

الاهتزازات الميكانيكية والأمواج

تنشأ الحركات الاهتزازية على حساب مخزون طاقة اهتزاز المنظومة المهتزة بدون تأثير قوى خارجية، وتُسمى مثل هذه الاهتزازات: **الحرّة**.

وعند وجود مقاومة تُسمى الحركة الاهتزازية: **متخامدة**.

وتُسمى عملية الاهتزاز تحت تأثير قوة خارجية متغيرة مع الزمن: **اهتزازات مُحرضة**.

1.2. الاهتزاز التوافقي

الشكل البسيط للحركة الاهتزازية هو **الاهتزازات التوافقية**، حيث يتغير المقدار المهتز مع الزمن وفق قانون الجيب أو جيب التمام (التّجيب):

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2.1)$$

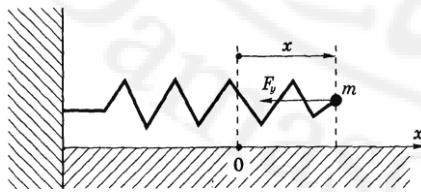
حيث إنّ:

x - الإزاحة اللحظية للجسم عن مركز التوازن،	ω - التواتر الدائري للاهتزاز،
A - سعة الاهتزاز، أي الإزاحة الأعظمية،	t - الزمن،
$(\omega t + \varphi_0)$ - الطور اللحظي للاهتزاز،	φ_0 - الطور الابتدائي للاهتزاز،

يرتبط دور الاهتزاز T وتواتره الخطي f وتواتره الدائري ω بالعلاقات الآتية:

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2.2)$$

وإذا ما أردنا أن نُبرهن أن الاهتزازات التوافقية تظهر تحت تأثير قوة المرونة أو ما يُشابهها (قوة شبه مرنة)، فإننا نقوم بما يلي:



الشكل 1.2. اهتزاز نقطة مادية

معلقة بنابض

لتكن لدينا نقطة مادية كتلتها m مُثبتة في نابض صلابته k ، ويوضعان على سطح أملس مثالي أفقي (الشكل 1.2). فإذا ما قُمنا بشدّ النابض لمسافة x ، تؤثر من جهة النابض في هذه النقطة قوة مرونة F_{ela} تتناسب مع الإزاحة x وفق قانون "هوك":

$$F_{ela} = -k \cdot x$$

وتدل الإشارة السالبة على أن الإزاحة وقوة المرونة متعاكستان بالاتجاه.

وإذا ما أردنا تحديد طبيعة الحركة، أي: العلاقة $x = f(t)$ ، فإننا نكتب قانون نيوتن الثاني على شكل معادلة تفاضلية (وذلك لأنَّ تسارع الجسم $a = d^2x/dt^2$)، آخذين بالاعتبار: أنَّ الحركة في الحالة المدروسة تتعيَّن فقط بوجود قوة المرونة:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x \quad (2.3)$$

نقسم طرفي المعادلة (2.3) الأيمن والأيسر على m ، ونرمز لنسبة المقدارين الموجبين k و m من خلال $\omega_0^2 = k/m$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x = -\omega_0^2 x \quad (2.4)$$

ولنثبت أن حلَّ هذه المعادلة التفاضلية هو اهتزازة توافقية:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.5)$$

لأجل ذلك يجب أن تُفاضل المعادلة (2.5) مرتين:

$$v = dx/dt = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.6)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.7)$$

ونعوض النتيجة في المعادلة (2.4):

$$-A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{k}{m} A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$$

أو:

$$-A_0 \left[\frac{k}{m} - \omega_0^2 \right] \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$$

هذه المساواة يجب أن تتحقق في أي لحظة زمنية، وهذا ممكن فقط من أجل الشرط:

$$\omega_0^2 = k/m \quad (2.8)$$

والنتيجة:

- إذا كانت القوة المحصلة المؤثرة في الجسم هي قوة مرونة، فإن الجسم ينجز اهتزازاً توافقياً من الشكل (2.5)، ويتعيَّن التواتر الدائري للاهتزاز $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ، فقط بكتلة الجسم وبخواص المرونة (الصلابة) للمنظومة، ولذلك يُسمَّى تواتراً خاصاً للجسم المهتز.

تدل المقارنة بين المعادلتين (2.5) و (2.2): أن الإزاحة والسرعة في الاهتزاز التوافقي يختلفان في الطور بمقدار $\pi/2$ ، وسعة السرعة تساوي $v_{max} = A_0 \omega_0$. وسرعة الجسم أعظمية عند المرور في وضع التوازن (الإزاحة تساوي الصفر)، وعند الإزاحة العظمى (المساوية للسعة) تساوي الصفر.

ينتج من المعادلتين (2.5) و (2.7): أن إزاحة الجسم وتسارعه يتغيران بطورين متعاكسين، وسعة التسارع تساوي $a_{max} = f_{max} \omega_0 = A_0 \omega_0^2$.

تعيّن الطاقة الكلية في الاهتزاز التوافقي E بمجموع الطاقتين الحركية E_k والكامنة E_p :

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{mx^2}{2} \quad (2.9)$$

بالتعويض في صيغة السرعة (2.2)، والإزاحة (2.5) في العلاقة (2.9)، وبمراعاة أن $k = \omega_0^2 m$ نحصل على:

$$E = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2 \quad (2.9a)$$

والنتيجة:

- إن الطاقة الكلية للاهتزاز التوافقي لا تتعلّق بالزمن، وتناسب طرماً مع كتلة الجسم، ومُرَبَّع السعة ومُرَبَّع تواتر الاهتزاز.

- والطاقة الحركية والكامنة تتغيران باستمرار مع الزمن، ولكن يبقى مجموعهما ثابتاً دائماً.

2.2. الاهتزازات المتخامدة

هناك بعض قوى المقاومة في المنظومات الحقيقية المهتزة، والتي تعيق تطوّر عمليات الاهتزاز. وفي هذه الحالة لإيجاد طابع الحركة الاهتزازية، نعتبر - بالإضافة إلى قوة المرونة أو شبه المرونة F_{ela} :- أن هناك قوة احتكاك تؤثر في المنظومة، وهي تتناسب مع السرعة، وتتوجّه باتجاه مُعَاكِسٍ لقوة المرونة: $F_{fri} = -r \left(\frac{dx}{dt} \right)$. ولدى احتساب تأثير هاتين القوتين في طابع الحركة فإنه يؤدي إلى المعادلة التفاضلية الآتية (قانون "نيوتن" الثاني):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - r \frac{dx}{dt} \quad (2.10)$$

وبقسمة طرفيّ هذه المعادلة الأيمن والأيسر على m ، وبأخذ الرمز $\frac{r}{m} = 2\beta$ ، وبالحفاظ على الرمز $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ نحوّل هذه المعادلة إلى الشكل الآتي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.11)$$

ومن الممكن أيضاً أن يكون لهذه المعادلة حلٌّ من الشكل الآتي:

$$x = A_0 e^{-\beta \cdot t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.12)$$

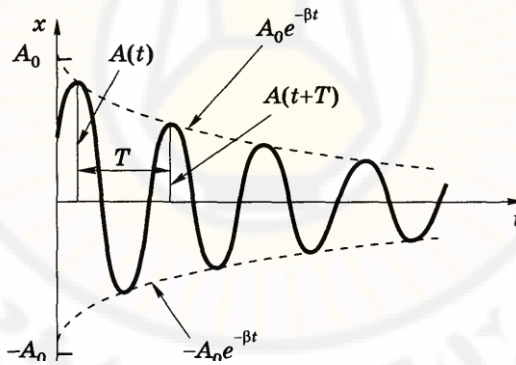
حيث تدل (2.12) على: أن إزاحة الجسم مع الزمن يحدث وفق قانون توافقيّ بتواتر ω ، ولكن تتناقص سعة الاهتزاز مع الزمن: $A = A_0 e^{-\beta \cdot t}$. ويُسمى المُعامل $\beta = r/2m(s^{-1})$ بمُعامل التخماد. وكُلّما كان أكبر كُلاًّما كان تخامدُ الاهتزاز أسرع.

وبالمقارنة مع الحالات السابقة فإنّ التواتر الدائريّ للاهتزاز الخاصّ ω يتناقصُ أيضاً:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.13)$$

وتحدث عملية الاهتزاز فقط من أجل الشرط $(\omega_0^2 - \beta^2) > 0$ ، أي: عندما $\omega_0 > \beta$. وإذا كان التخماد في المنظومة كبيراً جداً ($\omega_0 < \beta$) ، فإنّ القيمة تحت الجذر في العلاقة (2.13) تصبح سالبةً، وفي هذه الحالة الاهتزاز غير ممكن، وطابع الحركة لا دوري.

يُوضّح الشكل 2.2 الاهتزاز المتخامد؛ حيث تدلّ الخطوط المستمرة على تبعية الإزاحة للزمن، بينما تدلّ الخطوط المتقطعة على القانون الأسّي لتناقص السعة.



الشكل 2.2. تبعية الإزاحة x للزمن t في حالة الاهتزاز المتخامد

في التطبيقات العملية يمكن تمييز الاهتزاز المتخامد من خلال تناقص التخماد δ ، والذي يُعبّر عن نسبة سَعَتَيْن متتاليتين، يفصل بينهما دورُ الاهتزاز T (انظر الشكل 2.2).

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} \quad (2.14)$$

ويُسمى اللوغاريتم الطبيعي لهذه العلاقة بالتناقص اللوغاريتمي للتخماد λ ، ويرتبط بالدور وبمُعامل التخماد بالعلاقة:

$$\lambda = \ln[\delta] = \ln \left[\frac{A_0 e^{-\beta \cdot t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} \right] = \ln[e^{\beta \cdot T}] = \beta \cdot T \quad (2.15)$$

وتتلخص سهولة استخدام التناقص اللوغاريتمي للتخامد λ لوصف الاهتزازات المتخامدة بإمكان تعيينه البسيط في التجربة؛ حيث يتم تسجيل الاهتزاز المتخامد بشكل يُوافق المنحني (الشكل 2.2) وذلك: بقياس سعتين للاهتزاز (بأي وحدة)، مأخوذتين من خلال الدّور، ومن ثمَّ إيجاد اللوغاريتم الطبيعيّ لنسبتهما. وهكذا: بتعيين λ ، ومعرفة الدور T ، يمكن بسهولة إيجاد مُعامل التخامد β .

3.2. الاهتزازات القسرية

في هذه الحالة تؤثر في منظومة الاهتزاز خارجية ما، بالإضافة إلى قوَيّ المرونة والاحتكاك، حيث تُعيق القوّة الخارجية تخامد الاهتزاز.

نفترض أنّ القوة القسرية F_{com} تؤثر دورياً بتواتر دائري Ω مرتبط بالزمن وفق العلاقة:

$$F_{com} = F_0 \sin(\Omega. t)$$

حيث: F_0 - هي سعة القوة القسرية.

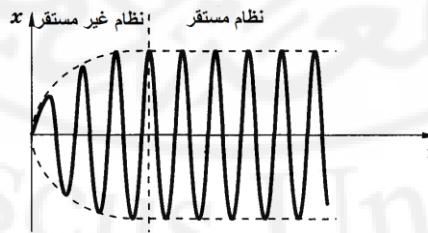
فإنّ في هذه الحالة تملك المعادلة التفاضلية للاهتزاز وفق قانون نيوتن الثاني الشكل الآتي:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k.x - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\Omega. t) = 0 \quad (2.12)$$

وبالحفاظ على الرمز $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ و $\frac{r}{m} = 2\beta$ ، وبأخذ الرمز $\frac{F_0}{m} = f_0$ تتحول المعادلة (2.12) إلى الشكل التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega. t) \quad (2.13)$$

وحل هذه المعادلة هو دالة ما؛ كالموضحة بالمنحني على الشكل 3.2. ويتكون هذا الحل من جزأين: أحدهما يُوافق نظام الاهتزاز غير المستقر؛ حيث تتعلّق سعتُهُ مع الزمن، والجزء الثاني يصف نظام الاهتزاز المستقرّ.



الشكل 3.2. تبعية الإزاحة x للزمن t في حالة الاهتزاز القسري

تتبع الإزاحة x في النظام المستقرّ للاهتزاز القسريّ لقانون جيبي (توافقي)، وتحدث بتواتر يساوي تواتر تأثير القوة القسرية:

$$x = A \sin(\Omega. t + \varphi) \quad (2.14)$$

وتعتمد السعة المستقرة A للاهتزاز على بارامترات المنظومة (تواتر الاهتزاز الخاص ω_0 ومُعامل التخميد β)، وعلى طابع القوة القسرية (f_0 و Ω): $A = f(\omega_0, \beta, f_0, \Omega)$. وبدراسة منضبطة نحصل على العلاقة الآتية لقيمة A و φ الداخليّين في العلاقة (2.17):

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad (2.15)$$

$$\tan \varphi = \frac{-2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (2.16)$$

وينتج عن المعادلة (2.19): أنّ السعة تبلغ قيمةً عظمى A_{max} عندما يأخذ المقام قيمةً دُنيا، ويحدث هذا من أجل الشرط:

$$\Omega = \Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (2.17)$$

وهكذا، إذا تعيّن تواتر القوة القسرية وفقّ العلاقة (2.21)، تكون سعة الاهتزاز القسرية أعظميةً. إنّ ظاهرة الازدياد الحادّ لسعة الاهتزاز القسريّ الذي يحدث من أجل تواترٍ ما للقوة القسرية يُسمى بالتجاوبي، ويُسمى التواتر المعيّن بالعلاقة (2.21) تجاوبياً. فإذا انعدم التخميد في المنظومة المهتزة ($\beta = 0$)، فإن التجاوب يحدث عندما $\Omega = \omega_0$ ، وتسعى السعة إلى قيمة كبيرة لا نهائية.

4.2. جمع الاهتزازات التوافقية

تعتمد نتيجة جمع الاهتزازات التوافقية على اتجاه الإزاحة للاهتزازات الجاري جمعها، وعلى النسب بين تواتراتها، وأطوارها وسعاتها.

