



الرياضيات (الأعداد)



الرياضيات (الأعداد)

السنة الثانية

قسم معلم صف





منشورات جامعة دمشق
كلية التربية

الرياضيات (الأعداد)

تأليف

د. جمال مللي
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات - كلية العلوم
د. الياس أبو يونس
مدرس في قسم المناهج وطرائق التدريس
كلية التربية

د. خالد الخلويس
أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم
د. هاشم إبراهيم
أستاذ مساعد في قسم المناهج وطرائق التدريس
كلية التربية

1432 - 1433 هـ

2011 - 2012 م

جامعة دمشق

تمارين

الفصل الثالث

المجموعات العددية

1- مقدمة

2- مجموعة الأعداد الطبيعية

3- مجموعة الأعداد الصحيحة

4- مجموعة الأعداد العنانية

5- مجموعة الأعداد الحقيقية

6- المجالات الحقيقية

تمارين

الفصل الرابع

المتتاليات

1- مقدمة

2- المتتالية المحدودة

3- المتتالية المتزايدة - للمتناقصة

4- المتتالية المتقاربة - المتباعدة

5- المتتالية الحسابية

6- المتتالية الهندسية

تمارين

الفصل الخامس

المتسلسلات العددية اللانهائية

1- مقدمة

2- للمتسلسلة المتقاربة - المتباعدة

3- للمتسلسلة الحسابية

4- للمتسلسلة الهندسية

تمارين

فهرس المحتويات

5	فهرس المحتويات
11	المقدمة
13	الفصل الأول
13	القضايا
13	1- للقضية الرياضية
14	2- قيم الحقيقة للقضية الرياضية (جداول الحقيقة)
16	3- القضايا البسيطة والمركبة
16	4- أدوات الربط المنطقية
22	5- الاستدلال والتناقض
24	6- جبر القضايا
27	تمارين
29	الفصل الثاني
29	المجموعات
29	1- مقدمة
29	2- المجموعة
30	3- طرائق التعبير عن مجموعة
32	4- عدد عناصر مجموعة
35	5- مجموعات الأعداد
38	6- جبر المجموعات
41	7- المجموعة الشاملة نسبياً والمجموعة المتممة
42	8- خواص العمليات على المجموعات
46	9- مخططات فن
47	10- قانونا دي مورغان
48	11- التطبيقات
74	12- للعمليات الثنائية

135	الفصل السادس
135	المشتقات
135	1- المشتق عند نقطة
136	2- قوانين النسب المثلثية
138	3- قوانين الاشتقاق
139	4- المعنى الهندسي للمشتق
141	تمارين
143	الفصل السابع
143	دراسة تغيرات دالة عددية
143	1- دراسة تغيرات دالة عددية
147	2- الدالة المحدودة والدالة غير المحدودة
154	تمارين
155	الفصل الثامن
155	الأسس واللوغاريتمات
155	1- مقدمة
155	2- الأسس والجذور
160	3- اللوغاريتمات
165	تمارين
167	الفصل التاسع
167	الاستقراء الرياضي
167	1- مقدمة
167	2- الاستقراء الرياضي
168	3- مبدأ الاستقراء الرياضي
172	4- الاستقراء الرياضي القوي
173	5- مبدأ الاستقراء الرياضي القوي

177	تمارين
181	الفصل العاشر
181	فن العد
181	1- مقدمة
181	2- التباديل
187	3- التوافيق
188	4- مبرهنة ذات الحدين
191	5- مثلث باسكال
193	تمارين
197	الفصل الحادي عشر
197	الأعداد المركبة
197	1- مقدمة
197	2- العدد المركب
199	3- مرافق العدد المركب
201	4- التمثيل الهندسي للأعداد المركبة:
205	5- مبرهنة ديموافر وتطبيقاتها
219	تمارين
221	الفصل الثاني عشر
221	المصفوفات
221	1- مقدمة
221	2- تعريف المصفوفة
223	4- أنواع المصفوفات
226	6- العمليات على المصفوفات
230	7- منقول مصفوفة
231	8- محدد مصفوفة مربعة - المصفوفة المساعدة (المرافقة) لمصفوفة مربعة.
236	9- مقلوب مصفوفة مربعة

241	تمارين
243	الفصل الثالث عشر
243	جملة المعادلات الخطية
243	1- تعريف المعادلة الخطية
244	2- جملة المعادلات الخطية
247	3- طرائق حل جملة معادلات خطية
256	4- جملة معادلات خطية متجانسة
263	تمارينات
265	المراجع العلمية
267	المصطلحات العلمية



المقدمة

كان ابن رشد يقول: "إن أنسا الله في العمر" فسوف أكتب كتاباً في الفقه أو الفلسفة. وهذه العبارة تتكرر في كل كتبه.

إن ما كتبناه بالأمس وإن كان معاصراً وحديثاً سيصبح في عالم الغد قديماً وعتيقاً حتى مع بقاء الموضوع والحقل نفسه طازجاً مثل انبلاج الفجر بنور الحلم الإنساني الزاخر بشآبيب الأمل والمعرفة. يقوم علم الرياضيات على أسس وقواعد ثابتة وممتينة ومؤصلة على مسلمات وتعريف تكون متسقة فيما بينها غير متنافرة. لقد وحدثت "لغة" المجموعات البناء الرياضي المعاصر كله وأوجدت نظرة أشمل وأعمق للمفاهيم الرياضية، كما سهمت بشكل فاعل في إبراز الترابط الوثيق بين أفرع الرياضيات المختلفة.

إن المؤسسات التعليمية مسؤولة عن إعداد جيل، يخدم المجتمع ويلبي حاجاته من خبرات عقلية وثقافية وتقنية ورياضية، فلا بد لها أن تعيد بناء التحصيل العلمي في ضوء حاجات ومتطلبات المجتمع وتفسح المجال للمفاهيم الحديثة أن تأخذ مكانتها التي ترقى بها بأساليب وطرائق وأفكار ومفاهيم تربطها بالتأثير الفكري الحديث.

إن هذا الكتاب يعد مدخلاً أولياً للإمام ببعض مبادئ علم الرياضيات ويفسح الطريق أمام دراسة تجريبية لهذا العلم، ولا غرو أن تكون البدايات من السهولة بمكان إلا أن إتقانها شرط في فهم ما يبني عليها وما يرد بعدئذ.

لم يكن من هدفنا أن نعالج الموضوعات هنا بطريقة المسلمات والبرهان على الرغم من برهنتنا بعض النظريات، وإنما آثرنا عرض المادة من خلال الأمثلة المكثفة والنماذج المتنوعة التي تحمل في طياتها مفاهيم وأفكاراً نقدمها بصورة تكون مقبولة، بل نطمح إلى أكثر من ذلك وهو أن نصل بالقارئ إلى مستوى التشويق والإثارة!

يتألف الكتاب من ثلاث عشرة فصلاً، حيث يبدأ كل فصل بصياغة مفصلة للتعريفات والمبادئ الأساسية المستخدمة في إطار مناسب من الوصف والإيضاح، يلي ذلك عدد كافٍ من الأمثلة المحلولة، توضح كل فكرة تمّ التطرق لها.

إنّ هذا الكتاب محاولة جادة لوضع القارئ ما يحتاج إليه حقاً. نسأل الله التوفيق والرضا، ونهدي هذا الكتاب إلى كل من يرغب باللاحق بالركب العلمي العالمي آمليين أن يكون مرجعاً مفيداً لكل المهتمين.

﴿أَوْ مَنْ كَانَ مَيِّتًا فَأَحْيَيْنَاهُ وَجَعَلْنَا لَهُ نُورًا يَمْشِي بِهِ فِي النَّاسِ كَمَنْ مَثَلُهُ فِي الظُّلُمَاتِ لَيْسَ بِخَارِجٍ مِنْهَا كَذَلِكَ زُيِّنَ لِلْكَافِرِينَ مَا كَانُوا يَعْمَلُونَ﴾ " الأنعام 122 " والله ولي التوفيق

المؤلفون

دمشق في 2010/2/12

الفصل الأول

القضايا

1- القضية الرياضية

هي كل جملة مفيدة تكون صحيحة أو خاطئة ولا تكون صحيحة وخاطئة في الوقت نفسه.

فالقضية الرياضية:

هي جملة خبرية تكون صحيحة أو تكون خاطئة.
ويرمز للقضايا بأحرف لاتينية صغيرة:

$p, q, r, \dots$

أمثلة:

أوضح أي التراكيب التالية يمثل قضية ثم بين فيما إن كانت القضايا صحيحة أم خاطئة ؟

1. إن الشكل $abcd$ معين.
2. هل الشكل $abcd$ معين ؟
3. إن كان المستقيم bc ماراً من النقطة M فهو المطلوب.
4. إن القمر كوكب سيار.
5. دمشق عاصمة الجمهورية العربية اليمنية.
6. $(2^5)^2 = 2^{10}$
7. أوجد ناتج ما يلي: $5(x+5)$
8. للمعادلة من الدرجة الثانية جذران.
9. العدد 12 يقبل القسمة على العدد 3.
10. أوجد على الضلع bc من المثلث abc نقطة متساوية البعد عن ضلعيه.

الحل:

1. قضية مرهونة بمشاهدة الشكل.
2. لا تمثل قضية.
3. قضية مرهونة بمشاهدة الشكل.
4. قضية - خاطئة.
5. قضية - خاطئة.
6. قضية - صحيحة.
7. لا تمثل قضية.
8. قضية، صحيحة.
9. قضية، صحيحة.
10. لا تمثل قضية.

2- قيم الحقيقة للقضية الرياضية (جداول الحقيقة)

لتكن p قضية رياضية ما فإن p إما أن تكون صحيحة أو تكون خاطئة.
لنرمز بالرمز T أو بالرمز (1) كقيمة للقضية إذا كانت صحيحة.
لنرمز بالرمز F أو بالرمز (0) كقيمة للقضية إذا خاطئة.

1, T True عندما للقضية صحيحة.

0, F False عندما للقضية خاطئة.

عندئذ مجموعة قيم الحقيقة للقضية p هي: $\{0,1\}$

وجداول الحقيقة لها:

p
1
0

عدد الحالات (الأسطر): 2^1 .

أما إذا كانت لدينا قضيتان p, q ، عندئذٍ هناك أربعة احتمالات:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

عدد الحالات (الأسطر): $2^2 = 4$.

لما إذا كان لدينا ثلاث قضايا p, q, r فيكون لدينا ثماني حالات:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

عدد الحالات الممكنة: $2^3 = 8$.

الأماس 2 ← يدل أن القضية صحيحة أو خاطئة.

والأس: يدل على عدد القضايا.
وبشكل عام إذا كان لدينا n قضية ما فإن عدد الحالات الممكنة لقيم الحقيقة لهذه القضايا هو: 2^n

3- القضايا البسيطة والمركبة

باستخدام أدوات الربط المنطقية يمكن الحصول من عدة قضايا بسيطة على قضايا جديدة نسميها قضايا مركبة.

مثال:

إن الرباعي متوازي أضلاع وقطراه متعامدان.

القضية مركبة من قضيتين بسيطتين هما:

1. الرباعي متوازي أضلاع.

2. قطراه متعامدان.

واستخدمنا أداة الربط (و). And.

تعريف:

نقول عن قضية أنها مركبة فيما إذا كانت محورة عن قضية أخرى بإضافة كلمات أو رموز جديدة إليها، أو كانت مؤلفة من أكثر من قضية واحدة. ونقول عن القضية أنها بسيطة فيما عدا ذلك.

4- أدوات الربط المنطقية

1. النفي (ليس): $(\sim)$.Not
2. الوصل (و): $(\wedge)$.And
3. الفصل (أو): $(\vee)$.OR
4. أداة الشرطية (الاقتضاء): $p \rightarrow q$: إذا كان p فإن q .
5. أداة ثنائية الشرطية (التكافؤ): $p \leftrightarrow q$: p إذا وفقط إذا q .

مثال:

إذا كان الرباعي متوازي أضلاع وكان قطراه متعامدين فإن هذا الرباعي معين.

الحل:

القضية مركبة مؤلفة من القضايا البسيطة التالية:

1. رباعي متوازي أضلاع.
2. قطراه متعامدان.
3. الرباعي معين.
4. استخدمنا أداة الربط الشرطية إذا كان p فإن q . $(q \leftarrow p)$

مثال:

العدد 2 أو 3 قاسم للعدد 12.

الحل:

قضية مركبة ربطنا القضيتين باستخدام أداة الربط (أو): OR.

مثال:

إذا كان $x \leq 5$.

الحل:

القضية مركبة $x \leq 5$ لأن:

$$x \leq 5 \Leftrightarrow x < 5 \text{ أو } x = 5$$

استخدمنا أداة الربط (OR).

مثال:

إذا كان abc مثلث، فيه: $\hat{B} = 90^\circ$ فإن المثلث قائم.

الحل:

القضية هنا قضية مركبة استخدمنا أداة الربط الشرطية إذا كان p فإن q .

$$(p \rightarrow q)$$

مثال:

ليس صحيحاً أن المطر يهطل.

الحل:

قضية مركبة. لأن الجملة البسيطة: إن المطر يهطل.

ملاحظة: نقول أحياناً ومع شيء من التجاوز عن أن:

نفي القضية هو قضية مركبة.

مثال:

المثلث abc متساوي الأضلاع فالمثلث abc فيه: $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c}$.

الحل:

القضية مركبة استخدمنا أداة الربط الشرطية للتثائية $p \leftrightarrow q$. p إذا فقط

إذا q .

ملاحظة:

نسمي هذه القضايا البسيطة المولدة للقضايا المركبة بمركباتها وتكون هذه

المركبات مرتبطة فيما بينها ببعض أدوات الربط المنطقية.

- القضية التي لا تحوي أدوات ربط منطقية هي قضية بسيطة.

أدوات الربط المنطقية:

أولاً: أداة الربط المنطقية (النفي): ليس: Not:

إذا كان لدينا p قضية رياضية أيضاً، وتكون القضية $\sim p$ خاطئة إذا كانت

p صحيحة. وتكون $\sim p$ صحيحة إذا كانت p خاطئة.

جدول الحقيقة للقضية: $\sim p$:

p	$\sim p$
1	0
0	1

أمثلة:

اكتب للقضايا النافية للقضايا التالية:

1. العدد 5 أولي.
2. قطرا المستطيل متعامدان.
3. $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
4. يقبل العدد الزوجي القسمة على 3.
5. مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي 180° .

الحل:

1. العدد 5 ليس أولياً.
 2. قطرا المستطيل ليسا متعامدين.
 3. $(x+2)^2 \neq x^2 + 4x + 4$.
 4. لا يقبل العدد الزوجي القسمة على 3.
 5. مجموع قياسات زوايا المثلث لا يساوي 180° .
- ثانياً: أداة الربط المنطقية: الوصل: (و): $\wedge$: And:

لنكن p و q قضيتين ما، فإن $p \wedge q$ عبارة عن قضية مركبة تقرأ: p و q .

$p \text{ And } q$

تكون صحيحة عندما تكون كل من القضيتين p و q صحيحة وتكون خاطئة عندما تكون واحدة على الأقل من القضيتين p و q خاطئة.

جدول الحقيقة للوصل: $\wedge$: And:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ثالثاً: أداة الربط المنطقية: الفصل: (أو): $\vee$: OR:

$p \vee q$

q OR p

q أو p

هي قضية مركبة، وتقرأ p أو q .

تكون هذه القضية خاطئة إذا كان كل من القضيتين p و q خاطئة. وتكون صحيحة عندما تكون واحدة على الأقل من القضيتين صحيحة. وجدول الحقيقة لها:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

رابعاً: أداة الربط الشرطية (الاقتضاء): يرمز لها: $p \rightarrow q$

وتقرأ: إذا كان p فإن q .

$p \rightarrow q$ هي قضية مركبة، تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة و q خاطئة. وتكون صحيحة فيما عدا ذلك.

وجدول الحقيقة لها:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

خامساً: أداة الربط الثنائية، يرمز لها بالرمز: $p \leftrightarrow q$
وتقرأ: p إذا وفقط إذا q

p If and only If q

$$p \leftrightarrow q \text{ و } (p \rightarrow q) \text{ و } (q \rightarrow p)$$

$p \leftrightarrow q$ هي قضية مركبة تكون صحيحة إذا كانت p و q قيم الحقيقة ذاتها.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

تكافؤ قضيتين:

نقول عن قضيتين إنهما متكافئتان ونكتب: $p \equiv q$ إذا وفقط إذا كانت قيم الحقيقة لـ p هي ذاتها لـ q .

5- الاستدلال والتناقض

الاستدلال:

نقول عن قضية ما أنها استدلال إذا كانت قيم الحقيقة لها دائماً صحيحة.

TRUE. T أو 1. ونرمز له بالرمز T.

التناقض:

نقول عن قضية ما أنها تناقض إذا كانت قيم الحقيقة لها دوماً خاطئة. F أو

O. ونرمز لها بالرمز C.

أمثلة:

أثبت صحة ما يلي:

1. $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
2. $(p \leftrightarrow q) \equiv [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$
3. $\sim (p \rightarrow \sim q) \equiv p \wedge q$
4. $\sim (\sim p \rightarrow q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

الحل:

(1):

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

:(2)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1

:(3)

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow \sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \rightarrow \sim q)$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \rightarrow q$	$\sim (\sim p \rightarrow q)$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1

6- جبر القضايا

إذا كانت لدينا r, q, p ثلاث قضايا فإن:

T استدلال، و C تناقض.

1. الخاصة التبديلية للوصل:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

2. الخاصة التبديلية للفصل:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

3. الخاصة التجميعية للوصل:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (q \wedge p) \wedge r$$

4. الخاصة التجميعية للفصل:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (q \vee p) \vee r$$

5. الخاصة التوزيعية للوصل على الفصل:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6. الخاصة التوزيعية للفصل على الوصل:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\sim(\sim p) \equiv p \quad .7$$

$$\sim T \equiv C, \quad \sim C \equiv T \quad .8$$

$$p \wedge T \equiv p \quad .9$$

$$p \wedge T \equiv T \quad .10$$

$$p \wedge C \equiv C \quad .11$$

$$p \vee C \equiv p \quad .12$$

$$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad .13$$

$$p \vee \sim p \equiv T \quad .14$$

$$p \wedge \sim p \equiv C \quad .15$$

.16 قانون دموورغان:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$(r \wedge p) \vee r \equiv r \quad .17$$

$$(r \vee p) \wedge r = r \quad .18$$

مثال:

باستخدام جبر القضايا أثبت صحة القضايا التالية:

1. $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$
2. $\sim [(x \wedge \sim y) \vee (y \wedge x)] \equiv \sim x$
3. $(r \wedge p) \vee [(r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)] \equiv r$
4. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$
5. $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \wedge q$

الحل:

$$1. \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

$$\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$$

$$\equiv \sim p \wedge t$$

$$\equiv \sim p$$

$$2. \sim [(x \wedge \sim y) \vee (y \wedge x)] \equiv \sim x$$

الحل:

$$\sim [(x \wedge \sim y) \vee (y \wedge x)] \equiv [(\sim y \vee y) \wedge \sim x]$$

$$\equiv \sim [t \wedge x]$$

$$\equiv \sim x$$

$$3. (r \wedge p) \vee [(r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)] \equiv r$$

الحل:

$$(r \wedge p) \vee [(r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)] \equiv (r \wedge p) \vee [r \wedge (q \vee \sim q)]$$

$$\equiv (r \wedge p) \vee [r \wedge t]$$

$$\equiv (r \wedge p) \vee r$$

$$\equiv r$$

$$4. (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$$

الحل:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \wedge (q \vee \sim q)$$

$$\equiv p \wedge t$$

$$\equiv p$$

$$5. p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

الحل:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv t \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv p \vee q$$

تمارين

1- باستخدام جبر القضايا بين صحة أو خطأ القضايا التالية:

- أ $\sim (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p$
- ب $\sim [(x \vee \sim y) \wedge (y \vee x)] \equiv \sim x$
- ت $(r \vee p) \wedge [(r \vee q) \wedge (r \vee \sim q)] \equiv r$
- ث $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$
- ج $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \vee q$

2- باستخدام جبر القضايا بين صحة القضايا التالية:

- أ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- ب $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- ت $(r \wedge p) \vee r \equiv r$
- ث $(r \vee p) \wedge r \equiv r$

3- باستخدام جبر القضايا بين صحة القضايا التالية:

- أ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- ب $p \vee q \equiv q \vee p$
- ت $p \wedge (q \wedge r) \equiv (q \wedge p) \wedge r$
- ث $p \vee (q \vee r) \equiv (q \vee p) \vee r$
- ج $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- ح $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$



الفصل الثاني

المجموعات

1- مقدمة

يوجد في الرياضيات مفاهيم أولية أو حدود غير قابلة للتعريف مثل النقطة في الهندسة والمجموعة والعنصر والانتماء وغيرها، ومن هنا تبرز الحاجة إلى وجود مفردات معروفة مستقرة وتستهمل لتعرف غيرها.

2- المجموعة

يعد مفهوم المجموعة في الرياضيات من المفاهيم الأولية غير القابلة للتعريف، وهذا المفهوم هو حجر الأساس للبناء الرياضي كله، وفي الرياضيات يشترط أن تكون المجموعة محددة تماماً بمعنى أنه يمكن الحكم على أي شيء معطى هل هو ضمن عناصر تلك المجموعة أم لا. إن كل عنصر من عناصر المجموعة يسمى عنصراً ينتمي للمجموعة، وكل عنصر أو شيء ليس من ضمن عناصر المجموعة فإننا نقول إنه ليس من عناصرها.

أمثلة:

1- مجموعة طلاب السنة الثانية معلم صف.

2- مجموعة أيام الأسبوع.

3- مجموعة الأعداد الزوجية-الفردية.

ترميز:

عادة نرسم للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة مثل $A, B, C, \dots$ ، ونرمز لعناصر المجموعة بحروف لاتينية صغيرة مثل $a, b, c, \dots$

الانتماء:

إذا كانت A مجموعة و كان a عنصراً منها فإننا نقول إن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ونكتب ذلك رمزياً $a \in A$. أما إذا وجد عنصر b ليس ضمن عناصر A ، فإننا نقول إن العنصر b لا ينتمي إلى المجموعة A ونكتب ذلك رمزياً بالشكل $b \notin A$.

مثال:

$$A = \{1, 2, 7, 15\}$$

$$1 \in A, 7 \in A$$

$$3 \notin A, 5 \notin A, 2 \in A$$

3- طرائق التعبير عن مجموعة

هناك ثلاث طرائق تستخدم غالباً للتعبير عن مجموعة معينة:

أ- طريقة سرد العناصر

عندما يكون عدد عناصر المجموعة A منتهياً بحيث يمكننا كتابة جميع العناصر فإننا نكتب $A = \{x, y, \dots\}$ ونضع فواصل بين العناصر مستخدمين للمجموعة الأقواس الحاصرة فقط.

مثال:

لتكن A مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 1 و 11 فإن:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

ب- طريقة الصفة المميزة:

عندما تكون عناصر المجموعة A تشتمل بصفة لا يتمتع بها سواها فتكون هذه الصفة محددة تماماً لتلك العناصر، والشكل العام لكتابة مجموعة باستخدام الصفة المميزة هو $A = \{x : P(x)\}$ حيث $P(x)$ خاصية تحدد عناصر A .

مثال:

نستطيع كتابة المجموعة A في المثال السابق باستخدام الصفة المميزة كما يلي:

$$A = \{x: 1 \leq x \leq 11, x \text{ زوجي}\}$$

وهي المجموعة السابقة نفسها إلا أنه اختلف أسلوب التعبير عنها.

مثال:

اكتب المجموعة $\{x: x^2 + 3x + 2 = 0\}$ التي هي جزء من مجموعة الأعداد وذلك بطريقة سرد العناصر.

الحل:

بما أن الأعداد التي تحقق المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ هي فقط $-1, -2$ فإن:

$$A = \{-1, -2\}$$

أمثلة:

(1) X هو طالب من مجموعة طلاب السنة الثانية معلم صف.

$$X = \{x: x \text{ طالب من طلاب السنة الثانية معلم صف}\}$$

(2) مجموعة أيام الأسبوع:

$$Y = \{y: y \text{ أحد أيام الأسبوع}\}$$

(3) مجموعة فصول السنة:

$$Z = \{\text{الشتاء والخريف والربيع والصيف}\}$$

$$A = \{1, 2, 14, 5\} \quad (4)$$

$$B = \{4, 6, 8, 10\} \quad (5)$$

ت- طريقة التسلسل النمطي

إذا كان عدد العناصر كبيراً أو غير منته، مثلاً عندما نريد أن نكتب مجموعة الأعداد الفردية الموجبة فإننا نكتب $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ ليدل ذلك على جميع الأعداد الفردية الموجبة، وعندما نريد كتابة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100 فإننا نكتب $A = \{2, 3, 5, 7, \dots, 97\}$.

ويلاحظ في هذا المثال أننا زدنا كتابة العناصر صراحة حتى يتبين التسلسل المقصود، فحينما نكتب مثلاً المجموعة:

$$B = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{3n}, \dots, \frac{1}{100n} \right\}$$

فإن كل قارئ يدرك أن $\frac{1}{70n} \in B$ بينما $\frac{1}{190n} \notin B$ وذلك من خلال التسلسل النمطي.

ملاحظة:

1- لا يوجد تكرار لعناصر المجموعة.

2- لا أهمية لترتيب عناصر المجموعة.

4- عدد عناصر مجموعة

نرمز لعدد عناصر المجموعة A بالرمز $|A|$ ، ولدينا حالتان: إما أن يكون عدد عناصر المجموعة A منتهياً بحيث يكون عدد العناصر يساوي عدداً صحيحاً n ، وعندها نكتب $|A| = n$ ، والحالة الأخرى أن يكون عدد عناصر A غير منته، وعندها نكتب $|A| = \infty$.

الاحتواء:

نقول إن المجموعة A تحتوي المجموعة B أو (المجموعة B محتواة في A) إذا كان كل عنصر من عناصر B ينتمي إلى A ونكتب ذلك رمزياً بالشكل $B \subseteq A$.

علاقة الاحتواء:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow [\forall x \in X \Rightarrow x \in Y]$$

بينما:

يوجد عنصر في Y غير موجود في X و $X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \in Y$

$$X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq Y \\ \text{و} \\ Y \subseteq X \end{cases}$$

ملاحظات:

(1) نقول إن المجموعة B محتواة في المجموعة A نعبر عنه بقولنا إن B مجموعة جزئية من A .

(2) إذا كانت $B \subseteq A$ بحيث يوجد على الأقل عنصر في A لا ينتمي إلى B فإننا نقول إن B مجموعة جزئية محتواة تماماً في A ونكتب ذلك $B \subset A$.

(3) إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ فإننا نقول إن المجموعتين A ، B متساويتان، ونكتب ذلك $A = B$.

مثال:

إذا كانت $Z = \{2, 4, 6, 8\}$ مجموعة فإن المجموعات:
 $D = \{4\}$ ، $A = \{2, 4\}$ ، $B = \{2, 6, 8\}$ ، $C = \{ \}$
 مجموعات جزئية من المجموعة Z .

مثال:

إذا كانت:

$$A = \{ \triangle, \square, \bigcirc, \square \}$$

$$C = \{ \triangle, \square, \bigcirc \} \quad D = \{ \triangle \} \quad F = \{ \square, \square \}$$

مجموعات جزئية من المجموعة A .

مثال:

إن مجموعة النقاط الواقعة على المستقيم $x + y = 1$ هي مجموعة جزئية من مجموعة نقاط المستوى، ولكن العكس غير صحيح.

مثال:

إذا كانت $\{x \text{ عدداً أولياً زوجياً} : x\} = A$ وكانت $B = \{x : (x-2)^2 = 0\}$ فإن $A = B = \{2\}$.

المجموعة الخالية:

المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$.

مبرهنة:

1. المجموعة الخالية مجموعة جزئية من أي مجموعة.

2. المجموعة الخالية وحيدة.

البرهان:

1. نفرض العكس، أي توجد مجموعة A بحيث $\phi \not\subseteq A$ وهذا يؤدي إلى

أن ϕ تحتوي عنصراً لا ينتمي إلى A وهذا يناقض كون ϕ خالية. إذاً

الفرض خاطئ وعليه فإن المبرهنة صحيحة.

2. نفرض العكس، أي توجد مجموعتان خاليتان مختلفتان ϕ_1, ϕ_2 ، ومن

الفرع الأول نجد أن $\phi_1 \subseteq \phi_2$ لأن ϕ_1 مجموعة خالية فهي جزئية من

أي مجموعة، وكذلك $\phi_2 \subseteq \phi_1$ لأن ϕ_2 مجموعة خالية أيضاً، ومن

تعريف تساوي مجموعتين نجد أن $\phi_1 = \phi_2$ ، وهذا يناقض الفرض مما

يثبت صحة المبرهنة .

مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة A :

وهي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A ونرمز لها

بالرمز $P(A)$ وتسمى مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة A .

مثال:

لتكن $A = \{1, 2, 3\}$. اكتب عناصر $P(A)$.

الحل:

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

ملاحظات:

1. عناصر $P(A)$ هي المجموعات الجزئية من المجموعة A .
2. في المجموعة $A = \{1,2,3\}$ ، إن $|P(A)| = 2^3$ وبملاحظة أن $|A| = 3$ ، نجد بصورة عامة إنه إذا كانت $|A| = n$ فإن $|P(A)| = 2^n$.

مثال:

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ونلاحظ أن $P(\emptyset) \neq \emptyset$ كما نلاحظ أن $|\emptyset| = 0$ وأن $|P(\emptyset)| = 2^0$. فهي تحقق ما ورد في الملاحظة الثانية من الملاحظات السابقة.

المجموعة المنتهية:

نقول عن مجموعة أنها منتهية إذا أمكن عد عناصرها.

مثال:

$$Z = \{0,1,3,7\}$$

$$A = \{1\}$$

المجموعة غير المنتهية:

نقول عن مجموعة أنها غير منتهية إذا لم نستطع عد عناصرها.

مثال:

$$A = \{1,3,7,8,\dots\}$$



غير منتهية

$$B = \{0,1,\dots\}$$



غير منتهية

5- مجموعات الأعداد

مجموعة الأعداد الطبيعية:

نرمز لها بالرمز N وهي مجموعة غير منتهية. وسنعرف المجموعات التي سوف نتعامل معها مع ذكر رمزها المتعارف عليه:

مجموعة الأعداد الطبيعية: $N = \{0,1,2,3,\dots\}$.

N^* مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر:

$$N^* = \{1,2,3,\dots\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة:

نرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z^-, Z^+, Z^{++}, Z^{*-}, \dots$$

مجموعة الأعداد الصحيحة المغايرة للصفر Z^*

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Z^+

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة Z^-

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المغايرة للصفر Z^{++}

مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة المغايرة للصفر Z^{*-}

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية:

$$E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية:

$$O = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$$

مجموعة الأعداد العادية :

وهي مجموعة الكسور العادية.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in Z \right\}$$

والعدد العادي هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة بسط ومقام كلاهما عدد صحيح والمقام مختلف عن الصفر.

مثال:

$$\frac{3}{2}, \frac{-7}{8}, 6 = \frac{6}{1}, 1.3 = \frac{13}{10}, 0 = \frac{0}{1}, \sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$$

ومن خواص العدد العادي أنه يمكن تمثيله ككسر عشري منته أو دوري.
مجموعة الأعداد غير العادية: I وهي مجموعة الأعداد التي إذا مثلت تمثيلاً
عشرياً فإن ما بعد الفاصلة العشرية لا ينتهي ولا يدور، أي أنها مجموعة
الأعداد التي لا يمكن أن تأخذ الصورة العادية.

مثال:

$$\sqrt{\frac{16}{17}}, \sqrt{2}$$

يمكن إثبات أن العددين التاليين غير عاديين

مجموعة الأعداد الحقيقية:

هي مجموعة الأعداد العادية وغير العادية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$
ويمكن وصفها كما يلي:

$$R = \{a, a_0a_1a_2a_3\ldots : a_i \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}, a \in \mathbb{Z}\}$$

أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية: هي مجموعة الأعداد العادية وغير العادية.

مجموعة الأعداد المركبة (العقدية):

نرمز لها بالرمز C وتعرف كما يلي: $C = \{a + ib : i = \sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}\}$ ، وهي
أكبر مجموعة عددية.

وهي كل عدد مركب يكتب على الشكل:

$$3 = x + iy$$

حيث x القسم الحقيقي للعدد المركب.

y القسم التخيلي للعدد المركب.

ملاحظة:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

ملاحظة:

إذا كانت A مجموعة عناصرها أعداد حقيقية فإن الرمز A^+ يعني المجموعة A عدا الصفر، والرمز A^+ يعني مجموعة الأعداد الموجبة في A ، وكذلك الرمز A^- يعني مجموعة الأعداد السالبة في A .

مثال:

لتكن لدينا المجموعات:

$$X = \{2, 6\} \quad Y = \{4, 3, 7\} \quad Z = \{4, 3, 2\}$$
$$A = \{ \}$$

والمطلوب:

أوجد:

$$A \cup Y, \quad A \cap X \quad (1)$$

$$X \cup (Y \cap Z)$$

$$Z - Y, X \Delta Y \quad (2)$$

الحل:

-(1)

$$A \cup Y = Y = \{2, 3, 7\}$$

$$A \cap X = A = \{ \}$$

$$X \cup (Y \cap Z)$$

$$Y \cap Z = \{4, 3\}$$

$$X \cup \{4, 3\} = \{2, 6, 4, 3\}$$

$$Z - Y = \{2\}$$

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

$$= \{2, 6\} \cup \{4, 3, 7\}$$

$$= \{2, 6, 3, 4, 6, 7\}$$

-(2)

6- جبر المجموعات

سنعرف الآن بعض العمليات المشهورة على المجموعات:

(1) التقاطع:

لتكن B, A مجموعتين، نعرف تقاطع المجموعتين بأنه مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \cap B$ ورمزياً نعرف التقاطع كما يلي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

مثال:

لتكن $A = \{4, 7, 10, 13, \dots\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ فإن:
 $A \cap B = \{4, 10, 16, 22, \dots\}$

مثال:

لتكن $A = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ، $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\} = \{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ فإن $A \cap B = \emptyset$ وفي مثل هذه الحالة نقول إن المجموعتين A, B منفصلتان.

(2) الاجتماع:

لتكن B, A مجموعتين، فإننا نعرف اجتماع هاتين المجموعتين بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى إحداها على الأقل ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \cup B$ ورمزياً نعرف الاجتماع كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

مثال:

إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{a, g, h\}$ ، $C = \{c, e, h\}$

فأوجد $A \cup B$ ، $A \cap (B \cup C)$ ، $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

الحل:

$$B \cup C = \{a, c, e, g, h\} \text{ ، } A \cup B = \{a, b, c, d, e, g, h\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{a, c, e\}$$

$$A \cap B = \{a\} \text{ ، } A \cap C = \{c, e\} \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{a, c, e\}$$

ومن ذلك نلاحظ أن: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. وهذه النتيجة صحيحة لأي ثلاث مجموعات A, B, C .

مثال:

$$N \subset Z \text{ لذلك } N \cup Z = Z$$

مثال:

$$R = Q \cup I$$

(3) الفرق:

لتكن B, A مجموعتين، نعرف الفرق بين B, A الذي نرمز له بالرمز $A - B$ بأنه مجموعة عناصر A التي لا تنتمي إلى B أي أن:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

إن عملية الفرق ليست تبديلية أي أن: $A - B \neq B - A$ بشكل عام والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال:

إذا كانت:

$$(B = \{3^n : n = 1, 2, 3\} \text{ و } A = \{x \in N : x \leq 10\}, 3 \text{ يقبل القسمة على } 3)$$

فأوجد B, A بطريقة سرد العناصر، ثم أوجد $A - B, B - A$ واستنتج أن $A - B \neq B - A$.

الحل:

$$A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{3, 9, 27\}$$

$$A - B \neq B - A \text{ إذا } B - A = \{27\}, A - B = \{6\}$$

تدريب:

إذا كانت $A - B = \emptyset$ ، ماذا تستنتج؟

(4) الفرق التناظري

لتكن A ، B مجموعتين، نعرف الفرق التناظري بين A ، B الذي نرمز له بالرمز $A \Delta B$ كما يلي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال:

لتكن لدينا المجموعتان:

$$A = \{3, 6, 9\} \quad , \quad B = \{3, 9, 27\}$$

$$\text{فإن } A \Delta B = \{6, 27\}$$

ملاحظة:

الفرق التناظري لمجموعتي الأعداد العادية وغير العادية يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية

تدريب:

إذا كانت $A \Delta B = \emptyset$ ماذا تستنتج ؟

7- المجموعة الشاملة نسبياً والمجموعة المتممة

إذا كان لدينا عدد من المجموعات فإن أي مجموعة تحتوي كل المجموعات التي لدينا تصلح أن تكون مجموعة شاملة نسبياً، ولكن يجب في كل مثال اختيار مجموعة واحدة فقط وتثبيتها.

