



الأساليب الكمية في المحاسبة





منشورات جامعة دمشق

مركز التعليم المفتوح

قسم المحاسبة

الأساليب الكمية في المحاسبة

تأليف

الدكتور عبد الرزاق القاسم

الدكتور جمال اليوسف

أستاذ مساعد في قسم إدارة الأعمال

أستاذ مساعد في قسم إدارة الأعمال

جامعة دمشق



رقم الصفحة	المحتويات
9	المقدمة
13	الوحدة الأولى مدخل إلى التحليل الكمي الوحدة الأولى
15	المقدمة
16	1-1- مفهوم المشكلة الإدارية:
20	1-2- آلية صياغة النموذج الرياضي لحل المشكلة:
22	1-3- خطوات بناء النموذج:
27	1-4- مزايا وعيوب استخدام النماذج في صناعة القرارات:
31	الوحدة الثانية
33	المقدمة
34	1-2- تعريف البرمجة الخطية:
35	2-2- متطلبات قضايا البرمجة الخطية:
36	2-3- الافتراضات الرئيسية للبرمجة الخطية:
37	2-4- الطريقة البيانية و قضايا تعظيم الأرباح:
48	2-5- الطريقة البيانية وقضايا تخفيض التكاليف
55	الوحدة الثالثة طريقة السمبلكس لحل نماذج البرمجة الخطية
57	3-1- طريقة السمبلكس وقضايا تعظيم الأرباح:
61	3-2- حل النموذج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس
64	3-3- تصميم الحل المبدئي:

68	3-4- تقويم الحل القائم
69	3-5- تحسين الحل القائم
81	3-6- أسعار الظل
85	الوحدة الرابعة
87	مقدمة
87	4-1- المتغيرات الإضافية
88	4-2- المتغيرات الاصطناعية
93	4-3- تصميم الحل الأولي
103	الوحدة الخامسة
105	- المقدمة
105	5-1- مشاكل التسويق
107	5-2- تحديد المزيج الإنتاجي
109	5-3- جدولة الإنتاج
113	5-4- مشكلة تكوين محفظة الأوراق المالية
117	الوحدة السادسة النموذج المرافق في البرمجة الخطية
119	المقدمة
120	6-1- شروط تحويل المسألة الأصلية إلى مسألة مقابلة
121	6-2- خطوات تحويل المسألة إلى مسألة مقابلة
122	6-3- صياغة البرنامج الخطي للمسألة المقابلة
124	6-4- العلاقة بين المسألة الأصلية و مسألة مقابلة
125	6-5- العلاقة بين الحل الأمثل للمسألة الأصلية والحل للمسألة المقابلة
131	6-6 - مقارنة النتائج بين برنامج المشكلة الأصلية والمشكلة المقابلة

133	الوحدة السابعة تحليل الحساسية
135	-المقدمة
137	7-1- التغير في معاملات دالة الهدف
137	7-2- للتغير في معاملات دالة الهدف ولعدة متغيرات معاً
142	7-3- أثر التغير في كمية الموارد على الحل الأمثل
145	أسئلة حول البرمجة الخطية
	الوحدة الثامنة قضايا النقل:
151	بناء النموذج والحل وفق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية
153	- مقدمة
154	8-1- مفهوم نموذج النقل وتطبيقاته
153	8-2- صياغة نموذج النقل
159	8-3- موازنة مسائل النقل
164	8-4- أساليب إيجاد الحل الأولي
165	8-5- أسلوب الزاوية الشمالية الغربية
172	- مسائل وتدريبات الوحدة الثامنة
175	الوحدة التاسعة :قضايا النقل
177	- مقدمة
177	9-1 - اختبار مثلية الحل
181	9-2- تطوير الحل
185	9-3- إيجاد الحل الأولي حسب التكلفة الأقل في الجدول
191	9-4- إيجاد الأولي حسب أسلوب فوجيل
199	- مسائل وتدريبات الوحدة التاسعة

203	الوحدة :العاشره قضايا التخصيص والتعيين
205	- مقدمة
207	10-1- إيجاد الحل وفق الطريقة الهنغاريه
215	10-2- قضايا التعيين و التخصيص في حالة العوائد
219	- مسائل وتدريبات الوحدة العاشرة
223	الوحدة: الحادية عشر قضايا الشبكة المثلى وقاضايا المسار الأمثل
225	مقدمة
226	11-1- قضية الشبكة الدنيا (المثلى)
232	11-2- قضايا المسارات المثلى (الأقصر)
236	11-3-خوارزمية إيجاد المسار الأمثل على شبكة لا تسمح بالدوران
241	-مسائل وتدريبات الوحدة الحادية عشر
	الوحدة الثانية عشر:
245	قضايا المسار الأمثل على شبكة تسمح بالدوران وقضايا التدفق الأعظمي
247	- مقدمة
247	12-1- خوارزمية المسار الأمثل على شبكة تسمح بالدوران
255	12-2- خوارزمية التدفق الأعظمي
264	مسائل و تدريبات للوحدة الثانية عشر
267	الوحدة الثالثة عشر التحليل الشبكي:المسار الحرج
269	مقدمة
270	13-1- قواعد رسم الشبكات
273	13-2- ترتيب أنشطة المشروع
280	13-3- للمسار الحرج
291	مسائل و تدريبات الوحدة الثالثة عشر

293	الوحدة الرابعة عشر قضية تحقيق الاستقرار في استخراج الموارد
295	-مقدمة
295	14-1- الزمن الاحتياطي الكلي
296	14-2- الزمن الاحتياطي الحر
308	14-3- الزمن الإحتياطي المستقل
301	14-4 - المخططات الزمنية
301	14-5 -تخصيص الموارد المتاحة
308	مسائل و تدريبات الوحدة الرابعة عشر
311	الوحدة الخامسة عشر عدم التحديد في تقويم و مراجعة المشروعات
313	- مقدمة
313	15-1- أوقات تنفيذ الأنشطة
	الوحدة السادسة عشر
321	قضية ضغط أوقات التنفيذ و دراسة العلاقة بين التكلفة و الوقت
323	-مقدمة
324	16-1- -- تحديد العلاقة بين الزمن و التكلفة :
324	16-2-التأكد من امكانية ضغط بعض الأنشطة على المسار الحرج
325	16-3- تحديد مقدار الضغط الذي يمكن تحقيقه :
326	16-4- تحديد التكاليف الكلية لتنفيذ المشروع
334	مسائل وتدريبات الوحدة السادسة عشر



تلعب الأساليب الكمية دوراً هاماً في إعداد الكوادر الاقتصادية والإدارية من حيث تنمية أفكارهم وتزويدهم بالمهارات التي تساعد في حل القضايا الكمية التي يواجهونها في حياتهم العملية .

وبالاستناد إلى هذا تناول هذا الكتاب الموجة لطلبة التعليم المفتوح في قسم المحاسبة أهم الموضوعات في الأساليب الكمية وحرص المؤلفان على الشكل المبسط والعرض السهل تمثيلاً مع منهجية التعليم المفتوح الذي يعتمد على فلسفة التعليم الذاتي وقد جاء هذا الكتاب في ثمان فصول قسمت إلى ستة عشر وحدة دراسية وفق متطلبات الدراسة .

كتب الأستاذ المساعد الدكتور عبد الرزاق قاسم الوحدات السبع الأولى (من الوحدة الأولى إلى الوحدة السابعة) .

وكتب الأستاذ المساعد الدكتور جمال سلمان اليوسف الوحدات التسع الأخيرة (من الوحدة الثامنة إلى الوحدة السادسة عشر) .

ونرجو أن يساهم عملنا المتواضع في إغناء المكتبة العربية وفي تقديم العون لمن يرغب بزيادة معارفه الكمية من أبناء الطلبة والمهتمين .

والله ولي التوفيق

الوحدة الأولى

مدخل إلى التحليل الكمي

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بمفهوم التحليل الكمي واستخداماته الإدارية
- تعريف الطالب بالنماذج الرياضية وطرق صياغتها.
- تعريف الطالب بمزايا استخدام النماذج الكمية وعيوبها.



مقدمة:

إن التطور العلمي في النصف الأخير من القرن الماضي أدى إلى ظهور ضرورة استخدام أدوات التحليل الرياضي في صناعة القرارات الإدارية التخطيطية والتنظيمية والرقابية وأصبحت هذه الأدوات جزءاً من الإدارة العلمية في المنظمات.

لقد كانت الإدارة في الماضي تعتمد على المعرفة الإدارية الشخصية، إذ كان المدير يعتمد على الخبرة والممارسة والقدرة الذاتية على اتخاذ القرارات والأحكام السليمة، دون إتباع منهج علمي في حل المشاكل والوصول إلى القرارات الرشيدة، ولكن التبدل السريع في الظروف الاقتصادية والاجتماعية والتقنية المحيطة بالمنظمات، قاد إلى تعقيد في طبيعة المشاكل المعالجة، مما يعني ضرورة تغير طبيعة وأساليب الإدارة والممارسة الإدارية، التي لم تعد تعتمد على الحدس والتخمين بشكل أساسي في إصدار القرارات الإدارية، بل اتجهت نحو الدراسات والبحوث الموضوعية، واستخدمت الطرق والأساليب العلمية في الحصول على المعلومات المتعلقة بأوضاع المنظمة، لتحديد الأهداف وتحليل المشاكل والعمل على حلها باتخاذ القرارات السليمة المناسبة، ووضع الخطط والسياسات اللازمة لتنفيذ الأهداف ومتابعة الأداء وتقويمه في مجالات العمل والفعاليات العديدة في المنظمة.

لقد صاحب التطورات المذكورة تعدد وتشابك في المتغيرات المؤثرة في القرار المتخذ وكثرة البدائل المصاحبة لاتخاذ القرار الواحد، لذلك أصبحت عملية اتخاذ القرارات لها قواعد وأصول علمية. هذا الأسلوب العلمي يتضمن مجموعة من النماذج الكمية التي تستخدم في عملية اتخاذ القرار. تهتم الأساليب الكمية بتطوير المشكلة الإدارية إلى نموذج رياضي ومن ثم مساعدة متخذ القرار من خلال التحليل العلمي المنظم للبدائل المتاحة والتعرف إلى أثارها المحتملة.

التحليل الكمي هو المدخل العلمي لصناعة القرارات الإدارية، ينطلق هذا المدخل من تجميع البيانات ومعالجتها من أجل الوصول إلى معلومات ذات قيمة بالنسبة لمتخذ القرار.

إن الوصول إلى معلومات ذات معنى بالنسبة لمستخدم القرار تشكل جوهر عملية التحليل الكمي. في إطار حل المشكلة يجب على الإداري أخذ كلاً من العوامل الكمية والنوعية بعين الاعتبار.

التحليل الكمي هو عبارة عن مدخل علمي في صناعة القرارات، وبالتالي فإن الدوافع والأعمال الخلاقة ليست جزءاً من التحليل الكمي، يبدأ التحليل الكمي بالبيانات مثل المواد الخام في المصنع ويتم معالجة هذه البيانات من أجل الوصول إلى معلومات لها قيمة بالنسبة لمتخذ القرار، وبالتالي فإن معالجة البيانات الخام وتحويلها إلى معلومات هي الهدف الرئيسي لعملية التحليل الكمي. تقوم عملية التحليل الكمي على تحويل المشكلة الإدارية إلى نموذج رياضي، ومن ثم يتم إيجاد حل للنموذج الرياضي للوصول إلى حل لهذه المشكلة.

1-1- مفهوم المشكلة الإدارية:

تظهر المشكلة الإدارية عندما يرغب متخذ القرار بالوصول إلى هدف محدد ويكون أمامه عدة بدائل مختلفة تساهم في تحقيق الهدف. ونظراً لأن كل بديل من هذه البدائل يتم تنفيذه في المستقبل فإن متخذ القرار يصبح في حالة من عدم التأكد عند تقويمه لكل بديل لصعوبة التنبؤ بظروف البيئة المحيطة وبالمتغيرات التي ستسود في المستقبل، وهنا تظهر مشكلة الاختيار للبديل الأفضل من بين مجموعة البدائل المتاحة والذي يحقق الهدف بأعلى كفاءة ممكنة. مثال: فلو فرضنا أن أحد المستثمرين يريد بناء مصنع وكان أمامه الخيارات التالية:

بناء مصنع كبير - بناء مصنع صغير - عدم بناء المصنع

مدخل إلى التحليل الكمي

أما النتائج المرتبطة بالقرار فكانت أنه في حالة وجود انتعاش اقتصادي فإن الأرباح سوف تكون في حالة بناء مصنع كبير هي 200000 وفي حالة بناء مصنع صغير فالأرباح هي 100000 وفي حالة الركود إذا كان المصنع كبيراً فالأرباح هي -180000 أما إذا كان المصنع صغيراً فالأرباح هي -20000 . في هذا المثال من الواضح، أن الهدف يتمثل في تحقيق أقصى ربح أو أقل خسارة وأمام متخذ القرار ثلاثة بدائل كما هو واضح من الجدول (1-1) وكل من هذه البدائل يرتبط بربح محدد، إذا كان هناك انتعاش اقتصادي وخسارة محددة إذا ساد الركود الاقتصادي.

البدائل		حالات الطبيعة	ركود اقتصادي
		انتعاش اقتصادي	
بناء مصنع كبير	200000	-180000	
بناء مصنع صغير	100000	-20000	
عدم فعل شيء	0	0	

وتتضمن المشكلة الإدارية كما هو واضح من العناصر التالية:

1- الهدف أو مجموعة الأهداف المراد تحقيقها:

لا بد من وجود هدف أو مجموعة أهداف يرغب متخذ القرار في تحقيقها، وغالباً ما تعدد الأهداف التي يتوخى تحقيقها من حل المشكلة، وهذه الأهداف المتعددة قد تكون أهداف كمية أي يمكن التعبير عنها بوحدات نقدية أو كمية مثل الربح أو كمية المبيعات..الخ، كما قد تكون أهداف نوعية والتي لا يمكن التعبير عنها بوحدات كمية أو نقدية مثل تحسين سمعة المنظمة في المجتمع أو تحسين نوعية الخدمات المقدمة للعملاء.

ونود أن نشير هنا إلى تعدد الأهداف وما يليه من تعدد البدائل التي يمكن أن تحقق تلك الأهداف، قد يؤدي إلى تعقد المشكلة المراد حلها. لذلك يجب التركيز على تحديد الأهداف وصياغتها بدقة. كما يجب تخفيض عدد الأهداف بقدر المستطاع من دون الإخلال بشمولية الأهداف التي يسعى متخذ القرار إلى تحقيقها. ومن الإجراءات التي يمكن أن تستخدم لتخفيض عدد الأهداف الإجراءات التالية:

أ- قد يكون هناك تكرار في الأهداف المعلنة نتيجة لعدد النظم الفرعية والأشخاص المشتركين في اتخاذ القرار لذا يجب استبعاد الأهداف المكررة أو المتماثلة.

ب- استبعاد الأهداف التي لا تتأثر بالبدائل المتاحة.

ج- استبعاد الأهداف الفرعية التي تؤدي إلى تحقيق هدف رئيسي والتركيز على الهدف الرئيسي.

2- البدائل المتاحة لتحقيق الهدف:

إن وجود مجموعة من البدائل الممكن تطبيقها لحل مشكلة معينة، هي التي تستوجب عملية اتخاذ القرار، ~~فلو كان هناك بديل واحد أمام متخذ القرار لما كانت هناك عملية اتخاذ لقرار.~~ لذلك يجب إعداد قائمة بكل البدائل المتاحة والتي يمكن أن تحقق الهدف أو مجموعة الأهداف المعتمدة من قبل الإدارة. وبعد حصر البدائل يجب تحديد الكفاءة النسبية لكل منها في تحقيق أي من تلك

الأهداف وهنا يجب أخذ حالة عدم التأكد بعين الاعتبار لذلك يجب إعطاء كل بديل قيمته الاحتمالية وحساب القيمة المتوقعة لكل بديل من البدائل.

مدخل إلى التحليل الكمي

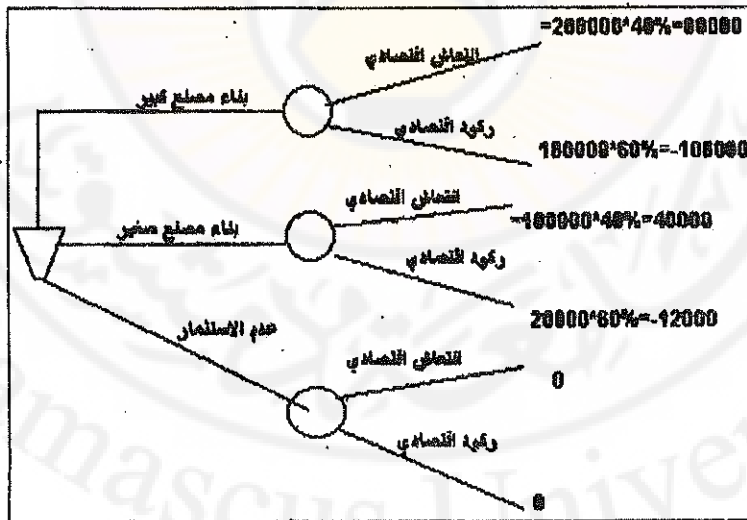
فلو فرضنا أن احتمال ظهور انتعاش اقتصادي في المستقبل تبلغ 60% واحتمال سيطرة الركود الاقتصادي تبلغ 40% فإن القيم المتوقعة للبدائل السابقة في المثال المذكور أعلاه هي:

القيمة المتوقعة للبدل = الإيرادات الناجمة عن البديل × احتمال حصول البديل.

وبتطبيق هذه المعادلة ينتج معنا الشجرة الواردة في الشكل (1-1) للقيم المتوقعة للبدائل.

3- المتغيرات والظروف البيئية المحيطة بالقرار:

هناك مجموعة من المتغيرات والظروف التي تؤثر بشكل مباشر على تحقيق الهدف أي أنها تؤثر على اتخاذ القرار حيث تفرض عليه التقيد بظروفها وأحوالها مثل ندرة الموارد المتاحة ووجود زمن محدد لإتمام العمليات ووجود موارد نقدية محددة إلى غير ذلك من القيود.



الشكل (1-1) شجرة القرارات

ويمكن تبويب المتغيرات من حيث تأثيرها على نموذج الحل إلى:

أ- متغيرات مستقلة:

وهي تلك المتغيرات التي لا تتأثر بغيرها من المتغيرات، فلو أراد متخذ القرار تحديد حجم الإنتاج فإن ذلك مرتبط بعدد العاملين فإن حجم الإنتاج هو متغير تابع بالنسبة لعدد العاملين، وعلى العكس فإن عدد العاملين هو متغير مستقل، وهذه المتغيرات المستقلة تكون مدخلات النموذج. ويمكن التمييز بين نوعين من المتغيرات المستقلة وهما:

- المتغيرات المستقلة القابلة للسيطرة : ويقصد بها المتغيرات التي يمكن لمتخذ القرار التحكم بها وتغييرها إذا ما أراد ذلك، بمعنى أن متخذ القرار هو الذي يحدد مقدارها مثل كمية الإنتاج أو عدد الورديات..الخ.
- المتغيرات المستقلة غير الخاضعة للسيطرة: وهي تلك المتغيرات التي تخرج عن نطاق سيطرة متخذ القرار وتتحكم بها الظروف البيئية المحيطة بالمنظمة مثل الطلب على منتج معين من منتجات الشركة.

ب- متغيرات تابعة: وهي تلك المتغيرات التي تتأثر بالمتغيرات المستقلة فكلمة تابع تعني أن قيمة هذا المتغير تتوقف على قيمة متغيرات أخرى فالربح تابع لمتغير للإيرادات ومتغير التكاليف. أو إذا حددت الشركة أجور العاملين بناء على كمية الإنتاج فإن الأجر هو عبارة عن متغير تابع لكمية الإنتاج وأجر القطعة.

1-2- آلية صياغة النموذج الرياضي لحل المشكلة:

1- مفهوم النموذج الرياضي:

عندما يواجه متخذ القرار مشكلة واقعية في الحياة العملية التي تتميز بالتعقد والدينامكية وعدم التأكد ويعمل على حل هذه المشكلة، فإنه يتعرض

مدخل إلى التحليل الكمي

لصعوبات كبيرة حتى يصبح من المستحيل السيطرة على العدد الكبير من المتغيرات وأثرها على القرار المتخذ.

وهنا تتبع فكرة استخدام النموذج، إذ أنه يسهل حل المشكلة أو مجموعة المشاكل الواقعية سواء كانت بسيطة أو معقدة، إذا ما قام متخذ القرار بالتركيز على الخصائص والأسباب الرئيسية لهذه المشكلة بدلاً من دراسة عناصر ومتغيرات الحياة الواقعية التي تتصف بالحركية الدائمة. وهذا التجريد للواقع العملي يطلق عليه بناء النموذج.

فالنموذج الرياضي هو عبارة عن تمثيل أو تجريد مبسط للواقع العملي في صورة مجموعة من المعادلات والرموز الرياضية. وهو مبسط لأن الواقع معقد لدرجة لا يمكن نقله أو تمثيله بالكامل من خلال نموذج ، وبالتالي فإن النموذج يكون عادة أقل تعقيداً من الواقع، لكنه يجب أن يكون كاملاً بما فيه الكفاية لتقريب مظاهر الواقع.

يتم النموذج بالمتغيرات الملائمة لمتخذ القرار لأن هذه المتغيرات فقط التي لها تأثير مباشر على المشكلة موضع الدراسة وبالتالي على القرار المتخذ. لذلك يتم صياغة النموذج لوصف وشرح والتنبؤ بسلوك الحالة التي ستسود في المستقبل، وعلى هذه العوامل تتوقف جودة النموذج.

2- طرق بناء النماذج الرياضية:

تتمثل طرق بناء النماذج الرياضية بطريقتين هما الطريقة التحليلية والطريقة التجريبية:

أ- الطريقة التحليلية: وتتلخص في دراسة مشكلة حقيقية ثم ترجمة هذه المشكلة إلى مجموعة من المعادلات تكون النموذج الرياضي وبواسطة حل هذا النموذج نصل إلى نتيجة رياضية يمكن تفسيرها للوصول إلى حل المشكلة موضع البحث.

ب- الطريقة المحاكاة: وتتطلب الطريقة المعرفة بالنظم المشابهة والوصول إلى المعلومات عن طريق القياس والملاحظة، أي أنها تقوم على تصميم التجربة ثم تسجيل نتائج التجربة وبعد ذلك تتم تفسير هذه النتائج في ظل النظريات السائدة للوصول إلى حل المشكلة.

1-3- خطوات بناء النموذج:

1- تعريف المشكلة:

الخطوة الأولى في التحليل الكمي هو التوصيف الدقيق والثابت للمشكلة. يعد توصيف المشكلة الخطوة الأهم والأصعب في التحليل الكمي، لأنه من الضروري تجاوز المظاهر الشكلية للمشكلة والبحث عن الأسباب الحقيقية للمشكلة والتعرف على الأهداف من وراء عملية اتخاذ القرار وتحديد المتغيرات والبدائل التي تسيطر عليها الإدارة وتلك المتغيرات والبدائل التي لا تستطيع السيطرة عليها. وكذلك تحديد الضغوط والقيود التي تحد من قدرة الإدارة على تحقيق الأهداف، ثم تحديد المعايير الممكن استخدامها حين المفاضلة بين البدائل واختيار البديل المناسب. والهدف قد يكون هدف واحد مثل تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة، أو قد يكون عدة أهداف مثل تحقيق أقصى ربح وزيادة حجم المبيعات.

وفي هذا المجال نود الإشارة إلى أنه يجب مراجعة الأهداف بصورة مستمرة خلال فترة البحث، فمن الأخطاء التي يمكن أن تحدث اختيار هدف يعبر عن جزء من المشكلة أو تجاهل بعض القيود أو البدائل، مما ينعكس على النتائج التي يقدمها النموذج.

2- بناء الشكل الرياضي للنموذج:

يعبر النموذج الرياضي عن المعادلات الرياضية التي تصف المشكلة التي تم تعريفها وسردها بصورة وصفية حيث يتم تمثيل تابع الهدف الذي يرتبط بعدد من المتغيرات التي قد تسيطر أو لا تسيطر الإدارة على بعضها. كما تظهر فيه عدد من المعادلات التي تعبر عن الضغوط التي تقف في وجه الإدارة عند اتخاذها القرار ويكون من الشكل:

$$E=f(X_i, Y_i)$$

حيث أن :

E تعبر عن قياس مدى فعالية النظام أي مدى تحقيق الهدف

X_i المتغيرات التي تقع تحت سيطرة الإدارة

Y_i المتغيرات التي تقع خارج سيطرة الإدارة.

تمر عملية بناء النموذج بالمراحل التالية:

أ- تحديد فروض النموذج:

وقبل أن يتم تصميم النموذج الخاص بحل مشكلة ما لابد من تحديد الفروض التي سيبني عليها النموذج مثل الحالة السائدة في المشكلة، هل هي حالة تأكيد أم مخاطرة أم حالة عدم تأكيد، وكذلك سلوك العناصر وطبيعة العلاقات بين المتغيرات هل هي علاقات خطية أو غير خطية وغير ذلك من الفروض التي تؤثر على تحديد نوع النموذج الذي سيتم بنائه لحل المشكلة.

ب- تحديد المتغيرات:

يتم في هذه الخطوة تحديد أهم العناصر التي يتوقع أن يكون لها تأثير على حل المشكل، حتى يمكن أخذها بعين الاعتبار عند بناء النموذج، مع ضرورة التمييز بين المتغيرات القابلة للسيطرة والمتغيرات التي تقع خارج نطاق سيطرة متخذ القرار.

إن عملية الفصل بين المتغيرات التي تؤثر على النموذج والمتغيرات التي لا تؤثر في النموذج عملية شاقة بسبب تداخل المتغيرات وتأثيرها المتبادل على بعضها.

ج- تحديد القيود:

وهي تعبر عن محدودية الموارد اللازمة للوصول إلى الهدف والشروط الواجب تحقيقها، ومن الأمثلة على هذه الحدود عدد العاملين، الطاقة الإنتاجية للآلات .. إلى غير ذلك من القيود.

يتم تمثيل هذه القيود على شكل متباينات أو معادلات فمثلاً لو كانت منظمة ما تنتج منتجين هما غسالة وبرد وكانت كمية الإنتاج من الغسالات هي X_1 وكمية الإنتاج من البرادات هي X_2 وبفرض أن إنتاج الغسالة يحتاج على 8 ساعات عمل أما إنتاج البراد فيحتاج إلى 10 ساعات عمل وكان الوقت المتاح للشركة هو 2400 ساعة عمل، فيتم تمثيل هذا القيد رياضياً على النحو التالي:

$$8X_1 + 10X_2 \leq 2400$$

أي الوقت الأقصى المتاح لإنتاج كل من البرادات والغسالات هو أقل أو يساوي 2400 ساعة عمل.

3- تجميع البيانات:

بعد وضع النموذج يجب الحصول على البيانات التي سوف تستخدم في النموذج، هذه البيانات يجب أن تكون دقيقة وإلا ستكون النتائج مضللة بالرغم من صحة النموذج ومثاليته. ومصادر البيانات تكون إما تاريخية من خلال وثائق ومستندات المنظمة أو من خلال المقابلة مع العاملين أو قائمة على التنبؤ مثل الطلاب المتوقع على سلعة ما.

4- إيجاد الحلول للنموذج:

نبدأ بإيجاد الحلول المقبولة للنموذج ثم نقوم بالبحث عن الحل المثالي من بين تلك الحلول ويتم استخدام بعض الأساليب الخاصة للوصول إلى الحل الأمثل أو شبه الأمثل مثل أسلوب المحاكاة Simulation وأسلوب اكتشاف الحل Heuristics وأسلوب الخوارزميات عبر الأسلوب التحليلي أو الأسلوب الرقمي.

يستخدم أسلوب المحاكاة عندما يصعب على الباحث إيجاد الحل الرقمي أو التحليلي للنموذج لأن عدد المتغيرات كبير والقيود التي تحكمه كثيرة، ويقوم هذا الأسلوب على محاكاة النظام أو المشكلة من أجل فهمها والتنبؤ ببدائل الحل الممكنة فيما إذا تغيرت بعض الظروف والخصائص المتعلقة بالمشكلة ثم اختيار البديل الذي يحقق النتائج المرغوبة.

يتم استخدام أسلوب اكتشاف الحل حين يكون النموذج الرياضي على درجة من التعقيد بحيث يصعب حله رياضياً أو تصعب معالجته من خلال أسلوب المحاكاة بسبب الوقت الطويل الذي تتطلبه عملية المعالجة. تعتمد هذه الطريقة على الحكم الشخصي للإداري وعلى القواعد التجريبية التي يستخدمها في تطوير الحل الأولي المطروح والحصول على حل أفضل.

وذلك عن طريق البحث والانتقال من حل إلى حل آخر بحيث يتم تحسين تابع الهدف في كل مرة يتم فيها الانتقال من حل إلى حل آخر. وعندما يصبح من المتعذر الانتقال إلى حل آخر لتحسين تابع الهدف في النموذج المعبر عن المشكلة فإن الحل الأخير يعد الأقرب إلى الحل الأمثل.

أما أسلوب إتباع قواعد الحل فيشمل الطريقة التحليلية التي يتم بواسطتها التعبير عن مجموعة العلاقات المعقدة بين متغيرات النموذج بشكل رياضي يضم عدة معادلات رياضية أو إحصائية يتم حلها من أجل الوصول إلى القيمة المثلى.

أما الطريقة الرقمية فتقوم على أساس التعويض عن المتغيرات التي تسيطر عليها الإدارة بقيم رقمية مختلفة في مجموع المعادلات التي يحتوي عليها النموذج على سبيل التجربة، حتى تصل تلك القيمة تبعاً لمعيار المفاضلة إلى المستوى الأمثل.

5- اختبار الحل:

إن استخدام النموذج بشكل دائم لإيجاد الحلول المناسبة يتطلب اختباراً للتعرف على مدى تمثيله للمشكلة الأصلية بصورة صحيحة، وقد يكون النموذج لا يمثل المشكلة الأصلية للأسباب التالية:

• قد يتضمن النموذج متغيرات غير ضرورية أو غير ملائمة يجب استبعادها.
• قد تكون قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات قد حددت بصورة غير سليمة ويجب تصحيحها.

• قد تكون بعض المتغيرات الهامة قد أهملت أو نسيت ويجب إدراجها في النموذج.

• قد يكون هناك خطأ في بنية النموذج أي العلاقات التابعة التي تربط الهدف بالمتغيرات، حيث يجب التأكد من نوع هذه العلاقات.

أما اختبار الحل المستخرج من النموذج فيعني اختبار صلاحية النموذج، أي التحقق من صحة المعلومات التي يوفرها وإمكانية الاعتماد عليها في اتخاذ القرارات. يوجد هناك العديد من الطرق التي يمكن أن تستخدم في اختبار مدى صلاحية النموذج ومنها طريقة الاختبار من واقع الماضي حيث يتم استخدام بعض البيانات التاريخية في النموذج للتأكد من صحة تنبؤات النموذج لأحداث وقعت في الماضي، ومن ثم مقارنة النتائج التي يقدمها النموذج مع النتائج الفعلية

مدخل إلى التحليل الكمي

التي حدثت في الماضي. من أجل التقرير، ما إذا كان يعطي النتائج المرضية المطلوبة.

6- تطبيق النتائج:

بعد التأكد من صحة النموذج وصلاحيته والجدوى العملية للحل المستخرج منه، يتم وضع هذا الحل موضع التنفيذ والتطبيق، أي تفسير الإدارة للحل وترجمته على شكل سياسات وإجراءات عمل سهل فهمها تنفيذاً من قبل العاملين.

إن هذا النموذج يبقى صحيحاً طالما أن الفروض الأساسية التي بني عليها لم تتغير كما أن الحل المستخرج منه، يبقى ساري المفعول طالما يحقق النتائج التي وضع من أجلها النموذج.

1-4- مزايا وعيوب استخدام النماذج في صناعة القرارات:

إن استخدام النماذج الرياضية في دراسة المشكلات والعمل على حلها من أجل مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المناسبة يحقق العديد من المزايا أهمها ما يلي :

أ- إن استخدام النماذج في حل مشكلات الإدارة يساعد على تخفيض تكاليف حل المشكلة ، حيث أن النموذج ما هو إلا تحديد مبسط للواقع العملي بمعنى أنه من الأفضل بناء نموذج رياضي يمكن تغيير معاملاته إلى أن يتم الحصول على أفضل حل للمشكلة بدلاً من تجربة الحلول المختلفة على الواقع العملي.

ب- يؤدي استخدام النماذج الرياضية في حل المشكلات إلى سهولة دراسة وتحليل المشكلات المعقدة من خلال التركيز على العناصر الرئيسية والملائمة فقط والعلاقات بينها بدلاً من بذل الجهد في تجميع ودراسة كثير من المعلومات

عن العناصر التي قد لا تكون ذات تأثير كبير على المشكلة وبالتالي يمكن الوصول إلى الحل الأمثل في أقصر وقت وأقل كلفة.

ج- إن استخدام النماذج في حل المشكلات تمكن متخذ القرار من أن يرى نتائج القرار الذي سوف يتخذه قبل اتخاذه، أي دون الحاجة إلى اتخاذ قرار فعلي والانتظار لحين معرفة نتائجه ، وهو يساعد المنظمة على تجنب الآثار السيئة للقرارات الخاطئة .

وعلى الرغم من هذه المزايا التي يحققها استخدام النماذج في حل المشكلات التي تواجهها إدارة المنظمة.

إن استخدام هذه النماذج توجه إليه عدة انتقادات نلخصها فيما يلي:

أ- عدم تمثيل النماذج للواقع العملي تمثيلاً كاملاً في صورة رياضية مما يؤدي في كثير من الحالات إلى وضع بعض الفروض حتى يمكن بناء النموذج، هذه الفروض قد لا تمثل تمثيلاً صادقاً، وبالتالي يصبح النموذج مبسطاً إلى درجة أنه قد يكون غير مفيد في دراسة المشكلات. إلا أنه يرد على هذا الانتقاد، بأن مجموعة الفروض التي يتم فرضها غير ثابتة بمعنى أنه يمكن إسقاط أي فرض غير واقعي إلى أن يقترب مصمم النموذج من الواقع بقدر المستطاع.

ب- إن معظم النماذج تعمل على تحقيق هدف واحد قد يكون تعظيم ربح أو تخفيض التكاليف مثل نموذج البرمجة الخطية والبرمجة العددية إلى غير ذلك وهو ما يتعارض من الواقع العملي و لا يناسبه حيث يندر أن تعمل إدارة المنظمة متخذة القرار على تحقيق هدف واحد.

ويرد على ذلك أن هناك نماذج أخرى تعمل على تحقيق أكثر من هدف مثل نموذج برمجة الأهداف والنماذج الديناميكية.

ج- أنه قد يصعب عمليا حل بعض النماذج التي تتكون من أكثر من معادلة رياضية عن طريق الجهد البشري .

إلا أن يرد على ذلك أنه ~~كان~~ ذلك حقيقة إلا أن انتشار الحاسبات الإلكترونية وما تتميز به من سرعة فائقة وقدرة كبيرة على حل العمليات المعقدة يسهل من إعداد هذه النماذج ذات التركيب الرياضي المعقد.

د- قد تكون تكلفة تصميم النموذج أعلى من المنفعة التي تحصل عليها المنظمة من وراء استخدامه بالإضافة إلى أن متخذي القرار قد يجدون صعوبة في فهم النتائج التي تنتج من تطبيقها.

ويرد على ذلك بأن عدم فهم النتائج المستخرجة من النموذج لا يعد عيبا في النموذج في حد ذاته وإنما يعد عيبا في متخذي القرار الذين ليست لديهم دراية أو خلفية رياضية،

وهنا يجب عليهم تطوير أنفسهم حتى يمكنهم التمشي مع متطلبات العصر الحاضر هذا من ناحية ومن ناحية أخرى نشير إلى أن الأصل في بناء النموذج هو تخفيض التكاليف التي تتحملها المنظمة فالنموذج ما هو إلا تمثيل مبسط للواقع وبالتالي إذا كانت تكلفة تصميم النموذج أعلى من منفعته فهذا يعني أن هناك خطأ في تصميم النموذج في حد ذاته نتيجة خطأ في تركيب المعادلات ، وقد ترجع زيادة تكلفة النموذج عن منفعته إلى أن المشكلة التي يراد حلها لا تحتاج أساساً إلى نموذج. وبالتالي لا يعاب على استخدام النموذج فقد تكون العيوب في مصممي النموذج.



الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

الوحدة الثانية الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية والطريقة البيانية

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بمفهوم البرمجة الخطية
- تعريف الطالب بأهم خصائص أساليب البرمجة الخطية.
- تعريف الطالب كيفية استخدام الطريقة البيانية في حل قضايا تعظيم الأرباح
- تعريف الطالب كيفية استخدام الطريقة البيانية في حل قضايا تخفيض التكاليف.



مقدمة:

أخذت بحوث العمليات دورها الحقيقي بعد ظهور البرمجة الرياضية Mathematical Programming وخاصة البرمجة الخطية linear Programming التي تعتبر أحد فروع البرمجة الرياضية. ولقد استخدمت البرمجة الخطية أثناء الحرب العالمية الثانية لتحديد أنسب الطرق الجوية وتحديد البرامج المناسبة للتدريب والصيانة والتجديد للقوات الجوية الأمريكية برئاسة المارشال وود K.Wood وكان جورج دانترز G.B Dantzing مؤسس بحوث العمليات من بين أعضاء فريق بحوث العمليات الذين ساعدوا المارشال وود.

ثم تطور استخدام البرمجة الخطية بعد ذلك لحل المشاكل الاقتصادية، وتعتبر شركات البترول الأمريكية من أول الشركات التي طبقت أسلوب البرمجة الخطية في تخطيط الإنتاج. وبصفة عامة تستخدم طرق البرمجة الخطية بنجاح كبير في حل مشاكل تخصيص الموارد المحدودة Resources Attraction الممثلة في التوزيع الكفء للموارد المحدودة على الاستخدامات البديلة المتعددة لتحقيق الأهداف المرغوب فيها.

ولقد نشأت جذور البرمجة الرياضية أساساً في علم الاقتصاد نظراً لاهتمام الاقتصاديين بالتوزيع الأمثل للموارد الاقتصادية ففي عام 1758 قدم Quinsy الجدول الاقتصادي الذي يصف فيه العلاقات الاقتصادية المتداخلة بين فئات المجتمع المختلفة.

وفي عام 1874 ابتكر Walras نموذج رياضي للتوازن الاقتصادي استخدم فيه المعاملات الفنية الخطية، على خلاف المتبع في تلك الفترة التي كان

الاقتصاديون يستخدمون فيها النماذج غير الخطية، وذلك لسهولة تحديد شروط التوازن. وفي عام 1920 قدم الاقتصادي الشهير W.Leontief النموذج التجريبي المعروف بنموذج المدخلات والمخرجات الذي يستخدم في عملية توزيع الموارد على استخداماتها البديلة، ولقد أرسى هذا النموذج التطبيقات الأولى للبرامج الخطية.

وفي عام 1947 ابتكر عالم الرياضيات الأمريكي G.B Dantzing مشكلة البرمجة الخطية في صورتها العامة، واقترح أكفا الطرق لحلها وهي طريقة السمبلكس Simplex Method وفي أوائل الخمسينات بدأ الاقتصاديون في دراسة وتطوير أساليب البرمجة الرياضية وربطها بالنظريات الاقتصادية المختلفة. وأخيراً بدأ المحاسبون ورجال الإدارة في استخدام البرمجة الرياضية في العديد من المجالات والتطبيقات المحاسبية والإدارية.

2-1- تعريف البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية أكثر أساليب بحوث العمليات انتشاراً واستخداماً في ترشيد عملية تخصيص الموارد المحدودة المتاحة على الاستخدامات البديلة المتعددة، بما يؤدي إلى تحقيق التخصيص الأمثل للموارد. ويتكون اصطلاح البرمجة الخطية من شقين هما:

أ- البرمجة: Programming

ويقصد بالبرمجة بصفة عامة سلسلة من الإجراءات والإرشادات والقواعد التقديرية المنظمة لحل مشكلة معينة يدوياً أو على الحاسب الآلي. وبالنسبة لمشكلة تخصيص الموارد يقصد بالبرمجة سلسلة الإجراءات والقواعد الرياضية التي تمكن من اختيار أفضل بديل أو برنامج من البرامج أو البدائل المتعددة لحل

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

مشكلة تخصيص الموارد، ويكون البرنامج أو البديل الأفضل هو الحل الأمثل للمشكلة .

ب- الخطية : Linear

يقصد بالخطية وجود علاقة خطية بين متغيرات المشكلة، أي إذا تغير المتغير المستقل بنسبة معينة فإنه سوف يتغير المتغير التابع بنفس النسبة.

وهناك العديد من التعاريف للبرمجة الخطية ومعظمها إن لم يكن كلها لا تخرج عن كونها أسلوب رياضي من أساليب بحوث العمليات يهدف إلى تخصيص الموارد والتسهيلات المحدودة بين الاستخدامات البديلة المتعددة بأقصى كفاية ممكنة. لتحقيق الأهداف المرغوب فيها والمتمثلة في تحقيق أقصى ربح Maximization Profit أو أدنى تكلفة ممكنة Minimization Cost .

2-2- متطلبات البرمجة الخطية:

تتطلب البرمجة الخطية توفر الخصائص التالية في المشكلة المعالجة:

1- تهدف مشاكل البرمجة الخطية إلى تعظيم أو تخفيض كمية معينة وتقليدياً تتمثل هذه الأهداف في تعظيم الربح أو تخفيض التكاليف، فمعظم المنظمات تسعى إلى تعظيم ربحية المبالغ المستثمرة، وفي شركات التوزيع قد يكون الهدف تخفيض تكاليف الشحن إلى أدنى حد ممكن. ويتمثل هذا الهدف في تحقيق أقصى ربح أو أدنى تكلفة حتى يمكن صياغته في صورة نموذج رياضي، ويطلق عليه دالة الهدف Objective Function.

2- الخاصية الثانية لمشاكل البرمجة الخطية هي محدودية الموارد، لكي تشكل قيود Constraints تحد من حرية استخدام الموارد والتسهيلات المتاحة. ومن أجل تتابع أثر الموارد على تحقيق الهدف، فمثلاً عند تحديد الكمية التي يجب إنتاجها من منتجات معينة، نجد أن القيود تتعلق بالطاقة الإنتاجية من العمال

والآلات. كذلك فإن اختيار محفظة استثمار معينة نجد أنها مقيدة بالأموال المتاحة للاستثمار.

3- أن يكون للمشكلة عدد من البدائل يمكن أن يتم اختيار البديل الأفضل منها والذي يتناسب مع حجم الموارد والتسهيلات المتاحة وأن يحقق الهدف من حل المشكلة، وهو ما يطلق عليه الحل الأمثل.

4- العلاقة الرياضية بين القيود والهدف هي علاقة مساواة أو متراجحة خطية، وكلمة خطي تعني أن دوال الهدف والقيود هي دوال من الدرجة الأولى أي مرفوعة للقوة 1 وليس مربعة أو مكعبة. وتؤثر الخطية إلى ثبات العلاقة بين المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة للمشكلة، بحيث إذا مثلنا هذه العلاقة بيانياً فإنها تأخذ شكل الخطوط المستقيمة.

2-3- الافتراضات الرئيسية للبرمجة الخطية:

هناك فنياً خمسة متطلبات إضافية لمشكلة البرمجة الخطية والتي يجب أن تكون واضحة:

1- التأكيد: ويقصد به أن متخذ القرار على معرفة مؤكدة بعدد الأهداف والقيود، أي أنه في حالة تأكد كامل بالمتغيرات والعوامل الخاصة بالمشكلة وبالتالي يكون على علم تام بمعاملات دالة الهدف، والموارد المتاحة، والمستوى التكنولوجي والمعاملات الفنية للقيود.... الخ. وبناء على ذلك يعتبر أسلوب البرمجة الخطية من الأساليب المحددة لا الاحتمالية. وبالتالي فإن هذه القيود والمعاملات لن تتبدل أثناء الدراسة.

2- وجود علاقة تناسبية **Proportionality**: ويعني ذلك أن التغير في مستوى الإنتاج سيؤدي إلى تغيير مناسب في حجم الموارد المستخدمة، فإذا

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

كانت الوحدة الواحدة من المنتج تحتاج إلى 2 ساعة عمل فإن إنتاج 10 وحدات يتطلب 20 ساعة عمل.

3- الجمع Additively : تؤكد هذه الخاصة استمرار العلاقة الخطية بين عناصر المشكلة، وهي تعني أن هامش المساهمة الإجمالي والقدر المستخدم من الموارد لكل المنتجات يعادل مجموع هامش المساهمة لكل منتج والقدر المستخدم من الموارد لكل منتج.

4- القابلية للتجزئة Divisibility: وتعني هذه الخاصة أن الحل وفق طريقة البرمجة الخطية يمكن أن يعطي القيم الكسرية للمتغيرات، وتعد هذه الصفة هامة بصورة خاصة عندما يود الإداري أن يحصل على النتائج على شكل أرقام صحيحة، كما في تحديد عدد الوحدات المنتجة.

5- خاصة عدم السلبية (الإيجابية) Non-Negativity : وتعني هذه الخاصة أن القيمة التي تأخذها المتغيرات نتيجة الحل المقترح يجب أن تكون موجبة حتى تمثل وحدات حقيقية، إذ لا يمكن إنتاج وحدات عددها أقل من الصفر.

2-4- الطريقة البيانية وقضايا تعظيم الأرباح:

سنقوم بشرح كيفية استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل تعظيم الأرباح من خلال المثال التالي:

مثال : تقوم إحدى الشركات بإنتاج وبيع منتجين هما بنطال وقميص فإذا علمت أن المنتجين يمران في مرحلتين هي القص والخياطة، وهما يحتاجان إلى ساعات العمل التالية في كل قسم من الأقسام، والطاقة الإنتاجية في كل قسم من الأقسام الثلاثة مقننة بالساعة.

المنتج/القسم	القص	الخياطة
بنطال	2	4

2	2	قميص
4500	3000	الطاقة الإنتاجية

فإذا علمت أن البنطال الواحد يساهم في الربح 40 ل.س. والقميص يساهم في الربح 35 ل.س.
المطلوب:

تحديد حجم الإنتاج من كل من المنتج بنطال والمنتج قميص الذي يحقق الشركة أكبر ربح ممكن.

1- الصياغة الخطية للمشكلة:

تتميز هذه المشكلة بوجود هدف تسعى الشركة إلى تحقيقه وهو زيادة أرباح الشركة إلى الحد الأقصى بإنتاج هذين المنتجين. يمكن حساب الأرباح المحققة للشركة عن طريق ضرب ربح البنطال الواحد في عدد القطع المنتجة ويضاف إليها ربح القميص الواحد مضروباً بعدد القمصان المنتجة. وبفرض أن:

X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج بنطال

X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج قميص،

Z تمثل الأرباح الممكن تحقيقها من بيع الإنتاج من كميات القمصان

والبنطال.

فإن دالة الربح تكون:

$$\text{MAX } Z = 40X_1 + 35X_2$$

كما أن كمية الإنتاج من كل من النوعين محدودة بالطاقة الإنتاجية في الأقسام الثلاثة، ويجب ملاحظة وجود علاقة تأثير متبادل بين كلا النوعين من المنتجات، فاستخدام الطاقة الإنتاجية المتاحة لإنتاج البنطال سوف يؤدي إلى تخفيض الطاقة المتاحة لإنتاج القميص والعكس صحيح. وبالتالي تشكل الطاقة

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

الإنتاجية في كل قسم من الأقسام أحد القيود الذي يحدد كمية الإنتاج من كل من المنتجين ويمكن التعبير عن القيد في قسم القص على النحو التالي:

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 3000$$

أي أن عدد الساعات المتاحة في قسم القص لا تتجاوز 3000 ساعة.

أما في قسم الخياطة فيمكن التعبير عن القيد على النحو التالي:

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 4500$$

أي أن عدد الساعات المتاحة في قسم الخياطة لا تتجاوز 4500 ساعة.

تسمى معاملات المتغيرات في كل من القيود السابقة في كل من القيود السابقة

بنسب الإحلال المادية Physical rate of Substitution ذلك لأنها تعبر عن

نسبة الطاقة الإنتاجية التي تستخدم من أجل صناعة المنتجات النهائية المطلوبة.

فمن الواضح أن تصنيع البنطال يحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص وأن

القميص يحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص.

والقيد الأخير هو قيد عدم السلبية، وهو يعني الكميات المنتجة من البنطال

والقميص يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر.

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وتصبح الصياغة النهائية للنموذج على النحو التالي:

$$\text{Max: } Z = 40 X_1 + 35 X_2$$

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 3000$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 4500$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

2- تحويل المترajحات إلى معدلات:

من المعروف رياضياً أن التمثيل البياني للمترajحة يقسم المستوى إلى

قسمين أحدهما يحقق الشرط وهو المطلوب ويحدد بمساعدة إتجاه المترajحة .

الوحدة الثانية

ومعنى ذلك أن القيم المختلفة للمتغيرات والتي تحقق المتراجحة إذا تم تمثيلها بيانياً فإنها تنتشر في نصف مستوي، على خلاف المعادلة الخطية التي تأخذ خط مستقيم فقط ، وعلى ذلك فإن قيود المشكلة التي على شكل متراجحات تحول إلى معادلات خطية، وذلك بافتراض الموارد والتسهيلات المتاحة تستغل بالكامل، أي أنه لا توجد موارد غير مستغلة وتمثل بيانياً في شكل خطوط مستقيمة ، فإذا كانت المتراجحة من نوع ($\leq$) أقل من أو يساوي يكون الحل الممكن في نصف المستوي أسفل الخط المستقيم وإذا كانت المتراجحة من النوع ($\geq$) أكبر من أو يساوي يكون الحل الممكن في نصف المستوي أعلى الخط المستقيم، أما إذا كانت المتراجحة تتعلق بمتغير فإن التمثيل البياني لعلاقتها يأخذ شكل خط مستقيم أفقي أو رأسي. وبالتطبيق على الحالة السابقة تحول المتراجحات إلى معادلات وفق التالي:

$$\text{Max: } Z = 40 X_1 + 35 X_2$$

$$2 X_1 + 2 X_2 = 3000$$

$$4 X_1 + 2 X_2 = 4500$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

3- تمثيل القيود بيانياً:

يتم التمثيل البياني لمتغيرات المشكلة عن طريق تخصيص المحور الأفقي لأحد المتغيرات والمحور الرأسي الآخر للمتغير الآخر. ولتحقيق فرض عدم السلبية الذي يقضى بأن تكون الحلول الممكنة للمشكلة كلها غير سالبة أو تكون أكبر من الصفر أو تساويه ، وعلى ذلك فإن الأشكال البيانية سوف تقتصر على الربع الموجب للرسم البياني. بعد ذلك نقوم بتمثيل كل قيد من القيود على المستوى $X_1, 0, X_2$ وذلك بافتراض أن الطاقة الإنتاجية في القسم الأول سوف تستخدم بكاملها لإنتاج المنتج X_1 أي بنطال، أي عدد الوحدات المنتجة من

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

المنتج قميص تساوي الصفر، وتبديل ذلك في القيد الأول الذي يمثل الطاقة الإنتاجية في قسم القص، يكون عدد الوحدات المنتج من المنتج بنطال:

$$2 X_1 + 0 = 3000$$

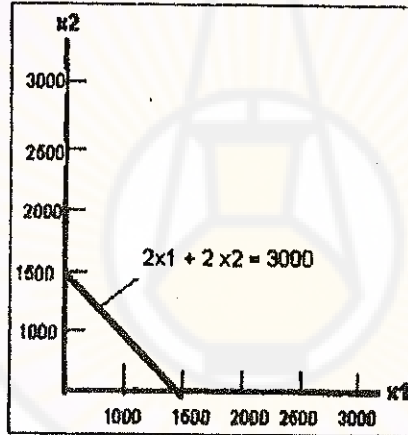
$$X_1 = 3000/2 = 1500.$$

نقوم في الخطوة التالية بافتراض أن الطاقة الإنتاجية في قسم القص سوف تستخدم لإنتاج المنتج قميص وبالتالي يكون عدد القمصان الممكن إنتاجها:

$$0 + 2 X_2 = 3000$$

$$X_2 = 3000/2 = 1500$$

يتم تمثيل القيد الأول على محور X_1 الذي يمثل كمية البنطال المنتج و X_2 الذي يمثل عدد القمصان المنتجة كما هو واضح في الشكل (1-1).



الشكل (1-2) تمثيل قيد الطاقة الإنتاجية في قسم القص بيانياً.

أما بالنسبة للقيد الثاني المتعلق بقسم الخياطة فنقوم بنفس الإجراءات السابقة، بافتراض أن الطاقة الإنتاجية في قسم الخياطة سوف تستخدم بكاملها لإنتاج المنتج X_1 أي بنطال، أي عدد الوحدات المنتجة من المنتج قميص تساوي الصفر، وتبديل ذلك في القيد الثاني الذي يمثل الطاقة الإنتاجية في قسم الخياطة يكون عدد الوحدات المنتجة من المنتج بنطال:

$$4X_1 + 0 = 4500$$

$$X_1 = 4500/4 = 1125$$

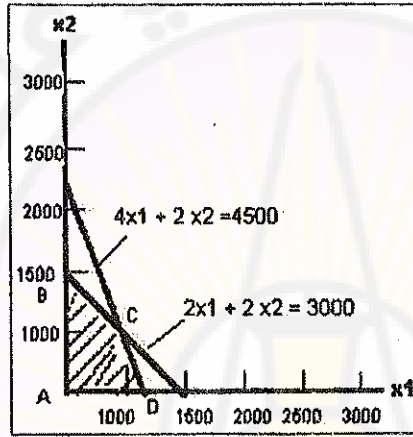
نقوم في الخطوة التالية بافتراض أن الطاقة الإنتاجية في قسم القص سوف

تستخدم لإنتاج المنتج قميص وبالتالي يكون عدد القمصان الممكن إنتاجها:

$$0 + 2X_2 = 4500$$

$$X_2 = 4500/2 = 2250$$

ويتم تمثيل القيد بيانياً كما هو واضح في الشكل (2-2):



الشكل (2-2) تمثيل قيود المشكلة بيانياً.

4- تحديد منطقة الحلول الممكنة The Feasible Region :

من المعروف رياضياً أن الخططين المستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، وعلى ذلك إذا كانت المشكلة ممثلة في شكل معادلتين خطيتين وتمثل بيانياً على شكل خطين مستقيمين، فيكون لها حل وحيد يتمثل في النقطة التي يتقاطع فيها الخطان المستقيمان الممثلان للمعادلتين الخطيتين لقيدا للمشكلة.

أما إذا كانت المشكلة ممثلة في شكل مترajحات خطية فإن كل مترajحة لها منطقة حلول خاصة بها منتشرة على مساحة نصف مستوي خاص بها، ويتمثل حل المشكلة في هذه الحالة في الجزء المشترك بين كافة أنصاف المستويات

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

لكافة المتراجحات (قيود المشكلة)، وفي هذه الحالة لا يوجد حل وحيد للمشكلة ولكن يكون لها أكثر من حل ممكن، ويطلق على المساحة المشتركة اصطلاح منطقة الحلول الممكنة، وهي عبارة عن جميع نقاط جزء المستوي أو على حدوده والتي تمثل كل نقطة منها حلاً ممكناً للمشكلة، أي لا تتعارض مع أي من قيود المشكلة، وأن لم تكن كلها حلول مثالية، ولكن يختار من بينها الحل الأفضل (الأمثل). ويتم تحديد منطقة الحلول الممكنة على الرسم البياني كما هو واضح في الشكل (2-2) بالمنطقة المظللة (A,B,C,D) .

من الملاحظ أن أي نقطة تقع على الخط المستقيم تحقق المتراجحة الخاصة به لأنها تفترض الاستخدام الكلي للطاقة الإنتاجية في القسم، أما أي نقطة تقع داخل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة فإنها تمثل عدم الاستخدام الكامل للطاقة الإنتاجية في القسم المعني، فإذا أخذنا جميع القيود بعين الاعتبار نرى أن كل قيد يقيد الآخر. يسهل استخدامه الكامل للطاقة الإنتاجية.

إن أي نقطة تقع داخل المنطقة المظللة (A,B,C,D) أو على حدودها تأخذ بعين الاعتبار القيود المفروضة، لذلك فإن أي نقطة داخل هذه المنطقة تشكل حلاً ممكناً للبرنامج الخطي.

5- الحل الأمثل : The Optimal Solution

بعد التوصل إلى منطقة الحلول الممكنة يصبح من الضروري التوصل إلى نقطة داخل هذه المنطقة أو على حدودها والتي تحقق أقصى ربح ممكن، وهذه النقطة هي التي تمثل الحل الأمثل للمشكلة ويمكن الحصول على الحل الأمثل بإحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى: طريقة أركان منطقة الحلول الممكنة:

إن أي نقطة داخل منطقة الحلول الممكنة تمثل حلاً ممكنًا، ونظرًا لكثرة عدد تلك النقاط الداخلية فإنه من الصعب عمليًا اختبار مثالية كل هذه النقاط. وحيث أن الخطوط المستقيمة لمعادلات تمثل الاستغلال الكامل للموارد، ولذلك فإنه كلما ابتعدنا عن نقطة المركز A في مشاكل تعظيم الأرباح، وتحركنا داخل منطقة الحلول الممكنة واقتربنا من الخطوط المستقيمة كلما زادت الأرباح وبناء على ذلك فإن أركان منطقة الحلول الممكنة والتي تقترب من الخطوط المستقيمة هي التي تمثل أكبر الحلول الممكنة تحقيقًا للأرباح. وكقاعدة عامة فإنه يتم اختبار مثالية أركان منطقة الحلول الممكنة (A, B, C, D) فقط واختيار النقطة التي تحقق أكبر ربح ويتم اختبار مثالية أركان منطقة الحلول الممكنة باتباع الخطوات التالية:

1- تحديد حجم كل متغير عند كل نقطة ركنية:

يمكن تحديد حجم كل متغير عند كل نقطة ركنية من الرسم البياني، ولذلك عن طريق إسقاط عمود من النقطة الركنية على المحور الأفقي وعمود آخر على المحور الرأسي، وتمثل نقطة تقاطع العمود مع المحور الأفقي حجم المتغير X_1 ، ونقطة تقاطع العمود مع المحور الرأسي حجم المتغير الثاني X_2 .

وفي الحالة السابقة يتم إسقاط عمود من النقطة الركنية (C) على كل من المحور الأفقي وآخر على المحور الرأسي، وبذلك تتحدد كمية الإنتاج من X_1, X_2 .

وبالمثل يمكن تحديد الإنتاج عند باقي النقاط الركنية إلا أن هذه الطريقة قد تكون غير دقيقة في بعض الأحوال ولذلك فإنه يتم تحديد حجم كل متغير بالطريقة الجبرية التي تقوم على أساس أن كل نقطة من نقاط أركان منطقة

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

الحلول الممكنة تتكون نتيجة لتقاطع خط مستقيم مع خط مستقيم لمعادلة أخرى ولذلك فإنه يمكن تحديد حجم كل متغير عند هذه النقطة بحل المعادلتين مع بعضهما جبرياً وبناء على ذلك يمكن تحديد حجم كل بديل عند كل نقطة ركنية كما يلي:

عند النقطة A :

إحداثيات النقطة A هي (0,0) أي أن كمية الإنتاج من $X_1=0$ وكمية الإنتاج من $X_2=0$.

عند النقطة B :

إحداثيات النقطة A هي (1500, 0) أي أن كمية الإنتاج من البطلال $X_1=0$ وكمية الإنتاج من القميص $X_2=1500$.

عند النقطة D :

إحداثيات النقطة D هي (0, 1125) أي أن كمية الإنتاج من البطلال 1125 وكمية الإنتاج من القميص $X_2=0$

عند النقطة C :

من أجل تحديد إحداثيات النقطة C، نلاحظ أن النقطة C تنتج عن تقاطع معادلة القيد الأول مع معادلة القيد الثاني وبالتالي فإنه يمكن حساب إحداثيات النقطة C عبر الحل المشترك للمعادلتين

$$2 X_1 + 2 X_2 = 3000 \rightarrow 2 X_1 = 3000 - 2X_2 \rightarrow$$

$$X_1 = (3000 - 2X_2)/2 \rightarrow X_1 = 1500 - X_2$$

وبتعويض قيمة X_1 في المعادلة الثانية $4 X_1 + 2X_2 = 4500$ ينتج معنا:

$$4(1500 - X_2) + 2 X_2 = 4500 \rightarrow$$

$$6000 - 4 X_2 + 2 X_2 = 4500 \rightarrow$$

$$-2X_2 = -1500 \rightarrow X_2 = 750$$

وبتعويض قيمة $X_2 = 750$ في المعادلة $X_1 = 1500 - X_2$ ينتج :

$$X_1 = 1500 - 750 = 750$$

أي أن إحداثيات النقطة C هي (750, 750) .

تحديد الأرباح لكل نقطة ركنية:

يتم تحديد الأرباح عند كل نقطة ركنية عن طريق التعويض في معادلة الهدف

$$(Z = 40 X_1 + 35 X_2)$$

بكمية الإنتاج لكل نقطة من النقاط السابقة كما هو واضح في الجدول التالي:

الربح	دالة الهدف	الإنتاج من X_2	الإنتاج من X_1	النقاط
0	$Z = 40(0) + 35(0)$	0	0	A
52500	$Z = 40(0) + 35(1500)$	1500	0	B
56250	$Z = 40(750) + 35(750)$	750	750	C
45000	$Z = 40(1125) + 35(0)$	0	1125	D

نلاحظ من الجدول أن النقطة C تحقق أقصى ربح للشركة، أي أنه يجب أن تنتج 750 بنظراً و 750 قميصاً.

