



منشورات جامعة دمشق  
كلية الهندسة المعلوماتية

# الجبر الخطي

الدكتور  
عمران قوبا

١٤٣٢ - ١٤٣٣ هـ  
٢٠١١ - ٢٠١٢ م

جامعة دمشق



حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق



## مقدمة

لقد نشأ الجبر الخطي من دراسة جمل المعادلات الخطية، التي بدأها LEIBNITZ في عام ١٦٧٨ ثم تابعها MACLAURIN فأعطى العلاقات التي تسمح بجمل المعادلات الخطية بمجهولين وبثلاثة مجاهيل عام ١٧٤٨. وأكمل CRAMER دراسة الحالة العامة في عام ١٧٥٤. ثم جاءت، انطلاقاً من الدراسات السابقة، فكرة تعريف المحدد من المرتبة  $n$  وذلك بالتعريف على  $n$  عن طريق نشر المحدد وفق سطر أو عمود، لكل من VANDERMONDE و LAPLACE. ومن جهة أخرى، اعتمد GAUSS في كتابه "Recherches Arithmétiques" رمزاً في هيئة جدول للدلالة على تحويل خطي، فظهر مفهوم المصفوفة، ثم عرف GAUSS ضرب المصفوفات. وهذا ما سمح للعالم CAUCHY باكتشاف قاعدة جداء مُحددين التي نشرها في أطروحة عام ١٨١٥.

وبقي مفهوم المصفوفة والمحدد متلازمين جداً في أذهان علماء الرياضيات، مدة من الزمن. وفي عام ١٨٢٦ عرف CAUCHY كثير الحدود المميز لمصفوفة، وذلك في دراسته للمحاور الأساسية لسطح من الدرجة الثانية. ثم تطورت نظرية المصفوفات في منتصف القرن التاسع عشر على يد كل من CAYLEY و SYLVESTER. وأصبحت المفاهيم الجديدة متعارفة ومألوفة أكثر فأكثر، وهذا ما أتاح المجال لظهور مفهوم الفضاء الشعاعي الذي له  $n$  بُعداً، والذي تحدث عنه لأول مرة كل من CAYLEY و GRASSMAN في الأعوام ١٨٤٣-١٨٤٥، وأخيراً قام PEANO في عام ١٨٨٨ بصياغة التعاريف النهائية، المبينة على موضوعات أولية، للجبر الخطي.

بقيت وجهة النظر المصفوفية المبينة على جمل الإحداثيات مهيمنة على الجبر الخطي حتى الثلاثينيات من هذا القرن، ثم أخذت النظرة الهندسية الحديثة، القائمة على الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية، تؤدي دورها أكثر فأكثر بسبب عموميتها واستقلالها عن الجمل الإحداثية.

فيما يلي عرضٌ لفحوى هذا الكتاب:

- ❖ يتضمن الفصل الأول التعاريف الأساسية في الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية.
  - ❖ ويدرس الفصل الثاني مسألة البعد في الفضاءات الشعاعية، و بوجه خاص الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية.
  - ❖ ويعالج الفصل الثالث الأشكال الخطية على فضاء شعاعي، والثبوتية في الفضاءات الشعاعية.
  - ❖ ويتصدى الفصل الرابع للدراسة المصفوفات، والعمليات عليها، وخواصها، ثم علاقتها بالتطبيقات الخطية.
  - ❖ ويعرض الفصل الخامس مفهوم المحددات، وحسابها، وحلّ جمل المعادلات الخطية.
  - ❖ ويشتمل الفصل السادس على دراسة اختزال التطبيقات الخطية، أي إمكان تمثيلها بمصفوفات قطرية أو مثلثية.
  - ❖ وأخيراً نجد في الفصل السابع الفضاءات الشعاعية المزودة بمجاء سلمي، وهي بنى غنية جداً، تتلازم فيها دراسة الجبر مع دراسة التحليل، فتعطي العديد من النظريات الهامة. ونفترض عند دراسة هذا الفصل أنّ القارئ على دراية بالفضاءات الشعاعية المنظمة.
- هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، والتي تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة
- ختاماً، أرجو الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النور، وأعرب سلفاً عن شكري لكل زميل يُبدي ملاحظة أو التقاداً بقاءين على فحوى هذا الكتاب.

عمران قوبا

كانون الثاني 1999

# الفصل الأول

## الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

### 1.1.1. عموميات

1.1.1. تعريف: لتكن  $E$  مجموعة غير خالية، وليكن  $IK$  حقلاً تبديلياً. نفترض أن المجموعة

$E$  مزودة بقانوني تشكيل أولهما داخلي:  $E \times E \rightarrow E : (x, y) \mapsto x + y$  وثانيهما

خارجي:  $IK \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ . نقول إن البنية  $(E, +, \cdot)$  فضاء شعاعي

على الحقل التبديلي  $IK$ ، إذا وفقط إذا تحققت الشروط:

1. البنية  $(E, +)$  زمرة تبديلية.

2. يحقق قانون التشكيل الخارجي  $(\cdot)$  الخواص التالية:

i. أيًا كانت  $x \in E$ ، فإن  $1 \cdot x = x$ .

ii. أيًا كانت  $x \in E$  و  $(\alpha, \beta) \in IK^2$ ، فإن  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ .

iii. أيًا كانت  $(x, y) \in E^2$  و  $\alpha \in IK$ ، فإن  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ .

iv. أيًا كانت  $x \in E$  و  $(\alpha, \beta) \in IK^2$ ، فإن  $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ .

نسمي عناصر  $E$  أشعة، ونسمي عناصر  $IK$  مؤثرات سلمية.

### 1.1.2. أمثلة:

< ليكن  $IK$  حقلاً تبديلياً ولتكن  $1 \leq n$ . تكون المجموعة  $E = IK^n$  مزودة بقانوني

التشكيل التاليين فضاء شعاعياً على الحقل  $IK$ .

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

< بوجه أعم، إذا كان  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ ، وكانت  $X$  مجموعة غير خالية،

كوت مجموعة التوابع التي منطلقها  $X$  ومستقرها  $E$  والتي لرمز إليها بالرمز

$\mathcal{F}(X, E)$  فضاء شعاعياً على الحقل  $IK$  بالنسبة إلى القانونين المعرفين كما يلي:

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in X, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

نسمي جماعة من عناصر  $E$ ، مجموعة أدلتها  $I$ ، أي عنصر من  $\mathcal{F}(I, E)$ ، وعندئذ لرمز إلى هذا العنصر بالرمز  $(x_i)_{i \in I}$ ، ولرمز إلى الفضاء  $\mathcal{F}(I, E)$  بالرمز  $E^I$ .

< إذا كانت  $E_1, \dots, E_n$  فضاءات شعاعية على حقل  $IK$ ، فإن القانونين التاليين يجهلان

من الجداء الديكاري  $F = E_1 \times \dots \times E_n$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

< تكون  $IK[X]$  أي مجموعة كثيرات الحدود بمحول واحد على حقل  $IK$ ، فضاءً

شعاعياً على الحقل  $IK$ ، بالنسبة إلى قانوني جمع كثيرات الحدود وضربها بعدد من  $IK$ .

لندكر بعض الخواص البسيطة التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ:

3-1.1. مبرهنة: لتكن  $E$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ ، عندئذ أياً كان  $x \in E$  و  $\alpha \in IK$

لدينا:

$$1. 0_{IK} \cdot x = 0_E \text{ و } \alpha \cdot 0_E = 0_E$$

$$2. \text{ إذا كان } 0_E = \alpha \cdot x \text{ فإما أن يكون } 0_{IK} = \alpha \text{ أو } 0_E = x$$

$$3. \text{ وأخيراً: } (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha x)$$

4-1.1. مبرهنة: ليكن  $(E, +, \cdot)$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ ، ولتكن  $F$  مجموعة جزئية من

$E$ . نقول إن  $F$  فضاءً شعاعياً جزئياً من  $E$ ، إذا وفقط إذا كان  $0 \in F$ ، وكانت

$F$  مغلقة بالنسبة إلى قانوني التشكيل المعرفين على  $E$ . عندئذ تكون المجموعة  $F$

المزودة بمقصوري قانوني التشكيل  $(+)$  و  $(\cdot)$  إلى  $F \times F$  و  $IK \times F$  على التوالي، فضاءً

شعاعياً على الحقل  $IK$ .

ويتحقق القارئ بسهولة صحة المبرهنة التالية:

5-1.1. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ ، ولتكن  $F$  مجموعة جزئية من  $E$ .

عندئذ يكون  $F$  فضاءً شعاعياً جزئياً من  $E$ ، إذا وفقط إذا كان  $0 \in F$ ، وتحقق

$$\text{الشرط: } \forall (x, y) \in F \times F, \forall \lambda \in IK, \lambda \cdot x + y \in F$$

يكون كل من  $\{0_E\}$  و  $E$  فضاءً شعاعياً جزئياً من  $E$ . ولسميها الفضاءين الجزئيين التافهين.

## 6-1.I. أمثلة:

< ليكن  $IK$  حقلاً تبديلياً ولكن  $IN \ni n$ . عندئذ تكون المجموعة

$$IK_n[X] = \{P \in IK[X] : \deg P \leq n\}$$

فضاء شعاعياً جزئياً من  $IK[X]$ .

< إذا كانت  $I$  مجموعة غير خالية، وكان  $IK$  حقلاً تبديلياً، كوّنت المجموعة

$$IK^{(I)} = \{(x_t)_{t \in I} : \text{Card}\{t \in I : x_t \neq 0\} < +\infty\}$$

فضاءً شعاعياً جزئياً من  $IK^I$ . نسمي أي عنصر من  $IK^{(I)}$  جماعة شبه معدومة من

عناصر  $IK$  مجموعة أدلتها  $I$ . لاحظ أنّ  $IK^{(I)} = IK^I$  إذا وفقط إذا كانت  $I$  مجموعة

منتهية. ولنذكر أنّ فضاء كثيرات الحدود  $IK[X]$  ما هو إلا  $IK^{(\mathbb{N})}$ .

< وبوجه أعم، إذا كانت  $I$  مجموعة غير خالية، وكان  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ ،

كوّنت المجموعة  $E^{(I)} = \{(x_t)_{t \in I} : \text{Card}\{t \in I : x_t \neq 0_E\} < +\infty\}$  فضاءً شعاعياً

جزئياً من  $E^I = \mathcal{F}(I, E)$ . نسمي أي عنصر من  $E^{(I)}$  جماعة أشعة شبه معدومة من

عناصر  $E$  مجموعة أدلتها  $I$ .

7-1.I. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ ، ولتكن  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  جماعة من الفضاءات

الشعاعية الجزئية من  $E$ . عندئذ يكون  $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ .

الإثبات

□ الإثبات تحقق مباشرة انطلاقاً من التعريف.

8-1.I. مبرهنة وتعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ ، ولتكن  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  جماعة من

الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ . نسمي أصغره فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$  يحوي

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  الفضاء الجزئي الموكّد  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ، ولرمز إليه بالرمز  $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ . إنّ  $\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  هو

تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$  الحاوية  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ ، ويُعطى أيضاً بالعلاقة:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda : (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in E^{(\Lambda)}, \forall \lambda \in \Lambda, x_\lambda \in F_\lambda \right\}$$

<sup>هـ</sup> بالنسبة إلى علاقة الاحتماء.

9-1.1. ملاحظة: إذا كانت  $\Lambda = \mathbb{I}N_n = \{1, \dots, n\}$  وكانت  $F_1, F_2, \dots, F_n$  فضاءات شعاعية

جزئية من  $E$  كتبنا  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  أو  $\sum_{k=1}^n F_k$  للدلالة على الفضاء الشعاعي

المولد  $\sum_{k=1}^n F_k = \{x_1 + \dots + x_n : \forall k \in \mathbb{I}N_n, x_k \in F_k\}$ ، ويكون:

## 2.1. التطبيقات الخطية

1-2.1. تعريف: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على الحقل التبادلي  $\mathbb{K}$ ، نقول عن تطبيق

$u : E \rightarrow F$  إنه خطي إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E \times E, \quad u(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot u(x) + u(y)$$

ونرمز بالرمز  $\mathcal{L}(E, F)$  إلى مجموعة التطبيقات الخطية التي منطلقها  $E$  ومستقرها  $F$ .

وهي فضاء شعاعي جزئي من  $\mathcal{F}(E, F)$  فضاء التوابع التي منطلقها  $E$  ومستقرها  $F$ .

وإذا كان  $u$  تطبيقاً من  $\mathcal{L}(E, F)$  فإننا نرمز بالرمز  $\ker u$  إلى نواته أي إلى المجموعة

$$\{0\}^{u^{-1}}, \text{ ونرمز بالرمز } \operatorname{Im} u \text{ إلى صورة التطبيق } u \text{ أي } u(E).$$

إن كل من  $\ker u$  و  $\operatorname{Im} u$  فضاء شعاعي جزئي، وهذا ناتج من المبرهنة التالية :

2-2.1. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على  $\mathbb{K}$ ، وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E, F)$ .

وليكن  $E_1$  و  $F_1$  فضاءين شعاعيين جزئيين من  $E$  و  $F$  على التوالي. عندئذ يكون  $u(E_1)$

$$\text{و } u^{-1}(F_1) \text{ فضاءين شعاعيين جزئيين من } E \text{ و } F \text{ على التوالي.}$$

الإثبات

ليكن  $y_1$  و  $y_2$  عنصرين من  $u(E_1)$ . عندئذ يوجد عنصران  $x_1$  و  $x_2$  من  $E_1$  بحيث

$$u(x_1) = y_1 \text{ و } u(x_2) = y_2, \text{ ومن ثم أياً كانت } \lambda \in \mathbb{K} \text{ لدينا}$$

$$\lambda \cdot y_1 + y_2 = u(\underbrace{\lambda \cdot x_1 + x_2}_{\in E_1}) \in u(E_1)$$

ومنه  $u(E_1)$  فضاء شعاعي جزئي من  $E$ .

وكذلك ليكن  $x_1$  و  $x_2$  عنصرين من  $u^{-1}(F_1)$ . عندئذ أياً كانت  $\lambda \in \mathbb{K}$  لدينا

$$u(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + u(x_2) \in F_1$$

ومن ثم  $\lambda \cdot x_1 + x_2 \in u^{-1}(F_1)$ .

□

3-2.I. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على  $\mathbb{K}$ ، وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E, F)$ . عندئذ يكون  $u$  متبايناً إذا وفقط إذا كان  $\ker u = \{0_E\}$ .

الإثبات

إن هذا التكافؤ واضح لأنه، أيما كان  $(x, y) \in E \times E$ ، فإن

$$\square \quad u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker u$$

المبرهنة التالية واضحة.

4-2.I. مبرهنة: لنكن  $E$  و  $F$  و  $G$  فضاءات شعاعية على  $\mathbb{K}$ ، وليكن  $u$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  و  $v$  من  $\mathcal{L}(F, G)$  عندئذ يكون  $v \circ u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E, G)$ .

5-2.I. ملاحظة: لقد جرت العادة أن نرمز بالرمز  $\mathcal{L}(E)$  إلى الفضاء  $\mathcal{L}(E, E)$ ، وهو يكون جبراً على الحقل  $\mathbb{K}$  بالنسبة إلى القوانين  $(+, \cdot, \cdot)$  ويكون غير تبديلي في الحالة العامة.

6-2.I. تعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على الحقل التبديلي  $\mathbb{K}$ ، نرمز بالرمز  $\mathcal{GL}(E)$  إلى مجموعة التقابلات الخطية من  $E$  إلى  $E$ ، وهي زمرة بالنسبة إلى قانون تركيب التطبيقات  $(\circ)$ . تُسمى الزمرة  $(\mathcal{GL}(E), \circ)$  الزمرة الخطية على الفضاء  $E$ .

3.I. جماعات وجمل الأشعة

1-3.I. تعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$  و  $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولتكن  $(x_1, \dots, x_n)$  جملة من عناصر  $E$ .<sup>4</sup> لتأمل التطبيق الخطي

$$\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow E, (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

حيث لسمي كل عنصر من النمط  $\sum_{k=1}^n a_k x_k$  عبارة خطية بالجملة  $(x_1, \dots, x_n)$ .

ولسمي صورة التطبيق  $\Phi$ ، الفضاء الشعاعي المولد بالجملة  $(x_1, \dots, x_n)$ . ولكتب

$$\text{vect}((x_1, \dots, x_n)) = \text{Im } \Phi = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k : (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

<sup>4</sup> أي عنصراً من  $E^n$ .



نقول إن الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  تولد الفضاء  $E$  أو إنها جملة مولدة في  $E$  إذا وفقط إذا كان  $\Phi$  غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه يمكن كتابة كل عنصر من  $E$  كمباراة خطية بالجملة  $(x_1, \dots, x_n)$ ، أو إن  $E = \text{vect}((x_1, \dots, x_n))$ .

ونقول إن الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  حرة، أو مستقلة خطياً، إذا وفقط إذا كان  $\Phi$  متبايناً، أي  $\ker \Phi = \{0\}$ ، وهذا يكافئ الشرط:

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \left( \sum_{k=0}^n a_k x_k = 0 \right) \Rightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0)$$

ونقول إن الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  مرتبطة خطياً إذا لم تكن حرة.

وأخيراً نقول إن الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  تكون أساساً للفضاء  $E$ ، إذا وفقط إذا كان  $\Phi$  تقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  حرة ومولدة في آن معاً.

هذا ويمكننا تعميم هذا التعريف ليشمل جماعات الأشعة كما يلي:

2-3.I تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$  و  $I$  مجموعة غير خالية، ولتكن

$(x_i)_{i \in I}$  جماعة من عناصر  $E$ <sup>٥</sup>. ولتأمل التطبيق الخطي

$$\Psi: \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow E, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$$

حيث نلاحظ أن للمجموع السابق معنى، لأن الجماعة  $(a_i)_{i \in I}$  شبه معدومة. وكما في السابق لستمي صورة التطبيق  $\Psi$ ، الفضاء الشعاعي المولد بالجماعة  $(x_i)_{i \in I}$ ، ويكون

$$\text{vect}((x_i)_{i \in I}) = \left\{ \sum_{j \in J} a_j x_j : (J \text{ مجموعة جزئية منتهية من } I) \wedge ((a_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J) \right\}$$

نقول إن الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  تولد الفضاء  $E$  أو إنها جماعة مولدة في  $E$  إذا وفقط إذا كان

$\Psi$  غامراً، وهذا يكافئ قولنا إنه يمكن كتابة كل عنصر من  $E$  كمباراة خطية بجماعة

جزئية **منتهية** من الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$ ، أو إن  $E = \text{vect}((x_i)_{i \in I})$ .

ونقول الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة حرة، أو مستقلة خطياً، إذا وفقط إذا كان  $\Psi$  متبايناً، أي

$\ker \Psi = \{0\}$ ، وهذا يكافئ كون كل جماعة جزئية **منتهية** من الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  حرة.

ونقول إن الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  مرتبطة خطياً إذا لم تكن حرة.

<sup>٥</sup> أي عنصراً من  $E^I$ .



وأخيراً نقول إن الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  تكون أساساً للفضاء  $E$ ، إذا وفقط إذا كان  $\Psi$  نقابلاً، أي إذا وفقط إذا كانت الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  حرة ومولدة في آن معاً.

نُدرج في المبرهنة التالية بعض الخواص البسيطة.

3-3.I. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$  و  $I$  مجموعة غير خالية، ولتكن  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة من عناصر  $E$ .

1. إذا كانت  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة حرة، كانت كل جماعة  $(x_i)_{i \in J}$  جزئية منها حرة أيضاً.
2. إذا كانت  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة حرة، كان  $x_i \neq 0$ ،  $\forall i \in I$ ، وكان التطبيق  $i \mapsto x_i$  متبايناً.
3. إذا كانت  $(x_i)_{i \in J}$  جماعة جزئية مرتبطة خطياً من الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$ ، كانت الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  نفسها مرتبطة خطياً.
4. تكون الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن أحد الأشعة  $x_{i_0}$  كعبارة خطية بالجماعة  $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ .

الإثبات

نحفظ برموز التعريف السابق.

1. هذه النتيجة واضحة، لأن مقصور التطبيق المتباين  $\Psi$  إلى الفضاء الجزئي  $IK^J$  يكون متبايناً أيضاً.
2. الجملة المولدة من عنصر واحد هو 0 مرتبطة. وكذلك تكون كل جملة من النمط  $(x, x)$ . ونحصل على النتيجة المطلوبة باستخدام 1.
3. تنسج هذه الخاصة من لفي الخاصة 1.
4. إذا كانت الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  مرتبطة خطياً، أمكننا أن نجد جماعة  $(a_i)_{i \in I}$  شبه معدومة وغير معدومة بحيث  $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$ . ولما كانت  $(a_i)_{i \in I}$  غير معدومة، وجد عنصر  $i_0 \in I$  بحيث  $a_{i_0} \neq 0$  ومن ثم  $x_{i_0} = - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \frac{a_i}{a_{i_0}} x_i$ . وبالعكس، إذا كان  $x_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} b_i x_i$  حيث  $(b_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$  جماعة شبه معدومة من  $IK$ ، وعرفنا الجماعة شبه المعدومة وغير المعدومة  $(a_i)_{i \in I}$  بأن  $a_{i_0} = 1$  و  $a_i = -b_i$ ،  $i \in I \setminus \{i_0\}$ ، كان  $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$  والجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  مرتبطة.

□

4-3.I أمثلة:

< ليكن  $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  فضاء التوابع الحقيقية المعرفة على  $\mathbb{R}$ . ولنعرف أياً كانت

$\alpha \in \mathbb{R}$  التابع

$$f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x - \alpha|$$

عندئذ تكون الجماعة  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  حرة.

في الحقيقة، لو كانت هذه الجماعة مرتبطة لأمكن التعبير عن أحد العناصر، وليكن  $f_\beta$

مثلاً، كتراكيب خطية بالجماعة  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\beta\}}$ . ومن ثم أمكننا إيجاد  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  من

$\mathbb{R} \setminus \{\beta\}$  و  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  من  $\mathbb{R}$  بحيث

$$f_\beta = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_{\alpha_k}$$

ولما كان  $\beta \neq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  كانت التوابع  $(f_{\alpha_k})_{1 \leq k \leq n}$  قابلة للاشتقاق عند  $\beta$  ومن

ثم كان  $f_\beta$  قابلاً للاشتقاق عند  $\beta$  وهذا تناقض واضح.

< ليكن  $E = \mathbb{K}[X]$  فضاء كثيرات الحدود على الحقل التبادلي  $\mathbb{K}$ ، وليكن لدينا تطبيق

متزايد تماماً:  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  وجماعة  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  من  $\mathbb{K}[X]$  بحيث  $\deg P_n = \varphi(n)$ .

عندئذ تكون الجماعة  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حرة. وفي الحالة الخاصة الموافقة لـ  $\varphi(n) = n$  أياً كان

$n \in \mathbb{N}$ ، تكون الجماعة  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  أساساً لـ  $E$ .

< ليكن  $\mathbb{K}$  حقلاً تبادلياً، ولتكن  $n \in \mathbb{N}^*$ . تكون الجملة  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ ، حيث  $e_k$  هو

العنصر  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  من  $\mathbb{K}^n$ ، أساساً للفضاء  $\mathbb{K}^n$  نسميه الأساس القانوني.

< ليكن  $\mathbb{K}$  حقلاً تبادلياً، ولتكن  $I$  مجموعة غير خالية. تكون الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$ ، حيث  $e_i$

هو العنصر  $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in I}$  من  $\mathbb{K}^{(I)}$ ، و  $\delta_{i,j}$  هو رمز كرونكر Kronecker الذي

يساوي 1 عندما  $i = j$  ويساوي 0 عندما  $i \neq j$ ، أساساً للفضاء  $\mathbb{K}^{(I)}$  نسميه الأساس

القانوني.

5-3.I. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي  $IK$  و  $u$  تطبيقاً من  $\mathcal{L}(E, F)$

ولكن  $I$  مجموعة غير خالية، و  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة من عناصر  $E$ .

1. إذا كانت  $(u(x_i))_{i \in I}$  جماعة حرة، كانت الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  حرة أيضاً.
2. إذا كان  $u$  متبايناً وكانت  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة حرة، كانت  $(u(x_i))_{i \in I}$  جماعة حرة.
3. إذا كانت  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة مولدة، كان  $\text{Im } u = u(E) = \text{vect}((u(x_i))_{i \in I})$ .

الإثبات

□ الإثبات بسيطاً انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ.

6-3.I. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن أساساً

لـ  $E$  ولكن  $(y_i)_{i \in I}$  جماعة من  $F$ . عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد  $u$  من  $\mathcal{L}(E, F)$

يُحقق  $\forall i \in I, u(e_i) = y_i$ .

الإثبات

لنثبت أولاً الوحدانية. ليكن  $u$  و  $v$  تطبيقين خطيين من  $\mathcal{L}(E, F)$  يحققان

$$\forall i \in I, u(e_i) = y_i \text{ و } \forall i \in I, v(e_i) = y_i$$

عندئذ يكون  $\forall i \in I, (u - v)(e_i) = 0$  ومن ثم يكون  $\{e_i : i \in I\} \subset \ker(u - v)$ . ولما

كان  $\ker(u - v)$  فضاءً شعاعياً جزئياً من  $E$  كان  $E = \text{vect}((e_i)_{i \in I}) \subset \ker(u - v)$ ، ومنه

ينتج أن  $\forall x \in E, (u - v)(x) = 0$  وهذا يكافئ قولنا  $u = v$ .

لإثبات الوجود، نأخذ التطبيقين الخطيين

$$\Psi : IK^{(I)} \rightarrow E : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i e_i$$

$$\Theta : IK^{(I)} \rightarrow F : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i y_i$$

إن  $\Psi$  قابل خطي لأن  $(e_i)_{i \in I}$  أساس لـ  $E$ ، ومن ثم يكون  $u = \Theta \circ \Psi^{-1}$  تطبيقاً من  $\mathcal{L}(E, F)$

□ ويحقق وضوحاً الشرط  $\forall i \in I, u(e_i) = y_i$ .

#### 4.I. المجموع المباشر والفضاءات المتتامّة

1-4.I. تعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $E_1$  و  $E_2$  فضاءين شعاعيين جزئيين من  $E$ . نقول إن الفضاء الشعاعي الجزئي  $F = E_1 + E_2$  مجموع مباشر للفضاءين الجزئيين  $E_1$  و  $E_2$ ، ونكتب عندها  $F = E_1 \oplus E_2$ ، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ .

وبوجه عام، إذا كانت  $(E_i)_{i \in I}$  جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ ، نقول إن الفضاء الشعاعي الجزئي  $F = \sum_{i \in I} E_i$  مجموع مباشر للجماعة  $(E_i)_{i \in I}$ ، ونكتب عندها  $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$\forall i \in I, E_i \cap \left( \sum_{j \in I \setminus \{i\}} E_j \right) = \{0\}$$

من المهم الإشارة هنا إلى أن الشرط السابق لا يكافئ قولنا  $E_i \cap E_j = \{0\}$  وذلك أياً كان الدليلان المختلفان  $(i, j) \in I^2$ .

2-4.I. تعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $E_1$  و  $E_2$  فضاءين شعاعيين جزئيين من  $E$ . نقول إن  $E_1$  و  $E_2$  متتامان إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$E = E_1 \oplus E_2$$

وبوجه عام، إذا كانت  $(E_i)_{i \in I}$  جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ ، نقول إن الجماعة  $(E_i)_{i \in I}$  متتامّة إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

3-4.I. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . ولتكن  $(E_i)_{i \in I}$  جماعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ . عندئذ يكون الفضاء الجزئي  $F = \sum_{i \in I} E_i$  مجموعاً مباشراً إذا وفقط إذا كانت جماعة معدومة كلّ جماعة شبه معدومة  $(x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$  محقّقة للشرطين:  $\sum_{i \in I} x_i = 0$  و  $\forall i \in I, x_i \in E_i$ . أي:

$$\forall (x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}, \left( \sum_{i \in I} x_i = 0 \right) \wedge (\forall i \in I, x_i \in E_i) \Rightarrow (\forall i \in I, x_i = 0)$$

## الاثبات

لنفترض أولاً أن  $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . ولتكن  $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$  جماعة شبه معدومة محققة للشرطين:

$$\sum_{i \in I} x_i = 0 \text{ و } \forall i \in I, x_i \in E_i$$

ولكن  $I \ni k$  عندئذ يمكننا أن نكتب

$$x_k = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} (-x_i) \in E_k \cap \left( \sum_{i \in I \setminus \{k\}} E_i \right) = \{0\}$$

ومن ثم  $x_k = 0$ . هذا ما يثبت أن  $\forall k \in I, x_k = 0$ .

وبالعكس، ليكن  $I \ni k$ ، وليكن  $y$  عنصراً من  $E_k \cap \left( \sum_{i \in I \setminus \{k\}} E_i \right)$ . توجد عندئذ جماعة

شبه معدومة  $E^{I \setminus \{k\}}$  من  $(y_i)_{i \in I \setminus \{k\}}$  بحيث  $y = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} y_i$ . نعرف إذن الجماعة شبه المعدومة

$E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$  كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} -y_i & : i \in I \setminus \{k\} \\ y & : i = k \end{cases}$$

فيكون  $\sum_{i \in I} x_i = 0$  و  $\forall i \in I, x_i \in E_i$ . إذن يتبع من الفرض أن  $x_k = 0$ ، ومن ثم

$y = 0$ . نكون قد أثبتنا أن  $E_k \cap \left( \sum_{i \in I \setminus \{k\}} E_i \right) = \{0\}$  وذلك أياً كان  $I \ni k$ . □

4-4.I. نتيجة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . ولتكن  $(E_i)_{i \in I}$  جماعة من

الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ ، بحيث يكون الفضاء الجزئي  $F = \sum_{i \in I} E_i$  مجموعاً

مباشراً. ولتكن  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة من عناصر  $E \setminus \{0\}$  تحقق الشرط

عندئذ تكون  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة حرة.

## الاثبات

لتكن  $(a_i)_{i \in I}$  جماعة شبه معدومة من  $IK^{(I)}$ ، بحيث  $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$ . فإذا عرفنا

$y_i = a_i x_i$  أياً كانت  $I \ni i$ ، حصلنا على جماعة  $E^{(I)} \ni (y_i)_{i \in I}$ ، تحقق الشرطين

و  $\forall i \in I, y_i \in E_i$  ولما كان المجموع  $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$  مباشراً كان  $\forall i \in I, y_i = a_i x_i = 0$

بمقتضى المبرهنة السابقة، ولكن  $\forall i \in I, x_i \neq 0$  إذن  $\forall i \in I, a_i = 0$ . □

مجموعاً مباشراً، إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall k \in \{2, \dots, n\} \quad E_k \cap (E_1 + \dots + E_{k-1}) = \{0\}$$

## الإجابات

وإذا كانت  $x_k \neq 0$  فهذا تناقض. إذن المجموعة  $\mathcal{N}$

□ خالية أي:  $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_n$ . وهذا يثبت المطلوب استناداً إلى المبرهنة 3-4.I.

لتحقق الشرط : أيًا كان  $E \ni x$  توجد جماعة شبه معدومة وحيدة  $E^{(n)} \ni (x_i)_{i \in I}$  بحيث

$$x = \sum_{i \in I} x_i, \quad \forall i \in I, x_i \in E_i$$

الجزئي  $E_I$  توازياً مع الفضاء الجزئي  $E_J = \bigoplus_{j \in I \cap J} E_j$ . ولتحقق جماعة التطبيقات  $(p_i)_{i \in I}$

### المواضيع التالية:

1. أياً كانت  $I \ni i$ ، فالتطبيق  $p_i$  خطي.
  2. أياً كان الدليلان المختلفان  $(i, j) \in I^2$ ، فإن  $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$ .
  3. أياً كانت  $I \ni i$ ، فإن  $p_i \circ p_i = p_i$ .
  4. أياً كان  $x \in E$  كانت الجماعة  $(p_i(x))_{i \in I}$  شبه معدومة وكان  $x = \sum_{i \in I} p_i(x)$ .
- ونعبر عن الخاصية الأخيرة بكتابة  $I_E = \sum_{i \in I} p_i$ .

## الإثبات

نفترض أولاً أن  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ، وليكن  $E \ni x$ . عندئذ نظراً إلى أن  $E = \sum_{i \in I} E_i$  توجد جماعة شبه معدومة  $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$  بحيث:  $x = \sum_{i \in I} x_i$  و  $\forall i \in I, x_i \in E_i$ . وإذا كانت  $E^{(I)} \ni (y_i)_{i \in I}$  جماعة أخرى شبه معدومة بحيث  $\forall i \in I, y_i \in E_i$  و  $x = \sum_{i \in I} y_i$  كانت الجماعة  $E^{(I)} \ni (z_i)_{i \in I}$ ، حيث  $z_i = x_i - y_i$ ، جماعة شبه معدومة مُحَقَّقة للشرطين:

$$\sum_{i \in I} z_i = 0 \text{ و } \forall i \in I, z_i \in E_i$$

ومن ثم  $\forall i \in I, z_i = 0$ ، بمقتضى المبرهنة 3-4.I. أي  $\forall i \in I, x_i = y_i$ . ولترك الاقتضاء المعاكس، وهو أبسط، تقريباً للقارى.

لتكن  $I \ni k$ ، ولنثبت أن التطبيق  $p_k$  خطي. لتكن  $(x, y) \in E^2$ . توجد جماعتان شبه معدومتين  $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$  و  $E^{(I)} \ni (y_i)_{i \in I}$  بحيث يكون لدينا من جهة أولى:  $\forall i \in I, x_i \in E_i$  و  $x = \sum_{i \in I} x_i$  ومن جهة ثانية:  $\forall i \in I, y_i \in E_i$  و  $y = \sum_{i \in I} y_i$ . عندئذ أياً كانت  $\lambda \in \mathbb{K}$ ، يَكُنْ

$$x + \lambda \cdot y = \sum_{i \in I} (x_i + \lambda \cdot y_i) \quad \text{و} \quad \forall i \in I, x_i + \lambda \cdot y_i \in E_i$$

ومن ثم  $p_k(x + \lambda \cdot y) = p_k(x) + \lambda \cdot p_k(y)$ . إذن  $p_k \in \mathcal{L}(E)$ . لتكن  $x \in E_k$ ، حيث  $I \ni k$ . ولنعرّف الجماعة شبه المعدومة  $E^{(I)} \ni (x_i)_{i \in I}$  كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 0 & : i \in I \setminus \{k\} \\ x & : i = k \end{cases}$$

عندئذ يكون  $x = \sum_{i \in I} x_i$  و  $\forall i \in I, x_i \in E_i$  ولأن هذه الكتابة وحيدة نستنتج أن  $p_k(x) = x$  وأن  $p_i(x) = 0$  في حالة  $i \neq k$ .

ليكن  $x \in E$  ولتكن  $I \ni k$ . عندئذ يكون  $p_k(x) \in E_k$  ومن المناقشة السابقة يكون  $p_k(p_k(x)) = p_k(x)$ ، ويكون  $p_i(p_k(x)) = 0$  في حالة  $i \neq k$ . وهذا يثبت الخالصتين 2.

3. أما الخاصية الأخيرة فهي واضحة من التعريف.  $\square$

7-4.I. حالة خاصة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $E_1$  و  $E_2$  فضاءين شعاعيين جزئيين من  $E$ . يكون الفضاءان  $E_1$  و  $E_2$  متتامين، إذا وفقط إذا تحقق الشرط: أيًا كان  $x \in E$  توجد ثنائية وحيدة  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  بحيث

$$x = x_1 + x_2$$

وإذا عرفنا  $p_1 : E \rightarrow E, x \mapsto x_1$  و  $p_2 : E \rightarrow E, x \mapsto x_2$ ، كان التطبيقان  $p_1$  و  $p_2$  خطيين وكان  $p_1 \circ p_1 = p_1$  و  $p_1 \circ p_2 = 0$  و  $p_2 \circ p_1 = 0$  و  $p_2 \circ p_2 = p_2$  وأخيراً  $I = p_1 + p_2$ . و يسمى  $p_1$  الإسقاط الخطي لـ  $E$  على  $E_1$  توازياً مع  $E_2$ ، وكذلك يسمى  $p_2$  الإسقاط الخطي لـ  $E$  على  $E_2$  توازياً مع  $E_1$ .

8-4.I. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . نقول عن تطبيق خطي  $p$  من  $L(E)$  إنه إسقاط إذا وفقط إذا كان  $p \circ p = p$ ، (ولنكتب أيضاً  $p^2 = p$ ).

9-4.I. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $p \in L(E)$  إسقاطاً. عندئذ يوجد فضاءان شعاعيان جزئيان  $E_1$  و  $E_2$  من  $E$  بحيث يكون  $E = E_1 \oplus E_2$ ، ويكون  $p$  هو الإسقاط الخطي لـ  $E$  على  $E_1$  توازياً مع  $E_2$ .

الإثبات

لنضع  $E_1 = \text{Im } p$  و  $E_2 = \ker p$ .

إذا كان  $x \in E_1 \cap E_2$ ، وجد عنصر  $y \in E$  بحيث  $x = p(y)$  وكان  $p(x) = 0$ .

وعندئذ يكون  $0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ . ومنه  $\{0\} = E_1 \cap E_2$ .

ومن ناحية أخرى، إذا كان  $x \in E$  كان  $x = x_1 + x_2$  حيث  $x_1 = p(x) \in E_1$  و

$x_2 = x - p(x) \in E_2$ ، (لأن  $p(x_2) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$ ). ومنه

لستنتج أن  $E = E_1 \oplus E_2$ .

وأخيراً لقد وجدنا فيما سبق أنه أيًا كان  $x \in E$  فإن  $p(x) = x_1$  هو الإسقاط الخطي

لـ  $x$  على الفضاء الجزئي  $E_1$  توازياً مع  $E_2$ .  $\square$



سننهي هذه الفقرة بذكر خاصيتين بسيطتين نترك إثباتهما المباشر تمريناً للقارئ:

10-4.I. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . ولتكن  $(E_t)_{t \in I}$  جماعة متتامة

من الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ . نفترض أنه، أيًا كان  $t \in I$ ، يوجد أساس

$(e_{t,j})_{j \in J_t}$  للفضاء الجزئي  $E_t$ . عندئذ تكون الجماعة التالية

$$K = \bigcup_{t \in I} (\{t\} \times J_t) \text{ حيث } (e_{t,j})_{(t,j) \in K}$$

أساساً للفضاء  $E$ .

11-4.I. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . ولتكن  $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$  جماعة

متتامة من الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ . عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi: E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \rightarrow E, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$$

تقابلاً خطياً.

5.I. فضاء خارج القسمة

1-5.I. مبرهنة وتعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $H$  فضاءً شعاعياً

جزئياً من  $E$ . نعرف العلاقة الثنائية

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x - y \in H$$

علاقة تكافؤ على  $E$ . نرمز بالرمز  $E/H$  إلى مجموعة صفوف التكافؤ بالقياس إلى  $\mathcal{R}_H$ .

وإذا كان  $[x]$  و  $[y]$  عنصرين من  $E/H$  وكان  $IK \ni \lambda$ ، كان كلٌّ من المجموعتين:

$$[x] + [y] = \{x_1 + y_1 : (x_1, y_1) \in [x] \times [y]\}$$

$$\lambda \cdot [x] = \{\lambda \cdot x_1 : x_1 \in [x]\}$$

عنصراً من  $E/H$ . يسمح لنا هذا بتزويد المجموعة  $E/H$  بقانوني التشكيل (+) و (·).

الذين يجعلان من  $(E/H, +, \cdot)$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ ، نسميه فضاءً خارج قسمة  $E$

على الفضاء الجزئي  $H$ .

ويكون في هذه الحالة التطبيق  $Q_H: E \rightarrow E/H: x \mapsto [x]$  تطبيقاً خطياً غامراً،

نسميه الغمر القانوي.

الإثبات

□

الإثبات يُحقَّق مباشرة من التعاريف. نترك تفاصيله للقارئ.

2-5.1. مبرهنة : ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً

من  $\mathcal{L}(E, F)$ . عندئذ يوجد تقابل خطي  $\tilde{u} : E/\ker u \rightarrow \text{Im } u$  يحقق  $u = i \circ \tilde{u} \circ Q$

حيث  $Q : E \rightarrow E/\ker u, x \mapsto [x]$  هو القعر القانوني، و  $i : \text{Im } u \rightarrow F, x \mapsto x$

الإثبات

ليكن  $[x]$  عنصراً من  $E/\ker u$ . عندئذ يأخذ  $u$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ Q \downarrow & & \uparrow i \\ E/\ker u & \xrightarrow{\tilde{u}} & \text{Im } u \end{array}$$

قيمة واحدة على جميع عناصر  $[x]$ . أي

$$\text{card} \{ u(\alpha) : \alpha \in [x] \} = 1$$

وذلك لأنه إذا كان  $(\alpha, \beta) \in [x] \times [x]$  كان  $\alpha - \beta \in \ker u$ ، ومن ثم  $u(\alpha - \beta) = 0$ . أي

$$u(\alpha) = u(\beta)$$

نعرف إذن  $\tilde{u}([x])$  بأنه العنصر الوحيد الموجود في المجموعة  $\{ u(\alpha) : \alpha \in [x] \}$

$$\{ u(\alpha) : \alpha \in [x] \} = \{ \tilde{u}([x]) \}$$

نلاحظ مباشرة أن  $\tilde{u}$  تطبيق من  $E/\ker u$  إلى  $\text{Im } u$ . وإذا كان  $[x]$  و  $[y]$  عنصريين

من  $E/H$  وكان  $\lambda \in IK$ ، كان لدينا  $[x + \lambda \cdot y] = [x] + \lambda \cdot [y]$  ومن ثم

$$\begin{aligned} \tilde{u}([x] + \lambda \cdot [y]) &= \tilde{u}([x + \lambda \cdot y]) = u(x + \lambda \cdot y) \\ &= u(x) + \lambda \cdot u(y) = \tilde{u}([x]) + \lambda \cdot \tilde{u}([y]) \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E/\ker u, \text{Im } u)$ . ومن جهة أخرى، من الواضح أن

$$\tilde{u} \text{ تطبيق غامر لأن } \forall x \in E, \tilde{u}([x]) = u(x) \text{ وهو أيضاً متباين لأن}$$

$$[x] \in \ker \tilde{u} \Rightarrow \tilde{u}([x]) = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker u \Rightarrow [x] = 0$$

نستنتج أن  $\tilde{u}$  تقابل خطي من  $\mathcal{L}(E/\ker u, \text{Im } u)$ . وأخيراً نتج العلاقة  $u = i \circ \tilde{u} \circ Q$  من

$$\square \quad \text{المساواة الواضحة : } \forall x \in E, \tilde{u}([x]) = u(x)$$



## تمارين

التمرين 1. ليكن  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  تطبيقاً متبايناً. ولتكن  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  جماعة من  $\mathbb{K}[X]$  فضاء كثيرات الحدود على الحقل  $\mathbb{K}$ . نفترض أن  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = \varphi(n)$ . أثبت أن الجماعة  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حرة.

التمرين 2. ليكن  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ؛ فضاء التتابع من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$ . نعرف أياً كان  $\alpha \in \mathbb{R}$  التابع  $f_\alpha$  بالعلاقة  $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$ . أثبت أن الجماعة  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  حرة في  $E$ .

التمرين 3. ليكن  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ؛ فضاء التتابع من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$ . نعرف أياً كان  $\alpha \in \mathbb{R}$  التابع  $f_\alpha$  بالعلاقة  $f_\alpha(x) = \cos \alpha x$ . أثبت أن الجماعة  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  حرة في  $E$ . مساعدة:

$$I(\alpha, \beta) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\alpha t) \cos(\beta t) dt$$

التمرين 4. ليكن  $E = \mathbb{K}_n[X]$ ؛ فضاء كثيرات الحدود على الحقل  $\mathbb{K}$  والتي لا تزيد درجتها عن  $n$ . أثبت أننا نعرف تطبيقاً خطياً  $\varphi$  من  $E$  إلى  $E$  بالعلاقة

$$\varphi(P) = X(1 - X)P'(X) + nXP(X)$$

واستنتج أن الجملة  $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  حرة في  $E$ . غير أياً كان  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$  عن  $X^n$  تركيب خطي لعناصر الجملة  $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ ، ماذا نستنتج؟

التمرين 5. ليكن  $E = \mathbb{K}_n[X]$ ؛ فضاء كثيرات الحدود على الحقل  $\mathbb{K}$  والتي لا تزيد درجتها عن  $n$ . ولتكن  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  عناصر متباينة مثنى مثنى من  $\mathbb{K}$ . نعرف أياً كان

$$j \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ كثير الحدود } \ell_j \text{ بالعلاقة } \ell_j(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k}.$$

أثبت أن الجملة  $(\ell_j)_{0 \leq j \leq n}$  أساس للفضاء  $E$ . وأن كل كثير حدود  $P$  من  $E$  يكتب بطريقة وحيدة بالشكل

$$P = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) \cdot \ell_k$$

التمرين 6. لتكن  $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$  جملة حرة في فضاء شعاعي  $E$  على حقل تبديلي  $IK$ . ولتكن  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  عناصر متباينة مثنى مثنى من  $IK$ . أثبت أن الجملة  $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$  المعرفة

$$f_k = \sum_{i=0}^n (\alpha_i)^k e_i$$

جملة حرة أيضاً.

التمرين 7. ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$  عدده المميز يساوي 0. ولندكر بأن تطبيقاً خطياً  $p$  من  $E$  إلى  $E$  هو إسقاط إذا وفقط إذا كان  $p \circ p = p$ .

1. ليكن  $p$  إسقاطاً لـ  $E$ . أثبت أنه يوجد فضاءان شعاعيان جزئيان متتامان  $E_1$  و  $E_2$  من

$E$ ، بحيث يكون  $p$  إسقاطاً لـ  $E$  على  $E_1$  توازياً مع  $E_2$ .

2. ليكن  $p$  إسقاطاً لـ  $E$ ، ولتكن  $\lambda \in IK \setminus \{0, 1\}$ . أثبت أن  $p - \lambda I_E$  تشاكل تقابلي خطي.

3. ليكن  $p$  و  $q$  إسقاطين لـ  $E$ . أثبت أن  $p + q$  إسقاط لـ  $E$  إذا وفقط إذا كان

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

عبر في هذه الحالة صورة ونواة  $p + q$ .

4. ليكن  $p$  و  $q$  إسقاطين لـ  $E$ ، حيث  $p \circ q = 0$ . أثبت أن  $r = p + q - q \circ p$  إسقاط لـ  $E$  وعبر صورته ونواته.

5. نقول عن تطبيق خطي  $u: E \rightarrow E$  إنه يحافظ على الفضاء الشعاعي الجزئي  $E_1$  من  $E$  إذا وفقط إذا كان  $u(E_1) \subset E_1$ . ليكن  $p$  إسقاطاً لـ  $E$ ، و  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $E$ . أثبت أن التطبيقين  $u$  و  $p$  يتبادلان إذا وفقط إذا كان  $u$  يحافظ على كل من

$$\text{Im } p \text{ و } \ker p$$

6. ليكن  $u: E \rightarrow E$  تطبيقاً خطياً يحقق  $u^m = I_E$  حيث  $m \in \mathbb{N}^*$ . نفترض أن  $u$  يحافظ على الفضاء الجزئي  $E_1$  من  $E$ . ليكن  $p$  إسقاطاً لـ  $E$  على  $E_1$ . أثبت أن التطبيق الخطي المعرفة

$$q = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k \circ p \circ u^{m-k}$$

هو إسقاط لـ  $E$  على  $E_1$ ، وأن  $u$  يحافظ على الفضاء الجزئي  $\ker q$ .

التمرين 8. ادرس في  $C([0, 1], \mathbb{R})$ ، الارتباط الخطي للجملة  $(f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots)$  حيث

$$f(x) = \ln(1+x)$$

التمرين 9. ليكن  $E = \text{IK}_n[X]$ ، فضاء كثيرات الحدود على الحقل  $\text{IK}$  والتي لا تزيد درجتها عن  $n$ . ولتكن  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  عناصر متباينة مثنى مثنى من  $\text{IK}$ . نعرف أيضاً كان  $J \ni \{0, 1, \dots, n\}$  كثير الحدود  $P_J$  بالعلاقة  $P_J(X) = (X - \alpha_J)^n$ . أثبت أن الجملة  $(P_J)_{0 \leq J \leq n}$  حرة في  $E$ .

