# رياضيات إدارية

## لطلاب السنة الثانية – كلية السياحة

**العام الدراسي 2018–2019**

## مجموعات الأعداد

توصل الرياضيون إلى مجموعات الأعداد التالية:

**أولاً: مجموعة الأعداد الطبيعيةN**: يرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمزN، وتكتب على الشكل التالي: $N = \{0,1,2, \ldots.\}$ وهي مجموعة غير منتهية وغير محدودة من الأعلى ولكنها محدودة من الأدنى بالعدد صفر، ويمكن إجراء جميع العمليات عليها كعمليات الجمع والضرب والرفع إلى الأس الموجب، ولكنها لاتقبل إجراء عمليات الطرح والقسمة والجذر إلا في بعض الحالات الخاصة.

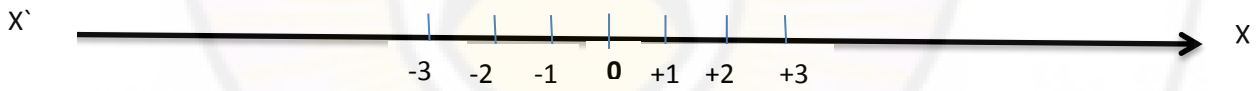
**ثانياً: مجموعة الأعداد الصحيحة Z**: وهي المجموعة التي تشمل الأعداد الطبيعية ونظائرها السالبة ويرمز لها بالرمز Z وتكتب على الشكل التالي: $\{\ldots\ldots, -3, -2, -1,0,1,2, \ldots.\}$ وهي مجموعة $Z = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1,0,1,2, \ldots.\}$ غير منتهية وغير محدودة من الأعلى ,الأدنى ، ويمكن إجراء جميع العمليات عليها كعمليات الجمع والضرب والطرح والرفع إلى الأس الموجب، ولكنها لاتقبل إجراء عمليات والقسمة والجذر والرفع إلى أس سالب إلا في بعض الحالات الخاصة.

**ثالثاً: مجموعة الأعداد العاديةQ**: يمكن التوصل إلى تعريف هذه المجموعة انطلاقاً من تعريف العدد العادي والذي هو ناتج قسمة عددين صحيحين، فإذا كان لدينا m,k عددين صحيحي، و$k \neq 0$، فإن العدد المعرف بالعلاقة $q = \frac{m}{k}$ هو عدد عادي ويمكن أن يكون عدد كسري أو صحيح موجب أو سالب، ومنه مجموعة الأعداد العادية اوسع من Z وتشملها ضمناً ويرمز لها بالرمز Q وتكتب على الشكل التالي:

$$Q = \left\{\frac{m}{k} : m, k \in Z, k \neq 0\right\}$$

وهي مجموعة غير منتهية وغير محددة من الطرفين الأعلى والأدنى ويمكن إجراء بعض العمليات عليها كعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة ولكنها لا تقبل عمليات الجذور والرفع إلى أس إلا في حالات خاصة.

**رابعاً مجموعة الأعداد الحقيقية:** تعرف على أنها اجتماع مجموعتي الأعداد العاديةQ وغير العاديةS ويرمز لها بالرمزR وتكتب على الشكل التالي: $R = Q \cup S$ إذاً R تشمل N,Z,Q,S ويمكن إجراء بعض العمليات عليها كعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع إلى أس صحيح والجذر التربيعي على الاعداد الموجبة فقط، وتبقى عمليات الجذور الزوجية واللوغاريتمية على الأعداد السالبة غير معرفة في R كما أن عملية الرفع إلى أس غير صحيح ( عادي) غير معرفة إلا في حالات خاصة. ويمكن أن تمثل الاعداد الحقيقية على المحور الحقيقيXÓX الممتد من ∞−إلى ∞+ على الشكل التالي:




الشكل(1): محور الاعداد الحقيقيةR.

تلعب مجموعة الأعداد الحقيقية R دوراً كبيراً في العمليات الحسابية وتستخدم في حل المعادلات الجبرية لذلك سنعرض أهم الخواص التي تحققها أعداد هذه المجموعة بشكل مختصر وفق ما يلي:

إذا كان m,n عددين صحيحين، وكانت a,b,c أعداد من R فإن:

1. a+b=b+a
2. (a+b)+c=a+(b+c)
3. a.b=b.a
4. a.(b.c)=(a.b).c

5. $\underbrace{a.a.a.a\ldots..a}_{\text{مرة n}} = a^n$

6. $a(b+c) = ab + ac$

7. $a^n a^m = a^{n+m}$

8. $(a^n)^m = a^{n.m}$

9. $(a.b)^n = a^n b^n$

10. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ , b \neq 0$

11. $a^0 = 1, a \neq 0$

12. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

13. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, a \neq 0$

14. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},\ \ a > 0, b > 0$

15. $\log_{10} b = a \leftrightarrow b = 10^a \quad , b > 0$

16. $\log(b.c) = \log b + \log c \quad c, b > 0$

17. $\log\left(\frac{b}{c}\right) = \log b - \log c \quad \frac{b}{c} > 0,\ c \neq 0$

18. $\log b^a = a \log b \quad , b > 0$

19. $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

20. $|a + b| \leq |a| + |b|$

21. $|a - b| \geq |a| - |b|$

22. $|a.b| = |a|.|b|$

23. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0$

24. $|x| < a \leftrightarrow -a < x < +a$

25. $|x| > a \leftrightarrow x > +a. x < -a$

**خامساً: مجموعة الأعداد المركبة (التخيلية)C:** لاحظنا أن الجذور التربيعية بقيت غير معرفة على الأعداد السالبة من المجموعة R، وهذا ما يعيق إيجاد حل للمعادلة $X^2 = 1$ ضمن أعداد تلك المجموعة، ولحل هذه المشكلة افترض وجود العدد التخيلي ويرمز له بالرمز i ويكون مربعه مساوياً العدد$(-1)$، أي التعريف الرياضي لـــi هو أن يكون:

$$i^2 = -1 \leftrightarrow i = \sqrt{-1}$$

وبناء على هذا التعريف يمكن حساب القوى المختلفة لـــ i كما يلي:

$$i = \sqrt{-1} \ , i^2 = -1$$

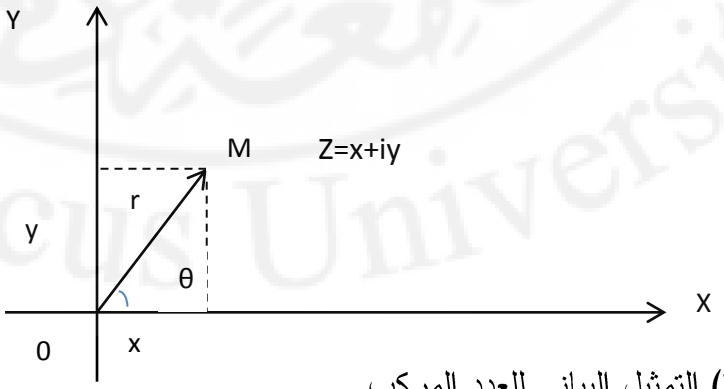
$$i^3 = i^2 i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = +1$$

$$i^5 = i^2 i^2 i = +i$$

$$i^6 = i^2 i^2 i^2 = -1$$

التمثيل البياني للعدد المركب Z=x+iy على محورين إحداثيين متعامدين في المستوي xoy ، بحيث يكون الجزء x هو مركبته أو مسقطه على المحور XÓX والجزء y هو مركبته على المحور YÓY كما هو موضح في الشكل التالي:




الشكل (2) التمثيل البياني للعدد المركب.

أي أن z عدد مركب يمثل بشعاع $\overrightarrow{OM}$ مبدؤه المركز (0,0) ونهايته النقطة (x.y) وتكون طويلة ذلك الشعاع $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ويصنع الزاوية$\theta$ بينه وبين الاتجاه الموجب للمحور OX

وتعميماً لمفهوم الاعداد تم الاصطلاح على كتابة أي عدد مركب من جزأين حقيقيين b,a بحيث يكون الجزء الأول a حراً ويضرب الجزء الثاني بالعدد التخيلي i أي أن: Z=a+ib حيث b,a عددان حقيقيان وz العدد المركب الناتج عنهما سميت مجموعة هذه الاعداد بالاعداد المركبة ويرمز لها بالرمز C ومن الواضح أنها تشمل R لآن R هي حالة خاصة من C عندما تكون فيها b=0

**العمليات الأساسية على C:**

لنفرض لدينا العددين المركبين التاليين:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2$$

1- عمليتا الجمع والطرح:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2)$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 \pm a_2) \pm i(b_1 \pm b_2)$$

2- عملية الضرب:

$$z_1 . z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$$

$$z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

3- عملية القسمة:

بالنسبة لعملية القسمة فهي تحتاج إلى تعريف العدد المرافق للعددz والذي يرمز له بالرمز $\bar{z}$ وهو يساوي:

$$\bar{z} = \overline{(a + \imath b)} = (a - ib)$$

وبسهولة يمكن أن نستنتج أن $z\bar{z} = a^2 + b^2 = r^2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$ نضرب بمرافق المقام

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{a^2 + b^2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{r_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a^2 + b^2} + i\frac{a_2b_1 - b_2a_1}{a^2 + b^2}$$

**خواص الأعداد المركبة:**

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 . z_2| = |z_1| - |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$$

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

$$0z = 0$$

$$1z = z$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$Z + 0 = Z$$

## الأشعة

يعرف الشعاع في $R^2$ بأنه جملة n من الاعداد الحقيقية المرتبة وتكتب على الشكل التالي:

$$V = (x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n)$$

نسمي الأعداد $x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n$ مركبات او احداثيات الشعاع V في $R^2$ ، نميز بين عدة أنواع من الاشعة:

الشعاع السطر: ويكتب على الشكل التالي: $A = [a_1, a_2 \dots\dots, a_n]$

الشعاع العمود: $$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

الشعاع الصفري: قد يكون شعاع السطر أو شعاع العمود جميع مركباته معدومة ويرمز له بالرمز0 أي أن:

$$0 = [0,0 \dots\dots, 0]$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

**العمليات على الاشعة:**

1- المساواة: يتساوى شعاعان Aو B من $R^2$ إذا تساوت مركباتهما المقابلة أي أنه إذا كان

$$A = B \leftrightarrow [a_1, a_2 \dots\dots, a_n] - [b_1, b_2 \dots\dots, b_n] \leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots\dots\dots a_n = b_n$$

2- الجمع والطرح: مجموع شعاعين $X,Y$ من $R^2$ يساوي شعاعا ثالثا مركباته مجموع المركبات المتقابلة:

$$X \pm Y = [x_1, x_2 \dots\dots, x_n] \pm [y_1, y_2 \dots\dots, y_n] = [(x_1 \pm y_1), (x_2 \pm y_2) \dots\dots, (x_n \pm y_n)]$$

3- جداء شعاع $X$ بعدد حقيقي $\lambda$ هو شعاع آخر ويساوي:

$$\lambda X = \lambda[x_1, x_2 \dots\dots, x_n] = [\lambda x_1, \lambda x_2 \dots\dots, \lambda x_n]$$

4- خواص العمليات السابقة:

ليكن لدينا $X,Y,Z$ ثلاثة أشعة من $R^2$، $\mu$و$\lambda$ عددان من $R$ فإن:

- ✓ $X + Y = Y + X$
- ✓ $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
- ✓ $\lambda(X \pm Y) = (\lambda X \pm \lambda Y)$
- ✓ $(\lambda \pm \mu)X = (\lambda X \pm \mu X)$
- ✓ $\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X$

جداء شعاعين: إن جداء شعاع السطر $X$بشعاع العمود $Y$ وكلاهما من $R^2$ هو عدد حقيقي وليس شعاعاً ويعرف جداؤهما على الشكل التالي:

$$X.Y = [x_1, x_2 \dots\dots, x_n].\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots \dots\dots x_ny_n = \text{عدد حقيقي}$$

مثال: إذا كان لدينا أحد الفنادق يقدم أربعة أنواع من الخدمات وكان حجم الطلب على خدماته في اليوم هو $Q = [12,8,11,18]$ فإذا علمت أن سعر الخدمة (الوحدة الواحدة) لهذه الخدمات هو على التالي:

$p = [15,5,10,20]$ فما هي القيمة الاجمالية لخدمات هذا الفندق في اليوم؟

القيمة الاجمالية تنتج من جداء كميات الطلب بسعر الطلب الواحد لكل خدمة ومن ثم جمع النواتج الاربعة ( جداء شعاعين) كما يلي:

$$Q.P = [12,8,11,18]\begin{bmatrix}15\\5\\10\\20\end{bmatrix} = 180 + 40 + 110 + 360 = 690$$ وحدة نقدية

إذا الناتج عدد حقيقي وليس شعاع.

**الارتباط الخطي للأشعة:** نقول عن الشعاع $V$ من $R^2$ أنه مرتبطاً خطياً بالاشعة $B_1, B_2, \dots\dots, B_m$ حيث $V = [v_1, v_2 \dots\dots v_n]$ ( ليس بالضرورة أن تكون n=m) إذا أمكن التعبير عن الشعاع $V$ بدلالة الاشعة $B_1, B_2, \dots\dots, B_m$ بعلاقة خطية من الشكل التالي:

$$V = \lambda_1 B_1, \lambda_2 B_2, \dots\dots, \lambda_m B_m$$

حيث: $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_m$ لا تساوي الصفر.

