً من الجبر الخطي.

ليكن الحقل $K = \mathbb{R}$ ولنفرض جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \end{aligned} \qquad (1)$$

هندسياً تمثل هذه الجملة مستقيماً في $\mathbb{R}^3$ وهو تقاطع المستويين (الفصل المشترك للمستويين) $x + y + z = 1$ و $x + 2y - z$.

وبالتالي فإنه يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول، ولوصف هذه الحلول نقوم بتحويلات على أسطر (تحويلات سطرية) الجملة (1)، ونحصل على جملة مكافئة:

$$\begin{aligned} x + 3z &= -1 \\ y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

فإذا فرضنا $z = t$ حيث t وسيط اختياري (كيفي)، فإن جميع حلول الجملة (1) تعطى بـ:

$$\begin{aligned} x &= -1 - 3t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= t \end{aligned} \qquad (2)$$

حيث t يتحول على $\mathbb{R}$ (نسمي t وسيط) ونسمي (2) توسيطاً لحلول الجملة (1).

ولنرى ما إذا كانت فكرة توسيط الحلول (الشكل الوسيطي للحل) قابلة للتطبيق على متنوعات أفينية أخرى، فإذا عدنا إلى مثال دائرة الواحدة:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (3)$$

الطريقة المعتادة لتوسيط معادلة الدائرة هي استعمال دوال مثلثية:

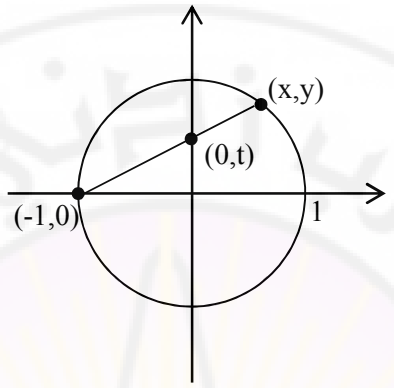
$$x = \cos t,\ y = \sin t$$

وهناك طريقة جبرية لتمثيل الدائرة وسيطياً من خلال المعادلات:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ y = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad (4)$$

وعليك التحقق أن النقاط المعرفة بهاتين المعادلتين تقع على الدائرة (3). وتجدر الإشارة إلى أن هذا التوسيط لا يُعطي وصفاً لكامل الدائرة حيث إنّ $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ لا

يمكن أن يساوي 1- علماً أن النقطة (-1,0) تقع على الدائرة، أي إن النقطة (-1,0) غير مغطاة في هذا التوسيط، ولنبين كيف جاء هذا التوسيط:



كل مستقيم غير عمودي (nonvertical) مار بالنقطة (-1,0) سيقطع الدائرة في نقطة وحيدة (x,y)، وهذا المستقيم يلاقي المحور y ولتكن نقطة التلاقي هذه (0,t). وهذا يعطي الشكل الوسيطي لمعادلة الدائرة، فإذا أعطي الوسيط t ورسمنا المستقيم الذي يصل (-1,0) و (0,t)، ولتكن (x,y) النقطة حيث المستقيم يلاقي الدائرة $x^2 + y^2 = 1$، وهذا ما يسمى توسيط الدائرة حيث إنه عندما يتحول t من ∞- إلى ∞+ مع المحور العمودي (المحور y)، فالنقطة المقابلة (x,y) ترسم كامل الدائرة باستثناء النقطة (-1,0)، يبقى إيجاد صيغة مفصلة لكل من x, y بدلالة t، ولعمل هذا نفرض ميل المستقيم الذي يمكن حسابه من خلال مروره بالنقطتين (-1,0)، (0,t) من جهة، ومن خلال مروره بالنقطتين (-1,0)، (x,y) من جهة ثانية. فنجد الميل:

$$\frac{t-0}{0-(-1)} = \frac{y-0}{x-(-1)} \Rightarrow \frac{t}{1} = \frac{y}{x+1} \Rightarrow t = \frac{y}{x+1}$$

ومنه $y = t(x + 1)$، نعوض في معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = 1$، فنجد المعادلة التربيعية:

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + t^2x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$t^2 (x^2 + 2x + 1) + x^2 - 1 = 0$$
$$t^2(x + 1)^2 + (x - 1)(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)[t^2(x + 1) + x - 1] = 0$$

إما $x + 1 = 0$ ومنه $x = -1$ وهي النقطة $(-1, 0)$

أو: $t^2 (x + 1) + x - 1 = 0$

$$(t^2 + 1)x + t^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

وبما أن: $y = t (1 + x) \Leftarrow y = \frac{2t}{1 + t^2}$

وبذلك نكون قد تعرفنا كيف وصلنا إلى هذا التمثيل الوسيطي.

هناك العديد من الأمثلة حول توسيط المتنوعات الأفينية نتركها على شكل تمارين.

٢ – ٤ – المثاليات في حلقة الحدوديات:

تعرفنا في فقرة سابقة على كائن هندسي يُعد عنصراً أساسياً في الهندسة الجبرية، ألا وهو المجموعة الجبرية الأفينية، أو المتنوعة الأفينية (انظر ٢ – ٢).

ونعرف فيما يأتي عنصراً جبرياً أساسياً مألوفاً لدى القارئ، ألا وهو المثالي، وهو يلعب دوراً محورياً في دراسة الهندسة الجبرية.

٢ – ٤ – ١ – تعريف:

لتكن حلقة الحدوديات $K[x_1,\ldots,x_n]$، ولتكن المجموعة الجزئية $I \subset K[x_1,..,x_n]$. تشكل المجموعة I مثالياً في هذه الحلقة إذا تحقق الآتي:

(i) $0 \in I$.

(ii) لكل $f,g \in I$ فإن $f + g \in I$.

(iii) لكل $f \in I$ ولكل $h \in K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن $hf \in I$.

إن الهدف من إدخال المثاليات هو التعرف على علاقتها بالمجموعات الجبرية، والأهمية الحقيقية للمثاليات تكمن في إعطائنا طرقاً لحساب (تعيين) المجموعات الجبرية الأفينية (أو المتنوعات الأفينية).

٢ – ٤ – ٢ – تعريف وتمهيد:

لتكن $f_1, \ldots, f_s$ حدوديات في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$.

نعرف المجموعة $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ على أنها:

$$\langle f_1,\ldots,f_s\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{s} h_i f_i ; h_1,\ldots, h_s \in k[x_1,\ldots, x_n]\right\} \qquad (*)$$

وهي مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$.

ويسمى المثالي المولد بالحدوديات $f_1,\ldots,f_s$.

الإثبات:

إن $0 \in \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ لأن $0 = \sum_{i=1}^{s} 0 \cdot f_i$.

من جهة ثانية لنفرض $f = \sum_{i=1}^{s} p_i \cdot f_i$ ، $g = \sum_{i=1}^{s} q_i \cdot f_i$

وأن $h \in K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ يكون:

$f + g = \sum_{i=1}^{s} (p_i + q_i)\cdot f_i$ ، $hf = \sum_{i=1}^{s} (hp_i)\cdot f_i$ وكل منها ينتمي إلى (*)، وبذلك يتحقق المطلوب.

ملاحظة:

المثالي المولد بالحدوديات $f_1,..,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$ هو أصغر مثالي يحوي هذه الحدوديات (علّل).

بما أن I يحوي $f_1,\ldots,f_s$، وبما أنه مثالي فإن $h_if_i \in I$، وذلك $\forall\ h \in K[x_1,\ldots,x_n]$. وبما أن I مثالي من جهة ثانية فهو مغلق بالنسبة للجمع فهوي يحوي $\Leftarrow \sum_{i=1}^{s} f_i$

$$<f_1,\ldots,f_s> \subseteq I$$

يملك المثالي $<f_1,\ldots,f_s>$ ميزات مهمة وبخاصة عندما نعبر عنه على شكل معادلات حدودية.

فإذا كانت $f_1,\ldots,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$، ولنأخذ جملة المعادلات $f_1 = 0, f_2 = 0,\ldots, f_s=0$، ومن هذه الجملة يمكن استنتاج معادلات أخرى باستخدام عمليات جبرية، فمثلاً إذا ضربنا المعادلة الأولى بـ h_1 حيث $h_1 \in K[x_1,\ldots,x_n]$، والثانية بـ $h_2 \in K[x_1,\ldots,x_n]$ وهكذا، ثم جمعنا النواتج فإننا نحصل على:

$$h_1f_1 + h_2f_2 + \ldots + h_sf_s = 0$$

وهي ناتجة عن جملة المعادلات التي فرضناها.

والطرف اليساري في هذه المعادلة الأخيرة هو عنصر من المثالي $<f_1,\ldots,f_s>$، أي أن $<f_1,\ldots,f_s>$ يعبر عن كل التراكيب الحدودية (تراكيب لعدد منتهٍ من حدوديات) لجملة المعادلات $f_1 = f_2 = \ldots. = f_s = 0$.

ولتوضيح هذا لنأخذ الجملة (جملة معادلات حدودية):

$$x = 1 + t\ ,\ y = 1 + t^2$$

ولنحذف t منها، فنحصل على $y = x^2 - 2x + 2$.

فإذا استخدمنا الفكرة التي قدمناها آنفاً، فنكتب المعادلتين بالشكل:

$$\begin{aligned} x - 1 - t &= 0 \\ y - 1 - t^2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ولحذف t يلزمنا ضرب المعادلة الأولى بـ $(x - 1 + t)$ والثانية بـ (-1)، فنحصل على:

$$(x - 1)^2 - t^2 = 0$$
$$-y + 1 + t^2 = 0$$

وبالجمع نحصل على:

$$(x-1)^2 - y + 1 = x^2 - 2x + 2 - y = 0$$

وباستخدام عناصر المثالي المولد بالمعادلات (1) يمكن أن نكتب:

$$x^2 - 2x + 2 - y = (x - 1 + t) \,.\, (x - 1 - t) + (-1)((y - 1 - t^2) \in \langle f_1, f_2 \rangle$$

حيث: $f_1 = x - 1 - t,\ f_2 = y - 1 - t^2$

وبشكل مشابه أي تحويل جبري لجملة المعادلات (1) سيقودنا إلى عنصر من هذا المثالي.

٢ – ٤ – ٣ – تعريف:

نقول عن مثالي I من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ إنه منتهي التوليد (finitely generated) إذا وجدت حدوديات $f_1,\ldots,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$ بحيث $I = \langle f_1,\ldots,f_s \rangle$، وندعو الحدوديات $f_1,\ldots,f_s$ قاعدة المثالي.

ملاحظات:

- إن كل مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ منتهي التوليد (مبرهنة الأساس لـ هيلبرت Hillbert Basis Theorem) لأن K حقل فهو حلقة نيوثرية، وبالتالي فإن $K[x_1,\ldots,x_n]$ نيوثرية.
- تجدر الملاحظة أنّ مثالياً ما قد يملك عدة قواعد، وفي الهندسة الجبرية يلجأ الدارس في كثير من الأحيان لاختيار نوع من القواعد تسمى قواعد معيارية أو قواعد غروبينر (Groebner Basis).
- هناك تشابه مع الجبر الخطي يمكن ذكره هنا حيث أن تعريف المثالي يشبه تعريف الفضاء الجزئي، فكل منهما يجب أن يكون مغلقاً بالنسبة للجمع والضرب، إلا أننا في حالة الفضاء الجزئي نضرب بمقدار سلمي (عددي)، في حين أننا نضرب بحدودية في حالة المثالي.

• نلاحظ أيضاً أن المثالي يتولد بحدوديات $f_1,\ldots,f_s$، وهذا يشبه التوليد بعدد منتهٍ من المتجهات $v_1, v_2,\ldots,v_s$ في الفضاءات الجزئية. وفي كل من الحالتين نأخذ تراكيب خطية باستخدام معاملات من الحقل K في الجبر الخطي (في حالة الفضاءات الجزئية)، وباستخدام معاملات هي حدوديات في حالة المثاليات.

• هناك مؤشر مهم للدور الذي تلعبه المثاليات، يتضح في المبرهنة الآتية حيث يتبين من خلالها أن المجموعة الجبرية (المتنوعة) تعتمد فقط على المثالي المولد بالمعادلات التي تعرف تلك المجموعة الجبرية.

٢ – ٤ – ٤ – مبرهنة:

إذا كانت مجموعة الحدووديات $\{f_1,\ldots,f_s\}$ ومجموعة الحدوديات $\{g_1,\ldots,g_t\}$ قاعدتين للمثالي I نفسه في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ أي إن:

$$I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle = \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$$

فإن:

$$V(\langle f_1,\ldots,f_s\rangle) = V(\langle g_1,\ldots,g_t\rangle)$$

ويترك الإثبات لأنه ينتج مباشرة من تعريف المجموعة الجبرية (المتنوعة).

مثال:

لتكن المتنوعة (المجموعة الجبرية) $V_1 = V(2x^2 + 3y^2 - 11,\ x^2 - y^2 - 3)$

بيّن أن $\langle 2x^2 + 3y^2 - 11,\ x^2 - y^2 - 3\rangle = \langle x^2 - 4,\ y^2 - 1\rangle$

ثم استنتج أن $V_1 = V_2 = V(x^2 - 4,\ y^2 - 1)$

الحل:

$$2x^2 + 3y^2 - 11 = 0\ ,\ x^2 - y^2 - 3 = 0$$

نحذف y^2 فنحصل على المعادلة: $x^2 - 4 = 0$

ثم نعود لحذف x^2 فنحصل على المعادلة: $y^2 - 1 = 0$

إذن:

$$<2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3> = <x_2 - 4, y^2 - 1>$$

وحسب المبرهنة الأخيرة فإن:

$$V_1 = V_2 = \{(\pm 2, \pm 1)\}$$

إذن بتغيير قاعدة المثالي قد يصبح تعيين المتنوعة (المجموعة الجبرية) أبسط.

إن إمكانية تغيير القاعدة دون التأثير على المتنوعة (المجموعة الجبرية) أمر مهم. وهذا سيقودنا لاحقاً إلى أن المتنوعات الأفينية تحدد من خلال المثاليات وليس من خلال المعادلات، وهذا سيكون موضوعنا الأساسي لاحقاً.

أي إنشاء مقابلة بين المتنوعات (المجموعات الجبرية) والمثاليات.

نناقش فيما يأتي كيف أن المتنوعات (المجموعات الجبرية) تنتج فئة مثاليات ذات أهمية خاصة:

لنفرض لدينا المجموعة الجبرية $V = V(f_1,..,f_s) \subset \mathbb{A}^n(k)$

والمعرفة بالحدوديات $f_1,\ldots,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$.

نعلم أن $f_1,\ldots,f_s$ تنعدم على V، ولكن هل هذه هي الحدوديات الوحيدة التي تنعدم على V؟

هل توجد حدوديات أخرى تنعدم على V؟

على سبيل المثال إذا أخذنا مكعب الالتفاف المعرف بالحدوديتين $f_1 = y - x^2$، $f_2 = z - x^3$ ويمكن إيجاد الشكل الوسيطي لها وهو $(x,y,z) = (t,t^2,t^3)$.

من خلال هذا الشكل الوسيطي نجد أيضاً أن كلاً من الحدوديتين $g_1 = z - xy$, $g_2 = y^2 - xz$ تنعدم أيضاً على V التي عرفناها بـ f_1,f_2 ولنرى هل توجد حدوديات أخرى وكيف يمكن إيجادها (إن وجدت).

٢ – ٤ – ٥ – تعريف:

لتكن $V \subset \mathbb{A}^n(K)$ مجموعة جبرية أفينية (متنوعة أفينية) ولنعرف المجموعة I(V) بالشكل:

$$I(V) = \{f \in K[x_1,\ldots,x_n]: f(a_1,..,a_n) = 0 \ , \forall \ (a_1,\ldots,a_n) \in V\}$$

أي إن I(V) هي مجموعة الحدوديات التي تنعدم على V (على جميع نقاط V).

٢ – ٤ – ٦ – تمهيدية:

إذا كانت $V \subset \mathbb{A}^n(K)$ مجموعة جبرية (متنوعة)، فإن $I(V) \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالي ويسمى مثالي المجموعة الجبرية أو المتنوعة V.

الإثبات:

إن $0 \in I(V)$ وضوحاً لأن الحدودية الصفرية تنعدم على $\mathbb{A}^n(K)$ وبالتالي فهي تنعدم على V.

من جهة ثانية لنفرض $f,g \in I(V)$ و $h \in K[x_1,\ldots,x_n]$

ولتكن $p = (a_1,\ldots,a_n)$ نقطة ما من V عندئذ:

$$f(p) + g(p) = 0 + 0 = 0$$

$$h(p) \cdot f(p) = h(p) \cdot 0 = 0 \qquad \text{و}$$

وبالتالي فإن I(V) مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$.

مثال:

لتكن المجموعة الجبرية (المتنوعة) $V = \{(0,0)\}$ المكونة من المبدأ في $A^2 = K^2$، عندئذ يكون مثالي هذه المتنوعة $I(\{(0,0)\})$ مكوناً من جميع الحدوديات التي تنعدم عند المبدأ، ولنبرهن أن $I(\{(0,0)\}) = \langle x,y \rangle$ من أجل أي حدودية من الشكل:

$$A(x,y) \cdot x + B(x,y).y$$

فإن هذه الحدودية تنعدم عند (0,0) وهذا يعني أن:

$$A(x,y)x + B(x,y).y \in \langle x,y \rangle$$

وهي تنعدم عند المبدأ.

لكن من جهة ثانية، إذا فرضنا f حدودية من الشكل: $f = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$

تنعدم عند (0,0) فإن $a_{00} = f(0,0) = 0$ وبالتالي f تكتب بالشكل:

$$f = a_{00} + \sum_{i,j\neq 0,0} a_{ij}x^i y^j$$

$$= 0 + \left(\sum_{i,j>0} a_{ij}x^{i-1}y^i\right)x + \left(\sum a_{0j}y^{j-1}\right)y \in < x, y >$$

وبالتالي يتحقق المطلوب أي إن $I(\{(0,0)\}) = <x,y>$.

٢ – ٤ – ٧ – تمهيدية:

إذا كانت $f_1,\ldots,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ $<f_1,\ldots,f_s> \subset I(V <f_1,\ldots,f_s>)$، والمساواة ليس بالضرورة أن تتحقق.

الإثبات:

بفرض $f \in <f_1,\ldots,f_s>$، هذا يعني وجود حدوديات $h_1,\ldots,h_s \in K[x_1,..,x_n]$ بحيث $f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i$.

وبما أن $f_1,\ldots,f_s$ تنعدم جميعها على $V(f_1,\ldots,f_s)$ إذن $f \in I(V(f_1,..,f_s))$ إذن $<f_1,\ldots,f_s> \subset I(V(f_1,\ldots,f_s))$ وهو المطلوب.

لإثبات أن المساواة غير محققة دوماً نحتاج لمثال يكون فيه المثالي $I(V(f_1,\ldots,f_s))$ أوسع من $<f_1,\ldots,f_s>$.

لهذا الغرض سوف نبين أن الاحتواء $<x^2,y^2> \subset I(V(x^2,y^2))$ هو احتواء تام.

لذلك نحسب المثالي $I(V(x^2,y^2))$

إن المعادلتين $x^2 = 0, y^2 = 0$ تقتضيان أن $V(x^2,y^2) = \{(0,0)\}$، ولكن أثبتنا في مثال سابق أن $I(\{(0,0)\}) = \langle x,y \rangle$

إذن $I(V(x^2,y^2)) = \langle x,y \rangle$

ونعلم أن المثالي $\langle x,y \rangle$ أوسع من المثالي $\langle x^2,y^2 \rangle$ أي إن $\langle x^2,y^2 \rangle \subsetneq \langle x,y \rangle$.

٢ – ٤ – ٨ – مبرهنة:

لتكن V,W متنوعتين في $\mathbb{A}^n(K)$ عندئذ:

(١) $V \subset W \Leftrightarrow I(V) \supset I(W)$.

(٢) $V = W \Leftrightarrow I(V) = I(W)$

الإثبات:

(١) ($\Leftarrow$) بفرض $V \subset W$ عندئذ $\forall f \in I(W)$، فإن $f(p) = 0$ لكل $p \in W$، إذن $f(p) = 0$ لكل $p \in V$ (كون $V \subset W$) إذن $f \in I(V)$ ومنه $I(W) \subset I(V)$.

($\Rightarrow$) بفرض $I(V) \subset I(W)$، ولكن W هي متنوعة معرفة بحدوديات $g_1,\ldots,g_t \in K[x_1,\ldots,x_n]$ أي إن $g_1,\ldots,g_t \in I(W) \subset I(V)$.

إذن تنعدم هذه الحدوديات $g_1,\ldots,g_t$ على V.

وبما أن W مكونة من الأصفار المشتركة لهذه الحدوديات فإن $V \subset W$.

(٢) ينتج مباشرة من كون $V = W \Leftrightarrow V \subseteq W$ و $W \subseteq V$ وبتطبيق (١) نحصل على المطلوب.

ملاحظات مهمة:

لنفرض أننا عرفنا:

$$V(f_1,f_2) = \{p \in \mathbb{A}^n : f_1(p) = 0, f_2(p) = 0\} \qquad (1)$$

ولتكن المجموعة:

$$\{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0, \forall f \in \langle f_1,f_2 \rangle\} \qquad (2)$$

إن (1) و (2) تمثلان المجموعة ذاتها.

الإثبات:

لتكن p نقطة من المجموعة (1) أي إن $f_1(p) = f_2(p) = 0$، عندئذ سيكون:

$$(gf_1 + hf_2)(p) = g(p)f_1(p) + h(p)f_2(p) = 0 + 0 = 0$$

أي إنه $\forall f \in \langle f_1, f_2 \rangle$ فإن $f(p) = 0$، وهذه تشكل عناصر المجموعة (2).

والعكس إذا كانت p نقطة من (2) فإن $f(p) = 0$ وكون $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$

فإن $f_1(p) = f_2(p) = 0$ وهذه تعرف المجموعة (1).

مثال:

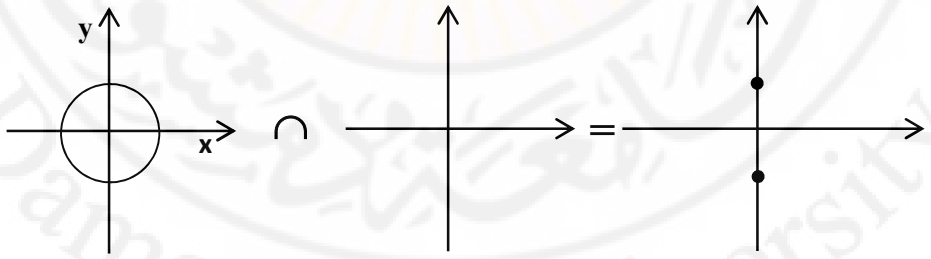
لتكن $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \in K[x,y]$ ولتكن $g(x,y) = x \in K[x,y]$، ولنفرض $K = \mathbb{R}$ عندئذ:

$$V(f,g) = \{p \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : f(p) = 0, g(p) = 0\}$$

أي إن:

$$V(f,g) = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : x^2 + y^2 - 1 = 0, x = 0\}$$

والشكل الآتي يوضح ذلك:



ونجد أن: $V(f,g) = \{(0,1), (0,-1)\}$

أي إن: $V(f,g) = V(f) \cap V(g)$

مثال:

لتكن الحدودية $f(x,y) = x^2$ من الحلقة $\mathbb{R}[x, y]$ عندئذ $V(f) = \{p \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}):x^2 = 0\}$، أي $V(f)$ هي المحور y.

والآن لنأخذ الاتجاه الآخر، أي لتكن المجموعة: المحور $X = V(f) = y$، فما هو المثالي $I(x)$؟

إن $I(x) = \{f : f(0,y) = 0, \forall y\}$

فإذا كانت $f(x,y) = x \cdot g(x,y)$ فإن f تنعدم على المحور y، وبالتالي فإن $f \in I(X)$.

في الحقيقة إذا فرضنا $f \in I(X)$، وبتجميع الحدود التي يظهر فيها x عاملاً مشتركاً فإن f تكتب بالشكل:

$$f(x,y) = x \cdot p(x,y) + g(y) ; p,g \in \mathbb{R}[x, y]$$

وعندها $f(0,y) = 0$ يكافئ القول إن $g(y) = 0$، وهذه المعادلة يجب أن تكون صحيحة لكل y وهذا يعني أن g حدودية صفرية إذن:

$$f = x \cdot p(x,y)$$

إذن $I(X) = \langle x \rangle$ وهو المثالي المولد بجمع مضاعفات x، ولكن هذا يقتضي أن $I(V(x^2)) = \langle x \rangle$.

وهنا يبرز السؤال: هل العمليتان (التطبيقان) I,V يقلب كل منهما الآخر؟ (Inverse).

وهذا سيكون موضوع النقاش في الفقرات الآتية.

٢ – ٥ – مبرهنة الأصفار لـ هيلبرت: Hillbert's Nullstellensatz

لقد رأينا أن متنوعة ما $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ يمكن أن تُدرس من خلال العبور إلى المثالي:

$$(I(V) = \{f \in K[x_1,\ldots,x_n] : f(p) = 0, \forall p \in V\}$$

وهو المثالي المكون من جميع الحدوديات التي تنعدم على V أي إننا أنشأنا تطبيقاً:

$$\text{affine varieties} \rightarrow \text{Ideals}$$
$$V \rightarrow I(V)$$

كما رأينا أيضاً أنه إذا كان $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالياً فإنه يمكن تعريف المجموعة:

$$V(I) = \{p \in \mathbb{A}^n(K) : f(p) = 0, \forall\, f \in I\}$$

وهذه المجموعة هي متنوعة أفينية لأنها تبين أنه توجد مجموعة منتهية من الحدوديات $f_1,\ldots,f_s \in I$ بحيث $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$، وإن $V(I)$ هي مجموعة الأصفار المشتركة (الجذور المشتركة) لهذه الحدوديات وهذا يعني وجود تطبيق:

$$\text{Ideals} \rightarrow \text{affine varieties}$$
$$I \rightarrow V(I)$$

يقدم لنا هذان التطبيقان مقابلة (correspondence) بين المثاليات والمتنوعات، وسوف نسلط الضوء هنا على طبيعة هذه المقابلة، وقبل ذلك نود إبداء بعض الملاحظات.

١ – التطبيق V ليس متبايناً حيث أن المثاليات المختلفة يمكن أن تعطي المتنوعة نفسها، فمثلاً المثاليان $\langle x\rangle, \langle x^2\rangle$ مختلفان في الحلقة $K[x]$، في حين أن $V(x) = V(x^2) = \{0\}$.

٢ – وهناك مسألة أكثر جدية وذلك عندما يكون الحقل K غير مغلق جبرياً، فإذا كان $K = \mathbb{R}$ مثلاً ولنأخذ الحدوديات:

$$f_1 = 1\ ,\ f_2 = 1 + x^2\ ,\ f_3 = 1 + x^2 + x^4 \in \mathbb{R}\,[x]$$

تولّد هذه الحدوديات مثاليات مختلفة:

$$I_1 = \langle f_1\rangle = \langle 1\rangle = \mathbb{R}\,[x]\ \ ,\ I_2 = \langle 1 + x^2\rangle\ ,\ I_3 \langle 1 + x^2 + x^4\rangle$$

ولكن كل من هذه الحدوديات لا يملك جذوراً حقيقية وبالتالي فإن:

$$V(I_1) = V(I_2) = V(I_3) = \phi$$

كذلك الأمر في الحلقة $\mathbb{R}\,[x, y]$ لا تملك الحدوديتان:

$$f_2 = 1 + x^2 + y^4 \qquad\qquad f_1 = 1 + x^2 + y^2$$

جذوراً حقيقية وهي تعرف مثاليين مختلفين:

$$I_1 = \langle 1 + x^2 + y^2\rangle \qquad , \qquad I_2 = \langle 1 + x^2 + y^4\rangle$$

علماً بأن:

$$V(I_1) = V(I_2) = \phi$$

٣ – إذا كان الحقل K مغلقاً جبرياً يمكن عندها القول إن المثالي I يعطي متنوعة $V(1) = \phi$ فقط إذا كان I يساوي كامل الحلقة (حلقة الحدوديات على K).

فلو أخذنا الحلقة K[x] ذات المتغير الوحيد x حيث K مغلق جبرياً فإن أي مثالي I في K[x] هو مثالي رئيسي لأن K[x] هي PID (حلقة مثاليات رئيسية)، إذن يمكن كتابة I على الشكل $I = <f>$ حيث $f \in K[x]$ وبالتالي فإن:

$$V(f) = \{a \in K : f(a) = 0\}$$

وكون K مغلقاً جبرياً، فإن كل حدودية غير ثابتة في K[x] تملك صفراً في K أو جذراً، وبالتالي فالحالة الوحيدة التي يكون فيها $V(I) = \phi$ هي أن تكون f حدودية ثابتة غير صفرية، وعندها فإن $\frac{1}{f} \in k$ ومنه $1 = \frac{1}{f} \cdot f \in I$، وهذا يعني أن $I = K[x]$ أي إن $V(K[x]) = \phi$.

لحسن الحظ أنه عندما يكون K مغلقاً جبرياً فإن هذا ينطبق على حلقة الحدوديات بأكثر من متغير أي:

$$V(K[x_1,\ldots,x_n]) = \phi$$

وسنوضح ذلك من خلال التمهيديات والمبرهنات الآتية.

٢ – ٥ – ١ – تمهيدية:

ليكن K حقلاً، ولتكن K[x] حلقة الحدوديات بمتغير واحد عندئذ كل مثالي من الشكل $I = <x - a>$ حيث $a \in K$ يكون أعظمياً.

الإثبات:

لنفرض وجود مثالي J يحوي $J \supset I = <x - a>$ بحيث $J \neq K[x]$، عندئذ توجد حدودية $f \in J \setminus I$.

إذن f ليس من مضاعفات (x - a) وبتقسيم f على (x – a) نجد:

$$f = (x - a) \cdot q(x) + r$$

حيث r ثابت غير صفري ومنه:

$$r = f - (x - a) \cdot q$$

وبالتالي:

$$1 = \frac{1}{r} \cdot f - \frac{1}{r}(x - a) \cdot q \in J$$

إذن $1 \in J$، ومنه $J = K[x]$، ومنه فإن $I = \langle x - a \rangle$ مثالي أعظمي.

٢ – ٥ – ٢ – تمهيدية:

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، عندئذ المثاليات الأعظمية الوحيدة في K[x] تكون من الشكل: $\langle x - a \rangle$، وذلك أجل $a \in K$.

الإثبات:

في التمهيدية السابقة رأينا أن المثاليات ذات الشكل $\langle x - a \rangle$ أعظمية.. لنفرض وجود مثالي أعظمي M ليس من الشكل $\langle x - a \rangle$، وبما أن K[x] حلقة مثاليات رئيسة، فإنه توجد حدودية $f \in K[x]$ حيث $M = \langle f \rangle$، وبالتالي إذا لم تكن f حدودية خطية (من الدرجة الأولى)، فإنها تملك تحليلاً أحد عوامله من الشكل $(\alpha x - \beta)$ إذن:

$\langle \alpha x - \beta \rangle \subset_{\neq} \langle f \rangle = M$، وبالتالي فإن M ليس أعظمياً.

ملاحظة:

كون K مغلق جبرياً، فإن أحد عوامل تحليل f له الشكل $(\alpha x - \beta)$.

٢ – ٥ – ٣ – مبرهنة:

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، وليكن I مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$، فإذا كان I من الشكل: $I = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ حيث $(a_1,\ldots,a_n \in K)$ فإن I مثالي أعظمي.

الإثبات:

نفرض J مثالياً يحوي I ($I \subset J$)، عندئذ $\exists\ f \in J$ و $f \notin I$، وبحسب خوارزمية القسمة فإن f تكتب بالشكل:

$f = A_1 (x_1 - a_1) + A_2 (x_2 - a_2) + \ldots + A_n (x_n - a_n) + b$ حيث $b \in K$،

وحيث $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$.

لكن $A_1 (x_1 - a_1 + A_2 (x_2 - a_2) + \ldots + A_n (x_n - a_n) \in I$ وكون $f \notin I$ فإن $b \neq 0$ وبالتالي:

$$b = f - [A_1 (x_1 - a_1) + A_2 (x_2 - a_2) + \ldots + A_n (x_n - a_n)] \in J$$

وبما أن $b \neq 0$ فإن $b \cdot \frac{1}{b} = 1 \in J$

إذن: $J = K[x_1,\ldots,x_n]$، وهذا يعني أن I مثالي أعظمي.

٢ – ٥ – ٤ – مبرهنة (مبرهنة الأصفار لـ هيلبرت: Hillbert's Nullstellensatz)

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، ولتكن $f_1,\ldots,f_s$ حدوديات في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ بحيث $f \in I(V(f_1,\ldots,f_s))$، عندئذ يوجد $m \in \mathbb{N}^*$ بحيث $f^m \in \langle f_1,\ldots,f_s \rangle$.

الإثبات:

بفرض f حدودية من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ تنعدم عند كل صفر مشترك للحدوديات $f_1,\ldots,f_s$ ولنثبت أنه يوجد $m \in \mathbb{N}^*$ كما توجد حدوديات $A_1, \ldots, A_n$ من $K[x_1,\ldots,x_n]$ بحيث $f^m = \sum_{i=1}^{s} A_i . f_i$، كي يتم الوصول لهذا الهدف نفرض مثالياً $\tilde{I} = \langle f_1,\ldots,f_s, 1 - yf \rangle$ في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n,y]$.

فإذا أخذنا نقطة ما $p = (a_1,\ldots,a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}$، فإما أن تكون النقطة $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{A}^n$ صفراً مشتركاً للحدوديات $f_1,\ldots,f_s$ أو ليست صفراً مشتركاً لهذه الحدوديات.

في الحالة الأولى تكون $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ لأن f تنعدم عند كل صفر مشترك للحدوديات $f_1,\ldots,f_s$ فرضاً، وبالتالي فإن $1 - yf$ تأخذ عند النقطة p القيمة:

$$1 - a_{n+1} \cdot f(a_1,\ldots,a_n) = 1 - a_{n+1}(0) = 1 \neq 0$$

أي إن $p \notin V(\tilde{I})$.

أما في الحالة الثانية أي إذا كانت $(a_1,\ldots,a_n)$ ليست صفراً مشتركاً لتلك الحدوديات، فإنه يوجد i $(1 \leq i \leq s)$ بحيث $f_i(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$، وبالنظر إلى f_i على أنها دالة ذات $n + 1$ متغير $(x_1,\ldots,x_n,y)$، وحيث أن المتغيرات $x_1,\ldots,x_n$ مستقلة عن المتغير الأخير y فإن $f_i(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}) \neq 0$ وهذا بدوره يعني أيضاً أن $p \notin V(\tilde{I})$.

وبما أن $p \in \mathbb{A}^{n+1}$ اختيرت عشوائياً فإن $V(\tilde{I}) = \phi$، وهذا يعني أن $1 \in \tilde{I}$ أي أنه توجد حدوديات $p_i, q \in K[x_1,\ldots,x_n,y]$ بحيث:

$$1 = \sum_{i=1}^{s} p_i(x_1,..,x_n,y) \cdot f_i + q(x_1,...,x_n,y)(1-yf)$$

وبأخذ $y = \frac{1}{f}$ فإن هذه العلاقة تتحول إلى الشكل:

$$1 = \sum_{i=1}^{s} p_i(x_1,..,x_n,\frac{1}{f}) \cdot f_i$$

بضرب طرفي هذه العلاقة بـ f^m (m كبير بقدرٍ كافٍ)، نجد أن f^m يصبح من الشكل:

$$f^m = \sum_{i=1}^{s} A_i f_i$$

وإن A_i حدوديات من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$، والعلاقة الأخيرة تعني أن:

$$f^m \in \langle f_1,\ldots,f_s \rangle$$

وهو المطلوب.

٢ – ٥ – ٥ – مبرهنة: (The weaK Nullstellensatz)

إذا كان K حقلاً مغلقاً جبرياً، وليكن I مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ بحيث $I \neq K[x_1,\ldots,x_n]$، عندئذ يكون $V(I) \neq \phi$.

الإثبات:

بما أن I مثالي فعلي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$، فإنه يوجد مثالي أعظمي M في هذه الحلقة يحوي I $(I \subset M)$، وبحسب (٢ – ٥ – ٣) فإن:

$$M = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \; ; \; a_1,\ldots,a_n \in K$$

وبالتالي فإن:

$$V(M) = (a_1, \ldots, a_n)$$

$$\phi \neq V(M) \subset V(I) \Leftarrow I \subset M$$ ولكن

إذن $V(I) \neq \phi$ وهو المطلوب.

ملاحظة:

تعد هذه المبرهنة مفتاحاً أساسياً في الهندسة الجبرية، ويمكن صياغة الشكل الضعيف لمبرهنة الأصفار على النحو الآتي:

إذا كان K مغلقاً جبرياً وكان I مثالياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ:

$$V(I) = \phi \Rightarrow I = \langle 1 \rangle = K[x_1,\ldots,x_n]$$

٢ – ٦ – المثاليات الجذرية والمتنوعات:

٢ – ٦ – ١ – تمهيدية:

لتكن V متنوعة في الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^n$ عندئذ: «إذا كان $f^m \in I(V)$، فإن $f \in I(V)$».

الإثبات:

ليكن $p \in V$ فإذا كان $f^m \in I(V)$ فإن $(f(p))^m = 0$ وهذا يتحقق فقط عندما $f(p) = 0$. وبما أن $p \in V$ نقطة اختيارية فإن $f(p) = 0$.

إذن أياً كانت $p \in V$ فإن $f \in I(V)$ وهو المطلوب.

٢ – ٦ – ٢ – تعريف:

نقول عن مثالي I إنه مثالي جذري (radical ideal) إذا تحقق الآتي: $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ بحيث $(f^m \in I \Rightarrow f \in I)$.

يمكن إعادة صياغة التمهيدية السابقة انطلاقاً من هذا التعريف:

٢ – ٦ – ٣ – نتيجة:

I(V) مثالي جذري.

ملاحظة:

تبين مبرهنة الأصفار أن الحالة الوحيدة التي لا يكون فيها مثالي ما I مثالياً لجميع الحدوديات التي تنعدم على V(I) هي أن يكون $f^m \in I$ في حين $f \notin I$، بمعنى آخر أن I ليس جذرياً.

٢ – ٦ – ٤ – تعريف:

ليكن $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالياً. نعرف جذر I (radical of I) على أنه المجموعة:

$$\sqrt{I} = \{f : f^m \in I, m \in \mathbb{Z} \ , m \geq 1\}$$

ملاحظة:

- إن $I \subset \sqrt{I}$ وذلك لأنه $\forall f \in I$، فإن $f^1 \in I$ وبالتالي $f \in \sqrt{I}$ حسب التعريف.
- يبرهن بسهولة أيضاً أن $I'' = \sqrt{I} \Leftrightarrow$ I مثالي جذري، ويمكن اعتبار هذه المساواة $\left(I = \sqrt{I}\right)$ بمثابة تعريف أيضاً للمثالي الجذري.

مثال:

ليكن المثالي:

$$I = \langle x^2, y^2 \rangle \subset K[x,y]$$

نلحظ أن $x \notin I$ وكذلك $y \notin I$.

وواضح أن $x \in \sqrt{I}$ وكذلك $y \in \sqrt{I}$.

ونجد أن $(x.y)^2 = x^2y^2 \in I$ كون $x^2 \in I$ إذن $x.y \in \sqrt{I}$، فهل $x + y \in \sqrt{I}$؟

الجواب هو: $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^4y^4 + 4xy^3 + y^4 \in I$ لأن:

$x^4, 4x^3y, 6x^2y^2 \in I$ لأن كل منها من مضاعفات x^2.

وكذلك $4xy^3, y^4 \in I$ لأن كلاً منها من مضاعفات y^3.

إذن $x + y \in \sqrt{I}$

وتجدر ملاحظة أن $xy, x + y \notin I$.

٢ – ٦ – ٥ – تمهيدية:

إذا كان I مثالياً في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن $\sqrt{I}$ مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$ ويحوي I، بالإضافة لذلك يكون $\sqrt{I}$ مثالياً جذرياً.

الإثبات:

لقد أوضحنا للتو أن $I \subset \sqrt{I}$.

لكي نبرهن أن $\sqrt{I}$ مثالي نفرض $f,g \in \sqrt{I}$ عندئذ يوجد $m,k \in \mathbb{N}^*$ بحيث $f^m, g^k \in I$، عندئذ في منشور ثنائي الحد $(f + g)^{m+i-k}$ كل حد يملك عاملاً من الشكل $f^i . g^j$ حيث $i + j = m + k - 1$، وبالتالي إما $f^i \in I$ أو $g^j \in I$، ومنه $f^i . g^j \in I$. إذن كل حد من هذا المنشور يقع في I ومنه $(f + g)^{m+i-k} \in I$، وبالتالي:

$$f + g \in \sqrt{I} \qquad (1)$$

من جهة ثانية بفرض $f \in \sqrt{I}$ وليكن $h \in K[x_1,\ldots,x_n]$، عندئذ $f^m \in I$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ وبما أن I مثالي فإن $(h.f)^m = h^m . f^m \in I$ إذن:

$$h . f \in \sqrt{I} \qquad (2)$$

من (1) و (2) ينتج أن $\sqrt{I}$ مثالي، بقي أن نبرهن أن $\sqrt{I}$ مثالي جذري، أي يجب أن نبرهن أن $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

الاحتواء $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$ واضح كما مر معنا سابقاً ($\sqrt{I} \subset I$)، وعلينا إثبات الاحتواء الآخر أي $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$.

$\forall f \in \sqrt{\sqrt{I}}$ فإن $f^1 \in \sqrt{I} \Leftarrow f \in \sqrt{I}$.

إذن الاحتواء محقق وبذلك يتحقق المطلوب.

$\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$ إذن $\sqrt{I}$ مثالي جذري.

وبذلك يكتمل إثبات التمهيدية.

٢ – ٦ – ٦ – مبرهنة (The Strong Nullstellensatz):

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، فإذا كان I مثالياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن:

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

الإثبات:

إن $\sqrt{I} \subset I(V(I))$ لأنه $\forall f \in \sqrt{I}$ فإن $f^m \in I$ (من أجل $m \in \mathbb{N}^*$)، وبالتالي فإن f^m ينعدم على V(I) أي $(f(p))^m = 0$ لكل $p \in V(I)$. ولكن:

$$f \in I(V(I)) \Leftarrow f(p) = 0 \Leftarrow (f(p))^m = 0$$

وبذلك يتحقق الاحتواء: $\sqrt{I} \subset I(V(I))$

لنبرهن الاحتواء الآخر أي: $I(V(I)) \subset \sqrt{I}$

لنفرض $f \in I(V(I))$ فحسب التعريف فإن $f(p) = 0$ لكل $p \in V(I)$ وبحسب مبرهنة الأصفار يوجد عدد صحيح $(m \geq 1)$ بحيث $f^m \in I$، ومنه فإن $f \in \sqrt{I}$. وبما أن الحدودية f اختيرت كيفياً فإن $I(V(I)) \subset \sqrt{I}$.

من الاحتواءين السابقين يتحقق المطلوب: $\sqrt{I} = I(V(I))$.

