بنـــى جيـــريـــة (2)

بنـــى جبـــريـــة (2)

الســنـــة الثـــانيـــة ريـــاضيـــات

قســـم الـــريـــاضيـــات

منشـــورات جـــامعـــــة دمشـــــق
كليـــــة العـــلـــــوم

بنى جبرية
(2)

الـــدكتـــــور
حمـــــزة إبـــراهيـــم حـــاكمـــي
أستـــاذ مساعد في قسم الرياضيات

جـــامعـــة دمشـــــق :
1433-1434
2012-2013

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهـــــرس

الفهـــــرس 5
المقـــدمـــة 9
الفصـــــل الأول 13
الحـــلقـــة 13
1 - 1. الحـلقـــــة 13
1 - 2. الـحلقـــــة الجزئيـــة 19
1 - 3. العنـاصر القـابلـة للقـلـب 24
1 - 4. قـــواســـم الصفـــر 27
1 - 5. المنطقـــة التكـامليـــة 31
تمـــاريـن محـــلولـــة (1) 39
تمـــاريـــن (1) 47
الفصـــل الثـــاني 51
المثـــاليـــات وحـلقـــة الخـــارج 51
2 - 1. المثـاليـــات 51
2 - 2. العمـليـات على المثـاليـات 57
2 - 3. حـلقـــة الخـــارج 65
2 4. المجمـوع المبـــاشـر للمثـاليـــات 74
2 - 5. العـــوادم 80
تمـــاريـــن محلـــولـــة (2) 83
تمـــاريـــن (2) 88
الفصـــل الثـــالـث 91
التشـاكـلات الحـلقيـة 91

3 - 1. التشاكلات الحلقية 91
3 - 2. المميز 104
3 - 3. حقل النسب 110
تمارين محلولة (3) 129
تمارين (3) 137
الفصل الرابع 139
نظرية المثاليات 139
4 - 1. المثاليات الأعظمية 140
4 - 2. المثاليات الأصغرية 145
4 - 3. أساس الحلقة 154
4 - 4. المثاليات الصغيرة والكبيرة 161
4 - 5. المثاليات منتهية التوليد 166
تمارين محلولة (4) 171
تمارين (4) 180
الفصل الخامس 183
الحلقات التبديلية 183
5 - 1. المثاليات الأولية والأعظمية 183
5 - 2. حلقة المثاليات الرئيسية 198
5 - 3. الحلقات الإقليدية 202
5 - 4. الحلقات ذات التحليل الوحيد 208
تمارين محلولة (5) 219
تمارين (5) 230
الفصل السادس 235
حلقة كثيرات الحدود(الحدوديات) 235
6 - 1. حلقة الحدوديات 235

6 - 2. الحد وديات الأولية (غير الخزولة). 250
6 - 3. حلقة الحدوديات $Z[x]$ 260
تمارين محلولة (6) 276
تمارين (6) 285
الفصل السابع 289
تمديدات الحقول 289
7 - 1. تمديد الحقول 289
7 - 2. حقول التفريق 297
7 - 3. التمديدات المنتهية 304
7 - 4. التمديدات الجبرية 309
تمارين محلولة (7) 320
تمارين (7) 326
الفصل الثامن 329
الحلقات البسيطة والموضعية 329
8 - 1. الحلقات البسيطة 329
8 - 2. الحلقات الأولية 336
8 - 3. الحلقات الموضعية 339
الفصل التاسع 345
الحلقات الأرتينية والنيوثرية 345
9 - 1. الحلقات الأرتينية 345
9 - 2. الحلقات النيوثرية 355
9 - 3. الحلقات نصف البسيطة 367
الفصل العاشر 375
الحلقات المنتظمة 375
10 - 1. الحلقات المنتظمة 375

10 - 2. I_0 - حلقات 386
10 - 3. الحلقات π - المنتظمة 390
الفصل الحادي عشر 409
حلقات القسمة 409
11 - 1. حلقة القسمة 409
11 - 2. المرشحات 419
المصطلحات العلمية 427
المراجع العلمية 435

Damascus University

المقـــدمـــة

في عصرنا هذا يتم الحديث بشكل مباشر وبدون أي مقدمات عـن " الجبريـة " أو بمعنى آخر تطور الأفكار الجبرية النظرية كما في مختلف فروع الرياضيات التطبيقية وهذا الوضع بدأ يتبلور في منتصف العشرينات من القرن الماضي. وقد كان لتطـور البشرية في جميع المجالات أثره في تطور علم الرياضيات بشكل عام والجبر بـشكل خاص وكان التطور في علم الجبر يستوجب أحياناً وجود أفكار ظاهرها يخرج عـن حدود العقل وذلك لأنه لم يكن من المهم أحياناً دراسة المفاهيم الجبرية بحد ذاتها وإنما العلاقة فيما بينها. وقد تم تعريف الجبر بأنه ذلك الفرع من العلوم الرياضـية الـذي يدرس العمليات الجبرية على عناصر المجموعات المختلفة وحيث إن هذه العمليـات أتت من حيث المبدأ من العمليات الحسابية الأساسية على الأعداد وقد أدى التطور في علم الجبر إلى ظهور مفهوم البنى الجبرية (مجموعة مزودة بعـدد مـن العمليـات الجبرية) والذي وسع مفهوم الرياضيات خارج حدود النظريات العدديـة وتطبيقاتهـا وأدى ذلك أيضاً إلى ظهور مفاهيم جديدة مثل الفـضاءات الطبولوجيـة والمعـادلات التفاضلية وغيرها الكثير.

وبشكل عام فإن علم الجبر ضروري جداً ويمكن القول إنه أساسي لتطور العلـوم الأخرى مثل الميكانيك الكوانتي ودراسة الجسم الصلب وغيره من العلوم.

وقد خصص هذا الكتاب " البنى الجبرية 2 " لدراسة البنى الجبرية المزودة بعمليتين جبريتين والتي تسمى الحلقات ويعتبر الألماني هلبرت (1862 -1943) أول من أدخل هذا المفهوم وذلك لأجل المجموعات التي عناصرها أعداد جبرية (الأعداد التي هـي أصفاراً لحدوديات صحيحة). وقد عرفت الحلقة تعريفاً دقيقاً عام 1921 وذلك من قبل الرياضية الألمانية آيمي نيوثر (1882 - 1935) وفي هذا الكتاب حاولنـا دراسـة الحلقة من ناحيتين رئيسيتين:

- الناحية الأولى: درسنا فيها الحلقات التي بنيتها الجبرية تشبه إلى حد كبير البنية الجبرية لحلقة الأعداد الصحيحة.
- الناحية الثانية: درسنا فيها الحلقات التي بنيتها الجبرية تشبه إلى حد كبير البنية الجبرية لحلقة المصفوفات.

ويضم الكتاب أحد عشر فصلاً كتبت جميعها بلغة علمية بسيطة بحيث أتبعت كل فقرة بتطبيق وألحق كل فصل بعدد كبير ومتنوع من التمارين المحلولة وغير المحلولة بحيث يمكن اعتبار هذا الكتاب مغطياً لكل من الناحيتين النظرية والعملية على السواء.

يبدأ الكتاب بالتعريف المجرد للحلقة فيدرس في الفصل الأول المفاهيم الأساسية في الحلقة مثل العناصر القابلة للقلب وقواسم الصفر.

وخصص الفصل الثاني لدراسة المثاليات والعمليات عليها وأيضاً دراسة حلقة الخارج.

أما الفصل الثالث فقد خصص لدراسة التشاكلات الحلقية وعلاقة الحلقات فيما بينها وخصص الجزء الأكبر من هذا الفصل لدراسة حقول وحلقات النسب وبشكل خاص بناء حقل الأعداد النسبية انطلاقاً من حلقة الأعداد الصحيحة.

أما أنواع المثاليات في الحلقة (الأعظمية - الأصغرية وغيرها) فقد عولجت في الفصل الرابع وقد خصص جزء لا بأس به من هذا الفصل لدراسة أساس الحلقة والذي يعتبر من أهم البنى الجزئية في الحلقة.

بينما خصص الفصل الخامس لدراسة الحلقات التبديلية وبشكل خاص حلقة المثاليات الرئيسية والإقليدية والحلقات ذات التحليل الوحيد.

وخصص الفصل السادس لدراسة حلقات الحدوديات وتطبيقاتها وخصص الجزء الأكبر من هذا الفصل لدراسة الحدوديات الأولية (غير القابلة للتحليل) وقد أوردنا في هذا الفصل عدداً من الاختبارات المهمة لهذه الحدوديات.

وتضمن الفصل السابع دراسة شبه معمقة للحقول وتمديداتها وتطبيقاتها.

أما الفصل الثامن فقد خصص لدراسة الحلقات البسيطة والموضعية والعلاقة فيما بينها.

وأما الفصل التاسع فقد خصص لدراسة نوعين مهمين من الحلقات وهما الحلقات الأرتينية والليوثرية.

والفصل العاشر خصص لدراسة الحلقات المنتظمة والقريبة من المنتظمة ودراسة العلاقة بين هذه الأنواع من الحلقات.

وأخيراً خصص الفصل الحادي عشر لدراسة حلقات القسمة.

ونلفت الانتباه إلى أنه يجب قراءة الصيغ المكتوبة بالأحرف الأجنبية من اليسار إلى اليمين.

هذا وإني أمل أن يؤدي هذا الكتاب الفائدة المرجوة منه وهي

أن يحصل الطالب على أساس قوي ومتين في هذا الموضوع حيث إن الكثير من المفاهيم التي تمت معالجتها في هذا الكتاب تعتبر أساساً لجميع فروع الرياضيات الأخرى. كما أريد من القارئ أن يستمتع بقراءة هذا الكتاب ولاسيما الفصول الأربعة الأخيرة حيث تمت معالجة أفكار أساسية ومواضيع حديثة.

وأخيراً أمل أنني نجحت من خلال عرض مواضيع هذا الكتاب تغيير نظرة طلابنا حول المواضيع الرياضية ولاسيما الجبرية منها والتي يعتبرونها نظرية بحتة ولا تمت إلى الواقع بصلة وقد بذلت جهدي لتغيير هذه النظرة.

وفي النهاية لا بد من شكر جميع من رافقني في رحلة إعداد هذا الكتاب ولم يبخل في تزويدي بالملاحظات والإرشادات في طريقة عرض المواضيع التي وردت ضمن هذا الكتاب.

والله ولـــي التـــوفيـــق

دمشـــق
في 1 / 6 / 2012 م

المؤلـف
أ. م. د. حمزة حاكمي

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصـــــل الأول

الحـــلقـــة

من المعلوم أن كثير من المجموعات مزودة وبشكل طبيعـي بعمليتـين ثنـائيتين (داخليتين) جمع وضرب. وهنا يتبادر إلى الذهن مباشـرة أن المجموعـات الآتيـة: مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد الـصحيحة بالمقـاس n و مجموعـة الأعداد الحقيقية ومجموعة المصفوفات المربعة من مرتبة معينة ومجموعة كثيـرات الحدود كل منها مزودة بعمليتي جمع وضرب. بسهولة يمكن ملاحظة أن المجموعات السابقة بالنسبة لعملية الجمع تشكل زمراً تبديليه.

لأجل دراسة المجموعات السابقة وغيرها من المجموعات المزودة بعمليتي جمـع وضرب فقد تم إدخال مفهوم الحلقة وذلك مـن قبـل العـالم الرياضـي الألمـاني (*David Hilbert* 1862-1943).

1 - 1. الحـلقـــــة.

تعـريـف.

الحلقة R هي مجموعة (غير خالية) مزودة بعمليتين ثنائيتين (داخليتـين) جمـع ($+$) وضرب ($.$) تحققان الشروط الآتية: أيا كان $a,b,c \in R$ فإن:

1 - $a+b \in R$ 2 - $a+b=b+a$.

3 - $(a+b)+c=a+(b+c)$.

4 - يوجد في R عنصر محايد جمعي (بالنسبة لعملية الجمع) نرمز لـه o ويحقـق $a+o=a$ ويسمى صفر الحلقة.

5 - يوجد لكل عنصر $d \in R$ نظير نرمز له $-d$ ويحقق $d+(-d)=o$.

6 - $ab \in R$ 7 - $(ab)c=a.(bc)$.

8 - $a.(b+c)=ab+ac$. 9 - $(b+c)a=ba+ca$.

وهكذا نجد أن الحلقة هي زمرة جمعية تبديليه مزودة بعملية ضرب تجميعية وتوزيعية على الجمع من اليمين واليسار ونرمز لها $(R,+,.)$.

نلاحظ من تعريف الحلقة أن عملية الضرب ليست إبدالية (تبديلية) ولا يوجد في الحلقة عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب. لأجل ذلك سوف نورد التعريف الآتي:

تعـريـف.

لتكن R حلقة .

1 - نقول عن الحلقة R إنها تبديليه (إبدالية) إذا كانت عملية الضرب تبديليه. أي إذا تحقق الشرط: أياً كان $a,b\in R$ فإن $ab=ba$.

2 - نقول عن العنصر $e_1\in R$ إنه عنصر محايد (ضربي) من اليمين إذا حقق الشرط: أياً كان $c\in R$ فإن $ce_1=c$.

3 - نقول عن العنصر $e_2\in R$ إنه عنصر محايد (ضربي) من اليسار إذا حقق الشرط: أياً كان $d\in R$ فإن $e_2d=d$.

4 - نقول عن العنصر $e\in R$ إنه عنصر محايد (ضربي) إذا حقق الشرط: أياً كان $a\in R$ فإن $ae=ea=a$.

ينتج من التعريف السابق ما يأتي:

نتيجـة.

لتكن R حلقة و $e\in R$. الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر e عنصراً محايداً في R هو أن يكون عنصراً محايداً من اليمين واليسار في آن واحد.

نرمز عادة للعنصر المحايد في الحلقة في حال وجوده بالرمز 1 ويسمى واحد الحلقة.

أما المحايد الجمعي o الموجود في الحلقة فيدعى صفر الحلقة.

تعـريـف.

نقول عن الحلقة R إنها واحديه إذا وجد فيها عنصر محايد.

تمهيـديـة 1-1-1.

لتكن R حلقة. إذا وجد في R عنصر محايد فهو وحيد.

البرهـــان.

لنفرض أنه يوجد في R عنصري وحده هما e_1, e_2 عندئذ: $e_1 = e_1 e_2 = e_2$.

أمثـلـــة.

1 - مجموعة الأعداد الصحيحة Z تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب الأعداد الصحيحة وهذه الحلقة تبديليه و واحديه العنصر المحايد فيها هو 1.

2 - ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً. المجموعة

$$Z_n = \{0,1,2,\cdots,(n-1)\}$$

تشكل حلقة تبديليه وواحديه بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقـاس n العنـصر المحايد فيها هو 1.

3 - المجموعة $M_2(Z) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \ a,b,c,d \in Z\}$ تـشكل حلقـة بالنـسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات وهذه الحلقة ليست تبديليه ولكنها واحديه. العنـصر المحايد فيها هو $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{bmatrix}$ وهي المصفوفة الواحديه.

4 - مجموعة الأعداد الزوجية الصحيحة $2Z$ تشكل حلقة بالنـسبة لعمليتـي جمـع وضرب الأعداد الصحيحة وهذه الحلقة تبديليه ولكنها لا تحوي عنصراً محايداً ضربياً أي إنها ليست واحديه.

5 - لتكن $R = \{o,a,b,c\}$ ولنعرف على المجموعة R عمليتـي جمـع وضـرب معرفتين بجداول كايلي الآتية:

+	o	a	b	c
o	o	a	b	c
a	a	o	c	b
b	b	c	o	a
c	c	b	a	o

.	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	a	b	c
b	o	a	b	c
c	o	o	o	o

إن R تشكل حلقة غير تبديليه ولا تحوي عنصراً محايداً ضربياً. تأكد من ذلك.

لندرس الآن خواص بعض العناصر في الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 1 -1 -2.

لتكن R حلقة و $a,b,c \in R$ عندئذ:

1 - $ao = oa = o$.

2 - $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

3 - $(-a)(-b) = ab$.

4 - $a(b-c) = ab - ac$ $\qquad$ $(b-c)a = ba - ca$.

إذا كانت الحلقة R واحديه فإن:

5 - $(-1)a = -a$.

6 - $(-1)(-1) = 1$.

البرهـــان.

1 - بما أن R "بالنسبة لعملية الجمع" زمرة تبديلية العنصر المحايد فيها هو o فإن $ao = a(o+o) = ao + ao$. بإضافة نظير العنصر ao للطرفين نجـــد أن $o = ao$.

بشكل مشابه نجد أن $oa = o$.

2 - بما أن $-(ab)+(ab) = o$ و أن $a(-b)+ab = a(-b+b) = ao = o$ نجد أن $-(ab)+ab = a(-b)+ab$ بإضافة نظير العنصر ab إلـــى الطـــرفين نجـــد أن $-(ab) = a(-b)$.

بشكل مشابه نبرهن أن $(-a)b = -(ab)$.

3 - $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$.

4 - $a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab - ac$

بشكل مشابه نبرهن أن $(b-c)a = ba - ca$.

الحالتين 5 و 6 تعتبر حالات خاصة من 2 و3 على الترتيب. ه

ملاحظـــة.

لتكن R حلقة و $a \in R$ وليكن n عدداً صحيحاً. عندئذ:

1 - إذا كان $n > o$ سوف نعتبر أن $na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ once}}$.

2 - إذا كان $n = o$ سوف نعتبر أن $na = o$ حيث الصفر في الطرف الأيمن هو صفر الحلقة R.

3 - إذا كان $n < o$ سوف نعتبر أن $na = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{-n \text{ once}}$. أي إن $na = (-n)(-a)$.

العلاقة بين عناصر الحلقة والأعداد الصحيحة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 1-1-3.

لتكن R حلقة و $a,b \in R$ وليكن n,m أعداداً صحيحة. عندئذ:

1 - $(na)(mb) = (nm)(ab)$.

2 - $n(-a) = -(na)$.

3 - $n(ab) = (na)b = a(nb)$.

البرهـــان.

1 - نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى. العددان n,m موجبان. عندئذ:

$$(na)(mb) = (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ once}})(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{m \text{ once}}) =$$

$$= \underbrace{a(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{m \text{ once}}) + a(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{m \text{ once}}) + \cdots + a(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{m \text{ once}})}_{n \text{ once}} =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{m \text{ once}}) + (\underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{m \text{ once}}) + \cdots + (\underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{m \text{ once}})}_{n \text{ once}} =$$

$$= \underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{nm \text{ once}} = (nm)(ab)$$

الحالة الثانية. كل من n,m أعداد سالبة. عندئذ:

$$(na)(mb)=[(-n)(-a)][(-m)(-b)]=[(-n)(-m)][(-a)(-b)]=$$
$$=(nm)(ab).$$

الحالة الثالثة. العددان n,m من إشارتين مختلفتين. لنفرض أن $n>o$ عندئذ: $m<o$

$$(na)(mb)=(na)[(-m)(-b)]=[n(-m)][a(-b)]=$$
$$=[-(nm)][-(ab)]=(nm)(ab)$$

2 - نميز حالتين: **الحالة الأولى.** إذا كان $n\geq o$ عندئذ:

$$n(-a)=\underbrace{(-a)+(-a)+\cdots+(-a)}_{n\ once}=-\underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{n\ once}=-(na)$$

الحالة الثانية. إذا كان $n<o$ عندئذ:

$$n(-a)=(-n)[-(-a)]=(-n)a=-[(-n)(-a)]=-(na)$$

3 - للبرهان على أن $(na)b=n(ab)$. نميز حالتين:

الحالة الأولى. إذا كان $n\geq o$ عندئذ:

$$(na)b=\underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{n\ once}b=\underbrace{ab+ab+\cdots+ab}_{n\ once}=n(ab)$$

الحالة الثانية. إذا كان $n<o$ عندئذ:

$$(na)b=[(-n)(-a)]b=(-n)[(-a)b]=(-n)[-(ab)]=n(ab)$$

بشكل مشابه نبرهن على أن $n(ab)=a(nb)$.

التمهيدية الآتية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة الواحديه مغايرة للصفر.

تمهيديـــة 1-1-4.

لتكن R حلقة واحديه. الشرط اللازم والكافي كي تكون $R\neq o$ هو أن يكون $1\neq o$.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن $R\neq o$ عندئذ يوجد عنصر $a\in R$ مغاير للصفر. لنفرض جدلاً أن $1=o$ عندئذ $a1=ao$ وحسب المبرهنة (1-1-2) فإن $a=a1=ao=o$ وهذا يناقض كون $a\neq o$. ومنه $1\neq o$.

كفاية الشرط. واضح.

1 - 2. الحلقة الجزئية.

من خلال دراستنا للزمر وجدنا أن الزمر الجزئية تلعب دوراً محدداً في نظرية الزمر. بنية الحلقة الجزئية تشبه بنية الزمرة الجزئية ولكنها لا تلعب ذلك الدور المميز في الحلقات. وللتعرف على بنية الحلقة الجزئية نورد التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة و S مجموعة جزئية وغير خالية من R. نقول عن المجموعة S إنها حلقة جزئية في R إذا كانت S تشكل حلقة بحد ذاتها بالنسبة للعمليات المعرفة على R.

يمكن ملاحظة أن تعريف الحلقة الجزئية ليس عملياً فهو يحتاج إلى الكثير من الوقت والجهد للتحقق منه. لأجل ذلك كان لابد من إيجاد شرط مكافئ آخر وهذا الشرط يسمى اختبار الحلقة الجزئية والذي نورده من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1-2-1.

لتكن R حلقة و S مجموعة جزئية وغير خالية من R. الشرط اللازم والكافي كي تكون S حلقة جزئية في R هو أن يتحقق الشرط الآتي: أيا كان $a,b \in S$ فإن:

1 - $a-b \in S$.

2 - $ab \in S$.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن S حلقة جزئية من الحلقة R. عندئذ فإن S تحقق جميع الشروط الواردة في تعريف الحلقة وهذا يبين لنا أنه أيا كان $a,b \in S$ فإن $a-b \in S$ و $ab \in S$.

كفاية الشرط. لنفرض أن S تحقق الشروط $a-b \in S$ و $ab \in S$ وذلك أيا كان $a,b \in S$. ولما كانت R حلقة عندئذ R بالنسبة لعملية الجمع تشكل زمرة تبديلية ولما كانت المجموعة S تحقق الشرط $a-b \in S$ أيا كان $a,b \in S$ فان المجموعة S

تشكل زمرة جزئية تبديليه وبالتالي فهي تحقق الشروط الأربعة الأولى من تعريف الحلقة. من جهة أخرى ولما كانت S مغلقة بالنسبة لعملية الضرب وأن الضرب يحقق الشروط الثلاثة الأخيرة الواردة في تعريف الحلقة لأجل عناصر R وبالتالي فان هذه الشروط تكون محققة لأجل عناصر S. بهذا الشكل نكون قد أثبتنا أن S حلقة جزئية من الحلقة R.

أمثلة.

1 - لتكن R حلقة عندئذ كل من R و $\{o\}$ هي حلقات جزئية من R. نسمي الحلقة الجزئية $\{o\}$ بالحلقة الجزئية التافهة.

2 - لنأخذ الحلقة $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 6. إن المجموعة $S=\{0,2,4\}$ تشكل حلقة جزئية من الحلقة Z_6. لنشكل الجدول الذي يعطي الناتج $a-b$ والجدول الذي يعطي الناتج ab وذلك أيا كان $a,b\in S$. فنجد أن

$a-b$	o	2	4
o	o	4	2
2	2	o	4
4	4	2	o

ab	o	2	4
o	o	o	o
2	o	4	2
4	o	2	4

ولما كانت جميع نواتج الجدولين السابقين هي عناصر من المجموعة S فإنه حسب النظرية (1-2-1) نجد أن المجموعة S هي حلقة جزئية من الحلقة Z_6 وأن العنصر 4 هو عنصر محايد في الحلقة الجزئية S.

3 - ليكن $n\geq 1$ عدداً صحيحاً. إن المجموعة $nZ=\{0,\pm n,\pm 2n,\pm 3n,\cdots\}$ تشكل حلقة جزئية من حلقة الأعداد الصحيحة. لأنه إذا كان $a,b\in nZ$ عندئذ $a=nt$ و $b=ns$ حيث $t,s\in Z$ ومنه فإن $a-b=nt-ns=n(t-s)\in nZ$ و $ab=(nt)(ns)=n(tns)\in nZ$ وهذا يبين لنا أن المجموعة nZ هي حلقة جزئية من حلقة الأعداد الصحيحة.

نلاحظ أنه إذا كان $n > 1$ فإن الحلقة nZ لا تحوي عنصر محايد.

4 - المجموعة $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix} : a,b \in Z \right\}$ تشكل حلقة جزئية من حلقة المصفوفات $M_2(Z)$.

ليكن $\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & o \\ o & d \end{bmatrix} \in S$ عندئذ $a,b,c,d \in Z$ وأن

$$\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & o \\ o & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & o \\ o & b-d \end{bmatrix} \in S$$

$$\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & o \\ o & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & o \\ o & bd \end{bmatrix} \in S$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة S تشكل حلقة جزئية من الحلقة $M_2(Z)$ وهذه الحلقة واحديه لأن $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{bmatrix} \in S$ هو عنصر محايد.

تمهيدية 1-2-2.

لتكن R حلقة. إن تقاطع أي جماعة غير خالية من الحلقات الجزئية من R هو حلقة جزئية في R.

البرهان.

لتكن $\Gamma = \{A_i : i \in I\}$ جماعة من الحلقات الجزئية من الحلقة R. بما أن $o \in A_i$ وذلك أياً كان $i \in I$ فإن $o \in \bigcap_{i \in I} A_i$ وبالتالي $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \Phi$.

ليكن $x,y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ عندئذ أياً كان $i \in I$ فإن $x,y \in A_i$ وبما أن A_i حلقة جزئية من R فإن $x - y \in A_i$ وهذا يبين لنا أن $x - y \in \bigcap_{i \in I} A_i$. من جهة أخرى بما أن A_i حلقة جزئية من R فإن $x.y \in A_i$ وذلك أياً كان $i \in I$ وبالتالي فإن $x.y \in \bigcap_{i \in I} A_i$. مما سبق نجد أن $\bigcap_{i \in I} A_i$ حلقة جزئية من R.

ملاحظـــة.

إن اجتماع حلقتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون حلقة جزئية ويعود السبب في ذلك إلى أن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية. وكمثال على ذلك لنأخذ في حلقة الأعداد الصحيحة الحلقتين الجـزئيتين $2Z, 3Z$ فنجـد أن $2,3 \in 2Z \cup 3Z$ بينما $2 - 3 = 1 \notin 2Z \cup 3Z$.

تمهيديـــة 1 -2 -3.

لتكن R حلقة تبديليه و $a,b \in R$ وليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. عندئذ:

$$(a+b)^n = a^n + (\sum_{r=1}^{n-1} C_r^n a^{n-r} b^r) + b^n$$

حيث $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

البرهـان.

سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب n. نلاحظ أنه عندما $n = 2$ فالعلاقة السابقة صحيحة. لنفرض أنها صحيحة من أجل $n-1$. أي لنفرض أن

$$(a+b)^{n-1} = a^{n-1} + (\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r-1} b^r) + b^{n-1}$$

ولنبرهن على أن العلاقة صحيحة لأجل n.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) =$$

$$= [a^{n-1} + (\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r-1} b^r) + b^{n-1}](a+b) =$$

$$= a^n + a^{n-1}b + ab^{n-1} + b^n + (\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r} b^r) + (\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r-1} b^{r+1})$$

وذلك لأن الضرب تجميعي وتبديلي وتوزيعي على الجمع في R. من جهـة أخـرى

ولما كان $\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r} b^r = (n-1)a^{n-1}b + \sum_{r=2}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r} b^r$ وأن

$$\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r-1} b^{r+1} = (n-1)ab^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-3} C_r^{n-1} a^{n-r-1} b^{r+1} =$$

$$= (n-1)ab^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-3} C_{(r+1)+1}^{n-1} a^{n-(r+1)} b^{r+1}$$

لنجري التغير الآتي: نفرض أن $t = r+1$ عندئذ يكون $r = t-1$ فنجد

$$\sum_{r=1}^{n-2} C_r^{n-1} a^{n-r-1} b^{r+1} = (n-1)ab^{n-1} + \sum_{t=2}^{n-2} C_{t-1}^{n-1} a^{n-t} b^t$$

وهكذا نجد أن

$$(a+b)^n = a^n + b^n + na^{n-1}b + nab^{n-1} + \sum_{r=2}^{n-2} [C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}] a^{n-r} b^r$$

وبما أن $C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1} = C_r^n$ ، $C_1^n = C_{n-1}^n = n$ نجد أن

$$(a+b)^n = a^n + (\sum_{r=1}^{n-1} C_r^n a^{n-r} b^r) + b^n$$

مما سبق نجد أن العلاقة السابقة صحيحة أياً كان العدد الصحيح $n > 1$.

تعريـــف.

لتكن R حلقة تبديليه و $a,b \in R$ وليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. نسمي العلاقة

$$(a+b)^n = a^n + (\sum_{r=1}^{n-1} C_r^n a^{n-r} b^r) + b^n$$

دستور ثنائي الحد في الحلقة التبديليه R.

ملاحظـــة. إذا كانت الحلقة R تبديليه و واحديه فإن دستور ثنائي الحد في الحلقـــة R يأخذ الشكل الآتي:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

وذلك أياً كان $a,b \in R$ و أياً كان العدد الصحيح $n \geq 1$.

Damascus University

1 - 3. العنـاصر القـابلـة للقـلـب.

لنأخذ في حلقة المـصفوفات $M_2(Z)$ العنـصر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فنجـد أنـه يوجـد $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in M_2(Z)$ ويحقق

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

بينما في حلقة الأعداد الصحيحة Z لا يوجد عنصر $x \in Z$ يحقـق $2x = 1$. لأجـل ذلك سوف ندخل التعريف الآتي:

تعريـف.

لتكن R حلقة واحديه وليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر.

- نقول عن العنصر a إنه قابل للقلـب (قلـوب) مـن اليـسار فـي R إذا وجد $b \in R$ يحقق $ba = 1$. (أي له مقلوب من اليسار).
- نقول عن العنصر a إنه قابل للقلـب (قلـوب) مـن اليمـين فـي R إذا وجد $d \in R$ يحقق $ad = 1$. (أي له مقلوب من اليمين).
- نقول عن العنصر a إنه قابل للقلـب (قلـوب) فـي R إذا وجـد $c \in R$ يحقق $ca = ac = 1$. ونقول عن العنصر c إنه مقلوب للعنـصر a فـي R ونرمز له a^{-1} أي أن $a^{-1} = c$.

أمثلـة.

1 - لنأخذ الحلقة $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقـاس 5 فنجد أن جميع العناصر المغايرة للصفر في Z_5 قابلة للقلب لأن

$$1.1 = 1, \quad 2.3 = 1, \quad 4.4 = 1$$

2 - في حلقة الأعداد الصحيحة Z جميع العناصر $x \in Z$ المغايرة للصفر والتي من أجلها $x \neq \pm 1$ ليست قابلة للقلب.

3 - ليكن $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix} \in M_2(Z)$ عندئذ يوجد $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix} \in M_2(Z)$ ويحقق

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

أي إن العنصر $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ قابل للقلب في $M_2(Z)$ بينما العنصر $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ليس قابلاً للقلب في $M_2(Z)$ (تأكد من ذلك).

نأتي الآن لدراسة الشرط اللازم والكافي لوجود المقلوب وبعض خواص مقلوب عنصر وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1-3-1.

لتكن R حلقة واحديه و $a \in R$ عنصر مغاير للصفر. عندئذ:

1 - الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر a قابلاً للقلب في R هو أن يكون قابلاً للقلب من اليمين واليسار في آن واحد.

2 - إذا كان العنصر a قابلاً للقلب في R فإن مقلوبه وحيد.

البرهان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن العنصر a قابل للقلب في R عندئذ يوجد عنصر $c \in R$ مغاير للصفر يحقق $ca = ac = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قابل للقلب من اليمين واليسار. كفاية الشرط. لنفرض أن العنصر a قابل للقلب من اليمين واليسار في R عندئذ يوجد في R عناصر b,d مغايرة للصفر تحقق $ba = 1,\ ad = 1$ ومنه $b = b1 = b(ad) = (ba)d = 1d = d$ وبالتالي $ad = da = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قابل للقلب في R.

2 - لنفرض أن العنصر a قابل للقلب في R وأن كلاً من u,v مقلوب للعنصر a في R عندئذ $ua = au = 1,\ va = av = 1$ ومنه

$$u = 1u = (va)u = v(au) = v1 = v$$

وهذا يبين لنا أن مقلوب العنصر a وحيد.

لتكن R حلقة واحديه عندئذ فإن واحد الحلقة هو عنصر قابل للقلب في R وبالتالي فإن مجموعة العناصر القابلة للقلب في R والتي سوف نرمز لها $U(R)$ هي مجموعة غير خالية. لنرى ماذا تشكل هذه المجموعة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1 -3 -2.

لتكن R حلقة واحديه. إن مجموعة العناصر القابلة للقلب في R تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب المعرفة على R.

البرهان.

لنفرض أن $U(R)$ هي مجموعة العناصر القابلة للقلب في R. ولما كان واحد الحلقة هو عنصر قابل للقلب في R فإن $1 \in U(R)$ وبالتالي المجموعة $U(R)$ غير خالية. لنبرهن على أن عملية الضرب المعرفة على R هي عملية داخلية على المجموعة $U(R)$. ليكن $a,b \in U(R)$ عندئذ كل من a,b هي عناصر قابلة للقلب في R وبالتالي يوجد $a^{-1}, b^{-1} \in R$ بحيث $aa^{-1} = a^{-1}a = 1,\ bb^{-1} = b^{-1}b = 1$.

لنبرهن على أن $ab \in U(R)$ أي لنبرهن على أن العنصر ab قابل للقلب في R. ولما كان $a^{-1}, b^{-1} \in R$ فإن $b^{-1}a^{-1} \in R$ وأن

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1$$

ومنه نجد أن العنصر ab قابل للقلب في R وأن مقلوبه هو العنصر $b^{-1}a^{-1}$ أي أن $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ وبالتالي فإن $ab \in U(R)$. كذلك فإن عملية الضرب المعرفة على R هي عملية تجميعية على عناصر المجموعة $U(R)$ لأن $U(R) \subset R$. كما أنه يوجد في $U(R)$ عنصر محايد هو واحد الحلقة 1. لنبرهن أخيراً على أن لكل عنصر من المجموعة $U(R)$ يوجد مقلوب. ليكن $c \in U(R)$ عندئذ فإن العنصر c قابل للقلب في R وبالتالي يوجد $c^{-1} \in R$ بحيث $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر c^{-1} قابل للقلب في R وأن مقلوبه هو العنصر c وبالتالي فإن $c^{-1} \in U(R)$ ويحقق $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$. مما سبق نجد أن المجموعة $U(R)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب المعرفة على الحلقة R.

1 - 4. قـــواســـم الصفـــر.

لعل من أهم خواص النظام العددي الذي نستخدمه هو أنه إذا كان جداء عـــددين يساوي الصفر فإن أحد المضروبين على الأقل يكون مساوياً للصفر. وهذا هو الحـــال في حلقة الأعداد الصحيحة. إن الخاصية السابقة غير محققة في جميع الحلقات فعلى سبيل المثال في حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وذلك أياً كانت a,b,c,d أعداد صحيحة مغايرة للصفر.

كذلك الأمر في الحلقة Z_8 فإن $2.4 = 0,\quad 6.4 = 0,\quad 4.4 = 0$. لأجل ذلك ســوف نورد التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $a \in R$ عنصر مغاير للصفر.

- نقول عن العنصر a إنه قاسم للصفر من اليسار فـــي R إذا وجـــد عنـــصر $b \in R$ مغاير للصفر يحقق $ab = o$.
- نقول عن العنصر a إنه قاسم للصفر من اليمين فـــي R إذا وجـــد عنـــصر $c \in R$ مغاير للصفر يحقق $ca = o$.
- نقول عن العنصر a إنه قاسم للصفر في R إذا كان قاسماً للصفر من اليمين واليسار في آن واحد.

أمثـــلـــة.

1 - حلقة الأعداد الصحيحة لا تحوي قواسم للصفر.

2 - حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ تحوي قواسم للصفر.

3 - الحلقة $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 5 لا تحوي قواسم للصفر. لأن

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

لنرى من خلال التمهيدية الآتية أياً من عناصر الحلقة ليس قاسماً للصفر.

تمهيديـــة 1-4-1.

كل عنصر قابل للقلب في حلقة واحديه ليس قاسماً للصفر في هذه الحلقة.

البرهـــان.

لتكن R حلقة واحدية و $a \in R$ عنصراً قابلاً للقلب في R، عندئذ $a \neq o$ كما أنه يوجد عنصر $a^{-1} \in R$ يحقق $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. لنفرض أنه يوجد $w \in R$ يحقق إما $aw = o$ أو $wa = o$. إذا كان $aw = o$ عندئذ $a^{-1}(aw) = a^{-1}o = o$ ومنه $(a^{-1}a)w = o$ وبالتالي $1w = o$ أي أن $w = o$. إذا كان $wa = o$ عندئذ $(wa)a^{-1} = oa^{-1} = o$ ومنه $w(aa^{-1}) = o$ وبالتالي $w1 = o$ أي أن $w = o$. وهذا يبين لنا أنه لا يوجد عنصر $w \in R$ مغاير للصفر يحقق إما $aw = o$ أو $wa = o$. أي أن العنصر a ليس قاسماً للصفر في R.

تعريـــف.

نقول عن الحلقة الواحدية $R \neq o$ إنها تامة إذا كانت لا تحوي قواسماً للصفر.

أمثلـــة.

1 - حلقة الأعداد الصحيحة هي حلقة تامة.

2 - حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ هي حلقة غير تامة.

3 - الحلقة $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 7 هي حلقة تامة.

4 - الحلقة $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 6 هي حلقة غير تامة.

التمهيدية الأتية تبين لنا أنه لا يوجد في الحلقة Z_n عناصر مغايرة للصفر قابلة للقلب وقاسمة للصفر في آن واحد.

تمهيدية 1-4-2.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. عندئذ كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة Z_n إما قابل للقلب أو قاسم للصفر.

البرهان.

ليكن $k \in Z_n$ عنصراً مغايراً للصفر. عندئذ $o < k < n$ وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى. إذا كان $gcd\,(k,n) = 1$ عندئذ يوجد $s,t \in Z$ بحيث $1 = sk + tn$ في Z وبالتالي $sk = 1$ في Z_n وهذا يبين لنا أن العنصر k قابل للقلب في Z_n.

الحالة الثانية. إذا كان $gcd\,(k,n) = d > 1$ عندئذ توجد عناصر $\alpha,\beta \in Z$ مغايرة للصفر تحقق $k = \alpha d\,,\quad n = \beta d$ ومنه

$$k\beta = (\alpha d)\beta = \alpha(d\beta) = \alpha n = o \mod -n$$

ولما كان $o < \beta < n$ فإن $\beta \in Z_n$ وهذا يبين لنا أن العنصر k قاسم للصفر. مما سبق نجد أن كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة Z_n إما أن يكون قابلاً للقلب أو يكون قاسماً للصفر.

التمهيدية الأخيرة يوجد لها تعميم نورده من خلال المبرهنة الأتية:

مبرهنة 1-4-3.

لتكن R حلقة تبديليه و واحديه. إذا كانت الحلقة R منتهية عندئذ كل عنصر مغاير للصفر في R إما قابل للقلب أو قاسم للصفر في R.

البرهان.

لنفرض أن R حلقة تبديليه وواحديه منتهية وليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر. لنأخذ المجموعة $S = \{ar : \ r \in R\}$ فنجد أن المجموعة S غير خالية لأن

$a = a1 \in S$. وهنا نميز حالتين: الحالة الأولى. إذا كان $S = R$ عندئذ $1 \in S$ وبالتالي يوجد $r_a \in R$ بحيث $ar_a = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قابل للقلب. الحالة الثانية. إذا كان $S \neq R$. ولما كانت R منتهية عندئذ المجموعة S منتهية. من جهة أخرى ولما كانت $a, a^2, a^3, \cdots \in S$ ولما كانت المجموعة S منتهية فإنه توجد أعداد صحيحة موجبة i, j تحقق $i \neq j$ وأن $a^i = a^j$. لنفرض أن n, m أصغر عددين صحيحين موجبين من أجلهما $a^n = a^m$ عندئذ $a(a^{n-1} - a^{m-1}) = o$ وأن $a^{n-1} \neq a^{m-1}$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قاسم للصفر. مما سبق نجد أن كل عنصر مغاير للصفر في R إما قابل للقلب أو قاسم للصفر في R.

تعريف.

الجسم هو حلقة R فيها $U(R) = R \setminus \{o\}$. أو بمعنى آخر الجسم هو حلقة فيها $o \neq 1$ وكل عنصر مغاير للصفر يملك مقلوب.

تمهيدية 1-4-4.

لتكن R حلقة فيها $o \neq 1$. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R جسماً هو أن يكون كل عنصر مغاير للصفر في R يملك مقلوباً من اليسار (اليمين) في R.

البرهان.

لزوم الشرط. واضح.

كفاية الشرط. لنفرض أن كل عنصر من R مغاير للصفر يملك مقلوب من اليسار في R. وليكن $o \neq a \in R$ عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $ba = 1$ ولما كانت $b \neq o$ فإنه يوجد $c \in R$ يحقق $cb = 1$ ومنه يكون $c = c1 = c(ba) = (cb)a = 1a = a$ وهكذا نجد أن $ba = ab = 1$ وبالتالي العنصر a قابل للقلب في R وحسب التعريف تكون الحلقة R جسماً.

1 - 5. المنطقـــة التكـــامليـــة.

يمكن القول إلى حد ما إن مفهوم الحلقة نشأ لأجل دراســة الخــواص الجبريــة للأعداد الصحيحة بشكل مجرد ومن ثم تعميم هذه الخواص. إلى جانــب الخاصــتين الجبريتين الأساسيتين للأعداد الصحيحة وهما الخاصة التبديليه ووجود العنصر المحايد توجد خاصة ثالثة مهمة لا تتمتع بها الكثير من الحلقات وهي خاصية الاختصار. وفي هذه الفقرة سوف نخصص دراستنا لصف الحلقات الذي يحقق الخواص الثلاث السالفة الذكر.

ملاحظـــة هامـــة. من الآن فصاعداً جميع الحلقات التي سوف نتناولها في دراســتنا هي حلقات واحديه ما لم نذكر خلاف ذلك وبشكل صريح.

تعريـــف.

نقول عن الحلقة التبديليه والواحديه إنها منطقة تكاملية إذا كانت لا تحــوي قواســم للصفر وكان $1 \neq 0$. أو بمعنى أخر المنطقة التكاملية هي حلقة تامة وتبديليه لا تحوي قواسم للصفر. ينتج من التعريف السابق أنه في المنطقــة التكامليــة إذا كــان جــداء عنصرين يساوي الصفر فإن أحد العنصرين على الأقل يساوي الصفر حتماً.

أمثلـــة.

1 - حلقة الأعداد الصحيحة هي منطقة تكاملية.

2 - الحلقة $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ هي منطقة تكاملية.

3 - الحلقة $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ليست منطقة تكاملية لأن $2.2 = 0$.

4 - حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ ليست منطقة تكاملية.

5 - الحلقة $Z[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2}: \quad a,b \in Z\}$ هي منطقة تكاملية.

إن المثال رقم (3) يبين لنا أنه إذا كان العدد الصحيح الموجب n ليس أولياً فــإن الحلقة Z_n بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس n ليست منطقة تكاملية. أمــا إذا كان العدد n أولياً فإن الحلقة Z_n تشكل منطقة تكاملية وهذا ما تبينــه لنــا المبرهنــة الآتية:

مبرهنـــة 1-5-1.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة Z_n منطقة تكاملية.

2 - العدد n أولي.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة Z_n منطقة تكاملية ولنفرض جدلاً أن العدد n غيـر أولي عندئذ يوجد قاسم للعدد n وليكن $s \in Z$ وأن $1 < s < n$. ولما كـان العـدد s قاسماً للعدد n في Z فإنه يوجد $t \in Z$ بحيـث $n = st$ وبمـا أن $1 < s < n$ فـإن $1 < t < n$ ومنه فإن $s, t \in Z_n$ وأن $st = o$ في Z_n. وهذا يبين لنا أن الحلقـة Z_n تحوي قواسم للصفر مما يناقض كونها منطقة تكاملية. مما سبق نجد أن العدد n أولي.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن العدد n أولياً. ولما كانت الحلقة Z_n تبديليه وواحدية وفيهـا $1 \neq o$ فإنه يكفي لإثبات أنها منطقة تكاملية أن نثبت أنها لا تحوي قواسـم للـصفر. ليكن $x, y \in Z_n$ بحيث $xy = o$ عندئذ $xy = kn$ حيث $k \in Z$ ولما كان العـدد n أولياً ويقسم الجداء xy فإن العدد n إما يقسم العدد x أو يقسم العدد y.

- إذا كان العدد n يقسم العدد x عندئذ يوجد $\alpha \in Z$ بحيث $x = \alpha n$ وبالتالي فإن $x = o$ في Z_n.
- إذا كان العدد n يقسم العدد y عندئذ يوجد $\beta \in Z$ بحيث $y = \beta n$ وبالتالي فإن $y = o$ في Z_n.

مما سبق نجد أن Z_n لا تحوي قواسم للصفر وبالتالي فهي منطقة تكاملية. ◊

نأتي الآن إلى دراسة خاصية الاختصار في الحلقات.

خاصيـــة الاختصـــار.

نقول عن الحلقة $R \neq o$ إنها تحقق خاصية الاختصار إذا حققت الشرط الآتـــي: إذا كان $a, b, c \in R$ بحيث $a \neq o$ وإذا كان $ab = ac$ عندئذ فإن $b = c$.

نلاحظ أن الخاصة السابقة محققة في حلقة الأعداد الصحيحة Z وبشكل أعم فإن كل منطقة تكاملية تحقق خاصية الاختصار كما سنرى من خلال التمهيدية الآتيـة والتـي تبين لنا أيضا متى يكون العكس صحيحاً.

تمهيديـــة 1 -5 -2.

لتكن $R \neq o$ حلقة تبديليه وواحدية. الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R منطقة تكاملية.

2 - الحلقة R تحقق خاصية الاختصار.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R منطقة تكاملية وليكن $a,b,c \in R$ بحيث $a \neq o$ و لنفرض أن $ab = ac$ عندئذ $a(b-c) = o$ ولما كـــان $a \neq o$ وكانـــت R لا تحـــوي قواسم للصفر نجد أن $b - c = o$ وبالتالي $b = c$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R تحقق خاصية الاختصار. وليكن $x, y \in R$ بحيث $xy = o$. ولنفرض أن $x \neq o$ عندئـــذ $xy = o = xo$ ومنـــه $xy = xo$ وحـــسب الفرض نجد أن $y = o$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R لا تحوي قواسم للصفر ولما كانت $R \neq o$ وهي تبديليه وواحدية فإن R تشكل منطقة تكاملية.

نوع خاص من المناطق التكاملية له العديد من التطبيقات يسمى الحقل نورده مـــن خلال التعريف الآتي:

تعريـــف.

الحقل هو حلقة مغايرة للصفر تبديليه وواحدية وكل عنصر فيها مغاير للصفر يملك مقلوب (قابل للقلب). أو بمعنى آخر نسمي الثلاثـــة $(F,+,.)$ حقـــلاً إذا حققـــت الشروط الآتية:

1 - الثنائية $(F,+)$ زمرة تبديليه.

2 - الثنائية $(F^*,.)$ زمرة تبديليه حيث $F^* = F \setminus \{o\}$.

3 - الضرب توزيعي على الجمع.

توجد العديد من الأمثلة على الحقول منها حقل الأعداد الحقيقية وحقل الأعداد العقدية (المركبة) وحقل الأعداد النسبية.

إن نظرية الحقول درست بشكل مجرد لأول مرة في العام 1893 وذلك من قبل العالم *Heinrich Webe*. وتعتبر كل من نظرية الزمر ونظرية الحلقات ونظرية الحقول الفروع الثلاثة الرئيسية في الجبر المجرد.

بعض الخواص للحقول نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 1-5-3.

ليكن F حقل عندئذ:

1 - الحقل F لا يحوي قواسم للصفر.

2 - الحقل F منطقة تكاملية.

البرهان.

1 - ليكن $a,b \in F$ بحيث $ab = o$ ولنفرض أن $a \neq o$. ولما كان F حقل فإن العنصر a قابل للقلب وبالتالي يوجد $a^{-1} \in F$ بحيث $a^{-1}a = 1$ ومنه $a^{-1}(ab) = a^{-1}o = o$ وبالتالي $(a^{-1}a)b = o$ أي إن $b = o$ وهذا يبين لنا أن الحقل F لا يحوي قواسم للصفر.

2 ولما كان F حقل فإن F حلقة تبديليه وواحدية فيه $1 \neq o$ وحسب(1) فهو لا يحوي قواسم للصفر وبالتالي فهو منطقة تكاملية.

التمهيدية السابقة بينت لنا أن كل حقل هو منطقة تكاملية إلا أن العكس غير صحيح في الحالة العامة لأن حلقة الأعداد الصحيحة هي منطقة تكاملية ولكنها ليست حقلاً. المبرهنة الآتية تخبرنا أنه لأجل المجموعات المنتهية فإن مفهومي الحقل والمنطقة التكاملية متطابقان.

مبرهنة 1-5-4.

كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً.

البرهـــان.

لتكن R منطقة تكاملية منتهية. للبرهان على أن R حقل يكفي أن نبرهن علـــى أن كل عنصر مغاير للصفر في R قابل للقلب (يملك مقلوب).

ليكن $a \in R$ بحيث $a \neq o$. إذا كان $a = 1$ فإن $a^{-1} = 1$ وبالتالي فإن العنصر a قابـل للقلب. لنفرض أن $a \neq 1$. ولما كان $a, a^2, a^3, \cdots \in R$ وأن R منتهية فإنه توجد أعداد صحيحة موجبة $i, j \in Z$ بحيث $i \neq j$ وأن $a^i = a^j$. ولما كان $i \neq j$ لنفرض أن $i > j$ عندئذ $i - j > o$ وبالتالي $a^{i-j} \in R$. من جهة أخرى بمـــا أن $a \neq 1$ فـــإن $i - j \neq 1$ وهذا يبين لنا أن $i - j > 1$. وبما أن $a^{i-j}a^j = a^i = a^j = 1a^j$ ولكون R منطقة تكاملية فإنه حسب خاصـــية الاختـــصار نجـــد أن $a^{i-j} = 1$ ولمـــا كـــان $i - j - 1 > o$ فـــإن $aa^{i-j-1} = 1$ أي إن العنـــصر a قابـــل للقلـــب وأن مقلوبـــه $a^{i-j-1} \in R$. مما سبق نجد أن كل عنصر مغاير للصفر في R له مقلوب وبالتـــالي فإن R حقل.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نستطيع صياغة النتيجة المهمة الآتية:

نتيجـــة.

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقـــة Z_n بالنـــسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس n حقلاً هو أن يكون العدد n أولياً.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحلقة Z_n حقلاً عندئذ حسب التمهيدية(1 -5 -3) فإن الحلقة Z_n منطقة تكاملية وحسب المبرهنة(1 -5 -1) يكون العدد n أولياً.

كفاية الشرط. لنفرض أن العدد n أولياً عندئذ حسب المبرهنة(1 -5 -1) فـــإن الحلقـــة Z_n هي منطقة تكاملية ولما كانت منتهية فإنه حسب المبرهنة(1 -5 -4) فإن الحلقـــة Z_n تشكل حقلاً.

وجدنا من خلال النتيجة الأخيرة أنه إذا كان p عدداً أولياً فإن الحلقة Z_p بالنـــسبة لعمليتي الجمع والضرب تشكل حقلاً. وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال الآتي: هـــل كـــل

حقل منته هو من الشكل Z_p حيث p عدد أولي. إن الإجابة عن هذا السؤال سلبية أي إنه ليس بالضرورة أن يكون كل حقل منته من الشكل Z_p حيث p عدد أولي. لنورد الآن مثالاً على حقل منته ليس من الشكل Z_p.

مثـــال.

لنأخذ المجموعة $Z_3[i]=\{a+bi : a,b \in Z_3\}$ إن

$$Z_3[i]=\{o,1,2,i,2i,1+i,1+2i,2+i,2+2i\}$$

حيث $Z_3=\{o,1,2\}$ وأن $i^2=-1$. والتي تسمى حلقة غاوص *Gauss* الصحيحة بالمقاس 3. لنعرف على المجموعة $Z_3[i]$ عمليتي جمع وضرب مشابهتين لعمليتي جمع وضرب الأعداد المركبة عدا الأمثال التي تجمع وتضرب مع بعضها البعض بالمقاس 3. حيث

$$(1+2i)+(2+2i)=i, \qquad 2i+(2+i)=2$$

$$(1+2i).(2+i)=2i, \qquad (2i).(2+i)=-2+i$$

شكل جدولاً لعمليتي الجمع والضرب على هذه المجموعة. إن المجموعة $Z_3[i]$ تشكل حقلاً (تأكد من ذلك) وهذا الحقل ليس من الشكل Z_p.

الحقـــل الجـــزئـــي.

تعريـــف.

ليكن F حقل و K مجموعة جزئية غير خالية من F. نقول عن K إنها تشكل حقل جزئي في F إذا كانت K تشكل حقلاً بحد ذاتها بالنسبة للعمليات المعرفة على F.

يمكن الملاحظة أن تعريف الحقل الجزئي ليس عملياً فهو يحتاج إلى الكثير من الوقت والجهد للتحقق منه ولأجل ذلك كان لابد من إيجاد شرط مكافئ آخر وهذا الشرط يسمى اختبار الحقل الجزئي والذي نورده من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 1 -5 -5.

ليكن F حقلاً و K مجموعة جزئية من F تحوي عنصرين على الأقل. الشرط اللازم والكافي كي تكون K حقلاً جزئياً من F هو أن تتحقق الشروط الآتية:

1 - أياً كان $a,b \in K$ فإن $a-b \in K$.

2 - أياً كان $c,d \in K^*$ فإن $cd^{-1} \in K$.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن K حقل جزئي من F عندئذ فإن K يحقق جميـــع شـــروط الحقل وبالتالي فإن $(K,+)$ زمرة تبديليه ومنه أياً كان $a,b \in K$ فـــإن $a-b \in K$. كذلك فإن $(K^*,.)$ زمرة تبديليه ومنه أياً كان $c,d \in K^*$ فإن $cd^{-1} \in K$.

كفاية الشرط. لنفرض أن المجموعـــة K تحقـــق الـــشروط أيـــاً كـــان $a,b \in K$ و $c,d \in K^*$ فإن $a-b \in K$ و $cd^{-1} \in K$. ولما كان F حقل فإن F بالنسبة لعملية الجمع زمرة تبديليه وبما أن المجموعة K تحقـــق $a-b \in K$ أيـــاً كـــان $a,b \in K$ فإن $(K,+)$ تشكل زمرة جزئية تبديليه من الزمرة $(F,+)$ وبالتالي تكـــون $(K,+)$ زمرة تبديليه. من جهة أخرى ولما كان F حقل فإن $(F^*,.)$ زمرة تبديليـــه ولكـــون المجموعة K تحقق $cd^{-1} \in K$ أياً كان $c,d \in K^*$ فإن $(K^*,.)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(F^*,.)$ وبالتالي $(K^*,.)$ زمرة تبديليه. كذلك بما أن الـــضرب تـــوزيعي على الجمع من أجل جميع عناصر F وأن $K \subset F$ فإن الضرب توزيعي على الجمع لأجل عناصر K. مما سبق نجد أن K حقل جزئي من F.

نعلم أن كل من مجموعة الأعداد العقدية (المركبة) C ومجموعة الأعداد الحقيقيـــة R ومجموعة الأعداد النسبية (العادية) Q عبارة عن حقول. وبما أن $Q \subset R \subset C$ فإن Q يمثل حقلاً جزئياً من R و C وأن R يمثل حقلاً جزئياً من C.

مثـــال.

لنأخذ المجموعة $Q[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} : \ a,b \in Q\}$. فنجد أن $Q[\sqrt{2}]$ هو حقل جزئي من حقل الأعـــداد الحقيقيـــة R يحـــوي الحقـــل Q. واضـــح أن المجموعـــة $Q[\sqrt{2}] \subset R$ وغير خالية لأن $o = o + o\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$. لـــيكن $x,y \in Q[\sqrt{2}]$ عندئذ $x = a_1 + b_1\sqrt{2}, \quad y = a_2 + b_2\sqrt{2}$ وحيث $a_1,a_2,b_1,b_2 \in Q$. ومنه

$$x - y = (a_1 + b_1\sqrt{2}) - (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$$

إذا كان $y \neq o$ فإن

$$y^{-1} = \frac{1}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{1}{a_2 + b_2\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2 - b_2\sqrt{2}}{a_2 - b_2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{a_2}{a_2^2 - 2b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$$

$$xy^{-1} = (a_1 + b_1\sqrt{2})\frac{1}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{a_2 + b_2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{a_2 - b_2\sqrt{2}}{a_2 - b_2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= (a_1 + b_1\sqrt{2})\left[\frac{a_2}{a_2^2 - 2b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2}\right] =$$

$$= \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2} \in Q[\sqrt{2}]$$

وحسب اختبار الحقل الجزئي نجد أن $Q[\sqrt{2}]$ تشكل حقلاً جزئياً من حقل الأعداد الحقيقية و هذا الحقل يحوي الحقل Q (تأكد من ذلك).

يمكن تعميم المثال السابق بالشكل الآتي: أياً كان العدد الصحيح الموجب d فإن المجموعة

$$Q[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : \ a, b \in Q\}$$

تشكل حقلاً جزئياً من حقل الأعداد الحقيقية ويحوي الحقل Q.

Damascus University

تمـــاريـــن محـــلولـــة (1)

1 - لتكن R حلقة و $a,a_1,a_2,\cdots,a_n,b,b_1,b_2,\cdots,b_m \in R$. عندئذ فإن:

أ - $a(\sum_{i=1}^{m} b_i) = \sum_{i=1}^{m} (ab_i)$.

ب - $(\sum_{i=1}^{n} a_i)b = \sum_{i=1}^{n} (a_i b)$.

ت - $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i b_j)$.

الحـل.

أ - سوف نـورد البرهـان بالاسـتقراء حـسب m. لنفـرض أن $x = a(\sum_{i=1}^{m} b_i)$ و $y = \sum_{i=1}^{m} (ab_i)$ فنجد أنه لأجل $m = 1$ فإن $x = ab_1 = y$ ولأجل $m = 2$ فإن

$$x = a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2 = y$$

لنفرض أن العلاقة صحيحة لأجل $m-1$ ولنبرهن على صحتها لأجـل m. بمـا أن $a(\sum_{i=1}^{m-1} b_i) = \sum_{i=1}^{m-1} (ab_i)$ عندئذ فإن

$$x = a(\sum_{i=1}^{m} b_i) = a[(\sum_{i=1}^{m-1} b_i) + b_m] = a(\sum_{i=1}^{m-1} b_i) + ab_m =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (ab_i) + ab_m = \sum_{i=1}^{m} (ab_i) = y$$

ومنه نجد أن العلاقة السابقة صحيحة أياً كان $m \in N^*$.

ب - يبرهن بطريقة مشابهة.

ت - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i b_j) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} (a_i b_j)) = \sum_{i=1}^{n} (a_i (\sum_{j=1}^{m} b_j)) = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j)$.

2 - لتكن R حلقة. أثبت أن المجموعة

$$Z(R)=\{x : x\in R;\ \ ax=xa\ ;\forall a\in R\}$$

تشكل حلقة جزئية من R.

الحـــل.

نلاحظ أنـــه أيـــاً كـــان $a\in R$ فـــإن $ao=oa=o$ ومنـــه $o\in Z(R)$. لـــيكن $x,y\in Z(R)$ عندئذ أياً كان $a\in R$ فإن $ay=ya,\ \ ax=xa$ ومنه

$$(x-y)a=xa-ya=ax-ay=a(x-y)$$

وهذا يبين لنا أن $x-y\in Z(R)$. من جهة أخرى فإن

$$(xy)a=x(ya)=x(ay)=(xa)y=(ax)y=a(xy)$$

وهذا يبين لنا أيضا أن $x.y\in Z(R)$. مما سبق نجد أن المجموعة $Z(R)$ تشكل حلقة جزئية في R. نسمي الحلقة الجزئية $Z(R)$ بمركز الحلقة R.

ملاحظـــة.

إذا كانت الحلقة R واحديه فإن مركز الحلقة R هو أيضا حلقـــة واحديـــه وذلـــك لأن $a1=1a$ وذلك أياً كان $a\in R$.

3 - أثبت أن المجموعة $Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}:\ \ a,b\in Z\}$ تشكل حلقة تبديليه و واحديه بالنسبة لعمليتي جمع وضرب الأعداد الحقيقية.

الحـــل.

من الواضح أن المجموعة $Z[\sqrt{2}]$ غير خالية لأن $o=o+o\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$. لـــيكن $x=a_1+b_1\sqrt{2},\ \ y=a_2+b_2\sqrt{2},\ \ z=a_3+b_3\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$ عندئذ فإن

$$x+y=(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$$

وهذا يبين لنا أن العملية $(+)$ داخلية (مغلقة). وهي أيضا تبديليه لأن

$$x+y=(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}=$$
$$=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{2}=(a_2+b_2\sqrt{2})+(a_1+b_1\sqrt{2})=y+x$$

وأيضاً عملية الجمع $(+)$ تجميعية لأن

$$(x+y)+z=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}]+(a_3+b_3\sqrt{2})=[(a_1+a_2)+a_3]$$
$$+[(b_1+b_2)+b_3]\sqrt{2}=[a_1+(a_2+a_3)]+[b_1+(b_2+b_3)]\sqrt{2}=$$
$$=(a_1+b_1\sqrt{2})+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\sqrt{2}]=x+(y+z)$$

المجموعة $Z[\sqrt{2}]$ تحوي عنصراً محايداً بالنسبة للجمع وهو o لأن

$$x+o=(a_1+b_1\sqrt{2})+(o+o\sqrt{2})=(a_1+o)+(b_1+o)\sqrt{2}=x$$

كذلك يوجد نظير للعنصر $x=a_1+b_1\sqrt{2}$ هو $-x=-a_1+(-b_1)\sqrt{2}$ لأن

$$x+(-x)=(a_1-a_1)+(b_1-b_1)\sqrt{2}=o+o\sqrt{2}=o$$

مما سبق نجد أن المجموعة $Z[\sqrt{2}]$ تشكل بالنسبة إلى عملية الجمع زمرة تبديليه.

خواص عملية الضرب. نلاحظ أن

$$x.y=(a_1+b_1\sqrt{2}).(a_2+b_2\sqrt{2})=a_1a_2+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}+2b_1b_2=$$
$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$$

وهذا يبين لنا أن عملية الضرب $(\cdot)$ داخلية (مغلقة) وهي تبديليه لأن

$$x.y=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}=(a_2a_1+2b_2b_1)+$$
$$+(b_2a_1+a_2b_1)\sqrt{2}=yx$$

وهي أيضا تجميعية (تحقق من ذلك) وتقبل التوزيع على الجمع لأن

$$x(y+z)=(a_1+b_1\sqrt{2})[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\sqrt{2}]=$$
$$=a_1(a_2+a_3)+2b_1(b_2+b_3)+a_1(b_2+b_3)\sqrt{2}+b_1(a_2+a_3)\sqrt{2}=$$
$$=[(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}]+[(a_1a_3+2b_1b_3)+(a_1b_3+b_1a_3)\sqrt{2}]$$
$$=x.y+x.z$$

كما أنه يوجد في $Z[\sqrt{2}]$ عنصر محايد بالنسبة إلى الضرب هو $1=1+o\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$ (تحقق من ذلك). مما سبق نجد أن المجموعة $Z[\sqrt{2}]$ هي حلقة تبديليه و واحديه.

4 - لتكن R حلقة و $a,b\in R$. إن المجموعة $S=\{arb: r\in R\}$ تشكل حلقة جزئية في R.

الحـــل.

بما أن $o \in R$ فإن $o = aob \in S$ وهذا يبين لنا أن المجموعة S غير خالية. ليكن $ar_1b, ar_2b \in S$ عندئذ

$$(ar_1b)-(ar_2b) = a(r_1-r_2)b \in S \quad \text{و} \quad (ar_1b)(ar_2b) = a(r_1br_2)b \in S$$

لأن $r_1br_2 \in R$. مما سبق نجد أن المجموعة S تشكل حلقة جزئية من الحلقة R.

5 - لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة. إذا كانت الزمرة $(R,+)$ دوارة (دائرية) فإن الحلقة R تكون تبديليه.

الحـــل.

ليكن $x, y \in R$ ولما كانت الزمرة $(R,+)$ دائرية فإنه يوجد $a \in R$ و $n,m \in Z$ بحيث $x = na, y = ma$ ومنه

$$xy = (na)(ma) = (nm)(aa) = (mn)(aa) = (ma)(na) = yx$$

وهذا يبين لنا أن الحلقة R تبديليه.

6 - لتكن $R_1, R_2, R_3, \cdots, R_n$ عدداً منتهياً من الحلقات. لنحاول من خلال هذه الحلقات بناء حلقة جديدة بالشكل الآتي: لنأخذ المجموعة

$$\prod_{i=1}^{n} R_i = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in R_i; \quad i = 1,2,\cdots n\}$$

ولنعرف على هذه المجموعة عمليتي جمع وضرب بالشكل الآتي:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n).(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n)$$

وذلك أياً كان $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \prod_{i=1}^{n} R_i$. إن المجموعة $\prod_{i=1}^{n} R_i$ بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب السابقتين تشكل حلقة تسمى حلقة الجداء المباشر للحلقات $R_1, R_2, R_3, \cdots, R_n$.

الحـــل.

لإثبات أن المجموعة $\prod_{i=1}^{n} R_i$ حلقة وللسهولة ودون المس بعمومية المسألة ســـوف نفرض أن $n = 2$. واضح من خلال تعريف الجمع أن هذه العملية ثنائية وهي تبديليه

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1,a_2+b_2) = (b_1+a_1,b_2+a_2) =$$
$$= (b_1,b_2)+(a_1,a_2)$$

وهي أيضاً تجميعية لأن

$$[(a_1,a_2)+(b_1,b_2)]+(c_1,c_2) = (a_1+b_1,a_2+b_2)+(c_1,c_2) =$$
$$= ((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2) = (a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2)) =$$
$$= (a_1,a_2)+(b_1+c_1,b_2+c_2) = (a_1,a_2)+[(b_1,b_2)+(c_1,c_2)]$$

كما أنه يوجد في المجموعة $R_1 \times R_2$ عنصر محايد بالنسبة إلى الجمع هو (o,o) لأن

$$(a_1,a_2)+(o,o) = (a_1+o,a_2+o) = (a_1,a_2)$$

ولكل عنصر $(a_1,a_2) \in R_1 \times R_2$ يوجد نظير هو $(-a_1,-a_2)$ لأن

$$(a_1,a_2)+(-a_1,-a_2) = (a_1-a_1,a_2-a_2) = (o,o)$$

مما سبق نجد أن المجموعة $R_1 \times R_2$ بالنسبة إلى عملية الجمع أنفة الذكر تشكل زمرة تبديليه. واضح من خلال تعريف عملية الضرب على المجموعـــة $R_1 \times R_2$ أن هـــذه العملية داخلية وهي أيضاً تجميعية لأن

$$[(a_1,a_2)(b_1,b_2)](c_1,c_2) = (a_1b_1,a_2b_2)(c_1,c_2) = ((a_1b_1)c_1,(a_2b_2)c_2) =$$
$$= (a_1(b_1c_1),a_2(b_2c_2)) = (a_1,a_2)(b_1c_1,b_2c_2) = (a_1,a_2)[(b_1,b_2)(c_1,c_2)]$$

وكذلك فإن عملية الضرب توزيعية على الجمع لأن

$$(a_1,a_2)[(b_1,b_2)+(c_1,c_2)] = (a_1,a_2)(b_1+c_1,b_2+c_2) =$$
$$= (a_1(b_1+c_1),a_2(b_2+c_2)) = (a_1b_1+a_1c_1,a_2b_2+a_2c_2) =$$
$$= (a_1b_1,a_2b_2)+(a_1c_1,a_2c_2) = (a_1,a_2)(b_1,b_2)+(a_1,a_2)(c_1,c_2)$$

وهذا يبين لنا أن الضرب توزيعي على الجمع من اليسار بشكل مشابه نبرهن على أن الضرب توزيعي على الجمع من اليمين.مما سبق نجـــد أن الثلاثيـــة $(R_1 \times R_2,+,\cdot)$ تشكل حلقة.