جمع اهتزازين لهما نفس التواتر، ويحدثان على طول خط مستقيم واحد:

في هذه الحالة يختلف الاهتزازان المجموعان فقط بالسعة A_1 و A_2 وبالطور الابتدائي φ_1 و φ_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega.t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega.t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

ونتيجة جمع هذين الاهتزازين هو اهتزاز توافقيّ يحدث بنفس التواتر:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega.t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega.t + \varphi_2) \\ &= A \sin(\omega.t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

لا تعتمد سعة الاهتزاز المُحصّل A فقط على سعة الاهتزازين الأولين A_1 و A_2 ، بل أيضاً على فَرْق الطُّور الأوليّ بينهما φ_1 و φ_2 :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (2.24)$$

وَيُعَيَّن الطَّور الابتدائي φ للاهتزاز المحصل من العلاقة الآتية:

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad (2.25)$$

وعلى هذه الصورة يحدث الاهتزاز المحصل وفق قانونٍ توافقيٍّ (جَيِّبيٍّ) بنفس تواتر الاهتزازين الأولين، ولكنَّ سعة الاهتزاز المحصل تعتمد بوضوح على فَرْق الطَّور الابتدائيِّ للاهتزازين الأولين. والسَّعة أعظميَّة وتساوي $A = A_1 + A_2$ فيما إذا توافقت الاهتزازان الأولان بالطَّور أو إذا اختلفا بمقدار $2k\pi$ ، أي:

من أجل $\Delta\varphi = 2k\pi$ حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ السَّعة دنيا وتساوي $A = |A_1 - A_2|$ فيما إذا تعاكس الاهتزازان الأولان بالطَّور، أي: من أجل $\Delta\varphi = \pi(2k + 1)$ ، حيث: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. وعندما $A_1 = A_2$ يطفئ الاهتزازان بعضهما بعضاً و $A = 0$.

من أجل القيم الأخرى لفرق الطور $\Delta\varphi$ تتعين سعة الاهتزاز المحصل من العلاقة (2.24).

جمع اهتزازين مختلفين بالتواتر، ويحدثان على طول خط مستقيم واحد:

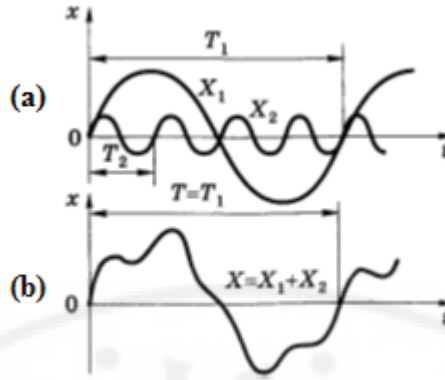
في هذه الحالة: الاهتزازان المجموعان توافقيَّان، ويحدثان بتواترين مختلفين:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

ويوضَّح الشكل (2.4,a) و (2.4,b) الاهتزازين الأولين، ونتيجة جمعهما على الترتيب.

عند جمع اهتزازين جَيِّبيَّين (توافقيَّين) بتواترين مختلفين ω_1 و ω_2 (دوراهما T_1 و T_2)، فإنَّ الاهتزاز المحصل لن يكون جيبياً، ويمثل حركة دوريةً أكثر تعقيداً.

إذا جُمع اهتزازان جيبيان بتواترين أحدهما مضاعفٌ للآخر (مثلاً على الشكل 4.2 a)، ويُقصد هنا فقط الاهتزازات المترابطة، أي: الاهتزازات التي فَرْق الطَّور الابتدائيِّ لها ثابتٌ مع الزمن ($\omega_2 = 4\omega_1$)، فإن دور الاهتزاز المحصل T يتطابق مع الدور الأكبر T_1 للاهتزازين المجموعين: $T = T_1$ ، وتواتر الاهتزاز المحصل يتطابق مع التواتر الأصغر $\omega = \omega_1$.



الشكل 4.2

جمع اهتزازين بتواترين مختلفين $\omega_2 = 4\omega_1$: -a الاهتزازين الأولين، $T_1 = 4T_2$ ، -b الاهتزاز المحصل اللاتوافقي

5.2. تحليل الاهتزازات المعقدة في سلسلة "فورييه"

يؤدي التمعّن في الشكل 4.2 إلى النتيجة المعروفة بنظرية "فورييه" والتي تتلخّص فيما يلي: إنّ أيّ حركة دورية مُعقّدة $x(t) = x(t + T)$ بدور T (تواتر $f = 1/T$) يُمكن أن تُمثّل على شكل مجموع اهتزازاتٍ جيبيّةٍ، تواتراتها مضاعفاتٌ للتواتر f للعملية الدورية المدروسة: $f_k = k \cdot f$. ويمكن كتابة هذا البرهان على شكل علاقاتٍ تُمثّل سلسلة "فورييه":

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (2.27)$$

حيث: A_k -سعة التوافقيات المجموعة، و φ_k -الأطوار الابتدائية للتوافقيات.

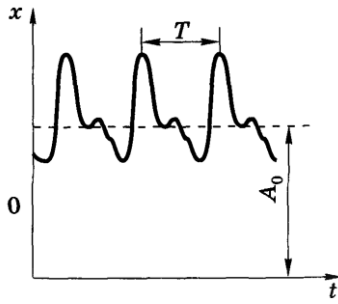
تملك التوافقية الأولى التواتر الدائري ω_1 الذي يساوي التواتر الدائري للاهتزاز المركّب $\omega_1 = \omega = 2\pi f$ ، وتملك التوافقية الثانية التواتر الدائري 2ω ، والثالثة 3ω وهكذا. إنّ الحد A_0 في العلاقة (2.27) هو مقدار ثابت، وله مفهوم مُركّبة ثابتة للعملية الدورية المركّبة.

ويوضح الشكل 5.2 التابع الدوري $x(t)$ الذي يصف اهتزاز مقدار ما (مثلاً: تغير نبض امتلاء الأوعية الدموية): تحدث على خلفية قيمتها الوسطى الثابتة (مثلاً: المستوى الوسطى للامتلاء بالدم)، والذي يُوصف بالمقدار A_0 في العلاقة (2.27).

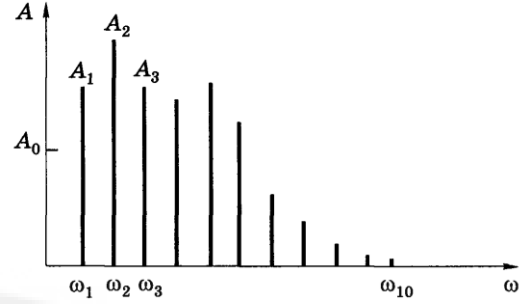
إنّ عدد التوافقيات الداخلة في تركيب الاهتزاز المعقّد (2.27) يتعيّن من تعقيد الاهتزاز الأولي $x(t)$ ، ويمكن أن يكون كبيراً جداً (عشرات، مئات، وألوف من التوافقيات).

وعند دراسة العمليات الاهتزازية الحقيقية يجب الأخذ بالحسبان الإسهام المختلف للتوافقيات المنفردة المركّبة للاهتزاز المعقّد المحلّل؛ حيث تدخل التوافقيات المنفردة بسعاتٍ مختلفةٍ في العلاقة (2.27).

المنحنى الذي يُمثّل فيه محور الترتيب (السيني) تواتر التوافقيات، ومحور (التوافقي) العينات، يُمثّل السعات الموافقة للتواترات يُسمّى بالطيف التوافقي للاهتزاز المعقّد (الشكل 2.6).



الشكل 2.6. الطيف التوافقي



الشكل 5.2. اهتزاز معقد بمركبة ثابتة A_0 اهتزاز معقد

فإنه ووفقاً للشكل 2.6 يمكن أن نستنتج:

- أن التوافقيات التي تواترتها أكبر من ω_{10} لها سعات صغيرة جداً، وبالتالي، إسهامها منخفض في الاهتزاز وفي الطيف التوافقي الموضح في هذا الشكل.
- ويمكن اعتبار أن سلسلة "فورييه" لهذه الحالة تحتوي على 10 حدود ($\omega = 1, 2, 3, \dots, 10$)، وتنحصر جميع المعلومات عن العملية الاهتزازية في نطاق التواترات من ω_1 (التواتر الأساسي للعملية) إلى ω_{10} .

7.2. الأمواج الميكانيكية

الأمواج الميكانيكية: هي عملية انتشار الاهتزازات الميكانيكية في الأوساط المرنة.

تؤدي الإزاحة الدورية لأحد الجسيمات، بسبب وجود روابط مرنة بين جسيمات الوسط، إلى إزاحة الجسيمات المجاورة بنفس التواتر، وتنتشر هذه العملية في الوسط المرن بسرعة ما، وتعيّن فقط بمعامل مرونة الوسط E وكثافته ρ :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.28)$$

وتسمى الموجة **طولية** إذا تطابق اتجاه إزاحة جسيمات الوسط مع اتجاه انتشار الموجة، ويمكن أن تنتشر الأمواج الطولية في أيّ وسط (عدا الفراغ)، بينما الأمواج العرضية تنتشر فقط في الأجسام الصلبة.

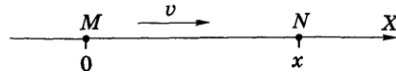
1.7.2. معادلة الموجة

تعيّن المعادلات الرياضية المدروسة سابقاً والتي تصف طابع الاهتزاز، الانزياح كتابع فقط لمتحول واحد هو الزمن. وفي الموجة ترتبط إزاحة جسيمات الوسط S بمتحولين: الزمن t ، والإحداثيات في الفراغ x ، ولذلك تملك الإزاحة دورية مضاعفة.

للحصول على معادلة الموجة، أي: العلاقة التحليلية لتابع الإزاحة بالمتحولين $S = f(t, x)$ ، فإننا نعتبر نشوء اهتزاز توافقي في نقطة ما M من الفراغ بتواتر دائري ω ، وسعة A ، وطور ابتدائي $\varphi = 0$:

$$S_M = A \sin \omega t$$

وبما أنَّ جُسيمات الوسط ترتبط فيما بينها بمرونة، ينتقل الاهتزاز من النقطة M على طول المحور x بسرعة v ، ويبلغ النقطة N خلال زمنٍ ما Δt (الشكل 8.2).



الشكل 8.2. معادلة الموجة

في حالة غياب التخميد في الوسط، تتأخر الإزاحة في النقطة N بالزمن Δt بالنسبة إلى النقطة M ، ويكون لها الشكل $S_N = A \sin \omega(t - \Delta t)$. وبما أنَّ $\Delta t = MN/v = x/v$ ، وبتعويض هذا في العلاقة S_N نحصل على معادلة الموجة:

$$S = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (2.29)$$

وبمراعاة أنَّ: $\omega = 2\pi/T$ ، حيث: T - الدور، وطول الموجة $\lambda = vT$ يمكن كتابة العلاقة (2.29) بالشكل التالي:

$$S = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.30)$$

ويمكن بواسطة معادلة الموجة (2.29) أو (2.30) تعيين إزاحة أي نقطة إحداثياتها x في أي لحظة زمنية t .

2.7.2. تدفق الطاقة وشدة الموجة "شعاع أوموف"

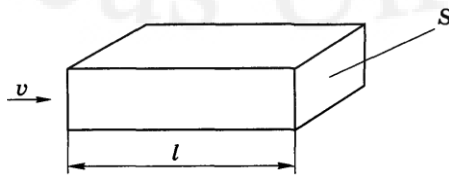
ترتبط العملية الموجية بانتشار الطاقة E في الفراغ. والمقدار الذي يصف كمية طاقة العملية الموجية هو تدفق الطاقة Φ ، ويُعرَّف بأنه: نسبة الطاقة التي تحملها الموجة من خلال سطحٍ ما إلى الزمن t الذي يتم خلاله نقل الطاقة. وإذا كان نقل الطاقة منتظماً، فإنَّ $\Phi = E/t$.

وفي الحالة العامة يُمثل التدفق مشتق الطاقة بالنسبة للزمن $\Phi = dE/dt$ ، ووحدة قياس تدفق الطاقة في جملة الوحدات الدولية هي الواط ($1W = 1J/s$).

شدة الموجة (كثافة تدفق الطاقة) I وتُعرَّف بأنها: نسبة تدفق الطاقة Φ إلى مساحة السطح S العمودي على اتجاه انتشار الموجة، وتُعبّر عن تدفق الطاقة من خلال واحدة السطوح.

وفي حالة التوزيع المنتظم للطاقة وفق هذا السطح $I = \Phi/S = E/(St)$ ، وفي الحالة العامة $I = d\Phi/dS$ وتقاس الشدة بالوحدة W/m^2 . ومثالاً على ذلك:

ليكن لدينا موجة منتشرة بسرعة v ، تُمثل انتشار الموجة في منطقة من الوسط على شكل متوازي مستطيلاتٍ طوله l ، ونرمز لسطح وجهٍ متوازي المستطيلات العمودي على اتجاه انتشار الموجة بالرمز S (الشكل 9.2).



الشكل 9.2. العلاقة بين شدة الموجة وسرعة انتشارها

ونُعرّف الكثافة الحجمية Γ للطاقة للحركة الاهتزازية، والتي تُعبّر عن كمية طاقة الاهتزاز في وحدة حجم الوسط:

$$\Gamma = E/V$$

وخلال الزمن t تعبر من خلال السطح S طاقة تساوي جداء قيمة الحجم $V = lS = vtS$ بكثافة الطاقة الحجمية:

$$E = \Gamma vtS \quad (2.31)$$

وبتقسيم طرفي هذه المعادلة الأيمن والأيسر على الزمن والسطح، نحصل على عبارة تربط شدة الموجة بسرعة انتشارها: $I = \Gamma v$ ، والشعاع $\bar{I}$ الذي تساوي قيمته السليمة شدة الموجة، ويتطابق بالاتجاه مع اتجاه انتشار الموجة يُسمى بشعاع "أوموف":

$$\bar{I} = \Gamma \bar{v} \quad (2.32)$$

ويمكن كتابة العلاقة (2.32) بشكل آخر، وذلك:

باعتبار أنّ طاقة الاهتزاز التوافقيّ [انظر: العلاقة (2.9)] $E = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega_0^2$ ، والكتلة $m = \rho V$. حيث: ρ - كثافة المادة، و: V - حجم المادة.

