الرياضيات

- ٢ -

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الرياضيات

ـ ٢ ـ

الدكتور

نظير هلال

أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

الدكتور

إبراهيم عبدو كيالي

مدرس في قسم العلوم الأساسية

جامعة دمشق

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

السنة: الأولى

القسم: العلوم الأساسية

الاختصاص: جميع الاختصاصات

الفهـــــرس

الموضـــــــــــوع	رقم الصفحة
المقدمـــــــــة	١١
الفصل الأول – التكامل غير المحدد	١٣
١-١ التابع الأصلي والتكامل غير المحدد	١٣
١-٢ الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد	١٧
١-٣ جدول التكاملات الأساسية	١٨
١-٤ الطرق الأساسية في التكامل	٢٠
١-٤-١ الطريقة المباشرة	٢٠
١-٤-٢ طريقة تغير المتغير	٢٣
١-٤-٣ حساب التكامل بطريقة التجزئة	٢٥
١-٥ التكامل بالتدريج	٣٥
١-٦ تكامل التوابع الكسرية	٤٥
١-٦-١ تفريق التوابع الكسرية	٥٠
١-٧ مكاملة التوابع الجذرية (الصماء)	٦٠
١-٨ تكامل التوابع المثلثية	٨٤
١-٩ حساب تكامل التوابع القطعية والأسية	٩٥
تمارين الفصل الأول	١٠٢
الفصل الثاني – التكاملات المتغيرة وتطبيقاتها	١٠٩
٢-١ تعريف التكامل المحدد وشروط وجوده	١٠٩
٢-١-١ المعنى الهندسي للتكامل المحدد	١١٢
٢-١-٢ خواص التكامل المحدد	١١٣
٢-١-٣ مشتق التكامل المحدد بالنسبة لحده الأعلى	١١٩

٢-٢ التكاملات الشاذة (المعتلة) ١٢٤
٢-٢-١ اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول ١٣٩
٢-٢-٢ اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني ١٤٧
٢-٢-٣ التكاملات المعتلة من النوع الثالث ١٥٢
٢-٣ التطبيقات الهندسية للتكامل المحدد ١٥٣
٢-٣-١ حساب مساحة السطوح المستوية ١٥٣
٢-٣-٢ أطوال الخطوط المنحنية (طول القوس) ١٦٤
٢-٣-٣ حساب حجم جسم دوراني ١٧١
٢-٣-٤ حساب مساحة السطوح الدورانية ١٧٥
٢-٤ تعيين مراكز الثقل ١٧٩
٢-٥ الطرائق العددية لحساب التكامل المحدد ١٩١
٢-٥-١ طريقة المستطيلات ١٩١
٢-٥-٢ طريقة أشباه المنحرفات ١٩٢
٢-٥-٣ طريقة سيمبسون ١٩٣
تمارين الفصل الثاني ١٩٥

الفصل الثالث – التوابع الحقيقية التابعة لعدة متغيرات ٢٠٣
٣-١ مفاهيم أساسية ٢٠٣
٣-٢ التمثيل الهندسي للتوابع ٢٠٧
٣-٣ خطوط السوية ٢٠٩
٣-٤ النهايات والاستمرار ٢١٠
٣-٥ المشتقات الجزئية ٢١٨
٣-٦ التأويل الهندسي للمشتقات الجزئية ٢٢٠
٣-٧ التفاضل التام ٢٢٦
٣-٨ اشتقاق التوابع المركبة وتفاضلها ٢٣٠
٣-٩ مشتق التوابع الضمنية ٢٣٧
٣-١٠ جملة التوابع الضمنية ٢٤٢

٣-١١ خواص اليعقوبيات ٢٤٣
٣-١٢ نشر تايلور للتابعين بمتغيرين ٢٤٧
٣-١٣ القيمتين العظمى والصغرى لتابع ذي متغيرين أو أكثر ٢٥٠
تمارين الفصل الثالث ٢٥٤

الفصل الرابع – المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ... ٢٥٩
٤-١ تصنيف المعادلات التفاضلية ٢٥٩
٤-٢ حل المعادلة التفاضلية ٢٦١
٤-٣ تشكيل المعادلات التفاضلية ٢٦٤
٤-٤ المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ٢٧٠
٤-٥ النوع الأول للحل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى – القابلة للحل ٢٧١
٤-٥-١ المعادلات التي يمكن فصل متغيراتها ٢٧١
٤-٥-٢ المعادلات التي تؤول إلى منفصلة المتغيرات ٢٧٤
٤-٦ النوع الثاني للحل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى – القابلة للحل ٢٨٠
٤-٦-١ المعادلات المتجانسة ٢٨٠
٤-٦-٢ المعادلة التفاضلية المتجانسة في الأبعاد (ذات التجانس العام) ٢٨٤
٤-٦-٣ المعادلات التفاضلية التي تُرد إلى متجانسة ٢٨٧
٤-٧ النوع الثالث للحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى القابلة للحل ٢٩٢
٤-٧-١ المعادلات التفاضلية التامة ٢٩٢
٤-٧-٢ المعادلات التفاضلية التي تُرد إلى تامة (عامل التكميل) ٢٩٨
٤-٨ مسألة القيمة الابتدائية ومبرهنة الوجود والوحدانية ٣٣١
٤-٨-١ المعادلة التفاضلية المحلولة بالنسبة إلى المشتق ٣٣٢
٤-٨-٢ المعادلة التفاضلية غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق ٣٣٥
٤-٩ حل مسألة القيمة الابتدائية (كوشي) باستخدام متسلسلات القوى الصحيحة ٣٤٤

تمارين الفصل الرابع ٣٤٦

الفصل الخامس – المعادلات التفاضلية الخطية من مراتب عليا ذات الأمثال الثابتة ٣٥٥

٥–١ تعاريف ومفاهيم أساسية ٣٥٥

٥–٢ المؤثر التفاضلي D ٣٦٠

٥–٣ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة والمتجانسة ٣٦٥

٥–٣–١ المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n وذات الأمثال الثابتة والمتجانسة ٣٦٩

٥–٤ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات معاملات ثابتة وغير متجانسة ٣٧٥

٥–٥ المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال المتغيرة والتي ترد إلى معادلات تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة ٣٩٣

٥–٦ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات الأمثال الثابتة واستخدام المؤثر التفاضلي في إيجاد الحل الخاص لها ٣٩٦

تمارين الفصل الخامس ٤١٣

الفصل السادس – المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير المحلولة بالنسبة للمشتق ٤١٧

٦–١ المعادلة التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة إلى y' ٤١٧

٦–٢ المعادلة التفاضلية التي لا تحوي x أو لا تحوي y ٤٢١

٦–٣ المعادلة التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة إلى y ٤٢٦

٦–٣–١ معادلة كليرو ٤٢٨

٦–٣–٢ معادلة لاغرانج ٤٣١

٦–٤ المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة إلى x ٤٣٣

تمارين الفصل السادس ٤٣٥

الفصل السابع – حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة متسلسلات القوى ٤٣٧

٧-١ مبرهنة الوجود والوحدانية للحلول ٤٣٩
٧-٢ الطريقة العملية لإيجاد الحل العام (أو الخاص) بوساطة متسلسلات القوى ٤٤٠
تمارين الفصل السابع ٤٥٣

الفصل الثامن – جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة ٤٥٥
٨-١ جمل المعادلات التفاضلية ٤٥٥
٨-١-١ حل الجملة ٤٥٥
٨-١-٢ الحل العام ٤٥٦
٨-١-٣ الحل الخاص ٤٥٦
٨-١-٤ الحل الشاذ ٤٥٦
٨-٢ جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة ٤٥٧
٨-٢-١ طريقة كرامر ٤٥٤
٨-٢-٢ حل الجملة التفاضلية بطريقة الحذف ٤٦٥
٨-٢-٣ حل الجملة التفاضلية بطريقة التكاملات الأولية ٤٦٦
تمارين الفصل الثامن ٤٧١

الفصل التاسع الطرائق التقريبية لحل المعادلات التفاضلية العادية ٤٧٣
٩-١ حل المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية ٤٧٣
٩-٢ طريقة منشور تايلور لحل المعادلات التفاضلية (طريقة الاشتقاق المتتالي) ٤٧٤
٩-٣ طريقة أولر ٤٧٨
٩-٤ طريقة أولر المطورة ٤٨١
٩-٥ طريقة رونج – كوتا ٤٨٤
٩-٦ طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكار) ٤٩٠
٩-٧ حل المعادلات التفاضلية من المرتبة n ٤٩٤
تمارين الفصل التاسع ٤٩٦
المصطلحات العلمية ٤٩٩
المراجع العلمية ٥٠٧

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المقدمة

يغطي هذا الكتاب مفردات المنهاج المعتمد لمقرر الرياضيات لطلاب السنة الأولى في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية ، في جامعة دمشق .

ويحتوي هذا الكتاب على تسعة فصول تعالج الموضوعات الآتية :

التكامل غير المحدد – التكاملات المحددة وتطبيقاتها – التوابع الحقيقية التابعة لعدة متحولات – المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى – المعادلات التفاضلية الخطية من مراتب عليا ذات الأمثال الثابتة – المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق – حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة متسلسلات القوى – جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة – الطرائق التقريبية لحل المعادلات التفاضلية العادية .

لقد بذلنا جهوداً لعرض المفاهيم الأساسية بصورة مبسطة ، وأكثرنا من الأمثلة المحلولة وغير المحلولة ، وبمستويات مختلفة ، وذلك بهدف إغناء الفكرة النظرية وتوضيحها من جهة وتطويرها وترسيخها في ذهن الطالب من جهة أخرى . وأدرجنا قائمة بالمصطلحات العلمية الواردة في الكتاب باللغتين العربية والانكليزية المعتمدة عربياً . كما أدرجنا قائمة بالمراجع المفيدة والمستخدمة في إعداد هذا الكتاب .

وأخيراً سنكون شاكرين لكل زميل يزودنا بملاحظاته حول هذا الكتاب ، راجين من الله أن نكون قد وفقنا في إعداد مواضيعه بالشكل الذي يحقق الفائدة المرجوة للطلاب .

وفي الختام ، لابد لنا إلا أن نتوجه بالشكر الجزيل لكل من أسهم في إعداد هذا الكتاب وإخراجه ، والله وليّ التوفيق .

الدكتور
نظير هلال

الدكتور
إبراهيم كيالي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

التكامل غير المحدد

١-١ التابع الأصلي والتكامل غير المحدد :

نلاحظ في كثير من المسائل أنه قد لا يطلب منا إيجاد مشتق تابع معطى ، بـل علـى العكس قد يطلب منا إيجاد تابع ما بمعرفة مشتقه، وهذا ما نراه في كثير من المسائل الرياضية والفيزيائية والميكانيكية والتي يطلب فيها حساب مراكز الثقل والأطوال والمساحات .

إذاً ، فالمسألة المطروحة هي بفرض $f(x)$ تابع معطى ، والمطلوب : إيجـاد تـابع $F(x)$ بحيث يكون مشتقه $F'(x)$ مساوياً $f(x)$.

من هنا نرى ضرورة إيراد التعريف الآتي :

تعريف (١) :

نسمي التابع $F(x)$ ، حيث $x \in I \subseteq R$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ على المجـال I ، إذا تحقق ما يلي :

$$F'(x) = f(x) \ ; \ x \in I$$

أو :

$$dF(x) = f(x)\,dx \ ; \ x \in I$$

إن البحث عن التابع الأصلي لتابع معطى يسمى بتكامل هذا التابع (التابع المعطـى) ، وهو من أهم مسائل الحساب التكاملي (التكامل) ، وهي مسألة تعاكس مسألة إيجاد تفاضل تابع في الحساب التفاضلي .

مثال (١) : التابع $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ، هو تابع أصلي للتابع $f(x) = x^2$ ، لأن :

$$F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = x^2 = f(x) \ ; \ \forall x \in R$$

مثال (٢) : التابع $F(x)=arc\sin x$ ، هو تابع أصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، لأن :

$$(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ \forall x\in\left]-1,1\right[$$

لكن علينا أن نتساءل : هل كل تابع يملك تابعاً أصلياً ؟

والجواب عن هذا السؤال نجده في النظرية الآتية :

مبرهنة (١) :

إن أي تابع مستمر على مجال مغلق يملك تابعاً أصلياً على المجال نفسه .

سنقبل هذه النظرية من دون برهان .

لكن إذا كان التابع الذي نبحث عن تابعه الأصلي يعاني من انقطاعاً ، فإننا سندرس هذا التابع على المجالات التي يكون مستمراً فيها .

ومن ناحية ثانية ، نلاحظ أنه إذا كان لدينا $f(x)=2x$ ، فإن $F(x)=x^2$ هو أحد توابعه الأصلية ، وذلك لأن :

$$F'(x)=(x^2)'=2x$$

أو :

$$dF(x)=d(x^2)=2x\,dx$$

لكن هناك توابع أصلية أخرى للتابع $f(x)=2x$ ، والتي هي :

$$F_1(x)=x^2+2\ ;\ F_2(x)=x^2-3\ ;\ F_3(x)=x^2+6$$

بل إن التابع $F(x)=x^2+c$ (حيث c ثابت ما) ، هو تابع أصلي للتابع $f(x)=2x$ ، وعليه سنستعرض النظرية الآتية :

مبرهنة (٢) :

إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ على المجال I (حيث I مجال مغلق أو مفتوح) فإن التابع $[F(x)+c]$ ، حيث c ثابت اختياري هو أيضاً تابع أصلي للتابع $f(x)$.

البرهان : حسب التعريف (١) ، نجد أن :

$$[F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x) \ ; \ \forall x \in I$$

وهذا يعني أن $F(x)$ ليس وحده تابعاً أصلياً ، بل إن التابع $F(x)+c$ هو أيضاً تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I .

مبرهنة (٣) :

إذا كان التابع $y=f(x)$ مستمراً في جميع نقاط المجال $[a,b]$ ومشتقه في جميع نقاط المجال المفتوح (a,b) يساوي الصفر، فإن هذا التابع يكون ثابتاً على هذا المجال المغلق .

نتيجة (١) :

إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً لتابع مفروض $f(x)$ ، فعندئذٍ تكون العبارة العامة للتابع الأصلي من الشكل الآتي :

$$F(x)+c$$

حيث c : ثابت اختياري .

تعريف (٢) : التكامل غير المحدد .

ليكن $f(x)$ تابعاً مُعرَّفاً ومستمراً على المجال $[a,b]$ ، فإن أحد التوابع الأصلية $F(x)$ للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ نسميه تكاملاً غير محدد للتابع $f(x)$ على ذلك المجال وهو :

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

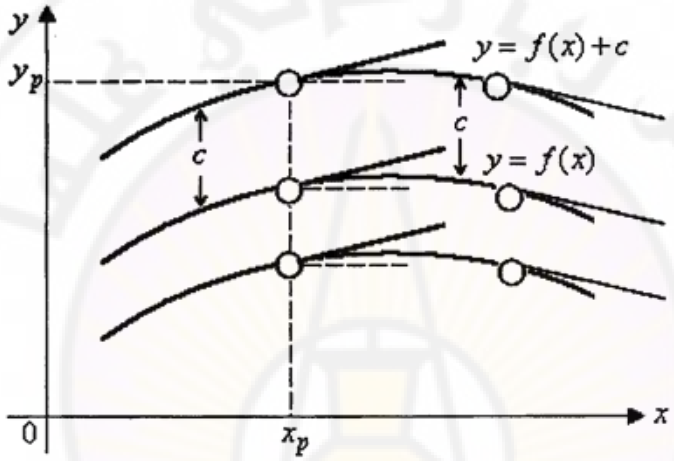
حيث c : ثابت اختياري .

ونسمي التابع $f(x)$ بالتابع المستكمل ، بينما نسمي $f(x)\,dx$ بالمقدار المستكمل .

وهنا نلاحظ أن الثابت c يمكن أن يأخذ مجموعة لانهائية من القيم ، لأنه ثابت اختياري وبالتالي فإن مجموعة التوابع الأصلية للتابع $f(x)$ لانهائية .

المفهوم الهندسي للتكامل غير المحدد :

نعلم أن مشتق التابع $y = f(x)$ يعين أمثال توجيه المماس للمنحني الموافق ، ولهذا فإن مسألة إيجاد التابع الأصلي $F(x)$ لتابع معطى $f(x)$ يمكن النظر إليها كمسألة إيجاد المنحني (إذا علم قانون تغير الأمثال التوجيهية للمماس لهذا المنحني $f(x) = tg\,\alpha$ باعتبار α زاوية المماس للمنحني $F(x)$) ، انظر الشكل (١-١) .



الشكل (١-١)

إذا كان $y = F(x)$ أحد هذه المنحنيات ، فإنه من الممكن الحصول على بقية المنحنيات بإجراء انسحاب يوازي المحور $0x$ قدره c .

نسمي منحني أي تابع من التوابع الأصلية للتابع $f(x)$ بمنحني تكاملي ، أي إذا كان $F'(x) = f(x)$ فإن منحني التابع $y = F(x)$ هو منحنٍ تكاملي .

مثال (٣) : أوجد المنحني التكاملي الذي يمر من النقطة $M_0(-1,2)$ والذي ميل المماس له في النقطة $M(x,y)$ يساوي ($3x^2$) .

الحل : نفرض أن معادلة المنحني التكاملي المطلوب هي $y = F(x)$ ، فميل المماس له في النقطة $M_0(x_0, y_0)$ يساوي y' ، أي :

$$F'(x) = 3x^2 \;\Rightarrow\; F(x) = 3\int x^2\,dx = x^3 + c$$

لكن $M_0(-1,2)$ تنتمي لهذا المنحني ، وبالتالي فإن :

$$2 = (-1)^3 + c$$

أي أن $c = 3$ ، وبذلك يكون :

$$F(x) = x^3 + 3$$

١-٢ الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد :

سوف نذكّر بالخواص الأساسية للتكامل غير المحدد :

آ- $\int f(x)dx\Big)' = f(x)$

ب- $\int f'(x)dx = f(x) + c$

ج- $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

د- $\int d f(x) = f(x) + c$

هـ- $\int a f(x)dx = a\int f(x)dx$

وحيث إن a ثابت و $a \neq 0$.

و- $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن :

ز- $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c \; ; \quad a \neq 0$

نتيجة (٢) :

من الخاصتين (هـ) ، (و) يمكن استنتاج الخاصة الخطية للتكامل غير المحدد من أجل عدد منته من التوابع والتي هي :

$$\int [c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm ... \pm c_n f_n(x)]dx =$$

$$= c_1 \int f_1(x) \pm c_2 \int f_2(x)dx \pm ... \pm c_n \int f_n(x)dx$$

حيث :

c_1 و c_3 و c_3 و ... و c_n ثوابت عددية .

١-٣ جدول التكاملات الأساسية :

الآن سوف نورد جدول التكاملات لبعض التوابع الأساسية والتي تنتج مباشرة من قواعد مفاضلة التوابع الأساسية . ويمكن التأكد من صحة كل منها بالمفاضلة .

1-	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ ; \ (n \neq -1)$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + c \ ; \quad x \neq 0$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a>0 \ ; \ a \neq 1) \ ; \ \int e^x dx = e^x + c$
4-	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
5-	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
6-	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + c \quad ; \ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$
7	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + c \ ; \ x \neq k\pi$
8	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \lvert tg \frac{x}{2} \rvert + c$
9-	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \lvert tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \rvert + c$
10-	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c \ ; \ (a \neq 0)$
11-	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \lvert \frac{x-a}{x-a} \rvert + c \ ; \ (a \neq 0)$
12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\sin \frac{x}{a} + c \ ; \quad \lvert x \rvert < \lvert a \rvert \ ; \ (a \neq 0)$
13-	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \rvert + c = arc\,ch(\frac{x}{a}) + c \ ; \ \lvert x \rvert > \lvert a \rvert$

14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|+c = arc\,sh(\frac{x}{a})+c \quad ; \quad a \neq 0$
15	$\int sh\,x\,dx = ch\,x+c$
16	$\int ch\,x\,dx = sh\,x+c$
17	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x+c$
18	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -coth\,x+c \; ; \; x \neq 0$

ومن أجل البرهان على هذه الدساتير يكفي أن نتحقق من أن المشتق في الطرف الأيمن في أي علاقة مساوياً للمقدار الموجود ضمن رمز التكامل .

لذلك سنكتفي ببرهان العلاقتين (2) و(14) ، أما برهان بقية العلاقات فسنترك للطالب

والآن لنبرهن :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c$$

آ- إذا كان $x>0$ فإن $|x|=x$ ، وبالتالي $\ln|x|=\ln x$ ، ومن ناحية ثانية :

$$d\ln|x| = d\ln x = \frac{dx}{x}$$

لذلك من أجل $x>0$ ينتج :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c = \ln|x|+c$$

ب- إذا كان $x<0$ فإن $|x|=-x$ ، وبالتالي $\ln|x|=\ln(-x)$ ، لكن :

$$d\ln(-x) = \frac{(-x')}{(-x)}dx = \frac{-1}{-x}dx = \frac{dx}{x}$$

عندئذٍ نجد :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x)+c$$
$$= \ln|x|+c$$

من العلاقتين السابقتين (آ) و(ب) ينتج أن :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

ولكي نبرهن على صحة العلاقة (14) والتي هي :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$$

نكتفي بالبرهان على أن :

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\left[\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})} \frac{(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

١-٤ الطرق الأساسية في التكامل :

١-٤-١ الطريقة المباشرة :

بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد ، يمكن حساب عدد كبير من التكاملات مباشرة ، وذلك برد التكامل المعطى إلى تكاملات موجودة في جدول التكاملات الأساسية الشهيرة .

مثال (٤) : احسب التكامل $I = \int (x^2 + 1)^2 dx$

$$I = \int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3} x^3 + x + c$$

مثال (٥) : احسب التكامل $I = \int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x}}$

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$$

مثال (٦) : احسب التكامل $I = \int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$

$$I = \int \frac{[(x^2+1)-1]\,dx}{x^2+1}$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x - arc\,tg\,x + c$$

مثال (٧) : احسب التكامل $I = \int tg^2 x\,dx$

$$I = \int tg^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\,dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx$$

$$= tg\,x - x + c$$

مثال (٨) : احسب التكامل $I = \int \frac{dx}{x \ln x}$

$$I = \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + c$$

مثال (٩) : احسب التكامل $I = \int tg^4 x\,dx$

$$I = \int tg^4 x\,dx = \int tg^2 x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int tg^2 x \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int tg^2 x\, d(tg\,x) - \int tg^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{3} tg^3 x - \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} tg^3 x - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx$$

$$= \frac{1}{3} tg^3 x - tg\,x + x + c$$

مثال (١٠) : احسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$= \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = arc\sin(\frac{x}{a}) + c$$

مثال (١١) : احسب التكامل $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{[(a+x)+(a-x)]dx}{(a+x)(a-x)} =$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(x+a)}{x+a} - \int \frac{d(x-a)}{x-a} \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\ln|x+a| - \ln|x-a| \right) + c$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c$$

١-٤-٢ طريقة تغير المتغير :

عندما يكون من الصعب حساب التكامل $\int f(x)\,dx$ بالطريقة المباشرة ، عندئذٍ نلجأ إلى طريقة أخرى ، وهذه الطريقة تسمى بطريقة تغيير المتغير رغبة منا في تسهيل عملية التكامل ، وذلك بإدخال متغير جديد u بدلاً من المتغير القديم x في التكامل ، يرتبط مع x بالعلاقة $x=\varphi(u)$ ، وحيث إن $\varphi(u)$ تابع مستمر وله مشتق $\varphi'(u)$ مستمر أيضاً ، وفي هذه الحالة تتحقق المساواة الآتية :

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du \qquad (1.1)$$

وتسمى هذه العلاقة بعلاقة تغير المتغير .

وبعد حساب قيمة هذا التكامل بدلالة u نبدل بقيمتها بدلالة x ، أي $u=\varphi^{-1}(x)$ فنحصل على المطلوب .

مثال (١٢) : احسب التكامل $I=\int \sin^3 x.\cos x\,dx$

$$I=\int \sin^3 x.\cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d(\sin x)$$

$$= \int u^3\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_{u=\sin x} + c$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

مثال (١٣) : احسب التكامل $I=\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$3x+1=u \;\Rightarrow\; 3\,dx=du \;\Rightarrow\; dx=\frac{1}{3}\,du$$

عندئذٍ نجد أن :

$$I=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}}\Big|_{u=3x+1} + c = \sqrt[3]{(3x+1)} + c$$

مثال (١٤) : احسب التكامل $I = \int e^{x^3}.x^2 dx$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x^3 = u \Rightarrow 3x^2 dx = du \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$$

عندئذ نجد أن :

$$\int e^{x^3}.x^2 dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

مثال (١٥) : احسب التكامل $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x+3}}$

نفرض أن :

$$\sqrt[5]{x+3} = t \Rightarrow x+3 = t^5$$

$$\Rightarrow x = t^5 - 3 \Rightarrow dx = 5t^4 dt$$

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{x+3}} = 5\int \frac{(t^5-3)t^4 dt}{t} = 5\int (t^5-3)t^3 dt$$

$$= 5\int t^8 dt - 15\int t^3 dt$$

$$= \frac{5}{9}t^9 - \frac{15}{4}t^4 + c$$

$$= \frac{5}{9}\sqrt[5]{(x+3)^9} - \frac{15}{4}\left(\sqrt[5]{(x+3)^4}\right) + c$$

مثال (١٦) : احسب التكامل $I = \int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^4 x}$

لنفرض أن $\sin x = u$ ، وبالتالي $\cos x\,dx = du$

وبالتعويض نجد :

$$I = \int \frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^4 x} = \int \frac{2\sin x.\cos x\,dx}{1+\sin^4 x} = \int \frac{2u\,du}{1+u^4}$$

وبتغير المتغير مرة أخرى ، نفرض أن :

$$u^2 = v \;\Rightarrow\; dv = 2u\,du$$

وبالتعويض نجد أن :

$$I = \int \frac{dv}{1+v^2} = arctg\, v + c$$

وبالعودة إلى المتغير x :

$$u = \sin x \;\; ; \;\; I = arctg\,(\sin^2 x) + c$$

١-٤-٣ حساب التكامل بطريقة التجزئة :

ليكن لدينا التابعان $u(x)$ و $v(x)$ القابلان للاشتقاق ومشتقاتهما مستمرة $u' = u'(x)$ و $v' = v'(x)$ على مجال ما ، وحسب قاعدة تفاضل جداء تابعين نكتب :

$$d(u.v) = u\,dv + v\,du$$

وبالتالي :

$$u\,dv = d(u.v) - v\,du$$

وبأخذ تكامل الطرفين نحصل على الدستور الآتي :

$$\int u\,dv = (u.v) - \int v\,du \qquad (1.2)$$

العلاقة (1.2) تسمى دستور التكاملات غير المحددة بطريقة التجزئة ، ومن الممكن كتابتها بشكل آخر حيث إن :

$$du = u'(x)\,dx \;\; , \;\; dv = v'(x)\,dv$$

وعليه نجد العلاقة الآتية :

$$\int u.v'dx = (u.v) - \int v.u'\,dx$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int u\,dv$ إلى حساب التكامل $\int v\,du$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنّا اختيار التابعين u , v ، والأمثلة الآتية توضح ذلك .

مثال (١٧) : احسب التكامل $\int x \ln x \, dx$

لنفرض :

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\ln x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

عندئذٍ بالتعويض في دستور التكامل بالتجزئة (1.2) نجد أن :

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

مثال (١٨) : احسب التكامل $I = \int \sqrt{1-x^2} \; dx$

الحـــل : نفرض أن :

$$dv = dx \quad \text{و} \quad u = \sqrt{1-x^2}$$

ومنه :

$$v = x \quad \text{و} \quad du = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

نعوض ي دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$I = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + arc\sin x - I \Rightarrow$$

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + arc\sin x + c_1 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} arc\sin x + c$$

تجدر الإشارة إلى أنه في بعض التمارين قد نطبق التكامل بالتجزئة أكثر من مرة متتالية ، وهذا يتبع شكل التكامل .

مثال (١٩) : احسب التكامل $I = \int x^3 e^x dx$

لحساب التكامل نفرض أن :

$$x^3 = u \Rightarrow du = 3x^2 dx$$
$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$
$$I = \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

ولنطبق دستور التكامل بالتجزئة مرة ثانية ، ونفرض أن :

$$x^2 = u \Rightarrow du = 2x\,dx$$
$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$
$$= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2\int x e^x dx)$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$$

كذلك نطبق دستور التكامل بالتجزئة مرة ثالثة نجد :

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c$$

مثال (٢٠) : احسب التكامل $I = \int x^2 . \cos x\, dx$

لحساب هذا التكامل نطبق دستور التكامل بالتجزئة ، لذلك نفرض أن :

$$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x$$
$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

وبالتالي نجد :

$$I = \int x^2 . \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx$$

نطبق دستور التكامل بالتجزئة مرة ثانية ، لذلك نفرض :

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

وفيما يلي سنتعرض لبعض أشكال التكاملات التي تتم مكاملتها بالتجزئة ، وكيفية اختيار u و dv :

أولاً- التكاملات من الأشكال :

$$\int p(x)e^{\alpha x}dx \ , \ \int p(x)\cos\alpha x\,dx \ , \ \int p(x)\sin\alpha x\,dx$$

حيث $p(x)$: هو كثير حدود للمتغير x .

α : عدد ثابت

ولحساب أي من هذه التكاملات نفرض أن :

$u = p(x)$ ، وكل من $\sin\alpha x\,dx$, $\cos\alpha x\,dx$, $e^{\alpha x}dx$ يجب اختياره dv .

والمثالين (١٩) و (٢٠) يوضحان ذلك

ثانياً- التكاملات من الأشكال :

$$\int p(x)\ln^n x\,dx \ ; \ \int p(x)arc.\sin x\,dx \ ; \ \int p(x)arc.\cos x\,dx \ ;$$
$$\int p(x)arctg\,x\,dx \ ; \ \int p(x)arctg\,x\,dx$$

حيث $p(x)$: هو كثير حدود تابع لـ x .

ولحساب هذه التكاملات نفرض أن $dv = p(x)dx$ ، والباقي نفرضه u .

مثال (٢١) : احسب التكامل $I = \int x\,arctg\,x\,dx$

الحـــل : لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$arctg\,x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$x\,dx = dv \;\Rightarrow\; v = \frac{x^2}{2}$$

وبالتالي نجد :

$$\int x\,arctg\,x\,dx = (\frac{x^2}{2})\,(arctg\,x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$

$$= (\frac{x^2}{2})\,(arctg\,x) - \frac{1}{2}\int \frac{[(x^2+1)-1]dx}{1+x^2}$$

$$= (\frac{x^2}{2})\,(arctg\,x) - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= (\frac{x^2}{2})\,(arctg\,x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,arctg\,x + c$$

مثال (٢٢) : احسب التكامل $I = \int arc\sin x\,dx$

الحـــل : لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$arc\sin x = u \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$$

$$\int arc\sin x\,dx = x\,arc\sin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

نحسب الآن :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.d\,(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + c$$

وبالتالي نجد :

$$\int arc\sin x\,dx = x\,arc\sin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

ومن التكاملات التي يمكن إجراؤها بالتجزئة مرتين متتاليتين ، التكاملين الآتيين :

مثال (٢٣) : احسب التكامل :

$$I = \int (16x^3 - 7x^2 + 6x + 1) \ln x^2 dx$$

الحـــل : لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$(16x^3 - 9x^2 + 6x + 1)\,dx = dv \;\; ; \;\; \ln x^2 = u$$

واعتماداً على دستور التكامل بالتجزئة نكتب :

$$I = (4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x)\,(\ln x^2) -$$
$$-2 \int (4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x)\,(\ln x)\,\frac{dx}{x}$$
$$= (4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x)\,(\ln x^2) -$$
$$-2 \int (4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)\,(\ln x)\,dx$$

ومن أجل حساب التكامل الأخير نفرض :

$$(4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)\,dx = dv \;\; ; \;\; u = \ln x$$
$$v = x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \;\; ; \;\; du = \frac{dx}{x}$$

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 3x + 1)\,(\ln x)\,dx =$$
$$= (x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x)\,(\ln x) - \int (x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + 1)\,dx$$
$$= (x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x)\,(\ln x) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 + x$$

بالتعويض تنتج قيمة التكامل :

$$I = (4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x)\,(\ln^2 x) -$$
$$-(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x)\,(\ln x) + \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$$

ثالثاً- التكاملات من الشكل :

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx\, dx \quad , \quad I_2 = \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

والآن لنقوم بحساب التكامل :

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

بينما نترك حساب التكامل I_2 للطالب .

لذلك ، لحساب I_1 نفرض أن :

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = a e^{ax} dx$$

$$dv = \sin bx\, dx \Rightarrow v = \frac{-1}{b} \cos bx$$

والآن لنطبق دستور التكامل بالتجزئة :

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

ولحساب التكامل الأخير نفرض أن :

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = a e^{ax} dx$$

$$dv = \cos bx\, dx \Rightarrow v = + \frac{1}{b} \sin bx$$

عندئذٍ نجد أن :

$$I_1 = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left[\frac{1}{b} e^{ax} . \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} . \sin bx\, dx \right]$$

$$\int e^{ax} . \sin bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} . \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} . \sin bx\, dx$$

بتوحيد المقامات والإصلاح نجد :

$$(1+\frac{a^2}{b^2})\int e^{ax}\sin bx\,dx=(\frac{a\sin bx-b\cos bx}{b^2})e^{ax}$$

ومنه نجد :

$$\int e^{ax}.\sin bx\,dx=(\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2})e^{ax}+c$$

وباتباع الخطوات التي اتبعناها في حساب التكامل I_1 نفسها ، نتبعها في حساب التكامل I_2 ، فنجد أن :

$$\int e^{ax}.\cos bx\,dx=(\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2})e^{ax}+c$$

- (يترك حسابه للطالب)

يتطلب أحياناً حساب بعض التكاملات بتطبيق طريقتين :

- طريقة التكامل بالتجزئة .
- طريقة تغيير المتغير .

وسنوضح ذلك بالمثال الآتي

مثال (٢٤) : احسب التكامل $I=\int x^5e^{x^3}\,dx$

الحـــل : لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$u=x^3 \Rightarrow du=3x^2\,dx$$

وبالتالي :

$$\int x^5e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int u\,e^u\,du$$

$$=\frac{1}{3}(u\,e^u-\int e^u\,du)$$

$$=\frac{1}{3}(u-1)e^u+c$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+c$$

والآن سنتعرض لبعض التكاملات المختلفة عن الأشكال السابقة والتي تحـل بطريقـة التجزئة ، وسوف نوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال (٢٥) : احسب التكامل $I = \int \sin(\ln 2x)\,dx$

الحـــل : نفرض أن :

$$dv = dx \quad ; \quad u = \sin(\ln 2x)$$

$$v = x \quad ; \quad du = \cos(\ln 2x)\,\frac{dx}{x}$$

عندئذٍ نجد أن :

$$\int \sin(\ln 2x)\,dx = x\sin(\ln 2x) - \int x\cos(\ln 2x)\frac{dx}{x}$$

$$= x\sin(\ln 2x) - \int \cos(\ln 2x)\,dx$$

ولحساب التكامل الأخير نفرض أن :

$$u = \cos(\ln 2x) \Rightarrow du = -\sin(\ln 2x)\frac{dx}{x}$$

$$dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \sin(\ln 2x)\,dx = x\sin(\ln 2x) - [x\cos(\ln 2x) + \int \sin(\ln 2x)\,dx]$$

$$\int \sin(\ln 2x)\,dx = x\sin(\ln 2x) - x\cos(\ln 2x) - \int \sin(\ln 2x)\,dx$$

$$2\int \sin(\ln 2x)\,dx = x\sin(\ln 2x) - x\cos(\ln 2x)$$

وبالتالي نجد :

$$\int \sin(\ln 2x)\,dx = \frac{1}{2}\,x\,[\sin(\ln 2x) - \cos(\ln 2x)] + c$$

مثال (٢٦) : احسب التكامل $I = \int x\ln(1+\frac{1}{x})\,dx$

الحـــل : لحساب هذا التكامل نقوم بإصلاح التابع المستكمل فنجد :

$$\ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(x+1) - \ln x$$

وبالتالي : $I = \int x \ln(x+1)\,dx - \int x \ln x\,dx = I_1 - I_2$

والآن لنقوم بحساب كل تكامل على حدة فنجد :

$$I_1 = \int x \ln(x+1)\,dx$$

نفرض أن :

$$x\,dx = dv \;\; ; \;\; u = \ln(x+1)$$

إذاً :

$$v = \frac{x^2}{2} \;\; ; \;\; du = \frac{dx}{x+1}$$

عندئذٍ نجد :

$$I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{x+1}$$

$$I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{[(x^2-1)+1]dx}{x+1}$$

$$I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$I_1 = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c_1$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x) + c_1$$

وبطريقة مشابهة نجد :

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c_2$$

وبالتالي ينتج :

$$I = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}x + c$$

وهو المطلوب .

١-٥ التكامل بالتدريج :

هو تطبيق للتكامل بطريقة التجزئة ، ويكون ذلك عندما يكون المطلوب إيجاد تكامل معطى بدلالة دليل $n \in N$ ، حيث نستطيع إيجاد هذا التكامل بدلالة تكامل آخر من النمط نفسه ، ولكن بدليل أقل ، ونقول عندئذٍ إننا وجدنا دستوراً تدريجياً .

مثال (٢٧) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل :

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad ; \quad (n=1,2,3,...)$$

الحـــل : من أجل حساب هذا التكامل نكتبه بالشكل الآتي :

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n} \right]$$

حيث : $$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

لنحسب الآن التكامل $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}$ بطريقة التكامل بالتجزئة ، إذ نفرض :

$$v = \frac{1}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} \quad ; \quad dv = \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} \quad ;$$

$$du = dx \quad ; \quad u = x$$

وبالتالي نجد :

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{x}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\, I_{n-1}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد :

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}\, I_{n-1} \right]$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{3-2n}{2-2n}\, I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} \right]$$

ومنه نجد :

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} \right]$$

وهذا يمثل الدستور التدريجي لحساب I_n بدلالة I_{n-1} .

مثال (٢٨) : احسب التكامل الآتي :

$$I_3 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

اعتماداً على الدستور التدريجي في المثال (٢٧) نجد أن $n = 3$ و $a = 1$ وبالتالي يكون:

$$I_3 = \frac{3}{4}\, I_2 + \frac{x}{4(1+x^2)^2}$$

ولحساب I_2 نطبق مرة ثانية الدستور التدريجي في المثال (٢٧) من جديد ، مع ملاحظة أن $n - 2$ ، فنجد :

$$I_2 = \frac{1}{2}\, I_1 + \frac{x}{2(1+x^2)} \quad ; \quad I_1 = arctg\, x + c_1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\, arctg\, x + \frac{x}{2(1+x^2)}$$

نعوض I_2 بما يساويه I_3 نجد :

$$I_3 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\, arctg\, x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right] + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + c$$

$$I_3 = \frac{3}{8}\, arctg\, x + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + c$$

مثال (٢٩) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل :

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

الحـــل : نكتب التكامل بالشكل الآتي :

$$I_n = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\cos^n x} =$$

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^n x} = I_{(n-2)} + \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^n x} \qquad (I)$$

ولحساب التكامل الأخير نفرض أن :

$$u = \sin x \qquad \text{و} \qquad dv = \frac{\sin x\,dx}{\cos^n x} \quad \text{، فيكون :}$$

$$v = \frac{1}{(n-1)} \cos^{1-n} x \qquad \text{و} \qquad du = \cos dx \;\; ; \;\; n \neq 1$$

نعوض في (I) نجد :

$$I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \sin x.\cos^{1-n} x - \frac{1}{n-1} \int \cos^{2-n} x\,dx$$

$$= I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \sin x.\cos^{1-n} x - \frac{1}{n-1} I_{(n-2)}$$

ومنه نجد الدستور التدريجي :

$$I_n = \frac{1}{n-1} \sin x.\cos^{1-n} x + \frac{(n-2)}{(n-1)} I_{n-2} \;\; ; \;\; n \neq 1$$

مثال (٣٠) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل :

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

حيث إن n عدد صحيح موجب ، ومن الممكن أن يكون عدداً كسرياً موجباً أو سالباً .

ولحساب هذا التكامل نطبق دستور التكامل بالتجزئة :

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x.\cos x\,dx$$

نفرض أن :

$$u = \cos^{n-1} \Rightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2}.\sin x$$
$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$$
$$I_n = \cos^{n-1} x.\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x.\sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x.\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x.(1-\cos^2 x)\,dx$$
$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

ومنه نجد :

$$I_n = \frac{(\cos^{n-1} x).\sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{(n-2)}$$

وهذا الدستور يسمى بالدستور التدريجي لحساب I_n بدلالة I_{n-2} وذلك بشرط $n \neq 0$ ويستعمل من أجل القيم الموجبة لـ n .

ولإيجاد الدستور التدريجي في حال كون n سالبة ، نوجد من الدستور التدريجي السابق قيمة $I_{(n-2)}$ بدلالة I_n ، عندئذٍ نجد :

$$I_{n-2} = \frac{-\cos^{n-1} x.\sin x}{(n-1)} + \frac{nI_n}{n-1}$$

لنبدل في هذا الدستور كل n بـ $(n+2)$ ، نجد :

$$I_n = \frac{-\cos^{n+1} x \sin x}{n+1} + \frac{(n+2)}{(n+1)} I_{n+2}$$

وهذا الدستور التدريجي يستخدم من أجل القيم السالبة لـ n وذلك بشرط $n \neq -1$.

مثال تطبيقي (٣١) : احسب التكامل :

$$I_8 = \int \cos^8 x\,dx$$

الحـــل :

لحساب هذا التكامل نطبق الدستور التدريجي في المثال (٣٠) والذي يستخدم لحساب I_n بدلالة I_{n-2} ومن أجل القيم الموجبة .

$$I_8 = \frac{\cos^7 x.\sin x}{8} + \frac{7}{8} I_6$$

$$I_6 = \frac{\cos^5 x.\sin x}{6} + \frac{5}{6} I_4$$

$$I_4 = \frac{\cos^3 x.\sin x}{4} + \frac{3}{4} I_2$$

$$I_2 = \int \cos^2 x\, dx = \int \frac{(1+\cos 2x)\, dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$I_4 = \frac{(\cos^3 x).\sin x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) + \frac{3}{4} c$$

$$I_4 = \frac{(\cos^3 x).(\sin x)}{4} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{4} c$$

$$I_6 = \frac{(\cos^5 x).\sin x}{6} + \frac{5}{6}\left[\frac{(\cos^3 x).(\sin x)}{4} + \frac{3}{8} x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{4} c\right]$$

$$I_6 = \frac{(\cos^5 x).\sin x}{6} + \frac{5(\cos^3 x).(\sin x)}{24} + \frac{15}{48} x + \frac{15}{96}\sin 2x + \frac{15}{24} c$$

$$I_8 = \frac{(\cos^7 x).\sin x}{8} + \frac{7}{8}\left[\frac{(\cos^5 x).\sin x}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{5(\cos^3 x).(\sin x)}{24} + \frac{15}{48} x + \frac{15}{96}\sin 2x + \frac{15}{24} c\right]$$

مثال (٣٢) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل :

$$I_n = \int (x^2 - a^2)^n dx \quad ; \quad n \in N$$

الحـــل :

$$I_n = \int (x^2 - a^2)\,(x^2 - a^2)^{n-1} dx =$$

$$= \int x\,(x^2 - a^2)^{n-1} x\, dx - a^2 \int (x^2 - a^2)^{n-1} dx$$

نفرض $u = x$ ، فيكون $du = dx$ ، ونفرض أن $dv = (x^2 - a^2)^{n-1} x\,dx$ فيكون :

$$v = \frac{1}{2n}(x^2 - a^2)^n$$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة :

$$I_n = \frac{1}{2n} x(x^2 - a^2)^n - \frac{1}{2n}\int (x^2 - a^2)^n dx - a^2 \int (x^2 - a^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = \frac{1}{2n} x(x^2 - a^2)^n - \frac{1}{2n} I_n - a^2 I_{n-1}$$

ومنه نجد :

$$I_n = \frac{1}{2n+1} x(x^2 - a^2)^n - \frac{2n}{2n+1} a^2 I_{n-1}$$

مثال (٣٣) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل $I_n = \int \sin^n x\,dx$

حيث n عدد صحيح موجب أو سالب . (من الممكن أن يكون n عدداً قسرياً موجباً أو سالباً) .

الحـــل : لنكتب : $I_n = \int \sin^{n-1} x . \sin x\,dx$

عندئذٍ نفرض أن $u = \sin^{n-1} x$ ، فيكون :

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x . \cos x\,dx$$

ونفرض $dv = \sin x\,dx$ ، فيكون : $v = -\cos x$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة :

$$I_n = \int \sin^{n-1} x . \sin x\,dx =$$

$$= -\cos x . \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x . \cos^2 x\,dx$$

$$I_n = -\cos x . \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x . (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x . \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

$$I_n = -\cos x . \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

ومنه نجد الدستور التدريجي :

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x.\sin^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

الذي يحسب I_n بدلالة I_{n-2} وذلك بشرط $n \neq 0$ ويستعمل من أجل القيم الموجبة لـ n .

الآن لنحسب I_{n-2} بدلالة I_n ، ومن ثم نحسب I_n بدلالة I_{n+2} وذلك لاستخرج دستور تدريجي آخر يستعمل من أجل القيم السالبة لـ n فنجد :

$$I_{n-2} = \frac{\cos x.\sin^{(n-1)} x}{n-1} + \frac{n}{n-1} I_n$$

لنبدل كل n بـ $(n+2)$ فنجد :

$$I_n = \frac{\cos x.\sin^{(n+1)} x}{(n+1)} + \frac{(n+2)}{(n+1)} I_{n+2}$$

وذلك بشرط $n \neq -1$ ، حيث إن هذا الدستور يستخدم من أجل القيم السالبة لـ n .

مثال تطبيقي (٣٤) : احسب التكامل الآتي :

$$I_{-5} = \int \frac{dx}{\sin^5 x}$$

الحـــل : لنطبق الدستور التدريجي في المثال (٣٣) والذي يتم بوساطته حساب I_n بدلالة $I_{(n+2)}$ ومن أجل القيم السالبة لـ n :

$$I_{-5} = \frac{-\cos x.\sin^{-4} x}{4} + \frac{3}{4} I_{-3}$$

$$I_{-3} = \frac{-\cos x.\sin^{-2} x}{2} + \frac{1}{2} I_{-1}$$

$$I_{-1} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

والآن لنبدل I_{-1} في I_{-3} نجد :

$$I_{-3} = \frac{-\cos x.\sin^{-2} x}{2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c\right]$$

نبدل I_{-3} في I_{-5} نجد :

$$I_{-5} = \frac{-\cos x.\sin^{-4} x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-\cos x.\sin^{-2} x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}c\right]$$

$$I_{-5} = \frac{-\cos x.\sin^{-4} x}{4} - \frac{3}{4}\cos x.\sin^{-2} x + \frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c_1$$

حيث c_1 : ثابت اختياري .

مثال (٣٥) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكاملات من الشكل الآتي :

$$I_{m,n} = \int \cos^m x.\sin^n x\,dx$$

حيث n,m : أعدادٌ صحيحة موجبة أو سالبة ، ومن الممكن أيضاً أن تكون أعداداً كسرية موجبة أو سالبة .

الحل : لحساب مثل هذه التكاملات نكتب :

$$I_{m,n} = \int \cos^m x.\sin^n x\,dx = \int \cos^{m-1} x.\sin^n x.\cos x\,dx$$

$$= \int \cos^{m\ 1} x.\sin^n x\,d(\sin x)$$

$$I_{m,n} = \int \cos^{m-1} x.d\left(\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right)$$

وباستخدام دستور التكامل بالتجزئة (1.2) نجد :

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x.\sin^{n+1} x}{(n+1)} + \frac{(m-1)}{(n+1)}\int \cos^{(m-2)} x.\sin^{n+2} x.dx$$

أو :

$$I_{(m,n)} = \frac{\cos^{m-1} x.\sin^{n+1} x}{(n+1)} + \frac{(m-1)}{(n+1)}\int \cos^{m-2} x.\sin^n x(1-\cos^2 x).dx$$

$$I_{m,n} = \frac{1}{(n+1)}\cos^{m-1} x.\sin^{n+1} x + \frac{(m-1)}{(n+1)} I_{m-2,n} - \frac{(m-1)}{(n+1)} I_{m,n}$$

ومنه نجد :

$$\frac{(m+n)}{(n+1)} I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x.\sin^{n+1} x}{(n+1)} + \frac{(m-1)}{(n+1)} I_{m-2,n}$$

وبالتالي يكون :

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x.\sin^{n+1} x}{(m+n)} + \frac{(m-1)}{(m+n)} I_{m-2,n} \qquad (I)$$

وهذا يمثل الدستور التدريجي الذي يحسب $I_{m,n}$ بدلالة $I_{m-2,n}$ وذلك من أجل القيم الموجبة لـ m وبشرط أن تكون $m \neq -n$. أما عندما $m = -n$ فيتحول التكامل المفروض $I_{m,n}$ إلى التكامل من الشكل الآتي :

$$I_{m,n} = \int \cos^{-n} x \sin^{n} x\, dx = \int tg^{n} x\, dx$$

أما الدستور التدريجي من أجل قيم m السالبة فيتم بحساب $I_{m-2,n}$ بدلالة $I_{m,n}$ ، نبدل m بـ $(m+2)$ فنجد :

$$I_{m-2,n} = \frac{\cos^{m-1} x.\sin^{n+1} x}{m-1} + \frac{(m+n)}{m-1} I_{m,n}$$

لنبدل كل m بـ $(m+2)$ فنجد :

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{m+1} x.\sin^{n+1} x}{(m+1)} + \frac{(m+n+2)}{(m+1)} I_{m+2,n} \qquad (II)$$

وهذا يمثل الدستور التدريجي الذي يستعمل من أجل قيم m وبشرط أن يكون $m \neq -1$.

أما إذا كان $m = -1$ فيصبح التكامل المفروض من الشكل الآتي :

$$I_{-1,n} = \int \cos^{-1} x.\sin^{n} x.dx =$$

$$= \int \frac{\sin^{n} x.dx}{\cos x} = \int \frac{\sin^{n} x.\cos x.dx}{\cos^{2} x} = \int \frac{\sin^{n} x.d(\sin x)}{(1-\sin^{2} x)}$$

ولحساب هذا التكامل نفترض أن :

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$$

نعوض في التكامل المعطى فنجد أن :

$$I_{-1,n} = \int \frac{t^{n}}{1-t^{2}}\, dt$$

وهذا التكامل هو عبارة عن تكامل نسبي يمكن حسابه بالطرق الواردة في التكاملات الكسرية .

مثال (٣٦) : استنتج دستوراً تدريجياً لحساب التكامل :

$$I_n = \int tg^n x . dx$$

الحل : لإيجاد الدستور التدريجي لهذا التكامل نميز حالتين :

١- في حال كون n عدد صحيح موجب نجد :

$$I_n = \int tg^{n-2} x . tg^2 x . dx = \int tg^{n-2} x . (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) dx$$

$$I_n = \int tg^{n-2} x . d(tg\, x) - \int tg^{n-2} x . dx$$

$$I_n = \frac{tg^{n-1} x}{(n-1)} - \int tg^{n-2} x . dx \quad ; \quad n \neq 1$$

$$I_n = \frac{tg^{n-1} x}{(n-1)} - I_{n-2} \quad ; \quad n \neq -1 \quad \text{بشرط}$$

وهذا يمثل الدستور التدريجي للتكامل المعْطى ويستعمل من أجل قيم n الموجبة بشرط $n \neq -1$.

٢- في حال كون n عدداً صحيحاً سالباً نحسب من دستور القيم الموجبة قيمة I_{n-2} بدلالة I_n ، ثم نبدل كل n بـ $n+2$ نجد :

$$I_n = \frac{tg^{n+1} x}{(n+1)} - I_{n+2}$$

بشرط $n \neq -1$

(يترك استنتاجه للطالب)

مثال تطبيقي (٣٧) : احسب التكامل الآتي :

$$I_{-8} = \int tg^{-8} x . dx$$

الحـــل : لحساب هذا التكامل نستخدم الدستور التدريجي في المثال (٣٦) في حال كون n عدداً صحيحاً سالباً ، نجد :

$$I_{-8} = \frac{tg^{-7}x}{-7} - I_{-6}$$

$$I_{-6} = \frac{tg^{-5}x}{-5} - I_{-4}$$

$$I_{-4} = \frac{tg^{-3}x}{-3} - I_{-2}$$

$$I_{-2} = -cotg\,x - x + c$$

$$I_{-8} = \frac{-tg^{-7}x}{7} + \frac{tg^{-5}x}{5} - \frac{tg^{-3}x}{3} + cotg\,x + x + c_1$$

٦-١ تكامل التوابع الكسرية :

كل تابع من الشكل $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ نسميه بالتابع الكسري .

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرا حدود لـــ x .

إذا كانت درجة كثير الحدود في البسط $P(x)$ أكبر أو تساوي درجة كثير الحدود فـــي المقام $Q(x)$ ، فإننا نقسم البسط على المقام فنحصل على علاقة من الشكل الآتي :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث :

$H(x)$ كثير حدود يمثل حاصل القسمة .

$P_1(x)$ باقي القسمة ، وهو كثير حدود درجته أقل من درجـــة $Q(x)$ بدرجـــة واحدة على الأقل .

وبالتالي فإن :

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int H(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)\,dx}{Q(x)}$$

ونلاحظ هنا أنه يمكن مكاملة كثيرة الحدود $H(x)$ بسهولة ، بينما مكاملة التوابع الكسرية $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ التي فيها درجة البسط أقل تماماً من درجة المقام ، أحياناً سهلة الحساب ، وأحياناً أخرى صعبة الحساب ، مثل هذه التوابع الكسرية تسمى بالتوابع الكسرية النظامية .

وهكذا ، لندرس مسألة مكاملة التوابع الكسرية النظامية . في البداية لندرس مكاملة ما يسمى بالتوابع الكسرية البسيطة . نسمي الأشكال الآتية من التوابع الكسرية النظامية بـالتوابع الكسرية البسيطة .

I	$\frac{A}{x-a}$
II	$\frac{A}{(x-a)^k}$; $(k=2,3,4,\ldots)$
III	$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
IV	$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$; $(n=2,3,4,\ldots)$

حيث :

A, a, p, q, M, N : أعداد حقيقية .

x^2+px+q : كثير الحدود لا يملك جذوراً حقيقية ، أي :

$$(p^2-4q)<0$$

والآن لنقوم بحساب تكاملات التوابع من الأشكال السابقة I, II, III, IV .

أولاً- حساب التكامل $\int \frac{A\,dx}{x-a}$

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A.\ln|x-a|+c$$

مثال (٣٨) : احسب التكامل الآتي : $I = \int \frac{2\,dx}{3x+5}$

الحـــــل : لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$3x+5=u \Rightarrow du=3\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{3}\,du$$

$$I=\int\frac{2\,dx}{3x+5}=\frac{2}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{2}{3}.\ln|u|+c$$

$$=\frac{2}{3}.\ln|3x+5|+c$$

ثانياً- حساب التكامل $\int\frac{A\,dx}{(x-a)^k}$; $k=2,3,4,...$

لحساب التكاملات من هذا الشكل نفرض أن :

$$x-a=u \Rightarrow du=dx$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^k}=A\int\frac{du}{u^k}=A\int u^{-k}du=A\,\frac{u^{1-k}}{1-k}+c$$

$$=A\,\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+c$$

مثال (٣٩) : احسب التكامل الآتي $\int\frac{9\,dx}{(3x+2)^7}$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$3x+2=u \Rightarrow 3\,dx=du \Rightarrow dx=\frac{1}{3}\,du$$

$$\int\frac{9\,dx}{(3x+2)^7}=\frac{9}{3}\int\frac{du}{u^7}=\frac{9}{3}\int u^{-7}du=\frac{-1}{2}\,\frac{1}{(3x+2)^6}+c$$

ثالثاً- حساب التكاملات من الشكل $\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)}$

حيث : $(p^2-4q)<0$.

هذا يعني أن ثلاثي الحدود (x^2+px+q) لا يتحلل إلى مضاريب بسيطة . **ولحساب** مثل هذه التكاملات نقوم بإتمام المقدار (x^2+px+q) **إلى مربع كامل وفق الطريقة الآتية :**

$$x^2+px+q=x^2+px+(\frac{p}{2})^2+[q-(\frac{p}{2}$$

وحسب الفرض $(q-\frac{p)^2}{4})>0$ ، وبالتالي بفرض $q-\frac{p^2}{4}=a^2$ يأخـذ كثيـر الحدود السابق الشكل الآتي :

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+a^2$$

عندئذٍ لنقوم بتغيير المتغير فنفترض أن :

$$x+\frac{p}{2}=u \Rightarrow x=u-\frac{p}{2}$$
$$\Rightarrow dx=du$$

وبالتالي ينتج :

$$\int\frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q}=\int\frac{[\,M\,(u-\frac{p}{2})+N\,]du}{u^2+a^2}$$
$$=M\int\frac{u\,du}{u^2+a^2}+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{du}{u^2+a^2}$$
$$=\frac{M}{2}\ln(u^2+a^2)+\frac{(N-\frac{pM}{2})}{a}\,arctg\,\frac{u}{a}+c$$

وبالرجوع إلى المتغير x ، وبتعويض a بقيمتها نجد أخيراً :

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-pM}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg[\frac{(2x+p)}{\sqrt{4q-p^2}}]+c$$

ملاحظة (١) : لحساب التكامل من الشكل III كنا قد استخدمنا عبارة تغيير المتغير بأن فرضنا $u=x+\frac{p}{2}$ ، ويمكننا الحصول على النتيجة نفسها لو فرضنا أن :

$$u=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=x+\frac{p}{2}$$

مثال (٤٠) : احسب التكامل الآتي :

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2-2x+5}$$

لندخل متغيراً جديداً u يرتبط مع المتغير القديم x بالعلاقة الآتية :

$$u=\frac{1}{2}(x^2-2x+5)'=x-1 \Rightarrow x=u+1 \Rightarrow dx=du$$

$$x^2-2x+5=(u+1)^2-2(u+1)+5=u^2+4$$

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2-2x+5}=\int \frac{[2(u+1)+1]\,du}{u^2+4}=\int \frac{(2u+3)\,du}{u^2+4}=$$

$$=2\int \frac{u\,du}{u^2+4}+3\int \frac{du}{u^2+4}$$

$$=\ln|u^2+4|+\frac{3}{2}\,arctg\,\frac{u}{2}+c$$

$$=\ln|x^2-2x+5|+\frac{3}{2}\,arctg\,\frac{(x-1)}{2}+c$$

رابعاً- حساب التكاملات من الشكل $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^n}$

حيث : $(p^2-4q)<0 \quad ; \quad (n=2,3,4,\ldots)$

لنفرض أن :

$$u=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=x+\frac{p}{2}$$

وبالتالي :

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^n}=\int \frac{[Mu+(N-\frac{pM}{2}]\,du}{(u^2+a^2)^n}=$$

$$=M\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^n}+(N-\frac{pM}{2})\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} \qquad (1.3)$$

- لحساب التكامل الأول $\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^n}$ من العلاقة (1.3) :

نفرض أن $t = u^2 + a^2$ ، وبالتالي $dt = 2u\,du$ ، وبالتعويض نجد :

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2(n-1)t^{n-1}} + c$$

$$= \frac{-1}{2(n-1)\,(u^2+a^2)^{n-1}} + c \qquad (1.4)$$

ويحسب التكامل الثاني من العلاقة (1.3) بالتجزئة ، انظر المثال (٢٧) .

وسنبين الآن أن أي تابع كسري ، درجة بسطه أقل من درجة مقامه ، يمكن أن يكتب بشكل مجموع منته من التوابع الكسرية من الأشكال الأربعة السابقة .

وبالتالي فإن مكاملة أي تابع كسري يؤول إلى حساب التكامل لتوابع كسرية بسيطة . لنستعرض الآن مسألة التعبير عن أي تابع كسري نظامي بشكل مجموع توابع كسرية بسيطة وهذا ما يسمى بتفريق الكسور .

١-٦-١ تفريق التوابع الكسرية :

سندرس في هذه الفقرة طرق تفريق الكسر الأصلي :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

إلى كسور جزئية أولية بسيطة ، وحيث إن كل من $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرة حدود درجة P أقل من درجة Q .

تعريف (٣) :

نقول إن كثيرة الحدود $Q(x)$ تقبل القسمة على المقدار $(x - a)$ تماماً إذا كان الباقي عند إجراء القسمة :

$$\frac{Q(x)}{(x-a)}$$

يساوي الصفر ، هذا يعني أن :

$$\frac{Q(x)}{(x-a)} = Q_1(x)$$

حيث $Q_1(x)$: هو ناتج القسمة .

ونرى عندئذٍ أن :

$$Q(x) = (x-a).Q_1(x)$$

مبرهنة (٤) :

إذا كان : $Q(x) = (x-a)^k.Q_1(x)$ ، (حيث $k \geq 1$) ، وإذا كانت كثيرة الحدود $Q_1(x)$ لا تقبل القسمة تماماً على $(x-a)$ ، فعندئذٍ يكتب الكسر الآتي :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k.Q_1(x)} \qquad (1.5)$$

كمجموع من الكسور بالشكل الآتي :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}.Q_1(x)} \qquad (1.6)$$

حيث :

$A \neq 0$, $P_1(x)$ كثير حدود درجته أقل من درجة المقام $(x-a)^{k-1}.Q_1(x)$.

البرهـــان : للبرهان على صحة هذه المبرهنة يكفي إيجاد كل من $P_1(x)$ و A ، بحيث تكـون المطابقة الآتية محققة :

$$P(x) - AQ_1(x) \equiv (x-a).p_1(x) \qquad (1.7)$$

ولإيجاد قيمة A يكفي أن نبدل في الطرفين $x = a$ ، فنجد :

$$P(a) - AQ_1(a) = 0$$

وعليه يكون :

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)} \;\; ; \;\; Q_1(a) \neq 0$$

لنبدل الآن قيمة A في العلاقة (1.7) ، فنجد قيمة $P_1(x)$ كما يلي :

$$P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}.Q_1(x)\equiv(x-a).P_1(x)$$

ومنه نجد :

$$P_1(x)=\frac{P(x)}{(x-a)}-\frac{P(a)}{Q_1(a)}.\frac{Q_1(x)}{(x-a)}$$

وهو المطلوب .

مبرهنة (٥) :

إذا كان $Q(x)=(x^2+px+q)^m.Q_1(x)$ ، (حيث $m\geq 1$) ، وإذا كانت كثيرة الحدود $Q_1(x)$ لا تقبل القسمة تماماً على (x^2+px+q) ، فعندئذٍ يُكتب الكسر الآتي :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m.Q_1(x)} \qquad (1.8)$$

كمجموع من الكسور بالشكل الآتي :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}.Q_1(x)} \qquad (1.9)$$

حيث $P_1(x)$: كثيرة حدود درجته أقل من درجة كثير الحدود :

$$(x^2+px+q)^{m-1}.Q_1(x)$$

البرهان :

للبرهان على صحة هذه المبرهنة يكفي إيجاد الثوابت M و N ، وكذلك إيجاد $P_1(x)$ ، بحيث تكون المطابقة الآتية محققة :

$$P(x)-(Mx+N).Q_1(x)\equiv(x^2+px+q).P_1(x)$$

ولنحسب الآن M و N ، بحيث يكون الطرف الأيسر قابلاً للقسمة تماماً على المقدار (x^2+px+q) ، ليكن الباقي عند تقسيم $P_1(x)$ و $Q_1(x)$ على المقدار (x^2+px+q) هو $(\alpha x+\beta)$ و $(\gamma x+\delta)$ على الترتيب .

عندئذٍ ، نجد أن المسألة تؤول إلى السؤال فيما إذا كان المقدار الآتي :

$$\alpha x+\beta-(Mx+N).(\gamma x+\delta)=$$
$$=-\gamma M x^2+(\alpha-\delta M-\gamma N)x+(\beta-\delta N)$$

يقبل القسمة تماماً على المقدار (x^2+px+q) . وبإجراء عملية القسمة نجد أن الباقي في عملية القسمة هو المقدار :

$$[(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha]x+[q\gamma.M-\delta N+\beta] \quad (1.10)$$

ولكي ينعدم هذا الباقي يجب أن ينعدم كل من القوسين ، أي يجب أن يكون :

$$\left.\begin{aligned}(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha=0\\ q\gamma.M-\delta N+\beta=0\end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

وهكذا نرى أنه لإيجاد M و N يجب حل هاتين المعادلتين ، حيث المجهول فيها هو N و M ، ونرى أن معين الأمثال هو :

$$\begin{vmatrix} p\gamma-\delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix}=\delta^2-p.\gamma.\delta+q\gamma^2$$

وهو غير معدوم ، ويمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$\gamma^2\left[(-\frac{\delta}{\gamma})^2+p(-\frac{\delta}{\gamma})+q\right] \; ; \; \gamma\neq 0$$

ونرى كل ما يقع داخل القوس هو قيمة المقدار (x^2+px+q) من أجل :

$$x=-\frac{\delta}{\gamma}$$

وبما أن المقدار (x^2+px+q) لا ينعدم في أية نقطة ، إذاً فالمعين لا ينعدم . ونرى أنه من أجل $\gamma=0$ ، فإن قيمة المعين تساوي δ^2 ، (حيث $\delta\neq 0$) ، وذلك لأن $Q_1(x)$ لا يقبل القسمة تماماً على المقدار (x^2+px+q) .

وهكذا نرى أنه يمكن إيجاد M و N وفق ما سبق ، وبالتالي نستطيع إيجاد $P_1(x)$ بعملية قسمة بسيطة .

مبرهنة (٦) :

كل تابع كسري $R(x)=\frac{p(x)}{Q(x)}$ ، درجة بسطه أقل من درجة مقامه ، يمكن أن يكتب **بشكل** مجموع عدد منته من التوابع الكسرية البسيطة .

البرهان : بما أن المقام $Q(x)$ هو كثير حدود ، فمن المعلوم أنه بإمكاننا كتابته بالشكل الآتي :

$$Q(x)=(x-a)^{k_1}.....(x^2+px+q)^{m_1}.....$$

حيث : $k_1,.....,m_1,.....$ هي أعداد طبيعية .

وإذا كانت درجة كثيرة الحدود الموجودة في المقام $Q(x)$ تساوي n ، فعندئذٍ نجد أن :

$$\sum_i k_i+2\sum_i m_i=n$$

وبتطبيق كل من **النظرية (٥)** ، **والنظرية (٤)** ، نجد أن :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^k.(x^2+px+q)^m}=$$

$$=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}$$

حيث : $Q(x)=(x-a)^k.(x^2+px+q)^m$

وأن : $n=k+2\,m$

واعتماداً على ما سبق نستنتج ما يلي :

لتفريق الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ إلى مجموع كسور بسيطة استناداً إلى المبرهنتين السابقتين نميز حالات أربع وهي :

الحالة الأولى : إذا كانت عوامل المقام جميعها من الدرجة الأولى وغير مكررة ، عندئذٍ يحلل الكسر الحقيقي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ إلى كسور بسيطة حسب العلاقة الآتية :

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

حيث : $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ ثوابت عددية .

ولتعيين الثوابت العددية يكفي أن نكتب الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مساوياً مجموع الكسور البسيطة الموافقة لكل عامل من عوامل مقامه وتوحيد المقامات في الطرفين وحذفها ثم إجراء التطـابق بين الطرفين ، ينتج لدينا عدد من المعادلات بعدد الثوابت . نحل هذه المعادلات فنحصل على القيم العددية للثوابت .

مثال (٤١) : احسب التكامل الآتي :

$$\int \frac{(7x-5)\,dx}{x^3+x^2-6x}$$

الكسر المعطى حقيقي ، نحلل المقام إلى عوامل :

$$x^3+x^2-6x = x(x-2)\,(x+3)$$

نلاحظ أن جميع العوامل غير مكررة ، وبالتالي نكتب :

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)\,(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

وبتوحيد المقامات وحذفها نجد :

$$7x-5 = (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A$$

بالتساوي بين معاملات x من الدرجة نفسها في الطرفين :

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A+3B-2C &= 7 \\ -6A &= -5 \end{aligned}\right\}$$

بحل هذه المعادلات نجد أن :

$$A = \frac{5}{6} \;;\; B = \frac{9}{10} \;;\; C = \frac{-26}{15}$$

بالتعويض نجد أن :

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{5}{6}\frac{1}{x}+\frac{9}{10}\frac{1}{x-2}-\frac{26}{15}\frac{1}{x-3}$$

بمكاملة الطرفين نجد أن :

$$\int\frac{(7x-5)\,dx}{x^3+x^2-6x}=\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{9}{10}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{26}{15}\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-\frac{26}{15}\ln|x+3|+c$$

الحالة الثانية : في حال كون عوامل المقام جميعها من الدرجة الأولى ولكن بعضها يتكـــرر، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الأولى ومكرر k مرة مثل $(x-a)^k$ يوافقه مجموع k كسراً بسيطاً من الشكل :

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}$$

حيث :

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ ثوابت عددية .

مثال (٤٢) : احسب التكامل الآتي :

$$\int\frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$$

نقوم بتحليل المقام :

$$x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$$

عندئذٍ نكتب :

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

وبتوحيد المقامات وحذفها والمطابقة نجد :

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2$$
$$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A$$

بالتساوي بين معاملات x من الدرجة نفسها في الطرفين نجد :

$$\left.\begin{aligned} &A+D=1\\ &-3A+C-2D=0\\ &3A+B-C+D=0\\ &-A=1 \end{aligned}\right\}$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$A=-1\ ,\ B=2\ ,\ C=1\ ,\ D=2$$

بالتعويض نجد أن :

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$$

نكامل حداً حداً ، فنجد أن :

$$\int\frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+c$$
$$=\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}+c$$

الحالة الثالثة : في حال كون عوامل المقام من الدرجة الثانية وغير مكررة ، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الثانية غير مكرر مثل (x^2+px+q) يوافقه كسر بسيط من الشكل :

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

مثال (٤٣) : احسب التكامل الآتي :

$$\int\frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}$$

نحلل المقام إلى عوامل :

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-3^2$$
$$=(x^2+2x+3)\ (x^2+2x-3)$$

حصلنا على عاملين من الشكل (x^2+px+q) ، ولكن العامل الأول منهما فقد لا يتحلل إلى عوامل حقيقية من الدرجة الأولى لأن :

$$(p^2-4q)=4-12=-8<0$$

أما الثاني :

$$p^2-4q=4+12=16>0$$

فيتحلل إلى :

$$x^2+2x-3=(x-1)\ (x+3)$$

عندئذٍ نكتب :

$$\frac{(7x^2+26x-9)}{(x^2+2x+3)\ (x-1)\ (x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

بتوحيد المقامات وحذفها والمطابقة نجد :

$$7x^2+26x-9=(x^2+2x+3)\ [A(x+3)+$$
$$+B(x-1)]+(Cx+D)\ (x-1)\ (x+3)$$

بالتساوي بين معاملات x ومن الدرجة نفسها نجد :

$$\left.\begin{aligned}A+B+C&=0\\5A+B+2C+D&=7\\9A+B-3C+2D&=26\\9A-3B-3D&=-9\end{aligned}\right\}$$

بحل جملة المعادلات نجد أن :

$$A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=-2\ ,\ D=5$$

وبالتعويض نجد أن :

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)\,(x-1)\,(x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} + \frac{-2x+5}{x^2+2x+3}$$

بتكامل طرفي المساواة حداً حداً نجد :

$$\int \frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9} = \ln|x-1| + \ln|x+3| -$$

$$-\ln(x^2+2x+3) + \frac{7}{\sqrt{2}}\, arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \ln\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}\right| + \frac{7}{\sqrt{2}}\, arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

الحالة الرابعة : إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الثانية وبعضها مكرر، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الثانية مثل (x^2+px+q) مكرر k مرة يوافقه مجموع k كسراً بسيطاً من الشكل :

$$\frac{M_k x+N_k}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{M_1 x+N_1}{x^2+px+q}$$

مثال (٤٤) : احسب التكامل الآتي :

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x}$$

نحلل المقام إلى عوامل :

$$x^5+2x^3+x \equiv x(x^4+2x^2+1) = x(x^2+1)^2$$

العامل $(x^2+1)^2$ لا يتحلل إلى عوامل حقيقية من الدرجة الأولى ولكنه يتكرر مرتين ، لذلك يأخذ مفكوك الكسر الشكل الآتي :

$$\frac{3x+5}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

بتوحيد المقامات وحذفها والمطابقة نجد :

$$3x+5=A(x^2+1)^2+x(Bx+C)+x(x^2+1)\,(Dx+E)$$
$$3x+5=(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$$

بالتساوي بين معاملات x من الدرجة نفسها يكون :

$$A+D=0\ ;\ E=0\ ;\ 2A+B+D=0\ ;\ C+E=3\ ;\ A=5$$

بحل جملة المعادلات السابقة نجد :

$$A=5\ ;\ B=-5\ ;\ C=3\ ;\ D=-5\ ;\ E=0$$

نبدل قيم هذه الثوابت نجد :

$$\int\frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x}=5\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(-5x+3)\,dx}{(x^2+1)^2}-5\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=$$
$$=5\ln|x|+[\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\,arctg\,x]-$$
$$-\frac{5}{2}\ln(x^2+1)+C=5\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{3x+5}{2(x^2+1)}+$$
$$+\frac{3}{2}\,arctg\,x+c$$

١-٧ مكاملة التوابع الجذرية (الصماء) :

لمكاملة التوابع الجذرية سوف نحاول تحويلها إلى مكاملة توابع كسرية ، والتي درسناها سابقاً ، وسوف نستخدم في هذه الفقرة والفقرات التالية الرمز R للتوابع الكسرية ، وفيما يلي سنتعرض لأنواعها ، ولطرق مكاملتها .

١-٧-١ حساب التكامل من الشكل $I=\int R(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{p}{s}})\,dx$:

لحساب التكاملات من هذا الشكل ، نفرض أن المقام المشترك لـ $\frac{m}{n},...,\frac{p}{s}$ هو k ، عندئذٍ يكون $x=t^k$ ، وبالتالي نجد أن $dx=k\,t^{k-1}\,dt$ ، نبدل في التكامل المعطى قيمة كلٍ من x و dx ، عندئذٍ يتحول التكامل إلى تكامل كسري دُرّس سابقاً .

مثال (٤٥) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

نكتب التكامل المعطى بالشكل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

ونلاحظ أن الكسور الممثلة للقوى هي $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ، ومقامها المشترك هو $k = 6$ ،

وبالتالي لحساب هذا التكامل نفترض أن :

$$x = t^k \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

نبدل في التكامل المعطى نجد :

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}} + (t^6)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2}$$

$$= 6 \int (t^2 - t + 1)\, dt - 6 \int \frac{dt}{t+1}$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + c$$

ثم نبدل t بقيمتها :

$$I = 2(\sqrt[6]{x})^3 - 3(\sqrt[6]{x})^2 + 6(\sqrt[6]{x}) - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c$$

١-٧-٢ حساب التكاملات من الشكل $I = \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$:

حيث m : عدد طبيعي .

a, b, c, d : ثوابت ، $ad - cb \neq 0$

R : تابع كسري لـ x وللمقدار $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

ولحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \qquad \text{ومنه نجد} \qquad t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$$

و :

$$x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a} \Rightarrow dx = \frac{mt^{m-1}(ad-bc)\,dt}{(ct^m - a)^2}$$

بالتعويض في التكامل المعطى نجد أن :

$$I = \int R\left[\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}\right), t\right] \frac{mt^{m-1}(ad-bc)\,dt}{(ct^m-a)^2} = \int R_1(t)\,dt$$

حيث $R_1(t)$: تابع كسري للمتغير t تعلمنا حساب تكامله سابقاً .

مثال (٤٦) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right) dx$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t \Rightarrow t^3 = \frac{x+1}{x-1}$$

من هنا نجد أن :

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \Rightarrow dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$$

وبالتالي فإن :

$$x - 1 = \frac{2}{t^3-1}$$

نبدل في التكامل المعطى نجد :

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \int \frac{-6t^3}{(t^3-1)^2}\,\frac{(t^3-1)^2}{4}\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\int t^3 dt = \frac{-3}{8}t^4 + c$$

$$= -\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4 + c$$

ملاحظة (٢) : التكامل من الشكل :

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

حيث إن R تابع كسري و $n, k, r, s, \ldots$ أعداد صحيحة غير سالبة والثوابت a, b, c, d محققة للشرط $ad - cb \neq 0$.

ولحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

حيث إن : k هو المقام المشترك للكسور $\frac{k}{n}, \frac{r}{s}$

عندئذٍ نجد :

$$x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k} \quad ; \quad dx = \frac{k(ad-cb)t^{k-1}dt}{(s-ct^k)^2}$$

نبدل في التكامل المعطى فنحصل على تكامل من الشكل :

$$\int R\left[\frac{dt^k - b}{a - ct^k} \; ; \; t^{\frac{mK}{n}}, \ldots, t^{\frac{kr}{s}}\right]\frac{k(ad-cb)t^{k-1}dt}{(a-ct^k)^2}$$

مثال (٤٧) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+5} - \sqrt[3]{2x+5}}$$

لنكتب :

$$\sqrt{2x+5} = (2x+5)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \sqrt[3]{2x+5} = (2x+5)^{\frac{1}{3}}$$

وبالتالي ، فإن المقام المشترك لـ $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ هو $k=6$ ، ولذلك لحساب هـذا التكامـل نفرض أن :

$$2x+5=t^k \Rightarrow 2x+5=t^6$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}(t^6-5) \Rightarrow dx=3t^5dt$$

نبدل في التكامل المعطى نجد أن :

$$\sqrt{2x+5}=(2x+5)^{\frac{1}{2}}=(t^6)^{\frac{1}{2}}=t^3$$

$$\sqrt[3]{2x+5}=(2x+5)^{\frac{1}{3}}=(t^6)^{\frac{1}{3}}=t^2$$

$$I=\int\frac{3t^5dt}{t^3-t^2}=3\int\frac{t^5dt}{t^3-t^2}$$

$$I=3\int(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt$$

$$I=t^3+\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+c$$

$$I=\sqrt{2x+5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5}+\sqrt[3]{2x+5}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+5}-1\right|+c$$

مثال (٤٨) : احسب التكامل الآتي :

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3.(x-2)}}$$

بما أن :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3.(x-2)}}=\int\sqrt{\frac{(x-2)}{x-1}}\ \frac{dx}{(x-1)\ (x-2)}$$

والتابع المستكمل تحول إلى تابع من الشكل :

$$R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

لذلك نفرض أن :

$$Z=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \Rightarrow Z^2=\frac{x-2}{x-1}$$

$$x=\frac{2-Z^2}{1-Z^2} \Rightarrow dx=\frac{2Z\,dz}{(1-Z^2)^2}$$

نبدل في التكامل المعطى نجد أن :

$$I=\int \frac{\frac{2Z^2\,dz}{(1-Z^2)^2}}{(\frac{2-Z^2}{1-Z^2}-1)\,(\frac{2-Z^2}{1-Z^2}-2)}=2\int dz=2Z+c$$

$$\Rightarrow \quad I=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+c$$

١-٧-٣ حساب التكاملات من الشكل $I=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

لحساب مثل هذه التكاملات نقوم برد ثلاثي الحدود الموجود تحت إشارة الجذر إلى مجموع مربعي مقدارين ، أو فرق مربعي مقدارين . عندئذٍ نميز حالات أربع :

آ- لنفرض أنه رد إلى الشكل الآتي :

$$I=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}$$

وهذا التكامل معروف من دساتير التكاملات الأساسية :

$$I=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}=arc\,sh(\frac{t}{k})+c=\ln|t+\sqrt{t^2+k^2}\;|+c$$

ب- لنفرض أنه رد إلى تكامل من الشكل الآتي :

$$I=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}}$$

عندئذٍ نجد أن حسابه سهل ومعروف :

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} = arc\,ch(\frac{t}{k}) + c = \ln|t + \sqrt{t^2 - k^2}| + c$$

ج- لنفرض أنه رد إلى تكامل من الشكل الآتي :

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}$$

وهذا تكامله معروف من الدساتير الأساسية للتكاملات ، أي :

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = arc\sin(\frac{t}{k}) + c = -arc\cos(\frac{t}{k}) + c$$

د- لنفرض أنه رُدّ إلى الشكل الآتي :

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+k)^2}}$$

عندئذٍ يصبح تكامله سهل الحساب ، أي :

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+k)^2}} = \frac{-1}{t+k} + c$$

مثال (٤٩) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}}$$

نلاحظ أن كثير الحدود الموجود تحت إشارة الجذر لا يقبل جذوراً حقيقية ، وبالتالي نقوم بإتمامه إلى مربع كامل ، عندئذٍ نجد :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 2}}$$

ولحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x + 2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} = arc\,sh(\frac{t}{\sqrt{2}}) + c$$

$$= arc\,sh(\frac{x+2}{\sqrt{2}}) + c$$

مثال (٥٠) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{3\,dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

نقوم بإتمام كثير الحدود تحت إشارة الجذر إلى مربع كامل ، عندئذٍ نجد :

$$I = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$$

ولحساب التكامل الأخير نفرض أن :

$$x-2 = t \;\Rightarrow\; dx = dt$$

$$= 3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = 3\,arc\,ch\,t + c$$

$$= 3\,arc\,ch(x-2) + c$$

١-٧-٤ حساب التكاملات من الشكل $I = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$:

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$a\,x^2 + b\,x + c = t$$

ومنه :

$$x\,dx = \frac{dt - b\,dx}{2\,a}$$

نعوض فنجد :

$$I = \int \frac{A\,\frac{(dt-b\,dx)}{2\,a} + B\,dx}{\sqrt{t}}$$

وبالإصلاح نجد :

$$I = \frac{A}{2a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + (B - \frac{A.b}{2a}) \int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + b x + c}}$$

والتكامل المعطى رُد إلى تكامل تمت دراسته سابقاً .

ملاحظة (٣) : هناك طريقة أخرى لحساب التكامل :

$$I = \int \frac{(Ax + B)\,dx}{\sqrt{a x^2 + b x + c}}$$

بأن نفرض : $t = \frac{1}{2}(a x^2 + b x + c)'$

وبالتالي نجد أن :

$$t = a x + \frac{b}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t - \frac{b}{2})$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{a}\,dt$$

نبدل في التكامل المعطى نحصل على تكامل من الشكل :

$$\int \frac{(Dt + E)\,dt}{\sqrt{a x^2 + b x + c}} \qquad (1.12)$$

ولحساب هذا التكامل نميز حالتين :

١- عندما $a > 0$ يتحول التكامل (1.12) إلى تكامل من الشكل الآتي :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + m}}$$

وحيث إن :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + m}} = \ln\left| t + \sqrt{t^2 + m}\ \right| + c$$

٢- عندما $a < 0$ يتحول التكامل (1.12) إلى تكامل من الشكل الآتي :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

وحيث إن :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = arc\sin\left(\frac{t}{a}\right) + c$$

مثال (٥١) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

الحـــل : نفرض أن :

$$x^2 - 4x + 3 = t \Rightarrow$$
$$2x\,dx - 4\,dx = dt$$
$$2x\,dx = dt + 4\,dx$$

نبدل في التكامل المعطى بجد :

$$I = \int \frac{[(2x\,dx + dx)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \int \frac{(dt + 5\,dx)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$
$$= \int \frac{2dt}{\sqrt{t}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$
$$= 2\sqrt{t} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 1}}$$
$$= 2\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 5\,arc\,ch(x-2) + c$$

مثال (٥٢) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{6 - 2x - x^2}}$$

لحساب هذا التكامل نفرض :

$$t = \frac{1}{2}(6 - 2x - x^2)'$$

$$t = -1 - x \;\; ; \;\; x = -1 - t \;\; ; \;\; dx = -dt$$

بالتعويض نجد :

$$I = \int \frac{(-1-t+5)\,(-dt)}{\sqrt{7-t^2}} = \int \frac{(t-4)\,dt}{\sqrt{7-t^2}}$$

$$= \int \frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}} - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}$$

$$= -\sqrt{7-t^2} - 4\,arc\sin\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$= -\sqrt{6-2x-x^2} - 4\,arc\sin\left(\frac{-x-1}{\sqrt{7}}\right) + c$$

١-٧-٥ حساب التكاملات من الشكل $\int \frac{p_m(x)\,dx}{\sqrt{a\,x^2+bx+c}}$:

حيث $p_m(x)$: كثير حدود من الدرجة m .

يمكن حسابها مباشرة وفق صيغة استروغرادسكي الآتية :

$$\int \frac{p_m(x)\,dx}{\sqrt{a\,x^2+bx+c}} =$$

$$= Q_{(m-1)}(x)\sqrt{a\,x^2+bx+c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2+bx+c}} \qquad (1.13)$$

حيث $Q_{(m-1)}(x)$: كثير حدود من الدرجة $(m-1)$.

K : عدد حقيقي .

ويمكن حساب أمثال كثير الحدود $Q_{(m-1)}(x)$ والعدد K ، بمطابقة أمثال القوى المتساوية لـ x وسنوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (٥٣) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{(x^2-x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

من العلاقة (1.13) ، نجد :

$$I = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

نشتق الطرفين :

$$\frac{x^2-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = A\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(Ax+B)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{K}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

نضرب الطرفين بالجذر $\sqrt{x^2+2x+2}$ نجد أن :

$$x^2-x-1 \equiv A(x^2+2x+2)+(Ax+B)(x+1)+K$$
$$\equiv 2Ax^2+(3A+B)x+2A+B+K$$

نطابق بين الطرفين :

$$\left.\begin{aligned} 1 &= A+A = 2A \\ -1 &= 2A+A+B \\ -1 &= 2A+B+K \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\ ,\ B=-\frac{5}{2}\ ,\ K=\frac{1}{2}$$

ومنه فإن :

$$I = \frac{1}{2}(x-5)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$
$$= \frac{1}{2}(x-5)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$
$$= \frac{1}{2}(x-5)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\ \right]+c$$

٦-٧-١ حساب التكاملات من الشكل $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n.\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

لحساب مثل هذه التكاملات ، نفرض أن $t=\dfrac{1}{x-\alpha}$ ، عندئذٍ يُردّ هذا التكامل إلى تكامل تمت دراسته سابقاً [الفقرة (١-٧-٣)] .

مثال (٥٤) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{(x-1).\sqrt{x^2-2}}$$

نفرض أن $t = \frac{1}{x-1}$ ، ومنه $x = \frac{1+t}{t}$ ، وبالتالي نجد :

$$dx = \frac{-dt}{t^2}$$

نعوض في التكامل المعطى ، نجد :

$$I = \int \frac{-dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}} =$$

$$= -arc\sin\frac{(t-1)}{\sqrt{2}} + c$$

$$= -arc\sin\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2-x}{x-1}\right)\right] + c$$

١-٧-٧ حساب التكاملات من الشكل $I = \int R(x\ ,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\ )dx$:

حيث إن : $(b^2-4ac) \neq 0$.

لحساب هذا التكامل سوف نقوم بإتمام كثير الحدود ما تحت الجذر إلى مربع كامل ، وبالتالي يتحول التكامل المعطى إلى أحد الأشكال الآتية :

آ- $I_1 = \int R(t\ ,\ \sqrt{k^2-t^2}\ )dt$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$t = k\sin u \ \Rightarrow\ dt = k\cos u\, du$$

أو : $t = k\,th\,u$

نبدل في التكامل I_1 ، عندئذٍ يتحول التكامل I_1 إلى تكامل سهل الحساب .

ب- $I_2 = \int R(t\ ,\ \sqrt{k^2+t^2}\ )dt$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$t = k\,sh u \Rightarrow dt = k\,sh u\,du$$

أو : $t = k\,tg\,u$

نبدل في التكامل I_2 ، عندئذٍ يتحول التكامل I_2 إلى تكامل سهل الحساب .

ج- $I_3 = \int R(t\ ,\ \sqrt{t^2 - k^2}\ )\,dt$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$t = k\,ch u \Rightarrow dt = k\,sh u\,du$$

أو $t = \dfrac{k}{\cos u}$ ، أو $t = k\sec u$

نبدل في التكامل I_3 ، عندئذٍ يتحول هذا التكامل إلى تكامل سهل الحساب .

