الجُمْهُورِيَّةُ العَرَبِيَّةُ السُّورِيَّةُ
جَامِعَةُ دِمَشْقَ
كُلِّيَّةُ العُلُومِ
قِسْمُ الرِّيَاضِيَّاتِ



عنوان الرسالة

نَظَرِيّةُ مُورسْ عَلَى الْمُتَنَوّعَاتْ وبعضُ تَطْبِيقَاتِها

Morse Theory on Manifolds and Some of Its Applications

رِسَالَةٌ أُعِدَّتْ لِنَيْلِ دَرَجَةِ المَاجِستيرِ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ (التّحْليلُ الرّيَاضِي)

إعْدَادُ

آلاء عادل الحمد

إشْرَاف

المشرف الرئيس
الأستاذ الدكتور خليل يحيى

المشرف المشارك
الأستاذ المساعد الدكتور محمد الشيخ

2025-2026

قرار لجنة الحكم

شكر وتقدير

الحمد لله حتى يبلغ الحمد منتهاه، وكما قال رسول الله ﷺ: "من لا يشكر الناس لا يشكر الله"، فإنني أتقدم بخالص الشكر والامتنان لكل من كان له دور في مسيرتي العلمية.

وأشكــرُ مُشرفَيْ الدكتور خليل يحيى والدكتور محمد الشيخ اللذين كانا لي خير معين وداعم طوال فترة البحث. لقد كانت توجيهاتكما وإرشاداتكما نبراساً أضاء لي الطريق. شكرًا لكما من أعماقِ قلبي على كلِّ ما قدمتُما لي من وقتٍ وجهدٍ ومعرفة. أسألُ الله أن يجزيكما خيرَ الجزاء، وأن يجعل ما قدمتما لي في ميزان حسناتكما.

وجزيل الشكر والامتنان إلى الدكتور محمد الكوسى، لما قدمه لي من دعمٍ علميٍ وتوجيهاتٍ قيمةٍ كان لها أثر كبير في مسيرتي البحثية، فله مني أصدق مشاعر التقدير والعرفان.

والشكر موصول إلى الدكتورة الفاضلة أماني عاشور، التي كانت خير عون لي، لطالما كانت تقف إلى جانبي بكل سخاء وعطاء، منذ اللحظة الأولى لاختيار الموضوع، كانت مرشدة ومحفزة، لا بل كانت أختاً لي تشجعني بصبرٍ كلما واجهتني عقبة أو ارتباك، وداعمة لي في الأوقات التي كاد اليأس يتسلل إليّ، جزاكِ الله خيراً، ورزقك الصحة والسعادة.

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات ١
قَائِمَةُ الأشكالِ والرُّسومِ البيانيَّةِ ٥
فهرس الجداول ٥
المُلخّص ٧
المُقدّمَة ٨
مُشكِلة البَحْثِ ٨
تَساؤلات البَحْثِ ٩
أهداف البحث ١٠
أهمية البحث ١١
مبررات البحث ١١
محدودية البحث ١٢
الدراسات المرجعية ١٢
خُلاصةُ الدراساتِ المَرجِعيّة ١٣
مَنهجُ البَحْثِ وأدَواتُهُ ١٤
خُطّةُ العَمَلِ ١٥
الفصل الأول: مفاهيم أساسيّة في المتنوعات التفاضلية ١٧
1-1مقدمة ١٧
1-2المتنوعات (manifolds) ١٧
1-2-1 الفضاء الهاوسدورفي ١٧
1-2-2 المتنوع التبولوجي من البعد n ١٨
1-2-3المتنوع مع حدود ١٨
1-2-4 الجوار الاحداثي في متنوعٍ M ٢٠
1-2-5 الاحداثيات المحلية لنقطة $p \in U$ ٢٠
1-2-6الأطلس ٢٠

1-2-7 جملة الجوارات الإحداثية من الصف C^r ٢٢

1-2-8 المتنوع التفاضلي من البعد n ٢٣

3-1 التوابع الفضولة على متنوع وجمل الإحداثيات المحلية حول نقطة ٢٧

1-3-1 تفاضل تابع على متنوع ٢٧

1-3-2 المشتق الجزئي لتابع على متنوع ٢٨

1-3-3المحدد الدالي بالنسبة لجملة احداثيات محلية ٢٩

4-1المتجهات المماسية ٣١

1-4-1 المتجه المماس ٣١

1-4-2الفضاء المماس ٣١

5-1 تفاضل تطبيق على متنوع ٣٣

1-5-1تفاضل تابع ٣٣

1-5-2التطبيقات الفضولة ٣٥

1-5-3 التماثل التفاضلي أو الديفيومورفيزم ٣٧

1-5-4 المنحني المفتوح ٣٨

1-5-5 المنحني الفضول على مجال مفتوح ٣٨

1-5-6المنحني الفضول على مجال مغلق ٣٩

1-5-7 المنحني الفضول قطعياً ٣٩

6-1 المتنوع الريماني ٣٩

1-6-1 الشكل ثنائي الخطية ٣٩

1-6-2 الفضاء $T_2(V)$ ٤٠

1-6-3الفضاء $T_1^1(V)$ ٤٠

1-6-4 الشكل ثنائي الخطية غير المتردي ٤٠

1-6-5 الشكل ثنائي الخطية المتناظر ٤٠

1-6-6الشكل ثنائي الخطية المتخالف ٤١

1-6-7 الجداء الداخلي الموجب ٤١

1-6-8 المترية الريمانية ٤٠

1-6-9 الطول والمسافة على المتنوعات الريمانية ٤٣

الفصل الثاني: النقاط الحرجة للدوال على المتنوعات ٤٤

2-1مقدمة ٤٥

2-2النقاط الحرجة ٤٥

2-2-1النقطة الحرجة والنقطة النظامية لدالة ٤٥

2-2-2 القيمة الصغرى محلياً، القيمة العظمى محلياً لدالة ٤٦

2-2-3الهيسيان لدالة ٥٠

2-2-4النقطة الحرجة غير المتردية ٥١

2-2-5أنواع النقاط الحرجة غير المتردية لدالة بمتغيرين $f(x,y)$ ٥١

2-3خصائص وسلوك النقاط الحرجة المتردية ٥٣

الفصل الثالث: دالة مورس وهومولوجيا مورس ٥٧

3-1 مقدمة ٥٨

3-2 دالة مورس ٥٨

3-2-1دليل مورس ٥٨

3-2-2نظرية مورس ٦١

3-2-3الجوار الإحداثي لمورس وجوار مورس ٦١

3-3مميز مورس –سميل ٦٢

3-4نظرية مورس للأسطح ٦٥

3-5 خطوط التدفق والتدرجات ٦٧

3-5-1 حقل شبه التدرج ٦٨

3-6 المتنوع المستقر و المتنوع غير المستقر ٧٠

3-6-1أمثلة على المتنوعات المستقرة و المتنوعات غير المستقرة ٧١

3-6-2 المسارات لحقل شبه التدرج ٧٣

3-6-3 التقاطع العرضي ٧٣

3-6-4شرط سميل ٧٤

7-3 التشوه المستمر أو التكافؤ..... ٧٥

3-7-1الفضاء الجزئي ضام التشوه ٧٦

3-7-2التكافؤ التشوهي..... ٧٧

3-7-3تماثل مورس ٧٨

3-7-4تطبيقات تماثل مورس ٨٠

الفصل الرابع: بعض التطبيقات لنظرية مورس..... ٨٢

4-1 مقدمة..... ٨٢

4-2 تقسيم السطح الطيفي باستخدام نظرية مورس..... ٨٢

4-2-1الدوال الذاتية اللابلاسية ٨٤

4-2-2 تطبيق نظرية مورس ٨٦

4-2-3 رسم مسارات التدفق والتدرج ٨٧

4-2-4 إنشاء مركب مورس-سميل ٨٨

4-2-5 إزالة الضجيج التبولوجي..... ٩٠

4-2-6 المركبات شبه الثنوية..... ٩١

4-2-7خوارزمية التحسين التكراري ٩٢

4-2-8 آلية إنشاء الشبكة النهائية ٩٣

4-3 الفضاء الإسقاطي العقدي ٩٦

4-3-1بناء دالة مورس على $\mathbb{C}P^n$ ٩٧

4-3-2النتائج الرئيسية..... ٩٧

الفصل الخامس: الاستِنتاجاتُ والتوصياتُ..... ٩٩

6-1 الخاتمة والاستنتاجات ٩٩

6-2 الرُّؤى المُستقبليَّةُ..... ٩٩

المراجع..... ١٠١

المصطلحات العلمية..... ١٠٣

Abstract..... ١٠٧

قَائِمَةُ الأشكالِ والرُّسومِ البيانيَّةِ

رقم الشكل	الموضوع	رقم الصفحة
1−1	متنوع مع حدود	١٨
2−1	العلاقة بين جملتين احداثيتين معرفتين على جوارين U_α و U_β	٢٠
3−1	الدائرة S^1	٢٢
4−1	التطبيق الفضول	٣٥
1−2	النقاط الحرجة لدالة الارتفاع على الطارة	٤٨
2−2	النقطة الحرجة الأعظمية لدالة f	٥٠
3−2	النقطة الحرجة الأصغرية لدالة f	٥٠
4−2	النقطة الحرجة السرجية لدالة f	٥١
5−2	الدالة $f(x,y)=x^2$	٥٣
6−2	الدالة $f(x,y)=x^2y^2$	٥٣
1−3	المتنوعات المستقرة وغير المستقرة	٦٩
2−3	مسارات تدفق دالة الارتفاع على الطارة المائلة	٧٠
3−3	المتنوعات المستقرة وغير المستقرة وتماثلها التفاضلي مع الأقراص المفتوحة	٧١
4−3	دالة الارتفاع على الطارة المائلة	٧٨
1−4	مجموعة من الشبكات	٨٠
2−4	تصور للزاوية a_{ij} المقابلة للضلع(i,j)	٨٢
3−4	أول8 دوال ذاتية غير ثابتة على شبكة مستوية 15 ×15مرسومة كدوال ارتفاع	٨٣

4-4	تحديد النقاط الحرجة	٨٥
4-5	وصل مسارات التدفق والتدرج	٨٦
4-6	تكوين مركب مورس –سميل	٨٨
4-7	مركبات الدوال الذاتية للحلقة 8 و16	٩٠
4-8	الهيكل الأساسي لسطح الأرنب	٩١
4-9	هيكل سطح الأرنب بعد إعادة التمثيل الباراميتري	٩١
4-10	الشبكة النهائية	٩٢

فهرس الجداول

رقم الجدول	الموضوع	رقم الصفحة
2-1	مقارنة بين النقاط الحرجة المتردية وغير المتردية	٥٢
4-1	تقييم الجودة	٩٣

المُلخّص

تُعد نظرية مورس من الأدوات الأساسية والفعالة لتحليل البنية الهندسية والتبولوجية للمتنوعات من خلال تحليل الدوال الملساء المعرفة عليها. وتمثل دوال مورس إحدى أهم الركائز التي يتم البناء عليها في هذا الإطار بفضل قدرتها على كشف البنية التحتية للمتنوعات من خلال دراسة النقاط الحرجة لهذه الدوال. تتكون هذه الرسالة من مقدمة وخمسة فصول، عرضنا في الفصل الأول مراجعة للمفاهيم الأساسية للمتنوعات التفاضلية، أما في الفصل الثاني ذكرنا النقاط الحرجة وأنواعها، القيمة النظامية، تمهيداً لصياغة النتائج الأساسية لنظرية مورس حيث تمّ في الفصل الثالث تقديم تعريفات دقيقة لدوال مورس ودليل مورس وعلاقتها بالخصائص التبولوجية للمتنوعات مثل حساب مجموعات الهومولوجيا، وتقديم دراسة مفصلة عن مميز مورس سميل، ركزنا في الفصل الرابع على بعض التطبيقات المهمة لنظرية مورس خصوصاً في سياق التقسيم الطيفي للأسطح باستخدام الدوال الذاتية لمؤثر لابلاس، حيث تستخدم نقاط مورس الحرجة لتوليد تقسيمات رباعية للخلايا تعكس البنية التبولوجية الدقيقة للسطح. تُبرز الرسالة كذلك أهمية مسارات التدفق والتدرج في الربط بين النقاط الحرجة (الصغرى، العظمى، السرجية) مما يمكّن من بناء مركبات مورس ذات تطبيقات واسعة في الرسوم الحاسوبية والهندسة الرقمية. كما تتناول الرسالة تطبيق نظرية مورس على الفضاءات العقدية مثل الفضاء الإسقاطي العقدي موضحةً كيف تساهم الدوال المورسية في تحليل بنية هذا الفضاء. أما في الفصل الخامس عرضنا أهم النتائج التي توصلت إليها الدراسات السابقة والرؤى المستقبلية، هدفنا هو تقديم دراسة منهجية لهذه النظرية وإبراز إمكانية توظيفها كجسر يربط بين فروع الرياضيات المختلفة لفك تعقيدات البنى ذات الأبعاد العالية، مما يفتح آفاقاً جديدة في البحث النظري والتطبيقي.

الكلمات المفتاحية: نظرية مورس، المتنوعات التفاضلية، النقاط الحرجة، هومولوجيا مورس، التقسيم الطيفي للأسطح، الفضاء الإسقاطي العقدي.

التصنيف الرياضياتي العالمي للموضوع: .MSC2020:53…. , 58E05,58k05,57R70,57R58

المُقدّمَة

في عالم الرياضيات المتقدمة، تمثل المتنوعات(Manifolds) فئة بالغة الأهمية من الفضاءات الرياضية التي تُستخدم لنمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والهندسية المعقدة. وتبرز الحاجة إلى تطوير أدوات تحليلية فعالة قادرة على كشف البنى الخفية لهذه المتنوعات وربط خصائصها المحلية بسلوكها المحلي. في هذا السياق تأتي نظرية مورس (Morse theory) كإحدى الركائز الرياضية البارزة التي تقدم جسراً تحليلياً يربط بين الهندسة التفاضلية والتبولوجيا، من خلال دراسة الخصائص العميقة للدوال المعرفة على هذه المتنوعات.

تعود الجذور التاريخية لنظرية مورس إلى أعمال العالم مارستون مورس (Marston Morse) في عشرينيات القرن الماضي، حيث قدم إطاراً نظرياً متكاملاً يربط بين دراسة النقاط الحرجة (Critical points) للدوال المورسية والبنية التبولوجية للمتنوعات. تتميز هذه النظرية بقدرتها على تحويل المسائل التبولوجية المعقدة إلى مسائل تحليلية يمكن معالجتها باستخدام أدوات التحليل الرياضي المتقدم. تأتي أهمية هذا البحث من كونه يجمع بين الأساس النظري الدقيق لنظرية مورس وبين بعض تطبيقاتها المهمة على المتنوعات، وذلك بهدف توضيح الآليات الرياضية التي تقوم عليها النظرية وكيفية توظيفها لاستنتاج خصائص توبولوجية وهندسية. كما يهدف إلى تقديم عرض متكامل للمفاهيم الأساسية اللازمة في المتنوعات التفاضلية، ومن ثم الانتقال نحو البناء المورسي وتحليل تطبيقاته، بما يتيح فهماً أعمق للعلاقة بين النقاط الحرجة والدوال الملساء والتبولوجيا التفاضلية للمتنوعات. سيقدم هذا البحث مقارنة شاملة للطرق المختلفة لتطبيق نظرية مورس، مع تحليل مدى فعالية هذه الطرق في معالجة مسائل توبولوجية معقدة. كما سنستعرض بعض التطبيقات الحديثة لهذه النظرية في سياق التقسيم الطيفي للسطح والفضاء الاسقاطي العقدي، مما يبرز الأهمية المستمرة لهذه النظرية وأثرها في تطور العلوم الحديثة.

مُشكِلة البَحْثِ

تمثلُ المتنوعات فضاءاتٍ رياضيةٍ معقدةٍ تُستخدم لنمذجة العديد من الظواهر الطبيعية والهندسية، لكن تحليلها يواجه تحديات منهجية عميقة بسبب طبيعتها غير الإقليدية وتعقيدها البنيوي، حيث تعيق صعوبة ربط الخصائص المحلية بالسلوك المحلي للمتنوعات قدرتنا على فهم بنيتها الجوهرية، كما يُعد تصنيف هذه المتنوعات وتحليل تبولوجيتها

من المشكلات الرياضية العميقة التي تتطلب أدواتٍ تحليليةٍ متقدمة. على الرغم من الأهمية الكبيرة لنظرية مورس في الكشف عن البنية التبولوجية للمتنوعات من خلال تحليل النقاط الحرجة غير المتردية لدوال ملساء، إلا أنّ الكثير من الجوانب الأساسية لهذه العلاقة ماتزال غير مفهومة بشكل كامل، ولا تتوفر نماذج رياضية عامة توضح كيفية ارتباط سلوك النقاط الحرجة بالتغيرات التبولوجية المتتابعة التي تطرأ على المتنوع. وتتمثل المشكلة البحثية في ضرورة بناء إطار رياضي متكامل لدراسة دوال مورس على المتنوعات وتحليل تأثير النقاط الحرجة على بنية المتنوع، عبر فهم المتنوعات المستقرة وغير المستقرة، ودليل مورس، ومجموعات السوية ومسارات التدفق والتدرج، وتطبيق نتائج ذلك في توصيف التغيرات الهندسية والتبولوجية للمتنوعات. كما تتطلب المشكلة معالجة القصور الحالي في فهم الشروط التي تضمن تحقق شرط مورس –سميل، ودوره في بناء هومولوجيا مورس وربطها بالخصائص التبولوجية للمتنوع. وتبرز الحاجة إلى تقديم تطبيقات لنظرية مورس توضح كيف تسهم نظرية مورس في تحليل المتنوعات واستنتاج خصائصها الهندسية والتفاضلية عبر بنية النقاط الحرجة. حيث تواجه الطرق التقليدية صعوبات في معالجة البنى ذات الأبعاد العالية والتركيب المعقد.

تَساؤلات البَحْثِ

تُعد نظرية مورس من النظريات الأساسية في الربط بين الهندسة والتبولوجيا، والتي تمتاز بقدرتها على كشف البنية العميقة للمتنوعات من خلال دراسة الدوال المعرفة عليها. إلا أنّ الأدوات والتقنيات التحليلية المستخدمة في تطبيقاتها قد لا تقدم النتائج المُثلى في فهم التعقيد البنيوي الكامل، مما يستدعي دراسة أعمق لكيفية تطويرها وتوظيفها بكفاءة. ويمكن طرح العديد من التساؤلات في هذا السياق، نذكر منها ما يأتي:

- كيف يمكن الإستفادة من دوال مورس في الكشف عن البنية التبولوجية للمتنوعات وتحليل التغيرات التي تطرأ عليها؟
- ما الشروط الهندسية والتفاضلية الكافية لبناء دوال مورس فعالة على المتنوعات، وكيف يؤثر اختيار هذه الدوال على دقة النتائج التبولوجية المستخلصة؟

- إلى أي مدى يمكن الاعتماد على نظرية مورس في توصيف فضاءات معقدة، وما حدود قدرتها على تبسيط التحليل الهندسي باستخدام النقاط الحرجة وأدلتها؟
- هل يمكن تصميم نماذج جديدة تعتمد على نظرية مورس في تحليل بيانات هندسية أو شبكية، وكيف تتم مقارنة نتائجها بنماذج تعتمد على أساليب أخرى من التبولوجيا الحسابية؟
- هل يمكن تطوير خوارزميات حسابية أكثر كفاءة لاستخراج النقاط الحرجة لدوال مورس على متنوعات عالية البعد، بحيث تحسن الأداء وتقلل التعقيد الحسابي؟
- ما فعالية استخدام المركبات من نوع MORSE -SMALE في توصيف سلوك المتنوعات، وهل يمكن تعزيزها بطرق تحليل إضافية لتحسين التنبؤ أو الفهم الهندسي؟
- ما التطبيقات العملية التي يمكن أن تستفيد من نظرية مورس، مثل معالجة الصور، تحليل البيانات، أو دراسة الأنظمة الديناميكية، وما حدود صلاحية النظرية في تلك السياقات؟
- كيف يمكن تقييم شمولية وعمق نتائج التطبيقات المختلفة لنظرية مورس، وما المعايير التي يمكن اعتمادها لقياس دقتها وموثوقيتها؟

إنّ وجود هذه التساؤلات يساهم في تحديد هدف البحث وتوجيهه نحو دراسة أكثر عمقاً وشمولية.

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى دراسة الأسس الرياضية لنظرية مورس على المتنوعات، وتصنيف البنى التبولوجية المعقدة. كما يسعى البحث إلى تسليط الضوء على نقاط القوة والضعف في التطبيقات التحليلية لهذه النظرية، مما يمكن من فهم أعمق لكيفية توظيفها بشكل أكثر فعالية في مجالات مثل التبولوجيا التفاضلية والفيزياء الرياضية بشكل يساهم في رفع دقة التحليل التبولوجي وضمان فهم أشمل للبنى الهندسية الأساسية في الرياضيات والعلوم.

أهمية البحث

تكمن أهمية هذا البحث في تسليط الضوء على نظرية مورس وتطبيقاتها على المتنوعات، حيث تُعد هذه النظرية من أقدم وأهم النظريات التي وضعت أسساً راسخة في الربط بين الهندسة التفاضلية والتبولوجيا. وتعتبر دراسة الآليات التحليلية لهذه النظرية في هذا السياق أمراً جوهرياً، إذ يساهم فهم مدى قدرة الأدوات المورسية على كشف البنى المعقدة وتحقيق دقة عالية في تحليل الخصائص التبولوجية. وتكمن القيمة العلمية لهذا البحث في أنه يساهم في توسيع المعرفة النظرية والعملية بأساليب التحليل المورسي، مما يمكن من استكشاف إمكانات تطويرها أو تحسين أدائها لتواكب متطلبات الدراسة المتقدمة للفضاءات العقدية. كما تظهر أهمية هذا البحث في البعد التطبيقي، حيث أنّ دقة وفعالية هذه الأدوات تنعكس إيجاباً على مجالات متنوعة مثل الفيزياء الرياضية وعلوم الحاسب والطب.

مبررات البحث

تكمن مبررات هذا البحث في أنّ نظرية مورس تُعد من النظريات الأساسية في الرياضيات الحديثة، حيث تمتلك قيمة نظرية وتطبيقية كبيرة في مجال التبولوجيا والهندسة التفاضلية، وعلى الرغم من القدم النسبي لصياغتها الأولى، فإنها ماتزال تحتل مكانة مميزة في الدراسات الأكاديمية لما تتميز به من إطار رياضي متين وقابلية للتطوير والتحليل. كذلك، فإنّ الاهتمام المتزايد بدراسة البنى الهندسية المعقدة في مجالات مثل الفيزياء النظرية وعلوم البيانات المتقدمة يشكل دافعاً قوياً لدراسة الأدوات التحليلية المتخصصة في تحليل البيانات، خصوصاً في ظل التحديات المتعلقة بفهم البنى التبولوجية المعقدة وربط الخصائص المحلية بالسلوك.

ومن هنا يأتي هذا البحث كمحاولة لتسليط الضوء على أهمية الأدوات المورسية وفعاليتها، مع السعي لإبراز إمكانيات تطويرها لتتوافق مع متطلبات البحث العلمي الحديث وحاجات التطبيقات المتقدمة في الرياضيات والفيزياء.

محدودية البحث

ينحصر هذا البحث في دراسة الأسس الرياضية لنظرية مورس وتحليل آلياتها من الناحية النظرية، دون التوسع في جانب التطبيقات الحسابية المتقدمة التي تدخل فيها هذه النظرية. كما أنّ البحث يقتصر على مقارنة بعض المنهجيات التحليلية المختصة بتحليل المتنوعات بينما لا يشمل جميع الطرق والتقنيات المتوفرة في المراجع المختلفة. كذلك، فإنّ التحليل المقدم في هذا البحث يعتمد على الإطار الرياضي والنظري للنظرية وأدواتها، بينما لم يتم إجراء تطبيقات رقمية متقدمة أو نمذجة لحالات دراسة معقدة في سياقات متنوعة.

الدراسات المرجعية

يُعد مجال نظرية مورس على المتنوعات الملساء من الاتجاهات الأساسية في الهندسة التبولوجية والتحليل الهندسي، وقد حظي باهتمام متزايد في الأدبيات لما يوفره من أدوات دقيقة في توصيف البنية التبولوجية عبر تحليل النقاط الحرجة لدوال ملساء معرفة على المتنوع. وقد تعددت المناهج العلمية التي طرحت في هذا الإطار بدءاً من الأسس الكلاسيكية للنظرية، وصولاً إلى التطبيقات الحديثة التي تُسخر البنى المورسية في تحليل البيانات، والنمذجة الهندسية، والبنى عالية الأبعاد. وفيما يلي عرض لأبرز الدراسات المرجعية التي شكلت تطور النظرية ومجالات توظيفها.

ففي الدراسة[20] قُدمت الصياغة الكلاسيكية الأولى للنظرية، حيث طرح Milnor منهجاً متكاملاً لتحليل الدوال الملساء عبر تحديد نقاطها الحرجة ودراسة دليل مورس، وتميزت هذه الدراسة بصرامتها الرياضية وكونها حجر الأساس الذي بُنيت عليه التطويرات اللاحقة، غير أنها بقيت محدودة من حيث الشمولية في التعامل مع فضاءات غير ملساء أو بنى ذات تعقيد حسابي كبير.

أما الدراسة [3] فقدمت تطويراً جوهرياً للنظرية من خلال صياغة الهومولوجيا المورسية بوصفها بديلاً جبرياً يعكس البنية التبولوجية للمتنوع بطريقة تعتمد مباشرة على المتنوعات الصاعدة والهابطة للنقاط الحرجة. وقد سمح هذا الإطار بتعريف المركب السلسلي لمورس، مما أضفى على النظرية طابعاً جبرياً أكثر اتساقاً وأتاح استخدامها في

سياقات تحليلية أوسع. وتكمن أهمية هذا التطوير في تمكين الربط بين مفاهيم مورس وبين النماذج الحديثة في تبولوجيا المتنوعات، وإن تطلب بنية ملساء قوية وفرضيات إضافية.

في الدراسة [3] تناولت طريقة تدفق التدرج في تحليل البنية، حيث استخدمت خواص حقول المتجهات لتتبع المسارات على المتنوع. يعتمد هذا الأسلوب على خاصية الاستقرار في بنية المتنوعات التي تسمح بتحويل عملية التحليل التبولوجي إلى دراسة سلوك منحنيات التدفق. وقد أثبتت الدراسة أنّ هذه الطريقة تحقق نتائج قوية خصوصاً عند التعامل مع متنوعات ذات أبعاد عالية.

أما الدراسة [25] أكدت على أنّ مميز مورس سميل يعكس خصائص تبولوجية أساسية للمتنوع، ويشكل إطاراً منهجياً لدراسة دوال مورس المثالية التي تحقق الحد الأدنى لعدد النقاط الحرجة، مما يجعلها أداةً مهمة في التحليل التبولوجي للمتنوعات المترابطة.

وفي الدراسة [26] قدمت إطاراً منهجياً جديداً لبناء شبكات رباعية عالية الجودة انطلاقاً من سطوح مثلثية غير منتظمة، وهو ما يمثل محوراً رئيسياً في تطبيقات الرسومات الحاسوبية، والنمذجة الهندسية، والمحاكاة العددية.

خُلاصةُ الدراساتِ المَرجِعيّة

مرت نظرية مورس على المتنوعات بسلسلة من مراحل التطور العلمي التي أسهمت في ترسيخ مكانتها كأحد أهم الأدوات التبولوجية لتحليل بنية المتنوعات الملساء. فقد شكلت الصياغات الكلاسيكية الأولى أساساً متيناً اعتمد على دراسة النقاط الحرجة للدوال الملساء وأدلة مورس المرتبطة بها، الأمر الذي أتاح توصيفاً دقيقاً للتغيرات التبولوجية التي تطرأ على مجموعات السوية. وقدم هذا النهج إطاراً تحليلياً قوياً لفهم البنية الداخلية للمتنوعات، رغم محدوديته في التعامل مع البنى عالية التعقيد أو الحالات التي تتطلب معالجة حسابية مباشرة.