فإننا نحصل على عبارة الكثافة الحجمية لطاقة الموجة:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega_0^2 \quad (2.33)$$

عندئذ تأخذ المعادلة (2.32) الشكل الآتي:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega_0^2 \bar{v} \quad (2.34)$$

وهكذا تتناسب شدة الموجة الميكانيكية طردياً مع سرعة انتشارها، ومع مربع سعة اهتزاز جسيمات الوسط، ومع مربع تواتر الاهتزاز.

عناصر الميكانيك الحيوي

إنَّ من أهمِّ ما تتناوله دراسة الميكانيك الحيوي قوانين الحركة وتشوُّه البنى والأنسجة البيولوجية تحت تأثير عوامل الوسط المحيط والنظام العضليّ.

وتبرز أهمية المسائل التي يعالجها الميكانيك الحيوي في أنَّه يتناول العلوم التَّقنيَّة والطبيَّة والبيولوجيَّة، ويدرسها على حدِّ سواء. ولعل هذا يرجع إلى أنه في عملية التطور نشأت الأنظمة البيولوجية الأمثل في التصميم؛ ليس فقط فيما يتعلق بوظائفها الحيوية، ولكن أيضاً بالنسبة لخصائص المواد التي تُحدِّد سلوكها الميكانيكي؛ لذلك:

فإن دراسة الخصائص الهيكلية والميكانيكية لمختلف الأنسجة الحيويَّة سوف تُساهم في خَلْق ونشوء موادٍّ - مثل: (المركبات عادة)^(١) - مناسبة أكثر لاستبدال الهياكل الطبيعية المتضررة. إنَّ الإنسان والكائنات البيولوجيَّة الأخرى، كوُحها جزءاً من العالم الماديّ، تخضع بطبيعة الحال لقوانين الميكانيك والفيزياء.

وبسبب امتلاك الكائنات الحيَّة لعدد من الميزات الواجب مراعاتها عند دراسة سلوكها البيولوجي، فهي تختلف عن الأنظمة التَّقنيَّة، ولعل الاختلاف الأبرز الذي يُكسبها هذه الأهمية هو: قدرة الأنظمة الحية على التكيف على المدى الطويل، أو عند التعرض المتكرر للعوامل الخارجية، وذلك من خلال إعادة التنظيم الوظيفي والمورفولوجي للهياكل المنفردة.

ولدى التعمُّق في تتبُّع ودراسة الميكانيك الحيوي تبين أنَّها تُعالج موضوعاتٍ ومجموعةً متنوعةً من المسائل، والتي سنتطرَّق للحديث عنها في هذا الفصل:

١. الحركات وديناميك الحركات عند الإنسان.
٢. أنواع التشوهات والخصائص الميكانيكية للأوساط.
٣. الخصائص الميكانيكية للأنسجة البيولوجية ومميزاتها.

(١) المواد المركبة: هي مواد غير متجانسة في التركيب، حيث توفر مجموعة المكونات المختلفة الخصائص الفيزيائية والميكانيكية الضرورية.

1.1. علم الحركة وديناميك حركة الإنسان

أنواع المزدوجات العظمية ودورها في حركة الإنسان:

من وجهة نظر الميكانيك الحيوي، إنَّ جهاز الحركة لدى الإنسان يُمثِّل نظاماً مُتحكِّماً به للعظام المتصلة المتحركة ذات الأبعاد والكتل وعُزُوم العطالة المعيّنة والمجهَّزة بمُحرِّكات العضلات.

ويتكون الهيكل العظمي من 206 عظمة:

1 - 85 عظمة مزدوجة.

2 - 36 عظمة منفصلة.

وهذه العظام ترتبط بالمفاصل والأربطة؛ وهي تُمثِّل الجزء الحامل من جهاز الحركة الاستنادي عند الإنسان.

وعضلات الهيكل العظمي العرَضِيَّة المخطَّطة (وهي أكثر من 600 عظمة) هي الجزء النَشِط منه، وله الدور الأبرز الذي يؤدي إلى حركة وصلات العظام.

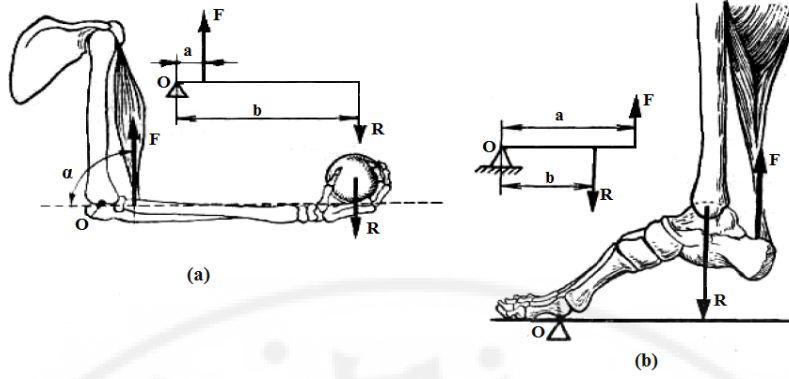
ويتحكم الجهاز العصبي المركزي بحركة الجهاز العضلي الهيكلي.

ومن هنا يتَّضح لنا أنه يتم تنفيذ الحركة بواسطة نظام الرفعات (المزدوجات) العظمية التي تتحرك بواسطة قوة الشد الناتجة عن تقلُّص العضلات.

والمزدوجة هي: جسم صلب يحتوي على محور دوران (نقطة ارتكاز)، وهي النقطة التي تطبق فيها القوتين المسببتين لعزم القوة بالنسبة لهذا المحور.

ونذكر: أن عزم القوة (بالنسبة إلى محور ما، أو نقطة ارتكاز) يساوي ناتج جداء قيمة القوة بذراع تأثيرها، وذراع القوة هو أقصر مسافة من محور الدوران إلى خط تأثير القوتين الواقعتين في مستوى الدوران.

ومثالاً على المزدوجة: نعتبر الساعد (الشكل a-1, 1)، وهنا تُطبق قوة الدفع العضلي F على الذراع القصير a للمزدوجة (نقطة الارتكاز O - مفصل الكوع)، ويُطبق على ذراعها الطويل b حمل R قوة شدٍّ لاحتجاز الحمل، والمطبقة عادةً على كفِّ اليد، وكذلك أيضاً قوة جذب الساعد نفسه، المطبقة في مركز كتلته (لا تظهر في الشكل، وبالتالي: لا تؤخذ في الاعتبار فيما يلي)، ويساوي عزم هاتين القوتين $F.a$ و $R.b$ على الترتيب.



(الشكل 1.1). شكلين رئيسيين للرافعة: a - مزدوجة السرعة، b - مزدوجة القوة

ولكي تتوازن المزدوجة فإنَّ من الضروريّ تساوي العزم للقوتين المتعاكستين المطبقتين عليها:

$$F \cdot a = R \cdot b \quad (1.1)$$

عند حركة المزدوجة تكون السرعة الزاوية واحدة في جميع نقاطها $\omega = v/r$ (v هي السرعة الخطية للنقطة، r هي بُعدها عن محور الدوران)، ولذلك من الواضح أنَّه بالنسبة لنقاط تطبيق الحمل والعضلات على المزدوجة يمكن أن نكتب ما يلي:

$$\frac{v_{ca}}{b} = \frac{v_m}{a} \quad (1.2)$$

حيث v_{ca} - سرعة حركة الحمل، v_m - سرعة تقلص العضلة. وينتج عن هاتين العلاقتين أن:

$$F = R \cdot b/a \quad \text{قوة شد العضلة هي:}$$

$$\text{وسرعة تحريك الحمل هي: } v_{ca} = v_m \cdot b/a$$

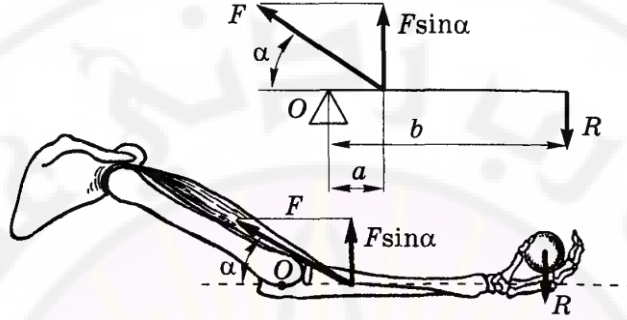
عندما $a < b$ تخسر المزدوجة في القوة ($F > R$)، ولكنها تريح في سرعة نقل الحمل ($v_{ca} > v_m$)؛ ولذلك: تُسمى مزدوجة السرعة (الساعد مثلاً، الشكل 1, a).

ومن أجل $a > b$ تعطي المزدوجة ربحاً في القوة ($F < R$) وتسمى مزدوجة القوة، ولكن في نفس الوقت تخسر في سرعة تحريك الحمل ($v_{ca} < v_m$).

وأوضح مثال على هذه المزدوجة هو: قوس القدم عندما يرتفع إلى نصف أصابع القدم (الشكل 1, b). ففي هذه الحالة تعمل رؤوس عظام مشط القدم وتكون كنقطة ارتكاز للمزدوجة O التي تتغلب على قوة جذب الجسم R المطبقة على عظم الكاحل، ويتم نقل القوة العضلية F التي ترفع الجسم عبر وتر العرقوب وتُطبق على نتوء عظم الكعب، وبما أن $a > b$ هنا، فإن $F < R$.

وغالباً ما تتوجه القوة العضلية F في المزدوجة بزاوية α تختلف عن 90° (الشكل 2.1). وفي هذه الحالة تأخذ حالة التوازن للمزدوجة الشكل التالي:

$F \cdot a \cdot \sin\alpha = R \cdot b$ ومنه: $F = R \cdot b / (a \cdot \sin\alpha)$ أي: أن الجهد العضلي F الضروري للتغلب على قوة المقاومة R يجب أن يكون أكبر كلما كانت زاوية اتجاهها أصغر بالنسبة لمحور المزدوجة.



الشكل 2.1. مثال لمزدوجة السرعة من أجل $\alpha < 90^\circ$

يطور الليف العضلي منفرداً قوة من مرتبة $2mN$ عند التقلص، وتحتوي عضلات الإنسان $3 \cdot 10^7$ ليفاً عضلياً. فلو تقلصت هذه العضلات معاً في اتجاه واحد لأنتجت قوة هائلة تصل إلى $6 \cdot 10^4 N$.

إنَّ قوة العضلة تعتمد على عدد الألياف الموجودة فيها، ولما كان من الصعب حساب عدد هذه الألياف، فإنه عادةً ما يتمُّ قياسُ المقطع العرضي للعضلة والذي يتناسب مع عدد الألياف، ومنه يمكن الحكم على إمكانيات قوتها. وفي هذه الحالة من الضروري تعيين المقطع العرضي الفيزيولوجي بدلاً من المقطع العرضي الهندسي، وهو مجموع المقاطع العرضية لجميع الألياف التي تُشكل العضلات المعنية.

قوة العضلة المطلقة:

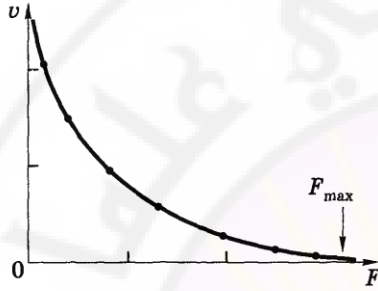
تُسمى نسبةُ الجهد العضلي الأقصى الذي يمكن أن تُطوِّره العضلة، إلى مقطعها العرضي الفيزيولوجي قُوَّةُ العضلة المطلقة ويُعبّر عنها بوحدة الإجهاد الميكانيكي ($N/m^2 = Pa$). بالنسبة لأغلب عضلات الهيكل العظمي للإنسان، قوة العضلات المطلقة هي من مرتبة $10^6 Pa$ (أي $100 N/cm^2$)، وللعضلات الملساء $10^5 Pa$ (أي $10 N/cm^2$). وتعتمد قوة العضلات على عدد من الحالات الفيزيولوجية للإنسان: العمر، الجنس، واللياقة البدنية وغيرها.

يتحرك جسم الإنسان في الفراغ بفضل تقلصات العضلات، فوفقاً لها تقصر العضلات وتتوتر. وفي الوضع المتساوي التوتر، أي مع الحمل الثابت على العضلة، يُعبّر عن العلاقة بين سرعة تقلص العضلة v والقوة المطبقة عليها بواسطة معادلة "هيل" *Hill's equation*:

$$v = b \times \frac{F_{max} - F}{F + a} \quad (1.3)$$

هنا F_{max} هي القوة القصوى التي تطورها عضلة معينة، a - ثابتة لها أبعاد القوة، b - ثابتة لها أبعاد السرعة.

ويتبع من معادلة "هيل" (1.3) أن سرعة تقلص العضلة أعظمية في حالة عدم وجود الحمل ($F = 0$)، ومع ازدياد الحمل تتناقص السرعة، وعند أقصى حمل ($F = F_{max}$) لا تتقلص العضلة أبداً ($v = 0$)، كما هو موضح في الشكل (3.1).



الشكل 3.1. تبعية سرعة تقلص

العضلة v للحمولة المطبقة عليها F

يُعرّف مُعامل الكفاءة $\eta = A/E$ عند تقلص العضلة على أنه: نسبة العمل المنجز A إلى الطاقة المستهلكة E ، ويمكن أن يصل إلى (40 - 60) % لأنواع العضلات المختلفة.