مثال (٥٥) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

لحساب هذا التكامل نقوم بإتمام ما تحت الجذر إلى مربع كامل ، أي أن :

$$I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 1}}$$

لحساب التكامل الأخير نفرض أن :

$$x - 2 = cht \Rightarrow x = cht + 2$$
$$dx = sht\,dt$$

نعوض في التكامل الأخير نجد :

$$I = \int \frac{[2(cht+2)+3]\,sht\,dt}{sht} = \int (2\,cht + 7)\,dt$$

$$I = 2\int cht\,dt + 7\int dt$$

$$I = 2\,sht + 7t + c$$

$$I = 2\sqrt{(x-2)^2 - 1} + 7ch^{-1}(x-2) + c$$

مثال (٥٦) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}\ dx}{x^2}$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x = 3\sin t \ \Rightarrow\ dx = 3\cos t\, dt$$

نبدل في التكامل المعطى نجد :

$$I = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}\ (3\cos t)\, dt}{9\sin^2 t}$$

$$= \int \frac{9\cos^2 t\, dt}{9\sin^2 t} = \int ctg^2 t\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt$$

$$= -ctg\, t - t + c$$

لكن نعلم أن :

$$\sin t = \frac{x}{3} \ \Rightarrow\ t = arc\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$ctg\, t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}\ dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} - arc\sin\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

ملاحظة (٤) : يمكن حساب التكامل من الشكل :

$$I = \int R\left(x\ ,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\ \right) dx$$

باستخدام تحويلات أولر ، وحيث إن R تابع كسري لـــ x و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ و $a \neq 0$ ، ومميز ثلاثي الحدود ax^2+bx+c غير صفري .

آ- **تحويل أولر الأول** : لنعتبر أن :

$$a > 0 \quad و \quad (b^2 - 4ac) \neq 0$$

عندئذٍ نفرض أن :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \mp \sqrt{a}\, x \qquad (1.14)$$

وبأخذ إشارة (+) وتربيع الطرفين نجد أن :

$$ax^2 + bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}\, xt + ax^2$$

$$bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}\, tx$$

عندئذٍ نجد أن :

$$bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}\, tx$$

$$(b - 2\sqrt{a}\, t)x = t^2 - c \Rightarrow$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\, t} \Rightarrow$$

$$dx = \frac{2t(b - 2\sqrt{a}\, t) + 2\sqrt{a}\, (t^2 - c)}{(b - 2\sqrt{a}\, t)^2}$$

$$dx = \frac{2tb - 4t^2\sqrt{a} + 2\sqrt{a}\, t^2 - 2\sqrt{a}\, c}{(b - 2\sqrt{a}\, t)^2}$$

$$dx = \frac{2tb - 2t^2\sqrt{a} - 2\sqrt{a}\, c}{(b - 2\sqrt{a}\, t)^2}$$

نبدل قيمة x بدلالة t في العلاقة (1.14) ، ثم نبدل قيمة كل من x و $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ و dx في التكامل المعطى ، عندئذٍ يتحول التكامل المعطى إلى تكامل كسري تمت دراسته سابقاً .

مثال (٥٧) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

نلاحظ أن $b^2-4ac=-3\neq 0$; $a=1>0$ ، عندئذٍ وبتطبيق العلاقـــة (1.14) نجد الآتي :

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t$$

$$x^2+x+1=x^2+2tx+t^2$$

$$x+1=2tx+t^2$$

$$x-2tx=t^2-1 \Rightarrow x(1-2t)=t^2-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{1-2t} \Rightarrow dx=\frac{[2t(1-2t)+2(t^2-1)]dt}{(1-2t)^2}$$

$$dx=\frac{(2t-4t^2+2t^2-2)dt}{(1-2t)^2}=\frac{(-2t^2+2t-2)dt}{(1-2t)^2}$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-1}{1-2t}+t=\frac{t^2-1+t-2t^2}{(1-2t)}=\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)}$$

نبدل في التكامل المعطى ، قيمة كل من dx و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نجد أن :

$$I=2\int\frac{dt}{(1-2t)}=-\int\frac{-2dt}{(1-2t)}$$

$$I=-\ln|1-2t|+c=\ln|\frac{1}{1-2t}|+c$$

ثم نبدل كل t بدلالة x ، حيث :

$$t=\sqrt{x^2+x+1}-x$$

وبذلك نحصل على المطلوب .

ب- تحويل أولر الثاني : لنعتبر في التكامل :

$$\int R(x\,,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$$

أن $c>0$, $(b^2-4ac)>0$

عندئذٍ نفرض أن :

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c} \qquad (1.15)$$

وبأخذ الإشارة (+) ، وبتربيع الطرفين نجد أن :

$$a x^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2 x t \sqrt{c} + c \quad ، \quad \text{نقسم على } x \neq 0$$

$$a x + b = x t^2 + 2 t \sqrt{c} \quad \Rightarrow$$

$$(a - t^2) x = 2 \sqrt{c}\ t - b \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 \sqrt{c}\ t - b}{a - t^2}$$

$$dx = \frac{2(\sqrt{c}\ t^2 - bt + a\sqrt{c}\ )dt}{(a - t^2)^2}$$

نبدل قيمة x في العلاقة (1.15) ، نجد :

$$\sqrt{a x^2 + bx + c} = \sqrt{c}\ + (\frac{2 \sqrt{c}\ t - b}{a - t^2}) t$$

$$= \frac{\sqrt{c}\ t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

نبدل قيمة كل من x و $\sqrt{a x^2 + bx + c}$ و dx في التكامل المعطى ، عندئذٍ يتحـول التكامل كما في الحالة الأولى ، على تكامل كسري تمت دراسته سابقاً .

مثال (٥٨) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)\ \sqrt{1 + x - x^2}}$$

لحساب مثل هذا التكامل نطبق العلاقة (1.15) ، لأن :

$$(b^2 - 4ac) = 5 > 0 \ , \ c = 1 > 0$$

$$\sqrt{1 + x - x^2}\ = t x - 1$$

بتربيع الطرفين والإصلاح نجد :

$$x = \frac{1 + 2t}{t^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2(1 - t - t^2)\, dt}{(t^2 + 1)^2}$$

عندئذٍ نجد أن :

$$\sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}$$

نبدل في التكامل المعطى ، قيمة كل من x و $\sqrt{1+x-x^2}$ و dx ، نجد أن :

$$I = -2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2\,arctg\,(t+1)+c$$

$$= -2\,arctg\left[\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x}\right]+c$$

ج- تحويل أولر الثالث :

إذا كان كثير الحدود (ax^2+bx+c) يقبل جذرين حقيقيين α , β ، فإننا نفرض :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)\,(x-\beta)} = (x-\alpha)t \qquad (1.16)$$

وبالتالي نجد بتربيع طرفي المساواة أن :

$$ax^2+bx+c = (x-\alpha)^2t^2 \qquad (1.17)$$

لكن نعلم أن :

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)\,(x-\beta) \qquad (1.18)$$

بالمساواة بين العلاقتين (1.17) و(1.18) نجد :

$$a(x-\alpha)\,(x-\beta) = (x-\alpha)^2.t^2$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha).t^2$$

ومنه نجد :

$$x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2} \Rightarrow dx = \frac{2at(\beta-\alpha)\,dt}{(t^2-\alpha)^2}$$

نبدل في (1.16) قيمة x بدلالة t ، وبعدها نبدل قيمة كل من x و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ و dx في التكامل المعطى ، نحصل على تكامل كسري دُرِسَ سابقاً .

مثال (٥٩) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

نلاحظ هنا أن :

$$(1-x^2) = (1-x)\,(1+x)$$

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x)t$$

$$(1-x^2) = (1-x)^2.t^2 \;\Rightarrow\; (1+x)\,(1-x) = (1-x)^2.t^2$$

$$\Rightarrow (1+x) = (1-x).t^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{(t^2-1)}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2} \;;\; \sqrt{1-x^2} = \left[1 - \frac{(t^2-1)}{t^2+1}\right]t$$

وبالتالي نجد :

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}$$

وبالتالي نجد أن :

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

نبدل في التكامل المعطى نجد أن :

$$I = \int \frac{\dfrac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}}{\dfrac{(t^2-1)}{(t^2+1)}\cdot\dfrac{2t}{(t^2+1)}} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - 1}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + 1}\right| + c$$

مثال (٦٠) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

لثلاثي الحدود $(-x^2+3x-2)$ جذران هما $x_1=1$ ، $x_2=2$:

$$-x^2+3x-2 = -(x-2)(x-1)$$

تكون العبارة الموجودة تحت الجذر موجبة عندما $1 < x < 2$ (وعندما تكون $x=1$ أو $x=2$ ، فإن التابع الموجود تحت الجذر يؤول إلى مالا نهاية) ، نفرض أن :

$$\sqrt{\frac{-(x-1)}{x-2}} = t \Rightarrow \frac{-(x-1)}{(x-2)} = t^2$$

ومن هنا نجد أن :

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2+1} \quad ; \quad dx = \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)} = \sqrt{\frac{-(x-1)}{(x-2)}} \cdot |x-2| = t\,|x-2| = -t(x-2)$$

[حسب المتباينة $1 < x < 2$ ، يكون المقدار $(x-2)$ سالباً] .

نعوض في الطرف الأيمن بعبارة x المعطاة بدلالة t نجد أن :

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)} = \frac{t}{t^2+1}$$

نبدل قيمة كل من x و dx و $\sqrt{-(x-2)(x-1)}$ في التكامل المعطى نجد :

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-(x-2)(x-1)}} = \int \frac{2\,dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + c$$

$$= -\sqrt{\frac{(x-2)}{-(x-1)}} + c$$

١-٧-٨ تكاملات ثنائيات الحد التفاضلية :

العبارة : $x^m.(a+bx^n)^p$ (حيث $a\,,\,b$: ثوابت ، $p\,,\,n$: أعداد عادية) ، تسمى ثنائي الحد التفاضلية ، فإذا كان أحد الأعداد :

$$p\ ,\ \frac{m+1}{n}\ ,\ \frac{m+1}{n}+p$$

صحيحاً ، فإن التكامل :

$$\int x^m.(a+bx^n)^p.dx$$

يمكن رده إلى تكامل كسري ، عندئذٍ نميز الحالات الآتية :

١- إذا كان p عدداً صحيحاً ، في مثل هذه الحالة يكون لدينا شكلان مختلفان لقوى x فقط هي m و n ، ونعود في هذه الحالة إلى الحالة الأولى من مكاملة التوابع الجذرية والتي تعلمنا كيفية حسابه .

٢- إذا كان $\frac{m+1}{n}$ عدداً صحيحاً ، نفرض في هذه الحالة أن :

$$a+bx^n=t$$

$$x=(\frac{t-a}{b})^{\frac{1}{n}} \Rightarrow dx=\frac{1}{n.b}(\frac{t-a}{b})^{\frac{1}{n}-1}$$

نبدل في التكامل المعطى :

$$\int x^m.(a+bx^n)^p.dx=\frac{1}{n}b^{-\frac{(m+1)}{n}}\int t^p(t-a)^{\frac{(m+1)}{n}-1}.dt$$

وإذا أخذنا بالاعتبار أن $\frac{(m+1)}{n}$ عدد صحيح ، فإن التكامل قد رُد إلى الحالة الأولى من التكاملات الجذرية .

٣- إذا كان $\frac{m+1}{n}+p$ صحيحاً ، عندئذٍ نكتب :

$$\int x^m.(a+bx^n)^p.dx=\int x^{m+np}.(a\,x^{-n}+b)^p.dx$$

وهذا التكامل الأخير هو تكامل ثنائي الحد التفاضلي ، ولكن بأمثال جديدة :

$$m_1=m+np\ ;\ n_1=-n\ ,\ p_1=p$$

نبدل في التكامل نجد :

$$=\int x^{m_1}.(a\,x^{n_1}+b)^{p_1}.dx$$

وهذا التكامل يعود إلى الحالة الأولى من مكاملة التوابع الجذرية .

مثال (٦١) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\ (1+\sqrt[3]{x^2}\ )} \ ;\ x > 0$$

لنقوم بكتابة التابع المستكمل بالشكل الآتي :

$$I = \int x^{-\frac{2}{3}}.(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx$$

أي :

$$m = -\frac{2}{3}\ ;\ n = \frac{2}{3}\ ;\ p = -1$$

وبالتالي ، لنفرض أن :

$$x = t^3\ ;\ t = \sqrt[3]{x}\ ;\ x^{-\frac{2}{3}} = t^{-2}\ ;\ (1+x^{\frac{2}{3}})^{-1} = (1+t^2)^{-1}\ ;\ dx = 3t^2 dt$$

$$I = \int t^{-2}(1+t^2)^{-1}(3t)^2 dt = 3\int \frac{dt}{1+t^2} = 3\,arctg\,t + c$$

$$I = 3\,arctg\,(\sqrt[3]{x}\ ) + c$$

مثال (٦٢) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\ dx}{\sqrt{x}}$$

لنقوم بكتابة التابع المستكمل بالشكل الآتي :

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}.(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}.dx$$

من هنا نجد أن :

$$m = -\frac{1}{2}\ ;\ n = \frac{1}{4}\ ;\ p = \frac{1}{3}$$

وبالتالي : $\dfrac{m+1}{n} = 2 \in Z$

عندئذٍ نفرض : $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{4}}=t^3-1 \Rightarrow x=(t^3-1)^4$

وبالتالي نجد :

$$(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=t \;;\; dx=12t^2(t^3-1)^3dt \;;\; t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$$

نبدل في التكامل المعطى نجد أن :

$$I=\int(t^3-1)^{-2}(12t^3)\,(t^3-1)^3\,dt=$$

$$=12\int(t^6-t^3)\,dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+c$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x}\,)^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x}\,)^4}+c$$

مثال (٦٣) : احسب التكامل الآتي :

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \;;\; x>0$$

لنكتب هذا التكامل بالشكل الآتي :

$$I=\int x^{-2}.(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.\,dx$$

وهذا التكامل شكله من شكل التكامل في الحالة الأولى ، حيث إن :

$$m=-2 \;;\; n=2 \;;\; p=-\frac{1}{2}$$

وبالتالي نجد : $\dfrac{(m+1)}{n}+p=\dfrac{(-2+1)}{2}-\dfrac{1}{2}=-1\in Z$

عندئذٍ نشكل لهذه الغاية التابع الجديد :

$$I=\int x^{-2}.[x^2(1+\frac{1}{x^2})]^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$I=\int x^{-3}.(1+x^{-2})^{-\frac{1}{2}}.dx$$

نفرض أن : $1+x^{-2}=u \Rightarrow x^{-2}=u-1$

وبالتالي نجد : $x=(u-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow dx=-\frac{1}{2}(u-1)^{-\frac{3}{2}}.du$

أي : $I=-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}.du=-\sqrt{u}+c$

$$I=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$$

ومن الجدير ذكره أن العالم (تشيبتشيف) قد برهن أن تكامل ثنائي الحد التفاضلي (١-٧-٨) لا يمكن التعبير عنه بتوابع بسيطة إلا في الحالات الثلاث السابقة ، وذلك بشرط أن يكون $a\neq 0$, $b\neq 0$ ، وإذا كان أحد الأعداد p و $\frac{m+1}{n}$ و $\frac{m+1}{n}+p$ ليس صحيحاً ، عندئذٍ لا يمكن التعبير عن (١-٧-٨) بوساطة توابع بسيطة .

١-٨ تكامل التوابع المثلثية :

ندرس في هذه الفقرة مكاملة بعض التوابع المثلثية من الشكل :

$$I=\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

حيث R : تابع كسري .

لحساب التكاملات من هذا الشكل نفرض أن :

$$tg\frac{x}{2}=t\ ,\ x=2\,arctg\,t\ ,\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

حيث إن : $-\pi<x<\pi$

ثم نستبدل النسب المثلثية بقيمها حسب الدساتير، نجد :

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\ ;$$

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (1.19)$$

لنبدل في التكامل المعطى ، نجد :

$$I = \int R(\sin x\,,\, \cos x)\,dx =$$

$$= \int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \frac{2t}{1+t^2}\Big)\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt$$

حيث إن $R_1(t)$ تابع كسري للمتغير t ، وبالتالي تحول التكامل المثلثي السابق إلى تكامل كسري جرت دراسته بالتفصيل . وبعد إجراء المكاملة بدلالة t نعود إلى المتغيرات القديمة .

مثال (٦٤) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{\cos x}$$

لحساب هذا التكامل نستخدم الدساتير المثلية (1.21) ، نجد :

$$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \ln\Big|\frac{1+t}{1-t}\Big| + c$$

$$= \ln\Big|\frac{1+tg\,(\frac{x}{2})}{1-tg\,(\frac{x}{2})}\Big| + c$$

مثال (٦٥) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

بتطبيق الدساتير المثلثية (1.19) ، نجد :

$$= \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|+c$$

$$= \ln\left|tg\ \frac{x}{2}+1\right|+c$$

ملاحظة (٥) :

مع التحويل العام $t = \tan(\frac{x}{2})$ يمكن أن تستخدم الطريقة المذكورة دائماً بحل التكاملات من الشكل $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ ويمكن تطبيقها من أجل جميع التكاملات المثلثية .

ملاحظة (٦) :

يمكن حساب بعض التكاملات المثلثية اعتماداً على الدساتير المثلثية مباشرة دون اللجوء إلى تغيير المتغير ، والأمثلة الآتية توضح ذلك .

مثال (٦٦) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$$

الحل :

$$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[4]{\cos x}} = \int \frac{\sin^2 x(\sin x)\,dx}{\sqrt[4]{\cos x}} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)\,d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}}$$

$$--\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x\,d(\cos x)}{\sqrt[4]{\cos x}}$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{7}\sqrt[4]{\cos^7 x} + c$$

مثال (٦٧) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$$

الحل :

$$I = \int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{\sin^2 x\,d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)\,d(\cos x)}{\cos^4 x}$$

نفرض أن : $\cos x = t$

$$= -\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4} = -\int t^{-4}.dt + \int t^{-2}.dt$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + c$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} = c$$

والآن لندرس بعض الأشكال الخاصة من التكاملات المثلثية ، والطرق المستخدمة في حسابها :

آ- إذا كان التابع R يغير إشارته إذا بدلنا كل $\cos x$ بـ $-\cos x$ ، أي :

$$R(\sin x\ ,\ \cos x) = -R(\sin x\ ,\ \cos x)$$

عندئذٍ نفرض أن :

$$t = \sin x \ \Rightarrow\ dt = \cos x\,dx$$

نعوض في التكامل المعطى ، عندئذٍ يتحول التكامل إلى تكامل كسري تمت دراسته سابقاً .

مثال (٦٨) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$$

إذا بدلنا كل $\cos x$ بـ $-\cos x$ ، نلاحظ أن التابع المستكمل يغير إشارته ، لذلك نفرض أن :

$$\sin x = t \ \Rightarrow\ dt = \cos x\,dx$$

نبدل في التكامل المعطى نجد :

$$I=\int \frac{\cos^2 x.\cos x\,dx}{\sin^2 x}=-\int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$=\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^2}=\frac{-1}{t}-t+c=\frac{-1}{\sin x}-(\sin x)+c$$

ملاحظة (٧) :

نلاحظ أن التكاملات من الشكل $\int \sin^n x.\cos^{2m-1} x\,dx$ ، (حيث $m,\ n$ أعداد صحيحة) تؤول إلى الشكل الأول .

ب- إذا كان التابع R يغير إشارته إذا بدلنا كل $\sin x$ بـ $-\sin x$ ، أي :

$$R(\sin x\ ,\ \cos x)=-R(-\sin x\ ,\ \cos x)$$

عندئذٍ نفرض أن :

$$\cos x=t\ \Rightarrow\ dt=-\sin x\,dx$$

نبدل في التكامل الأصلي ، ونكامل ، نحصل على المطلوب .

مثال (٦٩) : احسب التكامل الآتي :

$$I=\int \sin^5 x.\cos^2 x\,dx$$

إذا بدلنا كل $\sin x$ بـ $-\sin x$ في التابع المستكمل ، نلاحظ أن هذا التابع يغير إشارته ، لذلك نفرض أن :

$$\cos x=t\ \Rightarrow\ dt=-\sin x\,dx$$

نبدل في التكامل المعطى نجد أن :

$$I=\int \sin^4 x.\cos^2 x.\sin x\,dx$$

$$=-\int (1-\cos^2 x)^2.\cos^2 x.\sin x\,dx$$

$$=-\int (1-t^2)^2.t^2.dt$$

$$=-\int (1-2t^2+t^4).t^2.dt$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6).dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c$$

$$= -\frac{(\cos^3 x)}{3} + \frac{2(\cos^5 x)}{5} - \frac{(\cos^7 x)}{7} + c$$

ملاحظة (٨) :

نلاحظ أن التكاملات المثلثية من الشكل $\int \sin^{2n-1} x . \cos^m x \, dx$ ، (حيث $n,\ m$ أعداد صحيحة) تؤول إلى الحالة المعطاة في المثال السابق .

مثال (٧٠) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x}$$

نبدل في التابع المستكمل كل $\sin x$ بـ $-\sin x$ ، نلاحظ أن التابع المستكمل يغير إشارته ، وبالتالي نفرض أن :

$$\cos x = t \ \Rightarrow \ dt = -\sin x \, dx$$

$$I = \int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x)\sin x \, dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x \, dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$= -\int \frac{(1 - t^2)\, dt}{1 + t^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{1 + t^2} + \int \frac{t^2 . dt}{1 + t^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{1 + t^2} + \int \frac{[(t^2 + 1) - 1]dt}{1 + t^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{1 + t^2} + \int dt - \int \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= -arctg\,t + t - arctg\,t + c$$
$$= -2\,arctg\,t + t + c$$
$$= -2\,arctg(\cos x) + \cos x + c$$

ج- إذا بدلنا في التابع المستكمل كل $\cos x$ بـ $-\cos x$ ، وكل $\sin x$ بـ $-\sin x$ ، ولم يتغير التابع R ، عندئذٍ لحساب التكامل نفرض أن :

$$t = tg\,x \quad \text{أو نختار} \quad \sin x = t \quad \text{أو} \quad \cos x = t$$

وهنا نختار الفرضية الأسهل لحساب التكامل ، وهذا التكامل ينتمي للحالتين الأولى والثانية ، وبالتالي يمكن اتباع الطريقة الأفضل والأسهل لحساب التكامل .

مثال (٧١) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \sin^3 x . \cos^{49} x\,dx$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن $\cos x = t$ أو $\sin x = t$ ، وذلك لأن قوى كل منهما فردية . ولحساب هذا التكامل ، من الأفضل أن نفرض :

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$$
$$I = \int \sin^2 x . \cos^{49} x . \sin x\,dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x) . \cos^{49} x . \sin x\,dx$$
$$= -\int (1 - t^2) t^{49} . dt$$
$$= -\int t^{49} dt + \int t^{51} dt$$
$$= -\frac{t^{50}}{50} + \frac{t^{52}}{52} + c$$
$$= -\frac{\cos^{50} x}{50} + \frac{\cos^{52} x}{52} + c$$

ملاحظة (٩) :

التكاملات المثلثية ذات القوى الفردية $\int \sin^{2n-1} x . \cos^{2m-1} x\,dx$ ، تنتمي إلى الشكلين الأول والثاني ، لذلك هناك طريقة ثانية لحساب مثل هذه التكاملات بأن نفرض :

$$tg\,x = t \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

وسنوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (٧٢) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}$$

إذا بدلنا في التابع المستكمل كل $\sin x$ بـ $-\sin x$ ، وكل $\cos x$ بـ $-\cos x$ ، عندئذٍ نلاحظ أن التابع المستكمل لا يغير إشارته ، وبالتالي لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$t = tg\,x \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

نبدل في التكامل المعطى ، نجد :

$$I = \int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c$$
$$= \frac{1}{4}\,tg^4 x + c$$

ملاحظة (١٠) : إن التكاملات من الأشكال :

أ- $I = \int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\,dx$

ب- $\int tg^m x\,dx$

ج- $\int ctg^m x\,dx$

حيث :

$n\,,\,m$ عددان صحيحان تنتميان إلى الحالة الثالثة .

ولحساب التكاملات من هذا النوع نفرض أن :

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{dt}{1+t^2} \quad , \quad tg\,x = t \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال (٧٣) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \sin^2 x . \cos^4 x \, dx$$

نلاحظ أن التابع المستكمل لا يغير إشارته إذا بدلنا كل $\sin x$ بـ $-\sin x$ ، وكل $\cos x$ بـ $-\cos x$ ، وبالتالي لحساب هذا التكامل نطبق الدساتير المثلثية في العلاقات (1.20) نجد :

$$tg\, x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

نبدل في التكامل المعطى ، نجد :

$$I = \int tg^2 x \cos^8 x . \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{t^2 . dt}{(1+t^2)^4}$$

وهذا تكامل كسري تمت دراسته سابقاً (يترك للطالب) .

ملاحظة (١١) :

يمكن حساب التكاملات من الشكل $I = \int \sin^{2n} x . \cos^{2m} x \, dx$ ، (حيث n , m عددان صحيحان موجبان) باستخدام دساتير التحويل المثلثية بدلالة ضعف الزاوية :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

أو نستفيد من الدستور : $\cos x . \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

مثال (٧٤) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \sin^2 x . \cos^4 x \, dx$$

لحساب هذا التكامل سوف نستعين بالدساتير الآتية :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad ;$$

$$\sin x . \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int \sin^2 x.\cos^4 x\,dx = \int (\sin x.\cos x)^2.\cos^2 x\,dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 2x}{4}\,\frac{(1+\cos 2x)\,dx}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x.\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{(1-\cos 4x)\,dx}{2} + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x)$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$$

مثال (٧٥) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int tg^5 x\,dx$$

نلاحظ أن التابع المستكمل لا يغير إشارته إذا بدلنا كل $\sin x$ بـ $-\sin x$ ، وكل $\cos x$ بـ $-\cos x$ ، لذلك نفرض أن :

$$tg\,x = t \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

بالتعويض نجد أن :

$$I = \int tg^5 x\,dx = \int \frac{t^5.dt}{1+t^2} = \int (t^3 - t + \frac{t}{t^2+1})\,dt$$

$$= \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln|t^2+1| + c$$

$$= \frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x + \frac{1}{2}\ln|tg^2 x + 1| + c$$

ملاحظة (١٤) :

نلاحظ أن كثيراً من التكاملات السابقة يمكن حسابها بالتجزئة ، وذلك بالحصول على دستور تدريجي لها . وهذا ما تم دراسته في الأمثلة (٢٧ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٥) ، كما يمكن حسابها بطرق أخرى متعلقة بالتابع المستكمل قد تكون أسهل من الطرق المذكورة .

حساب التكاملات من الشكل

$$\int \sin\alpha x.\sin\beta x\,dx \quad ; \quad \int \cos\alpha x.\cos\beta x\,dx \quad ;$$
$$\int \sin\alpha x.\cos\beta x\,dx \quad ; \quad \alpha,\beta \in R$$

لحساب التكاملات من هذه الأشكال نقوم بتجزئة التابع المستكمل لمجموع تابعين ، وفق إحدى العلاقات الآتية :

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha x.\cos\beta x &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right] \\
\cos\alpha x.\cos\beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right] \\
\sin\alpha x.\sin\beta x &= \frac{-1}{2}\left[+\cos(\alpha+\beta)x-\cos(\alpha-\beta)x\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1.21)$$

مثال (٧٦) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \sin 6x.\cos 2x\,dx$$

الحـــل :

$$I = \frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 4x).dx$$

$$I = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{8}\cos 4x + c$$

مثال (٧٧) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \sin 4x.\sin 6x\,dx$$

الحـــل :

$$I = \frac{1}{2}\int(-\cos 10x+\cos 2x).dx$$

$$I = -\frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

٩-١ حساب تكامل التوابع القطعية والأسية :

نلاحظ أن تكامل التوابع القطعية يؤول إلى تكامل التوابع الأسية ، لأن التوابع القطعية تعرف بوساطة التوابع الأسية ، ولاستكمال التوابع القطعية نستفيد من دساتير التوابع القطعية كما نستفيد من استخدام e^x كمتغير جديد في بعض الأحيان . والأمثلة الآتية توضح ذلك .

مثال (٧٨) : احسب التكامل الآتي : $I = \int \frac{3e^x.dx}{e^{2x}+1}$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$e^x = u$ فيكون $du = e^x.\,dx$

نبدل في التكامل المعطى نجد :

$$I = 3\int \frac{du}{u^2+1} = 3\,arctg\,u + c$$
$$= 3\,arctg\,(e^x) + c$$

مثال (٧٩) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int ch\,x\,(ch\,x + sh\,x)\,dx$$

الحـــل :

$$I = \int ch^2 x\,dx + \int ch\,x.sh\,x\,dx$$
$$I = \int \frac{(ch\,2x+1)\,dx}{2} + \frac{1}{2}\int sh\,2x\,dx$$
$$I = \frac{1}{4}\,sh\,2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,ch\,2x + c$$

مثال (٨٠) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{dt}{3\,sh\,x.ch\,x}$$

الحـــل :

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{ch^2x.\frac{shx}{chx}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{ch^2x.thx}$$

$$=\int\frac{d(thx)}{thx}=\ln|thx|+c$$

مثال (٨١) : احسب التكامل الآتي :

$$I=\int\frac{(-e^{-x}-1).dx}{e^x+e^{2x}}$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$e^x=t\ \Rightarrow\ dx=\frac{dt}{t}$$

لنعوض في التكامل I ، فنجد :

$$I=-\int\frac{(\frac{1}{t}+1)dt}{(t+t^2)}.\frac{dt}{t}=-\int\frac{(1+t)dt}{t^3.(1+t)}=-\int\frac{dt}{t^3}$$

$$=-\int t^{-3}.dt=\frac{t^{-2}}{2}+c=\frac{1}{2t^2}+c=\frac{1}{2e^{2x}}+c$$

١-٩-١ حساب التكاملات من الشكل :

$I_n=\int\frac{e^x dx}{x^n}$ ، (حيث n عدد صحيح موجب) .

لحساب مثل هذه التكاملات من الشكل المفروض I_n ، نطبق دستور حساب التكـــاملات بطريقة التجزئة وفق الشكل الآتي :

$$I_n=\int e^x\frac{1}{x^n}\,dx=\int e^x.x^{-n}dx$$

$$=\frac{x^{1-n}}{(1-n)}e^x-\frac{1}{(1-n)}\int x^{1-n}.e^x dx\ ;\ n\neq 1$$

$$I_n=\frac{x^{1-n}}{(1-n)}e^x-\frac{1}{(1-n)}\int\frac{e^x}{x^{n-1}}\,dx$$

ومنه نجد :

$$I_n = \frac{x^{1-n}.e^x}{(1-n)} - \frac{1}{(1-n)} I_{(n-1)} \qquad (1.22)$$

وبشرط $n \neq 1$

إن الدستور التدريجي المستخرج (1.22) يحسب I_n بدلالة $I_{(n-1)}$ ، وذلك باستثناء $n = 1$ ، وأما في حالة $n = 1$ فعندئذٍ يأخذ التكامل المفروض الشكل الآتي :

$$I_1 = \int \frac{e^x}{x} dx$$

ولحساب هذا التكامل نستعمل طريقة نشر $\frac{e^x}{x}$ بالشكل الآتي :

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + ...$$

عندئذٍ بتكامل الطرفين نجد :

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \ln|x| + ,x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^4}{4.4!} + ... + c$$

وعندئذٍ نجد أن قيمة I_1 تعطى بشكل مجموع عدد غير منته من الحدود .

مثال (٨٢) : احسب التكامل الآتي :

$$I_4 = \int \frac{e^x}{x^4} dx$$

لحساب هذا التكامل نطبق الدستور التدريجي (1.22) :

$$I_4 = \frac{-x^{-3}.e^x}{3} + \frac{1}{3} I_3$$

$$I_3 = \frac{-x^{-2}.e^x}{2} + \frac{1}{2} I_2$$

$$I_2 = -x^{-1}.e^x + I_1$$

لكن نعلم أن :

$$I_1 = \ln|x| + x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^4}{4.4!} + \ldots + c$$

وبالتالي فإن :

$$I_4 = -\frac{1}{3}x^{-3}.e^x - \frac{1}{6}x^{-2}.e^x + \frac{1}{6}x^{-1}.e^x + \frac{1}{6}\left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots\right]$$

١-٩-٢ حساب التكاملات من الشكل $I_m = \int x^m.e^{x^2}.dx$:

ولحساب مثل هذه التكاملات نميز حالات ثلاث :

- **حالة أولى :** في حال كون m عدداً صحيحاً فردياً موجباً ، أي أن : $m = 2k+1$

حيث : $k = 0,1,2,3,\ldots$ ، فعندئذٍ نجد أن :

$$I_n = \int x^{2k+1}e^{x^2}\,dx = \int x^{2k}e^{x^2}x\,dx$$

وإذا افترضنا أن $x^2 = t$ ، وبالتالي يكون :

$$dt = 2x\,dx$$

نعوض في التكامل المفروض I_n نجد :

$$I_n = \frac{1}{2}\int t^k e^t\,dt$$

وهذا الكامل يحسب بطريقة التكامل بالتجزئة .

مثال (٨٣) : احسب التكامل الآتي : $I_3 = \int x^3e^{x^2}.dx$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$x^2 = t$ ، وبالتالي $dt = 2x\,dx$

نعوض في التكامل :

$$I_3 = \frac{1}{2}\int t.e^t.dt$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\,(t.e^t - e^t) + c$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\,(x^2.e^{x^2} - e^{x^2}) + c$$

- **حالة ثانية :** في حال كون m عدداً صحيحاً فردياً سالباً ، أي أن : $m = -(2k+1)$ ، حيث : $k = 0,1,2,3,...$ ، فعندئذٍ نجد أن :

$$I_n = \int x^{-(2k+1)}\, e^{x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{e^{x^2} dx}{x^{2k+1}} = \int \frac{e^{x^2} x\, dx}{x^{2k+2}}$$

نفرض أن : $x^2 = t \;\Rightarrow\; 2x\,dx = dt$

نعوض في التكامل نجد :

$$I_n = \frac{1}{2} \int \frac{e^t\, dt}{t^{k+1}}$$

وهذا التكامل يمكن حسابه بوساطة الدستور التدريجي (1.22) .

مثال (٨٤) : احسب التكامل الآتي :

$$I_{-3} = \int x^{-3}.e^{x^2}.dx$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x^2 = t \;\Rightarrow\; 2x\,dx = dt$$

وبالتعويض :

$$I_{-3} = \int \frac{e^{x^2}.dx}{x^3} = \int \frac{e^{x^2} x\, dx}{x^4}$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x^2 = t \;\Rightarrow\; 2x\,dx = dt$$

$$I_{-3} = \frac{1}{2} \int \frac{e^t.dt}{t^2}$$

والتكامل الأخير يحسب بوساطة الدستور التدريجي (1.22) .

– **حالة ثالثة :** إذا كان m عدداً صحيحاً زوجياً سالباً أو موجباً ، أي $m = 2n$ ، وحيث إن $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ، عندئذٍ يصبح التكامل المفروض بالشكل الآتي :

$$I_n = \int x^{2n} . e^{x^2} . dx \qquad (1.23)$$

ولحساب هذا التكامل نطبق دستور التكاملات بالتجزئة :

$$I_n = \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} . e^{x^2} - \frac{2}{(2n+1)} \int x^{2n+2} . e^{x^2} . dx$$

أي أن :

$$I_n = \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} . e^{x^2} - \frac{2}{(2n+1)} I_{n+1} \qquad (1.24)$$

وذلك بشرط $n \neq -\frac{1}{2}$

والدستور التدريجي المستخرج (1.24) يستعمل من أجل قيم $m = 2n$ السالبة باستثناء $m = -1$. وأما إذا كانت $n = -\frac{1}{2}$ فيصبح التكامل بالشكل الآتي :

$$I_{-1} = \int \frac{e^{x^2} . dx}{x}$$

لحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$$

لنعوض في التكامل I_{-1} فنجد :

$$I_{-1} = \frac{1}{2} \int \frac{e^{x^2} x\,dx}{x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{e^t\,dt}{t}$$

وهذا التكامل يحسب بطريقة النشر للتابع المكامل $\frac{e^t}{t}$ كما وجدنا في الفقرة السابقة (١-٩-١) . لنحسب الآن من الدستور (1.24) $I_{(n+1)}$ بدلالة I_n فنجد :

$$I_{(n+1)} = \frac{1}{2} x^{2n+1} . e^{x^2} - \frac{(2n+1)}{2} I_n$$

لنبدل كل n بـ $(n-1)$ ، فنجد :

$$I_n = \frac{1}{2}\, x^{2n-1}.e^{x^2} - \frac{(2n-1)}{2}\, I_{(n-1)} \qquad (1.25)$$

وهو الدستور التدريجي الذي يحسب I_n بدلالة $I_{(n-1)}$ من أجل قيم n الموجبة .

مثال (٨٥) : احسب التكامل الآتي : $I_2 = \int x^2 e^{x^2}\, dx$

لحساب هذا التكامل نطبق الدستور التدريجي (1.25) نجد :

$$I_2 = \frac{1}{2}\, x^3 e^{x^2} - \frac{3}{2}\, I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\, xe^{x^2} - \frac{1}{2}\, I_0$$

$$I_0 = \int e^{x^2}\, dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\, x^3.e^{x^2} - \frac{3}{4}\, xe^{x^2} + \frac{3}{4} \int e^{x^2}\, dx$$

والتكامل الأخير I_0 يحسب بطريقة نشر التابع المكامل e^{x^2} بالشكل الآتي :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + ...$$

مثال (٨٦) : احسب التكامل الآتي : $I_{-2} = \int \frac{e^{x^2}.dx}{x^2}$

ولحساب هذا التكامل نطبق الدستور التدريجي (1.24) نجد :

$$I_{-2} = \frac{-1}{3}\, x^{-3}.e^{x^2} + \frac{2}{3}\, I_{-1}$$

$$I_{-1} = -x^{-1}.e^{x^2} + 2I_0$$

$$I_0 = \int e^{x^2}\, dx$$

$$I_{-2} = \frac{-1}{3}\, x^{-3}.e^{x^2} - \frac{2}{3}\, x^{-1}.e^{x^2} + \frac{4}{3} \int e^{x^2}\, dx$$

والتكامل الأخير I_0 يحسب بطريقة نشر التابع المكامل e^{x^2} كما في المثال السابق .

تمارين الفصل الأول :

١- اعتماداً على جدول التكاملات الأساسية ، احسب كلاً من التكاملات الآتية :

1	$\int (3x^2+2x+\frac{1}{x})dx$	11	$\int \frac{dx}{x^2+4}$
2	$\int \frac{(2x+3)dx}{x^4}$	12	$\int \frac{dx}{5-x^2}$
3	$\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}})$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$
4	$\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}$	14	$\int th^2 x\,dx$
5	$\int \frac{(2-\sin x)dx}{\sin^2 x}$	15	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+1}}$
6	$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x.\sin^2 x}$	16	$\int \frac{a^x.dx}{\sqrt{a^{2x}-1}}$
7	$\int \frac{(3-2ctg^2 x)dx}{\cos^2 x}$	17	$\int x^2(5-x)^4 dx$
8	$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx$	18	$\int (1+\sin x+\cos x)dx$
9	$\int \frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1)dx}{\sqrt[4]{x}}$	19	$\int (\frac{1-x}{x})^2 dx$
10	$\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$	20	$\int ct^2 g\,x\,dx$

٢- باستخدام طريقة تغيير المتحول ، احسب كلاً من التكاملات الآتية :

1	$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+2)^2}$		14	$\int \frac{x\,e^{\sqrt{x^2-1}}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$
2	$\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{x^2-4}$		15	$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{3-\cos^2 x}}$
3	$\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3}\;\;dx$		16	$\int tha\,x\,dx$
4	$\int (x^2+1)^4 x^2 dx$		17	$\int tg^2(ax+b)\,dx$
5	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$		18	$\int \frac{dx}{ctg\sqrt{3x}}$
6	$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos 4x}$		19	$\int \sqrt{2x-1}\;\;dx$
7	$\int \frac{dx}{(8-3x)^2}$		20	$\int \frac{dx}{6x-7}$
8	$\int \cos\frac{(x+1)\,dx}{3}$		21	$\int \cos\frac{2x\,dx}{1+x^2}$
9	$\int \sin x.\cos^3 dx$		22	$\int (x^2+1)^4\,dx$
10	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$		23	$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$
11	$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$		24	$\int \frac{e^x.dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$
12	$\int \frac{dx}{(1+x^2)\,arc\,tg\,x}$		25	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$
13	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$		26	$\int \frac{(e^x-e^{-x})\,dx}{e^x+e^{-x}}$

٣- اعتماداً على طريقة التكامل بالتجزئة ، احسب كلاً من التكاملات الآتية :

1	$\int x^3 \ln x\,dx$		13	$\int e^{arc\cos x}\,dx$
2	$\int x^2.e^{-x}\,dx$		14	$\int \cos(\ln x)\,dx$
3	$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)\,dx$		15	$\int x.(arc\,tg\,x)^2\,dx$
4	$\int x^2 \sin x\,dx$		16	$\int x^2 arc\cos x\,dx$
5	$\int \frac{(x\sin x)\,dx}{\cos^2 x}$		17	$\int \frac{\ln(\ln x)\,dx}{x}$
6	$\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}}$		18	$\int \frac{arc\sin\sqrt{x}\;dx}{\sqrt{1-x}}$
7	$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2}$		19	$\int \frac{(arc\sin x)\,dx}{x^2}$
8	$\int x^2 ch\,3x\,dx$		20	$\int arc\,tg\,\sqrt{x}\;dx$
9	$\int x.\sin^2 x\,dx$		21	$\int \sqrt{x}\;\ln^2 x\,dx$
10	$\int x.sh\,x\,dx$		22	$\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$
11	$\int x\ln(\frac{1+x}{x1-x})\,dx$		23	$\int \frac{arc\sin x\,dx}{x^2}$
12	$\int \cos(\ln x)\,dx$		24	$\int x^2\cos x\,dx$

٤- اعتماداً على طريقة تفريق الكسور ، احسب كلاً من التكاملات الآتية :

1	$\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$		7	$\int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^3-4x}$
2	$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$		8	$\int \frac{(3x^3+2x-1)\,dx}{(x-1)^2(x-2)}$

3	$\int \frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$		9	$\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$
4	$\int \frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}$		10	$\int \frac{(7x-5)\,dx}{x^3+x^2-6x}$
5	$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x}$		11	$\int \frac{dx}{(x-3)\,(x+4)}$
6	$\int \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)^2(x+3)^3}$		12	$\int \frac{dx}{x^2-6x}$

٥- بالطريقة التي تراها مناسبة ، احسب كلاً من التكاملات الآتية :

1	$\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$		8	$\int \frac{(x^4+1)\,dx}{(x^4-1)^3}$
2	$\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+3}$		9	$\int \frac{x\,dx}{(x-1)\,(x^2+x+1)^2}$
3	$\int \frac{(4x-3)\,dx}{x^2-2x+6}$		10	$\int \frac{(x^2-x+4)\,dx}{(x+1)\,(x-2)\,(x-3)}$
4	$\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$		11	$\int \frac{(5x-13)\,dx}{(x^2-5x+6)^2}$
5	$\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}$		12	$\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}$
6	$\int \frac{(2x-5)\,dx}{(x^2-5x+4)^3}$		13	$\int \frac{dx}{x^7+x^5}$
7	$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^3}$		14	$\int \frac{(x^5+x^2)\,dx}{x^9+x^3-2}$

٦- احسب كلاً من التكاملات الآتية بالطريقة التي تراها مناسبة :

1	$\int \sin^3 x\,dx$		2	$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
3	$\int \cos^7 x\,dx$		4	$\int \sin 3x.\cos 5x\,dx$
5	$\int \sin^2 x.\cos^2 x\,dx$		6	$\int \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{3}\,dx$
7	$\int \frac{dx}{\sin^6 x}$		8	$\int \cos x.\cos^2 3x\,dx$
9	$\int \frac{dx}{\sin^3 x.\cos^5 x}$		10	$\int \sin 10x.\sin 15x\,dx$
11	$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}$		12	$\int \sin\frac{x}{3}.\cos\frac{2x}{3}\,dx$
13	$\int (ctg^3\frac{x}{2}+ctg^4\frac{x}{2})\,dx$		14	$\int \sin x\,.\sin 2x\,.\sin 3x\,dx$
15	$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$		16	$\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$
17	$\int \frac{dx}{3\cos x+2}$		18	$\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$
19	$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-2\cos x+5}$		20	$\int \frac{(\sin 2x)\,dx}{1+4\cos^2 x}$
21	$\int \frac{dx}{2-\sin x}$		22	$\int \frac{(1+ctg\,x)\,dx}{1-ctg\,x}$
23	$\int \frac{dx}{ch\,x-1}$		24	$\int \frac{dx}{ch^2 x-4ch^2 x}$
25	$\int ch^2 3x\,dx$		26	$\int \sqrt{ch\,x+1}\;dx$
27	$\int ch^3 2x\,dx$		28	$\int ch^4 x\,dx$

29	$\int \frac{dx}{ch^2 x . ch^2 x}$	30	$\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^6}}$
31	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$	32	$\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$
33	$\int \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x}$	34	$\int \frac{x^2.dx}{(x^2+1)^5}$
35	$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$	36	$\int \frac{\sqrt{x^2+5}\,dx}{x^2}$
37	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$	38	$\int \frac{dx}{(x+2)^2.\sqrt{x^2+5}}$
39	$\int \frac{dx}{(x^2+1)\,(x+\sqrt{x^2+1}\,)}$	40	$\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^2 x}$
41	$\int \frac{\sin x.\cos x\,dx}{\sin^4 x.\cos^4 x}$	42	$\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$
43	$\int \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}$	44	$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x}$
45	$\int \sin^5 x.\cos^5 x\,dx$	46	$\int \sin^4 x.\cos^5 x\,dx$
47	$\int \sin^2 x.\cos^4 x\,dx$	48	$\int \sin^3 2x.\cos^2 3x\,dx$
79	$\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^3 x}$	50	$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$
51	$\int ctg^6 x\,dx$	52	$\int tg^5 x\,dx$
53	$\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^6 x}$	54	$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x.\cos^5 x}}$
55	$\int \cos x.\cos 2x.\cos 3x\,dx$	56	$\int \cos^2 ax.\cos^2 bx\,dx$

57	$\int \sin x.\sin(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{3})\,dx$	58	$\int th\,x\,dx$
59	$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$	60	$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$
61	$\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$	62	$\int \frac{dx}{sh\,x+2ch\,x}$
63	$\int sh^2x.ch^2x\,dx$	64	$\int ch\,ax.\sin bx\,dx$
65	$\int \frac{ch\,x\,dx}{3sh\,x-4ch\,x}$	66	$\int \frac{dx}{sh\,x+2ch\,x}$
67	$I_1=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^3+1}}$	68	$\int ch^4x\,dx$
69	$I_2=\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$	70	$I_3=\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}\,]^2}$
71	$I_4=\int \frac{\sqrt{x}\;dx}{(1+\sqrt[3]{x}\,)}$	72	$I_5=\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
73	$I_6=\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}}$	74	$I_7=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$
75	$I_8=\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$	76	$I_9=\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$
77	$I_{10}=\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$	78	$I_{11}=\int (x+\sqrt{2+x+x^2}\,)\,dx$
79	$I_{13}=\int \frac{(1-x+x^2)\,dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$	80	$I_{15}=\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+1}}$
81	$I_{14}=\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\;x\,dx$		

الفصل الثاني

التكاملات المحددة وتطبيقاتها

٢-١ تعريف التكامل المحدد وشروط وجوده :

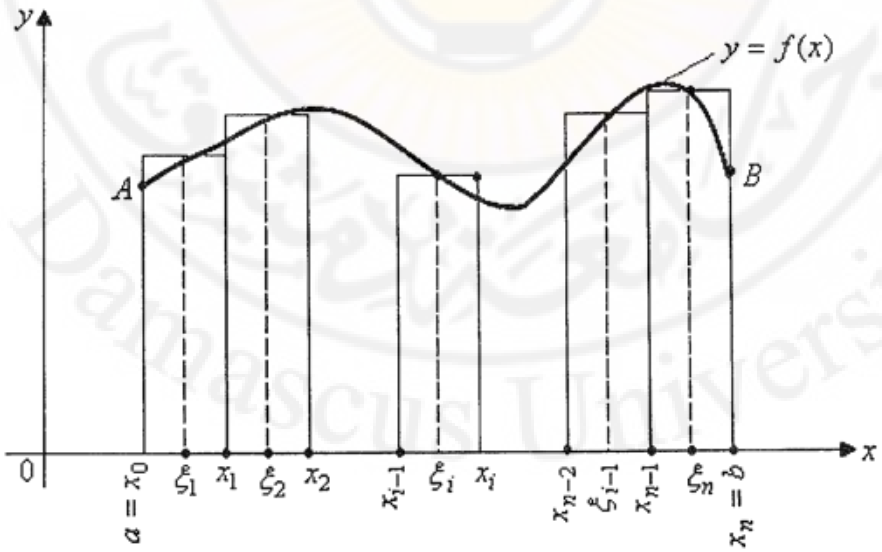
ليكن التابع $y=f(x)$ المعرّف والمحدد على المجال $[a,b]$ ، ولنجزئ المجال المغلق $[a,b]$ إلى n مجال جزئي بوساطة النقاط :

$$a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{(n-1)},x_n=b$$

بحيث يكون : $$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{(n-1)}<x_n=b$$

والآن لنختار من كل مجال جزئي من المجالات $[x_i,x_{i-1}]$ نقطة ما ، الشكل (٢-١) ولتكن ξ_i ، وحيث $\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]$ ، ولنوجد جداء قيمة التابع عند تلك النقطة بطول المجال $[x_i-x_{i-1}]$ ، أي الجداء :

$$f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}) \quad ; \quad i=1,2,3,\ldots,n$$



الشكل (٢-١)

لنشكل مجموع الجداءات السابقة ونرمز له بالرمز I_n :

$$I_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

أي أن :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

لنفرض أن : $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

وبالتالي نجد :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (2.1)$$

وهذا يسمى بمجموع ريمان التكاملي .

لنرمز بـ λ لأطوال المجالات الجزئية ، أي :

$$\lambda = \max\left\{(x_1 - x_0)\ ,\ (x_2 - x_1)\ ,...,\ (x_n - x_{n-1})\right\}$$

والآن لنوجد النهاية I للمجموع التكاملي I_n عندما $\lambda \to 0$ ، أي أن :

$$\lim_{\lambda \to 0} I_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ولتكن I تسمى بالتكامل المحدد للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ويمكن أن نعبر عنه بالشكل الآتي :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.2)$$

ويقرأ كما يلي : تكامل التابع $f(x)$ من a إلى b .

واعتماداً على تعريف المجموع التكاملي نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (2.3)$$

اعتماداً على ما سبق يمكن أن نُعرّف التكامل المحدد لتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ بالشكل الآتي :

تعريف (١) :

نسمي النهاية المحددة I للمجموع I_n عندما $\lambda \to 0$ بالتكامل المحدد للتابع الحقيقي $f(x)$ في المجال $[a,b]$ ونرمز له بالشكل الآتي :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية I موجودة يكون التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، حيث نسمي a حد التكامل السفلي و b حد التكامل العلوي .

إن المجاميع التكاملية المشكلة من أجل عدد من التقسيمات n قد تكون مختلفة ، حيث إننا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى n مجال جزئي بشكل كيفي ، وتم اختيار النقاط ξ_i في المجالات $[x_i , x_{i-1}]$ بشكل كيفي أيضاً ، لذلك فإن المجموع التكاملي (2.1) لا يعتبر تابعاً لـ n ، وذلك أنه من أجل عدد n من التقسيمات المختلفة يوجد عدد لانهائي من المجاميع الجزئية المختلفة . وهنا نفهم النهاية بالتعريف الآتي :

تعريف (٢) :

نقول إن المجموع I_n ينتهي إلى النهاية I عندما $\lambda \to 0$ إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta < 0 : |I_n - I| < \varepsilon \qquad (2.4)$$

ما دام : $|\lambda - 0| < \delta$

ونرمز لذلك بالرمز الآتي :

$$\lim_{\lambda \to 0} I_n = I$$

مبرهنة (١) – وجود التكامل المحدد :

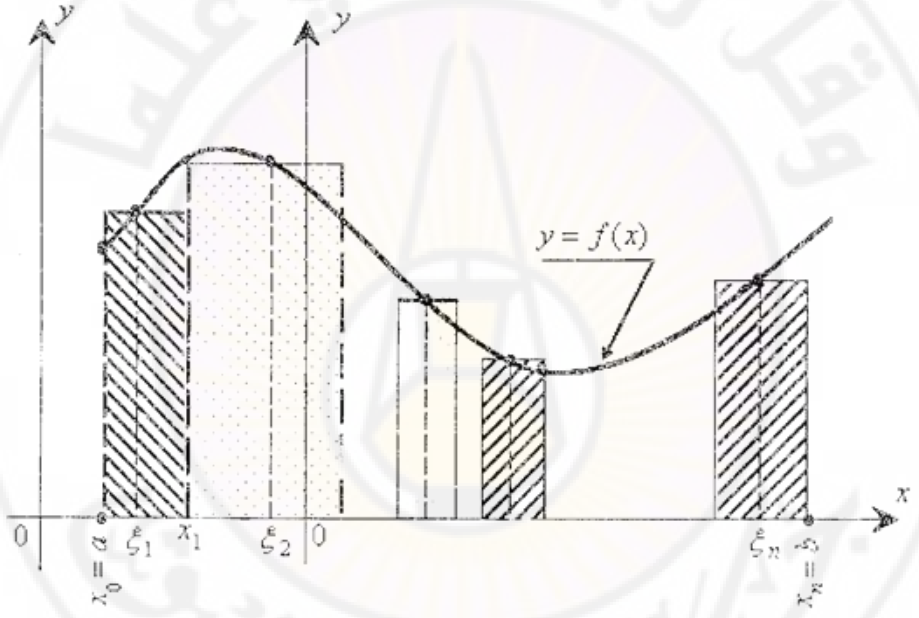
إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال المغلق $[a,b]$ ، فإن نهاية المجموع التكاملي لهذا التابع تكون نهاية محددة عندما يسعى أطول المجالات الجزئية إلى الصفر .

سوف نعتبر لاحقاً التوابع المكاملة كلها مستمرة ، إلا إذا أشرنا إلى خلاف ذلك .

٢-١-١ المعنى الهندسي للتكامل المحدد :

بفرض $y = f(x)$ تابع معرّف ومستمر على المجال $[a,b]$ ، ولـيكن $f(x) \geq 0$ على هذا المجال .

إن للمجموع التكاملي (2.1) لكل حد من حدوده معنى هندسي ، فالجـداء $f(\xi_i)\Delta x_i$ هو مساحة المستطيل الذي عرضه $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ وطوله $f(\xi_i)$ ، وعليه فإن المجموع (2.1) يمثل مساحة المنطقة المظللة كما هو مبين على الشكل (٢-٢) .



الشكل (٢-٢)

كما هو واضح ، إن هذه المساحة متعلقة بالتجزئة للمجال $[a,b]$ وباختيار النقاط ξ_i من المجال $[a,b]$ ، مع العلم أنه كلما صغر المقدار Δx_i ، حيث $i = 1,2,3,\ldots,n$ اقتربت من مساحة الشكل المظلل من مساحة المنطقة المحددة بمنحني التـابع $y = f(x)$ ومحـور الفواصل وبالمستقيمين $x = a$ ، و $x = b$. وعليه ، فإن المساحة الدقيقة لهذه المنطقـة هـي نهاية المجموع (2.1) ، عندما تسعى λ إلى الصفر ، أي هي التكامل المحـدد للتـابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

وعليه ، فإن التكامل المحدد لتابع مستمر $f(x)$ على المجال $[a,b]$ مساوٍ إلى مساحة المنطقة المحددة بمنحني التابع $y = f(x)$ ومحور الفواصل ، وبالمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

٢-١-٢ خواص التكامل المحدد :

١- التكامل المحدد ، كما رأينا هو عدد ، أي أنه لا خلاف بتسمية المتغير المستقل للتابع المستكمل ، هذا يعني أنه يمكننا استخدام أي رمز لهذا المتغير ، أي أن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;;\; \int_a^b f(t)\,dx \;;\; \int_a^b f(u)\,dx$$

تدل على معنى واحد ، والنتيجة واحدة .

٢- إذا كانت $a = b$ ، فإن قيمة التكامل (2.2) تكون صفراً ، أي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

٣- إذا كان $f(x)$ تابعاً حقيقياً وقابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

٤- عند تجزئة مجال التكامل $[a,b]$ إلى مجالين جزئيين $[a,c]$ و $[c,b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

هذه العلاقة صحيحة في حال كون النقطة c واقعة خارج المجال $[a,b]$ من اليمين $(a < b < c)$ أو من اليسار $(c < a < b)$ بشرط أن يكون التابع $f(x)$ مستمراً على المجالين $[c,b]$ و $[a,c]$.

فإذا كان $(a < b < c)$ فبحسب الخاصة (٤) وكون النقطة b واقعة بين a,c إن :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

وبحسب الخاصة الثالثة نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

وبالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

وأما إذا كان $c < a < b$ ، بالطريقة نفسها نكتب :

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

وبحسب الخاصة الثالثة نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

أي أن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

وبشكل عام إذا كانت النقاط $c_1, c_2, ..., c_n$ واقعة في المجال $[a,b]$ إن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

٥- إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة في المجال $[a,b]$ ، وكان c ثابتاً فإن :

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

٦- إذا كان التابعان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرين في المجال $[a,b]$ وقابلين للمكاملة عليه فإن :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

٧- إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ ، وكانت $f(x) \geq 0$ في ذلك المجال فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

٨- إذا كان كلٍ من التابعين $f(x)$ و $g(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، وكان $f(x) \leq g(x)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

البرهان :

بما أن :

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \leq 0$$

وبمكاملة الطرفين نجد أن :

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \leq 0$$

وبالتالي نجد :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

٩- إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، وكانت M و m القيمتين العظمى والصغرى على التوالي للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$ ، أي :

$$m \le f(x) \le M$$

فإن :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

وتقبل هذه المبرهنة من دون برهان .

مبرهنة (٢) – القيمة الوسطى في التكامل المحدد :

إذا كان التابع $y = f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، ولتكن M و m القيمتين العظمى والصغرى للتابع $f(x)$ في ذلك المجال ، عندئذٍ يوجد العدد μ ، بحيث : $m \le \mu \le M$ ، ويكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) \qquad (2.5)$$

البرهان : استناداً إلى الخاصة (٩) من خواص التكامل المحدد نجد أن :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

أو :

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

بفرض أن :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$$

نحصل من هذه العلاقة على العلاقة المعطاة في نص المبرهنة .

ملاحظة (١) : ندعو العدد :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

بالقيمة الوسطى للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$.

نتيجة (١) :

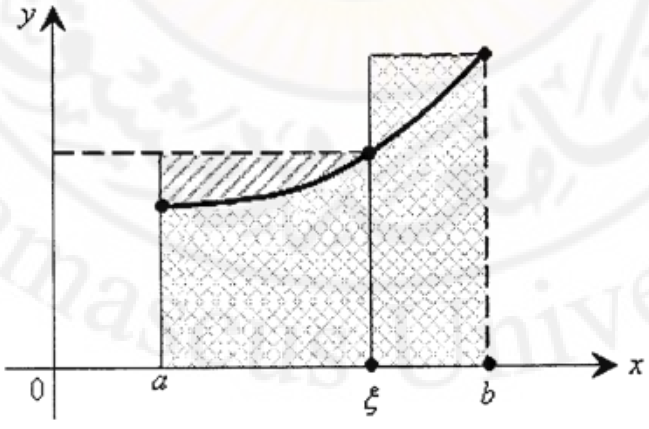
إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ فإنه توجد نقطة ξ من هذا المجال بحيث:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a) \qquad (2.6)$$

حيث : $a < \xi < b$

البرهان : بما أن التابع $f(x)$ بالفرض تابع مستمر على المجال $[a,b]$ ، عندئذٍ يكون قابلاً للمكاملة على ذلك المجال ، وبالتالي يبلغ كل من الحدين الأدنى والأعلى ويقبل النقاط الداخلية كافةً نقاطاً يأخذ فيها قيماً مختلفة ، الشكل (٢-٣) . وبالتالي العلاقة (2.5) محققة ، وتوجد نقطة مثل $\xi \in [a,b]$ ، وبحيث يكون $\mu = f(\xi)$ ، أي أن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$



الشكل (٢-٣)

مبرهنة (٣) – نيوتن – ليبنتز في التكامل :

تكمن أهمية هذه المبرهنة في إعطاء تفسير للعلاقة ما بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد لتابع $f(x)$ المستمر على مجال ما D ، حيث إننا بالاعتماد على التفسير الهندسي ، نتمكن من توضيح ذلك بسهولة عندما يكون التابع $f(x)$ موجباً .

في الحقيقة ، ليكن التابع $f(x)$ معرّفاً ومستمراً على مجال ما D ، وباختيار نقطة مثل a من D ، و x نقطة ثابتة من هذا المجال يكون بالتالي $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,x]$ ، ويمكن بالتالي كتابة التكامل بالشكل الآتي :

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

من الواضح ، بأن قيمة هذا التكامل تمثل تابعاً لـ x ، معرفاً على المجال $[a,x]$ ، ولنرمز لهذه القيمة بـ $F(x)$ ، أي :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

واستناداً لتعريف التابع الأصلي لتابع a ، فإن $F(x)$ يمثل تابعاً أصلياً لـ $f(x)$ في المجال D ، ويكون :

$$F'(x)=f(x)\ ;\quad \forall x\in D$$

ولكي نتحقق من ذلك ، نأخذ العبارة :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \qquad (2.7)$$

حيث : $x_0\in D$

ولنبرهن بأن هذه العبارة تتناهى إلى $f(x_0)$ عندما h تتناهى إلى الصفر .

بما أن $f(x)$ موجباً ، ولنأخذ $h>0$ ، عندئذٍ فإن :

$F(x_0)$ و $F(x_0+h)$ يمثلان سطحين ، والفرق بينهما سطح أيضاً ، ولنختار h صغيراً عندئذٍ قيمة التابع $f(x)$ في المجال $(x_0\,,\,x_0+h)$ تختلف قليلاً عن $f(x_0)$ ، وذلك

لكون $f(x)$ تابعاً مستمراً، وهذا ما يؤكد بأن $F(x_0+h)-F(x_0)$ يكون مساوياً $h\,f(x_0)$ أما العبارة (2.7) فمساوية لـ $f(x_0)$ ، والخطأ الذي نرتكبه في حساب هذه العبارة يصغر تبعاً لصغر h ، أي أن العبارة (2.7) تتناهى إلى $f(x_0)$ عندما h تتناهى إلى الصفر .

٢-١-٣ مشتق التكامل المحدد بالنسبة لحده الأعلى :

بما أن التكامل يتعلق بحديه الأعلى والأدنى ، فلنثبت حده الأدنى a ، ولنجعل حده الأعلى متغيراً ، عندئذٍ بتغير قيم الحد الأعلى سوف تتغير قيمة التكامل المحدد ، وعندها يصبح التكامل المحدد كتابع لحده الأعلى .

مبرهنة (٤) :

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في مجال D ، فإن التابع :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (2.8)$$

يكون قابلاً للاشتقاق في ذلك المجال ، ويكون من أجل أية x من D محققاً ما يلي :

$$F'(x)=f(x)$$

البرهان : لنأخذ النقطة x اختيارية من D ، و $x+h$ نقطة أخرى من D ، عندئذٍ :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]=\frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)\,dt$$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التكامل الأخير نجد :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi)\quad ;\quad x<\xi<x+h$$

وإذا تناهت h إلى الصفر إن النقطة ξ تتناهى إلى x ، وبالتالي :

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x)$$

وذلك ، استناداً لكون التابع $f(x)$ مستمراً في جميع نقاط المجال D .

– **بهذا الشكل تكون المبرهنة قد برهنت .**

ان مبرهنة نيوتن – ليبنتز ، تُعطينا طريقة سهلة لحساب قيمة التكامل المحدد لتابع $f(x)$ ، في الحقيقة ، لنحسب التكامل :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ ، عندئذٍ استناداً للعلاقة (2.8) من المبرهنة (٤) يكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)$$

ولنحدد $F(b)$ ، كما نعلم فإن $F(x)$ يمثل تابعاً أصلياً لـ $f(x)$ ، ويمثل لـ $f(x)$ عدداً غير محدود من التوابع الأصلية التي تختلف فيما بينها بثابت ، وبالتالي إذا علمنا تابعاً أصلياً $\phi(x)$ آخر لـ $f(x)$ في المجال $[a,b]$ ، يكون :

$$F(x)=\phi(x)+c$$

ولكي نحسب c ، نبدل كل x بـ a ، فنجد :

$$F(a)=\phi(a)+c$$

لكن $F(a)=0$ [من العلاقة (2.8) والخاصة (٢) من خواص التكامل المحدد] ، نجد :

$$-\phi(a)=+c$$

وبالتالي يكون :

$$F(x)=\phi(x)-\phi(a)$$

وبخاصة يكون من أجل $x=b$

$$F(b)=\phi(b)-\phi(a)$$

أي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a) \qquad (2.9)$$

وهذا يؤكد بأنه لحساب التكامل المحدد ، يجب أولاً حساب التكامل غير المحدد $\int f(x)\,dx$ ، أي إيجاد تابع أصلي للتابع $f(x)$ مثل $\phi(x)$ ، ومن ثم نطبق العلاقة (2.9) وللسهولة نكتبها بالشكل الآتي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\phi(x)\right]_a^b$$

حيث نعني بـ $\left[\phi(x)\right]_a^b$ العبارة :

$$\phi(b) - \phi(a)$$

مثال (١) : احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$I = \left[arc\,tg\,x\right]_0^1 = arc\,tg\,1 - arc\,tg\,0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال (٢) : احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}(0+0) = \frac{\pi}{2}$$

مثال (٣) : احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_1^e \ln x \, dx$$

نفرض أن :

$$u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$$

وبالتالي نجد :

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e dx$$
$$= \left[x \ln x - x\right]_1^e - 1$$

ملاحظة (٢) : استخدمنا في المثال (٣) علاقة التكامل بالتجزئة والتي نكتبها عموماً :

$$\int_a^b u \, dv = \left[u.v\right]_a^b - \int_a^b v \, du$$

ملاحظة (٣) : نستخدم طرق المكاملة ذاتها في حساب التابع الأصلي ، ومن ثم نطبق العلاقة (2.9) .

مثال (٤) : احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

نجري تغييراً في المتغير من الشكل :

$$x = a \sin t \;\Rightarrow\; dx = a \cos t \, dt$$

ندرس مجال تحول t فنجد :

$$x=0 \Rightarrow t_1=0$$

$$x=a \Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي نجد :

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t.\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t.dt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}(\frac{1-\cos 4t}{2})\,dt$$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt$$

$$=\frac{a^4}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi.a^4}{16}$$

مثال (٥) : احسب قيمة التكامل :

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3}$$

نفرض أن $tg(\frac{x}{2})=t$ ، وبالتالي :

$$x=2\,arctg\,t \;;\; dx=\frac{2\,dt}{1+t^2} \;;\; \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2(\frac{1-t^2}{1+t^2})+3} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5}$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{5}} arctg\ (\frac{t}{\sqrt{5}}) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\ (\frac{1}{\sqrt{5}})$$

٢-٢ التكاملات الشاذة (المعتلة) :

مما سبق ذكره حتى الآن ، لاحظنا أن التكامل المحدد لتابع ما $f(x)$ في مجال $[a,b]$ ، قد تم تعريفه بحيث يكون التابع $f(x)$ محدوداً على مجال محدود ، لكنه في بعض الأحيان قد تتغير معطيات خاصة بالتابع أو بحدود المجال ، كأن يكون مثلاً مجال التكامل من أحد الأشكال :

$$(-\infty,\infty) \quad \text{أو} \quad [a,\infty) \quad \text{أو} \quad (-\infty,a]$$

أو كأن يعاني التابع من انقطاعات في مجال تعريفه ، أي توجد نقطة واحدة على الأقل مثل $c\in[a,b]$ ، بحيث يكون :

$$f(c)=\infty$$

وندعو التكامل المحدد في مثل هذه الحالات بتكامل ريمن الشاذ .

في البداية سوف ندرس التكامل المحدد على مجالات لانهائية ، وفي الفقرة اللاحقة سندرس التكامل المحدد للتوابع المنقطعة .

أولاً- التكامل المحدد على مجالات لانهائية :

ليكن $f(x)$ تابع معرف ومستمر على المجال $[a,\infty)$ وقابل للمكاملة على أي مجال جزئي $[a,\alpha]$ ، أي أن التكامل $\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$ موجود أياً يكن $a<\alpha$.

تعريف (٣) :

إذا كانت نهاية التكامل $\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$ عندما $\alpha \to \infty$ موجودة ومحدودة ، عندئذٍ نقول عن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ إنه متقارب ، وبالتالي نكتب :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_a^{\alpha} f(x)\,dx \qquad (2.10)$$

إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ وموجوداً ، عندئذٍ يمكن معرفة فيما إذا كان التكامل المعتل متقارب أم لا ، اعتماداً على علاقة نيوتن – ليبنتز :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_a^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} [F(x)]_a^{\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} [F(\alpha) - F(a)]$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) - F(a)$$

إذا كانت النهاية $\lim_{\alpha \to \infty} [F(\alpha)$ موجودة ومحدودة ، عندئذٍ نقول إن التكامل المعتل (الشاذ) متقارب ، أما في حال كون النهاية غير موجودة أو غير محدودة ، عندئذٍ نقول عن التكامل الشاذ إنه متباعد .

مثال (٦) : احسب قيمة التكامل : $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$

وبيّن متى يكون متقارباً ، ومتى يكون متباعداً .

نعلم حسب العلاقة (2.10) أن :

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} x^{-\alpha}.dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{b}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left[x^{1-\alpha}\right]_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left[b^{1-\alpha} - 1\right]$$

وهنا نميز حالات ثلاث :

١- إذا كان $\alpha < 1$ ، عندئذٍ فإن $I \to \infty$ والتكامل المعطى متباعد .

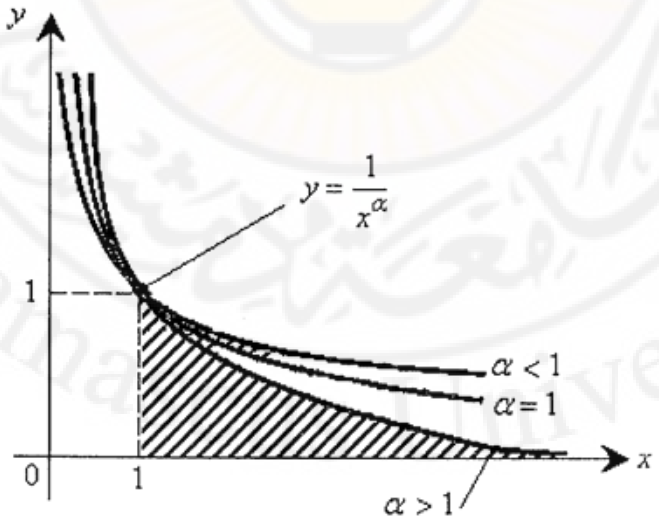
٢- إذا كان $\alpha > 1$ ، عندئذٍ فإن $I = \frac{1}{\alpha - 1}$ والتكامل المعطى متقارب .

٣- إذا كان $\alpha = 1$ فإن $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ، وبالتالي :

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b = \infty$$

والتكامل المعطى متباعد .

عندئذٍ نستنتج أن التكامل المعطى متقارب عندما $\alpha > 1$ ، ومتباعد عندما $\alpha \le 1$ ، كما هو موضح على الشكل (٢-٤)



الشكل (٢-٤)

مثال (٧) : برهن أن التكامل :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$ متقارب .

لنأخذ التابع :

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

لدينا حسب الخاصة الرابعة من خواص التكامل المحدد أن :

$$F(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_1^{\alpha} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad ; \quad \alpha > 1$$

نكامل بالتجزئة فنجد أن :

$$\int_1^{\alpha} \frac{\sin x\, dx}{x} = -\int_1^{\alpha} \frac{d\cos x}{x}$$

بفرض أن :

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}$$
$$dV = d\cos x \Rightarrow V = \cos x$$

أي أن :

$$\int_1^{\alpha} \frac{\sin x\, dx}{x} = \left[\frac{\cos x}{x}\right]_1^{\alpha} + \int_1^{\alpha} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$
$$= -\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \cos 1 + \int_1^{\alpha} \frac{\cos x\, dx}{x^2}$$

ونلاحظ أن النهاية :

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_1^{\alpha} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

موجودة ، لأن :

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

وبالتالي فإن التكامل $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ متقارب .

وإذا أخذنا بالاعتبار أن النهاية $\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\cos\alpha}{\alpha}$ موجودة أيضاً ، فإن نهاية $F(\alpha)$ تكون موجودة أيضاً والتكامل متقارب .

مثال (٨) : ادرس تقارب التكامل المعتل : $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$

نعلم أن :

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}.dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-2x}.dx = -\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}\left[e^{-2x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}\left[e^{-2\alpha}-1\right] = \frac{1}{2}$$

وبما أن النهاية موجودة ومحدودة عندما $\alpha\to\infty$ وتساوي $\frac{1}{2}$ ، فإن التكامل المعتل متقارب وقيمته $\frac{1}{2}$.

مثال (٩) : ادرس تقارب التكامل المعتل :

$$\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} \cos x\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\left[\sin x\right]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty}\sin\alpha$$

إن النهاية $\lim_{\alpha\to\infty}\sin\alpha$ غير موجودة وتتراوح بين [1 + , 1−] ، وبالتالي فالتكامل المعطى متباعد .

وبالطريقة نفسها تماماً يمكننا أن نعرف التكامل المعتل على المجال $(-\infty, a]$.

تعريف (٤) :

إذا كانت نهاية التكامل $\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx$ عندما $\alpha \to -\infty$ موجودة ومحدودة ، عندئذٍ نقول عن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ إنه متقارب ، حيث نكتب :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx \qquad (2.11)$$

وإذا كانت النهاية غير موجودة أو غير محدودة ، فنقول إن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ متباعد ، وبالاعتماد على دستور نيوتن – ليبنتز نكتب :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx = F(a) - \lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha)$$

مثال (١٠) : ادرس تقارب التكامل المعتل :

$$I = \int_{-\infty}^{\ln 2} e^{x}\,dx$$

حسب التعريف (٤) نكتب :

$$\int_{-\infty}^{\ln 2} e^{x}\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{\ln 2} e^{x} = \lim_{\alpha \to -\infty} \left[e^{x} \right]_{\alpha}^{\ln 2}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \left[e^{\ln 2} - e^{\alpha} \right] = e^{\ln 2} - \lim_{\alpha \to -\infty} e^{\alpha} = 2$$

وبما أن النهاية موجودة ومحدودة ، إذاً التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي (2) .

مثال (١١) : ادرس تقارب التكامل المعتل :

$$I = \int_{-\infty}^{0} \cos x \, dx$$

حسب التعريف (٤) نكتب :

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x \, dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \cos x \, dx = \lim_{\alpha \to -\infty} [\sin x]_{\alpha}^{0}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} (\sin 0 - \sin \alpha)$$

$$= - \lim_{\alpha \to -\infty} \sin \alpha$$

إن هذه النهاية غير موجودة وتتراوح بين [1 + , 1−] وبالتالي فالتكامل المعتل متباعد .

تعريف (٥) :

إذا كان التابع $f(x)$ مُعرفاً ومستمراً على المجال $(-\infty, \infty)$ فيمكن اعتبار التكامل المعتل على كل المجال $(-\infty, \infty)$ ، على أنه مجموع تكاملين معتلين ، ومن الشكل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x) \, dx + \int_{a}^{\infty} f(x) \, dx \qquad (2.12)$$

وحيث إن $-\infty < a < \infty$ ، ويكون هذا التكامل المعتل (الشاذ) متقارباً ، إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن من العلاقة (2.12) متقارباً ، وإذا كان التكاملان أو أحدهما متباعداً ، فنقول عن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ إنه متباعد .

ملاحظة (٤) :

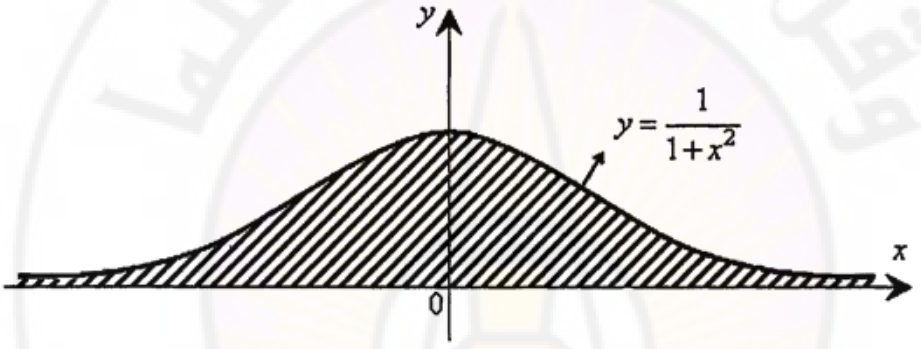
إذا كان التابع الأصلي $F(x)$ للتابع $f(x)$ موجوداً فيمكن كتابة :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \to \infty} F(b) - \lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) \qquad (2.13)$$

ويكون التكامل المعتل متقارباً إذا كانت كلتا النهايتين في الطرف الأيمن من العلاقة (2.13) موجودة ، وإذا كانت إحدى النهايتين على الأقل غير موجودة أو غير محدودة ، فيكون التكامل المعتل متباعداً .

مثال (١٢) : ادرس تقارب وتباعد التكامل المعتل الآتي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$



الشكل (٢-٥)

الحـــل : اعتماداً على العلاقة (2.12) نكتب :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{\alpha} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \left[arctg\, x \right]_{\alpha}^{0} + \lim_{b \to \infty} \left[arctg\, x \right]_{0}^{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \left[arctg\, 0 - arctg\, \alpha \right] + \lim_{b \to \infty} \left[arctg\, b - arctg\, 0 \right]$$

$$= - \lim_{\alpha \to -\infty} \left[arctg\, \alpha \right] + \lim_{b \to \infty} \left[arctg\, b \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ملاحظة (٥) :

يمكن حساب هذا التكامل مباشرة اعتماداً على العلاقة (2.13) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[arctg\, b\right] - \lim_{\alpha\to-\infty}\left[arctg\,\alpha\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

مثال (١٣) : ادرس تقارب وتباعد التكامل المعتل الآتي :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{3x}dx$$

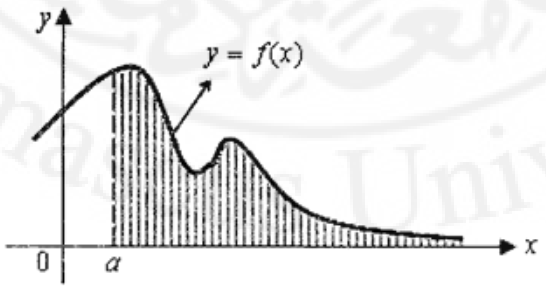
اعتماداً على العلاقة (2.13) نجد :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x}dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[e^{3b}\right] - \frac{1}{3}\lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^{3\alpha}\right] = \infty$$

وبما أن النهاية غير محدودة ، فالتكامل المعطى متباعد ، وهو المطلوب .

والآن لنعطي التفسير الهندسي للتكاملات المعتلة :

إن منحني التابع $y = f(x) \geq 0$ يحدد مع المحور $0x$ ، والمستقيم $x = a$ سطحاً لانهائياً ، كما يبينه الشكل (٢-٦) .



الشكل (٢-٦)

فإذا كان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ متقارباً ، فإن المساحة التي يحددها منحني التابع $y=f(x)$ مع المحور $0x$ ، وعلى يمين المستقيم $x=a$ تكون منتهية ويتقارب منحني التابع $y=f(x)$ من المحور $0x$ وتكون مساحة السطح تساوي إلى نهاية هذا التكامل ، أما إذا كان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ متباعداً ، فتكون المساحة لانهائية .

مثال (١٤) : السطح اللانهائي المحدود بين منحني التابع $y=\frac{1}{x^3}$ والمحور $0x$ والمستقيم $x=a$; $(a>0)$ مساحته محدودة لأن :

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\alpha\to\infty} \int_a^{\alpha} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\alpha\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_a^{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \left[-\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{2a^2} \right] = \frac{1}{2a^2}$$

إذاً ، مساحة السطح اللانهائي لها قيمة محدودة وهي $\frac{1}{2a^2}$.

نشير إلى أن أشكال التكاملات المعتلة المدروسة سابقاً تصادفنا في كثير من المسائل الميكانيكية والتطبيقية .

ثانياً- تكاملات التوابع المنقطعة :

ليكن التابع $y=f(x)$ المعرَّف والمستمر على المجال $[a,b]$ ، والذي يعاني من انقطاع عند النقطة b ، عندئذٍ يمكن القول إن التابع $y=f(x)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,b-\varepsilon]$ ، حيث $\varepsilon>0$ ، وبالتالي فالتكامل $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ موجود من أجل كل ε $(\varepsilon>0)$ ، وقيمة هذا التكامل متعلقة بـ ε ، وبالتالي فهو تابع للمتغير ε ، إذاً لنرمز :

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

ولنجعل ε تسعى إلى الصفر، عندئذٍ إما أن يكون للتكامل $I(\varepsilon)$ نهاية محـــدودة ، أو لا تكون له نهاية ، وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي :

تعريف (٦) :

ليكن التابع $f(x)$ مستمراً من أجل جميع نقاط المجال $[a,b]$ باستثناء النقطـــة b ، أي أن التابع $f(x)$ يعاني من انقطاع في النقطة $x=b$ ، فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad ; \quad \varepsilon > 0 \qquad (2.14)$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة ، فإننا نقول عن التكامل المعتل إنـــه متقـــارب وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية .

أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو غير محدودة ، فإننا نقول عن التكامل المعتل إنه متباعد .

مثال (١٥) : ادرس تقارب وتباعد التكامل الآتي : $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)}$

نلاحظ أن التابع $f(x)=\frac{1}{(1-x)}$ يعاني من انقطاع في النقطة $x = 1$ ، وبالتـــالي اعتماداً على العلاقة (2.14) نجد :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{-dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln|1-x|\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \frac{1}{|1-x|}\right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$$

وبما أن النهاية غير محدودة ، إذاً التكامل المعطى متباعد .

تعريف (٧) :

إذا كان التابع $f(x)$ يعاني انقطاعاً في النقطة $x=a$ من المجال $[a,b]$ ، فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to \infty} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \quad ; \quad \delta > 0 \qquad (2.15)$$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة ، عندئذٍ نقول عن التكامل المعتل إنه متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو غير محدودة ، عندئذٍ نقول عن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ إنه متباعد .

تعريف (٨) :

إذا كان التابع $f(x)$ يعاني من انقطاعين في طرفي المجال (a,b)، فباختيار نقطة داخلية c من المجال (a,b) ، فإننا نجزئ التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ لمجموع تكاملين معتلين من النوع الثاني :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad ; \quad \varepsilon > 0 \ , \ \delta > 0 \qquad (2.16)$$

إذا كانت كل من النهايتين موجودة ومحدودة ، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ متقارب وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية .

أما إذا كانت إحدى هاتين النهايتين ، على الأقل غير موجودة أو غير محدودة ، فإن التكامل المعتل متباعد .

ملاحظة (٦) :

يمكن بأسلوب مشابه ، تعميم هذا التعريف إذا كان التابع $f(x)$ يعاني من انقطاعات في النقاط $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ ، حيث :

$$a < c_1 < c_2 < c_3 < ... < c_k < b$$

عندئذٍ نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)\,dx \qquad (2.17)$$

وتحسب التكاملات في الطرف الأيمن من العلاقة (2.17) بحسب الحالات المدروسة سابقاً .

مثال (١٦) : ادرس تقارب وتباعد التكامل الآتي :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

التابع $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ منقطع في النقطتين $x=1$ و $x=-1$ (في طرفي المجال) ، واعتماداً على العلاقة (2.16) نكتب :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int_{-1+\delta}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \varepsilon > 0 \, , \, \delta > 0$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left[arc\sin x \right]_{-1+\delta}^{0} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[arc\sin x \right]_{0}^{1+\varepsilon}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

النهاية موجودة ومحدودة والتكامل متقارب .

مثال (١٧) : ادرس تقارب وتباعد التكامل الآتي :

$$I = \int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-2)^3}$$

نلاحظ أن التابع $f(x)\dfrac{1}{(x-2)^3}$ يعاني من انقطاع في النقطة $x=2$ والتي تقع ضمن مجال التكامل ، وبالتالي واعتماداً على العلاقة (2.17) نكتب :

$$I=\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^3}=\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x-2)^3}+\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$$

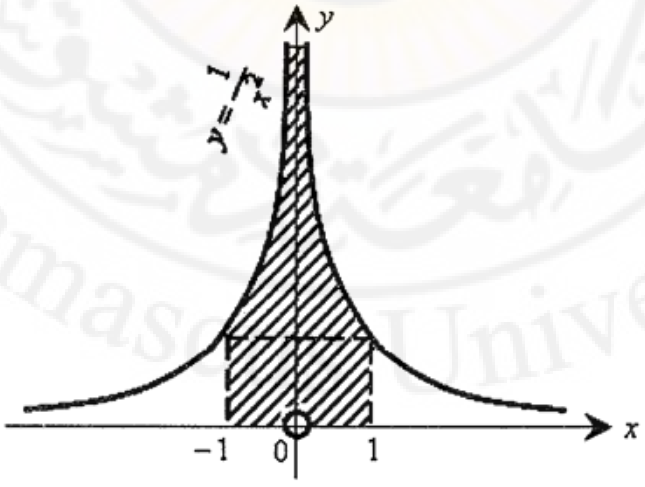
$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^3}+\lim_{\delta\to 0}\int_{2+\delta}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}\quad ;\ \varepsilon>0\ ,\ \delta>0$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[\frac{-1}{2(x-2)^2}\right]_{-1}^{2-\varepsilon}\right\}+\lim_{\delta\to 0}\left\{\left[\frac{-1}{2(x-2)^2}\right]_{2+\delta}^{3}\right\}$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{18}\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2\delta^2}\right)=\infty-\infty$$

والتكامل المعتل متباعد .

مثال (١٨) : احسب قيمة التكامل الآتي : $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$



الشكل (٢-٧)

نلاحظ أن التابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مستمر على المجال $[-1,1]$ ، عدا النقطة $x=0$ ، عندئذٍ نجد :

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{0+\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

حيث :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]=-\infty$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{\delta}-1\right]=\infty$$

وهذا يعني أن التكامل غير معرَّف على المجال $[-1,1]$ ، أي التكامل متباعد .

من المهم أن نلاحظ هنا أننا لو أهملنا ملاحظة انقطاع المستكمل على المجال $[-1,1]$ لحصلنا على نتيجة خاطئة وهي :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2$$

وهي مستحيلة كما يبدو من الشكل (٢-٧) .

مثال (١٩) : ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي α تقارب وتباعد التكامل :

$$I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}\quad ;\quad (a<b)$$

التكامل معتل عند حده الأدنى ، ليكن $\varepsilon>0$ ، نحسب التكامل :

$$\phi(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=$$

$$= \begin{cases} \left[\ln|x-a|\right]_{a+\varepsilon}^{b} = \ln(b-a) - \ln|\varepsilon| \; ; \; \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{a+\varepsilon}^{b} = \dfrac{-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \; ; \; \alpha \neq 1 \end{cases}$$

لنحسب الآن النهاية :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \phi(\varepsilon)$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \phi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\ln(b-a) - \ln\varepsilon\right] = \infty$$

$$\alpha \neq 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \phi(\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{-1}{\alpha - 1}\left[\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \infty \; ; \; \alpha > 1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \; ; \alpha < 1 \end{cases}$$

وعليه ، فإن التكامل المعتل المعطى متقارب فقط في الحالة $\alpha < 1$ ، وقيمته :

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \; ; \; (\alpha < 1)$$

٢-٢-١ اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول :

يكون المطلوب أحياناً معرفة نوع التكامل المعتل دون الحاجة لمعرفة قيمتـــه ، أو أن الحصول على هذه القيمة مستحيل . لذلك سندرس بعض اختبارات تقارب التكاملات المعتلة ، والتي تشبه إلى حدٍ كبير، اختبارات تقارب السلاسل العددية ، وذلك للتكامل المعتل الذي حده الأعلى غير محدود . وبالنسبة إلى التكامل الشاذ الذي حده الأدنى غير محدود ، فإنـــه يُـــرد إلى الحالة السابقة بإجراء تغيير في المتغير $x = -t$ فنحصل على تكامل شاذ حده الأعلـــى غير محدود .