ومع تطور نظرية مورس، ظهرت منهجيات أكثر عمقاً كان أبرزها بناء الهومولوجيا المورسية التي أعادت صياغة المعلومات المستخلصة من النقاط الحرجة ضمن إطار جبري صارم. وقد أثبت هذا التطوير قدرته على توسيع نطاق استخدام نظرية مورس، لاسيما في تحليل البنى الهندسية المرتبطة بمسارات الانحدار والمتنوعات الصاعدة

والهابطة. كما شهدت الدراسات اللاحقة توظيفاً أكثر مرونة للنظرية عبر تطوير مركبات مورس سميل، وهي أدوات هيكلية تتيح تقسيم المتنوع إلى مناطق تبولوجية متمايزة اعتماداً على سلوك خطوط الانحدار. وقد حسنت هذه المقاربة القدرة على توصيف البنية الهندسية في سياقات تطبيقية، خصوصاً في تحليل الشكل ومعالجة البنى عالية الأبعاد. بشكل عام، يتضح من مجمل الدراسات أنّ لكل منهج من مناهج نظرية مورس مزايا وحدوداً واضحة، فالصياغات الكلاسيكية تتميز بالدقة التحليلية والصرامة الرياضية، بينما توفر المركبات الهيكلية مثل مركب مورس سميل توازناً بين الوصف التبولوجي والبنية الهندسية. وتشكل الاتجاهات مجتمعة الأساس الذي يُبنى عليه البحث الحالي في دراسة نظرية مورس على المتنوعات وبعض تطبيقاتها، وتحليل إمكانيات توظيفها بشكل أكثر فعالية لفهم توبولوجيا المتنوعات المعقدة وتطبيقاتها المتقدمة.

مَنهجُ البَحْثِ وأدَواتُهُ

يعتمد هذا البحث على المنهج النظري–التحليلي في دراسة الأسس الرياضية والهندسية لنظرية مورس على المتنوعات، وذلك من خلال تحليل بنيتها الرياضية باستخدام أدوات الهندسة التفاضلية، التبولوجيا الجبرية. تم اعتماد مراجعة شاملة للأبحاث والدراسات السابقة ذات الصلة، بما في ذلك المنهجيات الكلاسيكية مثل دراسة النقاط الحرجة، كما يتضمن البحث عرضاً مفصلاً للأدوات الأساسية في نظرية مورس، ومقارنة بينها من حيث القوة التحليلية، القدرة على التصنيف التبولوجي، وملاءمتها للتطبيقات العملية. وقد جرى الاعتماد على أمثلة رياضية وتطبيقات توضيحية للتأكد من صحة النتائج النظرية، مع استخدام أدوات التحليل الهندسي لإبراز الفروق بين المنهجيات.

تكمن أدوات البحث في الاعتماد على النماذج الرياضية المجردة كأساس للتحليل، وعلى التمثيل الهندسي في بناء الاختبارات النظرية. كما تم الاستعانة ببعض الأمثلة الحسابية المبسطة لتوضيح آليات النظرية، دون التوسع في النمذجة الحاسوبية المعقدة، وذلك بما يتناسب مع هدف الدراسة النظري المتمثل في تحليل البنى الرياضية وتقديم رؤية لتعميق فهمها. وبذلك يقوم هذا البحث عل دمج التحليل التفاضلي بالتبولوجيا الجبرية، مع توظيف الأدوات

الهندسية المناسبة لبلورة فهم دقيق للبنية المورسية للمتنوعات وتطبيقاتها، وصولاً إلى تقديم رؤية منهجية متكاملة تُسهم في توسيع آفاق استخدام نظرية مورس في الدراسات الرياضية المعاصرة.

خُطّةُ العَمَلِ

تنقسم هذه الرسالة المعنونة بـ "نظرية مورس على المتنوعات وبعض تطبيقاتها" إلى خمسة فصول، مُنظَّمة على النحو الآتي:

الفصل الأول: مفاهيم أساسية في المتنوعات التفاضلية

يُخصَّص هذا الفصل لعرض مجموعة من المفاهيم الرياضية الأساسية التي تشكِّل أساساً لدراسة نظرية مورس، مثل تعريف المتنوعات التفاضلية، والفضاءات المماسة، وتفاضل تابع، وذلك لكونها الإطار الهندسي الأساسي الذي تُطبَّق فيه النظرية.

الفصل الثاني: النقاط الحرجة على المتنوعات التفاضلية

يتناول هذا الفصل دراسة النقاط الحرجة للدوال المعرَّفة على المتنوعات، حيث يتم استعراض تعريفها، وتصنيفها باستخدام دليل النقطة الحرجة، وتحليل سلوك الدوال حول هذه النقاط، مع التمهيد لدورها المركزي في صياغة نظرية مورس.

الفصل الثالث: دالة مورس وهومولوجيا مورس

يُقدِّم هذا الفصل التعريف الرياضي الدقيق لدوال مورس ويبيّن خصائصها الأساسية. كما يشرح مفهوم هومولوجيا مورس وكيفية ربط سلسلة معقدة من النقاط الحرجة بالخصائص التوبولوجية للمتنوع، مُبرِزاً الأسس الجبرية والهندسية التي تقوم عليها النظرية.

الفصل الرابع: بعض التطبيقات لنظرية مورس

في هذا الفصل نقوم بدراسة التطبيقات الرئيسية لنظرية مورس ولاسيما التقسيم الطيفي للسطح والفضاء الاسقاطي العقدي ونركز على آلية عملية التقسيم الطيفي للسطح ودور نظرية مورس في هذه العملية وجودة ودقة النتائج النهائية المستخلصة.

الفصل الخامس: الرؤى المستقبلية والاستنتاجات

يُخصَّص هذا الفصل لعرض أهم النتائج التي جُمعت في البحث، إلى جانب تقديم التوصيات والرؤى المستقبلية التي يمكن أن تسهم في تطوير تطبيقات نظرية مورس وتعزيز دورها في حل إشكاليات رياضية وفيزيائية معقدة.

الفصل الأول: مفاهيم أساسيّة في المتنوعات التفاضلية

Basic Concepts in Differentiable Manifolds

1-1 مقدمة

إنّ دراسةَ نظريةِ مورس للدوال الملساء على المتنوعات الملساء تتطلبُ منا مراجعة عدة مفاهيم في الهندسة التفاضلية، ولعلّ أهم هذه المفاهيم المتنوع الفضول(الأملس) والذي يعد أساساً يُبنَى عليه جميع ما نحتاج له من أجل صياغة مثل هذه النظرية ودراسة تطبيقاتها على المتنوعات، فمن أجل ذلك نخصّصُ الفصل الأول لدراسة المتنوعات الفضولة ونستعرضُ فيهِ بعضَ الأمثلةِ عن المتنوعات التي سنحتاجُ إليها في الفصول اللاحقة.

2-1 المتنوعات (manifolds)[19]

1-2-1 الفضاء التبولوجي:

لتكن X مجموعة غير خالية وτ أسرة من المجموعات الجزئية من X بحيث أن τ تحقق الشروط الآتية:

1-المجموعتان $X, \emptyset \in \tau$.

2-لأجل كل من $A_1, A_2 \in \tau$ فإنّ $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

3-ليكن $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ جماعة غير منتهية من عناصر τ فإنّ اتحاد هذه المجموعات هي مجموعة تنتمي إلى τ .

تُسمى τ بالتبولوجيا على X و (X, τ) بالفضاء التبولوجي وعناصر τ بالمجموعات المفتوحة.

2-2-1 الفضاء الهاوسدورفي:[19]

هو فضاء تبولوجي (X, τ) يتحقق فيه:

$$\forall x, y \in X; \exists U \in U(x), V \in V(y); U \cap V = \emptyset$$

حيث $U(x), U(y)$ جماعة كل الجوارات لـx, y على الترتيب.

3-2-1 المتنوع التبولوجي من البعد n: [19]

ليكن (M,τ) فضـــاءً تبولوجياً هاوســدورفياً يُقال عن M إنّه متنوعٌ تبولوجيٌ من البعد n إذا وجِد لكلّ نقطةٍ من M جوارٌ متماثلٌ استمرارياً (هوميومورفياً) مع مجموعةٍ مفتوحةٍ في $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة: يُقال عن المتنوع M إنّه متراصٌ إذا كان متراصاً كفضاءٍ تبولوجيٍ.

ملاحظة: يُقال عن المتنوع M إنّه مترابط إذا كان مترابطاً كفضاء تبولوجي.

ملاحظة**[16]** : يُرمز لنصف الفضاء العلوي المغلق ذي البعدn بـ $H^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ويُعرف بـ:

$$H^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n \geq 0\}$$

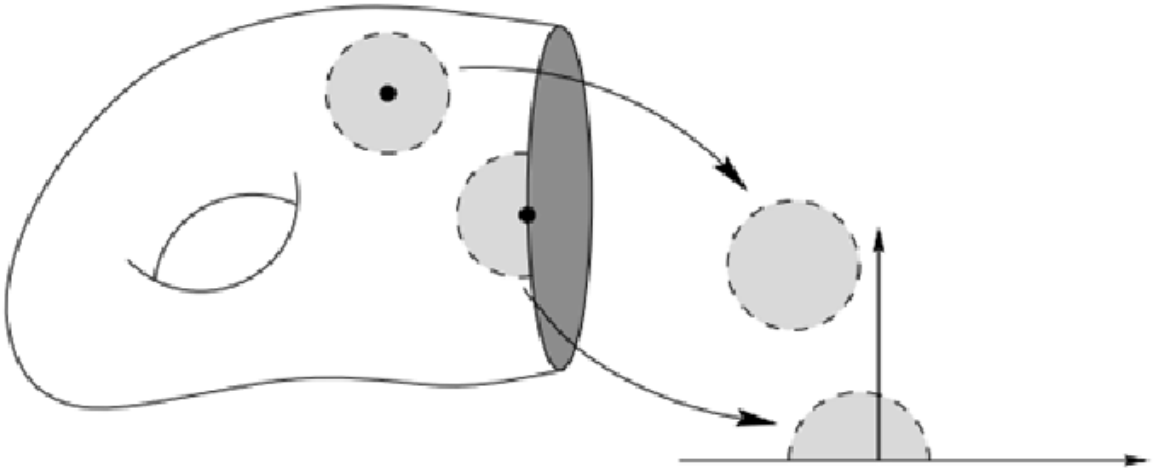
ويُسمى كل من $\boldsymbol{\partial H^n}$،$\boldsymbol{IntH^n}$ بداخل H^n وحدود H^n وفق المفهوم التبولوجي على الترتيب ويعبر عن ذلك بالشكل:

$$IntH^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n > 0\}$$
$$\partial H^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; x^n = 0\}$$

4-2-1 المتنوع مع حدود[16]:(Manifold With boundary)

إذا كان الفضاء التبولوجي M مُغطّى بأسرة من المجموعات المفتوحة $\{U_{i=1}^n\}$ والتي كل منها متماثلة استمرارياً مع مجموعة مفتوحة في H^n عندئذٍ يُقال إنّ M متنوع ذو حدود وتكون حدود M هي مجموعة النقاط المعينة بـ$x^n = 0$ ويُرمز لها بـ∂M، وتُعطى الإحداثيات لـ∂M بـ $n-1$عدد$(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, 0)$.

أما الداخل لـ M هي مجموعة نقاط M التي كل منها يملك جواراً متماثلاً استمرارياً في مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ والتي احداثيّها النوني المحليx^n > 0.



الشكل (1-1): متنوع مع حدود

أمثلة: من الأمثلةِ البسيطةِ على هذا المتنوع المجالات المغلقة في $\mathbb{R}$ والكرات المغلقة في $\mathbb{R}^n$ وأنصافِ الكرات المغلقة في S^n حيث:

$$S^n = \{(x^1, x^2, , \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

إن القرص المغلق هو متنوعٌ بعده 2 مع حدود، الكرة (القشرة مع الداخل) هي متنوعٌ بعده 3 مع حدود.

مثال: سطح الكرة هو متنوع دون حدود.

مثال: المجال المفتوح $]0,1[$ هو متنوع دون حدود.

اصطلاح**[16]** : يُستخدم مصطلح المتنوع المغلق للإشارة إلى المتنوع المتراص دون حدود، بينما يُطلق مصطلح المتنوع المفتوح للمتنوع غير المتراص دون حدود.

نتيجة1: كل متنوعٌ M هو متنوعٌ مع حدود.

مبرهنة**[16]**: ليكن M متنوعاً تبولوجياً بُعدهn مع حدود عندئذٍ:

١. $Int\ M$ هومجموعةٌ جزئيةٌ مفتوحةٌ في M وهو متنوعٌ تبولوجي بعده n دون حدود.

٢. ∂M هي مجموعةٌ جزئيةٌ مغلقةٌ في M. وهي متنوعٌ تبولوجي بعده (n-1) دون حدود.

٣. M متنوعٌ تبولوجيٌ إذا وفقط إذا $\partial M = \emptyset$.

٤. إذا كان $n = 0 \Leftarrow \partial M = \emptyset$ و M متنوعاً بعده الصفر.

مبرهنة[16]: لتكن $M_1, \dots, M_K$ متنوعاتٌ ملساء و N متنوعاً أملساً مع حدود، عندئذٍ $M_1 \times \dots \times M_K \times N$ هو متنوعٌ أملسٌ مع حدود والحدود هي:

$$\partial(M_1 \times \dots \times M_K \times N) = M_1 \times \dots \times M_K \times \partial N$$

1-2-5 الجوار الاحداثي في متنوعٍ M (coordinate neighborhood) [19]

ليكن M متنوعاً تبولوجياً من البعد n و U مجموعةً مفتوحةً في M ومتماثلةً استمرارياً مع مجموعة مفتوحة E في $\mathbb{R}^n$ وفق التماثل الاستمراري (الهوميومورفيزم) $\psi: U \longrightarrow E$ ، عندئذٍ تُسمَى الثنائية$(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\psi})$ جواراً إحداثياً لـ M.

1-2-6 الاحداثيات المحلية لنقطة p ∈ U (local coordinates): [19]

لتكن $p \in U$ عندئذٍ $\psi(p) \in E$ نقطةٌ من $\mathbb{R}^n$ يُقال عن المرتبة$\boldsymbol{\psi(p) = \left(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)\right)}$ والمؤلفة من n إحداثيةٍ حقيقيةٍ بالإحداثيات المحلية للنقطة $\boldsymbol{p}$ من U بالنسبة للجوار الإحداثي $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\psi})$ حيث كل مركبة x^i لـψ هي عبارة عن تابع حقيقي مستمر معرّف على U كون ψ مستمراً. إنّ المرّتبةَ السابقة وحيدةٌ كون ψ تقابلاً، أمّا المرتبة من الشّكل $\boldsymbol{\psi = (x^1, x^2, \dots, x^n)}$ يُقال إنّها جملةُ إحداثياتٍ محليّةٍ (موضعيّة) (local coordinate system) معرفةٌ على الجوار الاحداثي(U, ψ) ، ويُسمَى التابع x^i تابعاً إحداثياً معرّفاً على الجوار U.

ملاحظة: أُستخدِم مصطلح محلي للإشارة إلى أنّ الإحداثيات معرّفة فقط على جزء U من M وتكون جملةَ إحداثيات معرفةً على كامل M إذا كان M هوميومورفياً مع مجموعةٍ مفتوحةٍ من $\mathbb{R}^n$.

1-2-7 الأطلس(Atlas): [19]

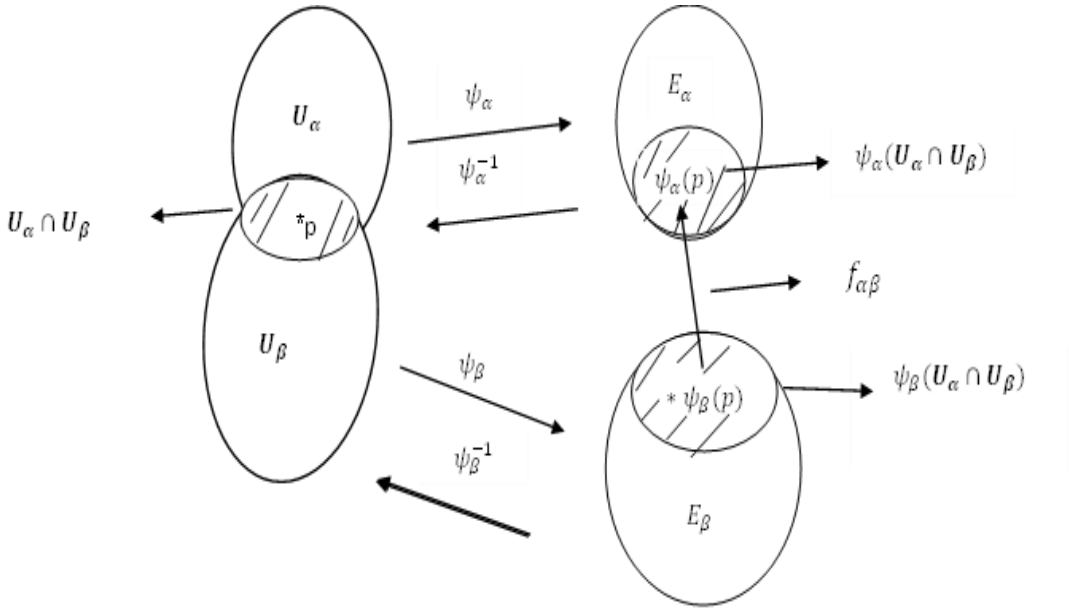
ليكن M متنوعاً تبولوجياً من البعد n ،أي أنّه لكل نقطة يوجد جوارٌ إحداثي (U, ψ) وبالتالي فإنّ M تُغطّى بجماعة $\{U_\alpha\}$ من المجموعات المفتوحة في M والمتماثلة استمرارياً مع مجموعاتٍ مفتوحةٍ في$\mathbb{R}^n$.

لتكن A مجموعة كل الأدلة α للمجموعات المفتوحة $\{U_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$ وحيث $\{U_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$ جماعةٌ تغطي M وكل عنصر من عناصرها مجموعةٌ متماثلةٌ استمرارياً مع مجموعةٍ مفتوحةٍ E_α في $\mathbb{R}^n$ وفق التماثل الاستمراري ψ_α نسمي الجماعة $\boldsymbol{S} := \{(\boldsymbol{U_\alpha}, \boldsymbol{\psi_\alpha})\}_{\boldsymbol{\alpha\epsilon A}}$ أطلساً لـ$\boldsymbol{M}$ أو جملةَ جواراتٍ إحداثيةٍ لـ$\boldsymbol{M}$.

تطبيقات الانتقال: ليكن $(\boldsymbol{U_\beta}, \boldsymbol{\psi_\beta})$ ، $(\boldsymbol{U_\alpha}, \boldsymbol{\psi_\alpha})$ جوارين إحداثيين بحيث يكون تقاطع U_α مع U_β غير خالٍ وإذا كانت$\psi_\alpha = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)$ جملة الإحداثيات المحلية المعرّفة على U_α، و$\psi_\beta = (x_\beta^1, x_\beta^2, \dots, x_\beta^n)$ جملة الإحداثيات المحلية المعرّفة على U_β، نسمي التطبيق $f_{\alpha\beta}$ من $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ على $U_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ المعرف بالمساواة$f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$

تطبيق الانتقال من الجوار الإحداثي $(\boldsymbol{U_\alpha}, \boldsymbol{\psi_\alpha})$ إلى الجوار الإحداثي $(\boldsymbol{U_\beta}, \boldsymbol{\psi_\beta})$ أو تطبيق تغيير الاحداثيات.

إنّ هذا التطبيق تماثل استمراري.



الشكل (2-1) العلاقة بين جملتين احداثيتين معرفتين على جوارين U_α وU_β متقاطعين

إذا كانت$\psi_\alpha = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)$ جملة إحداثيات محلية معرّفة على الجوار U_α، و

$\psi_\beta = (x_\beta^1, x_\beta^2, \dots, x_\beta^n)$ جملة إحداثيات محلية معرّفة على الجوار U_β، وبفرض p نقطة من $U_\alpha \cap U_\beta$

عندئذٍ:

$$f_{\alpha\beta}\left(\psi_\beta(p)\right) = \psi_\alpha(\psi_\beta^{-1}(\psi_\beta(p))$$

$$\Longrightarrow f_{\alpha\beta}\left(x_\beta^1(p), x_\beta^2(p), \dots, x_\beta^n(p)\right) = \psi_\alpha(p)$$

$$= (x_\alpha^1(p), x_\alpha^2(p), \dots, x_\alpha^n(p))$$

$$\Longrightarrow x_\alpha^i(p) = f_{\alpha\beta}^i\left(x_\beta^1(p), x_\beta^2(p), \dots, x_\beta^n(p)\right); i = 1,2, \dots, n$$

والمساواة الأخيرة تُعطينا العلاقة بين الإحداثيات المحلية لـ p في الجوار U_α والإحداثيات المحلية p في الجوار U_β كما أنّ المساواة:

$$x_\alpha^i = f_{\alpha\beta}^i\left(x_\beta^1, x_\beta^2, \dots, x_\beta^n\right) \qquad (1.1)$$

تُعطينا العلاقة بين جملتي الإحداثيات المحليتين:

$$(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n) \text{ و} \left(x_\beta^1, x_\beta^2, \dots, x_\beta^n\right)$$

1-2-8 جملة الجوارات الإحداثية من الصف C^r :[19]

نقول عن جملة جوارات إحداثية $\boldsymbol{S} := \{(\boldsymbol{U_\alpha}, \boldsymbol{\psi_\alpha})\}_{\boldsymbol{\alpha\in A}}$ لمتنوعٍ تبولوجيٍّ M بعده n إنّها من الصف C^r أو C^r – جملة جواراتٍ إحداثيةٍ إذا حققت $\boldsymbol{S}$ الخاصة التالية:

لأجل كل من $\alpha, \beta \in A$ يتحقق من أجلها $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ تكون التوابع$(i = 1 \dots, n)$; $f_{\alpha\beta}^i$ و$f_{\beta\alpha}^i$ التي تعين التحويل بين الجوارين الإحداثيين المحليين (U_α, ψ_α)و$\left(U_\beta, \psi_\beta\right)$ قابلة للمفاضلة بشكل مستمر r مرة أي من الصف C^r على $\psi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ و $\psi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ على الترتيب.

- إذا كانت $f_{\alpha\beta}^i$ و$f_{\beta\alpha}^i$ توابع حقيقية تحليلية عندئذٍ تُسمَى S جملة جواراتٍ إحداثيةٍ من الصف C^W أو تحليلية.
- إذا كانت S جملة جوارات إحداثيةٍ من الصف C^r $\left\{1 \leq r \leq \infty \text{ أو } r = w\right\}$ على M عندئذٍ يُقال إنّ S تُعرّف بنيةً تفاضليةً من الصف C^r على المتنوع التبولوجي M.

9-2-1 المتنوع التفاضلي من البعد n[19] :

إذا كان M متنوعاً تبولوجياً بعده n مزوداً بجملة جواراتٍ إحداثيةٍ من الصف C^r عندئذٍ يُقال عن $\boldsymbol{M}$ إنّه متنوعٌ تفاضليٌ بعده $\boldsymbol{n}$ من الصف C^r ، وفي حالة خاصة إذا كانت $r = w$ يُقال إنّ M متنوعٌ تحليليٌ، أما إذا كان $r = \infty$ فنقول عن المتنوع إنّه فضول أو أملس أو من الصف C^∞.

ملاحظة: إنّ جملة جواراتٍ إحداثيةٍ من الصف C^r هي جملة جواراتٍ إحداثيةٍ من الصف C^s لأجل كل $s \leq r$ وبالتالي المتنوع التفاضلي من الصف C^r هو متنوعٌ من الصف C^s لكل $s \leq r$، وفي حالة خاصة المتنوع التحليلي والمتنوع من الصف C^∞ هو متنوعٌ من الصف C^r لكل $1 \leq r \leq \infty$.

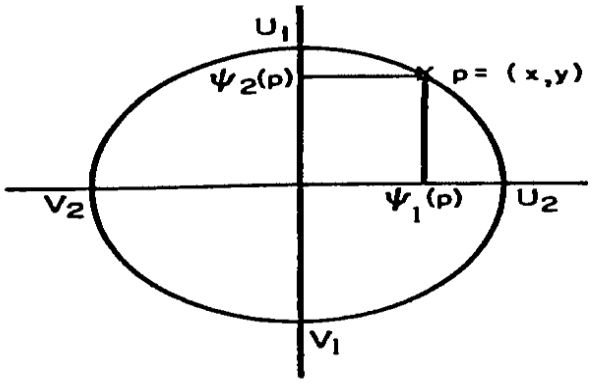
أمثلة على المتنوعات:

مثال١: إنّ $\mathbb{R}^n$ مزوّد بالأطلس $\{(\mathbb{R}^n, I)\}$ حيث I هو التطبيق المطابق، عبارة عن متنوعٍ تحليلي بُعده n لعدم وجود تطبيقات تحويل إحداثيات وبالتالي $\mathbb{R}^n$ متنوع فضول.

مثال٢: إنّ دائرة الواحدة S^1, $S^1 = \{p(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ عبارة عن متنوعٍ تحليلي بُعده 1 وبالتالي متنوع فضول.

التعليل: بتزويد S^1 بالتبولوجيا النسبية τ ، فإنّ (S^1, τ) فضاءٌ تبولوجيٌ هاوسدورفيٌ وبأخذ المجموعات:

$$\boldsymbol{U_1 = \{p(x,y) \in S^1; y > 0\}}$$
$$\boldsymbol{V_1 = \{p(x,y) \in S^1; y < 0\}}$$
$$\boldsymbol{U_2 = \{p(x,y) \in S^1; x > 0\}}$$
$$\boldsymbol{V_2 = \{p(x,y) \in S^1; x < 0\}}$$



الشكل (1−3) الدائرة S^1

من السهل إثبات أن: $S^1 = U_1 \cup V_1 \cup U_2 \cup V_2$ ومنه فإنّ $\{U_1, V_1, U_2, V_2\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ S^1 .

الآن ليكن لدينا التطبيقات:

$$\psi_i: U_i \to]-1,1[; i = 1,2$$

$$\varphi_i: V_i \to]-1,1[; i = 1,2$$

$$\psi_1(x,y) = x, \psi_2(x,y) = y, \varphi_1(x,y) = x, \varphi_2(x,y) = y$$

إنّ التطبيق: $\psi_1: U_1 \to]-1,1[$ متباين:

$$\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in U_1$$

$$\psi_1(x_1,y_1) = \psi_1(x_2,y_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 = y_2^2$$

$$\Rightarrow |y_1| = |y_2| \Longrightarrow y_1 = y_2$$

أي أنّ $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ ومنه ψ_1 متباين ولنثبت أنّ ψ_1 غامر:

$$\forall t \in]-1,1[\Longrightarrow 1 - t^2 \in]0,1[\Longrightarrow \sqrt{1-t^2} \in]0,1[\Longrightarrow$$
$$\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \in U_1$$

وإنّ $\psi_1\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) = t$ أي أنّ ψ_1 غامر، $\psi_1^{-1}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ نلاحظ أن المركبات هي توابع مستمرة ومنه ψ_1^{-1} مستمر ونجد أيضاً أنّ $\psi_1(x,y) = x$ هذا يعني أن $\psi_1 = pr_1|_{U_1}$ ومنه ψ_1 مستمر بالنتيجة ψ_1 تماثل استمراري وبنفس الأسلوب نجد أنّ $\psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ هي تماثلات استمرارية، بالتالي (S^1, τ) متنوعٌ تبولوجيٌ بعده 1.

لدينا $(U_i, \psi_i); i = 1,2$ ولنثبت أنّ f_{12}, f_{21} هي توابع تحليلية:

$$f_{21}: \psi_1(U_1 \cap U_2) \to \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

$$f_{21}:]0,1[\to]0,1[$$

$$f_{21}(t) = (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(t) = \psi_2\left(\psi_1^{-1}(t)\right) = \psi_2\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) = \sqrt{1-t^2}$$

$f_{21}(t)$ تحليلي لكل $t \in]0,1[$ ، وبنفس الأسلوب نجد أنّ تطبيقات تحويل الاحداثيات هي توابعٌ تحليليةٌ وبالتالي S^1 هو متنوعٌ تحليليٌ بُعده 1.

مثال٣: إنّ السطح الكروي

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$$

عبارة عن متنوعٍ تحليليٍ بُعده 2 وبالتالي فضول.