ملاحظـــة.

إذا كانت الحلقتان R_1, R_2 واحديتين ومغايرتين للصفر فإن الحلقة $R_1 \times R_2$ تكـــون أيضاً واحديه ويكون عنصر الوحدة لها هو $(1,1)$. والعكس أيضاً صحيح أي إذا كانت الحلقة $R_1 \times R_2$ واحديه فإن كل من الحلقتين R_1, R_2 تكون واحديه.

7 - لتكن $R_1, R_2, R_3, \cdots, R_n$ حلقات واحديه مغايرة للصفر. عندئذ

$$U(R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n) = U(R_1) \times U(R_2) \times \cdots \times U(R_n)$$

الحـــل.

أيضا للسهولة ودون المس بالعمومية سوف نورد البرهان مـــن أجـــل $n = 2$. أي لنبرهن على أن $U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2)$. ليكن $(a_1, a_2) \in U(R_1 \times R_2)$ عندئذ يكون العنصر (a_1, a_2) قابلاً للقلب في الحلقة $R_1 \times R_2$ وبالتالي يوجد عنـــصر $(x, y) \in R_1 \times R_2$ بحيث $(a_1, a_2)(x, y) = (x, y)(a_1, a_2) = (1,1)$ ومنه يكـــون $a_1 x = x a_1 = 1,\ a_2 y = y a_2 = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a_1 قابل للقلـــب فـــي R_1 وأن العنصر a_2 قابل للقلب في R_2. وبالتـــالي $(a_1, a_2) \in U(R_1) \times U(R_2)$ ومنـــه $U(R_1 \times R_2) \subseteq U(R_1) \times U(R_2)$.

ليكن $(b_1, b_2) \in U(R_1) \times U(R_2)$ عندئذ $(b_1, b_2) \in R_1 \times R_2$ ويحقق أن b_1 قابـــل للقلب في R_1 و b_2 قابل للقلب في R_2. لنفرض أن $b_1^{-1} \in R_1$ وأن $b_2^{-1} \in R_2$ مقلـــوب كل من العناصر b_1, b_2 في R_1, R_2 على الترتيب عندئذ فـــإن $(b_1^{-1}, b_2^{-1}) \in R_1 \times R_2$ ويحقق

$$(b_1, b_2)(b_1^{-1}, b_2^{-1}) = (b_1 b_1^{-1}, b_2 b_2^{-1}) = (1,1)$$
$$(b_1^{-1}, b_2^{-1})(b_1, b_2) = (b_1^{-1} b_1, b_2^{-1} b_2) = (1,1)$$

وهـــذا يبـــين لنـــا أن العنـــصر (b_1, b_2) قابـــل للقلـــب فـــي $R_1 \times R_2$ ومنـــه فـــإن $U(R_1) \times U(R_2) \subseteq U(R_1 \times R_2)$. مما سبق نجد أن

$$U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2).$$

8 - لتكن G زمرة تبديليه جمعية ولنرمز لمجموعة التشاكلات للزمرة G بالرمز $End(G)$ حيث إنه أياً كان $f \in End(G)$ فإن $f : G \to G$ هو تشاكل للزمرة G. ولنعرف على هذه المجموعة عملية جمع $(+)$ بالشكل الآتي: أياً كان $f, g \in End(G)$ و أياً كان $a \in G$ فإن $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ ولنعرف أيضا على المجموعة $End(G)$ عملية تركيب التطبيقات $(\circ)$ والتي سوف نرمز إليها $(\cdot)$ بالشكل: أياً كان $f, g \in End(G)$ و أياً كان $a \in G$ فإن $(f.g)(a) = f(g(a))$. إن الثلاثية $(End(G), +, .)$ حلقة واحديه.

الحل.

لندرس أولاً عملية الجمع $(+)$. إن هذه العملية داخلية (ثنائية) لأن $(f+g) : G \to G$ و أياً كان $a, b \in G$ فإن

$$(f+g)(a+b) = f(a+b) + g(a+b) = (f(a) + f(b)) + (g(a) + g(b)) = (f(a) + g(a)) + (f(b) + g(b)) = (f+g)(a) + (f+g)(b)$$

ومنه نجد أن $f+g$ هو تشاكل للزمرة G أي أن $f+g \in End(G)$. كما أن عملية الجمع هذه تبديليه لأنه أياً كان $a \in G$ فإن

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = g(a) + f(a) = (g+f)(a)$$

ومنه $f+g = g+f$. أيضا عملية الجمع المعرفة على المجموعة $End(G)$ هي عملية تجميعية لأنه أياً كان $f, g, h \in End(G)$ و أياً كان $a \in G$ فإن

$$[(f+g)+h](a) = (f+g)(a) + h(a) = [f(a) + g(a)] + h(a) = f(a) + [g(a) + h(a)] = f(a) + [(g+h)(a)] = [f + (g+h)](a)$$

ومنه $(f+g)+h = f+(g+h)$. كذلك يوجد في المجموعة $End(G)$ عنصر محايد بالنسبة إلى الجمع هو التشاكل الصفري $O : G \to G$ حيث $O(x) = o$ أياً كان $x \in G$ وذلك لأنه أياً كان $f \in End(G)$ و أياً كان $a \in G$ فإن

$$(O+f)(a) = O(a) + f(a) = o + f(a) = f(a)$$

ومنه $f+O=f$. أيضاً يوجد لكل عنصر $f\in End(G)$ نظير هو $-f:G\to G$ معرف بالشكل أياً كان $x\in G$ فإن $(-f)(x)=-(f(x))$ لأنه أياً كان $a\in G$ فإن $(-f+f)(a)=(-f)(a)+f(a)=-(f(a))+f(a)=o=O(a)$ ومنه $-f+f=O$. مما سبق نجد أن الثنائية $(End(G),+)$ زمرة تبديليه.

لندرس الآن خواص عملية الضرب. إن عملية الضرب داخلية (ثنائية) لأنه أياً كان $f,g\in End(G)$ فإن $f.g:G\to G$ وأن $(fg)(x)=f(g(x))$ و ذلك أياً كان $x\in G$ بالإضافة إلى ذلك أياً كان $a,b\in G$ فإن

$$(fg)(a+b)=f(g(a+b))=f(g(a)+g(b))=f(g(a))+f(g(b))=$$
$$=(fg)(a)+(fg)(b)$$

أي أن fg هو تشاكل للزمرة G وبالتالي $fg\in End(G)$. كما أن عملية الضرب هذه تجميعية لأنه أياً كان $f,g,h\in End(G)$ و أيا كان $a\in G$ فإن

$$[(fg)h](a)=(fg)(h(a))=f(g(h(a)))=f((gh)(a))=[f(gh)](a)$$

ومنه $(fg)h=f(gh)$. كذلك فإنه يوجد في المجموعة $End(G)$ عنصر محايد بالنسبة إلى الضرب هو التطبيق المطابق على G (نرمز له 1_G) لأنه أياً كان $a\in G$ و أيا كان $f\in End(G)$ فإن

$$(1_G f)(a)=1_G(f(a))=f(a)\quad \text{و أن}\quad (f1_G)(a)=f(1_G(a))=f(a)$$

ومنه $f1_G=1_G f=f$. أيضاً الضرب توزيعي على الجمع من اليمين واليسار لأنه أياً كان $f,g,h\in End(G)$ و أياً كان $a\in G$ فإن

$$[f(g+h)](a)=f((g+h)(a))=f(g(a)+h(a))=$$
$$=f(g(a))+f(h(a))=(fg+fh)(a)$$

ومنه $f(g+h)=fg+fh$ أي إن الضرب توزيعي على الجمع من اليسار. بشكل مشابه نبرهن على أن الضرب توزيعي على الجمع من اليمين. مما سبق نجد أن الثلاثية $(End(G),+,.)$ حلقة واحديه.

تمـــاريـــن (1)

1 - أثبت أن المجموعة $Z[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}: a,b\in Z\}$ تشكل حلقـة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب الأعداد الحقيقية.

2 - لتكن R حلقة و $a\in R$. أثبت أن المجموعة $S=\{x: x\in R; ax=o\}$ تشكل حلقة جزئية من الحلقة R.

3 - لتكن R حلقة. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R تبديليه هو أن يتحقق الشرط الآتي: أياً كان $a,b\in R$ فإن $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

4 - هل تشكل الحلقة Z_6 حلقة جزئية من الحلقة Z_{12}

5 - لتكن R حلقة تحقق الشرط الآتي: أيـاً كـان $a\in R$ فـإن $a^2=a$. أثبـت أن الحلقة R تبديليه.

6 - لتكن R حلقة واحديـه ولـيكن $a\in R$ يحقـق $a^2=1$. أثبـت أن المجموعـة $S=\{ara: r\in R\}$ حلقة جزئية واحديه في R.

7 - لتكن R حلقة ولنفرض أنه يوجد عدد صحيح $n>1$ يحقق $a^n=a$ وذلك أيـاً كان $a\in R$. أثبت أن $a=-a$ أياً كان $a\in R$.

8 - أوجد جميع قواسم الصفر في الحلقة Z_{20} ثم قارن بينها وبين العناصـر القابلـة للقلب في Z_{20}. ماذا تستنتج؟

9 - لتكن R حلقة تبديليه و $a,b\in R$. أثبت أنه إذا كان الجداء ab قاسماً للـصفر عندئذ إما a قاسم للصفر أو b قاسم للصفر.

10 - ليكن F حقلاً منتهياً مؤلفاً من n عنصر. أثبت أن $x^{n-1}=1$ أياً كان $x\in F$.

11 - ليكن F حقل منته مرتبته 32. أثبت أن الحقول الجزئيـة فـي F هـي F و $\{0,1\}$ فقط.

12 - أثبت أن المجموعة $Z[i]=\{a+bi: a,b\in Z\}$ تشكل حلقة جزئية من حقل الأعداد العقدية حيث $i^2=-1$.

13 - أوجد العدد الصحيح الموجب n كي لا تحقق الحلقة Z_n الخاصة:

- إذا كان $a \in Z_n$ بحيث $a^2 = a$ عندئذ إما $a = 1$ أو $a = o$.
- إذا كان $a,b \in Z_n$ بحيث $ab = o$ عندئذ إما $b = o$ أو $a = o$.
- إذا كان $a,b,c \in Z_n$ بحيث $ab = ac$ وكان $a \neq o$ فإن $b = c$.

14 - أوجد مجموعة العناصر في الحلقة $M_2(Z)$ القابلة للقلب وهل هذه المجموعة تشكل حلقة جزئية من الحلقة $M_2(Z)$.

15 - هل تشكل المجموعة $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} : a,b \in Z \right\}$ حلقة جزئية من الحلقة $M_2(Z)$

16 - هل تشكل المجموعة $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} : a,b \in Z \right\}$ حلقة جزئية من الحلقة $M_2(Z)$

17 - لتكن R حلقة و A,B,D حلقات جزئية من R. إذا كان $A \subseteq B \cup D$ أثبت أنه إما $A \subseteq B$ أو $A \subseteq D$.

18 - ليكن d عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن الحقل $Q[\sqrt{d}]$ هو أصغر حقل جزئي في حقل الأعداد الحقيقية يحوي كلاً من $Q, \sqrt{d}$.

19 - أثبت أن الجداء المباشر لمنطقتين تكامليتين ليس بالضرورة منطقة تكاملية.

20 - ليكن $R = Z \times Z \times Z$. ولنأخذ المجموعة

$$S = \{(a,b,c) : \ a,b,c \in Z, a+b=c\}$$

هل تشكل المجموعة S حلقة جزئية من الحلقة R

21 - أوجد الزمرة $U(Z[i])$.

22 - أثبت أن كل عنصر قابل للقلب في الحلقة R يكون قاسماً لجميع عناصر الحلقة R.

23 - لتكن R حلقة و $a,b \in R$. إذا كان العنصر a قابلاً للقلب في R وكان $b^2 = o$ أثبت أن العنصر $a+b$ قابل للقلب في R.

24 - لتكن R حلقة تحقق الشرط $x^3 = x$ أياً كان $x \in R$ وليكن $a,b \in R$. أثبت أنه إذا كان $ab = o$ فإن $ba = o$.

25 - لتكن $M_2(Z)$ حلقة المصفوفات فوق حلقة الأعداد الصحيحة ولنفرض أن

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} : a,b \in Z \right\}$$

هل تشكل المجموعة R حلقة جزئية في الحلقة $M_2(Z)$.

26 - عين جميع العناصر القاسمة للصفر والعناصر القابلة للقلب في الحلقة $Z \oplus Z \oplus Z$.

27 - شكل جدول الضرب لحلقة غاوص الصحيحة بالمقاس 2.

$$Z_2[i] = \{a+ib : a,b \in Z_2 ; i^2 = -1\}$$

هل هذه الحلقة تشكل حقلاً أم منطقة تكاملية.

28 - لتكن R منطقة تكاملية و $a,b \in R$.

- إذا كان $a^5 = b^5$ و $a^3 = b^3$ أثبت أن $a = b$.
- إذا كان $a^m = b^m$ و $a^n = b^n$ حيث n,m أعداد صحيحة موجبة وأولية فيما بينها. أثبت أن $a = b$.

29 - ليكن F حقلاً منتهياً و K مجموعة جزئية وغير خالية من F. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة K حقلاً جزئياً في F هو أن يتحقق ما يلي: أياً $a,b \in K$ فإن $0 \in K , a+b \in K , ab \in K$.

30 - لتكن R منطقة تكاملية تحقق الشرط الآتي: أياً كان $x \in R$ فإن $x^2 = x$. أثبت أن R تحوي عنصرين فقط. هل R في هذه الحالة تشكل حقلاً.

31 - أثبت أن كل حلقة تبديلية منتهية لا تحوي قواسم للصفر تملك عنصراً محايداً.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصـــل الثـــانـــي

المثـــاليـــات وحـلقـــة الخـــارج

وجدنا من خلال دراستنا لنظرية الزمر أن الزمرة الجزئية الناظمية تلعب دوراً مهماً ولاسيما من خلال بناء زمرة الخارج. في هذا الفصل سوف ندخل مفهوما مهمـاً وجديداً في الحلقة يسمى المثالي لأجل دراسة الحلقة ذاتها ولأجل بناء حلقة الخارج.

2 - 1. المثـــاليـــات.

قبل البدء في دراسة المثالي لابد لنا من التعـرف علـى عمليتـي جمـع وجـداء المجموعات في الحلقة وذلك من خلال التعريف الآتي:

تعريـف.

لتكن R حلقة و A, B مجموعات جزئية وغير خالية من R.

- نعرف المجموع $A+B$ على أنه المجموعة

$$A+B=\{a+b:\ a\in A, b\in B\}$$

- و نعرف الجداء AB على أنه المجموعة

$$AB=\{\sum a_i b_j:\ a_i\in A, b_j\in B\}$$

لابد من التذكير هنا أن المجموعة الأخيرة تتألف فقط من جميع المجاميع المنتهيـة أو بمعنى آخر إن كل عنصر من المجموعة AB هـو عبـارة عـن مجمـوع منتـه لمضاريب الأول فيها عنصر من A والمضروب الثاني عنصر مـن B. إذا كانـت المجموعة $A=\{a\}$ عندئـذ فـإن $AB=aB=\{ab:b\in B\}$. أيـضاً إذا كانـت المجموعة $B=\{b\}$ فإن $AB=Ab=\{ab:a\in A\}$.

إن كلاً من عمليتي جمع وجداء المجموعات في الحلقة تتمتعان بعدد من الخواص نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2 -1 -1.

لتكن R حلقة و A, B, D مجموعات جزئية وغير خالية من R. عندئذ:

1. $(A+B)+D=A+(B+D)$.
2. $A+B=B+A$.
3. $(AB)D=A(BD)$.
4. $A(B+D)=AB+AD$.
5. $(A+B)D=AD+BD$.

البرهـــان.

نتركه كتمرين للقارئ.

نأتي الآن إلى تعريف المثاليات في الحلقة.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و A مجموعة جزئية وغير خالية من R.

1 - نقول عن المجموعة A إنها مثالي يساري في R إذا حققت الشروط الآتية:

- الثنائية $(A,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$.
- أياً كان $r\in R$ فإن $rA\subseteq A$.

2 - نقول عن المجموعة A إنها مثالي يميني في R إذا حققت الشروط الآتية:

- الثنائية $(A,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$.
- أياً كان $r\in R$ فإن $Ar\subseteq A$.

3 - نقول عن المجموعة A إنها مثالي (ثنائي الجانب) في R إذا كانت مثالياً يسارياً ويمينياً في آن واحد.

شرط مكافئ آخر للتعريف السابق نورده من خلال المبرهنة الآتية:

تمهيديـــة 2 -1 -2.

لتكن R حلقة و A مجموعة جزئية وغير خالية من R. عندئذ:

1 - الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة A مثالياً يسارياً في R هو أن يتحقق ما يلي:

- أياً كان $a,b \in A$ فإن $a-b \in A$.
- أياً كان $a \in A$ و $r \in R$ فإن $ra \in A$.

2 - الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة A مثالياً يمينياً في R هو أن يتحقق ما يلي:

- أياً كان $a,b \in A$ فإن $a-b \in A$.
- أياً كان $a \in A$ و $r \in R$ فإن $ar \in A$.

3 - الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة A مثالياً في R هو أن يتحقق ما يلي:

- أياً كان $a,b \in A$ فإن $a-b \in A$.
- أياً كان $a \in A$ و $r_1,r_2 \in R$ فإن $r_1ar_2 \in A$.

البرهـــان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن A مثالي يساري في R. ولما كانت $(A,+)$ زمرة جزئية من $(R,+)$ فإنه أياً كان $a,b \in A$ فإن $a-b \in A$. من جهة أخرى أيا كان $a \in A$ و $r \in R$ فإن $ra \in rA \subseteq A$.

كفاية الشرط. بما أنه أياً كان $a,b \in A$ فإن $a-b \in A$ نجد أن الثنائية $(A,+)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$. لنبرهن على أن $rA \subseteq A$ وذلك أياً كان $r \in R$. ليكن $x \in rA$ عندئذ فإن x عبارة عن مجموع منته من الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} ra_i$ حيث $a_i \in A$ أيا كان $i = 1,2,\cdots,n$. وبما أنه أياً كان $r \in R$ و $a \in A$ فإن $ra \in A$ نجد أن $ra_i \in A$ حيث $i = 1,2,\cdots,n$. ولما كانت $(A,+)$ زمرة جزئية من $(R,+)$ فهي مغلقة بالنسبة إلى عملية الجمع وبالتالي يكون $x = \sum_{i=1}^{n} ra_i \in A$ وهذا يبين لنا أن $rA \subseteq A$. مما سبق نجد أن A مثالي يساري في R.

بشكل مشابه تماماً يتم البرهان على (2) و(3).

ملاحظـــة.

إذا كانت الحلقة R تبديلية فإن كل مثالي يساري (يميني) فيها يكون مثالياً.

أمثلـــة.

1 - في أي حلقة R كل من $R,\{o\}$ يشكل مثالياً في R. نسمي المثالي $\{o\}$ بالمثالي الصفري (التافه).

2 - لتكن R حلقة و $a \in R$. إن المجموعة $aR = \{ar : r \in R\}$ هي مثالي يميـــني في R. يسمى المثالي اليميني الرئيسي المولد بالعنصر a.

ولما كان $a = a1 \in aR$ نجد أن $aR \neq \Phi$. ليكن $x, y \in aR$ عندئذ يوجد $r_1, r_2 \in R$ بحيث $x = ar_1,\ y = ar_2$ ومنه $x - y = ar_1 - ar_2 = a(r_1 - r_2) \in aR$ وهذا يبين لنا أن المجموعة aR زمرة جزئية من الزمـرة $(R, +)$. لـيكن $z \in aR$ و $r \in R$ عندئذ يوجد $r_o \in R$ بحيث $z = ar_o$ وأن $zr = (ar_o)r = a(r_o r) \in aR$.

3 - لتكن R حلقة $a \in R$ إن المجموعة $Ra = \{ra : r \in R\}$ هي مثالي يساري في R. يسمى المثالي اليساري الرئيسي المولد بالعنصر a. ويبرهن على ذلك بطريقـــة مشابهة للمثال (2).

4 - من أجل أي عدد صحيح موجب n فإن المجموعة nZ تشكل مثالياً في Z. لأنه حسب المثال (2) المجموعة nZ تشكل مثالياً يمينياً في Z ولما كانـــت الحلقـــة Z تبديلية فإن nZ يشكل مثالياً في Z.

5 - لتكن R حلقة و $a \in R$. عندئذ المجموعة $RaR = \{\sum x_i a y_i : x_i, y_i \in R\}$ حيث إن كل عنصر من المجموعة السابقة عبارة عن مجموع منته تشكل مثالياً في R يسمى المثالي الرئيسي المولد بالعنصر a. بما أن $a = 1a1 \in RaR$ فإن المجموعة RaR غير خالية. ليكن $\alpha, \beta \in RaR$ عندئذ $\alpha = \sum x_i a y_i$ و $\beta = \sum x'_i a y'_i$ حيث $x_i, x'_i, y_i, y'_i \in R$. بما أن كلاً من α, β عبارة عن مجاميع منتهية لعناصر من الشكل $x_i a y_i$ فإن كل من $\alpha - \beta$ و $r_1 \alpha r_2$ هو عبارة عن مجموع منتهي لعناصر من الشكل

x_1ay_1 وبالتالي كل منهما عنصر من RaR وذلك أياً كان $r_1, r_2 \in R$. مما سبق نجد أن المجموعة RaR مثالي في R .

6 - لتكن R حلقة و $a \in R$. إن المجموعة $r(a) = \{x : x \in R;\ ax = o\}$ تشكل مثالياً يمينياً في R يسمى العادم اليميني للعنصر a في R . بما أن $ao = o$ عندئذ $o \in r(a)$ وبالتالي فإن المجموعة $r(a)$ غير خالية. ليكن $x, y \in r(a)$ ، عندئذ $a(x-y) = ax - ay = o$ وبالتالي فإن $x - y \in r(a)$. ليكن $r \in R$ عندئذ $a(xr) = (ax)r = or = o$ وبالتالي $xr \in r(a)$. مما سبق نجد أن المجموعة $r(a)$ تشكل مثالياً يمينياً في R .

7 - لتكن R حلقة و $a \in R$. إن المجموعة $l(a) = \{y : y \in R;\ ya = o\}$ تشكل مثالياً يسارياً في R يسمى العادم اليساري للعنصر a في R .

يبرهن على ذلك بطريقة مشابهة للمثال (6).

8 - لتكن R حلقة و $M_2(R)$ حلقة المصفوفات فوق الحلقة R . إن المجموعة

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$$

هي مثالي يساري في الحلقة $M_2(R)$.

بما أن $\begin{bmatrix} o & o \\ o & o \end{bmatrix} \in I$ فإن المجموعة I غير خالية. ليكن $\begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & o \\ b_1 & o \end{bmatrix} \in I$ عندئذ فإن $\begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & o \\ b_1 & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a_1 & o \\ b-b_1 & o \end{bmatrix} \in I$. من جهة أخرى ليكن

$\begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix} \in I$ و $\begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} \in M_2(R)$ عندئذ

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & o \\ b & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+yb & o \\ za+rb & o \end{bmatrix} \in I$$

مما سبق نجد أن المجموعة I هي مثالي يساري في $M_2(R)$.

9 - لتكن R حلقة و $M_2(R)$ حلقة المصفوفات فوق الحلقة R . إن المجموعة

$$J=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ o & o \end{bmatrix} : a,b \in R\right\}$$

هي مثالي يميني في الحلقة $M_2(R)$. يبرهن على ذلك بطريقة مشابهة للمثـــال رقـــم (8).

التمهيدية الآتية تبين لنا بنية المثاليات في الحلقة.

تمهيديـــة 2 -1 -3.

لتكن R حلقة. كل مثالي يساري (يميني) في R هو حلقة جزئية في R.

البرهـــان.

نتركه للقارئ كتمرين.

التمهيدية الآتية تعطينا إحدى الخواص للمثاليات اليسارية (اليمينية) الرئيسية المولدة بعنصر.

تمهيديـــة 2 -1 -4.

لتكن R حلقة و $a \in R$. عندئذ:

1 - المثالي اليساري Ra هو أصغر مثالي يساري في R يحوي العنصر a.

2 - المثالي اليميني aR هو أصغر مثالي يميني في R يحوي العنصر a.

3 - المثالي RaR هو أصغر مثالي في R يحوي العنصر a.

البرهـــان.

1 - ليكن A مثالياً يسارياً في R يحوي العنصر a. ولما كان $a \in A$ وكان A مثالياً يسارياً في R عندئذ أياً كان $r \in R$ فإن $ra \in A$ وبالتالي يكون $Ra \subseteq A$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري Ra هو أصغر مثالي يساري في R يحوي العنصر a.

2 - يبرهن بطريقة مشابهة.

3 - ليكن B مثالياً في R يحوي العنصر a. ولما كان $a \in B$ وكان B مثالياً في R عندئذ أياً كان $r_1, r_2 \in R$ فإن $r_1 a r_2 \in B$ وبالتالي $RaR \subseteq B$. وهذا يبـــين لنـــا أن المثالي RaR هو أصغر مثالي في R يحوي العنصر a.

2 - 2. العمليات على المثاليات.

لندرس الآن بعض العمليات على المثاليات وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 2-2-1.

لتكن R حلقة و $\Gamma=\{A_i : i\in I\}$ جماعة غير خالية من المثاليات اليسارية (اليمينية) في R. عندئذ:

1 - المجموعة $\bigcap_{i\in I}A_i$ مثالي يساري (يميني) في R.

2 - إذا كانت الجماعة Γ مرتبة كلياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء عندئذ المجموعة $\bigcup_{i\in I}A_i$ هي مثالي يساري (يميني) في R.

البرهان.

1 - بما أن تقاطع أي جماعة غير خالية من الزمر الجزئية من الزمرة $(R,+)$ هو زمرة جزئية في $(R,+)$ فإن $\bigcap_{i\in I}A_i$ هو زمرة جزئية في الزمرة $(R,+)$. من جهة أخرى أياً كان $r\in R$ و أيا كان $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$ عندئذ $x\in A_i$ وذلك أياً كان $i\in I$. ولما كان A_i مثالياً يسارياً في R نجد أن $rx\in A_i$ وذلك أياً كان $i\in I$. ومنه $rx\in\bigcap_{i\in I}A_i$. مما سبق نجد أن $\bigcap_{i\in I}A_i$ مثالي يساري في R.

2 - بما أنه أياً كان $i\in I$ فإن A_i زمرة جزئية من $(R,+)$ ولما كانت المجموعة Γ مرتبة كلياً فإن $\bigcup_{i\in I}A_i$ هو زمرة جزئية في $(R,+)$. من جهة أخرى أيا كان $r\in R$ و أيا كان $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$ فإنه يوجد دليل $j\in I$ بحيث $y\in A_j$ ولما كان A_j مثالياً يسارياً في R فإن $ry\in A_j$ وبذلك يكون $ry\in A_j\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$. وهذا يبين لنا أن المجموعة $\bigcup_{i\in I}A_i$ مثالي يساري في R. ∎

ملاحظـــة.

إن اجتماع مثاليين يساريين (يمينيين) ليس بالضرورة مثالياً يسارياً (يمينياً) ويعود السبب في ذلك إلى أن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة زمرة جزئية.

نتابع دراستنا للعمليات على المثاليات وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2-2-2.

لتكن $(R,+,.)$ حلقة. عندئذ:

1 - إذا كان A,B مثاليين يساريين (يمينيين) في R فإن:

- $A+B$ مثالي يساري (يميني) في R.
- AB مثالي يساري (يميني) في R.

2 - إذا كان K مثالياً يسارياً في R و L مثالياً يمينياً في R عندئذ فـــإن KL هـــو مثالي في R.

3 - إذا كان M,N مثاليين في R فإن $NM \subseteq N \cap M$.

البرهـــان.

1 - ليكن A,B مثاليين يساريين في R.

- نعلم أن $A+B=\{a+b;a\in A,b\in B\}$. ولما كان A,B مثاليين يـــساريين في R فإن كلاً من A,B مجموعات غير خالية ومنه فإن $A+B$ مجموعـــة غيـــر خالية. ليكن $x,y\in A+B$ عندئذ $x=a+b,\ y=a_1+b_1$ حيث $a,a_1\in A$ و $b,b_1\in B$ ومنه $x-y=(a+b)-(a_1+b_1)=(a-a_1)+(b-b_1)\in A+B$.

من جهة أخرى أياً كان $r\in R$ فـــإن $rx=r(a+b)=ra+rb\in A+B$ وهـــذا يبين لنا أن المجموعة $A+B$ هي مثالي يساري في R.

- نعلـــم أن $AB=\{\sum a_ib_i : a_i\in A,b_i\in B\}$ حيـــث إن كـــل عنـــصر مـــن المجموعة السابقة عبارة عن مجموع منته. إن المجموعة AB غير خالية لأن كلاً من A,B مجموعات غير خالية.ليكن $x,y\in AB$ عندئذ

$$x=\sum a_ib_i,\ y=\sum a'_ib'_i$$

حيث $a_i, a_i' \in A$, $b_i, b_i' \in B$ والمجاميع السابقة منتهية. ومنه

$$x - y = (\sum a_i b_j) - (\sum a_i' b_i') = (\sum a_i b_i) + (\sum -(a_i' b_i')) =$$
$$= (\sum a_i b_i) + (\sum (-a_i') b_i')$$

ولما كان كل من $\sum a_i b_i$ و $\sum a_i' b_i'$ عبارة عن مجموع منته فإن $(\sum a_i b_i) + (\sum (-a_i') b_i')$ يمثل أيضاً مجموع منته لجداءات المضروب الأول في كل حد منها ينتمي إلى A والمضروب الثاني ينتمي إلى B. وهذا يبين لنا أن $x - y \in A.B$. من جهة أخرى أياً كان $r \in R$ فإن

$$rx = r(\sum a_i b_i) = \sum r(a_i b_i) = \sum (ra_i) b_i \in A.B$$

مما سبق نجد أن $A.B$ مثالي يساري في R.

2 - لنفرض أن K مثالي يساري في R وأن L مثالي يميني في R. ولما كان كل من K, L مجموعات غير خالية فإن الجداء KL هو أيضاً مجموعة غير خالية. ليكن $x, y \in KL$ عندئذ $x = \sum a_i b_i$, $y = \sum a_i' b_i'$ وحيث أن المجاميع السابقة منتهية وأن $a_i, a_i' \in K$, $b_i, b_i' \in L$. ومنه

$$x - y = (\sum a_i b_j) - (\sum a_i' b_i') = (\sum a_i b_i) + (\sum -(a_i' b_i')) =$$
$$= (\sum a_i b_i) + (\sum (-a_i') b_i')$$

وبما أن كلاً من $\sum a_i b_i$ و $\sum a_i' b_i'$ عبارة عن مجموع منته فإن $(\sum a_i b_i) + (\sum (-a_i') b_i')$ يمثل أيضاً مجموع منته لجداءات المضروب الأول في كل حد منها ينتمي إلى K والمضروب الثاني ينتمي إلى L. وهذا يبين لنا أن $x - y \in K.L$. من جهة أخرى أياً كان $r_1, r_2 \in R$ فإن

$$r_1 x r_2 = r_1 (\sum a_i b_i) r_2 = \sum r_1 (a_i b_i) r_2 = \sum (r_1 a_i)(b_i r_2)$$

وبما أن K مثالي يساري في R فإن $r_1 a_i \in K$ وأن L مثالي يميني في R فإن $b_i r_2 \in L$ وهذا يعني أن $r_1 x r_2 \in K.L$. مما سبق نجد أن KL هو مثالي في R.

3 - لنفرض أن M, N مثاليان في R. عندئذ حسب التمهيدية (2-2-1) فإن $N \cap M$ مثالي في R. وحسب (2) من التمهيدية (2-2-2) يكون $N.M$ مثالياً في R. ليكن $x \in NM$ عندئذ $x = \sum a_i b_i$ حيث $a_i \in N, b_i \in M$ وهذا

المجموع منته. كما أن $a_i b_i \in NM \subseteq NR \subseteq N$ ولما كانت N زمرة بالنسبة لعملية الجمع فهي مغلقة بالنسبة لهذه العملية وبالتالي $x = \sum a_i b_i \in N$. كذلك الأمر فإن $a_i b_i \in NM \subseteq RM \subseteq M$ ولكون M زمرة بالنسبة لعملية الجمع فإن $x = \sum a_i b_i \in M$. مما سبق نجد أن $x \in N \cap M$ وبالتالي $NM \subseteq N \cap M$.

إن عمليتي جمع وضرب المثاليات اليسارية (اليمينية) الواردة في التمهيدية (2-2-2) يمكن تعميمها لأجل أي عدد منته من المثاليات اليسارية (اليمينية) وهذا ما توضحه لنا التمهيدية الآتية:

تمهيدية 2-2-3.

لتكن R حلقة و $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينية) في R. عندئذ:

1 - المجموعة $\{\sum_{i=1}^{n} a_i : a_i \in A_i \; ; 1 \le i \le n\} = \sum_{i=1}^{n} A_i$ هي مثالي يساري (يميني) في R.

2 - المجموعة $\{\sum a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} : \; a_{i_j} \in A_j \; ; 1 \le j \le n\} = \prod_{i=1}^{n} A_i$ هي مثالي يساري (يميني) في R. حيث إن كل عنصر من المجموعة $\prod_{i=1}^{n} A_i$ هو مجموع منته.

البرهان.

لنفرض أن $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية في R.

1 - بما أن كلاً من المجموعات A_i هي مجموعة غير خالية أياً كان $1 \le i \le n$ فإن المجموعة $\sum_{i=1}^{n} A_i$ غير خالية. ليكن $x, y \in \sum_{i=1}^{n} A_i$ و $r \in R$ عندئذ $x = \sum_{i=1}^{n} a_i$ و $y = \sum_{i=1}^{n} b_i$ حيث $a_i, b_i \in A_i$ أياً كان $1 \le i \le n$. ومنه

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} (-b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \in \sum_{i=1}^{n} A_i$$

وذلك لأن $a_i - b_i \in A_i$ أياً كان $1 \le i \le n$ كما أن

$$rx = r(\sum_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} (ra_i) \in \sum_{i=1}^{n} A_i$$

وذلك لأن $ra_i \in A_i$ أياً كان $1 \le i \le n$. مما سبق نجد أن المجموعة $\sum_{i=1}^{n} A_i$ هي مثالي يساري في R.

2 - ليكن $x_o, y_o \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ و $r_o \in R$ عندئذ

$$x_o = \sum c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n} \text{ و } y_o = \sum d_{i_1} d_{i_2} \cdots d_{i_n}$$

حيث إن المجاميع السابقة منتهية وأن $c_{i_j}, d_{i_j} \in A_j$ أياً كان $1 \le i \le n$. ومنه

$$x_o - y_o = \sum c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n} - \sum d_{i_1} d_{i_2} \cdots d_{i_n} = \sum c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n} +$$
$$+ \sum (-d_{i_1}) d_{i_2} \cdots d_{i_n} \in \prod_{i=1}^{n} A_i$$

كما أن

$$r_o x_o = r_o (\sum c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n}) = \sum r_o (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_n}) =$$
$$= \sum (r_o c_{i_1}) c_{i_2} \cdots c_{i_n} \in \prod_{i=1}^{n} A_i$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $\prod_{i=1}^{n} A_i$ هي مثالي يساري في R.

بعض الخواص للمثاليات اليسارية (اليمينية) نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 2-2-4.

لتكن R حلقة و A مثالياً يسارياً في R و B مثالياً يمينياً في R. عندئذ:

1 - $R = A$ عندما وفقط عندما $1 \in A$.

2 - $R = B$ عندما وفقط عندما $1 \in B$.

3 - إذا وجد في A عنصر قابل للقلب من اليسار فإن $R = A$.

4 - إذا وجد في B عنصر قابل للقلب من اليمين فإن $R = B$.

البرهـــان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن $1 \in A$ عندئذ أيـاً كـان $x \in R$ فـإن $x = x1 \in A$ وبالتالي يكون $R \subseteq A$ أي أن $R = A$. كفاية الشرط واضح.

2 - يبرهن بطريقة مشابهة.

3 - لنفرض أن A يحوي عنصراً قابلاً للقلب من اليسار ولـيكن a عندئـذ يوجـد $b \in R$ بحيث $ba = 1$ ومنه $1 = ba \in A$ وحسب (1) نجد أن $R = A$.

4 - يبرهن بطريقة مشابهة.

ينتج من التمهيدية الأخيرة أنه إذا كان A مثالياً يسارياً (يمينياً) في حلقـة مـا R ويحوي عنصراً قابلاً للقلب فإن $R = A$.

نتيجة مهمة أخرى يمكن الحصول عليها من التمهيدية السابقة نوردها مـن خـلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2 -2 -5.

إذا كان F حقلاً فإن F يحوي مثاليين اثنين فقط هما $\{0\}$ و F.

البرهـــان.

ليكن F حقلاً و A مثالياً في F. إذا كان $A = \{0\}$ يتم المطلـوب. لنفـرض أن $A \neq \{0\}$ عندئذ يوجد عنصر $a \in A$ مغاير للصفر ولما كان F حقل فإن العنـصر a يملك مقلوب في F وحسب التمهيدية (2 -2 -4) يكون $A = F$.

توجد علاقة مهمة بين عمليتي جمع وتقاطع المثاليات اليسارية (اليمينية) نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2 -2 -6.

لنفرض أن D, B, A مثاليات يسارية (يمينية) في الحلقة R. إذا كان $A \subseteq D$ عندئذ

$$A + (B \cap D) = (A + B) \cap D$$

البرهـــان.

لنفـــرض أن A, B, D مثاليـــات يـــسارية فـــي الحلقـــة R وأن $A \subseteq D$. لـــيكن $x \in A+(B \cap D)$ عندئذ $x = a+b$ حيث $a \in A$ و $b \in B \cap D$. ولما كـــان $b \in B$ فإن $x = a+b \in A+B$. مـــن جهـــة أخـــرى بمـــا أن $b \in D$ وكـــان $a \in A \subseteq D$ نجد أن $x = a+b \in D$. مما ســـبق نجـــد أن $x \in (A+B) \cap D$ وبالتالي يكـــون $A+(B \cap D) \subseteq (A+B) \cap D$. لـــيكن $y \in (A+B) \cap D$ عندئذ $y \in D$ كذلك $y \in A+B$ وبالتالي $y = c+d$ حيـــث $c \in A, d \in B$ وبما أن $A \subseteq D$ فإن $c \in D$ ومنه $d = y-c \in D$ وهكذا نجد أن $d \in B \cap D$ ومنـــــه $y = c+d \in A+(B \cap D)$ أي إن $(A+B) \cap D \subseteq A+(B \cap D)$. مما سبق نجد أن $A+(B \cap D) = (A+B) \cap D$. ₀

إن كلاً من عمليتي جمع المثاليات وتقاطعها تتمتع بعدد من الخواص المهمة نـــورد بعضاً منها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2-2-7.

لتكن R حلقة وليكن A, B مثاليين يساريين (يمينيين) في R. عندئذ:

1 - $A+B$ هو أصغر مثالي يساري (يميني) في R يحوي كلاً من A و B.

2 - $A \cap B$ هو أكبر مثالي يساري (يميني) في R محتوى في كل من A و B في آن واحد.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن A, B مثاليان يساريان في R عندئذ وحسب التمهيدية (2-2-2) فإن $A+B$ هو مثالي يساري في R كما أن $A, B \subseteq A+B$ لأنه أياً كان $a \in A$ فإن $a = a+o \in A+B$ و أياً كان $b \in B$ فإن $b = o+b \in A+B$. ليكن K مثاليـــاً يسارياً في R يحوي كلاً من A و B وليكن $x \in A+B$ عندئذ $x = a_1+b_1$ حيث $a_1 \in A$ و $b_1 \in B$ ولما كان $A, B \subseteq K$ فإن $x = a_1+b_1 \in K$ وهذا يبين لنا أن

$A+B \subseteq K$. وهكذا نجد أن $A+B$ هو أصغر مثالي يساري في R يحوي كلاً من A و B.

2 - إذا كان A,B مثاليين يساريين في R عندئذ وحسب التمهيدية (2-2-1) فإن $A \cap B$ هو مثالي يساري في R كما أن $A \cap B \subseteq A,B$. ليكن L مثالياً يسارياً في R محتوى في كل من A و B في آن واحد ولـيكن $y \in L$ عندئـذ $y \in A,B$ وبالتالي فإن $y \in A \cap B$ أي أن $L \subseteq A \cap B$. وهذا يبين لنا أن $A \cap B$ هو أكبر مثالي يساري في R محتوى في كل من A و B في آن واحد. ◊

خاصة مهمة أخرى من خواص تقاطع المثاليات نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـة 2-2-8.

لتكن R حلقة و S مجموعة جزئية وغير خالية من R. إن تقاطع جميع المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتي كل منها يحوي S هو مثالي يساري (يميني) في R يحوي S وهو أصغر مثالي يساري (يميني) في R يحوي S.

البرهـان.

لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة المثاليات اليسارية في R والتي كـل منهـا يحـوي S ولنفرض أن $K = \bigcap_{B \in \Im} B$ عندئذ بالاعتماد على التمهيدية (2-2-1) فإن K هو مثالي يساري في R وبما أنه أياً كان $A \in \Im$ فإن $S \subseteq A$ نجد أن $S \subseteq \bigcap_{B \in \Im} B = K$. ليكن H مثاليـاً يـمارياً فـي R يحـوي S عندئـذ يكـون $H \in \Im$ ومنـه فـإن $K = \bigcap_{B \in \Im} B \subseteq H$ وهذا يبين لنا أن K هـو أصـغر مثـالي يـساري فـي R يحوي S. ◊

2 - 3. حلقة الخارج.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. بما أن R تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع فإن A تشكل زمرة جزئية ناظمية في R وبالتالي فإننا نحصل على زمرة الخارج $R/A = \{r + A : r \in R\}$ (راجع بحث زمرة الخارج في كتاب البنى الجبرية (1)). وحيث إن عناصر زمرة الخارج R/A تسمى مرافقات يسارية (يمينية) للزمرة الجزئية A في R. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو كيف يمكن الحصول على حلقة من خلال هذه المرافقات الزمرة حيث يتعين علينا تعريف عملية ضرب على هذه المرافقات تحقق لنا جميع شروط الحلقة الخاصة بالضرب. المبرهنة الآتية تبين لنا كيفية عمل ذلك:

مبرهنة 2-3-1.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. ولنأخذ المجموعة

$$\bar{R} = R/A = \{\bar{r} = r + A : r \in R\}$$

ولنعرف عليها عمليتي جمع $(+)$ وضرب $(.)$ بالشكل الآتي: أياً كان $\bar{x} = x + A,\ \bar{y} = y + A \in \bar{R}$ فإن

$$\bar{x} + \bar{y} = (x + A) + (y + A) = (x + y) + A = \overline{x + y}$$

$$\bar{x}.\bar{y} = (x + A).(y + A) = (x.y) + A = \overline{x.y}$$

عندئذ: 1 - كلاً من العمليتين $(+)$ و $(.)$ داخلية على المجموعة R.

2 - العمليتان $(+)$ و $(.)$ كلتاهما معرفة جيداً على $\bar{R}$.

3 - العملية $(+)$ تبديلية وتجميعية على المجموعة $\bar{R}$.

4 - المجموعة $\bar{R}$ تحوي عنصراً محايداً بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ هو $\bar{0} = 0 + A = A$.

5 - لكل عنصر $\bar{x} = x + A \in \bar{R}$ يوجد نظير بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ هو $-\bar{x} = (-x) + A \in \bar{R}$.

6 - الثنائية $(\bar{R},+)$ زمرة تبديلية.

7 - يوجد في $\bar{R}$ عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب هو $1=1+A\in R$.

8 - عملية الضرب $(.)$ تجميعية على المجموعة $\bar{R}$.

9 - عملية الضرب $(.)$ توزيعية على الجمع $(+)$ من اليمين واليسار.

10 - الثلاثية $(\bar{R},+,.)$ حلقة واحدية.

البرهان.

1 - واضح من خلال تعريف عمليتي الجمع $(+)$ والضرب $(.)$ أن كلاً من هاتين العمليتين هي عملية داخلية (ثنائية) على المجموعة $\bar{R}$.

2 - لتكن $\bar{x}=\bar{y}\ ,\ \bar{x}_1=\bar{y}_1$ تحقق $\bar{x},\bar{y},\bar{x}_1,\bar{y}_1\in\bar{R}$.

لنبرهن أولاً على أن عملية الجمع معرفة جيداً أي لنبرهن على أن $\bar{x}+\bar{x}_1=\bar{y}+\bar{y}_1$. بما أن $\bar{x}=\bar{y}$ عندئذ $x+A=y+A$ حيث $x,y\in R$ ومنه

$$(x-y)+A=(x+(-y))+A=(x+A)+(-y+A)=(y+A)+$$
$$+(-y+A)=(y-y)+A=o+A=A$$

وهذا يبين لنا أن $x-y\in A$ وبالتالي يوجد $a\in A$ بحيث $x-y=a$ ومنه $x=y+a$. من جهة أخرى بما أن $\bar{x}_1=\bar{y}_1$ فإنه وبطريقة مشابهة نجد أنه يوجد عنصر $b\in A$ بحيث $x_1=y_1+b$ ومنه

$$\bar{x}+\bar{x}_1=(x+A)+(x_1+A)=(x+x_1)+A=(y+a+y_1+b)+A=$$
$$=[(y+y_1)+(a+b)]+A=[(y+y_1)+A]+[(a+b)+A]=$$
$$=(y+A)+(y_1+A)+A=(y+A)+(y_1+A)=\bar{y}+\bar{y}_1$$

لنبرهن الآن على أن عملية الضرب معرفة جيداً أي لنبرهن على أن $\bar{x}\,\bar{x}_1=\bar{y}.\bar{y}_1$.

$$\bar{x}\,\bar{x}_1=(x+A).(x_1+A)=(x.x_1)+A=(y+a).(y_1+b)+A=$$
$$=(y.y_1+yb+ay_1+ab)+A=[(y.y_1)+A]+[(yb+ay_1+ab)+A]$$

ولما كان A مثالياً في R فإن العناصر $yb,ay_1,ab\in A$ وبالتالي $yb+ay_1+ab\in A$ ومنه

$$\bar{x}\,\bar{x}_1 = (x+A).(x_1+A) = (x\,x_1)+A = [(yy_1)+A]+A = (yy_1)+A =$$
$$= (y+A).(y_1+A) = \bar{y}\,\bar{y}_1$$

3 - لتكن $\bar{x},\bar{y} \in \bar{R}$ عندئذ

$$\bar{x}+\bar{y} = (x+A)+(y+A) = (x+y)+A = (y+x)+A =$$
$$= (y+A)+(x+A) = y+x$$

حيث $x, y \in R$. وهذا يبين لنا أن عملية الجمع $(+)$ تبديلية.

وكذلك هي تجميعية لأنه أياً كان $x, y, z \in \bar{R}$ فإن

$$(x+y)+\bar{z} = [(x+A)+(y+A)]+(z+A) = [(x+y)+A]+(z+A) =$$
$$= [(x+y)+z]+A = [x+(y+z)]+A = (x+A)+[(y+z)+A] =$$
$$= (x+A)+[(y+A)+(z+A)] = x+(y+z)$$

حيث $x, y, z \in R$.

4 - إن $\bar{o} = o+A \in \bar{R}$ ومنه أياً كان $\bar{x} = x+A \in R$ فإن

$$\bar{x}+\bar{o} = (x+A)+(o+A) = (x+o)+A = x+A = \bar{x}$$

حيث $x \in R$ وهكذا فإنه يوجد في $\bar{R}$ عنصر محايد هو $\bar{o}$.

5 - ليكن $\bar{x} = x+A \in \bar{R}$ ولما كان $x \in R$ فإنه يوجد $-x \in R$ بحيث $x+(-x) = o$ ومنه $-\bar{x} = (-x)+A \in \bar{R}$ وأن

$$\bar{x}+(-\bar{x}) = (x+A)+(-x+A) = (x+(-x))+A = o+A = \bar{o}$$

وهذا يبين لنا أنه يوجد في R لكل عنصر نظير.

6 - بالاعتماد على ما سبق نجد أن الثنائية $(+, \bar{R})$ زمرة تبديلية.

7 - بما أن الحلقة R واحدية فإن $1 \in R$ وبالتالي $\bar{1} = 1+A$. أياً كان $\bar{x} = x+A \in \bar{R}$ حيث $x \in R$ فإن

$$\bar{1}\,\bar{x} = (1+A)(x+A) = (1x)+A = x+A = \bar{x}$$
$$\bar{x}\,\bar{1} = (x+A)(1+A) = (x1)+A = x+A = \bar{x}$$

وهذا يبين لنا أن العنصر $\bar{1}$ هو عنصر محايد في $\bar{R}$ وذلك بالنسبة لعملية الضرب.

8 - ليكن $\bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \bar{R}$ عندئذ

$$(\bar{x}.\bar{y}).\bar{z} = [(x+A).(y+A)](z+A) = [(x.y)+A].(z+A) =$$
$$= [(x.y)z]+A = [x.(y.z)]+A = (x+A).[(y.z)+A] =$$
$$= (x+A).[(y+A).(z+A)] = \bar{x}.(\bar{y}.\bar{z})$$

حيث $x, y, z \in R$. وهذا يبين لنا أن عملية الضرب $(.)$ تجميعية.

9 - ليكن $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{R}$ عندئذ

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = (a+A)[(b+A)+(c+A)] = (a+A)[(b+c)+A] =$$
$$[a.(b+c)]+A = (ab+ac)+A = (ab+A)+(ac+A) =$$
$$= [(a+A)(b+A)]+[(a+A)(c+A)] = \bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$$

وهذا يبين لنا أن عملية الضرب توزيعية على الجمع من اليسار في $\bar{R}$. بشكل مشابه نبرهن على أن عملية الضرب توزيعية على الجمع من اليمين في $\bar{R}$.

10 - بالاعتماد على ما سبق نجد أن الثلاثية $(\bar{R}, +, .)$ تشكل حلقة واحدية.

تعريف.

لتكن R حلقة و A مثالي في R. وجدنا في المبرهنة السابقة أن المجموعة $\bar{R} = R/A$ تشكل حلقة واحدية نسمي الثلاثية $(\bar{R} = R/A, +, .)$ حلقة الخارج وفق المثالي A.

لنلق نظرة على بعض حلقات الخارج وذلك من خلال الأمثلة الآتية:

أمثلة.

1 - بما أن حلقة الأعداد الصحيحة تبديلية فإن كل مثالي يساري (يميني) فيها هو مثالي وبالتالي أياً كان العدد الصحيح $n > 1$ فإن nZ هو مثالي في Z وأن $nZ \neq Z$ ومنه فإن Z/nZ حلقة غير صفرية. من أجل $n = 6$ يكون

$$Z/6Z = \{0+6Z, 1+6Z, 2+6Z, 3+6Z, 4+6Z, 5+6Z\}$$

وتتم عمليات الجمع والضرب بالشكل الآتي:

$$(2+6Z)+(3+6Z) = (2+3)+6Z = 5+6Z$$
$$(3+6Z)+(4+6Z) = (3+4)+6Z = 7+6Z = (1+6)+6Z =$$
$$= (1+6Z)+(6+6Z) = (1+6Z)$$
$$(2+6Z).(3+6Z) = (2.3)+6Z = 6+6Z = 6Z$$

$$(2+6Z).(5+6Z)=(2.5)+6Z=10+6Z=(4+6)+6Z=$$
$$=(4+6Z)+(6+6Z)=4+6Z$$

إذا كان $n=1$ فإن $\bar{o}=Z=Z/Z=Z/nZ$.

2 - ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً إن nZ مثالي في الحلقة Z وحسب التمهيدية (2-1-3) فإن nZ حلقة جزئية من الحلقة Z وبالتالي فإنه يمكن النظر إليها على أنها حلقة بحد ذاتها.

من أجل $n=2$ نجد أن $2Z$ حلقة فيها المجموعة $6Z$ تشكل مثالياً وبالتالي تكون $6Z/2Z$ حلقة خارج مؤلفة من العناصر.

$$6Z/2Z=\{0+6Z,2+6Z,4+6Z\}.$$

3 - لنأخذ الحلقة $R=\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}:a_i\in Z;i=1,2,3,4\}$ بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات. ولنأخذ المجموعة

$$I=\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}:a_i\in Z;\ a_i mod\ 2=o,i=1,2,3,4\}$$

ولما كان حاصل جمع وجداء عددين صحيحين زوجيين هو عدد صحيح زوجي وأن حاصل جداء أي عدد صحيح بعدد زوجي يكون الناتج عدداً زوجياً نجد أن المجموعة I تشكل مثالياً في الحلقة R (تأكد من ذلك). وهكذا فإن المجموعة R/I هي حلقة خارج وأن

$$R/I=\{\begin{bmatrix}r_1 & r_2\\ r_3 & r_4\end{bmatrix}+I:r_i\in\{0,1\};i=1,2,3,4\}$$

أما كيفية الحصول على عناصر هذه الحلقة فيتم بالشكل الآتي: بما أن $\begin{bmatrix}7 & 8\\ 5 & -3\end{bmatrix}\in R$ فإن $\begin{bmatrix}7 & 8\\ 5 & -3\end{bmatrix}+I\in R/I$ وأن

$$\begin{bmatrix}7 & 8\\ 5 & -3\end{bmatrix}+I=(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 8\\ 4 & -4\end{bmatrix})+I=(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}+I)+$$

$$+\left(\begin{bmatrix}6 & 8\\ 4 & -4\end{bmatrix}+I\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}+I$$

كذلك $\begin{bmatrix}9 & -7\\ 4 & 1\end{bmatrix}+I\in R/I$ وأن

$$\begin{bmatrix}9 & -7\\ 4 & 1\end{bmatrix}+I=\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -8\\ 4 & 0\end{bmatrix}+I\right)=\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+I\right)+$$

$$+\left(\begin{bmatrix}8 & -8\\ 4 & 0\end{bmatrix}+I\right)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+I$$

مما سبق نجد أن المجموعة R/I تتألف من العناصر الآتية:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

تأكد من ذلك.

لنتعرف الآن على بعض خواص حلقة الخارج وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2 -3 -2.

لتكن R حلقة و I مثالي في R. عندئذ:

1 - إذا كانت الحلقة R تبديلية فإن حلقة الخارج $\overline{R}=R/I$ تبديلية.

2 - الشرط اللازم والكافي كي تكون حلقة الخارج تبديلية هو أن يتحقق الشرط الآتي:
أياً كان $a,b\in R$ فإن $ab-ba\in I$.

البرهـــان.

1 - نتركه كتمرين للقارئ.

2 - لزوم الشرط. لنفرض أن الحلقـــة $\overline{R}=R/I$ تبديليـــة وأن $a,b\in R$ عندئـــذ $a+I,b+I\in R/I$ ومنـــــه $(a+I)(b+I)=(b+I)(a+I)$ وبالتـــــالي $ab+I=ba+I$ أي أن $(ab-ba)+I=I$ وهذا يبين لنا $ab-ba\in I$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $ab-ba\in I$ أياً كان $a,b\in R$.

ليكن $x+I, y+I \in R/I$ عندئذ $x, y \in R$ وحسب الفرض فإن $xy - yx \in I$ وبالتالي $(xy - yx)+I = I$ ومنه $xy + I = yx + I$ وهكذا فإن

$$(x+I)(y+I) = (y+I)(x+I)$$

وهذا يبين لنا أن الحلقة $\bar{R} = R/I$ تبديلية.

لنتعرف الآن على المثاليات اليسارية (اليمينية) في حلقات الخارج وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2-3-3.

لتكن R حلقة و A مثالي في R. إن المثاليات اليـــسارية (اليمينيـــة) فـــي حلقـــة الخارج $\bar{R} = R/A$ هي من الشكل $\bar{K} = K/A$ حيث K مثالي يساري (يميني) في R يحقق $A \subseteq K$.

البرهـــان.

ليكن $\bar{K}$ مثالياً يسارياً في $\bar{R}$ ولنبرهن على أن $\bar{K}$ هو من الشكل K/A حيث K مثالي يساري في R وأن $A \subseteq K$. لنأخذ المجموعة

$$K = \{x : x \in R ; x + A \in \bar{K}\}$$

فنجد أن المجموعة K تشكل مثالياً يسارياً في R لأنه:

- لما كان $\bar{K}$ مثالياً يسارياً فـــي $\bar{R}$ فـــإن $\bar{o} = o + A \in \bar{K}$ ومنـــه $o \in K$ أي إن المجموعة K غير خالية.

- ليكن $x, y \in K$ عندئذ $\bar{x} = x + A$, $\bar{y} = y + A \in \bar{K}$ ومنه

$$(x - y) + A = (x + A) - (y + A) = \bar{x} - \bar{y} \in \bar{K}$$

وحسب تعريف المجموعة K نجد أن $x - y \in K$.

- كذلك أياً كان $r \in R$ فإن $\bar{r} = r + A \in \bar{R}$ ومنه

$$rx + A = (r + A)(x + A) = r\bar{x} \in \bar{K}$$

وحسب تعريف المجموعة K نجد أن $rx \in K$. مما سبق نجد أن المجموعة K تشكل مثالياً يسارياً في R. كما أنه أياً كان $a \in A$ فإن $a + A = \bar{o} \in \bar{K}$ وبالتالي فإن

$a \in K$ ومنه فإن $A \subseteq K$. وبما أن K مثالي يساري في R فإن K حلقة ومنه K/A حلقة خارج. لنبرهن على أن $\overline{K} = K/A$. ليكن $\overline{z} = z + A \in K/A$ عندئذ $z \in K$ ومنه حسب تعريف المجموعة K نجد أن $\overline{z} = z + A \in \overline{K}$ أي أن $K/A \subseteq \overline{K}$. من جهة أخرى أياً كان $\overline{b} \in \overline{K} \subseteq R/A$ فإن $\overline{b} = b + A$ حيث $b \in R$ وبما أن $\overline{b} \in \overline{K}$ وحسب تعريف المجموعة K نجد أن $b \in K$ وهذا يبين لنا أن $\overline{b} = b + A \in K/A$ أي أن $\overline{K} \subseteq K/A$. مما سبق نجد أن $\overline{K} = K/A$.

لندرس الآن كيفية الحصول على المثاليات اليسارية (اليمينية) في حلقة الخارج وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2-3-4.

لتكن R حلقة و I مثالياً في R. إذا كان A مثالياً يسارياً (يمينياً) فـي R عندئـذ $A+I/I$ هو مثالي يساري (يميني) في حلقة الخارج R/I.

البرهـــان.

بما أن I مثالي في الحلقة R فإن R/I حلقة خارج. لنفرض أن A مثالي يساري في R عندئذ $A+I$ هو أيضاً مثالي يساري في R وذلك حسب التمهيدية (2-2-2) ولما كان $I \subseteq A+I$ فإنه حسب التمهيدية (2-3-3) يكون $A+I/I$ مثالياً يـساريا في حلقة الخارج R/I.

العلاقة بين المثاليات اليسارية (اليمينية) لحلقة ما وحلقة الخارج لها نوردهـا مـن خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 2-3-5.

لتكن R حلقة و I مثالياً في R ولنفرض أن $\Im$ هي مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتي كل منها يحوي I. ولتكن $\overline{R} = R/I$ حلقة الخارج وأن $\overline{\Im}$ هي مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في الحلقة $\overline{R}$. عندئذ يوجد تطبيق متباين وغامر (تقابل) بين $\Im$ و $\overline{\Im}$ يحافظ على الاحتواء.

البرهـــان.

لنعرف العلاقة $\varphi : \Im \to \overline{\Im}$ بالشكل الآتي: أياً كان $A \in \Im$ فـإن A هـو مثـالي يساري في R يحوي I وحسب التمهيدية (2-3-3) فإن A/I هو مثـالي يـساري في $\overline{R}$ أي $A/I \in \overline{\Im}$. لنضع $\varphi(A) = A/I$ فنجد أن العلاقة φ هي تطبيق لأنه أياً كان $A,B \in \Im$ بحيث $A = B$ فإن $A/I = B/I$ وبالتالي $\varphi(A) = \varphi(B)$. كما أن التطبيق φ متبـاين لأنـه أيـاً كـان $D,K \in \Im$ بحيـث $\varphi(D) = \varphi(K)$ فـإن $D/I = K/I$. ليكن $a \in D$ عندئذ $a+I \in D/I = K/I$ وبالتالي يوجد $b \in K$ بحيث $a+I = b+I$ ومنه $a-b \in I$ ولما كان $I \subseteq K$ فإن $a-b \in K$ وبالتالي يوجد $d \in K$ بحيث $a-b = d$ وهكذا نجـد أن $a = b+d \in K$ أي أن $D \subseteq K$. بطريقة مشابهة نبرهن على أن $K \subseteq D$. مما سبق نجد أن $K = D$ وبالتالي التطبيق φ متباين. لنبرهن على أن التطبيق φ غامر. ليكن $\overline{H} \in \overline{\Im}$ عندئذ $\overline{H}$ هـو مثـالي يساري في الحلقة $\overline{R}$ وحسب التمهيدية (2-3-3) فإن $\overline{H} = H/I$ حيث H هو مثالي يساري في R وأن $I \subseteq H$ ومنه $H \in \Im$ وأن $\varphi(H) = H/I = \overline{H}$. مما سبق نجد أن التطبيق φ هو تقابل.

ليكن $N, M \in \Im$ بحيث $N \subseteq M$ عندئذ $N/I \subseteq M/I$ ومنه $\varphi(N) \subseteq \varphi(M)$ وهذا يبين لنا أن التطبيق φ يحافظ على الاحتواء. ∎

Damascus University

2 - 4 . المجمـــوع المبـــاشـــر للمثـــاليـــات.

وجدنا حسب التمهيدية (2-2-2) أنه إذا كان A,B مثاليين يساريين (يمينيين) في حلقة R فإن $A+B$ هو مثالي يساري (يميني) في R وفي هذه الفقرة سوف ندرس المثالي اليساري (اليميني) $A+B$ عندما يكون $A\cap B=\{o\}$ ومدى تـأثير هـذا المجموع على الحلقة R والبداية ستكون مع التعريف الآتي:

تعريـف.

لتكن R حلقة و $A_1,A_2,\cdots,A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينيـة) فـي الحلقة R. نقول عن المجموع $A=\sum_{i=1}^{n}A_i$ إنه مجموع مباشر إذا أمكن كتابـة كـل عنصر $a\in A$ بصورة وحيدة على النحو $a=a_1+a_2+\cdots+a_n$ حيث $a_i\in A_i$ من أجل جميع القيم $1\le i\le n$.

شرط مكافئ أخر لمفهوم المجموع المباشر نورده من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـة 2-4-1.

لتكن R حلقة و $A_1,A_2,\cdots,A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينيـة) فـي الحلقة R. الشروط الآتية متكافئة:

1 - المجموع $A=\sum_{i=1}^{n}A_i$ هو مجموع مباشر.

2 - أياً كانت العناصر $a_1,a_2,\cdots,a_n$ حيث $a_i\in A_i$ من أجل جميع القيم $1\le i\le n$ والتي تحقق $a_1+a_2+\cdots+a_n=o$ فإن $a_i=o$ من أجل جميع القيم $1\le i\le n$.

3 - $A_j\cap(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}A_i)=\{o\}$ وذلك من أجل جميع القيم $1\le j\le n$.

البرهـان.

(1)$\Leftarrow$(2). لنفـرض أن المجمـوع $A=\sum_{i=1}^{n}A_i$ هـو مجمـوع مباشـر ولـتكن $a_1,a_2,\cdots,a_n$ عناصر تحقق $a_1+a_2+\cdots+a_n=o$ حيث $a_i\in A_i$ من أجل جميـع

القيم $1 \le i \le n$. لما كان $o = \sum_{i=1}^{n} o_i$ حيث $o_i = o \in A_i$ وكان المجموع $\sum_{i=1}^{n} A_i$ هو مجموع مباشر فإن $a_i = o$ من أجل جميع القيم $1 \le i \le n$.

(2) $\Leftarrow$ (3). ليكن $x \in A_j \cap (\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} A_i)$ عندئذ $x = a_j$ حيث $a_j \in A_j$. من جهة أخرى ولما كان $x \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} A_i$ فإن $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_n$ حيث

$a_i \in A_i$ وبما أن $x = a_j$ نجد أن

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + (-a_j) + a_{j+1} + \cdots + a_n = o$$

وحسب الفرض فإن $a_i = o$ من أجل جميع القيم $1 \le i \le n$. وبالتالي يكون $x = a_j = o$ أي أن $A_j \cap (\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} A_i) = \{o\}$ وذلك من أجل جميع القيم $1 \le j \le n$.

(3) $\Leftarrow$ (1). ليكن $a \in \sum_{i=1}^{n} A_i$ ولنفرض أن

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{و} \quad a = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

حيث $a_i, b_i \in A_i$ من أجل جميع القيم $1 \le i \le n$. عندئذ

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) = o$$

ومنه أيا كان $1 \le j \le n$ فإن

$$b_j - a_j = (a_1 - b_1) + \cdots + (a_{j-1} - b_{j-1}) + (a_{j+1} - b_{j+1}) + \cdots + (a_n - b_n)$$

وهذا يبين لنا $b_j - a_j \in A_j \cap (\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} A_i) = o$. وهكذا نجد أن $a_j = b_j$ وذلك من أجل جميع القيم $1 \le j \le n$. وبالتالي فإن كل عنصر $a \in \sum_{i=1}^{n} A_i$ يكتب وبصورة وحيدة على النحو $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ حيث $a_i \in A_i$ من أجل جميع القيم $1 \le i \le n$ أي أن المجموع $\sum_{i=1}^{n} A_i$ هو مجموع مباشر.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية (اليمينية) في R. نرمز عادة للمجموع المباشر للمثاليات $A_1, A_2, \cdots, A_n$ بـــالرمز $\sum_{i=1}^{n} \oplus A_i$ أو $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ ونسمي كل حد A_i حداً مباشراً للمثالي $\sum_{i=1}^{n} \oplus A_i$.

نتيجـــة.

لتكن R حلقة و A مثالياً يـــسارياً (يمينيـــاً) فـــي R. يكـــون المثـــالي اليـــساري (اليميني) A حداً مباشراً في الحلقة R إذا وجد مثالي يساري (يميني) B في R يحقق $R = A \oplus B$.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $a \in R$. نقول عن العنصر a إنه عنصر جامد فـــي R إذا كـــان $a^2 = a$.

ينتج من التعريف مباشرة ما يأتي:

نتيجـــة.

لتكن R حلقة. إذا كان العنصر $a \in R$ عنصراً جامداً فإن العنـــصر $(1-a) \in R$ هو عنصر جامد.

أمثلـــة.

1 - في أي حلقة R كلاً من 1 و o هو عنصر جامد في R.

2 - في الحلقة $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 6 نلاحظ أن كلاً من 3, 4 هي عناصر جامدة في Z_6.

3 - لتكن R حلقة و $M_2(R)$ حلقة المصفوفات فـــوق R. إن العناصـــر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي عناصر جامدة في الحلقة $M_2(R)$.

لنحاول الآن التعرف على بنية الحد المباشر في الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2-4-2.

لتكن R حلقة و A مثالياً يسارياً (يمينياً) في R. الشروط الآتية متكافئة:

1 - المثالي اليساري (اليميني) A هو حد مباشر في R.

2 - يوجد في R عنصر جامد e بحيث $A = Re$ ($A = eR$).