مثال: ليكن لدينا الشعاع $V = [14, -10,7]$ من $R^2$ والشعاعين

$$B_1 = [4,1,2]$$

$$B_2 = [2, -4,1]$$

نجد أنه يمكننا كتابة الشعاع V بواسطة الشعاعين $B_1$ و $B_2$ عل الشكل التالي: $V = 2B_1 + 3B_2$

$$= 2[4,1,2] + 3[2,-4,1] = [14,-10,7] = V$$

أي أن V مرتبط خطياً بالشعاعين $B_1$و $B_2$

ملاحظة: إذا كان الشعاع V مرتبط خطياُ مع $B_1$و $B_2$ فإنه يمكننا القول بأن $B_1$ مرتبط خطياً مع Vو$B_2$أو $B_2$ مرتبط خطياً مع V و$B_1$ لأنه يمكننا التعبير عن أحد هذه الأشعة بدلالة الشعاعين الآخرين بعلاقة ارتباط خطي,

**الاستقلال الخطي للاشعة:**

نقول عن جملة الاشعة $B_1, B_2, \dots\dots, B_m$ من $R^2$ أنها مستقلة خطياً إذا لم تكن مرتبطة خطياً أي إذا لم يكن بالامكان حساب أحدهما بدلالة الآخر، وبتعبير آخر إذا كانت الأشعة $B_1, B_2, \dots\dots, B_m$ مستقلة فإن وجود أية علاقة خطية بينها مثل العلاقة:

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots \dots + \lambda_m B_m = 0$$

لا تتحقق هذه العلاقة إلا إذا كانت جميع الاعداد $\lambda_i : i = 1,2, \dots . m$ معدومة أي

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_m = 0$$

وذلك باستخدام هذا الشرط للبرهان عن استقلالية الاشعة أو ارتباطها.

مثال: لنأخذ الاشعة التالية:

$$B_1 = [1,2,-1]$$

$$B_2 = [2,1,0]$$

$$B_3 = [0, -2, 1]$$

برهن أنها مستقلة خطياً لذلك نشكل منها العبارة الخطية التالية:

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0$$

$$\lambda_1[1,2,-1] + \lambda_2[2,1,0] + \lambda_3[0,-2,1] = [0,0,0]$$

$$[\lambda_1, 2\lambda_1, -\lambda_1] + [2\lambda_2, \lambda_2, 0\lambda_2] + [0\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3]$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0 = 0 \quad (1)$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \quad (2)$$

$$-\lambda_1 + 0 + \lambda_3 = 0 \quad (3)$$

من (3) نجد أن $\lambda_1 = \lambda_3$ نعوض في (2) فنجد أن

$2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$ وبالتالي $\lambda_2 = 0$ نعوض في (1) فنجد أن $\lambda_1 = 0$ ومنه $\lambda_3 = 0$

وبالتالي: $\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ فالأشعة مستقلة خطياً.

## تشكيل المجموعات

إذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من n عنصراً مختلفاً $A_n = \{a_1, a_2, \dots \dots a_n\}$ فإنه يمكننا أن نشكل من هذه المجموعة مجموعات كثيرة سنميز هنا بين الأنواع التالية:

1- **المتبادلات:** وهي جملة المجموعات من نفس الحجم n والتي يمكن تشكيلها من عناصر المجموعة $A_n$ ويتغير ترتيبها ضمن المجموعة ويبرهن على أن عدد متبادلات المجموعة ذات الحجم n هو $P_n$ ويساوي إلى $P_n = n!$ حيث n! تشير إلى عاملي n أي أن:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots 3 \times 2 \times 1$$

مثال: يمكن لمجلس الادارة أن يتوزع المهام بين أعضائه بعدد من الطرق يساوي $P_n = n! = 5!$ طريقة$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ملاحظة هامة: إذا كان بعض عناصر المجموعة $A_n$ مكررا فإننا نقسم العدد n! على عاملي عدد مرات تكرار كل منها كمثال على ذلك نجد أن عدد مبادلات المجموعة $A = \{a, a, b, b, b, c, c, c, c, c\}$

$$P_n = \frac{10!}{2!\,3!\,5!}$$

وبصورة عامة يكون عدد المتبادلات

$$P_n = \frac{n!}{n_1!\,n_2! \dots \dots n_n!}$$

حيث $n_i$ هو عدد مرات تكرار العنصر $a_i$ وإذا كان $n_i = 1$ فإن $P_n = n!$

2- **المرتبات:** وهي جملة المجموعات الجزئية من الحجم k التي يمكن تشكيلها من المجموعة $A_n$ حيث $k \leq n$ والتي تختلف عن بعضها باختلاف عناصرها أو باختلاف ترتيب تلك العناصر داخلها ويبرهن على أن عدد مرتبات الحجم k من أصل n في حالة السحب بدون اعادة يساوي:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

وكمثال على ذلك عدد المرتبات المختلفة التي يمكن تشكيلها بدون اعادة بحجم k=3 من المجموعة $A = \{a, b, c, d, e\}$ حيث

$$A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

ملاحظة هامة: إذا كانت شروط التشكيل تسمح بتكرار العناصر ضمن المرتبات ( حالة السحب مع الاعادة ) فإن عدد المرتبات الممكنة يساوي $\acute{A}_n^k = n^k$

مثال: إن عدد الأرقام ذات ثلاث مراتب التي يمكن تشكيلها من مجموعة الأرقام العشرية $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ هو $\acute{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$

وهي تشمل جميع الاعداد من0 وحتى 999

3- **المتوافقات:** هي جملة المجموعات الجزئية من الحجم k والتي يمكن تشكيلها من المجموعة A حيث $k \leq n$ والتي تختلف عن بعضها البعض باختلاف عناصرها فقط أي أن المتوافقات لا تفرق بين المجموعات $\{a, b, c\}, \{b, c, a\}\{c, b, a\}$ لأنها تحوي نفس العناصر ولذلك نعتبرها متوافقة واحدة قيبرهن على أن عدد المتوافقات التي يمكن تشكيلها بحجم k من أصل n في حالة السحب بدون اعادة يعطى بالعلاقة: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

وكمثال على ذلك نجد أن عدد المتوافقات التي يمكن تشكيلها بحجم k=3 من الاحرف $A_5 =$ $\{a, b, c, d, e\}$ يساوي:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!.2!} = \frac{20}{2} = 10$$

ملاحظة هامة: إذا كانت شروط التشكيل تسمح بتكرار العنصر ضمن المتوافقة ( سحب مع اعادة) فإن عدد المتوافقات الممكنة يساوي:

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

مثال: إن عدد المتوافقات التي يمكن تشكيلها من الاعداد بحجم k=3 من المجموعة $A_5 =$ $\{a, b, c, d, e\}$ يساوي:

$$C_{n+k-1}^k = c_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(4)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

وهي تشكل جميع المتوافقات ذات العناصر المكررة داخليا

مثال: $\{a, a, b\}, \{a, a, a\}$ ..... الخ,

**عدد طرق تجزئة المجموعة $A_n$**: لنفرض أننا نريد تجزئة المجموعة $A_n$ إلى m مجموعة جزئية بحجوم $k_1, k_2, \dots\dots, k_m$ حيث $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ فإن عدد طرق التجزئة يساوي:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots\dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots\dots k_n!}$$

مثال: عدد طرق تجزئة المجموعة يساوي:

$A_n^m = A_{10}^m = \{a_1, a_2, \dots\dots, a_{10}\}$ إلى ثلاث مجموعات بحجوم $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 =$

5 يساوي:

$$P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2!\,3!\,5!}$$

## المتواليات العددية

نقول عن الاعداد $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ أنها متوالية عددية إذا كانت حدودها تنشأ عن بعضها البعض ومن علاقة أو قانون معين، يسمى $a_1$ الحد الأول للمتوالية و$a_n$ الحد الأخير للمتوالية، و$a_i$ الحد العام للمتوالية.

1- **المتوالية الحسابية:** وهي المتوالية التي يكون فيها الفرق بين حد وسابقه يساوي مقداراً ثابتاً r يسمىrأساس المتوالية، أي أن حدود المتوالية الحسابية تحقق الشرط التالي: $a_k - a_{k-1} =$ r حيث: $r \neq 0$ و k:2,3,....n وهكذا نجد أنه يمكننا حساب أي حد من حدود المتوالية الحسابية من خلال العلاقات التالية:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$
$$a_k = a_{k-1} + r = a_1 + (k-1)r$$
$$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r$$

**خواص المتوالية الحسابية:**

- مجموع أي حدين متقابلين يساوي مقداراً ثابتاً وهو $2a_1 + (n-1)r$ لأن:

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-2} = (a_1 + r) + [a_1 + (n-2)r] = 2a_1 + (n-1)r$$

وهكذا

- مجموع حدود المتوالية الحسابية يرمز له بالرمز $S_n$ ويكتب بالعلاقة الاتية: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$

ومن ناحية أخرى مجموع أي حدين متقابلين يساوي $a_1 + a_n$

ويمكن كتابة المحوع السابق

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

- تكون المتوالية متزايدة إذا كان r>0 ومتناقصة إذا كان r<0

مثال(1): ادرس المتوالية التالية واوجد مجموع حدودها

2,4,6,8,10,12, 14,16,18,20

من خلال دراسة الحدود نجد أن الفرق بين أي حد وسابقه هو 2 وهي متزايدة لأن r=2>0 أساسها r=2 ومجوع حدودها

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{10}{2}(2 + 20) = 110$$

مثال(2):أوجد مجموع الاعداد الطبيعية من 1 وحتى n أي أن الاعداد الطبيعية هي

1,2,3,4,……n-1,n

وهي تشكل متوالية حسابية أساسها r=1 ومجوع حدودها

$$S_n = \frac{n}{2}[1 + n] = \frac{n(n+1)}{2}$$

وكمثال على مجموع الاعداد الطبيعية من 1 وحتى20

$$S_{20} = \frac{20}{2}[1 + 20] = \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

2- **المتوالية الهندسية:** وهي المتوالية التي يكون فيها نسبة أي حد على سابقه يساوي مقداراً ثابتاً q أي أن:

$$\frac{a_1}{a_1 - 1} = q \quad q \neq 1$$

نسمي العددq بأساس المتوالية ويكتب على الشكل التالي:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = qa_1$$
$$a_3 = qa_2 = q(qa_1) = q^2a_1$$
$$a_k = qa_{k-1} = q^{k-1}a_1$$
$$a_n = qa_{n-1} = q^{n-1}a_1$$

مجموع حدود متوالية هندسية:

$$G_n = a_1 + qa_1 + q^2a_1 + \cdots \ldots + q^{n-1}a_1$$
$$G_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q \neq 1$$

تكون المتوالية الهندسية متزايدة عندما$q > 1$ومتناقصة عندما$q < 1$وثابتة إذا كانت $q = 1$

مثال: حدد نوع المتوالية وأوجد أساسها ومجموعها

2, 6, 18, 54, 162, 486

نسبة أي حد إلى سابقه تساوي/3/ أي q=3 والمتوالية هندسية.

عدد حدودها n=6 ومجموعها يساوي $G_6 = 2\frac{3^6}{3-1}$

مثال: إذا كان مجموع حدود متوالية هندسية يساوي 242 وأساسها q=3 وعدد حدودها n=5 أوجد حدها الأول وحدودها المتتالية.

$$242 = a_1 \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121a_1 \rightarrow a_1 = \frac{242}{121} = 2$$

الحدود: 2, 6, 18, 54, 162

**تمارين**

1- ضع إشارة √أو x أمام العبارات التالية:

- $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ √
- $\frac{1}{2} = \frac{5}{15}$ X
- $\frac{-5}{2} = \frac{-10}{4}$ √
- $-|-3| = -3$ √
- $-|6| = -6$ √
- $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$ √
- $\left|\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{6}$ √
- $-10 \in N$ X
- $\frac{1}{2} \in Z$ X
- $4 + 2i \in R$ X
- $\frac{(3^2)^3}{4^{\frac{1}{2}}} \in N$ X
- $4 + i \in C$ √
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \in Q$ X
- $-\frac{1}{7} \in Q$ √
- $\sqrt{7} \in R$ √
- $-\frac{|-5|}{\sqrt[3]{27}} \in Q$ √
- $\frac{4}{\sqrt{16}} \in N$ √

2- إذا علمت أن الأشعة التالية هي , $V_1 = [0,-2,\sqrt{2}]$ ,$V_2 = \left[1,3,-\frac{1}{2}\right]$ أوجد $V_1 + V_2$ و $V_1 - V_2$

$$V_1 + V_2 = \left[(0+1),(-2+3),\left(\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right] = \left[1,1,\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right]$$

$$V_1 - V_2 = \left[(0-1),(-2-3),\left(\sqrt{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[-1,-5,\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right]$$

3- إذا علمت أن أعداد كميات اللحوم والفواكه والحلويات التي تم شراؤها لإحدى المطاعم خلال اسبوع هي: 225 ، 110، 75 على التوالي، وأسعارها موضحة بالشعاع التالي: $\begin{bmatrix}2500\\500\\1000\end{bmatrix}$ أوجد قيمة مشتريات المطعم من هذه الأنواع.

$$[225,110,75]\begin{bmatrix}2500\\500\\1000\end{bmatrix} = 225\times 2500 + 110\times 500 + 75\times 1000$$

$$= 692500$$

إذا علمت بأن أسعار هذه المواد قد تضاعفت فاوجد الأسعار الجديدة

الاسعار الجديدة=2×شعاع الأسعار القديمة

$$2\begin{bmatrix}2500\\500\\1000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5000\\1000\\2000\end{bmatrix}$$

4- لدينا الأشعة التالية:

$$P_1 = [1,-1,1,-1,1]$$

$$P_2 = [1,0,2,0,1]$$

$$P_3 = [1,-5,-1,2,-1]$$

$$P_4 = [3, -6,2,1,1]$$

برهن أن هذه الأشعة مرتبطة خطياً.

$$p_4 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$$

$$p_4 = 1p_1 + 1p_2 + 1p_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

الأشعة مرتبطة خطياً.