نعطي دون برهان الاختبارات الآتية :

أولاً- اختبار القيمة المطلقة :

إذا غير التابع $f(x)$ إشارته على المجال $[a,\infty)$ ، وكان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ متقارباً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب ، عندئذٍ نسمي تقارب التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ مطلقاً .

ملاحظة (٧) :

إذا كان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارباً وكان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ متباعداً ، فإن التقارب يسمى شرطياً .

مثال (٢٠) : أثبت أن التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ متقارب .

الحل :

نلاحظ أن $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ عندما $x \ge 1$ ، وحسب اختيار المقارنة نلاحظ أن التكامل $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ متقارب ، وبالتالي فإن التكامل $\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ متقارب ، أي أن $\int_1^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2}$ متقارب إطلاقاً . إذاً فالتكامل المعطى متقارب ، وهو المطلوب .

مثال (٢١) : أثبت أن التكامل المعتل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x}$ متقارب .

الحل : لنأخذ التابع :

$$F(P) = \int_0^{P} \frac{\sin x\,dx}{x}$$

$$F(b)=\int_0^1 \frac{\sin x\,dx}{x}+\int_1^P \frac{\sin x\,dx}{x}$$

نكامل بالتجزئة ، نجد :

$$\int_1^P \frac{\sin x\,dx}{x}=-\int_1^P \frac{d\cos x}{x}$$

بفرض :

$$u=\frac{1}{x}\ ;\ du=-\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$dv=d\cos x\ ;\ v=\cos x$$

أي أن :

$$\int_1^P \frac{\sin x\,dx}{x}=-\left[\frac{\cos x}{x}\right]_1^P+\int_1^P \frac{\cos x\,dx}{x^2}$$

$$\int_1^P \frac{\sin x\,dx}{x}=-\frac{\cos P}{P}+\cos 1+\int_1^P \frac{\cos x\,dx}{x^2}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $P\to\infty$:

$$\lim_{P\to\infty}\int_1^P \frac{\sin x\,dx}{x}=-\lim_{P\to\infty}\frac{\cos P}{P}+\cos 1-\lim_{P\to\infty}\int_1^P \frac{\cos x\,dx}{x^2}$$

نلاحظ أن النهاية $\lim_{P\to\infty}\frac{\cos P}{P}=0$ موجودة وكذلك النهايـــة $\lim_{P\to\infty}\int_1^P \frac{\cos x\,dx}{x^2}$ موجودة لأن $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ ، [انظر المثال (٢٠)] .

وبالتالي فإن نهاية $F(P)$ تكون موجودة أيضاً والتكامل المعطى متقارب .

مثال (٢٢) : ادرس تقارب وتقارب للتكامل المعتل :

$$I=\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

نلاحظ أن :

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \forall x \in R$$

وقد برهنا سابقاً في المثال (٦) على أن التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ متقارب ، حيث $\alpha = 2 > 1$ ، وإن التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ متقارب ، وعليه ، فإن التكامل I متقارب بالإطلاق .

مثال (٢٣) : ادرس تقارب وتباعد التكامل المعتل :

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$$

نلاحظ أن التابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ متناوب (يغير إشارته على طول المجال $[1,\infty)$) ، لكن نلاحظ أن : $\frac{|\sin x|}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$

وكذلك نجد أن :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن التكامل $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ متقارب ، حيث $\alpha = 3 > 1$ (درس سابقاً) ، عندئذٍ فإن التكامل $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ متقارب إطلاقاً .

ثانياً- اختبار المقارنة :

آ- **التقارب :** ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين معرَّفين وموجبين على المجال $[a,\infty)$ وقابلين للمكاملة في كل مجال جزئي $[a,b]$ من هذا المجال ، ويحققان الشرط :

$$0 \le f(x) \le g(x) \ ; \ \forall x \ge a$$

عندئذٍ ، إذا كان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متقارباً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^{x} f(x)\,dx$ متقارب .

ب- التباعد : نفرض $g(x) \ge 0$ لجميع $x \ge a$ ، ولنفرض أن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متباعد إذا كانت $f(x) \ge g(x)$ لجميع $x \ge a$ ، عندئذٍ نقول إن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ متباعد .

مثال (٢٤) : ادرس تقارب التكاملين المعتلين :

$$J = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x} \quad , \quad I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$$

١- بما أن :

$$\frac{1}{e^x + 1} \le \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \text{(محققة)}$$

لكن نعلم أن التكامل المعتل $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ متقارب لأن :

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b \to \infty} \left[-e^{-x}\right]_0^{b} = 1 \quad \text{(موجودة ومحدودة)}$$

وبالتالي فإن التكامل المعتل :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$$

متقارب وفق اختبار المقارنة .

٢- كذلك نجد أن :

$$\forall x \geq 2 \;\; ; \;\; \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x}$$

وبما أن التكامل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ متباعد ، [(راجع المثال (٦)] حيث ، $(\alpha = 1)$ ، وبالتالي فإن التكامل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ متباعد .

مثال (٢٥) : ادرس تقارب التكامل المعتل :

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

الحـــل : نلاحظ أن :

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \forall x \geq 1$$

ولكن نعلم أن التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ متقارب [(المثال (٨)] ، لأن $(\alpha = 2 > 1)$ ، وبالتالي فإن التكامل المعتل الآتي متقارب :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

ثالثاً- اختبار القسمة (اختبار المقارنة الثاني) :

لـيكن $f(x)$ و$g(x)$ تـابعين معـرَّفين ومـوجبين علـى المجـال $[a,\infty)$ ، أي $f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ وقابلين للمكاملة في كل مجال جزئي $[a,b]$ من هـذا المجـال ، ووجدت النهاية :

$$A = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

عندئذٍ نميز الحالات الآتية :

آ- إذا كان $0 \neq A < \infty$ ، فإن التكـــاملين المعتلـــين $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ يتقاربان معاً ، أو يتباعدان معاً .

ب- إذا كان $A = 0$ ، وكان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متقارباً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ متقارب .

ج- إذا كان $A = \infty$ ، وكان التكامل المعتل $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متباعداً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متباعد .

ملاحظة (٨) :

هذا الاختبار له ارتباط باختبار المقارنة ، وهو غالباً مفيد جداً بالتبادل معـــه وبوجـــه خاص بأخذ $g(x) = \frac{1}{x^P}$ ، فيكون لدينا من الحقائق المعروفة عن التكامل $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^P}$ ما يأتي :

مبرهنة (٥) :

بفرض $\lim_{x \to \infty} x^P . f(x) = A$ ، فإن :

١- $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ تتقارب إذا كانت $P > 1$ ، والمقدار A محدود .

٢- $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ تتباعد إذا كانت $P \leq 1$ و $A \neq 0$ (ربما تكون A لا متناهية) .

مثال (٢٦) : ادرس تقارب وتباعد التكاملين المعتلين :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{4x^4+25} \quad ; \quad \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

الحـــل : لدراسة تقارب وتباعد التكاملات المعتلة نطبق المبرهنة (٥) :

$$\lim_{x\to\infty} x^2.\frac{x^2}{4x^4+25} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{4x^4+25} = \frac{1}{4}$$

وحسب المبرهنة (٥) ، بما أن $P=2>1$ ، والمقدار $A=\frac{1}{4}$ ، إذاً التكامل المعتل الآتي متقارب :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{4x^4+25}$$

وبالطريقة السابقة نفسها نجد أن :

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})}}\right]$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}} = 1$$

وهنا نلاحظ أن $P = 1$ ، والمقدار $A=1\neq 0$. إذاً التكامل الآتي متباعـد حسب المبرهنة (٥) :

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

مثال (٢٧) : ادرس تقارب وتباعد التكامل المعتل :

$$\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+2x^2+1}}$$

الحـــل : اعتماداً على اختبار المقارنة ، وبمقارنة التكامل المعطى مع التكامـل المعتـل المتباعد [والذي تمت دراسته في المثال (٦)] . حيث $(\alpha = 1)$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

ومن ناحية ثانية نجد أن :

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+2x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})}} = 1 \neq 0$$

وبما أن $A = 1 \neq 0$ ، فحسب اختبار المقارنة نجد أن التكاملات من طبيعة واحـدة ، وبالتالي التكامل المعتل المعطى متباعد .

٢-٢-٢ اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني :

نعطي دون برهان بعض اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني ، والتـي تشبه إلى حد كبير اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول . وسوف نعطي هـذه الاختبارات في حال كون التابع $f(x)$ غير محدود عند النقطة $x = a$. وتعطـى اختبـارات مماثلة إذا كان التابع $f(x)$ غير محدودة عند النقطة $x = b$ ، أو عند النقطة $x = c$ ، حيث :

$$a < c < b$$

أولاً- اختبار المقارنة :

آ- التقارب : إذا فرضنا $g(x) \geq 0$ عندما $a < x \leq b$ ، ولنفـرض أن التكامـل المعتل $\int_a^b g(x)\,dx$ متقارب ، عندئذٍ ، إذا كانت $0 \leq f(x) \leq g(x)$ عندما $a < x \leq b$ ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ أيضاً متقارب .

ب- التباعد : إذا فرضنا $g(x) \geq 0$ عندما $a < x \leq b$ ، ولنفرض أن التكامل المعتل $\int_a^b g(x)\,dx$ متباعد ، عندئذٍ ، إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ عندما $a < x \leq b$ ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ أيضاً متباعد .

مثال (٢٨) : ادرس تقارب وتباعد التكامل المعتل :

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

الحـــل : نلاحظ أن :

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} < \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \quad ; \ \forall x > 1$$

لكن نلاحظ أن التكامل المعتل $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ منقطع في النقطة $x = 1$ وهو متقارب لأن:

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\delta \to 0} \int_{1+\delta}^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\delta \to 0} \left[(x-1)^{\frac{1}{2}} \right]_{1+\delta}^5$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left[2 - \sqrt{\delta} \right] = 2$$

بما أن النهاية موجودة ومحدودة ، إذاً التكامل فعلاً متقارب .

وبالتالي ، واعتماداً على اختبار المقارنة يكون التكامل $I = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$ متقارب .

مثال (٢٩) : ادرس تقارب وتباعد التكامل الآتي :

$$I = \int_3^5 \frac{\ln x\,dx}{(x-3)^4}$$

الحـــل : نلاحظ أن :

$$\frac{\ln x}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4} \quad ; \forall x > 3$$

ونلاحظ أن التكامل المعتل $\int_3^5 \frac{dx}{(x-3)^4}$ منقطع في النقطة $x = 3$ ، ومن ناحية ثانية نجد :

$$\int_3^5 \frac{dx}{(x-3)^4} = \lim_{\delta \to 0} \int_{3+\delta}^5 \frac{dx}{(x-3)^4} = -\frac{1}{3} \lim_{\delta \to 0} \left[(x-3)^{-3} \right]_{3+\delta}^5$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{\delta^3} \right] = \infty$$

نلاحظ أن النهاية غير محدودة ، وبالتالي فإن التكامل متباعد ، وحسب اختيار المقارنة نجد فعلاً أن التكامل $I = \int_3^5 \frac{\ln x \, dx}{(x-3)^4}$ متباعد .

ثانياً- اختبار القسمة (اختبار المقارنة الثاني) :

إذا كان التابعين $f(x)$ و $g(x)$ معرَّفين وموجبين على المجال $(a,b]$ ، أي :

$f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ وقابلين للمكاملة على أي مجال جزئي من هذا المجال ، ووجدت النهاية :

$$A = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

فإننا نميز الحالات الآتية :

آ- إذا كانت $0 \neq A < \infty$ ، فإن التكاملين المعتلين $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ يتقاربا معاً أو يتباعدا معاً .

ب- إذا كانت $A = 0$ ، وكان التكامل المعتل $\int_a^b g(x)\,dx$ متباعداً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ متقارب .

ج- : إذا كانت $A=\infty$ ، وكان التكامل المعتل $\int_a^b g(x)\,dx$ متباعداً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعد .

مبرهنة (٦) // تقبل من دون برهان // :

بفرض $A=\lim_{x\to a^+}(x-a)^P f(x)$ ، عندئذٍ نميز حالتين :

١- يتقارب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ إذا كانت $P<1$ ، والمقدار A مقداراً محدداً .

٢- يتباعد التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ إذا كانت $P\geq 1$ و $A\neq 0$ (ربما يكون A لا متناهي) .

مثال (٣٠) : ادرس تقارب وتباعد التكامل الآتي :

$$I=\int_4^6 \frac{dx}{x^2-7x+12}$$

الحـــل :

التكامل I معتل عند حده الأدنى ، ولما كان التكامل المعتل $J=\int_4^6 \frac{dx}{(x-4)}$ متباعد لأن :

$$J=\int_4^6 \frac{dx}{x-4}=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{4+\delta}^6 \frac{dx}{x-4}=\lim_{\delta\to 0^+}\left[\ln|x-4|\right]_{4+\delta}^6$$

$$=\lim_{\delta\to 0^+}[\ln 2-\ln\delta]=\infty$$

والآن لنطبق اختبار القسمة الثاني نجد :

$$A = \lim_{x\to 4}\left[\frac{\frac{1}{(x^2-7x+12)}}{\frac{1}{(x-4)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-3)} = 1 \neq 0$$

واعتماداً على الحالة الأولى نجد أن التكامل I متباعد .

ثالثاً- اختبار القيمة المطلقة :

إذا غيّر التابع $y = f(x)$ إشارته على المجال $(a,b]$ ، وكان التكامل المعتل $\int_a^b |f(x)|dx$ متقارباً ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارب ، عندئذٍ نسمي تقارب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ تقارباً مطلقاً .

ملاحظة (٩) :

إذا كان التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً ، وكان التكامل المعتل $\int_a^b |f(x)|dx$ متباعداً ، فإن التقارب يسمى شرطياً .

مثال (٣١) : ادرس التقارب المطلق والشرطي للتكامل المعتل الآتي :

$$I = \int_{\pi}^{4}\frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}}$$

الحـــل : لما كان :

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x-\pi}} \quad ; \quad x > \pi$$

وكان التكامل $\int_{\pi}^{4\pi} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-\pi}}$ متقارباً [يترك البرهان للطالب ، حيث $\alpha = \frac{1}{4} < 1$]

فإن التكامل المعتل $\int_{\pi}^{4\pi} \left| \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x-\pi}} \right| dx$ متقارب ، وعليه فالتكامل I المعطى متقارب مطلقاً.

مثال (٣٢) : أثبت أن التكامل المعتل :

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$ متقارب شرطياً .

الحـــل : نعوض في التكامل $x = \frac{1}{t}$ ، فنجد $I = + \int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\sin dt}{t}$ ، وهذا التكامل متقارب شرطياً (يترك إثباته للطالب) .

٢-٢-٣ التكاملات المعتلة من النوع الثالث :

التكاملات المعتلة من النوع الثالث يمكن التعبير عنها بدلالة التكاملات المعتلـــة مـــن النوع الأول والثاني ، وذلك تؤول دراسة هذا النوع إلى النوعين السابقين .

مثال (٣٣) : ادرس تقارب وتباعد التكامل الآتي :

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{(x\cos x - \sin x)\,dx}{x^2}$$

الحـــل :

التكامل I معتل من النوع الثالث ، لأن مجال المكاملة غير محدودة . والدالة المكاملة غير معرّفة عند النقطة $x = 0$. نجزئ التكامل المعتل إلى تكاملين :

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{(x\cos x - \sin x)\,dx}{x^2} + \int_{\pi}^{\infty} \frac{(x\cos x - \sin x)\,dx}{x^2}$$

التكامل الأول معتل من النوع الثاني ، والتكامل الثاني معتل من النوع الأول ، ندرس كل تكامل على حدة .

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(x\cos x-\sin x)\,dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{\pi} d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]_{0+\varepsilon}^{\pi}=-1$$

أي هذا التكامل متقارب .

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{(x\cos x-\sin x)\,dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_{\pi}^{b} d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\pi}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\sin b}{b}-\frac{\sin\pi}{\pi}\right]=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin b}{b}=0$$

وبما أن النهاية موجودة ومحدودة ، وبالتالي التكامل متقارب .

وعليه نستنتج أن التكامل I متقارب وقيمته :

$$I=-1+0=-1$$

٢-٣ التطبيقات الهندسية للتكامل المحدد :

من التطبيقات الهامة للتكاملات المحددة :

آ- حساب مساحة سطح مستوٍ .

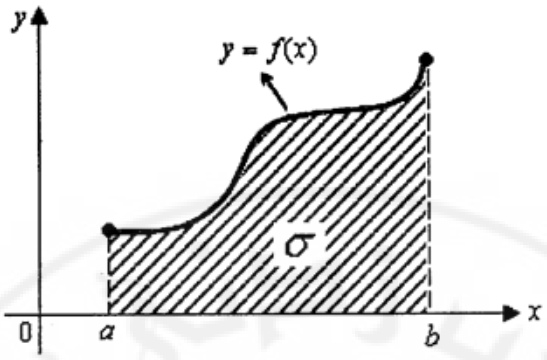
ب- أطوال الخطوط المنحنية .

ج- حجوم الأجسام الدورانية

د- حجوم السطوح الدورانية .

٢-٣-١ حساب مساحة السطوح المستوية :

آ- إذا كان التابع $f(x)$ معرّفاً ومستمراً على المجال المغلق $[a,b]$ ، ويأخذ قيماً موجبة فقط في ذلك المجال ، فإننا بالتالي سنحسب مساحة السطح σ من المستوي المحدد بمنحني التابع $y=f(x)$ ، والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ ، ومحور السينات $(y=0)$ ، والموضح على الشكل (٢-٨) .



الشكل (٢-٨)

إن σ تمثل مجموعة النقاط $(x\,,y)$ والتي تحقق المتراجحات :

$$a \le x \le b \quad , \quad 0 \le y \le f(x)$$

لهذه الغاية ، نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالات جزئية وفق النقاط :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

وبفرض أن M_i و m_i تمثلان القيمتان العظمى والصغرى للتابع $f(x)$ في مجال مثل $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ ، عندئذٍ ، واستناداً إلى مجاميع داربو يكون :

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$

واضح أن $s \le \sigma \le S$ ، أي أن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \sigma \le \int_a^b f(x)\,dx$$

وبالتالي :

$$\sigma = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2.18)$$

وهذا الدستور يستخدم لحساب المنطقة المستوية σ

مثال (٣٤) : احسب مساحة السطح المحصور ضمن القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

الحـــل : بفرض أن I هو نصف مساحة السطح ، عندئذٍ نجد أن :

$$\sigma = 2\,I$$

واعتماداً على العلاقة (2.18) نكتب :

$$\sigma = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\;dx$$

نجري تغييراً في المتغير من الشكل : $x = a\cos t$

وبالتالي :

$$dx = -\,a\sin t\,dt$$
$$x = -\,a \;\;;\;\; t = \pi$$
$$x = a \;\;\;\;;\;\; t = 0$$

أي :

$$\sigma = 2\int_{\pi}^{0} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\;(-a\sin t)\,dx$$

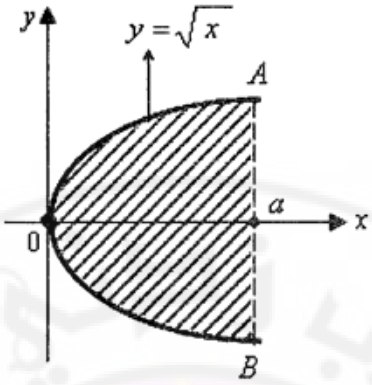
$$= 2\int_{0}^{\pi} a.b\sin^2 t\,dt = 2a.b\int_{0}^{\pi}\frac{(1-\cos 2t)\,dt}{2}$$

$$= 2a.b\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \pi\,a.b$$

مثال (٣٥) : احسب مساحة السطح المحدودة بالمنحني $x = y^2$ ، والمستقيم $x = a$ ، والموضح على الشكل (٢-٩) .

الحـــل :

بما أن المساحة المحدودة بالمنحنيات المذكورة متناظرة بالنسبة إلى محور السينات ، فإنه يكفي حساب مساحة الجزء العلوي $0Aa$ من المساحة وضربه بـ 2 .

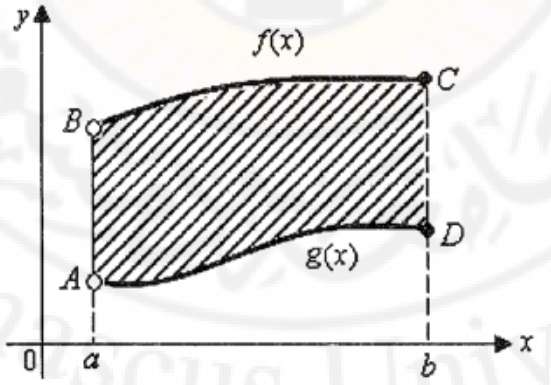


الشكل (٢-٩)

إذن :

$$S = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{x}\;dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^a = \frac{4}{3}\sqrt{a^3}$$

ب- إذا كان المطلوب حساب المساحة المحصورة بين منحنيي التابعين $f(x)$ و$g(x)$ والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ وكان $f(x)>g(x)$ على طول المجال $[a,b]$ كما هو موضح على الشكل (٢-١٠) ، فإننا نستخدم العلاقة الآتية :



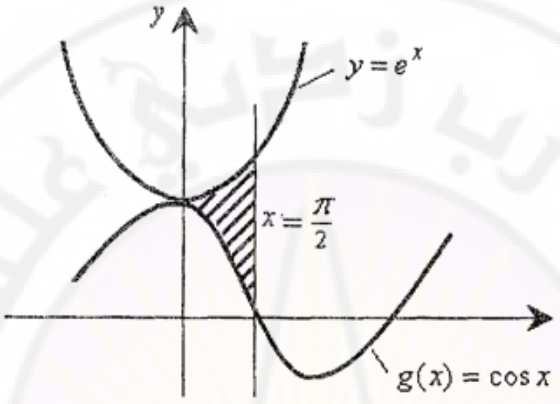
الشكل (٢-١٠)

$$\sigma = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \qquad (2.19)$$

مثال (٣٦) : احسب مساحة السطح المحصور بين منحني :

التابعين : $f(x)=e^x$, $g(x)=\cos x$ ، والمستقيمين : $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$

والشكل (٢-١١) يوضح ذلك .

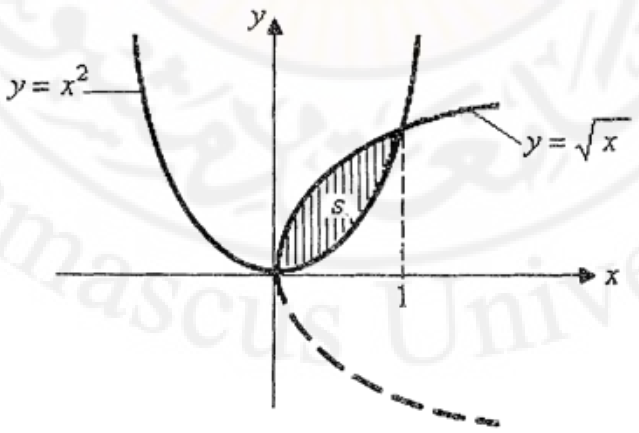


الشكل (٢-١١)

الحـــل : في هذا المثال نجد أن $e^x > \cos x$ ، وبالتالي :

$$S=\int_0^{\pi}(e^x-\cos x)\,dx=\left[e^x-\sin x\right]_0^{\pi/2}=e^{\pi/2}-2$$

مثال (٣٧) : احسب المساحة المحصورة بين المنحنيين $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$.



الشكل (١٢)

الحـــل : لنوجد نقاط تقاطع المنحنيين $f(x)$, $g(x)$. من أجل ذلك نكتب :

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

عندئذٍ نجد أن المنحنيين متقاطعين في النقطتين :

$$x = 1 \quad \text{أو} \quad x = 0$$

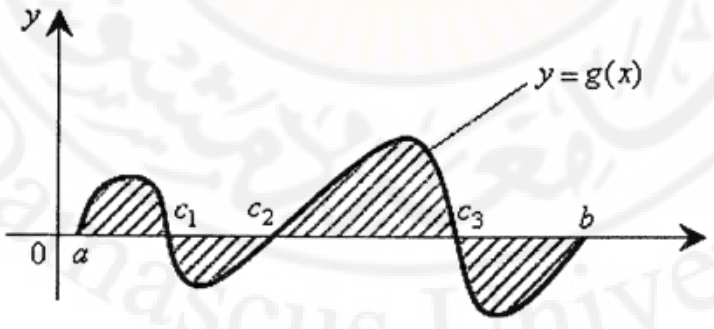
عندئذٍ فالمساحة المطلوبة هي :

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ج- إذا غير التابع $f(x)$ إشارته على مجال التكامل $[a,b]$ ، الـشكل (٢-١٢) ، عندئذٍ فإن المساحة S تعطى بالشكل الآتي :

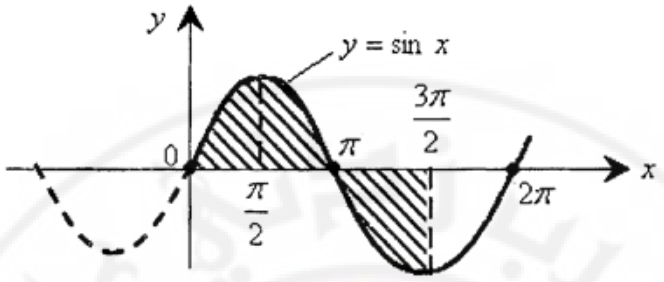
$$S = \int_a^{c_1} f(x)\,dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx - \int_{c_3}^{b} f(x)\,dx \qquad (2.20)$$



الشكل (٢-١٣)

مثال (٣٨) : احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابع $y = \sin x$ ومحور السينات $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

والموضح على الشكل (٢-١٤) .



الشكل (٢-١٤)

الحـــل : إن مساحة السطح S تمثل مجموع المساحتين S_1 , S_2 ، واعتماداً على العلاقة (2.20) نجد :

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \left[-\cos x\right]_{\pi}^{3\pi/2} = 3$$

د- إذا أردنا حساب المساحة المحدودة بالمنحني الممثل وسيطياً بالمعادلتين :

$$x = \varphi(t) \ , \ y = \psi(t)$$

وبالتالي نجد أنه إذا كان :

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt \ ; \ t_1 \le t \le t_2$$

بالتعويض ي المعادلة (2.18) نجد :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t).\varphi'(t)\,dt \qquad (2.21)$$

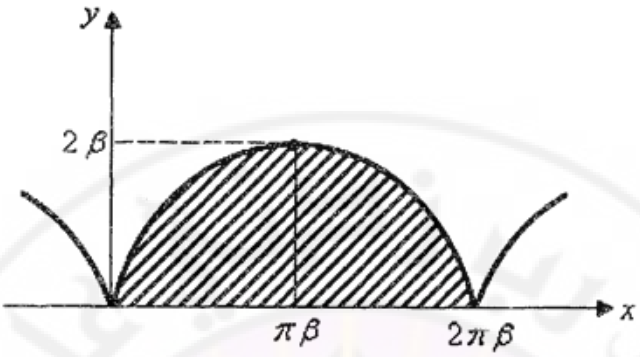
حيث t_2 , t_1 قيمتا الوسيط t المقابلتان للنقطتين a و b في الإحداثيات الديكارتية أي أن :

$$a = \varphi(t_1) \ , \ b = \varphi(t_2)$$

مثال (٣٩) : احسب المساحة المحصور بين منحني السيكلوئيد :

$$x = \beta(t - \sin t) \ , \ y = \beta(1 - \cos t)$$

ومحور السينات ، وذلك من أجل $0 \le t \le 2\pi$.



الشكل (٢-١٥)

الحـــل : إن المساحة المطلوبة هي :

$$S = \int_0^{2\pi} \beta^2 (1-\cos t)\,(1-\cos t)\,dt$$

$$= \beta^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt$$

$$= \beta^2 \int_0^{2\pi} [1 - 2\cos t + \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)]\,dt$$

$$= \beta^2 \left[\tfrac{3}{2}\,t - 2\sin t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi\beta^2$$

هـ- في كثير من الأحيان يُعبّر عن معادلة المنحني بالإحداثيات القطبية بالشكل $r = g(\theta)$ حيث $g(\theta)$ تابع مستمر على المجال $\alpha \le \theta \le \beta$ ولحساب مساحة القطاع $0AC$ المحدد بالمنحني $r = g(\theta)$ وبنصفي القطرين الشعاعيين :

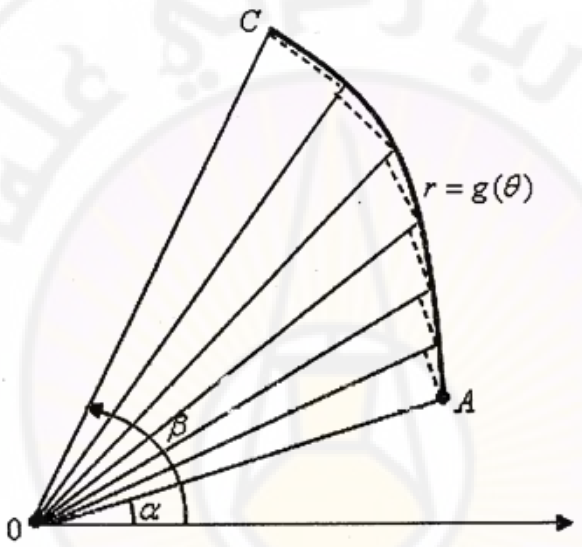
$$r_2 = g(\beta) \quad , \quad r_1 = g(\alpha)$$

نقسم القطاع $0AC$ إلى n قطاعاً جزئياً بوساطة الأشعة المحددة للزوايا :

$$\alpha = \theta_0 , \theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n = \beta$$

ولنفرض أن : $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, ..., \Delta\theta_n$ هي الزوايا بين أنصاف الأقطار لشعاعية هذه ، ولنفرض أن كل نصف قطر شعاعي يلاقي المنحني $r = g(\theta)$ في نقطة احدة فقط سوف نعتبر وبشكل تقريبي أن كل قطاع من هذه القطاعات هو عبارة عن قطاع ائري ، عندئذٍ تكون مساحة كل قطاع جزئي مساوٍ إلى :

$$\frac{1}{2} r_i^2 \theta_i \ , \ i = 1,2,3,...,n$$



الشكل (٢-١٦)

وبالتالي يكون مجموع مساحات القطاعات الجزئية هو S_n :

$$S_n \approx \frac{1}{2} g^2(\theta_1)(\theta_1 - \theta_0) + \frac{1}{2} g^2(\theta_2)(\theta_2 - \theta_1) + \\ + ... + \frac{1}{2} g^2(\theta_n)(\theta_n - \theta_{n-1})$$

$$S_n \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} g^2(\theta_i) \Delta\theta_i$$

حيث :

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1} \ ; \ i = 1,2,...,n$$

نلاحظ أن هذه العبارة تزداد دقة كلما صغرت $\Delta\theta_i$ وبالتالي إذا ازداد عدد التقسيمات n إلى اللانهاية عندها نحصل على المساحات الحقيقية للقطاع وتعطى بالعلاقة :

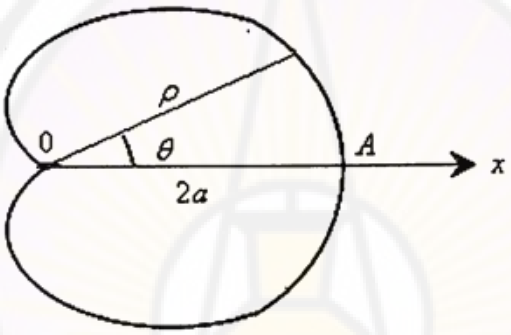
$$S = \tfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g^2(\theta_i)\Delta\theta_i$$

أو بالشكل :

$$S = \tfrac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \quad ; \quad r = g(\theta) \qquad (2.22)$$

وهذا الدستور يمثل مساحة القطاع بالإحداثيات القطبية

مثال (٤٠) : احسب مساحة الكاريوئيد المعين بالمعادلة : $\rho = a(1+\cos\theta)$; $a > 0$



الشكل (٢-١٧)

الحـــل : إن منحني الكاريوئيد متناظر بالنسبة إلى المحور القطبي ، وبالتالي :

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \rho^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{0}^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{0}^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\theta \Big|_{0}^{2\pi} + 2\sin\theta \Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta\Big|_0^{2\pi} + 2\sin\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\,\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{3\pi a^2}{2}$$

مثال (٤١) : احسب مساحة السطح المحصور بالمنحني المغلق :

$$r = a\cos 3\theta \;\; ; \;\; a > 0$$

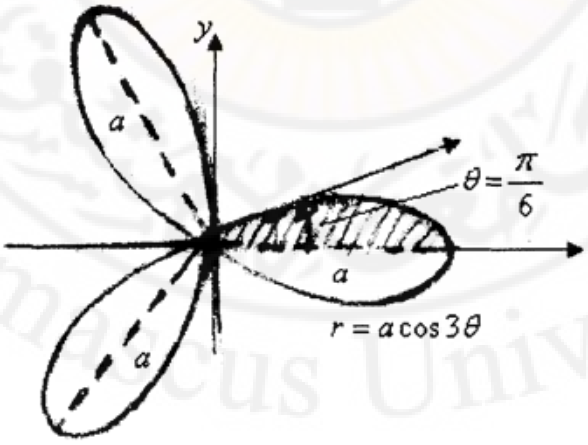
الحـــل :

نسمي هذا المنحني بالورقة الثلاثية ، والسطح المحصور بهذا المنحني يـساوي سـتة أمثال قطعة السطح المخططة ، والتي توافق تحولاً لـ θ من 0 وحتى $\frac{\pi}{6}$ ، وبالتالي نجد أن :

$$S = 6\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\,a^2\cos^2 3\theta\, d\theta = a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

وهو المطلوب .

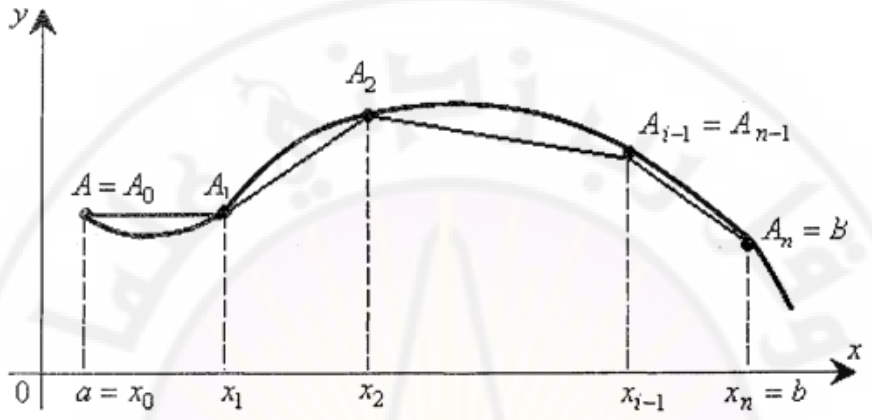
والشكل (٢-١٨) يوضح ذلك .



الشكل (٢-١٨)

٢-٣-٢ أطوال الخطوط المنحنية (طول القوس) :

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ قابلاً للاشتقاق على المجال $[a,b]$ وليكن l منحني هذا التابع ، الشكل (٢-١٩) .



الشكل (٢-١٩)

نحسب طول القوس l المحصور بين المستقيمين $x = a$, $x = b$

لنقسم المجال $[a,b]$ إلى n من الأجزاء بوساطة النقاط :

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

ولنرمز بـ Δx_i للفرق $x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,3,...,n)$ ، ولنمرر من نقاط التجزئة مستقيمات شاقولية توازي المحور $0y$ فتتقاطع مع المنحني AB بالنقاط :

$$A\ ,A_1\ ,A_2\ ,A_3\ ,\ ...\ A_{n-1}\ ,\ A_n$$

عندئذٍ يتجزأ هذا المنحني لـ n جزء ، نرسم الخط المنكسر، الشكل (٢-١٩) :

$$AA_1A_2\ \ ...\ A_{n-1}\ \mathrm{B}$$

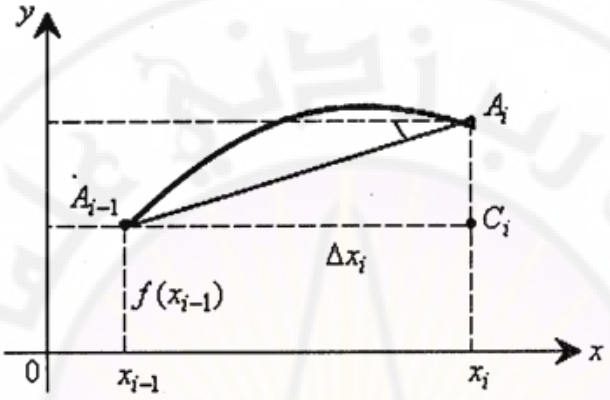
نلاحظ أن مجموع أطوال القطع :

$$A_0A_1\ ,\ A_1A_2\ ,\ ...,\ A_{n-1}\ \mathrm{B}$$

يمثل قيمة تقريبية لطول القوس AB ، وكلما كبرت n وصغر طول أكبر هذه القطع ، فإن قيمة هذا المجموع تقترب من الطول الحقيقي للقوس ، ولذلك فإن طول القوس AB والذي رمزنا له بالرمز l يكون كما يلي :

$$l = \lim_{n\to\infty} \left[|\overline{A_0A_1}| + |\overline{A_1A_2}| + \ldots + |\overline{A_{n-1}B}| \right]$$

ولحساب هذه النهاية ، سوف نحسب طول واحدة لا على التعيين من هذه القطع ، ولتكن طول القطعة $|A_{i-1} - A_i|$ ، الشكل (٢-٢٠) .



الشكل (٢-٢٠)

في المثلث $A_{i-1}\,A_i\,C_i$ لدينا :

$$|A_{i-1}\,A_i| = \sqrt{|A_{i-1}C_i|^2 + |C_iA_i|^2} =$$

$$= \left\{ (\Delta x_i)^2 + \left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ (\Delta x_i)^2 \left[1 + \frac{\left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right]^2}{(\Delta x_i)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\Delta x_i) \left\{ 1 + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

بما أن التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[x_{i-1}\,,\,x_i]$ ، إذاً توجد نقطة مثل ξ_i تحقق مبرهنة لاغرانج على هذا المجال ، أي أن :

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} = f'(\xi_i) \;\; ; \;\; x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

عندئذٍ نجد :

$$| A_{i-1}A_i | = \Delta x_i \left[1 + f'^2(\xi_i)\right]^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي يكون :

$$l = \lim_{n \to \infty} \left[|\overline{A_0A_1}| + |\overline{A_1A_2}| + \ldots + |\overline{A_{n-1}B}| \right]$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left[\sqrt{1 + f'^2(\xi_1)}\ (\Delta x_1) + \ldots + \sqrt{1 + f'^2(\xi_n)}\ (\Delta x_n) \right]$$

نلاحظ أن نهاية هذا المقدار هو تكامل محدد للتابع $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ على المجال $[a,b]$ ، ومنه :

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ dx \qquad (2.23)$$

وهي العلاقة التي يمكن بوساطتها أن نحسب طول القوس بالإحداثيات الديكارتية .

أما إذا كان المنحني AB معطى وسيطياً بالعلاقات :

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)\ ;\ t_1 \le t \le t_2$$

حيث $x(t)$, $y(t)$: توابع مستمرة هي ومشتقاتها $x'(t)$, $y'(t)$ على المجال $[t_1, t_2]$ و $x'(t) \neq 0$ في هذا المجال ، وتتغير t من t_1 إلى t_2 عندما تتغير $x(t)$ من a إلى b ، وحيث إن $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$ ، فإن طول القوس AB يعطى بالعلاقة الآتية :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt \qquad (2.24)$$

حيث t_1 , t_2 : قيمتا الوسيط t البدائية والنهائية .

ويمكنا استنتاج هذه العلاقة بإجراء تغيير في المتغير ، وحيث $x = x(t)$ و $y = y(t)$ وحيث $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ و $dx = x'(t)\,dt$ ، نبدل في العلاقة (2.23) فنحصل على المطلوب .

أما إذا كان المنحني معطى بإحداثيات قطبية ومن الشكل الآتي :

$$\theta_2 \le \theta \le \theta_1 \ , \quad \rho = \rho(\theta)$$

فيمكن اعتباره معطى بالمعادلتين الوسيطيتين الآتيتين :

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta$$

بالاشتقاق والتعويض في العلاقة (2.24) نجد أن :

$$dx = (r'\cos\theta - r\sin\theta)\,d\theta$$
$$dy = (r'\sin\theta + r\cos\theta)\,d\theta$$

وبالتالي ، فإنه يمكن حساب طول القوس المعطى بالإحداثيات القطبية بالعلاقة الآتية :

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\ d\theta \ ; \quad \theta_1 < \theta_2 \qquad (2.25)$$

حيث θ_2 , θ_1 : قيمتا θ الابتدائية والنهائية الموافقتان لبداية ونهاية الطول l من المنحني .

مثال (٤٢) : احسب طول قوس المنحني المعطى بالمعادلة الآتية :

$$y = \frac{2}{3}\,x^{3/2}$$

وذلك في المجال [8 , 0] .

المنحني للتابع معطى بالإحداثيات الديكارتية ، نطبق العلاقة (2.23) فنجد :

$$l = \int_0^8 \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

$$y' = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\,x^{1/2} = \sqrt{x}$$

وبالتالي :

$$l = \int_0^8 \sqrt{1+x}\ dx = \int_0^8 (1+x)^{1/2}\,d(x+1)$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\left[(9)^{3/2}-1\right] = \frac{52}{3}$$ وحدة طول

مثال (٤٣) : احسب طول منحني الاستروئيد المعين بمعادلته الديكارتية الآتية :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

الحـــل : بالاشتقاق نجد أن :

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$$

ومنه نجد :

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

لنحسب طول ربع منحني الاستروئيد $\frac{l}{4}$ بالدستور الآتي :

$$\frac{l}{4} = \int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

وبالإصلاح نجد أن طول المنحني :

$$l = 4\int_0^a \frac{a^{1/3}dx}{x^{1/3}} = 4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}dx$$

$$l = 6a^{1/3}\left[x^{2/3}\right]_0^a \Rightarrow l = 6a$$

مثال (٤٤) : احسب طول منحني السيكلوئيد المعين بالمعادلتين الآتيتين :

$$x = a(t-\sin t)\ ;\ y = a(1-\cos t)\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

الحـــل : بالاشتقاق نجد أن :

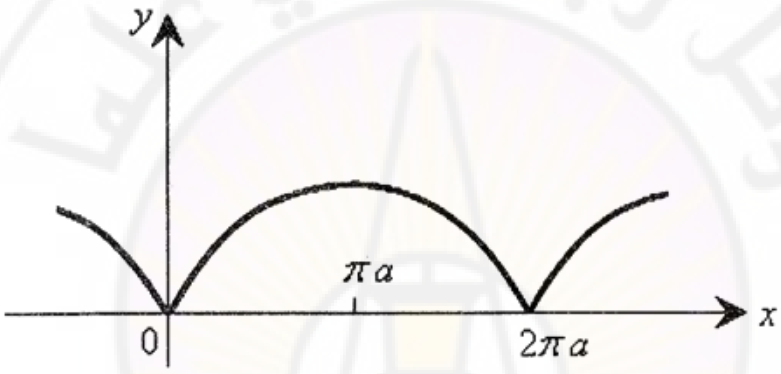
$$x'(t) = a(1-\cos t)\ ;\ y'(t) = a\sin t$$

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

نعوض الآن في قانون حساب طول قوس منحني:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$$

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a$$ وحدة طول



الشكل (٢-٢١)

مثال (٤٥) : احسب طول قوس الدائرة .

الحـــل : إن معادلة الدائرة بالإحداثيات الديكارتية هي :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

بالانتقال إلى الإحداثيات الوسيطية ، أي :

$$x = R\cos t \ ; \ \ y = R\sin t$$

فإن محيط الدائرة يرسم من $t = 0$ وحتى $t = 2\pi$ ، أي :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\ dt = R \int_0^{2\pi} dt$$

$$l = R\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi R$$

ملاحظة (١٠) :

إذا كان المنحني فراغياً ومعطى وسيطياً بالعلاقات الآتية :

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)\ ;\ z = z(t)\ ;\ t_1 \le t \le t_2$$

وحيث إن مشتقات التوابع $z(t), y(t), x(t)$ مستمرة على المجال $[t_1, t_2]$ فإن طول هذا المنحني يعطى بالعلاقة الآتية :

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\ dt \qquad (2.26)$$

مثال (٤٦) : احسب طول اللولب الدائري :

$$x = a\cos t\ ;\ y = a\sin t\ ;\ z = amt\ ;\ 0 \le t \le 2\pi\ ;\ (a, m \in R^+)$$

الحـــل : نشتق كلاً من x, y, z بالنسبة لـ t ، نجد :

$$x_t' = -a\sin t\ ;\ y_t' = a\cos t\ ;\ z_t' = am$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\ dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\ dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}$$

مثال (٤٧) : احسب طول الكارديوئيد :

$$\rho = a(1+\cos\theta)\ ;\ a > 0$$

الحـــل :

بما أن الكارديوئيد متناظر بالنسبة للمحور القطبي ، فإننا نحسب طول نصفه ، أي من أجل $\theta = 0$ وحتى $\theta = \pi$ ، وبالتالي ووفقاً للعلاقة (2.24) نجد :

$$\frac{l}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\ d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\ d\theta = a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\ d\theta$$

لكن :

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

وبالتالي :

$$\frac{l}{2} = a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\frac{l}{2} = 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 4a$$

أي أن :

وحدة طول $l = 8a$

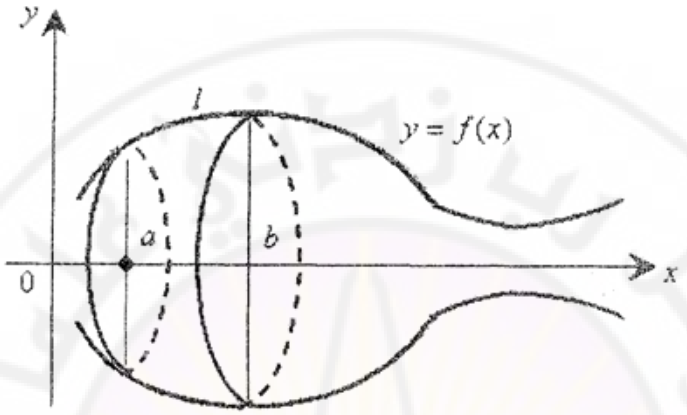
٢-٣-٣ حساب حجم جسم دوراني :

إن حجم الجسم الناتج عن دوران سطح مستوٍ محدود بالمنحني $y = f(x)$ وبالمستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، حول المحور $0x$ يعطى بالعلاقة الآتية :

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx \qquad (2.27)$$

بالمثل ، فإن حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور $0y$ للسطح المحدود بالمنحني $x = \varphi(y)$ وبالمستقيمين $y = \alpha$ و $y = \beta$ يعطى بالعلاقة الآتية :

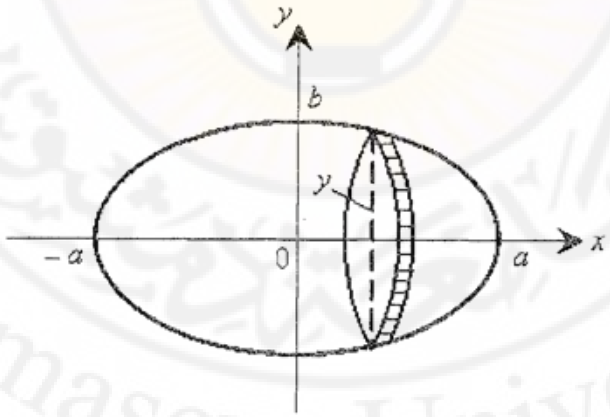
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dy \qquad (2.28)$$



الشكل (2-22)

مثال (48) : احسب حجم المجسم الدوراني المتولد عن دوران نصف القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{حول } 0x$$



الشكل (2-23)

الحـــل : نلاحظ أن الشكل المعطى متناظر بالنسبة إلى المحور $0y$ ، وبالتالي نكتب :

$$V = 2 \int_{0}^{a} \pi y^2 dx$$

ولكن من معادلة القطع الناقص المعطاة نجد أن :

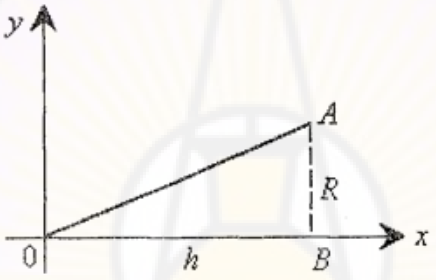
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ومنه يكون :

$$V = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi . b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

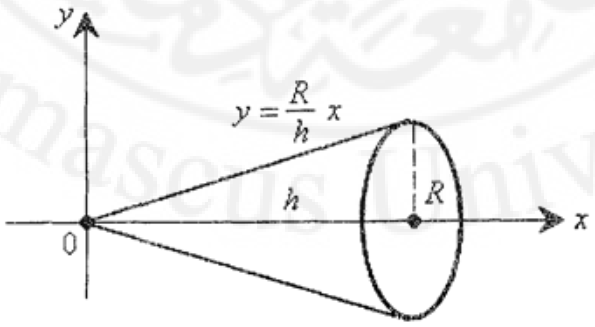
$$V = \frac{4\pi\, a . b^2}{3} \qquad \text{(وحدة حجم)}$$

مثال (٤٩) : احسب حجم المخروط المبين على الشكل (٢-٢٤) :



الشكل (٢-٢٤)

إن المخروط ينتج عن دوران المثلث $0AB$ حول المحور $0x$ ، فإذا رمزنا بـ R لنصف قطر قاعدة المخروط ، و بـ h لارتفاعه ، الشكل (٢-٢٥) ، عندئذٍ ستكون معادلة المولد $y = \frac{R}{h}x$.



الشكل (٢-٢٥)

وحدود التكامل هي من 0 وحتى h ، وبالتالي واعتماداً على (2.27) يكون حجم المخروط :

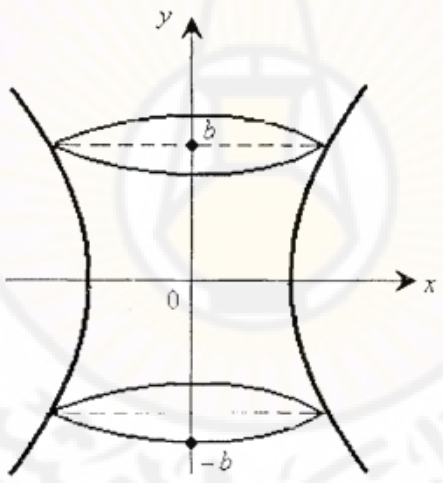
$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2}\, x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^3}{3h^2}\, x^3 \Big|_0^h$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3} R^2 . h$$

مثال (٥٠) : احسب حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور $0y$ للسطح المحدود بالقطع الزائد :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

انظر إلى الشكل (٢-٢٦) وذلك عندما تتغير V من $-b$ إلى b .



الشكل (٢-٢٦)

الحـــل : استناداً إلى العلاقة (2.28) نجد أن :

$$V = \pi \int_{-b}^{b} x^2 dy \quad ; \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (y^2 + b^2)\, dy = \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[\frac{y^3}{3} - b^2 y \right]_0^b$$

$$V = \frac{8}{3}\pi a^2 b$$

٢-٣-٤ حساب مساحة السطوح الدورانية :

نعطي من دون أية براهين ، العلاقات التي تمكننا من حساب مساحة السطح الناتج عن دوران قوس AB من منحني التابع $y = f(x)$ في المجال $[a,b]$ حول المحور $0x$ وبحيث يكون $f'(x)$ مستمراً في ذلك المجال ، عندئذٍ يمكن حساب مساحة السطح الدوراني بالعلاقة الآتية :

$$\sigma = 2\pi \int_0^b y\sqrt{1+y'^2}\ dx \qquad (2.29)$$

أما إذا أعطي التابع بشكل وسيطي من الشكل :

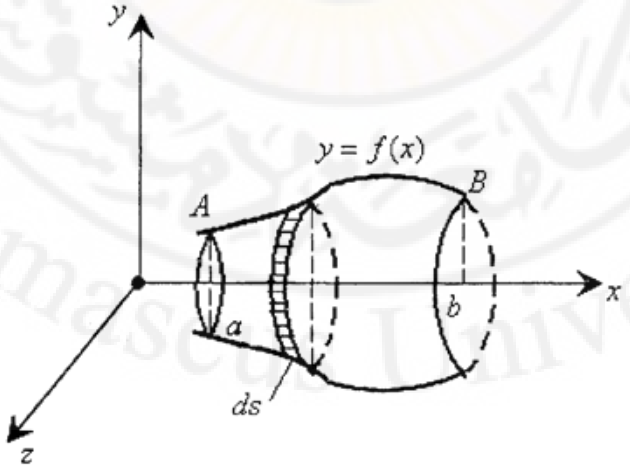
$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t)$$

عندئذٍ فإن مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران القوس AB حول المحور $0x$:

$$\sigma = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\ dt \qquad (2.30)$$

حيث α : تمثل بداية القوس من المنحني .

β : تمثل نهاية القوس من المنحني .



الشكل (٢-٢٧)

وكذلك إذا كان المنحني AB معطى قطبياً بالمعادلة :

$$r = r(\theta) \quad ; \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

حيث :

$r(\theta), r'(\theta)$: تابعان مستمران على المجال $[\theta_1, \theta_2]$.

عندئذٍ ، فإن مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران هذا المنحني حول المحور القطبي يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\sigma = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin\theta \sqrt{r^2 + r'^2}\ d\theta \qquad (2.31)$$

حيث :

θ_1, θ_2 : قيم θ الموافقة لبداية القوس ونهايتها .

مثال (٥١) : احسب مساحة السطح المتولد عن دوران السيكلوئيد حول محور السينات .

الحـــل : نعلم أن المعادلتين الوسيطيتين للسيكلوئيد :

$$x = a(t - \sin t) \ ; \ y = a(1 - \cos t)$$

نعوض في العلاقة (2.30) :

$$\sigma = 2\pi \int_0^{2\pi} y \sqrt{x'^2 + y'^2}\ dt$$

نعوض فنجد :

$$\sigma = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)}\ dt$$

$$\sigma = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}\, dt$$

$$\sigma = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{t}{2})\, d(\cos \frac{t}{2})$$

$$\sigma = -16\pi a^2 \left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$\sigma = \frac{64\pi a^2}{3}$$

مثال (٥٢) : احسب مساحة السطح المتولد عن دوران الكارديوئيد :

$$r = a(1+\cos\theta) \;;\; a > 0$$

حول المحور القطبي $0x$ ، بحيث $0 \le \theta \le \pi$.

الحـــل : اعتماداً على العلاقة (2.31) نجد :

$$\sigma = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$\sigma = -2\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sqrt{2+2\cos\theta}\, d(\cos\theta)$$

$$\sigma = -2\sqrt{2}\, a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^{3/2} d(1+\cos\theta)$$

$$\sigma = -\frac{-4\sqrt{2}\,\pi a^2}{5}(1+\cos\theta)^{5/2}\Big|_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi a^2$$

مثال (٥٣) : احسب مساحة سطح الكرة .

الحـــل : ينظر إلى الكرة كسطح دوراني ، متولد من دوران نصف الدائرة :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

حول المحور $0x$ ، والتي تعطى بالإحداثيات الوسيطية بالشكل الآتي :

$$x = R\cos t \;\; ; \;\; y = R\sin t \;\; ; \; 0 \le t \le \pi$$

وبالتالي ، واعتماداً على العلاقة :

$$\sigma = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\; dt$$

نجد :

$$\sigma = 2\pi \int_{0}^{\pi} R\sin t\;\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\; dt$$

$$\Rightarrow \;\; \sigma = 2\pi R^2 \int_{0}^{\pi} \sin t\, dt = 4\pi R^2$$

مثال (٥٤) : احسب مساحة السطح المتولد عن دوران المنحني :

$$a^2 y = x^3 \;\; ; \;\; a = const \quad \text{(ثابت)}$$

حول المحور $0x$ والمحدد بالمستويين $x = 0$, $x = a$

الحـــــل : اعتماداً على العلاقة (2.28) نكتب :

$$\sigma = 2\pi \int_{a}^{b} y\sqrt{1 + y'^2}\; dx$$

نطبق الدستور فنجد :

$$\sigma = 2\pi \int_{0}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}\; dx$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{a^2}\int_{0}^{a} x^3\sqrt{1 + \frac{9x^4}{a^4}}\; dx$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{a^4}\cdot\frac{1}{36}\int_{0}^{a}(a^4 + 9x^4)^{1/2}.d(a^4 + 9x^4)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{27.a^4}\left[(a^4 + 9x^4)^{3/2}\right]_0^a = \frac{\pi}{27.a^4}\left[(10a^4)^{3/2} - (a^4)^{3/2}\right]$$

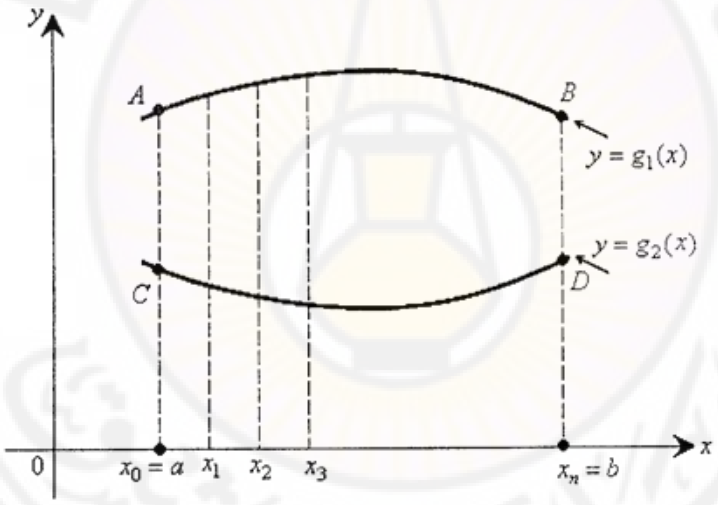
$$\sigma = \frac{2\pi.a^6}{27.a^4}\left(10^{3/2}-1\right) \approx 3{,}563.a^2$$

٢ – ٤ تعيين مراكز الثقل :

أولاً– مركز ثقل صفيحة متجانسة محدودة بمنحنيات التوابع :

ليكن $y = g_1(x)$; $y = g_2(x)$ تابعين معرَّفين ومستمرين على المجال $[a,b]$ ، وليكن $g_2(x) \geq g_1(x)$.

لنوجد إحداثيات مركز ثقل الشكل الهندسي المادي $ABCD$ المحدد بمنحني التابعين $g_2(x)$ و $g_1(x)$ ، ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b$ و $x = a$ ، الشكل (٢–٢٨) .



الشكل (٢–٢٨)

لنفرض أن الشكل المحدود بالمنحنيات السابقة يمثل صفيحة مادية متجانسة كثافتها السطحية ثابتة ، ولتكن γ . لنقسم الشكل إلى شطائر توازي محور العينات بالمستقيمات :

$$x = a,\ x = x_1,\ x = x_2,\ \ldots,\ x_n = b$$

عندئذٍ تكون عرض كل شطيرة على التوالي كما يلي :

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$$

وتكون كتلة كل شطيرة مساوية إلى جداء مساحتها في الكثافة السطحية γ .

لنلبس كل شطيرة بمستطيل قاعدته Δx_i ، وارتفاعه :

$$g_2(X_i) - g_1(X_i)$$

حيث : $X_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

فتكون كتلة هذه الشطيرة :

$$m_i = \gamma \left[g_2(X_i) - g_1(X_i) \right] \Delta x_i$$

(حيث $i = 1, 2, 3, \ldots, n$)

وعندئذٍ يكون مركز ثقل هذه الشطيرة تقريباً هو مركز المستطيل الذي إحداثياته :

$$\left(X_i \, , \, \frac{g_2(X_i) + g_1(X_i)}{2} \right)$$

وتكون كتلة الشطيرة هذه متوضعة في مركز ثقلها . وهكذا من أجل بقية الشطائر، وبالتالي رُدّت المسألة إلى تعيين مركز ثقل نقطة مادية . ومعروف من أبحاث الميكانيك أن هذا المركز $(x_c \, , y_c)$ يتعين بالعلاقتين الآتيتين :

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

بالتعويض نجد :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma\,[g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i . X_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma\,[g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma\,[g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i \;\dfrac{g_2(X_i) + g_1(X_i)}{2}}{\sum_{i=1}^{n} \gamma\,[g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i}$$

وبالاختصار نجد :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i\,[g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} [g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\sum [g_2^2(X_i) - g_1^2(X_i)]\Delta x_i}{\sum [g_2(X_i) - g_1(X_i)]\Delta x_i}$$

وهذه العلاقات تزداد دقة كلما صغرت أطوال المجالات الجزئيـــة . وبإنهـــاء أطـــول المجالات الجزئية Δx_i إلى الصفر، فإن المجاميع السابقة سوف تؤول إلى تكاملات محدودة ، وعندها نحصل على العلاقات الآتية :

$$x_c = \frac{\int_a^b x[g_2(x) - g_1(x)]\,dx}{\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\,dx}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g_2^2(x) - g_2^2(x)]\,dx}{\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\,dx}$$

حالة خاصة :

إذا كانت الصفيحة المتجانسة محدودة بمنحني التابع $y = g(x)$ وبمحور الفواصل ، أي $y = 0$ ، وبالمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ ، فإن مركز ثقلها (بعد التعويض في العلاقتين السابقتين) يتعين بالعلاقتين الآتيتين :

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} = \frac{\int_a^b x.y\, dx}{S}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\, dx}{S}$$

حيث S : يمثل مساحة الصفيحة .

مثال (٥٥) : عين مركز ثقل المساحة المحدودة بمنحني التابعين :

$$g_1(x) = x^2 \ , \ g_2(x) = 2 - x^2$$

الحـــل : نبحث عن نقاط التقاطع :

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = 1$$

بما أن الشكل متناظر بالنسبة لمحور العينات نستنتج أن مركز الثقل يقع عليه ، أي :

$$x_c = 0$$

أما ترتيب مركز الثقل فيتصف بالعلاقة الآتية :

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (g_2^2 - g_1^2)\, dx}{\int_a^b (g_2 - g_1)\, dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

لكن نلاحظ أن :

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[(2-x^2)^2 - x^4]\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(4-4x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

ولدينا :

$$I_2 = \int_{-1}^{1}(2-2x^2)\,dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

نبدل كلاً من I_1 , I_2 بقيمتيهما في y_c ، فنجد :

$$y_c = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = 1$$

وتكون إحداثيات مركز الثقل :

$$c\,(0\,,1\,)$$

مثال (٥٦) : عين مركز ثقل صفيحة متجانسة محدودة بمحور السينات ومنحني السيكلوئيد .

الحـــــل : بما أن الصفيحة تقبل المستقيم $x = \pi a$ كمحور للتناظر، إذاً فإن مركـز الثقل يقع عليه ويكون :

$$x_c = \pi a$$

ويتعين الترتيب بالعلاقة الآتية :

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_{a}^{b} y^2\,dx}{S} = \frac{I_1}{I_2}$$

لدينا الإحداثيات الوسيطية للسيكلوئيد :

$$x = a(t - \sin t) \;\Rightarrow\; dx = a(1-\cos t)\,dt$$

$$y = a\,(1-\cos\,t\,)$$

نفرض أن :

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$$

$$I_1 = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

أو :

$$I_1 = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}[1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-(1-\sin^2 t)\cos t\,]\,dt$$

$$I_1 = \frac{a^3}{2}\left[\frac{5}{2}t-3\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\sin t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}$$

نعوض نجد أن :

$$I_1 = \frac{5\pi a^3}{3}$$

والآن لنحسب I_2 :

$$I_2 = S = \int_a^b y\,dx = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t)^2\,dt$$

$$I_2 = a^2\int_0^{2\pi}[1-4\cos t+2(1+2\cos t)\,]_0^{2\pi}$$

$$I_2 = a^2\,[t-4\sin t+2t+\sin 2t\,]_0^{2\pi}$$

$$I_2 = 3\pi a^2$$

حيث أصبح لدينا :

$$y_c = \frac{I_1}{I_2} = \frac{5a}{18}$$

وتكون إحداثيات مركز الثقل :

$$c(\pi a\ ,\ \frac{5a}{18})$$

مثال (٥٧) : عين مركز ثقل صفيحة متجانسة محدودة بالمحورين الإحداثيين ومنحني القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

حيث : $x \geq 0\ ;\ y \geq 0$

يتعين فصل مركز الثقل بالعلاقة الآتية :

$$x_c=\frac{\int_a^b x.y\,dx}{S}=\frac{I}{S}$$

حيث :

S : مساحة القطع الناقص ، إن هذه المساحة تم حسابها سابقاً :

$$S=\frac{\pi a.b}{4}$$

والآن لنحسب I :

$$I=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ \ x\,dx$$

ولحساب هذا التكامل نفرض أن :

$$x=a\sin t\ \Rightarrow\ dx=a\cos t\,dt$$

بحيث :

$$x=0\ \Rightarrow\ t=0$$

$$x=a\ \Rightarrow\ t=\frac{\pi}{2}$$

نعوض في I ونختصر، فنجد :

$$I = b a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t . \sin t \, dt$$

$$I = -b a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, d(\cos t)$$

$$I = \frac{-b a^2}{3} \left[\cos^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{b a^2}{3}$$

نعوض في الدستور عن I, S بقيمتيهما ، فنجد :

$$x_c = \frac{I}{S} = \frac{4a}{3\pi}$$

أما ترتيب مركز الثقل فيتعين بالعلاقة الآتية :

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 \, dx}{S} = \frac{I_1}{S}$$

لنحسب I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx$$

$$I_1 = \frac{b^2}{2a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$I_1 = \frac{I_1}{S} = \frac{4b}{3\pi}$$

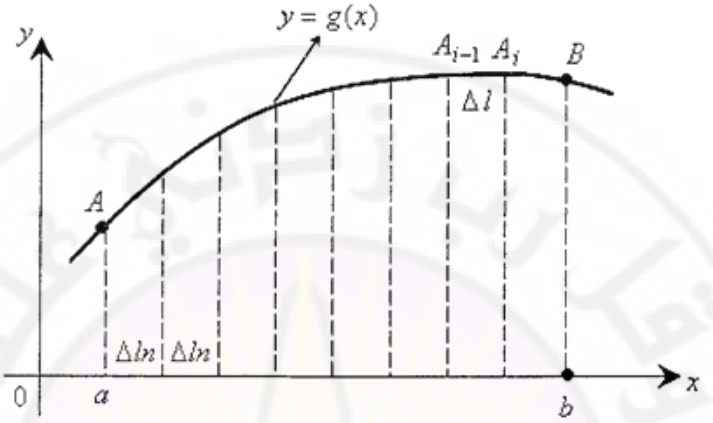
وتكون إحداثيات مركز الثقل : $c\left(\frac{4a}{3\pi} , \frac{4b}{3\pi}\right)$

ثانياً- تعيين مراكز ثقل المنحنيات المادية المستوية :

ليكن AB منحنياً مادياً محدداً بالنقطتين $x = a , x = b$ ، معادلته $y = g(x)$ ، ولتكن **كثافته** الخطية الثانية (كتلة واحدة الطول) في جميع أقسامه واحدة ، الشكل (٢-٢٩) .

لحساب مركز ثقل هذا المنحني المادي ، نقسمه إلى n قسم بوساطة النقاط :

$$A = A_0\,,\ A_1\,,\ A_2\,,\ldots,\ A_{n-1}\,,\ A_n = B$$



الشكل (٢-٢٩)

لنفرض أن أطوال الأقواس الجزئية على الترتيب هي : $\Delta l_1\,,\ \Delta l_2\,,\ \Delta l_3\,,\ldots,\ \Delta l_n$

فمن المعلوم أن كتل هذه الأجزاء تساوي جداء طول كل منها في الكثافة الخطية . لنأخذ جزءً ما ، كتلته كما يلي :

$$m_i = \gamma\,\Delta l_i$$

يمكن اعتبار (بشكل تقريبي) أن ذلك القوس الجزئي يمثل بنقطة مادية واقعة عليه ولتكن مثلاً $M_i\big(x_i\,,\ g(x_i)\big)$ ، وكتلتها $\gamma\,\Delta l_i$ ، وحسب علاقتي مركز ثقل نقطة مادية نستنتج أن مركز ثقل المنحني AB هو $(x_c\,,\ y_c)$ يتعين بالعلاقتين الآتيتين :

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2.32)$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2.33)$$

لكن نعلم أن $m_i = \gamma \Delta l_i$ ، نبدل في (2.31) و(2.32) فنجد :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma \Delta l_i . x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma \Delta l_i} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma \Delta l_i . y_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma \Delta l_i}$$

بفرض أن التابع $y = g(x)$ مستمر ومشتقه مستمر أيضاً على المجال $[a,b]$ ، وبالانتقال إلى النهايات عندما تنتهي أطوال الأقواس إلى الصفر، فإن المجاميع تؤول إلى تكاملات محددة ، وعندها نحصل على إحداثيات مركز ثقل المنحني المادي :

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, dl}{\int_a^b dl} \tag{2.34}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y\, dl}{\int_a^b dl} \tag{2.35}$$

لكن نعلم أن $dl = \sqrt{1+y'^2}\ dx$

نعوض قيمة dl في كل من (2.34) و(2.35) ، نجد أن :

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ dx} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\ dx}{l} \tag{2.36}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ dx} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\ dx}{l} \tag{2.37}$$

حيث l : طول المنحني المادي AB .

مثال (٥٨) : عين إحداثيات مركز ثقل سلك متجانس ينطبق على منحني السيكلوئيد .

لدينا الإحداثيات الوسيطية للسيكلوئيد :

$$x = a(t - \sin t) \Rightarrow dx = a(1 - \cos t)\,dt$$

$$y = a(1 - \cos t) \Rightarrow dy = a \sin t\,dt$$

ويكون :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

بما أن منحني السيكلوئيد يقبل المستقيم $x = a\pi$ كمحور للتناظر، الشكل (٢-٣٠) .

إذاً مركز الثقل يقع عليه ، أي فاصلة مركز الثقل $x_c = a\pi$.

ولتعيين الترتيب ، ومن العلاقة (2.36) ، نجد :

$$y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx}$$

نفرض أن :

$$I_1 = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

نعوض ونختصر ، فنجد :

$$I_1 = a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,(1 - \cos t)\,dt$$

أو :

$$I_1 = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}\,dt$$

ويكتب بالشكل الآتي :

$$I_1 = -8a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos^2\frac{t}{2})\, d(\cos\frac{t}{2})$$

أي :

$$I_1 = -8a^2 \left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

نعوض :

$$I_1 = \frac{32a^2}{3}$$

ونفرض :

$$I_2 = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ dx$$

نعوض عن dx و y' بقيمتيهما ، ونختصر :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\ dt$$

$$I_2 = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$I_2 = 4a \left[-\cos\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a$$

نستنتج :

$$y_c = \frac{I_1}{I_2} = \frac{4a}{3}$$

أي مركز الثقل هو : $c\left(a\pi, \frac{4a}{3}\right)$

٢-٥ الطرائق العددية لحساب التكامل المحدد :

إن عملية حساب التكاملات المحددة بمساعدة التوابع الأصلية ليست ممكنة دوماً ، أي لا يمكننا التعبير عن التابع المكامل بتوابع ابتدائية (بسيطة) وحتى إذا تمكنا من الوصول إلى التابع الأصلي ، فإن شكله في الغالب يكون معقداً جداً وغير ملائم للحسابات ، ولذلك فإن أمر حساب هذه التكاملات تقريباً أمر في غاية الأهمية . وانتشار الحواسيب الإلكترونية أمر ساعد مستخدمها على استخدام هذه الطرق التقريبية أو العددية ، فإذا كان التكامل المكامل $f(x)$ قابلاً للإرجاع أثناء عملية المكاملة إلى توابع نعرف توابعها الأصلية ، فإن أمر حساب قيمها سهل ، وتستخدم لذلك علاقة أو صيغة نيوتن – ليبنتز في التكامل :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

أما إذا كان الأمر صعباً ، فإن الحساب التقريبي للتكامل أمر وارد . ومن الأمثلة على هذه التوابع :

$$f(x) = e^{-x^2} \;;\; f(x) = \frac{\sin x}{x} \;;\; f(x) = \frac{1}{\ln x} \;;\; f(x) = \sin^2 x$$

وحساب قيم هذه التكاملات التقريبي يستند أساساً إلى مفهوم التكامل المحدد كمجموع من المساحات . ونتمكن من عملية حساب هذه التكاملات بدساتير متعددة منها :

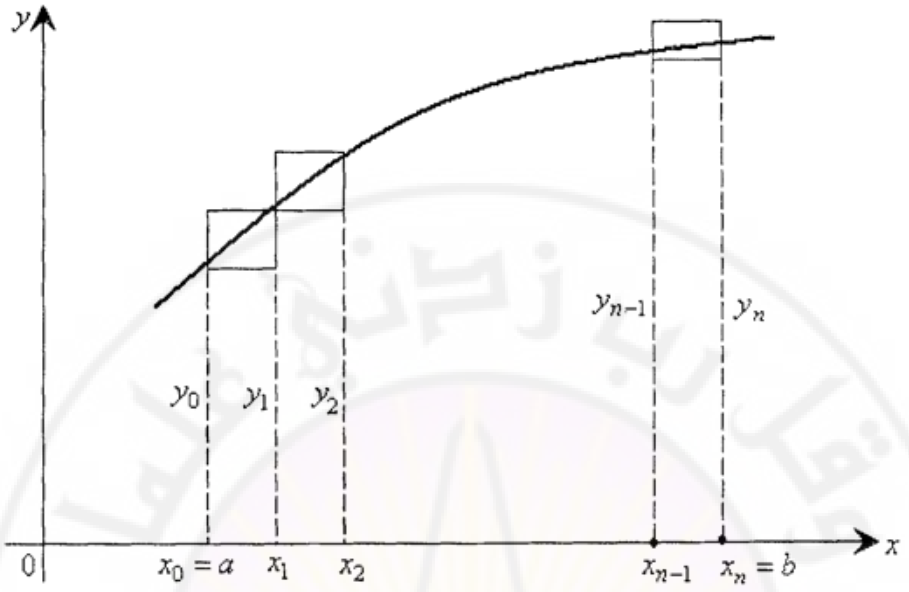
٢-٥-١ طريقة المستطيلات :

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ ، وقسمنا هذا المجال إلى النقاط الآتية :

$$x_0 = a \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\ldots,\; x_n = b$$

أي بتقسيم المجال $[a,b]$ إلى n قسماً بطول $h = \dfrac{b-a}{n}$ ، فإن قيم التوابع الموافقة تكون :

$$f(x_0) = y_0 \;,\; f(x_1) = y_1 \;,\ldots,\; f(x_n) = y_n$$



الشكل (٢-٣٠)

نلاحظ من الشكل (٢-٣٠) أن مساحة السطح تساوي مجموع مساحات المستطيلات المعينة على الشكل ، ونكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) \qquad (2.38)$$

أو :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)$$

حيث إن قيم التابع ، إما أن تكون معطاة وفق جدول ، أو نتمكن من حسابها مباشرة والخطأ المرتكب في حساب التكامل بإحدى الصيغتين السابقتين يصغر كلمت كبرت n .

٢-٥-٢ طريقة أشباه المنحرفات :

يمكن الحصول على عبارة تقريبية أُخرى للتكامل المحدد ، وذلك بتعويض الخط المكوّن من قطع مستقيمة أفقية بخطوط أخرى لا تختلف عن المنحني المفروض للتابع إلا

بمقدار صغير بشكل كافٍ ، عندئذٍ تكون مساحة أحد أشباه المنحرفات هي نصف مجموع القاعدتين × الارتفاع ، أي نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{(y_0+y_n)}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right] \qquad (2.39)$$

واعتماداً على أن الارتفاع h واحد بالنسبة لأشباه المنحرفات كافةً والواقعة ضمن المجال $[a,b]$. وهذه الصيغة أكثر دقة من الصيغتين الواردتين في دستور المستطيلات .

٢-٥-٣ طريقة سيمبسون :

تُعد قاعدة سيمبسون في حساب التكامل المحدد من الطرق شائعة الاستخدام نظراً للدقة التي تتميز بها بالنسبة لكل من قاعدة المستطيلات وأشباه المنحرفات ، حيث إنها تستخدم في حساب التكامل بدلاً من توابع تربط المجالات فيما بينها من الدرجة الأولى ، وتوابع من الدرجة الثانية ، إذ يتم تقسيم المجال المعرَّف عليه التابع مثل $[a,b]$ إلى عدد زوجي من المجالات الجزئية ، فبدلاً من n ، يتم التقسيم إلى $2n$ ، أي أن :

$$h=\frac{b-a}{2n}$$

ويعطى التكامل بالعلاقة الآتية :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left(y_1+4\sum_{i=2,4}^{n}y_i+2\sum_{i=3,5}^{n-1}y_i+y_{n+1}\right)$$

أو بالصيغة الآتية :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_2+\ldots+y_{2n-1})+\right.$$
$$\left.+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right] \qquad (2.40)$$

مثال (٥٩) : احسب قيمة التكامل الآتي : $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

لحساب قيمة هذا التكامل ، نقسم المجال $[0,\pi]$ إلى أربعة أقسام متساوية بواسطة النقاط الآتية :

$$0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ ,\ \pi$$

وبالتالي فإن قيم التابع هي :

$$y_0 = \sin 0 = 0 \quad ; \quad y_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \ ;$$

$$y_3 = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad y_4 = \sin\pi = 0$$

آ- نجد من العلاقة (2.38) قاعدة المستطيلات :

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx \approx \frac{\pi - 0}{4}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\left(1 + \sqrt{2}\ \right) \approx 1{,}896$$

ب- ونجد من العلاقة (2.39) قاعدة أشباه المنحرفات :

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{4}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \right) \approx 1{,}896$$

ج- ونجد من العلاقة (2.40) قاعدة سيمبسون ($2n = 4$) :

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left[0 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \right) + 2\times 1\right] \approx 1{,}99$$

مقرباً الأرقام إلى رقمين عشريين ، أو يساوي 2,0034 ، كما نعلم بأن :

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

وهكذا نجد أن أفضل هذه الطرق هي طريقة سيمبسون .

تمارين الفصل الثاني :

١- احسب التكاملات الآتية :

رقم التمرين	نص التمرين	الجواب
1	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$	$\frac{\pi}{2}$
2	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^2 x}\ dx$	$\frac{4}{3}$
3	$\int_{0}^{2} \lvert 1-x \rvert dx$	1
4	$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 + 3\sin^2 x}$	0
5	$\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$	$\frac{1}{4}$
6	$\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$	$-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
7	$\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos + 3}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}\ arctg\ \frac{1}{\sqrt{5}}$
8	$\int_{1}^{16} arctg\ \sqrt{\sqrt{x}-1}\ dx$	$\frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$
9	$\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x.dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$	$\ln\frac{4}{2}$

10	$\int_0^1 x.e^x d$	1
11	$\int_0^{\pi/b} e^{ax}.\sin x\,dx$	$\frac{b(e^{\frac{a\pi}{b}}+1)}{a^2+b^2}$

٢- احسب التكاملات الآتية :

1	$\int_0^a \frac{x^2.dx}{x^2+a^2}$		7	$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos^2 2x\,dx$
2	$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$		8	$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
3	$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$		9	$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$
4	$\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\,dx$		10	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$
5	$\int_0^1 arc\sin x\,dx$		11	$\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
6	$\int_0^8 \frac{x.dx}{x^2-6x+5}$		12	$\int_0^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

٣- ادرس تقارب وتباعد التكاملات الآتية :

1	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$		12	$\int_1^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x+e^{-x}}$

2	$\int_0^1 \ln x \, dx$		13	$\int_1^\infty \frac{arc\,tg\, x \, dx}{x^2}$
3	$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$		14	$\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$
4	$\int_3^6 \frac{\ln x \, dx}{(x-3)^2}$		15	$\int_{-\infty}^\infty \frac{(2+\sin x)\, dx}{x^2+1}$
5	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$		16	$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ حيث : $a>0$; $b>0$
6	$\int_2^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{(\ln x)^3}}$		17	$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)\,(x-1)}}$
7	$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$		18	$\int_0^2 \frac{\ln x \, dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$
8	$\int_0^1 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$		19	$\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}\, dx}{sh\sqrt{x}}$
9	$\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx$		20	$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$
10	$\int_0^\infty \frac{cs\, x \, dx}{x^2+1}$		21	$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin\ln x \, dx$ حيث : $\alpha>0$
11	$\int_1^\infty \frac{x\, dx}{3x^4+5x^2+1}$		22	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{(\cos x)^{1/n}}}$; $n>1$

٤- إذا كانت m , n عددين حقيقيين ، فأثبت أن :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

متقارب إذا كانت $m>0$, $n>0$ آنياً ، ومتباعد خلاف ذلك .

٥- إذا كانت n عدداً حقيقياً ، فأثبت أن :

$$\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$$

متقارب من أجل $n>0$ ، ومتباعد إذا كانت $n\le 0$.

٦- أثبت أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2}=\frac{\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

إذا كانت $b>|a|$

٧- ادرس تقارب وتباعد التكاملات الآتية ، واحسب قيمة التكامل في حالة التقارب :

1	$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{4x^2+25}$	6	$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{4x+1}$
2	$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$	7	$\int_{-\infty}^\infty (\frac{x+1}{x^2+1})dx$
3	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$	8	$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
4	$\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$	9	$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$

5	$\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{2/5}}$		10	$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin b\,x\,dx\ ;\ (\alpha>0)$

٨- احسب التكاملات الآتية :

آ- $\int_0^{\pi 2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$ (افرض أن $t=\sqrt{x}$ ، ومن ثم كامل بالتجربة) .

الجواب : 2

ب- $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ الجواب : متباعد

ج- $\int_0^1 x\,(arctg\,x)^2 dx\ ;\ \frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

٩- احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابعين :

$$y^2=2px\ ;\ x=2py$$

الجواب : $\frac{4}{a}p^3$

١٠- احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابعين :

$$x^2=4y\ ;\ y=\frac{8}{x^2+4}$$

الجواب : $(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3})$

١١- احسب مساحة القطاع المحدد بالمنحني المعطى بالمعادلة القطبية :

$\rho=a\sin 3\theta$ (زهرة بثلاث أوراق) ، الجواب : $\frac{\pi a^2}{4}$

$\rho=a\sin 2\theta$ (زهرة بأربع أوراق) ، الجواب : $\frac{\pi a^2}{2}$

١٢- أوجد المساحة المحددة من تقاطع الدائرة ذات المعادلة :

$$\rho = \sqrt{3}\,\sin\theta$$

والكارديوئيد ذي المعادلة : $\rho = 1 + \cos\theta$

١٣- أوجد طول قوس المنحني المحدد بـــ :

$$y = \ln\cos x \;\; ; \;\; 0 \le x \le \alpha < \frac{\pi}{2}$$

الجواب : $\ln\left[tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

١٤- أوجد طول قوس المنحني المحدد بـــ :

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \;\; ; \;\; 0 \le x \le \frac{5}{3}\,a$$

الجواب : $4a\left(1 + \sqrt{3}\,.\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$

١٥- أوجد طول قوس المنحني المحدد بـــ :

$x = a\cos^2 t \;\; ; \;\; y = a\sin^2 t \;\; ; \;\; a > 0$ (استروئيد)

الجواب : $6\,a$

١٦- أوجد طول قوس المنحني المحدد بـــ :

$$x = a(t - \sin t) \;\; ; \;\; y = a(1 - \cos t) \;\; ; \;\; 0 \le t \le 2\pi \;\; ; \;\; a > 0$$

١٧- أوجد طول قوس المنحني المحدد بـــ :

$$x = e^t(\cos t + \sin t) \;\; ; \;\; y = e^t(\cos t - \sin t)$$

من $t_1 = 0$ وحتى $t_2 = 1$

١٨- أوجد طول قوس منحني التابع :

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos\varphi} \;\; ; \;\; \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$$

١٩- أوجد طول قوس منحني التابع :

$$\rho = 2a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

من φ_1 وحتى φ_2

٢٠- أوجد طول قوس منحني التابع :

$$\rho = a\theta \;;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

٢١- احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحني $y^2 = 4 + x$ المتقاطع مع المستقيم $x = 2$ حول المحور $0x$.

٢٢- احسب مساحة السطح الدوراني المتكون من دوران المنحني $y^2 = 8x$ حول المحور $0x$ في المجال $x = 0$ و $x = 16$.

٢٣- احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحني $x = e^t.\sin t$ ، $y = e^t.\cos t$ حول المحور $0x$ ، من $t_1 = 0$ وحتى $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

٢٤- احسب الحجم المتولد عن الدوران حول $0x$ للشكل المحدود بمنحني التابع $y = a\sin^2 t$ ومحور الفواصل ، وذلك من $x = 0$ إلى $x = \pi$.

٢٥- احسب حجم الجسم الذي نجعل عليه من الدوران حول $0x$ للشكل المحدد بمنحني التابع $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$ ، والمستقيمين $x = \pm a$ ، ومحور الفواصل .

٢٦- احسب الحجم المتولد عن دوران الشكل المحدود بمنحني السيكلوئيد حول المحور $0x$.

٢٧- احسب الحجم المتولد عن دوران الشكل المحدود بمنحني التابع $y = e^x$ ، والمحورين الإحداثيين .

آ- إذا كان الدوران حول $0x$.

ب- إذا كان الدوران حول $0y$.

٢٨- احسب مساحة السطح المتولد عن الدوران حول المحور $0x$ للقطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

٢٩- احسب مساحة السطح المتولد عن الدوران حول المحور $0x$ لقطعة من منحني التابع $y=tg\,x$ ، والمحددة بنقطتين فصلاهما :

$$x=0\ ;\ x=\frac{\pi}{4}$$

٣٠- احسب مساحة السطح المتولد عن دوران منحني الاوستروئيد حول المحور $0x$.

٣١- عين مركز ثقل سطح محدود بمحور الفواصل ومنحني التابع $y=\sin x$ ، حيث :

$$0\le x\le \pi$$

٣٢- عين مركز ثقل المساحة المحدودة بمنحني التابعين :

$$y=x^2\ ;\ y=2-x^2$$

٣٣- عين مركز ثقل صفيحة متجانسة محدودة بمحور الفواصل ، وبمنحني القطع المكافئ .

$$x^2+4y-16=0$$

٣٤- أوجد إحداثيات مركز ثقل الشكل المحدد بالمنحني $y=2x-x^2$ ، والمحور $0x$.

٣٥- أوجد إحداثيات مركز ثقل الشكل المحدد بالمستقيم $y=\frac{2}{\pi}x$ ، والمنحني $y=\sin x$ ، من أجل $x>0$.

٣٦- أوجد إحداثيات مركز ثقل الشكل المحدد بالقطعين $ax=y^2$ و $ay=x^2$.

٣٧- أوجد إحداثيات مركز ثقل الشكل المحدد بالقطع $x^2+4y-16=0$ ، والمحور $0x$.

الفصل الثالث

التوابع الحقيقية التابعة لعدة متغيرات

٣-١ مفاهيم أساسية :

تعرضنا في دراستنا الرياضية السابقة إلى توابع متعلقة بمتغير مستقل واحد ، لكن مراقبة الكثير من الظواهر العلمية وفي المجالات كافة ، يقودنا إلى أنواع أخرى من التوابع والتابعة لأكثر من متغير مستقل واحد .