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي اليساري A هو حد مباشر في الحلقة R عندئذ وحسب التعريف يوجد مثالي يساري B في R يحقق $R = A \oplus B$ ومنه يوجد $a,b \in R$ بحيث $1 = a+b$ وبالتالي يكون $a = a^2 + ab$ ولما كان $a - a^2 \in A$ وكان $a - a^2 = ab \in B$ نجد أن $a - a^2 \in A \cap B = \{o\}$ وبالتالي يكون $a^2 = a$ وهذا يبين لنا أن العنصر a هو عنصر جامد في R وأن $a \in A$. ولما كان A مثالياً يسارياً في R عندئذ أياً كان $r \in R$ فإن $ra \in A$ وهذا يبين لنا أن $Ra \subseteq A$. ليكن $y \in A$ ولما كان $1 = a+b$ فإن $y = ya + yb$. من جهة أخرى لما كان $a \in A$, y فإن $y - ya \in A$ كما أن $yb \in B$ وذلك لأن B مثالي يساري في R. وهكذا نجد أن

$$y - ya = yb \in A \cap B = \{o\}$$

ومنه فإن $y - ya = o$ أي أن $y = ya \in Ra$ وبالتالي يكون $A \subseteq Ra$. مما سبق نجد أن $A = Ra$.

(2) $\Leftarrow$ (1). ليكن $e \in R$ عنصراً جامداً بحيث $A = Re$ عندئذ $1-e \in R$ وأن $R(1-e)$ مثالي يساري في R ومنه $Re + R(1-e) \subseteq R$. من جهة أخرى ليكن $z \in R$ بما أن $1 = e + (1-e)$ فإن $z = ze + z(1-e) \in Re + R(1-e)$ وهكذا نجد أن $R \subseteq Re + R(1-e)$. مما سبق نجد أن $R = Re + R(1-e)$. ليكن $x \in Re \cap R(1-e)$ عندئذ $x = re = r_o(1-e)$ حيث $r, r_o \in R$ ومنه

$$x = re = re^2 = r_o(1-e)e = r_o(e-e^2) = r_o(e-e) = o$$

وهذا يبين لنا أن $Re \cap R(1-e) = \{o\}$. مما سبق نجد أن $R = Re \oplus R(1-e)$ أي أن المثالي اليساري $\Lambda = Re$ هو حد مباشر في R.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نستطيع صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

إذا كانت R حلقة و $e \in R$ عنصراً جامداً عندئذ كل من Re و $R(1-e)$ هي حدود مباشرة في R بالإضافة إلى ذلك فإن $R = Re \oplus R(1-e)$.

أمثلة.

1 - لنأخذ حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة إلى عمليتي جمع وضرب الأعداد الصحيحة بالمقاس 6 أي $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. نلاحظ في هذه الحلقة أن العناصر 4,3 هي عناصر جامدة في Z_6 وأن $1-4=3$. بالاعتماد على النتيجة الأخيرة نجد أن

$$Z_6 = 4Z_6 \oplus 3Z_6$$

وأن $4Z_6 = \{0,2,4\}$ و $3Z_6 = \{0,3\}$ ومنه $Z_6 = \{0,2,4\} \oplus \{0,3\}$.

2 - لنأخذ حلقة الأعداد الصحيحة Z_{10} بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 10 أي إن $Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. إن كلاً من 5,6 هي عناصر جامدة في Z_{10} وأن $1-5=6$. ومنه $Z_{10} = 5Z_{10} \oplus (1-5)Z_{10} = 5Z_{10} \oplus 6Z_{10}$ حيث $5Z_{10} = \{0,5\}$ وأن $6Z_{10} = \{0,2,3,4,6,8\}$. ومنه

$$Z_{10} = \{0,5\} \oplus \{0,2,3,4,6,8\}.$$

3 - نلاحظ أنه في الحلقة Z_5 حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 5 أي $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ لا توجد عناصر جامدة تختلف عن 0 و 1. تأكد من ذلك.

التمهيدية الآتية تبين لنا العلاقة بين العناصر الجامدة في حلقة ما والعناصر الجامدة في حلقة الخارج للحلقة المفروضة:

تمهيديـــة 2-4-3.

لتكن R حلقة و I مثالياً في R. عندئذ:

1 - إذا كان e عنصراً جامداً في الحلقة R فإن $e+I$ هو عنصر جامد فـــي حلقـــة الخارج $\bar{R}=R/I$.

2 - إذا كان A,B مثاليين يساريين (يمينيين) في الحلقة R يحققـــان $R=A\oplus B$ عندئذ $\bar{R}=R/I=(A+I)/I\oplus(B+I)/I$.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن العنصر $e\in R$ هو عنصر جامد عندئذ $e+I\in R/I$ وأن

$$(e+I)^2=(e+I)(e+I)=e^2+I=e+I$$

وهذا يبين لنا أن العنصر $e+I$ هو عنصر جامد في الحلقة $\bar{R}=R/I$.

2 - لنفرض أن A,B مثاليين يساريين في R يحققان $R=A\oplus B$ عندئـــذ حـــسب التمهيدية (2-3-4) فإن $(A+I)/I\,,(B+I)/I$ مثاليات يسارية في حلقة الخارج $\bar{R}=R/I$ وحسب التمهيدية (2-2-2) يكـــون $(A+I)/I+(B+I)/I$ مثاليـــاً يسارياً في $\bar{R}=R/I$ أي أن $(A+I)/I+(B+I)/I\subseteq R/I$.

ليكن $x+I\in R/I$ عندئذ $x\in R=A\oplus B$ وبالتالي يوجد $a\in A\,,b\in B$ بحيث $x=a+b$ ولما كان $a+I\in(A+I)/I\,,\ b+I\in(B+I)/I$ نجد أن

$$x+I=(a+b)+I=(a+I)+(b+I)\in(A+I)/I+(B+I)/I$$

وهذا يبين لنا أن $R/I\subseteq(A+I)/I+(B+I)/I$. مما سبق نجد أن

$$R/I=(A+I)/I+(B+I)/I$$

ولما كان $A\cap B=\{o\}$ فإن $(A+I)/I\cap(B+I)/I=I$ وهذا يبين لنا أن

$$R/I=(A+I)/I\oplus(B+I)/I\,,$$

Damascus University

2 - 5. العـــوادم.

وجدنا في المثال السابق رقم (6) من الفقرة (2-1) أنه إذا كانت R حلقة و $a \in R$ فإن المجموعة $r(a) = \{x : x \in R; ax = o\}$ تشكل مثالياً يمينياً في R. و في المثال رقم (7) من الفقرة (2-1) وجدنا أن المجموعة $l(a) = \{x : x \in R; xa = o\}$ تشكل مثالياً يسارياً في R.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $a \in R$، نسمي المثالي اليساري $l(a)$ العادم اليساري للعنصر a في R و نسمي المثالي اليميني $r(a)$ العادم اليميني للعنصر a في R.

يمكن تعميم المفاهيم السابقة إلى المجموعات غير الخالية في الحلقة وهذا ما سنتعرف عليه من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 2-5-1.

لتكن R حلقة و X مجموعة جزئية وغير خالية في R. عندئذ:

1 - المجموعة $l(X) = \{a : a \in R;\ \ ax = o; \forall x \in X\}$ تشكل مثالياً يسارياً في R.

2 - المجموعة $r(X) = \{b : b \in R;\ \ xb = o; \forall x \in X\}$ تشكل مثالياً يمينياً في R.

البرهـــان.

1 - بما أن $ox = o$ أياً كان $x \in X$ فإن $o \in l(X)$ وبالتالي فإن المجموعة $l(X)$ غير خالية. ليكن $a,b \in l(X)$ عندئذ أياً كان $x \in X$ فإن $ax = bx = o$ ومنه

$$(a-b)x = ax - bx = o$$

أي أن $a-b \in l(X)$. من جهة أخرى، أياً كان $r \in R$ فإن $(ra)x = r(ax) = ro = o$ وذلك $\forall x \in X$ ومنه $ra \in l(X)$. مما سبق نجد أن المجموعة $l(X)$ تشكل مثالياً يسارياً في R.

2 - يبرهن بشكل مشابه.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و X مجموعة جزئية وغير خالية في R، نسمي المثالي اليساري $l(X)$ العادم اليساري للمجموعة X في R و نسمي المثالي اليميني $r(X)$ العادم اليميني للمجموعة X في R.

لندرس الآن بعض الخواص لعادم المجموعة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 2-5-2.

لتكن R حلقة و X, Y مجموعات جزئية وغير خالية في R. عندئذ:

1 - إذا كان $X \subseteq Y$ فإن $l(Y) \subseteq l(X),\quad r(Y) \subseteq r(X)$.

2 - $X \subseteq l(r(X)),\quad X \subseteq r(l(X))$.

3 - $l(r(l(X))) = l(X),\quad r(l(r(X))) = r(X)$.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن $X \subseteq Y$ ولنبرهن على أن $l(Y) \subseteq l(X)$. ليكن $a \in l(Y)$ عندئذ $ay = o$ وذلك $\forall y \in Y$ ولما كان $X \subseteq Y$ فإنه أياً كان $x \in X$ فإن $x \in Y$ وبالتالي $ax = o$، وهذا يبين لنا أن $a \in l(X)$ وبالتالي $l(Y) \subseteq l(X)$. بشكل مشابه نبرهن أن $r(Y) \subseteq r(X)$.

2 - لنبرهن على أن $X \subseteq r(l(X))$. ليكن $b \in l(X)$ عندئذ أياً كان $x \in X$ فإن $bx = o$ وبما أنه أياً كان $b \in l(X)$ فإن $bx = o$ نجد أن $x \in r(l(X))$ وذلك $\forall x \in X$ وهذا يبين لنا أن $X \subseteq r(l(X))$. بشكل مشابه نبرهن أن $X \subseteq l(r(X))$.

3 - لنبرهن على أن $l(r(l(X))) = l(X)$. لما كانت $l(X)$ مجموعة غير خالية في R فإنه حسب (2) يكون $l(X) \subseteq l(r(l(X)))$. من جهة أخرى، لدينا حسب (2) أن $X \subseteq r(l(X))$ ومنه حسب (1) يكون $l(r(l(X))) \subseteq l(X)$. مما سبق نجد أن $l(r(l(X))) = l(X)$. بشكل مشابه نجد أن $r(l(r(X))) = r(X)$.

بعد أن درسنا عوادم المجموعات في الحلقة لندرس الآن عوادم المثاليات اليسارية (اليمينية) في الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 2 -5 -3.

لتكن R حلقة. عندئذ:

1 - إذا كان A مثالياً يسارياً في R فإن $l(A)$ مثالي في R .

2 - إذا كان B مثالياً يمينياً في R فإن $r(B)$ مثالي في R .

3 - إذا كان D مثالياً في R فإن $l(D)\cap r(D)$ مثالي في R .

البرهـــان.

1 - ليكن A مثالياً يسارياً في R . بما أن A مجموعة غير خالية في R فإنه حسب التمهيدية (2 -5 -1) يكون $l(A)$ مثالياً يسارياً في R . للبرهان على أن $l(A)$ مثالي في R يكفي أن نبرهن أنه أياً كان $a\in R$ وأياً كان $x\in l(A)$ فإن $xa\in l(A)$.

ليكن $y\in A$ عندئذ وبما أن A مثالي يساري في R فإن $ay\in A$ ومنه فإن $x(ay)=xo=o$ وذلك لأن $x\in l(A)$ وهذا يبين لنا أن $(xa)y=$ $xa\in l(A)$.

مما سبق نجد أن $l(A)$ مثالي في R .

2 - يبرهن بطريقة مشابهة.

3 - ليكن D مثالياً في R . عندئذ فإن D مثالي يساري ويميني بآن واحد في R ، ومنه حسب (1) و (2) فإن كلاً من $l(D), r(D)$ يكون مثالياً في R وحسب التمهيدية (2 -2 -1) فإن $l(D)\cap r(D)$ مثالي في R .

لنورد الآن التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة و D مثالياً في R . نسمي المثالي $l(D)\cap r(D)$ بعادم المثالي D في R ونرمز له $Ann(D)$ أي أن $Ann(D)=l(D)\cap r(D)$.

تمـــاريـــن محلـــولـــة (2)

1 - لتكن R حلقة تبديلية وواحدية وليكن A,B مثاليين في R يحققان $R = A+B$.
أثبت أن $AB = A \cap B$.

الحـــل .

وجدنا حسب التمهيدية(2-2-2) أن $AB \subseteq A \cap B$. لنبرهن على الاحتواء المعاكس. بما أن $R = A+B$ وأن $1 \in R$ عندئذ يوجد $a \in A,\ b \in B$ بحيث $1 = a+b$. ليكن $x \in A \cap B$ عندئذ $x = ax+bx = ax+xb$ وذلك لأن الحلقة R تبديلية. بما أن $x \in B$ وأن $a \in A$ عندئذ $ax \in AB$. من جهة أخرى، لما كان $b \in B$ وكان $x \in A$ عندئذ $xb \in AB$ ، وهذا يبين لنا أن $x = ax+xb \in AB$ ، أي إن $A \cap B \subseteq AB$. مما سبق نجد أن $AB = A \cap B$.

2 - أوجد جميع عناصر الحلقة $3Z/12Z$.

الحـــل.

$$3Z/12Z = \{0+12Z, 3+12Z, 6+12Z, 9+12Z\}$$

جدول الضرب لهذه الحلقة هو

	$0+12Z$	$3+12Z$	$6+12Z$	$9+12Z$
$0+12Z$	$0+12Z$	$0+12Z$	$0+12Z$	$0+12Z$
$3+12Z$	$0+12Z$	$9+12Z$	$6+12Z$	$3+12Z$
$6+12Z$	$0+12Z$	$6+12Z$	$0+12Z$	$6+12Z$
$9+12Z$	$0+12Z$	$3+12Z$	$6+12Z$	$9+12Z$

نلاحظ أن الحلقة $3Z/12Z$ هي حلقة واحدية عنصر الوحدة فيها هو $9+12Z$ بينما الحلقة $3Z$ ليست واحدية.

3 - لتكن $R \neq o$ حلقة تبديلية تحقق الشرط الآتي: أياً كان العنصر $o \neq a \in R$ فإن $aR = R$. أثبت أن الحلقة R تشكل حقلاً.

الحـــل.

بما أن الحلقة R تبديلية وواحدية وتحوي عنصرين على الأقل فيكفي كي تكون الحلقة R حقلاً أن نبرهن أن كل عنصر من R مغاير للصفر يملك مقلوب. ليكن $a \neq 0$ وحسب الفرض فإن $aR = R$ ولما كان $1 \in R$ فإن $1 \in aR$ وبالتالي يوجد $b \in R$ بحيث $ab = 1$ ولكون الحلقة R تبديلية فإن $ab = ba = 1$ أي أن العنصر a قابل للقلب في R وبالتالي فإن الحلقة R هي حقل.

4 - لتكن R حلقة و $a \in R$، ولتكن Σ مجموعة كل المثاليات في R والتي كل منها يحوي العنصر a. إن $Ra = \bigcap_{A \in \Sigma} A$.

الحـــل.

وجدنا حسب التمهيدية (2-1-4) أن المثالي اليساري Ra هو أصغر مثالي يساري في R يحوي العنصر a ومنه أياً كان $A \in \Sigma$ فإن $Ra \subseteq A$ وبالتالي $Ra \subseteq \bigcap_{A \in \Sigma} A$. من جهة أخرى لما كان Ra هو مثالي يساري في R يحوي العنصر a فإن $Ra \subset \Sigma$ ومنه $\bigcap_{A \in \Sigma} A \subseteq Ra$. مما سبق نجد أن $Ra = \bigcap_{A \in \Sigma} A$.

5 - لتكن R حلقة و B, D مثاليات في R. إذا كان $B \subseteq D$ فإن

$Ann(D) \subseteq Ann(B)$.

الحـــل.

لما كان $B \subseteq D$ فإنه حسب المبرهنة (2-5-2) يكون $l(D) \subseteq l(B),\ r(D) \subseteq r(B)$ ومنه $l(D) \cap r(D) \subseteq l(B) \cap r(B)$ وبالتالي يكون $Ann(D) \subseteq Ann(B)$.

6 - لتكن R حلقة و A, B, D مثاليات يسارية (يمينية) في R بحيث $A \subseteq B$. إذا كان $A + D = B + D$ و $A \cap D = B \cap D$ عندئذ $A = B$.

الحـــل.

لتكن A, B, D مثاليات يسارية في R بحيث $A \subseteq B$ وأن $A + D = B + D$ و $A \cap D = B \cap D$. ليكن $b \in B$ عندئذ $b \in B + D = A + D$. ومنه يوجد

$a \in A$ و $d \in D$ بحيث $b = a + d$ وبالتالي $d = b - a$. من جهة أخرى، بما أن $A \subseteq B$ فإن $d = b - a \in B$ ومنه $d = b - a \in B \cap D = A \cap D$ أي أن $d = b - a \in A$ وهكذا نجد أن $b = a + d \in A$. مما سبق نجد أن $B \subseteq A$ وبالتالي $A = B$. ◊

7 - لتكن R حلقة و A, B مثاليين يساريين في R. إن المجموعة

$$(A : B) = \{x : x \in R ; xB \subseteq A\}$$

هي مثالي في R.

الحل.

بما أن $oB = o \in A$ نجد أن المجموعة $(A : B)$ غير خالية. ليكن $x, y \in (A : B)$ عندئذ $xB \subseteq A$, $yB \subseteq A$. لنفرض أن $a \in (x - y)B$ عندئذ يوجد $b \in B$ بحيث $a = (x - y)b$ ومنه $a = (x - y)b = xb - yb$ وبما أن $xb \in xB \subseteq A$ وأن $yb \in yB \subseteq A$ نجد أن $a = xb - yb \in A$ وهذا يبين لنا أن $(x - y)B \subseteq A$ وبالتالي $x - y \in (A : B)$. من جهة أخرى ليكن $r_1, r_2 \in R$ عندئذ $(r_1 x r_2)B = (r_1 x)r_2 B \subseteq (r_1 x)B = r_1(xB) \subseteq r_1 A \subseteq A$ ومنه فإن $r_1 x r_2 \in (A : B)$. مما سبق نجد أن $(A : B)$ مثالي في R. ◊

8 - لتكن R حلقة و $e \in R$ عنصر جامد. عندئذ يكون

$$r(e) = (1 - e)R, \quad l(e) = R(1 - e)$$

الحل.

لنبرهن على أن $r(e) = (1 - e)R$. ليكن $x \in r(e)$ عندئذ $ex = o$ وبما أن $1 = e + (1 - e)$ نجد أن $x = ex + (1 - e)x = (1 - e)x \in (1 - e)R$ ومنه $r(e) \subseteq (1 - e)R$. ليكن $y \in (1 - e)R$ عندئذ يوجد $r \in R$ بحيث $y = (1 - e)r$ ومنه $ey = e(1 - e)r = (e - e^2)r = or = o$ وهكذا نجد أن $y \in r(e)$ وبالتالي يكون $(1 - e)R \subseteq r(e)$. مما سبق نجد أن $r(e) = (1 - e)R$.

بطريقة مشابهة نبرهن على أن $l(e) = R(1 - e)$. ◊

9 - لتكن R حلقة و A, B مثاليات يسارية (يمينية) في R تحقق $A \subseteq B$. إذا كان A هو حد مباشر في R عندئذ A هو حد مباشر في B. أي أن $B = A \oplus K$ حيث K مثالي يساري (يميني) في R محتوى في B.

الحل.

لنفرض أن A, B مثاليات يسارية في R بحيث $A \subseteq B$ ولنفرض أن A حد مباشر في R عندئذ يوجد مثالي يساري D في R يحقق $R = A \oplus D$ ومنه $B \cap D$ هو مثالي يساري في R وأن $B \cap D \subseteq B$ وبالتالي يكون $A + (B \cap D) \subseteq B$. ليكن $b \in B$ عندئذ $b \in R$. من جهة أخرى لما كان $R = A \oplus D$ فإن $b = a + d$ حيث $a \in A$ و $d \in D$ وبما أن $a \in A \subseteq B$ نجد أن $d = b - a \in B$ وأن $d \in D$ وهكذا فإن $d \in B \cap D$. مما سبق نجد أن $b = a + d \in A + (B \cap D)$ ومنه فإن $B \subseteq A + (B \cap D)$ بالاعتماد على ما سبق نجد أن $B = A + (B \cap D)$. من جهة ثانية إن $A \cap (B \cap D) \subseteq A \cap D = \{o\}$ وهكذا فإن $A \cap (B \cap D) = \{o\}$ وهذا يبين لنا أن $B = A \oplus (B \cap D)$ أي أن A هو حد مباشر في B. بفرض أن $B \cap D = K$ فنجد أن K مثالي يساري في R وأن $K \subseteq B$ كما أن $B = A \oplus K$.

10 - لنأخذ حلقة الأعداد الصحيحة Z_{12} بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 12. والمطلوب:

1. أثبت أن $Z_{12} = 4Z_{12} \oplus 9Z_{12}$.
2. أوجد الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$.
3. اكتب الحلقة $Z_{12}/6Z_{12}$ على شكل مجموع مباشر.

الحل.

1 - نعلم أن $Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. نلاحظ أن $4^2 = 4$ وبالتالي فإن العنصر 4 هو عنصر جامد في Z_{12} كما أن $9 = 4 - 1$ هو أيضاً عنصر جامد في

Z_{12}. ومنه $Z_{12} = 4Z_{12} \oplus (1-4)Z_{12}$ وهكذا فإن $Z_{12} = 4Z_{12} \oplus 9Z_{12}$. وأن $4Z_{12} = \{0,4,8\}$ و $9Z_{12} = \{0,3,6,9\}$.

2 - إن $6Z_{12} = \{0,6\}$ هو مثالي في Z_{12}. وبالتالي فإن $Z_{12}/6Z_{12}$ حلقة خارج و أن

$$Z_{12}/6Z_{12} = \{6Z_{12}, 1+6Z_{12}, 2+6Z_{12}, 3+6Z_{12}, 4+6Z_{12}, 5+6Z_{12}\}$$

3 - لما كان $4Z_{12}$ مثالياً في Z_{12} فإنه حسب التمهيدية (2-3-4) فإن كلاً من

$$(9Z_{12}+6Z_{12})/6Z_{12} \quad \text{و} \quad (4Z_{12}+6Z_{12})/6Z_{12}$$

هو مثالي في $Z_{12}/6Z_{12}$ وأن $4Z_{12}+6Z_{12} = \{0,2,4,6,8,10\}$ كما أن $9Z_{12}+6Z_{12} = \{0,3,6,9\}$. وبالتالي يكون

$$(4Z_{12}+6Z_{12})/6Z_{12} = \{6Z_{12}, 2+6Z_{12}, 4+6Z_{12}\}$$

$$(9Z_{12}+6Z_{12})/6Z_{12} = \{6Z_{12}, 3+6Z_{12}\}$$

وهكذا فإن $Z_{12}/6Z_{12} = (4Z_{12}+6Z_{12})/6Z_{12} \oplus (9Z_{12}+6Z_{12})/6Z_{12}$.

11 - لتكن R حلقة و p عدداً أولياً. أثبت أن المجموعة

$$I_p = \{r : r \in R;\ p^n r = o : n \in N^*\}$$

هي مثالي في R.

الحل.

لدينا $p^n o = \underbrace{o+o+\cdots+o}_{p^n \text{ once}} = o$ ومنه $o \in I_p$. ليكن $n \in N^*$ وذلك أياً كان

$x, y \in I_p$ عندئذ يوجد $n, m \in N^*$ تحقق $p^n x = o$ و $p^m y = o$ ومنه

$$p^{n+m}.(x-y) = p^{n+m}x - p^{n+m}y = (p^m p^n)x - (p^m p^n)y =$$

$$= p^m(p^n x) - p^n(p^m y) = o$$

ليكن $r_1, r_2 \in R$ عندئذ

$$p^n(r_1 x r_2) = \underbrace{r_1 x r_2 + r_1 x r_2 + \cdots + r_1 x r_2}_{p^n \text{ once}} = r_1(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{p^n \text{ once}})r_2 =$$

$$= r_1(p^n x)r_2 = o$$

مما سبق نجد أن المجموعة I_p مثالي في R.

تمـــاريـــن (2)

1 - في حلقة الأعداد الصحيحة Z أوجد العدد الصحيح الموجب a الذي يحقق:

I. $aZ = 2Z + 3Z$.

II. $aZ = 3Z + 6Z$.

III. $aZ = nZ + mZ$. حيث n,m أعداد صحيحة موجبة.

2 - في حلقة الأعداد الصحيحة Z أوجد العدد الصحيح الموجب b الذي يحقق:

I. $bZ = (3Z)(4Z)$.

II. $bZ = (6Z)(8Z)$.

III. $bZ = (nZ)(mZ)$. حيث n,m أعداد صحيحة موجبة.

3 - أثبت أن كلاً من المجموعات التالية:

$$A = \{(3x, y):\ \ x, y \in Z\},\quad B = \{(a, o):\ \ a \in Z\}$$

تشكل مثالياً في الحلقة $Z \times Z$.

4 - أوجد جميع عناصر الحلقة $3Z/9Z$ ثم شكل جدول الضرب لهذه الحلقة.

5 - لتكن R حلقة و A, B مثاليات في R تحقق $A \cap B = o$. أثبت أنه أياً كان $a \in A$ و $b \in B$ فإن $ab = o$.

6 - لتكن R حلقة تبديلية وواحدية، ولنفرض أن R لا تحوي مثاليات عدا $\{o\}$ و R . أثبت في هذه الحالة أن الحلقة R تشكل حقلاً.

7 - لنأخذ الحلقة $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}:\ \ a,b,c,d \in Z_2\right\}$ بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات (عمليتي جمع وضرب العناصر بالمقاس 2). أثبت أن المجموعة

$$I = \left\{\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} r:\ \ r \in R\right\}$$

لا تشكل مثالياً في R .

8 - لتكن R حلقة و $A \neq R$ مثالي في R. إذا كانت R منطقة تكاملية ، هل من الضروري أن تكون حلقة الخارج منطقة تكاملية؟

9 - أثبت أن المجموعة $S = \{a+bi : \ a,b \in Z, b \bmod 2 = 0\}$ هي حلقة جزئية في الحلقة $Z[i]$ ولكنها ليست مثالياً فيها.

10 - أثبت أن المجموعة $R = \{0,2,4,6,8\}$ تشكل حقلاً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 10.

11 - لتكن R حلقة و $a \in R$ ولنفرض أن Σ هي مجموعة جميع المثاليات اليمينية في R والتي كل منها يحوي العنصر a. أثبت أن $aR = \bigcap_{B \in \Sigma} B$.

12 - لتكن R حلقة و $a \in R$ ولنفرض أن Γ هي مجموعة جميع المثاليات في R والتي كل منها يحوي العنصر a. أثبت أن $RaR = \bigcap_{D \in \Gamma} D$.

13 - ليكن F حقلاً منتهياً. أثبت أن مجموع جميع عناصر الحقل F يساوي الصفر.

14 - ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. إذا كانت الحلقة Z_n لا تحوي حلقات جزئية عدا $\{0\}$ و Z_n فإن Z_n تكون حقلاً.

15 - لتكن R حلقة و B مثالياً في R. أثبت أن

$$Ann(Ann(Ann(B))) = Ann(B)$$

16 - ليكن n,m أعداد صحيحة موجبة وأن $k = lcm(n,m)$. أثبت أن

$$kZ = nZ \cap mZ$$

17 - لتكن R حلقة و A, B مثاليين يمينيين في R. أثبت أن المجموعة

$$(A : B) = \{x : x \in R ; Bx \subseteq A\}$$

تشكل مثالياً في R.

18 - أوجد جميع عناصر الحلقة R التي هي قابلة للقلب وجامدة في آن واحد.

19 - بفرض أن R منطقة تكاملية. أثبت أن العناصر الجامدة في R هي فقط 0 و 1.

20 - أوجد جميع العناصر الجامدة في الحلقات Z_{30} ، Z_{20} ، Z_{10}.

21 - في الحلقة $Z_3 \oplus Z_6$ أوجد جميع العناصر الجامدة القاسمة للصفر.

22 - لتكن R حلقة تبديلية. أثبت أن مجموعة العناصر الجامدة في الحلقة R مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب المعرفة على الحلقة R.

23 - أوجد جميع قواسم الصفر والعناصر الجامدة في حلقة غاوص الصحيحة بالمقاس 5 أي $Z_5[i]=\{a+ib : a,b\in Z_5,\ i^2=-1\}$.

24 - أثبت أنه إذا كان $1+k$ عنصر جامد في الحلقة Z_n فإن $n-k$ هو أيضاً عنصر جامد في الحلقة Z_n.

25 - ليكن $k\in Z_n$ بحيث $k\neq o$. أثبت أنه إذا كان كلاً من k و $1+k$ عناصر جامدة في الحلقة Z_n فإن $n=2k$.

26 - ليكن p عدداً أولياً و $n>o$ عدداً صحيحاً. أثبت أن العناصر الجامدة في الحلقة Z_{p^n} هي فقط o و 1.

27 - أثبت أن $Z_{18}=9Z_{18}\oplus 10Z_{18}$.

28 - لتكن R حلقة تبديلية تحقق $x^2=x$ أياً كان $x\in R$. أثبت أن $2x=o$ أياً كان $x\in R$.

29 - ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً. أثبت أن عدد العناصر الجامدة في الحلقة Z_n هو دائما عدد زوجي وهذا العدد من الشكل 2^d حيث d هو عدد جميع الأعداد الأولية التي تقسم العدد n.

30 - لنأخذ الحلقة Z_3. ولتكن $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a,b\in Z_3\right\}$. أثبت أن R عبارة عن حقل منته مرتبته 9.

31 - لنفرض أن R حلقة لا تحوي قواسم للصفر وليكن $o\neq b\in R$ يحقق $b^2=b$. أثبت أن العنصر b هو عنصر محايد.

الفصـــــل الثـــــالـــث

التشـــاكـــلات الحـــلقيـــة

إن الفكرة المركزية العامة لكل مفاهيم الجبر الحديث هي فكرة التشاكل *Homomorphism*. وجدنا من خلال دراستنا للزمرة أنه إذا ملكت زمرة ما خاصة معينة ولاختبار أن زمرة أخرى تمتلك هذه الخاصة كنا نستخدم لهذا الاختبار مفهوم التشاكل. وليس من المفاجئ أن مفهوم التشاكل الزمري يمكن تعميمه إلى الحلقة وكما أن مفهوم التشاكل الزمري يحافظ على العمليات المعرفة على الزمرة فإن التشاكل الحلقي أيضاً يحافظ على العمليات المعرفة على الحلقة.

3 - 1. التشـــاكـــلات الحـــلقيـــة.

للتعرف على مفهوم التشاكل الحلقي نورد التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R,S حلقتين. نسمي كل تطبيق $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً إذا حقق الشروط الآتية: أياً كان $a,b \in R$ فإن

1 - $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

2 - $f(ab) = f(a).f(b)$.

حيث إن العمليات في الطرف الأيسر هي عمليات الجمع والضرب المعرفة على الحلقة R وعمليات الجمع والضرب في الطرف الأيمن هي العمليات المعرفة على الحلقة S.

قبل أن نبدأ بدراسة خواص التشاكل الحلقي لنورد التعريف الآتي:

تعريـــف.

ليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً. نسمي المجموعة

$$Ker\, f = \{a : a \in R;\ f(a) = o\}$$

نواة التشاكل الحلقي f .

من خلال المبرهنة الآتية سوف ندرس خواص التشاكل الحلقي والتي سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة.

مبرهنـــة 3 -1 -1.

لتكن R,S حلقتين و $f: R \to S$ تشاكل حلقي عندئذ:

1 - $f(o) = o$.

2 - أياً كان $a \subset R$ فإن $f(-a) = -f(a)$.

3 - إذا كان العنصر $a \in R$ قابلاً للقلب في R ، عندئذ العنصر $f(a)$ قابل للقلب في S وأن $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

4 - أياً كان العدد الصحيح الموجب n فإن $f(a^n) = (f(a))^n$ ، $f(na) = nf(a)$.

5 - إذا كانت A حلقة جزئية في R فإن $f(A)$ حلقة جزئية في S .

6 - إذا كانت الحلقة R تبديلية فإن الحلقة $f(R)$ تكون تبديلية.

7 - $Ker\, f$ حلقة جزئية في R .

8 - التشاكل f متباين عندما وفقط عندما $Ker\, f = \{o\}$.

البرهـــان.

1 - لدينا $f(o) = f(o+o) = f(o) + f(o)$ ومنه $f(o) = o$.

2 - ليكن $a \subset R$ عندئذ $-a + a = o$ ومنه حسب (1) نجد

$$o = f(o) = f(-a+a) = f(-a) + f(a)$$

نشكل نظير العنصر $f(a)$ من الطرفين نجد $f(-a) = -f(a)$.

3 - ليكن $a \in R$ عنصراً قابلاً للقلب في R وأن مقلوبه a^{-1} ، عندئذ $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ ومنه $f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = f(1) = 1$. بشكل مشابه نجد أن $f(a^{-1})f(a) = 1$. وهذا يبين لنا أن العنصر $f(a)$ قابل للقلب في الحلقة S وأن مقلوبه هو $f(a^{-1})$. أي أن $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$.

4 - ليكن $a \in R$ وليكن $n > 0$ عدداً صحيحاً عندئذ:

$$f(na)=f(\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\ \text{once}})=\underbrace{f(a)+f(a)+\cdots+f(a)}_{n\ \text{once}}=nf(a)$$

$$f(a^n)=f(\underbrace{a.a.\cdots a}_{n\ \text{once}})=\underbrace{f(a).f(a).\cdots.f(a)}_{n\ \text{once}}=[f(a)]^n$$

5 - لنفرض أن A حلقة جزئية في R. عندئذ $f(A)=\{f(a): a\in A\}$. بما أن $o\in A$ عندئذ $o=f(o)\in f(A)$ ومنه فإن المجموعة $f(A)$ غير خالية وأن $f(A)\subseteq S$. ليكن $a,b\in f(A)$ عندئذ يوجد $x,y\in A$ بحيث $a=f(x),\ b=f(y)$ ومنه

$$a-b=f(x)-f(y)=f(x)+f(-y)=f(x-y)\in f(A)$$

وذلك لأن $x-y\in A$. كذلك فإن $ab=f(x)f(y)=f(x.y)\in f(A)$ وذلك لأن $x.y\in A$. مما سبق نجد أن $f(A)$ حلقة جزئية في S.

6 - نتركه كتمرين للقارئ.

7 - بما أن $o\in R$ وأن $o=f(o)$ نجد أن $o\in Ker\,f$، وهكذا فإن المجموعة $Ker\,f$ غير خالية وأن $Ker\,f\subseteq R$. ليكن $x,y\in Ker\,f$ عندئذ $x,y\in R$ وأن $x-y\in R$ بالإضافة لذلك، فإن $f(x)=f(y)=o$ ومنه $f(x-y)=f(x)-f(y)=o$ وأن $f(x.y)=f(x).f(y)=o$ وهذا يبين لنا أن $x-y\in Ker\,f$ و $x.y\in Ker\,f$. مما سبق نجد أن $Ker\,f$ حلقة جزئية في R.

8 - نتركه كتمرين للقارئ.

لنتعرف من خلال المبرهنة الآتية إلى تأثير التشاكلات على المثاليات اليسارية (اليمينية) في الحلقة.

مبرهنـــة 3-1-2.

لتكن R,S حلقتين و $f:R\to S$ تشاكل حلقي عندئذ:

1 - إذا كان A مثالياً يسارياً (يمينياً) في R وكان f غامراً فإن $f(A)$ يكون مثالياً يسارياً (يمينياً) في S.

2 - إذا كان A مثالياً في R وكان f غامراً فإن $f(A)$ يكون مثالياً في S.

3 - إذا كان B مثالياً يسارياً (يمينياً) في S فإن $f^{-1}(B)$ يكون مثالياً يسارياً (يمينياً) في R.

4 - إذا كان B مثالياً في S فإن $f^{-1}(B)$ يكون مثالياً في R .

5 - $Ker\, f$ مثالي في R .

البرهـــان.

1 - لنفرض أن A مثالي يساري في R وأن التشاكل f غامر . بما أن

$$f(A)=\{f(a): a\in A\}$$

وأن $o\in A$ عندئذ $o=f(o)\in f(A)$ وبالتالي المجموعة $f(A)$ غير خالية. كما أن $f(A)\subseteq S$. ليكن $x,y\in f(A)$ عندئذ يوجد $a,b\in A$ بحيث $x=f(a), y=f(b)$ ومنـــه $x-y=f(a)-f(b)=f(a)+f(-b)=f(a-b)\in f(A)$ وذلـــك لأن $a-b\in A$. ليكن $r_0\in S$ و $z\in f(A)$ عندئذ بما أن التشاكل f غامر فإنه يوجـد $r\in R$ بحيث $f(r)=r_0$ وبما أن $z\in f(A)$ فإنه يوجد $d\in A$ بحيـث $z=f(d)$ ومنه $r_0z=f(r)f(d)=f(rd)$ وبما أن A مثالي يساري فـي R فـإن $rd\in A$ وبالتالي $r_0z=f(rd)\in f(A)$. مما سبق نجد أن $f(A)$ مثالي يساري في S .

بطريقة مشابهة نبرهن أنه إذا كان A مثالياً يمينياً في R وكان f غامراً فإن $f(A)$ مثالي يميني في S .

2 - ليكن A مثالياً في R عندئذ A مثالي يساري ويميني في R ، إذا كان التشاكل f غامراً فإنه حسب (1) يكون $f(A)$ مثالياً يسارياً ويمينياً في S ، ومنه يكون $f(A)$ مثالياً في S .

3 - لنفرض أن B مثالي يساري في S . إن $f^{-1}(B)=\{x: x\in R,\ f(x)\in B\}$. بما أن $f(o)=o\in B$ نجد أن $o\in f^{-1}(B)$ وهذا يبين لنا أن المجموعة $f^{-1}(B)$ غير خالية، كما أن $f^{-1}(B)\subseteq R$. ليكن $x,y\in f^{-1}(B)$ ، عندئذ $f(x),f(y)\in B$ ، ومنه $f(x-y)=f(x)-f(y)\in B$ وبالتالي فإن $x-y\in f^{-1}(B)$. من جهة أخرى، أياً كان $r\in R$ فإن $f(rx)=f(r)f(x)\in B$ ومنه $rx\in f^{-1}(B)$. مما سبق نجد أن $f^{-1}(B)$ مثالي يساري في R . بطريقة مشابهة نبرهن أنه إذا كان B مثالي يميني في S فإن $f^{-1}(B)$ مثالي يميني في R .

4 - ليكن B مثالياً في S. عندئذ B مثالي يساري ويميني في S، وحسب (3) يكون $f^{-1}(B)$ مثالياً يسارياً ويمينياً في R ومنه يكون $f^{-1}(B)$ مثالياً في R.

5 - إن $Ker\, f = \{x : x \in R;\ f(x) = o\}$، وبما أن $f(o) = o$ نجد أن $o \in Ker\, f$ وهذا يبين لنا أن المجموعة $Ker\, f$ غير خالية كما أن $Ker\, f \subseteq R$.

ليكن $x, y \in Ker\, f$، عندئذ $f(x) = f(y) = o$ ومنه $f(x-y) = f(x) - f(y) = o$ أي أن $x - y \in Ker\, f$. من جهة أخرى أياً كان $r_1, r_2 \in R$ فإن

$$f(r_1 x r_2) = f(r_1) f(x) f(r_2) = o$$

ومنه فإن $r_1 x r_2 \in Ker\, f$. مما سبق نجد أن $Ker\, f$ مثالي في R.

نأتي الآن إلى دراسة خواص التشاكلات الحلقية وسوف نبدأ بالتمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 3 -1 -3.

لتكن R, S حلقتين و $f : R \to S$ تطبيقاً يحقق: أياً كان $a, b \in R$ فإن

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a) f(b)$$

إذا كان التطبيق f غامراً فإن $f(1) = 1$.

البرهـــان.

كي نبرهن أن التطبيق f هو تشاكل حلقي علينا أن نبرهن أن $f(1) = 1$. لما كان $1 \in S$ عندئذ يوجد $x \in R$ بحيث $f(x) = 1$، ولما كان $1 \in R$، لنفرض أن $f(1) = y$ عندئذ $y = y.1 = f(x) = f(1x) = f(1) f(x) = f(1) = 1$ وهذا يبين لنا أن $f(1) = 1$.

لندرس ومن خلال المبرهنة الآتية العلاقة بين المثاليات في الحلقة والتشاكلات الحلقية.

مبرهنـــة 3 -1 -4.

لتكن R حلقة عندئذ كل مثالي في R هو نواة لتشاكل حلقي غامر.

البرهـــان.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R عندئذ حسب التمهيدية (2-3-1) تتشكل لدينا حلقة الخارج $\overline{R} = R/A$. لنعرف العلاقة $f : R \to \overline{R}$ بالشكل الآتي: أياً كان $x \in R$ فإن $f(x) = x + A$ فنجد أن f تطبيق لأنه أياً كان $x, y \in R$ بحيث $x = y$ فإن $f(x) = x + A = y + A = f(y)$. كما أن

$$f(x + y) = (x + y) + A = (x + A) + (y + A) = f(x) + f(y)$$

$$f(x.y) = (x.y) + A = (x + A).(y + A) = f(x).f(y)$$

وهذا يبين لنا أن التطبيق f هو تشاكل حلقي. وهو أيضاً غامر لأنه أياً كان $z + A \in R/A$ فإن $z \in R$ وبالتالي فإن $f(z) = z + A$.

لنبرهن الآن على أن $Ker\, f = A$. ليكن $a \in A$ عندئذ $a + A = A$ كما أن $a \in R$ ومنه $f(a) = a + A = A$ وهذا يبين لنا أن $a \in Ker\, f$ وبالتالي يكون $A \subseteq Ker\, f$. ليكن $b \in Ker\, f$ عندئذ $f(b) = b + A$ وأن $f(b) = A$ ومنه $b + A = A$ وبالتالي $b \in A$ أي أن $Ker\, f \subseteq A$. مما سبق نجد أن $Ker\, f = A$.

تعريف.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R . نسمي التشاكل الحلقي الغامر $f : R \to R/A$ المعرف بالشكل $f(x) = x + A$ بالتشاكل الحلقي القانوني الغامر ويرمز له عادة بالرمز $\pi : R \to R/A$.

تعريف.

نقول عن الحلقتين R, S إنهما متماثلتان إذا وجد بينهما تشاكل حلقي متباين وغامر ونرمز لذلك $R \cong S$.

إذا كانت لدينا حلقتان متماثلتان فهذا يعني أن هاتين الحلقتين متشابهتين ولكن الفرق بينهما يكون غالباً في طبيعة العناصر، بمعنى آخر الحلقات المتماثلة تملك الخواص الجبرية ذاتها. العلاقة المهمة بين التشاكلات الحلقية وحلقات الخارج نوردها من خلال المبرهنة الآتية والتي غالباً ما تسمى النظرية الأساسية للتشاكلات الحلقية.

مبرهنـــة 3 -1 -5. (مبرهنة التماثل الحلقي الأولى).

ليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً. عندئذ:

1 - $R/Ker\, f \cong Im\, f$.

2 - إذا كان f غامراً فإن $R/Ker\, f \cong S$.

البرهـــان.

1 - بما أن $f : R \to S$ تشاكل حلقي فإنه حسب المبرهنة (3-1-2) $Ker\, f$ هي مثالي في R وبالتالي فإن $R/Ker\, f$ حلقة. لنعرف العلاقة $\varphi: R/Ker\, f \to Im\, f$ بالشكل التالي: أياً كان $x + Ker\, f \in R/Ker\, f$ ؛ $x \in R$ فإن $\varphi(x + Ker\, f) = f(x)$. فنجد أن العلاقة φ معرفة جيداً (تطبيق) وذلك لأنه أياً كان $x + Ker\, f, y + Ker\, f \in R/Ker\, f$ بحيث $x + Ker\, f = y + Ker\, f$ فإن $(x - y) + Ker\, f = Ker\, f$ ومنه $x - y \in Ker\, f$ أي أن $f(x - y) = o$ ومنه $f(x) = f(y)$. كذلك فإن التطبيق φ هو تشاكل لأن

$$\varphi[(x + Ker\, f) + (y + Ker\, f)] = \varphi((x + y) + Ker\, f) = f(x + y) =$$
$$= f(x) + f(y) = \varphi(x + Ker\, f) + \varphi(y + Ker\, f)$$

$$\varphi[(x + Ker\, f).(y + Ker\, f)] = \varphi((x.y) + Ker\, f) = f(x.y) = f(x).f(y) =$$
$$= \varphi(x + Ker\, f).\varphi(y + Ker\, f)$$

مما سبق نجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي. كما أن التطبيق φ غامر، لأنه أياً كان $z \in Im\, f$ يوجد $a \in R$ بحيث $z = f(a)$ ومنه $a + Ker\, f \in R/Ker\, f$ وأن

$$\varphi(a + Ker\, f) = f(a) = z$$

كذلك فإن التشاكل φ متباين، لأنه إذا كان $a + Ker\, f, b + Ker\, f \in R/Ker\, f$ بحيث $\varphi(a + Ker\, f) = \varphi(b + Ker\, f)$ فإن $f(a) = f(b)$ ومنه $f(a - b) = o$ أي أن $a - b \in Ker\, f$ وبالتالي يكون $(a - b) + Ker\, f = Ker\, f$ ومنه

$$a + Ker\, f = b + Ker\, f$$

وهكذا نجد أن φ هو تماثل وبالتالي $R/Ker\, f \cong Im\, f$.

2 - إذا كان التشاكل f غامراً فإن $Im\, f = S$ وحسب (1) يكون لدينا $R/Ker\, f \cong S$.

نأتي الآن لدراسة مبرهنة التماثل الثانية.

مبرهنـــة 3-1-6.

لتكن R حلقة و A,B مثاليين في R . عندئذ:

$$A/A\cap B\cong A+B/B$$

البرهـــان.

لما كان كل من A,B مثاليات في R ، فإنه حسب التمهيدية (2-2-2) يكون $A+B$ مثالياً في R ولأن $B\subseteq A+B$ وبالتالي تكون $A+B/B$ حلقة. وحسب التمهيدية (2-1-2) فإن $A\cap B$ مثالي في R ولأن $A\cap B\subseteq A$ ، ومنه فإن $A/A\cap B$ حلقة. لنعرف العلاقة $\varphi: A\to A+B/B$ بالشكل الآتي: أياً كان $x\in A$ فإن $\varphi(x)=x+B$ فنجد أن العلاقة φ تطبيق لأنه أياً كان $x,y\in A$ بحيث $x=y$ فإن

$$\varphi(x)=x+B=y+B=\varphi(y)$$

كما أن التطبيق φ هو تشاكل لأن

$$\varphi(x+y)=(x+y)+B=(x+B)+(y+B)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

$$\varphi(x.y)=(x.y)+B=(x+B).(y+B)=\varphi(x).\varphi(y)$$

بالإضافة إلى ذلك فإن التشاكل φ غامر لأنه أيا كان $z\in A+B/B$ فإن $z=(a+b)+B$ حيث $a\in A, b\in B$ ومنه

$$z=(a+b)+B=(a+B)+(b+B)=(a+B)+B=a+B$$

وبما أن $a\in A$ نجد أن $\varphi(a)=a+B=z$. مما سبق نجد أن العلاقة φ هي تشاكل حلقي غامر وحسب المبرهنة (3-1-5) فإن $A/Ker\,\varphi\cong A+B/B$. لنبرهن على أن $Ker\,\varphi=A\cap B$. ليكن $x\in Ker\,\varphi$ عندئذ $x\in A$ وأن $\varphi(x)=x+B, \varphi(x)=B$ ومنه $x+B=B$ أي أن $x\in B$ ومنه نجد أن $x\in A\cap B$ وبالتالي $Ker\,\varphi\subseteq A\cap B$. ليكن $y\in A\cap B$ عندئذ $y\in B,\ y\in A$ ومنه $\varphi(y)=y+B=B$ أي أن $y\in Ker\,\varphi$ وبالتالي $A\cap B\subseteq Ker\,\varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\,\varphi=A\cap B$ وهكذا فإن $A/A\cap B\cong A+B/B$.

نأتي الآن لدراسة المبرهنة الثالثة من مبرهنات التماثل الحلقي.

مبرهنـــة 3-1-7.

لتكن R حلقة و A,B مثاليين في R بحيث $B \subseteq A$. عندئذ:

1 - A/B مثالي في الحلقة R/B .

2 - $\frac{R/B}{A/B} \cong R/A$.

البرهـــان.

1 - لما كان A مثالياً في R ويحوي B ، فإنه حسب التمهيدية (2-3-3) نجد أن A/B مثالي في الحلقة R/B .

2 - بما أن كلاً من A,B مثاليات في الحلقة R فإن كلاً من A/B و R/B حلقات. لنعرف العلاقة $f: R/B \to R/A$ بالشكل التالي: أياً كان $x+B \in R/B$ فإن $f(x+B) = x+A$ فنجد أن العلاقة f معرفة جيداً (تطبيق)، لأنه أياً كان $x+B,\ y+B \in R/B$ بحيث $x+B = y+B$ فإن $(x-y)+B = B$ ومنه $(x-y) \in B \subseteq A$ وبالتالي $(x-y)+A = A$ أي أن $x+A = y+A$ ومنه يكون $f(x+B) = f(y+B)$. كما أن التطبيق f هو تشاكل لأن

$$f[(x+B)+(y+B)] = f[(x+y)+B] = (x+y)+A = (x+A)+(y+A) =$$
$$= f(x+B)+f(y+B)$$

بالإضافة لذلك فإن

$$f[(x+B).(y+B)] = f[(x.y)+B] = (x.y)+A = (x+A).(y+A) =$$
$$= f(x+B).f(y+B)$$

كما أن التشاكل f غامر لأنه أياً كان $z+A \in R/A$ فإن $z \in R$ وبالتالي $z+B \in R/B$ ومنه $f(z+B) = z+A$. مما سبق نجد أن f تشاكل حلقي غامر وحسب المبرهنة (3-1-5) فإن $\frac{R/B}{Ker\ f} \cong R/A$. لنبرهن على أن $Ker\ f = A/B$.

ليكن $a+B \in Ker\ f$ عندئذ $f(a+B) = A$ وأن $f(a+B) = a+A$ ومنه $a+A = A$ أي أن $a \in A$ وبالتالي $a+B \subset A/B$ وهكذا نجد أن $Ker\ f \subseteq A/B$. ليكن $b+B \in A/B$ عندئذ $b \subset A$ ومنه $f(b+B) = b+A = A$. وهذا يبين لنا أن

$b+B \in Ker\ f$ ومنه $A/B \subseteq Ker\ f$. مما سبق نجد أن $Ker\ f = A/B$. وهكذا فإن

$$\frac{R/B}{A/B} \cong R/A$$

لندرس الآن العلاقة بين حلقة الأعداد الصحيحة والحلقات الواحدية وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 3-1-8.

لتكن R حلقة عندئذ العلاقة $\varphi : Z \to R$ المعرفة بالشكل $\varphi(n) = n.1$ وذلك أياً كان $n \in Z$ هي تشاكل حلقي.

البرهـــان.

إن العلاقة $\varphi : Z \to R$ المعرفة بالشكل $\varphi(n) = n.1$ أياً كان $n \in Z$ هي تطبيق لأنه أياً كان $n,m \in Z$ بحيث $n = m$ فإن $n.1 = m.1$ ومنه $\varphi(n) = \varphi(m)$. لنبرهن على أن التطبيق φ تشاكل. ليكن $n,m \in Z$ وهنا نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى. إذا كان $n \geq o,\ m \geq o$ عندئذ

$$\varphi(n+m) = (n+m).1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+m\ \text{once}} = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ \text{once}}) + (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\ \text{once}}) =$$

$$= n.1 + m.1 = \varphi(n) + \varphi(m)$$

الحالة الثانية. إذا كان $n < o,\ m < o$ عندئذ

$$\varphi(n+m) = (n+m).1 = -(n+m)(-1) = \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{(n+m)\ \text{once}} =$$

$$= \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{n\ \text{once}} + \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{-m\ \text{once}} = (-n)(-1)+(-m)(-1) =$$

$$= n.1 + m.1 = \varphi(n) + \varphi(m)$$

الحالة الثالثة. إذا كان $n \geq o,\ m < o$ عندئذ $m = -s$ ، حيث $s > o$ ، وهنا لدينا حالتان:

- إذا كان $n + m \geq o$ عندئذ

$$\varphi(n+m) = (n+m).1 = (n-s).1 = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-s\ \text{once}}) +$$

$$+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{s\ \text{once}})-(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{s\ \text{once}})=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ \text{once}})+(\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{s\ \text{once}})$$

$$=n.1+s(-1)=n.1+(-m)(-1)=(n.1)+(m.1)=\varphi(n)+\varphi(m)$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة (1 - 1 -3).

- إذا كان $n+m<o$. عندئذ $n-s<o$ وبالتالي $s-n>o$ ومنه

$$\varphi(n+m)=(n+m).1=(n-s).1=[-(n-s)](-1)=$$

$$=[\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{=(n-s)-s=n\ \text{once}}]+[\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{n\ \text{once}}]=$$

$$=\underbrace{[(-1)+(-1)+\cdots+(-1)]}_{n\ \text{once}}+\underbrace{[(-1)+(-1)+\cdots+(-1)]}_{s\ \text{once}}+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\ \text{once}}=$$

$$=n.1+s(-1)=n.1+(-m)(-1)=n.1+m.1=\varphi(n)+\varphi(m)$$

مما سبق نجد أن $\varphi(n+m)=\varphi(n)+\varphi(m)$ وذلك أياً كان $n,m\in Z$.

من جهة أخرى، فإن $\varphi(n.m)=(n.m).1=(n.m)(1.1)=(n.1)(m.1)=\varphi(n)\varphi(m)$ وذلك بالاعتماد على المبرهنة (1 - 1 -3). كما أن $\varphi(1)=1.1=1$. مما سبق نجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة لندرس الآن العلاقة بين الحلقات الثلاث Z، nZ، Z_n وذلك من أجل أي عدد صحيح موجب n من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 3 -1 -9.

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. عندئذ $Z/nZ\cong Z_n$ (تماثل حلقي).

البرهـــان.

لنعرف العلاقة $\varphi:Z\to Z_n$ بالشكل التالي: أياً كان $k\in Z$ فإن

$$\varphi(k)=k.1\ (k\bmod -n)$$

فنجد حسب المبرهنة (3 - 1 -8) أن φ هو تشاكل حلقي، وهو غامر، لأنه أياً كان $a\in Z_n$ فإن $a\in Z$ وبالتالي $\varphi(a)=a.1=a$ وحسب المبرهنة (3 - 1 -5) نجد أن $Z/Ker\varphi\cong Z_n$. لنبرهن على أن $Ker\varphi=nZ$. ليكن $b\in Ker\varphi$ عندئذ $\varphi(b)=b.1$ وأن $\varphi(b)=o$ ومنه $b.1=o$ وذلك في الحلقة Z_n، وهذا يبين لنا أن $b\in nZ$ وبالتالي $Ker\varphi\subseteq nZ$. ليكن $c\in nZ$ عندئذ $c\in Z$ وبالتالي $\varphi(c)=c.1=o$ أي إن

$c \in Ker\varphi$ ومنه $nZ \subseteq Ker\varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\varphi = nZ$. وهكذا نجد أن $Z/nZ \cong Z_n$.

قبل البدء بدراسة عدد من الأمثلة على التشاكلات الحلقية سوف نسورد المبرهنة التالية والتي سوف تكون ضرورية لنا في دراستنا المقبلة:

مبرهنة 3-1-10.

ليكن $n > 1$ عدد صحيح. القضايا التالية صحيحة:

1 - أياً كان $a,b \in Z$ فإن $(a+b)mod-n = amod-n + bmod-n$.

2 - أياً كان $a,b \in Z$ فإن $(ab)mod-n = (amod-n).(bmod-n)$.

البرهان.

1 - لدينا حسب خوارزمية القسمة $a = q_1n + r_1$ و $b = q_2n + r_2$ حيث $q_1,q_2,r_1,r_2 \in Z$ وأن $0 \le r_1,r_2 < n$. ومنه

$$a+b = (q_1+q_2)n + (r_1+r_2)$$

وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \le r_1+r_2 < n$. عندئذ

$$(a+b)mod-n = r_1+r_2 = amod-n + bmod-n.$$

- الحالة الثانية: $n \le r_1+r_2$. بما أن $0 \le r_1,r_2 < n$ فإن $n \le r_1+r_2 < 2n$ وبالتالي $0 \le r_1+r_2-n < n$ وهذا يبين لنا أن $r_1+r_2 = n+(r_1+r_2-n)$ وهكذا

$$(a+b)mod-n = (r_1+r_2)mod-n = amod-n + bmod-n.$$

2 - لنفرض أن $a = qn + r$ و $b = q_1n + r_1$ حيث $q,q_1,r,r_1 \in Z$ وأن $0 \le r,r_1 < n$. عندئذ $ab = (qq_1n + qr_1 + q_1r)n + rr_1$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى: $0 \le rr_1 < n$. عندئذ

$$(ab)mod-n = rr_1 = (amod-n).(bmod-n).$$

- الحالة الثانية: $n < rr_1 < n^2$. عندئذ بالا مكان كتابة rr_1 بالشكل $rr_1 = q_0n + r_0$ حيث $q_0,r_0 \in Z$ و $0 \le r_0 < n$ ومنه

$$ab = (qq_1 n + qr_1 + q_1 r + q_0)n + r_0$$

وهذا يبين لنا أن $ab \bmod -n = r_0 = r.r_1 \bmod -n = (a \bmod -n).(b \bmod -n)$. ه

مثـــال.

لتكن Z_4, Z_{10} حلقتي الجمع والضرب بالمقاس 4,10 على الترتيـــب. إن التطبيـــق $f : Z_4 \to Z_{10}$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $x \in Z_4$ فإن

$$f(x) = 5x \ (= 5x \ mod \ -10)$$

هو تشاكل حلقي.

الحـــل.

ليكن $x, y \in Z_4$ عندئذ

$$f(x+y) = 5(x+y) = [5(x+y)] mod \ -10 = (5x+5y) mod \ -10 =$$
$$= 5x \ mod \ -10 + 5y \ mod \ -10 = f(x) + f(y)$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة (3-1-10).

$$f(xy) = 5(xy) = [5(xy)] mod \ -10 = (5 \ mod \ -10)(xy \ mod \ -10) =$$
$$= (25 \ mod \ -10)(xy \ mod \ -10) = [(5.5)(xy)] \ mod \ -10 =$$
$$= (5x \ mod \ -10)(5y \ mod \ -10) = f(x) f(y)$$

وذلك بالاعتماد على المبرهنة (3-1-10).

وهذا يبين لنا أن التطبيق f هو تشاكل حلقي. ه

Damascus University

3 - 2. المميـــز.

نعلم أنه في الحلقة Z_4 إن $4.1 = 1+1+1+1 = o$ وكذلك فإن $4x = o$ أياً كـان $x \in Z_4$. أيضاً في الحلقة Z_5 فإن $5.1 = 1+1+1+1+1 = o$ ومنه فـإن $5x = o$ وذلك أياً كان $x \in Z_5$ (تأكد من ذلك). بينما في حلقة الأعـداد الـصحيحة Z فـإن $5.1 \neq o$ أو بمعنى آخر أياً كان $o \neq x \in Z$ فإن $5x \neq o$. إن الخـواص الـسابقة جديرة بالاهتمام وهي ذات فائدة كبيرة لنا كما سنرى لاحقا. وفي هذه الفقـرة سـوف ندرس تلك الخواص ولكن في البداية لنتعرف على التمهيدية الأتية:

تمهيديـة 3 -2 -1.

لتكن R حلقة. عندئذ:

1 - المجموعة $S = \{n.1 : n \in Z\}$ هي حلقة جزئية في R حيث 1 هو المحايد في R.

2 - العلاقة $\varphi : Z \to S$ المعرفة بالشكل $\varphi(n) = n.1$ أياً كان $n \in Z$ هي تـشاكل حلقي غامر.

البرهـان.

1 - بما أنه أياً كان $n \in Z$ فإن $n.1 \in R$ وأن $o.1 = o$ ومنه نجد أن $\phi \neq S \subseteq R$.

ليكن $x, y \in S$ عندئذ يوجد $n, m \in Z$ بحيث $x = n.1,\ y = m.1$ ومنه

$$x - y = n.1 - m.1 = (n-m).1 \in S$$

$$x.y = (n.1)(m.1) = (n.m).(1.1) = (n.m).1 \in S$$

مما سبق نجد أن S حلقة جزئية في R.

2 - لنعرف العلاقة $\varphi : Z \to S$ بالشكل الآتي: أياً كان $n \in Z$ فـإن $\varphi(n) = n.1$ فنجد أن هذه العلاقة هي تطبيق لأنه أيـاً كـان $n, m \in Z$ بحيـث $n = m$ فـإن $n.1 = m.1$ وبالتالي $\varphi(n) = \varphi(m)$. كذلك فإن التطبيق φ هو تشاكل لأن

$$\varphi(n+m) = (n+m).1 = (n.1) + (m.1) = \varphi(n) + \varphi(m)$$

$$\varphi(n.m) = (n.m).1 = (n.1).(m.1) = \varphi(n).\varphi(m)$$

كما أن التطبيق φ غامر لأنه إذا كان $z \in S$ فإن $z = s.1$ حيث $s \in Z$ وإن $z = s.1 = \varphi(s)$. مما سبق نجد أن $\varphi : Z \to S$ هو تشاكل حلقي غامر.

لنورد الآن التعريف التالي:

تعريف.

لتكن R حلقة ولنأخذ التشاكل الحلقي $\varphi : Z \to R$ المعرف بالشكل الآتي: $\varphi(n) = n.1$ وذلك أياً كان $n \in Z$. عندئذ:

1 - إذا كان التشاكل φ متبايناً نقول إن للحلقة R مميز يساوي الصفر.

2 - إذا كان التشاكل φ ليس متبايناً نسمي في هذه الحالة أصغر عدد صحيح موجب في $Ker\,\varphi$ بمميز الحلقة R.

نرمز عادة لمميز الحلقة R بالرمز $Chr\,R$. ينتج من التعريف مباشرة الحقيقة المهمة الآتية:

تمهيدية 3-2-2.

إذا كان مميز الحلقة R يساوي الصفر عندئذ:

1 - الحلقة R تحوي حلقة جزئية تماثل Z.

2 - الحلقة R تكون غير منتهية.

البرهان.

ينتج مباشرة من تعريف المميز والتمهيدية (3-2-1).

تمهيدية 3-2-3.

لتكن R حلقة مميزها $n \neq o$. عندئذ:

1 - $n.1 = o$.

2 - العدد n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n.1 = o$.

3 - الحلقة R تحوي حلقة جزئية تماثل الحلقة Z_n.

البرهان.

1 - بما أن $n \neq o$ هو مميز الحلقة R فإن $n \in Ker\,\varphi$ حيث $\varphi : Z \to R$ هو التشاكل المعرف بالشكل $\varphi(m) = m.1$ وذلك أياً كان $m \in Z$ ومنه فإن $\varphi(n) = o$ أي أن $n.1 = o$.

2 - ينتج من التعريف مباشرة.

3 - وجدنا حسب التمهيدية (3-2-1) أن العلاقة $\varphi : Z \to S$ المعرفة بالشكل $\varphi(n) = n.1$ أياً كان $n \in Z$ وحيث $S = \{m.1 : m \in Z\}$ هي تشاكل حلقي غامر. وبما أن مميز الحلقة R هو $n \neq o$ فإن $n \in Ker\,\varphi$ أي أن $Ker\,\varphi \neq \{o\}$ وهذا يبين لنا أن التشاكل φ ليس متبايناً وحسب المبرهنة (3-1-5) يكون $Z/Ker\,\varphi \cong S$. لنبرهن على أن $Ker\,\varphi = nZ$.

ليكن $m \in Ker\,\varphi$ عندئذ $\varphi(m) = m.1$ وأن $\varphi(m) = o$ ومنه $m.1 = o$. من جهة أخرى لنطبق خوارزمية القسمة لأجل العددين n, m فنجد أن $m = qn + r$ حيث $q, r \in Z$ وأن $o \leq r < n$. لنفرض جدلاً أن $r \neq o$ عندئذ

$$\varphi(m) = \varphi(qn + r) = \varphi(qn) + \varphi(r)$$

$$m.1 = (qn).1 + r.1 = (q.1)(n.1) + r.1$$

وبما أن $m.1 = n.1 = o$ نجد أن $r.1 = o$ ومنه $\varphi(r) = o$ أي أن $r \in Ker\,\varphi$ حيث $o < r < n$ وهذا يناقض كون $n \neq o$ هو مميز الحلقة R وهذا يبين لنا أن $r = o$ وبالتالي $m = qn \in nZ$ أي إن $Ker\,\varphi \subseteq nZ$. ليكن $\lambda \in nZ$ عندئذ $\lambda = \alpha.n$ حيث $\alpha \in Z$ ومنه

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\alpha n) = (\alpha n).1 = (\alpha.1)(n.1) = o$$

أي أن $\lambda \in Ker\,\varphi$ ومنه $nZ \subseteq Ker\,\varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\,\varphi = nZ$. وهكذا نجد أن $Z/nZ \cong S$ وحسب المبرهنة (3-1-9) نجد أن $S \cong Z/nZ \cong Z_n$ ومنه $Z_n \cong S \subseteq R$.

نأتي الآن لدراسة المبرهنة المهمة الآتية:

مبرهنـــة 3 -2 -4.

مميز أي منطقة تكاملية إما صفراً أو عدداً أولياً.

البرهـــان.

لتكن D منطقة تكاملية. إذا كان مميز D يساوي الصفر يتم المطلـــوب. لنفـــرض أن مميز D هو $n \neq o$ عندئذ وحسب التمهيدية (3-2-3) فإن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n.1 = o$. لنفرض جدلاً أن العدد n ليس أولياً ومنه يوجد قاسم للعدد n وليكن $t \in Z$ بحيث $1 < t < n$. بما أن t قاسم للعدد n فإنه يوجـــد $s \in Z$ بحيـــث $n = st$ وأن $1 < s < n$ وهكذا نجد أن $1 < t, s < n$. مـــن جهـــة أخـــرى فـــإن $0 = n1 = (st)1 = (s1)(t1)$. ولما كانت $s1, t1 \in D$ وكانت D منطقة تكامليـــة عندئذ إما $s1 = 0$ أو $t1 = 0$ وفي كلا الحالتين نحصل على ما يناقض كـــون n هـــو أصغر عدد صحيح موجب من أجله $n.1 = o$. مما سبق نجد أن العدد n أولي. ٥

ينتج من المبرهنة الأخيرة الحقائق المهمة الآتية:

نتيجـــة.

القضايا الآتية صحيحة:

1. مميز أي حقل إما صفر أو عدد أولي.
2. مميز أي حلقة منتهية لا يساوي الصفر.
3. مميز أي حقل منته هو عدد أولي.

مثـــال.

مميز حلقة الأعداد الصحيحة Z يساوي الصفر.

لأنه إذا كان مميز الحلقة Z هو $n \neq o$ عندئذ حـــسب التمهيديـــة (3-2-3) يكـــون $n.1 = o$ وهذا غير ممكن لأن الحلقة Z لا تحوي قواسم للصفر. وهذا يبين لنـــا أن مميز الحلقة Z هو الصفر. للسبب نفسه فإن مميز كل من الحقـــول الآتيـــة Q, R, C يساوي الصفر.

ليكن F حقلاً إن تقاطع أي مجموعة من الحقول الجزئية من F هو حقل جزئـــي في F (تأكد من ذلك). إن هذه الخاصة تقودنا إلى التعريف الآتي:

تعريـــف.

ليكن F حقلاً نسمي تقاطع جميع الحقول الجزئية من الحقل F بالحقل الأولي في F.

ينتج من التعريف السابق أن الحقل الجزئي الأولي للحقل F هو أصغر حقل جزئي في F. بالاعتماد على ما سبق يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 3-2-5.

ليكن F حقلاً مميزه العدد الأولي p. عندئذ:

1. المجموعة $J_p = \{0.1, 1.1, 2.1, \cdots, (p-1).1\}$ حقل جزئي في F.
2. الحقل F يحوي حقل جزئي يماثل الحقل Z_p.
3. الحقل الجزئي J_p هو الحقل الجزئي الأولي في F والذي يماثل Z_p.

البرهـــان.

1 - بما أن مميز الحقل F هو العدد الأولي p فإنه حسب التمهيدية (3-2-1) تكون المجموعة $J_p = \{n.1 : n \in Z\} = \{0,1.1, 2.1, \cdots, (p-1).1\}$ حلقة جزئية في F ولكون F منطقة تكاملية تكون الحلقة J_p منطقة تكاملية وحسب المبرهنـــة (3-2-4) يكون J_p حقلاً جزئياً في F.