٢ – ٦ – ٧ – مبرهنة: (Ideal – variety Correspondence):

من أجل أي حقل K.

(i) التطبيقان:

$$\text{affine varieties} \xrightarrow{I} \text{Ideals}$$

و

$$\text{Ideals} \xrightarrow{V} \text{affine varieties}$$

يعكس كل منهما الاحتواء أي:

$I_1 \subset I_2 \Rightarrow V(I_1) \supset V(I_2)$ if I_1, I_2 مثاليان).

وكذلك $V_1 \subset V_2 \Rightarrow I(V_1) \supset I(V_2)$ if V_1, V_2 متنوعتان)

بالإضافة لذلك $V(I(V)) = V$

وبذلك فإن التطبيق I متباين.

(ii) إذا كان K مغلقاً جبرياً وإذا أخذنا فقط المثاليات الجذرية عندئذ فإن التطبيقين:

$$\text{affine varieties} \xrightarrow{I} \text{radical ideals}$$

و

$$\text{radical ideals} \xrightarrow{V} \text{affine varieties}$$

يشكلان تقابلاً يعكس كل منهما الاحتواء، وكل منهما مقلوب للآخر.

الإثبات:

(i) لنبرهن أنه إذا كان $I_1 \subset I_2$ فإن $V(I_1) \supset V(I_2)$

$f(p) = 0$ فرضاً إذن $I_1 \subset I_2$ لكن $f \in I_2$ لكل $f(p) = 0$ فإن $\forall\ p \in V(I_2)$

لكل $f \in I_1$ إذن $p \in V(I_1)$، وبالتالي فإن $V(I_2) \subset V(I_1)$.

كذلك علينا أن نبرهن ما يلي:

إذا كان $V_1 \subset V_2$ فإن $I(V_2) \subset I(V_1)$ لذلك أياً كان $f \in I(V_2)$ فإن $f(p) = 0$

لكل $p \in V_2$. لكن $V_1 \subset V_2$ إذن $f(p) = 0$ لكل $p \in V_1$.

ومنه فإن $f \in I(V_1)$.

«إذن فرضنا $f \in I(V_2)$ فوجدنا $f \in I(V_1)$»

لذلك $I(V_2) \subset I(V_1)$.

مما سبق نجد أن التطبيقين I, V كل منهما يعكس الاحتواء.

لنبرهن الآن أن $V(I(V)) = V$.

وذلك عندما تكون $V = v(f_1,\ldots,f_s)$ متنوعة جزئية من الفضاء $\mathbb{A}^n(k)$.

بما أن كل $f \in I(V)$ تنعدم على V فإن الاحتواء

$$V \subset V(I(V)) \qquad (1)$$

ينتج مباشرة من تعريف V.

من جهة ثانية نلاحظ أن $f_1, \ldots, f_s \in I(V)$ وذلك من تعريف I وبالتالي فإن:

$$<f_1,\ldots,f_s> \subset I(V) \qquad (*)$$

وكون V يعكس الاحتواء فإن:

$$V(I(V)) \subset V(f_1,\ldots,f_s) = V \qquad (2)$$

من (1) و (2) تنتج المساواة:

$$V(IV)) = V \qquad (3)$$

من المساواة (3) نلحظ أن I يقبل معكوساً (مقلوباً) من اليسار لذلك ينتج أن I متباين.

(ii) بما أن I(V) مثالي جذري حسب (٢ – ٦ – ٣) فإننا ننظر إلى I على أنه تابع (تطبيق) من متنوعات إلى مثاليات جذرية، بالإضافة لذلك نعلم أن $I(V(I)) = V$ ويبقى أن نبرهن أن $I(V\ (I)) = I$ وذلك باعتبار I مثالياً جذرياً، ولكن من مبرهنة الأصفار القوية نعلم أن $I(V(I)) = \sqrt{I}$ وبما أن I جذري فإن $\sqrt{I} = I$ إذن يتحقق المطلوب $I(V(I)) = I$ إذن كل من I, V مقلوب للآخر، وبذلك فإنهما يعرفان تقابلين بين مجموعة المثاليات الجذرية ومجموعة المتنوعات الأفينية. وبذلك يتم إثبات المبرهنة.

من أهم نتائج هذه المبرهنة هو أن أي سؤال حول المتنوعات يمكن إعادته إلى سؤال جبري حول المثاليات الجذرية، والعكس بالعكس. حيث أن الحقل الذي نعمل عليه مغلق جبرياً.

٢ – ٧ – العمليات على المثاليات:

بما أن المثاليات كائنات جبرية، أو بنى جبرية، فمن الطبيعي أن نعرف عليها عمليات جبرية مثل التقاطع والجمع والضرب.

أولاً: جمع المثاليات:

٢ – ٧ – ١ – تعريف:

إذا كان I, J مثاليين في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن مجموعهما يُعرف بـ:

$$I + J = \{f + g: f \in I \wedge g \in J\}$$

٢ – ٧ – ٢ – مبرهنة:

إذا كان I, J مثاليين في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن $I + J$ مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$ وهو أصغر مثالي يحوي كلاً من I, J.

بالإضافة لذلك إذا كان:

$$I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$$
$$J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_t \rangle$$

فإن: $$I + J = \langle f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \rangle$$

الإثبات:

وضوحاً: (1) $$0 = 0 + 0 \in I + J$$

لنفرض $h_1, h_2 \in I + J$، فيوجد $f_1, f_2 \in I$ و $g_1, g_2 \in J$ بحيث $h_1 = f_1 + g_1$، $h_2 = f_2 + g_2$ وبذلك يكون:

$$h_1 + h_2 = (f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2) \in I + J \qquad (2)$$

من جهة ثانية $\forall h \in K[x_1,\ldots,x_n]$ وبفرض $\varphi \in I + J$ عندئذ يوجد $f \in I$ و $g \in J$ بحيث $\varphi = f + g$، وبذلك يكون:

$$h \cdot \varphi = h \cdot (f + g) = h \cdot f + h \cdot g \in I + J \qquad (3)$$

من (1) و (2) و (3) $\Leftarrow I + J$ مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$.

ولنثبت الآن أنه أصغر مثالي يحوي كلاً من I, J.

فإذا كان H مثالياً بحيث $I \subset H$ و $J \subset H$

وبفرض $f \in I$ و $g \in J$ فإن $f + g \in H \Leftrightarrow I + J \subset H$.

وهذا معناه أن كل مثالي يحوي كلاً من I,J فهو يحوي $I + J$ أي إنّ $I + J$ أصغر مثالي يحوي كلاً منهما.

أخيراً بقي أن نجد مجموعة مولدات المثالي $I + J$ فإذا كان $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$، $J = \langle g_1,\ldots,g_t\rangle$ فإن المثالي $\langle f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_t\rangle$ يحوي كلاً من I, J وبحسب الجزء الأول من هذه المبرهنة فإن:

$$I + J \subseteq \langle f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_t\rangle \qquad (4)$$

ويتحقق الاحتواء الآخر وضوحاً أي:

$$\langle f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_t\rangle \subseteq I + J \qquad (5)$$

من (4) و (5) $\Leftarrow I + J = \langle f_1,\ldots,f_s,g_1,\ldots,g_t\rangle$

٢ – ٧ – ٣ – نتيجة:

إذا كانت الحدوديات $f_1,\ldots,f_s \in K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ يكون:

$$\langle f_1,\ldots,f_s\rangle = \langle f_1\rangle + \ldots + \langle f_s\rangle$$

٢ – ٧ – ٤ – مبرهنة:

إذا كان I, J مثاليين في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن:

$$V(I + J) = V(I) \cap V(J)$$

الإثبات:

١) لنثبت الاحتواء $V(I + J) \subseteq V(I) \cap V(J)$

$V(I + J) \subseteq V(I)$ والذي يترتب عليه $I \subset I + J$ لأن $p \in V(I)$ فإن $\forall\ p \in V(I + J)$

وفي الوقت نفسه، وللسبب نفسه $V(I + J) \subseteq V(J)$ وبذلك يكون:

$V(I + J) \subseteq V(I) \cap V(J)$ أي أن $p \in V(I) \cap V(J)$.

٢) نثبت الاحتواء الآخر أي $V(I) \cap V(J) \subseteq V(I + J)$

$\forall\ p \in V(I) \cap V(J)$ ولتكن الحدودية $h \in I + J$

أي إن $h = f + g$ حيث $f \in I$ و $g \in J$

لكن $f(p) = 0$ كون $p \in V(I)$ و $g(p) = 0$ كون $p \in V(J)$

إذن:

$$p \in V(I + J) \Leftarrow h(p) = (f + g)(p) = f(p) + g(p) = 0 + 0 = 0$$

إذن:

$$V(I) \cap V(J) \subseteq V(I + J)$$

من الاحتواءين السابقين تتحقق المساواة المطلوبة:

$$V(I + J) = V(I) \cap V(J)$$

ثانياً: ضرب المثاليات:

٢ – ٧ – ٥ – تعريف:

إذا كان $I = \langle f_1,\ldots,f_s \rangle$, $J = \langle g_1,\ldots,g_t \rangle$ مثاليين في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن جداءهما يُعطى بالشكل:

$$I.J = \{f_i \,.\, g_j : f_i \in I,\ g_j \in J,\ 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t\}$$

تمرين:

أثبت أن $I \,.\, J$ مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$.

٢ – ٧ – ٦ – مبرهنة:

إذا كان I, J مثاليين في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن:

$$V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$$

الإثبات:

$\forall p \in V(I \cdot J)$ فإن $f(p) \cdot g(p) = 0$ لكل $f \in I$ ولكل $g \in J$ فإذا كان $f(p) = 0$ لكل $f \in I$ فإن $p \in V(I)$.

وإذا وُجد $f \in I$ بحيث $f(p) \neq 0$ فإن $g(p) = 0$ لكل $g \in J$.

وفي الحالتين $p \in V(I) \cup V(J)$ أي:

$$V(I \cdot J) \subseteq V(I) \cup V(J) \qquad (1)$$

من جهة ثانية $\forall p \in V(I) \cup V(J)$ فإنه:

$$(f(p) = 0 \; ; \forall f \in I) \text{ OR } (g(p) = 0; \forall g \in J)$$

إذن: $f(p) \cdot g(p) = 0$ لكل $f \in I \wedge g \in J$

إذن: $h(p) = 0$ لكل $h \in I \cdot J$ ومنه $p \in V(I \cdot J)$

أي: $$V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cdot J) \qquad (2)$$

من (1) و (2) $\Leftarrow V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$ وهو المطلوب.

ثالثاً: تقاطع المثاليات:

تعد عملية تقاطع المثاليات بسيطة وبديهية، في حين أن عمليتي الضرب والجمع لم تكونا كذلك.

٢ – ٧ – ٧ – تعريف:

إذا كان I, J مثاليين في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن تقاطعهما يعطى بـ:

$$I \cap J = \{f \in K[x_1,\ldots,x_n] : f \in I \wedge f \in J\}$$

٢ – ٧ – ٨ – مبرهنة:

إذا كان I, J مثاليين في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن $I \cap J$ مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$.

الإثبات:

وضوحاً $0 \in I \cap J$ لأن $0 \in I$ و $0 \in J$.

إذا كان $f,g \in I \cap J$ فإن $f+g \in I$ لأن كل من $f,g \in I$ وكذلك $f+g \in J$ لأن كل من $f,g \in J$ إذن $f+g \in I \cap J$.

من جهة ثانية $\forall f \in I \cap J$ و $\forall h \in K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن $hf \in I$ لأن I مثالي و $f \in I$.

وكذلك $hf \in J$ لأن J مثالي و $f \in I$.

إذن $hf \in I \cap J$ وبذلك يكون $I \cap J$ مثالياً.

ملاحظة:

$I \cdot J \subset I \cap J$ لأن عناصر I.J هي مجاميع لحدوديات من الشكل $f \cdot g$ حيث $f \in I$، $g \in J$ وبالتالي فإن $f \cdot g$ ينتمي لكل من I (لأن $f \in I$) و J (لأن $g \in J$).

إن هذا الاحتواء قد يكون تاماً في حالات كثيرة، فمثلاً إذا كان $I = J = \langle x,y \rangle$ فإن $I \cdot J = \langle x^2,xy,y^2 \rangle$، في حين أن $I \cap J = I = J = \langle x,y \rangle$.

ونلاحظ أن $x \in I \cap J$ في حين أن $x \notin I \cdot J$ أي إنّ الاحتواء تام.

ملاحظة ومثال:

يمكن إيجاد المثالي $I \cap J$ من خلال المضاعف المشترك الأصغر لمولدات المثاليين I,J فمثلاً إذا كان $I = \langle x^2y \rangle$، $J = \langle xy^2 \rangle$ مثاليين في الحلقة $K[x,y]$ فإن $f = x^2y$ تولد I، وإن $g = xy^2$ تولد J وإن المضاعف المشترك الأصغر:

$$LCM\,(f,g) = x^2y^2$$

ولذلك فإن $I \cap J = \langle x^2y^2 \rangle$

كذلك إذا كان:

$$I = <(x + y)^4 (x^2 + y^2)^2 (x - 5y)>$$
$$J = <(x + y) . (x^2 + y)^3 (x + 3y)>$$

فيكون:

$$LCM (f,g) = (x + y)^4 (x^2 + y)^3 (x - 5y) (x + 3y)$$

حيث f مولدة I، g مولدة J، وبالتالي فإن:

$$I \cap J = <(x + y)^4 (x^2 + y)^3 (x - 5y) (x + 3y)>$$

تمرين:

إذا كان كل من I, J مثالياً رئيسياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ فأثبت أن $I \cap J$ مثالي رئيسي في هذه الحلقة.

٢ – ٧ – ٩ – مبرهنة:

ليكن I, J مثاليين في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ يكون:

$$V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$$

الإثبات:

ليكن $x \in V(I) \cup V(J) \Leftarrow x \in V(I)$ أو $x \in V(J)$ وهذا يعني أن $f(x) = 0$ لكل $f \in I$ أو $f(x) = 0$ لكل $f \in J$، وبالتالي فإن $f(x) = 0$ لكل $f \in I \cap J$ إذن $x \in V(I \cap J)$ إذن:

$$V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J) \qquad (1)$$

من جهة ثانية: نعلم أن $I \cap J \subset I . J$ وعليه فإن $V(I \cap J) \subset V(I . J)$، ولكن $V(I.J) = V(I) \cup V(J)$ (حسب ٢ – ٧ – ٦).

إذن:

$$V(I \cap J) \subset V(I.J) = V(I) \cup V(J) \qquad (2)$$

من (1) و (2) $\Leftarrow V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$

وهو المطلوب.

٢ – ٧ – ١٠ – مبرهنة:

إذا كان I, J مثاليين فإن $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

الإثبات:

إذا كان $f \in \sqrt{I \cap J}$ فإنه يوجد $m > 0$ (m عدد صحيح) بحيث $f^m \in I \cap J$ أي $f^m \in I$ و $f^m \in J$ من الأولى نجد $f \in \sqrt{I}$، ومن الثانية نجد $f \in \sqrt{J}$ إذن $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

من أجل الاحتواء الآخر نفرض $f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \Leftarrow \exists\, m,p > 0$ بحيث $f^m \in I$ و $f^p \in J \Leftarrow f^m \cdot f^p = f^{m+p} \in I \cap J$.

وعليه فإن $f \in \sqrt{I \cap J} \Leftarrow \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{I \cap J}$

من الاحتواءين يتحقق المطلوب $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

٢ – ٨ – المتنوعات اللاخزولة والمثاليات الأولية:

Irreducible Varieties and prime Ideals:

٢ – ٨ – ١ – تعريف:

لتكن $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ متنوعة أفينية. نقول إن V خزولة (reducible) إذا أمكن كتابتها بالشكل $V = V_1 \cup V_2$ حيث $V \neq V_2$ و $V \neq V_1$ (V_1, V_2 متنوعتان في $\mathbb{A}^n(k)$).

وتكون V غير خزولة (irreducible) فيما عدا ذلك أي:

إذا كتبت V بالشكل $V = V_1 \cup V_2$ فإن $V = V_1$ أو $V = V_2$.

مثال:

$V(x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^2$ خزولة لأنها تكتب بالشكل:

$$V(x^2 - y^2) = V(x - y) \cup V(x + y)$$

أي إن V في هذه الحالة هي اجتماع المستقيمين: $y = x$, $y = -x$.

٢ – ٨ – ٢ – مبرهنة:

لتكن $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ متنوعة أفينية عندئذ: V غير خزولة إذا وفقط إذا كان I(V) مثالياً أولياً.

الإثبات:

($\Leftarrow$) نفرض V غير خزولة وليكن $f \cdot g \in I(V)$ نضع:

$$V_1 = V \cap V(f)\text{، } V_2 = V \cap V(g)$$

(على اعتبار أن f, g حدوديات في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$).

فتكون كل من V_1, V_2 متنوعة أفينية لأنها تقاطع لمتنوعات أفينية.

لكن عندما $f \cdot g \in I(V)$ فإن $f(p) = 0$ أو $g(p) = 0$ لكل $p \in V$. إذن:

$$V \subset V(f) \cup V(g) \qquad (1)$$

وبحساب $V_1 \cup V_2$ نجد:

$$\begin{aligned} V_1 \cup V_2 &= [V \cap V(f)] \cup [V \cap V(g)] \\ &= V \cap [V(f) \cup V(g)] \end{aligned}$$

وبالاستفادة من (1) نجد $V_1 \cup V_2 = V$

وبما أن V غير خزولة فرضاً فإن $V = V_1$ أو $V = V_2$ وبالتالي $f \in I(V)$ أو $g \in I(V)$ إذن I(V) مثالي أولي.

($\Rightarrow$) نفرض I(V) مثالي أولي وليكن $V = V_1 \cup V_2$، فإذا كان $V \neq V_1$ فيجب أن نثبت أن $I(V) = I(V_2)$. لكن $V_2 \subseteq V \Leftarrow$

$$I(V) \subseteq I(V_2) \qquad (2)$$

من جهة ثانية $V_1 \subset V$ إذن $I(V) \subset I(V_1)$ أي إنّه يوجد $f \in I(V_1)$ و $f \notin I(V)$.

فإذا أخذنا عنصراً $g \in I(V_2)$ فإن $f \cdot g$ ينعدم على V لأن $V = V_1 \cup V_2$ إذن $f \cdot g \in I(V)$، لكن I(V) أولي فرضاً. إذن $f \in I(V)$ أو $g \in I(V)$ وحيث $f \notin I(V)$ فإن $g \in I(V)$، وهذا يعني أن:

$$I(V_2) \subseteq I(V) \qquad (3)$$

من (2) و (3) نجد $I(V) = I(V_2)$ وهذا يعني أن $V = V_2$ (لأن I متباين).

إذن V غير خزولة.

تنويه:

لقد استخدمنا عبارة مجموعة جبرية أفينية وعبارة متنوعة دون التمييز بينهما، وهذا ما هو متداول في كثير من المصادر، ولكن في عدد آخر من المصادر نجد فرقاً بين هذين المفهومين، وهو أن المتنوعة الأفينية هي مجموعة جبرية أفينية غير خزولةن وهذا ما سنستخدمه في المبرهنات الآتية.

٢ – ٨ – ٣ – مبرهنة:

يمكن التعبير عن كل مجموعة جبرية أفينية في الفضاء $\mathbb{A}^n(k)$ على شكل اجتماع منتهٍ لمتنوعات جبرية أفينية.

الإثبات:

ليكن C تجمعاً (collection) لجميع المثاليات I من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ والتي تتصف بأن المجموعة الجبرية المقابلة لها V(I) لا يمكن أن تكون اجتماعاً منتهياً لمتنوعات أفينية ولنبين أن C لا تملك عنصراً أعظمياً.

لنفرض I مثالي في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ ينتمي إلى C، وبموجب هذا الفرض فلن تكون المجموعة الجبرية $V = V(I)$ متنوعة أفينية، وعليه فإنه توجد مجموعات جبرية جزئية من V $(V_1, V_2 \subset V)$ بحيث $V = V_1 \cup V_2$.

ولنفرض $I_1 = I(V_1)$، $I_2 = I(V_2)$ فنجد أن $I(V(I)) \subset I_1$ و $I(V(I)) \subset I_2$ لأن $V_1 \subset I(V)$ وكذلك $V_2 \subset I(V)$، ولكن لدينا أيضاً $I \subset I(V(I))$ إذن $I \subset I_1$ و $I \subset I_2$، وعلاوة على ذلك $V(I_1) = V_1$، $V(I_2) = V_2$ لأن V_1, V_2 مجموعات جبرية، وإن $V(I_1) \neq V(I)$ و $V(I_2) \neq V(I)$ وينتج من هذا أن $I \neq I_1$ و $I \neq I_2$. إذن I مجموعة جزئية

فعلية (احتواء تام) من كل من I_1, I_2. وبناء على ذلك فلا يمكن لـ V_1, V_2 أن تكون اجتماعاً منتهياً لمتنوعات أفينية لأن $V(I)$ ليست كذلك، وبالتالي أحد المثاليين I_1, I_2 يجب أن ينتمي إلى C وهذا يعني أنه لا يوجد مثالي I من C بحيث يكون عنصراً أعظمياً في C، ولكن أي تجمع غير خالٍ من المثاليات في الحلقة النيوثرية $K[x_1,\ldots,x_n]$ يجب أن يملك عنصراً أعظمياً ومن ذلك نستنتج أن C خالية.

إذن كل مجموعة جبرية في الفضاء $\mathbb{A}^n(k)$ تكون اجتماعاً منتهياً لمتنوعات أفينية.

٢ – ٨ – ٤ – مبرهنة: (شرط انقطاع السلسلة المتناقصة)

إذا كانت $V_1, V_2,\ldots$ متنوعات في $\mathbb{A}^n(k)$ فإن السلسلة:

$$V_1 \supset V_2 \supset \ldots \qquad (1)$$

يجب أن تنقطع (تتوقف) أي أنه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث:

$$V_N = N_{N+1} = \ldots$$

الإثبات:

من (1) وبالعبور إلى مثاليات هذه المتنوعات نحصل على السلسلة المتزايدة:

$$I(V_1) \subset I(V_2) \subset \ldots$$

في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ والتي هي حلقة نيوثرية وبالتالي فهي تحقق شرط انقطاع السلسلة المتزايدة للمثاليات أي يوجد $N \geq 1$ بحيث:

$$I(V_N) = I(V_{N+1}) = \ldots \qquad (2)$$

وبما أن $V(I(V)) = V$ لأي متنوعة فإن (2) تعطينا $V_N = V_{N+1} = \ldots$ وهو المطلوب.

• يمكن استخدام (٢–٨–٤) لإثبات المبرهنة الأساسية الآتية المتعلقة في بنية المتنوعات الأفينية.

٢ – ٨ – ٥ – مبرهنة:

لتكن $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ مجموعة جبرية أفينية، عندئذ يمكن أن تكتب V على شكل اجتماع منتهٍ $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ لمتنوعات أفينية (V_i مجموعة جبرية غير خزولة أي إنها متنوعة أفينية حسب الملاحظة الواردة بعد ٢ – ٨ – ٢).

الإثبات:

لنفرض جدلاً أن V لا يمكن أن تكتب على شكل اجتماع لمتنوعات أفينية (يقصد بأنها غير خزولة)، لذلك فإن V خزولة أي إنها من الشكل $V = V_1 \cup V'_1$ حيث $V_1 \neq V$ و $V'_1 \neq V$، وبالإضافة لذلك فإن V_1 أو V'_1 ليست اجتماعاً لمتنوعات غير خزولة وإلا فإن V ستكون من الشكل نفسه أي إنّ V_1 أو V'_1 خزولة ولنفرض أن V_1 خزولة وبالتالي فإن $V_1 = V_2 \cup V'_2$ مثلاً حيث $V_2 \neq V_1$ و $V'_2 \neq V_1$.

وحيث V_2 ليست اجتماعاً لمتنوعات غير خزولة وبتكرار هذه العملية نحصل على سلسلة غير منتهية من المجموعات الجبرية:

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots.$$

حيث:

$$V_1 \neq V_1 \neq V_2 \neq \ldots.$$

وهذا يتناقض مع المبرهنة السابقة (٢ – ٨ – ٤) وبذلك يتم البرهان.

مثال:

لتكن المجموعة الجبرية V(x,y,z) والتي تمثل اجتماع مستقيم (المحور z) ومستوي (المستوي xy) وكل منهما يمثّل متنوعة أي مجموعة جبرية غير خزولة:

$$V(xz,zy) = V(z) \cup V(x,y)$$

ملاحظة:

إن (2 – 4 – 3) و (2 – 4 – 5) تؤديان الغرض ذاته.

٢ – ٩ – قاموس جبر – هندسة:

The Algebra – Geometry Dictionary:

٢ – ٩ – ١ – ملاحظة:

لقد عرفنا الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^n(k)$ ذي البعد n على حقل K على أنه:

$$\mathbb{A}^n(k) = \{(a_1,\ldots,a_n) : a_i \in K\}$$

والسؤال لماذا لا نستخدم الرمز K^n للفضاء الأفيني في أغلب الأحيان؟

والجواب هو أن استخدام $\mathbb{A}^n$ يتم للتأكيد على الطبيعة الهندسية له أكثر من K^n والذي يتم استخدامه عادة لدراسة صفاته الجبرية (مثلاً K^n فضاء شعاعي).

للوصول إلى ما نصبو إليه لا بد من دراسة بعض القضايا الأساسية في هذا السياق.

٢ – ٩ – ٢ – مبرهنة:

إذا كانت R حلقة واحدية تبديلية، فإن كل مثالي أولي I في R هو مثالي جذري.

الإثبات:

ليكن I مثالياً أولياً، ولنفرض $x \in R$ بحيث $x^m \in I \Leftarrow x \cdot x^{m-1} \in I \Leftarrow x \in I$ أو $x^{m-1} \in I$ لأن I مثالي أولي وبالاستقراء على $x \in I \Leftarrow m$، ومنه فإن I مثالي جذري في R.

٢ – ٩ – ٣ – مبرهنة:

لتكن $K[x_1,\ldots,x_n]$ حلقة الحدوديات على حقل K عندئذ:

(i) $V(\{0\}) = \mathbb{A}^n(k)$ و $V(K[x_1,\ldots,x_n] = \phi$.

(ii) $V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$ لكل أسرة مثاليات $\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$.

(iii) $V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$ وذلك أياً كان المثاليان I, J من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$.

الإثبات:

(i) وضوحاً وثم إثبات ذلك في مواضع سابقة.

(ii) إذا كان $\mu \in \Lambda$ فإن $I_\mu \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ ومنه:

$$V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \subseteq V(I_\mu)$$ لكل $\mu \in \Lambda$ إذن:

$$V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \qquad (1)$$

والعكس إذا كانت p نقطة من $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$ فإن $f(p) = 0$ لكل $\lambda \in \Lambda$ وكل $f \in I_\lambda$ أي $f(p) = 0$ لكل $f \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ إذن:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \subseteq V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \qquad (2)$$

$$\text{من (1) و (2)} \Leftarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$$

(iii) تم إثباته سابقاً.

الهدف من هذه المبرهنة الأخيرة هو تعريف كائن جديد (تبولوجيا زاريسكي).

٢ – ٩ – ٤ – تعريف:

توضح المبرهنة (٢ – ٩ – ٣) وجود تبولوجيا على $\mathbb{A}^n(k)$ تسمى تبولوجيا زاريسكي (ZarisKi Topology) مجموعاتها المغلقة هي المجموعات الجبرية في $\mathbb{A}^n$.

ملاحظة:

يمكن تعريف تبولوجيا زاريسكي على $\mathbb{A}^n$ بواسطة المجموعات المفتوحة والتي هي متممات المجموعات الجبرية، فإننا نجد أن ϕ, $\mathbb{A}^n$ مفتوحتان بحسب (i) في المبرهنة الأخيرة. ومن (ii) في المبرهنة نفسها ينتج أن أي اجتماع لمجموعات مفتوحة مفتوحاً.

من (iii) وباستخدام الاستقراء الرياضي على عدد المجموعات ينتج أن أي تقاطع منتهٍ لمجموعات مفتوحة يكون مفتوحاً، أي إنّ هذه التبولوجيا معرّفة جيداً.

٢ – ٩ – ٥ – تعريف:

تُعرف تبولوجيا زاريسكي على مجموعة جبرية V في الفضاء $\mathbb{A}^n$ على أنها تلك التبولوجيا التي مجموعاتها المفتوحة من الشكل V\V(I) وذلك من أجل I مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$.

٢ – ٩ – ٦ – مبرهنة:

لتكن $V_1 = V(I_1) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$، $V_2 = V(I_2) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ مجموعتين جبريتين (متنوعتين)، عندئذ تكون $V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^{m+n}$ مجموعة جبرية (متنوعة) أيضاً.

الإثبات:

لتكن $x_1,\ldots,x_m$ إحداثيات في $\mathbb{A}^m$ و $y_1,\ldots,y_n$ إحداثيات في $\mathbb{A}^n$.

ليكن المثالي:

$$J_1 = \langle I_1 \rangle \subset K[x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_n]$$

حيث I_1 مثالي في $K[x_1,\ldots,x_n]$ و J_1 هو المثالي المولد بعناصر I_1 في الحلقة الأوسع $K[x_1,\ldots,x_m,y_1\ldots,y_n]$، ولنبين أن $V(J_1) = V_1 \times \mathbb{A}^n$، على النحو الآتي:

لتكن $p = (a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) \in V(J_1)$ فيكون $f(p) = 0$ لكل $f \in I_1$ كون $I_1 \subset J_1$.

بما أن f تحوي فقط المتغيرات $x_1,\ldots,x_m$ فإن:

$$0 = f(p) = f(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) = f(a_1,\ldots,a_m)$$

إذن: $(a_1,\ldots,a_m) \in V(I_1) = V_1$ وبالتالي فإن:

$$p \in V_1 \times \mathbb{A}^n(k) \Rightarrow V(J_1) \subseteq V_1 \times \mathbb{A}^n(k) \qquad (1)$$

من جهة ثانية، لتكن $p = (a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) \in V_1 \times \mathbb{A}^n$، ولتكن $f \in J_1$

عندئذ يمكن أن تكتب بالشكل $f = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i$ حيث $f_i \in I_1$

و $g_i \in K[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n]$

عندئذ:

$$f_i(p) = f_i((a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) = f(a_1,\ldots,a_m) = 0$$

لذلك فإن:

$$f(p) = \sum_{i=1}^{r} f_i(p)g_i(p) = 0 \Rightarrow p \in V(J_1)$$

وهذا يعني أن:

$$V_1 \times \mathbb{A}^n(k) \subseteq V(J_1) \qquad (2)$$

من (1) و (2) $\Leftarrow V(J_1) = V_1 \times \mathbb{A}^n(k)$

بطريقة مشابهة إذا عرفنا المثالي:

$$J_2 = \langle I_2 \rangle \subseteq K[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n]$$

حيث I_2 مثالي في $K[y_1,\ldots,y_n]$ نحصل على مساواة مشابهة:

$$V(J_2) = \mathbb{A}^m \times V_2$$

وبالتالي يصبح:

$$V_1 \times V_2 = (V_1 \times \mathbb{A}^n) \cap (\mathbb{A}^m \times V_2) = V(J_1) \cap V(J_2) = V(J_1 + J_2)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة مهمة:

- في الحسابات العملية، المثاليات التي تعرف متنوعات تعطى بواسطة المجموعات المولدة.
- لإيجاد مجموعة مولدات للمثالي الذي يعرف اجتماع متنوعات، نأخذ جميع الجداءات المحتملة للمولدات، حد بحد من كل مثالي.
- لإيجاد مجموعة مولدات المثالي الذي يعرف تقاطع متنوعات، نأخذ اجتماع المجموعات المولدة لهذه المثاليات.
- لإيجاد مجموعة مولدات المثالي الذي يعرف الجداء الديكارتي للمتنوعات، نأخذ اجتماع المجموعات المولدة لهذه المثاليات، ولكن يجب التنويه هنا إلى أن هذه المثاليات تقع في حلقات مختلفة.

مثال (١):

أوجد مثالي I في الحلقة $\mathbb{R}[x,y]$ بحيث $V(I) = \{(1,1), (2,-3)\}$.

الحل:

ليكن $I_1 = <x - 1, y - 1>$ و $I_2 = <x - 2, y + 3>$

وبالتالي فإن $V(I_1) = \{(1,1)\}$ و $V(I_2) = \{(2,-3)\}$

لكن:

$$I = I_1.I_2 = <(x - 1).(x - 2), (x - 1).(y + 3), (y - 1).(x - 2), (y - 1)(y + 3)>$$

وهذا المثالي I هو المثالي المطلوب لأن:

$$V(I) = V(I_1 . I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$$

مثال (٢):

ليكن:

$$V_1 = V\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$$
$$V_2 = V\left(y_1 - y_2\right) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$$

عندئذ يكون:

$$V_1 \times V_2 = V\left(x_1^2 + x_2^2 - 1, y_1 - y_2\right) \subseteq \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

٢ – ٩ – ٧ – التطبيقان I, V:

يمكن تلخيص ما جاء في فقرات مختلفة من هذا الفصل بمخطط تمثيلي للعلاقة التي تربط المجموعات الجبرية في فضاء أفيني $\mathbb{A}^n$ والمثاليات في حلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ على النحو الآتي لتكن $R = K[x_1,\ldots,x_n]$:

$$\{\text{مجموعات جزئية من } \mathbb{A}^n(k)\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \{\text{مثاليات الحلقة } R\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{مجموعات جبرية جزئية من } \mathbb{A}^n\} \xleftrightarrow[\text{تقابل}]{} \{\text{المثاليات الجذرية في } R\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{مجموعات جبرية غير خزولة من } \mathbb{A}^n\} \xleftrightarrow[\text{تقابل}]{} \{\text{المثاليات الأولية في } R\}$$

$$\cup$$

$$\{\text{نقاط } \mathbb{A}^n\} \xleftrightarrow[\text{تقابل}]{} \{\text{المثاليات الأعظمية في } R\}$$

حيث إنّ التقابل يكون محققاً إذا كان K مغلقاً جبرياً.

٢ – ٩ – ٨ – القاموس الجبري – الهندسي:

نلخص في الجدول الآتي نتائج هذا الفصل.

نفرض في هذا الجدول أن المثاليات جذرية وأن الحقل مغلق جبرياً.

Algebra		Geometry
Radical ideals		مجموعة جبرية (متنوعات)
I	$\rightarrow$	$V(I)$
$I(V)$	$\leftarrow$	V
جمع المثاليات		تقاطع المتنوعات
$I + J$	$\rightarrow$	$V(I) \cap V(J)$
$\sqrt{I(V) + I(W)}$	$\leftarrow$	$V \cap W$
جداء المثاليات		اجتماع المتنوعات
$I \,.\, J$	$\rightarrow$	$V(I) \cup V(J)$
$\sqrt{I(V) \cdot I(W)}$	$\leftarrow$	$V \cup W$
مثاليات أولية		متنوعات غير خزولة
مثاليات أعظمية		نقاط في الفضاء الأفيني
شرط السلسلة المتزايدة (ACC)		شرط السلسلة المتناقصة (DCC)

٢ – ١٠ – الفضاء الأفيني من وجهة نظر أخرى:

يُعد الفضاء الأفيني أبسط أنواع المجموعات أو المتنوعات الجبرية، إذ إنه مجموعة حلول (أصفار) جملة معادلات خطية، أي إنه يعرف بمثاليات مولّدة بحدوديات من الدرجة الأولى.

٢ – ١٠ – ١ – تعريف:

ليكن K حقلاً، وليكن V فضاء شعاعياً على K. نقول إن $U \subseteq V$ فضاء أفيني جزئي من V إذا وفقط إذا كان $U = \phi$ أو $U = u_0 + W = \{u_0 + w : w \in W\}$ حيث $u_0 \in U$ و W فضاء شعاعي جزئي من V.

مثال:

١) كل من K^n، ϕ، كل مجموعة تحوي نقطة وحيدة هي فضاءات أفينية جزئية من K^n.

٢) المستقيم $y = 2x + 3$ هو فضاء أفيني جزئي من $\mathbb{R}^2$.

وفي هذه الحالة فإن $W = \text{span}\{(1,2)\}$ وإن $u_0 = (0,3)$.

٢ – ١٠ – ٢ – مبرهنة:

ليكن $\phi \neq U = u_0 + W$ فضاءاً أفينياً جزئياً في فضاء شعاعي V، عندئذ فإن $U = u + W$ وذلك $\forall u \in U$.

بعبارة أخرى يمكن اختيار u_0 لتكون أي عنصر من U، ولكن W يعرف بشكل وحيد بواسطة U.

الإثبات:

إذا كان $u \in U$، فإن $u = u_0 + (u - u_0)$. وبما أن $U = u_0 + W$ فإن $u - u_0 \in W$.

إذن لدينا: $u + W = \{u + w : w \in W\} = \{u_0 + (u - u_0) + w : w \in W\}$

لكن $(u - u_0) + w \in W$ لأن W فضاء شعاعي، إذن $u + w \in u_0 + W$ لكل $w \in W$، وبالتالي فإن $u + W \subseteq u_0 + W$. وبشكل مشابه:

$$u_0 + W = \{u_0 + w : w \in W\} = \{u + (u_0 - u) + w : w \in W\} \subseteq u + W$$

إذن تتحقق المساواة $u + W = u_0 + W = U$

يمكن الحصول على W من الشكل:

$$U - u = \{v - u : v \in U\}$$

وذلك $\forall u \in U$.

٢ – ١٠ – ٣ – تعريف:

يعرف بعد الفضاء الأفيني $U = u_0 + W$ على أنه dimW، (وفي بعض الأحيان يُصطلح على أن $\dim \phi = -1$).

٢ – ١٠ – ٤ – تعريف:

ليكن K حقلاً، إذا اعتبرنا K^n فضاء أفينياً جزئياً من نفسه، فإن K^n يسمى فضاء أفيني على الحقل K من البعد n (n – dimensional) ويرمز له بـ $\mathbb{A}^n(k)$ أو اختصاراً $\mathbb{A}^n$.

٢ – ١٠ – ٥ – تعريف:

إذا كان V_1, V_2 فضاءين شعاعيين يُعرّف التطبيق الأفيني من V_1 إلى V_2 على أنه الدالة $\phi : V_1 \to V_2$ والتي يمكن أن تكتب بالشكل $\phi(x) = T(x) + b$ حيث:

$T: V_1 \to V_2$ تحويل خطي و $b \in V_2$.

ملاحظة:

يمكن التحقق بسهولة أن تركيب التطبيقات الأفينية هو تطبيق أفيني أيضاً، وأن التطبيقات الأفينية القلوبة $V \to V$ تشكل زمرة، والتحويلات الخطية لهذه التطبيقات تشكل زمرة جزئية ناظمية وزمرة الخارج هي زمرة التحويلات الخطية القلوبة على V.

٢ – ١٠ – ٦ – مبرهنة:

ليكن V_1, V_2 فضاءين شعاعيين وليكن $\Phi: V_1 \to V_2$ تطبيقاً أفينياً.

(i) لكل فضاء أفيني جزئي $U_1 \subseteq V_1$ تكون الصورة المباشرة $\Phi(U_1)$ فضاء أفينياً جزئياً من V_2.

(ii) لكل فضاء أفيني جزئي $U_2 \subseteq V_2$ تكون الصورة العكسية $\Phi^{-1}(U_2)$ فضاء أفينياً جزئياً من V_1.

الإثبات:

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ الإحداثيات على V_1.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ الإحداثيات على V_2.

وليكن $T: V_1 \to V_2$ حيث $\Phi(x) = T(x) + b$ تحويل خطي وحيث b شعاع في V_2 ونكتب الشعاع b بأخذ منقول السطر $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in V_2$، لتكن أيضاً $[t_{ij}]$ (حيث $1 \le I \le n \ , \ 1 \le j \le m$) مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للإحداثيات على كل من V_1، V_2.

والآن إلى الإثبات:

(i) بفرض $U_1 \subseteq V_1$ فضاء أفيني جزئي، فإذا كانا $U_1 = \phi$ فإن $\Phi(U_1) = \phi$، وإذا كان $U_1 \neq \phi$ فإن $U_1 = u_1 + W_1$ حيث $u_1 \in U_1$، W_1 فضاء شعاعي جزئي من V_1 عندئذ:

$$\begin{aligned}\Phi(U_1) &= \{\Phi(u_1 + w) : w \in W_1\} = \{T(u_1 + w) + b : w \in W_1\} \\ &= \{(T(u_1) + b) + T(w) : w \in W_1\} \\ &= (T(u_1) + b) + T(W_1)\end{aligned}$$

وبما أن $T(W_1)$ فضاء شعاعي من V_2 (جبر خطي)، فنجد أن $\Phi(U_1)$ فضاء أفيني جزئي من V_2.

(ii) ليكن U_2 فضاءاً أفينياً جزئياً من V_2. توجد حدوديات من الدرجة الأولى $f_1, \ldots, f_K$ متغيراتها $y_1, \ldots, y_n$ بحيث:

$$U_2 = \{(y_1,\ldots,y_n) \in V_2 : f_i(y_1,\ldots,y_n) = 0 \ , \forall \ i \ , \ 1 \le i \le k\}$$

وبالتالي:

$$\Phi(x_1,\ldots,x_m)^T = (b_1 + \sum_{j=1}^{m} t_{1j}x_j \ , \ b_2 + \sum_{j=1}^{m} t_{2j}x_j \ , \ \ldots, \ b_n + \sum_{j=1}^{m} t_{nj}x_j \ )$$

إذن $(((x_1,x_2,\ldots,x_m)^T) \in U_2$ Φ إذا وفقط إذا:

$$f_i = (b_1 + \sum_{j=1}^{m} t_{1j}x_j \ , \ b_2 + \sum_{j=1}^{m} t_{2j}x_j \ , \ \ldots, \ b_n + \sum_{j=1}^{m} t_{nj}x_j \ ) = 0$$

لكل $1 \le i \le K$ وهذه عبارة عن معادلات خطية بالمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

وبالتالي فإن $\Phi^{-1}(U_2)$ فضاء أفيني جزئي من V_1.

٢ – ١٠ – ٧ – تعريف:

إذا كانت X, Y مجموعات جزئية من فضاء شعاعي V، فنقول إن X, Y متكافئتان أفينياً (affine equivalent) إذا وفقط إذا وجد تطبيقان أفينيان:

$$\Phi \ , \Psi: V \to V$$

كل منهما مقلوب للآخر، بحيث $\Phi(X) = Y$ و $\Psi(Y) = X$ (التكافؤ الأفيني هو علاقة تكافؤ).

مثال (١):

جميع الفضاءات الأفينية الجزئية ذات البعد نفسه متكافئة أفينياً.

ويمكن إثبات ذلك من خلال إثبات أن الفضاء الأفيني الجزئي من بعد K يكافئ أفينياً الفضاء الشعاعي المولد بالمتجهات:

$$u_1 = (1,0,\ldots,0), \ u_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ \ldots. \ U_K = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

*** انتهى الفصل الثاني ***

تمارين الفصل الثاني

١ – أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية وسيطياً:

$$x + 2y - z + w = -1$$
$$x + y + z - w = 2$$

٢ – استخدم قوانين المثلثات من أجل إثبات أن $x = \cos t,\ y = \cos 2t$ هو تمثيل وسيطي لجزء من قطع مكافئ، وبين أي جزء مستهدف (مطلوب).