مثال:

إذا كان لدينا المجموعات التالية: $A = \{2, 5, 7\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ،
 $C = \{x \in N : x \leq 14\}$ فإن المجموعة $U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ يمكن تحديدها وتثبيتها على أنها هي المجموعة الشاملة في هذا المثال.

تعريف:

لتكن U مجموعة شاملة و $A \subseteq U$ ، نعرف متممة A بأنها هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولا تنتمي إلى A التي نرمز لها A' وتعرف رمزياً كما يلي:

$$A' = \{x \in U : x \notin A\} = U - A$$

ملاحظة:

إن أي عنصر في المجموعة الشاملة U لا يخلو من إحدى حالتين إما أن ينتمي إلى المجموعة A أو ينتمي إلى A' ولذلك يمكننا كتابة القاعدة التالية لأي مجموعة:

$$A \cup A' = U$$

مثال:

إذا كانت $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مجموعة شاملة نسبياً وكانت $A = \{x \in U : x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ فإن $A = \{2^1, 2^2, 2^3\}$ ،
 $A' = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 10\}$

ملاحظة:

باعتبار أن $\mathbb{R}$ هي المجموعة الشاملة فإن مجموعة الأعداد غير العادية تساوي Q' .

8- خواص العمليات على المجموعات

سنذكر بعض الخصائص الرئيسية لعمليات التقاطع والاتحاد والتممة والفرق: لأي ثلاث مجموعات A, B, C من مجموعة شاملة U :

$$(i) \quad A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A \quad \text{"تبادلية"}$$

$$(ii) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

"التجميعية"

$$(iii) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ "توزيع الاجتماع على التقاطع"}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ "توزيع التقاطع على الاجتماع"}$$

$$(iv) \quad A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A$$

$$(v) \quad A \cup A = A, A \cap A = A \text{ "عدم النمو"}$$

$$(vi) \quad \phi' = U, U' = \phi$$

$$(vii) \quad (A')' = A$$

خواص الفرق

$$i. \quad A - B \neq B - A$$

$$ii. \quad A \cap \bar{A} = \phi$$

$$iii. \quad A \cup \bar{A} = U$$

$$iv. \quad (\bar{A}) = A$$

$$v. \quad (\bar{\phi}) = U$$

$$vi. \quad (\bar{U}) = \phi$$

$$vii. \quad A \cap U = A$$

$$viii. \quad A \cup U = U$$

$$ix. \quad A \cap \phi = \phi$$

$$x. \quad A \cup \phi = A$$

$$xi. \quad (\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ و } (\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$xii. \quad A - B = A \cap \bar{B}$$

$$xiii. \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$xiv. \quad A \cup (A \cap B) = A$$

$$xv. \quad A \cap A = A$$

$$xvi. \quad A \cup A = A$$

خواص الفرق التناظري:

$$i. \quad A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$ii. \quad A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$iii. \quad A \Delta B = B \Delta A$$

مثال:

أثبت أن:

$$A \cap (B - A) = \phi$$

الحل:

$$\begin{aligned} A \cap (B - A) &= A \cap (B \cap \bar{A}) \\ &= B \cap (B \cap \bar{A}) \\ &= B \cap \phi = \phi \end{aligned}$$

مثال:

أثبت أن:

$$(A \cup B) - B = A - B$$

الحل:

$$\begin{aligned} (A \cup B) - B &= (A \cup B) \cap \bar{B} \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup \phi \\ &= A \cap \bar{B} = A - B \end{aligned}$$

مثال:

أثبت أن:

$$(A \cap B) \cup (B - A) = B$$

الحل:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (B - A) &= B \\ (A \cap B) \cup (B - A) &= (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= B \cap (A \cup \bar{A}) \\ &= B \cap \Omega \\ &= B \end{aligned}$$

مثال:

أثبت أن:

$$A - (A \cap B) = A - B$$

الحل:

$$\begin{aligned}A - (A \cap B) &= A \cap (\overline{A \cap B}) \\&= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\&= \phi \cup (A \cap \overline{B}) \\&= A \cap \overline{B} \\&= A - B\end{aligned}$$

مثال:

أثبت أن:

$$(A \Delta B) - A = B - A$$

الحل:

$$\begin{aligned}(A \Delta B) - A &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cap \overline{A} \\&= [(A \cap \overline{B}) \cap \overline{A}] \cup [(B \cap \overline{A}) \cap \overline{A}] \\&= [(A \cap \overline{A}) \cap \overline{B}] \cup [(\overline{A} \cap \overline{A}) \cap B] \\&= \phi \cup (\overline{A} \cap B) \\&= B \cap \overline{A} = B - A\end{aligned}$$

مثال:

أثبت أن:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A - B$$

الحل:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) &= [A \cup (B \cap \overline{B})] \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\&= [A \cup \phi] \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\&= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\&= \phi \cup (A \cap \overline{B}) \\&= (A \cap \overline{B}) = A - B\end{aligned}$$

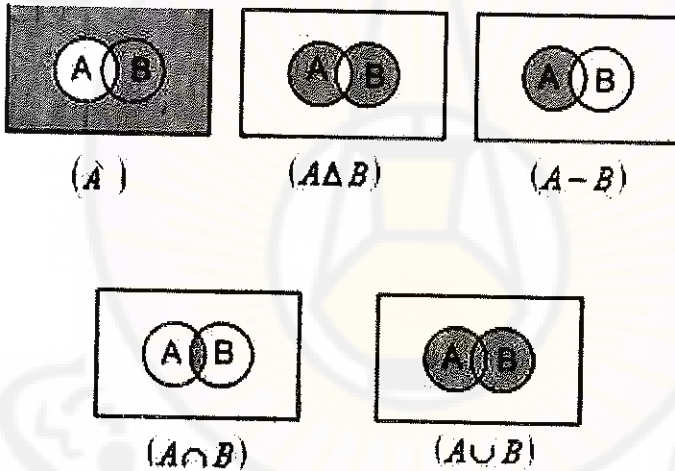
9- مخططات فن

يمكن أن نذكر تمثيلاً شكلياً للمجموعات لتوضيح العلاقة بينهما، غير أن هذا التمثيل لا يتخذ برهاناً على صحة تلك العلاقات: تمثل المجموعة الشاملة U بمستطيل ونرسم داخله المجموعة A على شكل دائرة، ثم نرسم المجموعة الأخرى B على شكل دائرة تتقاطع مع A (في حال وجود تقاطع) ثم نظل المنطقة المطلوبة ونسمي الشكل الناتج مخطط فن.

مثال:

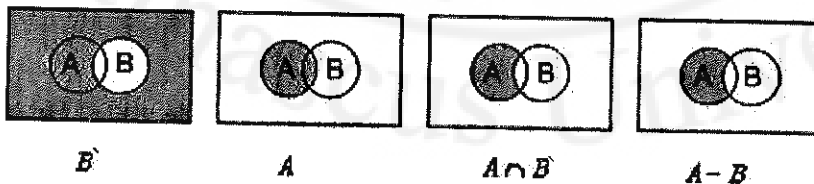
باستخدام مخططات فن، ظلل المجموعات التالية:

$$A', A \Delta B, A - B, A \cap B, A \cup B$$



مثال:

وضح صحة العلاقة التالية بأشكال فن $A - B = A \cap B'$



ونلاحظ التشابه بين تمثيل كل من $A - B$ و $A \cap B'$

10- قانونا دي مورغان

لتكن A, B مجموعتين لهما المجموعة الشاملة U .
فإن:

$$(i) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(ii) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

ملاحظة:

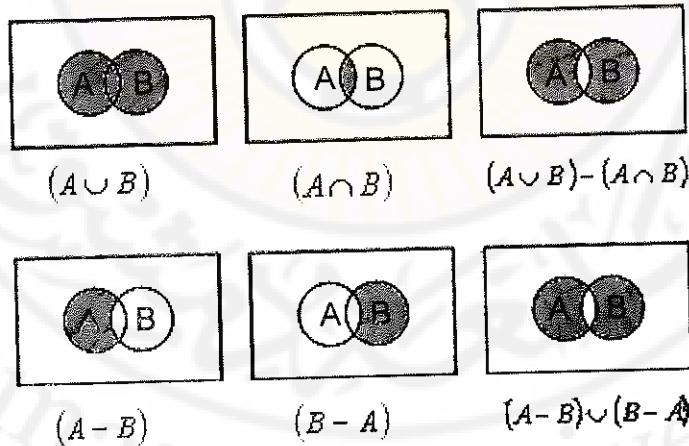
يمكن تعميم قانوني دي مورغان إلى أكثر من مجموعتين.

مثال:

بمخططات فن وضح أن التساوي التالي قائم:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

الحل:



ونلاحظ التشابه بين الناتجين.

11- التطبيقات

Mapping

الجداء الديكارتي

تعريف:

لتكن A, B مجموعتين، نعرف حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B الذي نرمز له بالرمز $A \times B$ كما يلي:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

ملاحظة:

إن عدد عناصر المجموعة يساوي عدد عناصر المجموعة A مضروباً بعدد عناصر المجموعة B

مثال:

$$B = \{3, 4, 5\} \quad A = \{1\}$$

عدد عناصر المجموعة $A \times B$ هو $1 \times 3 = 3$

مثال:

$$B = \{2, 4, 16\} \quad A = \{3, 6, 15\}$$

عدد عناصر المجموعة $A \times B$ هو $3 \times 3 = 9$

ملاحظة:

الرمز (a, b) يسمى زوجاً مرتباً مركبته الأولى من المجموعة A ومركبته الثانية من المجموعة B .

مثال:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{r, t\}$ فإن:

$$A \times B = \{(1, r), (2, r), (3, r), (1, t), (2, t), (3, t)\}$$

$$B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (t, 1), (t, 2), (t, 3)\}$$

ملاحظة:

إن $A \times B \neq B \times A$ أي أن عملية الضرب الديكارتي غير تبديلية وذلك ناتج من أن $(a,b) \neq (b,a)$ بشكل عام.

تعريف العلاقة الثنائية:

ليكن $A \times B$ حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B ،
نقول عن أي مجموعة جزئية من $A \times B$ بأنها علاقة ثنائية من A إلى B
ونرمز لها بـ R . نعرف العلاقة R بين عناصر المجموعتين كما يلي:

$$xRy \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B$$

حيث:

$$x \in A, y \in B$$

لكل علاقة بين عناصر مجموعتين A و B يوجد بيان نرمز له بالرمز G .
بيان العلاقة R : هو مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$ بحيث يحقق:

$$G = \{(x,y) : x,y \in A \times B : xRy\}$$

مثال:

لتكن لدينا المجموعتين:

$$B = \{4,8,10\} \quad A = \{2,5\}$$

المطلوب:

- (1)- أوجد $A \times B$. ثم $B \times A$.
- (2)- نعرف على $A \times B$ العلاقة R بين عناصر المجموعتين كما يلي:
 $aRb \Leftrightarrow a \mid b$ مضاعف لـ a
المطلوب: بيان العلاقة R .

الحل:

$$A \times B = \{(2,4), (2,8), (2,10), (5,4), (5,8), (5,10)\}$$

$$B \times A = \{(4,2), (8,2), (10,2), (4,5), (8,5), (10,5)\}$$

$$G = \{(2,4), (2,8), (2,10), (5,10)\}$$

البيان العكسي ونرمز له بالرمز G^{-1} : هو مجموعة جزئية من المجموعة

$B \times A$. نحصل عليه:

(إذا بدلنا المسقط الأول بالمسقط الثاني في كل ثنائية من البيان G فإننا نحصل

على G^{-1}).

مثال:

$$B = \{3, 5, 1\} \quad A = \{1, 2\}$$

والمطلوب أوجد:

$$B \times A \quad \text{ثم} \quad A \times B$$

$$A \times B = \{(1,3), (1,5), (1,1), (2,3), (2,5), (2,1)\}$$

$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (5,1), (5,2), (1,1), (1,2)\}$$

$$A \times B \neq B \times A \quad \text{نلاحظ أن:}$$

أي أن الجداء الديكارتي لمجموعتين عملية ليست تبديلية.

ملاحظة:

تتساوى ثنائيتين (a, b) و (c, d) إذا تحقق:

$$a = c, b = d$$

مثال:

$$B = \{5, 6\}, \quad A = \{1, 2, 3\}$$

لنكن: وضع أي المجموعات التالية تشكل علاقة من A إلى B ، وأيها تشكل علاقة

من B إلى A :

$$R_1 = \{(5, 2), (5, 3)\}$$

$$R_2 = \{(2, 6), (2, 5), (3, 6), (3, 5), (6, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1,5), (2,6)\}$$

$$R_4 = \{(6,5), (6,3)\}$$

الحل:

R_1 علاقة ثنائية من B إلى A وذلك لأن جميع المركبات الأولى تنتمي إلى B وجميع المركبات الثانية تنتمي إلى A .

R_2 ليست علاقة من A إلى B وليست علاقة من B إلى A وذلك لأن مجموعة كل المركبات الأولى ليست جزئية من A ولا B .

R_3 علاقة ثنائية من A إلى B وذلك لأن $R_3 \subseteq A \times B$

R_4 ليست علاقة من A إلى B وليست علاقة من B إلى A وذلك لأن $R_4 \not\subseteq A \times B$ وكذلك $R_4 \not\subseteq B \times A$.

العلاقة في المجموعة:

خواص العلاقات في المجموعة:

يمكن أن هناك علاقة بين عناصر المجموعة الواحدة. لتكن X مجموعة معرف عليها العلاقة R عندئذ:

1. الانعكاسية: تكون العلاقة R انعكاسية إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in X : xRx$$

أي كل عنصر يرتبط بنفسه

2. التناظرية: تكون العلاقة R تناظرية إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$$

3. المتعدية: تكون العلاقة R متعدية إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

4. التخالفية: تكون العلاقة R تخالفية إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow xRy$$

أو

$$\forall x, y \in X : x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$$

علاقة التكافؤ:

نقول عن العلاقة R أنها علاقة تكافؤ إذا تحقق الشرط التالي:

- 1- الانعكاسية 2- التناظرية 3- المتعدية

علاقة الترتيب:

نقول عن العلاقة R أنها علاقة ترتيب إذا تحققت الشروط التالية:

- 1- الانعكاسية 2- التخالفية 3- المتعدية

مثال:

نعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة Z العلاقة R كما يلي:

$$\forall a, b \in Z : a R b \Leftrightarrow a = b$$

ادرس صفات العلاقة R .

1. الانعكاسية:

$$\forall a \in Z : a R a$$

$$a R a \Leftrightarrow a = a$$

محقق R انعكاسية.

2. التناظرية:

$$\forall a, b \in Z : a R b \Leftrightarrow b R a$$

$$a R b \Leftrightarrow a = b$$

$$b = a \Leftrightarrow b R a$$

R تناظرية.

3. المتعدية:

$$\forall a, b, c \in Z : a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$

$$\left. \begin{array}{l} a R b \Leftrightarrow a = b \\ b R c \Leftrightarrow b = c \end{array} \right\} \Rightarrow a = c \Leftrightarrow a R c \Rightarrow$$

R متعدية

4. التخالفية:

$$\forall a, b \in Z : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

$$\left. \begin{array}{l} aRb \Leftrightarrow a = b \\ bRa \Leftrightarrow b = a \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$$

R تخالفية

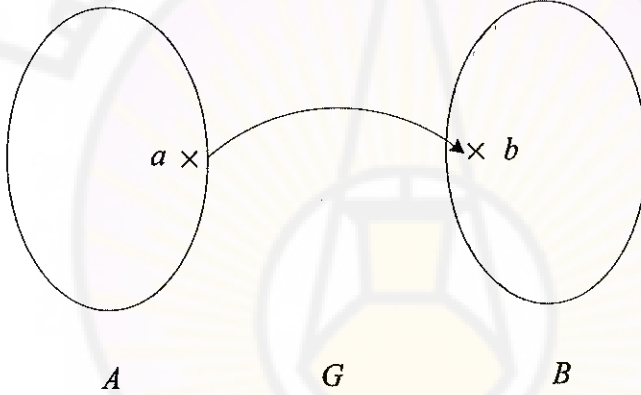
محقق.

ملاحظة:

إن كل مجموعة جزئية G من $A \times B$ تحدد علاقة ثنائية R من A إلى B .

حيث نقول أن: A منطلقها ومستقرها B وبيانها G .

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in G, a \in A \wedge b \in B$$



العلاقة العكسية:

لتكن R علاقة ثنائية من مجموعة A إلى المجموعة B بيانها G .

عندئذ يوجد في المجموعة $B \times A$ المجموعة الجزئية التي بيانها:

$$G^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in G\}$$

التي تعرف علاقة ثنائية من B إلى A سنرمز لها بالرمز: R^{-1} ونسميها

العلاقة العكسية لـ R .

ونسمي بيانها البيان العكسي للبيان G وسنرمز له بالرمز G^{-1} .

مثال:

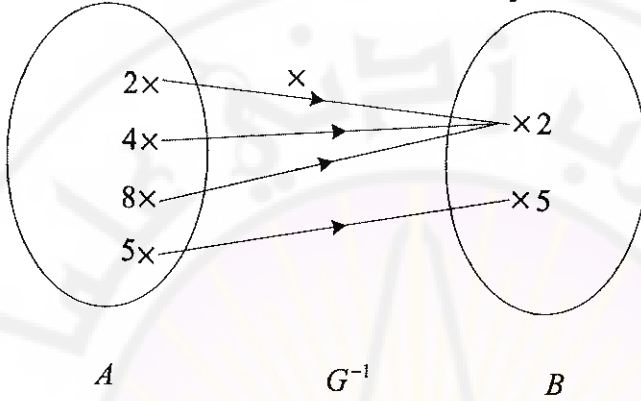
لتكن لدينا العلاقة R المعرفة ببيانها:

$$G = \{(2,2), (2,4), (2,8), (5,5)\}$$

والمطلوب:

أوجد بيان العلاقة العكسي G^{-1} ثم نمثله سهمياً:

$$G^{-1} = \{(2,2), (4,2), (8,2), (5,5)\}$$



ملاحظة:

إذا كانت A مجموعة منتهية وعدد عناصرها m عنصراً وكانت B مجموعة أخرى منتهية وكان عدد عناصرها n فإن عدد عناصر المجموعة (مجموعة الجداء الديكارتي) $A \times B$ يكون $m \cdot n$.

ويكون عدد المجموعات الجزئية في المجموعة $A \times B$ الممكن الحصول عليها هو:

$$2^{m \cdot n}$$

وهذا العدد هو عدد العلاقات من A إلى B في هذه الحالة.

مثال:

لتكن لدينا المجموعتين:

$$A = \{2, 1, 3\}, \quad B = \{7, b, 8\}$$

نعرف العلاقة الثنائية R بين المجموعتين كما يلي:

$$a R b \Leftrightarrow a = b - 5$$

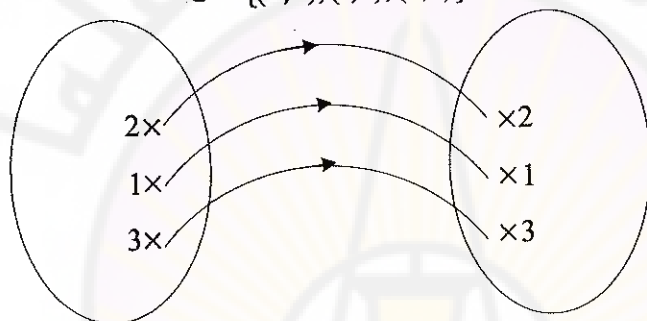
والمطلوب:

- (1) أوجد $A \times B$ ، ثم بيان العلاقة R ، مثل سهمياً.
- (2) أوجد العلاقة العكسية R^{-1} ، ثم بيانها العكسي G^{-1} ، مثل ذلك سهمياً.

الحل:

$$A \times B = \{(2,7), (2,6), (2,8), (1,7), (1,6), (1,8), (3,7), (3,6), (3,8)\} \quad 1.$$

$$G = \{(2,7), (1,6), (3,8)\}$$



A

G

B

$$a = b - 5$$

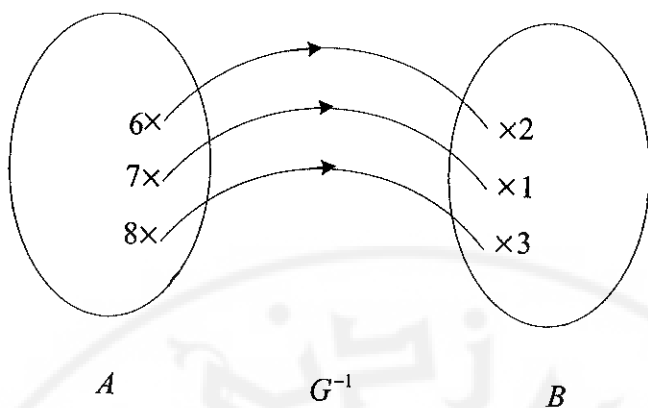
2. العلاقة العكسية:

نحسب b بدلالة a :

$$b = a + 5$$

$$b R^{-1} a \Leftrightarrow b = a + 5$$

$$G^{-1} = \{(7,2), (6,1), (8,3)\}$$



مثال:

نعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ العلاقة R كما يلي:

$$xRy \Leftrightarrow x \cdot y > 0$$

ادرس صفات العلاقة R .

الحل:

صفات العلاقة R .

(1) الانعكاسية:

$$\forall x \in \mathbb{R} : xRx$$

$$xRx \Leftrightarrow x \cdot x > 0$$

$$x^2 > 0$$

محقق دوماً و R انعكاسية.

(2) التناظرية:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} ; xRy \Rightarrow yRx$$

$$xRy \Leftrightarrow x \cdot y > 0$$

$$y \cdot x > 0 \Leftrightarrow yRx$$

محقق R تناظرية.

(3) المتعددية:

$$\begin{aligned} & \forall x, y, z \in \mathbb{R} : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \\ & \left. \begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \cdot y > 0 \\ yRz &\Leftrightarrow y \cdot z > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \cdot z > 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad R \text{ متعدية. محقق}$$

(4) التخالفية:

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in \mathbb{R} : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \\ & \left. \begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow x \cdot y > 0 \\ yRx &\Leftrightarrow y \cdot x > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

ليس من الضروري أن يكون $x = y$ ممكن ان يكون وممكن أن لا يكون.
ليست تخالفية.

R علاقة تكافؤ.

مثال:

نعرف على مجموعة المستقيمات في المستوى Ω العلاقة R كما يلي:

$$\forall x, y \in \Omega ; xRy \Leftrightarrow x \parallel y$$

حيث x, y مستقيمات من Ω .

أثبت أن: R علاقة تكافؤ في Ω .

الحل:

تكون R علاقة تكافؤ إذا تحققت الشروط التالية:

(1) الانعكاسية:

$$\forall x \in \Omega : xRx$$

$$xRx \Leftrightarrow x \parallel x$$

كل مستقيم يوازي نفسه محقق. R انعكاسية.

(2) التناظرية:

$$\forall x, y \in \Omega ; xRy \Rightarrow yRx$$

$$xRy \Leftrightarrow x \parallel y$$

$$y // x \Leftrightarrow y R x \Rightarrow$$

R تناظرية محقق.

(3) المتعدية:

$$\forall x, y, z \in \Omega : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

$$\left. \begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow x // y \\ y R z \Leftrightarrow y // z \end{array} \right\} \Rightarrow x // z \Rightarrow x R z$$

R متعدية محقق.

فهي علاقة تكافؤ.

تعريف الدالة:

الدالة (التابع) هي علاقة من A إلى B يرتبط فيها كل عنصر من المجموعة A بعنصر وحيد من المجموعة B .
إذا ارتبط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد من المستقر.
ونرمز للدالة:

$$f : x \rightarrow y$$

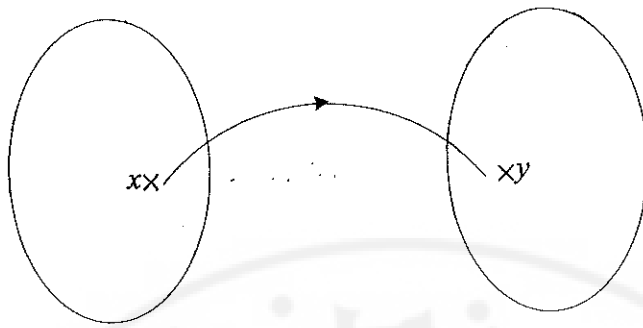
$$x \rightarrow f(x) = y$$

f اسم الدالة.

x منطلقها.

y مستقرها.

$f(x) = y$ قاعدة الربط. (صورة x وفق f هي y).



X منطلق

f

Y مستقر

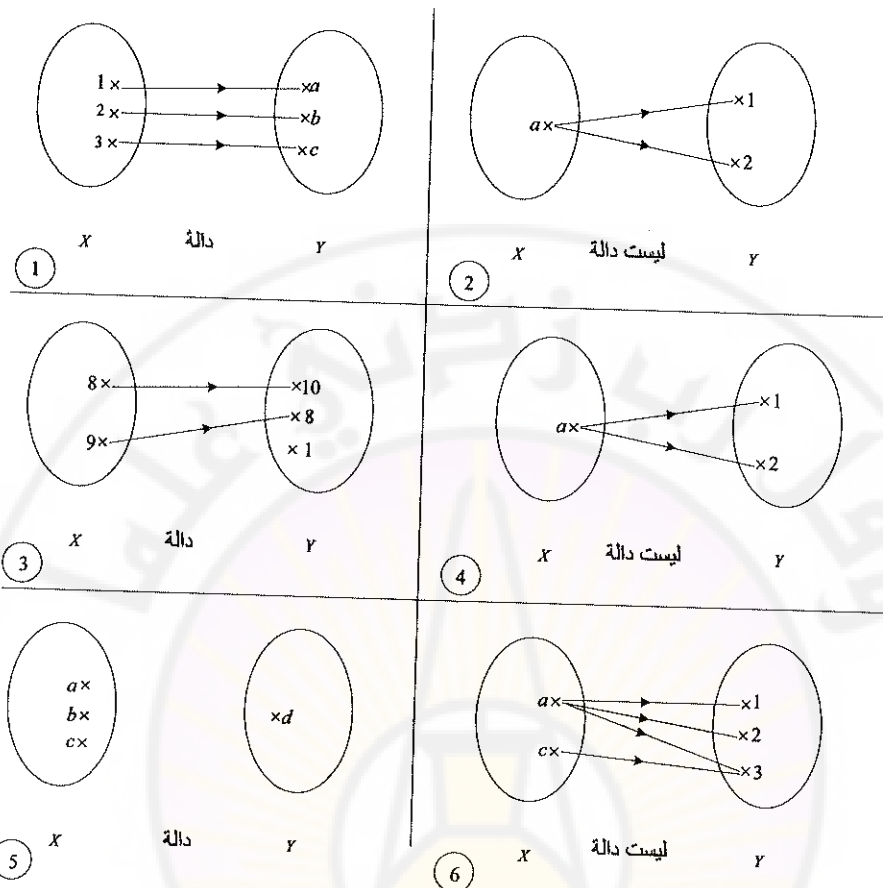
تُعرّف الدالة f : 1- منطلقها.

2- مستقرها.

3- قاعدة الربط.

أمثلة:

بين أي هذه العلاقات تمثل دالة f :



بعض الدوال الخاصة:

الدالة المطابقة: هي دالة منطلقها ومستقرها نفس المجموعة.

$$f: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$$

$$x \rightarrow f(x) = x$$

نرمز للدالة المطابقة بالرمز I .

الدالة المطابقة بالنسبة لـ X : نرمز له بالرمز I_X

$$I_X: X \rightarrow X$$

$$x \rightarrow I_X(x) = x$$

الدالة المطابقة بالنسبة لـ Y : نرمز له بالرمز I_Y

$$I_Y : Y \rightarrow Y$$

$$y \rightarrow I_Y(y) = y$$

1. الدالة المتباينة:

تعريف:

نقول عن دالة أنها دالة متباينة، إذا كان كل عنصر من المستقر صورة لعنصر واحد من المنطلق أو ليس صورة لأي عنصر منها.

التعريف الرياضي للدالة المتباينة:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

أو:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

مثال:

برهن أن الدالة:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x - 5$$

متباينة.

الحل:

f متباينة عندما:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2x_1 - 5 = 2x_2 - 5$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow$$

f متباينة.

2. الدالة الغامرة:

نقول عن دالة إنها غامرة إذا كان كل عنصر من المستقر يقابل عنصر من المنطلق

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

تعريف:

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$$

نحسب y بدلالة x .

مثال:

تحقق من أن الدالة:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = 3x - 7$$

غامرة.

الحل:

g غامرة عندما:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : g(x) = y$$

$$g(x) = y$$

$$3x - 7 = y$$

نحسب x بدلالة y :

$$3x = y + 7 \Rightarrow x = \frac{y+7}{3} \in \mathbb{R}$$

محقق. g غامرة.

التقابل:

إذا كان الدالة متباينةً وغامرة فإننا نقول عنها إنها تقابل.

التقابل العكسي:

عكس الدالة في الحالة العامة ليس دالة وإذا كان الدالة تقابل فعكسها يكون دالة.

ونرمز لها بالرمز f^{-1}

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = x$$

ملاحظة:

نحصل على قاعدة ربط التطبيق العكسي من شرط الغمر.

مثال:

برهن أن الدالة:

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}/\{1\}$$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x}$$

تقابل وله تقابل عكسي أوجد.

الحل:

تكون الدالة تقابلاً إذا كانت متباينة وغامرة.

1. f متباينة:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^* : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1+2}{x_1} = \frac{x_2+2}{x_2}$$

$$x_2 \cdot (x_1+2) = x_1(x_2+2)$$

$$x_2x_1 + 2x_2 = x_2x_1 + 2x_1$$

$$2x_2 = 2x_1$$

$$x_2 = x_1 \Rightarrow$$

f متباينة.

2. f غامرة:

$$\forall y \in \mathbb{R} / \{1\}; \exists x \in \mathbb{R}^* : f(x) = y$$

$$f(x) = y$$

$$\frac{x+2}{x} = y$$

نحسب x بدلالة y

$$x+2 = x \cdot y$$

$$2 = x \cdot y - x$$

$$2 = x \cdot (y-1) \Rightarrow x = \frac{2}{y-1} \in \mathbb{R}^*$$

فالدالة f هي تقابل.

$$f^{-1} : \mathbb{R} / \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

تقابلها العكسي:

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2}{y-1} = x$$

مثال:

هل الدالة:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

تقابل؟

الحل:

g تقابل إذا كانت متباينة وغامرة.

g متباينة عندما:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

نحذر تربيعاً:

$$g \Rightarrow x_1 = \mp x_2$$

ليس متباينة.

فهي ليس تقابل.

مثال:

هل الدالة:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow h(x) = x^3$$

تقابل؟

الحل:

h تقابل إذا كانت متباينة وغامرة.

h متباينة:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$h(x_1) = h(x_2)$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

نحذر تكعيباً:

$$x_1 = x_2$$

h متباينة.

h غامرة:

$$\forall y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R} : h(x) = y$$

$$h(x) = y$$

$$y = x^3$$

نحسب x بدلالة y :

$$x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$$

محقق.

h غامرة. فهي تقابل.

تركيب التطبيقات:

لتكن لدينا الدالة:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

$$h: Y \rightarrow Z$$

$$y \rightarrow h(y) = z$$

نرمز لتركيب التطبيقات بالرمز hof .

شرط وجوده: أن يكون: مستقر f هو نفس منطلق h .

h يلي f هو تطبيق منطلقه منطلق f ومستقره مستقر h .

$$hof: X \rightarrow Z$$

$$x \rightarrow (hof)(x) = h(f(x))$$

$$= h(y)$$

$$= z$$

مثال:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x + 5$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow$$

$$x \rightarrow g(x) = x^2 + x$$

هل التطبيق gof موجود؟ أوجد.

$$gof: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow (gof)(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(2x+5) \\
 &= (2x+5)^2 + (2x+5)
 \end{aligned}$$

$$= 4x^2 + 20x + 25 + 2x + 5$$

$$= 4x^2 + 22x + 30$$

$$fog : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow (fog)(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(x^2 + x) \\
 &= 2(x^2 + x) + 5 \\
 &= 2x^2 + 2x + 5
 \end{aligned}$$

نتيجة: تركيب التطبيقات: $fog \neq gof$ عملية ليست تبديلية.

مبرهنة:

برهن أن ناتج تركيب التطبيقين متباينين هو تطبيق متباين.

البرهان:

$$f : X \rightarrow Z \text{ متباين فرضاً}$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

$$g : X \rightarrow Z \text{ متباين فرضاً}$$

$$y \rightarrow g(y) = z$$

$$gof : X \rightarrow Z$$

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow (gof)(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(y) = z
 \end{aligned}$$

لنبرهن أنه متباين:

$$\forall x_1, x_2 \in X : \text{gof}(x_1) = \text{gof}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{gof}(x_1) = \text{gof}(x_2)$$

$$\text{go}(f(x_1)) = \text{go}(f(x_2))$$

لأن f متباين فرضاً.

$$g(x_1) = g(x_2)$$

gof متباين $x_1 = x_2 \Rightarrow$ لأن g متباين فرضاً.

مبرهنة:

برهن أن ناتج تركيب تطبيقين غامرين هو تطبيق غامر.

البرهان:

$$\forall z \in Z : \exists x \in X : \text{gof}(x) = z$$

$$(\text{gof})(x) = z$$

$$\text{g}(f(x)) = \text{g}(y) \quad f \text{ غامر فرضاً.}$$

$$= z$$

لأن g غامر.

$\Rightarrow$ gof غامر.

نتيجة:

إن ناتج تركيب تقابلين هو تطبيق تقابل.

أمثلة:

نعرف على المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ العلاقة R كما يلي:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

برهن أن R علاقة تكافؤ.

الحل:

تكون R علاقة تكافؤ إذا تحقق ما يلي:

1- R انعكاسية:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) R (a, b)$$

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + b = b + a$$

محقق. R انعكاسية.

2- R تناظرية:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow (c, d) R (a, b)$$

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

$$b + c = a + d$$

$$c + b = d + a$$

$$\Leftrightarrow (c, d) R (a, b)$$

R تناظرية.

3- R متعدية:

$$\forall (a, b), (c, d), (h, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) R (c, d) \wedge (c, d) R (h, f) \Rightarrow (a, b) R (h, f)$$

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \\ (c, d) R (h, f) \Leftrightarrow c + f = d + h \end{array} \right\}$$

بالجمع:

$$a + d + c + f = b + c + d + h$$

$$a + f = b + h$$

$$\Leftrightarrow (a, b) R (h, f)$$

$$R \Leftarrow \text{علاقة تكافؤ.}$$

R متعدية.

مثال:

ليكن لدينا الدالة:

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{3}$$

1. هل f تقابل؟ أوجد تقابله العكسي. ثم احسب:

$$(f^2 = f \circ f).f^2$$

2. أوجد:

$$(f \circ f)(-3), (f \circ f)(-1)$$

الحل:

f تقابل إذا كان:

1- f متباين:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1+2}{3} = \frac{x_2+2}{3}$$

$$x_1 = x_2 \Leftarrow f \text{ متباين.}$$

2- f غامر:

$$\forall y \in \mathbb{R}^*: \exists x \in \mathbb{R}^*: f(x) = y$$

$$f(x) = y$$

$$\frac{x+2}{3} = y$$

نحسب x بدلالة y :

$$x+2 = 3y$$

$$x = 3y - 2 \in \mathbb{R}^* \Leftarrow f \text{ غامر.}$$

فهو تقابل.

التقابل العكسي:

$$f^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = 3y - 2$$

$$f^2 = f \circ f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{x+2}{3}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+2}{3} + 2}{3}$$

$$= \frac{x+8}{9}$$

$$(f \circ f)(-3) = \frac{-3+8}{3} = \frac{5}{3}$$

$$(f \circ f)(-1) = \frac{-1+8}{3} = \frac{7}{3}$$

مثال:

نعرف العلاقة R على المجموعة A كما يلي:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ قاسم لـ } y$$

حيث $A = \{1, 2, 5, 6\}$ المطلوب:

1. اكتب بيان العلاقة R ، ثم مثل سهمياً هذا البيان.

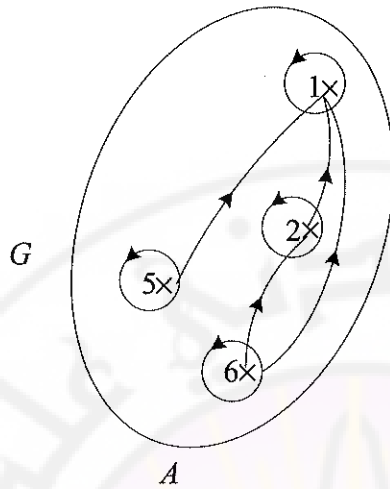
2. البيان العكسي.

3. ادرس صفات العلاقة R .