التعليل: لنأخذ المجموعات

$$U_i = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2; x^i > 0\}$$

$$V_i = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2; x^i < 0\}; i = 1,2,3$$

$$B^2 = \{(u^1, u^2); (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$$

والتطبيقات:

$$\varphi_i : U_i \to B^2; \varphi_i(x^1, x^2, x^3) = (.., \widehat{x^i}, ..)$$

حيث المقصود بالرمز $(.., \widehat{x^i}, ..)$ هو حذف x^i من الثلاثية فمثلاً:

$$\left(x^1, \widehat{x^2}, x^3\right) = (x^1, x^3)$$

$$\varphi_1^{-1}(u^1, u^2) = (\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}, u^1, u^2)$$

$$\varphi_2^{-1}(u^1, u^2) = \left(u^1, \sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}, u^2\right)$$

$$\varphi_3^{-1}(u^1, u^2) = \left(u^1, u^2, \sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}\right)$$

$$\psi_i : V_i \to B^2; \psi_i(x^1, x^2, x^3) = (.., -\widehat{x^i}, ..)$$

$$\psi_1^{-1}(u^1, u^2) = (-\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}, u^1, u^2)$$

$$\psi_2^{-1}(u^1, u^2) = \left(u^1, -\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}, u^2\right)$$

$$\psi_3^{-1}(u^1, u^2) = \left(u^1, u^2, -\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}\right)$$

إنّ الجماعة $\{(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i)\}$ تشكل أطلساً تحليلياً لـS^2 لذلك فإنّ S^2 متنوعٌ فضولٌ لأنّ تطبيقات التحويل جميعها تحليلية فهي من الصف C^∞ ، فمثلاً لو أخذنا تطبيق التحويل

$$f_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$f_{12}(u^1, u^2) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(u^1, u^2) = \varphi_1(\varphi_2^{-1}(u^1, u^2))$$

لوجدنا أنّ

$$f_{12}(u^1, u^2) = (\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2)}, u^2)$$

وهو تطبيقٌ تحليليٌ لأنّ مركباته كذلك حيث أنّ$(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1$.

تعميم: يمكن من خلال المثال السابق التعميم بأنّ المجموعة:

$$S^n = \{(x^1, x^2, , \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

عبارة عن متنوعٍ تحليليٍ بُعده n وبالتالي فضول.

اصطلاح: من الآن فصاعداً عندما نقول متنوعاً فإننا نقصد متنوعاً فضولاً.

ملاحظة: إنّ قولنا متنوعٌ فضولٌ يُكافئ قولنا متنوعٌ أملسٌ أو من الصف C^∞.

نتيجة2:[22][19][17] كلُّ مجموعةٍ مفتوحةٍ من متنوعٍ هي متنوعٌ له البعد نفسه.

مثال: ليكن $GL(n, \mathbb{R})$ مجموعة جميع المصفوفات الحقيقية من البعد $n \times n$ غير الشاذة (أي التي لا ينعدم محددها) ويمكن تسميتها بمجموعة جميع التحويلات الخطية غير الشاذة، إنّ هذه المجموعة هي متنوعٌ بُعده $2n$ لأنّ:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}, a_{ij} \in \mathbb{R} \ \& det\ (a_{ij}) \neq 0\}$$

ولو أخذنا التطبيق:

$$\varphi: GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$(a_{ij}) \mapsto (a_{11}, \dots \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots \dots, a_{2n}, \dots \dots, a_{n1}, \dots \dots, a_{nn})$$

نلاحظ أنّ $GL(n, \mathbb{R})$ هو المجموعة المتممة لـ $\triangle^{-1}(0)$ حيث$\triangle$ تابعٌ يقرن كل مصفوفة من البعد $n \times n$ بمحددها وهوتطبيق مستمرٌ (فهو مجموعٌ منتهٍ لجداءات منتهية لتوابع مستمرة) وبالتالي وطالما أنّ $\{0\}$ مجموعة

مغلقة فإنّ $\triangle^{-1}(0)$ هي أيضاً مجموعة مغلقة، وعليه فالمجموعة $GL(n,\mathbb{R})$ مفتوحة في المتنوع $\mathbb{R}^{2n}$ وحسب النتيجة (2) هذه المجموعة هي متنوعٌ بُعده $2n$.

نتيجة3:[22][19][17]

إنّ الجداء لمتنوعات عدة هو متنوعٌ بُعده يساوي مجموع أبعاد تلك المتنوعات.

مثال: إنّ المجموعة $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times S^1 \times \ldots\ldots\ldots \times S^1}_{n}$ حيث S^1 معرّفة في المثال (٢) هي متنوع يُسمى الطارة وبعده n.

ملاحظة[22]: إذا كان اتحاد أطلسين $\{(U_\alpha,\psi_\alpha),(V_\beta,\varphi_\beta)\}$ يشكل أطلساً آخر عندئذٍ يُقال عنهما إنّهما منسجمان (compatible) ويعطي الانسجام وفق هذا التعريف علاقة تكافؤ، وبالتالي صفوف تكافؤ، يسمى كل صف من هذه الصفوف بـ بنية تفاضلية (differentiable structure). ويُقال أيضاً بأنّ الأطلسين المنسجمين بالتبادل يُعرّفان البنية التفاضلية على M نفسها.

3-1 التوابع الفضولة على متنوع وجمل الإحداثيات المحلية حول نقطة:[22]

1-3-1 تفاضل تابع على متنوع:[22]

ليكن f تابعاً مستمراً على مجموعةٍ مفتوحةٍ V في M وp نقطة من V، نقول إنّ f قابل للمفاضلة عند p إذا وجد جوار إحداثي (U,ψ) بحيث تكون $p \in U$ و$U \subseteq V$ وبحيث يكون التابع $F = f \circ \psi^{-1}: \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلاً للمفاضلة عند $\psi(p)$. يُسمى F بالممثل المحلي لـf في الجوار الإحداثي (U,ψ)، إذا كان هذا الممثل F أملساً (من الصف C^∞) عند $\psi(p)$ فإنّنا نقول إنّ f من الصف C^∞ عند p. يُقال عن f إنه من الصف C^r على M إذا كان من الصف C^r عند كل نقطة من M. إذا كانت $\{x^i\}$ جملة إحداثية معرّفة على U فإنّ جميع التوابع x^i من الصف C^∞ .

نعرّف $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$ بالمساواة:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}\right)_{\psi(p)} \qquad (2.1)$$

ملاحظة: إنّ التعريف السابق مستقل عن اختيار الجوار الاحداثي (U_α, ψ_α) لـ p لأنه لو كان (U_β, ψ_β) جواراً إحداثياً آخراً لـ p فإنّ:

$$f \circ \psi_\beta^{-1} = f \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} = (f \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ (f_{\alpha\beta})$$

لدينا $f_{\alpha\beta}$ من الصف C^r عند $\psi_\beta(p)$ و $\psi_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(\psi_\beta(p))$

بفرض أنّ $f \circ \psi_\alpha^{-1}$ من الصف C^S عند $\psi_\alpha(p)$ فإنّ $f \circ \psi_\beta^{-1}$ من الصف C^S عند $\psi_\beta(p)$.

1-3-2 المشتق الجزئي لتابع على متنوع:[19]

ليكن M متنوعاً من الصف C^r $(r \geq 1)$ ولتكن $\psi_\alpha = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)$ جملة إحداثيات محلية معرفة على U_α عندئذٍ فإنّ التوابع الاحداثية x_α^i من الصف C^r على U_α.

ليكن f تابعاً من الصف C^S في جوار U لنقطة p منتمية للجوار الاحداثي U_α، نعرف المشتق الجزئي للتابع $\boldsymbol{f}$ بالنسبة لـ $\boldsymbol{x_\alpha^i}$ على $q \subseteq U \cap U_\alpha$ بالمساواة الآتية:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i}(q) = \frac{\partial F_\alpha}{\partial u^i}\left(\psi_\alpha(q)\right), i = 1, .., n \qquad (3.1)$$

حيث $F_\alpha = f \circ \psi_\alpha^{-1}$

وقد تنتمي النقطة q إلى جوارٍ إحداثي آخر V_β فتصبح المساواة السابقة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\beta^i}(q) = \frac{\partial F_\beta}{\partial v^i}\left(\psi_\beta(q)\right), i = 1, .., n \qquad (4.1)$$

إنّ العلاقة التي تربط $\frac{\partial f}{\partial x_\beta^i}$ بـ $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i}$ تعطى بـ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\beta^j} \cdot \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}, i = 1, .., n \qquad (5.1)$$

وبنفس الأسلوب نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\beta^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}, j = 1, \dots, n \qquad (6.1)$$

بوضع $f = x_\alpha^k$ في(1.5) و $f = x_\beta^k$ في (6.1) نحصل على:

$$\boldsymbol{\delta_i^k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} \cdot \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}}\ , \quad \boldsymbol{\delta_j^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}} \tag{7.1}$$

بفرض أنّ:

$$\boldsymbol{A_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^1} & \cdots & \frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^1} & \cdots & \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{A_{\beta\alpha} = (\frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i})); 1 \le i,j \le n} \tag{8.1}$$

من (7.1) نجد أنّ:

$$\boldsymbol{A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\alpha} = A_{\beta\alpha} \cdot A_{\alpha\beta} = I_n}$$

وهذا يعني أنّ $\boldsymbol{A_{\alpha\beta}}$ هي مقلوب $A_{\beta\alpha}$ وبشكلٍ خاص $detA_{\alpha\beta} \neq 0$ من أجل جميع نقاط $V_\alpha \cap V_\beta$.

1-3-3 المحدد الدالي بالنسبة لجملة احداثيات محلية:[19]

لتكن $f^1, f^2, \dots, f^n$ توابع من الصف C^S معرفة على جوارٍ U لـ p ولأجل $q \in U \cap U_\alpha$ عندئذٍ يُسَمى المحدد المعطى بالمساواة:

$$\frac{D(f^1, f^2, \dots, f^n)}{D(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)} = det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha^j}(q)\right)_{1 \le i,j \le n} \tag{9.1}$$

بالمحدد الدالي للمرتبة $(f^1, f^2, \dots, f^n)$ عند q بالنسبة لجملة الإحداثيات المحلية $(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)$.

إنّ خاصية عدم انعدام المحدد الدالي بالنسبة لجملة الاحداثيات المحلية $x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n$ لا يعتمد على اختيار الجوار الاحداثي U_α الحاوي لـ p وذلك لأنه إذا كانت $q \in U_\alpha \cap U \cap U_\beta$ فإنّ:

$$\frac{D(f^1, f^2, \dots, f^n)}{D\left(x_\beta^1, x_\beta^2, \dots, x_\beta^n\right)_q} = \left(det\, A_{\alpha\beta}\,(q)\right) \cdot \frac{D(f^1, f^2, \dots, f^n)}{D(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)_q}$$

إذا كان M متنوعاً بُعده n من الصف C^r و $f^1, f^2, \dots, f^n$ من الصف C^S حيث $1 \le S \le r$ فيُقال عن $(\boldsymbol{f^1, f^2, \dots, f^n})$ إنّها جملة إحداثياتٍ محليةٍ حول نقطةٍ $\boldsymbol{p}$ إذا تحقق:

$$\frac{D(f^1, f^2, \dots, f^n)}{D(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \dots, x_\alpha^n)}(p) \neq 0 \qquad (10.1)$$

لأجل $p \in U_\alpha$ حيث U_α جوار إحداثي يحوي p،إنّ التعريف السابق مستقل عن اختيار الجوار الإحداثي لـ p.

مبرهنة[19]: إذا كانت $(f^1, f^2, \dots, f^n)$ جملة إحداثياتٍ محليةٍ حول نقطةٍ p من متنوعٍ M فهي جملة إحداثياتٍ محليةٍ معرّفةٍ على جوارٍ صغيرٍ كفايةٍ لـ p .

إذا كان M متنوعاً بُعده n من الصف C^r حيث $1 \leq r \leq \infty$ أو $r = w$ ولتكن $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ جملة جواراتٍ إحداثيةٍ من الصف C^r لـ M وليكن (U, ψ) جواراً إحداثياً لـ M فإذا كانت $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha), (U, \psi)\}$ جملة جوارات احداثيةٍ من الصف C^S حيث $S \leq r$ عندئذٍ ندعو (U, ψ) جواراً إحداثياً من الصف C^S للمتنوع التفاضلي M من الصف C^r.

ملاحظات:

- ليكن M متنوعاً بعده n مزوداً بجملتي جواراتٍ إحداثيةٍ $T = \{(U_i, \varphi_i)\}$ من الصف C^S و $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ من الصف C^r بحيث أنّ $1 \leq s \leq r$ وبالتالي (M, T) من الصف C^S و (M, S) متنوعٌ من الصف C^r على الترتيب.
- إذا كان(U_i, φ_i) جواراً إحداثياً من الصف C^S من المتنوع (M, S) الذي هو من الصف C^r وذلك لأجل كل $i \in I$ عندئذٍ نقول عن البنية التفاضلية من الصف C^S المعطاة بواسطة T إنّها جملة خاضعة "مُهيمن عليها" للبنية التفاضلية من الصف C^r المعطاة بـ S وللدلالة على ذلك نكتب $T < S$.
- أما إذا كان $r = s$ وكان $T < S$ و $S < T$ عندئذٍ نقول إنّ TوS متكافئتان أي أنّهما تعرفان البنية التفاضلية من الصف C^r ذاتها على M.
- إذا كان M متنوعاً تبولوجياً يملك قاعدة عدودة فإننا نستطيع أن نبرهن أنّ أي بنية تفاضلية من الصفC^r حيث $(1 \leq r \leq \infty)$على M ستكون خاضعة لبنية تفاضليةٍ من الصف C^∞ على M.

4-1 المتجهات المماسية والفضاء المماس:[19] (Tangent vector and tangent space)

ليكن M متنوعاً و $p \in M$ نقطةٌ ولنرمز لمجموعة كل الدوال الحقيقية من الصف C^∞ عند نقطة p والتي كل منها معرف على جوارٍ للنقطة p بالرمز $F(p)$ فإذا كان $f, g \in F(p)$ فإنّ $f+g, f.g$ معرفان على تقاطع الجوارين المعرف عندهما كل من f, g وكذلك سيكون λf معرفاً وبالتالي فإنّ $\lambda f, f+g, f.g$ ستكون عناصر من $F(p)$.

1-4-1 المتجه المماس(Tangent vector) :[19]

يُسمى متجهاً مماساً لـ M عند نقطةٍ p كل تطبيق:

$$v: F(p) \to \mathbb{R}$$
$$f \to v(f)$$

يحقق ما يلي:

١. $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$
٢. $v(f \cdot g) = v(f)g(p) + v(g) \cdot f(p)$

وذلك أياً كان $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in F(p)$ وتُسمى الخاصة الأولى بالخطية أما الثانية بخاصة ليبنتز.

ملاحظة: إنّ قيمة $v(f)$ تعتمد على السلوك الموضعي لـ f.

هذا يعني أنّه إذا كان $f, g \in F(p)$ وكانا متطابقين على جوارٍ V لـ p فإنّ:

$$v(f) = v(g)$$

2-4-1الفضاء المماس:(Tangent space) [19]

إنّ مجموعة كل المتجهات المماسة عند النقطة p المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد تشكل فضاءً متجهياً نرمز له بـ $T_p(M)$ ونسميه الفضاء المماس لـ M عند p.

إذا كانت $(x^1, \dots\dots, x^n)$ جملة إحداثيات محلية على U و p نقطة من U عندئذٍ يكون $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ المعرف بالمساواة:

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

متجهاً مماساً لـM عند p.

مبرهنة:**[16]**

ليكن M متنوعاً أملساً، $p \in M, v \in T_p(M), f, g \in F(p)$ عندئذٍ:

١. إذا كان f تابعاً ثابتاً $\Leftarrow vf = 0$.

٢. إذا كان $f(p) = g(p) = 0 \Leftarrow v(f.g) = 0$. **[17][19][29]**

مبرهنة:**[17][19]**

إذا كان M متنوعاً و $p \in M$ فإنّ $dimT_p(M) = dimM$. يمكن –وفقاً لهذه المبرهنة– صياغة بعض النتائج:

- إذا كان (U, φ) جواراً لـM يحوي p ومرتبط بالجملة الإحداثية (x^i) فإنّ الأسرة $\left\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\right\}$ تُشكل أساساً لـ$T_p(M)$.
- من أجل أي $v_p \in T_p(M)$ فإنّ $v_p = \sum_{i=1}^n v^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ حيث $v^i = v_p(x^i)$ التي تسمى مركبات v_p بالنسبة للجملة $\{x^i\}$.
- من أجل $f \in F(p)$ فإنّ $v_p(f) = \sum_{i=1}^n v^i(\frac{\partial f}{\partial x^i})_p$.
- من أجل جوار إحداثي آخر عند p مرتبط بالجملة الإحداثية (y^i) تكون لدينا العلاقة:

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)(\frac{\partial}{\partial y^j})_p \qquad (11.1)$$

بما أنّ $T_p(M)$ فضاء متجهي فله فضاء ثنويٌ عناصره هي التوابع الخطية المُعرفة على$T_p(M)$ نرمز له بـ T_p^*M ويُسمى بفضاء ظل التمام (cotangent space) أو الفضاء الثنوي (dual space) للفضاء المماس ويُسمى كل عنصر $\omega: T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ من الفضاء T_p^*M شعاعاً موافقاً للتغير (covector) عند p أو شكلاً أحادياً (1-form)عند p ولما كانت الأسرة $\left\{e_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})_p\right\}$ أساساً لـ $T_p(M)$ فإنّه يتعرّف لدينا أساس لـ T_p^*M نرمز له بـ $\{e^i = (dx^i)_p\}$ يحقق المساواة $e^i(e_j) = \delta_j^i$ يُسمى هذا الأساس بالأساس الثنوي.

وبالتالي كل شكل أحادي ω يقرن p بـ ω_p المعرف بالمساواة:

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p)(dx^i)_p \qquad (12.1)$$

حيث $\omega_i(p)$ مركبات الشكل الأحادي ω_p.

ملاحظة: الفضاء الثّنوي (dual space) :

ليكن V فضاءً متجهياً فوق $\mathbb{R}$ ولنأخذ مجموعةَ كلّ التطبيقات الخطية التي منطلقها V ومستقرها $\mathbb{R}$.

$$\zeta: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

نعرّف على هذه المجموعة جمع تطبيقين خطيين ζ وη بـ:

$$(\zeta + \eta)(x) = \zeta(x) + \eta(x)$$

والضرب بعدد:

$$(k\,\zeta)(x) = k.\zeta(x)$$

فيمكن التحقق من أنّ هذه المجموعة مزوّدة بالعمليتين هي فضاء متجهي نرمز له بـ V^* أو $T_1(V)$ ويُدعى بالفضاء المتجهي الثّنوي أمّا عناصره بالأشكال الخطية.

5-1 تفاضل تطبيق على متنوع:[19]

1-5-1 تفاضل تابع (The differential of a function):[19]

ليكن f تابعاً من الصف $C^r(1 \leq r)$، معرّفاًعلى مجموعةٍ مفتوحةٍU من متنوعٍ M، يُعرف تفاضل التابع f عند نقطة p من U بالشكل:

$$(df)_p: T_p(M) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto (df)_p v = v(f)$$

وإنّ $(df)_p$ تابعٌ يقرن كل متجهٍ بعددٍ حقيقي وحيد، ويحقق:

$$(df)_p\left(v + v`\right) = (df)_p v + (df)_p v`$$
$$(df)_p(\lambda v) = \lambda(df)_p(v)$$

وذلك أيّاً كان $v, v` \in T_p(M)$ و$\lambda \in \mathbb{R}$.

ومنه فإنّ $(df)_p$ تابعٌ خطيٌ معرفٌ على الفضاء المتجهي $T_p(M)$ وبالتالي فإنّ $(df)_p$ هو عنصرٌ من الفضاء الثنوي $T_p^*(M)$. ومن المعروف أنّ $T_p^*(M)$ مجموعة كل الدوال الخطية على $T_p(M)$، ويُسمّى التابع الخطي $(df)_p$ بتفاضل f عند p.

مبرهنة: إذا كانت $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ جملة إحداثيات محلية معرفة على جوارٍ U لـ p فإنّ:

١. $(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

٢. $(dx^j)_p(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \delta_i^j$.

البرهان:

إثبات العلاقة الأولى:

إذا كانت $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ جملة إحداثيات محلية معرفة على جوارٍ U لـ p فقد عرفنا سابقاً $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ بالمساواة $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ وأثبتنا أنّ $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ متجه مماس لـ M عند p

وأنّ $i = 1, .., n$ و $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$ أساس لـ $T_p(M)$

$$(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = (\frac{\partial f}{\partial x^i})(p)$$

ومنه العلاقة الأولى صحيحة.

إثبات العلاقة الثانية:

$$(dx^i)_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow (dx^i)_p v = v(x^i)$$

كون $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ جملة إحداثيات محلية معرفة على جوار لـ p فإنّ $\{x^i\}_{i=1}^n$ دوال حقيقية مستمرة فضولة معرفة على U ومنه:

$$(dx^j)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j$$

حسب المبرهنة السابقة فإنّ $\{(dx^i)_p\}_{i=1}^n$ أساس لـ$T_p^*(M)$ وهي الأساس الثنوي لـ

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$.

ومنه فيمكن التعبير عن كل $(df)_p \in T_p^*(M)$ كتركيب خطي بدلالة عناصر القاعدة $\{(dx^i)_p\}_{i=1}^n$.

$$(df)_p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (dx^j)_p$$

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (dx^j)_p\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_i^j = \lambda_i$$

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \lambda_i$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) = \lambda_i$$

$$\Longrightarrow (df)_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (dx^i)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p)(dx^i)_p$$

2-5-1 التطبيقات الفضولة (differentiable maps):[19]

ليكن M و M` متنوعين من الصف $C^\infty$ ومن البعد n و m على الترتيب، وليكن $\varphi$ تطبيقاً مستمراً $\varphi: M \to M`$ وp نقطةٌ من M وf تابعاً من الصف C^∞ معرفا على جوارٍ V لـ $\varphi(p)$ في $M`$. بما أنّ φ مستمراً يوجد جوار U لـ p بحيث $\varphi(U) \subset V$ ؛ يُعرّف $\varphi_* f$ على الجوار U لـ p بالعلاقة الآتية:

$$(\varphi_* f)(q) = f\big(\varphi(q)\big)$$

بما أنّ fوφ مستمران فإنّ $\varphi_* f$ تابع مستمر.

إذا كان $\varphi_* f$ من الصف C^∞ في جوارٍ لـ p لأجل كل تابع f من الصف C^∞ على جوارٍ لـ $\varphi(p)$ عندئذٍ يُقال عن $\boldsymbol{\varphi}$ إنّه من الصف $\boldsymbol{C^\infty}$ عند النقطة p أو أنّه فضول أو أملس عند النقطة $\boldsymbol{p}$.

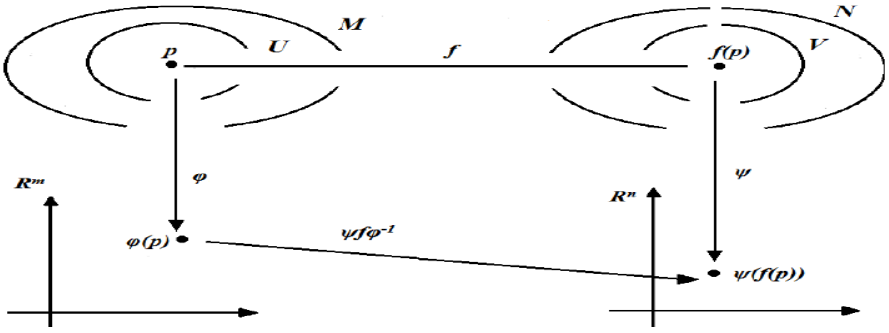
إذا كان φ فضولاً عند كل نقطةٍ من M فيُقال إنّه تطبيقٌ فضولٌ أو تطبيق من الصف $\boldsymbol{C^\infty}$ من $\boldsymbol{M}$ إلى $\boldsymbol{M`}$.

مبرهنة:**[22]**

ليكن f تطبيقاً مستمراً من متنوعٍ M بعده m إلى آخر N بعده n، و $p \in M$ ، وبما أنّ كلاً من M, N متنوع و f مستمر فلأجل كل جوار (V, ψ) لـ $f(p)$ في N يوجد جوار إحداثي (U, φ) لـ p في M وبحيث يكون $f(U) \subseteq V$ وبالتالي سيكون لـ f في الجوارين ما يُسمى بالممثل الاحداثي لـ f :

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

إذا كانت $\varphi = \{x^i\}$ و $\psi = \{y^\alpha\}$ فإنّ التطبيق $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ليس إلا تطبيقاً شعاعي القيمة $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ بـ m متغيراً، ويُقال عن f إنّه فضولٌ عند p إذا كان $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ من الصف C^∞ عند $x = \varphi(p)$ أو ببساطة إذا كانت $y^\alpha = f^\alpha(x^i); i = 1, \dots, m.$ التي هي مركبات الأول من الصف C^∞ ، تُسمى التطبيقات الفضولة أيضاً بالملساء.



الشكل (1-4) التطبيق الفضول

إنّ ما يضمن لنا استقلالية التعريف للتطبيق الفضول عن جملة الإحداثيات المأخوذة هو افتراضنا بأنّ المتنوع الذي تجري عليه الدراسة هو متنوعٌ فضولٌ، أي أنّ تطبيقات الانتقال أو التحويل فضولة (ملساء) والذي يقتضي بدوره أنّه إذا كان الممثل لتطبيق ما فضولاً بالنسبة لأحد الجوارات الاحداثية فإنّه سيكون فضولاً في أي جوارٍ آخر وتبقى الاستقلالية هذه قائمة أيضاً من أجل متنوع المستقر.

مثال: إنّ التطبيق:**[19]**

$$H: S^n \longrightarrow p^n, H(x) = \pi(x), p^n = S^n/\sim$$

فضولاً عند نقطة اختيارية حيث أنّ:

$$\pi: \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to P^n$$

$$H = \pi/_{S^n}$$

لتكن $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{n+1}) \in S^n$ نقطة اختيارية ومنه $x_0 \neq 0$ وهذا يقتضي وجود دليل $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$ بحيث $x_0^i \neq 0$ ولنفرض أنّ $i = 1$ وذلك لا يمس بعمومية الإثبات.

$$\{x_0^1 > 0 \Rightarrow x_0 \in U_1 = \{(x^1, , \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1, x^1 > 0\}\}$$

$$\pi(x_0) \in V_1 = \{\pi(x); x^1 \neq 0\}$$

بما أنّ $H(U_1) \subseteq V_1$ ولنأخذ الممثل الموضعي للتطبيق H في الجوارين $(U_1, \varphi_1), (V_1, \psi_1)$

$\psi_1 \circ H \circ \varphi_1^{-1}$ ولنثبت أنه من الصف C^∞ عند $\varphi_1(x_0)$:

$$\psi_1 \circ H \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$= \psi_1(H(\varphi_1^{-1}(u^1, u^2, \dots, u^n))$$

$$= \psi_1\left(H\left(\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2 + \cdots + (u^n)^2)}, u^1, u^2, \dots, u^n\right)\right)$$

$$= \psi_1\left(\pi\left(\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2 + \cdots + (u^n)^2)}, u^1, u^2, \dots, u^n\right)\right)$$

$$= \left(\frac{u^1}{\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2 + \cdots + (u^n)^2)}}, \dots, \frac{u^n}{\sqrt{1 - ((u^1)^2 + (u^2)^2 + \cdots + (u^n)^2)}}\right)$$

وبما أنّ المركبات الأخيرة من الصف C^∞ لأنّ كل منها عبارة عن كسر بسطه كثير حدود لـ n متحول وهو من الصف C^∞ ومقامه جذر لكثير حدود موجب تماماً وهو من الصف C^∞ فإنّ الممثل $\psi_1 \circ H \circ \varphi_1^{-1}$ من الصف C^∞ على $\varphi_1(U_1)$ والتي هي جوار لـ $\varphi_1(x_0)$ وبالتالي H فضول عند النقطة x_0 وبما أنّ x_0 اختيارية فإنّ H فضول.

3-5-1 التماثل التفاضلي أو الديفيومورفيزم(diffeomorphism):[17][22][19]

إذا كان التطبيق φ تقابلاً من متنوعٍ M إلى متنوعٍ N من الصف C^∞ وكان تقابله العكسي φ^{-1} كذلك، فإنّه يُسمَى تماثلاً تفاضلياً أو ديفيومورفيزماً من الصف C^∞ ، عندئذٍ يُقال عن المتنوع M إنّه متماثل تفاضلياً مع المتنوع N وبالعكس ويُرمز لذلك بالرمز $M \equiv N$.

ملاحظة: يُرمز لمجموعة التماثلات التفاضلية $\varphi: M \to M$ بـ Diff(M).

مثال: لتكن $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ الجملة الإحداثية المعيارية في الفضاء الأفيني $\mathbb{R}^n$ إذا كان $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تطبيقاً يحقق:

$$\varphi_* x^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j + b^i, i = 1,2, \dots, n$$

عندئذٍ نسمي φ تطبيقاً أفينياً (تآلفياً) لـ $\mathbb{R}^n$ وبشكل خاص إذا كانت $b^i = 0, i = 1, \dots, n$ فإننا نسمي φ تطبيقاً خطياً.