2 - بما أن مميز الحقل F هو العدد الأولي p عندئذ الحقل F يحوي حلقة جزئية F_0 تماثل Z_p. من جهة أخرى بما أن العدد p أولي فإن الحلقة Z_p تكون حقلاً ولكـــون F_0 يماثل Z_p يكون F_0 حقلاً أيضاً. وهذا يبين لنا أن الحقل F_0 يماثل Z_p.

3 - ليكن K حقلاً جزئياً من F عندئذ $1 \in K$ ومنه أياً كان $x \in J_p$ فـــإن $x \in K$ وهذا يبين لنا أن الحقل الجزئي J_p محتوى في كل حقل جزئي للحقـــل F وبالتـــالي يكون J_p هو الحقل الجزئي الأولي في الحقل F وهو يماثل Z_p. ∎

واحدة من الخواص المهمة لمميز الحلقة نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 3-2-6.

لتكن R, S حلقتين وليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً. إذا كـــان مميـــز كـــل مـــن الحلقتين R, S مغاير للصفر فإن مميز الحلقة S يقسم مميز الحلقة R.

البرهـــان.

لنفرض أن n هو مميز الحلقة R و m هو مميز الحلقة S عندئذ حسب الفـــرض فإن $n \neq o, m \neq o$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $n = qm + r$ وأن $o \leq r < m$. لنفرض جدلاً أن $r \neq o$ عندئذ $n1_R = (qm + r)1_R$ وبما أن n هو مميز الحلقة R فإن $n.1_R = o$ ومنـــه $(qm + r)1_R = o$. مـــن جهـــة أخـــرى إن $f[(qm + r)1_R] = f(o) = o$ ومنـــه $(qm + r)f(1_R) = o$ وبالتـــالي يكـــون $(qm + r)1_S = o$ وأن $o = (qm + r)1_S = (qm)1_S + r1_S = (q1_S)(m1_S) + r1_S$ ولما كـــان $m.1_S = o$ لأن m هـــو مميـــز الحلقـــة S نجـــد أن $r.1_S = o$ حيـــث $o < r < m$ وهذا يناقض كون m مميز للحلقة S. مما سبق نجد أن $r = o$ وبالتالي يكون $n = qm$. أي أن مميز الحلقة S يقسم مميز الحلقة R.

بالاعتماد على التمهيدية الأخيرة نحصل على العلاقة المهمة بين مميز حلقة ومميز حلقة الخارج لها والتي نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 3-2-7.

لتكن R منطقة تكاملية مميزها لا يساوي الصفر وليكن $A \neq R$ مثاليـــاً فـــي R. عندئذ الحلقتين R و R/A لهما المميز نفسه.

البرهـــان.

بما أن R منطقة تكاملية مميزها لا يساوي الصفر فإنه حسب المبرهنة (3-2-4) يكون مميز الحلقة R عدداً أولياً وليكن p عندئذ يكون $p1 = o$. لنأخذ التشاكل الحلقي الغامر $\pi: R \to R/A$ عندئذ $\pi(p1) = \pi(o)$ وحسب المبرهنـــة (3-1-1) يكـــون $p\pi(1) = A$ أي أن $p(1 + A) = A$ وهذا يبين لنا أن للحلقة R/A مميز لا يساوي الصفر. لنفرض أن مميز الحلقة R/A يساوي m. عندئذ حسب التمهيدية (3-2-6) يكون m قاسماً للعدد p وبما أن العدد p أولي عندئذ إما $m = 1$ أو $m = p$. وبما أن $A \neq R$ فإن $m \neq 1$ وهكذا نجد أن $m = p$. مما سبق نجد أن للحلقتين R و R/A لهما المميز نفسه.

3 - 3. حقـــــل النســـــب.

لفترة طويلة من الزمن كانت العلاقة بين مجموعة الأعداد الصحيحة و مجموعة الأعداد النسبية (العادية) موضوع دراسة كثير من العلماء. فمن المعلوم أن حلقة الأعداد الصحيحة Z هي منطقة تكاملية بينما مجموعة الأعداد العادية Q هي حقل بالإضافة إلى ذلك فإن Q هو أصغر حقل يحوي Z ويحقق الخاصة "كل عنصر مغاير للصفر في Z يملك مقلوب في Q ". في هذه الفقرة سوف نعالج المسألة الآتية وهي كيفية الحصول على حقل F انطلاقاً من منطقة تكاملية D بحيث يكون F أصغر حقل يحوي D ويحقق أن كل عنصر مغاير للصفر في D يملك مقلوباً في F والبداية ستكون مع المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 3 -3 -1.

لتكن D منطقة تكاملية. عندئذ يوجد حقل F يحوي حلقة جزئية تماثل D.

البرهـــان.

لنفرض أن D منطقة تكاملية ولنأخذ المجموعة $S = D \setminus \{o\}$. لنشكل المجموعة

$$D \times S = \{(a,s) : a \in D, s \in S\} = \{(a,s) : a,s \in D, s \neq o\}$$

لنعرف على المجموعة $D \times S$ العلاقة $(\sim)$ بالشكل الآتي: أياً كان $(a,s),(a_1,s_1) \in D \times S$ فإن $(a,s) \sim (a_1,s_1) \Leftrightarrow as_1 = a_1 s$ فنجد أن العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $D \times S$. (تحقق من ذلك).

لنرمز لصف التكافؤ المولد بالعنصر $(a,s) \in D \times S$ بالرمز a/s أي إن

$$a/s = \{(a_1,s_1) : (a_1,s_1) \in D \times S; (a,s) \sim (a_1,s_1)\}$$

ولنفرض أن F هي مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $(\sim)$. أي إن

$$F = \{a/s : (a,s) \in D \times S\}$$

بما أن $(o,1) \in D \times S$ نجد أن $o/1 \in F$ وبالتالي فإن المجموعة F غير خالية. ليكن $a/s, a_1/s_1 \in F$ عندئذ $(a,s),(a_1,s_1) \in D \times S$ ولما كانت D منطقة تكاملية وكانت العناصر s_1, s مغايرة للصفر فإن العنصر ss_1 مغاير للصفر وبالتالي يكون

$ss_1 \in S$ وهكذا نجد أن $(as_1 + a_1 s, ss_1) \in D \times S$ أي أن $(as_1 + a_1 s)/ss_1 \in F$.

هذه الحقيقة تسمح لنا بتعريف قانون تشكيل داخلي $(+)$ على F بالشكل الآتي: أياً كان $a/s, a_1/s_1 \in F$ فإن $a/s + a_1/s_1 = (as_1 + a_1 s)/ss_1$.

لنبرهن على أن العملية $(+)$ معرفة جيداً. ليكن $a/s, a_1/s_1, b/d, b_1/d_1 \in F$ بحيث $a/s = a_1/s_1$, $b/d = b_1/d_1$ ولنبرهن على أن $a/s + b/d = a_1/s_1 + b_1/d_1$ والذي يكافئ بدوره أن $(ad + bs)/sd = (a_1 d_1 + b_1 s_1)/s_1 d_1$. بما أن $a/s = a_1/s_1$ عندئذ $(a,s) \sim (a_1, s_1)$ وحسب التعريف يكون $as_1 = a_1 s$. كذلك بما أن $b/d = b_1/d_1$ فإن $(b,d) \sim (b_1, d_1)$ وبالتالي يكون $bd_1 = b_1 d$ ومنه

$$(ad + bs)s_1 d_1 = ads_1 d_1 + bss_1 d_1 = (as_1)(dd_1) + (bd_1)(ss_1) =$$
$$= (a_1 s)(dd_1) + (b_1 d)(ss_1) = (a_1 d_1)(sd) + (b_1 s_1)(sd) = (a_1 d_1 + b_1 s_1)sd$$

وهذا يبين لنا أن $(ad + bs, sd) \sim (a_1 d_1 + b_1 s_1, s_1 d_1)$ ومنه

$$(ad + bs)/sd = (a_1 d_1 + b_1 s_1)/s_1 d_1$$

أي أن العملية $(+)$ معرفة جيداً.

كما أنه أياً كان $b \in S$ فإن $o/1 = o/b$ وذلك لأن $0.1 = 0$ وأن $ob = o$ وبالتالي $ob = o1$ أي أن $(o,1) \sim (o,b)$. إن العملية $(+)$ تبديلية لأنه أياً كان $a/b, c/d \in F$ فإن $(ad + bc)db = (bc + ad)bd = (cb + da)bd$. وهذا يبين لنا أن $(ad + bc, bd) \sim (cb + da, db)$ ومنه $(ad + bc)/bd = (cb + da)/db$.

أي أن $a/b + c/d = c/d + a/b$.

كما أن العملية $(+)$ تجميعية لأنه أياً كان $a/b, c/d, k/s \in F$ فإن

$$[(ad + bc)s + (bd)k][b(ds)] = [(ad)s + (bc)s + (bd)k][b(ds)] =$$
$$[a(ds) + b(cs) + b(dk)][(bd)s] = [a(ds) + b(cs + dk)][(bd)s]$$

وهذا يبين لنا أن

$$((ad + bc)s + (bd)k, (bd)s) \sim (a(ds) + b(sc + dk), b(ds))$$

ومنه $((ad + bc)s + (bd)k)/(bd)s = (a(ds) + b(sc + dk))/b(ds)$ أي أن

$$(ad + bc)/bd + k/s = a/b + (cs + dk)/ds$$ ومنه

$$.(a/b+c/d)+k/s=a/b+(c/d+k/s)$$

كما أنه يوجد في F عنصر محايد بالنسبة إلى الجمع $(+)$ هو $0/1$ وذلك لأنه أياً كان $a/b\in F$ فـــإن $(a.1+b.0)/b.1=a/b$ أي إن $(a.1+b.0)b=ab=a(b.1)$ ومنه $a/b+0/1=a/b$. كذلك فإن أي عنصر $a/b\in F$ يوجد له نظير في F هـو $-a/b$ لأن $(ab+b(-a)).1=ab-ba=0=0(bb)$ وهـذا يبـين لنـا أن $(ab+b(-a))/bb=0/1$. ومنـه $a/b+(-a)/b=0/1$. ممـا سـبق نجـد أن الثنائية $(F,+)$ زمرة تبديلية.

لابد من التذكير هنـا أنـه أيـاً كـان $a/b\in F$ فـإن $-a/b=a/-b$ وذلـك لأن $(-a)(-b)=ab$. سوف نرمز إلى العنصر $-a/b$ بالرمز $-(a/b)$ أي إن

$$--(a/b)=-a/b=a/-b$$

ليكن $c/d\in F$ ، a/b عندئذ $(a,b),(c,d)\in D\times S$ ولما كانـت الحلقـة D منطقة تكاملية وأن العناصر b,d مغايرة للصفر فإن العنـصر bd مغـاير للـصفر وبالتالي يكون $bd\in S$ وهكذا نجـد أن $(ac,bd)\in D\times S$ أي أن $ac/bd\in F$. إن هذه الحقيقة تسمح لنا بتعريف قانون تشكيل داخلي جديد على F هـو $(\cdot)$ بالـشكل الآتي: أياً كان $c/d\in F$ ، a/b فإن $a/b\ .c/d=ac/bd$. لنبرهن على أن عملية الضرب $(\cdot)$ معرفة جيداً. ليكن $a/b=a_1/b_1$ بحيث $a/b\ ,c/d\ ,a_1/b_1,c_1/d_1\in F$ و $c/d=c_1/d_1$ ولنبرهن على أن $a/b\ .c/d=a_1/b_1.c_1/d_1$ والذي بدوره يكافئ $ac/bd=a_1c_1/b_1d_1$. بمـا أن $a/b=a_1/b_1$ و $c/d=c_1/d_1$ فـإن $ab_1=a_1b$ و $cd_1=dc_1$ ومنـه $(ac)(b_1d_1)=(ab_1)(cd_1)=(a_1b)(dc_1)=(a_1c_1)(bd)$ أي أن $ac/bd=a_1c_1/b_1d_1$ وهذا يبين لنا أن $a/b\ .c/d=a_1/b_1.c_1/d_1$ أي أن العمليـة $(\cdot)$ معرفة جيداً. إن عملية الضرب $(\cdot)$ تبديلية لأنه أياً كـان $c/d\in F$ ، a/b فـإن $(ac)(db)=(ca)(bd)=(bd)(ca)$ وهذا يبين لنـا أن $ac/bd=ca/db$ أي إن $a/b\ c/d=c/d\ .a/b$. كمـا أن العمليـة $(\cdot)$ تجميعيـة لأنـه أيـاً كـان $a/b\ ,c/d\ ,k/s\in F$ فإن

$$[(ac)k\ ][b(ds)]=[a(ck)][(bd)s]=[(bd)s][a(ck)]$$

وهذا يبين لنا أن $(ac)k/(bd)s = a(ck)/b(ds)$ ومنه

$$(ac/bd)(k/s) = (a/b)(ck/ds)$$

أي أن $[(a/b)(c/d)](k/s) = (a/b)[(c/d)(k/s)]$.

كما أنه يوجد في F عنصر محايد بالنسبة إلى الضرب (٠) هو $1/1$ لأن $(1,1) \in D \times S$ وبالتالي فإن $1/1 \in F$ وأنه أياً كان $a/b \in F$ فإن $(a/b)(1/1) = a/b$ أي أن $a1/b1 = a/b$ ومنه $(a1)b = a(1b) = a(b1)$.

بالإضافة إلى ذلك فإنه أياً كان العنصر $d \in S$ فإن $d/d = 1/1$ وذلك لأن $d1 = 1d$.

يوجد لكل عنصر $a/b \in F$ مغاير للصفر مقلوب في F هو b/a. ليكن $a/b \in F$ وأن $a/b \neq 0/1$ وبما أن $0/1 = 0/b$ فإن $a/b \neq 0/b$ وهذا يبين لنا أن $(a,b) \neq (o,b)$ وبالتالي يكون $a \neq o$ ومنه $(b,a) \in D \times S$ أي أن $b/a \in F$ وبما أن $(ba).1 = 1.(ba)$ نجد أن $(ab).1 = (ba).1$ أي أن $ab/ba = 1/1$ أي أن $(a/b)(b/a) = 1/1$. مما سبق نجد أن الثنائية $(F^*, .)$ زمرة تبديلية.

لنبرهن أخيراً على أن الضرب توزيعي على الجمع ليكن $a/b, c/d, k/s \in F$ ولنبرهن على أن $(a/b)[(c/d)+(k/s)] = (a/b)(c/d)+(a/b)(k/s)$. إن

$$[a(cs+dk)](bd)(bs) = [a(cs)+a(dk)](bd)(bs) =$$
$$= a(cs)(bd)(bs)+a(dk)(bd)(bs) = (ac)[s(db)](bs)+$$
$$+(ak)[d(bs)](bd) = [b(ds)](ac)(bs)+[b(ds)](bd)(ak) =$$
$$= b(ds)[(ac)(bs)+(bd)(ak)]$$

وهذا يبين لنا أن $a(cs+dk)/b(ds) = [(ac)(bs)+(bd)(ak)]/(bd)(bs)$ أي أن $a/b[(cs+dk)/ds] = (ac/bd)+(ak/bs)$ وبالتالي يكون

$$a/b\,(c/d + k/s) = (a/b)(c/d)+(a/b)(k/s)$$

مما سبق نجد أن الثلاثية $(F, +, .)$ حقل.

لنعرف العلاقة $f : D \to F$ بالشكل الآتي: أياً كان $a \in D$ فإن $f(a) = a/1$ فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه أياً كان $a,b \in D$ بحيث $a = b$ فإن $a1 = 1b$ ومنه $(a,1) \sim (b,1)$ وبالتالي يكون $a/1 = b/1$ أي أن $f(a) = f(b)$. كما أن التطبيق f

هو تشاكل حلقي لأنه أياً كان $a,b \in D$ فإن $(a+b).1 = 1.(a.1+b.1)$ ومنه $(a+b,1) = (a.1+b.1,1)$ وهكذا فإن $(a+b)/1 = (a.1+b.1)/1$ وبالتالي يكون

$$f(a+b) = (a+b)/1 = (a.1+b.1)/1 = a/1 + b/1 = f(a) + f(b)$$

كما أن $(ab).1 = (ab)(1.1)$ ومنه $(ab,1) \sim (ab.1,1)$ وبالتالي يكون $ab/1 = ab/1.1$ وهكذا فإن

$$f(ab) = ab/1 = ab/1.1 = (a/1)(b/1) = f(a)f(b)$$

بالإضافة إلى ذلك التطبيق f متباين لأنه إذا كان $a,b \in D$ بحيث $f(a) = f(b)$ فإن $a/1 = b/1$ ومنه $(a,1) \sim (b,1)$ وبالتالي يكون $a = a.1 = b.1 = b$. مما سبق نجد أن التطبيق f هو تشاكل حامي متباين. لنفرض أن $Im f = f(D) = D_0$ عندئذ حسب المبرهنة (3-1-1) فإن D_0 تكون حلقة جزئية في F وأن $D_0 = \{a/1 : a \in D\}$ كما أن التطبيق $f : D \to D_0$ هو تماثل حلقي. وهكذا نجد أنه لأجل المنطقة التكاملية D يوجد حقل F يحوي حلقة جزئية D_0 تماثل D. وأن لكل عنصر $a \in D$ مغاير للصفر يوجد مقلوب هو $1/a$ ينتمي إلى F. نطابق عادة بين الحلقتين D_0 و D.

العلاقة بين الحقل F والمنطقة التكاملية D تبينه لنا المبرهنة الآتية:

مبرهنة 3-3-2.

لتكن D منطقة تكاملية. إن الحقل F الذي تم بناؤه في المبرهنة (3-3-1) هو أصغر حقل يحوي D.

البرهان.

ليكن F_0 حقلاً يحوي D_0 بحيث $F_0 \subseteq F$ ولنبرهن على أن $F_0 = F$. ليكن $a/b \in F$ عندئذ بالاعتماد على الفرضيات التي اعتمدت في المبرهنة (3-3-1) فإن $(a,b) \in D \times S$ أي أن $b \neq o$ كما أن $(a,1),(b,1) \in D \times S$ وأن $a/1, b/1 \in D_0 \subseteq F_0$ وبما أن F_0 حقل وأن $b/1 \neq 0/1$ فإن العنصر $b/1$ يملك مقلوب في F_0 هو $1/b$ أي أن $1/b = (b/1)^{-1}$ ومنه

$$a/b = (a/1)(1/b) = (a/1)(b/1)^{-1} \in F_0$$

وهذا يبين لنا أن $F = F_0$.

نتيجـــة.

بالاعتماد على المبرهنة (3-3-1) نلاحظ أنه إذا كانـــت $D = Z$ فـــإن $F = Q$. وبالتالي فإن حقل الأعداد العادية Q هو أصغر حقل يحوي حلقة الأعداد الصحيحة Z.

تعريـــف.

لتكن D منطقة تكاملية. نسمي الحقل F الذي تم بناؤه في المبرهنة (3-3-1) حقل النسب.

3 - 4. حلقـــــة النســـــب.

وجدنا حسب المبرهنة (3-3-1) أنه إذا كانت D منطقة تكاملية فإنه في هذه الحالة يوجد حقل F يحوي حلقة جزئية تماثل D. ولكن ماذا عن الحلقـــات التبديليـــة التـــي تحوي قواسم للصفر حيث تبين في كثير من الأحيان ومن خلال دراسة حلقة مـــا R أنه من المفيد البحث عن حلقة أخرى R' تمتلك خواص إضافية وتحوي الحلقـــة R. وقبل البحث في هذا الموضوع سوف نورد التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة تبديلية و S مجموعة جزئية وغيـــر خاليـــة مـــن R. نقـــول عـــن المجموعة S إنها مغلقة إذا حققت الشروط الآتية:

1 - $1 \in S$.

2 - أياً كان $x, y \in S$ فإن $xy \in S$.

سوف ندرس الآن عملية بناء حلقة تمتلك خواص إضافية تحوي حلقـــة مفروضـــة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 3-4-1.

لتكن R حلقة تبديلية و S مجموعة جزئية مغلقة في R بحيث $o \notin S$. عندئذ توجد حلقة تبديلية نرمز لها $S^{-1}R$ تحوي حلقة جزئية تماثل R وتحقق أن لكل عنصر مـن S يوجد له مقلوب في الحلقة $S^{-1}R$.

البرهـــان.

لنأخذ المجموعة $R \times S = \{(r,s) : r \in R, s \in S\}$ ولنعرف على المجموعة $R \times S$ العلاقة $(\sim)$ بالشكل الآتي: أياً كان $(r,s),(r_1,s_1) \in R \times S$ فإن

$$(r,s) \sim (r_1,s_1) \Leftrightarrow \exists s_o \in S; s_o(rs_1 - r_1 s) = o$$

فنجد أن العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $R \times S$. (تحقق من ذلك).

لنرمز إلى صف التكافؤ المولد بالعنصر (r,s) بالرمز r/s أي أن

$$r/s = \{(a,b) : (a,b) \in R \times S; (a,b) \sim (r,s)\}$$

ولنرمز لمجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $(\sim)$ بالرمز $S^{-1}R$ أي أن

$$S^{-1}R = \{r/s : \quad (r,s) \in R \times S\}$$

بما أن المجموعة S مغلقة فإن $1 \in S$ ومنه $(o,1) \in R \times S$ وبالتالي يكون $0/1 \in S^{-1}R$ وهكذا تكون المجموعة $S^{-1}R$ غير خالية. ليكن $a/b, c/d \in S^{-1}R$ عندئذ يكون $(a,b),(c,d) \in R \times S$ وبما أن $b,d \in S$ وأن المجموعة S مغلقة فإن $bd \in S$ وكذلك $ad + bc \in R$ ومنه $(ad + bc, bd) \in R \times S$ وبالتالي يكون $(ad + bc)/bd \in S^{-1}R$. هذه الحقيقة تسمح لنا بتعريف قانون تشكيل داخلي $(+)$ على المجموعة $S^{-1}R$ بالشكل الآتي: أياً كان $a/b, c/d \in S^{-1}R$ فإن

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd$$

لنبرهن على أن العملية $(+)$ معرفة جيداً.

ليكن $a/s, a_1/s_1, b/d, b_1/d_1 \in S^{-1}R$ بحيث $a/s = a_1/s_1, \quad b/d = b_1/d_1$ ولنبرهن على أن $a/s + b/d = a_1/s_1 + b_1/d_1$ والذي يكافئ بدوره أن $(ad + sb)/sd = (a_1 d_1 + s_1 b_1)/d_1 s_1$. بما أن $a/s = a_1/s_1$ عندئذ يكون $(a,s) \sim (a_1,s_1)$ وحسب التعريف يوجد $s_2 \in S$ يحقق

$$s_2(as_1 - sa_1) = o \qquad (1)$$

أيضاً بما أن $b/d = b_1/d_1$ عندئذ يكون $(b,d) \sim (b_1,d_1)$ وحسب التعريف يوجد $s_3 \in S$ يحقق

$$s_3(bd_1 - db_1) = o \qquad (2)$$

سوف نضرب المساواة (1) بالعنصر s_3dd_1 والمساواة (2) بالعنصر s_2s_1s فنجد أن

$$s_2s_3d_1d(as_1 - sa_1) = o$$

$$s_2s_3s_1s(bd_1 - db_1) = o$$

بالجمع نجد أن $s_2s_3[d_1d(as_1 - sa_1) + s_1s(bd_1 - db_1)] = o$ ومنه يكون

$$s_2s_3(d_1das_1 - d_1dsa_1 + s_1sbd_1 - s_1sdb_1) = o$$

$$s_2s_3[d_1s_1(ad + bs) - ds(a_1d_1 + b_1s_1)] = o$$

مما سبق نجد أن $(ad + bs, ds) \sim (a_1d_1 + b_1s_1, d_1s_1)$ ومنه

$$(ad + bs)/ds = (a_1d_1 + b_1s_1)/d_1s_1$$

وهذا يبين لنا أن العملية $(+)$ معرفة جيداً على المجموعة $S^{-1}R$. بالإضافة إلى ذلك فإن $o/s = o/1$ وذلك أياً كان $s \in S$. لأنه أياً كان $s_o \in S$ فإن $s_o(o1 - os) = o$ وبالتالي يكون $(o,s) \sim (o,1)$ أي أن $o/s = o/1$.

إن عملية الجمع $(+)$ تبديلية لأنه إذا كان $a/b\ ,\ c/d \in S^{-1}R$ فإن $(ad + bc)db = (cb + da)bd$ وذلك لأن عمليتي الجمع والضرب المعرفتين على الحلقة R كل منهما تبديلية وبالتالي أياً كان $s \in S$ فإن

$$s[(ad + bc)db - (cb + da)bd] = o$$

وبالتالي يكون $(ad + bc)/bd = (cb + da)/db$ أي أن

$$a/b + c/d = c/d + a/b .$$

نتابع بهذا الشكل فنجد أن العملية $(+)$ تجميعية على المجموعة $S^{-1}R$، بالإضافة إلى ذلك يوجد في المجموعة $S^{-1}R$ عنصر محايد هو $0/s = 0/1$ وذلك أياً كان $s \in S$. كذلك فإن أي عنصر $a/b \in S^{-1}R$ يوجد له نظير في $S^{-1}R$ هو $-a/b$ لأنه إذا كان $a/b \in S^{-1}R$ فإن $(a,b) \in R \times S$ وبالتالي فإن $(-a,b) \in R \times S$ ومنه

$-a/b \in S^{-1}R$. من جهة أخرى لما كان $(ab-ba)1-ob^2=o$ عندئذ أياً كان $s_o \in S$ فإن $s_o((ab-ba)1-ob^2)=o$ وحسب تعريف العلاقة $(\sim)$ نجد أن $(ab-ba,b^2)\sim(o,1)$ وبالتالي يكون $(ab-ba)/b^2=0/1$ وحسب تعريف عملية الجمع نجد أن $a/b+(-a)/b=0/1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a/b يوجد له نظير هو $-a/b \in S^{-1}R$ بالإضافة لذلك فإن $-a/b=a/-b$ لأنه إذا كان $(a,b)\in R\times S$ فإن $ab-ba=o$ وبالتالي أياً كان $s_o \in S$ فإن $s_o(ab-ba)=o$ وبما أن $ab=(-a)(-b)$ فإن $s_o((-a)(-b)-ba)=o$ وحسب تعريف العلاقة $(\sim)$ نجد أن $(-a,b)\sim(a,-b)$ أي أن $-a/b=a/-b$. نرمز عادة إلى نظير العنصر a/b بالرمز $-(a/b)$ أي أن $-(a/b)=-a/b=a/-b$. مما سبق نجد الثنائية $(S^{-1}R,+)$ زمرة تبديلية.

لنعرف على المجموعة $S^{-1}R$ عملية ضرب$(\cdot)$ بالشكل الآتي: أياً كان $a/b\ ,c/d \in S^{-1}R$ فإن $(a/b).(c/d)=ac/bd$ فنجد أن العملية$(\cdot)$ معرفة جيداً لأنه إذا كان $a/b\ ,c/d\ ,a_1/b_1\ ,c_1/d_1 \in S^{-1}R$ بحيث $a/b=c/d\ ,a_1/b_1=c_1/d_1$ ولنبرهن على أن $(a/b)(c/d)=(a_1/b_1)(c_1/d_1)$. بما أن $a/b=c/d$ عندئذ $(a,b)\sim(c,d)$ وحسب التعريف يوجد $s_4 \in S$ بحيث

$$(4) \qquad s_4(ad-bc)=o$$

كذلك بما أن $a_1/b_1=c_1/d_1$ عندئذ $(a_1,b_1)\sim(c_1,d_1)$ وحسب التعريف يوجد $s_5 \in S$ بحيث

$$(5) \qquad s_5(a_1d_1-b_1c_1)=o$$

نضرب المساواة (1) بالعنصر $s_5a_1d_1$ والمساواة (2) بالعنصر s_4bc نجد أن

$$s_4s_5a_1d_1(ad-bc)=o$$

$$s_4s_5bc(a_1d_1-b_1c_1)=o$$

بالجمع نجد أن $s_4s_5[(aa_1)(dd_1)-(bb_1)(cc_1)]=o$ وبما أن $s_4,s_5 \in S$ وأن المجموعة Sمغلقة فإن $s_4s_5 \in S$ وحسب التعريف نجد أن $(aa_1,bb_1)\sim(cc_1,dd_1)$

وبالتالي يكون $aa_1/bb_1 = cc_1/dd_1$ أي أن $(a/b)(a_1/b_1) = (c/d)(c_1/d_1)$ وهذا يبين لنا أن عملية الضرب $(\cdot)$ معرفة جيداً.

بالإضافة إلى ذلك فإنه أياً كان $s \in S$ فإن $s/s = 1/1$ لأن $s1 - 1s = o$ وبالتالي أياً كان $s_o \in S$ فإن $s_o(s1 - 1s) = o$ أي أن $(s,s) \sim (1,1)$ ومنه $s/s = 1/1$.

نتابع بهذا الشكل فنجد أن العملية $(\cdot)$ تجميعية على المجموعة $S^{-1}R$ بالإضافة إلى ذلك يوجد في المجموعة $S^{-1}R$ عنصر محايد بالنسبة إلى الضرب هو $s/s = 1/1$ وذلك أياً كان $s \in S$. كما أن الضرب $(\cdot)$ توزيعي على الجمع $(+)$. (أثبت ذلك). مما سبق نجد أن الثلاثية $(S^{-1}R, +, \cdot)$ حلقة تبديلية.

لنعرف العلاقة $f : R \to S^{-1}R$ بالشكل الآتي: أياً كان $r \in R$ فإن $f(r) = r/1$ فنجد أن العلاقة f تطبيق لأنه أياً كان $a,b \in R$ بحيث $a = b$ فإن $(a,1),(b,1) \in R \times S$ وأنه أياً كان $s \in S$ يكون $s(a1 - b1) = o$ ومنه $(a,1) \sim (b,1)$ وبالتالي $a/1 = b/1$ أي أن $f(a) = f(b)$. كما أن f هو تشاكل حلقي لأنه أياً كان $a,b \in R$ فإن

$$f(a+b) = (a+b)/1 = a/1 + b/1 = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = (ab)/1 = (a/1)(b/1) = f(a)f(b)$$

كذلك فإن f متباين لأنه إذا كان $a,b \in R$ بحيث $f(a) = f(b)$ فإن $a/1 = b/1$ ومنه $(a,1) \sim (b,1)$ وبالتالي يوجد $s_o \in S$ بحيث $s_o(a-b) = o$ ومنه $a - b = o$ لأنه إذا كان $a - b \neq o$ فإن $a - b \in S$ وبما أن المجموعة S مغلقة فإن $s_o(a-b) = o \in S$ وهذا يناقض كون $o \notin S$. وهكذا فإن $a = b$ وبالتالي f متباين. مما سبق نجد أن f هو تشاكل حلقي متباين.

لنضع $Im f = R_o$ عندئذ يكون $f : R \to R_o$ تماثلاً حلقياً وحسب المبرهنة (3 - 1 - 1) فإن R_o تكون حلقة جزئية في $S^{-1}R$ وأن $R_o = f(R) = \{r/1 : r \in R\}$. وهكذا نجد أنه لأجل المجموعة المغلقة $R \subseteq S$ توجد حلقة تبديلية $S^{-1}R$ تحوي حلقة جزئية R_o تماثل R وتحقق أن لكل عنصر $s \in S$ يوجد مقلوب هو $1/s$ ينتمي إلى $S^{-1}R$. نطابق عادة بين الحلقتين R و R_o.

تعريـــف.

لتكن R حلقة تبديلية و S مجموعة مغلقة في R بحيـث $o \notin S$. نـسمي الحلقـة $S^{-1}R$ التي تم بناؤها في المبرهنة (3-4-1) حلقة النسب الموافقة للمجموعة S.

بالعودة إلى المبرهنة (3-4-1) نجد أن المجموعة المغلقة S في الحلقة التبديليـة R التي من أجلها $o \notin S$ هي مجموعة جزئية من R تحقق الشروط: أياً كان $x \in S$ فإن $x \neq o$ وأيضاً أياً كان $x, y \in S$ فإن $xy \neq o$. بمعنى آخر المجموعة المغلقة S و التي من أجلها $o \notin S$ هي مجموعة لا تحوي قواسم للصفر. لنرى الآن مـاذا تـشكل مجموعة العناصر غير القاسمة للصفر في الحلقة التبديلية R وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 3-4-2.

لتكن R حلقة تبديلية. إن مجموعة العناصر غير القاسمة للـصفر فـي R تـشكل مجموعة مغلقة في R.

البرهـــان.

لنفرض أن S هي مجموعة العناصر غير القاسمة للصفر في R. إن $1 \in S$ لأن 1 ليس قاسماً للصفر وبالتالي المجموعة S غير خالية. كما أن $o \notin S$. لـيكن $a,b \in S$ عندئذ أياً كان $o \neq x \in R$ فإن $bx \neq o$, $ax \neq o$ وبما أن العنصر a لـيس قاسـماً للصفر فإن $a(bx) \neq o$ وبالتالي $(ab)x \neq o$ أياً كان $o \neq x \in R$ وهذا يبين لنـا أن العنصر ab ليس قاسماً للصفر في R وبالتالي $ab \in S$. مما سبق نجد أن المجموعة S مغلقة.

الآن أصبح بمقدورنا تعميم المبرهنة (3-4-1) على النحو الآتي:

مبرهنـــة 3-4-3.

لتكن R حلقة تبديلية. عندئذ توجد حلقة تبديلية $Q(R)$ تحوي R وتحقـق أن كـل عنصر من R وغير قاسم للصفر في R يملك مقلوباً في $Q(R)$.

البرهـــان.

لنفرض أن S هي مجموعة العناصر غير القاسمة للصفر في R. حسب التمهيديـــة (3-4-2) نجد أن S هي مجموعة مغلقة وأن $o \notin S$ ومنه حسب المبرهنة (3-4-1) توجد حلقة تبديلية $S^{-1}R$ تحوي R وتحقق أن كل عنصر من S يملك مقلوباً فـــي $S^{-1}R$. سوف نرمز إلى هذه الحلقة $Q(R)$.

تعريـــف.

لتكن R حلقة تبديلية. نسمي الحلقة $Q(R)$ التي تم بناؤها حسب المبرهنة (3-4-3) حلقة النسب للحلقة R.

نأتي الآن إلى دراسة مسألة وجود حلقة النسب للحلقات غير التبديلية والبداية سوف تكون مع التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه نظامي إذا لم يكن قاسماً يـــمارياً ولا يميناً للصفر.

تعريـــف.

لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة $Q(R)$ إنها حلقة نسب يسارية للحلقة R إذا حققت الشروط الآتية:

1. $R \subseteq Q(R)$.
2. كل عنصر نظامي في الحلقة R يملك مقلوب في الحلقة $Q(R)$.
3. كل عنصر $x \in Q(R)$ يمكن كتابته بالشكل $x = a^{-1}b$ حيث $a,b \in R$ وأن العنصر a نظامي في R.

إن الشرط الذي من أجله توجد حلقة النسب اليسارية لحلقة ما يسمى بـــشرط Ore والذي نورده من خلال التعريف الآتي:

تعريـــف.

نقول عن الحلقة R إنها تحقق شرط Ore من اليسار إذا كان لأجل أي عنـــصرين $a,b \in R$ حيث b هو عنصر نظامي في R يوجـــد $a_1,b_1 \in R$ حيـــث b_1 عنـــصر نظامي في R يحققان $a_1b = b_1a$.

لندرس الآن تأثير شرط Ore في الحلقة وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 3-4-4.

لتكن R حلقة تحقق شرط Ore من اليسار ولتكن $\Im$ مجموعة العناصر النظامية في الحلقة R. وليكن $b,d \in R$ بحيث $b,d \in \Im$. إذا وجـــد $b_1,d_1 \in R$ بحيـــث $b_1 \in \Im$ يحققان $d_1b = b_1d$ عندئذ يكون $d_1 \in \Im$ أي أن العنصر d_1 يكون نظامياً في R.

البرهـــان.

إن $d_1 \neq o$ لأنه إذا كان $d_1 = o$ فإن $b_1d = o$ وهذا غير ممكـــن لأن $b_1,d \in \Im$. ليكن $y \in R$ بحيث $yd_1 = o$ عندئذ يكون $y(d_1b) = o$ ولما كان $d_1b = b_1d$ نجد أن $y(b_1d) = o$ أي أن $(yb_1)d = o$ ولما كان $d \in \Im$ نجد أن $yb_1 = o$ وكذلك بما أن $b_1 \in \Im$ يكون $y = o$ وهذا يبين لنا أن العنصر d_1 ليس قاسماً يمينياً للصفر في R. لنبرهن الآن على أن العنصر d_1 ليس قاسماً يسارياً للصفر. بما أن $d \in \Im$ وأن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار عندئذ لأجل العنصرين b,d يوجد $b_2,d_2 \in R$ حيث $d_2 \in \Im$ يحققان $d_2b = b_2d$. من جهة أخرى بما أن $b_1 \in \Im$ وأن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه لأجل العنصرين b_1,b_2 يوجد $e_1,e_2 \in R$ حيـــث $e_2 \in \Im$ يحققان $e_1b_1 = e_2b_2$ ومنه يكون $e_1b_1d = e_2b_2d = e_2d_2b$ وبما أن $b_1d = d_1b$ نجد أن $e_1d_1b = e_2d_2b$ وبالتالي يكون $(e_1d_1 - e_2d_2)b = o$ وبما أن $b \in \Im$ نجـــد أن $e_1d_1 = e_2d_2$. ليكن $x \in R$ بحيث $d_1x = o$ عندئذ يكون $(e_1d_1)x = o$ ومنه يكون $e_2(d_2x) = o$ وبما أن $e_2 \in \Im$ نجد أن $d_2x = o$ وبما أن $d_2 \in \Im$ نجد أن $x = o$ وهذا يبين لنا أن العنصر d_1 ليس قاسماً للصفر من اليسار. مما سبق نجد أن $d_1 \in \Im$ أي أن العنصر d_1 هو عنصر نظامي. ◦

قبل البدء في بناء حلقة النسب اليسارية لحلقة ما لابد لنا من التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 3-4-5.

لتكن R حلقة تحقق شرط Ore من اليسار ولتكن $\Im$ مجموعة العناصر النظامية في الحلقة R. لنعرف على المجموعة

$$R \times \Im = \{(a,b) : a \in R , b \in \Im\}$$

العلاقة $(\sim)$ بالشكل الآتي: أياً كان $(a,b),(c,d) \in R \times \Im$ فإن

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \exists\, d_1 \in R, b_1 \in \Im : d_1 a = b_1 c, d_1 b = b_1 d$$

عندئذ العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ. وهذه العلاقة مستقلة عن اختيار العناصر المحققة للشرط $d_1 b = b_1 d$.

البرهـــان.

واضـــح أن العلاقـــة $(\sim)$ انعكاســـية لأنـــه أيـــاً كـــان $(a,b) \in R \times \Im$ فـــإن $ba = ba, bb = bb$ وبالتالي يكون $(a,b) \sim (a,b)$. لنبرهن على أن العلاقـــة $(\sim)$ تناظرية. لـــيكن $(a,b),(c,d) \in R \times \Im$ بحيـــث $(a,b) \sim (c,d)$ عندئـــذ يوجـــد $d_1 \in R, b_1 \in \Im$ بحيث $d_1 a = b_1 c\,,\ d_1 b = b_1 d$ عندئذ وحسب التمهيدية (3-4-4) يكون العنصر d_1 نظامياً أي $d_1 \in \Im$ وهكذا نجد أن $d_1 a = b_1 c\,,\ d_1 b = b_1 d$ وهـــذا يبين لنا أن $(c,d) \sim (a,b)$ وبالتالي العلاقة $(\sim)$ تناظرية.

لنبرهن الآن على أن العلاقة $(\sim)$ متعدية.

ليكن $(a,b),(c,d),(p,q) \in R \times \Im$ بحيـــث $(a,b) \sim (c,d)$ و $(c,d) \sim (p,q)$ عندئذ يوجد $d_1, d_2, b_1, b_2 \in R$ حيث b_1, b_2 عناصر نظاميـــة تحقـــق $d_1 a = b_1 c$ و $d_1 b = b_1 d$ وأن $d_2 c = b_2 p$ و $d_2 d = b_2 q$ ولما كان $b_1 \in \Im$ وكانـــت الحلقـــة R تحقق شرط Ore من اليـــسار فإنـــه لأجـــل العنـــصرين d_2, b_1 يوجـــد $e_1, e_2 \in R$ حيث $e_2 \in \Im$ يحققان $e_1 b_1 = e_2 d_2$ ومنه $e_1 b_1 c = e_2 d_2 c$ و هكذا نجد أن

$$e_1 d_1 a = e_1 b_1 c = e_2 d_2 c = e_2 b_2 p$$

وبالتالي يكون $e_1 d_1 b = e_1 b_1 d = e_2 d_2 d = e_2 b_2 q$.

وبما أن جداء عنصرين نظاميين هو عنصر نظامي نجد أن $e_2b_2 \in \Im$ وهذا يبين لنا أن $(a,b) \sim (p,q)$. مما سبق نجد أن العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $R \times \Im$.

ليكن $(a,b),(c,d) \in R \times \Im$ بحيث $(a,b) \sim (c,d)$ عندئذ يوجد $b_1,d_1 \in R$ حيث $b_1 \in \Im$ يحققان $d_1a = b_1c$ و $d_1b = b_1d$ وحسب التمهيدية (3-4-4) يكون $d_1 \in \Im$. لنبرهن الآن على أن العلاقة $(\sim)$ مستقلة عن اختيار العناصر b_1,d_1 المحققة للشرط $d_1b = b_1d$. ليكن $b_2,d_2 \in R$ عناصر نظامية في R تحقق $d_2b = b_2d$ وبما أن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه لأجل العنصرين b_1,b_2 يوجد $e_1,e_2 \in R$ يحققان $e_1b_1 = e_2b_2$ حيث $e_2 \in \Im$ وحسب التمهيدية (3-4-4) يكون $e_1 \in \Im$ ومنه $e_1d_1b = e_1b_1d = e_2b_2d = e_2d_2b$ وبما أن $b \in \Im$ نجد أن $e_1d_1 = e_2d_2$ وهكذا نجد أن $e_2d_2a = e_1d_1a = e_1b_1c = e_2b_2c$ وبما أن $e_2 \in \Im$ نجد أن $d_2a = b_2c$.

نأتي الآن إلى صياغة المبرهنة الآتية والتي تبين لنا متى تملك حلقة ما R حلقة نسب يسارية $Q(R)$.

مبرهنة 3-4-6.

كل حلقة R تحقق شرط Ore من اليسار تملك حلقة نسب يسارية $Q(R)$.

البرهان.

لتكن R حلقة تحقق شرط Ore من اليسار ولنفرض أن $\Im$ مجموعة العناصر النظامية في الحلقة R. لنأخذ المجموعة

$$R \times \Im = \{(a,b) : a \in R, b \in \Im\}$$

ولنعرف عليها العلاقة $(\sim)$ بالشكل الآتي: أياً كان $(a,b),(c,d) \in R \times \Im$ فإن

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \exists\, d_1 \in R, b_1 \in \Im : d_1a = b_1c, d_1b = b_1d$$

عندئذ حسب التمهيدية (3-4-4) تكون العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $R \times \Im$. لنرمز إلى صف التكافؤ المولد بالعنصر $(a,b) \in R \times \Im$ بالرمز a/b أي

$$a/b=\{(r,s):(r,s)\in R\times S;(a,b)\sim(r,s)\}$$

لنفرض أن المجموعة $Q(R)=\{a/b:(a,b)\in R\times\mathfrak{I}\}$ هي مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $(\sim)$. واضح أن المجموعة $Q(R)$ غير خالية لأن $(o,1)\in R\times\mathfrak{I}$ وبالتالي $o/1\in Q(R)$.

ليكن $a/b\ ,c/d\in Q(R)$ عندئذ $(a,b),(c,d)\in R\times\mathfrak{I}$ وبما أن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه لأجل العنصرين b,d يوجد $b_1,d_1\in\mathfrak{I}$ بحيث $d_1b=b_1d$ وبما أن جداء عنصرين نظاميين هو عنصر نظامي نجد أن $b_1d\in\mathfrak{I}$ وبالتالي $(d_1a,d_1b),(b_1c,b_1d)\in R\times\mathfrak{I}$ وبما أن $d_1b=b_1d$ نجد أن $(d_1a,b_1d),(b_1c,b_1d)\in R\times\mathfrak{I}$ وبالتالي يكون $(d_1a+b_1c,b_1d)\in R\times\mathfrak{I}$ ومنه يكون $(d_1a+b_1c)/b_1d\in Q(R)$.

هذه الحقيقة تسمح لنا بتعريف قانون تشكيل داخلي $(+)$ على المجموعة $Q(R)$ بالشكل الآتي:

أياً كان $a/b\ ,c/d\in Q(R)$ فإن $a/b+c/d=(d_1a+b_1c)/b_1d$. لنبرهن على أن العملية $(+)$ معرفة جيداً.

ليكن $a/b\ ,a'/b'\ ,c/d\ ,c'/d'\in Q(R)$ بحيث $a/b=c/d$ و $a'/b'=c'/d'$.

بما أن $a/b=c/d$ عندئذ $(a,b)\sim(c,d)$ وحسب تعريف العلاقة $(\sim)$ يوجد $d_1\in R,b_1\in\mathfrak{I}$ يحققان $d_1a=b_1c\ ,\ d_1b=b_1d$ وحسب التمهيدية (3-4-4) يكون $d_1\in\mathfrak{I}$. أيضاً بما أن $a'/b'=c'/d'$ عندئذ يكون $(a',b')\sim(c',d')$ وحسب تعريف العلاقة $(\sim)$ يوجد $d_1'\in R,b_1'\in\mathfrak{I}$ يحققان $d_1'a'=b_1'c'$ و $d_1'b'=b_1'd'$ وحسب التمهيدية (3-4-4) يكون $d_1'\in\mathfrak{I}$ وبما أن $d_1,b\in\mathfrak{I}$ و $d_1',b'\in\mathfrak{I}$ فإن $d_1b\in\mathfrak{I}$ و $d_1'b'\in\mathfrak{I}$ وبما أن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه لأجل العنصرين $d_1b,d_1'b'$ وحسب التمهيدية (3-4-4) يوجد $s,t\in\mathfrak{I}$ يحققان $sd_1b=td_1'b'$ ومنه $sd_1b=sb_1d$ وبالتالي يكون $sb_1d=sd_1b=td_1'b'=tb_1'd'$ بما أن $td_1'b'=tb_1'd'\in\mathfrak{I}$ وهكذا نجد أن

$$(sd_1a+td_1'a',td_1'b'),(sb_1c+tb_1'c',tb_1'd')\in R\times\mathfrak{I}$$

وبما أن $sd_1a+td_1'a'=sb_1c+tb_1'c'$ و أن $td_1'b'=tb_1'd'$ نجد أن

$$(sd_1a+td_1'a')/td_1'b'=(sb_1c+tb_1'c')/tb_1'd'$$

وهذا يبين لنا أن $a/b+a'/b'=c/d+c'/d'$ وبالتالي العملية $(+)$ معرفة جيداً.

بالإضافة إلى ذلك أياً كان $s\in\mathfrak{I}$ فإن $o/s=o/1$ لأنه إذا كان $s\in\mathfrak{I}$ فإنه لأجل العنصرين $s,1$ يوجد $b,d\in\mathfrak{I}$ يحققان $ds=b1$ و أن $do=bo$ وبالتالي يكون $(o,s)\sim(o,1)$ أي أن $o/s=o/1$. كما أن العملية $(+)$ تبديلية لأنه أياً كان $a/b,c/d\in Q(R)$ فإن $(a,b),(c,d)\in R\times\mathfrak{I}$ وبما أن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه لأجل العنصرين $b,d\in\mathfrak{I}$ يوجد $b_1,d_1\in\mathfrak{I}$ يحققان $d_1b=b_1d$ وبما أن $b_1d\in\mathfrak{I}$ فإن $(d_1a,d_1b),(b_1c,b_1d)\in R\times\mathfrak{I}$ وهكذا فإن $(d_1a+b_1c)/b_1d\in Q(R)$ و أن

$$a/b+c/d=(d_1a+b_1c)/b_1d=(b_1c+d_1a)/b_1d=c/d+a/b$$

نتابع بهذا الشكل فنجد أن العملية $(+)$ تجميعية على المجموعة $Q(R)$ بالإضافة لذلك يوجد في المجموعة $Q(R)$ عنصر محايد هو $o/s=o/1$ وذلك أياً كان $s\in\mathfrak{I}$. كذلك فإن أي عنصر $a/b\in Q(R)$ يوجد له نظير في $Q(R)$ هو $-a/b$ لأنه إذا كان $a/b\in Q(R)$ فإن $(a,b),(-a,b)\in R\times\mathfrak{I}$ و أن

$$(1a+(-1)a,1b)=(o,1b)=(o,b)\in R\times\mathfrak{I}$$

وبالتالي يكون $a/b+((-a)/b)=(1a+1(-a))/1b=o/b$ بالإضافة إلى ذلك فإن $-a/b=a/-b$ (تأكد من ذلك). نرمز عادة لنظير العنصر a/b بالرمز $-(a/b)$ أي أن $-a/b=a/-b=-(a/b)$. مما سبق نجد أن الثنائية $(Q(R),+)$ زمرة تبديلية.

لنعرف على المجموعة $Q(R)$ عملية ضرب $(.)$.

ليكن $a/b,c/d\in Q(R)$ عندئذ $(a,b),(c,d)\in R\times\mathfrak{I}$ ولما كانت الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه لأجل العنصرين $a,d\in R$ حيث $d\in\mathfrak{I}$ يوجد $a_1,g_1\in R$ حيث $g_1\in\mathfrak{I}$ يحققان $a_1d=g_1a$. بما أن $g_1,b\in\mathfrak{I}$ فإن $g_1b\in\mathfrak{I}$ وبالتالي يكون $(a_1c,g_1b)\in R\times\mathfrak{I}$ ومنه $a_1c/g_1b\in Q(R)$.

وهذا يسمح لنا بتعريف عملية الضرب $(.)$ على المجموعة $Q(R)$ بالشكل الآتي:

$$a/b\ .c/d = a_1c/g_1b$$

حيث $a_1d = g_1a$ للبرهن على أن العملية (.) معرفة جيداً.

ليكن $a/b = c/d$ بحيث $a/b\ ,c/d\ ,a'/b'\ ,c'/d' \in Q(R)$ و $a'/b' = c'/d'$. بما أن $a/b = c/d$ عندئذ $(a,b) \sim (c,d)$ ومنه يوجد $b_1,d_1 \in R$ حيث $d_1 \in \mathfrak{I}$ يحققان $d_1a = b_1c$ و $d_1b = b_1d$ وأن $b_1 \in \mathfrak{I}$. أيضاً بما أن $a'/b' = c'/d'$ فإن $(a',b') \sim (c',d')$ ومنه يوجد $b'_1,d'_1 \in R$ بحيث $d'_1 \in \mathfrak{I}$ يحققان $d'_1a' = b'_1c'$ و $d'_1b' = b'_1d'$ وأن $b'_1 \in \mathfrak{I}$. بما أن $d_1b' \in \mathfrak{I}$ فإنه لأجل العنصرين d_1a, d_1b' يوجد $p,q \in R$ حيث $p \in \mathfrak{I}$ يحققان $pd_1a = qd_1b'$ وذلك لأن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار. من جهة أخرى بما أن $b'_1d' \in \mathfrak{I}$ فإنه لأجل العنصرين b_1c و b'_1d' يوجد $u,v \in R$ حيث $u \in \mathfrak{I}$ يحققان $ub_1c = vb'_1d'$. بما أن $pd_1b, ub_1d \in \mathfrak{I}$ وأن الحلقة R تحقق شرط Ore من اليسار فإنه يوجد $x,y \in R$ يحققان $xpd_1b = yub_1d$ وبما أن $(a,b) \sim (c,d)$ وحسب التمهيدية (3-4-5) إن علاقة التكافؤ (~) مستقلة عن اختيار العناصر $b_1,d_1 \in R$ المحققة للشرط $d_1b = b_1d$ وهذا يبين لنا أن $xpd_1a = yub_1c$. مما سبق نجد أن

$$(qd_1a', pd_1b) \sim (vb'_1c', ub_1d)$$

ومنه $(qd'_1a')/(pd_1b) = (vb'_1c')/(ub_1d)$ أي أن

$$(a/b)\ (a'/b') = (c/d)\ (c'/d')$$

وهذا يبين لنا أن عملية الضرب (.) معرفة جيداً.

كما أن عملية الضرب هذه تجميعية و توزيعية على الجمع (+). كما أنه يوجد في الحلقة $Q(R)$ عنصر محايد هو $1/1 = a/a$ وذلك أياً كان $a \in \mathfrak{I}$. بالاعتماد على ما سبق نجد أن $Q(R)$ هي حلقة نسب يسارية للحلقة R. لأنه إذا عرفنا التطبيق $f : R \to Q(R)$ بالشكل الآتي: أياً كان $a \in R$ فإن $f(a) = a/1$ فنجد أن f هو تشاكل حلقي (تأكد من ذلك) وأن $Im\,f$ حلقة جزئية في $Q(R)$.

نطابق عادة بين الحلقتين $R, Im\,f$ ومنه يكون $R \subseteq Q(R)$. من جهة أخرى ليكن $b \in R$ عنصراً نظامياً عندئذ $1/b \in Q(R)$ وأن $(b/1).(1/b) = 1/1$ أي إن كل

عنصر نظامي b يملك مقلوب $1/b$ في $Q(R)$ نرمز له عادة b^{-1}. ليكن $x \in Q(R)$ عندئذ $x = a/b$ حيث $a,b \in R$ وأن b عنصر نظامي في R ومنه $x = a/b = (1/b)(a/1) = b^{-1}a$.

نأتي الآن إلى دراسة مبرهنة *Ore* الآتية:

مبرهنة 3-4-7.

الشرط اللازم والكافي كي تملك الحلقة R حلقة نسب يسارية $Q(R)$ هو أن تحقق الحلقة R شرط *Ore* من اليسار.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحلقة R تملك حلقة نسب يسارية $Q(R)$ وليكن $a,b \in R$ بحيث يكون العنصر b نظامياً في R عندئذ يوجد $b^{-1} \in Q(R)$ ومنه $ab^{-1} \in Q(R)$ وحسب تعريف الحلقة $Q(R)$ فإن $ab^{-1} = b_1^{-1}a_1$ حيث $a_1,b_1 \in R$ وأن العنصر b_1 نظامي في R ومنه يكون $a_1b = b_1a$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R تحقق شرط *Ore* من اليسار.

كفاية الشرط. ينتج من المبرهنة (3-4-6).

1 - لتكن A حلقة تبديليه بحيث $1 \neq o$. القضايا الآتية متكافئة:

1. الحلقة A حقل.
2. لا يوجد في A سوى مثاليين اثنين فقط هما A والمثالي الصفري.
3. أي تشاكل حلقي $f : A \to B$ حيث $B \neq o$ حلقة تبديليه هو تشاكل متباين.

الحـل.

(1) $\Leftarrow$ (2). ينتج مباشرة من التمهيدية (2-2-4).

(2) $\Leftarrow$ (3). لتكن $B \neq o$ حلقة تبديليه و $f : A \to B$ تشاكل حلقي. بما أن $A \neq o$ فإن $Kerf \neq A$ وبما أن $Kerf$ مثالي في A وحسب الفرض يكون $Kerf = \{o\}$ وحسب المبرهنة (3-1-1) فإن f متباين.

(3) $\Leftarrow$ (1). لإثبات أن A حقل يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من A مغاير للصفر يكون قابلاً للقلب. ليكن $a \in A$ عنصراً غير قابل للقلب في A عندئذ $Aa \neq A$ ومنه فإن $B = A/Aa$ هي حلقة تبديليه مغايرة للصفر. لأن $1 + Aa \neq Aa$ وحسب الفرض فإن التشاكل الحلقي الغامر $\pi : A \to B$ يكون متباينا وبالتالي $Ker\pi = \{o\}$ أي أن $Aa = \{o\}$ وهكذا نجد $a = o$. مما سبق نجد أن كل عنصر من A مغاير للصفر يكون قابلاً للقلب في A وبالتالي تكون الحلقة A حقلاً.

2 - لتكن R منطقة تكاملية مميزها العدد الأولي p. أثبت أن:

1. أياً كان $x \in R$ فإن $px = o$.
2. أياً كان $x, y \in R$ فإن $(x + y)^p = x^p + y^p$.
3. أياً كان $x, y \in R$ و أياً كان $n \in N^*$ فإن $(x + y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$.

الحـل.

بما أن p هو مميز الحلقة R فإن $p.1 = o$.

1 - ليكن $x \in R$ عندئذ

$$px = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p\ \text{once}} = \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p\ \text{once}}x = (p.1)x = ox = o$$

2 - ليكن $x, y \in R$ عندئذ

$$(x+y)^p = \sum_{i=0}^{p} C_i^p x^{p-i} y^i = C_0^p x^p + C_p^p y^p + \sum_{i=1}^{p-1} C_i^p x^{p-i} y^i$$

إن $C_0^p = C_p^p = 1$ وأن $C_i^p = p!/i!(p-i)!$ ومنه

$$C_i^p x^{p-i} y^i = [(p-1)!/i!(p-i)!](px^{p-i})y^i$$

وبما أن $x^{p-i} \in R$ عندئذ وحسب (1) فإن $(px^{p-i}) = o$ وهكذا نجد أن $C_i^p x^{p-i} y^i = o$ وذلك من أجل جميع القيم $1 \le i \le p-1$. وهذا يبين لنا أن $(x+y)^p = x^p + y^p$.

3 - سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب n.

من أجل $n = 1$ فإنه حسب (2) يكون $(x+y)^p = x^p + y^p$. لنفرض أن القضية صحيحة من أجل $n-1$ عندئذ $(x+y)^{p^{n-1}} = x^{p^{n-1}} + y^{p^{n-1}}$ ومنه

$$(x+y)^{p^n} = [(x+y)^{p^{n-1}}]^p = [x^{p^{n-1}} + y^{p^{n-1}}]^p$$

وذلك بالاعتماد على الفرض الاستقرائي. وبما أن $x^{p^{n-1}}, y^{p^{n-1}} \in R$ وحسب (2) نجد أن $(x+y)^{p^n} = [x^{p^{n-1}} + y^{p^{n-1}}]^p = (x^{p^{n-1}})^p + (y^{p^{n-1}})^p = x^{p^n} + y^{p^n}$ مما سبق نجد أنه أياً كان $n \in N^*$ فإن $(x+y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$.

3 - ليكن F حقلاً منتهياً. والمطلوب:

1. أثبت أن مرتبة F هي من الشكل p^n حيث p عدد أولي و n عدد صحيح موجب.
2. أثبت أنه أياً كان $o \neq x \in F$ فإن $x^{p^n} = x$.
3. أثبت أن المجموعة $F^p = \{x^p : x \in F\}$ هي حقل جزئي في الحقل F.
4. أثبت أن $F = F^{p^n}$.

الحل.

1 - بما أن الحقل F منتهياً فإنه بالاعتماد على نتيجة المبرهنة (3-2-4) يكون مميز الحقل F عدداً أولياً وليكن p. ومنه تكون المجموعة

$$J_p = \{0.1.1, 2.1, 3.1, \cdots, (p-1).1\}$$

حقل جزئي من الحقل F. وهنا يمكن النظر إلى الزمرة التبديلية $(F,+)$ على أنها فضاء شعاعي فوق الحقل J_p. وبما أن الحقل F منتهياً يكون لهذا الفضاء بعد منته وليكن n. لنفرض أن المجموعة $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ قاعدة لهذا الفضاء. عندئذ أياً كان $x \in F$ فإن x يكتب بصورة وحيدة على النحو $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ حيث $a_i \in J_p$ من أجل جميع القيم $1 \le i \le n$. وبما أن الحقل J_p مؤلفاً من p عنصر فإن كل عنصر a_i يأخذ p قيمة وهكذا نجد أن عدد عناصر الحقل F هو p^n. وبالتالي تكون مرتبة الحقل F هي p^n.

2 - بما أن مرتبة الحقل F هي p^n فإن مرتبة الزمرة الضربيه $(F \setminus \{o\}, .)$ هي $p^n - 1$ ومنه أياً كان $o \ne x \in F$ يكون $x^{p^n-1} = 1$ وبالتالي $x^{p^n} = x$.

3 - لنأخذ المجموعة $F^p = \{x^p : x \in F\}$ واضح أن المجموعة F^p غير خالية. ليكن $a, b \in F^p$ عندئذ $a = x^p,\ b = y^p$ حيث $x, y \in F$ ومنه

$$a - b = x^p - y^p = (x - y)^p \in F^p$$

$$ab = x^p y^p = (xy)^p \in F^p$$

وذلك بالاعتماد على التمرين المحلول (2). مما سبق نجد أن F^p حقل جزئي في F.

4 - حسب (3) فإن $F^p \subseteq F$. ليكن $x \in F$ عندئذ حسب (2) فإن $x^{p^n-1} = 1$ ومنه $x^{p^n} = x$ وهكذا نجد أن $x = x^{p^n} = (x^{p^{n-1}})^p \in F^p$ أي أن $F \subseteq F^p$ مما سبق نجد $F = F^p$.

4 - (اختبار قابلية القسمة على 9). لتكن $a_k, a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0$ أعداداً صحيحة. الشرط اللازم والكافي كي يقبل المقدار $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ القسمة على 9 هو أن يقبل المجموع $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ القسمة على 9.

الحل.

لنضع $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ عندئذ يمكننا كتابة العدد n بالشكل

$$n = a_k (10)^k + a_{k-1}(10)^{k-1} + \cdots + a_1(10) + a_0$$

لنأخذ التشاكل الحلقي $\alpha : Z \to Z_9$ المعرف في المبرهنة (3-1-8) بالشكل الآتـــي
$\alpha(x) = x \bmod 9$ وذلك أياً كان $x \in Z$.

لزوم الشرط. لنفرض أن المقدار $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ يقبل القسمة على 9 عندئذ

$$0 = \alpha(n) = \alpha(a_k(10)^k + a_{k-1}(10)^{k-1} + \cdots + a_1(10) + a_0)$$

$$= \alpha(a_k)\alpha((10)^k) + \alpha(a_{k-1})\alpha((10)^{k-1}) + \cdots + \alpha(a_1)\alpha(10) + \alpha(a_0)$$

وبما أن $\alpha(10) = 1$ نجـد $\alpha(a_k) + \alpha(a_{k-1}) + \cdots + \alpha(a_1) + \alpha(a_0) = o$ وبالتـــالي
$\alpha(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) = o$ وهكذا نجد أن

$$(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) \bmod 9 = o$$

وهذا يبين لنا أن المجموع $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ يقبل القسمة على 9.

كفاية الشرط. لنفرض أن المجموع $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ يقبل القسمة علـــى 9
عندئذ $(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) \bmod 9 = o$ وبالتالي يكون

$$\alpha(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) = o$$

$$\alpha(a_k) + \alpha(a_{k-1}) + \cdots + \alpha(a_1) + \alpha(a_0) = o$$

$$\alpha(a_k)\alpha((10)^k) + \alpha(a_{k-1})\alpha((10)^{k-1}) + \cdots + \alpha(a_1)\alpha(10) + \alpha(a_0) = 0$$

$$\alpha(n) = \alpha(a_k(10)^k + a_{k-1}(10)^{k-1} + \cdots + a_1(10) + a_0) = 0$$

وهذا يبين لنا أن $n \bmod 9 = o$ وبالتالي العدد n يقبل القسمة على 9.

تطبيق. إن المقدار 71768259421160272111 يقبل القسمة على 9 لأن المجموع

$$7+1+7+6+8+2+5+9+4+2+1+1+6+0+2+7+2+1+1 = 72$$

يقبل القسمة على 9.

5 - لنأخذ الحلقتين Z_4, Z_{10}. إن التطبيق $f : Z_4 \to Z_{10}$ المعـــرف بالـــشكل الآتـــي:
$f(x) = 5x$ وذلك أياً كان $x \in Z_4$ يحقق الشرطين التاليين: أياً كان $x, y \in Z_4$ فإن

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

الحـــل.

1 - ليكن $x,y \in Z_4$ عندئذ $x,y \in Z$ وبالتالي $x+y \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل العنصرين $x+y$ و 4 فإنه يوجد $q,r \in Z$ بحيث $x+y=4q+r$ وأن $0 \le r < 4$ وبالانتقال إلى الحلقة Z_4 نجد أن $x+y=r$ ومنه

$$f(x+y)=f(r)=5r=5(x+y-4q)=5x+5y-20q=$$
$$=5x+5y=f(x)+f(y)$$

2 - ليكن $x,y \in Z_4$ عندئذ $x,y \in Z$ وبالتالي $x \cdot y \in Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل العنصرين $x \cdot y$ و 4 فإنه يوجد $q_1,r_1 \in Z$ بحيث $x \cdot y = 4q_1 + r_1$ وأن $0 \le r_1 < 4$ وبالانتقال إلى الحلقة Z_4 نجد أن $x \cdot y = r_1$ ومنه

$$f(x \cdot y)=f(r_1)=5r_1=5(x \cdot y-4q_1)=5(x \cdot y)-20q_1=$$
$$=5(x \cdot y)=(5 \cdot 5)(x \cdot y)=(5x)(5y)=f(x) \cdot f(y)$$

6 - أثبت أن الحلقتين

$$Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}: a,b \in Z\} \text{ و } H=\left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}: a,b \in Z\right\}$$

متماثلتان.

الحـــل.

لنعرف العلاقة $f: Z[\sqrt{2}] \to H$ بالشكل الآتي: أياً كان $a+b\sqrt{2} \in Z[\sqrt{2}]$ فإن

$$f(a+b\sqrt{2})=\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$$

واضح أن العلاقة f هي تطبيق. لنبرهن على أن التطبيق f هو تشاكل حلقي. لـــيكن $x,y \in Z[\sqrt{2}]$ عندئذ $x=a_1+b_1\sqrt{2}, \quad y=a_2+b_2\sqrt{2}$ حيث $a_1,a_2,b_1,b_2 \in Z$ ومنه فإن

$$f(x+y)=f[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}]=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 2(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=f(x)+f(y)$$

$$f(x\cdot y)=f\left[(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})\right]=f\left[(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\right]=$$
$$=\begin{bmatrix}a_1a_2+2b_1b_2 & 2(a_1b_2+a_2b_1)\\ a_1b_2+a_2b_1 & a_1a_2+2b_1b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & 2b_1\\ b_1 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & 2b_2\\ b_2 & a_2\end{bmatrix}=f(x)f(y)$$

مما سبق نجد أن f هو تشاكل حلقي. لنبرهن على أن التطبيق f متباين.

ليكن $x_o,y_o\in Z[\sqrt{2}]$ بحيث $f(x_o)=f(y_o)$ عندئذ يكون $x_o=a_3+b_3\sqrt{2}$ و $y_o=a_4+b_4\sqrt{2}$ حيث $a_3,a_4,b_3,b_4\in Z$ وأن

$$f(x_o)=\begin{bmatrix}a_3 & 2b_3\\ b_3 & a_3\end{bmatrix},f(y_o)=\begin{bmatrix}a_4 & 2b_4\\ b_4 & a_4\end{bmatrix}$$

وبما أن $f(x_o)=f(y_o)$ نجد أن $\begin{bmatrix}a_3 & 2b_3\\ b_3 & a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_4 & 2b_4\\ b_4 & a_4\end{bmatrix}$ ومنه يكون $a_3=a_4,\ b_3=b_4$ وهذا يبين لنا أن $x_o=a_3+b_3\sqrt{2}=a_4+b_4\sqrt{2}=y_o$ أي أن التطبيق f متباين.

لنبرهن على أن التطبيق f غامراً. ليكن $z\in H$ عندئذ يكون $z=\begin{bmatrix}\alpha & 2\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ حيث $\alpha,\beta\in Z$ ومنه فإن $z_o=\alpha+\beta\sqrt{2}\in Z[\sqrt{2}]$ ويحقق $f(z_o)=z$. مما سبق نجد أن التطبيق f هو تماثل حلقي وهكذا نجد أن الحلقتين $Z[\sqrt{2}]$ و H متماثلتين أي أن $Z[\sqrt{2}]\cong H$.