التمرين 10. ليكن  $E$  فضاء التوابع من الصف  $C^\infty$  على  $\text{IR}$  والدورية ذات الدور  $2\pi$ . وليكن  $T$  التطبيق الخطي من  $\mathcal{L}(E)$  المعرفة بالعلاقة  $T(f) = f''$ . حين صورة ونواة  $T$ .

التمرين 11. ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $\text{IK}$ ، وليكن  $f: E \rightarrow E$  تطبيقاً خطياً.

1. أثبت أن:  $\ker f^2 = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .

2. أثبت أن:  $\text{Im } f^2 = \text{Im } f \Leftrightarrow E = \ker f + \text{Im } f$ .

3. نفترض أن بُعد  $E$  منتهٍ  $^{Pb}$ . أثبت تكافؤ الشروط الأربعة السابقة.

التمرين 12. ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $\text{IK}$  عدده المميز لا يساوي 2.

1. ليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$  ولا يساوي  $E$ . وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $E$  ومحققاً للشرط:

$$\forall x \in E \setminus F, \exists \lambda_x \in \text{IK}, u(x) = \lambda_x \cdot x$$

أثبت أنه يوجد عدد  $\lambda$  في  $\text{IK}$  بحيث  $u = \lambda I_E$ .

2. ليكن  $a$  عنصراً من  $E \setminus \{0\}$ . حين مجموعة التطبيقات الخطية  $f$  من  $\mathcal{L}(E)$  والتي

تكون من أجلها الجملة  $(a, x, f(x))$  مرتبطة أي كانت  $x$  من  $E$ .



<sup>Pb</sup> يتطلب هذا السؤال بعض الدراية بالفصل اللاحق.



## الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

## II.1. عموميات

1.II-1. مبرهنة : ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . ولتكن  $(e_i)_{i \in I}$  جماعة من عناصر  $E$ .  
إن الخواص التالية متكافئة:

1. الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  أساس لـ  $E$ .
2. الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  جماعة مولدة أصغرية. (أي إن الجماعة  $(e_i)_{i \in I \setminus \{j\}}$  لا تولد  $E$  أبداً  
كان  $j \in I$ ).
3. الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  جماعة حرة أعظمية. (أي تكون مرتبطة خطياً كل جماعة مُمدد تماماً  
الجماعة السابقة).

## الإبّات

1.  $\Leftarrow$  3. إذا لم يكن ذلك صحيحاً أمكن توسيع مجموعة الأدلة إلى  $J = I \cup \{j\}$ ، حيث  $J \neq I$ ، وإيجاد عنصر  $e_j \in E$  بحيث تكون الجماعة الجديدة  $(e_i)_{i \in J}$  حرة. ولكن الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  أساس لـ  $E$  إذن توجد جماعة شبه معدومة  $(\alpha_i)_{i \in I}$  من  $\mathbb{K}^{(I)}$  بحيث  $e_j = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$  وهذا يتناقض مع كون الجماعة  $(e_i)_{i \in J}$  حرة.

3.  $\Leftarrow$  2. : ليكن  $x \in E$  وليكن  $J \neq I$  لنضع  $J = I \cup \{j\}$  و  $e_j = x$ . ولما كانت الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  حرة أعظمية كانت الجماعة  $(e_i)_{i \in J}$  مرتبطة. إذن توجد جماعة شبه معدومة  $(\alpha_i)_{i \in J}$  من  $\mathbb{K}^{(J)}$  بحيث  $\sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0$  و  $(\alpha_i)_{i \in I} \neq 0$ . ولأن  $0 = \alpha_j$  يتناقض مع كون الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  حرة، إذن  $\alpha_j \neq 0$  وبالإمكان القسمة على  $\alpha_j$ . عندئذ يكون  $x = e_j = \sum_{i \in I} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot e_i$  ومن ثم تكون الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  مولدة، وهي أصغرية لأنها حرة.

2.1. : إذا لم تكن الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  حرة ووجد  $I \ni i_0$  بحيث يكون العنصر  $e_{i_0}$  تركيباً خطياً  
في عناصر  $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ . ومن ثم تكون الجماعة  $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$  مولدة وهذا يتناقض مع  
كون الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  جماعة مولدة أصغر.  
□

2.1.2. البرهنة : ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . وليكن  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  جملة من  $E$ .  
لنضع  $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . عندئذ تكون كل جملة  $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$  من  $F$   
مربطة خطياً.

الإثبات

سنثبت هذه البرهنة بالتدريج على  $n$ .

إذا كانت  $1 = n$  فإن  $F = \{\lambda \cdot e_1, \lambda \in IK\}$ . فإذا كان  $f_1$  و  $f_2$  من  $F$  ووجد عددان  
 $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  من  $IK$  بحيث  $f_i = \lambda_i e_1$  و  $i = 1, 2$ . عندئذ يكون  $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$  و تكون  
الجملة  $(f_1, f_2)$  مرتبطة خطياً. (لاحظ أنّ حالة  $0 = \lambda_2 = \lambda_1$  تافهة).

لنفترض صحة الخاصية عند قيمة  $n - 1$ . و لنفترض أنّ  $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$  جملة من

$F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . عندئذ توجد جملة  $(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n}}$  من  $IK$  بحيث :

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \dots + \alpha_{1n} e_n \\ f_2 &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{2n} e_n \\ &\vdots \\ f_{n+1} &= \alpha_{n+1,1} e_1 + \alpha_{n+1,2} e_2 + \dots + \alpha_{n+1,n} e_n \end{aligned}$$

إذا كان  $\alpha_{1n} = \alpha_{2n} = \dots = \alpha_{n+1,n} = 0$  كانت الجملة  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  جملة من

عناصر  $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ ، ونقتضي فرض التدرّج تكون هذه الجملة مرتبطة خطياً.

لنفترض إذن أنّ  $\alpha_{k,n} \neq 0$ ، ولنضع أيّاً كان  $j$  من  $IN_{n+1} \setminus \{k\}$  :

$$\tilde{f}_j = f_j - \frac{\alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}} f_k \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

عندئذ تكون  $(\tilde{f}_j)_{j \in IN_{n+1} \setminus \{k\}}$  جملة من  $\text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$  فهي إذن مرتبطة خطياً بمقتضى

فرض التدرّج. ومن ثمّ توجد جملة غير معدومة  $(\lambda_j)_{j \in IN_{n+1} \setminus \{k\}}$  من  $IK$  بحيث  $\sum_{j \neq k} \lambda_j \tilde{f}_j = 0$

ومنه  $0 = \sum_{j \neq k} \lambda_j \tilde{f}_j - \left( \sum_{j \neq k} \frac{\lambda_j \alpha_{j,n}}{\alpha_{k,n}} \right) f_k$  وهذا يثبت أنّ  $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$  جملة مرتبطة.  
□



3-1.II. نتيجة : ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . إذا كانت  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  جملة مولدة لـ  $E$  كانت كل جماعة  $(f_j)_{j \in J}$  تحقق الشرط  $\text{card } J > n$  مرتبطة خطياً.

## 2.II. بُعد فضاء شعاعي

2.II-1. تعريف : ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . نقول إن  $E$  منتهي البعد إذا وفقط إذا وجدت فيه جماعة مولدة ومنتهية (أي  $(e_i)_{i \in I}$  مع  $\text{card } I < +\infty$ ).

2.II-2. مبرهنة : ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . ولتكن  $(e_i)_{i \in I}$  جماعة من عناصر  $E$ . نفرض أن الجماعة  $(e_i)_{i \in I}$  جماعة مولدة وأنه توجد مجموعة جزئية غير خالية  $J$  من  $I$  بحيث تكون الجماعة  $(e_i)_{i \in J}$  حرة. عندئذ توجد  $K$  مجموعة جزئية من  $I$  تحوي  $J$  أي  $(I \supset K \supset J)$  بحيث تكون الجماعة  $(e_i)_{i \in K}$  أساساً لـ  $E$ .

### الاثبات

سنقدم البرهان فقط في حالة كون الفضاء الشعاعي  $E$  منتهي البعد. الحالة العامة تتطلب تقنيات إضافية : (لوطة Zorn) وهي خارجة عن إطار الكتاب. كما كان  $E$  فضاء منتهي البعد يوجد عدد طبيعي  $n$  بحيث تكون كل جملة  $(f_j)_{j \in L}$  تحقق الشرط  $\text{card } L > n$  مرتبطة خطياً. وذلك استناداً إلى النتيجة 3-1.II. لنعرف

$$\mathcal{H} = \{H \subset I : (J \subset H) \wedge (جماعة حرة (e_i)_{i \in H})\}$$

من الواضح أن  $J \in \mathcal{H}$  وأنه بمقتضى الملاحظة السابقة  $\forall H \in \mathcal{H}, \text{card } H \leq n$ . إذن يوجد  $K \ni \mathcal{H}$  بحيث  $\text{card } K = \max \{ \text{card } H : H \in \mathcal{H} \}$ .

من جهة أولى، كما كان  $K \ni \mathcal{H}$  كانت الجملة  $(e_i)_{i \in K}$  حرة ومحقة  $J \subset K \subset I$ . ومن جهة ثالثة، إذا لم تكن الجملة  $(e_i)_{i \in K}$  مولدة وجد عنصر  $j \in I \setminus K$  بحيث يكون  $e_j \notin \text{vect}((e_i)_{i \in K})$ ، ولكن هذا يقتضي أن الجملة  $(e_i)_{i \in K \cup \{j\}}$  جملة حرة في  $E$  ومن ثم أن  $\{j\} \cup K \ni \mathcal{H}$ ، وهذا يتناقض مع تعريف  $K$ . إذن الجملة  $(e_i)_{i \in K}$  مولدة وهي من ثم تكون أساساً لـ  $E$ .  $\square$

3-2.II. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . نفترض أن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_r)$  جملة حرة من  $E$  و  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$  جملة مولدة لـ  $E$ . عندئذ يمكننا أن نعلم  $\mathcal{E}$  إلى أساس  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$  للفضاء  $E$  وذلك بأخذ العناصر  $e_{r+1}, \dots, e_n$  من المجموعة  $\{g_k : k \leq m\}$ .

3-2.II. مبرهنة وتعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ ، نفترض أن  $E \neq \{0\}$ . عندئذ يوجد نظام طبيعي ووحيد  $n$  بحيث يحقق كل أساس  $(e_i)_{i \in I}$  للفضاء  $E$  الشرط  $n = \text{card } I$ .

نسمي العدد  $n$  بُعد الفضاء الشعاعي  $E$  على الحقل  $IK$ ، ونرمز إليه بالرمز  $\dim_{IK} E$ ، أو ببساطة  $\dim E$ ، إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  و  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$  أساسين لـ  $E$ . لما كانت  $\mathcal{E}$  جملة مولدة، ولأن الجملة  $\mathcal{F}$  جملة حرة، كان  $n \geq m$  وذلك بمقتضى النتيجة 3-1.II. وبأسلوب مماثل، الجملة  $\mathcal{F}$  جملة مولدة والجملة  $\mathcal{E}$  جملة حرة إذن  $m \geq n$ ، ومن ثم  $m = n$ .  $\square$

4-2.II. ملاحظة: نستخدم أن  $\dim\{0\} = 0$ ، وأنه إذا لم يكن الفضاء الشعاعي  $E$  منتهي البعد على  $IK$  فإن  $\dim_{IK} E = +\infty$ .

5-2.II. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ . عندئذ يكون  $F$  فضاء شعاعياً منتهي البعد ويكون  $\dim F \leq \dim E$ .

الإثبات

إذا كان  $F = \{0\}$  تم المطلوب. نفترض أن  $F \neq \{0\}$  ونعرف  $\mathcal{B}$  بمجموع الأعداد الطبيعية  $q \in \mathbb{N}^*$  حيث توجد جملة  $(x_1, \dots, x_q)$  حرة في  $F$ .

لما كانت كل جملة حرة في  $F$  حرة في  $E$  كان  $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}_{\dim E}$  لأن  $F \neq \{0\}$ . ليكن  $p = \max \mathcal{B} \leq \dim E$  عندئذ توجد جملة  $(x_1, \dots, x_p)$  حرة وهي أعظمية في  $F$  فهي تكون أساساً لـ  $F$ ، ومنه  $p = \dim F$  وها  $\square$

6-2.II. مبرهنة: إذا كان  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $IK$  و كان بُعداهما منتهيين كان  $E \times F$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على الحقل  $IK$  وتحقق العلاقة:

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

الإثبات

إن هذه النتيجة صحيحة لأنه إذا تأملنا أساساً  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  لـ  $E$  ، وتأملنا كذلك أساساً  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$  لـ  $F$  . كانت الجملة

$$((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_m))$$

أساساً لـ  $E \times F$  .  $\square$

7-2.II. تعميم: لكن  $E_1, E_2, \dots, E_n$  فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقل  $IK$  . عندئذ يكون  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  فضاءً شعاعياً منتهي البعد أيضاً ويكون

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \sum_{i=1}^n \dim E_i$$

8-2.II. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $IK$  . نفترض أن بُعد كلٍّ من  $E$  و  $F$  منته . عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1. يوجد تقابل خطي  $u$  بين  $E$  و  $F$  ، (ونكتب عندئذ  $E \cong F$ ).

2.  $\dim E = \dim F$  .

الإثبات

1.  $\Leftarrow$  2. ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$  . ولنعرف  $f_i = u(e_i)$  أيما كانت  $i \in \mathbb{N}_n$  .

إن الجملة  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  أساس لـ  $F$  . وذلك لأنه من جهة أولى: الجملة  $\mathcal{E}$  جملة

حرّة والتطبيق  $u$  متباين إذن  $\mathcal{F}$  جملة حرّة، ومن جهة ثانية لأن  $\mathcal{E}$  جملة مولدة ولأن

التطبيق  $u$  غامر ينتج أن  $\mathcal{F}$  جملة مولدة. ومن ثمّ  $\dim F = n = \dim E$  .

2.  $\Leftarrow$  1. ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$  وليكن  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  أساساً لـ  $F$  . إن

التطبيق الخطي  $u: E \rightarrow F$  المعرفة  $u(e_i) = f_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_n$  هو التقابل الخطي

$\square$

المطلوب.

9-2.II. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . عندئذ يكون  $E$  مُشاكلاً تقابلياً للفضاء  $IK^{\dim E}$ . أي  $E \cong IK^{\dim E}$ .

ثمين: ليكن  $IF$  حقلاً منتهياً، إذن  $\text{card } IF = p^n$  حيث  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $p$  عدد أولي. في الحقيقة، ليكن  $p$  العدد المميز للحقل  $IF$ . نعلم أن  $p$  عدد أولي لأن  $IF$  حلقة تامة. ومن ثم يكون  $IK = Z/pZ$  حقلاً جزئياً من  $IF$ ، ويمكن اعتبار  $IF$  فضاء شعاعياً على  $IK$ . ولما كان  $IF$  حقلاً منتهياً كان بُعد الفضاء الشعاعي  $IF$  على الحقل  $IK$  منتهياً. لنضع  $n = \dim_{IK} IF$ . عندئذ يكون  $IF \cong IK^n$  بمقتضى النتيجة السابقة ومنه  $\text{card } IF = p^n$ .

10-2.II. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . لنفترض أن  $E_1, E_2, \dots, E_n$  فضاءات شعاعية جزئية أبعادها منتهية من  $E$ . ولنفترض أن المجموع  $\sum_{i=1}^n E_i$  مباشر. عندئذ يكون الفضاء  $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$  منتهي البعد، ويكون  $\dim \bigoplus_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \dim E_i$ .

الاثبات

في الحقيقة إن التطبيق

$$\varphi: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n E_i, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$$

□

تقابل خطي استناداً إلى المبرهنة 11-4.I.

11-2.II. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ . يوجد فضاء شعاعي جزئي  $G$  من  $E$  بحيث  $E = F \oplus G$ .

الاثبات

ليكن  $(e_1, \dots, e_r)$  أساساً لـ  $F$ . يمكننا بناءً على المبرهنة 3-2.II. أن نجد  $e_{r+1}, \dots, e_n$  في  $E$  بحيث يكون  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$ . نعرف إذن

$$G = \text{vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$$

□

ولتحقق بسهولة أن  $E = F \oplus G$ .

ملاحظة: إن الخاصية السابقة صحيحة ولو لم يكن  $\dim E < +\infty$ .

12-2.II. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ ، وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ . عندئذ يكون بُعد  $E/F$  منتهياً، ويكون

$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

الإثبات

ليكن  $G$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$  يحقق  $E = F \oplus G$ ، (موجود استناداً إلى المبرهنة 11-2.II). ولتأمل  $\Phi: G \rightarrow E/F, x \mapsto [x]$ ، مقصور الغمر القانوني على الفضاء الجزئي  $G$ . إن  $\Phi$  تشاكل تقابلي خطي. في الحقيقة، إن  $\Phi$  خطي لأنه مقصور تطبيق خطي على فضاء شعاعياً جزئياً من منطلقه. وهو متباين لأن

$$\begin{aligned} x \in \ker \Phi &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge ([x] = 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge (x \in F) \\ &\Leftrightarrow x \in G \cap F = \{0\} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

وأخيراً إذا كان  $x \in E$  كان  $x = x_F + x_G$  و من ثم  $[x] = [x_G] = \Phi(x_G)$  إذن  $\Phi$  غامر. يتبع من ذلك أن  $\dim E/F = \dim G = \dim E - \dim F$  وهو المطلوب إثباته.  $\square$

13-2.II. تعريف: إذا كان  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ ، و كان  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ . نقول إن تمام بُعد  $F$  منته و نكتب  $\text{codim}_E F < +\infty$  إذا وفقط إذا كان بُعد الفضاء  $E/F$  منتهياً. ويكون بالتعريف  $\text{codim}_E F = \dim E/F$ . لقد أثبتنا في المبرهنة السابقة أنه إذا كان بُعد  $E$  منتهياً كان  $\text{codim}_E F = \dim E - \dim F$ .

14-2.II. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى فضاء شعاعياً  $F$  على الحقل  $IK$ ، أي  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . عندئذ يكون بُعد  $\text{Im } u$  منتهياً ويكون

$$\dim E = \dim(\ker u) + \dim(\text{Im } u)$$

الإثبات

لقد أثبتنا في المبرهنة 2-5.I أن  $E/\ker u \cong \text{Im } u$  ومن ثم يكون

$$\dim \text{Im } u = \dim E/\ker u = \dim E - \dim \ker u$$

$\square$

15-2.II. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين أبعادهما منتهية على حقل  $K$ . عندئذ يكون بُعد الفضاء  $\mathcal{L}(E, F)$  منتهياً ويكون  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$ .

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$ . كما كان التطبيق الخطي يمتد بطريقة وحيدة انطلاقاً من صورة أساس للمنطلق، كان التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F^n, u \mapsto (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

تقابلاً خطياً، ومن ثمّ

$$\square \quad \dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = \sum_{i=1}^n \dim F = \dim E \cdot \dim F$$

3.II. رتبة جماعة أشعة و رتبة تطبيق خطي

3-1.II. تعريف: لتكن  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة من فضاء شعاعي  $E$ . إذا كان بُعد  $\text{vect}((x_i)_{i \in I})$  منتهياً قلنا إنّ رتبة الجماعة  $(x_i)_{i \in I}$  منتهية وكتبنا  $\text{rg}((x_i)_{i \in I}) = \dim \text{vect}((x_i)_{i \in I})$ .

3-2.II. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين  $E$  و  $F$ . ولتكن  $(x_i)_{i \in I}$  جماعة من  $E$  رتبها منتهية  $r$ . عندئذ تكون رتبة الجماعة  $(u(x_i))_{i \in I}$  منتهية أيضاً ويكون  $\text{rg}((u(x_i))_{i \in I}) \leq \text{rg}((x_i)_{i \in I})$ .

الإثبات

ليكن  $G = \text{vect}((x_i)_{i \in I})$  عندئذ  $r = \dim G = \text{rg}((x_i)_{i \in I})$ . وليكن التطبيق الخطي  $u$  مقصور إلى  $G$  أي  $v = u|_G \in \mathcal{L}(G, F)$ . إنّ  $\text{Im } v = \text{vect}((u(x_i))_{i \in I})$ . ومن ثمّ

$$\square \quad r = \dim G = \dim \ker v + \dim \text{Im } v \geq \dim \text{Im } v = \text{rg}((u(x_i))_{i \in I})$$

3-3.II. تعريف: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً بين فضاءين شعاعيين  $E$  و  $F$ . إذا كان بُعد  $\text{Im } u$  منتهياً قلنا إنّ رتبة  $u$  منتهية وكتبنا  $\text{rg } u = \dim \text{Im } u$ .

ونلاحظ من جهة أولى أنّه إذا كان  $\dim E < +\infty$  كان  $\dim E = \dim \ker u + \text{rg } u$  وإذا كان  $\dim F < +\infty$  كان  $\text{rg } u \leq \dim F$ . إذن  $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \text{rg } u \leq \min(\dim E, \dim F)$

ونلاحظ أيضاً أنه إذا كان بُعد كل من  $E$  و  $F$  منتهياً كان التكافؤان الهامان التاليان:

$$\bullet \quad u \text{ متباين} \Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} u$$

$$\bullet \quad u \text{ غامر} \Leftrightarrow \dim F = \operatorname{rg} u$$

II-3-4. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين أبعادهما منتهية بحيث  $\dim E = \dim F = n$ .

وليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . عندئذ يكون هناك تكافؤ بين الخواص التالية:

1.  $u$  غامر.

2.  $u$  متباين.

3.  $u$  تقابل.

4.  $n = \operatorname{rg} u$ .

5.  $u$  قلوب من اليسار. (أي يوجد  $v$  من  $\mathcal{L}(F, E)$  بحيث  $v \circ u = I_E$ ).

6.  $u$  قلوب من اليمين. (أي يوجد  $v$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  بحيث  $u \circ v = I_F$ ).

الإثبات

الإثبات سهل ومتروك للقارئ.

□

II-3-5. مبرهنة: لتكن  $E$  و  $F$  و  $G$  ثلاثة فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية على حقل  $K$ .

و ليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  و  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . عندئذ

1. إن  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$ .

2. إذا كان  $u$  غامراً فإن  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$ .

3. إذا كان  $v$  متبايناً فإن  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$ .

الإثبات

1. لدينا من جهة أولى  $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im}(u))$  و من ثَمَّ  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(u)$ . ومن جهة

ثانية  $\operatorname{Im}(u) \subset F$  إذن  $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$  و من ثَمَّ  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(v)$ .

2. إذا كان  $u$  غامراً كان  $\operatorname{Im} v \circ u = \operatorname{Im} v$ .

3. و إذا كان  $v$  متبايناً كان  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim v(\operatorname{Im}(u)) = \dim \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rg} u$ .

□



### II.3-6. ملاحظة عملية:

لتعيين رتبة جملة أشعة  $(a_1, \dots, a_p)$  من فضاء شعاعي  $E$  بُعدته  $n$ ، نكتب أولاً كل شعاع منها كعبارة خطية بعناصر أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ . ثم نلاحظ أن الفضاء  $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$  لا يتغير إذا ضرب أحد الأشعة  $a_i$  بثابت مختلف عن 0 أو إذا أضيف إلى أحد الأشعة  $a_i$  تركيب خطي في بقية الأشعة  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p$ . لذلك نسعى للحصول على جملة  $(b_1, \dots, b_p)$  من أشعة  $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$  تولد الفضاء نفسه و بحيث تكون مركباتها على الأساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  حاوية العديد من الأصفار. في الحقيقة نسعى لأن يكون تمثيل الأشعة  $b_1, \dots, b_p$  على الأساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  من النمط التالي:

|          | $b_1$ | $b_2$    | ... | ...      | $b_p$ |
|----------|-------|----------|-----|----------|-------|
| $e_1$    | x     | 0        | ... | ...      | 0     |
| $e_2$    | x     | x        | 0   |          | ...   |
| $\vdots$ | x     | $\ddots$ | x   | $\ddots$ | ...   |
| $\vdots$ | ...   | ...      | ... | $\ddots$ | 0     |
| $\vdots$ | x     |          |     |          | x     |
| $\vdots$ | ...   | ...      | ... | ...      | ...   |
| $e_n$    | x     | x        | ... | ...      | x     |

سنوضح هذا الأسلوب في المثال التالي، حيث نحسب رتبة  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  من  $\mathbb{R}^5$  والتي مركباتها على الأساس القانوني معطاة كما يلي :

$$a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ و } a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ و } a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نبين فيما يلي العمليات التي يمكن إجراؤها على هذه الأشعة للحصول على الشكل السابق:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_3 & a_1 + 2a_3 & a_2 + 5a_3 & a_4 - 2a_3 \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 13 \\ 9 & 7 & 1 & 12 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 3 \\ 3 & 5 & 16 & -6 \\ 5 & 15 & 27 & 3 \\ 1 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$a_3, a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3, a_1 + 2a_3, a_4 - 2a_3$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$a_3, a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3 = b_2, a_1 + 2a_3 - 7b_2, a_4 - 2a_3 - 3b_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix}$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -57 & 0 \\ 5 & 9 & -24 & 0 \\ 1 & -9 & 37 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3 \\ b_2 &= -a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4 \\ b_3 &= 3a_1 - 3a_2 - 17a_3 + 4a_4 \\ b_4 &= 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \end{aligned}$$

لستج أن  $\text{rg}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$  وأنه توجد علاقة ارتباط خطي بين الأشعة  $a_1, a_2, a_3, a_4$

$$b_4 = 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0 \text{ هي } a_4 \text{ و } a_3$$



## تمارين

التمرين 1. ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ ، بُعد  $n$ . وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $E$ ، و  $x$  عنصراً من  $E \setminus \{0\}$ . نفترض أن الجملة  $(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$  أساس  $E$ . أثبت أن  $f$  تقابل، وأنه يوجد من  $IK^n$  بحيث

$$f^n + a_n f^{n-1} + \dots + a_1 I_E = 0$$

التمرين 2. ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $IK$ . وليكن  $V$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$  وكذلك ليكن  $W$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $F$ . نعرف  $\mathcal{L}_{V,W}(E, F)$  بأنها المجموعة:

$$\mathcal{L}_{V,W}(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) : V \subset \ker u, \text{Im } u \subset W\}$$

أثبت أن  $\mathcal{L}_{V,W}(E, F)$  فضاء شعاعي جزئي من  $\mathcal{L}(E, F)$  يُشاكل تقابلياً الفضاء  $\mathcal{L}(E/V, W)$ . ماذا يمكن أن نقول عن بُعد  $\mathcal{L}_{V,W}(E, F)$  إذا كان كل من  $\dim V$  و  $\text{codim } W$  منتهياً؟

التمرين 3. ليكن  $E = \mathbb{R}^4$ . وليكن الأشعة  $a = (1, 2, 3, 4)$ ،  $b = (1, 1, 1, 3)$ ،  $c = (2, 1, 1, 1)$ ،  $e = (2, 3, 0, 1)$ ،  $d = (-1, 0, -1, 2)$  من  $E$ . وليكن الفضاءين الجزئيين:

$$U = \text{vect}(a, b, c) \text{ و } V = \text{vect}(d, e)$$

احسب أبعاد كل من  $U$  و  $V$  و  $U \cap V$  و  $U + V$ .

التمرين 4. ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $IK$ . وليكن  $E_1$  و  $E_2$  فضاءين شعاعيين جزئيين من  $E$ . نفترض أن بُعد  $E_1 + E_2$  منته. أثبت أن

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

ثم أثبت أن الشرط  $\dim E_1 + \dim E_2 > \dim E$  يقتضي أن  $E_1 \cap E_2 \neq \{0\}$ .

التمرين 5. ليكن  $E$  و  $F$  و  $G$  ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية الأبعاد على حقل  $IK$ .

1. ليكن  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  و  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . أثبت أن

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim F \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$$

2. ليكن  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  و  $g \in \mathcal{L}(E, F)$ . أثبت أن

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(g + f) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

التمرين 6. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل  $IK$ ، بعده  $n$ . وليكن  $E_1$  و  $E_2$  فضاءين شعاعيين

جزئيين من  $E$  يحققان  $\dim E_1 = \dim E_2 = n - p$ . أثبت أنه يوجد فضاء شعاعي

جزئي  $F$  يحقق  $E = F \oplus E_1 = F \oplus E_2$ .

التمرين 7. لتكن  $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن  $E = \mathbb{R}_n[X]$  فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد

درجتها عن  $n$ . وليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$  معرفاً بـ

$$u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. تحقق أنّ  $u$  خطّي وعيّن  $\ker u$  و  $\text{Im } u$ .

2. ليكن  $Q \in \text{Im } u$ . أثبت أنه يوجد كثير حدود وحيد  $P \in E$  بحيث  $u(P) = Q$

$$\text{وبحيث } P(0) = P'(0) = 0$$

التمرين 8. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل تبديلي  $IK$ . نفترض أن  $n = \dim E$ . وليكن

$u \in \mathcal{L}(E)$ . أثبت أنّ

$$\ker u = \text{Im } u \Leftrightarrow (u^2 = 0) \wedge (n = 2 \text{rg } u)$$

التمرين 9. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $u$  و  $v$  عنصرين

من  $\mathcal{L}(E)$ . نفترض أنّ  $E = \text{Im } u + \text{Im } v = \ker u + \ker v$ . أثبت أنّ

$$E = \text{Im } u \oplus \text{Im } v = \ker u \oplus \ker v$$

التمرين 10. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن العنصران  $u$

و  $v$  من  $\mathcal{L}(E)$ . نفترض أنّ  $u \circ u - u \circ v + 2u - I_E = 0$ . أثبت أنّ  $u \circ v = v \circ u$ .

التمرين 11. ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $K$ . نفترض أن  $n = \dim E$ . ليكن

$$\mathcal{L}(E, F) \ni u$$

1. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي  $G$  من  $E$  لدينا

$$\dim u(G) = \dim G - \dim(G \cap \ker u)$$

2. أياً كان الفضاء الشعاعي الجزئي  $H$  من  $F$  لدينا

$$\dim u^{-1}(H) = n + \dim(H \cap u(E)) - \operatorname{rg} u$$

التمرين 12. ليكن  $(a, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}^*$ . ولتأمل المجموعة

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

1. أثبت أن  $S$  فضاء شعاعي جزئي من  $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$  بعده يساوي 2.

2. نفترض أن المعادلة  $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$  تقبل جذرين مختلفين  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$ . أثبت أن الجملة

$$((\lambda_1^n)_{n \geq 0}, (\lambda_2^n)_{n \geq 0})$$

تكون أساساً للفضاء  $S$ .

3. نفترض أن المعادلة  $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$  تقبل جذراً مضاعفاً  $\lambda$ . أثبت أنه في هذه الحالة

$$(n\lambda^n)_{n \geq 0}, (\lambda^n)_{n \geq 0})$$

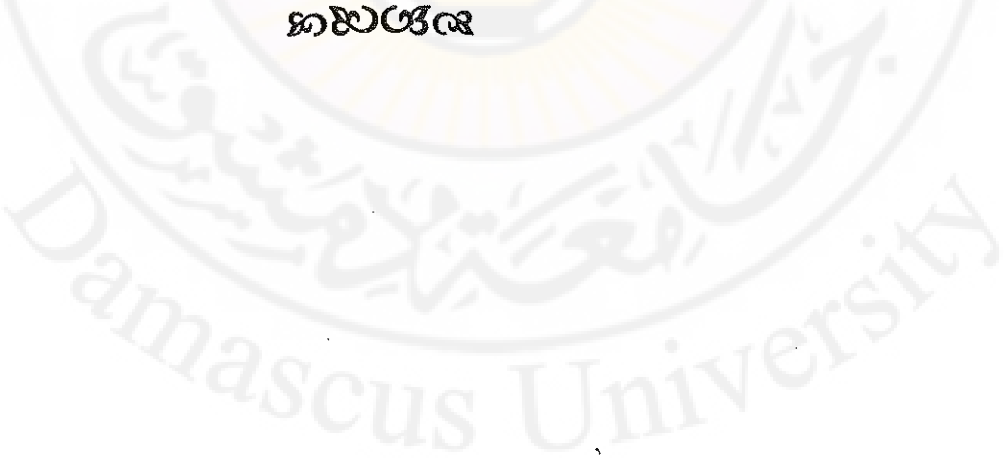
تكون الجملة أساساً للفضاء  $S$ .

4. لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متالية Fibonacci المعرفة تدريجياً كما يلي :

$$\forall n \geq 0, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ و } x_1 = 1, x_0 = 1$$

احسب  $x_n$  بدلالة  $n$ .

❧❧❧❧❧



## الفصل الثالث

### الثنوية في الفضاءات الشعاعية

#### 1.III. ثنوي فضاء شعاعي

1-1.III. تعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على حقل  $IK$ ، نفترضه مختلفاً عن  $\{0\}$ . نسمي كل تطبيق خطي من  $E$  إلى  $IK$  شكلاً خطياً على  $E$ . و نرمز بالرمز  $E^*$  إلى الفضاء الشعاعي  $\mathcal{L}(E, IK)$  أي فضاء الأشكال الخطية على  $E$ . ونسمي  $E^*$  الفضاء الشعاعي الثنوي لـ  $E$ . وأخيراً أيّا كان  $f \in E^*$  و  $x \in E$  نرمز بـ  $\langle f, x \rangle$  إلى المقدار  $f(x)$ .

#### 2-1.III. تعريف:

•• أيّا كان  $x \in E$  نعرف

$$x^\perp = \{y \in E^* : \langle y, x \rangle = 0\}$$

إنّ فضاء شعاعي جزئي من  $E^*$  نسميه الفضاء العمودي على  $x$  في  $E^*$ .

•• وبوجه عام أيّا كانت المجموعة الجزئية غير الخالية  $A$  من  $E$  نعرف:

$$A^\perp = \{y \in E^* : \forall a \in A, \langle y, a \rangle = 0\} = \bigcap_{a \in A} a^\perp$$

إنّ فضاء شعاعي جزئي من  $E^*$  ندعوه الفضاء العمودي على  $A$  في  $E^*$ .

•• بأسلوب مماثل نعرف، أيّا كان  $y \in E^*$ ،

$$y^\circ = \{x \in E : \langle y, x \rangle = 0\} = \ker y$$

نسمي  $y^\circ$  الفضاء الشعاعي الجزئي العمودي على  $y$  في  $E$ .

•• وكذلك نعرف، أيّا كانت المجموعة الجزئية غير الخالية  $B$  من  $E^*$ ،

$$B^\circ = \{x \in E : \forall y \in B, \langle y, x \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in B} \ker y$$

ونسمي  $B^\circ$  الفضاء الشعاعي الجزئي العمودي على  $B$  في  $E$ .

•• وأخيراً إذا كانت  $A$  مجموعة جزئية غير خالية من  $E$  و  $B$  مجموعة جزئية غير خالية

من  $E^*$  فإننا نقول إنّ  $A$  و  $B$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $B \subset A^\perp$  وهذا يكافئ

$$\text{كون } A \subset B^\circ \text{ أو } \forall a \in A, \forall b \in B, \langle a, b \rangle = 0$$

## III-1.3. ملاحظات:

- من الواضح أن  $E^\perp = \{0\}$ .
- وكذلك يكون  $(E^\circ)^\circ = \{0\}$  إلا أن إثبات هذه الخاصية في الحالة العامة الموافقة لـ  $\dim E = +\infty$  يتطلب موضوع الاختيار، وسنرى لاحقاً إثباتاً لهذه الخاصية في حالة  $\dim E < +\infty$ .

III-1.4. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، على حقل  $\mathbb{K}$ . عندئذ

1. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين  $A$  و  $B$  من  $E$ ، كان:  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .
2. أيّاً كان الجزء غير الخالي  $A$  من  $E$ ، كان  $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$  و  $A^\perp = (A^\perp)^\circ$ .
3. أيّاً كان الجزءان غير الخاليين  $A$  و  $B$  من  $E^\circ$ ، كان  $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$ .
4. أيّاً كان الجزء غير الخالي  $A$  من  $E^\circ$ ، كان  $A^\circ = (\text{vect}(A))^\circ$  و  $A^\circ = (A^\circ)^\perp$ .

الإثبات

□ إثبات هذه الخواص بسيط ومتروك للقارئ.

III-1.5. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $H$  فضاءً شعاعياً جزئياً من  $E$ . هناك تكافؤ بين الخواص التالية:

- 1°. تمام بعد  $II$  يساوي 1 أي  $\text{codim}_E H = 1$ .
- 2°.  $H$  هو لواء شكل خطي غير معدوم.
- 3°. يوجد مستقيم شعاعي  $D$  (أي فضاء جزئي بعده 1) بحيث  $H \oplus D = E$ .

الإثبات

1°  $\Leftarrow$  2°. لئلا كان  $\dim E/H = \dim \mathbb{K} = 1$ ، يوجد تشاكل خطي ثنائي

$$\theta: E/H \rightarrow \mathbb{K}$$

ليكن  $\theta: E \rightarrow E/H$  الغمر القالوني عندئذ يكون  $\theta = \theta \circ \theta$  شكلاً خطياً يحقق  $H = \ker f$ ، وبالطبع  $f \neq 0$  لأن  $E \neq H$ .

2°  $\Leftarrow$  3°. لنفترض أن  $H = \ker f$  حيث  $f$  شكل خطي من  $E^* \setminus \{0\}$ . إن  $f$  غامر لأنه

غير معدوم، إذن يوجد  $b \in E$  بحيث  $\langle f, b \rangle = 1$ . لنضع  $D = \mathbb{K}.b$ .

إذا كان  $x \in D \cap H$  كان  $\lambda \cdot b = x$  حيث  $\lambda \in \mathbb{K}$  وكان  $\langle f, x \rangle = 0$ ، ومن ثم يكون  $\lambda = \lambda \langle f, b \rangle = 0$ . ينتج من ذلك أن  $x = 0$  ومنه  $D \cap H = \{0\}$ .  
من جهة أخرى، أيًا كان  $x \in E$  لدينا

$$x = \underbrace{\langle f, x \rangle \cdot b}_{\in D} + \underbrace{x - \langle f, x \rangle \cdot b}_{\in H}$$

إذن  $E = H \oplus D$ .

1°  $\Leftarrow$  3°. ليكن  $P$  الإسقاط على  $D$  توازياً مع  $H$  إن  $H = \ker P$  و  $D = \text{Im } P$  ومن ثم يكون هناك تقابل خطي بين  $E/H = E/\ker P$  و  $\text{Im } P$  وذلك استناداً إلى المبرهنة 1.5-2. إذن  $\text{codim}_E H = \dim E/H = \dim D = 1$  □

III. 1-6. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على حقل  $\mathbb{K}$ . نسمي مستقيماً في  $E$  كل فضاء شعاعي جزئي  $D$  بعده 1 في  $E$ . ونسمي مستوياً في  $E$  كل فضاء شعاعي جزئي  $P$  بعده 2 في  $E$ . وأخيراً نسمي مستوياً فوقياً في  $E$  كل فضاء شعاعي جزئي  $H$  تمام بعده 1 في  $E$ .

III. 1-7. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $H$  مستوياً فوقياً في  $E$ . عندئذ يكون  $H^\perp$  مستقيماً شعاعياً في  $E^*$ .

الإثبات

نفترض أن  $H = \ker y$  حيث  $y \in E^* \setminus \{0\}$ . لأن الشكل الخطي  $y$  غامر، يوجد  $a \in E$  بحيث  $\langle y, a \rangle = 1$ .

من جهة أولى، من الواضح أن  $y \in H^\perp$  ومن ثم  $\mathbb{K} \cdot y \subset H^\perp$ . ومن جهة ثانية، ليكن  $z \in H^\perp$ ، عندئذ لما كان

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{\langle y, x \rangle a}_{\in \mathbb{K} \cdot a} + \underbrace{x - \langle y, x \rangle a}_{\in H}$$

كان  $\langle z, x \rangle - \langle y, x \rangle z(a) = 0$ ،  $\forall x \in E$ ، أو  $z = \langle z, a \rangle \cdot y$ . إذن  $z \in \mathbb{K} \cdot y$ ، وهذا ما يثبت صحة المساواة  $H^\perp = \mathbb{K} \cdot y$ . □

III. 8-1. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $y$  شكلاً خطياً من  $E^* \setminus \{0\}$ . وليكن  $H = \ker y$ . عندئذ نسمي المعادلة  $\langle y, x \rangle = 0$  معادلة المستوي الفوقى  $H$ . ذلك لأن  $x \in H \Leftrightarrow \langle y, x \rangle = 0$ .

### III. 2. منقول تطبيق خطي

III. 1-2. تعريف: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $\mathbb{K}$ ، وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من

$E$  إلى  $F$  أي  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . نعرف التطبيق الخطي  ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$  كما يلي:

$${}^t u : F^* \rightarrow E^*, y \mapsto {}^t u(y) = y \circ u$$

ونسمي  ${}^t u$  منقول التطبيق  $u$ . لاحظ أن:

$$\forall x \in E, \forall y \in F^*, \langle {}^t u(y), x \rangle_{E^*, E} = \langle y, u(x) \rangle_{F^*, F}$$

III. 2-2. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $\mathbb{K}$ .

1. إن التطبيق  $u \mapsto {}^t u$ ،  $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$ ، خطي ومتباين.

2. أياً كان  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  و  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ ، كان  ${}^t(v \circ u) = {}^t v \circ {}^t u$ .

3. ليكن  $I_E$  (على التوالي  $I_{F^*}$ ) التطبيق المطابق على  $E$  (على  $E^*$ )، إذن  ${}^t I_E = I_{E^*}$ .

4. إذا كان  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  تقابلاً كان  ${}^t u$  تقابلاً أيضاً و كان  $({}^t u)^{-1} = ({}^t(u^{-1}))$ .

5. إذا كان  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  كان  $\ker({}^t u) = (\text{Im } u)^\perp$ . ومن ثم إذا كان  $u$  خامراً كان

${}^t u$  متبايناً.

الإثبات

1. ليكن  $u$  و  $v$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  وليكن  $\lambda \in \mathbb{K}$ . عندئذ، أياً كان  $(x, y) \in E \times F^*$ ، يكن

$$\begin{aligned} \langle \Phi(u + \lambda v)(y), x \rangle_{E^*, E} &= \langle {}^t(u + \lambda v)(y), x \rangle_{E^*, E} = \langle y, (u + \lambda v)(x) \rangle_{F^*, F} \\ &= \langle y, u(x) + \lambda v(x) \rangle_{F^*, F} = \langle y, u(x) \rangle_{F^*, F} + \lambda \langle y, v(x) \rangle_{F^*, F} \\ &= \langle {}^t u(y), x \rangle_{E^*, E} + \lambda \langle {}^t v(y), x \rangle_{E^*, E} \\ &= \langle {}^t u(y) + \lambda {}^t v(y), x \rangle_{E^*, E} \\ &= \langle ({}^t u + \lambda {}^t v)(y), x \rangle_{E^*, E} = \langle (\Phi(u) + \lambda \Phi(v))(y), x \rangle_{E^*, E} \end{aligned}$$

فالتطبيق  $\Phi$  خطي.



ومن جهة أخرى، التطبيق  $\Phi$  متباين لأن

$$\begin{aligned} u \in \ker \Phi &\Rightarrow \forall (x, y) \in E \times F^*, \langle y, u(x) \rangle_{F^*, F} = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in E, u(x) \in (F^*)^\circ = \{0\} \\ &\Rightarrow \forall x \in E, u(x) = 0 \\ &\Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

وهذا ما يثبت الخاصية 1.

2. ليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  و  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . عندئذ، أيّا كان  $(x, y)$  من  $E \times G^*$ ، يَكُن

$$\begin{aligned} \langle {}^t(v \circ u)(y), x \rangle_{E^*, E} &= \langle y, v \circ u(x) \rangle_{G^*, G} = \langle y, v(u(x)) \rangle_{G^*, G} \\ &= \langle {}^t v(y), u(x) \rangle_{F^*, F} \\ &= \langle {}^t u({}^t v(y)), x \rangle_{E^*, E} = \langle {}^t u \circ {}^t v(y), x \rangle_{E^*, E} \end{aligned}$$

ومن ثم  ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

3. واضح من التعريف.

4. نتج هذه الخاصية من أخذ المنقول في طرفي المساواتين:

$$u^{-1} \circ u = I_E \quad \text{و} \quad u \circ u^{-1} = I_F$$

فنجد باستخدام ما سبق أن

$${}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = {}^t I_E = I_{E^*} \quad \text{و} \quad {}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = {}^t I_F = I_{F^*}$$

فالتطبيق  ${}^t u$  تقابل و  $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$ .

5. نتج هذه الخاصية من التكافؤات التالية:

$$\begin{aligned} f \in \ker({}^t u) &\Leftrightarrow f \circ u = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \langle f, u(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } u, \langle f, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in (\text{Im } u)^\perp \end{aligned}$$

ومن ثم إذا كان  $u$  غامراً كان  ${}^t u$  متبايناً.

□

## 3.III. القوة في الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل تبديلي  $IK$ . عندئذ يكون الفضاء الثنائي  $E^*$  منتهي البعد ويكون  $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, IK) = \dim E$ .

3.III.1. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$ . لتعرف الجملة  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  من  $E^*$  بالعلاقات:

$$e_j^*(e_i) = \langle e_j^*, e_i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

عندئذ تكون الجملة  $\mathcal{E}^*$  أساساً لـ  $E^*$  نسميه الأساس الثنائي للأساس  $\mathcal{E}$ . وتتحقق العلاقات التالية:

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle \cdot e_i^*$$

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle e_i^*, x \rangle \cdot e_i$$

والتي تُبرر تسمية الأساس  $\mathcal{E}^*$  بالأساس الثنائي.

3.III.2. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $x$  عنصراً من  $E \setminus \{0\}$ . عندئذ يوجد شكل خطي  $f \in E^*$  بحيث يكون  $f(x) = 1$ .

الإثبات

لنضع  $e_1 = x$ ، ولنتمم  $(e_1)$  إلى أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  لـ  $E$ . ثم لناخذ الأساس الثنائي  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  لهذا الأساس. عندئذ يحقق  $f = e_1^*$  المطلوب. ينتج من هذه المبرهنة أن  $(E^*)^* = \{0\}$ .  $\square$

3.III.2. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، ومنتهي البعد على حقل  $IK$ . عندئذ يكون التطبيق:  $\Psi: E \rightarrow E^{**}: x \mapsto \Psi(x)$  المعروف بالعلاقة  $\langle \Psi(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$  حين يكون  $(x, f) \in E \times E^*$ ، تقابلاً خطياً.

## الإثبات

لما كان  $\dim E^{**} = \dim E$  يكفي أن نثبت أن التطبيق  $\Psi$  خطي ومتباين. النقطة الأولى واضحة، والثانية تنتج من المساواة  $\ker \Psi = (E^*)^\circ = \{0\}$ . وبذلك يتم المطلوب.  $\square$

III-3-3. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، رنتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  أساساً لـ  $E^*$ . عندئذ يوجد أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  لـ  $E$  بحيث يكون  $\mathcal{F}$  أساسه الثنائي.

## الإثبات

ليكن  $\mathcal{F}^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$  الأساس الثنائي لـ  $\mathcal{F}$  في  $E^{**}$ . ولنضع  $e_j = \Psi^{-1}(f_j^*)$  أيًا كان  $j \in \mathbb{N}_n$ ، حيث  $\Psi$  هو التقابل الخطي القانوني بين  $E$  و  $E^{**}$  الوارد في المبرهنة السابقة، فيكون:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \langle f_i, e_j \rangle_{E^*, E} = \langle \Psi(e_j), f_i \rangle_{E^{**}, E^*} = \langle f_j^*, f_i \rangle_{E^{**}, E^*} = \delta_{ij}$$

إذن  $\mathcal{F}$  هو الأساس الثنائي لـ  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ .

III-3-4. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً، مختلفاً عن  $\{0\}$ ، ومتهي البعد على حقل  $IK$ .

1. أيًا كان الفضاء الشعاعي الجزئي  $F$  من  $E$  لدينا:  
 $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$  و  $F = (F^\perp)^\circ$ .
2. أيًا كان الفضاء الشعاعي الجزئي  $G$  من  $E^*$  لدينا:  
 $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$  و  $G = (G^\circ)^\perp$ .