إذا كان $a_j^i = \delta_j^i$ يُسمَى نقلاً موازياً وفق المتجه $b = (b^1, \dots, b^n)$.

هناك صفوف خاصة من التطبيقات على المتنوع تُسمى المنحنيات والتوابع مر ذكرها سابقاً وفيما يلي تعريف المنحني.

4-5-1 المنحني المفتوح:[22]

إنّ المنحني المفتوح في متنوعٍ M بعده m هو تطبيقٌ مستمرٌ $C: (a, b) \to M$ حيث (a, b) مجالٌ مفتوحٌ وبحيث أنّ $a < 0 < b$.

نفترض بأنّ المنحني لا يقطع نفسه أي ليس هناك نقاط مضاعفة (لا يمر المنحني بالنقطة نفسها مرتين)، قد يكون العدد a (b) مساوياً لـ $\infty -$ $(+\infty)$ وقد افترضنا الصفر محتوىً في المجال لكي يلائمنا فيما بعد (يمكن دائماً بإجراء تحويل خطي جعل المجال (a, b) يحوي الصفر).

إنّ المنحني المفتوح حالةٌ خاصةٌ من التطبيق المعرّف من متنوعٍ إلى آخر حيث المنطلق هو المجال (a, b) وهو متنوعٌ لأنه عبارة عن مجموعةٍ مفتوحةٍ من المتنوع الأفيني $\mathbb{R}$.

5-5-1 المنحني الفضول على مجال مفتوح: [19]

ليكن (a, b) مجالاً مفتوحاً في $\mathbb{R}^1$ حيث $\mathbb{R}^1$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية وهي متنوع بعده 1 كما رأينا، (a, b) هو متنوع جزئي مفتوح في $\mathbb{R}^1$. نسمّي أي تطبيق فضول $\varphi: (a, b) \to M$ منحنياً فضولاً في M معرّفاً على (a, b).

ملاحظة: المنحني الفضول هو تطبيق φ وليس صورة المجال (a, b) وفق φ.**[19]**

6-5-1 المنحني الفضول على مجال مغلق:[19]

إذا كان φ تطبيقاً من مجال مغلق $[a,b]$ إلى M وإذا وجد مجال مفتوح $(a`,b`)$ يحوي $[a,b]$ و $\varphi`$ تطبيقاً فضولاً بحيث:

$$\varphi`: (a`,b`) \mapsto M$$
$$\varphi`(t) = \varphi(t); t \in [a,b]$$

عندئذٍ نسمي φ منحنياً فضولاً معرفاً على$[a,b]$. كذلك يُعرّف المنحني الفضول على مجال نصف مفتوح بأسلوب مماثل للسابق.

7-5-1 المنحني الفضول قطعياً:[19]

ليكن φ تطبيقاً مستمراً من مجالٍ $[a,b]$ إلى متنوعٍ M ولتكن $a_0, a_1, \dots, a_m$ مجموعةٌ منتهيةٌ من نقاط $[a,b]$ بحيث تكون $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ على المجالات الجزئية:

$$[a_0,a_1],[a_1,a_2],\dots\dots,[a_{m-1},a_m]$$

منحنيات فضولة عندئذٍ نسمي φ منحنياً فضولاً قطعياً.

6-1 المتنوع الريماني:[19] (The Riemannian Manifold)

نستعرضُ في هذه الفقرة بعضَ التعاريفِ التي سنحتاجها من أجلِ دراسةِ ما يُسمّى المتنوع الريماني لأجل ذلك سنعرّف المترية الريمانية والتي وردَ ذكرها في أكثرَ من مرجعٍ وعُرّفت بأساليبَ عدّةٍ. لنذكر الآن بعضاً من هذه التعاريف:

1-6-1 الشكل ثنائي الخطية:[29] bilinear form

ليكن V, W فضاءين متجهيين على حقل $\mathbb{K}$ ، وليكن التطبيق $\alpha: V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ يحقق الشروط الآتية:

$$\alpha(a+b,a') = \alpha(a,a') + \alpha(b,a') \qquad -١$$

$$\alpha\big(a,a` + b`\big) = \alpha\big(a,a`\big) + \alpha(a,b`) \qquad -٢$$

$$\alpha(\lambda a, a`) = \alpha(a, \lambda a`) = \lambda\alpha(a, a`) \qquad -٣$$

$$(a, b \in V, a`, b` \in W; \lambda \in K)$$

عندئذٍ نسمي α شكلاً ثنائي الخطية على $V \times W$. بشكلٍ خاصٍ إذا كان $W = V$ و $\mathbb{K} = \mathbb{R}$، نسمي α شكلاً ثنائي الخطية على V ونرمز لمجموعة كل التطبيقات ثنائية الخطية على V بـ $T_2(V)$.

2-6-1 الفضاء $\mathbf{T^2(V)}$ [29]: فيُعرّف بأنّه مجموعة كل الأشكال ثنائية الخطية على V^*:

$$\mathcal{B}: V^* \times V^* \to \mathbb{R}$$
$$(\zeta, \eta) \to \mathcal{B}(\zeta, \eta)$$

وهكذا فإنّ الأشكال ثنائية الخطية على V^* تشكل فضاءً متجهياً بعده يساوي n^2.

3-6-1 الفضاء $\mathbf{T_1^1(V)}$ [29]: عناصره أشكال ثنائية الخطية على $V \times V^*$:

$$\mathcal{B}: V \times V^* \to \mathbb{R}$$
$$(x, \zeta) \to \mathcal{B}(x, \zeta)$$

حيث x متجه من V و ζ شكل خطي من V^* ، يُقال عن هذه الأشكال إنّها أشكال مختلطة.

إنّ مجموعة الأشكال المختلطة تشكل فضاء متجهات بعده n^2 ويرمز له بـ$T_1^1(V)$.

4-6-1 الشكل ثنائي الخطية غير المتردي(Nondegenerate bilinear form) [29] :

هو شكل ثنائي الخطية على $V \times W$ ويحقق:

- $\left(\forall\, x \in V \;\; \alpha(x, a`) = 0\right) \Longrightarrow a` = 0$
- $(\forall\, y \in W \;\alpha(a, y) = 0) \Longrightarrow a = 0$

مثال:

$$<,>: V \times V^* \to K$$
$$(a, f) \longmapsto < a, f >= f(a)$$

شكل ثنائي الخطية غير متردٍ على$V \times V^*$.

5-6-1 الشكل ثنائي الخطية المتناظر[29] (Symmetric bilinear form) :

$$\alpha: V \times V \to K$$
$$\alpha(a, b) = \alpha(b, a)$$

1-6-6 الشكل ثنائي الخطية المتخالف (Skew-symmetric bilinear form) [29]:

$$\alpha: V \times V \to K$$
$$\alpha(a,b) = -\alpha(b,a)$$

في حالة $K = \mathbb{R}$ فإنّ V فضاء شعاعي حقيقي، والشكل ثنائي الخطية المتناظر غير المتردي على V يُدعى بالجداء الداخلي على V (Inner product).

بالتالي الشكل ثنائي الخطية αعلى فضاء حقيقي V يكون جداءً داخلياً على V إذا حقق الشروط التالية:

1. $\alpha(x,y) = \alpha(y,x)$
2. $(\alpha(x,a) = 0 \ \forall a \in V) \Longrightarrow x = 0$

مثال[16] : ليكن $\mathrm{M} = \mathbb{R}^2$ ولنعرّف شكلاً ثنائياً أملساً B على الفضاءالمماس $\mathrm{T_p(M)} \simeq \mathbb{R}^2$ بالصيغة الآتية: $\mathrm{B_p(u,v) = u^1v^2}$ حيث: $\mathrm{u = (u^1,u^2), v = (v^1,v^2)}$ ويمكن تمثيله بمصفوفة على الشكل الآتي: $\mathrm{B(u,v) = (u^1 \quad u^2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} = u^1v^2}$

إنّ التعامل مع الأشكال الثنائية يكون من خلال تمثيلها بمصفوفات.

1-6-7 الجداء الداخلي الموجب (Positive inner product) [29]:

هو شكل ثنائي الخطية متناظر على V يحقق:

$$\alpha(x,x) > 0 \quad (\forall x \in V, x \neq 0)$$

وبناءً على التعاريف السابقة عُرفت المترية الريمانية بالشكل الآتي:

1-6-8 المترية الريمانية[19]:

ليكن M متنوعاً فضولاً(أملساً). تُعرّف مترية ريمانية g على المتنوع الفضول M بأنّها تطبيق يربط كل نقطة $p \in M$ بجداء داخلي موجب $<,>_P$ على الفضاء المماس $T_p(M)$ أي أنّ:

$$g_p: T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

فإذا كانت $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ جملةَ إحداثياتٍ محليةٍ معرفةٍ على جوارٍ U لـ p فإننا نعرف مركبات المترية g عند p بالمساواة الآتية:

$$g_{ij}(q) = g_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q\right) \forall q \in U, 1 \le i,j \le n$$

إنّ $g_{ij}(q)$ هي دالةٌ معرّفةٌ على U حيث $1 \le i,j \le n$ والمصفوفة $(g_{ij}(q))_{1\le i,j\le n}$ متناظرة ومعرّفة إيجاباً وذلك لأنّها مصفوفة الجداء الداخلي لتطبيق ثنائي الخطية وأنّ $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q\right\}_{1\le i,j\le n}$ أساسٌ للفضاء $T_p(M)$.

تُسمَى g_p قيمة g عند p وتُسمى g_{ij} مركبات g بالنسبة للجملة $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. إذا كانت كل التوابع g_{ij} من الصف C^r على جوارٍ معين لكل نقطة من نقاط M فإنّ التطبيق

$$g: p \to g_p$$

يُسمى مترية ريمانية من الصف C^r على M.

سنتعامل في دراستنا مع المتريات الريمانية من الصف C^∞ وإنّ قولنا مترية ريمانية فيقصد بها مترية ريمانية من الصف C^∞.

إنّ متنوعاً ريمانياً هو متنوعٌ مزودٌ بمتريةٍ ريمانيةٍ ويُرمَز له بـ (M, g).

مثال:

إنّ الفضاء الإقليدي $M = \mathbb{R}^n$ متنوعٌ ريمانيٌ والسبب أنّ $\mathbb{R}^n$ متنوعٌ فضولٌ ولدينا $T_p(M) \cong \mathbb{R}^n \forall p \in \mathbb{R}^n$ ولنعرّف الجداء الداخلي المألوف

$$< u, v >_p = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \,; u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in T_p(M)$$

عندئذٍ $(M, <,>)$ هو متنوع ريماني.

تسمح لنا المترية بقياس طول المتجهات المماسة $v \in T_p(M)$ حيث أنّ $\| v \|_g = \sqrt{g_p(v,v)}$ وهنا تبرز أهمية كون g_p موجب.**[15]**

بفرض أنّ $(\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$ مركبات v بالنسبة للجملة $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ بالتالي

$$\| v \|^2_g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\zeta^i\zeta^j \qquad (13.1)$$

ذلك كون:

$$\| v \|^2_g = g_p(v,v)$$

$$= g_p\left(\sum_{i=1}^{n} \zeta^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \sum_{j=1}^{n} \zeta^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \zeta^i\zeta^j g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\zeta^i\zeta^j$$

يُرمز للمترية الرّيمانية عادةً بالرّمز:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j \qquad (14.1)$$

1-6-9 الطول والمسافة على المتنوعات الريمانية:[8][16]

من أهم الأدوات التي توفرها لنا المترية هي القدرة على تحديد وحساب أطوال المنحنيات.

- طول المنحنيات :(length of curves) ليكن (M,g) متنوعاً ريمانياً بحدود أو بدونها وليكن $\gamma: [a,b] \to M$ منحنياً أملسا قطعياً عندئذٍ يُعرّف طول γ بـ:

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \| \gamma`(t) \|_g \, dt \qquad (15.1)$$

نلاحظ أنّ الطول:

١-معرّف جيداً ذلك كون $\| \gamma'(t) \|_g$ مستمر قطعياً وحيث أنّ النهايات موجودة ومعرفة جيداً من اليمين واليسار عند نقاط الانقطاع.

٢-مستقل عن اختيار الوسيط t .

- المسافة الريمانية(the Riemannian distance) : إذا كان (M,g) متنوعاً ريمانياً مترابطاً و $p,q \in M$ عندئذٍ تُعطى المسافة الرّيمانية بين p,q بـ:

$$d_p(p,q) = inf_\gamma\, L_g(\gamma) \qquad (16.1)$$

حيث أنّ inf مأخوذة على مجموعة كل المنحنيات الفضولة قطعياً من p إلى q.

ملاحظة: إذا كانت $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ جملة الإحداثيات القانونية (الكلية) على $\mathbb{R}^n$ و $u, v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ ولتكن مركباتهما (η_i) و (ζ_i) على الترتيب وحيث أنّ $g_p(u,v) = \sum_{i=1}^n \zeta^i \eta^i$ عندها التطبيق $p \longrightarrow g_p$ يُعرّف متريةً ريمانية على $\mathbb{R}^n$ ويُرمزلها بـ $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ وإنّ المتنوع الريماني الناتج من $\mathbb{R}^n$ ، والمزود بهذه المترية يُسمى بالفضاء الإقليدي من البعد n ويُرمز بـ E^n.

الإثبات: نجد وضوحاً أن g_p جداء داخلي موجب على $\mathbb{R}^n$ ، من أجل كل $p \in \mathbb{R}^n$ لدينا مركبات g بالنسبة للجملة $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ هي:

$$g_{ij}(q) = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q\right) = \delta_i^j$$

$g_{ij}(q)$ دالة ثابتة هو من الصف C^∞ على E^n .

الفصل الثاني: النقاط الحرجة للدوال على المتنوعات

Critical Points for Functions on Manifolds

1-2 مقدمة:

تعتمد نظرية مورس على مفهوم النقاط الحرجة التي تمثل نقاطاً في المتنوع، فهي تحدد التحولات والتغيرات الهامة في المتنوعات، وتلعب دوراً حيوياً في تحليل الخصائص والأشكال الجبرية المختلفة، وباستخدام نظرية مورس وفهم النقاط الحرجة يمكن للعلماء والباحثين تحليل البنية والسلوك والتطور في العديد من المتنوعات المختلفة، مما يسهم في تطوير فهمنا للظواهر الطبيعية والرياضية المعقدة، لذا خصصنا هذا الفصل لدراسة النقاط الحرجة على المتنوعات.

2-2 النقاط الحرجة(critical points) [19] :

1-2-2 النقطة الحرجة والنقطة النظامية لدالة:

ليكن M متنوعاً تفاضلياً، ولتكن $f: M \to R$ دالة ملساءأو من الصف C^{∞} (جميع المشتقات حتى اللانهاية موجودة ومستمرة)، يُقال عن النقطة $x_0 \in M$ إنّها نقطة حرجة للدالة f إذا تحقق:

$$(df)_{x_0} = 0$$

وكحالة خاصة تُعرّف النقطة الحرجة لدالة بمتغيرين $f(x,y)$ بأنها النقطة التي يكون عندها المشتقان الجزئيان الأوليان صفراً:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

وتُدعى $f(p)$ قيمة حرجة للدالة f ، في حين يُقال عن x_0 إنّها نقطة نظامية لـ f إذا تحقق:

$$(df)_{x_0} \neq 0$$

ترميز **[18] [19]:** نرمز لمجموعة النقاط الحرجة لدالة f ب $c[f]$ ،أي أنّ:

$c[f] = \{p \in M; (df)_p = 0\}$ بمجموعة النقاط الحرجة لـ f.

ملاحظة: وهناك تعريف آخر للنقطة الحرجة:

ليكن M متنوعاً تفاضلياً مغلقاً (متراص دون حدود) أي من الصف C^∞ ولتكن $f: M \to \mathbb{R}$ دالة فضولة من الصف C^∞على M.

إنّ النقطة $p \in M$ نقطة حرجة لـ f إذا وفقط إذا كان التطبيق الناتج:

$$(f_*)_p: T_p(M) \to T_{f(p)}(\mathbb{R})$$

$$(f_*)_p v \approx 0$$

هو التطبيق الصفري حيث $T_p(M)$ فضاء المماس لـ Mعند p.

يكون العدد الحقيقي a قيمة نظامية لـ f إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(a)$ لا تحتوي على نقاط حرجة.**[25]**

مبرهنة: ليكن M متنوعاً ريمانياً مغلقاً، عندئذٍ لأجل أي نقطة $p \in M$ توجد نقطة واحدة على الأقل $q \in M$ بحيث تكون النقطة p نقطة حرجة لدالة المسافة من q.**[11]**

2-2-2 القيمة الصغرى محلياً، القيمة العظمى محلياً لدالة[19]:

لتكن f دالةً من الصف C^∞ على جوارٍ U في المتنوع M ،ولتكن p^* نقطةً من U نقول عن $f(p^*)$ إنّها قيمة صغرى محلياً لـ f إذا وُجد جوار $V \subseteq U$ لـ p^* بحيث يتحقق:

$$\forall q \in V \quad ; \quad f(p^*) \leq f(q)$$

ونقول عن $f(p^*)$ إنّها قيمة عظمى محلياً لـ f إذا وجد جوار $V \subseteq U$ لـ p^* بحيث:

$$\forall q \in V \quad ; \quad f(p^*) \geq f(q)$$

تعريف: نقول عن قيمة $f(p)$ إنها قصوى محلية لدالة f إذا كانت قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية.

مثال**[19]**:

- لتكن الدالة $f(x,y)=x^2+y^3$ إنّ

$$(df)_{p(x,y)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(dx)_{(x,y)}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(dy)_{(x,y)}$$

$$=2x(dx)_{(x,y)}+3y^2(dy)_{(x,y)}$$

$$(df)_{(0,0)}=0(dx)_{(0,0)}+0(dy)_{(0,0)}=0$$

ومنه $p=(0,0)$ نقطة حرجة للدالة f بينما أي $p\neq(0,0)$ نقطة نظامية للدالة f.

مبرهنة[19] : إنّ كل قيمة عظمى أو صغرى محلياً لدالة f من الصف C^∞ هي نقطة حرجة لتلك الدالة.

الإثبات:

لتكن f دالةً من الصف C^∞ على الجوار U للنقطة p من المتنوع M ولتكن p^* نقطةً من U حتى نثبت أنّ $(df)_{p^*}=0$ يكفي أن نثبت أنّه إذا كانت $f(p^*)$ قيمة عظمى محلية لـ f فإنّ $\psi(p^*)$ قيمة عظمى محلية لـ $F=f\circ\psi^{-1}$ ممثل f في الجوار الإحداثي (U,ψ). بما أنّ $f(p^*)$ قيمة عظمى محلية لـ f فإنّه يوجد جوار V لـ p^* بحيث

$$\forall q\in V \quad ; \quad f(p^*)\geq f(q)$$

ومنه:

$$\forall q\in W=U\cap V;\exists\, u\in\psi(U\cap V);u=\psi(\ q)\Rightarrow \quad q=\psi^{-1}(u)$$

ومنه

$$f(q)=f\big(\psi^{-1}(u)\big)=f\circ\psi^{-1}(u)=F(u)$$

$$F(u) = f(q) \leq f(p^*) = f \circ (\psi^{-1} \circ \psi(p^*)) = f \circ \psi^{-1}(\psi(p^*))$$

$$F(\psi(q)) \leq F(\psi(p^*))$$

ومنه $\psi(p^*)$ قيمة عظمى محلية لـ F

وبحسب مبرهنة سابقة لدينا: إذا كانت $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ وكانت $F(C)$ قيمة قصوى محلية لـ F وكانت المشتقات الجزئية الأولى لـ F موجودة فإنّ $\frac{\partial F}{\partial x^i}(c) = 0$ و $F(C)$ نقطة حرجة ومنه فإنّ $\frac{\partial F}{\partial u^i}\big(\psi(p^*)\big) = 0$ و $\psi(p^*)$ نقطة حرجة لـ F.والذي يضمن أن المشتقات الجزئية لـ F موجودة كون f من الصف C^∞ وبالتالي الممثل الموضعي F من الصف C^∞ ومنه المشتقات الجزئية لـ F موجودة حتى اللانهاية.

ومنه

$$\forall i \quad \frac{\partial F}{\partial u^i}\big(\psi(p^*)\big) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p^*)$$

$$(df)_{p^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p^*)(dx^i)_{p^*}$$

وكون $\forall i \quad \frac{\partial F}{\partial u^i}\big(\psi(p^*)\big) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(p^*) = 0$

ومنه $(df)_{p^*} = 0$ وبالتالي p^* نقطة حرجة لـ f.

مثال: **[4]**

لتكن T هي الطارة الثابتة، يمكن تمثيلها كمتنوع جزئي من الفضاء $\mathbb{R}^3$ بالمعادلات الآتية:

$$x = R_2\, sin(\theta)$$
$$y = (R_1 + R_2\, cos(\theta))\, cos(\varphi)$$
$$z = (R_1 + R_2\, cos(\theta))\, sin(\varphi) + R_1 + R_2$$

حيث:

R_1: نصف القطر الكبير الداخلي (من المركز حتى منتصف الأنبوب).

R_2: نصف القطر الصغير للأنبوب.

θ: زاوية الدوران حول الأنبوب.

φ: زاوية الدوران حول محور الطارة.

$(\theta, \varphi) \in [0,2\pi[$، $0 < R_2 < R_1$ و.

لنعرف الآن دالة الارتفاع على الطارة:

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(\varphi,\theta) = (R_1 + R_2\, cos(\theta))\, sin(\varphi) + R_1 + R_2$$

أي أنّ الدالة تعطي الارتفاع z عند كل نقطة على الطارة.

لنوجد النقاط الحرجة، وذلك بحساب التفاضل:

$$(df)_{(\varphi,\theta)} = ((R_1 + R_2\, cos(\theta))\, cos(\varphi)\,, -R_2\, sin(\varphi) sin\,(\theta))$$

بجعل المشتقات مساوية الصفر نحصل على المعادلتين الآتيتين:

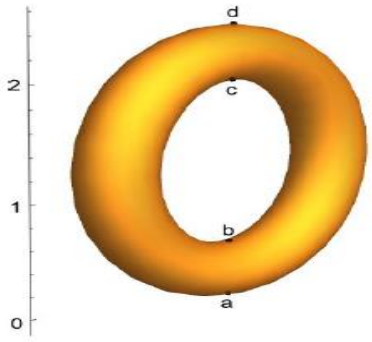
$$(R_1 + R_2\, cos(\theta))\, cos(\varphi) = 0$$
$$-R_2\, sin(\varphi) sin\,(\theta) = 0$$

بحل المعادلتين حلاً مشتركاً من المعادلة الثانية نجد إما $sin(\varphi) = 0$ أو $sin(\theta) = 0$.

من المعادلة الأولى نجد إما $cos(\varphi) = 0$ أو $R_1 + R_2\, cos(\theta) = 0$.

نجد النقاط الحرجة الأربعة الآتية:

$$a = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), b = \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right), c = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), d = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$



الشكل(2-1) يوضح النقاط الحرجة لدالة الارتفاع على الطارة

2-2-3 الهيسيان لدالة:[21][19][7]

لتكن p نقطة حرجة لدالة f، ولتكن $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ جملة احداثيات محلية معرفة على جوار لـ p، عندئذٍ يُعرف الهسيان بأنّه شكل ثنائي الخطية متناظر H_f على الفضاء المماس $T_p(M)$، أي أن:

$$H_f : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto H_f(u, v)$$

ويحقق المساواة:

$$H_f(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \zeta^i \eta^j$$

حيث ζ^i و η^i مركبات $u, v \in T_p(M)$ بالنسبة لجملة الإحداثيات المحلية $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ على الترتيب.

إنّ مصفوفة الهسيان للدالة $\boldsymbol{f}$ عند النقطة $\boldsymbol{x_0}$ تُعطى بـ:

$$\boldsymbol{H_f(x_0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

أما الهيسيان لدالة بمتغيرين x, y تُعطى بـ:

$$H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

مبرهنة:**[19][7] [4]**

إذا كانت p نقطة حرجة لدالة $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$، فإنّ الهيسيان عند p مستقل عن اختيار الجوار الإحداثي لـ p.

4-2-2 النقطة الحرجة غير المتردية: [20][19]

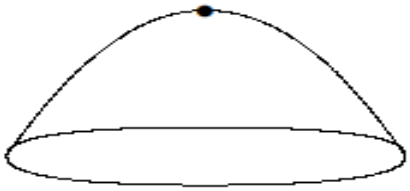
يُقال عن النقطة الحرجة $\boldsymbol{x_0}$ للدالة $\boldsymbol{f}$ إنَّها نقطة حرجة غير مترديةnon-degenerate critical point إذا كانت مصفوفة الهسيان $\boldsymbol{H_f}$ غيرَ شاذّة (قلوبه) عند ال $\boldsymbol{x_0}$ ،أي أنّ:

$$\boldsymbol{det}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{x_0} \neq 0; \boldsymbol{i,j} = \boldsymbol{1, \dots, n}.$$

5-2-2 أنواع النقاط الحرجة غير المتردية لدالة بمتغيرين $\mathbf{f(x,y)}$ [6] :

- **النقاط الحرجة أعظمية:** وتحقق الشروط الآتية:$\boldsymbol{f_{xx} < 0}$ و $\boldsymbol{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0}$ عند تلك النقطة.

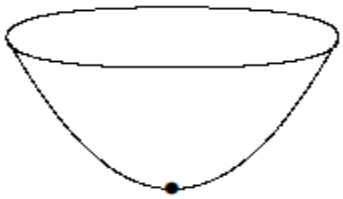
وتتناقص الدالة بالابتعاد عن النقطة الحرجة في أي اتجاه كما في الشكل.



الشكل(2-2) يوضح النقطة الحرجة الأعظمية لدالة f

- **النقاط الحرجة أصغرية:** وتحقق الشروط الآتية: $\boldsymbol{f_{xx} > 0}$ و $\boldsymbol{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0}$ عند تلك النقطة.

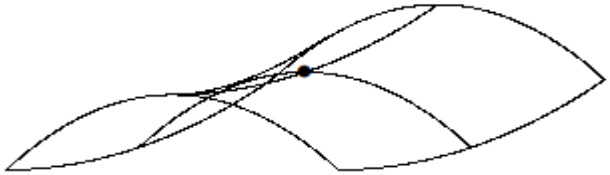
وتتزايد الدالة بالابتعاد عن النقطة الحرجة في أي اتجاه كما في الشكل.



الشكل (2-3) يوضح النقطة الحرجة الأصغرية لدالة f

- **النقاط الحرجة سرجية:** وتحقق الشرط الآتي: $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < \mathbf{0}$ عند تلك النقطة.

تتزايد الدالة أو تنقص بالابتعاد عن النقطة الحرجة اعتماداً على الاتجاه المختار كما في الشكل.



الشكل (2-4) يوضح النقطة الحرجة السرجية لدالة f

القيم الذاتية لمصفوفة مربعةA: هي القيم العددية λ التي تحقق المعادلة المميزة $det(A - \lambda I) = 0$

حيث تمثل A المصفوفة الأصلية، و I مصفوفة الواحدة من نفس مرتبة المصفوفة A.

دليل الهيسيان لشكل ثنائي الخطية عند نقطة حرجة غير متردية: هو عدد القيم الذاتية السالبة لمصفوفة الهسيان H_f. **[6]**

تعريف: إذا كانت p نقطة حرجة غير متردية لـ f عندئذٍ يُسمى دليل الهسيان H_f لـ f عند p بدليل النقطة الحرجة غير المتردية p .

نتيجة: إذا كانت مصفوفة الهسيان لدالة $\boldsymbol{f}$ عند نقطة حرجة $\boldsymbol{x_0}$ شاذة عندئذٍ تُسمى $\boldsymbol{x_0}$ نقطة حرجة متردية.

مثال: **[4]**

بالعودة إلى المثال السابق لدالة الارتفاع على الطارة الثابتة، نلاحظ أنّ مصفوفة الهيسيان عند النقطة

$p = (\varphi, \theta)$ من الشكل الآتي:

$$H_f(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -R_1\, sin(\varphi) - R_2\, sin(\varphi).cos\,(\theta) & -R_2\, cos(\varphi).sin\,(\theta) \\ -R_2\, cos(\varphi).sin\,(\theta) & -R_2\, sin(\varphi).cos\,(\theta) \end{pmatrix}$$

وبالتالي بتعويض النقطة الحرجة $p = (\frac{3\pi}{2}, 0)$ في مصفوفة الهيسيان ينتج لدينا:

$$H_f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

إنّ $det\,(H_f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)) \neq 0$ ومنه النقطة الحرجة $p = (\frac{3\pi}{2}, 0)$ هي نقطة حرجة غير متردية، وبأسلوب مماثل نجد أن النقاط الحرجة الثلاثة المتبقية جميعها نقاط حرجة متردية.