الحل:

1. بيان العلاقة:

$$G = \{(1,1), (2,2), (5,5), (6,6), (2,1), (5,1), (6,1), (6,2)\}$$



2. البيان العكسي:

$$G^{-1} = \{(1,1), (2,2), (5,5), (6,6), (1,2), (1,5), (1,6), (2,6)\}$$

3. ادرس صفات العلاقة:

(1) الانعكاسية:

$$\forall x \in A; xRx$$

$$xRx \Leftrightarrow 1R1, 2R2, 5R5, 6R6$$

محقق كل عنصر يرتبط بنفسه.

(2) التناظرية:

$$\forall x, y \in A; xRy \Rightarrow yRx$$

$$xRy \Leftrightarrow 2R1 \not\Leftrightarrow 1R2$$

ليست تناظرية.

(3) المتعدية:

$$\forall x, y, z \in A: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

$$xRy \Leftrightarrow 2R1 \wedge 6R1 \Rightarrow 6R2$$

محقق. متعدية.

(4) التخالفية:

$$\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x \neq y$$

$$\left. \begin{array}{l} xRy \Leftrightarrow 2R1 \\ yRx \Leftrightarrow 1R2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \neq 2$$

محقق تخالفية.

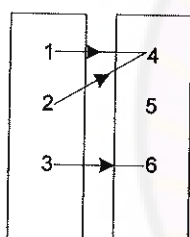
ملاحظة:

في التعريف السابق نعني بارتباط العنصر a بالعنصر b أن يكون الزوج المرتب (a, b) منتبياً إلى العلاقة المعرفة.

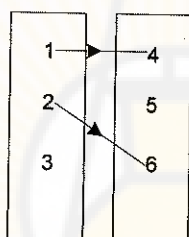
مثال:

لتكن ثلاث علاقات من $A = \{1, 2, 3\}$ إلى $B = \{4, 5, 6\}$ تمثلها

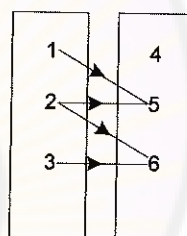
المخططات السهمية التالية:



R_1



R_2



R_3

أي هذه العلاقات تمثل دالة ؟

الحل:

- R_1 دالة لأن كل عنصر من A يرتبط بعنصر وحيد من B .
- R_2 لا تمثل دالة لأن العنصر 3 ينتمي إلى A ولا يرتبط بأي عنصر من B .
- R_3 لا تمثل دالة لأن العنصر 2 من A يرتبط بأكثر من عنصر من B .

مثال:

العلاقة R المعرفة كما يلي

$R = \{(x, 2-3x) : x \in N\}$ تشكل دالة من N إلى Z .

ملاحظة:

الدالة في المثال السابق تكتب عادة كما يلي:

$$R : N \rightarrow Z$$

$$R(x) = 2 - 3x$$

ويسمى N مجال R (أو منطلق R) و Z المجال المقابل لـ R (أو مستقر R)

12- العمليات الثنائية

Binary Operations

يمكن تقديم مفهوم العملية الثنائية.

تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية، $A \times A$ حاصل الضرب الديكارتي لـ A مع نفسها أي أن:

$A \times A = \{(a, b) : a, b \in A\}$ كل دالة معرفة من $A \times A$ إلى A تسمى عملية داخلية ثنائية على A .

أي، إذا رمزنا لهذه الدالة بالرمز $*$ ورمزنا للعنصر الناتج من تأثير هذه الدالة على العنصر (a, b) بالرمز $a * b$ فإن $*$ تكون ثنائية على المجموعة A إذا حققت الشرط:

$$a * b \in A \quad \forall a, b \in A$$

أي أن ناتج تفاعل a, b عبر العملية $*$ لا يخرج عن المجموعة A .

مثال:

عملية الجمع ثنائية على N وذلك لأنه لأي $a, b \in N$ فإن $a + b \in N$

مثال:

عملية الطرح غير ثنائية على N وذلك لأنه إذا كان $a, b \in N$ فليس بالضروري أن يكون $a - b \in N$ فمثلاً $3, 7 \in N$ بينما $3 - 7 \notin N$ (لاحظ أن الطرح عملية ثنائية على Z).

مثال:

عملية القسمة غير ثنائية على Z وذلك لأنه مثلاً $1, 2 \in Z$ بينما $1 \div 2 \notin Z$

ملاحظات:

- (1) نقول: إن العملية $*$ ثنائية على المجموعة A مكافئ لقول: إن المجموعة A مغلقة بالنسبة العملية $*$.
- (2) يمكن أن نعرف عملية على مجموعة عددية، وليست العمليات الأربع المعروفة هي فقط كل العمليات.

مثال:

نعرف على المجموعة N ، العملية $*$ كما يلي: $a * b = a^b + 1$
فإن $*$ عملية ثنائية لأن أي عدد طبيعي مرفوع لأس عدد طبيعي مضافاً إليه العدد 1 فإن الناتج عدد طبيعي.

مثال:

نعرف على المجموعة $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ العملية $*$ كما يلي:

$$a * b = \min(a, b)$$

حيث $\min(a, b)$ تعني أصغر العددين a, b ، فإن $*$ عملية ثنائية على A .

مثال:

إذا عرفنا العملية $*$ على المجموعة $A = \{x \in N : x + 1 < 6\}$ كما يلي:

$$a * b = \frac{a + b}{2} \text{ هل } * \text{ ثنائية على } A ?$$

الحل:

نسرد عناصر المجموعة A ، كما يلي : $A = \{1, 2, 3, 4\}$
وبأخذ العنصرين 2, 3 نجد أن : $2 * 3 = \frac{2+3}{2} = 2\frac{1}{2} \notin A$

إذا العملية $*$ غير ثنائية على A .

جدول العملية الثنائية:

عندما تكون A مجموعة عدد عناصرها صغير، ومعرف عليها عملية ثنائية
فيمكن استخدام جدول يتضح من خلاله جميع النواتج الممكنة للعملية.

مثال:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ وعرفنا العملية $*$ كما يلي:

$$a * b = a$$

اكتب جدولاً يمثل هذه العملية، وبين فيما إذا كانت العملية $*$ ثنائية ؟

الحل:

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	3	4

وبما أن جميع النواتج تنتمي إلى A فإن العملية $*$ ثنائية.

ملاحظة:

يمكن أن نبين أن العملية $*$ ثنائية في المثال السابق من غير استخدام الجدول
وذلك بالنظر إلى القاعدة التي عرفت بها.

مثال:

إذا عرفنا $*$ على المجموعة $A = \{h, k\}$ كما يلي:

*	h	k
h	h	h
k	m	k

فإن $*$ ليست ثنائية على A ، وذلك لوجود عنصر في مجموعة النواتج لا ينتمي إلى A وهو m .

خواص العمليات الثنائية:

تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية، ولتكن $*$ عملية ثنائية على A فإننا نقول إن $*$ تبديلية: إذا حققت الشرط:

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$$

ملاحظة:

عمليتا الضرب والجمع على Z تبديليتان بينما عملية الطرح غير تبديلية:

مثال:

$$5 - 7 \neq 7 - 5, \quad 5, 7 \in Z$$

مثال:

عملية القسمة على Q^+ ليست تبديلية.

مثال:

$$2 \div 1 \neq 1 \div 2, \quad 1, 2 \in Q^+$$

مثال:

لتكن $A = \{r, t, s\}$ نعرف $*$ على مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة أي $P(A)$ كما يلي:

$$X * Y = X \cap Y \quad \forall X, Y \in P(A)$$

فإن * تبديلية، وذلك لأن عملية التقاطع تبديلية.

تعريف:

نقول إن العملية الثنائية * المعرفة على المجموعة A تجميعية إذا حققت الشرط:

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in A$$

مثال:

عمليتا الجمع والضرب تجميعيتان على كل من N, Z, Q, R .

مثال:

إذا كانت A مجموعة فإن عمليتي التقاطع والاتحاد تجميعيتان على $P(A)$.

مثال:

عملية الطرح غير تجميعية على Q ، كما أن عملية القسمة غير تجميعية على Q^* .

مثال:

$$4 = 3 - (1 - 2) \neq (3 - 1) - 2 = 0$$

$$6 = 3 \div (1 + 2) \neq (3 \div 1) \div 2 = 1 \frac{1}{2} \quad \text{وكذلك}$$

تعريف:

لتكن A مجموعة معرفة عليها عمليتان ثنائيتان *, ° نقول أن العملية * تتوزع على العملية ° من اليسار إذا حققت الشرط:

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$$

ونقول إن العملية * تتوزع على العملية ° من اليمين إذا حققت الشرط:

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$$

وذلك $\forall a, b, c \in A$.

مثال:

إن عملية الضرب تتوزع على عمليتي الجمع والطرح في R من اليمين واليسار، وذلك لأن:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot c \pm a \cdot b \quad \forall a, b, c \in R$$

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c \quad \forall a, b, c \in R$$

بينما عمليتا الجمع والطرح لا تتوزعان على عملية الضرب.

مثال:

$$13 = 3 + (2 \times 5) \neq (3 + 2) \times (3 + 5) = 40$$

ملاحظة:

إذا كانت $a, b \in R$ فإن التعبيرات $a \times b, ab, a \cdot b$ لها المعنى نفسه.

مثال:

في R ، عملية القسمة تتوزع على عمليتي الجمع والطرح من اليمين، ولكنها لا تتوزع عليهما من اليسار أي أن:

$$(a \pm b) \div c = (a \div c) \pm (b \div c), a, b, c \in R$$

في حين أن

$$a \div (b \pm c) \neq (a \div b) \pm (a \div c)$$

مثال:

إن عملية الاجتماع توزيعية على عملية التقاطع من اليمين واليسار والعكس أيضاً صحيح.

مثال:

نعرف على Z العمليتين التاليتين:

$$a * b = 2a + b$$

$$a \circ b = 2a - b$$

بين فيما إذا كانت هاتان العمليتان ثنائيتين؟ تبديليتين؟ تجميعيتين؟ هل إحداهما تتوزع على الأخرى من اليمين أو اليسار؟

الحل:

العملية $*$ ثنائية لأنه إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ فإن $2a \in \mathbb{Z}$ وكذلك $2a + b \in \mathbb{Z}$ وعليه فإن $a * b \in \mathbb{Z}$ أي أن $*$ ثنائية. لكن $*$ غير تبديلية.

مثال:

$$2 * 1 = 2(2) + 1 = 5$$

$$1 * 2 = 2(1) + 2 = 4$$

بينما

وكذلك $*$ غير تجميعية

مثال:

$$(1 * 2) * 3 = 4 * 3 = 2(4) + 3 = 11$$

$$1 * (2 * 3) = 1 * 7 = 2(1) + 7 = 9$$

بينما

بالمثل نجد أن العملية $\circ$ ثنائية، وليبيان إمكانية توزيع $*$ من اليسار على $\circ$ فإننا نلاحظ أن:

$$a * (b \circ c) = 2a + (2b - c) = 2a + 2b - c$$

$$(a * b) \circ (a * c) = (2a + b) \circ (2a + c) = 2[2a + b] - (2a + c) = 2a + 2b - c$$

من تساوي الطرف الأيمن في هاتين المعادلتين نجد أن $*$ تتوزع من اليسار على $\circ$.

وليبيان إمكانية توزيع $*$ على $\circ$ من اليمين:

$$(a \circ b) * c = (2a - b) * c = 2[2a - b] + c = 2a - 2b + c$$

$$(a * b) \circ (b * c) = (2a + c) \circ (2b + c) = 2[2a + c] - (2b + c)$$

$$= 4a + 2c - 2b - c = 4a - 2b + c$$

من تساوي الطرف الأيمن في هاتين المعادلتين ينتج صحة توزيع * على اليمين أيضاً.

وبطريقة ماثلة لما سبق يمكن توضيح أن عملية $\circ$ غير تبديلية، غير تجميعية، وليبيان إمكانية توزيعها على * من اليسار نلاحظ أن:

$$a \circ (b * c) = a \circ (2b + c) = 2a - (2b + c) = 2a - 2b - c$$

$$(a \circ b) * (a \circ c) = (2a - b) * (2a - c) = 2[2a - b] + (2a - c)$$

$$4a - 2c + 2a - c = 6a - 2b - c$$

أي أن الطرف الأيمن في المعادلة الأولى $\neq$ الطرف الأيمن في المعادلة الثانية، وعليه فالعملية $\circ$ غير توزيعية من اليسار على *.
ولبيان إمكانية توزيعها من اليمين على *، نجد أن:

$$(a * b) \circ c = (2a + b) \circ c = 2[2a + b] - c = 4a + 2b - c$$

$$(a \circ b) * (a \circ c) = (2a - c) * (2b - c) = 2[2a - c] + (2b - c)$$

$$= 4a - 2c + 2b - c = 4a + 2b - 3c$$

ملاحظة:

يكفي مثال لإثبات أن $\circ$ غير توزيعية على * بينما لا يكفي مثال لإثبات أن * تتوزع على $\circ$.

تمارين

(1) إذا $U = \{1,2,3,\dots,15\}$ هي المجموعة الشاملة

$$B = \{x \in N^* : x = \frac{k}{3}, k \in U\}, A = \{1,2,3,\dots,9\}$$

$$\cdot A \cup B^c \text{ (i)}$$

$$\cdot B - A \text{ (ii)}$$

$$\cdot A \cap U^c \text{ (iii)}$$

(iv) تحقق من قانوني ديمورغان على المجموعتين B, A .

(2) باعتبار U هي المجموعة الشاملة، و ϕ هي المجموعة الخالية،

$A \subseteq U$ أكمل ما يلي:

$$U \cup A = \dots \text{ (v)}$$

$$A \Delta U = \dots \text{ (i)}$$

$$A \cap A' = \dots \text{ (vi)}$$

$$(A' \cup A)' = \dots \text{ (ii)}$$

$$\phi \cap U = \dots \text{ (vii)}$$

$$A - A' = \dots \text{ (iii)}$$

$$A \Delta A = \dots \text{ (viii)}$$

$$A - (A \cap U')' = \dots \text{ (iv)}$$

(3) عين قيمة (أو قيم) العدد الطبيعي a في كل فقرة مما يلي:

$$\cdot \{x : x \in N, 2 \leq x \leq a\} = \{2,3,4,5,6,7\} \text{ (i)}$$

$$\cdot \{a-1, a+2, a^2\} = \{0,1,3\} \text{ (ii)}$$

$$\cdot \{2, a+3, 5, 7\} = \{x : 1 < x \leq 7, \text{ عدد أولي}\} \text{ (iii)}$$

(4) بطريقة الصفة المميزة، اكتب المجموعة التالية:

$$A = \{2,4,8,16,32,\dots\}$$

$$\cdot |A \cup B| \text{ فاحسب } |A| = 3, |B| = 2, |A \cap B| = 1 \text{ إذا كانت } \text{ (5)}$$

$$\cdot P(A) \text{ فاكتب عناصر } A = \{a,b,c,d\} \text{ إذا كانت } \text{ (6)}$$

(7) من خلال مخططات فن، تأكد من صحة العلاقة:

$$\cdot A \cup (B - A') = A$$

(8) اذكر العلاقة بين المجموعات التالية $\{ \}, \{0\}, \{\phi\}, \{x \in R : x^2 < 0\}$.

(9) بطريقة السرد، اكتب المجموعتين التاليتين:

$$A = \{x \in Z : x \leq 27\}$$

$$B = \{x \in R : (x+1)(x^2 - 4x - 5) = 0\}$$

ثم أوجد $(A \cup B) \cap (A \Delta B)$.

(10) إذا كانت B, A مجموعتين بحيث $(A \cup B) = A$ ماذا تستنتج؟

(11) إذا كان $(A - B) \cup B = A$ فأی التعابير التالية يجب أن يكون صحيحاً

$$B = \phi \quad (i)$$

$$A \subseteq B \quad (ii)$$

$$B \subseteq A \quad (iii)$$

$$(B - A) \cup A = B \quad (iv)$$

(12) اكتب جميع العلاقات الممكنة من A إلى B حيث:

$$B = \{a, b\}, A = \{0, 1\}$$

ثم وضح أي العلاقات التي كتبت تمثل دالة.

(13) عرف دالة من المجموعة $A = \{x, y, z\}$ إلى نفسها.

(14) إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$\tilde{R} = \{(x, x^2) : x \in R\}$$

فاكتب ثلاثة عناصر تنتمي إلى $\tilde{R}$.

(15) نعرف على Q^+ العملية $*$ كما يلي: $a * b = \frac{1}{a+b}$

(i) أوجد خواص العلاقة $*$ من حيث كونها ثنائية، تبديلية، تجميعية.

(ii) بين صحة توزيع $*$ على الضرب العادي والعكس.

(16) نعرف على Z العملية التالية: $a * b = a + b - ab$

أوجد خواص العملية $*$ من حيث كونها ثنائية، تبديلية، تجميعية.

(17) إذا كانت العملية $*$ عملية ثنائية معرفة على $A = \{n, r, t\}$ كما في

الجدول التالي:

*	n	r	t
n	r	t	n
r	t	n	r
t	n	r	t

بين فيما إذا كانت العملية * تبديلية، تجميعية.

(18) عرف على N عملية ثنائية بحيث تكون تبديلية غير تجميعية.

(19) عرف على N عملية ثنائية بحيث تكون غير تبديلية غير تجميعية.

(20) لتكن $A = \{0,1\}$ ، أوجد $P(P(A))$.

(21) بين فيما إذا كانت عملية الجمع أو الضرب ثنائية على المجموعة

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

(22) بين فيما إذا كانت عملية الجمع أو الضرب ثنائية على المجموعة

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{22}, \frac{1}{222}, \dots\right\}$$

(23) لتكن A مجموعة، $P(A)$ مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة

$$H = \{S - T : S, T \in P(A)\}$$

فما العلاقة بين $P(A)$ و H ؟

الفصل الثالث

المجموعات العددية

1- مقدمة

نتعامل مع الأعداد الطبيعية والصحيحة والعادية وغيرها، لذا سندرس مجموعات تلك الأعداد وخواصها وطرائق الحساب فيها.

2- مجموعة الأعداد الطبيعية

The Set of Natural Numbers

سبق أن عرفنا مجموعة الأعداد الطبيعية بأنها مجموعة الأعداد التالية $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ وهي مجموعة غير منتهية، كما أنها مرتبة بمعنى أنه لأي عددين $a, b \in N$ فإن واحدة فقط من العلاقات التالية تكون صحيحة:

$$(i) \quad a = b$$

$$(ii) \quad a \text{ أكبر من } b \text{ ونرمز لذلك بالرمز } a > b$$

$$(iii) \quad a \text{ أصغر من } b \text{ ونرمز لذلك بالرمز } a < b$$

وهذه المجموعة هي أول مجموعة تعامل معها الإنسان، وتستوعب حلول بعض المعادلات مثل $x - 3 = 2$.

ملاحظات:

(1) لا معنى لقسمة أي عدد على الصفر، أي أن الرمز $\frac{a}{0}$ لا معنى له في الرياضيات.

(2) إن عمليتي الجمع والضرب ثنائيتان على N ولكن عمليتي الطرح والقسمة غير ثنائيتين على N .

3- مجموعة الأعداد الصحيحة

The Set of Integer Numbers

تعرف مجموعة الأعداد الصحيحة بأنها المجموعة:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

وتتمتع بالخصائص التالية:

- (1) Z مجموعة غير منتهية.
- (2) Z مجموعة مرتبة .
- (3) Z مغلقة بالنسبة لكل من الجمع، الطرح والضرب.
- (4) Z ليست مغلقة بالنسبة لعملية القسمة وذلك لأن $1, 2 \in Z$ ولكن $1 \div 2 = \frac{1}{2} \notin Z$.

قابلية القسمة:

ليكن a, b عددين صحيحين $a \neq 0$ ، نقول إن b يقبل القسمة على a إذا وجد عدد صحيح c بحيث $b = a \cdot c$. فمثلاً العدد 21 يقبل القسمة على 3 لأنه يوجد عدد صحيح وهو 7 بحيث $21 = 3 \times (7)$.

ملاحظات:

- (1) إن قولنا " b يقبل القسمة على a " مكافئ لقولنا إن " a يقسم b " ونرمز لأي من التعبيرين بالرمز $a|b$ ، وإذا كان b لا يقبل القسمة على a فنكتب ذلك رمزياً $a \nmid b$.
- (2) إذا كان العدد الصحيح الموجب b يقبل القسمة على العدد الصحيح a فإن العدد السالب $-b$ يقبل القسمة على a .
- (3) الصفر يقبل القسمة على أي عدد صحيح ما عدا نفسه، بينما لا يوجد عدد صحيح يقبل القسمة على الصفر.
- (4) كل عدد صحيح يقبل القسمة على الواحد أي أن $1|b \quad \forall b \in Z$.

قابلية القسمة على 2

يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان عدداً زوجياً أي إذا كان آحاده أحد الأرقام التالية: 0, 2, 4, 6, 8. وإذا كان العدد يقبل القسمة على 2 نسميه عدداً زوجياً، وإن لم يكن نسميه عدداً فردياً.

ملاحظات:

- (1) إذا كان n عدداً زوجياً فيوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k$.
- (2) إذا كان n عدداً فردياً فيوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k + 1$.
- (3) حاصل ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي، وحاصل ضرب عدد زوجي وآخر فردي هو عدد زوجي، وحاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي.
- (4) إذا كان n عدداً زوجياً فإن n^2 عدد زوجي والعكس صحيح.

قابلية القسمة على 3

يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على العدد 3.

قابلية القسمة على 4

يقبل العدد القسمة على 4 إذا كان العدد المكون من آحاده وعشراتّه يقبل القسمة على العدد 4.

قابلية القسمة على 5

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان آحاده إما 0 أو 5.

قابلية القسمة على 6

يقبل العدد القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على 2 وعلى 3 معاً.

قابلية القسمة على 7

يمكن فهم قاعدة قسمة العدد على 7 من خلال المثال التالي:

مثال:

بين قابلية العدد 129 القسمة على 7.

الحل:

نجزئ العدد إلى جزأين "12" و "9" ثم نوجد ناتج $5(9)+12=57$

وهذا الناتج لا يقبل القسمة على 7 إذن العدد الأصلي لا يقبل القسمة على 7.

والقاعدة العامة كما يلي: إذا كان $n=10b+a$ فإن n يقبل القسمة على 7 إذا

كان العدد $5a+b$ يقبل القسمة على 7 فقط.

قابلية القسمة على 8

يقبل العدد القسمة على 8 إذا كان العدد المكون آحاده وعشراته ومئاته يقبل

القسمة على 8.

قابلية القسمة على 9

يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

قابلية القسمة على 10

يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفراً.

قابلية القسمة على 11

يقبل العدد القسمة على 11 إذا كان الفرق بين مجموع أرقام خاناته فردية

الترتيب ومجموع أرقامه زوجية الترتيب.

مثال:

بين قابلية العدد 120978713 القسمة على العدد 11.

الحل:

العدد هو 1 2 0 9 7 8 7 1 3

مجموع الأرقام فردية الترتيب $18=1+0+7+7+3$

مجموع الأرقام زوجية الترتيب $20=2+9+8+1$

الفرق يساوي 2 وهذا العدد لا يقبل القسمة على 11، إذن العدد الأصلي لا يقبل القسمة على 11.

مثال:

بين قابلية العدد 6270 للقسمة على الأعداد 2,3,4,...,11.

الحل:

بما أن الأحاد "0" إذن العدد يقبل القسمة على كل من 2,5,10.

وبما أن مجموع الأرقام $0+7+2+6=15$ ، إذن العدد يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9.

العدد المكون من آحاد العدد وعشراته هو "70" وهو لا يقبل القسمة على 4.

(العدد 6270 لا يقبل القسمة على 4)

العدد المكون من آحاد العدد وعشراته ومئاته هو "270" وهو لا يقبل القسمة على 8.

إذن العدد الأصلي لا يقبل القسمة على 4 ولا على 8.

بما أن العدد يقبل القسمة على 2 وعلى 3 فهو يقبل القسمة على 6.

ولنبين قابلية القسمة على 11 نلاحظ أن العدد هو 0 2 7 6

مجموع الأرقام فردية الترتيب $2+0=2$

مجموع الأرقام زوجية الترتيب $7+6=13$

الفرق بينها يساوي 11 وهو يقبل القسمة على 11 إذن العدد الأصلي يقبل القسمة على 11.

ولبيان قابلية العدد القسمة على 7 نلاحظ أن: 0 27 6

$$5(0) + 627 = 627$$

$$62 \ 7$$

$$5(7) + 62 = 97$$

وهذا العدد لا يقبل القسمة على 7 إذن العدد الأصلي لا يقبل القسمة على 7.

ملاحظة:

قابلية العدد القسمة على 8 تؤدي إلى قابلية قسمته على 4 التي بدورها تؤدي إلى قابليته القسمة على 2. وكذلك فإن قابلية قسمة العدد على n تؤدي إلى قابليته القسمة على أي قاسم من قواسم n .

مثال:

أجر عملية القسمة التالية: $2017510 \div 11$

الحل:

$$\begin{array}{r} 183410 \\ 11 \overline{) 2017510} \\ \underline{-11} \\ 91 \\ \underline{-88} \\ 37 \\ \underline{-33} \\ 45 \\ \underline{-44} \\ 11 \\ \underline{-11} \\ 00 \end{array}$$

مجموعة القواسم ومجموعة المضاعفات:

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ ، نعرف مجموعة قواسم a التي نرمز لها بالرمز $D(a)$ كما يلي:

$$D(a) = \{b \in \mathbb{Z} : b|a\}$$

كما نعرف مجموعة مضاعفات a التي نرمز لها بالرمز $M(a)$ كما يلي:

$$M(a) = \{\dots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots\}$$

مثال:

$$D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

$$M(5) = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$$

ملاحظات:

(1) لكل عدد صحيح $a \neq 0$ فإن $D(a)$ مجموعة منتهية بينما $M(a)$ مجموعة غير منتهية.

(2) لكل عدد صحيح $a \neq 0$ فإن $M(a) \cap D(a) = \{\pm a\}$.

(3) $M(0) = \{0\}$ بينما $D(0) = \mathbb{Z}^*$.

(4) إن $\mathbb{Z}$ تحتوي على حلول معادلات لا تحتويها N فمثلاً نجد أن $\mathbb{Z}$ تستوعب جميع حلول المعادلتين $x^2 - 4 = 0, x + 6 = 3$ بخلاف المجموعة N .

مجموعة الأعداد الأولية:

تعريف:

العدد الأولي هو العدد الطبيعي الذي له قاسمان موجبان فقط، أي أننا نقول عن العدد $P \in N$ إنه أولي إذا كان :

$$P \neq 1 \quad (i)$$

$$D(p) = \{\pm 1, \pm p\} \quad (ii)$$

مبرهنة (المبرهنة الأساسية في الحساب):

كل عدد طبيعي يمكن تحليله بشكل وحيد إلى حاصل ضرب أعداد أولية. (بغض النظر عن ترتيب هذه الأعداد)

مثال:

العدد 24 يمكن أن يكتب كما يلي:

$$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3 \quad 24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3$$

ولا يوجد تحليل إلى عوامل أولية لهذا العدد غير هذا التحليل، وبشكل عام فإن أي عدد طبيعي n يمكن أن يكتب على الصورة $n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots p_r^{n_r}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة، r ، n_i أعداد طبيعية.

مثال:

حلل العدد 9625 إلى عوامل أولية:

الحل:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 9625 \\ 5 & 1925 \\ 5 & 385 \\ 7 & 77 \\ 11 & 11 \\ & 1 \end{array}$$

$$9625 = 5^3 \times 7 \times 11 \quad \text{إذن}$$

مبرهنة:

مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية.

البرهان:

نفرض العكس أي أن مجموعة الأعداد الأولية P منتهية ولتكن $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ الآن لنأخذ العدد $r = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$. إن r لا يقبل القسمة على أي من الأعداد p_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$. إذن r عدد أولي، ولكن $r \notin P$ وهذا يناقض الفرض. إذن عكس الفرض صحيح أي أن $|P| = \infty$.

ملاحظات:

- (1) لا يوجد عدد أولي زوجي غير العدد 2.
- (2) العدد 1 ليس من الأعداد الأولية لعدم انطباق التعريف عليه.



(3) للحكم على عدد طبيعي معطى n هل هو أولي أم لا...يكفي أن نختبر قابلية n القسمة على كل الأعداد الأولية التي هي أقل من $\sqrt{n}$ أو تساويه فإن كان n لا يقبل القسمة على أي منها فهو أولي، وإلا فهو غير أولي.

مثال:

اختبر العدد 149 هل هو أولي أم لا؟
نلاحظ أن الأعداد الأولية التي هي أقل أو تساوي $\sqrt{149}$ هي 2,3,5,7,11 وبملاحظة أن 149 لا يقبل القسمة على هذه الأعداد الأولية إذن فهو عدد أولي، وبالجمله فإنه كلما كبر العدد زادت صعوبة الحكم عليه من حيث كونه أولياً أم لا.

(4) الأعداد الأولية الأولى هي 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,.....

القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر:
القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيحين a و b هو أكبر عدد طبيعي بحيث a, b يقبلان القسمة عليه ويرمز له بالرمز $g.c.d(a, b)$.
المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين a و b هو أصغر عدد طبيعي بحيث يقبل القسمة على كل من a, b ويرمز له بالرمز $l.c.m.d(a, b)$.
مثال:

القاسم المشترك الأعظم للعددين 15,12 هو 3 والمضاعف المشترك الأصغر لهما هو 60.
مبرهنة :

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ وكان d هو القاسم المشترك الأعظم لهما، m هو المضاعف المشترك الأصغر لهما فإن $ab = dm$.

4- مجموعة الأعداد العادية

The Set of Rational Numbers

تعريف:

مجموعة الأعداد العادية أو الكسرية Q تعرف كما يلي:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : b \neq 0 \text{ and } a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

ونلاحظ هنا أن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي مجموعة جزئية من Q لأنه

لأي عنصر $a \in \mathbb{Z}$ فإن $a = \frac{a}{1} \in Q$ وبالتالي فالاحتواءات التالية

الصحيحة: $Q \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.

إن أي عدد عادي يمكن أن يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ فمثلاً العدد $3\frac{7}{9}$ ليس على

الصورة $\frac{a}{b}$ ولتحويله إلى هذه الصورة فإننا نجري العملية الحسابية التالية:

$$3\frac{7}{9} = \frac{3 \times 9 + 7}{9} = \frac{34}{9}$$

وكذلك يمكن القيام بعملية عكسية لهذه العملية فالعدد $\frac{45}{7}$ يمكن تحويله إلى

صورة عدد صحيح وكسر كما يلي:

خارج القسمة

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7 \overline{) 45} \\ \underline{42} \\ 3 \end{array}$$

الباقي

$$\text{إذن: } \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$$

تعريف:

نقول إن العدد العادي $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة إذا كان القاسم المشترك الأعظم للعددين a, b يساوي 1.

العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد العادية:

إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ فإننا نعرف:

$$(i) \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d} \quad \text{عمليتي الجمع والطرح}$$

$$(ii) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \quad \text{عملية الضرب}$$

$$(iii) \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c} ; c \neq 0 \quad \text{عملية القسمة}$$

ويمكن كتابة القسمة بصورة أخرى وهي: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a.d}{b.c}, c \neq 0$

مثال:

$$(i) \quad \text{احسب: } \frac{7}{11} \left(3\frac{7}{9} - 2\frac{1}{7} \right)$$

$$(ii) \quad \text{وضح أن } \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} . \text{ ثم وضح أن العلاقة التالية صحيحة لأي}$$

عدد طبيعي $n (n \neq 0)$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

$$(iii) \quad \text{ما ناتج جمع الثلث مع الربع.}$$

الحل:

$$(i) \quad \frac{7}{11} \left(3\frac{7}{9} - 2\frac{1}{7} \right) = \frac{7}{11} \left(\frac{34}{9} - \frac{15}{7} \right) = \frac{7}{11} \left(\frac{34(7) - 15(9)}{9 \times 7} \right) \\ = \frac{7}{11} \left(\frac{103}{9 \times 7} \right) = \frac{103}{99}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1(6) - 1(5)}{5 \times 6} = \frac{1}{30} \quad (\text{ii})$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \quad \text{وكذلك}$$

تعميم:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} = \frac{1(n+1) - 1(n)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \times 4} = \frac{7}{12} \quad (\text{iii})$$

ملاحظة:

في حالة القسمة يمكن إعطاء القاعدتين التاليتين للأعداد العادية.

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}; b \neq 0 \neq c \quad (1)$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}; b \neq 0, c \neq 0 \quad (2)$$

المقارنة:

لمقارنة العددين العاديين $\frac{c}{d}, \frac{a}{b}$ حيث المقامان موجبان، نتبع الخطوات الموضحة

فيما يلي:

نضرب مقام الأول في بسط الثاني، ونضرب مقام الثاني في بسط الأول، ونقارن بين الناتجين.

$$bc \leftarrow \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} \rightarrow da$$

فإذا كان $ad > bc$ فإن العدد $\frac{a}{b}$ أكبر من $\frac{c}{d}$.

وإذا كان $ad < bc$ فإن العدد $\frac{a}{b}$ أصغر من $\frac{c}{d}$.

وإذا كان $ad = bc$ فإن العددين متساويان.

مثال:

قارن بين العددين $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{17}$

الحل:

$$34 = 17 \times 2 \leftarrow \frac{2}{5} \quad \frac{7}{17} \rightarrow 5 \times 7 = 35$$

وحيث أن $34 < 35$ فإن العدد $\frac{7}{17}$ أكبر من $\frac{2}{5}$.

تدريب:

قارن بين العددين $\frac{-3}{7}$, $\frac{-4}{9}$

كثافة الأعداد العادية:

مبرهنة:

إن بين أي عددين عادييين يوجد عدد غير منته من الأعداد العادية.

البرهان:

ليكن $a, b \in \mathbb{Q}$ بحيث $a < b$. لإثبات المطلوب نبرهن قضيتين أولاهما أنه لكل $n \in \mathbb{N}$

$$a < \frac{na+b}{n+1} < b$$

ولكن هذا واضح لأن:

$$(n+1)a < na+b < (n+1)b$$

وبقسمة جميع الأطراف على العدد $n+1$ ينتج المطلوب. والقضية

الأخرى أنه إذا كان $n, m \in \mathbb{N}$ بحيث $n \neq m$ فإن:

$$\frac{na+b}{n+1} \neq \frac{ma+b}{m+1}$$

افرض أن $m > n$ وأن $m-n=r > 0$ إذن:

$$(b-a)r > 0 \Rightarrow (b-a)(m-n) = mb+na-ma-nb > 0$$

ومن ذلك وبإضافة الحدين b و mna نجد أن:

$$mna + mb + na + b > mna + ma + nb + b$$

$$\Rightarrow (m+1)(na+b) > (n+1)(ma+b)$$

وبقسمة الطرفين على $(m+1)(n+1)$ نحصل على المطلوب.

مثال:

أوجد ثلاثة أعداد عادية بين العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$.

الحل:

$$\frac{1/2 + 1/3}{2} = \frac{5/6}{2} = \frac{5}{12}$$

العدد الأول هو:

$$\frac{1/2 + 5/12}{2} = \frac{22/24}{2} = \frac{22}{48}$$

العدد الثاني هو:

$$\frac{1/3 + 5/12}{2} = \frac{27/36}{2} = \frac{27}{72}$$

العدد الثالث هو:

الصورة العشرية للأعداد العادية:

إن الأعداد العادية يمكن كتابتها بشكل آخر يختلف عن استخدام البسط والمقام وذلك باستخدام الفاصلة العشرية. فمثلاً نعلم أن العددين $\frac{1}{2}$ و 0.5 متساويان، وسنعطي طريقة لتحويل العدد العادي من أي من الصورتين إلى الصورة الأخرى.

أولاً: تحويل العدد الكسري إلى عدد عشري

إذا كان لدينا العدد $\frac{a}{b}$ ونريد تحويله إلى صورة عشرية فإن الطريقة المتبعة هي قسمة البسط على المقام قسمة عادية وسنجد أننا أمام إحدى الحالتين: إما أن تنتهي القسمة بعد إجراء عدد منته من العمليات، والحالة الثانية أن تستمر عملية القسمة من غير نهاية، ولكننا سنلاحظ بعد إجراء عدد من العمليات أن الأعداد

التي تلي الفاصلة العشرية بدأت تتكرر وعندها نكتشف الأعداد التي تدور بعد الفاصلة العشرية وحينئذ يسمى العدد العشري عدداً دورياً.

مثال:

حول الأعداد الكسرية التالية إلى الصورة العشرية $\frac{7}{21}, \frac{2}{11}, \frac{1}{8}$.

الحل:

$\begin{array}{r} 0.1818... \\ 11 \overline{) 20} \\ \underline{-11} \\ 90 \\ \underline{-88} \\ 20 \\ \underline{-11} \\ 90 \\ \underline{-88} \\ 20 \end{array}$ إذن $\frac{2}{11} = 0.1818... = 0.18$	$\begin{array}{r} 0.125 \\ 8 \overline{) 10} \\ \underline{-8} \\ 20 \\ \underline{-16} \\ 40 \\ \underline{-40} \\ 00 \end{array}$ إذن $\frac{1}{8} = 0.125$
--	---

أن $\frac{7}{21} = 0.333... = 0.\bar{3}$ حيث الرمز $0.\bar{3}$ يعني أن الرقم 3 يتكرر إلى غير

نهاية، والرمز 0.18 يعني أن الرقمين يتكرران بالترتيب إلى غير نهاية.