إن الإجهاد العضلي والقوى الخارجية المؤثرة في أنسجة الإنسان، تسبب تشوه هذه الأنسجة وتنشأ فيها جهوداً ميكانيكياً، الذي إلى قيم معينة يعتبر آمناً للجسم، ولكن يمكن أن يؤدي فائضها إلى إصابات في تمدد العضلات، والأربطة، والاضطرابات، والكسور وغيرها؛ ولذلك: ننظر أدناه الخصائص الميكانيكية لمختلف الأوساط وميزات سلوكها عند تأثير مختلف الأحمال.

2.1. أنواع التشوهات والخصائص الميكانيكية للأجسام المرنة

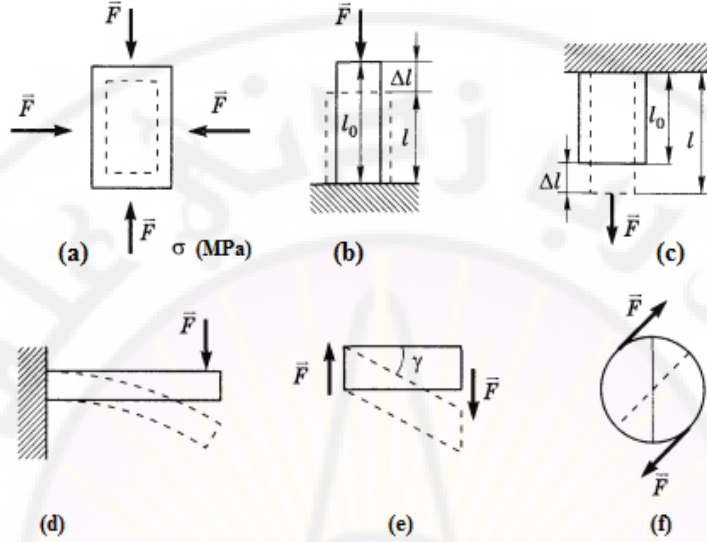
تتجلى الخصائص الميكانيكية للأجسام في رد فعلها على تأثير القوى الخارجية (الأحمال). ويُدعى تغير شكل العينة و/ أو أبعادها تحت تأثير القوة الخارجية تشوه.

والتشوهات تكون مرنة أو بلاستيكية:

يُدعى التشوُّه مرناً إذا بعد رفع الحمل يستعيد الجسم شكله وأبعاده الأصلية تماماً، وبلاستيكاً (غير مرن) إذا لم يستعد الجسم أبعاده تماماً، أي: هناك تشوه متبقي.

وبالتالي فإن المرونة هي قدرة الجسم على استعادة أبعاده وشكله الأصلي بعد إزاحة الحمل، واللدونة هي القدرة على الحفاظ على التشوه المتبقي بعد إزالة الحمل.

ويمكن أيضاً أن نشهد أنواعاً من التشوه عن طريق تغيير شكل الجسم واتجاه الأحمال المطبقة، وهي موضحة في الشكل 4.1: (تشوه الضغط، والتمدد، والقص، والانحناء، والالتواء، ويشار إلى اتجاه القوى الخارجية (الأحمال) بواسطة الأسهم، وتتطابق الخطوط المتقطعة مع نموذج التشوه).



(الشكل 4.1). الأنواع الرئيسية لتشوه المواد الصلبة: a. ضغط شامل، b. ضغط أحادي المحور، c. تمدد أحادي المحور، d.

الانحناء، e. قص، f. التواء. ويشار إلى اتجاه القوى الخارجية (الأحمال) بواسطة الأسهم

ونلاحظ أن مجموعة متنوعة من أنواع تشوه الجسم الصلب يمكن أن تنقسم إلى نوعين أساسيين: أولاً: تشوه التمدد (أو الضغط).

ثانياً: تشوهات القص.

ونحن سنتطرق إلى دراسة هذين النوعين من التشوهات بشيء من التفصيل والتوضيح:

أولاً: تشوه التمدد (الضغط):

إن المقياس الكمي للتشوه هو التشوه المطلق أو النسبي، والذي نمثل له بالآتي:

إذا كان الطول الأولي للجسم هو l_0 ، وإذا ازداد إلى القيمة l في حالة الشد أحادي المحور، فإن

المقدار $\Delta l = l - l_0$ يُسمى التشوه المطلق (استطالة)؛ ويقاس بوحدة الطول.

والتشوه النسبي ε هو كمية بلا أبعاد؛ ويُعرف بأنه نسبة التشوه المطلق إلى الطول الأصلي للعينة:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \times 100\% \quad \text{أو} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.4)$$

فعندما تتشوه العينة تظهر فيها قوة مُرونة F_{ela} تُعاكس الحمل الخارجي اتجاهها، وتمنع تشوهها

اللاحق. ويستمر تشوه الجسم تحت تأثير القوة الخارجية F_{ext} إلى أن تظهر فيه قوة مُرونة مُعاكسة

لاتجاه F_{ext} تُوازن تأثير القوة الخارجية: $F_{ela} = F_{ext}$ (بالشكل الشعاعي $\vec{F}_{ela} = -\vec{F}_{ext}$). ومن

هنا فإنَّ وجود قوة مرونة F_{ela} موزَّعة على كامل حجم العينة المشوَّهة يؤدي إلى نشوء إجهاد ميكانيكيٍّ فيها σ والذي يساوي نسبةً قوة المرونة إلى مساحة المقطع العرضي، أي: القوة العمودية المؤثرة في مقطع العينة:

$$\sigma = \frac{F_{ela}}{S} \quad (1.5)$$

في القرن السابع عشر وضع الفيزيائي الإنكليزي "هوك" القانون التالي: تتناسب القوة المرنة F_{ela} الناشئة في العينة تحت التشوهات المرنة طرداً مع مقدار التشوه المطلق:

$$F_{ela} = k \times \Delta l \quad (1.6)$$

فالقوة المرنة دائماً تُعاكس اتجاه التشوُّه x ، ويُعبَّر عن قانون "هوك" في شكل مُتَّجهات كما يأتي:

$$\vec{F}_{ela} = -k \times \vec{x} \quad (1.6) a$$

حيث $x = \Delta l$.

يُدعى مُعامل التناسب k صلابة العينة، ويعتمد على خصائص مرونة المادة التي تُصنع منها العينة، وعلى أبعادها الهندسية، وفي نظام SI يقاس بـ N/m .

يُعبَّر عن قانون "هوك" (1.6) في شكل آخر أيضاً: يتناسب الإجهاد الميكانيكي σ الناشئ في العينة عند التشوه المرن طرداً مع تشوُّهها النسبي ε :

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (1.7)$$

وهنا لا يعتمد مُعامل التناسب E على الأبعاد الهندسية للعينة، ولكن يتم تعيينه فقط من خلال الخصائص المرنة للمادة التي صُنعت منها العينة، ويُسمى معامل المرونة (مُعامل يونغ). في: SI يُقاس معامل المرونة بوحدة باسكال ($1Pa = 1N/m^2$)، ويمكن الحصول على قيمته للمواد المختلفة من الجداول الخاصة.

وبتعويض العلاقتين (1.4) و (1.1) في المعادلة (1.7)؛ وبمقارنة الصيغة الناتجة مع قانون "هوك" (1.6)، نجد العلاقة بين الصلابة k والأبعاد (S و l_0) ومعامل المرونة E للعينة:

$$k = E \frac{S}{l_0} \quad (1.8)$$

وهنا يلاحظ أن صلابة العينة k تتناسب:

طرداً: مع معامل المرونة E ومع مساحة المقطع العرضي للعينة S .

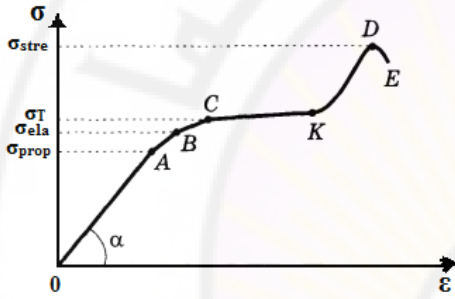
وعكساً: مع طوله l_0 .

أي: كلما كانت العينة أقصر وأسمك كلما ازدادت صلابتها، وإذا كان للعينة شكلٌ مُعقّدٌ ومختلف المقاطع العرضية بالنسبة لاتجاه تأثير القوة، فإنه يستخدم مفهوم الصلابة D لمقطع معين S :

$$D = E \times S \quad (1.8) \text{ a}$$

الذي يُقاس بوحدة القوة N ، بعكس صلابة العينة k التي تقاس بوحدة N/m . وبشكل عام فإن العلاقة بين الإجهاد الميكانيكي σ والتشوه النسبي ϵ للعينة معقدة للغاية ويتم تمثيلها من خلال مخطط استطالة العينة في الشكل 1.1.

العلاقة بين σ و ϵ ، في الجزء OA ، خطية وتوافق قانون "هوك" (1.7)، وتُعين زاوية الميل α معامل المرونة E للمادة: $\tan(\alpha) = E$.

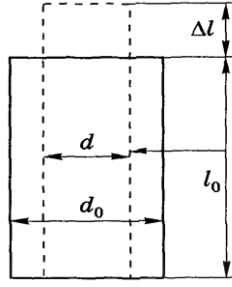


الشكل 1.1. مخطط الاستطالة

ففي الجزء AB يبقى التشوه مرناً، لكنَّ العلاقة بين σ و ϵ تغدو غير خطية، وبالتالي فإن النقطة A تقابل حدَّ التناسب σ_{prop} ، بينما تقابل النقطة B حدَّ المرونة σ_{ela} ، وبما أن $\sigma > \sigma_{ela}$ فإن تشوُّه الجسم يغدو غير مرِنٍ (بلاستيكي). ويتحقق قانون "هوك" (1.7) فقط في الجزء الخطي OA ، أي: من أجل $\sigma \leq \sigma_{ela}$.

أما في الجزء CK فإنَّه تزداد الاستطالة النسبية ϵ للعينة تقريباً مع ثبات الإجهاد الميكانيكي، ولذلك يُسمَّى جُزءُ السُّيولة، ويُسمى الإجهاد σ_{flu} الذي يبدأ عنده هذا الجزء بحد السيولة. وفي الجزء KD يكون للعينة مرَّةً أخرى مقاومة تشوُّه (أي: يزداد σ مع ازدياد ϵ)، والنقطة D تُقابل حدَّ الصلابة σ_{str} وهو: مقدار الإجهاد الميكانيكي في العينة، وبعدها يبدأ في العينة كسرٌ لا رجعة فيه، وهكذا في الجزء ED يزداد التشوُّه النسبي ϵ حتى مع انخفاض الإجهاد الميكانيكي. ولذلك يُعدُّ مُعامل بواسون μ أحد الخصائص المهمة للمادة، ويربط التشوُّه النسبي الطولي ϵ والعرضي ϵ_1 للعينة:

$$\mu = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon} \quad (1.9)$$



الشكل 6.1. العلاقة بين التشوهين

الطولي والعرضي

لهذين التشوهين دائماً إشارتان متعاكستان، ومُعامل بواسون دائماً إيجابي.

فمثلاً: عندما تتمدد العينة (الشكل 6.1):

$$\varepsilon = -\frac{\Delta l}{l_0} > 0 ; \varepsilon_1 = \frac{\Delta d}{d_0} < 0$$

وبما أن $\Delta d < 0$ ، فعند الانضغاط بالعكس:

$$\varepsilon < 0 ; \varepsilon_1 > 0$$

يعتمد معامل بواسون μ فقط على خصائص المرونة لمادة العينة، وتُعَيَّن قيمته التغير النسبي في

الحجم V للعينة المشوهة:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu) \quad (1.10)$$

وإذا كان معامل بواسون $\mu = 0.5$ فإن $\Delta V = 0$ فإن هذا يعني: أن المادة غير قابلة للانضغاط.

ثانياً: تشوهات القص:

ينشأ تشوه القص (انظر الشكل 4.1.d) في حالة التأثير على الجسم بقوتين F متماستين متوازيتين ومتعاكستين بالاتجاه، وتطبقان على مستويين مختلفين متوازيين ومساحة كل منهما S . والمقياس الكمي لهذا التشوه هو زاوية القص γ ، وتسمى النسبة $\tau = F/S$ الإجهاد الميكانيكي المماسي (أو التماسي).

إن قانون "هوك" لتشوه القص يشابه العلاقة (1.7): حيث يتناسب الإجهاد الميكانيكي المماسي τ الذي ينشأ في العينة المشوهة طرداً مع زاوية القص γ :

$$\tau = G \times \gamma \quad (1.11)$$

يعتمد معامل القص G فقط على مادة العينة، ويرتبط بمعامل المرونة E ومعامل بواسون μ للمادة بالعلاقة الآتية:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.12)$$

حيث يلاحظ من هذه العلاقة: أن قيمة معامل القص دائماً أصغر من قيمة معامل يونغ لمادة

معينة بمرتبتين وأكثر.

حد المتانة:

إنَّ حدَّ المتانة هو الخاصية التالية الأكثر أهميةً للمواد القابلة للتشوه، وهي التي تصف قدرة المادة على مقاومة الانهيار تحت تأثير القوى الخارجية. ولتقدير المتانة كمياً فإنَّ حد المتانة المذكور σ_{str} يُستخدم للمادة (وتعتمد قيمته على نوع التشوه)، وهكذا فقيمة إجهاد الانهيار الميكانيكي هي نسبة قيمة حمولة الانهيار إلى مساحة المقطع العرضي للعينة في مكان الانهيار.

الصلابة: وهي تميز مقاومة المادة على اختراقها بواسطة جسم أكثر صلابةً ويضغط عليها. وتُعيّن الصلابة كمياً باعتبارها نسبة الحمل F المؤثر في الجسم المضغوط إلى مساحة الطباعة S المتشكلة في المادة، وفي SI تُقدَّر الصلابة بـ: N/m^2 .

هذا وإنَّ طرق قياس الصلابة تختلف باختلاف شكل ومادة الضاغط على الجسم. فمثلاً: عند تعيين الصلابة بطريقة "برنولي": يتم ضغط كرة صلبة في العينة. وفي طريقة "فيكرز" Vickers: يتم الضغط بواسطة هرمٍ مربعٍ من الماس وما شابه، ويُرْمَز لهما بالرمز: H_B (أو HB) للصلابة وفق تعيين "برنولي"، و: HV (أو HB) للصلابة وفق تعيين "فيكرز" ... وهكذا.