3-2 خصائص وسلوك النقاط الحرجة المتردية:

- **عدم كفاية المشتقات من الرتبة الثانية: [23]**

لا تكفي مشتقات الرتبة الثانية (الهسيان) لتحديد طبيعة النقطة إذ يلزم تحليل مشتقات ذات رتب أعلى كالرتبة الثالثة والرابعة لتحديد وفهم سلوك النقطة.

- **عدم العزلة:[23]**

قد لا تكون النقاط المتردية معزولة بل تكون مجموعات متصلة (مثل المنحنيات أو الأسطح) من النقاط الحرجة.

مثال: $f(x,y) = x^2$ على $\mathbb{R}^2$، إنّ جميع النقاط على المحور y (x=0) هي نقاط حرجة متردية.

- **الإعتماد على الإضطرابات والتغيرات:[20][2]**

النقطة المتردية تنقسم إلى عدة نقاط غير متردية تحت تأثير تغيرات صغيرة للدالة، فهي حساسة وهشة أمام التغيرات الصغيرة أي إضافة حد بسيط يُغيّر طبيعتها.

مثال: لتكن لدينا الدالة التربيعية $y = x^2$ ،إنّ النقطة $x = 0$ هي نقطة حرجة لها وهي غير متردية وذلك لأنّ $\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = 2 \neq 0$، وبإضافة اضطراب أو تغير للدالة السابقة بحيث تصبح الدالة التربيعية على الشكل الآتي:

$y = x^2 + ax + b$ ، نجد أنّ $y` = \frac{\partial y}{\partial x} = 2x + a \Leftarrow x = -\frac{a}{2}$ هي نقطة حرجة وهي غير متردية وذلك كون $\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} = 2 \neq 0$ ، وبنفس المناقشة السابقة على الدالة التكعيبية $y = x^3$ ، نجد أن النقطة $x = 0$ هي نقطة حرجة متردية، وبإضافة تغير للدالة السابقة بحيث تصبح على الشكل الآتي:

$y = x^3 + ax + b$ نجد أن الحلول الناتجة هي حقيقية $y` = \frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 + a \Leftarrow x = \mp\sqrt{\frac{a}{3}}$ عندما $a \geq 0$ وتكون مركبة عندما $a < 0$.

- **التأثير على تبولوجيا المتنوعات:[18][2]**

يؤدي المرور عبر النقاط الحرجة غير المتردية إلى تغير ملحوظ في البنية التبولوجية للفضاء M، في حين أنّ النقاط المتردية لا تُحدث بالضرورة تغيراً تبولوجياً جوهرياً بل قد تقتصر آثارها على اختفاء أو اندماج عدة نقاط حرجة في آنٍ معاً. ملاحظة: ليست كل النقاط المستقرة غير متردية، لكن النقاط الحرجة المستقرة هي بالضرورة غير متردية.

وخلاصة القول بأنه يمكن استنتاج المقارنة الآتية:

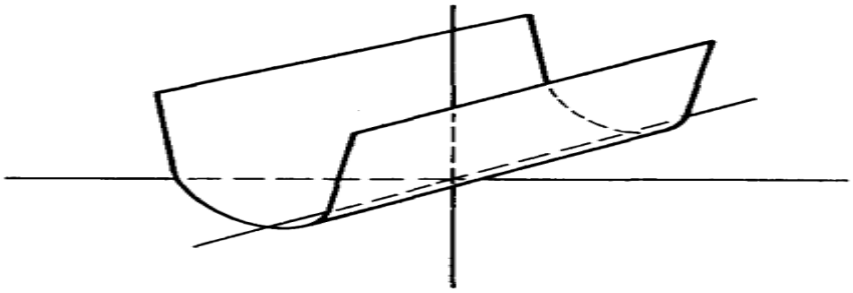
جدول(2−1) مقارنة بين النقاط الحرجة المتردية وغير المتردية

المعيار	النقاط المتردية	النقاط غير المتردية
الهسيان	محدده صفري	محدده غير صفري
العزلة	قد تكون غير معزولة	معزولة دائماً
السلوك بتأثير التغيرات	تتغير أو تختفي بسهولة	تبقى ثابتة في النوع والموقع
التصنيف	يتطلب مشتقات أعلى رتبة	يكفي الهسيان

الاستقرار	أنظمة غير مستقرة: تغير بسيط يُغيّر من طبيعتها. (مثل انتقالات الطور) الدالة التكعيبية نموذج للنقاط الحرجة غير المستقرة	أنظمة مستقرة: لا تتغير جذرياً بتغيرات صغيرة. (مثل التوازن الميكانيكي) الدالة التربيعية نموذج للنقاط الحرجة المستقرة

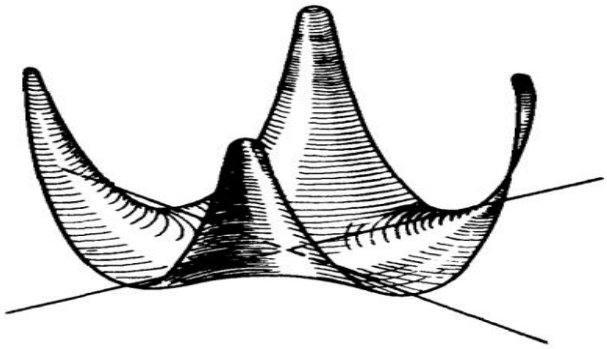
سنتعامل بشكل أساسي في دراستنا لنظرية مورس مع النقاط الحرجة غير المتردية وذلك لتجنب عدم الاستقرار.

مثال: إنّ مجموعة النقاط الحرجة المتردية للدالة $f(x,y)=x^2$ هي المحور X، وهو متنوع جزئي من $\mathbb{R}^2$



الشكل (2-5) الدالة $f(x,y)=x^2$

مثال: مجموعة النقاط الحرجة المتردية للدالة $f(x,y)=x^2y^2$ تتألف من اجتماع المحور X والمحور Y **.[20]**



الشكل (2-6) الدالة $f(x,y)=x^2y^2$

مثال:[**28**]

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1^3 - 3x_1x_2^2$$

إنَ النقطة $(x_1, x_2) = (0,0)$ نقطة حرجة متردية.

التعليل: بحساب المشتقات الجزئية الأولى بالشكل:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3x_2^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -6x_1x_2$$
$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 \end{bmatrix}$$

وبحساب المحدد:

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} 6x_1 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 \end{vmatrix} = -36x_1^2 - 36x_2^2$$
$$detH_f(0,0) = 0$$

مبرهنة: ليكن M متنوعاً متراصاً بعده n ولتكن $f: M \to \mathbb{R}$ دالة ملساءعلى M بنقطتين حرجتين فقط وغير مترديتين عندئذٍ M متماثل استمراريا مع الكرة. (مبرهنة REEB) **[18][21]**

مبرهنة: النقاط الحرجة غير المتردية لدالة ملساء على متنوع أملس هي نقاط منعزلة أي أنّه لا يمكن أن يكون هناك متتالية من النقاط الحرجة غير المتردية يتقارب إلى نقطة حرجة غير متردية، بمعنى آخر يوجد جوار مفتوح حول أي نقطة حرجة غير متردية لا يحوي أي نقطة حرجة غير متردية للدالة غيرها.

ملاحظة: إذا كان M متنوعاً بعده n وقابلاً للعد من الدرجة الثانية وكانت $A \subset M$ مجموعة ما، فإنّ قياس المجموعة Aهو الصفر إذا وفقط إذا كان يقابل كل أطلس (U, X) المجموعة $X(A \cap U)$ والتي قياسها الصفر في $\mathbb{R}^n$.

وتنص نظرية سارد: ليكن $f: M \to N$ تطبيقاً أملساً بين المتنوعين الأملسين M, N، عندئذٍ قياس مجموعة النقاط الحرجة ل f في N هو الصفر.

والآن لنجيب على السؤال الآتي:**[27][16]**

هل يمكن أن تكون مجموعة النقاط الحرجة لدالة ملساء $\boldsymbol{f: M \to \mathbb{R}}$ هي كامل نقاط المتنوع؟ وما الشرط اللازم حتى تمثل مجموعة النقاط الحرجة للدالة $\boldsymbol{f}$ السابقة متنوعاً جزئيأمن $\boldsymbol{M}$؟

إنّ أبسط حالة تكون مجموعة النقاط الحرجة هي المتنوع بأكمله في الحالة الآتية:

ليكن M متنوعاً أملساً ولنعرّف:

$$f: M \to \mathbb{R} \ ; f(x) = C$$

لأجل كل ثابت $C \in \mathbb{R}$.

- عندئذٍ $(df)_x = 0$ لأجل كل $x \in M$.
- كل نقطة هي نقطة حرجة.

لنناقش السؤال السابق في حالة f غير ثابتة:

مجموعة النقاط الحرجة عادةً لا تكون كثيفة أو ذات قياس صفري وكما هو موضح في نظرية سارد وبشكل خاص (مجموعة القيم الحرجة لدالة ملساء $f: M \to \mathbb{R}$ لها قياس الصفر في $\mathbb{R}$) وبالتالي نستنتج أن الدوال الملساء التي تكون نقاطها الحرجة هي جميع نقاط المتنوع هي فقط الدوال الثابتة محلياً وتكون الدوال ثابتة فقط عندما يكون المتنوع مترابطاً.

ملاحظة**[11]** : لأي نقطة من متنوع ريماني مغلق توجد على الأقل نقطة واحدة $q \in M$ بحيث تكون p نقطة حرجة لدالة المسافة من q.

الفصل الثالث: دالة مورس وهومولوجيا مورس

Morse Function and Homology Morse

3-1 مقدمة:

تلعب نظرية مورس على المتنوعات دوراً حيوياً في فهم الهندسة التفاضلية المعقدة، وتطبيقاتها في العديد من المجالات مثل علم الفيزياء والهندسة والعلوم الطبيعية، هذه النظرية توفر أدواتٍ قويةٍ لدراسة الخصائص الهندسية للمتنوعات وتحليل تفاعلاتها، مما يعزّز الفهم العميق للظواهر الرياضية والفيزيائية في العالم من حولنا لذا خصّصنا هذا الفصل لدراسة نظرية مورس وما تتطلبه هذه النظرية من تعاريف أساسية وتوسيع هذه الدراسة في دراسة مميز مورس وبعض تطبيقاته.

3-2 دالة مورس:[5]

يُقال عن دالة ملساء $f: M \to \mathbb{R}$ إنّها دالة مورس إذا وفقط إذا كانت جميع نقاطها الحرجة غير متردية.

يمكن إثبات وجود دوال مورس على أي متنوعٍ أملسٍ وذلك باستخدام نظرية سارد.**[6]**

نتيجة: لدالة مورس على متنوع متراص (مغلق) عدد منتهٍ من النقاط الحرجة.**[6] [5]**

3-2-1 دليل مورس[6]:

يُعرّف دليل مورس للدالة f عند نقطة حرجة غير متردية x_0 بأنّه عدد القيم الذاتية السالبة لمصفوفة الهسيان $H_f(x_0)$ ، ويُرمز عادة لدليل f عند x_0 بـ $ind(x_0)$.

مثال:[6]

لتكن $M = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ كرة الواحدة في $\mathbb{R}^3$ ،إنّ الدالة

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow z$$

هي دالة مورس.

الإثبات: لتكن المجموعات المفتوحة الآتية:

$$U_1: \{p(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\}\}$$
$$U_2: \{p(x,y,z) \in S^2 \setminus \{S\}\}$$

حيث S هو القطب الجنوبي وN هو القطب الشمالي، إنّ $S^2 = U_1 \cup U_2$ أي الجماعة $\{U_1, U_2\}$تشكل تغطية مفتوحة لـS^2. إنّ التطبيقين الآتيين تماثلان استمراريان:

$$\varphi_1: U_1 \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$$
$$\varphi_2: U_2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

كما أنّ التطبيقين العكسيين لـ φ_1, φ_2 يعطيان بالمساوتين:

$$\varphi_1^{-1}(y_1,y_2) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2+y_2^2+1}, \frac{2y_2}{y_1^2+y_2^2+1}, \frac{y_1^2+y_2^2-1}{y_1^2+y_2^2+1}\right)$$
$$\varphi_2^{-1}(x_1,x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)$$

لنعين الآن النقاط الحرجة لـ f في الجوار الإحداثي (U_2, φ_2)، إنّ الممثل الموضعي لـ f في هذا الجوار هو:

$g = f \circ \varphi_2^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالمساواة:

$$g(x_1,x_2) \coloneqq f \circ \varphi_2^{-1}(x_1,x_2) = \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}$$

بالتالي فإنّ تفاضله عند نقاط U_2 ، تُعطى بالمساواة:

$$dg(x_1,x_2) = \left(\frac{-4x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}\right)$$

إن $dg(x_1,x_2)=0$ يقتضي أنّ $x_1=x_2=0$ بالتالي $\varphi_2^{-1}(0,0)=(0,0,1)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة فقط لـ f في $U_2 = S^2 \setminus \{S\}$. لتعيين نوع هذه النقطة، لنجد الآن مصفوفة الهسيان للتابع f عند النقطة $(0,0,1)$:

$$H_g\big(\varphi_2(0,0,1)\big) = H_g(0,0) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}(0,0)\right)_{1\le i,j\le 2}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-4(1-3x_1^2+x_2^2)}{(1+x_1^2+x_2^2)^3} & \frac{16x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^3} \\ \frac{16x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^3} & \frac{-4(1+x_1^2-3x_2^2)}{(1+x_1^2+x_2^2)^3} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

بالتالي النقطة $(0,0,1)$ هي نقطة حرجة غير متردية لـ f بدليل 2، حيث أنّ $-4,-4$ هما القيمتان الذاتيتان لمصفوفة الهيسيان عند هذه النقطة وهما سالبتان.

ونستطيع بيان أن النقطة الحرجة الوحيدة لـ f في الجوار U_1 هي $(0,0,-1)$ وأنّ هذه النقطة حرجة غير متردية دليلها 0. حيث أنّ لمصفوفة الهيسيان عند النقطة قيمتان ذاتيتان موجبتان ولا يوجد قيم ذاتية سالبة.

تمهيدية: [6] إذا كانت $f(x,y)$ دالة حقيقية بحيث $f(0,0)=0$ ،عندئذٍ توجد دالتان $h(x,y)$،$g(x,y)$ بحيث:

$$f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y)$$

في جوار ما للنقطة $(0,0)$ وبحيث:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h(0,0)$$

تمهيدية: لتكن $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة بمتغيرين ولتكن p_0 نقطة حرجة غير متردية لها، عندئذٍ توجد جملة إحداثيات محلية (x,y) معرفة على جوار لـ p_0، بحيث يكون $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) \neq 0$.

2-2-3 نظرية مورس[19]:

إذا كانت x_0 نقطة حرجة غير متردية لدالة f على متنوع M، عندئذٍ يوجد جوار مفتوح ما لـx_0 في M، وجملة إحداثيات محلية$(x^1, x^2, \dots, x^n)$ معرفة على جوارٍ لـx_0 بحيث، تُعطى الدالة f في هذه الإحداثيات بالمساواة:

$$f(x) = f(x_0) - (x^1)^2 - \cdots - \left(x^\lambda\right)^2 + \left(x^{\lambda+1}\right)^2 + \cdots + (x^n)^2$$

حيث λ دليل النقطة الحرجة.

وفي مراجع أخرى فإنّ نظرية مورس نصت على ما يلي **[3]**

لتكن p نقطة حرجة غير متردية و$f:M \to \mathbb{R}$ دالة على متنوع M، عندئذٍ يوجد جوار U لـ p وتماثل تفاضلي $\varphi:(U,p) \to \mathbb{R}^n$ وبحيث أنّ:

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{j=1}^{\lambda} x_j^2 + \sum_{j=\lambda+1} x_j^2$$

حيث أنّ λ هو دليل النقطة الحرجة غير المتردية p.**[19]**

ملاحظة: يمكن دائماً اختيار الإحداثيات المحلية في الجوار للنقطة الحرجة غير المتردية، ولهذا السبب نجد أنّ الدالة السابقة في ذلك الجوار عبارة عن دالة تربيعية قطرية.

3-2-3 الجوار الإحداثي لمورس وجوار مورس [3]:

ليكن M متنوعاً بعده n و $f:M \to \mathbb{R}$ دالة مورس، وحيث أنّ:

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{j=1}^{\lambda} x_j^2 + \sum_{j=\lambda+1}^{n} x_j^2$$

عندئذٍ يسمى الجوارالإحداثي (U,φ) للنقطة الحرجة p بالجوار الإحداثي لمورس والجوار U جوار مورس.

3-3 مميز مورس –سميل [25]:

تعد نظرية مورس –سميل من أعمدة التبولوجيا والأنظمة الديناميكية الحديثة.تأتي أهميتها من كونها حقلاً نشطاً في الرياضيات والفيزياء ولها تطبيقات في التبولوجيا كدراسة أشكال الفراغات عالية الأبعاد وتحليل سلوك الأنظمة المعقدة مثل تصنيف المتنوعات إلى دراسة نقاط حرجة قابلة للحساب، بالإضافة لفتحها أبواب جديدة لحل حدسيات رياضية كبرى مثل حدسية بونكاريه$(Poincaré\ conjecture)$ ومبرهنة فيرما الأخيرة (Fermat's Last Theorem)، وتأسيس تقنيات مستخدمة في الفيزياء النظرية.

ليكن M متنوعاً تفاضلياً متراصاً بعده n ومن الصف c^∞، عندئذٍ يعرف مميز مورس –سميل بـ$min_{f\in\Omega}\sum_{i=0}^{n} c_i(M,f)$ ونرمز له بـ $\mu(M)$ حيث Ωهو فضاء دوال مورس علىM،$c_i(M,f)$ هو عدد النقاط الحرجة ذات الدليل i لـf في Ω.

مبرهنة:[25]

ليكن M متنوعاً تفاضلياً متراصاً بعده nومن الصف c^∞، إذا كان $dimM = n < 4$ عندئذٍ:

$$\mu(M) = min_{f\in\Omega}\sum_{i=0}^{n} c_i(M,f) = \sum_{i=0}^{n} min_{f\in\Omega} c_i(M,f)$$

مثال١: إذا كان $n = 3$ عندئذٍ توجد دالة مورس f على M^3 لها نقطة حرجة وحيدة دليلها 0 ونقطة حرجة وحيدة دليلها 3، وعدد النقاط التي دليلها 1 مساوٍ لعدد النقاط التي دليلها 2 أي أنّ:

$$C_0(M^3,f) = C_3(M^3,f) = 1$$
$$C_1(M^3,f) = C_2(M^3,f)$$

بالتالي:

$$\mu(M) = min_{f\in\Omega}\sum_{i=0}^{3} c_i(M^3, f) = min_{f\in\Omega}\big(2 + 2C_1(M^3, f)\big)$$

$$= 2 + 2min_{f\in\Omega}C_1(M^3, f) = \sum_{i=0}^{3} min_{f\in\Omega}c_i(M^3, f)$$

مبرهنة:[25]

مميز مورس سميل لأي متنوع بعده فردي هو عدد صحيح زوجي أكبر أو يساوي 2.

ملاحظة: (مسألة مفتوحة) لا يزال غير معروف بعد من أجل متنوعين تفاضليين C^∞ مغلقين (M, N) تحقق المساواة:

$$\mu(M \times N) = \mu(M).\mu(N)$$

مصطلحات وتعريف آخر لمميز مورس:[1]

ليكن M^n متنوعاً فضولاً أملساً متراصاً بعده n دون حدود أي$(\partial M = \emptyset)$، وليكن$\mathscr{F}(M)$ الجبر الحقيقي لكل الدوال الحقيقية الفضولة المعرّفة على M، عندئذٍ نرمز لمجموعة كل دوال مورس بـ$\mathscr{F}_m(M)$ وهي مجموعة جزئية من $\mathscr{F}(M)$. إنّ$\emptyset \neq \mathscr{F}_m(M)$ وذلك لوجود دالة مورس معرفة على M، إذا كانت

$f \in \mathscr{F}_m(M)$ فإنّ المجموعة الحرجة $c[f]$ منتهية كونها تحتوي على نقاط حرجة معزولة والمتنوع M متراص ويُرمز لـ $\mu_k(f)$ لعدد النقاط الحرجة لـf ذات دليل مورس k حيث $0 \leq k \leq n$ وعندها سيمثّل

$$\gamma(f) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k(f)$$

العدد الرئيسي لـ$c[f]$.

يُعرّف مميز مورس للمتنوع M بـ:

$$\mu(M) = min\{\gamma(f); f \in \mathscr{F}_m(M)\}$$

وحيث أنّ

$$\mu_k(M) = min\{\gamma_k(f)\ ; f \in \mathscr{F}_m(M)\}; k = 0, \dots, n$$

وقد تم إثبات أنّ $\mu(M), \mu_K(M)$، لأجل $k = 0, \dots, n$ عبارة عن لا متغيرات تفاضلية، هذا يعني أنّه إذا كان المتنوعان المتراصان M, N متماثلين تفاضلياً فإنّ:

$$\mu(M) = \mu(N)$$
$$\mu_K(M) = \mu_K(N)$$

الأعداد μ_i, μ على متنوعات الجداء [25]:

ليكن M^m, N^n متنوعات متراصة بدون حدود أي $(\partial M = \partial N = \emptyset)$ عندئذٍ القضايا التالية صحيحة:

$$\mu(M \times N) \leq \mu(M)\mu(N)$$
$$\mu_i(M \times N) \leq \sum_{i=j+k} \mu_j(M)\, \mu_k(N); i = 0, \dots, m+n$$

الإثبات:

المتراجحة الأولى: ليكن M, N متنوعين متراصين من الصف C^∞، $f \in \mathscr{F}_m(M), g \in \mathscr{F}_m(N)$ ولتكن $h: M \times N \to \mathbb{R}$ معرفة بالمساواة:

$$h(x, y) = f(x) + g(y)$$

إنّ النقطة $(p, q) \in M \times N$ تكون نقطة حرجة لـ h إذا تحقق $(dh)_{(p,q)} = 0$ وبالاعتماد على تعريف الدالة h وبحساب التفاضل الجزئي لـ h بالنسبة لـ x, y نجد:

$$(d_x)h_{(p,q)} = (df)_p$$
$$(d_y)h_{(p,q)} = (dg)_q$$
$$(dh)_{(p,q)} = 0 \Leftrightarrow (df)_p = 0 \wedge (dg)_q = 0 \Leftarrow$$
$$C[h] = \{(p, q) \in M \times N; p \in C[f], q \in C[g]\} = C[f] \times C[g]$$
$$\gamma(h) = \gamma(f).\gamma(g)$$

نلاحظ من تعريف الدالة h بأنه لا يوجد تداخل مختلط في المتغيرات x, y، بالتالي المشتقات المختلطة من الدرجة الثانية معدومة أي $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} = 0$.

ينتج أنّ مصفوفة الهسيان لـh عند (p,q) هي مصفوفة قطرية من الشكل الآتي:

$$H(h)(p,q)=\begin{pmatrix} H(f)(p) & 0 \\ 0 & H(g)(q) \end{pmatrix}$$

إنّ h دالة مورس على $M\times N$ وكون f دالة مورسية على M وعدد نقاطها الحرجة ذات الدليل i يساوي a_i وg دالة مورسية على N لها b_j نقاط حرجة من الدليل j.

عند ضرب الدالتين لتكوين h كل زوج (p,q) مع p نقطة حرجة لـ f وq نقطةحرجة لـ g يصبح نقطة حرجة لـ h ودليل هذه النقطة هو $i+j$ أو عدد نقاط h ذات الدليل k.

$$C_k=\sum_{k=i+j} a_i\, b_j$$

$$\sum_k C_k=\sum_k\sum_{k=i+j} a_i\, b_j=(\sum_i a_i)(\sum_j b_j)$$

الآن من تعريف $\mu(M)$ هو أصغر عدد ممكن للنقاط الحرجة لدالة مورسية على M أو الحد الأدنى للأرقام $\sum_i a_i$ بالتالي إذا اخترنا f,g كل منهما يحقق الحد الأدنى نأخذ أعداد النقاط الحرجة لا تزيد عن $\mu(M)$ ولا عن $\mu(N)$، نحصل على دالة h بعدد نقاط حرجة لا يزيد عن $\mu(M).\mu(N)$ ومنه:

$$\mu(M\times N)\le \mu(f).\mu(g)$$

لأجل أي دالة مورس $f\in \mathscr{F}_m(M), g\in \mathscr{F}_m(N)$ وهذا يعني أنّ:

$$\mu(M\times N)\le \mu(M)\mu(N)$$

4-3 نظرية مورس للأسطح [3]:

إنّ الهدف من دراسة نظرية مورس على الأسطح هو البحث عن النقاط الحرجة لدالة مورس على السطح.

لتكن f دالة مورس على سطح M (متنوع بعده 2) وليكن a عدداً حقيقياً، تُسمى $f^{-1}(a)$ منحني سوية مقابل للقيمة a .لتكن M_a مجموعة جزئية من M معرفة بالمساواة:

$$M_a = \{x : f(x) \leq a\} = f^{-1}((-\infty, a]).$$

بفرض أنّ a قيمة نظامية وبحسب المبرهنة التي نصها: ليكن $f: M \to N$ تطبيقاً أملساً للمتنوعين الأملسين وليكن $q \in f(M)$ قيمة نظامية لـ f عندئذٍ الصورة العكسية لـ$f^{-1}(q)$ متنوع أملس من البعد

$$dim f^{-1}(q) = dim M - dim N = m - n$$

يصبح لدينا $f^{-1}(a)$ متنوعاً جزئياً أملساً لـM وM_a متنوعٌ أملسٌ بعده (2) مع حدود والحدود هي مجموعة السوية $f^{-1}(a)$، إذا افترضنا أنّM متنوع متراص، وa قيمة نظاميةٍ فإنّ $f^{-1}(a)$ متنوع متراص بعده (1)، إنّ اجتماع عدد منتهٍ من الدوائر الملساء في الشكل السابق هو تماثل تفاضلي مع الدائرة القياسية.

والسؤال هنا ماذا يحدث لهذه الدوائر عندما تتغير a؟

إنّ تغيراً طفيفاً في a لا يُغير حقيقة أنّ a قيمة نظامية، وهذا يعني أنّه إذا كانت $\grave{a}$ قريبة كفاية من a عندئذٍ $\grave{a}$ هي أيضاً قيمة نظامية، بالتالي فمن الطبيعي معرفة أن تغيراً صغيراً في القيمة النظامية لـa لا تغير نوع التبولوجيا لمنحني السوية $f^{-1}(a)$.

ملاحظة: يترتب على مبرهنة القيمة النظامية أنّ M_a متنوع مع حدود عندما تكون a قيمة حرجة.

مبرهنة:

لتكن f دالةً ملساء على السطح الأملس المتراص M ولنفترض أنّ المجال $[a, b]$،(حيث $a < b$) لا يحتوي على قيم حرجة لـf أو بشكل مكافئ $f^{-1}([a, b]) \subset M$ ليس لها نقطة حرجة لـf الشكل التالي عندئذٍ القضايا التالية محققة:

١. مجموعات السوية $f^{-1}(a)$،$f^{-1}(b)$ متماثلة تفاضلياً (وبشكل خاص) تتألف المجموعات من نفس العدد من الدوائر الملساء المتماثلة تفاضلياً مع الدائرة القياسية.

٢. إنّ كل من M_β, M_α متماثلة تفاضلياً كمتنوعات من البعد 2 مع حدود.

٣. كلا التماثلين يتحققان على طول المسارات للحقل المتجهي $-grad\ f$ على M، وذلك من أجل أي مترية ريمانية على M.

ملاحظة: إنّ التدرج $gradf$ لحقل عددي تفاضلي f على M يُعرّف بالعلاقة الآتية:

$$< gradf, X > = df(X) = X(f)$$

وذلك لأجل كل $X \in \mathfrak{D}^1(M)$ حيث $\mathfrak{D}^1(M)$ فضاء الحقول للمتجهات الملساء

تعريف آخر للتدرج: لتكن $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دالةً فضولةً عندئذٍ يُعرف تدرج الدالة $grad\ f$ بـ:**[3]**

$$(gradf)(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})(x)$$

ملاحظة: الحقل المتجهي $gradf(p) = 0$ إذا كانت p نقطة حرجة لـ f.