الطريقة الثانية : طريقة مستويات دالة الهدف:

تعتبر دالة الهدف معادلة خطية يمكن تمثيلها في شكل خط مستقيم يعبر عن كمية معينة من المساهمة في الربح عند مستوى محدد من الإنتاج، وأي نقطة تقع على هذا الخط تعطي الأرباح نفسها التي تعطيها نقطة أخرى تقع على الخط نفسه. فإذا أخذنا دالة الهدف في المثال السابق:

$$Z = 40 X_1 + 35 X_2$$

فإذا فرضنا أن الأرباح التي نرغب في تحقيقها هي مثلاً 28000 أي أن :

$$Z = 40 X_1 + 35 X_2 = 28000$$

وعندها يمكن كتابة دالة الهدف كمستقيم آخر كما يلي:

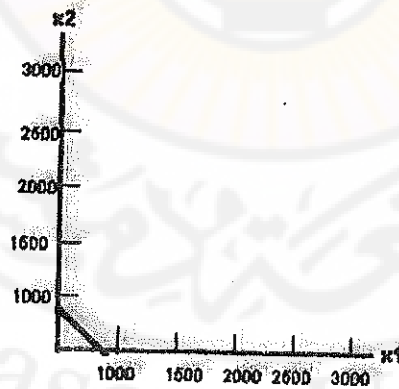
$$X_2 = -40 X_1 / 35 + 28000 / 35$$

وهي معادلة مستقيم ميله يساوي $-40/35$ ويقطع المحور X_2 عند النقطة $28000/35$ كم يمكن تمثيل دالة الهدف بيانياً كما في الشكل (2-3) عن طريق افتراض أن قيمة $X_2 = 0$ فتصبح قيمة X_1 :

$$X_1 = 28000 / 40 = 700$$

ثم نفترض أن قيمة X_1 تساوي الصفر فتصبح قيمة X_2 :

$$X_2 = 28000 / 35 = 800$$



الشكل (2-3) تمثيل خط الأرباح.

وبذلك نحصل على المستقيم الذي يقطع محور الأفقي عند 700 ويقطع المحور العمودي عند 800 ويكون ميله مساوياً $(-800/700)$ أي يساوي $(-40/35)$. وبالتالي يمكن رسم العديد من خطوط الأرباح المتوازية (لها نفس الميل) ترتفع كلما ارتفع الربح . وحتى تستطيع الإدارة زيادة الأرباح عن طريق الاستغلال الأفضل للطاقة الإنتاجية المتاحة فإن خط الربح يجب أن يلامس أعلى نقطة في حدود منطقة الحل الممكن، وهذا يعني تحريك خط الربح إلى أعلى وفي اتجاه اليمين من منطقة الحل الممكن، سوف يعطي قدراً من الربح أكبر من الأرباح التي تعطيها الخطوط السابقة له، وبالتالي فإن الحل الأمثل سوف يقع على حدود منطقة الحل وعند أعلى نقطة تلامس خط الربح وهي النقطة C . فتمثل هذه النقطة الحل الأمثل للمشكلة ومن هذه النقطة يتم إسقاط عمود على المحور الرأس وآخر على المحور الأفقي لتحديد حجم كل متغير في برنامج الحل الأمثل.

2-5- الطريقة البيانية وقضايا تخفيض التكاليف:

تستخدم الطريقة البيانية أيضاً لحل نماذج البرمجة الخطية لمشاكل تخفيض التكاليف ذات البعدين (أو المتغيرين) وتتبع نفس الخطوات الرئيسية السابقة في مشاكل تعظيم الأرباح مع مراعاة بعض الفروق المتعلقة بخصائص مشاكل تخفيض التكاليف، ويمكن إيضاح ذلك من خلال الحالة الافتراضية التالية:

ترغب إحدى الشركات في إنتاج 500 كغ من إحدى المنتجات الكيميائية المولفة من مادتين أساسيتين يبلغ سعر الكيلو غرام من المادة الأولى 50 ل.س. وسعر الكيلو غرام من المادة الثانية 80 ل.س. وترغب الشركة في إعداد الكمية المطلوبة للبيع بأقل التكاليف الممكنة، مع العلم أن الكمية المستخدمة من المادة

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

الأولى في المنتج يجب أن لا تزيد عن 400 كغ، وأن كمية المادة الثانية المستخدمة في المنتج يجب أن لا تقل عن 200 كغ.

المطلوب: تحديد الكمية المستخدمة من المادة الأولى والثانية لإنتاج المنتج بأقل تكلفة.

الحل:

أولاً- الصياغة الخطية للمشكلة:

نلاحظ أن المشكلة في هذه الحالة هي تخفيض التكاليف أي إنتاج المنتج بأقل التكاليف الممكنة وبفرض أن:

X_1 : الكمية المستخدمة من المادة الأولى في تصنيع المنتج والتي يبلغ سعر الكغ منها 50 ل.س..

X_2 : الكمية المستخدمة من المادة الثانية في تصنيع المنتج والتي يبلغ سعر الكغ منها 80 ل.س..

يمكن صياغة تابع الهدف على الشكل التالي:

$$\text{MIN: } Z = 50 X_1 + 80 X_2$$

أما القيود فتصبح على الشكل التالي:

$$X_1 \leq 400$$

$$X_2 \leq 200$$

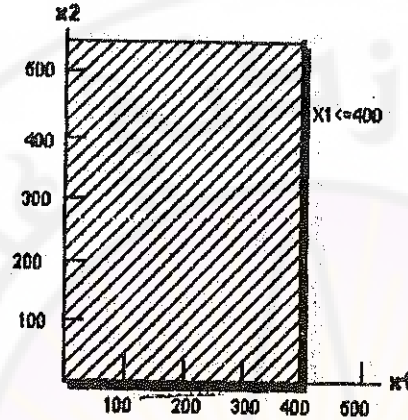
$$X_1 + X_2 = 500$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- تمثل القيود بيانياً:

بعد ذلك نقوم بتمثيل كل قيد من القيود على محاور X_1, X_2 كما هو واضح في الشكل (2-4)، وبما أن المتراجحة الأول من نوع (<)، يكون الحل الممكن في

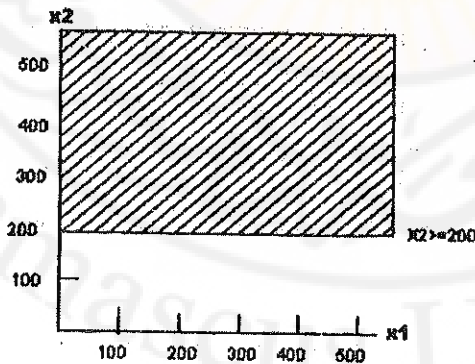
المساحة التي تقع على يسار الخط المستقيم (المنطقة المظللة)، حيث أن X_1 يمكن أن تأخذ أي قيمة بين 0 و 400.



الشكل (2-4) تمثيل القيد الأول بيانياً

وإذا قمنا بتمثيل القيد الثاني بيانياً الشكل (2-5) نلاحظ أن أي نقطة تقع

في المنطقة المظللة فوق المستقيم تقدم حلاً مقبولاً للقيد الثاني كون المتراجعة



$x_2 \geq 200$

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية

الشكل (5-2) تمثيل القيد الثاني بيانياً

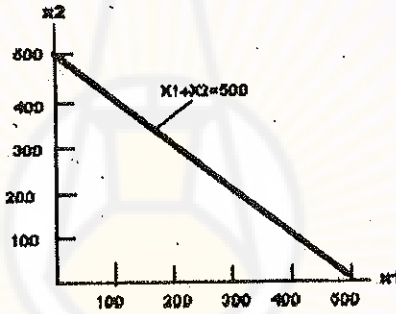
أما القيد الثالث فيشكل معادلة مساواة أي أنه يمثل على شكل مستقيم يتم تحديد إحداثيات هذا المستقيم بافتراض أن $X_1=0$ في المعادلة :

$$X_1 + X_2 = 500 \rightarrow 0 + X_2 = 500 \rightarrow X_2 = 500$$

ثم نفترض أن قيمة $X_2 = 0$ في المعادلة:

$$X_1 + X_2 = 500 \rightarrow X_1 + 0 = 500 \rightarrow X_1 = 500$$

نقوم بتمثيل القيد كما هو في الشكل (6-2) ، ومن الواضح أن أي نقطة تقع على المستقيم تشكل حلاً مقبولاً للقيد الثالث.



الشكل (6-2) تمثيل القيد الثالث بيانياً

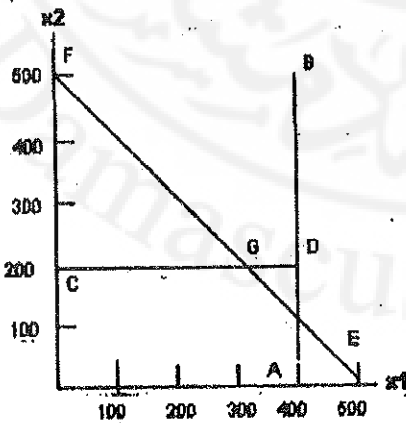
نقوم الآن بتمثيل هذه القيود جميعاً على

رسم بياني واحد كما في الشكل (7-2) ،

حيث تظهر حدود منطقة الحل الممكن ،

وتعد أي نقطة تقع على المستقيم (GF)

تحقق القيود الثلاثة حيث يكون لدينا أي



الوحدة الثانية

مزيج من المادتين تساوي 500 كغ ووتكون الكمية التي

الشكل (2-7) تمثيل القيود

تدخل المنتج من المادة الأولى أقل أو تساوي 400 كغ، كما تكون كمية المادة الثانية التي تدخل في المنتج أكثر أو تساوي 200 كغ.

تمثيل دالة الهدف:

نقوم بتمثيل دالة الهدف بمستقيم يعبر عن تكلفة معينة عند مستوى من المزيج، وطبقاً لهذه الطريقة نرسم دالة الهدف لمشاكل تخفيض التكاليف بيانياً على شكل خطوط مستقيمة ومتوازية داخل منطقة الحلول الممكنة، وهنا نلاحظ أنه كلما اقتربنا من نقطة المركز كلما انخفضت التكاليف حتى نصل إلى نقطة تماس أحد خطوط دالة الهدف، مع أي نقطة من نقاط أركان منطقة الحلول الممكنة، فتعتبر هذه النقطة هي الحل الأمثل للمشكلة، ثم نسقط عمودين من هذه النقطة أحدهما على المحور الأفقي والآخر على المحور العمودي لتحديد حجم كل متغير. فإذا فرضنا أن التكاليف الكلية للمنتج تعادل 24000 ل.س. فإن دالة الهدف تمثل بيانياً كما في الشكل (2-8) بجعل $X_1=0$ مرة ثم بافتراض $X_2=0$ مرة أخرى.

$$C = 50 X_1 + 80 X_2 = 4000 \rightarrow$$

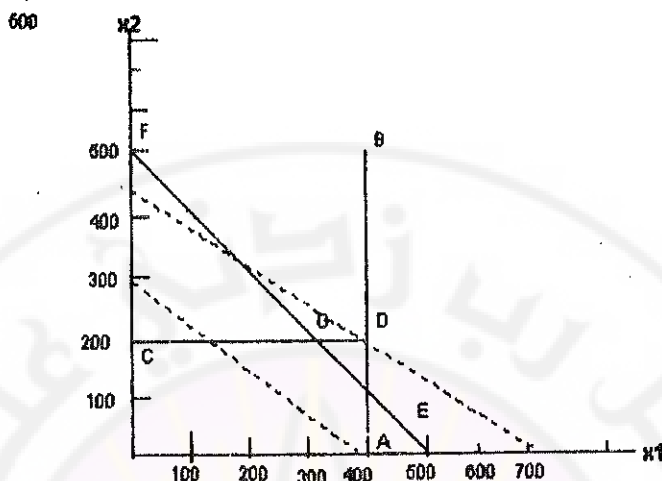
$$0 + 80 X_2 = 24000 \rightarrow X_2 = 300$$

$$C = 50 X_1 + 80 X_2 = 24000$$

$$\rightarrow 50 X_1 + 0 = 24000 \rightarrow X_1 = 480$$

ويتحدد ميل الخط على أساس نسبة كلفة المادة الأولى إلى المادة الثانية وهو $- 80 / 50$.

الإطار العام لأسلوب البرمجة الخطية



الشكل (2-8) تمثيل خطوط التكاليف

ووفق هذا المنطق يمكن رسم مجموعة من خطوط التكاليف التي لها الميل نفسه. والنقطة الناجمة عن ملاصقة خط التكاليف لأدنى نقطة في منطقة الحل المقبولة للقيود الثلاثة معاً، نجد أن النقطة (G)، تقدم الحل الأمثل. إيجاد الحل الأمثل:

بما أن النقطة G تقدم الحل الأمثل المقترح فيمكن تحديد مقدار كل من X_1 , X_2 من هذه المركبين، بحل المتراجحة الثانية والمعادلة الثالثة فنحصل على:

$$X_1 = 300, X_2 = 200$$

أما مقدار التكاليف الدنيا فتعادل:

$$Z = (300) \times (50) + (200) \times (80) = 31000$$



الوحدة الثالثة

طريقة السمبلكس لحل نماذج البرمجة

الخطية

The Simplex Method

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بصياغة مسائل البرمجة الخطية من الشكل العام.
- تعريف الطالب باستخدام طريقة السمبلكس في حل مسائل تعظيم الأرباح.



مقدمة:

تستخدم الطريقة البيانية لحل نماذج البرمجة الخطية للمشاكل التي تحتوي على متغيرين أو بعدين فقط، وهي بذلك لا تكون ذات فائدة كبيرة في الواقع العملي نظراً لكثرة عدد المتغيرات وتشابك العلاقات في كثير من مشاكل الواقع العملي، ومن هنا ظهرت الحاجة إلى طريقة أكثر دقة لحل نماذج البرمجة الخطية لكي تتعامل مع المشاكل المعقدة.

إن الطريقة العامة لحل نماذج البرمجة الخطية والتي أطلق عليها اصطلاح السمبلكس Simplex Method وهي عبارة عن سلسلة متتابعة من الإجراءات الجبرية لحل نماذج البرمجة الخطية لجميع المشاكل بغض النظر عن عدد المتغيرات والقيود التي تحتويها. ويرجع ذلك إلى الخصائص التي تتميز بها هذه الطريقة والتي من أهمها ما يلي:

1- خاصية للمعاودة Iterative :

تهدف طريقة السمبلكس إلى إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية من خلال خطوات متتابعة ومنظمة محددة مسبقاً لا تتغير، وفي نهاية تلك الخطوات يتم التوصل إلى حل ممكن للنموذج، فإذا لم يكن هذا الحل هو الحل الأمثل نكرر الخطوات نفسها مرة ثانية، فإذا لم نصل إلى الحل الأمثل نكرر الخطوات نفسها مرة ثالثة. وهكذا حتى نصل إلى الحل الأمثل. وهذا يعني أن هدفنا هو تكبير قيمة دالة الهدف إذا كان الهدف تعظيم دالة الربح أو تقليل قيمة دالة الهدف. إذا كانت المشكلة تخفيض التكلفة.

ونظراً لصفة التكرار هذه فإننا يمكن أن نستخدم الحاسب الآلي لإجراء وتنفيذ العمليات الحسابية بسهولة ويسر وفي أقل وقت ممكن.

2- خاصية الحلول الممكنة : Feasible Solutions

نتيجة لاتباع طريقة السمبلكس لخطوات متتالية نصل في نهايتها إلى حل ممكن للنموذج، فإذا لم يكن هو الحل الأمثل فإننا نكرر الخطوات نفسها لنصل إلى حل آخر ممكن، والحل الثاني يكون أفضل من الحل الأول أو على الأقل مساوياً له. وهذه الخاصية تفيد في أنها تؤكد لنا أننا في الطريق الصحيح للوصول إلى الحل الأمثل؛ طالما أن الحل الممكن الذي تم التوصل إليه أفضل من الحل السابق له.

3- خاصية الإعلان عن الحل الأمثل : Optimal Solutions

تتميز طريقة السمبلكس بمقدرتها على التعرف على الحل الأمثل والإفصاح عنه بمجرد التوصل إليه . وهذه الخاصية في غاية الأهمية؛ لأنها توفر الكثير من الوقت والجهد للذين يمكن أن يضيعوا في عمليات حسابية غير مطلوبة للبحث عن حلول أخرى؛ قد يكون من بينها حل آخر أفضل من الحلول التي تم التوصل إليها ، وفي النهاية نكتشف أن الحل الذي تم التوصل إليه أفضل من هذه الحلول.

3-1- طريقة السمبلكس وقضايا تعظيم الأرباح:

يمكن توضيح كيفية حل نماذج البرمجة الخطية لمشاكل تعظيم الأرباح من خلال الحالة الافتراضية التالية :

حالة عملية:

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات هي براد وغسالة ، وتمر عملية التصنيع في ثلاث مراحل هي: مرحلة القص والتجميع ومرحلة الطلاء، أما الوقت اللازم لإنهاء كل مرحلة فقد تم تلخيصها في الجدول التالي:

النوع	القص	التجميع	الطلاء	مقدار الربح
براد X_1	2	1	4	10
غسالة X_2	2	2	2	15
الوقت المتاح	1600	1200	2000	

إن الوقت المتاح أسبوعياً للقيام بكل مرحلة من مراحل التصنيع هي 1600 لمرحلة القص و 1200 ساعة لمرحلة التجميع و 2800 ساعة لمرحلة الطلاء . وبناء على هذه المعلومات فإن مدير الإنتاج يرشح في تحديد الكمية الواجب إنتاجها أسبوعياً حتى يحقق أقصى ربح ممكن، هذا مع العلم أن مساهمة البراد في الربح تبلغ 10 وحدة نقدية وأن مساهمة الغسالة في الربح تعادل 15 وحدة نقدية.

أ- تحديد المشكلة :

يتمثل الهدف في هذه المشكلة في تحديد المزيج الأمثل من المنتجات الذي يحقق أقصى ربح ممكن للشركة ، أي تعظيم الأرباح.
القيود تتمثل في :

قيود الطاقة المتاحة لقسم القص = 1600 ساعة

قيود الطاقة المتاحة لقسم التجميع = 1200 ساعة

قيود الطاقة المتاحة لقسم الطلاء = 1800 ساعة

ب- صياغة النموذج الرياضي:

تحديد متغيرات القرار:

بفرض أن:

X_1 تمثل الكمية الممكن إنتاجها من المنتج براد

X_2 تمثل الكمية الممكن إنتاجها من المنتج غسالة.

صيغة دالة الهدف:

بما أن الهدف هي زيادة كمية الأرباح الممكن الحصول عليها إلى الحد الأقصى من خلال تحديد الكمية التي يجب إنتاجها كل من المنتجين:

$$\text{MAXIMIZE: } Z = 10 X_1 + 15 X_2$$

صيغة القيود:

حتى يمكننا صياغة القيود لابد من تحديد معاملات المتغيرات والموارد المتاحة في كل قسم من الأقسام مع ملاحظة:

1- أن تكون الوحدات المستخدمة في القيد الواحد موحدة نقد، أمتار، ساعات...الخ.

2- يمكن التعبير عن كل قيد من القيود بوحدات مختلفة فيمكن استخدام

الساعات في القيد الأول والنقد في القيد الثاني...الخ.

تتضمن المشكل الحالية ثلاثة قيود تتعلق بالطاقة الإنتاجية المتاحة في الأقسام الثلاثة:

قسم القص: تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج براد إلى 2 ساعة عمل في قسم القص، وكذلك الوحدة الواحدة من المنتج غسالة تحتاج 2 ساعة عمل أيضاً وبما أن الطاقة المتاحة هي 1600 ساعة عمل فيكون القيد الأول:

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 1600$$

قسم التجميع: تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج براد إلى 1 ساعة عمل في قسم التجميع، بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج غسالة إلى 2 ساعة وبما أن الطاقة المتاحة هي 1200 ساعة عمل فيكون القيد الثاني:

$$1 X_1 + 2 X_2 \leq 1200$$

قسم الطلاء:

طريقة السمبلكس

وفق نفس المنطق يكون القيد في القسم الثالث على النحو التالي:

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 2800$$

شرط عدم السلبية:

يجب أن تكون قيم كل من كمية الإنتاج من البراد X_1 وكمية الإنتاج من

الغسالة X_2 أكبر أو تساوي الصفر.

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبشكل موجز يصبح النموذج الرياضي للمشكلة على النحو التالي:

$$\text{Max: } Z = 10 X_1 + 15 X_2$$

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 1600$$

$$1 X_1 + 2 X_2 \leq 1200$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 2800$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

3-2- حل النموذج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس:

1- تحويل المترajحات القيود إلى معادلات:

نقوم بتحويل المترajحات إلى معادلات وذلك لتسهيل تنفيذ العمليات الحسابية المتعلقة بحل نموذج البرمجة الخطية، وبما أن المترajحات من النوع أصغر أو يساوي ($\leq$) فإن تحويل المترajحات إلى معادلات يتطلب إضافة متغيرات جديدة تسمى المتغيرات الراكدة Slack Variables إلى الطرف الأيسر للمترajحات، وذلك بغية تحقيق المساواة بين طرفي المترajحة. وتمثل المتغيرات الراكدة الطاقة غير المستغلة للأقسام الإنتاجية، فالقيد الأول ينص على أن :

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 1600$$

وحتى نحول المترajحة إلى معادلة مساواة فإن ذلك يفترض أن تستغل كامل الطاقة الإنتاجية في قسم القص حتى تصبح المعادلة صحيحة، أما في حالة

وجود طاقة إنتاجية فائضة فإن كامل الطاقة الإنتاجية تصبح: كامل الطاقة - الطاقة المستغلة + الطاقة غير المستغلة. وبفرض أن S_1 تمثل الطاقة غير المستغلة في قسم القص فتصبح المعادلة على النحو التالي:

$$2 X_1 + 2 X_2 + S_1 = 1600$$

إن المتغيرات الراكدة تضاف إلى الطرف الأيسر لكل متراجحة لتحقيق المساواة بين الجانب الأيمن والأيسر للمتراجحة وبالتالي تحول المتراجحة إلى معادلة. وبناء على ذلك فإن الطاقة غير المستغلة المتمثلة في المتغيرات الراكدة بالإضافة إلى الطاقة المستغلة المتمثلة في المتغيرات الأساسية تساوي الطاقة القصوى للقسم الإنتاجي المتمثلة في حجم الموارد المتاحة وبفرض أن S_2, S_3 تمثل المتغيرات الراكدة في القيد الثاني والثالث وعندها تتحول المتراجحات إلى معادلات وفق الصيغة التالية:

$$1 X_1 + 2 X_2 + S_2 = 1200$$

$$4 X_1 + 2 X_2 + S_3 = 2800$$

2- كتابة المعادلات في شكل مصفوفة :

تعتمد طريقة السمبلكس أساساً على جبر المصفوفات Matrix Algebra بدلاً من طرق الجبر العادية ، وعلى ذلك يجب تحويل معادلة الهدف ومعادلات القيود لكي تأخذ شكل المصفوفة أحادية كما يلي:

1- معادلة الهدف :

من القواعد الأساسية لأسلوب البرمجة الخطية أن جميع متغيرات المشكلة (متغيرات القرار) يجب أن تمثل في دالة الهدف، وبناء على ذلك فإن دالة الهدف السابقة يجب أن تتضمن المتغيرات الراكدة بمعاملات صفيرية لأنها تمثل بعض متغيرات المشكلة وتعتبر عن عدم استغلال الموارد المتاحة (أي

طريقة السبلكس

التي تظل عاطلة) . وتظهر المتغيرات الراكدة في دالة الهدف مضروبة بمعاملات صفرية ، ويفسر ذلك اقتصادياً بأن الموارد غير المستغلة لا تساهم بأية أرباح بالنسبة لمشكلات تعظيم الأرباح ، ولا تتحمل أية تكاليف بالنسبة لمشكلات تخفيض التكاليف.

وهكذا نجد أنه بالنسبة للحالة السابقة فإن دالة الهدف تأخذ الشكل التالي :

$$\text{Max: } Z = 10 X_1 + 15 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

أ- معادلات القيود:

لكي تكتمل أعمدة المصفوفة فإننا نظهر المتغيرات الراكدة بأكملها في كل معادلة من معادلات القيود ، ولكي لا يكون هناك أي تضارب من الناحية الرياضية بين معادلات القيود في شكلها الجديد والمعادلات في شكلها الأصلي ، فإننا نظهر المتغير الراكد بمعامل فني مساو للواحد الصحيح في معادلة القيد الخاص به ، وبمعامل فني مساو للصفر في معادلة القيد الذي لا يخصه . ويمكن إيضاح ذلك كما يلي :

$$2 X_1 + 2 X_2 + 1 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 = 1600$$

$$1 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 + 0 S_3 = 1200$$

$$4 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 1 S_3 = 2800$$

ج- فرض عدم السلبية :

المتغيرات الراكدة تكون ذات قيم غير سالبة أي ينطبق عليها أيضاً فرض عدم السلبية ، لأنها إذا كانت سالبة فإن هذا يعني أن الموارد التي استخدمت فعلاً أكثر من الموارد المتاحة، فإن المتغيرات الراكدة لا يمكن أن تكون سالبة أي ينطبق عليها فرض عدم السلبية .

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

ويصبح النموذج الخطي للمشكلة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= 10 X_1 + 15 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 \\ 2 X_1 + 2 X_2 + 1 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 &= 1600 \\ 1 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 + 0 S_3 &= 1200 \\ 4 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 1 S_3 &= 2800 \\ X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3-3- تصميم الحل المبدئي: Initial Basic Feasible Solution

تبدأ طريقة السمبلكس بإيجاد حل مبدئي ممكن للمشكلة يعتبر نقطة

ارتكاز ننطلق منه إلى حلول أخرى أفضل حتى نصل إلى الحل الأمثل، ويتم

ذلك باتباع الخطوات التالية :

إعداد جدول السمبلكس الأول:

يحتاج إعداد جدول السمبلكس الأول إلى تحديد المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية، والأسلوب الذي يمكن استخدامه هو تحديد المصفوفة الأحادية الناجمة عن معادلات القيود فإذا كتبنا معادلات القيود في المشكلة على شكل مصفوفة تنتج معنا المصفوفة التالية:

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
2	2	1	0	0
1	2	0	1	0
4	2	0	0	1

وبما أن المتغيرات الراكدة S_1, S_2, S_3 تشكل مصفوفة أحادية من المرتبة (3×3) فإن ذلك يمكن بسهولة من تحديد حل مجموعة المعادلات الثلاث إذا اخترنا S_1, S_2, S_3 على أنها متغيرات أساسية وجعلنا X_1, X_2 متغيرات غير أساسية (أي جعل قيمته تساوي الصفر). ويكون حل المعادلات على النحو التالي:

$$2(0) + 2(0) + 1 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 = 1600 \rightarrow S_1 = 1600$$

طريقة السمبلكس

$$1 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 + 0 S_3 = 1200 \rightarrow S_2=1200$$

$$4 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 1 S_3 = 2800 \rightarrow S_1=2800$$

إن اعتبار المتغيرات التي تشكل المصفوفة الأحادية متغيرات أساسية

سوف يؤدي دوماً إلى تحديد الحل الأولي والانطلاق منه إلى تحديد إمكانية

تحسين الحل. ويتم وضع الجدول السمبلكس الأول كما هو واضح في الجدول

(1-3).

المساهمة في تابع الهدف							
C_i			10	15	0	0	0
المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
S_1	0	1600	2	2	1	0	0
S_2	0	1200	1	2	0	1	0
S_3	0	2800	4	2	0	0	1
	Z_i	0	0	0	0	0	0
	$C_i - Z_i$		10	15	0	0	0

الجدول (1 - 3) جدول السمبلكس الأول لشركة الصناعات.

والتالي هو عبارة عن إيضاح لمحتويات كل عمود وسطر من أعمدة وأسطر

جداول السمبلكس:

1- الأعمدة : يتكون جدول السمبلكس من الأعمدة التالية :

أ- عمود المتغيرات الأساسية: ويتضمن هذا العمود المتغيرات التي يتكون منها الحل المقترح، أما المتغيرات الأخرى لا تظهر في العمود ويطلق عليها اصطلاح المتغيرات غير الأساسية. وتختلف المتغيرات الأساسية من حل إلى

آخر ، وبالنسبة لجدول السمبلكس الأول الذي يمثل الحل المبدئي فإن المتغيرات الأساسية التي تدخل في الحل الأول هي المتغيرات الراكدة، أي إننا لن ننتج أي وحدة من المنتجات وبالتالي ستبقى الموارد كما هي، لذلك ظهرت S_1, S_2, S_3 في هذا العمود.

ب- عمود مساهمة المتغيرات: ويتضمن هذا العمود هامش المساهمة للمتغيرات الأساسية في الأرباح، أي الأرباح التي تحققها الوحدة الواحدة من المتغيرات الأساسية في الجدول والظاهرة في عمود المتغيرات الأساسية في تابع الهدف، ونظراً لأن المتغيرات الأساسية تختلف من جدول سمبلكس لآخر؛ فإن قيم عمود هامش مساهمة الوحدة تختلف أيضاً من جدول لآخر طبقاً للمتغيرات المذكورة في عمود المتغيرات الأساسية. وبما أننا اعتبرنا S_1, S_2, S_3 المتغيرات الأساسية في الجدول الأول، وبما أن هذه المتغيرات لا تحقق أي أرباح لذلك تم وضع القيم صفر مقابل كل متغير.

ج- عمود قيم المتغيرات الأساسية: ويتضمن هذا العمود كميات أو قيم المتغيرات الأساسية في الحل المقترح ، وفي جدول السمبلكس الأول فإن هذا العمود يتضمن قيم أو كميات الطرف الأيسر من معادلات القيود، وفي الحالة السابقة نجد أن محتويات هذا العمود تتمثل في الطاقة المتاحة للأقسام الإنتاجية .

د- أعمدة المعاملات الفنية لمتغيرات المشكلة: ويتم تخصيص عمود لكل متغير من متغيرات المشكلة ويتوقف عدد هذه الأعمدة على عدد متغيرات المشكلة ويتم تحديدها بواسطة المصفوفة.

2- الصفوف: يتكون جدول السمبلكس من عدد من الصفوف هي :

أ- صف معاملات دالة الهدف ويرمز له ب C_i ويسجل فيه ربح الوحدة الواحدة من كل متغير من متغيرات دالة الهدف أو مساهمة المتغيرات في دالة الهدف.

ب- صف رموز المتغيرات - ويتضمن رموز المتغيرات الأصلية للمشكلة وهي X_1, X_2 بالإضافة إلى رموز المتغيرات الراكدة وهي S_1, S_2, S_3

ت- صفوف معاملات معادلات القيود: ويتوقف عددها على عدد قيود المشكلة المعالجة، حيث إنه يتم تخصيص صف لمعاملات كل معادلة. وتعتبر القيم الواردة في هذه الصفوف عن معاملات الإحلال، بمعنى أنها تمثل مقدار التخفيضات في المتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) الناجمة عن إدخال وحدة واحدة من متغير آخر. فالرقم 4 الظاهر مقابل S_3 في العمود X_1 يدل على أنه لا بد من التضحية ب 4 ساعات عمل في قسم الطلاء من أجل الحصول على وحدة واحدة من المنتج X_1 .

ث- صف الأرباح المحققة من البرنامج المقترح ويرمز له بالرمز Z وينتج هذا الصف من حاصل جمع جداء عمود مساهمة المتغيرات بالعمود الخاص بكل متغير من المتغيرات.

ج- صف اختبار المثالية: وتحتسب قيم هذا الصف بطرح قيم صف الأرباح المحققة من صف معاملات دالة الهدف ($C_i - Z_i$). ويستخدم هذا الصف لتحديد إمكانية تحسين الحل في تابع الهدف إذا ازدادت قيمة كل متغير بمقدار وحدة واحدة، حيث تشير الأرقام الظاهرة في صف اختبار المثالية إلى المبلغ الذي تخسره المنظمة نتيجة عدم إنتاج وحدة واحدة

من المنتج، فالرقم 10 الظاهر مقابل X_1 يدل على أن الشركة تضيق فرصة ربح 10 وحدة نقدية مقابل كل وحدة لا تنتجها من X_1 وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات (تكلفة الفرصة البديلة). فالرقم 15 الظاهر مقابل X_2 يدل على أن الشركة تضيق فرصة ربح 15 وحدة نقدية مقابل كل وحدة لا تنتجها من X_2 وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات (تكلفة الفرصة البديلة) كما أنه لا توجد أي فرص ضائعة لباقي المتغيرات لأنها تدخل في الحل الأولي، ويستخدم هذا الصف في التقييم النهائي للحل كما يلي :

1- إذا كانت المشكلة تعظيم أرباح فإن الحل الأمثل يشترط فيه أن يحتوي صف اختيار المثالية $(C_i - Z_i)$ على قيم سالبة أو أصفار فقط لكل المتغيرات ، أما إذا كانت هناك قيم موجبة فهذا يدل على أننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل، وبالتالي توجد إمكانية لتحسين الحل.

2- إذا كانت المشكلة تخفيض تكاليف فإن الحل الأمثل يشترط فيه أن يحتوي صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ على قيم موجبة أو أصفار لكل المتغيرات ، أما إذا كان هناك قيم سالبة فلا يكون الحل الأمثل.

3-4- تقويم الحل:

يتضح من دراسة وتحليل جدول السمبلكس الأول النتائج التالية:

1- درجة استغلال الموارد :

يقوم الحل المبدئي على أساس إنتاج المتغيرات الراكدة أي إن الطاقة الإنتاجية كلها غير مستغلة ، أي عدم الإنتاج وبالتالي فإن

$$X_1=0, X_2=0$$

وعلى ذلك فإن الطاقة غير المستغلة تتمثل في

$$S_1=1600, S_2=1200, S_3=2800$$

2- هامش المساهمة الكلي :

يمكن حساب الربح الذي يحققه الحل المبدئي عن طريق جمع حاصل جداء عمود مساهمة المتغيرات في عمود قيم المتغيرات :

$$Z_i = 0 \times 1200 + 0 \times 1600 + 0 \times 2800 = 0$$

3- اختبار مثالية الحل :

الحل المبدئي لا يحقق المثالية المطلوبة لأن صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ يحتوي على قيم موجبة ، وبالتالي فهناك إمكانية لتحسين الحل بإدخال متغيرات أخرى لتحل محل المتغيرات الأساسية التي يتضمنها الحل المبدئي.

3-5- تحسين الحل القائم :

نظرا لأن الحل الأولي في الشكل (3-1) لا يحقق ربحاً للشركة، لذلك يجب البحث عن حل آخر أفضل منه ، وذلك باتباع الخطوات التالية:

أ- تحديد المتغيرات المطلوبة لتحسين الحل القائم:

لكي يتم التوصل إلى حل أفضل من الحل القائم يجب تحديد المتغير الذي يجب أن ندخله ليحل محل أحد المتغيرات الداخلة في الحل القائم، ويترتب على عملية الإحلال تحسين الحل القائم، وبما أن تابع الهدف في هذه الحالة هو تعظيم الأرباح؛ فإن هذا يستوجب البحث عن المتغير الذي يضيف أقصى ربح في الوحدة الواحدة، لذلك يتم اختيار المتغير الموافق لأعلى قيمة موجبة في صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ ، ليتم إدخاله في الحل عوضاً عن أحد المتغيرات الراكدة ويطلق على هذا المتغير، المتغير الداخل (Entering variable) وبما أن المنتج X_2 سيضيف أكبر ربح وقدره 15 وحدة نقدية للوحدة الواحدة، فهو إذن المتغير الأساسي الذي سوف يدخل في الحل الجديد ويكون العمود X_2 هو العمود المفتاح (Key Column). للحل لأنه يحتوي على المتغير الذي يعطي أكبر

الوحدة الثالثة

كمية من الربح للوحدة الواحدة، وفي حال وجود أكثر من قيمة موجبة متساوية في الصف الأخير فيمكن عندئذ اختيار أحد المتغيرات الموافقة لهذه القيم المتساوية ذات الربح الأعلى وجعله متغيراً أساسياً.

ب- تحديد المتغير الخارج:

بعد تحديد المتغير غير الأساسي الذي يدخل في الحل الجديد ليصبح متغيراً أساسياً، وبعد تحديد عمود المفتاح الذي يحتوي على المتغير الداخل، فإن الخطوة التالية هي تحديد المتغير الأساسي الذي سيخرج من الحل القائم، ويصبح متغيراً غير أساسي في الحل الجديد والذي يطلق عليه اصطلاح المتغير الخارج (Exiting variable)، ويتم تحديد ذلك بتقسيم عناصر عمود المتغيرات على معاملات الإحلال الخاصة بالمتغير الجديد X_2 واختيار المتغير الذي يقابل أصغر قيمة موجبة على أنه المتغير غير الأساسي الذي سوف يتم الاستغناء عنه (سوف يحول إلى متغير غير أساسي)، ويطلق على الصف المقابل له الصف المتاح (The Key Row).

وبالعودة إلى الجدول (3-1) وبقسمة قيم المتغيرات الأساسية في هذا الجدول على معدلات الإحلال الموجودة في عمود X_2 ينتج معنا القيم التالية:

المتغيرات	S_1	S_2	S_3
قيم المتغيرات	1600	1200	2800
÷ معدلات الإحلال الخاصة بـ X_2	2	2	2
نتائج عملية القسمة	800	600	1400

وبما أن أصغر قيمة موجبة هي 600 والتي تقابل المتغير S_2 ، فإن المتغير S_2 يصبح هو المتغير الخارج، والصف المقابل له يصبح هو الصف المستغنى عنه. يتضح من اختبار الصفوف أنه لو تم إنتاج X_2 بدلا من S_1 نلاحظ أنه يمكن أن ننتج 800 وحدة في القسم الإنتاجي (القص)، ونظرا لأن X_2 يتم إنتاجه في الأقسام الإنتاجية الثلاثة القص والتجميع والطلاء، لذلك يجب أن تسمح الطاقة الإنتاجية للأقسام الأخرى بإنتاج الكمية نفسها ولكن نلاحظ أن الطاقة الإنتاجية القصوى للقسم الثاني قسم التجميع هي 600 وحدة فقط، وبالتالي فإن ذلك مخالف لفرض عدم السلبية لأن إنتاج 800 وحدة من X_2 في قسم القص يؤدي إلى وجود موارد سالبة وهذا غير واقعي لأنه لا توجد موارد سالبة. وبناء على ذلك فإن أقصى كمية يمكن إنتاجها من X_2 هي 600 وحدة وهي تمثل أقل قيمة موجبة يمكن أن تنتج في حدود الطاقة الإنتاجية للأقسام الإنتاجية الثلاثة وتحقق فرض عدم السلبية، وبالتالي فإن المتغير X_2 سوف يحل محل المتغير S_2 أي إن المتغير الذي يرشح للخروج من الحل القائم هو S_2 و يطلق على الصف الذي يقع فيه المتغير المرشح للخروج بصف المفتاح. و الذي يمكن تعريفه بأنه الصف الذي يتضمن المتغير الأساسي الذي له قيمة موجبة من خارج قسمة عناصر عمود قيم المتغيرات الأساسية على معدلات الإحلال المناظرة بعمود المفتاح. و كقاعدة عامة في طريقة السمبلز فإن صف المفتاح هو النصف الذي يتضمن المتغير الذي له أقل قيمة موجبة نتيجة قسمة قيم المتغيرات الأساسية على القيم المناظرة لها في عمود المفتاح بعد استبعاد القيم السالبة والصفرية.

إعداد الجدول الثاني:

يتم إعداد الحل الثاني الظاهر في الجدول (2-3) الذي يجب أن يتضمن حلاً أفضل من الحل المتاح في الجدول الأول.

المساهمة في تابع الهدف C_1			10	15	0	0	0
المتغيرات الأساسية	المتغيرات الأساسية	قيم مساهمة المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
S_1	0	400	1	0	1	-1	0
X_2	15	600	0.5	1	0	0.5	0
S_3	0	1600	3	0	0	-1	1
	Z_1	9000	7.5	15	0	7.5	0
	$C_1 - Z_1$		2.5	0	0	-7.5	0

الجدول (2-3) جدول السمبلكس الثاني لشركة الصناعات

لا يترتب على إعداد جدول السمبلكس الجديد أي تغيير في عدد المتغيرات، وذلك يؤدي إلى ثبات عدد الصفوف والأعمدة في كل الحلول الممكنة للمشكلة، لأن جدول السمبلكس الجديد يتم اشتقاقه من الجدول السابق له، فإنه من الضروري تعديل كل صفوف الجدول السابق؛ وذلك لأن الحل الجديد يتضمن إدخال متغير غير أساسي لم يكن في الحل السابق ليحل محل متغير أساسي كان الحل السابق، مما يترتب عليه تغيير وتعديل صف المفتاح وباقي صفوف

طريقة السبلكس

الجدول السابق لكي يتناسب مع محتويات الجدول الجديد ، ويتم ذلك وفقا لقواعد وأسس ثابتة كما يلي :

بعد تحديد عمود المفتاح أو عمود المتغير المرشح للدخول ، وتحديد صف المفتاح أو صف المتغير المرشح للخروج فإن الخطوة التالية هي تحديد العنصر المحوري pivot element وهو القيمة التي تقع عند تقاطع العمود المفتاح مع الصف المفتاح. ويستخدم العنصر المحوري في إعداد حل جديد عن طريق إجراء بعض التعديلات على الحل السابق . حيث يتم الوصول إلى قيمة الصف الجديد المدخل عن طريق قسمة القيم الموجودة في الصف المرشح للخروج على قيمة العنصر المحوري كما يتضح من الجدول التالي:

قيم الصف المرشح للخروج	1200	1	2	0	1	0
÷ العنصر الحيوي	2	2	2	2	2	2
قيم الصف الجديد المدخل	600	0.5	1	0	0.5	0

وهكذا نستطيع تحديد قيمة الصف الجديد المدخل. أما بالنسبة لبقية الصفوف فلا يمكن تحديد قيمها إلا بعد تحديد العنصر المتقاطع (Intersecting Element). ويعرف العنصر المتقاطع بأنه العنصر الذي يقع عند تقاطع الصف القديم مع العمود المفتاح (العمود المرشح للدخول. ومن العودة إلى الجدول (3-1) نلاحظ أن الصف الأول S_1 يتقاطع مع العمود X_2 عند القيمة 2. وبالتالي يعد هذا العنصر المتقاطع للسطر S_1 .

من أجل إيجاد القيم الجديدة للصف S_1 نقوم بتطبيق المعادلة التالية:
عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم - {العنصر المتقاطع × (العناصر المناظرة في الصف الجديد المدخل) } . وبتطبيق المعادلة على الصف S_1 حسب الجدول التالي تنتج معنا القيم الجديدة للصف S_1 في جدول السبلكس الثاني:

$$= 1600 - (2 \times 600) = 400 \text{ قيمة المتغير}$$

$$X_1 = 2 - (2 \times 0.5) = 1$$

$$X_2 = 2 - (2 \times 1) = 0$$

$$S_1 = 1 - (2 \times 0) = 1$$

$$S_2 = 0 - (2 \times 0.5) = -1$$

$$S_3 = 0 - (2 \times 0) = 0$$

وكذلك الأمر فيما يتعلق بالصف S_3 ، حيث نلاحظ من الجدول (3-1) أن نقطة تقاطع الصف مع العمود المدخل (العمود المفتاح) هو 2 أي العنصر المتقاطع ويتم تطبيق الخطوات نفسها المطبقة على الصف السابق فينتج معنا الجدول التالي:

$$\text{قيمة المتغير} = 2800 - (2 \times 600) = 1600$$

$$X_1 = 4 - (2 \times 0.5) = 3$$

$$X_2 = 2 - (2 \times 1) = 0$$

$$S_1 = 0 - (2 \times 0) = 0$$

$$S_2 = 0 - (2 \times 0.5) = -1$$

$$S_3 = 1 - (2 \times 0) = 1$$

طريقة السميكس

بعد الحصول على الصفوف الثلاثة في الجدول الثاني بقي علينا أن نحسب قيمة دالة الهدف Z_i في الجدول الثاني عن طريق ضرب عمود المساهمة الحدية للمتغيرات بالعناصر المناظرة في كل عمود من أعمدة الجدول الثاني كما يتم عند حساب الأرباح في الحل المبني كما يلي:

$$Z_i = (0 \times 400) + (15 \times 600) + (0 \times 1600) = 9000$$

$$Z_{x1} = (0 \times 1) + (15 \times 0.5) + (0 \times 3) = 7.5$$

$$Z_{x2} = (0 \times 0) + (15 \times 1) + (0 \times 0) = 15$$

$$Z_{s1} = (0 \times 1) + (15 \times 0) + (0 \times 0) = 0$$

$$Z_{s2} = (0 \times -1) + (15 \times 0.5) + (0 \times -1) = 7.5$$

$$Z_{s3} = (0 \times 0) + (15 \times 0) + (0 \times 1) = 0$$

أما عمود اختبار المثالية $Z_i - C_i$ فيتم حسابه كما ورد عند الحل المبني بطرح القيم الموجود في الصف Z_i من القيم الموجودة في الصف C_i كما يلي:

$$X_1 = 10 - 7.5 = 2.5$$

$$X_2 = 15 - 15 = 0$$

$$S_1 = 0 - 0 = 0$$

$$S_3 = 0 - 7.5 = -7.5$$

$$S_3 = 0 - 0 = 0$$

تكوين الحل في الجدول الثاني:

يتضح من دراسة وتحليل جدول السميكس الثاني النتائج التالية:

1- درجة استغلال الموارد : يتم حساب الطاقة غير المستغلة في الأقسام

على النحو التالي:

الطاقة غير المستغلة = الطاقة المتاحة - (عدد الوحدات المنتجة $\times$ عدد الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة الواحدة).

يقوم البرنامج الجديد على أساس إنتاج 0 وحدة من المنتج الأول (براد) و 600 وحدة من المنتج الثاني (غسالة) فإن الطاقة غير المستغلة في الأقسام هي على النحو التالي:

$$\text{قسم القص} = 1600 - (2 \times 600) = 1800 - 1200 - 400$$

$$\text{قسم التجميع} = 1200 - (2 \times 600) = 1200 - 1200 = 0$$

$$\text{قسم الطلاء} = 2800 - (2 \times 600) = 2800 - 1200 - 1600$$

2- هامش المساهمة الكلي:

يمكن حساب الأرباح التي يحققها الحل المقترح:

$$Z = 0 \times 400 + 15 \times 600 + 0 \times 1600 = 9000$$

وبناء على ذلك فإن الحل الجديد أفضل من الحل السابق؛ حيث إنه يحقق زيادة في الأرباح قدرها 9000 وحدة نقدية.

3- اختبار مثالية الحل :

الحل الثاني لا يحقق المثالية المطلوبة لأن صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ ، انظر الجدول رقم (2-3)، مازال يتضمن قيماً موجبة، وبالتالي فهناك إمكانية لتحسين الحل بإدخال متغيرات أخرى لتحل محل المتغيرات الأساسية التي يتضمنها الحل الثاني.

خامساً - تحسين الحل القائم الثاني :

للتوصل إلى حل أفضل من الحل السابق نتبع الخطوات نفسها، السابق اتباعها لتحسين الحل الأولي كما يلي :

أ- تحديد المتغير الداخل:

يتم اختيار المتغير الموافق لأعلى قيمة موجبة في صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ كما في الجدول (2-3)، ليتم إدخاله في الحل عوضاً عن أحد المتغيرات

طريقة السبلكس

الراكدة، وبما أن المنتج X_1 سيضيف ربحاً قدره 2.5 وحدة نقدية للوحدة الواحدة، فهو إذن المتغير الأساسي الذي سوف يدخل في الحل ويكون العمود X_1 هو العمود المفتاح (Key Column) للحل لأنه يحتوي على المتغير الذي يعطي أكبر كمية من الربح للوحدة الواحدة.

ب- تحديد المتغير الخارج:

الخطوة التالية هي تحديد المتغير الأساسي الذي سيخرج من الحل القائم ويصبح متغيراً غير أساسي في الحل الجديد، والذي يطلق عليه اصطلاح المتغير الخارج (Exiting variable)، ويتم تحديد ذلك بتقسيم قيمة المتغيرات على معاملات الإحلال الخاصة بالمتغير الجديد X_1 واختيار المتغير الذي يقابل أصغر قيمة موجبة على أنه المتغير غير الأساسي الذي سوف يتم الاستغناء عنه.

بالعودة إلى الجدول (2-3) وبقسمة قيم المتغيرات الأساسية في هذا الجدول على معدلات الإحلال الموجودة في عمود X_1 ينتج معنا القيم التالية:

المتغيرات	S_1	X_2	S_3
قيم المتغيرات	400	600	1600
÷ معدلات الإحلال الخاصة بـ X_2	1	0.5	3
ناتج عملية القسمة	400	1200	533.3

وبما أن أصغر قيمة موجبة هي 400 والتي تقابل المتغير S_1 ، فإن المتغير الخارج من الحل يصبح هو S_1 .

الوحدة الثالثة

نقوم بعد ذلك بحساب قيمة للصنف الجديد المدخل X_1 وذلك من خلال قسمة عناصر الصنف القديم S_1 على العنصر المحوري (نقطة تقاطع الصنف الخارج مع العمود المفتاح) والذي يأخذ القيمة 1 كما في الجدول التالي:

قيم الصنف المرشح للخروج	400	1	0	1	-1	0
العنصر المحوري	1	1	1	1	1	1
قيم الصنف الجديد المدخل	400	1	0	1	-1	0

نقوم بعد ذلك بتعديل قيم الصفوف القديمة في الجدول الجديد وفق القواعد السابقة نفسها التي تم ذكرها عند إعداد الجدول الثاني، فالعنصر المتقاطع بين الصنف X_2 والعمود المفتاح X_1 هو 0.5 ويتم حساب القيم المعدلة لـ X_2 وفق القاعدة:

عناصر الصنف الجديد = عناصر الصنف القديم - {العنصر المتقاطع $\times$ }
العناصر المتناظرة في الصنف الجديد المدخل) } وبتطبيق هذه القاعدة ينتج معنا التالي:

$$= 400 - (-0.5 \times 400) = 600 \text{ = قيمة المتغير}$$

$$X_1 = 0.5 - (0.5 \times 1) = 0$$

$$X_2 = 1 - (0.5 \times 0) = 1$$

$$S_1 = 0 - (0.5 \times 1) = -0.5$$

$$S_2 = 0.5 - (0.5 \times -1) = 1$$

$$S_3 = 0 - (0.5 \times 0) = 0$$

وبتطبيق الآلية نفسها يمكن حساب قيم الصنف S_3 الجديدة وفق الجدول التالي مع ملاحظ أن قيمة العنصر المتقاطع هي 3.

$$= 1600 - (3 \times 400) = 400 \text{ = قيمة المتغير}$$

طريقة السمبلكس

$$X_1 = 3 - (3 \times 1) = 0$$

$$X_2 = 0 - (3 \times 0) = 0$$

$$S_1 = 0 - (3 \times 1) = -3$$

$$S_2 = -1 - (3 \times -1) = 2$$

$$S_3 = 1 - (3 \times 0) = 1$$

وبالتالي ينتج معنا جدول السمبلكس الثالث الوارد في الجدول رقم (3-3).

ولكي تكتمل الحسابات في الجدول نقوم بحساب كل من قيم صف تابع الهدف Z_i وقيم صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ ، ويتم حساب قيم ذين الصفين وفق القواعد نفسها المذكورة عند إعداد الجداول السابقة. ونتيجة الحساب ينتج معنا

قيم Z_i التالية:

$$Z_1 = (10 \times 400) + (15 \times 400) + (0 \times 1600) = 10000$$

$$Z_{x1} = (10 \times 1) + (15 \times 0) + (0 \times 3) = 10$$

$$Z_{x2} = (10 \times 0) + (15 \times 1) + (0 \times 0) = 15$$

$$Z_{s1} = (10 \times 1) + (15 \times -0.5) + (0 \times -3) = 2.5$$

$$Z_{s2} = (10 \times -1) + (15 \times 1) + (0 \times 2) = +5$$

$$Z_{s3} = (10 \times 0) + (15 \times 0) + (0 \times 1) = 0$$

أما صف اختبار المثالية $C_i - Z_i$ فيتم حسابه كما ورد عند الحل المبدئي بطرح القيم الموجود في الصف Z_i من القيم الموجودة في الصف C_i كما يلي:

$$X_1 = 10 - 10 = 0$$

$$X_2 = 15 - 15 = 0$$

$$S_1 = 0 - 2.5 = -2.5$$

$$S_2 = 0 - 5 = -5$$

$$S_3 = 0 - 0 = 0$$

المساهمة في تابع الهدف C_i			10	15	0	0	0
قيم المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات الأساسية		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
X_1	10	400	1	0	1	-1	0
X_2	15	400	0	1	-0.5	1	0
S_3	0	400	0	0	-3	2	1
Z_i	10000		10	15	2.5	5	0
$C_i - Z_i$			0	0	-2.5	-5	0

الجدول (3-3) جدول السمبلكس الثالث لشركة الصناعات

تقويم الحل في الجدول الثالث:

يتضح من دراسة وتحليل جدول السمبلكس الثالث النتائج التالية:

1- درجة استغلال الموارد : يتم حساب الطاقة غير المستغلة في الأقسام

على النحو التالي:

الطاقة غير المستغلة = الطاقة المتاحة - (عدد الوحدات المنتجة $\times$ عدد الساعات اللازمة لإنتاج الوحدة الواحدة).

يقوم البرنامج الجديد على أساس إنتاج 400 وحدة من المنتج الأول (براد) و

400 وحدة من المنتج الثاني (غسالة)، وبالتالي فإن الطاقة غير المستغلة في

الأقسام هي على النحو التالي:

$$\text{الفائض في قسم القص} = 1600 - (2 \times 400) - (2 \times 400) =$$

$$1600 - 800 - 800 = 0$$

$$\text{الفائض في قسم التجميع} = 1200 - (1 \times 400) - (2 \times 400)$$

$$1200 - 400 - 800 = 0$$

$$\text{الفائض في قسم الطلاء} = 2800 - (4 \times 400) - (2 \times 400)$$

$$2800 - 1600 - 800 = 400$$

2- هلمش المساهمة الكلي:

يمكن حساب الأرباح التي يحققها البرنامج الثالث المقترح، وبناء على ذلك فإن الحل الجديد أفضل من الحل السابق؛ حيث إنه يحقق زيادة في الأرباح قدرها 1000 وحدة نقدية عن الحل الثاني.

3- اختبار مثالية الحل :

الحل الثالث يحقق أفضل حل ممكن، لأن صف اختبار المثالية $(Z_i - C_i)$ لا يتضمن أي قيم موجبة، وبالتالي لا توجد إمكانية لتحسينه .

3-6- أسعار الظل Shadow Prices:

من بين القضايا الهامة التي يطرحها استخدام البرمجة الخطية، هي قضية المبلغ الذي تستعد الشركة لدفعه مقابل من أجل تأمين موارد إضافية؟ ما هي قيمة ساعة طاقة إنتاجية إضافية في قسم القص مثلاً؟ هل هي 20 وحدة نقدية أو أكثر أو أقل. وهل يعد صحيحاً أن تقوم الشركة بتشغيل العمال في قسم ما ساعات عمل إضافية من أجل زيادة كمية الإنتاج؟ والخلاصة هناك معلومات هامة للإدارة يمكن الحصول عليها، إذا تمت معرفة القيمة الحقيقية للموارد الإضافية.

هذه المعلومات تكون متاحة في الجدول الأخير من جداول السمبلكس لمشاكل البرمجة الخطية.

ويقدم صف اختبار المثالية ($C_i - Z_i$) معلومات هامة من خلال القيم الملبية التي يتضمنها حول المتغيرات الراكدة. إنها تمثل أسعار الظل للموارد. إن أسعار الظل هي مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة تغيير مورد ما بمقدار وحدة واحدة. في حالة مشكلات تعظيم الأرباح فإن سعر ظل الموارد المتاحة عبارة عن مقدار الزيادة (أو النقص) في الأرباح نتيجة زيادة (أو نقص) الموارد المتاحة بمقدار وحدة واحدة.

ففي صف اختبار المثالية ($C_i - Z_i$) في جدول السمبلكس الثالث (الجدول رقم 3-3)، نجد العمود S_1 قيمة سالبة قدرها (-2.5)، وتشير هذه القيمة إلى أن زيادة الطاقة الإنتاجية في قسم القص ساعة واحدة يؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار 2.5 وحدة نقدية. وبالمثل فإن العمود S_2 يحتوي على قيمة سالبة قدرها (-5) وتشير إلى أن زيادة الطاقة الإنتاجية لهذا القسم بمقدار ساعة واحدة تؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار 5 وحدة نقدية؛ وبطلق على القيم السالبة السابقة أسعار الظل للموارد المتاحة، أما بالنسبة للعمود S_3 ذي القيمة صفر في صف اختبار المثالية أي إن سعر الظل لهذا المورد (القسم) يعادل الصفر؛ لأن هذا القسم ما زال به طاقة عاطلة وأي زيادة في الطاقة الإنتاجية لن تؤدي إلى زيادة الأرباح، وأي نقص في الطاقة المتاحة في حدود الطاقة غير المستغلة لهذا القسم لن تؤدي إلى نقص الأرباح. والهدف من التعرف على أسعار الظل للموارد المتاحة هو التوصل إلى القيمة الحقيقية للموارد المتاحة كما يلي :

القيمة الحقيقية للموارد المتاحة = حجم الموارد المتاحة × سعر الظل .

طريقة السبلوكس

بالنسبة لقسم القص: إن سعر الظل الخاص به يظهر في العمود S_1 في صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ في الجدول رقم (3-3) ويظهر بقيمة قدرها 2.5، كما أن الطاقة المتاحة لهذا القسم = 1600 ساعة .

إذا القيمة الحقيقية للطاقة الإنتاجية في قسم القص = $4000 - 2.5 \times 1600$
- بالنسبة قسم التركيب: إن سعر الظل الخاص به يظهر في العمود S_2 في صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ في الجدول رقم (3-3) ويظهر بقيمة قدرها 5، كما أن الطاقة المتاحة لهذا القسم = 1200 ساعة .

إذا للقيمة الحقيقية للطاقة الإنتاجية في قسم التركيب = $6000 - 5 \times 1200$
- بالنسبة لقسم الطلاء: فإن سعر الظل الخاص بهذا القسم يظهر في العمود S_3 بقيمة قدرها 0 وبالتالي فإن القيمة الحقيقية للطاقة الإنتاجية في قسم الطلاء تساوي $0 - 0 \times 2800$

وعلى ذلك فإن إجمالي القيمة الحقيقية (الاقتصادية) للموارد كما يلي :

$$10000 = 0 + 6000 + 4000$$

وهي الأرباح نفسها التي يحققها البرنامج للمذكور.



الوحدة الرابعة

طريقة السمبلز

وقضايا تخفيض التكاليف

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بصياغة مسائل البرمجة الخطية الهادفة إلى تخفيض التكاليف.
- تعريف الطالب باستخدام أسلوب الغرامة في مسائل تخفيض التكاليف.



تعتبر الخطوات السابقة لطريقة السمبلكس في حل مشكلات تعظيم الأرباح، إطار عام قابل للتطبيق على معظم مشاكل البرمجة الخطية مع الأخذ في الاعتبار بعض الاختلافات التي تتعلق بطبيعة وخصائص بعض المشاكل . وبناء على ذلك فإننا سوف نتبع الخطوات السابقة لحل نوع آخر من مشاكل البرمجة الخطية وهي مشاكل تخفيض التكاليف ، مع توضيح أوجه الخلاف بينها وبين مشاكل تعظيم الأرباح التي سبق مناقشتها.

5-1- المتغيرات الإضافية:

لقد استخدمنا في الفصل السابق في كل قيود المشكلة أصغر من أو يساوي (≤) . وحيث أنه من الشائع في الواقع العملي وبالأخص في مشاكل تخفيض التكاليف وجود حالة أكبر أو يساوي (≥) في قيود المشكلة، فإن تحويل المتراجحة إلى معادلة يختلف في هذه الحالة عن الحالات السابقة عند تصميم الحل الأولي لجدول السمبلكس الأول. لذلك رأينا أن نستعرض كيفية تحويل القيود إلى معادلات في حالة أكبر من أو يساوي قبل التعرض إلى كيفية معالجة مشاكل تخفيض التكاليف باستخدام جداول السمبلكس. لنأخذ على سبيل المثال المتراجحتين التاليتين:

$$5 X_1 + 10 X_2 + 8 X_3 \geq 210$$

$$25 X_1 + 30 X_2 = 900$$

في مثل هذا النوع من المتراجحات وعلى العكس من المتراجحات في الفصل السابق يجب أن تطرح من الطرف الأيسر متغيرات تسمى المتغيرات الإضافية (Surplus Variable) عوضاً عن الجمع بالنسبة للمتغيرات الراكدة (Slack Variable) في حالة تعظيم الأرباح، فالمتغيرات الإضافية تعطينا ما هو مقدار تجاوز الحل المقترح للموارد المتاحة. لذلك يطلق على هذه المتغيرات الفوائض

السلبية. أن تحويل القيد الأول يتم بطرح قيمة المتغير الراكذ الأول من القيد الأول على النحو التالي:

$$5 X_1 + 10 X_2 + 8 X_3 - S_1 = 210$$

فلو فرضنا أن الحل للمشكلة أعطى النتائج التالية:

$$X_1 = 20, X_2 = 8, X_3 = 5.$$

فإن كمية الفائض من المورد يمكن أن تحسب على النحو التالي:

$$5(20) + 10(8) + 8(5) - S_1 = 210$$

$$100 + 80 + 40 - S_1 = 210$$

$$-S_1 = 210 - 220 = -10$$

$$S_1 = 10$$

حيث تمثل هذه القيمة عدد الوحدات الفائضة من المورد الأول.