5- لدينا الأشعة التالية:

$$P_1 = [1,2, -1,0]$$
$$P_2 = [-1,2,4,2]$$

$$P_3 = [-3, -2,6,2]$$

برهن أن هذه الأشعة مرتبطة خطياً.

$$p_3 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$$

$$p_3 = -2[1,2, -1,0] + 1[-1,2,4,2] = [-2, -4, +2,0] + [-1,2,4,2]$$
$$= [-3, -2,6,2] = p_3$$

6- أوجد عدد الطرق التي تلزم لتجزئة مجموعة بحجم n=15 إلى ثلاثة مجموعات بحجوم

$$k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 6$$

$$p_{15}^{4,3,6} = \frac{15!}{4!\,3!\,6!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 6!}$$

$$= 12612600$$

7- أوجد قيمة الثابت k لتشكل الاعداد التالية متوالية حسابية : $k-1, k-3, 3k-1$

كل حد – الحد الذي يسبقه يساوي أساس المتوالية أي أن:

$$(k-3)-(k-1)=r \quad (1)$$

$$(3k-1)-(k-3)=r \quad (2)$$

$$(1)=(2)$$

$$(k-3)-(k-1)=(3k-1)-(k-3)$$

$$-2=2k+2 \rightarrow k=\frac{-4}{2}=-2$$

## المصفوفات والمعينات( المحددات)

1- المصفوفة: تدعى جملة الأعداد المرتبة في جدول يحوي m سطراً وnعموداً مصفوفة من المرتبة m×n يرمز لها بالرمز $A_{m\times n}$

وتكتب على الشكل التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتدعى الأعداد $a_{ij}$ عناصر المصفوفة A.

ويرمز الدليلi إلى رقم السطر ويأخذ القيم من i=1,2,3…..m ويشير الدليل j إلى رقم العمود ويأخذ القيم التالية: j=1,2,….n

ويمكن كتابة المصفوفة بشكل مختصر كما يلي:

$$A_{m.n}=[a_{ij}]_{m.n}$$

وهنا نلاحظ أن العناصر $a_{in}$ ⋯ $a_{ij}$, ⋯ $a_{i2}$, $a_{i1}$ والتي لها نفس الدليل الأول تشكل عناصر السطر i في المصفوفة A

**أنواع المصفوفات:**

يمكن تصنيف المصفوفات حسب مراتبها، وقيم عناصرها، والعلاقات بين عناصرها إلى ما يلي:

1- المصفوفات المستطيلة:

$$A_{m.n} = [a_{ij}]_{m.n}$$ حيث $m \neq n$

ويمكن أن نجد منها:

✓مصفوفة السطر: وهي مصفوفة مستطيلة تحوي سطراً واحداً فقط وn عموداً وتكتب على الشكل التالي: $A_{1,n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{1n}]$ وتسمى مصفوفة شعاع السطر.

✓مصفوفة العمود: وهي مصفوفة مستطيلة تحوي عموداً واحداً فقط وm سطراً وتكتب على الشكل التالي: $A_{m,1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ وتسمى مصفوفة شعاع العمود.

وغالباً ما تسمى المصفوفتان $A_{1,n}$ و$A_{m,1}$ أشعة فقط وعناصرها مركبات الأشعة.

2- المصفوفة الصفرية: وهي مصفوفة جميع عناصرها أصفاراً ونرمز لها بالرمزO وتكتب على الشكل التالي:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي فيها m=n أي التي يكون فيها عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة وتكتب:

$$A_{n.n} = [a_{ij}]_{n.n}$$

ويرمز لها اختصاراً بـــ:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$A_n$ مصفوفة مربعة من المرتبةn

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & 3 & 4 \\ b & 1 & x \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة. ومن المصفوفات

المربعة نجد المصفوفات التالية:

- ✓ المصفوفة أحادية العنصر: وهي مصفوفة ذات عنصر واحد فقط $A_{1.1} = [a]$
- ✓ المصفوفة الواحدية: وهي مصفوفة مربعة من المرتبة n فيها عناصر القطر الرئيسي متساوية وتساوي الواحد أما بقية عناصرها فهي معدومة ترمز لها بـــ $I_n$ وتكتب على الشكل التالي:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

وهي تلعب دور العنصر الحيادي بالنسبة لضرب المصفوفات كالعدد واحد بالنسبة لضرب الأعداد.

- ✓ المصفوفة القطرية: وهي مصفوفة من المرتبة n جميع عناصرها غير القطرية معدومة، وتكتب على الشكل التالي:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وفي الحالة الخاصة التي تكون العناصر القطرية متساوية، وتساوي عدداً ثابتاً $\lambda$ أي $a_{ij} = \lambda$ حيث i,j=1,2,…..n

ونحصل على المصفوفة القطرية التالية:

$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ وهي مصفوفة مربعة من المرتبة n ومن الأمثلة عليها المصفوفة الواحدية $I_n$

✓ المصفوفة المثلثة: وهي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت أو فوق القطر الرئيسي معدومة.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

إذا كانت العناصر $a_{ij} = 0$ من أجل i>j تسمى عندئذ المصفوفة المثلثة فوقية كالمصفوفة السابقة وإذا كانت العناصر $b_{ij} = 0$ من أجل i<j تسمى عندئذ المصفوفة المثلثة تحتية كالمصفوفة الآتية:

$$B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

✓ المصفوفة المتناظرة: وهي مصفوفة مربعة

$A_n = [a_{ij}]_n$ تكون عناصرها متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي أي: $a_{ij} = a_{ji}$ حيث i,j=1,2,…n

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ متناظرة لأن $a_{12} = a_{21} = 3$ و $a_{23} = a_{32} = 0$ و $a_{31} = a_{13} = 4$

✓ المصفوفة المتعاكسة: وهي مصفوفة مربعة تكون فيها العناصر متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متعاكسة أي أن: $a_{ij} = -a_{ji}$ حيث i,j=1,2,…n وتتطلب هذه المساواة أن تكون عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر مثال: $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

✓ نظير مصفوفة: وهي المصفوفة التي تنتج عن المصفوفة $A$ بضرب جميع عناصرها بـــ $(-1)$ أي أن نظيرة $A$ هي المصفوفة$(-A)$.

العمليات على المصفوفات:

1- المساواة: نقول عن مصفوفتين $A_{m.n} = [a_{ij}]_{m.n}$ و $B_{m.n} = [b_{ij}]_{m.n}$ أنهما متساويتان ونكتب على الشكل A=B إذا كانتا من نفس المرتبة m×n وكانت عناصرهما المتقابلة متساوية أي $a_{ij} = b_{ij}$ جيث i=1,2…..m, j=1,2,……n وخواص تساوي مصفوفتين هي:

- إذا كانت A=B فإن B=A
- إذا كانت A=B وB=C فإن A=C

مثال: إذا كانت المصفوفتان $B = \begin{bmatrix} 2X & Y \\ X-Z & Y-t \end{bmatrix}$ ,$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ متساويتين أوجد كل من X,Y,Z,t

الحل: من التساوي لدينا كل عنصرين متقابلين متساويين أي:

$2X=0 \rightarrow X=0$

$Y=2$

X-Z=1→0-Z=1 →Z=-1

Y-t=3→2-t=3→t=-1

2- جمع المصفوفات: حاصل جمع مصفوفتين $A_{m.n} = [a_{ij}]_{m.n}$ و $B_{m.n} = [b_{ij}]_{m.n}$ من نفس المرتبة $m \times n$ هو مصفوفة ثالثة $C_{m.n} = [c_{ij}]_{m.n}$ لها نفس المرتبة وعناصرها هي حاصل جمع العناصر المتقابلة في المصفوفتين A,B أي أن: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ حيث:

$$i = 1,2,\dots.m \text{ و } j = 1,2,\dots.n$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال: ليكن لدينا المصفوفتين A,B أوجد المصفوفة C ناتج جمعهما؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & -3 + 2 \\ 0 + 0 & 5 + (-2) & 4 + (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

**خواص جمع المصفوفات:** بفرض لدينا المصفوفات A,B,C من نفس المرتبة: فإن:

- جمع المصفوفات تبديلي: أي أن A+B=B+A
- جمع المصفوفات تجميعي: أي أن: (A+B)+C=A+(B+C)
- بفرضO مصفوفة صفرية من مرتبة A فإن: A+0=A المصفوفة الصفرية عنصر حيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

- من أجل كل مصفوفة A يوجد مصفوفة وحيدة Y مناظرة لـــ A وتحقق العلاقة A+Y=0 يجب أن تكون Y من مرتبة A لتتحقق هذه المعادلة ويرمز للمصفوفة Y بالرمز Y=-A

$$Y = -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

3- طرح المصفوفات: إن ناتج طرح مصفوفتين A,B من المرتبة نفسها m×n هو مصفوفة ثالثة من المرتبة نفسها m×n نحسب عناصرها من طرح العناصر المتقابلة للمصفوفتين A,B ونكتب ذلك λλعلى الشكل التالي: A-B=C حيث يتم حساب عناصر C كما يلي: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ حيث: $. j = 1,2, \ldots . n$ و$i = 1,2, \ldots . m$

**لا تتمتع عملية الطرح بخواص عملية الجمع أي أن:**

- الطرح غير تبديلي: A-B≠B-A
- الطرح غير تجميعي: (A-B)-C≠A-(B-C)
- طرح المصفوفة A من المصفوفة المناظرة لها (-A) لا يساوي الصفر أي أن A-(-A)≠0

4- لكن المصفوفة الصفرية O عنصر حيادي بالنسبة لطرح المصفوفات كما في عملية الجمع أي أن:A-O=A

4- ضرب مصفوفة بعدد ثابت: حاصل ضرب المصفوفة $A_{m.n} = [a_{ij}]_{m.n}$ بعدد ثابت λ هو مصفوفة B من المرتبة نفسها m×n أي أن $B_{m.n} = [b_{ij}]_{m.n}$ حيث $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

$$B_{m.n} = \lambda A_{m.n} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات بعدد:

- لا تتغير المصفوفة إذا ضربت بالعدد/1/ أي أن $1\times A=A$ ويعتبر العدد/1/ عنصر حيادي بالنسبة لضرب المصفوفات بعدد.
- تتحول المصفوفة إلى مصفوفة صفرية إذا ضربت بالعدد/0/ أي أن: $0\times A=0$
- بفرض أن $\lambda$ و$\mu$ عددان ثابتان فإن: $\lambda(\mu\ A)=(\lambda\ \mu)\ A$
- بفرض $\lambda$ عدد حقيقي و $A,B$ مصفوفتان من نفس المرتبة $m\times n$ فإن:

$$\lambda(A\pm B)=\lambda\ A\pm\lambda\ B$$

- بفرض أن $\lambda$ و$\mu$ عددان حقيقيان و$A$ مصفوفة فإن: $(\lambda\pm\mu)\ A=\lambda\ A\pm\ \mu\ A$ أي ان عملية ضرب المصفوفات توزيعية على جمع وطرح الأعداد.

5- ضرب المصفوفات ببعضها:

لنفرض أولاً ضرب مصفوفة سطر(شعاع) بمصفوفة عمود(شعاع):

$$A_{1,n}=[\ a_{11}\quad a_{12}\quad \dots a_{1n}\ ]$$

$$B_{n,1}=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

إن ضرب المصفوفتين $A_{1,n}\times B_{n,1}$ نسميع عمليتي ضرب شعاعين:

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \dots a_{1n}] \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \dots \dots + a_{1n} \times$$

$$b_{n1} = c$$

حيث cعدد ثابت.

نعمم ذلك على جداء مصفوفتين: $A_{m.n} = [a_{ij}]_{m.n}$ و $B_{n.p} = [b_{ij}]_{n.p}$ يكون فيها عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B ويساوي n فنحصل على المصفوفة C أي:

$$A_{m.n} \times B_{n.p} = C_{m.p} = [c_{ij}]_{m.p}$$

حيث $C$ مصفوفة من المرتبة $m.p$ نحصل على العنصر $c_{ij}$ بأخذ جداء عناصر شعاع السطر $i$ بالعنصر المقابلة لها في العمود $j$ ثم أخذ مجموع هذه الجداءات فنحصل على العدد الواقع في السطر $i$ والعمود $j$ في المصفوفة $C$.