5-3 مسارات التدفق والتد[4] : Gradients and Flow Lines

مسارات التدفق: ليكن $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حقلاً متجهياً، يُعرف مسار التدفق بأنه منحني من الشكل:

$$\varphi^x(s): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(s, x) \longrightarrow \varphi^S(x)$$

وحيث أن المنحني يحقق المعادلة التفاضلية:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}\varphi^x(s) = -(gradf)(\varphi^x(s)) \\ \varphi^0(x) = 0 \end{cases}$$

ملاحظة: الدالة f متناقصة على طول خط التدفق في الحقل $-gradf$ أي أنّ:

$$\frac{\partial}{\partial s}(f\big(\varphi^s(x)\big) = |(gradf)(\varphi^s(x))|^2 < 0$$

نعرف الآن حقل شبه التدرج وهو تعميم لتعريف التدرج حيث لا يعتمد حقل شبه التدرج على الجداء الداخلي.

1-5-3 حقل شبه التدرج [4]:

ليكن M متنوعاً بعده n ولتكن $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مورس على متنوع M بعده n، عندئذٍ يُعرّف حقل شبه التدرج المزود بـ f بالحقل المتجه الآتي:

$$X: M \longrightarrow \sqcup_{p\in M} T_pM; X_p = X(p) \in T_pM$$

بحيث يتحقق:

- $(df)_p(X_p) \leq 0$ في حين تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت p نقطة حرجة.
- في الجوار الإحداثي لمورس في الجوار لنقطة حرجة، يتطابق X مع التدرج السالب للمترية القياسية على $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة:[10]

لتكن $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مورس على متنوع بعده n و $p \in M$ نقطة حرجة ذات دليل λ عندئذٍ (U, φ) جوار إحداثي مورس لـ p وحيث أنّ f تأخّذ الشكل الآتي:

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(p) - \sum_{j=1}^{\lambda} x_j^2 + \sum_{j=\lambda+1}^{n} x_j^2 = f(p) + Q(x)$$

وأنّ:

$$V_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, j \geq \lambda + 1\}$$

$$V_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0, j \leq \lambda\}$$

$$Q: \mathbb{R}^n = V_- \oplus V_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,; Q(x) = -|x_-|^2 + |x_+|^2, x = x_- + x_+$$

لأجل $\varepsilon, \eta > 0$ ، تُعرّف الكرات القياسية بـ:

$$U(\varepsilon, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^n, -\varepsilon \leq Q(x) \leq \varepsilon, \| x_- \|^2 \| x_+ \|^2 \leq \eta(\varepsilon + \eta)\}$$

حيث $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ويُعطى تدرجها بـ:

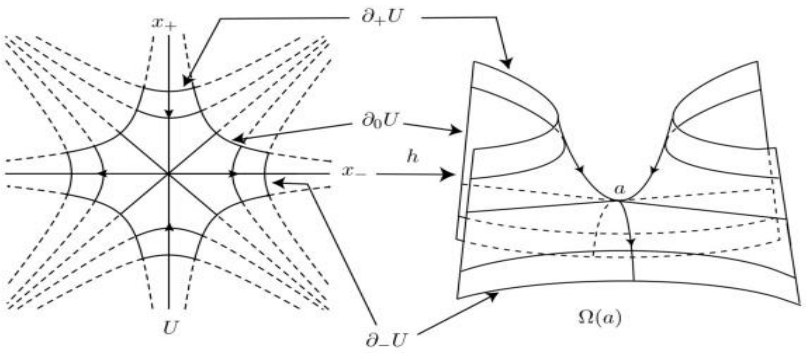
$$-(gradQ)(x_-, x_+) = 2(x_-, x_+)$$

وإنّ الحدود لـ$U(\varepsilon, \eta)$ تتألف من ثلاث قطع:

$$\partial_+ U = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = \varepsilon \,, \| x_- \|^2 \leq \eta\}$$

$$\partial_- U = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = -\varepsilon \,, \| x_+ \|^2 \leq \eta\}$$

$$\partial_0 U = \{x \in \mathbb{R}^n : |Q(x)| \leq \varepsilon, \| x_- \|^2 \| x_+ \|^2 = \eta(\varepsilon + \eta)\}$$



لنتأمل الشكل السابق ونوضحه:

لأجل $Q(x) = \varepsilon, Q(x) = -\varepsilon$ حيث أنّ الوسيط ε يصف مجموعات السوية التي تحدد جوار مورس ويقتضي ذلك أنّ:

$$1 = \frac{|x_+|^2}{\varepsilon} - \frac{|x_-|^2}{\varepsilon}, 1 = \frac{|x_-|^2}{\varepsilon} - \frac{|x_+|^2}{\varepsilon}$$

وهي معادلات قطوع زائدة بحيث أنّ المحور الأفقي للمعادلة الأولى على محور الفواصل ورؤوسه $(\pm\varepsilon, 0)$، أما المحور الأفقي للمعادلة الثانية على محور التراتيب ورؤوسه $(0, \pm\varepsilon)$ وإنّ $\partial_+ U$، $\partial_- U$ هي قطوع زائدة، تتوافق القطوع الزائدة مع مجموعتي السوية $f(p) + \varepsilon$، $f(p) - \varepsilon$ على الترتيب، وكون جوار مورس محدوداً، يُشترط أن $|x_+|^2 \leq \eta$ و $|x_-|^2 \leq \eta$ لأجل $\eta \epsilon \mathbb{R}$ صغير كفاية.

ومن الواضح أنّ خطوط التدرج في الجوار الإحداثي هي من الشكل $a \in \mathbb{R}, |x_+|^2 = \frac{a}{|x_-|^2}$ ،ثم بحل المعادلات نحصل على القطوع الزائدة الأربعة المقابلة التي تصف $\partial_0 U$.

ملاحظة: من الآن فصاعداً لأجل نقطة حرجة $\boldsymbol{p \in M}$ سنرمز إلى:

- $\Omega(\boldsymbol{p}) = \varphi^{-1}(U(\varepsilon, \eta))$، لأجل $\varepsilon, \eta > 0$.
- $\boldsymbol{\partial_+}\Omega(\boldsymbol{p}) = \varphi^{-1}(\partial_+ U)$
- $\boldsymbol{\partial_-}\Omega(\boldsymbol{p}) = \varphi^{-1}(\partial_- U)$
- $\boldsymbol{\partial_0}\Omega(\boldsymbol{p}) = \varphi^{-1}(\partial_0 U)$

حيث $(\Omega, \boldsymbol{\varphi})$هو الجوار الاحداثي لمورس وحيث أنّ $\boldsymbol{\varphi}(\Omega) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta})$ لأجل $\varepsilon, \eta > 0$.

ملاحظة[3] : وفقاً لتعريف التدرج على $\mathbb{R}^n$، تكون مسارات التدرج متعامدة مع مجموعات السوية للدالة، ينطبق هذا على كل نقطة x في مجموعة سوية معينة، وكل متجه مماس v لمجموعة سوية:

$$0 = (df)_x(v) = < (grad\ f)(x), v >$$

وبالتالي فإن $(grad\ f)(x)$متعامد مع v وكذلك المسارات، لذا يجب أن تشكل $\partial_+ U، \partial_- U، \partial_0 U$ أسرتين متعامدتين من القطوع الزائدة المتساوية.

مبرهنة: ليكن M متنوعاً متراصاً، ولتكن $f: M \to \mathbb{R}$ دالة مورس، عندئذٍ يوجد حقل شبه التدرج.

6-3 المتنوع المستقر وغير المستقر:[3] (stable and unstable manifold)

المتنوع المستقر: لتكن a نقطة حرجة لـ f، حيث$\varphi^x(s)$ هو تدفق شبه التدرج، عندئذٍ يُعرف المتنوع المستقر بـ:

$$w^s(a) = \{x \in M;\ lim_{x \to +\infty} \varphi^x(s) = a\}$$

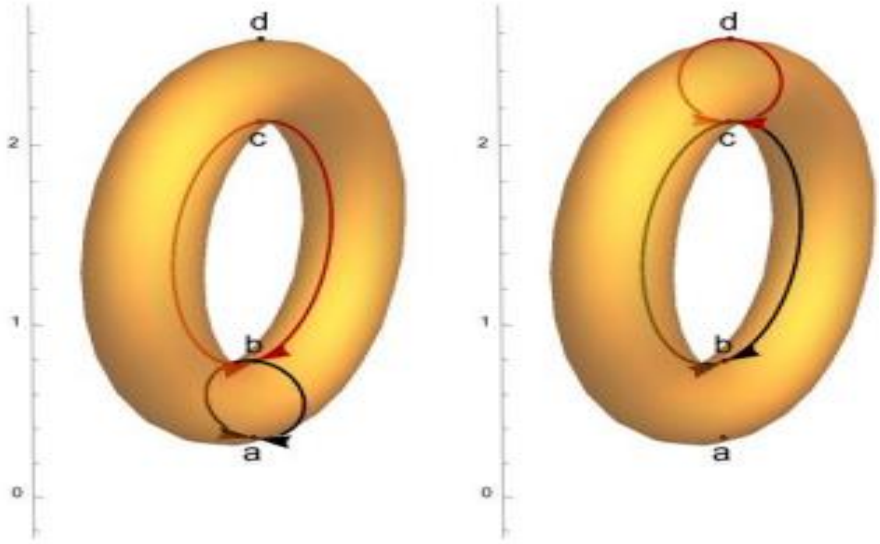
المتنوع غير المستقر: يُعرف المتنوع غير المستقر:

$$w^u(a) = \{x \in M; lim_{x \to -\infty} \varphi^x(s) = a\}$$

1-6-3 أمثلة على المتنوعات المستقرة وغير المستقرة[3] :

١. بفرض أن دالة الارتفاع على الطارة الثابتة ذات حقل شبه التدرج أي أنّه التدرج المتري الناتج على $\mathbb{R}^3$، إنّ $W^s(a)$ تتكون من الطارة بأكملها باستثناء النقطة d بالإضافة إلى الدائرة المارة بالنقطتين c, b و $W^u(a) = \{a\}$.

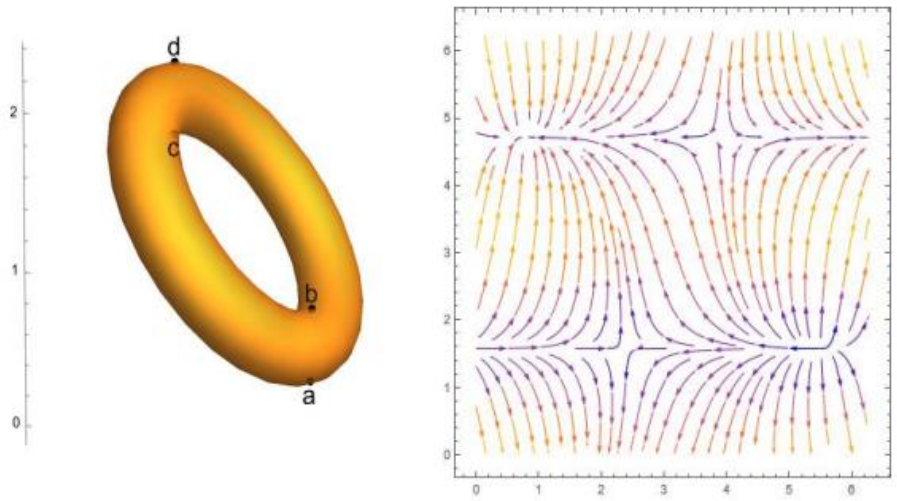
إنّ $W^u(d)$ تتألف من الطارة بأكملها باستثناء الدائرة المارة عبر c, b. و $W^s(d) = \{d\}$.



الشكل (3−1) المتنوعات المستقرة وغير المستقرة

وبملاحظة أنّ المتنوعات المستقرة ذات اللون الأحمر أما المتنوعات غير المستقرة ذات اللون الأسود للنقطتين الحرجتين b, c لدالة الارتفاع على الطارة الثابتة.

٢. لدينا في الشكل الآتي مسارات تدفق دالة الارتفاع على الطارة المائلة.



الشكل (3−2) مسارات تدفق دالة الارتفاع على الطارة المائلة

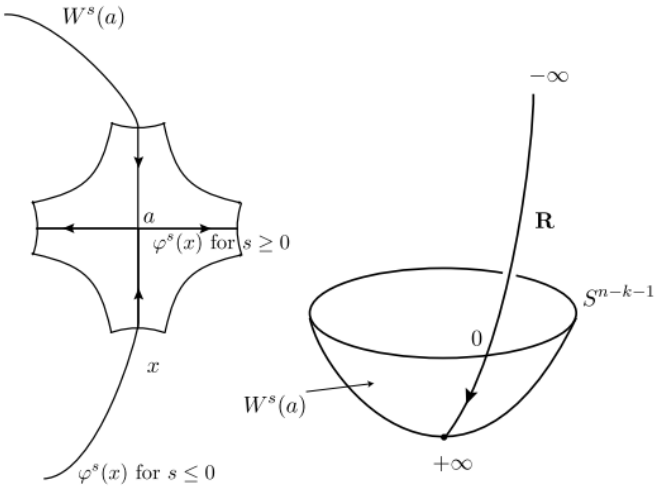
نلاحظ أن المتنوع غير المستقر لـ C لا يشترك مع المتنوع المستقر لـ b في مجالين مفتوحين.

مبرهنة: المتنوعات المستقرة وغير المستقرة للنقطة الحرجة a هي متنوعات جزئية من المتنوع M وهي متماثلة تفاضلياً مع الأقراص المفتوحة، وتحقق أنّ:

$$dimw^u(a) = codimw^s(a) = ind(a)$$

حيث $ind(a)$ هو دليل النقطة الحرجة a لـ f.

$$codimw^s(a) = dimM - dimw^s(a)$$



الشكل(3-3) يوضح المتنوعات المستقرة وغير المستقرة وتماثلها التفاضلي مع الأقراص المفتوحة

3-6-2 مسارات حقل شبه التدرج[3] :

ليكن φ_s^x أو φ^x تدفق شبه التدرج X إنّ أهم خاصية لخطوط أو مسارات التدفق لحقل المتجه X تتمثل بأنّ جميعها تربط النقاط الحرجة للدالة f، أي أنّ جميع المسارات تنطلق من نقطة حرجة وتتجه نحو نقطة حرجة أخرى.

مبرهنة: ليكن $\boldsymbol{M}$ متنوعاً متراصاً وليكن $\boldsymbol{\gamma}: \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ مساراً لحقل شبه التدرج $\boldsymbol{X}$، عندئذٍ توجد نقطتان حرجتان $\boldsymbol{c, d}$ لـ $\boldsymbol{f}$ بحيث $lim_{s\to-\infty}\gamma^s(s) = c, lim_{s\to+\infty}\gamma^s(s) = d$.

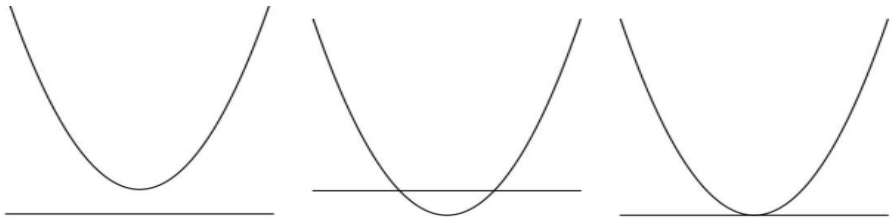
مبرهنة Reeb's[4]: ليكن M متنوع متراص ولنفترض وجود دالة مورس على M، ولها نقطتين حرجتين فقط، عندئذٍ M متماثل استمرارياً مع الكرة.

3-6-3 التقاطع العرضي[4] :(Transversality)

ليكن V متنوعاً، يُقال عن المتنوعين الجزئيين M, N من V إنّهما متقاطعان عرضياً في النقطة $v \in V$ إذا تحقق مايلي:

$$M \pitchfork N \Leftrightarrow T_vM + T_vN = T_vV$$

مثال:



إنّ المنحنيات في الشكلين الأيمن والأوسط متقاطعين عرضياً بينما في الشكل الأيسر غير متقاطعين عرضياً.

مبرهنة: ليكن M, N متنوعين جزئيين من متنوعٍ V، إذا كان $M \pitchfork N$ عندئذٍ $M \cap N$ هو متنوع جزئي من V والذي بعده المتمم يساوي $codim(M) + codim(N)$

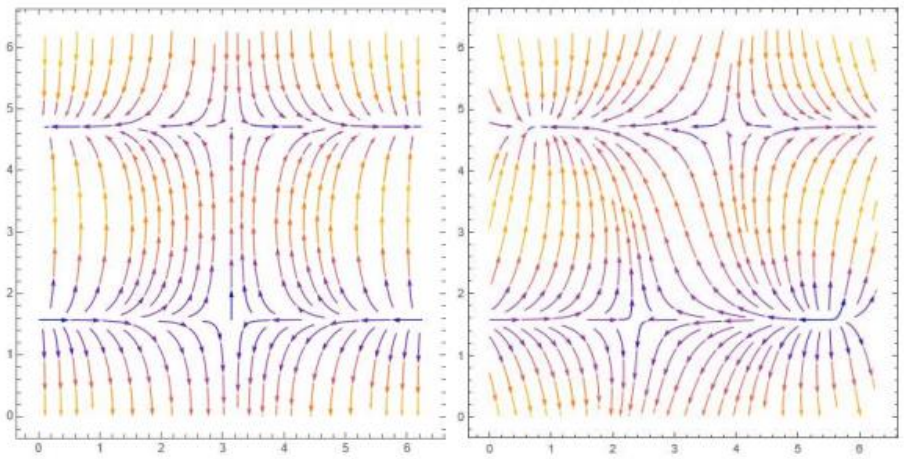
4-6-3 شرط سميل [3] The Smale Condition:

يُستخدم شرط سميل لضمان أنّ النقاط الحرجة لدالة ملساء على متنوع هي نقاط غير متردية هذا يعني أن السلوك حول هذه النقاط يمكن تحليله باستخدام نظرية المتنوعات المستقرة وغير المستقرة. وينص شرط سميل على أنّه إذا كان X حقل شبه تدرج مزوداً بدالة مورس $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ فيُقال عنه أنّه يحقق شرط سميل إذا تحقق:

$$W^u(a) \pitchfork W^s(b)$$

لأجل كل من النقطتين a, b من مجموعة النقاط الحرجة للدالة f $(a, b \in C[f])$

أمثلة: إنّ دالة الارتفاع على الطارة الثابتة بحقل شبه تدرج مزود بالمترية على $\mathbb{R}^3$، لا يحقق شرط سميل كون المتنوع المستقر لـ b والمتنوع غير المستقر لـ cغير متقاطعين عرضياً، أما دالة الارتفاع على الطارة المائلة تحقق شرط سميل.



الشكل الأيسر يبين مسارات التدفق لدالة الارتفاع على الطارة الثابتة، أما الشكل الأيمن يبين مسار التدفق لدالة الارتفاع على الطارة المائلة.

مبرهنة: ليكن X حقل شبه تدرج مزود بدالة مورس $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$، يحقق شرط سميل عندئذٍ:

$$codim\big(W^u(a) \cap W^s(b)\big) = codim W^u(a) + codim W^s(b)$$

$$dim\big(W^u(a) \cap W^s(b)\big) = ind(a) - ind(b)$$

7-3 التشوه المستمر أو التكافؤ[3]: (HOMOTOPY)

نظرية الهوموتوبي هي فرع من الرياضيات وتحديداً في التبولوجيا، تُعنى بدراسة التشوهات المستمرة بين الكائنات الرياضية، مثل الفضاءات التبولوجية أو الدوال، بمعنى آخر تُستخدم الهوموتوبي لتصنيف الفضاءات والدوال بناءً على كيفية تحولها إلى بعضها البعض دون تمزيق او قطع الهيكلية التبولوجية أي إمكانية تحويل أحدها للآخر بشكل مستمر.

يُعد تماثل مورس أداة قوية في التبولوجيا التفاضلية والجبرية، فهي تعميم لنظرية مورس الكلاسيكية، تربط بين الدوال المورسية والبنى المتجانسة مع تطبيقات عميقة في التبولوجيا والفيزياء الرياضية.

ليكن X, Y فضاءين تبولوجيين، إنّ الأسرة من التطبيقات الآتية:

$$h_t: X \longrightarrow Y; t \in [0,1]$$

هي تشاكل تماثلي إذا كان التطبيق:

$$H: X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

والمُعطى بـ:

$$H(x,t) = h_t(x)$$

مستمراً على $X \times [0,1]$.

ويُقال عن تطبيقين مستمرين $f, g: X \to Y$ إنّهما متشوهان استمرارياً ونرمز لذلك بـ $f \simeq g$ إذا وُجد تماثل $h_t: X \to Y$ بحيث $h_0(x) = f(x)$ و $h_1(x) = g(x)$ وتُمثل h التشوه المستمر بين f, g من أجل $x \in X$ و $t \in [0,1]$.

مثال عن التشوه:

تشوه دائرة إلى نقطة: يمكن تشويه دائرة إلى نقطة واحدة في فضاء تبولوجي إذا كان الفضاء قابلاً للانكماش(contractible)، على سبيل المثال القرص الصلب يمكن تشويهه إلى نقطة.**[12][6]**

1-7-3 الفضاء الجزئي ضام التشوه[6] :(deformation retract)

يُقال عن فضاء جزئي A من X إنّه ضام التشوه لـX إذا وُجِد تشوه:

$$h_t: X \longrightarrow X; t \in [0,1]$$

يُحقق ما يلي:

- $h_0(x) = x$ لأجل كل $x \in X$.
- $h_1(x) \in A$ لأجل كل $x \in X$.
- $h_t(a) = a$ لأجل $a \in A$ و $t \in [0,1]$.

أنواع التشوه[6] :

- التشوه النسبي: وتكون النقاط أو الأجزاء في الفضاء ثابتة أثناء التشوه بالنسبة إلى مجموعة معينة، أي جزء من الشكل يبقى ثابتاً، بينما يتشوه الجزء الآخر مثل دائرة مشدودة من نقطة واحدة ثابتة.
- التشوه الحر: لا توجد قيود على النقاط أثناء التشوه مثل تشوه منحني إلى آخر دون تثبيت أي نقطة.
- التشوه المساري: تُركز على الدوال التي تمثل مسارات في الفضاء كتحويل مسار إلى آخر.

2-7-3 التكافؤ التشوهي[6]: (homotopy equivalence)

يكون التطبيق $f: X \to Y$ تكافؤ تشوهي إذا وُجد تطبيق مستمر $g: Y \to X$ بحيث $f \circ g \simeq id_Y$ و $g \circ f \simeq id_X$ وعندئذٍ يُقال عن الفضائين X, Y إنّهما متكافئان تشوهياً أو أنّ لهما نفس النمط التشوهي ويُسمّى التطبيق g بالتطبيق العكسي التشوهي لـ f.

الفرق بين التكافؤ التشوه المستمر والهوميورفيزم:

إنّ الهوميومورفيزم هو تكافؤ تبولوجي يحافظ على جميع الخصائص التبولوجية (مثل البعد والاستمرار) بينما التكافؤ التشوهي أضعف لأنه يسمح بتشوهات أكثر مرونة مثل الانكماش أو التمدد على سبيل المثال، القرص الصلب والنقطة متكافئان تشوهياً لأنّ القرص يمكن تشويهه إلى نقطة لكنهما ليسا هوميورفيين بسبب اختلاف الأبعاد.

نتيجة: كل تماثل استمراري هو تكافؤ تشوهي لكن العكس غير صحيح.

مثال: بفرض $p \in \mathbb{R}^n$ ، الفضاء $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ هو متكافؤ تشوهياً مع S^{n-1} لكنه ليس متماثل استمرارياً معها.

مثال: الكرة ثلاثية الأبعاد S^2 ليست متكافئة هوموتوبياً مع الفضاء الأقليدي $\mathbb{R}^3$ بمعنى سطح الكرة (الذي لديه بعدان) لا يمكن تحويله إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد دون تمزيق.

مبرهنة نظرية مورس[20] : لتكن $f: M \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية ملساء على متنوع M ولتكن a, b قيمتين نظاميتين لـ f بحيث $a < b$ والمجموعة:

$$f^{-1}([a,b]) = \{p \in M; a \leq f(p) \leq b\}$$

متراصة ولا تحوي نقاط حرجة لـ f، عندئذٍ M^a متماثل تفاضلياً مع M^b و M^a هو ضام التشوه بالنسبة إلى M^b وبحيث يكون التطبيق الناتج $M^a \to M^b$ تكافؤ تشوهي.

3-7-3 تماثل مورس[6]: MORSE HOMOLOGY

سندرس تماثل مورس على افتراض أنّ M متنوع مزود بدالة مورس f و X حقل شبه تدرج محقق لشرط مورس، بداية نحتاج لبعض التعريفات الأساسية:

- **المركب السلسلي لمورس سميل[6] :(morse -smale chain complex)**

ليكن الفضاء $C_k(f)$ فضاءاً متجهياً فوق الحقل $\mathbb{Z}\ /\ 2\mathbb{Z}$ وكل عنصر فيه يكتب كتركيب خطي من النقاط الحرجة ذات الدليل k بالشكل الآتي:

$$C_k(f) = \sum_{c \in crit_k(f)} a_c C\ ; a_c \in \mathbb{Z}\ /\ 2\mathbb{Z}$$

حيث:

$\mathbb{Z}\ /\ 2\mathbb{Z}$: حقل مع عملية الجمع يتكون من عنصرين $\{0,1\}$.

a_c : معاملات من $\mathbb{Z}\ /\ 2\mathbb{Z}$ تُضاف لكل نقطة حرجة C.

$crit_k(f)$: مجموعة النقاط الحرجة للدالة f ذات الدليل k.

مثال: $crit_2(f) = \{p, q\}$ وبالتالي $C_2(f) = \{0, p, q, p+q\}$.

بينما التفاضل الحدودي $\boldsymbol{\partial_k}$ يُعطى بـ:

$$\partial_k(a) = \sum_{crit_{k-1}(f)} n_X(a,b)b$$

وهو المشتق الحدودي للسلسلة المولدة بالنقطة الحرجة a وحيث أنّ $a \in Crit_k$ وحيث أنّ $n_X(a,b)b$ عدد المسارات لحقل شبه التدرج X بين النقطة الحرجة a ذات الدليل k والنقطة الحرجة b ذات الدليل $k-1$.

يُرمز للمركب السلسلي بـ $(C_k(f), \partial_k(a))$.

- **زمر الهومولوجيا[6] [3]:Homology groups** هي تسلسل من المجموعات الجبرية $H_n(X)$ المرتبطة بفضاء تبولوجي X بعده n وتُعرف على النحو الآتي:

$$H_n(X) = ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1})$$

وهي تعكس عدد ونوع الثقوب في الفضاء.

أنواع الثقوب:

H_0: تمثل عدد المركبات المتصلة مسارياً في الفضاء.

H_1:تمثل عدد الثقوب أحادية البعد مثل الحلقات أو الدوائر في السطح.

H_2: تمثل عدد الثقوب ثنائية البعد.

مثال:

إنّ مجموعات التشوه في الدائرة $\boldsymbol{S^1}$ هي:

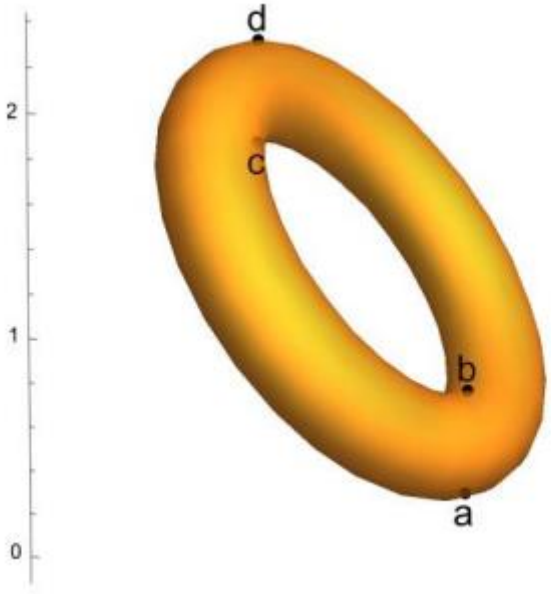
$$\boldsymbol{H_2 = \{0\}}\ ،\boldsymbol{H_1 = \mathbb{Z}}،\ \boldsymbol{H_0 = \mathbb{Z}}$$

مثال:

إنّ مجموعات التشوه في الكرة $\boldsymbol{S^2}$ هي:

$$.\boldsymbol{H_2 = \mathbb{Z}}\ ،\boldsymbol{H_1 = \{0\}}،\boldsymbol{H_0 = \mathbb{Z}}$$

مثال: لتكن لدينا دالة الارتفاع على الطارة المائلة بأربع نقاط حرجة.