7 - لنأخذ الحلقة $R=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}:a,b,c\in Z\right\}$ ولنعرف التطبيق $f:R\to Z$ بالشكل الآتي: $f:\left(\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\right)\to a$ وذلك أياً كان $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\in R$. والمطلوب:

1. أثبت أن التطبيق f هو تشاكل حلقي.
2. أوجد نواة التشاكل f.
3. أثبت أن $Z\cong\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+Ker f\ ;a\in Z\right\}$.

الحل.

1 - عندئذ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \in R$

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{bmatrix}\right)=a_1+a_2=$$

$$=f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix} a_1.a_2 & a_1b_2+b_1c_2 \\ 0 & c_1.c_2 \end{bmatrix}\right)=a_1.a_2=$$

$$=f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right).f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)$$

مما سبق نجد أن التطبيق f هو تشاكل حلقي.

2 - ليكن $x \in Ker f$ عندئذ $x \in R$ ومنه $x=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ حيث $a,b,c \in Z$ وأن $f(x)=o$ ومنه $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=o$ وهكذا نجد أن $a=o$ و $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)=a$

وبالتالي فإن $Ker f=\left\{\begin{bmatrix} o & b \\ o & c \end{bmatrix}: b,c \in Z\right\}$.

3 - إن التشاكل f غامر لأنه أياً كان $a \in Z$ فإن $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ وأن $f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=a$ وحسب نظرية التماثل الحلقي الأولى يكون $Z \cong R/Ker f$.

كما أن

$$R/Ker f=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}+Ker f : a,b,c \in Z\right\}=$$

$$=\left\{\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)+Ker f : a,b,c \in Z\right\}=$$

$$= \left\{ \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + Ker f \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + Ker f \right) : a,b,c \in Z \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + Ker f : a \in Z \right\}$$

ومنه فإن $Z \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix} + Ker f \ : a \in Z \right\}$.

Damascus University

تمـــاريـن (3)

1 - لـــتكن R منطقـــة تكامليـــة تحقـــق $o=1.20$ و $o=1.12$ حيـــث $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ once}=n.1$. أوجد مميز R.

2 - لتكن R حلقة تبديلية مميزها 2. أثبت أن العناصر الجامدة في R تـشكل حلقـة جزئية في R.

3 - أوجد مميز الحلقة $Z_4\oplus 4Z$.

4 - لنأخذ المعادلة الآتية: $x^2-5x+6=o$. والمطلوب:

- أوجد جميع حلول هذه المعادلة في الحلقة Z_8.
- أوجد جميع حلول هذه المعادلة في الحلقة Z_{12}.
- أوجد جميع حلول هذه المعادلة في الحلقة Z_{14}.

5 - لتكن R,S حلقتين ولنأخذ الحلقتين $R\oplus S$, $S\oplus R$. والمطلوب:

- أثبت أن التطبيق $f:R\oplus S\to S$ المعـرف بالـشكل الآتـي: أيـاً كـان $(a,s)\in R\oplus S$ فإن $f((a,s))=s$ هو تشاكل حلقي غامر.
- أثبت أن التطبيق $\varphi:R\to R\oplus S$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $a\in R$ فإن $\varphi(a)=(a,o)$ هو تشاكل حلقي متباين.
- أثبت أن $R\oplus S\cong S\oplus R$.

6 - لتكن $R=\{0,2,4,6,8,10\}$ حلقة بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 12. أوجد مميز الحلقة R.

7 - ليكن n,m أعداد صحيحة موجبة. أثبـت أن مميـز الحلقـة $Z_n\oplus Z_m$ هـو $Icm(n,m)$.

8 - لتكن R حلقة $a\in R$ عنصراً قابلاً للقلب في R. أثبت أن التطبيق $f:R\to R$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $x\in R$ فإن $f(x)=axa^{-1}$ هو إيزومورفيزم.

9 - أثبت أن الحلقتين $Z\times Z$, Z غير متماثلتين.

10 - لتكن K, S, R حلقات. أثبت أن $(R \times S) \times K \cong R \times (S \times K)$.

11 - لتكن R حلقة تبديلية مميزها العدد الأولي p. أثبت أن التطبيق $f : R \to R$ المعرف بالشكل الآتي: $f(x) = x^p$ أياً كان $x \in R$ هو تشاكل حلقي.

12 - ليكن $m, n > 1$ أعداد صحيحة أولية فيما بينها. أثبت أن الحلقة Z_{mn} تحوي عنصرين جامدين بالاضافة إلى 0 و 1.

13 - ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً. أثبت أن الحلقة $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in Z_n \right\}$ تماثل الحلقة $Z_n \oplus Z_n$.

14 - أورد مثالاً على منطقة تكاملية غير منتهية مميزها يساوي 3.

15 - لتكن R حلقة مرتبتها m. أثبت أن مميز الحلقة R يقسم m.

16 - ليكن F حقلاً منتهياً مرتبته 8. وليكن $a, b \in F$ بحيث $a^2 + ab + b^2 = 0$، أثبت أن $a = 0$ و $b = 0$. هل هذا صحيح لأجل أي حقل منته مرتبته 2^n حيث n عدد فردي.

17 - لتكن R حلقة و $M_2(R)$ حلقة المصفوفات فوق الحلقة R. أثبت أن الحلقتين R و $M_2(R)$ لهما المميز نفسه.

18 - لتكن $Z[i]$ حلقة غاوص الصحيحة و A المثالي الرئيسي المولد بالعنصر $2 + i$ في $Z[i]$. أوجد مميز الحلقة $Z[i]/A$.

19 - (اختبار القسمة على 3). لتكن $a_k, a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0$ أعداداً صحيحة. الشرط اللازم والكافي كي يقبل المقدار $n = a_k\, a_{k-1} \cdots a_1\, a_0$ القسمة على 3 هو أن يقبل المجموع $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ القسمة على 3.

20 - أثبت أن المقدار 9897654527609877 يقبل القسمة على 99.

21 - لتكن R حلقة تبديلية مميزها يساوي 2. أثبت أن العلاقة $f : R \to R$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $a \in R$ فإن $f(a) = a^2$ هي تشاكل حلقي.

22 - أثبت أن الحلقتين $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$ و $Q[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in Q\}$ غير متماثلتين.

الفصـــل الـــرابـــع

نظـــريـــة المثـــاليـــات

وجدنا من خلال دراستنا السابقة عن المثاليات أن بعضاً من هذه المثاليات يلعب دوراً مهماً في دراسة الحلقة فعلى سبيل المثال عند دراستنا لحلقة الخارج وجـدنا أن مفهوم المثالي كان له الدور الأساس في هذه الدراسة وتوجد أنواع أخرى من المثاليات تلعب أدواراً مميزة في دراسة الحلقة كما سنرى لاحقا منهـا المثاليـات الأعظميـة والأصغرية والأولية وغيرها الكثير. وسوف نخصص هذا الفصل لدراسة تلك الأنواع من المثاليات. وقبل البدء في دراسة هذه المثاليات لابد لنا من التعرف علـى بعـض العناصر في المجموعات المرتبة والتي سنذكرها الآن من خلال التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر أصغر في P إذا حقق الشرط:
$\forall x \in P$ فإن $a \leq x$.
- نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر أكبر في P إذا حقق الشرط:
$\forall y \in P$ فإن $y \leq b$.
- نقول عن العنصر $d \in P$ إنه عنصر أصغري في P إذا حقق الشرط:
$\forall z \in P$ بحيث $z \leq d$ ينتج أن $z = d$.
- نقول عن العنصر $c \in P$ إنه عنصر أعظمي في P إذا حقق الشرط:
$\forall u \in P$ بحيث $c \leq u$ ينتج أن $c = u$.

تعريـــف.

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P.

- نقول عن العنصر $a \in P$ إنه حداً أعلى للمجموعة A إذا حقق الشرط: $\forall x \in A$ فإن $a \geq x$.

- نقول عن العنصر $a \in P$ إنه حداً أدنى للمجموعة A إذا حقق الشرط: $\forall y \in A$ فإن $y \geq a$.

نأتي الآن إلى صياغة تمهيدية زورن والتي تعتبر واحدة من موضوعات نظرية المجموعات وهي تشكل أحد الأدوات الرياضية الفعالة عند التعامل مع المجموعات غير المنتهية.

تمهيدية زورن.

لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. إذا كانت كل مجموعة جزئية من P وغير خالية ومرتبة كلياً تملك حداً أعلى (أدنى) واحداً على الأقل عندئذ يوجد في P عنصر أعظمي (أصغري) واحداً على الأقل.

4 - 1. المثاليات الأعظمية.

لتكن R حلقة فيها $1 \neq o$ و $\Im$ مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتي كل منها لا يساوي R. بما أن $\{o\}$ هو مثالي في R وأن $\{o\} \neq R$ فإن $\{o\} \in \Im$ وبالتالي المجموعة $\Im$ غير خالية، وهي مرتبة جزئياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. بالاعتماد على ما سبق يمكننا الحديث عن العناصر الأعظمية في $\Im$ ولأجل ذلك سوف ندخل المفهوم الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة فيها $1 \neq o$ و $\Im$ مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتي كل منها لا يساوي R. نقول عن العنصر $A \in \Im$ إنه مثالي يساري (يميني) أعظمي في R إذا كان A عنصراً أعظمياً في $\Im$.

لنورد الآن بعض الشروط المكافئة لمفهوم المثاليات اليسارية (اليمينية) الأعظمية وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 4 -1 -1.

لتكن R حلقة و $A \neq R$ مثالياً يسارياً (يمينياً) في R. الشروط التالية متكافئة:

1 - المثالي اليساري (اليميني) A أعظمي في R.

2 - أياً كان المثالي اليساري (اليميني) D الذي من أجله $A \subseteq D \subseteq R$ فإن $D = A$.

3 - لا يوجد في R مثالي يساري (يميني) B يحقق $A \subsetneq B \subsetneq R$.

4 - أياً كان المثالي اليساري (اليميني) K الذي من أجله $A \subsetneq K$ فإن $K = R$.

البرهـــان.

لتكن $\Im$ مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتي كل منها لا يساوي R عندئذ $A \in \Im$.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي اليساري A أعظمي في R وليكن D مثالياً يسارياً في R يحقق $A \subseteq D \subsetneq R$. عندئذ $A, D \in \Im$ ولما كان A مثالياً يسارياً أعظمياً في R فإن A عنصر أعظمي في المجموعة المرتبة (بالنسبة إلى علاقة الاحتواء) $\Im$ وأن $A \subseteq D$ وحسب تعريف العنصر الأعظمي نجد أن $D = A$.

(2) $\Leftarrow$ (3). لنفرض أنه يوجد في R مثالي يساري B يحقق $A \subsetneq B \subsetneq R$، عندئذ و حسب الفرض فإن $A = B$ وهذا غير ممكن. إن هذا يبين لنا أنه لا يوجد في R مثالي يساري B من أجله $A \subsetneq B \subsetneq R$.

(3) $\Leftarrow$ (4). ليكن K مثالياً يسارياً في R من أجله $A \subsetneq K$، وهنا نكون أمام حالتين: إما $K = R$ أو $K \neq R$. لنفرض أن $K \neq R$ عندئذ $A \subsetneq K \subsetneq R$ وهذا غير ممكن حسب الفرض. ومنه يكون $K = R$.

(4) $\Leftarrow$ (1). ليكن $N \in \Im$ بحيث $A \subseteq N$. عندئذ يكون A مثالياً يسارياً في R وأن $A \subseteq N \subsetneq R$. لنفرض جدلاً أن $A \neq N$ عندئذ $A \subsetneq N$، وحسب الفرض يكون $N = R$ وهذا يناقض كون $N \in \Im$. مما سبق نجد أن $A = N$ وهذا يبين لنا أن A هو عنصر أعظمي في المجموعة $\Im$، وحسب التعريف يكون المثالي اليساري A أعظمياً في R.

نأتي الآن إلى دراسة مسألة وجود المثاليات الأعظمية اليسارية (اليمينية) في الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 4-1-2.

لتكن R حلقة و $A \neq R$ مثالياً يسارياً (يمينياً) في R. عندئذ يوجد في R مثالي يساري (يميني) أعظمي يحوي A.

البرهـــان.

لنفرض أن $A \neq R$ مثالي يساري في R. ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{B:\ B \text{ مثالي يساري في } R;\ A \subseteq B \neq R\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $A \in \Im$ كما أن المجموعة $\Im$ مرتبة جزئياً وفق علاقة الاحتواء. لتكن $\Im_\alpha$ مجموعة جزئية من $\Im$ غير خالية ومرتبة كلياً وحسب التمهيدية (2-2-1) نجد أن $K = \bigcup_{B \in \Im_\alpha} B$ مثالي يساري في R وأن $A \subseteq K$. بالإضافة إلى ذلك فإن $K \neq R$ لأنه إذا كان $K = R$ فإن $1 \in K = \bigcup_{B \in \Im_\alpha} B$ ومنه يوجد $D \in \Im_\alpha$ بحيث $1 \in D$ وحسب التمهيدية (2-2-3) يكون $D = R$ وهذا يناقض كون $D \in \Im_\alpha \subseteq \Im$. إذاً $K \neq R$ وهذا يبين لنا أن $K \in \Im$. لنبرهن الآن على أن K يمثل حداً أعلى للمجموعة $\Im_\alpha$ في $\Im$. ليكن $N \in \Im_\alpha$ عندئذ $N \subseteq \bigcup_{B \in \Im_\alpha} B = K$ وحسب تعريف الحد الأعلى لمجموعة نجد أن K يمثل حداً أعلى للمجموعة $\Im_\alpha$ في $\Im$ وحسب تمهيدية زورن يوجد في المجموعة $\Im$ عنصر أعظمي وليكن M. وهذا يبين لنا حسب التعريف أن M مثالي يساري أعظمي في R وأن $A \subseteq M$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا الآن صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 4-1-3.

لتكن $R \neq o$ حلقة. عندئذ:

1 - R تحوي مثالياً يسارياً (يمينياً ثنائي الجانب) أعظمياً واحداً على الأقل.

2 - كل عنصر من R وغير قابل للقلب من اليسار (اليمين) ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية (اليمينية) الأعظمية في R .

البرهـــان.

1 - بما أن $R \neq o$ فإن $R \neq \{o\}$ مثالي يساري في R وحسب المبرهنة (4-1-2) يوجد في R مثالي يساري أعظمي في R يحوي $\{o\}$.

2 - ليكن $a \in R$ عنصراً غير قابل للقلب من اليسار، عندئذ $Ra \neq R$ لأنه إذا كان $Ra = R$ فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $ba = 1$ وهذا يعني أن العنصر a قابل للقلب من اليسار في R . بما أن Ra مثالياً يسارياً في R فإنه حسب المبرهنة (4-1-2) يوجد مثالي يساري أعظمي M في R يحوي Ra، أي أن $a \in Ra \subseteq M$. وهكذا فإن M مثالي يساري أعظمي في R ويحوي العنصر a .

ملاحظـــة.

المبرهنة الأخيرة تخبرنا أنه إذا كانت $R \neq o$ حلقة فإنه يوجد في R مثالي يساري أعظمي واحد على الأقل وآخر يميني أعظمي واحد على الأقل وثالث مثالي أعظمي واحد على الأقل. وهنا يتبادر إلى الذهن التساؤل التالي هل من علاقة بين هذه المفاهيم الثلاثة السابقة؟ بمعنى آخر، إذا كان A مثالياً أعظمياً في الحلقة R فهل يكون A كمثالي يميني أعظمي؟ أم كمثالي يساري أعظمي؟ إن الجواب عن هذا التساؤل سلبي بمعنى أنه إذا كان A مثالياً أعظمياً فليس بالضرورة أن يكون A كمثالي يميني أو كمثالي يساري أعظمي.

لندرس الآن خواص الحلقة R عندما يكون فيها $\{o\}$ مثالياً يسارياً أعظمياً وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 4-1-4.

لتكن $R \neq \{o\}$ حلقة. الشروط التالية متكافئة:

1 - المثالي اليساري (اليميني) $\{o\}$ أعظمي في R .

2 - لا يوجد في R مثاليات يسارية (يمينية) تختلف عن $\{o\}$ و R .

3 - كل عنصر في R مغاير للصفر قابل للقلب من اليسار (اليمين).

4 - كل عنصر من R مغاير للصفر قابل للقلب.

5 - الحلقة R جسم.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي اليساري $\{o\}$ أعظمي في R . وليكن A مثالياً يسارياً في R . إذا كان $A=\{o\}$ يتم المطلوب. لنفرض أن $A\neq\{o\}$ عندئذ ولما كان A مثالياً يسارياً فإن $A\supset\{o\}$ ولما كان المثالي اليساري $\{o\}$ أعظمي في R فإنه حسب التمهيدية (4-1-1) يكون $A=R$.

(2) $\Leftarrow$ (3). ليكن $a\in R$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ $Ra\neq o$ مثالي يساري في R وحسب الفرض يكون $Ra=R$ ومنه يوجد $x\in R$ بحيث $xa=1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قابل للقلب من اليسار في R .

(3) $\Leftarrow$ (4). ليكن $a\in R$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ حسب الفرض العنصر a قابل للقلب من اليسار وبالتالي يوجد $b\in R$ بحيث $ba=1$. وبما أن $R\neq\{o\}$ فإن $b\neq o$ وحسب الفرض فإن العنصر b قابل للقلب من اليسار وبالتالي يوجد $c\in R$ بحيث $cb=1$ ومنه $c=c.1=c(ba)=(cb)a=1a=a$ أي أن $ba=ab=1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قابل للقلب في R .

(4) $\Leftarrow$ (5). ينتج مباشرة من التعريف.

(5) $\Leftarrow$ (1). ليكن B مثالياً يسارياً في R مغايراً للصفر، عندئذ يوجد $b\in B$ بحيث $b\neq o$ وحسب الفرض فإن b قابل للقلب في R ، وحسب التمهيدية (3-2-2) فإن $B=R$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري $\{o\}$ أعظمي في R .

Damascus University

4 - 2. المثـــاليـــــات الأصغـــريـــــة.

لتكن R حلقة فيها $0 \neq 1$ و $\mathfrak{I}$ مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتـــي كل منها لا يساوي $\{o\}$. بما أن R هي مثالية فـــي R ولأن $R \neq \{o\}$ فـــإن $R \in \mathfrak{I}$ وبالتالي تكون المجموعة $\mathfrak{I}$ غير خالية. وهي مرتبة جزئيـــاً بالنـــسبة إلـــى علاقـــة الاحتواء. بالاعتماد على ما سبق يمكن الحديث عن العناصر الأصغرية في $\mathfrak{I}$ ولأجل ذلك سوف نورد المفهوم الآتي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة فيها $0 \neq 1$ و $\mathfrak{I}$ مجموعة المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتـــي كل منها لا يساوي الصفر $\{o\}$. نقول عن العنصر $A \in \mathfrak{I}$ إنه مثالي يساري (يميني) أصغري في R إذا كان A عنصراً أصغرياً في $\mathfrak{I}$.

لندرس الآن بعض الشروط المكافئة لمفهوم المثالي اليساري (اليميني) الأصـــغري وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 4 -2 -1.

لتكن $R \neq \{o\}$ حلقة و $A \neq o$ مثالياً يسارياً (يمينياً) فـــي R. الـــشروط الآتيـــة متكافئة:

1 - المثالي اليساري (اليميني) A أصغري في R.

2 - أياً كان المثالي اليساري (اليميني) D من R والذي من أجله $o \neq D \subsetneq A$ فإن $D = A$.

3 - لا يوجد في R مثالي يساري (يميني) B يحقق $o \neq B \subsetneq A$.

4 - أياً كان المثالي اليساري (اليميني) K من R حيث $K \subsetneq A$ فإن $K = o$.

البرهـــان.

لتكن $\mathfrak{I}$ مجموعة المثاليات اليسارية في R المغايرة للصفر وليكن $A \neq o$ مثاليـــاً يسارياً في R عندئذ $A \in \mathfrak{I}$.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي اليساري A أصغري في R وليكن D مثالياً يسارياً في R يحقق $o \neq D \subseteq A$. عندئذ $A, D \in \mathfrak{I}$ ولما كان A مثالياً يسارياً أصغرياً في R فإن A هو عنصر أصغري في المجموعة المرتبة (بالنسبة إلى الاحتواء) $\mathfrak{I}$ وأن $D \subseteq A$ وحسب تعريف العنصر الأصغري نجد أن $D = A$.

(2) $\Leftarrow$ (3). لنفرض أنه يوجد في R مثالي يساري B يحقق $o \neq B \subsetneq A$ وحسب الفرض يكون $B = A$ وهذا غير ممكن. إن هذا يبين لنا أنه لا يوجد في R مثالي يساري B من أجله $o \neq B \subsetneq A$.

(3) $\Leftarrow$ (4). ليكن K مثالياً يسارياً في R من أجله $K \subsetneq A$ وهنا نكون أمام حالتين: إما $K = o$ أو $K \neq o$. لنفرض أن $K \neq o$ عندئذ $o \neq K \subsetneq A$ وهذا غير ممكن حسب الفرض ومنه يكون $K = A$.

(4) $\Leftarrow$ (1). ليكن $N \in \mathfrak{I}$ بحيث $N \subseteq A$ عندئذ $N \neq o$ مثالي يساري في R ومنه إما $N = A$ أو $N \neq A$. لنفرض أن $N \neq A$ عندئذ $N \subsetneq A$ وحسب الفرض يكون $N = o$ وهذا غير ممكن وبالتالي يكون $N = A$ وهذا يبين لنا أن العنصر A أصغري في $\mathfrak{I}$ وبالتالي المثالي اليساري A حسب التعريف أصغري في R.

التمهيدية الآتية تبين لنا أن كل مثالي يساري (يميني) أصغري يكون رئيسياً:

تمهيدية 4-2-2.

لتكن R حلقة و A مثالي يساري (يميني) أصغري في R. عندئذ $A = Ra$ $(A = aR)$ حيث $o \neq a \in A$.

البرهان.

لنفرض أن A مثالي يساري أصغري في R. عندئذ $A \neq o$ ومنه يوجد $a \in A$ بحيث $a \neq o$ وحسب التمرين رقم (3) من الفقرة (2-1) فإن Ra هو مثالي يساري في R وأن $Ra \subseteq A$ ولما كانت $Ra \neq o$ وكان المثالي اليساري A أصغري نجد أن $A = Ra$.

نأتي الآن إلى المبرهنة المهمة الآتية والتي تصف لنا المثالي اليساري (اليميني) الأصغري في حال وجوده:

مبرهنة 4-2-3.

لتكن R حلقة و K مثالي يساري (يميني) أصغري في R. عندئذ إما $K^2 = o$ أو $K = Re$ ($K = eR$) حيث e عنصر جامد في R مغاير للصفر.

البرهان.

ليكن K مثالياً يسارياً أصغرياً في R عندئذ يكون K^2 مثالياً يسارياً في R وأن $K^2 \subseteq K$. إذا كان $K^2 = o$ يتم المطلوب. لنفرض أن $K^2 \neq o$ عندئذ يوجد $k \in K$ بحيث $Kk \neq o$ لأنه إذا كان $Ka = o$ لأجل جميع العناصر $a \in K$ فإن $K^2 = o$ وهذا غير ممكن كما أن Kk هو مثالي يساري في R وأن $o \neq Kk \subseteq K$ ولما كان المثالي اليساري K أصغري في R فإن $Kk = K$. لنأخذ المجموعة $A = \{r : r \in R, rk = o\}$ فنجد أن المجموعة A غير خالية لأن $ok = o$ وبالتالي $o \in A$. كما أن A هو مثالي يساري في R لأنه أياً كان $x, y \in A$ فإن $(x-y)k = xk - yk = o$ وبالتالي $x - y \in A$. كذلك أياً كان $r_o \in R$ فإن $(r_o x)k = r_o(xk) = r_o o = o$ ومنه $r_o x \in A$ وبالتالي A مثالي يساري في R وهكذا يكون $K \cap A$ مثالياً يسارياً في R. وأن $K \cap A \neq K$ لأنه إذا كان $K \cap A = K$ فإن $K \subseteq A$ وبالتالي $Kk = o$ وهذا غير ممكن. وهكذا نجد أن $K \cap A \subsetneq K$ ولما كان المثالي اليساري K أصغرياً نجد أن $K \cap A = \{o\}$. من جهة أخرى لما كان $Kk = K$ وكان $k \in K = Kk$ فإنه يوجد $e \in K$ بحيث $k = ek$ ومنه $ek = e^2 k$ أي أن $(e - e^2)k = o$ وبالتالي يكون $(e - e^2) \in A$ وبما أن $(e - e^2) \in K$ نجد أن $(e - e^2) \in K \cap A = \{o\}$ أي إن $e = e^2$ وهذا يبين لنا أن العنصر e هو عنصر جامد وأن $e \neq o$ وبما أن $e \in K$ نجد أن $Re \subseteq K$ وبما أن المثالي اليساري K أصغرياً في R نجد أن $K = Re$.

نأتي الآن إلى دراسة مفاهيم جديدة في الحلقة وذلك من خلال التعاريف الآتية:

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $a \in R$. نقول عن العنصر a إنه عديم القوى إذا وجـد $n \in N^*$ يحقق $a^n = o$.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و A مثالياً يسارياً (يمينياً) في R.

- نقول عن A إنه عديم إذا كان كل عنصر من A هو عنصر عديم القوى.
- نقول عن A إنه عديم القوى إذا وجد $n \in N^*$ يحقق $a_1a_2\cdots a_n = o$ وذلك أياً كان $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$.

العلاقة بين المثاليات اليسارية (اليمينية) عديمة القوى والعديمة نوردها من خـــلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 4-2-4.

لتكن R حلقة. القضايا التالية صحيحة:

1. الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي اليساري (اليميني) A عديم القـــوى في R هو أن يوجد $n \in N^*$ يحقق $A^n = o$.
2. كل مثالي يساري (يميني) عديم القوى يكون عديماً.

البرهـــان.

1 - ليكن A مثالياً يسارياً في R.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري A عديم القـــوى عندئـــذ يوجـــد $n \in N^*$ يحقق $a_1a_2\cdots a_n = o$ وذلك أياً كـــان $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$. لـــيكن $x \in A^n$ عندئـــذ $x = \sum_i b_{i_1}b_{i_2}\cdots a_{i_n} = o$ حيث $b_{i_j} \in A$ من أجل جميع القيم $1 \le j \le n$ وهذا يبين لنا أن $A^n = o$.

كفاية الشرط. لنفرض أنه يوجد $n \in N^*$ يحقق $A^n = o$. وليكن $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ عندئذ $a_1a_2\cdots a_n \in A^n = o$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري A عديم القوى.

2 - ليكن B مثالياً يسارياً عديم القوى في R عندئذ حسب (1) يوجد $n \in N^*$ يحقق $B^n = o$. من جهة أخرى ليكن $b \in B$ عندئذ $b^n = bb\cdots b \in B^n = o$ وهذا يبين لنا أن كل عنصر من B هو عنصر عديم القوى. مما سبق نجد أن المثالي اليساري B عديم. ٥

مسألة وجود المثاليات عديمة القوى ندرسها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 4 -2 -5.

الشرط اللازم والكافي كي تحوي الحلقة R مثالياً يسارياً (يمينياً) عديم القوى مغاير للصفر هو أن تحوي مثالياً عديم القوى مغاير للصفر.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحلقة R تحوي مثالياً يسارياً عديم القـــوى A مغـــايراً للصفر عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق $A^n = o$. بما أن A مثالياً يسارياً فـــي R فإنـــه حسب التمهيدية (2-2-2) يكون AR مثالياً في R وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $AR \neq o$ عندئذ:

$$(AR)^n = \underbrace{(AR)(AR)\cdots(AR)}_{n \text{ once}} = A\underbrace{(RA)(RA)\cdots(RA)}_{n-1 \text{ once}}R \subseteq$$

$$\subseteq A(\underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ 1 once}})R = A^nR = oR = o$$

وهذا يبين لنا أن المثالي AR عديم القوى.

- إذا كان $AR = o$ عندئذ يكون A مثالياً يمينياً في R لأنه أياً كـــان $r \in R$ و $a \in A$ فإن $ar \in AR = o \in A$ وهنا نجد أن A هو مثالي عديم القـــوى لأن $A^n = o$.

مما سبق نجد أنه يوجد في R مثالي عديم القوى.

كفاية الشرط. ينتج من كون كل مثالي هو مثالي يساري. ٥

العلاقة بين المثاليات اليسارية (اليمينية) الأصغرية والعديمة القوى ندرسها من خـــلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 4-2-6.

لتكن R حلقة لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر وليكن $e \in R$ عنصر جامد مغاير للصفر. الشروط الأتية متكافئة:

1. المثالي اليساري Re (اليميني eR) أصغري في R.
2. الحلقة eRe جسم (حلقة قسمة).

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي اليساري Re أصغري في R. نعلـم أن eRe حلقـة واحديه (العنصر المحايد فيها هو e). ليكن $x \in eRe$ عنصراً مغايراً للصفر عندئذ $x = eae$ حيث $o \neq a \in R$ وبما أن Rx مثالياً يسارياً في R مغايراً للـصفر وأن $Rx = Reae \subseteq Re$ وبما أن المثالي اليـساري Re أصـغرياً فـي R نجـد أن $Rx = Re$. من جهة أخرى بما أن $e \in Re = Rx$ فإنـه يوجـد $r \in R$ بحيـث $e = rx$ وهكذا نجد أن $e = ee = e(rx) = (ere)(eae) = (ere)x$ ومنه بمـا أن العنصر $ere \in eRe$ ومغاير للصفر نجد أن العنصر $x = eae$ قابل للقلب من اليسار في الحلقة eRe. وهكذا نجد أن كل عنصر من الحلقة eRe مغاير للصفر يملك مقلوباً من اليسار في الحلقة eRe وحسب التمهيدية (1-4-4) تكون الحلقة eRe جسماً.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة eRe جسماً ولنبرهن أن المثالي اليساري Re أصغري في R. ليكن A مثالياً يسارياً مغاير للصفر في R بحيث $A \subseteq Re$ عندئـذ $eA \neq o$ لأنه إذا كان $eA = o$ فإن $A^2 = AA \subseteq (Re)A = R(eA) = o$ وهذا يبين لنـا أن المثالي اليساري A عديم القوى وحسب التمهيدية (4-2-5) فإن الحلقـة R تحـوي مثالياً عديم القوى مغايراً للصفر وهذا يناقض الفرض وبالتالي فـإن $eA \neq o$ ومنـه يوجد $a \in A$ بحيث $ea \neq o$ وبما أن $a \in A \subseteq Re$ فإنـه يوجـد $y \in R$ بحيـث $o \neq ea = eye = (eye)e = e(eye)e \in eRe$ ومنه $a = ye$ وبما أن eRe جـسماً وأن $o \neq ea \in eRe$ يكون العنصر ye قـابلاً للقلـب فـي eRe وبالتـالي يوجـد $ebe \in eRe$ بحيث $(ebe)(ye) = e$ ومنه

$$e = (ebe)(ye) = (ebe)a \in Ra \subseteq RA \subseteq A$$

وهذا يبين لنا أن $Re \subseteq A$ ومنه يكون $Re = A$. مما سبق نجد أن المثالي اليساري Re أصغري في R .

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نحصل على الحقيقة المهمة الآتية:

مبرهنـــة 4 -2 -7.

لتكن R حلقة لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر وليكن $e \in R$ عنصراً جامداً مغايراً للصفر. الشروط الآتية متكافئة:

1. المثالي اليساري Re أصغري في R.
2. المثالي اليميني eR أصغري في R.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي اليساري Re أصغري في R عندئذ حسب المبرهنة (4 -2 -6) تكون الحلقة eRe جسماً. مرة أخرى حسب المبرهنـــة (4 -2 -6) يكـــون المثالي اليميني eR أصغري في R.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن المثالي اليميني eR أصغري في R عندئذ حسب المبرهنـــة (4 -2 -6) تكون الحلقة eRe جسماً ومرة أخرى حسب المبرهنـــة (4 -2 -6) يكـــون المثالي اليساري Re أصغري في R .

المبرهنة الآتية تبين لنا طبيعة مجموع المثاليات عديمة القوى:

مبرهنـــة 4 -2 -8.

أي مجموع منته لمثاليات يسارية (يمينية) عديمة القوى هو مثالي يساري (يمينـــي) عديم القوى.

البرهـــان.

لتكن R حلقة و $N_1, N_2, \cdots, N_t$ مجموعة منتهية من المثاليات اليسارية عديمـــة القوى في R . ولنبرهن على أن $N_1 + N_2 + \cdots + N_t$ هو مثالي يساري عديم القوى في R .

للسهولة ودون المس بعمومية المسألة سوف نفرض أن $n=2$. بما أن N_1,N_2 مثاليين يساريين في R عندئذ حسب التمهيدية (2-2-3) فإن المجموع N_1+N_2 هو مثالي يساري في R. من جهة أخرى بما أن المثاليان اليساريان N_1,N_2 عديمي القوى عندئذ يوجد $n,m\in N^*$ تحقق $N_1^n=N_2^m=o$. لنبرهن على أن $(N_1+N_2)^{n+m}=o$. ليكن $x\in(N_1+N_2)^{n+m}$ عندئذ

$$x=\sum_{i=1}^{s}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+m}}$$

وأن كل حد في المجموع السابق $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+m}}$ يحوي على الأقل n عنصر من المثالي اليساري N_1 أو على الأقل m عنصر من المثالي اليساري N_2. إذا كان $q\geq n$ هو عدد عناصر المثالي اليساري N_1 في الحد $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+m}}$ عندئذ يمكننا كتابة هذا الحد بالشكل الآتي :

$$(x_{i_1}.x_{i_2}.\cdots.x_{i_{k_1}})\cdot(x_{i_{k_1+1}}.x_{i_{k_1+2}}.\cdots.x_{i_{k_2}})\cdots(x_{i_{k_{q-1}+1}}.x_{i_{k_{q-1}+2}}.\cdots.x_{i_{k_q}})$$

حيث $x_{i_{k_1}},x_{i_{k_2}},\cdots,x_{i_{k_q}}\in N_1$. وبما أن N_1 مثالياً يسارياً في R فإن جميع الأقواس السابقة هي عناصر من N_1 وعددها $q\geq n$ وبالتالي يكون جداؤها معا يساوي الصفر وبالتالي يكون $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+m}}=o$. نتبع الطريقة نفسها عندما يحوي الحد $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+m}}$ على الأقل m عنصراً من المثالي اليساري N_2. بهذا الشكل نجد أن $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+m}}=o$ لأجل جميع قيم $1\leq i\leq s$ وهذا يبين لنا أن $x=o$. مما سبق نجد أن المثالي اليساري N_1+N_2 عديم القوى.

التمهيدية الآتية تبين لنا أن المثاليات اليسارية (اليمينية) عديمة القوى في أي حلقة لا تحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.

تمهيدية 4-2-9.

لتكن R حلقة. عندئذ أي مثالي يساري (يميني) عديم القوى في R لا يحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.

البرهان.

ليكن A مثالياً يسارياً عديم القوى في R وليكن e عنصراً جامداً في R بحيث $e \in A$.
بما أن المثالي اليساري A عديم القوى في R عندئذ حسب التمهيدية (4-2-4) فإن المثالي اليساري A عديم وبما أن $e \in A$ عندئذ حسب التعريف يوجد $n \in N^*$ بحيث $e^n = o$ وبما أن العنصر e جامداً نجد أن $e = o$ وهذا يبين لنا أن المثاليات اليسارية (اليمينية) عديمة القوى في أي حلقة لا تحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.

4 - 3. أســـاس الحـــلقـــة.

من خلال الدراسة العامة للبنى الجبرية وطرق بنائها وبشكل خاص نظرية الفئـــات تتملكنا الرغبة في معرفة أي من هذه البنى (أشياء الفئة) يمكن اعتبارها "جيدة" وأي منها "غير جيدة". لهذا الهدف تم إدخال العديد من المفاهيم ومن بينها أساس الحلقـــة وذلك من قبل *Nathan Jacobson* 1964 حيث إنه لدراسة حلقة ما وفئة المودولات على هذه الحلقة ندرس أساس هذه الحلقة فإذا كان الأساس يساوي الصفر فـــإن هـــذه الحلقة تملك خواصاً معينة يتم وصفها من خلال نوع خاص من الحلقات وإذا كان هذا الأساس مغايراً للصفر فهناك توجد طرق أخرى لوصف هذه الحلقة. وقد أعاد كثيـــر من الرياضيين صياغة نظرية الحلقات والمودولات والفئات بالاعتماد علـــى مفهـــوم الأساس ومنهم *C. Faith* 1976. وقبل البدء في دراسة أساس الحلقة ســـوف نـــورد التعريف الآتي:

تعريـــف.

نسمي تقاطع جميع المثاليات اليسارية الأعظمية في الحلقة R بأساس جاكبسون أو أساس الحلقة R ونرمز إليه $J(R)$.

ينتج من التعريف مباشرة أنه إذا كانت الحلقة $R \neq o$ فإنه حسب المبرهنة (4-1-3) الحلقة R تحوي مثالياً يسارياً أعظمياً واحداً على الأقل وبما أن كل مثـــالي يـــساري أعظمياً في R لا يساوي R ينتج أن $J(R) \neq R$.

المبرهنة الآتية تبين لنا ما هي العناصر التي يتألف منها أساس الحلقة:

مبرهنـــة 4-3-1.

لتكن R حلقة و $x \in R$. القضايا الآتية متكافئة:

1 - $x \in J(R)$.

2 - أياً كان $y \in R$ فإن $1 - yx$ قابل للقلب من اليسار في R.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن $x \in J(R)$ عندئذ x ينتمي إلى جميع المثاليات اليسارية الأعظمية في R. ليكن M مثالياً يسارياً أعظمياً في R بما أن $x \in M$ عندئذ أياً كان $y \in R$ فإن $yx \in M$ وبالتالي يكون $1-yx \notin M$ وحسب المبرهنة (4-1-3) يكون العنصر $1-yx$ قابلاً للقلب من اليمار في R.

(2) $\Rightarrow$ (1). لنفرض جدلاً أنه يوجد مثالي يساري أعظمي K في R بحيث $x \notin K$ عندئذ فإن $K + Rx = R$ لأن $K \subsetneq K + Rx$. وهكذا يوجد $r \in R$ بحيث $1 - rx \in K$ وحسب المبرهنة (4-1-3) ينتج أن العنصر $1-rx$ غير قابل للقلب من اليسار في R وهذا يناقض الفرض مما سبق نجد أن $x \in K$. وهذا يبين لنا أن العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات اليمارية الأعظمية في R وبالتالي $x \in J(R)$.

نتائج مهمة أخرى تتعلق بأساس جاكبسون للحلقة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4-3-2.

لتكن R حلقة. القضايا الآتية صحيحة:

1 - $J(R)$ مثالي يميني في R.

2 - $J(R)$ مثالي في R.

3 - أياً كان $a \in J(R)$ فإن العنصر $a-1$ قابل للقلب في R.

4 - $J(R)$ أكبر مثالي في R يحقق ما يأتي: أياً كان $a \in J(R)$ فإن العنصر $a-1$ قابل للقلب في R.

5 - $x \in J(R)$ عندما وفقط عندما العنصر $1-yx$ يكون قابلاً للقلب في R أياً كان $y \in R$.

البرهان.

1 - لدينا حسب التعريف $J(R)$ هو مثالي يساري في R. ليكن $r \in J(R)$ عندئذ حسب المبرهنة (4-3-1) فإنه أياً كان $t \in R$ يكون العنصر $1-tr$ قابلاً للقلب في R ومنه يوجد $u \in R$ يحقق $u(1-tr) = 1$ وبالتالي $u = 1+utr$ أي أن

$$(1+rut)(1-rt) = 1 - rt + rut - rutrt = 1 + rut - r(1+utr)t =$$

$$= 1 + rut - rut = 1$$

وهذا يبين لنا أن العنصر $1 - rt$ قابل للقلب من اليسار في R. لنبرهن على أن $rt \in J(R)$. بما أن $J(R)$ مثالياً يسارياً في R وأن $r \in J(R)$ فإنه أياً كان $a \in R$ فإن $ar \in J(R)$ ومنه أياً $t \in R$ فإن العنصر $1 - (ar)t$ قابل للقلب من اليسار وبالتالي العنصر $1 - a(rt)$ قابل للقلب من اليسار في R ومنه $rt \in J(R)$. وهذا يبين لنا أن $J(R)$ مثالي يميني في R.

2 - ينتج مباشرة من التعريف ومن (1).

3 - ليكن $a \in J(R)$ عندئذ حسب المبرهنة (4-3-1) فإن العنصر $1 - a$ قابل للقلب من اليسار في R ومنه يوجد $u \in R$ بحيث $u(1-a) = 1$ وبالتالي $u - ua = 1$ وبما أن $J(R)$ مثالي في R وحسب (2) فإن $-u = -ua \in J(R)$ وحسب المبرهنة (4-3-1) فإن العنصر $1 - (1-u) = u$ يكون قابلاً للقلب من اليسار في R وهكذا يوجد $v \in R$ بحيث $vu = 1$ ومنه

$$v = v1 = v[u(1-a)] = (vu)(1-a) = 1(1-a) = 1-a$$

وبالتالي $(1-a)u = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر $1 - a$ قابل للقلب من اليمين وأن $u = u1 = u(1-a) = (1-a)u$ وبالتالي العنصر $1 - a$ قابل للقلب في R.

4 - ليكن K مثالياً في R يحقق: أياً كان $b \in K$ فإن $1 - b$ قابل للقلب في R ولنبرهن على أن $K \subseteq J(R)$. ليكن $a \in K$ عندئذ أياً كان $x \in R$ فإن $xa \in K$ وحسب الفرض يكون العنصر $1 - xa$ قابلاً للقلب في R وحسب المبرهنة (4-3-1) نجد أن $a \in J(R)$ وهذا يبين لنا أن $K \subseteq J(R)$.

5 - لزوم الشرط. ليكن $x \in J(R)$ عندئذ بما أن $J(R)$ مثالي في R وحسب (2) فإن $yx \in J(R)$ أياً كان $y \in R$ وحسب (3) ينتج أن $1 - yx$ قابل للقلب في R.

كفاية الشرط. ينتج مباشرة من المبرهنة (4-3-1).

نأتي الآن إلى دراسة تقاطع المثاليات اليمينية الأعظمية في الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 4 -3 -3.

لتكن R حلقة و K تقاطع جميع المثاليات اليمينيـــة الأعظميـــة فـــي R. ولـــيكن $x \in R$. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 - $x \in K$ عندما وفقط عندما العنصر $1-xy$ قابل للقلب من اليمين في R وذلك أياً كان $y \in R$.

2 - K مثالي يساري في R.

3 - K مثالي في R.

4 - أياً كان $a \in K$ فإن العنصر $1-a$ قابل للقلب في R.

5 - K أكبر مثالي في R يحقق الشرط: أياً كان $a \in K$ فإن العنصر $1-a$ قابـــل للقلب في R.

6 - $J(R) = K$.

البرهـــان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن $x \in K$ وليكن N مثالياً يمينياً أعظمياً في R عندئـــذ $x \in N$ ومنه أياً كان $y \in R$ فإن $xy \in N$ ومنه $1-xy \notin N$ وحسب المبرهنـــة (4-1-3) فإن العنصر $1-xy$ قابل للقلب من اليمين في R.

كفاية الشرط. لنفرض جدلاً أنه يوجد مثالي يميني أعظمي M في R يحقق $x \notin M$ ومنـــه $M + xR = R$ لأن $M \subset M + xR$ ومنـــه يوجـــد $r_0 \in R$ بحيـــث $1 - xr_0 \in M$ وحسب المبرهنة (4-1-3) ينتج أن العنصر $1-xr_0$ غير قابل للقلب من اليمين في R وهذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن $x \in M$. وهذا يبين لنا أن العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات اليمينية الأعظمية في R وبالتالي $x \in K$.

2 - حسب الفرض فإن K هو مثالي يميني في R. ليكن $r_0 \in K$ عندئذ حســـب (1) فإن العنصر $1-r_0t$ قابل للقلب من اليمين في R وذلك أياً كان $t \in R$ ومنـــه يوجـــد $v \in R$ بحيث $(1-r_0t)v = 1$ وبالتالي $v = 1 + r_0tv$ ومنه

$$(1-tr_0)(1+tvr_0) = 1+tvr_0 - tr_0 - tr_0tvr_0 = 1+tvr_0 - t(1+r_0tv)r_0 =$$
$$= 1+tvr_0 - tvr_0 = 1$$

وهذا يبين لنا أن العنصر $1-r_0$ قابل للقلب من اليمين في R. لنبرهن على أن $r_0 \in K$. بما أن K مثالياً يمينياً في R وأن $r_0 \in K$ فإنه أياً كان $a \in R$ فإن $r_0 a \in K$ ومنه أياً كان $t \in R$ فإن العنصر $1-t(r_0 a)$ قابل للقلب من اليمين في R وبالتالي العنصر $1-(tr_0)a$ قابل للقلب من اليمين في R وحسب (1) يكون $tr_0 \in K$ وهذا يبين لنا أن K مثالي يساري في R.

3 - ينتج مباشرة من تعريف K و(2) أن K مثالي في R.

4 - ليكن $a \in K$ عندئذ حسب (1) فإن العنصر $1-a$ قابل للقلب من اليمين في R ومنه يوجد $u \in R$ بحيث $(1-a)u = 1$ وبالتالي $u - au = 1$ وبما أن K مثالياً في R يكون $1-u = -au \in K$ وحسب (1) فإن العنصر $1-(1-u) = u$ يكون قابلاً للقلب من اليمين في R وهكذا يوجد $v \in R$ بحيث $uv = 1$ ومنه

$$v = 1v = [(1-a)u]v = (1-a)(uv) = 1-a$$

وبالتالي $u(1-a) = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر $1-a$ قبل للقلب من اليسار في R وأن $u(1-a) = (1-a)u = 1$ وبالتالي العنصر $1-a$ قابل للقلب في R.

5 - ليكن H مثالياً في R يحقق أياً كان $b \in H$ فإن العنصر $1-b$ قابل للقلب في R ولنبرهن على أن $H \subseteq K$. ليكن $a \in H$ عندئذ أياً كان $x \in R$ فإن $ax \in H$ وحسب الفرض يكون العنصر $1-ax$ قابلاً للقلب في R وحسب (1) نجد أن $a \in K$ وهذا يبين لنا أن $H \subseteq K$.

6 - حسب المبرهنة (4-3-2) فإن $J(R)$ هو أكبر مثالي في R يحقق $1-a$ قابلاً للقلب في R أياً كان $a \in J(R)$ ومنه $K \subseteq J(R)$ وحسب (5) يكون $J(R) \subseteq K$. مما سبق نجد أن $K = J(R)$.

نأتي الآن إلى دراسة أساس جاكبسون للحلقة $R/J(R)$ وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4-3-4.

لأجل أي حلقة R إن $J(R/J(R)) = \bar{0}$.

البرهان.

لتكن R حلقة وحسب المبرهنة (4-3-2) فإن $J(R)$ مثالي في R ومنه $R/J(R)$ حلقة. ليكن $\pi : R \to R/J(R)$ التشاكل القانوني الغامر ولنفرض أن $\bar{x}$ هي الصورة المباشرة للعنصر x وفق التشاكل π وذلك أياً كان $x \in R$. من جهة أخرى بما أن $R/J(R)$ حلقة فإنه بالاعتماد على المبرهنة (4-3-2) فإن $J(R/J(R))$ مثالي في $R/J(R)$ ومنه فإن $J(R) = \bar{o} \in J(R/J(R))$.

ليكن $\bar{x} \in J(R/J(R))$ عندئذ أياً كان $y \in R$ فإن العنصر $\bar{1} - \bar{y}\bar{x}$ قابل للقلب من اليسار في الحلقة $R/J(R)$ وبالتالي يوجد $\bar{z} \in R/J(R)$ يحقق $\bar{z}(\bar{1} - \bar{y}\bar{x}) = \bar{1}$ ومنه $z(1-yx) + J(R) = 1 + J(R)$ وهذا يبين لنا أن $1 - z(1-yx) \in J(R)$ وحسب المبرهنة (4-3-2) يكون العنصر $1 - [1 - z(1-yx)] = z(1-yx)$ قابلاً للقلب في R ومنه يوجد $t \in R$ بحيث $tz(1-yx) = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر $1 - yx$ قابل للقلب في R وذلك أياً كان $y \in R$ وحسب المبرهنة (4-3-2) فإن $x \in J(R)$ ومنه $\bar{x} = x + J(R) = J(R) = \bar{o}$ وهكذا فإن $J(R/J(R)) \subseteq \bar{o}$. مما سبق نجد أن $J(R/J(R)) = \bar{o}$.

العلاقة بين المثاليات عديمة القوى وأساس جاكبسون للحلقة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4-3-5.

لتكن R حلقة. القضايا الآتية صحيحة:

1 - كل مثالي يساري (يميني) عديم محتوى في $J(R)$.

2 - كل مثالي يساري (يميني) عديم القوى محتوى في $J(R)$.

البرهان.

1 - ليكن A مثالياً يسارياً عديم في R وليكن $a \in A$ عندئذ حسب التعريف يوجد $n \in N^*$ يحقق $a^n = o$ ومنه يكون $(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر $1-a$ قابل للقلب من اليمين وبما أن

$$(1+a+a^2+\cdots+a^n)(1-a) = 1$$

نجد أن العنصر $a-1$ قابل للقلب من اليسار.

مما سبق نجد أن العنصر $a-1$ قابل للقلب في R وحسب المبرهنة (4-3-2) نجد أن $A \subseteq J(R)$.

2 - ينتج مباشرة من كون كل مثالي يساري (يميني) عديم القوى يكون عديماً وبالاعتماد على (1).

واحدة من الخواص المهمة لأساس الحلقة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4-3-6.

لتكن R_1, R_2 حلقتين. عندئذ $J(R_1 \times R_2) = J(R_1) \times J(R_2)$.

البرهان.

ليكن $x = (x_1, x_2) \in J(R_1 \times R_2)$ و $y_1 \in R_1,\ y_2 \in R_2$ عندئذ $y = (y_1, y_2)$ عنصر من الحلقة $R_1 \times R_2$ ومنه فإن $1 - yx = (1 - y_1x_1, 1 - y_2x_2)$ قابل للقلب من اليسار في الحلقة $R_1 \times R_2$ أي يوجد $z = (z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$ يحقق

$$1 = z(1 - yx) = (z_1(1 - y_1x_1), z_2(1 - y_2x_2))$$

وهذا يبين لنا أن $1 = z_1(1 - y_1x_1),\ 1 = z_2(1 - y_2x_2)$ وبالتالي يكون $1 - y_1x_1$ قابلاً للقلب في R_1 أياً كان $y_1 \in R_1$ و $1 - y_2x_2$ قابلاً للقلب في R_2 أياً كان $y_2 \in R_2$ ومنه يكون $x = (x_1, x_2) \in J(R_1) \times J(R_2)$ أي أن $x_1 \in J(R_1), x_2 \in J(R_2)$ ومنه $J(R_1 \times R_2) \subseteq J(R_1) \times J(R_2)$. ليكن $x' = (x_1', x_2') \in J(R_1) \times J(R_2)$ وليكن $y' = (y_1', y_2') \in R_1 \times R_2$. بما أن $x_1' \in J(R_1)$ فإن العنصر $1 - y_1'x_1'$ يكون قابلاً للقلب من اليسار في R_1 ومنه يوجد $z_1' \in R_1$ بحيث $z_1'(1 - y_1'x_1') = 1$ أيضاً بما أن $x_2' \in J(R_2)$ فإن $1 - y_2'x_2'$ قابل للقلب من اليسار في R_2 وبالتالي يوجد $z_2' \in R_2$ بحيث $z_2'(1 - y_2'x_2') = 1$ ومنه يكون $z' = (z_1', z_2') \in R_1 \times R_2$ وأن

$$z'(1 - y'x') = (z_1'(1 - y_1'x_1'), z_2'(1 - y_2'x_2')) = 1$$

أي أن العنصر $1 - y'x'$ قابل للقلب من اليسار في الحلقة $R_1 \times R_2$ وذلك أياً كان $y' \in R_1 \times R_2$ ومنه $x' \in J(R_1 \times R_2)$ أي أن $J(R_1) \times J(R_2) \subseteq J(R_1 \times R_2)$.

مما سبق نجد أن $J(R_1 \times R_2) = J(R_1) \times J(R_2)$.

4 - 4. المثاليـــات الصغيـــرة والكبيـــرة.

المثاليـــات الصغيـــرة.

توجد لأساس جاكبسون للحلقة علاقة وثيقة مع نوع أخر من المثاليـــات اليـــسارية (اليمينية) في الحلقة والتي سوف نوردها من خلال التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة. نقول عن المثالي اليساري (اليميني) A في الحلقة R إنه صغير في R إذا كان لأجل أي مثالي يساري (يميني) B من الحلقـــة R يحقـــق $A+B=R$ ينتج أن $B=R$.

ينتج من التعريف مباشرة أن المثالي الصفري هو مثالي يساري (يميني) صغير في أي حلقة.

بعض من خواص المثاليات اليسارية (اليمينية) الصغيرة نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 4 -4 -1.

لتكن R حلقة. القضايا الآتية صحيحة:

1 - مجموع أي عدد منته من المثاليات اليسارية (اليمينية) الصغيرة في R هو مثالي يساري (يميني) صغير في R.

2 - إذا كان A,B مثاليين يساريين (يمينيين) في R بحيـــث $A\subseteq B$ وإذا كـــان B صغير في R عندئذ المثالي A صغير في R.

3 - تقاطع أي عدد من المثاليات اليسارية (اليمينية) الصغيرة في R هو مثالي يساري (يميني) صغير في R.

البرهـــان.

1 - ليكن $A_1,A_2,\cdots,A_n$ مجموعة منتهية من المثاليات اليسارية الصغيرة فـــي R ولنبرهن أن المجموع $\sum_{i=1}^{n}A_i$ هو مثالي يساري صغير في R. للسهولة ودون المـــس

بعمومية المسألة سوف نثبت صحة القضية لأجل $n = 2$. بما أن A_1, A_2 مثاليين يساريين في R فإنه حسب التمهيدية (2-2-2) يكون $A_1 + A_2$ مثالياً يسارياً في R. ليكن B مثالياً يسارياً في R يحقق $(A_1 + A_2) + B = R$ عندئذ $A_1 + (A_2 + B) = R$ وبما أن المثالي اليساري A_1 صغير في R ينتج أن $A_2 + B = R$ وأيضاً بما أن المثالي اليساري A_2 صغير في R ينتج أن $B = R$. مما سبق نجد أن المثالي اليساري $A_1 + A_2$ صغير في R.

2 - ليكن A, B مثاليين يساريين في R بحيث $A \subseteq B$ ولنفرض أن المثالي اليساري B صغير في R. وليكن K مثالياً يسارياً في R يحقق $A + K = R$ عندئذ $R = A + K \subseteq B + K \subseteq R$ ومنه يكون $B + K = R$ وحسب الفرض ينتج أن $K = R$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري A صغير في R.

3 - لتكن Γ مجموعة من المثاليات اليسارية الصغيرة في R عندئذ أياً كان $H \in \Gamma$ فإن $\bigcap_{N \in \Gamma} N \subseteq H$ وبما أن المثالي اليساري H صغيراً في R فإنه حسب (2) يكون المثالي اليساري $\bigcap_{N \in \Gamma} N$ صغيراً في R.

العلاقة بين المثاليات اليسارية (اليمينية) الصغيرة وأساس جاكبسون نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4-4-2.

لتكن R حلقة. القضايا الآتية صحيحة:

1 - $J(R)$ مثالي يساري (يميني) صغير في R.

2 - ليكن N مثالياً يسارياً (يمينياً) في R. الشرط اللازم والكافي كي يكون N صغيراً في R هو أن يكون $N \subseteq J(R)$.

3 - أياً كان $x \in R$ فإن $x \in J(R)$ عندما وفقط عندما يكون المثالي اليساري Rx (اليميني xR) صغير في R.

4 - $J(R)$ هو أكبر مثالي يساري (يميني) صغير في R.

البرهان.

1 - ليكن D مثالياً يسارياً في R يحقق $D+J(R)=R$ عندئذ يوجد $r\in J(R)$ و $a\in D$ بحيث $a+r=1$ ومنه $1-a=r\in J(R)$ وحسب المبرهنة (4-3-2) فإن العنصر $a=(1-a)-1$ قابل للقلب من اليسار في R وهذا يبين لنا أن $1\in D$ وحسب التمهيدية (4-2-2) يكون $D=R$. مما سبق نجد أن المثالي اليساري $J(R)$ صغير في R.

2 - ليكن N مثالياً يسارياً في R.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري N صغير فسي R ولنفرض جدلاً أن $N\not\subset J(R)$ عندئذ يوجد مثالي يساري أعظمي M في R بحيث $N\not\subset M$ ومنه يكون $M\subset N+M$ ولكون المثالي اليساري M أعظمياً فإن $N+M=R$ وبما أن المثالي اليساري N صغيراً في R ينتج أن $M=R$ وهذا يناقض كون المثالي اليساري M أعظمياً في R مما سبق نجد أن $N\subseteq J(R)$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $N\subseteq J(R)$ عندئذ بما أن المثالي اليساري $J(R)$ صغير في R وحسب التمهيدية (4-4-1) يكون المثالي اليساري N صغيراً في R.

3 - ليكن $x\in R$.

لزوم الشرط. لنفرض أن $x\in J(R)$ عندئذ $Rx\subseteq J(R)$ وحسب (2) يكون المثالي اليساري Rx صغيراً في R.

كفاية الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري Rx صغيراً في R عندئذ حسب (2) يكون $Rx\subseteq J(R)$ ومنه $x\in J(R)$.

4 - ينتج مباشرة من (1) و(2). ∎

Damascus University

المثاليـــات الكبيـــرة.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و B مثالياً يسارياً (يمينياً) في R. نقـــول عـــن المثـــالي اليـــساري (اليميني) B إنه كبير في R إذا كان لأجل أي مثالي يساري (يميني) D مـــن R يحقق $B \cap D = \{o\}$ ينتج أن $D = o$.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل حلقة R هي مثالي يساري (يميني) كبير في R.

بعض من خواص المثاليات اليسارية (اليمينية) الكبيرة نوردها من خـــلال التمهيديـــة الآتية:

تمهيديـــة 4-4-3.

لتكن $R \neq o$ حلقة. القضايا الآتية صحيحة:

1 - أي مثالي يساري (يميني) كبير في R لا يساوي الصفر.

2 - تقاطع مثاليين يساريين (يمينيين) كبيرين في R لا يساوي الصفر.

3 - إذا كان A, B مثاليين يساريين (يمينيين) في R بحيـــث $A \subseteq B$ وإذا كـــان A كبير في R عندئذ يكون B كبيراً في R.

4 - مجموع أي عدد منته من المثاليات اليسارية (اليمينية) الكبيرة في R هو مثـــالي يساري كبير في R.

5 - تقاطع أي عدد منته من المثاليات اليسارية (اليمينية) الكبيرة في R هـــو مثـــالي يساري (يميني) كبير في R.

البرهـــان.

1 - ليكن B مثالياً يسارياً كبيراً في R ولنفرض أن $B = o$ عندئـــذ $B \cap R = \{o\}$ وبما أن B كبيراً في R ينتج أن $R = o$ وهذا غير ممكن ومنه يكون $B \neq o$.

2 - ليكن H, K مثاليين يساريين كبيرين في R ولنفرض أن $H \cap K = \{o\}$ عندئذ وبما أن K كبيراً في R ينتج أن $H = o$ وهـــذا حـــسب (1) غيـــر ممكـــن ومنـــه $H \cap K \neq \{o\}$.

3 - ليكن A,B مثاليين يساريين في R بحيث $A \subseteq B$ ولنفرض أن A كبير في R وليكن D مثالياً يسارياً في R يحقق $B \cap D = \{o\}$ عندئذ وبما أن $A \subseteq B$ فإن $A \cap D = \{o\}$ وبما أن A كبير في R ينتج أن $D = o$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري B كبير في R.

4 - لتكن $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة منتهية من المثاليات اليسارية الكبيرة في R عندئذ المجموع $\sum_{i=1}^{n} A_i$ هو مثالي يساري في R وأن $A_1 \subseteq \sum_{i=1}^{n} A_i$ وبما أن المثالي A_1 كبيراً في R فإنه حسب (3) ينتج أن المثالي اليساري $\sum_{i=1}^{n} A_i$ كبير في R.

5 - لتكن $B_1, B_2, \cdots, B_n$ مجموعة منتهية من المثاليات اليسارية الكبيرة في R عندئذ $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ هو مثالي يساري في R. ليكن D مثالياً يسارياً في R يحقق $(\bigcap_{i=1}^{n} B_i) \cap D = \{o\}$ عندئذ يكون $B_1 \cap (\bigcap_{i=2}^{n} B_i) \cap D = \{o\}$ وبما أن المثالي B_1 كبير في R ينتج أن $(\bigcap_{i=2}^{n} B_i) \cap D = \{o\}$. نتابع بهذا الشكل فنجد بعد عدد منته من الخطوات أن $D = o$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ كبير في R.

4 - 5. المثـــاليـــــات منتهيـــة التوليـــد.

في هذه الفقرة سوف ندرس نوع مهم من المثاليات اليسارية (اليمينية) في الحلقـــة والتي تسمى المثاليات منتهية التوليد والبداية ستكون مع التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 4-5-1.

لتكن R حلقة و S مجموعة جزئية وغير خالية في R. عندئذ:

1 - إن تقاطع جميع المثاليات اليسارية (اليمينية) في R والتي كل منها يحوي S هو مثالي يساري في R يحوي S نرمز له $\langle S \rangle$.

2 - إن $\langle S \rangle$ هو أصغر مثالي يساري (يميني) في R يحوي S.

البرهـــان.

لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة المثاليات اليسارية في R والتي كل منها يحوي S.

1 - حسب التمهيدية (2-2-1) فإن $K = \bigcap_{B \in \Im} B$ هو مثالي يساري في R وبمـــا أن $S \subseteq B$ أياً كان $B \in \Im$ فإن $S \subseteq K$.

2 - لـــيكن H مثاليـــاً يـــسارياً فـــي R يحـــوي S عندئـــذ فـــإن $H \in \Im$ ومنـــه $\bigcap_{B \in \Im} B \subseteq H$ وهذا يبين لنا أن $\langle S \rangle$ هو أصـــغر مثـــالي يـــساري فـــي R يحوي S.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و S مجموعة جزئية في R وغير خالية.

1 - نسمي المثالي اليساري (اليميني) $\langle S \rangle$ بالمثـــالي اليـــساري (اليمينـــي) المولـــد بالمجموعة S.

2 - إذا كانت المجموعة S منتهية عندئذ نقول عن المثالي اليساري (اليمينـــي) $\langle S \rangle$ إنه منتهي التوليد وفي الحالة المعاكسة نقول إن $\langle S \rangle$ غير منتهي التوليد.

المبرهنة الآتية توضح لنا طبيعة المثالي اليساري (اليميني) منتهي التوليد:

مبرهنـــة 4 -5 -2.

لتكن R حلقة و $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في R وليكن $\langle S\rangle$ المثالي اليساري المولد بالمجموعة S. عندئذ فإن

$$\langle S\rangle = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$$

البرهـــان.

بما أن Ra_i مثالياً يسارياً وأن $a_i \in Ra_i$ أياً كان $1 \le i \le n$ فإنه حسب التمهيديـــة (3-2-2) فإن المجموع $Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ هو مثالي يساري فـــي R وأن $\langle S\rangle \subseteq \sum_{i=1}^{n} Ra_i$. من جهـــة أخـــرى لـــيكن $x \in \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ عندئـــذ يوجـــد $r_1,r_2,\cdots,r_n \in R$ بحيث $x = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n$ وبما أن العناصر $a_i \in \langle S\rangle$ أياً كان $1 \le i \le n$ وأن $\langle S\rangle$ مثالي يساري في R فـــإن $r_1a_1, r_2a_2, \cdots, r_na_n \in \langle S\rangle$ وبالتـــالي يكـــون $x = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n \in \langle S\rangle$ وهـــذا يبـــين لنـــا أن $\sum_{i=1}^{n} Ra_i \subseteq \langle S\rangle$. مما سبق نجد أن $\langle S\rangle = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$.

ملاحظـــة.

المبرهنة السابقة تبقى صحيحة لأجل المثاليات اليمينية.

مثـــال.

كل حلقة واحديه R تعتبر مثالياً يسارياً (يمينياً) منتهي التوليد مولدة بالعنصر 1 لأنه أياً كان $x \in R$ فإن $x = x1$ $(x = 1x)$.

المبرهنة الآتية تعطينا بعضاً من خواص المثاليات اليـــسارية (اليمينيـــة) منتهيـــة التوليد:

مبرهنـــة 4 -5 -3.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R وليكن B مثالياً يسارياً (يمينياً) فـــي R بحيـــث $A \subseteq B$. عندئذ:

1 - إذا كان المثالي اليساري (اليميني) B منتهي التوليد في R فإن المثالي اليساري (اليميني) B/A يكون منتهي التوليد في الحلقة R/A.

2 - إذا كان كلاً من المثاليين اليساريين (اليمينيين) A و B/A منتهية التوليد عندئذ يكون المثالي اليساري (اليميني) B منتهي التوليد.

البرهـــان.

لنفرض أن B مثالي يساري في R وأن $A \subseteq B$ عندئذ حسب التمهيدية (2-3-3) يكون B/A مثالياً يسارياً في الحلقة R/A.

1 - لنفرض أن المثالي اليساري B منتهي التوليد في R عندئذ توجد عناصر $a_1,a_2,\cdots,a_n \in B$ وتحقق $B=\sum_{i=1}^{n} Ra_i$.

لنفرض أن $a_1,a_2,\cdots,a_s \notin A$ حيث $s \le n$ وليكن $\overline{x} \in B/A$ عندئذ $\overline{x}=b+A$ حيث $b \in B$. بما أن $b \in B=\sum_{i=1}^{n} Ra_i$ نجد أن $b=\sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ حيث $r_i \in R$ وذلك أياً كان $1 \le i \le n$ ومنه

$$\overline{x}=b+A=(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i)+A=\sum_{i=1}^{n}(r_i a_i+A)=\sum_{i=1}^{n}(r_i+A)(a_i+A)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}(r_i+A)(a_i+A)$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $\{a_1+A,a_2+A,\cdots,a_s+A\} \subseteq B/A$ وأن هذه المجموعة تولد المثالي اليساري B/A في الحلقة R/A. مما سبق نجد أن المثالي اليساري B/A منتهي التوليد.

2 - لنفرض أن كلاً من المثاليين اليساريين A و B/A منتهي التوليد ولنفرض أن A مولد بالمجموعة $S=\{c_1,c_2,\cdots,c_t\} \subseteq A$ وأن B/A مولد بالمجموعة

$$\overline{S}=\{\overline{b_1},\overline{b_2},\cdots,\overline{b_k}\} \subseteq B/A$$

ليكن $y \in B$ عندئذ $y+A \in B/A=\langle \overline{S} \rangle$ ومنه توجد عناصر $\overline{r_1},\overline{r_2},\cdots,\overline{r_k}$ من الحلقة R/A تحقق

$$y+A=\sum_{i=1}^{k}\overline{r_i}b_i=\sum_{i=1}^{k}(r_i+A)(b_i+A)=\sum_{i=1}^{k}(r_ib_i+A)=(\sum_{i=1}^{k}r_ib_i)+A$$

وهكـــذا نجـــد أن $y-\sum_{i=1}^{k}r_ib_i\in A=\langle S\rangle=\sum_{i=1}^{t}Rc_i$ ومنـــه توجـــد عناصـــر $r_1',r_2',\cdots,r_t'\in R$ بحيث $y-\sum_{i=1}^{k}r_ib_i=\sum_{i=1}^{t}r_i'c_i$ وبالتالي $y=\sum_{i=1}^{k}r_ib_i+\sum_{i=1}^{t}r_i'c_i$.

وهذا يبين لنا أن المجموعة $S_o=\{b_1,b_2,\cdots,b_k,c_1,c_2,\cdots,c_t\}\subseteq B$ تولد المثـــالي اليساري B. مما سبق نجد أن المثالي اليساري B منتهي التوليد.

خاصة أخرى للمثاليات منتهية التوليد نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 4-5-4.