٣ – ليكن التمثيل الوسيطي: $x = \dfrac{t}{1+t}$ ، $y = 1 - \dfrac{1}{t^2}$

المطلوب:

أ – أوجد معادلة المتنوعة الأفينية المعرفة بهاتين المعادلتين الوسيطيتين.

ب – بيّن أن المعادلات الوسيطية السابقة تعطي جميع نقاط المتنوعة الأفينية التي حصلت عليها في الطلب الأول ما عدا النقطة (1,1).

٤ – لتكن V_1, V و V_2 مجموعات أفينية في الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^n = K^n$. أثبت أن:

١) إذا كان $\#\, K < \infty$ الحقل منتهي فإن:

$$I(\mathbb{A}^n) = <0> \text{ و } I(\phi) = <1> = K[x]$$

٢) $V(I(V)) = V$.

٣) $$V_1 \cup V_2 = V(I(V_1) \cap I(V_2))$$
$$= V(I(V_1) \,.\, I(V_2))$$

٤) $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$.

٥ – ليكن $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n = K^n$ مجموعات أفينية في $\mathbb{A}^n$.

المطلوب:

١) بيّن أنه ليس بالضرورة أن يكون:

$$I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}$$

٢) إذا كان K حقلاً مغلقاً جبرياً، فإن:

$$I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}$$

حيث: $\sqrt{I(V_1)+I(V_2)} := \sqrt{< I(V_1) \cup I(V_2) >}$

٦ – ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً و $\eta \subseteq K[x] = K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالي أعظمي في K[x]، و $I \subsetneq K[x]$ مثالي في K[x] المطلوب:

١) أثبت أنه يوجد $p = (p_1, \ldots, p_n) \in K^n$ تحقق:

$$\eta = <x - p> = <x_1 - p_1, x_2 - p_2, \ldots, x_n - p_n>$$

٢) إن $V(I) \neq \phi$.

٧ – ليكن X فضاء تبولوجياً (Zariski):

١) أثبت أن X نوثري.

٢) إذا كانت $Y \subseteq X$ مجموعة مغلقة في X، فإن Y نوثرية.

٨ – أثبت أن أي مجموعة (متنوعة) أفينية في $\mathbb{A}^n$ تكون نوثرية.

٩ – لتكن $f \in K[x]$ كثيرة حدود غير ثابتة ($f \notin K$) وخالية من الحدود التربيعية، (square free). أثبت أن $V = V(f)$ غير خزولة إذا وفقط إذا كانت f غير خزولة على الحقل K.

١٠ – ليكن X فضاء تبولوجياً و $\phi \neq Y \subseteq X$. أثبت أن:

١) إذا كانت Y غير قابلة للاختزال، فإن غُلاقتها $\overline{Y}$، $\overline{Y} \subseteq X$ في X غير قابلة للاختزال.

٢) إذا كانت X غير قابلة للاختزال و $Y \subseteq X$ مجموعة مفتوحة في X، فإن Y كثيفة (dense) أي أن $\overline{Y} = X$.

٣) إذا كانت Y غير قابلة للاختزال، فإنّه يوجد $Y' \subseteq X$ وتكون Y' أعظمية (بالنسبة إلى علاقة الاحتواء).

١٢ – ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً و I مثالياً في الحلقة $R: K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$. أثبت أن:

$$\sqrt{I} = \bigcap \eta$$

$$I \subseteq \eta \in \eta \text{ - Spec } (R)$$

حيث η - Spec(R) مجموعة كل المثاليات الأعظمية في الحلقة R.

الفصل الثالث (٣)

التطبيقات، حلقة الإحداثيات، فضاء التماس والبعد

٣ – ١ – التطبيقات الحدودية أو التشاكلات:

نعلم أن أي حدودية $f \in K[x_1,\ldots,x_n]$ تعرف دالة: $f: \mathbb{A}^n(k) \to K$، وإذا كانت $V \subseteq \mathbb{A}^n$ متنوعة أفينية فإن f تعين دالة $f: V \to K$.

إذا كانت $f,g \in K[x_1,\ldots,x_n]$ حدوديتين تعينان الدالة نفسها $f = g: V \to K$ فهذا يكافئ $f - g \in I(V)$.

٣ – ١ – ١ – تعريف:

لتكن $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ متنوعة أفينية ولنأخذ حلقة الخارج $K[x_1,\ldots,x_n]/I(V)$ نرمز لهذه الحلقة بالرمز $K[V]$ ونسميها حلقة إحداثيات المتنوعة V (coordinate ring).

٣ – ١ – ٢ – تعريف:

لتكن المتنوعتان $W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$، $V \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ ولتكن الدالة $\phi: V \to W$ المعرفة بـ:

$$\phi(p) = (\phi_1(p), \phi_2(p),\ldots,\phi_n(p))$$

حيث $\phi_i \in K[V]$، لكل $1 \le i \le n$ و $p \in V$.

تُسمّى الدالة ϕ تشاكلاً (morphism) أو تطبيقاً حدودياً (polynomial map).

ملاحظة:

١) يمكن اعتبار عناصر $K[V]$ تشاكلات من V إلى $\mathbb{A}^1$ $(V \to \mathbb{A}^1)$.

٢) تركيب تشاكلين $\phi: V \to W$، $\psi: W \to X$، هو تشاكل $\psi \circ \phi: V \to X$.

٣ – ١ – ٣ – تعريف:

نقول إن التشاكل $\phi: V \to W$ تماثل، إذا وفقط إذا كان لـ ϕ مقلوباً أي إذا وُجد $\psi: W \to V$ بحيث $\psi \circ \phi = id_V$ و $\phi \circ \psi = id_W$. ونعبر عن ذلك بالقول إن V, W متماثلتان ($V \cong W$).

نعامل المتنوعات الجبرية المتماثلة على أنها الكائن ذاته لأغراض عدّة، حيث إنّ أحد أهداف الهندسة الجبرية هو تصنيف ا لمتنوعات الجبرية إلى متنوعات متماثلة لذلك فإن الأدوات اللازمة هي إيجاد خواص لهذه المتنوعات تبقى ثابتة بتأثير التماثلات.

أمثلة:

١ – أي تطبيق أفيني يُعد تشاكلاً.

٢ – ليكن K حقلاً غير منتهٍ، ليكن t الإحداثي على $\mathbb{A}^1$ وليكن x,u إحداثيين على $\mathbb{A}^2$، وليكن $V = \mathbb{A}^1$، $W \subseteq \mathbb{A}^2$ معرفة بالمعادلة $y - x^2 = 0$ أي:

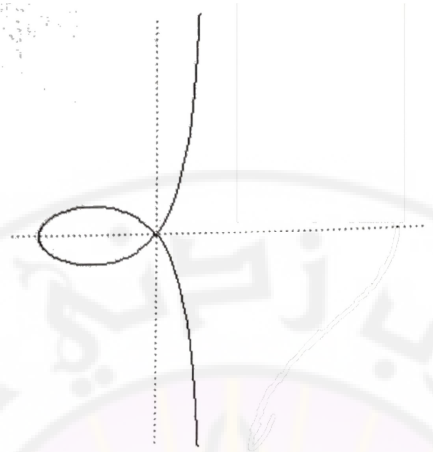
$$I(V) = \{0\} \ , \ I(W) = \langle y - x^2 \rangle$$

وبالتالي فإن $K[V] = K[t]$ و $K[W] = K[x,y]/\langle y - x^2 \rangle$

إن الدالة $\phi: V \to W$ المعرفة بـ $t \mapsto (t, t^2)$ تمثل تشاكلاً حسب التعريف، إن $t, t^2 \in K[V]$ و $x = t, \ y = t^2$ تحقق العلاقة $y - x^2 = 0$ أياً كان t وهذا يعني أن $\phi(t) \in W$ وبالتالي فإن ϕ تشاكل $V \to W$ وليس $V \to \mathbb{A}^2$.

لنأخذ التطبيق $\psi: W \to V$ المعرف بـ $(x,y) \mapsto x$، وإن هذا التطبيق تشاكل أيضاً، إن $x \in K[w]$ ويمكن كتابته بشكل مفصل $x + I(W)$ نحسب كلاً من $\psi \circ \phi$, $(\phi \circ \psi)(x,y) = \phi(x) = (x,x^2) = (x,y)$ و $(\psi \circ \phi)(t) = \psi(t, t^2) = t$ فنجد $\phi \circ \psi$ لكل $(x,y) \in W$، وبالتالي فإن كلاً من ϕ, ψ مقلوب للآخر، إذن $V \cong W$.

٣ – ليكن K حقلاً غير منتهٍ مميزه لا يساوي 2 (يمكن أن يكون $K = \mathbb{R}$ أو $K = \mathbb{C}$). لتكن $V = \mathbb{A}^1$، $W \subseteq \mathbb{A}^1$ حيث W معرفة بالمعادلة $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.



إن $\phi: V \to W$ المعرفة بـ $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ تشاكل.

إن $t^2 - 1, t(t^2 - 1) \in K[V]$ وإن $y = t(t^2 - 1), x = t^2 - 1$ تحقق العلاقة $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ أياً كان t.

إذن ϕ دالة $V \to W$.

إن ϕ ليست تماثلاً لأن ϕ غير متباينة:

$$\phi(1) = \phi(-1) = (0,0)$$

(ولكي يتحقق أن $1 \neq -1$ يلزمنا أن يكون المميز $\neq 2$).

٤ – ليكن $H \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ القطع الزائد $xy - 1 = 0$ وليكن $\phi: H \to \mathbb{A}^1$ التشاكل المعرف بـ $(x,y) \to x$.

إن ϕ ليس تماثلاً (isomorphisim) كونه ليس غامراً $0 \notin im\phi$.

«تنويه: إن صورة تشاكل ما ليس بالضرورة متنوعة جبرية، ففي هذا المثال $im\phi = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$ وهذه المجموعة ليست متنوعة».

٣ – ١ – ٤ – مبرهنة:

لتكن $V \subseteq \mathbb{A}^m(k)$، $W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ مجموعتان جبريتان أفينيتان (أو متنوعات).

(i) يُنتج التطبيق الحدودي $f : V \to W$ تشاكلاً حقلياً $f^* : K[W] \to K[V]$ معرفاً بـ $f^*(g) = gof$.

(ii) أي تشاكل حلقي $\phi : K[W] \to K[V]$ يكون من الشكل $\phi = f^*$ وذلك من أجل التطبيق الحدودي $f: V \to W$.

الإثبات:

(i) لدينا:

$$f^*(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)\, of = g_1 of + g_2 of = f^*(g_1) + f^*(g_2)$$
$$f^*(g_1.g_2) = (g_1.g_2)\, of = (g_1 of) \,.\, (g_2 of) = f^*(g_1) \,.\, f^*(g_2)$$

بالإضافة لذلك لكل $a \in K$ فإن $f^*(a) = a$.

إذن f^* تشاكل حلقي.

(ii) ليكن $I(W)$ حيث يمكن تعريف $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_m)$ بأن نأخذ $y_i = Y_i \mod I(W)$، فيكون $f = (f_1,\ldots,f_n)$ تطبيقاً حدودياً $f : V \to \mathbb{A}^m(k)$ بحيث $f_i(x_1,\ldots,x_m) = \phi(y_i)$.

وعلينا أن نثبت أن $f(V) \subset W$ أو $I(W) \subset I(f(V)$.

ليكن $G \in I(W)$ فتكون Gof حدودية متغيراتها $f_i = \phi(y_i)$. وبما أن ϕ تشاكل حلقي فإن $Gof = \phi(G)$ لكن $G \in I(W)$.

إذن $G \circ f = \phi(G) = \phi(0)$، ومنه فإن $G°f \in I(V)$ و $G \in I(f(V))$، وبما أن التشاكل يمكن تعيينه من خلال القيم على مولداته، فإن $\phi = f^*$ وهذا يعرف f.

٣ – ٢ – الدوال النسبية (الكسرية)، حقل الدوال:

Rational Functions, functions field:

٣ – ٢ – ١ – تعريف:

لتكن V متنوعة جبرية أفينية غير خزولة يرمز لحقل دوال المتنوعة V بـ K(v) ويعطى بـ:

$$K(v) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in k[v], g \neq 0 \right\}$$

- ونقول إن الكسرين $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2}$ متساويان $\Leftrightarrow f_1 g_2 = f_2 g_1$ في K[v].
- ويمكن التحقق بسهولة أن K (v) حقل بالنسبة للعمليات المألوفة.
- تدعى عناصر K(v) دوالاً نسبيةً (Rational function) على V.
- تكون الدالة النسبية ϕ على V معرفة عند $p \in V$ إذا وفقط إذا أمكن تمثيلها بالشكل $\frac{f}{g}$ بحيث $g(p) \neq 0$. وفي هذه الحالة فإن القيمة $\phi(p)$ تُعطى بـ $\phi(p) = \frac{f(p)}{g(p)}$ وهذه القيمة مستقلة عن اختيار f, g.

مثال:

إذا كانت $V = \mathbb{A}^n$ فإن $K(\mathbb{A}^n) = K(x_1,\ldots,x_n)$ يكون حقل الدوال النسبية بالمتغيرات $x_1,\ldots,x_n$.

٣ – ٢ – ٢ – تمهيدية:

لتكن V متنوعة جبرية أفينية غير خزولة.

ولتكن $\phi = \frac{f}{g}$ حيث $f,g \in K[V]$ و $g \neq 0$.

إذا وجدت نقطة $p \in V$ بحيث $f(p)=0$ و $g(p)=0$ عندئذ ϕ ليست معرفة عند p.

الإثبات:

ليكن $\phi = \frac{f_1}{g_1}$ (من أجل $f_1, g_1 \in K[V]$ و $g_1 \neq 0$) تمثيل آخر لـ ϕ.

من تعريف الكسرين المتساويين يكون $\phi = \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$، وينتج من هذه المساواة $f_1 g = f g_1$ في $K[V]$، وبالتالي:

$$f_1(p) \cdot g(p) = f(p) \cdot g_1(p) \qquad (1)$$

(ولدينا $g(p) = 0$ فرضاً).

إذن الطرف اليساري في (1) يساوي $= 0$.

وبذلك فإنه في الطرف الأيمن من (1) $f(p) \neq 0 \Leftarrow g_1(p) = 0$، لأن $K[V]$ منطقة تكاملية وبذلك تكون ϕ غير معرفة في النقطة p.

٣ – ٢ – ٣ – تعريف:

لتكن $V \subseteq \mathbb{A}^m(k)$، $W \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ متنوعات أفينية جبرية، ولتكن V غير خزولة، يُعرّف التطبيق النسبي (rational map) $\phi: V \dashrightarrow W$ على أنه دالة معرفة على مجموعة جزئية غير خالية من V مُعطى بـ:

$$\phi(p) = (\phi_1(p),\ldots,\phi_n(p)) \text{ حيث } \phi_i \in K(V) \text{ لكل } 1 \leq i \leq n$$

ويحقق ما يلي: إذا كان $\phi(p)$ معرفة عند p، فإن $\phi(p) \in W$.

٣ – ٢ – ٣ – تعريف:

إذا كان $\phi_I\ V \dashrightarrow W$ تطبيقاً نسبياً فإن ϕ تسمى مهيمنة (dominant) إذا وفقط إذا كانت صورتها المباشرة غير محتواة في أي متنوعة جزئية فعلية من W.

ملاحظة:

لتكن V, W متنوعات جبرية أفينية غير خزولة ولتكن $\phi:V \dashrightarrow W$ و $\psi:W \dashrightarrow X$ تطبيقات نسبية فإذا كان $\psi \circ \phi: V \dashrightarrow X$ معرفاً فهو تطبيق نسبي وإذا كان ϕ مهيمن (مسيطر)، فإن $\psi \circ \phi$ معرف دوماً.

٣ – ٢ – ٤ – تعريف:

نقول عن التطبيق النسبي $\phi: V \dashrightarrow W$ إنه ثنائي التكافؤ (birational equivalence) إذا وفقط إذا وُجد $\psi: W \dashrightarrow V$ بحيث $\psi \circ \phi = id_V$ و $\phi \circ \psi = id_W$.

ويكون في هذه الحالة كل من ϕ, ψ مهيمناً ويكون $V \sim W$.

٣ – ٣ – الفضاء المماس : Tangent Space

تسمى المتنوعة الجبرية المعرفة بحدودية واحدة سطحاً زائداً أو فوق سطح (hypersurface).

أي أن السطح الزائد هو متنوعة من الشكل $V(I) = V(f)$ حيث $f \in K[x_1,\dots,x_n]$.

إذا كان $H \subset \mathbb{A}^n(k)$ سطحاً زائداً معرفاً بـ $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ ولتكن $p \in H$ نقطة من السطح الزائد.

لنأخذ المستقيم $L = \{p + tv : t \in K\}$ وحيث $v \in K^n - \{0\}$.

أي أن v شعاع (متجه) غير صفري.

نقول إن L يمس H في P إذا كان للدالة: $f(p + tv)$ نقطة حرجة عند $t = 0$.

(ملاحظة t هو المتغير الوسيط).

٣ – ٣ – ١ – تعريف:

لتكن $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ متنوعة جبرية أفينية ولتكن $p \in V$ و L مستقيماً معرفاً وسيطياً بالشكل: $L = \{p + tv : t \in K\}$، $v \in K^n - \{0\}$.

يقال إن L يمس V عند p إذا وفقط إذا $f(p + tv)$ تملك صفراً من تعددية أكبر أو يساوي 2 من أجل $t = 0$ وذلك $\forall f \in I(V)$.

أو أن $f(p + tv)$ تطابق الصفر.

٣ – ٣ – ٢ – تعريف:

الفضاء المماس لمتنوعة V عند نقطة $p \in V$ والذي يرمز له بـ T_pV هو اجتماع المستقيمات الماسة لـ V عند p مضافاً لها النقطة p.

٣ – ٣ – ٣ – مبرهنة:

لتكن $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ متنوعة جبرية أفينية.

ولتكن $f_1, \ldots, f_r$ مجموعة مولدات المثالي I(V).

لتكن $p \in V$ وليكن $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in K^n - \{0\}$

المستقيم $l = \{p+tv : t \in K\}$ مماس لـ V عند p إذا وفقط إذا $J_pv = 0$، حيث J مصفوفة جاكوب (اليعقوبية):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

وإن J_p تمثل قيمة J عند p.

إن T_pV فضاء أفيني جزئي بعده $= n - \text{ranK } J_p$.

الإثبات:

لتكن $f \in I(V)$، يُعطى منشور تايلور لـ $f(p + tv)$ عند $t = 0$ بالعلاقة:

$$f(p + tv) = f(p) + t \cdot \left.\frac{df(p + tv)}{dt}\right|_p + (\text{حدود من مرتبة} \geq 2 \text{ بالنسبة لـ } t)$$

$$= f(p) + t \cdot \left.\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j + (\text{حدود من مرتبة} \geq 2 \text{ بالنسبة لـ } t)$$

إن $f(p) = 0$ كون $p \in V$ و $f \in I(V)$.

إذن $f(p + tv)$ تملك صفراً من تعددية على الأقل 2 عند $t = 0$، أو أنها تطابق الصفر إذا وفقط إذا $\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j = 0$.

لنفرض l مماس لـ V عند p.

العلاقة $\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j = 0$ تتحقق لكل $f \in I(V)$.

وبشكل خاص $\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j = 0$ لكل $1 \le i \le r$، وهذه العبارة هي بالضبط المركبة i لـ $J_p.v$، وبالتالي $J_p.v = 0$.

من جهة ثانية: نفرض $J_p.v = 0$، ولتكن $f \in I(V)$، عندئذ يوجد g_i بحيث $f = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i$ ومنه:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{i=1}^{r} \left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_p \cdot f_i(p) + g_i(p) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} g_i(p) \cdot \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_p$$

كون $f_i(p) = 0$.

ولذلك نحصل على:

$$\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} g_i(p) \cdot \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j$$

$$= \sum_{i=1}^{r} g_i(p) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j = 0$$

لأن $\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_p \cdot v_j = 0$ لكل $1 \le i \le r$ لأنها المركبة i لـ $J_p \,.\, v = 0$

تشكل المجموعة $W = \{v \in K^n : J_p \,.\, v = 0\}$ فضاءاً شعاعياً جزئياً ولذلك فإن $T_pV = p + w$ فضاء أفيني جزئي. وبعده $\dim T_pV = \dim W = n - \text{ranK } J_p$.

مثال:

لتكن $V \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ المتنوعة المعرفة بـ $y^2 - x^3$ غير خزولة، وبالتالي المثالي $\langle y^2 - x^3 \rangle$ أولي وبذلك فهو جذري، وبالتالي فإن مبرهنة الأصفار تقتضي أن $I(V) = \langle y^2 - x^3 \rangle$.

وعليه فإن اليعقوبية هي: $J = \begin{pmatrix} -3x^2 & 2y \end{pmatrix}$ (عدد الأسطر = عدد الحدوديات، عدد الأعمدة = عدد المتغيرات).

عند النقطة $p = (1,1)$، نجد $J_p = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}$ ولذلك فإن المستقيم $\{p + tv : t \in \mathbb{C}\}$ يكون مماساً لـ V عند p إذا وفقط إذا $-3v_1 + 2v_2 = 0$ إذن $T_{(1,1)}V$ هو المستقيم الذي ميله $\frac{3}{2}$ والمار بالنقطة p وبالتالي فمعادلته $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

توضيح:

$$J_p \cdot v = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{r \times n} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

وفي هذا المثال:

$$J_p \,.\, v = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3v_1 + 2v_2 = 0$$

في هذا المثال أيضاً عند النقطة Q(0,0) نجد أن $J_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$، لذلك فإن كل مستقيم مار من Q يكون مماساً وبالتالي $T_QV = \mathbb{A}^2$ هو كامل الفضاء $\mathbb{A}^2$.

ليكن $v = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ شعاع توجيه المستقيم المار من Q((0,0)) عندئذ $Q + tv = (t\alpha, t\beta)$ وإذا عوضنا $x = t\alpha, y = t\beta$ في $y^2 - x^3$ نحصل على:

$$t^2\beta^2 - t^3\alpha^3 = t^2(\beta^2 - t\alpha^3) \qquad (1)$$

والتي تملك صفراً من تعددية على الأقل 2 عند $t = 0$.

إذن كل مستقيم مار بـ $(0,0)$ يُعد مستقيماً مماساً.

وإذا كان $\beta = 0$ فإن (1)) تملك صفراً من تعددية 3 عند $t = 0$، إذن المستقيم $y = 0$ مماس من مرتبة أعلى من المستقيم العام المار بـ $(0,0)$.

ملاحظة:

تدعى نقاط المتنوعة V التي يكون عندها $\dim T_pV = \dim V$ نقاطاً غير شاذة (non – singular).

وعندما يكون $\dim T_pV > \dim V$ فالنقاط التي تحقق ذلك تسمى نقاطاً شاذة (singular).

• لإيجاد بعد مجموعة جبرية غير خزولة V في فضاء $\mathbb{A}^n(k)$ وإيجاد مجموعة نقاطها الشاذة فإننا نقوم بالخطوات الآتية:

١ – نختار مجموعة مولدات $f_1,\dots,f_r$ للمثالي $I(V)$ (الحقل K يجب أن يكون مغلقاً جبرياً والمثالي $I(V)$ جذري).

٢ – نحسب المصفوفة اليعقوبية J (Jacobian Matrix).

٣ – من أجل $K = 0,1,2,\dots$ نعين النقاط التي تكون عندها الصغائر من المرتبة $(K+1)\times(K+1)$ لـ J.

(يقصد بالصغير (minor) محدد مصفوفة جزئية من المصفوفة الأساسية) وكذلك $f_1 = f_2 = \dots = f_r = 0$.

وهذه الحلول هي النقاط التي يكون عندها $\dim T_pV \geq n - K$، ويتم ذلك حتى نحصل على أصغر K يحقق $\dim T_pV \geq n - K$ لكل $p \in V$.

٤ – عندئذ يكون $\dim V = n - K$ وتكون SingV (مجموعة النقاط الشاذة) هي مجموعة النقاط التي من أجلها يكون $\dim T_pV > n - K$ أي مجموعة نقاط V حيث جميع الصغائر من المرتبة $K \times K$ تنعدم.

٣ – ٣ – ٤ – تعريف:

لتكن V مجموعة جبرية أفينية (ليس بالضرورة غير خزولة) يُعرّف بعد V (dimV) على أنه:

القيمة العظمى لأبعاد المركبات غير الخزولة لـ V:

$$\dim V = \max \{\dim V_i : V_i \text{ مركبة غير خزولة}\}$$

٣ – ٣ – ٥ – مبرهنة (دون برهان):

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، وليكن $H \subset \mathbb{A}^n(k)$ فوق سطح أي أن $H = V(<f>)$ حيث f حدودية غير ثابتة $f \in K[x_1,\ldots,x_n]$، عندئذ يكون $\dim H = n - 1$.

٣ – ٣ – ٦ – مبرهنة (دون برهان):

ليكن $\phi: V \to W$ تماثلاً بين مجموعتين جبريتين (أي V, W مجموعات جبرية)، عندئذ:

$$\dim T_pV = \dim T_{\phi(p)}W, \ \forall\, p \in V$$

وبالتالي فإن $\dim V = \dim W$ و $\phi(\text{sing}V) = \text{sing}W$

أمثلة:

١ – المستقيم الأفيني على الحقل $\mathbb{C}$ أي $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ والمنحني المعرف بالمعادلة $y^2 - x^3 = 0$ في $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ غير متماثلين (not isomorphic)، لأن المستقيم لا يملك نقاطاً شاذة في حين أن المنحني $(y^2 - x^3 = 0)$ يملك نقطة شاذة هي (0,0).

٢ – لتكن المجموعات الجبرية الأفينية:

$$W_1 = V(<xy, xz, yz>) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$$
$$W_2 = V(<xy(x + y)>) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$$

هل يوجد تماثل (isomorphism) بينهما؟ أي هل $W_1 \cong W_2$؟

الحل:

إن المركبات غير الخزولة لـ W_1 هي المحاور الإحداثية أي $V(<x,z>)$، $V(<x,y>)$، $V(<y,z>)$.

والمركبات غير الخزولة لـ W_2 هي المستقيمات: $V(x+y)$, $V(<y>)$, $V(<x>)$ وكل من W_1, W_2 يتكون من ثلاثة مستقيمات تلتقي في المبدأ.

سوف نبين أن W_1, W_2 غير متماثلتين:

لنحسب الفضاء المماس لكل من W_1، W_2 عند المبدأ.

أي لنحسب $T_{(0,0)}W_2$ و $T_{(0,0,0)}W_1$.

بداية نلاحظ أن المثاليين: $I_1 = <xy, xz, yz>$ و $I_2 = <xy(y+z)>$ جذريان وبالتالي فإن $I_2 = I(W_2)$، $I_1 = I(W_1)$.

إن يعقوبية W_1 هي: $$J(w_1) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

وفي النقطة (0,0,0) نجد: $$J_{(0,0,0)}(W_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ورتبتها $= 0$ أي $\text{rank}J_{(0,0,0)}(W_1) = 0$ ومنه فإن $\dim T_{(0,0,0)}W_1 = 3$.

أما يعقوبية W_2 فهي $J(W_2) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy \end{pmatrix}$

وفي النقطة (0,0) تصبح: $J_{(0,0)}(W_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

أيضاً رتبتها تساوي 0 ومنه: $\dim T_{(0,0)}W_2 = 2$

فإذا وجد تماثل $\phi: W_1 \to W_2$ لكان $\phi(0,0,0) = (0,0)$ لأن (0,0,0) و (0,0) هي نقاط التقاطع الوحيدة لمركبات W_1، W_2 وكون التماثل يحافظ على بعد الفضاء المماس في حين أن $\dim T_{(0,0,0)}W_1 \neq \dim T_{(0,0)}W_2$، وبالتالي لا يوجد تماثل.

٣ – ٤ – بعد متنوعة: The Dimension of a variety

٣ – ٤ – ١ – بعد متنوعة معرفة بواسطة مثالي مولّد بوحيدات حد:

نبدأ هذه الفقرة من خلال المثال الآتي:

مثال (١):

نفرض المثالي $I = \langle x^2y, x^3 \rangle$ في الحلقة $K[x,y]$ وليكن H_x المستقيم الواقع في $\mathbb{A}^2(k) = k^2$ والمعرف بالمعادلة $x = 0$ (أي إنّ $H_x = V(x)$).

ولنأخذ أيضاً المستقيم H_y المعرف بـ $y = 0$ أي إنّ $H_y = V(y)$ عندئذ:

$$\begin{aligned} V(I) &= V(x^2y) \cap V(x^3) \\ &= (V((x^2) \cup V(y)) \cap V((x^3) \\ &= (H_x \cup H_y) \cap H_x \\ &= (H_x \cap H_x) \cup (H_y \cap H_x) \qquad (1) \\ &= H_x \end{aligned}$$

أي أن $V(I)$ هو المحور y (H_x).

وبما أن بُعد H_x كفضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{A}^2(k)$ يساوي 1، فمن المبرر القول إن بعد H_x كمتنوعة يساوي 1.

مثال (٢):

لنفرض المثالي $I = \langle y^2z^3, x^5z^4, x^2yz^2 \rangle$ في الحلقة $K[x,y,z]$، ولنفرض H_x المستوي المعرف بـ $x = 0$، ولنفرض أيضاً H_y, H_z بشكل مشابه، والمستقيم H_{xy} معرف بـ $x = y = 0$ فيكون:

$$\begin{aligned} V(I) &= V(y^2z^3) \cap V(x^5z^4) \cap V(x^2yz^2) \\ &= (H_y \cup H_z) \cap (H_x \cup H_z) \cap (H_x \cup H_y \cup H_z) \\ &= H_z \cup H_{xy} \end{aligned}$$

والتحقق من ذلك يتم من ملاحظة أن المستوي H_z ينتمي لكل واحد من الحدود الثلاثة في السطر من المساواة هذه، وبالتالي فهو ينتمي لتقاطعها، إذن V(I) يتكون من H_z بالإضافة لمجموعات جزئية أخرى غير محتواة في H_z، فإذا أخذنا الحدود التي لا يحويها H_z سيكون لدينا:

$$H_y \cap H_z \cap (H_y \cup H_z) = H_{xy}$$

إذن:

$$V(I) = H_{xy} \cup H_z$$

إنّ بُعد اجتماع عدد منتهٍ من فضاءات جزئية من الفضاء $\mathbb{A}^n = k^n$ يساوي البعد الأكبر فيما بينها، وبالتالي فإن:

$$\dim V(I) = \dim H_z = 2 = (xy) \text{ بعد المستوي}$$

ملاحظة:

في الفضاء $\mathbb{A}^n = k^n$ الفضاء الجزئي المعرف بوضع مجموعة جزئية من الإحداثيات $x_1,\ldots,x_n$ تساوي صفر يدعى فضاء الإحداثيات الجزئي coordinate subspace.

٣ – ٤ – ١ – مبرهنة:

متنوعة المثالي المولد بوحيدات حد في $K[x_1,\ldots,x_n]$ تساوي اجتماع منتهٍ لفضاءات إحداثية جزئية من K^n.

الإثبات:

لتكن وحيدة الحد $x_{i_1}^{\alpha_1}\ldots.x_{i_s}^{\alpha_s}$ من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ حيث $\alpha_j \geq 1$ لكل $1 \leq j \leq s$ فيكون:

$$V(x_{i_1}^{\alpha_1}\ldots.x_{i_s}^{\alpha_s}) = H_{x_{i1}} \cup \ldots\ldots \cup H_{x_{is}}$$

حيث $H_{x_k} = V(x_k)$

أي إن المتنوعة المعرفة بوحيد حد هي اجتماع فوق مستويات إحداثية (coordinate hyerplanes).

بالإضافة لهذا نلاحظ أنه يوجد فقط n من فوق المستويات. ويمكن متابعة الإثبات كما جاء في الأمثلة الواردة قبل هذه المبرهنة.

ملاحظة:

يمكن كتابة المتنوعة الناتجة عن مثالي مولد بوحيدات حد بالشكل:

$$V(I) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_p$$

حيث $V_i \not\subset V_j$ من أجل $i \neq j$ وهذا التحليل وحيد.

٣ – ٤ – ٢ – تعريف:

لتكن V متنوعة ممثلة باجتماع عدد منتهٍ من الفضاءات الخطية الجزئية من K^n، عندئذ dim V يساوي البعد الاكبر من بين أبعاد الفضاءات الجزئية هذه.

مثالاً: إذا كانت V_1 مستقيماً وكانت V_2 مستوياً، فإن بعد $V = V_1 \cup V_2$ يساوي بعد V_2 أي يساوي 2.

• ليكن $I = \langle m_1,\ldots,m_2 \rangle$ مثالياً فعلياً مولداً بوحيدات الحد m_j، لحساب dim V(I) فنحن نحتاج لاختيار المركبة ذات البعد الأكبر من $V(I) = \bigcap_{j=1}^{t} (V(m_j))$.

إذا استطعنا إيجاد تجمّع لمتحولات $x_{i1},\ldots,x_{is}$ بحيث يظهر على الأقل في كل m_j، واحد على الأقل من هذه المتحولات، عندئذ سيكون الفضاء الإحداثي الجزئي المعرف بالمعادلات:

$$x_{i1} = \ldots = x_{is} = 0$$

محتوى في V(I).

هذا يعني أنه يجب النظر إلى المتحولات التي تظهر في أكبر عدد ممكن من وحيدات الحد m_j المختلفة.

بشكل أدق من أجل $1 \le j \le t$ لتكن:

$$M_j = \{K \in \{1,\dots,n\} : m_j \text{ الحد وحيد يقسم } x_K\}$$

مجموعة أدلة المتحولات التي تظهر بأس موجب في m_j. ثم لتكن:

$$\mathcal{M} = \{J \subset \{1,\dots,n\} : J \cap M_j \neq \phi, \forall\ 1 \le j \le t\}$$

المكونة من جميع المجموعات الجزئية من $\{1,\dots,n\}$ والتي تملك تقاطعاً غير خالٍ مع كل مجموعة M_j، فإذا فرضنا $|J|$ عدد العناصر في J عندئذ تكون القضية الآتية صحيحة.

٣ – ٤ – ٣ – مبرهنة:

$$\dim V(I) = n - \min|J| : J \in \mathcal{M}$$

الإثبات:

ليكن $J = \{i_1,\dots,i_n\}$ عنصراً من $\mathcal{M}$ بحيث $|J| = r$ أصغري (minimal) في $\mathcal{M}$.

بما أن كل وحيد حد m_j يحوي قوة ما لمتغير ما x_{iK} $(1 \le K \le r)$ فيكون الفضاء الإحداثي الجزئي $W = V(x_{i1},\dots,x_{ir})$ محتوى في $V(I)$ و إن بعد W هو:

$$\dim W = n - r = n - |J|$$

وعليه فإن $\dim V(I)$ على الأقل يساوي $n - |J|$ إذا كان بعد $V(I)$ أكبر من $n - r$ عندئذ يوجد $s < r$ بحيث يوجد فضاء إحداثي جزئي W': $W' = V(x_{K1},\dots,x_{Ks})$ محتوى في $V(I)$، كل وحيد حد w_j يجب أن ينعدم على W'، وبالتالي ينعدم عند النقطة $p \in W'$ والتي مركبتها K_i تساوي صفر لكل $1 \le i \le s$ وبقية المركبات تساوي 1، إذن على الأقل واحد من x_{Ki} يقسم m_j، وينتج عن ذلك أن:

$J' = \{K_2,\dots,K_s\} \in \mathcal{M}$ وبما أن $|J'| = s < r$، فإن هذا يتناقض مع كون r أصغري إذن:

$$\dim V(I) = n - \min |J|$$

مثال:

ليكن المثالي:

$$I = < x_2^2x_3^3, x_1^5x_3^4, x_1^2x_2x_3^2 > = <m_1,m_2,m_3>$$

حيث: $m_1 = x_2^2x_3^3, m_2 = x_1^5x_3^4, m_3 = x_1^2x_2x_3^2$

باستخدام الرموز التي أشرنا إليها قبل المبرهنة:

$$M_1 = \{2,3\},\ M_2 = \{1,3\}\ ,\ M_3 = \{1,2,3\}$$

و

$$\mathcal{M} = \{\{1,2,3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{3\}\}$$

إذن $\min|J| = 1$ حيث $J \in \mathcal{M}$.

وبالتالي فإن $\dim V(I) = 3 - 1 = 2$.

٣ – ٥ – النفخ: Blowing – up

عرفنا فيما سبق النقاط الشاذة، والمجموعة الجبرية الشاذة والتي تسمى الشذوذات singularity، ولإزالة شذوذية ما فإننا نستخدم تقنية النفخ لإزالة الشذوذ، وهو ما يسمى حلول أو تفكيك الشذوذية (Resolution).

٣ – ٥ – ١ – تعريف:

يُعرف نفخ الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^n$ عند المبدأ $0 = (0,\ldots,0)$ على أنه المتنوعة الجزئية المغلقة $B \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ المعطاة بـ:

$$B = \{((a_1,\ldots,a_n), (b_1:,\ldots,:b_n)) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : a_ib_j = a_jb_i\ ,\ \forall\ i,j\}$$

نفسر ذلك هندسياً كما يلي:

إذا عبرنا عن $\mathbb{P}^{n-1}$ على أنها المتنوعة المكونة من المستقيمات $L \subset \mathbb{A}^n$ المارة بالمبدأ O عندئذ يمكن إعادة كتابة B على النحو الآتي:

$$B = \{(p,L) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : p \in L\}$$

أي إن V مكونة من الأزواج (point, line) بشرط وقوع النقطة على المستقيم.

- النفخ B متنوعة جزئية مغلقة ($B \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$).

لتوضيح ذلك نأخذ الإحداثيات $(x_1,\ldots,x_n)$ على $\mathbb{A}^n$ والإحداثيات $(y_1:\ldots:y_m)$ على $\mathbb{P}^{n-1}$، ولنفرض $U_i \subset \mathbb{P}^{n-1}$، $(1 \le i \le n)$ مجموعة جزئية أفينية مفتوحة معطاة بـ $y_i \neq 0$ عندئذ يوجد تماثل $U_i \cong \mathbb{A}^n$ معرف بـ:

$$(b_1: \ldots : b_n) \mapsto \left(\frac{b_1}{b_i},\ldots,\frac{b_{i-1}}{b_i},\frac{b_{i+1}}{b_i},\ldots,\frac{b_n}{b_i}\right)$$

وباستخدام الإحداثيات $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ على U_i نجد $B \cap (\mathbb{A}^n \times U_i)$ هي المتنوعة الجزئية المغلقة من $\mathbb{A}^n \times U_i \cong \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n-1}$ والمعطاة بالمعادلات: $x_j = x_i y_j$ لكل j إذن: $B \cap (\mathbb{A}^n \times U_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ وهو التماثل المعرف بـ:

$$((a_1,\ldots,a_n)(b_1: \ldots : b_n)) \mapsto \left(\frac{a_i b_1}{b_i},\ldots,\frac{a_i b_{i-1}}{b_i}, a_i, \frac{a_i b_{i+1}}{b_i},\ldots,\frac{a_i b_n}{b_i}\right)$$

وبما أن $B \cap (\mathbb{A}^n \times U_i) \cap (\mathbb{A}^n \times U_j)$ غير خالية لكل i,j فينتج أن B غير خزولة.

• نرمز بـ $\Pi : B \to \mathbb{A}^n$ لتطبيق الإسقاط (تشاكل الإسقاط) ونلاحظ أنه تماثل خارج المبدأ O أي:

$$\Pi : B \setminus \Pi^{-1}\{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$$

والمجموعة $E = \Pi^{-1}\{0\}$ هي كامل الفضاء $\{0\} \times \Pi^{P^{n-1}}$ وهي كما أسلفنا متنوعة المستقيمات في $\mathbb{A}^n$ المارة بالمبدأ O وتسمى E المحل الاستثنائي (exceptional locus).

٣ – ٥ – ٢ – تعريف:

لتكن $X \subset \mathbb{A}^n$ متنوعة جزئية مغلقة بحيث $O \in X$، وليكن $\Pi: B \to \mathbb{A}^n$ نفخاً لِـ $\mathbb{A}^n$ عند O، عندئذ فإن نفخ X عند O هي المتنوعة الجزئية $\widetilde{X} \subset B$ والتي هي لصاقة $\Pi^{-1}(X\setminus\{0\})$ في B.

نلاحظ أن Π يُعرّف تماثلاً $\Pi^{-1}(X\setminus\{0\}) \xrightarrow{\sim} X\setminus\{0\}$ وبشكل خاص فإن $\widetilde{X}$ غير خزولة لأنها لصاقة $\Pi^{-1}(X\setminus\{0\})$ وبالتالي فهي متنوعة جزئية مغلقة في B.

• تكمن فكرة النفخ في أننا نغيّر X في المبدأ O، ونترك X\{0} بدون تغيير، وبالتالي تصبح $\widetilde{X}$ أقل شذوذاً من X.

٣ – ٥ – ٣ – مثال:

ليكن $X \subset \mathbb{A}^2$ منحنياً معرفاً بـ: $y^2 = x^2 (x + 1)$، ونلاحظ أن المبدأ O هو النقطة الشاذة الوحيدة في X.

باستخدام (t:u) كإحداثيات متجانسة على $\mathbb{P}^1$ عندئذ يُعطى النفخ $B \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ بالمعادلة $xu = yt$ ولنحسب النفخ $\widetilde{X}$ على جزئين بشكل منفصل.

الجزء الأول: (ما يسمى أيضاً الخريطة الأولى الأفينية)

من أجل $t \neq 0$ ويمكن أخذ $t = 1$، وفي هذه الحالة فإن الإجراء يتم داخل المتنوعة $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^3$ والإحداثيات (x,y,v) ويُعطى B بالمعادلة $y = xv$ وبالتالي فإن $B \cong \mathbb{A}^2$ بإحداثيات (x,v) وتشاكل الإسقاط $B \to \mathbb{A}^2$ يُعطى بـ $(x,v) \mapsto (x,xv)$، وبتعويض العلاقة $y = xv$ في معادلة X نحصل على $x^2v^2 = x^2(x + 1)$، وهذا يعني أن $\pi^{-1}(X)$ على هذا الجزء تملك مركبتين غير خزولتين الأولى E_1 الناتجة عن النقاط التي من أجلها $x = 0$ و v اختياري ومركبة ثانية غير خزولة تعطى بالعلاقة $v^2 = x + 1$. المركبة الأولى تقع في المبدأ O وعليه فإن $\widetilde{X}$ المعرفة على أنها لصاقة $\Pi^{-1}(X\backslash\{0\})$ تقطع هذا الجزء (هذه الخريطة) في المتنوعة $\widetilde{X}_1 \subset \mathbb{A}^2$ المعرفة بـ $v^2 = x + 1$.