## الإثبات

1. ليكن  $(e_1, \dots, e_p)$  أساساً لـ  $F$ ، ولتعممه إلى أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  لـ  $E$ ، وليكن  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  الأساس الثنائي لـ  $\mathcal{E}$ . عندئذ، أيًا كان  $f \in E^*$ ، فإن

$$\begin{aligned} f \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \quad \langle f, e_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f = \sum_{i=p+1}^n \langle f, e_i \rangle \cdot e_i^* \\ &\Leftrightarrow f \in \text{vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*) \end{aligned}$$

إذن  $F^\perp = \text{vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$  و  $\dim F^\perp = n - \dim F$ .

2. ليكن  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  أساساً لـ  $E^*$  خُصِلَ عليه لإتمام الأساس  $(f_1, \dots, f_p)$  للفضاء الجزئي  $G$  إلى أساس لـ  $E^*$ . وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  الأساس في  $E$  الذي أساسه الثنوي هو  $\mathcal{F}$ . عندئذ أياً كان  $x \in E$  فلدينا

$$\begin{aligned} x \in G^\circ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \langle f_i, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sum_{i=p+1}^n \langle f_i, x \rangle \cdot e_i \\ &\Leftrightarrow x \in \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \end{aligned}$$

ومن ثم يكون  $G^\circ = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$  و  $\dim G^\circ = n - \dim G$ .

من ناحية أخرى، من الواضح أن  $F^\circ \subset (F^\perp)^\circ$ ، ولكن

$$\dim (F^\perp)^\circ = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$$

ومنه المساواة  $F = (F^\perp)^\circ$ ، ونترك للقارئ أن يثبت بأسلوب مماثل أن  $G = (G^\circ)^\perp$ . □

III-3-5. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين، غير تافهين، ومنتهي البعد على حقل  $\mathbb{K}$ .

وليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ، عندئذ يكون  $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$ .

الإثبات

في الحقيقة، لقد وجدنا أن  $\ker {}^t u = (\text{Im } u)^\perp$ ، إذن:

$$\begin{aligned} \text{rg}({}^t u) &= \dim F^* - \dim \ker {}^t u = \dim F^* - \dim (\text{Im } u)^\perp \\ &= \dim F^* - (\dim F^* - \dim \text{Im } u) = \dim \text{Im } u = \text{rg}(u) \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب إثباته. □

III-3-6. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $(f_1, \dots, f_r)$  جملة

من الأشكال الخطية على  $E$ . عندئذ تكون الخلاصتان التاليتان متكافئتين:

$$1. \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r, \quad f = \sum_{k=1}^r \lambda_k f_k$$

$$2. \forall x \in \bigcap_{i=1}^r \ker f_i, \quad f(x) = 0$$

الإثبات

في الحقيقة، لدينا

$$\square \quad \left( \bigcap_{i=1}^r \ker f_i \right)^\perp = \left( (f_1, \dots, f_r)^\circ \right)^\perp = \left( \text{vect}(f_1, \dots, f_r) \right)^\circ = \text{vect}(f_1, \dots, f_r)$$

## تمارين

التمرين 1. ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على الحقل  $IK$ ، وليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  تطبيقاً خطياً غامراً. أثبت أن  $u'$  متباين.

التمرين 2. ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهي البعد على الحقل  $IK$ ، وليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  أثبت أن:

$$\ker u' = (\operatorname{Im} u)^\perp, \quad \operatorname{Im} u' = (\ker u)^\perp$$

التمرين 3. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً منتهي البعد على الحقل  $IK$ ، وليكن  $V_1$  و  $V_2$  فضاءين شعاعيين جزئيين من  $E$ . قارن بين  $(V_1 + V_2)^\perp$  و  $V_1^\perp \cap V_2^\perp$  وبين  $(V_1 \cap V_2)^\perp$  و  $V_1^\perp + V_2^\perp$  وبين  $W_1^\circ + W_2^\circ$  و  $(W_1 \cap W_2)^\circ$ .

التمرين 4. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ ، وليكن  $(f, g) \in (E^*)^2$ . لفترض أنه أياً كان  $x$  من  $E$  لدينا  $f(x)g(x) = 0$ . أثبت أن  $f = 0$  أو  $g = 0$ .

التمرين 5. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $IK$ ، أثبت صحة القضيتين التاليتين:

(a) لتكن  $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  جملة حرة من عناصر  $E^*$ . يوجد جملة  $(x_1, \dots, x_k)$  من عناصر  $E$  بحيث يكون  $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$  أي كان  $(i, j) \in \operatorname{IN}_k^2$ .

(b) لتكن  $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  جملة حرة من عناصر  $E^*$ . وليكن  $\ell$  من  $E^*$  بحيث  $\ell = \sum_{i=1}^k \lambda_i \ell_i$  يوجد  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  من  $IK$  بحيث  $\bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$ .

واستنتج أنه أياً كانت الجملة  $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  من عناصر  $E^*$ ، هناك تكافؤ بين القضيتين:

$$\ell \in \operatorname{vect}(\ell_1, \dots, \ell_k) \iff \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$$

التمرين 6. ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً منتهي البعد على الحقل  $IK$ ، ولتكن  $(\ell_1, \dots, \ell_k)$  جملة حرة من عناصر  $E^*$ . أثبت أن:

$$\dim \left( \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) \right) = \dim E - k$$

التمرين 7. ليكن  $E = \mathbb{R}_2[X]$  فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن 2، ولتكن  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  و  $\varphi_3$  العناصر من  $E^*$  المعرفة بـ :

$$\varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P'(1), \quad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t) dt$$

أثبت أن  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  أساس للفضاء  $E^*$  وحدد أساساً لـ  $E$  يكون  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  أساسه الثنوي.

التمرين 8. ليكن  $E = \mathbb{R}_3[X]$  فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن 3، ولتكن  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  و  $\varphi_3$  و  $\varphi_4$  العناصر من  $E^*$  المعرفة بـ :

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = P'(0), \quad \varphi_4(P) = P'(1)$$

1. أثبت أن  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$  أساس لـ  $E^*$  وحدد أساساً لـ  $E$  يكون الأساس  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$  أساسه الثنوي.

2. عبر عن الشكل الخطي  $\psi \in E^*$  المعروف بـ  $\psi(P) = \int_0^1 P(t) dt$  بدلالة عناصر الأساس السابق.

التمرين 9. ليكن  $E = \mathbb{R}_n[X]$  فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن  $n$ . في حالة كل عدد حقيقي  $a$  نضع:  $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$ .

1. تحقق أنه أياً كان العدد الحقيقي  $a$ ،  $\varphi_a \in E^*$ .

2. لتكن  $x_0, x_1, \dots, x_n$  أعداداً حقيقية مختلفة معنى معنى. أثبت أن  $(\varphi_{x_0}, \varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n})$  أساس للفضاء  $E^*$  وحدد أساسه الثنوي.

3. أثبت أنه توجد متتالية منتهية وحيدة  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  تحقق:

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 P(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$

التمرين 10. ليكن  $E = \mathbb{R}_n[X]$  فضاء كثيرات الحدود ذات الأمتثال الحقيقية والتي لا تزيد درجتها عن  $n$ .

1. ليكن  $e_k(X) = (X+a)^k$ ، أوجد الأساس الثنوي  $(e_k^*)_{0 \leq k \leq n}$  للأساس  $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

من  $E$ . عبر عن الشكل الخطي  $\varphi: P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$  بدلالة عناصر هذا الأساس.

2. ليكن الشكل الخطي  $\Delta$  المعرفة  $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ ، و ليكن الشكل

الخطي  $\varphi_k$  المعرفة بالعلاقة  $\varphi_k(P) = \Delta^k(P)(0)$ . أثبت أن  $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$  أساس للفضاء

$E^*$  وأوجد الأساس  $(e_k)_{0 \leq k \leq n}$  في  $E$  الذي أساسه الثنوي  $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$ .

التمرين 11. لتكن  $\mathcal{J}$  مجموعة المصفوفات  $M = (a_{ij})$  من  $M_n(\mathbb{R})$  التي تحقق:

$$\exists s \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{ij} = s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \sum_{i=1}^n a_{ij} = s$$

نرمز بـ  $\delta(M)$  إلى  $s$ .

1. أثبت أن  $\mathcal{J}$  فضاء شعاعي جزئي من  $M_n(\mathbb{R})$  وأن  $\delta$  شكل خطي على  $\mathcal{J}$ .

2. أثبت أن جداء عنصرين من  $\mathcal{J}$  هو عنصر من  $\mathcal{J}$ .

3. لتكن المصفوفة  $J = (a_{ij})$  التي تحقق  $a_{ij} = 1, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ . أثبت أن:

$$(A \in \mathcal{J}) \Leftrightarrow (\exists s: AJ = JA = sJ)$$

4. أثبت أنه إذا كانت المصفوفة  $A$  من  $\mathcal{J}$  قلوبية فإن  $A^{-1} \in \mathcal{J}$ .

5. أثبت أن  $J = \ker \delta \oplus \mathbb{R} \cdot J$  وأوجد  $\dim \mathcal{J}$ .

6. ليكن  $\overline{\mathcal{J}}$  مجموعة المصفوفات  $M = (a_{ij})$  من  $M_n(\mathbb{R})$  التي تحقق:

$$\exists s \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{ij} = s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \sum_{i=1}^n a_{ij} = s,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{kk} = \sum_{k=1}^n a_{k, n+1-k} = s$$

أثبت أن  $\overline{\mathcal{J}}$  فضاء شعاعي جزئي من  $M_n(\mathbb{R})$  وأوجد بعده.

التمرين 12. لتكن متتالية كثيرات الحدود  $(P_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad \forall n \geq 2, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-n)^{n-1}$$

1. تحقق أنه أياً كان  $1 \leq n$  لدينا  $P'_n(X) = P_{n-1}(X-1)$  واستنتج أن:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$$

2. لتكن  $k \in \mathbb{N}$ ، نعرف على  $\mathbb{R}[X]$  الشكل الخطي  $\varphi_k$  بالعلاقة:  $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$ . أوجد  $\varphi_k(P_n)$ .

3. نفترض الآن أن  $m$  عدد طبيعي موجب تماماً ولنرمز بـ  $E = \mathbb{R}_m[X]$  لفضاء كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن  $m$ . أثبت أن  $P_0, P_1, \dots, P_m$  أساس لـ  $E$ . أوجد أمثلة أخرى.

$$4. \text{ أثبت أن } \forall Q \in E, \quad Q(X) = \sum_{k=0}^m Q^{(k)}(k) P_k(X)$$

$$5. \text{ استنتج أن } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad P_m(X+\alpha) = \sum_{k=0}^m P_{m-k}(\alpha) P_k(X)$$

تمت



## الفصل الرابع

### المصفوفات

#### 1.IV. مفهوم المصفوفة

لندكر بالرمز  $IN_n$  الذي يرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية الواقعة بين 1 و  $n \in IN$ . وسنرمز في بقية هذه الفقرة بالرمز  $A$  إلى سلكة تبديلية ما.

1.IV.1. تعريف: نسمي مصفوفة من عناصر الحلقة  $A$  —  $n$  سطرًا و  $p$  عمودًا، كل تطبيق منطلقه المجموعة  $IN_n \times IN_p$  يأخذ قيمه في  $A$ . ولرمز بالرمز  $M_{n \times p}(A)$  إلى مجموعة المصفوفات —  $n$  سطرًا و  $p$  عمودًا من عناصر الحلقة  $A$ . ولقد جرت العادة أن نمثل مصفوفة  $M$  من  $M_{n \times p}(A)$  بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{(i,j) \in IN_n \times IN_p}$$

#### 2.IV.1. تعريف:

- نسمي مصفوفة جزئية من مصفوفة  $M \in M_{n \times p}(A)$  مقصور  $M$  على مجموعة جزئية من النمط  $IN_n \times IN_p \supset I \times J$  ولرمز إلى هذه المصفوفة الجزئية بالرمز  $M_{I,J}$ .
- نسمي مصفوفة سطر (أو مصفوفة عمود) كل عنصر من  $M_{1 \times p}(A)$  (أو  $M_{n \times 1}(A)$ ).
- نسمي مصفوفة مربعة من المرتبة  $n$  كل عنصر من  $M_{n \times n}(A)$ ، ولرمز إلى مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة  $n$  بالرمز  $M_n(A)$ .
- نسمي مصفوفة مثلثية عليا كل مصفوفة مربعة  $M \in M_n(A)$  تحقق  $a_{ij} = 0$  لـ  $i > j$ .
- نسمي مصفوفة مثلثية سفلى كل مصفوفة مربعة  $M \in M_n(A)$  تحقق  $a_{ij} = 0$  لـ  $i < j$ .

• وأخيراً نسمي مصفوفة قطرية كل مصفوفة مربعة  $M \in M_n(A)$  ، تحقق

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

ولسمي المصفوفة  $I_n = (a_{ij})$  من  $M_n(A)$  المعروفة  $a_{ij} = \delta_{ij}$  ، حيث  $\delta_{ij}$  هو رمز Kronecker المصفوفة الواحدة في  $M_n(A)$ .

#### 2.IV. العمليات على المصفوفات

سنفترض في هذه الفقرة أيضاً أن  $A$  حلقة تبديلية. لكن  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  يمكننا تزويد

$M_{n \times p}(A)$  بقانوني تشكيل، أولهما داخلي (+) معرف كما يلي:

أياً كانت  $M \in M_{n \times p}(A)$  و  $N \in M_{n \times p}(A)$  فإن

$$M + N = (a_{ij} + b_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$$

وثانيهما خارجي (·)، مجموعة مؤثراته  $A$ ، ومعرف كما يلي:

أياً كانت  $M \in M_{n \times p}(A)$  و  $\lambda \in A$  فإن

$$\lambda \cdot M = (\lambda a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$$

ونتحقق بسهولة أن  $(M_{n \times p}(A), +)$  زمرة تبديلية وأن

$$\forall M \in M_{n \times p}(A), \quad 1_A \cdot M = M \quad .1$$

$$\forall \lambda \in A, \quad \forall (M, N) \in (M_{n \times p}(A))^2, \quad \lambda \cdot (M + N) = \lambda \cdot M + \lambda \cdot N \quad .2$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad \forall M \in M_{n \times p}(A), \quad (\lambda + \mu) \cdot M = \lambda \cdot M + \mu \cdot M \quad .3$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad \forall M \in M_{n \times p}(A), \quad \lambda \cdot (\mu \cdot M) = (\lambda \mu) \cdot M \quad .4$$

فإذا كانت الحلقة  $A$  حقلاً  $\mathbb{K}$  كانت البنية  $(M_{n \times p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  فضاء شعاعياً على الحقل  $\mathbb{K}$ .

ومن جهة أخرى، أيّاً كانت  $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ ، نعرف قانون ضرب المصفوفات كما يلي:

$$\times : M_{n \times p}(A) \times M_{p \times q}(A) \rightarrow M_{n \times q}(A), \quad (M, N) \mapsto L = M \times N$$

فإذا كان  $M \in M_{n \times p}(A)$  و  $N \in M_{p \times q}(A)$  و  $L \in M_{n \times q}(A)$  كانت  $L = M \times N$  حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_q, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

هذا ونصح، بترتيب المصفوفات كما في الشكل التالي ليسهل إجراء عملية الضرب هذه:

$$\begin{array}{c}
 M \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} N \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & b_{2j} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} \\ \downarrow \\ L \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}
 \end{array}$$

نبين المبرهنة التالية خاصة هامة من خواص ضرب المصفوفات:

1-2.IV مبرهنة: لتكن  $\mathbb{IN}^{*q} \ni (n, p, q, r)$ ، ولتكن  $M_{n \times p}(A) \ni M$  و  $M_{p \times q}(A) \ni N$

و  $M_{q \times r}(A) \ni L$  عندئذ يكون  $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$ .

الإثبات

لنفترض أن  $(a_{ij}) = M$  و  $(b_{ij}) = N$  و  $(c_{ij}) = L$  عندئذ يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_q, \quad [M \times N]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q [M \times N]_{im} c_{mj} \quad \text{وكذلك يكون}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{km} \right) c_{mj} \quad \text{ومن ثم}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_r, \quad [(M \times N) \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{km} c_{mj} \quad \text{وأخيراً}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_p \times \mathbb{IN}_r, \quad [N \times L]_{ij} = \sum_{m=1}^q b_{im} c_{mj} \quad \text{ومن جهة أخرى،}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} [N \times L]_{kj} \quad \text{إذن}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \left( \sum_{m=1}^q b_{km} c_{mj} \right) \quad \text{ومن ثم}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{IN}_n \times \mathbb{IN}_r, \quad [M \times (N \times L)]_{ij} = \sum_{m=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{km} c_{mj} \quad \text{وأخيراً}$$

ومنه نستنتج أن  $(M \times N) \times L = M \times (N \times L)$ .

□

## 2-2.IV. ملاحظات :

- إن قانون ضرب المصفوفات قانون تشكيلي داخلي على مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة  $n$  أي  $M_n(A)$ . وتصبح بذلك البنية  $(M_n(A), +, \cdot)$  حلقة، حيادي الضرب فيها هو المصفوفة الواحديّة  $I_n$ . وتكون الحلقة  $M_n(A)$  غير تبديليّة أيّا كانت  $n \geq 2$ ، كما يبيّن المثال التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وتصبح البنية  $(M_n(A), +, \cdot)$  جبراً غير تبديلي على الحلقة  $A$ .

- نقول عن مصفوفة  $M$  من  $M_n(A)$  إنها قلوبية إذا وفقط إذا كانت عنصراً قلوبياً في الحلقة  $(M_n(A), +, \cdot)$ ، ولنرمز بالرمز  $\mathcal{CL}_n(A)$  إلى زمرة العناصر القلوبية في  $(M_n(A), +, \cdot)$ .

- عند ضرب مصفوفتين  $M$  و  $N$  نكتب جداء الضرب عادة  $MN$  عوضاً عن  $M \times N$ .

سنفترض في بقية هذا الفصل أن الحلقة  $A$  حقل تبديليّ نرمز إليه بالرمز  $IK$ .

3-2.IV. مبرهنة: إن  $(M_{n \times p}(IK), +, \cdot)$  فضاء شعاعي منتهي البعد على  $IK$ ، بعده يساوي  $np$ .

الإثبات

إن إثبات كون الفضاء  $M_{n \times p}(IK)$  فضاءً شعاعياً على  $IK$ ، أمر سهل ومتروك للقارئ.

لنعرف، أيّا كان  $(i, j) \in IN_n \times IN_p$ ، المصفوفة  $E_{i,j} = (\lambda_{k,q}^{(i,j)})_{(k,q) \in IN_n \times IN_p}$  من الفضاء

$M_{n \times p}(IK)$  بالعلاقة  $\lambda_{k,q}^{(i,j)} = \delta_{ik} \delta_{jq}$  حيث  $\delta_{\alpha\beta}$  هو رمز كرونيكر الذي يُحقّق  $\delta_{\alpha\alpha} = 1$  و  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  إذا كان  $\alpha \neq \beta$ .

$$E_{i,j} : \begin{matrix} & j \\ & \downarrow \\ i \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نلاحظ بسهولة أن الجملة  $\mathcal{E} = (E_{i,j})_{(i,j) \in IN_n \times IN_p}$  أساس للفضاء  $M_{n \times p}(IK)$ ، نسمّيه الأساس

القانوني لـ  $M_{n \times p}(IK)$ . ومن ثمّ يكون  $\dim_{IK} M_{n \times p}(IK) = np$  لأنّ  $np$  هو عدد عناصر

□

المجموعة  $IN_n \times IN_p$ .

3-2.IV. مبرهنة: تكون مجموعة المصفوفات المثلثية العليا  $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ، وكذلك مجموعة المصفوفات المثلثية السفلى  $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$ ، جبرين جزئيين من  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . أي إن كلا منهما مغلق بالنسبة إلى العمليات الثلاث ويحتوي على المصفوفة الواحدة  $I_n$ .

الإثبات

يكفي أن نتحقق أن جداء ضرب مصفوفتين من  $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$  ينتمي إلى  $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ ، لأن التوثق من كون  $\mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$  فضاء شعاعي جزئي من  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  سهل جداً ومتروك للقارئ. لنكن  $M \ni \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$  و  $N \ni \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K})$ . ولنفرض أن  $(a_{ij}) = M$  و  $(b_{ij}) = N$ . عندئذ

يكون

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i > j \Rightarrow [M \times N]_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{0} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0} = 0$$

□ ولترك للقارئ أن يدرس بأسلوب مماثل حالة  $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K})$ .

4-2.IV. مبرهنة: تكون مجموعة المصفوفات القطرية  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ، جبراً جزئياً تبديلياً من  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

الإثبات

□ الإثبات تحقق مباشر ومتروك للقارئ.

### 3.IV. مصفوفة تطبيق خطي

3-1.IV. تعريف: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهيين البعد على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$ . وليكن

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  أساساً للفضاء  $E$  و  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  أساساً للفضاء  $F$ .

وأخيراً ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $F$ . يُكتب الشعاع  $u(e_j)$  بطريقة وحيدة

كمجموعة خطية بعناصر الأساس  $\mathcal{F}$ :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot f_i$$

وذلك أيًا كانت  $r \in \mathbb{N}_p$ . نسمي المصفوفة  $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$  من  $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$

مصفوفة التطبيق الخطي  $u$  في الأساسين  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$ ، و نرمز إليها بالرمز  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ ،

كما يبين الشكل التوضيحي التالي:

$$\begin{array}{c}
 u(e_1) \quad \dots \quad u(e_j) \quad \dots \quad u(e_p) \\
 f_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_i & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_n & a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})
 \end{array}$$

وأخيراً لنلاحظ أنه إذا كان  $\mathcal{F}^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)$  الأساس الشعري للأساس  $\mathcal{F}$ ، كان

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p, \quad a_{ij} = \langle f_i^*, u(e_j) \rangle$$

نتج المبرهنة التالية من التعريف والملاحظة السابقة مباشرة.

2-3.IV. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهيين البعد على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$ . وليكن

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  أساساً للفضاء  $E$  و  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  أساساً للفضاء  $F$ .

عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{n \times p}(\mathbb{K}), \quad u \mapsto \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

تقابلاً خطياً.

3-3.IV. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهيين البعد على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$ . وليكن

$\dim E = p$  و  $\dim F = n$ . وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $F$ ، رتبته  $\text{rg } u = r$ .

عندئذ يوجد  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  أساس للفضاء  $E$  و يوجد  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  أساس للفضاء  $F$ ، بحيث :

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = n \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xleftarrow{r} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{r} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{r} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{r} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0_{r \times p-r} \\ 0_{n-r \times r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0_{n-r \times p-r} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \end{array} \end{array} = J_{n,p,r}$$

## الإثبات

لما كان  $rg u = r$  كان بُعد  $\ker u$  مساوياً  $p - r$ . ليكن إذن  $(e_{r+1}, \dots, e_p)$  أساساً لـ  $\ker u$ ، ولتضممه إلى أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  للفضاء  $E$ . ثم لتعرف الفضاء الجزئي  $G = \text{vect}((e_1, \dots, e_r))$ ، فيكون  $E = G \oplus \ker u$ . إن مقصور  $u$  على  $G$ ، أي  $u|_G$ ، تطبق خطي متباين لأن

$$\ker u|_G = \ker u \cap G = \{0\}$$

ومن ثم إذا عرفنا  $f_i = u(e_i)$  حين يكون  $i \in \text{IN}_r$ ، كانت الجملة  $(f_1, \dots, f_r)$  جملة حرة في  $F$ ، لتضمها إذن إلى أساس  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  للفضاء  $F$ . ونحقق بسهولة أن لمصفوفة  $u$  في الأساسين  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$  الشكل الموصوف في نص البرهنة أي  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = J_{n,p,r}$ . □

IV. 3-4. برهنة: لتكن  $E$  و  $F$  و  $G$  ثلاثة فضاءات شعاعية منتهية البعد على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $\dim E = p$  و  $\dim F = n$  و  $\dim G = m$ . وليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  وكذلك ليكن  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . عندئذ، أياً كانت الأسس  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  للفضاء  $E$ ، و  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  للفضاء  $F$ ، وأخيراً  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  للفضاء  $G$ ، كان

$$\text{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

## الإثبات

لنضع  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$  و  $\text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = (b_{kl})$ . فيكون

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i \quad , \quad j \in \text{IN}_p$$

$$v(f_i) = \sum_{k=1}^m b_{ki} g_k \quad , \quad i \in \text{IN}_n$$

ينتج من ذلك أنه، أياً كان  $j \in \text{IN}_p$ ، فإن

$$v \circ u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v(f_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k=1}^m b_{ki} g_k \right) = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij} \right) g_k = \sum_{k=1}^m c_{kj} g_k$$

حيث  $c_{kj} = \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij}$ . إذن  $\text{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = (c_{ij})$ ، والمساواة السابقة تكافئ

المساواة المطلوبة:  $\text{mat}(v \circ u, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ . □

5-3.IV. ملاحظة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهي البعد على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$ . وليكن  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  أساساً لـ  $F$  و  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  أساساً لـ  $E$ ، و  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . ولنضع أخيراً  $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$ . لما كان  $\mathcal{E}$  أساساً لـ  $E$  كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{E}} : M_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow E, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{E}}(X) = \sum_{j=1}^p x_j e_j$$

لقابلاً خطياً. وكذلك يكون التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow F, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

لأن  $\mathcal{F}$  أساس لـ  $F$ .

ليكن  $x$  عنصراً من  $E$ ، وليكن  $y = u(x)$ . يُعطى شعاع مركبات  $x$  على الأساس  $\mathcal{E}$  بالعلاقة  $X = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$ ، وكذلك فإن شعاع مركبات  $y$  على الأساس  $\mathcal{F}$  يعطى بالعلاقة  $Y = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(y)$ . ويتحقق القارئ بسهولة أن الشعاعين  $X$  و  $Y$  يرتبطان بالعلاقة  $Y = M \times X$ .

فإذا عرفنا التطبيق الخطي

$$U_M : M_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto U_M(X) = M \times X$$

صار لدينا  $U_M = \Phi_{\mathcal{F}}^{-1} \circ u \circ \Phi_{\mathcal{E}}$ .

ويمكن تلخيص ذلك بالقول إن المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} M_{p \times 1}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{U_M} & M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \\ \Phi_{\mathcal{E}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{F}} \\ E & \xrightarrow{u} & F \end{array}$$



6-3.IV تعريف: لتكن المصفوفة  $M = (a_{ij})$  من  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$ . نسمي منقول  $M$  المصفوفة

$${}^tM = (b_{ij}) \text{ من } M_{p \times n}(\mathbb{K}) \text{ المرفقة كما يلي :}$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n, \quad b_{ij} = a_{ji}$$

نقول إن المصفوفة المربعة  $M$  من  $M_n(\mathbb{K})$  متناظرة إذا وفقط إذا كان  $M = {}^tM$ .

ونقول إنها تخالفية إذا وفقط إذا كانت تحقق  $M = -{}^tM$ . ولقد جرت العادة أن نرمز

بالرمز  $S_n(\mathbb{K})$  إلى مجموعة المصفوفات المربعة المتناظرة من المرتبة  $n$ ، وبالرمز  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

إلى مجموعة المصفوفات المربعة التخالفية من المرتبة  $n$ .

تلتخص البرهنة التالية بعض الخواص البسيطة.

7-3.IV مبرهنة:

1. إن التطبيق  $M \mapsto {}^tM$ ،  $M_{n \times p}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{p \times n}(\mathbb{K})$ ،  $\Theta$  تقابل خطي.
2. أيًا كانت  $A \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$  و  $B \in M_{p \times m}(\mathbb{K})$  كان  ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ .
3. أيًا كانت المصفوفة القلوبة  $A$  من  $M_n(\mathbb{K})$ ، كانت  $A$  قلوبة وكان  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ .
4. إن كلاً من  $S_n(\mathbb{K})$  و  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  فضاء شعاعي جزئي من  $M_n(\mathbb{K})$ ، وإذا كان العدد

المميز للحقل  $\mathbb{K}$  لا يساوي 2، كان

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{و} \quad \dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \quad \text{و}$$

الاثبات

1. إن إثبات الخاصة 1 مباشر وبسيط نتركه للقارئ.
  2. لنفترض أن  $A = (a_{ij})$  وأن  $B = (b_{ij})$ . عندئذ يكون
- $$[{}^t(A \times B)]_{ij} = [A \times B]_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p [{}^tB]_{ik} [{}^tA]_{kj} = [{}^tB \times {}^tA]_{ij}$$
- وذلك أيًا كان  $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ . وهذا ما يثبت الخاصة 2.
  3. لتكن  $A$  مصفوفة قلوبة من  $M_n(\mathbb{K})$ ، عندئذ نجد  $A^{-1} = B$  بحيث

$$A \times B = B \times A = I_n$$

وبالاستفادة من 2. نجد  ${}^tB \times {}^tA = {}^tA \times {}^tB = {}^tI_n = I_n$ ، ومن ثم تكون  ${}^tA$  قلوبة،

ويكون  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ .

4. واضح من التعريف أن كلًا من  $S_n(\mathbb{K})$  و  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  فضاء شعاعي جزئي من  $M_n(\mathbb{K})$ . وإذا كان  $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$  الأساس القانوني للفضاء  $M_n(\mathbb{K})$ ، كوّنت الجملة  $(S_{ij})_{(i,j) \in T_n}$  حيث  $T_n := \{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2 : i \leq j\}$  وحيت

$$\forall (i,j) \in T_n, \quad S_{i,j} = \begin{cases} E_{ii} & : i = j \\ E_{i,j} + E_{j,i} & : i \neq j \end{cases}$$

أساساً للفضاء الجزئي  $S_n(\mathbb{K})$ . إذن

$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \text{card } T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

لنلاحظ، انطلاقاً من التعريف، أنه إذا كان العدد المميز للحقل  $\mathbb{K}$  يساوي 2 كان

$S_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . لذلك سنفرض فيما يأتي أن العدد المميز للحقل  $\mathbb{K}$  لا يساوي 2.

تكون الجملة  $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$  أساساً للفضاء الجزئي  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ، ومن ثمّ

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \text{card } \{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2 : i < j\} = \frac{n(n-1)}{2}$$

وأخيراً، أيّا كان  $M \in S_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  كان  $M = M^t = -M$ ، ومن ثمّ  $M = 0$

لأن العدد المميز للحقل  $\mathbb{K}$  لا يساوي 2. إذن من جهة أولى،  $S_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$ .

ومن جهة ثالثة لدينا

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^t)}_{\in S_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^t)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

□

وهذا ما يثبت أن  $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

8-3.IV. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهيين البعد على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$ . وليكن

$\mathcal{L}(E, F) \ni u$  ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  أساساً لـ  $E$ ، و  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  أساساً

لـ  $F$ . ولنضع  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_p^*)$  الأساس الثوري لـ  $\mathcal{E}$ ، و  $\mathcal{F}^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$

الأساس الثوري لـ  $\mathcal{F}$ . عندئذ يكون

$${}^t(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})) = \text{mat}({}^t u, \mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*)$$

الإثبات

لنضع  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$  و  $(b_{ij}) = ({}^t u, \mathcal{F}^*, \mathcal{E}^*)$  ليكن

□

$$b_{ij} = \langle f_j^*, u(e_i) \rangle_{F^*, F} = a_{ji}$$

## 4.IV. رتبة مصفوفة

4.IV.1. تعريف: لتكن المصفوفة  $M = (a_{ij})$  من  $M_{n \times p}(\mathbb{IK})$ . نسمي أعمدة  $M$  الجملة

$(C_1(M), C_2(M), \dots, C_p(M))$  من عناصر الفضاء  $M_{n \times 1}(\mathbb{IK})$  المعرفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{IN}_p, \quad C_j(M) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

وكذلك نسمي أسطر  $M$  جملة العناصر  $(R_1(M), R_2(M), \dots, R_n(M))$  من الفضاء  $M_{1 \times p}(\mathbb{IK})$  المعرفة كما يلي

$$\forall j \in \mathbb{IN}_n, \quad R_i(M) = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}]$$

4.IV.2. تعريف: لتكن المصفوفة  $M$  من  $M_{n \times p}(\mathbb{IK})$ . نسمي رتبة المصفوفة  $M$  رتبة أعمدتها

في الفضاء  $M_{n \times 1}(\mathbb{IK})$ . ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز  $\text{rg } M$ . أي

$$\text{rg } M = \dim \text{vect}((C_1(M), \dots, C_p(M)))$$

4.IV.3. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهيي البعد على حقل تبديلي  $\mathbb{IK}$ . وليكن

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  أساساً للفضاء  $E$ ، و  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  أساساً للفضاء  $F$ .

عندئذ أياً كان  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ، لدينا  $\text{rg } M = \text{rg } u$  حيث  $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ .

الإثبات

من جهة أولى، لدينا  $\text{rg } u = \dim \text{Im } u = \text{rg}((u(e_1), \dots, u(e_p)))$

ومن جهة ثانية، لما كان  $\mathcal{F}$  أساساً لـ  $F$ ، كان التطبيق

$$\Phi_{\mathcal{F}} : M_{n \times 1}(\mathbb{IK}) \rightarrow F, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \Phi_{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{i=1}^n y_i f_i$$

تقابلاً خطياً، وهو يُحقق  $\Phi_{\mathcal{F}}(C_j(M)) = u(e_j)$  إذن

$$\begin{aligned} \text{rg } u &= \text{rg}((\Phi_{\mathcal{F}}(C_1(M)), \dots, \Phi_{\mathcal{F}}(C_p(M)))) \\ &= \text{rg}((C_1(M), \dots, C_p(M))) = \text{rg } M \end{aligned}$$

وهذا يثبت المطلوب.  $\square$

4-4.IV. ملاحظة: لنكن  $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ . وليكن التطبيق الخطي

$$U_M : \mathcal{M}_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), \quad \iota \mapsto X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون  $\text{rg } M = \text{rg } U_M$ ، لأن أعمدة المصفوفة  $M$  هي صورة الأساس القانوني في الفضاء

$\mathcal{M}_{p \times 1}(\mathbb{K})$  وفق التطبيق الخطي  $U_M$ .

نسمح لنا هذه الملاحظة باستنتاج المبرهنة التالية من المبرهنة II-3-4.

5-4.IV. مبرهنة: لنكن  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . إن الخواص التالية متكافئة:

1. المصفوفة  $M$  قَلْوِيَّة.

2.  $\text{rg } M = n$ .

3. يوجد  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  بحيث  $M \times R = I_n$ .

4. يوجد  $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  بحيث  $L \times M = I_n$ .

5-4.IV. مبرهنة: لنكن  $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ . عندئذ يكون  $\text{rg } M = \text{rg } {}^t M$ .

الاثبات

لتعرف  $\mathcal{E}$  بأله الأساس القانوني في  $\mathcal{M}_{\ell \times 1}(\mathbb{K})$ . ولنرمز بالرمز  $\mathcal{E}$  إلى أساسه الثوري.

ولنتأمل التطبيق الخطي

$$U_M : \mathcal{M}_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), \quad \iota \mapsto X \mapsto M \times X$$

عندئذ يكون لدينا استناداً إلى المبرهنة IV-3-8.

$${}^t M = \text{mat}({}^t U_M, \mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_p^*) \quad \text{و} \quad M = \text{mat}(U_M, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

وبالاستفادة من المبرهنة III-5-3. يكون  $\text{rg } U_M = \text{rg } {}^t U_M$ ، ومن ثم  $\text{rg } M = \text{rg } {}^t M$ . □

6-4.IV. نتيجة: لنكن  $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ . إن رتبة  $M$  هي رتبة أسطرها في الفضاء  $\mathcal{M}_{1 \times p}(\mathbb{K})$ .

ومن ثم يكون  $\text{rg } M \leq \min(n, p)$ .

وإذا استندنا من المبرهنة II-5-3. حصلنا على النتيجة التالية:

7-4.IV. نتيجة: لنكن  $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$  و  $N \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$ . عندئذ

$$\text{rg } A \times B \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$$

وإذا كانت  $A$  قَلْوِيَّة كان  $\text{rg } (A \times B) = \text{rg } A$ . وإذا كانت  $B$  قَلْوِيَّة كان  $\text{rg } (A \times B) = \text{rg } B$ .

## 5.IV. تغيير الأساس

1-5.IV. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً للفضاء  $E$ . وأخيراً لتكن  $P = (p_{ij})$  مصفوفة من  $M_n(K)$ . حتى تكون جملة الأشعة  $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ ، حيث  $a_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \cdot e_i$ ، أساساً للفضاء  $E$  يلزم ويكفي أن تكون المصفوفة  $P$  قلبية.

الإثبات

ليكن  $u$  التطبيق الخطي من  $\mathcal{L}(E)$  المعرفة بالشرط  $u(e_j) = a_j$ .  $\forall j \in \mathbb{N}_n$ . عندئذ يكون  $P = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ . ومن ثم تكون لدينا التكافؤات التالية:

$$(\mathcal{A} \text{ أساس لـ } E) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ تولد } E) \Leftrightarrow (n = \text{rg } u) \Leftrightarrow (n = \text{rg } P) \Leftrightarrow (P \text{ قلبية}).$$

وهذا يثبت المطلوب.  $\square$

2-5.IV. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً للفضاء  $E$ ، وليكن  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  أساساً آخر للفضاء  $E$ . نسمي مصفوفة الانتقال من  $\mathcal{E}$  إلى  $\mathcal{E}'$ ، مصفوفة التطبيق المطابق  $I_E$ ، من الفضاء  $E$  مزوداً بالأساس  $\mathcal{E}'$  إلى الفضاء نفسه مزوداً بالأساس  $\mathcal{E}$ ، أي  $(E, \mathcal{E}') \xrightarrow{I_E} (E, \mathcal{E})$ . ولرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز  $P_E^{\mathcal{E}'}$ ، فيكون  $P_E^{\mathcal{E}'} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$ .

3-5.IV. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ . وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً للفضاء  $E$ ، وليكن  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  أساساً آخر للفضاء  $E$ . عندئذ أيّا كان  $x \in E$  لدينا

$$X = P_E^{\mathcal{E}'} \times X'$$

حيث  $X = [\xi_1, \dots, \xi_n]^t \in M_{n \times 1}(IK)$  هو شعاع مركبات  $x$  على الأساس  $\mathcal{E}$ ، أي

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i \quad \text{و} \quad X' = [\xi'_1, \dots, \xi'_n]^t \in M_{n \times 1}(IK) \text{ هو شعاع مركبات العنصر } x$$

$$\text{أيضاً على الأساس } \mathcal{E}', \text{ أي } x = \sum_{i=1}^n \xi'_i \cdot e'_i.$$

الإثبات

ولكن  $P_E^{\mathcal{G}} = (p_{i,j})$ ، عندئذ يكون  $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} \cdot e_i$ ،  $\forall j \in \mathbb{N}_n$ .

ومن ثمّ

$$x = \sum_{j=1}^n \xi'_j \cdot e'_j = \sum_{j=1}^n \xi'_j \cdot \left( \sum_{i=1}^n p_{i,j} \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{i,j} \xi'_j \right) \cdot e_i$$

ولأنه لدينا أيضاً  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i$ ، يتبع أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \xi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} \cdot \xi'_j$$

□

وهذا يكافئ المساواة المطلوبة:  $X = P_E^{\mathcal{G}} \times X'$ .

IV-b-4. ملاحظة: لما كان  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{E}'$  أساسين لـ  $E$  كان التطبيقان الخطيان التاليان قابلين:

$$\Phi_{\mathcal{E}} : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow E, [\xi_1, \dots, \xi_n] \mapsto \sum_{j=1}^n \xi_j \cdot e_j$$

$$\Phi_{\mathcal{E}'} : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow E, [\zeta_1, \dots, \zeta_n] \mapsto \sum_{j=1}^n \zeta_j \cdot e'_j$$

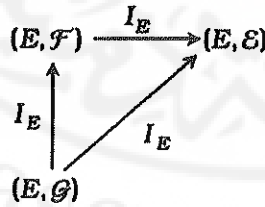
ويمكننا التعبير عن المبرهنة السابقة بكتابة:  $\forall x \in E, \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(x) = P_E^{\mathcal{G}} \times \Phi_{\mathcal{E}'}^{-1}(x)$ .

IV-5-5. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $\mathbb{K}$ . ولتكن  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$  و  $\mathcal{G}$  ثلاثة

أساسات للفضاء  $E$ . عندئذ يكون  $P_E^{\mathcal{G}} = P_E^{\mathcal{F}} \times P_E^{\mathcal{G}}$ .

الإثبات

إذا تأملنا المخطط التبديلي التالي



أمكننا أن نكتب  $\text{mat}(I_E, \mathcal{G}, \mathcal{E}) = \text{mat}(I_E, \mathcal{F}, \mathcal{E}) \times \text{mat}(I_E, \mathcal{G}, \mathcal{F})$

□

وهذه المساواة المطلوبة.

6-5.IV. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين منتهي البعد على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $\mathcal{E}'$  و  $\mathcal{E}$  أساسين للفضاء  $E$ ، و  $\mathcal{F}'$  و  $\mathcal{F}$  أساسين للفضاء  $F$ . وأخيراً ليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . عندئذ يكون

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = P_{\mathcal{F}'} \times \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{F}') \times (P_{\mathcal{E}'}^{-1})$$

الإثبات

كما في المبرهنة السابقة، يكفي أن ننظر في المخطط التبديلي التالي

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{E}) & \xrightarrow{u} & (F, \mathcal{F}) \\ I_E^{-1} \downarrow & & \uparrow I_F \\ (E, \mathcal{E}') & \xrightarrow{u} & (F, \mathcal{F}') \end{array}$$

□

فتجد المطلوب.

7-5.IV. مبرهنة وتعريف: نقول عن مصفوفتين  $A$  و  $B$  من  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$  إنهما متكافئتان إذا وفقط إذا وُجدت مصفوفتان قلبتان  $P \in GL_p(\mathbb{K})$  و  $Q \in GL_n(\mathbb{K})$  بحيث يكون  $B = QAP$ ، وكتب في هذه الحالة  $B \approx A$ . وتكون العلاقة التناظية:

$$\forall (A, B) \in (M_{n \times p}(\mathbb{K}))^2,$$

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), B = QAP$$

علاقة تكافؤ على المجموعة  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$ .

8-5.IV. مبرهنة: لتكن  $A$  و  $B$  مصفوفتين من  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$ ، عندئذ يكون

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg } B$$

الإثبات

إن الاقتضاء  $(\Rightarrow)$  واضح استناداً إلى النتيجة 7-4.IV.

وبالعكس، لتكن  $A$  مصفوفة من  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$  نُحقق  $\text{rg } A = r$ . وليكن التطبيق

الخطي القانوني الموافق لـ  $A$ :

$$U_A : M_{p \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto AX$$

فإذا كان  $\mathcal{E}_p$  و  $\mathcal{E}_n$  الأساسين القانولين في  $M_{p \times 1}(\mathbb{K})$  و  $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$  على التوالي، كان

$$A = \text{mat}(U_A, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_n)$$

ولكن بمقتضى المبرهنة 3-3.IV. يوجد أساسان  $\mathcal{E}'_p$  و  $\mathcal{E}'_n$  في  $M_{p \times 1}(\mathbb{K})$  و  $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$  على التوالي، بحيث يكون

$$J_{n,p,r} = \text{mat}(U_A, \mathcal{E}'_p, \mathcal{E}'_n)$$

ومن ثم، بالاستفادة من المبرهنة 6-5.IV. يكون

$$A = P_{\mathcal{E}'_n}^{\mathcal{E}_n} J_{n,p,r} (P_{\mathcal{E}_p}^{\mathcal{E}'_p})^{-1}$$

وهذا ما يُثبت أن  $A \approx J_{n,p,r}$ .

فإذا كان  $\text{rg } B = r = \text{rg } A$  كان  $B \approx J_{n,p,r} \approx A$ . وهذا يُبرهن صحة الافتضاء

□

الثاني أي ( $\Leftarrow$ ).

9-5.IV. مبرهنة وتعريف: نقول عن مصفوفتين مرتعيتين  $A$  و  $B$  من  $M_n(\mathbb{K})$  إنهما متشابهتان

إذا وفقط إذا وُجدت مصفوفة قَلَوِيَّة  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  بحيث يكون  $B = P A P^{-1}$ .

ونكتب في هذه الحالة  $B \equiv A$ . وتكون العلاقة التالية:

$$\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, \quad A \equiv B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), B = P A P^{-1}$$

علاقة تكافؤ على المجموعة  $M_n(\mathbb{K})$ .

10-5.IV. مبرهنة: لتكن  $A$  و  $B$  مصفوفتين مرتعيتين من  $M_n(\mathbb{K})$ . ولنفرض أنهما متشابهتان.

عندئذ تتحقق الخواص التالية:

1. إن المصفوفتين  $A$  و  $B$  متشابهتان.
2. إن المصفوفتين  $A^m$  و  $B^m$  متشابهتان، وذلك أياً كانت  $m \in \mathbb{N}^*$ .
3. وإذا كانت  $A$  قَلَوِيَّة كانت  $B$  قَلَوِيَّة وكانت المصفوفتان  $A^{-1}$  و  $B^{-1}$  متشابهتين.

الإثبات

□

إن إثبات هذه المبرهنة بسيط انطلاقاً من التعريف ونتركه تمريناً للقارئ.



#### 6.IV. أثر مصفوفة وأثر تطبيق خطي

6.IV.1. تعريف: لنكن  $A = (a_{ij})$  مصفوفة مربعة من  $M_n(\mathbb{K})$ . نسمي العنصر  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  من

$\mathbb{K}$  أثر المصفوفة  $A$ ، ولرمز إليه بالرمز  $\text{tr } A$ .

تتلخص المبرهنة التالية خواص أثر مصفوفة.

6.IV.2. مبرهنة:

1. إن التطبيق  $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto \text{tr } A$  شكل خطي على  $M_n(\mathbb{K})$ .

2. أيًا كانت  $A$  من  $M_n(\mathbb{K})$ ، لدينا  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$ .

3. إن أثر المصفوفة الواحدية يساوي  $n$ ، أي  $\text{tr } I_n = n$ .

4. أيًا كانت  $A$  و  $B$  من  $M_n(\mathbb{K})$ ، لدينا  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

الإثبات

إن الخواص الثلاث الأولى واضحة من التعريف. لنثبت فقط الخاصة الرابعة:

لنضع  $A = (a_{ij})$  و  $B = (b_{ij})$  فيكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, [BA]_{jj} = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, [AB]_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

ومن ثم

$$\text{tr } AB = \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n [BA]_{jj} = \text{tr } BA$$

□

وهذا يثبت المطلوب.

تبين الخاصة التالية أن أثر المصفوفة هو الشكل الخطي الوحيد من  $(M_n(\mathbb{K}))^*$  الذي يُحقق

الشرطين 3 و 4. من المبرهنة السابقة.

6.IV.3. مبرهنة: لنفترض أن العدد المميز لـ  $\mathbb{K}$  يساوي 0. وليكن  $\Phi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

شكلًا خطيًا على  $M_n(\mathbb{K})$  يحقق الشرطين  $\Phi(I_n) = n$  و

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}), \quad \Phi(AB) = \Phi(BA)$$

عندئذ يكون  $\Phi = \text{tr}$ .

## الإثبات

ليكن  $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$  الأساس القانوني للفضاء  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . نترك للقارئ أن يتحقق صحة الخاصية التالية:

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \mathbb{N}_n^4, \quad E_{ij}E_{\ell k} = \delta_{\ell j}E_{ik}$$

حيث  $\delta_{\alpha\beta}$  هو رمز كرونكر.

ومن ثم، أياً كان الدليلان المختلفان  $i$  و  $j$  من  $\mathbb{N}_n$ ، كان

$$E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$$

لذا يكون  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad i \neq j \Rightarrow \Phi(E_{ij}) = 0$

ومن جهة أخرى، أياً كان الدليل  $j$  من  $\mathbb{N}_n$ ، المختلف عن 1، كان

$$E_{jj} - E_{11} = E_{j1}E_{1j} - E_{1j}E_{j1}$$

إذن يكون  $\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \Phi(E_{jj}) = \Phi(E_{11})$

فإذا عرفنا  $\lambda = \Phi(E_{11})$  ووضعنا  $\Psi = \Phi - \lambda \cdot \text{tr}$ ، كان لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \Psi(E_{ij}) = 0$$

لستنتج من ذلك أن  $\Psi = 0$  أو أن  $\Phi = \lambda \cdot \text{tr}$ . ولما كان  $\Phi(I_n) = n$  أمكننا أن نحسب  $\lambda$  لنجد  $\lambda = 1$ . وهنا نستفيد من كون العدد المميز لـ  $\mathbb{K}$  يساوي 0. في الحقيقة يكفي ألا يقسم العدد المميز للحقل  $\mathbb{K}$  العدد  $n$ . وبذلك يكتمل الإثبات.  $\square$

4-6.IV. مبرهنة: لتكن  $A$  و  $B$  مصفوفتين مربعيتين من  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . ونفترض أنهما متشابهتان.