5-2- المتغيرات الاصطناعية: (Artificial Variables)

كما سبق أوضحنا القواعد الأساسية لطريقة السمبلكس تتضمن الحل المبدي بدلالة المتغيرات الراكدة أي أن المتغيرات الأصلية للمشكلة لا يتم إنتاجها في البرنامج الأولي. أما بالنسبة لمشكلات تخفيض التكاليف فإن ذلك يؤدي إلى جعل المتغيرات الراكدة سالبة أي أنه إذا تم التعويض عن المنتجات الأصلية X_1, X_2, X_3 بصفر فإن المتغيرات الراكدة S_1 تكون قيمتها:

$$5(0) + 10(0) + 8(0) - S_1 = 210$$

$$0 - S_1 = 210 \rightarrow S_1 = -210$$

وهي قيمة سالبة وهذا يخالف فرض عدم السلبية، إذ أن كافة المتغيرات في البرمجة الخطية يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر، وللتغلب على هذه المشكلة فإنه يتم إضافة متغيرات أخرى للطرف الأيمن من المعادلة تكون موجبة ويطلق عليها اصطلاح المتغيرات الاصطناعية وهذه المتغيرات لا وجود لها في المشكلة الأصلية ولكنها متغيرات مساعدة تهدف إلى المساعدة

كمشايًا تخفيض التكاليف

في التغلب على مشكلة المتراجحات من النوع أكبر من أو يساوي ، وتظهر هذه المتغيرات في الحل المبدئي ثم تخرج هذه المتغيرات من الحل قبل أن نصل إلى الحل النهائي للمشكلة ويصبح القيد على النحو التالي:.

$$5 X_1 + 10 X_2 + 8 X_3 - S_1 + A_1 = 210$$

حيث A_1 متغير اصطناعي

لنلق الضوء على القيد الثاني:

$$25 X_1 + 30 X_2 = 900$$

إن القيد هو عبارة عن مساواة، ولكن من أجل تضمينها في الحل الأولي، يجب أن نضيف إليها متغير اصطناعي ولذلك يجب إعادة صياغة القيد الثاني على النحو التالي:

$$25 X_1 + 30 X_2 + A_2 = 900$$

وبعود السبب في إدخال المتغيرات الاصطناعية حتى في القيود التي تكون من نوع يساوي، هو في آلية تصميم الحل الأولي، عندما نقوم بافتراض أن متغيرات المشكلة الأساسية تساوي الصفر، فعندئذ سيظهر المتغير الاصطناعي بقيمة الموارد وسيظهر أن $A_2 = 900$.

المتغيرات الاصطناعية هي عبارة عن متغيرات افتراضية ، ليس لها وجود مادي ملموس، وهي ليست أكثر من أدوات حسابية لتصميم الحل الأولي في مشاكل البرمجة الخطية، لذلك يمكن اعتبارها موارد غالية الثمن، تكلفتها أعلى من بقية الموارد المستخدمة في المشكلة الأصلية، ويتم التخلص منها خلال عملية الحل وذلك عبر إضافتها إلى تابع الهدف بمعاملات كبيرة، إذ أنه طالما كانت تكلفتها أعلى من الموارد الأصلية، فإنها لن تؤدي إلى الوصول إلى أقل تكلفة ممكنة.

وسوف نقوم بإيضاح ذلك من خلال الحالة الافتراضية التالية :

حالة عملية:

تنتج إحدى شركات الصناعات الدوائية نوعين من الأدوية هما B1 و B2 باستخدام نوعين من المواد الأولية هما X_1 , X_2 لقد توافرت لديك البيانات التالية :

إن الوحدة الواحدة من المادة الأولية X_1 تحتوي على وحدتين من B1، ووحدة من B2، كما أن الوحدة الواحدة من المادة الأولية X_2 تحتوي على وحدتين من B1، ووحدة واحدة من B2. الأدنى منها بأقل تكلفة ممكنة.

أولاً- تحديد القيود: علمت أن تكلفة الوحدة من المادة X_1 تساوي 12 و من المادة X_2 تساوي 15 وأن كمية الاحتياجات الدنيا من B1 تساوي 50 وحدة ومن B2 تساوي 45 وحدة، وترغب إدارة الشركة في تحديد كمية المواد الأولية اللازمة لتجهيز الأدوية وتوفير الحد مشكلة:

الهدف: وهو عبارة عن تحديد كمية المواد الأولية اللازمة لتحضير المنتجين بأقل التكاليف، أي تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن.

القيود: تتمثل قيود المشكلة في توفير الحد الأدنى من الاحتياجات من المنتجين قيد الحد الأدنى من المنتج B1 تساوي 50 وحدة، قيد الحد الأدنى من المنتج B2 تساوي 45 وحدة.

البدايل: تتمثل البدائل في المواد الأولية X_1 , X_2 التي تدخل في تحضير المنتجين.

ثانياً- صياغة النموذج الرياضي:

لتصليها تخفيض التكاليف

صياغة دالة الهدف تهدف الشركة إلى تحضير المنتجين بأقل التكاليف الممكنة وبالتالي يمكن صياغة دالة الهدف

$$\text{Minimize: } Z = 12 X_1 + 15 X_2$$

صياغة القيود: تتم صياغة القيود على شكل متراجحات تأخذ شكل أكبر من أو يساوي:

$$2 X_1 + 2 X_2 \geq 50$$

$$1 X_1 + 2 X_2 \geq 45$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ثالثاً- تحويل المتراجحات إلى معادلات:

ويتم تحويل متراجحات القيود إلى معادلات كما يلي :

1- طرح المتغيرات الراكدة :

لتحويل المتراجحات إلى معادلات تستخدم المتغيرات الراكدة كما في

مشكلات تعظيم الأرباح ، ولكن في مشكلات تخفيض التكاليف فإن المتراجحات تكون عادة من النوع أكبر من أو يساوي ، ولتحويلها إلى معادلات فإننا نطرح

المتغيرات الراكدة S_1 الخاصة بالمنتج B1 ، S_2 الخاصة بالمنتج B2 من

الطرف الأيسر لتحقيق المساواة بين الطرفين الأيمن والطرف الأيسر للمتراجحة

وبالتالي تحول المتراجحة ، إلى معادلة - وتمثل المتغيرات الراكدة في مشاكل

تخفيض التكاليف قيمة الزيادة عن الحد الأدنى المطلوب توفيره من الموارد

المتاحة ،

وعلى ذلك فإن المتغيرات الراكدة S_1 ، S_2 تمثل كميات مستعدة وبذلك

تحول المتراجحات إلى معادلات كما يلي :

$$2 X_1 + 2 X_2 - S_1 = 50$$

$$1 X_1 + 2 X_2 - S_2 = 45$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

٢- إضافة المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables

تشير المتغيرات الاصطناعية إلى أنها مواد وهمية كل وحدة تحتوي على وحدة واحدة من المنتج ، فمثلاً A_1 تمثل وحدة واحدة من المنتج B_1 ، A_2 تمثل وحدة واحدة من المنتج B_2 ، وعلى ذلك فهناك تشابه بين كل من S_1 ، A_1 ، وبين S_2 ، A_2 من هذه الناحية. وبفرض أن المتغيرات الاصطناعية A_1 للمنتج B_1 ، A_2 للمنتج B_2 ، فإنه يمكن إضافة المتغيرات الاصطناعية للمعادلات لكي تأخذ الشكل التالي :

$$\begin{aligned} 2 X_1 + 2 X_2 - S_1 + A_1 &= 50 \\ 1 X_1 + 2 X_2 - S_2 + A_2 &= 45 \end{aligned}$$

رابعاً - كتابة المعادلات على شكل مصفوفة:

1- صياغة دالة الهدف: من المعروف أن دالة الهدف يجب أن تتضمن كافة

المتغيرات التي تتضمنها القيود، بما في ذلك المتغيرات الراكدة

والمتغيرات الاصطناعية، أما معاملات المتغيرات الأصلية X_1 ، X_2

فتمثل في تكلفة الوحدة ، أما المتغيرات الراكدة فتكون مساهمتها في

التكلفة صفر. أما بالنسبة للمتغيرات الاصطناعية A_1 و A_2 فهي

متغيرات أقحمت في المشكلة لكي نتمكن من صياغة الحل الأولي، ولكي

نضمن خروجها من الحل خلال عملية تقليل التكلفة، نفترض أن تكلفتها

أعلى بكثير من تكلفة المواد الأساسية المستخدمة في النموذج مثل 20

ونقوم بإضافتها إلى معادلة الهدف لتصبح على الشكل التالي:

$$\text{Minimize: } Z = 12 X_1 + 15 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 20 A_1 + 20 A_2$$

2- صياغة معادلات القيود:

لكي نكمل أعمدة المصفوفة فإننا نتبع الخطوات السابقة في مشاكل تعظيم الأرباح وتعامل المتغيرات الاصطناعية نفس معاملة المتغيرات الراكدة ، أي أن المتغير الاصطناعي يظهر بمعامل فني مساوي للواحد الصحيح في القيد الذي يخصه وبمعامل فني يساوي الصفر في القيد الذي لا يخصه كما يلي:

$$2 X_1 + 2 X_2 - 1 S_1 + 0 S_2 + 1 A_1 + 0 A_2 = 50$$

$$1 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 - 1 S_2 + 0 A_1 + 1 A_2 = 45$$

3- فرض عدم السلبية:

ينطبق هذا الفرض كما سبق على المتغيرات الأصلية وكذلك على المتغيرات الراكدة والمتغيرات الاصطناعية .

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , A_1 , A_2 \geq 0$$

5-3- تصميم الحل الأولي:

تتبع نفس الخطوات السابقة في مشاكل تعظيم الأرباح كما يلي :

أ- إعداد جدول السمبلكس الأول :

يتم إعداد جدول السمبلكس الأولي بنفس الطريقة السابقة في مشاكل تعظيم الأرباح مع اختلاف المتغيرات الأساسية ، سوف تكون في مشاكل تخفيض التكاليف المتغيرات الاصطناعية بدلا من المتغيرات الراكدة أي أننا سوف نبدأ بإنتاج المتغيرات الاصطناعية أولا، وتحسب قيمة Z_i بنفس الطريقة السابقة في مشاكل تعظيم الأرباح، إلا أنها في مشاكل تخفيض التكاليف تمثل التكاليف الناجمة عن الحل. ويظهر الجدول الأول كما هو في الجدول (4-1).

مساهمة المتغيرات في دالة الهدف C_i			12	15	0	0	20	20
المتغير	تكلفة الوحدة	قيمة المتغير	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2
الأساسية								
A_1	20	50	2	2	1-	0	1	0
A_2	20	45	1	2	0	1-	0	1
	Z_i	1900	60	80	-	-	20	20
	$C_i - Z_i$		-48	-	20	20	0	0
				65				

الجدول (1-4) جدول السمبلكس الأول لشركة الصناعات الدوائية

ب- تقييم الحل :

القاعدة العامة في مشاكل تخفيض التكاليف أن الحل الأمثل يتحقق إذا كان صف اختبار المثالية $\{ C_i - Z_i \}$ لا يحتوي على قيم سالبة أي تكون كل للقيم الموجودة به إما موجبة أو صفرية . وعلى ذلك فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل لأن صف اختبار المثالية بجدول السمبلكس الأول يحتوي على قيم سالبة، وبذلك فهناك إمكانية لتحسين الحل بإدخال متغيرات أخرى لتحل محل المتغيرات الأساسية التي يتضمنها الحل الأولي.

خامساً- تصميم الجدول الثاني:

نقوم باتباع نفس الخطوات التي تم القيام بها في مشاكل تعظيم الأرباح الواردة في الفصل السابق، وفق الخطوات التالية:

1- تحديد العنصر المرشح للدخول:

لكي يتم التوصل إلى حل أفضل من الحل القائم يجب تحديد المتغير أو المتغيرات التي يجب أن تدخل لتحل محل أحد المتغيرات الداخلة في الحل القائم، ويترتب على عملية الإحلال تحسين الحل القائم، وبما أن تابع الهدف في هذه الحالة هو تخفيض التكاليف، فإن هذا يستوجب البحث عن المتغير الذي بخفض تكاليف الوحدة الواحدة إلى أدنى حد، لذلك يتم اختيار المتغير الموافق لأقل قيمة سالبة في صف اختبار المثالية ($C_i - Z_i$)، ليتم إدخاله في الحل عوضاً عن أحد المتغيرات الاصطناعية، وبالعودة إلى الجدول رقم (4-1) نلاحظ أن العنصر $X_2 = -65$ هو العنصر المرشح للدخول لأنه يمثل أقل قيمة سالبة. ويطلق على العمود الذي يظهر فيه العنصر X_2 عمود المفتاح.

2- تحديد العنصر المرشح للخروج:

يتم حساب مثالية الصفوف عن طريق قسمة قيم المتغيرات الأساسية على القيم المقابلة في عمود المفتاح على الشكل التالي:

$$A_1 = 50 \div 2 = 25$$

$$A_2 = 45 \div 2 = 22.5$$

تحديد المتغير المرشح للخروج وهو المتغير الذي له أقل قيمة موجبة في اختبار الصفوف وهو A_2 ، لأنه يقابل القيمة 22.5 و على ذلك فإن A_2 هو المتغير المرشح للخروج، و صف A_2 هو صف المرشح للخروج.

3- تحديد العنصر المحوري:

وهو العنصر الذي يقع عند تقاطع العمود المرشح للدخول وهو العمود X_2 (العمود المفتاح) مع الصف المرشح للخروج وهو الصف A_2 . والقيمة الموجودة عند التقاطع هي 2.

4- تحديد قيم عناصر الصف الجديد المدخل:

يتم اختيار مساهمة المتغير الجديد X_2 من الجدول الأول وهي القيمة الموجودة أعلى X_2 وهي القيمة 15 أما بقية عناصر الصف فيحسبها بتقسيم القيم الموجود في الصف المرشح للخروج على العنصر المحوري 2 في هذه الحالة. كما في الجدول التالي:

القيم في الصف	قيمة المتغير	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2
المرشح للخروج	45	1	2	0	1-	0	1
÷ العنصر المحوري	2	2	2	2	2	2	2
قيم الصف المدخل	22.5	0.5	1	0	-0.5	0	0.5

- تعديل قيم الصفوف الأخرى:

يتم تعديل قيم الصف A_1 وذلك عبر الصيغة التي تم عرضها في الفصل السابق وهي: عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم - العنصر المتقاطع (العناصر المتناظرة في الصف الجديد المدخل). والعنصر المتقاطع هو العنصر الذي يتقاطع فيه الصف المنوي تعديله مع العمود المفتاح، وبالعودة إلى الحل الأولي المعرض في الجدول (4-1) نجد أن هذا العنصر هو 2. ونقوم باستخدام هذه الصيغة لتعديل القيم الموجودة في الصف A_1 على النحو التالي:

$$\text{Basic variable} = 50 - (2 \times 22.5) = 5$$

$$X_1 = 2 - (2 \times 0.5) = 1$$

$$X_2 = 2 - (2 \times 1) = 0$$

تضايًا لتخفيض التكاليف

$$S_1 = -1 - (2 \times 0) = -1$$

$$S_2 = 0 - (2 \times -0.5) = 1$$

$$A_1 = 1 - (2 \times 0) = 1$$

$$A_2 = 0 - (2 \times 0.5) = -1$$

6 - حساب قيمة دالة الهدف:

نحسب قيمة دالة الهدف Z_i في الجدول الثاني عن طريق ضرب عمود تكلفة الوحدة بالعناصر المناظرة في كل عمود من أعمدة الجدول الثاني على النحو

التالي:

$$Z_i = (20 \times 5) + (15 \times 22.5) = 437.5$$

$$Z_{x1} = (20 \times 1) + (15 \times 0.5) = 27.5$$

$$Z_{x2} = (20 \times 0) + (15 \times 1) = 15$$

$$Z_{s1} = (20 \times -1) + (15 \times 0) = -20$$

$$Z_{s2} = (20 \times 1) + (15 \times -0.5) = 12.5$$

$$Z_{A1} = (20 \times 1) + (15 \times 0) = 20$$

$$Z_{A2} = (20 \times -1) + (15 \times 0.5) = -12.5$$

أما عمود اختبار المثالية $Z_i - C_i$ فيتم حسابه كما ورد عند الحل المبني بطرح

القيم الموجود في الصف Z_i من القيم الموجودة في الصف C_i كما يلي:

$$X_1 = 12 - (27.5) = -15.5$$

$$X_2 = 15 - 15 = 0$$

$$S_1 = 0 - (-20) = 20$$

$$S_2 = 0 - (12.5) = -12.5$$

$$A_1 = 20 - (20) = 0$$

$$A_2 = 20 - (-12.5) = 32.5$$

فيصبح الحل الثاني كما هو معروض في الجدول (4-2).

مساهمة المتغيرات في دالة الهدف			12	15	0	0	20	20
C_i								
المتغيرات الأساسية	تكلفة الوحدة	قيمة المتغيرات	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2
A_1	20	5	1	0	-1	1	1	-1
X_2	15	22.5	0.5	1	0	-0.5	0	0.5
	Z_i	437.5	27.5	15	-20	12.5	20	-
	$C_i - Z_i$		-15.5	0	20	-12.5	0	32.5

الجدول (2-4) جدول السبلكس الثاني لشركة الصناعات النواتية

7- تقويم الحل الثاني:

البرنامج الثاني لا يحقق المثالية المطلوبة لأن صف اختبار المثالية ($C_i - Z_i$) بجدول السبلكس الثاني ما زال به قيم سالبة ، وعلى ذلك فهناك إمكانية لتحسين الحل .

سليماً - تصميم الجدول الثالث:

نقوم بالتتابع نفس الخطوات التي تم القيام بها في عدد إعداد الجدول الثاني في الفقرة السابقة وفق الخطوات التالية:

1- تحديد العنصر المرشح للدخول:

بما أن تابع الهدف في هذه الحالة هو تخفيض التكاليف، فإن هذا يستوجب البحث عن المتغير الذي يخفض تكاليف الوحدة الواحدة إلى أدنى حد، لذلك يتم اختيار المتغير الموافق لأقل قيمة سالبة في صف اختبار المثالية ($C_i - Z_i$) من الجدول (2-4)، نلاحظ أن العنصر $X_1 = -15.5$ هو العنصر المرشح للدخول لأنه يمثل أقل قيمة سالبة. وبطلق على العمود الذي يظهر فيه العنصر X_1 عمود المفتاح.

2- تحديد للعنصر المرشح للخروج:

يتم حساب مثالية الصفوف عن طريق قسمة قيم المتغيرات الأساسية

على القيم المقابلة في عمود المفتاح على الشكل التالي:

$$A_1 = 5 + 1 = 5$$

$$X_2 = 22.5 + (0.5) = 45$$

تحديد المتغير المرشح للخروج وهو المتغير الذي له أقل قيمة موجبة في

اختيار الصفوف وهو A_1 ، لأنه يقابل القيمة 5 و على ذلك فإن A_1 هو المتغير

المرشح للخروج، و صف A_1 هو الصف المرشح للخروج.

3- تحديد العنصر المحوري:

وهو العنصر الذي يقع عند تقاطع العمود المرشح للدخول وهو العمود X_1

(العمود للمفتاح) مع الصف المرشح للخروج وهو الصف A_1 ، والقيمة

الموجودة عند التقاطع هي 1.

4- تحديد قيم الصف الجديد المدخل:

يتم اختيار مساهمة المتغير الجديد X_1 من الجدول التالي وهي القيمة الموجودة

أعلى X_1 وهي القيمة 12 أما بقية عناصر الصف فيم حسابها بتقسيم القيم

الموجود في الصف المرشح للخروج على العنصر المحوري 1 في هذه الحالة.

كما في الجدول التالي:

القيم في الصف المرشح للخروج	قيمة المتغير	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2
	5	1	0	-1	1	1	-1
÷ العنصر المحوري	1	1	1	1	1	1	1
قيم الصف المدخل	5	1	0	-1	1	1	-1

5- تعديل قيم الصفوف الأخرى:

يتم تعديل قيم الصف X_2 وذلك عبر الصيغة العامة :

عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم - العنصر المتقاطع (العناصر
المتناظرة في الصف الجديد المدخل).

والعنصر المتقاطع هو العنصر الذي يتقاطع فيه الصف المنوي تعديله X_2 مع
العمود المفتاح X_1 ، وبالعودة إلى الحل الأولي المعرض في الجدول (4-2) نجد
أن هذا العنصر هو 0.5.

ونقوم باستخدام هذه الصيغة لتعديل القيم الموجودة في الصف X_2 على النحو
التالي:

$$\text{Basic variable} = 22.5 - (0.5 \times 5) = 20$$

$$X_1 = 0.5 - (0.5 \times 1) = 0$$

$$X_2 = 1 - (0.5 \times 0) = 1$$

$$S_1 = 0 - (0.5 \times -1) = +0.5$$

$$S_2 = (-0.5) - (0.5 \times 1) = -1$$

$$A_1 = 0 - (0.5 \times 1) = -0.5$$

$$A_2 = 0.5 - (0.5 \times -1) = 1$$

6 - حساب قيمة دالة الهدف:

نحسب قيمة دالة الهدف Z_i في الجدول الثالث عن طريق ضرب عمود المساهمة الحدية للمتغيرات بالعناصر المناظرة في كل عمود من أعمدة الجدول الثاني على النحو التالي:

$$\begin{aligned} Z_i &= (12 \times 5) + (15 \times 20) = 360 \\ Z_{x1} &= (12 \times 1) + (15 \times 0) = 12 \\ Z_{x2} &= (12 \times 0) + (15 \times 1) = 15 \\ Z_{s1} &= (12 \times -1) + (15 \times 0.5) = -4.5 \\ Z_{s2} &= (12 \times 1) + (15 \times -1) = -3 \\ Z_{A1} &= (12 \times 1) + (15 \times -0.5) = 4.5 \\ Z_{A2} &= (12 \times -1) + (15 \times 1) = 3 \end{aligned}$$

أما عمود اختبار المثالية $C_i - Z_i$ فيتم حسابه كما ورد عند الحل المبدئي بطرح القيم الموجود في الصف Z_i من القيم الموجودة في الصف C_i كما يلي:

$$\begin{aligned} X_1 &= 12 - 12 = 0 \\ X_2 &= 15 - 15 = 0 \\ S_1 &= 0 - (-4.5) = 4.5 \\ S_2 &= 0 - (-3) = 3 \\ A_1 &= 20 - 4.5 = 15.5 \\ A_2 &= 20 - 3 = 17 \end{aligned}$$

فيصبح الحل الثالث كما هو معروض في الجدول (3-4).

		المساهمة في تابع الهدف C_i	12	15	0	0	20	20
الأساسية المتغيرات	تكلفة الوحدة	قيم المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2
X_1	12	5	1	0	-1	1	1	-1
X_2	15	20	0	1	0.5	-1	-0.5	1
Z_i		360	12	15	-4.5	-3	4.5	3
$C_i - Z_i$			0	0	4.5	3	15.5	17

الجدول (3-4) جدول السمبلكس الثالث لشركة الصناعات الدوائية

- تقويم الحل الثالث:

إن الحل الثالث يحقق المثالية المطلوبة لأن صف اختبار المثالية $(C_1 - Z_1)$ بجدول السمبلكس الثالث لا يتضمن أي قيمة سالبة وكل القيم الموجودة في صف اختبار المثالية إما موجبة أو صفر وبناء على ذلك ليس هناك إمكانية لتحسين الحل .

الوحدة الخامسة

تطبيقات البرمجة الخطية

LINEAR PROGRAMMING APPLICATION

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بأمنة عن القضايا التي يمكن حلها خطياً
- تعريف الطالب بأساليب صياغة هذه القضايا وحلها.



المقدمة:

لقد تعرضنا في الفصول السابقة إلى بعض مشاكل البرمجة الخطية، والتي تميزت بعدد صغير من المتغيرات القيود، وسنقوم في هذا الفصل بالتعرف على استخدامات البرمجة الخطية في العديد من المشاكل الإدارية والمحاسبية والمالية الهامة، لكي يستطيع القارئ التعرف إلى الفوائد العملية للبرمجة الخطية في العديد من القرارات التي تواجه المستخدم.

وسوف نكتفي في هذا المجال بالتعرف إلى كيفية صياغة نموذج للمشكلة، أما الحل فإنه يحتاج إلى استخدام الكمبيوتر نظراً لكثرة عدد المتغيرات والقيود. وفي الحقيقة فإن الصعوبة تكمن في إعداد النموذج وصياغته، أما حل النموذج فقد توفرت العديد من البرامج التي تقدم الحلول لمختلف أنواع النماذج مثل برنامج QM FOR WINDOS .

5-1- قضايا التسويق:

تستخدم نماذج البرمجة الخطية في مجال الدعاية والإعلان لمساعدة الإداري على تحديد التوليفة الأفضل لوسائل الدعاية المختلفة مثل الصحف والتلفاز والمذياع ضمن موازنة محددة للإنفاق على حملات الدعاية، كما يتضح من المثال التالي:

خصصت إحدى الشركات مبلغ 8000 وحدة نقدية للإعلان أسبوعياً ويصرف هذا المبلغ على الدعاية في وسائل الإعلام المختلفة مثل التلفاز والصحف والمذياع وترغب الشركة تحديد أفضل توليفة لوسائل الإعلان المختلفة بحيث تتمكن من الوصول إلى أكبر عدد من الجمهور. والجدول التالي يبين البيانات التي حصلت عليها الشركة عن وسائل الإعلان المختلفة.

الوحدة الخامسة

وسائط الإعلان	عدد الجمهور	تكلفة الإعلان	الحد الأقصى لعدد مرات الإعلان
تلفاز	5000	800	15
صحف	8500	925	5
مذياع	2600	320	30

وتلتزم الشركة بعقد مسبق مع إحدى محطات المذياع على ألا تقل عدد مرات الإعلان عن 5 مرات في الأسبوع علماً بأن مخصصات الإعلان في المذياع يجب أن لا تتجاوز 1800 وحدة نقدية.
النموذج الرياضي:

بفرض أن :

X_1 عدد مرات الدعاية في التلفاز

X_2 عدد مرات الدعاية في الصحف

X_3 عدد مرات الدعاية في المذياع

فإن دالة الهدف تتمثل في تعظيم تغطية على أكبر عدد ممكن من الجمهور.

$$\text{Maximize } Z = 5000 X_1 + 8500 X_2 + 2600 X_3$$

أما القيود فتتمثل في :

المبلغ المخصص للإنفاق على الإعلان:

$$800 X_1 + 925 X_2 + 320 X_3 \leq 8000$$

$X_1 \leq 15$ الحد الأقصى لعدد مرات الدعاية في التلفاز

$X_2 \leq 5$ الحد الأقصى لعدد مرات الدعاية في الصحف

$X_3 \leq 30$ الحد الأقصى لعدد مرات الدعاية في المذياع

تطبيقات البرمجة الخطية

الحد الأدنى لعدد مرات الدعاية في الراديو $X_3 > 5$

الحد الأقصى للمبلغ المخصص للدعاية في الراديو $320 X_3 \leq 1800$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

وبإدخال النموذج إلى برنامج QM فإنه يعطي النتائج التالية:

$X_1 = 1.96875$

$X_2 = 5$

$X_3 = 5.625$

Optimal Value (Z)

عدد الجمهور 66968.75

2-5 - قضايا تحديد المزيج الإنتاجي:

قد يكون لدى المنشآت قدر محدود من الموارد التي قد تتمثل في طاقة إنتاجية محدودة أو ساعات عمل محدودة أو كمية مواد محدودة، ولديها عدد من المنتجات التي تتنافس على هذه الموارد المحدودة، ولذلك فإنه يمكن استخدام أسلوب البرمجة الخطية لتحديد تشكيلة من هذه المنتجات لتحقيق أقصى ربح ممكن للمنشأة في حدود الموارد المتاحة. كما يتضح من خلال المثال التالي:

مثال 1:

تملك إحدى المزارع التعاونية 130 دونم من الأرض التي تريد زراعة ثلاثة أنواع من المحاصيل هي القمح والذرة والشعير فإذا علمت أن الجدول التالي يبين كمية الإنتاج والطلب على كل نوع من المنتجات والربح في كل كبس من الأنواع:

الوحدة الخامسة

المحصول	عدد الأكياس المنتجة في الدونم الواحد	الكمية المطلوبة	الربح في الكيس الواحد
الشعير	420	12000	1.5
القمح	200	13000	1.80
الذرة	70	4000	2.5

والمطلوب: صياغة دالة الهدف والقيود من أجل أن تحقق الجمعية أقصى ربح ممكن.

النموذج الرياضي:

بفرض أن المتغيرات التي تمثل معطيات النموذج هي:

X_1 عدد الدونمات التي يجب أن تزرع شعير

X_2 عدد الدونمات التي يجب أن تزرع قمح

X_3 عدد الدونمات التي يجب أن تزرع ذرة.

وبما أن الربح المعطى في المثال هو ربح الكيس فيجب حساب ربح الدونم الواحد من أجل توحيد الوحدات المستخدمة في النموذج.

$$\text{ربح دونم الشعير} = 1.5 \times 420 = 630$$

$$\text{ربح دونم القمح} = 1.80 \times 200 = 360$$

$$\text{ربح دونم الذرة} = 2.5 \times 70 = 175$$

بتمثل الهدف في الوصول إلى أقصى ربح من خلال تخصيص المساحة المتاحة

على المنتجات الثلاثة، فتصبح دالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 630 X_1 + 360 X_2 + 175 X_3$$

أما القيود فهي على النحو التالي:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 130 \quad \text{قيد مساحة الأرض المتاحة للزراعة}$$

$$420 X_1 \leq 12000 \quad \text{الحد الأقصى للطلب على الشعير}$$

تطبيقات البرمجة الخطية

الحد الأقصى للطلب على القمح $200 X_2 \leq 13000$

الحد الأقصى للطلب على الذرة $70 X_3 \leq 4000$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

وبإدخال النموذج إلى برنامج QM فإنه يعطي النتائج التالية:

$X_1 = 28.57143$

$X_2 = 65$

$X_3 = 36.42857$

$(Z) = 47775$

3-5 - قضايا جدولة الإنتاج:

تعد عملية وضع برامج الإنتاج خلال مدة زمنية تمتد لعدة أسابيع أو أشهر من المشكلات الإدارية الهامة، والصعبة التي تواجه معظم المصانع، فهناك عدة عوامل يجب أخذها بعين الاعتبار عند إعداد هذه البرامج مثل الطاقة الإنتاجية، تكاليف التخزين، طاقة التخزين،... الخ.

وتأخذ هذه المشكلة أهميتها بالنسبة للمنشآت ذات الإنتاج الموسمي والطاقة الإنتاجية الثابتة، فإنها تواجه مشكلة الطلب المتقلب إما عن طريق التخزين في أوقات الطلب المنخفض أو تشغيل المصانع أكثر من فترة في أوقات الطلب المرتفع، وفي كلا الحالتين تتحمل المنشأة تكاليف مرتفعة، وذلك يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في جدولة الإنتاج لعدة فترات لتحديد مستويات الإنتاج اللازمة لمواجهة الطلب الموسمي بأقل تكلفة ممكنة.

مثال:

تنتج إحدى الشركات منتجاً يتميز باختلاف الطلب عليه بين فترة وأخرى، وقد توقعت الشركة أن يكون الطلب على المنتج خلال الأربعة أشهر القادمة على النحو التالي:

1800 - 2200 - 3400 - 2800 وحدة على التوالي. وتعاني الشركة من وجود الفائض في بعض الفترات وبالتالي ارتفاع تكاليف التخزين، كما تجد صعوبة في مواجهة الطلب في فترات أخرى بسبب الإنتاج بكميات غير كافية. و قد حددت الشركة طاقتها الإنتاجية بما يعادل 2400 وحدة شهرياً ضمن فترات العمل العادية و 800 وحدة شهرياً ضمن ساعات العمل الإضافي. وقد كانت تكاليف الإنتاج 7 وحدة نقدية إضافية إذا تم الإنتاج خلال ساعات العمل الإضافية وتبلغ تكلفة تخزين الوحدة الواحدة 3 وحدة نقدية شهرياً لكل وحدة يتم إنتاجها في الشهر ولا يتم بيعها خلال نفس الشهر.

ترغب الشركة بوضع جدول إنتاج أمثل بحيث تكون تكاليف الإنتاج والتخزين معاً أقل ما يمكن ويؤمن هذا الجدول مواجهة كل طلبات البيع.

صياغة النموذج:

بفرض أن المتغيرات المستخدمة للتعبير عن معطيات المشكلة هي المتغيرات التالية:

- X_1 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل العادية في الشهر الأول
- X_2 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل العادية في الشهر الثاني
- X_3 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل العادية في الشهر الثالث
- X_4 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل العادية في الشهر الرابع.
- Y_1 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل الإضافية في الشهر الأول.

Y_2 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل الإضافية في الشهر الثاني

Y_3 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل الإضافية في الشهر الثالث

Y_4 : هي الكمية المنتجة خلال أوقات العمل الإضافية في الشهر الرابع

C_1 : هي عدد الوحدات المخزنة من الشهر الأول إلى الشهر الثاني

C_2 : هي عدد الوحدات المخزنة من الشهر الثاني إلى الشهر الثالث

C_3 : هي عدد الوحدات المخزنة من الشهر الثالث إلى الشهر الرابع

وإن يتم بقاء أي وحدات مخزنة في نهاية الشهر الرابع.

صيغة دالة الهدف:

إن الهدف من البرنامج هو تخفيض تكاليف الإنتاج والتخزين إلى أدنى حد ممكن

وبما أن تكلفة الإنتاج الإضافية هي 7 وحدة نقدية وتكاليف التخزين هي 3 وحدة

نقدية ويجب تضمين دالة الهدف كل متغيرات القرار فإن دالة الهدف تكون:

$$\text{Min: } Z = 0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 7 Y_1 + 7 Y_2 + 7 Y_3 + 7 Y_4 + 3 C_1 + 3 C_2 + 3 C_3$$

صيغة القيود:

قيود الطاقة الإنتاجية:

إن الحد الأقصى لعدد الوحدات الممكن إنتاجها ضمن أوقات العمل العادية:

$$X_1 \leq 2400 \quad \text{الإنتاج خلال الشهر الأول}$$

$$X_2 \leq 2400 \quad \text{الإنتاج خلال الشهر الثاني}$$

$$X_3 \leq 2400 \quad \text{الإنتاج خلال الشهر الثالث}$$

$$X_4 \leq 2400 \quad \text{الإنتاج خلال الشهر الرابع}$$

قيود الإنتاج خلال ساعات العمل الإضافي:

- $Y_1 \leq 800$ الإنتاج الإضافي خلال الشهر الأول
 $Y_2 \leq 800$ الإنتاج الإضافي خلال الشهر الثاني
 $Y_3 \leq 800$ الإنتاج الإضافي خلال الشهر الثالث
 $Y_4 \leq 800$ الإنتاج الإضافي خلال الشهر الرابع

ما الطلب على الإنتاج فهو يساوي إلى

الطلب = الكميات المنتجة ضمن الوقت العادي + الكميات المنتجة أثناء العمل

الإضافي + المخزون في بداية الشهر - المخزون في نهاية الشهر

وبما أن مخزون بداية الشهر في الشهر الأول 0 ومخزون نهاية الشهر الأول

هو C_1 يصبح قيد الشهر الأول:

$$X_1 + Y_1 - C_1 = 1800$$

قيد الشهر الثاني:

$$X_2 + Y_2 - C_2 + C_1 = 2200$$

قيد الشهر الثالث:

$$X_3 + Y_3 - C_3 + C_2 = 3400$$

قيد الشهر الرابع: نظراً لعدم وجود مخزون في نهاية الشهر الرابع يصبح قيد

الشهر الرابع على النحو التالي:

$$X_3 + Y_3 + C_3 = 2800$$

أما القيد الأخير فهو قيد عدم السلبية:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, C_1, C_2, C_3 \geq 0.$$

وبعد إدخال دالة الهدف والقيود إلى برنامج QM نحصل على البرنامج التالي:

تطبيقات البرمجة الخطية

$$X1=2400$$

$$X2= 2400$$

$$X3=2400$$

$$X4= 2400$$

$$Y1= 0$$

$$Y2=0$$

$$Y3=200$$

$$Y4=400$$

$$C1= 600$$

$$C2 = 800$$

$$C3 = 0$$

$$\text{Optimal Value (Z)} = 8400$$

4-5- قضايا تكوين محفظة الأوراق المالية:

نتيجة لتوافر العديد من البدائل الاستثمارية التي تتفاوت في مقدار العائد ودرجة المخاطر تظهر مشكلة اختيار تشكيلة الاستثمار في الأوراق المالية (الأسهم والسندات). لأن المستثمر يهدف إلى استثمار القدر المتاح لديه من رأس مال في أوراق مالية يتم اختيارها لتحقيق أقصى عائد ممكن، وتخفيض درجة المخاطرة إلى أدنى حد ممكن. ويعتبر أسلوب البرمجة الخطية من أفضل أساليب بحوث العمليات في اختيار تشكيلة الاستثمار التي تحقق أقل مخاطرة وأكبر عائد ممكن.

مثال:

تعمل إحدى مؤسسات الضمان الإجتماعي على تحديد طرق التوظيف الأمثل للأموال الموجودة لديها والتي تبلغ قيمتها (2.000.000) ليرة سورية

وقد اقترحت اللجنة القائمة بالدراسة الأخذ بعين الاعتبار جميع بدائل التوظيف الآتية :

1- إيداع الأموال في المصرف في حساب الانخار.

2- توظيفها في شهادات الاستثمار .

3- وضعها في صندوق توفير البريد .

4- شراء أسهم شركات سياحية حكومية .

5- شراء أسهم شركات برأسمال مشترك خاص وحكومي

6- توظيفها في شراء العقارات وبيعها .

وقد حددت اللجنة في الجدول التالي، مقدار العائد المتعلق بكل توظيف ، ومدة التوظيف وعامل المخاطرة لكل استثمار متاح (أي عدم تحقق العائد المنتظر والحصول على عائد أقل) .

البديل الاستثماري	معدل عائد الاستثمار %	معدل عامل المخاطرة	مدة للتوظيف
حساب انخار	8.5	2%	8
شهادات استثمار	9.0	1%	2
صندوق توفير البريد	8.5	38%	5
شركات سياحية	14.3	45%	6
شركات مشتركة	6.7	7%	2
تجارة عقارات	13.0	35%	4

وقد اقترحت اللجنة أن لا تزيد قيمة عامل المخاطرة المرجح لجميع بدائل التوظيف على (20%) وأن لا يقل الوسط الحسابي المرجح لمدة الاستثمار عن

تطبيقات البرمجة الخطية

خمس سنوات ، كما رأيت أن لا يزيد الجزء المخصص من الأموال للمستثمرة في الشركات السياحية والعقارات على 25 % من رأس المال الموجود . ما هو الحل الذي يمكن أن تقترحه للجنة حتى تكون قيمة الأرباح المتوقعة من توظيف مبلغ مليوني ل.س. أعلى ما يمكن ؟

تصميم للنموذج:

نرمز إلى المبالغ الموظفة في أنواع الاستثمارات على النحو التالي:

X_1 : هي المبلغ المستثمر في حساب الآخار

X_2 : هي المبلغ المستثمر في شهادات الاستثمار

X_3 : هي المبلغ المستثمر في صندوق توفير البريد

X_4 : هي المبلغ المستثمر في شركات سياحية.

X_5 : هي المبلغ المستثمر في شركات مشتركة.

X_6 : هي المبلغ المستثمر في تجارة العقارات.

فإن دالة الهدف تكون:

$$\text{Max } Z = 0.085 X_1 + 0.09 X_2 + 0.085 X_3 + 0.143 X_4 \\ + 0.067 X_5 + 0.13 X_6.$$

أما القيود فيمكن صياغتها على النحو التالي:

قيد المبلغ المستثمر: يجب أن يكون المبلغ المستثمر 2000000 ل.س.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 2000000$$

قيد عامل المخاطرة المرجح: يتم حساب عامل المخاطرة المرجح لجميع بدائل الاستثمار بضرب عامل المخاطرة لكل نوع من أنواع الاستثمارات بالمبلغ المستثمر ويقسم على المبالغ المستثمرة وهو (2000000) ل.س.، ومن أجل

الوحدة الخامسة

التخلص من عملية القسمة بضرب 2000000 بطرف المتراجحة الآخر الذي

يتضمن عاملان المخاطرة المسموح به وهو 20% فيصبح القيد على النحو التالي:

$$0.02 X_1 + 0.01 X_2 + 0.38 X_3 + 0.45 X_4 + 0.07 X_5 + 0.35 X_6 \leq 2000000 \times 0.2$$

أي أن القيد يصبح :

$$0.02 X_1 + 0.01 X_2 + 0.38 X_3 + 0.45 X_4 + 0.07 X_5 + 0.35 X_6 \leq 400000$$

قيد الوسط الحسابي المرجح لمدة الاستثمار:

وفق نفس المنطق المتبع في القيد السابق فإن مجموع ضرب المبلغ المستثمر

بالمدة الزمنية للاستثمار مقسوما على المبالغ المستثمرة يجب أن لا يقل عن

خمس سنوات :

$$8 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3 + 6 X_4 + 2 X_5 + 4 X_6 \geq 2000000 \times 5$$

$$8 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3 + 6 X_4 + 2 X_5 + 4 X_6 \geq 10000000$$

قيد النسبة المئوية للمبالغ المستثمرة في العقارات والشركات السياحية:

$$X_4 + X_6 \leq 2000000 \times 0.25$$

$$X_4 + X_6 \leq 500000$$

القيد الأخير قيد عدم السلبية:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

وبعد إدخال دالة الهدف والقيود إلى برنامج QM نحصل على البرنامج التالي:

$$X1=666666.7$$

$$X2=833333.3$$

$$X3=0$$

$$X4=5000000$$

$$X5=0$$

$$X6=0$$

$$\text{Optimal Value (Z)} = 203166.7$$

الوحدة السادسة

النموذج المرافق في البرمجة الخطية Dual Problem in Linear Programming

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بمفهوم المرافقة الخطية.
- تعريف الطالب بالعلاقة المتبادلة بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي.



مقدمة:

إن جميع مشاكل البرمجة الخطية التي تمت معالجتها حتى الآن تسمى بالمشاكل الأصلية primal problems ويوجد لكل مشكلة أصلية طريقة مختلفة للتعبير عنها تسمى المشكلة المرافقة Dual Problem أو تسمى أحياناً المشكلة المرافقة.

يعني الترافق أن أي مشكلة تعظيم أرباح يقابلها مشكلة تخفيض تكاليف ، كما أن أي مشكلة تخفيض تكاليف يقابلها مشكلة تعظيم أرباح ، وعلى ذلك فإن كل مشكلة أصلية يكون لها وجه آخر هو المشكلة المرافقة، وإن هاتين المشكلتين مرتبطتين ببعضهما البعض بحيث أن الحل الأمثل لإحدهما يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للمشكلة الأخرى.

ويمكن تفسير ذلك محاسبياً بأن هناك ارتباط طبيعي بين الأرباح والتكاليف لأن الأرباح عبارة عن الفرق بين الإيرادات والتكاليف ، وبالتالي فهناك علاقة عكسية بينهما فإذا زادت التكاليف انخفضت الأرباح والعكس صحيح ، وبالنسبة لمشاكل تخصيص الموارد التي تعالجها البرمجة الخطية، فإنه لزيادة الأرباح إلى أقصى حد ممكن في ظل ثبات أسعار البيع والكميات المتاحة من المدخلات ، يجب تخفيض تكاليف عناصر الإنتاج إلى أدنى حد ممكن . كما يمكن تفسير ذلك اقتصادياً بأنه لا يمكن تحقيق الأرباح بدون مدخلات الإنتاج أي أنه يجب أخذ تكاليف الموارد التي ساهمت في تحقيق الأرباح في الحسبان . وللتعرف على القيمة الحقيقية للموارد التي استخدمت كمدخلات يجب أن يتم حساب أسعار الظل لها ، وهذه الأسعار هي التي تمثل القيمة الحقيقية للموارد ، وذلك للتأكد من أن للقيمة الحقيقية للموارد لا تزيد عن إجمالي الأرباح المحققة. وعلى ذلك فإن الهدف الأساسي من حل المشكلة المرافقة هو الحصول على أسعار الظل كمنتج

أساسي لحل نموذج البرمجة الخطية، أي أنها تظهر بعمود قيم المتغيرات الأساسية . بينما يمكن الحصول على أسعار الظل كمنتج ثانوي لحل مشكلة البرمجة الخطية الأصلية ، حيث أنها تظهر بصف اختبار المثالية بجدول الحل الأمثل .

6-1- شروط تحويل المسألة الأصلية إلى مشكلة مرافقة:

لتحويل المشكلة الأصلية للبرمجة الخطية إلى مشكلة مرافقة يجب توافر الشروط الآتية في المشكلة الأصلية:

أ- أن تكون جميع قيود المشكلة في صورة متراجحات، فإذا كان من بين قيود المشكلة معادلة فإنها تحول إلى متراجحتين كما يلي :

1- تحول المعادلة إلى متراجحتين مختلفتين الاتجاه، فعلى سبيل المثال بفرض أن أحد قيود المشكلة الأصلية في صورة معادلة كما يلي :

$$3X_2 + 2X_1 = 5$$

فتحول إلى متراجحتين كما يلي :

$$3X_2 + 2X_1 \leq 5$$

$$3X_2 + 2X_1 \geq 5$$

2- نحدد اتجاه المتراجحتين عن طريق ضرب إحداهما في رقم ثابت (-1). وعلى ذلك يمكن تعديل اتجاه المتراجحة الأولى عن طريق ضربها في (-1) كما يلي:

$$-3X_2 - 2X_1 \geq -5$$

ب- أن تكون جميع المتراجحات في اتجاه واحد أي أنها إما أن تكون كلها من النوع ($\geq$) ، أو ($\leq$) .

6-2- خطوات تحويل المسألة إلى مشكلة مرافقة:

إذا توافرت الشروط السابقة في أي مشكلة أصلية فيمكن تحويلها إلى مشكلة مرافقة، وذلك باتباع الخطوات التالية والتي سيتم إيضاحها من خلال المثال التالي:

مثال: نقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المصابيح الكهربائية هما المصباح الزئبقي والمصباح العادي ويمر المنتج بثلاثة أقسام أثناء عملية التصنيع هي قسم التحضير وقسم التركيب وقسم الإنهاء والجدول التالي يبين المعلومات حول حاجة هذين النوعين من ساعات العمل في الأقسام والطاقة المتاحة في كل قسم خلال الأسبوع:

القسم / المنتج	مصباح زئبقي	مصباح عادي	عدد ساعات العمل
التحضير	2	1	100
التركيب	4	3	240
الإنهاء	3	2	260
ربح وحدة المنتج	7	5	

والمطلوب :

1- صياغة البرنامج الخطي للمشكلة الأصلية.

2- صياغة المشكلة المرافقة لهذه الحالة.

الحل: 1- صياغة البرنامج الخطي للمشكلة الأصلية:

نرمز لكمية الإنتاج من المصباح الزئبقي ب X_1 ولكمية الإنتاج من المصباح الغازي ب X_2 ، دالة الهدف للمشكلة الأصلية والمتمثلة في تعظيم الأرباح الناجمة عن المنتجين من المصابيح تأخذ الشكل التالي:

$$\text{MAX } Z = 7 X_1 + 5 X_2$$

أما القيود فتتمثل في القيود التالية:

$$\begin{aligned} 2 X_1 + 1 X_2 &\leq 100 \\ 4 X_1 + 3 X_2 &\leq 240 \\ 3 X_1 + 2 X_2 &\leq 260 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6-3- صياغة البرنامج الخطي المسألة المرافقة:

1- صياغة دالة الهدف:

يتم تكوين دالة الهدف للمشكلة المرافقة كما يلي :

أ- إذا كانت المشكلة الأصلية تهدف إلى تعظيم الأرباح فإن المشكلة المرافقة تهدف إلى تخفيض التكاليف ، والعكس إذا كانت المشكلة الأصلية تهدف إلى تخفيض التكاليف فإن المشكلة المرافقة تهدف إلى تعظيم الأرباح .

ب- معاملات دالة الهدف للمشكلة المرافقة هي عبارة عن الطرف الأيسر لمراجحات القيود في المشكلة الأصلية أي هي الموارد المتاحة.

ج- يتم استخدام رموز جديدة للتعبير عن متغيرات المشكلة المرافقة وهي:

$$Y_1, Y_2, Y_3$$

فتصبح دالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{Minimize : } Z = 100 Y_1 + 240 Y_2 + 260 Y_3$$

تفسر دالة الهدف بصفة عامة بأنها تعبير رياضي لدالة المنفعة والتي تستخدم هامش المساهمة أو التكلفة كتعبير كمي لقياسها، وبناء على ذلك إذا كانت المشكلة الأصلية تعظيم الأرباح فمعنى ذلك أنه يتم تعظيم الأرباح عن طريق تعظيم الكميات المنتجة التي تضرب في هامش مساهمة وحدة المنتج، ومعنى ذلك أن دالة الهدف للمشكلة الأصلية تعتمد على دالة المنفعة (عائد المساهمة) ودالة الإنتاج (كمية الإنتاج) أي أنها دالة منفعة مباشرة. وعندما نتوصل إلى الحل

الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية فمعنى ذلك أننا توصلنا إلى أفضل برنامج إنتاجي يحقق أقصى ربح ممكن، لأن دالة الهدف في حالة الحل الأمثل لا تتضمن المنتجات ذات هامش المساهمة الأقل أو هامش المساهمة الذي لا يغطي تكاليف الإنتاج .

أما بالنسبة لدالة الهدف في المشكلة المرافقة فإنها تعتمد على دالة كمية الموارد المتاحة ، ودالة أسعار الظل عند نقطة الحل الأمثل، أي أن دالة الهدف للمشكلة المرافقة هي عبارة عن حاصل ضرب كمية الحل الأمثل بسعر الظل العائد لها، أي أنها دالة منفعة غير مباشرة ، حيث أنها تعظم الأرباح عن طريق تخفيض تكاليف عناصر المدخلات (الموارد المتاحة) إلى أدنى حد ممكن . وبصفة عامة فإن سعر الظل للموارد المستغلة بالكامل يكون ذو قيمة موجبة، وبالتالي فإنه بضرب سعر الظل لهذه الموارد في كمية الموارد المتاحة يكون الناتج مساوي لقيمة الأرباح المحققة في المشكلة الأصلية . أما الموارد غير المستغلة بالكامل، فإن سعر الظل لها يكون مساوي للصفر وكذلك تكون مساهمتها في الأرباح في المشكلة الأصلية مساوياً للصفر، وبناء على ذلك فإن قيمة دالة الهدف في المشكلة المرافقة لا بد أن تكون مساوية لقيمة دالة الهدف في المشكلة الأصلية .

2- صياغة القيود:

تتم صياغة القيود وفق القواعد التالية:

أ- تحل معاملات تلعب الهدف في المشكلة الأصلية مكان ثوابت القيود في المشكلة الأصلية.

ب- تتكون القيود في البرنامج الثاني من عن طريق الحصول على المعاملات المناظرة للقيود في البرنامج الأصلي، أي بجعل أعمدة

القيود في البرنامج الأصلي صفوف معاملات القيود في البرنامج
الثاني.

ج- يعكس اتجاه المتراجحات بحيث إذا احتوى البرنامج الأصلي على قيود
من أكبر أو تساوي، فتصبح في المشكلة المرافقة من نوع أصغر من
أو يساوي والعكس صحيح.

بذلك تصبح قيود المشكلة المرافقة كالتالي:

$$2 Y_1 + 4 Y_2 + 3 Y_3 \geq 7$$

$$1 Y_1 + 3 Y_2 + 2 Y_3 \geq 5$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

وتفسر قيود المشكلة المرافقة بأن الطرف الأيسر للمتراجحة عبارة عن
معامل دالة الهدف للمشكلة الأصلية أي هامش مساهمة الوحدة، أما الطرف الأيمن
للمتراجحة فيمثل منقول مصفوفة المعاملات الفنية للمشكلة الأصلية.

6-4- العلاقة بين المسألة الأصلية و المسألة المرافقة :

من أجل إيضاح العلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة المرافقة سوف نعود إلى
وضع المشكلتين في الشكل التالي:

المشكلة المرافقة لمصنع المصابيح	المشكلة الأصلية لمصنع المصابيح
$\text{Min : } Z = 100 Y_1 + 240 Y_2 + 260 Y_3$ $2 Y_1 + 4 Y_2 + 3 Y_3 \geq 7$ $1 Y_1 + 3 Y_2 + 2 Y_3 \geq 5$ $Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ حيث تشير المتغيرات Y_1, Y_2, Y_3 إلى أسعار الظل لساعة العمل في كل قسم من الأقسام الثلاثة.	$\text{Max } Z = 7 X_1 + 5 X_2$ $2 X_1 + 1 X_2 \leq 100$ $4 X_1 + 3 X_2 \leq 240$ $3 X_1 + 2 X_2 \leq 260$ $X_1, X_2 \geq 0$ حيث تشير المتغيرات X_1 إلى عدد المصابيح الزئبقية التي يجب إنتاجها و X_2 إلى عدد المصابيح العادية.

النموذج المرافق

ومن أجل فهم دالة الهدف في النموذج المرافق فإنه يقوم على افتراض أن الشركة سوف تقوم بتوزيع الموارد المتاحة لديها (عدد ساعات العمل في كل قسم من الأقسام) لإنتاج المنتج الأكثر ربحية، ويتحقق هذا الشرط عندما يكون سعر الظل لكل وحدة إضافية من ساعات العمل أقل ما يمكن. وبالتالي فإن تابع الهدف في المشكلة المرافقة يعبر عن ضرورة توزيع الموارد المتاحة لإنتاج النوعين من المصابيح بحث تكون أسعار الظل أقل ما يمكن.

أما بالنسبة للقيود فإنها تبين مساهمة الأقسام الثلاثة في إنتاج كلا النوعين من المصابيح فالقيود الأول يبين أن القسم الأول يساهم بساعتين في إنتاج المصباح الزئبقي وأن القسم الثاني يساهم بأربع ساعات في إنتاج المصباح الزئبقي وأن القسم الثالث يساهم بثلاث ساعات في إنتاج المصباح الزئبقي. يضمن اتجاه المتراجحة أن القيمة الكلية للموارد المستخدمة في إنتاج مصباح عادي يجب أن تساوي على الأقل مساهمة هذا المنتج في الربح، وإلا فإن الشركة ستتحول إلى إنتاج النوع الآخر من المصابيح.

6-5- العلاقة بين الحل الأمثل للمسألة الأصلية والحل الأمثل للمسألة المرافقة:

يتضح مما سبق أن كل من المشكلة الأصلية والمشكلة المرافقة يتفقان في البيانات الأساسية ولكنهما يختلفان في ترتيب هذه البيانات، وبناء على ذلك فإنه يمكن استنتاج حل إحدى المشكلتين من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى ، ويمكن توضيح أوجه العلاقة من خلال الجدولين الجدول، رقم (6-1) الذي يبين الحل الأمثل للمشكلة الأصلية والجدول رقم (6-2) الذي يبين الحل الأمثل للمشكلة المرافقة.

1- حل المشكلة الأصلية :

بإضافة المتغيرات الراكدة إلى ملاحظات القيود لتحويلها إلى معادلات وتعديل دالة الهدف وكتابة المعادلات في شكل مصفوفة فإننا نحصل على البرنامج الخطي التالي :

$$\text{MAX } Z = 7 X_1 + 5 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

للقيد :

$$2 X_1 + 1 X_2 + 1 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 = 100$$

$$4 X_1 + 3 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 + 0 S_3 = 240$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 1 S_3 = 260$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

وبعد تصميم الحل المبدئي والانتقال والتدرج في إعداد جداول السيمبلكس فإننا نصل إلى الجدول رقم (1-6) الذي يتضمن الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

المساهمة في تابع الهدف			7	5	0	0	0
Ci							
المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
X_1	7	30	1	0	1.5	-0.5	0
X_2	5	40	0	1	-2	1	0
S_3	0	90	0	0	-0.5	-0.5	1
	Zi	410	7	5	0.5	1.5	0
	Ci - Zi		0	0	-0.5	-1.5	0

الجدول رقم (1-6) الحل الأمثل لمصنع المصابيح

يتضح من جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية ما يلي :

1- أن برنامج الإنتاج الأمثل عبارة ($X_1=30, X_2=40$)

2- أن هامش المساهمة الكلي الذي يحققه البرنامج 410

3- أن سعر الظل للموارد عبارة عن $(S_1 = -0.5, S_2 = -1.5, S_3 = 0)$

ويمكن تفسير أثار أسعار الظل لكل مورد كما يلي:
بالنسبة لقسم التحضير:

فإن سعر الظل لهذا المورد الذي يمثله $S_1 = -0.5$ ، وإن هذا الرقم يدل على أن زيادة الموارد المتاحة (أو نقصها) بمقدار ساعة واحدة يؤدي إلى زيادة الأرباح (أو تخفيضها) بمقدار 0.5 وحدة نقدية . فإذا زادت عدد ساعات العمل المتاحة في قسم التحضير بمقدار ساعة واحدة فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة كمية الإنتاج من المصباح الزئبقي (X_1) بمقدار 1.5 وحدة وتخفيض الإنتاج من المنتج مصباح عادي (X_2) بمقدار 2 وحدة. ويمكن حساب تأثير التغير في الإنتاج على الربح على النحو التالي:
التغير في الربح :

$$(7 \times 1.5) - (5 \times 2) = 0.5$$

وهذا يمثل سعر الظل لهذا المورد .

ب- بالنسبة لقسم التركيب : يبلغ سعر الظل لهذا المورد $S_2 = -1.5$ وعلى ذلك فإذا زادت طاقة قسم التركيب بمقدار ساعة واحدة فإنها تؤدي إلى زيادة أرباح دالة الهدف بمقدار 1.5 وحدة نقدية . فإذا زادت عدد ساعات العمل المتاحة في قسم التركيب بمقدار ساعة واحدة فإن ذلك سوف يؤدي إلى انخفاض كمية الإنتاج من المصباح الزئبقي (X_1) بمقدار 0.5 وحدة وزيادة كمية الإنتاج من المنتج مصباح عادي (X_2) بمقدار وحدة واحدة. ويمكن حساب تأثير التغير في الإنتاج على الربح على النحو التالي:
التغير في الربح :

$$(7 \times (-0.5)) + (5 \times 1) = 1.5$$

وهذا يمثل سعر الظل لهذا المورد.

ج- بالنسبة لقسم الإنهاء: فإن سعر الظل لهذا المورد والذي يمثله $S_3=0$ ويبدل هذا الرقم على أن زيادة (أو نقص) الموارد لن يؤثر على الأرباح، وذلك لأن هناك فائض في ساعات العمل المتاحة في هذا القسم 90 ساعة عمل.

ملاحظة: بالنسبة لمشاكل تخفيض التكاليف فإن سعر الظل عبارة عن الوفرة

(أو الزيادة) في التكاليف التي تحدث لو أن الموارد المستغلة بالكامل زادت

(أو انخفضت) بمقدار وحدة واحدة.

2- البرنامج الخطي للمشكلة المرافقة:

بطرح المتغيرات الراكدة S_1, S_2 وإضافة المتغيرات الاصطناعية

A_1, A_2 إلى متراجحات القيود لتحويلها إلى معادلات، وتعديل دالة الهدف،

وكتابة المعادلات في شكل مصفوفة للمشكلة المرافقة على النحو التالي:

$$\text{MIN : } Z = 100 Y_1 + 240 Y_2 + 260 Y_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + 300 A_1 + 300 A_2$$

$$2 Y_1 + 4 Y_2 + 3 Y_3 - 1 S_1 + 0 S_2 + 1 A_1 + 0 A_2 = 7$$

$$1 Y_1 + 3 Y_2 + 2 Y_3 + 0 S_1 - 1 S_2 + 0 A_1 + 1 A_2 = 5$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

المساهمة في تابع الهدف Ci			100	240	260	0	0	300	300
المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2
Y_1	100	0.5	1	0	0.5	-1.5	2	1.5	-2
Y_2	240	1.5	0	1	0.5	0.5	-1	-0.5	1
	Z_i	410	100	240	170	-30	-40	30	40
	$C_i - Z_i$		0	0	110	+30	+40	270	260

الجدول رقم (2-6) الحل الأمثل للمشكلة المرافقة لمصنع المصابيح

يتضح من جدول الحل الأمثل للمشكلة المرافقة النتائج التالية:

1- أن برنامج تخفيض التكاليف الأمثل يكون عندما تكون القيمة الحقيقية للمتغيرات على النحو التالي: ($Y_1 = 0.5$, $Y_2 = 1.5$, $Y_3 = 0$)

2- إن قيمة دالة الهدف :

$$(100 \times 0.5) + (240 \times 1.5) + (260 \times 0) = 410$$

ويلاحظ أن سعر الظل في قسم الإنهاء صفر لأن الطاقة الإنتاجية غير مستغلة بالكامل .

3- تحديد قيمة دالة الهدف التي تساهم بها كل مرحلة على حسب المنتجات كما يلي :

- المرحلة الأولى - ويمر بها منتجان هما X_1 ، X_2 وبحسب مقدار مساهمة كل منتج في دالة الهدف بالمعادلة التالية :

مقدار مساهمة المنتج في دالة الهدف = كمية الإنتاج $\times$ عدد الساعات التي يستغرقها المنتج $\times$ سعر الظل للساعة الواحدة.

ويتم الحصول على كمية الإنتاج من صف اختبار المثالية بجدول الحل الأمثل للمشكلة المرافقة، حيث تمثل $S_1=30$ الكميات التي يجب إنتاجها من المنتج X_2 في المشكلة الأصلية وتمثل $S_2=40$ الكميات التي يجب إنتاجها من المنتج X_1 . أما عدد الساعات التي يستغرقها المنتج في القسم يتم الحصول عليها من قيود المشكلة الأصلية ، أما سعر الظل فيوجد في عمود قيم المتغيرات الأساسية .