ثانياً: تحويل العدد العشري إلى كسري

إن الأعداد العشرية التي نستطيع تحويلها إلى أعداد كسرية هي الكسور العشرية المنتهية والدورية فقط، أما الكسور العشرية التي لا تنتهي ولا تدور فإنها ليست أعداداً عادية، أي لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}$ وهذا ما سنوضحه لاحقاً.

مثال:

حول كلاً من الأعداد العشرية التالية إلى أعداد كسرية:

(i) 0.2791 (ii) 0.212121 (iii) 0.37525252

الحل:

$$0.2791 = \frac{2791}{10000} \quad (i)$$

وهنا يمكن إعطاء قاعدة وهي: أن عدد الأصفار على يمين الواحد في المقام يساوي عدد الخانات على يمين الفاصلة.

$$0.212121 = 0.\overline{21} = \frac{21}{99} \quad (ii)$$

وهنا يمكن إعطاء قاعدة أيضاً وهي أن عدد التسعات في المقام يساوي عدد الأرقام التي تدور..
(iii) نفرض أن:

$$100x = 37.5252.. \quad (1) \Leftrightarrow x = 0.74525252..$$

$$10000x = 3752.5252...(2) \quad \text{وكذلك}$$

$$\text{وبطرح (1) من (2) ينتج أن } 9900x = 3752 - 37 \quad \text{إذن} \quad x = \frac{3752 - 37}{9900} = \frac{3715}{9900}$$

وطريقة الحل هذه يمكن اعتبارها طريقة عامة لحل (ii) وغيرها.

ملاحظة:

عند ضرب عدد عشري بـ 10, 100, 1000, ... فإننا نزيح الفاصلة العشرية يميناً بمقدار عدد الأصفار، وأما عند قسمة عدد عشري على 10, 100, 1000, ... فإننا نزيح الفاصلة يساراً بمقدار عدد الأصفار.

بعض خواص مجموعة الأعداد العادية مع العمليات الحسابية المألوفة:

لتكن $a, b, c \in \mathbb{Q}$ فإن:

(1) عمليتي الجمع والضرب تبديليتان في $\mathbb{Q}$ أي أن:

$$ab = ba, a + b = b + a$$

(2) عمليتي الجمع والضرب تجميعيتان في $\mathbb{Q}$ أي أن:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

(3) قابليتي الحذف في عمليتي الجمع والضرب محققة، أي أن:

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

$$(a \neq 0) \quad a.b = a.c \Rightarrow b = c \quad \text{وكذلك}$$

(4) خاصية توزيع الضرب على كل من الجمع والطرح، أي أن:

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

(5) عملية القسمة توزيعية من اليمين على عمليتي الجمع والطرح أي أن:

$$(a \pm b) \div c = (a \div c) \pm (b \div c); c \neq 0$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}; c \neq 0 \quad \text{أو بصورة مكافئة}$$

ولكن عملية القسمة غير توزيعية من اليسار عليهما أي أن:

$$\frac{c}{a \pm b} \neq \frac{c}{a} \pm \frac{c}{b}$$

(6) المجموعة Q تتمتع بخاصية الترتيب.

(7) Q مغلقة بالنسبة لعملية الضرب والجمع والطرح، و Q^* مغلقة بالنسبة لعملية القسمة.

ملاحظات:

(1) عند إجراء عملية الضرب بين عددين عادييين مكتوبين بالصورة العشرية بحيث الفاصلة العشرية في الأول بعد n من الخانات، وفي الثاني بعد m من الخانات، فإننا نضرب العددين متجاهلين الفاصلة العشرية في كل من العددين ثم نضع الفاصلة العشرية في الرقم الناتج بعد $(n + m)$ من الخانات بدءاً من اليمين.

(2) عند إجراء قسمة عدد عادي مكتوب بالصورة العشرية، على آخر مكتوب بالصورة العشرية فإننا نوجد عدد الخانات على يمين الفاصلة في العددين وذلك بإضافة أصفار ثم نزيح الفاصلة العشرية على اليمين في كل من العددين حتى يكون العددان صحيحين ثم نجري القسمة.

(3) الجمع والطرح لا يتوزعان على الضرب.

مثال:

$$.5 + (6 \times 3) \neq (5 + 6) \times (5 + 3)$$

مثال:

أوجد كلاً من (i). $(2.71)(3.9)$

(ii). $10.11 \div 0.3$

الحل:

في العدد 3.9 الفاصلة بعد خانة واحدة.

وفي العدد 2.71 الفاصلة بعد خانتيين.

ولذلك فإن الفاصلة تكون في العدد الناتج بعد ثلاث خانات، الآن نجري عملية الضرب.

271

39 ×

2439

813

10569

$$2.71 \times 3.9 = 10.569$$

إذن

ولأجراء القسمة نزيح الفاصلة في المقسوم خانتيين وكذلك في المقسوم عليه فنحصل على:

$$10.11 \div 0.3 = 1011 \div 30 = 33.7$$

(8) لأي عدد عادي $\frac{a}{b} \in Q$ يوجد عدد عادي وحيد $-\frac{a}{b}$ بحيث:

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 0$$

يسمى العدد $-\frac{a}{b}$ النظير (المعكوس) الجمعي للعدد $\frac{a}{b}$. ولأن للعدد العادي

$\frac{a}{b} \in Q^*$ يوجد عدد عادي وحيد $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$ يسمى العدد $\frac{b}{a}$ النظير (المعكوس) الضربي للعدد $\frac{a}{b}$.

تعريف:

نقول: إن العدد العادي $\frac{a}{b}$ عدد عادي موجب إذا كان $a.b > 0$.

ونقول: إن العدد العادي $\frac{a}{b}$ عدد عادي سالب إذا كان $a.b < 0$.

ملاحظات:

$$(1) \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

(2) العدد العادي $\frac{a}{b}$ يساوي العدد العادي $\frac{ac}{bc}$ حيث $c \neq 0$ ولذلك فللعدد

العادي صور لا تنتهي فمثلاً:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100} = \dots$$

$$(3) \quad \frac{a}{b} \neq 0, \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

تطبيق على الحساب في مجموعة الأعداد العادية [النسبة المئوية]:

مثال:

في محل تجاري خفض سعر سلعة من 30 ليرة سورية إلى 24 ليرة سورية فما النسبة المئوية لهذا التخفيض؟

الحل:

نفرض أن النسبة هي $\frac{x}{100}$ وبما أن قيمة التخفيض بالنسبة للسعر الأصلي هي $\frac{6}{30}$ إذن $\frac{x}{100} = \frac{6}{30}$ ومن ذلك ينتج أن: $x = 20$.
أي أن نسبة التخفيض هي 20 %.

مثال:

إذا أعلن محل عن تخفيض أسعاره بنسبة مئوية قدرها 45 % وكان هناك سلعة سعرها قبل التخفيض 180 ليرة سورية، وسلعة أخرى بعد التخفيض 22 ليرة سورية، فاحسب السعر الحالي للسلعة الأولى والسعر الأصلي للسلعة الأخرى.

الحل:

التخفيض الحاصل في السلعة الأولى $81 = \frac{45}{100} \times 180$ ليرة سورية.

إذن سعرها الحالي هو: (ليرة سورية) $180 - 81 = 99$

وللحصول على السعر الأصلي للسلعة الثانية نفرض أنه يساوي y وعليه فإن :

$$22 = y - y \left(\frac{45}{100} \right) = y \left(1 - \frac{45}{100} \right) = y \left(\frac{55}{100} \right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{22}{\frac{55}{100}} = \frac{2200}{55} = 40 \quad \begin{array}{l} \text{ليرة} \\ \text{سورية} \end{array}$$

5- مجموعة الأعداد الحقيقية

The Set of Real Numbers

سنبين أن هناك أعداداً لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان، $b \neq 0$ أي أنه يوجد أعداد لا تنتمي إلى المجموعة Q وسنكتفي بذكر عددين لا ينتميان إلى Q وسنبرهن ذلك:
أولاً: العدد $\sqrt{2}$ ليس عدداً عادياً.

البرهان:

نفرض العكس أي أن $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in Q$ ولنفرض أن $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة، إذن:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ عدد زوجي} \Rightarrow a \text{ عدد زوجي}$$

إذن يوجد عدد صحيح k بحيث: $a = 2k$

$$\Rightarrow 2b^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \text{ عدد زوجي} \Rightarrow b \text{ عدد زوجي}$$

وينتج من ذلك أن كلا من a, b عدد زوجي، أي أنهما ليسا في أبسط صورة، وهذا يناقض الفرض، إذن الفرض غير صحيح، وبالتالي فعكسه هو الصحيح أي أن $\sqrt{2} \notin Q$.

ثانياً: العدد x الذي يحقق المعادلة $10^x = 2$ ليس عدداً عادياً ($x > 0$).

البرهان:

نفرض العكس أي أن $x = \frac{a}{b} \in Q$ وليكن $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة:

$$10^x = 2 \Rightarrow 10^{a/b} = 2 \Rightarrow (10^{a/b})^b = 2^b$$

$$\Rightarrow 10^a = 2^b$$

$$\Rightarrow 5^a 2^a = 2^b$$

وهذه النتيجة الأخيرة مستحيلة لأنها تناقض المبرهنة الأساسية في الحساب، إذن عكس الفرض صحيح أي أن: $x \notin Q$.

ملاحظة:

يمكن أن نصنف مجموعة الأعداد الحقيقية بأنها المجموعة التي تشمل الأعداد العشرية التالية:

(1) التي تنتهي أرقامها بعد الفاصلة العشرية.

(2) التي تدور أرقامها بعد الفاصلة العشرية.

(3) التي لا تنتهي أرقامها بعد الفاصلة العشرية ولا تدور.

إن النوعين الأول والثاني يشكلان المجموعة Q ، وإن النوع الثالث يشكل مجموعة الأعداد غير العادية التي نرمز لها بالرمز Π أو Q' وعلى ذلك فإن:

$$R = Q \cup Q'$$

تعريف R بشكل موجز كما يلي:

$$R = \{a.a_1.a_2.a_3... : a_i \in \{0,1,2,3,...,9\}, a \in \mathbb{Z}\}$$

وهذا التعريف يغطي المجموعتين Q, Q' تماماً.

مثال:

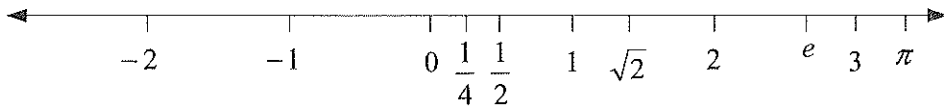
من الأعداد غير العادية المعروفة العددين الثابتان e (أساس اللوغاريتم الطبيعي)، π ، حيث:

$$\pi = 3.1424..., e = 2.7182$$

وكذلك لأي عدد طبيعي n فإن $\sqrt{n}$ لا يخلو من حالتين إما أن يكون عدداً عادياً أو يكون عدداً غير عادي. فمثلاً الأعداد $\sqrt{99}, \sqrt{20}, \sqrt{6}$ تسمى جذور صماء وهي أعداد حقيقية ولكنها غير عادية.

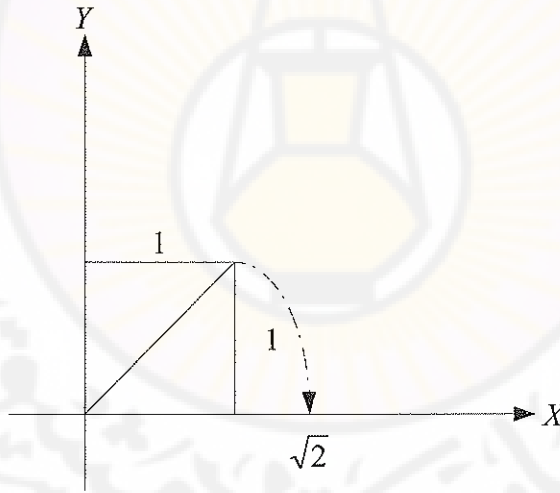
إن المجموعة R تستوعب حلول كثير من المعادلات لا يمكن حلها في Q مثل $x^2 - 7 = 0$ ، بينما لا تستوعب حلول معادلات أخرى مثل $x^2 + 1 = 0$ مما يوحي بوجود مجموعة عددية تحتوي R تماماً.

لقد أثبت أن هناك تقابلاً بين الأعداد الحقيقية R ومجموعة نقاط مستقيم يمتد من طرفيه إلى مالا نهاية، وبناء على ذلك فإننا نتعامل مع R أحياناً على أنها نقاط خط مستقيم، فكل عدد حقيقي تقابله نقطة وحيدة على هذا الخط، وكل نقطة على هذا الخط يقابلها عدد حقيقي وحيد كما في الشكل:



وللحصول على النقطة المقابلة للعدد $\sqrt{2}$ مثلاً على خط الأعداد فيمكننا إجراء العملية التالية:

نوصل جزء الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها هو طول قطر المربع الموضح في الشكل المجاور إلى أن يلاقي الخط المستقيم في النقطة المقابلة للعدد غير العادي $\sqrt{2}$ إن هذا الخط يسمى خط الأعداد الحقيقية ونحدد عليه نقطة نسميها الصفر وما كان من النقاط على يمين تلك النقطة فهو يمثل عدداً حقيقياً موجباً، وما كان منها على يسار تلك النقطة فهو يمثل عدداً حقيقياً سالباً، نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالرمز R^+ ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة بالرمز R^- ولذلك فإن $R = R^+ \cup R^- \cup 0$.



ملاحظة:

(1) الرمز $\sqrt{a}$ حيث a عدد حقيقي موجب يعني الجذر التربيعي الموجب للعدد a علماً $a^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ ، سنعتبر $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ما لم نذكر خلاف ذلك

(2) إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإن $\sqrt{a}$ له قيمة حقيقية موجبة واحدة لجميع قيم n الطبيعية، وإذا كان a عدداً حقيقياً سالباً و n عدداً فردياً فإن $\sqrt{a}$ له قيمة حقيقية سالبة واحدة وإذا كان a عدداً حقيقياً سالباً و n عدداً زوجياً فإن $\sqrt{a}$ ليس له قيمة حقيقية بل له قيمة مركبة فقط.

إيجاد الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب:

يمكن إيجاد جذر أي عدد حقيقي موجب، وسنبين ذلك عملياً من خلال المثالين التاليين:

مثال:

أوجد مقرباً إلى أربع خانات عشرية العدد $\sqrt{3}$.

الحل:

- 1- نجزئ العدد الذي تحت الجذر إلى خانات مثلى مثلى بدءاً من الفاصلة العشرية يمينا ويساراً مع إضافة أصفار عند الحاجة.
- 2- نبدأ بالزوج الأول 03 وذلك بالبحث عن أكبر عدد مربع لا يتجاوز هذا الزوج 03 فنجد أنه 1 .
- 3- نوجد الجذر التربيعي للعدد المربع في الخطوة السابقة "1" فنجد أنه يساوي 1 وهو أول خانة من اليسار في الناتج.
- 4- نضع الجذر 1 مكرراً في الجهة اليمنى تحت الجذر. ثم نجمعهما لنحصل على العدد 2 المجاور للعدد 7.
- 5- نضرب الجذر 1 في نفسه ونضع الناتج مباشرة أسفل الزوج 03.
- 6- نطرح مربع العدد 1 من الزوج 03 ثم ننزل الزوج الثاني بجوار الباقي 200 بعد إنزال الفاصلة العشرية إلى ناتج الجذر.
- 7- البحث عن عدد إذا وضع في كلا القوسين كان الناتج بعد عملية الضرب أقرب ما يكون إلى 200، فنجد أنه يساوي 7 وذلك لأن $200 < 8 \times 28 = 224$ ، نضع 7 في كل من القوسين وفي ناتج الجذر، ثم

نضع ناتج الضرب 189 تحت العدد 200 ثم نطرح لنجد حاصل الطرح
يساوي 11 ثم ننزل الزوج 00 فنحصل على العدد 1100.
8- نجمع $27+7=34$ ثم نبحت عن عدد (مكون من خانة واحدة) بحيث
نضع على يمين 34 ونضرب الناتج بهذا العدد ليكون أقرب إلى العدد 1100
ولا يتجاوزه، فنجد أن العدد المطلوب هو 3 لأن $3 \times 343 = 1029 < 1100$
بينما $4 \times 344 = 1376 > 1100$.
9- نكرر العملية.

03.	00	00	00	00	1.7320
-1					1
200					+1
-189					2(7)
1100					+ (7)
-1029					34 (3)
7100					+ (3)
-6924					346 (2)
17600					+ (2)
-00000					3464 (0)
1760000					(0)
					34640

نتوقف ، لأن الاستمرار في هذه العملية لا ينتهي.

مثال:

نوجد $\sqrt{15876}$ كما يلي:

01	58	76	00	00	126
-1	0058	-44	1476	1476	1
+1	2(2)	+ (2)	24 (6)	(6)	1
.....					

خواص مجموعة الأعداد الحقيقية:

إن مجموعة الأعداد الحقيقية R تتمتع بكافة الخواص التي تتمتع بها مجموعة الأعداد العادية Q .

(1) لكل عنصر $a \in R$ يوجد عنصر وحيد $-a \in R$ بحيث

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

(2) لكل عنصر $a \in R^*$ يوجد عنصر وحيد $\frac{1}{a} \in R^*$ بحيث

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

(3) إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

(4) لأي عدد حقيقي $a \in R$ فإن $a^2 \geq 0$.

(5) ليكن $a, b \in R$ فإن القواعد التالية صحيحة:

$$(-a) \cdot (-b) = ab \quad \spadesuit$$

$$(-a) \cdot (b) = -ab \quad \spadesuit$$

$$-a - b = -(a + b) \quad \spadesuit$$

$$a - (-b) = a + b \quad \spadesuit$$

مثال:

اختصر إلى أبسط صورة كلا من:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad .i$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} - \sqrt{2} \right) \quad .ii$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}} \quad .iii$$

$$(1 - \sqrt{5})^2 + (1 + \sqrt{5})^2 \quad .iv$$

الحل:

i. يمكن التأكد بسهولة من صحة قاعدة الفرق بين مربعين التالية:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

وبوضع:

$$y = \sqrt{2}, \quad x = \sqrt{3}$$

ينتج أن:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

ii. بناء على توزيع الضرب على الجمع والطرح فإن:

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} - \sqrt{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}} = \sqrt{3 + \sqrt{4}} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5} \quad .iii$$

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{5})^2 + (1 + \sqrt{5})^2 &= 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 + 1^2 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{5} + 5 + 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 12 \end{aligned} \quad .iv$$

6- المجالات الحقيقية

يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية R وبين نقاط الخط المستقيم الممتد من طرفيه إلى غير نهاية، سندرس حالة خاصة من المجموعات الجزئية من R وهي تلك المجموعات الجزئية التي يمكن وصفها كما يلي:

■ مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين b, a .

▪ مجموعة الأعداد الحقيقية التي هي أكبر من عدد حقيقي معين b أو أصغر من عدد حقيقي معين a وسنسمي المجموعات التي يمكن أن توصف بأحد الوصفين السابقين بالمجالات الحقيقية.

أشكال المجالات الحقيقية:

(1) المجال المفتوح: ونرمز له بالرمز (a, b) ونعرفه كما يلي:

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

(2) المجال نصف المفتوح (نصف المغلق) وله شكلان نرمز لهما بالرمزين

ونعرفهما $(a, b], [a, b)$ ونعرفهما كما يلي:

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

(3) المجال المغلق: ونرمز له بالرمز $[a, b]$ ونعرفه كما يلي:

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

ملاحظات:

1. إن العلاقات التالية صحيحة:

$$(a, b) \cup \{a\} \cup \{b\} = [a, b]$$

$$(a, b) \cup \{a\} = [a, b)$$

$$(a, b) \cup \{b\} = (a, b]$$

$$(a, b) \cap \{a\} = (a, b) \cap \{b\} = \emptyset$$

2. من الحالات الخاصة للمجال المفتوح مجموعة الأعداد الحقيقية التي

تكبر أو تصغر عدداً حقيقياً معيناً ونعرفها كما يلي:

$$(a, \infty) = \{x \in R : a < x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in R : x < b\}$$

حيث ∞ يرمز إلى اللانهاية.

ومن الحالات الخاصة للمجال نصف المفتوح (نصف المغلق) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكبر أو تصغر عدداً حقيقياً معيناً أو تساويه ونعرفها كما يلي:

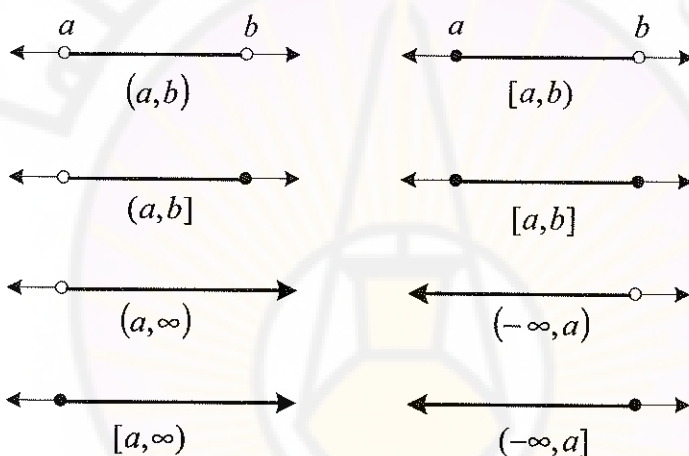
$$[a, \infty) = \{x \in R : a \leq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in R : x \leq b\}$$

3. لاحظ أنه إذا كان طرف المجال ∞ أو $-\infty$ فيجب أن يكون هذا الطرف مفتوحاً لأن كلا من ∞ و $-\infty$ ليس عدداً حقيقياً.

تمثيل المجالات الحقيقية على خط الأعداد الحقيقية:

يمكن تمثيل المجال هندسياً (أي على خط الأعداد الحقيقية) كما يلي:



القيمة المطلقة:

ليكن a عدداً حقيقياً، نعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي a التي نرمز لها بالرمز $|a|$ كما يلي:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإن $|a| \geq 0$ لكل $a \in R$ أي أن قيمة $|a|$ دائماً أكبر من أو تساوي الصفر وهي تمثل المسافة بين النقطة 0 والنقطة a على خط الأعداد الحقيقية، ولذلك فهي دائماً موجبة أو تساوي الصفر لأنها تمثل مسافة.

مثال:

$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

ومن خصائص القيمة المطلقة ما يلي: ليكن $b \in R^*$, $a \in R$ فإن:

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad (1)$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right| \quad (2)$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad (3)$$

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \quad (4)$$

قاعدة:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in R$$

إذا أعطينا مجالاً حقيقياً بوساطة القيمة المطلقة فإننا نستطيع تحويله إلى واحد من الأشكال السابقة كما يلي:

$$\begin{aligned} \{x \in R : |x| \leq a\} &= \{x \in R : -a \leq x \leq a\} = [-a, a] \\ \{x \in R : |x| \geq a\} &= \{x \in R : x \geq a \text{ or } x \leq -a\} \\ &= \{x \in R : x \leq -a\} \cup \{x \in R : x \geq a\} \\ &= (-\infty, -a] \cup [a, \infty) \end{aligned}$$

مثال:

عبر جبرياً وهندسياً عن كل من

$$(3,8) \cap [2,7] \quad (i)$$

$$(-\infty, 3] \cup (0, \infty) \quad (ii)$$

الحل:

$$(3,8) = \{x \in R : 2 < x < 8\}, [2,7] = \{x \in R : 2 \leq x \leq 7\} \quad \text{جبرياً (i)}$$

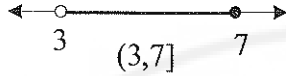
$$(3,8) \cap [2,7] = \{x \in R : 3 < x < 8 \text{ and } 2 \leq x \leq 7\} = (3,7]$$



هندسياً : (3,8)



[2,7]



$(3,8) \cap [2,7]$

(ii) جبرياً :

$$(-\infty, 3] = \{x \in R : x \leq 3\}$$

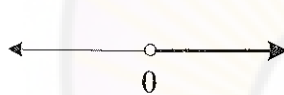
$$(0, \infty) = \{x \in R : x > 0\}$$

$$(-\infty, 3] \cup (0, \infty) = \{x \in R : x \leq 3 \text{ or } x > 0\} = R$$

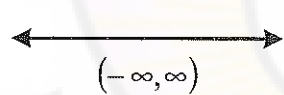
(ii) هندسياً :



$(-\infty, 3]$



$(0, \infty)$



$(-\infty, 3] \cup (0, \infty)$

$(-\infty, \infty)$

مثال:

عبر عن المجموعة التالية على شكل مجال حقيقي:

$$\{x \in R : |3 - x| < 2\}$$

الحل:

$$\{x \in R : |3 - x| < 2\}$$

$$\{x \in R : -2 < 3 - x < 2\}$$

$$\{x \in R : -2 - 3 < -x < 2 - 3\}$$

$$\{x \in R : -5 < -x < -1\} = \{x \in R : 5 > x > 1\} = (1, 5)$$

تدريب:

حاول أن تكتب كلاً من المجموعتين التاليتين على شكل مجال حقيقي:

$$\{x \in R : |x - b| \leq a\}, \{x \in R : |x - b| \geq a\}$$



تمارين

- 1- هل العدد 851 أولي أم لا ؟
- 2- أثبت أن مجموع عددين زوجيين معاً أو فرديين معاً يكون عدداً زوجياً.
- 3- أوجد $D(15) \cap D(6)$
وهل يمكن تعميم ما حصل عليه إلى القاعدة التالية :
 $D(n) \cap D(m) = D(g \cdot c \cdot d(n, m))$ ؟
- 4- أوجد $M(5) \cap M(3)$
وهل يمكن تعميم ما حصل عليه إلى القاعدة التالية :
 $M(n) \cap M(m) = D(l \cdot c \cdot m(n, m))$ ؟
- 5- أوجد $D(2^{10})$.
- 6- ابحث عن قابلية العدد 24013 القسمة على كل من : 2, 3, 4, ..., 11.
- 7- احسب كلاً مما يلي وضح الناتج في أبسط صورة :
(i) $\frac{1}{8} + \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{3}\right)$
(ii) $3\frac{7}{9} - \left(-7\frac{3}{9}\right)$
(iii) $4 \cdot \frac{2}{11} + \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{11} + \frac{6}{11}$
- 8- حول كلاً من الأعداد العادية الكسرية إلى عشرية والعكس
 $2.3717171..., \frac{4}{11}, 2\frac{5}{3}, 4.35608, 10.01, \frac{1}{16}$
- 9- أوجد ثلاثة أعداد نسبية بين العددين : $\frac{3}{2}, 1.49$.
- 10- بمجرد النظر احسب ما يلي:
(i) 5.097×10000

$$\cdot \frac{0.51}{0.001} \text{ (ii)}$$

$$\cdot \sqrt{900} \text{ (iii)}$$

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{1}{7}} \text{ (iv)}$$

11- برهن أن العدد $\sqrt{\sqrt{2}}$ ليس عددا عادياً.

12- احسب من غير الآلة الحاسبة $\sqrt{31.6}$ وذلك لأقرب ثلاث خانات عشرية.

13- أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $6x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

14- إذا كانت $x = \sqrt{3} - 2$ ، $6y - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{25}{4} \text{ فأثبت أن}$$

15- إذا علمت أن $\frac{8x-7}{4x-1} = \frac{6x-5}{3x}$ فأوجد قيمة x .

16- محل تجاري أعلن عن تخفيض أسعاره بنسبة 10% ثم بعد شهرين أعلن عن زيادة الأسعار بنسبة 10% عن سعرها الحالي فهل تعود السلع إلى أسعارها الأصلية أم تزيد أم تنقص؟ احسب نسبة التغير إن وجدت.

17- مثلث زيدت قاعدته بنسبة 20% وأنقص من ارتفاعه بنسبة 10% فما نسبة التغير في مساحته؟

18- عبر جبرياً وهندسياً بدلالة الفترات الحقيقية عن المجموعة : $[-2, 7] \cap]0, 9[$.

19- عبر بدلالة الفترات الحقيقية عن كل من:

$$(i) \{x \in R : |x| > 2\}$$

$$(ii) \{x \in R : |2 - x| > 2\}$$

$$(iii) \{x \in R : x^2 \leq 25\}$$

$$(iv) \{x \in R : 2 - x > 2\}$$

-20 برهن أن : $\forall x \in R : |x| = |-x|$.

-21 إذا علمت صحة المتباينة التالية

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in R \quad (*)$$

(نعرف بمتباينة المثلث)

استفد من متباينة المثلث في برهان أن:

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad x, y \in R$$

-22 أوضح أن : $0.1010010001000010000010... \notin Q$.

-23 ليكن $q \in Q^*$ ، $y \in H$ ، أثبت أن كلا من $q+y$ ، qy ينتمي إلى H .

-24 أوضح أن $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q$.

-25 أوجد قيم $x, y \in R$ التي تحقق $|x-y| = |x| + |y|$.



الفصل الرابع

المتتاليات

1- مقدمة

تكمن أهمية المتتاليات عند حساب المساحات والحجوم. كما أنها تلعب دوراً أساسياً في الحساب العددي ودراسة السلاسل وتوضيح مفهوم النهايات والاستمرار. المتتالية هي دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز عادة لصورة العدد الطبيعي n بالرمز a_n ، فمثلاً المتتالية التي تعطى بالعلاقة $a_n = 2n$ يمكن كتابة حدودها الأولى كما يلي: $2, 4, 6, 8, \dots$. إذن هي ليست إلا مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية مرتبة تصاعدياً. وقد تعطى الحدود الأولى لمتتالية ما لتدل على بقية الحدود، ومن أمثلة ذلك المتتالية المعطاة بالشكل التالي: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ فهي تشير إلى متتالية الأعداد الأولية لأنه لا توجد قاعدة تعطي جميع الأعداد الأولية. العدد a_1 يسمى الحد الأول، a_2 يسمى الحد الثاني، ... وهكذا العدد a_n يسمى الحد النوني.

تعريف:

المتتالية:

هي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية ومستقره مجموعة غير خالية.

المتتالية العددية:

هي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية ومستقره مجموعة الأعداد الحقيقية.

$$f = N \longrightarrow R$$

$$n \longrightarrow f(n) = a_n$$

نرمز للمتتالية بـ $\{a_n\}$ ويسمى a_n الحد النوني أو الحد العام أي أن:

a_1 الحد الأول للمتتالية، a_2 الحد الثاني وهكذا...

تكتب حدود المتتالية بشكل مفصل كما يلي:

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

مثال:

$$: u_n = \frac{1}{n} \text{ اكتب حدود المتتالية التي حدها العام}$$

الحل:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

مثال:

$$. u_n = \frac{1}{n+1} \text{ اكتب حدود المتتالية التي حدها العام}$$

الحل:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

مثال:

$$u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \text{ اكتب حدود المتتالية التي حدها العام}$$

الحل:

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \dots$$

$$u_n * u_{n+1} < 0 \text{ متناوبة بالإشارة}$$

مثال:

$$: u_n = \frac{n}{2^{n-1}} \text{ اكتب حدود المتتالية التي حدها العام}$$

الحل:

$$1, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \dots$$

2- المتتالية المحدودة

تعريف:

نقول عن متتالية إنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي موجب k حيث يكون:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| < k$$

مثال:

المتتالية التي حددها العام $u_n = \frac{n}{n+1}$ محدودة بالعدد 1.

مثال:

المتتالية التي حددها العام $u_n = \frac{1-2n}{n}$ محدودة.

$$|u_n| = \left| \frac{1-2n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} - 2 \right| = \left| 2 - \frac{1}{n} \right| < 2$$

3- المتتالية المتزايدة - المتناقصة

تعريف:

نقول عن المتتالية $\{u_n\}$ إنها متزايدة إذا تحقق الشرط التالي:

$$u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

نقول عن المتتالية $\{u_n\}$ إنها متناقصة إذا تحقق الشرط التالي:

$$u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال:

المتتالية التي حددها العام $u_n = \frac{1}{n+1}$ متناقصة لأن:

$$u_n = \frac{1}{n+1}, u_{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1} \geq 1$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$$

4- المتتالية المتقاربة - المتباعدة

نقول إن المتتالية $\{u_n\}$ تنتهي إلى العدد الحقيقي a إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \Rightarrow u_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

ونكتب: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ ونقول إن المتتالية متقاربة من a .

تكون المتتالية متباعدة إذا كان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$$

أو لا تنتهي إلى عدد محدود

مثال:

إن المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n(n+1)}$ متتالية مقاربة من الصفر.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{n} + \frac{5n}{n+1}} = \frac{1}{5} \quad \bullet$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{3}{n} + \frac{5n}{n+1} \right) = 5 \quad \bullet$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{3}{n} + \frac{5n}{n+1}} = \frac{1}{5} \quad \bullet$$

5- المتتالية الحسابية

تعريف:

المتتالية الحسابية من الشكل $\{a + nb\}$ أي حدها العام:

$$u_n = a + nb : n \in \mathbb{N}$$

مثال:

$$a = 1, b = 3$$

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

6- المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتالية الهندسية من الشكل $\{aq^{n-1}\}$ حددها العام: $u_n = aq^{n-1}$

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

ملاحظة:

$$u_n = aq^{n-1}$$

$$u_{n+1} = aq^n$$

إذاً:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{aq^n}{aq^{n-1}} = q, aq \neq 0$$



تمارين

- (1) في المتتالية الحسابية $5, 9, 13, 17, \dots$ ، احسب u_8, u_{11}, u_{25} .
- (2) أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية $7, 9, 11, \dots, 81$.
- (3) أوجد أساس المتتالية الحسابية التي حدها الأول 15 وحدها العاشر 60.
- (4) أوجد الحد الأول من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الثالث والعشرون 21.
- (5) متتالية حسابية حدها الرابع 18 وحدها السابع 27. أوجد المتتالية ثم استنتج الحد الخامس عشر من المتتالية.
- (6) أدخل ثلاث أوساط حسابية بين العددين 5, 25.
- (7) أدخل خمس أوساط حسابية بين العددين 20, 32.
- (8) أوجد مجموع التسعة عشر حداً الأول من المتتالية الحسابية التي فيها $a_{12} = 130, a_{19} = 116$.
- (9) في متتالية حسابية $u_5 = 60, u_{10} + u_{11} = 142$ ، أوجد هذه المتتالية ثم أوجد S_{10} (مجموع الحدود العشرة الأولى منها).
- (10) في المتتالية الحسابية $5, 8, 11, 14, \dots$ ، أوجد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى. ثم أوجد مجموع الحدود من السابع حتى الثامن عشر.
- (11) احكم على المتتاليات التالية من حيث كونها حسابية هندسية، حسابية غير هندسية، هندسية غير حسابية أو غير حسابية غير هندسية.
 - (i) $1, 4, 9, 25, \dots$
 - (ii) $2, 6, 18, 54, \dots$
 - (iii) $2, 2, 2, 2, \dots$
 - (iv) $1, -11, -11, -1, \dots$

(12) أوجد قيمة كل من الحدين السابع والعاشر من المتتالية الهندسية
2048, ..., 512, -1024, -2048.

(13) متتالية هندسية فيها الحد الثالث 2 والحد السادس $\frac{1}{4}$ ، اكتب الحدود
الأربعة الأولى منها.

(14) إذا كانت $(a_n), (u_n)$ متتاليتين حسابيتين، فوضح أن $(a_n + u_n)$ متتالية
حسابية.

(15) إذا كانت $(a_n), (u_n)$ متتاليتين هندسيتين، فوضح أن $(a_n \cdot u_n)$ متتالية
هندسية.

(16) أصدر رجل شائعة إلى ثلاث من أصدقائه، وكل منهم بلغها إلى ثلاثة لم
يسمعوها من قبل خلال ساعة واحدة. فإذا كان كل من سمعها بلغها إلى
ثلاث أشخاص لم يسمعوها من قبل خلال ساعة، وإذا افترضنا أن عدد
سكان الأرض ست مليارات، فكم نحتاج من الزمن ليسمع تلك الشائعة كل
من في الأرض ؟

(17) يعرف الوسط التوافقي H لعددين موجبين x, y كما يلي:
$$H := \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

يساوي وسطهما الحسابي.

الفصل الخامس

المتسلسلات العددية اللانهائية

1- مقدمة

عندما نجمع حدود المتتالية فإن ناتج الجمع يطلق عليه اسم "متسلسلة".
وللربط بين مفهوم المتسلسلة وإحدى خواص الأسس وهي سرعة تزايد المقدار بتزايد الأسس حيث الأساس أكبر من الواحد، نورد إحدى النماذج المشهورة: لو اتفقت مع أحد التجار على أن يعطيك عشرة ملايين ليرة سورية مقابل أن تعطيه قرشاً واحداً في اليوم الأول وقرشين في اليوم الثاني وأربعة قروش في اليوم الثالث وهكذا تضاعف له المبلغ كل يوم لمدة ثلاثين يوماً فقط، فإنه من المفاجئ أن تعلم أنك ستخسر الرهان بمبلغ هائل يمكنك حسابه بعد دراسة "المتتالية الهندسية" ومقدار خسارتك يساوي بالضبط 737,418.23 ليرة سورية، أي ما يقارب ثلاثة أرباع المليون!