الجزء الثاني (الخريطة الثانية):

وهذا يتعين عند $v \neq 0$ ويمكن أخذ $v = 1$، وبذلك يتم الإجراء داخل المتنوعة $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^3$ بإحداثيات (x,y,t)، ويعطى النفخ B بالمعادلة: $x = yt$، وبالتالي $B \cong \mathbb{A}^2$ والإحداثيات (y,t)، ويعطى تشاكل الإسقاط $B \to \mathbb{A}^2$ بـ $(y,t) \mapsto (yt,y)$ وبتعويض العلاقة $x = yt$ في معادلة X نحصل على $y^2 = y^2t^2(yt + 1)$، وهذا يعني أن $\Pi^{-1}(X)$ على هذه الخريطة تملك مركبتين غير خزولتين الأولى E_2 تنتج من النقاط التي من

أجلها $y = 0$ و t اختياري، والثانية تعطى بالعلاقة $1 = t^2 (yt + 1)$. ولكن E_2 تقع في المبدأ O وعليه فإن $\widetilde{X}$ تقطع هذه الخريطة في المتنوعة الجزئية $\widetilde{X}_2 \subset \mathbb{A}^2$ حيث $\widetilde{X}_2$ معطاة بـ: $1 = t^2(yt + 1)$.

أخيراً بدمج $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2$ نحصل على النفخ $\widetilde{X}$.

بعد هذا الدمج نلاحظ أن المركبتين E_1, E_2 تعطيان المحل الاستثنائي $E \cong \mathbb{P}^1$.

بالإضافة لما سبق كل من الاحتواءين $\widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}$، $\widetilde{X}_2 \to \widetilde{X}$ يشكل تماثلاً، كما أن $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2$ لا تحوي نقاطاً شاذة، وعليه فإن $\widetilde{X}$ غير شاذة، وبالفعل فإن:

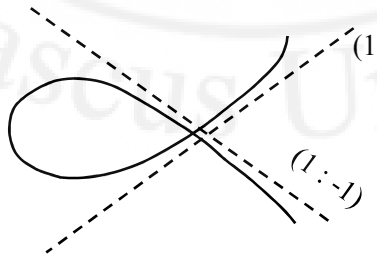
$$\widetilde{X} \cong \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \backslash \{(0:1)\}$$

بموجب الإسقاط $B \to \mathbb{P}^1$.

• الصورة العكسية الكاملة $\Pi^{-1}(X)$ هي اجتماع $\widetilde{X} \cup E$، ولأننا نهتم بالنفخ $\widetilde{X}$ فقط نرى لماذا عرفنا $\widetilde{X}$ على أنها لصاقة $\Pi^{-1}(X\backslash\{0\})$، وبهذه الطريقة نتخلص من المركبة الزائدة E.

• يوضح هذا المثال السبب لاعتبار $E \cong \mathbb{P}^1$ على أنه مجموعة المستقيمات في $\mathbb{A}^2$ المارة بالمبدأ.

• النفخ $\widetilde{X}$ يقطع E في نقطتين $(1 : 1)$، $(-1 : 1)$، وهذا يقابل الاتجاهين المماسين لـ X عند المبدأ، كما هو موضح بالشكل:



٣ – ٥ – ٤ – مثال:

ليس صحيحاً دوماً أن نفخ نقطة شاذة ينتج عنه متنوعة غير شاذة، ولكن يمكن حل أو تفكيك الشذوذات بمتتالية منتهية من عمليات النفخ ولتوضيح ذلك لنأخذ حقلاً مميزه يساوي صفر ولتكن الأعداد الصحيحة $2 \geq n < m$ ولنأخذ المتنوعة الأفينية (المنحني الأفيني) $X \subset \mathbb{A}^2$ المعرف بالمعادلة: $y^2 = x^m + x^n$.

إذا حسبنا $\widetilde{X}$ كما في المثال السابق نجد أن $\widetilde{X}_2$ على الخريطة الثانية يعطى بـ $1 = y^{m-2}t^m + y^{n-2}t^n$، وهذه ليست شاذة، أما على الخريطة الأولى نحصل على معادلة جديدة: $v^2 = x^{m-2} + x^{n-2}$ تعبر عن $\widetilde{X}_1$. ومن أجل $n \geq 4$ فهذه لاتزال شاذة، لكن هذه المعادلة الناتجة هي من نفس نوع المعادلة التي تعرف X ولكن بقوة أصغر (الأسس هنا أصغر)، لذلك نكرر نفس الإجراء على $\widetilde{X}_1$.

وبعد عدد معين من عمليات النفخ مقداره $\left[\frac{n}{2}\right]$ نحصل على منحنٍ غير شاذ.

٣ – ٥ – ٥ – مثال:

ليكن السطح الأفيني $X \subset \mathbb{A}^3$ المعرف بالمعادلة: $z^2 = x^2 + y^3$ (نفرض مميز الحقل $\neq 2$) والذي يملك نقطة شاذة وحيدة هي المبدأ $O = (0,0,0)$. المطلوب إجراء عملية نفخ لـ X عند O.

الحل:

نأخذ الإحداثيات المتجانسة $(t : u : v)$ على $\mathbb{P}^2$ ونفرض $B \subset \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2$ تعطى بالعلاقات:

$$xu = yt \, , \, xv = zt \, , \, yv = zu$$

ولحساب النفخ $\widetilde{X}$ فإننا نعمل على ثلاث خرائط مختلفة:

الأولى: $t \neq 0$ (نضع $t = 1$) ونعمل عندئذ في $\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2$ وتكون $B \cong \mathbb{A}^3$ معرفة بـ $y = xu, z = vx$ وبتعويض ذلك في معادلة X نحصل على $x^2v^2 = x^2 + x^3u^3$ والنقاط

التي من أجلها $x = 0$ تقع على النقطة الشاذة O، لذلك فإن نفخ X يقطع هذه الخريطة في السطح $\widetilde{X}_1$ والمعطى (داخل $\mathbb{A}^3$ بالإحداثيات (x, u, v) بالمعادلة $v^2 = 1 + xu^3$ وهذا سطح غير شاذ.

الثانية: $u \neq 0$ نحصل على العلاقتين $x = yt,\ z = yv$ ونعمل داخل $\mathbb{A}^3$ بإحداثيات (y,t,v) ونجد $\widetilde{X}_2$ تعطى بـ $v^2 = t^2 + y$ وهذا سطح غير شاذ أيضاً.

الثالثة: $v \neq 0$ نحصل على العلاقات: $x = zt,\ y = zu$ ونعمل داخل $\mathbb{A}^3$ بإحداثيات (z,t,u) ونجد $\widetilde{X}_3$ معرفة بـ $1 = t^2 + zu^3$ وهو أيضاً غير شاذ.

وبدمج القطع الأفينية $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ نجد $\widetilde{X}$ وهي تقطع الحل الاستثنائي $E \cong \mathbb{R}^2$ بالمستقيمين $v = \pm t$.

*** انتهى الفصل الثالث ***

تمارين الفصل الثالث

١ – ليكن K حقلاً والتطبيق:

$$\varphi : K[x_1, \ldots, x_n] \to K^k$$

$$\forall\, f \in K[x_1,\ldots,x_n] : \varphi(f) = \left(\widetilde{f} : K^n \to K; (p_1,\ldots,p_n) \mapsto f(p_1,\ldots,p_n)\right)$$

حيث:

$$K^k := \{\, \widetilde{f} : K^n \to K, \widetilde{f}(p_1,\ldots,p_n) = f(p_1,\ldots,p_n) \,\}$$

المطلوب:

١) بيّن فيما إذا كان φ تقابلاً.

٢) إذا كان $\#K = \infty$ (K غير منتهٍ)، فإن φ تقابل.

٢ – ليكن K حقلاً غير منتهٍ و $V_1 = V(y - x^2)$، $V_2 = V(xy - 1)$ متنوعات أفينية في $\mathbb{A}^2 k$.

أثبت أن: ١) $\dfrac{K[x,y]}{I(V_1)} \cong K[t]$

٢) $\dfrac{K[x,y]}{I(V_2)} \cong K[t, \dfrac{1}{t}]$

٣ – ليكن $T = \dfrac{\mathbb{R}}{<y^2 - x^2 - x^3>}$ حلقة الخارج، بيّن فيما إذا كان $T \cong \mathbb{R}[t]$.

٤ – ليكن $I = <xy - 1>$ مثالي في حلقة كثيرات الحدود $K[x,y]$

و $V = V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^n k$ متنوعة أفينية.

والتطبيق $\varphi : V \to \mathbb{A}^1 k$ المعرَّف بالعلاقة:

$$\forall\, p = (p_1,p_2) \in V : \varphi(p) = p_1$$

المطلوب:

١) أوجد $I(X)$، حيث $X = Im(\varphi)$ الصورة المباشرة.

٢) بيّن فيما إذا كان $X = V(I(X))$.

٥ – ليكن $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n k$ متنوعة أفينية متولدة بالمثالي I

و $f_1, f_2, \ldots, f_t \in K[x_1, \ldots, x_n]$ حدوديات.

١) أثبت أن التطبيق:

$$\varphi : X \to \mathbb{A}^t k$$
$$p \mapsto (f_1(p), \ldots, f_t(p))$$

مستمر (بالنسبة لتبولوجيا Zariski).

* تذكرة: نقول عن تطبيق إنه مستمر إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة.

٦ – لتكن $X = \{(s,t) \in \mathbb{A}^2 k : t = s^2, t - 1 \neq 1\}$ مجموعة من أجل حقل:

$K \in \{ {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}, \mathbb{C} \}$.

بيّن فيما إذا كانت X متنوعة أفينية جزئية من $\mathbb{A}^2 k$

٧ – ليكن $X = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{A}^4 k$، حيث K حقل، و $U = X \setminus (V(y) \cap V(z))$

والتطبيق $\varphi : U \to K$ المعرَّف بالعلاقة:

$$\forall (x, y, z, w) \in U : \varphi(x, y, z, w) = \begin{cases} \frac{x}{z} \text{ if } z \neq 0 \\ \frac{w}{y} \text{ if } z = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

١) أثبت أن φ منتظم (regular).

٢) بيّن أنه لا يوجد حدوديات مثل $f, g \in K[x,y,z,w]$ تحقق $g(p) \neq 0$ من أجل كل $p \in U$ و $\varphi \cong \left.\frac{f}{g}\right|_U$ عند U.

* تذكرة: يُسمى التطبيق φ منتظماً (regular) إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\, p \in U : \exists\, V \subseteq U, f, g \in K[x]$$

حيث $p \in V$ و V مجموعة مفتوحة، تحقق:

$$\forall\, q \in V : g(q) \neq 0\ ,\ \varphi(q) = \frac{f(q)}{g(q)}$$

٨ – ليكن K حقلاً ما، و $X = V(x^2 - y^2) \subseteq \mathbb{A}^2 k$ متنوعة أفينية.

المطلوب:

١) أثبت أن التطبيق $\varphi: \mathbb{A}^1 k \to \mathbb{A}^2 k$ المعرَّف بالعلاقة:

$$\forall\, t \in \mathbb{A}^1 k : \varphi(t) = (t^3, t^2)$$

تشاكل في $\mathbb{A}^1 k$ إلى المتنوعة X^-، ثم بيّن فيما إذا كان φ تماثلاً.

٢) في حالة $K = \mathbb{R}$، بيّن فيما إذا كان التطبيق $\psi : X \to \mathbb{A}^1 k$ المعرَّف بالعلاقة:

$$\forall\, (x,y) \in X : \psi\,(x,y) = x$$

تماثلاً.

٩ – اشرح عملية النفخ (blow – up) للمنحنيات التالية:

١) $x_1^{k+1} + x_2^2$ حيث $k \geq 1$.

٢) $x_1^a + x_2^b$ حيث $\gcd(a,b) = 1$.

الفصل الرابع (٤)

الفضاء الإسقاطي والمتنوعات الإسقاطية

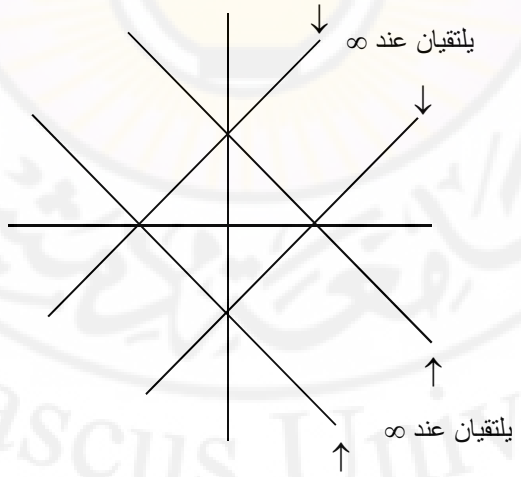
Projective Space and Projective Varieties

إن المجموعات الجبرية أو المتنوعات التي تم دراستها حتى الآن كانت مجموعات جزئية من فضاء أفيني $\mathbb{A}^n(\mathrm{K}) = \mathrm{K}^n$.

سوف نوسع $\mathbb{A}^n(k)$ بإضافة «نقاط محددة في ∞» لتكوين الفضاء الإسقاطي $\mathbb{P}^n$ وندرس النسخة الإسقاطية للعلاقة بين الهندسة والجبر.

٤ – ١ – المستوى الإسقاطي:

سوف ندرس أولاً المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ المعرف على الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$. نلاحظ بداية أن أي مستقيمين في المستوي $\mathbb{R}^2$ يلتقيان في نقطة إلا إذا كانا متوازيين، عندئذ نقول إن المستقيمات المتوازية تلتقي في نوع معين من النقاط عند اللانهاية ∞.



ولتقريب هذه الفكرة بشكل دقيق سوف نعرف علاقة تكافؤ على مجموعة مستقيمات المستوي كما يأتي:

نقول إن $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow L_1 \,||\, L_2$، وبالتالي فإن صف التكافؤ [L] يتكون من جميع المستقيمات التي توازي L.

هذا الإجراء يوجب علينا إدخال نقطة في ∞ لكل صف تكافؤ [L]. وبالتالي فإننا نعرف المستوي الإسقاطي كما يلي:

٤ – ١ – ١ – تعريف:

يُعرف المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ على الحقل على أنه:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{نقطة في } \infty \text{ لكل صف تكافؤ للمستقيمات المتوازية}\}$$

والآن لنرمز بـ $[L]_\infty$ للنقطة المشتركة في ∞ لكل المستقيمات الموازية L. عندئذ نسمي المجموعة $\overline{L} = L \cup [L]_\infty \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ المستقيم الإسقاطي الذي يقابل L. وتجدر ملاحظة أن أي مستقيمين إسقاطيين يلتقيان تماماً في نقطة واحدة في $\mathbb{R}^2$ إذا لم يكونا متوازيين وإذا كانا متوازيين فإنهما يلتقيان في نقطة اللانهاية المشتركة.

سوف نناقش فيما يلي مقاربة أخرى لمفهوم المستوي الإسقاطي.

٤ – ١ – ٢ – الإحداثيات المتجانسة: Homogeneous coordinates

ليكن المستوي الأفيني $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$، ولتكن النقطة $P(x_1,x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ نأخذ مجموعة الثلاثيات $S = \{(y_0,y_1,y_2)\}$ حيث $y_0 \neq 0$ وحيث $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. ننشئ مقابلة بين مجموعة الثلاثيات S ونقاط المستوي $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ بالشكل الآتي:

$$P(x_1,x_2) \xleftrightarrow{\text{تقابل}} (y_0,y_1,y_2) \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0}\ ,\ x_2 = \frac{y_2}{y_0}\ \ (y_0 \neq 0) \qquad (1)$$

أي إن كل ثلاثية $(y_0,\ y_1,\ y_2)$ يقابلها نقطة وحيدة $(x_1,x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$، ومن جهة ثانية إذا حققت الأعداد x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 العلاقة (1) فإن الأعداد:

$x_1, x_2, \lambda y_0, \lambda y_1, \lambda y_2$ تحقق العلاقة (1) لكل $\lambda \in \mathbb{R}^*$، وهذا يعني أنه يقابل كلّ نقطةٍ $(x_1, \quad x_2)$ عددٌ غير منتهٍ من الثلاثيات (y_0,y_1,y_2)، فإذا فرضنا أن الثلاثيات (y_0,y_1,y_2) و (z_0,z_1,z_2) تقابل النقطة (x_1,x_2) فعندئذ:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{z_1}{z_0} \ , \ x_2 = \frac{y_2}{y_0} = \frac{z_2}{z_0} \qquad (y_0 \neq 0, z_0 \neq 0)$$

فإذا وضعنا $z_0 = \lambda y_0$ نجد $z_1 = \lambda y_1, z_2 = \lambda y_2$.

إذن عندما تقابل الثلاثية (y_0,y_1,y_2) نقطة ما $(x_1,x_2) \in \mathbb{A}^2$ فإن مجموعة الثلاثيات $\{(\lambda y_0, \lambda y_1, \lambda y_2) : \lambda \neq 0\}$ تقابل (x_1,x_2) أيضاً.

تعريف (١): نسمي الثلاثية (y_0,y_1,y_2) الإحداثيات المتجانسة للنقطة $p(x_1,x_2)$ ونرمز للإحداثيات المتجانسة بـ $[y_0 : y_1 : y_2]$ لأن النسبة $\frac{y_i}{y_0}$ هي المهمة.

تعريف (٢): تسمى الثلاثية $[y_2 : y_1 : 0]$ (حيث أحد المتغيرين y_2, y_1 على الأقل لا يساوي صفر) نقطة افتراضية أو نقطة في اللانهاية ∞.

ملاحظة: لا توجد أي نقطة من $\mathbb{A}^2$ تقابل الثلاثية $[0 : 0 : 0]$.

تعريف (٣): تتساوى النقطتان $[y_2 : y_1 : 0]$، $[0 : z_1 : z_2]$ إذا وجد $\lambda \neq 0$ حيث $z_1 = \lambda y_1$، $z_2 = \lambda y_2$.

تعريف (٤): إذا أضفنا للمستوي الأفيني $\mathbb{A}^2$ النقاط الافتراضية (نقاط اللانهاية ∞) فإننا نحصل على المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2$ أي إنّ:

$\mathbb{P}^2 = \{[y_0 : y_1 : y_2]$: حيث أحد هذه المتغيرات على الأقل لا يساوي الصفر $\}$

وهذه وجهة نظر أخرى لتعريف المستوي الإسقاطي وهي متطابقة مع التعريف السابق.

٤ – ٢ – معادلة المستقيم في $\mathbb{P}^2$:

ليكن L مستقيماً في $\mathbb{A}^2$ معرفاً بالمعادلة:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \ ; \ \left(a_1^2 + a_2^2 \neq 0\right) \qquad (2)$$

ندخل الإحداثيات المتجانسة إلى (2) حيث $x_1 = \frac{y_1}{y_0}, x_2 = \frac{y_2}{y_0}$ فتصبح العلاقة (2) من الشكل:

$$a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0 \qquad (3)$$

إذن تقع النقطة ذات الإحداثيات المتجانسة $[y_0 : y_1 : y_2]$ حيث $y_0 \neq 0$ على المستقيم L إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها المعادلة (3). لنرى ما إذا كانت هناك نقطة في ∞ $[0:y_1: y_2]$ من المستوي $\mathbb{P}^2$ تحقق (3)، أي لنبحث عن ثلاثية من الشكل $[y_0:y_1: y_2]$ حيث $y_0 = 0$ و $y_1^2 + y_2^2 \neq 0$ بحيث:

$$a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0 \qquad (4)$$

وبما أن $y_0 = 0$ فإن (4) تصبح $a_1y_1 + a_2y_2 = 0$.

وبما أن a_1, a_2 أحدهما على الأقل لا يساوي صفر ولنفرض $a_1 \neq 0$ فنحصل على $y_1 = \frac{-a_2}{a_1}y_2$ أي:

$$y_1 = \lambda y_2 \qquad (5) \quad \left(\text{أخذنا } \lambda = \frac{-a_2}{a_1}\right)$$

فإذا اخترنا y_2 عشوائياً بحيث $y_2 \neq 0$ نجد أن النقطة الافتراضية $[y_2 : y_1 : 0]$ تحقق المعادلة (3)، وهذه النقطة وحيدة لأنه لو كانت $[y'_2 : y'_1 : 0]$ تحقق (3) أيضاً سيكون $y'_1 = \mu y'_2$ وبالتالي يوجد $\mu \neq 0$ بحيث: $y_2 = \mu y'_2 , y_1 = \mu y'_1$.

أي: $[y_2 : y_1 : 0]$، $[y'_2 : y'_1 : 0]$ تمثلان النقطة الافتراضية ذاتها.

• لذلك نقول إنه إذا حققت نقطة افتراضية (نقطة ∞) المعادلة (3) فإننا نعدّ هذه النقطة الافتراضية نقطة من المستقيم L.

مما سبق نجد أنه على كل مستقيم توجد نقطة افتراضية (∞) وحيدة.

• إن توسيع المستقيم الأفيني (1) بإضافة نقطته الافتراضية يعطينا مستقيماً، نسميه المستقيم الإسقاطي $\mathbb{P}^1$ أي:

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$$

• بالعودة إلى المعادلة (3)، إذا تخلينا عن الشرط $\left(a_1^2 + a_2^2 \neq 0\right)$ وليكن $a_1 = a_2 = 0$ عندئذ تكتب هذه المعادلة بالشكل:

$$a_0 y_0 = 0 \qquad (6)$$

فإذا كان $a_0 \neq 0$ فإن (6) تتحقق من أجل $y_0 = 0$.

أي أن (6) تتحقق فقط من أجل النقاط الافتراضية في $\mathbb{P}^2$.

٤ – ٢ – ١ – تعريف:

تسمى مجموعة النقاط الافتراضية للمستوي $\mathbb{P}^2$ بالمستقيم الافتراضي لهذا المستوي.

ويمكن التحقق من صحة القضايا الآتية:

قضية (١): إذا كان أحد الثوابت $a_0,\ a_1,\ a_2$ على الأقل غير معدوم فإن كل معادلة متجانسة:

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

تمثل مستقيماً في المستوي $\mathbb{P}^2$.

قضية (٢): من نقطتين مختلفتين في المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2$ يمر مستقيم وحيد (كما هو في المستوي الأفيني).

قضية (٣): تقاطع مستقيمين متوازيين هو نقطة افتراضية.

قضية (٤): في $\mathbb{P}^2$ أي مستقيمين إسقاطيين مختلفين يتقاطعان في نقطة وحيدة.

٤ – ٣ – الفضاء الإسقاطي: (وجهة نظر أخرى)

٤ – ٣ – ١ – تعاريف أساسية:

تعريف (١): ليكن V فضاء شعاعياً، نعرف الفضاء الإسقاطي $\mathbb{P}(V)$ لـ V على أنه مجموعة الفضاءات الشعاعية الجزئية وحيدة البعد من V:

$$\mathbb{P}(V) = \{U : \dim U = 1, \text{ U فضاء شعاعي جزئي من V}\}$$

تعريف (٢): إذا كان V فضاءاً شعاعياً، $\dim V = n + 1$ يعرف بعد الفضاء الإسقاطي $\mathbb{P}(V)$ على أنه $\dim \mathbb{P}(V) = n$.

بالإضافة لما سبق هناك مقاربة لمعرفة الفضاء الإسقاطي.

- إن أي فضاء جزئي وحيد البعد من الفضاء V هو مجموعة مضاعفات متجه غير صفري $u \in V \neq 0$ وعندها يمكن القول إن u متجه يمثل النقطة $[u] \in \mathbb{P}(V)$، من الواضح أن λu $(\lambda \neq 0)$ ممثل آخر وبالتالي $[u] = [\lambda u]$ (صف تكافؤ).
- لو اخترنا قاعدة $\{u_0,\ldots,u_n\}$ للفضاء V عندئذ $\forall u \in V$ فإن $u = \sum_{i=0}^{n} x_i u_i$ وتكون $(x_0,\ldots,x_n)$ ممثلة لإحداثيات u بالنسبة لهذه القاعدة.

فإذا كان $u \neq 0$ فإن النقطة التي تقابله في الفضاء الإسقاطي $[u] \in \mathbb{P}(V)$ تكتب بالشكل: $[u] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ وهذه سبق أن دعوناها الإحداثيات المتجانسة للنقطة [u] من أجل $\lambda \neq 0$ فإن:

$$[\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$$

- لتكن $U_0 \subset \mathbb{P}(V)$ مجموعة جزئية ذات إحداثيات متجانسة $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ حيث $x_0 \neq 0$.

(لأنه إذا كان $\lambda \neq 0$ فإن $x_0 \neq 0$ إذا وفقط إذا كان $\lambda x_0 \neq 0$ إذن U_0 مجموعة جزئية معرفة جيداً أي إنها مستقلة عن اختيار الإحداثيات المتجانسة $x_0, x_1, \ldots, x_n$).

إذن يمكن تمثيل أي نقطة في U_0 بشكل وحيد بإحداثيات من الشكل $[1 : y_1 : \ldots : y_n]$ ومنه فإن $U_0 \cong \mathbb{A}^n(k)$ والنقاط المفقودة، هي تلك النقاط التي من أجلها $x_0 = 0$ ولكن هذه هي الفضاءات الجزئية ذات البعد 1 من الفضاءات الشعاعية الجزئية ذات البعد n والمولدة بـ $u_1,\ldots,u_n$ وهي فضاء إسقاطي ذات بعد أصغر بـ 1 أي إنّ:

$$\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \cup \mathbb{P}^{n-1}(k)$$

٤ – ٣ – ٢ – الفضاءات الجزئية الخطية:

تعريف (١): يعرف الفضاء الخطي الجزئي من الفضاء الإسقاطي $\mathbb{P}(V)$ على أنه مجموعة الفضاءات الشعاعية الجزئية أحادية البعد من الفضاء الشعاعي الجزئي $U \subseteq V$.

وبالعودة إلى القضايا الواردة في الفقرة (٤ – ٢) والتي نعيد كتابتها وإثبات صحتها على النحو الآتي:

قضية (١) /مبرهنة/: من نقطتين مختلفتين في فضاء إسقاطي يمر مستقيم وحيد.

الإثبات:

ليكن $\mathbb{P}(V)$ فضاء إسقاطياً ولتكن النقطتان $x,y \in \mathbb{P}(V)$ $(x \neq y)$.

ليكن u,v متجهين يمثلان x,y فيكون u,v مستقلين خطياً لأنه لو كانا مرتبطين لكان $u = \lambda v$ $(\lambda \neq 0)$ وبالتالي $x = [u] = [\lambda v] = [v] = y$.

فإذا كان $U \subseteq V$ فضاء شعاعي جزئي ثنائي البعد مولد بـ u, v فيكون $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V)$ مستقيماً إسقاطياً يحوي كلاً من x,y.

ولنفرض $\mathbb{P}(U')$ مستقيماً إسقاطياً آخر يحوي x,y عندئذ يوجد $u,v \in U'$، وبالتالي فالفضاء المولد بـ u,v (أي U) سيكون فضاء جزئياً من U'، ولكن كل من U, U' ثنائي البعد وبالتالي $U = U'$.

قضية (٢)/ مبرهنة: أي مستقيمين إسقاطيين مختلفين في $\mathbb{P}^2$ يتقاطعان في نقطة وحيدة.

الإثبات:

ليكن $\mathbb{P}(V)$ المستوي الإسقاطي حيث $\dim V = 3$. إن أي مستقيمين إسقاطيين يُعرفان بـ $\mathbb{P}(U_1)$, $\mathbb{P}(U_2)$ حيث U_1, U_2 فضاءان شعاعيان جزئيان مختلفان وبعد كل منهما = 2. نعلم من الجبر الخطي أن:

$$\dim V \geq \dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$$

إذن: $3 \geq 2 + 2 - \dim (U_1 \cap U_2)$

وبالتالي $\dim (U_1 \cap U_2) \geq 1$ وكون بعد كل من U_1, U_2 يساوي 2 فإن:

$$\dim (U_1 \cap U_2) \leq 2$$

وعندما يكون $U_1 = U_2$ يكون (*) $\dim (U_1 \cap U_2) = 2$

وبما أن المستقيمين مختلفان فإن (*) غير محققة.

إذن $\dim (U_1 \cap U_2) = 1$ أي أن $U_1 \cap U_2 \subset V$ وحيد البعد فهي تمثل نقطة في $\mathbb{P}(V)$ وهو المطلوب.

٤ – ٤ – الفضاء الإسقاطي من البعد n:

٤ – ٤ – ١ – تعريف:

نعرف على $\mathbb{R}^3$ علاقة تكافؤ كما يلي:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^* : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$ (تحقق أن ~ علاقة تكافؤ).

وبالتالي ينتج عن هذه العلاقة صفوف تكافؤ وتعرف مجموعة صفوف التكافؤ على أنها المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

٤ – ٤ – ٢ – تعريف:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim$$

٤ – ٤ – ٣ – مبرهنة:

ليكن التطبيق: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$(x,y) \mapsto (x,y,1)$$

إن هذا التطبيق متباين ومتممة صورته هو مستقيم إسقاطي H_∞ معرف بـ $z = 0$.

الإثبات:

بفرض $(x,y)\ ,\ (x',y') \in \mathbb{R}^2$ وبفرض: $(x,y) \mapsto (x, y, 1)$ و $(x',y') \mapsto (x, y, 1)$

لكن:

$$(x,y) \mapsto (x',y')$$
$$(x',y') \mapsto (x', y', 1)$$

وبالتالي فإن $(\lambda \neq 0)\ (x, y, 1) = \lambda\ (x', y', 1)$

ومن العلاقة الأخيرة نجد $\lambda = 1$، إذن $(x,y) = (x',y')$ فالتطبيق متباين.

من جهة ثانية إذا كانت $[x : y : z]$ إحداثيات متجانسة للنقطة $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$، فإذا فرضنا $z = 0$ فإن P تقع على مستقيم إسقاطي H_∞.

أما إذا كان $z \neq 0$ فيمكن ضرب الإحداثيات المتجانسة بـ $\frac{1}{z}$ لنحصل على $\left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right]$ وهذه تعطي إحداثيات متجانسة لـ P أي إن P تقع في صورة التطبيق المعرف في هذه المبرهنة وهذه الصورة منفصلة عن H_∞ إذن:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty$$

ملاحظة: يعرف المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2$ على أنه مجموعة المستقيمات المارة من مبدأ الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^3$.

٤ – ٤ – ٥ – تعريف:

بشكل عام نعرف على الفضاء $\mathbb{A}_k^{n+1}$-{O} (O ترمز لمبدأ الفضاء) علاقة التكافؤ:

$$(x_0,x_1,\ldots,x_n) \sim ((y_0,y_1,\ldots,y_n)$$

إذا وفقط إذا وجد $0 \neq \lambda \in k$ بحيث:

$$(x_0,x_1,\ldots,x_n) = (\lambda y_0,\lambda y_1,\ldots,\lambda y_n)$$

٤ – ٤ – ٦ – يعرف الفضاء الإسقاطي من البعد n ($\mathbb{P}^n(k)$) على أنه مجموعة صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة «~» أي $\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{A}^{n+1}_{(k)} - 0)/\sim$.

ويرمز لصف تكافؤ العنصر (النقطة) $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ بـ $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ وتدعى هذه بالإحداثيات المتجانسة homogeneous coordinates.

٤ – ٤ – ٧ – ملاحظات أساسية:

لتكن $U_0 = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_0 \neq 0\}$

عندئذ: $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right]$ in U_0

إذن يوجد تقابل بين نقاط U_0 والفضاء $\mathbb{A}^n$ والمجموعة:

$$\mathbb{P}^n \backslash U_0 = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_0 = 0\}$$

هي نسخة من $\mathbb{P}^{n-1}$، لذلك نجد أن:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} \text{ (كمجموعات)}$$

حالات خاصة:

- عندما $n = 1$ فإن:

$$U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 : x_0 \neq 0\} = \{[1 : \frac{x_1}{x_0}] : x_1 \in K, x_0 \neq 0\} = \{[1 : x] : x \in K\}$$

إذن يمكن مطابقة U_0 مع $\mathbb{A}^1$ بواسطة التقابل:

$$[x_0 : x_1] \leftrightarrow \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{A}^1$$

أما $\mathbb{P}^1 \backslash U_0$ فإنه يُعطى بـ:

$$\mathbb{P}^1 \backslash U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 : x_0 = 0\} = \{[0 : x_1] : x_1 \in K^*\} = \{[0 : 1]\}$$

لأن $[0 : x_1] = [0 : 1]$ أياً كان $x_1 \in K^*$.

وبذلك يكون $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{P}^0$ حيث $\mathbb{P}^0$ تتكون من نقطة وحيدة.

يمكـن مطابقـة $\mathbb{A}^1$ مـع K ونرمـز للنقطـة الوحيـدة لـ $\mathbb{P}^0$ بـالرمز ∞ وبهـذا فـإن $\mathbb{P}^1 = K \cup \{\infty\}$ تعبير آخر عن $\mathbb{P}^1$ وهو المستقيم الإسقاطي الذي نتج في مطلع هذا الفصل عن إضافة نقاط في ∞ للمستقيم الأفيني.

•• عندما $n = 2$:

$$U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 \neq 0\}$$
$$= \{[1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}] : x_1, x_2 \in K, x_0 \in K^*\}$$
$$= \{[1 : x : y] : x,y \in K\}$$

إذن يمكن مطابقة U_0 مع $\mathbb{A}^2$ وفق:

$$[x_0 : x_1 : x_2] \leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \in \mathbb{A}^2$$

وتكون متممة U_0 هي:

$$\mathbb{P}^2 \backslash U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 0\}$$
$$= \{[0 : x_1 : x_2] : (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

وهذه تمثل نسخة من $\mathbb{P}^1$.

••• لفهم هذه الملاحظات نأخذ المثال الآتي:

ليكن المستقيمان المتوازيان (في $U_0 = \mathbb{A}^2$)

$$x + y = 0 \quad , \quad x + y - 2 = 0 \qquad (*)$$

فإذا أدخلنا إحداثيات متجانسة حيث $x = \frac{X_1}{X_0}, y = \frac{X_2}{X_0}$ وأعدنا كتابة المعادلتين (*) باستخدام الإحداثيات المتجانسة فإن (*) تصبحان من الشكل:

$$\frac{X_1}{X_0} + \frac{X_2}{X_0} = 0 \quad , \quad \frac{X_1}{X_0} + \frac{X_2}{X_0} - 2 = 0$$

وبضرب كل منهما بـ $X_0 \neq 0$ نجد:

$$X_1 + X_2 = 0 \quad , \qquad X_1 + X_2 - 2X_0 = 0$$

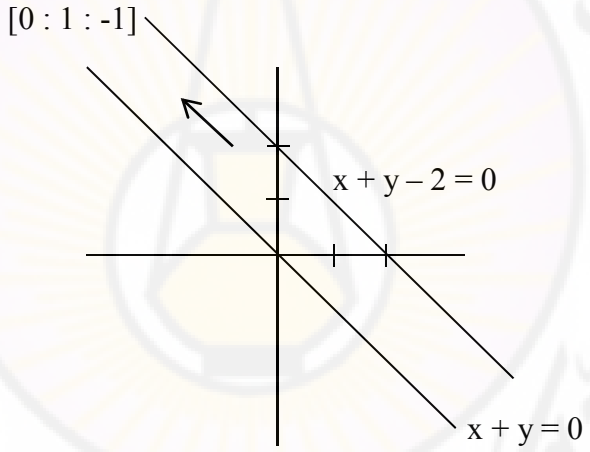
وحلول هذه ا لجملة من المعادلات الخطية هي:

$$X_0 = 0 \ , \ X_1 = - X_2$$

وهذه الحلول تقابل النقطة: $[0 : 1, -1] \in \mathbb{P}^1$

إذن هذان المستقيمان المتوازيان الواقعان في $U_0 = \mathbb{A}^2$ يتقاطعان في $\mathbb{P}^2 \backslash U_0$ وأي مستقيم آخر يوازيهما يحوي [1- : 1 : 0].

وبشكل مشابه فإن جميع المستقيمات التي شعاع توجيه كل منها $(X_1 \ , \ X_2)$ تتقاطع في $[0 : X_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \backslash U_0$.



وهذا صحيح من أجل n اختياري، فنقاط $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^n \backslash U_0$ تقابل توجيه مستقيمات في $\mathbb{A}^n$ أو صفوف تكافؤ المستقيمات المتوازية وإن النقطة $[0 : x_1 : \ldots : x_n]$ هي النقطة التي تلتقي عندها جميع المستقيمات التي شعاع توجيهها $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ في $\mathbb{A}^n$.

(وإن النقطة الوحيدة في $\mathbb{P}^0$ تقابل المستقيم الأفيني الوحيد $\mathbb{A}^1$) ولهذا السبب فإن هذه النقاط تسمى نقاط ∞ وهي ليست مختلفة إنما الاختلاف يرتبط في اختيار الإحداثيات.

٤ – ٥ – المتنوعات الإسقاطية:

٤ – ٥ – ١ – تعريف:

لتكن $f \in K[x_0,\ldots,x_n]$ حدودية نقول إن f حدودية متجانسة مندرجة كلية d إذا وجد $\lambda \in K^*$ بحيث:

$$f(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

ويمكن تعريف الحدودية المتجانسة من الدرجة d إذا كان كل حد فيها من الدرجة d أيضاً.

مثلاً:

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 - x_1^2 + x_2x_3$ حدودية متجانسة من الدرجة 2 بينما $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2x_3$ ليست متجانسة.

ملاحظة (١):

يمكن كتابة أي حدودية على شكل مجموع لأجزائها المتجانسة فنكتب مثلاً:

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_d$$

حيث F_0 حدودية من الدرجة 0 (ثابت)، F_1 حدودية من الدرجة 1 وهكذا.

ملاحظة (٢):

إن عكس التعريف (٤ – ٦ – ١) يتحقق إذا كان الحقل غير منتهٍ.

ومن أجل أي حقل (منتهٍ أو غير منتهٍ) يتحقق ما يلي:

f حدودية متجانسة من الدرجة d إذا وفقط إذا كانت:

$$f(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) - \lambda^d f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

حدودية صفرية في $K[x_0, x_1,\ldots,x_n, \lambda]$.

هدفنا الآتي هو توسيع تعريف المجموعات الجبرية الأفينية إلى المجموعات الجبرية الإسقاطية.

ولذلك يمكن طرح السؤال التالي: هل V(f) له معنى (معرف)؟ حيث $f \in K[x_0,\ldots,x_n]$ وللإجابة على ذلك لنأخذ المثال الآتي: في $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ لنأخذ $V(x_1 - x_2^2)$.

إن النقطة $P = [x_0: x_1:x_2] = [1:4: 2]$ تحقق المعادلة $x_1 - x_2^2 = 0$ أي $4 - (2)^2 = 0$، ولكن كما نعلم فإن $[2:8:4] = [1:4:2]$. 2 تمثل النقطة P أيضاً في $\mathbb{P}^2$ (تذكر أن النقاط في الفضاء الإسقاطي هي صفوف تكافؤ)، ونجد أن $[2:8:4]$ لا تحقق المعادلة $x_1 - x_2^2 = 0$ أي $8 - (4)^2 \neq 0$، لذلك كي نتجنب مثل هذه المشاكل فإننا نستخدم حدوديات متجانسة عندما ندرس مجموعات في فضاء إسقاطي $\mathbb{P}^n(k)$.

نلاحظ في هذا المثال أن f ليست متجانسة ولهذا وجدنا الاختلاف السابق، فإذا حولنا f إلى حدودية متجانسة بأن نضع $x_1 = \frac{x_1}{x_0}, x_2 = \frac{x_2}{x_0}(x_0 \neq 0)$ فإن:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_0} - \frac{x_2^2}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x_1x_0 - x_2^2 = 0$$

وهذه الأخيرة متجانسة من الدرجة 2 وهي تنعدم أياً كان ممثل P. (تحقق).

٤ – ٥ – ٢ – مبرهنة:

لتكن f حدودية متجانسة من الدرجة d في الحلقة $K[x_0,\ldots,x_n]$ عندئذ V(f) معرفة جيداً في $\mathbb{P}^n(k)$.

الإثبات:

إذا كانت $p \in \mathbb{P}^n(k)$ فإن $p = \lambda p$ $(\lambda \in K^*)$ وذلك من تعريف الإحداثيات المتجانسة.

فإذا كان $f(p) = 0$ (أي $p \in V(f)$) فإن $f(p) = 0 . \lambda^d$.

وكون f متجانسة فإن $f(\lambda p) = \lambda^d . f(p) = 0$

إذن f تنعدم عند p بغض النظر عن اختيار ممثل لصف التكافؤ للنقطة p.

إذن V(f) معرفة جيداً.

ملاحظة:

المعادلة $f = a$ حيث $0 \neq a \in K$ (ثابت غير صفري) ليس لها معنى في $\mathbb{P}^n(k)$ حتى وإن كانت f متجانسة.

٤ – ٥ – ٣ – تعريف:

ليكن K حقلاً ولتكن الحدوديات المتجانسة $f_1, \ldots, f_s \in K[x_0,\ldots,x_n]$.

إن مجموعة الأصفار المشتركة لهذه الحدوديات وهي:

$$V(f_1,\ldots,f_s) = \{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n(k) : f_i(a_0,\ldots,a_n) = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq s\}$$

تسمى المجموعة الجبرية الإسقاطية المعرفة بالحدوديات $f_1, f_2,\ldots,f_s$.

مثال:

في الفضاء الإسقاطي $\mathbb{P}^n(k)$ كل حدودية متجانسة من الدرجة الأولى:

$$f(x_0,\ldots,x_n) = c_0x_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

تعرف مجموعة جبرية إسقاطية V(f) تسمى فوق المستوي (hyperplane)، وقد رأينا في أمثلة سابقة فوق المستوي عند ∞ والذي كان يمثل $H = V(x_0)$، وعندما $n = 2$ نسمي V(f) المستقيم الإسقاطي أو مستقيم في $\mathbb{P}^2(k)$.

- المجموعات الإسقاطية المعرفة بحدودية متجانسة أو أكثر من الدرجة 1 تسمى مجموعات خطية أو متنوعات خطية في $\mathbb{P}^n(k)$.
- المجموعة الجبرية الإسقاطية V(f) المعرفة بحدودية متجانسة واحدة فقط تدعى فوق سطح (Hypersurface)، ويسمى فوق سطح تربيعي إذا كانت درجة الحدودية 2 أو تكعيبي إذا كانت الدرجة 3 وهكذا..

٤ – ٥ – ٤ – تمهيدية:

لتكن $U_0 = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) : x_0 \neq 0\}$

عندئذ يكون التطبيق:

$$\phi : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1 : a_1 : \ldots : a_n]$$

تقابلاً بين $\mathbb{A}^n$ و $U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$.

الإثبات:

بما أن المسقط الأول في صورة $(a_1,\ldots,a_n)$ لا يساوي صفر فيمكن أن نأخذ $\phi: \mathbb{A}^n \to U_0$ ويمكن تعريف تطبيق عكسي $\psi: U_0 \to \mathbb{A}^n$ كما يلي: إذا كانت النقطة $p = [x_0 : \ldots : x_n] \in U_0$، وبما أن $x_0 \neq 0$ فيمكن ضرب الإحداثيات المتجانسة بـ $\frac{1}{x_0}$ للحصول على $\left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0}\right]$ وبوضع $p = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0}\right] \in \mathbb{A}^n$ وبسهولة $\psi(p) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ يبرهن أن ψ معرف جيداً وأن كل من ϕ, ψ معكوس للآخر، إذن يوجد تقابل بين U_0 و $\mathbb{A}^n(k)$ وهو المطلوب.