مقدار مساهمة المنتج X_1 مصباح زيتي في دالة الهدف في قسم التحضير:

$$= 30 \times 2 \times 0.5 = 30$$

مقدار مساهمة المنتج X_2 مصباح عادي في دالة الهدف في قسم التحضير:

$$= 40 \times 1 \times 0.5 = 20$$

مقدار مساهمة المنتج X_1 مصباح زيتي في دالة الهدف في قسم التركيب:

$$= 30 \times 4 \times 1.5 = 180$$

مقدار مساهمة المنتج X_2 مصباح عادي في دالة الهدف في قسم التحضير:

$$= 40 \times 3 \times 1.5 = 180$$

أما قسم الإنهاء فإن سعر الظل له يساوي 0 وبالتالي فإن مساهمة المنتجين X_1 ,

X_2 في دالة الربح تساوي الصفر. وبجمع مساهمة المنتجين في كل الأقسام ينتج

معنا مساهمة البرنامج الكلية:

$$= 30 + 50 + 180 + 180 = 440$$

6-6- مقارنة النتائج بين برنامج المشكلة الأصلية والمشكلة المرافقة:

بمقارنة الحل الأمثل للمشكلة بالحل الأمثل للمشكلة المرافقة الذي يمثل الجدول، يتضح النتائج التالية:

- إن قيمة الحل الأمثل للمشكلة الأصلية يتساوى مع قيمة الحل الأمثل للمشكلة المرافقة لأن كل منهما 410، وذلك بالرغم من اختلاف دالة الهدف ففي المشكلة الأصلية يكون الهدف تعظيم أرباح بينما المشكلة المرافقة يكون الهدف تخفيض تكاليف ولكنهما في الحقيقة وجهان لمشكلة واحدة.
- إن قيم صف اختبار المثالية للمتغيرات الراكدة في المشكلة الأصلية تتساوى مع قيم المتغيرات الأساسية في المشكلة المرافقة، بعد تغيير الإشارات السالبة للمتغيرات الراكدة إذا كانت المشكلة الأصلية تعظيم الأرباح.
- أن قيم المتغيرات الأساسية للمشكلة الأصلية بعمود قيم المتغيرات الأساسية تتساوى مع المتغيرات الراكدة بصف اختبار المثالية، مع ملاحظة تغيير الإشارات السالبة إذا كانت المشكلة المرافقة تعظيم أرباح .
- إن قيم معاملات المتغيرات الأساسية في صف اختبار المثالية في المشكلة الأصلية، تتساوى مع الفرق بين الطرف الأيمن والطرف الأيسر لمتراجحات القيود في المشكلة المرافقة بعد التعويض فيها بقيم الحل الأمثل .

وبناء على النتائج السابقة فإنه يمكن التوصل إلى الحل الأمثل لإحدى المشكلتين من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى . وهذه الخاصية لها فائدة عملية كبيرة حيث أنها توفر كثير من الوقت والجهد والتكاليف اللازمة لتنفيذ العمليات الحسابية لمشاكل البرمجة الخطية ، لأن هناك تناسب طردي بين العمليات الحسابية وعدد القيود في المشكلة ، وعلى ذلك تقوم بمقارنة عدد القيود في

المشكلة الأصلية بعدد القيود في المشكلة المرافقة ، فإذا كان عدد القيود في المشكلة المرافقة أقل فإننا نقوم بحل المشكلة المرافقة ثم نستنتج حل المشكلة الأصلية من حل المشكلة المرافقة . وكقاعدة عامة إذا كان عدد متغيرات المشكلة الأصلية أقل من عدد قيودها فإن عدد قيود المشكلة المرافقة تكون أقل من عدد قيود المشكلة الأصلية كما أنه في حالة مشاكل تخفيض التكاليف وللتخلص من المتغيرات الصورية فإنه يفضل حل المشكلة المرافقة.

الوحدة السابعة

تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

هدف الوحدة:

تهدف هذه الوحدة إلى:

- تعريف الطالب بمفهوم الحساسية.
- تعريف الطالب باستخدامات تحليل الحساسية
- لتحديد صلاحية النموذج تجاه التغيرات.



مقدمة :

تعتمد نتائج حل نماذج البرمجة الخطية على معاملات المتغيرات المستخدمة في إعداد النموذج، مثل معاملات دالة الهدف ومعاملات قيود المشكلة. وبالتالي فإن أي تعديل في هذه المعطيات يمكن أن يقود إلى تعديل النتائج التي يقدمها الحل المقترح للنموذج، وبالتالي يتطلب إعادة تصميم البرنامج ودراسته للوصول إلى النتائج الجديدة. وهذه الحالة تتكرر كثيراً في مسائل البرمجة الخطية، ويعود السبب في ذلك إلى الواقع الاقتصادي المتحرك لمعظم المشكلات الإدارية التي تعالجها البرمجة الخطية، فمثلاً لا أحد يتوقع ثبات الطلب أو ثبات أسعار المواد الأولية.. الخ وغيرها من المعطيات التي تشكل مدخلات النموذج الخطي.

وعوضاً عن القيام بوضع النموذج الجديد وحله في كل مرة يحدث فيها تغير في معاملات دالة الهدف والقيود، يستخدم تحليل الحساسية للقيام بتحليلات ما بعد الأمثلية (Postoptimal Analysis) لنماذج البرمجة الخطية وذلك للتعرف على أثر التغير في مدخلات النموذج أو في العلاقات بين عناصر المشكلة على الحل الأمثل للمشكلة من خلال بيانات جدول السمبلكس النهائي الذي يتضمن الحل الأمثل للمشكلة، وذلك عن طريق تحديد الحد الأدنى (Lower Limit) والحد الأقصى (Upper Limit) للتغير لكل عنصر من عناصر مدخلات نموذج البرمجة الخطية والتي يمكن للعنصر أن يتغير في حدودها بالزيادة أو النقص دون أن يؤدي إلى تغيير الحل الأمثل وأسعار الظل، وذلك لأنه من المعروف أن التغيرات بالزيادة أو بالنقص في مدخلات نموذج البرمجة الخطية في حدود معينة لا تؤدي إلى تغيير المتغيرات الأساسية للحل الأمثل، وبالتالي لا تؤدي إلى تغيير أسعار الظل ، ولكن إذا تعدت التغيرات هذه

الحدود فإنها تؤدي إلى تغيير المتغيرات الأساسية للحل الأمثل وبالتالي تغيير أسعار الظل.

ويقوم تحليل الحساسية عن فرض أساسي وهو دراسة أثر تغيير عنصر واحد فقط من عناصر مدخلات نموذج البرمجة الخطية على الحل الأمثل للنموذج ، وبقاء باقي عناصر مدخلات النموذج ثابتة بدون تغيير . وسوف نقوم بدراسة تحليل حساسية عناصر مدخلات نموذج البرمجة الخطية من خلال المثال التالي:

نقوم إحدى شركة النصر بإنتاج منتجين هما راديو وتلفزيون ويتم إنتاجهما في قسمين هما قسم الإلكترونيات وقسم الصوت، والجدول يبين حاجة كل من المنتجين إلى ساعات العمل والطاقة المتاحة في كلا القسمين.

القسم/ المنتج	راديو	تلفزيون	الوقت المتاح
الإلكترونيات	2	4	80
الصوت	3	1	60
مشاهدة المنتج في الربح	50	120	

والمطلوب: تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يضمن للشركة تحديد أقصى ربح. بفرض أن X_1 هو عبارة عن الكمية المنتجة من المنتج راديو و X_2 هي الكمية المنتجة من التلفزيون وبعد إدخال المتغيرات الراكدة ينتج معنا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max: } Z = 50 X_1 + 120 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2$$

$$2 X_1 + 4 X_2 + 1 S_1 + 0 S_2 = 80 \quad (\text{قيد قسم الإلكترونيات})$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + 0 S_1 + 1 S_2 = 60 \quad (\text{قيد قسم الصوت})$$

تحليل الحساسية

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

أما الحل الأمثل للبرنامج الخطي فهو معطى في الجدول رقم (1-7) التالي:

المساهمة في تابع الهدف						
Ci		50	120	0	0	
المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2	
X_1	120	20	0.5	1	0.25	0
S_2	0	40	2.5	0	-0.25	1
	Z_i	2400	60	120	30	0
	$C_i - Z_i$		-10	0	-30	0

الجدول (1-7) الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

1-7- التغير في معاملات دالة الهدف :

يقصد بتحليل حساسية معاملات دالة الهدف تحديد أثر تغير معاملات دالة الهدف (هامش مساهمة الوحدة أو تكلفة الوحدة) بالنقص أو بالزيادة على الحل الأمثل. وتنقسم متغيرات دالة الهدف إلى نوعين، متغيرات أساسية ومتغيرات غير أساسية. وتختلف معالجة المتغيرات غير الأساسية عن المتغيرات الأساسية عند تحليل حساسية النموذج.

1- معاملات المتغيرات غير الأساسية لدالة الهدف:

المتغير غير الأساسي هو المتغير الذي لم يدخل ضمن برنامج الحل الأمثل، وهي في مثالنا السابق وكما هو واضح من الجدول (1-7) المتغيرات X_1, S_1 . وتحليل الحساسية يهدف إلى تحديد مقدار التغير في المساهمة الحدية

لهذه المتغيرات من دون أن يؤدي ذلك إلى إيجاد حل مثالي آخر للبرنامج الخطي. وبعبارة أدق ما هو نطاق التغير المسموح به في معاملات دالة الهدف من دون أن يؤدي ذلك إلى إدخال المتغيرين X_1, S_1 ضمن برنامج الحل الأمثل.

إن الجواب على هذا السؤال يظهر من خلال صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$ لجدول الحل النهائي، كما هو في الجدول (7-1)، فبالنسبة لمشاكل تعظيم الأرباح فإن الحل لن يتغير طالما أن قيمة المتغيرات غير الأساسية في صف اختبار المثالية بقيت أصغر أو تساوي الصفر، (شرط الحل الأمثل كما ورد في الفصل الثالث، أن جميع القيم الموجودة في صف اختبار المثالية أصغر أو تساوي الصفر). ويمكن صياغة هذه الفرضية على النحو التالي بالنسبة للمتغيرين X_1, S_1 :

$$C_i - Z_i \leq 0$$

ويمكن نضع هذا الشرط على النحو التالي:

$$C_i \leq Z_i$$

أي أنه طالما بقي معامل المتغير C_i أقل من الأرباح المحققة من المتغير Z_i فإن الحل يبقى مثالياً. وبالعودة إلى الجدول (7-1) نجد حلول الجدول تبقى مثالية، طالما أن ربح الوحدة الواحدة من المنتج X_1 راديو لم يتجاوز 60 وحدة نقدية، أي أن مقدار التغير في المساهمة الحدية للمنتج لم تتجاوز أكثر من 10 وحدات نقدية.

وبشكل مشابه بالنسبة إلى المتغير S_1 حيث يمكن للمساهمة الحدية لساعة العمل في قسم الإلكترونيات أن تتزايد من 0 إلى 30 دون أن يؤثر ذلك على مثالية نتائج البرنامج.

وبشكل عام في مشاكل تعظيم الأرباح يمكن زيادة قيمة معاملات المتغيرات غير الأساسية، بما لا يتجاوز الأرباح المحققة من المتغير في صف اختبار المثالية ويمكن تخفيض قيم هذه المتغيرات حتى $(-\infty)$ من دون أن يؤدي ذلك إلى التأثير على مثالية الحل، لأن أي تخفيض سوف يؤدي إلى زيادة القيمة السالبة لهذا المتغير في صف اختبار المثالية وبالتالي يبقى هذا المتغير مرفوضاً.

أما بالنسبة لمشاكل تخفيض التكاليف فإن التغير بالنقص في معامل دالة الهدف لمتغير غير أساسي حتى الحد الأدنى لن يؤثر على الحل الأمثل، لأن قيمة هذا المتغير في صف اختبار المثالية حتى الحد الأدنى سوف تكون مساوية لصفر، وبالتالي يرفض هذا المتغير، ولكن أي نقص عن الحد الأدنى يؤدي إلى ظهور قيمة سالبة لهذا المتغير في صف اختبار المثالية، وبالتالي يدخل هذا المتغير ضمن المتغيرات الأساسية في الحل الجديد، وعلى ذلك يتغير الحل الأمثل الحالي. وبحسب الحد الأدنى للتغير في معامل دالة الهدف لمتغير غير أساسي في مشاكل تخفيض التكاليف بالقاعدة التالية:

$$C_i - Z_i \geq 0 \rightarrow C_i \geq Z_i$$

أما بالنسبة لمشاكل تخفيض التكاليف فإن أي زيادة في تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسي سوف يؤدي إلى زيادة القيمة الموجبة لهذا المتغير في صف اختبار المثالية، وبالتالي يزداد رفض هذا المتغير، أي أنه يمكن زيادة تكلفة الوحدة للمتغير غير الأساسي إلى ما لا نهاية دون أن يؤدي ذلك إلى تغيير الحل الأمثل، وبناء على ذلك يكون الحد الأقصى للتغيير في معامل دالة الهدف لمتغير غير أساسي في مشاكل تخفيض التكاليف هو $(+\infty)$.

2- معاملات المتغيرات الأساسية لدالة الهدف:

المتغير الأساسي هو المتغير الذي يدخل ضمن برنامج الحل الأمثل، وهي في مثالنا السابق وكما هو واضح من الجدول (1-7)، المتغيرات S_2, X_2 . يؤدي التغير في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية (الممثلة في الحل الأمثل) ليس إلى التأثير على معاملات المتغيرات غير الأساسية فقط في صف اختبار المثالية فقط $(C_i - Z_i)$ ، كما هو الحال في حال المتغيرات غير الأساسية، وإنما يؤدي التغير في أرباح أو تكاليف الوحدة الواحدة من متغيرات الحل الأساسي إلى التأثير على قيم جميع المتغيرات غير الأساسية في صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$. لأن التغير في مساهمة الوحدة C_i للمتغيرات الأساسية يؤثر على أعمدة المساهمة الحدية للمتغيرات، مما ينعكس على قيم الأرباح المحققة من البرنامج لكل متغير من المتغيرات. فإذا كان التغير في النطاق أو المدى المسموح به فإنه لا يؤثر على مثالية الحل (وقد يؤثر على قيمة دالة الهدف) أما إذا تعدى هذا النطاق فإن الحل الأمثل سوف يتغير.

من أجل فهم هذا المنطق سنعيد صياغة جدول الحل الأمثل الوارد في الشكل (1-7) بعد افتراض أن مساهمة المنتج تلفزيون في الربح قد تغيرت بمقدار دلتا Δ . ويظهر معنا جدول السمبلكس بعد التعديل كما هو في الجدول (2-7).

تحليل الحساسية

	المساهمة في تابع الهدف C_i		50	$120 + \Delta$	0	0
المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات	قيم المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2
X_1	$120 + \Delta$	20	0.5	1	0.25	0
S_2	0	40	2.5	0	-0.25	1
	Z_i	2400	$60 + 0.5\Delta$	$120 + \Delta$	$30 + 0.25\Delta$	0
	$C_i - Z_i$		$-10 - 0.5\Delta$	0	$-30 - 0.25\Delta$	0

الجدول (1-7) الحل الأمثل للبرنامج الخطي بعد التعديل .

من أجل تحديد نطاق التغير المسموح به في معاملات دالة الهدف للمتغيرات الأساسية نعود إلى الشكل (1-7) فنلاحظ أن قيم التغير المسموح بها هي القيم التي لا تؤدي إلى تغيير إشارة القيم الموجودة بصف اختبار المثالية بجدول الحل الأمثل ، أي تظل القيم سالبة أو صفرية في مشاكل تعظيم الأرباح . أو تظل القيم موجبة أو صفرية في مشاكل تخفيض التكاليف . فلو أخذنا قيمة المتغير X_1 في صف اختبار المثالية $(C_i - Z_i)$:

$$-20 \leq \Delta \rightarrow -20 \geq \Delta \rightarrow -10 \leq 0.5\Delta \rightarrow -10 - 0.5\Delta \leq 0$$

هذا يعني أن الحل المثالي للنموذج لن يتغير طالما أن أرباح الوحدة الواحدة من المنتج X_2 لم تنقص أكثر من عشرين وحدة نقدية، أي أن المنتج راديو لن يدخل في الحل الأمثل ويتحول إلى متغير أساسي حتى تنخفض أرباح الوحدة الواحدة من المنتج تلفزيون لأكثر من 20 وحدة نقدية أي تصبح أرباح وحدة التلفزيون أقل من 100 وحدة نقدية.

أما لو نظرنا إلى قيم المتغير S_1 في صف اختبار المثالية لوجدنا:

$$\Delta \geq -120 \rightarrow -30 \leq 0.25\Delta \rightarrow -30 \leq 0.25\Delta \rightarrow \Delta \geq -120$$

وهذا يعني أن المتغير S_1 هو أقل حساسية للتغير من المتغير X_1 وأن المتغير S_1 لن يدخل الحل الأساسي ولو انخفضت أرباح المنتج X_2 من 120 إلى الصفر. أي أن الحل الأمثل يبقى صحيحا طالما أن هامش مساهمة المنتج تفلزيون في الربح هو ضمن النطاق من 100 إلى $+\infty$.

7-2- التغير في معاملات دالة الهدف لعدد من المتغيرات معاً :

يتم تحديد نطاق التغير المسموح به في معامل دالة الهدف للمتغير غير الأساسي أو لمتغير أساسي كل على حده مع ثبات عناصر مدخلات نموذج البرمجة الخطية باستخدام القواعد السابقة أما إذا كان هناك تغير في معامل دالة الهدف لأكثر من متغير أساسي أو لأكثر من متغير غير أساسي أو لمتغير أساسي وآخر غير أساسي في نفس الوقت ، فإن القواعد السابقة قد لا تنطبق عليها ويرجع ذلك لحدود صلاحية تحليل الحساسية التي تفترض تغير عنصر واحد فقط مع ثبات باقي عناصر مدخلات النموذج . وفي مثل هذه الحالة فإنه لقياس أثر التغير على الحل الأمثل فمن الأفضل إعادة اختبار مثالية جدول الحل الأمثل بعد إضافة التعديلات الجديدة عليه.

7-3- أثر التغير في كمية الموارد على الحل الأمثل:

إن للتغير في كمية الموارد المتاحة أثر على الحل الأمثل، إذ أنه من غير الممكن أن نضيف عدد غير محدود من وحدات المورد من دون أن يؤثر ذلك على واحد من قيود الحل الأمثل. ويرتبط ذلك بمفهوم أسعار الظل للموارد (راجع الفصل الثالث)، إذ أن ندرة المورد هي التي تحدد سعر الظل لذلك المورد والموارد التي يوجد بها فائض يكون سعر الظل لها يساوي الصفر. وتحليل

تحليل الحساسية

الحساسية هنا يعني تحديد نطاق التغير في عدد وحدات مورد معين مع بقاء سعر الظل لهذا المورد ثابتاً كما يظهر في صف اختبار للمثالية $(C_1 - Z_1)$. فلو أخذنا المورد مثل قسم الإلكترون نجد أن سعر الظل له هو 30 وحدة نقدية، والسؤال كم ساعة عمل إضافية يمكن أن نضيف أو نخفض من هذا القسم من دون أن يؤدي ذلك إلى تغير في سعر الظل.

من أجل تحديد المدى الذي يمكن أن تتراوح (Ranging) حوله كميات مورد ما من الموارد الحرجة من دون أن يؤثر ذلك على سعر الظل، نعيد تصوير الجدول في الشكل (7-3)، ثم نستخدم القواعد التالية:

1- نقوم بقسمة محتويات عمود قيم المتغيرات الأساسية على العناصر المناظرة في عمود المورد، وهو في هذه الحالة عمود S1 الذي يمثل مورد ساعات العمل في قسم الإلكترون فلنحصل على النتائج التالية:

$$20 / 0.25 = 80$$

$$40 / (-0.25) = -160$$

2- إن أصغر نسبة موجبة (هي 80 في هذا المثال) نلنا على مقدار التخفيض الذي يمكن أن يحدث على موارد هذا القسم من دون أن يؤدي ذلك إلى تغير سعر الظل لهذا المورد وهو 30. أي أنه يمكن عدد ساعات العمل في قسم الإلكترون إلى الصفر (80 ساعة الحالي - 80 ساعة يمكن تخفيضها = 0)

3- أصغر نسبة سالبة (هي -160 في هذا المثال) نلنا على عدد الساعات التي يمكن أن تضاف إلى المورد من دون أن تؤدي إلى تغير في الحل الأمثل للنموذج، وفي مثل هذه الحالة يمكن زيادة عدد ساعات قسم الإلكترون إلى 240 ساعة (80 ساعة الحالي + 160 يمكن إضافتها = 240 ساعة)، من دون أن يؤدي ذلك إلى تغير سعر الظل لهذا المورد.

الوحدة السابعة

أما بالنسبة لقسم الصوت فالوضع مختلف، وذلك لعدم استغلال كامل الوقت المئاح في هذا القسم وهو 60 ساعة عمل . لاحظ أن الوقت المستغل في هذا القسم هو فقط 40 ساعة وهو قيمة S_2 في

المساهمة في تابع الهدف C_1			50	120	0	0
المتغيرات الأساسية	مساهمة المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	S_1	S_2
X_1	120	20	0.5	1	0.25	0
S_2	0	40	2.5	0	- 0.25	1
Z_1	2400	60	120	30	0	0
$C_1 - Z_1$		-10	0	- 30	0	0

الجدول (3-7) الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

الجدول رقم (3-7)، وبالتالي فإن أي زيادة على عدد ساعات عمل هذا القسم لن تؤدي إلى تغير سعر الظل العائد لهذا المورد. أما بالنسبة للحد الأدنى الذي يمكن أن نخفض هذا المورد في حدوده دون أن يؤثر ذلك على سعر الظل العائد له فيبقى في حدود 20 ساعة عمل :

$$\text{الطاقة المتاحة} - \text{الطاقة المستغلة} = 40 - 60 = 20 \text{ س}$$

أسئلة حول البرمجة الخطية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي

1- عند استخدام طريقة الحل البياني فإن المنطقة المحددة بمجموعة القيود تدعى:

- أ- الحل ب- منطقة الحلول الممكنة ج- المنطقة غير الممكنة د- منطقة الربح الأمثل.

2- أي من الأشياء التالية يؤدي إلى تغيير منطقة الحلول:

- أ- تغيير معاملات دالة الهدف
- ب- تكرار أحد القيود من قيود المشكلة
- ج- تغيير القيمة الموجودة إلى يمين أحد القيود
- د- زيادة معاملات دالة الهدف في مشاكل تخفيض التكاليف.

3- تستخدم الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية:

- أ- في حالة وجود قيدتين للمشكلة فقط.
- ب- في حالة وجود أكثر من قيدتين.
- ج- في حالة وجود متغيرين فقط.
- د- في حالة وجود أكثر من متغيرين.

4- عندما يتم إيجاد مجموعة من البدائل التي تشكل الحل الأمثل في مشاكل تعظيم الأرباح، فإن ذلك ينجم:

- أ- عندما تكون دالة الهدف موازية لأحد قيود المشكلة.
- ب- عندما يوجد تكرار في أحد القيود
- ج- عندما تكون خطوط القيود متوازية
- د- عندما تكون المشكلة غير محددة.

5- أي من التالي يشير إلى أنه تم الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل

تعظيم الأرباح:

- أ- تكون القيم في صف اختبار المثالية موجبة أو تساوي الصفر.
- ب- تكون القيم في صف اختبار المثالية سالبة أو تساوي الصفر.
- ج- عندما تكون كل معاملات الإحلال في العمود المفتاح سالبة.
- د- عند عم وجود متغيرات راکدة في الحل الأساسي.

6- العمود المفتاح في مشاكل تعظيم الأرباح هو العمود الذي يتضمن:

- أ- قيمته في صف اختبار المثالية أكبر قيمة موجبة
- ب- قيمته في صف اختبار المثالية أكبر قيمة سالبة
- ج- قيمته في دالة الهدف أكبر قيمة موجبة
- د- قيمته دالة الهدف أكبر قيمة سالبة.

7- عند صياغة القيود لمشاكل البرمجة الخطية باستخدام السبلكس يجب

إضافة المتغيرات الراکدة في حالة:

- أ- في حال كون القيود متراجحات
 - ب- في حال كون القيود معادلات.
 - ج- في حالة كانت القيود أكبر من أو يساوي فقط.
 - د- في حال كانت القيود أصغر من أو يساوي فقط.
- 8- حل المشكلة المرافقة (المقابلة):

- أ- يمثل المساهمة الحدية لوحة إضافية من المورد.
- ب- يمكن اشتقاقه من صف دالة الهدف للحل الأمثل للمشكلة الأساسية
- ج- أفضل من حل المشكلة الأساسية.

د- كل ما ذكر.

9- عدد القيود في المشكلة المرافقة (المقابلة) يكون مساوياً لعدد:

أ- القيود في المشكلة الأصلية.

ب- المتغيرات في المشكلة الأصلية.

ج- عدد المتغيرات زائد عدد القيود في المشكلة الأصلية.

د- عدد المتغيرات في المشكلة المرافقة.

10- صور الظل لأحد القيود :

أ- هو قيمة وحدة إضافية من ذلك المورد

ب- هو يساوي الصفر إذا كان هناك قيمة موجبة للمتغير الراكد الذي يخص القيد.

ج- هو موجود في صف اختيار المثالية لعمود المتغير الراكد

د- كل ما ذكر.

السؤال الثاني:

التالي هو عبارة عن دالة الهدف والقيود لإحدى المشاكل الإدارية:

$$\text{MAX } Z = 7X_1 + 5X_2$$

$$2X_1 + 1X_2 \leq 100$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 240$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 260$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

والمطلوب:

أ- إعداد جداول السمبلكس لتحديد قيمة X_1, X_2 التي تمكن من تحقيق أعظم

ربح.

لوحدة السابعة

2- صياغة المشكلة المذكورة أعلاه على شكل مشكلة مقابلة (المرافقة البرمجة الخطية).

السؤال الثالث:

المطلوب استخدام الطريقة البيانية في حل المشكلة التالية:

$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 5 X_2$$

القيود:

$$X_1 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

السؤال الرابع:

تنتج إحدى شركات الأنابيب المعدنية نوعين من الأنابيب ذات الحجم العادي وذات الحجم الكبير، وتتم عملية التصنيع في ثلاث مراحل هي مرحلة التجميع ومرحلة الطلاء ومرحلة مراقبة الجودة أما الوقت اللازم لإنهاء كل مرحلة فقد تم تلخيصها في الجدول التالي:

النوع	التجميع	الطلاء	رقابة الجودة
الحجم العادي x_1	3.6	1.6	0.6
الحجم الكبير x_2	4.8	1.8	0.6

إن الوقت المتاح أسبوعياً للقيام بكل مرحلة من مراحل التصنيع هي 4800 لمرحلة التجميع و 1980 ساعة لمرحلة الطلاء و 900 ساعة لمرحلة الرقابة على الجودة .

تتوقع الشركة أن تبيع على الأقل أسبوعياً 300 وحدة من المنتج x_1 و 180 وحدة من المنتج x_2 وبناء على هذه المعلومات فإن مدير الإنتاج يرغب في تحديد الكمية التي الواجب إنتاجها أسبوعياً حتى يحقق أقصى ربح ممكن، هذا مع العلم

تحليل الحساسية

أن مساهمة النوع الأول في الربح تبلغ 50 وحدة نقدية وأن مساهمة النوع الثاني في الربح تعادل 75 وحدة نقدية.

والمطلوب:

1- صياغة هذه المشكلة.

2- إعداد جداول السمبلكس اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل.

السؤال الخامس:

تعاقدت إحدى شركات التعدين على توريد كمية من الحديد الخام لأحد العملاء خلال أسبوع، ولقد توافرت لديك البيانات التالية :

أ- إن الكمية المطلوبة خلال أسبوع كما يلي:

24 طن حديد عالي الجودة.

16 طن حديد متوسط الجودة.

48 طن حديد منخفض الجودة.

ب- إن الشركة تمتلك منجمين لإنتاج الحديد يبلغ إنتاجهما اليومي كما يلي:

	<u>المنجم الأول</u>	<u>المنجم الثاني</u>
طن حديد عالي الجودة	12	4
طن حديد متوسط الجودة	4	4
طن حديد منخفض الجودة	8	24

ج- إن أيام العمل الفعلية 6 أيام في الأسبوع.

د- إن تكلفة التشغيل اليومي للمنجم الأول 400 وحدة نقدية والمنجم الثاني 320 وحدة نقدية.

والمطلوب:

استخدام طريقة السمبلكس في تحديد عدد أيام تشغيل هذين المنجمين للوفاء بالالتزامات تجاه العملاء مع مراعاة تخفيض التكاليف الكلية للتشغيل إلى أدنى حد لها.

السؤال السادس:

تنتج إحدى الشركات ثلاثة منتجات هي س1، س2، س3، ويمر الإنتاج في ثلاثة أقسام إنتاجية هي ص1، ص2، ص3، ولقد توافرت لديك البيانات التالية :

أ- تحتاج المنتج س1 ساعتين في القسم ص1، 6 ساعات في القسم ص2، 4 ساعات في القسم ص3. أما المنتج س2 فيحتاج إلى 4 ساعات في القسم ص1، 8 ساعات في القسم ص2، 12 ساعة في القسم ص3. والمنتج س3 يحتاج إلى ساعتين في القسم ص1، 4 ساعات ص2، 8 ساعات في القسم ص3.

ب- إن الطاقة الإنتاجية القصوى للقسم ص1=20 ساعة ، والقسم ص2=24 ساعة والقسم ص3=40 ساعة.

ج- إن هامش مساهمة الوحدة من المنتج س1=12 وحدة نقدية المنتج س2=14 وحدة نقدية والمنتج س3=16 وحدة نقدية.

وترغب الشركة في تحديد المزيج الأمثل من المنتجات الذي يحقق لها أقصى ربح ممكن.

والمطلوب : إعداد جداول السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة المذكورة.

الوحدة الثامنة

مضاي النقل Transportation Problems

بناء النموذج والحل وفق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية

The Northwest Corner Method

هدف الوحدة :

تعريف الطالب بمضاي النقل وكيفية صياغتها على شكل جداول،
و تعريفه بأسلوب موازنتها، بالإضافة إلى تعريفه بأسلوب إيجاد
الحل الأولي وفق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية .



قضايا النقل

المقدمة : نموذج النقل يساعد على وضع خطة مثلى لنقل نوع وحيد من المواد، من عدد من نقاط المصدر (نقطتين على الأقل) مثل مصانع، حقول، مناجم، إلى مجموعة من نقاط الاستيعاب (نقطتين على الأقل) مثل مستودعات، أسواق وغيرها. ويمكن الاعتماد على نموذج النقل لحل عدة قضايا عملية مثل إدارة المخزون، توزيع العمال على أماكن العمل، تنظيم استدراج المياه من السدود وغيرها.

قضايا النقل تستقرع عن قضايا البرمجة الخطية، ويمكن حلها وفق الطرائق الواردة في الفصول السابقة؛ لكن طبيعة هذه القضايا ساعدت في إيجاد عدة طرائق تساعد على حل هذه القضايا بفاعلية وكفاءة أكبر، ويمكن تطوير نموذج النقل بحيث يحل قضايا نقل عدة أنواع من المواد، وينطوي هذا النموذج على إمكانية تطويره ليشمل قضايا النقل مع نقاط عبور (ترانزيت).

- مفهوم نموذج النقل وتطبيقاته :

لدى صياغة نموذج النقل بالشكل القياسي نستخدم :

أ - الثوابت التي تحدد حجم الطاقة المتاحة في كل نقطة من نقاط المصدر؛ وحجم الطاقة المتاحة في كل نقطة من نقاط الاستيعاب .

ب- الثوابت التي تحدد تكلفة نقل كل وحدة منقولة من كل نقطة من نقاط المصدر إلى كل نقطة من نقاط الاستيعاب .

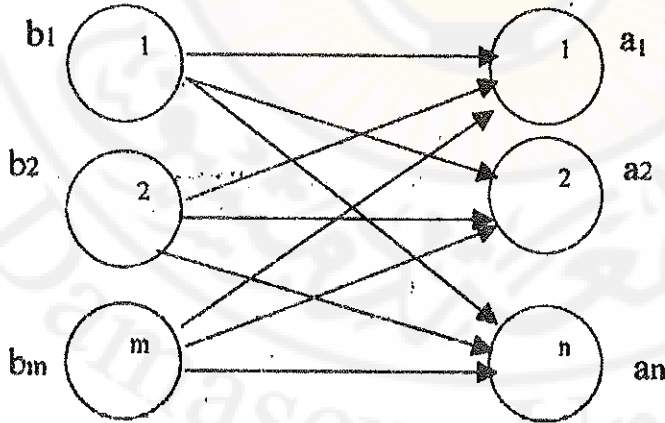
نموذج النقل يتناول نوعاً وحيداً من السلع، حيث يمكن تلبية الطلب في كل نقطة من نقاط الاستيعاب من بعض نقاط المصدر (اثنتين على الأقل)، والكميات المتاحة (الطاقة المتاحة) في كل نقطة من نقاط المصدر يمكن نقلها إلى بعض نقاط الاستيعاب (اثنتين على الأقل). وهدف النموذج وضع خطة نقل تبين عدد الوحدات التي يتوجب نقلها من كل نقطة من نقاط المصدر إلى كل

نقطة من نقاط الاستيعاب، بحيث تكون تكاليف النقل الإجمالية مثالية (أدنى ما يمكن) .

8-1- صياغة نموذج النقل:

- إن تكاليف النقل لأي معبر (مسار) تتناسب طردياً مع الكمية المنقولة من السلع والخدمات .،

- وحدة القياس المعتمدة وهي واحدة ؛ يمكن أن تكون على سبيل المثال قضيبياً معدنياً موجهاً إلى موقع البناء أو إلى المستودع؛ وقد تكون طنناً من الفلزات الموجهة إلى معمل التعدين وغيرها . وفي أي حال من الأحوال يجب أن تكون وحدة القياس المعتمدة في نقاط المصادر والمطلوبة في نقاط الاستيعاب؛ هي ذات وحدة النقل المعتمدة الشكل (8-1) يعرض مسألة نقل على شكل شبكة مؤلفة من m نقطة مصدر و n نقطة استيعاب . وتمثل نقاط المصدر والاستيعاب بدوائر؛ أما الأضلاع التي تربط نقاط المصدر مع نقاط الاستيعاب تمثل المعابر التي يتم عبرها نقل المواد وترسم على الشكل بأسهم .



الشكل رقم (8-1)

a_i : تمثل الكمية المتاحة في المصدر i : $(i = 1, 2, \dots, n)$

تضاي النقل

b_j : تمثل الكمية المطلوبة في المستوعب j : ($j = 1, 2, \dots, n$)

c_{ij} : تكلفة النقل من المصدر i إلى المستوعب j

يفرض أن الكمية المنقولة من المصدر i إلى المستوعب j هي x_{ij} في هذه الحالة مسألة النقل تصاغ على شكل مسألة برمجة خطية على النحو التالي :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\ \sum_{j=1}^n X_{ij} &\leq a_i \quad i=1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &\geq b_j \quad j=1, 2, \dots, n \\ X_{ij} &\geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m \\ &\quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

حيث تبين المجموعة الأولى من القيود أن إجمالي المواد المنقولة من كل مصدر من المصادر لا يمكن أن تزيد عن الكمية المتاحة في هذا المصدر .
وتبين المجموعة الثانية من القيود أن إجمالي المواد المنقولة إلى كل مستوعب من جميع المصادر يجب ألا يقل عن الكمية المطلوبة في هذا المستوعب
المجموعة الثالثة تبين أن الكميات المنقولة لا يمكن أن تكون سالبة .
من استعراض النموذج يتضح أن إجمالي الكميات المتاحة في نقاط المصدر

$$\sum_{i=1}^m a_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

يجب أن لا تقل عن إجمالي الطلب في نقاط الاستعاب

$$\sum_{j=1}^n b_j \quad j=1, 2, \dots, n$$

و اذا تساوت الكميات المتاحة مع الكميات المطلوبة أي اذا كانت :

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

يسمى النموذج من هذا النوع نموذج النقل المتوازن، ويختلف عن النموذج الوارد أعلاه فقط بان القيود تصبح على شكل معادلات أي :

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad i=1,2,\dots,m$$

$$j=1,2,\dots,n.$$

$$X_{ij} \geq 0$$

$$i=1,2,\dots,m$$

$$j=1,2,\dots,n$$

في الحياة العملية نادراً ما تتساوى الكمية المتاحة مع الكمية المطلوبة، وقد تكون الكمية المتاحة أقل أو أكبر من الكمية المطلوبة، لكن يمكن دائماً موازنة مسألة النقل بإضافة مصدر أو مستوعب وهمي. حيث إن موازنة المسألة تساعد في تبسيط عملية بناء النموذج الرياضي للمسائل الحقيقية، وتعتبر ضرورية لتطبيق أسلوب الحل المبسط الذي يتناسب مع شكل مسائل النقل .

المثال - 8-1 - مثال عن صياغة النموذج : شركة صناعية تنتج نوعاً وحيداً من المنتجات في مصانعها الثلاثة ، الطاقة الإنتاجية للمصانع 3, 2, 1 هي (700، 500، 300) على الترتيب وتوزع منتجاتها على خمسة أسواق، الطاقة الاستيعابية (الطلب) للأسواق 5، 4، 3، 2، 1 هي :

تفضايا النقل

(350، 250، 250، 300، 350) على الترتيب. فإذا كانت المسافة بين المصانع والأسواق معطاة في الجدول رقم (8-1) وتكلفة نقل الوحدة للكيلو متر هي (0.1) ل س، بالإضافة إلى تكلفة تحميل وتفريغ قدرها (1) ل س لكل وحدة منقولة.

المطلوب صياغة النموذج لهذه المسألة .

الأسواق	1	2	3	4	5
المصانع					
1	40	60	80	100	50
2	180	70	90	120	40
3	30	80	60	50	20

الجدول (8-1) جدول المسافات

الحل : صياغة النموذج :

تكلفة النقل تحسب عن طريق ضرب المسافة بين نقطة المصدر (المصنع) ونقطة الاستيعاب (سوق) z بتكلفة النقل للكيلومتر، ويضاف إلى الناتج تكلفة التحميل والتفريغ

مثلاً : تكلفة النقل من المصنع الأول إلى السوق الأول c_{11}

$$C_{11} = 0.1(40) + 1 = 5$$

تكلفة النقل من المصنع الثالث إلى السوق الخامس : C_{35}

$$C_{35} = 0.1 (20) + 1 = 3$$

وكذلك تم حساب باقي تكاليف النقل من المصانع إلى الأسواق وفق هذا الأسلوب، ووضع النتائج في الجدول رقم (8-2) ،

الأسواق	1	2	3	4	5
المصانع	1	2	3	4	5
1	5	7	9	11	6
2	19	8	10	13	5
3	4	9	7	6	3

الجدول رقم (2-8) جدول تكاليف النقل

ولصياغة المسألة بالشكل النهائي نضع التكاليف والبيانات في جدول جديد مثل الجدول (3-8) حيث خصص لكل نقطة مصدر سطورم تجاهة تثبيت الكمية المتاحة في المصدر المعني ؛ وخصص لكل نقطة استيعاب عمود وتم تثبيت أسفله الكمية المطلوبة في المستوعب المعني، وتثبيت تكلفة نقل كل وحدة من نقطة المصدر في السطر إلى نقطة الاستيعاب هي العمود في الزاوية اليمنى العليا للحقل المتشكل من تقاطع السطر مع العمود .

الأسواق	1	2	3	4	5	ai
المصانع	1	2	3	4	5	ai
1	5	7	9	11	6	300
2	19	8	10	13	5	
3	4	9	7	6	3	700
bj	350	250	250	300	350	1500

الجدول رقم (3-8)

نلاحظ أن مجموع الطاقة المتاحة في المصانع تساوي:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 300 + 500 + 700 = 1500$$

وأن مجموع الكميات المطلوبة في الأسواق تساوي:

$$\sum_{j=1}^n b_j = 350 + 250 + 250 + 300 + 350 = 1500$$

أي مجموع الكميات المتاحة تساوي مجموع الكميات المطلوبة:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = 1500$$

8-3- موازنة مسائل النقل: تتم موازنة مسائل النقل غير المتوازنة بإضافة بإضافة نقطة مصدر أو نقطة استيعاب وهمية، تمتص الفرق بين الكمية المتاحة والكمية المطلوبة.

8-3-1- موازنة المسألة عندما تزيد الكمية المطلوبة عن للكمية المعروضة :
نوضح عملية الموازنة من خلال المثال (8 - 2) .

المثال 8 - 2 :

شركة صناعية تصنع إحدى منتجاتها النمطية في ثلاثة مصانع، متوضعة في ريف دمشق، حمص، حلب، إنتاج هذه المصانع هو 2000,2500,2000 وحدة على الترتيب وتوزع منتجاتها عن طريق خمسة

وكلاء ، حجم طلب الوكيل الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ، الخامس هو
2000, 1500, 1700, 1700, 1800, 1000 وحدة على الترتيب .

المطلوب : صياغة المسألة بالشكل القياسي ، علماً أن تكاليف النقل من
المصانع إلى الوكلاء معطاة في الجدول رقم (4 - 8) .

الوكلاء	1	2	3	4	5
المصانع					
1	10	20	25	30	32
2	25	5	12	20	18
3	40	17	5	14	20

الجدول رقم (4-8)

الحل : المصانع هي نقاط المصدر، يخصص لكل منها سطر مستقل في

الجدول (5-8)، وتثبت الكمية المتاحة إلى يمين السطر .

الوكلاء هم نقاط الاستيعاب، يخصص لكل منهم عمود مستقل، وتثبت الكمية

المطلوبة في أسفل العمود .

وبعد نقل المعطيات والتكاليف على الجدول (5-8)، وهنا نلاحظ أن الكمية

المتاحة في نقاط المصدر هي 6500 وحدة، والكميات المطلوبة في نقاط

الاستيعاب (الوكلاء) هي 8000 وحدة، أي أن المسألة غير متوازنة، ولذلك

يتوجب إدخال نقطة عرض وهمية، تعرض الفرق بين الكمية المطلوبة والكمية

المتاحة، أي ان طاقتها الإنتاجية : $8000 - 6500 = 1500$ ؛ وهذا يتطلب

إضافة سطر للجدول كما هو الحال في الجدول (6-8)، وبما أن هذا المصدر

وهي فلن نتقل منه أية كميات ، وهذا يسمح لنا اعتبار ان تكلفة النقل من

قضايا النقل

المصدر الوهمي إلى أي نقطة من نقاط الاستيعاب، معدومة وهذا ما تم اعتماده فعلاً لدى صياغة المسألة بعد موازنتها كما هو في الجدول رقم (6-8)

الوكلاء المصانع	1	2	3	4	5	ai
1	10	20	25	30	32	2000
2	25	5	12	20	18	2500
3	40	17	5	14	20	2000
bj	2000	1500	1700	1800	1000	6500 8000

الجدول رقم (5-8)

الوكلاء المصانع	1	2	3	4	5	ai
1	10	20	25	30	32	2000
2	25	5	12	20	18	2500
3	40	17	5	14	20	2000
4	0	0	0	0	0	1500
bj	2000	1500	1700	1800	1000	8000

الجدول رقم (6 - 8)

ملاحظه : يمكن اعتبار تكلفة النقل من المصدر الوهمي معدومه إذا لم يترتب

على عدم تلبية طلب الوكلاء أي تكاليف، أما إذا وجدت تكاليف عن عدم التلبية (مثلاً غرامة تأخير أو عدم تنفيذ)، في هذه الحالة تعتبر هذه التكاليف هي تكاليف النقل .

8-3-2 موازنة المسألة عندما تزيد فيها الكميات المعروضة في المصادر عن الكميات المطلوبة في نقاط الاستعاب. نوضح عملية الموازنة من خلال المثال (3-8) .

المثال (3 - 8) :

شركة زراعية لديها ثلاث مزارع نموذجية، الطاقة الإنتاجية للمزرعة الأولى ، الثانية ، الثالثة هي 220, 300, 250 طناً على الترتيب، تورد الشركة منتجاتها إلى أربعة مصانع، استيعاب المصنع الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع هو 100, 200, 170, 180 طن على الترتيب .

المطلوب : صياغة المسألة بالشكل القياسي علماً بأن تكلفة النقل من المزارع إلى المصانع معطاة في الجدول رقم (7-8) .

المصانع				
المزارع	1	2	3	4
1	2	7	12	9
2	4	5	8	10
3	8	2	3	6

جدول رقم (7-8)

صياغة المسألة :

- المزارع هي نقاط المصدر .
- المصانع هي نقاط الاستيعاب
- ان الصياغة الأولية للمسألة كما هي واردة في الجدول رقم (8 - 8) تبين أن المسألة غير متوازنة؛ لذلك يجب موازنتها عن طريق إضافة نقطة استيعاب وهمية تطلب الفرق البالغ (طن 120 = 650 - 770) ، وبما أن النقطة وهمية فإن تنقل إليها أية كميات، وبالتالي يمكن اعتبار تكلفة النقل كل وحدة من نقاط المصدر إلى النقطة الوهمية تساوي الصفر كما هو الحال على الجدول رقم (8-9)، لكن إذا ترتب على عدم النقل من المصادر أية تكاليف إضافية (مثل تكاليف التخزين وغيرها) تعتبر هذه التكاليف هي تكاليف النقل .

المصانع					
المزارع	1	2	3	4	ai
1	2	7	12	9	250
2	4	5	8	10	300
3	8	2	3	6	220
bj	180	170	200	100	770 650

الجدول رقم (8 - 8)

المصانع	1	2	3	4	5	ai
المزارع						
1	2	7	12	9	0	250
2	4	5	8	10	0	300
3	8	2	3	6	0	220
bj	180	170	200	100	120	770

الجدول رقم (8 - 9)

8 - 4 - أساليب إيجاد الحل الأساس الأولي المسموح به :

هناك عدة أساليب لإيجاد الحل الأولي، وكلها تقوم على مبدأ أساس وحيد هو تحديد أولوية المعابر التي يتم النقل عبرها، والاختلاف بين الأساليب ينحصر في آلية تحديد أولوية المعابر، وبعد ذلك تتطابق هذه الأساليب بشكل مطلق في باقي الخطوات، ويمكن تحديد خطوات الحل الأولي بما يلي :

- 1 - تحديد المعبر الذي يتم النقل عبره؛
- 2 - تحديد أكبر كمية يمكن نقلها عبر هذا المعبر وهي تساوي الكمية المعروضة في سطر المعبر أو المطلوبة في عمود المعبر أيهما أقل؛
- 3 - الاستغناء عن السطر أو العمود (شطبه) الذي استنفذت طاقته بشكل كامل، ويثبت في الآخر المتبقي من طاقته، أما إذا استنفذت طاقتهما معا فيتم الاستغناء عن أحدهما ويثبت في الآخر طاقة معدومة (صفر)، ويعامل السطر أو العمود المعني كأي سطر أو عمود لديه طاقة متاحة؛
- 4 - نكرر الخطوات السابقة حتى يتم الاستغناء عن جميع الأسطر و الأعمدة.

8-5 -- أسلوب الزاوية الشمالية الغربية :

1- تحديد المعبر : يتم تحديد المعبر الواقع في الزاوية الشمالية الغربية غير المشطوبة في الجدول، ويكون المعبر بين سطرها وعمودها هو المعبر الذي له الأولوية في عبور المواد خلاله (النقل خلاله)، ونعالج باقي الخطوات كما ورد أعلاه . نوضح هذا الأسلوب من خلال إيجاد الحل الأولي للمثال (8-4)

المثال 8-4 : نوجد الحل الأولي للمثال 8-1 :

الأسواق المصانع	1	2	3	4	5	ai
1	5	7	9	11	6	300
2	19	8	10	13	5	500
3	4	9	7	6	3	700
bj	350	250	250	300	350	1500

الجدول رقم (8-10)

المعبر الأول : على الجدول رقم (8-10) تكون الأولوية هي للمعبر (1,1)، نلاحظ أن نقطة المصدر الأولى تعرض (300) وحدة ، في حين نقطة الاستيعاب الأولى تطلب (350) وحدة، إذاً أكبر كمية يمكن أن تعبر من نقطة المصدر الأولى إلى نقطة الاستيعاب الأولى هي 300 وحدة، وتثبت في الحقل (1,1) أي نضع (x=300)، وهذا يستنفذ كامل الطاقة المتاحة للمصدر الأول، وبالتالي يتم الاستغناء عن هذا المصدر ويشطب سطره ، وهذا يعني أن قيم باقي

المتغيرات في السطر معدومة ($X_{12} = X_{13} = X_{14} = X_{15} = 0$) ، ونثبت
 في أسفل العمود الأول المقدار المتبقي من طاقة استيعابه بعد تخفيضها بمقدار
 (300) أي نثبت (50) وحدة ، وبالتالي نحصل على الجدول رقم (8-11)

الأسواق						
المصانع	1	2	3	4	5	ai
1	300	5				300
2		19	8	10	13	5
3		4	9	7	6	3
bj	350	250	250	300	350	1500
	50					

الجدول رقم (8 - 11)

المعبر الثاني : على الجدول رقم (8-11) نعتبر الأولوية هي للمعبر (2,1)
 لكونه يقع على الزاوية الشمالية الغربية الجديدة بعد شطب السطر الأول ،
 والطاقة المتاحة في المصدر الثاني هي 500 وحدة وبقي طلب نقطة
 الاستيعاب الأولى هو 50 وحدة ، إذاً أكبر كمية يمكن أن تعبر من المصدر
 (2) إلى المستوعب (1) هي (50) ، وحدة أي إن $X_{21} = 50$ وهذا يعني
 انخفاض الطاقة المتاحة للسطر من 500 إلى 450 وحدة ، وتلبية المقدار
 المتبقي من طلب العمود الأول لذلك يشطب ويستغنى عنه ، وهذا يعني أن قيم

تضمينا النقل

باقي المتغيرات في العمود معدومة أي $X_{31} = 0$. وبالنسبة نحصل على
الجدول رقم (8 - 12)

الأسواق	1					
المصانع	1	2	3	4	5	a_i
1	300					300
			8	10	13	5
2	50					450
			9	7	6	3
3						700
b_j	350	250	250	300	350	1500
	50					

الجدول رقم (8 - 12)

المعبر الثالث : على الجدول رقم (8 - 12) الأولوية للمعبر (2, 2) وذلك بعد شطب السطر الأول والعمود الأول، والطاقة المتاحة المتبقية في السطر هي 450 وحدة والطلب في العمود الثاني هو 250 وحدة؛ لذلك نجد إن أكبر كمية يمكن أن تعبر إليه هي 250 وحدة، أي ($X_{22} = 250$)، وهذا يلبي كامل حاجة العمود لذلك نشطه من الحسابات، وبالتالي تكون قيم باقي المتغيرات غير المعرفة معدومة أي ($X_{32} = 0$)، أما المقدار المتبقي من الطاقة المتاحة في السطر الثاني فهو 200 وحدة لذلك نشبته بدلا من 450 وبالتالي نحصل على الجدول رقم (8 - 13) .

الأسواق المصانع	1	2	3	4	5	ai
1	300	5				300
2	50	250	8	10	13	500 450 200
3				9	7	3
bj	350 50	250	250	300	350	700

الجدول رقم (8 - 13)

المعبر الرابع : على الجدول رقم (8 - 13) نعتبر الأولوية للمعبر (3 , 2) وذلك بعد شطب السطر الأول والعمودين الأول والثاني . نلاحظ ان المقدار المتبقي من الطاقة المتاحة للسطر الثاني هو (200) وحدة، والطاقة الاستيعابية للعمود الثالث هي (250) وحدة، هذا يعني أن أكبر كمية يمكن أن تعبر إلى المستوعب الثالث هي (200) وحدة، وهذا يستنفذ كامل المتاح في السطر الثاني لذلك نشطبه ؛ وبالتالي تصبح قيم باقي المتغيرات غير المعرفة في السطر الثاني معدومة وهي ($X_{24} = X_{25} = 0$)، والمتبقي من طلب العمود الثالث هو (50) وحدة تثبت بدلاً من 250 وحدة، وبالتالي نحصل على الجدول (8 - 14) .

المعبر الخامس : على الجدول رقم (8 - 14) نعتبر الأولوية للمعبر (3,3) وبمعالجة منطقية مشابهة لما ورد أعلاه نلاحظ أن أكبر كمية يمكن أن تعبر من المصدر (3) إلى المستوعب (3) هي 50 وحدة (أي $X_{33} = 50$)،

فضايا النقل

الأسواق							
المصانع	1		2	3	4	5	ai
1	300	5					300
2	50	19	250	200			450 500 200
3				7	6	3	700
bi	350 50	250	250 50	300	350		

الجدول رقم (8 - 14)

وبالنتيجة نلبي حاجة المستوعب الثالث و يشطب عموده ويبقى في السطر الثالث طاقة متاحة قدرها 650 وحدة، ونحصل على الجدول رقم (8-15).

الأسواق							
المصانع	1	2	3	4	5		ai
1	300						300
2	50	250	200				500 450 200
3			50	6	3		700 650
bj	350 50	250	250 50	300	350		

الجدول رقم (8 - 15)

المعبر السادس : على الجدول رقم (8 - 15) تكون الأولوية للمعبر (4 , 3) وبمعالجة منطقية كما ورد أعلاه نجد أن $X_{34} = 300$ وبالنسبة لشطب العمود الرابع ونحصل على الجدول رقم (8 - 16) .

الأسواق						
المصانع	1	2	3	4	5	a_i
1	300					300
2	50	250	200			500 450 200
3			50	300	0	700 650 350
b_j	350 50	250	250 50	300	350	

الجدول رقم (8 - 16)

المعبر السابع : على الجدول رقم (8 - 16) نعتبر الأولوية للمعبر (5 , 3) وبمعالجة منطقية كما ورد أعلاه نجد $X_{35} = 350$ وبالنسبة يتم شطب العمود الخامس والسطر الثالث لأن الحقل (3 , 5) هو الحقل الأخير على الجدول، ونحصل على الحل الأولي الوارد في الجدول (8 - 17) .

تضاييا النقل

الأسواق المصانع	1	2	3	4	5	ai	
1	300	5	7	9	11	16	300
2	50	19	8	10	13	5	500
3		4	9	7	6	3	700
bj	350	250	250	300	350		

الجدول رقم (8 - 17)

الجدول رقم (8 - 17) يحتوي على الحل الأولي للمسألة حيث $X_{21}=50$ ،

$$X_{11}=300 , X_{22}=250 , X_{23}=200 , X_{33}=50 , X_{34}=300 , X_{35}=350$$

أما الكميات المنقولة عبر باقي المعابر فمعدومة، أي قيم باقي المتغيرات معدومة

$$X_{12} = X_{13} = X_{14} = X_{15} = X_{24} = X_{25} = X_{31} = X_{32} = 0$$

وتكلفة النقل هي :

$$\begin{aligned} C &= C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35} \\ &= 5(300) + 19(50) + 8(250) + 10(200) + 7(50) + 6(300) + 3(350) = 9300 \end{aligned}$$

ولكن هذا الحل هو حل أولي وننطلق منه للبحث عن الحل المثالي.

مسائل وتدريبات الوحدة 8

II - ضع إشارة (✓) تجاه العبارة الصحيحة وإشارة (×) تجاه العبارة الخاطئة

- 1 - يمكن موازنة مسائل النقل مهما كان نوعها
- 2- موازنة مسألة النقل تتطلب ادخال مصدر وهمي ومستوعب وهمي
- 3 - في مسائل النقل حجم المواد المنقولة من المصدر الوهمي يساوي الى حجم الطلب غير الملبى .
- 4- في مسائل النقل حجم المواد المنقولة الى المستوعب الوهمي يساوي الى حجم المواد غير المنقولة من المصادر كلها .
- 5- أسلوب النقل يستخدم لحل مسائل تنقل نوعاً وحيداً من المواد
- 6- التوازن في مسائل النقل الشرط الاساس لحلها وفق الاسلوب الجدولي
- 7- خطوات حل مسائل النقل جدولياً تشابه خطوات الحل وفق أسلوب السمبلكس
- 8- لدى حل مسائل النقل بناء الحلقة المستخدمة لتحديد المتغير الخارج من الحل تختلف عن تلك العمليات المناظرة في جداول السمبلكس
- 9 - اذا أضيف رقم ما الى جميع تكاليف النقل في الجدول فان قيم X_{ij} في الحل الأمثل بعد الاضافة تختلف عن قيمتها في الحل الأمثل قبل الاضافة
- 10- تكلفة النقل من المصدر الوهمي دائماً معدومة
- 11- تكلفة النقل الى المستوعب الوهمي أكبر من أي تكلفة أخرى في الجدول
- 12- في مسائل النقل المصوغة على شكل برنامج خطي عدد المتغيرات يساوي عدد المعابر في المسألة

تصايف النقل

13- في مسائل النقل المصوغة على شكل برنامج خطي كل مستوعب وكل مصدر يقابله قيد

II - ثلاثة تجمعات سكنية حاجتها من المياه هي 4, 8, 7 ألف متر مكعب يوميا ويتم تغذيتها من ثلاثة آبار طاقتها 5, 6, 8 ألف متر مكعب على الترتيب، تكلفة استدراج (ضخ) المتر المكعب الآبار الى كل تجمع من التجمعات مسطرة على الجدول رقم (8- 18)

التجمعات			
الآبار	1	2	3
1	2	3	-
2	5	2	1
3	3	4	2

الجدول (8- 18)

المطلوب : تحديد حجم المياه التي تضخ من كل بئر، بحيث تكون تكاليف الضخ صغرى .

III - حل المسألة السابقة بفرض ان طاقة البئر الاولى زادت بمقدار ألف متر مكعب يوميا .

IV - سيارة شحن تنقل الحليب من ثلاثة مراكز تجميع الى خمسة معامل جبنة تكلفة نقل كل عبوة (صفيحة)، تحسب حسب المسافة بين المراكز والمعامل بفض

الوحدة الثامنة

النظر عن عدد العبوات المنقولة ، الجدول رقم (8-19) يبين المسافات بين المراكز والمعامل والكمية المتاحة في كل مركز وحاجة كل معمل .
المطلوب : 1- صياغة المسألة جدولياً مع العلم أن تكلفة نقل العبوة لكل كيلو متر هي 0,2 ل س .

2- حل المسألة حسب أسلوب الزاوية الشمالية الغربية.

المعامل لمراكز	1	2	3	4	5	aj
1	90	110	70	60	40	200
2	30	80	150	90	80	500
3	70	120	100	70	50	300
bi	150	240	200	150	260	

الجدول رقم (8-19)

قضايا النقل : اختبار الحل و تطويره

الوحدة التاسعة

قضايا النقل - اختبار الحل الأولي و أساليب تطويره

Transportation Problems:

Test for optimal and improving the solution

هدف الوحدة تعريف الطالب:

- بأسلوب تقييم مثلية الحل الأولي
- كيفية تطوير الحل الأولي (الجاري)
- بأساليب تحسين الحل الأساس الأولي .



المقدمة : ان حل مسائل النقل الذي يتم ايجاده وفق أي اسلوب يشكل حلاً مسموحاً به، لكن الإدارة تسعى إلى الحل المثالي، أي يجب اختبار الحل ومعرفة فيما إذا كانت الخطة التي تم التوصل إليها هي الخطة ذات التكاليف الدنيا، وهل تحتاج لعملية تطوير. إن عملية الاختبار تجيب على هذه التساؤلات.

9-1- عملية الاختبار تتم على مرحلتين:

-المرحلة الأولى :

تتضمن عمليات حساب المساهمة النسبية في دالة الهدف لجميع نقاط المصدر

ولجميع نقاط الاستيعاب من خلال العلاقة : $C_{ij} = u_i + v_j$

جميع المعابر التي يتم النقل عبرها حيث :

C_{ij} - تكلفة نقل كل وحدة تنقل من المصدر i إلى نقطة الاستيعاب j .

u_i - المساهمة النسبية للمصدر i في دالة الهدف .

v_j - المساهمة النسبية لنقطة الاستيعاب j في دالة الهدف .

نشير إلى أن عدد المعادلات لأي مسألة أقل من عدد المعابر المطروقة بواحد، أي $(n + m - 1)$ ؛ وعدد المجاهيل هو $(n + m)$ ؛ حيث يوجد هنا n مجهول من النوع v_j و m مجهول من النوع u_i ومن المعلوم أن حل جملة معادلات ممكن عندما يكون عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات، لهذا السبب نعطي أي مجهول من المجاهيل قيمة معدومة؛ وعادة يتم اختيار u للسطر أو v للعمود الذي يحتوي أكبر عدد من المعابر المطروقة؛ لكن لأغراض الدراسة يفضل إعطاء u_1 قيمة معدومة (أي جعل $u_1 = 0$) .

2 - المرحلة الثانية :

تتضمن حساب فرق المساهمة لجميع المعابر غير المطروقة (التي لا تتقل خلالها أية كميات ولا تدخل الحل) من خلال العلاقة :

$$X_{pq}: G_{pq} = U_p + V_q - C_{pq}$$

حيث :

X_{pq} : المتغيرات التي لا تدخل في الحل (للمعابر غير المطروقة) .

G_{pq} : فرق المساهمة النهائي الناجم عن أي وحدة سيتم نقلها من المصدر p إلى نقطة الاستيعاب q . ويمكن القول إنه الأثر النهائي على دالة الهدف الناجم عن عملية النقل هذه .

U_p : مساهمة نقطة المصدر p في دالة الهدف .

V_q : مساهمة نقطة الاستيعاب q في دالة الهدف .

C_{pq} : تكلفة نقل الوحدة من المصدر p إلى نقطة الاستيعاب q .

- إذا كانت جميع فروق المساهمة سالبة ($G_{pq} < 0$) كان الحل أمثل ووحيد .

- إذا كانت بعض فروق المساهمة سالبة ($G_{pq} < 0$) وبعضها معدومة

($G_{pq} = 0$) كان الحل أمثل وتوجد حلول بديلة .