لتكن R حلقة و A,B مثاليين يساريين (يمينيين) مغايرين للصفر في R ولـــيكن $K=A\oplus B$. الشرط اللازم والكافي كي يكون K منتهي التوليد هو أن يكون كـــل من A و B منتهي التوليد.

البرهـــان.

لنفرض أن A و B مثاليين يساريين في R وأن $K=A\oplus B$ عندئذ يكـــون K مثالياً يسارياً في R.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري K منتهـــي التوليـــد ومولـــد بالمجموعـــة $S=\{c_1,c_2,\cdots,c_t\}\subset K$. إن $S\not\subset A$ لأنه إذا كان $S\subseteq A$ ينتج $K=\langle S\rangle\subseteq A$ وبالتالي يكون $B=\{o\}$ وهذا غير ممكـــن. كـــذلك الأمـــر بالنـــسبة إلـــى المثـــالي اليساري B أي أن $S\not\subset B$. لنفرض أن $S_A=A\cap S$ و $S_B=B\cap S$ ولنبرهن على أن $A=\langle S_A\rangle$. واضح أن $\langle S_A\rangle\subseteq A$. ليكن $a\in A$ عندئذ $a\in K$ ومنه توجد عناصر $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t\in R$ بحيث $a=\sum_{i=1}^{t}\lambda_ic_i$.

بمـــا أن $S\not\subset A$ لنفـــرض أن $c_{k_1},c_{k_2},\cdots,c_{k_s}\notin A$ حيـــث $s<t$ ومنـــه يكـــون $a=\sum_{i=1}^{t-s}\lambda_ic_{j_i}$ وأن $c_{j_i}\in S_A$ ومنـــه نجـــد أن $A\subseteq\langle S_A\rangle$. ممـــا ســـبق نجـــد أن

$A = \langle S_A \rangle$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري A منتهي التوليد. بطريقة مشابهة نجد أن المثالي اليساري B منتهي التوليد أيضاً.

كفاية الشرط. لنفرض أن كلاً من A, B منتهي التوليد وأن $A = \langle S_A \rangle, B = \langle S_B \rangle$ حيث $S_A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $S_B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$. ولنكن $x \in K$ عندئذ $x = a + b$ حيث $a \in A, b \in B$ ومنه توجد عناصر $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$ تحقق أن $a = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ وعناصر $r_1', r_2', \cdots, r_n' \in R$ تحقق $b = \sum_{i=1}^{n} r_i' b_i$. ومنه يكون

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{m} r_i' b_i$$

وهذا يبين لنا أن المجموعة $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m\} \subseteq K$ وتولد المثالي اليساري K أي أن $K = \langle S \rangle$. مما سبق نجد أن K منتهي التوليد.

البرهنة الأخيرة يمكن تعميمها لأجل أي عدد منته من المثاليات اليسارية (اليمينية) بالشكل الآتي:

نتيجة.

لتكن R حلقة و $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مثاليات يسارية (يمينية) مغايرة للصفر في R وليكن $K = \sum_{i=1}^{n} \oplus A_i$. الشرط اللازم والكافي كي يكون المجموع المباشر $K = \sum_{i=1}^{n} \oplus A_i$ منتهي التوليد هو أن يكون كل حد مباشر A_i منتهي التوليد وذلك أياً كان $i = 1, 2, \cdots, n$.

تمـــاريـــن محـــلولـــة (4)

1 - ليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً و A مثالياً يسارياً (يمينياً) فـي R و B مثالياً يسارياً (يمينياً) في S. عندئذ:

- $f^{-1}(f(A)) = A + Ker f$.
- $f(f^{-1}(B)) = B$.

الحـــل.

- لنفرض أن A مثالي يساري في R عندئذ حسب المبرهنة (3-1-2) يكون $f(A)$ مثالياً يسارياً في S و $f^{-1}(f(A))$ مثالياً يسارياً فـي R. لـيكن $x \in f^{-1}(f(A))$ عندئـذ $f(x) \in f(A)$ ومنـه يوجـد $a \in A$ يحقـق $f(x) = f(a)$ وبالتـالي $f(x - a) = o$ أي إن $x \in A + Ker f$ وهكذا يكون

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A + Ker f.$$

ليكن $y \in A + Ker f$ عندئذ يوجد $b \in A$ و $z \in Ker f$ بحيث $y = a + z$ ومنه

$$f(y) = f(a + z) = f(a) + f(z) = f(a) \in f(A)$$

وهذا يبين لنا أن $y \in f^{-1}(f(A))$ أي أن $A + Ker f \subseteq f^{-1}(f(A))$. مما سـبق نجد أن $f^{-1}(f(A)) = A + Ker f$.

- يبرهن بطريقة مشابهة.

2 - ليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً. إذا كان M مثاليـاً يـسارياً (يمينيـاً) أعظمياً في S عندئذ يكون $f^{-1}(M)$ مثالياً يسارياً (يمينياً) أعظمياً في R.

الحـــل.

لنفرض أن M مثالي يساري أعظمي في S عندئذ حـسب المبرهنـة (3-1-2) يكون $f^{-1}(M)$ مثالياً يـسارياً فـي R كمـا أن $R \neq f^{-1}(M)$ لأنـه إذا كـان $f^{-1}(M) = R$ عندئذ يكون $1 \in f^{-1}(M)$ وبالتالي يكون $M = S$ وهـذا يتـاقض كون M أعظمياً في S. لنفرض جدلاً وجـود مثـالي يـساري K فـي R بحيـث

$f^{-1}(M) \subset K \subset R$ عندئذ يكون $f(f^{-1}(M)) \subseteq f(K) \subseteq f(R)$ وحسب التمرين (1) نجد أن $M \subset f(K) \subset S$ وبما أن المثالي اليساري M أعظمياً في S نجد أنه إما $f(K) = M$ أو $f(K) = S$.

- بفرض أن $f(K) = M$ عندئذ يكون $K \subseteq f^{-1}(M)$ وهذا غير ممكن.

- لنفرض أن $f(K) = S$ عندئذ $1 \in f(K)$ ومنه يوجد $x \in K$ بحيث $f(x) = 1 = f(1)$ ومنه يكون $x - 1 \in Kerf$ وبما أن $f(Kerf) = \{o\} \subseteq M$ فإنه يكون $Kerf \subseteq f^{-1}(M) \subset K$ وهكذا نجد أن $x - 1 \in K$ ومنه فإن $1 = x - (x - 1) \in K$ وبالتالي فإن $K = R$ وهذا غير ممكن حسب الفرض. مما سبق نجد أنه لا يوجد في R مثالي يساري K يحقق $f^{-1}(M) \subset K \subset R$ وحسب التمهيدية (4-1-1) يكون المثالي اليساري $f^{-1}(M)$ أعظمياً في R.

3 - ليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً. عندئذ:

1. إذا كان A مثالياً يسارياً (يمينياً) صغيراً في R فإن $f(A)$ مثالي يساري (يميني) صغير في S.
2. $f(J(R)) \subseteq J(S)$.

الحل.

1 - ليكن A مثالياً يسارياً في R. بما أن التشاكل f غامراً فإن $f(A)$ هو مثالي يساري في S. ليكن K مثالياً يمارياً في S يحقق $f(A) + K = S$ ولنبرهن على أن $A + f^{-1}(K) = R$. واضح أن $A + f^{-1}(K) \subseteq R$. ليكن $r \in R$ عندئذ يكون $f(r) \in S = f(A) + K$ ومنه يوجد $x \in K, y \in A$ بحيث $f(r) = f(y) + x$ وبالتالي يكون $f(r - y) = x \in K$ ومنه $r - y \in f^{-1}(K)$ وهذا يبين لنا أن $r \in A + f^{-1}(K)$ أي أن $R \subseteq A + f^{-1}(K)$.

مما سبق نجد أن $R = A + f^{-1}(K)$ وبما أن المثالي اليساري A صغيراً في R نجد أن $R = f^{-1}(K)$ ومنه $S = f(R) \subseteq K$ أي إن $S = K$ وهكذا يكون المثالي اليساري $f(A)$ صغيراً في S.

2 - وجدنا حسب المبرهنة (4-4-2) أن $J(R)$ مثالي يساري صغير في R وحسب (1) يكون $f(J(R))$ مثالياً يسارياً صغيراً في S وبالتالي حسب المبرهنة (4-4-2) يكون $f(J(R)) \subseteq J(S)$.

تعريف.

نقول عن الحلقة R إنها عديمة القوى إذا وجد $n \in N^*$ يحقق $R^n = \{o\}$.

4 - لتكن R حلقة و I مثالياً في R. إذا كانت الحلقة R عديمة القوى عندئذ الحلقة R/I والمثالي I كل منهما عديم القوى.

الحل.

لنفرض أن الحلقة R عديمة القوى عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق $R^n = \{o\}$ وبما أن $I \subseteq R$ فإن $I^n \subseteq R^n = \{o\}$ ومنه يكون $I^n = \{o\}$ وحسب التمهيدية (4-2-4) يكون المثالي I عديم القوى. ليكن $\bar{x} \in (R/I)^n$ عندئذ

$$\bar{x} = \sum (r_{i_1} + I)(r_{i_2} + I)\cdots(r_{i_n} + I) = \sum (r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_n}) + I$$

حيث $r_{i_j} \in R$ وأن $1 \le j \le n$ و $i \in N^*$ وبما أن $r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_n} \in R^n = \{o\}$ نجد أن $\bar{x} = \sum (o + I) = I$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R/I عديمة القوى.

5 - ليكن $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً وليكن A مثالياً يسارياً (يمينياً) في R. إذا كان A منتهي التوليد في R عندئذ يكون $f(A)$ منتهي التوليد في S.

الحل.

لنفرض أن A مثالي يساري في R منتهي التوليد عندئذ توجد مجموعة من العناصر $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ تحقق $A = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$. بما أن التشاكل f غامراً فإن $f(A)$ هو مثالي يساري في S. ليكن $x \in f(A)$ عندئذ يوجد $y \in A$ بحيث $x = f(y)$. وبما أن $y \in A = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ فإنه توجد عناصر $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$ تحقق $y = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ ومنه $x = f(y) = f(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i) f(a_i)$. وهكذا نجد أن المجموعة

$\{f(a_1), f(a_2), \cdots f(a_n)\} \subseteq f(A) \subseteq S$ تولد المثالي اليساري $f(A)$ ومنه يكون $f(A)$ منتهي التوليد.

6 - لتكن R حلقة و A مثالياً يسارياً في R. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون A كبير في R هو أن يتحقق الشرط الآتي: أياً كان $o \neq x \in R$ فإنه يوجد $o \neq r \in R$ بحيث $rx \neq o$ وأن $rx \in A$.

الحل.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري A كبير في R ولنكن $o \neq x \in R$ عندئذ $Rx \neq o$ مثالياً يسارياً في R وبما أن A كبيراً في R ينتج أن $A \cap Rx \neq o$ ومنه يوجد $o \neq y \in A \cap Rx$. بما أن $y \in Rx$ فإنه يوجد $o \neq r \in R$ بحيث $y = rx$ وبما أن $y \in A$ نجد أن $rx \in A$ وأن $rx \neq o$.

كفاية الشرط. ليكن $D \neq o$ مثالياً يسارياً في R. ولنبرهن على أن $A \cap D \neq o$. بما أن $D \neq o$ فإنه يوجد $o \neq d \in D$ وحسب الفرض يوجد $o \neq r \in R$ بحيث $rd \neq o$ وأن $rd \in A$ ومنه نجد أن $rd \in D$ وبالتالي يكون $o \neq rd \in A \cap D$ أي أن $A \cap D \neq o$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري A كبير في R.

تعريف.

لتكن R حلقة (ليس بالضرورة أن تملك عنصر وحدة) ولنكن A مثالياً يسارياً في R. نقول عن المثالي A إنه نظامي في R إذا وجد $a \in R$ يحقق $x - xa \in A$ وذلك أياً كان $x \in R$.

7 - لتكن R حلقة (ليس بالضرورة أن تملك عنصر وحدة) ولنكن $A \neq R$ مثالياً يسارياً نظامياً في R. أثبت أنه يوجد في R مثالي يساري نظامي أعظمي يحوي A.

الحل.

لنفرض أن $A \neq R$ مثالي يساري نظامي في R عندئذ يوجد $a \in R$ بحيث $x - xa \in A$ وذلك أياً كان $x \in R$. لتكن $\mathfrak{F}$ مجموعة كل المثاليات اليسارية في R والتي كل منها يحوي A ولا يساوي R. أي أن

$$\Im = \{K : R \text{ مثالي يساري في } K ;\ A \subseteq K , K \neq R\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $A \in \Im$ كما أن المجموعة $\Im$ مرتبة جزئياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. لتكن $\Im_{\alpha}$ مجموعة جزئية من $\Im$ غير خالية ومرتبة كلياً عندئذ يكون $K = \bigcup_{B \in \Im_{\alpha}} B$ مثالياً يسارياً في R يحوي A كما أن $K \neq R$ لأنه إذا كان $K = R$ عندئذ يكون $a \in K$ ومنه يوجد $B_{\alpha} \in \Im_{\alpha}$ بحيث $a \in B_{\alpha}$. من جهة أخرى بما أن $\Im_{\alpha} \subseteq \Im$ فإن $A \subseteq B_{\alpha}$ ومنه $x - xa \in A \subseteq B_{\alpha}$ وذلك أياً كان $x \in R$ وهذا يبين لنا أنه أياً كان $x \in R$ فإن $x \in B_{\alpha}$ وبالتالي يكون $R = B_{\alpha}$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $K \neq R$ وبالتالي يكون $K \in \Im$ وبما أن $D \subseteq K$ أياً كان $D \in \Im_{\alpha}$ نجد أن K هو حد أعلى للمجموعة $\Im_{\alpha}$ في $\Im$ وحسب تمهيدية زورن يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي وليكن M. وهذا يبين لنا أن M مثالي يساري أعظمي في R وأن $A \subseteq M$ وأنه يوجد $a \in R$ يحقق $x - xa \in A \subseteq M$ وبالتالي يكون المثالي اليساري M نظامياً في R.

تعريف.

لتكن R حلقة (ليس بالضرورة أن تملك عنصر وحدة) وليكن $a \in R$. نقول عن العنصر a إنه شبه نظامي من اليسار في R إذا وجد $a' \in R$ يحقق $a + a' + a'a = o$. ونقول عن المثالي اليساري A في الحلقة R إنه شبه نظامي من اليسار إذا كان كل عنصر من A هو عنصر شبه نظامي من اليسار في R.

8 - لتكن R حلقة (ليس بالضرورة أن تملك عنصر وحدة). إن المثالي اليساري $J(R)$ شبه نظامي من اليسار في R.

الحل.

ليكن $a \in J(R)$ عندئذ المجموعة $D = \{x + xa ; \forall x \in R\}$ هي مثالي يساري نظامي في R. (انظر التمرين 14). إن $D = R$ لأنه إذا كان $D \neq R$ فإنه حسب التمرين المحلول (7) يوجد في R مثالي يساري نظامي أعظمي M في R يحوي D. بما أن المثالي اليساري M أعظمياً فإن $J(R) \subseteq M$ وبالتالي يكون $a \in M$

وهذا يبين لنا أنه أياً كان $x \in R$ فإن $x + xa \in D \subseteq M$ وبالتالي يكـون $x \in M$ أياً كان $x \in R$ ومنه فإن $M = R$ وهذا يناقض كون المثالي اليساري M أعظمياً. مما سبق أن $D = R$ وبما أن $-a \in R$ فإنه يوجد $a' \in R$ يحقـق $a + a' + a'a = o$ وهكذا نجد أن $J(R)$ مثالي يساري شبه نظامي من اليسار في R.

9 - لتكن R حلقة و A, B مثاليين يساريين في R. إن المجموعة

$$(A : B) = \{x : x \in R ; xB \subseteq A\}$$

تشكل مثالياً في R يسمى خارج قسمة A على B.

الحـل.

بما أن $oB = o \in A$ نجد أن $(A : B)$ مجموعة جزئية في R وغير خالية.

ليكن $x, y \in (A : B)$ عندئذ فإن $xB \subseteq A$ و $yB \subseteq A$. لـيكن $z \in (x - y)B$ عندئذ يوجد $b \in B$ بحيث $z = (x - y)b$ ومنه $z = (x - y)b = xb - yb \in A$ وبالتـالي نجـد $z \in A$ ومنـه فـإن $(x - y)B \subseteq A$ وهـذا يبـين لنـا أن $x - y \in (A : B)$. لـيكن $r_1, r_2 \in R$ و $x \in (A : B)$ ولنبـرهن علـى أن $r_1 x r_2 \in (A : B)$. ليكن $z \in (r_1 x r_2)B$ عندئذ يوجد $c \in B$ بحيث $z = (r_1 x r_2)c$. بما أن B مثالياً يـسارياً فـي R فـإن $r_2 c \in B$ وبمـا أن $x \in (A : B)$ نجـد أن $x(r_2 c) \in xB \subseteq A$. وبما أن A مثالياً يسارياً في R فإن

$$z = (r_1 x r_2)c = r_1(x r_2 c) \in r_1 A \subseteq A$$

وهكذا نجد أن $r_1 x r_2 \in (A : B)$. مما سبق نجد أن $(A : B)$ مثالي في R.

10 - لتكن R حلقة و D مثالياً يسارياً في R. عندئذ:

1 - إذا كان A, B مثاليين يساريين في R بحيث $A \subseteq B$ عندئذ

- $(D : B) \subseteq (D : A)$.
- $(A : D) \subseteq (B : D)$.

2 - إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة من المثاليات اليسارية في R فإن

- $(D:\sum_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(D:A_i)$.

- $((\bigcap_{i=1}^{n}A_i):D)=\bigcap_{i=1}^{n}(A_i:D)$.

الحـــل.

1 - ليكن $x\in(D:B)$ عندئذ $xB\subseteq D$ وبمـــا أن $A\subseteq B$ نجـــد أن $xA\subseteq xB$ ومنه يكون $xA\subseteq D$ وبالتالي فإن $x\in(D:A)$ ومنه $(D:A)\subseteq(D:B)$.

- ليكن $x\in(A:D)$ عندئذ $xD\subseteq A$ وبما أن $A\subseteq B$ نجد أن $xD\subseteq B$ ومنه يكون $x\in(B:D)$ وهكذا نجد أن $(A:D)\subseteq(B:D)$.

2 - بما أن $A_i\subseteq\sum_{i=1}^{n}A_i$ فإنه حسب (1) نجد أن $(D:\sum_{i=1}^{n}A_i)\subseteq(D:A_i)$ وذلـــك أياً كان $1\le i\le n$ ومنه فإن $\bigcap_{i=1}^{n}(D:A_i)\subseteq(D:\sum_{i=1}^{n}A_i)$. ليكن $y\in\bigcap_{i=1}^{n}(D:A_i)$ عندئذ يكون $y\in(D:A_i)$ وذلك أياً كان $1\le i\le n$ وبالتالي فإن $yA_i\subseteq D$ لأجل جميع القيم $1\le i\le n$ وبما أن D مثالياً يسارياً فـــي R نجـــد أن $\sum_{i=1}^{n}yA_i\subseteq D$ وبالتـــالي يكـــون $y(\sum_{i=1}^{n}A_i)\subseteq D$ ومنـــه $y\in(D:(\sum_{i=1}^{n}A_i))$ وهكـــذا نجـــد أن $(D:\sum_{i=1}^{n}A_i)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}(D:A_i)$. مما سبق نجد أن $(D:\sum_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(D:A_i)$.

- بما أن $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\subseteq A_i$ لأجل جميع القـــيم $1\le i\le n$ فإنـــه حســـب (1) نجـــد أن $(A_i:D)\subseteq((\bigcap_{i=1}^{n}A_i):D)$ ومنه يكون $((\bigcap_{i=1}^{n}A_i):D)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}(A_i:D)$.

ليكن $z\in((\bigcap_{i=1}^{n}A_i):D)$ عندئذ يكون $zD\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ ومنه يكون $zD\subseteq A_i$ لأجـــل جميع القيم $1\le i\le n$ وبالتالي $z\in(A_i:D)$ لأجل جميع القـــيم $1\le i\le n$ ومنـــه يكون $z\in\bigcap_{i=1}^{n}(A_i:D)$ وهكذا فإن $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i:D)\subseteq((\bigcap_{i=1}^{n}A_i):D)$. مما سبق نجد

أن $((\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : D) = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : D)$.٥

تعريـــف.

لتكن R حلقة. نقول عن العنصرين $x, y \in R$ بحيث $x \neq y$ أنهما متعامـــدان إذا كان $xy = o$. ونقول عن العنصر $a \in R$ إنه مركزي إذا حقق $\forall z \in R; az = za$.

11 - لأجل أي حلقة R القضايا الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R تماثل الجداء المباشر للحلقات R_i أي إن $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$.

2 - توجد في الحلقة R عناصر جامدة ومركزيـــة ومتعامـــدة $e_1, e_2, \cdots, e_n$ تحقـــق $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ و $R_i \cong Re_i$ أياً كان $i = 1,2,\cdots,n$.

3 - توجـــد فـــي الحلقـــة R مثاليـــات $K_1, K_2, \cdots, K_n$ بحيـــث يكـــون $R = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n$ حيث $R_i \cong K_i$ وأن $i = 1,2,\cdots,n$.

الحـــل.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفـــرض أن R تماثـــل الجـــداء المباشـــر للحلقـــات R_i أي أن $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$ ولنفرض أن $\varphi : \prod_{i=1}^{n} R_i \to R$ هو التماثل المفروض.

لنفرض أن $\varphi(o,\cdots,1,o,\cdots,o) = e_i$ فنجد أن العناصر e_i هي عناصر جامدة لأن

$$e_i^2 = e_i e_i = \varphi(o,\cdots,o,1,o,\cdots,o).\varphi(o,\cdots,o,1,o,\cdots,o) =$$
$$= \varphi(o,\cdots,o,1,o,\cdots,o) = e_i$$

كما أن العناصر $e_1, e_2, \cdots, e_n$ متعامدة مثنى مثنى لأنه أياً كان $i \neq j$ فإن

$$e_i e_j = \varphi(o,\cdots,o,1,o,\cdots,o).\varphi(o,\cdots,o,1,o,\cdots,o) =$$
$$= \varphi(o,\cdots,o,\cdots,o) = o$$

والعناصر السابقة مركزية في R لأنه أياً كان $x \in R$ وبما أن φ غامراً فإنه يوجـــد $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} R_i$ بحيث $\varphi(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ومنه

$$e_i x = \varphi(o,\cdots,1,\cdots,o)\varphi(x_1,\cdots,x_n) = \varphi[(o,\cdots,1\cdots,o)(x_1,\cdots,x_n)] =$$
$$= \varphi(o,\cdots,x_i,\cdots,o) = \varphi[(x_1,\cdots,x_n)(o,\cdots,1,\cdots,o)] = xe_i$$

بما أن φ تماثل فإن

$$1=\varphi(1,1,\cdots,1)=\varphi[(1,0,\cdots,0)+(0,1,0,\cdots,0)+\cdots+(0,0,\cdots,1)]$$

وبما أن φ تشاكل نجد أن $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$. لنعرف العلاقة $f_i:R_i\to Re_i$ بالشكل التالي أياً كان $x_i\in R_i$ فإن

$$f_i(x_i)=\varphi(0,\cdots,\underset{i}{x_i},\cdots,0)=\varphi(0,\cdots,\underset{i}{x_i},\cdots,0)\varphi(0,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,0)\in Re_i$$

فنجد أن العلاقة f_i هي تماثل حلقي وذلك أياً كان $i=1,2,\cdots,n$. (أثبت ذلك).

(2) $\Leftarrow$ (3). لنفرض أن $e_1,e_2,\cdots,e_n$ عناصر جامدة ومتعامدة ومركزية في R عندئذ فإن $e_iR=Re_i$ لأن العناصر e_i مركزية ومنه $K_i=Re_i$ هي مثاليات في R أياً كان $i=1,2,\cdots,n$. بما أن $K_1,K_2,\cdots,K_n$ مثاليات في R فإن $\sum_{i=1}^{n}K_i\subseteq R$.

ليكن $y\in R$ بما أن $1=\sum_{i=1}^{n}e_i$ نجد $y=y(\sum_{i=1}^{n}e_i)=\sum_{i=1}^{n}ye_i\in\sum_{i=1}^{n}Re_i=\sum_{i=1}^{n}K_i$

ومنه نجد أن $R\subseteq\sum_{i=1}^{n}K_i$ وبالتالي يكون $R=\sum_{i=1}^{n}K_i$. لنفرض أن $o=\sum_{i=1}^{n}x_i$ حيث $x_i\in K_i$ أياً كان $1\le i\le n$ ومنه يكون $x_i=r_ie_i$ حيث $r_i\in R$ وبالتالي فإن

$$o=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}r_ie_i$$

وبما أن العناصر e_i جامدة ومتعامدة نجد أن

$$o=oe_i=(\sum_{i=1}^{n}r_ie_i)e_i=r_ie_i=x_i$$

وذلك أياً كان $1\le i\le n$ وهكذا فإن $x_i=o$ لأجل جميع القيم $1\le i\le n$. وبالتالي يكون $R=\sum_{i=1}^{n}\oplus K_i$ كما أن $R_i\cong K_i$.

(3) $\Leftarrow$ (1). حسب الفرض أياً كان $1\le i\le n$ يوجد تماثل حلقي $\varphi_i:R_i\to K_i$ ومنه يوجد التماثل الحلقي $\varphi:R_1\times R_2\times\cdots\times R_n\to R=\sum_{i=1}^{n}\oplus K_i$ معرفاً بالشكل $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)$. (تحقق من ذلك).

تمـــــاريـــــن (4)

1 - لتكن R منطقة تكاملية. أثبت أن الصفر هو العنصر عديم القوى الوحيد في R.

2 - لتكن R حلقة تحقق الشرط الآتي: أيـاً كـان $a \in R$ بحيـث $a^2 = o$ ينـتج أن $a = o$. أثبت أن الحلقة R لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر.

3 - لتكن R حلقة و $a \in R$ يحقق $a^n = o$ حيث n عدد صحيح موجب. أثبـت أن كلاً من العنصرين $1-a$ و $1+a$ قابل للقلب في R.

4 - لتكن R حلقة تبديلية. أثبت أن العناصر عديمة القوى في R تشكل حلقة جزئيـة في R.

5 - لتكن R حلقة. أثبت أن:

- مجموع مثاليين يساريين (يمينيين) أعظميين مختلفين في R يساوي R.
- تقاطع مثاليين يساريين (يمينيين) أصغريين مختلفين في R يساوي الصفر.

6 - لتكن R حلقة. أثبت أن:

- $J(R)$ لا يحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.
- $J(R)$ لا يحوي عناصر قابلة للقلب من اليسار (اليمين).

7 - لتكن R حلقة و A, B مثاليين يساريين (يمينيين) في R. إذا كان A صغيراً في R أثبت أن $A \cap B$ صغير في R.

8 - أثبت أن $J(R)$ هو أكبر مثالي يساري في R يحقق الشرط: أياً كان $a \in J(R)$ فإن العنصر a شبه نظامي من اليسار.

9 - لتكن R حلقة و $a, b \in R$. إذا كان العنصر $1-ab$ قابلاً للقلـب مـن اليـسار (اليمين) في R أثبت أن العنصر $1-ba$ قابل للقلب من اليسار (اليمين) في R.

10 - لتكن R حلقة و A, B مثاليين يساريين (يمينيين) في R. إذا كـان كـل مـن $A+B$ و $A \cap B$ منتهي التوليد في R أثبت أن كلاً من A و B منتهي التوليد.

11 - ليكن $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً. وليكن A,B مثاليين يساريين (يمينيين) في R. أثبت صحة القضايا الآتية:

1. إذا كان $A \subseteq B$ فإن $f(A) \subseteq f(B)$.
2. $f(A+B) = f(A) + f(B)$.
3. $f(A.B) = f(A) f(B)$.
4. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

12 - ليكن $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً. وليكن D,K مثاليين يساريين (يمينيين) في S. أثبت صحة القضايا الآتية:

1. إذا كان $K \subseteq D$ فإن $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(D)$.
2. $f^{-1}(K+D) = f^{-1}(K) + f^{-1}(D)$.
3. $f^{-1}(K \cap D) = f^{-1}(K) \cap f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(K) f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(K.D)$.

13 - لتكن R حلقة و A مثالياً يسارياً (يمينياً) نظامياً في R. أثبت أن أي مثالي يساري (يميني) في R يحوي A يكون نظامياً أيضاً.

14 - لتكن R حلقة (ليس بالضرورة أن تحوي عنصر وحده) وليكن $a \in R$.

- أثبت أن المجموعة $K = \{x + xa; \forall x \in R\}$ تشكل مثالياً يسارياً نظامياً في R.
- أثبت أن المجموعة $D = \{y + ay; \forall y \in R\}$ تشكل مثالياً يمينياً نظامياً في R.

15 - لتكن R حلقة و $a \in R$ ولنفرض أنه يوجد عدد صحيح $n > 1$ يحقق $a^n = a$.
إذا كان $m > 0$ عدداً صحيحاً يحقق $a^m = 0$ أثبت أن $a = 0$.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصـــل الخـــامســـس

الحـلقـــات التـــبديليـــة

جميع الحلقات التي سوف ندرسها في هذا الفصل هي حلقات تبديلية ما لم نذكر خلاف ذلك وبشكل صريح.

بداية دراستنا ستكون مع المثاليات الأولية.

5 - 1. المثاليـات الأوليـة والأعظميـة.

تعريـف .

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً في R. نقول عن المثالي P إنه أولـي فـي R إذا كان لأجل أي مثاليين A,B مـن R بحيـث $AB \subseteq P$ عندئـذ إمـا $A \subseteq P$ أو $B \subseteq P$.

لنورد الآن شرطاً مكافئاً لمفهوم المثالي الأولي وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـة 5-1-1.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً في R. الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي P أولياً في R هو أن يتحقق ما يأتي: أياً كان $a,b \in R$ بحيـث $ab \in P$ عندئـذ إمـا $a \in P$ أو $b \in P$.

البرهـان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي P أولي في R وليكن $a,b \in R$ بحيث $ab \in P$ عندئذ $(aR)(bR) \subseteq (ab)R \subseteq P$ ومنه إما $aR \subseteq P$ أي $a \in P$ أو $bR \subseteq P$ أي $b \in P$.

كفاية الشرط. ليكن A,B مثاليين في R حيـث $AB \subseteq P$ ولنفـرض أن $A \not\subset P$ عندئذ يوجد $a \in A$ بحيث $a \notin P$. لـيكن $b \in B$ عندئـذ يكـون $ab \in AB \subseteq P$

وحسب الفرض نجد أن $b \in P$ وهكذا نجد إنه أياً كان $b \in B$ فإن $b \in P$ وبالتالي يكون $B \subseteq P$. وهذا يبين لنا أن المثالي P أولي في R .

نأتي الآن لدراسة العلاقة بين المثاليات الأولية وحلقات الخارج وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-1-2.

لتكن R حلقة و P مثالياً في R . الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي P أولياً في R هو أن تكون حلقة الخارج R/P منطقة تكاملية.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي P أولي في R بما أن الحلقة R تبديلية فإن الحلقة R/P تكون أيضاً تبديلية. من جهة أخرى بما أن المثالي P أولياً في R فإن $P \neq R$ وبالتالي يكون $1 \notin P$ وهذا يبين لنا أن $1+P \neq P$. ليكن $a+P, b+P$ عناصر من الحلقة R/P بحيث $(a+P)(b+P) = P$ عندئذ يكون $ab+P = P$ ومنه يكون $ab \in P$ ولكون المثالي P أولياً عندئذ إما $a \in P$ أو $b \in P$ ومنه إما $a+P = P$ أو $b+P = P$. مما سبق نجد أن الحلقة R/P منطقة تكاملية.

كفاية الشرط. لنفرض أن الحلقة R/P منطقة تكاملية عندئذ $1+P \neq P$ ومنه $1 \notin P$ وهذا يبين لنا أن $P \neq R$. ليكن $a,b \in R$ بحيث $ab \in P$ عندئذ $ab+P = P$ ومنه $(a+P)(b+P) = P$ وبما أن الحلقة R/P لا تحوي قواسم للصفر نجد أنه إما $a+P = P$ أو $b+P = P$ وهذا يبين لنا أنه إما $a \in P$ أو $b \in P$ وحسب التمهيدية (5-1-1) نجد أن المثالي P أولي في R .

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نحصل على النتيجة المهمة الآتية:

نتيجة.

لتكن $R \neq o$ حلقة. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R منطقة تكاملية هو أن يكون المثالي الصفري $\{o\}$ أولياً في R .

لنبحث الآن في مسألة وجود المثاليات الأولية وذلك من خلال المبرهنة الآتية والتي تعطينا الشرط الذي من أجله توجد المثاليات الأولية في الحلقة.

أمثلـــة.

1 - لتكن $R = Z \times Z$ و $P = Z \times \{o\}$ فنجد أن P مثالي أولي في الحلقـــة R. مـــن الواضح أن P هو مثالي في الحلقة R. لـــيكن $x = (a,b), y = (c,d) \in R$ بحيـــث $x.y \in P$ فنجد أن $xy = (ac,bd) \in P$ أي أن $bd = o$ ومنه إمـــا $b = o$ أو $d = o$ وبالتالي إما $x = (a,o) \in P$ أو $y = (c,o) \in P$ وهذا يبين لنا أن المثالي P أولي في R. وأن حلقة الخارج $R/P \cong Z$ هي منطقة تكاملية.

2 - لنأخذ الحلقة $(Z_6,+,\cdot)$ بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقـــاس 6 ولـــيكن $P = \{0,3\}$ فنجد أن P مثالي في الحلقة Z_6 لأن

+	0	3
0	0	3
3	3	0

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	3	0	3

وأن $P \neq Z_6$. إن المثالي P هو مثالي أولي في الحلقة Z_6 لأنه إذا كان $a,b \in Z_6$ بحيث $ab \in P$ نجد أنه إما $ab = o$ أو $ab = 3$. بما أنه $ab = o$ أو $ab = 3$ نجد أن $ab = o \mod -6$ أو $ab = 3 \mod -6$.

- إذا كان $ab = o \mod -6$ نجد أنه يتحقق لدينا واحدة فقط من الحالات الآتية:

$a = o,\ b \in Z_6$ $\quad$ $a = 2,\ b = 3$ $\quad$ $a = 3,\ b = 4$

$a \in Z_6,\ b = o$ $\quad$ $a = 3,\ b = 2$ $\quad$ $a = 4,\ b = 3$

وهذا يبين لنا أنه إما $a \in P$ أو $b \in P$.

- إذا كان $ab = 3 \mod -6$ نجد أنه يتحقق لدينا واحدة فقط من الحالات الآتية:

$a = 1,\ b = 3$ $\quad$ $a = 5,\ b = 3$ $\quad$ $a = 3,\ b = 3$

$a = 3,\ b = 1$ $\quad$ $a = 3,\ b = 5$

وفي هذه الحالة نجد أنه إما $a \in P$ أو $b \in P$.

مما سبق نجد أن المثالي P هو مثالي أولي في الحلقة Z_6.

3 - نأخذ الحلقة $(Z_8,+,\cdot)$ بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقـاس 8 ولـيكن $A = \langle 4 \rangle$. من الواضح أن A مثالي في الحلقة Z_8 لأن $A = \{0,4\}$ وأن

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	4	0	4	0	4	0	4

$+$	0	4
0	0	4
4	4	0

كما أن $A \neq Z_8$. إن المثالي A ليس أولياً في الحلقة Z_8 لأن $2 \in Z_8$ وأن $2.2 = 4 \in A$ بينما $2 \notin A$.

مبرهنـة 5 -1 -3.

لتكن R حلقة و $a \in R$ عنصراً ليس عديم القوى في R. عندئذ يوجد في R مثالي أولي لا يحوي العنصر a.

البرهـان.

ليكن $a \in R$ عنصراً ليس عديم القوى في الحلقة R ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{A : R \text{ مثالي في } \quad \Lambda ; a^n \notin A \quad \forall n \in N^*\}$$

بما أن $a^n \neq o$ أياً كان $n \in N^*$ نجد أن $a^n \notin \{o\}$ ومنه $\{o\} \in \Im$ وبالتالي المجموعة $\Im$ تكون غير خالية. كما أن المجموعة $\Im$ مرتبة جزئياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء.

لتكن $\Im_0$ مجموعة جزئية من $\Im$ غير خالية ومرتبة كلياً عندئذ حسب التمهيديـة (2 - 1-2) فإن $H = \bigcup_{B \in \Im_0} B$ هو مثالي في R وهو يمثل حداً أعلى للمجموعة $\Im_0$ في $\Im$

وحسب تمهيدية زورن يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي وليكن M وهكذا نجـد أن M مثالي في R وأن $a^n \notin M$ أياً كان $n \in N^*$ وبالتالي يكون $a \notin M$. لنبرهن علـى أن المثالي M أولي في R. واضـح أن $M \neq R$ لأن $a \notin M$. لـيكن $x, y \in R$ بحيث $x.y \in M$. ولنفرض جدلاً أن كلاً من x, y لا ينتمي إلى المثالي M عندئـذ يكون كل من $K = M + xR$ و $D = M + yR$ مثالياً في R وأن $M \subset K$ كمـا أن $M \subset D$ ولما كان المثالي M أعظمياً في $\Im$ فإن $K, D \notin \Im$ وحسب تعريـف

المجموعة $\Im$ يوجد $s,t \in N^*$ بحيث $a^s \in K$ و $a^t \in D$ ومنه يوجد $r_1,r_2 \in R$ و $m_1,m_2 \in M$ بحيث $a^s = m_1 + xr_1$ و $a^t = m_2 + yr_2$ وبالتالي يكون

$$a^{s+t} = a^s a^t = m_1 m_2 + m_1 y r_2 + x r_1 m_2 + xy r_1 r_2 \in M$$

وهذا يناقض كون $M \in \Im$. مما سبق نجد أنه إما $x \in M$ أو $y \in M$ وهذا يبين لنا أن المثالي M أولي في R وأن $a \notin M$.

لمتابعة دراستنا للمثاليات الأولية في الحلقة لا بد لنا من التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة. نسمي تقاطع جميع المثاليات الأولية في الحلقة R بالأساس الأولي للحلقة R ونرمز له $rad\ R$.

ينتج من التعريف مباشرة أن الأساس الأولي لأي حلقة هو مثالي في هذه الحلقة وذلك لأن تقاطع أي أسرة من المثاليات هو مثالي.

العلاقة بين العناصر عديمة القوى والأساس الأولي للحلقة ندرسها من خلال المبرهنة الآتية والتي توضح لنا مكونات الأساس الأولي لأي حلقة.

مبرهنة 5-1-4.

لتكن R حلقة و $x \in R$. القضايا الآتية متكافئة:

1. $x \in rad\ R$.
2. العنصر x عديم القوى.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن $x \in rad\ R$. لنفرض جدلاً أن العنصر x ليس عديم القوى وحسب المبرهنة (5-1-3) يوجد في R مثالي أولي B بحيث $x \notin B$ وهذا يناقض كون العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات الأولية في R. مما سبق نجد أن العنصر x عديم القوى.

(2)$\Leftarrow$(1). لنفرض أن العنصر x عديم القوى وعليه يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n = 0$.
ليكن A مثالي أولي في R عندئذ فإن $x^n \in A$ ولما كان المثالي A أولياً نجد أن $x \in A$ وهذا يبين لنا أن العنصر x ينتمي إلى جميع المثاليات الأولية في R وبالتالي $x \in rad\, R$.

نعلم أن أحد الأهداف من إدخال مفهوم الحلقة هو دراسة حلقة الأعداد الصحيحة Z ولما كان مفهوم العدد الأولي في حلقة الأعداد الصحيحة يعد واحد من أهم المفاهيم في الحلقة Z فإنه يتوجب علينا تعميم هذا المفهوم ونقله إلى الحلقات التي تملك ذات الخواص التي تتمتع بها الحلقة Z. لأجل ذلك لابد لنا من أن نذكر بواحدة من أهم الخواص للأعداد الأولية والتي تسمى "تمهيدية إقليدس".

تمهيدية إقليدس.

ليكن p عدداً أولياً و $a,b \in Z$. إذا كان p يقسم الجداء ab عندئذ إما p يقسم a أو p يقسم b.

العلاقة بين الأعداد الأولية والمثاليات الأولية في حلقة الأعداد الصحيحة Z نوردها من خلال المبرهنة الآتية والتي تبين لنا مدى تأثير الأعداد الأولية على المثاليات في الحلقة Z.

مبرهنة 5-1-5.

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي nZ أولياً في Z هو أن يكون العدد n أولياً.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي nZ أولي في Z عندئذ $nZ \neq Z$ ومنه $n > 1$.
ليكن $s \in Z$ قاسم موجب للعدد n عندئذ يوجد $t \in Z$ بحيث $n = st$ ومنه $st \in nZ$
وبما أن المثالي nZ أولي في Z عندئذ إما $s \in nZ$ أو $t \in nZ$.

- إذا كان $s \in nZ$ عندئذ يوجد $m \in Z$ بحيث $s = nm$ ومنه $n = st = nmt$ ولكون Z منطقة تكاملية فإنه حسب خاصية الاختصار ينتج أن $mt = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر m قابل للقلب في Z وبالتالي فإن $m = 1$ ومنه $s = n$.

- إذا كان $t \in nZ$ عندئذ يوجد $m_0 \in Z$ بحيث $t = nm_0$ ومنه $n = st = snm_0$ ولكون Z منطقة تكاملية فإنه حسب خاصية الاختصار ينتج أن $sm_0 = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر s قابل للقلب في Z وبالتالي فإن $s = 1$. مما سبق نجد أن أي قاسم موجب للعدد n إما يساوي n أو يساوي الواحد وهذا يبين لنا أن العدد n هو عدد أولي.

كفاية الشرط. لنفرض أن العدد n أولياً وليكن $a,b \in Z$ بحيث $ab \in nZ$ عندئذ يوجد $c \in Z$ بحيث $ab = nc$ وهذا يبين لنا أن n يقسم الجداء ab وبما أن العدد n أولياً عندئذ إما n يقسم a أو n يقسم b.

- إذا كان n يقسم a عندئذ $a = nh$ حيث $h \in Z$ ومنه $a \in nZ$.
- إذا كان n يقسم b عندئذ $b = nk$ حيث $k \in Z$ ومنه $b \in nZ$.

مما سبق نجد أنه إما $a \in nZ$ أو $b \in nZ$ وهذا يبين لنا أن المثالي nZ أولي في Z.

لنورد الآن تعريف العنصر الأولي في الحلقة والذي يعتبر تعميماً لمفهوم العدد الأولي في Z.

تعريف.

لتكن R منطقة تكاملية و $x \in R$. $x \neq o$. نقول عن العنصر x إنه أولي في R إذا حقق ما يأتي:

- العنصر x غير قابل للقلب في R.
- إذا كان $a,b \in R$ وكان x يقسم الجداء ab عندئذ إما x يقسم a أو x يقسم b.

العلاقة بين العناصر الأولية والمثاليات الأولية في الحلقة نوردها من خلال المبرهنة الآتية والتي تعتبر تعميماً للمبرهنة (5 - 1 - 5).

مبرهنـــة 5-1-6.

لتكن R منطقة تكاملية و $o \neq x \in R$. الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر x أولياً في R هو أن يكون المثالي xR أولياً في R.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن العنصر x أولي في R. بما أن العنصر x غير قابل للقلب في R فإن $xR \neq R$. ليكن $a,b \in R$ ولنفرض أن $ab \in xR$ عندئذ يوجـد $r \in R$ بحيث $ab = xr$ وهذا يعني أن العنصر x يقسم الجداء ab وحسب الفـرض إمـا x يقسم a أو x يقسم b. لنفرض أن x لا يقسم a عندئذ x يقسم b في R ومنه يوجـد $c \in R$ بحيث $b = xc$ ومنه $b = xc \in xR$. وهكذا فإن المثالي xR أولي في R.

كفاية الشرط. لنفرض أن المثالي xR أولي في R. بما أن $xR \neq R$ عندئـذ يكـون العنصر x غير قابل للقلب في R. ليكن $a,b \in R$ ولنفرض أن العنـصر x يقـسم الجـداء ab فـي R عندئـذ يوجـد $d \in R$ بحيـث $ab = xd$ وهكـذا فـإن $ab = xd \in xR$ وبما أن المثالي xR أولي في R عندئذ إما $a \in xR$ أو $b \in xR$. لنفرض أن $a \notin xR$ عندئذ $b \in xR$ ومنه يوجد $h \in R$ بحيث $b = xh$ وهذا يبين لنا أن العنصر x يقسم b. مما سبق نجد أن العنصر x أولي في R.

المبرهنة الآتية تبين لنا طبيعة الأساس الأولي لحلقة الخارج $R/rad\ R$.

مبرهنـــة 5-1-7.

لتكن R حلقة. عندئذ $rad\,(R/rad\ R) = \bar{o}$.

البرهـــان.

حسب التعريف فإن $rad\ R$ هو مثالي في R ومنه فإن $R/rad\ R$ حلقة.

ليكن $\pi : R \to R/rad\ R$ التشاكل القانوني الغامر ولنفرض أن $\bar{x}$ هـي صـورة العنصر x وفق التشاكل π وذلك أياً كـان $x \in R$. مـن جهـة أخـرى بمـا أن $R/rad\ R$ حلقة فإن $rad\,(R/rad\ R)$ مثالي في الحلقة $R/rad\ R$ ومنه فإن

$$rad\ R = \bar{o} \in rad\ (R/rad\ R)$$

ليكن $\bar{a} \in rad\,(R/rad\,R)$ عندئذ حسب المبرهنة (5 -1 -4) فإن العنصر $\bar{a}$ عديم القوى في الحلقة $R/rad\,R$ وبالتالي يوجد $n \in N^*$ بحيث $\bar{a}^n = \bar{o} = rad\,R$ ومنه يكون $a^n + rad\,R = rad\,R$ وبالتالي فإن $a^n \in rad\,R$.

ليكن A مثالياً أولياً في R عندئذ $a^n \in rad\,R \subseteq A$ ومنه يكون $a \in A$ وهذا يبين لنا أن العنصر a ينتمي إلى جميع المثاليات الأولية في R وبالتالي $a \in rad\,R$ ومنه $\bar{a} = a + rad\,R = rad\,R$. مما سبق نجد أن $rad\,(R/rad\,R) = \bar{o}$.

تعريف.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. نسمي المجموعة

$$\{a : a \in R\,;\ \exists n \in N^*; a^n \in A\}$$

أساس المثالي A أو جذر المثالي A ونرمز له $rad\,A$ أو $\sqrt{A}$.

نأتي الآن لدراسة بعض الخواص لجذر المثالي وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 5 -1 -8.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. عندئذ:

1 - $rad\,A$ مثالي في R.

2 - $A \subseteq rad\,A$.

3 - $rad\,(rad\,A) = rad\,A$.

البرهان.

1 - بما أن A مثالياً في R فإن $o \in A$ وبالتالي فإن المجموعة $rad\,A$ غير خالية.

ليكن $x, y \in rad\,A$ عندئذ يوجد $n, m \in N^*$ بحيث $x^n, y^m \in A$ ومنه

$$(x-y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_k^{n+m}\, x^{(n+m)-k}\,(-y)^k \in A$$

ومنه $x - y \in rad\,A$. كذلك فإنه أياً كان $r \in R$ فإن $(rx)^n = r^n a^n \in A$ وبالتالي يكون $rx \in rad\,A$. مما سبق نجد أن $rad\,A$ مثالي في R.

2 - واضح.

3 - حسب (2) فإن $rad\ A \subseteq rad\ (rad\ A)$.

ليكن $z \in rad\ (rad\ A)$ عندئذ يوجد $t \in N^*$ بحيث $z' \in rad\ A$ وحسب التعريف يوجد $s \in N^*$ بحيث $(z')^s \in A$ وبما أن $z'' = (z')^s \in A$ نجد أن $z \in rad\ A$ أي أن $rad\ (rad\ A) \subseteq rad\ A$. مما سبق نجد أن $rad\ (rad\ A) = rad\ A$. ₀

لندرس الآن الخاصة الآتية للمثاليات الأولية في الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-1-9.

لتكن R حلقة و A مثالياً أولياً في R. عندئذ $rad\ A = A$.

البرهان.

ليكن A مثالياً أولياً في R. حسب التمهيدية (5-1-8) فإن $A \subseteq rad\ A$.

ليكن $x \in rad\ A$ عندئذ حسب التعريف يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n \in A$ وبما أن المثالي A أولياً في R ينتج أن $x \in A$ ومنه يكون $rad\ A \subseteq A$. مما سبق نجد أن $rad\ A = A$. ₀

مثال.

لنأخذ الحلقة $R = \mathbb{Z}_{27}$ بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 27 وليكن $A = \langle 3 \rangle$ أوجد $rad\ A$.

الحل.

من الواضح أن $A = \langle 3 \rangle = 3R = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.

ليكن $x \in rad\ A$ عندئذ حسب التعريف يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n \in A$ وهنا نلاحظ أن العناصر x في الحلقة R التي تحقق الشرط $x^n \in A$ هي العناصر الآتية $0,3,6,9,12,15,18,21,24$ أي أن $rad\ A \subseteq \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$ وبما أن $A \subseteq rad\ A$ نجد أن $rad\ A = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\} = A$ وهنا يتبادر إلى الذهن التساؤل التالي: هل المثالي A أولي في الحلقة R.

لمتابعة دراستنا لأساس المثالي لابد لنا من التعريف التالي:

تعريـــف.

لتكن R حلقة و S مجموعة جزئية وغير خالية في R. نقول عـن المجموعـة S إنها ضربية إذا حققت الشرط التالي: أياً كان $x, y \in S$ فإن $x.y \in S$.

قبيل البدء بدراسة المبرهنة التي تصف لنا أساس المثالي لنورد التمهيدية التالية:

تمهيديـــة 5-1-10.

لتكن R حلقة و S مجموعة ضربية في R تحقق $o \notin S$. إذا وجد في R مثالي A يحقق $A \cap S = \phi$ عندئـذ يوجـد فـي R مثـالي أولـي P يحـوي A ويحقـق $P \cap S = \phi$.

البرهـــان.

لنفرض أن A مثالي في R يحقق $A \cap S = \phi$ ولنفرض أن $\Im$ هي مجموعة كـل المثاليات في الحلقة R والتي كل منها يحوي A ولا يتقاطع مع S. أي أنه أيـاً كـان $B \in \Im$ فإن B مثالي في R وأن $A \subseteq B$ ويحقق $B \cap S = \phi$. فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $A \in \Im$ كما أن المجموعة $\Im$ مرتبة جزئياً بالنسبة إلـى علاقـة الاحتواء. لتكن $\Im_0$ مجموعة جزئية من $\Im$ غير خالية ومرتبـة كليـاً ولنفـرض أن $K = \bigcup_{H \in \Im_0} H$ عندئذ حسب التمهيدية (2-2-1) نجـد أن K مثـالي فـي R وأن $A \subseteq K$. بالإضافة إلى ذلك فإن $K \cap S = \phi$ لأنه إذا كان $K \cap S \neq \phi$ فإنه يوجد $a \in K \cap S$ وبالتـالي يكـون $a \in K \cap S = S \cap (\bigcup_{H \in \Im_0} H) = \bigcup_{H \in \Im_0} (S \cap H)$

ومنه يوجد $L \in \Im_0$ بحيث يكون $a \in S \cap L$ أي أن $S \cap L \neq \phi$ وهذا يناقض كون $L \in \Im_0$. مما سبق نجد أن $K \cap S = \phi$ وبالتالي يكون $K \in \Im$. من جهة أخـرى فإن $D \subseteq K$ وذلك أياً كان $D \in \Im_0$ وهذا يبين لنا أن K هو حد أعلى للمجموعة $\Im_0$ في $\Im$ وحسب تمهيدية زورن يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي وليكن P. بمـا أن $P \in \Im$ فإن P هو مثالي في R يحوي A ويحقق $P \cap S = \phi$.

لنبرهن على أن المثالي P أولي في R. ليكن $x,y \in R$ بحيث $xy \in P$ ولنفرض جدلاً أن $x \notin P$ و $y \notin P$ عندئذ يكون $P+Rx$ و $P+Ry$ مثاليين فسي R كـل منهما يحوي A وأن $(P+Rx)\cap S \neq \phi$ و $P \subsetneq P+Ry$ ، $P \subsetneq P+Rx$. كما أن $P \subsetneq P+Rx$ وأن $P+Rx \in \Im$ عندئذ يكـون $(P+Rx)\cap S = \phi$ لأنه إذا كان وهذا يناقض كون المثالي P أعظمياً في المجموعة $\Im$. كذلك الأمر بالنسبة إلى المثالي $P+Ry$ أي أن $(P+Ry)\cap S \neq \phi$ ومنـــه يوجـــد $a \in (P+Rx)\cap S$ و $b \in (P+Ry)\cap S$ وبالتـــالي يكـــون $a = x_o + r_1 x$ و $b = y_o + r_2 y$ حيـــث $x_o, y_o \in P$ و $r_1, r_2 \in R$ وبما أن المجموعة S ضـــربية وأن $a,b \in S$ نجـــد أن $ab \in S$ وأن

$$ab = (x_o + r_1 x)(y_o + r_2 y) = x_o y_o + (r_2 y)x_o + (r_1 x)y_o + (r_1 r_2)(xy)$$

وبما أن $x_o, y_o, xy \in P$ نجد أن $ab \in P$ وهذا يبين لنـــا أن $ab \in P \cap S$ أي أن $P \cap S \neq \phi$ وهذا يناقض كون $P \in \Im$. مما سبق نجد أنه إمـــا $x \in P$ أو $y \in P$ وهذا يبين لنا أن المثالي P أولي في R وأن $A \subseteq P$ ويحقق $P \cap S = \phi$.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة المهمة الآتية والتي تصف لنا أساس المثالي في الحلقة.

مبرهنـــة 5-1-11.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. إن $rad\ A$ يساوي إلى تقاطع جميـــع المثاليـــات الأولية في الحلقة R والتي كل منها يحوي A.

البرهـــان.

لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة كل المثاليات الأولية في الحلقة R والتـــي كـــل منهـــا يحوي A ولنبرهن على أن $rad\ A = \bigcap_{B \in \Im} B$.

ليكن $x \in rad\ A$ و $D \in \Im$ عندئذ D هو مثالي أولي في R وأن $A \subseteq D$. بمـــا أن $x \in rad\ A$ عندئذ حسب التعريف يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n \in A$ ومنـــه يكـــون $x^n \in A \subseteq D$ وبما أن المثالي D أولياً في R ينتج أن $x \in D$ وذلـــك أيـــاً كـــان

$D \in \Im$ وبالتالي يكـون $x \in \bigcap_{D\in\Im} D$ ومنـه $rad\ A \subseteq \bigcap_{D\in\Im} D$. لـيكن $y \in \bigcap_{D\in\Im} D$ ولنفرض جدلاً أن $y \notin rad\ A$ ولنأخذ المجموعة $S = \{y, y^2, y^3, \cdots\}$ فنجـد أن المجموعة S هي مجموعة ضربية وأن $o \notin S$ لأنـه إذا كـان $o \in S$ فإنـه يوجـد $s \in N^*$ بحيث $y^s = o$ وبما أن A مثالياً فـي R فـإن $y^s = o \in A$ وحسب التعريف يكون $y \in rad\ A$ وهذا غير ممكن فرضاً. وحسب التمهيديـة (5-1-10) يوجد في R مثالي أولي P يحوي A ويحقق $P \cap S = \phi$ وهذا يبين لنا أن $P \in \Im$. بما أن $y \in S$ وأن $P \cap S = \phi$ نجد أن $y \notin P$ وبالتالي يكون $y \notin \bigcap_{D\in\Im} D$ وهـذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن $y \in rad\ A$ وبالتالي يكـون $\bigcap_{D\in\Im} D \subseteq rad\ A$.

وهكذا يكون $rad\ A = \bigcap_{B\in\Im} B$. ■

المثـاليـات الأعظميـة

درسنا في الفقرة الأولى من الفصل الرابع المثاليات الأعظمية وفي هذه الفقرة سوف نتابع دراستنا للمثاليات الأعظمية في الحلقات التبديلية. لنذكر أولاً بتعريـف المثـالي الأعظمي.

تعريـف.

لتكن R حلقة و $\Im$ مجموعة المثاليات في الحلقة R والتي كل منها لا يـساوي R. نقول عن المثالي $M \in \Im$ إنه أعظمي في R إذا كـان M عنـصر أعظمـي فـي المجموعة $\Im$ (المرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء).

لنورد الآن شرطاً مكافئاً لمفهوم المثالي الأعظمي وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـة 5-1-12.

لتكن R حلقة و $M \neq R$ مثالياً في R. الشرط الـلازم والكـافي كـي يكـون المثالي M أعظمياً في R هو أن يتحقق الشرط الآتي: أياً كان $m \in R$ و $m \notin M$ يوجد $x \in R$ بحيث $1 - xm \in M$.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي M أعظمي في R. وليكن $m \in R$ بحيث $m \notin M$ عندئذ يكون $M \subsetneq M + Rm$ وحسب الفرض نجد أن $M + Rm = R$ وبالتالي يوجد $x \in R$ و $y \in M$ بحيث $y + xm = 1$ وهذا يبين لنا أن $1 - xm \in M$.

كفاية الشرط. ليكن $M \subsetneq B$ مثالياً في R عندئذ يوجد $a \in B$ بحيث $a \notin M$ وحسب الفرض يوجد $x \in R$ بحيث $1 - xa \in M$ وبما أن $M \subsetneq B$ نجد أن $1 - xa \in B$ وبما أن $xa \in B$ يكون $1 \in B$ ومنه $B = R$. وحسب التمهيدية (4-1-1) نجد أن المثالي M أعظمي في R.

العلاقة بين المثاليات الأولية والأعظمية نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 5-1-13.

في أي حلقة كل مثالي أعظمي هو مثالي أولي.

البرهان.

لتكن R حلقة و M مثالياً أعظمياً في R عندئذ يكون $M \neq R$. ليكن $x, y \in R$ بحيث $x.y \in M$ ولنفرض أن $x \notin M$ عندئذ فإن $M \subsetneq M + Rx$ وبما أن المثالي M أعظمياً نجد أن $M + Rx = R$ ومنه يوجد $m \in M$ و $r \in R$ بحيث $m + rx = 1$ ومنه نجد أن $y = my + rxy \in M$ وهذا يبين لنا أن المثالي M أولي في R.

توجد علاقة مهمة بين المثاليات الأعظمية والحقول وهذه العلاقة سوف نوضحها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-1-14.

لتكن R حلقة و M مثالياً في R. الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي M أعظمياً في R هو أن تكون حلقة الخارج R/M حقلاً.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي M أعظمي في R عندئذ حسب التمهيدية (5-1-13) يكون المثالي M أولياً في R ومنه حسب المبرهنة (5-1-2) تكون حلقة الخارج R/M منطقة تكاملية. ليكن $a+M \in R/M$ عنصراً مغايراً للصفر عندئذ فإن $a \notin M$ ومنه يكون $M \subsetneq M+Ra$ ولكون المثالي M أعظمياً في R نجد أن $M+Ra=R$ وبالتالي يوجد $m \in M$ و $r \in R$ بحيث $m+ra=1$ ومنه نجد أن

$$1+M=(m+ra)+M=(m+M)+(ra+M)=(r+M)(a+M)$$

وهذا يبين لنا كل عنصر مغاير للصفر في R/M يملك مقلوباً وبالتالي تكون الحلقة R/M حقلاً.

كفاية الشرط. لنفرض أن الحلقة R/M حقلاً عندئذ يكون $1+M \neq M$ وبالتالي $1 \notin M$ أي أن $M \neq R$. ليكن $a \in R$ بحيث $a \notin M$ عندئذ $a+M \in R/M$ وأن $a+M \neq M$ وحسب الفرض يوجد $b+M \in R/M$ بحيث $b+M \neq M$ يحقق $(a+M)(b+M)=1+M$ ومنه $ab+M=1+M$ وبالتالي $1-ab \in M$ وحسب التمهيدية (5-1-12) نجد أن المثالي M أعظمي في R.

وجدنا حسب التمهيدية (5-1-13) أن كل مثالي أعظمي هو مثالي أولي. إن هذه الحقيقة تقودنا إلى علاقة مهمة بين أساس جاكبسون والأساس الأولي للحلقة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-1-15.

لأجل أي حلقة R يكون $rad\ R \subseteq J(R)$.

البرهان.

ليكن $a \in rad\ R$ عندئذ حسب المبرهنة (5-1-4) يكون العنصر a عديم القوى و بالتالي يوجد $n \in N^*$ بحيث $a^n=0$. ليكن M مثالياً أعظمياً في R عندئذ يكون $a^n \in M$ وبما أن المثالي M أولياً ينتج أن $a \in M$ وهذا يبين لنا أن العنصر a ينتمي إلى جميع المثاليات الأعظمية في R وبالتالي يكون $a \in J(R)$. مما سبق نجد أن $rad\ R \subseteq J(R)$.

5 - 2. حلقـــة المثـــاليـــات الرئيسيـــــة.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. نقول عن المثالي A إنه رئيسي في R إذا وجـد $a \in R$ بحيث $A = Ra$.

تعريـــف.

لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة R إنها حلقة مثاليات رئيسية إذا حققت الشروط الأتية:

1 - الحلقة R منطقة تكاملية.

2 - كل مثالي في R هو مثالي رئيسي.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل حقل هو حلقة مثاليات رئيسية لأنه إذا كـان F حقلاً فإن F يكون منطقة تكاملية. من جهة أخرى إذا كان A مثالياً في F عندئذ إما $A = F = 1.F$ أو $A = \{o\} = o.F$ وذلك لأن الحقل F لا يحوي مثاليات تختلـف عن F و $\{o\}$.

المبرهنة الأتية تبين لنا أن حلقة الأعداد الصحيحة هي حلقة مثاليات رئيسية.

مبرهنـــة 5 -2 -1.

حلقة الأعداد الصحيحة Z هي حلقة مثاليات رئيسية وكل مثالي فيها من الـشكل nZ حيث $m \geq o$ عدد صحيح.

البرهـــان.

إن Z منطقة تكاملية. ليكن A مثالياً في Z. إذا كان $A = \{o\}$ عندئـذ $A = oZ$ وبذلك يتم المطلوب. لنفرض أن $A \neq \{o\}$ وأن m أصغر عدد صحيح موجب في A عندئذ أياً كان $n \in Z$ فإن $mn \in A$ وهذا يبين لنا أن $mZ \subseteq A$.

ليكن $a \in A$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث $a = qm + r$ وأن $o \leq r < m$. إذا كان $r \neq o$ عندئـذ يكـون $r > o$ وأن $r = a - qm \in A$ وهـذا يناقض كون m أصغر عدد صحيح موجب في A. مما سبق نجد أن $r = o$ وبالتـالي

يكون $a = qm \in mZ$ أي أن $A \subseteq mZ$. وهكذا نجد أن $A = mZ$ ومنه فإن كل مثالي في Z هو مثالي رئيسي. مما سبق نجد أن الحلقة Z هي حلقة مثاليات رئيسية.

لنورد الآن التمهيدية الآتية:

تمهيدية 5-2-2.

كل حلقة مثاليات رئيسية R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة للمثاليات في R. أي أنه من أجل أي سلسلة متزايدة من المثاليات

$$A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \cdots \subsetneq$$

في R يوجد دليل n يحقق $A_n = A_k$ وذلك أياً كان $k \geq n$.

البرهان.

لتكن R حلقة مثاليات رئيسية ولتكن $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \cdots \subsetneq$ سلسلة متزايدة من المثاليات في R عندئذ المجموعة $\Gamma = \{A_i : i \in N^*\}$ هي مجموعة مرتبة كلياً (بالنسبة إلى علاقة الاحتواء) من المثاليات في R. وحسب التمهيدية (2-2-1) يكون $K = \bigcup_{A_i \in \Gamma} A_i$ مثالياً في R وبما أن R حلقة مثاليات رئيسية فإنه يوجد $a \in R$ بحيث $K = Ra$ وبما أن $a \in K = \bigcup_{A_i \in \Gamma} A_i$ فإنه يوجد دليل n بحيث $a \in A_n$ وهذا يبين لنا أن $K = Ra \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{A_i \in \Gamma} A_i = K$ وبالتالي يكون $K = A_n$ ومنه أياً كان $k \geq n$ فإن $A_n \subseteq A_k$ وبالتالي يكون $K = A_n \subseteq A_k \subseteq \bigcup_{A_i \in \Gamma} A_i = K$ أي أن $A_n = A_k$. وهكذا نجد أن $A_n = A_k$ أياً كان $k \geq n$.

وجدنا سابقاً أن كل مثالي أعظمي في أي حلقة هو مثالي أولي إلا أن العكس غير صحيح دوماً. المبرهنة الآتية تبين لنا في أي الحلقات يتطابق المثالي الأعظمي مع المثالي الأولي.

مبرهنـــة 5 -2 -3.

لتكن R حلقة مثاليات رئيسية و $A \neq o$ مثالياً في R. الشرط اللازم والكافي كـــي يكون المثالي A أعظمياً في R هو أن يكون المثالي A أولياً في R.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي A أعظمي في R عندئذ حسب التمهيدية (5-1-13) يكون المثالي A أولياً في R.

كفاية الشرط. لنفرض أن المثالي A أولياً في R عندئذ $A \neq R$. ليكن B مثالياً فـــي R بحيث $A \subsetneq B$ وبما أن الحلقة R هي حلقة مثاليات رئيسية فإنه يوجـــد $a,b \in R$ بحيث $B = Rb$ و $A = Ra$. بما أن $Ra \subsetneq Rb$ عندئذ $b \notin Ra$ و $a \in Rb$ ومنـــه يوجد $r \in R$ بحيث $a = rb$ وبما أن المثـــالي Ra أوليـــاً وأن $rb \in Ra$ و $b \notin Ra$ ينتج أن $r \in Ra$ ومنه يوجد $x \in R$ بحيث $r = xa$ ومنه نجد أن $a = xab = axb$ وبما أن R منطقة تكاملية فإنه حسب خاصية الاختصار نجد أن $xb = 1$ ومنه يكـــون $1 = xb \in Rb$ وبالتالي $B = Rb = R$ ومنه نجد أن المثالي A أعظمي في R. ه

نأتي الآن إلى صياغة المبرهنة الآتية والتي تصف لنا المثاليات في حلقة الأعـــداد الصحيحة.

مبرهنـــة 5 -2 -4.

ليكن $m > o$ عدداً صحيحاً. القضايا الآتية متكافئة:

1. العدد m أولي في Z.
2. المثالي mZ أولي في Z.
3. الحلقة Z/mZ حقل.
4. المثالي mZ أعظمي في Z.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). ينتج من المبرهنة (5-1-5).

(2) $\Leftarrow$ (3). لنفرض أن المثالي mZ أولياً في Z ولما كانت الحلقة Z هي حلقة مثاليات رئيسية فإنه حسب المبرهنة (5-2-3) يكون المثالي mZ أعظمياً في Z وحسب المبرهنة (5-1-14) تكون الحلقة Z/mZ حقلاً.

(3) $\Leftarrow$ (4). ينتج مباشرة من المبرهنة (5-1-14).

(4) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن المثالي mZ أعظمياً في Z عندئذ حسب التمهيدية (5-1-13) يكون المثالي mZ أولياً في Z وحسب المبرهنة (5-1-5) يكون العدد m أولياً في Z. ■

لندرس الآن حلقة الخارج للحلقات ذات المثاليات الرئيسية وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-2-5.

لتكن R حلقة مثاليات رئيسية و A مثالياً في R. عندئذ:

1 - كل مثالي في حلقة الخارج R/A هو مثالي رئيسي.

2 - إذا كان المثالي A أولي في R عندئذ تكون حلقة الخارج R/A حلقة مثاليات رئيسية.

البرهان.

1 - ليكن $\overline{K}$ مثالياً في R/A عندئذ $\overline{K} = K/A$ حيث K مثالي في R يحوي A. وبما أن الحلقة R ذات مثاليات رئيسية فإنه يوجد $x \in R$ بحيث $K = Rx$ ومنه يكون $\overline{K} = \overline{Rx}$ وهذا يبين لنا أن المثالي $\overline{K}$ رئيسي.