ملاحظة:

من خلال تعريف U_0 نجد أن $\mathbb{P}^n(k) = U_0 \cup H$ حيث:

$$H = \{p \in \mathbb{P}^n(k) : p = [0 : x_1 : \ldots : x_n]\} \qquad (*)$$

إذا طابقنا U_0 مع $\mathbb{A}^n(k)$ فيمكن اعتبار H فوق مستوٍ عند اللانهاية. وعندها من (*) يمكن النظر إلى H على أنها نسخة من $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ (فضاء إسقاطي بعده أصغر بـ 1).

كي ندرك المجموعات الجبرية الإسقاطية أو المتنوعات الإسقاطية بشكل أفضل، فإننا نحتاج إلى اكتشاف الكائنات ا لجبرية التي تقابلها، وهذا يقودنا إلى مفهوم المثاليات المتجانسة والتي سنأتي على دراستها لاحقاً. ولكن الآن السؤال الذي يطرح نفسه:

ما العلاقة بين المجموعات الجبرية الأفينية والإسقاطية؟ لنأخذ المجموعة الجبرية الإسقاطية V ولنقاطعها مع إحدى المجموعات U_i $(V \cap U_i)$ فهل نحصل على مجموعة أفينية؟

والإجابة نعم دوماً والمعادلات التي تعرف هذا التقاطع نحصل عليها من خلال عملية تدعى فك التجانس أو إزالة التجانس (dehomogenization) والتي نوضحها على $V \cap U_0$ ($x_0 \neq 0$). نعلم من التمهيدية الأخيرة إذا كانت $p \in U_0$ فإن p تملك إحداثيات متجانسة من الشكل: $[1:x_1:\ldots:x_n]$ فإذا كانت الحدودية $f \in K[x_0,\ldots,x_n]$ إحدى المعادلات التي تعرف V فإن الحدودية:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = f(1,x_1,\ldots,x_n) \in K[x_1,\ldots,x_n]$$

تنعدم على جميع نقاط $V \cap U_0$.

إن وضع $x_0 = 1$ في الحدودية f يُعطينا حدودية خالية التجانس g (dehomogenized) هي غير متجانسة ولنبين أن $V \cap U_0$ هي المجموعة الجبرية الأفينية (المتنوعة الأفينية) التي نحصل عليها عندما نجري عملية إزالة التجانس في المعادلات التي تعرف V وذلك من خلال المبرهنة الآتية.

٤ – ٥ – ٥ – مبرهنة:

إذا كانت $V = V(f_1,\ldots,f_s)$ مجموعة جبرية إسقاطية، عندئذ يمكن مطابقة $W = V \cap U_0$ مع المجموعة الجبرية الأفينية $V(g_1,\ldots,g_s) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ حيث:

$$1 \leq i \leq s \text{ لكل } g_i(y_1,\ldots,y_n) = f_i(1, y_1,\ldots,y_n)$$

الإثبات:

باستخدام التطبيقين ψ, ϕ الواردين في التمهيدية الأخيرة آخذين بعين الاعتبار المناقشة التي تسبق هذه المبرهنة فإن التطبيق $\psi: U_0 \to \mathbb{A}^n$ يعطينا الصورة المباشرة لـ W:

$$\psi(W) \subset V(g_1, \ldots, g_s)$$

من جهة ثانية إذا كانت النقطة $(a_1,\ldots,a_n) \in V(g_1,\ldots,g_s)$، فإن النقطة ذات الإحداثيات المتجانسة $[1 : a_1 : \ldots : a_n] \in U_0$ تحقق المعادلات:

$$f_i(1, a_1, \ldots, a_n) = g_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

إذن الصورة المباشرة $\phi(V((g_1,\ldots,g_s)) \subset W$.

وبما أن كل من ψ , ϕ مقلوب للآخر، فإنه يوجد تقابل بين نقاط W ونقاط $V(g_1,\ldots,g_s)$ وبذلك يتحقق المطلوب.

مثال:

لتكن المجموعة الجبرية الإسقاطية:

$$V = V(x_1^2 - x_0x_2,\ x_1^3 - x_3x_0^2) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

لإيجاد $V \cap U_0$ فإننا نزيل تجانس المعادلات التي تعرف V بالنسبة لـ $x_0 \neq 0$.

ونحصل على المجموعة الأفينية $V(x_1^2 - x_2,\ x_1^3 - x_3) \subset \mathbb{R}^3$ والتي تمثل $V \cap U_0$.

يمكن إجراء ذلك من أجل $V \cap U_1$ أو $V \cap U_2$.

من جهة ثانية هل يمكن لمجموعة أفينية في U_i أن تكتب بالشكل $V \cap U_i$ من أجل V إسقاطية؟

الجواب نعم، ويمكن الحصول على ذلك بأكثر من طريقة. وسنأخذ طريقة طبيعية وهي عكس عملية إزالة التجانس والمسماة تجانس (homogenize) المعادلات التي تعرف المجموعة الأفينية. لنأخذ المجموعة الجبرية الأفينية $W = V(x_2 - x_1^3 + x_1^2) \subset U_0 = \mathbb{R}^2$.

ونرى أن المعادلة التي تعرف W ليست متجانسة، لذلك لا نحصل على مجموعة إسقاطية في $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ مباشرة.

ندخل المتغير الإضافي x_0 لجعل $f = x_2 - x_1^3 + x_2^2$ متجانسة بحيث يصبح كل حد في f من الدرجة 3 لأن درجة f هي 3، وبذلك تصبح الحدودية المتجانسة:

$$f^h = x_2x_0^2 - x_1^3 + x_1^2x_0$$

لاحظ أن إزالة التجانس من f^h يعيدنا إلى f.

- بعد هذه المناقشة المطوّلة، يمكن إثبات صحة المبرهنة الآتية ونترك ذلك للقارئ:

٤ – ٥ – ٦ – مبرهنة:

لتكن $g(x_1,\ldots,x_n) \in K[x_1,\ldots,x_n]$ حدودية من الدرجة الكلية d.

(i) ليكن $g = \sum_{i=0}^{d} g_i$ منشور g على شكل مجموع أجزائه المتجانسة حيث g_i من الدرجة i، عندئذ تكون:

$$g^h(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(x_1,\ldots,x_n)x_0^{d-i}$$

$$= g_d(x_1,\ldots,x_n) + g_{d-1}(x_1,\ldots,x_n) \cdot x_0 + \ldots + g_0(x_1,\ldots,x_n)x_0^d$$

حدودية متجانسة من درجة كلية d في $K[x_0,\ldots,x_n]$ حيث ندعو g^h تجانس g (أي الشكل المتجانس لـ g) (تجانس homogenization).

(ii) يمكن حساب g^h من g باستخدام العلاقة:

$$g^h = x_0^d \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right)$$

(iii) إزالة تجانس g^h (dehomogenizing) ممكن، وإن:

$$g^h(1, x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n)$$

(iv) إذا كانت $F(x_0,\ldots,x_n)$ حدودية متجانسة، وكان x_0^e أعلى قوة لـ x_0 تقسم F، عندئذ: إذا كان $f = F(1, x_1,\ldots,x_n)$ ناتج عن إزالة التجانس فيكون: $F = x_0^e \cdot f^h$. (يترك الإثبات).

ملاحظة:

• كنتيجة لهذه المبرهنة إذا أُعطيت مجموعة أفينية $W = V(g_1,\ldots,g_s) \subset \mathbb{A}^n(k)$ فيمكن تحويل المعادلات التي تُعرف W إلى معادلات متجانسة والحصول على مجموعة إسقاطية:

$$V = V\left(g_1^h,\ldots,g_s^h\right) \subset \mathbb{P}^n(k)$$

بالإضافة لذلك وفي ضوء (٤ – ٦ – ٥، ٤ – ٦ – ٦) نجد أن $V \cap U_0 = W$ إذن المتنوعة الأساسية W هي الجزء الأفيني من المتنوعة الإسقاطية V.

• هناك احتمالات غير متوقعة في بعض الأحيان.

٤ – ٥ – ٧ – مثال:

لنأخذ الفضاء الإسقاطي $\mathbb{P}^2(k)$ بالإحداثيات المتجانسة (x,y,z) فنرى أن U_0 هي مجموعة النقاط التي إحداثياتها المتجانسة (1,y,z)، أما U_2 فهي مجموعة النقاط ذات الإحداثيات المتجانسة (x,y,1) وتكون x, y الإحداثيات على $U_2 \cong \mathbb{A}^2(K)$.

والآن لنفرض المتنوعة (المجموعة الجبرية) الأفينية $W = V(g) = V(y-x^3+x) \subset U_2$.

نعلم أن W هو الجزء الأفيني من $V \cap U_2$ حيث V المجموعة الإسقاطية:

$$V = V(g^h) = V(yz^2 - x^3 + xz^2)$$

إن V تتكون من W بالإضافة إلى نقاط في ∞، وهذه النقاط هي $V \cap V(z)$.

إن الجزء الأفيني W هو الخط البياني لحدودية من الدرجة الثالثة وهذا الخط هو منحني غير شاذ (لا توجد نقاط شاذة).

إن النقاط في ∞ هي مكملة (متممة) W في V، وهذه النقاط هي حلول المعادلات:

$$0 = yz^2 - x^3 + z^2$$
$$0 = z$$

وحلولها هي $z = x = 0$، وبما أننا في $\mathbb{P}^2(k)$ فإن هذه الحلول تعطي النقطة الوحيدة $p = (0,1,0) \in V \cap V(z)$، إذن: $V = W \cup \{p\}$.

إن الأمر غير المتوقع في هذا المثال هو طبيعة النقطة p. دعنا نرى كيف تبدو V عند p:

نزيل التجانس في معادلة V بالنسبة لـ y أي نعين $V \cap U_1$ فنجد:

$$W' = V \cap U_1 = V(g^h(x, 1, z)$$
$$= V(z^2 - x^3 + xz^2)$$

والنقطة p تصبح هنا $(x,y) = (0,0) \in W'$ نقطة شاذة على W'.

إذن بالرغم من أننا انطلقنا من متنوعة غير شاذة إلا أن تحويل الحدوديات إلى متجانسة والحصول على متنوعة إسقاطية من خلال هذا التحويل يقود إلى تعقيد أكثر، إلا أننا لا نرى الصورة كاملة في الجزء الأفيني من المتنوعة الأساسية التي انطلقنا منها.

بشكل عام إذا كانت $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ وبما أن $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ فنحن بحاجة لأن نأخذ $V \cap U_i$ لكل $0 \le i \le n$ كي نرى الصورة كاملة.

٤ – ٦ – المثاليات والمتنوعات الإسقاطية:

٤ – ٦ – ١ – تعريف:

ليكن I مثالياً في $K[x_0,\ldots,x_n]$.

نقول إن I مثالي متجانس إذا تحقق ما يلي:

لكل $f \in I$ فإن الأجزاء المتجانسة f_i تقع في I أيضاً.

«يقصد بالأجزاء المتجانسة أننا نكتب f كما يلي: (حيث f_i من الدرجة i) $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$»

- يجب الانتباه إلى أن مولدات المثالي هي حدوديات متجانسة.

ملاحظة:

معظم المثاليات لا تتمتع بهذه الصفة، فمثلاً المثالي $I = \langle y - x^2 \rangle \subset K[x,y]$ إن المركبات (أو الأجزاء) المتجانسة للحدودية $f = y - x^2$ هي $f_1 = y$، $f_2 = -x^2$، وكل من f_1, f_2 لا ينتمي إلى I. إذن I ليس مثالياً متجانساً.

ومع ذلك لدينا المبرهنة التالية التي توضح متى يكون I متجانساً.

٤ – ٦ – ٢ – مبرهنة:

ليكن I مثالي في $K[x_0,\ldots,x_n]$ عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

(١) I مثالي متجانس في $K[x_0,\ldots,x_n]$.

(٢) $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ حيث $f_1,f_2,\ldots,f_s$ حدوديات متجانسة.

الإثبات:

(١) $\Leftarrow$ (٢)

لكل $g \in I$ فإن $g = \sum_{j=1}^{s} A_j f_j$ (١) حيث $A_j \in K[x_0,\ldots,x_n]$.

ننشر كل من A_j على شكل مجموع حدودياته المتجانسة، أو كما نقول أجزائه المتجانسة $A_j = \sum_{i=1}^{d} A_{ji}$.

نعوض كل منشور A_j في (١) ثم نجمع الحدود التي تملك الدرجة الكلية نفسها فنحصل على تركيب من الشكل:

$$g = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} A_{ji} f_i$$

وبالتالي فإن الحدود المتجانسة (الأجزاء المتجانسة) من g تقع في $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ إذن I مثالي متجانس.

(2) $\Leftarrow$ (1)

ليكن I مثالياً متجانساً. حسب مبرهنة الأساس لـ هيلبرت فإن I منتهي التوليد أي $I = \langle F_1,\ldots,F_s\rangle$.

ليكن $F \in I$ عندئذ $F = \sum_{i=1}^{s} G_i F_i$ وذلك من أجل $G_i \in K[x_0,\ldots,x_n]$ لكل $1 \le i \le s$،

الجزء المتجانس من الدرجة d لـ F يكتب بالشكل $F_d = \sum_{i=0}^{s} F_i . G_{(d-\deg F_i)} \in I$ لكل d

حيث $0 \le d \le \deg F$، إذن جميع الأجزاء المتجانسة لـ F هي عناصر من I وبذلك يتم المطلوب.

- استناداً إلى هذه المبرهنة:

لكل مثالي متجانس I من الحلقة $K[x_0,\dots,x_n]$ نعرف لمجموعة:

$$V(I) = \{p \in \mathbb{P}^n(k) : f(p) = 0 \ , \ \forall \ f \in I\}$$

إن $V(I) = V(f_1,\dots,f_s)$ مجموعة جبرية إسقاطية حيث $f_1,\dots,f_s$ حدوديات متجانسة أي I مثالي متجانس.

٤ – ٦ – ٣ – مبرهنة:

لتكن $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ مجموعة جبرية إسقاطية حيث K حقل غير منتهٍ، ولتكن المجموعة:

$$I(V) = \{f \in K[x_0,\dots,x_n] : f(a_0,\dots,a_n) = 0, \forall (a_0,\dots,a_n) \in V\}$$

عندئذ I(V) مثالي متجانس في $K[x_0,\dots,x_n]$.

الإثبات:

المجموعة I(V) مغلقة بالنسبة للجمع أي $\forall f,g \in I(V)$ فإن $f + g \in I(V)$ ويتم الإثبات كما في الحالة الأفينية.

وكذلك I(V) مغلقة بالنسبة لضرب عنصر ما $h \in K[x_0,,\dots,x_n]$ بعنصر $f \in I(V)$ أي $h.f \in I(V)$.

ويتم التأكد من ذلك أيضاً بشكل موازٍ للحالة الأفينية.

الآن بفرض $f \in I(V)$ ولنثبت نقطة $p \in V$ وبحسب الفرض فإن f تنعدم عند جميع الإحداثيات المتجانسة $[a_0 : \dots : a_n]$ للنقطة p وبما أن K غير منتهٍ، فإن كل جزء متجانس f_i لـ f ينعدم عند $[a_0 : \dots : a_n]$ إذن $f_i \in I(V)$ وبالتالي I(V) متجانس.

٤ – ٦ – ٤ – مبرهنة:

ليكن K حقلاً غير منتهٍ، عندئذ التطبيقان:

المثاليات المتجانسة $\xrightarrow{I}$ المجموعات الجبرية الإسقاطية

المجموعات الجبرية الإسقاطية $\xrightarrow{V}$ المثاليات المتجانسة

يعكسان الاحتواء.

بالإضافة لذلك $V(I(V)) = V$ أي أن I متباين.

الإثبات:

كما هو في الحالة الأفينية.

٤ – ٦ – ٥ – مبرهنة:

ليكن K حقلاً:

(i) لتكن السلسلة المتناقصة من المجموعات الجبرية الإسقاطية في $\mathbb{P}^n(k)$:

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

عندئذ يوجد عدد صحيح N بحيث $V_N = V_{N+1}$.

(ii) كل مجموعة جبرية إسقاطية $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ يمكن أن تكتب بشكل وحيد على شكل اجتماع منتهٍ لمجموعات جبرية إسقاطية:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$$

حيث $V_i \not\subset V_j$ من أجل $i \neq j$.

الإثبات:

(i) بما أن I يعكس الاحتواء فإننا نحصل على السلسلة المتزايدة للمثاليات المتجانسة:

$$I(V_1) \subset I(V_2) \subset I(V_3) \subset \dots$$

في الحلقة $K[x_0,\dots,x_n]$ وبما أن حلقة الحدوديات هذه نيوثرية فإنه يوجد N صحيح بحيث:

$$I(V_N) = I(V_{N+1}) = \dots$$

وبما أن I متباين (حسب ٤ – ٧ – ٤) $\Leftarrow V_N = V_{N+1} = \dots$

وهو المطلوب في (i).

(ii) لنفرض أن V مجموعة جبرية إسقاطية والتي لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع منتهٍ لمجموعات غير خزولة فتكون V خزولة أي تكتب بالشكل $V = V_1 \cup V'_1$ حيث $V_1 \neq V \neq V'_1$. أيضاً V_1 أو V'_1 يجب أن لا يكون اجتماع لمجموعات غير خزولة، وإلا فإن V ستكون من الشكل نفسه، لنفرض V_1 ليست اجتماع لمجموعات غير خزولة، إذن تكتب V_1 بالشكل $V_1 = V_2 \cup V'_2$، حيث $V'_2 \neq V_1 \neq V_2$.

بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على سلسلة غير منتهية من المجموعات الجبرية الإسقاطية: $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$

حيث $V \neq V_1 \neq V_2 \neq \dots$

وهذا يتناقض مع (i) وبذلك يتم المطلوب.

ملاحظة:

العلاقة بين العمليات (مثل مجموع، جداء، تقاطع) على المثاليات المتجانسة والعمليات المقابلة على الحالة الأفينية، فمثلاً إذا كان $V_i = V(I_i)$ فإن:

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_K = V(I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_K) = V(I_1 . I_2 \dots I_K) \quad (*)$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = V\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha \right)$$

ملاحظة:

ليكن I مثالياً متجانساً في الحلقة $K[x_0,\dots,x_n]$ عندئذ يكون $\sqrt{I}$ مثالياً متجانساً أيضاً في الحلقة ذاتها.

الجزء الأخير من هذا الفصل نكرسه لدراسة مبرهنة الأصفار الإسقاطية.

لقد رأينا في الحالة الأفينية أنه إذا كان I مثالياً في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن مبرهنة الأصفار الضعيفة كانت:

$$V_a(I) = \phi \text{ in } \mathbb{A}(k) \Leftrightarrow I = K[x_1,\ldots,x_n]$$

ومبرهنة الأصفار القوية كانت:

$$\sqrt{I} = I_a\,(V_a(I)) \text{ in } K[x_1,\ldots,x_n]$$

لتجنب الالتباس نستخدم هنا V_a, I_a للدلالة على النسخة الأفينية لـ V, I.

من الطبيعي أن يتساءل المرء إذا كانت هذه النتائج تمتد أيضاً إلى المجموعات الجبرية الإسقاطية والمثاليات المتجانسة. والإجابة لا (ليس دوماً).

إن مبرهنة الأصفار الضعيفة غير محققة من أجل بعض المثاليات المتجانسة ولتوضيح ذلك نفرض المثالي $I = \langle x_0,\ldots,x_n\rangle$ في الحلقة $\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ عندئذ $V(I) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ تعرف بالمعادلات: $x_0 = x_1 = \ldots. = x_n = 0$.

أي إن الحل الوحيد هو (0,0,…,0)، ولكن هذا غير ممكن لأنه لا يسمح لجميع الإحداثيات المتجانسة أن تنعدم بآن واحد، وينتج عن ذلك أن $V(I) = \phi$ علماً بأن $I \neq \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ وهذا المثالي $I = \langle x_0,\ldots,x_n\rangle$ لحسن الحظ هو واحد من عدد قليل من المثاليات التي تجعل $V(I) = \phi$.

والآن ندرس مبرهنة الأصفار الضعيفة في $\mathbb{P}^n(k)$.

٤ – ٦ – ٦ – مبرهنة: (الأصفار الضعيفة الإسقاطية)

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً وليكن I مثالياً متجانساً في $K[x_0,\ldots,x_n]$ عندئذ تكون القضايا الآتية متكافئة:

(١) $V(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ خالية أي $V(I) = \phi$.

(٢) لتكن G قاعدة غروبنر مختزلة للمثالي I عندئذ لكل $0 \le i \le n$ يوجد $g \in G$ بحيث $L\,T\,(g)$ قوة غير سالبة لـ x_i.

(٣) لكل $0 \le i \le r$ يوجد عدد صحيح $m_i \ge 0$ بحيث $x_i^m \in I$.

(٤) يوجد $r \ge 1$ بحيث: $<x_0,\ldots,x_n>^r \subset I$.

ملاحظة قبل الإثبات:

سوف يتم التطرق إلى قواعد غروبينر في فصل مستقل.

الإثبات:

المثالي I يعطينا المجموعة الإسقاطية $V = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. في هذا الإثبات سوف نستخدم أيضاً مجموعات أفينية $C_V = V_a(I) \subset A^{n+1}$.

أي إنّ C_V يستخدم المثالي I نفسه، ولكن الآن ننظر إلى حلول في $\mathbb{A}^{n+1}$ وندعو C_V المخروط الأفيني لـ V، فإذا نظرنا إلى النقاط في $\mathbb{P}^n(k)$ على أنها مستقيمات مارة بالمبدأ في $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ فيكون C_V اجتماع المستقيمات المعرفة (المعينة) بنقاط V، إذن C_V يحوي جميع الإحداثيات المتجانسة لنقاط V. والآن نعود لإثبات تكافؤ القضايا.

(٢) $\Leftarrow$ (١) لنفرض أنه لدينا قاعدة غروبينر حيث لكل i يوجد $g \in G$ بحيث $LT(g) = x_i^{m_i}$ من أجل $m_i \ge 0$، وبذلك يكون C_V مجموعة منتهية (حسب بعض خواص قواعد غروبينر).

ولكن لنفرض أنه توجد نقطة $p \in V$، فتكون جميع الإحداثيات المتجانسة للنقطة p تقع في C_V إذا كتبنا هذه الإحداثيات بالشكل $\lambda(a_0,\ldots,a_n)$، فنرى أنه يوجد عدد لا نهائي منها كون K غير منتهٍ وهذا تناقض وبذلك يكون $V = V(1) = \phi$.

(٣) $\Leftarrow$ (٢) لتكن G قاعدة غروبينر المختزلة لـ I، عندئذ $x_i^{m_i} \in I$ تقتضي أن الحد القيادي لحدودية ما $g \in G$ يقسم $x_i^{m_i}$، إذن الحد القيادي $LT(g)$ يجب أن يكون قوة لـ x_i.

أما إثبات (٤) $\Leftarrow$ (٣) فهو واضح بما أن $(x_0,\ldots,x_n)^r \subset I$ يقتضي أن $x_i^r \in I$ لكل i.

يبقى إثبات (١) $\Leftarrow$ (٤). أولاً نلاحظ أن $V = \phi$ يقتضي $C_V \subset \{(0,\ldots,0)\}$ في $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ وهذا ينتج كون أي نقطة غير صفرية $(a_0,\ldots,a_n)$ في C_V سيعطي إحداثيات متجانسة لنقطة في $V \subset \mathbb{P}^n(k)$.

وهذا يناقض $V = \phi$ وبتطبيق I_a نحصل على:

$$I_a(\{(0,\ldots,0)\}) \subset I_a(C_V)$$

ونعلم أن $I_a(\{(0,\ldots,0)\}) = (x_0,\ldots,x_n)$

والنسخة الأفينية لمبرهنة الأصفار القوية تقتضي $I_a(C_V) = I_a(V_a(I)) = \sqrt{I}$ كون K مغلقاً جبرياً.

وربط هذه الحقائق نستنتج $\sqrt{I} \subset <x_0,\ldots,x_n>$.

ولكن نعلم أنه إذا كان مثالي ما محتوى في $\sqrt{I}$ عندئذ فإن قوة هذا المثالي تقع في I. وبهذا يكتمل البرهان.

٤ – ٦ – ٧ – مبرهنة: (الأصفار القوية)

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، وليكن I مثالياً متجانساً في $K[x_0,\ldots,x_n]$. إذا كان $V = (V(I)$ مجموعة جبرية إسقاطية غير خالية في $\mathbb{P}^n(k)$ عندئذ:

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

الإثبات:

كما فعلنا في المبرهنة الأخيرة سوف نعمل على المجموعة $V = V(I) \subset \mathbb{P}^n(k)$ ومخروطها الأفيني $C_V = V_a(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

ولنبرهن أن:

$$I_a(C_V) = I(V) \qquad (1)$$

عندما $V = \neq \phi$.

لذلك نفرض $f \in I_a(C_V)$، فإذا كانت $p \in V$ نقطة مفروضة، فإن أي إحداثيات متجانسة لـ p تقع في C_V بحيث f تنعدم عند جميع الإحداثيات المتجانسة لـ p، وهذا يقتضي $f \in I(V)$.

من جهة ثانية لنأخذ $f \in I(V)$.

بما أن أي نقطة غير صفرية من C_V تُعطي إحداثيات متجانسة لنقطة ما من V ينتج أن f تنعدم على $C_V - \{0\}$ ويبقى أن نبرهن أن f تنعدم عند المبدأ.

بما أن I(V) مثالي متجانس، فنعلم أن الأجزاء (المركبات) المتجانسة f_i لـ f تنعدم أيضاً على V. بشكل محدد الحد الثابت لـ f وهي المركبة المتجانسة f_0 من الدرجة الكلية 0 يجب أن تنعدم على V، وبما أن $V \neq \phi$ هذا يجعل $f_0 = 0$ والذي يعني أن f تنعدم عند المبدأ، وبالتالي $f \in I_a(C_V)$، وبالتالي تتحقق (1).

ومن الشكل الأفيني لمبرهنة الأصفار القوية نعلم أن $\sqrt{I} = Ia(Va(I))$ وباستخدام (1) نحصل على:

$$\sqrt{I} = I_a(V_a(I)) = I_a(C_V) = I(V) = I((V(I))$$

وبهذا يتم المطلوب.

ونختم هذه الفقرة بالمبرهنة الآتية والتي نتركها دون إثبات لأن الإثبات يتم كما في الحالة الأفينية.

٤ – ٦ – ٨ – مبرهنة:

تكون المجموعة الجبرية الإسقاطية V غير خزولة $\Leftrightarrow$ I(V) مثالي أولي.

يتم إثبات هذه المبرهنة بشكل مشابه للحالة الأفينية والاستفادة من مفهوم المثالي الأولي.

ونلخص ما سبق تناوله بالمخطط الآتي:

{مجموعات جبرية إسقاطية}	$\xleftrightarrow{1:1}$	{مثاليات متجانسة جذرية}
$\cup$		$\cup$
{متنوعات إسقاطية}	$\xleftrightarrow{1:1}$	{مثاليات متجانسة أولية}
$\cup$		$\cup$
{نقاط}	$\longleftrightarrow$	{مثاليات متجانسة أعظمية}

حيث أن متنوعة تعني مجموعة جبرية غير خزولة، وننوه إلى أننا في كثير من الحالات لم نميز بين متنوعة ومجموعة واعتبرنا المجموعة هي المتنوعة.

٤ – ٧ – اللصاقة الإسقاطية لمتنوعة أفينية:

The projective closure of an Affine variety:

٤ – ٧ – ١ – تعريف:

ليكن I مثالياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$، نُعرف المثالي I على أنه المثالي تجانساً (جعله متجانساً) homogenization:

$$I^h = \langle f^h : f \in I \rangle \subset K[x_0,\ldots,x_n]$$

حيث f^h هو تجانس الحدودية f كما هو في (٤ – ٦ – ٦).

ملاحظة:

سوف نذكر هنا بعض المبرهنات التي تتعلق باللصاقة الإسقاطية دون الخوض في إثباتها، ولكن نورد بعض الأمثلة التي توضح صفات هذه اللصاقة وكيفية الحصول عليها.

٤ – ٧ – ٢ – مبرهنة:

أياً كان المثالي I من الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ فإن I^h مثالي متجانس في $K[x_0,\ldots,x_n]$.

٤ – ٧ – ٢ – مبرهنة:

ليكن I مثالياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$، ولتكن $G_1 = \{g_1,\ldots,g_s\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I بالنسبة لـ grles في $K[x_1,\ldots,x_n]$. عندئذ تكون $G^h = \{g_1^h,\ldots,g_s^h\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I^h في الحلقة $K[x_0,\ldots,x_n]$.

مثال (١):

ليكن المثالي $I = \langle x_2 - x_1^2 , x_3 - x_1^3 \rangle$ في $\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$ بحساب قاعدة غروبنر لهذا المثالي بالنسبة لـ grevles نجد:

$$G = \langle x_1^2 - x_2, x_1x_2 - x_3, x_1x_3 - x_2^2 \rangle$$

نحسب كلاً من g_i^h ونحصل على $G^h = \langle x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_3 - x_2^2 \rangle$ إذن:

$$I^h = \langle x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_3 - x_2^2 \rangle$$

ونلاحظ أن هذا المثالي يعطينا المتنوعة الإسقاطية $V' = V(I^h) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

• سوف نناقش في الخطوات الآتية المعنى الهندسي لـ تجانس مثالي. حيث نبين ماذا يحصل عندما نجانس المثالي $I_a(W)$ المكون من جميع المثاليات التي تنعدم على المتنوعة الأفينية W. وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي:

٤ – ٧ – ٣ – تعريف:

لتكن المتنوعة الأفينية $W \subset \mathbb{A}^n(K)$.

إن اللصاقة الإسقاطية لـ W هي المتنوعة الإسقاطية:

$$\overline{W} = V(I_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$$

حيث $I_a(W)^h \subset K[x_1,\ldots,xm]$ هو تجانس المثالي: $I_a(W) \subset K[x_1,\ldots,x_n]$.

المبرهنة الآتية تلقي الضوء على خواص اللصاقة الإسقاطية.

٤ – ٧ – ٤ – مبرهنة:

لتكن $W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ متنوعة أفينية ولتكن $\overline{W} \subset \mathbb{P}^n(k)$ لصاقتها الإسقاطية:

(i) $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap \mathbb{A}^n = W$

(ii) $\overline{W}$ هي أصغر متنوعة إسقاطية في $\mathbb{P}^n(k)$ تحوي W.

(iii) إذا كانت W غير خزولة فإن $\overline{W}$ غير خزولة.

(iv) لا توجد مركبة غير خزولة لـ $\overline{W}$ واقعة في $V(x_0) \subset \mathbb{P}^n(k)$.

ملاحظة:

في المثال (١) السابق كنا قد عينا I^h انطلاقاً من مثالي لمتنوعة أفينية W معرفة بالمعادلات: $x_2 - x_1^2 = 0, x_3 - x_1^3 = 0$، وهناك أوجدنا قاعدة غروبنر ثم أوجدنا I^h.

في الحقيقة إذا استخدما الرموز الواردة في التعريف الأخير فإن:

$$I_a(W) = \langle x_2 - x_1^2 , x_3 - x_1^3 \rangle$$

وقد وجدنا في المثال (1) I^h حيث I^h ما هو إلا $I_a(W)^h$.

ملاحظة:

من المفيد جداً أن نتمكن من حساب اللصاقة الإسقاطية مباشرة من أي مثالي للمتنوعة الأفينية W. وهذا ممكن عندما يكون الحقل K مغلقاً جبرياً.

٤ – ٧ – ٥ – مبرهنة:

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً وليكن I مثالياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ عندئذ تكون $V(I^h) \supset \mathbb{P}^n(k)$ اللصاقة الإسقاطية لـ $V_a(I) \subset \mathbb{A}^n(k)$.

توضيح:

إذا فرضنا $W = V_a(I) \subset \mathbb{A}^n(k)$ و $Z = V(I^h) \subset \mathbb{P}^n(k)$ فإن $Z = \overline{W}$.

٤ – ٨ – التحويلات الإسقاطية: Projective Transformation

بداية نود أن ندخل مفهوم التكافؤ الإسقاطي لتكن GL(n+1, K) مجموعة المصفوفات المربعة القلوبة (invertible) والتي عناصرها من الحقل K (المصفوفات من المرتبة $(n + 1) \times (n + 1)$) ويمكننا استخدام عناصر هذه المجموعة مثل المصفوفة $A \in GL(n+1, K)$ لإنشاء تحويلات لـ $\mathbb{P}^n$ وذلك بضرب المصفوفات، عندئذ تُنتج المصفوفة A تطبيقاً خطياً $A: \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^{n+1}$، وهذا التطبيق تماثل (isomorphism) لأن A قلوبة، وهذا التطبيق ينقل فضاءات جزئية من $\mathbb{A}^{n+1}$ إلى فضاءات جزئية من البعد نفسه. وإذا أخذنا فضاءات وحيدة البعد، فإن المصفوفة A تنقل المستقيم المار بالمبدأ إلى مستقيم مار بالمبدأ أيضاً.

خلاصة القول إن A تعرف تطبيقاً $A: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ ويدعى مثل هذا التطبيق تحويلاً إسقاطياً خطياً.

بلغة الإحداثيات المتجانسة يمكن وصف $A: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ كما يلي:

نفرض $A = (a_{ij})$، $0 \le i,j \le n$، فإذا كانت $(b_0,\dots,b_n)$ إحداثيات متجانسة لنقطة $p \in \mathbb{P}^n$ وباستخدام ضرب المصفوفات فإن:

$$A(p) = (a_{00}b_0 + \dots + a_{0n}b_n, \dots , a_{n0}b_0 + \dots + a_{mn}b_n) \qquad (1)$$

هي إحداثيات متجانسة لـ A(p) وهذه العلاقة (1) تُسهّل العمل على التحويلات الإسقاطية.

ونلاحظ أن $A: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ تقابل، وتقابله العكسي يعطى بالمصفوفة:

$A^{-1} \in GL\ (n+1,K)$.

- إذا أعطيت متنوعة $V \subset \mathbb{P}^n$ ومصفوفة $A \in GL(n+1, K)$ نطبق A على جميع نقاط V لنحصل على مجموعة جزئية $A(V) = \{A((p): p \in V\} \subset \mathbb{P}^n$.

٤ – ٨ – ١ – مبرهنة وتعريف:

إذا كانت $A \in GL\ (n+1, K)$ و $V \subseteq \mathbb{P}^n$ متنوعة فإن $A\ (V) \supset \mathbb{P}^n$ متنوعة أيضاً. وفي هذه الحالة نقول إن $A(V)$ و V متكافئان إسقاطياً (projectively equivalent).

الإثبات:

لنفرض $V = V(f_1,\ldots,f_s)$ حيث f_i حدودية متجانسة. بما أن A قلوبة فهي تملك مصفوفة مقلوبة $B = A^{-1}$، عندئذ لكل i ليكن $g_i = f_{i0}B$. إذا كان $B = (b_{ij})$ فإن:

$$g_i\ (x_0,\ldots,x_n) = f_i(b_{00}x_0 + \ldots + b_{0n}x_n,\ \ldots,\ b_{n0}x_0 + \ldots + b_{nn}x_n)$$

ومن الواضح أن g_i حدوديات متجانسة درجتها الكلية هي درجة f_i نفسها وبالتالي يمكن استنتاج أن:

$$A(V(f_1,\ldots,f_s)) = V(g_1,\ldots,g_s)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة:

يمكن اعتبار $A = (a_{ij})$ بأنها تحول الإحداثيات المتجانسة $x_0,\ldots,x_n$ إلى إحداثيات جديدة $x_0,\ldots,x_n$ معرفة بالعلاقة: $x_i = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}x_j$.

وهي تعطي إحداثيات متجانسة في $\mathbb{P}^n$.

• عند دراسة $\mathbb{P}^n$ هناك هدف مهم وهو تصنيف المتنوعات الإسقاطية بالنسبة لعلاقة التكافؤ الإسقاطي والتي هي علاقة تكافؤ (تحقق أنها علاقة تكافؤ).

ومن الأمثلة على هذا التصنيف هو تصنيف فوق المستويات (hyperplanes) $H \subset \mathbb{P}^n$ إلى مجموعات (صفوف تكافؤ) بالنسبة للتكافؤ الإسقاطي.

للتذكير:

إن فوق المستوي هو متنوعة في $\mathbb{P}^n$ معرفة بمعادلة خطية من الشكل:

$$a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$$

حيث $a_0,\ldots,a_n$ ليست جميعها أصفاراً.

٤ – ٨ – ٢ – مبرهنة:

جميع فوق المستويات $H \subset \mathbb{P}^n$ متكافئة إسقاطياً.

الإثبات:

سوف نثبت أن H يكافئ إسقاطياً $V(x_0))$ $V(x_0)$ ($H \sim V(x_0)$). وبما أن التكافؤ الإسقاطي هي علاقة تكافؤ فإن هذا يكفي لإثبات صحة المبرهنة:

لنفرض H معرفاً بـ $f = a_0x_0 + \ldots + a_nx_n$ ولنفرض $a_0 \neq 0$ ومن ثم لنفرض الإحداثيات المتجانسة الجديدة:

$$X_0 = a_0x_0 + \ldots + a_nx_n$$
$$X_1 = x_1$$
$$\vdots$$
$$X_n = x_n$$

عندئذ من السهل أن نرى أن $V(f) = V(X_0)$.

أي إنّه في الجملة الجديدة $X_0,\ldots,X_n$.

إن $V(f)$ معرفة بانعدام الإحداثي الأول X_0 وهذا يكافئ القول إن $V(f)$, $V(x_0)$ متكافئة إسقاطياً من خلال مصفوفة المعاملات:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة قلوبة كون $a_0 \neq 0$ وبالتالي $A(V(f)) = V(x_0)$ وبالتالي نحصل على التكافؤ الإسقاطي المطلوب.

بشكل أعم إذا كان $a_i \neq 0$ في f نجد بطريقة مشابهة أن V(f) و $V(x_i)$ متكافئان إسقاطياً.

ومن السهل جداً بيان أن $V(x_i)$ و $V(x_0)$ متكافئان إسقاطياً لكل i وهذا هو المطلوب.

٤ – ٨ – ٣ – تعريف:

إذا كانت $V = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ وكانت f معرفة حدودية متجانسة غير صفرية من الدرجة 2 فإن V تُدعى فوق سطح تربيعي (quadric hypersurface) أو اختصاراً quadric.

- نفرض مميز الحقل $\neq 2$.
- وكمثال على الـ quadric القطوع المخروطية المعرفة في $\mathbb{R}^2$ بمعادلته من الشكل:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

للحصول على اللصاقة الإسقاطية في $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ نجعلها متجانسة بالنسبة لمتغير إضافي z (ندخل z) فتصبح:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

وهي متجانسة درجتها الكلية = 2.

٤ – ٨ – ٤ – مبرهنة: (الشكل النظامي لـ فوق السطوح التربيعية)

لتكن الحدودية $f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j \in k[x_0,\ldots,x_n]$ متجانسة غير صفرية من درجة كلية = 2. ولنفرض مميز الحقل $K \neq 2$. عندئذ V(f) تكافئ إسقاطياً أي سطح تربيعي (quadric) معرف بمعادلة من الشكل:

$$c_0x_0^2 + c_1x_1^2 + \ldots + c_nx_n^2 = 0 \qquad (*)$$

حيث $c_0, c_1,\ldots,c_n \in K$ وليست جميعها أصفاراً.

(دون إثبات). حيث يمكن إرجاع الإثبات إلى الجبر الخطي.

ملاحظة:

عند تحويل معادلة فوق سطح تربيعي إلى الشكل النظامي (*) فقد تكون بعض المعاملات c_i أصفاراً، وتصبح المعادلة بالشكل:

$$c_0x_0^2 + \ldots + c_px_p^2 = 0 \qquad (**)$$

حيث $c_0, c_1, \ldots, c_p$ ليست أصفاراً.

٤ – ٨ – ٥ – تعريف:

لتكن $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ فوق سطح تربيعي:

(i) إذا كانت V معرفة بمعادلة من الشكل (**) فإن V من الرتبة (p+1) أي $ranK(V) = p$.

(ii) بشكل عام إذا كانت V فوق سطح ما (quadric) عندئذ V من الرتبة $p + 1$ إذا كانت V مكافئة إسقاطياً لـ فوق سطح تربيعي معرف بـ (**).

مثلاً المخاريط المعرفة بالمعادلات:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \ , \ x^2 - z^2 = 0, \ x^2 = 0$$

تملك الرتبة 1 ,2 ,3 على الترتيب حيث المعادلة الأولى من اليسار هي النسخة الإسقاطية للدائرة.

والثانية هي اجتماع مستقيمين إسقاطيين $V(x + z) \cup V(x - z)$.

والثالثة هي المستقيم الإسقاطي V(x) والتي تسمى مخروطاً مترديـاً (منحل) من درجة تعددية 2 (multiplicity).

٤ – ٨ – ٦ – تعريف:

لتكن $V \subset \mathbb{P}^n$ فوق سطح تربيعي إذا كان $ranK(V) = n + 1$ فإن V غير شاذة (nonsingular).

نختم هذه الفقرة بالمبرهنة الآتية:

٤ – ٨ – ٧ – مبرهنة:

أي تماثل $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ هو تحويل إسقاطي أي أنه من الشكل:

$$\phi(x_0 : x_1) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx)$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ و $ad - bc \neq 0$.

الإثبات:

لنفرض أن $\phi: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ تماثل وبذلك فإنه يوجد تحويل إسقاطي $\psi: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ حيث:

$$\psi(\phi(0 : 1)) = (0 : 1)$$
$$\psi(\phi(1 : 0)) = (1 : 0)$$
$$\psi(\phi(1 : 1)) = (1 : 1)$$

فإذا فرضنا $\theta = \psi \circ \phi$ فإن θ يكتب على الشكل:

$$\theta\,(x_0 : x_1) = (\theta_0((x_0, x_1) : \theta_1\,(x_0, x_1)$$

وحيث θ_0, θ_1 أوليان فيما بينهما كحدوديات متجانسة من نفس الدرجة ولتكن d.

θ تقابل أي إنّه متباين وغامر (الغمر واضح)، ويبقى التباين: يوجد عنصر وحيد $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ بحيث $\theta(x_0 : x_1) = (0 : 1)$ وهو $(0 : 1)$ إذن $\theta_0\,(x_0, x_1) = \alpha x_0^d$ حيث $\alpha \in \mathbb{C}^*$، كذلك بالنسبة لـ $\theta_1(x_0,x_1) = \beta x^d$ حيث $\beta \in \mathbb{C}^*$.