- إذا كانت بعض الفروق موجبة ($G_{pq} > 0$) إحداها على الأقل فالحل

غير أمثل وهناك إمكانية لتحسينه (تطويره) . نوضح عملية الاختبار من

خلال المثال (1 - 9) :

المثال (1 - 9) : نختبر مثولية الحل الأساس الأولي للمثال (1 - 8)

الوارد في الجدول رقم (1 - 9) من الوحدة الثامنة

نضاييا النقل : اختبار الحل و تطويره

المصانع المزارع	1		2		3		4		5		a _{ij}
1	300	5	7		9		11		16		300
2	50	19	8		10		13		5		500
3		4	0		7		6		3		700
b _j	350		250		250		350		350		

الجدول رقم (1-9)

في المعبر : 1,1 : $c_{11} = u_1 + v_1 = 5$
 2,1 : $c_{21} = u_2 + v_1 = 19$
 2,2 : $c_{22} = u_2 + v_2 = 8$
 2,3 : $c_{23} = u_2 + v_3 = 10$
 3,3 : $c_{33} = u_3 + v_3 = 7$
 3,4 : $c_{34} = u_3 + v_4 = 6$
 3,5 : $c_{35} = u_3 + v_5 = 3$

بإعطاء u_1 قيمة معروفة أي وضع $u_1 = 0$ نجد من العلاقة الأولى :

$$0 + v_1 = 5 \rightarrow v_1 = 5$$

بتعويض v_1 بقيمتها في العلاقة الثانية نجد أن :

$$u_2 + 5 = 19 \rightarrow u_2 = 14$$

بتعويض u_2 بقيمتها في العلاقة الثالثة نجد أن :

$$14 + v_2 = 8 \rightarrow v_2 = -6$$

$$7 + v_3 = 10 \rightarrow v_3 = 3$$

وهكذا من العلاقة الرابعة نجد :

$$u_3 + 3 = 7 \rightarrow u_3 = 4$$

ومن العلاقة الخامسة نجد :

$$-2 + v_5 = 4 \rightarrow v_5 = 6$$

ومن العلاقة السابعة نجد :

نثبت قيم u_i و v_i الى يمين و أعلى الجدول كما هو وارد في الجدول رقم

(2-9)

حساب فروق المساهمة للمعابر غير المطروقة وهي :

$$x_{12} : G_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 6 - 7 = -13 \quad :1,2 \quad \text{المعبر}$$

$$x_{13} : G_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 4 - 9 = -13 \quad :1,3$$

$$x_{14} : G_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 5 - 11 = -16 \quad :1,4$$

$$x_{15} : G_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 - 8 - 16 = -24 \quad :1,5$$

$$x_{24} : G_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 14 - 5 - 13 = -4 \quad :2,4$$

$$x_{25} : G_{25} = u_2 + v_5 - c_{25} = 14 - 8 - 5 = 1 \quad :2,5$$

المصانع	V1=5	V2=-6	V3=-4	V4=-5	V5=-8	
المزارع	1	2	3	4	5	ai
U1=0	300	5	7	9	11	300
U2=14	50	19	8	10	13	500
U3=-11		4	9	7	6	700
bj	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (2-9) .

$$x_{24} : G_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 14 - 5 - 13 = -4 \quad :2,4$$

$$x_{25} : G_{25} = u_2 + v_5 - c_{25} = 14 - 8 - 5 = 1 \quad :2,5$$

$$x_{31} : G_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 11 - 5 - 4 = 12 \quad :3,1$$

$$x_{32} : G_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 11 - 6 - 9 = -4 \quad :3,2$$

نلاحظ ان هناك فرقي مساهمة موجبين لمعبرين، الأول : 2,5 وفرق مساهمته (1) والمعبر الثاني (3,1) وفرق مساهمته (12)، اذاً الحل غير أمثل ويجب تطويره . وللسهولة والوضوح نثبت فروق المساهمة في الزاوية الجنوبية الغربية للحقل كما هو وارد في الجدول رقم (3-9) .

تصانيف النقل : اختبار الحل و تطويره

9 - 2- تطوير الحل:

1 - يتم اختيار أكبر فرق مساهمة بالقيمة المطلقة والإشارة الموجبة، ويؤشر على المعبر الذي يحقق ذلك وهو المعبر الذي سيتم النقل عبره، ولتحديد الكمية التي يمكن نقلها عبر هذا المعبر ننقل إلى الخطوة التالية .

2- تشكل حلقة أضلعها خطوط مستقيمة وفق الشروط التالية :

أ - الأضلع خطوط مستقيمة أفقية أو عمودية ؛

ب - كل ضلع متعامد مع الضلع السابق والضلع اللاحق له ؛

ج - كل ضلع يبدأ و ينتهي بمعبر مطروق (حقل مشغول) أو المعبر المؤشر

د - عدد الأضلع زوجي ؛

3- تؤشر رؤوس الحلقة بإشارة + ، - بالتناوب انطلاقاً من الحقل المؤشر ؛

4 - يتم اختيار أصغر رقم في المعابر (الحقول) المؤشرة بسالب ويضاف

أو يطرح إلى رؤوس الحلقة حسب إشارتها؛

5 - يتم الاستغناء عن إحدى المعابر (الحقول) التي تصبح الكمية العابرة

خلالها معلومة ؛

6 - تحسب تكلفة النقل؛

7 - تكرر عملية الاختبار؛

نوضح عملية التطوير من خلال المثال (9 - 2)

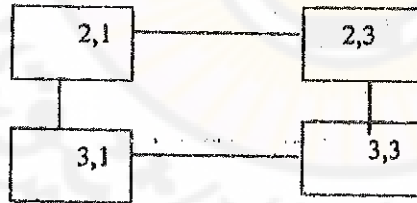
المثال: 9-2 : المطلوب تطوير الحل الأولي للمثال رقم (9-1) وهو الحل

الوارد على الجدول رقم (9 - 3)

المصانع المزارع	$v_1=5$	$v_2=-8$	$v_3=-4$	$v_4=-5$	$v_5=-8$	a_i
$u_1=0$	5	7	9	11	16	300
	300	-13	-13	-16	-24	
$u_2=14$	19	8	10	13	5	500
	50	250	200	-4	1	
$u_3=11$	4	9	7	6	3	700
	12	-4	50		350	
b_j	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (3 - 9)

الحقل غير المشغول والذي يحتوي أكبر فرق مساهمة موجب هو الحقل (3,1)
نؤشره بإشارة + ونشكل حلقة انطلاقاً من هذا الحقل؛ نجد أن الحلقة
تتشكل من الحقول الواردة على الشكل رقم (1 - 9)



الشكل رقم (1 - 9)

وعلى الجدول تصبح الحلقة كما هو وارد في الجدول (4 - 9)

الوحدة التاسعة

المصانع المزارع	$v_1=5$	$V_2=-6$	$v_3=-4$	$v_4=-5$	$v_5=-8$	a_j
$u_1=0$	5	7	9	11	16	300
	300	-13	-13	-16	-24	
$u_2=14$	19	8	10	13	5	500
	-	50	250	200	-4	1
$u_3=11$	4	9	7	6	3	700
	+					
	12	-4	50	300	35	0
b_i	350	250	250	300		

الجدول رقم (4 - 9)

نلاحظ أن أصغر قيمة في الحقول المؤشرة بإشارة (-) هي (50) ، إذا
يجب أن تضاف أو تطرح إلى رؤوس الحلقة حسب إشارتها ، وتوضع النتائج في
الجدول رقم (5 - 9) .

المصانع المزارع	$V_1=5$	$V_2=6$	$V_3=8$	$V_4=7$	$V_5=4$	a_j
$U_1=0$	5	7	9	11	16	300
	300	-1	-1	-4	-12	
$U_2=2$	19	8	1	13	+	5
	0		0			
$U_3=-1$	4	9	7	6		3
	50	-4	0	300	350	
b_i	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (5 - 9)

فسي الجدول رقم (9 - 5) يتضح أن هناك معبرين أصبحت الكميات التي تتسقل عبرهما معدومة ويجب التخلي عن معبر وحيد فقط لذلك نشطب المعبر (2-1) نشطب الصفر ويعتبر الحقل غير مشغول، أما المعبر 3,3 فيبقى ضمن الحل والكمية المنقولة عبره معدومة (أي المعبر الأساس الداخل في الحل X_{33} قيمته معدومة).تكلفة النقل للحل الوارد في الجدول (9 - 5) :

$$C = 5 (300) + 8 (250) + 10 (200) + 4 (50) + 7 (0) + 6 (300) + 3 (350) = 9050$$

- اختبار الحل الوارد في الجدول (9-5) :

نختبر الحل على الجدول مباشرة وان نتيجة الاختبار تبين وجود فرق مساهمة موجب وحيد للمعبر (2,5) اذا الحل غير أمثل .

تطوير الحل : نشكل حلقة على الجدول (9 - 5) انطلاقا من المعبر (2,5) يتضح أن اصغر رقم مؤشر بسالب على رؤوس الحلقة هو (250) يضاف وي طرح حسب الإشارات والنتيجة نحصل على الحل الوارد في الجدول رقم (9 - 6) .

اختبار الحل الوارد في الجدول (9 - 6) :

نختبر الحل على الجدول : نتيجة الاختبار يتبين أن الحل أمثل .وان تكلفة النقل المثلى :

$$C = 5 (300) + 8 (250) + 5 (250) + 4 (50) + 7 (250) + 6 (300) + 3 (100) = 8800$$

كضايا النقل : اختبار الحل و تطويره

المصانع المزارع	V1= 5	v2=7	V3= 8	V4= 7	V5= 4	ai
U1=0	300	-1	-1	-4	-12	300
u2=1	-13	250	-1	-5	250	500
u3=-1	50	-4	250	300	100	700
bj	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (9 - 6)

9-3 - إيجاد الحل الأولي حسب التكلفة الأقل في الجدول :

1- تحديد المعبر : يحدد المعبر الذي يحمل الجهة المعنية أقل تكلفة نقل من بين المعابر المتاحة ويبدأ النقل عبر هذا المعبر .

2- تحديد أكبر كمية يمكن نقلها عبر المعبر كما ورد في الفقرة (5 - 4) .

3- يستبعد سطر المعبر أو عموده كما ورد في (5 - 4) .

4- نكرر العمليات من (1) إلى (3) حتى يتم استبعاد جميع أسطر وأعمدة الجدول .

نوضح العمليات على المثال (9 - 3) :

المثال (9 - 3) :

نوجد الحل الأساس الأولي للمثال (8 - 1) والوارد في الجدول (9 - 7)

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	5	7	9	11	16	300
2	19	8	10	13	5	500
3	4	9	7	6	3	700
bj	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (9 - 7)

تحديد المعبر الأول : أن الأولوية كما أشرنا أعلاه للمعبر الذي يحمل الجهة المعنية أقل التكاليف ، والأولوية في الجدول هي للمعبر (3,5) حيث يحتوي أقل تكلفة نقل وهي (3) . ومن مقارنة ما يعرضه المصدر الثالث والبالغ (700) وحدة مع ما يطلبه المستوعب الخامس والبالغ 350 نلاحظ أن أكبر كمية يمكن أن تعبر هي (350) ، وحدة وهذا يلبي حاجة نقطة الاستيعاب الخامسة وبالتالي تستبعد من الحل (يشطب عمودها) ويبقى في نقطة العرض (350) ، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9 - 8)

كضاياء النقال : اأناار الال وناطوره

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	5	7	9	11		300
2	19	8	10	13		500
3	4	9	7	6	350	700 350
bj	350	250	250	300	350	

الالول رقم (8-9)

ناااااا المااااا النناا : على الالول (8-9) الأولاا للمااا (3 , 1) ، وبماالاة مشابها لما ورا أعاا نااا الرقا (350) فا المااا (3 , 1) ، وهاا بااواا الاااة المنااة للمصنا ونااة الاااااا وبوااع (350) فا فسا الماااا (3-1) ، أا امكن اسناااا المصنا النناا ، أو نااة الاااااا الأولى من ماراا الال الاااة ، وناا عنااا نساااا نااة المصنا النناا ونااا فا نااة الاااااا الأولى اااة منااة ماماا (صفا) . وهاا ما بواااا الالول رقم (9-9) .

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	5	7	9	11		300
2	19	8	10	13		500
3	350				350	700 350
bj	350 0	250	250	300	350	

الالول رقم (9-9)

تحديد المعبر الثالث على الجدول رقم (9-9) الأولوية للمعبر (1,1) وبمقارنة مع ما يعرضه المصدر الأول مع باقي الطلب لنقطة الاستيعاب الأولى نلاحظ أن الكمية التي يمكن نقلها معدومة أي نثبت صفراً في المعبر (1-1) ونشط عموده ، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9-10) .

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	0	7	9	11		300 300
2		8	10	13		500
3	350				350	350 700
bj	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (9-10)

تحديد المعبر الرابع : على الجدول رقم (9-10) الأولوية للمعبر (2-1)، ونلاحظ أن الكمية التي يمكن أن تعبر هي (250) وحدة ، وهذا يلبي الطلب لنقطة الاستيعاب الثانية تستبعد ويشط عمودها ونثبت في السطر الول باقي طاقته المتاحة والبالغة (50) وحده وتوضع النتائج في الجدول رقم (9-11) .

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	0	250	7	9	11	50 300
2			10	13		500
3	350				350	350 700
bj	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (9-11)

تحديد المعبر الخامس :

على الجدول رقم (9 11 -) نجد أن الأولوية للمعبر (3 , 1) وأكبر كمية يمكن أن تعبره هي (50) وحدة، وهذا يستنفذ الطاقة المتاحة للمصدر الأولي، وبالتالي يشطب سطرها عمودها وتثبت في السطر الأول باقي طاقتها المتاحة والبالغة (50) وحدة وتوضع النتائج في الجدول رقم (9 - 11) ويثبت في نقطة الاستيعاب الثالثة باقي طلبها وقدره (200) وحدة، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9 - 12) .

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	0	250	50			50 300
2			10	13		500
3	350				350	700 350
bj	350	250	250	300	350	
	0		200			

الجدول رقم (9 - 12)

تحديد المعبر السادس : على الجدول رقم (9 - 12) نجد أن الأولوية للمعبر (3 , 2) وأكبر كمية يمكن أن تعبره هي (200) وحدة، وهذا يستنفذ طاقة نقطة الاستيعاب الثالثة تستبعد ويشطب سطرها ويثبت في نقطة المصدر باقي طاقتها المتاحة وهي 300 وحدة، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9 - 13) .

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	0	250	50			50 300
2			200	13		500 300
3	350				350	350 700
bj	350 0	250	250 200	300	350	

الجدول رقم (9-13)

تحديد المعبر السابع :

على الجدول (9-13) نجد أن المعبر الوحيد المتبقي هو (4 , 2) وأكبر كمية يمكن أن تعبره هي (300) وحدة، وهذا يستنفد الطاقة المتاحة لنقطة المصدر ولنقطة الاستيعاب، وبالتالي ينتهي الحل والجدول رقم (9-14) يحتوي على الحل الأولي:

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai
1	5 0	7 250	9 50	11	16	300
2	19	8 200	10 300	13	5	500
3	4 350	9	7	6	3 350	700
bj	350	250	250	300	350	

الجدول رقم (9-14)

ثم نقوم بحساب تكلفة النقل لهذا الحل فنجدها تساوي:

$$C=7(250)+9(50)+10(200)+13(300)+4(350)+3(350)=10550$$

ليرة سورية وهو حلا أوليا وليس بالضرورة أن يكون حلا مثاليا لذلك نقوم بما يلي :

-اختبار الحل يتم وفق الأسلوب الذي سبق التعرف عليه أثناء اختبار الحل الأولي الذي تم الحصول عليه في الفقرة (9-1).

-تطوير الحل يتم وفق الأسلوب الذي سبق التعرف عليه أثناء تطوير الحل الأولي الذي تم الحصول عليه في الفقرة (9-2).

- حساب تكلفة النقل.

9- 4 - إيجاد الحل الأولي حسب أسلوب فوجيل :

1-تحديد المعبر : ان هذا الأسلوب يقوم على فكرة أساسية تقول إذا لم يتم النقل بأقل تكلفة سيتم بتكلفة أخرى أكبر منها (تليها في الكبر وفي حالات شاذة تساويها)، وبالتالي ستتحمل الجهة المعنية تكلفة إضافية (غرامة) تساوي الفرق بين التكلفة الدنيا والتكلفة التي تليها بالكبر، وهنا يكمن سر هذا الأسلوب الذي يسعى لجعل الغرامة الناجمة عن عدم النقل بأقل التكاليف في حدودها الدنيا ، ولهذا السبب في كل مرة يتم فيها البحث عن المعبر تحسب الغرامة لكل نقطة مصدر لم تستفد كامل طاقتها المتاحة، وتوضع في عمود إضافي يسمى عمود الغرامات، وتحسب الغرامة لكل نقطة استيعاب (طلب) لم يلبى كامل طلبها وتوضع النتائج في سطر إضافي أسفل الجدول يسمى سطر الغرامات .

ملاحظة : في كل مرة يتم البحث فيها عن معبر يعطى لعمود الغرامات الجديد وسطر الغرامات الجديد ذات الرقم، ثم نحدد أكبر غرامة في سطر الغرامات

الوحدة التاسعة

وعמוד الغرامات معا ويحدد سطرها أو عمودها (إن وجدت أكثر من غرامة تحقق هذا الشرط يتم اختيار إحداهما بشكل عشوائي فهي بدائل) . ثم يفتش في هذا السطر (العمود) عن المعبر الأقل تكلفة حيث نبدأ بالنقل عبره .

2- نقوم تحديد أكبر كمية يمكن نقلها عبر المعبر المختار كما ورد في الفقرة (4 - 8) .

3 - يستبعد سطر المعبر أو عموده كما ورد في الفقرة (4-8) .

4- تكرر العمليات من (1) إلى (3) حتى يتم استبعاد (شطب) جميع أسطر و أعمدة الجدول . نوضح الأسلوب على المثال (4 - 9)

المثال 4-9:

أوجد الحل الأساس الأولي للمثال (8 - 1) والوارد في الجدول رقم (9-15)

المصانع المزارع	1	2	3	4	5	ai	Δi
1	5	7	9	11	16	300	2
2	19	8	10	13	5	500	3
3	4	9	7	6	3	700	1
bj	350	250	250	300	350		
Δ1	1	1	2	5	2		

الجدول رقم (9 - 15)

تحديد المعبر الأول على الجدول :

1- نحسب الغرامات للمصادر ونضعها في العمود Δ_1 المضاف الى يمين الجدول ونحسب الفروق لنقاط الاستيعاب Δ_1 ونضعها في السطر الاضافي أسفل الجدول .

2- نختار أكبر غرامة : لدى في النظر عمود و سطر الغرامة معاً، نجد أن أكبر غرامة هي (5) ل.س وهي لنقطة الاستيعاب الرابعة والبالغة، ونحدد عمودها .

3- تحديد المعبر : الأفضلية للمعبر ذي تكلفة النقل الدنيا في عمود نقطة الاستيعاب الرابعة وهو للمعبر (3 , 4)،

4- العمليات على الجدول : أكبر كمية يمكن أن تعبر من 3 إلى 4 هي : (300) وجيدة ، وهذا يغطي حاجة المستوعب الرابع، ويخفض الطاقة المتاحة لنقطة المصدر الثالثة إلى (400) نثبت تجاهها في السطر ويشطب العمود الثالث ، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9 - 16)

المصانع للمزارع	1	2	3	4	5	ai	Δ_2
1	5	7	9		16	300	2
2	19	8	10		5	500	
3	4	9	7		3	700	
				300		400	1
bj	350	250	250	300	350		
Δ_2	1	1	2	—	2		

الجدول رقم (9 - 16)

تحديد المعبر الثاني على الجدول :

- 1- تحسب الغرامات للجدول (9 - 16) كما ورد أعلاه .
- 2- أكبر غرامة هي غرامة المصدر الثاني والبالغة (3) وحدة نقد ، ونحدد سطرها .
- 3- تحديد المعبر : الأفضلية للمعبر (5 , 2) .
- 4- العمليات على الجدول : أكبر كمية يمكن أن تعبر هي (350) وحدة ، وهذا يغطي حاجة نقطة الاستيعاب الخامسة وتخفض الطاقة المتاحة للمصدر الثاني إلى 150 وحدة، تثبت في السطر الثاني ويشطب العمود الخامس ، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9 - 17) .

المصانع							
المزارع	1	2	3	4	5	aj	A3
1	5	7	9			300	2
2	19	8	10		350	500 150	2
3	4	9	7	300		700 400	3
bi	350	250	250	300	350		
A3	1	1	2				

الجدول رقم (9-17)

- تحديد المعبر الثالث على الجدول (9-18):

- 1- تحسب الغرامات وتوضع في العمود والسطر Δ 3
- 2- أكبر غرامة هي غرامة المصدر الثالث يؤثر سطرها .
- 3- تحديد المعبر : الأفضلية هي للمعبر (1 , 3) .

كشاياء النقل : اختبار الحل و تطويره

4- العمليات على الجدول : أكبر كمية يمكن أن تعبر (350) وحدة ، وهذا يغطي طلب نقطة الاستيعاب الأولى ويخفض الطاقة المتاحة في نقطة المصدر الثالثة إلى (50) وحدة تثبت في السطر الثالث ، ويشطب العمود الأول وهذا ما يوضحه الجدول (9 - 18) :

المصالح							
المزارع	1	2	3	4	5	Δ4	ai
1		7	9			2	300
2		8	10		350	2	500 150
3	350	9	7	300		2	700 400-50
bj	350	250	250	300	350		
Δ4		1	2				

الجدول رقم (9 - 18)

تحديد المصدر الرابع على الجدول رقم (9 - 18) :

- 1- تحسب الغرامات للجدول وتوضع النتائج في العمود والسطر Δ4.
- 2- أكبر غرامة هي (2) ومتساوية في الأسطر الثلاثة وفي العمود الثالث، وهي تشكل أربعة بدائل ، وقد وقع اختيارنا على العمود الثالث .
- 3- تحديد المعبر : في العمود الثالث تكون الأفضلية للمعبر (3,3) .
- 4- العمليات على الجدول: يمكن نقل (50) وحدة ، وهذا يستنفد الطاقة المتاحة للمصدر الثالث ويخفض حاجة نقطة الاستيعاب الثالثة إلى (200) وحدة تثبت في العمود ويشطب السطر، وهذا ما يوضحه الجدول رقم (9-19).

المصانع المزراع	1	2	3	4	5	ai	Δ5
1		7	9			300	2
2		8	10			150	
					350	500	2
3						400 50	
	350		50	300		700	
bj	350	250	250 200	300	350		
Δ5		1	1				

الجدول رقم (9 - 19)

تحديد المعبر الخامس على الجدول رقم (9 - 19) :

- 1- تحسب الغرامات للجدول وتوضع في العمود والسطر Δ 5 .
- 2- أكبر غرامة (2) وهي للسطر الأول والثاني ، نختار السطر الأول
- 3- تحديد المعبر : في السطر الأول الأفضلية للمعبر (1-2) وأكبر كمية يمكن أن تعبر هي (250) ، وهذا يغطي طلب نقطة الاستيعاب الثانية ويخفض الطاقة المتاحة في المصدر الأول إلى (50) وحدة تثبت في السطر ، ويشطب العمود وهذا ما يوضحه الجدول (9 - 20) .

تحديد المعبر السادس على الجدول رقم (9 - 20) :

الجدول يحتوي على مستوعب وحيد (عمود وحيد) ، إذا لم يعد هناك ضرورة لحساب الغرامات لعدم وجود بدائل للعمود . و بالتالي يتم تحديد المعبر مباشرة في العمود الثالث ، والأفضلية للمعبر (1-2) وأكبر كمية يمكن أن تعبر هي

تضاييا اللقل : اأأبار الال و أألوراء

المصانع المزارع	1	2	3	4	5		Δ6
1		250	9			50 300	
2			10		350	150 500	
3	350		50	300		400 700	50
	350	250	250	300	350		
Δ6			200				

الآلول رقم (9 - 20)

(50) وأةة وأةأأأأ الطاقاة المأأاة فف السأر الأول آفأ فشطأ والمأأأفف من طأأ نأأةة الاسأأعاب الأالأة (50) وأةة، وهذا ما فوأأأه الآلول رقم (9 - 21) .

المصانع المزارع	1	2	3	4	5		
1		250	50			300 50	
2			10		350	150 500	
3	350		50	300		400 700	50
	350	250	200 250	300	350		
			150				

الآلول رقم (9 - 21)

- تحديد المعبر السابع على الجدول (9 - 21) :

المعبر الوحيد المتبقي هو (2,3) وأكبر كمية يمكن أن تعبر هي (150) ، وهذا يستنفد الطاقة المتاحة للمصدر الثاني ولنقطة الاستيعاب الثالثة ، ونصل إلى الحل الأساس الأول الوارد في الجدول (9 - 22) .

المصانع	1	2	3	4	5
المزارع	1	2	3	4	5
1	5	7	9	11	16
		250	50	50	
2	19	8	10	13	5
			150		350
3	4	9	7	6	3
	350		50	300	

الجدول رقم (9 - 22)

ان الحل الوارد في الجدول رقم (9-22) يجعل تكلفة النقل تساوي:

$$C = 7(250) + 9(50) + (150) + 5(350) + 4(350) + 7(50) + 6(300) = 9000$$

- اختبار الحل يتم وفق ما ورد في الفقرة (9-1) .
- تطوير الحل يتم وفق ما ورد في الفقرة (9-2) .

مسائل و تدريبات الوحدة 9

- ضع اشارة $\checkmark$ تجاه العبارة الصحيحة وعبارة $\times$ تجاه العبارة الخاطئة
- 1 - لدى ايجاد الحل الأولي لمسائل النقل اذا تساوت الكمية المتاحة للمعبر المختار مع الكمية المطلوبة سوف نحصل على حل منحل
- 2- وفق أسلوب التكلفة الأقل في الجدول لدى البحث عن التكلفة الدنيا ؛ اذا تساوت تكلفتني النقل لمعبرين نهملهما ونبحث عن التكلفة التي تليها بالكبر .
- 3- لدى اختبار الحل نحسب المساهمة في دالة الهدف لجميع المعابر .
- 4 - اختيار أكبر فرق مساهمة موجب لدى تحديد المعبر الذي سيدخل الحل ييناظر عملية اختيار أصغر ناتج قسمة لعمود الحلول على العمود الدليل أثناء تحديد المتغير الخارج من الحل وفق أسلوب السمبلكس .
- 5- اختيار اصغر رقم مؤشر بسالب على رؤوس الحلقة لدى تطوير حل مسائل النقل يكافئ عملية اختيار أكبر عنصر في سطر دالة الهدف من النوع Min وفق أسلوب السمبلكس .
- 6- الحل الاساس الأولي الذي يتم ايجاده وفق أسلوب فوجيل التقريبي اقرب الى الحل الأمثل من الحل الذي يتم ايجاده وفق أي أسلوب .
- 7- لدى تطوير الحل لمسألة النقل نحصل على حل جديد بتكلفة أكبر من تكلفة الحل السابق .
- 8- ايجاد الحل الاساس الاولي وفق أسلوب فوجيل التقريبي يعتمد على فكرة عدم تحميل المنشأة تكاليف اضافية ناجمة عن عدم اختيار المعابر بشكل مماثل .

الوحدة التاسعة

- 9- الجدول الجديد بعد التطوير يحمل المنشأة تكاليف اقل من التكاليف التي يحملها الحل في الجدول السابق ؛ بمقدار عدد الوحدات مضروباً بفرق المساهمة للمعبر (المتغير) الذي سيدخل الحل .
- II - الجدول رقم (9 - 23) يحتوي البيانات حول تكاليف النقل والكميات المتاحة في كل مصدر من المصادر والكميات المطلوبة في كل مستوعب

المستوعبات المصادر	1	2	3	4	
1	4	8	6	2	200
2	5	1	9	10	300
3	7	8	4	9	2500
4	3	10	7	5	350
	250	300	250	300	

الجدول رقم (9 - 23)

المطلوب :

- 1- أوجد الحل حسب أسلوب التكلفة الاقل في الجدول.
 - 2- أوجد الحل حسب أسلوب فوجيل التقريبي .
 - 3- بفرض أن الكميات المتاحة في كل مصدر من المصادر الواردة في الجدول رقم (9 - 23) متساوية وقدرها (300) وحدة المطلوب :
- أ - حل المسألة حسب أسلوب التكلفة الاقل في الجدول .
- ب - حل المسألة حسب أسلوب فوجيل التقريبي .

III - الجدول رقم (9-24) يحتوي البيانات حول تكاليف النقل والكميات المتاحة في كل مصدر من المصادر والكميات المطلوبة في كل مستويع

المستويات المصادر	1	2	3	4	
1	5	4	1	6	250
2	3	2	7	4	350
3	9	5	3	1	300
	200	250	300	200	

الجدول رقم (9-24)

المطلوب :

- 1- أوجد الحل حسب أسلوب التكلفة الأقل في الجدول.
- 2- أوجد الحل حسب أسلوب فوجيل التقريبي .
- 3- بفرض أن الكميات المتاحة في كل مصدر من المصادر الواردة في الجدول رقم (9-24) متساوية وقدرها (300) وحدة المطلوب :
 - أ - حل المسألة حسب أسلوب التكلفة الأقل في الجدول .
 - ب - حل المسألة حسب أسلوب فوجيل التقريبي .



الوحدة العاشرة

Assignment problems. قضايا التخصيص والتعيين

هدف الوحدة :

-تعريف الطالب بقضايا التخصيص والتعيين
-تعريفه بأسلوب إيجاد الحل الأساس للقضية بشكلها العام، من حيث
تخفيض التكاليف ، بالإضافة إلى كيفية تطبيق هذا الأسلوب على
قضايا تعظيم الأرباح.



المقدمة :

تتناول هذه الوحدة قضايا التخصيص والتعيين التي يتوجب فيها توزيع مجموعة من العمال أو الآلات (m عامل أو آلة أو أي جهة أخرى) لتنفيذ مجموعة من المهام (n مهمة)، لنفترض أن تعيين العامل I (حيث $i=1,2,\dots,m$) لتنفيذ المهمة J (حيث $j=1,2,\dots,n$) بحمل الجهة المعنية تكلفة قدرها c_{ij} ، القضية تتلخص في توزيع العمال على المهام بحيث يسند للعمال الواحد تنفيذ مهمة واحدة، وكل مهمة توكل لعمال واحد بحيث تكون تكاليف التنفيذ الإجمالية في أقل ما يمكن.

القضايا من هذا النوع ينظر إليها كحالات شاذة من مسائل النقل، حيث تشكل الأسطر (نقاط المصدر) وتعرض كل نقطة وحدة واحدة أي $a_i = 1$ لكافة i ، أما المهام فتشكل (نقاط الاستيعاب)، وكل منها يطلب وحدة واحدة أي $b_j = 1$ لكافة j ، تكلفة (النقل) هي c_{ij} والتي تمثل التكلفة الناجمة عن تعيين العامل i لتنفيذ المهمة j ، وإذا وجدت بعض المهام التي يتعذر تنفيذها من قبل بعض العمال تعتبر التكلفة c_{ij} كبيرة جدا ويرمز لها بـ M (تذكر أسلوب الغرامة في جداول السمبلكس)، الجدول رقم (10 - 1) يعرض قضية التعيين في شكلها العام.

قبل حل المسألة وفق أساليب حل مسائل النقل يتوجب (إجراء موازنة) للمسألة، بحيث يصبح عدد العمال m يساوي عدد المهام ($m = n$ أي) وذلك بإضافة عامل أو أكثر إذا كانت ($n > m$) حتى تصبح $n = m$ ، أو إضافة مهمة أو أكثر إذا كانت $n < m$ حتى تصبح $n = m$ ولهذا السبب يمكن اعتبار $n = m$ في جميع مسائل التعيين، ومذا ضروري لإيجاد الحل وفق الأساليب المعتمدة.

العمال	1	2		n	المتاح
المهام	1	2		n	1
1	C_{11}	C_{12}		C_{1n}	1
2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	1
:	:	:		:	:
:	:	:		:	:
M	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	1
العدد المطلوب	1	1		1	

الجدول رقم (10 - 1)

قضية التعيين يمكن عرضها على النحو التالي :

إذا لم تنفذ المهمة z من قبل العامل i : $X_{ij} = 0$
 إذا تم تنفيذ المهمة z من قبل العامل i : $X_{ij} = 1$
 والمسألة يمكن صياغتها على النحو التالي :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad : i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1 \quad : j = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{ij} = 0 \text{ أو } 1 \quad \text{حيث أن :}$$

لكل سطر

لكل عمود

تصنيف التخصيص والتعيين

لتوضيح مسألة التعيين نأخذ الجدول رقم (10-2) المؤلف من أربعة عمال وأربع مهام .

الحل الأساس الأولي (وفق أسلوب الزاوية الشمالية) سيكون حلاً منعلاً ،
(هناك متغيرات صفيرية) وسيبقى الحال كذلك في جميع مراحل الحل وهذه
الخاصية تصف جميع مسائل التخصيص ولكن طبيعة هذه المسائل ساعدت على
وضع أسلوب حل أكثر فعالية وبسيط يعرف باسم الطريقة الهنغارية .

المهام العمال	1	2	3	4	ai
1	5 1	8	12	7	1
2	9	4 1	5	10	1
3	11	10	8 1	4	1
4	3	7	5	10 1	1
bj	1	1	1	1	

الجدول رقم (10 - 2)

10-1- إيجاد الحل وفق الطريقة الهنغارية :

تقوم هذه الطريقة على إيجاد جدول معدل لتكلفة النقل يحتوي على أكبر
عدد من الأصغار عن طريق طرح بعض الأرقام من بعض الأسطر وبعض
الأعمدة ، ثم تعيين العمال لتنفيذ المهام التي تكون تكلفة تنفيذها المعدلة معنومة .

خطوات الطريقة الهنغارية لحل مسائل التعيين

1- إيجاد الجدول المعدل الأول : عن طريق القيام بطرح أصغر عنصر (رقم) في كل سطر من أسطر الجدول الأساس؛ من باقي عناصر السطر، وتوضع النتائج في جدول جديد يسمى الجدول المعدل الأول .

2 - إيجاد الجدول المعدل الثاني : عن طريق طرح أصغر عنصر في كل عمود من أعمدة الجدول المعدل الأول من باقي عناصر العمود ، وتوضع النتائج في جدول مشابه يسمى الجدول المعدل الثاني .

3 - التخصيص الأول : يخصص العامل لتنفيذ المهمة التي يمكن ان ينفذها بتكلفة معدلة معدومة . نظهر الحل على الجدول المعدل الثاني حيث نبدأ بتعيين العامل الذي لديه أقل عدد من المهام التي يمكنه تنفيذها بتكلفة معدلة معدومة أو من المهمة التي يمكن تنفيذها من قبل أقل عدد من العمال بتكلفة معدلة معدومة.

4 - إذا تم تخصيص كل عامل لتنفيذ مهمة بتكلفة معدلة معدومة ؛ وتم إسناد كل مهمة إلى عامل بتكلفة معدلة معدومة ، هذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل ، وننتقل إلى الخطوة رقم (7) في الحالة المعاكسة ننتقل إلى الخطوة التالية

5- إيجاد جدول المعدل الثالث : يمرر أقل عدد من الخطوط المستقيمة الأفقية والعمودية من جميع الأصفار ثم يحدد أصغر عنصر (أصغر رقم) لا يخرقه خط مستقيم وي طرح من جميع العناصر التي لا يخرقها خط مستقيم ، ويضاف إلى العناصر الواقعة على تقاطع الخطوط المستقيمة التي تم تمريرها عبر النقاط ، وتوضع النتائج في جدول جديد هو الجدول المعدل الثالث .

6 - نعود إلى الخطوة رقم (3) .

تضامياً للتخصيص و التعمين

7 - نحسب تكلفة التعمين : التكلفة تساوي لمجموع العناصر التي تم طرحها أثناء إجراء التعديلات على الجداول كلها وتساوي أيضاً مجموع العناصر في الجدول الأساس المناظرة للأصفار التي حددت العامل الذي سينفذ المهمة .
نوضح هذه الخطوات على المثال رقم (1-10)

المثال (1 - 10) : الجدول رقم (10 - 3) يحتوي بيانات حول أربع مهام وتكاليف تنفيذها من قبل أربعة عمال .

المهام				
العمال	1	2	3	4
1	3	6	8	5
2	9	7	10	9
3	6	7	13	7
4	9	8	9	6

الجدول رقم (10 - 3)

المطلوب : توزيع العمال على المهام بحيث تكون تكاليف التنفيذ الإجمالية في حدودها الدنيا .

الحل :

- 1- التعديل الأول : نختار أصغر عنصر في السطر i من أسطر الجدول (10 - 3) وليكن p_i ، ونضع هذه العناصر في العمود (p_i) الذي يمين الجدول رقم (10-4) ثم نطرحها من باقي عناصر السطر (من c_{ij}) ، ونوضح النتائج في جدول مشابه ، الجدول رقم (10 - 5) .

المهام العمال	1	2	3	4	pi
1	3	6	8	5	3
2	9	7	10	9	7
3	6	7	13	7	6
4	9	8	9	6	6

الجدول رقم (4 - 10)

2-التعديل الثاني : نختار أصغر عنصر في العمود z من أعمدة الجدول المعدل، الجدول رقم (5 - 10) ونضعه أسفل الجدول، فنحصل على عناصر السطر (qj) أسفل الوارد الجدول رقم (5-10)، ثم نطرحه من باقي عناصر العمود z وتوضع النتائج في جدول جديد ، الجدول رقم (6- 10) .

المهام العمال	1	3	3	4
1	0	0	5	2
2	2	1	3	2
3	0	1	7	1
4	3	2	3	0
qj	0	0	3	0

الجدول رقم (5-10)

مضاييا التخصصيس و التعيين

المهام العمال	1	3	3	4
1	0	0	2	2
2	2	1	0	2
3	0	1	4	1
4	3	2	0	0

الجدول رقم (6-10)

لدى التطبيق في الجدول (6-10) نجد أن الأفضلية هي لتعيين العامل الأول لتنفيذ المهمة الأولى (يوجد صفر وحيد في سطره) نؤشره بنجمة، ثم نشطب الصفر الآخر في عموده، نجري باقي العمليات على الجدول رقم (7-10) .

المهام العمال	1	2	3	4
1	*0	3	2	2
2	2	*0	0	2
3	0	1	4	1
4	3	2	*0	0

الجدول رقم (7-10)

- لدى التطبيق في الجدول رقم (7-10) من جديد نجد أن الأفضلية للمهمة الثانية أي تعيين العامل الثاني لتنفيذها و نؤشر الصفر في العمود الثاني بنجمة ونشطب الصفر الآخر في سطره .

- لدى التدقيق في الجدول من جديد نجد أن الأفضلية للمهمة الثالثة أي تعيين العامل الرابع لتنفيذها ونؤشر الصفر في العمود الثالث بنجمة ونشطب الصفر الآخر في سطره .

- لدى التدقيق في الجدول رقم (7-10) نجد أن جميع الأصفار تم تأشيرها أو شطبها ، لكن هناك العمود الرابع والسطر الثالث لا يحتويان على صفر مؤشر ، أي لم يتم تعيين العامل الثالث لتنفيذ أي مهمة ، وبالتالي لم تسند المهمة للربعة لأي عامل .

4 - التعديل الثالث للجدول :

نمرر أقل عدد من الخطوط المستقيمة الأفقية و العمودية من كافة الأصفار :

1 - الخط الأول يمرر عبر العمود الأول ،

2 - الخط الثاني يمرر عبر السطر الثاني ،

3 - الخط الثالث يمرر عبر السطر الرابع

بالنتيجة نحصل على الجدول رقم (8-10)

المهام				
العمال		3	3	4
1	0	3	2	2
2	2	1	0	2
3	0	1	4	1
4	3	2	0	0

الجدول رقم (8-10)

- نلاحظ على الجدول رقم (8-10) أن اصفر رقم لا يخرقه خط

مستقيم هو الرقم (1) نعدل الجدول وفق ما يلي :

أ - تعديل السطر الأول :

نلاحظ أن الحقل (1,1) يحتوي على صفر يخرقه خط مستقيم نبقه دون

تعديل، أما باقي العناصر فلا يخرقها خط مستقيم فنطرح منها الرقم (1)،

وبالنتيجة نحصل على السطر الأول على النحو التالي:

	1	2	3	4
1	0	2	1	1

ب - تعديل السطر الثاني:

نلاحظ أن هذا السطر يخرقه خط مستقيم إذا لا تتغير عناصره باستثناء

العنصر الواقع في الحقل (2,1) فيقع على تقاطع خطين مستقيمين

يضاف له (1) ويصبح السطر الثاني .

	1	2	3	4
2	0	0	0	2

ج - تعديل السطر الثالث:

في هذا السطر العنصر الواقع في الحقل

(3,1) هو الوحيد الذي يخرقه خط مستقيم وحيد لا يتغير، ويطرح

الرقم (1) من باقي العناصر فنحصل على السطر الثالث المعدل.

	1	2	3	4
3	0	0	3	0

د - تعديل السطر الرابع : السطر الرابع يخرقه خط مستقيم فلا تتغير

عناصره باستثناء العنصر (4,1) الذي يقع على تقاطع خطين مستقيمين،

لذلك يضاف له الرقم (1)، وبالتالي نحصل على السطر الرابع المعدل

	1	2	3	4
3	4	2	0	0

-- وجمع الأسطر الأربعة نحصل على الجدول المعدل رقم (9-10)
ونكرر عملية التخصيص .

المهام العمال	1	3	1	1
1	*0	2	2	2
2	3	*0	0	2
3	0	0	3	*0
4	4	2	0*	0

الجدول رقم (9-10)

5 - التخصيص الثاني : على الجدول رقم (9-10)

أ - الأفضلية للعامل الأول لأن سطره يحتوي على صفر وحيد لذلك
نخصصه للمهمة الأولى ونؤشر الصفر بنجمة ونشطب باقي الأصفار في
عموده .

ب - الأفضلية الآن هي متساوية لجميع الأسطر والأعمدة ، نختار الصفر
الواقع في الحقل 2,2 ونخصص العامل الثاني للمهمة الثانية ، ونؤشر
الصفر المناسب ونشطب بقية الأصفار في سطره وعموده .

ج - الأفضلية الآن للعامل الثالث أو المهمة الثالثة ، نعطيها للعامل الثالث و
بذلك نخصصه للمهمة الرابعة، ونؤشر الصفر المناسب بنجمة ونشطب الصفر
الأخر في عمود المهمة الرابعة .

د - الأفضلية الآن للعامل الرابع حيث يخصص للمهمة الثالثة ، وبذلك نكون
قد أشرنا أو شطبنا جميع الأصفار، ولدى التطبيق في الجدول رقم (9-10)

قضايا التخصيص و التعيين

نجد أن كل عامل خصص لتففيذ مهمة وكل مهمة خصص لها عامل ، وبذلك نكون قد توصلنا إلى التخصيص الأمثل .

6 - تكلفة التخصيص : إن تكلفة التخصيص هي تكلفة إنجاز الأعمال وتساوي : مجموع العناصر في الجدول الأصلي المقابلة للأصفار المؤشرة بنجمة في جدول الحل الأمثل : وحدة نقد $c = 9 + 7 + 7 + 3 = 26$ أو مجموع الأرقام المطروحة لإجراء كافة التعديلات التي أجريت على الجداول حتى الوصول إلى الحل المثالي أي تساوي:

$$c = (1) + (3) + (6) + 6 + 7 + 31 = 26 \text{ وحدة نقد}$$

10 - 2 - قضايا التعيين و التخصيص في حالة العوائد :

في هذا النوع من القضايا الإدارة الهدف من تخصيص الآلات أو العمال لتففيذ المهام أو نشاطات هو تحقيق أكبر أرباح أو اعظم نتائج ممكنة ، وإن حل المسائل من هذا النوع يتطلب تحويل جدول العوائد إلى جدول خسائر أو تكاليف ؛ عن طريق طرح جمع أرقام الجدول من اعظم (أكبر) رقم فيه، وتوضع النتائج في جدول جديد ثم يتبع أسلوب الحل السابق دون تغيير ، وبعد الحصول على صفر مؤشر في كل سطر وكل عمود نخصص تماماً كما في الأسلوب المشار إليه ، وهنا يكون إجمالي العوائد هو مجموع الأرقام في الجدول الأصلي والتي تقابل (تناظر) الأصفار المؤشرة بنجمة. نوضح آلية الحل من خلال المثال رقم (10-2).

المثال رقم (10-2)

تقوم شركة المميون لنقل الركاب بتخصيص أربعة أنواع من حافلات نقل الركاب على أربعة محاور رئيسية ، ومن خبرتها تمكنت من تحديد الأرباح الساجمة عن تخصيص كل نوع من الحافلات على كل محور ووضعتها في

الجدول رقم (10-10). المطلوب مساعدة الشركة على تخصيص الحافلات بهدف تحقيق أعظم الأرباح .

المحاور	1	2	3	4
الحافلات	15	10	12	8
2	6	8	13	7
3	11	7	10	9
4	12	10	14	11

الجدول رقم (10-10)

الحل :

1- التعديل الأول على الجدول رقم (10-10) :

يتم بهدف تحويل جدول الأرباح إلى جدول تكاليف (خسائر) ، أكبر رقم (الأرباح) في الجدول هو (15) . نطرح منه جميع أرقام الجدول رقم (10 - 10) نحصل على الجدول رقم (11-10) :

المحاور					pi
الحافلات	1	2	3	4	
1	0	5	3	7	0
2	9	7	2	8	2
3	4	8	5	6	4
4	3	5	1	4	1

الشكل رقم (11-10)

تضاريا التخصيص والتعيين

3 - التعديل الثاني على الجدول رقم (10-11) يتم بهدف الحصول على صفر في كل سطر : نطرح أصغر رقم في كل سطر من اسطر الجدول من باقي الأرقام ونضع النتائج في الجدول رقم (10 - 12)

المحاور				
الحافلات	1	2	3	4
1	0	3	3	7
2	7	5	0	6
3	0	4	1	2
4	2	4	0	4
qj	0	4	0	2

الجدول رقم (10-12)

3 - التعديل الثالث : بهدف الحصول على صفر في كل عمود ولذلك نطرح أصغر رقم في كل عمود من أعمدة الجدول رقم (10-12) من باقي الأرقام في العمود ، ونضع النتائج في الجدول رقم (10-13)

المحاور				
الحافلات	1	2	3	4
1	* 0	1	3	5
2	7	1	* 0	4
3	0	0	1	* 0
4	2	* 0	0	2

الجدول رقم (10-13)

4- التخصيص الأول

- أ - لدى التدقيق في الجدول نجد الأولوية للسطر الأول ، لأنه يحتوي على صفر وحيد نؤشره بنجمة ونشطب الصفر الآخر في عموده
- ب - لدى التدقيق من جديد في الجدول نجد الأولوية للسطر الثاني يحتوي على صفر وحيد نؤشره بنجمة ونشطب الصفر الآخر في عموده .
- ج - لدى التدقيق من جديد في الجدول نجد الأولوية للعمود الرابع يحتوي على صفر وحيد نؤشره بنجمة ونشطب الصفر الآخر في سطره .
- د - لدى التدقيق من جديد في الجدول نجد للسطر الأخير يحتوي على صفر وحيد غير مشطوب نؤشره بنجمة

نجد أن كل سطر وكل عمود يحتوي على صفر مؤشر .

- 5 - القرار : نخصص النوع الأول من الحافلات على المحور الأول والأرباح المحققة (15) ، نخصص النوع الثاني من الحافلات على المحور الثالث والأرباح المحققة (13) ، نخصص النوع الثالث من الحافلات على المحور الرابع والأرباح المحققة (9) ، نخصص النوع الرابع من الحافلات على المحور الثاني والأرباح المحققة (10) وتكون الأرباح هي 47 وحدة .

مسائل وتدريبات الوحدة 10

- ضع اشارة (✓) تجاه العبارة الصحيحة وإشارة × تجاه العبارة الخاطئة :

- 1-موازنة مسألة التخصيص والتعيين ضرورية لإيجاد حل أولي.
- 2-إضافة أي رقم أو طرحه من كافة عناصر جدول الكلفة (العائد) يمكن أن يغير من الحل الأمثل لمسألة التخصيص .
- 3-عدد الأصفار المؤشرة في الحل الأمثل يساوي الى عدد العمال والمهام معاً.
- 4-لدى تأشير الاصفار وشطبها في الجدول المعدل نبدأ من السطر أو العمود الذي يحتوي على عدد اكبر من الأصفار .
- 5-لدى تطوير الحل الاساس نمرر اكبر عدد من الخطوط المستقيمة الأفقية والعمودية من جميع الأصفار.
- 6-بعد عملية تمرير الخطوط المستقيمة في الحل لدى تطويره نختار أصغر رقم ونضيفه الى جميع الارقام التي لا يخرقها خط مستقيم ونطرحه من نقاط التقاطع .
- 7-في مسائل النقل عادة يسمح للعامل بتنفيذ مهمتين معاً.
- 8-لا يسمح في مسائل التخصيص لعاملين بالعمل على مهمة واحدة
- 9-مسائل التخصيص تمثل حالة شاذة من مسائل النقل ، كل مصدر يعرض وحدة واحدة وكل مستوغب يطلب وحدة واحدة .
- 10-أي حل لمسألة التخصيص وفق أسلوب النقل يعطي حلاً منعلاً.

11- في جدول التكلفة المعدل عدد الاصفار دائماً أكبر من عدد الأسطر والأعمدة معاً.

12- يمكن موازنة مسائل التخصيص والتعيين عن طريق ادخال عامل وهمي أو مهمة وهمية .

13- يمكن حل مسائل التخصيص والتعيين عن طريق جداول السمبلكس .

14- في مسائل تعظيم الارباح ليس من الضروري أن يكون عدد العمال يساوي عدد المهام .

15- حل مسائل التعظيم يختلف بشكل جوهري عن مسائل تخفيض التكاليف

II - منشأة صناعية لديها ورشة مؤلفة من خمسة عمال ، وتقوم بتنفيذ خمسة أنواع من النشاطات ، وقد لاحظت اختلاف تكلفة تنفيذ هذه الاعمال باختلاف العامل المنفذ فوضعت هذه التكاليف في الجدول رقم (10-14):

النشاطات					
العمال	1	2	3	4	5
1	8	12	7	6	5
2	10	13	9	12	8
3	6	7	10	12	10
4	11	9	6	8	13
5	5	13	11	5	7

الشكل رقم (10-14)

المطلوب مساعدة الشركة في تخصيص العمال لتنفيذ اعمال المنشأة بأقل التكاليف.

قضايا التخصيص و التعيين

III - شركة للصناعات الكيماوية لديها اربع حافلات من أنواع مختلفة تعمل على نقل العمال من منازلهم الى الشركة وبالعكس عبر اربعة معابر مختلفة ، لاحظت اختلاف تكاليف النقل باختلاف توزيع الحافلات على المعابر، وقد عزت ذلك الى أحد الاسباب التالية :نوع الحافلة ، السائق ، الطريق .ونظراً لصعوبة تحديد السبب قررت تخصيص كل حافلة على معبر وحيد، وقد أعدت جدول التكاليف رقم (10-15)

محاور حافلات	1	2	3	4
1	6	8	7	9
2	9	7	5	4
3	4	9	10	6
4	5	3	7	8

الجدول رقم (10-15)

المطلوب :

1- مساعدة الشركة في عملية التخصيص التي تحملها أقل تكاليف اجمالية.

1- هل المسألة-المتبقية بفرض أن الجدول جدول عوائد:



الوحدة الحادية عشر

قضايا الشبكة المثلى وقضايا المسار الأمثل

Minimum-span problems and shortest-rout problems

هدف الوحدة تعريف الطالب:

بقضايا الشبكات واستخداماتها وبأسلوب تحديد شبكة النطاق الأدنى
بقضايا المسارات المثلى وأسلوب تحديد المسار الأمثل .



المقدمة:

قضايا النقل التي تعرضنا لها في الفصل السابق تشكل جزءاً من مجموعة قضايا يمكن صياغتها وحلها وفق أساليب التحليل الشبكي ، ومنها على سبيل المثال :

- 1 - مد خطوط لنقل الغاز من حقول النفط الى كافة المدن السورية ، هذا يتطلب البحث عن الشبكة ذات التكلفة الدنيا .
- 2 - تحديد الطريق الأمثل للانتقال بين مدينتين عبر شبكة من الطرق المعبدة ، هذا يتطلب البحث عن المسار الأمثل (الأقصر ، الأقل تكلفة)
- 3 - تحديد التدفق الأعظمي (مسافر / سنة) لشبكات النقل المتاحة بين كافة المدن الرئيسية . وهذا يتطلب تحديد أعظم عدد يمكنه السفر .
- 4 - تحديد الشبكة الأقل تكلفة لنقل النفط من حقول الاستخراج الى الموانئ ومحطات التكرير .

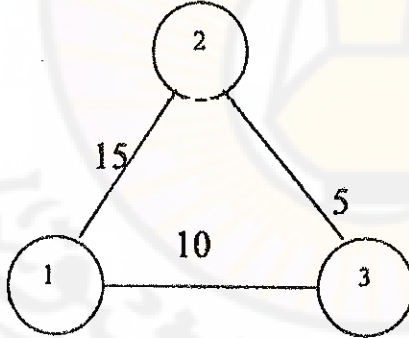
من هذه الأمثلة يمكن القول : إن القضايا التي يمكن معالجتها (حلها) وفق أساليب التحليل الشبكي هي :

- قضية الشبكة الدنيا (أقصر شبكة) .
 - قضية إيجاد المسار الأمثل (المسار الأدنى) .
 - قضية إيجاد التدفق الأعظمي .
 - قضية تحديد تكلفة النقل الدنيا مع وجود قيود على طاقة النقل .
- كل من الأمثلة الواردة الأمثلة الواردة أعلاه تحتوي على نقاط يفصل بينها بعد محدد، وترتبط فيما بينها بطرق تكاليفها تقاس بوحدات النقد، وترتبط بمعايير طا طاقة تدفقها المادية محدودة تقاس بوحدات القياس المعروفة، لكن هناك العديد من الحالات التي تأخذ فيها المتغيرات قيماً (حجوماً) من طبيعة أخرى؛ على سبيل

المثال قضبان حديدية موجهة موقع البناء . نشير الى أن جميع القضايا الواردة أعلاه يمكن صياغتها وحلها وفق أساليب البرمجة الخطية، لكن بسبب العدد الكبير من القيود والمتغيرات يصبح تطبيق أسلوب السمبلكس غير عملي . والشكل المميز (الخاص) لهذه المسائل يسمح بتطبيق خوارزميات أكثر كفاءة ، والتي تعتمد بشكل رئيسي على نظرية البرمجة الخطية .

1-11 - قضية الشبكة الدنيا (المثلى) :

قضية الشبكة الدنيا تتطلب إيجاد سلسلة الأضلع التي تصل جميع عقد الشبكة (أي كل نقطة فيها تتصل بضلع وحيد على الأقل) وبأقصر طول إجمالي . من الواضح أن الحل الأمثل يجب ألا يحتوي على أي حلقة ، ويمكن أن نوضح هذا من خلال الشكل رقم (1-11) الذي يعرض شبكة من ثلاث عقد ، والمسافة بين العقد معطاة على الأضلع التي تصل بينها .



الشكل رقم (1 - 11)

يتضح أن الشبكة الدنيا التي تربط العقدة (3) مع العقدتين (1) و (2) وبطول إجمالي قدره ($10 + 5 = 15$) وحدة ، وإذا تم ربط (2) مع (1) تتشكل حلقة ولا يمكن أن يكون الطول الإجمالي للشبكة والبالغ ($10 + 5 + 15 = 30$) وحدة أصغرياً ، وبالاستناد الى عدم احتواء الشبكة الدنيا على أية حلقات سميت باسم هيكل الشجرة العارية .

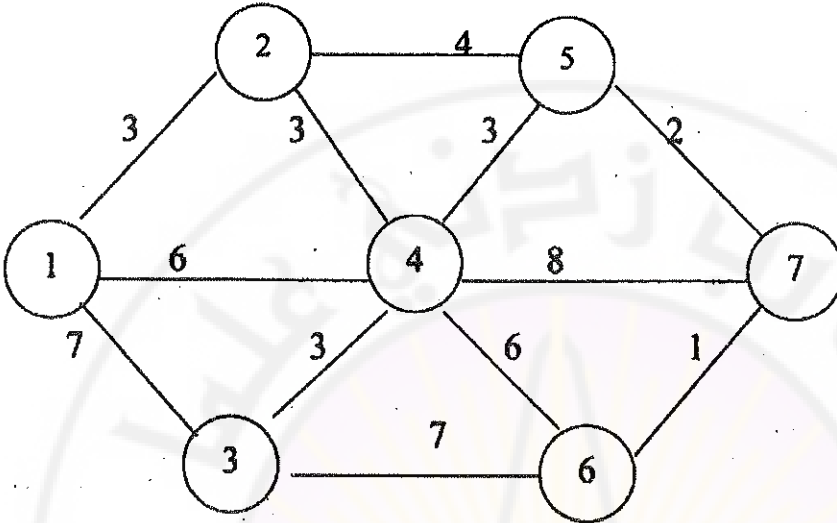
ويمكن تحديد أفرع الشجرة على الشبكة وفق الخطوات التالية :

يتم اختيار أي عقدة من عقد الشبكة ويتم وصلها بأقصر فرع يربطها مع أي عقدة من عقد الشبكة ، وهكذا تشكل العقدتان المتصلتان مجموعة العقد المتصلة ، وباقي العقد على الشبكة تشكل مجموعة العقد غير المتصلة . نختار من جديد أقصر فرع يربط أي عقدة من مجموعة العقد غير المتصلة مع أي عقدة من عقد المجموعة المتصلة من جهة واحدة ونصله معها ، وبالتالي يزداد عدد عناصر مجموعة العقد المتصلة وينقص عدد عناصر المجموعة غير المتصلة. نكرر عملية الوصل حتى تضم مجموعة العقد المتصلة جميع عقد الشبكة ، وفي حال تساوي طول فرعين من الأفرع المرتبطة من جهة واحدة مع العقد المتصلة نختار أبداً منها ، وهذا دليل على وجود أكثر من هيكل للشجرة الدنيا ، يتوجب الإشارة إلى إن اختيار أي نقطة بداية سوف يؤدي إلى الحل المثالي ذاته.

نوضح العمليات على المثال (1-11).

المثال 11 - 1 :

شركة تلفازية ترغب في ربط مجموعة تجمعات سكنية جديدة بشبكة بث تلفازية سلكية ، نتيجة الدراسة الميدانية توصلت لوضع مخطط شبكي لهذه التجمعات ، وبدلاً من تثبيت المسافات الفاصلة بين العقد على الأضلع ثبتت تكاليف مد الشبكة بين العقد (للتجمعات) ، لأن هذه التكاليف ترتبط بطبيعة المنطقة التي يمر عبرها الضلع بالإضافة إلى طول الضلع (السلك) ، والشركة ترغب القيام بعملية الربط بأقل تكاليف إجمالية ممكنة ، الشكل رقم (11-2) يعرض المخطط الشبكي الذي توصلت له ، الشركة وتثبت التكاليف على الأضلع بمئات ألوف الليرات السورية .



الشكل رقم (11 - 2)

الحل:

الخطوة الأولى: نختار عقدة بداية للشبكة (للشجرة العارية) ولتكن العقدة

(3) ، حيث تمثل مجموعة العقد المتصلة ونرمز لها بـ C ، أي : $C = \{3\}$

والمجموعة المتممة لها والتي نسميها مجموعة العقد المنفصلة ونرمز لها بـ $\bar{C}$

أي : $\bar{C} = \{1,2,4,5,6,7\}$

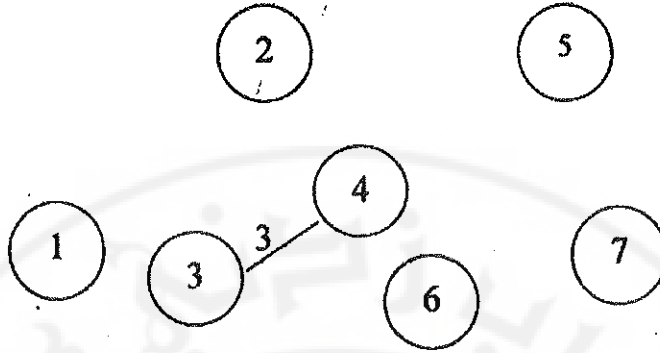
الخطوة الثانية: نختار من بين الأفرع التي تربط العقدة (3) مع النقاط المجاورة،

وهي الأفرع (3,1) و (3,4) و (3,6) أقصرها هو الفرع (3,4) نصله

مع (3) ، وتصبح مجموعة العقد المتصلة مؤلفة من عقدتين، أي:

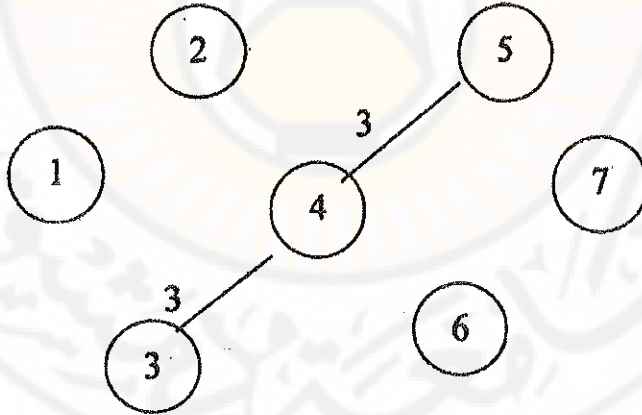
$C = \{3,4\}$ ، وتصبح مجموعة العقد المنفصلة مؤلفة من بقية العقد أي:

$\bar{C} = \{1,2,5,6,7\}$ ، كما هو واضح على الشكل (11 - 3 - أ)



الشكل رقم (11 - 3 - 1)

الخطوة الثالثة: من بين جميع الأفرع التي ترتبط مع أي عقدة من العقدتين (3) أو (4) وهي الأفرع : (3,1) ، (3,6) ، (4,1) ، (4,2) ، (4,5) ، (4,6) ، (4,7) ، نختار الفرع الأقصر وهو (4,5) ، وبذلك تصبح مجموعة العقد المتصلة مؤلفة من العقد (5,4,3) ، أما مجموعة العقد المنفصلة فتصبح مؤلفة من العقد $\bar{C} = \{1,2,6,7\}$ ، كما هو واضح على الشكل الرقم (11 - 3 - ب)

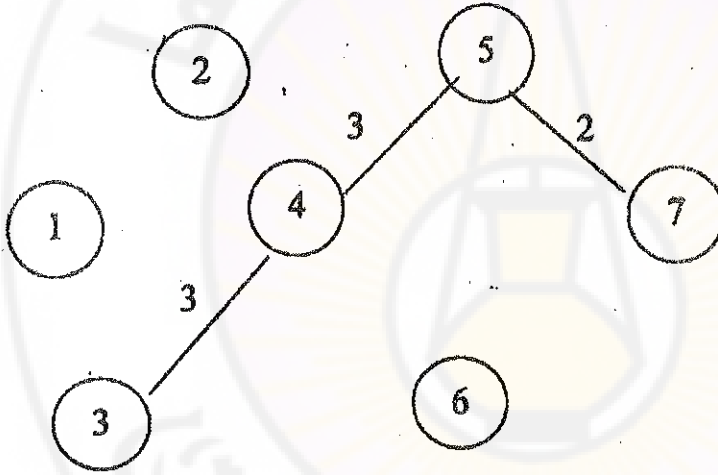


الشكل رقم (11 - 3 - ب)

الخطوة الرابعة: من بين جميع الأفرع المرتبطة مع أي من العقد الثلاث (3,4,5) وهي الأفرع : (3,1) ، (3,6) ، (4,1) ، (4,2) ، (4,6) ، (4,7) ،

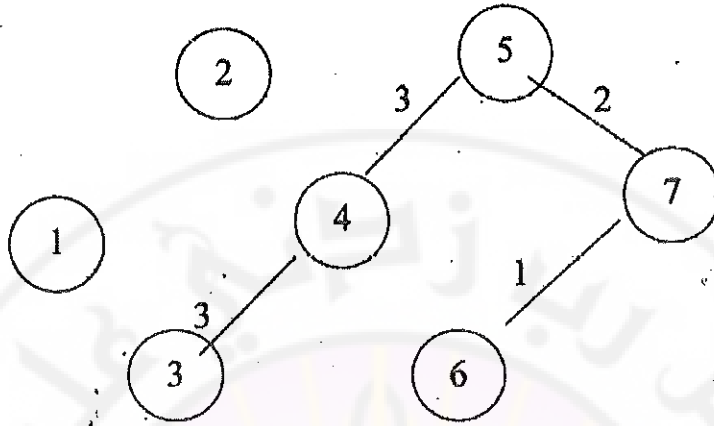
(5,2) ، (5,7) نختار الفرع الأقصر وهو الفرع (5,7) ، وبذلك تصبح مجموعة العقد المتصلة مؤلفة من العقد $C = (3,4,5,7)$ ، أما مجموعة العقد المنفصلة فتصبح مؤلفة من العقد $\bar{C} = \{1,2,6\}$ كما هو موضح على الشكل رقم (11 - 3 - ج) .