2 - لنفرض أن المثالي A أولياً في R عندئذ حسب المبرهنة (5-1-2) تكون الحلقة R/A منطقة تكاملية وحسب (1) تكون الحلقة R/A ذات مثاليات رئيسية. ■

Damascus University

5 - 3. الحلقات الإقليدية.

نوع مهم آخر من المناطق التكاملية نورده في هذه الفقرة والبداية ستكون مع التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة R إنها حلقة إقليدية إذا حققت الشروط الآتية:

1 - الحلقة R منطقة تكاملية.

2 - يوجد تطبيق $\varphi : R^* \to N$ يحقق أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $\varphi(a) \le \varphi(ab)$ حيث $R^* = R / \{o\}$.

3 - لأجل أي عنصرين $a,b \in R$ حيث $b \neq o$ يوجد $q,r \in R$ يحققان $a = bq + r$ حيث إما $r = o$ أو $\varphi(r) < \varphi(b)$. نسمي التطبيق φ بالدالة الإقليدية.

لنورد الآن بعض الأمثلة على الحلقات الإقليدية:

أمثلة.

1 - حلقة الأعداد الصحيحة Z هي حلقة إقليدية.

نعلم أن حلقة الأعداد الصحيحة Z هي منطقة تكاملية. لنعرف العلاقة $\varphi : Z^* \to N$ بالشكل التالي: أياً كان $m \in Z^*$ فإن $\varphi(m) = |m|$ فنجد أن φ تطبيق ويحقق أياً كان $a,b \in Z^*$ فإن $\varphi(ab) = |ab| = |a||b| \ge |a| = \varphi(a)$. ليكن $a,b \in Z$ بحيث $b \neq o$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r \in Z$ بحيث $a = bq + r$ حيث $o \le r < |b|$ وهذا يبين لنا أنه إما $r = o$ أو $o < r < |b|$ ومنه $r = |r| < |b|$ أي أنه إما $r = o$ أو $\varphi(r) < \varphi(b)$. مما سبق نجد أن حلقة الأعداد الصحيحة هي حلقة إقليدية.

2 - حلقة غاوص الصحيحة (*The ring of Gaussian integers*)

$$Z[i] = \{a + bi : a,b \in Z, i^2 = -1\}$$

هي حلقة إقليدية.

إن $Z[i]$ هي منطقة تكاملية. (تأكد من ذلك). لنعرف العلاقة $\varphi:(Z[i])^{*}\to N$ بالشكل التالي: أياً كان $a+bi\in(Z[i])^{*}$ فإن $\varphi(a+bi)=a^2+b^2$. واضح أن φ تطبيق. ليكن $x,y\in(Z[i])^{*}$ عندئذ $x=a+bi\,,\ y=c+di$ حيث $a,b,c,d\in Z$ عندئذ $xy=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

ومنه يكون

$$\varphi(xy)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=$$
$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=\varphi(x)\varphi(y)$$

وهذا يبين لنا أن $\varphi(y)\le\varphi(xy)$. بما أن الحلقة $Z[i]$ منطقة تكاملية فإنه حسب المبرهنة (3-3-2) فإن الحلقة $Z[i]$ تملك حقل نسب وأن حقل النسب للحلقة $Z[i]$ هو $Q[i]=\{s+ti:s,t\in Q\,,i^2=-1\}$ (برهن على ذلك).

ليكن $x,y\in Z[i]$ بحيث $y\neq o$ وبما أن $Q[i]$ هو حقل النسب للمنطقة التكاملية $Z[i]$ فإن كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة $Z[i]$ يملك مقلوباً في الحقل $Q[i]$ ومنه فإن $y^{-1}\in Q[i]$ وبالتالي يكون $x.y^{-1}\in Q[i]$ ومنه فإن $x.y^{-1}=s+ti$ حيث $s,t\in Q$. لنفرض أن m هو أقرب عدد صحيح للعنصر s وأن n هو أقرب عدد صحيح للعنصر t. (من الممكن أن تكون الأعداد n,m ليست وحيدة التعيين ولكن هذا لن يسبب لنا أية مشكلة). عندئذ فإن $|n-t|\le 1/2\,,\ |m-s|\le 1/2$ ومنه فإن

$$xy^{-1}=s+ti=(m-m+s)+(n-n+t)i=(m+ni)+$$
$$+[(s-m)+(t-n)i]$$

وبالتالي يكون $x=(m+ni)y+[(s-m)+(t-n)i]y$.

بفرض أن $q=m+ni$ و $r=[(s-m)+(t-n)i]y$ فنجد أن $q,r\in Z[i]$ وأن $x=qy+r$. إذا كان $r\neq o$ فإنه حسب ما تم إثباته سابقاً نجد أن

$$\varphi(r)=\varphi[(s-m)+(t-n)i]\varphi(y)=[(s-m)^2+(t-n)^2]\varphi(y)\le$$
$$\le(1/4+1/4)\varphi(y)<\varphi(y)$$

مما سبق نجد أن الحلقة $Z[i]$ هي حلقة إقليدية.

المبرهنة الآتية تبين لنا العلاقة بين الحلقات الإقليدية والحلقات ذات المثاليات الرئيسية:

مبرهنة 5-3-1.

كل حلقة إقليدية هي حلقة مثاليات رئيسية.

البرهان.

لتكن R حلقة إقليدية. عندئذ حسب التعريف فإن R منطلقة تكاملية. ليكن A مثالياً في R. إذا كان $A=\{o\}$ يتم المطلوب.

لنفرض أن $A\neq\{o\}$ عندئذ يوجد $a\in A$ بحيث $a\neq o$ بما أن الحلقة R إقليدية فإنه يوجد تطبيق $\varphi:R^*\to N$ يحقق الشروط الواردة في تعريف الحلقة الإقليدية.

لنأخذ المجموعة $\Im=\{\varphi(c):c\in A\,,\,c\neq o\}$ فنجد أن $\Im$ مجموعة جزئية من N وغير خالية لأن $\varphi(a)\in\Im$ وبما أن أي مجموعة جزئية وغير خالية من N تحوي عنصراً أصغراً فإنه يوجد في $\Im$ عنصر أصغر ولنكن $\varphi(b)$ حيث $b\in A$ وأن $b\neq o$. ومنه فإن Rb مثالي في R وأن $Rb\subseteq A$.

ليكن $x\in A$ عندئذ لأجل العنصرين x,b يوجد $q,r\in R$ بحيث $x=bq+r$ وأنه إما $r=o$ أو $\varphi(r)<\varphi(b)$. لنفرض أن $r\neq o$ عندئذ فإن $r=x-bq\in A$ وأن $\varphi(r)<\varphi(b)$ وهذا يناقض كون $\varphi(b)$ عنصراً أصغراً في المجموعة $\Im$. ومنه نجد أن $r=o$ وبالتالي يكون $x=bq\in Rb$. وهذا يبين لنا أن $A\subseteq Rb$ وبالتالي يكون $A=Rb$. مما سبق نجد أن الحلقة R هي حلقة مثاليات رئيسية.

لنورد الآن التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R منطلقة تكاملية. نقول عن العنصرين $a,b\in R$ إنهما متشاركان في R إذا وجد في R عنصر u قابل للقلب يحقق $a=ub$ أو $b=ua$. ونقول في هذه الحالة إن العنصر a متشارك مع b أو أن b متشارك مع a.

القـــاســـم المشتـــرك الأعظـــم.

لتكن R منطقة تكاملية. وليكن $a,b \in R$. نقول عن العنصر $d \in R$ إنـــه قاســـم مشترك أعظم للعنصرين a,b إذا حقق الشرطين التاليين:

1 - العنصر d يقسم كلاً من a و b.

2 - إذا كان $c \in R$ ويقسم كلاً من a,b فإن c يقسم d.

نرمز إلى القاسم المشترك الأعظم للعنصرين a,b بالرمز $gcd\,(a,b)$.

ملاحظـــة.

في المناطق التكاملية لـــيس بالـــضرورة أن يكـــون $gcd\,(a,b)$ لأي عنـــصرين موجوداً.

المبرهنة التالية تبين لنا أن القاسم المشترك الأعظم ليس وحيداً في حال وجوده.

مبرهنـــة 5 -3 -2.

لتكن R منطقة تكاملية و $a,b \in R$. عندئذ:

1 - إذا كان $d = gcd\,(a,b)$ عندئذ أي عنصر من R ومتشارك مع d يكون قاسماً مشتركاً أعظماً للعنصرين a,b.

2 - الشرط اللازم والكافي كي يكون $\alpha = gcd\,(a,b)$ هو أن يكون كل عنصر من R ومتشارك مع α قاسماً مشتركاً أعظماً للعنصرين a,b.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن $d = gcd\,(a,b)$ وليكن $d_0 \in R$ عنصراً متشاركاً مـــع d عندئـــذ يوجد عنصر $u \in R$ قابـــل للقلـــب بحيـــث $d = ud_0$. بمـــا أن d يقـــسم a عندئـــذ يوجد $x \in R$ بحيث $a = xd$ ومنه يكون $a = (xu)d_0$ أي أن d_0 يقسم a.

أيضاً بمـــا أن d يقـــسم b عندئـــذ يوجـــد $y \in R$ بحيـــث $b = yd$ ومنـــه يكـــون $b = (yu)d_0$ أي أن d_0 يقسم b.

ليكن c قاسماً آخر للعنصرين a,b وبما أن $d = gcd\,(a,b)$ ينـــتج أن c يقـــسم d وبالتالي يوجد $z \in R$ بحيث $d = zc$ ومنه $ud_0 = zc$ وبما أن u قابلاً للقلب نجد أن

$d_o = (u^{-1}z)c$ أي إن c يقسم d_o. مما سبق وحسب التعريف نجد أن $d_o = gcd(a,b)$.

2 - لزوم الشرط. ينتج مباشرة من (1).

كفاية الشرط. ليكن $\beta \in R$ عنصراً متشاركاً مع α في R و أن $\beta = gcd(a,b)$ بما أن العنصر α متشاركاً مع β فإنه حسب (1) يكون $\alpha = gcd(a,b)$.

خواص القاسم المشترك الأعظم نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-3-3.

لتكن R منطقة تكاملية و $a,b \in R$. عندئذ:

1 - $a = gcd(a,b)$ عندما وفقط عندما يكون a قاسماً للعنصر b.

2 - $a = gcd(a,o)$.

البرهان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن $a = gcd(a,b)$ عندئذ حسب التعريف يكون العنصر a قاسماً للعنصر b.

كفاية الشرط. لنفرض أن a يقسم b عندئذ يكون a قاسماً للعنصرين a,b. ليكن d قاسماً آخر للعنصرين a,b عندئذ يكون d يقسم a ومنه نجد أن $a = gcd(a,b)$.

2 - بما أن $o = oa$ ينتج أن a يقسم الصفر وحسب (1) نجد أن $a = gcd(a,o)$.

تعريف.

لتكن R منطقة تكاملية و $a,b \in R$. إذا كان $gcd(a,b)$ موجوداً ويحقق $gcd(a,b) = 1$. نقول في هذه الحالة عن العنصرين a,b إنهما أوليان فيما بينهما.

المبرهنة الآتية تبين لنا أنه في الحلقات الإقليدية القاسم المشترك الأعظم لأي عنصرين موجود.

مبرهنـــة 5-3-4.

لتكن R حلقة إقليدية. عندئذ:

1 - لأجل أي عنصرين $a,b \in R$ فإن $gcd\,(a,b)$ موجود ويحقق

$$gcd\,(a,b) = au + bv$$

حيث $u,v \in R$.

2 - الشرط اللازم والكافي كي يكون $a,b \in R$ أوليين فيما بينهمـــا هـــو أن يكـــون $1 = au_0 + bv_0$ حيث $u_0,v_0 \in R$.

البرهـــان.

1 - ليكن $a,b \in R$ ولنأخذ المجموعـــة $A = \{ax + by : x,y \in R\}$ فنجـــد أن A مثالي في R لأن $o = ao + bo \in A$ أي إن المجموعة A غير خالية. ليكن $\alpha,\beta \in A$ عندئذ يوجد $x_1,x_2,y_1,y_2 \in R$ بحيث $\alpha = ax_1 + by_1$ و $\beta = ax_2 + by_2$ ومنه

$$\alpha - \beta = a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) \in A$$

أياً كان $r \in R$ فإن $\alpha r = (ax_1 + by_1)r = a(x_1r) + b(y_1r) \in A$ وهذا يبين لنـــا أن A مثالي في R. وبما أن الحلقة R إقليدية فإنه حسب المبرهنة (5-3-1) الحلقـــة R هي حلقة مثاليات رئيسية ومنه يوجد $d \in R$ بحيث $A = Rd$ وهكـــذا نجـــد أن $d \in A$ وبالتالي يوجد $u,v \in R$ بحيث $d = au + bv$. بمـــا أن $a = a1 + bo \in A$ نجد أن $a \in Rd$ ومنه يوجد $x_0 \in R$ بحيث $a = x_0d$ أي أن d يقـــسم a. بطريقـــة مشابهة نجد أن d يقسم b. وهكذا يكون d يقسم كلاً من a و b.

ليكن c قاسماً آخر للعنصرين a و b عندئـــذ يوجـــد $\mu,\lambda \in R$ بحيـــث $a = \lambda c$ و $b = \mu c$ ومنه $au = (\lambda u)c$ و $bv = (\mu v)c$ وبالتالي يكون

$$d = au + bv = (\lambda u)c + (\mu v)c = (\lambda u + \mu v)c$$

أي إن العنصر c يقـــسم d وحـــسب التعريـــف نجـــد أن $d = gcd\,(a,b)$ ومنـــه $gcd\,(a,b) = au + bv$.

2 - ينتج مباشرة من (1) والتعريف.

5 - 4. الحلقات ذات التحليل الوحيد.

تعريف.

لتكن R منطقة تكاملية وليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر. نقول عن العنصر a إنه بسيط في R إذا حقق الشرطين التاليين:

1 - العنصر a غير قابل للقلب في R.

2 - إذا وجد $b, c \in R$ بحيث $a = bc$ عندئذ إما b قابل للقلب أو c قابل للقلب في R.

توجد علاقة مهمة بين العناصر الأولية والعناصر البسيطة سوف نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 5 -4 -1.

في أي منطقة تكاملية كل عنصر أولي هو عنصر بسيط.

البرهان.

لتكن R منطقة تكاملية وليكن $a \in R$ عنصراً أولياً عندئذ يكون $a \neq o$ وغير قابل للقلب في R. ليكن $b, c \in R$ بحيث $a = bc$ بما أن العنصر a أولياً في R عندئذ إما a يقسم b أو a يقسم c.

- إذا كان a يقسم b عندئذ يوجد $x \in R$ بحيث $b = ax$ ومنه يكون

$$b1 = b = ax = (bc)x = b(cx)$$

وبما أن R منطقة تكاملية فإنه حسب خاصية الاختصار نجد أن $cx = 1$ وهذا يبين لنا أن العنصر c قابل للقلب.

- إذا كان a يقسم c فإننا نجد بطريقة مشابهة أن العنصر b قابل للقلب.

مما سبق نجد أن العنصر a هو عنصر بسيط في R.

نأتي الآن إلى دراسة الحالة التي يتطابق فيها مفهوم العنصر البسيط مع مفهوم العنصر الأولي وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 5-4-2.

لتكن R حلقة مثاليات رئيسية و $a \in R$. الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر a أولياً في R هو أن يكون بسيطاً.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن العنصر a أولياً في R عندئذ حسب التمهيدية (5-4-1) يكون العنصر a بسيطاً.

كفاية الشرط. لنفرض أن العنصر a بسيط في R عندئذ حسب التعريف فإن $a \neq o$ وغير قابل للقلب في R.

ليكن $b, c \in R$ بحيث أن a يقسم الجداء bc ولنبرهن على أنه إما a يقسم b أو a يقسم c. لنأخذ المثالي $A = Ra + Rb$ وبما أن R حلقة مثاليات رئيسية فإنه يوجد $d \in R$ بحيث $A = Rd$. بما أن $a \in Rd$ عندئذ يوجد $r \in R$ يحقق $a = rd$ وبما أن العنصر a بسيط في R فإنه إما d قابل للقلب أو r قابل للقلب في R.

- إذا كان العنصر d قابلاً للقلب في R عندئذ يكون $A = R$ ومنه يوجد $x, y \in R$ بحيث $1 = xa + yb$ ومنه نجد أن $c = xac + ybc$.

من جهة أخرى بما أن العنصر a يقسم الجداء bc فإنه يوجد $t \in R$ بحيث $bc = at$ ومنه نجد أن $c = xac + yat$ وبالتالي يكون $c = a(xc + yt)$ وهذا يبين لنا أن العنصر a يقسم c في R.

- إذا كان العنصر r قابلاً للقلب عندئذ يكون $d = r^{-1}a$ ومنه فإن $Rd \subseteq Ra$. كذلك بما أن $a = rd$ نجد أن $Ra \subseteq Rd$ وبالتالي يكون $Ra = Rd = A$ وبما أن $b \in A = Ra$ فإنه يوجد $s \in R$ بحيث $b = sa$ وهذا يبين لنا أن العنصر a يقسم b في R. مما سبق نجد أن العنصر a أولي في R.

قبل البدء بدراسة حلقات التحايل الوحيد لابد لنا من المبرهنة المهمة الآتية:

مبرهنـــة 5-4-3.

كل عنصر مغاير للصفر وغير قابل للقلب في أي حلقة مثاليات رئيسية يملك قاسماً بسيطاً واحداً على الأقل.

البرهـــان.

لتكن R حلقة مثاليات رئيسية و $a_0 \in R$ عنصراً مغايراً للصفر وغير قابل للقلـــب في R. إذا كان العنصر a_0 بسيطاً يتم المطلوب.

لنفرض أن العنصر a_0 ليس بسيطاً في R. بما أن $a_0 \neq o$ وغير قابل للقلب فـــي R فإنه حسب التعريف يوجد $a_1, b_1 \in R$ كل منهما مغايراً للصفر وغير قابل للقلب بحيث $a_0 = b_1 a_1$. إذا كان أحد العنصرين a_1, b_1 بسيطاً يتم المطلوب. في الحالة المعاكسة فإن العنصر a_1 ليس بسيطاً وبما أنه مغاير للصفر وغير قابل للقلب في R فإنه حسب التعريف توجد في R عناصر a_2, b_2 كل منهما مغاير للصفر وغير قابل للقلب في R بحيث $a_1 = b_2 a_2$ ومنه يكون $a_0 = b_1 a_1 = b_1 b_2 a_2$. إذا كان أحـــد العنـــصرين a_2, b_2 بسيطاً يتم المطلوب. في الحالة المعاكسة فإن العنصر a_2 ليس بسيطاً وبما أنه مغـــايراً للصفر وغير قابل للقلب فإنه حسب التعريف يوجد في R عناصر a_3, b_3 كل منهمـــا مغاير للصفر وغير قابل للقلب بحيث $a_2 = b_3 a_3$.

نتابع بهذه الطريقة فنحصل على متتاليتين من العناصر:

- الأولى. وتتألف من العناصر $b_1, b_2, b_3, \cdots$ كل منها مغاير للصفر وغير قابل للقلب في R.

- الثانية. وتتألف من العناصر $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ كل منها مغاير للصفر وغير قابـــل للقلب في R وتحقـــق $a_n = b_{n+1} a_{n+1}$ وذلـــك أيـــاً كـــان $n \in N$. وهكـــذا نجـــد أن $Ra_n \subset Ra_{n+1}$ لأنه إذا وجد $k \in N$ بحيث $Ra_k = Ra_{k+1}$ فإنه يوجد $\lambda \in R$ بحيث $a_{k+1} = \lambda a_k = \lambda b_{k+1} a_{k+1}$ وبما أن الحلقة R متكاملية و $a_{k+1} \neq o$ فإنه حسب خاصية الاختصار نجد أن $\lambda b_{k+1} = 1$ أي إن العنصر b_{k+1} قابل للقلـــب وهـــذا غيـــر ممكن. وهكذا نجد أن

$$Ra_0 \subset Ra_1 \subset Ra_2 \subset Ra_3 \subset \cdots$$

هي متتالية متزايدة من المثاليات في R. بما أن R هي حلقة مثاليات رئيسية فإنه حسب التمهيدية (5-2-2) يوجد دليل $t \in N$ بحيث $Ra_n = Ra_t$ وذلك أياً كان $n \geq t$. إن العنصر a_t هو عنصر بسيط في R. لنفرض جدلاً أن العنصر a_t ليس بسيطاً وبما أنه مغاير للصفر وغير قابل للقلب في R فإنه توجد عناصر $a_{t+1}, b_{t+1} \in R$ مغايرة للصفر وغير قابلة للقلب بحيث $a_t = b_{t+1}a_{t+1}$ ومنه يكون $Ra_t \subsetneq Ra_{t+1}$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر a_t بسيطاً وأن العنصر a_t يقسم a_n.

تعريف.

نقول عن المنطقة التكاملية R إنها حلقة تحليل وحيد إذا حققت الشرط: كل عنصر مغاير للصفر وغير قابل للقلب في R يكتب على شكل جداء منته لعناصر بسيطة في R وهذه الكتابة وحيدة حتى بالنسبة إلى العناصر المتشاركة وذلك بغض النظر عن ترتيب هذه المضاريب.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5-4-4.

كل حلقة مثاليات رئيسية هي حلقة تحليل وحيد.

البرهان.

لتكن R حلقة مثاليات رئيسية عندئذ R منطقة تكاملية.

ليكن $a_0 \in R$ عنصراً مغايراً للصفر وغير قابل للقلب في R. إذا كان العنصر a_0 بسيطاً يتم المطلوب. لنفرض أن العنصر a_0 ليس بسيطاً عندئذ بما أن العنصر a_0 مغاير للصفر وغير قابل للقلب في R فإنه حسب المبرهنة (5-4-3) يوجد في R عنصر بسيط p_1 يقسم العنصر a_0. ومنه يوجد $o \neq c_1 \in R$ وغير قابل للقلب في R بحيث $a_0 = p_1c_1$. إذا كان العنصر c_1 بسيطاً يتم المطلوب. لنفرض أن العنصر c_1 ليس بسيطاً وبما أن العنصر c_1 مغايراً للصفر وغير قابل للقلب في R فإنه حسب المبرهنة (5-4-3) يوجد في R عنصر بسيط p_2 يقسم العنصر c_1. ومنه يوجد

$o \neq c_2 \in R$ وغير قابل للقلب في R بحيث $c_1 = p_2 c_2$ وبالتالي يكون $a_o = p_1 p_2 c_2$. إذا كان العنصر c_2 بسيطاً يتم المطلوب. و إلا في الحالة المعاكسة يوجد $c_3, p_3 \in R$ حيث $c_2 = p_3 c_3$ وأن العنصر p_3 بسيط في R والعنصر c_3 غير قابل للقلب في R. نتابع بهذه الطريقة فنحصل على متتاليتين من العناصر

- الأولى. هي $p_1, p_2, p_3, \cdots$ و هي عناصر بسيطة في R.
- الثانية. هي $a_o = c_o, c_1, c_2, c_3, \cdots$ وهي عناصر مغايرة للصفر وغير قابلة للقلب في R وهذه العناصر تحقق $c_n = p_{n+1} c_{n+1}$ وذلك أياً كان $n \in N$.

إن $Rc_n \subsetneq Rc_{n+1}$ لأنه إذا كان $Rc_n = Rc_{n+1}$ عندئذ يكون $c_{n+1} \in Rc_n$ وبالتالي يوجد $\lambda \in R$ بحيث $c_{n+1} = \lambda c_n$ ومنه يكون $c_{n+1} = \lambda p_{n+1} c_{n+1}$ وبما أن R منطقة تكاملية و $c_{n+1} \neq o$ فإنه حسب خاصية الاختصار نجد أن $\lambda p_{n+1} = 1$. أي أن العنصر p_{n+1} قابل للقلب وهذا يناقض كون العنصر p_{n+1} بسيطاً. ومنه $Rc_n \subsetneq Rc_{n+1}$ مما سبق نجد أن $Rc_o \subsetneq Rc_1 \subsetneq Rc_2 \subsetneq \cdots$ وحسب التمهيدية (5-2-2) يوجد دليل k يحقق $Rc_t = Rc_k$ وذلك أياً كان $t \geq k$. إن العنصر c_k بسيط لأنه إذا كان غير بسيط وبما أنه مغايراً للصفر وغير قابل للقلب فإنه يوجد $c_{k+1}, p_{k+1} \in R$ بحيث $c_k = p_{k+1} c_{k+1}$ حيث p_{k+1} هو عنصر بسيط والعنصر c_{k+1} غير قابل للقلب في R ومنه فإن $Rc_k \neq Rc_{k+1}$ وهذا غير ممكن. أي أن العنصر c_k بسيط وإن

$$a_o = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k c_k$$

حيث إن جميع العناصر p_i بسيطة أياً كان $1 \leq i \leq k$ وكذلك العنصر c_k بسيط أيضاً.

الوحدانية. ليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر وغير قابل للقلب في R ولنفرض أن

$$a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r = q_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

حيث إن جميع العناصر p_i, q_j هي عناصر بسيطة من R وذلك أياً كان $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s$.

البرهان سوف نورده بالاستقراء حسب r.

إذا كان $r = 1$ عندئذ $a = p_1$ ومنه فإن العنصر a بسيط. وفي هذه الحالة يكون $s = 1$ أيضاً لأنه إذا كان $s > 1$ عندئذ $a = q_1 q_2$ ومنه إما q_1 قابل للقلب أو q_2 قابل للقلب وهذا غير ممكن.

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل أي عدد من المضاريب البسيطة أصغر من r بما في ذلك العناصر المتشاركة. بما أن العنصر p_1 يقسم الجداء $q_1 q_2 q_3 \cdots q_s$ فإن العنصر p_1 يقسم أحد المضاريب q_i وذلك لأن العنصر p_1 هو عنصر أولي في R. ومنه يوجد $u \in R$ بحيث $q_i = up_1$ وبما أن العنصر q_i بسيطاً وأن العنصر p_1 غير قابل للقلب فإنه حسب التعريف يكون العنصر u قابلاً للقلب في R وهكذا فإن

$$up_1 p_2 p_3 \cdots p_r = uq_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

ومنه يكون

$$p_2 p_3 \cdots p_r = q_2 q_3 \cdots (q_s u)$$

وذلك بعد إعادة الترقيم وحسب الفرض الاستقرائي نجد أن $r = s$ وأن $p_i = q_i$ وذلك أياً كان $1 \le i \le r$. ٥

بالاعتماد على البرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

كل حلقة إقليدية هي حلقة تحليل وحيد.

البرهان.

حسب البرهنة (5-3-1) فإن كل حلقة إقليدية هي حلقة مثاليات رئيسية وحسب البرهنة (5-4-4) فإن كل حلقة مثاليات رئيسية هي حلقة تحليل وحيد وهكذا نجد أن كل حلقة إقليدية هي حلقة تحليل وحيد. ٥

لنورد الآن عدداً من الأمثلة نوضح من خلالها الفرق بين العناصر الأولية والعناصر البسيطة. وجدنا حسب البرهنة (5-4-2) أنه إذا كانت R حلقة مثاليات رئيسية فإن مفهومي العنصر البسيط والعنصر الأولي يتطابقان وبما أن Z هي حلقة مثاليات رئيسية فإن كل عنصر أولي هو عنصر بسيط والعكس أيضاً صحيح وبالتالي

فإنه في حلقة الأعداد الصحيحة لا يوجد أي فرق بين العناصر البسيطة والأولية لأجل ذلك لابد من البحث عن مناطق تكاملية أخرى لتوضيح الفرق بين العناصر الأولية والبسيطة. لأجل ذلك لابد لنا من التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R منطقة تكاملية. نقول عن التطبيق $\varphi: R \to N$ إنه نظيم على R إذا حقق الشروط الآتية:

1 - أياً كان $x \in R$ فإن $\varphi(x) = o$ عندما وفقط عندما $x = o$.

2 - أياً كان $x, y \in R$ فإن $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

3 - أياً كان $x \in R$ فإن العنصر x يكون قابلاً للقلب عندما وفقط عندما $\varphi(x) = 1$.

4 - أياً كان $x \in R$ وكان $\varphi(x)$ أولياً في N فإن العنصر x يكون بسيطاً في R.

مثال.

1 - لنأخذ المنطقة التكاملية $Z[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} : a,b \in Z\}$. إن التطبيق $\varphi: Z[\sqrt{-3}] \to N$ المعرف بالشكل $\varphi: (a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2$ هو نظيم على $Z[\sqrt{-3}]$.

الحل.

1 - ليكن $x \in Z[\sqrt{-3}]$ عندئذ $x = a + b\sqrt{-3}$ حيث $a,b \in Z$.

لنفرض أن $x = o$ عندئذ $x = o + o\sqrt{-3}$ ومنه $\varphi(x) = o + 3o = o$.

لنفرض أن $\varphi(x) = o$ عندئذ $\varphi(x) = \varphi(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2 = o$ ومنه يكون $a = b = o$ وبالتالي $x = o$.

2 - ليكن $x, y \in Z[\sqrt{-3}]$ عندئذ $x = a + b\sqrt{-3}, y = a_1 + b_1\sqrt{-3}$ حيث $a,a_1,b,b_1 \in Z$. ومنه

$$\varphi(xy) = \varphi[(aa_1 - 3bb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{-3}] = (aa_1 - 3bb_1)^2 + 3(ab_1 + ba_1)^2 = (a^2 + 3b^2)(a_1^2 + 3b_1^2) = \varphi(x)\varphi(y)$$

3 - ليكن $x \in Z[\sqrt{-3}]$ عنصر قابلاً للقلب عندئذ يوجد $y \in Z[\sqrt{-3}]$ بحيث $xy = 1$ ومنه يكون $\varphi(xy) = \varphi(1)$ وحسب (2) نجد أن $\varphi(x)\varphi(y) = 1$ وبما أن $\varphi(x), \varphi(y) \in N$ نجد أن $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$.

لنفرض أن $\varphi(x) = 1$ عندئذ $a^2 + 3b^2 = 1$ ومنه نجد أن $a = 1, b = 0$ وبالتالي يكون $x = a + b\sqrt{-3} = 1$ أي إن العنصر x قابل للقلب.

4 - ليكن $x \in Z[\sqrt{-3}]$ ولنفرض أن $\varphi(x)$ أولي في N عندئذ $\varphi(x) \neq 1$ وحسب (3) نجد أن x غير قابل للقلب في $Z[\sqrt{-3}]$. ليكن $b, c \in Z[\sqrt{-3}]$ بحيث $x = bc$ ومنه يكون $\varphi(x) = \varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c)$ وبما أن العنصر $\varphi(x)$ أولياً في N عندئذ إما $\varphi(b) = 1$ أو $\varphi(x) = \varphi(b)$. إذا كان $\varphi(b) = 1$ عندئذ حسب (3) يكون العنصر b قابل للقلب فسي $Z[\sqrt{-3}]$. إذا كان $\varphi(x) = \varphi(b)$ نجد أن $\varphi(c) = 1$ وحسب (3) يكون العنصر c قابل للقلب في $Z[\sqrt{-3}]$. وهكذا نجد أنه إذا كان $\varphi(x)$ أولي في N فإن العنصر x بسيط في $Z[\sqrt{-3}]$. مما سبق نجد أن التطبيق φ هو نظيم على $Z[\sqrt{-3}]$.

2 - في المنطقة التكاملية $Z[\sqrt{-3}]$ العنصر $1 + \sqrt{-3} \in Z[\sqrt{-3}]$ هو عنصر بسيط ولكنه غير أولي.

الحل.

وجدنا في المثال (1) أن التطبيق $\varphi : Z[\sqrt{-3}] \to N$ المعرف بالشكل

$$\varphi(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2$$

هو نظيم على الحلقة $Z[\sqrt{-3}]$. لنفرض أن $x = 1 + \sqrt{-3}$ نلاحظ أن $\varphi(x) = 4 \neq 1$ ولكون φ نظيماً نجد أن العنصر x غير قابل للقلب في $Z[\sqrt{-3}]$.

ليكن $x_1, x_2 \in Z[\sqrt{-3}]$ بحيث $x = x_1 x_2$ ولنفرض أن كلاً من x_1 و x_2 غير قابل للقلب في $Z[\sqrt{-3}]$. عندئذ بما أن $\varphi(x) = \varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ نجد أن $\varphi(x_1)\varphi(x_2) = 4$ وبما أن كلاً من x_1 و x_2 غير قابل للقلب فإن $\varphi(x_1) \neq 1$ و $\varphi(x_2) \neq 1$ ومنه نجد أن $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 2$. لنفرض أن $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{-3}$

حيث $a_1,b_1 \in Z$ فنجد أن $a_1^2+3b_1^2=2$ وهنا نلاحظ أنه لا توجد أعداد صحيحة a_1,b_1 تحقق $a_1^2+3b_1^2=2$ وهذا يبين لنا أنه إما x_1 قابل للقلب أو x_2 قابل للقلب في $Z[\sqrt{-3}]$. مما سبق نجد أن العنصر $x=1+\sqrt{-3}$ هو عنصر بسيط. لنبرهن أن العنصر $x=1+\sqrt{-3}$ ليس أولياً. وجدنا أن العنصر x غير قابل للقلب في $Z[\sqrt{-3}]$. كما أنه بملاحظة أن $(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})=4=2.2$ فإن هذا يبين لنا أن العنصر x يقسم الجداء 2.2 . لنبرهن على أن x يقسم 2.

ليكن $(1+\sqrt{-3})(a_0+b_0\sqrt{-3})=2$ بحيث $a_0+b_0\sqrt{-3}\in Z[\sqrt{-3}]$ فنجد أن

$$(a_0-3b_0)+(a_0+b_0)\sqrt{-3}=2$$

ومنه نجد $a_0+b_0=0$ و $a_0-3b_0=2$ وهنا نلاحظ أنه لا يوجد $a_0+b_0\sqrt{-3}$ يحقق $(1+\sqrt{-3})(a_0+b_0\sqrt{-3})=2$ أي أن العنصر $1+\sqrt{-3}$ لا يقسم 2 وهذا يبين لنا أن العنصر $1+\sqrt{-3}$ ليس أولياً في $Z[\sqrt{-3}]$.

إن الشرط الرابع من تعريف النظيم ينص على أنه إذا كان x عنصراً في منطقة تكاملية وبحيث أن $\varphi(x)$ أولي عندئذ يكون العنصر x بسيطاً.

لنورد الآن مثالاً نثبت من خلاله أن عكس هذا الشرط غير صحيح.

مثال.

لنأخذ المنطقة التكاملية $Z[\sqrt{6}]=\{a+b\sqrt{6}:a,b\in Z\}$.

إن التطبيق $\varphi:Z[\sqrt{6}]\to N$ المعرف بالشكل $\varphi(a+b\sqrt{6})=|a^2-6b^2|$ هو نظيم على $Z[\sqrt{6}]$ (أثبت ذلك). لنبرهن على أن العنصر $x=7\in Z[\sqrt{6}]$ هو عنصر بسيط في $Z[\sqrt{6}]$.

الحل.

بما أن $\varphi(7)=49\neq 1$ نجد أن العنصر $x=7$ غير قابل للقلب.

ليكن $x,y\in Z[\sqrt{6}]$ بحيث $x=zy$ فيكون $\varphi(x)=\varphi(z)\varphi(y)$ ومنه فإن $\varphi(z)\varphi(y)=49$ وهنا نلاحظ أن $\varphi(y)\in\{1,7,49\}$. إن $\varphi(y)\neq 7$ (تأكد أنه لا

توجد عناصر $y \in Z[\sqrt{6}]$ تحقق $\varphi(y) = 7$). وبالتالي إما $\varphi(y) = 1$ أو $\varphi(y) = 49$.

- إذا كان $\varphi(y) = 1$ عندئذ يكون العنصر y قابلاً للقلب في $Z[\sqrt{6}]$.
- إذا كان $\varphi(y) = 49$ عندئذ يكون $\varphi(z) = 1$ وبالتالي يكون العنصر z قابلاً للقلب في $Z[\sqrt{6}]$.

مما سبق نجد أن العنصر $x = 7$ هو عنصر بسيط في $Z[\sqrt{6}]$. بينما $\varphi(x) = 49$ ليس أولياً في N.

لنورد الآن مثالاً على منطقة تكاملية ليست حلقة تحليل وحيد.

مثال.

الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$ ليست حلقة تحليل وحيد.

الحل.

إن $Z[\sqrt{-5}]$ منطقة تكاملية (تأكد من ذلك).

كما أن التطبيق $\varphi : Z[\sqrt{-5}] \to N$ المعرف بالشكل $\varphi(a+b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ هو تظليم على $Z[\sqrt{-5}]$ (انظر التمرين المحلول رقم (5)). ومنه أياً كان $x \in Z[\sqrt{-5}]$ فإن x قابل للقلب عندما وفقط عندما $\varphi(x) = 1$ وهنا نجد أن العناصر القابلة للقلب في $Z[\sqrt{-5}]$ هي $x = \pm 1$.

لنأخذ العنصر $46 \in Z[\sqrt{-5}]$. إن العنصر 46 غير قابل للقلب وأن $46 = 2.23$.

لنبرهن أن كلاً من 2,23 هي عناصر بسيطة.

إن العنصر 2 غير قابل للقلب. ليكن $x, y \in Z[\sqrt{-5}]$ بحيث $2 = xy$ فنجد أن $\varphi(x).\varphi(y) = 4$ وهنا نجد أن $\varphi(x) \in \{1,2,4\}$. لنبرهن أنه لا توجد عناصر x في $Z[\sqrt{-5}]$ تحقق $\varphi(x) = 2$ بفرض أن $x = a+b\sqrt{-5}$ وأن $\varphi(x) = 2$ عندئذ $a^2 + 5b^2 = 2$ وهذا غير ممكن. وبالتالي يكون $\varphi(x) \in \{1,4\}$.

- إذا كان $\varphi(x) = 1$ نجد أن العنصر x قابل للقلب.
- إذا كان $\varphi(x) = 4$ نجد أن $\varphi(y) = 1$ ومنه يكون العنصر y قابلاً للقلب.

مما سبق نجد أن العنصر 2 بسيط في $Z[\sqrt{-5}]$.

بطريقة مشابهة نجد أن العنصر 23 هو عنصر بسيط في $Z[\sqrt{-5}]$.

بالإضافة إلى ذلك نلاحظ أن $(1+3\sqrt{-5})(1-3\sqrt{-5}) = 46$ وأن كلاً من $1\pm 3\sqrt{-5}$ هي عناصر بسيطة في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (انظر التمرين المحلول رقم (5)).

مما سبق نجد أن العنصر 46 أمكن كتابته على شكل جداء منته لعناصر بسيطة في $Z[\sqrt{-5}]$ بشكلين مختلفين. وهذا يبين لنا أن المنطقة التكاملية $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ليست حلقة تحليل وحيد.

تمـــاريـــن محـــلـــولـــة (5)

1 - لتكن R حلقة و S مجموعة ضربية في R تحقق $o \notin S$. عندئذ يوجد في R مثالي أولي P بحيث $P \cap S = \Phi$.

الحـــل.

لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة كل المثاليات في الحلقة R والتي كل منها لا يتقاطع مع المجموعة S. أي أنه أياً كان $A \in \Im$ فإن A مثالي في R وأن $A \cap S = \Phi$. فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $\{o\}$ هو مثالي في R وأن $\{o\} \cap S = \Phi$ لأن $o \notin S$ حسب الفرض. كما أن المجموعة $\Im$ مرتبة جزئياً بالنسبة إلى علاقة الإحتواء.

لتكن $\Im_0$ مجموعة جزئية من $\Im$ غير خالية ومرتبة كلياً ولنفرض أن $K = \bigcup_{H \in \Im_0} H$

عندئذ وحسب التمهيدية (2-2-1) نجد أن K مثالي في R. كما أن $K \cap S = \Phi$ لأنه إذا كان $K \cap S \neq \Phi$ فإنه يوجد $a \in K \cap S$ وبالتالي يكون

$$a \in K \cap S = S \cap (\bigcup_{H \in \Im_0} H) = \bigcup_{H \in \Im_0} (S \cap H)$$

ومنه يوجد $L \in \Im_0$ بحيث يكون $a \in L \cap S$ أي أن $L \cap S \neq \Phi$ وهذا يناقض كون $L \in \Im_0$. مما سبق نجد أن $K \cap S = \Phi$ وبالتالي يكون $K \in \Im$.

من جهة أخرى فإن $B \subseteq K$ وذلك أياً كان $B \in \Im_0$ وهذا يبين لنا أن K هو حد أعلى للمجموعة $\Im_0$ في $\Im$ وحسب تمهيدية زورن يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي وليكن P. بما أن $P \in \Im$ فإن P هو مثالي في R وأن $P \cap S = \Phi$. لنبرهن الآن على أن المثالي P أولي في R.

ليكن $x, y \in R$ بحيث $x.y \in P$ ولنفرض جدلاً أن $x \notin P$ و $y \notin P$ عندئذ يكون $P + Rx$ و $P + Ry$ مثاليين في R وأن $P \subsetneq P + Rx$ و $P \subsetneq P + Ry$. كما أن $(P + Rx) \cap S \neq \Phi$ لأنه إذا كان $(P + Rx) \cap S = \Phi$ يكون $P + Rx \in \Im$ وأن $P \subsetneq P + Rx$ وهذا يناقض كون المثالي P أعظمياً في المجموعة $\Im$. كذلك

الأمر بالنسبة إلى المثالي $P+Ry$ أي أن $(P+Ry)\cap S\neq\Phi$. ومنه يوجد $a\in(P+Rx)\cap S$ و $b\in(P+Ry)\cap S$ وبالتالي يكون $a=x_o+r_1x$ و $b=y_o+r_2y$ حيث $x_o,y_o\in P$ و $r_1,r_2\in R$ وبما أن المجموعة S ضربية وأن $a,b\in S$ نجد أن $ab\in S$ وأن

$$ab=(x_o+r_1x)(y_o+r_2y)=x_oy_o+(r_2y)x_o+(r_1x)y_o+(r_1r_2)(xy)$$

وبما أن $x_o,y_o,x,y\in P$ نجد أن $ab\in P$ وهذا يبين لنا أن $ab\in P\cap S$ أي أن $P\cap S\neq\Phi$ وهذا يناقض كون $P\in\Im$. مما سبق نجد أنه إما $x\in P$ أو $y\in P$ وهذا يبين لنا أن المثالي P أولي في R وأن $P\cap S=\Phi$.

2 - ليكن $f:R\to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً و M مثالياً في S. عندئذ:

أ - إذا كان المثالي M أولياً في S عندئذ المثالي $f^{-1}(M)$ يكون أولياً في R.

ب - إذا كان المثالي M أعظمياً في S عندئذ المثالي $f^{-1}(M)$ يكون أولياً في R.

الحل.

أ - لنفرض أن المثالي M أولياً في S عندئذ يكون $f^{-1}(M)$ مثالياً في R وأن $f^{-1}(M)\neq R$ لأنه إذا كان $f^{-1}(M)=R$ عندئذ يكون $1\in f^{-1}(M)$ ومنه فإن $1=f(1)\in M$ وبالتالي $S=M$ وهذا يناقض كون المثالي M أولياً في S.

ليكن $a,b\in R$ بحيث $ab\in f^{-1}(M)$ عندئذ يكون $f(ab)\in M$ وبالتالي $f(a)f(b)\in M$ وبما أن المثالي M أولياً في S نجد أنه

- إما $f(a)\in M$ وبالتالي يكون $a\in f^{-1}(M)$.
- أو $f(b)\in M$ وبالتالي يكون $b\in f^{-1}(M)$.

مما سبق نجد أن المثالي $f^{-1}(M)$ أولي في R.

ب - لنفرض أن المثالي M أعظمي في S عندئذ حسب التمهيدية (5-1-13) يكون المثالي M أولياً في S وحسب (1) يكون المثالي $f^{-1}(M)$ أولياً في R.

3 - ليكن p عدداً أولياً. أثبت أن المجموعة $A=\{(px,y):x,y\in Z\}$ تشكل مثالياً أعظمياً في الحلقة $Z\oplus Z$.

الحـــل.

واضح أن المجموعة A تشكل مثالياً في الحلقة $Z \oplus Z$ (تأكد من ذلك). لنعـــين الحلقة $Z \oplus Z/A$. ليكن $\overline{(x,y)} \in Z \oplus Z/A$ عندئذ $\overline{(x,y)} = (x,y)+A$ حيث $(x,y) \in Z \oplus Z$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل x, p يوجد $q, r \in Z$ بحيـــث $x = pq + r$ وأن $o \le r < p$ ومنه

$$(x,y) = (pq + r, y) = (pq, y) + (r, o)$$

وبالتالي فإن

$$\overline{(x,y)} = (x,y) + A = [(pq,y) + (r,o)] + A = [(pq,y) + A] + [(r,o) + A] = (r,o) + A$$

وذلك لأن $(pq,y) \in A$ وهذا يبين لنا أن

$$Z \oplus Z/A = \{(r,o) : r = o,1,2,\cdots,(p-1)\}$$

لنعرف العلاقة $f : Z_p \to Z \oplus Z/A$ بالشكل الأتـــي: أيـــاً كـــان $x \in Z_p$ فـــإن $f(x) = (x,o) + A$. واضح أن العلاقة f تطبيق.

من جهة أخرى ليكن $x, y \in Z_p$ عندئذ

$$f(x+y) = (x+y,o) + A = [(x,o) + (y,o)] + A = [(x,o) + A] + [(y,o)] + A] = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = (xy,o) + A = [(x,o) + A].[(y,o) + A] = f(x) f(y)$$

مما سبق نجد أن التطبيق f هو تشاكل حلقي. كما أن التطبيق f متباين لأنه إذا كان $x, y \in Z_p$ بحيث $f(x) = f(y)$ عندئذ يكون $(x,o) + A = (y,o) + A$ وبالتالي يكون $(x-y,o) \in A$ ومنـــه $x - y = pa$ حيـــث $a \in Z$ وهـــذا يبـــين لنـــا أن $x - y \equiv o \bmod -p$ أي إن $x = y$ في Z_p. وبما أن كلاً مـــن $Z \oplus Z/A$ و Z_p حلقات منتهية وأن f متباين نجد أن f تقابل. مما سبق نجد أن f هـــو تماثـــل حلقي وبمـــا أن العـــدد p أولـــياً فـــإن الحلقـــة Z_p هـــي حقـــل ومنـــه نجـــد أن الحلقة $Z \oplus Z/A$ حقل وحسب المبرهنة (5-1-14) يكون المثالي A أعظمياً فـــي الحلقة $Z \oplus Z$.

4 - لتكن R حلقة تحقق: أياً كان $a \in R$ يوجد عدد صحيح موجب $n_a > 1$ يحقق $a^{n_a} = a$. أثبت أن:

- كل مثالي أولي في R هو مثالي أعظمي في R.
- $rad\, R = J(R)$.

الحل.

1 - ليكن B مثالياً أولياً في R عندئذ $B \neq R$. ليكن D مثالياً في R بحيث $B \subseteq D \subseteq R$ وليكن $d \in D$ عندئذ وحسب الفرض يوجد عدد صحيح $n_d > 1$ يحقق $d^{n_d} = d$ ومنه فإن $d^{n_d} - d = o \in B$ وبالتالي $d(d^{n_d-1} - 1) \in B$ وبما أن المثالي B أولي عندئذ إما $d^{n_d-1} - 1 \in B$ أو $d \in B$. لنفرض جدلاً أن $d^{n_d-1} - 1 \in B$ وبما أن $B \subseteq D$ نجد أن $d^{n_d-1} - 1 \in D$ ومنه يوجد $a \in D$ بحيث $d^{n_d-1} - 1 = a$ وبالتالي يكون $d^{n_d} - a = 1$ وبما أن $d \in D$ وأن $n_d - 1 \geq 1$ فإن $d^{n_d-1} \in D$ وهكذا نجد أن $1 = d^{n_d-1} - a \in D$ وهذا يبين لنا أن $D = R$ وهذا غير ممكن فرضاً. ومنه يكون $d \in B$ وذلك أياً كان $d \in D$ وبالتالي فإن $D \subseteq B$. مما سبق نجد أن $D = B$ وهذا يبين لنا أن المثالي B أعظمي في R.

2 - لدينا حسب المبرهنة (5-1-15) أن $rad\, R \subseteq J(R)$. وبما أنه حسب (1) كل مثالي أولي في R هو مثالي أعظمي نجد أن $J(R) \subseteq rad\, R$ ومنه فإن $rad\, R = J(R)$.

5 - أثبت أن العنصر $1 + 3\sqrt{-5}$ هو عنصر بسيط في الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$ ولكنه غير أولي.

الحل.

نعلم أن الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$ هي منطقة تكاملية.

لنعرف التطبيق $\varphi : (Z[\sqrt{-5}])^* \to N$ بالشكل الآتي:

أياً كان $a + b\sqrt{-5} \in Z[\sqrt{-5}]$ فإن $\varphi(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$. إن التطبيق φ هو نظيم على الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$، (أثبت ذلك). بما أن $a + b\sqrt{-5} \in Z[\sqrt{-5}]$ وأن

$\varphi(1+3\sqrt{-5}) = 1+5(9) \neq 1$ نجد أن العنصر $x = 1+3\sqrt{-5}$ غير قابل للقلب في الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$. ليكن $x = yz$ بحيث $y, z \in Z[\sqrt{-5}]$ عندئذ يكون

$$46 = \varphi(x) = \varphi(yz) = \varphi(y)\varphi(z)$$

وهنا نلاحظ أن $\varphi(y) \in \{1,2,23,46\}$. لنفرض أن $\varphi(y) = 2$ عندئذ وبفرض أن $y = a_1 + b_1\sqrt{-5}$ نجد أن $a_1^2 + 5b_1^2 = 2$. وهنا نلاحظ أنه لا توجد أعداد صحيحة a_1, b_1 تحقق $a_1^2 + 5b_1^2 = 2$. ومنه نجد أن الاحتمال $\varphi(y) = 2$ غير ممكن.

- إذا كان $\varphi(y) = 23$ نجد أن $\varphi(z) = 2$ وهذا أيضاً غير ممكن.
- إذا كان $\varphi(y) = 1$ نجد أن العنصر y قابل للقلب لأن φ نظيم.
- إذا كان $\varphi(y) = 46$ نجد أن $\varphi(z) = 1$ وبالتالي يكون العنصر z قابل للقلب.

مما سبق نجد أنه إما y قابل للقلب أو z قابل للقلب في $Z[\sqrt{-5}]$. وهذا يبين لنا أن العنصر $x = 1+3\sqrt{-5}$ بسيط في $Z[\sqrt{-5}]$. لنثبت الآن أن العنصر $x = 1+3\sqrt{-5}$ غير أولي.

نلاحظ أن $(1+3\sqrt{-5})(1-3\sqrt{-5}) = 2 \cdot 23 = 46$ أي إن العنصر $x = 1+3\sqrt{-5}$ يقسم الجداء $2 \cdot 23$. لنفرض أن العنصر x يقسم 2 عندئذ يوجد $a_2 + b_2\sqrt{-5}$ بحيث $(1+3\sqrt{-5})(a_2 + b_2\sqrt{-5}) = 2$ وبالتالي يكون $b_2 + 3a_2 = 0$ و $a_2 - 15b_2 = 2$ ومنه نجد أن $46a_2 = 2$ أي إن $a_2 = 1/23 \notin Z$ وهنا نجد أنه لا توجد عناصر $a_2 + b_2\sqrt{-5} \in Z[\sqrt{-5}]$ تحقق $(1+3\sqrt{-5})(a_2 + b_2\sqrt{-5}) = 2$ أي أن العنصر x لا يقسم 2. لنفرض أن العنصر x يقسم 23 عندئذ يوجد عنصر $a_3 + b_3\sqrt{-5}$ يحقق $(1+3\sqrt{-5})(a_3 + b_3\sqrt{-5}) = 23$ وهنا نجد أن $b_3 + 3a_3 = 0$ و أن $a_3 - 15b_3 = 23$ وبالتالي يكون $46a_3 = 23$ أي أن $a_3 = 1/2 \notin Z$. وهنا نجد أنه لا توجد عناصر $a_3 + b_3\sqrt{-5} \in Z[\sqrt{-5}]$ تحقق $(1+3\sqrt{-5})(a_3 + b_3\sqrt{-5}) = 23$ أي أن العنصر x لا يقسم 23. مما سبق نجد أن العنصر $1+3\sqrt{-5}$ ليس أولياً.

6 - ليكن $d \neq 1$ عدداً صحيحاً يحقق الشرط: أياً كان العدد الأولي p فإن d ليس قاسماً للعدد p^2 . ولنأخذ المنطقة التكاملية $Z[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d} : a,b \in Z\}$. أثبت أن التطبيق $\varphi:(Z[\sqrt{d}])^* \to N$ المعرف بالشكل الآتي: $\varphi(a+b\sqrt{d}) = |a^2 - db^2|$ وذلك أياً كان $a+b\sqrt{d} \in Z[\sqrt{d}]$ هو نظيم على الحلقة $Z[\sqrt{d}]$.

الحل.

1 - ليكن $x \in Z[\sqrt{d}]$ عندئذ $x = a+b\sqrt{d}$ حيث $a,b \in Z$. إذا كان $x = o$ عندئذ $\varphi(x) = o$ ومنه $\varphi(x) = |a^2 - db^2| = o$. لنفرض أن o عندئذ $a = b = o$ ومنه $|a^2 - db^2| = o$ وحسب الفرض يكون $a = b = o$ ومنه $a^2 = db^2$. $x = o$

2 - ليكن $y,z \in Z[\sqrt{d}]$ عندئذ $y = a_1 + b_1\sqrt{d}$ و $z = a_2 + b_2\sqrt{d}$ حيث $a_1,a_2,b_1,b_2 \in Z$ و منه

$$\varphi(yz) = |a_1^2a_2^2 + d^2b_1^2b_2^2 - a_1^2b_2^2d - b_1^2a_2^2d| = |(a_1^2 - db_1^2)(a_2^2 - b_2^2d)| =$$
$$= |a_1^2 - db_1^2| \cdot |a_2^2 - b_2^2d| = \varphi(y)\varphi(z)$$

3 - ليكن $x \in Z[\sqrt{d}]$ عنصراً قابلاً للقلب عندئذ يوجد $u \in Z[\sqrt{d}]$ بحيث $xu = 1$ ومنه $\varphi(x)\varphi(u) = \varphi(1) = 1$ وبما أن $\varphi(x),\varphi(u) \in N$ نجد أن $\varphi(x) = 1$.

ليكن $x \in Z[\sqrt{d}]$ ولنفرض أن $\varphi(x) = 1$ ويفرض أن $x = a+b\sqrt{d}$ نجد أن $|a^2 - db^2| = 1$ ومنه يكون $a = 1, b = o$ أي أن $x = 1$ وبالتالي x قابل للقلب.

4 ليكن $y \in Z[\sqrt{d}]$ ولنفرض أن $\varphi(y)$ أولي في N عندئذ $\varphi(y) \neq 1$ وحسب (3) يكون العنصر y غير قابل للقلب. ليكن $y_1,y_2 \in Z[\sqrt{d}]$ بحيث $y = y_1y_2$ عندئذ $\varphi(y) = \varphi(y_1)\varphi(y_2)$ ولما كان العدد $\varphi(y)$ أولياً في N نجد أنه إما $\varphi(y_1) = 1$ أو $\varphi(y_1) = \varphi(y)$.

- إذا كان $\varphi(y_1) = 1$ عندئذ حسب (3) نجد أن العنصر y_1 قابل للقلب.
- إذا كان $\varphi(y_1) = \varphi(y)$ عندئذ يكون $\varphi(y_2) = 1$ وحسب (3) نجد أن العنصر y_2 قابل للقلب.

مما سبق نجد أن التطبيق φ هو نظيم على الحلقة $Z[\sqrt{d}]$.

7 - أثبت أن $Z[\sqrt{-6}]$ ليست حلقة تحليل وحيد.

الحـــل.

نعلم أن $Z[\sqrt{-6}]$ منطقة تكاملية. كما أن التطبيـــق $\varphi : Z[\sqrt{-6}] \to N$ المعـــرف بالشكل $\varphi(a+b\sqrt{-6}) = a^2+6b^2$ وذلك أياً كان $a+b\sqrt{-6} \in Z[\sqrt{-6}]$ هو تظليم على الحلقة $Z[\sqrt{-6}]$ (أثبت ذلك).

إن $10 \in Z[\sqrt{-6}]$ وأن $10 = 2.5$ و $10 = (2+\sqrt{-6})(2-\sqrt{-6})$. لنبـــرهن أن العناصر $2,5,(2+\sqrt{-6}),(2-\sqrt{-6})$ هي عناصر بسيطة.

- بما أن $\varphi(2) = 4 \neq 1$ فإن العنصر 2 غير قابل للقلـــب. لـــيكن $x, y \in Z[\sqrt{-6}]$ بحيث $xy = 2$ عندئذ $\varphi(x)\varphi(y) = 4$ ومنه $\varphi(x) \in \{1,2,4\}$ وهنا نلاحظ أنـــه لا توجد في Z عناصر a,b تحقق $a^2+6b^2 = 4$ ومنه فإن $\varphi(x) \neq 2$ أي أنـــه إمـــا $\varphi(x) = 1$ وبالتالي العنصر x قابل للقلب. أو $\varphi(x) = 4$ ومنـــه $\varphi(y) = 1$ أي أن العنصر y قابل للقلب. وهكذا نجد أن العنصر 2 بسيط.

- بما أن $\varphi(5) = 25 \neq 1$ فإن العنصر 5 غير قابل للقلب. لـــيكن $x, y \in Z[\sqrt{-6}]$ بحيث $xy = 5$ عندئذ $\varphi(x)\varphi(y) = 25$ ومنه $\varphi(x) \in \{1,5,25\}$ وهنا نلاحظ أنـــه لا توجد في Z عناصر a,b تحقق $a^2+6b^2 = 5$ ومنه فإن $\varphi(x) \neq 5$ أي أنـــه إمـــا $\varphi(x) = 1$ وبالتالي العنصر x قابل للقلب. أو $\varphi(x) = 25$ ومنه $\varphi(y) = 1$ أي أن العنصر y قابل للقلب. وهكذا نجد أن العنصر 5 بسيط.

- بما أن $\varphi(2 \pm \sqrt{-6}) = 10 \neq 1$ نجد أن العناصر $2 \pm \sqrt{-6}$ غيـــر قابلـــة للقلـــب فـــي $Z[\sqrt{-6}]$. لـــيكن $x, y \in Z[\sqrt{-6}]$ بحيـــث $x.y = 2 \pm \sqrt{-6}$ فنجـــد أن $\varphi(x).\varphi(y) = \varphi(2 \pm \sqrt{-6}) = 10$ ومنه $\varphi(y) \in \{1,2,5,10\}$ وهنا نلاحظ أنـــه لا يوجد $x \in Z[\sqrt{-6}]$ بحيث $\varphi(x) = 2$ أو $\varphi(x) = 5$. ومنه نجد أنه إما $\varphi(x) = 1$ أو $\varphi(y) = 1$ وبالتالي إما x قابل للقلب أو y قابل للقلب.

مما سبق نجد أن العناصر $2 \pm \sqrt{-6}$ بسيطة في $Z[\sqrt{-6}]$. وهكذا نجد أن العنـــصر 10 قد أمكن كتابته على شكل جداء منته لعناصر بـــسيطة فـــي $Z[\sqrt{-6}]$ بـــشكلين مختلفين. وهذا يبين لنا أن المنطقة التكاملية $Z[\sqrt{-6}]$ ليست حلقة تحليل وحيد.

تعريـف. (المضـاعـف المشتـرك الأصغـر).

لتكن R منطقة تكاملية و $a,b \in R$. نقول عن العنصر $m \in R$ إنـه مـضاعف مشترك أصغر للعنصرين a,b إذا حقق الشرطين التاليين:

1. كل من a و b يقسم m.
2. إذا كان $c \in R$ وكان كل من a و b يقسم c عندئذ m يقسم c.

نرمز إلى المضاعف المشترك الأصغر للعنصرين a,b بالرمز $lcm\,(a,b)$.

8 - لتكن R منطقة تكاملية و $a,b \in R$. عندئذ:

1 - إذا كان $m = lcm\,(a,b)$ عندئذ فإن m يقسم ab.

2 - إذا كان $m = lcm\,(a,b)$ وكان $m_o \in R$ عنـصراً متـشاركاً مـع m فـإن $m_o = lcm\,(a,b)$.

3 - الشرط اللازم والكافي كي يكون $m = lcm\,(a,b)$ هو أن يكون كـل عنـصر $m_o \in R$ ومتشارك مع m يحقق $m_o = lcm\,(a,b)$.

4 - $lcm\,(a,b) = o$ عندما وفقط عندما $a = o$ أو $b = o$.

5 - إذا كان $a \neq o$ و $b \neq o$ وكان $m = lcm\,(a,b)$ وكان $ab = dm$ حيث $d \in R$ فإن $d = gcd\,(a,b)$.

الحـل.

1 - لنفرض أن $m = lcm\,(a,b)$ و $x = ab$. بما أن كلاً من a,b يقـسم x فإنـه حسب التعريف m يقسم x أي أن m يقسم ab.

2 - لنفرض أن $m = lcm\,(a,b)$ وليكن $m_o \in R$ ومتشارك مع m عندئذ يوجـد $u \in R$ قابل للقلب ويحقق $m_o = um$. بما أن كلاً من a,b يقـسم m فإنـه يوجـد $a',b' \in R$ بحيث $m = b'b$,$m = a'a$ ومنه يكون $m_o = (ub')b$ و$m_o = (ua')a$ أي أن كلاً من a,b يقسم m_o.

ليكن $c \in R$ بحيث أن كلاً من a و b يقسم c عندئذ وحسب التعريف فإن m يقسم c ومنه يوجد $c_o \in R$ بحيث $c = c_o m$ ومنه يكون $c = (c_o u^{-1})m_o$ أي أن m_o يقسم c. مما سبق وحسب التعريف نجد أن $m_o = lcm(a,b)$.

3 - لزوم الشرط. لنفرض أن $m = lcm(a,b)$ وجدنا حسب (2) أنه إذا كان $m_o \in R$ عنصراً متشاركاً مع m فإن $m_o = lcm(a,b)$.

كفاية الشرط. لنفرض أن كل عنصر $m_o \in R$ ومتشاركاً مع m يحقق $m_o = lcm(a,b)$ عندئذ يوجد $v \in R$ قابل للقلب بحيث $m = vm_o$. بما أن كلاً من a,b يقسم m_o نجد أن كلاً من a,b يقسم m.

ليكن $c \in R$ وأن كلاً من a و b يقسم c عندئذ حسب التعريف فإن m_o يقسم c ومنه يوجد $c_o \in R$ بحيث $c = c_o m_o$ ومنه $c = (c_o v^{-1})m$ أي أن m يقسم c. مما سبق وحسب التعريف نجد أن $m = lcm(a,b)$.

4 - لزوم الشرط. لنفرض أن $lcm(a,b) = o$ عندئذ حسب (1) فإن o يقسم ab ومنه $ab = o$ وبما أن R منطقة تكاملية فإنه إما $a = o$ أو $b = o$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $a = o$ وأن $m = lcm(a,b)$. بما أن a يقسم m فإنه يوجد $d \in R$ بحيث $m = da = o$.

5 - لنفرض أن كلاً من a,b لا يساوي الصفر وأن $m = lcm(a,b)$ وليكن $d \in R$ بحيث $ab = dm$ ولنبرهن على أن $d = gcd(a,b)$.

بما أن $m = lcm(a,b)$ فإن كلاً من a و b يقسم m ومنه يوجد $a',b' \in R$ بحيث $m = b'b$ و $m = a'a$ ومنه يكون $ab = dm = (da')a$ وبما أن R منطقة تكاملية و $a \neq o$ فإنه حسب خاصية الاختصار نجد أن $b = da'$ كما أن $ab = dm = (db')b$ وبما أن $b \neq o$ نجد أن $a = db'$ وهكذا نجد أن d يقسم كلاً من a و b.

ليكن $d_o \in R$ قاسماً آخر للعنصرين a,b عندئذ يوجد $a'',b'' \in R$ بحيث $b = d_o b''$ و $a = d_o a''$ بفرض أن $c = d_o a''b''$ نجد أن $c = ab'' = ba''$ أي أن كلاً من a,b يقسم c وبما أن $m = lcm(a,b)$ ينتج أن m يقسم c وبالتالي يوجد $c' \in R$ بحيث $c = c'm$ ومنه يكون $d_o c'm = d_o c = d_o^2 a''b'' = ab = dm$ وبما أن R منطقة

تكاملية وحسب خاصية الاختصار نجد $d_0 c' = d$ حيث إن $m \neq o$ وهذا يبين لنا حسب التعريف أن $d = gcd(a,b)$.

9 - ليكن $A \neq Z[i]$ مثالياً في $Z[i]$. أثبت أن حلقة الخارج $Z[i]/A$ منتهية.

الحل.

وجدنا حسب المثال (2) من الفقرة (5-3) أن الحلقة $Z[i]$ هي حلقة إقليدية وحسب المبرهنة (5-3-1) تكون $Z[i]$ حلقة مثاليات رئيسية. ومنه فإن المثالي A هو مثالي رئيسي في $Z[i]$. لنفرض أن $A = \langle a+bi \rangle$ حيث $a,b \in Z$ ومنه فإن $(a+bi)(a-bi) \in A$ وهكذا يكون

$$(a^2+b^2)+A = (a+bi)(a-bi)+A = A$$

أي أن $a^2+b^2 \in A$. ليكن $\overline{0} \in Z[i]/A$ عندئذ $\overline{\theta} = \theta + A$ حيث $\theta \in Z[i]$ ومنه $\theta = x+yi$ حيث $x,y \in Z$. وحسب خوارزمية القسمة لأجل العنصرين x, a^2+b^2 فإنه يوجد $q_1, r_1 \in Z$ بحيث $x = q_1(a^2+b^2)+r_1$ وأن $o \leq r_1 < a^2+b^2$. وأيضاً لأجل العنصرين y, a^2+b^2 يوجد $q_2, r_2 \in Z$ بحيث $y = q_2(a^2+b^2)+r_2$ حيث $o \leq r_2 < a^2+b^2$. ومنه نجد أن

$$\overline{\theta} = \theta + A = [(q_1+q_2 i)(a^2+b^2)+(r_1+r_2 i)]+A = (r_1+r_2 i)+A$$

حيث $o \leq r_1, r_2 < a^2+b^2$ وهكذا نجد أن

$$Z[i]/A = \{(r_1+r_2 i)+A : r_1, r_2 \in Z;\ o \leq r_1, r_2 < a^2+b^2\}$$

وهذا يبين لنا أن الحلقة $Z[i]/A$ منتهية.

10 - أثبت أن المثالي $A = \langle \sqrt{2} \rangle$ أعظمي في الحلقة $Z[\sqrt{2}]$.

الحل.

بما أن $1 \notin A$ فإن $A \neq Z[\sqrt{2}]$. ليكن $\overline{\theta} \in Z[\sqrt{2}]/A$ عندئذ $\overline{\theta} = \theta + A$ حيث $\theta \in Z[\sqrt{2}]$ ومنه $\theta = a+b\sqrt{2}$ حيث $a,b \in Z$ وبالتالي

$$\overline{\theta} = 0 + A = (a+b\sqrt{2})+A = a+A$$

نطبق خوارزمية القسمة لأجل العنصرين $2,a$ نجد أن $a = 2q + r$ حيث $0 \le r < 2$ ومنه $\bar{\theta} = (2q + r) + A = [(q\sqrt{2})\sqrt{2} + r] + A = r + A$ و منه نجد أن $Z[\sqrt{2}]/A = \{A, 1 + A\}$ وهذا يبين لنا أن الحلقة $Z[\sqrt{2}]/A$ هي حقل وبالتالي يكون المثالي A أعظمياً في $Z[\sqrt{2}]$.

11 - لنأخذ في حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ المجموعة

$$A = \{p : p \in Z ; \quad p \text{ عدد أولي}\}$$

ولنأخذ المثالي $P = \langle A \rangle$ وبما أن حلقة الأعداد الصحيحة Z هي حلقة مثاليات رئيسية نجد أن $P = p.Z$ حيث $p \in A$ أي إن p عدد أولي وحسب المبرهنة (5-1-5) نجد أن المثالي P أولي في Z.