عندئذ يكون  $\text{tr } A = \text{tr } B$ .

## الإثبات

توجد بمقتضى الفرض مصفوفة قلوبة  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  بحيث  $A = PBP^{-1}$ . لذا

$$\square \quad \text{tr } A = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr}(I_n B) = \text{tr } B$$

5-6.IV. مبرهنة وتعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن التطبيق الخطي  $u \in \mathcal{L}(E)$ . عندئذ لا يتعلق المقدار  $\text{tr}(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}))$  بالأساس المختار  $\mathcal{E}$  للفضاء  $E$ . لذلك نسميه أثر التطبيق الخطي  $u$  و نرمز إليه بالرمز  $\text{tr } u$ .

## الإثبات

ليكن  $\mathcal{E}'$  أساساً آخر للفضاء  $E$ ، ولنضع  $P = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$ . فيكون، بمقتضى المبرهنة IV-5-6،

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = P \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') P^{-1}$$

ينتج من ذلك أن  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) \equiv \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$ ، ومن ثم يكون

$$\text{tr}(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})) = \text{tr}(\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}'))$$

□

وهو المطلوب إثباته.

نستنتج من التعريف السابق ومن خواص أثر المصفوفة النتيجة التالية:

IV-6-6. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل  $IK$ .

1. إن التطبيق  $\text{tr}: \mathcal{L}(E) \rightarrow IK, u \mapsto \text{tr} u$  شكل خطي على  $\mathcal{L}(E)$ .

2. أيًا كان  $u$  من  $\mathcal{L}(E)$ ، لدينا  $\text{tr} u = \text{tr} u'$ .

3. إن أثر التطبيق المطابق يساوي  $\dim E$ ، أي  $\text{tr} I_E = \dim E$ .

4. أيًا كانت  $u$  و  $v$  من  $\mathcal{L}(E)$ ، لدينا  $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$ .

5. إذا كان  $p$  إسقاطاً للفضاء  $E$ ، كان  $\text{rg } p = \text{tr } p$ .

□

أي  $p \in \mathcal{L}(E)$  يحقق  $p \circ p = p$ .

## تمارين

التمرين 1. لتكن  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  مصفوفة ثوابتها في حلقة تبديلية  $A$ . أثبت أن

$$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0$$

التمرين 2. ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين مختلفين، ولتكن  $M \in M_n(\mathbb{R})$  مصفوفة تحقق

$$M^2 - (\alpha + \beta)M + \alpha\beta I_n = 0, \quad M \neq \alpha I_n, \quad M \neq \beta I_n$$

1. أثبت أن بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي  $V(M) = \text{vect}((M, I_n))$  يساوي 2.

2. أثبت أنه لا توجد في  $V(M)$  إلا مصفوفتان مختلفتان  $A$  و  $B$  تحققان الشروط

$$B \notin \{0, I_n\}, \quad B^2 = B \quad \text{و} \quad A \notin \{0, I_n\}, \quad A^2 = A$$

ثم أثبت أن  $AB = BA = 0$  وأن  $(A, B)$  أساس لـ  $V(M)$ .

3. أثبت أن  $V(M)$  جبر جزئي من  $M_n(\mathbb{R})$ ، وأنه إذا كانت  $C \in V(M)$  مصفوفة قلوية

$$V(M) \ni C^{-1}.$$

التمرين 3. لتكن  $A$  و  $B$  المصفوفتين من  $M_3(\mathbb{R})$  المعرفتين كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ولتكن المجموعة  $\mathcal{E} = \{xA + yB \in M_3(\mathbb{R}) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1. احسب  $(A+B)^n$  أيًا كانت  $n \in \mathbb{N}$ .

2. أثبت أن عناصر  $\mathcal{E}$  ليست قلوية في  $M_3(\mathbb{R})$ .

3. أثبت أن البنية  $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ ، حيث  $+$  و  $\cdot$  هما جمع و ضرب المصفوفات في  $M_3(\mathbb{R})$ ، هي

حقل. عيّن حيادي الضرب ومقلوب عنصر غير معدوم فيه، ثم أثبت أن هذا الحقل

يشاكل تقابلياً حقل الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$ .

التمرين 4. ليكن الفضاء الشعاعي  $E = M_{p \times 1}(\mathbb{R})$ ، حيث  $p \geq 2$ . وليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$  التطبيق الخطي الذي يربط كل  $X = [x_1, \dots, x_p]^t \in E$  بـ  $Y = u(X) = [y_1, \dots, y_p]^t \in E$  حيث

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \quad y_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} x_j$$

I. عيّن  $A = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ ، حيث  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  هو الأساس القانوني في  $E$ .

II. لرمز  $I$  إلى المصفوفة الواحدة في  $M_p(\mathbb{R})$  و  $J$  إلى المصفوفة في  $M_p(\mathbb{R})$  التي تساوي جميع ثوابتها 1.

1. احسب  $J^n$  عندما  $n \in \mathbb{N}$ .

2. أثبت أنه أياً كانت  $n \in \mathbb{N}$  توجد ثنائية  $(a_n, b_n)$  يطلب تعيينها بحيث

$$A^n = a_n A + b_n I$$

3. أثبت أن  $A$  قلبية واحسب  $A^{-1}$ .

4. أثبت أنه يوجد  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  بحيث  $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$ .

III. لتكن  $C = \frac{p-1}{p} A + \frac{1}{p} I$ . أثبت أن  $C$  مصفوفة إسقاط  $q$  في الأساس  $\mathcal{E}$ . عيّن

كلًا من  $E_1 = \text{Im } q$  و  $E_2 = \ker q$ ، ثم عيّن أساساً  $\mathcal{B}$  لـ  $E$  بحيث تكون المصفوفة  $\tilde{A} = \text{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$  مصفوفة قطرية، وأوجد مصفوفة قلبية  $Q$  بحيث  $A = Q \tilde{A} Q^{-1}$ .

التمرين 5. ليكن الفضاء الشعاعي  $E = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ، حيث  $n \geq 2$ . وليكن  $\sigma \in S_n$  تبديلاً على المجموعة  $\mathbb{N}_n$ . ولننظر في التطبيق الخطي  $p_\sigma \in \mathcal{L}(E)$  الذي يربط كل شعاع

$$X = [x_1, \dots, x_n]^t \text{ بالشعاع } p_\sigma(X) = [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]^t$$

1. عبر باستخدام رمز Kronecker عن المصفوفة  $(a_{ij}^\sigma)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  حيث  $P_\sigma = \text{mat}(p_\sigma, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij}^\sigma)_{i,j}$ .

2. عيّن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  هو الأساس القانوني في  $E$ .

2. لتكن  $M = (m_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ ، احسب  $P_\sigma M$  و  $M P_\sigma^{-1}$  و  $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$ .

3. استنتج أن المصفوفتين التاليتين متشابهتان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

التمرين 6. ليكن  $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$  و  $Y = {}^t[y_1, \dots, y_n]$  شعاعين من  $E = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ،

يفققان  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$  و  $\sum_{k=1}^n y_k^2 = 1$  و  $\sum_{k=1}^n x_k y_k = 0$ . نضع  $M = aX \cdot {}^tX + bY \cdot {}^tY$

حيث  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . أثبت أنه يوجد عدداً  $\lambda$  و  $\mu$  بحيث

$$M^3 + \lambda M^2 + \mu M = 0$$

ادرس حالة المصفوفة  $M_n(\mathbb{R}) \ni (m_{ij}) = M$  حيث  $m_{ij} = \alpha$  إذا كان  $i + j$  زوجياً

و  $m_{ij} = \beta$  إذا كان  $i + j$  فردياً.

التمرين 7. أياً كان  $\alpha \in \mathbb{R}$ ، نعرف المصفوفة  $M_n(\mathbb{R}) \ni (m_{ij}) = M_\alpha$  كما يلي

$$m_{ij} = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} \cdot \alpha^{j-i} & : j \geq i \\ 0 & : j < i \end{cases}$$

1. أثبت أن المجموعة  $G = \{M_\alpha \in M_n(\mathbb{R}) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  زمرة جزئية من  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  تشاكل

تقابلياً  $(\mathbb{R}, +)$ .

2. لتكن  $(a_{ij}) = A$  و  $(b_{ij}) = B$  من  $M_n(\mathbb{R})$ . ونفترض أن  $a_{ij} = 0$  عندما  $i \geq j$ ،

وأن  $b_{ij} = 0$  حين يكون  $i \geq j - s$  حيث  $s \in \{0, \dots, n-1\}$ . وأخيراً لتكن المصفوفة

$(c_{ij}) = AB = C$ . أثبت أن  $c_{ij} = 0$  عندما يكون  $i \geq j - s - 1$ . واستنتج أن

$$(M_\alpha - I_n)^n = 0$$

3. أثبت أنه مهما يكن كثير الحدود  $P$  الذي لا تزيد درجته عن  $n-1$  من  $\mathbb{R}[X]$ ، فإن

$$P(X) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k P(X + k\alpha)$$

4. لتكن  $\mathbb{N} \ni (p, n)$  حيث  $n \geq p > 0$ . نرمز بالرمز  $S_n^p$  إلى عدد التطبيقات الفائرة من

$\mathbb{N}_n$  إلى  $\mathbb{N}_p$ . أثبت أن  $p^n = \sum_{k=1}^n C_p^k S_n^k$ . مساعدة: يمكن حساب عدد التطبيقات

من  $\mathbb{N}_n$  إلى  $\mathbb{N}_p$  بطريقتين.

5. استنتج قيمة  $S_n^p$ . واحسب بوجه خاص  $S_{n+1}^n$  و  $S_{n+2}^n$ .



## الفصل الخامس

### المحددات وجمل المعادلات الخطية

#### 1.V. التطبيقات المتعددة الخطية

1-1.V. تعريف: لنكن  $p \in \mathbb{N}^*$ ، ولتكن  $E_1, E_2, \dots, E_p$  و  $F$  فضاءات شعاعية على حقل  $IK$ .  
نقول عن تطبيق  $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  إنه  $p$ -خطي إذا وفقط إذا كانت التطبيقات:

$$f_{j, A_j} : E_j \rightarrow F, x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p)$$

خطية، وذلك أيًا كان  $j \in \mathbb{N}_p$ ، وأيًا كانت  $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p) = A_j$  من  $E_1 \times \dots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \dots \times E_p$ .

ولنرمز بالرمز  $\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; F)$  إلى مجموعة التطبيقات الـ  $p$ -خطية من الفضاء  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  إلى  $F$ . وهي تكون فضاء شعاعياً على الحقل  $IK$ .  
وأخيراً، عندما يكون الفضاء الشعاعي  $F$  هو الحقل  $IK$  نفسه، نسمي عناصر الفضاء الشعاعي  $\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; IK)$  أشكالاً  $p$ -خطية على  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ .

2-1.V. ملاحظة: أيًا كان التطبيق الـ  $p$ -خطي  $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ ، نتحقق الخاصة التالية:

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, (\exists j \in \mathbb{N}_p, x_j = 0) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_p) = 0$$

وذلك لأنه وفقاً لتعريف التطبيقات الـ  $p$ -خطية يكون التطبيق  $f_{j, (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p)}$  خطياً.

3-1.V تعريف: لتكن  $p \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $IK$ . نقول عن

تطبيق  $p$ -خطي  $f$  من  $\mathcal{L}_p(E^p; F)$  إنه متناظر إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,$$

$$i < j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

ونقول عن التطبيق  $p$ -خطي  $f$  إنه تخالفى إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,$$

$$i < j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

وأخيراً نقول عن التطبيق  $p$ -خطي  $f$  إنه متناوب إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,$$

$$(i < j) \wedge (x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0$$

ولرمز بالرمز  $\mathcal{L}_p^S(E^p; F)$  إلى فضاء التطبيقات  $p$ -خطية المتناظرة من  $E^p$  إلى  $F$ ،

وبالرمز  $\mathcal{L}_p^A(E^p; F)$  إلى فضاء التطبيقات  $p$ -خطية المتناوبة من  $E^p$  إلى  $F$ .

4-1.V صياغة جديدة: ليكن  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ، وليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على

حقل  $IK$ . أيأ كان التطبيق  $p$ -خطي  $f$  من  $\mathcal{L}_p(E^p; F)$ ، وأيأ كان التبديل  $\sigma$  من  $S_p$ ،

نرمز بالرمز  $\bar{\sigma}(f)$  إلى التطبيق  $p$ -خطي المعروف بالعلاقة

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \quad \bar{\sigma}(f)(x_1, \dots, x_p) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

وهكذا، يمكننا صياغة التعريف السابق كما يلي:

• يكون  $f \in \mathcal{L}_p(E^p; F)$  متناظراً إذا وفقط إذا كان:  $\bar{\sigma}(f) = f$ ،  $\forall \sigma \in S_p$ .

• ويكون  $f \in \mathcal{L}_p(E^p; F)$  تخالفياً إذا وفقط إذا كان:  $\bar{\sigma}(f) = \Delta(\sigma) \cdot f$ ،  $\forall \sigma \in S_p$ .

حيث  $\Delta(\sigma)$  هو توقيع التبديل  $\sigma$ ، ويساوي  $(-1)^{k_\sigma}$  إذا أمكن كتابة  $\sigma$  كناتج تركيب  $k_\sigma$  مناقلة.<sup>٥</sup>

<sup>٥</sup> راجع خواص الزمرة المتناظرة في كتاب مبادئ الجبر المجرد.



5-1.V. مبرهنة : ليكن  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ، وليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $\mathbb{K}$ .

وليكن التطبيق  $p$ -خطي  $f$  من  $\mathcal{L}_p(E^p; F)$ . عندئذ

1. إذا كان  $f$  متناوباً، كان  $f$  تحالفياً.
2. وإذا كان العدد المميز لـ  $\mathbb{K}$  مختلفاً عن 2، وكان  $f$  تحالفياً، كان  $f$  متناوباً.

الإثبات

1. لنفترض أن  $f$  متناوب. وليكن  $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$  بحيث  $i < j$ ، و  $E^p \ni (x_1, \dots, x_p)$ .

عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned} 0 = f(x_1, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{\text{الموقع } i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{\text{الموقع } j}, \dots, x_p) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ &+ f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \\ &+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ &+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

ولما كان  $f$  متناوباً، كان لدينا

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0 \quad \text{و} \quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$$

ينتج من ذلك أن

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$$

وهذا يثبت أن  $f$  تحالفياً.

2. ليكن  $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$ ، بحيث  $i < j$ ، وليكن  $E^p \ni (x_1, \dots, x_p) = x$ ، بحيث  $x_i = x_j$ .

ولنتأمل المناقلة  $(i, j) = \tau_{ij} = \sigma$ ، أي التي تبادل بين الدليلين  $i$  و  $j$ . لما كان  $f$  تحالفياً، كان لدينا

$$\bar{\sigma}(f)(x) = \Delta(\sigma) \cdot f(x) = -f(x)$$

ولدينا، من جهة أخرى،

$$\bar{\sigma}(f)(x) = f(x)$$

لأن  $x_i = x_j$ . نستنتج أن  $f(x) = -f(x)$  أو  $2f(x) = 0$ . وبلاستفادة من كون العدد المميز

للحقل  $\mathbb{K}$  لا يساوي 2، ينتج إذن أن  $f(x) = 0$ . والتطبيق  $p$ -خطي  $f$  متناوب.  $\square$

تبين المبرهنة السابقة تكافؤ مفهومي تناوب وتحالف التطبيقات المتعددة الخطية، عندما

يكون العدد المميز للحقل  $\mathbb{K}$  لا يساوي 2.

6-1.V. مبرهنة : ليكن  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ، وليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $IK$ .

وليكن التطبيق الـ  $p$ -خطي  $f$  من  $\mathcal{L}_p(E^p; F)$ . لتعرف التطبيق

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma \in S_p} \Delta(\sigma) \cdot \overline{\sigma(f)}$$

عندئذ يكون  $\mathcal{A}(f)$  تطبيقاً  $p$ -خطياً متناوباً، نسميه التطبيق الـ  $p$ -خطي المتناوب المبني على  $f$ .

الإثبات

إن  $\mathcal{A}(f)$  تطبيق  $p$ -خطي لأنه عبارة خطية بتطبيقات من  $\mathcal{L}_p(E^p; F)$ . نشبت أنه متناوب.

ليكن  $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$ ، بحيث  $i < j$ ، وليكن  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ ، بحيث  $x_i = x_j$ . ولتأمل المناقلة  $\tau_{ij} = (i, j)$ ، أي التي تبادل بين الدليلين  $i$  و  $j$ . وأخيراً لنذكر بالرمز  $A_p$  الذي يرمز إلى الزمرة المتناوبة وهي الزمرة الجزئية من  $S_p$  المؤلفة من التباديل التي يساوي توقيعها +1. لتكن  $B = \{\tau \circ \sigma \in S_p : \sigma \in A_p\}$ ، عندئذ تكون  $B$  هي مجموعة التباديل

ذات التوقيع -1، أي:  $B = S_p \setminus A_p$ . ومن ثم

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma \in A_p} \Delta(\sigma) \cdot \overline{\sigma(f)} + \sum_{\sigma \in B} \Delta(\tau \circ \sigma) \cdot \overline{\tau \circ \sigma(f)}$$

إذن

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\sigma \in A_p} (\overline{\sigma(f)} - \overline{\tau \circ \sigma(f)})$$

ومنه

$$\mathcal{A}(f)(x) = \sum_{\sigma \in A_p} (f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) - f(x_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, x_{\tau \circ \sigma(p)}))$$

ولكن لتكن  $0 \in A_p$  و  $k \in \mathbb{N}_p$ :

- فإذا كان  $\sigma(k) \neq \{i, j\}$ ، كان  $\sigma(k) = \tau \circ \sigma(k)$  ومن ثم  $x_{\sigma(k)} = x_{\tau \circ \sigma(k)}$ .

- وإذا كان  $i = \sigma(k)$ ، كان  $j = \tau \circ \sigma(k)$  ومن ثم  $x_{\sigma(k)} = x_i = x_j = x_{\tau \circ \sigma(k)}$ .

- وإذا كان  $j = \sigma(k)$ ، كان  $i = \tau \circ \sigma(k)$  ومن ثم  $x_{\sigma(k)} = x_j = x_i = x_{\tau \circ \sigma(k)}$ .

ينتج من ذلك أن  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = (x_{\tau \circ \sigma(1)}, \dots, x_{\tau \circ \sigma(p)})$  ومن ثم  $\mathcal{A}(f)(x) = 0$ .

ونكون بذلك قد أثبتنا أن  $\mathcal{A}(f)$  متناوب، وهذا يكمل الإثبات.

□

وأخيراً تُنهي هذه الفقرة بالخاصة المهمة التالية للتطبيقات المعددة الخطية المتناوبة:

7-1.V. مبرهنة : ليكن  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ، وليكن  $E$  و  $F$  فضاءين شعاعيين على حقل  $\mathbb{K}$ .

وليكن التطبيق الـ  $p$ -خطي المتناوب  $f$  من  $\mathcal{L}_p^A(E^p; F)$ . عندئذ لا تتغير قيمة  $f$

عند  $(a_1, \dots, a_p)$  من  $E^p$  إذا أضفنا إلى أحد الأركان  $a_i$  وليكن تركيباً خطياً ما

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j a_j$$

$$f(a_1, \dots, a_p) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

الإثبات

تنتج صحة هذه الخاصية من المساواة البسيطة التالية:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_p) &= f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \lambda_j f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{aligned}$$

□

ثم نستفيد من كون  $f$  متناوباً، فيكتمل الإثبات.

2.V. المحددات

1-2.V. مبرهنة وتعريف: ليكن  $E$  فضاءً شعاعياً بُعده متنه ويساوي  $n \in \mathbb{N}^*$  على حقل  $\mathbb{K}$ .

وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً للفضاء  $E$ . يوجد شكل  $n$ -خطي متناوب وحيد

$f$  يُحقق الشرط  $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ . لرمز إلى  $f$  بالرمز  $\det_{\mathcal{E}}$ ، ونسميه المحدد

بالأساس  $\mathcal{E}$ . وتكون الجملة  $(\det_{\mathcal{E}})$  أساساً للفضاء  $\mathcal{L}_n^A(E^n; \mathbb{K})$ ، أي يكون

$$\mathcal{L}_n^A(E^n; \mathbb{K}) = \mathbb{K} \cdot \det_{\mathcal{E}}$$

وأخيراً، إذا كان  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  هو الأساس الثنوي للأساس  $\mathcal{E}$ ، كان

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_{\sigma(j)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_{\sigma(j)}^*, x_j \rangle \end{aligned}$$

وذلك أياً كان  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .

## الإثبات

نبدأ أولاً بإثبات الوجود. ليكن الشكل الـ  $n$ -خطي على  $E$  المعرف بالعلاقة

$$\vartheta : E^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_j \rangle$$

ولنضع  $\det_E = \mathcal{A}(\vartheta)$ . نعلم بمقتضى المبرهنة 6-1.V أن  $\det_E$  شكل  $n$ -خطي متناوب. ويكون

$$\begin{aligned} \det_E(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \bar{\sigma}(\vartheta)(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_{\sigma(j)} \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, x_{\sigma^{-1}(j)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_{\sigma(j)}^*, x_j \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

ونلاحظ أن

$$\det_E(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, e_{\sigma(j)} \rangle = \Delta(I) \cdot \prod_{j=1}^n \langle e_j^*, e_j \rangle = 1$$

وبذلك نكون قد أكملنا إثبات جزء الوجود في المبرهنة، لنثبت إذن الوحدة.

ليكن  $g \in \mathcal{L}_n^A(E^n; \mathbb{K})$ . ولنعرّف  $h = g - g(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_E$ . من الواضح أن

$h$  شكل  $n$ -خطي متناوب ويُحقق  $h(e_1, \dots, e_n) = 0$ . ولنتأمل تطبيقاً ما  $v : \mathbb{I}N_n \rightarrow \mathbb{I}N_n$ .

- إذا لم يكن  $v$  متبايناً، ووجد دليلان  $j \neq t$  بحيث  $v(t) = v(j)$ ، وينتج من ذلك أن

$$h(e_{v(1)}, \dots, e_{v(n)}) = 0$$

لأن  $h$  متناوب.

- وإذا كان  $v$  متبايناً، كان  $S_n \ni v$  وكان

$$h(e_{v(1)}, \dots, e_{v(n)}) = \bar{v}(h)(e_1, \dots, e_n) = \Delta(v) \cdot h(e_1, \dots, e_n) = 0$$

لستنتج من المناقشة السابقة أن

$$(*) \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{I}N_n)^n, \quad h(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$$

لكن  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ، فيكون  $x_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij} e_i$ ،  $\forall j \in \mathbb{I}N_n$ ، حيث  $\xi_{ij} = \langle e_i^*, x_j \rangle$ .  
وعندئذ

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1 1} h(e_{i_1}, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^n \xi_{i_2 2} h(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \xi_{i_1 1} \xi_{i_2 2} \dots \xi_{i_n n} h(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0 \end{aligned}$$

□ إذن  $h = 0$  أو  $g = g(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{\mathcal{E}}$ ، وهذا يُثبت المطلوب.

2-2.V. ملاحظة: إذا كان  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ، وكان  $x_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij} e_i$   $\forall j \in \mathbb{I}N_n$ ، حيث

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساس للفضاء  $E$ . كان

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \xi_{1\sigma(1)} \xi_{2\sigma(2)} \dots \xi_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta(\sigma) \xi_{\sigma(1)1} \xi_{\sigma(2)2} \dots \xi_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

وذلك بمقتضى البرهنة السابقة.

3-2.V. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً بُعدُه منه ويساوي  $n \in \mathbb{I}N^*$  على حقل  $IK$ . وليكن

$\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$  عنصراً من  $E^n$ . عندئذ تكون الخواص الثلاث التالية متكافئة:

1. الجملة  $\mathcal{A}$  أساس للفضاء  $E$ .
2. أيّاً كان الأساس  $\mathcal{E}$  للفضاء  $E$ ، فلدينا  $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ .
3. يوجد أساس  $\mathcal{E}$  للفضاء  $E$ ، بحيث  $\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ .

الإثبات

1.  $\Leftarrow$  2. ليكن  $\mathcal{E}$  أساساً ما لـ  $E$ ، نجد، بمقتضى البرهنة السابقة، عنصراً  $\lambda \in IK$  بحيث

$$\det_{\mathcal{E}} = \lambda \det_{\mathcal{A}}. \text{ فمن جهة أولى، يكون } \det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) = \lambda \det_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$$

ومن جهة ثانية، يكون  $1 = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_{\mathcal{A}}(e_1, \dots, e_n)$  إذن

$$0 \neq \lambda = \det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n)$$

2.  $\Leftarrow$  3. هذا اقتضاء تافه، لوجود أساس للفضاء  $E$ .

3.  $\Leftarrow$  1. إن الجملة  $\mathcal{A}$  حرة، وإلا أمكن التعبير عن أحد الأشعة  $a_1, \dots, a_n$  وليكن  $a_i$  مثلاً كعبارة خطية  $a_i = \sum_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}} \lambda_j a_j$  لبقية الأشعة. ومن ثَمَّ يكون، استناداً إلى المبرهنة 1.V-7 :

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) = \det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - \sum_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ \det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0$$

وبذلك يتم المطلوب.  $\square$

2.V-4. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً بُعده منه ويساوي  $n \in \mathbb{N}^*$  على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$  جملة من  $E$ . إذا كانت  $\mathcal{A}$  جملة مرتبطة خطياً كان

$$\det_{\mathcal{E}}(a_1, \dots, a_n) = 0$$

أيًا كان الأساس  $\mathcal{E}$  للفضاء  $E$ .

3.V. مُحدّد تطبيق خطي من فضاء شعاعي إلى نفسه

3.V-1. مبرهنة وتعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً بُعده منه ويساوي  $n \in \mathbb{N}^*$  على حقل  $\mathbb{K}$ .

وليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$ . يوجد عنصر وحيد  $\det u \in \mathbb{K}$ ، نسميه مُحدّد التطبيق الخطي  $u$ ، يُحقق الشرط

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$$

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

الإثبات

ليكن  $f$  عنصراً من  $\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K})$ . ولنعرّف  $\Phi_u(f)$  كما يلي

$$\Phi_u(f) : E^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

من الواضح أنّ  $\Phi_u(f)$  شكل  $n$ -خطي متناوب على  $E$ . لتأمل إذن التطبيق الخطي

$$\Phi_u : \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), f \mapsto \Phi_u(f)$$

لما كان  $\dim \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}) = 1$ ، كان  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K})) = 1$  وكان التطبيق المطابق

$(I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))})$  أساساً للفضاء  $\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))$ . إذن يوجد عدد وحيد  $\det u$  بحيث يكون

$\square$   $\Phi_u = \det u \cdot I_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}))}$ ، ولكافى هذه المساواة العلاقة المطلوبة.

2-3.V. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً بُعدته  $n$  ويساوي  $\mathbb{N}^*$  على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$ ، و  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً ما للفضاء  $E$ . عندئذ يكون

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

الإثبات

لما كان لدينا

$$\forall f \in \mathcal{L}_n^A(E^n, \mathbb{K}), \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$$

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

□

نتجت العلاقة المطلوبة بأخذ  $f = \det_{\mathcal{E}}$  و  $(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{E}$ .

3-3.V. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً بُعدته  $n$  ويساوي  $\mathbb{N}^*$  على حقل  $\mathbb{K}$ . عندئذ يكون

1.  $\det I_E = 1$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathcal{L}(E), \det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
3.  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \det u = \det {}^t u$
4.  $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \det u \circ v = \det u \cdot \det v$

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً ما للفضاء  $E$ ، وليكن  $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  الأساس الثنائي للأساس  $\mathcal{E}$ .

1. نعلم بمقتضى المبرهنة السابقة أن

$$\det I_E = \det_{\mathcal{E}}(I_E(e_1), \dots, I_E(e_n)) = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

2. وكذلك لدينا

$$\det(\lambda u) = \det_{\mathcal{E}}(\lambda u(e_1), \dots, \lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \lambda^n \det u$$

3. لتكن المصفوفتان  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij})$  و  $\text{mat}({}^t u, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*) = (b_{ij})$ . نعلم أنه، أياًكان  $j \in \mathbb{N}_n$ ، فإن

$${}^t u(e_j^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \cdot e_i^* \quad \text{و} \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot e_i$$

وكذلك أن  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} = b_{ji}$ .

لذلك يمكننا أن نكتب استناداً إلى النتيجة 2-2.V.

$$\begin{aligned}\det u &= \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} = \det_{\mathcal{E}^*}({}^t u(e_1^*), \dots, {}^t u(e_n^*)) = \det {}^t u\end{aligned}$$

4. لما كان التطبيق

$$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(v(x_1), \dots, v(x_n))$$

شكلاً  $n$ -خطياً متناوباً على  $E$ ، كان

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot f(x_1, \dots, x_n)$$

أو أيّاً كان  $(x_1, \dots, x_n)$  من  $E^n$ ، فإن

$$\det_{\mathcal{E}}(v \circ u(x_1), \dots, v \circ u(x_n)) = \det u \cdot \det_{\mathcal{E}}(v(x_1), \dots, v(x_n))$$

وإذا أخذنا  $(e_1, \dots, e_n) = (x_1, \dots, x_n)$  نتج

$$\begin{aligned}\det v \circ u &= \det_{\mathcal{E}}(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_n)) \\ &= \det u \cdot \det_{\mathcal{E}}(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \det u \cdot \det v\end{aligned}$$

□

وهو المطلوب إثباته.

4-3.V. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً بُعدته منتهية ويساوي  $n \in \mathbb{N}^*$  على حقل  $\mathbb{K}$ . وليكن

$u \in \mathcal{L}(E)$ . يكون  $u$  قلوياً إذا وفقط إذا كان  $\det u \neq 0$ ، وفي هذه الحالة يكون

$$\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$$

الإثبات

يكون  $u$  قلوياً إذا وفقط إذا كان  $\text{rg } u = n$ ، وهذا يُكافئ كون  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$

جملة حرة. وهذا بدوره يُكافئ كون

$$\det u = \det_{\mathcal{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \neq 0$$

ونتج المساواة الأخيرة من العلاقة  $u \circ u^{-1} = I_E$  وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة. □



#### 4.V. مُحدّد مصفوفة مربعة

1-4.V. تعريف: لتكن  $M = (a_{ij})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $1 \leq n$  على حقل  $\mathbb{K}$ . نسمي

محدّد أعمدة المصفوفة  $M$  بالأساس القانوني  $\varepsilon_n$  لـ  $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$  مُحدّد المصفوفة  $M$

ونرمز إليه بالرمز  $\det M$ ، أي

$$\det M = \det_{\varepsilon_n}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

حيث  $(C_j(M))_{j \in \mathbb{N}_n}$  هي أعمدة المصفوفة  $M$ . تسمح لنا النتيجة 2-2.V. أن نكتب

إذن

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$$

2-4.V. ملاحظات:

❖ تبين المساواة السابقة مباشرة أن  $\det M = \det {}^t M$ .

❖ ومن ناحية أخرى، يبين التعريف السابق أنه إذا تأقلمنا التطبيق الخطي

$$u_M : M_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto M X$$

حيث  $M \in M_n(\mathbb{K})$ ، كان  $\det M = \det u_M$ .

❖ إذا أجرى على أعمدة (أسطر) مصفوفة مربعة  $M$ ، تبديل  $\sigma$  ضربت قيمة  $\det M$

بالعدد  $\Delta(\sigma)$ . وذلك لأنّ المحدّد شكل خطّي متناوب فهو إذن مخالف.

❖ لا تتغير قيمة مُحدّد مصفوفة إذا جمعنا إلى أحد أعمدتها (أسطرها) عبارة خطية في

بقية الأعمدة (الأسطر)، وذلك استناداً إلى المبرهنة 1-7.V.

❖ وبناءً على المبرهنة 3-3.V. والملاحظة الأولى يكون

$$1. \det I_n = 1$$

$$2. \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in M_n(\mathbb{K}), \det(\lambda M) = \lambda^n \det M$$

$$3. \forall (M, N) \in (M_n(\mathbb{K}))^2, \det(MN) = \det M \cdot \det N$$

### 5.V. حساب المحددات

1-5.V. مبرهنة: لتكن  $M = (a_{ij})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n$  على حقل  $IK$ . ونفترض

أن  $n = p + q$  حيث  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ ، وأن المصفوفة  $M$  تكتب بالشكل

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

حيث  $M_p(IK) \ni A$  و  $M_q(IK) \ni B$  و  $M_{p \times q}(IK) \ni C$  و  $0$  هي المصفوفة الصفرية

في  $M_{q \times p}(IK)$ . عندئذ يكون  $\det M = \det A \cdot \det B$ .

الإثبات

لنرمز بالرموز  $a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$  إلى أعمدة المصفوفة  $M$ . أي

$$a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq p; \quad a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{pk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{p+1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}, \quad p+1 \leq k \leq n;$$

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  الأساس القانوني لـ  $M_{n \times 1}(IK)$ . ونعرف  $E' = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$

و  $E'' = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$  و  $E' = (e_1, \dots, e_p)$  و  $\mathcal{E}' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ . فيكون  $E' \ni a_j$

أيًا كان  $j \in \mathbb{N}_p$ .

لتأمل الشكل الـ  $p$ -خطي المتناوب

$$f : E'^p \rightarrow IK, (x_1, \dots, x_p) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_p, a_{p+1}, \dots, a_n)$$

لما كان  $(\det_{\mathcal{E}})$  أساساً للفضاء  $\mathcal{L}_p^A(E'^p; IK)$  أمكننا إيجاد  $\lambda \in IK$  بحيث  $f = \lambda \det_{\mathcal{E}'}$ .

ويكون  $\lambda = f(e_1, \dots, e_p)$ .

ومنه

$$(*) \quad \det M = f(a_1, \dots, a_p) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{E}'}(a_1, \dots, a_p) = f(e_1, \dots, e_p) \cdot \det A$$

من جهة أخرى، كما كان  $c_j \in E' \Rightarrow \text{vect}(e_1, \dots, e_p) = E'$  أيًا كان  $j \in \{p+1, \dots, n\}$ ، ولأن جمع عبارة خطية ما في الأشعة  $(e_1, \dots, e_p)$  إلى العمود  $a_j$ ، حيث  $j \in \{p+1, \dots, n\}$ ، لا يغير قيمة المحدد

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, c_{p+1} + b_{p+1}, \dots, c_n + b_n)$$

نتج لدينا أن

$$(**) \quad \lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n)$$

وأخيراً، كما كان

$$g: E'^q \rightarrow \mathbb{K}, (x_{p+1}, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$$

شكلاً  $q$ -خطياً متناوباً على  $E'$ ، يوجد  $\mu \in \mathbb{K}$  بحيث  $g = \mu \det_{\mathcal{E}}$ ، ويكون

$$\mu = g(e_{p+1}, \dots, e_n) = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

ينتج من ذلك أن  $g = \det_{\mathcal{E}}$ ، وبلاستفادة من  $(**)$  يكون

$$\lambda = \det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_p, b_{p+1}, \dots, b_n) = g(b_{p+1}, \dots, b_n) = \det_{\mathcal{E}'}(b_{p+1}, \dots, b_n) = \det B$$

وبالعودة إلى العلاقة  $(*)$  نجد  $\det M = \det A \cdot \det B$ ، فيكتمل الإثبات.  $\square$

يمكننا بالتدريج تعميم المبرهنة السابقة على النحو التالي:

2-5.V. مبرهنة: لتكن  $M \in M_n(\mathbb{K})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n \leq 1$  على حقل  $\mathbb{K}$ . ولنفترض

أن المصفوفة  $M$  مثلثية كتلياً، أي أنه توجد  $(p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}^m$  بحيث  $n = \sum_{i=1}^m p_i$ ،

وتوجد مصفوفات  $(A_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}_m^2}$  بحيث تكون  $A_{i,j} \in M_{p_i \times p_j}(\mathbb{K})$  وتكون  $A_{i,j}$  مصفوفة

صفيرية حين يكون  $j > i$ ، وأخيراً نكتب  $M$  بالشكل:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون  $\det M = \prod_{k=1}^m \det A_{kk}$

3-5.V مبرهنة: لنكن  $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n \geq 1$  على حقل  $\mathbb{K}$ .

ولنعرف أياً كانت  $(i, j) \in \mathbb{I}_n^2$  المصفوفة  $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$  التي نحصل عليها بحذف

السطر ذي الدليل  $i$  والعمود ذي الدليل  $j$  من المصفوفة  $M$ . عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{I}_n, \quad \det M = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det M_{i,j}, \quad (*)$$

$$\forall i \in \mathbb{I}_n, \quad \det M = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det M_{i,j}, \quad (**)$$

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  الأساس القانوني لـ  $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ . إن محدد المصفوفة  $M$  هو محدد أعمدها بالأساس  $\mathcal{E}$ . أي

$$\forall j \in \mathbb{I}_n, \quad C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{و} \quad \det M = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n)$$

لنثبت عنصراً  $j \in \mathbb{I}_n$ . لئلا كان التطبيق

$$M_{n+1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_{j-1}, x, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

خطئاً، كان بالإمكان أن نكتب

$$\begin{aligned} \det M &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n) \end{aligned}$$

حيث تنتج المساواة الأخيرة من كون توقيع الدورة  $(j, 1, 2, \dots, j) = \sigma_j$  يساوي  $\Delta(\sigma_j) = (-1)^{j-1}$ .

لحساب المحدد  $\det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$  نقوم بتطبيق التبديل الممثل

بالدورة  $\sigma_i = (1, 2, \dots, i)$  والذي يساوي توقيع  $\sigma_i = (-1)^{i-1}$ ، على أسطر المصفوفة التي

أعمدها هي  $(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$  فتصبح قيمة المحدد

$$\det_{\mathcal{E}}(e_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

مساوية للمقدار

$$(-1)^{t-1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{t1} & \dots & a_{t,j-1} & a_{t,j+1} & \dots & a_{tn} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t-1,1} & \dots & a_{t-1,j-1} & a_{t-1,j+1} & \dots & a_{t-1,n} \\ a_{t+1,1} & \dots & a_{t+1,j-1} & a_{t+1,j+1} & \dots & a_{t+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ونكتب هذه النتيجة بالشكل التالي

$$\det_g(e_t, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n) = (-1)^{t-1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_{t1} \dots a_{tn} \\ 0 & M_{t,j} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix} = (-1)^{t-1} \det M_{t,j}$$

وبالعودة إلى  $\det M$  نجد

$$\det M = \sum_{t=1}^n a_{t,j} \cdot (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{t-1} \det M_{t,j} = \sum_{t=1}^n a_{t,j} \cdot (-1)^{t+j} \cdot \det M_{t,j}$$

وهذا يثبت المساواة (\*).

وتنتج المساواة (\*\*) من السابقة بالاستفادة من كون  $\det M = \det {}^t M$ .

4-5.V. ملاحظات:

❖ تسمى العلاقة (\*) في المبرهنة السابقة نشر مُحدّد  $M$  وفق العمود ذي الدليل  $j$ . وتسمى

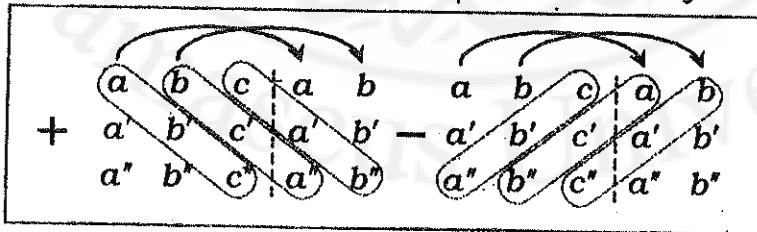
العلاقة (\*\*) في المبرهنة نفسها نشر مُحدّد  $M$  وفق السطر ذي الدليل  $t$ .

❖ تنتج من المبرهنة السابقة الحالتان الخاصتان التاليتان:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = ab' - ba'$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$$

حيث يمكننا تذكر هذه القاعدة باستخدام الطريقة الموضحة في الشكل التالي:



5-5.V. تعريف: لتكن  $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n \geq 1$  على حقل  $\mathbb{K}$ . ولنعرف أيضاً كانت  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$  المصفوفة  $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$  التي نحصل عليها بحذف السطر ذي الدليل  $i$  والعمود ذي الدليل  $j$  من المصفوفة  $M$ . ولنضع

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$$

نسمي العدد  $A_{i,j}$  تمام العامل  $a_{ij}$  في المصفوفة  $M$ . ورمز بالرمز  $\text{com}(M)$  إلى المصفوفة المربعة  $(A_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ ، ونسميها تمام المصفوفة  $M$ .

5-5.V. مبرهنة: لتكن  $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n \geq 1$  على حقل  $\mathbb{K}$ . عندئذ يكون

$$M {}^t\text{com}(M) = {}^t\text{com}(M) M = (\det M) \cdot I_n$$

الإثبات

سنحتفظ بالرموز الواردة في التعريف السابق، ولتكن  $(\gamma_{i,j}) = {}^t\text{com}(M)$ . عندئذ

$$\gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det M_{j,k}$$

❖ فإذا كان  $i = j$  مثلت العلاقة السابقة نشر مُحدّد  $M$  وفق السطر ذي الدليل  $i$ . إذن يكون  $\gamma_{i,i} = \det M$  في هذه الحالة.

❖ وإذا كان  $i \neq j$  مثلت العلاقة السابقة النشر وفق السطر ذي الدليل  $i$ ، مُحدّد المصفوفة  $\tilde{M}$  التي نتج من  $M$  باستبدال السطر ذي الدليل  $i$  بالسطر ذي الدليل  $j$ . فيكون في هذه الحالة  $\gamma_{i,j} = \det \tilde{M} = 0$  لأنّ للمصفوفة  $\tilde{M}$  سطرين متماثلين.

نكون قد أثبتنا أنّ  $M {}^t\text{com}(M) = (\det M) \cdot I_n$ ، وبمثل القارئ بأسلوب مماثل أنّ

$${}^t\text{com}(M) M = (\det M) \cdot I_n \quad \square$$

5-5.V. نتيجة: لتكن  $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n \geq 1$  على حقل  $\mathbb{K}$ . إذا كانت  $M$  قلبية، أي  $M \in \mathcal{CL}_n(\mathbb{K})$ ، كان

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\text{com}(M)$$

8-5.V. مثال تقليدي: لتكن  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ ، وليكن

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det(\xi_i^{j-1})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$$

والمطلوب هو حساب المحدد  $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ، الذي يسمى محدد VAN DER MONDE. سنفترض فيما يلي أن القيم  $\xi_1, \dots, \xi_n$  مختلفة معنى معنى وإلا كانت قيمة المحدد المطلوب صفراً لتساوي سطرين في المصفوفة المدروسة في تلك الحالة.

لتناقل كثير الحدود  $P$  من  $\mathbb{K}[X]$  المعروف كما يلي

$$P(X) = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^{n-1} \end{bmatrix} = V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, X)$$

من الواضح أن  $\deg P \leq n-1$ ، وأن  $P(\xi_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$ . يتبع من ذلك أن

$$P(X) = \lambda \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi_k)$$

حيث  $\lambda$  هي أمثال  $X^{n-1}$  في  $P$ ، فهي إذن  $V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ . ومنه

$$P(X) = V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi_k)$$

وهذا، حين تكون  $X = \xi_n$ ، يقتضي أن

$$V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_k)$$

وتسمح العلاقة السابقة من ثم أن نثبت بالتدريج

$$V(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (\xi_2 - \xi_1) \cdots \prod_{k=1}^{m-1} (\xi_m - \xi_k) \cdots \prod_{k=1}^{n-2} (\xi_{n-1} - \xi_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_k)$$

أو

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_j - \xi_i)$$

### 6.V. جمل المعادلات الخطية

ليكن  $IK$  حقلاً تبديلياً، ولتكن الجماعتان  $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$  و  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$  من  $IK$ .

نسمى جملة المعادلات

$$\mathcal{L} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = \beta_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = \beta_n \end{cases}$$

جملة  $n$  معادلة خطية ذات  $p$  مجهولاً هي  $x_p, \dots, x_1$ .

ويمكننا أن نربط بجملة المعادلات الخطية  $\mathcal{L}$  جملة معادلات خطية أخرى  $\mathcal{H}$  نسميها

جملة المعادلات الخطية المتجانسة الموافقة لـ  $\mathcal{L}$ ، وهي

$$\mathcal{H} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

وإذا رمزنا بالرمز  $B_{\mathcal{L}}$  إلى الشعاع  $[\beta_1, \dots, \beta_n] \in M_{n \times 1}(IK)$  ورمزنا، حين يكون  $j \in \mathbb{N}_p$ ،

بالرمز  $C_j$  إلى الشعاع  $[a_{1j}, \dots, a_{nj}] \in M_{n \times 1}(IK)$ ، كتبت جملة المعادلات الخطية  $\mathcal{L}$

بالشكل المكافئ التالي، والذي يسمى الشكل الشعاعي للجملة الخطية  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_1 : x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_p \cdot C_p = B_{\mathcal{L}}$$

وكذلك إذا رمزنا بالرمز  $X$  إلى الشعاع المجهول  $[x_1, \dots, x_p] \in M_{p \times 1}(IK)$ ، و بالرمز  $A_{\mathcal{L}}$

إلى المصفوفة من  $M_{n \times p}(IK)$  التي أعمدها هي  $C_1, C_2, \dots, C_p$ ، كتبت جملة المعادلات الخطية

بالشكل المكافئ التالي، والذي يسمى الشكل المصفوفي للجملة الخطية  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_2 : A_{\mathcal{L}} X = B_{\mathcal{L}}$$

وأخيراً إذا رمزنا بالرمز  $u_{\mathcal{L}}$  إلى التطبيق الخطي

$$u_{\mathcal{L}} : M_{p \times 1}(IK) \rightarrow M_{n \times 1}(IK), Y \mapsto A_{\mathcal{L}} Y$$

كتبت جملة المعادلات الخطية  $\mathcal{L}$  بالشكل المكافئ التالي، والذي يسمى الشكل الهندسي للجملة

الخطية  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_3 : u_{\mathcal{L}}(X) = B_{\mathcal{L}}$$



لما كانت رتبة التطبيق الخطي  $u_L$  هي نفسها رتبة المصفوفة  $A_L$ ، وهي كذلك تساوي رتبة جملة الأشعة  $C_1, C_2, \dots, C_p$ . كان بالإمكان أن نضع التعريف التالي:

1-6.V. تعريف: نسمي رتبة جملة المعادلات الخطية  $L$ ، أي من الأعداد المتساوية التالية: رتبة التطبيق الخطي  $u_L$ ، أو رتبة المصفوفة  $A_L$ ، أو رتبة جملة الأشعة  $C_1, C_2, \dots, C_p$ . ونرمز إلى هذه الرتبة بالرمز  $rg L$ .

2-6.V. مبرهنة: سنحتفظ بالرموز والتعاريف السابقة، عندئذ

1. إذا كان  $rg L = n = p$ ، قُبِلَتْ جملة المعادلات الخطية  $L$  (التي تسمى في هذه الحالة جملة كرامر Cramer) حلاً، وحلاً وحيداً فقط.

2. إذا رمزنا بالرمز  $S(\mathcal{H})$  إلى مجموعة حلول الجملة المتجانسة  $\mathcal{H}$ ، كان  $S(\mathcal{H})$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $M_{p \times 1}(IK)$  بُعده يساوي  $p - rg L$ .

3. تقبل الجملة  $L$  حلاً، إذا وفقط إذا انتمى الشعاع  $B_L$  إلى صورة التطبيق الخطي  $u_L$ ، أي كان  $B_L \in \text{Im } u_L$ . وفي هذه الحالة، إذا كان  $X_0$  حلاً ما للجملة  $L$ ، وكانت  $S(L)$  هي مجموعة حلول الجملة  $L$ ، كان

$$S(L) = \{X_0 + X : X \in S(\mathcal{H})\} = X_0 + S(\mathcal{H})$$

الإثبات

□ إن الإثبات بسيط جداً ومتروك تمريناً للقارئ.