الخطوة الخامسة: من بين الأفرع المرتبطة من جهة واحدة مع أي عقدة من العقد المتصلة وهي الأفرع : (3,1) ، (3,6) ، (4,1) ، (4,2) ، (4,6) ، (4,7) ، (5,2) ، (5,7) فقط ولا تشمل الفرع (4,7) ، لأنه يصل بين عقدتين متصلتين ،



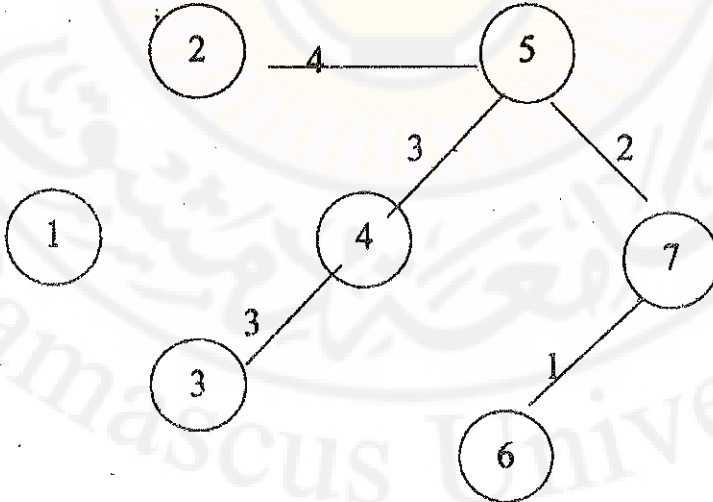
الشكل رقم (11 - 3 - ج)

وهذا يشكل حلقة لذلك يستبعد هذا الفرع. والفرع الأقصر هو الفرع (7,6) يوصل مع هيكل الشجرة ، وبذلك تصبح مجموعة العقد المتصلة مؤلفة من العقد $C = \{3,4,5,7,6\}$ أما مجموعة العقد المنفصلة فتصبح مؤلفة من العقدتين $\bar{C} = \{1,2\}$ كما هو موضح على الشكل رقم (11 - 3 - د)



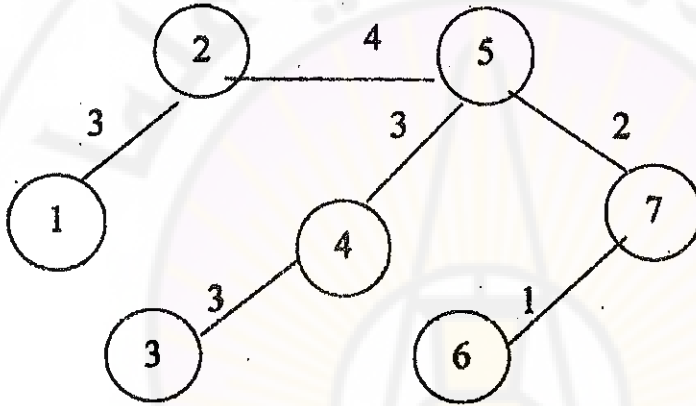
الشكل رقم (11 - 3 - د)

الخطوة السادسة من بين الأفرع المرتبطة من جهة واحدة مع أي عقدة من العقد المتصلة وهي الأفرع (1,3) , (1,4) , (2,4) , (2,5) نختار الفرع الأقصر وهو الفرع (2,5) وبذلك تصبح مجموعة العقد المتصلة مؤلفة من العقد $C = \{ 3,4,5,7,6,2 \}$ أما مجموعة العقد المنفصلة فتصبح مؤلفة من العقدة $\bar{C} = \{ 1 \}$ كما هو موضح على الشكل (11 - 3 - هـ)



الشكل رقم (11 - 3 - هـ)

الخطوة السابعة: من بين الأفرع المرتبطة من جهة واحدة مع أي عقدة من العقد المتصلة وهي الأفرع (3,1) , (4,1) , (2,1) الأقصر هو الفرع (2,1) نصله مع المجموعة ، وبالتالي تصبح المجموعة المتصلة مؤلفة من العقد $C = \{ 2,3,4,5,6,7,1 \}$ أما مجموعة العقد المنفصلة فتصبح خالية $\bar{C} = \{ \}$ ويصبح الحل كما هو موضح على الشكل (11 - 3 - و)



الشكل رقم (11 - 3 - و)

ولم يبق أي فرع في الشجرة يمكن أن يربط أية عقدة مع العقد المتصلة من جهة واحدة، وبالتالي تم الوصول إلى الشبكة الدنيا.
وطول الشبكة الدنيا هو : $3 + 4 + 1 + 3 + 2 + 3 = 16$ أي تكلفة التنفيذ هي 1600000 ل س .

11 - 2 قضايا المسارات المثلى (الأقصر) :

للقضية تلخص في إيجاد أقصر سلسلة من فروع الشبكة التي تربط عقدة البداية على الشبكة مع نقطة النهاية ، في هذه الفقرة سنتعرف على مجموعة قضايا يمكن صياغتها وحلها على شكل قضية أقصر مسار .

أمثلة على تطبيقات أساليب المسارات المثلى:

المثال رقم (11 - 2) قضية تبديل الآلات :

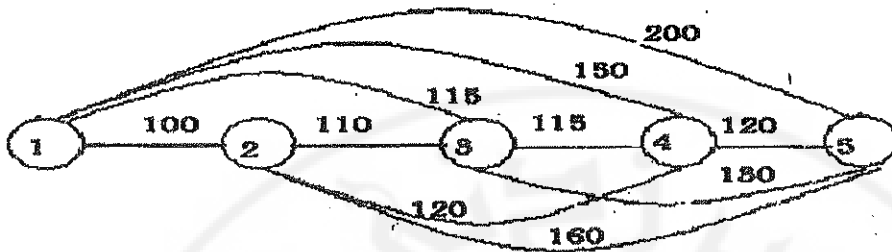
شركة نقل ركاب لديها مجموعة حافلات تخطط لتبديل محركاتها بشكل دوري خلال / 5 سنوات / . المحرك يجب أن يعمل سنة واحدة على الأقل قبل التفكير بتبديله ، الجدول رقم (11 - 1) يعرض تكلفة تبديل المحرك (بآلاف الليرات السورية) بالاستناد إلى زمن تبديل وعدد سنوات الخدمة للمحرك. القضية يمكن صياغتها على شكل شبكة على النحو التالي : كل سنة في المسألة تشكل عقدة ، طول الفرع الواصل بين أي عقدتين (سنتين) يقابل تكلفة التبديل ، من البيانات في الجدول رقم (11 - 1) يمكن صياغة القضية على الشبكة الواردة في الشكل رقم (11 - 4) ، وبالتالي يتوجب إيجاد المسار الأمثل (الأقل تكلفة) بين العقدة (1) والعقدة (5) . هذه المسألة يمكن حلها وفق الخوارزمية الواردة في الفقرة التالية (الفقرة رقم

11 - 2 - 1) والحل سيعطي المسار $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

يتوجب تبديل محرك كل حافلة في السنة الثالثة والسنة الخامسة ، وتكون إجمالي التكاليف (طول المسار الأمثل) $(120 + 130 + = 250)$ ألف ليرة سورية

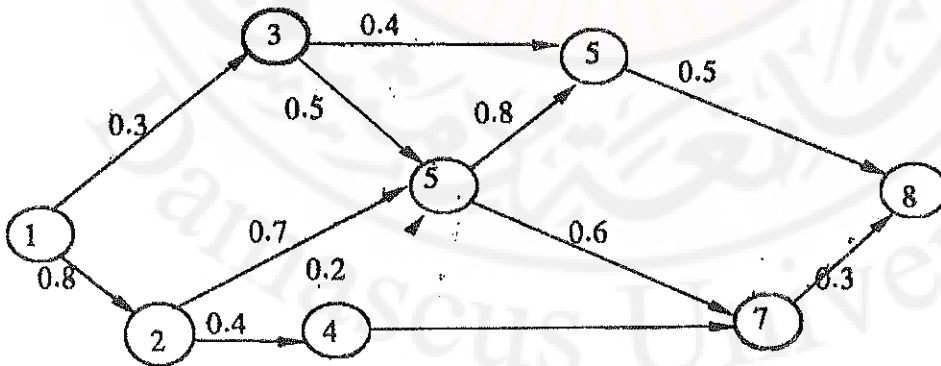
	1	2	3	4	5
1	-	100	115	150	200
2	-	-	110	120	160
3	-	-	-	115	130
4	-	-	-	-	120

الجدول رقم (11 - 1)



الشكل رقم (4 - 11)

السيد زيد ينتقل كل يوم بسيارته الخاصة من مسكنه إلى عمله ، ولأنه متخصص في التحليل الشبكي تمكن من تحديد المسار الأمثل من مسكنه إلى عمله لكن بعد التجربة ؛ والكثير من المخالفات والتوقيف المتكرر من قبل رجال المرور، والتأخير عن عمله توصل السيد زيد إلى نتيجة مفادها أن المسار الأمثل ليس أقصر مسار ، ونظر إلى القضية من وجهة نظر أخرى وهي أن المسار الأمثل ذاك المسار الذي تكون فيه احتمالات عدم توقيفه من قبل رجال المرور عظمى، درس جميع أجزاء الطريق التي يمكن أن يعبرها من مسكنه إلى عمله ووضع الاحتمالات الخاصة بكل جزء (فرع) على الشبكة ، كما هو وارد في الشكل (11,5) الفرع هنا يعتبر موجه حيث إن السيد زيداً يتحرك دائماً باتجاه عمله .



الشكل رقم (5 - 11)

الشبكة المتلى والمسار الأمثل

دراسة الاحتمالات بينت أن احتمال عدم توقيفه من قبل رجال المرور هو جداء احتمالات عدم توقيفه على جميع أجزاء (فروع) المسار الذي يسلكه إلى عمله ، والتي تقابل أطوال الفروع مثلاً احتمال عدم توقيفه على المسار

$$0,3 \times 0,4 \times 0,5 = 0,002 \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8$$

لكن السيد زيد قرر تعديل المسألة على النحو التالي : باستناد إلى أن لوغاريتم جداء كثير حدود يساوي إلى مجموع لوغاريتم الحدود ، وبالتالي إذا كان احتمال

عدم توقيفه على المسار (1,k) هو p_{1k} :

$$p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k \quad \text{فان :}$$

$$\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_k \quad \text{وأن :}$$

وجسرياً إن تعظيم p_{1k} يكافئ تعظيم $\log p_{1k}$ ، وبالتالي تعظيم مجموع

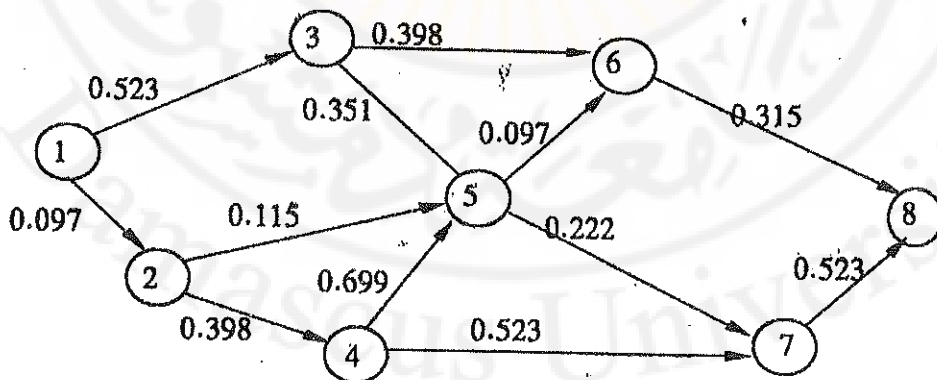
لوغاريتمات الاحتمالات لأجزاء الطريق ، وبما أن

$$\log p_{1k} \leq 0 : j = 1, 2, \dots, K$$

فان تعظيم $\log p_j$ يكافئ تصغير مجموع ($-\log p_j$) الجدول رقم (2 - 11)

يعرض احتمالات لأجزاء الطريق (فروع الشبكة) . وبالاستناد الى هذا تمكن

زيد من صياغة المسألة على شكل الشبكة الواردة على الشكل (6-11) .



الشكل رقم (6-11)

أجزاء الطريق	P_{ij}	$\log j$	$-\log j$
1,2	0,8	- 0,097	0,097
1,3	0,3	- 0,523	0,523
2,4	0,4	- 0,398	0,398
2,5	0,7	- 0,155	0,155
3,5	0,5	- 0,301	0,301
3,6	0,4	- 0,398	0,398
4,5	0,2	- 0,699	0,699
4,7	0,3	- 0,532	0,532
5,6	0,8	- 0,097	0,097
5,7	0,6	- 0,222	0,222
6,8	0,5	- 0,310	0,310
7,8	0,3	- 0,523	0,523

الجدول رقم (11 - 2)

11 - 3 - خوارزمية إيجاد المسار الأمثل على شبكة لا تسمح بالدوران :
هذه الخوارزمية بسيطة جدا لكنها تعرض مفهوم الحسابات غير المتقاطعة ،
والتي على أساسها تبنى البرمجة الديناميكية .
نتعرف على المصطلحات التي تعتمد لدى تطبيق الخوارزمية وهي :

الشبكة المثلى والمسار الأمثل

d_{ij} - ثابت يساوي المسافة بين العقدة i والعقدة j والتي تربط معها بفرع،
 u_j - بعد للعقدة (j) الأمثل عن عقدة البداية (i) .
 العمليات الحسابية تتوقف عندما نحصل على طول المسار الأمثل أي قيمة u_j
 عندما $j = n$ والصيغة العامة للعلاقة التي تساعد في حساب قيم u_j نأخذ الشكل

$$u_j = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{المسافة الفاصلة بين العقد } j \text{ + بعد العقدة السابقة } i \text{ عن} \\ \text{والعقد السابقة لها } i \text{ بداية الشبكة} \end{array} \right\}$$

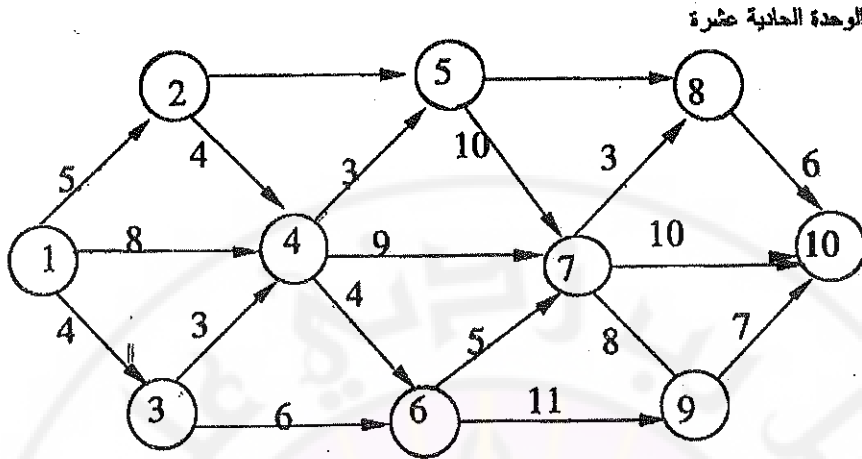
$$= \min \{ u_i + d_{ij} \}$$

وترتبط معها بضلع $j < i$

هذه العلاقة تبين أن طول المسار الأمثل الذي يصل العقدة j مع عقدة البداية
 (1)، أي إن قيمة (u_j) يمكن حسابها فقط بعد معرفة (حساب) أطوال
 المسارات المثلى لجميع العقد السابقة لها (أي جميع قيم u_i حيث $j < i$
 وترتبط معها بفرع مباشر)؛ مثلاً على الشكل رقم (11-6) نلاحظ أن
 الحسابات المسموحة انطلاقاً من العقدة (1) أي بالاستناد إلى قيمة u_1 هي
 1- u_2 و u_3 على التوازي وغير مسموحة بالنسبة للعقدة الرابعة؛ لأن هناك
 عقدتين سابقتين لها وغير معلوم بعدهما عن عقدة البداية، هما (2) و (3).
 نتعرف على الخوارزمية من خلال حل المثال (11-4)

المثال 11-4 :

إن الشبكة على شكل (11-7) تمثل جميع أجزاء الطرق التي تربط عقدة
 البداية (1) مع عقدة النهاية (10) نلاحظ أن الشبكة لا تسمح
 بالدوران، حيث لا توجد أية سلسلة من الأفرع التي تربط أي نقطة مع نفسها.



الشكل رقم (7 - 11)

مراحل الحل :

المرحلة الأولى : نفترض أن بعد نقطة البداية عن بداية الشبكة صفر

$$u_1 = 0$$

أي

المرحلة الثانية : (العقدة الثانية) من (1)

$$u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 5 = 5$$

(العقدة الثالثة) من (1)

$$u_3 = u_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4$$

المرحلة الثالثة : (العقدة الرابعة) من (3)

$$u_4 = \min \{ u_1 + d_{14} , u_2 + d_{24} , u_3 + d_{34} \}$$

$$= \min \{ 0+8 , 5+4 , 4+3 \} = 7$$

المرحلة الرابعة : (العقدة الخامسة) من (4)

$$u_5 = \min \{ u_2 + d_{25} , u_4 + d_{45} \}$$

$$= \min \{ 5+6 , 7+3 \} = 10$$

(العقدة السادسة) من (3)

$$u_6 = \min \{ u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46} \}$$

$$= \min \{ 4 + 6, 7 + 4 \} = 10$$

المرحلة الخامسة : (العقدة السابعة) من (6)

$$u_7 = \min \{ u_4 + d_{47}, u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67} \}$$

$$= \min \{ 7 + 9, 10 + 10, 10 + 5 \} = 15$$

المرحلة السادسة : (العقدة الثامنة) من (7)

$$u_8 = \min \{ u_5 + d_{58}, u_7 + d_{78} \}$$

$$= \min \{ 10 + 12, 15 + 3 \} = 18$$

(العقدة التاسعة) من (7)

$$u_9 = \min \{ u_6 + d_{69}, u_7 + d_{79} \}$$

$$= \min \{ 10 + 11, 15 + 8 \} = 21$$

المرحلة السابعة : (العقدة العاشرة) من (8)

$$u_{10} = \min \{ u_7 + d_{710}, u_8 + d_{810}, u_9 + d_{910} \}$$

$$= \min \{ 15 + 10, 18 + 6, 21 + 7 \} = 24$$

وفي المرحلة السابعة نتوصل الى $i = n$ وبالتالي نوقف الحسابات ، ونجد أن طول المسار من 1 إلى 10 هو 24 وحدة ، ويتألف من الأجزاء التالية:



نلاحظ أن الحل يحدد المسارات المثلى وأطولها بين عقدة البداية وجميع عقد الشبكة . ونشير الى إمكانية إجراء جميع الحسابات بشكل مباشر على الشبكة . إن أهمية أسلوب الحسابات الواردة أعلاه يعود إلى صفة عدم تقاطع الحسابات، حيث تتم بعد الحصول على معلومات كافية حول المسارات المثلى، لجميع العقد

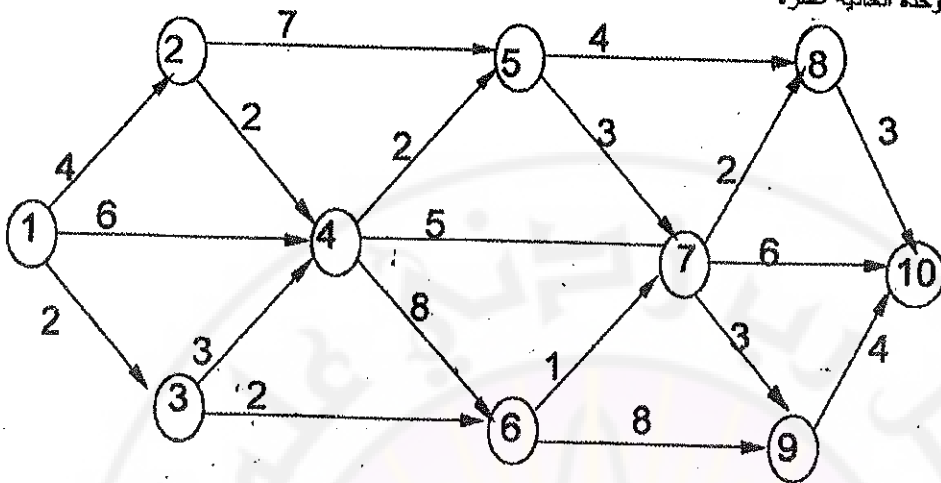
التي تسبق بشكل مباشر العقدة التي بحسب طول مسارها الأمثل (أي قيم u_i)
مثلاً في المثال السابق ، يمكن حساب طول المسار الأمثل للعقدة (7) فقط بعد
معرفة طول المسار الأمثل للعقد (4 , 5 , 6) ؛ ونشير إلى أنه من غير
الضروري تحديد المسار الأمثل لجميع النقاط المتبقية بل يكفي معرفة طولها
(أي قيمة u_i) لأن هذا يقدم معلومات كافية للقيام بالحسابات اللازمة ،
وبالتحديد هذه المعلومات تساعد على استخدام الحسابات غير المتقاطعة في
البرمجة الديناميكية وغيرها .

مسائل وتدريبات الوحدة الحادية عشر

I - ضع إشارة (✓) تجاه العبارة الصحيحة وإشارة (×) تجاه العبارة الخاطئة

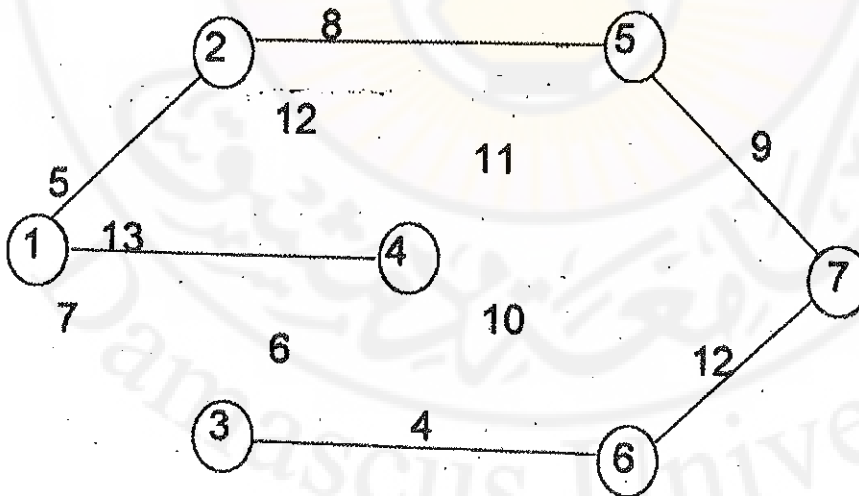
- 1- تسمى الشبكة شبكة موجهة إذا سمحت بالحركة خلالها باتجاه واحد .
 - 2- على الشبكة الموجهة يمكن العودة إلى أي نقطة بعد الإنطلاق منها .
 - 3- شبكة النطاق الأدنى يمكن أن تحتوي على دارات مغلقة .
 - 4- لتحديد المسار الأمثل بين نقطة البداية على شبكة ونقطة النهاية يمكن أن نختار أي نقطة تقع بينهما ونبدأ بالحسابات إنطلاقاً منها .
 - 5- على أي شبكة البعد بين i و j يساوي البعد بين j و i .
 - 6- المسار الأمثل بين نقطة البداية ونقطة النهاية على أي شبكة يجب أن يمر بكافة نقاطها .
 - 7- شبكة النطاق الأدنى قد تحتوي على بعض نقاط الشبكة دون البعض الآخر .
 - 8- يمكن تمثيل شجرة نسب الإنسان على شكل شجرة نطاق أدنى .
- II- الشبكة على الشكل رقم (8-11) تمثل مراحل الطريق ، التي يمكن أن يعبرها مربى الأغنام عوض ، للانتقال من المنطقة (1) التي يقضي فيها الشتاء والربيع ، إلى المنطقة (10) التي يقضي فيها الصيف والخريف . وضع السيد عوض بإستناد إلى خبرته تقديرات الأزمنة اللازمة للانتقال من مرحلة إلى أخرى ، وهي موضحة على الشكل رقم (7-11) .
- المطلوب : تحديد مسار السيد عوض مع قطعانه الانتقال من مشاته في المنطقة (1) إلى مصيفه في المنطقة (10) .

الوحدة الحادية عشرة



الشكل رقم (8-11)

III- الشبكة على الشكل رقم (9-11) تمثل توضعات مجموعة مزارع ، حيث العقد تمثل المزارع والأضلع تمثل المسافات بينها ، لدى المالك السيد حمد بنر ماء في المزرعة رقم (6) يغطي حاجة جميع المزارع من المياه ، المطلوب : وضع مخطط لوصل المزارع ببعضها البعض بشبكة مياه .

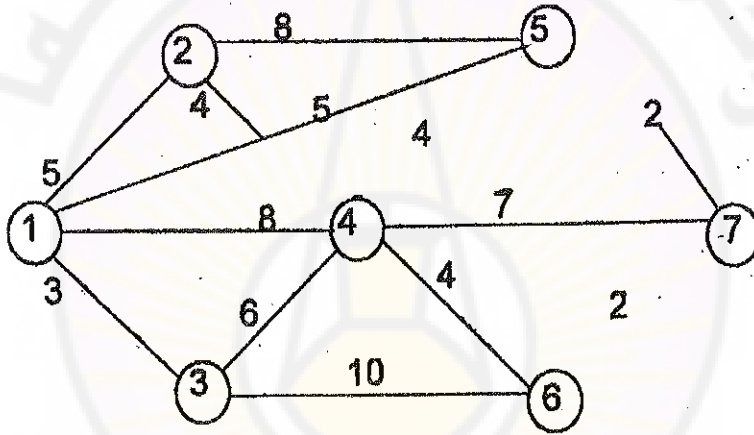


الشكل رقم (9-11)

الشبكة المثلى والمسار الأمثل

III- الشبكة على الشكل رقم (10-11) تمثل توضعات مجموعة من التجمعات السكنية في البادية وترغب مؤسسة الخدمات بربط هذه التجمعات بشبكة طرق بغض النظر عن المسافة التي يتوجب على عابر الطريق قطعها لدى إنتقاله من تجمع إلى آخر، حيث ثبتت على الأضلع تكاليف تنفيذ أجزاء الطريق بدلا من طول المسافة الفاصلة.

المطلوب :تحديد الشبكة التي تحمل المؤسسة أقل التكاليف .



الشكل رقم (10-11)



قضايا المسار الأمثل و التدفق الأعظمي

الوحدة الثانية عشر

قضايا المسار الأمثل على شبكة تسمح بالدوران

وقضايا التدفق الأعظمي

shortest-rout problems and maximal-flow problems

هدف الوحدة :

تعريف الطالب بالشبكة التي تسمح بالحركة بالاتجاهين

وكيفية تحديد المسار الأمثل عليها بالإضافة الى تعريفه

بقضية التدفق الأعظمي



المقدمة

إن قضايا المسار الأمثل التي تعرفنا عليها في الوحدة السابقة تشكل حالة شاذة من مجموعة قضايا أكثر شمولاً وهي قضايا المسارات التي تسمح بالدوران وهي ستكون موضع دراستنا في هذه الوحدة بالإضافة إلى نوع آخر من القضايا وهي قضايا التدفق الأعظمي.

12-1 خوارزمية المسار الأمثل على شبكة تسمح بالدوران

إن خوارزمية المسار الأمثل على شبكة تسمح بالدوران لها تطبيقات عديدة، وأهميتها تعود إلى اعتمادها على الحسابات غير المتقاطعة .

سنتعرف أولاً على خطوات الحل ثم نوضحها على مثال مناسب .

إن عملية إيجاد المسار الأمثل بين عقدة البداية (1) ، وأي عقدة أخرى (z) من عقد الشبكة ، حيث $z = 2, 3, \dots, n$ ، ويمكن أن تتم على الشبكة مباشرة ، لكن العمليات تصبح أكثر يسراً و سهولة ، إذا تم عرض المسافات بين العقد i و العقد z على شكل جدول ، حيث i دائماً عقد انطلاق و z عقد وصول ، كما هو الحال على الجدول رقم (12-1) نلاحظ أن d_{ij} يمكن أن تختلف عن d_{ji}

	1	2		n	
1	d_{11}	d_{12}		d_{1n}	U_1
2	d_{21}	d_{22}		d_{2n}	U_2
			d_{ij}		
m	d_{m1}	d_{m2}		d_{mn}	
	V_1	V_2		V_n	

الجدول رقم (12-1)

وهكذا السطر i (العمود z) يقابل العقدة i (العقدة z) ويمكن عرض مراحل وخطوات الخوارزمية على النحو التالي :

1- إيجاد الحل (المسار) الأولي : نفرغ المعلومات من الشبكة في جدول مناسب، ونفترض أن V_j تساوي إجمالي أطوال الفروع المشكلة للسلسلة التي تربط عقدة البداية مع العقدة j ، خوارزمية الحل تتطلب المساواة بين v_j و u_i عندما $i = j$ ، ونحسب قيمة v_j بالعلاقة:

$$v_j = \min \{ u_i + d_{ij} \}$$

ونربط معها بفروع مباشر $i < j$

العمليات تبدأ بـ $i = 1$ و $v_1 = u_1 = 0$

نلاحظ أن u_i تتضمن بعد العقدة i عن نقطة البداية ، والتي نستخدم لتحديد العقدة j ، وهذا يتطلب مساواة v_j مع u_i عندما $i = j$ فور ظهور قيمة v_j ، وقبل حساب أية قيمة جديدة لـ v_j وتكرر الحسابات حتى الوصول الى قيمة v_j عندما $j = n$

2- اختبار مثلية الحل: نفترض أن $i = 1$

أ - نحسب قيم D_{ij} لجميع العقد j بالعلاقة $D_{ij} = v_j - u_i$

ب - إذا كانت $d_{ij} \geq D_{ij}$ لجميع العقد j ، فإن هذا يعني عدم وجود مسار بين i و j أقصر (أكثر مثلية) من المسار الحالي إذا كانت $i = m$.
ننتقل الى المرحلة (4) في الحالة المعاكسة نجعل $i+1 = i$ ونعود الى أ .
ج - إذا كانت $d_{ij} < D_{ij}$ هذا يعني وجود مسار آخر أفضل من المسار الحالي (أكثر مثلية) ، وننتقل إلى الخطوة التالية، أي يجب تطوير الحل.

3- تطوير الحل:

أ - نحسب طول المسار الجديد للعقدة j ونرمز له بـ v'_j بالعلاقة :

$$v'_j = u_i + d_{ij}$$

ب - نبدل v_j و u_i عندما $i = j$ بقيمة v'_j ، وإذا كانت $i = m$ ننتقل الى الخطوة (4) ، في الحالة المعاكسة نجعل $i = i + 1$ ونعود الى أ .

تضايًا للمسار الأمثل و التتفق الأعظمي

4 - إن قيم v_j التي تم التوصل إليها تحدد طول المسار الأمثل بين عقدة البداية والعقد $j = 2, 3, \dots, n$ وتحدد سلسلة المسار الأمثل تتم وفق ما يلي :

$$u_{i1} = v_j - d_{ij} \quad \text{بالعلاقة :}$$

بعد تحديد العقدة قبل الأخيرة يمكن تحديد العقدة التي تسبقها بالعلاقة :

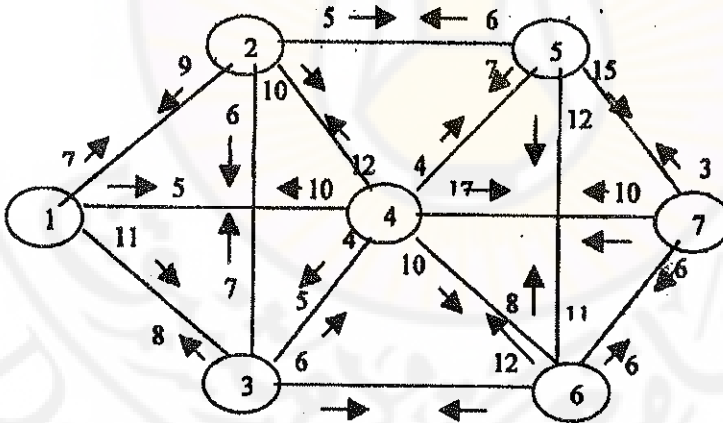
$$u_{i2} = v_{i1} - d_{i2i1}$$

ونكرر العملية حتى الوصول إلى عقدة البداية (العقدة 1) .

نوضح مراحل وخطوات الخوارزمية على المثال رقم (1-12) .

المثال رقم (1-12)

أوجد المسار الأمثل للانتقال من العقدة (1) إلى العقدة (7) على الشبكة المعطاة في الشكل رقم (1-12)



الشكل رقم (1-12)

1- نفرغ المعلومات من الشبكة في الجدول رقم (2-12)

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	u_i	u_j
1	-	7	11	5	-	-	-	0	0
2	9	-	6	10	5	-	-	7	7
3	8	7	-	6	-	5	-	11	9
4	10	12	4	-	4	10	17	5	5
5	-	6	-	7	-	12	15	9	9
6	-	-	8	12	11	-	6	15	14
7	-	-	-	10	3	6	-	21	20
v_j	0	7	11	5	9	15	21		
v_j	0	7	9	5	9	14	20		

الجدول رقم (2-12)

2- نفرض أن $u_1 = v_1 = 0$ ونحسب باقي قيم v_j بالعلاقة :

$$v_j = \min \{ u_i + d_{ij} \}$$

$$v_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 7 = 7 \quad u_2 = v_2 = 7$$

$$v_3 = \min \{ u_1 + d_{13}, u_2 + d_{23} \}$$

$$i=1,2,$$

$$= \min \{ 0 + 11, 7 + 6 \} = 11 \quad u_3 = 11$$

$$v_4 = \min \{ u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34} \}$$

$$i=1,2,3,$$

تضاييا المسار الأمثل و التدفق الأعظمي

$$= \min\{0+5, 7+10, 11+6\} = 5 \quad u_4 = 5$$

$$v_5 = \min\{u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}\}$$

$$i = 2, 4,$$

$$= \min\{7+5, 5+4\} = 9 \quad u_5 = 9$$

$$v_6 = \min\{u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}\}$$

$$i = 3, 4,$$

$$= \min\{11+5, 5+10\} = 15 \quad u_6 = 15$$

$$v_7 = \min\{u_4 + d_{47}, u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67}\}$$

$$i = 4, 5, 6,$$

$$= \min\{5+17, 9+15, 15+6\} = 21 \quad u_7 = 21$$

وبذلك نجد أن طول المسار الأولي هو 21 وحدة .

2 - اختبار مثلية الحل :

أ - نفترض أن $i=1$ ونضع قيم D_{ij} في سطر مناسب ، ونضع قيم d_{ij}

في سطر يليه لسهولة المقارنة على النحو التالي :

$i=1$	$j=1$	2	3	4	5	6	7
D_{1j}	-	7	11	5	-	-	-
d_{1j}	-	7	11	5	-	-	-

وبالنتيجة نجد أن الشرط $d_{ij} \leq D_{ij}$ محقق لجميع قيم j هذا يعني أنه لا

يوجد مسار أكثر مثلية لأي عقدة من العقد .

ب - نفترض أن: $i=2$

$i=2$	$j=1$	2	3	4	5	6	7
D_{2j}	-7	-	4	-2	2	-	-
d_{2j}	9	-	6	10	5	-	-

نجد أن الشرط محقق لجميع قيم j .

i=3	j=1	2	3	4	5	6	7
D_{3j}	-11	-4	-	-6	-	4	-
d_{3j}	8	7	-	6	-	4	-

ج - نضع : $i=3$

نجد أن الشرط محقق لجميع قيم j

د - نضع : $i=4$

i=4	j=1	2	3	4	5	6	7
D_{4j}	-5	2	6	-	4	10	16
d_{4j}	10	12	4	-	4	10	17

نجد أن الشرط محقق لجميع قيم j زعدا القيمة $j=3$ حيث $D_{43} = 6$ وهي أكبر

من $d_{43} = 4$.

هـ - نضع : $J=5$

i=5	j=1	2	3	4	5	6	7
D_{5j}	-	-2	-	-4	-	6	12
d_{5j}	-	6	-	7	-	12	15

نجد أن الشرط محقق لجميع قيم j

و - نضع : $j=6$

i=6	j=1	2	3	4	5	6	7
D_{6j}	-	-	-4	-10	-6	-	6
d_{6j}	-	-	8	12	11	-	6

نجد أن الشرط محقق لجميع قيم j

نضع : $j=7$

$i=7$	$j=1$	2	3	4	5	6	7
D_{7j}	-	-	-	-16	-12	-6	-
d_{7j}	-	-	-	10	3	6	-

نجد أن الشرط محقق لجميع قيم j

كما تبين من الاختبار أن الشرط غير محقق عندما $i=4$ و $j=3$ لذلك

يتوجب تبديل v_3 بـ v_3 المحسوبة بالعلاقة :

$$v_3 = u_4 + d_{43} = 5 + 4 = 9$$

3 - ونكرر الخطوة 2 وبالقيم الجديدة لـ v_3 نجد أن :

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0$$

$$v_3 = 9$$

$$u_3 = 9$$

$$v_2 = \text{Min} \{ 0+7, 9+6 \}$$

$$u_2 = 7$$

$$v_4 = \text{Min} \{ 0+5, 7+10 \} = 5$$

$$u_4 = 5$$

$$v_5 = \text{Min} \{ 7+5, 5+4 \} = 9$$

$$u_5 = 9$$

$$= \text{min} \{ 0+11, 7+6 \} = 11$$

$$u_3 = 11$$

$$v_4 = \text{min} \{ u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34} \}$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$v_6 = \text{Min} \{ 9+5, 5+10, 9+12 \} = 14$$

$$u_6 = 14$$

$$v_7 = \text{Min} \{ 5+17, 9+15, 14+6 \} = 20$$

$$u_7 = 20$$

يمكن إجراء الحسابات على الجدول وتوضع النتائج في السطر v_j والعمود

(u_i) وهذا يعني أن طول المسار الجديد هو 20 وحدة.

- الاختبار : نجري الاختبار على الجدول رقم (3-12) :

	j	J=1	2	3	4	5	6	7	
i=1	D _{1j}	—	7	9	5	—	—	—	الشرط
	d _{1j}	—	7	11	5	—	—	—	محقق
i=2	D _{2j}	-7	—	2	-4	2	—	—	الشرط
	d _{2j}	9	—	6	10	5	—	—	محقق
i=3	D _{3j}	-9	-2	—	-4	—	5	—	الشرط
	d _{3j}	8	7	—	6	—	5	—	محقق
i=4	D _{4j}	-5	2	4	—	4	9	15	الشرط
	d _{4j}	10	12	4	—	4	10	17	محقق
i=5	D _{5j}	—	-2	—	-4	—	5	11	الشرط
	d _{5j}	—	6	—	7	—	12	15	محقق
i=6	D _{6j}	—	—	-5	-9	-5	—	6	الشرط
	d _{6j}	—	—	8	12	11	—	6	محقق
i=7	D _{7j}	—	—	—	-15	-11	-6	—	الشرط
	d _{7j}	—	—	—	10	3	6	—	محقق

الجدول رقم (3-12)

نتيجة الاختبار أثبتت أن الشرط محقق لجميع قيم i و j لذلك،

أي $d_{ij} \leq D_{ij}$ $i = 1, 2, 3, \dots, 7$

أي إن طول المسار الأمثل الواصل العقد (1) مع العقد (7) هو (20) وحدة

5 - تحديد المسار : نجد أن العقدة الأخيرة 7 و $v_7 = 20$ ، ومنه العقدة

قبل الأخيرة i_1 يجب أن تحقق العلاقة $v_7 = u_1 + d_{17}$ ، من الجدول i يمكن أن

فضايا المسار الأمثل و التدفق الأعظمي

تكون $i=6$ أو $i=5$ أو $i=4$ ، ونجد أن $i=6$ هي التي تحقق العلاقة ، أي العقدة قبل الأخيرة هي 6.

$v_6 = u_i + d_{ij}$ من الجدول نجد أن $i=3$ تحقق العلاقة

$v_3 = u_i + d_{i3}$ من الجدول نجد أن $i=4$ تحقق العلاقة

$v_4 = u_i + d_{i4}$ من الجدول نجد أن $i=1$ تحقق العلاقة

و بالتالي المسار الأمثل

1 → 4 → 3 → 6 → 7

2-12- خوارزمية التدفق الأعظمي : سنتعرف في هذه الفقرة على قضية؛ يمكن تعريفها وفق ما يلي :

يتوجب تحديد أعظم كمية يمكن عبورها من عقدة البداية على الشبكة الى عقدة النهاية، والتي يفصل بينهما مجموعة من الفروع الممثلة لوسائط النقل (معابر) ، وكل من هذه الفروع (الوسائط) له طاقة نقل محددة في الاتجاهين ، والتي تمثل الكمية المسموح بمرورها عبر الفرع ولا يسمح بتجاوزها ، والفرع الموجه يعني طاقة النقل في الاتجاه المعاكس معدومة ، ويمكن عرض طاقات النقل المتاحة C_{ij} على شكل جدول (مصفوفة) ، وذلك عن طريق تعريفها من الشبكة في جدول من النوع $n \times n$ ، عملية ايجاد التدفق الاعظمي الذي يمكن أن يعبر من عقدة البداية (s) الى عقدة النهاية (t) تتم وفق الخطوات التالية والمعروفة بخطوات التدفق الاعظمي :

1- تفرغ المعلومات من الشبكة على جدول (مربع من النوع $n \times n$) ثم توجد سلسلة من الفروع التي تربط عقدة البداية (s) مع عقدة النهاية (t) ، والتي يأخذ التدفق عبرها قيمة موجبة في الاتجاه $s \rightarrow t$ ، و اذا تعذر ايجاد مثل هذه السلسلة ننقل الى الخطوة (4) في الحالة المعاكسة ننقل الى

الخطوة (2) .

2- على السلسلة التي تم ايجادها في الخطوة (1) نؤشر طاقة نقل جميع المعابر (الحقول) المتجهة بالاتجاه $t \rightarrow s$ بإشارة سالبة أي (C_{ij})، ونؤشر المعابر بالاتجاه المعاكس أي بالاتجاه $s \rightarrow t$ بإشارة موجبة أي (C_{ji}) ونختار أصغر طاقة نقل في المعابر (الحقول) المؤشرة بسالب؛ ونعدها للنقل (هي الكمية التي يمكن أن تعبر من s الى t)
ولتكن Q : $Q = \min \{ c_{ij} \} > 0$

3- العمليات على الجدول : نغير طاقة التدفق للمعابر (الحقول) المؤشرة وفق ما يلي :

أ - نطرح قيمة Q من جميع طاقات التدفق المتاحة للمعابر (الحقول) المؤشرة بسالب

ب - نضاف قيمة Q الى جميع طاقات النقل المتاحة في المعابر المؤشرة بموجب . ونعود الى (1) .

العمليات من النوع (أ) يمكننا من استخدام المتبقي من طاقة النقل المتاحة والعمليات من النوع (ب) تحافظ على طاقة التدفق للشبكة بشكل عام؛ حيث تخفيض هذه الطاقة باتجاه معين يمكن النظر اليه كزيادة للطاقة بالاتجاه المعاكس .

4 - تحديد التدفق الأعظمي عبر الشبكة وعبر كل فرع من فروعها . بفرض أن $C = // C_{ij} //$ جدول (مصفوفة) الطاقة المتاحة الأساس (المعطاه)، ولتكن $// C^*_{ij} //$ جدول (مصفوفة) الطاقة الذي حصلنا عليه نتيجة العمليات التي تمت على الجدول الأساس .
التدفق الأعظمي يتحدد كما يلي :

قضايا المسار الأمثل و التدفق الأعظمي

$$X_{ij} = C_{ij} - C^*_{ij} : C_{ij} > C^*_{ij}$$

$$X_{ij} = 0 : C_{ij} \leq C^*_{ij}$$

والتدفق الأعظمي الذي يعبر من s الى t والذي نرمز له بـ Z هو :

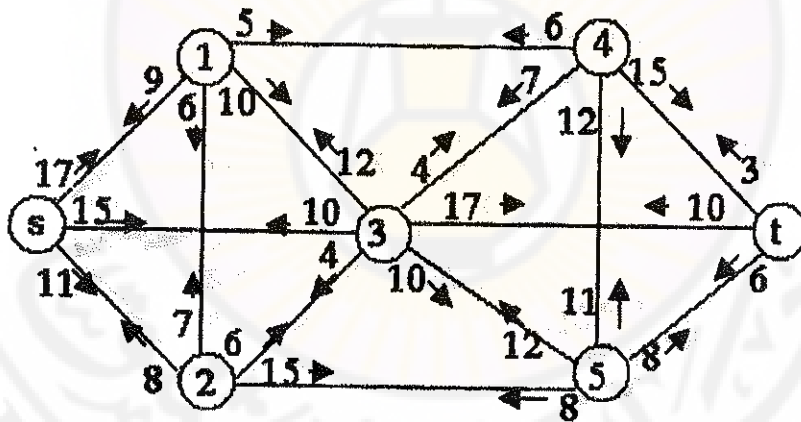
$$Z = \sum_{i=1}^t X_{si} = \sum_{i=s}^{t=1} X_{ii}$$

حيث Z تمثل مجموع قيم Q التي تم تحديدها في الخطوة (2) .

نوضح هذه الخوارزمية على المثال رقم (2-12) :

المسائل رقم (2-12) أوجد التدفق الأعظمي عبر الشبكة الواردة في الشكل

رقم (4-12)



الشكل رقم (4-12)

الحل : نقرغ المعلومات (توضع للمسألة) في الجدول رقم (4-12)

نبحث عن سلسلة تدفق موجبة من s باتجاه t نجد هناك عدة سلاسل على

مسيل المثال السلسلة :
 $s \xrightarrow{17} 1 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{15} t$

وأكبر تنفق يمكن أن يعبر هذه السلسلة هو 5 وحدات

17 10 17

s → 1 → 3 → t السلسلة

أعظم تنفق هو 10 وحدات

11 6 17
s → 2 → 3 → t السلسلة

وأعظم تنفق هو 6 وحدات

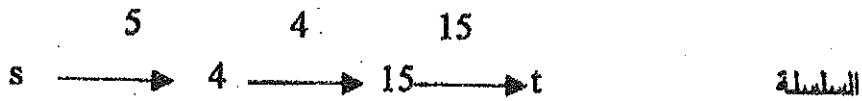
	s	1	2	3	4	5	T
S	x	17	11	15	x	x	x
1	9	x	6	10	5	x	x
2	8	7	x	6	x	15	x
3	+ 10	12	4	x	4	10	17
4	x	6	x	7	x	12	15
5	x	x	8	12	11	x	8
T	x	x	x	+ 10	3	6	x

الجدول رقم (4-12)

15 17
s → 3 → t السلسلة

وأعظم تنفق هو 15

تضاريا المسار الأمثل و التدفق الأعظمي



وأعظم تدفق هو 4

وحيث إننا نبحث عن التدفق الأعظمي نختار السلسلة التي تحقق أعظم تدفق عبرها ؛ لأن هذا يساعدنا في اختصار عدد مراحل الحل ؛ و نجد أن السلسلة التي تحقق لنا هذا هي السلسلة



2- نؤشر المعابر بالاتجاه من s الى t بالاشارة السالبة أي المعبرين (S , 3)

و (3 , t) ونؤشر المعبرين المعاكسين باشارة موجبة أي المعبرين (3 , S)

و (t , 3) في المعابر المؤشرة بسالب طاقة التدفق هي :

$$Q = \min \{ 17, 15 \} = 15$$

3-العمليات على الجدول : نطرح التدفق Q من طاقة التدفق لجميع المعابر

المؤشرة بسالب ونضيفها الى المعابر المؤشرة بموجب ، أما باقي المعابر

فنتبقى دون تغيير ، ونضع بالاستناد الى الجدول رقم (5-12).

	s	1	2	3	4	5	T
8	x	$\bar{17}$	11	0	x	x	x
1	+	x	6	$\bar{10}$	5	x	x
2	8	7	x	6		15	x
3	25	+	4	x	4	$\bar{10}$	2
4	x	6	x	7	x	12	15
5	x	x	8	+	11	x	$\bar{8}$
6	x	x	x	25	3	+	x
						6	

الجدول رقم (5-12)

4- على الجدول رقم (5-12) التدفق الأعظم هو ($Q = 8$) على السلسلة التالية :



نجري العمليات اللازمة ونضع الأجوبة في الجدول رقم (6-12) :

	s	1	2	3	4	5	t
s	x	9	$\bar{11}$	0	x	x	x
1	17	x	6	2	5	x	x
2	$\begin{smallmatrix} + \\ 8 \end{smallmatrix}$	7	x	6	x	$\bar{15}$	x
3	25	20	4	x	4	2	2
4	x	6	x	7	x	$\begin{smallmatrix} + \\ 12 \end{smallmatrix}$	$\bar{15}$
5	x	x	$\begin{smallmatrix} + \\ 8 \end{smallmatrix}$	20	$\bar{11}$	x	0
t	x	x	x	25	$\begin{smallmatrix} + \\ 3 \end{smallmatrix}$	14	x

الجدول رقم (6-12)

- على الجدول رقم (6-12) التدفق الأعظم هو ($Q = 11$) على السلسلة

التالية :



نجري العمليات على الجدول؛ ونضع الأجوبة في الجدول رقم (7-12) :

6- على الجدول رقم (7-12) التدفق الأعظم هو ($Q = 5$) على

السلسلة التالية :



نجري العمليات على الجدول، ونضع الأجوبة في الجدول رقم (8-12) :

اضاءا للنسب الأمثل و التعلق الأعظم

	s	1	2	3	4	5	t
s	x	$\bar{5}$	0	0	x	x	x
1	+ 17	x	6	2	$\bar{5}$	x	x
2	19	7	x	6	x	4	x
3	25	20	4	x	4	2	2
4	x	+ 6	x	7	x	23	$\bar{11}$
5	x	x	19	20	0	x	0
t	x	x	x	25	+ 14	14	x

الجدول رقم (7-12)

	s	1	2	3	4	5	t
s	x	$\bar{5}$	0	0	0	x	x
1	+ 21	x	6	$\bar{2}$	1	x	x
2	19	7	x	6	x	4	x
3	25	+ 20	4	x	4	2	$\bar{2}$
4	x	10	x	7	x	23	0
5	x	x	19	20	0	x	0
t	x	x	x	+ 25	18	14	x

الجدول رقم (8-12)

7- على الجدول رقم (8-12) التعلق الأعظم هو ($Q=2$) على السلسلة

s $\longrightarrow$ 1 $\longrightarrow$ 3 $\longrightarrow$ t

نجري العمليات على الجدول؛ ونضع الأجوبة في الجدول رقم (9-12) :

	s	1	2	3	4	5	t
s	x	3	0	0	x	x	x
1	23	x	6	0	1	x	x
2	19	7	x	6	x	4	x
3	25	22	4	x	4	2	0
4	x	10	x	7	x	23	0
5	x	x	19	20	0	x	0
t	x	x	x	27	18	14	x

الجدول رقم (9-12)

8- على الجدول رقم (9-12) لا توجد سلسلة تكافؤ موجبة، هذا يعني أنه

لا يمكن عبور كميات جديدة؛ لذلك نطرح الجدول رقم (9-12) من الجدول

	s	1	2	3	4	5	t
s	x	14	11	15	x	x	x
1	0	x	0	10	4	x	x
2	0	0	x	0	x	11	x
3	0	0	0	x	0	8	17
4	x	0	x	0	x	0	15
5	x	x	0	0	11	x	8
t	x	x	x	0	0	0	

الجدول رقم (10 - 12)

تضايها المسار الأمثل و ω أقصى

رقم (4-12) ونضع الأجوبة في الجدول رقم (10-12) الذي يبين جميع

التدفقات عبر الشبكة والبالغة 40 وحدة .

أي يتوجب القيام بعمليات النقل التالية :

تنقل (14) ، (11) ، (15) وحدة من (s) الى العقد (1) ، (2) ،
(3) على الترتيب وتنقل (10) ، (4) وحدة من العقدة (1) الى العقدتين
(3) ، (4) على الترتيب وتنقل (11) وحدة من العقدة (2) الى العقدة
(5) وتنقل (8) ، (17) وحدة من العقدة (3) الى العقدة (5) وتنقل (15)
وحدة من العقدة (4) الى العقدة (t) وتنقل (8) وحدات من العقدة (5)
الى العقدة (t)

مسائل و تدريبات الوحدة الثانية عشر

I- ضع اشارة ($\vee$) تجاه العبارة الصحيحة و ضع اشارة ($\times$) تجاه العبارة الخاطئة:

1- على الشبكة التي تسمح بالدوران يسمح بالحركة على الأضلع باتجاه وحيد فقط .

2- على الشبكة التي تسمح بالدوران عملية تحديد المسار الأمثل تحدد المسار الأمثل بين نقطة البداية و جميع نقاط الشبكة .

3- طول المسار على الشبكة تسمح بالدوران يساوي طول جميع الأضلع على الشبكة .

4- اختبار الحل الأمثل على شبكة تسمح بالدوران يتم باختبار بعض النقاط فقط

5- شبكة التدفق الأعظمي تسمح بتدفق المواد باتجاه وحيد فقط

6- اختبار أكبر تدفق موجب عبر سلسلة من الأضلع من (S) باتجاه (T) يساعد في تخفيض عدد مراحل الحل

7- اذا كان أكبر تدفق عبر أي سلسلة من الأضلع التي تربط نقطة البداية مع نقطة النهاية معدوماً. هذا دليل على تعذر نقل أية كميات إضافية

8- في مسائل التدفق الأعظمي يمكن تخزين أية كميات في أي معبر من المعابر عند الضرورة.

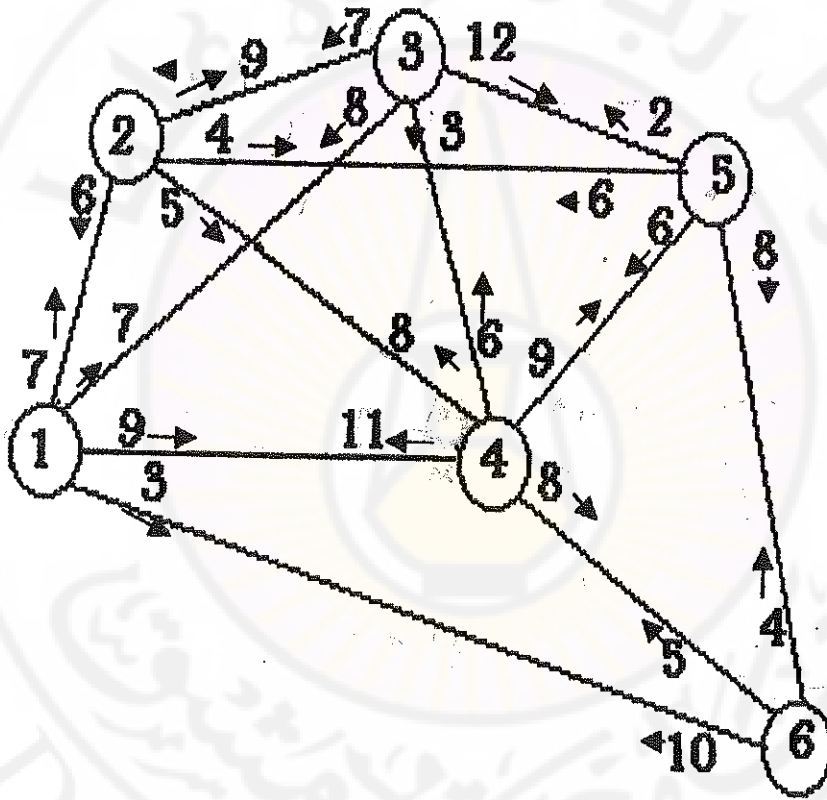
9- لدى حل مسائل المسار الأمثل على شبكات تسمح بالدوران يمكن اختيار أي عقدة و اعتبارها بداية الحل.

10- على مسائل الحل الأمثل يمكن أن تمثل الأرقام على الأضلع و حداث قياس مسافة أو وحدات زمنية أو وحدات نقدية.

فضلياً المسار الأمثل و التدفق الأعظمي

11- في مسائل التدفق الأعظمي طاقات النقل عبر المعابر (الأضلع) يمكن أن تقاس بوحدات قياس مختلفة،

2- أوجد المسار الأمثل للانتقال من العقدة (1) إلى العقدة (6) على الشبكة الواردة على الشكل (5-12)



الشكل رقم (5-12)

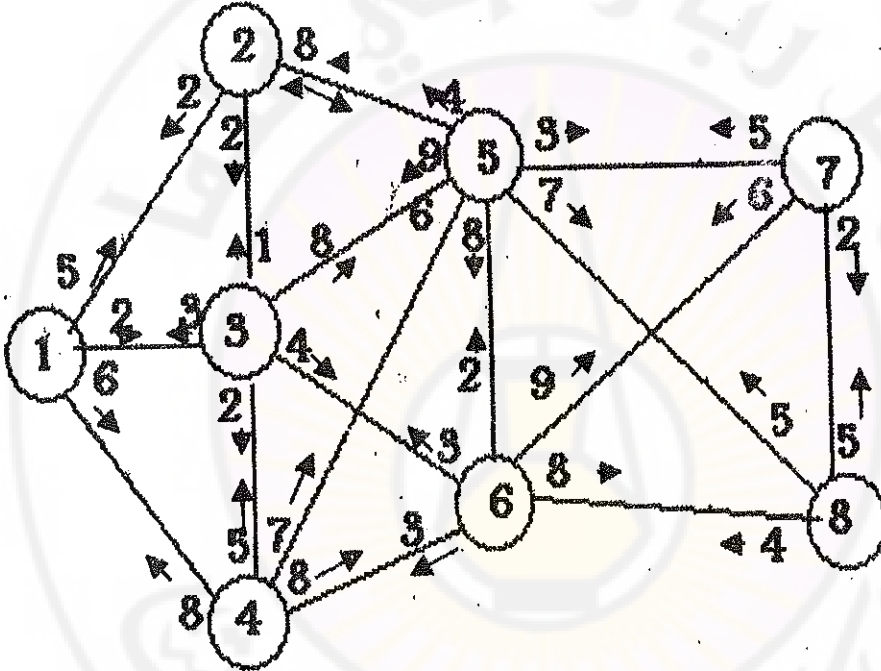
3- بفرض أن الأرقام على أضلع الشبكة الواردة في الشكل رقم (5-12) هي

الوحدة الثالثة عشرة

طاقة تدفق.

المطلوب : إيجاد التدفق الأعظمي الذي يمكن أن يعبر من (1) إلى (6)

4- أوجد المسار الأمثل للانتقال من العقدة (1) إلى العقدة رقم (8) على الشبكة الواردة على الشكل رقم (6-12).



الشكل رقم (6-12)

5- بفرض أن الأرقام على أضلاع الشبكة الواردة في الشكل رقم (6-12) هي

طاقة تدفق

المطلوب : إيجاد التدفق الأعظمي الذي يمكن أن يعبر من (1) إلى (8).

الوحدة الثالثة عشر

التحليل الشبكي: المسار الحرج

Network-Analysis:Critical Path.

هدف الوحدة :

تعريف الطالب بأسلوب تقويم ومراجعة المشروعات وقواعد بناء الشبكة
وكيفية إيجاد الزمن المبكر لتنفيذ الأنشطة والمشروعات وكيفية
تحديد الأنشطة الحرجة وبالتالي المسار الحرج .