الشكل(3-4) دالة الارتفاع على الطارة المائلة

إنّ $\boldsymbol{a}$ هي نقطة حرجة بدليل 0، النقطتين $\boldsymbol{b,c}$ نقطتين حرجتين بدليل 1، النقطة $\boldsymbol{d}$ هي نقطة حرجة بدليل 2.

بالتالي فإنّ:$\boldsymbol{C_0(f)=\{a\}}$، $\boldsymbol{C_1(f)=\{b,c\}}$، $\boldsymbol{C_2(f)=\{d\}}$.

عندئذٍ $\boldsymbol{\partial(d)=2c+2b}$، $\boldsymbol{\partial(c)=\partial(b)=2a}$ ومنه التماثل هو:

$$\begin{cases} \boldsymbol{H_0=\mathbb{Z}/2} \\ \boldsymbol{H_1=\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2} \\ \boldsymbol{H_2=\mathbb{Z}/2} \end{cases}$$

4-7-3 تطبيقات تماثل مورس[6] :

نستعرض بعض التطبيقات الأساسية لتماثل مورس، وحقيقة أن هذا التماثل لا يعتمد على دالة مورس ولا على حقل المتجهات شبه التدرجي.

مبرهنة: ليكن M متنوعاً، ولتكن $f_0, f_1: M \to \mathbb{R}$دالتي مورس على المتنوع M و X_0, X_1 شبهي تدرجين مزودين بالدالتين f_0, f_1، على الترتيب ويحققان خاصية سميل، عندئذٍ يوجد تشاكل مركبات

$$\Phi_*: (C_*(f_0), \partial_* X_0) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_* X_1)$$

والتي تولد تماثل في هومولوجيا مورس.

تهدف المبرهنة إلى أنّ البنية الجبرية (الهومولوجي) المعرفة باستخدام دوال مورس تعتمد فقط على المتنوع الأساسي M نفسه وليس على دالة مورس أو شبه التدرج.

مبرهنة: باقي قسمة عدد النقاط الحرجة على 2 يعتمد فقط على المتنوع وليس على الدالة.

مبرهنة: عدد النقاط الحرجة لدالة مورس على متنوع M أكبر أو يساوي مجموع الأبعاد لمجموعات التشوه لمورس (بالمقياس 2) لهذا المتنوع.

مبرهنة: ليكن M متنوعاً متراصاً دون حدود من البعد n، عندئذٍ $H_{n-k}(M, \mathbb{Z}/2)$ هو تشاكل مع $H_K(M, \mathbb{Z}/2)$.

مبرهنة: إذا كان M متنوعاً متراصاً مترابطاً عندئذٍ:

$$HM_0(V, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z} / 2$$

مبرهنة: ليكن M متنوعاً متراصاً مترابطاً من البعد nعندئذٍ:

$$HM_n \cong \mathbb{Z} / 2$$

مبرهنة: ليكن M متنوعاً متراصاً من البعد nعندئذٍ$HM_0(M, \mathbb{Z}/2)$، $HM_n(M, \mathbb{Z}/2)$ فضاءات $\mathbb{Z} / 2$ بعدهما عدد المركبات المترابطة لـM .

مبرهنة: إذا كان M متنوعاً مزوداً بدالة مورس لا يحوي نقاط حرجة بدليل 1 عندئذٍ يكون بسيط الترابط.**[13]**

الفصل الرابع: بعض التطبيقات لنظرية مورس

Some applications of Morse theory

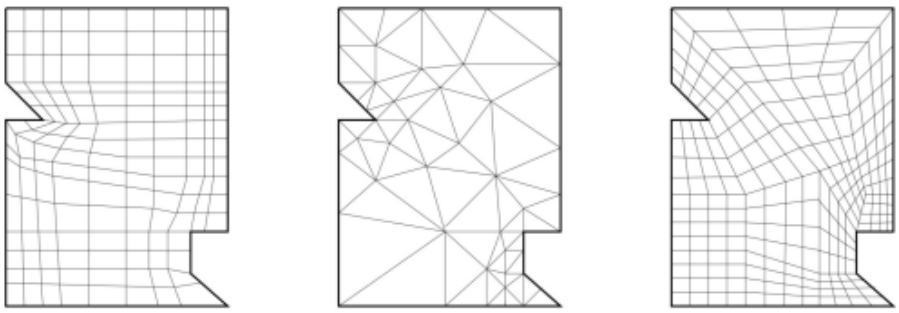
4-1 مقدمة

تُعد نظرية مورس من الركائز الأساسية في دراسة المتنوعات الملساء، وتعتمد النظرية على تحليل النقاط الحرجة وأدلتها. فكلُّ نقطةٍ حرجةٍ تحمل في طياتها معلوماتٍ دقيقةٍ عن كيفية تشكل الفضاء الداخلي للمتنوع، مما يمكن من فهم التركيب الخلوي للفضاءات الملساء بطريقة دقيقة ومنهجية.

وتتجلى أهمية النظرية في تطبيقاتها الواسعة، ومن أبرزها التقسيم الطيفي للسطوح، حيث تساعد الدوال المورسية في ربط البنية الهندسية للسطح بطيف المؤثرات التفاضلية عليه. وتمتد تطبيقات النظرية إلى الفضاءات الإسقاطية العقدية $\mathbb{C}P^n$، حيث تصف النظرية البنية التحليلية والتبولوجية لهذا الفضاء دون الحاجة إلى أساليبٍ عقدية أو جبرية. بذلك تشكل نظرية مورس إطاراً متكاملاً لدراسة الفضاءات الملساء وخصائصها، وربط التحليل بالتبولوجيا والهندسة ضمن منظور واحد متماسك. في هذا الفصل نستعرض هذه التطبيقات لبيان دور وأهمية نظرية مورس.

4-2 تقسيم السطح الطيفي باستخدام نظرية مورس[20][4]:

تُعرّف الشبكة (Mesh) على أنها تقسيم منطقة هندسية إلى أشكال صغيرة بسيطة مثل المثلثات أو أشكال رباعية ببعدين، أو سداسية بثلاثة أبعاد، فيما يلي أمثلة على شبكات:



الشكل (4-1) مجموعة من الشبكات

غالباً ما تُولّد شبكات ادخال الأسطح من المسح الضوئي بالليزر أو من اقتطاع سطوح متساوية، أو بطرائق أخرى. على أي حال، تعاني هذه الشبكات من عدم انتظام أو تشويش مما يعيق دقة وكفاءة العمليات اللاحقة، على سبيل المثال إنّ إعادة استرجاع بناء سطح ، وهي مهمة شائعة في رسومات الحاسوب والتصميم بمساعدة الحاسوب (CAD)، تهدف إلى إنشاء تمثيل أملس ودقيق لسطح من مجموعة من النقاط أو من شبكة .يركز جزء كبير من أعمال إعادة بناء الشبكات في أدبيات الرسومات على الشبكات المثلثية على الرغم من أنّ العديد من التطبيقات العلمية تستفيد من الشبكات الرباعية الجيدة الإجراءات لإعادة بناء الشبكة التي سنركز عليها والتي تسمى بـ(التربيع الطيفي للسطح).

إنّ عملية التقسيم الطيفي للسطح تساعدنا في إعادة بناء الصور وتحسين دقتها وتقليل الضوضاء ودمج البيانات كمثال على ذلك، تلتقط الماسحة الضوئية (CT scanner) العديد من صور الأشعة السينية ثنائية الأبعاد حول الجسم من زوايا مختلفة. تتيح إعادة بناء الشبكة صور عالية الجودة مما يساعد الأطباء على تشخيص أمراض مثل الأورام السرطانية والالتهابات بدقة وفعالية.

تتكون عملية التقسيم من الخطوات الآتية:

- اختيار دالة ذاتية لابلاسية مناسبة من مصفوفة اللابلاسيان.
- تطبيق نظرية مورس على الدالة السابقة لتحديد النقاط الحرجة.
- رسم خطوط الانحدار والصعود (التدفق والتدرج).
- تكوين مركب مورس –سميل.
- إزالة الضجيج التبولوجي وتنقية المركب الناتج.
- إنشاء مركب شبه الثنوي.
- إجراء خوارزمية تحسين تكراري(Iterative relaxation) .
- الشبكة النهائية.

4-2-1 الدوال الذاتية اللابلاسية [20][4]:

هناك دراسة موجزة عن الدوال الذاتية اللابلاسية لشبكة مثلثية الشكل لمتنوعM ، تتميز هذه الدوال بتوزيع منتظم ومتساوٍ لقيمها القصوى وهذا التوزيع هو ما يجعلها مثالية لتوليد الشبكة الرباعية الأساسية ذات الخلايا المتجانسة.

ويتم اختيار الدالة الذاتية اللابلاسية وفق المعايير الآتية:

- إيجاد القيم الذاتية الأولى لمصفوفة اللابلاسيان باستخدام خوارزمية عددية، حيث أنّ نطاق القيم الذاتية الأمثل هو بين 40-80.
- ملاحظة توزيع النقاط الحرجة في كل دالة ذاتية للحصول على شبكة رباعية متوسطة الكثافة، حيث يتم اختيار الدالة التي يكون فيها عدد النقاط الحرجة معتدلاً.

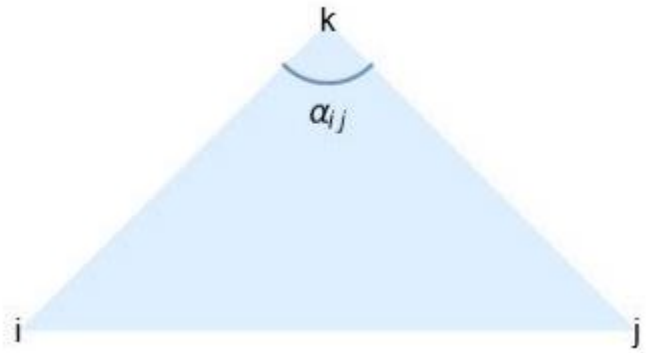
يُعرّف مؤثر لابلاس المنفصل لكل رأس i على دالة خطية قطعية على متنوعٍ مثلثٍ بالشكل الآتي:

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij}(f_j - f_i)$$

حيث: N_i هي مجموعة الرؤوس المجاورة للرأس i.

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(cot(\alpha_{ij}) + cot\,(\beta_{ij})\right).$$

و α_{ij} وβ_{ij} هما الزاويتان المقابلتان للضلع (i,j) .



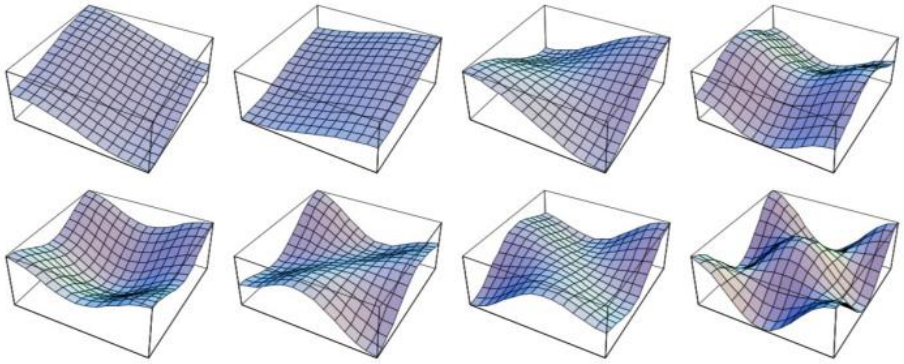
الشكل (4-2) تصور للزاوية a_{ij} المقابلة للضلع (i,j)

بعد حساب w_{ij} ، تتشكل لدينا مصفوفة اللابلاسيان وتعطى المصفوفة بـ:

$$L_{ij}\begin{cases} \sum_k w_{ik}, & i=j \text{ عندما} \\ -w_{ij}, & (i,j)\in M \text{ إذا كان الضلع} \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبالتعويض في معادلة اللابلاس $\Delta f = -Lf$ ، يتم الحصول على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة.

ملاحظة: بما أنّ f دالة خطية قطعياً، فإنها تُحدّد بشكل وحيد من خلال قيمها عند الرؤوس وتُشكل القيم الذاتية $\lambda_1 = 0 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_n$ للمصفوفة L طيف الشبكة M، أما المتجهات الذاتية المقابلة $e_1, e_2, \ldots, e_n$ فتُعرف دوالاً خطية قطعياً على M ذات قيماً ذاتية عالية، تُدعى بالدوال الذاتية اللابلاسية للشبكة.



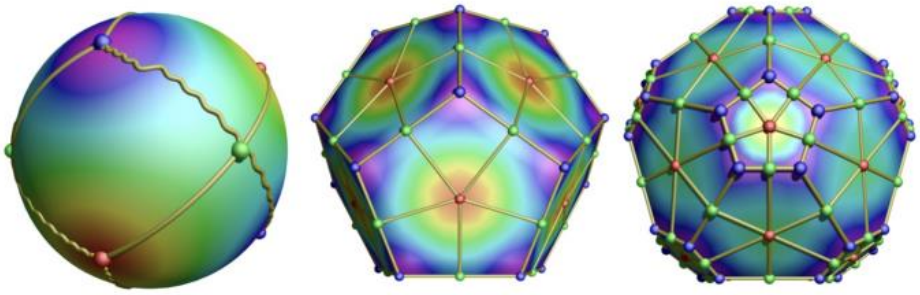
الشكل(4–3)أول8 دوال ذاتية غير ثابتة على شبكة مستوية 15 ×15مرسومة كدوال ارتفاع

إنّ أهم ما يُميز الدوال الذاتية اللابلاسية هي أنّ:

- نقاطها الحرجة متباعدة بشكل جيد على السطح.
- تتناوب القيم العظمى والصغرى، مما يمنع ظهور عقد ذات تكرار عالي.
- ندرة ظهور نقاط السرج المتعددة، بالتالي يمكن أن تظهر النقاط الاستثنائية فقط عند القيم القصوى.

وهذه الخصائص تضمن أنّ مركب مورس –سميل الناتج ينتج شبكة رباعية.

ويختلف اختيار عدد القيم الذاتية حسب نوع السطح حيث أنّ الأسطح البسيطة (الكرة، الطارة) تأخذ قيماً ذاتية منخفضة بينما الأسطح ذات الصفوف الأعلى تتطلب قيماً ذاتية أعلى.



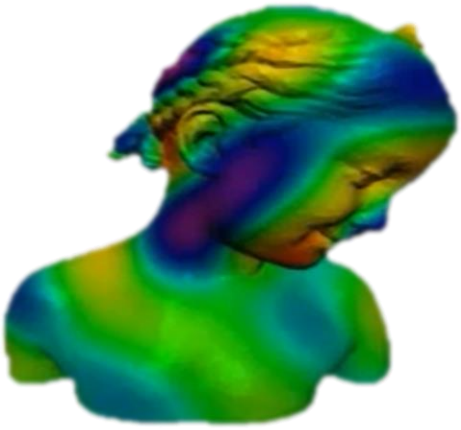
في الشكل السابق تتطلب الأسطح التي يحتوي مركبها الأمثل على عدد أكبر من العقد (nodes) دوالاً ذاتية ذات تكرار أعلى، نرى التوافيقات من 10,46,108 للكرة، والمجسم الاثني عشر الوجوه، والمجسم عشريني الوجوه المقطوع من الزوايا على التوالي.

إنّ حساب عدد كبير من القيم الذاتية لمعادلة لابلاس على شبكات دقيقة يتطلب موارد حسابية عالية وإنّ تقنيات تعدد الدقة (multiresolution) تعتبر حلاً فعالاً لتجاوز هذه المعضلة وتكمن الفكرة في إنشاء نسخة مبسطة من الشبكة مع الحفاظ على تبولوجيا السطح واستخدام هذه النسخة لتحديد نطاق ضيق من الدوال الذاتية المناسبة لهدف المستخدم.

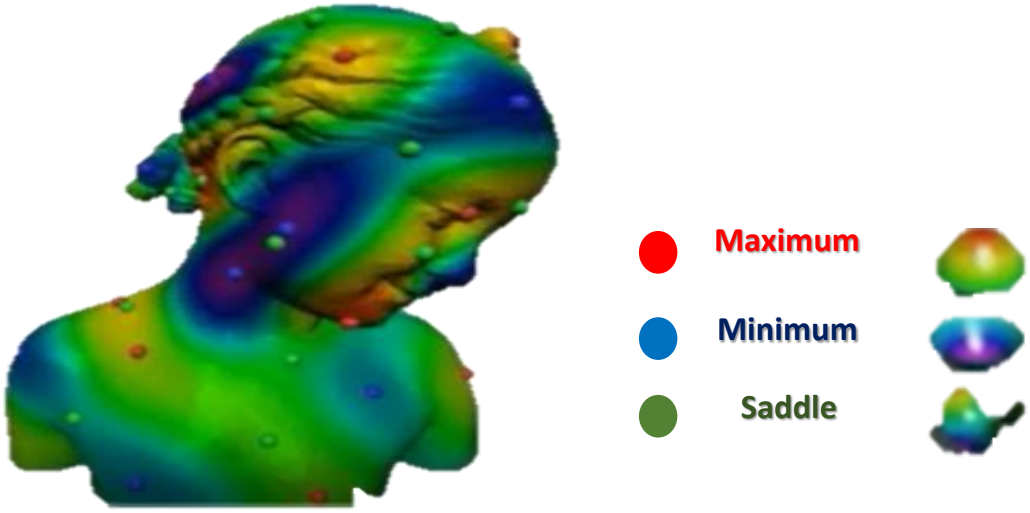
4-2-2 تطبيق نظرية مورس [20][4]:

بعد اختيار الدالة الذاتية اللابلاسية المناسبة يأتي دور نظرية مورس في تحديد النقاط الحرجة للدالة كنقاط عظمى أو صغرى أو سرجية.

تمّ إجراء عملية تقسيم طيفي للسطح الآتي:



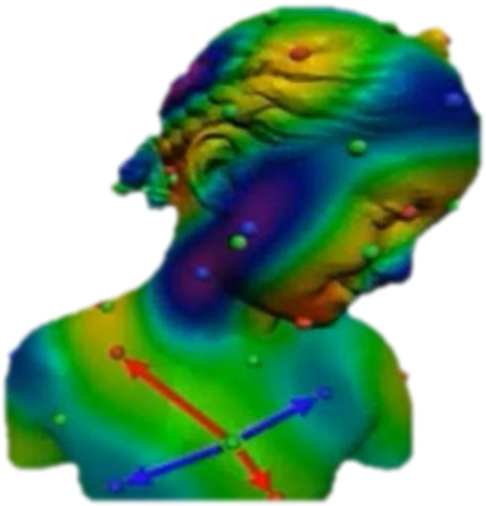
تم تطبيق نظرية مورس وتحديد النقاط الحرجة.



الشكل (4-4) تحديد النقاط الحرجة

4-2-3 رسم مسارات التدفق والتدرج[20][4]:

بعد تحديد النقاط الحرجة يتم وصلها بمسارات (انحدار- هبوط) تُسمى بمسارات (التدرج -الانحدار) حيث يُرسَم من كل نقطة سرجية مسارات تدفق تتجه نحو النقاط الصغرى ومسارات تدرج تتجه نحو النقاط العظمى، تتقاطع هذه المسارات وينتج لدينا تقسيم طبيعي للسطح إلى مناطق مغلقة ليتشكل ما يسمى بمركب مورس -سميل.



الشكل (4-5) وصل مسارات التدفق والتدرج

4-2-4 إنشاء مركب مورس–سميل[20][4]:

يشرح هذا القسم طريقة إنشاء مركب مورس –سميل بهدف تقسيم السطح إلى شبكة من المضلعات رباعية الأضلاع.

لذا نحتاج إلى دراسة بعض التعاريف وأهمها:

- **الخلية (Cell) ذات البعد n** :هي فضاء تبولوجي متماثل الشكل مع الكرة الإقليدية المفتوحة ذات البعد n أي أنّ:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| < 1\}$$

وهي الكرة المفتوحة في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$.إنّ الخلية من البعد 0 هي نقطة أما الخلية من البعد 1 هي مستقيم مفتوح بينما الخلية من البعد 2 هي الدائرة بأكملها في المستوي.

- **إضافة خلية من البعد λ:** ليكن Y فضاءاً تبولوجياً و $e^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^\lambda, \| x \| \leq 1\}$ خلية من البعد λ مع حدود $\partial(e^\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^\lambda, \| x \| = 1\} = S^{\lambda-1}$ وكان $g: S^{\lambda-1} \longrightarrow Y$ تطبيقاً مستمراً (دالة الاضافة)، عندئذٍ يُرمز لـ Y مع الخلية المضافة ذات البعد λ بواسطة g بـ$Y \cup_g e^\lambda$ ونحصل عليها بأخذ الاجتماع المنفصل لـY و e^λ وربط كل نقطة$x \in S^{\lambda-1}$ مع $g(x) \in Y$.

ملاحظة: إنّ e^0 هي نقطة و $\partial(e^0) = S^{-1}$ هي مجموعة فارغة.

- **مركب الخلية:** ليكن X فضاء هاوسدورفي، يُقال عن X إنّه مركب خلية إذا وجد متتالية من الفضاءات الجزئية $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(3)} \subset \cdots \subset X$ تحقق ما يلي:

١. $X^{(0)}$ منفصلاً (اجتماع منفصل لخلايا صفرية)

٢. $X^{(i+1)}$ ينتج من $X^{(i)}$ بإضافة $(i+1)$ خلية.

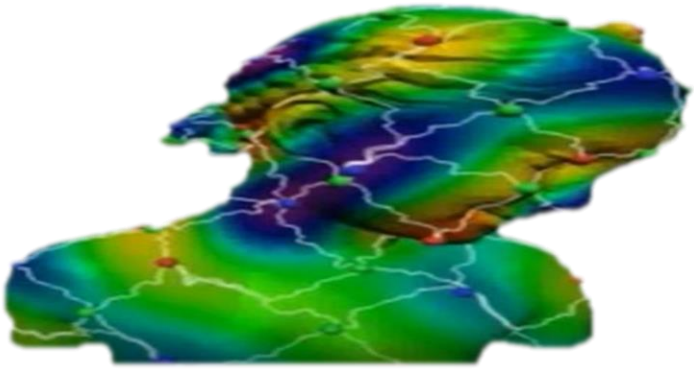
٣. المجموعة $X = \bigcup_n X^n$ مزودة بالتبولوجيا الضعيفة (أي أنّه تكون $A \subset X$ مفتوحة (مغلقة) إذا وفقط إذا كانت $A \cap X^n$ مفتوحة (مغلقة) في X^n لأجل كل n.

- **الهيكل SKELETON:** ليكن X مركب خلية إنّ الهيكل من البعد n لـX، يُرمز له بـX^n هو اجتماع لجميع الخلايا ذات الأبعاد الأقل أو تساوي n في X.

- **التطبيق الخلوي:** ليكن X, Y مركبا خلية، التطبيق $f: X \to Y$ هو تطبيق خلوي إذا تحقق:

$$f(X^n) \subseteq Y^n \; ; \quad \text{لأجل كل } n$$

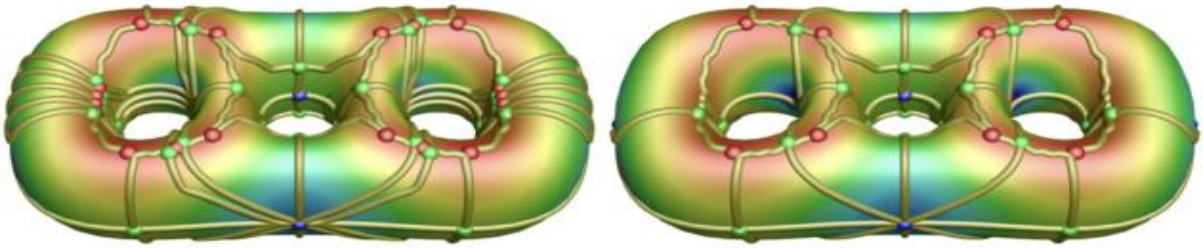
ويُعرف مركب مورس –سميل بأنّه تفكك خلوي لدالة عددية على متنوع وهو عبارة عن تقاطع متنوعات الصعود مع متنوعات الانحدار، ويحسب عملياً على الشبكات المثلثية بتتبع مسارات الصعود أو الانحدار، وتقسم هذه المسارات المتنوع إلى خلايا رباعية الأضلاع ذات سرجين متقابلين وزاوية عظمى وزاوية صغرى، هذا يعني أنّ كل خلية مكونة من أربع زوايا، إذن مركب مورس –سميل هو القاعدة الأساسية للشبكة الرباعية.



الشكل (4-6) تكوين مركب مورس-سميل

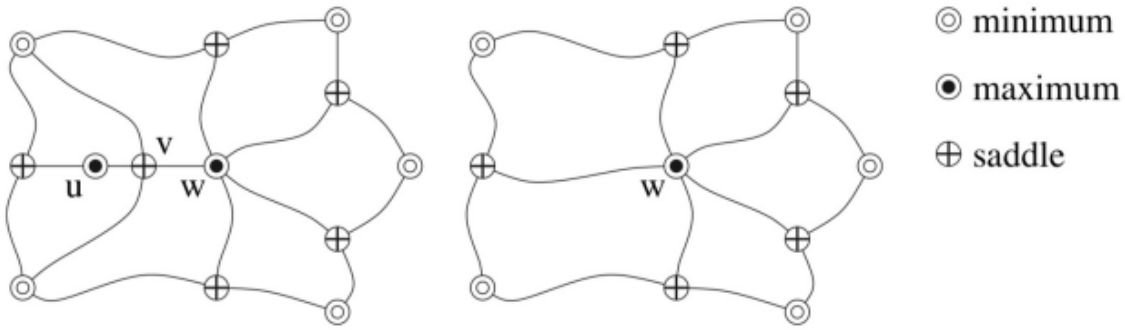
4-2-5 إزالة الضجيج التبولوجي[20][4]:Topological Noise removal

إنّ زيادة التكرارت في الدوال الذاتية تؤدي إلى كثرة النقاط الحرجة، مما قد يسبب ضجيجاً توبولوجياً لذا طبق الباحثون خوارزمية Cancellation حيث تمت إزالة انتقائية لبعض هذه النقاط لتحسين وضوح الهيكل الرياضي الناتج.



الجزء الأيسر في الشكل السابق يُظهر الحالة الأولية للمركب وهي مشوشة أو ضاجة، أما الجزء الأيمن في الشكل يُظهر نفس المركب بعد عملية إزالة الضجيج التبولوجي مما أدى إلى مركب أنظف وأوضح.

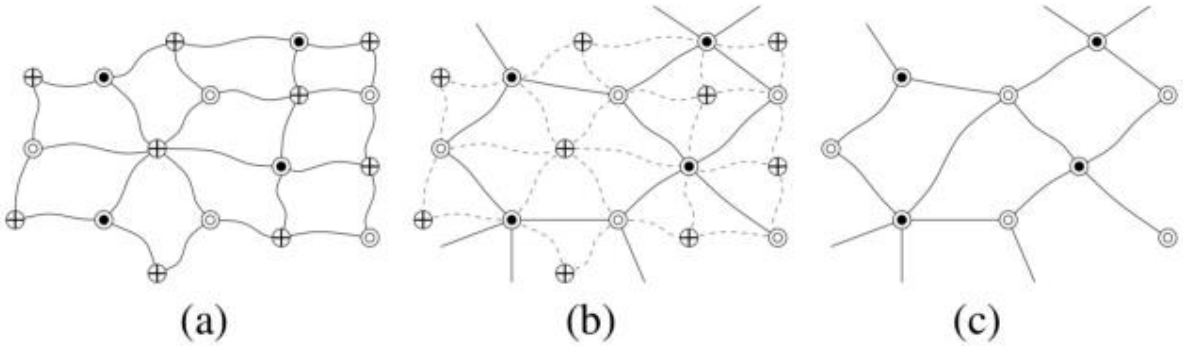
تُزال النقاط الحرجة الضاجة عبر حذف أزواج (سرجية، عظمى، صغرى) مترابطة، ويتم تحديد أولوية الإزالة بناءً على ثبات الزوج (الفرق في ارتفاعهما) حيث تُزال الأزواج الأقل ثباتاً (الأكثر ضجيجاً) أولاً حتى عتبة محددة مما يحسن نقاء المركب التبولوجي مع الحفاظ على شكله الأساسي.



يُظهر الشكل تأثير عملية إلغاء زوج (u, v) على مركب مورس سميل والنتيجة هي اختفاء هاتين النقطتين الحرجتين تماماً مع اختفاء أربع مسارات تربطهما بالهيكل وخليتين كانتا محددتين بموجبهما مما يؤدي إلى مركب تبولوجي أبسط وأقل تعقيداً.