مثال(1): لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد $A \times B$ ؟ عدد أعمدة $A$ يساوي عدد أسطر $B$ شرط الضرب محقق.

$$A_{2.2} \times B_{2.3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 2 & 3 \times 3 + 2 \times 4 & 3 \times 1 + 2 \times 3 \\ 1 \times 1 + 4 \times 2 & 1 \times 3 + 4 \times 4 & 1 \times 1 + 4 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 17 & 9 \\ 9 & 19 & 13 \end{bmatrix}$$

أوجد $B \times A$؟ عملية الضرب غير ممكنة لأن عدد أعمدة $B$ لا يساوي عدد أسطر $A$

مثال(2): لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{3.3} \times X_{3.1} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = B$$

وبالتالي نحصل على المعادلة المصفوفية $A \times X = B$ وهي شكل مختصر لثلاث معادلات خطية:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_1$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b_2$$

$$5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = b_3$$

ملاحظة: إذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين من نفس المرتبة فغن عمليتي الجداء A.B, B.A ممكنتان في نفس الوقت ولكن A.B≠B.A

مثال: $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد A×B, B×A ماذا تستنتج؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 22 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 32 & 7 \end{bmatrix}$$ نستنتج أن A.B≠B.A

خواص ضرب المصفوفات:

- إذا كان λ عدد ثابت و $A_{m.n}$ و $B_{n.p}$ مصفوفتان فإن: λ (A.B)=(λ.A)B=A(λ.B)
- ضرب المصفوفات تجميعي لدينا المصفوفات: $C_{n_2,n_3}$ $B_{n_1,n_2}$, $A_{m_1,n_1}$ فإن A(B.C)=(A.B)C شرط الضرب محقق.

- ضرب المصفوفات غير تبديلي: A.B≠B.A
- إذا كانت المصفوفةA من المرتبة m× n و $I$ المصفوفة الواحدة يكون:

$$A_{m.n} \times I_n = A_{m.n}.I_n = I_m.A_{m.n} = A_{m.n}$$

وفي الحالة الخاصة فغذا كانت A مربعة من المرتبة n فإن:

$$A_n.I_n = I_n.A_n = A_n$$

أي أن المصفوفة I عنصر حيادي لعملية ضرب المصفوفات.

- ضرب المصفوفات توزيعي من اليمين واليسار بالنسبة لجمع وطرح المصفوفات أي أن:

(A±B)C=A.C±BC

C (A±B) =C.A±C.B

- إذا كانت A.B=A.C فإن B=C
- ملاحظة: ضرب المصفوفات يختلف عن ضرب الأعداد حيث يمكن أن نحصل على مصفوفة صفرية من ناتج ضرب مصفوفتين غير صفريتينA, B

مثال: $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$A_{2.3}.B_{3.2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ شرط الضرب محقق عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B

$$A_{2.3}.B_{3.2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 2 + (-2)\times 3 + 4\times 1 & 1\times 4 + (-2)\times 6 + 4\times 2 \\ -2\times 2 + 3\times 3 + (-5)\times 1 & -2\times 4 + 3\times 6 + (-5)\times 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{2.3}.B_{3.2} = \begin{bmatrix} 2-6+4 & 4-12+8 \\ -4+9-5 & -8+18-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

*A≠0, B≠0, A.B=0*

منقول( مدور مصفوفة): إن منقول المصفوفة $A_{m.n}$ هو المصفوفة $\acute{A}_{n.m}$ الناتجة عن $A_{m.n}$ بتبديل الأسطر بالأعمدة ( أو الأعمدة بالأسطر) حيث نضع السطر الأول في $A$ عموداً في $\acute{A}$ والسطر الثاني عموداً ثانياً ....وهكذا نرمز لمنقول المصفوفة $A$ بـــ $\acute{A}$ ويتمتع منقول المصفوفة بالخواص التالية:

- $(\acute{A})' = A$
- $(A + B)' = \acute{A} + \acute{B}$
- $(\lambda A)' = \lambda \acute{A}$
- $(A.B)' = \acute{B}.\acute{A}$
- $(A.B.C)' = \acute{C}.\acute{B}.\acute{A}$

مثال: أوجد منقول المصفوفة:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

منقول المصفوفة هو $\acute{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

**المعينات( المحددات):** تعريف: يرافق كل مصفوفة مربعة $A$ عدد يسمى معين $A$ أو محددها ويرمز لها عادة بـــ $detA$ أو $|A|$، إن عناصر المعين هي نفسها عناصر المصفوفة ومكتوبة بنفس الترتيب في سطور وأعمدة ضمن خطين متوازيين، وبما أن المعينات هي حالة خاصة مرافقة للمصفوفات المربعة فقط لذلك إن عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها دائماً، فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ يرافقها المعين $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

**إيجاد قيمة المعين:** هناك عدة طرائق حسب مرتبة المصفوفة: فالمعينة الثنائية 2×2 والثلاثية 3×3 لهما طرائق خاصة وهناك الطريقة العامة لكل المعينات من أي مرتبة كانت.

1- حساب قيمة معين المصفوفة الثنائية 2×2:

إذا كانت $A_{2.2}$أي $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ قيمة معينها تساوي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

أي أن قيمة معين المصفوفة هو جداء عناصر القطر الرئيسي $a_{11}.a_{22}$ مطروحاً منه جداء عناصر القطر الثانوي $a_{12}.a_{21}$

مثال: او جد قيمة معين المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 4 + 6 = 10 > 0$$

2- حساب قيمة معين المصفوفة الثلاثية 3×3: وتسمى طريقة سايروس التي اشتقت منها الطريقة العامة

طريقة سايروس: بفرض لدينا المعين التالي:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

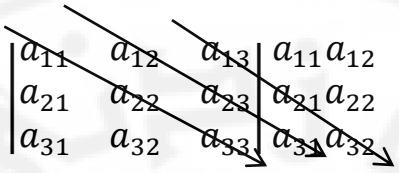
يتم حساب قيمة المعين بالخطوات التالية:

1- نكتب إلى جانب المعين الأيمن العمودين الأول والثاني كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{matrix}$$

2- نمرر ثلاثة أسهم هابطة متوازية مارة بعناصر القطر الرئيسي وبعناصر القطرين الموازيين له،

وبأخذ مجموع جداء العناصر الواقعة على هذه الأسهم نحصل على المجموع الناتج S

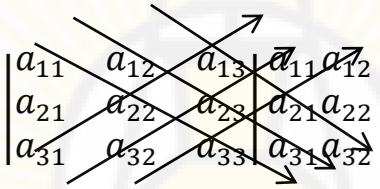


$$S = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

3- نمرر ثلاثة اسهم صاعدة متوازية مارة بعناصر القطر الثانوي وبعناصر القطرين الموازيين له

ونأخذ مجموع جداء العناصر الواقعة على هذه الأسهم ونرمز للمجموع الناتج بـــ T أي أن:

$$T = a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

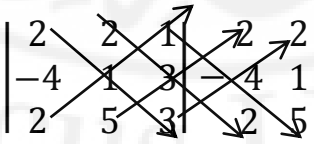


4- نحصل على قيمة المعين D بحساب الفرق S-T أي أن D=S-T

مثال: اوجد قيمة المعين D؟

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

بطريقة سايروس :



$$S = 2 \times 1 \times 3 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times -4 \times 5 = 6 + 12 - 20 = -2$$

$$T = 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times -4 \times 2 = 2 + 30 - 24 = 8$$

D=S-T=-2-8=-10<0

**الطريقة العامة لحساب معين مصفوفة من المرتبة $D \geq 3$:**

تعتمد الطريقة على جدول الاشارات، المصغرات، العوامل المرافقة:

1- **جدول الاشارات:** يرافق كل معين جدول من الاشارات وهي اشارات متناوبة في كل سطر وكل عمود نبدأ بإشارة (+)، في الزاوية العليا اليسرى كما يلي:

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ فيكون جدول الاشارات كما يلي: $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$

يمكننا الحصول على الاشارة المقابلة للعنصر $a_{ij}$ من تطبيق القاعدة $(-1)^{i+j}$ حيث i ترمز لرقم السطر و j ترمز لرقم العمود. مثال العنصر $a_{12}$ الإشارة المقابلة له هي $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$، ليس لجدول الاشارات علاقة بالاشارة الجبرية للعناصر $a_{ij}$ نفسها.

2- **المصغرات:** هي معينات جزئية مشكلة من المعين الاساسي D بحذف نفس العدد من الأسطر والأعمدة يتم تشكيل مصغرات المرتبة (n-1) بحذف أحد الاسطر وأحد الاعمدة من المعين D وهكذا يمكننا أن نشكل مثابل كل عنصر $a_{ij}$ من D مصغراً من المرتبة (n-1) بحذف السطر i والعمودj . نرمز للمصغر المقابل للعنصر $a_{ij}$ بالرمز $M_{ij}$، وبما أن عدد عناصر المعينD يساوي $n^2$ عنصراً فإن عدد المصغرات من المرتبة (n-1) يساوي$n^2$ مصغراً، للحصول على المصغرات من المرتبة (n-2) نعالج كلاً من المصغرات من المرتبة (n-1) بنفس الطريقة.

مثال: أوجد جميع مصغرات المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

بحذف سطر وعمود كل عنصر نحصل على المصغرات التي عددها يساوي عدد عناصر المصفوفة كما يلي:

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix},\qquad M_{12}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\qquad M_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix},\qquad M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\qquad M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix},\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\qquad M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

وعددها (9) مصغرات لأن $n^2=3^2=9$ بحساب قيمة هذه المصغرات نحصل على أعداد جبرية عادية.

3- **العوامل المرافقة:** جملة الأعداد الناتجة عن جداء المصغرات السابقة بالاشارات المقابلة لها في جدول الاشارات أي أن العامل المرافق للعنصر $a_{ij}$ والذي نرمز له بالرمز $D_{ij}$ هو العدد:

$$D_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$$

نطبق على المثال السابق نجد أن العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A هي

$$D_{11}=(-1)^{1+1}.M_{11}=+1.\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1.(2\times 2-1\times 2)=2$$

وهكذا بالنسبة لبقية العناصر نحصل على معين العوامل المرافقة المقابلة لعناصر المصفوفة A وهي:

$$D=\begin{vmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}+2 & +4 & -5\\ +1 & -5 & +1\\ -4 & -1 & +3\end{vmatrix}$$

نعود لمعالجة الطريقة العامة لحساب قيمة المعين من المرتبة $D\geq 3$ وذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية: إن قيمة معين المصفوفة $A_n = [a_{ij}]_n$ تساوي مجموع نواتج جداءات عناصر أي سطر منها ( أو أي عمود منها) في العوامل المرافقة المقابلة لعناصر ذلك السطر ( أو العمود). أي أن قيمة معين حسب عناصر السطر i هي:

$$|A| = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots \ldots + a_{in}D_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}$$

وإذا أردنا حساب قيمة معين A حسب عناصر العمودj فغن ذلك يساوي:

$$|A| = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \cdots \ldots + a_{nj}D_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}D_{ij}$$

تسمى العلاقتين السابقتين بمنشور أو مفكوك لا بلاس لمعين المصفوفة بدلالة عناصر السطرi أو العمود j

مثال: أوجد معين المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots \ldots + a_{in}D_{in}$$

النشر حسب السطر الأول:

$$= a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \cdots \ldots + a_{1n}D_{1n}$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-2) - (2-6) + 3(1-6) = 4 + 4 - 15 = -7$$

مثال(2): أوجد معين المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

**خواص المعينات:**

1- إذا بدلنا أسطر معين بالاعمدة المناظرة لها نحصل على معين جديد قيمته مساوية لقيمة المعين الأول.

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ قيمة هذا المكعين هي جداء عناصر القطر الرئيسي مطروحا منها جداء عناصر القطر الثانوي = 2×5−3×4 = 10−12=−2

بتبديل الأسطر بالاعمدة المناظرة لها نحصل $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ وقيمة المعين = 2×5−3×4=10−12=−2 إذا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2- إذا كانت عناصر أحد الأسطر ( الاعمدة) في معين $|A|$ تساوي الصفر فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

3- إذا بدلنا مواضع سطرين( أو عمودين) في معين $|A|$نحصل على معين جديد $|B|$ يساوي $-|A|$ () أي أن:

$$|A| + |B| = 0 \text{ أو } |B| = -|A|$$

مثال: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

4- إذا تضمن المعين سطرين (او عمودين) متساويين فإنه يساوي الصفر.

إذا ضربنا عناصر السطر ( أو العمود ) في المعين $|A|$ بعددλ نحصل على معين $|B|$ يساوي $\lambda|A|$ أي: $|B|= \lambda|A|$

5- إذا ضربنا المصفوفة A بعدد λ فإن قيمة المعين للمصفوفة الناتجة λA هي: $|\lambda A| = \lambda^n|A|$

ملاحظة: ضرب المصفوفة A بعدد λ يختلف كلياً عن ضرب المعين A بالعدد λ لأن ضرب المصفوفات يعني ضرب جميع عناصرها بـــ λ بينما ضرب المعين A بـــ λ يعني ضرب عناصر أحد أسطرها أو ( أعمدتها) بالعدد λ.

$$\lambda|A| = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

6- إذا وجد في معين سطرين ( عمودين) متناسبين أحدهما مضاعف للآخر فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

7- لا تتغير قيمة المعين $|A|$ إذا ضربنا عناصر أحد الأسطر ( أو الاعمدة) بعدد λ وأضفنا الناتج إلى عناصر سطر ( عمود) آخر.