نعطي في البداية تعريفاً لمفهوم التابع لمتغيرين مستقلين :

ندعو البعد المتغير z بتابع للمتغيرين x, y ، إذا كان من أجل أية ثنائية (x , y) من مجموعة ما D ، تتحدد تماماً قيمة لـ z .

ندعو المجموعة D ، مجموعة تعريف التابع ، و x, y ندعوهما بالمتغيرات المستقلة أو الوسطاء للتابع .

ونكتب التابع z رمزياً بالشكل الآتي :

$$z = f(x,y) \quad \text{أو} \quad z = \phi(x,y) \quad \text{أو} \quad z = F(x,y)$$

أو أي تعبير آخر مشابه .

مثال (١) : إن مساحة المثلث : $S = \frac{1}{2} x y$: هي تابع للمتغيرين المستقلين x, y المحددين في المجال

$$x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; .$$

حيث x : يمثل قاعدة المثلث .

y : يمثل ارتفاع المثلث .

وبالتالي يسهل تعميم مفهوم التابع لمتغيرين أو أكثر من ذلك ، مثلاً ثلاثة أو أربعة ... **متغيرات مستقلة** نقول إن البعد z يمثل تابعاً لـ n متغير مستقل مثل :

$$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$$

إذا كان من أجل أية جملة لقيم هذه المتغيرات ، تتحدد قيمةٌ لـ z ، ونكتب ذلك :

$$z = f(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots . x_n)$$

تدعى مجموعة قيم الوسطاء العددية بمجموعة تعريف التابع .

وهكذا ، وبشكل أساسي ، ندرس التوابع التابعة لمتغيرين مستقلين ، وذلك يعود إلى أننا سندرس تلك التوابع ذات الخصائص التي لا تتغير جوهرياً عندما يزداد عدد المتغيرات المستقلة .

فإذا أعطينا تابعاً لمتغيرين أو أكثر تحليلياً ، فإن أول ما نجريه هو تحديد المجال المعرّف عليه هذا التابع ، والمشكل من جميع قيم x , y ، والتي من أجلها نحصل على قيمة محددة للتابع z .

فإذا أخذنا الجملة الديكارتية $x0y$ (مستوٍ) فإن الثنائيات المرتبة (x , y) تحدد نقاط مثل $p(x, y)$ واقعة في مستوي المحاور الإحداثية ، وهذا التحديد وحيد . عندئذٍ تكون مجموعة تعريف التابع $f(x, y)$ هي مجموعة من نقاط المستوي . ندعو تعريفاً مجموعة هذه النقاط بمجموعة تعريف التابع .

وسندرس (في الواقع) توابع ذات مجموعات تعريف تمثل جزءاً من المستوي والمحددة بمستقيمات ، وتدعى هذه المستقيمات بحدود مجال التعريف . ندعو النقاط التي تقع داخل هذه المستقيمات ولا تقع عليها بالنقاط الداخلية ، والمجالات التي تتألف فقط من هذه النقاط الداخلية ندعوها بمجالات مفتوحة . أما إذا كانت هذه المجالات مشكلة ، بالإضافة للنقاط الداخلية من النقاط الواقعة على هذه المستقيمات ، فندعوها بالمجالات المغلقة ، كما ندعو مجالاً محدوداً فيما إذا وجد عدد c ، تكون المسافة الفاصلة بين نقطة P من المجال والمبدأ 0 للجملة الديكارتية المتعامدة النظامية أصغر من c ، أي :

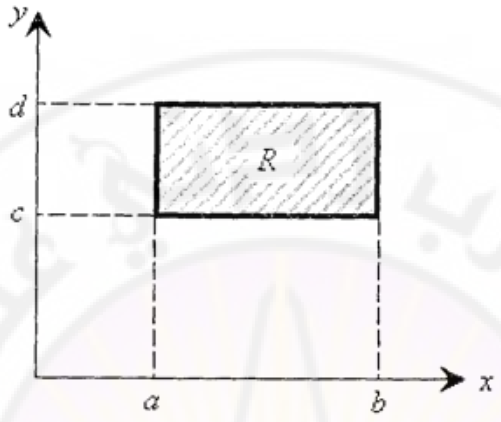
$$\overline{0P} < c$$

غالباً ما نصادف نوعين من المجالات بالنسبة لتوابع لمتغيرين مستقلين :

آ- المجال المعطى بالشرطين :

$$a \le x \le b \quad ; \quad c \le y \le d$$

ويمثل هذا المجال مستطيلاً ، أضلاعه تكون موازية لمحـــاور الجملـــة الديكارتيـــة ، والمبين على الشكل (٣-١) .

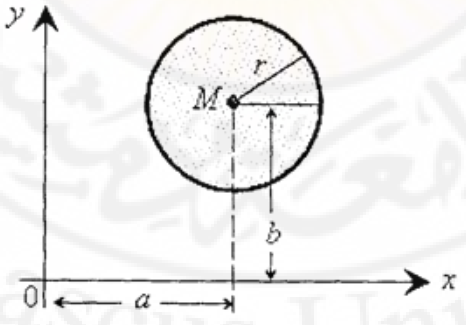


الشكل (٣-١)

ب- المجال المعطى من المتراجحة الآتية :

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2$$

ويمثل هذا قرص دائري مغلق ، نصف قطـــره r ، ومركـــزه النقطـــة $M(a,b)$ ، والمبين على الشكل (٣-٢) .



الشكل (٣-٢)

إن أية ثلاثية من الأعداد المرتبة (x,y,z) تمثل نقطة وحيدة من الفراغ ، أي نقطـــة في فراغ الجملة الديكارتية $0xyz$ ، وبالتالي فـــإن التـــابع لثلاثـــة متغيـــرات مـــستقلة مثـــل

$u = f(x,y,z)$ يمكن النظر إليه كتابع للنقاط $p(x,y,z)$ من الفراغ ، ومجموعة تعريفه تمثل بالتالي مجموعة من نقاط الفراغ . وبشكل مشابه للتوابع التابعة لمتغيرين أو لثلاثة متغيرات مستقلة . يمكننا إدخال مفهوم التابع لـ n من المتغيرات المستقلة ($n > 3$) ، أي التابعة للنقاط $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ من الفراغ الاقليدي .

مثال (٢) : إن مجموعة تعريف التابع : $z = x^2 + y^2$

تتألف من جميع نقاط مستوي الإحداثيات الديكارتية $x0y$ ، وذلك لأن قيمة z تتحدد تماماً من أجل أية ثنائية من القيم المرتبة (x, y) ، من الواضح أن $z \geq 0$.

مثال (٣) : إن التابع :

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

محدد أو معرّف من أجل جميع نقاط القرص الدائري المغلق $x^2 + y^2 \leq 9$ وذلك لكون z تتحدد من أجل :

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0$$

مثال (٤) : أما التابع :

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y + 7$$

فهو عبارة عن كثير حدود صحيح في x و y ، وبالتالي فهو معرّف على المستوي $x0y$ بكامله .

مثال (٥) : إن مجموعة تعريف التابع :

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

هي مجموعة كل النقاط ، التي تحقق الشرط :

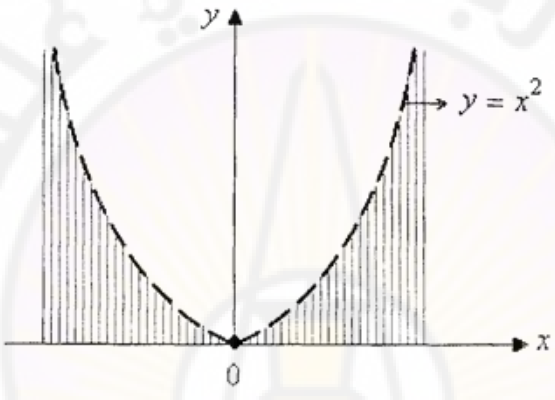
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

وهي المنطقة الكروية ذات نصف قطر مساوٍ 2 ، ومركزها واقع في مبدأ الإحداثيات الديكارتية .

مثال (٦) : مثل بيانياً منطقة التعريف D للتابع :

$$z = f(x,y) = \ln(x^2 - y)$$

نعلم أن اللوغاريتم يكون معرّفاً من أجل الأعداد الحقيقية الموجبة فقط ، وهذا يعني أن التابع المعطى معرّف من أجل كل x و y ، في المستوي $0xy$ ، حيث $(x^2 - y) > 0$ ، أي $y < x^2$ ، ومنه ، فإن منطقة تعريف التابع $z = f(x,y)$ هي المنطقة المظللة المبينة في الشكل (٣-٣) .



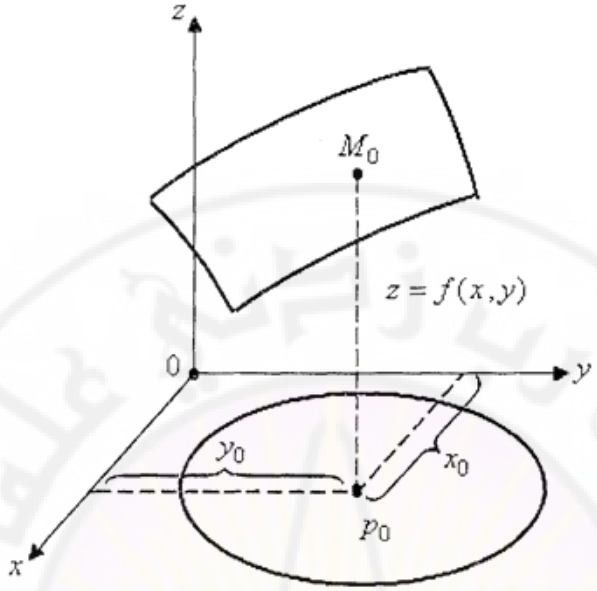
الشكل (٣-٣)

٣-٢ التمثيل الهندسي للتوابع :

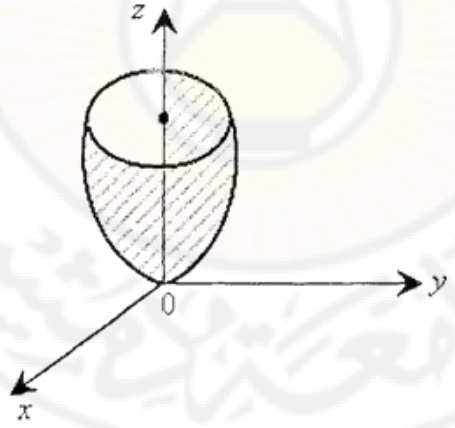
من المعروف أن التابع لمتغير مستقل واحد يمكن تمثيله بمنحنٍ في المستوي آخذين بالاعتبار تحول x على $0x$ ، وتحولات y على محور $0y$

يمكن أن يمثل بشكل مشابه التابع $z = f(x,y)$ في الجملة المتعامدة $0xyz$ ، أي فراغ الإحداثيات الثلاثة ، حيث من أجل أية نقطة $p_0(x_0, y_0)$ من مجموعة تعريفه تتحدد لنا قيمة لـ z ، وبالتالي من أجل أي نقطة في الفراغ مثل $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تشكل بالتالي مجموعة هذه النقاط سطحاً في الفراغ ، الشكل (٣-٤) ، وهذا السطح يُعد تمثيلاً هندسياً للتابع $z = f(x,y)$ وبالتالي نقول إن كل سطح فراغي يحدد تابعاً لمتغيرين مستقلين

يبين الشكل (٣-٥) التمثيل الهندسي للتابع $z = f(x,y)$ والمعرّف من أجل جميع نقاط المستوي $x0y$ ، والذي يدعى بـ مجسم القطع المكافئ الناقصي ، ويمكننا بالتالي ، **وبالتعميم** أن نمثل شكل التابع لأكثر من ثلاث متغيرات هندسياً بفراغ ذي $(n+1)$ بعداً .



الشكل (٣-٤)



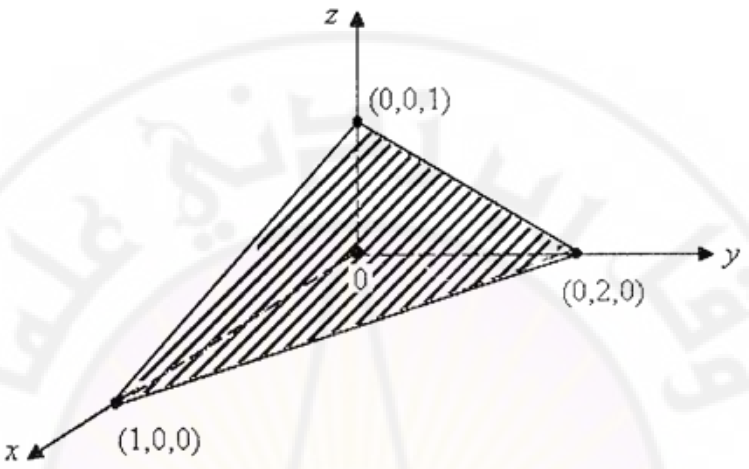
الشكل (٣-٥)

مثال (٧) : مثّل في R^3 بيانياً التابع : $f(x,y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$

التمثيل البياني لهذا التابع هو التمثيل البياني نفسه للمعادلة : $z = 1 - x - \frac{1}{2}y$ ، ويمكن أن نكتبها بالشكل الآتي :

$$x+\frac{1}{2}\,y+z=1$$

وهي معادلة المستوي المبين في الشكل (٣-٦) ، جزء منه واقع في الثمن الأول .



الشكل (٣-٦)

٣-٣ خطوط السوية :

تعريف (١) :

إذا قطعنا السطح S الذي معادلته $z=f(x,y)$ بمستوٍ أفقي معادلتـــه $z=K$ ، وإذا أسقطنا المنحني الناتج على المستوي $0xy$ ، فإننا نحصل على منحني يسمى منحني السوية ذي الارتفاع K للتابع $f(x,y)$ ، ومعادلته هي :

$$f(x,y)=K$$

مثال (٨) : عين منحنيات السوية ذات الارتفاعات $1\,,2$ للتابع :

$$z=f(x,y)=x^2+\frac{1}{4}\,y^2$$

إن معادلة منحني السوية ذي الارتفاع K هي :

$$x^2+\frac{1}{4}\,y^2=K$$

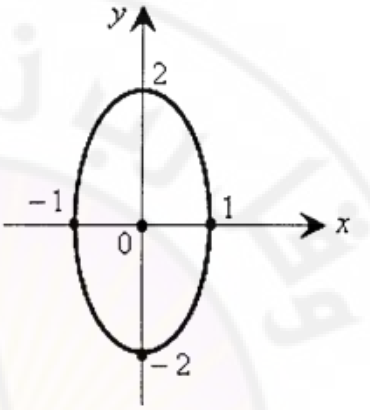
من أجل $K=1$ ، نجد المعادلة :

$$x^2+\frac{1}{4}\,y^2=1$$

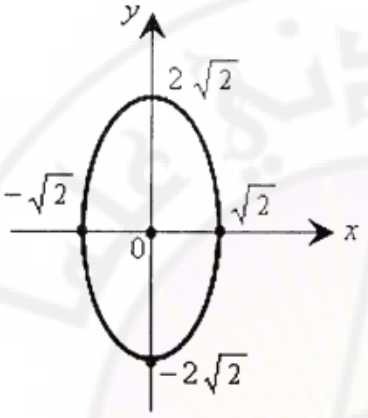
وهي معادلة قطع ناقص له الشكل (٣-٧) .

ومن أجل $K = 2$ ، نجد المعادلة : $x^2 + \frac{1}{4} y^2 = 2$

وهي معادلة قطع ناقص له الشكل (٣-٨) .



الشكل (٣-٧)



الشكل (٣-٨)

٣-٤ النهايات والاستمرار :

قبل إعطاء تعريف لمفهوم نهاية تابع لمتغيرين ، نوضح مفهوم الجوار لنقطة .

الجوار بنصف قطر r للنقطة $p_0(x_0, y_0)$ هو بالتعريف مجموعة النقاط $p(x, y)$ من المستوي $x0y$ والمحققة للمتراجحة الآتية :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$$

أي مجموعة النقاط الواقعة داخل دائرة التي نصف قطرها r ، ومركزها النقطة $p_0(x_0, y_0)$ ، وندعو مثل هذا الجوار بالجوار الدائري .

أما في الفراغ ، فإننا نُعرف الجوار الكروي ذو نصف القطر r للنقطة $p_0(x_0, y_0, z_0)$ ، بأنه مجموعة النقاط $p(x, y, z)$ والمحققة للمتراجحة الآتية :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} < r$$

وهي النقاط الداخلية لكرة ذات نصف القطر r ، والمركز $p_0(x_0, y_0, z_0)$.

اعتماداً على ذلك نُعرّف الجوار في الفراغ الاقليدي ذي الـ n بعداً ، بأنـه مجموعـة النقاط $p(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ المحققة للمتراجحة الآتية :

$$\sqrt{(x-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2} < r$$

والنقطة $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ ، هي مركز لهذا الجوار .

كما يمكن أن نعرّف جوار نقطة بالنسبة لتابع ذي متغيرين بشكل آخـر ، أي أن هـذا الجوار هو مربع طوله 2δ ، والمؤلف من مجموعة النقاط $p(x,y)$ المحققة للمتراجحتين :

$$|y-y_0| < \delta \ ; \ |x-x_0| < \delta$$

وبالتالي يدعى جواراً للنقطة $p_0(x_0,y_0)$.

يمكن بطريقة مشابهة أن نعمم الجوار الخاص بالفراغ ، أي من أجل $n = 3$ أو أكثر.

تعريف (٢) :

نقول عن العدد A ، إنه نهاية للتابع $Z = f(x,y)$ ، المعرّف على الساحة D ، عندما تسعى النقطة $p(x,y)$ إلى النقطة $p_0(x_0,y_0)$ ، ونكتب :

$$\lim_{p \to p_0} f(x,y) = A \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \quad \text{إذا تحقق الشرط :}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

وبالتالي فإن :

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

أي يمكن جعل المسافة بين العددين A و $f(x,y)$ صغيرة بقدر ما نشاء ، وذلك بجعل المسافة بين النقطتين p و p_0 صغيرة بقدرٍ كافٍ ولكن ليس صفراً .

ملاحظة (١) : إذا كانت :

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad \text{فإن :} \quad f(x,y) \to A$$

عندما $(x,y) \to (x_0,y_0)$ على طول أي منحنٍ يقع في منطقة تعريف $f(x,y)$ وينتهي بالنقطة (x_0,y_0)، وهذا يعني أن النهاية :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

تكون غير موجودة إذا انتهى $f(x,y)$ على طول منحنيين من منطقة تعريفه ، ويمران من النقطة (x_0,y_0) إلى قيمتين مختلفتين .

مثال (٩) : أوجد :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

الحـــل :

لنوجد نهاية التابع عندما $p(x,y) \to p_0(0,0)$ ، أي عندما $\rho \to 0$ ، (حيث ρ البعد بين النقطتين p و p_0) ، وحيث إن النقطة p_0 تمثل مبدأ الإحداثيات ، عندئذٍ يكون :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

بناءً على ذلك نجد :

$$\lim_{p\to p_0} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}\right)$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار $(\sqrt{\rho^2+1}+1)$ نجد :

$$= \lim_{\rho\to 0} \left[\frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{(\rho^2+1-1)}\right]$$

$$= \lim_{\rho\to 0} (\sqrt{\rho^2+1}+1) = 2$$

يجب أن نذكر هنا أن التابع المذكور ليس معرفاً في النقطة $p_0(0,0)$ ، لكن له نهاية عندما $p \to p_0$.

مثال (١٠) : أثبت عدم وجود النهاية :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

الحـــل : نلاحظ أن التابع المعطى معرّف ومـستمر فـي كـل نقـاط المـستوي عـدا النقطة $(0,0)$. ولنوجد نهاية التابع عندما $(x,y)\to(0,0)$ ، عندئذٍ :

- إذا كان $(x,y)\to(0,0)$ على طول المحور $0x$ ، أي $(y=0)$ ، فإن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

- إذا كان $(x,y)\to(0,0)$ على طول المحور $0y$ ، أي $(x=0)$ ، فإن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$$

ونلاحظ هنا أن النهايتين غير متساويتين ، وبالتالي فإن النهاية غيـر موجـودة ، لأن النهاية يجب ألا تتعلق بالطريق الذي تسلكه النقطة $(x\ ,y)$ مقتربة من النقطة $(0,0)$.

تعريف (٣) :

لتكن النقطة $p_0(x_0,y_0)$ والواقعة في مجال تعريف التابع $f(x,y)$ ، عندئذٍ نقول إن التابع $z=f(x,y)$ مستمر في النقطة $p_0(x_0,y_0)$ إذا تحققت الشروط الآتية :

آ- $f(x_0,y_0)$ معينة ومحدودة .

ب- النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة .

ج- هذه النهاية ، مساوية لقيمة التابع في تلك النقطة ، أي أن :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) \qquad (3.1)$$

أما إذا اختل أحد هذه الشروط ، فإننا نقول إن التابع غير مستمر في تلـك النقطـة ، وندعو هذه النقطة $p_0(x_0,y_0)$ بنقطة انقطاع للتابع المعطى .

وفي حال كون التابع مستمراً في كل نقاط جوار أو مجال ما ، فإننا نقول إن هذا التابع مستمر على ذلك المجال .

وبإدخال المصطلحات الآتية :

$$y = y_0 + \Delta y \ ; \ \ x = x_0 + \Delta x$$

نكتب العلاقة (3.1) بالشكل الآتي :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

أو بالشكل الآتي :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [\, f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\,] = 0$$

وبما أن الفرق :

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

يمثل التزايد Δz الحاصل على التابع z في النقطة $p_0(x_0, y_0)$ ، فإننا نعيد صياغة مفهوم استمرار التابع بالشكل الآتي :

نقول إن التابع $z = f(x, y)$ مستمر في النقطة $p_0(x_0, y_0)$ ، إذا كان التزايد الصغير الحاصل على وسطاء هذه النقطة Δx و Δy ، يقابله تزايد صغير على التابع z بمقدار Δz .

مثال (١١) : إن التابع $z = x^2 + y^2$

هو تابع مستمر في جميع نقاط المستوي $x0y$ ، في الحقيقة ، فإنه من أجل أية قيم اختيارية لـ $x, y, \Delta x, \Delta y$ يكون :

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Lambda y)^2\,] - [\,x^2 + y^2\,]$$

$$\Delta z = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2$$

$$\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

تعريف (٤) :

نقول إن التابع $z = f(x,y)$ مستمر في المنطقة D من المستوي $0xy$ إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط D .

ونقول إن التابع $z = f(x,y)$ مستمر على المستوي $0xy$ إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاطه .

مثال (١٢) : إن التابع :

$$z = \frac{xy+1}{1-xy}$$

غير مستمر في النقطة $x = 1$ و $y = 1$ ، وذلك لكونه غير معرّف في تلك النقطة .

مثال (١٣) : إن التابع :

$$z = \frac{x-y}{x-y-1}$$

مستمر من أجل جميع نقاط المستوي $x0y$ ما عدا النقاط من المستقيم والتي إحداثياتها تحقق المعادلة الآتية :

$$x - y - 1 = 0$$

مثال (١٤) : ليكن لدينا التابع :

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

والمطلوب : بيّن هل التابع مستمر في النقطة $(0,0)$.

حسب تعريف الاستمرار للتابع عند نقطة ، نلاحظ أولاً من نص التمرين أن قيمة التابع المعطى في النقطة $(0,0)$ هي صفر، أي أن : $f(0,0) = 0$

ومن ناحية ثانية نجد أن :

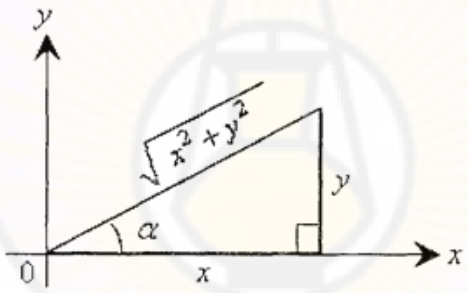
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 0+0=0$$

إن القيمتين :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

تمثلان $\cos\alpha, \sin\alpha$ على الترتيب ، وهما محدودتان مهما كانت x و y ، كما في الشكل (٣-٩) ، وبالتالي كلا الحدين في الطرف الأيمن من المساواة السابقة ينتهي إلى الصفر عندما $(x,y)\to(0,0)$. وبالتالي ، مما سبق نستنتج أن التابع المعطى مستمر من جميع نقاط المستوي $0xy$.



الشكل (٣-٩)

مثال (١٥) : بيّن هل التابع :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مستمر عند النقطة $(0,0)$ ؟

بما أن :

$$\lim_{x\to 0}\left\{ \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

و :

$$\lim_{y \to 0} \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\} = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

وبما أن النهايتين غير متساويتين ، فإن النهاية غير موجودة ، وبالتالي فإن التابع المعطى غير مستمر عند النقطة $(0,0)$.

تعريف (٥) :

نقول إن التابع $z = f(x,y)$ محدود في المجال المغلق D ، إذا كان ممكناً إيجاد ذلك العدد الموجب c ، والذي من أجله تكون جميع قيم الوسيطين x و y من ذلك المجال محققة للمتراجحة :

$$| f(x,y) | \le c$$

وفي الحالة المخالفة لذلك نقول إن التابع غير محدود على ذلك المجال .

تعريف (٦) :

ندعو القيمة العظمى (الصغرى) للتابع $f(x,y)$ في المجال المغلق D ، بالقيمة $f(x_0,y_0)$ إذا تحقق الشرط الآتي :

$$f(x_0,y_0) \ge f(x,y) \; [\, f(x_0,y_0) \le f(x,y) \,]$$

من أجل جميع نقاط المجال المغلق D .

وهكذا ، تكون المبرهنة الآتية محققة :

مبرهنة (١) :

إذا كان التابع $f(x,y)$ مستمراً في جميع نقاط المجال المغلق D ، فإنه يأخذ قيمة عظمى واحدة على الأقل في إحدى نقاطه ولتكن M ، وأخرى صغرى ولتكن m .

ينتج من هذه المبرهنة أنه إذا كان التابع مستمراً على مجال ما D ، فإنه محدود في ذلك المجال .

٣-٥ المشتقات الجزئية :

ليكن لدينا التابع $z = f(x,y)$ ، ولنثبّت y ، ولنعطي x تزايداً مقداره Δx ، عندئذٍ يحصل تزايد على التابع z مقداره :

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

والذي يدعى بتزايد جزئي للتابع z بالنسبة للمتغير x . وبشكل مشابه يحصل تزايد جزئي على التابع z بالنسبة للمتغير y مقداره :

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ولنلاحظ العلاقة ما بين التزايد الجزئي الحاصل $\Delta_x z$ بالنسبة للتزايد Δx على المتغير x ، نجد :

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

ندعو نهاية هذا المقدار (إن وجدت) ، عندما Δx يتناهى للصفر بالمشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبة لـ x ، ونرمز لذلك بأحد الرموز الآتية :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ z'_x \ , \ f'_x(x,y)$$

وبالتالي ، نكتب :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (3.2)$$

وبشكل مشابه نعرّف المشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y ونكتب :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (3.3)$$

نلاحظ من العلاقتين (3.2) و(3.3) أن عملية إيجاد المشتقات الجزئية تتم وفقاً لقواعد الاشتقاق لتابع لمتغير مستقل واحد .

والمطلوب وفق عملية حساب المشتق الجزئي للتابع z بالنسبة للمتغير x ، هو أن نفترض y كثابت ، وبالشكل نفسه إذا كان المطلوب حساب المشتق الجزئي للتابع z بالنسبة للمتغير y هو أن نفترض x كثابت .

مثال (١٦) : احسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$f(x,y) = x^3 \sin y + y^4$$

الحـــل : لنحسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 3x^2 \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = x^3 \cos y + 4y^3$$

مثال (١٧) : احسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$f(x,y) = arctg\,(x^2 + y^2)$$

بالنسبة لـ x و y في النقطة $A(0\,,\,0)$

الحـــل : المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$$

نعوض بإحداثيات النقطة $A(0\,,\,0)$ ، نجد :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

مثال (١٨) : احسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$z = \ln\left[\sin \frac{x}{\sqrt{y}}\right]$$

الحـــل : المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}}\ cotg\ \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = -\frac{x}{2\sqrt{y^3}}\ cotg\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$$

نُعرّف المشتقات الجزئية للتوابع التابعة لأكثر من متغيرين مستقلين بـشكل مـشابه ، وتحسب بالطريقة نفسها . فالتابع لـ n من المتغيرات $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ، له n مـن المشتقات الجزئية **الأولى** :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}\ , ...\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

مثال (١٩) : احسب المشتقات الجزئية :

$$z = \ln(xy + yt + tx)$$

الحـــل :

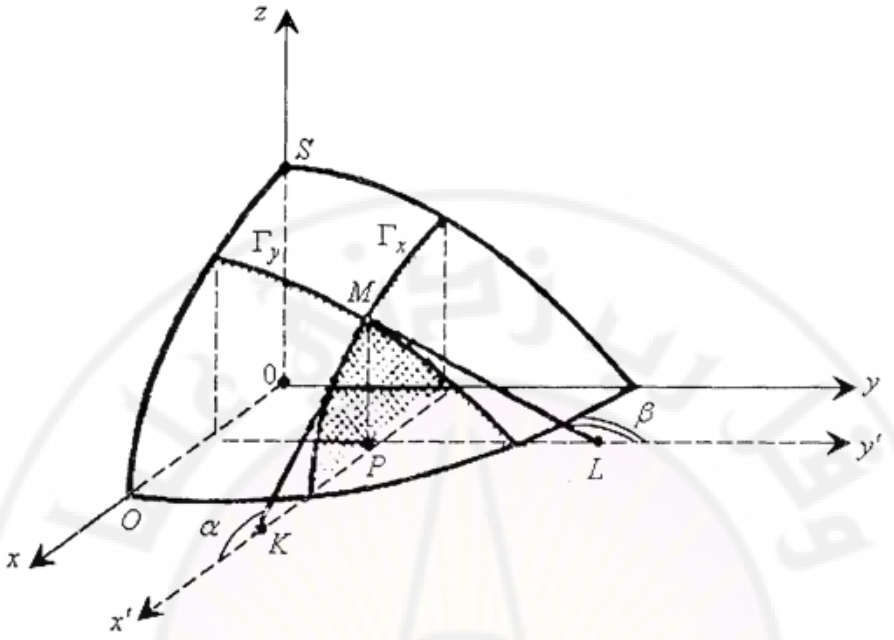
المشتقات الجزئية لهذا التابع :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y+t}{xy+yt+tx}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+t}{xy+yt+tx}\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x+t}{xy+yt+tx}$$

٣-٦ التأويل الهندسي للمشتقات الجزئية :

لاحظنا سابقاً أن التمثيل الهندسي للتابع $z = f(x,y)$ هو سطح فراغي فـي الفـراغ الديكارتي $0xyz$ ، ليكن السطح الممثل بالشكل (٣-١٠) ، ولنرمز له بـ S ، فـإذا وضـعنا (ثابتاً) $y = const$ ، نحصل بالتالي على المستوي Γ_x والذي يقطع السطح S بمستوٍ موازٍ لـ $x0z$ ، ولتكن MK مماساً للمنحني Γ_x في النقطة M ، تمثل α الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب للمحور $0x$.



الشكل (٣-١٠)

وبما أن المشتق الجزئي $\frac{\partial z}{\partial x}$ في النقطة M مساوٍ للمشتق العادي لهذا التابع في تلك النقطة ($y = const$) ، وبالاعتماد على المعنى الهندسي لمشتق تابع لمتغير واحد يكون :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha$$

بالشكل نفسه، إذا كان Γ_y منحني تقاطع المستوي الفراغي S مع المستوي $x = const$ وتمثل β الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لـ $0y$ ، يكون :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = tg\,\beta$$

وكما أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ للتابع $z = f(x, y)$ هي توابع للمتغيرين x و y ، وبالتالي يمكن اشتقاقها جزئياً مرة أخرى ، عندئذٍ نحصل على المشتقات الجزئية الأربعة الآتية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

عندئذٍ نسمي هذه المشتقات الجزئية ، بالمشتقات الجزئية من المرتبة الثانيـــة بالنـــسبة لـــ x ، وبالنسبة لـــ y ، ثم بالنسبة لـــ x و y على الترتيب وبالعكس . وبالطريقة نفسها تماماً يمكن الحصول على مشتقات جزئية من المرتبة الثالثة والرابعة ... الخ .

ملاحظة (٢) : نسمي المشتقين :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

بالمشتقات المختلطة .

مثال (٢٠) : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع :

$$z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

الحـــل : نحسب أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ، نجد :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

نشتق كلاً من $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بالنسبة لـــ x و y ، فنجد :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

حصلنا في المثال السابق على القيم نفسها للمشتقات المختلطة ، ومن الجدير ذكـره أن هذا التساوي غير محقق دوماً من أجل جميع التوابع . والشرط الواجب تحقيقه لكي تتـساوى قيم المشتقات المختلطة ، يعطى بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة (٢) :

إذا كان التابع $z = f(x,y)$ ومشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية محددين ومـستمرين في النقطة $M(a,b)$ وفي جوار ما لها ، عندئذٍ وفي هذه النقطة يكون محققاً ما يلي :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

نقبل هذه المبرهنة من دون برهان ، ونلخص إلى القول :

إن نتيجة الاشتقاق غير متعلقة بترتيب عملية الاشتقاق ، بالنسبة للمتغيرات .

مثال (٢١) : أوجد المشتقات الجزئية : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ للتابع $z = x^3 y^3$

الحـــل : نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^3 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 x^3$$

والآن لنحسب المشتقات الجزئية المختلطة $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ، نجد :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 9x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 9x^2y^2$$

وبما أن $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ، هذا يعني أن التابع $z = x^3y^3$ مستمر ومحدود في النقطة $M(a,b)$.

مثال (٢٢) : إذا كانت :

$z = x^2\, arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ ، أوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ عند النقطة $(1\ ,\ 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{1}{x} = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M(1,1)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \left[\frac{(x^2+y^2)\,(3x^2) - (x^3)\,(2x)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{2{,}3 - 1{,}2}{2^2} = 1$$

ملاحظة (٣) : يمكننا حساب المشتقات الجزئية لكلٍ من :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

باشتقاق العلاقة $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ جزئياً بالنسبة إلى x ، فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

وباشتقاق العلاقة $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ جزئياً بالنسبة إلى x ، فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

وكذلك باشتقاق $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)$ جزئياً بالنسبة لـ x ، فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$$

وبالطريقة نفسها تماماً نحصل على كلٍ من :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x}\ ,\ \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial y^2}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \text{الخ}$$

مثال (٢٤) : أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 . \partial y^2}\ ,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

للتابع : $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$

الحـــل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x.\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 . \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -2x\sin(xy) - yx^2\cos(xy)$$

ولحساب $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ ، نشتق هذه العلاقة جزئياً بالنسبة لـ x ، فنجد :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = -2\sin(xy) - 2xy\cos(xy) -$$

$$-2xy\cos(xy) + y^2x^2\sin(xy)$$

٣-٧ التفاضل التام :

سنستعرض الآن التفاضل التام (الكلي) للتوابع لعدة متغيرات . نبدأ ذلك بالتوابع لمتغيرين .

ليكن التابع $z = f(x,y)$ المعرّف والمستمر والقابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x و y ، في نقطة ما . نعطي التفاضل التام dz لهذا التابع $z = f(x,y)$ في تلك النقطة بالتركيب الخطي الآتي :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}h + \frac{\partial z}{\partial y}k$$

بحيث إن المشتقين الجزئيين قد تم إيجادهما في النقطة المفروضة .

نختار قيم الثابتين تبعاً للنقطة التي يحسب فيها التفاضل التام dz ، وتبعاً للتابع z الذي نوجد تفاضله التام ، وخاصة من أجل التابعين :

$$f(x,y) = x \quad , \quad \varphi(x,y) = y$$

نحصل على :

$$df(x,y) = dx = 1.h + 0.k = h$$
$$d\varphi(x,y) = dy = 0.h + 1.k = k$$

عندئذٍ :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (3.4)$$

وتكون عبارة التفاضل التام لتابع ذي (n) متغيراً مستقلاً :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\, dx_n$$

مثال (٢٤) : أوجد التفاضل التام للتابع : $z = \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

الحـــل : نحسب أولاً المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x^2 - y^2} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{x^2 - y^2}$$

وبالتالي :

$$dz = \frac{2y\,dx - 2x\,dy}{x^2 - y^2}$$

مثال (٢٥) : أوجد التفاضل التام للتابع :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

الحـــل : نحسب أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

وبالتالي فإن :

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy$$

إذا كان التابع $z = f(x, y)$ قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى x و y ، فإنه من أجل التزايـد Δx و Δy للمتغيرين x و y ، ينتج ويطرأ تزايد على التابع مقداره Δz ، ويعطى بالعلاقة :

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x, y)$$

وندعوه بالتزايد الكلي أو التام على z .

وبشكل تقريبي ، يمكن أن نستبدل به التفاضل التام dx ، أي أن :

$$\Delta z \approx dz$$

مثال (٢٦) : مخروط ارتفاعه $h = 30\ cm$ ، ونصف قطر قاعدته $r = 10\ cm$.

كم سيتغير حجم هذا المخروط ، إذا طرأ على الارتفاع تغير مقدار $3\ mm$ ، ويصغر نصف قطر القاعدة $1\ mm$.

الحـــل :

إن حجم المخروط يعطى بالعلاقة الآتية :

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 . h$$

وهو تابع للمتغيرين h , r ، ومشتقاته الجزئية هي :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi}{3} r.h \ , \ \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2$$

وبما أن $\Delta V \approx dV$ ، فإن تزايد الحجم التقريبي يكون :

$$\begin{aligned}
\Delta V &\approx \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh \\
&\approx \frac{2\pi}{3} rh\,dr + \frac{\pi}{3} r^2 dh \\
&\approx \frac{\pi}{3} (2rh\,dr + r^2 dh) \\
&\approx \frac{\pi}{3} [2\times 10\times 30(-0{,}1) + 100\times 0{,}3] - 10\pi \\
&\approx -31\times 4\ cm^2
\end{aligned}$$

التفاضل التام dz لتابع $z = f(x,y)$ هو تابع لكل من x و y ، وتفاضله إن وجد يدعى بالتفاضل التام من المرتبة الثانية z ، ونرمز له بالرمز $d^2 z$ ، واعتماداً على التعريف يكون:

$$\begin{aligned}
d^2 z = d(dz) &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d^2 x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d^2 y
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d^2x + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d^2y \qquad (3.5)$$

أثناء عملية الاشتقاق نعامل dx و dy كثوابت .

من العلاقة الأخيرة نجد :

$$d^2 z = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} d^2x + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} d^2y)\, z$$

لكن نعلم أن $z = f(x,y)$ ، أي :

$$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^2 . f(x,y)$$

وبالأسلوب ذاته ، نجد التفاضل التام من مراتب عليا للدالة $z = f(x,y)$:

$$d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^n . f(x,y)$$

وإذا كان التابع بثلاث متغيرات $u(x,y,z)$ ، فإن التفاضل التام من المرتبة n ، يعطى بالعلاقة الآتية :

$$d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz)^n\, f(x,y,z) \qquad (3.6)$$

مثال (٢٧) : أوجد التفاضل $d^2 z$ للتابع :

$$z = x^2 + y^2 + \ln(x - y^2)$$

الحـــل :

نحسب أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{1}{x - y^2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - \frac{2y}{x - y^2}$$

ونحسب ثانياً المشتقات من المرتبة الثانية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 - \frac{1}{(x - y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)^2 - 1}{(x - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{(x-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 - \left[\frac{2(x-y^2)+4y^2}{(x-y^2)^2}\right] = \frac{2(x-y^2)^2 - 2x - 2y^2}{(x-y^2)^2}$$

وبتطبيق العلاقة (3.5) ، نجد :

$$d^2 z = \left[\frac{2(x-y^2)-1}{(x-y^2)^2}\right] dx^2 +$$

$$+ \frac{4y}{(x-y^2)^2}\, dx\, dy + \left[\frac{2(x-y^2)-2x-2y^2}{(x-y^2)^2}\right] dy^2$$

٣-٨ اشتقاق التوابع المركبة وتفاضلها :

إذا كان للتابع $z = f(x,y)$ مشتقات جزئية مستمرة z'_x , z'_y ، وكان كلاً من x و y قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى t ، حيث :

$$x = \varphi(t) \;\; ; \;\; y = \psi(t)$$

عندئذٍ يكون التابع :

$z = f(x,y) = f[\varphi(t) \;;\; \psi(t)] = F(t)$ تابعاً مركباً بالنسبة لـ t .

ولنوجد تفاضل هذا التابع z بالنسبة إلى t ، وذلك :

بفرض أن Δz يمثل التزايد الحاصل على التابع $z = f(x,y)$ ، أي :

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,y) \qquad (3.7)$$

وبإضافة $f(x, y+\Delta y)$ إلى الطرف الثاني وطرحه ، نجد :

$$\Delta z = [f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] +$$
$$+ [f(x,\, y+\Delta y) - f(x,y)] \qquad (3.8)$$

وبتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة على عبارتي ما بين الأقواس المتوسطة ، وكما أن حاصل الفرق ما بين الأقواس المتوسطة هو ثابت لكل من x و $y+\Delta y$ ، فيكون x متغيراً ، بينما يكون $y+\Delta y$ ثابتاً ، أي :

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]=$$
$$=\Delta f'_x.x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y) \qquad (3.9)$$

حيث :

θ : عدد محصور ما بين الصفر والواحد ، ومن أجله تكون مبرهنة التزايدات المحدودة محققة ، وتكون النقطة $x+\theta\Delta x$ واقعة بين x و $x+\theta\Delta x$ ، أي :

$$x < x+\theta\Delta x < x+\Delta x$$

ولنطبق مبرهنة التزايدات المحدودة على القوس الثاني في الطرف الثاني من العلاقة (3.8) فيكون x ثابتاً ، بينما يكون y متغيراً ، أي :

$$f(x,\ y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y.z'_y(x,y+\theta_1\Delta y) \qquad (3.10)$$

حيث $0<\theta_1<1$ ، وبالتالي :

$$y < y+\theta_1\Delta y < y+\Delta y$$

بإبدال العلاقتين (3.10) و(3.9) في العلاقة (3.8) نجد :

$$\Delta z=z'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+z'_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$

بالتقسيم على Δt ، نجد :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=z'_x(x+\theta.\Delta x,y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+z'_y(x,y+\theta_1\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (3.11)$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t\to 0$ ، وبما أن x وy قابلان للاشتقاق بالنسبة لـ t يكون أيضاً $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$ ، أي :

$$\frac{dz}{dt}=z'_x(x,y)\ \frac{dx}{dt}+z'_y(x,y)\ \frac{d\,y}{dt}$$

أو بالشكل :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{d\,y}{dt} \qquad (3.12)$$

وبتعميم العلاقة (3.12) على تابع لأكثر من متغيرين ، وليكن هذا التابع :

$$u=f(x,y,z)$$

حيث إن :

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$: توابع قابلة لاشتقاق بالنسبة إلى t ، وكان $u = f(x, y, z)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة $[x(t), y(t), z(t)]$ ، فإن التابع :

$$u = f[x(t), y(t), z(t)]$$

يكون قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى t ، وأن :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (3.13)$$

مثال (٢٨) : أوجد مشتق التابع :

$$z = x^2 + y^2$$

حيث : $x = \sqrt{t}$; $y = e^{2t}$

الحـــل :

نحسب المشتقات الجزئية للتابع z بالنسبة إلى x و y ، نجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

نحسب مشتقات x و y ، بالنسبة إلى t ، يكون :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2e^{2t}$$

واعتماداً على العلاقة :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

يكون :

$$\frac{dz}{dt} = [2x\frac{1}{2\sqrt{t}} + 4e^{2t}y]\Big|_{\substack{x=\sqrt{t} \\ y=e^{2t}}} = 2\sqrt{t}\ \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4e^{4t}$$

$$= 1 + 4e^{4t}$$

مثال (٢٩) : أوجد :

$\frac{du}{dt}$ ، إذا كان التابع $u = x.y.z$ ، و $x = t^2 + 1$ ، و $y = \ln t$ ، و $z = tg\,t$

الحـــل : نعلم أن :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = (yz)(2t) + (x.z)(\frac{1}{t}) + (x.y)\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{\substack{x=t^2+1\\ y=\ln t\\ z=tg\,t}} = 2t(\ln t).(tg\,t) + \frac{(t^2+1)tgt}{t} + (t^2+1)\frac{\ln t}{\cos^2 t}$$

حالة خاصة : إذا كان $z = f(x,y)$ و $y = \varphi(x)$ ، أي أن :

$$z = f[x, \varphi(x)]$$

هو تابع مركب بالنسبة إلى x ، وتأخذ العلاقة (3.12) الشكل الآتي :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (3.14)$$

مثال (٣٠) : أوجد مشتق التابع :

$$z = x^3 y^7 + e^{xy}$$

حيث : $y = \frac{1}{1+x^2}$

الحـــل : من العلاقة (3.14) نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2y^7 + ye^{xy} + (7x^3y^6 + xe^{xy})\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

مبرهنة (٣) :

إذا كان للتابعان $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ مشتقات جزئية من المرتبة الأولى عند النقطة (u,v) ، وإذا كان التابع $z = f(x,y)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة :

$$[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]$$

فإن للتابع :

$$z = f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]$$

مشتقين جزئيين من المرتبة الأولى عند النقطة (u,v) ، ويعطيان بالعلاقتين الآتيتين :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

مثال (٣١) : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial v}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial u}$$

حيث : $z = e^{2xy}\ ;\ x = u + 3v\ ;\ y = \frac{u}{v}$

الحـــل : نطبق الدساتير (3.15) نجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ye^{2xy}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2xy}\ ;\ \frac{\partial x}{\partial u} = 1\ ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}\ ;\ \frac{\partial x}{\partial v} = 3$$

نبدل في الدساتير السابقة :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2ye^{2xy}).(1) + (2xe^{2xy}).(\frac{1}{v})$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\substack{x=u+3u \\ y=\frac{u}{v}}} = 2(\frac{u}{v})e^{2(u+3v)(\frac{u}{v})} + 2(u+3v)e^{2(u+3v)(\frac{u}{v})}.(\frac{1}{v})$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left[\frac{2u}{v} + \frac{2u+6v}{v}\right] e^{\frac{2u^2+3uv}{v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{4u+6v}{v}\right) e^{\frac{2u^2+3uv}{v}}$$

وبالطريقة نفسها تماماً يمكن حساب $\frac{\partial u}{\partial v}$ (يترك للطالب) .

ملاحظة (٤) : إذا كان :

$w = f(x,y,z)\ ;\ z = z(r,s)\ ;\ y = y(r,s)\ ;\ x = x(r,s)$ ، فإن :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

ملاحظة (٥) : إذا كان :

$w = f(x,y,z)\ ;\ z = z(r,s,t)\ ;\ y = y(r,s,t)\ ;\ x = x(r,s,t)$

فإن :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

مثال (٣٣) : إذا كان :

$$U = z\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث : $x = 3r^2 + 2s \;\; ; \;\; y = 4r - 2s^3 \;\; ; \;\; z = 2r^2 - 3s^2$

والمطلوب ، أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial U}{\partial r} \quad ، \quad \frac{\partial U}{\partial s}$$

آ- لنوجد $\frac{\partial U}{\partial r}$:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \left[(z\cos\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) \right](6r) +$$

$$+ \left[(z\cos\frac{y}{x})(\frac{1}{x}) \right](4) + \left[(\sin\frac{y}{x})(4r) \right]$$

$$= -\frac{6ryz}{x^2}\cos(\frac{y}{x}) + \frac{4z}{x}\cos(\frac{y}{x}) + 4r\sin(\frac{y}{x})$$

ب- لنوجد $\frac{\partial U}{\partial s}$:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= \left\{ (z\cos\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) \right\}(2) +$$

$$+ \left\{ (z\cos\frac{y}{x})(\frac{1}{x}) \right\}(-6s^2) + \sin(\frac{y}{x})(-6s)$$

$$= -\frac{2yz}{x^2}\cos(\frac{y}{x}) - \frac{6s^2z}{x}\cos(\frac{y}{x}) - 6s\sin(\frac{y}{x})$$

مثال (٣٣) : إذا كان لدينا :

$$w = x^2 + y^2 - z^2 \;\; ; \;\; x = \rho\sin\phi\cos\theta \;\; ;$$

$$y = \rho \sin\theta \sin\phi \ ; \ z = \rho \cos\phi \qquad \text{و}$$

والمطلوب ، أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} \ , \ \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

آ- لنوجد $\frac{\partial w}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= 2x(-\rho \sin\phi \sin\theta) + 2y(\rho \sin\phi \cos\theta)$$

$$= 2(\rho \sin\phi \cos\theta)(-\rho \sin\phi \sin\theta) + 2(\rho \sin\theta \sin\phi)(\rho \sin\phi \cos\theta)$$

$$= -2\rho^2 \sin^2\phi \sin\theta \cos\theta + 2\rho^2 \sin^2\phi \sin\theta \cos\theta = 0$$

ب- لنوجد $\frac{\partial w}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$= 2x \sin\phi \cos\theta + 2y \sin\phi \sin\theta - 2z \cos\phi$$

$$= 2\rho \sin^2\phi \cos^2\theta + 2\rho \sin^2\phi \sin^2\theta - 2\rho \cos^2\phi$$

$$= 2\rho \sin^2\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2\rho \cos^2\phi$$

$$= 2\rho \sin^2\phi - 2\rho \cos^2\phi$$

٣-٩ مشتق التوابع الضمنية :

إذا كانت قيم الوسيطين x و y مرتبطة بمعادلة ، والتي يمكن إعادة كتابتها بعد نقل جميع حدودها إلى طرف واحد من الشكل الآتي :

$$F(x,y) = 0 \qquad (3.18)$$

فإننا ندعو كل تابع من الشكل $y = f(x)$ المعرّف والمستمر على مجال ما D ، والذي يمكن إعادة كتابته لمطابقة الشكل بالعلاقة (3.18) بالتابع الضمني ، أو المستتر، والمعرّف بالعلاقة (3.18) .

مثال (٣٤) : المعادلة :

$$x\,y + x + y - 1 = 0$$

تعين التابع :

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

مثال (٣٥) : المعادلة :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

تعين كلاً من التابعين :

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad ; \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

ومن الجدير ذكره ، أنه ليس كل معادلة من الشكل $F(x,y) = 0$ تعين تابعاً .

فمثلاً المعادلة :

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

غير محققة من أجل أية ثنائية مرتبة من الأعداد الحقيقية ، وبالتالي فلا تعين تابعاً .

والشرط الكافي لوجود التابع الضمني نعطيه من خلال المبرهنة الآتية التي نقبلها من دون برهان .

مبرهنة (٤) : ليكن :

آ- التابع $F(x,y)$ معرفاً ومستمراً ، بالإضافة لمشتقاته الجزئية :

$$F'_x(x,y) \quad \text{و} \quad F'_y(x,y)$$

في جوار ما للنقطة (x_0, y_0) .

ب- قيمة التابع في هذه النقطة صفر، أي :

$$F(x_0, y_0) = 0$$

ج- المشتق :

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

عندئذٍ يوجد ذلك الجوار للنقطة (x_0, y_0) ، والتي من أجله تحدد المعادلة $F(x,y)=0$ تابعاً y بالنسبة للمتغير x ، والذي يكون له القيمة $y=y_0$ من أجل $x=x_0$. وبالتالي يوجد مجال متناظر بالنسبة لـ x_0 يكون التابع المشتق لهذا التابع مستمراً في جميع نقاطه .

ونذكر هنا أن عملية كتابة y بالنسبة لـ x ، ليست عملية ناجحة وسهلة في كثير من الأحيان ، ولذلك لنحسب مشتق التابع الضمني المعطى بالعلاقة $F(x,y)=0$ ، وذلك من دون التعبير عن y بدلالة x ، وبالتالي تكتب المعادلة (3.18) كما يلي :

$$F[(x,y(x)]=0 \qquad (3.19)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن F هو تابع مركب بالنسبة للمتغير المستقل ، أي يمكننا تطبيق العلاقة (3.14) ، نجد أن :

$$\frac{dF[(x,y(x)]}{dx}=F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\,y'(x)=0$$

أو بالشكل :

$$F'_x\big(x,f(x)\big)+F'_y\big(x,f(x)\big)\,f'(x)=0$$

أو :

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\,f'(x)=0$$

وبالتالي نجد :

$$f'(x)=\frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad (3.20)$$

مثال (٣٦) : أوجد مشتق التابع الضمني :

$$y^5+2x^2y^2+x\,y-42=0$$

الحـــل : نحسب F'_x و F'_y ، يكون :

$$F'_x(x,y)=4\,x\,y^2+y$$
$$F'_y(x,y)=5\,y^4+4\,x^2y+x$$

ومن العلاقة (3.20) نجد أن :

$$f'(x)=\frac{(4xy^2+y)}{5y^4+4x^2y+x}$$

أما إذا أعطينا المعادلة :

$$F(x,y,z)=0 \qquad (3.21)$$

التي تربط ما بين قيم المتغيرات الثلاثة x, y, z .

ولنبحث عن تلك النقاط أو القيم المرتبة للثنائية (x,y) والتي تحدد قيمة لـ z ، بحيث ترجع العلاقة أو المعادلة (3.21) إلى مطابقة .

نقول إن المعادلة (3.21) تعين تابعاً ضمنياً مثل $z=f(x,y)$ ، مجموعة تعريفه هي قيم الثنائيات لـ (x,y) كافة ، والتي من أجلها يكون :

$$F[x,y,f(x,y)]=0 \qquad (3.22)$$

مثال (٣٧) : إن المعادلة :

$$2x+y-z=5$$

تحدد z كتابع ضمني لكل من المتغيرين x و y ، وذلك من أجل جميع نقاط المستوي $x0y$ ، ومن أجل أية ثنائية (x,y) توجد قيمة لـ z هي :

$$z=2x+y-5$$

وبحيث يكون :

$$2x+y-z-5=0$$

بالواقع ، إن المعادلة (3.21) ليست دائماً تحدد وبشكل صريح z كتابع ضمني لكل من x و y ، مثلاً المعادلة :

$$\sin(2x+y+3z)=3$$

غير محققة ، من أجل أية ثلاثية (x,y,z) .

يمكن حساب المشتقات الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ للتابع الضمني ، وذلك من دون التعبير عن z بدلالة x و y ، بشكل واضح .

ولإيجاد هذه المشتقات ، نشتق المعادلة (3.22) بالنسبة لكل من x و y ، ونجد :

$$\frac{\partial F[x,y,z(x,y)]}{\partial x} = F'_x(x,y,z) + F'_z(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F[x,y,z(x,y)]}{\partial y} = F'_y(x,y,z) + F'_z(x,y,z)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

وبالتالي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

مثال (٣٨) : أوجد المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

الحـــل : نوجد المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمتغيرات $x\,,\,y\,,\,z$:

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}\;;\; F'_y = \frac{2y}{b^2}\;;\; F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

ومن العلاقة (3.23) نجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{2x}{a^2}}{\dfrac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{2y}{b^2}}{\dfrac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

٣-١٠ جملة التوابع الضمنية :

يمكن أن نُعَرّف المعادلة :

$$F(x,y,u,v)=0$$

تابعاً v ، مثلاً، في ثلاثة متغيرات u وy و x .

وإذا كان بالإضافة لهذه المعادلة ، معادلة أخرى هي :

$$G(x,y,u,v)=0$$

فإن هاتين المعادلتين تعرفان ، ضمن شروط معينة تابعين u وv في المتغيرين y وx :

$$u=f(x,y) \quad ; \quad v=g(x,y)$$

ولإيجاد مشتقاتهما الجزئية بالنسبة إلى x ، نشتق كلاً من u وv :

آ- بالنسبة إلى x :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى المجهولين $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، نجد :

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}$$

ب- بالنسبة إلى y ، وبأسلوب مماثل ، نجد مشتقي التابعين u وv ، ونرمز للاختصار:

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$$

ويسمى يعقوبي التابعين F وG بالنسبة إلى u وv .

وعليه ، فإن مشتقات التابعين u و v بالنسبة إلى المتغيرين y و x ، تكتب اختصاراً :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

وبالأسلوب ذاته ، يمكن تعريف يعقوبي m تابعاً في m متغير .

٣-١١ خواص اليعقوبيات :

إن لليعقوبيات خواصاً مشابهة لخواص مشتقات التوابع بمتغير واحد ، وإثبات صحة هذه الخواص يعتمد على خواص المحددات .

فمثلاً إذا كان لدينا التابعان : $u = f(x,y)$; $v = g(x,y)$

وكان المتغيران x و y ، يتبعان للمتغيرين r و s ، وكان $x,y,u,v \in cl'$ (حيث إن الرمز cl' يرمز لمجموعة التوابع القابلة للاشتقاق مرة واحدة) ، وكانت اليعقوبيات الواردة لا تنعدم ، فإن :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$$

وباستبدال r بـ u ، و s بـ v ، يكون :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

وهي تشبه قاعدة اشتقاق التابع العكسي بمتغير واحد .

وعموماً ، يمكن أن تعرّف جملة المعادلات :

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n ; u_1, u_2, ..., u_m) = 0 \ ; \ i = 1, 2, ..., m \qquad (3.24)$$

وضمن شروط معينة ، جملة توابع عددها m في n متغير :

$$u_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ i = 1, 2, ..., m \qquad (3.25)$$

وفيما يلي ، نورد من دون إثبات ، مبرهنة وجود جملة التوابع الضمنية واستمرارها واشتقاقها .

مبرهنة (٥) :

إذا حققت جملة التوابع : $F_i : D^{n+m} \to D$;

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n ; u_1, u_2, ..., u_m) = 0 \ ; \ i = 1, 2, 3, ... m$$

الشروط الآتية :

آ- $F_i(p_0) = 0$ في نقطة ما $p_0 \in D^{n+m}$ ، مهما يكن $i = 1, 2, ..., m$.

ب- $F_i \in cl'(I)$ ، حيث I جوار للنقطة p_0 .

ج- $J = \dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(u_1, u_2, ..., u_m)} \neq 0$ ، في الجوار I .

فإن جملة المعادلات (3.24) تعرف في الجوار I للنقطة p_0 ، وجملة التوابع الضمنية (3.25) ، حيث $u_1, u_2, ..., u_m$ توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق في I ـ وتعطى مشتقاتها بالعلاقات الآتية :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = - \frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(x_1, u_2, ..., u_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(u_1, u_2, ..., u_m)}} \ , ... \ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} = \frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(x_m, u_2, ..., u_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(u_1, u_2, ..., u_m)}}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = - \frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(u_1, x_1, ..., u_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, F_2, ..., F_m)}{\partial(u_1, u_2, ..., u_m)}} \ .....$$

مثال (٣٩) : أثبت أن المعادلتين :

$$F(x,y,u,v) \equiv x^2 + ux + v^2 + 8y = 0$$

$$G(x,y,u,v) \equiv x^3 y - 2ux + v^2 + 4 = 0$$

تُعرّفان تابعين ضمنيين u و v في المتغيرين المستقلين x و y ، وهذان التابعان مستمران وقابلان للاشتقاق في ساحة يُطلب تعيينها ، ثم أوجد $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

الحـــل : لما كان عدد المتغيرات في المعادلتين أربعة ، وعدد متغيرات التوابع الـضمنية المفروضة u و v مساوٍ لعدد المعادلات ، فإن المتغيرين المتبقيين x و y مستقلاّن والشروط الواردة في المبرهنة (٥) محققة ، لأن :

آ- $F = 0$ و $G = 0$ ، أياً تكن x و y و u و v فرضاً .

ب- $F, G \in cl'$ ، أياً تكن x و y و u و v ، لأن F, G كثيرتي حدود .

ج- $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x & 2v \\ -2x & 2v \end{vmatrix} = 6xv \neq 0$$

وعليه ، فإن المعادلتين $F = 0$ و $G = 0$ ، تُعرّفان تابعين ضـمنيين u و v ، فـي المتغيرين المستقلين x و y ، بحيث $xv \neq 0$ ، وهذان التابعان مستمران وقابلان للاشـتقاق ، أيّ تكن x و y و u و v ، من أجل $xv \neq 0$ ، ويكون :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{-1}{6xv}\begin{vmatrix} 8 & 2v \\ x^3 & 2v \end{vmatrix} = \frac{-(16v - 2vx^3)}{6xv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{6xv}\begin{vmatrix} x & 2x+u \\ -2x & 3x^2y - 2u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3x^2y + 4x}{6v}$$

مثال (٤٠) : إذا كانت :

$$u-2v^2=x-2y \;\; ; \;\; u^2-v=3x+y$$

والمطلوب ، أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} ; \frac{\partial v}{\partial x} ; \frac{\partial u}{\partial x}$$

الحـــل : نفاضل المعادلات المعطاة بالنسبة إلى المقدار x ، معتبـرين u و v ، كتوابـع للمقدارين x و y ، وبالتالي نجد :

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=3 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x}-4v\frac{\partial v}{\partial x}=1$$

وبحل هاتين المعادلتين حلاً مشتركاً نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}=\frac{-12v+1}{1-8uv}=\frac{1-12v}{1-8uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}2u & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}=\frac{2u-3}{1-8uv}$$

وبمفاضلة المعادلات المعطاة بالنسبة إلى y ، نجد :

$$2u\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}-4v\frac{\partial v}{\partial y}=-2$$

وكذلك ، بحل هاتين المعادلتين نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -4v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}=\frac{-4v-2}{-8uv+1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{-4u-1}{-8uv+1}$$

حيث إننا افترضنا أن $1-8uv \neq 0$

٣-١٢ نشر تايلور لتابع بمتغيرين :

نعمم الآن نشر تايلور من أجل التوابع بمتغيرين :

مبرهنة تايلور في النشر المنتهي (٦) :

ليكن $z = f(x,y)$ تابع معرّف ومستمر على الساحة $D \subseteq R^2$ ، وليكن Ω جواراً للنقطة $p_0(x_0, y_0)$ من D ، وليكن $f \in cl^N$ ، يمكن عندئذٍ كتابة هذا التابع كما يلي :

$$f(x,y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0 - y_0) + R_N \quad (3.26)$$

حيث R_N : باقي تايلور للتابع f ، في جوار النقطة p_0 ، معطى بالعلاقة الآتية :

$$R_N = \frac{1}{N!} \left[(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(X,Y)$$

حيث :

$$0 < \theta < 1 \; ; \; Y = y_0 + \theta(y-y_0) \; ; \; X = x_0 + \theta(x-x_0)$$

ويمثل R_N الخطأ المرتكب عند استبدال التابع f ، بالمتسلسلة السابقة .

ملاحظة (٦) : إذا وضعنا :

$x - x_0 + \Delta x$ ، $y - y_0 + \Delta y$ ، في المتسلسلة السابقة ، نجد :

$$f'(x_0 + \Delta x \; ; \; y_0 + \Delta y) = f(x_0 \, , \, y_0) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n!}\left[\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n} f(x_0,y_0)+R_N$$

أي أن :

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n!}\left[\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n} f(x_0,y_0)+R_N$$

وهذا التغير الذي يطرأ على التابع f ، عندما تتغير x بالمقدار Δx ، و y بالمقدار Δy .

مبرهنة تايلور في النشر غير المنتهي (٧) :

إذا كان التابع $f(x,y)$ تابع معرف ومستمر على الساحة $D\subseteq R^2$ ، ولها مشتقات جزئية ، عدداً غير منتهٍ من المرات ، مستمرة على جوار Ω للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ من D ، ونيكن $\lim_{N\to\infty} R_N=0$ في هذا الجوار ، عندئذٍ فإن :

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n} f(x_0,y_0)$$

وتسمى هذه المتسلسلة ، متسلسلة تايلور غير المنتهية للتابع $f(x,y)$ في الجوار Ω ، ونسمى الجوار Ω ، جوار النشر .

ويمكن بسهولة إثبات أن هذا النشر وحيد في الجوار Ω . ويمكن اشتقاق ومكاملة المتسلسلات غير المنتهية الناتجة ، حداً حداً ، وذلك للحصول على مشتق أو تكامل التابع المنشورة ، بالترتيب .

حالة خاصة :

إذا كان النشر بجوار النقطة $(0,0)$ ، فإن النشر يسمى نشر ماكلوران .

مثال (٤١) : أوجد منشور تايلور للتابع :

$$f(x,y)=y^2+\cos(xy)$$

في جوار للنقطة $p_0(\frac{\pi}{2},1)$ ، مكتفياً بحدود من الدرجة الثانية .

الحـــل : واضح أن التابع f ، معرّف ومستمر هو ومشتقاته ومن جميع المراتـب علـى جوار للنقطة p_0 :

$$f(\frac{\pi}{2},1)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$$

$$f'_x(x,y)=-y\sin(xy)\ \Rightarrow\ f'_x(\frac{\pi}{2},1)=-1$$

$$f'_y(x,y)=2y-x\sin(xy)\ \Rightarrow\ f'_y(\frac{\pi}{2},1)=2-\frac{\pi}{2}$$

$$f''_{xx}(x,y)=-y^2\cos(xy)\ \Rightarrow\ f''_{xx}(\frac{\pi}{2},1)=0$$

$$f''_{yy}(x,y)=2-x^2\cos(xy)\ \Rightarrow\ f''_{yy}(\frac{\pi}{2},1)=2$$

$$f''_{xy}(x,y)=-\sin(xy)-xy\cos(xy)\ \Rightarrow\ f''_{xy}(\frac{\pi}{2},1)=-1$$

$$f''_{yx}(x,y)=-\sin(xy)-xy\cos(xy)\ \Rightarrow\ f''_{yx}(\frac{\pi}{2},1)=-1$$

نبدل في العلاقة (3.26) ، فنجد :

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)f'_x+(y-y_0)f'_y+$$
$$+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''_{xx}+\frac{(y-y_0)^2}{2!}f''_{yy}+2\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{2!}f''_{xy}+R_3$$

$$y^2+\cos(xy)=1+(x-\frac{\pi}{2})(-1)+(y-1)(2-\frac{\pi}{2})+$$
$$+\frac{(2-\frac{\pi}{2})^2}{2}(0)+\frac{(y-1)^2}{2}(-1)+2\frac{2-\frac{\pi}{2}(y-1)}{2}(-1)+R_3$$

$$f(x,y)=1-(x-\frac{\pi}{2})+(2-\frac{\pi}{2})(y-1)-$$
$$-\frac{(y-1)^2}{2}-(x-\frac{\pi}{2})(y-1)+R_3$$

٣-١٣ القيمتين العظمى والصغرى لتابع ذي متغيرين أو أكثر :

ليكن $z = f(x,y)$ تابعاً لمتغيرين z و y ، معرفاً على مجال ما D . ولتكن $p_0(x_0,y_0)$ ، نقطة من هذا المجال .

نقول إن للتابع $z = f(x,y)$ قيمة عظمى من نقطة مثل $p_0(x_0,y_0)$ ، إذا كان :

$$f(x_0,y_0) > f(x,y) \quad ; \quad \forall (x,y) \in D$$

محققاً من أجل جميع النقاط $p(x,y)$ الواقعة في الجوار القريب للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ والمختلفة عنها .

وبشكل مشابه ، نقول إن للتابع $z = f(x,y)$ قيمة صغرى في النقطة $p_0(x_0,y_0)$ إذا كان :

$$f(x_0,y_0) < f(x,y) \quad ; \quad \forall (x,y) \in D$$

محققاً من أجل جميع النقاط $p(x,y)$ الواقعة في الجوار القريب للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ والمختلفة عنها .

إن نقاط القيم العظمى والصغرى تدعى بنقاط القيم الحدية للتابع ، أي نقول إن للتابع ذي المتغيرين ، قيمة حدية في نقطة ، إذا كان للتابع في تلك النقطة قيمة عظمى أو صغرى .

وكما نعلم ، فإن الشرط الكافي ليكون للتابع $f(x)$ التابع لمتغير مستقل واحد فقط قيمة حدية في النقطة $x = x_0$ ، هو أن ينعدم المشتق الأول لهذا التابع في تلك النقطة .

ولتعيين القيم العظمى والصغرى للتابع ذي متغيرين (ويمكن تعينهما لأكثر من متغيرين) ، فإننا سنعتمد على المبرهنتين الآتيتين :

مبرهنة (٨) :

إذا كان لتابع $z = f(x,y)$ ، قيمة عظمى أو صغرى في النقطة $p_0(x_0,y_0)$ ، فإن كلاً من المشتقين الجزئيين $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ينعدم من أجل :

$$y = y_0 \ ; \ x = x_0$$

أي : $$f'_x(x_0,y_0) = 0 \ ; \ f'_y(x_0,y_0) = 0$$

مبرهنة (٩) :

إذا كان لتابع $z = f(x,y)$ مشتقات جزئية مستمرة من المرتبتين الأولى والثانية في النقطة (x_0, y_0) ، وكان :

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad ; \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

فإن لهذا التابع في تلك النقطة نهاية حدية إذا تحقق الشرط الآتي :

$$D(x,y) = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0 \qquad (3.27)$$

وهنا نميز حالات ثلاث :

أ- للتابع قيمة عظمى في النقطة (x_0, y_0) إذا كان $f''_{xx} < 0$ ، وقيمة صغرى إذا كان $f''_{xx} > 0$.

ب- إذا كان $D(x,y) < 0$ ، فإن التابع $z = f(x,y)$ ليس له قيم حدية في النقطة (x_0, y_0) .

ج- أما في حال كون $D(x,y) = 0$ ، فإنه لا يمكن القول إن للتابع قيمة عظمى أو صغرى ، أو ليس له من قيم حدية (حالة شك) .

مثال (٤٢) : أوجد القيم الحدية للتابع :

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

الحـــل : نحسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع المعطى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) = 2x + y - 2 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) = x + 2y - 3$$

نعدم هذه المشتقات ، ونحل جملة المعادلتين الناتجتين :

$$2x + y - 2 = 0 \quad ; \quad x + 2y - 3 = 0$$

ونحل جملة المعادلتين حلاً مشتركاً ، نجد أن النقطة $p_0(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فنجد :

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \quad ; \quad f''_{yy}(x,y) = 2 \quad ; \quad f''_{xy}(x,y) = 1$$

نلاحظ إذا المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية هي ثوابت ، أي أن قيمها في النقطة $p_0(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ هي على الترتيب $1, 2, 2$

نتحقق من صحة الشرط الوارد في المبرهنة (٩) فقرة (آ) ، نجد أن :

$$f''_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}) > 0$$

وهذا يعني أن للتابع $z = f(x,y)$ قيمة صغرى في النقطة $p_0(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ ، وقيمة z هي كالآتي :

$$z_{\min} = -\frac{7}{3}$$

مثال (٤٣) : أوجد القيم الحدية للتابع :

$$z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

الحل : نحسب المشتقات الجزئية الأولى :

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y \quad ; \quad f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

بجعل $f'_x = 0$ و $f'_y = 0$ ، نجد أن :

$$4x^3 - 4x + 4y = 0 \quad ; \quad 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

أو :

$$x^3 - x + y = 0 \quad ; \quad y^3 + x - y = 0$$

وبالتالي نجد بالجمع أن :

$$y^3 = -x^3 \quad ; \quad y = -x$$

نبدل في المعادلة الأولى من الجملة فنجد :

$$4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$$

أي : $x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \sqrt{2} \; ; \; x_3 = -\sqrt{2}$

عندئذ :

$$y_1 = 0 \; ; \; y_2 = -\sqrt{2} \; ; \; y_3 = \sqrt{2}$$

ونحصل على نقاط ثلاثة ، تنعدم من أجلها المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى هي :

$$M_1(0,0)\ ;\ M_2=(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2}\ )\ ;\ M_3=(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\ )$$

نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فنجد :

$$f''_{xx}=12x^2-4\ ;\ f''_{xy}=4\ ;\ f''_{yy}=12y^2-4$$

نتحقق من صحة الشرط الوارد في نص المبرهنة (٩) ، أي العلاقة (3.27) من أجل كل نقطة من النقاط الثلاثة ، فنجد :

آ- من أجل النقطة $M_1(0,0)$ ، فإن :

$$f''_{xx}(0,0).f''_{yy}(0,0)-[f''_{xy}(0,0)]^2=(-4)(-4)-(4)^2=0$$

أي – واستناداً للمبرهنة (٩) – لا نتمكن من تحديد وجود قيمة حدية في النقطة $M_1(0,0)$ ، أو عدم وجودها .

ويمكن بدراسةٍ موسعة ، أن نلاحظ أن التابع z ليس له قيمة حدية في هذه النقطة ، ويمكن التأكد بأن قيمة التابع z مساوية الصفر .

ومن أجل أي جوار لـ M_1 ، يمكن أن تكون قيم z موجبة أو سالبة ، فمثلاً من أجل نقاط المحور $0x$ ، أي $y=0$ ، نجد أن :

$$z=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0$$

في النقاط الواقعة بجوار مبدأ الإحداثيات .

أما من أجل نقاط المستقيم $y=x$ ، نجد :

$$z=x^4+x^4-2x^2+4x^2-2x^2=2x^4>0$$

ب- من أجل النقطة $M_2(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2}\ )$ ، أن :

$$f''_{xx}(\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\ ).f''_{yy}(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2}\ )-[f''_{xy}(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2}\ )]^2=$$

$$=(12,2-4)\ (12,2-4)-(4)^2=400-16=384>0$$

وكما أن : $f''_{xx}(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2}\ )=20>0$

أي أن للتابع z في النقطة $M_2(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2}\ )$ قيمة صغرى ، و : $z_{\min}=-8$

ج- من أجل النقطة $M_3(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ )$ ، أن :

$$f''_{xx}(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\ ).f''_{yy}(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\ )-[\,f''_{xy}(-\sqrt{2}\ .\sqrt{2}\ )]^2=384>0$$

$$f''_{xx}(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ )=20>0$$

أي أن للتابع z في النقطة $M_3(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ )$ قيمة صغرى ، و $z_{\min}=-8$

تمارين الفصل الثالث :

١- أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية :

1	$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$		4	$z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
2	$z=arc\sin(1-x^2-y^2)$		5	$z=\ln(x,y)$
3	$z=\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$		6	$z=\ln x+\ln y$

٢- مستخدماً تعريف نهاية تابع ، برهن أن :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2+xy+y^2)=7$$

٣- أوجد نهاية المقادير الآتية :

1	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}}=-2$		5	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2.y^2}{x^2+y^2}$
2	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{(3-x+y)}{(4+x-2y)}$		6	$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to \pi}}\left[x^2.\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$
3	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$		7	$\lim\limits_{\substack{x\to \\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy-2)}{\tan^{-1}(xy-6)}$
4	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{3x-2y}{2x-3y}\right)$		8	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

٤- أوجد المشتقات الجزئية الأولى للتوابع الآتية :

$$z = x^2 y - y^2 \quad ; \quad z = e^{x^2+y^2}$$

$$z = \ln[tg(\frac{y}{x})] \quad ; \quad z = (\frac{y}{x}) arc\sin(\frac{x}{y})$$

$$z = x^2 \quad ; \quad u = \sin(xy) + \sin(xz) + \sin(yz)$$

$$u = x^{y/z}$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$$

٥- برهن أن التابع :

$$z = \ln(x^2 + y^2 + yx)$$

يحقق العلاقة :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

٦- برهن أن التابع :

$$z = xy + xe^{y/z}$$

يحقق العلاقة :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

٧- احسب المشتقات الجزئية من المرتبتين الأولى والثانية للتابع :

$$z = x^{y^2} \quad ; \quad z = x^4 - 4x^2y^2 + y^4 \quad ; \quad z = x^2 \sin^2 y$$

$$z = e^{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad z = arctg(x, y)$$

$$z = \ln\left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right] \quad ; \quad z = \frac{x}{y^2}$$

$$z = arc\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad ; \quad u = e^{x/y}$$

$$z = x^2 y + 2x^2 \cos y + 1 \;\; ; \;\; z = arctg\,(x^2 + y^2)$$

$$z = x^2 . y^3 \;\; ; \;\; u = \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right]$$

$$u = arc\sin(x+y) \;\; ; \;\; u = e^{x^2+y^2}$$

٨- تحقق من صحة العلاقة الآتية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

من أجل التابع :

$$z = \sqrt{x^2 + y} - x\,y \ln x$$

٩- برهن على وجود $f''_{xy}(0,0)$ ، من أجل :

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2}$$

حيث :

$$f''(0,0) = 0 \;\; ; \;\; x^2 + y^2 \neq 0$$

١٠- أوجد التفاضل التام للتوابع الآتية :

1	$z = (\frac{y}{x})$		6	$z = e^{x^2+y^2}$
2	$z = x^y$		7	$u = 2x^2 + 3x\,y^2 + \sin 2z$
3	$z = arctg\,(\frac{y}{x})$		8	$z = arc\sin(\frac{x}{y})$
4	$z = \ln(x.y)$			
5	$U = x^2 . e^{y/x}$		9	$u = x^2 + x\,y^2 = \sin z$

١١- إذا كانت $z^3 - x\,z - y = 0$ ، أثبت أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y} = \frac{(3z^2+x)}{(3z^2+x)^3}$$

١٢- بيّن أن :

$$U(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية (لابلاس) الآتية :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

بفرض أن : $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

١٣- أثبت أن : $f(x,y) = x^2 + 2y$ مستمرة عند النقطة $(1,2)$

١٤- بين فيما إذا كان التابع :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y & ; \ (x,y) \neq (1,2) \\ 0 & ; \ (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

آ- له نهاية عند $x \to 1$ ، $y \to 2$ ، ب- مستمر عند النقطة $(1,2)$

١٥- بفرض :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{عندما} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{عندما} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

والمطلوب :

آ- أثبت أن $f_y(0,0)$ ، $f_x(0,0)$ كلاهما موجود .

ب- $f(x,y)$ غير مستمر عند النقطة $(0,0)$.

١٦- أوجد المشتق الأول للتابع $y = f(x)$ المعطى كتابع ضمني بالعلاقات :

آ- $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ، ب- $e^y - e^x + xy = 0$

١٧- أوجد القيم الحدية للتوابع الآتية ، وحدد نوعها :

1	$z = x^2 + y^2 - 3xy$		4	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x + y$
2	$z = e^x + e^y + e^{xy}$		5	$z = (x-5)\sqrt[3]{x^2 + y^2}$
3	$z = e^x \sin y$		6	$z = 4xy - x^2 - y^2$

١٨- إذا كانت :

$$u - 2v^2 = x - 2y \quad , \quad u^2 - v = 3x + y$$

والمطلوب ، أوجد كلاً مما يلي :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \; , \; \frac{\partial v}{\partial x} \; , \; \frac{\partial u}{\partial y} \; , \; \frac{\partial v}{\partial y}$$

١٩- إذا كانت $U = z \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ ، حيث :

$$x = 5r^2 + 4s \; ; \; y = 6r - 3s^2 \; ; \; z = 3r^2 - 2s^2$$

أوجد :

آ- $\dfrac{\partial U}{\partial r}$ ، ب- $\dfrac{\partial U}{\partial s}$

٢٠- إذا كانت :

$$z = e^{x^2 y} \; ; \; x = t\cos 4t \; ; \; y = t \sin 3t$$

احسب : $\dfrac{dz}{dt}$

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

تعريف المعادلة التفاضلية (١) :

كل معادلة تحتوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع ما أو أكثر، وذلك بالنسبة لمتغير أو أكثر، تدعى معادلة تفاضلية .

٤-١ تصنيف المعادلات التفاضلية :

تصنف المعادلات التفاضلية إلى معادلات تفاضلية عادية ، ومعادلات تفاضلية جزئية .

تعريف (٢) :

المعادلة التفاضلية العادية هي معادلة تحتوي على المشتقات العادية لتابع بالنسبة لمتغير واحد .

ملاحظة (١) : إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية العادية هو :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0 \qquad (4.1)$$

مثال (١) : المعادلات التفاضلية :

أ- $x y'' + y' = x$

ب- $M(x, y)dx - N(x, y) = 0$

ج- $x y' + 4x y = y^3$

د- $y''^3 + y'^2 = x$

هي معادلات تفاضلية عادية .

تعريف (٣) :

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تحتوي على المشتقات الجزئية لتابع ، بالنسبة لمتغيرين أو أكثر .

مثال (٢) : المعادلات التفاضلية :

أ- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

ب- $\frac{\partial z}{\partial x} + x z^2 = 0$

ج- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

هي معادلات تفاضلية جزئية .

ملاحظة (٢) : سوف تتركز دراستنا على المعادلات التفاضلية التي تحتوي على تابع واحد مثل y متعلق بمتغير واحد فقط مثل x ، ويطلق عادة على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات التفاضلية العادية .

تعريف (٤) :

إن مرتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى مشتق للتابع الموجود فيها .

تعريف (٥) :

إن درجة المعادلة التفاضلية هي أعلى درجة لأعلى مشتق لتابع موجود فيها ، وذلك بعد التخلص من الكسور أو الجذور إن وجدت (أي يجب وضعها على شكل كثيرة حدود بالنسبة لجميع المشتقات إذا أمكن) .

مثال (٣) : حدد المرتبة والدرجة للمعادلة التفاضلية :

$$y''^2 + \frac{1}{y''^2} + 6y'^6 = 0$$

الحـــل : لإيجاد مرتبة ودرجة المعادلة التفاضلية المعطاة ، نقوم بتوحيـد المقامـات والإصلاح ، فنجد :

$$y''^4 + 6y'^6 y''^2 + 1 = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الرابعة .

مثال (٤) : حدد المرتبة والدرجة للمعادلة التفاضلية :

$$y'''(1+y'^2) - 2y'y''^2 = 0$$

الحـــل : نلاحظ أنها معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة والدرجة الأولى .

مثال (٥) : حدد المرتبة والدرجة للمعادلة التفاضلية :

$$(1+y'^2)^{3/2} = 4y''$$

الحـــل : بتربيع الطرفين ، نجد أن :

$$\left[(1+y'^2)^{3/2}\right]^2 = 16y''^2 \Rightarrow (1+y'^2)^3 = 16y''^2$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الثانية .

تعريف (٦) :

نقول عن المعادلة التفاضلية إنها خطية إذا كانت درجة التابع وكل مشتق موجود فيهـا من الدرجة الأولى ، ولا تحتوي على جداء التابع مع مشتقاته .

مثال (٦) : المعادلة التفاضلية :

$x\,dy + (x+y)\,dx = 0$ ، هي معادلة خطية .

والمعادلة التفاضلية : $(x^2y + y^2)\,dx + 2x^3y\,dy = 0$ هي معادلة خطية .

٤-٢ حل المعادلة التفاضلية :

تعريف (٧) :

نسمي التابع $y = f(x)$ القابل للاشتقاق n مرة متتالية على المجال I ، حلاً للمعادلـة التفاضلية (4.1) إذا حوّل المعادلة التفاضلية إلى مطابقة من أجل جميع قيم x من المجال I أي

$$F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)] \equiv 0$$

ملاحظة (٣) : إذا كان حل المعادلة التفاضلية (4.1) معطى كتابع ضمني (تابع لمتغيرين x و y) ، أي من الشكل :

$$\varphi(x, y) = 0$$

فإننا نسميه تكاملاً للمعادلة التفاضلية (4.1) . وكلمة تكامل تعني أيضاً حل .

ملاحظة (٤) : إن الخط البياني للتابع $y = f(x)$ الذي يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية (4.1) نسميه المنحني التكاملي .

مثال (٧) : تحقق من أن : $y = x^2 + c$ ، هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' - 2x = 0$

الحل : لدينا $y = x^2 + c$ قابل للاشتقاق ، حيث $y' = 2x$.

نعوض في الطرف الأيسر من المعادلة نجد :

$$2x - 2x = 0$$

إذاً : $y = x^2 + c$ ، هو حل المعادلة .

وبالطريقة نفسها تماماً نستطيع أن نتحقق من أن :

أ- $y = x^2 - 1$

ب- $y = x^2 - \pi$

ج- $y = x^2 - \frac{5}{2}$

د- $y = x^2 + \sqrt{2}$

جميعها حلولاً للمعادلة التفاضلية .

تعريف الحل العام (٨) :

كل حل من الشكل : $y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$

للمعادلة التفاضلية (4.1) نسميه بحل عام للمعادلة (4.1) ، يحوي عدداً من الثوابت الكيفية $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ (المستقلة فيما بينها) ، عددها يساوي مرتبة المعادلة التفاضلية .

تعريف الحل الخاص (٩) :

كل حل للمعادلة (4.1) نحصل عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت الكيفية قيماً عددية معينة نسميه بحل خاص للمعادلة (4.1) .

مثال (٨) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$y''+y=0$$

والمار من النقطتين $M_1(0,1)$ و $M_2(\frac{\pi}{2},0)$ ، مع العلم أن الحل العام لها هو :

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

الحـــل : بالاعتماد على الشروط المعطاة ، من أجل النقطة $M_1(0,1)$ نجد أن :

$$1=c_1\cos 0+c_2\sin 0 \;\Rightarrow\; c_1=1$$

من أجل النقطة M_2 نجد :

$$c_1\cos + c_2\sin\frac{\pi}{2}=0 \;\Rightarrow\; c_2=0$$

إن الحل الخاص المار بالنقطتين المذكورتين هو :

$$y=\cos x$$

تعريف الحل الشاذ (١٠) :

إن كل حل للمعادلة التفاضلية (4.1) والذي لا يمكن الحصول عليه من الحـــل العـــام بإعطاء الثوابت الكيفية قيماً عددية ، نُسميه بحل شاذ لهذه المعادلة .

مثال (٩) : لتكن لدينا للمعادلة التفاضلية :

$$xy'^2-yy'+1=0$$

يمكننا التحقق من أن :

$$y=cx+\frac{1}{c}$$

هو حل عام لها وهو يمثل حزمة مستقيمات حسب قيم c ، وبكل بساطة يمكن التحقـــق من أن $y^2=4x$ هو أيضاً حل للمعادلة التفاضلية نفـسها ، ولكـــن هـــذا الحـــل لا يمكـــن

الحصول عليه من الحل العام بإعطاء أي قيمة للثابت c . يسمى $y^2 = 4x$ بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية .

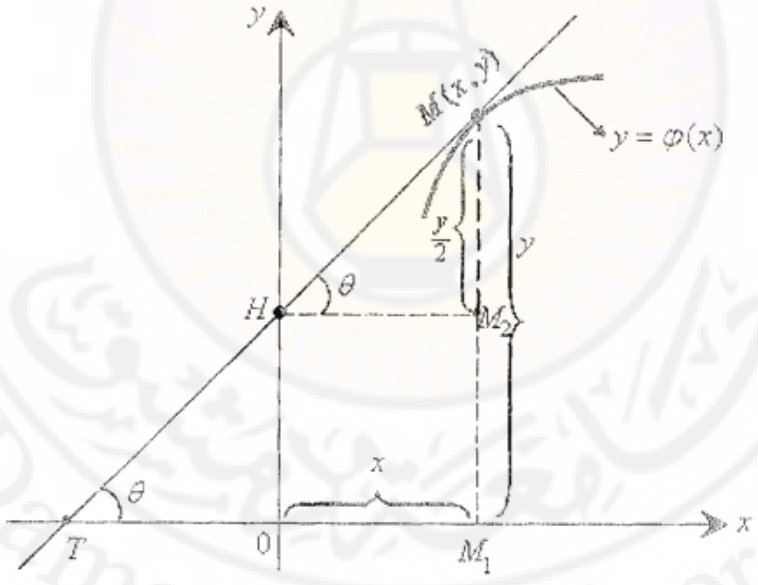
٤-٣ تشكيل المعادلات التفاضلية :

يمكن تشكيل المعادلات التفاضلية بإحدى الطرائق الآتية :

أولاً- تشكيل المعادلات التفاضلية من المسائل الهندسية :

سوف نوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (١٠) : شكل المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات التي لو أنشئنا في كل نقطة منها مماساً لوقعت منتصفات قطع هذه المماسات المحدودة في نقطة التماس ، ومحور السينات على المحور $0y$.



الشكل (٤-١)

الحل : نعلم أن :

$$tg\theta = y'$$

ومن الشكل (٤-١) نجد أن :

$$tg\theta = \frac{M_2M}{H\,M_2} = \frac{y}{2x} \Rightarrow y' = \frac{y}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ، ولإيجاد الحل العام لها نأخذ تكامل الطرفين فنجد :

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\frac{|y|}{c} = \ln\sqrt{x} \Rightarrow y = c\sqrt{x}$$

بتربيع الطرفين نجد أن :

$$y^2 = c^2x = c_1x$$

وهذا الحل يمثل مجموعة منحنيات قطوع مكافئة محورها التناظري $0X$ وذروتها 0 .