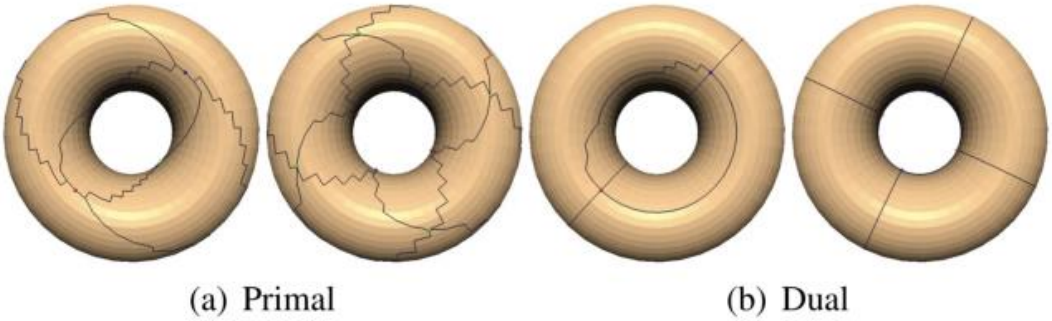
4-2-6 المركبات شبه الثنوية[20][4]:Quasi-dual complex

هي مركبات مساعدة تُشتق من مركب مورس–سميل الأساسي(primal complex) برسم أقطار تربط بين النقاط العظمى والصغرى داخل كل منطقة، نحصل على مركب جديد كامل يتكون من مضلعات رباعية فقط مما يتيح شبكات أساسية أكثر تنوعاً وفعالية في تمثيل البيانات.



يتم استبدال المركب الأولي (a) بأقطار الحد الأدنى والأقصى (b) لإنتاج المركب شبه المزدوج (c).

إحدى مزايا المركبات شبه الثنوية هي أنها بشكل عام أكثر إحكاماً من نظيراتها الأساسية.



الشكل (4–7) مركبات الدوال الذاتية للحلقة 8 و16

يختار الباحثون أحياناً إما الـ $primal$ أو quasi-dual حسب أيهما يعطي شكلاً أكثر تناظراً أو توازناً على السطح. إن المشاكل الرئيسية في المركب الأساسي لعملية التقسيم تبرر الحاجة إلى عملية إعادة التقسيم وتكمن هذه المشاكل في:

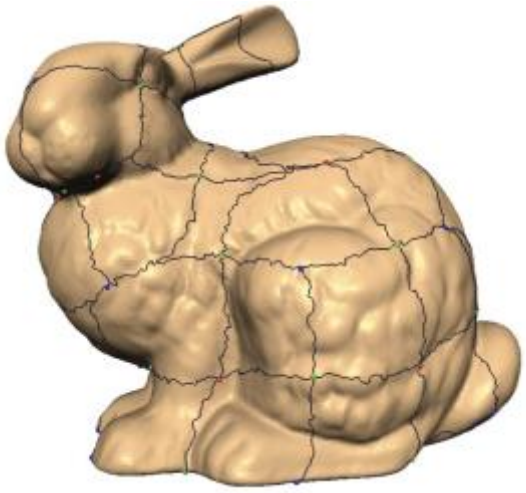
- **عدم اتباع شكل السطح بشكل طبيعي:** المسارات المكونة للهيكل لا تتوافق بشكل جيد مع التعرجات والتضاريس الطبيعية للسطح الأصلي.
- **اندماج المسارات:** قد تتلاقى عدة مسارات مستقلة وتندمج لتسير معاً على نفس الخط من الحدود المتصلة، مما يفقدها تميزها ويخلق تشابهاً غير مرغوب فيه.

4–2– 7خوارزمية التحسين التكراري[20][4] (Iterative relaxation):

غالباً ما يكون التقسيم الرباعي الناتج غير منتظمٍ هندسياً، لذا تجري عملية تحسين تكراري لتحسين شكل المربعات وتتم عبر المراحل الآتية:

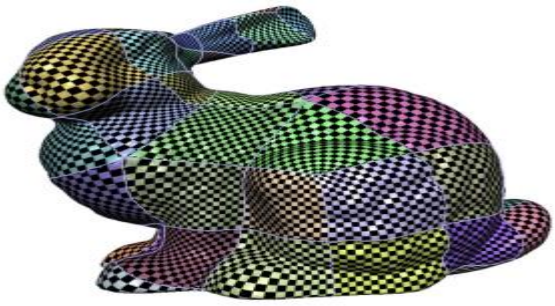
- **حل معادلة إحداثيات باراميترية:** تبنى جملة معادلات خطية تعطي لكل نقطة إحداثياتها داخل مربعات موحدة ($[0,1] \times [0,1]$).
- **تحريك الحدود والعقد:** يتم تحريك النقاط حتى تتقاطع المسارات بزوايا قريبة من 90° وتصبح المربعات متناسقة.

- **تحسين جودة الشكل:** يُقاس مقدار التشوه الباراميتري، وتُعاد الخطوات إلى أن تقل قيمة التشويه تدريجياً.



الشكل (4–8) الهيكل الأساسي لسطح الأرنب

الهدف الآن إنشاء نموذج رياضي أملس لوصف كامل الهيكل بدقة أي إنشاء تمثيل باراميتري أملس عالمياً والذي يصحح ويحسن اندماج المركب على السطح.



الشكل (4–9)هيكل سطح الأرنب بعد إعادة التمثيل الباراميتري

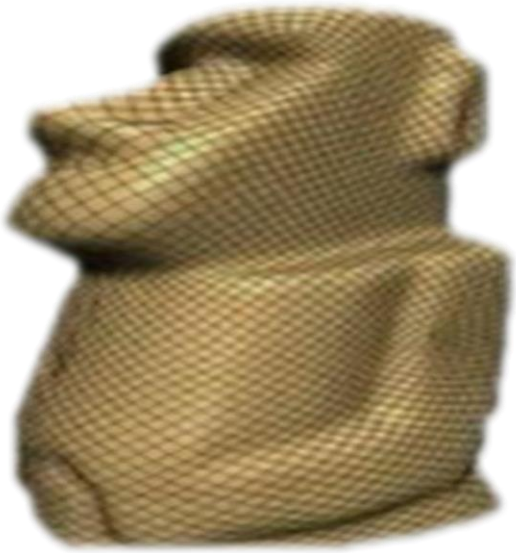
4–2–8 آلية إنشاء الشبكة النهائية[20][4]:

بعد أن تم الحصول على مركب مثالي على السطح تتم المراحل الآتية:

- يُسقط على كل خلية شبكة مربعات صغيرة $d \times d$.
- كل خلية رباعية تُقسَم إلى مربعات فرعية بنفس الكثافة.

- تُربط هذه المربعات عبر الأضلاع بشكل متواصل لتغطية السطح بالكامل.

تتمتع الشبكة النهائية بمجموعة من الخصائص منها أنها تتكون من خلايا رباعية جيدة الشكل بزوايا قريبة من 90° وعدد قليل من النقاط غير المنتظمة، مناسبة لاحقاً لتطبيقات مثل النمذجة الهندسية (CAD)، المحاكاة الفيزيائية (مثل تدفق السوائل).



الشكل (4-10)الشبكة النهائية

تمّ تقييم الجودة باستخدام مجموعة من المعايير حيث أنّ الهدف من تقييم الجودة ليس فقط انتاج شبكة من مربعات بل شبكة ملساء، متوازنة، ومناسبة للتحليل العددي أو النمذجة الهندسية. لذا قارن الباحثون شبكتهم SSQ وهو اختصار إلى Spectral Surface Quadrangulation مع طريقتين مشهورتين مختلفتين وهما PQD, PGP.وأهم هذه المعايير:

- **عدد الرؤوس (Vertices)**: يتم حساب عدد النقاط الحرجة في الشبكة النهائية مقارنة بعددها في النموذج الأصلي، كلما كان العدد أقل مع الحفاظ على الدقة كانت الشبكة أكثر كفاءة.

مثال: الأرنب في الشكل كان يحتوي على 72023 رأساً وبعد المعالجة أصبح 10370 فقط.

- **عدد النقاط الاستثنائية[20][4] (extraordinary):** هي النقاط التي لا يلتقي عندها أربع خلايا بالضبط، تكون الشبكة أكثر انتظاماً إذا كان عددها قليل، وإنّ وجودها يسبب مشاكل في المحاكاة أو النمذجة.

إنّ طريقة SSQ أنتجت فقط 26 نقطة استثنائية بينما PQD أنتجت 175 نقطة وPGP أنتجت 312 نقطة.

- **جودة الزوايا الداخلية[20][4]:(Angels)** : يُقاس مدى قرب زوايا المربعات من 90°، إنّ الانحراف عنها يسبب تشوهاً في الشكل أو صعوبات في الحسابات العددية. في طريقة SSQ كان المتوسط $=89^{\circ}.79$ والانحراف المعياري$=6^{\circ}.87$ (أي معظم الزوايا قريبة جداً من 90°)، بينما الطرق الأخرى كان لها انحراف أكبر $(9^{\circ} - 12^{\circ})$.بالتالي إنّ شبكة مورس أكثر انتظاماً هندسياً.
- **تجانس أطوال الأضلاع[20][4] (Edge length uniformity):** يُقاس توزيع أطوال الأضلاع في الشبكة، الأضلاع المتساوية تعطي شبكة منتظمة ومتوازنة بينما يعطي تباين الأضلاع تشوهاً هندسياً.

إنّ طريقة SSQ أعطت توزيع أطوال أكثر توازناً من PQD ، PGP.

- **كفاءة الخطأ الهندسي[20][4] :(Error Efficiency)**

إنّ قياس مدى دقة الشبكة مقارنة بالسطح الأصلي يُعطى بالقانون:

$$Efficiency = -\frac{log\, E}{log\, m}$$

حيث E: الخطأ الهندسي $(L_2, L_{2,1})$.

m: عدد الرؤوس في الشبكة.

كلما كانت الكفاءة أعلى، كان النموذج أكثر دقة. طريقة SSQ كانت أعلى من PQD ومقاربة جداً لـ PGD في الدقة الهندسية لكنها تفوقت عليهما في الانتظام والجودة الهندسية.

جدول (4-1) تقييم الجودة

	Vertices		Angles		Edges		Efficiency	
	Total	Ext.	Mean	σ	Mean	σ	L_2	$L_{2,1}$
PQD	12,738	175	89.88°	12.71°	0.0019	0.00093	0.628	0.328
PGP	6,355	314	89.44°	9.63°	0.0030	0.00074	0.997	0.411
SSQ	10,370	26	89.79°	6.87°	0.0023	0.00070	0.968	0.413

وخلاصة القول إنّ التقسيم الرباعي الطيفي باستخدام نظرية مورس يقدم إطاراً رياضياً متيناً لتحليل الأسطح وفهم هيكلها التبولوجي والهندسي، وإنّ هذا الأسلوب يجمع بين العمق النظري للهندسة التفاضلية والتطبيقات العملية

إنّ نظرية مورس هي الأساس القوي الذي يضمن أنّ النقاط الحرجة محددة بدقة، المسارات بين النقاط تكون خلايا رباعية والهيكل الناتج يعكس الشكل التبولوجي الحقيقي للسطح.

4-3 الفضاء الإسقاطي العقدي[6]:

يُعد تطبيق نظرية مورس على المتنوعات، وخاصة الفضاءات الإسقاطية العقدية، حجر أساس في الربط بين الخصائص المحلية للدوال والخصائص التبولوجية العالمية للمتنوعات، إذ تسمح لنا نظرية مورس بفهم البنية التبولوجية للفضاء الاسقاطي العقدي. ويُعرف الفضاء $\mathbb{C}^{n+1}$ بأنَه مجموعة جميع المستقيمات (المتجهات العقدية) ذات البعد 1 والمارة بنقطة الأصل.

أما الفضاء الإسقاطي العقدي **complex Projective space**:

$$\mathbb{C}\boldsymbol{P^n} = \{(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}/\sim): (\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{Z_1}, \dots, \boldsymbol{Z_n}) \sim (\boldsymbol{\lambda Z_0}, \boldsymbol{\lambda Z_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda Z_n}); \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbf{0}\}\}$$

يمكننا اختيار ممثل وحيد لكل صف تكافؤ يحقق الشرط:

$$\sum_{j=0}^{n} |Z_j|^2 = 1$$

نرمز لصفوف التكافؤ لـ $(\boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{Z_1}, \dots, \boldsymbol{Z_n})$ بـ $(\boldsymbol{Z_0}: \boldsymbol{Z_1}: \dots : \boldsymbol{Z_n})$.

4-3-1 بناء دالة مورس على $\mathbb{C}\mathbf{P}^{\mathbf{n}}$[6]:

تُعرف دالة حقيقية f على الفضاء $\mathbb{C}\boldsymbol{P^n}$ بالشكل الآتي:

$$f: \mathbb{C}\boldsymbol{P^n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\boldsymbol{Z_0}: \boldsymbol{Z_1}: \dots : \boldsymbol{Z_n}) = \sum_{j=0}^{n} C_j |Z_j|^2$$

حيث C_j ثوابت حقيقية مختلفة تماماً، بتعيين الإحداثيات المحلية ولنفرض انَ المجموعة U_0 مجموعة جزئية من $(\boldsymbol{Z_0}: \boldsymbol{Z_1}: \dots : \boldsymbol{Z_n})$ وحيث أنّ $\boldsymbol{Z_0} \neq \boldsymbol{0}$ والمجموعة $|\boldsymbol{Z_0}| \frac{Z_j}{\boldsymbol{Z_0}} = \boldsymbol{x_j} + \boldsymbol{iy_j}; \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}$ تشكل الدوال $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}: U_0 \to \mathbb{R}$ دوالاً إحداثية، إنّ U_0 متماثل تفاضلياً مع كرة الواحدة المفتوحة في $\mathbb{R}^{2n}$، وباستخدام الشرط:

$$|Z_j|^2 = {x_j}^2 + {y_j}^2; j = 1, \dots, n$$

$$|Z_0|^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n} ({x_j}^2 + {y_j}^2)$$

بتعويض هذه العلاقات في الدالة f نجد أنها تأخذ الشكل الآتي في الجوار U_0:

$$f = C_0 + \sum_{j=1}^{n} (C_j - C_0)({x_j}^2 + {y_j}^2)$$

4-3-2النتائج الرئيسية[6]:

١-النقطة الحرجة الوحيدة في U_0 هي نقطة المركز لجملة الإحداثيات حيث تنعدم جميع المشتقات الأولى مثل النقطة $p_0(1: 0: \dots . : 0)$.

٢-النقاط الحرجة الوحيدة للدالة f هي النقاط الأساسية(1في الموضع k) $p_k = (0: 0: 0 \dots . : 1: 0: 0: 0)$;.

٣-جميع النقاط الحرجة غير متردية ودليل مورس عند النقطة p_k هو:

$$\lambda(p_k) = 2 \times j; (\ C_j < C_k)$$

حيث j عدد الأدلة. ونظراً لأنّ جميع C_j مختلفة، فإنّ كل دليل زوجي بين 0 و2n يظهر مرة واحدة فقط.

٤- باستخدام نظرية مورس نستنتج أنّ $\mathbb{C}\boldsymbol{P^n}$ له نمط التماثل لمركب خلوي من الشكل:

$$e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \ldots \cup e^{2n}$$

حيث e^{2k} تمثل خلية بعدها 2k، وبالتالي:

$$H_k(\mathbb{C}\boldsymbol{P^n}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}; \boldsymbol{k = 0, 2, 4, \ldots, 2n} \\ \boldsymbol{0}; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

يأتي دور نظرية مورس في:

- تبسيط كبير في فهم التبولوجيا دون الحاجة إلى أساليب هندسية عقدية أو جبرية، حيث تسمح لنا نظرية مورس بوصف الشكل التبولوجي في $\mathbb{C}\boldsymbol{P^n}$ بسهولة.
- اثبات تجريدي للهومولوجيا، نحصل على المجموعات الهومولوجية مباشرة من النقاط الحرجة ورتبها.
- إظهار البنية الخلوية للفضاء الاسقاطي، حيث يتكون من خلايا بأبعاد زوجية.
- إذا كانت f دالة مورس على متنوع M، يمكن بناء M بإضافة خلية من بعد يساوي رتبة كل نقطة حرجة.

مثال: النقطة الحرجة p_0 دليلها 0، الخلية المضافة هي من الشكل e^0.

النقطة الحرجة p_1 دليلها 2، الخلية المضافة e^2.

الفصل الخامس: الاستِنتاجاتُ والتوصياتُ

6-1 الخاتمة والاستنتاجات:

تُعد نظرية مورس من بين أهم النظريات في مجال التبولوجيا والهندسة التفاضلية، إذ تمتاز ببنية رياضية قائمة على تحليل النقاط الحرجة ودراسة تدفق التدرج، ما يمنحها قدرة عالية على كشف البنى التبولوجية المعقدة وتحليل خصائص المتنوعات. ورغم قدم هذه النظرية، فإنها ما تزال تحتفظ بأهميتها العلمية والعملية وتشكل أساساً للعديد من الدراسات الحديثة. لقد أثبتت نظرية مورس قدرتها على توصيف البنية التحليلية والتبولوجية للفضاءات العقدية دون الحاجة إلى أساليب عقدية أو جبرية، وتكشف عن البنية الخلوية ومجموعات الهومولوجيا. أما التطبيقات الفيزيائية للنظرية فقد تميزت بدقتها العالية وقدرتها على نمذجة الظواهر الطبيعية المعقدة، لكنها ما تزال تعتمد على افتراضات رياضية صارمة تحد من تطبيقها في بعض الحالات. أظهرت هذه النتائج أن أدوات نظرية مورس تختلف فيما بينها من حيث القوة التحليلية والإمكانيات التطبيقية، الأمر الذي يجعل اختيار الأداة الأنسب مرتبطاً بطبيعة المتنوع المدروس ودرجة تعقيده البنيوي، بالإضافة إلى متطلبات الدقة والعمق الرياضي.

6-2 الرُّؤى المُستقبليَّةُ:

في ضوء ما عرضناه في هذه الرسالة من نتائج تتعلق بدراسة نظرية مورس على المتنوعات،

وتوضيح تطبيقاتها في التحليل التبولوجي والهندسي، يمكن رسم عدد من المسارات البحثية المستقبلية

التي تمثل امتداداً طبيعياً لموضوع هذه الرسالة، وتسهم في تعميق الفهم النظري والتطبيقي لهذا المجال، وأهم

هذه المسارات:

- يُعد تطوير مفهوم دالة مورس نحو فئات أوسع من الدوال أحد الجوانب المهمة التي يمكن متابعتها مستقبلاً، كتعميم دالة مورس وتوسيع نطاق النظرية بحيث تشمل المتنوعات مع حدود أو المتنوعات غير الملساء، مما يوفر إطاراً أعم لتحليل البنى التبولوجية المعقدة التي لا يمكن دراستها بالطرق التقليدية.

- يمكن التعمق في دراسة هومولوجيا مورس وتطوير أساليب جيدة لحسابها وربطها بأنواع أخرى من الهومولوجيا، في محاولة لبناء صيغ موحدة تجمع بين الجانبين التحليلي والتبولوجي للنظرية، كما يمكن دراسة تطبيقات هومولوجيا مورس في تصنيف المتنوعات ذات الأبعاد العليا أو في تحليل المتنوعات غير المترابطة، مما يعزز من القيمة التبولوجية للنظرية كأداة تحليلية دقيقة.

- يمكن تطوير ما تناولته الرسالة من تطبيقات لنظرية مورس بالتركيز على حالات خاصة من المتنوعات، مثل المتنوعات الريمانية ودراسة تأثير اختيار دوال مورس مختلفة على البنية التبولوجية لهذه المتنوعات ومن المفيد أيضاً دراسة كيفية تغير الهومولوجيا الناتجة تبعاً لتغير دالة مورس، وتحليل العلاقة بين عدد النقاط الحرجة وأنواعها، وبين الخصائص التبولوجية المميزة للمتنوع.

- من المهم العمل على تطوير الجوانب الحسابية للنظرية من خلال تصميم خوارزميات عددية وهندسية قادرة على تحديد النقاط الحرجة للدوال على المتنوعات المعقدة. ويُتوقع أن تُسهم هذه الأدوات في بناء نماذج محاكاة رقمية لتصور دوال مورس وهومولوجيا مورس بطريقة تفاعلية، ما يجعل النظرية أكثر قرباً من التطبيقات الحاسوبية في الهندسة والفيزياء.

المراجع

1. Andrica, D. (1993). **The Morse-Smale Characteristic of simply-connected compact manifolds**. Revue d´ Analyse Numérique et de Théorie de l´ Approximation, 22(2), 121-124.
2. Arnold, V. I. (1984). **Catastrophe theory** (2nd ed.). Springer-Verlage.
3. Audin, M., & Damian, M. (2014). **Morse theory and Floer homology** (R. Erné, Trans.). springer, EDP Sciences.
4. Braun, C. (2024). **Morse theory and its applications** (Master's thesis, ETH Zürich.
5. Chen, Y. (2006). **A brief history of Morse homology**. Department of Mathematics, University of California, Irvine.
6. Chhim, R. (2017). **Morse theory and applications**. (Master's thesis). Centro de Inverstigación en Matemáticas (CIMAT). Guanajuato, México.
7. Cohen, R.L., Iga, K.,& Norbury, P. (2006). **Topics in Morse theory: Lecture notes**. Unpublished manuscript. USA.
8. DO Carmo, M.P. (1992). **Riemannian Geometry**. Bosten, MA: Birkhäuser.
9. Edelsbrunner, H., & Harer, J. L. (2010). **Computational topology**: AnIntroduction. American Mathematical Society.
10. Fushida-Hardy, s. (2025). **Morse theory** (Lecture notes). Stanford University, 381B Sloan Hall, Standford, CA.
11. Galaz-García, F. & Guijarro, L. (2014). **Every point in a Riemannian manifold is critical**. arxiv preprint arxiv:1408. 4777.https://arxiv .org/abs/1408.4777.
12. Guggisberg, Y. (2018). **Morse Theory with examples** (Bachelor thesis). ETH Zürich.
13. Guillemin, v., & Pollack, A. (1974). **Differential topology**. Prentice -Hall. Englewood Cliffs, USA.
14. Guillemin, v., & Pollack, A. (2010). **Differential topology**. American Mathematical Society.
15. J. Lee (2018). **Riemannian manifolds**. (Lecture notes), Graduate studies in Mathematics, Springer.
16. Lee, J. M. (2013). **Introduction to smooth manifolds** (2nd.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol.218). springer.
17. Martin, D. (1991). **Manifold theory** (An introduction for mathematical physicists). Ellis Horwood Limited, England, 423.
18. Matsumoto, y. (2002). **An introduction to Morse theory**. American Mathematical Society. Providence, USA.

19. Matsushima, Y. (1972). **Differentiable manifolds**. Doctoral thesis. Mathematics. university of Tokyo. Japan.
20. Milnor, J. (1963). **Morse theory**. (Based on Lecture notes by M. Spivak & R. Wells). Princeton University press.
21. Momin, A. (2005, October 17). **Morse theory**. Unpublished Lecture notes.
22. Nakahara, M. (2003). **Geometry, Topology and physics** (2nd ed.) CRC PRESS.
23. Nicolaescu, L. I. (2011). **An invitation to Morse theory** (2nd ed.). Springer.
24. Pete, G. (2001). **Morse theory**. Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary. (Original Work Published 1999, Trinity College, University of Cambridge), Uk.
25. Rassias, G. M. (1979). **On the Morse -Smale characteristic of a differentiable manifold**. Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.20,281-283.
26. Shen, D., Bremer, P.-T., Garland., Pascucci, v., & Hart. (2006). **Spectral Surface quadrangulation**. To appear in SIGGRAPH 2006.
27. Spivak, M. (1965). **Calculus on manifolds**: A modern approach to Classical theorems of advanced Calculus. W. A. Benjamin.
28. Wang, B. (2017, March9). Lecture 18: **Morse Function** (Lecture notes). CS 6170 Computational Topology: Topological Data Analysis, Spring 2017. School of Computing, University of Utah. (Scribed by Justin Boyer & Mohammad Musaddiq).
29- أبو عقل سمير، الشيخ محمد. (2006) . الهندسة التفاضلية. جامعة دمشق.

المصطلحات العلمية

A	
Algorithm	خوارزمية
Atlas	الأطلس (جملة جوارات احداثية)
B	
Bilinear form	شكل ثنائي الخطية
C	
Cancellation	الإلغاء
Chain complex	مركب سلسلي
Compact	متراص
Compatible	منسجمان
Complex projective space	الفضاء الإسقاطي العقدي
Connected	مترابط
Coordinate neighborhood	جوار إحداثي
Covariant	موافق للتغير
Critical point	نقطة حرجة
Critical value	قيمة حرجة
D	
Deformation retract	ضام التشوه
Diffeomorphism	التماثل التفاضلي
Differentiable structure	بنية تفاضلية
E	
Edge	أضلاع

Efficiency	كفاءة الخطأ الهندسي
Eigen functions	الدوال الذاتية
Eigenvalues	القيم الذاتية
Extraordinary	غير المنتظمة
F	
Finite field	حقل منتهي
Flow lines	خطوط التدفق
G	
Gradient	تدرج
Quadrangulation	تقسيم رباعي
H	
Homeomorphism	تماثل استمراري
Homology	تشوه مستمر
Homotopy equivalence	تكافؤ تشوهي
I	
Inner product	جداء داخلي
Iterative relaxation	تحسين تكراري
L	
Local coordinates	احداثيات محلية
Local coordinates system	جملة احداثيات محلية
M	
Manifold with boundary	متنوع مع حدود
Maximum	عظمى
Mesh	شبكة

Minimum	صغرى
Morse characteristic	مميز مورس
Morse function	دالة مورس
Morse index	دليل مورس
Morse theory	نظرية مورس
N	
Nodes	عقد
Nondegenerate	غير متردي
O	
Operator	مؤثر
P	
Pseudo-gradient	شبه التدرج
R	
Regular value	قيمة نظامية
Riemannian Manifold	متنوع ريماني
Riemannian metric	مترية ريمانية
S	
Saddle	سرجية
Spectral surface	سطح طيفي
Stable	مستقر
Symmetric	متناظر
T	
Tangent space	فضاء مماس
Tangent vector	متجه مماس

Tensor field	حقل تنسوري
Topological noise removal	إزالة الضجيج التبولوجي
Torus	طارة
Trajectories	مسارات
Transversality	تقاطع عرضي
V	
Vector field	حقل متجهي
Vector space	فضاء متجهي
Vertices	رؤوس

Abstract

Morse theory is a fundamental and effective tool for analyzing the geometric and topological structure of varieties by analyzing the smooth functions defined on them. Morse functions are one of the most important pillars upon which this framework is built, thanks to their ability to reveal the underlying structure of varieties by studying the critical points of these functions. This thesis consists of an introduction and four chapters. In the first chapter, we presented a review of the basic concepts of differential varieties. In the second chapter, we discussed critical points and their types, as well as the systematic value, as a prelude to formulating the main results of Morse theory. In the third chapter, we provided precise definitions of Morse functions and the Morse index, and their relationship to the topological properties of varieties, such as calculating homology sets. We also presented a detailed study of the Morse-Smel criterion. In the fourth chapter, we focused on some important applications of Morse theory, particularly in the context of surface spectral partitioning using the eigenfunctions of the Laplace operator, where Morse critical points are used to generate tetragonal cell partitions that reflect the fine topological structure of the surface. The thesis also highlights the importance of flow paths and gradients in connecting critical points (minimum, maximum, and saddle points), enabling the construction of Morse codes with wide-ranging applications in computer graphics and digital engineering. Furthermore, the thesis addresses the application of Morse theory to complex spaces, such as the nodal projection space, demonstrating how Morse functions contribute to the analysis of the structure of this space. Our aim is to present a systematic study of this theory and demonstrate its potential as a bridge connecting different branches of mathematics to unravel the complexities of high-dimensional structures, thus opening new horizons in theoretical and applied research.

Keywords: Morse theory, differential variations, critical points, Morse homology, surface spectral partitioning, nodal projection space.

International Mathematical Classification of the Subject: MSC2020:54, E8E05.

Ministry of Higher Education

Damascus University

Faculty of Science

Department of Mathematics

Morse Theory on Manifolds and Some of Its Applications

A thesis prepared to obtain a Master's degree

in Mathematics (Mathematical Analysis)

By

Alaa Adel Al-Hamad

Supervisor

Co-supervisor

Assistant Professor

Dr. Mouhammad Al- Sheikh

Main supervisor

Professor

Dr. Khalil Yahya

2025–2026