3-6.V. تعريف: نقول عن جملتي معادلات خطية  $L$  و  $L'$  إنهما متكافئتان، إذا وفقط إذا كان لهما مجموعة الحلول نفسها، أي  $S(L) = S(L')$ .

تقوم الدراسة العملية لجملة معادلات خطية  $L$  على إخضاع هذه الجملة لعمليات أولية بهدف تحويلها إلى جملة مكافئة  $\tilde{L}$ ، تكون أبسط وأسهل معالجة.

لتعامل من جديد الجملة  $\mathcal{L}$ ، ولنرمز بالرمز  $\mathcal{L}_i$  إلى المعادلة ذات الرقم  $i$ ، وأخيراً لنذكر بالرمز  $(E_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$  للدلالة على الأساس القانوني في  $M_n(\mathbb{K})$ . نسمي عملية أولية أحد التحويلات التالية:

❖ المبادلة بين المعادلتين  $\mathcal{L}_i$  و  $\mathcal{L}_j$ ، تكافئ هذه العملية ضرب كل من المصفوفة  $A_{\mathcal{L}}$  والشعاع  $B_{\mathcal{L}}$  من اليسار بالمصفوفة  $P_{ij}$  التالية:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & 1 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & 1 \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow i \\ \downarrow j \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

$$= I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

والجملة التي نحصل عليها بعد إجراء هذه العملية تكافئ الأولى لأن المصفوفة  $P_{ij}$  قلوبة. ❖ استبدال  $\mathcal{L}_i$  بالمعادلة  $\mathcal{L}_i + \lambda \cdot \mathcal{L}_j$  حيث  $\lambda \in \mathbb{K}$ ، و  $i \neq j$ ، تكافئ هذه العملية ضرب كل من المصفوفة  $A_{\mathcal{L}}$  والشعاع  $B_{\mathcal{L}}$  من اليسار بالمصفوفة القلوبة  $I_n + \lambda E_{ij}$ :

$$I_n + \lambda E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow j \\ \leftarrow i \end{matrix}$$

❖ استبدال  $\mathcal{L}_i$  بالمعادلة  $\lambda \cdot \mathcal{L}_i$  حيث  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ، تكافئ هذه العملية ضرب كل من المصفوفة  $A_{\mathcal{L}}$  والشعاع  $B_{\mathcal{L}}$  من اليسار بالمصفوفة القلوبة  $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ :

$$I_n + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow i \\ \leftarrow i \end{matrix}$$

يسمح الاختيار المناسب لهذه العمليات الأولية بتحويل الجملة الخطية  $\mathcal{L}$  إلى جملة مكافئة

$$\tilde{\mathcal{L}}: \tilde{A}X = \tilde{B}$$

حيث يكون للمصفوفة  $\tilde{A}$  الشكل التالي

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} x & \dots & x & x & \dots & x \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & x & \dots & x \\ & & \ddots & x & \ddots & x \\ & & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 \end{bmatrix} = (\tilde{a}_{ij})$$

مع الشرط  $\tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \dots \tilde{a}_{rr} \neq 0$ ، وللشعاع  $\tilde{B}$  الشكل  ${}^t[\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r, \dots, \tilde{b}_n]$ .  
وهنا نناقش الحالات التالية:

1. حالة  $n = r < p$ . فتكون الجملة حُلولة، وبالسماح لـ  $x_{r+1}, \dots, x_p$  بأخذ قيم اختيارية نحصل على جملة كرامر، مثالية سهلة الحل، وتعطي  $x_1, \dots, x_r$  بدلالة  $x_{r+1}, \dots, x_p$ .
2. حالة  $n = r = p$ . فتكون الجملة جملة كرامر، مثالية سهلة الحل.
3. حالة  $n > r$ ، و  ${}^t[\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_n] \neq 0$ . لا تقبل الجملة في هذه الحالة حُلولة.
4. حالة  $n > r$ ، و  ${}^t[\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_n] = 0$ . الجملة حُلولة، ونقول الجملة في هذه الحالة إلى الحالة الأولى.

4-6.V مثال: حلّ الجملة الخطية التالية

$$\mathcal{L}: \begin{cases} L_1 : & y + z = 5 \\ L_2 : & 2x + y + 2z = 9 \\ L_3 : & 3x + y - z = 4 \end{cases}$$

لتسهيل عرض الحل ستقوم بتمثيل التحويلات الأولية ببساطة، كما في الشكل الآتي، حيث وضعنا في العمود الأول أمثال  $x$ ، وفي العمود الثاني أمثال  $y$ ، ووضعنا أمثال  $z$  في العمود الثالث، وأخيراً وضعنا الطرف الثاني في العمود الرابع. إن جميع الجمل الخطية الممثلة فيما يلي متكافئة:

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{19}{2} & -4 & -\frac{19}{2} \end{array} \right] \\
 & & & & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{2}{7}L_3} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 & & & & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3, L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 & & & & \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]
 \end{array}$$

إذن تكافئ الجملة الخطية  $\mathcal{L}$  الجملة

$$\tilde{\mathcal{L}} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

وهي تبين مباشرة الحل المطلوب.

5-6.V. ملاحظة هامة: إذا أردنا حل عدد من الجمل الخطية

$$\mathcal{L}_i : AX_i = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

فها جميعاً المصفوفة  $A$  نفسها، فمن الأفضل والأسرع إجراء العمليات الأولية على الأشعة  $B_k, B_{k-1}, \dots, B_1$  في آن واحد مع المصفوفة  $A$ .

لنأخذ مثلاً حالة مصفوفة مقلوبة  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ، وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  الأساس القانوني للفضاء  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ . إن أعمدة المصفوفة  $A^{-1}$  هي  $(A^{-1}e_1, \dots, A^{-1}e_n)$ ، وللحصول على الشعاع  $C_j = A^{-1}e_j$ ، يجب حل الجملة الخطية  $\mathcal{L}_j : AX = e_j$ . إذن لحساب  $A^{-1}$  نقوم بحل  $n$  جملة خطية:

$$\mathcal{L}_i : AX_i = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

سنبين في المثال التالي طريقة تنظيم العمليات المذكورة فيما سبق لحساب مقلوب مصفوفة:

6-6.V. مثال: لنحسب مقلوب المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ . يجب إذن أن نحل الجمل

الخطية الثلاث التالية:  $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  لنحصل على أعمدة  $A^{-1}$ .

سنقوم فيما يلي بتمثيل هذه الجمل الثلاث في مصفوفة واحدة وبإجراء العمليات الأولية عليها:

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -4 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{2}{7}L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{array} \right]
 \end{array}$$

ولستنتج إذن أن:  $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$



## تمارين

التمرين 1. احسب المحددين التاليين :

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

التمرين 2. احسب محدد المصفوفة  $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$  المعرفة بالعلاقة  $a_{ij} = |i - j|$ .

التمرين 3. لتكن  $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$  المصفوفة المعرفة كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & : i > j, \\ b & : i < j, \\ x_i & : i = j. \end{cases}$$

حيث  $(x_1, \dots, x_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$ . احسب  $\det A$  بفرض  $a \neq b$  ثم ادرس حالة

$a = b$ . (يمكن دراسة التابع  $x \mapsto \det A_x$  حيث  $A_x$  هي المصفوفة التي نحصل عليها

بجمع  $x$  إلى جميع ثوابت  $A$ ، والاستعانة بالتابع  $(t \mapsto f(t) = \prod_{1 \leq k \leq n} (t - x_k))$ .

التمرين 4. لتكن  $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$  المصفوفة المعرفة بالعلاقة  $a_{ij} = S_{ij}$ ، حيث  $S_1$

و  $S_2$  و... و  $S_n$  أعداد من  $\mathbb{R}$ ، و  $\min(i, j) = i \wedge j$ . احسب  $\det A$ . وطبق ذلك

$$\text{في حالة } S_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

التمرين 5. لتكن  $A$  و  $B$  مصفوفتين من  $M_n(\mathbb{K})$ . نعرف  $P \in M_{2n}(\mathbb{K})$  بأنها المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

أثبت أن :  $\det P = \det(A + B) \det(A - B)$ .

التمرين 6. لتكن  $M_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$  المصفوفة المعرفة، أيًا كان  $\theta \in \mathbb{R}$ ، كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 \cos \theta & : i = j, \\ 1 & : |i - j| = 1, \\ 0 & : |i - j| > 1. \end{cases}$$

احسب  $\det A_n$ .

التمرين 7. لتكن  $1 \leq n$ ، ولتكن  $IK^n \ni (a_1, \dots, a_n)$  و  $IK^n \ni (b_1, \dots, b_n)$ . نفترض أن

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_i + b_j \neq 0$$

نسمي مصفوفة Cauchy المتعلقة بـ  $(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$  تلك المصفوفة

$$(\alpha_{ij}) = C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \text{ من } \mathcal{M}_n(IK) \text{ المعرفة بالعلاقة } \alpha_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}.$$

احسب المحدد  $\det C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) = c(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$  ثم

ادرس حالة مصفوفة Hilbert:  $\mathcal{H}_n$  الموافقة للحالة الخاصة  $a_k = b_k = k - 1/2$ .

التمرين 8. ادرس تبعاً لقيم الوسطاء  $a, b, m$  الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}, \begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az = a+4 \\ 4(a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{cases}$$

التمرين 9. ادرس تبعاً لقيم الوسيطين  $\lambda$  و  $\mu$  الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

التمرين 10. احسب مقلوب كل من المصفوفات التالية:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 190 & 210 & 231 & 253 \\ 1140 & 1330 & 1540 & 1771 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

التمرين 11. أثبت أن المصفوفة التالية قَلْوِيَّة، أيًا كانت  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \dots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \dots & \frac{1}{(2n)!} \end{bmatrix}$$

التمرين 12. لتكن المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4.1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

أوجد حلول الجملتين الخطيتين  $AX_1 = b_1$  و  $AX_2 = b_2$ . ماذا تلاحظ؟

التمرين 13. لتكن  $X$  و  $Y$  مصفوفتين من  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .

1. أوجد شرطاً لازماً وكافياً على  $\gamma = {}^t Y \cdot X$  حتى تكون المصفوفة  $I_n + X \cdot {}^t Y$  قَلْوِيَّة، واحسب مقلوبها في هذه الحالة.

2. لتكن  $M$  مصفوفة قَلْوِيَّة من  $M_n(\mathbb{R})$ ، نضع  $N = M + X \cdot {}^t Y$ . أوجد شرطاً لازماً وكافياً على العدد  $X \cdot M^{-1} \cdot {}^t Y$  حتى تكون المصفوفة  $N$  قَلْوِيَّة، واحسب مقلوبها  $N^{-1}$  في هذه الحالة.

3. لنضع

$$N = \begin{bmatrix} 2.01 & 3 & 5.99 & 1.98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

احسب  $M^{-1}$ ، واستنتج  $N^{-1}$ . كيف يجب تغيير الثابت  $a_{24} = 1$  في  $M$  حتى تصبح المصفوفة  $M$  غير قَلْوِيَّة؟



التمرين 14. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 16 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

1. أوجد مصفوفة مثلثية عليا  $U$ ، وأخرى مثلثية سفلى  $L$  عناصرها القطرية تساوي 1، بحيث  $A = L \cdot U$ .

2. أوجد مقلوب كل من  $U$  و  $L$ ، ثم استنتج  $A^{-1}$ .

التمرين 15. لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 6 & 10 \\ 4 & -4 & 10 & 29 \end{bmatrix}$$

1. أثبت أنه توجد مصفوفة مثلثية سفلى  $S$  عناصرها القطرية موجبة تماماً، بحيث  $A = S^t S$ .

2. أوجد مقلوب  $S$ ، ثم استنتج  $A^{-1}$ .

التمرين 16. لتكن  $2 \leq n$  و  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  و  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ . نفترض أن الأعداد  $a_1, \dots, a_n$  مختلفة مثني مثني وكذلك أن الأعداد  $b_1, \dots, b_n$  مختلفة مثني مثني، وأخيراً أن  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_i + b_j \neq 0$ . لتكن  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ، أوجد حل الجملة الخطية

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{a_i + b_j} = y_i, \quad i \in \mathbb{N}_n$$

يمكن لتحقيق ذلك استخدام التابع الكسري  $F(X) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X + b_j}$ . ثم استنتج مقلوب

مصفوفة Cauchy المتعلقة بـ  $(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$  أي المصفوفة:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j} \quad \text{المعرفة بـ } M_n(\mathbb{K}) \ni (\alpha_{ij}) = C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$$

وأخيراً احسب مقلوب مصفوفة Hilbert  $\mathcal{H}_n$  الموافقة للحالة الخاصة  $\alpha_k = k - 1/2$ ، و

$$b_k = k - 1/2$$

التمرين 17. أياً كان  $1 \leq m$ ، نضع  $E_m = \mathcal{C}_{m-1}[X]$  فضاء كثيرات الحدود ذات الثوابت

العقدية التي لا تزيد درجتها عن  $m-1$ . وليكن فيما يلي  $\mathbb{N}^{*2} \ni (n, m)$ .

1. ليكن  $k$  عنصراً من  $\mathbb{N}_{n+m}$ ، نعرف العنصر  $e_k$  من  $E_n \times E_m$  كما يلي:

$$e_k = \begin{cases} (X^{n-k}, 0) & : 1 \leq k \leq n \\ (0, X^{n+m-k}) & : n < k \leq n+m \end{cases}$$

أثبت أن الجملة  $\mathcal{E} = (e_k)_{1 \leq k \leq n+m}$  أساس للفضاء  $E_n \times E_m$ .

2. ليكن كثير الحدود  $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$  و  $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  من  $E_{n+1}$  و  $E_{m+1}$

على التوالي. نفترض أن  $0 \neq a_m$  و  $0 \neq b_n$ . نضع

$$\Phi(W) = S(X)P(X) + T(X)Q(X)$$

وذلك أياً كان  $E_n \times E_m \ni (S(X), T(X)) = W$

i. أثبت أن  $\Phi$  تطبق خطي من  $E_n \times E_m$  إلى  $E_{n+m}$ .

ii. ليكن  $\Delta(X) = \gcd(P(X), Q(X))$  القاسم المشترك الأعظم لـ  $P$  و  $Q$ ، ولتكن

$d = \deg \Delta(X)$ . نضع  $P(X) = \Delta(X)P_1(X)$  و  $Q(X) = \Delta(X)Q_1(X)$ .

- أثبت أن  $P_1(X)$  و  $Q_1(X)$  أوليين فيما بينهما.

- أثبت أن  $\ker \Phi = \{(-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)) : \lambda(X) \in E_d\}$

واستنتج قيمة  $\dim \ker \Phi$ .

iii. ليكن الأساس  $\mathcal{F} = \{X^{n+m-1}, X^{n+m-2}, \dots, X, 1\}$  للفضاء  $E_{n+m}$ . اكتب

$\text{mat}(\Phi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ . ثم استنتج أن رتبة المصفوفة  $M(P, Q) \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$  التالية

$$M(P, Q) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & \begin{array}{c} n \\ \hline \end{array} & & & \begin{array}{c} m \\ \hline \end{array} & & & \\ \begin{array}{c} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_m & \ddots & & \vdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & & \vdots \\ & a_{m-1} & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & a_m & 0 & \vdots & & b_n & 0 \\ a_1 & \vdots & & a_{m-1} & a_m & b_1 & & b_{n-1} & b_n \\ a_0 & a_1 & & a_{m-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-1} & \\ 0 & a_0 & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & b_1 & \vdots \\ \vdots & & & a_0 & a_1 & \vdots & & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

تساوي درجة المضاعف المشترك الأصغر لكثيري الحدود  $P$  و  $Q$ . أي أن

$$\text{rg}(M(P, Q)) = \deg \text{lcm}(P(X), Q(X))$$

3. تحتفظ برموز السؤال السابق ونضع  $R(P, Q) = \det M(P, Q)$ . أثبت أن  $P$  و  $Q$

أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان  $R(P, Q) \neq 0$ .

4. نسمي مُميز كثير حدود  $P$  العدد  $D(P) = R(P, P')$ . احسب  $D(P)$  في الحالة الخاصة

$$P(X) = X^3 + aX + b \quad \text{واستنتج شرطاً لازماً وكافياً على } (a, b) \text{ حتى تقبل المعادلة}$$

$$P(X) = 0 \text{ جذراً مضاعفاً.}$$

5. أثبت أن شرطاً لازماً وكافياً حتى يقبل  $aX^2 + bX + c$  و  $a'X^2 + b'X + c'$  جذراً مشتركاً هو

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba') \cdot (bc' - cb')$$

6. تحتفظ برموز السؤال 2. أيًا كان كثير الحدود  $U(X)$  و العدد  $a \in \mathbb{C}$ ، لرمز بالرمز

$\tau_a(U)(X)$  إلى كثير الحدود  $U(X+a)$ . ثم نعتبر التطبيقات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \Psi : E_n \times E_m &\rightarrow E_n \times E_m : (S, T) \mapsto (\tau_{-a}(S), \tau_{-a}(T)), \\ \Phi_1 : E_n \times E_m &\rightarrow E_{n+m} : (S, T) \mapsto S(X) \cdot \tau_{-a}(P)(X) + T(X) \cdot Q(X), \\ \Theta : E_{n+m} &\rightarrow E_{n+m} : U \mapsto \tau_a(U), \\ \Phi_2 : E_n \times E_m &\rightarrow E_{n+m} : (S, T) \mapsto S(X) \cdot P(X) + T(X) \cdot \tau_a(Q)(X). \end{aligned}$$

i. أثبت أن  $R(P, \tau_a(Q)) = R(\tau_{-a}(P), Q)$  واستنتج أن  $\Phi_2 = \Theta \circ \Phi_1 \circ \Psi$ .

ii. احسب  $R(P, X)$ ، ثم أثبت أن  $R(P, Q) = (-1)^m P(0) R(P, Q)$ .

iii. استخدم i.6 لإثبات المساواة  $R(P, (X-a)Q) = (-1)^m P(a) R(P, Q)$ .

iv. أثبت أن  $R(P, \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)) = (-1)^{nm} \prod_{k=1}^n P(\alpha_k)$ ، واستنتج المساواة:

$$R\left(\prod_{k=1}^m (X - \beta_k), \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)\right) = (-1)^{nm} \prod_{1 \leq k, j \leq n} (\alpha_k - \beta_j)$$

٥٥٥٥٥٥٥٥



## الفصل السادس

### اختزال التطبيقات الخطية

#### 1.VI. عموميات

1-1.VI. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً مختلفاً عن  $\{0\}$  على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $u$

تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . نسمي قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $u$  كل عنصر  $\lambda \in IK$  يجعل

$u - \lambda \cdot I_E$  غير متباين، أي يُحقق الشرط

$$\ker(u - \lambda \cdot I_E) \neq \{0\}$$

وإذا كانت  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $u$ ، أسمينا الفضاء الشعاعي الجزئي

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \cdot I_E)$$

الفضاء الذاتي لـ  $u$  الموافق للقيمة الذاتية  $\lambda$ ، وأسمينا العناصر غير المعدومة في  $E_\lambda$

أشعة ذاتية للتطبيق الخطي  $u$  موافقة للقيمة الذاتية  $\lambda$ .

وأخيراً نسمي طيف التطبيق الخطي  $u$  مجموعة قيمه الذاتية ونرمز إليه بالرمز  $sp(u)$ :

$$sp(u) = \{\lambda \in IK, \ker(u - \lambda \cdot I_E) \neq \{0\}\}$$

2-1.VI. مبرهنة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً مختلفاً عن  $\{0\}$  على حقل تبديلي  $IK$ . وليكن  $u$

تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . وأخيراً لنكن  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$  جماعة من القيم الذاتية المختلفة معنى

معنى للتطبيق الخطي  $u$ . عندئذ يكون المجموع  $\sum_{k=1}^n E_{\lambda_k}$  مجموعاً مباشراً.

الإثبات

لنرمز بالرمز  $\mathcal{P}_n$  إلى القضية التالية:

"أيما كانت الجملة  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$  المؤلفة من  $n$  قيمة ذاتية مختلفة معنى للتطبيق الخطي  $u$ ،

كان المجموع  $\sum_{k=1}^n E_{\lambda_k}$  مجموعاً مباشراً."

القضية  $\mathcal{P}_1$  صحيحة وضوحاً. لنفترض جدلاً وجود عدد  $k$  تكون عنده  $\mathcal{P}_k$  خاطئة،  
ولكن  $m$  أصغر عدد طبيعي أكبر تماماً من 1، بحيث تكون  $\mathcal{P}_m$  خاطئة. عندئذ توجد جماعة  
منتهية  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_m}$  من القيم الذاتية المختلفة مثنى مثنى لـ  $u$ ، بحيث لا يكون المجموع  $\sum_{k=1}^m E_{\lambda_k}$   
مباشراً، ومن ثم، لأن  $m$  أصغري، يمكن أن نجد عناصر  $x_m, \dots, x_2, x_1$  بحيث

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\} \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^m x_k = 0$$

ويكون من ثم

$$\sum_{k=1}^m \lambda_m \cdot x_k = 0 \quad \text{و} \quad 0 = u\left(\sum_{k=1}^m x_k\right) = \sum_{k=1}^m u(x_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot x_k$$

وينتج من ذلك، بالطرح، أن

$$\sum_{k=1}^{m-1} (\lambda_m - \lambda_k) \cdot x_k = 0$$

ولكن المجموع  $\sum_{k=1}^{m-1} E_{\lambda_k}$  مباشر استناداً إلى تعريف  $m$ ، إذن

$$\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \quad (\lambda_m - \lambda_i) \cdot x_i = 0$$

وهذا يقتضي أن  $\forall i \in \mathbb{N}_{m-1}, \lambda_i = \lambda_m$ ، لأن الأشعة  $x_{m-1}, \dots, x_1$  غير معدومة، وهذا  
يتناقض مع كون القيم الذاتية  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_m}$  مختلفة مثنى مثنى. نستنتج من ذلك أن  $\mathcal{P}_n$  صحيحة  
أيأ كانت  $n$ .  $\square$

3-1.VI. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً مختلفاً عن  $\{0\}$  على حقل تبديلي  $\mathbb{K}$ . وليكن  $u$   
تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ يكون المجموع  $\sum_{\lambda \in \text{esp}(u)} E_{\lambda}$  مجموعاً مباشراً.

سنفترض في كل ما يأتي أن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد، وبعده  $1 \leq n$ ، على حقل  $\mathbb{K}$ .

4-1.VI. تمهيد: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ لا يتعلق كثير الحدود

$$\mathbb{K}[X] \ni \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n)$$

بالأساس  $\mathcal{E}$  للفضاء  $E$ .  $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}$  يمكن النظر إلى المصفوفة التي نحسب محددها على أنها عنصر من  $M_n(\mathbb{K}(X))$  حيث  $\mathbb{K}(X)$  هو حقل  
الكسور بممتحول واحد  $X$  التي نوابتها في  $\mathbb{K}$ .

الإثبات

$$\begin{array}{ccc}
 (E, \mathcal{E}) & \xrightarrow{u} & (E, \mathcal{E}) \\
 I_E^{-1} \downarrow & & \uparrow I_E \\
 (E, \mathcal{E}') & \xrightarrow{u} & (E, \mathcal{E}')
 \end{array}$$

ليكن  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{E}'$  أساسين للفضاء  $E$ ، لما كان المخطط  
الجاور تبديلياً، نجد أنّ

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \times \text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') \times (P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}})^{-1}$$

ومن ثم يكون

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \times (\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') - X I_n) \times (P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}})^{-1}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned}
 \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n) &= \det P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \cdot \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') - X I_n) \cdot (\det P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}})^{-1} \\
 &= \det(\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}') - X I_n)
 \end{aligned}$$

□

وبذلك يكتمل الإثبات.

يسمح لنا هذا التمهيد بصياغة التعريف التالي:

5-1.VI. تعريف: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . نسمي كثير الحدود

$$\det(\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) - X I_n)$$

حيث  $\mathcal{E}$  هو أساس ما للفضاء  $E$ ، كثير الحدود المميز للتطبيق الخطي  $u$ ، ونرمز إليه  
بالرمز  $\chi_u(X)$ .

6-1.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . إن القيم الذاتية للتطبيق الخطي  $u$  هيجذور كثير الحدود المميز  $\chi_u(X)$  لـ  $u$ ، أي

$$\text{sp}(u) = \{ \lambda \in \mathbb{K} : \chi_u(\lambda) = 0 \}$$

7-1.VI. تعريف: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . نسمي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية  $\lambda$ للتطبيق الخطي  $u$ ، رتبة مضاعفة  $\lambda$  كجذر لكثير الحدود  $\chi_u(X)$ ، ونرمز إليها بالرمز $m_u(\lambda)$ . فيكون

$$m_u(\lambda) = k \Leftrightarrow (X - \lambda)^k \mid \chi_u(X) \wedge (X - \lambda)^{k+1} \nmid \chi_u(X)$$

لندكر بالرمز  $C_J(B)$  الذي يدل على العمود ذي الدليل  $J$  في المصفوفة  $B \in M_n(\mathbb{K})$ .  
ليكن  $\mathcal{E}$  الأساس القانوني في  $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ ، ولتكن  $A_0$  و  $A_1$  مصفوفتين من  $M_n(\mathbb{K})$ .  
لما كان  $\det_{\mathcal{E}}$  شكلاً  $n$ -خطياً أمكننا أن نكتب

$$(*) \quad \det(A_0 + A_1) = \sum_{J_1=0}^1 \sum_{J_2=0}^1 \dots \sum_{J_n=0}^1 \det_{\mathcal{E}}(C_1(A_{J_1})C_1(A_{J_2}), \dots, C_1(A_{J_n}))$$

لإذا كانت  $J$  مجموعة جزئية من  $\mathbb{N}_n$ ، عرفنا المصفوفة  $A_J$  من أعمدها على النحو التالي:

$$C_J(A_J) = \begin{cases} C_J(A_1) & : J \in J, \\ C_J(A_0) & : J \notin J. \end{cases}$$

يسمح لنا هذا الرمز الجديد بكتابة العلاقة (\*) بالشكل

$$(*) \quad \det(A_0 + A_1) = \sum_{J \subset \mathbb{N}_n} \det A_J$$

لإذا استخدمنا العلاقة (\*) في حساب  $\det(M - X I_n)$  بوضع  $A_1 = M$  و  $A_0 = -X I_n$  حصلنا على

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{\emptyset \neq J \subset \mathbb{N}_n} (-X)^{n-\text{card}(J)} \cdot \det M_{J,J}$$

حيث  $M_{J,J}$  هي المصفوفة المربعة من المرتبة  $\text{card}(J)$ ، التي نحصل عليها من  $M$  بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أدلتها إلى  $J$ . وأخيراً نجد

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^n (-X)^{n-k} \sum_{J \in P_k^{(n)}} \det M_{J,J}$$

حيث  $P_k^{(n)}$  هي مجموعة أجزاء  $\mathbb{N}_n$  التي يساوي عدد عناصر كل منها  $k$ .  
نكون بذلك قد أثبتنا المبرهنة الهامة التالية:

8-1.VI. مبرهنة: لتكن  $M$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n$ . عندئذ يكون

$$\det(M - X I_n) = (-X)^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \tau_k(M) \cdot X^{n-k}$$

حيث  $\tau_k(M) = \sum_{J \in P_k^{(n)}} \det M_{J,J}$  و  $P_k^{(n)}$  هي مجموعة أجزاء  $\mathbb{N}_n$  التي يساوي عدد

عناصر كل منها  $k$ ، و  $M_{J,J}$  هي المصفوفة المربعة من المرتبة  $\text{card}(J)$ ، التي نحصل عليها من  $M$  بعد حذف الأعمدة والأسطر التي لا تنتمي أدلتها إلى  $J$ . ونلاحظ بوجه



خاص أن  $\det(M - X I_n)$  هو كثير حدود من الدرجة  $n$ ، حدّه المسيطر هو  $(-1)^n X^n$  وحدّه الثابت هو  $\det M$ ، وحدّه ذو الدرجة  $n-1$  هو  $(-1)^{n-1} \text{tr } M \cdot X^{n-1}$ .

9-1.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ يكون كثير حدوده المميز  $\chi_u(X)$  كثير حدود من الدرجة  $n$  في  $\mathbb{K}[X]$ ، حدّه المسيطر هو  $(-1)^n X^n$  وحدّه الثابت هو  $\det u$ ، وحدّه ذو الدرجة  $n-1$  هو  $(-1)^{n-1} \text{tr } u \cdot X^{n-1}$ . وبوجه خاص إذا كان  $\mathbb{K}$  هو حقل الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$ ، كان طيف التطبيق  $u$  غير خالٍ، أي  $\text{sp}(u) \neq \emptyset$ .

10-1.VI. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ تتحقق الخواص التالية:

1. إن للتطبيقين الخطيين  $u$  و  $u^t$  كثير الحدود المميز نفسه.
2. ليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن  $\{0\}$  من  $E$ ، بحيث  $u(F) \subset F$  ولنرمز بالرمز  $v = u|_F$  إلى التطبيق الخطي من  $\mathcal{L}(F)$  الذي يُعرّضه  $u$  على  $F$  أي  $v: F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$

عندئذ يقسم كثير الحدود  $\chi_v(X)$  كثير الحدود  $\chi_u(X)$ .

3. ليكن  $F$  و  $G$  فضاءين شعاعيين جزئيين مختلفين عن  $\{0\}$  من  $E$ ، بحيث  $u(F) \subset F$  و  $u(G) \subset G$ . نفترض أيضاً أن الفضاءين  $F$  و  $G$  متماثلان، أي  $E = F \oplus G$ . عندئذ يكون  $\chi_u(X) = \chi_v(X) \cdot \chi_w(X)$  حيث  $v = u|_F \in \mathcal{L}(F)$  و  $w = u|_G \in \mathcal{L}(G)$ .

الإثبات

1. ليكن  $\mathcal{E}$  أساساً للفضاء الشعاعي  $E$ ، وليكن  $\mathcal{E}^*$  الأساس الثنوي للأساس  $\mathcal{E}$ . نعلم أنه إذا كانت  $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  كانت  ${}^t M = \text{mat}({}^t u, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^*)$  ومن ثم

$$\chi_u(X) = \det(M - X I_n) = \det({}^t M - X I_n) = \chi_{u^t}(X)$$

2. ليكن  $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_r)$  أساساً لـ  $F$ ، ولنتممه إلى أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  لـ  $E$ . نكتب مصفوفة  $u$  في هذا الأساس بالشكل

$$M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

حيث  $P = \text{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$  إذن

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \det(M - X I_n) = \det(P - X I_r) \cdot \det(Q - X I_{n-r}) \\ &= \chi_v(X) \cdot \det(Q - X I_{n-r}) \end{aligned}$$

3. ليكن  $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_r)$  أساساً لـ  $F$ ، وليكن  $\mathcal{E}'' = (e_{r+1}, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $G$ ، عندئذ يكون  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$ . وتكتب مصفوفة  $u$  في هذا الأساس بالشكل

$$M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

حيث  $P = \text{mat}(v, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$  و  $Q = \text{mat}(w, \mathcal{E}'', \mathcal{E}'')$ . إذن

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \det(M - X I_n) = \det(P - X I_r) \cdot \det(Q - X I_{n-r}) \\ &= \chi_v(X) \cdot \chi_w(X) \end{aligned}$$

□

وهو المطلوب إثباته.

11-1.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . ولتكن  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $u$ . عندئذ يكون بُعد الفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية  $\lambda$ ، أي  $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$  أصغر أو يساوي رتبة مضاعفة القيمة الذاتية  $\lambda$ . أي

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u), \quad 1 \leq \dim E_\lambda \leq m_u(\lambda)$$

الإثبات

ليكن  $F = E_\lambda$ ، عندئذ يكون  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً مختلفاً عن  $\{0\}$  من  $E$ ، يُحقق  $u(F) \subset F$  ويكون أيضاً  $v = u|_F = \lambda I_F$ . إذن  $\chi_v(X) = (\lambda - X)^{\dim F}$  وهو يقسم كثير الحدود  $\chi_u(X)$  بمقتضى المبرهنة السابقة. ولكن

□

$$(\lambda - X)^{\dim F} \mid \chi_u(X) \Rightarrow \dim F \leq m_u(\lambda)$$

2.VI. التطبيقات الخطية القابلة للتمثيل بمصفوفات قطرية

1-2.VI. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ تكون الخاصتان التاليتان متكافئتين:

1. يوجد أساس  $\mathcal{E}$  لـ  $E$  بحيث تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  قطرية.
2. يقبل كثير الحدود  $\chi_u(X)$  التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في  $\mathbb{K}[X]$ ، ويكون بُعد الفضاء الذاتي الموافق لأي قيمة ذاتية لـ  $u$  مساوياً رتبة مضاعفتها.

## الإثبات

1.  $\Leftarrow$  2. ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$  بحيث تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  قطرية. ولنرمز بالرموز  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  إلى العناصر المختلفة في قطر المصفوفة  $M$ . ولنفترض أن  $\lambda_i$  مكررة  $m_i$  مرة. عندئذ يكون لدينا، من جهة أولى،

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{m_i}$$

ومن ثم  $\text{sp}(u) = \{\lambda_p, \dots, \lambda_1\}$ .

من جهة ثانية، نلاحظ أن  $m_i = \text{card} \{j \in \mathbb{N}_n : u(e_j) = \lambda_i e_j\}$ ، إذن  $m_i \leq \dim E_{\lambda_i}$ .

وذلك أيًا كانت  $i \in \mathbb{N}_p$ . وبالمستفادة من النتيجة 1.VI-11. يكون  $m_i \geq \dim E_{\lambda_i}$  أيًا كان

$i \in \mathbb{N}_p$ . وهذا يقتضي أن  $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ ،  $\forall i \in \mathbb{N}_p$ .

2.  $\Leftarrow$  1. نعلم، استناداً إلى الفرض، أن

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{m_i}$$

حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  عناصر مختلفة من  $\mathbb{K}$ ، تكون في مجموعتها طيف التطبيق الخطي

ii. وأن  $\forall i \in \mathbb{N}_p$ ،  $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ ، حيث  $E_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k I_E)$ .

بناءً على المبرهنة 2-1.VI. يكون المجموع  $F = \sum_{k=1}^p E_{\lambda_k}$  مجموعاً مباشراً، ومن ثم

$$\dim F = \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^p m_k = \deg \chi_u(X) = n = \dim E$$

إذن  $F = E$ ، أو  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$ . فإذا اخترنا أساساً  $\mathcal{E}_k$  لكل من الفضاءات الجزئية  $E_{\lambda_k}$ ،

وعرفنا الأساس  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_p$  للفضاء الكلي  $E$ ، كانت المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$

قطرية، وكَمَل الإثبات.  $\square$

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمة التالية:

2-2.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . إذا كان  $u$  يقبل  $n$  قيمة ذاتية مختلفة ( نذكر

أن  $n = \dim E$  )، أي  $\text{card}(\text{sp}(u)) = n$ ، قبل  $u$  التمثيل بمصفوفة قطرية.

لنتقل إلى وجهة النظر المصفوفية.

3-2.VI. تعريف: لتكن  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . نقول إن المصفوفة  $M$  تشابه مصفوفة قطرية إذا وفقط

إذا وجدت مصفوفة قلوبية  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، ووجدت مصفوفة قطرية  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  بحيث

$$M = P D P^{-1}$$

يكافئ ذلك قولنا إن التطبيق الخطي

$$u_M : \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto M X$$

يقبل التمثيل بمصفوفة قطرية، حيث نأخذ  $P = \text{mat}(I_{\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ، و  $\mathcal{E}$  هو الأساس

القانوني للفضاء  $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ ، و  $\mathcal{V}$  هو أساس  $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  المكوّن من الأشعة الذاتية لـ  $u_M$ .

4-2.VI. مثال: ليكن  $\mathbb{K}$  حقلاً تبادلياً عدده المميز لا يساوي 2. ولنتأمل في  $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$  المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

ولكن الأشعة  $v_4, v_3, v_2, v_1$  من  $\mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{K})$  المعرفة كما يلي:

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن

$$M v_1 = (a + b + c + d) v_1, \quad M v_2 = (a - b + c - d) v_2,$$

$$M v_3 = (a + b - c - d) v_3, \quad M v_4 = (a - b - c + d) v_4,$$

فالأشعة  $v_4, v_3, v_2, v_1$  أشعة ذاتية للتطبيق الخطي  $u_M$  وهي تكون أساساً  $\mathcal{V}$  للفضاء

$\mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{K})$ . وذلك لأن المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

قلوبية، إذ نحقق  $P^2 = 4I_4$ .

وتكون مصفوفة  $u_M$  في الأساس  $\mathcal{V}$ ، مصفوفة قطرية، هي

$$D = \text{mat}(u, \mathcal{V}, \mathcal{V}) = \begin{bmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{bmatrix}$$

ونُحقّق

$$.M = PDP^{-1}$$

فالمصفوفة  $M$  تشابه مصفوفة قطرية. ويمكننا أن نحسب  $X_M(X) = X_D(X)$  لنجد

$$\begin{aligned} X_M(X) &= (a+b+c+d-X)(a-b+c-d-X)(a+b-c-d-X)(a-b-c+d-X) \\ &= (X-a)^4 - 2(b^2+c^2+d^2)(X-a)^3 - 8bcd(X-a) + (b^2-c^2-d^2)^2 - 4c^2d \end{aligned}$$

### 3.VI. التطبيقات الخطية القابلة للتمثيل بمصفوفات مثلثية

1-3.VI. تعريف: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . نقول إنّ التطبيق الخطي  $u$  يقبل التمثيل

بمصفوفة مثلثية، إذا وفقط إذا وُجدَ أساس  $\mathcal{E}$  للفضاء الشعاعي  $E$  بحيث تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  مثلثية.

نلاحظ أننا لم نحدد أكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  مثلثية عليا أم مثلثية سفلى، ذلك لأنه إذا كان  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  وعرفنا  $\mathcal{E}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ ، وكانت  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  مثلثية عليا (سفلى)، كانت المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}', \mathcal{E}')$  مثلثية سفلى (عليا).

2-3.VI. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ يقبل  $u$  التمثيل بمصفوفة مثلثية إذا وفقط إذا كان كثير الحدود المميز  $X_u(X)$  يقبل التحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في  $\mathbb{K}[X]$ .

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً لـ  $E$  بحيث تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (a_{ij})$  مثلثية عليا. عندئذ يكون

$$.X_u(X) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X)$$

بالعكس، سنثبت بالتدريج على  $\dim F = n$ ، أن كل تطبيق خطي من  $\mathcal{L}(F)$  يقبل كثير حدوده المميز التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في  $\mathbb{K}[X]$ ، يقبل التمثيل بمصفوفة مثلثة.

إن هذه القضية صحيحة حين يكون  $n = 1$ .

نفترض صحة هذه القضية، مهما يكن الفضاء شعاعي  $F$  الذي بُعده أصغر تماماً من  $n$ . وليكن  $E$  فضاءً شعاعياً بُعده  $n$ . وليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$  بحيث يقبل كثير الحدود المميز  $X_u(X)$  التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في  $\mathbb{K}[X]$ .

لتكن  $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، (إن  $\text{sp}(u) \neq \emptyset$ ) لأن  $X_u(X)$  يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في  $\mathbb{K}[X]$ ، وليكن  $x$  شعاعاً ذاتياً لـ  $u$  موافقاً للقيمة الذاتية  $\lambda$ . أي إن  $x$  عنصر من  $E_\lambda \setminus \{0\}$ .

لنضع  $e_1 = x$ ، ولنتممه إلى أساس  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  لـ  $E$ . وليكن  $p: E \rightarrow F$  الإسقاط الخطي لـ  $E$  على  $F = \text{vect}((e_2, e_3, \dots, e_n))$  توازياً مع  $G = \mathbb{K} \cdot e_1$ ، ولنعرّف

$$s: F \rightarrow E, x \mapsto x$$

ولنضع أخيراً  $v = p \circ u \circ s \in \mathcal{L}(F)$ . فإذا كانت  $M = \text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = (m_{ij})$  كان

$$\forall j \in \{2, \dots, n\} \quad p \circ u \circ s(e_j) = \sum_{i=2}^n m_{ij} \cdot e_i$$

وصار لدينا

$$\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

حيث  $\mathcal{E}' = (e_2, \dots, e_n)$  أساس لـ  $F$ .

من جهة أولى، لدينا  $\dim F < n$  و  $v \in \mathcal{L}(F)$ ، ومن جهة ثانية لدينا

$$X_u(X) = (\lambda - X) X_v(X)$$

وهذا يقتضي أن  $X_v(X)$  يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في  $\mathbb{K}[X]$ . بنجم عن ذلك، استناداً إلى فرض التدريج، أنه يوجد أساس  $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$  لـ  $F$  بحيث تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}})$  مثلثة عليا. عندئذ تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{F}, \mathcal{F})$  حيث  $\mathcal{F}$  هو الأساس  $\mathcal{F} = (e_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$  لـ  $E$ ، مثلثة عليا أيضاً، ويكمل الإثبات.  $\square$

نستنتج من المبرهنة السابقة النتيجة المهمة التالية:

3-3.VI. نتيجة: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$ . عندئذ يقبل كل تطبيق خطي  $u$  من  $\mathcal{L}(E)$ ، التمثيل بمصفوفة مثلثية.

الإثبات

هذه النتيجة صحيحة لأنه في  $\mathcal{L}[X]$  يقبل كل كثير حدود غير ثابت التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

□

4.VI. كثيرات الحدود والتطبيقات الخطية

ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ ، ولتكن  $k \in \mathbb{N}$ . إذا كانت  $k = 0$  اصطلاحاً أن  $u^k = I_E$ . وإذا كانت  $0 < k$  عرفنا  $u^k = u \circ u^{k-1} = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ مرات}}$ .

1. 4.VI. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . إن التطبيق

$$\Psi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E), P \mapsto P(u)$$

الذي يربط بكثير الحدود  $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$  من  $\mathbb{K}[X]$  التطبيق الخطي  $P(u) = \sum_{k=0}^m a_k u^k$ .

من  $\mathcal{L}(E)$ ، هو تشاكل بين الجبرين  $\mathbb{K}[X]$  و  $\mathcal{L}(E)$ .

الإثبات

يجب أن نثبت الخاصّة التالية:

$$\forall (\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], \quad \forall u \in \mathcal{L}(E),$$

$$P(u) + Q(u) = (P + Q)(u)$$

$$\lambda \cdot P(u) = (\lambda P)(u)$$

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$$

□

وهذا تمحقّق مباشرة تركه تمريناً للقارئ.

2-4.VI. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . وليكن كثير الحدود  $P$  و  $Q$  من  $\mathbb{K}[X]$ .  
نفترض أن  $P$  و  $Q$  أوليان فيما بينهما. عندئذ يكون

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

الإثبات

استناداً إلى مبرهنة Bezout نعلم أنه يوجد  $S$  و  $T$  من  $\mathbb{K}[X]$  بحيث

$$SP + TQ = 1$$

وهذه المساواة تقتضي أن يكون

$$(*) \quad S(u) \circ P(u) + T(u) \circ Q(u) = I_E$$

- لنكن  $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$ ، إذن بناءً على (\*) يكون

$$x = S(u)(P(u)(x)) + T(u)(Q(u)(x)) = 0$$

$$\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$$

- ومن ناحية أخرى، لنكن  $x \in \ker(PQ)(u)$ ، نعرف  $x_1 = T(u) \circ Q(u)(x)$  وكذلك نعرف  $x_2 = S(u) \circ P(u)(x)$ . فليكون  $x_1 \in \ker P(u)$  و  $x_2 \in \ker Q(u)$ ، واستناداً إلى (\*) يكون أيضاً  $x = x_1 + x_2$ . إذن  $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$ . وهذا هو المطلوب إثباته.  $\square$

3-4.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . ولتكن كثيرات حدود أولية  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_m}$

فيما بينها متني متني من  $\mathbb{K}[X]$ . وليكن  $P = \prod_{k=1}^m P_k$ . عندئذ يكون

$$\ker(P)(u) = \bigoplus_{k=1}^m \ker P_k(u)$$

الإثبات

هذه النتيجة تعميم مباشر للمبرهنة السابقة، ويجري إثباتها بالتدريج على العدد  $m$ .  $\square$

4-4.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . هناك تكافؤ بين القضيتين التاليتين:

1. يقبل التطبيق الخطي  $u$  التمثيل بمصفوفة قطرية.
2. يوجد كثير حدود  $P$  من  $\mathbb{K}[X]$  يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى مختلفة متني متني، بحيث  $P(u) = 0$ .



### الإثبات

1.  $\Leftarrow$  2. لما كان التطبيق الخطي  $u$  يقبل التمثيل بمصفوفة قطرية، كان

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_{\lambda} \quad \text{حيث} \quad E_{\lambda} = \ker(u - \lambda I_E)$$

يكفي إذن أن نعرف  $P = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (\lambda - X)$ ، ونتيقن بسهولة أن  $P$  يحقق الشرط 2.

2.  $\Leftarrow$  1. لنفترض أن  $P = \prod_{k=1}^m (X - \mu_k)$  حيث تكون الأعداد  $\mu_1, \dots, \mu_m$  مختلفة مثنى مثنى.

لما كان  $P(u) = 0$ ، ولما كانت كثيرات الحدود  $((X - \mu_k))_{k \in \text{IN}_m}$  أولية فيما بينها مثنى مثنى، كان

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^m \ker(u - \mu_k I_E)$$

وذلك بمقتضى النتيجة 3-4.VI. لنعرف إذن  $J = \{k \in \text{IN}_m : \ker(u - \mu_k I_E) \neq \{0\}\}$  فيكون

$$E = \bigoplus_{k \in J} \ker(u - \mu_k I_E)$$

يكفي أن نختار أساساً  $\mathcal{E}$  لـ  $E$ ، من الشكل  $\bigcup_{k \in J} \mathcal{E}_k$  حيث يكون  $\mathcal{E}_k$  أساساً ما للفضاء

$\ker(u - \mu_k I_E)$ ، حتى تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  قطرية، ومنه 1.  $\square$

5-4.VI. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . ولنفترض أنه يوجد في  $\text{IK}[X]$  كثير حدود

$$P(X) = \prod_{k=1}^m (X - \mu_k)^{n_k}$$

بحيث تكون الأعداد  $\mu_1, \dots, \mu_m$  مختلفة مثنى مثنى، ويكون  $P(u) = 0$ . عندئذ يكون

$$E = \bigoplus_{k=1}^m \ker(u - \mu_k)^{n_k}$$

### الإثبات

تتجم هذه النتيجة مباشرة عن النتيجة 3-4.VI لأن كثيرات الحدود  $((X - \mu_k)^{n_k})_{k \in \text{IN}_m}$

أولية فيما بينها مثنى مثنى.  $\square$

6-4.VI. مبرهنة Cayley-Hamilton: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ يكون

$$X_u(u) = 0$$

الإثبات

ليكن  $x$  عنصراً غير معدوم من  $E$ . أما كان بُعد الفضاء الشعاعي  $E$  منتهياً ويساوي  $n$ ، كانت الجملة  $(x, u(x), \dots, u^n(x))$  مرتبطة خطياً. يمكننا إذن أن نعرف  $p = p_x$  أصغر عدد طبيعي  $k$  يجعل الجملة  $(x, u(x), \dots, u^k(x))$  مرتبطة. ونعرف أيضاً

$$F_x = \text{vect} \{ (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \}$$

إن اختيارنا للعدد  $p$  يجعل من الجملة  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  جملة حرة، فهي إذن أساس للفضاء الجزئي  $F_x$ ، نرمز إليه بالرمز  $\mathcal{F}$ . ولما كانت الجملة  $(x, u(x), \dots, u^p(x))$  مرتبطة، أمكننا أن نجد  $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$  بحيث

$$(*) \quad u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot u^k(x)$$

تقتضي هذه المساواة أن الفضاء  $F_x$  يُحقق الشرط  $u(F_x) \subset F_x$ ، وإذا عرفنا التطبيق الخطي

$$v = u|_{F_x} : F_x \rightarrow F_x, y \mapsto u(y)$$

من  $\mathcal{L}(F_x)$ ، صار لدينا بمقتضى المبرهنة 10-1.VI

$$(0) \quad X_u(X) = \mathcal{Q}(X) X_v(X)$$

ولكن

$$M_x = \text{mat}(v, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

ويبين حساب مباشر نترك تفاصيله للقارئ أن

$$X_v(X) = \det(M_x - X I_p) = (-1)^p (X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k)$$

ومن ثم يكون  $X_v(u)(x) = (-1)^p (u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)) = 0$  استناداً إلى العلاقة (\*).