ثانياً- تشكيل المعادلات التفاضلية من المسائل الفيزيائية أو الميكانيكية :

سوف نوضح هذه الفقرة بالمثال الآتي :

مثال (١١) : تسقط نقطة مادية كتلتها m بتأثير الثقالة الأرضية في وسط مقاومته متناسبة مع سرعة النقطة .

المطلوب : اكتب المعادلة التفاضلية للحركة .

الحل : بفرض x المسافة التي قطعتها النقطة بعد زمن قدره t . g التسارع الأرضي . وبتطبيق قانون نيوتن للحركة :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

حيث k : عدد ثابت يتعلق بالوسط الذي تسقط فيه النقطة .

يمكن إيجاد الحل العام لهذه المعادلة بأخذ تكامل الطرفين :

$$m\frac{dx}{dt} = m.g.t - k.x + c_1$$

وكما سنرى يمكن حل المعادلة الأخيرة بضرب طرفيها بـ $(1/m)e^{k.t/m}$:

$$e^{k.t/m}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{k.x}{m}\right)=\left(g.t+\frac{c_1}{m}\right)e^{k.t/m}$$

والتي تكتب بالشكل :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{k.t/m}x\right)=\left(g.t+\frac{c_1}{m}\right)e^{k.t/m}$$

بمكاملة الطرفين مرة ثانية نجد :

$$e^{k.t/m}x=\int\left(g.t+\frac{c_1}{m}\right)e^{k.t/m}\,dt+c_2$$

ومنه نجد :

$$x=\frac{m.g.t}{k}+c_2.e^{-k.t/m}+c_3 \qquad (I)$$

وبفرض أن النقطة بدأت حركتها من السكون ، أي :

$$t=0\ ;\ x=0\ ;\ \frac{dx}{dt}=0$$

وبالتعويض في (I) ينتج :

$$c_2+c_3=0$$

كذلك باشتقاق الطرفين من (I) ثم التعويض بالشروط الابتدائية نجد :

$$0=\frac{m.g}{k}-c_2\frac{k}{m}\Rightarrow c_2=\frac{m^2.g}{k^2}=-c_3$$

نعوض c_2 و c_3 بما يساويها في (I) :

$$x=\frac{m.g.t}{k}+\frac{m^2.g}{k^2}\left[e^{-k.t/m}-1\right]$$

ثالثاً- تشكيل المعادلات التفاضلية بطرائق رياضية بحتة :

أ- تشكيل المعادلة التفاضلية لتابع يحوي ثابتاً كيفياً :

لنكن :

$$y=\varphi(x,c) \qquad (4.2)$$

مجموعة منحنيات مستوية ، (حيث c : وسيط) . بحيث من كل نقطة من المستوي (أو من مساحة في المستوي) لا يمر سوى منحنٍ واحد من هذه المجموعة .

والمطلوب : إيجاد المعادلة التفاضلية التي تقبل هذه المجموعة تكاملاً (أو حلاً) لها .

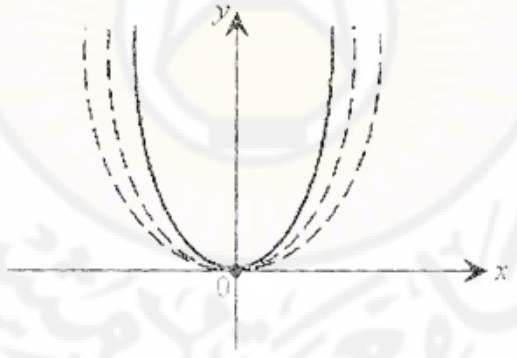
الحل : باشتقاق طرفي العلاقة (4.2) بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, c) \qquad (4.3)$$

بما أنه لا يمر من كل نقطة من المستوي سوى منحنٍ واحد ، فإن كل قيمة معينة للثنائية (x, y) تعين قيمة وحيدة لـ c في المعادلة (4.2) .

إذا عوضنا هذه القيمة لـ c في المعادلة المشتقة (4.3) نحصل على $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x و y ، وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية .

مثال (١٢) : أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة القطوع المكافئة التي ذروتها في 0 ، وتقبل محور العينات محوراً تناظرياً لها ، الشكل (٤-٢) .



الشكل (٤-٢)

الحل : إن مجموعة القطوع المذكورة معادلتها من الشكل الآتي :

$$y = c\,x^2 \qquad (I)$$

نشتق طرفي المعادلة (I) بالنسبة إلى x ، فنجد :

$$y' = 2\,c\,x \qquad (II)$$

من (I) نجد أن :

$$c = \frac{y}{x^2}$$

نعوض في المعادلة (II) ، نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة ، وهي :

$$y' = \frac{2y}{x}$$

ب- تشكيل معادلة تفاضلية لتابع يحوي n ثابت كيفي :

لتكن لدينا المعادلة الجبرية :

$$y = y(x) \; ; \quad f(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \qquad (4.4)$$

حيث $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$: ثوابت كيفية مستقلة فيما بينها .

لإيجاد المعادلة التفاضلية للمعادلة الجبرية (4.4) ، نشتق المعادلة (4.4) بالنسبة إلى x (n مرة) ، أي عدد مرات الاشتقاق يساوي إلى عدد الثوابت الكيفية ، عندئذ نحصل على n معادلة . ومع المعادلة (4.4) يصبح لدينا $(n+1)$ معادلة جبرية .

وبحذف $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ من $(n+1)$ معادلة جبرية ينتج لدينا المعادلة التفاضلية :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

مثال (١٣) : أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر التي نصف قطرها يساوي (4) ، ثم حدد المرتبة والدرجة .

الحـــل :

إن المعادلة الجبرية لمجموعة الدوائر في هذه الحالة هي :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 16 \qquad (I)$$

حيث a, b : إحداثيات المركز .

نشتق (I) بالنسبة إلى x نجد :

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$

$$(x-a) + (y-b)y' = 0 \qquad (II)$$

نشتق (II) بالنسبة إلى x نجد :

$$1+y'^2+y''(y-b)=0$$

ومنه نجد :

$$y-b=\frac{-(1-y'^2)}{y''} \qquad (\text{III})$$

نعوض (III) في (II) ، نجد أن :

$$(x-a)+\left[\frac{-(1+y'^2)}{y''}\right]y'=0$$

وبالتالي فإن :

$$(x-a)=\frac{(1+y'^2)\,y'}{y''}$$

نعوض في (I) ، نجد :

$$\left[\frac{(1+y'^2)\,y'}{y''}\right]^2+\left[\frac{-(1+y'^2)}{y''}\right]^2=16$$

$$(1+y'^2)^2y'^2+(1+y'^2)^2=16y''^2 \Rightarrow$$
$$16y''^2-(1+y'^2)^2y'^2-(1+y'^2)^2=0 \Rightarrow$$
$$16y''^2-(1+y'^2)^2[y'^2+1]=0 \Rightarrow$$
$$16y''^2-(1+y'^2)^3=0$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الثانية .

مثال (١٤) : أوجد المعادلة التفاضلية للمعادلة الجبرية :

$$y=c_1\cos(2x-c_2) \qquad (\text{I})$$

الحـــل : نشتق مرتين بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$y'=-2c_1\sin(2x-c_2) \qquad (\text{II})$$

نشتق المعادلة (II) بالنسبة إلى x ، نجد :

$$y''=-4c_1\cos(2x-c_2) \qquad (\text{III})$$

نبدل (I) في (III) ، نجد :

$$y'' = -4y$$

إذاً المعادلة التفاضلية هي .

$$y'' + 4y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى .

٤ – ٤ المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى :

أولاً– المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق :

إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى هو :

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (4.5)$$

وهي علاقة بين التابع y والمتغير x ومشتق التابع y' .

إذا تمكنا من حل المعادلة (4.5) بالنسبة إلى y' نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل

$$y' = f(x, y) \qquad (4.6)$$

وهي معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة للمشتق y' ، وسنقوم بدراستها في هذا الفصل .

إن المعادلة التفاضلية (4.6) يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$dy - f(x, y)\,dx = 0 \qquad (4.7)$$

لنضرب طرفي المعادلة (4.7) بالتابع $Q(x, y) \neq 0$ ، نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$Q(x, y)\,dy - Q(x, y).f(x, y)\,dx = 0$$

لنضع :

$$p(x, y) = -Q(x, y).f(x, y)$$

فنحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$p(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (4.8)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y)$$

حيث إن التابعان $Q(x, y), p(x, y)$ معلومان .

إن الحل العام (التكامل العام) للمعادلات التفاضلية (4.5) و(4.6) و(4.7) ، يعبر عنه بالشكل الآتي :

$$\phi(x, y, c) = 0 \qquad (4.9)$$

وهي صيغة التكامل العام .

إذا أمكن حل المعادلة السابقة بالنسبة إلى y ، نحصل على الحل العام بالشكل الآتي :

$$y = \varphi(x, c) \qquad (4.10)$$

حيث إن التابعان ϕ , φ لهما مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة إلى x .

نسمي التابع $y = \varphi(x, c)$ ، حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية (4.6) إذا أمكن حل العلاقة (4.9) بالنسبة للثابت الاختياري c ، أي أن :

$$c = \psi(x, y) \qquad (4.11)$$

وتسمى أيضاً الصيغة (4.11) بالتكامل العام .

لإيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ، والقابلة للحل ، نميز نوعان :

٤-٥ النوع الأول للحل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى – القابلة للحل :

٤-٥-١ المعادلات التي يمكن فصل متغيراتها :

آ- إذا كانت المعادلة (4.6) من الشكل :

$$y' = f(x) \;\; ; \;\; y = y(x) \qquad (4.12)$$

أي :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx$$

بمكاملة الطرفين نجد أن :

$$\int dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = \phi(x) + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.12) ، حيث c : ثابت كيفي .

مثال (١٥) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = \sin \frac{2}{3} x$$

الحـــــل :

$$\frac{dy}{dx} = \sin \frac{2}{3} x \Rightarrow dy = (\sin \frac{2}{3} x)\, dx$$

بالمكاملة نجد أن :

$$\int dy = \int \sin \frac{2}{3} x\, dx \Rightarrow$$

$$y = -\frac{3}{2} \cos \frac{2}{3} x + c$$

وهو الحل العام ، حيث c : ثابت كيفي .

مثال (١٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x^3 y' = 6 + x$$

الحـــــل : من المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$y' = \frac{6+x}{x^3}$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow dy = (\frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^2})\, dx$$

بالمكاملة نجد أن :

$$\int dy = \int (\frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^2})\, dx \Rightarrow y = \int \frac{6}{x^3}\, dx + \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3}{x^3} - \frac{1}{x} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية ، حيث c : ثابت كيفي .

ب- المعادلة (4.6) لا تحوي x ، أي من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \qquad (4.13)$$

ولإيجاد الحل العام نجد أن :

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx \Rightarrow \phi(y) = x + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.13) ، حيث c : ثابت كيفي .

مثال (١٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' + 3y + 5 = 0$$

الحـــل : من المعادلة التفاضلية نجد أن :

$$y' = -(3y+5) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(3y+5) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{3y+5} = -dx$$

بالمكاملة نجد أن :

$$\frac{1}{3}\int \frac{3\,dy}{3y+5} = -\int dx \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3y+5}{c}\right| = -x \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{3y+5}{c}\right| = -3x \Rightarrow \frac{3y+5}{c} = e^{-3x} \Rightarrow$$

$$3y+5 = c\,e^{-3x} \Rightarrow y = \frac{c}{3}e^{-3x} - \frac{5}{3}$$

وهو الحل العام ، حيث c : ثابت كيفي .

ج- إذا كانت المعادلة (4.6) من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{h(x)} \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \qquad (4.14)$$

لنختار المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)\,dy = h(x)\,dx$$

بمكاملة طرفي المساواة نجد أن :

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx + c$$

وهو الحل العام .

مثال (١٨) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = \frac{-y}{x-2}$$

الحـــــل : لنكتب المعادلة التفاضلية بالشكل الآتي :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x-2}$$

لإيجاد الحل العام ، نكامل طرفي المساواة :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x-2} \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| + \ln|x-2| = 0 \Rightarrow$$

$$y(x-2) = c \Rightarrow y = \frac{c}{x-2} \quad ; \quad c \neq 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

٤-٥-٢ المعادلات التي تؤول إلى منفصلة المتغيرات :

آ- كل معادلة من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(a\,x + b\,y + d) \qquad (4.15)$$

حيث $a\,,\ b\,,\ d$: ثوابت محددة .

يمكن تحويلها إلى معادلة منفصلة المتغيرات ، بأن نفرض :

$$\left.\begin{aligned} z &= a\,x + b\,y + d \\ z' &= a + b\,y' \Rightarrow y' = \frac{z'-a}{b} \end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

بتعويض المعادلة (4.16) في المعادلة (4.15) نجد :

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \Rightarrow z'-a = b\,f(z)$$

$$\Rightarrow z' = a+b\,f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a+b\,f(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{a+b\,f(z)} = dx \qquad (4.17)$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات .

وللحصول على الحل العام ، نكامل طرفي المعادلة (4.17) ، فنجد :

$$\int \frac{dz}{a+b\,f(z)} = \int dx = x+c \Rightarrow$$

$$\phi(z) = x+c \qquad (4.18)$$

وبعدها نعوض قيمة z من العلاقات (4.16) ، في العلاقة (4.18) ، فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.15) .

مثال (١٩) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = 2x-y+3$$

الحـــل : لحل هذه المعادلة التفاضلية نفرض أن :

$$z = 2x-y+3 \Rightarrow z' = 2-y' \Rightarrow y' = 2-z'$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد :

$$2-z' = z \Rightarrow -z' = z-2$$

$$\Rightarrow z' = 2-z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2-z$$

وهذه معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات ، وبالمكاملة نجد :

$$\int \frac{dz}{2-z} = \int dx$$

$$-\int \frac{-dz}{2-z} = \int dx \Rightarrow -\ln\left|\frac{2-z}{c}\right| = x$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{2-z}{c}\right| = -x \Rightarrow \frac{2-z}{c} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow 2-z = ce^{-x} \Rightarrow z = 2-ce^{-x}$$

نعوض z بقيمتها ، نجد :

$$2x-y+3 = 2-ce^{-x} \Rightarrow y = 2x+ce^{-x}+1$$

وهو الحل العام ، حيث c : ثابت كيفي .

ب - كل معادلة من الشكل :

$$f(x).g(y)\,dx - f_1(x).g_1(y)\,dy = 0 \qquad (4.19)$$

تدعى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ، ويمكن فصل متغيراتها بأن نقسم طرفي المعادلة (4.19) على المقدار :

$$f_1(x).g(y) \neq 0$$

فنحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g(y)}\,dy = 0 \qquad (4.20)$$

نلاحظ في المعادلة (4.20) أن أمثال dx تحتوي فقط على المتغير x ، وأمثال dy تحتوي فقط على y .

بمكاملة طرفي المعادلة (4.20) نحصل على الحل العام للمعادلة (4.19) ، وهو :

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g(y)}\,dy = c \qquad (4.21)$$

ملاحظة (*) : إن قسمنا طرفي المعادلة (4.19) على $f_1(x).g(y) \neq 0$ ، فهذا يعني أننا خسرنا حلولاً ، وهي عندما يكون :

$$f_1(x).g(y) = 0$$

وعندئذٍ ، نناقش الآتي : عندما $g(y) = 0$ ، أو عندما $f_1(x) = 0$ ، فإذا كانت تمثل حلولاً للمعادلة (4.19) وكان بالإمكان الحصول عليها من التكامل العام بتبديل الثابت بقيمة عددية ما ، فتكون هذه الحلول حلولاً خاصة . وأما إذا كانت هذه الحلول غير موجودة في

صيغة التكامل ، أي لا يمكن الحصول عليها من التكامل العام بتبديل الثابت بقيمة عددية مـا، فتكون هذه الحلول حلولاً شاذة .

ملاحظة (٦) : إن المعادلة التفاضلية التي تكتب بالشكل :

$$y' = f(x).g(y) \qquad (4.22)$$

هي معادلة منفصلة المتغيرات ، لأن :

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g(y) \Rightarrow dy - f(x).g(y)dx = 0$$

وهي تملك شكل المعادلة التفاضلية (4.19) نفسها .

مثال (٢٠) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x(y^2-1)dx + y.(x^2-1)dy = 0$$

الحـــل : نقسم طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة على المقـدار $(x^2-1)(y^2-1) \neq 0$ نجد :

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{2y}{y^2-1}dy = -\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2-1}{c}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$$

$$\ln\left|\frac{y^2-1}{c}\right| = \ln\left|\frac{1}{x^2-1}\right| \Rightarrow \frac{y^2-1}{c} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y^2-1 = \frac{c}{x^2-1} \Rightarrow (y^2-1)(x^2-1) = c$$

عندما $y^2-1=0$ يكون $y=\pm 1$ وهما حلان خاصان للمعادلة لأنه يمكن الحصول عليها بإعطاء الثابت c ، وبالتالي لم تفقد أي حلا من جراء التقسيم على المقدار :

$$(y^2-1)(x^2+1) \neq 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة ، حيث c : ثابت كيفي .

مثال (٢١) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' - 2x(y^2+1) = 0$$

الحـــل : بفصل المتغيرات ، نجد :

$$\frac{dy}{dx} - 2x(y^2+1) = 0 \Rightarrow$$

حيث : $$\frac{dy}{1+y^2} = 2x\,dx \quad ; \quad 1+y^2 \neq 0$$

بالمكاملة نجد :

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = 2\int x\,dx$$

$$arc1g\,y = x^2 + c$$

وهذا يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

مثال (٢٢) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = e^{3x+3y}$$

الحـــل : لنكتب :

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x}.e^{3y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{3y}} = e^{3x}dx \Rightarrow$$

بمكاملة طرفي المساواة في العلاقة الأخيرة نجد :

$$e^{-3y} = -e^{3x} - 3c \Rightarrow e^{-3y} + e^{3x} + 3c = 0$$

نفرض أن $3c = c_1$ ، نجد أن :

$$e^{-3y} + e^{3x} + c_1 = 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ج- كل معادلة من الشكل :

$$y\,F(x.y)\,dx + xg(x.y)\,dy = 0$$

بمكن تحويلها إلى معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات بأن نفرض :

$$z = x.y \;\Rightarrow\; y = \frac{z}{x} \;\Rightarrow\; dy = \frac{x\,d\,z - z\,dx}{x^2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية نجد ما يلي :

$$\frac{z}{x}\,F(z)\,dx + xg(z)\,\frac{xd\,z - z\,dx}{x^2} = 0$$

$$z\,F(z)\,dx + g(z)\,(xd\,z - z\,dx) = 0$$

$$[z\,F(z) - z\,g(z)]\,dx + x\,g(z)\,d\,z = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على المقدار :

$$x\,z[\,F(z) - g(z)\,] \neq 0$$

فنجد :

$$\frac{g(z)\,d\,z}{z[\,F(z) - g(z)\,]} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad (4.23)$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات ، لحلها نكامل طرفي المعادلة (4.23) ، فنجد :

$$\int \frac{g(z)\,d\,z}{z[\,F(z) - g(z)\,]} + \int \frac{dx}{x} = c$$

عندئذٍ نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية ، وبعد ذلك نبدل في الحل العام كـل $z = x.y$ ، فنحصل على المطلوب .

مثال (٢٣) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y(1 - x.y)\,dx - x(1 + x.y)\,dy - 0$$

الحـــل : نبدل في المعادلة التفاضلية كل $z = x.y$ ، عندئذٍ نجد :

$$y = \frac{z}{x} \;\Rightarrow\; dy = \frac{x\,d\,z - z\,dx}{x^2}$$

$$\frac{z}{x}\,(1 - z)\,dx - x(1 + z)\,\frac{xd\,z - z\,dx}{x^2} = 0$$

$$z(1-z)dx-(1+z)\,(xdz-zdx)=0$$

$$(z-z^2+z+z^2)dx-(1+z)\,x\,dz=0$$

$$2z\,dx-(1+z)\,x\,dz=0$$

نقسم على $xz\neq 0$ ، فنجد :

$$\frac{2\,dx}{x}-\frac{(1+z)}{z}\,dz=0$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات .

$$\ln x^2-(z+\ln z)=\ln c$$

$$\ln\left(\frac{x^2}{cz}\right)=z$$

نبدل كل z بقيمتها في العلاقة الأخيرة ، نجد :

$$\ln\left(\frac{x^2}{c(x.z)}\right)=xy$$

ملاحظة (٧) :

لقد اقتصرت دراستنا على بعض الأشكال للمعادلات التفاضلية التي تؤول إلى منفصلة المتغيرات والواردة في دراستنا .

٤-٦ النوع الثاني للحل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى – القابلة للحل :

٤-٦-١ المعادلات المتجانسة :

تعريف التابع المتجانس (١١) :

ليكن لدينا التابع $f:R^2\to R$ ، نقول عن التابع $f(x,y)$ إنه متجانس من الدرجة n بالنسبة إلى x و y ، إذا بدلنا كل x بـ λx ، وكل y بـ λy ، (حيث λ : وسيط اختياري ، و n : درجة التجانس) ، لحصلنا على المطابقة الآتية :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \qquad (4.24)$$

وذلك من أجل جميع قيم $(\lambda > 0)$.

ولإيجاد درجة التجانس ، نورد الأمثلة الآتية :

أ-	$f_1(x, y) = x^2 + 5y^2 + 3xy$	متجانس من الدرجة « 2 »
ب-	$f_2(x, y) = \sqrt[3]{3x^3 + 4y^3}$	متجانس من الدرجة « 1 »
ج-	$f_3(x, y) = \dfrac{x + y + 4}{3x + 2y - 2}$	ليس متجانس

تعريف المعادلة المتجانسة (١٢) :

نقول عن المعادلة التفاضلية :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (4.25)$$

إنها متجانسة ، إذا كان للتابعان N و M درجة التجانس نفسها بالنسبة لـ x و y .

مثال (٢٤) : هل المعادلة التفاضلية متجانسة ؟

$$(3xy - y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

الحـــل : نلاحظ أن :

$$M(x, y) = 3xy + y^2 \;\; ; \;\; N(x, y) = x^2 + xy$$

نبدل في كل من $M(x, y)$ و $N(x, y)$ ، كل x بـ λx ، وكل y بـ λy ، فنجد أن :

$$M(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2(3xy - y^2)$$

إذاً درجة تجانس M هي « 2 » . ونلاحظ أن :

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy = \lambda^2(x^2 + xy)$$

وبالتالي فإن درجة تجانس N هي « 2 » .

إذاً ، التابعان M و N ، لهما درجة التجانس نفسها ، وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية المعطاة متجانسة .

مبرهنة (١) :

كل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ومتجانسة تكتب بالشكل :

$$y' = F_1(\frac{y}{x})$$

وحلها العام من الشكل :

$$x = c\,F(\frac{y}{x})$$

البرهان : لتكن $F(x,y,y')=0$ معادلة تفاضلية متجانسة ، إذا حللنا هذه المعادلة بالنسبة للمشتق y' ، عندئذٍ تكتب :

$$y' = F_1(x,y) \qquad (4.26)$$

وبما أن المعادلة (4.26) متجانسة ، عندئذٍ لو بدلنا كل x بـ cx ، وكل y بـ cy نحصل على :

$$y' = F_1(cx,cy) \qquad (4.27)$$

وبما أن c ثابت كيفي ، عندئذٍ يمكن اختياره بحيث $c=\frac{1}{x}$ ، عندها تصبح المعادلة (4.27) بالشكل الآتي :

$$y' = F_1(1\ ,\ \frac{y}{x}) \ \Rightarrow\ y' = F_2(\frac{y}{x}) \qquad (4.28)$$

ولحل المعادلة (4.28) نفرض أن :

$$\frac{y}{x} = z \ \Rightarrow\ y = x\,z \ \Rightarrow\ y' = z + x\,z'$$

نبدل في المعادلة (4.28) نجد :

$$z + x\,z' = F_2(z) \ \Rightarrow\ x\,z' = F_2(z) - z$$

نفرض أن :

$$F_2(z) - z = \varphi(z) \neq 0$$

عندئذٍ نجد :

$$\frac{dz}{F_2(z)-z}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dz}{\varphi(z)}=\frac{dx}{x} \qquad (4.29)$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات ، ولحلها نكامل طرفي المساواة (4.29) نجد :

$$\ln\left|\frac{x}{c}\right| = F_3(z)$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{x}{c} = e^{F_3(z)} \Rightarrow x = c\,e^{F_3(z)}$$

$$\Rightarrow x = c\,F_4(z) \Rightarrow x = c\,F_4\left(\frac{y}{x}\right)$$

وهذا يمثل الحل العام .

نستنتج من كل مما سبق أنه لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة للمعادلة (4.25) أو (4.28) ، نفرض أن :

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = x\,z$$

ومنه نحسب :

$$dy = z\,dx + x\,dz$$

أو :

$$y' = z + x\,z'$$

نعوض في المعادلة (4.25) أو (4.28) ، فنحصل على معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات ، بحلها نحصل على المطلوب .

مثال (٢٥) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = \frac{x^2+y^2}{x\,y}$$

الحـــل : المعادلة التفاضلية المعطاة متجانسة ، ولحلها نفرض أن :

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = x\,z \Rightarrow y' = z + x\,z'$$

نبدل في المعادلة المعطاة نجد :

$$z + x\,z' = \frac{x^2 + x^2 z^2}{x^2 . z}$$

وهذه المعادلة يمكن تبسيطها على الشكل الآتي :

$$x\,\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx - z\,dz = 0$$

وهذه معادلة منفصلة المتغيرات ، ولإيجاد الحل العام نكامل طرفي المساواة فنجد :

$$\ln|x| - \frac{z^2}{2} = c \Rightarrow z^2 = \ln x^2 + K$$

وحيث $K = -2c$ ، نجري التعويض $z = \frac{y}{x}$ نجد الحل المطلوب للمعادلة التفاضلية وهو كما يلي :

$$y^2 = x^2 \ln x^2 + K\,x^2$$

٤-٦-٢ المعادلة التفاضلية المتجانسة في الأبعاد (ذات التجانس العام) :

تعريف (١٣) : نقول عن المعادلة (4.5) :

إنها متجانسة في الأبعاد من الدرجة n إذا استبدلنا كل x بـ cx ، وكل y بـ $c^n y$ وبالتالي كل y' بـ $c^{n-1}y$ ، ولم تتبدل المعادلة مهما كانت $c \neq 0$ ، أي :

$$F(c\,x, c^n y, c^{n-1} y) \equiv F(x, y, y') = 0 \;;\; \forall c \neq 0$$

وبالتالي نجد :

$$F(c\,x, c^n y, c^{n-1} y) = 0$$

باختيار $c = \frac{1}{x}$ ، نجد أن :

$$F\left(1, \frac{y}{x^n}, \frac{y'}{x^{n-1}}\right) = 0 \qquad (4.30)$$

ملاحظة (٨) : إذا كان بُعد التجانس ($n = 1$)، عندئذٍ تكون المعادلة التفاضلية (4.5) متجانسة.

مبرهنة (٢) :

إذا كانت المعادلة (4.5) متجانسة في الأبعاد من الدرجة n ، فيمكن ردها إلى معادلة منفصلة المتغيرات .

البرهان : وجدنا أن المعادلة التفاضلية (4.5) تكتب بالشكل الآتي :

$$F(1, \frac{y}{x^n} , \frac{y'}{x^{n-1}}) = 0$$

لذلك نفرض أن :

$$z = \frac{y}{x^n} \quad \Rightarrow \quad xz = \frac{y}{x^{n-1}}$$

وباشتقاق طرفي المساواة نجد :

$$z + x\,z' = \frac{y'}{x^{n-1}} - \frac{(n-1)\,y}{x^n} \Rightarrow$$

$$x\,z' = \frac{y'}{x^{n-1}} - (n-1)\,z - z \Rightarrow$$

$$x\,z' = \frac{y'}{x^{n-1}} - n\,z \Rightarrow \frac{y'}{x^{n-1}} = x\,z' + n\,z$$

نعوض في المعادلة : $F(1, \frac{y}{x^n} , \frac{y'}{x^{n-1}}) = 0$ قيمة كل من $\frac{y}{x^n}$ و $\frac{y'}{x^{n-1}}$ فنجد :

$$F(1, z, x\,z' + n\,z) = 0$$

أو بالشكل :

$$F_1(x\,z' + z) = 0$$

ويمكن أن نعبّر عنها بالشكل :

$$x\,z' = F_2(z) \qquad (4.31)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة من الشكل :

$$x = c\,.\,G(z)$$

بحل المعادلة التفاضلية (4.31) نجد أن :

$$\frac{dz}{F(z)} = \frac{dx}{x}$$

بتكامل طرفي المساواة نجد :

$$\int \frac{dz}{F(z)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{x}{c}\right| = \int \frac{dz}{F(z)} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x}{c}\right| = e^{\int \frac{dz}{F(z)}} \Rightarrow x = c\,e^{\int \frac{dz}{F(z)}}$$

ولنفرض أن :

$$e^{\int \frac{dz}{F(z)}} = G(z)$$

عندئذٍ نجد أن الحل العام هو $x = c.G(z)$ ، وهو المطلوب .

ملاحظة (٩) : لحل معادلة تفاضلية ذات أبعاد متجانسة ، نفرض أن :

$z = \frac{y}{x^n}$ ، ثم نعوض كل x بـ cx ، وكل y بـ $c^n y$ ، وكل y' بـ $c^{n-1}y$ ، فإذا استطعنا تعيين قيمة لـ n بحيث تحذف c من كل الحدود الحاوية على c في المعادلة وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية متجانسة الأبعاد ، وترد إلى معادلة منفصلة المتغيرات .

مثال (٢٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x\,y\,y' - 2y^2 + 4x^4 = 0$$

الحـــل :

نبدل كل x بـ cx وكل y بـ $c^n y$ وكل y' بـ $c^{n-1}y$ ، لوجدنا الآتي :

$$c^{2n}x\,y\,y' - 4c^{2n}y^2 + 4c^4x^4 = 0$$

وهنا نلاحظ أن $n = 2$ ، وبالتالي فهي معادلة تفاضلية متجانسة الأبعاد ومن الدرجة الثانية ، أي $n = 2$. وبالتالي لحل هذه المعادلة نضع :

$$z=\frac{y}{x^2} \Rightarrow y=x^2 z$$

نبدل في المعادلة التفاضلية كل $y=x^2 z$ نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$x\,z.z'+4=0 \quad \Rightarrow \quad z.d\,z+\frac{4\,dx}{x}=0$$

وبتكامل طرفي هذه المعادلة :

$$\int z.d\,z+4\int\frac{dx}{x}=0$$

نحصل على الحل العام وهو :

$$\frac{z^2}{2}+4\,\ln|x|=\ln c \quad \Rightarrow \quad z^2+8\,\ln|x|=c_1$$

نبدل كل $z=\frac{y}{x^2}$ ، نجد أن :

$$\frac{y^2}{x^4}+\ln x^8=c_1$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

٤-٦-٣ المعادلات التفاضلية التي تُرد إلى متجانسة :

هناك أنواع من المعادلات التفاضلية التي تُرد إلى معادلات متجانسة ، من هذه المعادلات التي شكلها العام هو :

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a\,x+b\,y+c}{a'\,x+b'\,y+c'}\right) \qquad (4.32)$$

فإذا كان $c=c'=0$ ، عندئذٍ تتحول المعادلة (4.32) إلى معادلة تفاضلية متجانسة لنفرض أن أحد العددين c أو c' مختلف عن الصفر، عندئذٍ نصادف إحدى الحالتين الآتيتين

آ- الحالة الأولى :

المستقيمان : $a\,x+b\,y+c=0$

و : $a'\,x+b'\,y+c'=0$

غير متوازيان ، أي :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{أو} \quad \frac{a}{a} \neq \frac{b}{b'}$$

عندئذٍ في هذه الحالة نوجد نقطة تقاطع المستقيمان ولتكن هذه النقطة (x_0 , y_0) ثم نسحب المحاور الإحداثية إلى هذه النقطة ، وذلك بإدخال متغيرات جديدة X , Y متعلقة بالمتغيرات القديمة وفق العلاقات الآتية :

$$x = X + x_0$$
$$y = Y + y_0$$

بالتعويض في العلاقة (4.32) نجد أن :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + a x_0 + b y_0 + c}{a' X + b' Y + a' x_0 + b' y_0 + c'}\right)$$

وبما أن :

$$a x_0 + b y_0 + c = 0$$
$$a' x_0 + b' y_0 + c' = 0$$

عندئذٍ نحصل على المعادلة التفاضلية المتجانسة وهي من الشكل الآتي :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a' X + b' Y}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

نحل هذه المعادلة التفاضلية بالطرق المعروفة ، ومن ثم نعود إلى المتغيرات القديمة فنجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأصلية .

مثال (٢٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{2x - 4y + 5}$$

الحـــل : يأخذ المستقيمان :

$$\left.\begin{matrix} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x - 4y + 5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

إذاً ، المستقيمان متقاطعان .

ثم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع (x_0, y_0) بحل جملة معادلتي المستقيمين ، فنجد أن :

$$M_0(-\frac{11}{4}, -\frac{1}{8})$$

ولنضع :

$$X = x - x_0 \Rightarrow X = x + \frac{11}{4} \Rightarrow dX = dx$$

$$Y = y - y_0 \Rightarrow Y = y + \frac{1}{8} \Rightarrow dY = dy$$

لنعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X - \frac{11}{4}) + 2(Y - \frac{1}{8}) + 3}{2(X - \frac{11}{4}) - 4(Y - \frac{1}{8}) + 5}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X - 4Y} \qquad (I)$$

وهذه المعادلة متجانسة ، ولحلها نفرض أن :

$$\frac{Y}{X} = Z \Rightarrow Y = XZ$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى X نجد أن :

$$Y' = Z + XZ'$$

نبدل في المعادلة (I) ، نجد :

$$Z + XZ' = \frac{X + 2XZ}{2X - 4XZ} \Rightarrow XZ' = \frac{1 + 2Z}{2 - 4Z} - Z$$

بتوحيد المقامات وحذفها نجد :

$$XZ' = \frac{1 + 4Z^2}{2 - 4Z} \Rightarrow \frac{(2 - 4Z)dZ}{1 + 4Z^2} = \frac{dX}{X}$$

$$\frac{(2 - 4Z)dZ}{1 + 4Z^2} = \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$\frac{2\,dZ}{1+4Z^2}-\frac{4Z\,dZ}{1+Z^2}=\frac{dX}{X}$$

$$\frac{2\,dZ}{1+(2Z)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{8Z\,dZ}{1+4Z^2}=\frac{dX}{X}$$

بمكاملة طرفي المساواة نجد :

$$arctg(2Z)-\frac{1}{2}\ln(1+4Z^2)=\ln|X|+C$$

نبدل كل Z بـ $\frac{Y}{X}$ نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$arctg\left(\frac{2Y}{X}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{4Y^2}{X^2}\right)=\ln|X|+C$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

ب- الحالة الثانية :

أما إذا كانت $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ، فإن المستقيمين متوازيان .

عندئذٍ نفرض أن :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\lambda \quad\Rightarrow\quad a=\lambda a' \;,\; b=\lambda b'$$

بالتعويض في المعادلة (4.32) نجد :

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\lambda a'x+\lambda b'y+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=f\left[\frac{\lambda(a'x+b'y)+c}{(a'x+b'y)+c'}\right] \qquad (4.33)$$

في هذه الحالة ، نفرض أن المقدار المشترك في البسط والمقام z ، فيكون :

$$z=a'x+b'y \;\Rightarrow$$

$$z'=a'+b'y' \;\Rightarrow\; y'=\frac{z'-a'}{b'}$$

نبدل في المعادلة (4.33) قيمة y' ، نجد :

$$\frac{z'-a'}{b'}=f\left(\frac{\lambda z+c}{z+c'}\right)\Rightarrow\quad\frac{z'-a'}{b'}=G(z)$$

وهذه معادلة ترد إلى منفصلة المتغيرات :

$$z'-a'=b'.G(z)\Rightarrow\quad z'=a'+b'.G(z)$$

$$\frac{dz}{b'.G(z)+a'}=dx$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات ، حلها من القبيل :

$$x=C.\gamma(z)$$

وبالعودة إلى المتغيرات الأصلية بأن نبدل كل $z=a'x+b'y$ في المعادلة الأخيـرة نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

مثال (٢٨) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(2x+3y+1)\,dx+(10x+15y+4)\,dy=0$$

الحـــل : يمكن أن نعبّر عن هذه المعادلة التفاضلية بالشكل الآتي :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+3y+1)}{10x+15y+4}$$

وهنا نلاحظ أن المستقيمين :

$$2x+3y+1=0$$
$$10x+15y+4=0$$

متوازيان لأن $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{1}{5}$ ، وبالتالي نكتب :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{[(2x+3y)+1]}{5(2x+3y)+4}\qquad(1)$$

عندئذٍ نفرض أن المقدار المشترك هو :

$$2x+3y=z\ \Rightarrow$$
$$z'=2+3y'\ \Rightarrow\ z'-2=3y'\ \Rightarrow$$
$$y'=\frac{z'-2}{3}$$

نبدل في المعادلة (I) نجد :

$$\frac{z'-2}{3}=\frac{-(z+1)}{5z+4} \Rightarrow z'=-\frac{3(z+1)}{5z+4}+2 \Rightarrow$$

$$z'=\frac{7z+5}{5z+4} \Rightarrow \frac{(5z+4)\,dz}{7z+5}=dx$$

بتكامل طرفي المساواة نجد :

$$\int \frac{(5z+4)\,dz}{7z+5}=\int dx$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن نقسم المقدار $(5z+4)$ على المقدار $(7z+5)$ نجد :

$$\frac{5}{7}\int dz+\int \frac{\frac{3}{7}}{7z+5}\,dz=\int dx \Rightarrow \frac{5}{7}\int dz+\frac{3}{49}\int \frac{7\,dz}{7z+5}=\int dx$$

$$\frac{5}{7}z+\frac{3}{49}\ln|7z+5|=x+c \qquad (II)$$

وبالرجوع إلى المتيرات الأصلية نبدل في (II) كل $z=2x+3y$ نحصل على الحل العام وهو :

$$\frac{5}{7}(2x+3y)+\frac{3}{49}\ln|7(2x+3y)+5|=x+c$$

٤-٧ النوع الثالث للحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى القابلة للحل :

٤-٧-١ المعادلات التفاضلية التامة :

تعريف المعادلة التفاضلية التامة (١٤) :

نقول عن المعادلة التفاضلية :

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \qquad (4.34)$$

بأنها تامة إذا كان الطرف الأيسر من هذه المعادلة تفاضلاً تاماً لتابع $z=f(x,y)$ ، أي أن :

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=0$$

عندئذٍ ينتج من هذا التطابق :

$$P(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$Q(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

والمعادلة التفاضلية تصبح بالشكل المختصر :

$$dz=0$$

وحلها العام هو :

$$z=f(x,y)=c$$

حيث c : ثابت اختياري .

مبرهنة (٣) : لتكن المعادلة التفاضلية (4.34) :

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

حيث إن التابعين $P,\ Q$ ، لهما مشتقات جزئية مستمرة ، فالشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة (4.34) تامة هو :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

البرهان :

آ- لزوم الشرط :

بما أن المعادلة (4.34) تامة ، عندئذٍ يوجد تابع $z=f(x,y)$ فيه :

$$P(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (4.35)$$

$$Q(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (4.36)$$

باشتقاق طرفي المعادلة (4.35) جزئياً بالنسبة لـ y نجد :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (4.37)$$

باشتقاق طرفي المعادلة (4.36) بالنسبة لـــ x نجد :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (4.38)$$

وبما أن التابع $z = f(x,y)$ مستمر، عندئذٍ فإن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

وبالتالي ، بمقارنة المعادلة (4.37) مع المعادلة (4.38) ينتج :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

وهو المطلوب .

ب- كفاية الشرط :

نستفيد من الفرض $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ، ولنبرهن أن المعادلة :

$Pdx + Qdy = 0$ تامة .

هذا يعني إيجاد تابع مثل $z(x,y)$ ، بحيث :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P \qquad (4.39)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q \qquad (4.40)$$

نفتش عن هذا التابع $z(x,y)$ المحقق للشرطين الأخريين ، فإذا تحقق الشرط الأول ، $\frac{\partial z}{\partial x} = P$ بالمكاملة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابت نجد :

$$z(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \phi(y) \qquad (4.41)$$

باشتقاق طرفي العلاقة (4.41) بالنسبة إلى y نجد أن :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right] + \phi'(y) \qquad (4.42)$$

ثم نقارنها مع العلاقة (4.40) نجد :

$$\phi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right] \qquad (4.43)$$

ومنه بالمكاملة نجد :

$$\phi(y) = \int \left\{ Q - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right]\right\} dy$$

نعوض $\phi(y)$ بما يساويها في العلاقة (4.41) فنحصل على التابع $z(x,y)$:

$$z(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int \left\{ Q - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right]\right\} dy = c \qquad (4.44)$$

وهذا يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة (4.34) .

بقي أن نتحقق من أن ثابت التكامل في المعادلة (4.43) تابع إلى y فقط ، لذا يكفي أن نبرهن أن مشتق الطرف الأيسر من المعادلة (4.43) بالنسبة إلى x يساوي الصفر، أي أن :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi'(y)\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

وهذا يعني أن $\phi'(y)$ تابع لـــ y فقط ، وهذا صحيح من فرض المبرهنة .

مثال تطبيقي (٢٩) :

أثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة ، وأوجد حلها العام :

$$y^2 dx + 2xy\,dy = 0$$

الحـــــل : نلاحظ أن :

$$\left.\begin{aligned} P = y^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ Q = 2xy &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{تامة}$$

ولإيجاد الحل العام ، نفتش عن التابع $z = f(x,y)$ ، بحيث :

$$\frac{dz}{dx} = P \qquad (I)$$

$$\frac{dz}{dy} = Q \qquad (II)$$

$$z = \int y^2 dx + \phi(y) \Rightarrow$$

$$z = y^2 x + \phi(y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \phi'(y) \qquad (III)$$

لكن نعلم أن :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$2xy = 2xy + \phi'(y) \Rightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = c_0$$

نبدل قيمة $\phi(y)$ في (III) :

$$z = y^2 x + c_0$$

ومنه نجد أن الحل العام :

$$z(x,y) = c \;\; ; \;\; y^2 x + c_0 = c \;\; ; \;\; y^2 x = c - c_0 = c_1$$

حيث :

c_1 : ثابت كيفي ، وهو الحل العامل للمعادلة التفاضلية .

ملاحظة (١٠) : هناك طريقة ثانية لإيجاد الحل العام للمعادلة التامة (4.34) .

بعد التحقق من أن العلاقة (4.34) تامة ، نحسب التكاملين الآتيين :

آ- $\int P(x,y)\,dx$ ، (حيث y ثابت) .

ب- $\int Q(x,y)\,dy$ ، (حيث x ثابت) .

عندئذٍ يكون $z\ (x\ ,\ y)$ هو كل الحدود التي ظهرت في التكاملين مع كتابة الحدود المكررة مرة واحدة فقط .

مثال (٣٠) : أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x^2 + \ln y)\,dx + (\frac{x}{y})\,dy = 0$$

نلاحظ أولاً أن :

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) = x^2 + \ln y \;&\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y} \\ Q(x,y) = \frac{x}{y} \;&\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{(المعادلة تامة)}$$

لنحسب التكاملين :

$$\int P\,dx = \int (x^2 + \ln y)\,dx = \frac{x^3}{3} + x \ln y$$

$$\int Q\,dx = \int \frac{x}{y}\,dy = x \int \frac{dy}{y} = x \ln y$$

حيث y ثابت . عندئذٍ يكون الحل العام كما يلي :

$$x \ln y + \frac{x^3}{3} = c$$

ملاحظة (١١) : هناك طريقة أخرى لحل المعادلة التفاضلية التامة (4.34) ، وتدعى بطريقة التجميع ، وذلك بمحاولة جعل الطرف الأيسر من المعادلة (4.34) بشكل مجموع تفاضلات .

مثال (٣١) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy$$

بعد التأكد أنها تامة ، نلاحظ أن :

$$\left.\begin{aligned} P = 3x^2 + 4xy \;&\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 4x \\ Q = 2x^2 + 2y \;&\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \text{(المعادلة تامة)}$$

لنوجد الحل العام بطريقة التجميع ، فنجد :

$$3x^2dx + 4xy\,dx + 2x^2dy + 2y\,dy = 0$$
$$d(x^3) + d(2x^2y) + d(y^2) = dc$$
$$d(x^3 + 2x^2y + y^2) = dc \Rightarrow x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

٤-٧-٢ المعادلات التفاضلية التي تُرد إلى تامة (عامل التكميل) :

أولاً- عامل التكميل ،

بفرض : $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

معادلة تفاضلية غير تامة ، أي أن :

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

إذا وجد تابع $\mu(x,y)$ ، بحيث لو ضربنا طرفي المعادلة (4.34) به لأصبحت تامة ، يسمى هذا التابع بعامل التكميل ، أي :

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0 \qquad (4.45)$$

بما أنها تامة ، عندئذٍ يجب أن تحقق الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

وبالتالي نجد :

$$(\frac{\partial \mu}{\partial y})P + \frac{\partial P}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + (\frac{\partial Q}{\partial x})\mu$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(\frac{\partial \mu}{\partial y})P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \qquad (4.46)$$

ونلاحظ أن المعادلة (4.46) هي معادلة تفاضلية جزئية يصعب حلها الآن ، وسنناقش عامل التكميل وفق الحالات الآتية :

آ- حالة أولى : إذا كان $\mu = c$ ، عندئذٍ فإن :

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

ومن العلاقة (4.46) تتحقق المطابقة الآتية :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

والمعادلة أصبحت تامة ، لذلك يمكن أن نقول إن أي معادلة تفاضلية تامة أصلاً تقبل أي ثابت كيفي عامل تكميل لها .

ب- حالة ثانية :

إذا كانت μ تابعاً لـ x فقط ، أي $\mu = \mu(x)$ ، عندئذٍ نجد $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$.

بالتعويض في (4.46) نجد أن :

$$-\frac{\partial \mu}{\partial x} Q = \mu (Q'_x - P'_y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = (\frac{P'_y - Q'_x}{Q}) dx$$

فإذا كان الكسر في الطرف الثاني تابعاً إلى x فقط ، عندئذٍ يمكن أن نكتب المعادلة :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x)\, dx \qquad (4.47)$$

وبتكامل طرفي المساواة نجد :

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \varphi(x) dx$$

$$\ln\left|\frac{\mu}{c}\right| = \int \varphi(x) dx \Rightarrow \frac{\mu}{c} = e^{\int \varphi(x) dx}$$

$$\Rightarrow \mu = c\, e^{\int \varphi(x) dx} \quad ; \quad \varphi(x) = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المنفصلة (4.47) ، حيث نختار مثلاً $c = 1$ ، وبالتالي نجد أن عامل التكميل $\mu = \mu(x)$ يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\mu(x)=e^{\int \frac{(P'_y-Q'_x)dx}{Q}}=\phi(x) \qquad (4.48)$$

أما إذا كان الكسر في الطرف الثاني غير تابع إلى x فقط ، عندئذٍ نفشل في إيجاد عامل التكميل ونلجأ إلى تجربة أخرى .

ج- حالة ثالثة :

إذا فرضنا عامل التكميل تابعاً لـ y ، أي $\mu=\mu(y)$ فقط ، عندئذٍ نجد :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}=0$$

بالتعويض في (4.46) نجد أن :

$$\frac{d\mu}{\mu}=(\frac{Q'_x-P'_y}{P})dy$$

فإذا كان الكسر في الطرف الأيمن تابعاً لـ y فقط ، أي من الشكل $\varphi(y)$ ، عندئذٍ يكون :

$$\frac{d\mu}{\mu}=\varphi(y)dy \qquad (4.49)$$

وبتكامل طرفي المساواة نجد :

$$\int \frac{d\mu}{\mu}=\int \varphi(y)dy \Rightarrow \ln\left|\frac{\mu}{c}\right|=\int \varphi(y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{c}=e^{\int \varphi(y)dy} \Rightarrow \mu=ce^{\int \varphi(y)dy} \quad ; \quad \varphi(y)=\frac{Q'_x-P'_y}{P}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المنفصلة (4.49) ، حيث نختار مثلاً $c=1$ ، وبالتالي نجد أن عامل التكميل $\mu=\mu(y)$ يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\mu(y)=e^{\int \frac{(Q'_x-P'_y)dy}{P}}=\phi(y) \qquad (4.50)$$

د- حالة رابعة : إذا لم يكن عامل التكميل تابعاً لـ x فقط ، أو y فقط ، عندئذٍ نفتش عن عامل التكميل من الشكل الآتي :

$$\mu = \mu[w(x,y)]$$

للتسهيل نفرض أن $t = w(x,y)$ ، عندئذٍ نجد :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x}.\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

وبالمثل :

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y}.\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

بالتعويض في (4.46) يكون :

$$P.(\frac{\partial t}{\partial y}.\frac{\partial \mu}{\partial t}) - Q.(\frac{\partial t}{\partial x}.\frac{\partial \mu}{\partial t}) = \mu(Q'_x - P'_y)$$

ونكتب الطرف الأيسر بالشكل الآتي :

$$(P.\frac{\partial t}{\partial y} - Q.\frac{\partial t}{\partial x})\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu(Q'_x - P'_y)$$

وهذه تكتب بالشكل الآتي :

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{(P'_y - Q'_x)\,dt}{Q.\frac{\partial t}{\partial x} - P.\frac{\partial t}{\partial y}} \qquad (4.51)$$

والمسألة ممكنة إذا كان الكسر في الطرف الثاني تابعاً لـ t ، وعندئذٍ نكامل طرفي العلاقة (4.51) بالنسبة إلى t ، وبعدها نستبدل كل t بـ $w(x,y)$.

حالة خاصة (١) :

عندما $t = w(x,y) = x + y$ ، أي عامل تكميل في الشكل $\mu = \mu(x,y)$ ، فإن :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 1$$

عندئذٍ بالتعويض في العلاقة (4.51) ، نجد :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(P'_y - Q'_x)\,dt}{Q - P} \qquad (4.52)$$

حالة خاصة (٢) :

إذا كان $w(x,y)=t=x.y$ ، فإن :

$$\frac{\partial t}{\partial x}=y \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial y}=x$$

عندئذٍ بالتعويض في العلاقة (4.51) ، نجد :

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(P'_y-Q'_x).dt}{y.Q-x.P} \qquad (4.53)$$

وحتى لا نعيد المناقشة نفسها من أجل كل افتراض ، ندرس المسألة بشكل عام .

الحالة العامة :

إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة (4.51) تابعاً لـ t فقط ، فإن هذه المعادلة تكون قابلة للحل ، وبالتالي يمكن إيجاد عامل التكميل للمعادلة (4.34) تابعاً لـ t في هذه الحالة أما إذا لم يكن الطرف الأيمن للمعادلة (4.51) تابعاً لـ t ، عند ذلك لا تتحقق المعادلة (4.51) ، وبالتالي لا يوجد في هذه الحالة عوامل تكميل تابعة لـ t .

بالتأكيد ، يجب أخذ t مساوية لأحد المقادير :

$$x \ , \ y \ , \ x.y \ , \ x+y \ , \ x-y \ , \ x^2-y^2 \ , \ \frac{y}{x} \ , \ \frac{x^2}{y^2}$$ و ..... الخ .

حتى نحصل على حالة إيجابية يمكن فيها إيجاد عامل التكميل للمعادلة (4.34) .

مثال (٣٢) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y\,dx-(x+x^2+y^2)\,dy=0$$

علماً أنها تقبل عامل تكميل كتابع x^2+y^2 .

الحـــل : إن عامل التكميل هو من الشكل $\mu=\mu[w(x,y)]$ ، حيث :

$$t=w(x,y)=x^2+y^2$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{\partial t}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial y}=2y$$

$$P(x,y)=y\ ,\ Q(x,y)=-(x+x^2+y^2)$$
$$P'_y=1\ ,\ Q'_x=-1-2x$$

نبدل في المعادلة (4.51) :

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(2+2x)\,dt}{-2x(x+x^2+y^2)-2y^2}\Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2(1+x)\,dt}{-2(1+x)\,(x^2+y^2)}=-\frac{dt}{x^2+y^2}=\frac{-dt}{t}$$

لكن نعلم أن :

$$dt=2x\,dx+2y\,dy=d(x^2+y^2)$$

وبالتالي ، بالمكاملة نجد أن عامل التكميل :

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة بعامل التكميل $\frac{1}{x^2+y^2}$ ، نجد :

$$(\frac{y}{x^2+y^2})\,dx-(\frac{x}{x^2+y^2}+1)\,dy=0$$

عندئذٍ نجد أن الحل العام لهذه المعادلة بالاعتماد على العلاقتين :

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}\qquad (\mathrm{I})$$

و :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)=-(\frac{x}{x^2+y^2}+1)\qquad (\mathrm{II})$$

من العلاقة (I) نجد :

$$F(x,y)=\int\frac{y\,dx}{x^2+y^2}=arctg(\frac{y}{x})+\phi(y)\qquad (\mathrm{III})$$

بالاعتماد على العلاقة (II) نجد :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[arctg(\frac{y}{x})+\phi(y)\right]=-(\frac{x}{x^2+y^2}+1)$$

ومنه نجد :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}+\frac{d\phi}{dy}=-\frac{x}{x^2+y^2}-1 \Rightarrow$$

$$\frac{d\phi}{dy}=-1 \Rightarrow \phi(y)=-y+c_1$$

نبدل في العلاقة (III) ، نحصل على الحال العام :

$$F(x,y)=arctg(\frac{x}{y})-y=c \;\; ; \;\; y\neq 0$$

مثال (٣٣) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(y+3x^3)\,dx+(x+\frac{x^4}{y})=0$$

الحـــل : المعادلة المعطاة ليست تامة ، لأن :

$$P=y+3x^3 \;\; ; \;\; Q=x+\frac{x^4}{y}$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1 \;\; ; \;\; \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\frac{4x^3}{y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ولإيجاد عامل التكميل لهذه المعادلة ، نفرض أن للمعادلة المعطاة عامل تكميل لـــ x مثلاً ، أي لو أخذنا $t=x$ ، لوجدنا :

$$\frac{\partial t}{\partial x}=1 \;\; ; \;\; \frac{\partial t}{\partial y}=0$$

وبالاعتماد على العلاقة (4.51) لوجدنا :

$$\frac{1}{\mu}.\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{-4x^2}{y+x^3}$$

وبما أن الطرف الأيمن غير تابع لـــ x فقط ، فإن هذه المعادلة لا يمكن أن تتحقق ، وبالتالي لا يوجد عامل تكميل للمعادلة تابع لـــ x فقط . وذلك وبالطريقة نفسها تماماً نفرض جدلاً ، أن للمعادلة عامل تكميل تابع لـــ y يأخذ $t = y$ ، في المعادلة (4.51) نجد بالحساب أن :

$$\frac{1}{\mu}.\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{4x^3}{y^2+3yx^3}$$

وهنا نلاحظ أن الطرف الأيمن من المعادلة الناتجة غير تابع لـــ y فقط ، فـــإن هـــذه المعادلة لا يمكن أن تتحقق ، وبالتالي لا يوجد عامل تكميل تابع لـــ y .

لنفرض جدلاً أن عامل التكميل الذي نبحث عنه تـــابع لـــــ $t = x\,y$ ، عنـــد ذلـــك ، بالاعتماد على العلاقة (4.51) نجد :

$$\frac{1}{\mu}.\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{-4\,\frac{x^3}{y}}{(x+\frac{x^4}{y})y-(y+3x^3)x} = \frac{2}{xy} = \frac{2}{t}$$

وبما أن الطرف الأيمن من المعادلة الناتجة يتبع لـــ t فقط ، فإن هذه المعادلـــة يمكـــن حلها ، وبحلها نجد عامل التكميل $\mu = x^2.y^2$.

نضرب المعادلة التفاضلية المعطاة بعامل التكميل النـــاتج ، نحـــصل علـــى المعادلـــة التفاضلية التامة الآتية :

$$(y^3x^2+3y^2x^5)dx+(x^3y^2+yx^6)dy=0$$

ولإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نكتب :

$$P(x,y) = y^3x^2+3y^2x^5$$
$$Q(x,y) = x^3y^2+yx^6$$

وبالتالي :

$$\int P(x,y)\,dx = \int (y^3x^2+3y^2x^5)\,dx = \frac{y^3x^3}{3}+\frac{y^2x^6}{2}+c_1$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int (x^3y^2 + y\,x^6)\,dy = \frac{x^3y^3}{3} + \frac{y^2x^6}{2} + c_2$$

وبالتالي ، فإن الحل العام هو :

$$z(x,y) = c$$

$$\frac{x^3y^3}{3} + \frac{y^2x^6}{2} = c$$

مثال (٣٤) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(2 - 3\,x\,y)\,dx + (x\,y - 3x^2)\,dy = 0$$

الحـــــل : نلاحظ أن :

$$P = 2 - 3\,x\,y \;\; ; \;\; Q = x\,y - 3x^2$$

$$P'_y = -3x \;\; ; \;\; Q'_x = y - 6x$$

إذاً نلاحظ أن المعادلة التفاضلية ليست تامة . لنوجد عامل التكميل $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{-3x - y + 6x}{x\,y - 3x^2} = \frac{3x - y}{x\,y - 3x^2} = \frac{-(y - 3x)}{x(y - 3x)} = \frac{-1}{x}$$

نبدل في العلاقة (4.48) نجد :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(P'_y - Q'_x)\,dx}{Q}} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$$

وبالتالي نلاحظ أنه :

- عندما $x > 0$ ، فإن عامل التكميل $\mu(x) = \frac{1}{x}$

- عندما $x < 0$ ، فإن عامل التكميل $\mu(x) = \frac{-1}{x}$

وبالضرب في كلتا الحالتين في عامل التكميل ، نحصل على المعادلة التفاضلية التامة :

$$(\frac{2}{x} - 3\,y)\,dx + (y - 3x)\,dy = 0$$

وبإعادة تجميع الحدود ، يكون لدينا :

$$\frac{2}{x}\,dx + y\,dy - 3(y\,dx + x\,dy) = 0$$

أي :

$$d(\ln x^2) + d(\tfrac{1}{2}\,y^2) - 3\,d(x\,y) = 0$$

بمكاملة طرفي المساواة نحصل على مجموعة الحلول :

$$\ln x^2 + \tfrac{1}{2}\,y^2 - 3xy = c$$

مثال (٣٥) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$$

الحـــل : نلاحظ أولاً :

$$P = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$

$$Q = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

وبالتالي نستنتج أن المعادلة ليست تامة .

والآن لنوجد عامل التكميل $\mu = \mu(y)$:

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-8xy^2 - 8xy^3e^y - 4}{2xy^3 + 2xy^4e^y + y} =$$

$$= \frac{-4(2xy^2 - 2xy^3e^y + 1)}{y(2xy^3 + 2xy^3e^y + 1)} \Rightarrow \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-4}{y}$$

نبدل في الدستور :

$$\mu(y) = e^{\int \frac{(Q'_x - P'_y)\,dy}{P}} = e^{-4\int \frac{dy}{y}} = e^{-4\ln y} = e^{\ln \frac{1}{y^4}} = \frac{1}{y^4}$$

نضرب المعادلة التفاضلية المعطاة بعامل التكميل :

$$\mu(y)=\frac{1}{y^4}$$

عندئذٍ نحصل على معادلة تفاضلية تامة .

$$\frac{(2xy^4e^y+2xy^3+y)\,dx}{y^4}+\frac{(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)\,dy}{y^4}=0$$

بالإصلاح نجد :

$$(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3})\,dx+(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4})\,dy=0$$

و لإيجاد الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية نحسب التكاملين :

$$\int P(x,y)\,dx=\int(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3})\,dx$$

$$=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+c_1$$

$$\int Q(x,y)\,dy=\int(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4})\,dy$$

$$=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+c_2$$

وبالتالي ، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$z(x,y)=c$$

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=c$$

وهو المطلوب .

ثانياً- تطبيقات عامل التكميل :

آ- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى :

إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية هو :

$$y' + A(x)\,y = B(x) \qquad (4.54)$$

وقد سميت خطية ، لأن y و y' كلاهما من الدرجة الأولى ، ولا تحوي مضاريب من الشكل $y.y'$. نسمي $B(x)$ الفرق الثاني للمعادلة التفاضلية (4.54) .

حالة خاصة (٣) :

عندما $B(x) = 0$ ، تصبح المعادلة (4.54) بالشكل الآتي :

$$\frac{dy}{dx} + A(x)\,y = 0$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات ، ولذلك لحلها نكتب :

$$\frac{dy}{y} + A(x)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = -A(x)\,dx \qquad (4.55)$$

ولإيجاد الحل العام ، نكامل طرفي المعادلة (4.55) ، فنجد :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int A(x)\,dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int A(x)\,dx$$

$$y = c\,e^{-\int A(x)dx} = c\,F(x)$$

ملاحظة (١٢) :

عندما $B(x) \neq 0$ ، عندئذٍ نلاحظ أن المعادلة (4.54) تبقى بالشكل الآتي :

$$\frac{dy}{dx} + A(x)\,y = B(x)$$

وهذه المعادلة التفاضلية تكتب بالشكل الآتي :

$$[A(x)\,y - B(x)]\,dx + dy = 0$$

مبرهنة (٤) :

كل معادلة تفاضلية خطية ذات طرف ثانٍ ومن شكل المعادلة (4.54) تقبل عامل التكميل $\mu(x) = e^{\int A(x)dx}$ كتابع لـ x فقط .

البرهان : المعادلة (4.54) تكتب بالشكل الآتي :

$$[A(x)\,y - B(x)]\,dx + dy = 0$$

حيث :

$$P \equiv A(x)\,y - B(x) \;\Rightarrow\; P'_y = A(x)$$

$$Q \equiv 1 \;\Rightarrow\; Q'_x = 0$$

بتطبيق الدستور الذي يعطي عامل التكميل في x فقط نجد :

$$\varphi(x) = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = A(x)$$

وبالتالي فإن :

$$\mu = c\,e^{\int \varphi(x)dx} = c\,e^{\int A(x)dx}$$

إذا كان $c = 1$ ، نجد :

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx}$$

وهو المطلوب .

مبرهنة (٥) :

إن حل كل معادلة خطية من المرتبة الأولى ، هو تابع خطي بالنسبة لثابت اختياري ، والعكس صحيح .

الفرض : المعادلة (4.54) هي :

$$y' + A(x)\,y = B(x)$$

الطلب : حلها العام من الشكل :

$$y = c\,f_1(x) + f_2(x) \qquad (4.56)$$

البرهان : المعادلة (4.54) تكتب بالشكل الآتي :

$$[A(x)\,y - B(x)]\,dx + 1.dy = 0$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة بعامل التكميل :

$$\mu(x)=e^{\int A(x)dx}$$

تصبح كما يلي :

$$A(x)\,y\,e^{\int A(x)dx}dx-B(x)e^{\int A(x)dx}dx+e^{\int A(x)dx}dy=0$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل الآتي :

$$e^{\int A(x)dx}A(x)\,y\,dx+e^{\int A(x)dx}dy=e^{\int A(x)dx}B(x)\,dx$$

$$d\left[e^{\int A(x)dx}y\right]=e^{\int A(x)dx}B(x)\,dx$$

بمكاملة الطرفين :

$$e^{\int A(x)y}y=\int e^{\int A(x)dx}B(x)\,dx+c$$

ومنه نجد :

$$y=e^{-\int A(x)dx}\left[\int e^{\int A(x)dx}B(x)\,dx+c\right]$$

وهذا من القبيل :

$$y=c\,f_1(x)+f_2(x)$$

وهذا تابع خطي لثابت اختياري ، ويمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.54) ، والذي نعبر عنه بالشكل الآتي :

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\left(\int\mu(x)\,B(x)\,dx\right)+c\right] \qquad (4.57)$$

وخلاصة القول : لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.54) نتبع ما يلي :

١- نوجد عامل التكميل :

$$\mu(x)=e^{\int A(x)dx}$$

٢- نطبق الدستور :

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int\mu(x)\,B(x)\,dx+c\right]$$

والذي يعطي الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.54) .

والآن ، لنبرهن مبرهنة العكس للمبرهنة (٥) السابقة :

الفرض : إذا كان $y = c\,f_1(x) + f_2(x)$ تابع خطي في c .

الطلب : إثبات أن المعادلة التفاضلية لهذه المجموعة من التوابع هي خطية .

البرهان : نشتق الطرفين بالنسبة لـ x للمعادلة $y = c\,f_1(x) + f_2(x)$ ، فنجد :

$$y' = c\,f_1' + f_2' \Rightarrow y' - f_2' = c\,f_1' \Rightarrow$$

$$c = \frac{y' - f_2'}{f_1'} \qquad (4.58)$$

من العلاقة (4.56) نجد :

$$y - f_2 = c\,f_1 \Rightarrow c = \frac{y - f_2}{f_1}$$

نبدل قيمة c في العلاقة (4.58) نجد أن :

$$\frac{y' - f_2'}{y - f_2} = \frac{f_1'}{f_1} \Rightarrow$$

$$f_1(y' - f_2') = f_1'(y - f_2)$$

$$y'f_1 - f_1 f_2' = y f_1' - f_1' f_2 \Rightarrow$$

نقسم طرفي المساواة على $f_1 \neq 0$ ، نجد :

$$y' - \frac{f_1'}{f_1}\,y = \frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_1}$$

وهذا يمثل شكل المعادلة التفاضلية الخطية .

مثال (٣٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\,y = 1$$

الحـــــل : نلاحظ أن المعادلة المعطاة خطية ، ومن الشكل (4.54) نوجد عامل التكميل :

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx}$$

حيث :

$$A(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$$

ومنه :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2x\,dx}{1+x^2}} = e^{-\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}} = e^{-\ln|1+x^2|} = \frac{1}{1+x^2}$$

عندئذٍ نطبق العلاقة (4.57) نحصل على الحل العام :

$$y = (1+x^2)\left[\int \frac{dx}{1+x^2} + c\right]$$

$$y = (1+x^2)\left[arc\,tg\,x + c\right]$$

مثال (٣٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{x\,dy}{dx} - 2y = x^3.\cos 4x$$

الحـــــل : نكتب المعادلة التفاضلية في الصيغة الآتية :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}\,y = x^2.\cos 4x$$

عندئذٍ نجد :

$$B(x) = x^2.\cos 4x \;\; ; \;\; A(x) = -\frac{2}{x}$$

وبالتالي نجد :

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

ولإيجاد الحل العام ، نطبق العلاقة (4.57) ، نجد :

$$y = x^2\left[\left(\int \frac{1}{x^2}.x^2.\cos 4x\,dx\right) + c\right]$$

$$y = x^2\left[\left(\int \cos 4x\,dx\right) + c\right]$$

$$y = \frac{x^2}{4}\sin 4x + c\,x^2$$

ملاحظة هامة (١٣) : من الممكن أن تكون المعادلة التفاضلية الخطية من الشكل :

$$\frac{dx}{dy} + A(y)\,x = B(y) \qquad (4.59)$$

حيث المتغير y والتابع x .

عندئذٍ ، فإن عامل التكامل $\mu(y)$ يعطى بالدستور الآتي :

$$\mu(y) = e^{\int A(y)dy}$$

والحل العام يعطى كما يلي :

$$x = \frac{1}{\mu(y)}\left[\left(\int \mu(y).B(y)\,dy\right) + c\right] \qquad (4.60)$$

نتيجة للمبرهنة (٥) السابقة :

في المعادلة الخطية (4.54) ، إذا كانت $B(x) = 0$ ، عندئذٍ تُـرد المعادلـة (4.54) مباشرة إلى معادلة منفصلة المتغيرات ، وحلها العام يعطى مباشرة من الدستور :

$$y = \frac{1}{\mu(x)}[c] = c\,f_1(x)$$

حيث :

$$f_1(x) = e^{-\int A(x)dx}$$

أما إذا عوضنا في الدستور العام للحل (مع طرف) $c = 0$ ، نجد :

$$y = \left[\int \mu(x).B(x)\,dx\right] = f_2(x)$$

أي نستنتج مما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية يتألف من قسمين :

الأول : هو الحل العام للمعادلة من دون طرف $c\,f_1(x)$ وأحياناً يدعى بالتابع المتمم .

والثاني : هو الحل الخاص للمعادلة مع طرف وهو $f_2(x)$.

مبرهنة (٦) :

إذا كان y_1 حلاً خاصاً لمعادلة خطية من دون طرف ثانٍ ، و y_2 حلاً خاصاً مع طرف ثانٍ ، فإن الحل العام هو : $y = c\,y_1 + y_2$

البرهان : من الفرض y_1 ، حل خاص من دون طرف ، يعني :

$$y_1' + A(x)\,y_1 = 0 \qquad (4.61)$$

ومن الفرض y_2 ، حل خاص مع طرف ، يعني :

$$y_2' + A(x)\,y_2 = B(x) \qquad (4.62)$$

ولإثبات أن $y = c\,y_1 + y_2$ حل للمعادلة التفاضلية الخطية نجد :

$$y' + A(x)\,y = B(x)$$

$$c\,y_1' + y_2' + A(x)\,(c\,y_1 + y_2) = B(x)$$

$$c\,y_1' + y_2' + c\,A(x)\,y_1 + A(x)\,y_2 = B(x)$$

$$c[\,y_1' + A(x)\,y_1\,] + y_2' + A(x)\,y_2 = B(x) \qquad (4.63)$$

من العلاقة (4.61) نجد أن :

$$y_1' + A(x)\,y_1 = 0$$

من العلاقة (4.62) نجد أن :

$$y_2' + A(x)\,y_2 = B(x)$$

نبدل كل من (4.61) و(4.62) في (4.63) ، نجد فعلاً أن $y = c\,y_1 + y_2$ هو حل عام للمعادلة التفاضلية الخطية .

مبرهنة (٧) :

إذا كان y_1 و y_2 حلّان خاصّين للمعادلة التفاضلية (4.54) مع طرف ثانٍ ، فإن الحل العام هو: $y = c(y_2 - y_1) + y_1$

البرهان : حسب الفرض ، بما أن y_1 حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية مع طرف ينتج :

$$y_1' + A(x)\,y_1 = B(x) \qquad (4.64)$$

وبالمثل ، بما أن y_2 حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية مع طرف حسب الفرض نجد :

$$y_2' + A(x)\,y_2 = B(x) \qquad (4.65)$$

ولكي يكون $y = c(y_2 - y_1) + y_1$ حلاً للمعادلة مع طرف ، يجب أن يحققها مهما كانت c .

وباشتقاق الطرفين لهذا الحل نجد :

$$y' = c(y_2' - y_1') + y_1'$$

نبدل في المعادلة التفاضلية الخطية $y' + A(x)\,y = B(x)$ قيمة كلاً من y' و y نجد :

$$[c(y_2' - y_1') + y_1'] + A(x)\,[c(y_2 - y_1) + y_1] = B(x)$$

$$c[(y_2' + A(x)\,y_2) - (y_1' + A(x)\,y_1)] +$$

$$+ y_1' + A(x)\,y_1 = B(x) \qquad (4.66)$$

من العلاقة (4.64) نجد أن $y_1' + A(x)\,y_1 = B(x)$ ، وكذلك من العلاقة (4.65) نجد أن $y_2' + A(x)\,y_2 = B(x)$ ، نبدل في العلاقة (4.66) ، نلاحظ أنها محققة ، وبالتالي نجد أن :

$$y = c(y_2 - y_1) + y_1$$

وهو حل المعادلة التفاضلية الخطية (4.54) مع طرف ثانٍ .

ب- المعادلات التفاضلية التي ترد إلى خطية :

***- معادلة برنولي :** نسمي كل معادلة من الشكل :

$$y' + A(x)\,y = B(x)\,y^{(n)} \qquad (4.67)$$

بمعادلة برنولي ، حيث : $n \neq 0 \;\; ; \;\; n \neq 1$

- طريقة إيجاد الحل العام لمعادلة برنولي :

١- نقسم طرفي المعادلة (4.67) على y^n بشرط $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y^n} + A(x)\,\frac{y}{y^n} = B(x) \Rightarrow$$

$$y' y^{-n} + A(x) y^{1-n} = B(x) \qquad (4.68)$$

٢- نفرض أن $y^{1-n} = z$ ، ولنشتق طرفي هذه المساواة بالنسبة إلى x ، نجد :

$$(1-n) y^{-n} y' = z' \Rightarrow y' y^{-n} = \frac{z'}{1-n}$$

٣- نعوض في المعادلة (4.68) كل $y^{1-n} = z$ ، وكل $y' y^{-n} = \frac{z'}{1-n}$ ، نجد :

$$\frac{z'}{(1-n)} + A(x) z = B(x)$$

نضرب طرفي هذه المعادلة بـ $(1-n) \neq 0$ ، نجد :

$$z' + (1-n).A(x) z = (1-n).B(x) \qquad (4.69)$$

ولنفرض أن :

$$(1-n).A(x) = A_1(x) \;\; ; \;\; (1-n).B(x) = B_1(x)$$

لنبدل في العلاقة (4.69) ، نجد أن :

$$z' + A_1(x) z = B_1(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية سبق لنا دراستها وحلها العام سابقاً .

ملاحظة (١٤) : عندما قسّمنا طرفي المعادلة على y^n كان من الممكن أن نختصر حلاً للمعادلة $y = 0$ ، وهو يحققها عندما $n > 0$ ، ولا يحققها عندما $n \leq 0$.

أما من أجل $n > 1$ فهو حل خاص للمعادلة ، لأنه بالرجوع إلى دستور الحل العام فإن $y = 0$ حل خاص من أجل $c = \infty$ ، وأما من أجل $1 > n > 0$ ، فيوجد حل ، إلا أنه لا ينشأ عن الحل العام وبذلك فهو حل شاذ . وسوف نوضح هذه الملاحظة بالمثالين الآتيين .

مثال (٣٨) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = y^2$$

الحـــل :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{-1}{x+c}$$

نلاحظ أن $y=0$ حل خاص للمعادلة التفاضلية ، لأنه ينشأ عن الحل العام من أجل $c=\infty$.

مثال (٣٩) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'=2\sqrt{y}$$

نلاحظ أن $y=0$ هو حل شاذ للمعادلة التفاضلية المعطاة ، لأن $1>n>0$ ، وهو يحققها .

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{2\sqrt{y}}=dx\ \Rightarrow$$

$$\sqrt{y}=x+c\ \Rightarrow\ y=(x+c)^2$$

وهذا يمثل الحال العام للمعادلة التفاضلية المعطاة . وواضح من الحل العام للمعادلة التفاضلية أنه لا يمكن أن تكون $y=0$ حتى من أجل أي قيمة للثابت c .

مثال (٤٠) : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$xy'-y=-y^2$$

لتحويل هذه المعادلة إلى معادلة برنولي ، نقسم طرفيها على $x\neq 0$ نجد :

$$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2$$

ولإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نقسّم طرفيها على y^2 ، وبفرض $y\neq 0$:

$$y'y^{-2}-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{1}{x}\qquad (I)$$

والآن نفرض أن :

$$y^{-1}=z\ \Rightarrow\ z'=-y^{-2}y'\ \Rightarrow\ -z'=y^{-2}y'$$

نبدل في (I) ، نجد أن :

$$-z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x} \qquad (II)$$

نضرب (II) بـ (1 −) ، نجد :

$$z' + \frac{1}{x} z = \frac{1}{x} \qquad (III)$$

وهذه تمثل معادلة تفاضلية خطية في z ، لحلها نوجد عامل التكميل $\mu(x)$ ، حيث :

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x \Rightarrow \mu(x) = x$$

واعتماداً على العلاقة (4.57) نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو :

$$\Rightarrow z = \frac{1}{x}\left[\left(\int dx\right) + c\right] \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{x}[x + c] \Rightarrow xz = x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{x + c}{x}$$

لكن نعلم أن $z = \frac{1}{y}$ ، نبدل في العلاقة الأخيرة نجد أن الحل العام هو :

$$\frac{1}{y} = \frac{x + c}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x + c}$$

وهنا نلاحظ أن $y = 0$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة ، لأنه ينشأ عن الحل العام بإعطاء $c = \infty$.

مثال (٤١) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$dy + y\,dx = y^2 e^x dx$$

نقسم طرفي المعادلة على dx ، عندئذٍ تتحول المعادلة التفاضلية المعطاة إلى معادلة برنولي في الصيغة الآتية :

$$y' + y = y^2 e^x$$

ولحلها نقسم طرفي هذه المعادلة على y^2 ، نجد :

$$y' y^{-2} + y^{-1} = e^x$$

نفرض أن $y^{-1} = z$ ، بالاشتقاق نجد $y^{-2}y' = -z'$ ، نبدل في المعادلة الأخيرة نجد :

$$-z' + z = e^x \Rightarrow z' - z = -e^x$$

وهذه تمثل معادلة تفاضلية خطية لحلها تحسب عامل التكميل $\mu = \mu(x)$ ، حيث :

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة ، نستخدم العلاقة (4.5.7) ، عندئذٍ نجد :

$$z = \frac{-1}{e^{-x}} \left[\int e^{-x} dx + c \right]$$

$$z = -e^x (-e^{-x} + c)$$

$$z = -e^x (c - e^{-x})$$

نعلم أن $y^{-1} = z$ ، عندئذٍ نبدل في المعادلة الأخيرة فنجد :

$$\frac{1}{y} = -e^x (c - e^{-x}) \Rightarrow y = \frac{-1}{e^x (c - e^{-x})}$$

***- معادلة داربو** : إن الشكل العام لهذه المعادلة هو :

$$P(\frac{y}{x})dx + Q(\frac{y}{x})dy + x^n d(\frac{y}{x}) = 0 \qquad (4.70)$$

لحلها نفرض أن :

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow dy = x\,dz + z\,dx$$

نعوض في المعادلة الأصلية ، نجد ما يلي :

$$P(z)dx + Q(z)\,(x\,dz + z\,dx) + x^n.dz = 0$$

$$[\,P(z) + z\,Q(z)\,]dx + [\,x\,Q(z) + x^n\,].dz = 0 \qquad (4.71)$$

نقسم على $P(z) + z\,Q(z)\,dz \neq 0$ ، فتصبح المعادلة بالشكل الآتي :

$$\frac{dx}{dz}+\frac{Q(z)}{P(z)+zQ(z)}\,x=-\frac{x^n}{P(z)+zQ(z)}$$

وهي معادلة برنولي في المتغير z والتابع x .

أما إذا كان $dz=0$ عندئذٍ تصبح المعادلة (4.71) بالشكل $[P(z)+zQ(z)]dx=0$ وعندها يكون للمعادلة حلول خاصة هي جذور المعادلة :

$$P(z)+zQ(z)=0$$

وذلك حسب العلاقة (4.71) ، ولتكن هذه الحلول هي :

$$z=z_2\ ,\ z=z_1$$

وبالرجوع إلى الفرض نجد :

$$y=z_1x\ ,\ y=z_2x$$

وهي حلول خاصة .

مثال (٤٢) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x\,dx+y\,dy+x^2(x\,dy-y\,dx)=0$$

نلاحظ أنها من شكل معادلة داربو، وبعد التقسيم على $x\neq 0$ تكتب على الشكل الآتي:

$$dx+\frac{y}{x}\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$$

$$dx+\frac{y}{x}\,dy+x\,d(\frac{y}{x})x^2=0 \qquad (\text{I})$$

ولحل هذه المعادلة نفرض أن :

$$\frac{y}{x}=z\ \Rightarrow\ y=xz\ \Rightarrow\ dy=x\,dz+z\,dx$$

نعوض في العلاقة (I) ، نجد :

$$dx+z(x\,dz+z\,dx)+x^3dz=0 \qquad (\text{II})$$

نقسم المعادلة (II) على $dz\neq 0$:

$$\frac{dx}{dz} + xz + z^2 \frac{dx}{dz} + x^3 = 0$$

$$\frac{dx}{dz}(1+z^2) + xz = -x^3 \qquad (III)$$

من العلاقة (III) نجد أن :

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2} x = -\frac{1}{1+z^2} x^3$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة برنولي في التابع x والمتغير z ، وبحلها نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

*- **معادلة ريكاتي :** إن الشكل العام لمعادلة ريكاتي هو :

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \qquad (4.72)$$

هنا نلاحظ أنه :

- عندما $R(x) = 0$ ، تصبح المعادلة (4.72) معادلة برنولي .
- عندما $P(x) = 0$ ، تصبح المعادلة (4.72) معادلة خطية .

لذلك نفرض $R(x) \neq 0$ و $P(x) \neq 0$ ، فتبقى معادلة ريكاتي .

مبرهنة (٨) :

إذا كان y_0 حلاً خاصاً لمعادلة ريكاتي ، فيمكن ردها إلى معادلة برنولي بإجراء تغير في التابع y ، بحيث يكون $z + y_0 - y$ ، (حيث z تابع لـــ x يمكن تعيينه) .

والحل العام لمعادلة ريكاتي هو تناظري بالنسبة للثابت الاختياري .

البرهان :

من الفرض y_0 حل للمعادلة (4.72) ، إذن فهو يحققها ، أي أن :

$$y_0' + P(x)y_0^2 + Q(x)y_0 + R(x) = 0 \qquad (4.73)$$

إذا عوضنا كل y بـــ $z + y_0$ في العلاقة (4.72) نجد :

$$(y_0 + z)' + P(x).(y_0 + z)^2 + Q(x)(y_0 + z) + R(x) = 0$$

بفك الأقواس والترتيب نجد أن :

$$z' + P z^2 + (2 P y_0 + Q) z + (y_0' + P y_0^2 + Q y_0 + R) = 0 \quad (4.74)$$

لنبدل العلاقة (4.73) في العلاقة (4.74) ، نجد :

$$z' + (2 P y_0 + Q) z = -P z^2 \quad (4.75)$$

وهذه ليست إلا معادلة برنولي في التابع z والمتغير x ، ولحلها نقسم (4.75) على z^2 ، نجد :

$$z' z^{-2} + (2 P y_0 + Q) z^{-1} = -P \quad (4.76)$$

نفرض أن $z^{-1} = Y$ ، وبالتالي نجد أن $-Y' = z^{-2} z'$.

نعوض قيمة كل من Y وY' في المعادلة (4.76) ، نجد :

$$Y' - (2 P y_0 + Q) Y = P$$

وهذه العلاقة خطية في التابع Y والمتغير x ، وحلها العام من الشكل الآتي :

$$z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{c f_1(x) + f_2(x)}$$

بتعويض z بقيمتها في الفرض ، نجد :

$$y = y_0 + \frac{1}{Y} = y_0 + \frac{1}{c f_1(x) + f_2(x)}$$

$$y = \frac{c y_0 f_1(x) + y_0 f_2(x) + 1}{c f_1(x) + f_2(x)}$$

$$y = \frac{c F_1 + F_2}{c f_1 + f_2}$$

وهذا الشكل تابع تناظري بالنسبة للثابت c .

مبرهنة العكس [للمبرهنة (٨)] :

كل مجموعة توابع تناظرية بالنسبة لثابت اختياري c ، تكون معادلتها التفاضلية معادلة ريكاتي .

الفرض : $y = \dfrac{c\,F_1 + F_2}{c\,f_1 + f_2}$

الطلب : المعادلة التفاضلية هي معادلة ريكاتي .

البرهان : لإيجاد المعادلة التفاضلية نتبع طريقة عزل الثوابت .

من الفرض نجد :

$$c = \frac{F_2 - y\,f_2}{y\,f_1 - F_1}$$

باشتقاق طرفي المساواة نجد :

$$(F_2' - y'f_2 - y\,f_2')\,(y\,f_1 - F_1) - (y'f_1 + y\,f_1' - F_1')\,(F_2 - y\,f_2) = 0$$

$$y'(-f_2\,y\,f_1 + f_2F_1 - f_1F_2 + f_1f_2\,y) + y^2(f_1'f_2 - f_1f_2') +$$
$$+\ y(F_1f_2' - F_1'f_2 + f_1F_2' - f_1'F_2) + (F_1'F_2 - F_1\,F_2') = 0$$

وينتج مما تقدم ، أنه يمكن الحصول للحل العام لمعادلة ريكاتي إذا علمنا حلاً خاصاً y_0 وبالتحويل $y = y_0 + z$ نحصل على معادلة برنولي ، ومنها إلى معادلة خطية ، وبإجراء التحويل $y = y_0 + \dfrac{1}{z}$ نحصل على معادلة خطية مباشرة .

دراسة الحل العام لمعادلة ريكاتي (الخاصة المميزة لمعادلة ريكاتي) :

إذا أخذنا أربعة حلول خاصة لمعادلة ريكاتي ، فإن النسبة المضاعفة لها تكون ثابتة .

مبرهنة (٩) :

بفرض y_1 , y_2 , y_3 , y_4 أربعة مقادير جبرية ، حيث نسمي النسبة :

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} \div \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

بالنسبة المضاعفة للمقادير y_1 , y_2 , y_3 , y_4 . (تقبل هذه النظرية من دون برهان) .

إيجاد الحل العام لمعادلة ريكاتي بدلالة حلين خاصين :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$y' + P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) = 0 \qquad (4.77)$$

بما أن y_1 , y_2 حلان خاصان ، إذاً :

$$y_1' + P(x)\,y_1^2 + Q(x)\,y_1 + R(x) = 0 \qquad (4.78)$$

$$y_2' + P(x)\,y_2^2 + Q(x)\,y_2 + R(x) = 0 \qquad (4.79)$$

نفرض أن :

$$z = \frac{y - y_1}{y - y_2} \qquad (4.80)$$

ومنه نجد :

$$y = \frac{y_1 - z\,y_2}{1 - z} \qquad (4.81)$$

$$\ln z = \ln(y - y_1) - \ln(y - y_2)$$

باشتقاق طرفي المعادلة نجد أن :

$$\frac{z'}{z} = \frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} \qquad (4.82)$$

بطرح العلاقة (4.78) من العلاقة (4.77) نجد :

$$y' - y_1' = -[P(y^2 - y_1^2) + Q(y - y_1)]$$

ومنه :

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} = -\{P(y + y_1) + Q] \qquad (4.83)$$

كذلك بطرح العلاقة (4.79) من العلاقة (4.77) ينتج :

$$y' - y_2' = -[P(y^2 - y_2^2) + Q(y - y_2)]$$

ومنه :

$$\frac{y' - y_2'}{y - y_2} = -\{P(y - y_2) + Q] \qquad (4.84)$$

بتعويض العلاقتان (4.88) و (4.84) في (4.82) ، نجد :

$$\frac{z'}{z} = -P(y_1 - y_2)$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$\ln z = \int P(y_2 - y_1)\,dx + \ln c$$

$$\ln \frac{z}{c} = \int P(y_2 - y_1)\,dx$$

$$z = c\,e^{\int P(y_2 - y_1)\,dx}$$

نعوض z بقيمتها في (4.86) نجد :

$$y = \frac{y_1 - c\,y_2\,e^{\int P(y_2 - y_1)\,dx}}{1 - e^{\int P(y_2 - y_1)\,dx}} \qquad (4.85)$$

ملاحظة (١٥) : مما تقدم نلاحظ أنه إذا علمنا في معادلة ريكاتي حلاً خاصاً واحداً نحتاج إلى عمليتي تكامل ، وإذا علمنا حلّين خاصّين نحتاج إلى عملية تكامل واحدة وفق الدستور (4.85) .