تعريف:

لتكن لدينا المتتالية $\{u_n\}$ حدودها:

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

ولنربط جميع حدود هذه المتتالية بإشارة الجمع +

$$(*) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

نسمي العبارة * متسلسلة عددية لانهاية.

تعريف:

متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ هي:

$$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots$$

نرمز لمتتالية المجاميع الجزئية بـ $\{s_n\}$.

2- المتسلسلة المتقاربة - المتباعدة

تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية

متقاربة.

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} i$ أي:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

متتالية المجاميع الجزئية:

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + 2, \dots, s_n = 1 + 2 + \dots + n, \dots$$

لنحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

لدينا:

$$s_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

+

$$s_n = n + (n-1) + \dots + 1$$

نجمع فنحصل:

$$2 s_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$

$$2 s_n = n(n+1) \Rightarrow s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

إذاً:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

متتالية المجاميع الجزئية متباعدة إذا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} i$ متباعدة.

مثال:

المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ متقاربة و مجموعها 1.

متتالية المجاميع الجزئية:

$$s_1 = \frac{1}{1(2)}, s_2 = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)}, \dots$$

$$s_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

ومنه:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

3- المتسلسلة الحسابية

$$\sum_{i=1}^n (a + ib)$$

متتالية المجاميع الجزئية:

$$s_1 = (a + b), s_2 = (a + b) + (a + 2b), \dots, s_n$$

$$= (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + nb), \dots$$

إذا:

$$s_n = \sum_{i=1}^n (a + ib) = \sum_{i=1}^n a + \sum_{i=1}^n ib$$

$$= \sum_{i=1}^n a + b \sum_{i=1}^n i$$

$$= na + b \frac{n(n+1)}{2}$$

4- المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

الحد الأول $a \neq 0$ الأساس q حيث $q \in R$ تكون متقاربة من أجل $|q| < 1$
وتكون متباعدة من أجل $|q| \geq 1$.
شكل المتسلسلة الهندسية:

$$a + a.q + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

إذاً

$$s_n = a + a.q + \dots + aq^{n-1}$$

$$qs_n = aq + a.q^2 + \dots + aq^n$$

إذاً بالجمع نجد:

$$s_n(1-q) = a - aq^n$$

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

(1) من أجل $|q| < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

إذاً:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right) = \frac{a}{1-q}$$

وبالتالي تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة ومجموعها $\frac{a}{1-q}$

(2) من أجل $|q| > 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right) = \infty$$

المتسلسلة متباعدة.

(3) من أجل $q = 1$ فإن:

$$s_n = a + a + \dots + a = n.a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty \quad \text{فإن:}$$

المتسلسلة متباعدة.

(4) من أجل $q = -1$ فإن المتسلسلة الهندسية $\sum_{i=1}^{\infty} aq^i$. تأخذ الشكل:

$$a - a + a - a + a - a + \dots$$

متتالية المجاميع الجزئية:

$$s_1 = a, s_2 = 0, s_3 = a, s_4 = 0 \dots$$

متتالية المجاميع الجزئية تتأرجح بين $0, a$ فهي متباعدة إذا المتسلسلة متباعدة.

مثال:

المتسلسلة الهندسية $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ تأخذ المتسلسلة الشكل:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

الحد الأول $a = 1$.

الأساس $q = \frac{1}{2}$ إذا $|q| < 1$ فإن هذه المتسلسلة متقاربة بمجموعها:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

مثال:

المتسلسلة الهندسية: $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i$ تأخذ المتسلسلة الشكل:

$$2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

الحد الأول: $a = 2$

الأساس $q = 2$ إذا $|q| > 1$ فالمتسلسلة متباعدة.

تمارين

1- لتكن لدينا المتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}$$

أوجد مجموعها.

2- لتكن لدينا المتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 4^i$$

أوجد مجموعها إذا كانت متقاربة.

3- لتكن لدينا المتسلسلة :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i * (i + 2)}$$

بين فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة وأجد مجموعها.

الفصل السادس

المشتقات

1- المشتق عند نقطة

لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ المستمرة على المجال $]a, b[$ ولتكن $x_0 \in]a, b[$ ولنعطي المتحول x عند النقطة x_0 تغيراً Δx بحيث $x + \Delta x \in]a, b[$ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ المقدار نسمي $y = f(x)$ عند x_0 عندما يتغير المتحول x بمقدار Δx كما نسمي $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبة التغير للتابع $y = f(x)$ عندما x_0 .

إذا كان $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$ نسمي العدد α مشتق $y = f(x)$ عند x_0 .

(1) إذا كان $x_0 + \Delta x > x_0$ نسمي α_1 مشتق $f(x)$ من اليمين عند x_0 .

(2) إذا كان $x_0 + \Delta x < x_0$ نسمي α_2 مشتق $f(x)$ من اليسار عند x_0 .

مثال:

أوجد مشتق الدالة $y = x^2 + 1$ عند أي نقطة $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

مثال:

أوجد مشتق الدالة $y = f(x) = c$ حيث c ثابت.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

مثال:

أوجد مشتق الدالة $y = x^n$.

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

2- قوانين النسب المثلثية

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

مثال:

أوجد مشتق الدالة $y = f(x) = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{(x + \Delta x + x)}{2} \sin \frac{(x + \Delta x - x)}{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

$$y' = (\sin(x))' = \cos x \quad \text{إذاً:}$$

مثال:

أوجد مشتق $y = \ln x$.

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)
\end{aligned}$$

نفرض $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{a}$ إذاً $\Delta x = \frac{x}{a}$ ومنه:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a \\
&= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

3-قوانين الاشتقاق

• مشتق مجموع يساوي مجموع المشتقات:

$$\begin{aligned}y' &= [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \\y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\&= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

مثال: ليكن لدينا

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2$$

$$y = f(x) + g(x)$$

أوجد مشتق
الحل:

$$y' = [f(x) + g(x)]'$$

$$y' = 1 + 2x$$

• مشتق جداء يساوي مشتق الأول مضروباً بالثاني مضافاً إليه
الأول في مشتق الثاني

$$y' = [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

مثال: ليكن لدينا

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2$$

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

أوجد مشتق

الحل:

$$\begin{aligned}y' &= [f(x) \cdot g(x)]' = 1(x^2) + x(2x) \\&= 1x^2 + 2x^2 = 3x^2\end{aligned}$$

• مشتق تابع كسري:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

حيث $g(x) \neq 0$

مثال:

ليكن لدينا

$$f(x) = x$$

$$g(x) = x^2$$

حيث $x \neq 0$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

أوجد مشتق

الحل:

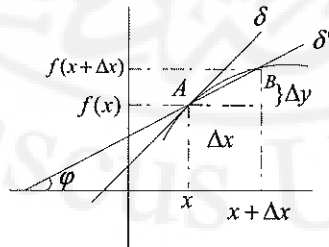
$$y' = \frac{1x^2 - x(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2}{x^4} = \frac{-x^2}{x^4} = -\frac{1}{x^2}$$

4- المعنى الهندسي للمشتق

لتكن لدينا الدالة $f(x)$ القابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ ولتكن B, A

نقطتين على المنحني البياني للتابع $f(x)$ فصلاهما x و $x + \Delta x$



فيكون $A(x, f(x))$, $B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$

إن ميل المستقيم القاطع δ' المار من B, A هو:

$$m_{\delta'} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

عندما تتناهي Δx إلى الصفر فإن النقطة B تتناهي إلى النقطة A ويتناهي

المستقيم δ' إلى المماس δ للمنحني البياني للدالة $f(x)$ في النقطة A أما

الميل $m_{\delta'}$ فيتناهي إلى ميل المماس m_{δ} في النقطة A وليكن m .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

معادلة المستقيم المماس:

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$$

مثال:

$y = f(x) = x^3$ أوجد معادلة المستقيم المماس لمنحني الدالة $f(x)$ في

النقطة التي ترتبها $y = 8$.

$$y_0 = 8 \Rightarrow x_0^3 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f' = 3x^2$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2 = 12$$

ومنه معادلة المماس في النقطة $A(2, 8)$ هي:

$$y - 8 = 12(x - 2) \Rightarrow$$

$$y = 12x - 16$$

تمارين

1- أوجد مشتق الدالة:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

2- أوجد مشتق الدالة:

$$y = (\ln(x) * \cos(x))$$

3- أوجد مشتق الدالة:

$$y = 4 - \sqrt[3]{x^2}$$

4- أوجد مشتق الدالة:

$$y = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$$

5- أوجد مشتق الدالة:

$$y = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$$



الفصل السابع

دراسة تغيرات دالة عددية

1-دراسة تغيرات دالة عددية

لدراسة تغيرات دالة عددية نتبع الخطوات التالية:

- (1) نعين مجموعة تعريف الدالة ونكتبها على هيئة مجال أو اجتماع مجالات ونعين مجالات استمراره.
 - (2) نعين قيم الدالة عند أطراف مجالات استمراره المغلقة ونهايات الدالة عند أطراف المجالات المفتوحة.
 - (3) ندرس الدالة وفق إشارة مشتقه الأول.
- ننظم جدولاً بالمعلومات السابقة نسميه (جدول التغيرات)

مثال:

لتكن f دالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها.

الدراسة

- الدالة صحيحة فهي معرفة على $\mathbb{R}$ ومستمرة على $]-\infty, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- الدالة قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$ ينعدم المشتق $f'(x)$ من أجل $x = -2$ و من أجل $x = +2$ ، ومنه فإن $f(2) = -16$ ، $f(-2) = 16$
- جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	16	-16	$+\infty$	

- يدل جدول تغيرات الدالة f على أنها دالة متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-\infty, -2]$ ، $[2, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[-2, 2]$

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^2 - 4x$ وليكن C خطه

البياني

ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، ارسم C .

الحل:

(1) الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

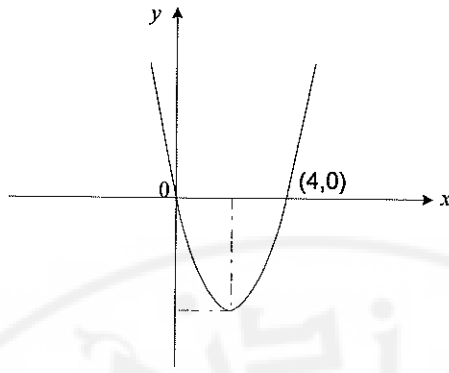
$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

ينعدم $f'(x)$ من أجل $x = 2$ ، ومنه فإن $f(2) = -4$

- جدول تغيرات الدالة $f(x)$

x	$-\infty$	$+2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

- الرسم: نستعين بنقطتي تقاطع الخط C مع المحور $x'ox$ وهما $(0,0)$ ، $(4,0)$



مثال :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x + 1$ وليكن C خطه البياني

ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، ارسم C .

الحل:

1) الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

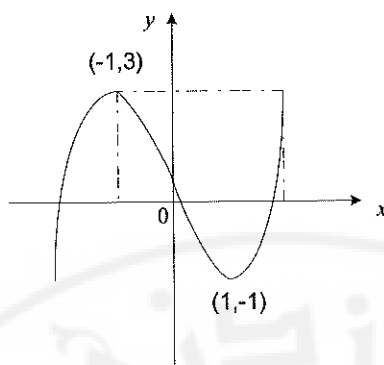
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

تتعدم $f'(x)$ من أجل $x = -1$ ، $f(-1) = 3$ و من أجل $x = 1$ ، ومنه فإن

$$f(1) = -1$$

• جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	



مثال:

لتكن الدالة f المعينة بالعلاقة $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ وليكن C خطه

البياني

- عين D مجموعة تعريف الدالة f
- ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، ارسم C .

الحل:

1. الدالة معرفة إذا كان

$$-x^2 + 6x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5) \leq 0$$

$$x \in D = [1, 5] \text{ إذن}$$

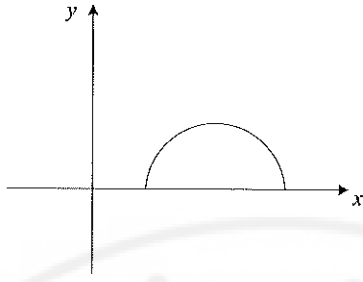
2. الدالة مستمرة على المجال $[1, 5]$ و $f(1) = f(5) = 0$

الدالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1, 5[$ و

$$f'(x) = \frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-5}} = \frac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$$

ينعدم $f'(x)$ عندما $x=3$ ، ويكون $f(3)=2$

x	+1	3	+5
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	0	2	0



2- الدالة المحدودة والدالة غير المحدودة

تعريف:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathcal{R} \supseteq D$

• نقول إن الدالة f محدودة من الأعلى، إذا وفقط إذا وجد عدد

حقيقي M بحيث:

أياً كان $x \in D$ ، فإن $f(x) \leq M$. وإذا انتمى العدد M إلى مجموعة قيم الدالة f ، فإن الدالة f تبلغ حدها الأعلى.

• ونقول إن الدالة f محدودة من الأدنى، إذا وفقط إذا وجد عدد

حقيقي m بحيث:

أياً كان $x \in D$ ، كان $f(x) \geq m$. وإذا انتمى العدد m إلى مجموعة قيم f ، قلنا إن الدالة f تبلغ حدها الأدنى.

• ونقول إن الدالة f محدودة إذا وفقط إذا كان محدودة من الأعلى ومن الأدنى.

نستنتج من التعريف السابق أن الدالة f المعرفة على $\mathcal{R} \supseteq D$

1. غير محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

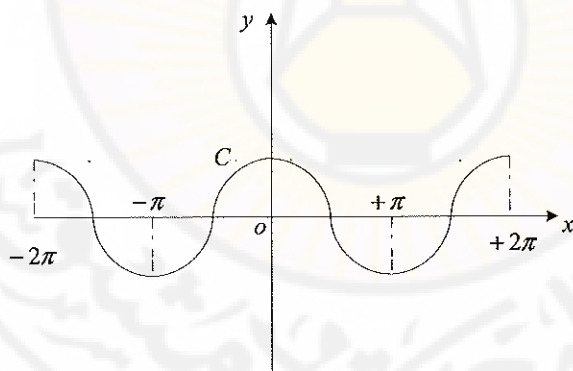
أياً كان العدد الحقيقي M ، وجد $x \in D$ بحيث $f(x) > M$

2. غير محدودة من الأدنى إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

أيًا كان العدد الحقيقي m ، وجد $x \in D$ بحيث $f(x) < m$
 3. الدالة غير محدودة إذا كان غير محدودة من الأعلى أو غير محدودة من الأدنى.

مثال :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وليكن $f(x) = \cos x$.
 من المعلوم أن مجموعة قيم $\cos x$ على $\mathbb{R}$ هي $[-1, 1]$ أي $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ فالدالة f محدودة.
 وفي هذا المثال إن العدد (-1) هو الحد الأدنى للدالة وهو أصغر قيمة، يأخذها عند كل $x \in \{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$
 إن العدد $(1+)$ هو الحد الأعلى للدالة وهو أكبر قيمة، ويأخذها عند كل $x \in \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$
 (نرسم الخط البياني C للدالة f على المجال $[-2\pi, 2\pi]$)



مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x$ ، خطها البياني C
 1. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها. هل الدالة f محدودة؟

2. أوجد $f''(x)$ وادرس إشارته، استنتج أن $\sigma(0,0)$ هي نقطة انعطاف للخط C اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة انعطافه.

3. ارسم Δ ثم ارسم C في المجال $[-2,2]$.

الحل:

1. الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

ينعدم $f'(x)$ من أجل $x = -1$ و من أجل $x = 1$

فيكون $f(1) = -2$ ، $f(-1) = 2$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

من جدول التغيرات نلاحظ أن $f(R) =]-\infty, +\infty[$ فالدالة غير محدودة من الأعلى وغير محدودة من الأدنى فالدالة f غير محدودة.

2. الدالة قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و $f''(x) = 6x$

ينعدم $f''(x)$ من أجل $x = 0$ فيكون $f(0) = 0$

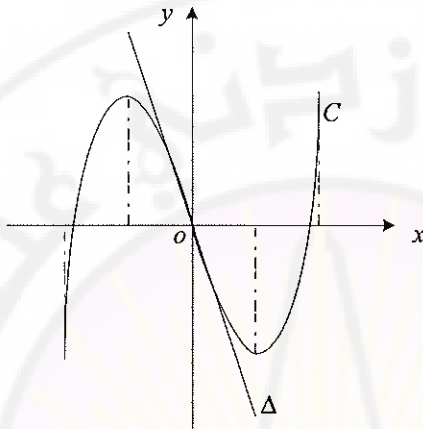
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

نلاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق من أجل $x = 0$ فيكون $f''(x) \leq 0$ على المجال $]-\infty, 0]$ و $f''(x) \geq 0$ على المجال $[0, +\infty[$ إذاً النقطة $\sigma(0,0)$ هي

نقطة انعطاف للخط C ميل المماس في $\sigma(0,0)$ يساوي $m = f'(0) = -3$

فتكون معادلة المماس Δ هي $y = -3x$

3. الرسم في المجال $[-2,2]$



مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -x^2 + 4x - 2$

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها. هل الدالة f

محدودة؟ عين حدها الأعلى.

2. ارسم الخط C على المجال $[0,4]$.

الحل:

1. الدالة مستمرة واشتقاقية على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = -2x + 4 = 2(-x + 2)$$

تنعدم $f'(x)$ من أجل $x = 2$ فيكون $f(2) = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أن $f(R) =]-\infty, 2[$ فالدالة محدودة من الأعلى فقط. إن العدد (2) هو الحد الأعلى للدالة وهو أكبر قيمة، تأخذها من أجل

$$x = 2$$

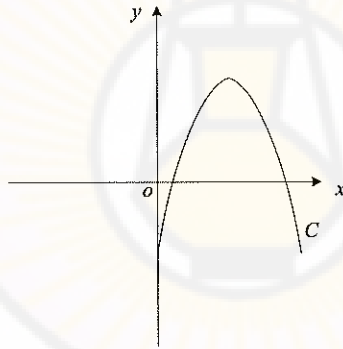
2. الرسم

نقاط المساعدة:

(1) التقاطع مع $y'oy$ نضع $x = 0$ نجد $f(0) = -2$

(2) التقاطع مع $x'ox$ نضع $f(x) = 0$ نجد أن $x = 2 - \sqrt{2}$ ،

$$x = 2 + \sqrt{2}$$



مثال:

لتكن f الدالة المعينة وفق $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، خطها البياني C .

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها.
2. دل على كل قيمة كبرى وعلى كل قيمة صغرى محلياً للدالة f .
3. أوجد مجموعة قيم f ثم استنتج أن f محدودة وأوجد حديها.
4. ارسم خطه البياني C .

الحل:

1. f معرفة ومستمرة على $[-1,1]$ $D = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\}$

واشتقاقي على $[-1,1]$

$$f(-1) = f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ينعدم } f'(x) \text{ عندما } x=0, f(0)=1$$

جدول التغيرات

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	1	0

2. للدالة قيمة كبرى محلياً $f(0)=1$ وله قيمتان صغريان محلياً

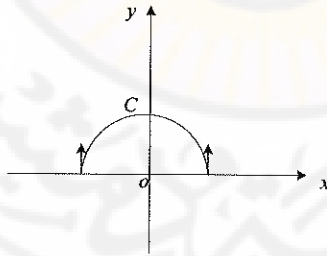
$$f(-1) = f(1) = 0$$

3. مجموعة قيم الدالة هي $[0,1] = f([-1,1])$ فالدالة محدودة، حدها

الأدنى يساوي الصفر (وهو أصغر قيمة) وحدها الأعلى يساوي

الواحد (وهو أكبر قيمة)

4. الرسم



مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ وفق $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ ، خطها البياني C .

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، استنتج كل مستقيم مقارب

للخط البياني C يوازي المحور $x'ox$ أو المحور $y'oy$.

2. أثبت أن الدالة f قيمة كبرى محلياً.

3. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

الحل:

1. الدالة مستمرة على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ ، $]0, +\infty[$ واشتقاقية على

كل منهما $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ومنه المستقيم $y = 0$ مقارب للخط

C عندما $-\infty$ وعند $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ومنه المستقيم $x = 0$ مقارب

للخط C

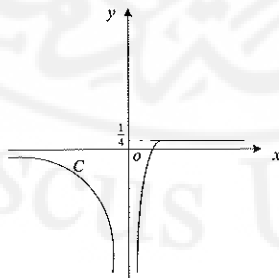
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{(x^2)^2} = \frac{-x+2}{x^3}$$

ينعدم $f'(x)$ عندما $x = 2$ ، فيكون $f(2) = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-		+ 0 -		
$f(x)$	0	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

2. نلاحظ من جدول التغيرات أن $f(2) = \frac{1}{4}$ قيمة كبرى محلياً للدالة.

3. الرسم:



تمارين

4- لتكن لدينا الدالة:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 2$$

خطها البياني C .

- أوجد مجموعة التعريف للدالة

- ادرس تغيرات الدالة f

5- لتكن لدينا الدالة:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$

خطها البياني C .

- أوجد مجموعة تعريف الدالة.

- ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، استنتج كل مستقيم مقارب

للخط البياني C يوازي المحور $x'ox$ أو المحور $y'oy$.

- أثبت أن الدالة f قيمة كبرى محلياً.

- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

الفصل الثامن

الأسس واللوغاريتمات

1- مقدمة

الأسس واللوغاريتمات مهارات رياضية بالغة الأهمية ولا غنى عنها لإجراء أي نوع من الحسابات، وهذه المهارات بدورها تحول الحسابات المعقدة إلى حسابات بسيطة ومباشرة.

2- الأسس والجذور

Exponents and Radicals

إن العدد $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ يمكن كتابته مختصراً على الصورة 5^6 حيث يسمى العدد 5 الأساس، ويسمى العدد 6 الأس، ونقول إن العدد 5 مرفوع إلى الأس 6.

تعريف:

ليكن $x \in R^*$ و $n \in N$ نعرف القوة النونية للعدد x التي نرمز إليها بالرمز x^n بأنها حاصل ضرب x بنفسه n من المرات، أي أن:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n \text{ مرة}$$

تعريف:

إذا كان $x \neq 0, n \in N$ ، نعرف العدد x^{-n} كما يلي $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

ملاحظة:

إذا كان $x \in R^*$ فإن $x^0 = 1$ بينما الرمز 0^0 غير معرف في الرياضيات ولذلك ففي أي قانون مما يلي نستثنى الحالة 0^0 .

قوانين القوى

$$(1) \text{ إذا كان } n, m \in Z \text{ وكان } x \in R^* \text{ فإن } x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

مثال:

$$.i. 5^8 \cdot 5^{-3} = 5^{8-3} = 5^5$$

$$.ii. 3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$$

$$.iii. 2^{-3} \cdot 2^{-2} = 2^{-3-2} = 2^{-5}$$

(2) إذا كان $n, m \in \mathbb{Z}$ وكان $x \in R^*$ فإن:

$$.i. \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$.ii. (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

مثال:

$$.i. \frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$$

$$.ii. \frac{3^8}{3^{-2}} = 3^{8-(-2)} = 3^{10}$$

$$.iii. (\sqrt{2}^3)^2 = \sqrt{2}^{3 \cdot 2} = \sqrt{2}^6 = 8$$

(3) إذا كان $x, y \in R^*$ وكان $n \in \mathbb{Z}$ فإن $(xy)^n = x^n y^n$

ملاحظة:

هذا القانون ناتج من كون عملية الضرب تبديلية في R .

$$(4) \text{ إذا كان } x, y \in R^* \text{ وكان } n \in \mathbb{Z} \text{ فإن } \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

تعريف:

لتكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \neq 0, n \neq 1$ ، نعرف الجذر النوني للعدد الحقيقي x بأنه العدد الذي إذا ضربناه في نفسه n من المرات فالناتج يساوي x .

ملاحظات:

(1) إن الرمز $x^{\frac{1}{n}}$ أو الرمز $\sqrt[n]{x}$ يدل على مجموعة الجذور النونية للعدد الحقيقي x .

(2) إذا كان $x \in R^+$ وكان n عدداً طبيعياً زوجياً ($n \neq 0$) فإن الجذر النوني لـ x له قيمتان حقيقتان إحداهما موجبة ونرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$ والأخرى سالبة ونرمز لها بالرمز $-\sqrt[n]{x}$.

(3) إذا كان $x \in R$ وكان n عدداً طبيعياً فردياً ($n \neq 1$) فإن الجذر النوني لـ x له قيمة حقيقية واحدة فقط يرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$.

(4) إذا كان $\frac{n}{m} \in Q$ بحيث $m > 0$ وكان $x \in R^+$ فإن

$$x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = (\sqrt[m]{x})^n = \sqrt[n]{x^n}$$

مثال:

أوجد قيمة $64^{\frac{2}{3}}$.

الحل:

$$64^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{64})^2 = (4)^2 = 16$$

مثال:

أوجد قيمة $81^{\frac{3}{4}}$.

الحل:

$$81^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{81})^3 = (3)^3 = 27$$

(5) إذا كان $x, y \in R$ وكان $\frac{n}{m} \in Q$ ، $m > 0$ فإن:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{y^n}} ; \quad (x \cdot y)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \sqrt[m]{y^n}$$

حيثما كانت هذه الحدود معرفة.

(6) إذا كان $x \in R^* - \{1, -1\}$ وكان $n, m \in Q$ فإن: $x^n = x^m \Rightarrow n = m$.

(7) إذا كان $x, y \in R^* - \{1\}$ وكان $n \in Q^*$ فإن: $x^n = y^n \Rightarrow x = y$.

مثال:

أوجد قيمة x التي تحقق العلاقة $2^{x-3} = 2^6$.

الحل:

$$2^{x-3} = 2^6 \Rightarrow x-3 = 6 \Rightarrow x = 9$$

مثال:

أوجد قيمة x التي تحقق العلاقة $3x^3 = 81$.

الحل:

$$3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

مثال:

ضع المقدار التالي في أبسط صورة $\frac{(16)^2 \cdot 9 \cdot 125}{32 \cdot 15}$.

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{(16)^2 \cdot 9 \cdot 125}{32 \cdot 15} &= \frac{(2^4)^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5} \\ &= \frac{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5} = 2^{8-5} \cdot 3^{2-1} \cdot 5^{3-1} = (8)(3)(25) = 600 \end{aligned}$$

مثال:

أوجد قيمة $\sqrt{625}$.

الحل:

$$625 = 5^4 \Rightarrow \sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 25$$

طريقة أخرى:

$$\sqrt{625} = \sqrt{25 \cdot 25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{25} = (5)(5) = 25$$

ملاحظات:

إذا كانت $n, m \in N, x \in R^+$ فإن:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = x^{\frac{1}{n \cdot m}}$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = x^{\frac{n+m}{n \cdot m}}$$

مثال:

$$\sqrt[5]{2\sqrt{3^{10}}}, \sqrt{\frac{169}{49}}$$

الحل

$$\sqrt[5]{2\sqrt{3^{10}}} = (3^{10})^{\frac{1}{(5)(2)}} = (3^{10})^{\frac{1}{10}} = 3, \quad \sqrt{\frac{169}{49}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{49}} = \frac{13}{7}$$

مثال:

$$8^{2x-10} = 4^{x+1}$$

الحل:

$$\begin{aligned} 8^{2x-10} &= 4^{x+1} \Rightarrow (2^3)^{2x-10} = (2^2)^{x+1} \\ \Rightarrow (2)^{6x-30} &= (2)^{2x+2} \\ \Rightarrow 6x-30 &= 2x+2 \\ \Rightarrow x &= 8 \end{aligned}$$

مبرهنة:

ليكن $x > y$ عددين حقيقيين، وليكن a عدداً حقيقياً موجباً فإن:

$$(i) \quad \text{إذا كان } x > y > 0 \text{ فإن } x^a > y^a$$

$$(ii) \quad \text{إذا كان } 0 < a < 1 \text{ فإن } a^x < a^y$$

$$(iii) \quad \text{إذا كان } a > 1 \text{ فإن } a^x > a^y$$

مثال:

$$\text{قارن بين العددين } 2^{\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^2$$

الحل:

$$\text{لاحظ أن } (\sqrt{2})^2 = 2^1 < 2^{\sqrt{2}} \text{ لأن } 1 < \sqrt{2}$$

مثال:

$$\text{قارن بين العددين } 3^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

ضع $s = 3^{\frac{1}{3}}, t = 2^{\frac{1}{2}}$ ، ولاحظ أن $s^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$ بينما $t^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$ أي أن $s^6 > t^6$ ومنه نجد أن $s > t$.

قاعدة:

أكبر قيمة للمقدار $x^{\frac{1}{x}}$ تكون عندما $x = e$ حيث e هو العدد النيبيري غير العادي.

مثال:

أيهما أكبر $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ أم $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ ؟

الحل:

بتربيع العددين نجد أن:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 = 2 + 7 + 2\sqrt{14} = 9 + 2\sqrt{14}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = 3 + 6 + 2\sqrt{18} = 9 + 2\sqrt{18}$$

ومن ذلك نجد أن $\sqrt{3} + \sqrt{6} < \sqrt{2} + \sqrt{7}$.

3- اللوغاريتمات

Logarithms

تعريف:

لتكن $\{1\} \neq R^+ \ni a, x \in R, y \in R^+$ ، بحيث $a^x = y$ فإننا نقول إن لوغاريتم y بالنسبة للأساس a هو العدد x ونكتب $\log_a y = x$ أي أن

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

مثال:

$$\log_2 16 = 4 \text{ لأن } 2^4 = 16$$

$$\log_5 125 = 3 \text{ لأن } 5^3 = 125$$

ملاحظات:

(i) إذا كان $y \in R^+$ ، فإذن $\log_a y$ هو موجود وذلك لاستحالة وجود عدد

$$x \text{ بحيث } a^x = y$$

(ii) إذا كان الأساس $a \neq 10$ فإن $\log_a y \neq \log_{10} y$ يكتب اختصاراً على

الصورة $\log y$ ويسمى اللوغاريتم العشري.

قوانين اللوغاريتمات:

ليكن $t \in R$ ، $x, y, a \in R^+$ فإن:

$$\log_a a = 1 \quad \text{لأن} \quad a^1 = a \quad (1)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{لأن} \quad a^0 = 1 \quad (2)$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (3)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (4)$$

$$\log_a (x)^t = t \log_a x \quad (5)$$

نتيجة:

$$\log_a \left(\frac{1}{y} \right) = \log_a 1 - \log_a y = 0 - \log_a y = -\log_a y$$

مثال:

أوجد قيمة $\log_2 128$

الحل:

نكتب العدد 128 بعد تحليله على شكل قوة للأساس 2 فيكون:

2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

إذن $128 = 2^7$. وبذلك نصل إلى

$$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7 \log_2 2 = 7(1) = 7$$

مثال:

$$\log_5 \frac{3}{5} + \log_5 \left(\frac{15}{2} \right)^2 - \log_5 \frac{5}{36} + \log_5 \frac{5}{243}$$

أوجد قيمة المقدار

الحل:

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \log_5 \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{243}}{\frac{5}{36}} = \log_5 \frac{3 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 36}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 243} \\ &= \log_5 5 = 1 \end{aligned}$$

مثال:

$$\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$$

أوجد قيمة x إذا كان

الحل:

$$\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x(x-2) = 3$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -2$$

والقيمة الثانية مرفوضة لأنها سالبة.

مثال:

أوجد قيمة المقادير التالية :

$$(i) \log 10. (ii) \log 10,000. (iii) \log(100 \times 10^{-2}). (iv) \log 0.01$$

الحل:

$$(i) \log 10 = \log_{10} 10 = 1$$

$$(ii) \log 10,000 = \log 10^4 = 4 \log 10 = 4(1) = 4$$

$$(iii) \log(100 \times 10^{-2}) = \log \frac{100}{100} = \log 1 = 0$$

$$(iv) \log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$$

مثال:

إذا كان $\log 3 = 0.4771, \log 2 = 0.3010$ فأوجد قيمة كل من

$$\log 5, \log \frac{27}{8}, \log 36$$

الحل:

$$\log 36 = \log(4 \times 9) = \log(2^2 \times 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2 \log 2 + 2 \log 3$$

$$= 2(0.3010) + 2(0.4771) = 1.5562$$

$$\log \frac{27}{8} = \log \left(\frac{3}{2} \right)^3 = 3(\log 3 - \log 2) = 3(0.4771 - 0.3010) = 0.5283$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$$

مثال:

$$\log \sqrt{x}^{\sqrt{2}} - \frac{\log x}{\sqrt{2}} = 0 \text{ وضح أن}$$

الحل:

$$\log \sqrt{x}^{\sqrt{2}} = \log \left(x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \log x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log x$$

$$\log \sqrt{x}^{\sqrt{2}} - \frac{\log x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log x - \frac{1}{\sqrt{2}} \log x$$

$$(\log x) \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = (\log x)(0) = 0$$

مبرهنة:

ليكن $x, y, a \in \mathbb{R}^+$ فإن

$$x > y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$$

مثال:

أيهما أكبر $\log_7 6$ أم $\log_6 7$ ؟

الحل:

باستخدام المبرهنة أعلاه نجد مباشرة أن

$$\log_7 6 < \log_7 7 = 1 = \log_6 6 < \log_6 7$$

تمارين

احسب القيمة العددية لكل من

$$(i) \cdot 27^{\frac{2}{3}} \quad (ii) \cdot 64^{\frac{1}{6}} \quad (iii) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{81}}} \right)$$

1. بسط ما يلي

$$(i) \cdot \frac{b^{-1/2}}{\sqrt{b}} \quad (ii) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^{-4}b^2}}{\sqrt{ab^{-1}}} \quad (iii) \cdot \sqrt{x^8} \frac{1}{x^{-2}}$$

$$2. \text{وضح أن } \sqrt{50} + \sqrt{54} - \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{24} = \frac{7}{2}\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

3. اكتب العددين التاليين على شكل أسس

$$(i) \cdot \frac{1}{169} \quad (ii) \cdot \left(\frac{25}{125} \right)^{-1}$$

4. ما قيمة (أو قيم) x في كل من المعادلات التالية

$$(i) \cdot 16^{2x-1} = 2^{3x+1} \quad (ii) \cdot x^2 = \left(\frac{49}{25} \right)^{-1} \quad (iii) \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^x = 3^{-x}$$

5. ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة

$$(i) \cdot \frac{9^{x+1} \times 6^{4x}}{27^{2x} \times 16^{2x}} \quad (ii) \cdot \frac{32^2 \times 27 \times 25}{4^3 \times 45}$$

$$6. \text{إذا علمت أن } (\sqrt{2})^n = 2^{\sqrt{n}}, \text{ فاحسب قيمة } n.$$

7. أوجد قيمة كل من

$$(i) \cdot \log_2 64 \quad (ii) \cdot \log_3 243 \quad (iii) \cdot \log_2 \frac{1}{32} \quad (iv) \cdot \log 10^{-6}$$

$$(v) \cdot \log_5 10 - \log_5 2$$

$$8. \text{إذا علمت أن } \log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 7 = 0.8451, \text{ فاحسب}$$

كلاً من:

$$(i) \cdot \log 0.002 \quad (ii) \cdot \log 21 \quad (iii) \cdot \log 3.5 \quad (iv) \cdot \log \frac{81}{16}$$

(v) $\log 3.3$.

9. اختصر ما يلي

$$\frac{\log_5 125 + \log_5 5}{\log_5 125 - \log_5 5}$$

10. أوجد قيمة (أو قيم) x في كل من المعادلات التالية:

(i) $\log_x 81 = 2$ (ii) $\log_9 x = \frac{3}{2}$ (iii) $\log_x 5x = 2$

(iv) $\log_x (9x+10) = 2$ (v) $\log_7 x = \log_x 7$

11. أثبت أن $\frac{\log \sqrt{125} + \log 27 - \log \sqrt{1000}}{\log 9 - \log 2} = \frac{3}{2}$

12. أثبت أن $\frac{\log 16 - \log 81}{\log 8 - \log 27} = \frac{4}{3}$

13. أثبت أن $\log_3 [\log_2 (\log_2 256)] = 1$

14. برهن أن $\log_a \beta = \frac{\log_a \beta}{\log_a \sigma}$

15. استنتج أن $\log_a \beta = \frac{1}{\log_\beta a}$

16. أثبت أنه يوجد عدداً غير عاديين b, c بحيث b' عدد عادي.

17. وضح أنه إذا كان $0 < a < 1$ عدداً حقيقياً فإن $a < \sqrt{a} < 1$.

18. هل $x^{x^x} = (x^x)^x$ ؟

19. قارن بين العددين $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

20. إذا كان r (مرة) $3^{13} = 3 + 3 + \dots + 3$ فأوجد قيمة r .

21. أثبت أن $\log 10^x = 10^{\log x} = x$ ، حيث $x > 0$.