القوى (الأحمال) المؤثرة على الجسم الصلب:

تتركز عادة في نقطة، أو أنها تتوزع على سطح معين، وهناك أيضاً أحمال ثابتة وأخرى ديناميكية. الأولى (الثابتة): تحميل طويل لا تتغير قيمته مع الزمن، والثاني (الديناميكية): تحميلٌ تختلف سرعته من حيث القيمة والاتجاه. ومثال على الأحمال الديناميكية الأحمال الدورية المتغيرة وأحمال الصدم.

3.1. الخواص الميكانيكية للأنسجة الحية

إن دراسة الخواص الميكانيكية للأنسجة البيولوجية ضرورية لتفسير الأحمال المسموحة غير الضارة بتشوه الأنسجة، وكذلك لتطوير: طرائق معالجة الجروح، ووسائل وقاية الإنسان من تأثيرات القوى غير المرغوبة، والجراحة الترميمية للأعضاء والأنسجة، وإنشاء مواد جديدة قريبة بخواصها من الأنسجة الحية.

وتنقسم الأنسجة البيولوجية عادةً إلى:

سائلة ك: (الدم، واللمف، والسوائل المخاطية، وسوائل زلالية وغيرها). **ولينة، وصلبة،** علماً أن التقسيم الأخير اصطلاحياً للغاية.

ونشير هنا إلى الأنسجة الرّخوة التي يمكن أن تصل فيها التشوّهات المرنة (القابلة للعكس) إلى العشرات ومئات النسب المئوية، ك: الجلد، والأنسجة العضلية، وأنسجة الرئتين، والدماغ، وجدران الأوعية الدموية، وأنسجة الجهاز التنفسي وغيرها.

ومن الأنسجة الصّلبة: الأنسجة العظمية، وأنسجة الأسنان، بينما تحتل الأوتار والغضاريف المفصليّة موضعاً وسطياً في التصنيف السابق، وعلى وجه التحديد تُنسب الأوتار إلى الأنسجة الرّخوة، والغضاريف إلى الأنسجة الصّلبة.

1.3.1. مميزات السلوك الميكانيكي للأنسجة الحية

بالانتقال إلى دراسة الخصائص الميكانيكية للأنسجة البيولوجية نلاحظ أن السمات الرئيسية لخواصها الميكانيكية تتلخص بما يأتي.

١. معظم الأنسجة البيولوجية متباينة الخواص (لا متناحية)، أي أن خواصها الفيزيائية بما فيها الميكانيكية ليست هي نفسها في اتجاهات مختلفة، وهذا ناجم عن البنية غير المتجانسة.

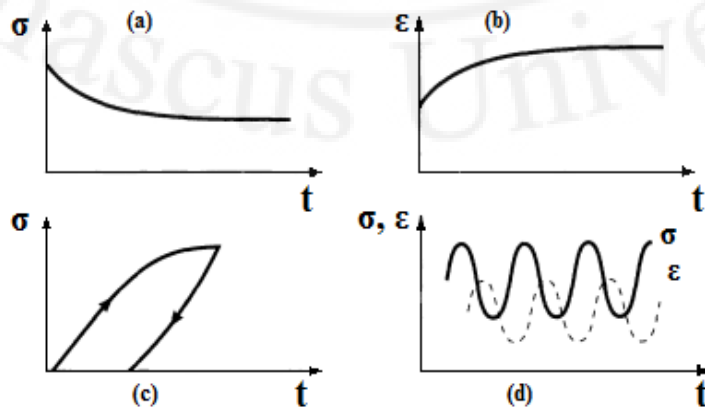
٢. تتميز جميع الأنسجة الحية تقريباً بمفاعيل مؤقتة أثناء التشوه:

(a) من أجل قيمة ثابتة للتشوه في الأنسجة البيولوجية: يحدث مع الزمن استرخاء (هبوط) للإجهاد الميكانيكي (الشكل a 7.1).

(b) من أجل حمل ثابت (إجهاد ميكانيكي): يزداد مقدار التشوه مع الزمن، وتُسمى هذه الظاهرة الزحف Creep (الشكل b 7.1).

(c) إن اعتماد الإجهاد الميكانيكي على التشوه أثناء التحميل وإزالة الحمولة يتطابق مع منحنيات مختلفة، ونتيجة لذلك: يتشكل ما يُسمّى حلقة البطء (الشكل c 7.1).

(d) عند التحميل الدوري، تظهر اهتزازات ميكانيكية للإجهاد والتشوه في الأنسجة الحية ϵ ، في حين أن التشوه يتخلّف دائماً بالطّور عن الإجهاد الميكانيكي σ (الشكل d 7.1).



الشكل 7.1. المفاعيل المؤقتة التي تظهر عند تشوه الأنسجة الحية: a. استرخاء الإجهاد، b. الزحف، c. حلقة البطء، d. تخلف طور التشوه عن الإجهاد.

e) تعتمد الخواص الميكانيكية للأنسجة البيولوجية في كثير من الأحيان على سرعة التشوه. إنّ هذه الحقائق هي مظهرٌ من مظاهر السلوك اللزج للأنسجة الحية، ولذلك نتوقف بشيء من التفصيل والبيان عند هذا المفهوم: "لزوجة مرنة":

تنجز القوى الخارجية المؤثرة في العينة عملاً على التشوه. والطاقة المستهلكة في تشوه العينة: أولاً: تُخزن جزئياً في حجم الوسط المتشوه على شكل طاقة كامنة للتشوه. وثانياً: تُستهلك بشكل غير عكسيّ للتغلب على قوى الاحتكاك الداخلي، وتتحول في نهاية المطاف إلى طاقة حرارية.

وإذا ما تحققت الحالة الأولى فقط خلال التشوه، فإن مادة العينة هي وسطٌ مرّن، وعند إزالة الحمولة يتحوّل كامل احتياطي الطاقة الكامنة للتشوه إلى عملٍ لاستعادة شكل العينة وأبعادها الأصلية.

وأما إذا تحقق الاحتمال الثاني فقط، أي: يحدث تبدّد للطاقة غير عكسيّ في العينة، فإنّ الوسط يُسمى لزجاً، وكلّ التشوهات في مثل هذا الوسط غير عكسية (غير مرنة).

وإذا ما تحققت الحالتان الأولى والثانية بدرجات متفاوتة، فإن الوسط يُسمى مرناً لزجاً. وعندما يتشوه مثل هذا الوسط يتم تخزين جزء من عمل القوى الخارجية في العينة على شكل طاقة للتشوه المرن، والطاقة المتبقية تتبدد بشكل غير عكسي على شكل حرارة. وبعد زوال تأثير القوة الخارجية يحدث فقط استعادة جزئية لأبعاد وشكل العينة وتشكل حلقة البطء (انظر الشكل 7.1c)، التي تُحدد مساحتها (المنطقة بين منحنى التحميل وإزالة الحمل) نسبة الطاقة المتبددة غير العكسية المتحوّلة إلى حرارة.

الفصل الرابع

خصائص السوائل (الظواهر السطحية)

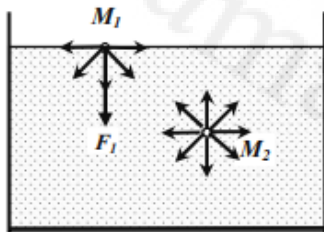
تَشغَلُ السوائلُ وفق الخصائص الفيزيائية موقعاً وسطياً بين الغازات والأجسام الصلبة، وجُزئيات السائل متماسكة بإحكامٍ كافٍ، ولذلك فالسوائل غير قابلة للانضغاط عملياً، وكثافتها قريبة من كثافة المواد الصلبة. وتؤثر قوى كبيرة بوضوح بين جزيئات السائل، ولكنها أصغرُ بقليل مما هي في المواد الصلبة. وبالتشابه مع الأجسام الصلبة تحتفظ السوائل بحجمها، ومثل الغازات؛ تأخذ شكل الأوعية التي توجد فيها.

تتميز السوائل "بترتيب قصير المدى" في موضع الجزيئات المتجاورة، ذاك الذي يحافظ عليه فقط على مسافات تساوي عدة أقطار جزيئية، في حين لا يُلاحظ وجود ترتيب "بعيد المدى" في السوائل، على عكس المواد الصلبة. تُنجز جزيئات السائل حركات انسحابية عشوائية مستمرة، وتتناسب طاقتها طرداً مع درجة الحرارة.

1.4. الطاقة السطحية

ترتبط بين جزيئات المادة المتجانسة قوى تُسمى قوى الجذب الجزيئية (قوى التماسك)، وهي تعمل على تماسك جزيئات المادة بعضها ببعض، وإنَّ قيمة هذه القوى في السوائل أقل مما هي في الأجسام الصلبة، وهذا ما يُفسّر تغيّر شكل السائل بتغيّر الإناء الذي يحتويه، بالإضافة إلى ذلك هناك قوى تلاصق تؤثر بين جزيئات السائل وجزيئات الأوساط الأخرى التي تلامسها، سواءً أكانت حالة تلك الأوساط صلبة أو سائلة أو غازية.

يتميز السائل بوجود سطح حرّ عند حدوده مع الغاز، مما يؤدي إلى نشوء ظواهر من نوع خاص تُدعى بالظواهر السطحية، التي تنجم عن الظروف الفيزيائية الخاصة التي توجد بها جزيئات السطح الحرّ للسائل. ويخضع كلُّ جُزءٍ داخل السائل يقع على بُعد عدة نانومترات من سطحه لقوى جذبٍ من الجزيئات المحيطة به.



الشكل 1.4. القوى الجزيئية المؤثرة على: الجزيء M_1 في الطبقة السطحية والجزيء M_2 داخل الحجم

واعتماداً على ما سبق نُوضّح الفرق بين محصلة قوى الجذب الجزيئية لجزيئات السائل في أوضاعها المختلفة سواء عند السطح أو داخل السائل. بعد عدة أقطار جزيئية إلى الأسفل من السطح الحرّ للسائل، فإنَّ كلَّ جُزءٍ، مثل: M_2 يتأثر بقوى تماسك (جذب) مع جزيئات السائل الأخرى من جميع الجهات وبنفس القدر تقريباً؛ مما يعني: أنَّ الجزيء M_2 يتأثر بمجموعة متوازنة من القوى مُحصلتها معدومة تقريباً (الشكل 1.4).

بالنسبة للجزيئات الواقعة عند السطح الحر للسائل كالجزيء M_1 ، تكون قوى التلاصق من جهة جزيئات الغاز صغيرة جداً مقارنةً بقوى جذب جزيئات السائل (كثافة السوائل أكبر بكثير من كثافة الغازات)، وبالتالي فإنَّ محصلة القوى F_1 لا تُساوي الصفر، وتنتج إلى الداخل عمودياً على سطح السائل. أي: أنَّ كلَّ جزيء عند السطح يتأثر بقوة جذب إلى الداخل (مما يُقلِّلُ الفرصة لأنَّ يَشْغَلَ موقعاً سطحياً)، ونتيجة لذلك تَنَشُدُ جزيئات الطبقة السطحية إلى داخل حجم السائل، وهكذا تُبدي الطبقة السطحية ضغطاً جزيئياً على السائل.

ولإزاحة جزيءٍ من داخل حجم السائل إلى سطحه، يجب بذلُ عملٍ ضدَّ قوى الضغط الجزيئيِّ، وينبغي بذلُ عملٍ مماثلٍ عند إزاحة جزيءٍ من الطبقة السطحية إلى الطَّور الغازيِّ، وبالتالي يكون لدى كلِّ جزيءٍ على سطح السائل طاقةً كامنةً إضافيةً بالمقارنة مع الجزيئات الموجودة داخل السائل، وهذه الطاقة الكامنة تُسمَّى بالطاقة السطحية.

إنَّ قيمة الطاقة السطحية W_n تتناسبُ طردياً مع عدد الجزيئات في الطبقة السطحية، وبالتالي فهي تتناسبُ طردياً مع المساحة S للسطح الحرِّ للسائل (عدد الجزيئات في وحدة سطح السائل أقلُّ من عدد الجزيئات في وحدة السطح داخل السائل، ومنه: فمتوسَّط البُعد بين الجزيئات على السطح أكبرُ بقليلٍ مما هو للجزيئات داخل السائل)، وهذا يؤدي وظيفياً إلى وجود قوى جذبٍ بين جزيئات السطح؛ ومنه وجود التوتُّر السطحيِّ:

$$W_n = \sigma \times S \quad (4.1)$$

يَعتمد مُعامل التناسب σ فقط على خصائص السائل ودرجة الحرارة، ويُسمَّى مُعامل التوتُّر السطحيِّ، ووحدته قياسه في SI بـ J/m^2 أو N/m .

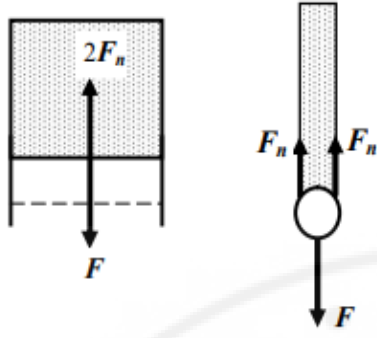
ونظراً إلى أنَّ أيَّ نظام فيزيائيٍّ يسعى إلى الحالة ذات الطاقة الكامنة الدنيا الممكنة من أجل ظروف معينة، فإنَّ السطح الحرَّ للسائل يسعى إلى امتلاك أصغر مساحةٍ. ولهذا السبب تأخذ قطرات السائل في حالة انعدام الوزن شكلاً كروياً، وهذا يتوافق مع الحد الأدنى للسطح من أجل حجمٍ مُعيَّنٍ من السائل.