تحويل معادلة ريكاتي إلى معادلة خطية من المرتبة الثانية :

لتكن المعادلة :

$$y' + P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) = 0$$

بضرب طرفيها بالتابع $P(x)$ تصبح :

$$P\,y' + P^2 y^2 + P\,Q\,y + PR = 0 \qquad (4.86)$$

إذا غيرنا التابع y ، وأخذنا تابعاً جديداً z ، بحيث : $P\,y = \frac{z'}{z}$ ، ومنه نجد :

$$y = \frac{z'}{P\,z} \qquad (4.87)$$

وباشتقاق الطرفين نجد :

$$y' = \frac{z''P\,z - z'(P'z + z'P)}{P^2 z^2}$$

وبالاختصار يكتب كما يلي :

$$y' = \frac{z''}{Pz} - \frac{P'z'}{P^2 z} - \frac{z'^2}{Pz^2}$$

ومنه :

$$Py' = \frac{z''}{z} - \frac{P'z'}{Pz} - (\frac{z'}{z})^2 \Rightarrow Py' = \frac{z''}{z} - \frac{P'}{P} Py - P^2 y^2$$

ومنه :

$$P'y + Py' = \frac{z''}{z} - P^2 y^2 \Rightarrow Py' + P^2 y^2 = \frac{z''}{z} - P' \frac{z'}{Pz}$$

ونكتب :

$$Py' + P^2 y^2 = \frac{z''}{z} - \frac{P'}{P} \frac{z'}{z}$$

لكن نعلم أن $Py' + P^2 y^2 = -(PQy + PR)$ حسب العلاقة (4.86) ، عندئذٍ نجد أن :

$$\frac{z''}{z} - \frac{P'}{P} \frac{z'}{z} + PQ \frac{z'}{Pz} + RP = 0$$

بالضرب بـ z ، نجد :

$$z'' - \frac{P'}{P} z' + Qz' + RPz = 0 \Rightarrow z'' + (Q - \frac{P'}{P}) z' + RPz = 0$$

وهذه هي معادلة خطية من المرتبة الثانية .

مثال (٤٣) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$y' = y^2 - (4x+1)y + 4x^2 + 2x + 2$ ، علماً بأن $y_0 = 2x$ هو حل خاص لها

الحل : المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي ، ولحلها نفرض أن :

$$y = y_0 + \frac{1}{z} = 2x + \frac{1}{z}$$

$$y' = 2 - \frac{z'}{z^2}$$

نبدل في المعادلة التفاضلية المعطاة قيمة كلٍّ من y و y' ، نجد :

$$2-\frac{z'}{z^2}=(2x+\frac{1}{z})^2-(4x+1)\,(2x+\frac{1}{z})+4x^2+2x+2$$

$$x^2\,[2-4x^2+2(4x+1)x-(4x^2+2x+2)]-z'=$$
$$=4xz+1-4xz-z$$

وبالتالي ينتج :

$$\frac{dz}{dx}=z-1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z-1}=dx \Rightarrow \int\frac{dz}{z-1}=\int dx \Rightarrow \ln\left|\frac{z-1}{c}\right|=x$$

$$\Rightarrow z-1=ce^x \Rightarrow z=ce^x+1$$

وبالتالي ، فإن الحل العام لمعادلة ريكاتي المفروضة هو :

$$y=2x+\frac{1}{1+ce^x}$$

مثال (٤٤) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$xy'+y^2-y-x^2=0$$

علماً أنها تقبل $y_1=x$ حلاً خاصاً لها .

الحـــــل : المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي ، ولحلها نفرض أن :

$$y=y_1+\frac{1}{z}=x+\frac{1}{z} \Rightarrow y'=1-\frac{z'}{z^2}$$

نبدل قيمة كلاً من y و y' ، في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نجد :

$$x(1-\frac{z'}{z^2})+(x+\frac{1}{z})^2-(x+\frac{1}{z})-x^2=0$$

$$-x\frac{z'}{z^2}+\frac{2x}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}=0$$

$$-xz'+2xz+1-z=0$$
$$-xz'+(2x-1)z+1=0$$

$$z' - \frac{(2x-1)}{x} z = \frac{1}{x}$$

وهذه المعادلة خطية بالنسبة للتابع z والمتغير x :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(1-2x)}{x} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\ln x - 2x} = x.e^{-2x}$$

$$z = \frac{e^{2x}}{x} \left(\int e^{-2x} dx + c \right)$$

$$z = \frac{e^{2x}}{x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + c \right)$$

$$z = \frac{-1 + 2ce^{2x}}{2x}$$

وبالتالي ، الحل العام يكتب كما يلي :

$$y = x + \frac{1}{z}$$

$$y = x + \frac{2x}{-1 + 2ce^{2x}}$$

مثال (٤٥) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$x y' + y^2 - y - x^2 = 0$$

مع العلم أن لها حلان خاصان : $y_2 = x \quad ; \quad y_1 = -x$

الحـــــل : نقسّم المعادلة المعطاة على $x \neq 0$ ، نجد :

$$y' + \frac{1}{x} y^2 - \frac{1}{x} y - x = 0 \qquad (I)$$

بما أن y_1 , y_2 حلان خاصان ، إذاً :

$$y_1' + \frac{1}{x} y_1^2 - \frac{1}{x} y_1 - x = 0 \qquad (II)$$

$$y_2' + \frac{1}{x}\, y_2^2 - \frac{1}{x}\, y_2 - x = 0 \qquad (\text{III})$$

نفرض أن :

$$z = \frac{y - y_1}{y - y_2} \qquad (\text{IV})$$

ومنه نجد :

$$y = \frac{y_1 - 3y_2}{1 - z} \qquad (\text{V})$$

لنأخذ لوغاريتم الطرفين في العلاقة (IV) ، نجد :

$$\ln z = \ln(y - y_1) - \ln(y - y_2)$$

باشتقاق طرفي المساواة نجد :

$$\frac{z'}{z} = \frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2}{y - y_2}$$

وبطرح العلاقة (II) من العلاقة (I) ، نجد :

$$y' - y_1' = \frac{1}{x}\,(y^2 - y_1^2) + \frac{1}{x}\,(y_1 - y)$$

نقسّم طرفي المعادلة على $(y - y_1) \neq 0$:

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} = \frac{1}{x}\,(y + y_1) - \frac{1}{x} \qquad (\text{VI})$$

وبالطريقة نفسها ، وبطرح (III) من (I) ، نجد :

$$y' - y_2' = \frac{1}{x}\,(y^2 - y_2^2) + \frac{1}{x}\,(y_2 - y)$$

نقسّم طرفي المعادلة على $y - y_2 \neq 0$ ، نجد :

$$\frac{y' - y_2'}{y - y_2} = \frac{1}{x}\,(y + y_2) - \frac{1}{x} \qquad (\text{VII})$$

بطرح (VII) من (VI) ، تصبح ما يلي :

$$\frac{-z'}{z} = \frac{1}{x}(y_1 - y_2) \Rightarrow$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{x}(-x - x) = -2 \Rightarrow \frac{z'}{z} = -2 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -2\,dx$$

$$\ln z = -2x + \ln c \Rightarrow z = c e^{-x}$$

نعوض في (IV) ، نجد :

$$y = \frac{-x - x c e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

وهو المطلوب .

٨-٤ مسألة القيمة الابتدائية ومبرهنة الوجود والوحدانية :

إن إيجاد منحنٍ تكاملي (حل خاص) للمعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ ، يتم بمعرفة القيمة الموافقة للثابت الاختياري في عبارة الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية . تتعين قيمة الثابت هذه بمعرفة قيمة المتغير $y = y(x)$ ولتكن $y = y_0$ الموافقة لقيمة معينة للمتغير المستقل x ولتكن $x = x_0$ ، أي إن :

$$y_0 = y(x_0)$$

نسمي هذا الشرط شرطاً ابتدائياً ، وعندها تكون مسألة القيمة الابتدائية (مسألة كوشي) هي إيجاد حل للمعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y) \;;\; y(x = x_0) = y_0 \qquad (4.88)$$

محققاً للشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ ، أي إيجاد المنحني التكاملي للمعادلة التفاضلية (4.88) المار بالنقطة (x_0, y_0) في المستوي $x0y$.

يكون في كثير من المسائل التطبيقية ، الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية أمراً صعباً ، إن لم يكن مستحيلاً بوساطة الطرائق العددية التي درسناها سابقاً . لذلك نشأ علم حل المعادلات التفاضلية بالطرائق العددية التقريبية ، والتي لن نتعرض لها في هذا الكتاب ، ولكن سنعطي فكرة موجزة عن إحداها ، وهي طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكار) . ولكن قبل ذلك يجب التحقق من وجود الحل لمسألة كوشي ومن وحدانية هذا الحل .

٤-٨-١ المعادلة التفاضلية المحلولة بالنسبة إلى المشتق :

سنستعرض هنا ، الشروط الكافية لوجود ووحدانية حل مسألة كوشي (مسألة القيمة الابتدائية) ، (4.88) :

في الساحة المغلقة G (مستطيل) المعرّفة كما يلي :

$$G = \{ | x - x_0 | \le a \ ; \ | y - y_0 | \le b \}$$

حيث إن :

$$b > 0 \quad و \quad a > 0$$

شرط ليبشتز :

إن الشروط التي وضعناها على التابع $f(x,y)$ غير كافية لإثبات وجود حدين تكاملي وحيد مار من النقطة (x_0, y_0) من المستوي ، لذلك سنضيف شرطاً إضافياً وهو شرط ليبشتز والذي ينص :

نقول إن التابع $f(x,y)$ يحقق في G ، شرط ليبشتز بالنسبة إلى المتغير y ، إذا وجد عدد ثابت موجب K ، بحيث تتحقق المتراجحة :

$$| f(x,y_2) - f(x,y_1) | \le K | y_2 - y_1 | \ ; \ \forall (x,y_2), (x,y_1) \in G$$

ويمكن البرهان بسهولة ، أنه إذا كان لدينا التابعين $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ المستمرين على G ، فإن التابع $f(x,y)$ يحقق شرط ليبشتز في G بالنسبة إلى y .

مبرهنة بيكار (١٠) :

المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ ، وإذا كان التابع $f(x,y)$ مُعرّف ومستمر بالنسبة إلى x في G ، ويحقق شرط ليبشتز في G بالنسبة إلى y ، فإن لمسألة كوشي (4.88) حل وحيد $y(x)$ مُعرّف وقابل للاشتقاق بالنسبة إلى x على المجال $| x - x_0 | \le h$ حيث :

$$h = \min(a, \frac{b}{N}) \ ; \ N = \max \{ | f(x,y) | \ ; \ \forall (x,y) \in G \}$$

يكفي لوجود حل لمسألة كوشي (4.88) في المجال $| x - x_0 | \le h$ ، أن يكون التابع $f(x,y)$ مستمر في الساحة المغلقة G (مبرهنة بيانو) .

يمكن إيجاد حل مسألة كوشي (4.88) عند تحقق شروط مبرهنة بيكار، كنهاية متتالية توابع $\{y_n(x)\}$ متقاربة بانتظام عندما تسعى n إلى اللانهاية ، مُعرّفة بالعلاقة التكرارية :

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_n(t)]dt \; ; \; y_0 = y(x_0) \; ; \; n = 0,1,2,\ldots \quad (4.89)$$

والتي تسمى دستور التقريبات المتتالية .

وتعطى دقة الخطأ عند تبديل الحل الدقيق $y(x)$ بالحل التقريبي $y_n(x)$ بالمتراجحة

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{NK^{n-1}}{n!}h^n$$

مثال (٤٦) : أوجد التقريب الثالث للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{في الساحة} \quad |x| \le 1 \; , \; |y| \le 1$$

والمحققة للشرط الابتدائي : $y(0) = 0$

الحـــل :

نلاحظ أولاً أن التابع في الطرف الأيمن مستمر في الساحة المعطاة بالنسبة إلى x و y

في البداية للتحقق من شرط ليبشتز :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le K|y_2 - y_1|$$

$$|x^2 + y_2^2 - (x^2 + y_1^2)| =$$

$$= |y_2^2 - y_1^2| = |y_2 + y_1||y_2 - y_1| \le 2|y_2 - y_1|$$

إذاً شرط ليبشتز محقق .

إن تطبيق طريقة التقريب المتتالي يعني إيجاد حل للمعادلة التفاضلية المعطاة .

بتطبيق العلاقة (4.95) نجد :

$$y_1 = 0 + \int_0^x x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 + \frac{x^6}{9})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3 = \int_0^x \left[x^2 + (\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63})^2 \right] dx$$

$$y_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2 \times 63 \times 11} + \frac{x^{15}}{(63)^2 \times 15}$$

مثال (٤٧) : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية : $y' = y^2$

والمطلوب : إيجاد الحل المحقق للشرط الابتدائي : $y = y_0 \ ; \ x = x_0$

الحـــل : من المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \implies \frac{dy}{y^2} = dx$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$-\frac{1}{y} = x + c \implies y = \frac{-1}{x + c} \qquad (\text{I})$$

والعلاقة (I) تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية . وبما أن هذا الحل محقق للشروط الابتدائية ، عندئذٍ نجد :

$$-\frac{1}{y_0} = x_0 + c \implies c = -(\frac{1}{y_0} + x_0) \qquad (\text{II})$$

نبدل قيمة c من (II) في (I) نجد :

$$y = \frac{-1}{x - (x_0 + \frac{1}{y_0})}$$

وهذا يمثل الحل العام المحقق للشروط الابتدائية .

مثال (٤٨) : أوجد التقريب الثاني للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = x + y^2$$

والمحققة للشرط الابتدائي : $y(0) = 0$

الحـــل : نلاحظ أن :

$$y' = x + y^2 = f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2y \qquad \text{و}$$

إن التابع المعطى لها يحقق شرط ليبشتز في الساحة $0xy$ ، لذلك نختار مساحة من الشكل :

$$|x| \le a \ , \ |y| \le b$$

عندئذٍ يكون :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = |2y| \le 2b$$

إذاً ، في هذه الساحة يتحقق شرط ليبشتز ، لذلك نستطيع تطبيق التقريب المتتالي .

لنختار $y_0 = 0$ تقريباً ابتدائياً ، عندئذٍ يكون :

$$y_1 = 0 + \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = \int_0^x (x + \frac{x^4}{4})\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$$

٤ ٨-٢ المعادلة التفاضلية غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق :

إذا كانت المعادلة التفاضلية $F(x, y, y')$ غير المحلولة بالنسبة للمشتق تحقق الشرط الابتدائي :

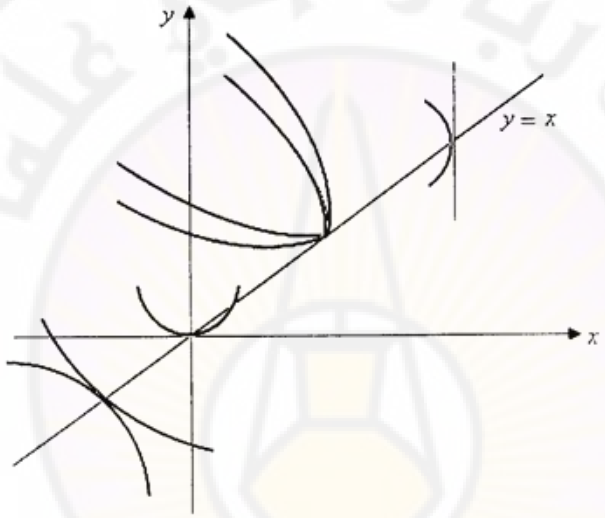
$$y(x = x_0) = y_0 \qquad (4.90)$$

نلاحظ أن حل هذه المسألة يختلف عن حل مسألة كوشي (4.88) ، حيث إنه يمكن أن يمر أكثر من حل من النقطة (x_0, y_0) يحقق شروط مبرهنة بيكار ، وبالتالي يوجد لكل من هذه المعادلات $y' = f_j(x, y)$ ، حل وحيد يحقق الشرط (4.90) ، لذلك نحتاج إلى معرفة شرط آخر ، وهو ميل مماس منحني الحل المطلوب في النقطة x_0 .

وعليه فإن خاصية وحدانية الحل تُفهم عادة من المعنى الآتي : وهو أنه لا يوجد سوى منحنٍ تكاملي واحد للمعادلة التفاضلية يمر بالنقطة (x_0, y_0) وفي اتجاه معين ، فمثلاً إن

خاصية الوحدانية لحل المعادلة التفاضلية $y'^2 - 1 = 0$ محققة دائماً ، لأنه يمر في كل نقطة من نقاط المستوي منحنيان تكامليان لها $y = c + x$, $y = c - x$ ، ولكل منهما ميل مختلف عن الآخر.

أما لأجل المعادلة $y'^2 = (x + y)\,y'$ تكون خاصية وحدانية الحل غير محققة لأجل نقاط المستقيم $y = x$ ، لأن المنحنيات التكاملية $y' = x$ و $y' = y$ والمارة بنقاط المستقيم $y = x$ لها اتجاه واحد في نقاط المستقيم .



مبرهنة (١١) ، (تقبل من دون برهان) :

إذا كان التابع $F(x, y, y')$ مستمر بالنسبة إلى x في جوار للنقطة $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ حيث y'_0 أحد جذور المعادلة الجبرية :

$$Q(\lambda) = F(x_0, y_0, \lambda) = 0$$

وإذا كان هذا التابع قابلا للاشتقاق باستمرار بالنسبة إلى y' وكان :

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{M_0} \neq 0$$

عندئذٍ يوجد للمسألة :

$$F(x, y, y') = 0 \quad ; \quad y_0 = y(x_0)$$

حل وحيد $y = y(x)$ معرّف على جوارٍ صغيرٍ بشكل كافٍ للنقطة x_0 بحيث يكون

$$y'_0 = y'(x_0)$$

ملاحظة (١٦) :

إن شروط المبرهنتين (١٠) و (١١) هي شروط كافية وغير لازمة ، أي أنه إذا اختل أحد الشروط ، فإن هذا لا يعني أن الحل غير موجود ، أو غير وحيد .

٤-٩ حل مسألة القيمة الابتدائية (كوشي) باستخدام متسلسلات القوى الصحيحة :

في البداية لنعطي موجزاً عن حل مسألة القيمة الابتدائية العلاقة (4.88) وذلك باستخدام متسلسلات القوى الصحيحة ومن أجل ذلك سوف نستعرض المبرهنة الآتية :

مبرهنة (١٢) : (تقبل من دون برهان)

إذا كان التابع $f(x,y)$ قابل للنشر وفق قوى :

$$(y-y_0)\ ,\ (x-x_0)$$

فإن حل مسألة كوشي (4.93) يكون أيضاً تابع قابل للنشر وفق قوى $(x-x_0)$ ، ويعطى بالعلاقة :

$$y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x-x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2 + ...$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n \qquad (4.91)$$

حيث :

$$y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0) \ \ ; \ \ n = 1,2,...$$

والحد y_0 معطى من شروط البدء .

لنحسب y'_0 من المعادلة التفاضلية نفسها نجد :

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

ولإيجاد y_0'' نشتق المعادلة التفاضلية بالنسبة إلى x ، مرة ثانية نجد :

$$y'' = \frac{d\,f}{dx}(x,y) \Rightarrow y'' = \left.\frac{d\,f(x,y)}{dx}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ y'=y_0'}}$$

وبالطريقة نفسها تماماً نحسب كلاً من الأمثال y_0''', $y_0^{(4)}$, $y_0^{(n)}$ في العلاقة (4.91) .

مثال (٤٩) : عيّن في صورة متسلسلة قوى صحيحة حل المسألة :

$$y' = 2xy + y^2 \;\; ; \;\; y(0) = 1$$

الحـــــل :

بما أن التابع $f(x,y) = 2xy + y^2$

كثير حدود في x و y ، فإنه قابل للنشر في كل المستوى $x0y$ ، وبالتالي يمكن التعبيـــر عن حل مسألة كوشي المعطاة في صورة متسلسلة قوى صحيحة من الشكل (4.91) :

$$y_0 = y(0) = 1 \;\; ; \;\; y_0' = y'(0) = f(0,1) = 1$$

$$y'' = \frac{d\,f(x,y)}{dx} = 2y + 2xy' + 2yy' \Rightarrow$$

$$y_0'' = 4$$

$$y''' = 2y' + 2y' + 2xy'' + 2y'^2 + 2yy'' \Rightarrow$$

$$y'''(0) = 14$$

وبالطريقة نفسها تماماً نحسب بقية الأمثال فنجد :

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{14}{3!}x^3 + \ldots$$

تمارين الفصل الرابع :

آ- تمارين محلولة :

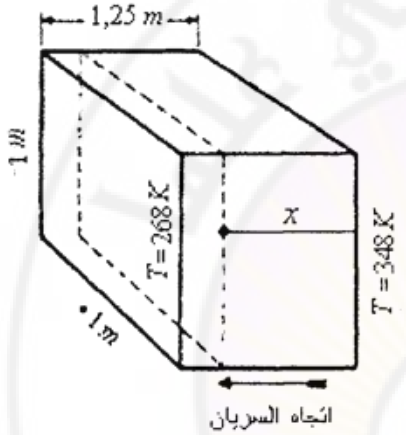
تمرين (١) : تحت شروط معينة تقدر كمية الحرارة الثابتة Q (J/s) ، السارية خلال حائط بالعلاقة الآتية :

$$Q = -kA\,\frac{dT}{dx}$$

حيث k : معامل التوصيل الحراري لمادة الحائط .

A : المساحة لسطح من الحائط عمودي على اتجاه سريان الحرارة ؛ $[m^2]$.

T : درجة الحرارة المطلقة على بعد x متر من السطح من السطح ، حيث إنهـا تتناقص كلما تزايدت x .



المطلوب :

أوجد كمية الحرارة مقدرة بالجول التي تسري في ساعة واحدة خلال متر مربع من حائط غرفة تبريد سماكته (m) 1,25 ، ومعامل توصيله الحراري هـو k = 1,05 إذا علم أن درجة حرارة السطح الداخل 268 (K) ، ودرجة حرارة السطح 348 (K) .

الحـــــل : نفرض أن x هي بُعد نقطة داخلية من الحائط عن السطح الخارجي له ، فـإذا كاملنا $dT = -\frac{Q}{kA}$ من $T = 348$; $x = 0$ ، إلى $T = 368$; $x = 1,25$ ، نجد :

$$\int_{348}^{268} dT = -\frac{Q}{kA}\int_{0}^{1.25} dx \quad ،$$

$$Q = \frac{80\,kA}{1,25} = \frac{80\times 1,05}{1,25} = 67,2\ J/s^{-1} \quad \text{و} \quad 80 = \frac{Q}{kA}(1,25)$$

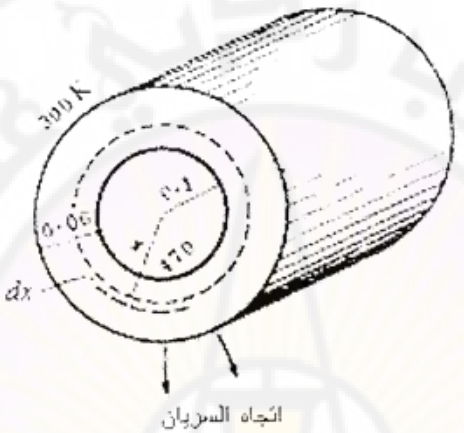
وتكون كمية الحرارة مقدرة بالجول التي تسري خلال متر مربع من الحائط في ساعة واحدة هي :

$$3\,,\,600\,Q = 2,42\times 10^5\ J$$

تمرين (٢) : أنبوبة بخار قطرها $(m)\,0,2$ ، محاطة بطبقـة عازلـة سـماكتها $(m)\,0,06$ ، ومعامل التوصيل الحراري $k = 0,13$. والمطلوب :

آ- أوجد كمية الحرارة المفقودة في ساعة خلال طول قدره متر واحد من هذه الأنبوبة إذا علمت أن درجة حرارة سطح الأنبوبة هي $470\,(K)$، وأن درجة حرارة السطح الخارجي للطبقة العازلة هي $300\,(K)$.

ب- أوجد درجة الحرارة على بعد $x > 0{,}1\ (m)$ عن محور الأنبوبة .



الحـــل : على بعد $x > 0{,}1\ (m)$ من محور الأنبوبة تمر الحرارة خلال قشرة أسطوانية مساحتها $2\pi x\,(m^2)$ لكل متر من طول الأنبوبة .

نستنتج من التمرين (١) السابق أن :

أ- إذا كاملنا الحدين :

$$T = 470, x = 0{,}1 \ ; \ T = 300, x = 0{,}16$$

فإن :

$$2\pi k \int_{300}^{470} dT = -Q \int_{0.16}^{0.1} \frac{dx}{x} \quad \text{و} \quad 340\pi k = Q(\ln 0{,}16 - \ln 0{,}1 = Q \ln 1{,}6$$

$$\text{و} \quad Q = \frac{340\pi k}{\ln 1{,}6}\ J/s^{-1}$$

أي أن كمية الحرارة المفقودة في ساعة واحدة خلال طول متر من الأنبوبة هي :

$$3\,.\,600\,Q = 1{,}03\,M\,J$$

ب- إذا كاملنا :

$2\pi k\,dT = -\dfrac{340\pi k}{\ln 1{,}6}\dfrac{dx}{x}$ بين $T = 300, x = 0{,}165$ و $T = T, x = x$ نجد

$$\int_{300}^{T} dT = -\frac{170}{\ln 1{,}6}\int_{0{,}16}^{x}\frac{dx}{x} \quad ،$$

$$T - 300 = -\frac{170}{\ln 1{,}6}\ln\frac{x}{0{,}16} \quad \text{و} \quad T = 300 + \frac{170}{\ln 1{,}6}\ln\frac{16}{x}$$

المناقشة :

- عندما $x = 0{,}1\ ;\ T = 300 + \dfrac{170}{\ln 1{,}6}\ln 1{,}6 = 470\,K$

- وعندما $x = 0{,}16\ ;\ T = 300 + 0 = 300\,K$

تمرين (٣) : سفينة كتلتها $45000(Mg)$ ، تبدأ حركتها من السكون تحت تأثير دفع المروحة الثابت $900000(N)$ ، والمطلوب :

أ- أوجد سرعتها كدالة للزمن t ، إذا علمت أن القوة المقاومة بالنيوتن هي $150000(v)$ ، (حيث v تمثل السرعة مقدرة m/s) .

ب- أوجد السرعة النهائية (أي السرعة عندما $t = \infty\ km/h$) .

الحل :

بما أن الكتلة (kg/m) × التسارع (m/s^2) =

= القوة المحصلة (N) = القوة الدافعة المحركة – القوة المقاومة

فإن :

$$45\times10^6\,\frac{dv}{dt} = 900000 - 15\times10^4\,v$$

أو

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{300} = \frac{1}{50}$$

وعند إجراء التكامل نجد أن :

$$v e^{t/300} = \frac{1}{50} \int e^{t/300} dt = 6 e^{t/300} + C$$

آ- عندما $C = -6$; $t = 0$, $v = 0$ ، وتكون $v = 6(1 - e^{-t/300})$

ب- وعندما $v \to 6$; $t \to \infty$ ، أي أن السرعة النهائية هي :

$$6\ m/s \quad \text{أو} \quad 21{,}6\ km/h$$

يمكن التوصل إلى هذه النتيجة من المعادلة (الأولى) وذلك لأنه عندما تقترب v نحو نهايتها نجد أن $\frac{dv}{dt} \to 0$.

إذاً ، $v = 6$ كما بينا من قبل .

تمرين (٤) : يسحب زورق بوساطة حبل بسرعة $20(km/h)$ ، وعند لحظة ما قطع الحبل $(t = 0)$. بدأ بحار موجود في الزورق بالتجديف في اتجاه الحركة بقوة مقدارها $90(N)$.

إذا كانت الكتلة الكلية للرجل والزورق تساوي $225(kg/h)$ ، والقوة المقاومة مقدّرة بالنيوتن تساوي $(v \quad 26{,}25)$ حيث السرعة v مقدرة بـ (m/s) ، فأوجد سرعة الزورق بعد نصف دقيقة .

بما أن : الكتلة (kg/m) × التسارع (m/s^2) =

= القوة المحصلة (N) = القوة المؤثرة في اتجاه الحركة – المقاومة

إذاً :

$$225 \frac{dv}{dt} = 90 - 26{,}25\ v \quad \text{أو} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{7}{60} v = \frac{2}{5}$$

وبإجراء التكامل :

$$v e^{7t/60} = \frac{2}{5} \int e^{7t/60} dt = \frac{120}{35} e^{7t/60} + C$$

عندما يكون :

$$t = 0 \ ; \ v = \frac{20000}{3600} = \frac{50}{9} \ ; \ C = \frac{134}{63}$$

$$v = \frac{24}{7} + \frac{134}{63}\, e^{-7t/60}$$ و

وعندما يكون :

$$t = 30 \;;\; v = \frac{24}{7} = \frac{50}{9} + \frac{134}{63}\, e^{-3,5} = 3,5\ m/s^{-1}$$

أي أن سرعة الزورق = 3,5 m/s وذلك بعد نصف دقيقة من قطع حبل سحب الزورق .

تمرين (٥) : يسقط جسم كتلته m (kg/m) ، من السكون داخل وسط تتناسب مقاومته (مقدّرة بالنيوتن) مع مربع السرعة (مقدّرة بـــ m/s) .

إذا كانت السرعة النهائية 40 m/s ، فأوجد :

آ- السرعة عند نهاية ثانيتين من بدء الحركة .

ب- الزمن اللازم لتصبح السرعة 30 m/s .

لتكن v سرعة الجسم عند الزمن t ثانية .

- إن القوة المحصلة = وزن الجسم - المقاومة

- وإن معادلة الحركة هي :

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - k\,v^2 \qquad (\mathrm{I})$$

إذا أخذنا $g = 9,8\ m/s^{-2}$ ، فإنه من المكن تبسيط الرموز بأخذ :

$$K = -\frac{9,8}{16}\, mk^2$$

وبذلك تؤول المعادلة (I) إلى الشكل الآتي :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9,8}{16}\,(16 - k^2 v^2)$$

$$\frac{dv}{k^2 v^2 - 16} = \frac{9,8}{16}\, dt$$ أو

وبإجراء التكامل نجد أن :

$$\ln \frac{k\,v - 4}{k\,v + 4} = -4,9\ k\,t + \ln C$$

$$\frac{kv-4}{kv+4} = Ce^{-4,9kt}$$ أو :

وعندما $v = 0$; $t = 0$ ، إذاً : $C = -1$ ، نجد المعادلة الآتية :

$$\frac{kv-4}{kv+4} = -e^{-4,9kt} \qquad (II)$$

عندما $v = 50$; $t \to \infty$ ، إذاً :

$$e^{-4,9kt} = 0 \; ; \; k = \frac{2}{25}$$

وتأخذ المعادلة (II) الشكل الآتي :

$$\frac{v-50}{v+50} = -e^{-0,39t}$$

آ- إذا كان $t = 2$; $\frac{v-50}{v+50} = -e^{-0,78} = -0,46$

و $v = 18,5\, m/s^{-1}$

ب- إذا كان $e^{-0,39t} = 0,25 = e^{-1,54}$; $v = 30$ و $t = 3,5 \sec/s$

تمرين (٦) : يسقط جسم كتلته m (kg/m) ، داخل وسط تتناسب مقاومته (مقدّرة بالنيوتن) متناسبة مع السرعة (مقدّرة بـ m/s) .

فإذا كان الوزن النوعي للوسط يساوي 1/4 الوزن النوعي للجسم ، وكانت السرعة النهائية للجسم تساوي $7,5\, m/s$ ، أوجد :

آ- السرعة عند نهاية الثانية الثالثة .

ب- المسافة المقطوعة خلال ثلاث ثوان .

لتكن v سرعة الجسم عند الزمن t ثانية .

يوجد في هذا التمرين بالإضافة إلى القوتين المؤثرتين في الجسم [كما ورد في التمرين السابق (٥)] قوة ثالثة ناتجة عن الفرق بين الوزنين النوعيين ، هذه القوة تساوي في المقدار وزن حجم الوسط المزاح من قبل الجسم واتجاهها عكس اتجاه قوة الجاذبية .

القوة المحصلة المؤثرة على الجسم = وزن الحسم – قوة الدفع – مقاومة الوسط

وتكون معادلة الحركة :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{4}mg - kv = \frac{3}{4}mg - kv$$

إذا أخذنا :

$$g = 9{,}8\,m/s^{-2} \quad \text{و} \quad k = 3\,m/k$$

فإن هذه المعادلة تأخذ الشكل الآتي :

$$\frac{dv}{dt} = 3(2{,}45 - k\,v)$$

أو :

$$\frac{dv}{2{,}45 - k\,v} = 3\,dt$$

بإجراء التكامل من $v = 0$; $t = 0$ و $v = v$; $t = t$ ، نجد أن :

$$-\frac{1}{k}\ln(2{,}45 - k\,v)\Big|_0^v = 3t\Big|_0^v \quad -\ln(2{,}45 - k\,v) + \ln 2{,}45 = 3\,k\,t$$

و

$$k\,v = 2{,}45(1 - e^{-3kt})$$

عندما $v = 7{,}35$; $t \to \infty$ ، إذاً : $k = \frac{1}{3}$ ، ونجد :

$$v = 7{,}35(1 - e^{-t} \qquad (I)$$

آ- عندما t = 3 ، فإن :

$$v = 7{,}35(1 - e^{-t}) = 7\ m/s^{-1}$$

ب- بتكامل المعادلة :

$$v = \frac{dv}{dt} = 7{,}35(1 - e^{-t})$$

بين $x = 0$; $t = 0$ و $x = x$; $t = 3$ ، نجد أن :

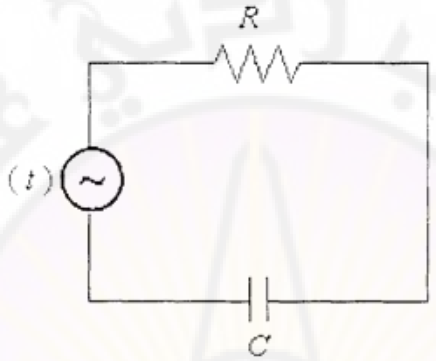
$$x\Big|_0^x = 7{,}35(t + e^{-t})\Big|_0^3$$

و

$$x = 7{,}35(2 + e^{-3}) = 15\ m$$

تمرين (٧) : إذا حوت دارة كهربائية مقاومة R (أوم) ، ومكثف سعته C (فاراد) ، متصلين بمنبع قوته الدافعة الكهربائية E (فولت) ، فإن الشحنة q (كولون) للمكثف تعطى بالمعادلة الآتية :

$$R.\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E$$



إذا كانت :

$$R=10(\Omega)\ ،\ C=10^{-3}(rad)\ \text{و}\ ،\ E(t)=100\sin 120\pi t\ (V)$$

آ- أوجد قيمة الشحنة بفرض أن $q=0$ عندما $t=0$

ب- استفد من العلاقة $i=\frac{dq}{dt}$ لإيجاد قيمة i إذا علمت أن :

$$i=5(A)\quad \text{عندما يكون الزمن}\quad t=0$$

إذا كاملنا المعادلة :

$$10\frac{dq}{dt}+10^{3}q=100\sin 120\pi t$$

فإننا نجد :

$$qe^{100t}=10\int e^{100t}\sin 120\pi t\,dt=$$

$$=10e^{100t}\,\frac{100\sin 120\pi t-120\pi\cos 120\pi t}{10000+14{,}400\pi^{2}}+A$$

$$= e^{100t}\ \frac{10\sin 120\pi t - 12\pi\cos 120\pi t}{100+144\pi^2} + A$$

و :

$$q = \frac{1}{(100+144\pi^2)^{1/2}}\sin(120\pi t-\phi) + Ae^{100t} \qquad (I)$$

حيث :

$$\cos\phi = \frac{10}{(100+144\pi^2)^{1/2}} \quad \text{و} \quad \sin\phi = \frac{12\pi}{(100+144\pi^2)^{1/2}}$$

آ- عندما $q = 0$ عندما $t = 0$ ، إذاً :

$$A = \frac{3\pi}{25+36\pi^2}$$

$$q = \frac{1}{2(25+36\pi^2)^{1/2}}\sin(120\pi t-\phi) + \frac{3\pi e^{-100t}}{25+36\pi^2} \quad \text{و}$$

ب- بتفاضل المعادلة (I) بالنسبة للزمن t ، نجد أن :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{60\pi}{(25+36\pi^2)^{1/2}}\cos(120\pi t-\phi) - 100Ae^{-100t}$$

وعندما $i = 5$, $t = 0$ ، إذاً :

$$100A = \frac{60\pi}{(25+36\pi^2)^{1/2}}\cos\phi - 5 = \frac{300\pi}{25+36\pi^2} - 5$$

و :

$$i = \frac{60\pi}{(25+36\pi^2)^{1/2}}\cos(120\pi t-\phi) - \left(\frac{300\pi}{25+36\pi^2} - 5\right)e^{-100t}$$

ب- تمارين غير محلولة :

١- اكتب مرتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية :

1	$y' + y = x^2$		6	$\sqrt{y''} = y' + x$

2	$y'' = y' + x^3 y^2$		7	$y''' = \sqrt[3]{1 + y'^2}$
3	$(y')^2 + 2y^3 = \sin x$		8	$y'^3 = \sqrt{1 + y'^2}$
4	$x^4 y'^3 - y' = x^5$		9	$(y'')^{1/3} = 2(1 + y'^2)^{3/2}$
5	$y'' = \sqrt{y'}$		10	$y''' = \sqrt[3]{1 + y'^4}$

٢- أوجد قيمة الثابت a بحيث يكون $y = e^{ax}$ حلاً للمعادلة التفاضلية : $y' = 2y$

٣- أوجد قيمة الثابت n بحيث يكون $y = x^n$ حلاً للمعادلة التفاضلية : $y' = \dfrac{3y}{x}$

٤- أوجد قيمة الثابت α بحيث يكون $y = e^{\alpha x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

٥- أثبت أن y في كل من المسائل الآتية تكون حلاً للمعادلة التفاضلية .

1	$y = c_1 x + c_2$	$y'' = 0$
2	$y = c_1 x + c_2 + \dfrac{1}{2} x^2$	$y'' = 1$
3	$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x$	$y'' + 4y = 4x$
4	$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2$	$y'' - 2y' + y = 2$
5	$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 - e^{-x}$	$y''' = e^{-x}$
6	$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + e^{2x}$	$y''' - y' = 6e^{2x}$
7	$x^2 + y^2 = cx$	$2xyy' = y^2 - x^2$

٦- أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للتابع الأصلي :

$$y = A\cos ax + B\sin ax$$

حيث A , B : ثابتان اختياريان ، و a : ثابت معين .

٧- أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للتابع الأصلي :

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C$$

٨- أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر ذات نصف القطر الثابت r والتي تقع مراكزها على محور السينات .

٩- أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة القطوع المكافئة التي تقع بؤرتها عند نقطة الأصل ، ومحورها على المحور السيني .

١٠- أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة منحنيات الكاردیوئید :

$$\rho = a(1-\cos\theta)$$

١١- أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر التي :

أ- مراكزها تقع على محور السينات .

ب- مراكزها تقع على محور العينات .

١٢- أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات الناقصة التي محاورها تقع على محوري السينات والعينات .

١٣- عيّن الحل العام والخاص والشاذ (إن وجد) للمعادلة التفاضلية :

$$3xy^{-2} - 6yy' + x + 2y = 0$$

من بين الدوال الآتية :

1	$y = \frac{3cx + x^2 + c^2}{3c}$		3	$y = x^2 + 1$	
2	$y = \frac{-x}{3}$		4	$y = \frac{x^2 + 1}{3} \cdot x$	

١٤- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية (القابلة لفصل المتغيرات) الآتية :

1	$(y^2 - 1)(x + 1)dy = (y^3 - 3y)dy$		10	$y(u^2 + 2)du + (u^3 + u)dy = 0$	

2	$(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$	11	$\frac{dy}{dx}=y^2+1$
3	$xv\,dv-(1+v^2)dx=0$	12	$\frac{dy}{dx}=y^2+6y=13$
4	$x(v^2-1)dv+(v^3-3v)dx=0$	13	$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3+4y}{x(y^2+2y+4)}$
5	$(1+x^3)dy-x^2y\,dx=0$	14	$(v^2+2v+2)dx+x(v-1)dv$
6	$y\frac{du}{dy}=\frac{u^2}{1-u}$	15	$x^3dx+(y+1)^2dy-0$
7	$xv\,dv(1+2v^2+v^4)dx=0$	16	$x^2(y+1)dx+y^2(x-1)dy=0$
8	$4x\,dy-y\,dx=x^2dy$	17	$y\,dx+(x^2-4x)dy=0$
9	$x^2(y+1)dx+y^2(x-1)dy=0$	18	$\frac{dy}{dx}=-\frac{4y}{x(y-3)}$

٥ - أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية بعد التأكد أنها متجانسة :

1	$y'=\frac{(y+x)}{x}$
2	$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$
3	$y'=\frac{x^2-2y^2}{xy}$
4	$x\,dy-y\,dx-\sqrt{x^2-y^2}\;\;dx=0$
5	$(x^2-y^2)dx-3y^2dy=0$
6	$(x^2+y^2)y'=2xy$
7	$2x^3y'=y(2x^2-y^2)$

١٦- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية (تؤول إلى متجانسة) :

1	$2(x-y)\,dx+(y-1)\,dy=0$
2	$(x-3y+2)\,dx+3(x+3y-4)\,dy=0$
3	$(x+y-3)\,dx+(x+y+5)\,dy=0 \quad ; \quad y(1)=0$
4	$(x-y)\,dx+(y-x+1)\,dy=0$
5	$(x+4y-2)\,dx+(4x-y+9)\,dy=0$
6	$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-2}{y-x-2}$
7	$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-7}{6x+3y} \quad ; \quad y(1)=0$
8	$(2x+7y-1)\,y'=3x-2y+4$

١٧- برهن أن المعادلات التفاضلية الآتية تامة ، ثم أوجد الحل العام لكل منها :

1	$(x+\sin y)\,dx+(x\cos y-2y)\,dy=0$
2	$2xy\,dx+(1+x^2)\,dy=0$
3	$ye^{xy}\,dx+xe^{xy}\,dy=0$
4	$(3x^4y^2-x^2)\,dy+(4x^3y^3-2xy)\,dx$
5	$x\sin y\,dy+\frac{1}{2}x^2\cos y\,dx=0$
6	$(\frac{xy-1}{x^2y})\,dx-\frac{1}{xy^2}\,dy=0$
7	$(y\sin x+xy\cos x)\,dx+(x\sin x+1)\,dy=0$
8	$2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$

١٨- أوجد عامل تكميل لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ، ثم أوجد الحل العام :

1	$y' = \dfrac{1}{x^2(1-3y)}$
2	$x^2 dx + xy\, dy = 0$
3	$(x^2y^2 - y)\,dx + (x^2y^2 - x)\,dy = 0$
4	$y' = \dfrac{-3y}{x(2+y^3)}$
5	$(x^2 + y^2)\,dx - xy^2\, dy - 0$
6	$(2xy^4.e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^4 - 3) = 0$
7	$(3x^2 + y^2)\,dx - 2xy\, dy = 0$
8	$(xy^2)\,dx + (x^2y^2 + x^2y)\,dy = 0$

١٩- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الخطية الآتية :

1	$y' - 3y = 6$	5	$x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$
2	$y' + 2xy = 4x$	6	$(x-2)\dfrac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$
3	$y' + y = \sin x$		
4	$x\dfrac{dy}{dx} - 2x - x^3\cos 4x$	7	$\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{2}{x}v = \dfrac{-1}{x^2}$

٢٠- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية (برنولي) الآتية :

1	$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{x}y = 4x^4y^{1/3}$	4	$\dfrac{dy}{dx} - y = xy^5$
2	$x\,dy + y\,dx = x^3y^6dx$	5	$y' + xy = 6x\sqrt{y}$

3	$\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$		6	$x\,y'+y=x\,y^3$

٢١- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية (ريكاتي) الآتية :

آ- $x^2y'=x^2y^2+xy-3 \quad ; \quad (x\neq 0)$

مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً هو : $y=\frac{1}{x}$

ب- $x\,y'=2(x-y)^2+(x-y)+x$

مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً هو : $y=x$

ج- $\frac{dy}{dx}=y^2-xy-x$

مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً هو : $y=x+1$

د- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\,y^2+\frac{1}{2x^2}$

مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً هو : $y=-\frac{1}{x}$

٢٢- أوجد حل المعادلة :

$$y'=x+y^2$$

الموافق لـ $y=0$, $x=0$ ، مع الاكتفاء بثلاثة حدود في النشر .

وذلك بعد التحقق من أن شروط وجود الحل محققة وبين إذا كان الحل وحيداً .

٢٣- أوجد حل المعادلة :

$$y'-x\,y^2+(2x-1)\,y=x-1$$

الموافق للشرط الابتدائي $y=-1$ ، $x=1$

يكتفي بثلاثة حدود صحيحة للنشر بعد التحقق من شروط الوجود للحل .

٢٤- أوجد حل المعادلة :

$$y' = x\,y^2 + 2\,y + x^2$$

الموافق للشرط الابتدائي $y = 1$, $x = 1$ وذلك بعد التحقق من شروط الوجود للحل .

٢٥- أوجد باستخدام دستور التقريبات المتتالية حل كل من مسائل كوشي الآتية :

1	$y' = 1 + x \sin y \;\; ; \;\; y(\pi) = 2\pi$
2	$y' = e^x + y \;\; ; \;\; y(0) = 1$
3	$y' = x\,y \;\; ; \;\; y(0) = 1$

٢٦- عيّن في صورة متسلسلة القوى حل كل من مسائل كوشي الآتية :

1	$y' = x + \frac{1}{y} \;\; ; \;\;\; ; \;\; y(0) = 1$
2	$y' = x^2 + y \;\; ; \;\; y(0) = y_0$
3	$y' = y + x e^y \;\; ; \;\; y(0) = 0$

٢٧- أوجد التقريبات $y_0(x)$ و $y_1(x)$ و $y_2(x)$

ومن ثم أوجد دقة الخطأ الناتج من استبدال الحل الدقيق $y(x)$ بالحل التقريبي $y_2(x)$ من أجل $|x| \le \frac{1}{4}$ للمسألة :

$$y' = y^2 - y - x\,y + 1 \;\; ; \;\; y(0) = 1$$

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من مراتب عليا ذات الأمثال الثابتة

٥-١ تعاريف ومفاهيم أساسية :

إن الشكل العام للمعادلة من المرتبة n هو :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (5.1)$$

وكحالة خاصة ، المعادلة :

$$y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + A_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + A_n(x)\, y = R(x) \qquad (5.2)$$

حيث $A_i(x)$; $i = 1,2,3,...n$: توابع مستمرة في مجال ما ، I .

نسمي المعادلة (5.2) بالمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات أمثال متغيرة وغير متجانسة .

وإذا كانت $R(x) = 0$ ، فإن المعادلة (5.2) تكتب بالشكل الآتي :

$$y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + A_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + A_n(x)\, y = 0 \qquad (5.3)$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية الخطية ذات أمثال متغيرة ومتجانسة .

وإذا كانت $A_i(x)$; $i = 1,2,3,...n$ أعداداً ثابتة ، و $R(x) \neq 0$ ، عندئذٍ فإن المعادلة التفاضلية (5.2) تكتب الشكل الآتي :

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + ... + a_n\, y = R(x) \qquad (5.4)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة (n) ذات أمثال ثابتة وغير متجانسة ، وتكون المعادلة المتجانسة المرافقة لهذه المعادلة كما يلي :

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + ... + a_n\, y = 0 \qquad (5.5)$$

ونلاحظ أنه يوجد عدة خواص لحلول المعادلة (5.3) ، وسوف نوضح هذه الخواص في المبرهنات الآتية :

مبرهنة (١) :

إذا كان $y = y_1(x)$ حلاً للمعادلة (5.3) ، فإن $y = c\,y_1$ هو أيضاً حل للمعادلة (5.3) .

البرهان : بما أن y_1 حل للمعادلة (5.3) ، فإنه يحقق المعادلة (5.3) وبالتالي فإن :

$$y_1^{(n)} + A_1(x)\,y_1^{(n-1)} + ... + A_n(x)\,y_1 = 0$$

ومن ناحية ثانية نلاحظ أنه إذا كان $y = c\,y_1$ حلاً للمعادلة التفاضلية (5.3) فإن :

$$\begin{array}{rcl} y = c\,y_1 \Rightarrow \quad y' & = & c\,y_1' \\ y'' & = & c\,y_1'' \\ y''' & = & c\,y_1''' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n)} & = & c\,y_1^{(n)} \end{array}$$

نعوض في الطرف الأيسر من المعادلة (5.3) نجد :

$$c\,y_1^{(n)} + c\,A_1(x)\,y_1^{(n-1)} + c\,A_2(x)\,y_1^{(n-2)} + ... + c\,A_n(x)\,y_1 = 0$$

$$c\,(y_1^{(n)} + A_1\,y_1^{(n-1)} + A_2\,y_1^{(n-2)} + ... + A_n\,y_1) = c\,(0) = 0$$

لأن :

$$y_1^{(n)} + A_1(x)\,y_1^{(n-1)} + ... + A_n(x)\,y_1 = 0$$

وبالتالي نستنتج أن $y = c\,y_1$ حلٌ للمعادلة (5.3) .

مثال (١) : إذا كانت :

$$y'' + 3\,y' + 2\,y = 0$$

١- تحقق من أن : $y = e^{-x}$ حلٌ للمعادلة .

٢- وتحقق أيضاً من أن : $y = 5e^{-x}$ ، أيضاً هو حلٌ للمعادلة .

الحـــل :

١- إذا كان $y = e^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة ، فإنه يحققها ، بالاشتقاق نجد :

$$y' = -e^{-x} \Rightarrow y'' = e^{-x}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$e^{-x} - 3e^{-x} + 2e^{-x} = 0$$

إذاً : $y = e^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية المعطاة .

٢- بما أن $y = 5e^{-x}$ ناتج من الحل الأول بضربه بالعدد (5) ، وبما أن المعادلة هي خطية متجانسة ، واستناداً للمبرهنة (١) يكون هو أيضاً حل للمعادلة التفاضلية المعطاة

مبرهنة (٢) :

إذا كان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة (5.3) ، فإن :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

هو أيضاً حل للمعادلة (5.3) ، حيث c_1, c_2 ثابتين كيفيين .

البرهان :

- بما أن y_1 حل للمعادلة (5.3) ، فإن $c_1 y_1$ أيضاً هو حل للمعادلة (5.3) .
- وبما أن y_2 حل للمعادلة (5.3) ، فإن $c_2 y_2$ أيضاً هو حل للمعادلة (5.3) .

وكذلك إذا كان :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حلاً للمعادلة التفاضلية ، فإن y ومشتقاته يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية (5.3) :

$$c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + A_1(x)(c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 y_1^{(n)} + A_1(x)(y_1^{(n-1)} + A_2(x)(y_1^{(n-2)} + \ldots + A_n(x)(y_1) + c_2 y_2^{(n)} + A_1(x)(y_1^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)(y_2) = 0 + 0 = 0$$

إذاً هو حل للمعادلة التفاضلية .

[يمكن تعميم المبرهنة (٢)]

مبرهنة (٣) :

إذا كانت $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ حلولاً للمعادلة (5.3) فإن :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

تكون أيضاً حلاً للمعادلة (5.3) .

حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت كيفية .

تعريف (١) :

إذا كانت $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ ، توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق حتى المرتبة $(n-1)$ في مجال ما I ، نقول عن هذه التوابع إنها مستقلة خطياً فيما إذا كان للمعادلة :

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

حلاً وحيداً وهو :

$$c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = 0$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$: ثوابت كيفية .

أما إذا كان للمعادلة السابقة حل ، بحيث يكون أحد الثوابت على الأقل $c_i \neq 0$ ، عندئذٍ نسمي التوابع غير مستقلة أو مرتبطة خطياً .

مثال (٢) : تحقق فيما إذا كانت التوابع :

$$f_1(x) = e^x \;\; ; \;\; f_2(x) = x \;\; ; \;\; f_3(x) = x^2$$

مستقلة خطياً .

الحـــل :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{e^x}{x} \neq \text{(عدد ثابت)}$$

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{e^x}{x^2} \neq \text{(عدد ثابت)}$$

$$\frac{f_2}{f_3} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \neq \text{(عدد ثابت)}$$

وبالتالي ، فإن التوابع : f_1 , f_2 , f_3 مستقلة خطياً .

فيما يلي سنورد إحدى المبرهمات التي تساعد في معرفة استقلال مجموعة من التوابع

مبرهنة (٤) :

إذا كانت $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ حلولاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة (5.3) ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون التوابع السابقة مستقلة خطياً على المجال I هو أن لا ينعدم المحدد التالي ضمن المجال المذكور .

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

يسمى هذا المحدد بمحدد رونسكي .

وإذا كانت قيمة المحدد عند نقطة ما تساوي الصفر، عندئذٍ تكون التوابع مرتبطة خطياً

سنقبل هذه المبرهنة من دون برهان .

مثال (٣) : أوجد الشرط الذي يجب أن تحققه a , b بحيث يكون التابعان :

$$f_1(x) = e^{ax} \;\; ; \;\; f_2(x) = e^{bx}$$

مستقلان خطياً .

الحـــل :

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ a e^{ax} & b e^{bx} \end{vmatrix} = e^{ax}.e^{bx} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = e^{(a+b)x}.(b-a)$$

إذاً : $b = a \Leftrightarrow W(x) = 0$

وإذا كان $b \neq a$ ، عندئذٍ $W(x) \neq 0$ ، والتابعين مستقلين خطياً .

بسهولة ، يمكن التحقق من أن التوابع مرتبطة خطياً :

$$f_1 = e^{\alpha x} \;\; ; \;\; f_2 = e^{\alpha x}$$
$$f_3 = \sin \alpha x \;\; ; \;\; f_2 = \cos \alpha x$$

ملاحظة هامة (١) : يكون :

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ حلاً عاماً للمعادلة (5.3) إذا كانت :

$y_1 , y_2 , y_3 , ..., y_n$ حلولاً للمعادلة (5.3) ومستقلة خطياً .

٥-٢ المؤثر التفاضلي D :

لو رمزنا بـ $D = \frac{d}{dx}$ ، والذي نسميه بالمؤثر التفاضلي وهو معرف بالشكل الآتي :

$$D\,y = \frac{dy}{dx} = y' \;\; ; \;\; y = y(x)$$

أي أن المؤثر التفاضلي D إذا أثر في التابع y ، يعطي مشتق هذا التابع ، وبالتالي :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y = y''$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = D^3 y = y'''$$

$$\vdots \qquad \cdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y = y^{(n)}$$

فيما يلي سنذكر خواص المؤثر التفاضلي D :

لتكن (a,b,c) أعداداً حقيقية ، و (l,n,m) أعداداً طبيعية ، فإن المؤثر التفاضلي يحقق ما يلي :

$D^n(a\,y) = a\,D^n y$	-١
$(a\,D^m)\,(b\,D^n)\,y = a.b\,D^{m+n} y$	-٢
$(a\,D^m + b\,D^n)\,y = (b\,D^n + a\,D^m)\,y$	-٣
$(a\,D^m + b\,D^n)\,y = a(D^m y) + b(D^n y)$	-٤
$(a\,D^m + b\,D^n) + c\,D^l = a\,D^m + (b\,D^n + c\,D^l)$	-٥
$(a\,D^m b\,D^n)c\,D^l = a\,D^m (b\,D^n c\,D^l) = a\,b\,c\,D^{m+n+l}$	-٦

$a D^m (b D^n + c D^l) = (a D^m)(b D^n) + (a D^m)(c D^l)$ $= a.b.D^{m+n} + a.c.D^{m+l}$	-٧

وبالاعتماد على العلاقات السابقة ، فإن المعادلة التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة والمتجانسة (5.5) ، يمكن كتابتها بدلالة المؤثر D بالشكل الآتي :

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \ldots + a_n y = 0$$

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_n) y = 0 \qquad (5.6)$$

وبالطريقة نفسها ، المعادلة (5.4) يمكن كتابتها بدلالة المؤثر D بالشكل الآتي :

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_n) y = R(x) \qquad (5.7)$$

وسنرمز لـــ :

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_n$$

بالرمز $F(D)$ ، وندعوه بمؤثر كثير الحدود التفاضلي ، عندئذٍ فإن العلاقة (5.7) تكتب بالشكل الآتي :

$$F(D)\, y = R(x)$$

وفيما يلي سنذكر بعض العلاقات التي يحققها $F(D)$ مؤثر كثير الحدود التفاضلي .

مبرهنة (٥) :

إذا كان $F(D)$ مؤثر كثير حدود تفاضلي D ، و α عدد ثابت ، و $V(x)$ تابع لـــ x ، فإن العلاقات الآتية تتحقق :

$F(D).e^{\alpha x} = e^{\alpha x} F(\alpha)$	(١)
$F(D^2)\sin\alpha x = \sin\alpha x\, F(-\alpha^2)$	(٢)
$F(D^2)\cos\alpha x = \cos\alpha x\, F(-\alpha^2)$	(٣)
$F(D)e^{\alpha x}V(x) = e^{\alpha x}F(D+\alpha)V(x)$	(٤)

البرهان على العلاقة الأولى (١) :

$$F(D)e^{\alpha x} = (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) e^{\alpha x}$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n) = e^{\alpha x} F(\alpha)$$

البرهان على العلاقة الثانية (٢) :

إن :

$$D \sin \alpha x = \alpha \cos \alpha x$$

$$D^2 \sin \alpha x = D(\alpha \cos \alpha x) = -\alpha^2 \sin \alpha x$$

من العلاقة الأخيرة ، نجد أنه بنتيجة الاشتقاق استبدلت D^2 بـ α^2 وهكذا نجد :

$$D^4 \sin \alpha x = (-\alpha^2)^2 \sin \alpha x$$

وبالتالي ، فإن :

$$D^{2n} \sin \alpha x = (-\alpha^2)^n \sin \alpha x$$

ومنه :

$$F(D^2) \sin \alpha x = (D^{2n} + a_1 D^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-1} D^2 + a_n) \sin \alpha x$$

بتعويض كل D^2 بـ α^2 و D^4 بـ $(-\alpha^2)^2$ ، وكل $D^{2(n-1)}$ بـ $(-\alpha^2)^{n-1}$ ، و D^{2n} بـ $(-\alpha^2)^n$ نحصل على :

$$F(D^2) \sin \alpha x = (D^{2n} + a_1 D^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-1} D^2 + a_n) \sin \alpha x$$

$$= [(-\alpha^2)^n + a_1 (-\alpha^2)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(-\alpha^2) + a_n] \sin \alpha x$$

$$= \sin \alpha x \, F(-\alpha^2)$$

وكذلك يمكننا البرهان على العلاقتين الثالثة (٣) ، والرابعة (٤) .

من تعريف المؤثر التفاضلي D نجد أنه إذا كانت $K_1, K_2, \ldots, K_n$ أعداداً ثابتة فإن :

$$(D - K_1) y = \frac{dy}{dx} - K_1 y$$

$$(D - K_1)(D - K_2) y = (D - K_2)\left(\frac{dy}{dx} - K_1 y\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} - (K_1 + K_2)\frac{dy}{dx} - K_1K_2\,y$$

... ...

... ...

وبصورة عامة :

$$(D - K_1)\,(D - K_2).....(D - K_n)\,y$$

في هذه الحالة يجب علينا أولاً أن نؤثر على y بالمؤثر $(D - K_n)$ ، ثم نؤثر على الناتج بـ $(D - K_{n-1})$ ، وهكذا ... إلى أن نصل إلى $(D - K_1)$.

من المعادلة (5.6) نلاحظ أن كثير الحدود المؤثر $F(D)$ يمكن كتابته على شكل جداء مضاريب ، أي :

$$\left.\begin{array}{l} (D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)\,y = 0 \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ (D - K_1)\,(D - K_2).....(D - K_n)\,y = 0 \end{array}\right\} \quad (5.8)$$

حيث $K_1\,,\,K_2\,,....,\,K_n$ جذور كثير حدود المؤثر .

من المعادلة (5.8) نجد :

$$\left.\begin{array}{l} (D - K_1)\,y = 0 \\ (D - K_2)\,y = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ (D - K_n)\,y = 0 \end{array}\right\} \quad (5.9)$$

إن حل أي معادلة من المعادلات (5.9) هو حل للمعادلة (5.8) ، ولكن حل المعادلات (5.9) يعطى على الترتيب بالمعادلات الآتية :

$$y_1 = e^{K_1 x}\,,\; y_2 = e^{K_2 x}\,,\; ...,\; y_n = e^{K_n x}$$

إذا كانت مجموعة هذه التوابع مستقلة خطياً في المجال $(-\infty\,,\infty)$ ، فإنها تشكل مجموعة حلول للمعادلة التفاضلية (5.6) ، ويكون الحل العام كالآتي :

$$y = c_1 e^{K_1 x} + c_2 e^{K_2 x} + ... + c_n e^{K_n x} \qquad (5.10)$$

حيث $c_1 , c_2 , c_3 , ..., c_n$: ثوابت كيفية .

إذا كان للمعادلة التفاضلية المتجانسة $F(D)y = 0$ حلاً من الشكل $y = e^{Kx}$ ، فإنه يحقق المعادلة الآتية :

$$F(D)e^{Kx} = 0$$

وحسب الخاصة الأولى من المبرهنة (٥) نجد :

$$F(D)e^{Kx} = e^{Kx}F(K) = 0$$

حيث :

$$F(K) = K^n + a_1 K^{n-1} + ... + a_{n-1} K + a_n = 0 \qquad (5.11)$$

عندئذٍ سوف نسمي المعادلة (5.11) بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (5.8) ، ونلاحظ أن المعادلة المميزة تختلف عن مؤثر كثير الحدود التفاضلي بتبديل كل D بـ K .

تعريف (٢) :

نقول إن $[F_1(D) + F_2(D)]$ هو مجموع مؤثر كثيري الحدود التفاضليين $F_1(D)$ و$F_2(D)$ إذا كان تأثيره في تابع ما $f(x)$ معرفاً بالعلاقة الآتية :

$$[F_1(D) + F_2(D)]f(x) = [F_1(D)]f(x) + [F_2(D)]f(x)$$

ومن هذا التعريف ينتج مباشرة أن :

$$\sum_{P=0}^{n} a_{n-P} D^P + \sum_{P=0}^{n} b_{n-P} D^P = \sum_{P=0}^{n} (a_{n-P} + b_{n-P}) D^P$$

تعريف (٣) :

نقول إن مؤثر كثير الحدود التفاضلي $F_1(D).F_2(D)$ هو جداء مؤثر كثير الحدود التفاضلي $F_1(D)$ في مؤثر كثير الحدود التفاضلي $F_2(D)$ إذا كان تأثير الجداء معرفاً بالعلاقة الآتية :

$$F_1(D).F_2(D)f(x) = F_1(D)[F_2(D).f(x)]$$

أي أننا نطبق أولاً المؤثر $F_2(D)$ في التابع $f(x)$ ، ومن ثم نطبق على الناتج المؤثر $F_1(D)$.

نلاحظ أن جداء مؤثرات كثيرات الحدود تبديلي لأن :

$$F_1(D).F_2(D) = F_2(D).F_1(D)$$

كما نلاحظ أن الجداء توزيعي على الجمع لأن :

$$F(D)[F_1(D) + F_2(D)] = F(D)F_1(D) + F(D)F_2(D)$$

٥-٣ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثانية والمتجانسة :

في البداية لندرس المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والمتجانسة هي :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (5.12)$$

حيث a_2 , a_1 : ثوابت .

قبل البدء في حل المعادلة التفاضلية (5.12) سنقدم تعريف الحل الخاص .

تعريف (٤) :

نقول أن التابع الحقيقي $y = g(x)$ القابل للمفاضلة مرتين متتاليتين في مجال ما هو حل خاص للمعادلة التفاضلية (5.12) ، إذا كان هذا التابع ومشتقاته المستمرة تحقق المعادلة التفاضلية (5.12) وذلك من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال المفروض .

لنكتب المعادلة التفاضلية (5.12) بدلالة المؤثر D تصبح :

$$(D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$$

عندئذٍ نسمي المعادلة الجبرية :

$$K^2 + a_1 K + a_2 = 0 \qquad (5.13)$$

بالمعادلة المميزة الموافقة للمعادلة التفاضلية (5.12) نجد أن حلول المعادلة التفاضلية (5.12) متعلقة بجذور المعادلة المميزة (5.13) ، عندئذٍ نميز الحالات الثلاثة الآتية :

أولاً- إذا كان $\Delta = (a_1^2 - 4a_2) > 0$:

عندئذٍ يوجد للمعادلة (5.13) جذران حقيقيان مختلفان K_1 , K_2 ، وبالتالي نحصل على حلين خاصين :

$$y_2 = c_2 e^{K_2 x} \quad ; \quad y_1 = c_1 e^{K_1 x}$$

وهما مستقلين خطياً ، وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة (5.12) كما يلي :

$$y = c_1 e^{K_1 x} + c_2 e^{K_2 x} \qquad (5.14)$$

حيث c_1 , c_2 : ثوابت كيفية .

مثال (٤) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

الحـــل : لنكتب المعادلة بدلالة المؤثر D :

$$(D^2 + 3D + 2)y = 0$$

والمعادلة المميزة هي :

$$K^2 + 3K + 2 = 0$$

وبما أن $\Delta = 1 > 0$ ، إذاً للمعادلة المميزة جذران مختلفان :

$$K_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \quad K_1 = -1 \quad ; \quad K_2 = -2$$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى حسب العلاقة (5.14) بالشكل الآتي :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

ثانياً- إذا كان $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$:

فإن للمعادلة (5.13) جذر مضاعف ، أي :

$$K = K_1 = K_2$$

عندئذٍ يعطى الحل العام للمعادلة المتجانسة (5.12) بالشكل الآتي :

$$y = (c_1 x + c_2) e^{K_1 x} \qquad (5.15)$$

مثال (٥) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

الحـــــل : نكتب المعادلة بدلالة D :

$$(D^2 + 6D + 9)y = 0 \Rightarrow$$

$$(D+3)^2 = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة :

$$(K+3)^2 = 0 \Rightarrow K = -3$$ **(جذر مضاعف)**

والحل العام يعطى حسب العلاقة (5.15) بالشكل الآتي :

$$y = (c_1 x + c_2)e^{-3x}$$

ثالثاً- إذا كان $\Delta = (a_1^2 - 4a_2) < 0$:

عندئذٍ فإن للمعادلة (5.13) جذران عقديان مترافقان وهما :

$$K_1 = \alpha + i\beta \quad ; \quad K_2 = \alpha - i\beta$$

حيث α, β : أعداد حقيقية ، بينما $i = \sqrt{-1}$.

وبالتالي يكون لكل من التابعين الآتيين حلاً خاصاً .

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}.e^{i\beta x} \quad ; \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}.e^{-i\beta x}$$

وبالاستناد إلى علاقة أيلر :

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$$

نجد أن الحلين الخاصين يأخذان الشكل الآتي :

$$y_1 = e^{\alpha x}.e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x}.e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

عندئذٍ يعطى الحل العام حسب المبرهنة (٢) بالشكل الآتي :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 =$$

$$= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\sin\beta x] \qquad (5.16)$$

حيث : $c_1 + c_2 = A \;\; ; \;\; i(c_1 - c_2) = B$ ثوابت كيفية .

وبالتالي فإن الحل العام للمعالة التفاضلية (5.12) هو :

$$y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x] \qquad (5.17)$$

مثال (٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

الحـــل : لنكتب المعادلة بدلالة المؤثر D :

$$(D^2 + 2D + 3)y = 0$$

والمعادلة المميزة هي :

$$K^2 + 2K + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}\, i$$

وبالتالي ، يوجد للمعادلة التفاضلية المعطاة جذران عقديان مترافقان هما :

$$K_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}\, i}{2} = -1 + \sqrt{2}\, i$$

$$K_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}\, i}{2} = -1 - \sqrt{2}\, i$$

حيث : $\alpha = -1 \;\; ; \;\; \beta = \sqrt{2}$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى حسب العلاقة (5.17) بالشكل الآتي :

$$y = (A_1\cos\sqrt{2}\, x + B\sin\sqrt{2}\, x)e^{-x}$$

مثال (٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + y = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق الشروط الآتية :

$$y(0) = 0 \;\; ; \;\; y'(0) = -1$$

الحـــل : لنكتب المعادلة التفاضلية بدلالة المؤثر D :

$$(D^2 + 1)y = 0$$

والمعادلة المميزة لها كما يلي :

$$K^2+1=0 \Rightarrow K^2=-1=i^2$$

وبالتالي فإن للمعادلة المعطاة جذرين تخيليين مترافقين هما :

$$K_1=i \quad ; \quad K_2=-i$$

حيث : $\alpha=0 \; ; \; \beta=1$

عندئذٍ فإن الحل العام للمعادلة يعطى حسب العلاقة (5.17) بالشكل الآتي :

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

ولإيجاد الحل الخاص نبدل في الحل العام كل $y(0)=0$ ، نجد :

$$0=c_1\cos 0+c_2\sin 0 \Rightarrow c_1=0$$

لنشتق الحل العام :

$$y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

نعوض كل $x=0$ ، وكل $y'=-1$ ، نجد :

$$-1=0+c_2\cos(0) \Rightarrow c_2=-1$$

وبالتالي فإن الحل الخاص هو : $y=-\sin x$

٥-٣-١ المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n وذات الأمثال الثابتة والمتجانسة :

فيما يلي سنحاول البحث عن طريقة لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة (5.5) ، وهي من الشكل الآتي :

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)}+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots+a_ny=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{أو} \\ (D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\ldots+a_n)y=0 \end{array}\right\} \quad (5.18)$$

حيث إن المعادلة الجبرية :

$$F(K)=K^n+a_1K^{n-1}+a_2K^{n-2}+\ldots+a_n=0 \qquad (5.19)$$

تمثل المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (5.18) .

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (5.18) نتبع ما يلي :

آ- نشكل المعادلة المميزة (5.19) :

ب- نحل هذه المعادلة ونبحث عن الجذور $K_1, K_2, ..., K_n$.

بعد ذلك سنميز الحالات الآتية :

أولاً- جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة .

في هذه الحالة نحصل على n جذراً حقيقياً مختلفاً للمعادلة المميزة .

إذا كانت هذه الجذور هي $K_1, K_2, ..., K_n$ ، فإن التوابع الحقيقة الآتية :

$$y_1 = e^{K_1 x}, y_2 = e^{K_2 x}, ..., y_n = e^{K_n x}$$

تكون حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية المتجانسة (5.18) .

علاوة على ذلك ، إن هذه الحلول تكون مستقلة خطياً ، وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة (5.18) في هذه الحالة هو :

$$y = c_1 e^{K_1 x} + c_2 e^{K_2 x} + ... + c_n e^{K_n x} \qquad (5.20)$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت كيفية .

مثال (٨) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''' - 9y'' + 20y' = 0$$

الحـــل : لنكتب المعادلة بدلالة المؤثر D :

$$(D^3 - 9D^2 + 20D)y = 0$$

وبالتالي المعادلة المميزة هي :

$$(K^3 \quad 9K^2 + 20K) = 0$$
$$K(K-5)(K-4) = 0$$

عندئذٍ نحصل على الجذور المختلفة :

$$K_1 = 0 \; ; \; K_2 = 5 \; ; \; K_3 = 4$$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى من العلاقة (5.20) بالشكل الآتي :

$$y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{4x}$$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى من العلاقة (5.20) بالشكل الآتي :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{-x}$$

ثانياً- المعادلة المميزة (5.19) تملك جذوراً مكررة : $K_1 , K_2 , \dots , K_m$

لو فرضنا أن :

K_1 مكرر α_1 مرة .

K_2 مكرر α_2 مرة .

... ...

... ...

K_n مكرر α_m مرة .

حيث : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$

عندئذٍ ، تكتب المعادلة التفاضلية بالشكل الآتي :

$$[(D-K_1)^{\alpha_1}.(D-K_2)^{\alpha_2}.....(D-K_m)^{\alpha_m}]y = 0 \qquad (5.21)$$

إن حل أي معادلة من المعادلات :

$$\left.\begin{array}{l} (D-K_1)^{\alpha_1}.y = 0 \\ (D-K_2)^{\alpha_2}.y = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (D-K_m)^{\alpha_m}.y = 0 \end{array}\right\} \qquad (5.22)$$

هو حل للمعادلة التفاضلية (5.18) .

وأيضاً يمكننا إيجاد حلول المعادلات (5.22) بالشكل الآتي :

لو أخذنا المعادلة :

$$(D-K_1)^{\alpha_1} y = 0 \qquad (5.23)$$

- فإذا كان $\alpha_1 = 1$ ، فإن حل المعادلة $(D-K_1)y = 0$ يكون :

$$y = c_1 e^{K_1 x}$$

- أما إذا كان $\alpha_2 = 2$ ، فإن حل المعادلة $(D - K_1)^2 y = 0$ يكون :

$$y = (c_1 x + c_2) e^{K_1 x}$$

- وإذا كان $\alpha_3 = 3$ فإن حل المعادلة $(D - K_1)^3 y = 0$ يكون :

$$y = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3) e^{K_1 x}$$

عندئذٍ نجد أن الحل العام المعادلة التفاضلية (5.23) كالآتي :

$$y = (c_1 x^{\alpha_1 - 1} + c_2 x^{\alpha_1 - 2} + \ldots + c_{\alpha_1}) e^{K_1 x} \qquad (5.24)$$

وبالتالي نوجد جميع حلول المعادلات (5.22) ، وعندئذٍ يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (5.18) هو مجموع هذه الحلول .

مثال (٩) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y^{(4)} - 8 y^{(2)} + 16 y = 0$$

الحل : لنكتب المعادلة بدلالة المؤثر D بالشكل الآتي :

$$(D^4 - 8 D^2 + 16) y = 0$$

والمعادلة المميزة هي :

$$K^4 - 8 K^2 + 16 = 0 \Rightarrow (K^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$[(K + 2)(K - 2)]^2 = 0$$

بحلها نحصل على الجذور :

$K = 2$ (مكرر مرتين) و $K = -2$ (مكرر مرتين)

وبالتالي فإن الحل العام يعطى بالشكل الآتي :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x}$$

مثال (١٠) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^3 - 3 D^2 + 3 D - 1) y = 0$$

الحـــــل : نلاحظ أن المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل الآتي :

$$(D-1)^3 y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة الموافقة لها هي : $(K-1)^3 = 0$

وجذور هذه المعادلة هي :

$K_1 = K_2 = K_3 = 1$ (مكرر ثلاث مرات)

عندئذٍ يعطى الحل العام حسب العلاقة (5.24) بالشكل الآتي :

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$$

ثالثاً- إذا كان للمعادلة المميزة جذران عقديان مترافقان :

$$K_1 = \alpha + i\beta \;\; ; \;\; K_2 = \alpha - i\beta$$

عندئذٍ يعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (5.18) بالشكل الآتي :

$$y = (A\cos\beta x + B\cos\beta x) e^{\alpha x} \qquad (5.25)$$

(تم البرهان على هذه المعادلة سابقاً)

- أما إذا كان الجذران K_1 , K_2 ، كل منهما مكرر مرتين ، فإن الحل العام يكون من الشكل الآتي :

$$y = \{(A_1 x + A_2)\cos\beta x + (B_1 x + B_2)\sin\beta x)\} e^{\alpha x} \qquad (5.26)$$

وهذا يمثل الحل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة .

وهكذا يمكن تعميم هذه الحالة فيما إذا كان الجذران العقديان مكرران S مـــرة ، فـــإن الحل العام يعطى بالعلاقة الآتية :

$$y' = \{(A_1 x^{S-1} + A_2 x^{S-2} + ... + A_S)\cos\beta x + (B_1 x^{S-1} + B_2 x^{S-2} + ... + B_S)\sin\beta x\} e^{\alpha x} \qquad (5.27)$$

مثال (١١) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$$

الحـــــل : نكتب المعادلة بدلالة المؤثر D بالشكل الآتي :

$$(D^4 + 8D^2 + 16) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة هي :

$$K^4 + 8K^2 + 16 = 0 \Rightarrow (K^2+4)^2 = 0$$

وجذورها :

$K_1 = K_2 = 2i$ (مكررة مرتين) و $K_3 = K_4 = -2i$ (مكررة مرتين)

وكذلك نجد أن :

$$\beta = 2 \; ; \; \alpha = 0$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يعطى حسب العلاقة (5.26) كما يلي :

$$y = (c_1 x + c_2)\cos 2x + (c_3 x + c_4)\sin 2x$$

مثال (١٢) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} + 4y'' = 0$$

الحـــل : نكتب المعادلة بدلالة المؤثر D بالشكل الآتي :

$$(D^6 - 4D^5 - 8D^4 + 4D^2)\, y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة لها هي :

$$K^6 - 4K^5 + 8K^4 + 4K^2 = 0$$

ومنه :

$$K^2(K^4 - 4K^3 + 8K^2 + 4) = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على الجذور كما يلي :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \; ; \; \lambda_3 = \lambda_4 = 1+i \; ; \; \lambda_5 = \lambda_6 = 1-i$$

وبالتالي يكون الحل العام حسب العلاقة (5.24) و العلاقة (5.26) بالشكل الآتي :

$$y = c_1 + c_2 x + \left\{(c_3 + c_4 x)\cos x + (c_5 + c_6 x)\sin x\right\}e^x$$

مثال (١٣) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^4 + D^3 + 2D^2 - D + 3)\, y = 0$$

الحـــل : يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية المعطاة بالشكل الآتي :

$$[(D^2 + 2D + 3)\,(D^2 - D + 1)]\, y = 0$$

إن المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي :

$$(K^2+2K+3)\,(K^2-K+1)=0$$

ومنه :

$$K^2+2K+3=0$$

وبالتالي فإن جذور هذه المعادلة هي :

$$K_1=-1+\sqrt{2}\,i \;\;;\;\; K_2=-1-\sqrt{2}\,i$$

أو :

$$K_2-K+1=0$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة هي :

$$K_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2} \;\;;\;\; K_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة حسب العلاقة (5.25) كما يلي :

$$y=(c_1\cos\sqrt{2}\,x+c_2\sin\sqrt{2}\,x)e^{-x}+$$
$$+(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}$$

٥-٤ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات أمثال ثابتة وغير متجانسة :

إن الشكل العام لهذه المعادلة هو :

$$y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+a_2\,y^{(n-2)}+\ldots+a_n\,y=R(x) \quad (5.28)$$

والمعادلة المتجانسة الموافقة لها (من دون طرف) هي :

$$y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+a_2\,y^{(n-2)}+\ldots+a_n\,y=0$$

مبرهنة (٦) :

إن الحل العام للمعادلة (5.28) مؤلف من حلين هما :

آ- حل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها ، ونرمز له بالرمز y_c ، ويسمى بالحل المتمم .

ب- حل خاص للمعادلة (5.28) بالكامل ، ونرمز له بالرمز y_p .

أي أن : $y = y_c + y_p$

علماً أننا درسنا سابقاً كيفية إيجاد الحل المتمم y_c ، أما بالنسبة للحل الخاص y_p ، فيمكن إيجاده بعدة طرق .

أولاً- الطريقة الأولى : وتسمى بطريقة لاغرانج ، أو (طريقة تغير البارامترات) .

لنفرض أن الحل العام للمعادلة (5.28) من دون طرف ، هي من الشكل الآتي :

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \qquad (5.29)$$

نفرض : $c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x), ..., c_n = c_n(x)$

توابع قابلة للاشتقاق باستمرار، ونفتش عن حل خاص y_p من الشكل الآتي :

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + ... + c_n(x) y_n \qquad (5.30)$$

ولإيجاد الحل الخاص y_p ، علينا إيجاد كلا من :

$$c_1(x),\ c_2(x), ...,\ c_n(x)$$

من جملة المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i = c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + ... + c_n'(x) y_n = 0 \\
&\sum_{i=2}^{n} c_i'(x) y_i' = c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + ... + c_n'(x) y_n' = 0 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \vdots \\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_1^{(n-2)} = c_1'(x) y_1^{(n-2)} + c_2'(x) y_2^{(n-2)} + ... + c_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_1^{(n-1)} = c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-2)} + ... + c_n'(x) y_n^{(n-1)} = R(x)
\end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

وهي جملة n معادلة خطية جبرية ، غير متجانسة بالنسبة إلى $c_i'(x)$.

ولما كان المعين الرئيسي لأمثال هذه الجملة ، معين رونسكي غير معدوم ، فإن للجملة (5.31) حل وحيد غير الحل الصفري بالنسبة إلى $c_i'(x)$.

بحل مجموعة المعادلات الجبرية (5.31) نجد أن :

$$c_1'(x) = g_1(x) \Rightarrow \frac{dc_1(x)}{dx} = g_1(x) \Rightarrow dc_1(x) = g_1(x)\,dx$$

بالمكاملة مع عدم إضافة ثابت نجد :

$$c_1(x) = \int g_1(x)\,dx = G_1(x)$$

وبالطريقة نفسها تماماً نجد أن :

$$c_2(x) = G_2(x),\ c_3(x) = G_3(x),\ ...,c_n(x) = G_n(x)$$

نبدل في العلاقة (5.30) قيم كُلاً من $c_1(x), c_2(x), ...,c_n(x)$ نجد الحل الخاص y_p ، وهو :

$$y_p = G_1(x)\,y_1 + G_2(x)\,y_2, ...,G_n(x)\,y_n \qquad (5.32)$$

بإضافته إلى الحل المتمم y_c نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (5.28) .

مثال (١٤) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' - y = e^x$$

الحـــل : نكتب المعادلة بدلالة المؤثر D بالشكل الآتي :

$$(D^2 - 1)\,y = e^x$$

في البداية لنوجد الحل المتمم y_c ، نأخذ المعادلة :

$$(D^2 - 1)\,y - 0$$

فإن المعادلة المميزة لها هي :

$$K^2 - 1 = 0 \Rightarrow (K-1)\,(K+1) = 0$$

وجذورها : $K_1 = 1\ ,\ K_2 = -1$

وبالتالي فإن الحل المتمم y_c حسب العلاقة (5.14) هو :

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

ولإيجاد الحل الخاص y_p ، نعتبر $c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x)$

ونفتش عن الحل الخاص من الشكل الآتي :

$$y_p = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} \qquad (\text{I})$$

ولنشكل مجموعة المعادلات الجبرية :

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \qquad (\text{II})$$

$$c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = e^x \qquad (\text{III})$$

بجمع المعادلتين (II) و (III) نجد أن :

$$2c_1'(x)e^x = e^x \Rightarrow 2c_1'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow d\,c_1(x) = \frac{1}{2}\,dx$$

بالمكاملة نجد أن : $c_1(x) = \frac{1}{2}\,x$

نبدل في المعادلة (II) كل $c_1'(x) = \frac{1}{2}$ نجد أن :

$$\frac{1}{2}\,e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \Rightarrow c_2'(x) = -\frac{1}{2}\,e^{2x}$$

بالمكاملة نجد أن :

$$c_2(x) = -\frac{1}{4}\,e^{2x}$$

نبدل في المعادلة (I) قيمة كل من $c_1(x)$ و $c_2(x)$ ، نحصل على الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{2}\,x\,e^x - \frac{1}{4}\,e^{2x}(e^{-x})$$

$$y_p = \frac{1}{2}\,x\,e^x - \frac{1}{4}\,e^x$$

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x$$

$$y = (c_1 - \frac{1}{4}) e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

$$y = G e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

حيث : $G = c_1 - \frac{1}{4}$.

ثانياً- طريقة مقارنة الأمثال ، أو (طريقة التخمين) .

إن هذه الطريقة تعتمد على شكل التابع $R(x)$ ، وهنا نميز عدة حالات :

١- إذا كان التابع $R(x)$ من الشكل :

$$R(x) = A e^{\alpha x} \tag{5.33}$$

حيث A , α : أعداد حقيقية ثابتة .

وهنا نميز حالتين :

١- العدد α ليس جذراً (أو حلاً) للمعادلة المميزة ، عندئذ نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = B e^{\alpha x} \tag{5.34}$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (5.28) نحصل على قيمة B ، وبالتالي نحصل على الحل الخاص .

٢- العدد α جذراً للمعادلة المميزة ، فإذا كان جذراً بسيطاً ، نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = B x e^{\alpha x} \tag{5.35}$$

أما إذا كان جذراً مكرراً k مرة ، عندئذ نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = B x^k e^{\alpha x} \tag{5.36}$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (5.28) نحصل على قيمة B .

مثال (١٥) : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$y'' - y = e^x$$

الحـــل : استناداً إلى المثال السابق (١٤) ، وجدنا أن :

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

ولحساب y_p ، لدينا $R(x) = e^x$ ، (حيث $a = 1$ ، وهو جذر بسيط للمعادلة المميزة) نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = Bxe^x \qquad (!)$$

$$y' = Be^x + Bxe^x \Rightarrow y'' = Be^x + Be^x + Bxe^x$$

$$y'' = 2Be^x + Bxe^x$$

نعوض قيمة كل من y و y'' في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$2Be^x + Bxe^x - Bxe^x = e^x$$

$$2Be^x = e^x \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

نبدل $B = \frac{1}{2}$ في المعادلة (!) نجد :

$$y = \frac{1}{2} xe^x$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} xe^x$$

ب- إذا كان التابع $R(x)$ أحد الأشكال الآتية :

$$\left.\begin{array}{l} R(x) = \alpha \sin ax \ ; \ R(x) = \beta \cos ax \\ R(x) = \alpha \sin ax + \beta \cos ax \end{array}\right\} \qquad (5.37)$$

نميز حالتين :

١- إذا كانت ai ليست جذراً للمعادلة المميزة ، نفرض حلاً من الشكل الآتي :

$$y = A\cos ax + B\sin ax \qquad (5.38)$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (5.28) نحدد قيمتي A , B .

٢- إذا كانت ai جذراً للمعادلة المميزة مكررة k مرة ، عندئذٍ نفرض حلاً من الشكل :

$$y = x^k (A\cos ax + B\sin ax) \qquad (5.39)$$

بالاشتقاق و التعويض في المعادلة التفاضلية (5.28) نحدد قيمتي A , B .

مثال (١٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + y = \sin 2x$$

الحسل : نعلم أن الحل العام المعادلة التفاضلية يعطى بالشكل الآتي :

$$y = y_c + y_p$$

في البداية ، لنحسب y_c ، لدينا :

$$(D^2 + 1)\, y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة هي :

$$K^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = i \;\; : \;\; K_2 = -i$$

لدينا $\alpha = 0 \;\; : \;\; \beta = 1$ ، عندئذ نجد :

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ولحساب y_p : لدينا :

$$R(x) = \sin 2x$$

ومنه $a = 2$ ، وعليه نجد :

$$a\, i = 2\, i$$

وهو ليس جذراً للمعادلة المميزة ، عندئذ نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad (1)$$

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

نعوض كل من y ، y' ، y'' في المعادلة التفاضلية نجد :

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \sin 2x$$

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \sin 2x$$

ومنه نجد :

$$3A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$3B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

نبدل قيمة كل من A , B في (1) ، عندئذٍ نحصل على الحل الخاص :

$$y_p = -\frac{1}{3}\sin 2x$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة هو :

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

مثال (٢٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + y = 2\sin x$$

الحل : لدينا الطرف المماثل السابق (٢٦) ، أيضاً :

$$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$$

والآن لنحسب y_p ، أيضاً :

$$R(x) = 2\sin x$$

ومنه $a = 1$ ، وعليه فإن :

$$a_1 = 1$$

وهو جذر بسيط للمعادلة المميزة $K^2 + 1 = 0$ ، عندئذٍ نأخذ حداً من الشكل :

$$y_p = x(A\cos x + B\sin x) \qquad (1)$$

حيث $K = 1$

بالاشتقاق نجد أن :

$$y' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$-2A\sin x + 2B\cos x +$$

$$+ x(-A\cos x - B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x$$

وبالتالي :

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1$$
$$2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

نبدل قيمة كل من A , B في (1) ، عندئذٍ نحصل على الحل الخاص y_p :

$$y_p = -x\cos x$$

وبالتالي فإن الحل العام هو :

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x$$

مثال (١٨) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' - y' = 3\cos x$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق :

$$y'(0) = 1 \ ; \ y(0) = 0$$

الحـــل : نعلم أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة يعطى بالدستور الآتي :

$$y = y_c + y_p$$

في البداية نكتب المعادلة التفاضلية المعطاة بدلالة المؤثر D :

$$(D^2 - D)\,y = 3\cos x$$

ولحساب y_c ، لدينا :

$$(D^2 - D)\,y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة :

$$K^2 - K = 0 \Rightarrow K(K-1) = 0$$

والجذور المميزة لهذه المعادلة هي :

$$K_1 = 0 \quad \text{أو} \quad K_2 = 1$$

وبالتالي فإن الحل المتمم لها هو : $y_c = c_1 + c_2\,e^x$

ولحساب y_p ، لدينا :

$$R(x) = 3\cos x$$

ومنه $a = i$ ، وعليه فإن :

$$i\,a = i$$

وهو ليس جذراً للمعادلة المميزة ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل الآتي :

$$y = A\sin x + B\cos x \qquad (1)$$

وبالتالي فإن :

$$y' = A\cos x - B\sin x \;\; ; \;\; y'' = -A\sin x - B\cos x$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$-A\sin x - B\cos x - x(A\cos x - B\sin x) = 3\cos x$$

$$(-A+B)\sin x + (-B-A)\cos x = 3\cos x$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$$-A+B=0 \;\Rightarrow\; A=B$$

$$-B-A=3 \;\Rightarrow\; -A-A=3 \;\Rightarrow\; -2A=3 \;\Rightarrow$$

$$A = \frac{-3}{2} = B$$

ومنه :

$$y_p = \frac{-3}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$y = c_1 + c_2 e^x - \frac{3}{2}(\sin x + \cos x)$$

لإيجاد الحل الخاص الذي يحقق $y(0)=0$; $y'(0)=1$ ، نشتق الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة وهو :

$$y' = c_2 e^x - \frac{3}{2}(\cos x - \sin x)$$

- عندما $y'(0)=1$ ، نبدل في y' نجد :

$$1 = c_2 - \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; c_2 = 1 + \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{5}{2}$$

- وعندما $y(0)=0$ ، نبدل في الحل العام نجد :

$$y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow c_1+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=0$$
$$\Rightarrow c_1=-1$$

نبدل قيمتي كل من c_1 ، c_2 في الحل العام للمعادلة التفاضلية نحصل على الحل الخاص الآتي :

$$y=-1+\frac{5}{2}e^x-\frac{3}{2}(\sin x+\cos x)$$

ج- إذا كان الطرف الثاني $R(x)$ عبارة عن كثير حدود :

فإذا كان $R(x)=Ax^m$ (حيث m عدد صحيح موجب) نميز حالتين هما :

١- إذا كان الصفر ليس جذراً للمعادلة المميزة ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل الآتي :

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m \qquad (5.40)$$

باشتقاق y والتعويض في المعادلة التفاضلية (5.28) نحصل على قيم الثوابت :

a_0 ، a_1 ،... ، a_m .