22. إذا تحقق $x^{x^3} = (x^x)^3$ ، $x > 0$ ، فاحسب قيمة x .

الفصل التاسع

الاستقراء الرياضي

1- مقدمة

تخيل أن أمامك سلماً طويلاً للغاية وأنت تستطيع أن تصعد الدرجة الأولى كما أنك وصلت إلى الدرجة التي رقمها k فإنك قادر على الصعود إلى الدرجة التي تليها مباشرة أي الدرجة التي رقمها $k+1$. إن محصلة هاتين الجملتين أنك قادر على صعود درجات السلم كلها وذلك لأنك قادر على أن تصعد الدرجة الأولى ومن الجملة الثانية أنت قادر على صعود الدرجة الثانية، وبما أنك قادر على صعود الدرجة الثانية فالجملة الثانية تمنحك القدرة على صعود الدرجة الثالثة وهكذا.

2- الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

الاستقراء الرياضي طريقة من طرائق البرهان على النظريات الرياضية التي تعتمد على الأعداد الطبيعية ، وأول من استخدم هذه الطريقة هو العالم الفرنسي فيرمات في القرن السادس عشر الميلادي وطورها العالم الإيطالي بيانو.

مبرهنة:

إذا كانت $A \subseteq N$ بحيث تحقق الشرطين:

$$(1) 1 \in A$$

$$(2) k \in A \Rightarrow k+1 \in A$$

فإن $A = N$

البرهان:

لتكن N هي المجموعة الشاملة، $A \subseteq N$ ، الآن متممة A (A') لها إمكانيتان:

- الأولى: $A' = \emptyset$ وعندها فإن $A = N$ وبذلك ينتهي البرهان.

- **الثانية:** $A' \neq \emptyset$ وليكن a أصغر عنصر في A' . إن a حتماً أكبر من 1 لأن $1 \in A$ ، إذن $a-1$ عدد طبيعي لا ينتمي إلى A' أي أن $a-1 \in A$ ، ومن الشرط الثاني فإن $(a-1)+1 \in A$ أو $a \in A$ وهذا **تناقض** لأننا فرضنا $a \in A'$ ولا مخرج من هذا التناقض إلا باستحالة **الإمكانية** للثانية أي أن $A' = \emptyset$ أو $A = N$.

3- مبدأ الاستقراء الرياضي

لتكن لدينا الجملة الرياضية $C(n)$ حيث $n \in N$ تحقق الشرطين التاليين

- (1) **الجملة** $C(1)$ صحيحة أي أن الجملة $C(n)$ صحيحة عندما $n=1$.
- (2) لأي $k \in N$ ، إذا كانت $C(k)$ صحيحة فإن $C(k+1)$ صحيحة. عندئذٍ فإن الجملة $C(n)$ صحيحة لكل $n \in N$.

مثال:

لكل $n \in N$ ، أثبت صحة الجملة الرياضية $C(n)$ حيث:

$$C(n) = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

(1) يجب إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$:

$$\text{الطرف الأيسر : } 1 = 1^2$$

$$\text{الطرف الأيمن : } 1 = \frac{1}{6}(1)(1+1)(2+1)$$

(2) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن :

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

(3) يجب إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ أي أن :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \quad \text{أي يجب إثبات صحة العلاقة:}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \quad \text{الآن:}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \quad (\text{بناء على صحة الفرض})$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

أي أن $C(k+1)$ صحيحة وبالتالي فإن $C(n)$ صحيحة لجميع قيم n الطبيعية.

مثال:

استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات أن $5^n - 3^n$ يقبل القسمة على 2 لكل

$$n \in \mathbb{N}$$

الحل:

$$(1) \quad \text{نثبت صحة الجملة عندما } n=1 \text{ وبوضع } n=1 \text{ نلاحظ أن } 5^1 - 3^1 = 2$$

أي أن $5^1 - 3^1$ يقبل القسمة على 2 وبالتالي فالجملة صحيحة عندما

$$n=1$$

$$(2) \quad \text{نفرض صحة الجملة عندما } n=k \text{ أي أن } 5^k - 3^k \text{ يقبل القسمة على 2}$$

وعليه فيوجد عدد صحيح m بحيث $5^k - 3^k = 2m$ أو $5^k = 3^k + 2m$

$$(3) \quad \text{يجب إثبات صحة الجملة عندما } n=k+1 \text{ أي يجب إثبات أن}$$

$$5^{k+1} - 3^{k+1} \text{ يقبل القسمة على 2، ونجد أن:}$$

$$5^{k+1} - 3^{k+1} = 5 * 5^k - 3 * 3^k = 5(3^k + 2m) - 3 * 3^k = 5 * 3^k + 10m - 3 * 3^k$$

$$= 2 * 3^k + 10m = 2(3^k + 5m)$$

أي أن $5^{k+1} - 3^{k+1}$ يقبل القسمة على 2 وعليه فإن الجملة صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$

تعريف:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نعرف ال (n عاملي) الذي نرمز له بالرمز $n!$ كما يلي:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

نتيجة:

من هذا التعريف مباشرة ينتج أن $n! = n(n-1)!$

إن

مثال:

استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات أن الجملة التالية صحيحة:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

الحل:

(1) نثبت صحة العلاقة عندما $n=1$:

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

إذن العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(2) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن:

$$\sum_{i=1}^k \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\text{أو} \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

(3) يجب إثبات صحة الجملة عندما $n=k+1$ أي يجب إثبات أن

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(i+1)!} &= \sum_{i=1}^k \frac{i}{(i+1)!} + \frac{(k+1)}{(k+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{(k+1)}{(k+2)!} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{(k+1)}{(k+2)!} \right] \\
&= 1 - \left[\frac{(k+2) - (k+1)}{(k+2)!} \right] = 1 - \frac{1}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

إذن العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ وبالتالي تكون صحيحة لجميع قيم n الطبيعية.

مثال:

أثبت أن عدد المجموعات الجزئية من أي مجموعة مؤلفة من n عنصرا هو 2^n . أو بشكل مكافئ، أثبت أنه إذا كانت A مجموعة بحيث $|A| = n$ ، فإن

$$|P(A)| = 2^n$$

الحل:

(1) نثبت صحة الجملة عندما $n=1$. لنفرض أن $A = \{x_1\}$ فإن المجموعات الجزئية من A هي $A, \emptyset$ ونجد أن عددها يساوي 2^1 وعليه فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

(2) نفرض صحة الجملة عندما $n=k$ أي نفرض صحة :

$$|A| = k \Rightarrow |P(A)| = 2^k$$

(3) نثبت صحة الجملة عندما $n=k+1$ أي نثبت الآن أن:

$$|A| = k+1 \Rightarrow |P(A)| = 2^{k+1}$$

افرض أن:

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}\}$$

$$B = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$$

إن المجموعات الجزئية من A نوعان، لا يحتوي العنصر x_{k+1} وهذه المجموعات هي المجموعات الجزئية من B وعددها بناء على صحة الفرض يساوي 2^k والنوع الآخر يحتوي العنصر x_{k+1} وبخذه نحصل على

المجموعات الجزئية من B نفسها وعددها كما مر سابقاً 2^k وعليه يكون عدد المجموعات الجزئية المختلفة من A هو : $2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

وهذا يثبت صحة الجملة من أجل $n = k + 1$ أي أن الجملة صحيحة لكل عدد طبيعي n .

ملاحظة:

إذا طلب إثبات صحة جملة رياضية $C(n)$ لقيم $n \geq m$ حيث m قد يختلف عن العدد 1 فإن الشرط الأول من شروط مبدأ الاستقراء الرياضي يتغير وسنبين ذلك في المثال التالي:

مثال:

أثبت أن $n^2 \geq 3n$ لكل $n \geq 3$.

الحل:

(1) نثبت صحة العلاقة عندما $n = 3$ وهذا واضح لأن $3^2 \geq 3(3)$

(2) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ ، أي نفرض صحة أن $k^2 \geq 3k$.

(3) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k + 1$ أي نثبت أن $(k + 1)^2 \geq 3(k + 1)$

$$= (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq 3k + 2 + 1 = 3(k + 1) = \text{الطرف الأيسر}$$

الطرف الأيمن وعليه فالجملة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبالتالي فهي صحيحة لجميع قيم n الطبيعية التي أكبر أو تساوي 3.

4- الاستقراء الرياضي القوي

Strong Mathematical Induction

لإثبات جملة رياضية تعتمد على الأعداد الطبيعية فإنه لا يكفي أحياناً أن نفرض صحتها من أجل $n = k$ ونستنتج أن ذلك يؤدي إلى صحتها من أجل $n = k + 1$ - كما هو الشأن في مبدأ الاستقراء الرياضي السابق - بل نفرض صحتها من أجل $n \leq k$ ونستنتج أنها صحيحة من أجل $n = k + 1$ وذلك بعد إثبات صحتها من أجل $n = 1$. وهذا ما يعرف بمبدأ الاستقراء الرياضي القوي.

ملاحظة:

لا يوجد تكافؤ بين هذين المبدأين.

ملاحظة:

إذا احتجنا لإثبات صحة العلاقة من أجل $n = k + 1$ من أجل الدليل $k - i_0$ عندئذ نكون أثبتنا صحتها من أجل $n_1, n_2, \dots$
الآن نصوغ هذا المبدأ مع ذكر بعض النماذج والأمثلة.

5- مبدأ الاستقراء الرياضي القوي

لتكن لدينا الجملة الرياضية $P(n)$ حيث $n \in \mathbb{N}$ نحقق الشرطين التاليين

- (1) الجملة $C(1)$ صحيحة أي أن الجملة $C(n)$ صحيحة عندما $n = 1$.
- (2) إذا كانت $C(n)$ صحيحة من أجل $n = 1, 2, 3, \dots, k$ فإن $C(n)$ صحيحة من أجل $n = k + 1$. عندئذ فإن الجملة $C(n)$ صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$.

مثال:

استخدم مبدأ الاستقراء الرياضي القوي لإثبات أن كل عدد طبيعي $n > 1$ إما أن يكون عدداً أولياً أو يمكن كتابته على هيئة حاصل ضرب أعداد أولية عددها منته.

الحل:

لاحظ أن العدد 2 عدد أولي وعليه فإن $C(2)$ صحيحة. الآن افرض أن الجملة صحيحة من أجل $n = 2, 3, \dots, k$ ولتأخذ العدد $k + 1$. إذا كان $k + 1$ أولياً فالجملة صحيحة، وإن لم يكن أولياً فيوجد عدداً s, t حيث $2 \leq s, t \leq k$ بحيث $k + 1 = st$ ، وبتطبيق الفرض نجد أن كلا من s, t إما عدد أولي أو حاصل ضرب أعداد أولية عددها منته، وفي كلتا الحالتين يكون $k + 1$ مساوياً حاصل ضرب أعداد أولية عددها منته. إذن الجملة صحيحة من أجل عدد طبيعي $n > 1$.

مثال:

تعرف أعداد فيبوناتشي بطريقة ارتدادية كما يلي

$$f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{W} \quad \text{أثبت أن } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2, f_0 = f_1 = 1$$

الحل:

عندما $n = 0, 1$ فإن $f_0 = 1 \leq (7/4)^0, f_1 = 1 \leq (7/4)^1$ وضوحاً. الآن نفرض

صحة الزعم من أجل $n \leq k$ ونريد برهان صحته من أجل $n = k+1$:

$$k \geq 2, k-1 \geq 1$$

وبالتالي يجب إثباتها من أجل $k=1, k=2$

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq (7/2)^k + (7/4)^{k-1} = (7/4)^{k-1}[(7/4) + 1]$$

$$f_{n+1} = f_k + f_{k-1} \leq (7/4)^k + (7/4)^{k-1} = (7/4)^{k-1}[(7/4) + 1] =$$

$$(7/4)^{k-1}(44/16) \leq (7/4)^{k-1}(49/16) = (7/4)^{k-1}(7/4)^2 = (7/4)^{k+1}$$

إذن العلاقة من أجل كل عدد طبيعي n صحيح.

ملاحظة:

في هذا المثال أثبتنا الحالتين $n=0, n=1$ لأننا في إثبات خطوة الاستقراء احتجنا

أن نستخدم الحالتين $n=k-1, n=k$ لإثبات الحالة $n=k+1$ ولهذا فإن أصغر

عدد نستخدمه للإثبات يجب ألا يقل عن الصفر.

مثال:

وضح الخطأ في المناقشة التالية:

ليكن $a > 1$ عدداً حقيقياً. إن $a^{n-1} = 1$ لكل عدد طبيعي n .

المغالطة: $a^{1-1} = 1$ ، إذن الجملة صحيحة من أجل $n=1$. نفرض صحة الجملة

من أجل $n \leq k$ ، ونثبت صحتها من أجل $n = k+1$:

$$a^{(k+1)-1} = a^k = \frac{a^{k-1} \cdot a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

إذن الجملة صحيحة من أجل $n = k + 1$ وبالتالي فهي صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . ولكن هذا غير صحيح لأنه مثلاً $2^3 \neq 1$ ، ووجه الخطأ هنا أننا استخدمنا صحة الجملة عندما $n = k - 1$ وبوضع $k + 1 = 2$ ينتج أن $k - 1 = 0$ وهذا ما لم نثبتته، بل إن الجملة غير صحيحة لأن $a^{0-1} \neq 1$.





تمارين

في المسائل التالية، استخدم أحد مبدأي الاستقراء الرياضي في الإثبات.

$$\cdot \sum_{k=1}^n k = 1/2(n+1)n \quad (1)$$

$$\cdot \sum_{k=1}^n (2^{k-1} + 3^{k-1}) = 2^n + \frac{3^n - 1}{2} - 1 \quad (2)$$

$$\cdot r \neq 1 \text{ ، حيث } \sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (3)$$

$$\cdot n! \geq n^2 \text{ لجميع } n \geq 4 \quad (4)$$

$$\cdot 2^{2n} - 1 \text{ يقبل القسمة على } 3 \text{ لكل عدد طبيعي } n \quad (5)$$

$$\cdot \sum_{k=1}^n k^3 = 1/4(n+1)^2 n^2 \quad (6)$$

$$\cdot 3n^5 + 5n^3 + 7n \text{ يقبل القسمة على } 15 \text{ لكل عدد طبيعي } n \quad (7)$$

$$\cdot \log x^n = n \log x \quad (8)$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n' \quad (9)$$

(تعميم قانون ديمورغان) $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$(10) \text{ إذا كان المتتالية } (a_n) \text{ تحقق } a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \text{ ، فإن}$$

$$\cdot a_n = (n+1)2^n$$

$$\cdot x^n - y^n \text{ يقبل القسمة } x - y \text{ لكل عدد طبيعي } n \quad (11)$$

$$\cdot (1+x)^n \geq 1+nx; x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

$$(13) \text{ إذا كان } f_n \text{ عدد فيبوناتشي ذا الترتيب } n$$

$$\cdot f_n \geq (3/2)^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \text{ برهن أن}$$

$$(14) \text{ أثبت أن كل عدد طبيعي أكبر من } 7 \text{ يمكن كتابته } \text{بـ } 3 \text{ هيئة مجموع}$$

ثلاثيات وخماسيات.

$$(15) \text{ وضح أن } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

$$(16) \text{ أثبت أن } 2^{n^2} \geq n!$$

(17) ليكن m عدداً طبيعياً مثبتاً. برهن أن:

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \dots + \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-1)!}$$

لاحظ أن إثبات هذه المسألة مصدر لكثير من المتطابقات وذلك بتغيير قيمة m .

(18) مستقيم واحد يجزئ المستوى إلى جزأين، ومستقيمان يجزئانه إلى

أربعة أجزاء، وثلاثة إلى سبعة وهكذا ... وإذا كان j_n هو أكبر عدد من أجزاء المستوى نحصل عليه من رسم n مستقيماً، فإننا بقليل من التفكير نجد أن $j_{n+1} = j_n + n$ لأننا نحصل على منطقة جديدة كلما قطع المستقيم الجديد مستقيماً من المستقيمتين السابقتين. برهن أن

$$j_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

(19) أثبت أن $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$. ثم استفد من ذلك في برهان تعميم الملاحظة التالية:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3}{5+7} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1}{3}$$

(20) وضح وجه الخطأ في المغالطة التالية:
قضية:

سيارات العالم ألوانها متشابهة.

البرهان:

باستخدام الاستقراء الرياضي، من أجل $n=1$ القضية صحيحة وضوحاً.
لنفرض أن أي مجموعة من السيارات فيها k سيارة فإن ألوانها متشابهة. الآن اعتبر المجموعة $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ التي فيها $k+1$ سيارة. باستخدام صحة الفرض، المجموعتان:

$$A - \{x_1\} = \{x_2, x_3, \dots, x_{k+1}\}, A - \{x_{k+1}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

كل منهما فيها k سيارة، إذن كل منهما فيها سيارات ذات ألوان متشابهة، أي أن جميع السيارات $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ لونها مشابه للون السيارة x_2 . في المجموعة A متشابهة الألوان، وعليه فالقضية صحيحة من أجل $n = k+1$ ، وبذلك فجميع سيارات العالم لها اللون نفسه!!



الفصل العاشر

فن العد

1- مقدمة

تتعدد طرائق العد وتتنوع من حيث النظر إلى المعداد، وتبعاً لذلك تختلف صعوبة إيجاد عدد في مسألة ما، وربما لا توجد له قاعدة محددة، وذلك ناتج من طبيعة طرائق العد، إنه بتغير كلمة في المسألة تتحول من مسألة بالغة الصعوبة إلى مسألة بسيطة أو العكس ولذا لا بد من الدقة المتناهية عند صياغة مسألة معينة أو التفكير في حلها.

2- التباديل

Permutations

قاعدتا الجمع والضرب:

إذا كان يراد اختيار عنصر واحد من إحدى المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_m$ وكان عدد عناصر A_i هو a_i فإن عدد الطرائق (الخيارات) الإجمالي يساوي $a_1, a_2, \dots, a_m$ وهذه القاعدة تسمى قاعدة الجمع.

مثال:

إذا كان لدينا الحروف الثلاثة x, y, z ولملء المكان الثاني لدينا إكمانيتان لأن الحرف الثالث اختير مسبقاً للمكان الأول. المكان الثالث سيبقى له حرف واحد بعد استنفاد الحرفين الآخرين في المكانين الأول والثاني. إذن العدد الكلي للطرائق الممكنة لترتيب هذه الحروف الثلاثة يساوي $6 = 3 \times 2 \times 1$ وهذه الطرائق تحديداً هي $xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx$.

مثال:

كم خطأ هاتفياً يستوعب مقسم 491 علماً بأن عدد خانات الرقم الهاتفي سبع وأن جميع الأرقام متاحة؟

الحل:

بما أن القسم المقصود هو 491 فإن ثلاثاً من خانات الرقم الهاتفي قد استنفدت أي لا خيار لنا فيها. يبقى لدينا أربع خانات، وكل واحدة منها نستطيع أن نضع فيها رقماً من عشرة أرقام هي 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. إذن العدد الإجمالي لأرقام الهاتف ذات المقسم 491 تساوي $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$ خطأ هاتفيًا.

التباديل:

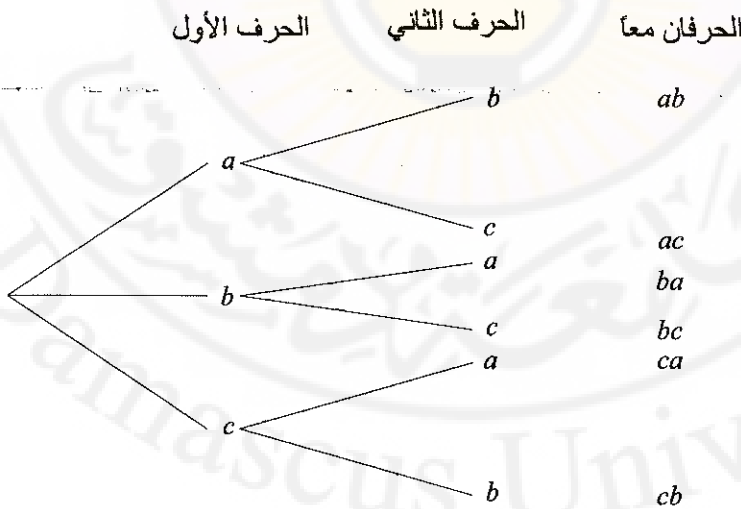
التبديل هو أي ترتيب يمكن تكوينه من مجموعة من الأشياء بأخذها كلها أو بعضها من غير تكرار للعناصر.

مثال:

كم عدد التبديلات المختلفة التي طولها اثنان المأخوذة من المجموعة $\{a, b, c\}$ ؟

الحل:

إننا نستطيع تكوين التباديل بـ 6 طرق وذلك لأن لدينا ثلاث إمكانيات للموضع الأول واثنين للثاني وحسب قاعدة الضرب نحصل على العدد 6. ويمكن توضيح ذلك بالشجرة البيانية التالية:



وبوجه عام فإن عدد التباديل التي طولها r المأخوذة من مجموعة بها n عنصراً ($r \leq n$) يرمز له بالرمز ${}^n P_r$ ويعطى بالعلاقة التالية المعتمدة على قاعدة الضرب

$${}^n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

يمكن اختيار العنصر الأول في التبديل بـ n طريقة.

ويمكن اختيار العنصر الثاني بـ $n-1$ طريقة.

ويمكن اختيار العنصر الذي رقمه r في التبديل بـ $n-r+1$ طريقة.

وظف الآن قاعدة الضرب لتحصل على الصيغة أعلاه.

وبشكل خاص عندما $r = n$ فإن عدد التباديل المختلفة يساوي

$${}^n P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$$

حيث $n!$ هو مضروب العدد الطبيعي n .

ملاحظة:

باستخدام رمز المضروب يمكن إعادة كتابة قانون ${}^n P_r$ كما يلي

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال:

احسب ${}^5 P_2$

الحل:

$${}^5 P_2 = 5(5-1) = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

مثال:

بكم ترتيب مختلف يمكن لستة أشخاص أن يجلسوا

(i) في صف به ستة مقاعد ؟

(ii) على مائدة دائرية بها ستة مقاعد ؟

الحل:

(i) توجد ستة اختيارات لملء المقعد الأول، وخمسة للثاني وهكذا حتى نصل
كما في الأمثلة السابقة إلى أن عدد الطرائق المختلفة يساوي $720 = 6!$
طريقة.

(ii) بنهيت لعد الأشخاص على مقعد معين حول المائدة وترتيب الخمسة
الباقيين بالنسبة إليه تؤول المسألة إلى ترتيب خمسة أشخاص (في صف)
وهذا يساوي كما نعلم $5!$ طريقة مختلفة.

التباديل في (ii) تعرف بعدد التباديل الدائرية.

لتصور ممكن الصعوبة في مسائل العد تأمل المثال التالي: ليكن لديك أربعة
فتيان وأربع فتيات فإن عدد طرائق تزويج هؤلاء الفتيان من أولئك الفتيات
يساوي كما رأينا في حالات مماثلة $4! = 24$ طريقة. الآن بإضافة معلومة جديدة
وهي أن لكل فتى من هؤلاء الفتيان أختاً من أولئك الفتيات فإن عدد الطرائق
المختلفة لتزويجهم سيتقلص نوعاً ما. فما العدد الكلي لتزويجهم والحالة هذه ؟ إن
هذه مسألة معقدة ناتجها - باستخدام مبرهنة التركيبات - يساوي أقرب عدد
صحيح للكسر $\frac{4!}{e}$ حيث e هو عدد غير العادي يساوي تقريباً 2.7182 ونجد أن
أقرب عدد صحيح للعدد $\frac{4!}{e} = 8.83$ يساوي 9 طرائق مختلفة.

إن هناك تطبيقات واسعة لفكرة التباديل نذكر طرفاً منها لأهميته في علم
الاحتمالات.

كيف يتم إيجاد عدد طرائق اختيار كرة من صندوق به مجموعة كرات أو سحب
بطاقة من حزمة بطاقات أو سحب بعض قطع من إنتاج معين لفحصها لمعرفة
ما إذا كانت سليمة أو معيبة ؟ نأخذ على سبيل المثال حساب عدد الطرق التي
يتم بها سحب r كرة بالترتيب من صندوق به n من الكرات المتمثلة ؟
ولدراسة هذه الجزئية ينبغي أن نعرف أن السحب يتم بطريقتين مختلفتين الأولى

تسمى السحب بإحلال (بإرجاع) والثانية السحب بغير إحلال (بغير إرجاع) وسوف نتناول كلا منها على حدة.

السحب بإرجاع:

عند سحب r كرة من صندوق به n من الكرات فإنه إذا سحبنا الكرة الأولى تعاد إلى الصندوق قبل إجراء السحب الثاني وهكذا بقية الكرات. هذه الطريقة تسمى بالسحب بالإرجاع ولحساب عدد الطرائق بهذا الأسلوب نتبع ما يلي:

عدد الطرائق التي يتم بها السحب الأول يساوي n طريقة، وعدد الطرائق التي يتم بها السحب الثاني يساوي n طريقة أيضاً، وهكذا. إن عدد الطرائق التي يتم بها سحب الكرة رقم r يساوي n طريقة أيضاً، وباستخدام قاعدة الضرب يكون عدد الطرائق التي يتم بها سحب r كرة من كرات متماثلة مع الإحلال يساوي

$$n \times n \times n \dots \times n = n^r$$

حيث n مضروبة في نفسها r مرة.

مثال:

صندوق به 15 كرة. ما عدد طرائق سحب كرتين بإرجاع ؟

الحل

باستخدام القاعدة السابقة للسحب بإرجاع حيث $n=15, r=2$ نجد أن عدد الطرائق المطلوب يساوي $15^2 = 225$.

السحب بغير إرجاع:

يقال إن السحب يتم بغير إرجاع إذا لم تتم إعادة أي كرة مسحوبة إلى الوعاء المسحوب منه. فإذا كان المطلوب سحب عدد r من الكرات مثلاً من صندوق به n من الكرات المتماثلة فإن حساب عدد الطرائق يتم في هذه الحالة كما يلي:

عدد طرائق سحب الكرة الأولى n طريقة.

وعدد طرائق سحب الكرة الثانية من غير إرجاع الكرة الأولى هو $n-1$ طريقة.

وهكذا بقية السحب، فيكون عدد طرائق سحب الكرة رقم r من غير إرجاع مساوياً لـ $n-r+1$ وحسب قاعدة الضرب فإن عدد الطرائق الإجمالي للسحب من غير إحلال ليس سوى P_r .

مثال:

أوجد عدد طرائق سحب كرتين بغير إرجاع من صندوق به 10 كرات.

الحل:

$${}^{10}P_2 = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

تسمى طرق السحب بإرجاع أو بغير إرجاع بالعينات المرتبة.

التباديل مع التكرار:

إذا أردنا عدد تباديل مجموعة بها n عنصراً بعضها مكرر بحيث العنصر الأول يتكرر n_1 مرة، العنصر الثاني يتكرر n_2 مرة ... العنصر رقم k يتكرر n_k مرة، و $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ فإن عدد التباديل الممكنة حينئذ يساوي

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

مثال:

احسب عدد التباديل المختلفة لكلمة Mathematics.

الحل:

يتكرر كل من الأحرف m, a, t مرتين، بينما بقية الأحرف تتكرر مرة واحدة، وعليه وحسب القانون السابق فإن عدد التباديل المختلفة لكلمة mathematics

$$\text{يساوي } \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 4989600 \text{ طريقة مختلفة.}$$

مثال:

موقف مخصص لثمانى سيارات مكون من صف واحد بكم طريقة يمكن وضع 4 سيارات مازدا، 3 سيارات تويوتا، وسيارة واحدة مرسيدس.

الحل:

$$\text{عدد الطرائق الممكنة} = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 280 \text{ طريقة.}$$

3- التوافيق

Combinations

التوافيق هي الطرائق التي تقسم بها مجموعة من العناصر إلى مجموعتين تحتوي إحداها عدداً معيناً من العناصر وتحتوي الأخرى بقية العناصر دون النظر إلى ترتيب تلك العناصر في أي من المجموعتين.

فإذا كان لدينا n عنصراً في مجموعة ما، فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحتوي كل توفيق على r من هذه العناصر سوف يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$

ويمكن إيجاد علاقة بين ${}^n P_r$ و $\binom{n}{r}$ كما يلي.

حيث أن كل توفيق تحتوي r من العناصر، فيمكن تبديل هذه العناصر داخل التوافقية بـ $r!$ طريقة وبذلك يكون عدد التباديل المختلفة في جميع التوافيق هو

$$r! \binom{n}{r}$$

$$\text{أي أن } {}^n P_r = (r!) \cdot \binom{n}{r} \text{ أو:}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{{}^n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال:

احسب التوافيق التالية

$$\binom{5}{3}, \binom{6}{4}, \binom{4}{0}, \binom{7}{7}$$

الحل:

باستخدام العلاقة أعلاه نحصل على

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! 2!} = 15$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! 4!} = 1$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7! 0!} = 1$$

يمكن من التعريف مباشرة استنتاج أن

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad ; 0 \leq r \leq n$$

مثال:

أوجد عدد المجموعات الجزئية بحجم 5 من مجموعة بها 8 عناصر.

الحل:

المطلوب هو بالضبط عدد التوافق بحجم 5 من مجموعة بها 8 عناصر وذلك

حسب قانون التوافق ليس إلا $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! 3!} = 56$ أي 56 مجموعة جزئية مختلفة.

4-مبرهنة ذات الحدين

نمهد لنظري ذات الحدين بالمبرهنة المفيدة التالية:

مبرهنة:

$$\text{ليكن } m \geq k \text{ فإن } \binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$$

البرهان:

باستخدام التعريف نجد أن

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} &= \frac{m!}{(m-k)!k!} + \frac{m!}{(m-k+1)!(k-1)!} \\ &= \frac{(m-k+1)m! + km!}{(m-k+1)!k!} = \frac{m![m-k+1+k]}{(m-k+1)!k!} \end{aligned}$$

$$= \frac{m![m+1]}{(m+1-k)!k!} = \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!k!}$$

$$= \binom{m+1}{k}$$

مبرهنة (ذات الحدين):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{إذا كان } n \geq 0 \text{ عدداً طبيعياً فإن}$$

البرهان:

نستخدم الاستقراء الرياضي على n . إذا كان $n=0$ فإن $(x+y)^0 = 1$ وأيضاً

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} x^0 y^0 = \frac{0!}{0!0!} x^0 y^0 = 1$$

وبالتالي، فإن الجملة صحيحة من أجل $n=0$. الآن نفرض أن الجملة صحيحة من أجل $n=m$. أي نفرض صحة

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$$

عندئذ:

$$\begin{aligned} (x+y)^{m+1} &= (x+y)(x+y)^m \\ &= (x+y) \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k+1} y^k + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} \\ &= \binom{m}{0} x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} + \binom{m}{m} y^{m+1} \\ &= x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{r=1}^m \binom{m}{r-1} x^{m+1-r} y^r + y^{m+1} \\ &= x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k + y^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{r-1} \right] x^{m+1-k} y^k + y^{m+1} \\
&= \binom{m+1}{0} x^{m+1-k} y^0 + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k + \binom{m+1}{m+1} x^0 y^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن المبرهنة صحيحة من أجل $n = m+1$

مثال:

(i) بوضع $x = y = 1$ في مبرهنة ذات الحدين نجد أن $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ وبالتالي،

فإن 2^n هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة بها n عنصر لأن

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ تشمل كل المجموعات الجزئية من جميع الأحجام.}$$

(ii) بوضع $x = 1, y = -1$ في (مبرهنة ذات الحدين)، نجد أن

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0^n = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2m} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{2m-1}$$

وعندما $n = 2m+1$ فإن

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2m} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{2m+1}$$

وبناء على ذلك نكون أثبتنا أنه إذا كانت A مجموعة بحيث $|A| = n$ فإن عدد

المجموعات الجزئية من A التي بها عدد زوجي من العناصر يساوي عدد

المجموعات الجزئية من A التي بها عدد فردي من العناصر.

مثال:

أوجد مفكوك العلاقات التالية:

$$(a - 4b)^4 \quad (\text{ii})$$

$$(x + y)^5 \quad (\text{i})$$

الحل:

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{5-k} y^k \quad \text{(i)} \\ &= x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + y^5 \\ &= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5 \quad \text{(ii)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-4b)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} (-4b)^k \\&= a^4 + \binom{4}{1} a^3 (-4b) + \binom{4}{2} a^2 (-4b)^2 + \binom{4}{3} a (-4b)^3 + (-4b)^4 \\&= a^4 - 16a^3b + 96a^2b^2 - 256ab^3 + 256b^4\end{aligned}$$

مثال:

أوجد معامل x^7 في مفكوك $(2x+3)^{10}$.

الحل :

بما أن $\binom{10}{3}(2)^7(3)^3 = (120)(128)(27) = 414720$ فإن معامل x^7 هو

.414720

5- مثلث باسکال

هو مثلث عددي سهل الإنشاء من خلاله يمكن معرفة المعاملات ذات الحدين.

نرسم جزءاً من هذا المثلث أولاً ثم نذكر طريقة تكوينه وبعض خصائصه:

$(x+y)^0$
 $(x+y)^1$
 $(x+y)^2$
 $(x+y)^3$
 $(x+y)^4$
 $(x+y)^5$
 $(x+y)^6$

1
 1 1
 1 2 1
 1 3 3 1
 1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
 1 6 15 20 15 6 1

نضع واحدات على ضلعي هذا المثلث (غير المنتهي)، وكل عدد نحصل عليه بجمع العددين اللذين يعلوانه مباشرة، فمثلاً العدد 20 حصلنا عليه بجمع $10+10$ وهما العددان اللذان فوقه مباشرة، وبذلك نستطيع إنشاء الصف التالي الذي يقابل معاملات $(x+y)^7$ في هذا المثلث وهو

1 7 21 35 35 21 7 1

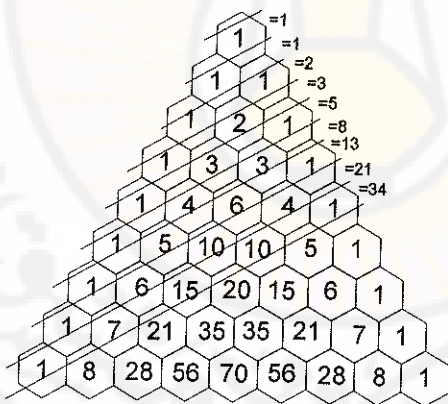
إن ذلك يعني أن معامل x^4y^3 في مفكوك $(x+y)^7$ يساوي 35.

إن من خصائص هذا المثلث أن عدد عناصر الصف المقابل لـ $(x+y)^n$ يساوي $n+1$ ، والعنصر رقم k في هذا الصف ليس إلا $\binom{n}{k-1}$. كما يلحظ

التناظر في هذا المثلث مما يؤكد أن

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

إذا جمعنا أعداد المثلث بطريقة معينة أيضاً فإننا نحصل على أعداد فيوناتشي كما في الرسم التالي:



تمارين

(1) احسب كلاً من

$$7!, 5!, \frac{10!}{9!}, {}^{10}P^{10}, \binom{7}{2}, \binom{7}{4}, \binom{8}{0}, \binom{8}{3}$$

(2) إذا كان لدينا الحروف A, B, C, D فبكم طريقة يمكن تكوين ثلاثة منها:

(i) مع أخذ الترتيب في الاعتبار.

(ii) بدون أخذ الترتيب في الاعتبار.

(3) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة Statistics.

(4) بفرض عدم السماح بالتكرار أوجد التالي:

(i) كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاث خانات من الأرقام التالية:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

(ii) كم عدداً يمكن تكوينه بحيث يكون أقل من 300؟

(iii) كم عدداً يمكن تكوينه بحيث يكون زوجياً؟

(5) بكم طريقة يمكن جلوس أربعة أطفال بحيث يكون جلوسهم:

(i) في صف واحد.

(ii) حول مائدة مستديرة.

(6) صندوق به 9 كرات، بكم طريقة يمكن اختيار عينة مكونة من ثلاث

كرات إذا كان السحب:

(i) بإرجاع.

(ii) بغير إرجاع.

(7) في أحد امتحانات مقرر إحصاء كان عدد الأسئلة ستة والمطلوب

الإجابة على خمسة.

(i) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار خمسة أسئلة.

(ii) إذا كان السؤالان الأول والثاني إجباريين، بكم طريقة يمكن للطلاب اختيار الأسئلة الخمسة؟

(8) المجموعة A تحتوي على 100 عنصر، باستخدام التوافق أوجد عدد المجموعات الجزئية منها المحتوية على 98 عنصرا.

(9) بكم طريقة يمكن سحب ورقتين من أوراق اللعب في الحالات التالية:

(i) بحيث يكون لونها أحمر.

(ii) بحيث يكون لونها أسود.

(iii) واحدة لونها أسود والثانية لونها أحمر.

(iv) بحيث تكونان من اللون نفسه.