2.4. قوة التوتُّر السطحي

يتقلَّص سطح السائل نتيجةً لوجود قوى تماسكٍ بين الجزيئات تسعى لإنقاص مساحة هذا السطح. وهكذا، لا يخضع الجزيء M_1 (الشكل 1.4). الموجود في طبقة السائل السطحية فقط لتأثير الجزيئات من داخل السائل، وإنما تُؤثِّرُ عليه أيضاً الجزيئات الواقعة في سطح السائل وكأنَّها تسعى لقطع السائل في النقطة M_1 . ويرسُم خطٌّ وهميٌّ وفق سطح السائل، فإنَّ القوى الجزيئية المتساوية التأثير والمؤثرة على الجزيئات الواقعة على هذا الخطِّ من أحد الاتجاهين، ستوجهه وفق المماسِّ على السطح، وفي الوقت نفسه تُؤثِّرُ قوةً عموديةً على خط القطع الممكن.

تُسمى القوة المتساوية التأثير بقوة التوتُّر السطحيِّ F_n ، وذلك لأنها تسعى إلى تقليص سطح السائل، وهذه القوة تتناسبُ مع عدد الجزيئات الموجودة على خطِّ الانقطاع، ومنه مع طوله l :

$$F_n = \sigma \times l \quad (4.2)$$



الشكل 2.4. قياس قوة التوتر السطحي

حيث: σ — معامل التوتر السطحي مُعبّرًا عنه بـ:
 N/m ، ويساوي عددياً قوّة التوتر السطحي المؤثرة في
 وحدة طول الخط المدروس.

يُمكن قياس هذه القوة بإحاطة سطح السائل بإطار يُمكن
 لأحد وجهيه التحرك بحريّة (الشكل 2.4). تؤثر على الوجه
 المتحرك من الإطار قوّة توتر سطحيّ $2F_n$ (لأنّ هناك
 سطحين) تسعى لتقليص السطح.

ولموازنتهما: يجب تطبيق قوّة F باتجاه معاكس: $F = 2F_n$ ، وبقياس القوّة F يُمكن بسهولة حساب F_n ، ومنه مُعامل
 التوتر السطحيّ σ .

يعتمد مُعامل التوتر السطحيّ فقط على طبيعة السائل ودرجة حرارته. وبالاتّباع عن درجة الحرارة الحرجة (التي عندها
 يختفي الفرق بين السائل وبخاره المشبّع) تتناقص قيمته خطياً مع ارتفاع درجة الحرارة، ويسعى إلى الصفر عند درجة الحرارة
 الحرجة.

وتحت تأثير التوتر السطحيّ يسعى عددٌ غير كبيرٍ من الأوساط السائلة لأخذ شكلٍ كرويٍّ يُوافق القيمة الدنيا للسطح.
 وكلما كانت قوّة التوتر أصغر كلما كان اقتراب الوصول للشكل الكرويّ أكبر، وذلك لأنّه في القطرة الصغيرة قوّة التوتر
 السطحيّ أكبر من قوّة الجذب.

التوتر السطحيّ هو من أهم خصائص السطوح الفاصلة بين الأطوار، ويؤثر بشكلٍ مباشر على تشكّل الجسيمات الصغيرة
 المتشتتة من المواد الصلبة والسائلة، وأيضاً على اندماج القطيرات أو الفقاعات في المستحلبات، والضباب، والرغوة، وفي
 عمليات الالتصاق.

الفصل الثالث

الصوت

الصوت (SOUND):

هو اهتزاز، أي: اضطراب، ميكانيكي دوري في الأوساط المرنة الغازية والسائلة والصلبة. ويُعبّر هذا الاضطراب عن تغيّر ماديّ ما في الوسط، ك: (تغيّر الكثافة أو الضغط، وتشريد الجسيمات)، ينتشر فيه على شكل موجات ضغطيّة. إنّ مجال الفيزياء الذي يدرس مسائل نشوء وانتشار واستقبال ومعالجة الأمواج الصوتية، يُسمّى بـ: **الصوتيات** ACOUSTICS، وهو علمٌ يعتمد على عدد من التخصصات، ويستخدم مجموعة واسعة من العلوم لحلّ مسائله، مثل: الرياضيات، والفيزياء، وعلم النفس، والهندسة المعمارية، والإلكترونيات، والبيولوجيا، والكيمياء، والطب، ونظرية الموسيقى، وغيرها.

الصوت غير مسموع إذا كان تواتره يتجاوز حساسية الأذن البشرية، أو أنه ينتشر في وسط ما، مثل مادة صلبة ليس لها اتصال مباشر مع الأذن، أو أنّ طاقته تتبدّد بسرعة في الوسط. وعلى هذه الصورة، فإنّ العملية العادية لتصورنا للصوت ليست سوى جانب واحد من الصوتيات. وإنّ **الصوت** بالمفهوم الضيق للكلمة هو دراسة الصوت، وهو قسم من الفيزياء الذي يدرس الأمواج المرنة بدءاً من أخفض تواتر إلى أعلى تواتر $(10^{12} - 10^{13})Hz$.

إنّ الأمواج المرنة ذات التواترات بدءاً من أخفضها وحتى $(10^{12} - 10^{13})Hz$ تُسمى بالأمواج الصوتية، ويؤدي تأثير الأمواج الصوتية في جهاز السمع لدى الإنسان إلى تشكّل الإحساس السمعيّ في مجال التواتر من $16Hz$ إلى $20kHz$ ؛ ولذلك: فإنّ الأمواج الميكانيكية في هذا المجال تُسمى بـ: الأمواج الصوتية.

ومن أجل تواتر أكبر من $20kHz$ لا تسمح عطالة الجهاز السمعيّ بتشكيل الإحساس بالسمع، ويُسمّى مجال هذه التواترات بـ: فوق الصوت، ولا ينشأ الإحساس السمعيّ أيضاً من أجل تواتر أصغر من $16Hz$ ، ومثل هذه الأمواج تُسمى بـ: الأمواج تحت الصوتية.

وتجدر الإشارة هنا: إلى أنّ مجال الإحساس السمعيّ للصوت يختلف باختلاف الكائنات، فمثلاً: تُدرك الدلافين والخفافيش أصواتاً بتواتر أعلى بكثير من ذلك الذي يدركه الإنسان.

وفضلاً عن ذلك تعتمد حدود تواتر إدراك الصوت بالعمر، وتزداد عطالة الجهاز السمعيّ لدى الإنسان مع ازدياد عمره، وفي عُمر الشيخوخة ينقص الحد الأعلى لمجال السمع ليُصبح أقلّ من $20kHz$.

1.3. الخواص الفيزيائية والفيزيولوجية للأمواج الصوتية

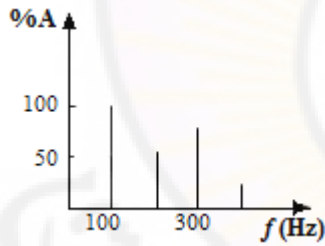
تملك الخصائص الفيزيائية للأمواج الصوتية طابعاً موضوعياً، وهو الذي يمكن قياسه بأجهزة موافقة بوحدات عيارية. وإن الإحساس بالسمع الذي ينشأ تحت تأثير الأمواج الصوتية ذاتي، ولكن يتم تحديده ميزاته إلى حد كبير ببارامترات التأثير الفيزيائي.

تعتمد سرعة الأمواج الصوتية v على خصائص الوسط الذي تنتشر فيه: مُعامل مرونة الوسط E ، وكثافته ρ :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.1)$$

تبلغ سرعة الصوت في الهواء نحو: 340 m/s ، وتتعلق بدرجة الحرارة (لأنه ومع تغير درجة الحرارة تتغير كثافة الهواء). وقد تبلغ هذه السرعة نحو 1500 m/s في السوائل والأنسجة الرخوة للجسم، و: $(3000 - 6000) \text{ m/s}$ في الأجسام الصلبة.

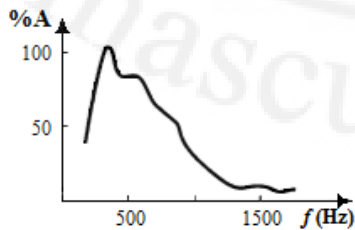
يُلاحظ من العلاقة (3.1) التي تُعَيِّن سرعة انتشار الأمواج الصوتية أنها لا تتضمن تواتر الأمواج، ولذلك فالأمواج الصوتية مختلفة التواتر لها نفس السرعة عملياً في نفس الوسط. ويُستثنى من ذلك التواترات التي يتم امتصاصها بشدة في وسط مُعطى، وتقع هذه الأمواج عادةً خارج حدود المجال الصوتي (فوق الصوت).



الشكل 1.3. طيف نغمات معقد

إذا مثَّلت الاهتزازات الصوتية عمليةً دوريةً، فإنها تُسمى **نغمات** أو أصوات موسيقية، ولها طيفٌ توافقِي منفصل، يمثل مجموعة التوافقيات (التوافقيات مُحَدَّدة التواتر والسعة). ويُسمى تواتر التوافقية الأولى ω **بالنغمة الأساسية**، والتوافقيات ذات الرُّتَب الأعلى (بتواتر $2\omega, 3\omega, 4\omega$ وغيرها) تُسمى فوق النغمات **overtones**.

توافق **النغمة النقية** (أو البسيطة): هو اهتزاز ميكانيكي ذو تواتر واحد فقط. ويوضح الشكل (1.3) طيف نغمات مُعقَّد مؤلَّف من أربعة مُركَّبات توافقية: $(100, 200, 300, 400) \text{ Hz}$ ، حيث اعتبر أنَّ قيمة سعة النغمة الأساسية 100%.



الشكل 2.3. طيف الضجيج

تملك الأصوات غير الدورية المسماة بـ: **الضجيج** أطيفاً صوتيةً مستمرةً (الشكل 2.3). وينجم الضجيج عن العمليات المترافقة بتغير سعة وتواتر الاهتزاز الصوتي مع الزمن (اهتزاز أجزاء الآلات والحفيف وغيرها).

شدة الصوت I : كما ذكرنا سابقاً، تُعبَّر شدة الصوت عن طاقة الموجة الصوتية المارة من خلال واحدة السطوح خلال واحدة الزمن، وتُقاس بوحدة W/m^2 .

وتُعيّن هذه الخاصية الفيزيائية مستوى الإحساس السمعي، الذي يُسمّى بـ: الجهورية وهي بارامتر فيزيولوجي ذاتي. وإذا ما نظرنا إلى العلاقة بين الشدة والجهورية وجدنا أنّها ليست علاقة تناسب خطي، وهنا نشير فقط إلى أنه مع ازدياد الشدة يزداد الإحساس بالجهورية.

يرافق انتشار الصوت في الوسط نشوء بعض الضغط الإضافي، يتحرك من منبع الصوت إلى المستقبل. وقيمة الضغط الصوتي P هي أيضاً خاصّة فيزيائية للصوت ولوسط الانتشار. ويرتبط الضغط الصوتي بشدة الصوت بالعلاقة:

$$P = \sqrt{2I \times \rho \times v} \quad (3.2)$$

حيث: ρ - كثافة الوسط، v - سرعة انتشار الصوت في الوسط.

يُسمى المقدار $Z = \rho \times v$ المقاومة النوعية الصوتية، أو: المعاوقة الصوتية النوعية.

ويُعيّن تواتر الاهتزاز التوافقي جانب الإحساس السمعي الذي يُسمى بارتفاع الصوت.

وإذا كانت الاهتزازات الصوتية دورية، ولكن لا تتبع للقانون التوافقي فإنّ الأذن تُقدّر ارتفاع الصوت وفق تواتر النغمة الأساسية (التوافقية الأولى الموافقة في سلسلة "فورييه")، والتي يكون دورها متطابقاً مع دور التأثير الصوتي المركب. نشير إلى أنّ إمكانية تقدير ارتفاع النغمة بالجهاز السمعي للإنسان يرتبط مع مدة الصوت؛ فإذا كان زمن التأثير الصوتي أقلّ من $(1/20)s$ فإنّ الأذن لا تستطيع تقدير ارتفاع النغمة.

يتم استقبال الاهتزازات الصوتية متقاربة التواتر، عند إطلاقها بأن واحد، كأصوات مختلفة الارتفاع في حالة تجاوز الفرق النسبي للتواتر القيمة $3 - 2\%$. ومن أجل فروق التواتر الصغيرة ينشأ إحساس بصوت قوي متوسط الارتفاع. إنّ عدد التوافقيات المركبة ونسب سعاتها يُعيّن التركيب الطيفي للاهتزاز الصوتي (الشكل 1.3)، وهذا ما يُسمّى بجرس الصوت. وجرس الصوت باعتباره خاصّة فيزيولوجية للإحساس السمعي يعتمد أيضاً إلى حدّ ما على مُعدّل ارتفاع وتغيّر الصوت.

2.3. منطقة السمع، عتبة السمع وعتبة الإحساس بالألم

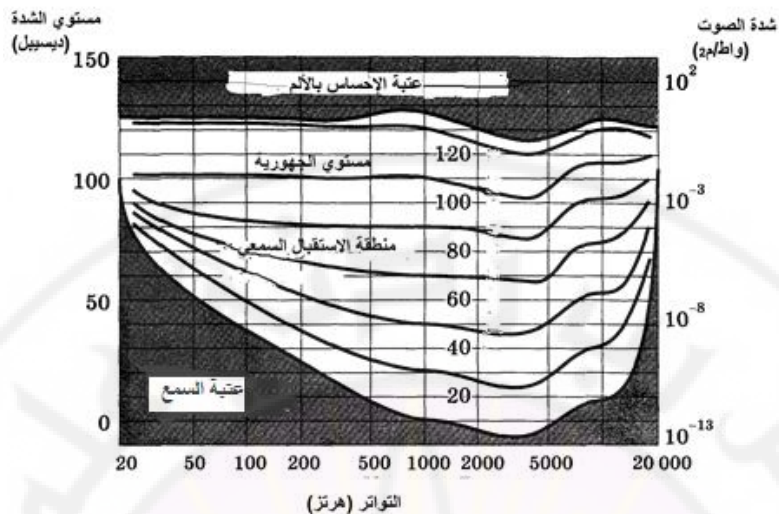
إنّ الإحساس السمعي لا يتشكّل إلا عندما تتجاوز شدّة الأمواج الصوتية قيمة دنيا مُعيّنة، تُسمى عتبة السمع. ولهذا العتبة قيم مختلفة تبعاً لاختلاف تواتر مجال الصوت، فالحساسية ليست متساوية بالنسبة للتأثيرات الصوتية عند اختلاف التواتر، ويعني هذا: أن لجهاز السمع حساسية طيفية. ويمكن تعيين عتبة السمع لتواتر الصوت بواسطة تجربة بسيطة. تبلغ قيمة عتبة شدّة الصوت بحدها الأدنى، وتبلغ $10^{-12} W/m^2$. ونشير أنّ سعة اهتزاز جسيمات الهواء أصغر بمئات المرات من قطر جزيئاته من أجل الشدة $10^{-12} W/m^2$ ، ويُشكّل جهاز السمع الطبيعي إحساساً سمعياً حتى في حالة تأثيرات الطاقة الضعيفة للغاية.