من جهة ثانية $\theta\,(1 : 1) = (1 : 1)$ وهذا يقتضي أن يكون $\alpha = \beta$، ويمكن فرض $\alpha = \beta = 1$ وعندما يكون $\theta(x_0 : x_1) = (x_0^d : x_1^d)$. إذا كان ε جذر الواحد من المرتبة d عندئذ $\theta\,(1 : 1) = (1 : 1) = (\varepsilon : 1)$ وكون θ متباين فإنه ينتج $d = 1$، ويترتب على ذلك أن $\theta = id_{\mathbb{P}^1}$ (تطبيق مطاق)، ومنه فإن $\phi = \psi^{-1}$ تحويل إسقاطي.

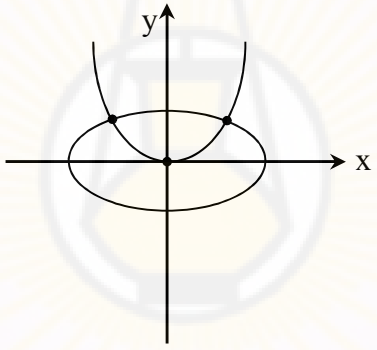
٤ – ٩ – نظرية بيزو Bezout's Theorem:

تبحث نظرية بيزو في دراسة تقاطع المنحنيات وبشكل خاص عدد نقاط تقاطع المنحنيات.

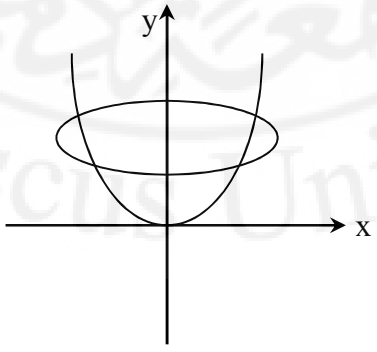
نبدأ أولاً ببعض الأمثلة في المستوي $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ والمستوي $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$، ويلزمنا أيضاً تعريف التعددية أو درجة التضاعف (multiplicity) لنقطة ما من نقاط التقاطع.

مثال (١):

لنأخذ القطع المكافئ $y = x^2$ والقطع الناقص $x^2 + 4(y - \lambda)^2 = 4$ حيث λ وسيط متحول، فمن أجل $\lambda = 0$ لدينا الشكل:



ومن أجل $\lambda = 2$ لدينا الشكل:



وهذه الأشكال تصور المعادلات السابقة على الحقل $\mathbb{R}$.

ونحصل على عدد مختلف من نقاط التقاطع ويتضح أيضاً أن هناك قيماً للوسيط λ لا يوجد من أجلها نقاط تقاطع. فمثلاً على $\mathbb{R}$ ومن أجل $\lambda < -1$ لا يوجد تقاطع.

الأمر الجدير بالاهتمام هو أنه على $\mathbb{C}$ توجد أربع نقاط تقاطع في الحالتين السابقتين (من أجل $\lambda = 0$ ومن أجل $\lambda = 2$) فمثلاً عندما $\lambda = 0$ تصبح المعادلتان: $x^2 + 4y^2 = 4,\ y = x^2$ وبحذف x نحصل على المعادلة $y + 4y^2 = 4$.

وجذور هذه المعادلة (حلولها): $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$

وقيم x المقابلة لهذه الجذور: $x = \pm\sqrt{\dfrac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}}$

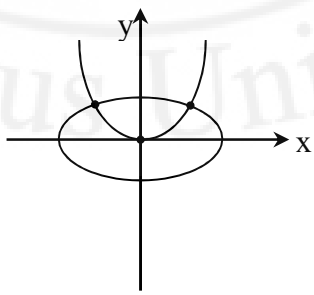
وهذه الحلول تعطينا أربع نقاط تقاطع، اثنتان منها حقيقية، واثنتان عقدية (كون $-1 - \sqrt{65} < 0$).

وكذلك عندما $\lambda = 2$ وعندما يكون الحقل $\mathbb{C}$ نحصل أيضاً على أربع نقاط تقاطع.

وتجدر الملاحظة إلى أنه في الحالات التي يوجد فيها نقاط تقاطع على $\mathbb{R}$، فستبقى هناك أربع نقاط تقاطع على $\mathbb{C}$.

على كل حال حتى على $\mathbb{C}$ قد تحصل حالات غير متوقعة:

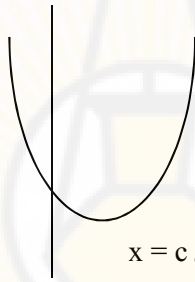
مثلاً عندما $\lambda = 1$، فنرى هنا أنه توجد ثلاث نقاط تقاطع ومع ذلك يبقى الحديث عن أربع نقاط صحيحاً.



لأنه عند المبدأ وهي إحدى نقاط التقاطع نلاحظ أن المنحنيين متماسان، وهذه تسمى نقطة مضاعفة (double)، أو من التعددية 2 فإذا حسبنا عدد النقاط آخذين بعين الاعتبار تعددية كل نقطة فإن مجموع نقاط التقاطع يبقى 4.

مثال (٢):

لنأخذ تقاطع القطع المكافئ مع مستقيم ما L، في أغلب الحالات نجد أن هناك نقطتي تقاطع على $\mathbb{C}$ آخذين بعين الاعتبار درجة التضاعف لنقاط التقاطع، ولكن إذا قطعنا القطع المكافئ بمستقيم شاقولي نحصل على الشكل الآتي وتوجد هنا نقطة تقاطع واحدة.



معادلة المستقيم الشاقولي $x = c$

ولكن كيف نجيب على السؤال من أن هناك نقطتي تقاطع، إذن أين هي النقطة الثانية في هذه الحالة.

إذا غيرنا نظرتنا ودرسنا ذلك في المستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ لكانت الإجابة على السؤال بسيطة، حيث أن هذه النقطة «المفقودة» هي نقطة في اللانهاية ∞، ولكي نرى لماذا؟ لنفرض z المتغير الثالث، ونحول المعادلات إلى متجانسة لنحصل على المعادلتين $x^2 = yz$ ومعادلة المستقيم الشاقولي الإسقاطية تصبح $x = cz$، وبحذف x نحصل: $yz = c^2z^2$، وبحلها نحصل على النقطتين $(x,y,z) = (c,c^2,1)$ و $(0,1,0)$ وهذه هي الإحداثيات المتجانسة لا تنسَ ذلك، وتقع النقطة الأولى $(c,c^2,1)$ على الجزء الأفيني

(حيث $z = 1$) وهي النقطة التي تظهر في الشكل، أما الثانية فهي تقع على مستقيم عند اللانهاية (حيث $z = 0$).

مثال (٣):

في ا لمستوي الإسقاطي $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ نفرض المنحنيين:

$$C = V(x^2 - z^2) \text{ و } D = V(x^2y - xz^2 - xyz + z^3)$$

من السهل ملاحظة أن النقطة $(1,b,1) \in C \cap D$ لكل $b \in \mathbb{C}$، وبذلك نرى أنه يوجد عدد لا نهائي من نقاط التقاطع، ولإدراك كيف يحصل ذلك نحلّل المعادلتين السابقتين:

$$C: (x - z)(x + z) \text{ , } D: (x - z)(xy - z^2)$$

أي إن C هي اجتماع مستقيمين إسقاطيين، D اجتماع مستقيم وقطع مخروطي، وهي المركبات غير الخزولة لـ C و D، ولنرى أين تكمن المشكلة (لماذا يبدو عدد نقاط التقاطع لا نهائي). حيث نجد أن C, D تملكان مركبة غير خزولة مشتركة وهي $V(x-z)$، ولهذا فإن التقاطع غير منتهٍ.

تبين هذه الأمثلة لماذا ندرس التقاطع في $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ولذلك في ما تبقى من هذه الفقرة، سوف نستخدم الحقل $\mathbb{C}$ ونكتب $\mathbb{P}^2$ بدلاً من $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$، ولذلك عندما نتحدث عن منحنٍ فهو متنوعة إسقاطية $V(f)$ معرفة بحدودية متجانسة غير صفرية $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$، ويجب لفت الانتباه إلى درجة التضاعف أو التعددية لنقاط التقاطع وكذلك إلى المركبات غير الخزولة للمنحنيات.

٤ – ٩ – ١ – مبرهنة:

لتكن $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ حدودية متجانسة غير صفرية، عندئذ فإن العوامل غير الخزولة لـ f هي أيضاً متجانسة، وإذا حلّلنا f إلى عوامل غير خزولة:

$$f = f_1^{a_1} \ldots . f_s^{a_s}$$

حيث f_i ليست مضاعفات ثابتة لـ f_j عندما $i \neq j$ عندئذ:

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \ldots \cup V(f_s)$$

هو التحليل الأصغري لـ $V(f)$ إلى مركبات غير خزولة في $\mathbb{P}^2$ وبالإضافة لذلك:

$$I(V(f)) = \sqrt{< f >} = <f_1,\ldots,f_2>$$

الإثبات:

لنفرض بداية أن $f = g \,.\, h$ حيث $g, h \in \mathbb{C}[x,y,z]$، ولنبرهن أن g, h متجانسة كون f متجانسة، ولنبرهن ذلك نكتب $g = g_m + \ldots + g_0$ حيث g_i متجانسة من الدرجة الكلية i وأن $g_m \neq 0$ وكذلك $h = h_n + \ldots + h_0$، عندئذ يصبح:

$$f = g \,.\, h = (g_m + \ldots + g_0) \,.\, (h_n + \ldots + h_0)$$
$$= g_m \,.\, h_n + (\text{حدود من درجة كلية أدنى})$$

بما أن f متجانسة، فيجب أن يكون $f = g_m\, h_n$، وبذلك نجد $g = g_m$، $h = h_n$ حدوديات متجانسة، وينتج عن ذلك أن عوامل f غير الخزولة متجانسة أيضاً. لذلك إذا فرضنا أن f تتحلل كما هو وارد في نص المبرهنة فإننا نجد أن $V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_s)$ وهو التحليل الأصغري إلى مركبات غير خزولة.

فإذا كانت f تعرف منحنياً C في $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ فإن $C \neq \phi$.

وبتطبيق مبرهنة الأصفار الإسقاطية يكون:

$$I(V(f)) = \sqrt{f}$$

ملاحظة:

نلاحظ من هذه المبرهنة أن كل منحنٍ $C \subset \mathbb{P}^2$ يعرف بالشكل $C = V(f)$ حيث f حدودية متجانسة وبتطبيق المبرهنة نجد $I(C) = <f_1,\ldots,f_s>$ حيث $f_1,\ldots,f_s$ عوامل غير خزولة مختلفة فيما بينها للحدودية f، وبذلك فإن أي حدودية أخرى تعرف C ستكون مضاعفاً لـ $f_1,\ldots,f_s$ بحيث $f_1 \,.\, f_2 \ldots f_s = 0$ هي معادلة التعريف من درجة كلية صغرى، ولذلك ندعو المعادلة $f_1 \,.\, f_2 \ldots f_s = 0$ معادلة C المختزلة.

عندما نأخذ تقاطع منحنيين C, D في $\mathbb{P}^2$ يجب أن نفرض أن C, D لا يملكان مركبات مشتركة غير خزولة، وهذا يعني أن الحدوديات التي تعرفهما لا تملك عوامل مشتركة.

هدفنا هو الربط بين عدد نقاط التقاطع $C \cap D$ ودرجات معادلاتهما المختزلة.

إن الناتج (Resultant) من بين الوسائل التي تساعدنا في دراسة هذه المشكلة، وقد خصص له فقرة كاملة في هذا الكتاب، وتعد التمهيدية الآتية إحدى الخصائص المهمة في نظرية الناتج، والتي ستكون أداة مساعدة في دراسة التقاطع (فهم نظرية بيزو)، وسوف نذكرها دون برهان.

٤ – ٩ – ٢ – تمهيدية:

لتكن الحدوديتان $f, g \in \mathbb{C}[x,y,z]$ متجانستين من الدرجة الكلية m, n على الترتيب.

إذا كانت $f(0,0,1), \quad g(0,0,1)$ ليست أصفاراً عندئذ فإن الناتج Res(f,g,z) حدودية متجانسة بالنسبة لـ x,y من درجة كلية تساوي m . n.

٤ – ٩ – ٣ – تعريف:

لتكن V متنوعة أفينية غير خزولة، ولتكن $p \in V$. نعرف الحلقة الموضعية لـ V عند p على أنها:

$$O_{V,p} = \{\phi \in K(V) : \phi \text{ معرف عند } p\}$$

وهذا يعني أن $O_{V,p}$ تتكون من الدوال النسبية والتي تكتب بالشكل $\phi = \frac{f}{g}$، $g(p) \neq 0$.

• إن الدالة: $\varepsilon_p : O_{V,p} \to K$ المعرفة بـ $\phi \mapsto \phi(p)$ هي تشاكل حلقي وهو غامر لذلك فإن نواته:

$$m_{V,p} = \{\phi \in O_{V,p} : \phi(p) = 0\}$$

مثالي أعظمي. كل عنصر من $O_{V,p}\backslash m_{V,p}$ يكون قلوباً، لذلك فإن أي مثالي فعلي من $O_{V,p}$ يكون محتوى في $m_{V,p}$، إذن $m_{V,p}$ هو المثالي الأعظمي الوحيد في الحلقة $O_{V,p}$ (في الجبر الحلقة الموضعية تعني حلقة ذات مثالي أعظمي وحيد).

٤ – ٩ – ٤ – تعريف:

لتكن $f,g \in K[x,y]$، ولتكن $p \in \mathbb{A}^2$. نعرف تعددية التقاطع (intersection multiplicity) لـ f, g عند النقطة p على أنها:

$$I_p(f, g) = \dim (O_{\mathbb{A}^2,p} / <f , g>)$$

- إذا كانت C, D منحنيات في $\mathbb{A}^2$ فإن:

$$I(D) = <g> , I(C) = <f>$$

وبالتالي فإن تعددية التقاطع (تضاعف التقاطع) لـ C, D عند p يكون:

$$I_p(C, D) = I_p (f,g)$$

- من أجل حدوديات متجانسة في $K[x,y,z]$ أو من أجل منحنيات C,D في $\mathbb{P}^2$ فإن تعددية التقاطع عند $p \in \mathbb{P}^2$ تعرف على أنها تعددية التقاطع للمنحنيات الأفينية المقابلة في الجزء الأفيني من $\mathbb{P}^2$ والذي يحوي p.

- إذا كان $f \in K[x]$ فإن تعددية f عند $a \in K$ هي: $\dim (O_{\mathbb{A}^1,p} / <f>)$ إذن تعددية التقاطع المعرفة أعلاه هي فعلاً تعميم لتعددية. صفر تلك الحدودية عند نقطة ما (يقصد بالتعددية أنه جذر أو صفر من تعددية 1 أو 2 أو ...) فمثلاً $f = x^2 = 0$ عند $x = 0$ تملك جذراً مضاعفاً أي من تعددية 2 وكذلك $g = x^3 = 0$ عند $x = 0$ تملك جذراً أو صفراً من تعددية 3. وكذلك $(x – 1)^3 = 0$ عند $x = 1$ تملك صفراً من تعددية 3.

خصائص تعددية التقاطع $I_p(C, D)$:

١ – $I_p(C,D)$ منتهية $\Leftrightarrow$ C, D لا تملكان مركبات مشتركة تحوي p.

٢ – $I_p(C,D) = 0 \Leftrightarrow p \notin C$ أو $p \notin D$.

٣ – $I_p(C,D) = 1 \Leftrightarrow$ p نقطة غير شاذة (nonsingular) على كل من C,D ومستقيمات التماس لـ C و D عند p مختلفة.

٤ – $I_p(C,D) > 1 \Leftrightarrow$ p نقطة شاذة على الأقل لـ C أو D. أو p غير شاذة لكل من C,D لكن مستقيمات التماس لـ C و D عند p نفسها.

قوانين حساب $I_p(f,g)$:

١ – $I_p(f,g)$ تعتمد فقط على المثالي $\langle f, g \rangle$ لذلك يمكن استبدال f,g بحدوديتين بحيث تولدان المثالي نفسه.

٢ – $I_p(f_1 f_2, g) = I_p(f_1,g) + I_p(f_2,g)$.

٣ – إذا كان $f(p) \neq 0$ أو $g(p) \neq 0$، فإن $I_p(f_1 g) = 0$.

٤ – إذا لم تملك f ولا g عوامل مكرّرة تنعدم عند p فإن المنحنيين $f = 0$ و $g = 0$ غير شاذين عند p ويملكان مستقيمي تماس مختلفين عند p، عندها يكون $I_p(f,g) = 1$.

٥ – إذا كانت $g = ax + b - y$ حيث $a,b \in K$ وكانت $p = (x_0,y_0)$ فإن $I_p(f,g)$ تساوي تعددية x_0 باعتبارها جذراً للمعادلة $f(x, ax + b) = 0$.

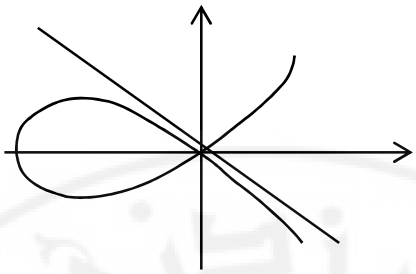
(يمكن تبادل الأدوار بين x,y).

مثال (١):

احسب $I_{(0,0)}(x^3 + x^2 - y^2, x + y)$

الحل:

لدينا $x + y = 0 \Leftarrow y = -x$، نبدل في الحدودية الأولي: $x^3 + x^2 - x^2 = x^3$ ومنه بالاستفادة من القانون ٥ أعلاه: $I_{(0,0)}(x^3 + x^2 - y^2, x + y) = 3$.



مثال (٢):

احسب تعددية التقاطع: $I_{(0,0)}\ (x^3 + x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2 - x^3)$.

الحل:

باستخدام القوانين ١ و ٢ $\Leftarrow$

$$I_{(0,0)}\ (x^3 + x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2 - x^3)$$
$$= I_{(0,0)}\ (x^3 + x^2 - y^2, (x^2 - 2xy + y^2 - x^3) + (x^3 + x^2 - y^2))$$
$$= I_{(0,0)}\ (x^2 + x^2 - y^2, 2x(x - y)$$
$$= I_{(0,0)}\ (x^3 + x^2 - y^2, x) + I_{(0,0)}\ (x^3 + x^2 - y^2, x - y)$$

لكن:

$$I_{(0,0)}(x^3 + x^2 - y^2, x) = I_{(0,0)}(-y^2,x) = 2I_{(0,0)}(y,x) = 2$$

حسب القوانين 1, 2, 4 وكذلك:

$$I_{(0,0)}(x^3 + x^2 - y^2, x - y) = I_{(0,0)}(x^3 + x^2 - y^2 - (x - y)\ (x + y), x - y)$$
$$= I_{(0,0)}((x^3, x - y) = 3I_{(0,0)}(x, x - y) = 3$$

إذن:

$$I_{(0,0)}(x^3 + x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2 - x^3) = 2 + 3 = 5$$

٤ – ٩ – ٥ – مبرهنة: (مبرهنة Bezout)

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، ولتكن $F, G \in K[X,Y,Z]$ حدوديتين متجانستين لا تملكان عوامل مشتركة عندئذ:

$$\sum_{p\in\mathbb{P}^2} I_p(F,G) = (\deg F)\ .\ (\deg G)$$

سوف نثبت صحة هذه المبرهنة باستخدام الناتج (Resultant).

الإثبات:

نزيل تجانس F, G بالنسبة لـ Z حيث $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$ ولتكن $f, g \in K[x,y]$ الحدوديات الناتجة بهذه الطريقة، وعندها يمكن أن نكتب:

$$f(x,y) = a_m(y)x^m + a_{m-1}(y)x^{m-1} + \ldots + a_1(y)x + a_0$$
$$g(x,y) = b_n(y)x^n + b_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + b_1(y)x + b_0$$

حيث إنّ المعاملات a_i, b_j حدوديات بالمتغير y:

$$0 \le j \le n \ ، \ 0 \le i \le m$$

والتي يمكن اعتبارها عناصر من الحقل K(y) وباستخدام هذه المعاملات في الناتج Res(f,g) نحصل على Res(f,g) بالنسبة لـ x والذي نرمز له بـ $Res_x(f,g)$ للدلالة على أننا أخذنا f, g كحدوديات بالمتغير x.

إن $Res_x(f,g)$ حدودية بالمتغير y، بما أن F, G لا تملك عوامل مشتركة، فإن f, g أيضاً لا تملك عوامل مشتركة. إذن $Res_x(f, g)$ ليست حدودية صفرية.

وإذا أخذنا بعين الاعتبار الدرجة الكلية لكل من f, g سيكون:

$$\deg a_i \le \deg f - i \quad \text{لكل } 0 \le i \le m$$

$$\deg bi \le \deg g - j \quad \text{لكل } 0 \le j \le n$$

إذن كل حد في المحدد الذي يعين $Res_x(f,g)$ يملك درجة على الأكثر تساوي (deg f) . (deg g) إذن:

$$\deg Res_x (f,g) \le (\deg f) . (\deg g) \le (\deg F) . (\deg G)$$

إذا كان $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$ عندئذ الحدوديات ذات المتغير x:

$$f(x,y_0) = a_m(y_0)x^m + a_{m-1}(y_0)x^{m-1} + \ldots + a_1(y_0)x + a_0$$
$$g(x,y_0) = b_n(y_0)x^n + b_{n-1}(y_0)x^{n-1} + \ldots + b_1(y_0)x + b_0$$

تملك x_0 صفراً مشتركاً وبالتالي فإن الناتج لهما (Res) يساوي صفر، ولكن هذا الناتج ما هو إلا $Res_x(f,g)(y_0)$.

بعبارة أخرى المحور y (الإحداثيات على المحور y) لنقاط تقاطع المنحنيين $f(x,y) = 0$، $g(x,y) = 0$ هي من بين أصفار الناتج $Res_x(f,g)$. وبما أن $Res_x(f,g)$ ليست حدودية صفرية من درجة على الأكثر تساوي: (degG).(degF) بالمتغير y. فإنه يوجد على الأكثر (degG) : (degF) قيماً محتملة للإحداثيات y لنقاط التقاطع.

بمناقشة مشابهة إذا بدلنا الأدوار بين x, y نستنتج أنه يوجد على الأكثر (degG).(degF) قيماً محتملة للإحداثيات على المحور x لنقاط التقاطع للمنحنيين $f(x,y) = 0$، $g(x,y)=0$. لهذا فإن عدد نقاط التقاطع منتهٍ.

نقاط تقاطع المنحنيات الأفينية $f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$ يقابل تماماً نقاط تقاطع المنحنيات الإسقاطية $F(X,Y,Z) = 0, G(X,Y,Z) = 0$ حيث $Z \neq 0$. لكن Z ليست عاملاً مشتركاً لـ F, G لذلك على الأقل أحد المنحنيين $G(X,Y,Z) = 0, F(X,Y,Z) = 0$ فقط يقطع المستقيم $Z = 0$ بعددٍ منتهٍ من النقاط. إذن العدد الكلي لنقاط تقاطع المنحنيين $G(X,Y,Z) = 0, F(X,Y,Z) = 0$ منتهٍ.

وإذا غيرنا الإحداثيات بحيث تصبح الإحداثيات المتجانسة الجديدة $(X':Y':Z')$ بحيث لا تقع أي نقطة من نقاط التقاطع على المستقيم $Z' = 0$. وبعد إزالة التجانس فإن المحور x′ لا يوازي أياً من المستقيمات الواصلة بين نقطتي تقاطع.

عند إزالة التجانس لا نفقد أي نقطة تقاطع، ونقاط التقاطع المتمايزة (المختلفة) تكون إحداثياتها على y′ متمايزة.

وبتكرار ما قمنا به سابقاً لما كانت المحاور x, y، فإننا نحصل على عدد نقاط تقاطع يساوي على الأكثر degG . degF.

وإذا كان الحقل K مغلقاً جبرياً، فإن عدد نقاط التقاطع يساوي degG . degF آخذين تعددية النقاط بعين الاعتبار.

*** انتهى الفصل الرابع ***

تمارين الفصل الرابع

١ – ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً و $f \in K[x_0,x_1]$ حدودية متجانسة درجتها d. أثبت أن f تُكتب بالشكل الوحيد $f = \prod_{i=0}^{r}(a_i x_0 + b_i x_1)^{f_i}$ حيث $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_r$.

٢ – ليكن I_1, I_2 مثاليات متجانسة في $K[x] = K[x_0,x=,\ldots,x_n]$ أثبت أن:

١) $I_1 + I_2, I_1 \cap I_2$ و $I_1 \,.\, I_2$ مثاليات متجانسة في $K[x]$.

٢) إن المثالي:

$$I_1 : I_2 = \{f \in L[x] : f \,.\, I_2 \subseteq I_1\}$$

متجانس.

٣ – ١) $\sqrt{I}$ مثالي متجانس.

٢) I مثالي أولي إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall\, f,g \in K[x],\ f \,.\, g \in I \Rightarrow f \in I \text{ or } g \in I$$

حيث f و g متجانسة.

٤ – لتكن: $U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$

والتطبيق $\varphi_I : U_i \to \mathbb{A}^n$ المعرف بالعلاقة:

$$\forall\, x = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in U_i :\ \varphi_i = \left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right)$$

من أجل $i \in \{0,1,\ldots,n\}$.

أثبت أن φ_i تشاكل (في تبولوجيا Zariski).

٥ – أثبت صحة العبارات التالية:

١) أي متنوعة إسقاطية $X \subseteq \mathbb{P}^n$ تُكتب على شكل اجتماع منتهٍ وبشكل وحيد لمتنوعات إسقاطية غير خزولة.

٢) $X \subseteq \mathbb{P}^n$ غير قابلة للاختزال إذا وفقط إذا كان المثالي $I(X)$ في $K[x_0,\ldots,x_n]$ (متجانس) اولي.

٣) إذا كان $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ تحليل غير مختزل أصغري للمتنوعة الأفينية في $\mathbb{A}^n$، فإن $\overline{V} = \overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_r}$ تحليل غير مختزل أصغري للمتنوعة الإسقاطية $\overline{V}$ في $\mathbb{P}^n$.

٦ – لتكن $V \subseteq \mathbb{P}^n$ متنوعة إسقاطية أثبت أن بُعدها:

$$\dim V = \max \{\dim \varphi(V \cap U_i) : i = 0,1,\ldots,n\}$$

٧ – لتكن $C \subseteq \mathbb{P}^3$ الصورة المباشرة للتشاكل $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ المعرَّف بالعلاقة:

$$\forall (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1 : \varphi(t_0 : t_1) = (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3)$$

بيّن فيما إذا كان المثالي $I(C)$ مُولَّداً بعنصرين فقط في الحلقة $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس (٥)

قواعد غروبنر، الناتج، نظرية الحذف

Groebner Bases, Resultant, Elimination Theory

لقد رأينا في فصل سابق العلاقة بين الحدوديات في الحلقة $K[x_1,\ldots,x_n]$ وهندسة المتنوعات الأفينية.

ندرس في هذا الفصل قواعد غروبنر التي تسمح لنا بحل مسائل متعلقة بمثاليات كثيرات الحدود بطرق حسابية وباستخدام قواعد غروبنر.

يمكن الإجابة على الأسئلة الآتية بشكل أسرع وباستخدام نظم برمجية ليست موضوع هذا الكتاب:

١ – وصف مثالي: هل كل مثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ منتهي التوليد؟.

٢ – عضوية مثالي (الانتماء): إذا كان $f \in K[x_1,\ldots,x_n]$ وليكن $I = \langle f_1,\ldots,f_s \rangle$، بيّن فيما إذا كان $f \in I$. ويقابل ذلك هندسياً هل تقع $V(f_1,\ldots,f_s)$ على $V(f)$.

٣ – حل جملة معادلات حدودية: إيجاد جميع الحلول المشتركة في K^n لجملة المعادلات:

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = f_s(x_1,\ldots,x_n = 0$$

وهذا يقابل السؤال عن النقاط الواقعة في المتنوعة الأفينية $V(f_1,\ldots,f_s)$.

- قد تتكرر بعض المفاهيم التي وردت في الفصل الأول، لذلك وجب التنبيه، وإن هذا التكرار تفرضه طبيعة البحث الذي نعالجه لكي يكون هناك تواصل بمفاهيم الترتيب وقواعد غروبنر.
- نود أن نلفت الانتباه أيضاً إلى أن قضايا عديدة في هذا الفصل تتم صياغتها دون التطرق إلى إثباتها لأن ذلك يعود إلى الجبر التبادلي في معظم الأحيان.

٥ – ١ – علاقات الترتيب على الحدوديات:

إن عبارة حدودية الواردة في هذا الفصل تعني وحيد حد.

بالنظر إلى خوارزمية القسمة في $K[x]$، نلاحظ أن لترتيب الحدود أهمية كبيرة ودوراً رئيسياً. على سبيل المثال:

عند قسمة $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ على $g(x) = x^2 - 4x + 7$

نقوم أولاً بكتابة الحدود في كثيرات الحدود بشكل متناقص بحسب درجة x، ثم نأخذ الحد القائد في f (الحد ذو الدرجة الأكبر) هو x^5 ونقسمه على الحد القائد في g والذي هو x^2 فيكون الناتج هو x^3، ثم نطرح $x^3 . g(x)$ من f لنحذف الحد القائد.

ونتابع بنفس الطريقة حتى نحصل على كثير حدود درجته أقل من 2.

أي نلاحظ أننا نتعامل مع علاقة ترتيب على الحدوديات ذات المتحول الوحيد x بالشكل:

$$x^{m+1} > x^m > \ldots > x^2 > x > 1$$

وأن نجاح الخوارزمية يعتمد على العمل بشكل منتظم مع الحدود القائدة لـ f و g وليس إزالة الحدود بشكلٍ عشوائي من f باستخدام حد ما من g.

مما سبق يمكننا أن نخمن بأن المكون الأساسي لأي توسيع لخوارزمية القسمة لكثيرات حدود بعدة متحولات سيكون هو الترتيب المفروض على الحدوديات في حلقة كثيرات الحدود $K[x_1,\ldots,x_n]$، ولذلك سنقوم بعرض عدة أنواع لعلاقات الترتيب.

أولاً: نلاحظ أنه يمكننا بناء الحدودية $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ من المرتبة المكونة من n مسقط

$$\alpha = (\alpha_{21},\ldots,\alpha_n)$$

أي يوجد تقابل (واحد لـ واحد) بين الحدوديات في $K[x_1,\ldots,x_n]$ ونقاط من $\mathbb{N}^n$ وأكثر من ذلك، أي ترتيب نُعرِّفه على $\mathbb{N}^n$ سيعطينا ترتيباً على الحدوديات:

$$\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$$

بما أن كثير الحدود عبارة عن مجموع حدوديات نريد أن نرتب الحدود لكثير الحدود بشكل واضح تصاعدي أو تنازلي، وبالتالي سنقوم بالمقارنة بين كل زوج من الحدوديات لنحدد مكانها فيكون لدينا واحدة من الحالات الآتية:

$$x^{\alpha} > x^{\beta} \text{ محققة } , x^{\alpha} = x^{\beta} , x^{\beta} > x^{\alpha}$$

كما ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار تأثير عمليتي الجمع والجداء على كثيرات الحدود، بالتالي سوف نشترط على علاقات الترتيب على الحدوديات أن تحقق:

إذا كانت $x^{\alpha} > x^{\beta}$ و x^{γ} هي حدودية ما، عندئذ يجب أن يتحقق:

$$x^{\alpha}x^{\gamma} > x^{\beta}x^{\gamma}$$

أو إذا كان $\alpha > \beta$ بالترتيب المعرَّف على $\mathbb{N}^n$ عندئذ لأجل $\gamma \in \mathbb{N}^n$ فإن:

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

٥ – ١ – ١ – تعريف:

ترتيب الحدوديات على $K[x_1,\ldots,x_n]$ هو أي علاقة $<$ على $\mathbb{N}^n$ أو بشكل مكافئ هو أي علاقة على مجموعة الحدوديات x^{α} حيث $\alpha \in \mathbb{N}^n$ تحقق:

i. $<$ هي ترتيب كلي (أو خطي) على $\mathbb{N}^n$.

ii. إذا كان $\alpha > \beta$ و $\gamma \in \mathbb{N}^n$ عندئذ $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

iii. $<$ هي ترتيب جيد على $\mathbb{N}^n$. أي إن كل مجموعة غير خالية من $\mathbb{N}^n$ تملك عنصراً أصغر وفق $<$.

والتمهيدية الآتية توضح ذلك.

٥ – ١ – ٢ – تمهيدية:

علاقة الترتيب $<$ على $\mathbb{N}^n$ هي علاقة ترتيب جيد إذا وفقط إذا كانت كل سلسلة في $\mathbb{N}^n$ $\ldots > \alpha_2 > \alpha_1$ منقطعة.

نعرض فيما يلي أشهر علاقات الترتيب المعرفة على الحدوديات.

١ – الترتيب من النوع (lexicographic order): الترتيب المعجمي

لتكن $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ من $\mathbb{N}^n$.

نقول إن $\alpha >_{lex} \beta$ إذا تحقق أن المُدخل الأول غير الصفري من اليسار في الشعاع $\alpha - \beta$ موجب. (المدخل الأول يقصد به المركبة الأولى).

سوف نكتب $x^{\alpha} >_{lex} x^{\beta}$ إذا كان $\alpha >_{lex} \beta$.

أمثلة:

- $\alpha - \beta = (1,-1,-4)$، $((1,2,0) >_{lex} (0,3,4))$.
- $\alpha - \beta = (0,0,3)$، $(3,2,4) >_{lex} (3,2,1)$

ترتيب المتحولات $x_1,\ldots,x_n$ هو بالشكل:

$$(1,0,\ldots,0) >_{lex} (0,1,0,\ldots,0) >_{lex} \ldots >_{lex} (0,\ldots,0,1)$$

وبالتالي $x_1 >_{lex} x_2 >_{lex} \ldots >_{lex} x_n$.

تنويه: عندما نتعامل مع كثيرات حدود بمتحولين أو ثلاثة سنسمي المتحولات x,y,z بدلاً من x_1,x_2,x_3 وسنفرض الترتيب الأبجدي $x > y > z$ على المتحولات لتعريف الترتيب من النوع lexicographic إلا إذا ذكر خلاف ذلك.

كما أن الترتيب من النوع lexicographic أو اختصاراً lex على $\mathbb{N}^n$ هو ترتيب حدودي.

٢ – الترتيب من النوع (graded lex): (الترتيب المعجمي المدرج)

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ نقول إن $\alpha >_{grlex} \beta$ إذا تحقق:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \text{ or } \begin{cases} |\alpha| = \beta \\ \alpha >_{lex} \beta \end{cases}$$

٣ – الترتيب من النوع (graded lex): (الترتيب المعجمي المدرّج العكسي)

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$، نقول إن $\alpha >_{grevlex} \beta$ إذا تحقق:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \quad \text{or} \quad \begin{cases} |\alpha| = |\beta| \\ \text{المدخل الأول غير الصفري من اليمين} \\ \text{في } \alpha - \beta \in \mathbb{N}^n \text{ هو سالب} \end{cases}$$

ملاحظة:

إن علاقات الترتيب من النوع lex و grevlex تُعطي نفس الترتيب على المتحولات:

$$(1,0,\ldots,0) >_{grevlex} (0,1,0,\ldots,0) >_{grlex} \ldots > (0,\ldots,0,1)$$

$$x_1 >_{grevlex} \ldots > x_n$$

الآن بعد أن عرّفنا الترتيب على الحدوديات سنرى كيف يُطبق هذا على كثيرات الحدود.

على سبيل المثال لنأخذ: $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in K[x,y,z]$

- lex: $f = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2$
- grlex: $f = 7x^2z^2 + 4xy^2z - 5x^3 + 4z^2$
- grevlex: $f = 4xy^2z + 7x^2z^2 - 5x^3 + 4z^4$

٥ – ١ – ٣ – تعريف:

ليكن $f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ كثير حدود غير صفري في $K[x_1,\ldots,x_n]$ ولتكن $<$ علاقة ترتيب على الحدوديات. إن:

i. $\text{multideg}(f) = \max(\alpha \in \mathbb{N}^n : a_\alpha \neq 0)$

(حيث الـ max مأخوذ بالنسبة لـ $<$ المعرفة على الحدوديات). فتكون الدرجة الكلية لـ f هي $|\text{multideg}((f)|$.

ii. المعامل القائد لـ f هو: $LC(f) = a_{multideg(f)} \in K$.

iii. الحدودية القائدة لـ f هي: $LP(f) = LM(f) = x^{multideg(f)}$

iv. الحد القائد لـ f هو: $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$

مثال:

بفرض لدينا الترتيب التالي على المتحولات $x >_{lex} y >_{lex} z$ وليكن:

$$f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2$$

عندئذ:

$$multideg((f) = (3,0,0), LC(f) = -5, LM(f) = x^3, LT(f) = -5x^3$$

٥ – ٢ – القسمة في $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$:

٥ – ٢ – ١ – مبرهنة (خوارزمية القسمة في $K[x_1,\ldots,x_n]$):

إذا كانت $F = (f_1,\ldots,f_s)$ مرتّبة ما مكونة من S مسقط من كثيرات حدود في $K[x_1,\ldots,x_n]$، وفق علاقة ترتيب ما، عندئذ أي كثير حدود f من $K[x_1,\ldots,x_n]$ يُكتب بالشكل الآتي:

$$f = a_1f_1 + \ldots + a_sf_s + r \quad \text{حيث} \quad a_i, r \in K[x_1,\ldots,x_n]$$

إما $r = 0$ أو r يُكتب كتركيب بمعاملات في k لحدوديات كلٌ فيها لا يقبل القسمة على أي من الحدود $LT(f_1),\ldots,LT(f_s)$ وفي هذه الحالة يُدعى r باقي قسمة f على F.

وأكثرُ من ذلك. إذا كان $a_if_i \neq 0$ عندئذ يكون: $multideg(f) \geq multideg(a_if_i)$.

٥ – ٢ – ٢ – تعريف:

لتكن $f, g, h \in K[x_1,\ldots,x_n]$ حيث $g \neq 0$. يُقال إن f يُختزل إلى h (عبر g) أو بالقياس g بخطوة واحدة ونكتب $f \xrightarrow{g} h$، إذا وفقط إذا كان LP(g) يقسم حد غير صفري يظهر في f و $h = f - \frac{X}{LT(g)}.g$ ويُقال عن h بأنه باقي القسمة الأول.

في حالة تعدد كثيرات الحدود ينبغي أن نُقسِّم على اكثر من كثير حدود في الوقت نفسه، لذلك يجب توسيع التعريف السابق ليصبح بالشكل:

$f,h, f_1,\dots,f_s \in K[x_1,\dots,x_n]$ حيث $f_i \neq 0$ $(1 \le i \le s)$ و $F = \{f_1,\dots,f_s\}$.

نقول إن f يُختزل إلى h (عبر F). ونرمز له بـ $f \xrightarrow{F}_{+} h$ إذا وفقط إذا وجدت متتالية من الأدلة بالشكل:

$i_1,\dots,i_t \in \{1,\dots,s\}$ ومتتالية من كثيرات الحدود $h_1,\dots,h_{t-1} \in K[x_1,\dots,x_n]$ بحيث يتحقق: $f \xrightarrow{f_{i1}} h_1 \xrightarrow{f_{i2}} h_2 \xrightarrow{f_{i3}} \dots \xrightarrow{f_{it}} h$.

٥ – ٢ – ٣ – تعريف:

يُقال عن كثير الحدود r إنَّه مختزل بالنسبة إلى مجموعة كثيرات الحدود غير الصفرية التالية $F = \{f_1,\dots,f_s\}$ إذا كان $r = 0$ أو لا توجد حدودية في r تقبل القسمة على أي من $LP(f_i)\ ;\ i = 1,\dots,s$، عندئذ يُدعى r باقي قسمة f على F.

٥ – ٢ – ٤ – مبرهنة:

لتكن $F = \{f_1,\dots,f_s\}$ مجموعة كثيرات حدود غير صفرية و $f \in K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذ يوجد كثيرات حدود $a_1,\dots,a_s, r \in K[x_1,\dots,x_n]$ بحيث يتحقق:

$$f = a_1f_1 + \dots + a_sf_s + r$$

حيث r مختزل بالنسبة إلى F و $LP(f) = mmax\ (max_{1\le i\le s}\ (LP(a_i)LP(f_i), Lp(r))$.

البرهان:

(حسب خوارزمية القسمة).

ملاحظة (١):

• إحدى خصائص خوارزمية القسمة في K[x] هي أن الباقي يتعين بشكل وحيد بينما يختلف الأمر في حال وجود اكثر من متحول لنرى ذلك من خلال المثال الآتي.

لنثبت الترتيب $x >_{lex} y$ عندئذ:

$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x + 1)(y^2 - 1) + (x)(xy - 1) + (2x + 1)$$
$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x + y)(xy - 1) + 1\ (y2 - 1) + (x + y + 1)$$

نلاحظ $(2x + 1) \neq (x + y + 1)$.

ملاحظة (٢):

- نعلم أن خوارزمية القسمة في $K[x]$ لها دور كبير في حل مسألة العضوية.

السؤال المطروح هنا هل خوارزمية القسمة في $K[x_1,\ldots,x_n]$ لها هذا الدور أيضاً؟

نلاحظ أنه إذا كان باقي قسمة f على $F = (f_1,\ldots,f_s)$ هو $r = 0$ عندئذ:

$$f \in \langle f_1,\ldots,f_s\rangle \text{ أي } f = a_1f_1 + \ldots + a_sf_s$$

بالتالي $r = 0$ هو شرط كافٍ لمسألة العضوية، لكنّه شرط غير لازم كما يوضح المثال الآتي:

مثال:

ليكن $f = xy^2 - x$ و $\left.\begin{matrix} f_1 = xy + 1 \\ f_2 = y^2 - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow F = (f_1, f_2)$

فنجد أن $f = yf_1 + 0f_2 + (-x - y)$.

أما إذا غيرنا ترتيب عناصر F بالشكل الآتي $F = (f_2,f_1)$

فنجد أن: $f = xf_2 + 0f_1 + 0$ أي $f \in \langle f_1, f_2\rangle$.

٥ – ٢ – ٥ – تعريف:

ليكن $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالي غير صفري.

i. نرمز بـ $LT(I)$ لمجموعة ا لحدود القائدة لعناصر I ونعبر عن ذلك بالشكل:

$$LT(I) = \{cx^{\alpha} : \exists\ f \in I,\ LT(f) = cx^{\alpha}\}$$

ii. نرمز بـ $\langle LT(I)\rangle$ للمثالي المولد بعناصر $LT(I)$.

إن للحدود القائدة في خوارزمية القسمة دور هام، وهذا يقودنا إلى نقطة مهمة متعلقة بـ $<LTT(I)>$ أي أنه إذا كان $I = <f_1,\ldots,f_s>$ فإنه ليس بالضرورة أن يكون $<LT(f_1),\ldots,,LT(f_s)>$ و $<LT(I)>$ مثاليين متساويين.

مثال على ذلك:

بفرض $I = <f_1, f_2>$ حيث $f_1 = x^3 - 2xy$ و $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$

وإذا كانت $x >_{grlex} y$ هي علاقة الترتيب المفروضة على المتحولات، عندئذ نلاحظ أن $x^2 \in I$ كون $x^2 = x(f_2) - y(f_1)$.