(10) بكم طريقة يمكن اختيار طالبين من خمس طلاب؟

(11) بكم طريقة يمكن تقسيم 10 طلاب إلى مجموعتين بحيث تشتمل كل مجموعة على 5 طلاب

(12) يوجد بين المدينتين A و B أربعة طرق، وبين المدينتين B و C ثلاثة طرق. بكم طريق يمكن لشخص أن يسافر من A إلى C مروراً بـ B ؟

(13) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة سلسبيل؟

(14) تريد مصلحة المرور في إحدى المدن تصميم لوحات معدنية لأرقام السيارات بحيث تحتوي اللوحة على ثلاثة حروف عربية متنوعة بثلاثة أرقام عربية. أوجد عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي يمكن تصميمها علماً بأن عدد الحروف العربية 28 حرفاً وعدد الأرقام عشرة.

(15) لدينا تسعة طلاب منهم ستة سعوديون وثلاثة غير سعوديين، نريد اختيار وفد من أربعة طلاب.

(i) ما عدد الطرائق الممكنة لاختيار الوفد.

(ii) ما عدد الطرائق الممكنة لاختيار الوفد إذا كان اثنان منهم بالضبط يجب أن يكونا غير سعوديين.

(iii) ما عدد الطرائق الممكنة للاختيار إذا كان الوفد يحتوي على اثنين على الأكثر من غير السعوديين.

16 أوجد مفكوك العلاقات التالية:

$$\begin{array}{lll} (i) (2+x)^4 & (ii) (1-x)^7 & (iii) (x^2-y)^4 \\ (iv) \left(\frac{3}{4}-\frac{x}{3}\right)^4 & (v) (a-3b)^3 & (vi) \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 \end{array}$$

17 (i) أوجد معامل x^5y^7 في مفكوك $(x-2y)^{12}$.

(ii) أوجد معامل x^4y^{12} في مفكوك $(x^2-2y)^{12}$.

(iii) أوجد معامل a^3 في مفكوك $(a-\frac{1}{a})^7$.

$$18 \text{ أثبت أن } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j = 3^n$$

$$19 \text{ بسط المجموع التالي } \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \binom{n}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{n}$$

$$20 \text{ أثبت أن } \binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3} = n^3$$

$$21 \text{ أثبت أن } \binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$$

22 كم عدد الأصفار على يمين العدد 100؟



الفصل الحادي عشر

الأعداد المركبة

1- مقدمة

من أجل كل عدد حقيقي a فإن $a^2 \geq 0$ ، وهذا يعني أن المعادلة $x^2 = -1$ لا حل لها في مجموعة الأعداد الحقيقية مما يوحي بوجود مجموعة تحوي تماماً مجموعة الأعداد الحقيقية. إذا عرفنا المقدار $i = \sqrt{-1}$ فإن i يصبح حينئذ حلاً للمعادلة السابقة ومن خلاله نستطيع توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة أكبر تعرف بمجموعة الأعداد المركبة ويرمز لها بالرمز C :

$$C = \{a + ib : a, b \in R\}$$

في العدد المركب $z = a + ib$ يسمى العدد الحقيقي a بالجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز $\text{Re}(z)$ بينما يسمى العدد الحقيقي b بالجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز $\text{Im}(z)$.

2- العدد المركب

Complex Number

تساوي عددين مركبين:

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين فإن $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ والرمز $\wedge$ يعني "و". ونتيجة لذلك فإذا كان $x + iy = 0$ فإن $x = y = 0$ ، وإذا كان $iy = 0$ فإن $y = 0$.

مثال:

أوجد قيم a, b الحقيقية التي تحقق كلاً من:

$$(i) \quad b = 3a^3 - (2 + i)a + 4i - 5. \quad (ii) \quad (a + ib)^2 = -i.$$

الحل:

$$b + i(0) = 3a^3 - 2a - ia + 4i - 5. \quad (i)$$

$$\Rightarrow b = 3a^3 - 2a - 5 \wedge 0 = 4 - a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 3(4)^3 - 2(4) - 5 = 179.$$

(ii)

$$(a+ib)^2 = -i \Rightarrow a^2 + 2iab + (ib)^2 = -i \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \wedge 2ab = -1$$

ومن هاتين المعادلتين نستنتج أن:

$$a = \frac{-1}{2b}, (a-b)(a+b) = 0 \Rightarrow a = b \vee a = -b$$

وفي حالة $a = b$: نجد أن $2a^2 = -1$ أي أن قيمة a ليست حقيقية.

وفي حالة $a = -b$: نجد أن

$$a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow [a = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge b = \frac{-1}{\sqrt{2}}] \vee [a = \frac{-1}{\sqrt{2}} \wedge b = \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

حيث الرمز $\vee$ يعني "أو".

ملاحظة:

بما أن أي عدد حقيقي a يمكن أن يكتب على الشكل $a + 0i$ ، وهذه حالة خاصة من صورة العدد المركب، إذن كل عدد حقيقي هو عدد مركب أو $R \subset C$ ، والتساوي هنا غير قائم لأن العدد $-i$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة ولا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

العمليات على الأعداد المركبة:

إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين، وكان λ عدداً حقيقياً فإن:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (i)$$

يسمى حاصل جمع (طرح) العددين z_1, z_2 وهو عدد مركب جزؤه الحقيقي

$$(x_1 \pm x_2) \text{ وجزؤه التخيلي } (y_1 \pm y_2).$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + iy_1) = \lambda x_1 + i(\lambda y_1) \quad (ii)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_2)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (iii)$$

مثال:

أوجد الجزء الحقيقي للمقدار:

$$(1+i)(2-i) + i(i-3)$$

الحل:

$$(1+i)(2-i) = ((1)(2) - (1)(-1)) + i((1)(-1) + (1)(2)) = 3 + i$$

$$i(i-3) = -1 - 3i$$

إذن مجموعهما يساوي $2-2i$ وعليه فالجزء الحقيقي يساوي 2 .

3- مرافق العدد المركب

إن مرافق العدد المركب $z = x + iy$ يرمز له بالرمز $\bar{z}$ ويعرف كما يلي:

$$\bar{z} = x - iy$$

ويمكن بسهولة التحقق من صحة ما يلي:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(xy - xy) = x^2 + y^2 \quad (i)$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re}(z) \quad (ii) \quad (\text{ضعف جزئه الحقيقي})$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im}(z) \quad (iii) \quad (\text{ضعف جزئه التخيلي})$$

مضروباً في (i)

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{من (ii) نجد أن}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{ومن (iii) نجد أن}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (iv)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (v)$$

حسب مفهوم المرافق لتعريف قسمة عدد مركب $z_1 = x_1 + iy_1$ على آخر غير

صفر $z_2 = x_2 + iy_2$ كما في القاعدة التالية:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

تمرين:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ أثبت أن}$$

مثال:

$$\text{أوجد الجزء الحقيقي للكسر } \frac{3+i}{5-2i}.$$

الحل:

بضرب بسط ومقام هذا الكسر وهو $5+2i$ نحصل على:

$$\frac{3+i}{5-2i} = \frac{3+i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{(15-2)+i(6+5)}{25+4} = \frac{13+11i}{29} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

$$\therefore \operatorname{Re}\left(\frac{3+i}{5-2i}\right) = \frac{13}{29}$$

مثال:

$$\text{اكتب العدد المركب التالي على الهيئة } x+iy: \frac{1+i}{1-i}.$$

الحل:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$$

مقياس العدد المركب:

ليكن $z = x+iy$ عدداً مركباً فإن مقياس z يرمز له بالرمز $|z|$ ويعطى بالتعريف $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

معكوس العدد المركب:

ليكن $z = x+iy$ عدداً مركباً غير صفري فإن معكوس z الضربي يساوي $\frac{1}{z}$ ،

ومن الفرع (i) أعلاه يمكن بسهولة ملاحظة أن:

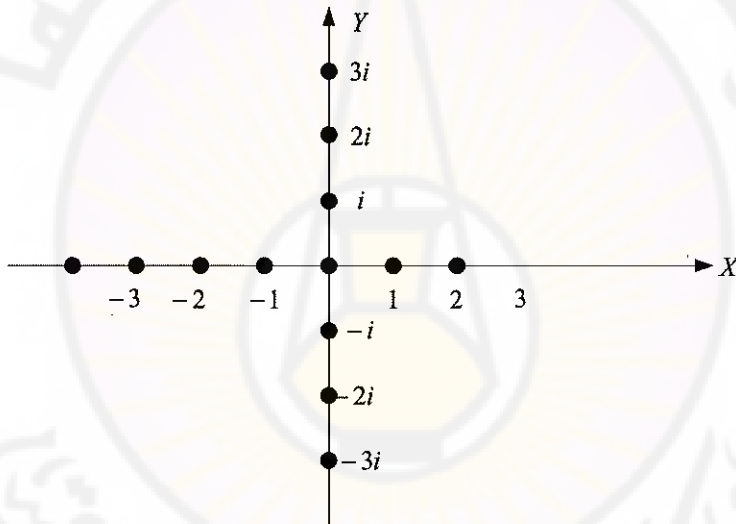
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

إن ذلك الاستقراء يربط بين معكوس العدد المركب ومرافقه ومقياسه وهو مفيد في تحويل عملية القسمة إلى ضرب.

4- التمثيل الهندسي للأعداد المركبة:

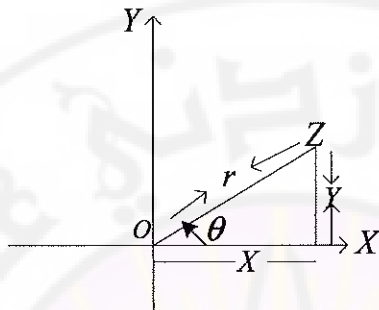
Geometric Representation of Complex Numbers

كما أن من الممكن تمثيل جمع الأعداد الحقيقية R على الخط المستقيم فإن من الممكن تمثيل الأعداد المركبة C على المستوى الديكارتي، أي أنه يوجد تقابل بين مجموعة جميع نقاط المستوى وبين مجموعة الأعداد المركبة. يسمى المحور $X'OX$ بالمحور الحقيقي والمحور $Y'OY$ بالمحور التخيلي كما هو مبين بالشكل:



ويمكن كتابة العدد المركب على شكل "زوج مركب" مركبته الأولى هي الجزء الحقيقي والثانية هي الجزء التخيلي وبصورة رمزية نكتب $x + iy = (x, y)$. يسمى هذا التمثيل للعدد المركب بالتمثيل الديكارتي والزوج المرتب (x, y) يمثل نقطة في المستوى كما في الشكل أدناه. كما نستطيع تمثيل العدد المركب بنوع آخر من التمثيل يعرف بالتمثيل القطبي للعدد المركب كما يلي:

بفرض $z \neq 0$ عدداً مركباً و r هو البعد $|O_z|$ وأن θ هي الزاوية التي يشكلها الجزء الموجب لمحور السينات مع $|O_z|$ باتجاه عكس دوران عقارب الساعة، نقول إن (r, θ) هو التمثيل النقطي للعدد المركب z . يسمى r بمقياس العدد المركب z أي أن $|z| = r$.



تسمى الزاوية θ بسعة العدد المركب z ويرمز لها بالرمز $\arg(z)$. إن هذه الزاوية محصورة بين 0 وبين 2π ويطلق عليها اسم الزاوية الرئيسية للعدد المركب z وذلك لأن العدد المركب له عدد غير منته من الزوايا تختلف فيما بينها بمضاعفات 2π . أي أن

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]; \quad K \in \mathbb{Z}$$

من الشكل السابق، نجد أن التحويل من التمثيل الديكارتي إلى القطبي والعكس يتم حسب العلاقات التالية:

$$(i) \quad x = r\cos(\vartheta), y = r\sin(\vartheta)$$

$$(ii) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \vartheta = \arctan \frac{y}{x}$$

ملاحظة:

بينما لا يكون للعبارة $z_1 < z_2$ معنى بصفة عامة حيث z_1, z_2 عددان مركبان، فإن $|z_1| < |z_2|$ تعني أن النقطة المناظرة للعدد z_1 تكون أقرب لنقطة الأصل من النقطة المناظرة للعدد z_2 . البعد بين النقطتين المناظرتين للعددين المركبين z_1, z_2 يعطى بالعدد أي:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

هذا القانون يشابه قانون البعد بين نقطتين في المستوى الديكارتي

مثال:

الأعداد المركبة المناظرة للنقاط الواقعة على محيط الدائرة التي مركزها (0,1) ونصف قطرها 3 تحقق المعادلة $|z - i| = 3$.

الأعداد الحقيقية $|z|, \text{Re}(z), \text{Im}(z)$ ترتبط مع بعضها بالعلاقة:

$$|z|^2 = \text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)$$

وتحقق المتباينات التالية وضوحاً: $|z| \geq |\text{Re}(z)| \geq \text{Re}(z)$

$$|z| \geq |\text{Im}(z)| \geq \text{Im}(z)$$

مبرهنة:

يمكن البرهان على صحة الخواص التالية لأي عددين مركبين z_1, z_2 حيث $z_2 \neq 0$:

$$(i) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$(ii) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

$$(iii) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

$$(iv) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

ولإجراء الضرب والقسمة لعددين مركبين مكتوبين بصورة التمثيل القطبي نجد أنه:

بفرض

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

فإن

$$(1) \quad \begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

أي أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مقياسي العددين، وسعة حاصل ضربيهما يساوي حاصل جمع سعتهما. رمزياً نكتب

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

والفرع الأول يبرهن (iii) من المبرهنة السابقة.

وكحالة خاصة نجد أن $\arg(z^2) = 2\arg(z)$ ومنه نجد

$$\arg(z^3) = \arg(z^2 z) = \arg(z^2) + \arg(z) = 2\arg(z) + \arg(z) = 3\arg(z)$$

وبالاستمرار في هذه العملية نصل إلى: $\arg(z^n) = n\arg(z)$ لكل عدد طبيعي

• (*)n

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} ; z_2 \neq 0 \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} \cdot \frac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \end{aligned}$$

أي أن مقياس خارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مقياس البسط على مقياس المقام وسعة خارج القسمة تساوي سعة البسط مطروحا منها سعة المقام ونكتب:

$$(i) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$(ii) \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

والفرع (i) يبرهن الفرع (iv) من المبرهنة السابقة.

وكحالة خاصة من 2 نجد أن $\frac{1}{\arg(z)} = 0 - \arg(z) = -\arg(z)$ وأيضاً

وباستخدام (*) نجد أن

$$\frac{1}{\arg(z^n)} = 0 - n \arg(z) = -n \arg(z) \text{ لكل عدد طبيعي } n.$$

بهذا يمكن أن نكون قد برهنا مبرهنة شهيرة ومفيدة.

5- مبرهنة دي موافر وتطبيقاتها

De Moivre's theorem and its Applications

أ- إذا كان n عدداً صحيحاً فإن

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مثال:

ضع المقدار التالي في صورة مبسطة

$$z = \frac{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2 \cdot (\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta))^6}{(\cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta))^3}$$

بتطبيق مبرهنة دي موافر مباشرة نحصل على:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^8 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)^{-12}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-4}} \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-4}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^{-9}} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta \end{aligned}$$

مثال:

$$z = (\sin \theta - i \cos \theta)^5 \text{ احسب}$$

الحل:

$$\begin{aligned} z &= (\sin \theta - i \cos \theta)^5 \\ &= \left(i \left(\frac{1}{i} \sin \theta - \cos \theta \right) \right)^5 \\ &= (i(-i \sin \theta - \cos \theta))^5 \\ &= (-i)^5 (\cos \theta + i \sin \theta)^5 \\ &= -i(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) \end{aligned}$$

مثال:

ضع المقدار التالي في صورة مبسطة

$$z = \frac{(2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ))^7}{(4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ))^3}$$

الحل:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2^7 (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^7}{4^3 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^3} \\ &= \frac{2^7 (\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)}{4^3 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)} \\ &= \frac{2^7}{4^3} (\cos(105^\circ - 135^\circ) + i \sin(105^\circ - 135^\circ)) \\ &= \frac{2^7}{2^6} (\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)) \\ &= 2 (\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

مثال:

احسب المقدار

$$z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{10}}{(1 - \sqrt{3}i)^{10}}$$

الحل:

نكتب $1 + 3i, 1 - 3i$ في الصورة القطبية

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ))$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ))^{10}}{(2(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)))^{10}} = \frac{2^{10}(\cos 600^\circ + i \sin 600^\circ)}{2^{10}(\cos(-600^\circ) + i \sin(-600^\circ))} \\ &= \cos(600^\circ - (-600^\circ)) + i \sin(600^\circ - (-600^\circ)) \\ &= \cos 1200^\circ + i \sin 1200^\circ = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

ب- إذا كان p, q عددين صحيحين في أبسط صورة (ليس بينهما قاسم مشترك سوى الواحد الصحيح) وكانت q موجبة فإن المقدار $[\cos \theta + i \sin \theta]_q^p$ له q من القيم المختلفة تعطى بالعلاقة:

$$[\cos \theta + i \sin \theta]_q^p = \cos\left(\frac{p\theta + 2\pi k}{q}\right) + i \sin\left(\frac{p\theta + 2\pi k}{q}\right); \quad k = 0, 1, 2, \dots, q$$

مثال:

أوجد جميع قيم المقدار $(\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{3}{4}}$

الحل:

$$\begin{aligned} &(\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{3}{4}} \\ &= \cos\left(\frac{3\pi + 2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi + 2\pi k}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \text{عند } k = 0 \text{ فإن المقدار}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \text{عند } k = 1 \text{ فإن المقدار}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \text{عند } k = 2 \text{ فإن المقدار}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \text{عند } k = 3 \text{ فإن المقدار}$$

ملاحظة:

تستخدم مبرهنة دي موافر لتعريف الجذر النوني للحد المركب $x + iy$ وذلك بتحويله أيضاً إلى الصورة القطبية ثم تطبيق المبرهنة .

مثال:

أوجد جميع قيم المقدار $(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

الحل:

لاحظ أن $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ، وبتطبيق مبرهنة دي موافر نجد

$$(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^{\frac{1}{4}} \\ = 2^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right) \right); k = 0, 1, 2, 3$$

عندما $k = 0$ نحصل على الجذر $2^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$

عندما $k = 1$ نحصل على الجذر $2^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$

ثم الجذر التالي عندما $k = 2$: $2^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \right)$

وأخيراً الجذر $2^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right)$ عندما $k = 3$

مثال:

أوجد جميع قيم المقدار $(1 - i)^{\frac{2}{3}}$

الحل:

نضع المقدار في صورته القطبية فيكون على الصورة

$$1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right]$$

وعليه فإن

$$(1-i)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) \right]; k = 0, 1, 2$$

وبالتعويض عن قيمة k بـ 0,1,2 تباعا نحصل على المجموعة التالية من الأعداد المركبة:

$$2^{\frac{1}{3}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$2^{\frac{1}{3}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2^{\frac{1}{3}} i$$

$$2^{\frac{1}{3}} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) = -2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

الجزور النونية للواحد الصحيح:

كحالة خاصة من إيجاد الجزور النونية لعدد مركب باستخدام ديموافر يمكن حل المعادلة $x^n = 1$ حيث n عدد طبيعي. إننا يمكن أن نعبر عن العدد الطبيعي 1 بالتمثيل القطبي:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

وطبقا لمبرهنة ديموافر يكون:

$$1^{\frac{1}{n}} = (\cos 0 + i \sin 0)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right); k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

إن الرمز $1^{\frac{1}{n}}$ يعني هنا مجموعة من الأعداد المركبة عدد عناصرها يساوي n . إن العدد 1 دائما ينتمي إلى تلك المجموعة ونحصل عليه من التعويض عن قيمة

k بالصفر. جذر نوني آخر يمكن أن نحصل عليه بالتعويض عن قيمة k بـ 1 وهذا الجذر تحديدا هو:

$w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. إنه بسهولة يمكن أن ملاحظة أن $w^1, w^3, \dots, w^{n-1}$ هي جذور مختلفة أخرى للواحد لأن $(w^j)^n = (w^n)^j = 1^{j=1}$ ، أما كونها مختلفة فلأن سعة كل منها تختلف عن الأخرى بمقدار $\frac{2\pi}{n}$ ، وقياس كل منها يساوي 1. بالنظر إلى هذه الجذور على أنها نقاط في المستوى الديكارتي نجد أنها تمثل نقاطا تقع على دائرة الوحدة موزعة بانتظام بحيث الجذر الأول هو 1 المقابل للنقطة (1,0)، نحصل على الجذر الثاني بالدوران عكس اتجاه دوران عقارب الساعة من هذه النقطة بزاوية قدرها $\frac{2\pi}{n}$ ثم بدوران آخر بمقدار $\frac{2\pi}{n}$ نحصل على الجذر الثالث، وهكذا إلى أن نستكمل بقية الجذور النونية للواحدة. مما يجدر ذكره أن مجموع هذه الجذور يساوي 0 ويمكن إثبات ذلك من خلال استخدام قانون المتسلسلة الهندسية:

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{1 - 1}{w - 1} = 0$$

مثال:

أوجد جميع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

الحل:

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$$1^{\frac{1}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right); k = 0, 1, 2 ;$$

أي أن الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي

$$1, \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

أي

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال:

أوجد جميع الجذور الرابعة للواحد الصحيح.

الحل:

الجذور الرابعة للواحد الصحيح

$$\frac{1}{4} = \cos\left(\frac{2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{4}\right); k = 0, 1, 2, 3;$$

وبالتعويض

$$1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos \pi + i \sin \pi, \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

أي $1, i, -1, -i$

مثال:

حل المعادلة $x^5 + 32 = 0$.

الحل:

$$x^5 = -32 = (-1)2^5 \Rightarrow x = 2(\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{5}}$$

$$x = 2\left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5}\right) k = 0, 1, 2, 3, 4$$

القيمة $k = 0$ تعطي الجذر $2\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$

القيمة $k = 1$ تعطي الجذر $2\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}\right)$

القيمة $k = 2$ تعطي الجذر $2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$

القيمة $k = 3$ تعطي الجذر $2\left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}\right)$

القيمة $k = 4$ تعطي الجذر $2\left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}\right)$

مثال:

حل المعادلة $z^3 = -i$.

الحل:

$$z = (-i)^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right); k = 0, 1, 2$$

القيمة $k = 0$ تعطي الجذر $\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)$.

القيمة $k = 1$ تعطي الجذر $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

القيمة $k = 2$ تعطي الجذر $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

التعبير عن قوى $\sin \theta, \cos \theta$ بدلالة جيب وجيوب تمام مضاعفات θ :

إذا كتبنا

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{1}{z} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2)$$

وبالجمع والطرح على الترتيب نصل إلى

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \quad (3)$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i \sin \theta \quad (4)$$

وبالمثل نجد أن

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \quad (5)$$

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad (6)$$

ونستخدم (3)، (4)، (5)، (6) في كتابة قوى $\cos \theta, \sin \theta$ بدلالة جيب وجيوب تمام مضاعفات الزاوية θ كما يتضح من خلال المثالين التاليين.

مثال:

اكتب المقدار $\cos^2 \theta, \sin^4 \theta$ بدلالة جيب تمام مضاعفات الزاوية θ .

الحل:

نضع $z = \cos \theta, \sin \theta$ فيكون

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \sin^4 \theta &= \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^2 \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 \left(\frac{1}{2i} \right)^4 \left(z - \frac{1}{z} \right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2i} \right)^4 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 \left(z - \frac{1}{z} \right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)^2 \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \left(z^4 - 2 + \frac{1}{z^4} \right) \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^6 \left(z^6 - 2z^4 + z^2 - 2z^2 + 4 - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^6} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left[\left(z^6 + \frac{1}{z^6} \right) - 2 \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) - \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}\right)^6 [2 \cos 6\theta - 2(2 \cos 4\theta) - 2 \cos 2\theta + 4] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^5 [\cos 6\theta - 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 2]
\end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta \sin^4 \theta = \frac{1}{32} (\cos 6\theta - 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 2).$$

مثال:

اكتب المقدار $\cos^2 \theta, \sin^3 \theta$ بدلالة جيوب مضاعفات الزاوية θ .

الحل:

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta \sin^3 \theta &= \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(z - \frac{1}{z}\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^5 i \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 \left(z - \frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{32} i \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)^2 \left(z - \frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{32} i \left(z^4 - 2 + \frac{1}{z^4}\right) \left(z - \frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{32} i \left(z^5 - z^3 - 2z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^5}\right) \\
&= \frac{1}{32} i \left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) - \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) - 2\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{32} i (2i \sin 5\theta - 2i \sin 3\theta - 2(2i \sin \theta)) \\
&= \frac{-2}{32} (\sin 5\theta - \sin 3\theta - 2 \sin \theta) \\
\cos^2 \theta \sin^3 \theta &= \frac{1}{16} (2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta).
\end{aligned}$$

تذكر أن

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n.$$

التعبير عن جيب وجيوب مضاعفات θ بدلالة قوى $\sin \theta, \cos \theta$:

سوف نوضح هذه الطريقة بالمثالين التاليين:

مثال:

اكتب $\cos 4\theta$ بدلالة قوى $\sin \theta$.

الحل:

$$\begin{aligned} \cos 4\theta + i \sin 4\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \\ &= \cos^4 \theta + 4 \cos^3 \theta (i \sin \theta) + \frac{4(3)}{2!} \cos^2 \theta (i \sin \theta)^2 \\ &\quad + \frac{4(3)(2)}{3!} \cos \theta (i \sin \theta)^3 + (i \sin \theta)^4 \\ &= \cos^4 \theta + 4 \cos^3 \theta (i \sin \theta) + 6 \cos^2 \theta (i)^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + 4 \cos \theta (i)^3 \sin^3 \theta + (i)^4 \sin^4 \theta \\ &= \cos^4 \theta + 4i \cos^3 \theta \sin \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4i \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^4 \theta \\ &= (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + i(4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

بمساواة الجزء الحقيقي في الطرفين نحصل على:

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= (1 - \sin^2 \theta)^2 + \sin^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= 8 \sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 1. \end{aligned}$$

مثال:

اكتب $\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta}$ بدلالة قوى $\cos \theta$.

الحل:

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^5$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^5 \theta + 5 \cos^4 \theta (i \sin \theta) + \frac{(5)(4)}{2!} \cos^3 \theta (i \sin \theta)^2 \\
&\quad + \frac{(5)(4)(3)}{3!} \cos^2 \theta (i \sin \theta)^3 + \frac{(5)(4)(3)(2)}{4!} \cos \theta (i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^5 \\
&= \cos^5 \theta + 5 \cos^4 \theta (i \sin \theta) + 10 \cos^3 \theta (i \sin \theta)^2 + \\
&\quad 10 \cos^2 \theta (i \sin \theta)^3 + 5 \cos \theta (i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^5
\end{aligned}$$

وبمساواة الجزء التخيلي في الطرفين نجد أن

$$\sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

ويكون

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} &= 5 \cos^4 \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\
&= 5 \cos^4 \theta - 10 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2 \\
&= 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1
\end{aligned}$$

صيغة أويلر:

تعرف الدالة المركبة $e^{i\theta}$ حيث θ مقيسة بالتقدير الدائري كما يلي

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

تعرف العلاقة (1) بصيغة أويلر. العدد e هو العدد النيبيري غير العادي الذي يساوي تقريباً 2.7182.

إذا كان $z = x + iy$ عددا مركبا فإن الدالة المركبة e^z تعرف باستخدام صيغر أويلر بالطريقة التالية:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

تحسن الإشارة هنا إلى أن هذا التعريف متسق مع نظائره في الأعداد الحقيقية وذلك كالعلاقات الأربع والقيمة المطلقة والأسس وغيرها، أي إنه عند قصر هذا التعريف على الأعداد الحقيقية فإنه يعطي تماما النتائج نفسها في التعريفات المألوفة. ينتج من ذلك أن التعريفات هنا هي تعميم لحالة الأعداد الحقيقية الآن،

وبالعودة إلى تعريف ضرب عددين مركبين مكتوبين بالصورة القطبية يمكن ملاحظة أن:

$$e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2} = e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad (i)$$

$$(e^{i\vartheta})^p = e^{ip\vartheta} \quad (ii)$$

$$\frac{1}{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta} \quad (iii)$$

وبناء على ما سبق فإنه يمكننا كتابة

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} \cos \vartheta + i \sin \vartheta - 1 \\ e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta - 2 \end{aligned}$$

وبالجمع واطرح على الترتيب نحصل على

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})$$

$$\sin \vartheta = \frac{1}{2i}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})$$

وهو تعبير عن الدوال المثلثية بدلالة الدوال الأسية. وحيث أن دالة الجيب دالة دورية أي تحقق $\sin \theta = \sin(\theta + 2k\pi); k \in \mathbb{Z}$ وكذلك دالة جيب التمام فإنه ينتج من ذلك مباشرة أن

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

حيث k عدد صحيح.

نستخلص مما سبق أن العدد المركب z يمكن تمثيله بصورة من صور ثلاث:

$$(1) \text{ الصورة الديكارتية } z(x, y) = x + iy$$

$$(2) \text{ الصورة المثلثية (القطبية) } z = (r, \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$(3) \text{ الصورة الأسية } z = re^{i\vartheta}$$

نوظف الآن صيغة أويلر لحساب أسس وجذور مركبة.

مثال:

احسب قيمة i^i .

الحل:

نعلم أن $i = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ، إذن $i = e^{i\pi}$. وهذا يؤدي إلى أن

$$i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \approx \frac{1}{4.81} \approx 0.21$$

وهي قيمة حقيقية صرفة كما هو واضح.

تمارين

(1) إذا كان $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = 3 - 2i, z_3 = 2 + i$ ، فأوجد كلا من

$$z_2 + z_3 \text{ (i)} \quad z_2 - z_3 \text{ (ii)} \quad z_1, z_2, z_3 \text{ (iii)} \quad \frac{z_2}{z_3} \text{ (iv)}$$

$$\left(\overline{z_3}\right)^2 \text{ (v)} \quad |2z_1| \text{ (vi)} \quad z_3 + \frac{1}{z_3} \text{ (vii)} \quad (z_2 z_3)^{-2} \text{ (viii)}$$

(2) أوجد قيم x, y الحقيقية التي تحقق $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

(3) احسب قيمة كل من a, b إذا كان $(1 + 4i)^2(a - bi) = abi$

(4) أوجد ناتج كل من

$$3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)(4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)) \text{ (i)}$$

$$\frac{2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}{4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)} \text{ (ii)}$$

$$[2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)]^0 \text{ (iii)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ (iv) حيث } z_1 = 4(\cos 43^\circ + i \sin 43^\circ), z_2 = 2(\cos 13^\circ + i \sin 13^\circ)$$

(5) احسب مجموعة جميع الجذور المركبة الممكنة لكل مما يلي

$$(1 - i)^{\frac{4}{5}} \text{ (i)} \quad (-8i)^{\frac{1}{4}} \text{ (ii)} \quad (i)^{\frac{1}{3}} \text{ (iii)} \quad (32)^{\frac{1}{5}} \text{ (iv)}$$

(6) احسب قيمة كل من i^3, i^5, i^{102}

(7) إذا كان $z = 4 - 5i$ ، فأوجد $|z|, \bar{z}, \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$

(8) أوجد الصورة القطبية للعدد $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(9) أوجد الصورة الديكارتية للعدد $6(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$

(10) استخدم مبرهنة دي موافر لإيجاد قيمة $(-\sqrt{3} + i)^7$

(11) عبر عن $\cos 2\theta$ بدلالة $\sin \theta, \cos \theta$

(12) على المستوى الديكارتي، ارسم العددين $z_1 = 3 - 6i, z_2 = i - 1$ ، ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما ومثل النتائج على المستوى. (ماذا تلاحظ؟)

(13) أوجد الجذور الخامسة للواحد، ومثل هذه الجذور على الدائرة الوحدة.

(14) أثبت أن $\arg(\bar{z}) = -\arg z$.

(15) حل المعادلة التالية في z $\frac{1+z}{1-z} = z$.

(16) إذا كان z حلاً للمعادلة $x^2 + ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}$ ، فأثبت أن $\bar{z}$ حل لها. (هذا يفسر أن الجذور المركبة تكون دائماً أزواجا مترافقة).

(17) احسب $\arg\left(\frac{i}{2-2i}\right)$.

(18) احسب قيمة $(-i)^{-i}$.

(19) حدد الشروط التي يجب توافرها في العددين المركبين z_1, z_2 لكي يتحقق

$$|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$$

الفصل الثاني عشر

المصفوفات

(MATRIX)

1- مقدمة

مصنع فيه ثلاثة أقسام ينتج كل منها ثلاثة أجزاء رئيسية من الجهاز هي a, b, c ومتوسط الإنتاج اليومي للمصنع من هذه الأجزاء مبينة في الجدول التالي:

الأجزاء	a	b	c
القسم الأول	13	35	40
القسم الثاني	15	23	36
القسم الثالث	10	30	45

كل عدد من هذه الأعداد له دلالة.

يمكن تقديم المعلومات السابقة بصورة مختصرة كآتي:

$$\begin{pmatrix} 13 & 35 & 40 \\ 15 & 23 & 36 \\ 10 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

يسمى هذا الشكل مصفوفة وتسمى الأعداد التي بين قوسين عناصر المصفوفة.

إن المصفوفة من المرتبة 3×3

2- تعريف المصفوفة

المصفوفة كائن رياضي مؤلف من عناصر مرتبة وفق m سطراً و n عموداً، وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

وتسمى المقادير a_{ij} حيث $(i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$ عناصر المصفوفة A حيث نعني بالدليل (i) رقم السطر، وبالدليل (j) رقم العمود الذي يقع فيهما العنصر.

إذن فالعنصر a_{ij} يقع في مكان تلاقي السطر ذي الرقم (i) والعمود ذي الرقم (j) .

نرمز للمصفوفة بالرمز $A = (a_{ij})$ أو $A_{m \times n} = (a_{ij})$ وتدعى مصفوفة ذات المرتبة $m \times n$.

3- المصفوفة المربعة (Square Matrix)

هي مصفوفة فيها عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة أي $m = n$ ويسمى العدد n مرتبة المصفوفة ونرمز لها بالرمز $A_n = (a_{ij})$.

القطر الرئيسي للمصفوفة:

هو العناصر الواقعة على المستقيم الواصل من a_{11} إلى a_{nn} في مصفوفة مربعة.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 5 \\ -2 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

أما عندما $m \neq n$ فتسمى المصفوفة مصفوفة مستطيلة، ويسمى m بعدها الشاقولي و n بعدها الأفقي.

4- أنواع المصفوفات

(1) المصفوفات السطرية (Row Matrix):

هي مصفوفة مستطيلة ذات المرتبة $(1 \times n)$ أي أن هذه المصفوفة تحوي سطراً واحداً و n عموداً وتكتب بالشكل:

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

(2) المصفوفة العمودية (Column Matrix):

هي مصفوفة ذات المرتبة $n \times 1$ وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (\text{لها عمود واحد و } n \text{ سطر})$$

(3) المصفوفة الصفرية (zero matrix):

هي مصفوفة تكون جميع عناصرها أصفاراً وتكتب بالشكل:

$$(0)_{m \times n} = o_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(4) المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix):

هي مصفوفة مربعة من المرتبة n عناصرها التي خارج القطر الرئيسي أصفار وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \\ & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أو للسهولة تكتب على الشكل : $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

مثال:

المصفوفة المربعة: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, 3)$ هي مصفوفة

قطرية.

(5) المصفوفة السلمية (Scalar Matrix):

وهي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي عدداً ثابتاً أما باقي عناصرها فهي أصفار وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} \text{ فالمصفوفة } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ قطرية سلمية.}$$

(6) المصفوفة الواحدية: I_n (Unit Matrix)

المصفوفة الواحدية من المرتبة n هي مصفوفة مربعة من المرتبة n جميع عناصر القطر الرئيسي فيها تساوي (1)، أما بقية العناصر فتساوي أصفاراً وتكتب بالشكل:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(7) المصفوفة المثلثية: (Triangular Matrix)

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي أو تحته أصفار.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية (دنيا)

مصفوفة مثلثية (عليا)،

(8) المصفوفة المتناظرة: (Symmetric Matrix)

هي مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ تحقق $a_{ij} = a_{ji}$ وذلك أيًا كان $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \text{ هي مصفوفة متناظرة}$$

5- تساوي مصفوفتين

تتساوى مصفوفتان لهما المرتبة ذاتها، إذا تساوى كل عنصر من إحداهما مع العنصر المقابل له في المصفوفة الأخرى. أي

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

يكون $A = B$ إذا وفقط إذا كان: $a = a_1$ و $b = b_1$ و $c = c_1$ و

$$(d = d_1)$$

مثال:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ لتكن المصفوفة } A = \begin{pmatrix} x+y & y-x \\ 2x & 2x+y \end{pmatrix} \text{ ولتكن المصفوفة}$$

أوجد x, y مع العلم أن $A = B$.

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots x + y = 3 \\ (2) \dots 2x = 2 \\ (3) \dots y - x = 1 \\ (4) \dots 2x + y = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow A = B$$

نحل المجموعة (2) و (3) فنجد $x = 1, y = 2$
وهذا الحل يحقق (1) و (4) فهو الحل المطلوب.