مع ازدياد شدة الصوت يزداد الإحساس بالجهورية، ولكن الأمواج الصوتية التي شدتها من مرتبة:

$(1 - 10) W/m^2$ تُسبّب الإحساس بالألم. والحد الأقصى لقيمة الشدة التي تتجاوزها يظهر الألم تُسمّى عتبة

الإحساس بالألم.

منطقة شِدَاتِ الصوتِ المحصورة بين عتبة الألم وعتبة السمع (بين المنحنيين الأعلى والأسفل على الشكل 3.3) ومجال التواتراتِ الموافق $(16-20.10^3)Hz$ تُسمَّى بمنطقة السمع.



الشكل 3.3. مخطط السمع لأذن الإنسان

ولتحديد العلاقة الكمية بين شدة الصوت والجهورية يلزم أن نُعرِّف مستوى شدة الصوت L وهو: مقدار يتناسب مع اللوغاريتم العشري لنسبة شدة الصوت I إلى الشدة عند عتبة السمع $I_0 = 10^{-12}W/m^2$:

$$\beta = L = n \times \log \frac{I}{I_0} \quad (3.3a)$$

يحدد المُعامل n في العلاقة (3.3) وحدة قياس مستوى شدة الصوت. وعادةً ما تُؤخذ $n = 10$ ،

$$\beta = L = 10 \times \log \frac{I}{I_0} \quad (3.3b)$$

وعندئذٍ يُقاس المقدار L بالديسيبل (dB). فعند عتبة السمع ($I = I_0$) يكون مستوى شدة الصوت $L = 0$ ، وعند عتبة الإحساس بالألم يكون ($I = 10W/m^2$) ومنه $L = 130dB$.

مثلاً: إذا بلغت شدة الصوت $I = 10^{-7}W/m^2$ (وهذا يتوافق مع المحادثة العادية) فمن الصيغة (3.3) ينتج أن مستوى الشدة يبلغ $L = 50dB$.

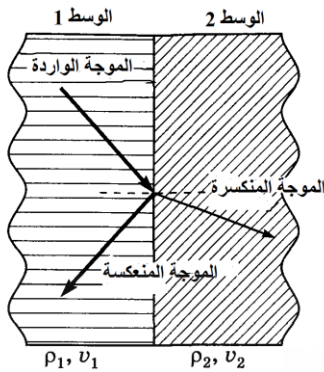
مستوي جهورية الصوت (E الجهرية) يرتبط بمستوي الشدة L بالعلاقة:

$$E = k.L \quad (3.4)$$

حيث: k - ثابت تناسبٍ ما، ويتعلق بتواتر وشدة الصوت.

4.3. انعكاس وامتصاص الأمواج الصوتية

تخضع الأمواج الصوتية عند عبورها لحدِّ فاصلٍ بين وسطين مختلفين للانعكاس والانكسار وفقاً لقوانين مماثلةٍ لقوانين انعكاس وانكسار الضوء (الشكل 5.3).



الشكل 5.3. انعكاس وانكسار الأمواج الصوتية

يُحدد مُعامل الانعكاس R نسبة شدة الموجة الصوتية المنعكسة I_{refl}

إلى شدة الموجة الواردة على السطح الفاصل I_{inci} :

$$R = \frac{I_{refl}}{I_{inci}}$$

وتعتمد قيمة مُعامل الانعكاس على نسبة كثافة الوسطين (ρ_2 و ρ_1)،

وعلى سرعة انتشار الأمواج الصوتية في هذين الوسطين (v_2 و v_1). ويطلق

على جداء كثافة الوسط وسرعة انتشار الأمواج الصوتية فيه بالمعاوقة

الصوتية النوعية، أو: مقاومة الموجة:

$$Z = \rho \times v$$

وبما أن $v = \sqrt{E/\rho}$ [انظر العلاقة (1.3)] فإن:

$$Z = \sqrt{E \times \rho}$$

وفي حالة الورود العمودي على السطح:

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \text{ أو } R = \left(\frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_2 v_2 + \rho_1 v_1} \right)^2 \quad (3.5)$$

يتضح من الصيغة (3.5) أنه كلما كان فرق المعاوقة للوسطين أكبر كلما كان مُعامل الانعكاس أكبر.

مثلاً: عند الحد الفاصل هواء - ماء، ينعكس أكثر من 99% من طاقة الموجة الصوتية، وجزء صغير جداً فقط ينقل

إلى الماء عند الورود من الهواء، ويكون الانعكاس عند السطوح الفاصلة للأنسجة البيولوجية المختلفة أصغر من ذلك

بكثير. وخاصةً عند انتقال الموجة فوق الصوتية من العضلات إلى العظام يساوي مُعامل الانعكاس 30 - 40%؛ ومنه

يكون مُعامل النفاذية $D = 1 - R$.

وهكذا عند ورود الأمواج الصوتية بالشدة I_{inci} على

السطح الفاصل بين وسطين تنشأ موجة منعكسة بالشدة

$I_{refl} = R \times I_{inci}$ ، وأمواج تنقل في الوسط الثاني بالشدة

$$I_{ent} = D \times I_{inci}$$

يرافق عملية انتشار الأمواج الصوتية في الوسط امتصاصها،

وتتناقص شدة الموجة I_{pass} مع ازدياد المسافة x التي

تعبئها في الوسط وفق قانون أسي:

$$I_{pass} = I_{ent} \times e^{-k.x} \quad (3.6)$$

حيث: k - مُعامل الامتصاص، ويتعلق بخصائص الوسط وبتواتر الموجة، ويوضح الشكل 6.3 هذه التبعية.

يرتبط امتصاص الأمواج الصوتية في الوسط بشكل كبير بتواترات الأمواج، ومع ازدياد التواتر يزداد مُعامل الامتصاص

k في جميع الأوساط، وامتصاص الأمواج الصوتية عالية التواتر أكبر بكثير من امتصاص الأمواج منخفضة التواتر.

النشاط الإشعاعي

تستطيع نوى الكثير من الذرات المشعة أن تتحول بشكل طوعي (تلقائي)، ونتيجة لذلك تظهر نوى ذرات أخرى وأشعة مؤينة على شكل فوتونات للأشعة الكهرومغناطيسية وجسيمات عنصرية. تتبادل هذه الأشعة والجسيمات التأثير مع الأنسجة البيولوجية، وتسبب في تغيرات وظيفية وبنوية فيها. ونحن هنا ندرس قوانين التفكك الإشعاعي وتطبيقاتها الطبية.

1.24. المميزات الأساسية للنوى:

تتكون نواة الذرة من جسيمات عنصرية، والتي تسمى: نكلونات. والنكلون هو نفسه البروتون أو النيوترون. يتمتع البروتون بكتلة قريبة من $1a.m.u$ وحدة الكتلة الذرية $a.m.u$ ، وشحنة $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ ، وتساوي بالقيمة شحنة الإلكترون، وتعاكسها بالإشارة. النيوترون معتدل الشحنة الكهربائية، وكتلته تساوي تقريباً كتلة البروتون ($1.001a.m.u$). يُعبر عن عدد البروتونات الداخلة في تركيب النواة الشحنة الكهربائية q لنواة العنصر، والتي تساوي رقم الترتيب Z للعنصر في جدول "ماندليف": $q = Z \cdot e$ مقدرةً بوحدة الشحنة العنصرية. العدد الكتلي للنواة A : هو عدد صحيح دائماً، ويتعبر بعدد النكلونات في النواة: $A = Z + N$ ، حيث: Z هو عدد البروتونات، و N هو عدد النيوترونات. يُعبر عن نواة العنصر بالكتابة الرمزية A_ZX ، حيث يُشير الدليل Z في الأسفل إلى العدد الذري للعنصر، و A في الأعلى إلى العدد الكتلي.

إن نصف قطر النواة R يتبع للعدد الكتلي للنواة، ويمكن أن يُحسب (بالمتر) بالعلاقة التقريبية الآتية:

$$R = 1.3 \times 10^{-15} \times A^{1/3} \quad (24.1)$$

ترتبط النكلونات في النواة بقوة نووية خاصة، تفوق قوة التدافع الكهربائي بين البروتونات. تُوفر القوة النووية الاستقرار الكافي للنواة، وتمتع بالمميزات الخاصة الآتية:

- قصر المدى؛ أي: أنها تؤثر فقط على مسافات من مرتبة أبعاد النواة نفسها ($10^{-14} m$).
 - شدة التأثير القوية؛ حيث إن قوة التأثير المتبادل بين النكلونات في النواة أكبر بعدة مراتب، من أي قوة تأثير متبادل أخرى معروفة في الطبيعة.
 - الاستقلالية الدورية؛ فلا ترتبط قوة التأثير المتبادل النووي بالشحنة الكهربائية للنكلون، ولذلك فقوة التأثير المتبادل بين بروتونين هي نفسها بين نيترونين أو بين بروتون ونيوترون.
 - رابطة مشبعة؛ يتبادل النكلون التأثير فقط مع عدد من النكلونات المحيطة به (عادةً ليس أكثر من 6).
- يرتبط استقرار نواة الذرة بالعدد الإجمالي للنكلونات في النواة، وبنسبة عدد النيوترونات إلى عدد البروتونات فيها N/Z .

النوى الأكثر استقراراً هي النوى التي تحتوي على عدد قليل نسبياً من النيكلونات، وتحقق النسبة $N/Z = 1$. ومع ازدياد العدد الإجمالي للنيكلونات في النواة وازدياد عدد النيوترونات بالنسبة لعدد البروتونات ($N/Z > 1.6$) يضعف استقرار النواة ويرتفع احتمال تفككها الطوعي.

تبادل النيكلونات التأثير فيما بينها بواسطة القوة النووية داخل النواة، لذا توجد طاقة ارتباط ϵ_b معينة للنواة. إن طاقة النيكلونات بشكلها الحر $\sum m_n c^2$ دائماً أكبر من طاقة النواة التي تدخل في تركيبها هذه النيكلونات $M_N c^2$ ، ويتحول الفرق بين هاتين الطاقتين إلى طاقة ارتباط للنيكلونات:

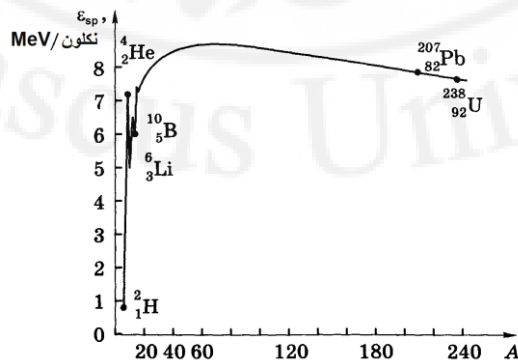
$$\epsilon_b = \sum m_n c^2 - M_N c^2 = (\sum m_n - M_N) c^2 \quad (24.2)$$

حيث: M_N - كتلة النواة، m_n - متوسط كتلة النيكلون، c - سرعة الضوء في الفراغ. الفرق بين كتلة النواة وبين كتلة النيكلونات الحرة المكونة لها $\Delta M = (\sum m_n - M_N) c^2$ يُسمى: بفائض الكتلة، وهذه القيمة هي التي تُعبر عن طاقة ارتباط النواة.

طاقة الارتباط النوعية ϵ_{sp} : هي حصّة النيكلون الواحد وسطياً من طاقة ارتباط النواة: $\epsilon_{sp} = \epsilon_b / A$ (الشكل 1.24). وتبلغ قيمتها القصوى (نيكلون/8.7 MeV) وهي تُميّز النوى ذات العدد الكتلي $A = 50 - 60$ ، ومع تغير العدد A خارج قيم هذا المجال تتناقص ϵ_{sp} بشكل حادّ لدى العناصر الأخف، وبسلاسة لدى العناصر الأثقل، ومن هنا تظهر إمكانيّتان لإطلاق واستخدام الطاقة النووية.

1. تفاعل الانشطار النووي، وفيه تنشطر نواة العنصر الثقيل (مثلاً: $^{235}_{92}\text{U}$) مع تشكّل نوى أكثر استقراراً، ويتحوّل جزء من طاقة ارتباط النيكلونات إلى طاقة حركية لنواتج الانشطار، التي تتحوّل إلى طاقة حرارية في محطات الطاقة النووية. ويعتمد عمل جميع المحطات والمفاعلات النووية الحديثة (NPP) على تفاعل الانشطار.

2. تفاعل اندماج نوى العناصر الخفيفة، ويُرافقه تشكّل نواة أكثر استقراراً وأكبر كتلة، وإطلاق كمية كبيرة من الطاقة. يمكن أن يحدث تفاعل الاندماج فقط عند درجات الحرارة العالية (عدّة ملايين الدرجات) الضرورية للتغلب على التدافع الكولومبي بين النوى، ويتحقّق في الانفجار النووي الحراري وفي مفاعلات أبحاث الاندماج النووي.