وأخيراً نجد، بناءً على (0)، أن  $X_u(u)(x) = \mathcal{Q}(u) \circ X_v(u)(x) = 0$ . ويكتمل الإثبات بملاحظة

□

أن  $x$  عنصر ما من  $E$ .

## 5.VI. تطبيقات

1-5.VI. مبرهنة: لتكن  $A$  مصفوفة من  $M_m(\mathcal{C})$ . ولنفترض أنه يوجد كثير حدود  $P \in \mathcal{C}[X]$

يُكتب بالشكل  $P(X) = \prod_{k=1}^p (\lambda_k - X)^{n_k}$ ، حيث  $\lambda_p, \dots, \lambda_1$  أعداد مختلفة معنى

معنى، ويُحقق  $P(A) = 0$ . عندئذ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = Q_n(A)$$

حيث  $Q_n$  هو كثير الحدود الوحيد من  $\mathcal{C}[X]$ ، الذي يُحقق الشروط:

$$\begin{aligned} \deg Q_n &< \deg P \\ \forall k \in \mathbb{N}_p, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\} \quad (X^n)^{(j)}(\lambda_k) &= (Q_n)^{(j)}(\lambda_k) \end{aligned}$$

الإثبات

لتكن  $\ell = \deg P = \sum_{k=1}^p n_k$ ، ولنعرّف المجموعة

$$\Delta = \{(j, k) : \mathbb{N}^2 : (1 \leq k \leq p) \wedge (0 \leq j < n_k)\}$$

فيكون  $\text{card } \Delta = \ell$ .

نمّ لتأمل التطبيق الخطي

$$\Phi : \mathcal{C}[X] \rightarrow \mathcal{C}^\Delta, \quad T(X) \mapsto (T^{(j)}(\lambda_k))_{(j,k) \in \Delta}$$

نلاحظ أولاً أن

$$\begin{aligned} T(X) \in \ker \Phi &\Leftrightarrow \forall (j, k) \in \Delta, \quad T^{(j)}(\lambda_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_p, \quad (\lambda_k - X)^{n_k} \mid T(X) \\ &\Leftrightarrow P(X) \mid T(X) \end{aligned}$$

$$\text{ذن } \ker \Phi = \{S(X)P(X) : S \in \mathcal{C}[X]\}$$

لنعرّف  $\mathcal{C}_{\ell-1}[X]$  بأنه الفضاء الشعاعي الجبري من  $\mathcal{C}[X]$  المؤلف من كثيرات الحدود العقدية التي درجتها أصغر تماماً من  $\ell$ ، فيكون  $\dim \mathcal{C}_{\ell-1}[X] = \ell = \text{card } \Delta$ . ولتأمل

$$\Psi = \Phi|_{\mathcal{C}_{\ell-1}[X]} : \mathcal{C}_{\ell-1}[X] \rightarrow \mathcal{C}^\Delta, \quad \Psi(T) = \Phi(T)$$

لما كان  $\{0\} = \ker \Psi = \mathcal{C}_{\ell-1}[X] \cap \ker \Phi$ ، كان  $\Psi$  تطبيقاً خطياً متبايناً بين فضاءين شعاعيين هما الجهد نفسه، لذا فهو تقابل خطي. وينتج بوجه خاص أن  $\Phi$  غامر.

لستنتج من هذه الدراسة أنه، أيّا كان  $n \in \mathbb{N}$ ، يوجد كثير حدود وحيد  $Q_n \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X]$  بحيث  $\Psi(Q_n) = \Phi(X^n)$ . فشروط المبرهنة تعيّن  $Q_n$  بطريقة وحيدة.

ومن ناحية أخرى، يُحقق كثير الحدود  $Q_n$  العلاقة  $Q_n - X^n \in \ker \Phi$  إذن يوجد كثير حدود  $S_n \in \mathcal{C}[X]$  بحيث  $X^n = Q_n(X) + S_n(X)P(X)$  ومنه

$$A^n = Q_n(A) + S_n(A)P(A) = Q_n(A)$$

لأن  $P(A) = 0$ . وهذا يُكْمِلُ الإثبات.  $\square$

يمكننا أن نكون أكثر دقة في صياغة المبرهنة السابقة. لنحتفظ برموز المبرهنة السابقة حيث أتينا أن.

$$\Psi: \mathcal{C}_{\ell-1}[X] \rightarrow \mathcal{C}^\Delta, T(X) \mapsto (T^{(j)}(\lambda_k))_{(j,k) \in \Delta}$$

تقابل خطي. إذن، أيًا كان  $(j_0, k_0) \in \Delta$ ، يوجد كثير حدود وحيد  $P_{j_0, k_0} \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X]$  بحيث يكون  $\Psi(P_{j_0, k_0}) = \delta_{j, j_0} \delta_{k, k_0} = e_{j_0, k_0}(j, k)$  حيث  $\delta_{\alpha, \beta}$  هو رمز كرونيكر المتعارف، أي

$$e_{j_0, k_0}(j, k) = \begin{cases} 1 & : (j_0, k_0) = (j, k) \\ 0 & : (j_0, k_0) \neq (j, k) \end{cases}$$

ولكن الجملة  $(e_{j_0, k_0})_{(j_0, k_0) \in \Delta}$  هي الأساس القانوني للفضاء الشعاعي  $\mathcal{C}^\Delta$ ، إذن تكون الجملة  $(P_{j_0, k_0})_{(j_0, k_0) \in \Delta}$  أساساً للفضاء الشعاعي  $\mathcal{C}_{\ell-1}[X]$ .

ليكن  $Q \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X]$  إذن توجد جملة  $(\beta_{j,k})_{(j,k) \in \Delta}$  من  $\mathcal{C}^\Delta$  بحيث

$$Q = \sum_{(j,k) \in \Delta} \beta_{j,k} \cdot P_{j,k}$$

ولتعيين الثوابت  $(\beta_{j,k})_{(j,k) \in \Delta}$ ، نحسب من العلاقة السابقة  $Q^{(t)}(\lambda_s)$  حيث  $\Delta \ni (t, s)$  فنجد أن  $Q^{(t)}(\lambda_s) = \beta_{t,s}$  إذن

$$\forall Q \in \mathcal{C}_{\ell-1}[X], \quad Q = \sum_{(j,k) \in \Delta} Q^{(j)}(\lambda_k) \cdot P_{j,k}$$

وبوجه خاص يكون  $Q_n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) P_{j,k}$  حيث  $\mathcal{U}_{j,k}(n) = (X^n)^{(j)}|_{X=\lambda_k}$  أو

$$\mathcal{U}_{j,k}(n) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-j+1)\lambda_k^{n-k} & : n \geq j \\ t! & : n = j \\ 0 & : n < j \end{cases}$$

وأخيراً نجد

$$(V) \quad \forall n > 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{U}_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A)$$

حيث توضّح العلاقة الهامة (V) تبعية  $A^n$  لـ  $n$ .

2-5.VI. نتيجة<sup>P2</sup>: لنكن  $A$  مصفوفة من  $M_m(\mathbb{C})$ . وليكن  $\rho(A)$  نصف القطر الطيفي

للمصفوفة  $A$ ، أي  $\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A) \}$ . وليكن  $\|\cdot\|$  نظيماً ما على

الفضاء الشعاعي  $M_m(\mathbb{C})$ . عندئذ يوجد ثابت  $K$  موجب تماماً بحيث يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m \Rightarrow \|A^n\| \leq K n^{m-1} (\rho(A))^{n-m+1}$$

الإثبات

ليكن  $\mathcal{C}[X] \ni P = X_A$  كثير الحدود المميز للمصفوفة  $A$ . فهو يكتب بالشكل

$$P(X) = \prod_{k=1}^p (\lambda_k - X)^{n_k}$$

حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  أعداد مختلفة مثنى مثنى تكون طيف  $A$ ، ويكون  $P(A) = 0$ . استناداً

إلى المبرهنة 6-4.VI. ويكون من ثم

$$\forall n \geq m, \quad A^n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} n(n-1)\dots(n-j+1) \cdot \lambda_k^{n-j} P_{j,k}(A)$$

وذلك باستخدام رموز المبرهنة السابقة. إذن، أيما كانت  $0 < n$ ، فإن

$$\begin{aligned} \|A^n\| &\leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} n(n-1)\dots(n-j+1) \cdot (\rho(A))^{n-j} \|P_{j,k}(A)\| \\ &\leq n^{m-1} \cdot (\rho(A))^{n-m+1} \cdot \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} (\rho(A))^{m-1-j} \|P_{j,k}(A)\| \end{aligned}$$

□

وهو المطلوب إثباته، حيث  $K = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} (\rho(A))^{m-1-j} \|P_{j,k}(A)\|$ .

3-5.VI. نتيجة<sup>P3</sup>: لنكن  $A$  مصفوفة من  $M_m(\mathbb{C})$ . وليكن  $\rho(A)$  نصف القطر الطيفي

للمصفوفة  $A$ ، أي  $\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \text{sp}(A) \}$ . عندئذ تكون الخواص التالية

متكافئة

$$1. \quad \rho(A) < 1$$

$$2. \quad \text{إن المتتالية } (A^n)_{n \geq 0} \text{ متقاربة نحو } 0 \text{ في } M_m(\mathbb{C})$$

$$3. \quad \text{إن المتسلسلة } \sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ متقاربة في } M_m(\mathbb{C})$$

<sup>P3</sup> نفترض أن القارئ على دراية بالفضاءات الشعاعية المنظمة، راجع كتاب التحليل ٢.

4-5.VI. مبرهنة: ليكن  $(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathcal{C}^m$  حيث  $1 \leq m$ ، و  $a_0 \neq 0$ . إن الفضاء

الشعاعي الجزئي من  $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$  المعروف كما يلي

$$\mathcal{E} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \geq m, u_n = a_{m-1}u_{n-1} + \dots + a_1u_{n-m+1} + a_0u_{n-m}\}$$

هو فضاء شعاعي بُعد  $m$ . وإذا كان

$$X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{n_k}$$

حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  أعداد مختلفة مثني مثني، كوّنت الجملة  $(u_{t,s})_{(t,s) \in \Delta}$  حيث

$$\Delta = \{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : (0 \leq j < n_k) \wedge (1 \leq k \leq p)\}$$

و

$$u_{t,s}(n) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-t+1)\lambda_s^{n-t} & : n \geq t \\ t! & : n = t \\ 0 & : n < t \end{cases}$$

أساساً للفضاء  $\mathcal{E}$ .

الإثبات

لنثبت أولاً أن  $\mathcal{E} \ni u_{t,s}$  وذلك أياً كانت  $(t, s) \in \Delta$ . في الحقيقة، نلاحظ أن

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{t,s}(n) = (X^n)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s}$$

ومنه، أياً كانت  $m \leq n$  نجد

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_{m-k} u_{t,s}(n-k) &= \sum_{k=1}^m a_{m-k} (X^{n-k})^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} = \left( \sum_{k=1}^m a_{m-k} X^{n-k} \right)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} \\ &= (X^{n-m} \sum_{k=1}^m a_{m-k} X^{m-k})^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} \\ &= \left( X^{n-m} (X^m - \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{n_k}) \right)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} \\ &= \left( X^n - X^{n-m} \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{n_k} \right)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} = (X^n)^{(t)} \Big|_{X=\lambda_s} = u_{t,s}(n) \end{aligned}$$

إذن الجملة  $(u_{t,s})_{(t,s) \in \Delta}$  هي جملة من عناصر  $\mathcal{E}$ .

من ناحية أخرى نرى بسهولة أن التطبيق الخطي

$$\Theta: E \rightarrow \mathcal{C}^m, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$$

تقابل، ومن ثم يكون  $\dim \mathcal{E} = m = \text{card } \Delta$ . يكفي إذن حتى يتم المطلوب أن نثبت أن الجملة  $(u_{t,s})_{(t,s) \in \Delta}$  تولد الفضاء الشعاعي  $\mathcal{E}$ .

$$\text{لكن } (u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}, \text{ ولنعرف الشعاع } Z_n = \begin{bmatrix} u_{n-m} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \text{ من } M_{m \times 1}(\mathcal{C}) \text{ حين تكون}$$

$n \geq m$ . فنلاحظ أن  $Z_{n+1} = A Z_n$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} \end{bmatrix} \in M_m(\mathcal{C})$$

ومنه، يكون  $Z_{n+m} = A^n Z_m$ ،  $\forall n \geq 0$ .

ولكن بنشر المحدد  $\chi_A(X)$  وفق العمود الأول وبالتدريج على مرتبة هذا المحدد نجد

$$\chi_A(X) = (-1)^m \left( X^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right) = \prod_{k=1}^p (\lambda_k - X)^{n_k}$$

وإذا استخدمنا العلاقة (V) بعد ملاحظة أن  $\chi_A(A) = 0$  وجدنا

$$\forall n \geq 0, \quad A^n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} u_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A)$$

ومن ثم

$$\forall n \geq 0, \quad Z_{n+m} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} u_{j,k}(n) \cdot P_{j,k}(A) Z_m$$

ولما كانت  $u_n$  هي المركبة الأولى للشعاع  $Z_{n+m}$ ، أمكننا بوضع  $\beta_{j,k}$  للدلالة على المركبة الأولى للشعاع  $P_{j,k}(A) Z_m$  أن نكتب

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{n_k-1} \beta_{j,k} \cdot u_{j,k}(n)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن الجملة  $(u_{t,s})_{(t,s) \in \Delta}$  أساس للفضاء الشعاعي  $\mathcal{E}$ .  $\square$

5-5.VI. مثال: لندرس المتتاليات  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بالعلاقات :

$$2x_{n+1} = 5x_n - 5y_n + 2z_n$$

$$2y_{n+1} = 5x_n - 6y_n + 3z_n$$

$$2z_{n+1} = 6x_n - 9y_n + 5z_n$$

في الحقيقة، إذا عرفنا  $T_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{C})$  و  $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ ، وجدنا أن العلاقات

التدريجية التي تعرف المتتاليات  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تكافئ  $T_{n+1} = AT_n$  وذلك أيًا كانت  $0 \leq n$  ومن ثم

$$\forall n \geq 0, T_n = A^n \cdot T_0$$

لنؤول المسألة إذن إلى حساب  $A^n$ ، لهذا علينا إيجاد كثير حدود  $P$  يُحقق  $P(A) = 0$ ، والمرشح الوحيد أمامنا هو  $\chi_A$  كثير الحدود المميز للمصفوفة  $A$ . ولنجد بالحساب المباشر

$$\chi_A(X) = -X^3 + 2X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2$$

لنبحث إذن عن كثير الحدود الوحيد  $Q_n(X)$  الذي درجته أصغر أو تساوي 2 ويُحقق

$$Q_n(1) = 1, \quad Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad Q'_n\left(\frac{1}{2}\right) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

لنجد بالحل

$$Q_n(X) = (1 - (n+1)2^{-n})(2X-1)^2 + n2^{-n}(2X-1) + 2^{-n}$$

ولكن

$$2A - I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2A - I_3)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

إذن بالتعويض فيما سبق وباستخدام  $A^n = Q_n(A)$  نجد

$$A^n = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n}{2^n} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون، أيًا كانت  $n \in \mathbb{N}$ ،



$$\begin{aligned}x_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(2x_0 - 3y_0 + z_0) + n2^{-n}(x_0 - 2y_0 + z_0) \\y_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 4y_0 + z_0) + n2^{-n}(2x_0 - 4y_0 + 2z_0) \\z_n &= 3x_0 - 3y_0 + z_0 - 2^{-n}(3x_0 - 3y_0) + n2^{-n}(3x_0 - 6y_0 + 3z_0)\end{aligned}$$

وللاحظ بوجه خاص أن المتتاليات الثلاث  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة نحو النهاية نفسها، وهي  $3x_0 - 3y_0 + z_0$ .

□



## تمارين

التمرين 1. احسب كثير الحدود المميز لكل من المصفوفات التالية:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & b \\ a & \dots & a & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_2 \\ a_n & \dots & a_2 & a_1^2 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

التمرين 2. لتكن المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$ . عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية لـ  $A$ .

هل تشابه المصفوفة  $A$  مصفوفة قطرية؟ احسب  $A^n$  حين يكون  $n \in \mathbb{N}$ .

التمرين 3. أثبت تشابه المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

التمرين 4. ادرس اختزال المصفوفات التالية، أي بين إذا كانت تشابه مصفوفات قطرية وفي

حال الإيجاب عيّن مصفوفة الانتقال والمصفوفة القطرية الموافقة.

• المصفوفة  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} = \alpha_i$$

• المصفوفة  $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, b_{ij} = \begin{cases} 1 & : i + j = n + 1 \\ 0 & : i + j \neq n + 1 \end{cases}$$

• المصفوفة  $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, c_{ij} = \begin{cases} c_i & : i + j = n + 1 \\ 0 & : i + j \neq n + 1 \end{cases}$$

• المصفوفة  $(d_{ij}) = D \in M_n(\mathbb{C})$ ، حيث

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, d_{ij} = \begin{cases} 1 & : (i-1)(j-1)(i-j) = 0 \\ 0 & : (i-1)(j-1)(i-j) \neq 0 \end{cases}$$

التمرين 5. حقل الدراسة هو  $\mathbb{C}$ . أوجد مصفوفة قطرية مشابهة للمصفوفة  $M$  في كل من

الحالات التالية، واحسب  $M^n$  أيًا كانت  $n \in \mathbb{N}$ .

$$1^\circ. M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2^\circ. M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3^\circ. M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 4^\circ. M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

التمرين 6. لتكن  $M$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n$  على حقل  $\mathbb{K}$ . نفترض أن المصفوفة  $M$  تكتب

$$M_{p \times q}(\mathbb{K}) \ni B, \quad M_q(\mathbb{K}) \ni D, \quad M_p(\mathbb{K}) \ni A \quad \text{حيث} \quad M = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

$$\text{و } p+q=n, \quad M_{q \times p}(\mathbb{K}) \ni C$$

1. أثبت أنه إذا كانت  $A$  قلوية فإن  $\det M = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$

2. أثبت أنه إذا كانت  $D$  قلوية فإن  $\det M = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C)$

3. ليكن  $(p, n) \in \mathbb{N}^2$  حيث  $n \geq p \geq 1$ . ولتكن  $M_{n \times p}(\mathbb{K}) \ni A$  و  $M_{p \times n}(\mathbb{K}) \ni B$ .

أثبت أن

$$\det(XI_n + AB) = X^{n-p} \det(XI_p + BA)$$

تطبيق - ليكن  $(X, Y) \in (M_{n \times 1}(\mathbb{K}))^2$ ، نضع  $X \cdot Y + Y \cdot X = M$ . عيّن كثير الحدود المميز

$$M = (\cos(j-i)\theta)_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$$

- لتكن  $M_{2n}(\mathbb{K}) \ni \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix} = B$  و  $M_n(\mathbb{K}) \ni A$ . أثبت أن

$$X_B(X) = (-1)^n X_A(X^2)$$

التمرين 7. لتكن المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ . نتأمل التطبيق الخطي  $\Phi \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{C}))$  المعرفة بالمعرف  $\Phi(M) = AM - MA$  حين يكون  $M \in M_2(\mathbb{C})$ . عيّن نواة  $\Phi$  وأثبت أنه قابل للتمثيل بمصفوفة قطرية.

التمرين 8. ليكن  $E$  فضاء التوابع المستمرة على  $[0,1]$  والتي تأخذ قيمها في  $\mathbb{R}$ . وليكن التطبيق الخطي  $u: E \rightarrow E: f \mapsto u(f)$  المعرفة بالعلاقة

$$u(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

عيّن القيم والأشعة الذاتية لـ  $u$ .

التمرين 9. ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين مختلفين. وليكن  $E = \mathbb{R}_n[X]$  فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن  $n$ . عيّن القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق  $u \in \mathcal{L}(E)$  حيث

$$u(P)(X) = (X - a)(X - b)P'(X) - (nX - \frac{n}{2}(a + b))P(X)$$

التمرين 10. لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداداً حقيقية مختلفة مثنى مثنى. وليكن  $E = \mathbb{R}_n[X]$  فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن  $n$ . ادرس قابلية تمثيل التطبيق  $u \in \mathcal{L}(E)$  بمصفوفة قطرية، حيث

$$u(P)(X) = \frac{d}{dX}((aX + b)P(X)) + cP(X)$$

التمرين 11. لتكن  $A$  و  $M$  مصفوفتين من  $M_n(\mathbb{C})$  تحققان  $AM = MA$ . نفترض أن القيم الذاتية لـ  $M$  متباينة مثنى مثنى.

1. أثبت أن كل شعاع ذاتي لـ  $M$  هو شعاع ذاتي لـ  $A$ .

2. أثبت أنه يوجد  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  بحيث

$$A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \dots + \alpha_{n-1} M^{n-1}$$

3. حلّ في  $M_3(\mathbb{C})$  المعادلة  $X^2 = A$  حيث  $A = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ .

التمرين 12. لتكن  $M$  مصفوفة من  $M_n(\mathbb{C})$ . نفترض وجود عددين  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  و مصفوفتين  $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$  بحيث يكون  $M^k = \lambda^k A + \mu^k B$  أياً كانت  $k \in \{1, 2, 3\}$ . أثبت أن  $M$  تشابه مصفوفة قطرية.

التمرين 13. لتكن  $M$  مصفوفة من  $M_n(\mathbb{C})$ ،  $(1 \leq n)$ . أثبت تكافؤ الخواص التالية:

• كثير الحدود المميز لـ  $M$  يحقق  $X_M(X) = (-1)^n X^n$ .

• أياً كان  $0 < k$  فإن  $\text{tr}(M^k) = 0$ .

• يوجد عدد طبيعي  $p$  بحيث  $M^p = 0$ .

التمرين 14. نقول عن مصفوفة  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  إنها إحصائية إذا وفقط إذا تحقق

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{ij} \in [0, 1] \quad \text{و} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

لتكن  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  مصفوفة إحصائية.

1. أثبت أن 1 قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$ .

2. لتكن  $\lambda$  قيمة ذاتية لـ  $A$  في  $\mathbb{C}$ . أثبت أن  $|\lambda| \geq 1$ .

3. نفترض أن  $0 < a_{ii}$  أياً كان  $i \in \mathbb{N}_n$ . أثبت أن جميع القيم الذاتية لـ  $A$  (في  $\mathbb{C}$ ) تقع داخل دائرة نصف قطرها أصغر تماماً من 1 وتمس داخلياً الدائرة المثلثية.

التمرين 15.

ليكن كثير الحدود  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$  من الدرجة  $n$  في  $\mathbb{C}[X]$ . نفترض أن

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

و نضع  $S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$  حين يكون  $k = 0, 1, \dots, n$ .

1. أثبت المطابقة:  $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=0}^n \frac{S_k}{X^{k+1}} + \frac{1}{X^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{n+1}}{X - \lambda_i}$ .

2. استنتج أنه في جوار  $+\infty$  لدينا  $P'(x) = \sum_{\ell=1}^n \left( \sum_{i=0}^{n-\ell} a_{n-i-\ell} S_i \right) x^{\ell-1} + O\left(\frac{1}{x}\right)$ .

3. أثبت أخيراً أن  $1 = a_0$  وأن  $a_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_{k-i} S_i$  حين يكون  $k \in \mathbb{N}_n$ .

4. لتكن  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . نعرف المتالتين  $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$  و  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  بالعلاقات:

$$(A, -\text{tr}(B_1)) = (B_1, a_1) \quad \diamond$$

$$(A(B_{k-1} + a_{k-1}I_n), -\text{tr}(B_k)/k) = (B_k, a_k) \quad \diamond$$

حيث يكون  $n \geq k > 1$ .

أثبت أن

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left( X^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} X^k \right)$$

التمرين 16. لتكن  $x \in ]-1, +1[$  و  $n \in \mathbb{N}$ . ولنعرف

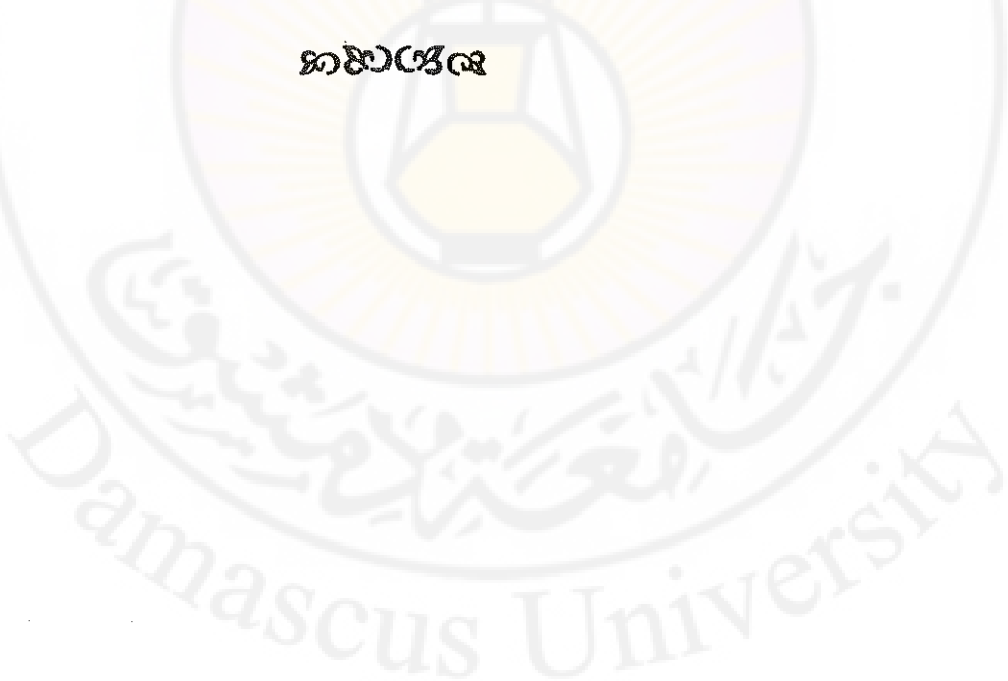
$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x \cos t} dt$$

1. احسب كلاً من  $I_0(x)$  و  $I_1(x)$ .

2. نفترض أن  $x \neq 0$ ، وأن  $1 \leq n$ ، احسب  $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$  بدلالة  $I_n(x)$  و  $x$ .

3. استنتج قيمة  $I_n(x)$ .

تمت



## الفصل السابع

### الفضاءات الشعاعية المزودة بجداء سلمي

يمثل الحقل  $IK$  في هذا الفصل حقل الأعداد الحقيقية  $IR$ ،  
أو حقل الأعداد العقدية  $C$ .

#### 1.VII. الجداء السلمي

1-1.VII. تعريف: ليكن  $E$  فضاء شعاعياً على الحقل  $IK$ . نسمي جداءً سلمياً على  $E$  كل تطبيق

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow IK, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

يُحقق الخواص التالية:

$S_1$  • أيًا كانت  $x \in E$ ، يكن التطبيق  $R_x : E \rightarrow IK, y \mapsto \langle x, y \rangle$  شكلاً خطياً.  
 $S_2$  • أيًا كانت  $(x, y) \in E^2$ ، يكن  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ، ونعبر عن هذه الخاصية بقولنا  
في حالة  $C = IK$  إن الجداء السلمي هرمتي. أما في حالة  $IR = IK$  فيكتب هذا  
الشرط  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall (x, y) \in E^2$ ، ونعبر عنه بقولنا إن الجداء السلمي  
متناظر.

$S_3$  • أيًا كانت  $x \in E$ ، يكن  $\langle x, x \rangle \in IR_+$ ، ونقول إن الجداء السلمي موجب.  
 $S_4$  • أيًا كانت  $x \in E \setminus \{0\}$ ، يكن  $\langle x, x \rangle \neq 0$ ، ونقول إن الجداء السلمي معرف.

ونسمي فضاء جداء سلمي كل فضاء شعاعي  $E$  مزود بجداء سلمي، ونرمز إليه بالرمز  
 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، أو  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  أو فقط  $E$  إذا لم يكن هنال مجال للالتباس.

وأخيراً نسمي فضاء إقليدياً كل فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل  $IR$ ، ونسمي  
فضاء هرمتياً كل فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل  $C$ .

2-1.VII. ملاحظة: ليكن  $E$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $E^3 \ni (x_1, x_2, z)$  و  $E^2 \ni (\lambda, \mu)$ ،  $\mathbb{K}^2$ ،

حيث يكون

$$\begin{aligned}\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle &= \overline{\langle y, \lambda x_1 + \mu x_2 \rangle} \\ &= \overline{\lambda \cdot \langle y, x_1 \rangle + \mu \cdot \langle y, x_2 \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \cdot \overline{\langle y, x_1 \rangle} + \bar{\mu} \cdot \overline{\langle y, x_2 \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \cdot \langle x_1, y \rangle + \bar{\mu} \cdot \langle x_2, y \rangle\end{aligned}$$

فإذا كان  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، كان الجداء السلمي شكلاً ثنائي الخطية. أما في حالة  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  فنقول إن الجداء السلمي نصف خطي بالنسبة إلى المركبة الأولى.

3-1.VII. أمثلة:

♦ إذا كان  $E = \mathbb{R}^n$  فإننا نسمي الجداء السلمي المألوف على  $E$  الجداء السلمي المعروف بالعلاقة

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$$

حيث  $(x_1, \dots, x_n) = x$  و  $(y_1, \dots, y_n) = y$  من  $E$ .

♦ إذا كان  $E = \mathbb{C}^n$  فإننا نسمي الجداء السلمي المألوف على  $E$  الجداء السلمي المعروف بالعلاقة

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \overline{y_k}$$

حيث  $(x_1, \dots, x_n) = x$  و  $(y_1, \dots, y_n) = y$  من  $E$ .

♦ إذا كان  $E = C([0,1], \mathbb{C})$  أي فضاء التتابع المستمرة على  $[0,1]$  والتي تأخذ قيمها في  $\mathbb{C}$ ، فيمكننا أن نرود هذا الفضاء بالجداء السلمي:

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

♦ إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وكان  $T \ni \mathcal{L}(E)$  تطبيقاً خطياً متبايناً، فإننا

نعرف جداءً سلميًّا جديدًا على  $E$  بوضع  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ ،  $\forall (x, y) \in E^2$ .

\* تكاملات تابع مستمر قيمته عقدية، تكامل جزائه الحقيقي والتخيلي كلاً على حدة. فإذا كان  $u$  و  $v$  من

$$C([a, b], \mathbb{R}) \text{ كان بالتعريف } \int_a^b (u + iv) = \int_a^b u + i \int_a^b v$$



4-1.VII. تعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي. نسمي التطبيق

$$Q_{<,\rangle} : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

الشكل التربيعي الموافق للجداء السلمي  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . وكذلك نسمي التطبيق

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

نظيم الجداء السلمي الموافق للجداء السلمي  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . وسنرى لاحقاً أنّ هذه التسمية مبررة، إذ إنّ  $\|\cdot\|$  فعلاً لنظيم<sup>٥</sup> على الفضاء الشعاعي  $E$ .

إنّ معرفة الشكل التربيعي الموافق لجداء سلمي كافية لتحديد هذا الجداء. هذا ما ستبينه

المبرهنة التالية:

5-1.VII. مبرهنة: -المطابقات القطيعة- ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي.

♦ في حالة  $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ ، لدينا

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{aligned}$$

♦ في حالة  $\mathbb{C} = \mathbb{K}$ ، لدينا

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \cdot \|i^k x + y\|^2$$

الإثبات

• حالة  $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ . لتكن  $(x, y) \in E \times E$ ، ولتكن  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ، عندئذ يكون

$$\begin{aligned} \|x + \varepsilon y\|^2 &= \langle x + \varepsilon y, x + \varepsilon y \rangle = \langle x, x \rangle + \varepsilon \langle x, y \rangle + \varepsilon \langle y, x \rangle + \varepsilon^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\varepsilon \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

حيث استغدنا من كون الجداء السلمي متناظراً في هذه الحالة ومن كون  $\varepsilon^2 = 1$ . وهذه المساواة تقتضي مباشرة المطابقتين الواردتين في نصّ المبرهنة.

• حالة  $\mathbb{C} = \mathbb{K}$ . لتكن  $(x, y) \in E \times E$ ، ولتكن  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ، عندئذ يكون

$$\|x + \varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon \langle x, y \rangle + \varepsilon \langle y, x \rangle + \varepsilon^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

راجع الفصل السادس من كتاب التحليل ٢.

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{إذن نستنتج أن}$$

ومن جهة أخرى يكون

$$\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(-i\langle x, y \rangle) = \operatorname{Re}\langle ix, y \rangle = \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2)$$

وأخيراً

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + i\operatorname{Im}\langle x, y \rangle \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|ix + y\|^2 - i\|ix - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|-x + y\|^2 + i\|ix + y\|^2 - i\|-ix + y\|^2) \end{aligned}$$

□

وهذه هي العلاقة المطلوبة.

6-1.VII. ملاحظة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي على الحقل  $\mathbb{C}$ . ولتكن  $3 \leq n$ .

نضع  $\omega_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$  وهو جذر من المرتبة  $n$  للواحد. عندئذ تكون لدينا المتطابقة القطبية

التالية، التي نترك إثباتها تمريناً للقارئ، وهي تعميم لتلك الواردة في المبرهنة السابقة،

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \cdot \|\omega^k x + y\|^2$$

7-1.VII. مبرهنة: -مراجعة Schwartz- ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، عندئذ

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة  $(x, y)$  مرتبطة خطياً.

الإثبات

لتكن  $(x, y) \in E \times E$ . إذا كان  $0 = y$  كانت النتيجة واضحة. نفترض إذن أن

$0 \neq y$ ، ولنضع  $\lambda = \langle y, x \rangle / \|y\|^2$ . عندئذ يكون

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, \lambda y \rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$$

□

وهذا يثبت المتراجحة المطلوبة، ويبين أن المساواة تتحقق فقط إذا كان  $x = \lambda y$ .

8-1.VII. ملاحظة: ينتج من مراجعة شوارتز السابقة أنه في حالة  $\mathbb{R} = \mathbb{K}$  يكون لدينا

وذلك أيما كان الشعاعان غير المعدومين  $x$  و  $y$  وهذا ما يسمح بتعريف

$$\text{زاوية شعاعين غير معدومين } x \text{ و } y \text{ بأنها } \angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

9-1.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، عندئذ يكون  $\|\cdot\|$  نظيماً على  $E$ .

الإثبات

- إذا كان  $\|x\| = 0$  كان  $x = 0$  لأن الجداء السلمي معرف.

- أيّاً كانت  $x \in E$ ، وأياً كانت  $\lambda \in \mathbb{K}$ ، فإنّ

$$\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

- وأخيراً أيّاً كانت  $(x, y) \in E \times E$ ، فلدينا، استناداً إلى متراجحة شوارتز،

$$|\operatorname{Re}\langle x, y \rangle| \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

ومن ثمّ

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

وهذا يُثبت متراجحة المثلث أي

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ  $\|\cdot\|$  نظيم على  $E$ .

10-1.VII. ملاحظة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(x, y) \in E \times E$ . عندئذ

يكون لدينا التكافؤ التالي

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|y\| \cdot x = \|x\| \cdot y$$

في الحقيقة، يبيّن الإثبات السابق أنّ المساواة تتحقّق في متراجحة المثلث إذا وفقط إذا

كان  $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \geq 0$  و  $\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = 0$  وكانت الجملة  $(x, y)$  مرتبطة خطياً. وتكافئ هذه

□

الشروط مجتمعة كون  $\|y\| \cdot x = \|x\| \cdot y$ .

11-1.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(x, y) \in E \times E$ . عندئذ

يكون لدينا المتطابقة التالية والتي تسمّى متطابقة متوازي الأضلاع

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

الإثبات

لتكن  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ، لقد وجدنا سابقاً أنّ

$$\|x + \varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

□

ولحصل على المتطابقة المطلوبة بجمع العلاقتين السابقتين.

12-1.VII. ملاحظة: تميز متطابقة متوازي الأضلاع فضاءات الجداء السلمي من بين الفضاءات الشعاعية المنظمة. أي إنه إذا كان  $(E, \|\cdot\|)$  فضاءً شعاعياً منظماً، وكان لظلمه يُحقق متطابقة متوازي الأضلاع، فيوجد جداء سلمي  $(\cdot, \cdot)$  على  $E$  بحيث يكون  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  أيًا كانت  $x \in E$ .

13-1.VII. تعريف: ليكن  $(E, (\cdot, \cdot))$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $\|\cdot\|$  التنظيم على  $E$  الموافق للجداء الداخلي. نقول إن  $(E, \|\cdot\|)$  فضاء هيلبرت Hilbert إذا وفقط إذا كان الفضاء الشعاعي المنظم  $(E, \|\cdot\|)$  فضاء تاماً<sup>٥</sup>.

14-1.VII. تعريف: لنذكر أولاً بعض التعاريف الخاصة بالمصفوفات:

♦ إذا كانت  $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$  كانت المصفوفة  $M \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$  هي منقول  $M$ . وكانت  $\bar{M}$  هي المصفوفة المرافقة لـ  $M$ ، أي التي ثوابتها هي مرافقات ثوابت  $M$ . وأخيراً نستخدم الرمز  $M^*$  للدلالة على المصفوفة  $\bar{M}^t$ .

♦ لنكن  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

< نقول إن المصفوفة  $M$  متناظرة إذا وفقط إذا كان  $M = M^*$ .

< ونقول إن المصفوفة  $M$  هرميتية إذا وفقط إذا كان  $M = M^*$ ، (هذا يكافئ كونها متناظرة في حالة  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).

< نقول أيضاً إن المصفوفة  $M$  موجبة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$$1. M = M^*$$

$$2. \forall X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), \quad X^* M X \in \mathbb{R}_+$$

(يمكن القارئ أن يثبت أن  $2. \Leftrightarrow 1.$  في حالة  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

< وأخيراً نقول أيضاً إن المصفوفة  $M$  معرفة موجبة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$$1. M = M^*$$

$$2. \forall X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, \quad X^* M X \in \mathbb{R}_+^*$$

<sup>٥</sup> راجع الفصل السادس من كتاب التحليل ٢.

15-1.VII. تعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $(x_1, \dots, x_m)$  جملة من أشعة الفضاء  $E$ . نسمي مصفوفة Gram للجملة  $(x_1, \dots, x_m)$  المصفوفة من  $M_m(\mathbb{K})$  التي ثابت السطر ذي الدليل  $i$  والعمود ذي الدليل  $j$  فيها هو  $\langle x_i, x_j \rangle$ . ونرمز إلى هذه المصفوفة بالرمز  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$ .

16-1.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $(x_1, \dots, x_m)$  جملة من أشعة الفضاء  $E$ . عندئذ تكون المصفوفة  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$  موجبة، وتكون الشروط الثلاثة التالية متكافئة:

1. المصفوفة  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$  معرفة موجبة.

2. المصفوفة  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m)$  قلبية.

3. الجملة  $(x_1, \dots, x_m)$  حرة.

الإثبات

لنضع  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_m) = G = (g_{ij})$ ، حيث  $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ . عندئذ، أيًا كانت  $(i, j) \in \text{IN}_m^2$ ، فإن

$$g_{ji} = \langle x_j, x_i \rangle = \overline{\langle x_i, x_j \rangle} = \overline{g_{ij}}$$

ومنه  $G^* = G$ .

من ناحية أخرى، ليكن  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \in {}^t M_{m \times 1}(\mathbb{K})$ . نجد بحساب بسيط أن

$$\Lambda^* G \Lambda = \sum_{(i,j) \in \text{IN}_m^2} \overline{\lambda_i} \cdot \langle x_i, x_j \rangle \cdot \lambda_j = \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot x_i \right\|^2$$

للمصفوفة  $G$  موجبة.

ونلاحظ من هذه المساواة، أنه توجد ثوابت  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  من  $\mathbb{K}$ ، ليست جميعها معدومة

بحيث يكون  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot x_i = 0$ ، إذا وفقط إذا، وجد شعاع غير معدوم  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m] = \Lambda$  بحيث

يكون  $\Lambda^* G \Lambda = 0$ . وهذا يثبت التكافؤ 1.  $\Leftrightarrow$  3.

لإثبات الاقتضاء 1.  $\Leftrightarrow$  2. نأمل التطبيق الخطي

$$u_G : M_{m \times 1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{m \times 1}(\mathbb{K}), X \mapsto GX$$

إذا كانت  $\Lambda \in \ker u_G$ ، كان  $G\Lambda = 0$  ومن ثم  $\Lambda^* G \Lambda = 0$  وهذا يقتضي، استناداً إلى 1، أن  $\Lambda = 0$ . فالتطبيق  $u_G$  متباين، وبناءً عليه يكون قلباً ومن ثم تكون  $G$  قلباً.

وأخيراً، لنفترض أن الجملة  $(x_1, \dots, x_m)$  مرتبطة خطياً. عندئذ نجد  $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]^t$ ،

من  $M_{m \times 1}(\mathbb{K})$ ، بحيث  $\Lambda \neq 0$  و  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot x_j = 0$ . نستنتج إذن أن

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \quad 0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{j=1}^m g_{ij} \cdot \lambda_j$$

وهذا يكافئ أن  $G\Lambda = 0$ . ولما كانت  $\Lambda \neq 0$ ، كان  $\ker u_G \neq \{0\}$ ، فالتطبيق  $u_G$  ليس قلباً، ومن ثم المصفوفة  $G$  ليست قلباً.  $\square$

17-1.VII. تعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبعده  $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً للفضاء  $E$ . عندئذ تسمى المصفوفة  $\text{Gram}(\mathcal{E})$  مصفوفة

الجداء السلمي  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  في الأساس  $\mathcal{E}$ . وعندئذ أيما كان  $X = [x_1, \dots, x_n]^t$  و أيما كان

$Y = [y_1, \dots, y_n]^t$  من  $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$  تتحقق العلاقة

$$\left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right\rangle = X^* G Y$$

تمرين: لتكن  $H_n = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  المصفوفة المعرفة بالعلاقة  $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ ، والمعروفة باسم مصفوفة هيلبرت. إن  $H_n$  مصفوفة معرفة موجبة.

في الحقيقة، إذا كان  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجاتها

أصغر تماماً من  $n$ ، وزودنا  $E$  بالجداء السلمي التالي

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

ثم أخذنا  $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^{n-1})$  أساساً للفضاء  $E$ ، كان لدينا  $H_n = \text{Gram}(\mathcal{E})$ . وهذا ما يثبت أن  $H_n$  مصفوفة معرفة موجبة.

18-1.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبعده  $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  و  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  أساسين للفضاء  $E$ . عندئذ يكون

$$\text{Gram}(\mathcal{E}) = P^* \text{Gram}(\mathcal{F}) P$$

$$P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

الإثبات

لنضع  $P = (p_{ij})$ ، فيكون عندئذ  $e_j = \sum_{k=1}^n p_{kj} \cdot f_k$ ،  $\forall j \in \mathbb{N}_n$ . إذن، أيًا كانت  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ ، يكون

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n p_{ki} f_k, \sum_{l=1}^n p_{lj} f_l \right\rangle = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_n^2} \overline{p_{ki}} \langle f_k, f_l \rangle p_{lj} = [P^* \text{Gram}(\mathcal{F}) P]_{ij}$$

□

وهذه هي المساواة المطلوبة.

19-1.VII. نتيجة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبعده  $n \in \mathbb{N}^*$ ، وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً للفضاء  $E$ . عندئذ لا تتغير قيمة  $\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n)$  إذا بادلنا بين أشعة الجملة  $\mathcal{E}$ ، أو إذا جمعنا إلى أحد الأشعة  $e_1, \dots, e_n$  عبارة خطية في بقية أشعة الجملة  $\mathcal{E}$ .

الإثبات

ليكن  $\sigma$  تبديلاً من  $S_n$ ، وليكن الأساس  $\mathcal{F} = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ . عندئذ يكون محدد المصفوفة  $P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  مساوياً لتوقيع التبديل  $\sigma$  أي:  $\det P = \Delta(\sigma)$ . ومنه يكون  $\det P^* \cdot \det P - \Delta^2(\sigma) - 1$ ، واستناداً إلى المبرهنة السابقة يكون  $\det \text{Gram}(\mathcal{E}) = \det \text{Gram}(\mathcal{F})$ .

من ناحية أخرى، إذا تأملنا الأساس  $\mathcal{F} = (\tilde{e}_1, e_2, \dots, e_n)$  حيث  $\tilde{e}_1 = e_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k e_k$ ، كان لدينا

$$P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \text{mat}(I_E, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

ومنه  $\det P = 1$ ، وهذا ما يثبت أن  $\det \text{Gram}(\mathcal{E}) = \det \text{Gram}(\mathcal{F})$ .

## 2.VII. المتعامد في فضاءات الجداء السلمي

2.VII-1. تعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي.

♦ نقول عن عنصرين  $x$  و  $y$  من  $E$  إنهما متعامدان، ونكتب  $x \perp y$ ، إذا وفقط إذا كان  $\langle x, y \rangle = 0$ .

♦ ونقول عن جماعة أشعة  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  من  $E$  إنها متعامدة إذا وفقط إذا كان

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times A, \quad \alpha \neq \beta \rightarrow \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0$$

♦ ونقول عن جماعة أشعة  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  من  $E$  إنها متعامدة نظامية إذا وفقط إذا كان

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times A, \quad \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & : \alpha = \beta \\ 0 & : \alpha \neq \beta \end{cases}$$

♦ لتكن  $B$  مجموعة جزئية غير خالية من  $E$ ، وليكن  $x$  عنصراً من  $E$ . نقول إن  $x$

عمودي على  $B$ ، ونكتب  $x \perp B$ ، إذا وفقط إذا كان  $x \perp y$   $\forall y \in B$ . ونرمز

بالرمز  $B^\perp$  إلى مجموعة العناصر  $x$  التي تنتمي إلى  $E$  والعمودية على  $B$ .

2.VII-2. مثال هام: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء التوابيع المستمرة على  $[0, 2\pi]$ ، والتي تأخذ قيمها في  $\mathbb{C}$ ، مزوداً بالجداء السلمي:

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ولتكن الجماعة  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ، حيث  $e_k(x) = \exp(ikx)$ . عندئذ تكون الجماعة  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  جماعة متعامدة نظامية في  $E$ .

2.VII-3. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  جماعة متعامدة من الأشعة غير المعدومة في  $E$ . حينئذ تكون الجماعة  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  حرة.

الإثبات

في الحقيقة، إن مصفوفة Gram لكل جماعة جزئية منتهية من  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  قلبية (لأنها قطرية ولوابت قطرها غير معدومة). وهذا يثبت أن كل جماعة جزئية منتهية من  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  تكون حرة، وهذا هو المطلوب إثباته.  $\square$



4-2.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  جملة حرة في  $E$ . حينئذ، توجد جملة متعامدة نظامية وحيدة  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  في  $E$ ، تحقق، أيًا كان

$IN_n \ni k$ ، الشرطين التاليين:

$$1. \text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1, \dots, \alpha_k))$$

$$2. \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

الإثبات

سنبدأ أولاً بإثبات الوحدة. لنفرض وجود جملتين متعامدتين نظاميتين  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ،

و  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ، تحققان، أيًا كان  $IN_n \ni k$ ، الشرطين التاليين:

$$1. \text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1, \dots, \alpha_k)) = \text{vect}((\gamma_1, \dots, \gamma_k))$$

$$2. \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^* \text{ و } \langle \alpha_k, \gamma_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

لتكن  $IN_n \ni p$ . لئلا كان  $\text{vect}((\gamma_1, \dots, \gamma_p)) \ni \beta_p$ ، والجملة  $(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  متعامدة نظامية كان

$$\beta_p = \sum_{j=1}^p \langle \gamma_j, \beta_p \rangle \gamma_j$$

ولكن إذا كان  $p > j$ ، كان  $\gamma_j \in \text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_j)) = \text{vect}((\gamma_1, \dots, \gamma_j))$ ، وكان من ثم

$\beta_p \perp \gamma_j$ ، وهذا يسمح باختصار المجموع السابق ليصبح

$$\langle \gamma_p, \beta_p \rangle = t_p \gamma_p \text{ حيث } \beta_p = t_p \gamma_p$$

ولستنتج من الشرط 2. ومن العلاقة  $\langle \alpha_p, \beta_p \rangle = t_p \langle \alpha_p, \gamma_p \rangle$ ، أن  $t_p \in \mathbb{R}_+^*$ . وأخيراً ينجم

عن كون الجملتين نظاميتين أن  $\|\beta_p\| = t_p \|\gamma_p\| = t_p$ . وهذا يقتضي  $\beta_p = \gamma_p$ .