8- عن قيمة معين جداء مصفوفتين بساوي جداء قيمتي معيناتها.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 15 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A.B| = \begin{vmatrix} 44 & 15 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 44 \times 8 - 11 \times 15 = 187$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 6 = -11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 7 = -17$$

$$|A|.|B| = -11 \times -17 = 187$$

$$|A.B| = |A|.|B|$$

9- إن قيمة معين منقول مصفوفة A تساوي قيمة معين المصفوفة A أي أن $\left|\acute{A}\right| = |A|$

مقلوب مصفوفة مربعة: إن مقلوب المصفوفة النظامية $A_n$ هو مصفوفة $X_n$ من نفس المرتبة وتحقق العلاقة المزدوجة التالية: $X.A=A.X=I_n$ حيث $I_n$ المصفوفة الواحدية من المرتبة n

**مثال:** أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة النظامية: هي المصفوفة المربعة التي تكون قيمة معينها مختلفة عن الصفر أي أن: $|A| \neq 0$.

المصفوفة الشاذة: هي المصفوفة المربعة التي يكون معينها $|A| = 0$

الحل: نتأكد أن من أن A نظامية: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 5 = -17 \neq 0$ وبالتالي المصفوفة نظامية

نفرض أن مقلوب A هو X وعناصرها $X_{=n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

$$X.A=I=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2x_{11} + 5x_{12} = 1$$

$$3x_{11} - x_{12} = 0$$

$$2x_{21} + 5x_{22} = 0$$

$$3x_{21} - x_{22} = 1$$

بالحل نحصل على: $x_{11} = \frac{1}{17}$ ، $x_{12} = \frac{3}{17}$ ، $x_{21} = \frac{5}{17}$ ، $x_{22} = \frac{2}{17}$ أي أن:

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**خواص مقلوب المصفوفة:**

1- يوجد لكل مصفوفة نظامية مقلوب وحيد.

2- إن مقلوب المقلوب $A^{-1}$ هو المصفوفة A نفسها.

3- إن مقلوب جداء مصفوفتين من نفس المرتبة يساوي جداء المقلوبين ولكن بترتيب معاكس أي أن:

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

4- إن قيمة معين مقلوب مصفوفةA يساوي مقلوب قيمة معين المصفوفة $|A|$ أي أن: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5- إن مقلوب منقول مصفوفة هو منقول مقلوبها: $\left(\acute{A}\right)^{-1} = (A^{-1})'$

**إيجاد مقلوب مصفوفة بواسطة المصفوفة المساعدة:**

1- لدينا المصفوفة الأساسية $A_n$

2- لدينا مصفوفة العوامل المرافقة $D_n$ والمستخرجة من $A_n$

3- المصفوفة المساعدة: وهي منقول المصفوفة D ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ حيث $\bar{A} = \acute{D_n}$

4- إذا كانت المصفوفة المربعة $A_n$ نظامية أي$|A| \neq 0$ فإن مقلوبها $A^{-1}$يعطى بالعلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\bar{A}$$

مثال: أوجد مقلوب المصفوفة $A$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

نتأكد أن $A$ نظامية أي: $|A|\neq 0$

$$|A|=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}+(-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$-2-8+12=2\neq 0$$

أي أن $A$ نظامية.

نوجد $D$ مصفوفة العوامل المرافقة:

نوجد اولا جدول الاشارات: $\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\\ - & + & -\end{vmatrix}$

نوجد المصغرات

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2,\quad M_{12}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4,\quad M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-3,\quad M_{22}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6,\quad M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1,\quad M_{32}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=4,\quad M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$$

بضرب المصغرات بجدول الاشارات المقابلة نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة $D$ كما يلي:

$$D=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -4\\ 3 & 6 & 5\\ -1 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

نوجد منقول المصفوفة $D$ فنحصل على المصفوفة المساعدة $\bar{A}$

$$\bar{A}=D'=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ -4 & 6 & -4\\ -4 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\bar{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

للتحقق $A^{-1}A = I$

مثال: أوجد مقلوب المصفوفة $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## المعادلات والمتراجحات الجبرية

**المعادلة الجبرية:** تركيب جبري يتضمن مجهولاً واحداً أو عدة مجاهيل، وتتألف المعادلة من طرفين تربط بينهما إشارة المساواة ولا يمكن لهذ المساواة أن تتحقق إلا من أجل عدد من القيم الممكنة للمتحول المجهول ونسمي هذه القيم التي تجعل المعادلة محققة جذور المعادلة أو حلولها.

1- المعادلة بمجهول واحد: ونميز الحالات الاتية:

- ✓ **المعادلة من الدرجة الاولى:** وتأخذ الشكل: $aX+b=0$ حيث $a\neq0$ ومنه $X=-\frac{b}{a}$

**مثال:** أوجد حل المعادلة التالية :

$$4X-57=\frac{X}{2}+\frac{X}{3}$$

نضرب الطرفين بالعدد/6/ فنحصل على: $24X-342=3X+2X$

$$24X-5X=342$$

$$19X=342\Rightarrow X=\frac{342}{19}=18\in N$$ حل وحيد

- ✓ **معادلة الدرجة الثانية:** وتأخذ الشكل: $aX^2+bX+c=0$ نقسم الطرفين على $a$ ونكمل الطرف الايسر الى مربع كامل بإضافة وطرح المقدار $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ فيكون:

$$X^2+\frac{b}{a}X+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$X+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$X = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نرمز للمقدار الذي تحت الجذر بالرمز $\Delta$ أي $\Delta = b^2 - 4ac$

ونميز بين الحالات التالية:

- $\Delta > 0$ للمعادلة حلان حقيقيان:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$ يكون للمعادلة حل وحيد

$$X_1 = X_2 = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$ للمعادلة حلان مركبان ومترافقان

$$\Delta = -(-\Delta) = -1(-\Delta) = i^2\Delta$$

$$X_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

وذلك لأنه إذا كان $\Delta < 0$ فإن $-\Delta > 0$ يصبح الجذر التربيعي ممكناً، والجزء التخيلي $i = \sqrt{-1}$

**مثال:** أوجد حل المعادلة التالية: $3x^2 - 24x + 45 = 0$

الحل: نحسب $\Delta$

$$\Delta=b^2-4ac=(-24)^2-4(3)(45)=36$$

$$\Delta>0$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=\pm 6$$

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-24)+6}{2\times 3}=5$$

$$X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-24)-6}{2\times 3}=3$$

**مثال:** أوجد حل المعادلة التالية: $5x^2+40x+80=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(40)^2-4(5)(80)=0$$

$\Delta=0$ يوجد حل مضاعف.

$$X_1=X_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-40}{2\times 5}=-4$$

**مثال:** أوجد حل المعادلة التالية: $2x^2+3x+2=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(2)(2)=-7$$

$\Delta<0$ يوجد للمعادلة جذرين مركبين ومترافقين هما:

$$X_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-3+i\sqrt{7}}{2\times 2}=\frac{-3}{4}+i\sqrt{7}$$

$$X_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-3-i\sqrt{7}}{2\times 2}=\frac{-3}{4}-i\sqrt{7}$$

**حل المعادلات الكسرية:** معادلات على شكل كسور جبرية مختلفة لإيجاد جذورها نقوم باصلاحها حتى نحصل على كسر واحد مبسط مؤلف من كثير حدود ومقام مؤلف من كثير حدود أيضاً على الشكل التالي:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$$

بفرض أن $Q_m(x) \neq 0$ لذلك يجب حذف جميع قيم $Q_m(x)= 0$ من مجال التعريف والحلول وبناء على ذلك وللحصول على الحلول نضع البسط مساوياً للصفر أي أ: $P_n(x) = 0$ مع ضرورة استثناء القيم التي تجعل $Q_m(x)= 0$. مثال: أوجد حلول المعادلة: $\frac{x+2}{x-8} - \frac{3}{2} = \frac{x-1}{x-8}$ نوحد المقامات فنحصل على: $\frac{2(x+2)-3(x-8)-2(x-1)}{2(x-8)} = 0$ حيث $x \neq 8$ نضع البسط مساوياً للصفر. $2x + 4 - 3x +$

$$24 - 2x + 2 = 0$$

$$-3x + 30 = 0$$

$$3x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{3} = 10$$

مثال: $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{4x+2}{2x-5} = 15$ نوحد المقامات فنجد $= \frac{(2x-5)(2x+1)+(x-3)(4x+2)-15(x-3)(2x-5)}{(x-3)(2x-5)}$

0 حيث $x \neq 3, x \neq \frac{5}{2}$ نياوي البسط للصفر ونصلح البسط فنجد

$$4x^2 + 2x - 10x - 5 + 4x^2 + 2x - 12x - 6 - 30x^2 + 75x + +90x - 225 = 0$$

$$-22x^2 + 147x - 236 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية $\Delta=b^2 - 4ac=(147)^2 - 4(-22)(-236) = 841$

$$\sqrt{\Delta}= \sqrt{841} = 29$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-147 + 29}{2 \times -22} = 2.681$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-147 - 29}{2 \times -22} = 4$$

حلان مقبولان.

**حل المعادلة الصماء ( الجذرية):** مثال: $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}-\sqrt{3x-2}=0$ نزيل الجذور عن طريق التربيع وذلك بشرط أن تكون جميع المقادير تحت الجذور موجبة أي يشترط أن يكون $x-5>0,\ \ 3x-2>0\Rightarrow x>\frac{2}{3}$

ننقل الجذر $-\sqrt{3x-2}=0$ للطرف الثاني ونربع الطرفين فنحصل على: $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{3x-2}$

$$2\sqrt{x}\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\right)^2=3x-2$$

$$x+x-5+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}=3x-2$$

$$3x-2-2x+5=$$

$$x+3=2\sqrt{x}\sqrt{x-5}$$

نربع مرة ثانية: $(x+3)^2=4x(x-5)$

$$x^2+6x+9=4x^2-20x$$

$$3x^2-26x-9=0$$

معادلة من الدرجة الثانية: $\Delta=b^2-4ac=(-26)^2-4(3)(-9)=784$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{784}=28$$

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-26)+28}{2\times3}=9$$

$$X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-26)-28}{2\times3}=-\frac{1}{3}$$ غير مقبول

**حل معادلات الدرجة النونية ذات الأمثال الصحيحة:**

تأخذ الشكل العام التالي:

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots \ldots + a_{n-1}X_1 + a_n = 0$$

$a_0 \neq 0$ حتى لا تصبح المعادلة من درجة أقل من $n$ $a_n \neq 0$ حتى لا يكون $X=0$ حلاً للمعادلة المفروضة، للمعادلة $n$ جذوراً.

ملاحظة: إذا لم تكن الأمثال صحيحة نقوم بتحويلها إلى صحيحة بتوحيد المقامات وضرب الطرفين بأعداد مناسبة لتصبح جميعاً صحيحة، لايجاد الحلول نقوم بالآتي:

1- نجعل جميع الأمثال أعداد صحيحة إذا لم تكن صحيحة نضرب طرفيها بالمقام المشترك للكسور، ثم نكتب المعادلة على شكل كثير حدود مساو للصفر.

2- نبحث عن قواسم الحد الحر $a_n$ والحد $a_0$ بما فيها القواسم المتطرفة $\pm 1$ إن جذور المعادلة هي بعض الاعداد الناتجة عن قسمة قواسم $a_n$ على قواسم $a_0$.

3- نجرب القواسم ( الاعداد) إذا كانت تحقق المعادلة.

4- إذا كان أحد الاعداد وليكن القاسم$X_0$ يحقق المعادلة فإننا نقسم الطرفين على $(X - X_0)$ فنحصل على كثير حدود من الدرجة *n-1*. إذا كان لدينا أكثر من عدد مثل$k,m$ يحققان المعادلة فإننا نكرر تقسيم كثير الحدود الناتج عن التقسيم السابق على $(X - m)$ ثم نكرر التقسيم على $(X - k)$ حتى نحصل على كثير حدود من درجات أدنى ونتابع بالعمل إلى أن نحصل على كثير حدود من الدرجة الثانية نطبق عليه طريقة حل معادلة الدرجة الثانية.

5- إن الاعداد التي تحقق المعادلة هي حلول المعادلة.

ملاحظة: لا يمكن الحصول على الجذور المركبة للمعادلة المفروضة بواسطة هذه الطريقة قلايوجد طرائق أخرى لإيجاد ذلك.

مثال: اوجد حلول المعادلة: $\frac{1}{2}X^4 - \frac{23}{2}X^2 - 9X + 20 = 0$

الحل: 1- نجعل الامثال صحيحة نضرب الطرفين بـــ2 فنحصل على المعادلة المكافئة التالية:

$$X^4 - 23X^2 - 18X + 40 = 0$$

$a_n = 40$ قواسمها هي: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm8, \pm10, \pm20$

نجرب هذه القواسم فنجد القاسم (+1) يحقق المعادلة الأخيرة،

$$(1)^4 - 23(1)^2 - 18(1) + 40 =$$
$$1 - 23 - 18 + 40 = 0$$

أي أن X=+1 حلاً للمعادلة. وكذلك X=5 ,X=-4, X=-2 تحقق المعادلة. نكون قد حصلنا على (4) حلول دون تخفيض المرتبة وبما أن المعادلة من الدرجة (4) قليس لها أكثر من أربعة جذور.