الشكل 1.24. تبعية طاقة الارتباط النوعية للنيكلونات في النواة للعدد الكتلي

الفيزياء والكميات الفيزيائية

1- مقدمة:

يقسم مجال عمل الفيزياء إلى مجالين هما الفيزياء الكلاسيكية، والفيزياء الحديثة. الفيزياء الكلاسيكية تدرس المادة والطاقة وتفاعلاتهما على المستوى الجهري (الماكروسكوبي)، وحركة الأجسام المادية المتحركة بسرعات أقل بكثير من سرعة الضوء، وتشتمل على مواضيع مثل دراسة حركة الأجسام الصلبة، والسائلة، ودراسة طبيعة الصوت وسلوكه، والسلوك الظاهري للضوء، والكهرباء والمغناطيسية، والحرارة. أما الفيزياء الحديثة، فتشمل نظرية فيزياء الكم، والنظرية النسبية. تدرس نظرية فيزياء الكم المادة والطاقة وتفاعلاتهما على المستوى الجهري (المكروسكوبي) كحركة الإلكترونات، والتركيب الذري، والجسيمات الأولية، والفيزياء النووية. بينما تدرس النظرية النسبية المادة والطاقة وتفاعلاتهما عندما يتعلق الأمر بحركة الأجسام بسرعات قريبة من سرعة الضوء.

2- الكميات الفيزيائية:

لوصف أي ظاهرة فيزيائية، أول ما نقوم به في عملية الملاحظة هو أخذ القياسات الكمية المتكونة من أرقام، أو من أرقام ووحدات. إن أي شيء يمكن أن يقاس بإعطائه رقم، أو رقم وحدة، نسميه في الفيزياء كمية فيزيائية. فالمسافة والكتلة والزمن والحجم والسرعة والشحنة الكهربائية والقوة ومعامل الاحتكاك ومعامل الانكسار كلها كميات فيزيائية.

تعد بعض الكميات الفيزيائية أساسية وتشكل عوامل مميزة للأجسام بحيث نستطيع وصفها بصورة طبيعية، ونقيسها بمقارنتها بوحدات قياس نسميها وحدات قياس أساسية. والبعض الآخر لا نستطيع وصفها وقياسها إلا بواسطة أكثر من وحدة قياس أساسية، وهذه الكميات نسميها كميات فيزيائية مشتقة، وحداتها نسميها وحدات مشتقة، وهذه التسمية جاءت بناء على أن تلك الكميات صيغت بقوانين فيزيائية على شكل علاقات رياضية تربط ما بين كميات فيزيائية أساسية لتفسير سلوك الظواهر الطبيعية.

تعريف الكتلة والطول والزمن:

يُعبّر عن قوانين الفيزياء باستخدام كميات فيزيائية محددة. هناك ثلاث كميات فيزيائية أساسية في علم الميكانيك هي: الطول والكتلة والزمن. وجميع الكميات الفيزيائية الأخرى في علم الميكانيك هي كميات فيزيائية مشتقة يتم الحصول عليها من الكميات الفيزيائية الأساسية الثلاثة السابقة. في عام 1960، أنشأت اللجنة الدولية (SI) مجموعة من المعايير للكميات الأساسية. حيث يُقدر كل من الطول، والكتلة، والزمن، بوحدات المتر، والكيلوغرام والثانية على التوالي.

واعتمدت (SI) أربعة معايير أخرى قياسية في الفيزياء تشمل: درجة الحرارة (كلفن)، شدة التيار الكهربائي (أمبير)، شدة الإضاءة (الشمعة، أو الكانديلا)، وكمية المادة (المول).

الزمن Time:

الوحدة المستخدمة لقياس الزمن هي الثانية.

لم تعد الثانية جزءاً من الوقت المطلوب لدوران الأرض، وهو ما يمكن أن يتغير تبعاً لسرعة الدوران، بل تم تعريف الثانية على أنها الزمن المطلوب لإطلاق مقدار معين من الطاقة على شكل إشعاع كهرومغناطيسي من ذرات السيزيوم 133، وبشكل دقيق الثانية هي الزمن اللازم كي تُتجز ذرة السيزيوم 133 عدد من الانتقالات ضمن مستويات الحالة فوق الدقيقة يساوي (انتقال $9 \times 10^9 \approx 9192631770$)، وهذا المقدار ثابت بغض النظر عن وقت قياسه ومكانه، أي يستخدم ما يسمى الساعة الذرية لتعريف الثانية.

الساعة الذرية (الساعات الجزيئية والكمومية) هي جهاز لقياس الزمن تستخدم فيه عملية دورية ما تُمثل الاهتزازات الخاصة المرتبطة بعمليات تحدث على مستوى الذرات والجزيئات.

الساعات الذرية مهمة في الملاحة، وفي تحديد مواقع المركبات الفضائية والأقمار الصناعية والصواريخ الباليستية، والطائرات والغواصات. وتستخدم الساعات الذرية أيضاً في أنظمة الاتصالات الأرضية والصاروخية بما في ذلك قواعد المحطات المتنقلة، وفي المكاتب العالمية والمكاتب الوطنية للمعايير، وفي مكاتب خدمات الزمن الدقيق، التي تبث بشكل دوري إشارات زمنية على الراديو.

(السيزيوم 133- هو النظير الوحيد المستقر لعنصر السيزيوم، وعدده الذري 55 والعدد الكتلي 133، وينتشر في الطبيعة بنسبة 100% تقريباً. [

الطول Length:

الوحدة المستخدمة لقياس الطول هي المتر.

والمتر ليس مئة سنتيمتر وإنما هو فعلياً طول المسافة التي يقطعها الضوء في الفراغ خلال فاصل زمني يبلغ (1/c = 299792458 s)، حيث $c = 299792458 \text{ m/s}$ هي سرعة انتشار الضوء في الفراغ.

الكتلة Mass:

الوحدة المستخدمة لقياس الكتلة هي الكيلوغرام.

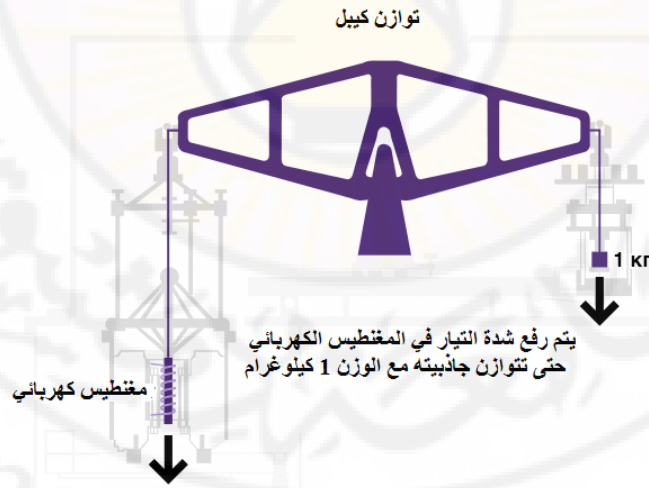
الكيلوغرام هو آخر وحدات SI، التي كانت تستند إلى جسم مادي حقيقي. بدأ التعريف الرسمي الذي تم تبنيه في عام 1901 تماماً كما يلي: "الكيلوغرام هو وحدة كتلة تساوي كتلة النموذج الأساسي للكيلوغرام". النموذج الأساسي الدولي للكيلوغرام هو كتلة أسطوانة بأبعاد محددة تتكون من 90 % البلاتين و 10 % إيريديوم. تم تصنيعها في لندن ومنذ عام 1889 تم تخزينها في المكتب الدولي للأوزان والمقاييس في مدينة Sevres بالقرب من باريس.

لكن الأجسام الفيزيائية يمكن أن تفقد الذرات (تتبخر فعلياً)، أو على العكس، تمتص الجزيئات من الهواء المحيط، لذلك خلال القرن الماضي تغيرت كتلة المعيار بعدة عشرات من ميكروغرامات. وهذا يعني أن جميع نماذج الكيلوغرام الأخرى العيارية في جميع أنحاء العالم، بالمعنى الدقيق للكلمة، لم تكن دقيقة تماماً.

كيلوغرام جديد:

يفترض الآن أن قياس الكيلوغرام يتم باستخدام ما يسمى ميزان واط (أو ميزان Kibble) - يحدد هذا الجهاز الكتلة من خلال ثابت بلانك، الثابت الرئيسي لنظرية الكم. ببساطة يمكن القول، يرتبط تعريف الكيلوغرام بكمية الطاقة الكهرومغناطيسية اللازمة لموازنة الكتلة الموافقة للجسم. سيتم استبدال الوزن المرجعي بالتيار الكهربائي والجهد. هذه الكميات، على عكس الجسم المادي نفسه، لا يمكن أن تتغير أو تختفي. بالإضافة إلى ذلك، سيتمكن أي علماء في جميع أنحاء العالم الآن من قياس الكيلوغرام بدقة، وليس فقط أولئك الذين لديهم إمكانية الوصول إلى الوزن الباريصي الأصلي أو نسخته. الكيلوغرام الجديد هو نقطة تحول في تاريخ الفيزياء، حيث أن جميع وحدات نظام SI ستعتمد على الثوابت الأساسية للطبيعة (القيم الأبدية) الثابتة. وهذا سيتيح إجراء قياسات أكثر دقة وتعزيز أسس العلوم ككل".

كيفية حساب الكيلوغرام بواسطة المغنطيس الكهربائي



ثابتة بلانك:

ثابتة بلانك (كوانت التأثير) هو الثابت الرئيسي لنظرية الكم، وهو المعامل الذي يربط طاقة كوانت (فوتون) الإشعاع الكهرومغناطيسي بتواتره، ويرمز له بالرمز $h = 6,626069934 (89) \cdot 10^{-34} J.s$.

تحليل الأبعاد

إن كلمة البعد لها معنى خاص في الفيزياء. وهي تدل على الطبيعة الفيزيائية للكمية. مثلاً بغض النظر عما إذا تم قياس المسافة بوحدات القدم أو الأمتار، إلا أنها تبقى مسافة. وبهذا للمسافة بعد هو الطول. الرموز التي نستخدمها لتحديد أبعاد الطول والكتلة والزمن هي: L, M, T على التوالي. ونستخدم القوسين [] للإشارة إلى أبعاد الكمية الفيزيائية. مثلاً، الرمز المستخدم للسرعة هو v ومنه فأبعاد السرعة هي $[L/T]$ ، وأبعاد المساحة A هي $[L^2]$.

نحتاج في كثير من الحالات، إلى اشتقاق معادلة محددة أو التحقق من صحتها. من المفيد استخدام ما يسمى تحليل الأبعاد للمساعدة في الاشتقاق أو التحقق من صحة كتابة علاقة رياضية ما. بفرض أننا نريد اشتقاق معادلة الموضع x لسيارة في لحظة زمنية t . إذا بدأت السيارة الحركة من السكون وإذا تحركت بتسارع منتظم، فإن العبارة الصحيحة هي $x = a \cdot t^2 / 2$. لنستخدم تحليل الأبعاد للتحقق من صحة هذه المعادلة. الكمية x على الطرف الأيسر من العبارة لها أبعاد الطول. لكي تكون المعادلة صحيحة الأبعاد، يجب أن يكون للكمية على الطرف الأيمن أيضاً بعد الطول. يمكن أن نفحص أبعاد الطرف الأيمن عن طريق استبدال أبعاد التسارع بـ L/T^2 ، والزمن بـ T في المعادلة.

وبهذا شكل الأبعاد للمعادلة $x = a \cdot t^2 / 2$ هو:

$$L = \frac{L}{T^2} T^2 = L$$

$$L = \frac{L}{T^2} T^2 = L$$

وباختصار أبعاد الزمن، نجد أن لطرفي المعادلة أبعاد الطول. ومنه فالمعادلة صحيحة.

وبشكل عام باستخدام تحليل الأبعاد يمكن إنشاء معادلة بالشكل:

$$x \sim a^n t^m$$

حيث n و m دليلي الأس ويطلب تعيينهما، والرمز $\sim$ يُشير إلى التناسب. هذه العلاقة صحيحة فقط إذا كانت أبعاد الطرفين متماثلة في المعادلة. بما أن أبعاد الطرف الأيسر هي طول، يجب أن تكون أبعاد الطرف الأيمن أيضاً طول. أي:

$$[a^n t^m] = L = L^1 T^0$$

وبما أن أبعاد التسارع هي L/T^2 وأبعاد الزمن هي T فإن:

$$(L/T^2)^n T^m = L^1 T^0 \Rightarrow L^n T^{m-2n} = L^1 T^0$$

يجب أن يكون لكل من L و T نفس الأس على طرفي المعادلة.

من قيمة أس L نلاحظ مباشرة أن $n = 1$. ومن أس T نلاحظ أن $m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2n = 2$. وبالعودة إلى العلاقة الأصلية نستنتج أن: $x \sim at^2$. وهذه العلاقة تختلف بالمعامل $1/2$ عن العلاقة الصحيحة $x \sim at^2/2$.

مثال:

يتحرك جسيم بسرعة منتظمة v على محيط دائرة نصف قطرها r . بفرض أن تسارع هذا الجسيم يتناسب مع r^n ومع v^m مثلاً. المطلوب: حدد قيمة كل من n و m ، ثم اكتب أبسط شكل لمعادلة التسارع.

الحل:

ليكن a هو التسارع، حسب الفرض يكون لمعادلة التسارع الشكل:

$$a = kr^n v^m$$

حيث k هو ثابت التناسب عديم الأبعاد.

وبمعرفة أبعاد a و r و v نجد أن أبعاد المعادلة يجب أن تكون من الشكل:

$$\frac{L}{T^2} = L^n \left(\frac{L}{T} \right)^m = \frac{L^{n+m}}{T^m}$$

ومنه:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T^m} \Rightarrow m = 2$$

و:

$$L^1 = L^{n+m} \Rightarrow n + m = 1 \Rightarrow n + 2 = 1 \Rightarrow n = -1$$

ومنه نجد أن معادلة التسارع هي من الشكل:

$$a = k \frac{v^2}{r}$$