أما إثبات الوجود فسنجريه بالتدريج على عدد العناصر في الجملة أي  $n$ .

$$- \text{حالة } n = 1 \text{ بسيطة، إذ يكفي أن نأخذ } \beta_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \cdot \alpha_1$$

- لنفرض صحة النتيجة عند قيمة ما للعدد  $n$ . ولتكن  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$  جملة حرة في  $E$ .

لنجد استناداً إلى فرض التدريج جملة متعامدة نظامية  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  في  $E$ ، تحقق، أيًا كان

$IN_n \ni k$ ، الشرطين التاليين:

$$1. \text{vect}((\beta_1, \dots, \beta_k)) = \text{vect}((\alpha_1, \dots, \alpha_k))$$

$$2. \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

لنضع إذن بالتعريف

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \alpha_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, \alpha_{n+1} \rangle \cdot \beta_k$$

ولنلاحظ ما يلي:

أولاً : إن  $\tilde{\beta}_{n+1} \neq 0$  وذلك لأن الجملة  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$  جملة حرة في  $E$ .

ثانياً : نجد بحساب بسيط ، أيّاً كان  $p \in \mathbb{N}_n$  ،

$$\langle \beta_p, \tilde{\beta}_{n+1} \rangle = \langle \beta_p, \alpha_{n+1} \rangle - \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, \alpha_{n+1} \rangle \cdot \langle \beta_p, \beta_k \rangle = \langle \beta_p, \alpha_{n+1} \rangle - \langle \beta_p, \alpha_{n+1} \rangle = 0$$

ومن ثم يكون  $\tilde{\beta}_{n+1} \perp \beta_p$  ،  $\forall p \in \mathbb{N}_n$ .

ثالثاً : باستخدام الخاصّة السابقة نجد أيضاً

$$\langle \tilde{\beta}_{n+1}, \tilde{\beta}_{n+1} \rangle - \langle \tilde{\beta}_{n+1}, \alpha_{n+1} \rangle \sum_{k=1}^n \langle \beta_k, \alpha_{n+1} \rangle \cdot \langle \tilde{\beta}_{n+1}, \beta_k \rangle = \langle \tilde{\beta}_{n+1}, \alpha_{n+1} \rangle$$

ومنه يكون  $\langle \alpha_{n+1}, \tilde{\beta}_{n+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^*$ .

رابعاً : إن المساواة  $\text{vect}(\beta_1, \dots, \beta_n, \tilde{\beta}_{n+1}) = \text{vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$  واضحة.

□

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{\|\tilde{\beta}_{n+1}\|} \cdot \tilde{\beta}_{n+1}$$

5-2.VII ملاحظة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  جملة حرة في  $E$ .

وليكن  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  الجملة المتعامدة النظامية الوحيدة في  $E$ ، التي تحقّق، أيّاً كان  $k \in \mathbb{N}_n$  ،

الشرطين التاليين:

$$1. \text{vect}(\beta_1, \dots, \beta_k) = \text{vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$2. \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

نسَمّي إجرائيّة إنشاء  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  الطلاقاً من  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  إجرائيّة Gram-Schmidt.

تمرين: ليكن  $E = \mathbb{R}[X]$  أي فضاء كثيرات الحدود الحقيقيّة، مزوداً بالجداء السلمي:

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

نترك للقارئ مهمّة تطبيق إجرائيّة Gram-Schmidt على الجملة  $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$ .

ينتج من المبرهنة النتيجة المهمّة التالية:

6-2.VII نتيجة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد، عندئذ يوجد في  $E$  أساس

متعامد نظامي.

7-2.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبعده  $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولتكن

جملة من عناصر  $E$ . عندئذ توجد مصفوفة  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  بحيث

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = A^* A$$

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً متعامداً نظامياً للفضاء  $E$ . عندئذ يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad x_j = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x_j \rangle \cdot e_k$$

ومن ثَمَّ، أيّا كان  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ ، فإنّ

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{\langle e_k, x_i \rangle} \cdot \langle e_\ell, x_j \rangle \cdot \langle e_k, e_\ell \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{\langle e_k, x_i \rangle} \cdot \langle e_k, x_j \rangle \end{aligned}$$

فإذا عرفنا المصفوفة  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  بالعلاقة  $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$ ، كان لدينا

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} \cdot a_{kj} = [A^* A]_{ij}$$

□

وهذا ما يثبت أنّ  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = A^* A$ .

8-2.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد وبعده  $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولتكن

أساساً للفضاء  $E$ . عندئذ توجد مصفوفة وحيدة  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ، مثلثية

عليا وثوابت قطرها الأساسي<sup>4</sup> موجبة تماماً، بحيث

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = A^* A$$

ومن ناحية أخرى، يكون

$$\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  متعامدة.

<sup>4</sup> القطر الأساسي لمصفوفة مربعة  $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  هو الجملة  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .

### الإثبات

لنثبت أولاً الوحدة. لنفترض أن  $A^* A = B^* B$ ، حيث  $A$  و  $B$  مصفوفتان مثلثيتان علويتان ثوابت قطريهما الأساسيان موجبة تماماً، عندئذ يكون  $D = (B^*)^{-1} A^* = B A^{-1}$ . فمن جهة أولى تكون  $B A^{-1} = D$  مصفوفة مثلثية عليا، ومن جهة ثانية تكون المصفوفة  $(B^*)^{-1} A^* = D$  مصفوفة مثلثية سفلى. فالمصفوفة  $D$  مصفوفة قطرية، ثوابت قطرها موجبة تماماً. وأخيراً

$$D^2 = D D^* = B A^{-1} ((B^*)^{-1} A^*)^* = B A^{-1} A B^{-1} = I_n$$

نستنتج إذن أن  $D = I_n$ ، ومن ثم  $B = A$ .

أما لإثبات الوجود، فنستخدم إجرائية Gram-Schmidt لإيجاد أساس متعامد نظامي

$$E = (e_1, \dots, e_n), \quad E \perp$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad (\text{vect}((x_1, \dots, x_k)) = \text{vect}((e_1, \dots, e_k))) \wedge ((e_k, x_k) \in \mathbb{R}_+^*)$$

فإذا عرفنا كما في المبرهنة السابقة  $M_n(\mathbb{K}) \ni A = (a_{ij})$  بحيث  $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$ ، كان لدينا من جهة أولى  $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = A^* A$ ، ومن جهة ثانية :

$$\diamond \quad a_{kk} = \langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{لأن } \mathbb{N}_n \ni k$$

$$\diamond \quad \text{وأيًا كانت } (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \text{بحيث } i > j, \quad \text{كان } x_j \in \text{vect}((e_1, \dots, e_j))$$

$$\text{ثم } e_i \perp x_j, \quad \text{إذن } a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle = 0$$

هذا يثبت أن المصفوفة  $A$  مصفوفة مثلثية عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً.

من ناحية أخرى لدينا

$$\det A = \prod_{k=1}^n a_{kk} = \prod_{k=1}^n \langle e_k, x_k \rangle \leq \prod_{k=1}^n \|e_k\| \cdot \|x_k\| = \prod_{k=1}^n \|x_k\|$$

$$\text{إذن،} \quad |\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n)| = |\det A|^2 \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

ونرى أن المساواة تتحقق في المراجعة السابقة إذا وفقط إذا كان

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \langle e_k, x_k \rangle = \|e_k\| \cdot \|x_k\|$$

وهذا يكافئ الشرط

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad x_k = \|x_k\| \cdot e_k$$

أي إن الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  متعامدة.

□

9-2.VII. نتيجة: ليكن  $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(x_1, \dots, x_m)$  جملة من عناصر الفضاء  $F$ . عندئذ يكون

$$\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_m) \leq \prod_{k=1}^m \|x_k\|^2$$

حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت الجملة  $(x_1, \dots, x_m)$  متعامدة، أو إذا انعدم أحد أشعتها.

الإثبات

إذا كانت الجملة  $(x_1, \dots, x_m)$  مرتبطة، كانت المتراجحة صحيحة وضوحاً، لأن طرفها الأيسر معدوم في هذه الحالة، وتتحقق عندها المساواة إذا وفقط إذا انعدم أحد أشعة الجملة. أما إذا كانت الجملة  $(x_1, \dots, x_m)$  حرة، فإننا نحصل على المطلوب بتطبيق المبرهنة السابقة على الفضاء  $E = \text{vect}((x_1, \dots, x_m))$ .  $\square$

10-2.VII. نتيجة: - تفريق Cholesky- ليكن  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  مصفوفة معرفة موجبة. عندئذ توجد مصفوفة مثلثية عليا وحيدة  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً بحيث

$$M = A^* A$$

الإثبات

لتردد الفضاء الشعاعي  $E = \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ ، بالجداء السلمي المعروف كما يلي

$$\forall (X, Y) \in E \times E, \quad \langle \langle X, Y \rangle \rangle = X^* M Y$$

وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  الأساس القانوني في  $E$ . عندئذ يكون  $M = \text{Gram}_{\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle}(\mathcal{E})$  ونحصل على المطلوب استناداً إلى المبرهنة 8-2.VII.  $\square$

11-2.VII. ملاحظة: إن عكس المبرهنة السابقة صحيح أيضاً. فإذا كانت  $M = A^* A$  حيث  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ، كانت المصفوفة  $M$  معرفة موجبة. وذلك لأنه من جهة أولى يكون

$$M^* = A^*(A^*)^* = A^* A = M$$

ومن جهة ثانية،

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), \quad X^* M X = \|AX\|^2$$

حيث  $\|\cdot\|$  هو التنظيم المرافق للجداء السلمي المألوف على  $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ .

12-2.VII. نتيجة: - متراجحة Hadamard- ليكن  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ . عندئذ يكون

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

الإثبات

يمكننا أن نفرض أن المصفوفة  $A$  قلبية، وإلا كانت المتراجحة واضحة.

لرود الفضاء الشعاعي  $E = M_{n \times 1}(\mathbb{K})$  بالجداء السلمي المعروف كما يلي

$$\forall (X, Y) \in E \times E, \quad \langle\langle X, Y \rangle\rangle = X^* A^* A Y = \langle AX, AX \rangle$$

حيث  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  هو الجداء السلمي المألوف على  $E$ . وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  الأساس القانوي في  $E$ . عندئذ يكون  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle(\mathcal{E}) = \text{Gram}(A^* A)$ ، و استناداً إلى النتيجة 9-2.VII. يكون

$$|\det(A^* A)| \leq \prod_{j=1}^n \langle\langle e_j, e_j \rangle\rangle$$

$$\square \quad |\det A| \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\langle Ae_j, Ae_j \rangle} = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{أو}$$

3.VII. الإسقاط القائم

1-3.VII. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ ، وأخيراً ليكن  $\beta \in E$ .

1. يكون عنصر  $\alpha \in F$  أفضل تقريب لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$ ، (أي يُحقق

$$\|\beta - \alpha\| = d(\beta, F) \quad \text{أو} \quad \forall \gamma \in F, \quad \|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|$$

إذا وفقط إذا كان  $\beta - \alpha \perp F$ .

2. إذا وجد  $\alpha \in F$  أفضل تقريب لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$ ، كان هذا العنصر وحيداً.

3. لنفترض أن بُعد  $F$  منته، وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً متعامداً نظامياً لـ  $F$ .

عندئذ يكون  $\alpha = \sum_{k=1}^n \langle e_k, \beta \rangle e_k$  هو أفضل تقريب لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$ .

4. إذا كان الفضاء  $F$  فضاء هيلبرت، وجد عنصر  $\alpha \in F$  يكون أفضل تقريب لـ  $\beta$

بعنصر من  $F$ .

## الإثبات

سنعرض الإثبات في حالة  $\mathcal{C} = \mathbb{K}$ ، لأن حالة  $\mathbb{R} = \mathbb{K}$  أبسط ونترك تفاصيلها للقارئ.

1. ليكن  $\gamma \in F$ . عندئذ يكون لدينا

$$(*) \quad \|\beta - \gamma\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2 + \|\alpha - \gamma\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \beta - \alpha, \alpha - \gamma \rangle_{F \otimes J}$$

لذا إذا كان  $\beta - \alpha \perp F$  كان  $\langle \beta - \alpha, \alpha - \gamma \rangle = 0$ ، ومن ثم  $\|\beta - \gamma\| \geq \|\beta - \alpha\|$ . أي إن  $\alpha$  هو أفضل تقريب لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$ .

وبالعكس، إذا كان  $\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|$ ،  $\forall \gamma \in F$ ، كان لدينا، بناءً على (\*)،

$$\forall \gamma \in F, \quad \|\alpha - \gamma\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \beta - \alpha, \alpha - \gamma \rangle \geq 0$$

$$\forall \delta \in F, \quad \|\delta\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \beta - \alpha, \delta \rangle \geq 0$$

أو

ومن ثم

$$\forall \delta \in F, \forall (r, t) \in \mathbb{R}^2, \quad r^2 \|\delta\|^2 + 2r \operatorname{Re}\langle \beta - \alpha, e^{it} \cdot \delta \rangle \geq 0$$

وهذا يقتضي

$$\forall \delta \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(e^{it} \cdot \langle \beta - \alpha, \delta \rangle) = 0$$

وأخيراً، لأن  $t$  عدد كمي، يكون

$$\forall \delta \in F, \quad \langle \beta - \alpha, \delta \rangle = 0$$

أو  $\beta - \alpha \perp F$ .

2. ليكن  $\alpha \in F$  أفضل تقريب لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$ ، وليكن أيضاً  $\alpha' \in F$  أفضل تقريب

لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$ . عندئذ يكون  $\beta - \alpha \perp F$  و  $\beta - \alpha' \perp F$  وذلك استناداً إلى ما سبق. ينتج

من ذلك أن  $\alpha' - \alpha = (\beta - \alpha) - (\beta - \alpha') \perp F$ ، ومن ثم يكون

$$\|\alpha' - \alpha\|^2 = \langle \alpha' - \alpha, \alpha' - \alpha \rangle_{F \otimes J} = 0$$

أو  $\alpha = \alpha'$ .

3. من الواضح أن  $\alpha = \sum_{k=1}^n \langle e_k, \beta \rangle e_k$  عنصر من  $F$ . يكفي إذن أن نتحقق أن  $\beta - \alpha \perp F$ .

ولتحقيق ذلك يكفي إثبات أن  $\langle e_k, \beta - \alpha \rangle = 0$  أيًا كانت  $k \in \mathbb{N}_n$ . وهذا أمر ميسور ترك

تفاصيله البسيطة للقارئ.

4. لتعرف  $d = d(\beta, F) = \inf \{ \|\beta - \gamma\| : \gamma \in F \}$  ، وهي المسافة بين  $\beta$  والفضاء الجزئي  $F$  . عندئذ يوجد، أيًا كانت  $n \in \mathbb{N}^*$  ، عنصر  $\alpha_n \in F$  بحيث  $\|\beta - \alpha_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n^2}$  .  
 لتكن  $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$  ، بحيث  $m < n$  ، عندئذ يمكننا أن نكتب، بناءً على متطابقة متوازي الأضلاع،

$$\begin{aligned} \|\alpha_n - \alpha_m\|^2 &= \|(\beta - \alpha_m) - (\beta - \alpha_n)\|^2 \\ &= 2\|\beta - \alpha_m\|^2 + 2\|\beta - \alpha_n\|^2 - \|2\beta - \alpha_n - \alpha_m\|^2 \\ &= 2\|\beta - \alpha_m\|^2 + 2\|\beta - \alpha_n\|^2 - 4\left\|\beta - \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_m)\right\|^2 \end{aligned}$$

ولكن  $F$  فضاء شعاعي، إذن  $\frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_m) \in F$  ، ومن ثم

$$\|\alpha_n - \alpha_m\|^2 \leq 2d^2 + \frac{2}{m^2} + 2d^2 + \frac{2}{n^2} - 4d^2 \leq \frac{4}{m^2}$$

وبذا نكون قد أثبتنا أن

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad m < n \Rightarrow \|\alpha_n - \alpha_m\| \leq \frac{2}{m}$$

فالمتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  تحقق شرط كوشي في الفضاء التام  $F$  . ينجم عن ذلك أنها متقاربة نحو عنصر  $\alpha \in F$  ، ولما كان  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d^2 \leq \|\beta - \alpha_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n^2}$$

أمكننا أن نستنتج، بجعل  $n$  تسعى إلى  $+\infty$  ، أن  $d = \|\beta - \alpha\|$  . أي

$$\|\beta - \alpha\| = \inf \{ \|\beta - \gamma\| : \gamma \in F \}$$

□

وهذا يُكْمِل الإثبات.

2-3.VII. تعريف : ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$  ، وأخيراً لتكن  $\beta \in E$  . إذا وُجدَ عنصر  $\alpha \in F$  يكون أفضل تقريب لـ  $\beta$  بعنصر من  $F$  ، قلنا إن  $\alpha$  هو المسقط القالم لـ  $\beta$  على  $F$  . قلنا أيضاً إن  $\beta$  يقبلُ مسقطاً قالمًا على  $F$  .



3-3.VII. مبرهنة : ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $F$  فضاءً شعاعياً جزئياً من

$E$ ، نفترض أن كل عنصر من  $E$  يقبل مسقطاً قائماً على  $F$ . عندئذ

1. إن المجموعة  $F$  مجموعة مغلقة في  $E$ . (حيث  $E$  مزود بالنظام الموافق للجداء السلمي).

2. إذا رمزنا بالرمز  $P_F$  للتطبيق الذي منطلقه  $E$ ، ومستقره  $E$ ، ويربط بكل عنصر

من  $E$  مسقطه القائم على  $F$ . كان  $P_F$  إسقاطاً خطياً يحقق

$$F^\perp = \ker P_F \quad \text{و} \quad F = \text{Im } P_F$$

ويكون من ثم  $E = F \oplus F^\perp$ .

3. يقبل كل عنصر  $E$  من مسقطاً قائماً على  $F^\perp$ . ويكون  $P_{F^\perp} = I - P_F$ .

الاثبات

1. لتأمل عنصراً  $x$  لاصقاً بـ  $F$ ، أي  $x \in \bar{F}$ ، ولتكن  $\alpha \in F$  المسقط القائم لـ  $x$  على

$F$ . عندئذ يكون  $\|x - \alpha\| = d(x, F) = d(x, \bar{F}) = 0$ ، وهذا يبين أن  $F \ni \alpha = x$ . إذن

$F = \bar{F}$  وهذه المجموعة مغلقة.

2. لتكن  $(x, y) \in E^2$ ، ولتكن  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . ولنعرف  $F \ni \lambda P_F(x) + \mu P_F(y) = z$ .

فيكون

$$\lambda x + \mu y - z = \lambda(x - P_F(x)) + \mu(y - P_F(y))$$

إذن  $\lambda x + \mu y - z \perp F$ ، أي إن  $z$  هو المسقط القائم لـ  $\lambda x + \mu y$  على  $F$ ، أو

$$P_F(\lambda x + \mu y) = z = \lambda P_F(x) + \mu P_F(y)$$

لكون إذن قد أثبتنا أن  $P_F$  تطبيق خطي.

من ناحية أخرى، إذا كان  $x \in F$ ، كان  $x$  نفسه أفضل تقريب لـ  $x$  بعنصر من  $F$ ،

ومنه نجد  $x = P_F(x)$ ،  $\forall x \in F$ ، وهذا يقتضي أن  $P_F \circ P_F = P_F$ ، وأن  $F = \text{Im } P_F$ .

وكذلك نلاحظ أن

$$x \in \ker P_F \Leftrightarrow P_F(x) = 0 \Leftrightarrow x - 0 \perp F \Leftrightarrow x \in F^\perp$$

أي  $\ker P_F = F^\perp$ . وأخيراً لما كان  $P_F$  إسقاطاً خطياً كان  $E = \text{Im } P_F \oplus \ker P_F$ .

3. ليكن  $\beta \in E$ ، ولنضع  $\alpha = \beta - P_F(\beta)$ . عندئذ يكون  $\alpha \in F^\perp$ ، و  $\beta - \alpha \perp F^\perp$ .

□ إذن  $\alpha$  هو المسقط القائم لـ  $\beta$  على  $F^\perp$ . أي  $P_{F^\perp}(\beta) = \beta - P_F(\beta)$ .

4-3.VII. نتيجة : ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ . عندئذ تتحقق جميع نتائج البرهنة السابقة إذا كان  $F$  فضاء هيلبرت. (لاحظ أن كل فضاء جداء سلمي منتهي البعد يكون فضاء هيلبرت). وفي الحالة التي يكون فيها  $F$  منتهي البعد، يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in E, \quad P_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k$$

حيث  $(e_1, \dots, e_n)$  -  $\mathcal{E}$  أساس متعامد نظامي ما للفضاء  $F$ .

الإثبات

نتيج هذه الخاصة مباشرة من البرهنة 1-3.VII. □

5-3.VII. نتيجة :-مراجعة Bessel- ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(e_1, \dots, e_n)$  جملة متعامدة نظامية في  $E$ . عندئذ يكون

$$\forall x \in E, \quad \sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان  $x \in \text{vect}((e_1, \dots, e_n))$ .

الإثبات

لنضع  $F = \text{vect}((e_1, \dots, e_n))$ ، ولتكن  $x \in E$ . لما كان الشعاعان  $P_F(x)$  و  $x - P_F(x)$  متعامدين، أمكننا أن نكتب

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$$

ومن ثم تكون لدينا المتراجحة  $\|x\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2$ ، حيث تتحقق المساواة فيها إذا وفقط إذا كان  $x = P_F(x)$  أي  $x \in \text{vect}((e_1, \dots, e_n))$ . وأخيراً لاحظ استناداً إلى النتيجة السابقة أن

$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2$$

وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب. □

6-3.VII. مثال : ليكن  $f$  تابعاً مستمراً على المجال  $[0, 2\pi]$  وبأخذ قيمه في  $\mathcal{C}$ . ولنعرّف ثابت

فورييه -Fourier- لـ  $f$  الموافق للدليل  $n \in \mathbb{Z}$ ، بأنه  $C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ ، عندئذ

يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=-n}^n |C_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

في الحقيقة، هذه هي متراجحة Bessel مطبقة على فضاء التوابيع المستمرة على  $[0, 2\pi]$ ، والتي تأخذ قيمها في  $\mathcal{C}$ ، بعد تزويده بالجداء السلمي:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

وعلى الجملة المتعامدة النظامية  $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$  حيث  $e_k(x) = \exp(ikx)$ .

7-3.VII. مبرهنة : ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من

$E$ . وأخيراً ليكن  $(x_1, \dots, x_n)$  أساساً ما لـ  $F$ . عندئذ يكون

$$\forall x \in F, \quad d^2(x, F) = \frac{\det \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n)}{\det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n)}$$

الإثبات

ليكن  $x \in E$ . نعلم بمقتضى النتيجة 18-1.VII. أن

$$\det \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) = \det \text{Gram}(x - P_F(x), x_1, \dots, x_n)$$

وذلك لأن  $P_F(x)$  هو عبارة خطية بالأشعة  $(x_1, \dots, x_n)$ . ولكن لما كان  $x - P_F(x) \perp x_k$ ،

وذلك أيّاً كان  $k \in \mathbb{N}_n$ ، أمكننا أن نكتب

$$\text{Gram}(x - P_F(x), x_1, \dots, x_n) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \|x - P_F(x)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{Gram}(x_1, \dots, x_n) & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

ومنه

$$\det \text{Gram}(x, x_1, \dots, x_n) = \|x - P_F(x)\|^2 \det \text{Gram}(x_1, \dots, x_n)$$

ونحصل على المطلوب بملاحظة أن  $\|x - P_F(x)\| = d(x, F)$ .

□

8-3.VII مثال : ليكن  $E = \mathbb{R}[X]$  ، ولزوده بالجداء السلمي

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

وليكن  $F_n = \text{vect}((1, X, \dots, X^{n-1}))$  . المطلوب هو تعيين  $d(X^m, F_n)$  حين يكون  $m \geq n$  .

لنضع  $\mathcal{H} = \text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}, X^m)$  فيكون

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{m+n} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

لحساب محدد  $\mathcal{H}$  لطرح العمود الأخير من بقية الأعمدة فنجد

$$\det \mathcal{H} = \det \begin{bmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{m-1}{2(m+1)} & \dots & \frac{m-n+1}{n(m+1)} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{m}{2(m+2)} & \frac{m-1}{3(m+2)} & \dots & \frac{m-n+1}{(n+1)(m+2)} & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{m}{n(m+n)} & \frac{m-1}{(n+1)(m+n)} & \dots & \frac{m-n+1}{(2n-1)(m+n)} & \frac{1}{m+n} \\ \frac{m}{(m+1)(2m+1)} & \frac{m-1}{(m+2)(2m+1)} & \dots & \frac{m-n+1}{(m+n)(2m+1)} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^2}{(m-n)! \cdot (m+n)! \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & 1 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبأسلوب مماثل نجد بعد طرح السطر الأخير من بقية الأسطر

$$\det \mathcal{H} = \frac{(m!)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & 0 \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{m+n} & 1 \end{bmatrix}$$

وبنشر هذا المحدد وفق العمود الأخير نجد

$$\det \mathcal{H} = \frac{(ml)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

ولما كان

$$\text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

أمكننا أن نكتب

$$d^2(X^m, F_n) = \frac{\det \text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1}, X^m)}{\det \text{Gram}(1, X, \dots, X^{n-1})} = \frac{(ml)^4}{((m-n)!)^2 \cdot ((m+n)!)^2 \cdot (2m+1)}$$

$$d(X^m, F_n) = \frac{(ml)^2}{(m-n)! \cdot (m+n)! \cdot \sqrt{2m+1}} \quad \text{ومنه}$$

أو

$$d(X^m, \text{vect}((1, X, \dots, X^{n-1}))) = \begin{cases} 0 & : m < n \\ \frac{C_{2m}^{m-n}}{C_{2m}^m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m+1}} & : m \geq n \end{cases}$$

## 4.VII. الأشكال الخطية، والتطبيقات الخطية المرافقة

4.VII.1. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد. وليكن  $f$  شكلاً خطياً

على  $E$ ، أي  $f \in E^*$ . عندئذ يوجد عنصر وحيد  $\beta \in E$  بحيث يكون

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$$

الإثبات

ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً متعامداً نظامياً لـ  $E$ . ولنفترض وجود عنصر  $\beta \in E$

يُحقق المطلوب. عندئذ، أيّاً كان  $x \in E$ ، يَكُنْ

$$\langle \beta, x \rangle = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k\right) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle f(e_k) = \left\langle \sum_{k=1}^n \overline{f(e_k)} \cdot e_k, x \right\rangle$$

ومن ثَمَّ لا بد أن يكون  $\beta = \sum_{k=1}^n \overline{f(e_k)} \cdot e_k$ ، وهذا ما يثبت وحدانية  $\beta$ .

من ناحية أخرى، إذا تأملنا العنصر  $\beta = \sum_{k=1}^n f(e_k) \cdot e_k$  وجدنا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad f(e_i) = \langle \beta, e_i \rangle$$

ويستج من ذلك أن  $f(x) = \langle \beta, x \rangle$ ،  $\forall x \in E$ ، لكون الطرفين خطيين.

□

VII-4-2. ملاحظة: يمكن تعميم البرهنة السابقة على النحو التالي: ليكن  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء هيلبرت. وليكن  $f$  شكلاً خطياً مستمراً على  $H$ . عندئذ يوجد عنصر وحيد  $\beta \in H$  بحيث يكون  $\forall x \in H, \quad f(x) = \langle \beta, x \rangle$ .

في الحقيقة، الوحدة أمر بسيط لتركه للقارئ، لنثبت إذن الوجود. يمكننا أن نفترض أن  $f \neq 0$ ، يوجد حينئذ  $\alpha \in H$  بحيث  $1 = f(\alpha)$ . ولما كان  $f$  مستمراً، كان  $F = \ker f$  فضاء شعاعياً جزئياً مغلقاً من  $H$ . يمكننا إذن أن نعرف  $P_F$  الإسقاط القائم لـ  $H$  على  $F$ . ونعرف من ثم  $\tilde{\beta} = \alpha - P_F(\alpha)$ ، فيكون  $1 = f(\tilde{\beta})$  و  $\tilde{\beta} \perp F$ .

أخيراً، أيما كانت  $x \in H$ ، كان  $\tilde{\beta} \cdot f(x) - x$  عنصراً من  $F$ ، ومن ثم

$$\langle \tilde{\beta}, x - f(x) \cdot \tilde{\beta} \rangle = 0$$

وهذا يكافئ، كون  $f(x) = \langle \beta, x \rangle$  حيث  $\beta = \frac{1}{\|\tilde{\beta}\|^2} \tilde{\beta}$ . وهذا يثبت المطلوب.

VII-4-3. نتيجة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد، ولرؤده بالنظيم الموافق للجداء السلمي. ولرؤد  $E^*$  فضاء الأشكال الخطية على  $E$  بنظم التطبيقات الخطية المستمرة من  $E$  إلى  $\mathbb{K}$ . عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi: E \rightarrow E^*, \quad \beta \mapsto f_\beta$$

حيث  $f_\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$ ،  $\forall x \in E$ ، تقابلاً نصف خطياً<sup>d</sup> محافظاً على النظم.

الإثبات

إن  $\Phi$  تقابل بناءً على البرهنة VII-4-1.

من ناحية أخرى، ليكن  $E^2 \ni (\alpha, \beta)$  و  $\mathbb{K}^2 \ni (t, s)$  و  $x \in E$  عندئذ

$$\begin{aligned} \Phi(t\alpha + s\beta)(x) &= \langle t\alpha + s\beta, x \rangle = t\langle \alpha, x \rangle + s\langle \beta, x \rangle = t\Phi(\alpha)(x) + s\Phi(\beta)(x) \\ &= (t\Phi(\alpha) + s\Phi(\beta))(x) \end{aligned}$$

<sup>d</sup> أي  $\forall (\alpha, \beta) \in E^2, \forall (t, s) \in \mathbb{K}^2, \quad \Phi(t\alpha + s\beta) = t \cdot \Phi(\alpha) + s \cdot \Phi(\beta)$

وأخيراً، أياً كان  $\beta \in E$ ، فلدينا

$$\|\Phi(\beta)\| = \|f_\beta\| = \sup \{ \langle \beta, x \rangle : \|x\| \leq 1 \} = \|\beta\|$$

□

وذلك بناءً على مترابطة شوارتز، وعلى حالة المساواة فيها.

4-4.VII. ملاحظة: يمكن تعميم النتيجة السابقة، باستخدام الإثبات نفسه والملاحظة 2-4.VII.

على النحو التالي: ليكن  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء هيلبرت. وليكن  $H'$  فضاء الأشكال الخطية المستمرة على  $H$ ، مزوداً بنظام التطبيقات الخطية المستمرة. عندئذ يكون التطبيق

$$\Phi : H \rightarrow H', \beta \mapsto f_\beta$$

حيث  $f_\beta(x) = \langle \beta, x \rangle$ ،  $\forall x \in H$ ، تقابلاً لنصف خطي محافظاً على النظام.

5-4.VII. مبرهنة وتعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  و  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  فضاءي جداء سلمي منتهيين البعد على الحقل نفسه. وليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $H$ ، أي  $u \in \mathcal{L}(E, H)$ . عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد  $u^* : \mathcal{L}(H, E) \ni u^*$ ، نسميه مرافق التطبيق  $u$ ، يُحقق ما يلي :

$$\forall (x, y) \in E \times H, \quad \langle y, u(x) \rangle_H = \langle u^*(y), x \rangle_E$$

وإذا زدنا الفضاءات  $\mathcal{L}(E, H)$  و  $\mathcal{L}(H, E)$  و  $\mathcal{L}(E, E)$  و  $\mathcal{L}(H, H)$  بنظام التطبيقات الخطية المستمرة، صار لدينا

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, H), \quad \|u\| = \|u^*\| = \sqrt{\|u \circ u^*\|} = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$$

الإثبات

ليكن  $y$  عنصراً من  $H$ . لما كان التطبيق  $x \mapsto \langle y, u(x) \rangle_H$  شكلاً خطياً على  $E$ ، يوجد بمقتضى المبرهنة 1-4.VII. عنصر وحيد  $u^*(y)$  في  $E$  بحيث يكون

$$\forall x \in E, \quad \langle y, u(x) \rangle_H = \langle u^*(y), x \rangle_E$$

لنثبت إذن أن التطبيق  $u^* : H \rightarrow E, y \mapsto u^*(y)$  تطبيق خطي.

في الحقيقة، أياً كان  $(y, z) \in H^2$ ، و  $(t, s) \in \mathbb{K}^2$ ، و  $x \in E$ ، فإن

$$\begin{aligned} \langle u^*(\lambda y + \mu z), x \rangle_E &= \langle \lambda y + \mu z, u(x) \rangle_H \\ &= \bar{\lambda} \langle y, u(x) \rangle_H + \bar{\mu} \langle z, u(x) \rangle_H \\ &= \bar{\lambda} \langle u^*(y), x \rangle_E + \bar{\mu} \langle u^*(z), x \rangle_E \\ &= \langle \lambda u^*(y) + \mu u^*(z), x \rangle_E \end{aligned}$$

ومن ثم  $u^*(\lambda y + \mu z) = \lambda u^*(y) + \mu u^*(z)$ ، وهذا يقتضي  $u^* \in \mathcal{L}(H, E)$ .

من ناحية أخرى، ليكن  $u \in \mathcal{L}(E, H)$  ولنعرف المجموعة الجزئية  $\mathcal{A}$  من  $\mathbb{R}_+$  بالعلاقة:

$$\mathcal{A} = \left\{ |\langle y, u(x) \rangle_H| : \|x\|_E \leq 1 \wedge \|y\|_H \leq 1 \right\}$$

ولنضع  $a = \sup \mathcal{A}$ . فيكون لدينا استناداً إلى متراجحة شوارتز وحالة المساواة فيها:

$$a = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left( \sup_{\|y\|_H \leq 1} |\langle y, u(x) \rangle_H| \right) = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_H = \|u\|$$

وبأسلوب مماثل يكون أيضاً لدينا

$$a = \sup_{\|y\|_H \leq 1} \left( \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle u^*(y), x \rangle_E| \right) = \sup_{\|y\|_H \leq 1} \|u^*(y)\|_E = \|u^*\|$$

وهذا ما يثبت أن  $\|u\| = \|u^*\|$ .

من ناحية أخرى، أياً كانت  $x \in E$  فلدينا:

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_H^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle_H = \langle u^*(u(x)), x \rangle_E \leq \|u^* \circ u(x)\|_E \|x\|_E \\ &\leq \|u^* \circ u\| \cdot \|x\|_E^2 \end{aligned}$$

ومن ثم يكون  $\|u\| \leq \sqrt{\|u^* \circ u\|}$ . ولكن لدينا أيضاً المتراجحة المعاكسة:

$$\|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2$$

إذن  $\|u\| = \sqrt{\|u^* \circ u\|}$ . وبطبيق ما أثبتناه على  $u^*$  وملاحظة أن  $(u^*)^* = u$ ، نجد

$$\|u^*\| = \sqrt{\|(u^*)^* \circ u^*\|} = \sqrt{\|u \circ u^*\|}$$

وبذلك يكتمل الإثبات.

□



6-4.VII. مبرهنة وتعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  و  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  فضاءي جداء سلمي منتهيين البعد على الحقل نفسه. وليكن  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  و  $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_m)$  أساسين متعامدين لنظامين  $E$  و  $H$  على التوالي. وأخيراً ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً من  $E$  إلى  $H$ ، أي  $u \in \mathcal{L}(E, H)$ . عندئذ يكون

$$\text{mat}(u^*, \mathcal{H}, \mathcal{E}) = (\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{H}))^*$$

الإثبات

في الحقيقة، إذا كان  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{H}) = (a_{ij})$  وكان  $\text{mat}(u^*, \mathcal{H}, \mathcal{E}) = (b_{ij})$ ، أمكن أن نعبر عن ثوابت هاتين المصفوفتين بدلالة الأساسين المتعامدين النظامين على النحو الآتي:

$$b_{ij} = \langle e_i, u^*(h_j) \rangle_E \quad \text{و} \quad a_{ij} = \langle h_i, u(e_j) \rangle_H$$

ومن ثم إذا استخدمنا خواص الجداء السلمي وتعريف المرافق نجد

$$\overline{b_{ji}} = \overline{\langle e_j, u^*(h_i) \rangle_E} = \langle u^*(h_i), e_j \rangle_E = \langle h_i, u(e_j) \rangle_H = a_{ij}$$

□

وهذا هو المطلوب إثباته.

نسمح لنا المبرهنة السابقة باستنتاج الخواص البسيطة التالية، التي نلخصها في المبرهنة التالية، علماً بأننا قد استخدمنا بعض الخواص سابقاً.

7-4.VII. مبرهنة: ليكن  $E$  و  $F$  و  $H$  ثلاثة فضاءات جداء سلمي منتهية البعد على الحقل نفسه. عندئذ:

❖ أيّاً كان  $u$  و  $v$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  و أيّاً كان  $\lambda \in \mathbb{K}$  فإن

$$(\lambda u + v)^* = \bar{\lambda} u^* + v^*$$

❖ أيّاً كان  $u$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  لدينا  $(u^*)^* = u$ .

❖ أيّاً كان  $u$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  و أيّاً كان  $v$  من  $\mathcal{L}(F, H)$  فلدينا

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$$

❖ وأخيراً إذا كان  $u$  من  $\mathcal{L}(E, F)$  قلّوباً كان  $u^*$  قلّوباً وكان

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

8-4.VII تعريف : ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل  $IK$ .

< في حالة  $IR = IK$ ، نسمي كل تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E)$  يُحقق الشرط  $u^* = u$  تطبيقاً خطياً متناظراً.

< في حالة  $\mathcal{C} = IK$ ، نسمي كل تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E)$  يُحقق الشرط  $u^* = u$  تطبيقاً خطياً هرميتياً.

< ونقول عن تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E)$  إنه موجب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$$u^* = u \quad \circ \circ$$

$$\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \in IR_+ \quad \circ \circ$$

< ونقول عن تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E)$  إنه معرف وموجب إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$$u^* = u \quad \circ \circ$$

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, u(x) \rangle \in IR_+^* \quad \circ \circ$$

< في حالة  $IR = IK$ ، نسمي كل تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E)$  يُحقق الشرط  $u^* = u^{-1}$  تطبيقاً خطياً متعامداً.

< في حالة  $\mathcal{C} = IK$ ، نسمي كل تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E)$  يُحقق الشرط  $u^* = u^{-1}$  تطبيقاً خطياً واحداً.

9-4.VII مثال : ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد. وليكن  $p \in \mathcal{L}(E)$  إسقاطاً

قائماً، عندئذ يكون  $p = p^*$ . في الحقيقة، أياً كان  $(x, y) \in E^2$  فإن

$$\begin{aligned} \langle x, p(y) \rangle &= \langle x - p(x) + p(x), p(y) \rangle = \langle x - p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), p(y) \rangle = \langle p(x), y + p(y) - y \rangle \\ &= -\langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), y \rangle \\ &= \langle p(x), y \rangle \end{aligned}$$

حيث استخدمنا كون الفضاءين الجزئيين  $\text{Im } p$  و  $\text{ker } p = \text{Im}(I_E - p)$  متعامدين. ولاحظ من الحساب السابق

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle p^*(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$$

وهذا بالطبع يكافئ  $p^* = p$ .

سنفترض في كل ما يأتي أن الحقل  $IK$  هو حقل الأعداد الحقيقية.

### 5.VII. التطبيقات الخطية المتعامدة

5.VII.1. تعريف: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  و  $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$  فضاءي جداء سلمي على الحقل  $IR$ . وليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . نقول إن  $u$  يحافظ على الجداء السلمي إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$$

وهذا الشرط يكافئ، بمقتضى المطابقات القطيية، حفاظ  $u$  على النظم أي

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F = \|x\|_E$$

وأخيراً نقول إن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  تقابل خطي محاف على المسافة، إذا كان  $u$  تقابلاً خطياً، من جهة أولى، وكان يحافظ على الجداء السلمي من جهة ثانية. و يلاحظ القارئ بسهولة أن كل تطبيق خطي  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  يحافظ على الجداء السلمي يكون متبايناً.

5.VII.2. مبرهنة: ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  و  $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$  فضاءي جداء سلمي على الحقل  $IR$ . نفترض أنهما منتهيي البعد وأن  $\dim E = \dim F$ . ليكن  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . عندئذ تكون الخواص التالية متكافئة:

1. التطبيق  $u$  يحافظ على الجداء السلمي.
2. التطبيق  $u$  تقابل خطي محاف على المسافة.
3. صورة كل أساس متعامد نظامي في  $E$  هي أساس متعامد نظامي في  $F$ .
4. يوجد أساس متعامد نظامي في  $E$  بحيث تكون صورته أساساً متعامداً نظامياً في  $F$ .

الإثبات

إن إثبات هذه المبرهنة، أمر ميسور جداً انطلاقاً من التعريف، ونترك تفاصيله للقارئ.  $\square$

ليكن  $E$  فضاء إقليدياً، أي فضاء جداء سلمي منتهي البعد على الحقل  $\mathbb{R}$ . ينتج من التعريف والمبرهنة السابقين، أن تطبيقاً خطياً  $u \in \mathcal{L}(E)$  يكون متعامداً، أي يحقق  $u^* = u^{-1}$ ، إذا وفقط إذا كان محافظاً على الجداء السلمي. تكون مجموعة التطبيقات الخطية المتعامدة، زمرة بالنسبة إلى تركيب التطبيقات، نرسم إليها بالرمز  $O(E)$ ، ونسميها الزمرة المتعامدة.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad u \in O(E) \Leftrightarrow u^* \circ u = I_E \\ \Leftrightarrow u \circ u^* = I_E$$

وتكون الزمرة المتعامدة  $(O(E), \circ)$  زمرة جزئية من الزمرة الخطية  $(\mathcal{L}(E), \circ)$ . ونشير إلى أن التعريف السابق يقتضي وضوحاً:  $\forall u \in O(E), \det u \in \{-1, +1\}$ ، ولكن العكس خطأ. ولما كان  $u \mapsto \det u$  يُعرف تشاكلاً زمرياً بين  $O(E)$  و  $\{-1, +1\}$  كانت نواة هذا التشاكل أي  $\{u \in O(E), \det u = 1\}$  زمرة جزئية من  $O(E)$  نسميها زمرة الدورانات ونرمز إليها بالرمز  $O^+(E)$ ، ونرمز عادة بالرمز  $O^-(E)$  إلى المجموعة  $O(E) \setminus O^+(E)$  وهي بالطبع ليست زمرة.

يمكننا إسقاط الملاحظة السابقة على المصفوفات الحقيقية المربعة، فنرمز بالرمز  $O(n)$  إلى مجموعة المصفوفات  $A \in M_n(\mathbb{R})$  التي تحقق  $AA^t = I_n$  أو الشرط المكافئ  $A^t A = I_n$ . وهي، مزودة بقانون ضرب المصفوفات، تكون زمرة جزئية من زمرة المصفوفات الحقيقية المربعة القابلة من المرتبة  $n$ :  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . ونعرف بأسلوب مماثل لما سبق  $O^+(n)$ ، و  $O^-(n)$ .

وأخيراً إذا كان  $E$  فضاء إقليدياً، بعده  $n$ ، وكان  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  أساساً متعامداً نظامياً لـ  $E$ ، كان التطبيق  $\Phi: O(E) \rightarrow O(n), u \mapsto \text{mal}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  تشاكلاً تقابلياً زمرياً.

تسمح لنا الدراسة السابقة بتعريف توجيه فضاء إقليدي:

ليكن  $E$  فضاء إقليدياً، بعده  $n$ ، ونرمز بالرمز  $BON(E)$  إلى مجموعة الأسس المتعامدة النظامية للفضاء  $E$ . فإذا كان  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  و  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  عنصرين من  $BON(E)$ ، عرفنا التطبيق الخطي المتعامد الوحيد  $U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}$  بالشرط:

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}(e_k) = e'_k$$

يسمح لنا هذا بتعريف علاقة ثنائية  $\Re$  على المجموعة  $BON(E)$ ، على النحو الآتي:

$$\mathcal{E} \Re \mathcal{E}' \Leftrightarrow \det(U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}) = 1 \Leftrightarrow U_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'} \in O^+(E)$$

ونتحقق بسهولة أن  $\mathfrak{N}$  علاقة تكافؤ على المجموعة  $BON(E)$ :

- فهي العكاسية لأن  $U_{E,E} = I_E$ ، أيًا كان  $E$  من  $BON(E)$ .
- وهي تناظرية لأن  $U_{E,E'}^{-1} = U_{E',E}$ ، أيًا كان  $E$  و  $E'$  من  $BON(E)$ .
- وأخيراً هي متعدية لأن  $U_{F,E} \circ U_{E,G} = U_{F,G}$ ، أيًا كان  $E$  و  $F$  و  $G$  من  $BON(E)$ .

وأخيراً، إن هذه العلاقة صفية تكافؤ اثنين فقط. ذلك لأنه إذا كان  $E^+ = (e_1, \dots, e_n)$  عنصراً ما من  $BON(E)$ ، وعرفنا  $E^- = (-e_1, \dots, e_n)$ ، كان

$$BON(E)/\mathfrak{N} = \{[E^+], [E^-]\}$$

في الحقيقة، لما كان  $\det(U_{E^+,E^-}) = -1$ ، كان  $[E^+] \neq [E^-]$ ، هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية، إذا كان  $F$  عنصراً ما من  $BON(E)$ ، نتج من العلاقة

$$U_{E^-,F} \circ U_{E^+,E^-} = U_{E^+,F}$$

أن  $\det(U_{E^-,F}) = -\det(U_{E^+,F})$ . فإما أن يكون  $\det(U_{E^+,F}) = 1$  ومن ثم  $F \in [E^+]$ ، أو أن يكون  $\det(U_{E^-,F}) = 1$ ، وهذا يقتضي  $F \in [E^-]$ . أي إن  $[F] \in \{[E^+], [E^-]\}$ .

نسمي صفية التكافؤ، في  $BON(E)/\mathfrak{N}$ ، توجيهين للفضاء الإقليدي  $E$ . ويكون توجيه الفضاء الإقليدي  $E$ ، هو اختيار أحد التوجيهين السابقين، أي اختيار أساس متعامد نظامي  $E$  من  $BON(E)$ . فنسمي  $[E]$  توجيهاً مباشراً ونسمي صف التكافؤ الثاني توجيهاً رجحياً أو غير مباشر. ونسمي عناصر  $[E]$  أساساً متعامدة نظامية مباشرة.

3.5.VII. مثال: لندرس الزمرة  $O(2)$ .

تكون المصفوفة المربعة  $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  متعامدة إذا وفقط إذا كان  ${}^t M M = I_2$ ،

وهذا يكافئ الشرطين:

$$(i) \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$$

$$(ii) \quad ac + bd = 0$$

ينتج من (i) أنه يوجد عدداً حقيقيّان  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$  بحيث

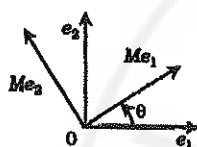
$$(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{و} \quad (c, d) = (\sin \varphi, \cos \varphi)$$

وننتج من العلاقة (٧) أن

$$\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) = 0$$

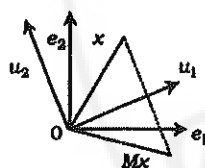
وهذا يُعطي حلين للمسألة:  $\varphi \in (-\theta + 2\pi\mathbb{Z})$  أو  $\varphi \in (\pi - \theta + 2\pi\mathbb{Z})$ . إذن للمصفوفة  $M$  أحد الشكلين الآتيين:

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



إذا كانت  $M = R_\theta$  كان  $\det M = +1$ ، فهي إذن مصفوفة دوران أي  $M \in O^+(2)$ ، وهي تمثّل هندسياً الدوران بزاوية  $\theta$  حول المبدأ  $O$ ، أي الذي مركزه  $O$ .