٢- إذا كان الصفر جذراً مكرراً k مرة ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل الآتي :

$$y=x^k(a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m) \qquad (5.41)$$

باشتقاق y والتعويض ، نحدد قيم a_0 ، a_1 ،... ، a_m .

مثال (١٩) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''+4y=8x^2$$

الحل : نعلم أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$y=y_c+y_p$$

في البداية ، لنكتب المعادلة التفاضلية المعطاة بدلالة المؤثر D :

$$(D^2+4)y=8x^2$$

ولحساب y_c ، لدينا :

$$(D^2+4)y=0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة هي :

$$K^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2i \; ; \; K_2 = -2i$$

ولدينا $\alpha = 0 \; : \; \beta = 2$.

وبالتالي فإن الحل المتمم y_c هو :

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ولحساب y_p ، لدينا :

$$R(x) = 8x^2$$

وبما أن الصفر ليس جذراً للمعادلة المميزة ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \qquad (\mathrm{I})$$

بالاشتقاق نجد :

$$y' = 2a_0 x + a_1$$

$$y'' = 2a_0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$2a_0 + 4(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) = 8x^2$$

$$4a_0 x^2 + 4a_1 x + 4a_2 + 2a_0 = 8x^2$$

وبالتالي ، بالمطابقة بين طرفي المساواة نجد :

$$4a_0 = 8 \Rightarrow a_0 = 2$$

$$4a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$4a_2 + 2a_0 = 0 \Rightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Rightarrow a_2 = -1$$

نبدل قيم الثوابت a_2 ، a_1 ، a_0 في (I) ، نحصل على الحل الخاص و هو :

$$y_p = 2x^2 - 1$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 1$$

مثال (٢٠) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y^{(4)} + 4\,y^{(3)} = 4x + 7$$

في البداية ، لنكتب المعادلة التفاضلية المعطاة بدلالة المؤثر D :

$$(D^4 + 4D^3)\,y = 4x + 7$$

ولحساب y_c ، لدينا :

$$(D^4 + 4D^3)\,y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المميزة :

$$K^4 + 4K^3 = 0 \;\Rightarrow\; K^3(K+4) = 0$$

إما :

$$K^3 = 0 \;\Rightarrow\; K_1 = K_2 = K_3 = 0$$

وهذا يمثل جذراً مكرراً ثلاث مرات .

أو :

$$K + 4 = 0 \;\Rightarrow\; K_4 = -4$$

وبالتالي فإن الحل المتمم y_c هو :

$$y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{0x} + c_4e^{-4x}$$

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-4x}$$

ولحساب y_p ، لدينا :

$$R(x) = 4x + 7$$

وبما أن الصفر جذراً مكرراً ثلاث مرات للمعادلة ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل :

$$y_p = x^3(a_0x + a_1)$$

$$y_p = a_0x^4 + a_1x^3 \qquad (\mathrm{I})$$

بالاشتقاق نجد :

$$y' = 4a_0x^3 + 3a_1x^2$$

$$y'' = 12a_0x^2 + 6a_1x$$

$$y''' = 24\,a_0 x + 6\,a_1$$
$$y^{(4)} = 24\,a_0$$

نبدل في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$24\,a_0 + 4(24\,a_0 x + 6\,a_1) = 4x + 7$$
$$24\,a_0 + 96\,a_0 x + 24\,a_1 = 4x + 7$$
$$96\,a_0 x + 24\,a_0 + 24\,a_1 = 4x + 7$$

بالمطابقة نجد :

$$96\,a_0 = 4 \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$$
$$24\,a_0 + 24\,a_1 = 7 \;\Rightarrow\; 24(\frac{1}{24}) + 24\,a_1 = 7$$
$$\Rightarrow\; 1 + 24\,a_1 = 7 \;\Rightarrow\; 24\,a_1 = 6 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{1}{4}$$

نبدل قيم كل من a_1 , a_0 في (I) ، نجد :

$$y_p = \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{4}\,x^3$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة :

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-4x} + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{4}\,x^3$$

د- إذا كانت $R(x) = e^{ax} f(x)$ (حيث $f(x)$ تابع ما) :

وخصوصاً ، إذا كانت $f(x)$ كثير حدود أو تابع مثلثي ، عندها ننتقل من المعادلة بدلالة y إلى معادلة بدلالة Z ، حيث نفرض $y = e^{ax}.Z$.

بالاشتقاق والتعويض ، نحصل على المعادلة التفاضلية غير المتجانسة الآتية :

$$Z^{(n)} + b_1 Z^{(n-1)} + \ldots + b_n Z = f(x) \qquad (5.42)$$

حيث $b_1 , b_2 , b_3 , \ldots , b_n$ ثوابت حقيقية .

مثال (٢١) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = 12\,x^2 e^{3x}$$

الحـــل – لنضع :

$$y = e^{3x}.Z \Rightarrow y' = 3e^{3x}.Z + e^{3x}.Z' \Rightarrow$$
$$y'' = 9e^{3x}.Z + 3e^{3x}.Z' + 3e^{3x}.Z' + e^{3x}.Z''$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة قيمة كلاً من y, y', y'' ، عندئذٍ نحصل على المعادلة التفاضلية غير المتجانسة :

$$Z'' + 2Z' = 12x^2 \qquad (I)$$

إن الحل العام للمعادلة (I) هو :

$$Z = Z_c + Z_p$$

لنكتب المعادلة بدلالة D :

$$(D^2 - 2D)Z = 12x^2$$

في البداية نحسب y_c ، من المعادلة المميزة نجد :

$$K^2 + 2K = 0 \Rightarrow K(K+2) = 0 \Rightarrow$$
$$K_1 = 0 \quad \text{أو} \quad K_2 = -2$$

وبالتالي ، فإن : $Z_c = c_1 - c_2 e^{-2x}$

والآن لنحسب Z_p ، نلاحظ أن الصفر جذراً للمعادلة المميزة، إذاً نأخذ حلاً من الشكل :

$$Z = x(a_1x^2 + a_2x + a_3) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x \qquad (II)$$
$$Z' = 3a_1x^2 + 2a_2x - a_3$$
$$Z'' = 6a_1x + 2a_2$$

نعوض في (I) ، نجد :

$$6a_1x + 2a_2 + 2(3a_1x^2 + 2a_2x + a_3) = 12x^2$$
$$6a_1x^2 + (6a_1 + 4a_2)x + 2a_2 + 2a_3 = 12x^2$$

بالمقارنة نجد أن :

$$6a_1 = 12 \Rightarrow a_1 = 6$$
$$6a_1 + 4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -3$$

$$2a_2 + 2a_3 \Rightarrow a_3 = 3$$

نبدل قيم كل من الثوابت a_3 , a_2 , a_1 في (II) ، عندئذٍ نحصل على الحل الخاص :

$$Z_p = 2x^3 - 3x^2 + 3x$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (I) هو :

$$Z = c_1 + c_2 e^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 3x$$

نبدل في Z كل $Z = \frac{y}{e^{3x}}$ ، عندئذٍ نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة بالشكل الآتي :

$$y = e^{-3x}(c_1 + c_2 e^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 3x)$$

مبرهنة (٧) :

إذا كان لدينا معادلة تفاضلية غير متجانسة ذات الأمثال الثابتة طرفها الأيمن من الشكل:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

وإذا كان y_{1p} حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة فإن :

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} + ... + y_{np}$$

يكون حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية :

$$F(D)\,y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

مثال (٢٢) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''' - 5y'' + 6y' = 12x + e^x$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق :

$$y''(0) = 1 \;;\; y'(0) = 1 \;;\; y(0) = 0$$

الحـــل : بدايةً ، لنحسب y_c ، حيث نكتب المعادلة بدلالة D :

$$(D^3 - 5D^2 + 6D)\,y = 12x + e^x$$

ومنه نجد المعادلة المميزة :

$$K^3 - 5K^2 + 6K = 0 \Rightarrow K(K^2 - 5K + 6) = 0 \qquad (I)$$

$$\Rightarrow K(K-2)(K-3) = 0$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة المميزة هي :

$$K_1 = 0 \; ; \; K_2 = 2 \; ; \; K_3 = 3$$

عندئذٍ ، فإن الحل المتمم يعطى بالشكل الآتي :

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

لنحسب الحل الخاص y_p ، حيث لدينا :

$$R(x) = 12x + e^x$$

وبالتالي فإن الحل الخاص يمثل مجموع حلين خاصين حسب المبرهنة (٧) نجد أن :

$$y_p = y_{1p} + y_{2p}$$

١- لنوجد الحل الخاص y_{1p} للمعادلة التفاضلية :

$$y''' - 5y'' + 6y' = (D^3 - 5D^2 + 6D)y = 12x \qquad (II)$$

لدينا $R_1(x) = 12x$ كثيرة حدود ، وبما أن الصفر جذراً للمعادلة المميزة (I) ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل الآتي :

$$y = x(ax + b) \Rightarrow y = ax^2 + bx \qquad (III)$$

$$y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a \Rightarrow y''' = 0$$

نبدل كل من y', y'', y''' في المعادلة (II) نجد :

$$-5(2a) + 6(2ax + b) = 12x$$

$$-10a + 12ax + 6b = 12x$$

$$-10a + 6b + 12ax = 12x$$

بالمقارنة نجد أن :

$$12a = 12 \Rightarrow a = 1$$

$$-10a + 6b = 0 \Rightarrow 6b = 10 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$

نبدل كل من قيمتي a , b في (III) نحصل على الحل الخاص y_{1p} :

$$y_{1p} = x^2 + \frac{5}{3}\,x$$

٢- لنوجد الحل الخاص y_{2p} للمعادلة التفاضلية :

$$y''' - 5\,y'' + 6\,y' = e^x \qquad (\text{IV})$$

لدينا $R_2(x) = e^x$ ، وهنا $a = 1$ ليس جذراً للمعادلة المميزة (I) ، عندئذٍ نأخذ حلاً من الشكل الآتي :

$$y = A e^x \qquad (\text{V})$$

لنشتق هذا الحل ثلاث مرات نجد أن النتيجة نفسها ، أي :

$$y = y' = y'' = y''' = A e^x$$

نبدل كلاً من y''', y'', y' في المعادلة التفاضلية (IV) نجد :

$$A e^x - 5 A e^x + 6 A e^x = e^x \Rightarrow$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

نبدل قيمة A في المعادلة (V) ، عندئذٍ نحصل على الحل الخاص y_{2p} :

$$y_{2p} = \frac{1}{2}\,e^x$$

وعليه يكون y_p :

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} = x^2 + \frac{5}{3}\,x + \frac{1}{2}\,e^x$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة كما يلي :

$$y = c_1 + c_2\,e^{2x} + c_3 e^{3x} + x^2 + \frac{5}{3}\,x + \frac{1}{2}\,e^x \qquad (\text{VI})$$

ولإيجاد الحل الخاص الذي يحقق الشروط المعطاة نشتق الحل العام المعطى في العلاقة (VI) مرتين متتاليتين نجد :

$$y' = 2c_2\,e^{2x} + 3c_3\,e^{3x} + 2x + \frac{1}{2}\,e^x + \frac{5}{3} \qquad (\text{VII})$$

$$y'' = 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x + 2 \qquad (\text{VIII})$$

وعندما $y(0) = 0$ ، نبدل في الحل العام (VI) كل $x = 0$ وكل $y = 0$ نجد أن

$$c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2} = 0 \qquad (\text{IV})$$

وعندما $y'(0) = 1$ ، نبدل في (VII) كل $x = 0$ ، وكل $y = 1$ نجد أن :

$$2c_2 + 3c_3 + \frac{1}{2} = 1 \qquad (\text{X})$$

وكذلك عندما $y''(0) = 1$ ، نبدل في (VIII) كل $x = 0$ ، وكل $y = 1$ نجد أن :

$$4c_2 + 9c_3 + \frac{1}{2} + 2 = 1 \qquad (\text{XI})$$

وبحل المعادلات الثلاثة (XI) و (X) و (IX) نحصل على قيم الثوابت c_1, c_2, c_3 ، حيث :

$$c_1 = \frac{-1}{9} \; ; \; c_2 = 0 \; ; \; c_3 = \frac{-7}{18}$$

نبدل قيم كل من c_1, c_2, c_3 في المعادلة (VI) نحصل على الحل الخاص :

$$y = -\frac{1}{9} - \frac{7}{18} e^{3x} + x^2 + \frac{5}{3} x + \frac{1}{2} e^x$$

٥-٥ المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال المتغيرة والتي ترد إلى معادلات تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة :

معادلة كوشي – أيلر :

نسمي كل معادلة من الشكل :

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad (5.43)$$

حيث :

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداداً حقيقية ثابتة ، بمعادلة كوشي – أيلر .

نلاحظ أن الطرف الأول للمعادلة متجانس بالنسبة إلى المتغير x ، لذلك هذه المعادلة يمكن ردها إلى معادلة ذات أمثال ثابتة إذا أخذنا متغيراً جديداً t يرتبط بالمتغير x بالعلاقة :

$$x = e^t \quad \text{أو} \quad t = \ln x$$

حيث : $x > 0$ ، ولنرمز أيضاً بـ $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ • .

ولنقوم بحساب كل المشتقات بدلالة المتغير المستقل الجديد ، ويتم ذلك كما يلي :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dt} \Rightarrow x\,y' = \mathcal{D}\,y$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

ولكن :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.e^{t} \quad ; \quad \frac{1}{x} = e^{-t}$$

ومنه :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dt}.(\frac{dy}{dt}\,e^{-t}).\frac{dt}{dx} = (\frac{d^2y}{dt^2}\,e^{-t} - \frac{dy}{dt}\,e^{-t})\,\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y'' = (\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-t}\,\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y'' = (y_t'' - y_t')\,\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2y'' = y_t'' - y_t'$$

$$\Rightarrow x^2y'' = (\mathcal{D}^2 - \mathcal{D})\,y$$

$$\Rightarrow x^2y'' = \mathcal{D}(\mathcal{D} - 1)\,y$$

وهكذا نتابع حتى نحصل على المشتق من المرتبة n ، أي أن :

$$x^n D^n y = [\,\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\,(\mathcal{D}-2).....(\mathcal{D}-(n-1)\,]\,y$$

نعوض في المعادلة (5.43) نجد أن :

$$(\mathcal{D}^n + b_1\mathcal{D}^{n-1} + b_2\mathcal{D}^{n-2} + ... + b_n)\,y = f(t)$$

حيث $b_1, b_2, ..., b_n$ ثوابت .

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة ، وحلها العام :

$$y = y_c + y_p$$

حيث : $y = y(t)$.

وبعد إيجاد هذا الحل نعوض قيمة t بدلالة x نحصل على الحل العام للمعادلة (5.43) .

مثال (٢٣) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(x^3D^3 + 2x^2D^2 - xD + 1)\,y = x^2 \ln x$$

الحـــل : نضع $x = e^t$ فنجد $\ln x = t$.

نقوم بحساب المشتقات في معادلة كوشي – أيلر بدلالة المتغير الجديد t .

حيث :

$$x^2y'' - \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\,y \quad \text{و} \quad xy' - \mathcal{D}\,y \quad \text{و} \quad (\mathcal{D}\,y - \frac{dy}{dt})$$

$$x^3y''' = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)\,y \quad \text{و}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$(\mathcal{D}^3 - \mathcal{D}^2 - \mathcal{D} + 1)\,y = te^{2t}$$

وهي معادلة خطية ذات أمثال ثابتة يمكن حلها بالطرق السابقة ، إذ يكون حلها العـــام بالشكل الآتي :

$$y = (c_1e^t + c_2)e^t + c_3e^{-t} + e^{2t}\left(\frac{3t-7}{9}\right)$$

لنعوض $t = \ln x$ ، نجد :

$$y = (c_1 \ln x + c_2)x + c_3\frac{1}{x} + x^2\left(\frac{3\ln x - 7}{9}\right)$$

مثال (٢٤) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x^2y'' - xy' + y = x$$

الحـــل : المعادلة هي معادلة كوشي – أيلر ، (من أجل $n = 2$) .

نفرض $x = e^t$ ، وبالتالي :

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y-\mathcal{D}y+y=e^t \\ &(\mathcal{D}^2-\mathcal{D}-\mathcal{D}+1)y=e^t \\ &(\mathcal{D}^2-2\mathcal{D}+1)y=e^t \end{aligned}\right\}$$

وهي معادلة خطية ذات أمثال ثابتة وغير متجانسة ، يمكن حلها بالطرق السابقة ، وحلها العام هو :

$$y(t)=(c_1t+c_2)e^t+\frac{1}{2}t^2e^t$$

ولإيجاد الحل العام لمعادلة كوشي – أيلر، نعوض كل $t=\ln x$:

$$y(t)=(c_1\ln x+c_2)x+(\frac{1}{2}\ln^2 x)x$$

٥-٦ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n ذات الأمثال الثابتة واستخدام المؤثر التفاضلي في إيجاد الحل الخاص لها :

نتركز دراستنا فيما يلي على طريقة إيجاد الحل الخاص للمعادلة الخطية غير المتجانسة (5.7) .

من أجل ذلك سنتعرف أولاً على المؤثر الجديد $\frac{1}{F(D)}$ ، ومن ثم سنتعرض لبعض خواصه الأساسية .

نعرف الآن المؤثر $\frac{1}{F(D)}$ ، حيث $F(D)$ كثير حدود معطى بالعلاقة (5.46) .

تعريف (٥) :

إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً في مجال ما ، فإن $\frac{1}{F(D)}f(x)$ هو بالتعريف : الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$F(D)\,y=f(x)$$

ويسمى $\frac{1}{F(D)}$ بالمؤثر العكسي .

نتيجة (١) :

إذا أثر المؤثر D على تابع $f(x)$ يعطي مشتقه ، وإذا أثـر $\frac{1}{D}$ فـي تـابع $f(x)$ لحصلنا على :

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{D^2} f(x) = \iint f(x)\,dx\,dx, \ldots, \frac{1}{D^n} f(x) = \underbrace{\iiint \ldots \int}_{n \text{ مرة}} [f(x)\,dx]\,dx\,dx \ \ldots\ dx$$

إذاً ، المؤثر $\frac{1}{D}$ يسمى مؤثراً تكاملياً .

فمثلاً : $D(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{1}{D} \sin x = -\cos x$

مبرهنة (٨) :

إذا كان $\frac{1}{F(D)}$ المؤثر العكسي ، و a عدد ثابـت ، و $V(x)$ تـابع لـ x ، فـإن العلاقات الآتية تكون محققة :

$$\frac{1}{F(D)} [a f(x)] = a\Big[\frac{1}{F(D)} f(x)\Big] \qquad (5.44)$$

$$\frac{1}{F(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{F(a)} \quad ; \quad F(a) \neq 0 \qquad (5.45)$$

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)} \quad ; \quad F(-a^2) \neq 0 \qquad (5.46)$$

$$\frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)} \quad ; \quad F(-a^2) \neq 0 \qquad (5.47)$$

$$\frac{1}{F(D)} e^{ax}.V(x) = e^{ax}.\frac{1}{F(D+a)} V(x) \qquad (5.48)$$

البرهان : لنبرهن على العلاقة (5.45) :

إن $F(a) \neq 0$ فرضاً ، واستناداً إلى :

$$F(D)e^{ax} = e^{ax}F(a)$$

وأثرنا بالمؤثر العكسي $\frac{1}{F(D)}$ على العلاقة السابقة ، نجد :

$$\frac{1}{F(D)}[F(D)e^{ax}] = \frac{1}{F(D)}[e^{ax}F(a)]$$

ومنه نجد أن :

$$e^{ax} = \frac{1}{F(D)}[e^{ax}F(a)]$$

وباعتبار أن $F(a)$ ثابت ، إذاً :

$$e^{ax} = F(a)\frac{1}{F(D)}e^{ax}$$

وبما أن $F(a) \neq 0$ ، فإن :

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{F(a)}$$

وبالطريقة نفسها ، يمكننا البرهان على العلاقات الباقية ، وذلك اعتماداً على خـــواص المؤثر $F(D)$.

ولإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية $F(D)\ y = f(x)$ ذات الأمثال الثابتة وغير المتجانسة ، بالعلاقة الآتية :

$$y = \frac{1}{F(D)}f(x)$$

إن حساب الطرف الأيمن من هذه العلاقة يمكن إجراؤه بتمييز حالات عدة :

الحالة الأولى : إذا كانت $f(x)$ من الشكل $f(x) = e^{ax}$ ، عندئذٍ نميز حالتين :

آ- a ليس حلاً (جذراً) للمعادلة المميزة ، أي $F(a) \neq 0$.

نبدل في المعادلة المميزة كل k بـــ a ، في هذه الحالة فإن الحل الخاص يعطـــى بالعلاقة الآتية :

$$y = \frac{e^{ax}}{F(a)}$$

ب- a جذراً للمعادلة المميزة مكرراً k مرة، $(k \geq 1)$ ، أي أن $F(a) = 0$.

أيضاً نبدل في المعادلة المميزة كل k بـ a ، في هذه الحالة نجد الحل الخاص يعطى بالعلاقة الآتية :

$$y_p = \frac{x^k}{k\,!}\,\frac{1}{g(a)}\,e^{ax}$$

بما أن a جذر مكرر k مرة ، إذاً a هو جذر مكرر k مرة لكثيرة الحدود المؤثر $F(D)$ أي إن $F(D)$ يقبل القسمة على $(D-a)^k$ ، وبالتالي :

$$F(D) = (D-a)^k . g(D)$$

حيث $g(a) \neq 0$.

وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{F(D)}\,e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^k . g(D)}\,e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^k . g(a)}\,e^{ax}$$

مثال (٢٥) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\,y = e^{4x}$$

الحـــل : في البداية نوجد الحل y_c :

من المعادلة المميزة : $K^3 - 2K^2 - 5K + 6 = 0$

والتي تكتب بالشكل الآتي :

$$(K-1)\,(K-3)\,(K+2) = 0$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة هي :

$$K_1 = 1 \;;\; K_2 = 3 \;;\; K_3 = -2$$

وبالتالي فإن الحل المتمم y_c هو :

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

ولإيجاد الحل الخاص y_p ، نلاحظ أن :

$$F(a) = F(4) \neq 0$$

وبالتالي فإن $a = 4$ ليس جذراً للمعادلة المميزة ، عندئذٍ فإن الحل الخاص يعطى بالشكل الآتي :

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{4x} =$$

$$= \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)} e^{4x} = \frac{1}{3\times 1\times 6} e^{4x} = \frac{1}{18} e^{4x}$$

وبذلك يكون الحل العام :

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{18} e^{4x}$$

مثال (٢٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\, y = (e^{2x} + 3)^2$$

الحل : من المثال السابق (٢٥) نجد أن الحل المنسم هو :

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

ويمكن كتابة المعادلة التفاضلية المعطاة بالشكل الآتي :

$$(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\, y = e^{4x} + 6e^{2x} + 9$$

عندئذ فإن الحل الخاص y_p يمثل ثلاثة حلول خاصة :

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} + y_{3p}$$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} (e^{4x} + 6e^{2x} + 9) =$$

$$= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{4x} + \frac{6}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{2x} +$$

$$+ \frac{9}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{0x}$$

وهنا نلاحظ أن كلاً من :

$$F(4) \neq 0 \;\; ; \;\; F(2) \neq 0 \;\; ; \;\; F(0) \neq 0$$

وبالتالي فإن كلاً من $a = 0$; $a = 2$; $a = 4$ على الترتيب ، ليست جذوراً للمعادلة المميزة ، عندئذٍ فإن الحل الخاص هو :

$$y_p = \frac{1}{3\times(1)\times 6}\, e^{4x} + \frac{6}{1\times(-1)\times 4}\, e^{2x} + \frac{9}{(-1)\,(-3)\times 2}$$

$$= \frac{e^{4x}}{18} - \frac{3e^{2x}}{2} + \frac{3}{2}$$

عندئذٍ فإن الحل العام هو :

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{18} - \frac{3e^{2x}}{2} + \frac{3}{2}$$

مثال (٢٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D-1)^2 (D+3)\, y = 12 e^{x}$$

الحـــــل : في البداية نوجد الحل لـــ y_c .

من المعادلة المميزة :

$$(K-1)^2 (K+3) = 0$$

نجد أن $K_1 = K_2 = 1$: جذر مكرر مرتين ، و $K_3 = -3$ جذر بسيط ، وبالتالي فإن الحل المتمم كما يلي :

$$y_c = (c_1 x + c_2) e^{x} + c_3 e^{-3x}$$

ولإيجاد الحل الخاص y_P ، نلاحظ أن $a = 1$ جذراً مكرراً مرتين لـــ :

$$F(a) = F(1) = 0$$

وبالتالي فإن الحل الخاص :

$$y_p = \frac{12}{(D-1)^2 (D+3)}\, e^{x} = \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{12}{4}\, e^{x}$$

$$= \frac{12}{8} x^2.e^x = \frac{3}{2} x^2.e^x$$

الحالة الثانية : إذا كانت $f(x)$ تابع مثلثي من الشكل :

$$A \cos ax \quad \text{أو} \quad B \sin ax$$

عندئذٍ نميز حالتين :

أ- إذا كان ai ليس جذراً للمعادلة المميزة $F(K) = 0$.

عندئذٍ نستبدل كل D^2 بـ $-a^2$ ، ويكون الحل الخاص معطى كما يلي :

$$y_p = \frac{1}{F(D)} (A\cos ax) = \frac{1}{F(-a^2)} (A\cos ax) \; ; \; F(-a)^2 \neq 0$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} (B\sin ax) = \frac{1}{F(-a^2)} (B\sin ax) \; ; \; F(-a)^2 \neq 0$$

مثال (٢٨) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2 + 4) y = \sin 3x$$

الحـــل : لنوجد الحل لـ y_c من المعادلة المميزة الآتية :

$$K^2 + 4 = 0 \Rightarrow K_1 = 2i \; ; \; K_2 = -2i$$

وبالتالي فإن الحل المتمم :

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نلاحظ أن $a = 3$ ليس جذراً للمعادلة المميزة $K^2 + 4 = 0$ ، وبالتالي فإن الحل الخاص :

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} (\sin 3x) = \frac{1}{F(-a^2)} (\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{-(3)^2 + 4} \sin 3x = -\frac{1}{5} \sin 3x$$

وبذلك نوجد الحل العام :

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$$

مثال (٢٩) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^4+10D^2+9)\,y=\cos(2x+3)$$

الحـــل : لنوجد y_c من المعادلة المميزة الآتية :

$$K^4+10K^2+9=0 \Rightarrow K_1=i\ ;\ K_2=-i\ ;\ K_3=3i\ ;\ K_4=-3i$$

وهي جذور تخيلية مختلفة ، وبالتالي فإن الحل المتمم :

$$y_c=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نلاحظ أن $a=2$ ليس جذراً للمعادلة المميزة وبالتـــالي فـــإن الحل الخاص :

$$y_p=\frac{1}{(D^2+1)\,(D^2+9)}\cos(2x+3)=$$

$$=\frac{1}{(-3)\,(5)}\cos(2x+3)=\frac{-1}{15}\cos(2x+3)$$

وبالتالي فإن الحل العام :

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x-\frac{1}{15}\cos(2x+3)$$

ملاحظة (٢) : سنوف نستعين بقوانين أيلر الشهيرة في الحالة التالية من الفقرة (ب) .

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (5.49)$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x \qquad (5.50)$$

ونلاحظ أن :

$$\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})\ ;\ \cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})$$

ب- إذا كان ai جذراً للمعادلة المميزة $F(K)=0$ ، نرد هذه الحالة إلى حالة التـــابع الأسي ، وذلك على الشكل الآتي :

*- إذا كان $f(x)=B\sin ax$ ، عندئذٍ :

$$y_p=\mathrm{Im}\left[\frac{1}{F(D)}\,e^{aix}\right]$$

**- إذا كان $f(x)=A\cos ax$ ، عندئذٍ :

$$y_p=\mathrm{Re}[\frac{1}{F(D)}e^{aix}]$$

مثال (٣٠) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2+1)y=\sin x$$

الحـــل :

لحساب y_c لدينا المعادلة المميزة الآتية :

$$K^2+1=0 \Rightarrow K_1=i \; ; \; K_2=-i$$

وبالتالي فإن الحل المتمم :

$$y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$$

ولإيجاد الحل الخاص y_c ، نلاحظ أن $f(x)=\sin x$.

ومنه $ai=i$ جذر للمعادلة المميزة ، وبالتالي فإن :

$$y_p=\mathrm{Im}[\frac{1}{D^2+1}e^{ix}]=\mathrm{Im}[\frac{1}{(D-i)(D+i)}e^{ix}]$$

$$=\mathrm{Im}[\frac{x}{1!}\frac{1}{2i}e^{ix}]=\mathrm{Im}[\frac{x}{2i}e^{ix}]=\mathrm{Im}[\frac{xi}{2i^2}(\cos x+i\sin x)]$$

$$=\mathrm{Im}[\frac{-xi}{2}(\cos x+i\sin x)]=\mathrm{Im}[\frac{x}{2}\cos xi+\frac{x}{2}\sin x]$$

$$\Rightarrow y_p=-\frac{x}{2}\cos x$$

وبالتالي فإن الحل العام : $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x$

مثال (٣١) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^4+D^2+1)y=8\cos x$$

الحـــــل :

$$y_p = \frac{1}{D^4 + D^2 + 1} 8\cos x = 8\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{D^4 + D^2 + 1} e^{ix}$$
$$= 8\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-1+1} e^{ix} = 8\,\mathrm{Re}(\cos x + i\sin x)$$
$$= 8\cos x$$

الحالة الثالثة : إذا كانت $f(x) = x^m$ (حيث m : عدد صحيح موجب) .

عندئذٍ ، فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$F(D)\,y = x^m$$

هو :

$$y_p = \frac{1}{F(D)} x^m$$

في هذه الحالة نقوم بنشر المؤثر $\frac{1}{F(D)}$ بجوار $D = 0$ ، كما لو كان D عدداً جبرياً فنحصل على كثير حدود في D ، مع العلم أن :

$$D^{m+1}.x^m = 0$$

أي يجب أن نتوقف في النشر من أجل D^m فقط .

إذاً :

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + ... + a_m D^m)\,x^m \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

مثال (٣٢) : احسب المقدار :

$$\frac{1}{1-D}(x^2 + 2x)$$

الحـــــل : اعتماداً على مفكوك مكلورين للتوابع نكتب :

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + ...$$

وبالتالي نجد :

$$\frac{1}{1-D}=(x^2+2x)=(1+D+D^2+D^3+\ldots)\,(x^2+2x)$$

$$=(x^2+2x)+(2x+2)+0$$

$$=x^2+4x+2$$

مثال (٣٣) : احسب المقدار : $\frac{1}{3+D}=(x^2)$

الحـــل :

$$\frac{1}{3+D}=(x^2)=\frac{1}{3[1+(\frac{D}{3})]}=\frac{1}{3}\left[(\frac{1}{1+(\frac{D}{3})})\,(x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{D}{3}+(\frac{D}{3})^2+\ldots\right](x^2)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{D}{3}+\frac{D^2}{3}+\ldots\right)(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}\,(x^2-\frac{1}{3}\,(2x)+\frac{2}{9}+\ldots)$$

مثال (٣٤) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$D^2(D+1)y=x+4$$

الحـــل :

$$y=\frac{1}{D^2(D+1)}\,(x+4)=\frac{1}{D^2}\left\{(1-D)(x+4)\right\}$$

لأن : $\frac{1}{1+D}=1-D+\ldots$

إذاً :

$$y=\frac{1}{D^2}\,(x+3)=\frac{1}{D}\,(\frac{x^2}{2}+3x)$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}\,x^2$$

وبالتالي إن الحل الخاص هو :

$$y_p = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}\,x^2$$

ملاحظة هامة (٣) :

إن عملية نشر $\dfrac{1}{F(D)}$ تتم عملياً بتقسيم الواحد على $F(D)$ ، بعد ترتيب $F(D)$ تصاعدياً ، ونستمر في عملية التقسيم حتى نحصل على ناتج القسمة $Q(D)$ من الدرجة m ، بحيث يكون درجة كل حد من حدود باقي القسمة $R(D)$ أكبر تماماً من m .

مثال (٣٥) : أوجد حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2 + 6D + 13)\,y = 13x^2 - x + 13$$

الحل : نقسم 1 على $F(D) = D^2 + 6D + 13$ ، ونتابع التقسيم حتى تصبح درجة أي حد من حدود باقي القسمة أكبر أو تساوي ثلاثة ويتم ذلك كما يلي :

$$\begin{array}{l|l}
1 & 13 + 6D + D^2 \\
\hline
1 + \frac{6}{13}D + \frac{1}{13}D^2 & \frac{1}{13} - \frac{6}{169}D + \frac{23}{2197}D^2 \\
\hline
-\frac{6}{13}D - \frac{1}{13}D^2 & \\
-\frac{6}{13}D - \frac{36}{169}D^2 - \frac{6}{169}D^3 & \\
\hline
\frac{23}{169}D^2 + \frac{6}{169}D^3 & \\
\frac{23}{169}D^2 + \frac{138}{2197}D^3 + \frac{23}{2197}D^4 &
\end{array}$$

إذاً ناتج القسمة هو :

$$Q(D) = \frac{1}{13} - \frac{6}{169}D + \frac{23}{2197}D^2$$

وبالتالي يكون الحل الخاص المطلوب هو :

$$y_p = \frac{1}{D^2+6D+13}(13x^2 - x + 13) =$$

$$= (\frac{1}{13} - \frac{6}{169}D + \frac{23}{2197}D^2)(13x^2 - x + 13) =$$

$$= x^2 - \frac{x}{13} + \frac{22}{13} - \frac{12}{13}x + \frac{6}{169} + \frac{64}{169} = x^2 - x + 2$$

الحالة الرابعة : إذا كانت $f(x) = e^{ax}.P(x)$ (حيث $P(x)$ تابع ما) ، فإن :

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{ax}.P(x)$$

ومنه نجد :

$$y_p = e^{ax}.\frac{1}{F(D+a)} P(x)$$

مثال (٣٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2 - 4)\,y = x^2 e^{3x}$$

الحـــل : لنوجد y_c من المعادلة المميزة نجد :

$$K^2 - 4 = 0 \Rightarrow K_1 = 2\ ;\ K_2 = -2$$

وبالتالي فإن الحل المتمم :

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

و لإيجاد الحل الخاص نكتب :

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{ax} P(x) = \frac{1}{D^2-4} e^{3x} x^2$$

$$= e^{3x} \frac{1}{(D+3)^2 - 4} x^2$$

$$= e^{3x} \frac{1}{D^2+6D+5} x^2$$

$$= e^{3x} (\frac{1}{5} - \frac{6}{25}D + \frac{31}{125}D^2 + ...) x^2$$

$$= e^{3x}\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{12}{25}x + \frac{62}{125}\right)$$

ويكون الحل العام :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{3x}\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{12}{25}x + \frac{62}{125}\right)$$

مثال (٣٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2 + 2D + 4)\,y = e^x \sin 2x$$

الحـــل : لنوجد y_c من المعادلة المميزة نجد :

$$K^2 + 2K + 4 = 0 \Rightarrow K_1 = -1 + \sqrt{3}\,i \;;\; K_2 = -1 - \sqrt{3}\,i$$

وبالتالي فإن :

$$\alpha = -1 \;;\; \beta = \sqrt{3}$$

ومنه ، فإن الحل المتمم :

$$y_c = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{3}\,x + c_2 \sin\sqrt{3}\,x)$$

لنوجد الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D + 4}\,e^x \sin 2x = e^x \frac{1}{(D+1)^2 + 2(D+1) + 4}\sin 2x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 + 4D + 7}\sin 2x = e^x \frac{1}{3D + 3}\sin 2x$$

$$= e^x \frac{4D - 3}{16D^2 - 9}\sin 2x = -\frac{e^x}{73}(4D - 3)\sin 2x$$

$$= -\frac{e^x}{73}(8\cos 2x - 3\sin 2x)$$

وبالتالي فإن الحل العام :

$$y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{3}\,x + c_2 \sin\sqrt{3}\,x) + \frac{e^x}{73}(8\cos 2x - 3\sin 2x)$$

الحالة الخامسة : إذا كانت $f(x) = x\,P(x)$ فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$F(D)\,y = x\,P(x)$$

يعطى بالشكل الآتي :

$$y_p = \frac{1}{F(D)}\,x\,P(x) = x\,\frac{1}{F(D)}\,P(x) - \frac{F'(D)}{\{F(D)\}^2}\,P(x)$$

مثال (٣٨) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2+3D+2)\,y = x\sin 2x$$

الحـــــل : لنوجد الحل المتمم y_c من المعادلة المميزة فنجد :

$$(K^2+3K+2)=0 \;\Rightarrow\; K_1=-1\;;\;K_2=-2$$

فإن الحل المتمم : $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

لنوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية كما يلي :

$$y_p = \frac{1}{D^2+3D+2}\,x\sin 2x =$$

$$= x\,\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x - \frac{(2D+3)\sin 2x}{(D^2+3D+2)^2}$$

$$= x\,\frac{1}{3D-2}\sin 2x - \frac{(2D+3)}{D^4+6D^3+13D^2+12D+4}\sin 2x$$

$$= x\,\frac{1}{3D-2}\sin 2x - \frac{2D+3}{(-4)^2+6(-4)D+13(-4)+12D+4}\sin 2x$$

$$= x\,\frac{3D+2}{9D^2-4}\sin 2x + \frac{1}{4}\,\frac{(2D+3)\,(3D-8)}{9D^2-64}\sin 2x$$

$$= x\,\frac{-x(3\cos 2x+\sin 2x)}{20} + \frac{24\sin 2x+7\cos 2x}{200}$$

وبالتالي فإن الحل الخاص :

$$y_p = -\frac{30x-7}{200}\cos 2x - \frac{5x-12}{100}\sin 2x$$

عندئذٍ فإن الحل العام :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - \frac{30x-7}{200}\cos 2x - \frac{5x-12}{100}\sin 2x$$

مثال (٣٩) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2-4D+3)\,y=5xe^{3x}+e^{x}\cos 2x$$

الحـــل : لإيجاد الحل الخاص نطبق المبرهنة (٧) :

$$=5e^{3x}\left[\frac{1}{(D+3)^2-4(D+3)+3}\,x\right]+e^{x}\left[\frac{1}{(D+1)^2-4(D+1)+3}\cos 2x\right]$$

$$=5e^{3x}\,\frac{1}{D^2+2D}\,x+e^{x}\,\frac{1}{D^2-2D}\cos 2x$$

لنحل كل واحدة على حدة فنجد :

١- لنوجد الحل الخاص الأول y_{1p} :

$$y_{1p}=5e^{3x}\,\frac{1}{D^2+2D}=5e^{3x}\,\frac{1}{D}\,\frac{1}{D+2D}\,x$$

$$=5e^{3x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,D\right)x$$

$$=\frac{5}{4}\,e^{3x}\,(x^2-x)$$

٢- لنوجد الحل الخاص الثاني y_{2p} :

$$y_{2p}=e^{x}\,\frac{1}{D^2-2D}\cos 2x$$

من أجل ذلك نكتب :

$$e^{x}\left[\frac{e^{2ix}}{D^2-2D}\right]=e^{x}\left[\frac{e^{2ix}}{-4i-4}\right]$$

$$=e^{x}\left[\frac{(4i-4)}{32}\,e^{2ix}\right]$$

$$=e^{x}\left[\left(\frac{i}{8}-\frac{1}{8}\right)(\cos 2x+i\sin 2x)\right]$$

$$=e^{x}\left[\frac{i}{8}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{8}-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{i}{8}\sin 2x\right]$$

نأخذ القسم الحقيقي فنجد الحل الخاص الثاني هو :

$$y_{2p} = -e^{x}\left[\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right]$$

وبالتالي فالحل الخاص النهائي هو :

$$y_p = y_1 p + y_2 p$$

$$y_p = \frac{5}{4}e^{3x}(x^2 - x) - e^{x}\left[\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right]$$

مثال (٤٠) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(D^2 - 2D + 1)\,y = 4e^{x}(x+1)\sin 2x$$

الحـــل : ويكون الحل الخاص هو :

$$y_p = \frac{1}{(D^2 - 2D + 1)}\,4e^{x}(x+1)\sin 2x$$

$$= 4\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{D^2 - 2D + 1}\,e^{x}(x+1)e^{2ix}$$

$$= 4\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(D-1)^2}\,e^{(1+2i)x}.(x+1) = 4\,\mathrm{Im}\,e^{(1+2i)x}\,\frac{1}{(D+1+2i-1)^2}\,(x+1)$$

$$= 4\,\mathrm{Im}\,e^{x}.e^{2ix}\,\frac{1}{-4+4iD+D^2}\,(x+1)$$

لنحسب المقدار :

$$\begin{array}{l|l} 1 & -4+4iD+D^2 \\ \hline 1 - iD - \frac{1}{4}D^2 & -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}D \\ \hline +iD + \frac{1}{4}D^2 & \\ \hline iD + D^2 - \frac{i}{4}D^3 & \\ \hline \frac{-3}{4}D^2 + \frac{i}{4}D^3 & \end{array}$$

إذاً :

$$\frac{1}{-4+4iD+D^2}(x+1) = -\frac{1}{4}(1+iD)(x+1)$$

$$= -\frac{1}{4}(x+1+i)$$

بالتعويض نجد :

$$y_p = 4\,\mathrm{Im}\; e^{x}.e^{2ix}\;\; \frac{-1}{4}(x+1+i)$$

$$y_p = -\mathrm{Im}\; e^{x}(\cos 2x + i\sin 2x)\,(x+1+i)$$

$$y_p = -e^{x}[\cos 2x + (x+1)\sin 2x\,]$$

وهو المطلوب .

تمارين الفصل الخامس :

١- أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

1	$\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$	10	$(D-1)^2y=0$
2	$\frac{d^2y}{dx^2}-10\frac{dy}{dx}+29y=0$	11	$(D-2)\,(D+2)\,(D+3)^2y=0$
3	$y''+y'-6y=0$	12	$(D+1)^3(D-4)y=0$
4	$y'''-y''-12y'=0$	13	$(D^2-2D+10)y=0$
5	$15y''-31y'+14y=0$	14	$(D^3+4D)y=0$
6	$y''+6y'+9y=0$	15	$(D^2+2D+3)\,(D^2-D+1)y=0$
7	$y''+3y=5y'$	16	$(D^2-2D+5)^2y=0$
8	$y''+4y'+3y=0$	17	$(D^4+4D)y=0$
9	$y''=ky^2$		

٢- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية اعتماداً على طريقة مقارنة المعاملات (طريقة التفتيش) :

1	$y''+2y'-3y=42e^{4x}$		5	$(D^2+1)y=(x^2+x)e^x$
2	$y''+y=3+6e^x$		6	$(D-1)^3 y=e^x\cos x$
3	$y''+y'=6\sin 2x$		7	$(D^3-3D^2-6D+8)y=xe^{-3x}$
4	$(D^2-D+1)y=x^3-3x^2+1$		8	$(D^2-1)y=x^2\sin 3x$

٣- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية اعتماداً على طريقة لاغرانج أو (طريقة تغيير البارامترات) .

1	$(D^2+1)y=\cos x$		5	$(D^2-6D+9)y=\dfrac{e^{3x}}{x^2}$
2	$(D^2+4)y=4\cos^2 2x$		6	$(D^2-2D)y=e^x\sin x$
3	$(D^2-1)y=e^{-x}\sin e^{-x}+\cos e^{-x}$		7	$(D^3+D)y=\csc x$
4	$(D^2-1)y=(1+e^{-x-2})$			

٤- أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات الآتية :

1	$(D^2+D+1)y=e^{3x}+6e^x-3e^{-2x}+5$			
2	$(D^3+D^2+D+1)y=e^x+e^{-x}+\sin x$			
3	$(D^2+2)y=x^3+x^2+e^x+e^{2-x}+\cos 3x$			
4	$(D^2-2D-1)y=e^x\cos x$			
5	$(D^2-1)y=e^x$		8	$(D^2-1)y=x^2$
6	$(D-2)^2 y=e^x+xe^{2x}$		9	$(D-2)^2 y=\dfrac{e^{2x}}{x^2}$
7	$(D^4-1)y=\sin 2x$		10	$(D^2-1)y=xe^{3x}$

٥- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية :

1	$(x^2D^2-3xD+4)y=x+x^2\ln x$
2	$(x^2D^2-2xD+2)y=\ln x^2-\ln x^2$
3	$(x^3D^3+2x^2D^2)y=x+\sin(\ln x)$
4	$x^3y'''+xy'-y=3x^4$
5	$[(x+1)^2D^2+(x+1)D-1]y=\ln(x+1)^2+x-1$
6	$(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'-12y=6x$
7	$[(3x+2)^2D^2+3(3x+2)D-36]=3x^2+4x+1$

٦- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية :

1	$(D^2+4)y=\sin 3x$
2	$(D^4+10D^2+9)y=\cos(2x+3)$
3	$(D^3+D^2+D+1)y=\sin 2x+\cos 3x$
4	$(2D^2+2D+3)y=x^2+2x-1$
5	$(D^3-2D+4)y=x^4+3x^2-5x+2$
6	$(D^4+2D^3-3D^2)=x^2+3e^{2x}+4\sin x$
7	$(D^2-4)y=x^4e^{3x}$
8	$(D^2+2D+4)y=e^x\sin 2x$
9	$(D^2+3D+2)y=x\sin 2x$
10	$(D^2-4D+3)y=2xe^{3x}+3e^x\cos 2x$

٧- أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية :

1	$y''+6y'+10y=3xe^{-3x}.\cos x-2e^{3x}.\cos x$
2	$y''-8y'+20y=5xe^{3x}.\sin 2x$
3	$(D^2-4D+3)y=2xe^{3x}+3e^{x}\cos 2x$
4	$(D^2-2D+1)y=e^{x}+e^{2x}\cos x$
5	$(D^2+D+2)y=x\sin x+\sin x$
6	$(D^2+12)y=64e^{2x}(x+6)\cos x.\sin 3x$

Damascus University

الفصل السادس

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى
غير المحلولة بالنسبة للمشتق

الشكل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى غير محلولة بالنسبة للمشتق هو :

$$F(x,y,y')=0 \qquad (6.1)$$

وتسمى في بعض الأحيان معادلة تفاضلية ضمنية من المرتبة الأولى .

إن حل هذه المعادلة على الأغلب ، إما أن يكون لـه الـشكل الـضمني ، أو الـشكل الوسيطي ، فنقول إن المعادلة :

$$\phi(x,y)=0 \qquad (6.2)$$

تُعرف حلاً ضمنياً للمعادلة (6.1) إذا عرفت هذه المعادلة y كتابع ضمني بالنسبة إلى x وكان هذا التابع حلاً للمعادلة (6.1) .

أو نقول إن التابعين :

$$y=\psi(t)\ ;\ \ x=\varphi(t)$$

يمثلان حلاً وسيطياً للمعادلة (6.1) على مجال ما إذا تحققت المطابقة الآتية من أجـل جميع قيم t :

$$F\Big[\varphi(t)\ ,\ \psi(t)\ ,\ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big]=0 \qquad (6.3)$$

سوف نستعرض بعض أنواع المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى وغير المحلولة بالنسبة للمشتق .

٦-١ المعادلة التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة إلى y' :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية :

$$(y')^n + A_1(x,y)(y')^{n-1} + A_2(x,y)(y')^{n-2} + \ldots\ldots + \\ + A_{n-1}(x,y)\,y' + A_n(x,y) = 0 \qquad (6.4)$$

في بعض الحالات يمكن حل المعادلة (6.4) بالنسبة للمشتق y' وذلك بوضع $y' = P$ في المعادلة (6.4) نجد :

$$P^n + A_1(x,y)P^{n-1} + A_2(x,y)P^{n-2} + \ldots\ldots + \\ + A_{(n-1)}(x,y)P + A_n(x,y) = 0 \qquad (6.5)$$

حيث :

$A_1(x,y)\ ;\ A_2(x,y)\ ,\ldots\ldots,\ A_n(x,y)$ توابع مستمرة في مجال ما .

وهي معادلة جبرية من الدرجة n مكتوبة على شكل كثير حدود بالنسبة إلى P .

إذا استطعنا كتابة الطرف الأيسر على شكل جداء أقواس ، وكل قوس عبارة عن حد يحوي P من الدرجة الأولى ، أي :

$$[P - f_1(x,y)]\,[P - f_2(x,y)]\,\ldots\ldots\,[P - f_n(x,y)] = 0 \qquad (6.6)$$

ومنه يكون :

$$\left.\begin{array}{l} P - f_1 = 0 \\ \qquad\quad \text{أو} \\ P - f_2 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ P - f_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P - f_i(x,y) = 0 \qquad (6.7)$$

حيث : $1 \le i \le n$

إن العلاقة (6.7) تعني أن $y' = f_i(x,y)$ ، وهي من الحالات التي درسناها سابقاً .

وبإيجاد الحل العام لكل معادلة من العلاقة (6.7) ، وليكن :

$$y = \varphi_1(x,c)\ ,\ y = \varphi_2(x,c)\ ,\ldots\ldots,\ y = \varphi_n(x,c) \qquad (6.8)$$

عندئذٍ يكون الحل العام للمعادلة (6.4) أو (6.5) هو :

$$[y - \varphi_1(x,c)]\,[y - \varphi_2(x,c)]\,\ldots\ldots\,[y - \varphi_n(x,c)] = 0$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة n بالنسبة إلى الثابت c .

مثال (١) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'^2 + (x+y)\,y' + x\,y = 0$$

الحـــل : نضع $y' = P$ نجد :

$$P^2 + (x+y)\,P + x\,y = 0$$

$$(p+x)\,(p+y) = 0$$

إما :

$$p + x = 0 \Rightarrow y' = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow dy = -x\,dx$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$y = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow (y + \frac{x^2}{2} - c) = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

أو :

$$p + y = 0 \Rightarrow p = -y \Rightarrow y' = -y$$

وبالتالي :

$$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

بالمكاملة نجد أن :

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x \Rightarrow y = c\,e^{-x}$$

$$\Rightarrow (y - c\,e^{-x}) = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

من العلاقة (I) والعلاقة (II) نجد أن الحل العام هو :

$$(y + \frac{x^2}{2} - c)\,(y - c\,e^{-x}) = 0$$

مثال (٢) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'^2 + y\,y' - x(x+y) = 0$$

الحـــل : نضع $y' = P$ نجد :

$$P^2 + yP - x(x+y) = 0$$

وهذه معادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة إلى P .

$$\Delta = y^2 - 4[-x(x+y) = 0$$

$$\Delta = y^2 + 4x^2 + 4xy = (y+2x)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = y \dot{+} 2x$$

$$P_1 = \frac{-y+y+2x}{2} = x$$

$$P_2 = \frac{-y-y-2x}{2} = \frac{-2y-2x}{2} = -y-x$$

إما $P = P_1$ ، أي :

$$y' = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x$$

$$\Rightarrow dy = x\,dx$$

بمكملة الطرفين نجد أن :

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow (y - \frac{x^2}{2} - c) = 0 \qquad (I)$$

أو: $P = P_2$ ، أي :

$$y' = -y - x$$

ومنه نجد :

$$y' + y = -x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية لها عامل تكميل :

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx} = e^{\int dx} = e^{x}$$

وحلها العام يعطى بالشكل الآتي :

$$y = \frac{1}{e^{x}}\left[\int (-xe^{x}dx) + c\right]$$

وهذا تكامل بالتجزئة بحسابه نجد :

$$y = e^{-x}[(-xe^{x} + e^{x}) + c]$$

وبالتالي نجد :

$$y = (-x+1) + ce^{-x}$$

ومنه :

$$[y - (-x+1) - ce^{-x}] = 0 \qquad (II)$$

من العلاقة (I) والعلاقة (II) نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$[y - \frac{x^2}{2} - c][y - (-x+1) - ce^{-x}] = 0$$

٦-٢ المعادلة التفاضلية التي لا تحوي x أو لا تحوي y :

أولاً- المعادلة التفاضلية لا تحوي x :

إن الشكل العام لهذه المعادلة هو :

$$F(y, y') = 0 \qquad (6.9)$$

لإيجاد الحل العام لهذا النوع من المعادلات ، نفرض بدايةً أن $y = \varphi(t)$ ، ثم بالاعتماد على المعادلة (6.9) نجد قيمة y' بدلالة t ، ولتكن $y' = \psi(t)$.

كما أننا يمكن أن نفرض أولاً $y' = \psi(t)$ ، ثم نبدل في المعادلة (6.9) فنحصل على قيمة y .

المهم في كلتا الحالتين أن نحصل على التمثيل الوسيطي بالشكل :

$$y = \varphi(t) \quad ; \quad y' = \psi(t) \qquad (6.10)$$

ومنه نجد :

$$dy = \varphi'(t)\,dt \quad ; \quad dy = \psi(t)\,dx$$

بالمساواة نجد أن :

$$\psi(t)\,dx = \varphi'(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$$

بالمكاملة نجد :

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + c$$

إذاً الحل العام المطلوب يعطي وسيطياً بالمعادلتين :

$$y = \varphi(t) \quad ; \quad x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + c$$

ولإيجاد الحل العام ديكارتياً ، نحذف t بين المعادلتين السابقتين .

مثال (٣) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y = \ln(1 + y'^2)$$

الحـــــل : المعادلة لا تحوي x ، وبالتالي لإيجاد الحل العام للمعادلة المعطاة نفـرض أن $y' = t$ ، فيكون :

$$y = \ln(1 + t^2) \qquad (\mathrm{I})$$

$$y' = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t \Rightarrow dy = t\,dx \qquad (\mathrm{II})$$

وكذلك بمفاضلة العلاقة (I) نجد :

$$dy = \frac{2t\,dt}{1+t^2} \qquad (\mathrm{III})$$

بالمساواة بين (II) و (III) نجد :

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$x = 2\,arctg\,t + c$$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى وسيطياً بالعلاقتين :

$$y = \ln(1+t^2) \;\; ; \;\; x = 2\,arctg\,t + c$$

مثال (٤) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y = 2y'^4 - 7y'^3 - 3y' + 2$$

حيث a : ثابت .

الحـــل : لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة ، نفـرض أن $y' = t$ ، نبـدل فـي المعادلة التفاضلية المعطاة ، فنجد :

$$y = 2t^4 - 7t^3 - 3t + 2$$

وبما أن :

$$y' = t \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = t \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{t}$$

نعوض فنجد :

$$dx = \frac{(8t^3 - 21t^2 - 3)}{t}\,dt$$

بالمكاملة نجد :

$$x = \frac{8}{3}t^3 - \frac{21}{2}t^2 - 3\ln|t| + c$$

والحل العام يعطى وسيطياً بالعلاقتين :

$$x = \frac{8}{3}t^3 - \frac{21}{2}t^2 - 3\ln|t| + c$$

$$y = 2t^4 - 7t^3 - 3t + 2$$

ثانياً- المعادلة التفاضلية لا تحوي y :

إن الشكل العام لهذه المعادلة هو :

$$F(x, y') = 0 \qquad (6.11)$$

إن المعادلة التفاضلية (6.11) غير محلولة بالنسبة إلى y' ، فيمكن تمثيلها وسيطياً بالشكل الآتي :

$$y' = \psi(t) \quad ; \quad x = \varphi(t)$$

ومنه :

$$dy - \psi(t)\,dx \quad ; \quad dx = \varphi'(t)\,dt$$

بتعويض قيمة dx في dy نجد :

$$dy = \psi(t).\varphi'(t)\,dt$$

بالمكاملة نجد أن :

$$y = \int \psi(t).\varphi'(t)\,dt + c$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية (6.11) يعرف وسيطياً بالعلاقتين :

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \int \psi(t).\varphi'(t)\,dt + c \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

وللحصول على الحل العام الديكارتي ، نقوم بحذف t بين المعادلتين في (6.12) .

مثال (٥) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x - y' \ln y' = 0$$

الحـــل : نفرض أن $y' = t$ ، ونبدل في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$x = t \ln t$$

وبالتالي نجد :

$$dx = (1 + \ln t)\,dt$$

كذلك لدينا :

$$dy = t\,dx$$

نبدل قيمة dx في dy ، نجد :

$$dy = t(1+\ln t)\,dt$$

بالمكاملة نحصل على العلاقة :

$$y = \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4} + c$$

والحل العام المطلوب يعطى وسيطياً بالمعادلتين :

$$y = \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4} + c$$
$$x = t\ln t$$

مثال (٦) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x = y' + y'^3$$

الحـــــل : نفرض أن $y' = t$ ، ونبدل في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$x = t + t^3$$

إذاً :

$$dx = (1+3t^2)\,dt$$

نعلم أن :

$$dy = t\,dx$$

بتعويض قيمة dx نجد :

$$dy = (t+3t^3)\,dt$$

بالمكاملة نجد :

$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^4 + c$$

الحل العام يعبر عنه بشكل وسيطي كما يلي :

$$x = t + t^3$$
$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^4 + c$$

ملاحظة (١) :

يجب اختيار التمثيل الوسيطي بشكل مناسب ، **كي يسهل ويبسط** حساب التكاملات التي ترد فيما بعد . لذلك عندما نختار التابع $\varphi(t)$ يجب أن يتم الاختيار بحيث يسهل حساب $\psi(t)$ من المعادلة (6.11) ، وبحيث يسهل التكاملات التي تصادفنا أثناء الحل أيضاً .

٦-٣ المعادلة التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة إلى y :

إن المعادلة التفاضلية التي يمكن حلها بالنسبة إلى y هي المعادلة التي يمكن كتابة y في أحد طرفي المعادلة ، بينما يكون الطرف الآخر تابعاً إلى y' و x من الشكل الآتي :

$$y = F(x, y') \qquad (6.13)$$

لنضع $y' = p$ كوسيط ، عندئذٍ نجد :

$$y = F(x, p) \qquad (6.14)$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية من هذا النوع ، نشتق العلاقة (6.14) بالنسبة إلى x ، نجد :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$P = y' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ، محلولة بالنسبة إلى y' فيها التابع p والمتغير x ، بحلها نجد :

$$x = g(p, c)$$

ومنه يكون الحل العام للمعادلة (6.14) وسيطياً ، يعطى بالشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned} x &= g(p, c) \\ y &= F(x, p) \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

وإذا أردنا الحصول على الحل العام ديكارتياً نحذف الوسيط p بين المعـــادلتين فـــي (6.15) نجد :

$$\phi(x,y,c)=0$$

مثال (٧) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y=2xy'+x^2y'^4$$

الحـــــل : نضع $y'=p$ ، نجد :

$$y=2xp+x^2p^4 \qquad (I)$$

نشتق بالنسبة إلى x :

$$y'=2p+\frac{dp}{dx}(2x)+2xp^4+4x^2p^3\frac{dp}{dx}$$

$$P=2p+2x\frac{dp}{dx}+2xp^4+4x^2p^3\frac{dp}{dx}$$

$$p+2x\frac{dp}{dx}(1+2xp^3)+2xp^4=0$$

$$p(1+2xp^3)+(1+2xp^3)(2x)\frac{dp}{dx}=0$$

$$(1+2xp^3)(p+2x\frac{dp}{dx})=0 \Rightarrow$$

هنا قسمنا على $(1+2xp^3)$ لأنه لا يحتوي على $\frac{dp}{dx}$ وهو حل شاذ ، وبالتالي نجد :

$$p+2x.\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow 2x.\frac{dp}{dx}=-p \Rightarrow$$

$$2\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة نجد :

$$2\int\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow 2\ln\left|\frac{p}{c}\right|=-\ln|x| \Rightarrow \ln\left|\frac{p^2}{c^2}\right|=\ln\left|\frac{1}{x}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x}=\frac{p^2}{c^2} \Rightarrow x=\frac{c^2}{p^2}$$

إذاً الحل العام الوسيطي هو :

$$x=\frac{c^2}{p^2}$$

$$y=2xp+x^2p^4$$

ولإيجاد الحل العام ديكارتياً، نقوم بحذف الوسيط p بين x و y ، فنجد :

$$x=\frac{c^2}{p^2} \Rightarrow p^2=\frac{c^2}{x} \Rightarrow p=\frac{c}{\sqrt{x}}$$

نبدل في (I) ، نجد أن :

$$y=2x(\frac{c}{\sqrt{x}})+x^2(\frac{c^4}{x^2}) \Rightarrow y=2c\sqrt{x}+c^4$$

وهذا هو الحل العام الديكارتي .

من المعادلات التي يمكن حلها بالنسبة إلى y :

١- معادلة كليرو .

٢- معادلة لاغرانج .

٦-٣-١ معادلة كليرو :

كل معادلة من الشكل :

$$y=xy'+f(y') \qquad (6.16)$$

تسمى بمعادلة كليرو (حيث f تابع غير خطي بالنسبة إلى y') .

لحل معادلة كليرو ، نفرض أن $y'=p$ ، نعوض في المعادلة التفاضلية (6.16) فنجد :

$$y=xp+f(p) \qquad (6.17)$$

لنشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x نجد :

$$p=p+xp'+f'(p)p'$$

$$p'[x+f'(p)]=0 \qquad (6.18)$$

نفرق المعادلة الأخيرة إلى معادلتين :

- المعادلة الأولى وهي :

$$p' = 0 \Rightarrow p = c$$

بالتعويض في العلاقة (6.17) قيمة $p = c$ ، نجد الحل العام لمعادلة كليرو :

$$y = c\,x + f(c) \qquad (6.19)$$

وهو يمثل هندسياً مجموعة مستقيمات في مستوي الإحداثيات الديكارتية (x, y).

بالمقارنة بين العلاقتين (6.16) و(6.19) نلاحظ أن الحل العام لمعادلة كليرو ناتج فقط من تبديل y' بثابت كيفي c .

- المعادلة الثانية من العلاقة (6.18) نجد أن :

$$x + f'(p) = 0$$

وبالتالي فإن :

$$x = -f'(p) \qquad (6.20)$$

وبتعويض هذه القيمة في العلاقة (6.17) نحصل على y بدلالة الوسيط P ، وبالتالي يكون لدينا حلاً آخر لمعادلة كليرو معطى وسيطياً بالعلاقة :

$$\left.\begin{aligned} x &= -f'(p) \\ y &= -p\,f'(p) + f(p) \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

إن الحل الوسيطي (6.21) يمثل حلاً شاذاً للمعادلة التفاضلية الأصلية إذا كان $f'(p)$ موجوداً ومستمراً وغير معدوم .

وهكذا ، نجد أنه من أجل الحصول على الحل العام لمعادلة كليرو ، يكفي أن نعوض عن كل y' بـ c .

أما الحل الشاذ فيعطى بالعلاقتين :

$$x = -f'(p) \qquad (6.22)$$

و :

$$y = x\,p + f'(p) \qquad (6.23)$$

وذلك عند تحقيق الشرط $f'(p) \neq 0$.

وللحصول على الحل الشاذ ديكارتياً ، نقوم بحذف p بين المعادلتين (6.22) و(6.23) .

مثال (٨) : أوجد الحلين العام والشاذ للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y = x\,y' - y'^3$$

الحـــــل : لنضع $y' = p$ ، نجد :

$$y = x\,p - p^3 \qquad (\mathrm{I})$$

لنشتق الطرفين بالنسبة إلى x ، يكون :

$$p = p + x\,p' - 3\,p^2 p'$$

$$x\,p' - 3\,p^2 p' = 0$$

$$p'(x - 3\,p^2) = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

إما :

$$p' = 0 \Rightarrow p = c$$

نبدل في (II) كل $p = c$ ، نجد :

$$y = c\,x - c^3$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية ، ويمثل مجموعة مستقيمات .

أو :

$$x - 3\,p^2 = 0 \Rightarrow x = 3\,p^2$$

نبدل في المعادلة (I) كل $x = 3\,p^2$ ، نجد أن :

$$y = 2\,p^3 \qquad (\mathrm{III})$$

$$x = 3\,p^2 \qquad (\mathrm{IV})$$

المعادلتين (III) و(IV) تمثلان الحل الشاذ وسيطياً (بارامترياً) .

وبحذف p بين المعادلتين (III) و(IV) نحصل على الحل الشاذ ديكارتياً :

$$(\frac{x}{3})^3 = (\frac{y}{2})^3$$

مثال (٩) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(y - x\,y')^2 = \frac{y'\,tg\,y'}{y'+2}$$

الحـــل : المعادلة هي معادلة كليرو ، ولإيجاد الحل العام نبدل في المعادلـــة التفاضـــلية المعطاة كل $y' = c$ ، نجد :

$$(y - x\,c)^2 = \frac{c\,(tg\,c)}{c+2}$$

وهو الحل العام .

٦-٣-٢ معادلة لاغرانج (وتسمى أيضاً معادلة دالمبير) :

هي المعادلة من الشكل :

$$y = x\,g(y') + f(y') \qquad (6.24)$$

بمعادلة لاغرانج .

ولو وضعنا $y' = p$ ، لأصبحت معادلة لاغرانج بالشكل الآتي :

$$y = x\,g(p) + f(p) \qquad (6.25)$$

ونلاحظ هنا أن معادلة كليرو حالة خاصة من معادلة لاغرانج عندما :

$$g(p) = p$$

ولحلها نشتق الطرفين بالنسبة إلى x ، نجد :

$$p = g(p) + x\,g'(p)p' + f'(p)\,p'$$

$$p - g(p) = p'\big(x\,g'(p) + f'(p)\big) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{x\,g'(p) + f'(p)}{p - g(p)} \quad ; \quad [p - g(p)] \neq 0$$

$$\frac{dx}{dp} = x\,\gamma(p) + \alpha(p) \qquad (6.26)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية بالنسبة إلى المتغير p والتابع x ، وحلها العام من الشكل :

$$x = c\,f_1(p) + f_2(p) = \phi(p,c) \qquad (6.27)$$

وبتعويض قيمة x في العلاقة (6.25) نجد أن :

$$y = \psi(p, c) \qquad (6.28)$$

وبالتالي فإن المعادلتين (6.27) و(6.28) تمثلان الحل العام لمعادلة لاغرانج وسيطيا ولإيجاد الحل الديكارتي نقوم بحذف p بين المعادلتين (6.27) و(6.28) .

ملاحظة (٢) :

نلاحظ أنه عندما قسمنا على $[p - g(p)]$ ، من الممكن فقدان حلول من الشكل .

$$p = p_i \ ; \ (i = 1,2,3,...)$$

حيث :

p_i : جذور المعادلة $p - g(p) = 0$.

بتعويض قيم p هذه في العلاقة (6.25) مع الانتباه إلى أن $y = g(p_i) = p_i$ (حيث $i = 1,2,3,...$) ، إذ إن هذه الحلول يمكن أن تكون حلولاً خاصة أو حلولاً شاذة .

مثال (١٠) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y = x y'^2 + y'^2 \qquad (\text{I})$$

الحـــل : لنضع $y' = p$ ، ثم نعوض في المعادلة (I) فنجد :

$$y = (x+1) p^2 \qquad (\text{II})$$

نشتق طرفي المعادلة المفروضة بالنسبة إلى x :

$$p = p^2 + 2x p \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = 2p(1+x) \frac{dp}{dx} \qquad (\text{III})$$

نلاحظ من (III) أنه إذا كان $p - p^2 = 0$ ، أي $p = 0;1$ ، فإن كليهمـــا يحققـــان المعادلة (III) . فإذا عوضنا P بهاتين القيمتين في (II) نجد أن :

$$\left.\begin{array}{l} p = 0 \Rightarrow y = 0 \\ p = 1 \Rightarrow y = x+1 \end{array}\right\} \qquad (\text{IV})$$

وهما حلان للمعادلة المعطاة .

من (III) نحسب $\frac{dx}{dp}$:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2x}{1-p} = \frac{2}{1-p}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى في x كتابع إلى P ، وعامل التكميـل $\mu = (1-p)^2$ ، وحلها العام هو :

$$x = \frac{c}{(p-1)^2} - 1 \qquad (V)$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ، نجد الحل العام وسيطياً :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c}{(p-1)^2} - 1 \\ y &= \frac{c\,p^2}{(p-1)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (VI)$$

بحذف P بين المعادلتين نحصل على الحل العام ديكارتياً :

$$y = (\sqrt{x+1} - \sqrt{c})^2 \qquad (VII)$$

نلاحظ أن الحل $y = 0$ لا يمكن الحصول عليه من الحل العام (VII) بإعطاء قيمة خاصة للثابت الاختياري c ، فهو حل شاذ للمعادلة التفاضلية .

أما : $y = x + 1$

فيمكن الحصول عليه من الحل العام (VII) ، وذلك بوضع $c = 0$

٦-٤ المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة إلى x :

الشكل العام للمعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة إلى x هو :

$$x = f(y, y') \qquad (6.29)$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (6.29) نفرض أن $y' = p$ ، ونعوض في المعادلة (6.29) ، فنجد :

$$x = f(y, p) \qquad (6.30)$$

لنشتق المعادلة (6.30) بالنسبة إلى y نجد :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \qquad (6.31)$$

وهي معادلة تفاضلية بحلها سوف نجد :

$$y = \varphi(p, c)$$

ومنه الحل العام للمعادلة (6.29) وهو :

$$\left.\begin{aligned} x &= f(y, p) \\ y &= \varphi(p, c) \end{aligned}\right\} \qquad (6.32)$$

وهو حل عام ممثلاً بشكل وسيطي .

إذا حذفنا الوسيط p من العلاقتين في المعادلة (6.32) نحصل على الحل العام ديكارتياً

مثال (١١) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$P = arc\cos(x - p)$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل الآتي :

$$x = p + \cos p \qquad (I)$$

نشتق طرفي المعادلة الأخيرة إلى y :

$$\frac{1}{p} = \frac{dp}{dy} - \sin p.\frac{dp}{dy}$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات تكتب بالشكل الآتي :

$$(1 - \sin p).\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$(1-\sin p)\,p\,dp = dy \qquad (\text{II})$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (II) نكامل طرفي المساواة ، نجد :

$$y = \frac{1}{2}\,p^2 + p\cos p - \sin p + c \qquad (\text{III})$$

وبالتالي فإن المعادلتين :(I) و(III) ، هما الوسيطيتان للحل العام .

أي :

$$x = p + \cos p$$

$$y = \frac{1}{2}\,p^2 + p\cos p - \sin p + c$$

تمارين الفصل السادس :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1	$y'^3 - 3y' + 1 = 0$	16	$y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$
2	$y' = e^{y'}\sin y'$	17	$y'^2 + 2xy' - 8x^2 = 0$
3	$x^3 + y'^3 = axy'$	18	$y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$
4	$x = ay' + by'^2$	19	$y = \ln(1 + y'^2)$
5	$e^{y'}.y'^2 = y$	20	$y = xy' - x^2y'^3$
6	$y = y'^2 + 2y'^3$	21	$y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$
7	$x(y'^2 - 1) = 2y'$	22	$y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$
8	$yy' = 2xy'^2 + 1$	23	$9yy'^2 - 2xy' + u = 0$
9	$xy' - y = \ln y'$	24	$yy' + y'^2 - xy - x^2 = 0$
10	$x = \frac{y}{y'}\ln y - \frac{y'^2}{y^2}$	25	$(y')^6 + (y')^{1/3} + tg\,y' = 0$

11	$y'^3 + y^2 = x\,y\,y'$		26	$y^2(y'-1) = (2-y')^2 \quad (y' = 2 - yt$ افرض$)$
12	$y = x\,y' - x^2 y'^3$		27	$y(1+y'^2) = 2a \quad (y' = tg\,t$ افرض$)$
13	$x\,y' = \sqrt{1+y'^2}$		28	$2\,y(y'+2) = x\,y'^2$
14	$y'^3 = 3(x\,y' - y)$		29	$5\,y + y'^2 = x(x+y')$
15	$y = x\,y'^2 - 2\,y'^3$			

الفصل السابع

حل المعادلات التفاضلية الخطية

من المرتبة الثانية بوساطة متسلسلات القوى

تعريف (١) :

نقول عن التابع $y=f(x)$ ، إنه تحليلي في النقطة $x=x_o$ إذا كان هو وجميع مشتقاته معرف ومستمر عند هذه النقطة وفي جوار لها . ونسمي عندئذٍ النقطة x_o بأنها نقطة عادية للتابع $f(x)$ ويكون التابع قابل للنشر حسب تايلور في النقطة x_o ونكتب :

$$f(x)=f(x_o)+\frac{(x-x_o)}{1!}f'(x_o)+\frac{(x-x_o)^2}{2!}f''(x_o)+\ldots\ldots \quad (7.1)$$

حالة خاصة (١) :

إذا كانت $x_o=0$ ، عندئذٍ نسمي المنشور (7.1) بمنشور ماكلوران ، ونكتب :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots\ldots$$

يمكن أن نعبر عن العلاقة (7.1) ، اختصاراً بالشكل الآتي :

$$f(x)=c_o+c_1(x-x_o)+c_2(x-x_o)^2+\ldots+$$
$$+c_n(x-x_o)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_o)^n$$

حيث $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$: ثوابت معلومة .

أما إذا كان التابع غير تحليلي في النقطة x_o ، عندئذٍ نسمي x_o بنقطة شاذة .

مثال (١) : نلاحظ أن التابع :

$f(x)=\sin x$ تحليلي في النقطة $x_o=0$.

وبالتالي فإن النقطة $x_o = 0$ هي نقطة عادية ، عندئذٍ فإن التابع المعطى قابل للنشر حسب ماكلوران في جوار النقطة $x_o = 0$ ، ومنشوره يعطى بالعلاقة الآتية :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وبسهولة ، نجد أن التوابع :

$$f(x) = e^x \; ; \; g(x) = \cos x \; ; \; \psi(x) = \frac{1}{1-x}$$

تحليلية عند النقطة $x_o = 0$.

وكمثال على التابع غير التحليلي ، نلاحظ أن التابع $f(x) = \ln|x|$ غير تحليلي عند النقطة $x_o = 0$ ، وكذلك التابع $g(x) = \frac{1}{x+1}$ غير تحليلي عند النقطة $x_o = -1$.

تعريف (٢) :

إذا كانت المعادلة التفاضلية :

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \qquad (7.2)$$

عندئذٍ نقول عن النقطة x_o إنها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية إذا كانت عادية لكل من $P(x)$ و $Q(x)$ بآن واحد .

ملاحظة (١) :

في كثير من الدراسات يطلب منا دراسة طبيعة النقطة $x = \infty$ (هل هي عادية أم شاذة) ، من أجل ذلك نجري التحويل $x = \frac{1}{t}$ ، ثم نحول المعادلة بدلالة t ، ونحكم على $t = 0$ وسنوضح ذلك في المثال الآتي :

مثال (٢) : بيّن طبيعة النقطة $x = \infty$ للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

الحـــل : لنضع $x=\frac{1}{t}$ ، وبالتالي نجد $t=\frac{1}{x}$:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-t^2.y'_t$$

$$y''_x=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-t^2.y'_t\right)\left(-t^2\right)$$

$$=\left(-2t^2y'_t-t^2y''_t\right)\left(-t^2\right)$$

$$=t^4.y''_t+2t^3.y'_t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نجد :

$$t^4.y''_t+2t^3.y'_t-2t^2.y'_t+y=0$$

$$y''_t+\left(\frac{2t^3-2t^2}{t^4}\right).y'_t+\frac{1}{t^4}.y=0$$

واضح أن $t=0$ نقطة شاذة للمعادلة ، ومنه $x=\infty$ نقطة شاذة للمعادلة المعطاة .

ملاحظة (٢) :

تكون $x=x_o$ نقطة شاذة للمعادلة (7.2) إذا كانت شاذة لـــ $P(x)$ أو لـــ $Q(x)$ أو كليهما .

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (7.2) بجوار نقطة عادية، بداية نستعرض المبرهنة الآتية :

٧-١ مبرهنة الوجود والوحدانية للحلول :

(تقبل من دون برهان)

بفرض أن x_o نقطة عادية للمعادلة التفاضلية :

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$$

إذن ، يوجد لهذه المعادلة حلين مستقلين خطياً وقابلان للنشر حسب متسلسلة تايلور بجوار تلك النقطة العادية ، ومتسلسلاتهما متقاربتان ، على الأقل في المجال المشترك لتقارب متسلسلتي نشر التابعين $P(x)$ و $Q(x)$.

في أغلب التطبيقات تصادفنا معادلات من الشكل (7.2) ، فيها $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود أو نسبة بين كثيرات حدود .

– في الحالة الأولى يكون الحل على شكل متسلسلة قوى متقاربة من أجل جميع قيم x (وذلك لأن متسلسلتا نشر التابعين $P(x)$ و$Q(x)$ تتقاربا في هذه الحالة من أجل جميع قيم x)

– في الحالة الثانية يكون نصف قطر تقارب متسلسلة القوى التي تمثل الحل لا يقل عن بعد النقطة x_0 عن أقرب نقطة ينعدم فيها مقام أمثال المعادلة التفاضلية .

يمكن دوماً اعتبار $x_0 = 0$ ، وذلك لأنه في الحالات المعاكسة يمكن سحب المحاور إلى النقطة x_0 .

ضمن الاعتبار المذكور إن شكل الحلول يعطى بمتسلسلات القوى ذات الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (7.3)$$

حيث c_n : أعداد حقيقية .

٧-٢ الطريقة العملية لإيجاد الحل العام (أو الخاص) بوساطة متسلسلات القوى

لإيجاد الحل العام (أو الحل الخاص) بوساطة متسلسلات القوى نتبع ما يلي :

آ- نفرض أن للمعادلة التفاضلية (7.2) حلاً من الشكل الآتي :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_o)^n$$

ب- ثم نحسب كل من y' و y'' ، أي :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_o)^{n-1}$$

و :

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_o)^{n-2}$$

ج- نعوض في المعادلة التفاضلية (7.2) ثم نوحد القوى ، ونوحد المجالات (الفترات).

د- نجعل أمثال الحدود تساوي الصفر، نحصل على قانون تدريجي (أو علاقة تكرارية عامة) .

هـ- للحصول على الحل الأول ، نجعل $c_o = 1$ و $c_1 = 0$ ، ونحسب بقية الثوابت فنحصل على الحل الأول $y_1(x)$.

و- للحصول على الحل الخاص الثاني المستقل خطياً مع الأول ، نجعل $c_o = 0$ و $c_1 = 1$ ، ثم نحسب بقية الثوابت من العلاقة التكرارية فنحصل على الحل الثاني $y_2(x)$ ، ويكون الحل العام هو :

$$y = A\,y_1 + B\,y_2$$

حيث $A\ ,\ B$: ثابتان اختياريان .

مثال (٣) : بيّن طبيعة النقطة $x = 0$ للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + x\,y = 0$$

ثم أوجد حلاً لها مستخدماً طريقة المتسلسلات ، وما هي فترة تقارب الحل ؟

الحل : نلاحظ أن $Q(x) = +x$ ، $P(x) = 0$ ، تابعان معرفان عند $x = 0$ ، وكذلك مشتقاتهما . إذاً ، $x = 0$ نقطة عادية للمعادلة .

لنأخذ حلاً من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$$

عندئذٍ نجد أن :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n . x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) . c_n . x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) . c_n . x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1).c_n.x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^{n+1} = 0$$

لنضع في المتسلسلة الأولى كل $n-2 = m+1$ وبالتالي نجد :

$$n = m+3$$

وعندما $n = 0$ فإن $m = -3$

$$\sum_{m=-3}^{\infty} (m+3)\,(m+2)c_{m+3}\,x^{m+1} = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+3)\,(m+2)c_{m+3}\,x^{m+1} =$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)\,(n+2)c_{n+3}\,x^{n+1}$$

ومنه نجد :

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)\,(n+2)c_{n+3}\,x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^{n+1} = 0$$

$$2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)\,(n+2)c_{n+3}\,x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^{n+1} = 0$$

$$2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)\,(n+2)c_{n+3} + c_n\right]x^{n+1} = 0$$

ومنه نجد :

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ (n+3)\,(n+2)c_{n+3} + c_n = 0 \end{cases} \qquad (7.4)$$

وبالتالي نجد :

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_{n+3} = \dfrac{-c_n}{(n+3)\,(n+2)} \quad ; \quad n = 0,1,2,..... \end{cases} \qquad (4.5)$$

والعلاقة (4.5) تمثل الدستور التدريجي العام (العلاقة التكرارية) .

والآن لنعطي إلى n قيمها ، فنجد :

$$n=0 \Rightarrow c_3 = \frac{-c_0}{6}$$

$$n=1 \Rightarrow c_4 = \frac{-c_1}{12}$$

$$n=2 \Rightarrow c_5 = \frac{-c_2}{15} = 0$$

$$n=3 \Rightarrow c_6 = \frac{-c_3}{30} = \frac{c_0}{180}$$

$$n=4 \Rightarrow c_7 = \frac{-c_4}{42} = \frac{c_1}{(42).(12)}$$

$$n=5 \Rightarrow c_8 = 0$$

إذا ، الحل العام هو :

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \ldots$$

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{6} x^3 - \frac{c_1}{12} x^4 + \frac{c_0}{180} x^6 + \ldots$$

$$= c_0 (1 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{180} x^6 + \ldots) + c_1 (x - \frac{1}{12} x^4 - \ldots)$$

وهو الحل العام حيث c_0 ، c_1 ثابتين اختياريين . وهذا الحل متقارب من أجل :

$$|x| < \infty$$

ملاحظة (٣) :

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$$

فإن هذه المعادلة تأخذ شكل المعادلة (7.2) ، وذلك بعد التقسيم على التابع :

$$a_0(x) \neq 0$$

مثال (٤) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(x-1)\, y'' - x\, y' + y = 0$$

باستخدام المتسلسلات بجوار النقطة $x = 0$.

الحـــل : لتحويل المعادلة التفاضلية المعطاة إلى الشكل (7.2) ، نقسم هذه المعادلة علـــى $x - 1 \neq 0$ نجد أن :

$$P(x) = \frac{-x}{x-1} \quad ; \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}$$

هذان التابعان معرفان عند النقطة $x = 0$ ، وكذلك مشتقاتهما .

إذاً ، $x = 0$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة ، وبالتالي نأخذ حلاً من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ومنه نجد كلاً من y', y'' ، حيث :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n . x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نجد أن :

$$(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n . x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

في المتسلسلة الأولى نضع : $n - 1 = m$ ، ومنه $n = m + 1$

عندما $n = 0$ ، فإن $m = -1$

أي :

$$\sum_{m=-1}^{\infty} m(m+1) c_{m+1} x^m = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) c_{m+1} x^m$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_{n+1} x^n$$

أما في المتسلسلة الثانية فنضع : $n = m + 2$

من أجل $n = 0$ ، فإن $m = -2$

وبالتالي نكتب :

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)\,(m+1)c_{m+2}\,x^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)\,(m+1)c_{m+2}\,x^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)c_{n+2}\,x^n$$

نعوض فنجد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}\,x^n -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)c_n.x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}\,x^n - 2c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}\,x^n + c_0 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)c_n.x^n = 0$$

$$-2c_2 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)c_{n+1} - (n+2)(n+1)c_{n+2} - (n-1)c_n\right]x^n = 0$$

وبالتالي نجد :

$$\begin{cases} -2c_2 + c_0 = 0 \\ n(n-1)c_{n+1} - (n+2)\,(n+1)c_{n+2} - (n-1)c_n = 0 \;\; ; \;\; n \geq 1 \end{cases}$$

ومن هنا نجد الدستور التدريجي العام (العلاقة التكرارية) ، وهي من الشكل الآتي :

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{1}{2}\,c_0 \\ c_{n+2} = \dfrac{n(n+1)c_{n+1} - (n-1)c_n}{(n+2)\,(n+1)} \end{cases}$$

ولإيجاد الحل الأول :

نضع $c_0 = 1$; $c_1 = 0$ ، ولنعطي قيماً لـ n ، نجد :

$$n=1 \Rightarrow c_3 = \frac{2c_2 - c_0}{2\times 3} = -\frac{c_0}{3!} = \frac{1}{3!}$$

$$n=2 \Rightarrow c_4 = \frac{6c_3 - c_2}{3\times 4} = \frac{6(\frac{1}{6}) - \frac{1}{2}}{3\times 4} = \frac{1}{2\times 3\times 4} = \frac{1}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow c_5 = \frac{3\times 4c_4 - 2c_3}{5\times 4} = \frac{12(\frac{1}{24}) - 2(\frac{1}{6})}{5\times 4} =$$

$$= \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} = \frac{1}{5!}$$

بصورة عامة لدينا :

$$c_n = \frac{1}{2!} \quad ; \quad n \geq 2$$

وبالتالي فإن الحل الأول هو :

$$y_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

ولإيجاد الحل الثاني :

نضع $c_0 = 0$; $c_1 = 1$ ، ومنه $c_2 = 0$ ، فنجد :

$$n=1 \Rightarrow c_3 = \frac{2c_2}{6} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} n=2 \Rightarrow c_4 = 0 \\ n=3 \Rightarrow c_5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 = c_3 = c_4 = \ldots = c_n = 0$$

وبالتالي فإن الحل الثاني هو :

$$y_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad y_2(x) = x$$

وبالتالي فإن الحل العام هو :

$$y = A\,y_1 + B\,y_2$$

$$y = A(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...) + B\,x$$

حيث $A\,,B$: ثابتان اختياريان .

ويمكن أن نعبر عن هذا الحل بدلالة توابع شهيرة :

نعلم أن :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$e^x = \frac{x}{1!} + y_1(x) \;\Rightarrow\; y_1(x) = e^x - \frac{x}{1!}$$

نعوض في الحل العام نجد أن :

$$y = A(e^x - x) + B\,x = A\,e^x + (B - A)\,x = A\,e^x + C\,x$$

حيث :

$A\,,C$: ثابتان اختياريان .

ملاحظة (٤) :

أحياناً ، يُطلب منا إيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية بجوار نقطة $x = x_o$ (حيث $x_0 \neq 0$) .