المقدمة:

إن المخطط الشبكي (البرنامج) يحدد مجموعة متكاملة من الأنشطة المترابطة التي يتوجب تنفيذها وفق ترتيب / تسلسل / معين من أجل تحقيق أهداف البرنامج منطقياً الأنشطة ترتب بحيث لا يسمح بتنفيذ نشاط معين قبل الانتهاء من نشاط (أنشطة) أخرى، ينظر إلى أنشطة البرنامج على أنها العمل الذي يتطلب تنفيذه وقتاً وموارد، ولا تكرر عادة أنشطة (فعاليات) البرنامج. قبل ظهور الأساليب الشبكية لتخطيط البرامج الزمنية كانت عمليات التخطيط الزمنية نادرة والوسيلة الأكثر انتشاراً لهذا النوع من التخطيط هو

المخطط الخطي الذي وضعه (كانت) ويحدد موعد بداية ونهاية كل نشاط على مقياس زمني أفقي. ولكن هذا النوع لم يعد كافياً لكونه لم يساعد على تحديد العلاقة الترابطية بين الأنشطة. ونتيجة لزيادة تعقيدات البرامج الحديثة يتطلب الأمر إيجاد أساليب تخطيط أكثر كفاءة ودقة تضمن تحقيق مثولية كافة أنشطة البرنامج وتعرف الكفاءة بأنها: تصغير زمن تنفيذ البرنامج (المشروع) مع الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة

إن برامج التنظيم الإداري أصبحت مجال نظري وتطبيقي جديد بفضل أسلوبين تحليليين الأول: أسلوب وضع الخطط الزمنية والثاني: أسلوب إدارة البرامج العملياتية اللذين وضعاً في نفس الفترة 1956 و 1958 من قبل فريقين مستقلين أخذاً تسمية: أسلوب المسار الحرج (MPA) وأسلوب تقييم وتقويم (متابعة) البرامج الزمنية PERT. الفرق الأساسي بين الأسلوبين هو اعتماد أسلوب (MPA) على زمن محدد بشكل قطعي (الظروف الأكيدة)، أما أسلوب (PERT) فاعتمد على أزمنة احتمالية (عشوائية)، والآن الأسلوبان يشكلان أسلوباً واحداً: التخطيط الشبكي وإدارة البرامج.

وفي هذه الوحدة نتناول قضايا تخطيط ومتابعة تنفيذ المشروعات من حيث أوقبات التنفيذ والتكاليف المرتبطة بها، بالإضافة لإعادة جدولة المشروعات بهدف ضغط أزمدة التنفيذ، ونتناول أيضا الدراسات الاحتمالية المتعلقة بتنفيذ المشروعات خلال الأوقات المحددة، ونتناول أيضا قضية تخصيص الموارد بهدف تحقيق نوع من الاستقرار في استرجاع أو استخدام الموارد النادرة.

هذه الدراسة تتطلب التعرف على المفاهيم التالية :

الحديث : يدل على تحقيق شيء ما (بداية نشاط أو الانتهاء منه) ويدل على أمر محدد بشكل قطعي ولا يتطلب وقوعه أية موارد ولا يستغرق أي وقت أي هو أي وتكلفته معدومة ويمثل على الشبكة بعقدة (دائرة) عادة ترقم هذه العقد من اليسار إلى اليمين، ومن الأعلى إلى الأسفل بحيث يدل تصاعد الأرقام على اتجاه سير العمل وعلى اتجاه تنفيذ المشروع أي رقم حدث البداية لأي نشاط وليكن (i) هو دائما أصغر من حدث نهايته (j)

النشاط : هو أي مهمة أو فعالية تتطلب إنجاز شيء ما، ويستغرق تنفيذها وقت ما ويتطلب بعض الموارد ويمثل على الشبكة بسهم يصل بين حدث بدايته (i) وحدث نهايته (j)

مدة تنفيذ النشاط : هي المدة المحددة من قبل الجهات المختصة والالزمة لتنفيذ النشاط وقد تكون محددة بدقة ووحيد (في الظروف الأكيدة) وقد تكون غير محددة ولها صفة عشوائية ضمن مجال معين أكثر من زمن (في ظروف عدم التحديد والمخاطرة) .

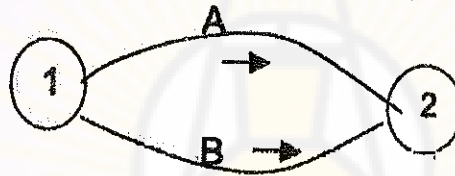
1-13- قواعد رسم الشبكات .

1- كل نشاط يمثل بسهم (فرع) وحيد وطول السهم ليس له أية دلالة لذلك يثبت الوقت اللازم لتنفيذ النشاط على السهم الذي يمثله

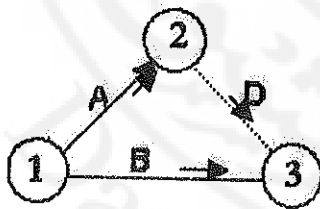
قواعد رسم الشبكات والمسار الحرج

2- كل نشاط يبدأ بحدث بداية وحيد وينتهي بحدث نهاية وحيد يعرف بهما، ولا يجوز (لا يسمح) لنشاطين أو أكثر بالاشتراك معا في حدث البداية وحدث النهاية، وعند الضرورة يستخدم نشاط وهمي لفك هذا الاشتراك . وهنا تجدر الإشارة إلى أن النشاط الوهمي تكون تكلفته معدومة ووقت تنفيذه معدوم أيضاً (لا يحتاج أية موارد ولا أي وقت ويمثل على الشبكة بخط منقط) . انظر المثال رقم (1-13)

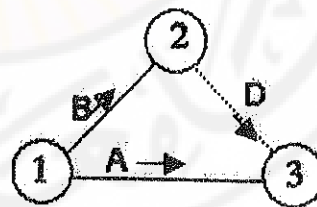
المثال رقم (1-13) : الشكل رقم (1-13-أ) غير سليم (خطأ) لأن النشاطين A و B يشتركان بحدث البداية (1) والنهاية (2) لذلك يتوجب فك هذا الاشتراك بنشاط وهمي كما هو الحال في الشكل (1-13-ب) و الشكل (1-13-ج) .



الشكل رقم (1-13-أ) المخطط غير سليم



الشكل رقم (1-13-ب)

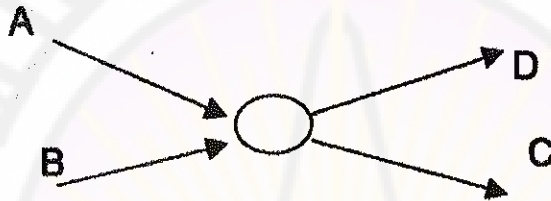


الشكل رقم (1-13-ج)

3- يجب مراعاة الترتيب السليم لتنفيذ الأنشطة أثناء رسم الشبكة وتستخدم

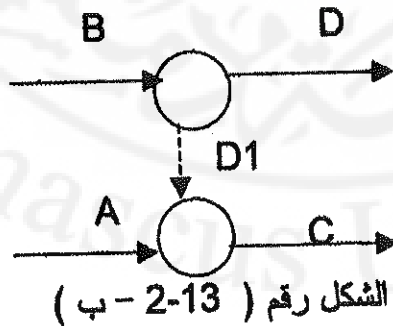
الأنشطة الوهمية لتحقيق هذا الترتيب انظر المثال (2-13)

المثال رقم (2-13) : بفرض لدينا جزء من مخطط شبكي فيه النشاطين A و B يسبقان النشاط C والنشاط D فقط يلي النشاط B فقط. المخطط الشبكي على الشكل (1-2-13) غير سليم، لأنه يدل على أن كلا النشاطين A و B يسبقان النشاط D.



الشكل رقم (1-2-13) المخطط غير سليم

لذلك يتوجب إدخال نشاط وهمي لتحقيق علاقة سليمة وهنا يدخل النشاط الوهمي D1 بعد النشاط B أي ينطلق من الحدث رقم (1) ليصله مع الحدث (2) الذي يمثل نهاية النشاط A ونهاية النشاط B من خلال النشاط الوهمي D1 ومنه ينطلق النشاط C في حين النشاط D ينطلق من الحدث (1) أي بعد النشاط B مباشرة وهذا يحقق علاقة الترتيب السليمة ، انظر الشكل: رقم (- 2-13 ب)



الشكل رقم (2-13 ب)

13-2- ترتيب أنشطة المشروع:

استخدام التخطيط الشبكي يتطلب تقسيم المشروع إلى أنشطة مستقلة ثم عرضها (رسمها) على شكل مخطط، وهذا يتطلب عملاً بغاية الدقة يتصل بضرورة العرض السليم الذي يضمن الترتيب المنطقي لنتائج الأنشطة حسب تسلسل تنفيذها، بحيث يوضح المخطط أية أنشطة يجب أن تنتهي قبل البدء بتنفيذ النشاط المعني، وأية أنشطة يمكن أن تنفذ معه على التوازي وأية أنشطة لا يمكن أن تبدأ إلا بعد الانتهاء من تنفيذ هذا النشاط، ولهذا ترقم حوادث المشروع (كما سبق وأشرنا) بحيث يدل تصاعد أرقام الحوادث من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل على اتجاه تنفيذ المشروع وهذا يتطلب عدم البدء بتنفيذ أي نشاط رقم حدث بدايته أكبر من رقم أي حدث آخر أصغر منه، ويرتبط معه بشكل مباشر أو عبر نشاط آخر ولم تنفذ كافة الأنشطة المنتهية به ونوضح هذه القضايا من خلال المثال رقم (13-3)

المثال رقم (13 - 3)

ترغب الشركة السياحية بتشييد مشروع سياحي في المنطقة الصحراوية وبعد القيام بالدراسات المناسبة توصلت إلى نتيجة مفادها ضرورة تنفيذ الأنشطة المسماة بالأحرف اللاتينية من A إلى T وقد كانت أولوية (ترتيب) تنفيذ هذه الأنشطة والوقت اللازم للتنفيذ كما هو وارد في الجدول رقم (13-1) المطلوب :

وضع المخطط الشبكي لهذا المشروع .

النشاط	النشاط (الأنشطة) السابق	الزمن	النشاط	النشاط (الأنشطة) السابق	الزمن
A	نشاط بداية	10	k	j	5
B	A	14	L	D	7
C	A	4	M	L	5
D	B,C	3	M	N	4
E	D	20	O	E,F,N	4
F	D	20	B	M	8
G	D	10	Q	E,F,N	5
H	G	2	R	K,I,Q	2
I	H	3	S	O,P	3
J	D	4	T	R,S	5

الجدول رقم (1- 13)

الحل:

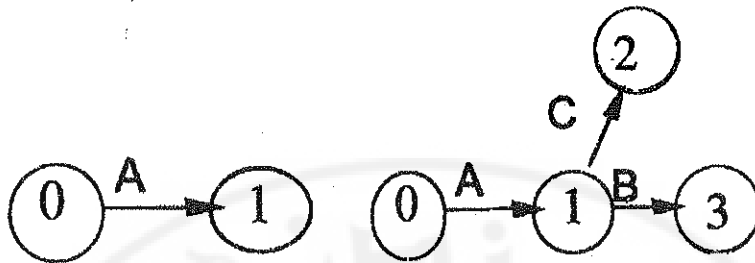
رسم الشبكة يتم وفق ما يلي:

- النشاط الأول A يبدأ بحدث بداية المشروع وليكن (0) وينتهي بالحدث

(1) انظر: الشكل رقم (1-3-13)

- يليه النشاطين B و C اللذان ينطلقان من الحدث (1) معا انظر الشكل

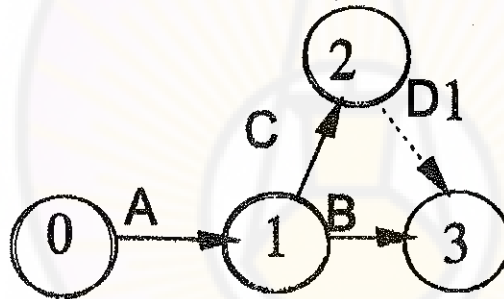
(1-3-ب)



الشكل رقم (13-3 - أ)

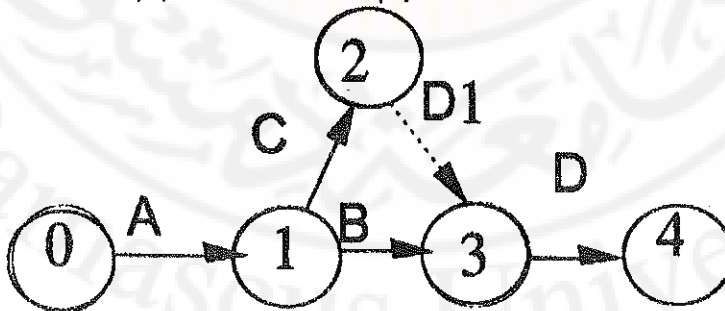
الشكل رقم (13-3 - ب)

وهما ينتهيان قبل بداية النشاط D وهذا يعني ضرورة اشتراكهما معا بحدث البداية للنشاط D وهذا غير مسموح به لذلك يتم اشتراكهما بشكل غير مباشر عن طريق إدخال النشاط الوهمي D_1 يفصل نهاية النشاط C عن نهاية النشاط B انظر: الشكل رقم (13-3 - ج) .



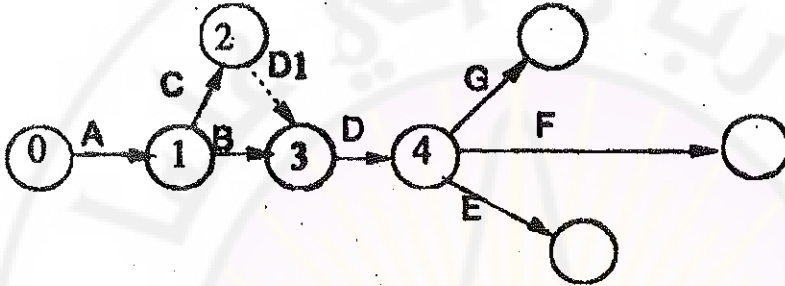
الشكل رقم (13-3 - ج)

النشاط D ينطلق من الحدث (3) انظر: الشكل رقم (13-3 - د)



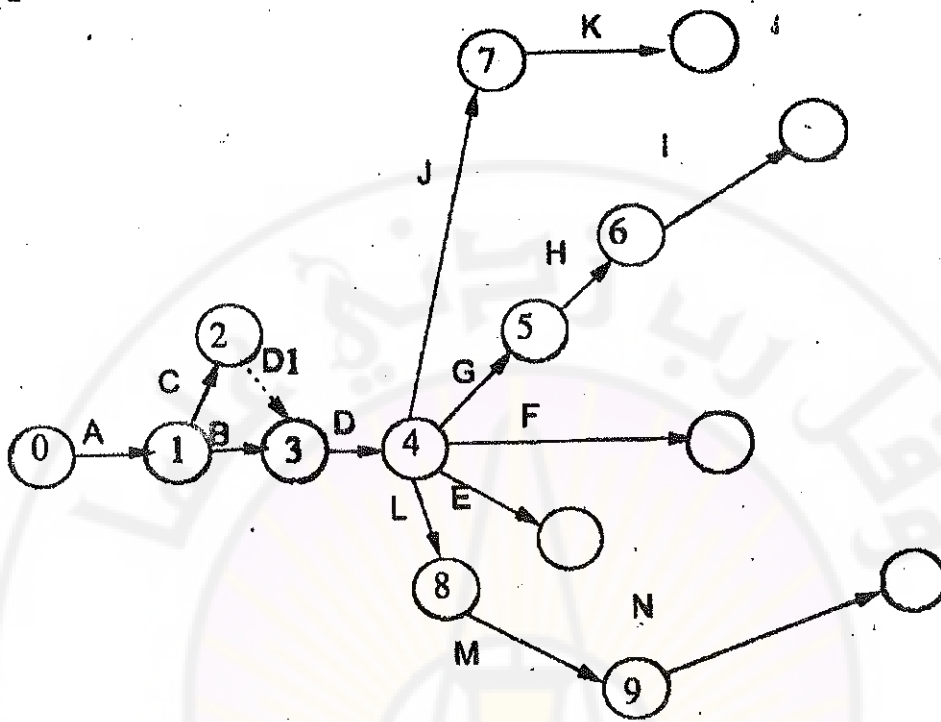
الشكل رقم (13-3 - د)

- النشاط: E : ينطلق بعد حدث النهاية للنشاط D أي من الحدث رقم (4)
 النشاط: F : ينطلق أيضاً بعد حدث النهاية للنشاط D أي من الحدث رقم (4)
 النشاط: G : ينطلق أيضاً بعد حدث النهاية للنشاط D أي من الحدث رقم (4)
 انظر الشكل رقم (4 - 13)



الشكل رقم (4-13)

- النشاط: H : ينطلق من حدث النهاية للنشاط G أي من الحدث رقم (5)
 النشاط: I : ينطلق من حدث النهاية للنشاط H أي من حدث رقم (6)
 النشاط: J : ينطلق من حدث النهاية للنشاط D أي من الحدث رقم (4)
 النشاط: K : ينطلق من حدث النهاية للنشاط J أي من الحدث رقم (7)
 النشاط: L : ينطلق من حدث النهاية للنشاط D أي من الحدث رقم (4)
 النشاط: M : ينطلق من حدث النهاية للنشاط L أي من الحدث رقم (8)
 النشاط: N : ينطلق من حدث النهاية للنشاط M أي من الحدث رقم (9)
 انظر الشكل: رقم (5 - 13)

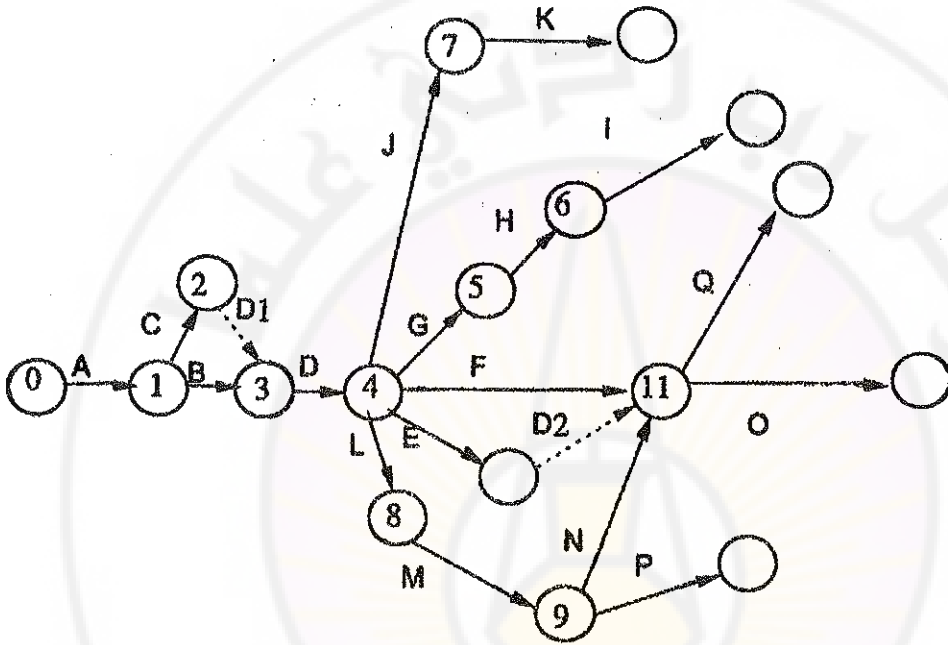


الشكل: رقم (5-13)

النشاط: O ينطلق بعد الانتهاء من الأنشطة E, F, N, أي يجب أن تشترك
 نهايات هذه الأنشطة بحدث بداية النشاط O لكن النشاطان E, F مشتركان
 بحدث البداية رقم (4) لذلك يجب فك اشتراكهما في حدث النهاية عن
 طريق إدخال نشاط وهمي بين حدث النهاية للنشاط (E) وحدث النهاية
 للنشاط F وليكن للنشاط الوهمي D₂, الذي يبدأ بحدث نهاية النشاط (E)
 وهو للحدث رقم (10) وينتهي بالحدث (11) الذي ينطلق منه النشاط O
 انظر الشكل رقم

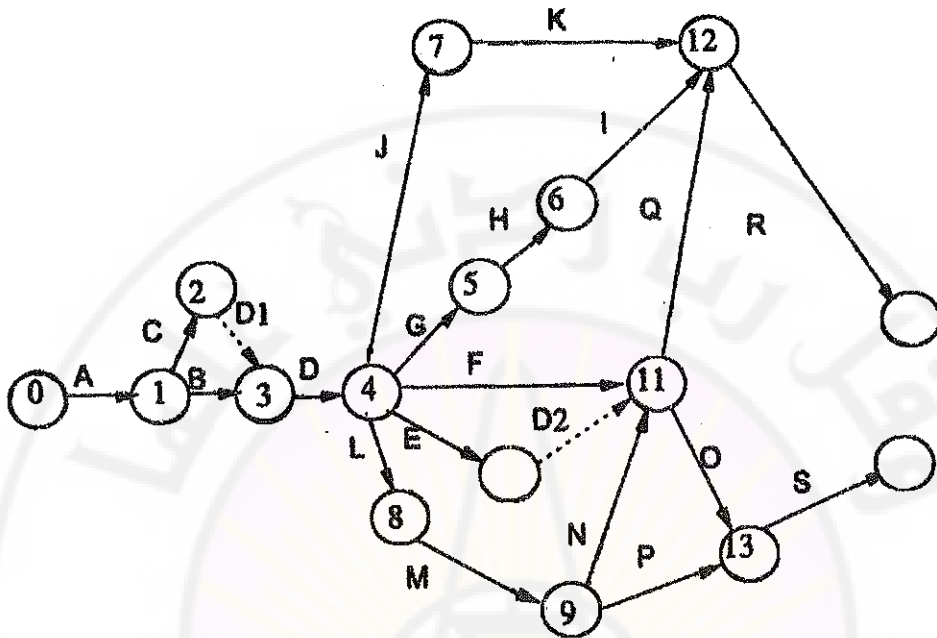
(6-13)

- النشاط p ينطلق بعد النشاط M أي من الحدث رقم (9) و النشاط O ينطلق بعد الأنشطة E , F , N أي ينطلق من الحدث رقم (11) أيضاً
انظر الشكل رقم (6-13)



الشكل رقم (6 - 13)

- النشاط: R ينطلق بعد الانتهاء من الأنشطة Q , I , K وبما أن هذه الأنشطة مستقلة بحوادث البداية إذا يمكن جمعها بحدث نهاية مشترك الحدث رقم (12) وهو حدث البداية للنشاط R انظر الشكل رقم (7-13) .
النشاط: S يبدأ بحدث النهاية للنشاطين p و o وهما مستقلان بحدث البداية لذلك يمكن جمعها بحدث نهاية مشترك هو الحدث رقم (13) ، وهو حدث البداية للنشاط S انظر الشكل رقم (7-13) .



الشكل رقم (7-13)

النشاط: T ينطلق من حدث النهاية للنشاطين S و R وهما مستقلان عن بعضهما بحدث البداية لذلك يمكن جمعهما بحدث نهاية مشترك هو الحدث رقم (14) وهو حدث البداية للنشاط T انظر الشكل رقم (8-13) .
وبما أن النشاط T هو آخر نشاط في المشروع وبإنجازه يتم إنجاز المشروع إذاً ننهي بالحدث رقم (15) وهو حدث نهاية المشروع .

قواعد رسم الشبكات والمسار الحرج

والتي يتوجب التركيز عليها لأن أي تغيير في وقت تنفيذها (وخاصة بالتأخير) يؤدي إلى تغيير في وقت المشروع ككل .

13-2-1 حسابات الأذهاب : هذه الحسابات تحدد ما يعرف بالوقت المبكر لإنجاز الأنشطة (تذكر أن الأحداث مرتبة بحيث يدل تصاعد أرقام هذه الأحداث على اتجاه التنفيذ)، أي أن النشاط (i, j) يدل على أن اتجاه التنفيذ من: i إلى j و يجب أن يكون $i < j$ ، ولإجراء هذه الحسابات نعرف الرموز التالية :

d_{ij} : هو المدة اللازمة لتنفيذ النشاط (i, j) وعادة نقول طول السهم (i, j)

E_i : الوقت المبكر لوقوع الحدث (i)

$E_0 = 0$: وقت حدث البداية ونضعه يساوي الصفر أي

E_n : هو الوقت المبكر لتنفيذ المشروع الذي ينتهي بالحدث n ، ويجب التأكيد على أن النشاط (i, j) لا يمكن أن يبدأ قبل الانتهاء من تنفيذ كافة الأنشطة السابقة له والمنتوية بالحدث i وبالتالي الوقت المبكر للبدء بتنفيذ النشاط (i, j) ، وبلاستناد إلى هذا يمكن القول أن الوقت المبكر لإنهاء النشاط (i, j) لن يقل عن (أكبر أو يساوي) الزمن المبكر لوقوع الحدث E_i مضافاً إليه الوقت اللازم لتنفيذ النشاط نفسه و يمكن التعبير عن هذا بالعلاقة $E_j \geq E_i + d_{ij}$ ، ولكن قد يكون لدينا أكثر من نشاط ينتهي بالحدث j لذلك يجب اختيار أعظم قيمة للمجموع $E_i + d_{ij}$ أي يمكن استبدال المتراجحة السابقة بالعلاقة :

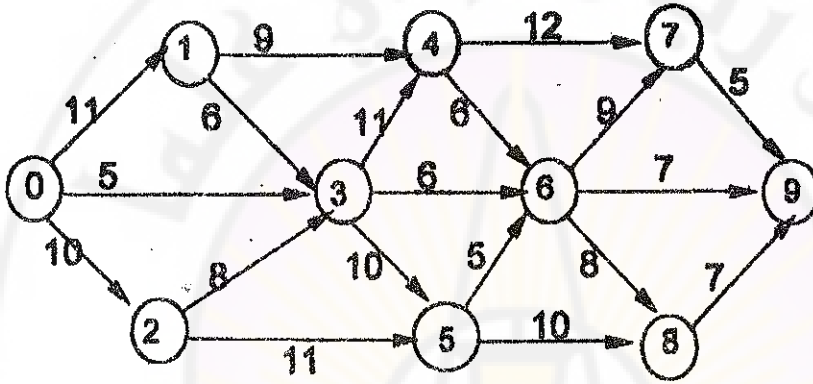
$$E_j = \max_{i=1,2,\dots,m} \{E_i + d_{ij}\}$$

لكافة الأنشطة المنتوية بـ j ونوضح: هذا على المثال رقم (13-2)

المثال رقم (2-13)

إن الشبكة المولدة على الشكل رقم (9-13) تمثل مخططاً لإحدى المشروعات .

المطلوب : تحديد وقت تنفيذ المشروع



الشكل رقم (9-13)

الحدث رقم (0) :

$$E_0 = 0$$

الحدث رقم (1) : وينتهي به النشاط (0, 1) فقط أي :

$$E_1 = E_0 + d_{01} = 0 + 11 = 11$$

الحدث رقم (2) : وينتهي به النشاط (0, 2) فقط أي :

$$E_2 = E_0 + d_{02} = 0 + 10 = 10$$

الحدث رقم (3) : وينتهي به ثلاثة أنشطة هي :

(0, 3) و (1, 3) و (2, 3)

$$E_3 = \text{Max} \{E_i + d_{ij}\}$$

$$i = 0, 1, 2,$$

$$= \text{Max} \{E_0 + d_{03}, E_1 + d_{13}, E_2 + d_{23}\}$$

$$= \text{Max} \{0 + 5, 11 + 6, 10 + 8\}$$

$$= \text{Max} \{5, 17, 18\} = 18$$

وفق المنهجية الواردة أعلاه نجد أن

$$E_4 = \text{Max}\{ E_i + d_{i4} \}$$

الحدث رقم (4) :

$$: i = 1, 3$$

$$= \text{Max}\{ 11+9, 18+11 \} = 2$$

الحدث رقم (5) :

$$E_5 = \text{Max}\{ E_i + d_{i5} \}$$

$$: i = 1, 2, 3$$

$$= \text{Max}\{ 10+11, 18+10 \} = 28$$

الحدث رقم (6) :

$$E_6 = \text{Max}\{ E_i + d_{i6} \}$$

$$i = 4, 5$$

$$= \text{Max}\{ 18+6, 29+6, 28+5 \} = 3$$

الحدث رقم (7) :

$$E_7 = \text{Max}\{ E_i + d_{i7} \}$$

$$: i = 4, 6,$$

$$= \text{Max}\{ 29+12, 35+9 \} = 44$$

الحدث رقم (8)

$$E_8 = \text{Max}\{ E_i + d_{i8} \}$$

$$: i = 5, 6$$

$$= \text{Max}\{ 28+10, 35+8 \} = 43$$

الحدث رقم (9)

$$E_9 = \text{Max}\{ E_i + d_{i9} \}$$

$$i = 6, 7, 8$$

$$= \text{Max}\{ 35+7, 44+5, 43+7 \} = 50$$

ملاحظة : يمكن إجراء الحسابات مباشرة على الشبكة حيث توضع النتائج في

مربعات إلى جانب كل حدث (انظر المثال رقم (13 - 5))

2-2-13 - حسابات الإياب: نقوم بإجراء هذه الحسابات لتحديد الوقت المتأخر لبدء الأنشطة والذي يعتمد عليه لتحديد المسار الحرج، حيث أن الوقت المتأخر لوقوع الحدث j بدون حدوث تأخير في الفترة الزمنية اللازمة لتنفيذ المشروع برمته، ويرمز للزمن المتأخر لوقوع الحدث j بـ L_j ، وبالتعريف يجب أن يكون $L_n = E_n$ حيث n حدث نهاية المشروع، ومما ورد أعلاه يمكن القول إن آخر وقت لإنهاء النشاط (i, j) يجب ألا يزيد عن الوقت المتأخر لوقوع الحدث j أي (L_j) ، نتذكر أن وقت الانتهاء من تنفيذ النشاط (i, j) يساوي إلى الوقت الأخير لوقوع الحدث i أي (L_i) مضافاً إليه الوقت اللازم لتنفيذ النشاط (i, j) أي d_{ij} ويمكن التعبير عن هذا رياضياً بالمتراجحه التالية

$$L_i + d_{ij} \leq L_j$$

$$L_i \leq L_j - d_{ij} \quad \text{أو}$$

لكن هناك إمكانية لوجود أكثر من نشاط يطلق من i وهذا يتطلب أوقات تنفيذ مختلفة، لذلك يتوجب أخذ أكبر قيمة لـ d_{ij} بعين الاعتبار، وهذا يعني أنه علينا اختيار أصغر فرق بين L_i و d_{ij} عند حساب قيمة L_i ، يعبر عن هذا رياضياً بالعلاقة :

$$L_i = \min \{ L_j - d_{ij} \}$$

لكافة الأنشطة المنطلقة من i

نوضح حسابات الإياب على المثال رقم (3 - 13)

للمثال رقم (3 - 13) : بالاستناد إلى نتائج الحسابات في المثال رقم

(2-13) يطلب تحديد الوقت المتأخر للبدء بتنفيذ الأنشطة :

1- حدث النهاية على المخطط الشبكي على الشكل رقم (9 - 13) هو

الحدث رقم (9) وحتى لا نترك مجالاً للتهاون نجعل $L_n = E_n$ أي :

$$L_9 = E_9 = 50$$

قواعد رسم الشبكات والمسار العرج

2 - الحدث السابق للحدث (9) هو الحدث رقم (8) ويوجد نشاط وحيد منطلق منه هو النشاط 8 , 9 إذاً

$$L_8 = L_9 - d_{89} = 50 - 7 = 43$$

3 - الحدث رقم (7) وينطلق منه نشاط وحيد وهو 7 , 8

$$L_7 = L_9 - d_{79} = 50 - 5 = 45 \quad \text{إذاً}$$

4 - الحدث رقم (6) وتوجد ثلاث أنشطة منطلقة منه هي :

(6 , 7) و (6 , 8) و (6 , 9)

$$L_6 = \text{Min} \{ L_{8j} - d_{6j} \} \quad \text{أي :}$$

$$j = 7, 8, 9$$

$$= \text{Min} \{ 45 - 9, 43 - 8, 50 - 7 \} = 35$$

5 - الحدث رقم (5) :

$$L_5 = \text{Min} \{ L_{6j} - d_{5j} \}$$

$$j = 6, 8$$

$$= \text{Min} \{ 35 - 5, 43 - 10 \} = 30$$

6 - الحدث رقم (4)

$$L_4 = \text{Min} \{ L_{7j} - d_{4j} \}$$

$$j = 6, 7$$

$$= \text{Min} \{ 35 - 6, 45 - 12 \} = 49$$

$$L_3 = \text{Min} \{ L_{7j} - d_{3j} \}$$

$$j = 4, 5, 6$$

$$= \text{Min} \{ 29 - 11, 30 - 10, 35 - 6 \} = 18$$

7 - الحدث رقم (3)

$$L_2 = \text{Min} \{ L_{7j} - d_{2j} \}$$

$$j = 3, 5$$

$$= \text{Min} \{ 18 - 8, 30 - 11 \} = 10$$

8 - الحدث رقم (2)

$$L_1 = \text{Min} \{ L_{7j} - d_{1j} \}$$

$$j = 3, 4$$

9 - الحدث رقم (1)

$$= \text{Min} \{ 18-6, 29-9 \} = 12$$

$$L_0 = \text{Min} \{ L_j - d_{0j} \} \quad (0) \text{ - الحدث رقم (0)}$$

$$j = 1, 2, 3$$

$$= \text{Min} \{ 12-11, 10-10, 18-5 \} = 0$$

ملاحظة : يمكن إجراء الحسابات مباشرة على الشبكة حيث توضع النتائج في مثلثات إلى جوار الدوائر الممثلة للحوادث وعادة تكون فوق المربعات التي تحتوي حسابات الذهاب . انظر المثال رقم (5-13)

13-3 -3 - تحديد المسار الحرج : المسار الحرج يتألف من سلسلة

الأنشطة الحرجة التي تحقق الشروط الثلاث التالية :

أ- يتساوى الوقت المبكر لوقوع حدث بداية النشاط E_i مع الوقت المتأخر لوقوع هذا الحدث L_i أي $E_i = L_i$

ب - يتساوى الوقت المبكر لوقوع حدث نهاية النشاط E_j مع الوقت المتأخر لوقوع هذا الحدث L_j أي $E_j = L_j$

ج - يتساوى الوقت المتأخر لوقوع حدث النهاية L_i مع الوقت المبكر لوقوع حدث البداية E_i مضافاً إليه وقت تنفيذ النشاط d_{ij}

$$L_i = L_j + d_{ij} \text{ أي}$$

أو يتساوى الوقت المتأخر لوقوع حدث البداية L_i مع الوقت المبكر لوقوع

حدث النهاية E_j مطروحاً منه الوقت اللازم لتنفيذ النشاط d_{ij} أي $L_i = L_j - d_{ij}$ نوضح العمليات على المثال رقم (4-13)

المثال رقم (4-13) : حدد المسار الحرج بالاستناد إلى نتائج المثال رقم (2-13) والمثال رقم (3-13)

النشاط (0-1) يحقق الشرط الأول فقط لذا هذا النشاط غير حرج

قواعد رسم الشبكات والمسار الحرج

النشاط (0,2) يحقق الشروط الثلاثة فهو حرج ويدخل ضمن المسار الحرج

النشاط (0,3) يحقق الشرط الأول والثاني فقط ولا يحقق الشرط الثالث اذا فهو غير حرج ولا يدخل في المسار

النشاط (1,3) يحقق الشرط الثاني فقط فهو غير حرج

النشاط (1,4) يحقق الشرط الثاني فقط فهو غير حرج

النشاط (2,3) يحقق الشروط الثلاثة فهو حرج ويدخل ضمن المسار الحرج

النشاط (2,5) يحقق الشرط الأول فقط فهو غير حرج

النشاط (3, 4) يحقق الشروط الثلاثة فهو حرج ويدخل ضمن المسار الحرج

النشاط (3,5) يحقق الشرط الأول فقط فهو غير حرج

النشاط (3, 6) يحقق الشرط الأول والثاني ولا يحقق الشرط الثالث فهو غير حرج

النشاط (4, 6) يحقق الشرط الأول فقط فهو غير حرج

النشاط (4, 7) يحقق الشروط الثلاثة فهو حرج ويدخل ضمن المسار الحرج

النشاط (5, 6) يحقق الشرط الثالث فقط فهو غير حرج

النشاط (5, 8) يحقق الشرط الثالث فقط فهو غير حرج

النشاط (6, 7) يحقق الشرط الأول فقط فهو غير حرج

النشاط (6, 8) يحقق الشروط الثلاثة فهو حرج ويدخل ضمن المسار الحرج

النشاط (6,9) يحقق الشرطان الأول والثاني فقط فهو غير حرج

النشاط (7, 9) يحقق الشرط الثاني فقط فهو غير حرج

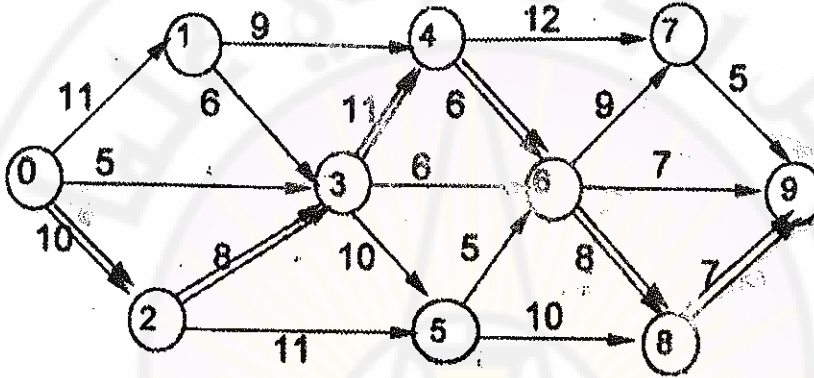
النشاط (8, 9) يحقق الشروط الثلاثة فهو حرج ويدخل ضمن المسار الحرج

أي المسار الحرج يتألف من الأنشطة :

(0,1) ، (1,3) ، (3,4) ، (4,6) ، (6,8) ، (8,9)

كما هو وارد على الشكل رقم (10-13)، وزمن تنفيذ المشروع (طول

المسار الحرج) هو (50) وحدة زمنية (أنظر الأسهم المزدوجة على الشكل) .



الشكل رقم (10-13)

وعادة يحدد المسار على الشبكة على النحو التالي :

1 - تظلل كافة الحوادث التي يتساوى فيها الوقت المبكر لوقوعها مع الوقت

الأخير لوقوعها . هذا يساعد في النظر فقط بالأنشطة التي تحقق الشرط الأول

والثاني وهي كافة الأنشطة التي تبدأ وتنتهي بحدث (دائرة) مظلل؛

2- نجمع الوقت المثبت إلى جانب حدث البداية (في المربع أو المثلث) إلى

وقست التنفيذ (الرقم المثبت على الفرع الممثل للنشاط)، إذا تساوى الناتج مع

الرقم المثبت إلى جانب حدث النهاية (في المثلث أو المربع)، يكون النشاط

حرج، ويتم تظليل فرعه بحبر غامق أو بلون آخر . بالنتيجة نحصل على

سلسلة من الأنشطة المظلة تربط حدث البداية مع حدث النهاية وهي تشكل

المسار الحرج

ملاحظة : قد يظهر على بعض الشبكات أكثر من مسار حرج .

المثال (5-13) حدد الزمن المبكر لإنهاء المشروع الوارد على الشكل رقم

(10 - 13) ثم حدد المسار الحرج .

- حسابات الذهاب :

نتذكر أنها تحدد الوقت المبكر لوقوع الحدث ونحسب بالعلاقة :

$$E_i = \text{Min} \{ E_j - d_{ij} \}$$

i : لكافة الأنشطة المنتهية بـ j

$$E_0 = 0 \quad \text{و} :$$

ونجري الحسابات على الشبكة ونضع النتائج ضمن مربعات إلى جانب الحوادث و الوقت المبكر لوقوع الحدث رقم (6) هو الزمن المبكر لنهاية المشروع أي (27) وحدة زمنية.

- حسابات الإياب : نتذكر إنها تحدد الوقت الأخير لوقوع الحدث وتحسب بالعلاقة :

$$L_i = \text{Min} \{ E_j - d_{ij} \}$$

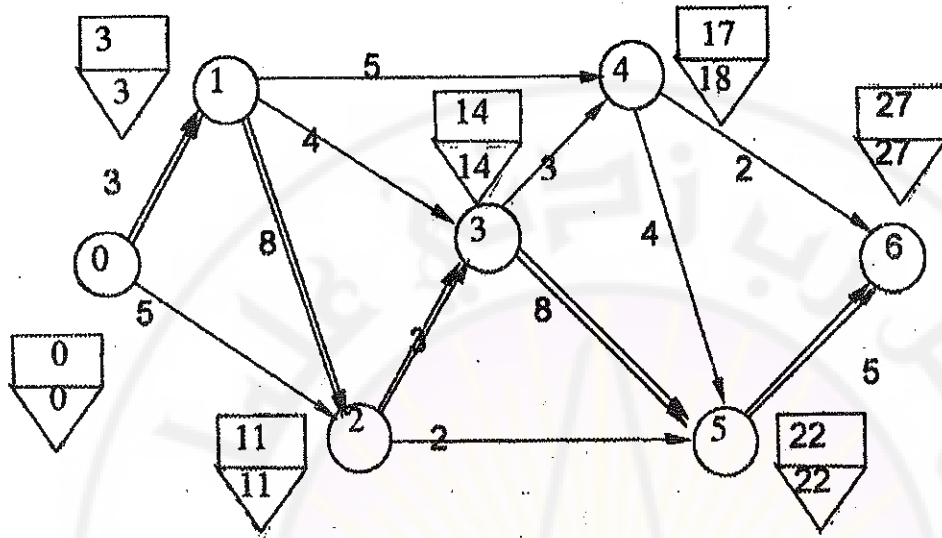
j : لكافة الأنشطة المنطلقة من i

$$L_6 = E_6 \quad \text{و} :$$

نجري الحسابات على الشبكة ونضع النتائج ضمن مثلثات الى جانب الحوادث (أعلى المربعات التي تحتوي نتائج حسابات الذهاب) :

- تظلل كافة الحوادث التي يتساوى فيها $E_j = L_i$ عندما $j = i$ أي التي تحقق الشرط الأول والثاني، وهي : 0, 1, 2, 3, 5, 6

- تظلل الفروع (الأنشطة) التي تبدأ وتنتهي بحدثين (عقدتين) مظللتين وهي : (0,1), (1,2) و (2,3) و (2,5) و (3,5) و (5,6) و المسار الجرج هو المسار الذي يمر عبر الحوادث : 0, 1, 2, 3, 5, 6



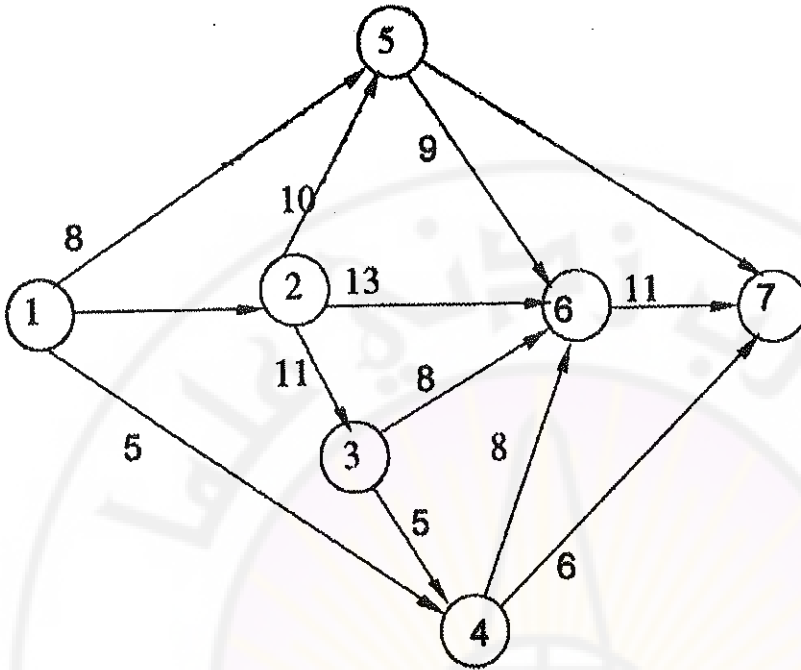
الشكل رقم (11 - 13)

مسائل و تدريبات الوحدة الثالثة عشر

I- ضع اشارة ($\vee$) بجانب العبارة الصحيحة و اشارة ($\times$) بجانب العبارة الخاطئة

- 1 - على الشبكة الممثلة للمشروع يمكن عند الضرورة تمثيل أي نشاطين على ضلع وحيد.
- 2- على الشبكة الممثلة للمشروع لا يسمح لنشاطين أن يشتركا معاً في حدث البداية و حدث النهاية.
- 3- الأنشطة الوهمية تحتاج لبعض الوقت لكنها لا تتطلب أية موارد.
- 4- النشاط على الشبكة الممثلة للمشروع يمثل أكثر من مرة .
- 5- حسابات الذهاب تحدد آخر زمن مسموح به لبداية تنفيذ النشاط .
- 6- حسابات الإياب تحدد آخر زمن مسموح به لوقوع حدث النهاية
- 7- طول المسار الحرج على أي شبكة أطول أو يساوي طول أي مسار آخر على الشبكة
- 8- كل نشاط ينطلق من أي حدث على الشبكة يجب أن يلي كافة الأنشطة المنتهية لهذا الحدث
- 9- المسار الحرج يتألف من سلسلة الأنشطة الحرجة التي تربط حدث بداية المشروع مع حدث نهايته

II - المخطط الشبكي على الشكل رقم (11-13) يوضح الأنشطة الواجب القيام بها لتنفيذ المشروع المزمع إنشائه



الشكل رقم (11-13)

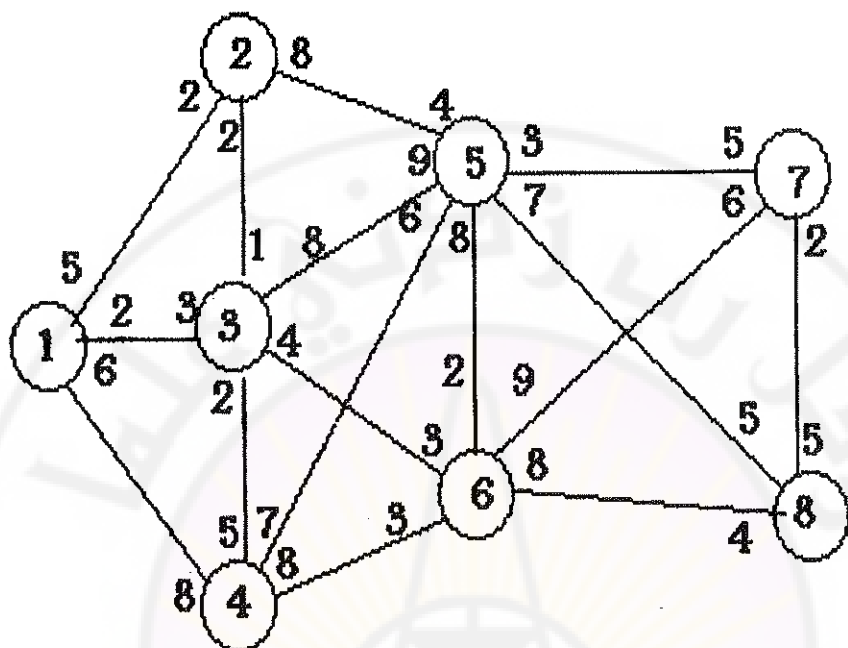
المطلوب :

- 1 - تحديد الوقت المبكر لتنفيذ المشروع
- 2 - تحديد الوقت المبكر و آخر وقت لبداية و نهاية كل نشاط
- III - المخطط الشبكي على الشكل رقم (12-13) يوضح الأنشطة الواجب القيام بها لتنفيذ المشروع :

المطلوب :

- 1 - تحديد المسار الحرج
- 2 - تحديد زمن تنفيذ المشروع
- 3 - تحديد الوقت المبكر و الوقت الأخير لوقوع كل حدث على الشبكة

قواعد رسم الشبكات والمسار الحرج



الشكل رقم (12-13)



قضية تحقيق الاستقرار في استدراج الموارد

الوحدة الرابعة عشر

التحليل الشبكي: قضية تحقيق الاستقرار في استدراج الموارد

Network-Analysis: Bar-Chart

هدف الوحدة :

تعريف الطالب بالأخطاطي الزمني وأهميته في عملية تحقيق الاستقرار باستدراج بعض الموارد النادرة ، و في الاستخدام المتوازن للعناصر الأشد ندرة عن طريق تعديل أوقات تنفيذ بعض الأنشطة بدلالة الزمن الإحتياطي .



المقدمة :

تحديد الإحطياطي الزمني لأنشطة المشروع غاية في الأهمية لأنه يبين إمكانية تعديل أوقات التنفيذ للأنشطة التي تتمتع بإحطياطي معين تحت تأثير المتغيرات الخارجية عن السيطرة ؛ دون أن يؤدي ذلك الى تأخير وقت تنفيذ المشروع بأكمله ، وسنتعرف هنا على ثلاثة أنواع من الأزمنة الإحطياطية هي :

- الزمن الإحطياطي الكلي
- الزمن الإحطياطي الحر
- الزمن الإحطياطي المستقل

1-14 الزمن الإحطياطي الكلي للنشاط : هو أكبر وقت يمكن تأجيل البدء بتنفيذ النشاط (i, j) دون أن يؤثر على وقت تنفيذ المشروع ، ويمكن أن نعرفه بأنه الفرق بين الوقت المتاح لتنفيذ النشاط ، والوقت اللازم لتنفيذه عندما تنتهي جميع الأنشطة السابقة في الوقت المبكر، وتبدأ الأنشطة اللاحقة في الوقت المتأخر .
نتذكر أن :

E_i : هو الوقت المبكر لوقوع الحدث i ، أي النهاية المبكرة لجميع الأنشطة السابقة للنشاط والمنتبهة i ، وهو الوقت المبكر لبدء الأنشطة المنطلقة من i .
 L_j : هو الوقت الإخير المسموح به لوقوع الحدث j وآخر وقت لبدء تنفيذ الأنشطة اللاحقة للنشاط (i, j)، أي النشاط المنطلقة من j .

إذا الوقت المتاح لتنفيذ النشاط (i, j) هو الفرق بين الوقت L_j والوقت E_i ، أما الوقت اللازم لتنفيذ النشاط فهو بالتعريف d_{ij} ، إذاً يمكن القول إن الزمن الإحطياطي الكلي والذي يرمز له بـ TF يحسب بالعلاقة :

$$TF = L_j - E_i - d_{ij}$$

$$TF = L_j - E_j \quad \text{حيث} \quad E_j = E_i + d_{ij} \quad \text{أوبالعلاقة :}$$

نوضح ذلك من خلال المثال رقم (14 - 1)

المثال رقم (14 - 1)

أوجد الزمن الإحطياطي الكلي لكافة أنشطة المثال رقم (14 - 1)

الحل : الزمن الإحطياطي الكلي

$TF_{0,1} = 12 - 0 - 11 = 1$	للنشاط : 0,1
$TF_{0,2} = 10 - 0 - 10 = 0$	للنشاط : 0,2
$TF_{0,3} = 18 - 0 - 5 = 13$	للنشاط : 0,3
$TF_{1,3} = 18 - 11 - 6 = 1$	للنشاط : 1,3
$TF_{1,4} = 29 - 11 - 9 = 9$	للنشاط : 1,4
$TF_{2,3} = 18 - 10 - 8 = 0$	للنشاط : 2,3
$TF_{2,5} = 30 - 10 - 11 = 9$	للنشاط : 2,5

وبحسب الزمن الإحطياطي الكلي للأنشطة وتوضع عادة على شكل جدول ، انظر الجدول رقم (13-2) . يلاحظ أن الزمن الإحطياطي الكلي للأنشطة الحرجة معلومة ، وهذا شيء متوقع حيث إن الوقت المبكر لتنفيذ المشروع تم حسابه بالاستناد إلى أوقات تنفيذ هذه الأنشطة .

14-2- الزمن الإحطياطي الحر : هو أكبر وقت يمكن تأجيل البدء بتنفيذ النشاط خلاله، عندما تبدأ جميع الأنشطة الأخرى (السابقة واللاحقة) بداية مبكرة دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير وقت تنفيذ المشروع . نتذكر أن :

E_i : هو الوقت المبكر لوقوع الحدث i ، أي النهاية المبكرة لجميع الأنشطة السابقة للنشاط والمنتبهة i ، وهو الوقت المبكر لبداية الأنشطة المنطلقة من i .

قضية تحقيق الاستقرار في استخراج الموارد

E_i : هو الوقت المبكر لوقوع الحدث i أي النهاية المبكرة لجميع الأنشطة السابقة للنشاط i ، وهو الوقت المبكر لبداية الأنشطة المنطلقة من i .

E_j : هو الوقت المبكر لوقوع الحدث j وهو الوقت المبكر للانتهاء من تنفيذ جميع الأنشطة المنتهية بهذا الحدث ، أي إن الوقت المتاح لتنفيذ النشاط (i, j) في هذه الظروف هو الفرق بين E_j و E_i ، وبالتعريف الوقت اللازم لتنفيذ النشاط (i, j) هو d_{ij} . إذاً الزمن الإحطياطي الحر والذي نرسم له بالرمز (FF) هو الفرق بين الوقت المتاح $(E_j - E_i)$ لتنفيذ النشاط والوقت اللازم لتنفيذه (d_{ij}) ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$FF_{ij} = E_j - E_i - d_{ij}$$

وبعد ، الزمن الإحطياطي الحر أيضاً بأكبر وقت يمكن إضافته إلى وقت تنفيذ النشاط عندما تنتهي الأنشطة السابقة نهاية مبكرة دون أن يؤثر ذلك على الوقت المبكر لبدء الأنشطة اللاحقة .

نوضح حسب الزمن الإحطياطي الحر على المثال رقم (14-2) :

المثال رقم (14-2)

يطلب تحديد الزمن الإحطياطي الحر لجميع أنشطة المثال (13-2) :

الحل : بحسب الزمن الإحطياطي الحر بالعلاقة :

$$EF_{ij} = E_j - E_i - d_{ij}$$

$$FF_{0,1} = E_1 - E_0 - d_{01} = 11 - 0 - 11 = 0 \quad \text{النشاط } (0,1) :$$

$$FF_{0,2} = E_2 - E_0 - d_{02} = 10 - 0 - 10 = 0 \quad \text{النشاط } (0,2) :$$

$$FF_{0,3} = E_3 - E_0 - d_{03} = 18 - 0 - 3 = 13 \quad \text{النشاط } (0,3) :$$

وهكذا الزمن نحسب الزمن الإحطياطي الحر لباقي الأنشطة ونضع الأجوبة في الجدول رقم (13-2) .

14-3 - الزمن الإحطياطي المستقل : هو أكبر وقت يمكن تأجيل البدء بتنفيذ النشاط خلاله عندما تنتهي جميع الأنشطة السابقة للنشاط في الوقت المتأخر (L_i) وتبدأ جميع الأنشطة اللاحقة له في الوقت المبكر (E_j) دون أن يؤثر ذلك على وقت تنفيذ المشروع .
نتذكر أن

L_i : هو الوقت المتأخر لوقوع الحدث i أي النهاية المتأخرة لجميع الأنشطة السابقة للنشاط (i, j) والمنتية بالحدث i ، وهو الوقت المبكر لبداية الأنشطة المنطلقة من i .

E_j : هو الوقت المبكر لوقوع الحدث j وهو الوقت المبكر لبداية جميع الأنشطة المنطلقة من j ، دون أن يؤثر على الوقت المبكر للأنشطة المنطلقة من j .
 d_{ij} : هو الوقت اللازم لتنفيذ النشاط (i, j) .

بالاستناد الى هذا يمكن التعبير عن الزمن الإحطياطي المستقل، والذي نرسم له بالرمز (IF) على النحو التالي :

$$IF = E_j - L_i - d_{ij}$$

نشير الى أن الوقت دائماً موجب أو معدوم ، لذلك نثبت قيمة (IF) كقيمة للزمن الإحطياطي المستقل إذا كانت أكبر من الصفر وفي الحالة المعاكسة نعتبر صفراً أي :

$$IF = TF : TF > 0$$

$$IF = 0 : 0 \leq TF$$

ويمكن أن يعرف الزمن الإحطياطي المستقل بأنه : الوقت الذي يمكن اضافته الى وقت تنفيذ النشاط ؛ عندما تنتهي الأنشطة السابقة في الوقت الأخير ، دون أن يؤثر ذلك على البداية في الوقت المبكر للأنشطة اللاحقة .

نوضح كيفية حساب الوقت المرن المستقل على المثال (14-3)

كيفية تحقيق الاستقرار في استرجاع الموارد

المثال (14-3) : يطلب تحديد الزمن الإحطياطي المستقل لجميع أنشطة

المثال (14-2) .

الحل :

بحسب الزمن الإحطياطي المستقل بالعلاقة : $IF = E_j - L_i - d_{ij}$

النشاط (0,1) $IF_{01} = E_1 - L_0 - d_{01} = 11 - 0 - 11 = 0$

النشاط (0,2) $IF_{02} = 10 - 0 - 10 = 0$

النشاط (0,3) $IF_{03} = 18 - 0 - 5 = 13$

ويحسب الزمن الإحطياطي المستقل لباقي الأنشطة على هذا المنوال وتوضع

الأجوبة في الجدول رقم (14-1)

dij	TF	FF	IF
0,2	0	0	0
0,3	13	13	13
1,3	1	1	1
1,4	9	9	9
2,3	0	0	0
2,5	9	7	7
3,4	0	0	0
3,5	11	11	11
3,6	2	0	0
4,6	0	0	0
4,7	4	3	3
5,6	2	2	0
5,8	5	5	0
6,7	1	0	0
6,8	0	0	0
6,9	8	8	8
7,9	1	1	0
8,9	0	0	0

الجدول رقم (14-1)

المثال رقم (4 - 14) : بالاستناد الى نتائج الحسابات في المثال (5 - 13) أوجد ما يلي :

- أ - الزمن الإحطياطي الكلي لجميع الأنشطة .
 - ب - الزمن الإحطياطي الحر لجميع الأنشطة .
 - ج - الزمن الإحطياطي المستقل لجميع الأنشطة .
 - د - هل يمكن تحديد المسار الحرج من نتائج الحسابات على الجدول
- الحل : نضع نتائج الحسابات في الجدول رقم (2 - 14)

d_{ij}	d_{jz}	E_i	L_i	E_j	L_j	IF	FF	IF
0,1	3	0	0	3	3	0	0	0
0,2	5	0	6	5	11	6	6	6
1,2	8	3	3	11	11	0	0	0
1,3	4	3	9	7	14	7	7	7
1,4	5	3	13	8	18	10	8	8
2,3	3	11	11	14	14	0	0	0
2,5	2	11	22	13	22	9	9	9
3,4	3	14	15	17	18	1	0	0
3,5	8	14	14	22	22	0	0	0
4,5	4	17	18	21	22	1	1	0
4,6	2	17	25	19	27	8	8	7
5,6	5	22	22	27	27	0	0	0

الجدول رقم (2 - 14)

قضية تحقيق الاستقرار في استرجاع الموارد

د- الإجابة :نعم يمكن تحديد المسار الحرج، وهو المسار المتشكل من الأنشطة التي يكون وقت مرونتها الكلي معدوماً أي المسار الأول يتألف من الأنشطة : (5,6) ، (3,5) ، (2,3) ، (1,2) ، (1,2) ، (0,1)

14-4 - المخططات الزمنية :

إن العرض الجدولي (على شكل جدول) لأنشطة المشروع من حيث تتابعها والأوقات اللازمة للتنفيذ ولزمن الإحطاطي لا تساعد على فهم هذه البيانات ، وأحياناً يصعب ربطها مع بعضها البعض ؛ لذلك توصل الرياضيون الى وضع ما يعرف بالمخطط الزمني، وأول مخطط وضع من قبل (كانيت)، لكن تطور بعد ذلك وأخذت المخططات أشكالاً عديدة حسب الحاجة إليها، حيث يمكن للمعنيين وخلال نظرة سريعة التمييز بين الأنشطة الحرجة وغير الحرجة، ومعرفة أوقات المرونة للأنشطة (ان وجدت) .

وعادة يرسم المخطط الزمني بمساعدة محور أفقي، يمثل الوقت والأولوية في الرسم للأنشطة الحرجة ؛ للتأكيد على أفضلية هذه الأنشطة بالاهتمام والمراقبة وعادة ترسم في أعلى المخطط ، وللتأكيد على ضرورة التنفيذ في الوقت المحدد بصراصة ترسم على استقامة واحدة ،¹ حيث تأخذ شكل مستقيم يبدأ بالوقت صفر (زمن بداية المشروع) وينتهي بالوقت المحدد بطول المسار الحرج .

ثم ترسم الأنشطة غير الحرجة بالترتيب حسب زمن تنفيذها على شكل مستقيمات، تقع بين الخط الممثل للأنشطة الحرجة والمحور الأفقي ، وعادة تمثل بخط مستقيم منقطع طوله يمثل الوقت المتاح لتنفيذ النشاط ، ويثبت على الخط رقم يمثل الوقت اللازم لتنفيذه .

¹ - يستثنى من هذا الأنشطة الوهمية حيث تمثل بشكل عمودي للدالة على أن زمن تنفيذها معدوم ولا تحتاج لاي موارد أو تمثل بنقطة على المستقيم الممثل للأنشطة الحرجة .

نوضح آلية رسم المخططات الزمنية على المثال رقم (1-14) :

المثال رقم (1 - 14) : المطلوب وضع المخطط الزمني لتنفيذ المشروع في

المثال رقم (5-13) .

الحل :

1- رسم المخطط الزمني للأنشطة الحرجة : ونبدأ بالرسم حسب التسلسل

الزمني للتنفيذ من الزمن 0 وحتى زمن تنفيذ المشروع (27) :

نشاط البداية (0,1) يبدأ في الزمن (0) ووقت تنفيذه ($d_{ij} = 3$) وينتهي

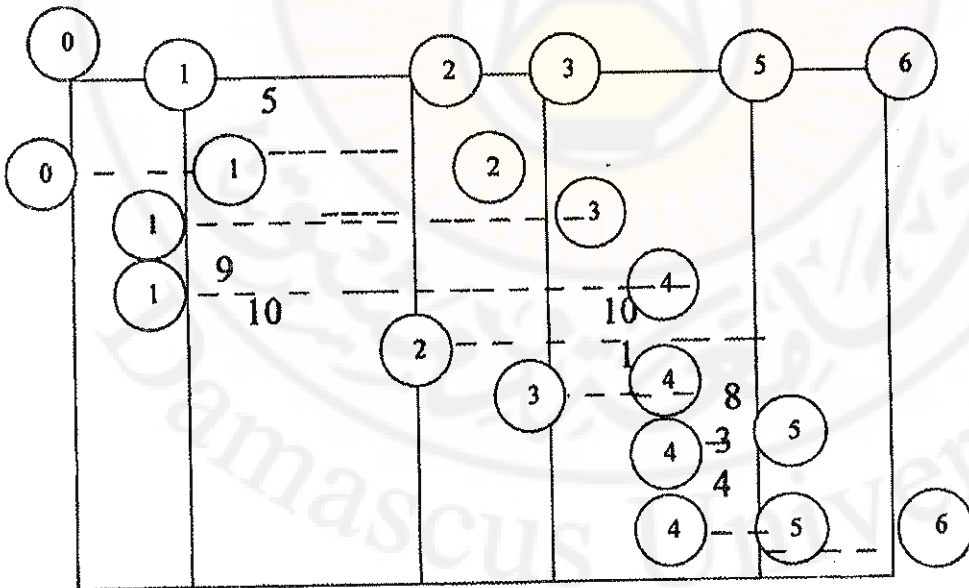
في الزمن ($E_1 = 3$) . انظر الشكل رقم (1-14) .