أما إذا كانت  $M = S_\theta$  فيكون  $\det M = -1$ ، ويكون كثير الحدود المميز لـ  $M$  هو  $X^2 - 1$  ومن ثم  $\text{sp}(M) = \{-1, +1\}$ ، ويكون الشعاعان  $u_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$  و  $u_2 = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$  أساساً



متعامداً نظامياً للفضاء الإقليدي المألوف  $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ ، مؤلفاً من أشعة ذاتية للمصفوفة  $M$ . أي  $Mu_1 = u_1$  و  $Mu_2 = -u_2$ . فهي تمثّل هندسياً التناظر القائم حول المستقيم الشعاعي الموجه بالشعاع  $u_1$  أي  $\mathbb{R}u_1$ .

4.5.VII. مثال: الجداء الخارجي والجداء المختلط في فضاء إقليدي ثلاثي البعد.

ليكن  $E$  فضاءً إقليدياً موجهاً بُعد 3. وليكن  $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$  و  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$  أساسين متعامدين نظاميين مباشرين في  $E$ . لما كان بُعد فضاء الأشكال الـ 3-خطية المتناوبة هو 1، يوجد عدد  $\lambda \in \mathbb{R}$ ، بحيث  $\det_{\mathcal{F}} = \lambda \det_{\varepsilon}$ ، ومن ثم  $\lambda = \det_{\varepsilon}(f_1, f_2, f_3) = \det U_{\varepsilon, \mathcal{F}} = 1$ .

نستنتج من ذلك أن  $\det_{\mathcal{F}} = \det_{\varepsilon}$ .

نسمح لنا بالملاحظة السابقة أن نستنتج الخاصّة التالية:

ليكن  $E$  فضاء إقليدياً موجهاً بعده 3. يوجد شكل ثلاثي الخطية متناوباً وحيث  $\delta_E$  على  $E$  يُحقّق  $\delta_E = \det_E$  أيّاً كان الأساس المتعامد النظامي المباشر  $\mathcal{E}$  للفضاء الإقليدي الموجه  $E$ ، نسمّي  $\delta_E$  الجداء المختلط على  $E$ .

ولنستخدم الرمز  $[x_1, x_2, x_3]$  دلالة على  $\delta_E(x_1, x_2, x_3)$ . فيكون

- $\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, [x_1, x_2, x_3] = \det_{\mathcal{E}}(x_1, x_2, x_3)$   
حيث  $\mathcal{E}$  أساس متعامد نظامي مباشر ما للفضاء  $E$ .

ليكن  $E$  فضاء إقليدياً موجهاً بعده 3. وليكن  $v_1$  و  $v_2$  شعاعين من  $E$ . كما كان التطبيق  $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [v_1, v_2, x]$  شكلاً خطياً على  $E$ ، نعلم أنّه يوجد شعاع وحيد، لرمز إليه بالرمز  $v_1 \wedge v_2$ ، بحيث

- $\forall x \in E, [v_1, v_2, x] = \langle v_1 \wedge v_2, x \rangle$   
نسمّي الشعاع  $v_1 \wedge v_2$  الجداء الشعاعي لـ  $v_1$  و  $v_2$  بهذا الترتيب.  
ليكن  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  أساساً متعامداً نظامياً مباشراً ما لـ  $E$ . ولنفترض أنّ

$$v_2 = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3 \quad \text{و} \quad v_1 = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \zeta_3 e_3$$

عندئذ، أيّاً كان الشعاع  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$  من  $E$ ، نجد ببساطة وفق المبرهن الأخير:

$$[v_1, v_2, x] = \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 & \alpha_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 & \alpha_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \det \begin{bmatrix} \zeta_2 & \eta_2 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} - \alpha_2 \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \det \begin{bmatrix} \zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_2 & \eta_2 \end{bmatrix}$$

وهذا يبيّن أنّ

$$v_1 \wedge v_2 = (\zeta_2 \eta_3 - \zeta_3 \eta_2) e_1 + (\zeta_3 \eta_1 - \zeta_1 \eta_3) e_2 + (\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1) e_3$$

ويعطينا طريقة عمليّة لحساب الجداء الشعاعي.

نلاحظ من التعريف ● أنّ الشعاع  $v_1 \wedge v_2$  عمودي على كل من  $v_1$  و  $v_2$ . ولسترك

للقارئ أن يتحقّق صحة المطابقة المهمّة التالية والمعروفة باسم متطابقة Lagrange

$$\|v_1 \wedge v_2\|^2 + |\langle v_1, v_2 \rangle|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2$$

والتي ينتج منها أن

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin(\hat{x}_1, x_2)$$

يُحقق الجداءان الشعاعي والمختلط الخواص التالية:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b, c) \in E^3 \quad (\lambda a + b) \wedge c = \lambda(a \wedge c) + (b \wedge c) \quad .1$$

$$\forall (a, b) \in E^3, \quad a \wedge b = -(b \wedge a) \quad .2$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c \quad .3$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0 \quad .4$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = [a, b, c]a \quad .5$$

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a] = [a, b, c]^2 \quad .6$$

وأخيراً، إذا كان  $a$  و  $b$  شعاعين من  $E$  بحيث  $a \neq 0$ ، فإن الشرط اللازم والكافي

حتى يوجد شعاع  $x \in E$  يُحقق  $a \wedge x = b$  هو أن يكون  $a \perp b$ ، وفي هذه الحالة تكون

مجموعة حلول المعادلة  $a \wedge x = b$  هي

$$\left\{ \frac{1}{\|a\|^2} b \wedge a + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

سنهني هذه الفقرة بالبرهنة التالية، التي تعطي تفرقة للمصفوفات المرتبة مهمتها في بعض

مسائل التحليل العددي:

5-5.VII. مبرهنة: -تفريق Iwasawa- لتكن  $M \in M_n(\mathbb{R})$ ، مصفوفة قطرية. عندئذ توجد ثنائية

وحيدة  $(O, T)$  حيث  $O$  مصفوفة متعامدة من المرتبة  $n$ ، و  $T$  مصفوفة مثلثية عليا، عناصر

قطرها الأساسي موجبة تماماً، بحيث  $M = OT$ .

الإثبات

لنعرف  $G = {}^t M M$ ، فتكون  $G$  مصفوفة معرفة موجبة عملاً بالملاحظة 2.VII.11. إذن

لنجد استناداً إلى تفريق Cholesky، (انظر المبرهنة 2.VII.10) مصفوفة مثلثية عليا  $T$ ، عناصر

قطرها الأساسي موجبة تماماً، بحيث  $G = {}^t M M = {}^t T T$ . ومن ثم يكون  $M = OT$  حيث عرفنا

المصفوفة  $O$  بالعلاقة  $O = ({}^t M)^{-1} {}^t T = {}^t (T M^{-1})$ .

بقي أن نثبت أن  $O \in O(n)$ ، ولكنه أمر واضح لأن المساواة  ${}^t M M = {}^t T T$  تقتضي:

$$O = M T^{-1} = (T M^{-1})^{-1} = ({}^t O)^{-1}$$



بذلك نكون قد أثبتنا الشئ المتعلق بوجود التفريق من المبرهنة. لنثبت إذن الوحدةانية. لنفترض أن  $M = OT = O'T'$ ، حيث نحقق الشائكان  $(O, T)$  و  $(O', T')$  شروط المبرهنة. عندئذ يكون  $OO' = T^{-1}T'^{-1}$ ، أي تكون المصفوفة  $D = T^{-1}T'^{-1}$  مصفوفة متماثلة عليا ثوابت قطرها الأساسي موجبة تماماً، وهي أيضاً مصفوفة متعامدة:  $O(n) \ni D$ . هذا يقتضي بالطبع أن يكون  $D = I_n$ ، أي  $T = T'$ ، ومن ثم  $O = O'$ .  $\square$

## 6.VII. اختزال التطبيقات الخطية المتناظرة

في كامل هذه الفقرة، يمثل  $E$  فضاء إقليدياً بعده  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 6.VII-1. مبرهنة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً متناظراً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ تتحقق الخواص التالية:
1. إذا كان  $F$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $E$ ، يُحقق  $u(F) \subset F$ ، كان  $u(F^\perp) \subset F^\perp$ .
  2. إذا كانت  $\lambda$  و  $\mu$  قيمتين ذاتيتين مختلفتين لـ  $u$ ، كان الفضاءان الجزئيان الذاتيان  $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$  و  $E_\mu = \ker(u - \mu I_E)$  متعامدين:  $E_\lambda \perp E_\mu$ .
  3. إن طيف  $u$  غير خال:  $\text{sp}(u) \neq \emptyset$ ، أي إن للتطبيق الخطي  $u$  قيمة ذاتية واحدة على الأقل.

### الإثبات

1. لتكن  $x \in F^\perp$ . عندئذ، أياً كان  $z \in F$ ،
 
$$\langle u(x), z \rangle = \langle x, u^*(z) \rangle \stackrel{u=u^*}{=} \left\langle x, u(z) \right\rangle_{F^\perp, F} = 0$$
 إذن  $u(x) \in F^\perp$ . وهذا ما يثبت أن  $u(F^\perp) \subset F^\perp$ .
2. لتكن  $(x, y) \in E_\lambda \times E_\mu$ . عندئذ يكون
 
$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle \stackrel{x \in E_\lambda}{=} \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle \stackrel{u=u^*}{=} \langle x, u(y) \rangle \stackrel{y \in E_\mu}{=} \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$
 وهذا يقتضي  $\langle x, y \rangle = 0$  لأن  $\lambda \neq \mu$ .

3. لتكن المجموعة الجزئية  $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  من  $E$ . إنها مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الشعاعي المنظم  $E$ ، فهي إذن مجموعة متراصة لأن بُعد  $E$  منته. ومن نسم فإن استمرار التابع الحقيقي:

$$\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

على هذه المجموعة المتراصة يجعله يبلغ حدّه الأعلى عليها، أي يوجد عنصر  $x_0 \in S$  بحيث

$$\lambda = \varphi(x_0) = \max_{x \in S} \varphi(x)$$

ويكون لدينا، بناءً على تعريف  $\lambda$ ،

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \langle u(x_0 + ty), x_0 + ty \rangle \leq \lambda \|x_0 + ty\|^2$$

لأنه في حالة  $x_0 + ty \neq 0$  يكون الشعاع  $z = \frac{1}{\|x_0 + ty\|}(x_0 + ty)$  عنصراً من  $S$ . ويتبع

من نشر المراجعة السابقة أنه

$$\forall y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2(\lambda \|y\|^2 - \langle u(y), y \rangle) + 2t(\lambda \langle x_0, y \rangle - \langle u(x_0), y \rangle) \geq 0$$

وينجم عن ذلك أن أمثال  $t$  معدومة، أي

$$\forall y \in E, \quad \lambda \langle x_0, y \rangle - \langle u(x_0), y \rangle = \langle \lambda x_0 - u(x_0), y \rangle = 0$$

وهذا يقتضي  $u(x_0) = \lambda x_0$ ، ومن ثم يكون  $\lambda \in \text{sp}(u)$  لأن  $x_0 \neq 0$ .  $\square$

2-6.VII. ملاحظة: إذا كان  $u$  تطبيقاً خطياً متناظراً من  $\mathcal{L}(E)$ . كان  $-u$  تطبيقاً خطياً متناظراً أيضاً، ويتبع من الإثبات السابق أن كلاً من العددين

$$\Lambda_{\min} = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \quad \text{و} \quad \Lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

عنصر من  $\text{sp}(u)$ . ومن جهة أخرى، تتحقق دوماً المتراجحة

$$\forall \mu \in \text{sp}(u), \quad \Lambda_{\min} \leq \mu \leq \Lambda_{\max}$$

تسمح لنا هذه الملاحظة أن نستنتج أن  $\Lambda_{\min} = \min \text{sp}(u)$  و  $\Lambda_{\max} = \max \text{sp}(u)$ .

ومنه

$$\min \text{sp}(u) = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \quad \text{و} \quad \max \text{sp}(u) = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle$$

3-6.VII. مبرهنة: -التحليل الطيفي- ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً متناظراً من  $\mathcal{L}(E)$ . نرسم، أيّاً كان

$\lambda \in \text{sp}(u)$ ، بالرمز  $P_\lambda$  إلى الإسقاط القالم لـ  $E$  على الفضاء الجزئي الذاتي المرافق

لـ  $\lambda$ :  $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ . عندئذ نتحقق الخواص التالية:

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\text{sp}(u))^2, \lambda \neq \mu \Rightarrow P_\lambda \circ P_\mu = 0 \quad .1'$$

$$I_E = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} P_\lambda \quad .2'$$

$$u = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \lambda \cdot P_\lambda \quad .3'$$

وتسمى الجماعة  $(P_\lambda)_{\lambda \in \text{sp}(u)}$  تحليلاً طيفياً لـ  $u$ ، وهي وحيدة بالمعنى الآتي: إذا كانت

$\Lambda$  مجموعة جزئية غير خالية من  $\mathbb{R}$ ، وكانت  $(Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  جماعة من الإسقاطات القائمة

وغير المدومة من  $\mathcal{L}(E)$ ، بحيث نتحقق الخواص:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \Lambda^2, \lambda \neq \mu \Rightarrow Q_\lambda \circ Q_\mu = 0 \quad .1''$$

$$I_E = \sum_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \quad .2''$$

$$u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot Q_\lambda \quad .3''$$

عندئذ لا بد أن يكون  $\Lambda = \text{sp}(u)$  و  $Q_\lambda = P_\lambda$   $\forall \lambda \in \Lambda$ .

وأخيراً، إذا كان  $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، وعرفنا كثير الحدود  $\ell_\lambda(X) = \prod_{\mu \in \text{sp}(u) \setminus \{\lambda\}} \frac{X - \mu}{\lambda - \mu}$  من

$$P_\lambda = \ell_\lambda(u) \text{ كان } \mathbb{R}[X]$$

الإنبات

لنثبت أولاً أن الجماعة  $(P_\lambda)_{\lambda \in \text{sp}(u)}$  تحقق الخواص 1. و 2. و 3. .

- لنعلم  $(\lambda, \mu) \in (\text{sp}(u))^2$  بحيث  $\lambda \neq \mu$ . عندئذ استناداً إلى المبرهنة 1-6.VII، يكون

$$E_\lambda \perp E_\mu \text{ ومنه } E_\lambda = \ker P_\lambda = E_\lambda^\perp = \text{Im } P_\mu = E_\mu \text{ وهذا يقتضي } P_\lambda \circ P_\mu = 0.$$

- من ناحية أخرى، لنعرف  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)}^\perp E_\lambda$ ، فيكون لدينا وضوحاً  $u(F) \subset F$ ، ومن

$$F^\perp \subset u(F^\perp) \text{ بناءً على المبرهنة 1-6.VII.}$$

لنفترض جدلاً أن  $E \neq F$  أي  $F^\perp \neq \{0\}$ ، ولتأمل التطبيق الخطي

$$v = u|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow F^\perp, x \mapsto u(x)$$

لتحقق بسهولة أن  $v$  تطبق خطي متناظر من  $\mathcal{L}(F^\perp)$ ، إذن  $\text{sp}(v) \neq \emptyset$ . أي يوجد  $\lambda_0 \in \text{sp}(v)$  و يوجد عنصر  $x \in F^\perp$  يكون شعاعاً ذاتياً لـ  $v$  موافقاً للقيمة الذاتية  $\lambda_0$ . أي  $0 \neq x$  و  $u(x) = v(x) = \lambda_0 x$  ومنه

$$x \neq 0 \text{ و } x \in E_{\lambda_0} \cap (F^\perp) \subset E_{\lambda_0} \cap (E_{\lambda_0}^\perp) = \{0\}$$

يثبت هذا التناقض، أن  $E = F$  أي إن

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$$

فإذا كانت  $x \in E$ ، أمكن أن نكتبها بطريقة وحيدة بالشكل  $x = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} x_\lambda$  حيث

$x_\lambda \in E_\lambda$ . وتبين الخاصّة 1 أن

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\text{sp}(u))^2, \lambda \neq \mu \Rightarrow P_\lambda(x_\mu) = P_\lambda \circ P_\mu(x_\mu) = 0$$

وهذا يقتضي، انطلاقاً من المساواة:  $x = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} x_\lambda$ ، أن يكون

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u), P_\lambda(x) = x_\lambda$$

ومن ثم يكون  $x = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} P_\lambda(x)$  وهذه هي الخاصّة 2.

وأخيراً، لما كان  $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ ، نتج أن

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u), u \circ P_\lambda = \lambda \cdot P_\lambda$$

ومنه

$$u = u \circ I_E = u \circ \left( \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} P_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} u \circ P_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \lambda \cdot P_\lambda$$

وهذه هي الخاصّة 3.

لنأت إلى إثبات الوحدة:

لنبدأ بتعريف الفضاءات الشعاعية الجزئية من  $E$ :  $F_\lambda = \text{Im } Q_\lambda$  حيث  $\lambda \in \Lambda$ ، وهي

جميعاً غير تافهة، أي لا تساوي  $\{0\}$ ، لأن  $Q_\lambda \neq 0$ ،  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

ليكن  $\lambda \in \Lambda$ ، وليكن  $x$  عنصراً من  $(\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} F_\mu)$  إذن

$$x = \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} x_\mu \text{ حيث } F_\mu \ni x_\mu, \forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$$

وبالاعتماد على الخاصية 1'. يكون

$$x = Q_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \Lambda(\lambda)} Q_\lambda(x_\mu) = \sum_{\mu \in \Lambda(\lambda)} Q_\lambda \circ Q_\mu(x_\mu) = 0$$

هذا نكون قد أثبتنا أن  $F_\lambda \cap (\sum_{\mu \in \Lambda(\lambda)} F_\mu) = \{0\}$  .  $\forall \lambda \in \Lambda$  . فالتجميع مباشر .

ومن جهة أخرى، تبين الخاصية 2'. أن  $E = \sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  . إذن

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

لتكن  $\lambda \geq \Lambda$  ، نجد اعتماداً على الخاصيتين 1' و 3'. أن  $\forall x \in F_\lambda, u(x) = \lambda x$  .

وهذا يقتضي  $\lambda \in \text{sp}(u)$  ، و  $E_\lambda \supset F_\lambda$  . إذن

$$\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \subset E_\lambda \text{ و } \Lambda \subset \text{sp}(u)$$

ومن ثم

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim F_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim E_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E$$

نستنتج من ذلك أنه لا بُد أن تكون هنالك مساواة في جميع المتراجحات السابقة : المساواة (٥)

تقتضي  $\Lambda = \text{sp}(u)$  ، والمساواة (٧) تقتضي  $F_\lambda = E_\lambda$  .  $\forall \lambda \in \Lambda$  . وهذا يُثبت الوحدة.

أخيراً، ينجم عن 1' و 3' ما يلي :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \lambda^k \cdot P_\lambda$$

وهذه المساواة صحيحة أيضاً حين يكون  $0 = k$  بناءً على 2'. ومنه نجد

$$\forall S \in \mathbb{R}[X], S(u) = \sum_{\mu \in \text{sp}(u)} S(\mu) \cdot P_\mu$$

وبوجه خاص نجد بأخذ  $S = \ell_\lambda(X)$  أن

$$\ell_\lambda(u) = \sum_{\mu \in \text{sp}(u)} \ell_\mu(\lambda) \cdot P_\mu = \sum_{\mu \in \text{sp}(u)} \delta_{\mu, \lambda} \cdot P_\mu = P_\lambda$$

□

وهذا يكتمل البرهان.

4-6.VII. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً متناظراً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ يوجد أساس متعامد لفضاء  $E$   $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  بحيث تكون المصفوفة  $\text{mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$  قطرية.

الإثبات

لنتأمل، أولاً كانت  $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، الفضاء الذاتي  $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ . عندئذ يكون لدينا، استناداً إلى المبرهنة السابقة:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$$

ونحصل على الأساس المتعامد النظامي المطلوب بأن نختار، أولاً كانت  $\lambda \in \text{sp}(u)$ ، أساساً متعامداً لفضاء  $E_\lambda$   $\mathcal{E}_\lambda$ ، ومن ثم نضع  $\mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in \text{sp}(u)} \mathcal{E}_\lambda$ .  $\square$

يمكننا ترجمة النتيجة السابقة إلى لغة المصفوفات فنحصل على النتيجة التالية:

5-6.VII. نتيجة: لتكن  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  مصفوفة متناظرة. عندئذ يوجد مصفوفة متعامدة

$O \in O(n)$ ، وتوجد مصفوفة قطرية  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ، بحيث

$$A = O D^t O$$

وأخيراً نختتم هذا البحث بالخاصتين التاليتين تاركين إياهما البسيط تقريباً للقارئ.

6-6.VII. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً متناظراً من  $\mathcal{L}(E)$ . عندئذ يتحقق التكافؤان التاليان:

$$u \text{ موجب} \Leftrightarrow \text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \quad \diamond$$

$$u \text{ معرف موجب} \Leftrightarrow \text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \quad \diamond$$

7-6.VII. نتيجة: ليكن  $u$  تطبيقاً خطياً متناظراً من  $\mathcal{L}(E)$ ، ولزود  $\mathcal{L}(E)$  بنظم التطبيقات الخطية المستمرة. عندئذ يكون

$$\|u\| = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda| = \max(-\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max})$$

حيث

$$\Lambda_{\min} = \min_{|x|=1} \langle u(x), x \rangle = \min \text{sp}(u)$$

$$\Lambda_{\max} = \max_{|x|=1} \langle u(x), x \rangle = \max \text{sp}(u)$$

و



## تجربيات

التمرين 1. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(e_1, \dots, e_n)$  جملة أشعة من  $E$  تحقق الشرطين:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \|e_i\| = 1 \quad 1.$$

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 \quad 2.$$

أثبت أن الجملة  $(e_1, \dots, e_n)$  أساس متعامد نظامي للفضاء  $E$ .

التمرين 2. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، ولتكن  $(x_1, \dots, x_n)$  جملة أشعة من  $E$ .

$$1. \text{ أثبت أن } \sum_{i < j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2$$

2. نفترض أن  $\|x_i\| < R$  أيًا كان  $i \in \mathbb{N}_n$ . وأن  $\|x_i - x_j\| > 2$  أيًا كان  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ .  
بحيث  $i \neq j$ . أثبت أن  $\sqrt{2(n-1)/n} \leq R$ . هل هذه أفضل نتيجة ممكنة؟

التمرين 3. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي. نذكر بأن  $\bar{B}(0, r)$  هي الكرة المغلقة التي

مركزها 0 ونصف قطرها  $0 < r$ ، وإذا كان  $(x, y) \in E^2$  فإننا نعرف

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} = [x, y]$$

ليكن  $(a, b) \in (\mathbb{R}, )^2$  أثبت أن

$$([x, y] \subset \bar{B}(0, a+b) \setminus \bar{B}(0, a)) \Rightarrow \|x - y\| \leq 2\sqrt{b^2 + 2ba}$$

التمرين 4. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  و  $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$  فضاءي جداء سلمي على الحقل نفسه. وليكن

$f: E \rightarrow F$  تطبيقاً يحقق الشرطين:

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

أثبت أن التطبيق  $f$  خطي. (اعتبر منتصف القطعة  $[x, y]$ ).

التمرين 5. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي. أياً كان  $(x, y) \in E \times E$  نضع

$$d(x, y) = \frac{\|x - y\|}{\sqrt{1 + \|x\|^2} \sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

نريد أن نثبت أن  $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1. أثبت أن  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, \|u\| = \|v\| = 1 \Rightarrow \|\lambda u - \mu v\| = \|\lambda v - \mu u\|$

2. أثبت أن  $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2, \left\| \frac{y}{\|y\|^2} - \frac{x}{\|x\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$

3. نتأمل الفضاء  $\tilde{E} = E \times \mathbb{K}$  مزوداً بالجداء السلمي  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}}$  المعروف كما يلي:

$$\langle (x, \alpha), (y, \beta) \rangle_{\tilde{E}} = \langle x, y \rangle + \bar{\alpha} \beta$$

كما نتأمل التطبيق  $f: E \rightarrow \tilde{E}, x \mapsto (x, 1)$  عبر عن  $d(x, y)$  بدلالة  $f(x)$  و  $f(y)$  ثم استنتج المطلوب.

التمرين 6. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء الجداء السلمي  $\mathbb{R}[X]$  مزوداً بالجداء السلمي

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

عين الإسقاط القائم لـ  $E$  على الفضاء الشعاعي الجزئي  $F$  المؤلف من كثيرات الحدود التي لا تزيد درجتها عن 3 وثقل 0 و 1 جديراً لها. ثم احسب مسافة  $X^n$  عن  $F$ .

التمرين 7. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي، وليكن  $(e_1, \dots, e_n)$  أساساً متعامداً نظامياً

لـ  $E$ . ولتكن  $(x_1, \dots, x_n)$  جملة أشعة من  $E$  تحقق  $\sum_{k=1}^n \|e_k - x_k\|^2 < 1$ . أثبت أن

الجملة  $(x_1, \dots, x_n)$  أساس للفضاء  $E$ .

التمرين 8. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي على الحقل  $\mathbb{R}$ ، ولتكن  $(e_1, \dots, e_n)$  جملة

أشعة من  $E$ . نفترض أن

$$\bullet \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle < 0$$

$$\bullet \quad \exists x \in E, \forall i \in \mathbb{N}_n, \langle x, e_i \rangle > 0$$

أثبت أن الجملة  $(e_1, \dots, e_n)$  حرة.



التمرين 9. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي. وليكن  $p$  إسقاطاً على  $E$ ، أي تطبيقاً خطياً يحقق  $p^2 = p$ ، أثبت تكافؤ الخواص التالية:

1. التطبيق  $p$  هو إسقاط قائم.

$$2. p^* = p.$$

$$3. \ker p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp.$$

$$4. \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

التمرين 10. لتكن  $A = (a_{ij})$  مصفوفة موجبة من المرتبة  $n$ . أثبت أن

$$\forall (X, Y) \in (M_{n \times 1}(\mathbb{R}))^2, |X^* A Y|^2 \leq (X^* A X)(Y^* A Y)$$

$$\text{واستنتج أن } \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| = \sup_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$$

التمرين 11. لتكن  $A_1$  و  $A_2$  مصفوفتين هرميتيتين من المرتبة  $n$ . أثبت أن  $A_1 A_2$  هرميتية

$$\text{إذا، فقط إذا، كان } A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

التمرين 12. لتكن  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ . نضع  $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}$ . أثبت أنه

إذا كان  $\lambda_1 > 0$  و  $\det(A) = 1$  كانت المصفوفة  $A$  معرفة موجبة.

التمرين 13. لتكن  $(a_{ij}) = 0$  مصفوفة متعامدة من المرتبة  $n$ . أثبت المتراجحتين:

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n \quad \text{و} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$$

التمرين 14. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد، و  $P$  إسقاط همودي على  $E$ ،

$$\text{و } (e_1, \dots, e_n) \text{ أساس متعامد لفضاء } E. \text{ أثبت أن } \sum_{k=1}^n \|P(e_k)\|^2 = \operatorname{rg}(P).$$

التمرين 15. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد، وليكن  $T \in \mathcal{L}(E)$ . أثبت أن

$$(\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^* \quad \text{و} \quad (\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$$

التمرين 16. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاءً إقليدياً.

1. ليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$ . أثبت أن تطبيق الخطي  $u^* u$  متناظر و قيمه الذاتية موجبة. سنرمز فيما يلي بـ  $\lambda_{\min}$  إلى أصغر قيمة ذاتية لـ  $u^* u$ ، و بـ  $\lambda_{\max}$  إلى أكبر قيمة ذاتية له.
2. ليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$ . أثبت أن  $\forall x \in E, \lambda_{\min}(u) \|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \lambda_{\max}(u) \|x\|^2$ .
3. ليكن  $u$  و  $v$  من  $\mathcal{L}(E)$ . أثبت أن  $\forall v \in \text{sp}(u \circ v), \lambda_{\min}(u) \lambda_{\min}(v) \leq |v|^2 \leq \lambda_{\max}(u) \lambda_{\max}(v)$ .

التمرين 17. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء جداء سلمي منتهي البعد، وليكن  $u \in \mathcal{L}(E)$ . نزود  $\mathcal{L}(E)$  بنظم التطبيقات الخطية المستمرة على  $E$ .

- I. أثبت أن  $\|u\| = \|u^*\|$ .
- II. نفترض أن  $\|u\| \leq 1$ .
1. أثبت أن  $\ker(I - u) = \ker(I - u^*)$ .
2. نعرف  $F_1 = \ker(I - u)$  و  $F_2 = \text{Im}(I - u)$ . أثبت أن  $F_2^\perp = F_1$ .
3. أيّا كان  $1 \leq k$ ، نضع  $u_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u^k$ . أثبت أن المتتالية  $(u_p(x))_{p \geq 1}$  تقارب نحو المسقط القائم لـ  $x$  على  $F_1$ ، وذلك أيّا كان  $x \in E$ .

التمرين 18. لتكن  $A \in M_n(\mathbb{R})$  مصفوفة متناظرة. أثبت أن :

$$(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = I_n) \Rightarrow A^2 = I_n$$

التمرين 19. ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاءً إقليدياً بعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . وليكن  $R$  الدوران بزاوية قدرها  $\theta$  حول محور الموجه بشعاع الواحدة  $\vec{i}$ .

1. اكتسب، باستخدام طريقة تغيير الأساس، مصفوفة  $R$  بالأساس  $\mathcal{B}$ . ثم أجز الحساب حين

$$\text{يكون } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ و } \vec{i} \wedge \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}).$$

2. أثبت أن  $R(\vec{x}) = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{x}$ .

3. أثبت كذلك أن  $\forall \vec{x} \in E, R(\vec{x}) = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{x} + (1 - \cos \theta) \frac{(\vec{i}, \vec{x})}{\|\vec{i}\|^2} \vec{i}$ .

التمرين 20. ليكن  $E$  فضاء إقليدياً بعده 3 منسوباً إلى جملة متعامدة نظامية مباشرة. عيّن الطبيعة الهندسية للتحويلات الخطية على  $E$  المثلة بالمصفوفات التالية:

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

التمرين 21. مُهدف في هذا المسألة إلى إثبات بعض خواص كثيرات حدود Legendre.

• لرمز بالرمز  $C([-1,1])$  إلى فضاء التوابع الحقيقية المستمرة على  $[-1,1]$ ، وبالرمز  $C^k([-1,1])$ ، حيث  $1 \leq k$ ، إلى الفضاء الجزئي المؤلف من التوابع الحقيقية التي تقبل الاشتقاق باستمرار  $k$  مرة على  $[-1,1]$ .

• نزود الفضاء  $C([-1,1])$  بالجداء السلمي والنظيم الموافق له والمعرفين بالعاملين التاليين أيّاً كان  $f$  و  $g$  من  $C([-1,1])$ :

$$(1) \quad \|f\| = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{و} \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

• أيّاً كان  $n \in \mathbb{N}$  لرمز بالرمز  $\mathbb{R}_n[X]$  إلى فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجتها عن  $n$ ، ولطابق بين كثيرات الحدود هذه وبين التوابع الحدودية في  $C([-1,1])$ .

• إذا كان  $f \in C^2([-1,1])$  فلنعرّف  $L(f) \in C([-1,1])$  بالعلاقة

$$L(f)(x) = \frac{d}{dx} \left( (x^2 - 1) \frac{df(x)}{dx} \right)$$

• وأخيراً نضع  $U_0(X) = P_0(X) = 1$ ، وحين يكون  $1 \leq n$  نعرّف

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n U_n(X)}{dX^n} \quad \text{و} \quad U_n(X) = (X^2 - 1)^n$$

1. أثبت أنه أيّاً كان  $n \in \mathbb{N}$  و  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  يَكُن لدينا  $L(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . لرمز إذن

بالرمز  $L_n$  إلى التطبيق الخطي  $L_n: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  أي التطبيق:

$$L_n: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]: P \mapsto L(P)$$

b. اكتب  $M_n$  مصفوفة التطبيق الخطي  $L_n$  بالنسبة إلى الأساس القانوني  $(1, X, \dots, X^n)$

في  $\mathbb{R}_n[X]$ .

c. عيّن القيم الذاتية لـ  $L_n$ . هل يقبل  $L_n$  التمثيل بمصفوفة قطرية؟

2. a. أثبت أنه مهما تكن  $n \in \mathbb{N}$ ، لدينا  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ .  
 b. أثبت أن  $\deg P_n = n$ ، وإذا كان  $a_n$  هو ثابت  $X^n$  في كثير الحدود  $P_n$ ، فأثبت أن

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}$$

c. أثبت، باستخدام عبارة مناسبة للمقدار  $\frac{d^n}{dX^n}((X-1)^n(X+1)^n)$ ، أن  $P_n(1) = 1$ .

d. عيّن كلاً من  $P_1$  و  $P_2$ .

3. تحقق صحة العلاقاتين التاليتين أيّاً كانت  $n \in \mathbb{N}$ :

$$U'_{n+1}(X) - 2(n+1)XU_n(X) = 0,$$

$$(X^2 - 1)U'_n(X) - 2nXU_n(X) = 0.$$

ثم أثبت باشتقاق كل منهما مرة  $n+1$  أن

$$(2) \quad P'_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (n+1)P_n(X)$$

$$(3) \quad L(P_n) = n(n+1)P_n$$

4. عيّن أساساً لـ  $\mathbb{R}_n[X]$  مؤلفاً من أشعة ذاتية لـ  $L_n$ .

5. a. أثبت، أيّاً كانت  $n \geq 1$ ، أن التابع

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}: f_n(x) = [P_n(x)]^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}[P'_n(x)]^2$$

تابع متزايد.

(4) b. استنتج أن  $\forall x \in [-1,1], |P_n(x)| \leq 1$ .

## II

1. a. أثبت أنه أيّاً كان  $n \in \mathbb{N}$  و  $f \in C^2([-1,1])$  فلدينا

$$\langle L(f), P_n \rangle = \langle f, L(P_n) \rangle = n(n+1)\langle f, P_n \rangle$$

b. أثبت بحساب كل من  $\langle L(P_n), P_m \rangle$  و  $\langle P_n, L(P_m) \rangle$  أن  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$   $\Leftrightarrow n \neq m$

c. أثبت أن

$$(5) \quad 0 = \langle P_n, X^k \rangle \Leftrightarrow \{0, 1, \dots, n-1\} \ni k$$

2. a. أثبت أنه مهما تكن  $n \in \mathbb{N}$ ، فلدينا  $\int_{-1}^1 P'_{n+1}(x)P_n(x)dx = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$ .

مساعدة: ما درجة كثير الحدود  $P'_n(x) - (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n(x)$  ؟

b. أثبت من ناحية أخرى أن  $\int_{-1}^1 P'_{n+1}(x)P_n(x)dx = 2$ ، واستنتج أن  $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ .

3. أثبت أن جماعة كثيرات الحدود  $(\tilde{P}_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالعلاقة  $\tilde{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$  تكون جماعة

متعامدة نظامية بالنسبة إلى الجداء السلمي الذي عرفناه على  $C([-1,1])$ ، وأن الجماعة

$(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)$  أساس متعامد نظامي لـ  $\mathbb{R}_n[X]$ .

4. أثبت أن

(6)  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \|LP\| \leq n(n+1)\|P\|$

مساعدة: خبر عن  $P$  بدلالة الأساس السابق.

### III

1. a. نعرف، حين يكون  $1 \leq n$ ، ما يلي:  $Q_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X)$ .

أثبت أن  $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ ، واحسب  $Q_n(1)$ ، وبين أيكون  $Q_n$  فردياً أم زوجياً ؟

b. أثبت باستخدام العلاقة (5) أن

$$0 = \langle XP_n, P_k \rangle = \langle P_n, XP_k \rangle \Leftrightarrow \{0, 1, \dots, n-2\} \ni k$$

c. استنتج مما سبق وجود عددين حقيقيين  $\lambda$  و  $\mu$  بحيث

$$Q_n(X) = \lambda P_n(X) + \mu P_{n-1}(X)$$

d. استخدم نتائج السؤال 1. a. لتثبت أن  $0 = \lambda$  و  $-n = \mu$ ، ومن ثم:

(7)  $(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X) = 0$

e. استنتج أن

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

2. نضع  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$ . أثبت أن المتتالية  $(W_n)_{n \geq 0}$  متناقصة، ثم أوجد علاقة تدريجية

بين  $W_n$  و  $W_{n-2}$  حين يكون  $2 \leq n$ ، واستنتج أن المتتالية  $(nW_n W_{n-1})_{n \geq 1}$  ثابتة.

وأخيراً احسب  $W_{2n}$  واستنتج أن  $\forall n \geq 1, |P_{2n}(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

3. تحقق أن  $(2n+2)P_{2n+2}(0) + (2n+1)P_{2n}(0) = 0$  أيًا كان  $0 \leq n$ . واستنتج باستخدام العلاقة (2) أن

$$|P'_{2n+1}(0)| \leq 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

4. a. ليكن، عندما  $1 \leq n$ ، التابع

$$\alpha_n : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_n(x) = \sqrt{1-x^2} P_n(x)$$

أثبت أنه أيًا كان  $x \in ]-1, +1[$  فإن  $\alpha'_n(x)\sqrt{1-x^2} + xP_n(x) + (x^2-1)P'_n(x) = 0$

ثم استخدم العلاقة (3) لنبت أن  $\alpha''_n(x) + \varphi_n(x)\alpha_n(x) = 0$  حيث

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1-x^2} \left( n(n+1) + \frac{1}{1-x^2} \right)$$

b. ليكن التابع  $\beta_n : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}; \beta_n(x) = [\alpha_n(x)]^2 + \frac{[\alpha'_n(x)]^2}{\varphi_n(x)}$ . أثبت أن  $\beta_n$  تابع

زوجي و متناقص على المجال  $[0, 1]$ .

c. استخدم نتائج 2. و 3. لإثبات أن  $\beta_n(0) \leq \frac{2}{\pi n}$ . ومن ثم استنتج أن

$$(8) \quad \forall n \geq 1, \forall x \in ]-1, +1[, |P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}$$

#### IV

ليكن  $f \in C([-1, 1])$ ، ولتكن  $0 \leq n$  نعرف  $c_n(f) = \langle f, \tilde{P}_n \rangle$  و  $S_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) \tilde{P}_k$

1. أثبت أن  $f - S_n(f)$  عمودي على الفضاء الجزئي  $\mathbb{R}_n[X]$  من  $C([-1, 1])$ ، ثم استنتج

$$\text{أن } \sum_{k=0}^n (c_k(f))^2 \leq \|f\|^2$$

2. أثبت تقارب المتسلسلة  $\sum_{n \geq 0} (c_n(f))^2$ ، وعين نهاية المتتالية  $(c_n(f))_{n \geq 0}$ .

3. a. نفترض أنّ  $f \in C^2([-1,1])$ ، و نضع  $L(f) = g$ . عبّر عن  $c_n(g)$  بدلالة  $c_n(f)$  ثم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1)c_n(f) = 0 \quad \text{استنتج، آله لدينا}$$

b. أثبت أنّ المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \tilde{P}_n$  تقارب بانتظام على  $[-1,1]$  نحو تسابع مستمر

$$\tilde{f} \in C([-1,1]). \quad \text{استخدم (4).}$$

c. أثبت أنّ  $\langle f - \tilde{f}, \tilde{P}_n \rangle = 0$ ،  $\forall n \geq 0$ ، واستخدم مبرهنة Wierstrass بعد أن

$$\text{تذكرها لتستنتج أنّ } f = \tilde{f}.$$

4. أثبت، باستخدام العلاقة (7)، آله أنّ كان  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  و أنّ كان  $0 \leq n$  فإنّ

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y)(x-y) = (n+1)(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y))$$

نعرف، أنّ كان  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  بحيث  $x \neq y$  المقدار

$$K_n(x, y) = \frac{n+1}{2} \left( \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right)$$

$$5. \quad \int_{-1}^1 K_n(x, y) dy = 1 \quad \text{أثبت أنّ}$$

6. a. نفترض أنّ  $f \in C^1([-1,1])$ ، وأنّ  $x \in [-1,1]$ . أثبت أنّ

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^1 K_n(x, y)(f(y) - f(x)) dy$$

b. نعرف التابع :

$$g_x: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}; g_x(y) = \begin{cases} (f(y) - f(x))/(y-x) & : y \neq x \\ f'(x) & : y = x \end{cases}$$

أثبت أنّ  $g_x \in C([-1,1])$ ، وآله، أنّ كانت  $1 \leq n$ ،

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{n+1}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{2n+1}} c_n(g_x) P_{n+1}(x) - \sqrt{\frac{2}{2n+3}} c_{n+1}(g_x) P_n(x) \right)$$

c. استخدم (8) لتثبت أنّ المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \tilde{P}_n$  تقارب ببساطة على  $[-1,1]$  نحو

$$\text{التابع } f|_{[-1,1]}$$







## مراجع الكتاب

1. "Cours de Mathématiques Spéciales, I,II.",  
E. RAMIS & C. DESCHAMPS & J. ODOUX, Masson, 1979.
2. "Cours de Mathématiques du Premier Cycle",  
J. DIXMIER, Gautier-villars, 1977.
3. "Cours de Mathématiques, Algèbre",  
J.M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE, Dunod Université, 1986.
4. "Analyse Linéaire dans les espaces de dimension finie",  
I. GLAZMAN, Y. LUBITCH,, Mir Publishers; Moscow 1974.
5. "Algebra",  
S. LANG, Addison Wesley, 1971.



## فهرس الرموز

يُمن الجدول التالي أرقام صفحات الكتاب التي ظهر فيها الرمز الموافق لأول مرة.

|         |                                                                                 |        |                                                                                                                                        |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 99 .... | $\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; F), \mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; \mathbb{K})$ | 3 .... | $\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{(V)}, E^{(V)}, \sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$                                                     |
| 70 .... | $\mathcal{L}_p(E^p; F), \mathcal{L}_p^s(E^p; F), \mathcal{L}_p^A(E^p; F)$       | 4 .... | $\sum_{k=1}^n F_k, \mathcal{L}(E, F), \ker u, \operatorname{Im} u$                                                                     |
| 73 .... | $\det_S(x_1, \dots, x_n)$                                                       | 5 .... | $\mathcal{L}(E), \mathcal{B}\mathcal{L}(E), \operatorname{vect}((x_1, \dots, x_n))$                                                    |
| 76 .... | $\det u$                                                                        | 6 .... | $\operatorname{vect}((x_i)_{i \in I})$                                                                                                 |
| 79 .... | $\det M$                                                                        | 10.... | $E_1 \oplus E_2, \bigoplus_{i \in I} E_i$                                                                                              |
| 84 .... | $\operatorname{con}(M)$                                                         | 15.... | $E/H, \mathcal{Q}_H$                                                                                                                   |
| 99 .... | $E_x, \operatorname{ap}(u)$                                                     | 24.... | $\dim_{\mathbb{K}} E, \dim E$                                                                                                          |
| 101.... | $\chi_u(X), m_u(\lambda)$                                                       | 25.... | $E \cong F$                                                                                                                            |
| 102.... | $\tau_k(M)$                                                                     | 27.... | $\operatorname{codim}_E F$                                                                                                             |
| 103.... | $u_F$                                                                           | 28.... | $\operatorname{rg}(x_i)_{i \in I}, \operatorname{rg}(u)$                                                                               |
| 109.... | $u^k, \ell(u)$                                                                  | 35.... | $E^*, \langle f, x \rangle, x^\perp, A^\perp, y', B'$                                                                                  |
| 125.... | $\langle x, y \rangle$                                                          | 38.... | ${}^t u$                                                                                                                               |
| 127.... | $[x] \in \mathcal{Q}_\omega$                                                    | 47.... | $M_{m,n,p}(A), M_n(A)$                                                                                                                 |
| 128.... | $(x, y)$                                                                        | 48.... | $M \times N$                                                                                                                           |
| 130.... | $M^*$                                                                           | 50.... | $\mathcal{GL}_n(A), I_n, E_1, \dots$                                                                                                   |
| 131.... | $\operatorname{Gram}(x_1, \dots, x_n)$                                          | 51.... | $\mathcal{T}_n^L(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^U(\mathbb{K}), \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \operatorname{mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{F})$ |
| 134.... | $x \perp y, x \perp B$                                                          | 52.... | $J_{n,p,r}$                                                                                                                            |
| 143.... | $P_F$                                                                           | 55.... | ${}^t M, S_n(\mathbb{K}), \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$                                                                                   |
| 145.... | $d(x, F)$                                                                       | 57.... | $\operatorname{rg}(M), C_j(M), R_j(M)$                                                                                                 |
| 149.... | $u^*, \ u\ , \ u^*\ $                                                           | 59.... | $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}}$                                                                                                        |
| 154.... | $O(E), O^s(E), O(n), O^s(n), \mathcal{BON}, U_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}$       | 61.... | $A \approx B$                                                                                                                          |
| 157.... | $v_1 \wedge v_2, [x_1, x_2, x_3]$                                               | 62.... | $A \approx B$                                                                                                                          |
| 160.... | $\wedge_{\min}, \wedge_{\max}$                                                  | 63.... | $\operatorname{tr} A$                                                                                                                  |
|         |                                                                                 | 64.... | $\operatorname{tr} u$                                                                                                                  |

# المختصر

## الفصل الأول

### الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

- 1.1. ..... 1.1.1. ..... 1
- 2.1. ..... 2.1.1. ..... 4
- 3.1. ..... 3.1.1. ..... 5
- 4.1. ..... 4.1.1. ..... 10
- 5.1. ..... 5.1.1. ..... 15
- تمرينات ..... 17

## الفصل الثاني

### الفضاءات الشعاعية المنتهية البعد

- 1.1. .... 1.1.1. .... 21
- 2.1. .... 2.1.1. .... 23
- 3.1. .... 3.1.1. .... 28
- تمرينات ..... 32

## الفصل الثالث

### الثنوية في الفضاءات الشعاعية

- 1.1. .... 1.1.1. .... 35
- 2.1. .... 2.1.1. .... 38
- 3.1. .... 3.1.1. .... 40
- تمرينات ..... 43

## الفصل الرابع المصفوفات

|    |                                        |
|----|----------------------------------------|
| 47 | 1.IV. مفهوم المصفوفة .....             |
| 48 | 2.IV. العمليات على المصفوفات .....     |
| 51 | 3.IV. مصفوفة تطبيق خطي .....           |
| 57 | 4.IV. رتبة مصفوفة .....                |
| 59 | 5.IV. تغيير الأساس .....               |
| 63 | 6.IV. أثر مصفوفة و أثر تطبيق خطي ..... |
| 66 | تمرينات .....                          |

## الفصل الخامس المحددات وجمل المعادلات الخطية

|    |                                                   |
|----|---------------------------------------------------|
| 69 | 1.V. التطبيقات المتعددة الخطية .....              |
| 73 | 2.V. المحددات .....                               |
| 76 | 3.V. مُحدد تطبيق خطي من فضاء شعاعي إلى نفسه ..... |
| 79 | 4.V. مُحدد مصفوفة مربعة .....                     |
| 80 | 5.V. حساب المحددات .....                          |
| 86 | 6.V. جمل المعادلات الخطية .....                   |
| 92 | تمرينات .....                                     |

## الفصل السادس اختزال التطبيقات الخطية

|     |                                                              |
|-----|--------------------------------------------------------------|
| 99  | 1.VI. عموميات .....                                          |
| 104 | 2.VI. التطبيقات الخطية القابلة للتمثيل بمصفوفات قطرية .....  |
| 107 | 3.VI. التطبيقات الخطية القابلة للتمثيل بمصفوفات مثلثية ..... |
| 109 | 4.VI. كثيرات الحدود والتطبيقات الخطية .....                  |
| 113 | 5.VI. تطبيقات .....                                          |
| 120 | تمرينات .....                                                |

## الفصل السابع

### الفضاءات الشعاعية المزودة بمجاء سلمي

|          |                                                 |
|----------|-------------------------------------------------|
| 125..... | 1.VII الجداء السلمي                             |
| 134..... | 2.VII التعماد في فضاءات الجداء السلمي           |
| 140..... | 3.VII الإسقاط القائم                            |
| 147..... | 4.VII الأشكال الخطية والتطبيقات الخطية المرافقة |
| 153..... | 5.VII التطبيقات الخطية المتعامدة                |
| 159..... | 6.VII اختزال التطبيقات الخطية المتناظرة         |
| 165..... | تمارين                                          |
| 175..... | مراجع الكتاب                                    |
| 177..... | فهرس الرموز                                     |
| 179..... | الفهرس                                          |