6- العمليات على المصفوفات

1. جمع المصفوفات:

تعريف:

مجموع مصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ لهما المرتبة ذاتها هو مصفوفة C لها المرتبة ذاتها وعناصرها c_{ij} معرفة على النحو التالي:
 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ وتكتب $C = A + B$.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ فإذا كانت}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \text{ فإن}$$

ولا يكون الجمع معرّفاً إذا اختلفت مرتبتا المصفوفتين.

مثال:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ إذا كان}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ فإن:}$$

خواص جمع المصفوفات:

- الخاصية التبديلية: $A + B = B + A$.
- وجود للعنصر المحايد: وهو المصفوفة الصفرية (O) وتكتب:

$$A + O = O + A = A$$
- الخاصية التجميعية: $A + (B + C) = (B + A) + C$.
- لكل مصفوفة $A = (a_{ij})$ نظير (معاكس) بالنسبة إلى الجمع ويرمز له بـ:

$$-A = (-a_{ij})$$

2. ضرب بعدد حقيقي:

تعريف:

ضرب مصفوفة $A = (a_{ij})$ بعدد حقيقي λ هو مصفوفة B تنتج عن ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالعدد λ أي:

$$B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. ضرب المصفوفات:

تعريف:

ضرب المصفوفة $A = (a_{ij})$ بالمصفوفة $B = (b_{ij})$ يعرف فقط عندما يكون عدد أعمدة المصفوفة A مساوياً لعدد أسطر المصفوفة.

إن جداء المصفوفة $A_{m \times r}$ في المصفوفة $B_{r \times n}$ على الترتيب هو مصفوفة $C = (c_{ij})$ من المرتبة $m \times n$ نسميها مصفوفة الجداء ونكتب

$$C_{m \times n} = A_{m \times r} * B_{r \times n}$$

ملاحظات:

- إذا كانت A مصفوفة من المرتبة 3×1 ، وكانت B مصفوفة من المرتبة 1×3 فإن $A \cdot B = C$ هي مصفوفة من المرتبة 3×3 .
- إذا كانت A مصفوفة من المرتبة 2×4 ، وكانت B مصفوفة من المرتبة 4×3 فإن $A \cdot B = C$ هي مصفوفة من المرتبة 2×3 .
- إذا كانت A مصفوفة من المرتبة 2×3 ، وكانت B مصفوفة من المرتبة 2×1 فإن $A \cdot B$ غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد أسطر المصفوفة B .

ويمكن تمثيل عملية ضرب المصفوفتين $A_{m \times r}$ ، $B_{r \times n}$ على النحو التالي:
ولتوضيح آلية الضرب نأخذ المصفوفتين:

$$A_{m \times r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B_{r \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1r}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{1r}b_{r1})$$

$$C_{m \times n} = A_{m \times r} \cdot B_{r \times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

فإن العنصر c_{ij} في مصفوفة الجداء يساوي مجموع جداءات عناصر السطر i من المصفوفة A بمقابلاتها من عناصر العمود والعنصر j من المصفوفة B .

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1r}b_{r1} \quad \text{أي أن العنصر}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1r}b_{r2} \quad \text{والعنصر}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} \quad \text{والعنصر}$$

خواص ضرب المصفوفات:

- الضرب غير تبديلي: $A * B \neq B * A$ بشكل عام.
 - وجود العنصر الحيادي: وهو المصفوفة الواحدية (I) وتكتب:
- $$A * I = I * A = A$$
- المصفوفة المربعة
- الخاصة التجميعية: $A * (B * C) = (B * A) * C$.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{أوجد } A * B \text{ إذا كان}$$

إن مصفوفة الجداء لهاتين المصفوفتين هي:

$$\begin{pmatrix} 2*2+0*(-1)+0*(1) & 2*1+(-1)*1+1*1 & 2*(-1)+(-1)*3+1*2 \\ 1*2+0*0+0*(-1) & 1*1+0*1+(-1)*1 & 1*(-1)+0*(3)+(-1)*2 \end{pmatrix}$$

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{نجد}$$

تدريب:

(1) لتكن المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

برهن أن $A \cdot B = A \cdot C$

(2) لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

برهن أن $A^2 = A$

7- منقول مصفوفة

Transpose Matrix

منقول المصفوفة A بالتعريف هي المصفوفة الناتجة عن المصفوفة A

بإبدال الأعمدة بالأسطر والأسطر بالأعمدة بالترتيب ذاته، فإذا كان:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فإن منقول المصفوفة A التي نرمز لها عادة بالرمز A^T هي:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ فإن } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ إذا كان}$$

مثال :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ فإن } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ إذا كان}$$

نتيجة:

- إن منقول مصفوفة سطرية يكون مصفوفة عمودية والعكس صحيح.

- إذا كانت B, A مصفوفتين مربعةتين من المرتبة n عندئذ يكون:

$$(A * B)^T = B^T * A^T \text{ و } (A + B)^T = A^T + B^T$$

8- محدد مصفوفة مربعة - المصفوفة المساعدة (المرافقة) لمصفوفة مربعة.

(1) محدد مصفوفة مربعة من المرتبة $2 * 2$:

$$\text{إذا كانت } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ مصفوفة مربعة من المرتبة } 2 * 2.$$

إن قيمة محدد المصفوفة A ويرمز له بـ $\det(A)$ يعطى كما يلي:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال:

$$\text{إذا كانت } A \text{ هي المصفوفة: } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13 \text{ فإن محدد هذه المصفوفة هو:}$$

(2) محدد مصفوفة مربعة من المرتبة $3 * 3$:

$$\text{إذا كانت } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ مصفوفة مربعة من المرتبة } 3 * 3.$$

إن قيمة محدد المصفوفة A ويرمز له بـ $\det(A)$ يعطى كما يلي:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ إذا كانت } A \text{ هي المصفوفة:}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ فإن محدد هذه المصفوفة هو:}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

وقيمته هي:

$$= 2(+1) - 3(-1) + 2(-1-2) = 2 + 3 - 6 = -1$$

(3) محدد مصفوفة مربعة من المرتبة 3×3 باستخدام قاعدة ساروس:

تستخدم قاعدة ساروس فقط في حساب قيمة محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 3×3 .

$$\text{إذا كانت } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ مصفوفة مربعة من المرتبة } 3 \times 3.$$

إن قيمة محدد المصفوفة A كما يلي:

نعيد كتابة العمودين الأول والثالث إلى يمين المحدد وفق ما يلي:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

نجد أن الحدود الثلاثة المسبوقة بإشارة (+) في منشور المحدد هي جداء العناصر الثلاثة في الأقطار الموازية للقطر الرئيسي، بينما الحدود الثلاثة

المسبوقة بإشارة (-) في منشور المحدد هي جداء العناصر الثلاثة في الأقطار الموازية للقطر الثانوي.

مثال:

احسب محدد المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل:

نكتب العمودين الأول والثاني إلى يمين المحدد فنجد:

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & 3 & 6 & -23 & & & \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & & \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 & & \end{array}$$

نجمع جداءات عناصر القطر الرئيسي والأقطار الموازية له، ونطرح جداءات عناصر القطر الثانوي والأقطار الموازية له، فنجد:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= [(-2) * (2) * (3) + (3) * (-1) * (5) + (6) * (1) * (1)] - \\ &= [(3) * (1) * (3) + (-2) * (-1) * (1) + (6) * (2) * (5)] = \\ &= (-12 - 15 + 6) - (9 + 2 + 60) = -92 \end{aligned}$$

4) محدد مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$:

• إذا كانت $n = 1$ فإن محدد المصفوفة $A = (a_{11})$ يعطى كما يلي:

$$\det(A) = a_{11}$$

• إذا كانت $n > 1$ فإن محدد المصفوفة $A = (a_{ij})$ ، حيث $i = 1..n$ ، يعطى

كما يلي:

من المصفوفة A بعد حذف السطر الأول والعمود j . مثلاً:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} * \det(A_{1j})$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * \det(A_{11}) - a_{12} * \det(A_{12}) + a_{13} * \det(A_{13})$$

$$= a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال:

احسب محدد المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(+1) - 3(-1) + 2(-1-2) = 2 + 3 - 6 = -1$$

ملاحظة:

أن قيمة المحدد لا تختلف إذا كان نشر المحدد بالنسبة لأية سطر أو أية عمود.

(5) المصفوفة المساعدة لمصفوفة مربعة (Adjoint matrix).

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، فإن المصفوفة المساعدة

للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $adj(A)$ ، هي المنقول للمصفوفة التي

عناصرها المحددات الصغرى المرافقة لعناصر المصفوفة A .

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ أي}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ لتكن لدينا المصفوفة } A \text{ هي:}$$

فإن مصفوفة المحددات الصغرى المرافقة لها هي:

$$B = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ فتكون المصفوفة المساعدة هي:}$$

فضايا أساسية:

1. إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n عندئذ يكون:

$$A * (\text{adj} A) = (\text{adj} A) * A = \det(A) * I_n$$
2. إن محدد مصفوفة مربعة A يساوي محدد منقولها A^T .

$$\det(A) = \det(A^T) \text{ أي}$$
3. إن محدد جداء مصفوفتين مربعيتين من المرتبة n يساوي جداء محديهما أي:

$$\det(A * B) = \det(A) * \det(B)$$

يمكن تعميم هذه الخاصة على أي عدد منته من المصفوفات المربعة من نفس المرتبة.

4. إذا تساوى سطران (أو عمودان) في مصفوفة A فإن $\det(A) = 0$
5. إذا تناسب سطران (أو عمودان) في مصفوفة A فإن $\det(A) = 0$

6. إذا بادلنا سطران (أو عمودان) في مصفوفة A ، فإن محدد

المصفوفة يغير إشارته

7. إن محدد مصفوفة مثلثية A يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي

أي:

$$\det(A) = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{nn}$$

تدريب:

1. أوجد المصفوفة المرافقة (المساعدة) لكل مصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

برهن أن $A * (adj A) = -10 * I$ حيث I مصفوفة الواحدة من المرتبة

الثالثة.

9- مقلوب مصفوفة مربعة

تعريف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، نعرف مقلوب المصفوفة A

بأنها مصفوفة مربعة من المرتبة n ونرمز لها بالرمز A^{-1} والتي تحقق:

$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_n$ (حيث I_n هي المصفوفة الواحدة من المرتبة

n).

يعطى مقلوب مصفوفة مربعة محددها غير معدوم بالعلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (adj A)$$

ملاحظة:

يكون للمصفوفة المربعة A مقلوب إذا كان محدد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر أي $\det(A) \neq 0$.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{إن مقلوب المصفوفة}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad \text{هي:}$$

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{يمكن التأكد من أن}$$

ملاحظة:

نستخدم مقلوب مصفوفة مربعة في حل جملة معادلات خطية.

خواص مصفوفة المقلوب:

1. محدد مقلوب المصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة الأصلية، أي:

$$\det A \neq 0 \quad \text{حيث} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

البرهان:

لدينا حسب تعريف المصفوفة المعاكسة: $A * A^{-1} = I$

$$\det(A * A^{-1}) = \det(I) \quad \text{ومنه}$$

$$\det(A) * \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \text{إذن:}$$

2. مقلوب A هو A^{-1} وكذلك مقلوب A^{-1} هو A أي:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. مقلوب جداء مصفوفتين يساوي جداء مقلوب مصفوفتين بترتيب معكوس أي: $(A*B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ حيث B, A مصفوفتان محدداهما غير معدوم ولهما المرتبة نفسها.

أمثلة:

1. لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ أوجد مقلوبها A^{-1}

الحل:

(1) نحسب المحدد $\Delta = \det(A)$ وذلك عن طريق نشره وفق عناصر السطر الأول فنجد:

$$\Delta = 3(4-0) - 0 + 1(-1-6) = 5 \neq 0$$

(2) نوجد المصفوفة المساعدة $adjA$ فنجد:

$$adjA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -7 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -7 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-7}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad \text{ومنه}$$

2. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ بين أن $adjA = A$

الحل:

$$adjA = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ لدينا:}$$

3. ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي λ وجود مقلوب للمصفوفة المربعة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{pmatrix}$$

الحل:

إن محدد المصفوفة هو: $\Delta = 1(0 - \lambda) - 2(-6) + 3(-\lambda - 0) = -\lambda + 12$

يكون للمصفوفة A مقلوب إذا وفقط إذا كان $\Delta \neq 0$ أي $\lambda \neq 3$.

$$4. \text{ أوجد مقلوب المصفوفة } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل:

1. نوجد قيمة المحدد Δ وذلك بنشر المحدد وفق عناصر سطره الأول:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3(1 - 12) + 0 = 31$$

$\Delta \neq 0$ إذن للمصفوفة مقلوب.

2. نوجد الآن المصفوفة المساعدة:

$$adjA = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 11 & 2 & -6 \\ 4 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{31} & \frac{-3}{31} & \frac{9}{31} \\ \frac{11}{31} & \frac{2}{31} & \frac{-6}{31} \\ \frac{4}{31} & \frac{12}{31} & \frac{-5}{31} \end{pmatrix} \quad 3. \text{ مقلوب المصفوفة هو:}$$

تمارين

1. لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

بين أن $A^2 = B^2 = I_3$, $(A-B)^2 = O$

2. لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

أثبت أن $A+B=I$, $A*B=B*A=O$, $B^2=B$

3. أوجد وفقاً للخواص الأساسية للمحددات، قيمة المحدد المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

4. أوجد A^{-1} لكل من المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. إذا كانت A مصفوفة من المرتبة الثانية، أثبت أن

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = A$$

6. لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{أثبت أن } A^3 = O$$



الفصل الثالث عشر

جملة المعادلات الخطية

1- تعريف المعادلة الخطية

هي المعادلة التي تحوي مجهولاً واحداً على الأقل وكل حد من حدودها (عدا الثابت) يتضمن مجهولاً واحداً فقط ومن الدرجة الأولى بالنسبة إلى ذلك المجهول.

أمثلة:

$$2x = 5 \text{ معادلة خطية بمجهول واحد.}$$

$$3x - 2y = 7 \text{ معادلة خطية بمجهولين.}$$

$$2x + y, z = 0 \text{ معادلة غير خطية بثلاثة مجاهيل.}$$

حل المعادلة الخطية: يعني إيجاد قيم المجاهيل التي تحقق المعادلة.

نتائج:

إن مجموعة قيم المجاهيل التي تحقق جملة من المعادلات الخطية تسمى حلاً لهذه الجملة.

نقول عن جملتين من المعادلات إنهما متكافئتان إذا كان كل حل لإحدى الجملتين هو حلاً للجملة الأخرى.

$$(1) \text{ المعادلة } a \cdot x = b$$

الحل:

$$\text{إذا كان } a \neq 0, \text{ للمعادلة حل وحيد: } x = \frac{b}{a}$$

مثال:

ناقش بحسب قيم الوسيط الحقيقي λ قابلية المعادلة الآتية للحل وأوجد حلولها الممكنة

$$(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1$$

الحل :

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$$

عندما $\lambda \in \mathbb{R}/\{-1, 1\}$ ، للمعادلة حل وحيد $x = \frac{\lambda-1}{\lambda^2-1} = \frac{1}{\lambda+1}$

(2) المعادلة: $ax + by = c : (a, b \neq 0)$

- تقبل عدداً غير منته من الحلول.
- من أجل كل قيمة لأحد المجهولين نجد قيمة للمجهول الآخر.
- تعميم: كل معادلة خطية بأكثر من مجهول لها عدد غير منته من الحلول.

مثال:

أوجد حلول المعادلة: $2x - 3y = 5$

الحل:

$S = \left\{ (x, y) \in R^2 : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \right\}$: مجموعة حلولها هي:

نحصل على كل حل بإعطاء قيمة للمجهول x لنجد قيمة للمجهول y .

2- جملة المعادلات الخطية

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التي عددها m ذات المجاهيل

$x_1, x_2, \dots, x_n$ والتي تأخذ الشكل:

$$(*) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

حيث b_i ، a_{ij} أعداد حقيقية و

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}; \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

تسمى جملة m معادلة خطية ذات n مجهول.
 قد لا يكون للجملة (*) أي حل وقد يكون لها واحد، أو يكون لها أكثر من حل واحد، في مثل هذه الحالة سيكون لها عدد غير منته من الحلول.
 - يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (*) بالشكل:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

ويسمى الشكل المصفوفي لجملة المعادلات (*).

أو بالشكل المختصر: $A * X = B$ (**).

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (A \text{ تسمى مصفوفة الأمثال للجملة } (**))$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad (X \text{ تسمى مصفوفة المجاهيل}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \quad (B \text{ تسمى مصفوفة}$$

الحدود الثابتة)

أما المصفوفة:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

تسمى المصفوفة الموسعة للجملة المدروسة ومن الواضح أنها موسعة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + y + 3z = 2$$

$$3x + y + z = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الأمثال A هي:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الحدود الثابتة B هي:

المصفوفة الموسعة هي:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

مثال:

لكن جملة المعادلات الخطية:

$$x + 2y - z = 1$$

$$2x - y + z = -2$$

$$x + 3y = 0$$

إن مصفوفة الأمثال هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & : & 1 \\ 2 & -1 & 1 & : & -2 \\ 1 & 3 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \quad \text{وأن المصفوفة الموسعة هي:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3- طرائق حل جملة معادلات خطية

أولاً: الطريقة المصفوفية:

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المجاهيل يساوي عدد للمعادلات ($m = n$) إن حل الجملة (*) في حالة $m = n$ يمكن في إيجاد مجموعة قيم المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$ التي تحقق الجملة (*) أي إيجاد المصفوفة X .

- إذا كانت قيمة محدد مصفوفة الأمثال A مختلفة عن الصفر أي

$$\Delta = \det A \neq 0$$

عندئذٍ نضرب طرفي المعادلة $A * X = B$ من اليسار بالمصفوفة A^{-1} مقلوب المصفوفة A نحصل على الحل $X = A^{-1} * B$ الذي يحقق جملة المعادلات الخطية (*) وهذا حل وحيد.

مثال:

حل جملة المعادلات التالية باستخدام الطريقة المصفوفية.

$$-x + 2y - 3z = -8$$

$$2x - y + 4z = 17$$

$$3x + 4y + z = 22$$

الحل:

إن مصفوفة الأمثال هي:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

تأخذ المعادلات السابقة الشكل:

$$(*) \dots A^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$$

نحسب المصفوفة A^{-1} :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1-16) - 1(2-12) - 3(8+3) = 4 \text{ لدينا}$$

$$\text{كذلك: } adj A = \begin{pmatrix} -17 & -14 & 5 \\ 10 & 8 & -2 \\ 11 & 10 & -3 \end{pmatrix} \text{ ومنه:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} adj A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -17 & -14 & 5 \\ 10 & 8 & -2 \\ 11 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

نضرب طرفي (*) من اليسار بالمصفوفة A^{-1} نجد:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -17 & -14 & 5 \\ 10 & 8 & -2 \\ 11 & 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\text{أو } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ومنه الحل هو:}$$

$$(x, y, z) = (2, 3, 4)$$

ثانياً: طريقة غاوس (Gausse):

تمكن طريقة غاوس من إيجاد حل جملة المعادلات الخطية $A * X = B$ التي عددها m معادلة وذات n مجهولاً والتي تعرف بطريقة غاوس.

بعض المفاهيم عن المصفوفات:

1. التحويلات السطرية الأولية على مصفوفة:

- (1) المبادلة بين سطرين في مصفوفة A .
- (2) إضافة أحد الأسطر، بعد ضربه بعدد c مغاير للصفر إلى سطر آخر.
- (3) ضرب جميع عناصر سطر ما بعدد مغاير للصفر.

تعريف:

يقال عن مصفوفتين A, B إنهما متكافئتان إذا كانت إحداها تنتج عن الأخرى بإجراء تحويل أولي أو أكثر ونكتب $A \sim B$

2. المصفوفة المدرجة:

تعريف:

نقول عن مصفوفة A إنها مصفوفة مدرجة إذا تحققت فيها الصفات:

- (1) الأسطر غير الصفريّة في المصفوفة A تسبق الأسطر الصفريّة (إن وجدت)
- (2) العنصر الرائد لكل سطر يقع على يمين العنصر الرائد للسطر الذي يسبقه. حيث السطر الصفري في مصفوفة A هو السطر الذي جميع عناصره أصفار.

أمثلة:

$$\bullet \text{ المصفوفة } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ هي مصفوفة مدرجة.}$$

• المصفوفة $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة ليست مدرجة

ويبرهن على أنه أياً كانت المصفوفة A فإنه توجد مصفوفة مدرجة مكافئة لها.

مثال:

أوجد المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل:

بإجراء التحويلات $-2R_1 + R_2$ ، $-3R_1 + R_3$ نحصل على المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

ثم التحويل $-7R_2 + 3R_3$ نحصل على المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

أوجد المصفوفة المدرجة المكافئة لها.

الحل:

تكون عادة الحسابات أبسط إذا كان العنصر الرائد مساوياً (1)، لذلك نبادل بين السطرين الأول والثالث نجد:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

بإجراء التحويلات: $4R_1 + R_2$, $-6R_1 + R_3$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix} \text{ نحصل على}$$

$$\text{ثم نجري التحويل } R_2 + R_3 \text{ نحصل على } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ وهي المصفوفة}$$

المدرجة المكافئة للمصفوفة A .

3. طريقة غاوس في حل جملة معادلات خطية:

إن طريقة غاوس تعتمد على ما يلي:

إذا كانت H المصفوفة الموسعة لجملة معادلات خطية وكانت H' مصفوفة مكافئة للمصفوفة H فإن جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة

H' تكافئ جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة H

وتتلخص طريقة غاوس لحل جملة معادلات خطية بالخطوات الآتية:

(1) نكتب المصفوفة الموسعة H لجملة المعادلات الخطية المفروضة.

(2) نوجد المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة H وذلك بإجراء

تحويلات سطرية مناسبة.

(3) نكتب جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة المدرجة H' .

4) نحل جملة المعادلات الناتجة فنحصل على حلول الجملة المفروضة.

مثال:

حل جملة المعادلات الخطية التالية بتطبيق طريقة غاوس:

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + y + 3z = 2$$

$$3x + y + z = 1$$

الحل:

نشكل أولاً المصفوفة الموسعة:

$$H = (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

نوجد المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة H كما يلي:

نطبق التحويلات التالية: $-2R_1 + R_2$, $-3R_1 + R_3$ ثم نضرب R_2

بالعدد $\left(-\frac{1}{3}\right)$ نجد:

$$H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array} \right)$$

ثم نطبق التحويل: $5R_2 + R_3$

$$H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

نجد:

من المصفوفة الأخيرة تكون جملة المعادلات المفروضة مكافئة للجملة

المدرجة:

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$y + z = 0$$

$$-3z = -2$$

$$x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3} \text{ ويكون الحل لها هو:}$$

مثال:

حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x + y + z + 2t = 1$$

$$x + 2y + z + t = 1$$

$$x + y + 2z + t = 1$$

$$2x + y + z + t = 1$$

الحل:

نشكل المصفوفة الموسعة H ، ونوجد المصفوفة المدرجة المكافئة لها

$$H = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

نطبق عليها التحويلات التالية: $-2R_1 + R_4$ ، $-R_1 + R_3$ ، $-R_1 + R_2$ نجد:

$$H \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

في المصفوفة الأخيرة نطبق: $R_2 + R_4$ ثم في المصفوفة الناتجة التحويل

$R_3 + R_4$ نجد:

$$H \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

إن جملة المعادلات المفروضة مكافئة للجملة المدرجة التالية

$$x + y + z + 2t = 1$$

$$y - t = 0$$

$$z - t = 0$$

$$-5t = -1$$

ويكون الحل هو: $\left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$

مثال:

أوجد مجموعة الحلول لجملة المعادلات الخطية (بطريقة غاوس)

$$x + 2y = 4$$

$$x - y = 1$$

$$2x + y = 5$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة للجملة:

$$H = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

نوجد المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة H فنجد أنها:

$$H' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

إن جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة H' هي:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

ولهذه الجملة حل وحيد هو $x = 2, y = 1$

فمجموعة الحلول هي: $\{(2, 1)\}$

مثال:

عين مجموعة الحلول لجملة المعادلات الخطية (بطريقة غاوس):

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 0 \\2x + 3y - x &= 2 \\-3x - 5y + 4z &= 1\end{aligned}$$

الحل:

إن المصفوفة الموسعة للجملة هي:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

بإجراء التحويلين $-2R_1 + R_2$, $3R_1 + R_3$ نحصل على المصفوفة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array} \right)$$

وبإجراء التحويل $R_2 + R_3$ نحصل على المصفوفة:

$$H' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

وهي المصفوفة المدرجة المكافئة للمصفوفة الموسعة H

إن المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة H' هي:

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 0 \\-y + 5z &= 2 \\0 &= 1\end{aligned}$$

وهذه الجملة مستحيلة الحل وبالتالي مجموعة الحلول هي Φ

رابعاً: طريقة الحذف بالتتالي للمجاهيل:

إن الطريقة المألوفة لإيجاد حلول جملة n من المعادلات الخطية ذات n

مجهول، هي طريقة الحذف المتتالي للمجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$. وتتركز الطريقة

على حذف المجاهيل واحداً تلو الآخر كما في الأمثلة الآتية:

مثال:

ابحث عن الحلول المشتركة لجملة المعادلات الآتية:

$$2x + y - 3z = 4 \dots\dots\dots(1)$$

$$3x + 2y + z = 2 \dots\dots\dots(2)$$

$$-x - 3y + 2z = 6 \dots\dots\dots(3)$$

الحل:

من المعادلة (1) نجد $y = 3z + 2x + 4$ نعوض في المعادلة (2) وفي المعادلة (3).

$$(1)' \dots -x + 7z = -6$$

$$(2)' \dots 5x - 7z = 18$$

من المعادلة (1)' نجد $y = 3z - 2x + 4$ نعوض في (2) نجد

$$28z = -12 \text{ ومنه } z = -\frac{3}{7} \text{ وبالتالي } x = 3, y = -\frac{23}{7}$$

طريقة ثانية:

بجمع المعادلات الثلاثة طرفاً إلى طرف نلاحظ أن $4x = 12$ ومنه $x = 3$

نعوض في معادلات الجملة فنجد:

$$y - 3z = -2 \dots(1)'$$

$$3y + z = -7 \dots(2)'$$

$$-3y + 2z = 9 \dots(3)'$$

$$\text{بحل المجموعة } \{(1)', (2)'\} \text{ نجد: } z = -\frac{3}{7}, y = -\frac{23}{7}$$

نعوض في (3)' نجد أنها محققة إذاً للجملة المفروضة حل مشترك وحيد

هو:

$$S = \left\{ x = 3, y = -\frac{23}{7}, z = -\frac{3}{7} \right\}$$

4- جملة معادلات خطية متجانسة

لتكن جملة مؤلفة من m معادلة ذات n مجهول على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

تسمى جملة المعادلات الخطية السابقة جملة معادلات خطية متجانسة.

میرھنہ:

الشرط اللازم والكافي ليكون لجملة معادلات خطية متجانسة عددها n معادلة وذات n مجهولاً، حلول مغايرة للحل الصفري هو أن يكون محدد مصفوفة الأمثال مساوياً للصفر.

مثال:

عين مجموعة الحلول لجملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$4x - y + 2z = 0 \dots\dots\dots(3)$$

الحل:

نحسب محدد الأمثال Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

ثم نجري التحويلات التالية: $-3R_1 + R_2$ ثم $-4R_1 + R_3$ نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & 14 \\ 0 & -9 & 14 \end{vmatrix}$$

ثم ننشر وفق العمود الأول فنجد $\Delta = -9(14) + 9(14) = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فالجملة المتجانسة لها عدد غير منته من الحلول بما في ذلك الحل الصفري $(0,0,0)$ ، وسنسعى لإيجاد الحلول.

نلاحظ أن المعادلة (3) تنتج من جمع المعادلتين (1) و (2). إذن حل الجملة المفروضة يؤول إلى حل المعادلتين الخطيتين:

$$x + 2y - 3z = 0 \dots (1)$$

$$3x - 3y + 5z = 0 \dots (2)$$

لحل هذه الجملة نتبع طريقة الحذف بالتتالي على الشكل الآتي:

نضرب المعادلة (1) بالعدد (-3) ونضيف الناتج للمعادلة (2) فنجد:

$$y = \frac{14}{9}z \quad \text{نعوض في المعادلة (1) نجد} \quad x = -\frac{1}{9}z$$

إذن لمجموعة المعادلتين حل وحيد من أجل كل $z \in \mathbb{R}$ ، وبالتالي للجملة المفروضة عدد غير منته من الحلول هي:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -\frac{1}{9}z, y = \frac{14}{9}z \right\}$$

ملاحظة:

يمكن الاعتماد على طريقة غاوس في حل جملة معادلات خطية متجانسة.

مثال:

ابحث عن الحلول لمجموعة المعادلتين الآتيتين:

$$2x + \frac{3}{4}y = 0$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y = 0$$

الحل:

الجملة المفروضة هي جملة متجانسة فهي تقبل الحل الصفري (0,0).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{10} \neq 0$$

فالحل الصفري وحيد.

أمثلة:

(1) حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غاوس.

$$x + 2y + 5z = -9$$

$$x - y + 3z = 2$$

$$3x - 6y - z = 25$$

الحل:

نشكل أولاً المصفوفة الموسعة $H = (A/B)$

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array} \right)$$

نطبق على الأسطر التحويلات الآتية: $-3R_1 + R_3, -R_1 + R_2$ نجد:

$$H \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array} \right)$$

ثم نطبق على المصفوفة الأخيرة التحويل $-4R_2 + R_3$ نجد:

$$H \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array} \right)$$

وهكذا نجد أن الجملة السابقة مكافئة للجملة المدرجة:

$$x + 2y + 5z = -9$$

$$-3y - 2z = 11$$

$$-8z = 8$$

ومنه حل الجملة هو: $x = 2, y = -3, z = -1$

(2) حل (بالطريقة المصفوفية) جملة المعادلات الخطية التالية:

$$x + y - 4z = 19$$

$$-5x + 4y + 2z = 4$$

$$8x - y - 5z = 26$$

الحل:

نكتب أولاً الجملة بالشكل المصفوفي $AX = B$ فنجد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}$$

من ناحية ثانية نحدد A^{-1} :

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 81$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 18 \\ -9 & 27 & 18 \\ -27 & 9 & 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{9}{81} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه}$$

وبما أن $X = A^{-1}B$ نجد:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ومنه حلول الجملة هي: $z = -3, y = 5, x = 2$





تمريبات

(1) عين مجموعة الحلول لكل من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -4x + y + z = 0 \\ 3x + 6y + 2z = 0 \end{array} \right\} \text{أ-}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \text{ب-}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + z = 4 \end{array} \right\} \text{ت-}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \\ -x - 2y + 3z = 8 \end{array} \right\} \text{ث-}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + 3t = 1 \\ x + 3y + z + t = 1 \\ x + y + 3z + t = 1 \\ 3x + y + z + t = 1 \end{array} \right\} \text{ج-}$$

(2) حل جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غاوس.

$$\begin{array}{l} 3x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 16 \end{array}$$

(3) حل جملة المعادلات الخطية الآتية بالطريقة المصفوفية.

$$\begin{array}{l} x - 2y + 4z = 6 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ 4x + y - 5z = 9 \end{array}$$



المراجع العلمية

- 1- أحمد حميد خضرو، (2006)، رياضيات الأعداد، مطبوعات جامعة تشرين، اللاذقية- سوريا.
- 2- بحبوح ، محيي الدين ،(1999)، الأرقام فن ومتعة و إبداع ، مؤسسة غبور للطباعة ، دمشق .
- 3- صلاح الأحمد، (1971)، التحليل، مطبوعات جامعة دمشق، مشق.
- 4- صلاح الأحمد، (1971)، الجبر، مطبوعات جامعة دمشق، مشق.
- 5- عطفة ، جمال الدين ، وآخرون ن(1999) ، الرياضيات ، السنة الأولى دور المعلمين، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية وزارة التربية، دمشق .
- 6- فئة من المختصين ، (2003) ، الرياضيات ، السنة الثانية دور المعلمين ، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ،وزارة التربية، دمشق .
- 7- فئة من المختصين ، (2009) ، التحليل ، الصف الثالث الثانوي العلمي، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ،وزارة التربية، دمشق .
- 8- فئة من المختصين ، (2009) ، الجبر ، الصف الثالث الثانوي العلمي، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ،وزارة التربية، دمشق .
- 9- فئة من المختصين ، (2009) ، الرياضيات ، الصف الثالث الثانوي العلمي، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ،وزارة التربية، دمشق .
- 10- الفقير ، أحمد ، وآخرون ، (1995) ، الحساب النظري ، المؤسسة العامة للمطبوعات و الكتب المدرسية ، وزارة التربية ، دمشق .
- 11- محمد الهوشي، (1975)، مبادئ الجبر، مطبوعات جامعة تشرين، اللاذقية- سوريا.

12- معروف عبد الرحمن سمحان، أحمد حميد شراري، (2001) ، مبادئ الرياضيات المتقطعة، مطبوعات جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية.

- 13-Althoen S. C. and Bumcrot R. J., Introduction to Discrete Mathematics. PWS - Kent, 1988.
- 14-Bogart K. P., Introductory Combinatorics. Pitman, 1983.
- 15-Brualdi R. A., Introductory Combinatorics. North Holland, Elsevier, 1979.
- 16-Gerstein L. J., Discrete Mathematics and Algebraic Structures. Freeman, 1987.
- 17-Grimaldi R. P., Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied Introduction, Addison - Wesley, 1985.
- 18-Hillman A. P., Alexanderson G. L. and Grassi R. M., Discrete and Combinatorial Mathematics. Dellen - Macmillan, 1987.
- 19-Johnsonbaugh R., Discrete Mathematics (Revised Edition).Macmillan, 1986.
- 20-Molluzzo J. C. and Buckley P., A First Course in Discrete Mathematics. Wadsworth, 1986.
- 21-Polimeni A. D. and Straight H. J., Foundation of Discrete Mathematics. Brooks/Cole, 1985.
- 22-Roberts F. S., Applied Combinatorics. Prentice - Hall, 1984.
- 23-Roman S., An Introduction to Discrete Mathematics, Sounders College Publishing, 1986.
- 24-Tucker A., Applied Combinatorics. John Wiley and Sons, 1980.

المصطلحات العلمية

Absolute value	قيمة مطلقة
Additive	تبديلية
Addition	جمع
Adjutant matrix	مصفوفة مرافقة (مساعدة)
Algebra	جبر
Algorithm	خوارزمية
Applications	تطبيقات
Associative	تجميعية
Average	متوسط
Binary	ثنائي
Bounded	محدود
Calculation	حساب
Cartesian product	جداء ديكارتي
Combination	التوافيق
Complex number	العدد المركب
Conjunctive	مرافق
Convergent	متقاربة
Cubature	تكعيب
Decimal	عشري
Decimal number	عدد عشري
Decomposition	تحليل

Decreasing	متناقصة
Definition	تعريف
Derivation-differentiation	الاشتقاق
Determinant	محدد
Diagram	مخطط
Difference	فرق
Digit	رقم
Divergent	متباعد
divisibility	قابلية القسمة
division	قسمة
Division	قسمة
Divisor	قاسم
Element	عنصر
Equation	معادلة
Even	زوجي
Exponent	الأس
Fraction	كسر
Fractional number	عدد كسري
Function	دالة
Geometry	هندسي
Homogeneous	متجانسة
Identity	مطابقة
Increasing	مترابطة
Infinity	لانهاية

Integer	عدد صحيح
Integral	صحيح
Intersection	تقاطع
Interval	مجال
Law	قانون
Linear	خطية
Logarithm	اللوغاريتم
Mathematic	رياضيات
Mathematical induction	الاستقراء الرياضي
Matrix	مصفوفة
Multiple root	جذر مضاعف
Multiplication	ضرب
Natural	طبيعي
Negative	سالب
Number	عدد
Numerator	بسط
Octal System	نظام ثماني
Odd	فردى
Operation	عملية
Parabolic	مكافئة
Permutation	التباديل
Primary	أولى
Prime number	عدد أولى
Product	جداء

Quotient	حاصل قسمة
Ratio	نسبة
Real number	عدد حقيقي
Reduction	اختزال
Relation	علاقة
Remainder	باق
Root	جذر
Séquence	متتالية
Set	مجموعة
Simple root	جذر بسيط
Solution	حل
Square root	جذر تربيعي
Square-quadrature	تربيع
Strong induction	الاستقراء القوي
Subtraction	طرح
Sum	مجموع
Symbol	رمز
Symmetric difference	فرق تناظري
System	نظام
System	جملة
Tangent	مماس
Theorem	مبرهنة
Transpose	منقول
Trigonometric ratio	النسب المثلثية

Unbounded

غير محدودة

Union

اجتماع

Unique

وحيد

Vulgar fraction

كسر عادي



التدقيق العلمي

الأستاذ الدكتور عبد الواحد أبو حمدة

الأستاذ الدكتور محمد صبح

الأستاذ المساعد الدكتور عبد اللطيف هنانو

التدقيق اللغوي

د.حمود يونس

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

Damascus University