النشاط (1,2) يبدأ في الزمن (3) ووقت تنفيذه ($d_{12} = 8$) ، وينتهي في

الزمن ($E_2 = 11$) .

يليه الأنشطة التالية على الترتيب (3,3) ، ثم (3,5) ، ثم نشاط النهاية (5,6)

انظر الشكل رقم (1-14) ..



الشكل رقم (1-14)

قضية تحقيق الاستقرار في استدراج الموارد

2- رسم المخطط الزمني لباقي الأنشطة (الأنشطة غير الحرجة)

أول نشاط غير حرج حسب تسلسل عمليات المشروع هو النشاط (0,2) ، وهذا النشاط مجال تنفيذه هو إحدى عشرة وحدة زمن (من الزمن صفر إلى الزمن أحد عشر) ، ووقت تنفيذه هو (5) وحدات . انظر الخط المنقط الأول من الأعلى على الشكل رقم (1-14) .

ثاني نشاط غير حرج هو (1,3) ومجال تنفيذه هو عشر وحدات زمنية (من الزمن (3) الى الزمن (14)) ووقت تنفيذه هو (9) وحدات . انظر الخط المنقط الثاني من الأعلى على الشكل رقم (1-14) . وترسم باقي الأنشطة الحرجة حسب تسلسل تنفيذها مرتبة من الأعلى إلى الأسفل .

نلاحظ أن الشكل رقم (1-14) يوضح الوقت المتاح لتنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع ، وتظهر أهمية هذا المخطط في الكشف عن التداخل في الأوقات المتاحة للتنفيذ بالنسبة للأنشطة غير الحرجة مثلاً الأنشطة (0,2) ، (1,3) ، (2,5) هي مستقلة تماماً ويمكن البدء بتنفيذها في أي وقت تراه الإدارة مناسباً شريطة انتهاء كل منها في الوقت المحدد على المخطط ، أما النشاطين (1,4) و (3,4) من جهة والنشاطين (4,5) و (4,6) من جهة أخرى فتشترك في جزء من الوقت المتاح لتنفيذها ، أي يجب معرفة أثر وقت تنفيذ كل من النشاطين : (1,4) و (3,4) على وقت تنفيذ كل من النشاطين : (4,5) و (4,6) ،

5-14 - تخصيص الموارد المتاحة : إن الحاجة إلى مستلزمات العمل تختلف من نشاط إلى آخر ، وبالتالي تختلف الحاجة إلى هذه المستلزمات من وقت لآخر خلال تنفيذ المشروع ، ولذلك تسعى الإدارة للاستفادة القصوى من الموارد عن طريق ترتيب أوقات تنفيذ الأنشطة ، وبشكل عام يفضل تحقيق نوع من

الاستقرار (التوازن) في استدراج بعض الموارد ؛ حتى وإن كانت غير نادرة وهذا ممكن أيضاً عن طريق ترتيب أوقات تنفيذ الأنشطة ، إن الترتيب بطل الأنشطة غير الحرجة فقط ، لأن الأنشطة الحرجة يجب تنفيذها كما هي ودون تغيير إلا عند الضرورة ؛ حيث يتم تكثيف العمل لتنفيذها بأوقات أقصر من الوقت الطبيعي (انظر الوحدة السادسة عشر) . وعادة يستخدم الزمن الاحتياطي للمساعدة في عملية ترتيب أوقات تنفيذ الأنشطة غير الحرجة ، حيث يمكن تأخير وقت تنفيذ النشاط بمقدار الزمن الاحتياطي المستقل دون أية اختبارات ، وفي حال عدم كفاية هذا المقدار من التأخير ، يمكن النظر إلى تأخير وقت تنفيذ النشاط بمقدار الزمن الاحتياطي الكلي ، لكن هنا يجب التأكد من تأثير هذا التأخير على الأنشطة اللاحقة ؛ والتي قد تتأثر بداياتها بهذا التأخير نوضح هذا من خلال المثال رقم (2-14) :

المثال رقم (2-14) بالاستناد إلى حل المثال رقم (1-14) والبيانات حول الآلات اللازمة لتنفيذ المشروع والمعطاة في الجدول رقم (3-14) المطلوب : ترتيب أوقات تنفيذ أنشطة المشروع بحيث تحقق استقرار في استدراج الموارد .

عدد الآلات اللازمة	الأنشطة	الآلات اللازمة	الأنشطة
4	2,5	6	0,1
5	3,4	4	0,2
5	3,5	3	1,2
0	4,5	5	1,3
3	4,6	0	1,4
6	5,6	5	2,3

الجدول رقم (3 - 14)

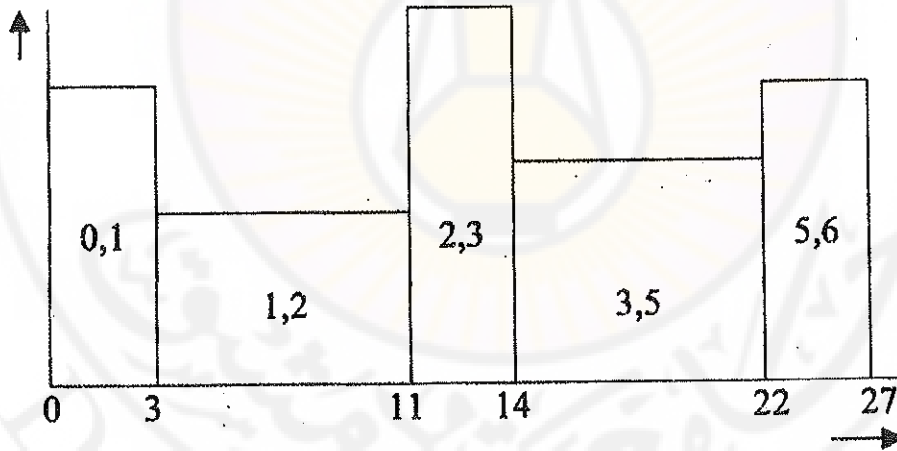
قضية تحقيق الاستقرار في استدراج الموارد

الحل : للسهولة تعرض حاجة المشروع من الآلات على شكل جدول تكراري على النحو التالي :

1 - سبق الإشارة إلى أن أوقات تنفيذ الأنشطة الحرجة وترتيبها ملزمة ، وبالتالي نبدأ بتحديد حاجة هذه الأنشطة من الآلات :

أ - النشاط الأول : (0,1) يبدأ بالزمن (0) ويحتاج إلى (6) وحدات وزمن تنفيذه (3) ووقت انتهائه (3) ، وعلى المدرج التكراري يمثل الحقل المسمى باسمه أي الحقل (0,1) انظر الشكل رقم (2-14) .

ب - النشاط الثاني : (1,2) وحقله على الجدول رقم (2-14) هو الحقل (1,2) وهكذا للأنشطة الحرجة الأخرى (2,3) ، (3,5) ، (5,6) تمثلها الحقول (2,3) ، (3,5) ، (5,6) على الترتيب .

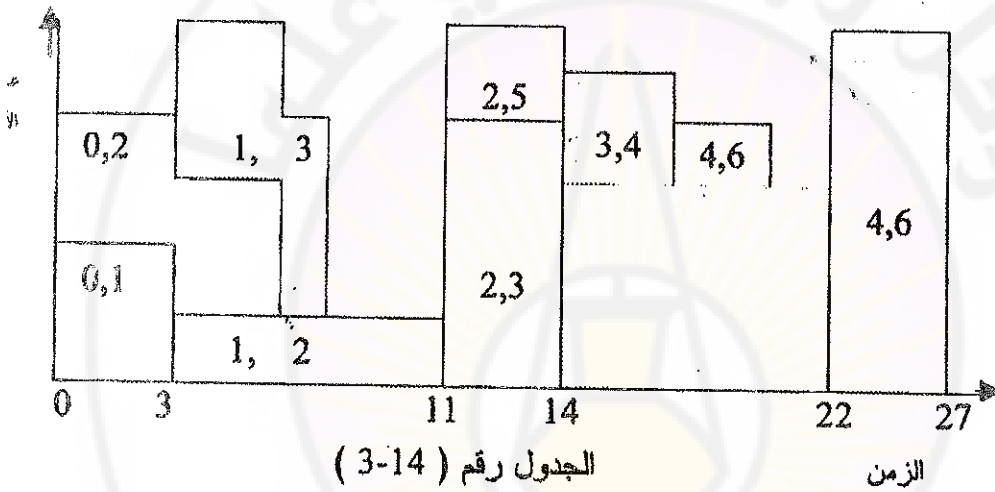


الشكل رقم (2-14)

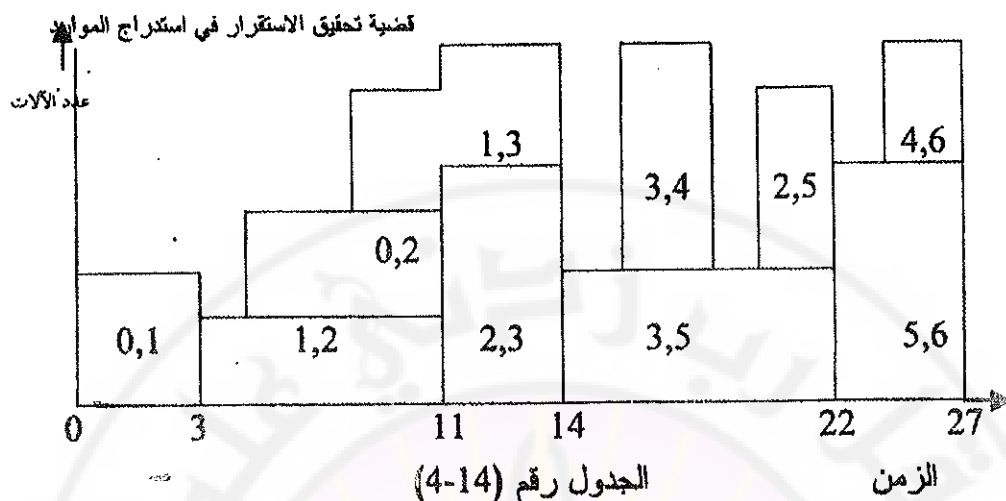
الأنشطة غير الحرجة :

1- من أجل توضيح أهمية الأزمنة الإحتياطية في عملية تخصيص الموارد بشكل مستقر ، سنعرض حاجة المشروع من الآلات عندما تبدأ جميع الأنشطة في

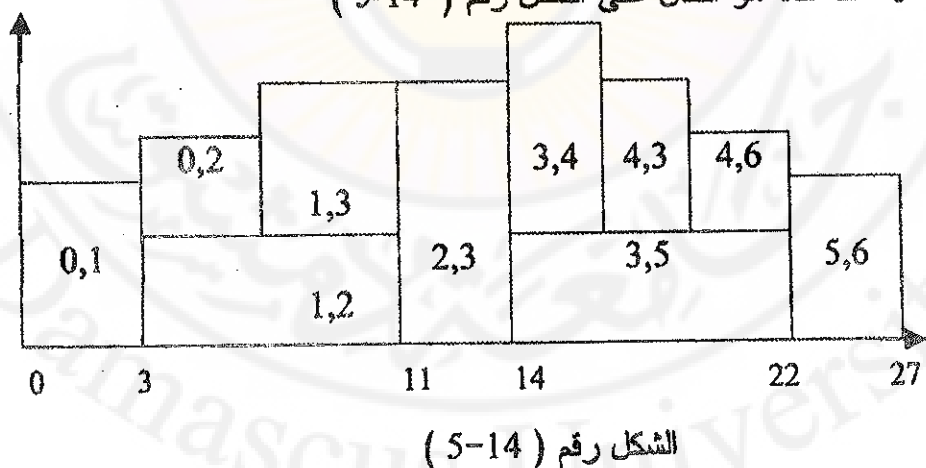
الوقت المبكر على الشكل رقم (3-14) ، عن طريق إضافة حاجة الأنشطة غير الحرجة إلى المدرج التكراري الوارد على الشكل رقم (2-14) ، ثم نعرض حاجة المنشأة عندما تنتهي جميع الأنشطة في الأوقات الأخيرة على الشكل رقم (4-14) عن طريق إضافة حاجة الأنشطة غير الحرجة إلى المدرج التكراري على الشكل رقم (2-14) .



- نلاحظ أن الحاجة من الآلات عندما تبدأ جميع الأنشطة في الوقت المبكر تبلغ في الزمن صفر (10) آلات ، ثم يزداد إلى (12) آلة في الزمن (3) ، وينخفض في الزمن (5) إلى (8) آلات ، ويزداد في الزمن (11) إلى (12) ثالثة ، ويبدأ بالتناقص من جديد ثم زيادة أي هناك عدم استقرار . نلاحظ أن الحاجة من الآلات عندما تنتهي جميع الأنشطة في آخر وقت تبلغ في الزمن صفر (6) وحدات ، ثم تنخفض إلى (4) وحدات في الزمن (3) ،



وفي الزمن (6) تزداد إلى (7) وفي الزمن (10) يزداد إلى (12) آلة، وفي الزمن (11) يزداد إلى (13) وحدة ، ثم ينخفض بشكل حاد إلى (5) وحدات في الزمن (14) ويزداد في الزمن (15) إلى (10) آلات ، ثم ينخفض إلى (5) في الزمن (18) ويزداد من جديد وهكذا ... أي هناك عدم استقرار، ويمكن تحقيق بعض الاستقرار عن طريق إزاحة وقت تنفيذ بعض الأنشطة كما هو الحال على الشكل رقم (5-14)



مسائل و تدريبات الوحدة الرابعة عشر

II - ضع إشارة (✓) بجانب العبارة الصحيحة و إشارة (×) بجانب العبارة الخاطئة:

1. يمكن تأخير تنفيذ أي نشاط حرج حسب ضرورة العمل دون أن يؤثر ذلك على زمن تنفيذ المشروع
2. الزمن الإحتياطي يمثل مقدار التأخير المسموح به ، للبدء بتنفيذ النشاط بعد الوقت المبكر دون أن يؤثر ذلك على وقت تنفيذ المشروع
3. الزمن الإحتياطي المستقل يمثل الوقت الذي يمكن إضافته الى وقت تنفيذ المشروع ، دون أن يؤثر ذلك على وقت تنفيذ المشروع
4. تحقيق الاستقرار باستدراج الموارد يتم عن طريق تكثيف العمل على الأنشطة غير الحرجة
5. الاستقرار باستدراج الموارد يتحقق عند ما تبدأ جميع الأنشطة في آخر وقت بداية مسموح به
6. الموارد المحدودة تؤثر على الحسابات على الشبكة ؛ من خلال تحديد لها للوقت اللازم لتنفيذ الأنشطة الحرجة و تنفيذ المشروع بشكل عام
7. إذا كان الوقت الأحتياطي الكلي لنشاط ما معدوم فهذا دليل على أن كافة أوقات المرونة معدومة.
8. الوقت الأحتياطي الكلي لأي نشاط حرج معدومة.
9. الوقت الأحتياطي الحر لأي نشاط أكبر أو تساوي الوقت الأحتياطي الكلي.

عدم التحديد في مراجعة و تقويم المشروعات

الوحدة الخامسة عشر

عدم التحديد في تقويم و مراجعة المشروعات

Probabilistic Project Scheduling

هدف الوحدة : تعريف الطالب بحالات عدم التحديد التي
تصادف الاداريين في دراسة وتنفيذ المشروعات ، وكيفية
معالجتها بالاضافة الى حساب احتمالات تنفيذ المشروعات.



المقدمة:

إن الدراسة في الفقرات السابقة اعتمدت على بيانات (أوقات) محددة بصرامة ، لكن الحياة العملية تتطوي على تقلبات في أوقات تنفيذ الأنشطة ؛ وغالباً تقدير أوقات التنفيذ يكون غير دقيق ، حيث تقدر بأقل من الوقت اللازم عندما تكون الجهات التي تقوم بالتقدير متعائلة ، وأحياناً تكون هذه الأوقات أطول من الأوقات اللازمة ؛ عندما تكون هذه الجهات متشائمة ؛ لذلك اعتمد أسلوب (بيرت) على بيانات عن ثلاثة أنواع من الأوقات لدى تقدير الوقت اللازم لتنفيذ الأنشطة .

15-1- أوقات تنفيذ الأنشطة:

أ - الوقت المتفائل : هو أقل تقدير للوقت اللازم لتنفيذ النشاط ، وهو أقصر وقت لأنه يمثل الوقت الذي يستغرقه تنفيذ النشاط ؛ عندما تكون جميع الظروف الداخلية والخارجية المحيطة بعملية التنفيذ مناسبة ووفق متطلبات العمل ويرمز له بـ A .

ب - الوقت الأكثر احتمالاً : هو تقدير للوقت اللازم لتنفيذ النشاط في الظروف العادية وهو الأقرب إلى الواقع ؛ لأنه يمثل الوقت الذي يستغرقه تنفيذ النشاط ؛ إذا كانت الجهات المعنية في المشروع لديها الخبرة الكافية للقيام بهذه الأنشطة ويرمز له بـ M .

ج - الوقت المتشائم : هو تقدير لأطول وقت لازم لتنفيذ النشاط ، ويقدر مع الأخذ بالحسبان جميع العقبات التي يمكن أن تعترض تنفيذ النشاط مجتمعة ، أي إذا كانت جميع الظروف الداخلية والخارجية تعيق عملية التنفيذ ، ويرمز له بـ B

أن أسلوب (بيرت) ربط بين توزيع الأوقات اللازمة لتنفيذ النشاط ؛ وبين توزيع المساحة تحت منحني التوزيع الطبيعي التي تشمل ستة انحرافات معيارية فأعطى هذا الأسلوب وزناً ترجيحياً واحداً (انحرافاً معيارياً واحداً) للوسط الحسابي ؛ للوقت المتفائل والوقت المتشائم ، أي :

$$\frac{A+B}{2}$$

و أعطى وزنين ترجيحين للوقت الأكثر احتمالاً أي $2M$ ، ثم أوجد الوسط الحسابي واعتبره الوقت المتوقع اللازم لتنفيذ النشاط ورمز له بـ $\bar{d}_y$

$$\bar{d}_y = \left\{ \left(\frac{A+B}{2} \right) + 2 \right\} M / 3$$

$$\bar{d}_y = \frac{A + B + 4 M}{6}$$

وبما ان الزمن المتوقع أعلاه يحتوي على ست انحرافات معيارية فان الفرق بين الحد الأعلى B والحد الأدنى A يساوي ست انحرافات معيارية ومنه يمكن القول أن الانحراف المعياري الواحد يساوي للفرق بين الحدين مقسوماً على عدد الانحرافات (أي ست انحرافات) ، نرسم للانحراف المعياري بـ ويحسب بالعلاقة:

$$\delta_y = \frac{B - A}{6}$$

وبدلالة الانحراف المعياري يمكن إيجاد التباين بالعلاقة :

$$\sigma_y = \delta_y^2 = \left(\frac{B - A}{6} \right)^2$$

عدم التحديد في مراجعة و تقويم المشروعات

وهذا المدخل يساعد على تحديد احتمال تنفيذ المشروع (احتمال وقوع حدث النهاية) ، وعلى تحديد احتمالات تنفيذ كل مرحلة من المراحل (كل حدث من الحوادث) ضمن الوقت المحدد من قبل الجهة صاحبة العلاقة ، وفق ما يلي :

1- حساب الوقت المتوقع لإنجاز كل نشاط من أنشطة المشروع .

2- حساب الوقت المتوقع لإنجاز كل مرحلة (كل حدث z) ، وذلك عن طريق إيجاد المسار الحرج المؤدي إلى كل حدث ونرمز له بـ $E \{ M_j \}$.

3- حساب تباين وقت إنجاز كل ، مرحلة وهو يساوي مجموع تباينات جميع الأنشطة الواقعة على المسار الحرج المؤدي إلى الحدث الممثل للمرحلة (z) ، وإذا وجد أكثر من مسار حرج يؤخذ التباين الأكبر من بين تباينات المسارات الحرجة ، ونرمز له بـ v_z .

4- حساب عدد الانحرافات المعيارية الواقعة بين الوقت المتوقع والوقت المحدد بالعلاقة :

$$K_j = \frac{St_j - E \{ M \}}{\sqrt{V_j}}$$

حيث K_j : عدد الانحرافات المعيارية تحت منحنى التوزيع الطبيعي

St_j : الوقت المحدد من قبل الجهة صاحبة العلاقة لتنفيذ المرحلة j

$E \{ M_j \}$: الوقت المتوقع لإنهاء المرحلة j

v_j : تباين الوقت المتوقع لإنهاء المرحلة j

نشير إلى أن K_j هي ليست موجبة دوماً ، وإشارتها تدل على وقوعها إلى يمين أو يسار الوسط الحسابي ، وبالتالي المساحة التي تمثلها تقع إلى يسار الوسط الحسابي إذا كانت سالبة وإلى يمينه إن كانت موجبة .

نوضح آلية حساب الوقت المتوقع لتنفيذ المشروع ؛ واحتمالات تنفيذ كل مرحلة من مراحله على المثال رقم (1-15) :

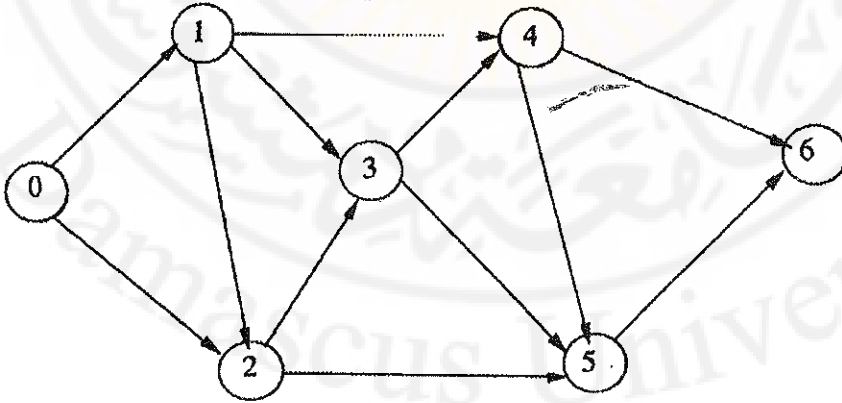
المثال رقم (1-15) :

المخطط الشبكي على الشكل رقم (1-15) يمثل مشروع تشييد ورشة خياطة ، دراسة الأوقات اللازمة لتنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع أعطت النتائج الواردة في الجدول رقم (1-15) ، أما الجهة صاحبة العلاقة فقد حددت الوقت اللازم لتنفيذ كل مرحلة (وقوع كل حدث) على النحو التالي :

6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 وحدة زمن للمراحل ، 33 , 25 , 25 , 15 , 10 , 3 , 0 على الترتيب .

المطلوب :

- 1- حساب الوقت المتوقع لإنجاز كل نشاط .
- 2- حساب الوقت المتوقع لإنجاز المشروع .
- 3- حساب احتمالات إنجاز كل مرحلة من مراحل المشروع ضمن الوقت المحدد ، بالإضافة لاحتمال تنفيذ المشروع .



شكل رقم (1-15)

عدم التحديد في مراجعة و تقويم المشروعات

النشاط ij	الوقت المتفائل	الوقت الأكثر احتمالاً	الوقت المتشائم
0,1	1	2	3
0,2	4	6	8
1,2	5	8	17
1,3	2	3	4
1,4	5	6	13
2,3	4	5	6
2,5	2	4	6
3,4	1	3	5
3,5	7	10	13
4,5	2	3	4
4,6	2	3	10
5,6	2	5	8

الجدول رقم (1-15)

الحل :

1- إيجاد الوقت المتوقع لإنجاز كل نشاط بالعلاقة :

$$\overline{d}_{ij} = \frac{A + 4M + B}{6}$$

2 - إيجاد الانحراف المعياري لوقت تنفيذ كل نشاط وتباينه :

$$d_{0,1} = \frac{1 + 4(2) + 3}{6} = 2$$

$$d_{1,4} = \frac{5 + 4(6) + 13}{6} = 7$$

$$\delta_{0,1} = \frac{3 - 1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{0,1}^2 = \delta_{0,1}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.333$$

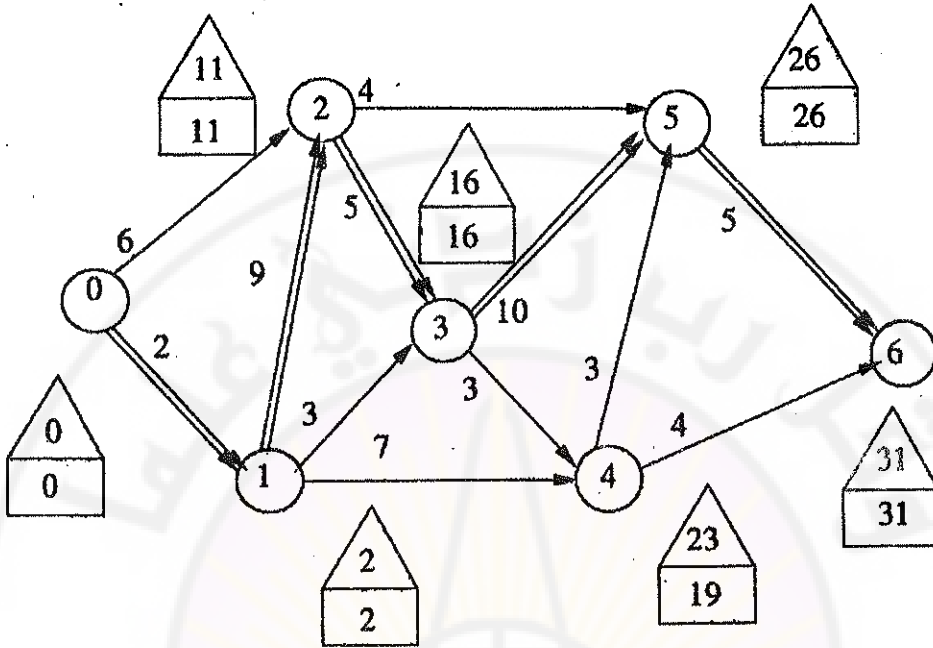
نحسب جميع القيم على هذا النحو ، و نضع النتائج في الجدول رقم (2-15) .

ij	d _{ij}	δ	V _{ij}
0,1	2	0,333	0,111
0,2	6	0,666	0,444
1,2	9	2	4
1,3	3	0,333	0,111
1,4	7	1,333	1,777
2,3	5	0,333	0,111
2,5	4	0,666	0,444
3,4	3	0,666	0,444
3,5	10	1	1
4,5	3	0,333	0,111
4,6	4	1,333	1,777
5,6	5	1	1

الجدول رقم (15 - 2)

3 - إيجاد الوقت المتوقع لإنجاز المشروع يتم عن طريق إيجاد المسار الحرج على الشبكة باستخدام الأوقات المتوقعة لتنفيذ الأنشطة أي d_{ij} ، انظر الشبكة على الشكل رقم (15 - 2) حيث تبين الحسابات أن الوقت المتوقع هو (31) وحدة زمن .

عدم التحديد في مراجعة و تكوين المشروعات



الشكل رقم (2-15)

4 - حساب احتمالات تنفيذ المراحل :

أ - نحدد المسار الحرج المؤدي الى كل حدث (انظر عمود المسارات في الجدول رقم (3-15) .

ب - نحسب طول المسار المؤدي الى كل حدث (انظر عمود $(E(M_j))$ في الجدول رقم (3-15) .

ج - نحسب تباين وقت كل حدث (انظر عمود $V\{M_j\}$ في الجدول رقم (3-15) .

د - نحسب عدد الانحرافات المعيارية تحت منحنى التوزيع الطبيعي K_j بمساعدة القيم المعطاة st_j والقيم المتوقعة $E\{M_j\}$ وقيم التباين V_j ، انظر العمود K_j في الجدول رقم (3-15) .

هـ- بمساعدة قيم K_j وجدول توزيع المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي نحدد احتمالات تنفيذ كل مرحلة ، واحتمال تنفيذ المشروع ضمن الوقت المحدد (انظر عمود P_j في الجدول رقم (3-15)).

الحدث	المسار	$E\{M_j\}$	$V\{M_j\}$	St_j	K_j	P_j
0	-	0	0	0	0	-
1	0,1	2	0,111	3	+3	0,9938
2	0,1,2	11	4,111	10	-0,493	0,3121
3	0,1,2,3	16	4,222	15	-0,486	0,3156
4	0,1,2,3,4	21	4,666	25	+1,851	0,9678
5	0,1,2,3,4,5	26	5,222	52	-0,437	0,3336
6	0,1,2,3,4,5,6	31	6,222	33	+0,801	0,7881

الجدول رقم (3-15)

أي إن احتمال تنفيذ المشروع خلال الوقت المحدد من قبل الجهة المعنية والبالغ 33 يوماً هو 0,7881.

ضغط ازمة التنفيذ

الوحدة السادسة عشر

قضية ضغط أوقات التنفيذ العلاقة بين التكلفة و الوقت

Project Crashing

هدف الوحدة :

تعريف الطالب بأهمية العلاقة بين التكلفة و الوقت،
وكيفية تحقيق عمليات ضغط أوقات تنفيذ الأنشطة،
بهدف تحقيق ضغط لأوقات تنفيذ المشروعات، ووضع
خطط تنفيذ المشروعات بأقل تكاليف ممكنة، و خلال
الوقت المرغوب من قبل الجهات المعنية.



مقدمة :

تتناول هذه الدراسة العلاقة بين التكلفة و الوقت اللازم لتنفيذ المشروع ،حيث يمكن وضع خطط بديلة بتكاليف بديلة ،عن طريق تطوير الشبكة (أي تغيير أزمدة تنفيذ بعض الأنشطة) ، و المنطق هو وجود حرية الاختيار بين أزمدة مختلفة ، و بالتالي نسعى لتحقيق تنفيذ المشروع من خلال زمن مناسب و تكلفة مناسبة من وجهة نظر الجهة صاحبة العلاقة .

عادة توضع خطة زمنية لتنفيذ المشروع بالشكل الطبيعي و بالتكاليف الطبيعية ، و بعد الانتهاء من ذلك يقوم الزمن اللازم لتنفيذ المشروع ،فإذا كانت الجهة صاحبة العلاقة، ترغب بتنفيذ المشروع بوقت أقل من الوقت الطبيعي، تنشأ فكرة تسريع تنفيذ بعض الأنشطة (ضغط الوقت اللازم لتنفيذها)، و من الطبيعي أن يترتب على هذا التسريع تكاليف إضافية تنشأ عن تكثيف العمل ، و بما أن زمن تنفيذ المشروع يساوي لطول المسار الحرج ؛ أي مجموع الأزمنة اللازمة لتنفيذ الأنشطة الحرجة الواقعة على هذا المسار ، و هذا يحدد الأنشطة التي يتوجب تسريع تنفيذها، وهي الأنشطة الحرجة التي وحدها تسرع في تنفيذ المشروع ؛ لكن هناك حقيقة أخرى هي: أن التكاليف المرتبطة بتسريع نشاط ما قد تختلف عن تكلفة تسريع نشاط آخر ؛ لذا يتوجب تحديد الأنشطة ذات تكلفة التسريع الأقل ،و التي يتوجب تسريعها، بحيث تحقق ضغطاً لزمن تنفيذ المشروع يساوي لزمن ضغطها ، ينجم عن هذا المدخل موضوعين يجب دراستهما :

الأول : ما هي تكلفة ضغط كل نشاط من الأنشطة الحرجة ؟

الثاني : التأكد من ضغط زمن تنفيذ المشروع بمقدار ضغط النشاط ، حتى لا تذهب تكاليف الضغط دون مبرر ، و هكذا تكون لدينا الخطوات التالية الواجب القيام بها لتحقيق التبادل بين الزمن و التكلفة (ضغط زمن تنفيذ المشروع) :

- 1 - تحديد العلاقة بين تكلفة و زمن تنفيذ كل نشاط .
- 2- التأكد من امكانية ضغط بعض أنشطة المسار الحرج (احداها على الأقل) .
- 3- تحديد مقدار الضغط الذي يمكن تحقيقه .
- 4- حساب التكاليف الكلية لتنفيذ المشروع .
- 16-1- تحديد العلاقة بين الزمن و التكلفة :

عادة يعرف الزمن الطبيعي لتنفيذ كل نشاط و التكاليف المقابلة له ، و يمكن بطريقة مماثلة تحديد أقل زمن يمكن تنفيذ النشاط خلاله ، و الذي يمكن تسميته بزمن الطوارئ ، و من الطبيعي أن تكون تكاليف تنفيذه ضمن هذا الزمن أكبر و تسمى تكاليف الطوارئ ، و عادة تفترض وجود علاقة خطية بين تغير الزمن و تغير التكاليف ، و تحديدها يتم عن طريق نسبة الفرق الموجب بين تكلفتي التنفيذ (الطوارئ - العادية) الى الفرق الموجب لزمن التنفيذ (العادي - الطوارئ) ، و نرمز لهذه التكلفة بـ

$$\Delta_{ij} \text{ حيث : } i=0,1, \dots, m \quad j=0,1,2, \dots, n$$

و عادة لتسهيل الحسابات توضع نتائج في عمود خاص ، في الجدول المعد لهذه الدراسة ، يسمى عمود تكاليف التسريع .

16-2- التأكد من امكانية ضغط بعض أنشطة المسار الحرج (احداها على الأقل) :

في هذه الخطوة نفتش عن الأنشطة الحرجة التي يمكن ضغط زمن تنفيذها ، و نتأكد من أن ضغطها سيؤدي الى ضغط زمن تنفيذ المشروع ، و هذا يتم عن

طريق ضغط نشاط حرج وحيد (على الأقل) ، على كل مسار حرج من المسارات الموجودة على الشبكة ، و قد يكون هذا نشاطاً مشتركاً لجميع المسارات الحرجه أو بعضها ؛ و على البعض الآخر أنشطة أخرى مستقلة ، و اذا تعذر ذلك فهذا دليل على عدم امكانية ضغط زمن تنفيذ المشروع ، وهذه الحالة نصادفها عندما يظهر مسار حرج وحيد لا يمكن ضغطه ، أما اذا توفرت أنشطة حرجة بديلة، فهنا يتم اختيار النشاط الذي يحمل المشروع أقل تكاليف تسريع .

16-3- تحديد مقدار الضغط الذي يمكن تحقيقه :

من المعلوم أن المسار الحرج أطول من أي مسار آخر على الشبكة بوحدة زمن واحدة على الأقل، و بالتالي اذا كان مجال ضغط النشاط الذي تم اختياره يساوي واحداً فقط ، هذا يسمح ضغط هذا النشاط مباشرة وحدة زمن واحدة ، و كذلك الأمر اذا كان مجال ضغط النشاط وحدتين أو أكثر، إذا كانت الجهة صاحبة العلاقة تحتاج لضغط وحدة زمن واحدة، هنا- أيضاً- يتم ضغط النشاط وحدة زمن واحدة ، لكن إذا كان مجال الضغط وحدتين أو أكثر، و ادارة المشروع ترغب بضغطه وحدتين أو أكثر تنشأ مشكلة تحديد مقدار الضغط .

قبل الحديث عن كيفية تحديد مقدار الضغط نعرف مايلي :

مجال الضغط : هو الفرق بين زمن التنفيذ الطبيعي و أقصر زمن تنفيذ ممكن و

نرمز له بـ : T_N

ونرمز لمجال الإحتياطي الزمني الحر بـ : T_M

ونرمز لمقدار الضغط المحقق بـ : T_D

أما مقدار الضغط فيحدد على النحو التالي :

1- نحدد مجال الضغط للنشاط الذي تم اختياره لتحقيق الضغط عليه .

2- نحدد مجال الإحتياطي الزمني الحر على النحو التالي :

أ - نحسب الإحتياطي الزمني الحر لكافة أنشطة الشبكة .

ب - نحقق ضغط وحدة زمن واحدة على النشاط المختار .

ج - نحسب من جديد الإحتياطي الزمني الحر لكافة أنشطة الشبكة بعد الضغط .

د - نحدد الإحتياطي الزمني الحر الذي تغير بالنقصان ، لكل نشاط من أنشطة

الشبكة و ليكن TT_{pq}

هـ - نحسب مجال الإحتياطي الزمني الحر T_M هو أقل إحتياطي زمني

حر تغير بالنقصان أي :

$$T_m = \min \{ TT_{pq} \}$$

$$: P = 0, 1, \dots, n-1$$

$$q = 1, 2, \dots, n$$

3- مقدار الضغط الذي يمكن تحقيقه يساوي لمجال ضغط النشاط الذي تم

اختياره (T_N) ، أو لمجال أوقات المرونة الحرة T_M أيهما أقل أي :

$$TD = \min \{ T_N, T_M \}$$

16-4- تحديد التكاليف الكلية لتنفيذ المشروع .

هذه التكاليف تساوي الى تكاليف التنفيذ الطبيعية (أو تكلفة الخطة السابقة) ،

و لتكن C_i مضافاً إليها تكاليف التسريع و التي تساوي الى مقدار الضغط

المحقق TD مضروباً بتكلفة تسريع وحدة الزمن الواحدة (CT) . نرمز

$$C_j = C_i + TD(CT \text{ أي : } C_j)$$

نوضح العلاقة بين / التكلفة - الزمن / و جميع الحسابات اللازمة لتحقيق عملية

ضغط أزمنة تنفيذ المشروعات من خلال المثال رقم (16-1) .

ضغط ازمة التنفيذ

المثال رقم (1-16) :

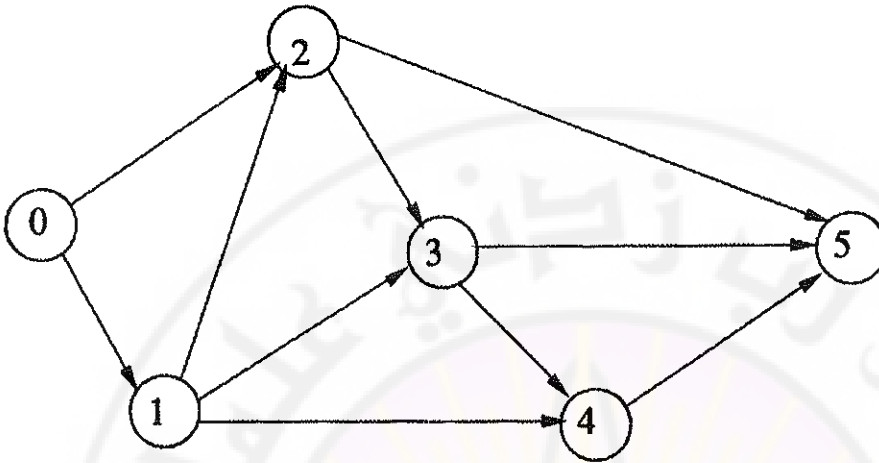
الشبكة الواردة على الشكل رقم (1-16) هي مخطط لمشروع حيث تبين الأنشطة الواجب تنفيذها وتتابع تنفيذها ؛ في حين يحتوي الجدول رقم (1-16) البيانات حول التنفيذ و تكاليف التنفيذ في الوقت الطبيعي و في أقصر وقت .

المطلوب :

1- تحديد جميع الخطط البديلة لتنفيذ المشروع من خلال العلاقة بين التكلفة ، والتكاليف والوقت اللازمين للتنفيذها .

الأنشطة	أوقات التنفيذ		تكاليف التنفيذ	
	عادية	طوارئ	عادية	طوارئ
0,1	3	2	300	370
0,2	1	1	50	50
1,2	8	5	320	410
1,3	9	7	900	940
1,4	10	6	160	200
2,3	3	3	150	150
2,5	8	5	120	135
3,4	3	2	300	320
3,5	8	7	200	220
4,5	4	2	100	200

الجدول رقم (1-16)



الشكل رقم (1-16)

الحل : تحديد تكلفة تسريع الأنشطة :

تكلفة التسريع = تكلفة الطوارئ - تكلفة عادية / زمن تنفيذ عادي - زمن تنفيذ طوارئ

$$\Delta_{0,1} = \frac{370-300}{3-2} = \frac{70}{1} = 70$$

$$\Delta_{0,2} = \frac{50-50}{1-1} = \infty \quad \text{لا يمكن ضغطه}$$

$$\Delta_{1,2} = \frac{410-320}{8-5} = \frac{90}{3} = 30$$

$$\Delta_{1,3} = \frac{940-900}{9-7} = \frac{40}{2} = 20$$

ضغط ازمته التنفيذ

$$\triangle_{1,4} = \frac{200-160}{10-6} = \frac{40}{4} = 10$$

$$\triangle_{2,3} = \frac{150-150}{3-3} = \infty \quad \text{لا يمكن ضغطه}$$

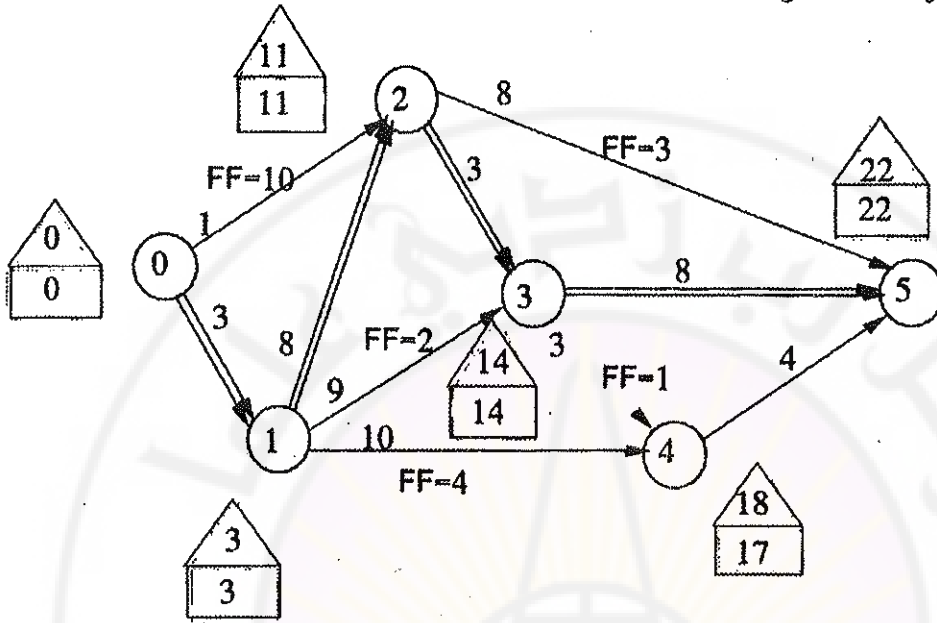
$$\triangle_{2,5} = \frac{135-120}{8-5} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\triangle_{3,4} = \frac{320-300}{3-2} = \frac{20}{1} = 20$$

$$\triangle_{3,5} = \frac{225-200}{8-7} = \frac{25}{1} = 25$$

$$\triangle_{4,5} = \frac{200-100}{4-2} = \frac{100}{2} = 50$$

نحدد المسار الحرج ،على الشبكة مباشرة كما هو واضح على الشكل (16-2).



الشكل رقم (2-16)

المسار أخرج : 0,1,2,3, ؛

زمن التنفيذ = 22

وتكلفة التنفيذ = مجموع تكاليف جميع الأنشطة ضمن زمن التنفيذ

الطبيعي ، و تساوي 1520 وحدة نقد .

3- الخطة البديلة الأولى :

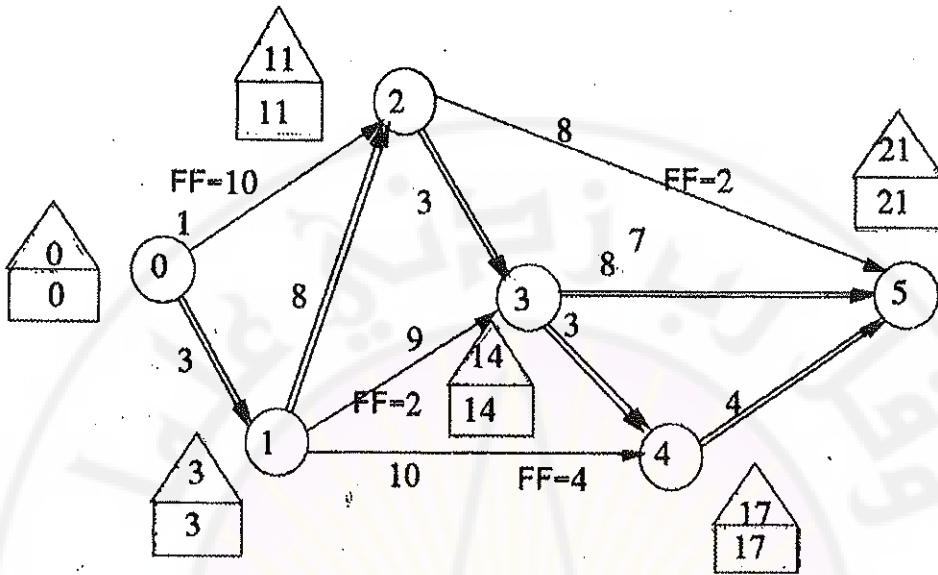
أ - نختار النشاط الذي يحمل المشروع أقل تكلفة تسريع ، و هو النشاط

الخرج (3,5) ، و تكلفة تسريعه (25) ، و مجال ضغطه وحدة زمن واحدة ؛

و بالتالي نحقق عملية الضغط دون أية اختبارات ؛ فنحصل على الخطة التي

على الشكل رقم (3-16) .

ضغط ازمة التنفيذ



الشكل رقم (3-16)

ب - زمن التنفيذ 21 .

ج - المسار الحرج : بقي المسار الحالي حرجاً أي المسار 0,1,2,3,5 .

و ظهر مسار حرج جديد هو 0,1,2,3,4,5 .

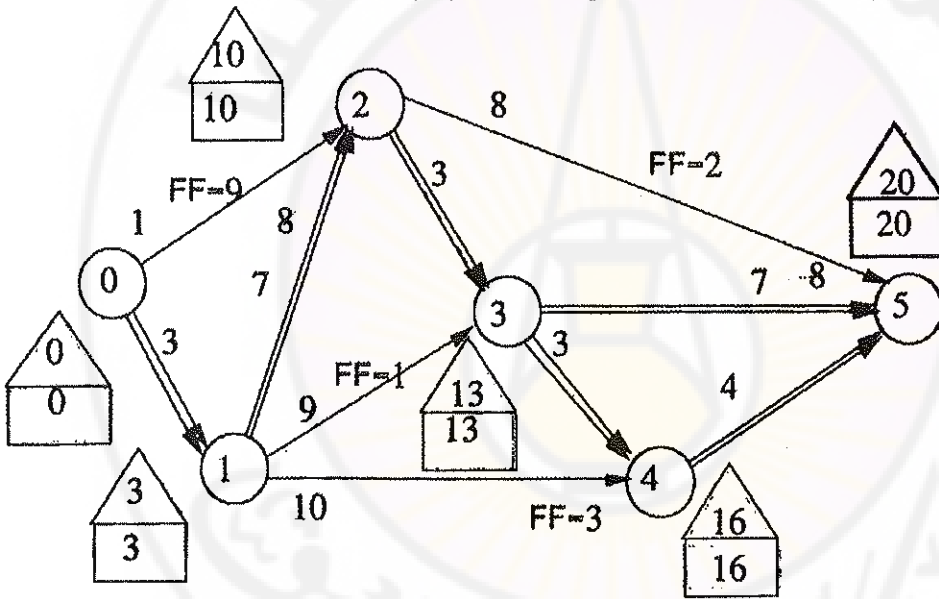
التكلفة تساوي $1545 = 1520 + 25 (1)$.

4 - الخطة البديلة الثانية

أ - نختار نشاطاً مشتركاً على المسارين الحرجين ، أو نشاطاً حرجاً مستقلاً على كسل مسار ، و الحكم هو التكلفة الأدنى . نجد أن النشاط الأقل تكلفة تسريع على المسار الحرج الأول ، هو النشاط (1,2) ، وتكلفته (30) وحدة نقد ، و هو يقع على المسار الحرج الثاني أيضاً ، و مجال ضغطه (3) وحدات زمن .

ب - اختبار مجال وقت المرونة الحرة :

نحسب الزمن الإحتياطي الحر للخطه الحاليه الوارده على الشكل رقم (3-16) ،
ثم نضغط النشاط (1-2) بمقدار وحدة زمن واحدة ، فنحصل على الخطه
الواردة على الشكل رقم (4-16) ، نحسب من جديد الزمن الإحتياطي الحر
لهذه الخطه و نقارنه مع الزمن الإحتياطي الحر الوارد على الشكل رقم
(3-16) نجد أن الزمن الإحتياطي الحر الذي تغير بالنقصان هو (4,2,10)
و بالتالي مجال الزمن الإحتياطي الحر هو (2) وحدة .

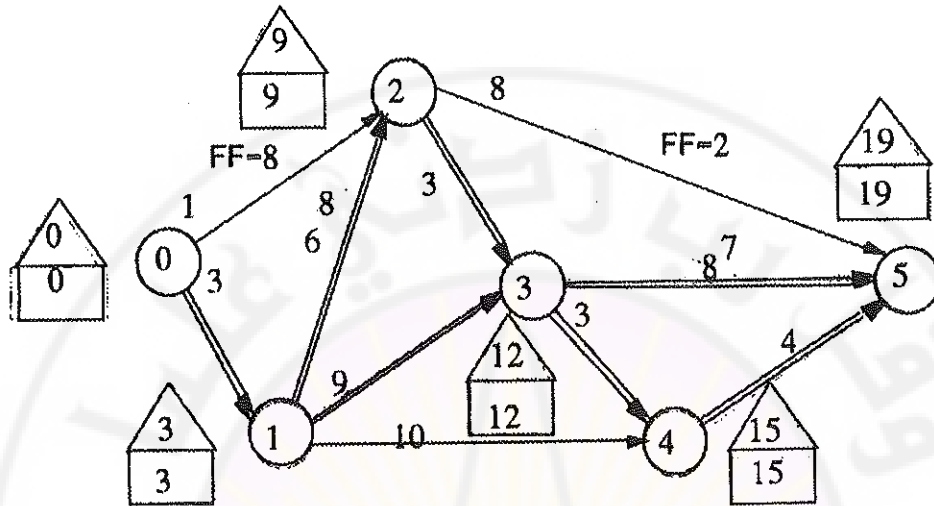


الشكل رقم (4-16)

نضغط زمن تنفيذ الخطه بمقدار الزمن الإحتياطي الحر لأنه أقل من مجال
الضغط أي نضغط النشاط (1,2) بمقدار وحدتين نحصل على الخطه الواردة

ضغط ازمة التنفيذ

على الشكل رقم (5-16) .



الشكل رقم (5-16)

زمن التنفيذ : 19

المسار الحرج : المساران السابقان بقيا حرجين وهما :

المسار : 0,1,2,3,5

و المسار : 0,1,2,3,4,5

و ظهر مساران جديدا هما :

المسار : 0,1,3,5

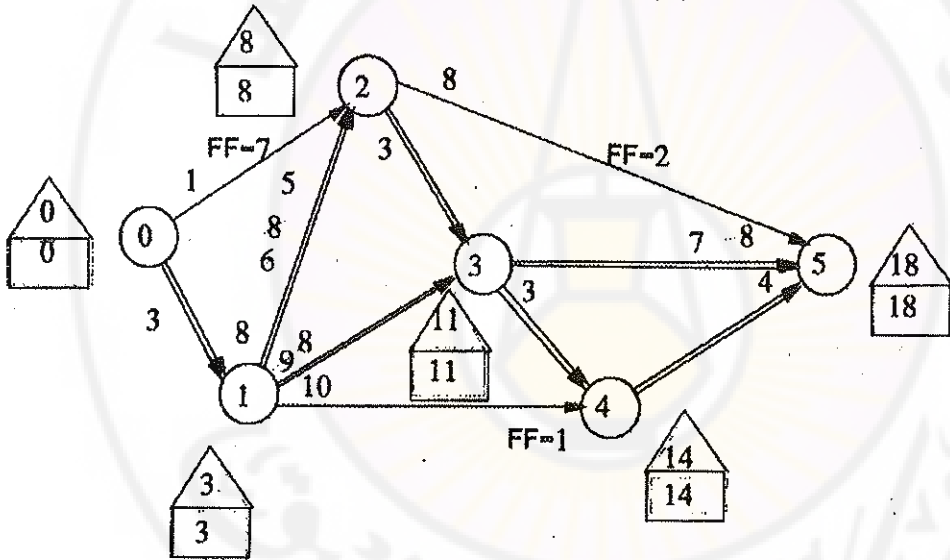
والمسار : 0,1,3,4,5

تكلفة التنفيذ تساوي : $1545 + 2(30) = 1605$

5 - الخطة البديلة الثالثة :

النشاط الأقل تكلفة على المسارين الاول والثاني هو (1,2) وتكلفته (30) وحدة نقد ، وباقي مجال ضغطه (1) وحدة زمن ، وهذا يتطلب اختيار نشاط

آخر على المسارين الآخرين ، والنشاط الأقل تكلفة من بين الأنشطة المشتركة بينهما هو النشاط (1,3) أو النشاط (3,4) وبتكلفة قدرها (20) ، وحدة نقد ومجال ضغط كل منهما هو (2) وحدة زمنية ، نختار النشاط (1,3) . لكن النشاط (1,2) مجال ضغطه وحدة زمن واحدة ؛ لذلك نعتبر مجال الضغط لجميع الأنشطة وحدة زمن واحدة ، وهذا يعني ؛ ان هناك ضرورة لاختيار مجال الزمن الإحباطي . نحقق الضغط على المسارين فنحصل على الخطة الواردة على الشكل رقم (6-16) .



الشكل رقم (6-16)

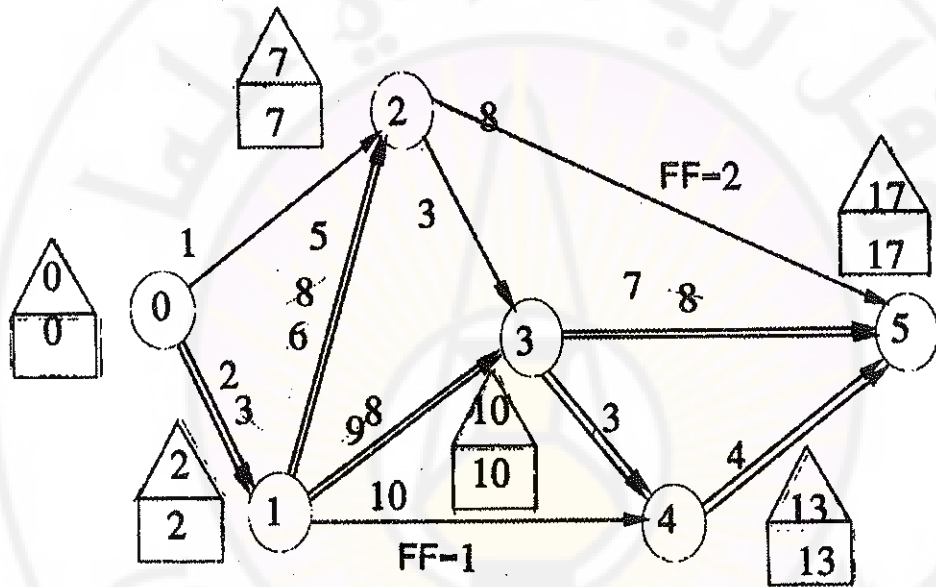
زمن التنفيذ : 18 وحدة زمنية .

المسار الحرج : المسارات الحرجة لم تتغير .

تكلفة التنفيذ تساوي $1605 + (20 + 30) \times 1 = 1655$.

6- الخطة البديلة الرابعة :

النشاط الأقل تكلفة بل والوحيد الذي يمكن ضغطه على المسار 0,1,2,3,5 هو النشاط (0,1) ، مجال ضغطه (1) وحدة زمن واحدة وتكلفة تسريعه (70) ، وهو مشترك على جميع المسارات اذا نقوم بعملية الضغط دون أية إختبارات ، وبالنتيجة نحصل على الخطة الواردة على الشكل (7-16) .



الشكل رقم (7-16)

زمن التنفيذ : 17

المسارات الحرجة : ظهر مسار حرج جديد وهو المسار : 0,1,2,5 .

$$\text{التكلفة} = 1725 = (70)1 + 1655$$

نلاحظ : على الشبكة ان الخطة الجديدة تحتوي على مسار حرج تم ضغط جميع أنشطته الى أقل وقت ممكن ، وبالتالي لا يمكن ضغط وقت تنفيذ المشروع أكثر ، ويمكن أن نسمي هذه الخطة بأنها أسرع خطة زمنية لتنفيذ المشروع ؛ بل ويمكن القول إنها خطة طوارئ .

مسائل وتدريبات الوحدة 16

I -- ضع إشارة ✓ تجاه كل عبارة صحيحة وإشارة ✗ تجاه كل عبارة غير صحيحة من العبارات التالية:

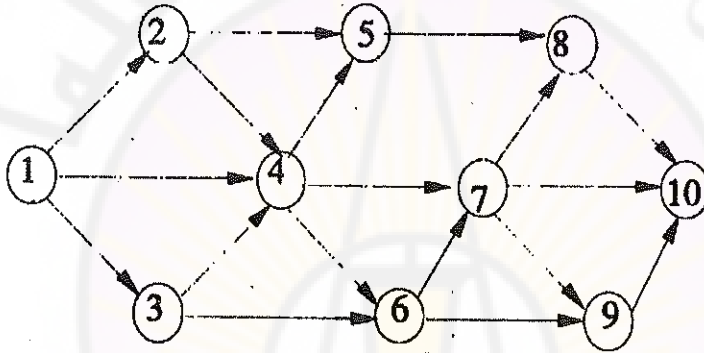
1. يمكن تغيير زمن تنفيذ بعض الأنشطة الحرجة دون أن يؤثر ذلك على زمن تنفيذ المشروع .
2. الزمن اللازم لتنفيذ النشاط يزداد ؛ إذا لم يكثف العمل خلال عملية التنفيذ .
3. أدنى زمن تنفيذ (وقت الطوارئ) يمكن ضغطه عن طريق تكثيف الإنفاق على عمليات التنفيذ.
4. تكاليف التسريع يمكن أن تحسب مباشرة على الشبكة من خلال المعطيات .
5. ضغط أزمدة تنفيذ الأنشطة الحرجة في أسلوب (بيرت) تستند الى افتراض وجود علاقة خطية بين التكلفة اللازمة والزمن .
6. يمكن ضغط أي نشاط حرج وحدة زمن واحدة دون أية اختبارات .
7. ضغط أي نشاط غير حرج ينطوي على تكاليف إضافية ؛ دون أن يحقق ضغطاً لزمن تنفيذ المشروع .
8. لا يمكن ضغط زمن تنفيذ أي مشروع بعد ظهور مسار حرج مضغوط الى زمن الطوارئ .

II - حل المسألة التالية :

البيانات حول ترتيب تنفيذ مشروع ما معطاة على الشبكة رقم (8-16) وفي الجدول رقم (2-16) ، بالإضافة الى التكاليف والزمين اللازمين لذلك .
المطلوب : 1- حدد اقصر زمن يمكن تنفيذ هذا المشروع .

2- حدد المسار (المسارات) الحرج

3- حدد تكلفة التنفيذ .

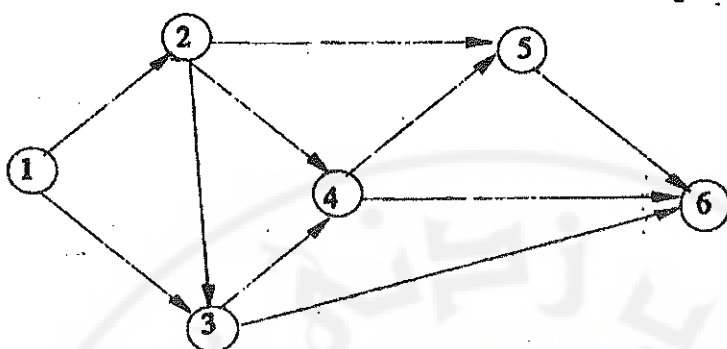


الشكل رقم (8-16)

I V - حل المسألة التالية :

البيانات الواردة الشبكة رقم (9-16) وفي الجدول رقم (3-16) ، تبين ترتيب تنفيذ مشروع ما ، بالإضافة الى التكاليف والزمين اللازمين لذلك .
المطلوب :

1- دراسة أزمان المشروع ، ووضع خطة زمنية لتنفيذه خلال / 18 / وحدة زمن ، على ان تكون التكلفة في حدودها الدنيا .



الشكل رقم (9-16)

النشاط	التنفيذ	زمن	التنفيذ	تكلفة
	عادية	طوارئ	عادية	طوارئ
1,2	6	3	400	565
1,3	8	8	200	200
1,4	10	7	120	180
2,4	16	14	300	420
2,5	12	7	400	475
3,4	9	5	200	300
3,6	13	13	500	500
4,5	8	4	160	240
4,6	7	3	200	320
4,7	9	7	250	280
5,7	5	3	250	430
5,8	9	7	500	560
6,7	10	6	100	200
6,9	12	8	150	250
7,8	8	4	150	270
7,9	5	3	140	170
7,10	12	10	250	290
8,10	8	8	190	190
9,10	6	4	160	190

الجدول رقم (2-16)

مخطط ازمة التنفيذ

النشاطات	عادي تنفيذ		طوارئ تنفيذ	
	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة
1,2	3	100	2	170
1,3	1	160	1	160
2,3	8	200	5	290
2,4	9	180	7	220
2,5	10	140	6	180
3,4	3	200	1	300
3,6	10	110	5	135
4,5	3	80	2	100
4,6	8	220	6	270
4,6	4	130	2	230

الجدول رقم (16-3)

١١