نقوم أولاً بسحب المحاور وذلك بفرض $X = x - x_0$ ، وعندئذٍ نعوض في المعادلة ثم نفتش عن حلاً من الشكل الآتي :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . x^n$$

مثال (٥) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية مفكوكاً بجوار الواحد $X = 1$

$$y'' - (X - 1)^2\,y' + 3(X - 1)\,y = 0$$

الحـــل : لنضع (لنسحب المحاور) : $x = X - 1$

واضح أن :

$$\frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dx}(1) = \frac{dy}{dx}$$

بالطريقة نفسها نجد أن $y''_x = y''_X$ والمعادلة التفاضلية المعطاة تصبح بالشكل الآتي :

$$y'' - 3x^2 y' + 3x\,y = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

واضح أنه عندما $X = 1$ فإن $x = 0$

لنوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (I) مفكوكاً بجوار النقطة $x = 0$.

لنأخذ حلاً من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;\; ; \;\; y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} \;\; ; \;\; y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (I) نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

لنبدل في المتسلسلة (I) كل $n - 2 = m + 1$ ، ومنه نجد : $n = m + 3$

عندما $n = 0$ فإن $m = -3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{m=-3}^{\infty} (m+3)\,(m+2) c_{m+3} x^{m+1} =$$

$$= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+3)\,(m+2) c_{m+3} x^{m+1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)\,(n+2) c_{n+3} x^{n+1}$$

نعوض في المعادلة :

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1}-3\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

$$2c_1+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n-2)c_{n+3}-3nc_n+3c_n\right]x^{n+1}=0$$

عندئذٍ نجد :

$$\begin{cases}2c_2=0\\(n-3)(n-2)c_{n+3}-3(n-1)c_n=0 \quad ; \ n\geq 0\end{cases}$$

أو :

$$\begin{cases}c_2=0\\c_{n+3}=\dfrac{3(n-1)c_n}{(n+3)(n+2)} \quad ; \quad n\geq 0\end{cases}$$

الآن لنوجد الحل الأول :

$$n=0 \Rightarrow c_3=\frac{-3c_0}{2.3}=-\frac{1}{2}$$

$$n=1 \Rightarrow c_4=0$$

$$n=2 \Rightarrow c_5=\frac{3c_2}{20}=0$$

$$n=3 \Rightarrow c_6=\frac{6c_3}{5}=\frac{-1}{10}$$

$$n=4 \Rightarrow c_7=0$$

$$n=5 \Rightarrow c_8=0$$

$$n=6 \Rightarrow c_9=\frac{3.5c_6}{8.9}=\frac{3.5(-\frac{1}{10})}{8.9}=\frac{3(-\frac{1}{2})}{8.9}=\frac{-1}{48}$$

وبالتالي فإن الحل الأول هو :

$$y_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$$

$$y_1(x)=1-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{10}x^6-\frac{1}{48}x^9+\ldots$$

والحل الثاني هو :

لنضع $c_0 = 0$ و $c_1 = 1$ نجد :

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ n=1 \Rightarrow c_4 = 0 \\ n=2 \Rightarrow c_5 = 0 \\ n=3 \Rightarrow c_6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 = c_3 = c_4 = \ldots = c_n = 0$$

حيث : $n \geq 2$

وبالتالي فإن الحل الثاني هو من الشكل :

$$y_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$
$$y_2(x) = x$$

عندئذٍ نجد أن الحل العام هو :

$$y = A\, y_1 + B\, y_2$$
$$y = A(1 - \frac{1}{2}\, x^3 - \frac{1}{10}\, x^6 - \frac{1}{48}\, x^9 + \ldots) + Bx$$

لنعود إلى المتغير الأصلي $x = X - 1$ نجد :

$$y = A\left[1 - \frac{1}{2}\,(X-1)^3 - \frac{1}{10}\,(X-1)^6 - \frac{1}{48}\,(X-1)^9 + \ldots\right] + B(X-1)$$

حيث A و B ثابتين اختياريين .

ملاحظة (٥) :

كنا قد درسنا سابقاً طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية في جوار النقاط العادية ، أي في النقاط التي تكون فيها التوابع $P(x)$, $Q(x)$ الواردة في المعادلة (7.2) توابع تحليلية .

أما في حال كون التوابع $P(x)$, $Q(x)$ ليست تحليلية في النقطة x_0 ، عندئذٍ فإن الطريقة السابقة لا يمكن تطبيقها ، وبالتالي لا يمكن إيجاد الحل العام بجوار هذه النقطة غير العادية .

وفيما يلي سنبين الطريقة التي يمكن بوساطتها إيجاد الحلول للمعادلة التفاضلية بجوار بعض النقاط غير العادية.

إذا كانت x_0 نقطة غير عادية للمعادلة التفاضلية (7.2)، وإذا كانت التوابع :

$(x-x_0)P(x)$; $(x-x_0)^2 Q(x)$ تحليلية في النقطة x_0 .

(تسمى عادة النقطة غير العادية x_0 المحققة للشروط المذكورة بنقطة شاذة نظامية)

فإن للمعادلة التفاضلية (7.2) حلول من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n} \qquad (7.6)$$

حيث r , c_n : ثوابت ، و $c_0 \neq 0$

لإيجاد هذه الحلول نتبع الطريقة الواردة في حالة النقطة العادية نفسها ، نشتق العلاقة (7.6) ثم نعوض في المعادلة التفاضلية (7.2) ونطابق فنحصل على العلاقات التي تربط الأمثال c_n والتي تعين الثابت r .

إن أمثال أصغر قوة لـ x تحدد (عند المطابقة) المعادلة التي تعين قيم r ، نسمي هذه المعادلة بالمعادلة المعينة ، وجذورها تؤدي دوراً كبيراً في طريقة إيجاد الحلول وفي معرفة كون الحلول الناتجة مستقلة خطياً أم لا .

لكن يمكن القول إنه في أغلب الحالات نحصل على حل (واحد على الأقل) في جوار النقطة x_0 ، حيث يمكن استعماله من أجل تخفيض مرتبة المعادلة التفاضلية (وسنتعرض لذلك في هذه الفقرة أيضاً) .

إذا حصلنا على جذرين مختلفين r_2 , r_1 للمعادلة المعينة ، وإذا كان الفرق $r_2 - r_1$ لا يساوي عدداً صحيحاً ، فإننا نحصل في هذه الحالة على حلين للمعادلة (7.2) من الشكل (7.4) لكن في الحالات الباقية قد لا نتمكن من الحصول على أكثر من حل واحد .

مثال (٦) : أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية الآتية في جوار الصفر :

$$x^2 y'' + 2x y' - x y = 0$$

الحـــل : النقطة $c_0 = 0$ نقطة شاذة نظامية ، لذلك نفتش عن حلول للمعادلة من الشكل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n}$$

بالاشتقاق و التعويض نحصل على المطابقة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)\,(n+r-1)c_n + 2(n+r)c_n \right] x^{r+n} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n+1} \equiv 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r+1)c_n x^{r+n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{r+n} \equiv 0$$

$$r(r+1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)\,(n+r+1)c_n - c_{n-1} \right] x^{r+n} \equiv 0$$

بالمطابقة نجد :

$$r(r+1)c_0 = 0$$

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{(n+r)\,(n+r+1)} \quad ; \quad n \geq 1$$

من الجذر الأول $r = 0$ ، نجد :

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n(n+1)}$$

$$c_1 = \frac{c_0}{1.2} \quad , \quad c_2 = \frac{c_1}{2.3} = \frac{c_0}{3\,!.2}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3.4} = \frac{c_0}{4\,!.3\,!} \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{c_0}{n\,!\,(n+1)\,!} \quad ; \quad n \geq 1$$

وبالتالي نحصل على الحل :

$$y = x^0 c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(n+1)!} \right]$$

وهو الحل المطلوب .

ملاحظة (٦) :

يجب أن نلاحظ هنا أنه من أجل الجذر $r = -1$ نحصل على العلاقة الآتية :

$$n(n-1)c_n = c_{n-1} \qquad n \geq 1$$

وهذا يؤدي على عدم إيجاد الحل الآخر بطريقة تعيين الأمثال . طبعاً هناك طريقة أخرى لإيجاد هذا الحل ، لكننا لن نتعرض لها هنا .

يجب الأخذ بالاعتبار أنه يمكن الاستفادة من الحل الناتج في تخفيض مرتبة المعادلة التفاضلية .

تمارين الفصل السابع :

١- أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية بوساطة المتسلسلات

1	$2x\,y'' + y' - 2y = 0$		5	$(x - x^2)\,y'' - (x+1)\,y' + y = 0$
2	$x\,y'' + 3y' - x^2 y = 0$		6	$(x^2 - x)\,y'' + (4x^2 - 2)\,y' + 2x\,y = 0$
3	$x^2 y'' + (x + 2x^2)y' - 4y = 0$		7	$(x^3 - x)\,y'' + (8x^2 - 2)\,y' + 12x\,y = 0$
4	$x^2 y'' - x^2 y' + (x-2)\,y = 0$		8	$y'' - x\,y' - y = 0$

٢- أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية على شكل متسلسلة قوى $(x-2)$:

$$y'' + (x-1)\,y' + y = 0$$

٣- أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية على شكل متسلسلة قوى في x :

$$(1 + x^2)\,y'' + x\,y' - y = 0$$

٤- أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية على شكل متسلسلة قوى في x :

$$y'' - x\,y' + x^2 y = 0$$

٥- أوجد حلا المعادلة التفاضلية الآتية :

$$(1-x)\,y' = x^2 - y$$

٦- أوجد حلا المعادلة التفاضلية الآتية :

$$2x\,y'' + (x+1)\,y' + 3\,y = 0$$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن

جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة

٨-١ جمل المعادلات التفاضلية :

في كثير من المسائل الرياضية أو الفيزيائية ، قد يُطلب منا إيجاد مجموعة من التوابع محققة لمجموعة من المعادلات التفاضلية التي تحوي المتغير x ، والتوابع المجهولة $y_1 , y_2 ,..., y_n$ ، ومشتقات هذه التوابع .

لنأخذ جملة المعادلات من المرتبة الأولى الآتية :

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array}\right\} \qquad (8.1)$$

حيث $y_1 , y_2 ,..., y_n$: توابع مجهولة للمتغير x .

يطلق عادةً على مجموعة المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى (8.1) اسم جملة معادلات تفاضلية نظامية .

إن عدد المعادلات المشكلة للجملة (8.1) يعين مرتبة تلك الجملة ، لذلك جملة المعادلات (8.1) هي من المرتبة n .

٨-١-١ حل الجملة :

نسمي كل مجموعة توابع مؤلفة من n تابعاً :

$$y_1 = f_1(x) \ ; \ y_2 = f_2(x), \ ... \ , \ y_n = f_n(x)$$

قابلاً للاشتقاق ومستمراً في المجال I حلاً للجملة (8.1) في ذلك المجال إذا تحولت جملة المعادلات من أجل تلك التوابع إلى مطابقة من أجل جميع $x \in I$.

$$\left.\begin{aligned} f_1'(x) &\equiv f_1[x,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x)] \\ f_2'(x) &\equiv f_2[x,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x)] \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ f_n'(x) &\equiv f_n[x,\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x)] \end{aligned}\right\}$$

٨-١-٢ الحل العام :

تسمى مجموعة الحلول لجملة المعادلات التفاضلية النظامية (8.1) والمتعلقة بـ n ثابتا كيفياً مستقلاً $c_1, c_2, \dots, c_n$ بالحل العام للجملة .

نقول عن مجموعة التوابع :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ y_n &= \varphi_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

المعرفة في منطقة تحول وسائطها $x, c_1, c_2, \dots, c_n$ ، والتي لها مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة إلى x ، إنها تمثل الحال العام لجملة المعادلات (8.1) .

إذا كانت مجموعة التوابع (8.2) حلاً لجملة المعادلات النظامية (8.1) من أجل جميع القيم العددية للثوابت $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ المعرفة بمجموعة العلاقات السابقة أعلاه وذلك من أجل جميع قيم $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ المنتمية إلى منطقة التعريف .

٨-١-٣ الحل الخاص :

إن الحلول الناتجة من الحل العام (8.2) وذلك بإعطاء الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ قيماً عددية ما ، تكون حلولاً خاصة لجملة المعادلات النظامية (8.1) .

٨-١-٤ الحل الشاذ :

نقول عن حل جملة المعادلات (8.2) التي لا يمكن الحصول عليها من الحل العام (8.2) وذلك بإعطاء الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ قيماً عددية ما ، إنها الحل الشاذ لجملة المعادلات (8.1) .

٨-٢ جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة :

- إذا كانت الأطراف اليمنى من الجملة (8.1) توابع خطية بالنسبة إلى $y_1 , y_2 ,..., y_n$ ، أي إذا كانت الجملة (8.1) من الشكل :

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + ... + a_{1n}(x)\,y_n + R_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + ... + a_{2n}(x)\,y_n + R_2(x) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \cdots \quad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + ... + a_{nn}(x)\,y_n + R_n(x) \end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

فإنها تسمى بجملة معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة ، حيث :

$$a_{11} , a_{12} ,..., a_{21} , a_{22} ,..., a_{n1} ,..., a_{nn} , R_1 , R_2 ,..., R_n$$

توابع في الحالة العامة للمتحول x .

- إذا كانت $a_{11} , a_{12} , a_{13} ,..., a_{nn}$ ثوابت ، نقول عن الجملة الخطية (8.3) إنها جملة خطية غير متجانسة وذات أمثال ثابتة .

- أما إذا كانت $R_1 = R_2 = R_3 = ... = R_n = 0$ ، ففي هذه الحالة نسمي الجملة الخطية (8.3) بجملة خطية متجانسة وذات أمثال ثابتة ، وتكون من الشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + ... + a_{1n}\,y_n \\ y_2' &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + ... + a_{2n}\,y_n \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \cdots \quad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + ... + a_{nn}\,y_n \end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

إن حل الجملة الخطية (8.3) غير متجانسة وذات الأمثال الثابتة يؤول إلى حل معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n وذات أمثال ثابتة .

وفيما يلي سنعالج جمل المعادلات الخطية ذات الأمثال الثابتة ، من أجل ذلك نعتمد على مفهوم المؤثر D .

ليكن (على سبيل المثال) لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات أمثال ثابتة ، فيهما y , z توابع للمتغير x ، بإدخال المؤثر التفاضلي D ، حيث :

$$D\,z = \frac{dz}{dx} \;\; ; \;\; D\,y = \frac{dy}{dx}$$

فإن هاتين المعادلتين تكتبان بالشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned} f(D)\,y + g(D)\,z &= R_1(x) \\ \varphi(D)\,y + \psi(D)\,z &= R_2(x) \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

نرمز بـ $F(D)$ للمعين :

$$F(D) = \begin{vmatrix} f(D) & g(D) \\ \varphi(D) & \psi(D) \end{vmatrix}$$

وإذا كانت درجة كثيرة الحدود $F(D)$ هي n ، فإن الحل العام يحوي n ثابت اختياري وهو من الشكل :

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$z = z(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ولإيجاد الحل العام للجملة (8.4) ، هناك عدة طرق :

٨-٢-١ طريقة كرامر :

من أجل إيجاد الحل العام للجملة (8.5) ، نطبق قاعدة كرامر على هذه الجملة ، فنحصل على المعادلتين الآتيتين :

$$F(D)\,z = \begin{vmatrix} f(D) & R_1(x) \\ \varphi(D) & R_2(x) \end{vmatrix}$$
$$= f(D)\,R_2(x) - \varphi(D)\,R_1(x)$$

$$F(D)\,y = \begin{vmatrix} R_1(x) & g(D) \\ R_2(x) & \psi(D) \end{vmatrix}$$
$$= \psi(D)\,R_1(x) - g(D)\,R_2(x)$$

بعد تطبيق المؤثرات على التوابع الواردة في الأطراف اليمنى من الأمثال السابقة ، وبالاختصار يمكن كتابة هذه المعادلات بالشكل الآتي :

$$F(D)\,y = \lambda(x) \qquad (8.6)$$

$$F(D)\,z = \mu(x) \qquad (8.7)$$

نلاحظ في البداية أن المعادلتين (8.6) و(8.7) تملكان المعادلة المميزة نفسها :

$$F(\alpha) = 0$$

علاوة على ذلك ، إن درجة المعادلة المميزة المذكورة تطابق درجة كثير الحدود $F(D)$.

نوجد الآن الحل العام للمعادلة (8.6) ، ثم للمعادلة (8.7) ، وذلك كما يلي :

لتكن : $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , ... , \alpha_n$

جذور المعادلة المميزة ، وبفرض أن هذه الجذور مختلفة مثنى مثنى ، وأن y_0 حل خاص للمعادلة (8.6) ، و z_0 حل خاص للمعادلة (8.7) ، ومنه يكون :

الحل الخاص للمعادلة (8.6) هو :

$$y = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + ... + A_n e^{\alpha_n x} + y_0 \qquad (8.8)$$

والحل الخاص للمعادلة (8.7) هو :

$$y = B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x} + ... + B_n e^{\alpha_n x} + z_0 \qquad (8.9)$$

إن التابعين (8.8) و(8.9) لا يمثلان حلاً عاماً للجملة (8.1) ، وذلك لأن عدد الثوابت الكيفية فيه n 2 ، وبالتالي يزيد عن درجة كثيرة الحدود $F(D)$.

في الحقيقة إن الثوابت المذكورة مرتبطة مع بعضها بعضاً ، ويتم إيجاد هذا الارتباط بالتعويض المباشر في بعض أو كل معادلات الجملة (8.5) ، ونعين هذه الثوابت بحيث تتحقق هذه العادلات بعد التعويض .

سنوضح حل هذا النوع من المعادلات بالأمثلة الآتية :

مثال (١) : أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الآتية :

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x - 2y = 5e^t \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+4x+2y=5e^{-t} \qquad (\text{II})$$

الحـــل : لنكتب الجملة بدلالة المؤثر D فنجد :

$$2(D-1)x+(D-2)y=5e^{t}$$
$$(D+4)x+(D+2)y=5e^{-t}$$

ومعين الأمثال للجملة التفاضلية هو :

$$F(D)=\begin{vmatrix}2(D-1) & D-2\\ D+4 & D+2\end{vmatrix}=2(D-1)(D+2)-(D-2)(D+4)$$
$$F(D)=D^2+4$$

وبتطبيق علاقات كرامر نجد :

$$(D^2+4)x=15e^{t}+15e^{-t} \qquad (\text{III})$$

$$(D^2+4)y=25e^{t}-20e^{-t} \qquad (\text{IV})$$

وبحل المعادلتين (III) و(IV) باعتبارهما معادلتان خطيتان غير متجانستين فنجد :

$$x=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t-3e^{t}+3e^{-t} \qquad (\text{V})$$

$$y=B_1\cos 2t+B_2\sin 2t-4e^{-t}-5e^{t} \qquad (\text{VI})$$

نعوض x و y من المعادلتين (V) و(VI) في المعادلة (I) فنجد :

$$(4A_2-2A_1-2B_1+2B_2)\cos 2t+$$
$$+(-4A_2-2A_1+2B_1-2B_2)\sin 2t=0$$

ومنه نجد :

$$4A_2-2A_1-2B_1+2B_2=0$$
$$-2A_2-4A_1-2B_1-2B_2=0$$

أو :

$$2A_2-A_1=B_1-B_2$$
$$-A_2-2A_1=B_1+B_2$$

بضرب طرفي المعادلة الثانية بـــ 2 ، والجمع ، نجد :

$$A_1 = -\frac{1}{5}(3B_1 + B_2)$$

بضرب طرفي المعادلة الأولى بـــ (2 –) ، والجمع ، نجد :

$$A_2 = -\frac{1}{5}(3B_2 - B_1)$$

بالتعويض في المعادلة (IV) و(IIV) نجد :

$$x = -\frac{1}{5}(3B_1 + B_2)\cos 2t - \frac{1}{5}(3B_2 - B_1)\sin 2t + 3e^{t} + 3e^{-t}$$

$$y = B_1 \cos 2t + B_2 \sin 2t - 4e^{-t} - 5e^{t}$$

إذاً ، المعادلتان هما معادلتا الحل العام .

مثال (٢) : أوجد الحل العام للجملة الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = y + 2z \qquad (I)$$

$$\frac{dz}{dx} = -y + 4z \qquad (II)$$

الحـــل : لنكتب جملة المعادلتين (I) و(II) بدلالة المؤثر التفاضلي D :

$$(D-1)y - 2z = 0$$
$$y + (D-4)z = 0$$

إن معين الأمثال لهذه الجملة هو :

$$F(D) = \begin{vmatrix} D-1 & -2 \\ 1 & D-4 \end{vmatrix} = (D-1)(D-4) + 2$$

$$F(D) = D^2 - 5D + 6$$

ومنه نجد :

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$
$$(D^2 - 5D + 6)z = 0$$

فإن المعادلة المميزة لكل من المعادلتين هي :

$$K_1 = 2 \quad ; \quad K_2 = 3$$

ومنه ، الحل العام للمعادلة الأولى هو :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \qquad (III)$$

والحل العام للمعادلة الثانية هو :

$$Z = c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x} \qquad (IV)$$

وبما أن عدد الثوابت الاختيارية يجب ألا يزيد عن درجتين لكثيرة الحدود $F(D)$ ، فهناك علاقة بين الثوابت الاختيارية c_1 , c_2 , c_3 , c_4 .

عندئذ يمكننا الحصول على العلاقة بين هذه الثوابت الاختيارية وذلك بتعويض y ، z بما يساويها في (III) و(IV) في إحدى المعادلتين المفروضتين ، وليكن في (I) مثلاً :

$$2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} - c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x} - 2c_3 e^{2x} - 2c_4 e^{3x} = 0$$

أو أن :

$$(c_1 - 2c_3) e^{2x} + (2c_2 - 2c_4) e^{3x} = 0$$

ومنه نحصل على المعادلتين الجبريتين الآتيتين :

$$c_1 - 2c_3 = 0$$
$$2c_2 - 2c_4 = 0$$

ومنه نجد :

$$\frac{1}{2} c_1 = c_3 \quad ; \quad c_2 = c_4$$

وبالتالي الحل العام للجملة هو :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$
$$z = \frac{1}{2} c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

ملاحظة (١) :

لقد تعرضنا فيما سبق لحل جملة معادلتين ، ثم درسنا بالتفصيل الطريقة التي يمكن فيها إيجاد الحل العام لها ، سنعالج الآن حل جملة مؤلفة من n معادلة .

في الواقع أن حل جملة مؤلفة من أكثر من معادلتين يتم بالطريقة السابقة نفسها ، ويمكن شرح خطوات الحل بشكل مختصر كما يلي :

الحـــل :

لتكن لدينا جملة المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} &f_{11}(D)\,y_1 + f_{12}(D)\,y_2 + \ldots + f_{1n}(D)\,y_n = R_1(x) \\ &f_{21}(D)\,y_1 + f_{22}(D)\,y_2 + \ldots + f_{2n}(D)\,y_n = R_2(x) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \cdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &f_{n1}(D)\,y_1 + f_{n2}(D)\,y_2 + \ldots + f_{nn}(D)\,y_n = R_n(x) \end{aligned}$$

إن معين هذه الجملة هو :

$$F(D) = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) & \cdots & f_{1n}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) & \cdots & f_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1}(D) & f_{n2}(D) & \cdots & f_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

حسب قاعدة كرامر نحصل على المعادلات :

$$\begin{aligned} &F(D)\,y_1 = \varphi_1(x) \\ &F(D)\,y_2 = \varphi_2(x) \\ &\vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ &F(D)\,y_n = \varphi_n(x) \end{aligned}$$

نوجد الحل العام لكل من المعادلات السابقة ، ومن ثم نعين العلاقة بين الثوابت بحيث يكون عددها بعد التعيين مساوياً درجة كثيرة الحدود $F(D)$ ، ويتم ذلك بالتعويض في معادلات الجملة الأصلية ونقوم بتعيين الثوابت بحيث تتحقق المعادلات بعد التعويض .

مثال (٣) : أوجد الحل العام لجملة المعادلات الآتية :

$$(D-1)x+y=0$$
$$x-Dy+z=0$$
$$x+(1-D)z=4t$$

الحـــــل : إن معين الجملة هو :

$$F(D)=\begin{vmatrix} D-1 & 1 & 0 \\ 1 & -D & 1 \\ 1 & 0 & 1-D \end{vmatrix}=D(D^2-2D+2)$$

المعادلة المميزة :

$$K(K^2-2K+2)=0 \Rightarrow \quad K_1=0 \;;\; K_2=1+i \;;\; K_3=1-i$$

حسب قاعدة كرامر نحصل على المعادلات الآتية :

$$D(D^2-2D+2)x=4t$$
$$D(D^2-2D+2)y=4t-4$$
$$D(D^2-2D+2)z=4-4t$$

وبالتالي تعطى الحلول العامة للمعادلات السابقة على الترتيب بالعلاقات الآتية :

$$x=c_1+c_2e^t\cos t+c_3e^t\sin t+t^2+2t$$
$$y=c_4+c_5e^t\cos t+c_6e^t\sin t+t^2-2$$
$$z=c_7+c_8e^t\cos t+c_9e^t\sin t+2-t^2$$

وهنا علينا أن نلاحظ أن عدد الثوابت يجب ألا يزيد عن ثلاثة ثوابت ، لذلك من أجـل إيجاد العلاقة بين الثوابت التسع السابقة ، نعوض في المعادلتين الأولى والأخيرة من معادلات الجملة فنجد :

$$(c_4-c_1)+(c_5+c_3)e^t\cos t+(c_6+c_2)e^t\sin t=0$$
$$(c_1+c_7+2)+(c_2-c_9)e^t\cos t+(c_8+c_3)e^t\sin t=0$$

من ذلك ، نحصل على العلاقات الآتية :

$$c_4 = c_1 \;\; ; \;\; c_5 = -c_3 \;\; ; \;\; c_6 = -c_2$$

$$c_1 = -(c_7 + 2) \;\; ; \;\; c_2 = c_9 \;\; ; \;\; c_8 = -c_3$$

وبالتالي نستنتج مما سبق أن :

$$c_1 = c_4 = -(c_7 + 2) \;\; ; \;\; -c_6 = c_2 = c_9 \;\; ; \;\; c_5 = c_8 = -c_3$$

بتعويض الثوابت بدلالة c_9 , c_8 , c_7 نحصل على الحل العام للجملة وهو :

$$x = -c_7 + c_9 e^t \cos t - c_8 e^t \sin t + t^2 + 2t - 2$$

$$y = -c_7 + c_8 e^t \cos t + c_9 e^t \sin t + t^2 - 4$$

$$z = c_7 + c_8 e^t \cos t + c_9 e^t \sin t + 2 - t^2$$

٨-٢-٢ حل الجملة التفاضلية بطريقة الحذف :

سنذكر إحدى طرق حل الجملة النظامية (8.1) دون الاعتماد على مفهوم المؤثر التفاضلي D .

بغية السهولة ، لتكن لدينا جملة نظامية مؤلفة من معادلتين فقط :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \qquad (8.10)$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \qquad (8.11)$$

لإيجاد الحل العام للجملة السابقة نتبع الخطوات الآتية :

أ- نشتق المعادلة (8.10) بالنسبة إلى x فنحصل على :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} \qquad (8.12)$$

ب- نحسب z من المعادلة (8.101) نجد أن :

$$z = \varphi(x, y, \frac{dy}{dx}) \qquad (8.13)$$

ج- نعوض قيمة z في المعادلة (8.11) من الجملة ، ثم نعوض المعادلة الناتجة في (8.12) فنحصل على معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة بتابع مجهول واحد y ، وبحلها نجد أن :

$$y = \psi(x, c_1, c_2) \qquad (8.14)$$

د- نعوض قيمة كل من y', y من (8.14) في المعادلة (8.13) فنحصل على قيمة z

$$z = \phi(x, c_1, c_2) \qquad (8.15)$$

وبالتالي فإن العلاقتين (8.14) و(8.15) تمثلان الحل العام للجملة المفروضة .

٨-٢-٣ حل الجملة التفاضلية بطريقة التكاملات الأولية :

مثال (٤) : أوجد الحل العام لجملة المعادلات الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 2z \qquad (I)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y - z \qquad (II)$$

نشتق المعادلة الأولى بالنسبة إلى x فنجد :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3\frac{dy}{dx} - 2\frac{dz}{dx} \qquad (III)$$

نعوض قيمة $\frac{dz}{dx}$ في (III) فنجد :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 2z - 4y \qquad (IV)$$

بحذف z بين (IV) و(I) من الجملة ، نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (V)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ومتجانسة وذات أمثال ثابتة .

لنكتب هذه المعادلة بدلالة المؤثر D :

$$(D^2-2D+1)y=(D-1)^2y=0 \qquad (\text{VI})$$

ومعادلتها المميزة هي :

$$K^2-2K+1=(K-1)^2=0 \Rightarrow K=1 \quad \text{(مكرر مرتين)}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (VI) هو :

$$y=(c_1x+c_2)e^x \qquad (\text{VII})$$

باشتقاق طرفي المعادلة (VII) والتعويض في المعادلة (I) نحصل على :

$$z=(c_2-\frac{1}{2}c_1+c_1x)e^x \qquad (\text{VIII})$$

عندئذٍ المعادلتان (VII) و(VIII) تمثلان الحل العام للجملة التفاضلية المعطاة .

إذا حللنا المعادلتين (8.14) و(8.15) بالنسبة للثابتين c_1 , c_2 ، عندئذٍ نحصل على علاقتين من الشكل الآتي :

$$u(x,y,z)=c_1 \qquad (8.16)$$

$$v(x,y,z)=c_2 \qquad (8.17)$$

نسمي كلاً من التابعين u, v ، تابعين لـ x, y, z بتكامل أولي للجملة التفاضلية (8.10) و(8.11) . وبصورة عامة ، نسمي كل تابع من الشكل :

$$\varphi(x,y,z)$$

تكاملاً أولياً للجملة التفاضلية (8.10) و(8.11) إذا أصبح هذا التابع ثابتاً عندما نستعيض فيه y بالحل العام للجملة التفاضلية ، أي :

$$\varphi[x,\psi(x,c_1,c_2) \;;\; \phi(x,c_1,c_2)]=C \qquad (8.18)$$

حيث :

C : ثابت ، وهذا الثابت لا يتعلق بالمتغير x ، ويأخذ قيمة ثابتة معينة من أجل كل منحني تكاملي للجملة (8.10) و(8.11) .

باشتقاق طرفي المعادلة (8.18) بالنسبة إلى x نجد :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{d\psi}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\frac{d\phi}{dx}=0$$

باستخدام العلاقات (8.10) و(8.11) و(8.14) و(8.15) نجد أنه إذا كان $\varphi(x,y,z)$ تكاملاً أولياً للجملة (8.10) و(8.11) ، فهو يحقق العلاقة الآتية :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} f_1(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} f_2(x,y,z) = 0 \qquad (8.19)$$

ويمكن إثبات كفاية هذا الشرط . فإذا كان :

$$\varphi_2(x,y,z) \;\; ; \;\; \varphi_1(x,y,z)$$

تكاملين أوليين للجملة التفاضلية (8.10) و(8.11) ، فإنه من الواضح أن كل تابع اختياري لهما $\theta(\varphi_1, \varphi_2)$ هو أيضاً تكامل أولي للجملة (8.10) و(8.11) ، يسمح لنا بتشكيل الحل العام لتلك الجملة .

إذاً يكفي حل هذين التكاملين الأوليين بالنسبة إلى y , z . وذلك للحصول على هذين التابعين بدلالة x, c_1, c_2

يكون من السهل في بعض الأحيان ، تكوين تراكيب للمعادلات التفاضلية المفروضة ، بحيث تكون هذه التراكيب تفاضلات تامة ندعوها تراكيب قابلة للمكاملة لتوابع في x , y , z ، فإذا كاملنا هذه التراكيب نحصل على تكاملات أولية ، ومن أجل ذلك يفضل كتابة الجملة التفاضلية (8.10) و(8.11) على الشكل الآتي :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f_1(x,y,z)} = \frac{dz}{f_2(x,y,z)}$$

وقد تأخذ الشكل المكافئ الآتي :

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

ويمكن الحصول على تراكيب قابلة للمكاملة بضرب النسب (بسط ومقام) بمقادير مناسبة والجمع ، للحصول على نسب مقامها أصفاراً .

مثال (٥) : أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

الحـــل : إذا جمعنا البسط إلى بعضهما ، والمقامات لبعضهما ، لحصلنا على نسبة جديدة تساوي النسب السابقة وهي :

$$\frac{dx + dy + dz}{0}$$

وبالتالي نجد التركيب الأول :

$$dx + dy + dz = 0$$

بالتكامل نحصل على تكامل أولي أول :

$$x + y + z = c_1 \qquad (\text{I})$$

إذا ضربنا النسبة الأولى (بسط ومقام) بـــ x والثانية بـــ y والثالثة بـــ z وجمعنـــا ، لحصلنا على النسبة الجديدة المساوية للنسب الأصلية :

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}$$

ومنها نحصل على تركيب قابل للمكاملة :

$$2(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = 0$$

ونحصل على تكامل أولي ثاني :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \qquad (\text{II})$$

التكاملان الأوليان للعلاقتين (I) و(II) مستقلان ، وبالتالي يمثلان الحل العام للجملة التفاضلية المفروضة .

مثال (٦) : أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$$

الحـــل :

من النسبتين الأولى والثانية نحصل على علاقة تحوي متغيرين بعد حذف عامـــل مشترك بين هاتين النسبتين ، ومنه نجد أن :

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

بالمكاملة نجد :

$$x=c_1 y \qquad (I)$$

من النسبتين الأولى والثالثة نجد أن :

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{y}$$

باعتبار أن :

$$y=\frac{x}{c_1}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على معادلة تفاضلية بمتغيرين :

$$x\,dx=c_1\,z\,dz$$

بالمكاملة نحصل على :

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}c_1 z^2+c_2 \qquad (II)$$

العلاقتان (I) و(II) تؤلفان الحل العام للجملة ، وكل منهما تدعى تكاملاً أولياً للجملة .

مثال (٧) : أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{y+x}$$

الحـــل : بطرح النسبة الثانية من الأولى ، والثالثة من الثانية ، وبالمساواة ما بين النسبتين الناتجتين نجد أن :

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y} \qquad (I)$$

بالمكاملة نحصل على :

$$-\ln\left|\frac{y-x}{c}\right|=-\ln|z-y|$$

ومنه نجد أن :

$$(y-x)=c_1(z-y) \qquad (II)$$

حيث : $c_1=\pm c$.

بطرح الثالثة من الأولى ، وبمساواة النسبة الناتجة مع الطرف الأيسر من العلاقة (I) نحصل على ما يلي :

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx-dz}{z-x}$$

بالمكاملة نجد أن :

$$-\ln\left|\frac{y-x}{k}\right|=-\ln|z-x|$$

ومنه نجد أن :

$$(y-x)=c_2(z-x) \qquad (III)$$

حيث : $c_2=\pm k$.

العلاقتان (I) و(III) تؤلفان الحل العام للجملة .

تمارين الفصل الثامن :

١- أوجد الحل العام لكل جملة من الجمل التفاضلية الآتية :

1	$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=4y-z+3x\\ \frac{dz}{dx}=y+2z+x^2\end{cases}$	2	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x+2y+e^t\\ \frac{dy}{dt}=-5x+y+t\end{cases}$
3	$\begin{cases}\frac{dy}{dx}-z-3y=0\\ \frac{dz}{dx}-z+y=0\end{cases}$	4	$\begin{cases}\frac{dy}{dx}+2y+z=\sin x\\ \frac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x\end{cases}$
5	$\begin{cases}\frac{dz}{dx}+5z+\frac{dy}{dx}+7y=8\\ 2\frac{dz}{dx}+z+3\frac{dy}{dx}+y=\cos x\end{cases}$		

٢- أوجد الحل العام للجمل الآتية :

1	$\begin{cases}(D+3)y+2(D+2)z=2\sin x\\2(D+1)y+(D-1)z=\cos x\end{cases}$	5	$\begin{cases}(D+2)z+(D+1)y=x\\(D+3)y+5z=e^{x}\end{cases}$
2	$\begin{cases}(D-1)z+(D+1)y=e^{2x}\\D^{2}z+Dy=3e^{2x}\end{cases}$	6	$\begin{cases}(D^{2}-2)x-3Dy=e^{2t}\\(D^{2}+2)y+x=0\end{cases}$
3	$\begin{cases}(D-3)x+2(D-2)y=2\sin t\\(2D+1)x+(D-1)y=\cos t\end{cases}$	7	$\begin{cases}(D-1)x+Dy=2t+1\\(2D+1)x+2Dy=t\end{cases}$
4	$\begin{cases}(D+1)x+(2D+7)y=e^{t}+2\\-2x+(D+3)y=e^{t}-1\end{cases}$	8	$\begin{cases}Dx-(D+1)y=e^{-t}\\x+(D-1)y=e^{2t}\end{cases}$

٣- أوجد الحل العام للجمل الآتية :

1	$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$
2	$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}$
3	$\frac{dx}{y+t}=\frac{dy}{x+t}=\frac{dz}{x-y}$
4	$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x-y}$
5	$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{y}$

الفصل التاسع

الطرائق التقريبية لحل المعادلات التفاضلية العادية

درسنا سابقاً أن الحل العام للمعادلات التفاضلية كما هو معلوم يحوي عدداً من الثوابت يساوي مرتبة المعادلة وقيم هذه الثوابت تحسب من شروط ابتدائية أو حدية يجب أن يحققها الحل بحيث تكون المعادلة التفاضلية قابلة للحل .

ومن المعروف أن الطرائق العادية لحل المعادلات التفاضلية لا تحل إلا عدداً محدوداً من المعادلات التفاضلية حتى الآن ، ومنها ما هو صعب الحل بهذه الطرائق ، لذلك لابد من اللجوء إلى طرائق عددية أخرى للحل .

في هذا الفصل سنتطرق أولاً إلى مسألة الشروط الابتدائية لإيجاد التابع $y(x)$ والذي نقبله حلاً للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الشكل $y' = f(x, y)$ الذي يأخذ الشرط الابتدائي :

$$y(x_0) = y_0$$

لهذه المسألة عدد كبير من الطرائق ، سنتطرق في البحث لبعضها ، وسنبحث مسألة القيم الحدية في حل معادلة تفاضلية من مرتبةٍ أعلى من المرتبة الأولى ، ولنبدأ بالطرائق التي تبحث في حل المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية .

إن المعادلات التفاضلية التي تحوي مشتقاً تابعاً من الدرجة الأولى ويتبع لمتغير واحد تجدها بشكل واسع في الرياضيات التطبيقية بجميع فروعها .

فأية حالة فيزيائية تتضمن نسبة تغير متغير ما بالنسبة لآخر، تقودنا إلى معادلة تفاضلية من هذا النوع ، وهذا ما يسمى بالمعادلات التفاضلية العادية .

٩-١ حل المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية :

سنعالج هنا المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى ومن الشكل :

$$y' = f(x,y) \qquad (9.1)$$

التي تحقق الشروط الابتدائية الآتية :

$$x = x_0 \quad ; \quad y = y_0$$

حيث إن هذين الشرطين يكتبان بالشكل الآتي :

$$y(x_0) = y_0$$

إن حل المعادلة التفاضلية يتم بحساب قيمة التابع $y(x)$ ومشتقه في النقطة x_0 ، وبعد ذلك يتم حساب قيمة $y(x)$ التقريبية في النقطة التالي x_1 ، وهكذا نتابع الحل بحساب قيمة المشتق $y'(x)$ في النقطة x_1 ، ومن ثم قيمة التابع التقريبية في النقطة x_2 حتى نجد قيم التابع التقريبية جميعها في جميع النقاط المطلوبة .

فبفرض أننا حصلنا على قيمة التابع التقريبية في النقطة x_i ، ولإيجاد قيمته في النقطة x_{i+1} نكتب :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]\,dx \Rightarrow$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]\,dx \qquad (9.2)$$

وبحساب هذا التكامل بطرائق مختلفة نحصل على عدة طرائق لحل المعادلة التفاضلية عددياً .

٩-٢ طريقة منشور تايلور لحل المعادلات التفاضلية (طريقة الاشتقاق المتتالي) :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ ، والشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ ، ولنفرض أن التابع $f(x,y)$ قابل للاشتقاق المتتالي بالنسبة لكل من المتغيرين x و y (مع الملاحظة أن y تابع للمتغير x) ، وأن شروط وحدانية الحل محققة ، كما نفرض أن $y(x)$ هو حلاً لهذه المعادلة .

وبنشر التابع $y(x)$ بجوار النقطة x_i باعتماد متسلسلة تايلور نجد :

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)\ y'(x_i) + \\ + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\ y''(x_i) + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\ y'''(x_i) + ...$$

وبتعويض كل من x في هذه العلاقة بالقيمة x_{i+1} نحصل على العلاقة الآتية :

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + h\,y'_i + \frac{h^2}{2!}\ y''_i + \frac{h^3}{3!}\ y'''_i + ... \qquad (9.3)$$

حيث : $h = x_{i+1} - x_i$.

إن المشتقات الواردة في هذه العلاقة غير معلومة لأن $y(x)$ غير معلوم . لكن ، وبما أننا فرضنا أن التابع $f(x,y)$ قابل للاشتقاق ، إذاً يمكننا أن نحسب المشتق الكلي لهذا التابع وبالتالي باشتقاق المعادلة $y' = f(x,y)$ عدة مرات متتالية نحصل على مجموعة المعادلات الآتية :

$$y'' = \frac{d}{dx}\,[\,f(x,y)\,] = f'_x + f.f'_y$$

$$y''' = f''_{xx} + 2\,f''_{xy}.f + f''_{yy}.f^2 + f'_x.f'_y + (f'_y)^2.f$$

وهكذا ، نلاحظ أن عملية الاشتقاق تصبح أكثر تعقيداً من أجل المراتب العليا ، إلا في الحالة الخاصة التي يكون فيها التابع f بسيطاً ، وهذا ما يضطرنا إلى الاكتفاء بعدد قليل من حدود متسلسلة تايلور .

مثال (١) : كتوضيح لاستخدام متسلسلة تايلور، نفرض أن المطلوب حساب :

$$y_1(x)\ ;\ y_2(x)$$

مضبوطاً لخمسة أرقام عشرية ، للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = \frac{-y^2}{1+x}$$

ذات الشروط الابتدائية :

$$x_0 = 0\ \ ;\ \ y(0) = 1$$

علماً أن $h = 0,05$.

الحـــل : في هذا المثال نلاحظ أن :

$$x_0 = 0 \;\; ; \;\; y(0) = 1 \;\; ; \;\; y'(0) = \frac{-[y(0)]^2}{1+0} = -1$$

ولإيجاد y'' ، نفاضل طرفي المعادلة التفاضلية بالنسبة لـ x نجد :

$$y'' = \frac{-2\,y\,y'(1+x) + y^2}{(1+x)^2}$$

ويمكن تبسيط y'' ، بأن نبدل قيمة الـ y' ، الموجودة في المعادلـــة التفاضـــلية بمـــا يساويها في المثال ، فنجد :

$$y'' = \frac{2\,y^3 + y^2}{(1+x)^2}$$

وبالتالي فإن :

$$y''(0) = \frac{2[y(0)]^3 + [y(0)]^2}{(1+0)^2} = 3$$

بالاشتقاق للمرة الثالثة نجد :

$$y''' = \frac{(6\,y^2 y' + 2\,y\,y')\,(1+x)^2 - 2(1+x)\,(2\,y^3 + y^2)}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{(6\,y^2 y' + 2\,y\,y')\,(1+x) - 2(2\,y^3 + y^2)}{(1+x)^3}$$

وبالتالي فإن :

$$y'''(0) = \frac{[6\,y^2(0)y'(0) + 2\,y(0)\,y'(0)](1+x) - 2(2\,y^3(0) + y^2(0)]}{(1+x)^3}$$

$$y'''(0) = -14$$

هذه العملية يمكن تكرارها لتحصل على :

$$y^{(4)}(0) = 88 \;\; ; \;\; y^{(5)}(0) = -694 \;\; ;$$

$$y^{(6)}(0) = 6578 \quad ; \quad y^{(7)}(0) = -72792$$

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + h\,y_i' + \frac{h^2}{2!}\,y_i'' + \frac{h^3}{3!}\,y_i''' + \ldots$$

من أجل $i = 0$ ، يكون :

$$y_1 = y(x_1) = y(0) + h\,y'(0) + \frac{h^2}{2!}\,y''(0) + \frac{h^3 y'''(0)}{3!} + \ldots$$

$$y_1 = y(x_1) = 1 - (0,05) + \frac{3(0,05)^2}{2!} - \frac{(0,05)^3(14)}{3!} +$$

$$+ \frac{(0,05)^4(88)}{4!} - \frac{(0,05)^5(694)}{5!} + \frac{(0,05)^6(6578)}{6!} -$$

$$- \frac{(0,05)^7(72792)}{7!} + \ldots\ldots$$

$$y_1 = y(x) = 1 - (0,05) + 0,00375 - 0,0002917 + 0,0000229 -$$

$$- 0,0000018 + 0,0000001 - 0,0000000 + \ldots\ldots$$

لاحظ أن الحدود المتتالية تقل في القيمة ، وإشارتها متناوبة ، وبالتـالي فـإن الخطـأ الحادث نتيجة قطع المتسلسلة بعد عدد محدود من حدودها لن يزيد عن الحد الأول في الحدود المهملة . وفي مثالنا هذا ، يمكن جمع أول خمسة حدود ، عندئذٍ نحصل على :

$$y(x_1) = 0,95348$$

صحيحة لخمسة أرقام .

وبالطريقة نفسها تماماً نجد أنه من أجل $i = 1$ و $h = 0,05$ نحصل على :

$$y_2 = y(x_2) = 1 - 0,1 + 0,015 - 0,0023333 + 0,0003667 -$$

$$- 0,0000578 + 0,0000091 - 0,000014 + \ldots\ldots$$

وفي هذه الحالة نحتاج إلى جميع الحدود الأولى السبعة لنحصل على قيمة $y(x_2)$ صحيحاً لخمسة أرقام عشرية ، وهذا يعطي :

$$y(x_2) = 0{,}91298$$

صحيحاً لخمسة أرقام عشرية .

مثال (٢) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = y - 4x + 3$$

ذات الشروط الابتدائية $x_0 = 0$; $y_0 = 3$

الحـــل : لدينا :

$$y'' = y' - 4 = y - 4x - 1$$

$$y''' = y'' = y - 4x - 1 \; ; \; y^{(4)} = y'''$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نجد :

$$y'_0 = y_0 - 4x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$y''_0 = y_0 - 4x_0 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$y'''_0 = 2 \quad ; \quad y_0^{(4)} = 2, \ldots\ldots, y_0^{(n)} = y_0^{(n-1)} = 2$$

بتعويض y'_0 , y''_0 , y'''_0 ,... في متسلسلة تايلور (9.3) ، ومن أجل $i = 0$ ، نجد :

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_0}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+ \frac{y_0^{(4)}{}_0}{3!}(x - x_0)^4 + \ldots = 3 + 6x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \ldots.$$

إن الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية المعطاة هو الناتج :

$$y = 2e^x + 4x + 1$$

إذا وضعنا $h = 0{,}1$ ، فيمكن وضع جدول حلول للمعادلة التفاضلية المعطاة :

x_i	0	0,1	0,2	0,3
القيم الناتجة من الحل التحليلي	3	3,6021	4,2428	4,8996
الحل التقريبي باستخدام متسلسلة القوى	3	3,6103	4,2427	4,8999

٩-٣ طريقة أولر :

إن الطرائق المعروفة لحل المعادلات التفاضلية ليست مفيدة بشكل جيد في حل تلك المعادلات وبرمجتها على الحاسب الإلكتروني ، لذلك نستعيض عنها بطرائق عددية سهلة البرمجة .

إن أسهل الطرائق العددية المعروفة لحل المعادلات التفاضلية العادية هي ما تعرف باسم طريقة أولر، وربما نفضلها عن غيرها ، مع العلم أن الخطأ فيها كبير نسبياً إذا ما قيس بأخطاء باقي الطرائق وخاصة مع $h = x_{i+1} - x_i$ كبيراً . ويزداد هذا الخطأ ويتراكم مع التكرار والانتقال في حساب الحل من نقطة لأخرى وخاصة لو كان $y' = f(x,y)$ يتبع للمتغيرين x و y .

أما في حال كون التابع $f(x,y)$ في المعادلة التفاضلية تابعاً للمتغير y فقط (مع ملاحظة أن y تابع للمتغير x) ، فيكون الخطأ صغيراً .

تعتمد هذه الطريقة على استبدال التكامل :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)].\, dx$$

الموجود في الطرف الأيمن من العلاقة (9.2) وفقاً لقاعدة المستطيل ، بمساحة مستطيل بُعداه :

$$h = x_{i+1} - x_i \;\; ; \;\; f[x_i, y(x_i)]$$

أي بالمساحة :

$$h\, f[x_i, y(x_i)] = h\, y_i'$$

ومنه نجد أن العلاقة (9.2) تأخذ الشكل الآتي :

$$y_{i+1} = y_i + h\, y_i' \qquad (9.4)$$

يمكن أن نلاحظ بسهولة أنه لو اكتفينا في نشر تايلور بالحد الأول والثاني الذي يحوي المشتق الأول فقط ، لحصلنا على النتيجة نفسها .

إن هذه الطريقة تعني هندسياً الاستعاضة عن التابع $y = y(x)$ بالمستقيم :

$$y = y_i + (x - x_i)\, y_i'$$

وهي عبارة عن معادلة المماس للمنحني الممثل بالمعادلة $y = y(x)$ في النقطة $x - x_i$ ، لذلك يمكن القول إن النقاط (x_i , y_i) هي رؤوس ضلع ، كل مضلع منه له ميل يساوي ميل المماس للمنحني الذي معادلته $y = y(x)$ ، وذلك في النهاية اليسرى من هذا الضلع .

يمكن معرفة الخطأ في هذه الطريقة من علاقة تايلور، وذلك بحساب القيمة المطلقة لأول حد مهمل من النشر، ويعطى بالعلاقة الآتية في النقطة x_{i+1} بالشكل الآتي :

$$E_1 = \frac{h^2}{2!} y''(x_i , y_i) \qquad (9.5)$$

مثال (٣) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية : $y' = x\, y^{1/3}$

باستخدام طريقة أولر، حيث :

$$y(1) = 1 \ ; \ h = 0{,}1$$

من أجل $n = 3$ ، ثم أوجد الخطأ في ذلك .

الحـــل : لدينا :

$$y_{i+1} = y_i + h\, y_i' = y_i + (0{,}1)\ (x_i\, y_i^{1/3})$$

ومن أجل $i = 0$ ، نجد :

$$y_1 = y(1{,}1) = y_0 + (0{,}1)\ (x_0\, y_0^{1/3}) = 1 + (0{,}1)\ (x_0 \times 1^{1/3}) = 1{,}1$$

ومن أجل $i = 1$ ، نجد :

$$y_2 = y(1{,}2) = y_1 + (0{,}1)\ (x_1 . y_1^{1/3}) =$$

$$= 1{,}1 + (0{,}1)\ [1{,}1 \times (1{,}1)^{1/3}]$$

$$= 1{,}213550813 \approx 1{,}21355$$

ومن أجل $i = 2$ ، نجد :

$$y_3 = y(1{,}3) = y_2 + (0{,}1)\ (x_2 . y_2^{1/3}) =$$

$$= 1{,}21355 + (0{,}1)\ [1{,}2 \times (1{,}21355)^{1/3}]$$

$$= 1\ ,\ 34155$$

ولحساب الخطأ نطبق العلاقة الآتية :

$$E_1 = \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i\,,\, y_i)$$

من أجل ذلك يلزمنا حساب القيمة الأعظمية للمشتق الأول للتـــابع $f(x\,,y) = x\,y^{1/3}$ وهو y'' ، فنكتب :

$$y'' = f'(x,y) = y^{1/3} + \frac{1}{3}\, x^2\, y^{1/3}$$

ويساوي حده الأعظمي في النقطة $x = 1$ أي يساوي المقدار $\frac{4}{3}$.

وبالتالي ، فإن الخطأ المطلق الأعظمي يكون :

$$|\, E_1\,| < \frac{311(0,1)^2}{2}\,(\frac{4}{3}) = \frac{0,02}{3} < 0,00667$$

ملاحظة (١) :

يمكننا تحسين طريقة أولر هذه لتكون أكثر دقة ، وذلك بأخذ حداً آخر من نشر تـــايلور فنحصل على ما يسمى بطريقة أولر المعدة ، والتي تعطى بالعلاقة الآتية :

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i\,,\, y_i) + \frac{h}{2}\, f'(x_i\,,\, y_i)$$

$$= y_i + h\, y_i' + \frac{h}{2}\, y_i'' \qquad (9.6)$$

٩-٤ طريقة أولر المطورة :

باستخدام قاعدة شبه المنحرف في حساب التكامل :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,[x, y(x)]\, dx$$

الواردة في العلاقة (2-9) نحصل على العلاقة الآتية :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[\, f(x_i\,,\, y_i) + f\,(x_{i+1}\,,\, y_{i+1})\,] \qquad (9.7)$$

وهنا نلاحظ أن y_{i+1} قد ظهرت في الطرف الأيمن كما هي في الطرف الأيسر، فإذا استعضنا عنها في الطرف الأيمن بقيمة تقريبية لها (ندعوها بقسم التنبؤ) محسوبة وفق علاقة ما من علاقات التكامل كعلاقة أولر مثلاً ورمزنا لها بالرمز $y_{i+1}^{(0)}$ نحصل على الحل $y_{i+1}^{(1)}$ في الطرف الأيسر (ندعوه بقسم التصحيح) .

بمتابعة الحل ، وذلك باستعمال القيمة المحسوبة $y_{i+1}^{(1)}$ هذه نحصل على الحل $y_{i+1}^{(2)}$ ، وهكذا ..... حتى نحصل على العلاقة الآتية :

$$y_{i+1}^{(r+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i , y_i) + f(x_{i+1} , y_{i+1}^{(r)}) \right] \qquad (9.8)$$

يمكن كتابة العلاقة (9.7) بالشكل الآتي :

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\,(y'_i + y'_{i+1})$$

وبملاحظة أن الطرف الأيمن هو مشتق دستور التكامل حسب قاعدة شبه المنحرف ، لذلك فالخطأ هنا هو مشتق علاقة الخطأ في قاعدة شبه المنحرف ، وهو الخطأ المرتكب في قسم التصحيح ، ويعطى بالعلاقة الآتية :

$$E_C = \frac{h^3}{12}\, y^{(5)}(\xi) \qquad (9.9)$$

أما الخطأ في قسم التنبؤ ، وفي حال استخدام طريقة أولر مثلاً، يعطى بالعلاقة الآتية :

$$E_P = \frac{h^2}{2}\, y''$$

بذلك أصبح لدينا خطأن ، خطأ في قسم التصحيح ، وخطأ في قسم التنبؤ .

مثال (٤) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = y - \frac{2x}{y} \;\; ; \;\; 0 \le x \le 1$$

بحسب طريقة أولر المطورة ، حيث :

$$y_0 = y(0) \;\; ; \;\; n = 5$$

الحـــل : بتطبيق العلاقة (9.8) ، ومن أجل $r = 0$ ، يكون :

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right]$$

$$= y_i + \frac{h}{2}\left[(y_i - \frac{2x_i}{y_i}) + (y_{i+1}^{(0)} - \frac{2x_{i+1}}{y_{i+1}^{(0)}})\right]$$

ومن أجل $i = 0$ يكون :

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) + (y_1^{(0)} - \frac{2x_1}{y_1^{(0)}})\right]$$

من أجل ذلك نبدأ بحساب $y_1^{(0)}$ وفق طريقة أولر ، فنكتب :

$$y_1^{(0)} = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0})$$

وبما أن $h = \frac{b-a}{n}$ ، فإن :

$$h = \frac{1-0}{5} = 0,2$$

وبالتعويض نجد :

$$y_1^{(0)} = y(0,2) = 1 + (0,2)(1-0) = 1,2$$

وبالتعويض في $y_1^{(1)}$ وفق طريقة أولر المطورة نجد :

$$y_1^{(1)} = y(0,2) = \left\{1 + (\frac{0,2}{2})[(1-0) + (1,2) - \frac{2(0,2)}{12}]\right\} \approx 1,18667$$

ومن أجل $i = 1$ يكون :

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}) + (y_2^{(0)} - \frac{2x_2}{y_2^{(0)}})\right]$$

لنحسب كذلك $y_2^{(0)}$ وفق طريقة أولر ، فنجد :

$$y_2^{(0)} = y_1 + h f(x_1, y_1) = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1})$$

$$= 1,18667 + (0,2)\left[1,18667 - \frac{2(0,2)}{1,18667}\right] \approx 1,35659$$

وبالتعويض في $y_2^{(1)}$ وفق طريقة أولر المطورة ، نجد :

$$y_2^{(1)} = y(0,4) = 1,18667 + (\frac{0,2}{2}) \left[1.18667 - \frac{2(0,2)}{1,18667} + \right.$$

$$\left. + (1,35659 - \frac{2(0,4)}{1,35659}) \right] \approx 1,34832$$

وهكذا بتكرار العملية من أجل $i = 1 , 2 , 4$ ، نجد :

$$y_3^{(1)} = y(0,6) \approx 1,49932$$

$$y_4^{(1)} = y(0,8) \approx 1,62787$$

$$y_5^{(1)} = y(1,0) \approx 1,75422$$

٩-٥ طريقة رونج – كوتا :

إن طريقة رونج – كوتا من الدرجة الرابعة ، طريقة شائعة ودقيقة ، ويتم حسابها بفرض أن :

$$y(x+h) \simeq y(x) + a K_1 + b K_2 + c K_3 + d K_4 \qquad (9.10)$$

حيث إن الأمثال a , b , c , d ، يتم حسابها بعد فرض أن :

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= h f(x,y) \\ K_2 &= h f(x+mh , y+m K_1) \\ K_3 &= h f(x+nh , y+n K_2) \\ K_4 &= h f(x+ph , y+p K_3) \end{aligned}\right\} \qquad (9.11)$$

ولسهولة الحل نفرض :

$$F_1 = f'_x + f f'_y$$

$$F_2 = f''_{xx} + 2 f''_{xy} + f^2 f''_{yy}$$

$$F_3 = f'''_{xxx} + 3 f'''_{xxy} + 3 f'''_{xyy} + f^3 f'''_{yyy}$$

باشتقاق المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على :

$$y'' = f'_x + f'_y y' = f'_x + f'_y f = F_1$$

$$y''' = f''_{xx} + 2 f''_{xy} + f''_{yy} f^2 + f'_y f'_x + f'^2_y f = F_2 + f''_y F_1$$

وبمتابعة الاشتقاق نحصل على :

$$y^{(4)} = F_3 + f'_y F_2 + 3F_1(f''_{xy} + f f''_{yy}) + f'^2_y = F_1$$

ولنكتب الآن نشر متسلسلة تايلور للتابع $y(x)$:

$$y(x+h) - y(x) = h y' + \frac{1}{2!} h^2 y'' + \frac{1}{3!} h^3 y^{(3)} + \frac{1}{4!} h^4 y^{(4)} + \ldots$$

$$= h f + \frac{1}{2!} h^2 F_1 + \frac{1}{3!} h^3 [F_2 + f'_y F_1] +$$

$$+ \frac{1}{4!} h^4 [F_3 + f'_y F_2 + 3F_1(f''_{xy} + f f''_{yy}) + f'^2_y F_1] + \ldots\ldots \quad (9.12)$$

وحسب متسلسلة تايلور لتابع يتبع لمتغيرين نجد أن :

$$f(x+h, y+K) = f(x,y) + h f'_x + K f'_y +$$

$$+ \frac{1}{2!} [h^2 f''_{xx} + 2hK f''_{xy} + K_2 f''_{yy}] +$$

$$+ \frac{1}{3!} [h^3 f'''_{xxx} + 3h^2 K f'''_{xxy} + 3hK^2 f'''_{xyy} + K^3 f'''_{yyy}] + \ldots$$

يمكننا أن نكتب ما يلي :

$$K_1 = h f(x,y)$$

$$K_2 = h \Big[f + mh f'_x + m K_1 f'_y + \frac{m^2 h^2}{2!} f''_{xx} + \frac{2m^2 h}{2!} K_1 f''_{xy} +$$

$$+ \frac{m^2}{2!} K_1^2 f''_{yy} + \frac{m^3 h^3}{3!} f'''_{xxx} + \frac{3m^3 h^2}{3!} K_1 f'''_{xxy} +$$

$$+ \frac{3m^3 h}{3!} K_1^2 f'''_{xyy} + \frac{m^3}{3!} K_1^3 f'''_{yyy} + \ldots \Big]$$

$$= h[f + mh(f'_x + f'_y f) + \frac{1}{2!} m^2 h^2 (f''_{xx} + 2f f''_{xy} + f^2 f''_{yy}) +$$

$$+\frac{1}{3!}m^3h^3(f'''_{xxx}+3f\,f'''_{xxy}+3f^2f'''_{xyy}+f^3f'''_{yyy})+\ldots]$$

$$=h[f+mhF_1+\frac{1}{2}m^2h^2F_2+\frac{1}{6}m^3h^3F_3+\ldots]$$

وهكذا بالطريقة نفسها نحصل على :

$$K_3=h[f+nhF_1+\frac{1}{2}h^2(n^2F_2+2mnf'_yF_1]+$$

$$+\frac{1}{6}h^3(n^3F_3+3m^2nf'_yF_2)+6mn^2(f''_{xy}+f\,f''_{yy})F_1+\ldots]$$

$$K_4=h[f+phF_1+\frac{1}{2}h^2(p^2F_2+2npf'_yF_1)+$$

$$+\frac{1}{6}h^3(p^3F_3+3n^2pf'_yF_2)+6np^2(f''_{xy}+f\,f'''_{yy})F_1+$$

$$+6mnpf'^2_y=F_1+\ldots\ldots]$$

وبتعويض قيم K_4, K_3, K_2, K_1 في العلاقة (9.10) نجد :

$$\left.\begin{aligned}y(x+h)-y(x)\simeq{}&(a+b+c+d)hf+(bm+cn+dp)h^2F_1+\\&+\frac{1}{2}(bm^2+cn^2+dp^2)h^3F_2+\frac{1}{6}(bm^3+cn^3+dp^3)h^4F_3+\\&+(cmn+dnp)h^3f'_yF_1+\frac{1}{2}(cm^2n+dn^2p)h^4f'_yF_2+\\&+(cmn^2+dnp^2)h^4(f''_{xy}+f\,f''_{yy})F_1+dmnph^4f'^2_yF_1+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(9.13)$$

وبمقارنة العلاقة (9.13) مع العلاقة (9.12) نحصل على المعادلات الثمـــان الآتيـــة والتي تحوي سبعة مجاهيل :

$$a+b+c+d=1$$

$$bm+cn+dp=\frac{1}{2}$$

$$b m^2 + c n^2 + d p^2 = \frac{1}{3}$$

$$b m^3 + c n^3 + d p^3 = \frac{1}{4}$$

$$c m n + d n p = \frac{1}{6}$$

$$c m n^2 + d n p^2 = \frac{1}{8}$$

$$c m^2 n + d n^2 p = \frac{1}{12}$$

$$d m n p = \frac{1}{24}$$

وإن الحل لتلك الجملة من المعادلات من الشكل الآتي :

$$m = n = \frac{1}{2} \quad ; \quad p = 1 \quad ; \quad a = d = \frac{1}{6} \quad ; \quad b = c = \frac{1}{3}$$

وهكذا نحصل على صيغة رونج – كوتا من الدرجة الرابعة كما يلي :

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \qquad (9.14)$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= h f(x, y) \\ K_2 &= h f(x + \frac{1}{2} h, y + \frac{1}{2} K_1) \\ K_3 &= h f(x + \frac{1}{2} h, y + \frac{1}{2} K_2) \\ K_4 &= h f(x + h, y + K_3) \end{aligned}\right\} \qquad (9.15)$$

إن طريقة رونج – كوتا تلك ، هي حالة عامة لطريقة سمبسون . حيث المعادلة التفاضلية تابعة لـ x فقط ومن الشكل $y' = f(x)$ ، أي أن : $f'_y = 0$

إن طريقة رونج – كوتا لا تتطلب مشتقات من مراتب عليا كما تتطلب طريقة متسلسلة تايلور، لذلك ينصح باستعمالها في المعادلات التفاضلية التي يصعب حساب المشتقات من المراتب العليا ، بينما طريقة رونج – كوتا تتطلب حساب قيم التابع $y' = f(x,y)$ في نقطة مختلفة .

إن حساب الخطأ في طريقة رونج – كوتا صعب ، بينما في طريقة متسلسلة تايلور فحسابه سهل .

مثال (٥) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = x\, y^{1/3} \; ; \; y(1) = 1$$

حيث : $x_0 = 1 \; ; \; h = 0,1$ ، وذلك حسب طريقة رونج – كوتا .

الحـــل :

$$K_1 = h\, f(x_0\,,\, y_0) = (0,1)\, f(1,1) = 0,1$$

$$K_2 = h\, f(x_0 + \frac{1}{2}\, h,\, y_0 + \frac{1}{2}\, K_1) =$$

$$= (0,1)[\,(1,05)\;(1,05)^{1/3}\,] \simeq 0,10672$$

$$K_3 = h\, f(x_0 + \frac{1}{2}\, h,\, y_0 + \frac{1}{2}\, K_2) =$$

$$= (0,1)\,[\,(1,05)\;(1,05336)^{1/3}\,] \simeq 0,10684$$

$$K_4 = h\, f(x_0 + h,\, y_0 + K_3) =$$

$$= (0,1)\,[\,(1,1)\;(1,10684)^{1/3}\,] \simeq 0,11379$$

وهكذا ، نحصل على :

$$y_1 = y(0,2) = y_0 + \frac{1}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}\,(0,1 + 0,21344 + 0,21368 + 0,11379)$$

$$\simeq 1,10682$$

مثال (٦) : أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

حسب طريقة رونج – كوتا ، حيث $y(0) = 1$; $h = 0,2$ ، وذلك في النقطتين :

$0,4$ و $0,2$ فقط .

الحـــــل : بتطبيق العلاقة (9.15) نجد :

$$K_1 = h f(x_0 , y_0) = h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) = (0,2)\ (1 - \frac{0}{1}) = 0,2$$

$$K_2 = h f(x_0 + \frac{h}{2} , y_0 + \frac{K_1}{2}) = h\left[(y_0 + \frac{K_1}{2}) - \frac{2(x_0 + \frac{h}{2})}{(y_0 + \frac{K_1}{2})}\right]$$

$$= (0,2)\ (1,1 - \frac{0,2}{1,1}) \simeq 0,183636$$

$$K_3 = h f(x_0 + \frac{h}{2} , y_0 + \frac{K_2}{2}) = h\left[(y_0 + \frac{K_2}{2}) - \frac{2(x_0 + \frac{h}{2})}{(y_0 + \frac{K_2}{2})}\right]$$

$$= (0,2)\ (1,091818 - \frac{0,2}{1,091818}) \simeq 0,181727$$

$$K_4 = h f(x_0 + h , y_0 + K_3) = h\left[(y_0 + K_3) - \frac{2(x_0 + h)}{(y_0 + K_3)}\right]$$

$$- (0,2)\ (1,181727 - \frac{0,4}{1,181727}) \simeq 0,168648$$

بالتعويض في العلاقة (9.14) نجد :

$$y_1 = y_0(0,2) = y_0 + \frac{1}{6}\ (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}[0,2 + 2(0,183636) + 2(0,1) + 0,168648]$$

$$\simeq 1,183229$$

وبالطريقة نفسها ، نستطيع إيجاد :

$$y_2 = y(0,4)$$

وذلك بحساب $K_1, 2K_2, 2K_3, K_4$ ، فنحصل على :

$$K_1 = h f(x_1, y_1) = (0,2)\,(y_1 - \frac{2x_1}{y_1})$$

$$= (0,2)\,(1,183229 - \frac{0,4}{1,183229}) \simeq 0,169034$$

$$K_2 = h f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1}{2})$$

$$= (0,2)\,(1,267746 - \frac{0,6}{1,267746}) \simeq 0,158893$$

$$K_3 = h f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2}{2})$$

$$= (0,2)\,(1,262676 - \frac{0,6}{1,262676}) \simeq 0,157499$$

$$K_4 = h f(x_1 + h, y_1 + K_3)$$

$$= (0,2)\,(1,340728 - \frac{0,8}{1,340728}) \simeq 0,148807$$

وبالتعويض في العلاقة (9.14) نجد :

$$y_2 = y(0,4) = y_1 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= 1,183229 + \frac{1}{6}[0,169034 + 2(0,158893) +$$

$$+ 2(0,148807) + 0,148807] \simeq 1,341667$$

٩-٦ طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكار) :

إن هذه الطريقة ظهرت عند البرهان على وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية .

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية (9.1) وهي :

$$y' = f(x, y)$$

والتي فيها الطرف الأيمن تابع مستمر هو ومشتقه الجزئي بالنسبة إلى y في المستطيل :

$$R\{|x - x_0| \le a \ ; \ |y - y_0| \le b\}$$

والمطلوب :

إيجاد حل للمعادلة (9.1) الذي يحقق الشروط الابتدائية :

$$x = x_0 \ ; \ y(x_0) = y_0 \qquad (9.16)$$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية بين x_0 و x ، نجد :

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx$$

أو :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx \qquad (9.17)$$

بتعويض y و y_0 في المعادلة (9.17) نجد التقريب الأول :

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

وبتعويض y و y_1 مرة أخرى في المعادلة (9.17) نجد التقريب الثاني :

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx$$

وبمتابعة العملية n مرة نجد :

$$\vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{(n-1)})\, dx$$

وهكذا ، نحصل على متتالية التوابع :

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x), \ldots,\ y_n(x)\ ;\ \ldots$$

لنورد (الآن) ، من دون برهان المبرهنة الآتية :

مبرهنة (١) :

ليكن $f(x,y)$ تابعاً مستمراً معطى في جوار النقطة (x_0, y_0) ، ومشتقه الجزئي $f'_y(x,y)$ محدود ، عندئذٍ تكون المتتالية :

$$\{y_i(x)\}$$

متقاربة في جوار النقطة x_0 من التابع $y(x)$ والذي يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية (9.1) ، ويحقق الشرط الابتدائي :

$$y(x_0) = x_0$$

يعطى الخطأ لطريقة بيكار بالعلاقة الآتية :

$$|y - y_n| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (9.18)$$

حيث :

$$M = \max\{|f(x,y)|\ ;\ (x,y) \in R[a,b]\}$$

وحيث إن N ثابت ليبتشز للمنطقة $R[a,b]$ ، وقيمته هي :

$$N = \max|f'_y(x,y)|$$

ويمكن حساب قيمة h التي تحدد الجوار :

$$[x_0 - h \le x < x_0 + h]$$

بالعلاقة الآتية :

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \qquad (9.19)$$

حيث a , b حدود المنطقة R .

مثال (٧) : أوجد باستخدام طريقة بيكار حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = x^2 + y^2$$

وذلك بالشروط الابتدائية :

$$x_0 = 0 \ ; \ \ y(x_0) = y_0 = 0$$

الحـــــل : بالاعتماد على العلاقة (9.17) نجد :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} (x^2 + y^2)\, dx$$

واعتماداً على الشروط الابتدائية نكتب :

$$y = \int_{0}^{x} (x^2 + y^2)\, dx$$

عندئذٍ نجد بالتقريبات المتتالية :

$$y_1 = \int_{0}^{x} (x^2 + y_0^2)\, dx = \int_{0}^{x} (x^2 + 0)\, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_{0}^{x} (x^2 + y_1^2)\, dx = \int_{0}^{x} (x^2 + \frac{x^6}{9})\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3 = \int_{0}^{x} (x^2 + y_2^2)\, dx = \int_{0}^{x} (x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969})\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

هنا ، يحسب خطأ التقريب الثالث بالعلاقة الآتية :

$$|y-y_n| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

حيث إن التابع $y' = x^2 + y^2$ معرف ومستمر في جميع نقاط المستطيل :

$$R\{|x-x_0| \le a \; ; \; |y-y_0| \le b\}$$

ويمكن أن نختار النقطتين a , b ، أي عددين ، وبالتالي فإن :

$$R\{-0{,}5 \le x \le 0{,}5 \; ; \; -1 \le y \le 1\}$$

عندئذٍ يكون :

$$M = \max|f'(x,y)| = \max(x^2+y^2) = 1{,}25$$
$$N = \max|f'_y(x,y)| = \max|2y| = 2$$

حيث $a = 0{,}5$ ، $\frac{b}{M} = 0{,}8$ ، عندئذٍ وحسب العلاقة (9.19) يكون :

$$h = \min(a, \frac{b}{M}) = 0{,}5$$

وبالتالي يكون الحل المعطى من أجل :

$$-0{,}5 \le x \le 0{,}5$$

ومن أجل $n = 3$ نجد :

$$|y-y_3| \le \frac{(1{,}25).(2)^3.(0{,}5)^4}{4!} = \frac{5}{192}$$

ونلاحظ أن الخطأ الناتج كبير جداً ، وفي الحقيقة ، فإن الخطأ أصغر من ذلك بكثير .

٩-٧ حل المعادلات التفاضلية من المرتبة n :

يمكن رد المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

حيث :

$$y' = \frac{dy}{dx} \; , \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \; , \; .....$$

إلى مجموعة معادلات تفاضلية آنية من المرتبة الأولى .

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \; , \; \frac{dy_1}{dx} = y_2 \; , ... \; , \; \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \; .$$

$$\; , \; \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, ..., y_{n-1})$$

فإذا أعطيت الشروط الابتدائية :

$$x = x_0 \; , \; y = y_0 \; , \; y' = (y_1)_{(0)} \; , \; y'' = (y_2)_{(0)} \; .... y^{(n-1)} = (y_{n-1})_{(0)}$$

عندئذ يمكن استخدام جميع الطرائق السابقة لحل المعادلة التفاضلية من المرتبة n

مثال (٨) : استخدم طريقة متسلسلة تايلور لحساب القيمة التقريبية لـ θ عندما :

$$t = 0,05$$

وذلك لحل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -8\sin\theta$$

الذي يحقق الشرط :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

عندما $t = 0$

الحل : إن المعادلة التفاضلية المفروضة تكافئ المجموعة :

$$\frac{d\theta}{dt} = \phi = f(t, \theta, \phi) \; : \; \frac{d^2\theta}{dt^2} = -8\sin\theta = g(t, \theta, \phi)$$

مع شروط البدء :

$$t = 0 \; : \; \theta = \frac{\pi}{4} \quad : \quad \phi = 1$$

إذاً :

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = \phi \;\; ; \;\; \theta'_0 = 1 \; ; \; \phi' = -8\sin\theta \; ; \; \phi'_0 = -4\sqrt{2}$$

$$\theta'' = \phi' \;\; ; \;\; \theta''_0 = -4\sqrt{2} \; ; \; \phi'' = -8\theta'\cos\theta \; ; \; \phi''_0 = -4\sqrt{2}$$

$$\theta''' = \phi'' \;\; ; \;\; \theta'''_0 = -4\sqrt{2} \; ; \; \phi''' = -8(\theta')^2\sin\theta - 8\theta''\cos\theta$$

$$\theta'''_0 = 4\sqrt{2}\,(1 + 4\sqrt{2}\,)$$

$$\theta'''' = \phi''' \;\; ; \;\; \theta''''_0 = 4\sqrt{2} + 32$$

ومنه ، واعتماداً على متسلسلة تايلور نجد :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + t - 4\sqrt{2}\,\frac{t^2}{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{t^3}{6} + 4(8+\sqrt{2}\,)\,\frac{t^4}{24} + ...$$

$$\theta(t = 0.05) = 0.82821$$

تمارين الفصل التاسع :

١- طبق طريقة أولر – كوشي في حل المعادلة :

$$y' = x + y$$

حيث : $y(0) = 0$ ، $h = 0.2$ ، وذلك بأخذ خمس خطوات فقط .

٢- أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = y - 4x + 3$$

ذات الشروط الابتدائية $x_0 = 0$: $y_0 = 3$.

٣- طبق طريقة أولر – كوشي في حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = y - x$$

ذات الشروط الابتدائية $x_0 = 0$: $y_0 = 1.5$

في المجال $[0\ ,\ 1{,}5]$ بأخذ $h = 0{,}25$ ، مقرباً النتائج إلى أربعة أرقام عشرية بعد الفاصلة .

٤- طبق طريقة رونج – كوتا من أجل $h = 0{,}1$ ، لإيجاد حل كل من المعادلتين التفاضليتين المعطاة بجانبها الشروط الابتدائية :

آ- $y' = x + y^2$ ، ذات الشروط الابتدائية : $y(1) = 0\ ;\ x \in [1\ ,\ 2]$

ب- $y' = x^2 - y$ ، ذات الشروط الابتدائية : $y(0) = 2\ ;\ x \in [0\ ,\ 1]$

٥- أوجد باستخدام طريقة بيكار ثلاث تقريبات متتالية لحل كل من المعادلتين التفاضليتين :

آ- $y' = 4y(1+x)\ ;\ y(0) = 1$

ب- $y' = x - y\ ;\ y(0) = 1$

٦- استخدم تقريباً لـ y عندما $x = 0{,}2$ بفرض أن :

$\frac{dy}{dx} = x + y^2$ ، وأن $y = 1$ ، عندما $x = 0$

اعتماداً على :

آ- طريقة بيكار ب- متسلسلة تايلور

٧- استخدم تقريباً لـ y عندما $x = 0{,}1$ ، بفرض أن :

$\frac{dy}{dx} = x - y^2$ ، وأن

اعتماداً على :

آ- طريقة بيكار ب- متسلسلة تايلور

٨- استخدم طريقة رونج لحساب قيمة تقريبية لـ y عندما $x = 1{,}1$ ، بفرض أن :

$\frac{dy}{dx} = 3x + y^2$ ، وأن $x = 1$ ، عندما $y = 1{,}2$

٩- أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y' = x + y + x\,y$$
$$y(0) = 1 \;\; ; \;\; h = 0{,}1$$

باستخدام منشور تايلور عند النقطة $x = 0{,}1$ ، مستخدماً حدوداً حتى x^3 .

١٠- حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = x^2 + y^2$$
$$y(1) = 0$$

من النقطة $x = 1$ ، باستخدام التقريب المتتالي (بيكار) .

المصطلحات العلمية

(A)	
Absolute convergence	تقارب مطلق
Absolute value	قيمة مطلقة
Addition	جمع
Analysis	تحليل
Applications	تطبيقات
Approximation	تقريب
Arc	قوس
Arc Length	طول قوس
Arca	مساحة
(B)	
Bernoulli's equation	معادلة بيرنولي
Binomial	منشور ثنائي الحد
Bounded	محدود
Bounded above	محدود من الأعلى
Bounded function	تابع محدود
Bounded interval	مجال محدود
Bounded set	مجموعة محدودة
(C)	
Cartesian coordinate	إحداثيات ديكارتية
Cauchy problem	مسألة كوشي

Center	مركز
Center of gravity	مركز الثقل
Characteristic equation	المعادلة المميزة
Characteristic roots	الجذور المميزة
Change if variable	تغير المتغير
Closed interval	مجال مغلق
Clariaut's equation	معادلة كليرو
Coefficients	عوامل
Continuous function	تابع مستمر
Condition	شرط
Coordinate	إحداثي
Coordinate axis	محور إحداثي
Coordinate system	جمل إحداثية
Complete differential	تفاضل كامل
Complementary function	الدالة المتممة
Complete solution	الحل التام
Constant coefficients	معاملات ثابتة
Complex root	جذر مركب
Constants of integration	ثوابت التكامل
Critical point	نقطة حرجة
Current	تيار
(D)	
Derivative	مشتق
Derivative partia	مشتق جزئي
Degree	درجة
Discriminate	مميز

Distinct real roots	جذور مختلفة حقيقية
Discontinuity	انقطاع
Differentiable	قابل للمفاضلة
Differential	تفاضل
Domain of definition	مجال تعريف (منطقة تعريف)
(E)	
Equation	معادلة
Equations solvable for – P	معادلات قابلة الحل بالنسبة لـ P
Elementary functions	التوابع الأولية
Element	عنصر
Ellipsoid	مجسم قطع ناقص
Empty set	مجموعة خالية
Euler's formula	صيغة أولر
Exact equation	معادلة تامة
Exact differential equation	معادلة تفاضلية تامة
Exact differential	تفاضل تام
Example	مثال
Entire function	تابع صحيح
Expansion	منشور
Existence theorem	مبرهنة وجود
(F)	
Factorial	عاملي
Family of curves	مجموعة منحنيات
Finite	منتهي
Finite set	مجموعة منتهية

First degree	درجة أولى
First order	مرتبة أولى
Formula	صيغة
Fractions	كسور
Fundamental	أساسي
Function	تابع
Functional	تابعي
Function of two variables	تابع ذو متغيرين

(G)

General solution	حل عام
General term	حد عام
Generalization	تعميم

(H)

Half	نصف
Height	ارتفاع
Higher	أعلى
Higher derivatives	مشتقات من مراتب عليا
Higher degree	درجة عليا
Homogeneous	متجانس
Hyperbola	قطع زائد
Hypotenuse	وتر

(I)

Identify	يطابق
Implicit function	تابع ضمني

Imaginary	تخيلي
Improper	معتل (شاذ)
Improper integrals	التكاملات الشاذة
Increasing function	تابع متزايد
Inequality	متراجحة
Interior point	مجموعة غير منتهية
Indeterminate form	شكل عدم تعيين
Interval	مجال
Indefinite	غير محدد
Inverse function	تابع عكسي
Integrable	قابل للمكاملة
Integral	تكامل
Integral domain	مجال المكاملة
Integrand	التابع المستكمل
Integration	عملية التكامل
Index	دليل
Interior point	نقطة داخلية
In finite	لا منتهية
In finite decimal	متتالية لا منتهية
In finite series	متسلسلة لا منتهية
Initial conditions	شروط ابتدائية
Inspection	إمعان النظر (تفحص)
Integrating factor	عامل تكامل

(J)

Jacobean	المعين اليعقوبي

(L)

Length	طول
Limit	نهاية
Limit of function	نهاية تابع
Limit inferior	نهاية دنيا
Limit superior	نهاية عليا
Limits of an integral	حدود التكامل
Limiting value	قيمة حدية
Linear equation of order n	معادلة خطية من المرتبة n
Linearly independent	مستقل خطياً
Lincarly dependent	غير مستقل خطياً
Logarithm	لوغاريتم
Logarithmic function	تابع لوغاريتمي

(M)

Maximum	قيمة عظمى
Maclaurin series	متسلسلة ماكلورين
Method of variation of paramenters	طريقة تغيير البارامترات
Minimum	قيمة صغرى
Multiple point	نقطة مضاعفة

(N)

Natural numbers	الأعداد الطبيعية
Negative	سالب
Negative integers	الأعداد الصحيحة السالبة
Neighborhood	مجاورة
Necessary and sufficient condition	الشرط اللازم الكافي

Not homogeneous – in homogeneous	غير متجانس
Numerical	عددي
(O)	
Odd function	تابع فردي
Open interval	مجال مفتوح
Operator	مؤثر
Ordinary	عادي
Order	مرتبة
(P)	
Partial derivative	مشتقات جزئية
Parabola	قطع مكافئ
Particular integral	تكامل خاص
Particular solution	حل خاص
Partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
Partial fractions	كسور جزئية
Polar coordinate	إحداثيات قطبية
Polynomial	كثير حدود
Positive integers	الأعداد الصحيحة الموجبة
Proccdure	طريقة
Primitive	تابع أصلي
(R)	
Range of function	مجموعة قيم التابع
Range of integration	منطقة التكامل
Rectangular coordinates	الإحداثيات المتعامدة
Repeated roots	جذور مضاعفة

Real root	جذر حقيقي
Region	منطقة
Riemann integrable function	تابع قابل للمكاملة بحسب بريمان
Riccati equation	معادلة ريكاتي
Runge's method	طريقة رنج
(S)	
Scalar	سلمي
Series	متسلسلات
Set	مجموعة
Simultaneous equation	معادلات آنية
Single valued	وحيدة القيمة
Solution	حل
Substitution	تعويض
(U)	
Undetermined coefficient	معاملات غير معينة
Undefined	غير معرف
(W)	
With variable coefficients	معاملات متغيرة

Damascus University

المراجع العلمية

آ- المراجع العربية :

١- أ. أحمد علوظي – الجبر والتحليل الرياضي – منشورات جامعة حلب ، ١٩٧٩م

٢- د. أنور اللحام– الرياضيات العامة /٣/ – منشورات جامعة دمشق ، ١٩٩٠ – ١٩٩١م

٣- د. حسن سلوطة – الرياضيات /٣/ – منشورات جامعة دمشق ، ١٩٩١ – ١٩٩٢م

٤- د. حسن نقار – الرياضيات /١/ – منشورات جامعة حلب ، ١٩٨١ – ١٩٨٢م

٥- د. حسن نقار– المعادلات التفاضلية /١/ – منشورات جامعة حلب ،١٩٨١ – ١٩٨٢م

٦- د. عماد فتاش ، د. معاز عبد المجيد – التحليل الرياضي /١/ – منشورات جامعة دمشق ، ٢٠٠٤ – ٢٠٠٥م

٧- د. محمد حنيفة – الرياضيات /٢/ – منشورات جامعة حلب ، ٢٠٠١م

٨- د. محمد حنيفة – الرياضيات /١/ – منشورات جامعة حلب ، ٢٠٠١م

٩- د. محمد خليل الصباغ ، د. موفق قباوة ، د. عبدو العبدالله – الرياضيات /٢/ – منشورات جامعة حلب ، ١٩٩٨ – ١٩٩٩م

١٠- د. محمد سعيد البرني – المعادلات التفاضلية /الجزء الأول/ – منشورات جامعة دمشق ،١٩٨٠ – ١٩٨١م

١١- د. معاز عبد المجيد – التحليل الرياضي /٢/ – منشورات جامعة دمشق ، ٢٠٠٦ – ٢٠٠٧م

١٢- د. موفق أحمد قباوة – الرياضيات /٣/ – منشورات جامعة حلب ، ١٩٩٩م

١٣- د. نظير هلال – الرياضيات /٢/ – منشورات جامعة دمشق ، ١٩٩٠ – ١٩٩١م

١٤- د. هاشم عبداللي – الرياضيات /٤/ – منشورات جامعة حلب ، ١٩٩٥م

١٥- د. هاشم عبداللي ، د. محمد عصام عقاد – الرياضيات /٣/ – منشورات جامعة حلب ١٩٨٥ – ١٩٨٦م

ب- المراجع الأجنبية :

١- فرانك آيرز – المعادلات التفاضلية – سلسلة ملخصات شوم – دار ماكجروهيل للنشر (مترجم) .

٢- فيجودسكي – المرجع في الرياضيات العالية – دار مير– موسكو (مترجم) ، ١٩٨٠م

٣- قيصر فيازمينسكي – المعادلات التفاضلية – الكتاب الأول – المركز العربي للتعريب والتأليف والترجمة والنشر – دمشق ، ١٩٩٥م

٤- موراي ر. شبيجل – التفاضل والتكامل المتقدم – سلسلة ملخصات شوم – دار ماكجروهيل للنشر (مترجم) ، ١٩٧٤م

٥- Сборник задач и упражнений по математическому анализу - Б. П. Демидович - Москва - наука ١٩٧٧

٦- Основы математического анализа - П. М. Фихтенгольц - Москва - наука ١٩٦٨.

٧- Дифференциальное и интегральное исчисления - Н. С. Пискунов - Москва - наука - ١٩٦٨.

٨- Дифференциальное и интегральное исчисление - Я. С. Бугров - С. М. Никольский - Москва - наука ١٩٨٠

٩- Высшая математика - Я. С. Бугров - С. М. Никольский - Дифференциальное и интегральное исчисление - Москва - наука ١٩٨٠.

١٠- Курс математического анализа Том ١ - С. М. Никольский - Москва - наука ١٩٩٠

اللجنة العلمية

الدكتور معاذ عبد المجيد – أستاذ في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة دمشق.

الدكتور نظير هلال – أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة دمشق .

الدكتور عماد فتاش – أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة دمشق .

مدقق اللغة العربية

الدكتور أسامة اختيار – جامعة دمشق – كلية الآداب والعلوم الإنسانية

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University