مثال: حل المعادلة التالية: $2X^3 + 2X^2 - 15X + 6 = 0$

الأمثال أعداد صحيحة قواسم 6 هي: $\pm1, \pm2, \pm3$ نجرب هذه الأعداد فنجد أن (+2) تحقق المعادلة المفروضة:

$$2(2)^3 + 2(2)^2 - 15(2) + 6 = 16 + 8 - 30 + 6 = 0$$

X=2 حلاً للمعادلة المفروضة اما القواسم الأخرى فلا تحقق المعادلة نخفض درجة المعادلة نقسم الطرف الأيسر على $(X - 2)$ فنجد أن:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2X^2+6X-3 \\
\hline
X-2 & 2X^3+2X^2-15X+6 \\
 & \underline{2X^3-4X^2} \quad - \\
 & 0+6X^2-15X+6 \\
 & \underline{0+6X^2-12X} \quad - \\
 & -3X+6 \quad - \\
 & \underline{-3X+6} \\
 & 0+0
\end{array}
$$

ومنه يكون لدينا: $2X^2+6X-3=\frac{2X^3+2X^2-15X+6}{X-2}$

يصبح الناتج الاخير مساوا للصفر أي أن $2X^2+6X-3=0$

معادلة من الدرجة الثانية نحلها بواسطة $\Delta$

معادلة من الدرجة الثانية: $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4(2)(-3)=60$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{60}$$

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(6)+\sqrt{60}}{2\times 2}=-3.44$$

$$X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(6)-\sqrt{60}}{2\times 2}=0.44$$

إذاً X=2, X=0.44, X=-3.44 حلول للمعادلة.

## جملة المعادلات الخطية

**الشكل العام لجملة المعادلات الخطية:**

ليكن لدينا المجاهيل $x_1 \dots . x_n$ والأعداد $a_1 \dots \dots a_n, b$ فإن المعادلة التي من الشكل:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots\cdots + a_nX_n = b$$

تسمى معادلة خطية وتدعى الأعداد $a_1 \dots \dots a_n$ بأمثال المتحولات( المتغيرات) $x_1 \dots . x_n$ ويسمى العدد $b$ بالثابت الحر للمعادلة الخطية.

وإذا وجدت مجموعة من الأعداد $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$ والتي تحقق المعادلة أي أن:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots\cdots + a_n\lambda_n = b$$

فإننا نسمي $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$ حلاً للمعادلة الخطية.

**تعريف:** إن جملة المعادلات الخطية من الشكل:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\cdots + a_{mn}X_n = b_m$$

وهي شكل عام يحوي $m$ معادلة بـــ $n$مجهولاً أما أمثال المعادلة $a_{ij}$ $(i=1,2\dots m,\ j=1,2,\dots n)$ التي تحوي الدليلين $i,j$ حيث $i$ يمثل رقم الثابت و$j$ تمثل رقم المجهول $x_i$ أما الثوابت الحرة $b_i$ حيث $i=1,2\dots m$ تحوي دليلاً واحداً $i$ يدل على رقم المعادلة الخطية.

وفي هذه الحالة لا يكون لهذه الجملة حلاً مشتركاً وحيداً إلا إذا كانت المعادلات مستقلة خطياً وكان عددها $m$ مساوياً لعدد المجاهيل $n$.

**الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية:**

لنكتب المعادلات السابقة على شكل مصفوفة: نكتب معاملات الجملة $a_{ij}$ على شكل المصفوفة $A$ تسمى مصفوفة الأمثال من المرتبة $m \times n$ على الشكل التالي:

$$A = A_{m.n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نكتب المجاهيل $X_i$ حيث $i=1,2...m$ وهي مصفوفة عمود $X$

$$X = X_{n1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نكتب الثوابت الحرة $b_j$ حيث $j=1,2...n$ على شكل مصفوفة $B$ حيث $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

وبالتالي نكتب جملة المعادلات بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبشكل مختصر نكتب: $AX=B$

**حل جملة المعادلات الخطية:**

تعريف: إن حل جملة المعادلات الخطية هو مجموعة من الأعداد المرتبة $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ تقابل المجاهيل $x_1 \ldots . x_n$ وتحقق جملة المعادلات الخطية المفروضة أي إذا كانت $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ حل لجملة المعادلات ويكتب ذلك على شكل مصفوفة عمود $C$ حيث $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ فإن $C$ تحقق المعادلة المصفوفية وتكتب على الشكل التالي:

$$AC = B$$

**مثال:**

$$2X_1 - 3X_2 = 8$$

$$X_1 + 5X_2 = -9$$

فنجد أن العمود $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ يمثل حلاً لها وبذلك يكون $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix}$ أي أن $X_1 = 1, X_2 = -2$

وقد تكون الجملة غير قابلة للحل مثل:

$$X_1 + 2X_2 = 5$$

$$X_1 + 2X_2 = 0$$

**تعريف:** نسمي جملة المعادلات الخطية جملة قابلة للحل إذا وجد بها حل واحد على الأقل ونسمي الجملة غير قابلة للحل إذا تعذر وجود أي حل لها.

**تعريف:** نسمي الجملة القابلة للحل جملة محدودة إذا وجد لها حل واحد فقط، كما نسمي الجملة غير محدودة إذا وجد لها أكثر من حل واحد.

مثال: $X_1 + 2X_2 = 3$

$$2X_1 + 4X_2 = 6$$

تكتب على الشكل: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ هي جملة غير محدودة يوجد لها عدد لانهائي من الحلول منها: $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نستنتج أن المعادلة الثانية تنتج عن الاولى بضربها بعدد محدد$\lambda$ يساوي 2 أي أن المعادلة الأولى غير مستقلة عن المعادلة عن الثانية.

**تعريف:** نقول عن جملتين أو عدة جمل من المعادلات الخطية أنها متكافئة إذا كان أي حل لإحدى الجمل هو حل للجمل الأخرى أو إذا كانت هذه الجملة غير قابلة للحل.

**العمليات البسيطة على جمل المعادلات الخطية:**

يمكن أن ننفذ على جملة المعادلات الخطية العمليات البسيطة التالية دون أن يؤثر ذلك على حلها.

1- يمكن تبديل موضعي معادلتي الجملة.
2- يمكن ضرب طرفي إحدى المعادلات في الجملة بعدد $\lambda \neq 0$
3- يمكن ضرب طرفي إحدى المعادلات في الجملة بعدد $\lambda \neq 0$ ثم إضافة الناتج إلى معادلة أخرى طرفاص إلى طرف,

**ملاحظة:** إذا طبقنا بعض أو كل العمليات البسيطة على جملة معادلات خطية فإننا نحصل على جملة جديدة مكافئة للأولى.

**الاستقلال والارتباط الخطي في جملة المعادلات الخطية:**

نقول عن جملة معادلات خطية أنها مرتبطة خطياً إذا وجد فيها معادلة واحدة على الأقل مرتبطة خطياً بمعادلة أخرى أو أكثر من معادلات الجملة، وبكلام آخر إذا كان أحد أسطر المصفوفة الموسعة $B$ عبارة عن تركيب خطي من الأسطر الأخرى أو بعض منها ونقول عن جملة المعادلات الخطية انها مستقلة خطياً إذا لم يكن فيها أية معادلة مرتبطة بالمعادلات الأخرى أو ناتجة عنها.

5- إذا حذفنا من جملة معادلات خطية مفروضى المعادلات المرتبطة خطياً فإننا نحصل على حملة جديدة مكافئة للأولى.
6- نقول عن جملة معادلات خطية أنها غير متجانسة إذا كان واحد على الأقل من الثوابت الحرة $(b)$ يختلف عن الصفر.
7- إذا كان جميع الثوابت $b_i$ معدومة فإن جملة المعادلات الخطية هي جملة متجانسة.

حل جملة المعادلات الخطية غير المتجانسة:

**أولاً: حل جملة معادلات خطية بطريقة مقلوب المصفوفة:** لتكن لدينا جملة معادلات خطية $m$ عدد المعادلات ويساوي عدد المجاهيل $n$ ومكتوبة بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$|A| \neq 0 \Longleftarrow$ نضرب من اليسار طرفي المعادلة المصفوفية بـــ $A^{-1}$ مقلوب المصفوفة $A$ نحصل على:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

, وهي حل جملة المعادلات الخطية ويحسب $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\bar{A}$ حيث $\bar{A}$ المصفوفة المساعدة.

مثال: أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 6$$

$$2X_1 - X_2 + X_3 = 3$$

$$X_1 - X_2 + 2X_3 = 5$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمة المعين ننشر وفق السطر الأول فنجد الاتي:

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 - 3 - 1 = -5 \neq 0, \text{ا}$$

نحسب مصفوفة العوامل المرافقة$D$ ومن ثم المصفوفة المساعدة $\bar{A}$

$$\text{جدول الاشارات} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

مصفوفة المصغرات$M$

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $D$ نجسب المصفوفة المسادة وهي منقول مصفوفة المرافقات $D$ $D = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\bar{A} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أي أن: $X_1 = 1\ ,\quad X_2 = 2,\ X_3 = 3$

**مثال(2):**

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 10$$

$$2X_1 + X_2 - 2X_3 = 20$$

$$2X_1 - X_2 = 40$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\bar{A}\,B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -40 \\ -30 \end{bmatrix}$$

أي أن: $X_1 = 0\ ,\quad X_2 = -40,\ X_3 = -30$

ثانياً: **طريقة كرامر**: حالة($m$=$n$) عدد المعادلات $m$ يساوي عدد المجاهيل $n$ وتأخذ الشكل:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\cdots + a_{mn}X_n = b_m$$

الشكل المصفوفي:

$AX = B$ حيث $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times m$ و $B$ مصفوفة من المرتبة $1 \times n$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

إن معين المصفوفة $|A|=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

إذا بدلنا في المعين$\Delta$ عناصر العمودj بعناصر عمود الثوابت الحرة B نحصل على معين جديد يرمز له بالرمز $\Delta_j=\Delta_j(B)$

$$\Delta_j=\Delta_j(B)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذا أردنا حساب قيمة $\Delta_j$ من خلال مفكوكه حسب عناصر العمود$b_j$ نجد أن:

$$\Delta_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+b_3A_{3j}+\cdots\ldots+b_nA_{nj}$$

**نظرية كرامر:** إذا كانت جملة المعادلات الخطية غير المتجانسة وكان فيها $\Delta\neq 0$ فإن الجملة قابلة للحل ولها حل وحيد يعطى بعلاقات كرامر التالية: $X_{ij}=\frac{\Delta_j}{\Delta}$

مثال: أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$X_1+X_2+X_3=6$$

$$2X_1-X_2+X_3=3$$

$$X_1-X_2+2X_3=5$$

الحل: الجملة تحوي 3 معادلات و3 مجاهيل، نكتب مصفوفة الأمثال كما يلي:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ نحسب $|A|$ نجد بأنه يساوي $|A|=-5\neq 0$ وبالتالي لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بعلاقة كرامر التالية: $X_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$ حيث j=1,2,3 نحسب $\Delta_j$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

ومنه $X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$، $X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$ ، $X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3$

**طريقة الحذف المتتالي للمجاهيل- طريقة غاوس:**

تعطى طريقة كرامر الحل لجملة المعادلات الخطية في الحالة الخاصة $n=m$ عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل ومعين مصفوفة الأمثال غير معدوم وإذا كانت لدينا جملة من المعادلات الخطية$n \neq m$ فإننا نلجأ إلى طريقة غاوس: لدينا جملة من المعادلات الخطية شكلها العام حيث $n \neq m$ كما يلي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\cdots + a_{mn}X_n = b_m$$

تعتبر طريقة غاوس من الطرق الأكثر شيوعاً لإيجاد حلول جملة معادلات خطية عندما $n \neq m$ وتعتمد هذه الطريقة على الحذف المتتالي للمجاهيل وتحويل الجملة إلى شكل مثلثي أو مدرج وفي هذه الحالة تصبح مصفوفة أمثالها مثلثية أو مدرجة وتطبق طريقة غاوس على الجملة شرط أن تكون $a_{11} \neq 0$ (في

الحالة المعاكسة عندما تكون$a_{11} = 0$) نغير ترتيب المعادلات بحيث نحصل على جملة مكافئة فيها $a_{11} \neq 0$ وسنوضح خطوات هذه الطريقة بالمثال التالي:

مثال: أوجد الحل المشترك للجملة التالية:

$$0.14X_1 + 0.24X_2 - 0.84X_3 = 1.11$$

$$1.07X_1 - 0.83X_2 + 0.56X_3 = 0.48$$

$$0.64X_1 + 0.43X_2 - 0.38X_3 = -0.83$$

نتبع الخطوات التالية:

1- نقسم المعادلة الأولى على أمثال $X_1$ فنحصل على معادلة مكافئة:

$$X_1 + 1.7143X_2 - 6X_3 = 7.929$$

2- نحذف $X_1$ من المعادلة الثانية: نضرب المعادلة الأولى الناتجة عن الخطوة /1/ بأمثال $X_1$ من المعادلة الثانية (1.07) ثم نطرح الناتج من المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة المكافئة التالية:

$$0 - 2.664X_2 + 6.98X_3 = -8.004$$

3- نحذف $X_1$ من المعادلة الثالثة: نضرب المعادلة الأولى الناتجة عن الخطوة /1/ بأمثال $X_1$ من المعادلة الثالثة (0.64) ثم نطرح الناتج من المعادلة الثالثة فنحصل على المعادلة المكافئة التالية:

$$0 - 0.6672X_2 + 3.46X_3 = -5.904$$

4- نكون بنتيجة الخطوات السابقة قد حصلنا على جملة مكافئة للجملة الأساسية ومؤلفة من المعادلات التالية:

$$X_1 + 1.7143X_2 - 6X_3 = 7.929$$
$$-2.664X_2 + 6.98X_3 = -8.004$$
$$-0.6672X_2 + 3.46X_3 = -5.904$$

5- نتابع المعالجة بتقسيم المعاجلة الثانية على أمثال $X_2$ فيها ونضرب الناتج بأمثال $X_2$ في المعادلة الثالثة ونطرح الحصيلة من المعادلة الثالثة ونحصل بنتيجة ذلك على جملة المعادلات المكافئة التالية:

$$X_1 + 1.7143X_2 - 6X_3 = 7.929$$
$$X_2 + -2.620X_3 = -3.004$$
$$1.712X_3 = -7.908$$

وهي جملة لها شكل مثلثي

$$X_3 = \frac{-7.908}{1.712} = -4.619$$

نعوض في المعادلة الثانية فنحصل على قيمة $X_2$ أي:

$$X_2 = -3.004 + 2.62(-4.619) = -15.106$$

نعوض قيمة $X_3$ و$X_2$ في المعادلة الاولى نحصل على قيمة $X_1$ أي $X_1 = 6.111$

وبالتالي نكون قد حصلنا على حل الجملة المشترك.