كما أن $x^2 = LT(x^2) \in <LT(I)>$.

لكن $x^2 \notin <LT(f_1), LT(f_2)>$ وذلك حسب التمهيدية الآتية.

٥ – ٢ – ٦ – تعريف:

يسمى المثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالي حدودي (مثالي وحيدات حد)، إذا وجدت مجموعة جزئية $A \subset \mathbb{N}^n$ (من الممكن غير منتهية) بحيث يتكون I من كل كثيرات الحدود التي هي مجاميع منتهية من الشكل $\sum_{\alpha\in A} h_\alpha x^\alpha$ حيث $h_\alpha \in K[x_1,..,x_n]$ وفي هذه الحالة نكتب $I = <x^\alpha : \alpha \in A>$.

٥ – ٢ – ٧ – تمهيدية:

ليكن $I = <x^\alpha : \alpha \in A>$ مثالياً حدودياً، عندئذ تكون الحدودية (وحيد الحد) x^β من I إذا وفقط إذا كان x^β يقبل القسمة على x^α لأجل $\alpha \in A$.

بالعودة إلى المثال، نلاحظ أن x^2 لا يقبل القسمة على $LT(f_1)$ أو $LT(f_2)$، وبالتالي $x^2 \notin <LT(f_1) , LT(f_2)>$.

٥ – ٢ – ٨ – مبرهنة:

ليكن I مثالياً من $K[x_1,\ldots, x_n]$ إن القضايا التالية صحيحة:

i. $<LT(I)>$ هو مثالي حدودي. (مثالي وحيدات حد).

ii. يوجد $g_1, \ldots, g_t \in I$ تحقق $<LT(I) = <LT(g_1),\ldots,LT(g_t)>$

٥ – ٢ – ٩ – مبرهنة (هلبرت الأساسية):Hilbert Basis Theorem

أي مثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ يملك مجموعة مولدة منتهية، أي أنه يوجد:

$I = <g_1,\ldots,g_t>$ بحيث $g_1,\ldots,g_t \in K[x_1,\ldots,x_n]$.

٥ – ٢ – ١٠ – تعريف:

ليكن I مثالياً في حلقة كثيرات الحدود $K[x_1,\ldots,x_n]$ و $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$ مجموعة جزئية منتهية من I عندئذ يُقال عن G إنها قاعدة غروبينر للمثالي I إذا وفقط إذا تحقق:

$$<LT(g_1), \ldots, LT(g_t)> = <LT(I)>$$

أو بشكل مكافئ:

المجموعة $\{g_1,\ldots,g_t\} \subset I$ هي قاعدة غروبينر لـ I $\Leftrightarrow$ الحد القائد لأي عنصر من I يقبل القسمة على أحد الحدود $LT(g_i)$ حيث $i = 1,\ldots,t$.

ويمكن القول إن G قاعدة غروبينر للمثالي I وفق علاقة ترتيب معينة، وذلك لأن تحديد الحدود $LT(g_i)$ يتطلب تعيين علاقة ترتيب على الحدوديات.

يُمكن أن نستنتج مباشرة من التعريف أن كل مثالي $0 \neq I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ يملك قاعدة غروبينر. وأكثر من ذلك أي قاعدة غروبينر لمثالي I هي مجموعة مولدة لـ I. وذلك حسب مبرهنة هيلبرت الأساسية.

نعرض فيما يأتي بعض خصائص قواعد غروبينر وكيفية الحكم على مجموعة مولدة ما أنها قاعدة غروبينر أم لا.

ولكن قبل ذلك سنبيّن أن الباقي الناتج من تطبيق خوارزمية القسمة في $K[x_1,\ldots,x_n]$ يتحدد بشكل وحيد عندما نقسم على قاعدة غروبينر.

٥ – ٢ – ١١ – مبرهنة:

لتكن $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I من $K[x_1,\dots,x_n]$.

إذا كان $f \in K[x_1,\dots,x_n]$ فإنه يوجد كثير حدود وليكن $r \in K[x_1,\dots,x_n]$ يحقق الخاصتين الآتيتين:

i. لا يوجد أي حد في r يقبل القسمة على أي حد من الحدود $LT(g_1),\dots,LT(g_t)$.

ii. يوجد $g \in I$ يحقق $f = g + r$ كما أن r هو باقي القسمة الوحيد لـ f على G.

ملاحظة:

ندعو الباقي أحياناً بالشكل القياسي كما سنرى لاحقاً.

كما أن خارج القسمة a_i (بالنسبة لقاعدة غروبنر) الناتج من خوارزمية القسمة يمكن أن يتغير بترتيب عناصر G، أما بالنسبة للباقي فهو وحيد.

الآن نعرض معياراً نبين فيه متى ينتمي كثير حدود ما إلى مثالي مُعطى.

٥ – ٢ – ١٢ – نتيجة:

لتكن $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I في $K[x_1,\dots,x_n]$ و $f \in K[x_1,\dots,x_n]$.

إن $f \in I$ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة f على G يساوي 0 (ونكتب $f \xrightarrow{G}_{+} 0$).

الإثبات:

($\Rightarrow$) إن $I = \langle g_1,\dots,g_t\rangle$ وكون الباقي يساوي 0 فإن $f \in I$.

($\Leftarrow$) بفرض $f \in I$، نفرض جدلاً أن باقي القسمة على G وليكن r لا يساوي 0، وبما أن باقي القسمة وحيد مهما غيرنا في ترتيب عناصر G فإن f يُكتب بالشكل $f = g + r$ حيث $g = a_1g_1 + \dots + a_tg_t$ و $r \neq 0$ وبالتالي f لا يُكتب بدلالة مولدات I وهذا تناقض.

ملاحظة:

الخاصة المذكورة في النتيجة السابقة يمكن استخدامها كتعريف لقاعدة غروبينر، أي إذا كانت $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$ مجموعة مولدات ما لـ I مع الخاصة $f \xrightarrow{G} 0$ وذلك $\forall f \in I$ فإن G هي قاعدة غروبينر لـ I و $I = \langle g_1,..,g_t\rangle$.

وحتى تكون G قاعدة غروبينر حسب التعريف المذكور يجب أن تتحقق المساواة:

$$\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1),\ldots,LT(g_t)\rangle$$

لدينا بداية $\langle LT(g_1),\ldots,LT(g_t)\rangle \subset \langle LT(I)\rangle$

$\forall f \in I$، فإن باقي قسمة f على G هو 0 بالتالي كل عنصر من I يمكن كتابته بالشكل $f = a_1g_1 + \ldots + a_tg_t$، بالتالي لأجل كل f فإنه:

$$\exists i \in \{1,\ldots,t\} : LT(g_i) \mid LT(f) \Rightarrow \langle LT(f)\rangle \in \langle LT(g_1),.., LT(g_t)\rangle, \forall f$$

أي $\langle LT(g_1),\ldots,LT(g_t)\rangle \subset \langle LT(I)\rangle$ و G قاعدة غروبينر.

من النتيجة السابقة نتوصل إلى حل لمسألة العضوية شريطة أن نعلم ما هي قاعدة غروبينر للمثالي، فنحن بحاجة فقط لحساب باقي القسمة على G لنحدد فيما إذا كان $f \in I$ أم لا.

فيما يأتي نعرض كيفية إيجاد قاعدة غروبينر، وبالتالي نكون قد قدمنا حلاً كاملاً لمسألة العضوية.

ترميز:

سنستخدم الرمز $\bar{f}^F$ للتعبير عن الباقي (باقي قسمة f على المجموعة المرتبة المكونة من s مسقط $F = (f_1,\ldots,f_s)$.

وإذا كانت F قاعدة غروبينر للمثالي $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ عندئذ يمكن النظر إلى F على أنها مجموعة عناصرها لا تخضع لترتيب معين.

مثال:

ليكن $f = x^5y$، ولنفرض أن علاقة الترتيب هي $x >_{lex} y$

و $F = (x^2y - y^2 , x^4y^2 - y^2)$ عندئذ $\overline{x^5y}^F = xy^3$.

٥ – ٢ – ١٣ – تعريف:

لتكن $f, g \in K[x_1,\ldots,x_n]$ كثيرات حدود غير صفرية.

i. إذا كان $\text{multideg}(f) = \alpha$ و $\text{multideg}(g) = \beta$، وليكن $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ حيث $\gamma_i = \max(\alpha_i,\beta_i)$ لأجل كل i فإن x^γ تُسمى المضاعف المشترك الأصغر للحدودية القائدة لـ f والحدودية القائدة لـ g ونكتب $x^\gamma = \text{Lcm}(LM(f), LM(g))$.

ii. الـ S - كثير حدود لـ f و g يُعرَّف بالعلاقة:

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$$

مثال:

$$\begin{cases} f = x^3y^2 - x^2y^3 + x \\ g = 3x^4y + y^2 \end{cases}$$ كثيرات حدود في $\mathbb{R}[x, y]$

ولتكن $x >_{grles} y$ علاقة الترتيب. فإن:

$$LM(f) = x^3y^2,\ LM(g) = x^4y \Rightarrow \text{Lcm} = x^4y^2 \Rightarrow \gamma = (4,2)$$

$$S(f,g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g = x \cdot f - \frac{1}{3} \cdot y \cdot g$$

٥ – ٢ – ١٤ – مبرهنة (معيار Buchberger):

ليكن I مثالياً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ و $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$ مجموعة مولدة لـ I.

تكون G قاعدة غروبنر للمثالي I إذا وفقط إذا تحقق: $(\forall\, i \neq j)\ S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$

مثال (١):

ليكن المثالي $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$

عندئذ فإن $G = \{y - x^2 ,\ z - x^3\}$ هي قاعدة غروبنر للمثالي I بالنسبة إلى الترتيب $y >_{lex} z >_{lex} x$، لنحسب الـ S - كثير حدود التالي:

$$S(y - x^2, z - x^3) = \frac{yz}{y}(y - x^2) - \frac{yz}{z}(z - x^3) = -zx^2 + yx^3$$

من خوارزمية القسمة نجد:

$$-zx^2 + yx^3 = x^3 \cdot (y - x^2) + (-x)^2 \cdot (z - x^3) + 0$$

أي $S(y - x^2, z - x^3) \xrightarrow{G} 0$

بالتالي حسب المعيار السابق G هي قاعدة غروبير للمثالي I.

نعرض فيما يلي كيفية بناء قاعدة غروبنر للمثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$، حيث أن فكرة بناء قاعدة غروبنر تعتمد على توسيع المجموعة المولدة للمثالي I لتصبح قاعدة غروبنر، وذلك بإضافة كثيرات حدود من I وهي الـ S - كثيرات حدود التي عرضناها سابقاً.

مثال (٢):

لنثبّت الترتيب الآتي: $x >_{grlex} y$ وليكن $I = \langle f_1, f_2\rangle \subset K[x,y]$ حيث:

$$f_1 := x^3 - 2xy\ ,\ f_2 := x^2y - 2y^2 + x$$

المجموعة $G = \{f_1, f_2\}$.

$$S(f_1,f_2) = \frac{x^3y}{x^3}(x^3 - 2xy) - \frac{x^3y}{x^2y}(x^2y - 2y^2 + x)$$
$$= x^3y - 2xy^2 - x^3y + 2xy^2 - x^2 = -x^2$$

نأخذ باقي القسمة على (f_1,f_2) فنجد أنه يساوي $-x^2$

لنضع $f_3 = -x^2$ ولنضع $G = \{f_1,f_2,f_3\}$، مباشرة نلاحظ أن $S(f_1,f_2) = 0$، الآن لنحسب $S(f_1,f_3)$:

$$S(f_1,f_3) = \frac{x^3}{x^3}(x^3 - 2xy) - \frac{x^3}{-x^2}(-x^2) = x^3 - 2xy - x^3 = -2xy$$

باقي القسمة على (f_1,f_2,f_3) هو:

$$\overline{S(f_1,f_3)}^{G} = -2xy$$

لنضع $f_4 = -2xy$ ولنأخذ $G = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$

مباشرة $\overline{S(f_1,f_2)}^G = \overline{S(f_1,f_3)}^G = 0$

$$S(f_1,f_4) = \frac{x^3y}{x^3}(x^3 - 2xy) - \frac{x^3y}{-2xy}(-2xy)$$

$$= -x^3y - 2xy^2 - x^3y = -2xy^2 = 4f_4 \Rightarrow \overline{S(f_1,f_4)}^G = 0$$

$$S(f_2,f_3) = \frac{x^2y}{x^2y}(x^2y - 2y^2 + x) - \frac{x^2y}{-2x^2}(-2x^2)$$

$$= x^2y - 2y^2 + x - x^2y = -2y^2 + x$$

لكن $\overline{S(f_2,f_3)}^G \neq 0$

لنضع $f_5 = -2y^2 + x$ و $G = \{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$

سنجد أن $\overline{S(f_i,f_j)}^G = 0$ وذلك مهما كانت $1 \le i \le j \le 5$.

أي إن $G = \{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I.

ملاحظة:

قواعد غروبنر المحسوبة باستخدام الخوارزمية السابقة عادة ما تكون أكبر من اللازم. سنرى فيما يأتي أنه بالإمكان حذف بعض المولدات غير الضرورية.

٥ – ٢ – ١٥ – تمهيدية:

لتكن G قاعدة غروبنر للمثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ و $p \in G$ كثير حدود يحقق $LT(p) \in \langle LT(G - \{p\})\rangle$ إن $G - \{p\}$ تكون أيضاً قاعدة غروبنر لـ I.

الإثبات:

من تعريف قاعدة غروبنر نجد $\langle LT(I)\rangle = \langle LT(G)\rangle$ بالتالي كون:

$LT(p) \in \langle LT(G - \{p\})\rangle$ فإن $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(G - \{p\})\rangle$، بالتالي حسب التعريف فإن $G - \{p\}$ تشكل قاعدة غروبنر أيضاً.

٥ – ٢ – ١٦ – تعريف: (قاعدة غروبنر الأصغرية):

لتكن G قاعدة غروبنر للمثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$. إن G تُسمى قاعدة غروبنر الأصغرية للمثالي I إذا تحقق:

i. $LC(p) = 1 \ , \forall \ p \in G$.

ii. $\forall \ p \in G, LT(p) \notin <LT(G - \{p\})>$.

٥ – ٢ – ١٧ – نتيجة:

بفرض $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I، للحصول على قاعدة غروبنر الأصغرية من G نحذف كل g_i يتحقق من أجلها وجود $i \neq j$ بحيث $LP(g_j)$ يقسم $LP(g_i)$، ونقسم ما تبقى من عناصر G على معاملاتها القائدة.

لدينا من المثال السابق قاعدة غروبنر عناصرها:

$$f_1 = x^3 - 2xy$$
$$f_2 = x^2y - 2y^2 + x$$
$$f_3 = -x^2$$
$$f_4 = -2xy$$
$$f_5 = -2y^2 + x$$

نلاحظ أن $L(P)(f_3)$ يقسم كل من $LP(f_1)$ و $LP(f_2)$ بالتالي نحذف f_1, f_2.

نقسم f_3 على (-1) وكل من f_5 و f_4 على (-2) فنجد:

$\overline{f_3} = x^2, \overline{f_4} = xy, \overline{f_5} = y^2 - \frac{1}{2}x$ وهي قاعدة غروبنر الأصغرية للمثالي I.

كما أن قاعدة غروبنر الأصغرية ليست وحيدة فمثلاً المجموعة:

$$\left\{\overline{f_3} = x^2 + axy, \overline{f_4} = xy, \overline{f_5} = y^2 - \frac{1}{2}x\right\}$$

تشكل أيضاً قاعدة غروبنر أصغرية، حيث $a \in K$.

المبرهنة الآتية توضح العلاقة بين قواعد غروبنر الأصغرية لمثالي.

٥ – ٢ – ١٨ – مبرهنة:

إذا كانت $G = \{g_1,\ldots,g_t\}$ و $F = \{f_1,\ldots,f_s\}$ قواعد غروبنر أصغرية للمثالي I فإن $s = t$ و $LT(f_i) = LT(g_i)\ ;\ i = 1,\ldots,t$.

الإثبات:

بما أن $f_1 \in I$ و G قاعدة غروبنر لـ I عندئذ يوجد i بحيث يتحقق $LP(g_i)$ يقسم $LP(f_1)$.

نعيد ترتيب عناصر G (إن دعت الحاجة) لنسمي $i = 1$.

الآن $g_1 \in I$ و F هي قاعدة غروبنر لـ I عندئذ يوجد j بحيث يتحقق $LP(f_j)$ يقسم $LP(g_1)$. وكون علاقة تقسيم متعدية فإن $LP(f_1) \mid LP(f_j)$ أي $j = 1$، لأن F هي قاعدة غروبنر أصغرية، بالتالي $LP(f_1) = LP(g_1)$.

تستمر العملية السابقة حتى يتم استخدام كل عناصر F و G، بالتالي $s = t$، وبإعادة الترتيب نجد $LP(f_i) = LP(g_i)$ لأجل $i = 1,\ldots,t$.

وكون $LC(f_i) = LC(g_i) = 1$ فإن $LT(f_i) = LT(g_i)$.

٥ – ٢ – ١٩ – تعريف:

نقول عن قاعدة غروبنر G لمثالي $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ إنها قاعدة غروبنر مختزلة لـ I إذا تحقق:

i. $LC(p) = 1$ لأجل كل p من G.

ii. لأجل كل p من G، لا يوجد أي حد من p يقع في $<(LT(G - \{p\})>$.

أو بمعنى آخر يمكننا القول عن قاعدة غروبنر الأصغرية G للمثالي I إنها مختزلة إذا كانت كل g_i من G مُنتجة عبر $G - \{g_i\}$.

٥ – ٢ – ٢٠ – مبرهنة:

إذا كان $\{0\} \neq I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالياً، فإنه توجد قاعدة غروبنر مختزلة وحيدة للمثالي I وذلك من أجل علاقة ترتيب مُثبَّتة على الحدوديات.

مثال:

ليكن المثالي:

$$I = \langle 3x - 6y - 2z,\ 2x - 4y + 4w,\ w - 2y - z - w \rangle \subset K[x,y,z,w]$$

ولنثبت علاقة ترتيب على المتحولات بالشكل الآتي $x >_{lex} y >_{lex} z >_{lex} w$، نوجد قاعدة غروبنر المختزلة للمثالي I وفق ما يلي:

نضع $G = \{f_1,f_2,f_3\}$ حيث:

$$f_1 = 3x - 6y - 2z$$
$$f_2 = 2x - 4y + 4w$$
$$f_3 = x - 2y - z - w$$

$$S(f_1,f_2) = \frac{x}{3x}(3x - 6y - 2z) - \frac{x}{2x}(2x - 4y + 4w)$$

$$= -\frac{2}{3}z - 2w \xrightarrow{G} 0$$

نضع $f_4 = -\frac{2}{3}z - 2w$، ولنأخذ $G = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$

$$S(f_1,f_3) = \frac{1}{3}z + w \xrightarrow{G} 0$$

$$S(f_1,f_4) = -3xw - 2yz - \frac{2}{3}z^2 \xrightarrow{G} 0$$

$$S(f_2,f_3) = z + 3w \xrightarrow{G} 0$$

$$S(f_2,f_4) = -3xw - 2yz + 2zw \xrightarrow{G} 0$$

$$S(f_3,f_4) = -3xw - 2yz - z^2 - zw \xrightarrow{G} 0$$

وبالتالي $G = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ هي قاعدة غروبنر للمثالي $I \subset K[x,y,z,w]$.

واضح أن قاعدة غروبينر الأصغرية هي $\{x - 2y + 2w,\ z + 3w\}$ وهي مختزلة أيضاً.

ملاحظة:

الحدوديات التي تعرف المثالي I في هذا المثال هي حدوديات خطية، لذلك يمكن استخدام طرق الجبر الخطي في حل جملة المعادلات المتجانسة $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

فتكون مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ الشكل المدرج للمصفوفة

فتكون قاعدة غروبينر الأصغرية:

$$\{x - 2y - z - w,\ z + 3w\}$$

وإذا حولنا المصفوفة إلى الشكل المدرج المختزل فإنها تصبح:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون قاعدة غروبينر الأصغرية المختزلة (أو المختزلة):

$$\{x - 2y + 2w,\ z + 3w\}$$

ملاحظة:

١ – يمكن استخدام قواعد غروبينر لاختبار تساوي مثاليين، حيث إن المثاليين I, J متساويان ⇔ قواعد غروبينر المختزلة لهما هي ذاتها.

٢ – لكل حدودية $f \in K[x_1,\ldots,x_n]$ يوجد عنصر وحيد $r \in K[x_1,\ldots,x_n]$ مختزل بالنسبة لـ G ويحقق $f \xrightarrow{G} r$.

٥ – ٣ – حل جملة معادلات كثيرات حدود:

سنرى في هذه الفقرة كيف يمكن استخدام تقنية قواعد غروبينر لحل جملة معادلات كثيرات حدود بعدة متحولات.

مثال:

لتكن المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = y \\ x = z \end{cases} \qquad (1)$$

لنبحث عن الحلول في $\mathbb{C}^3$.

إن هذه المعادلات تُعين المثالي:

$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ x^2 + z^2 - y,\ x - z \rangle \subset \mathbb{C}[x,y,z]$$

ونريد إيجاد كل النقاط في $\mathbb{V}(I)$.

نعلم أنه يمكننا حساب $\mathbb{V}(I)$ باستخدام أي مجموعة مولدة لـ I لذلك لنرى ماذا يحدث عندها نستخدم قاعدة غروبينر.

نوجد قاعدة غروبينر للمثالي I بالنسبة للترتيب التالي $x >_{lex} y$ فنجد العناصر الآتية:

$$g_1 = x - z$$
$$g_2 = -y + 2z^2$$
$$g_3 = z^4 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}$$

نلاحظ أن كثير الحدود g_3 يعتمد فقط على z، لذلك بحل المعادلة $g_3 = 0$ نجد:

$$z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5} - 1}$$

هذا يُعطي أربع قيم لـ z، نعوض هذه القيم في المعادلات $g_2 = 0$ و $g_3 = 0$.

من أجل: $z = +\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}$

من g_2 نجد:

$$-y+2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}\right)^2 = 0 \Rightarrow -y+\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{5}-1\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$$

من g_1 نجد:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}$$

أما في حال $z = -\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}$

من g_2 نجد:

$$-y+2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}i\left(\pm\sqrt{5}-1\right) \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}i$$

من g_1 نجد:

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}$$

بما أن $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(g_1,g_2,g_3)$ نكون قد أوجدنا كل حلول جملة المعادلات (1).

٥ – ٣ – ١ – تعريف (محذوف المثالي):

بفرض I مثالي في $K[x_1,\ldots x_n]$ عندئذ يُعرَّف محذوف المثالي من المرتبة ℓ بالشكل الآتي:

$$I_\ell = I \cap K[x_{\ell+1},\ldots,x_n]$$

أي إذا كان $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ فإن عناصر I_ℓ هي تراكيب خطية لـ $f_1,\ldots,f_s$ بمعاملات تحذف المتحولات $x_1,\ldots,x_\ell$ من المعادلات $f_1 = \ldots = f_s = 0$.

نلاحظ من المثال السابق أن هناك خطوتان أساسيتان لإيجاد الحلول:

- خطوة الحذف.
- خطوة التمديد.

وهذا ما سنبينه من خلال مبرهنة الحذف ومبرهنة التمديد.

مثال:

بفرض لدينا المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} x^2 + y + z &= 1 \\ x + y^2 + z &= 1 \\ x + y + z^2 &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

لنأخذ المثالي I بالشكل الآتي:

$$I = \langle x^2 + y + z - 1,\ x + y^2 + z - 1,\ x + y + z^2 - 1 \rangle \qquad (2)$$

بالحساب نجد[1] قاعدة غروبينر للمثالي I بالنسبة للترتيب $x >_{lex} y >_{lex} z$ هي:

$$\begin{aligned} g_1 &= x + z + y^2 + 1 \\ g_2 &= y^2 - y - z^2 + z \\ g_3 &= 2yz^2 + z^4 - z^2 \\ g_4 &= z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

إن المعادلات (1) و (3) لها نفس الحلول.

لدينا:

$$\begin{aligned} g_4 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 &= z^2 (z^4 - 4z^2 + 4z - 1) \\ &= z^2(z-1)^2(z^2 + 2z - 1) \end{aligned}$$

بالتالي الحلول هي: $-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 1, 0$

نعوض هذه الحلول في المعادلات $g_2 = 0$ و $g_3 = 0$ يمكننا عندئذ أن نحدد قيم y.

وأخيراً نعوض في $g_1 = 0$ نحصل على قيم x المقابلة.

بهذه الطريقة تتشكل لدينا الحلول الآتية:

---

(١) تم إجراء الحسابات باستخدام برنامج MAPLE وهو أحد أنظمة جبر الكمبيوتر التي تُخدم قواعد غروبنر.

$$(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (0,0,1)$$
$$\left(-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right),\left(-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\right)$$

نلاحظ أن $g_4 \in I \cap \mathbb{C}[z]$ حيث I هو المثالي المعرف بالمعادلة (2).

٥ – ٣ – ٢ – مبرهنة الحذف:

ليكن $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ مثالي و G قاعدة غروبينر لـ I بالنسبة للترتيب $x_1 >_{lex} x_2 > \ldots > x_n$ عندئذ لأجل كل $0 \le \ell \le n$ تكون المجموعة:

$$G_\ell = G \cap K[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$$

قاعدة غروبينر للمثالي I_ℓ، حيث I_ℓ هو محذوف المثالي I من المرتبة ℓ.

ملاحظة:

وجدنا في المثال السابق أن قاعدة غروبينر للمثالي:

$$I = \langle x^2 + y + z - 1,\ x + y^2 + z - 1,\ x + y + z^2 - 1\rangle$$

معطاة في (3).

ينتج من مبرهنة الحذف أن:

$$I_1 = I \cap \mathbb{C}[z] = \langle y^2 - y - z^2 + z,\ 2yz^2 + z^4 - z^2,\ z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2\rangle$$
$$I_2 = I \cap \mathbb{C}[z] = \langle z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2\rangle$$

إن g_4 هي ليست نتيجة لحذف x و y بطريقة عشوائية من المعادلات المعطاة، إنما هي أفضل طريقة ممكنة كون أي كثير حدود آخر يحذف x و y ما هو إلا مضاعف لـg_4.

كما أن مبرهنة الحذف تبين أن قاعدة غروبينر بالنسبة إلى الترتيب lex تحذف ليس فقط أول متحول، لكنها أيضاً تحذف أول متحولين أو أول ثلاث متحولات وهكذا..

الآن نناقش خطوة التمديد:

بفرض لدينا المثالي I من $K[x_1,\ldots,x_n]$ ولدينا المتنوعة الأفينية الآتية:

$$\mathbb{V}(I) = \{(a_1,\ldots,a_n) \in K^n : f(a_1,\ldots,a_n) = 0,\ \forall\ f \in I\}$$

لوصف نقاط $\mathbb{V}(I)$ نقوم ببناء الحلول وذلك من خلال إيجاد إحداثي واحد في كل مرة وفق ما يأتي.

لنُثبّت l بين 1 و n هذا يعطينا محذوف المثالي I_l وسنعرف الحل $(a_{l+1},\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I_l)$ بأنه حل جزئي للجملة الأساسية، لتمديد الحل $(a_{l+1},\ldots,a_n)$ إلى حل كامل في $\mathbb{V}(I)$.

نقوم بإضافة إحداثي آخر إلى الحل وهذا يعني إيجاد a_l بحيث يتحقق:

$$(a_l, a_{l+1},\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I_{l-1})$$

أي إذا كان $I_{l-1} = \langle g_1,\ldots,g_r\rangle$ في $K[x_l,\ldots,x_n]$ فإننا نريد إيجاد حلول جملة المعادلات:

$$g_1(x_l, a_{l+1},\ldots,a_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_r(x_l, a_{l+1},\ldots,a_n) = 0$$

وهي كثيرات حدود بمتحول واحد هو x_l، وينتج أن a_l المطلوب هو حل للقاسم المشترك الأكبر لكثيرات الحدود السابقة.

هناك مشكلة وهي أن كثيرات الحدود السابقة من الممكن أن لا تملك حلاً مشتركاً، أي قد يوجد حل جزئي لا يمكن تمديده ليصبح حلاً كاملاً للجملة.

مثال:

لنأخذ المعادلات:

$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ xz &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

حيث $I = \langle xy - 1, xz - 1\rangle$

وقاعدة غروبنر لـ I هي $G = \{y - z, xz - 1\}$ وبالتالي حل المعادلات (4) يكافئ حل المعادلات:

$$y = z$$
$$xz = 1$$

من مبرهنة الحذف $y - z$ يولد محذوف المثالي من المرتبة الأولى وبالتالي الحلول الجزئية معطاة بالشكل الآتي (a,a) وتوسَّع كلها إلى حل كاملٍ بالشكل $\left(\frac{1}{a}, a, a\right)$ باستثناء الحل الجزئي $(0,0)$.

نركز في دراستنا على الحالة الخاصة التي نحذف فيها فقط المتحول الأول x_1، وبالتالي نريد أن نعلم فيما إذا كان بالإمكان توسيع الحل الجزئي $(a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$ إلى الحل $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I)$. وهذا ما تعرضه المبرهنة الآتية.

٥ – ٣ – ٣ – مبرهنة التمديد:

ليكن $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subset \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ و I_1 محذوف المثالي I من المرتبة الأولى ولأجل كل $1 \le i \le s$ نكتب f_i بالشكل:

$$f_i = g_i(x_2,\ldots,,x_n)\ x_1^{N_i} + h(x_1,\ldots,x_n)\ :\ \deg_{x_1}(h) < N_i$$

حيث $N_i \ge 0$ و $g_i \in \mathbb{C}[x_2,\ldots,x_n]$، $g_i \ne 0$، وإذا وجد الحل الجزئي $(a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$. حيث $(a_2,\ldots,a_n) \notin \mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s)$ فإنه يوجد $a_1 \in \mathbb{C}$ يحقق: $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I)$.

البرهان:

يعتمد على الناتج resultant الذي سنعرضه لاحقاً في هذا الفصل.

ملاحظات:

١ – إن المبرهنة السابقة محققة فقط في حال $K = \mathbb{C}$ (حقل مغلق جبرياً) لأنه في حالة $K = \mathbb{R}$ فإن المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} x^2 &= y \\ x^2 &= z \end{aligned} \qquad (5)$$

تولّد المثالي $I = \langle x^2 - y,\ x^2 - z\rangle \subset \mathbb{R}[x,y,z]$.

إن قاعدة غروبنر للمثالي I هي $G = \{y - z,\ x^2 - z\}$ نُلاحظ أن $g_1 \in I \cap \mathbb{C}[y,z] = I_1$ وبالتالي نحصل على الحل الجزئي (a,a) حيث $a \in \mathbb{R}$.

بما أن المعاملات القائدة لكثيرات الحدود $x^2 - y$ و $x^2 - z$ (تساوي 1) فهي لا تنعدم. وبالتالي مبرهنة التمديد تضمن أن الحل (a,a) يوسّع (لكن بشرط أننا نعمل على $\mathbb{C}$). ولكن هنا نعمل على $\mathbb{R}$ أي إن $x^2 = a$ لا يملك حلولاً حقيقية عندما a سالب، وبالتالي الحلول الجزئية الوحيدة القابلة للتمديد هي عندما $a \geq 0$ حيث تُوسّع إلى حل لـ (5) أي مبرهنة التمديد لا يمكن تطبيقها على $\mathbb{R}$.

٢ – الفرض $(a_2,\ldots,a_n) \notin \mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s)$

نلاحظ أن g_i هي المعاملات القائدة لـ f_i بالنسبة للمتحول x_1.

وكون $(a_2,\ldots,a_n) \notin \mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s)$ نجد أن المعاملات القائدة لا تنعدم عند الحل الجزئي، على سبيل المثال المعادلات:

$$xy = 1$$
$$xz = 1$$

تملك حلاً جزئياً $(a,a) = (y,z)$ الحل الوحيد الذي لا يمكن توسيعه هو (0,0) والذي هو حل جزئي ينتمي إلى $\mathbb{V}(y,z)$ بالتالي من المبرهنة نجد أنّه لا يمكن تمديد الحل.

٣ – على الرغم من أنه قد تم صياغة مبرهنة التمديد فقط في حالة حذف المتحول الأول x_1 فإنه يمكن استخدامها لأي عدد من المتحولات.

على سبيل المثال لنأخذ المعادلات:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ xyz &= 1 \end{aligned} \qquad (6)$$

عناصر قاعدة غروبنر للمثالي $I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ xyz - 1\rangle$ بالنسبة للترتيب $x >_{lex} y >_{lex} z$ هي:

$$g_1 = y^4z^2 + y^2z^4 - y^2z^2 + 1$$
$$g_2 = x + y^3z + yz^3 - yz$$

من مبرهنة الحذف نجد:

$$I_1 = I \cap \mathbb{C}[y,z] = \langle g_1\rangle$$

$I_1 = I \cap \mathbb{C}[z] = \{0\}$

$I_2 = \{0\} \Leftarrow \mathbb{V}(I_2) = \mathbb{C}$ بالتالي كل $c \in \mathbb{C}$ هي حل جزئي.

لنرى ما هي الحلول الجزئية $c \in \mathbb{C} = \mathbb{V}(I_2)$ التي تمدد إلى $(a,b,c) \in \mathbb{V}(I)$؟

نوسع الحل إلى (b,c) ثم إلى (a,b,c) لتحديد ما هي الحلول التي توسع (نستخدم مبرهنة التمديد في كل خطوة).

أي الانتقال من $c \in \mathbb{V}(I_2)$ إلى $(b,c) \in \mathbb{V}(I_1)$ ومن ثم إلى $(a,b,c) \in \mathbb{V}(I)$.

i. لدينا $I_1 = \langle g_1 \rangle$ و $z = c$.

معاملات y^4 في g_1 هي z^2 بالتالي الحل c يوسع إلى (b,c) بشرط $c \neq 0$.

ii. نعوض في (6) الحل الجزئي $(y,z) = (b,c)$ نحصل على معادلتين بالمتحول x المعامل القائد لـ x: في المعادلة الأولى يساوي 1.

في المعادلة الثانية يساوي yz.

بما أن 1 لا تنعدم (فإن $\mathbb{V}(1,y,z) = \phi$).

وبالتالي مبرهنة التمديد تضمن وجود a ومنه نكون قد برهنّا أن كل الحلول الجزئية $c \neq 0$ تُوسَّع إلى $\mathbb{V}(I)$ (أي إلى حلول الجملة الأساسية).

٥ – ٣ – ٤ – نتيجة:

ليكن $I = \langle f_1,\ldots,f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ ومن أجل $i \in \{1,\ldots,s\}$، f_i يُكتب بالشكل:

$$f_i = c\,x_1^N + h(x_1,\ldots,x_n) : \deg_{x_1}(h) < N$$

حيث $0 \neq c \in \mathbb{C}$ و $N > 0$.

إذا كان I_1 محذوف المثالي I من المرتبة الأولى و $(a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I_1)$، فإنه يوجد $a_1 \in \mathbb{C}$ بحيث $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}(I)$.

الإثبات:

مباشرة من مبرهنة التمديد: لما كان $g_1 = c \neq 0 \Leftarrow \mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s) = \phi$.

ولدينا $(a_2,\ldots,a_n)$ هو حل جزئي ويحقق $(a_2,\ldots,a_n) \notin \mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s)$، وذلك من اجل كل الحلول الجزئية.

عرضنا في الجزء السابق من هذا الفصل كيفية استخدام قواعد غروبينرر في نظرية الحذف، أما الآن فسنتعرف على أداة أخرى لمسألة الحذف يُطلق عليها اسم الناتج، تُستخدم لحل جملة معادلات كثيرات حدود.

٥ – ٤ – الناتج: Resultant

نقدّم بداية مفهوم الناتج بالإجابة عن السؤال الآتي:

متى يملك كثيرا حدود في $K[x]$ عاملاً مشتركاً؟

إن هذا قد يبدو للوهلة الأولى بعيداً قليلاً عن الحذف لكننا سوف نرى الارتباط في نهاية هذه الفقرة، ثم ننتقل إلى الحالة العامة، (المقصود بعامل مشترك لـ $f, g \in K[x]$ هو كثير حدود $h \in K[x]$ درجته أكبر تماماً من الصفر ويقسم كلاً من f,g).

إن إحدى الطرق المألوفة هي تحليل f,g إلى عوامل غير خزولة، لكن التحليل يحتاج إلى وقت كبير، لذلك هي طريقة غير فعالة في معظم الحالات.

هناك طريقة أخرى هي حساب الـ gcd(f,g) باستخدام خوارزمية إقليدس، والتي تتطلب القيام بعدة عمليات قسمة، وهذا أمر نريد تجنبه عند قيامنا بعملية الحذف، لذلك نحن بحاجة إلى طريقة فعالة تحدد فيما إذا كان العامل المشترك موجود أم لا دون الحاجة لإجراء عمليات قسمة.

إن التمهيدية التالية تعرض شرط وجود عامل مشترك لكثيري حدود.

٥ – ٤ – ١ – تمهيدية:

لتكن $f,g \in K[x]$ من الدرجات $n,m > 0$ على الترتيب، إن f,g لهما عامل مشترك إذ وفقط إذا وجدت كثيرات حدود $A, B \in K[x]$ يتحقق من أجلها:

i. A, B ليس كلاهما معدوم.

ii. A يملك درجة $m-1$ على الأكثر.

و B يملك درجة $n-1$ على الأكثر.

iii. $A.f + B.g = 0$.

الإثبات:

($\Leftarrow$) بفرض f,g لهما عامل مشترك $h \in K[x]$ عندئذ $f = h \cdot f_1,\ g = h \cdot g_1$ حيث $f_1, g_1 \in K[x]$.

إن f_1 يملك درجة على الأكثر $n-1$. وبشكل مشابه درجة g_1 على الأكثر هي $m-1$.

عندئذ إن $g_1.f + (-f_1).g = g_1 \cdot h \cdot f_1 - f_1 \cdot h \cdot g_1 = 0$

بوضع $A = g_1, ,B = -f_1$ يتم المطلوب.

($\Rightarrow$) بفرض $A, B \in K[x]$ تحقق الخصائص الثلاثة المذكورة عندئذ:

من (i) يمكننا أن نضع $B \neq 0$. ولنفرض جدلاً أن $f,\ g$ لا يملكان عاملاً مشتركاً عندئذ يمكن ان نكتب $\gcd(f,g) = 1$ بالتالي $\exists \tilde{A}, \tilde{B} \in K[x] : \tilde{A}.f + \tilde{B}.g = 1$، لنضرب الطرفين بـ B فنجد: $B = \left(\tilde{A}.f + \tilde{B}.g\right) \cdot B = \left(\tilde{A}B - A\tilde{B}\right) \cdot f$.

مما يعني أن B له درجة على الأقل n وهذا يناقض (ii) إذن يوجد عامل مشترك من درجة موجبة.

ملاحظة (١):

في التمهيدية السابقة لإيجاد كثيرات الحدود $A, B \in K[x]$ نقوم بما يلي:

تحويل $A \cdot f + B \cdot g = 0$ إلى جملة معادلات خطية.

لنكتب أولاً A, B بالشكل: $\begin{cases} A = c_0 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1} \\ B = d_0 x^{n-1} + \ldots + d_{n-1} \end{cases}$

سننظر إلى الـ $m + n$ معامل $c_0,\ldots,c_{m-1}\ ,\ d_0,\ldots,d_{n-1}$ كمجاهيل، وهدفنا هو إيجاد $c_i, d_i \in K$ ليس جميعها أصفار وتحقق المعادلة (*) $A \cdot f + B \cdot g = 0$.

ولنكتب f,g بالشكل $\begin{cases} f = a_0x^n + \ldots + a_n ; a_0 \neq 0 \\ g = b_0x^m + \ldots + b_m ; b_0 \neq 0 \end{cases}$ حيث $a_i, b_i \in K$

نعوض هذه الصيغ في المعادلة (*) فنحصل على جملة معادلات خطية بالمجاهيل c_i, d_i والمعاملات $a_i, b_i \in K$ ويكون لدينا:

$$(**)\quad \begin{cases} \text{معاملات } x^{n+m-1}: & a_0c_0 + b_0d_0 = 0 \\ \text{معاملات } x^{n+m-2}: & a_1c_0 + a_0c_1 + b_1d_0 + b_0d_1 = 0 \\ \vdots & \\ \text{معاملات } x^0: & a_nc_{m-1} + b_md_{n-1} = 0 \end{cases}$$

وبما أنه يوجد $m + n$ معادلة خطية و $m + n$ مجهول عندئذ: يوجد حل غير صفري إذا وفقط إذا كان محدَّد مصفوفة الأمثال معدوم.

وبالتالي النقاش السابق يقودنا إلى التعريف الآتي:

٥ – ٤ – ٢ – تعريف:

ليكن $f, g \in K[x]$ كثيري حدود من درجات موجبة تماماً أي:

$$f = a_0x^n + \ldots + a_n\ ;\ a_0 \neq 0$$
$$g = b_0x^m + \ldots + b_m\ ;\ b_0 \neq 0$$

نرمز لمصفوفة Sylvester لـ g و f بالنسبة لـ x بـ Sylv(f,g,x) وهي مصفوفة المعاملات لجملة المعادلات (**) وهي تُعطى بالشكل:

$$Sylv(f,g,x)=\begin{pmatrix} a_0 & & 0 & b_0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_n & & a_0 & b_m & & b_0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n & 0 & & a_m \end{pmatrix}_{n+m}$$

$\overline{\text{m عمود}}$ $\overline{\text{n عمود}}$

بالتالي يعرّف الناتج لـ f, g بالنسبة لـ x والذي يُرمز له بـ $Res_{n,m}(f,g,xx)$ or $Res_x(9f,g)$ على أنه محدد المصفوفة السابقة أي $Res_x((f,g) = det(Sylv(f,g,x))$.

على سبيل المثال:

$$Res(x^3+x-1,2x^2+3x+7)=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}=159$$

ملاحظة (٢):

في تعريف مصفوفة سلفستر إن العنصر في الموقع (i,j):

هو a_{n-i+j} حيث $1 \le j \le m$.

وهو b_{-i+j} حيث $m+1 \le j \le m+n$

حيث $a_i = 0$ إذا كان $i > n$ أو $i < 0$

$b_i = 0$ إلا كان $i > m$ أو $i < 0$.

ملاحظة (٣):

بالإمكان توظيف التعريف السابق لحساب الناتج في حالة تعدد المتحولات باستخدامه بشكل تراجعي لحذف المتحولات.

سنناقش فيما يأتي عدة مبرهنات حول كثير الحدود الناتج $Res_{n,m}(f,g)$ والتي هي بحد ذاتها تمثل الخصائص الأساسية لكثير الحدود $Res_{n,m}(f,g)$ أو اختصاراً $R_{n,m}(f,g)$.

(سننظر إلى g و f على أنها كثيرات حدود بمعاملات في الحقل $K(a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m)$).

٥ – ٤ – ٣ – مبرهنة:

لتكن $f, g \in K[x]$ كثيرات حدود من الدرجات n,m على الترتيب، عندئذ فإن:

$R_{n,m}(f,g)$ هو كثير حدود صحيح متجانس:

من الدرجة m بالمتحولات $a_0,\ldots,a_n$.

ومن الدرجة n بالمتحولات $b_0,\ldots,b_m$.

٥ – ٤ – ٤ – مبرهنة:

إذا كانت $f,g \in K[x]$ ومن درجة موجبة تماماً فإن:

g و f يملكان عاملاً مشتركاً في K[x] إذا وفقط ذا تحقق أن $Res(f,g,x) = 0$.

الإثبات:

الناتج معدوم إذا وفقط إذا تحقق أن محدد مصفوفة الأمثال للمعادلات (**) معدوم وهذا يكافئ أن المعادلات (**) تملك حلاً غير صفري وبالتالي (i) و (ii) من التمهيدية (٣ – ٤ – ١) محققة، وهذا يكافئ أن f,g لهما عامل مشترك.

مثال:

بفرض $f = 2x^2 + 3x + 1$ و $g = 7x^2 + x + 3$ كثيرات حدود من Q[x]. لا يملكان عاملاً مشتركاً في Q[x] لأن $Rex_x(f,g) = 153 \neq 0$.

نعرض فيما يأتي بعض خواص الناتج.

٥ – ٤ – ٥ – مبرهنة:

ليكن $f, g \in K[x]$ حيث $deg(f) \leq n$, $deg(g) \leq m$، إن القضايا الآتية صحيحة:

i. إذا كان $n \geq m$ و h هو أي كثير حدود يحقق: $\deg(h) \leq n - m$ فإن:

$$R_{n,m}(f + hg, g) = R_{n,m}(f,g)$$

ii. وبشكل مشابه إذا كان $n \leq m$ و h هو أي كثير حدود يحقق: $\deg(h) \leq m - n$ فإن:

$$R_{n,m}(f, g + hf) = R_{n,m}(f,g)$$

البرهان:

من أجل (i) إن مصفوفة سلفستر $Sylv_{n,m}(f + hg, g)$ يتم الحصول عليها من $Sylv_{n,m}(f,g)$ بإجراء تحويلات عمودية لا تُغير من قيمة محددها $R_{n,m}$ وهذه التحويلات بالشكل الآتي:

بفرض $h(x) = c_l x^l + \ldots + c_0$ نقوم بإضافة العمود $n + i - k$ إلى العمود i وذلك c_k مرة لأجل $i = 1, \ldots, m$ و $k = 0, \ldots, l$.

٥ – ٤ – ٦ – مبرهنة:

ليكن $f = a_n x^n + \ldots + a_0$ و $g = b_m x^m + \ldots + b_0$ كثيرات حدود من $K[x]$:

i. إذا كانت $\deg(g) \leq k \leq m$ فإن:

$$R_{n,m}(f,g) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f,g)$$

ii. إذا كانت $\deg(f) \leq k \leq n$ فإن:

$$R_{n,m}(f,g) = (-1)^{(n-k).m} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g)$$

وأكثر من ذلك إذا كان كل من $\deg(f) < n$ و $\deg(g) < m$ فإن $R_{n,m}(f,g) = 0$.

البرهان:

من أجل (i): بفرض أن $\deg(g) < m$ عندئذ $b_m = 0$، بالتالي السطر الأول في مصفوفة سلفستر هو سطر صفري باستثناء العنصر الأول (المعامل القائد لـ f) وهو a_n ومصغر المصفوفة $Sylv_{n,m}(f,g)$ الناتج بحذف السطر الأول والعمود الأول هو $Sylv_{n,m-1}(f,g)$ عندئذ بنشر المحدد $R_{n,m}(f,g)$ وفق السطر الأول نجد:

$$R_{n,m}(f,g) = a_n R_{n,m-1}(f,g)$$

بالتالي يمكن التأكد من صحة القضية (i) بالاستقراء، أي لأجل $k = m$ ثم $k = m - 1$ وهكذا.. حتى $k = 0$.

من أجل (ii):

إن $R_{n,m}(f,g) = (-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)$ تنتج بإجراء تبديلات بين الأعمدة، عندئذ:

$$\begin{aligned}R_{n,m}(f,g) &= (-1)^{nm}R_{m,n}(g,f) = (-1)^{nm}\, b_m^{n-k}\ R_{m,k}(g,f)\\ &= (-1)^{nm}\, b_m^{n-k}\ (-1)^{mk}R_{k,m}(f,g)\\ &= (-1)^{nm+km}\, b_m^{n-k}\ b_m^{n-k}\ R_{k,m}(f,g)\\ &= (-1)^{(n-k)m}\, b_m^{n-k}\ R_{k,m}(f,g)\end{aligned}$$

٥ – ٤ – ٧ – تعريف:

لتكن $f,\ g \in K[x]$ تملكان نفس الدرجة $(n = m)$ وليكن $[ij]$ يُشير إلى التعبير $a_ib_j - b_ia_j$. إن صيغة Bezout – Cayle للناتج تُعرَّف على أنها المحدد ذو البعد $n\times m$:

$$R_{n,n}(f,g) = \det\begin{pmatrix}[01] & [02] & [03] & \cdots & [0n]\\ [02] & [03]+[12] & [04]+[13] & \cdots & [1n]\\ [03] & [04]+[13] & [05]+[14]+[23] & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ [0n] & [1n] & [2n] & \cdots & [n-1n]\end{pmatrix}$$

الآن نوضح علاقة النواتج بالحذف من خلال المثال التالي، لذلك سنحسب بداية الناتج لكثيري الحدود:

$$f = xy - 1\ ,\ g = x^2 + y^2 - 4$$

وبالنظر إلى g و f على أنَّها كثيرات حدود بالمتحول x معاملاتها هي كثيرات حدود بالمتحول y فنحصل على:

$$R_{1,2}(f,g,x) = \begin{vmatrix} y & 0 & 1\\ -1 & y & 0\\ 0 & -1 & y^2-4\end{vmatrix} = y^4 - 4y^2 + 1$$

وبشكل أكثر عمومية، إذا كانت f, g أيَّة كثيرات حدود من K[x,y] عندئذ نجد أن Res(f,g,x) هو كثير حدود بـ y.

إن المبرهنة الآتية توضِّح العلاقة بين الناتج والقاسم المشترك الأعظم لكثيرات حدود.

٥ – ٤ – ٨ – مبرهنة:

إذا كانت f, g ∈ K[x] من درجات موجبة، فإنه يوجد كثيرات حدود A, B ∈ K[x] تحقق Af + Bg = Res(f,g) وتكون معاملات A, B هي كثيرات حدود صحيحة متحولاتها هي معاملات f,g.

البرهان:

لاحظنا فيما سبق أن تعريف كثير الحدود الناتج اعتمد على المعادلة Af + Bg = 0، في هذا البرهان ستُتبع معالجة مشابهة لتلك التي وردت في الملاحظة (1)، ولكن على المعادلة:

$$\widetilde{A}.f + \widetilde{B}.g = 1 \qquad (i)$$

- إن المبرهنة محققة في حال كان Res(f,g,x) = 0.
- أما في حال Res(f,g,x) ≠ 0 نفرض أن:

$$\widetilde{A} = c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_0$$
$$\widetilde{B} = d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_0$$

حيث المعاملات $c_0,\ldots,c_{m-1}, d_0,\ldots,d_{l-1}$ هي مجاهيل في K.

نعوِّض هذه الصيغ في المعادلة (i) ونقارن المعاملات لقوى x فنحصل على جملة المعادلات الخطية التالية بالمجاهيل c_i, d_i والمعاملات a_i, b_i في K.

معاملات x^{n+m-1}: $a_nc_{m-1} + b_md_{n-1} = 0$

معاملات x^{n+m-2}: $a_{n-1}c_{m-1} + a_nc_{m-2} + b_{m-1}d_{n-1} + b_md_{n-2} = 0$

⋮

معاملات x^0: $a_nc_0 + b_0d_0 = 1$

إن مصفوفة الأمثال للجملة السابقة هي مصفوفة Sylv(f,g)، وبما أن $Res(f,g,x) \neq 0$ فإن الجملة السابقة تملك حلاً وحيداً في K.

من طريقة كرامر نجد أن المجهول i هو نسبة محددين.

المقام هو محدد مصفوفة الأمثال.

البسط هو محدد المصفوفة الناتجة عن استبدال العمود i من مصفوفة الأمثال بالطرف الأيمن من المعادلة. بالتالي طريقة كرامر تُعطي صيغ لـ c_i, d_i.

على سبيل المثال: أول مجهول c_{m-1} معطى بالشكل:

$$c_{m-1} = \frac{1}{Res(f,g,x)} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & b_m & & 0 \\ & a_n & \ddots & & \vdots & \ddots & b_m \\ \vdots & \vdots & & a_n & & & \vdots \\ & a_0 & \ddots & \vdots & b_0 & \ddots & \\ 1 & & & a_0 & & & b_0 \end{pmatrix}$$

بما أن البسط هو كثير حدود صحيح فإن: $c_0 = \frac{\text{كثير حدود صحيح في } a_i \text{ و } b_i}{Res(f,g,x)}$

وبنفس الطريقة من أجل بقية المجاهيل c_i, d_i.

وبما أن $\tilde{A} = c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_0$.

فإننا نجد أن $\tilde{A} = \frac{1}{Res(f,g,x)} \cdot A : A \in K[x]$ ، ومعاملات A هي كثيرات حدود صحيحة بـ a_i, b_i.

بشكل مشابه يمكن أن نكتب $\tilde{B} = \frac{1}{Res(f,g,x)} \cdot B : B \in K[x]$.

وبما أن $\tilde{A}, \tilde{B}$ يحققان: $\tilde{A}.f + \tilde{B}.g = 1$ نعوض ما سبق ونضرب الطرفين بـ Res(f,g,x) فنحصل على $Af + Bg = Res(f,g,x)$ و A, B تملك المعاملات المطلوبة.

ويمكن أن نوضح العلاقة بين الناتج والـ gcd وفق ما يأتي:

إذا كانت $f, g \in K[x]$ و $Res(f,g,x) \neq 0$ أي f, g لا يملكان عاملاً مشتركاً $(gcd(f,g) = 1)$ عندئذ يوجد $\tilde{A}, \tilde{B}$ تحقق $\tilde{A}.f + \tilde{B}.g = 1$ والمقام في معاملات $\tilde{A}, \tilde{B}$ هو $Res(f,g,x)$ ومنه يمكن أن نكتب $Res(f,g,x) = Af + Bg$.

مثال:

لتكن $f = xy - 1, g = x^2 + y^2 - 4$ كثيرات حدود من $K[x,y]$ عندئذ:

$Res(f,g,x) = y^4 - 4y^2 + 1 \neq 0$ وبالتالي $gcd(f,g) = 1$، وبالاستفادة من مسألة العضوية التي وردت سابقاً سنتمكن من إيجاد:

$$\tilde{A} = -\left(\frac{y}{y^4 - 4y^2 + 1} \cdot x + \frac{1}{y^4 - 4y^2 + 1}\right)، \tilde{B} = \frac{y^2}{y^4 - 4y^2 + 1}$$

يحقق $\tilde{A}.f + \tilde{B}.g = 1$ ومنه نجد: $y^4 - 4y^2 + 1 = -(yx + 1) \cdot f + y^2 \cdot g$.

٥ – ٤ – ٩ – مبرهنة:

لتكن $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ كثيرات حدود من الدرجات n و m على الترتيب، وبمعاملات من حقل ما K ولنفرض أنه في تمديد ما للحقل K يتحقق:

f يملك n جذراً $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ و g يملك m جذراً $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (ليس بالضرورة مختلفة) عندئذ:

١ – $Res(f,g) = a_n^m b_m^n \Pi_{i=1}^n \left(\Pi_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_i)\right)$.

٢ – $Res(f,g) = a_n^m \Pi_{i=1}^n g(\alpha_i)$.

٣ – $Res(f,g) = (-1)^{nm} \Pi_{j=1}^m f(\beta_j)$.

ملاحظة:

الصيغ المعطاة في المبرهنة السابقة تبدو صعبة الاستعمال كونها تتضمن جذور f, g، لذلك سنعرض طريقة بسيطة لإيجاد $Res(f,g)$.

لنأخذ حلقة الخارج $A_f = \frac{K[x]}{< f >}$

ولنعرف تطبيق الجداء بـ g وليكن m_g بالشكل:

$$m_g: A_f \to A_f$$
$$h \mapsto [g][h] = [g.h]$$

إن عناصر A_f هي كثيرات حدود من درجة أصغر من $\deg(f) = n$ وبالتالي $m_g(h)$ هو باقي قسمة g.h على f، عندئذ يمكن حساب Res(f, g) كما في المبرهنة الآتية والتي نذكرها دون إثبات:

٥ – ٤ – ١٠ – مبرهنة:

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ وكثيرات حدود تملك الدرجات n و m على الترتيب عندئذ:

$$Res(f,g) = a_n^m \det(m_g)$$

٥ – ٤ – ١١ – الناتج ومبرهنة التمديد:

في هذه الفقرة نستخدم الناتج من أجل عرض إثبات مبرهنة التمديد.

الخطوة الأولى هي نقل مفهوم نظرية النواتج إلى حالة كثيرات الحدود بـ n متحول.

إذا كان $f, g \in K[x_1,\ldots,x_n]$ من درجة موجبة بالنسبة لـ x_1 فإنه يمكن كتابة:

$$f = a_L x_1^L + \ldots + a_0 : a_L \neq 0$$
$$g = b_m x_1^m + \ldots + b_0 : b_m \neq 0$$

حيث $a_i, b_i \in K[x_2,\ldots,x_n]$.

عندئذ يُعرَّف الناتج لـ f, g بالنسبة للمتحول x_1 ليكون:

$$\mathrm{Res}(f,g,x_1)=\det\begin{pmatrix} a_L & & 0 & b_m & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_0 & & a_L & b_0 & & b_m \\ 0 & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_0 & 0 & & b_0 \end{pmatrix}_{L+m}$$

$\overline{\text{m عمود}}$ $\overline{\text{L عمود}}$

٥ – ٤ – ١٢ – مبرهنة:

لتكن $f, g \in K[x_1,\ldots,x_n]$ من درجة موجبة تماماً بالنسبة للمتحول x_1.

إن القضايا الآتية صحيحة:

i. $\mathrm{Res}(f,g,x_1)$ تنتمي إلى محذوف المثالي $\langle f,g\rangle$ من المرتبة الأولى.

أي في $\langle f,g\rangle \cap K[x_2,\ldots,x_n]$.

ii. $\mathrm{Res}(f,g,x_1)=0$ إذا وفقط إذا كان f, g يملكان عاملاً مشتركاً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ حيث كل منهما ذو درجة موجبة تماماً بالنسبة لـ x_1.

البرهان:

i. عندما ننظر إلى f, g على أنها كثيرات حدود بالمتحول x_1، فإن المعاملات a_i, b_i تقع في الحلقة $K[x_2,\ldots,x_n]$ وبما أن الناتج هو كثير حدود صحيح بـ a_i, b_i ينتج أن:

$$\mathrm{Res}(f,g,x_1) \in K[x_2,\ldots,x_n] \qquad (1)$$

ومن المبرهنة (٣ – ٤ – ٧) (*) $\mathrm{Res}(f,g,x_1)=A.f+B.g$

حيث A, B هي كثيرات حدود بالمتحول x_1 معاملاتها هي أيضاً كثيرات حدود صحيحة بـ a_i, b_i أي $A, B \in K[x_2,\ldots,x_n][x_1]=K[x_1,\ldots,x_n]$.

من المساواة (*) نجد أن (2) $\mathrm{Res}(f,g,x_1) \in \langle f,g\rangle$

من (1) و (2) نجد $\mathrm{Res}(f,g,x_1) \in \langle f,g\rangle \cap K[x_2,\ldots,x_n]$.

ii. بما أن f, g هي كثيرات حدود بالمتحول x_1 بمعاملات من $K[x_2,\ldots,x_n]$ عندئذ بتطبيق المبرهنة (٣ – ٤ – ٤) نجد أن $Res(f,g,x_1) = 0$ إذا وفقط إذا كانت f,g تمتلكان عاملاً مشتركاً في $K[x_2,\ldots,x_n][x_1]$ والذي يملك درجة موجبة بالنسبة للمتحول x_1، وهذا يكافئ قولنا إنهما تملكان عاملاً مشتركاً في $K[x_1,\ldots,x_n]$ من درجة موجبة بالمتحول x_1.

٥ – ٤ – ١٣ – نتيجة:

إذا كان $f, g \in \mathbb{C}[x]$ فإن:

$Res(f,g,x) = 0$ إذا وفقط إذا وجد جذر مشترك لـ g و f في $\mathbb{C}$.

٥ – ٤ – ١٤ – مبرهنة:

ليكن $f, g \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ كثيري حدود من الدرجات L, m على الترتيب. ولتكن النقطة $c = (c_2,\ldots,c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ تحقق ما يلي:

i. $f(x_1,c) \in \mathbb{C}[x_1]$ تملك الدرجة L.

ii. $g(x_1,c) \in \mathbb{C}[x_1]$ تملك الدرجة $p \le m$.

عندئذ كثير الحدود $h = Res(f,g,x_1) \in \mathbb{C}[x_2,\ldots,x_n]$ يحقق:

$$h(c) = a_L(c)^{m-p}\, Res(f(x_1,c), g(x_1,c), x_1)$$

حيث $a_L \in \mathbb{C}[x_2,\ldots,x_n]$.

البرهان:

لنعوض $c = (c_2,\ldots,c_n)$ في الصيغة الناتجة عن فك محدد مصفوفة سلفستر لأجل $h = Res(f,g,x_1)$ لنحصل على:

$$h(c) = \det \begin{pmatrix} a_L(c) & & 0 & b_m(c) & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_0(c) & & a_L(c) & b_0(c) & & b_m(c) \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_0(c) & 0 & & b_0(c) \end{pmatrix}_{L+m}$$

أولاً: لنفرض أن $g(x_1,c)$ يملك الدرجة $p = m$ عندئذ:

$$f(x_1,c) = a_L(c)\, x_1^L + \ldots + a_0(c)$$

$$g(x_1,c) = b_m(c)\, x_1^m + \ldots + b_0(c)$$

إذن المحدد السابق هو الناتج لـ $f(x_1, c)$ و $g(x_1, c)$ الآتي:

$$h(c) = Res(f(x_1,c) , g(x_1,c), x_1)$$

ثانياً: عندما $p < m$ المحدد السابق لا يمثل الناتج لـ $f(x_1,c)$ و $g(x_1,c)$، فهو يملك البعد الخاطئ بالتالي للحصول على المطلوب فقط نقوم بالنشر وفق السطر الأول حتى نصل إلى المحدد الذي يُعرِّف الناتج لـ $f(x_1,c)$ و $g(x_1,c)$.

٥ – ٤ – ١٥ – مبرهنة: (مبرهنة التمديد)

ليكن $I = \langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subset \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ و I_1 هو محذوف المثالي I من المرتبة الأولى.

لأجل كل $1 \le i \le s$ نكتب f_i بالشكل:

$$f_i = g_i(x_2,\ldots,x_n)\, x_1^{N_i} + h(x_1,\ldots,x_n)$$

حيث $\deg_{x_1} h \le N_i \;\&\; N_i \ge 0 \;\&\; 0 \ne g_i \in \mathbb{C}[x_2,\ldots,x_n]$

و $(c_2,\ldots,c_n) \in \mathbb{V}(I_1)$ إذا كان $(c_2,\ldots,c_n) \notin \mathbb{V}(g_1,\ldots,g_s)$ فإنه يوجد $c_1 \in \mathbb{C}$ بحيث $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{V}(I)$.

البرهان:

لنضع $c = (c_2,\ldots,c_n)$ ولنأخذ التشاكل الحلقي:

$$\psi : \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{C}[x_1]$$
$$f(x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,c)$$

من الواضح أنه ذا كان I مثالياً في $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ فإن الصورة المباشرة لـ I وفق ψ هي مثالي في $\mathbb{C}[x_1]$ وبما أن $\mathbb{C}[x_1]$ هي حلقة مثاليات رئيسية فإن $\psi(I)$ مولدة بكثير حدود واحد وليكن $u(x_1) \in \mathbb{C}[x_1]$ أي $\langle u(x_1)\rangle = \{f(x_1,c) : f \in I\}$.

ولنناقش الحالات الآتية:

١ – إذا كان $u(x_1)$ من درجة موجبة، عندئذ $\exists\, c_1 \in \mathbb{C}: u(c_1) = 0$ بالتالي $f(c_1,c) = 0$ وذلك $\forall\, f \in I$ إذن $(c_1,c) = (c_1,\ldots,c_n) \in \mathbb{V}(I)$.

٢ – في حال $u(x_1)$ هو كثير حدود صفري، عندئذ بشكل مشابه للنقاش السابق نجد أن المبرهنة محققة.

٣ – في حال كان $u(x_1)$ هو ثابت غير صفري، وليكن على سبيل المثال u_0 عندئذ بما أن $\{f(x_1,c): f \in I\} = \langle u_0 \rangle$ فإنه يوجد $f \in I$ بحيث $f(x_1,c) = u_0$.

من الفرض لدينا $\exists\, i: g_i(c) \neq 0$ بالتالي $c \notin (g_1,\ldots,g_s)$ ولنأخذ:

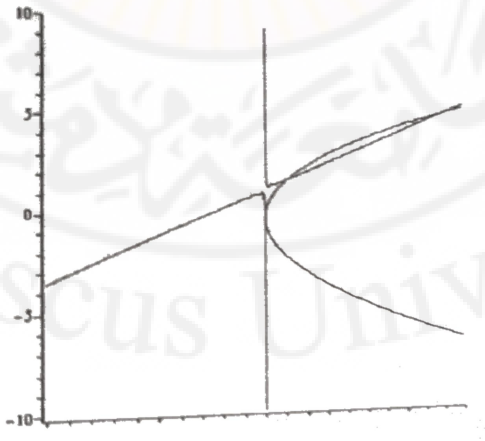
$h = Res(f_1,f,x_1) \in \mathbb{C}[x_2,\ldots,x_n]$ من المبرهنة السابقة نجد:

$$h(c) = g_{Ni}(c)^{deg(f)-0}\, Res(f_i(x_1,c), f(x_1,c) = u_0, x_1) = g_{Ni}(c)^{deg(f)} \cdot u_0^{N_i} \neq 0$$

ولكن $h \in I_1$ وبالتالي $h(c) = 0$ لأن $c \in \mathbb{V}(I_1)$ وهذا تناقض مع المساواة السابقة والحالة (٣) لا يمكن أن تحدث.

مثال:

ليكن لدينا $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3x$, $g(x,y) = y^2 - 4x$



باستخدام محدَّد مصفوفة سلفستر نجد:

$$Res_x(f,g) = y^2(y^2 - 8y + 12)$$

ومنه نجد الإحداثي y لنقاط الحلول للجملة الأصلية وهي {0,2,6}.

نلاحظ أن الحلول الجزئية السابقة يمكن تمديدها (حسب مبرهنة التمديد) إلى حلول للجملة الأصلية.

لنحسب بداية $Res_y(f,g) = x^2(x^2 - 10x + 9)$

ويكون الإحداثي x للحلول هو {0,1,9}، أي الحلول المشتركة للجملة الأصلية هي:

$$\{(0,0), (1,2), (9,6)\}$$

٥ – ٥ – الناتج لكثيري حدود متجانسين:

لتكن $F, G \in K[x,y]$ كثيرات حدود متجانسة من الدرجات l, m على الترتيب، ولنكتب:

$$F = a_0x^l + a_1x^{l-1}y + \ldots + a_ly^l$$
$$G = b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \ldots + b_my^m$$

عندئذ يُعرَّف Res(F,G) ليكون Res(f,g).

حيث $f = F((x,1), g = G(x,1)$ أي قُمنا بعملية فك التجانس وذلك بوضع $y = 1$ في كل من G و F بالتالي يمكننا استخدام مصفوفة سلفستر لتعريف الناتج لـ F, G بالشكل:

$Res((F,G) = det(Sylv(f,g))$ ويتحقق أن $Res((x^l, y^m) = 1$.

٥ – ٥ – ١ – تمهيدية:

لتكن $F, G \in K[x,y]$ كثيرات حدود متجانسة من الدرجات l, m على الترتيب، عندئذ:

a) يوجد كثير حدود $Res_{l,m} \in [a_0,\ldots,a_l, b_0,\ldots,b_m]$ يحقق:

$$Res(F,G) = Res_{l,m}(a_0,\ldots,a_l, b_0,\ldots,b_m)$$

b) من أجل حقل الأعداد العقدية يتحقق أن:

$Res(F,G) = 0$ إذا وفقط إذا ملكت المعادلات $F = G = 0$ حلاً غير تافه في $\mathbb{C}^2$.

الإثبات:

a) محقق وضوحاً.

b) بداية في حالة كثيرات الحدود المتجانسة يتحقق:

أنه إذا كان $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ هو حل غير تافه فإن $(\lambda u, \lambda v)$ هو حل غير تافه أيضاً وذلك لأجل أي عدد عقدي λ.

نميز الحالات الآتية:

١ – $a_0 = b_0 = 0$ عندها نلاحظ أن الناتج ينعدم ويكون لدينا الحل غير التافه:

$$(x,y) = (1,0)$$

٢ – بفرض $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ عندئذ:

إذا كان $Res(F,G) = 0$ فإن $Res(f,g) = 0$ أي f,g يملكان عاملاً مشتركاً غير تافه في $\mathbb{C}[x]$ وليكن $x = u$ بالتالي $(x,y) = (u, 1)$ هو حل غير تافه، الآن لنفرض أن (u,v) هو حل غير تافه عندئذ فإن فرضنا $a_0.b_0 \neq 0$ يؤدي إلى أن $v \neq 0$ أي $\left(\left(\frac{u}{v}\right),1\right)$ هو أيضاً حل.

٣ – بفرض $a_0 \neq 0$ و $b_0 = \ldots = b_{r-1} = 0$ ولكن $b_r \neq 0$.

نقوم بعملية فك التجانس لنجد كثيرات الحدود f, g من الدرجات l, m – r على الترتيب، كما ويتحقق أن $Res_{l,m}(f,g) = a_0^r \, . \, Res_{l,m-r}(f,g)$.

عندئذ النقاش يُرد إلى الحالة – ٢ – وهو المطلوب.

٥ – ٢ – ٢ – الناتج في حالة تعدد كثيرات الحدود والمتحولات:

في هذه الفقرة نقوم بتعميم للدراسة السابقة إلى حالة $n + 1$ كثير حدود متجانس $F_0,\ldots,F_n$ بالمتحولات $x_0,\ldots,x_n$ من درجات كلية موجبة تماماً، من أجل الحصول على جملة المعادلات الآتية:

$$F_0(x_0,\ldots,x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_n(x_0,\ldots,x_n) = 0$$

وهي عبارة عن $n + 1$ معادلة بـ $n + 1$ متحول، تملك الحل الصفري دوماً والذي ندعوه بالحل التافه.

والمطلوب البحث عن حل في $\mathbb{C}^{n+1} - \{(0,\ldots,0)\}$.

وبشكل عام مسألة وجود حل غير تافه تعتمد على معاملات كثيرات الحدود $F_0,\ldots,F_n$، فعلى سبيل المثال، إذا كانت F_i كثيرات حدود خطية وكونها متجانسة يمكن أن تكتب بالشكل:

$$F_0 = c_{00}x_0 + \ldots + c_{0n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$F_n = c_{n0}x_0 + \ldots + c_{nn}x_n = 0$$

وهي عبارة عن $n + 1$ معادلة خطية بـ $n + 1$ مجهول، وكما نعلم من الجبر الخطي فهي تملك حلاً غير تافه إذا وفقط إذا انعدم محدد مصفوفة الأمثال.

بالتالي يوجد شرط وحيد $\det(c_{ij}) = 0$ لمسألة وجود حل غير تافه.

- أما في حال كان عدد المعادلات الخطية أقل من عدد المجاهيل، عندها دائماً يوجد حل غير تافه مهما كانت المعاملات.
- وفي حال كان عدد المعادلات الخطية أكبر من عدد المتحولات فالأمر أكثر تعقيداً، فعلى سبيل المثال، حتى تملك جملة المعادلات الآتية حلاً غير تافه:

$$F_0 = c_{00}x + c_{01}y = 0$$
$$F_1 = c_{10}x + c_{11}y = 0$$
$$F_2 = c_{20}x + c_{21}y = 0$$

يجب أن تتحقق الشروط الآتية:

$$\det\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{20} & c_{21} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c_{10} & c_{11} \\ c_{20} & c_{21} \end{pmatrix} = 0$$

لنفرض أن الدرجة الكلية لـ F_i هي d_i ومنه F_i يمكن أن يُكتب بالشكل:

$$F_i = \sum_{|\alpha|=d_i} c_{i,\alpha} \cdot x^{\alpha}$$

عندئذ لأجل كل زوج ممكن من الأدلة (i, α) نعرّف متحول $u_{i,\alpha}$.

٥ – ٥ – ٣ – مبرهنة:

إذا كانت كثيرات الحدود $F_0,\ldots,F_n$ من الدرجات الموجبة تماماً $d_0,\ldots,d_n$ فإنه يوجد كثير حدود وحيد $Res \in \mathbb{Z}[u_{i,\alpha}]$ يحقق:

a) إذا كانت $F_0,\ldots,F_n \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ كثيرات حدود متجانسة من الدرجات $d_0,\ldots,d_n$ فإن المعادلات $F_0 = \ldots = F_n = 0$ تملك حلاً غير تافه على الحقل $\mathbb{C}$.

b) $Res\left(x_0^{d_0},\ldots,x_n^{d_n}\right) = 1$.

c) إن Res كثير حدود غير خزول.

ملاحظة:

يُدعى $Res(F_0,\ldots,F_n)$ بـ الناتج لـ $F_0,\ldots,F_n$، وفي بعض الأحيان نكتب $Res_{d_0,\ldots,d_n}$ عوضاً عن Res، وإذا كانت كل F_i خطية أي $F_i = \sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_j$

نجد أن $Res_{1,\ldots,1}(F_0,\ldots,F_n) = \det(c_{ij})$.

٥ – ٥ – ٤ – نتيجة:

لأجل j مثبت بين 0 و n إن الناتج هو كثير حدود متجانس بالمتحولات $u_{i,\alpha}$ حيث $|\alpha| = d_j$ من الدرجة $d_0\ldots d_{j-1}.\, d_{j+1} \ldots d_n$ هذا يعني:

$$Res(F_0,\ldots,\lambda F_j,\ldots,F_n) = \lambda^{d_0\ldots d_{j-1}.d_{j+1}\ldots d_n}\, Res\,(F_0,\ldots,F_n)$$

وأكثر من ذلك، الدرجة الكلية لـ Res هي:

$$\sum_{j=0}^{n} d_0\ldots d_{j-1}.d_{j+1}\ldots d_n$$

٥ – ٥ – ٥ – حساب الناتج:

نفرض $F_0,\ldots,F_n \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ كثيرات حدود متجانسة من الدرجات $d_0,\ldots,d_n$، ولنعرّف الدرجة الكلية للجملة $F_0 = \ldots = F_n = 0$ ولتكون:

$$d = 1 + \sum_{i=0}^{n}(d_i - 1) = \sum_{i=0}^{n} d_i - n$$

لنأخذ جميع وحيدات الحد $x^\alpha = x_0^{a_0}\ldots x_n^{\alpha_n}$ ذات الدرجة d، ولنقسمها في n+1 مجموعة بالشكل الآتي:

$$S_0 = \{x^\alpha : |\alpha| = d\ ,\ x_0^{d_0} | x^\alpha\}$$
$$S_1 = \{x^\alpha : |\alpha| = d,\ x_0^{d_0} \nmid x^\alpha, \text{ but } x_1^{d_1} | x^\alpha\}$$
$$\vdots$$
$$S_n = \{x^\alpha : |\alpha| = d,\ x_0^{d_0},\ldots x_{n-1}^{d_{n-1}} \nmid x^\alpha, \text{ but } x_n^{d_n} \mid x^\alpha\}$$

نلاحظ أن كل حدودية من الدرجة d تقع في واحدة فقط من هذه المجموعات أي $S_0 \cap \ldots \cap S_n = \phi$.

وإذا كان $x^\alpha \in S_i$ فإنه بالإمكان أن نكتب $x^\alpha = \frac{x_i^{d_i}.x^\alpha}{x_i^{d_i}}$ حيث $\frac{x^\alpha}{x_i^{d_i}}$ من الدرجة $d - d_i$.

الآن أصبح بإمكاننا كتابة جملة المعادلات الآتية:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{x^\alpha}{x_0^{d_0}} \cdot F_0 = 0, \forall x^\alpha \in S_0 \\ \vdots \\ \frac{x^\alpha}{x_n^{d_n}} \cdot F_n = 0, \forall x^\alpha \in S_n \end{array}\right\} \qquad (*)$$

لما كان كل F_i له الدرجة d_i فإن $\frac{x^\alpha}{x_i^{d_i}} \cdot F_i$ له درجة كلية d، بالتالي كل كثير حدود في الطرف اليساري للجملة (*) يُكتب على شكل تركيب خطي لحدوديات من الدرجة

d، كما أن العدد الكلي للمعادلات في الجملة السابقة يساوي إلى عدد العناصر في $S_0 \cup \ldots \cup S_n$ أي يساوي إلى عدد الحدوديات ذات الدرجة d، والذي يُعطى بالعلاقة $N = \binom{n+d}{d}$.

بالتالي إذا نظرنا إلى الحدوديات ذات الدرجة d كمجاهيل فإننا نحصل على جملة N معادلة خطية بـ N مجهول. سنرمز لمحدد مصفوفة المعاملات ذات المرتبة $N \times N$ للجملة (*) بـ D_n.

مثال:

لتكن جملة معادلات كثيرات الحدود المتجانسة:

$$F_0 = a_1x + a_2y + a_3z = 0$$
$$F_1 = b_1x + b_2y + b_3z = 0$$
$$F_2 = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4xy + c_5xz + c_6yz = 0$$

- نحسب الدرجة الكلية للجملة السابقة:

$$d = 1 + 1 + 2 - 2 = 2$$

- نأخذ مجموعة كل الحدوديات ذات الدرجة 2 بالمتحولات x,y,z:

$$F = \{x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz\}$$

- نقسم F إلى ثلاث مجموعات:

$$S_0 = \{x^2,xy,xz\}$$
$$S_1 = \{y^2,yz\}$$
$$S_2 = \{z^2\}$$

- نأخذ جملة المعادلات الآتية:

$$a_1x^2 + 0 + 0 + a_2xy + a_3xz + 0 = 0$$
$$0 + a_2y^2 + 0 + a_1xy + 0 + a_3yz = 0$$
$$0 + 0 + a_3z^2 + 0 + a_1xz + a_2yz = 0$$
$$0 + b_2y^2 + 0 + b_1xy + 0 + b_3yz = 0$$
$$0 + 0 + b_3z^2 + 0 + b_1xz + b_2yz = 0$$
$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4xy + c_5xz + c_6yz = 0$$

• $N = 6$.

• نحول الجملة السابقة إلى جملة N معادلة خطية بـ N مجهول وذلك باعتبار عناصر F هي المجاهيل ومن ثم نأخذ مصفوفة المعاملات:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 & 0 & b_1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$$

فيكون $D_2 = \det(M)$.

*** انتهى الفصل الخامس ***

تمارين الفصل الخامس

١ – لتكن $f = x^4 + y^4 + z^4 + xyz \in \mathbb{R}[x,y,z]$ كثيرة حدود مُعرَّفة على حقل الأعداد الحقيقية. أوجد قاعدة غروبينر للمجموعة $S = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ بالنسبة إلى علاقة الترتب $>_{grlex} = >_{dp}$.

٢ – لتكن $R = \mathbb{Q}[x,y,z]$ حلقة كثيرات الحدود المعرَّفة على حقل الأعداد $\mathbb{Q}$.

و $I = \langle xy - y, 2x^2 + yz, y - z\rangle$ مثالي في R.

بيّن فيما إذا كانت $f = xz^3 - 2y^2$ تنتمي إلى المثالي I.

٣ – لتكن R حلقة و $I \leq R$ مثالي في R، و $g_0, g_1, \ldots, g_t \in R$.

إذا كانت $g = \sum_{i=0}^{t} g_i t^i \in R[t]$، فأثبت أن:

$$I\ |: \langle g_0, g_1, \ldots, g_t\rangle = \langle I.R[t] : \langle g\rangle\rangle \cap R$$

٤ – لتكن علاقة الترتيب $>_{grlex} = >_{dp}$ المعرَّفة على $R + L[x,y,z]$ أوجد ناتج وباقي قسمة كثيرة الحدود $g = x^3 + y^2 + 2z^2 + x + y + 1$ على المجموعة $G = \{f_1 = x, f_2 = y\}$.

٥ – ليكن $I = \langle x^2 + y, xy + x\rangle$ مثالياً في الحلقة $R = \mathbb{R}[x,y]$.

١) أوجد قاعدة غروبينر للمثالي I بالنسبة إلى علاقة الترتيب $>_{grlex}$.

٢) أوجد قاعدة غروبينر للمثالي $J = I \cap \mathbb{R}[y]$.

المصطلحات العلمية

– أ –

Affine Coordinates	إحداثيات أفينية
Homogeneous Coordinates	إحداثيات متجانسة
Basis (Base)	أساس (قاعدة)
Standard Basis	أساس معياري

ب + ت + ث

Remainder	باقي
Dimension	البعد
Zariski Topology	تبولوجيا زاريسكي
Transformation	تحويل
Projective Transformation	تحويل إسقاطي
Affine Map	تطبيق أفيني
Polynomial Map	تطبيق حدودي
Rational Map	تطبيق نسبي
Resolution	تفكيك (حل)
Resolution of a Singularity	تفكيك (حل) شذوذية
Morphism	تشاكل
Isomorphism	تماثل

Bijection	تقابل
Affine Equivalence	تكافؤ أفيني
Birationally	ثنائي النسبية

ج + ح + خ

Algebra	جبر
Commutative Algebra	جبر تبديلي (تبادلي)
Polynomial	حدودية (كثيرة حدود)
Zero Polynomial	حدودية صفرية
Homogeneous Polynomial	حدودية متجانسة
Leading Term	حد قائد
Ring	حلقة
Polynomial Ring	حلقة الحدوديات
Field	حقل
Algebraically Closed Field	حقل مغلق جبرياً
Functions Field	حقل الدوال
Reducible	خزولة
Reducible Algebraic set	مجموعة جبرية خزولة
Algorithm	خوارزمية
Division Algorithm	خوارزمية القسمة
Euclidean Algorithm	خوارزمية إقليدس

د + ذ + ر + ز

Function	دالة
Rational Function	دالة نسبية (كسرية)

س + ش + ص + ض

Singular	شاذ
Singularity	شذوذية
Asceding Chain Condition (ACC)	شرط انقطاع السلسلة المتزايدة
Desceding Chain Condition (DCC)	شرط انقطاع السلسلة المتناقصة
Image	صورة

ط + ظ + ع + غ

Irreducible	غير خزولة
Irreducible Algebraic set	غير خزولة (مجموعة جبرية)
Irreducible Variety	غير خزولة (متنوعة)

ف + ق + ك + ل

Affine Space	فضاء أفيني
Projective Space	فضاء إسقاطي
Tangent Space	فضاء مماس
Coordinates Subspace	فضاء الإحداثيات الجزئي
Hypersurface	فوق سطح (سطح زائد)

Hyperplane	فوق المستوي (مستوي زائد)
Basis	قاعدة (أساس)
Groebner Basis	قاعدة معيارية = قاعدة غروبنر
Conics	قطوع
Conic Sections	قطوع مخروطية
Irreducibility	لا خزولية
Closure	لصاقة

– م –

Proposition = Theorem	مبرهنة
Hilbert's Nullstellensatz	مبرهنة الأصفار لـ هيلبرت
Hilbert's Basis Theorem	مبرهنة الأساس لـ هيلبرت
Variety	متنوعة
Affine variety	متنوعة أفينية
Projective Variety	متنوعة إسقاطية
Algebraic Variety	متنوعة جبرية
Ideal	مثالي
Prime Ideal	مثالي أولي
Radical Ideal	مثالي جذري
Homogeneous Ideal	مثالي متجانس

Algebraic set	مجموعة جبرية
Closed Algebraic Set	مجموعة جبرية مغلقة
Open Algebraic Set	مجموعة جبرية مفتوحة
Component	مركبة
Irreducible Component	مركبة غير خزولة
Twisted Cubic	مكعب الالتفاف

ن + هـ + و + ي

Resultant	ناتج
Kernel	نواة
Noetherian	نيوثيري
Elimination Theory	نظرية الحذف
Monomial	وحيد حد
Leading Monomial	وحيد حد قائد
Parameter	وسيط
Parametrization	وسيطياً (جعله ممثل وسيطياً)
Jacobian Matrix	يعقوبية (المصفوفة اليعقوبية)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المراجع العلمية

[1] Cox, D.A. Little, J. O'Shea, D "Ideals, Varieties, and Algorithms" An Introduction to Computational Algebraic Geometry an Commutative Algebra 2nd Ed. Springer (1997).

[2] Cox, D.A. Little, J. O'Shea, D. "Using Algebraic Geometry" Second Edition Springer Verlag (2005).

[3] Dolgachev, Igor. Introduction to Glgebraic Geometry (Notes) August 19, 2013.

[4] Ghorpade, Sudhir R. "Introduction to Algebraic Geometry" Department of Mathematics Indian Institute of Technology Bombay.

URL: http://www.math.iitb.ac.in/srg/

[5] Greuel, G-M. "Introduction to Algebraic Geometry" (Notes) vol.2 Kaiserslautern University (1998).

[6] Hartshorn, R. "Algebraic Geometry" Springer (1997).

[7] Hassett, Brendan "Introduction to Algebraic Geometry" Cambridge University (2007).

[8] Karen E. Smith, Lauri Kahanpda, Pekka KekdIdinen, William Traves "An Invitation to Algebraic Geometry" Springer (2000).

[9] Milne, J.S. "Algebraic Geometry" (Notes), (91998).

[10] Moonen, Ben Versie van 16 februari (2015) "Introduction to Algebraic Geometry" (Notes).

[11] Perrin, D. "Algebraic Geometry/ An Introduction" Springer – Verlag (2008).

[12] Skorobogatov, Alexei "Algebraic Geometry" (Notes) December 16, 2003.

[13] Stevens, Jan "Introduction to Algebraic Geometry" UNIVERSITY OF GOTHENBURG Gothenburg, Sweden.

[14] William Fulton "Algebraic Curves" W.A. Benjamin, INC. (1969).

[15] Boocher, Adam "Algebraic Geometry" ((Spring 2007)/ Notes.

[16] Dr Gaor Megyesi "Summary of Projective Varieties"/ Notes/ University of Manchester 19 March, 2015.

[17] F. Beukers "Notes on Algebraic Curves" (2018).

المقومون العلميون:

أ.د. محمد صبح.

أ.د. حمزة حاكمي.

أ.م.د. خليل يحيى

التدقيق اللغوي:

أ.م.د. لميس داود

حقوق الطباعة والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات في جامعة دمشق