**مثال آخر:** لدينا الجملة التالية والمطلوب ايجاد الحل المشترك:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 = 10$$
$$2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 5$$

$$3X_1 - 4X_2 + 2X_3 + 5X_4 = 15$$

نقوم بعمليات الحذف من المعادلة(2) و(3) لذلك نضرب المعادلة الأولى بأمثال $X_1$ ونطرح الناتج من المعادلة الثانية فنحصعلى معادلة مكافئة ونكرر ذلك بأن نضرب المعادلة الاولى بأمثال $X_1$ في المعادلة الثالثة أي بـــ3 ومن ثم نطرح الناتج من المعادلة الثالثة فنحصل على معادلة مكافئة. ومنه نحصل على الجملة التالية:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 = 10$$

$$0 - 3X_2 - 3X_3 + 3X_4 = -15$$

$$0 - 10X_2 - X_3 + 8X_4 = -15$$

ثم نقوم بإجراء عمليات الحذف لـــ $X_2$ من المعادلات الاخيرة فنقسم المعادلة الثانية على أمثال $X_2$ أي على $(-3)$ أي نحصل على المعادلة التالية:

$$X_2 + X_3 - X_4 = 5$$

نقوم بضرب هذه المعادلى بأمثال $X_2$ في المعادلة الثالثة $(-10)$ ونطرح الناتج من المعادلة الثالثة فنحصل على المعادلة التالية:

$$9X_3 - 2X_4 = 35$$

أي نحصل على الجملة التالية"

$$X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 = 10$$

$$X_2 + X_3 - X_4 = 5$$

$$9X_3 - 2X_4 = 35$$

نجد بأن عمليات الحذف أصبحت غير ممكنة عدد المعادلات أقل من عدد المتحولات ولكن يمكننا أن نحسب ثلاثة متحولات بدلالة المتحول الرابع كما يلي:

$$X_3 = \frac{35}{9} + \frac{2}{9}X_4$$

$$X_2 = 5 - \frac{35}{9} - \frac{2}{9}X_4 + X_4 = \frac{10}{9} + \frac{7}{9}X_4$$

$$X_1 = -2\left(\frac{10}{9} + \frac{7}{9}X_4\right) - \left(\frac{35}{9} + \frac{2}{9}X_4\right) + X_4 + 10$$

$$= -\frac{20}{9} - \frac{14}{9}X_4 - \frac{35}{9} - \frac{2}{9}X_4 + X_4 + 10 = \frac{35}{9} - \frac{7}{9}X_4$$

وبما أن $X_4$ يمكن أن يأخذ قيماً اختيارية في مجال تحوله وأن عددها لانهائي فإن للجملة السابقة لا نهاية من الحلول المشتركة:

إذا كانت $X_4 = 0$ فإن $X_1 = \frac{35}{9}$ و $X_2 = \frac{10}{9}$ و $X_3 = \frac{35}{9}$

إذا كانت $X_4 = 1$ فإن $X_1 = \frac{28}{9}$ و $X_2 = \frac{17}{9}$ و $X_3 = \frac{37}{9}$

**حل المعادلتين ذات المجهولين:**

مثال(1): اوجد الحلول المشتركة للمعادلتين $x^2 - 3xy + 4y^2 - 6x + 2y = 0$ (1)

$$x - 2y = 3 \quad (2)$$

الحل من المعادلة (2) نحصل على $x = 3 + 2y$ (3) نعوض(3) بـــ(1) فنحصل على:

$$(3 + 2y)^2 - 3(3 + 2y)y + 4y^2 - 6(3 + 2y) + 2y = 0$$

$$9 + 12y + 4y^2 - 9y - 6y^2 + 4y^2 - 18 - 12y + 2y = 0$$

$$2y^2 - 7y - 9 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية نحسب $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-9) = 49 + 72 = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = \pm 11$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + 11}{2 \times 2} = \frac{18}{4} = 4.5$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - 11}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد مقابل كبل قيمة لـــ$y$ هناك قيمة لـــ$x$

$$y_1 = 4.5 \Rightarrow x_1 = 3 + 2(4.5) = 12$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 3 + 2(-1) = 1$$

الحلان المشتركان للمعادلتين هما *(1,-1)* و*(12,4.5)*

مثال(2): $x^2 + xy + 2y^2 = 74$ (1)

$2\,x^2 + 2xy + y^2 = 73$ (2)

نضرب المعادلة الأولى بـــ2 ونطرح الثانية منها فنحصل على:

$$2x^2 + 2xy + 4y^2 = 148$$

$$\underline{\mp 2\,x^2 \mp 2xy \mp y^2 = \mp 73}$$

$$0 + 0 + 3y^2 = 75$$

$$y^2 = \frac{75}{3} = 25 \Longrightarrow y = \sqrt{25} = \mp 5$$

$$y_1 = 5 \Longrightarrow x^2 + x(5) + 2(5)^2 = 74$$

$$x^2 + 5x + 50 - 74 = 0$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية نحسب $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(-24) = 25 + 96 = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = \pm 11$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 11}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 11}{2 \times 1} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$y_1 = -5 \Longrightarrow x^2 + x(-5) + 2(-5)^2 = 74$$

$$x^2 - 5x + 50 - 74 = 0$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية نحسب $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-24) = 25 + 96 = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = \pm 11$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 + 11}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 - 11}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

وبالتالي حلول جملة المعادلتين هي (3,5) و (-8,5) و (8,-5) و (-3,-5),

## المتراجحات

**تعريف: المتراجحة** هي علاقة ترتيب بين طرفين يتضمن كل منهما تراكيب جبرية ونميز بين نوعين أساسيين من المتراجحات هما:

1. **المتراجحات العادية:** وهي التي تشكل علاقة ترتيب بين الأعداد فقط فإذا كان لدينا عددان حقيقان $a,b$ وكان $a\neq b$ توجد بينهما إحدى العلاقتين التاليتين: $a<b$ أو $a>b$

$a<b$ فإننا نجد أن هذه المتراجحة تتمتع بالخواص التالية:

إذا كان $c$ عدداً ما فإن $a+c<b+c$

إذا كان $c>0$ فإن $a.c<c.b$

إذا كان $c<0$ فإن $c.a>c.b$

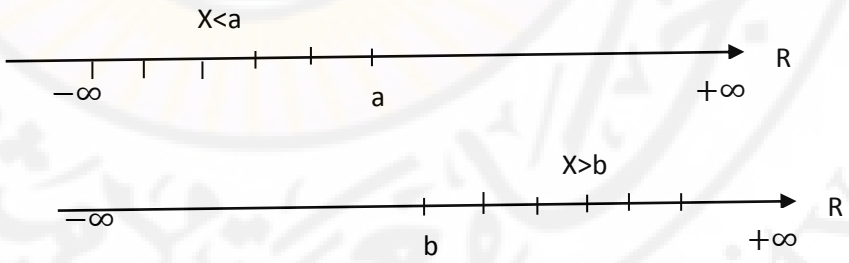
إذا كان $c<d$ فإن $a+c<b+d$

إذا كان $|x| \leq a$ فإن ذلك يكافئ $-a\leq x \leq a$

المتراجحة الجبرية: التي تتضمن مجهول أو أكثر في أحد أو كلا طرفيها.

**متراجحات المجهول الواحد وحلولها:**

1- **المتراجحة البسيطة:** $x>b$ أو $x<b$ ويمكننا تحليل قيم $x$ التي تحققها على محور الاعداد الحقيقية بالمجال $]-\infty,a[$ في حال $x<a$ وبالمجال $]b,+\infty[$ في حال $x>b$




نسمي جزء المحور الحقيقي الذي تحقق فيه المتراجحة بمجال حلولها.

مثال: أوجد مجال حلول المتراجحة $2x-\frac{5x+1}{2}<3x-1$ نضرب المتراجحة بـــ 2 نحصل على:

$$4x-5x+1<6x-2$$

$$-x-6x<-2-1$$

$$-7x<-3$$

$$7x > 3$$

$$x > \frac{3}{7}$$

إذاً حلول المتراجحة في المجال $\left]\frac{3}{7}, +\infty\right[$

2- **المتراجحة المزدوجة:** أوجد حلول المتراجحة التالية: $2x - 3 < 4x - 5 < x + 7$ نأخذ المتراجحتين البسيطتين:

| | |
|---|---|
| $4x - 5 < x + 7$ | $2x - 3 < 4x - 5$ |
| $3x < 12$ | $2 < 2x$ |
| $x < 4$ | $1 < x$ |
| مجال الحلول $]-\infty, +4[$ | مجال الحلول $]1, +\infty[$ |

وهكذا نجد أن الحل المشترك $]-\infty, +4[ \cap ]1, +\infty[$ أي الحل المشترك $]1,4[$.

3- **المتراجحة من الدرجة الثانية:** لها الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad a \neq 0$$

لحل هذه المتراجحة نكمل الطرف الأيسر إلى مربع كامل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = \left[x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

وهنا نميز بين ثلاث حالات لإشارة الـــ$\Delta$

1- إذا كان $\Delta > 0$ نكتب الطرف الأيسر على شكل جداء قوسين:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

حيث $x_1$ و$x_2$ جذر ثلاثي الحدود في الطرف الأيسر $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لدراسة المتراجحة في هذه الحالة ندرس جدول تقاطع الإشارات لكل من العامل $a$ والقوس $(x - x_1)$ والقوس $(x - x_2)$ كما سنجدها في المثال اللاحق.

2- $\Delta = 0$ إن ما داخل القوس يكون موجباً إلا في النقطة $x = -\frac{b}{a}$ حيث يصبح مساوياً للصفر وتكون إشارة الطرف الأيسر من إشارة $a$ وتكون المتراجحة محققة من أجل جميع قيم $x$ $x \in R \setminus \left[\frac{b}{2a}\right]$، إذا كان $a>0$ وتكون مستحيلة عندما $a<0$

3- $\Delta<0$ يكون ما داخل القوس موجب وتكون إشارة الطرف الأيسر من إشارة $a$ إذا كان $a>0$ فالمتراجحة تكون محققة من أجل جميع قيم $x$ من $R$ وإذا كانت $A<0$ فالمتراجحة مستحيلة.

**مثال (1):** أوجد حلول المتراجحة $-X^2 - 7X - 12 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(-1)(-12) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = \pm 1$$

نبحث عن جذري الطرف الأيسر

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + 1}{2 \times -1} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - 1}{2 \times -1} = \frac{6}{-2} = -3$$

لذلك يمكننا كتابة المتراجحة على الشكل التالي:

$$-X^2 - 7X - 12 = -(X + 4)(X + 3) > 0$$

ندرس إشارة الطرف الأيسر:

| $X$ | -∞ | -4 | | -3 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a=-1$ | - | - | - | - | - |
| $(x+4)$ | - | 0 | + | + | + |
| $(x+3)$ | - | - | - | 0 | + |
| $-(x+4)(x+3)$ | + | 0 | + | 0 | - |

ومن هذا يتضح لنا أن الإشارة محققة (+) في المجال $]-3,-4[$. مجال حلولها.

**مثال(2):** $x^2 - 4x + 12 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(+1)(12) = 16 - 48 = -32 < 0$$

إشارة a موجبة $a>0$ فالمتراجحة محققة من أجل جميع قيم x من R

**مثال(3):** $-x^2-4x-4>0$

$$\Delta= b^2-4ac=(-4)^2-4(-1)(-4)=16-16=0$$

وهذا يعني أن إشارة الطرف الأيسر من إشارة $a$ بما أن $a<0$ فالمتراجحة مستحيلة الحل.

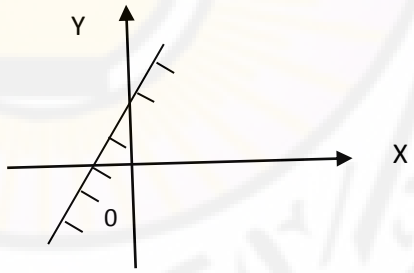
**المتراجحة الخطية بمجهولين:** تأخذ الشكل $ax+by+c>0$ حيث $a\neq0,\ b\neq0$

لإيجاد حلولها في المستوي $XOY$ نبحث عن المنطقة التي تجعل الطرف الأيسر موجباً لذلك نضع الطرف الأيسر مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة الخطية التالية: $ax+by+c=0$ ويمكن كتابتها $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}=mx+c_1$

حيث $m=-\frac{a}{b}$ ميل المستقيم و$c_1=-\frac{c}{b}$ ترتيب نقطة تقاطع المستقيم مع المحور $OY$ نحدد نقطتين يمر منهما المستقيم، أفضل نقطتين هما تقاطعه مع $OX, OY$، لتحديدهما نضع $x=0\Longrightarrow y=\frac{-c}{b}$ وتكون النقطة $(0,\frac{-c}{b})$

$y=0\Longrightarrow x=\frac{-c}{a}$ وتكون النقطة$(\frac{-c}{a},0)$

إذا كان $c=0$ يمر المستقيم من المبدأ ونضع $x=1$ فنجد أن $y=\frac{-a}{b}$ وتكون النقطة $(1,\frac{-a}{b})$




يقسم المستقيم المستوي إلى ثلاث مناطق:

1- **منطقة موجبة:** تمثل حلول المتراجحة إذا بدلنا أي نقطة من نقاطها بالمتراجحة تكون النتيجة موجبة وهي تمثل منطقة الحلول.
2- **منطقة سالبة:** نصف المستوي الذي يجعل المتراجحة غير محققة لأن أي نقطة من المنطقة تعطي إحداثيات سالبة.
3- **منطقة فاصلة:** جميع نقاط المستوي التي تقع على المستقيم الفاصل بين النقطتين وهي تلك النقاط التي تجعل الطرف الأيسر معدوم.

ملاحظة: إذا كانت المتراجحة تتضمن مساواة على الشكل $ax+by+c\geq 0$ فإن منطقة الحلول تمثل المنطقتين الموجبة والفاصلة.

**خطوات الحل:**

1- نرسم المستقيم في المستوي باستخدام نقطتين يمر منهما المستقيم.

2- نختار نقطة ما من المستوي ( غير واقعة على المستقيم ولتكن $(x_1,y_1)$ ونعوض الاحداثيات في المتراجحة وأسهل النقاط $(0,0)$ مبدأ الاحداثيات إذا كانت المتراجحة موجبة أي محققة فإن المنطقة التي تحوي النقطة $(0,0)$ هي منطقة حلول المتراجحة وإذا كانت سالبة فهي غير محققة والمنطقة المقابلة لها هي المقبولة وتمثل حلول المتراجحة .

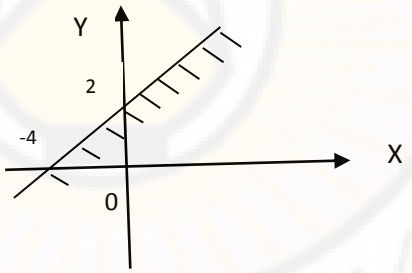
3- نؤشر بخطوط على جانب المستقيم باتجاه منطقة الحلول، والتي تضم عدد لانهائي من الحلول الممكنة.

مثال: $2x-4y+8>0$

نرسم المستقيم $2x-4y+8=0$

نضع $x=0$ فتكون قيمة $y=2$ وتكون النقطة الأولى التي يمر بها المستقيم $(0,2)$

نضع $y=0$ فتكون قيمة $x=-4$ وتكون النقطة الثانية التي يمر بها المستقيم $(-4,0)$



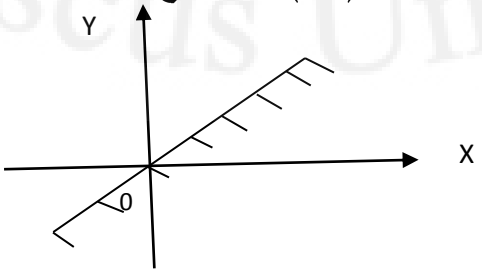

**مثال:** اوجد حلول المتراجحة $5x-10y>0$

نرسم المستقيم $5x-10y=0$

نضع $x=0$ فتكون قيمة $y=0$ وتكون النقطة الأولى التي يمر بها المستقيم $(0,0)$

نضع $x=2$ فتكون قيمة $y=1$ وتكون النقطة الأولى التي يمر بها المستقيم $(2,1)$

لتحديد منطقة الحلول إن النقطة $(0,0)$ لأنها تقع على المستقيم نأخذ النقطة $(1,1)$ لا تحقق المتراجحة.



**حل جملة متراجحات خطية بمجهولين:**

نحدد منطقة الحلول لكل متراجحة خطية ومن ثم نوجد تقاطع مناطق الحلول لنحصل على الحل المشترك لجملة المتراجحات.

مثال:

$x-3y+6>0$

$3x+6y-12>0$

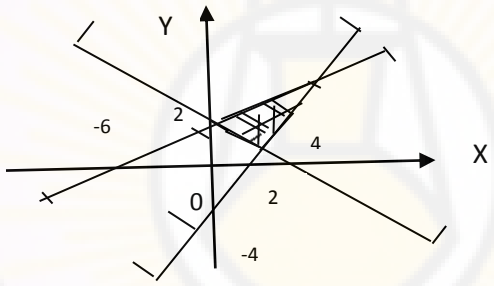
$-4x+2y+8>0$

نرسم المستقيمات الممثلة هذه المتراجحات

المستقيم الأول$I$: نقاط تقاطعه مع محاور الاحداثيات $(0,2)$، $(-6,0)$

المستقيم الثاني$II$: نقاط تقاطعه مع محاور الاحداثيات $(0,2)$، $(4,0)$

المستقيم الثالث$III$: نقاط تقاطعه مع محاور الاحداثيات $(0,-4)$، $(2,0)$



## مشتقات التوابع

**مشتق التابع:** تعريف: ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,b]$ ولتكن $x_0$ نقطة من المجال$[a,b]$ حيث $x_0 \in [a.b]$ و $x_0 \neq x$ تشكل النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ التي نهايتها عندما $x \to x_0$ هي مشتق التابع $f(x)$ في النقطة $x_0$ ويرمز للمشتق $f'(x)$ أي:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

**التفاضل:** تفاضل المتحول: إذا أعطي المتحول $x$ تزايداً مقداره$\Delta x$ وإذا كان $\Delta x$ يتناهى للصفر ولا يساوي الصفر نقول التزايد يتناهى إلى التفاضل ويرمز لتفاضل المتحول $dx$

تفاضل التابع: إن الجداء $\lambda f'(x)$ حيث $\lambda \neq 0$ عدد ثابت يسمى تفاضل التابع $y=f(x)$

ونرمز له بـــ $df(x)$ أو $dy$ أي أن $dy=f'(x)\lambda$ يختار الثابت $\lambda$ بشكل وحيد لجميع قيم التوابع ولجميع قيم $x$ ويمكن أن نكتب تفاضل التابع $dy=f'(x)dx$ أي أن: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

**قواعد الاشتقاق:**

1- **مشتق التابع الثابت** يساوي الصفر $f(x)=c$ حيث $c$ عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$

2- **مشتق تابع الدرجة الأولى** يساوي أمثال $x$ حيث $f(x)=ax+b$ حيث $a$ عدد ثابت فإن $f'(x) = a$

3- **مشتق تابع الدرجة *n*** أي: $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$

هذه القاعدة صحيحة إذا كانت $n$ عدد صحيح أو كسري موجب أو سالب.

مثال: $f(x) = 2$ فإن مشتقه $f'(x) = 0$

$f(x) = 3x + 5$ فإن مشتقه $f'(x) = 3$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ مشتقه

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

حيث $x\neq0$

$$f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$$

$$f(x)' = \quad -nx^{-n-1}=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

4- **مشتق مجموع توابع** يساوي مجموع مشتقات هذه التوابع إذا كان:

$$f(x)=g_1(x)\pm g_2(x)\pm\cdots\ldots+g_n(x)$$

$$f(x)'=g_1(x)'\pm g_2(x)'\pm\cdots\ldots+g_n(x)'$$

**مثال:** $f(x)=3x^3-2x^2+15$

$$f(x)'=9x^2-4x+0$$

5- **مشتق جداء تابعين** يساوي مشتق الاول بالثاني + مشتق الثاني بالاول:

$$f(x)=g_1(x)\times g_2(x)$$

$$f(x)'=g_1(x)'\times g_2(x)+g_2(x)'\,g_1(x)$$

**مثال:**

$$f(x)=(3x+1)(5x^3-6x^2+x+4)$$

$$f(x)=3(5x^3-6x^2+x+4)'+(15x^2-12x+1)(3x+1)$$

$$f(x)'=\quad+(15x^2-12x+1)'(3x+1)$$

$$=15x^3-18x^2+3x+12+45x^3+15x^2-36x^2-12x+3x+1=$$

$$60x^3+54x^2-6x+13$$

6- **مشتق تابع عادي ( كسري):** = (مشتق البسط× المقام –مشتق المقام× البسط)÷ مربع المقام.

**مثال:** $f(x)=\frac{3x^2+2}{3x}$ حيث $x\neq0$

$$f(x)'=\frac{(6x+2)(3x)-3(3x^2+2x)}{3x^2}=\frac{18x^2+6x-9x^2-6x}{9x^2}=\frac{9x^2}{9x^2}$$

$$=1$$

7- **مشتق تابع التابع:** إذا كان $y=f(u)$ و $u=g(x)$ أي $y=f(g(x))$ يسمى $y$ تابع التابع
فمشتق $y$ بالنسبة لـــ $x$ يعطى بالعلاقة: $\acute{y}_x=\acute{y}_u\acute{u}_x$
مثال أوجد مشتق $y=u^n$ و $u=2x+1$

$$\acute{y}_x=\acute{y}_u\acute{u}_x=nu^{n-1}.2=n(2x+1)^{n-1}2=2n(2x+1)^{n-1}$$

8- **مشتق التابع الضمني:** لإيجاد مشتق التابع الضمني $f(x,y)=0$ أي لا يوجد علاقة صريحة بين التابع $y$ والمتحول $x$ ونوجد مشتقه دون أن نجعله صريحاً كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\acute{f}_x(x,y)}{f_y(\acute{x},y)}=\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

**مثال:**

$$f(x,y)=y^5+2x^2y^2+xy-42=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4xy^2+y}{5y^4+4x^2y+x}$$

9- **مشتق التابع اللوغاريتمي ذي الاساس الطبيعي** $e$ يساوي مشتق المضمون على المضمون:

$$y=lnf(x)$$

$$\acute{y}=\frac{\acute{f}(x)}{f(x)}$$

10- **مشتق التابع الوغاريتمي ذي الاساس** $\boldsymbol{a}$ : $y=log_a x$

وفق تعريف اللوغاريتم يكون لدينا $x=a^x$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نجد: $ln=ylna$
باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة لـــ$x$

$$\frac{1}{x}=\acute{y}_x lna$$

ومنه $\acute{y}_x=\frac{1}{xlna}$

مثال: أوجد مشتق التابع: $y=log_a(3x^2+2x)$ نفرض أن $u=3x^2+2x$
ومنه $y=log_a(u)$ $\acute{u}=6x+2$

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{ulna}=\frac{6x+2}{(3x^2+2x)lna}$$

11-**مشتق التابع الأسي:** $y=a^x$ حيث $a$ عدد موجب لا يساوي الواحد.

$\acute{y}=\acute{u}.y.lna$ حيث $u$ هي الأس

**مثال:** $y = 3^{x^2}$ ومنه يكون المشتق $\acute{y} = 2x.3^{x^2}.ln3$

12- **مشتق التابع الجذري:** مشتق ما تحت الجذر على ضعفي الجذر:

$$y = \sqrt{f(x)}$$

$$\acute{y} = \frac{f(\acute{x})}{2\sqrt{f(x)}}$$

مثال: $y=\sqrt{2x+3}$

$$\acute{y} = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

**المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لتابع بمتحولين:**

**مثال:** $z = x^2y + 4x - 2y + 5$

المشتق الجزئي لـــ$X$: $\frac{dz}{dx} = 2xy + 4$

المشتق الجزئي لـــ$y$: $\frac{dz}{dy} = x^2 - 2$

**مثال:** $z = \frac{xy}{x+y}$ حيث $x + y \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y(x+y) - 1(xy)}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{x(x+y) - 1(xy)}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

**مثال:**

$z = a_0x^{a_1}y^{a_2}$ حيث $a_1$ و$a_0$ و$a_2$ ثوابت

$$\frac{dz}{dx} = a_0a_1x^{a_1-1}y^{a_2}$$

$$\frac{dz}{dy} = a_0a_2x^{a_1}y^{a_2-1}$$

**المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لتابع بمتحولين:**

**مثال:** $f(x,y) = z = x^4 - 5x^2y^2 + 3xy^2 + 7$

1- المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$z_x' = 4x^3 - 10xy^2 + 3y^2$$
$$z_y' = -10x^2y + 6xy$$

المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$z''_{x.x} = 12x^2 - 10y^2$$
$$z''_{y.x} = -20xy + 6y$$
$$z''_{y.y} = -10x^2 + 6x$$
$$z''_{xy} = -20xy + 6y$$