تمـــاريـــن (5)

1 - لتكن R حلقة تبديلية تحقق $a^2 = a$ أياً كان $a \in R$ وليكن I مثالياً أولياً في R. أثبت أن $Card\ R/I = 2$.

2 - في الحلقة $R = Z_{27}$ بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 27 أوجد $rad\ A$ في كل من الحالات التالية: $A = \langle o \rangle$ $A = \langle 9 \rangle$.

3 - في الحلقة $R = Z_{36}$ بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 36 أوجد $rad\ B$ في كل من الحالات التالية: $B = \langle o \rangle$ $B = \langle 4 \rangle$ $B = \langle 6 \rangle$.

4 - أثبت أن $\langle 2 \rangle$ و $\langle 3 \rangle$ هي المثاليات الأعظمية الوحيدة في الحلقة Z_{36}.

5 - لتكن R حلقة منتهية. أثبت أن كل مثالي أولي في R يكون أعظمياً في R.

6 - أوجد جميع المثاليات الأعظمية في الحلقات Z_8, Z_{10}, Z_{12}, Z_n.

7 - في الحلقة $Z \oplus Z$ أثبت أن المجموعة $I = \{(a,o) : a \in Z\}$ تشكل مثالياً أولياً في الحلقة $Z \oplus Z$ ولكنه ليس أعظمياً.

8 - في الحلقة $Z \oplus Z$ أثبت أن المجموعة $I = \{(3x, y) : x, y \in Z\}$ تشكل مثالياً أعظمياً في الحلقة $Z \oplus Z$.

9 - لنفرض أن $R = Z_8 \oplus Z_{30}$. أوجد جميع المثاليات الأعظمية في الحلقة R. ومن أجل أي مثالي أعظمي I في الحلقة R عين الحقل R/I.

10 - في حلقة غاوص الصحيحة $Z[i]$ أثبت أن المثالي $I = \langle 2 + 2i \rangle$ ليس أولياً.

11 - أثبت من خلال مثال أن تقاطع مثاليين أوليين ليس مثالياً أولياً.

12 - عين جميع حلقات الخارج لحلقة الأعداد الصحيحة Z.

13 - في حلقة الأعداد الصحيحة Z لنفرض أن $B = 3Z$ و $A = 2Z$. أثبت أن $A + B = Z$ وأن $AB = 6Z$.

14 - لتكن R منطقة تكاملية، ولنعرف على R العلاقة ($\sim$) بالشكل الآتي: أياً كان $a, b \in R$ فإن

العنصران a,b متشاركان $\Leftrightarrow a\sim b$

أثبت أن العلاقة ($\sim$) هي علاقة تكافؤ على R.

15 - لتكن R منطقة تكاملية. أثبت أن جداء أي عنصرين أحدهما بسيط ولأخر قابل للقلب هو عنصر بسيط.

16 - لتكن D حلقة إقليدية و φ هي الدالة الإقليدية وليكن $a\in D$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر a قابلاً للقلب في R هو أن يكون $\varphi(a)=\varphi(1)$.

17 - لتكن D حلقة إقليدية و φ هي الدالة الإقليدية وليكن $a,b\in D$. أثبت أنه إذا كان العنصران a,b متشاركين في D فإن $\varphi(a)=\varphi(b)$.

18 - لتكن R حلقة. أثبت أن الحلقة $R/\sqrt{\langle o\rangle}$ لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر.

19 - لتكن R حلقة و $a,b\in R$ بحيث a قابل للقلب و b عديم القوى. أثبت أن العنصر $a+b$ قابل للقلب.

20 - لتكن الحلقة $Z_n[i]=\{a+bi : a,b\in Z_n ; i^2=-1\}$. أثبت أنه

- إذا كان $n=2$ فإن الحلقة $Z_2[i]$ ليست حقلاً.
- إذا كان $n=3$ فإن الحلقة $Z_3[i]$ تشكل حقلاً.

21 - لتكن R حلقة مثاليات رئيسية و $a\in R$. والمطلوب:

- أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي Ra أعظمياً في R هو أن يكون العنصر a بسيطاً في R.
- أثبت أنه إذا كان العنصر a بسيطاً في R فإن الحلقة R/Ra تكون حقلاً.

22 - لتكن R منطقة تكاملية و $a,b\in R$ عناصر متشاركة. أثبت أن $Ra=Rb$.

23 - أثبت أن العنصر $1+i$ هو عنصر بسيط في الحلقة $Z[i]$.

24 - أثبت أن كلاً من العنصرين 2 و $1+\sqrt{5}$ هو عنصر بسيط في الحلقة $Z[\sqrt{5}]$ ولكنه غير أولي.

25 - أثبت أن 3 هو عنصر بسيط في الحلقة $Z[i]$ بينما العنصران 2و 5 ليسا كذلك.

26 - أوجد العناصر القابلة للقلب في الحلقة $Z[i]$.

27 - ليكن $Z[\sqrt{-5}]$ بحيث $a+b\sqrt{-5} \in Z[\sqrt{-5}]$. $b \neq o$ أثبت أن $2 \notin \langle a+b\sqrt{-5} \rangle$.

28 - في الحلقة $Z[i]$ لنفرض أن $A = \langle 2+i \rangle$. أثبت أن الحلقة $Z[i]/A$ حقلاً.

29 - ليكن p عدداً أولياً. أثبت أنه إذا وجد $a,b \in Z$ بحيث يكون $a^2+b^2 = p$ فإن العنصر $x = a+bi$ هو عنصر بسيط في الحلقة $Z[i]$.

30 - أثبت أن كلاً من العناصر $2+i, 1+2i, 1+i, 2+3i, 3+2i$ هي عناصر بسيطة في الحلقة $Z[i]$.

31 - في الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$ أثبت أن العنصر 21 يمكن كتابته كجداء منته لعناصر بسيطة في $Z[\sqrt{-5}]$ بطريقتين مختلفتين.

32 - أثبت أن الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$ ليست حلقة تحليل وحيد.

33 - أثبت أن الحلقة $Z[\sqrt{5}]$ ليست حلقة مثاليات رئيسية.

34 - ليكن $d < -1$ عدداً صحيحاً يحقق أياً كان العدد الأولي p فإن d لا يقسم p^2 . أثبت أن العناصر القابلة للقلب في $Z[\sqrt{d}]$ هي فقط1 و 1- .

35 - ليكن $d < -1$ عدداً صحيحاً يحقق أياً كان العدد الأولي p فإن d لا يقسم p^2 . وليكن $a,b \in Z[\sqrt{d}]$ أثبت أنه إذا كان العنصر ab قابل للقلب فإن كلاً من a,b يكون قابلاً للقلب.

36 - في المنطقة التكاملية $Z[\sqrt{2}]$ أثبت أن كل عنصر من الشكل $(3+2\sqrt{2})^n$ قابل للقلب حيث $n \in N$.

37 - لتكن R منطقة تكاملية وليكن $p \in R$ عنصراً أولياً. أثبت أنه إذا كانت $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$ وكان p يقسم الجداء $a_1 a_2 \cdots a_n$ فإن p يقسم أحد المضاريب.

38 - أثبت أن كلاً من $Z[\sqrt{2}]$ و $Z[\sqrt{-2}]$ هي حلقات تحليل وحيد.

39 - أكتب كل من العناصر 13 و $5+i$ على شكل جداء لعناصر أولية في $Z[i]$.

40 - لتكن R منطقة تكاملية و $A \neq R$ مثالياً في R . أثبت أنه يوجد في R مثالي أعظمي يحوي A .

41 - لتكن R منطقة تكاملية وليكن $a,b,d \in R$. أثبت أن

- $gcd(ad,bd) = d\,gcd(a,b)$.

- $gcd\,(gcd\,(a,b),d)=gcd\,(a,gcd\,(b,d))$.

42 - لتكن R حلقة إقليدية و $a,b,c\in R$. أثبت أنه:

- إذا كان $gcd\,(a,b)=1$ و $gcd\,(a,c)=1$ فإن $gcd\,(a,bc)=1$.
- إذا كان a يقسم الجداء bc و $gcd\,(a,b)=1$ فإن a يقسم c.
- إذا كان b يقسم a و c يقسم a وأن $gcd\,(b,c)=1$ عندئذ الجداء bc يقسم a.

43 - ليكن $B=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in Z\,,a-b\in 2Z\}$. أثبت أن المجموعة B مثالي أعظمي في الحلقة $Z[\sqrt{-5}]$.

44 - ليكن $A=\langle 3\rangle$ مثالياً في الحلقة $Z[i]$. أثبت أن الحلقتين $Z[i]/A$ و $Z_3\oplus Z_3$ غير متماثلتين.


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصـــــل الســـــادس

حـــلقـــــة كثيـــــرات الحـــــدود(الحـــــدوديـــــات)

6 - 1. حلقـــــة الحـــدوديـــــات.

لتكن R حلقة واحديه ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{f = (f_0, f_1, f_2, \cdots);\ f_i \in R, \forall i \in I\}$$

مجموعة جميع الأسطر غير المنتهية والتي جميع مركباتها عناصر مـــن الحلقـــة R والتي تحقق $f_i = o$ باستثناء عدد منته. من الواضح أن المجموعة $\Im$ غير خالية.

لنعرف على المجموعة $\Im$ عملية تحولها إلى بنية جبرية وذلك من خـــلال التمهيديـــة الآتية:

تمهيديـــة 6 -1 -1.

لتكن R حلقة واحديه ولنعرف على المجموعة

$\Im = \{f = (f_0, f_1, f_2, \cdots);\ f_i \in R, f_i = o, \forall i \in I$ {باستثناء عدد منته

عملية جمع (+) بالشكل الآتي: $\forall f = (f_0, f_1, f_2, \cdots), g = (g_0, g_1, g_2, \cdots) \in \Im$

فـــإن $f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots) \in \Im$. إن الثنائيـــة $(\Im, +)$ زمـــرة تبديليه.

البرهـــان.

واضح من خلال تعريف عملية الجمع (+) على المجموعة $\Im$ إنها داخلية (ثنائيـــة) وهي أيضاً تجميعية لأنه أياً كان

$$\forall f = (f_0, f_1, f_2, \cdots), g = (g_0, g_1, g_2, \cdots), \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots) \in \Im$$

$$\text{فإن } (f + g) + \varphi = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots) + (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots) =$$

$$= ((f_0 + g_0) + \varphi_0, (f_1 + g_1) + \varphi_1, (f_2 + g_2) + \varphi_2, \cdots) =$$

$$= (f_0 + (g_0 + \varphi_0), f_1 + (g_1 + \varphi_1), f_2 + (g_2 + \varphi_2), \cdots) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, \cdots) + (g_0 + \varphi_0, g_1 + \varphi_1, g_2 + \varphi_2, \cdots) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, \cdots) + [(g_0, g_1, g_2, \cdots) + (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots)] = f + (g + \varphi)$$

كما أن العملية (+) تبديلية لأن

$$f + g = (f_0, f_1, f_2, \cdots) + (g_0, g_1, g_2, \cdots) = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots)$$

$$= (g_0 + f_0, g_1 + f_1, g_2 + f_2, \cdots) = (g_0, g_1, g_2, \cdots) + (f_0, f_1, f_2, \cdots) =$$

$$= g + f$$

كما أنه يوجد في المجموعة $\Im$ عنصر محايد بالنسبة إلى عملية الجمع (+) هو $O = (o, o, o, \cdots)$. ولكل عنصر $f = (f_0, f_1, f_2, \cdots) \in \Im$ يوجد نظير هو $-f = (-f_0, -f_1, -f_2, \cdots) \in \Im$. مما سبق نجد أن الثنائية $(\Im, +)$ زمرة تبديلية.

لنتابع دراستنا للزمرة التبديلية $(\Im, +)$ بغية تحويلها إلى حلقة واحديه وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 6 -1 -2.

لتكن R حلقة واحديه ولنعرف على المجموعة

$\Im = \{f = (f_0, f_1, f_2, \cdots);\ f_i \in R, f_i = o, \forall i \in I$ { باستثناء عدد منته

عملية ضرب (.) بالشكل الآتي: $\forall f = (f_0, f_1, f_2, \cdots), g = (g_0, g_1, g_2, \cdots) \in \Im$

$f.g = h$ حيث $h = (h_0, h_1, h_2, \cdots)$ وأن $h_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$ أي أن

$$h_k = f_0 g_k + f_1 g_{k-1} + f_2 g_{k-2} + \cdots + f_{k-1} g_1 + f_k g_0$$

عندئذ:

1 - العملية (.) على المجموعة $\Im$ هي عملية داخلية (ثنائية) وتجميعية.

2 - يوجد في المجموعة $\Im$ عنصر محايد بالنسبة للضرب هو $1 = (1,0,0,\cdots)$.

3 - الضرب توزيعي على الجمع من اليمين واليسار.

4 - الثلاثية $(\Im, +, .)$ حلقة واحديه.

5 - الحلقة R هي حلقة جزئية من الحلقة $(\Im, +, .)$.

البرهـــان.

1 - واضح من خلال تعريف عملية الضرب (.) أنها داخلية على المجموعة $\Im$ وهي أيضاً تجميعية لأنه أياً كان

$$f=(f_0,f_1,f_2,\cdots), g=(g_0,g_1,g_2,\cdots), \varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots)\in\Im$$

فإن $fg=h$ حيث $h=(h_0,h_1,h_2,\cdots)\in\Im$. كما أن $h_k=\sum_{i+j=k} f_i g_j$ ومنه

$(fg)\varphi=h\varphi=d$ حيث $d=(d_0,d_1,d_2,\cdots)\in\Im$ وأن $d_s=\sum_{n+m=s} h_n\varphi_m$ وهكذا

نجد أن

$$d_s=\sum_{n+m=s} h_n\varphi_m=\sum_{n+m=s}[(\sum_{i+j=n} f_i g_j)\varphi_m]=\sum_{n+m=s}(\sum_{i+j=n}(f_i g_j)\varphi_m)=$$

$$=\sum_{i+j+m=s} f_i(g_j\varphi_m)=\sum_{i+t=s}(\sum_{j+m=t} f_i(g_j\varphi_m))=\sum_{i+t=s} f_i(\sum_{j+m=t} g_j\varphi_m)$$

مما سبق نجد أن $(fg)\varphi=f(g\varphi)$.

2 - إن $1=(1,0,0,\cdots)\in\Im$ وأن $f1=f$ وذلك $\forall f=(f_0,f_1,f_2,\cdots)\in\Im$.

3 - ليكن $f=(f_0,f_1,f_2,\cdots), g=(g_0,g_1,g_2,\cdots), \varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots)\in\Im$

عندئذ

$$f(g+h)=(f_0,f_1,f_2,\cdots)[(g_0+h_0,g_1+h_1,g_2+h_2,\cdots)]=(d_0,d_1,d_2,\cdots)$$

حيث $d_k=\sum_{i+j=k} f_i(g_j+h_j)$ ومنه

$$f(g+h)=\sum_{i+j=k}(f_i g_j+f_i h_j)=(\sum_{i+j=k} f_i g_j)+(\sum_{i+j=k} f_i h_j)$$

وهذا يبين لنا أن $f(g+h)=fg+fh$. مما سبق نجد أن الضرب توزيعي على الجمع من اليسار. بشكل مشابه نجد أن الضرب توزيعي على الجمع من اليمين.

4 - بالاعتماد على ما سبق نجد أن الثلاثية $(\Im,+,.)$ حلقة واحديه.

5 - لنأخذ المجموعة $\Im_0=\{(a,0,0,\cdots): a\in R\}$ فنجد أن $\Im_0$ هي مجموعة جزئية من $\Im$ وغير خالية لأن $(1,0,0,\cdots)\in\Im_0$. كما أن $\Im_0$ هي حلقة جزئية من الحلقة $\Im$ لأنه أياً كان $x=(a,0,0,\cdots), y=(b,0,0,\cdots)\in\Im_0$ عندئذ يكون $a,b\in R$ وبما أن $a-b\in R$ و $ab\in R$ نجد أن

$$x - y = (a,o,o,\cdots) - (b,o,o,\cdots) = (a-b,o,o,\cdots) \in \mathfrak{I}_o$$

$$x.y = (a,o,o,\cdots).(b,o,o,\cdots) = (ab,o,o,\cdots) \in \mathfrak{I}_o$$

كما أن التطبيق $\psi : R \to \mathfrak{I}_o$ المعرف بالشكل الآتي: أياً كان $a \in R$ فإن

$$\psi(a) = (a,o,o,\cdots) \in \mathfrak{I}_o$$

هو تشاكل حلقي متباين وغامر لأنه إذا كان $a,b \in R$ فإن

$$\psi(a+b) = (a+b,o,o,\cdots) = (a,o,o,\cdots) + (b,o,o,\cdots) = \psi(a) + \psi(b)$$

$$\psi(ab) = (ab,o,o,\cdots) = (a,o,o,\cdots).(b,o,o,\cdots) = \psi(a).\psi(b)$$

وهذا يبين لنا أن التطبيق ψ هو تشاكل. إذا كان $\psi(a) = \psi(b)$ عندئذ يكون $(a,o,o,\cdots) = (b,o,o,\cdots)$ وبالتالي فإن $a = b$ أي إن التشاكل ψ متباين.

ليكن $(c,o,o,\cdots) \in \mathfrak{I}_o$ عندئذ يكون $c \in R$ وأن $\psi(c) = (c,o,o,\cdots)$ أي أن التشاكل ψ غامر. مما سبق نجد أن التشاكل ψ ايزومورفيزم. نطابق عادة بين الحلقتين $\mathfrak{I}_o$ و R وهكذا نجد أن R هي حلقة جزئية من الحلقة $\mathfrak{I}$.

تعريف.

لتكن R حلقة ولنأخذ الحلقة $\mathfrak{I}$ المعرفة في التمهيدية (6-1-2) إن $x = (o,1,o,\cdots) \in \mathfrak{I}$. لنضع x نسمي العنصر x متحولاً فوق الحلقة R أو على الحلقة R.

بعض الخواص للمتحول x نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 6-1-3.

لتكن R حلقة ولنأخذ الحلقة $\mathfrak{I}$ المعرفة في التمهيدية (6-1-2). عندئذ:

1 - أياً كان $n \in N$ فإن $x^n = (o,o,o,\cdots,o,\underset{n}{1},o,\cdots)$ حيث العنصر 1 يظهر في المركبة ذات الرقم n.

2 - أياً كان $a \in R$ فإن $ax^n = x^n a = (o,o,o,\cdots,o,\underset{n}{a},o,\cdots)$ حيث إن عدد الأصفار الواقعة على يسار العنصر a هو n.

3 - إذا كان $f = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots) \in \mathfrak{I}$ حيث إن f_n هو آخر مركبة في السطر f مغايرة للصفر فإن f يمكن تمثيله بالشكل الآتي:

$$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n$$

وهذا التمثيل للعنصر f وحيد.

البرهان.

1 - البرهان نورده بالاستقراء حسب n. لدينا حسب التعريف $x = (0,1,0,\cdots)$.

لنفرض أن $x^2 = xx = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_m, \cdots)$ حيث $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ وأن $a_i = b_i = 1$ و $a_i = b_i = 0$ أياً كان $i \neq 1$. ومنه فإن $c_k = 0$ أياً كان $k \neq 2$ وأن $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1$ وهكذا فإن $x^2 = (0,0,1,0,0,\cdots)$.

لنفرض أن $x^{n-1} = (0,0,\cdots,0,\underset{n-1}{1},0,\cdots)$ عندئذ يكون

$$x^n = x^{n-1}x = (h_n, h_1, h_2, \cdots)$$

حيث $h_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ وأن $a_i = 0$ أياً كان $i \neq n-1$ و $a_{n-1} = 1$ وأيضاً $b_i = 0$ أياً كان $i \neq 1$ و $b_1 = 1$. وهكذا نجد أن $h_i = 0$ أياً كان $i \neq n$ وأن

$$h_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1$$

وهكذا فإن $x^n = (0,0,\cdots,0,\underset{n}{1},0,\cdots)$.

2 - ليكن $a \in R$ و $n \in N^*$ عندئذ

$$(0,0,0,\cdots,0,\underset{n}{a},0,\cdots) = (a,0,\cdots)(0,0,\cdots,0,\underset{n}{1},0,\cdots) = ax^n$$

$$(0,0,0,\cdots,0,\underset{n}{a},0,\cdots) = (0,0,\cdots,0,\underset{n}{1},0,\cdots)(a,0,\cdots) = x^n a$$

وهذا نجد أن $ax^n = x^n a$.

3 - ليكن $f = (f_0, f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots) \in \mathfrak{I}$ عندئذ فإن

$$f = (f_0,0,0,\cdots,) + (0 f_1,0,\cdots,) + \cdots + (0,0,\cdots f_n,0,\cdots)$$

حيث إن f_n هو آخر مركبة في السطر f مغايرة للصفر وحسب (2) نجد أن

$$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n$$

تعريـــف.

لتكن R حلقة نسمي الحلقة $\mathfrak{I}$ والتي تم بناؤها فـــي التمهيديـــة (6-1-2) حلقـــة الحدوديات بالمتحول x على الحلقة R ونرمز إليها $R[x]$ ونسمي عناصر الحلقة $R[x]$ حدوديات على الحلقة R ونرمز إليها $f(x)$. إذا كان

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in R[x]$$

حيث $a_n\neq 0$ فإننا نسمي n بدرجة الحدودية $f(x)$ ونرمز إلى ذلك $\partial f(x)=n$ ونسمي العناصر $a_i\in R$ حيث $0\leq i\leq n$ بأمثال الحدودية $f(x)$.

بالاعتماد على التعريف السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن $R[x]$ حلقة الحدوديات على الحلقة R. عندئذ:

1 - أياً كان $a\in R$ فإن $\partial a=0$.

2 - نصطلح على أن $\partial 0=-\infty$.

3 - إذا كان $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i\in R[x]$ حيـــث $a_i,b_i\in R$

فإن $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{r}(a_i+b_i)x^i\in R[x]$ حيـــث $r=max\{n,m\}$ وأن

$f(x).g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}d_kx^k$ حيث $d_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$.

لنتابع دراستنا لخواص الحلقة $R[x]$ وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6-1-4.

لتكن $R[x]$ حلقـــة الحـــدوديات علـــى الحلقـــة R ولـــيكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و

$g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$ عنصرين من $R[x]$ حيث $a_i,b_i\in R$. عندئذ:

1 - $f(x)=g(x)\Leftrightarrow n=m;a_i=b_i;\forall i=0,1,2,\cdots,n$.

2 - $\partial(f(x)+g(x)) \le max\{\partial f(x), \partial g(x)\}$.

3 - $\partial(f(x).g(x)) \le \partial f(x)+\partial g(x)$.

4 - إذا كانت الحلقة R منطقة تكاملية فإن $R[x]$ تكون منطقة تكاملية.

5 - إذا كانت R منطقة تكاملية فإن $\partial(f(x).g(x)) = \partial f(x)+\partial g(x)$.

البرهان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن $f(x) = g(x)$ عندئذ

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b_o + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

$$(a_n, a_1, a_2, \cdots, a_n, o, \cdots) = (b_n, b_1, b_2, \cdots, b_m, o, \cdots)$$

ومنه يكون $n = m$ وأن $a_i = b_i$ أياً كان $i = o, 1, 2, \cdots, n$.

كفاية الشرط. ينتج من خلال التعريف مباشرة.

2 - لنفرض أن $a_n \neq o$ و $b_m \neq o$ عندئذ يكون $\partial f(x) = n$ و $\partial g(x) = m$ وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $n = m$ وأن $a_n + b_m \neq o$ عندئذ

$$\partial(f(x)+g(x)) = n = max\{n, m\}$$

أما إذا كان $a_n + b_m = o$ عندئذ يكون $\partial(f(x)+g(x)) < n = max\{n, m\}$.

- إذا كان $n \neq m$ وبفرض أن $n > m$ عندئذ

$$\partial(f(x)+g(x)) = n = max\{n, m\}.$$

3 - لنفرض أن $f(x).g(x) = \sum_{k=o}^{n+m} d_k x^k$ حيث $d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ عندئذ يكون

$$\partial(f(x).g(x)) \le n+m = \partial f(x)+\partial g(x).$$

4 - لنفرض أن الحلقة R منطقة تكاملية عندئذ الحلقة R تبديلية فيها $1 \neq o$ وبالتالي تكون الحلقة $R[x]$ أيضاً تبديلية فيها $1 \neq o$. لنفـرض أن $f(x) \neq o$ و $g(x) \neq o$ عندئذ يوجد دليل $o \le i_o \le n$ وآخر $o \le j_o \le m$ بحيث $a_{i_o} \neq o, b_{j_o} \neq o$ ولكـون الحلقة R منطقة تكاملية ينتج أن $a_{i_o} b_{j_o} \neq o$ ومنه $f(x).g(x) \neq o$ وهذا يبين لنا أن الحلقة $R[x]$ منطقة تكاملية.

5 - لنفرض أن R منطقة تكاملية وأن $a_n \neq o$ و $b_m \neq o$ عندئذ يكـــون $a_n b_m \neq o$ وأن $\partial f(x) = n$ و $\partial g(x) = m$ ومنه

$$\partial(f(x).g(x)) = n + m = \partial f(x) + \partial g(x)$$

بالإضافة إلى ذلك فإن $f(x).g(x) \neq o$ عندما وفقط عندما $a_n b_m \neq o$.

نعلم أن أحد أهم الخواص التي تتمتع بها حلقة الأعداد الصحيحة Z هي خوارزمية القسمة والتي يمكن صياغتها بالشكل الآتي:

خوارزميـــة القســـمة.

إذا كان $a,b \in Z$ وكان $b \neq o$ عندئذ يوجد $q,r \in Z$ بحيث $a = qb + r$ حيـــث $o \leq r < |b|$ بالإضافة إلى ذلك فإن كلاً من q,r يتعين بشكل وحيد.(راجـــع كتـــاب البنى جبرية (1)).

إن خوارزمية القسمة السابقة صحيحة لأجل حلقة الحدوديات على حقل وهـــذا مـــا تثبته لنا المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6 -1 -5. (خوارزميـــة القســـمة).

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على F وليكن $f(x),g(x) \in F[x]$ بحيث $g(x) \neq o$ عندئذ يوجد $q(x),r(x) \in F[x]$ تحقق

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

وأنه إما $r(x) = o$ أو أن $\partial r(x) < \partial g(x)$ بالإضافة لذلك فإن كلاً من $q(x)$ و $r(x)$ يتعين بشكل وحيد.

البرهـــان.

البرهان سوف نورده بطريقة الاستقراء حسب درجة الحدودية $f(x)$.

- إذا كان $\partial f(x) = -\infty$ فإن $f(x) = o$ ومنه $f(x) = og(x) + o$ وهنا نختار $q(x) = r(x) = o$ والصفر معين بشكل وحيد.

- إذا كان $\partial f(x) = o$ وهنا يكون $f(x) = a$ حيث $o \neq a \in F$ وهنا نميز حالتين:

- $\partial g(x)=o$ عندئذ $g(x)=b$ حيث $o\neq b\in F$. لنضع $q(x)=ab^{-1}$ و $r(x)=o$ فنجد أن $f(x)=a=(ab^{-1})b+o$ أي إن

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

- $\partial g(x)>o$ وهنا نأخذ $q(x)=o$, $r(x)=a$ فنجد أن $f(x)=a=og(x)+a$ أي أن $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$. كما أن $\partial r(x)=o<\partial g(x)$.

- لنفرض أن $\partial f(x)>o$ وأن المبرهنة صحيحة من أجل جميع الحدوديات التي درجاتها أصغر من درجة $f(x)$ وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى. إذا كان $\partial f(x)<\partial g(x)$ في هذه الحالة نأخذ $q(x)=o$, $f(x)=r(x)$ فنجد أن $f(x)=og(x)+r(x)$ فيكون

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x).$$

الحالة الثانية. إذا كان $\partial f(x)\geq\partial g(x)$. لنفرض هنا أن $\partial f(x)=n$ وأن $\partial g(x)=m$ فيكون $n\geq m$ وأن

$$f(x)=\sum_{i=o}^{n}a_ix^i;\quad a_n\neq o;\ a_i\in F;\ o\leq i\leq n.$$

$$g(x)=\sum_{j=o}^{m}b_jx^j;\quad b_m\neq o;\ b_j\in F;\ o\leq j\leq m.$$

لنضع $C(x)=a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)-f(x)$ فنجد أن $C(x)\in F[x]$ وأن $\partial C(x)<n$ وحسب الفرض الاستقرائي يوجد $q_1(x),r_1(x)\in F[x]$ تحقق $C(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$ وأنه إما $r_1(x)=o$ أو $\partial r_1(x)<\partial g(x)$.

لنفرض أن $q(x)=a_nb_m^{-1}x^{n-m}-q_1(x)$ و $r(x)=-r_1(x)$ فنجد أن

$$q(x)g(x)+r(x)=a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)-q_1(x)g(x)-r_1(x)=$$

$$=a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)-C(x)=$$

$$=a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)-[a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)-f(x)]=f(x)$$

وأنه إما $r(x)=o$ أو $\partial r(x)=\partial r_1(x)<\partial g(x)$.

الوحدانية. لنفرض أن $f(x)=q(x)g(x)+r(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$ عندئذ يكون $g(x)[q(x)-q_1(x)]=r_1(x)-r(x)$ وبما أن F حقلاً فإن $F[x]$ منطقة تكاملية ومنه يكون

$$\partial(r_1(x)-r(x))=\partial g(x)+\partial[q(x)-q_1(x)]$$

وبالتالي يكون $\partial(r_1(x)-r(x))\geq\partial g(x)$. من جهة أخرى إن

$$\partial(r_1(x)-r(x))\leq max\{\partial r_1(x),\partial r(x)\}<\partial g(x)$$

وهذا يكون محققاً عندما وفقط عندما $\partial(r_1(x)-r(x))=-\infty$ أي أن $r_1(x)-r(x)=o$ ومنه $r_1(x)=r(x)$ وبالتالي يكون $q_1(x)=q(x)$.

تعريف.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على F وليكن $f(x),g(x)\in F[x]$ بحيث $g(x)\neq o$ وجدنا حسب خوارزمية القسمة أنه يوجد $q(x)\in F[x]$ و $r(x)\in F[x]$ تحقق $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ حيث إما $r(x)=o$ أو $\partial r(x)<\partial g(x)$. نسمي $q(x)$ ناتج قسمة $f(x)$ على $g(x)$ في $F[x]$ ونسمي $r(x)$ باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)$ في $F[x]$.

مثال.

لنأخذ الحقل Z_5 وليكن $f(x)=3x^4+x^3+2x^2+1$ و $g(x)=x^2+4x+2$ عنصرين من $Z_5[x]$ عندئذ

$$3x^4+x^3+2x^2+1=(x^2+4x+2)(3x^2+4x)+(2x+1)$$

إن $q(x)=(3x^2+4x)\in Z_5[x]$ يمثل ناتج قسمة $f(x)$ على $g(x)$ في $Z_5[x]$ وكذلك $r(x)=2x+1\in Z_5[x]$ يمثل باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)$ في $Z_5[x]$.

نأتي الآن إلى دراسة التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 6-1-6.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على F. وليكن $a \in F$ و $f(x) \in F[x]$ عندئذ فإن $f(a)$ هو باقي قسمة $f(x)$ على $x-a$.

البرهـــان.

بما أن $a \in F$ فإن $(x-a) \in F[x]$ $o \neq (x-a)$ وحسب خوارزمية القسمة فإنه لأجل العنصرين $x-a$ و $f(x)$ يوجد $q(x), r(x) \in F[x]$ بحيث

$$f(x) = q(x)(x-a) + r(x)$$

وأنه إما $r(x) = o$ أو $\partial r(x) < \partial(x-a)$. إذا كـــان $r(x) = o$ عندئـــذ يكـــون $r(a) = o$ وبالتالي $f(a) = r(a) = o = r(x)$. إذا كـــان $\partial r(x) < \partial(x-a)$ عندئـــذ يكـــون $\partial r(x) = 0$ ومنـــه $r(x) = b \in F$ وبالتـــالي يكـــون $f(a) = r(a) = b = r(x)$. وهذا يبين لنا أن $f(a)$ هو باقي قسمة $f(x)$ على $x-a$. ◊

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $f(x), g(x) \in R[x]$ بحيث $g(x) \neq o$. نقـــول إن $g(x)$ يقسم $f(x)$ في $R[x]$ أو $f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ (بدون بـــاقي) إذا وجـــد $h(x) \in R[x]$ يحقق $f(x) = g(x)h(x)$.

تعريـــف.

لتكن R حلقة و $f(x) \in R[x]$. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه صـــفر (جـــذر) للحدودية $f(x)$ إذا كان $f(a) = o$.

تعريـــف.

ليكن F حقلاً و $a \in F$ وليكن $f(x) \in F[x]$. نقول عن العنصر a إنه صـــفر (جذر) للحدودية $f(x)$ من المرتبة k $(k \geq 1)$ إذا كان $(x-a)^k$ يقسم $f(x)$ في $F[x]$ و $(x-a)^{k+1}$ لا يقسم $f(x)$ في $F[x]$.

بالاعتماد على التعاريف السابقة يمكننا صياغة التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 6 -1 -7.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على F. وليكن $a \in F$ و $f(x) \in F[x]$ الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر a صفراً للحدودية $f(x)$ هـو أن يكـون $x-a$ قاسماً للحدودية $f(x)$.

البرهـــان.

لـــزوم الـــشرط. لنفـــرض أن a صـــفر للحدوديـــة $f(x)$ بمـــا أن $a \in F$ فـــإن $x-a \in F[x]$ وحسب خوارزمية القسمة يوجـد $q(x), r(x) \in F[x]$ بحيـث $f(x)=q(x)(x-a)+r(x)$ حيـــث $r(x)=o$ أو $\partial r(x) < \partial(x-a)$.

لنفرض جدلاً أن $r(x) \neq o$ عندئذ $\partial r(x) = o$ ومنه $r(x)=b \in F$ وأن $b \neq o$.

من جهة أخرى بما أن a صفراً للحدودية $f(x)$ فإن $f(a)=o$ وحسب التمهيديـة (6-1-6) فإن $o=f(a)=r(x)=b$ وهذا غير ممكـن ممـا سـبق نجـد أن $r(x)=o$ وبالتالي $f(x)=q(x)(x-a)$.

كفايـــة الـــشرط. لنفـــرض أن $x-a$ يقـــسم $f(x)$ فـــي $F[x]$ عندئـــذ يوجـــد $h(x) \in F[x]$ بحيث $f(x)=h(x)(x-a)$ ومنه $f(a)=o$ وبالتالي يكـون a صفراً للحدودية $f(x)$.

المبرهنة الآتية تبين لنا ما هو عدد أصفار حدودية ما:

مبرهنـــة 6 -1 -8.

لتكن $F[x]$ حلقة الحدوديات على الحقل F. ولـتكن $f(x) \in F[x]$. إذا كـان $\partial f(x)=n$ عندئذ الحدودية $f(x)$ تملك n صفراً على الأكثر.

البرهـــان.

البرهان نورده بالاستقراء حسب درجة $f(x)$.

- إذا كان $\partial f(x)=1$ عندئـذ يكـون $f(x)=a_0+a_1x$ حيـث $a_0, a_1 \in F$ وأن $a_1 \neq o$ وبما أن F حقل فإن $b=a_0a_1^{-1} \in F$ وأن $f(b)=o$ وبالتالي b هو صفر للحدودية $f(x)$.

لنفرض أن الحدودية $f(x)$ تملك صفراً آخر في F ولـيكن c عندئـذ يكـون $f(c)=a_0+a_1c=a_0+a_1(a_0a_1^{-1})$ ومنـه نجـد أن $a_0+a_1c=a_0$ وبالتـالي يكـون $a_1c=a_0$ أي أن $c=a_0a_1^{-1}=b$ مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ تملك صـفراً واحداً فقط في F.

- لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل كل حدودية من $F[x]$ درجتهـا أصـغر مـن درجة $f(x)$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كانت $f(x)$ لا تملك أصفاراً في F يتم المطلوب.

- ليكن a أحد أصفار الحدودية $f(x)$ من المرتبة k عندئذ فـإن $(x-a)^k$ يقـسم $f(x)$ في $F[x]$ ومنه يوجد $g(x)\in F[x]$ بحيـث $f(x)=(x-a)^k g(x)$ وأن $g(a)\neq o$ ومنـه فـإن $\partial f(x)=\partial(x-a)^k+\partial g(x)$ وبالتـالي يكـون $\partial f(x)=k+\partial g(x)$ وهكذا نجـد أن $\partial g(x)=\partial f(x)-k=n-k<n$ وحـسب الفـرض الاسـتقرائي نجـد أن الحدوديـة $f(x)$ تملـك علـى الأكثـر $k+(n-k)=n$ صفراً في F.

ملاحظـة.

إن المبرهنة السابقة غير صحيحة من أجل الحدوديات على الحلقات. فعلـى سـبيل المثال الحدودية $f(x)=x^2+3x+2\in Z_6[x]$ تملك أربعة أصفار في Z_6 هـي 1,2,4,5 لأن $f(1)=f(2)=f(4)=f(5)=o$ بينما $\partial f(x)=2$.

لندرس الآن بعض الخواص لحلقة الحدوديات على حقل والبداية ستكون مع المبرهنة الآتية:

مبرهنـة 6-1-9.

حلقة الحدوديات على أي حقل هي حلقة مثاليات رئيسية.

البرهـان.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على الحقل F. بما أن F منطقة تكاملية فإنه حسب المبرهنة (6-1-4) الحلقة $F[x]$ منطقة تكاملية. ليكن A مثالياً في $F[x]$. إذا كان $A=\{o\}$ يتم المطلوب. لنفرض أن $A\neq\{o\}$ ولنأخذ المجموعة

$$\Im=\{\partial f(x): o\neq f(x)\in A\}$$

فنجد أن $\Im\subseteq N$ وغير خالية. وبما أن أي مجموعة جزئية من N وغير خالية تحوي عنصر أصغر فإن المجموعة $\Im$ تحوي عنصر أصغر وليكن n. ومنه يوجد $o\neq g(x)\in A$ بحيث $\partial g(x)=n$ ومنه فإن $g(x)F[x]\subseteq A$.

ليكن $\mu(x)\in A$ حسب خوارزمية القسمة يوجد $q(x),r(x)\in F[x]$ بحيث $\mu(x)=q(x)g(x)+r(x)$ وحيث إما $r(x)=o$ أو $\partial r(x)<\partial g(x)$.

لنفرض أن $r(x)\neq o$ عندئذ $r(x)=-q(x)g(x)+\mu(x)$ وأن $r(x)\in A$ كما أن $\partial r(x)<\partial g(x)$ وهذا يناقض اختيار $g(x)$ أي أن $r(x)=o$ ومنه يكون $\mu(x)=q(x)g(x)\in g(x)F[x]$. وبالتالي $A\subseteq g(x)F[x]$ مما سبق نجد أن $A=g(x)F[x]$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على الحقل F. إن كل مثالي A في الحلقة $F[x]$ هو مثالي رئيسي مولد بالحدودية ذات الدرجة الأصغر في A.

مبرهنة 6-1-10.

حلقة الحدوديات على أي حقل هي حلقة إقليدية.

البرهان.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات على الحقل F. حسب المبرهنة (6-1-4) فإن الحلقة $F[x]$ هي منطقة تكاملية. لنعرف العلاقة $\varphi:(F[x])^{*}\to N$ بالشكل التالي: أياً كان $g(x)\in F[x]$ فإن $\varphi(g(x))=\partial g(x)$ فنجد أن φ تطبيق.

ليكن $g(x),\mu(x) \in F[x]$ عندئذ وبما أن $F[x]$ منطقة تكاملية فإنه حسب المبرهنة (6-1-4) نجد أن

$$\varphi[g(x).\mu(x)] = \partial[g(x).\mu(x)] = \partial g(x) + \partial\mu(x) \geq$$
$$\geq \partial g(x) = \varphi(g(x))$$

ليكن $f(x),g(x) \in F[x]$ بحيث $g(x) \neq o$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة يوجد $q(x),r(x) \in F[x]$ بحيث $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ و إما $r(x) = o$ أو $\partial r(x) < \partial g(x)$ أي إما $r(x) = o$ أو $\varphi(r(x)) < \varphi(g(x))$ مما سبق نجد أن الحلقة $F[x]$ هي حلقة إقليدية.

وجدنا حسب نتيجة المبرهنة (5-4-4) أن كل حلقة إقليدية هي حلقة تحليل وحيد وهكذا فإنه بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 6-1-11.

حلقة الحدوديات على أي حقل هي حلقة تحليل وحيد.

البرهان.

ينتج مباشرة من المبرهنتين (5-4-4) و(6-1-10).

Damascus University

6 - 2. الحـــد وديـــات الأولـــيـــــة (غيـــر الخـــزولـــة).

في هذه الفقرة سوف ندرس نوع مهم من الحدوديات وهي الحدوديات الأولية (غير الخزولة) والبداية سوف تكون مع التعريف الآتي:

تعريـــف.

لتكن R منطقة تكاملية و $f(x) \in R[x]$ $o \neq f(x)$. نقول عن الحدودية $f(x)$ إنهـــا أولية (غير خزولة) في $R[x]$ إذا حققت الشرطين التاليين:

1 - الحدودية $f(x)$ غير قابلة للقلب في $R[x]$.

2 - لا يمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء حدوديتين من $R[x]$ كل منهما غير قابلة للقلب في $R[x]$.

إذا لم تكن الحدودية $f(x)$ أولية (غير خزولة) قلنا إنها غير أولية (خزولة).

إن الشرط (2) يعني أنـــه إذا كـــان $f(x) = g(x)p(x)$ حيـــث $g(x), p(x)$ عناصر من $R[x]$ عندئذ إما $g(x)$ قابلة للقلب أو $p(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$.

لنبدأ الآن بتحديد أي الحدوديات هي حدوديات أولية وأيها غير أولية والبداية سوف تكون مع بعض الأمثلة.

أمثلـــة.

1 - الحدودية $f(x) = 2x^2 + 4 \in Z[x]$ غير أولية في $Z[x]$ لأنه يمكن كتابـــة $f(x)$ بالـــشكل $f(x) = g(x)p(x)$ حيـــث $p(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = 2$ وكل منهما غير قابلة للقلب في $Z[x]$.

2 - الحدودية $f(x) = x + 2 \in Z[x]$ هي حدودية أولية في $Z[x]$.

3 - الحدودية $f(x) = 6x + 3 \in Z[x]$ هي حدودية غير أولية في $Z[x]$.

4 - الحدودية $f(x) = x^2 - 2 \in Q[x]$ هي حدودية أولية في $Q[x]$.

5 - الحدودية $f(x) = x^2 - 2 \in R[x]$ هي حدودية غير أولية فوق حقل الأعـــداد الحقيقية أي في $R[x]$.

مثـــال.

لنأخذ الحلقة Z_4 بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب بالمقاس 4 فنجد أن الحدوديـــة $f(x)=2x+1$ عنصر من $Z_4[x]$ تحقق $(2x+1)(2x+1)=1$ وهذا يبين لنـــا أن الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب في $Z_4[x]$ مع العلم أن $\partial f(x)>o$.

التمهيدية الآتية تبين لنا أنه في حلقة الحدوديات فوق أي منطقة تكامليـــة لا توجـــد حدوديات قابلة للقلب درجتها أكبر من الصفر.

تمهيديـــة 6-2-1.

لتكن R منطقة تكاملية و $o\neq f(x)\in R[x]$. إذا كانت $f(x)$ قابلة للقلب فـــي $R[x]$ عندئذ $\partial f(x)=o$.

البرهـــان.

لنفرض أن الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب في $R[x]$ عندئذ يوجـــد $g(x)\in R[x]$ بحيـــث $f(x)g(x)=1$ عندئـــذ حســـب المبرهنـــة (6-1-4) نجـــد أن $\partial f(x)+\partial g(x)=o$ ومنه يكون $\partial f(x)=\partial g(x)=o$.

إن عكس التمهيدية السابقة غير صحيح لأنه ليس كل عنصر في منطقـــة تكامليـــة مغاير للصفر قابل للقلب. بينما إذا كان F حقلاً فإن عكس التمهيدية الـــسابقة يكـــون صحيحاً وهذا ما تبينه المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6-2-2.

ليكن F حقلاً و $o\neq f(x)\in F[x]$. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$ هو أن تكون $\partial f(x)=o$.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب وبما أن F حقلاً فإن F هـــو منطقة تكاملية وحسب التمهيدية (6-2-1) يكون $\partial f(x)=o$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $\partial f(x)=o$ عندئذ $f(x)=a$ حيث $o\neq a\in F$ وبما أن F حقلاً فإن العنصر a قابل للقلب في F وبالتالي $f(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$.

لنورد الآن المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6-2-3.

ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات فوق F. عندئذ:

1 - كل حدودية من $F[x]$ درجتها تساوي الصفر حدودية غير أولية في $F[x]$.

2 - كل حدودية من $F[x]$ درجتها تساوي الواحد هي حدودية أولية في $F[x]$.

البرهـــان.

1 - لتكن $f(x) \in F[x]$ بحيث $\partial f(x) = o$ عندئذ حسب المبرهنـــة (6-2-2) الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب وحسب التعريف تكون الحدودية $f(x)$ غير أولية.

2 - لتكن $g(x) \in F[x]$ بحيث $\partial g(x) = 1$ عندئذ حسب المبرهنـــة (6-2-2) الحدودية $g(x)$ غير قابلة للقلب.

لتكن $p(x), q(x) \in F[x]$ بحيث $g(x) = p(x)q(x)$ وبما أن $F[x]$ منطقة تكاملية فإن $\partial p(x) + \partial q(x) = 1$ ومنه إما $\partial p(x) = o$ أو $\partial q(x) = o$.

- إذا كانت $\partial p(x) = o$ عندئذ حسب المبرهنة (6-2-2) تكون الحدوديـــة $p(x)$ قابلة للقلب.

- إذا كانت $\partial q(x) = o$ عندئذ تكون الحدودية $q(x)$ قابلة للقلب.

مما سبق نجد أن الحدودية $g(x)$ هي حدودية أولية في $F[x]$.

اختبار آخر للحدوديات الأولية نورده من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6-2-4.

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$ بحيث $\partial f(x)$ تـــساوي 2 أو 3. الـــشرط الـــلازم والكافي كي تكون الحدودية $f(x)$ غير أولية في $F[x]$ هو أن تملك صفراً في F.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ غير أولية فوق F وبما أن $\partial f(x) > 0$ فإن $f(x)$ غير قابلـــة للقلـــب وبالتـــالي يوجـــد $g(x), h(x) \in F[x]$ بحيـــث $f(x) = g(x)h(x)$ ومنـــه يكـــون $\partial f(x) = \partial g(x) + \partial h(x)$ وبمـــا

أن $\partial f(x)$ تساوي 2 أو 3 عندئذ واحدة على الأقل من الحدوديتين $g(x)$ أو $h(x)$ درجتها تساوي الواحد. لنفرض أن $\partial g(x)=1$ عندئذ $g(x)=ax+b$ حيث $a,b\in F$ وأن $a\neq o$ ومنه فإن $-ba^{-1}\in F$ هو صفر للحدودية $g(x)$ وبالتالي صفر للحدودية $f(x)$. كذلك الأمر إذا كانت $\partial h(x)=1$. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ تملك صفراً في F.

كفاية الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ تملك صفراً في F وليكن d عندئذ حسب التمهيدية (6-1-7) فإن الحدودية $x-d$ تقسم $f(x)$ في $F[x]$ ومنه توجد $\varphi(x)\in F[x]$ بحيث $f(x)=(x-d)\varphi(x)$ وبما أن $\partial f(x)$ تساوي 2 أو 3 نجد أن $\partial\varphi(x)\geq o$. بما أن $\partial\varphi(x)>o$ و $\partial(x-d)>o$ فإنه حسب المبرهنة (6-2-2) كلاً من $x-d$ و $\varphi(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$. وهذا يبين لنا أنه أمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء حدوديتين كل منهما غير قابلة للقلب في $F[x]$ وحسب التعريف نجد أن الحدودية $f(x)$ غير أولية في $F[x]$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة التمهيدية الآتية:

تمهيدية 6-2-5.

ليكن F حقلاً و $f(x)\in F[x]$ بحيث $\partial f(x)$ تساوي 2 أو 3. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$ هو أن لا تملك صفراً في F.

البرهان.

نتركه للقارئ.

أمثلة.

1 - الحدودية $f(x)=x^2+1$ هي حدودية أولية فوق Z_3.

بما أن 3 عدد أولي فإن Z_3 حقل كما أن $\partial f(x)=2$ وبملاحظة أن $f(o)=1$ و $f(1)=f(2)=2$ نجد أن $f(x)$ لا تملك أصفاراً في Z_3 وحسب التمهيدية (6-2-5) فإن الحدودية $f(x)$ هي حدودية أولية فوق Z_3.

بينما فوق الحقل Z_5 فإن الحدودية $f(x)$ تملك أصفاراً هي 2 و 3 وبالتالي حسب المبرهنة (6-2-4) فإن الحدودية $f(x)$ غير أولية فوق Z_5.

2 - الحدودية $g(x)=x^2-3$ هي حدودية أولية فوق Q.

لأن Q حقل و أن $\partial g(x)=2$ و أن $x=\pm\sqrt{3}\notin Q$ هي جميع أصفار الحدودية $g(x)$. أي أن الحدودية $g(x)$ لا تملك أصفاراً في الحقل Q وحسب التمهيدية (6-2-5) تكون الحدودية $g(x)$ أولية فوق Q.

بينما فوق حقل الأعداد الحقيقية R فإن الحدودية $g(x)$ غير أولية لأن $\pm\sqrt{3}\in R$ وذلك حسب المبرهنة (6-2-4).

3 - الحدودية $h(x)=2x^2+4$ هي حدودية أولية فوق Q.

لأن Q حقل و $\partial h(x)=2$ وأن $x=\pm\sqrt{2}\,i\notin Q$ هي جميع أصفار الحدودية $h(x)$. وحسب التمهيدية (6-2-5) تكون الحدودية $h(x)$ أولية فوق Q.

تمهيدية 6-2-6.

ليكن F حقلاً و $a\in F$ $,a\neq o$ ولتكن $f(x)\in F[x]$. عندئذ:

1 - إذا كانت الحدودية $af(x)$ أولية فوق F فإن $f(x)$ تكون أولية فوق F.

2 - إذا كانت الحدودية $f(ax)$ أولية فوق F فإن $f(x)$ تكون أولية فوق F.

3 - إذا كانت الحدودية $f(a+x)$ أولية فوق F فإن $f(x)$ تكون أولية فوق F.

البرهان.

1 - بما أن $f(x)\in F[x]$ فإن $af(x)\in F[x]$ وأن $\partial f(x)=\partial(af(x))$.

لنفرض أن الحدودية $f(x)$ أولية فوق F عندئذ $\partial f(x)>o$ ومنه يكون $\partial(af(x))>o$. لتكن $g(x),h(x)\in F[x]$ بحيث $f(x)=g(x)h(x)$ عندئذ يكون $af(x)=(ag(x))h(x)$ وبما أن الحدودية $af(x)$ أولية فوق F عندئذ إما $\partial(ag(x))=o$ ومنه يكون $\partial g(x)=o$. أو $\partial h(x)=o$. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ أولية فوق F.

2 - بما أن $f(x)\in F[x]$ فإن $f(ax)\in F[x]$ وأن $\partial f(x)=\partial f(ax)$.

لنفرض أن الحدودية $f(ax)$ أولية فوق F عندئذ $\partial f(ax)>o$ ومنه تكون $\partial f(x)>o$. لتكن $q(x),\lambda(x)\in F[x]$ بحيث $f(x)=q(x)\lambda(x)$ ومنه يكون $f(ax)=q(ax)\lambda(ax)$ وبما أن الحدودية $f(ax)$ أولية فوق F عندئذ:

- إما $\partial q(x)=o$ ومنه يكون $\partial q(ax)=o$.

- أو $\partial \lambda(x)=o$. ومنه يكون $\partial \lambda(ax)=o$.

مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ أولية فوق F.

3 - البرهان يتم بطريقة مشابهة للحالة (2) وذلك لأن $f(x), f(a+x)\in F[x]$ وأن $\partial f(x)=\partial f(a+x)$.

لندرس الآن الخواص الجبرية للحدوديات الأولية وأول هذه الخواص نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 6-2-7.

ليكن F حقلاً و $f(x)\in F[x]$. الشروط الآتية متكافئة:

1. المثالي $A=f(x).F[x]$ أعظمي في $F[x]$.
2. الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المثالي A أعظمي في $F[x]$ عندئذ $A\neq\{o\}$ لأن $\{o\}$ ليس مثالياً أعظمياً في $F[x]$. وبما أن $A\neq F[x]$ فإن $f(x)$ غير قابل للقلب في $F[x]$ وبالتالي $\partial f(x)>o$. ليكن $g(x),h(x)\in F[x]$ بحيث $f(x)=g(x)h(x)$ عندئذ $f(x)\in g(x).F[x]$ ومنه يكون $A\subseteq g(x).F[x]$ وبما أن المثالي A أعظمياً في $F[x]$ نجد أنه إما $g(x).F[x]=F[x]$ أو $g(x).F[x]=A$.

- إذا كان $g(x).F[x]=F[x]$ عندئذ تكون الحدودية $g(x)$ قابلة للقلب ومنه $\partial g(x)=o$.

- إذا كان $g(x).F[x]=A$ نجد أن $\partial f(x)=\partial g(x)$ وهنا نجد أن $\partial h(x)=o$.

وهذا يبين لنا أنه لا يمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء حدوديتين درجة كل منهما أكبر من الصفر. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$.

(2)$\Leftarrow$(1). لنفرض أن الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$ وليكن B مثالياً في $F[x]$ بحيث $A \subseteq B \subseteq F[x]$ وبما أن F حقلاً فإنه حسب المبرهنة (6-1-9) فإن الحلقة $F[x]$ هي حلقة حدوديات رئيسية ومنه يوجد $g(x) \in F[x]$ بحيث $B = g(x).F[x]$ وبما أن $f(x) \in A \subseteq B$ فإنه يوجد $h(x) \in F[x]$ بحيث $f(x) = g(x)h(x)$ وبما أن الحدودية $f(x)$ أولية فإنه إما $\partial g(x) = o$ أو $\partial h(x) = o$.

- إذا كان $\partial g(x) = o$ عندئذ تكون الحدودية $g(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$ وبالتالي يكون $B = F[x]$.

- إذا كان $\partial h(x) = o$ عندئذ يكون $h(x) = b \neq o$ ومنه فإن $A = f(x)F[x] \ni f(x)b^{-1} = g(x)$ وبالتالي يكون $B \subseteq A$ وهكذا نجد أن $B = A$. مما سبق نجد أن المثالي $A = f(x)F[x]$ أعظمي في $F[x]$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا الوصول إلى المبرهنة الآتية:

مبرهنة 6-2-8.

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$ هو أن تكون الحلقة $F[x]/\langle f(x)\rangle$ حقلاً.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$ عندئذ حسب المبرهنة (6-2-7) يكون المثالي $\langle f(x)\rangle$ أعظمياً في $F[x]$ وحسب المبرهنة (5-1-14) تكون الحلقة $F[x]/\langle f(x)\rangle$ حقلاً.

كفاية الشرط. لنفرض أن الحلقة $F[x]/\langle f(x)\rangle$ حقلاً عندئذ وحسب المبرهنة (5-1-14) يكون المثالي $\langle f(x)\rangle$ أعظمياً في $F[x]$ وحسب المبرهنة (6-2-7) تكون الحدودية $f(x)$ أولية في $F[x]$.

النتيجة الآتية مشابهة لتمهيدية إقليدس الخاصة بالأعداد الأولية والتي يمكن صياغتها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6 -2 -9.

ليكن F حقلاً و $f(x),g(x),p(x)\in F[x]$. إذا كانـت الحدوديـة $p(x)$ أوليـة فوق F وكانت $p(x)$ تقسم الجداء $f(x).g(x)$ عندئذ إما $p(x)$ تقسم $f(x)$ أو $p(x)$ تقسم $g(x)$.

البرهـــان.

لنفرض أن الحدودية $p(x)$ أولية في $F[x]$ وأن $A=\langle p(x)\rangle$ وحسب المبرهنة (6 -2 -7) يكون المثالي A أعظمياً في $F[x]$ وحسب المبرهنة (5 -1 -14) تكـون الحلقـــة $F[x]/A$ حقـــلاً. مـــن جهـــة أخـــرى لمـــا كـــان $f(x).g(x)=p(x).\varphi(x)\in A$ حيـــث $\varphi(x)\in F[x]$ نجـــد أن $f(x).g(x)+A=A$ ومنه فـإن $(f(x)+A).(g(x)+A)=\overline{\overline{o}}$ وبمـا أن $F[x]/A$ حقل عندئذ إما $f(x)+A=o$ أو $g(x)+A=\overline{o}$ وهذا يبين لنا أنـه إما $f(x)\in A$ أو $g(x)\in A$.

- إذا كان $f(x)\in A$ عندئذ يوجد $h(x)\in F[x]$ بحيث $f(x)=p(x)h(x)$.
- إذا كان $g(x)\in A$ عندئذ يوجد $\lambda(x)\in F[x]$ بحيث $g(x)=p(x)\lambda(x)$.

ومنه نجد أنه إما $p(x)$ تقسم $f(x)$ أو $p(x)$ تقسم $g(x)$.

المبرهنة الأخيرة يمكن تعميمها لأجل عدد منته من الحدوديات وهذا التعميم سوف نورده من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6 -2 -10.

ليكن F حقلاً و $f_1(x),f_2(x),\cdots f_n(x),p(x)\in F[x]$. إذا كانت الحدوديـة $p(x)$ أولية فوق F وكانت $p(x)$ تقسم الجداء $f_1(x)f_2(x).\cdots f_n(x)$ عندئذ فإن $p(x)$ تقسم واحدة من الحدوديات $f_i(x)$ في $F[x]$ حيث $i=1,2,\cdots,n$.

البرهـــان.

يتم من خلال التطبيق المباشر للمبرهنة (6 -2 -9) ولذلك سوف نتركه للقارئ.

أمثلـــة.

لنأخذ الحقل $Z_2 = \{o, I\}$ ولتكن $Z_2[x]$ حلقة الحدوديات فوق الحقل Z_2 ولـــتكن $p(x) = x^3 + x + 1 \in Z_2[x]$. والمطلوب:

1 - أثبت أن الحدودية $p(x)$ أولية في $Z_2[x]$.

2 - أثبت أن الحلقة $Z_2[x]/A$ حقل حيث $A = \langle p(x) \rangle$ ثم عين هذا الحقل.

الحـــل.

1 - نلاحظ أن $p(o) = p(I) = 1$ وهذا يبين لنا أن الحدودية $p(x)$ لا تملك أصفاراً في الحقل Z_2 وبما أن $\partial p(x) = 3$ فإنه حسب التمهيدية (6-2-5) تكون الحدوديـــة $p(x)$ أولية فوق الحقل Z_2.

2 - بما أن الحدودية $p(x)$ أولية فوق الحقل Z_2 فإنه حـــسب المبرهنـــة (6-2-8) تكون الحلقـــة $Z_2[x]/A$ حقـــلاً حيـــث $A = \langle p(x) \rangle$. لنوجـــد عناصـــر الحقـــل $Z_2[x]/A$.

لـــــيكن $\overline{f}(x) \in Z_2[x]/A$ عندئـــــذ يوجـــــد $f(x) \in Z_2[x]$ بحيـــــث $\overline{f}(x) = f(x) + A$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل العنـــصرين $f(x), p(x)$ نجد أنه يوجـــد $q(x), r(x) \in Z_2[x]$ بحيـــث $f(x) = q(x).p(x) + r(x)$ وأنه إما $r(x) = o$ أو $\partial r(x) < \partial p(x)$ ومنه

$$\overline{f}(x) = f(x) + A = [q(x)p(x) + r(x)] + A = [q(x)p(x) + A] + [r(x) + A] = r(x) + A$$

وذلك لأن $q(x).p(x) \in A$. وبما أنه إما $r(x) = o$ أو $\partial r(x) < \partial p(x) = 3$ نجد أنه إما $r(x) = o$ أو $r(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in Z_2$ ومنه نجد أن

$$Z_2[x]/A = \{(ax^2 + bx + c) + A : a, b, c \in Z_2\}$$

وبما أن Z_2 حقلاً يحوي عنصرين فقط نجـــد أنـــه للعناصـــر $a, b, c \in Z_2$ ثمانيـــة احتمالات فقط ومنه فإن الحقل $Z_2[x]/A$ يتألف من ثمانية عناصر.

بالاعتماد على المثال السابق يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6-2-11.

ليكن p عدداً أولياً ولتكن $Z_p[x]$ حلقة الحدوديات فوق الحقل Z_p ولتكن $f(x)$ عنصر من $Z_p[x]$ بحيـــث $\partial f(x)=n$ و $A=\langle f(x)\rangle$. إذا كانـــت الحدوديـــة $f(x)$ أولية في $Z_p[x]$ فإن الحلقة $Z_p[x]/A$ تكون حقلاً مؤلفاً من "p عنصراً.

البرهـــان.

بما أن العدد p أولياً فإن Z_p حقل. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ أولية فوق الحقـــل Z_p عندئذ حسب المبرهنة (6-2-7) المثالي $A=\langle f(x)\rangle$ أعظمـــي فـــي الحلقـــة $Z_p[x]$ وبالتالي تكون الحلقة $Z_p[x]/A$ حقلاً. لنفرض أن $\partial f(x)=n$.

ليكن $\overline{g}(x)\in Z_p[x]/A$ عندئذ $\overline{g}(x)=g(x)+A$ حيـــث $g(x)\subset Z_p[x]$ وحســـب خوارزميـــة القـــسمة لأجـــل العنـــصرين $g(x),f(x)$ يوجـــد $q(x),r(x)\in Z_p[x]$ بحيـــث $g(x)=q(x)f(x)+r(x)$ وانـــه إمـــا $r(x)=o$ أو $\partial r(x)<n$. أي أن $r(x)=\sum_{i=o}^{n-1}a_ix^i$ حيث $a_i\in Z_p$ وبمـــا أن العناصر a_i عددها يساوي n وكل من هذه العناصر يأخذ p قيمة نجد أن عدد عناصر الحقل $Z_p[x]/A$ يساوي "p أي أن

$$Z_p[x]/A=\{a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o : a_i\in Z_p;\ o\le i\le n-1\}$$

وبالتالي $Card\,(Z_p[x]/A)=p^n$.

Damascus University

6 - 3. حلقة الحدوديات $Z[x]$.

في هذه الفقرة سوف ندرس حلقة الحدوديات فوق حلقة الأعداد الصحيحة وبداية دراستنا ستكون للحدوديات الأولية في $Z[x]$ ولنبدأ بالتمهيدية الآتية:

تمهيدية 6 -3 -1.

لتكن $f(x) \in Z[x] \neq o$. عندئذ:

1 - الشرط اللازم والكافي كي تكون الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$ هو إما أن يكون $f(x)=1$ أو $f(x)=-1$.

2 - كل عدد أولي في Z هو حدودية أولية في $Z[x]$ درجتها تساوي الصفر.

3 - كل عدد غير أولي في Z ولا يساوي الصفر هو حدودية غير أولية في $Z[x]$ درجتها تساوي الصفر.

البرهان.

1 - لزوم الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$ وبما أن Z منطقة تكاملية فإنه حسب التمهيدية (6-2-1) يكون $\partial f(x)=o$ ومنه $f(x)=a$ حيث $o \neq a \in Z$ وبما أن العناصر القابلة للقلب في Z هي فقط $1,-1$ نجد أنه إما $f(x)=1$ أو $f(x)=-1$.

كفاية الشرط. واضح.

2 - ليكن p عدداً أولياً في Z ولنفرض أن $g(x)=p$ فنجد أن $g(x) \in Z[x]$ مغاير للصفر وأن $\partial g(x)=o$. وبما أن $p \neq \pm 1$ عندئذ حسب (1) فإن الحدودية $g(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$. لنفرض أن $g(x)=h(x)\lambda(x)$ حيث $h(x),\lambda(x) \in Z[x]$ وأن $\partial h(x)=\partial \lambda(x)=o$ لأن $Z[x]$ منطقة تكاملية ومنه $h(x)=a, \lambda(x)=b$ حيث a,b أعداد صحيحة مغايرة للصفر ومنه نجد أن $p=ab$ وبما أن العنصر a قاسماً للعدد الأولي p فإنه إما $a=\pm 1$ أو $a=\pm p$.

- إذا كان $a=\pm 1$ فإنه حسب (1) تكون الحدودية $h(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$.

- إذا كان $a = \pm p$ عندئذ يكون $b = \pm 1$ وحسب (1) تكون الحدودية $\lambda(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$. مما سبق وحسب التعريف نجد أن $g(x)$ أولية في $Z[x]$.

3 - لنفرض أن $n \neq o$ عدد غير أولي وأن $\mu(x) = n$ عندئذ $\mu(x) \in Z[x]$ مغاير للصفر وأن $\partial \mu(x) = o$. وهنا نميز حالتين:

- $n = \pm 1$ عندئذ حسب (1) تكون الحدودية $\mu(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$ وبالتالي فهي غير أولية في $Z[x]$ حسب التعريف.

- $n \neq \pm 1$ عندئذ حسب (1) تكون الحدودية $\mu(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$ وبما أن الحلقة Z هي حلقة مثاليات رئيسية وأن العدد n غير أولي فإنه حسب المبرهنة (5-4-2) يكون العنصر n غير بسيط وبما أنه غير قابل للقلب في Z فإنه حسب التعريف بالا مكان كتابة العنصر n بالشكل $n = cd$ حيث $c, d \in Z$ وكل منهما غير قابل للقلب في Z. بفرض أن $g_1(x) = c, h_1(x) = d$ نجد أن $\mu(x) = g_1(x).h_1(x)$ وأن كلاً من $g_1(x), h_1(x)$ غير قابل للقلب في $Z[x]$. مما سبق نجد أن الحدودية $\mu(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$.

قبل المتابعة في دراسة الحدوديات الأولية لنورد المثالين التاليين:

أمثلة.

1 - الحدودية $f(x) = 3x + 6 \in f[x]$ غير أولية في $Z[x]$.

بما أن $\partial f(x) > o$ فإنه حسب التمهيدية (6-3-1) تكون الحدودية $f(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$. نلاحظ أن $f(x) = 3(x + 2)$ وبفرض أن $h(x) = x + 2$ و $g(x) = 3$ نجد أن $f(x) = g(x)h(x)$ وأن الحدودية $g(x) = 3$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$ وأيضاً الحدودية $h(x) = x + 2$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$ وذلك حسب التمهيدية (6-3-1). مما سبق وحسب التعريف نجد أن الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Z[x]$.

2 - الحدودية $f(x) = 5x + 2$ هي حدودية أولية في $Z[x]$.

بما أن $\partial f(x) > o$ فإن $f(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$. لنفرض أن $f(x) = g(x)\lambda(x)$ عندئذ وبما أن $Z[x]$ منطقة تكاملية نجد أن

$$\partial g(x)+\partial \lambda(x)=\partial f(x)=1$$

ومنه إما $\partial g(x)=o$ أو $\partial \lambda(x)=o$.

- إذا كان $\partial g(x)=o$ نجد أن $g(x)=a$ حيث $o\neq a\in Z$ وفي هذه الحالة تكون $\partial \lambda(x)=1$ وبالتالي $\lambda(x)=bx+d$ حيث $b,d\in Z$ و $b\neq o$. ومنه فإن $5x+2=a(bx+d)=abx+ad$ وهكذا يكون $ab=5$ و $ad=2$ وهذا يبين لنا أن العدد a هو قاسم مشترك للعددين 5 و 2. وبما أن العددان 5,2 أوليين فيما بينهما فإن القاسم المشترك الوحيد لهما هو الواحد ومنه نجد أن $a=1$. وهكذا نجد أن الحدودية $g(x)=1$ وحسب التمهيدية (6-3-1) فإن الحدودية $g(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$.

- إذا كان $\partial \lambda(x)=o$ بطريقة مشابهة نجد أن الحدودية $\lambda(x)$ قابلة للقلب.

مما سبق نجد أنه إما $g(x)$ قابلة للقلب أو $\lambda(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$ وحسب التعريف نجد أن الحدودية $f(x)$ أولية في $Z[x]$.

بالعودة إلى المثالين السابقين نجد أنه في المثال رقم (1) لدينا $gcd\,(3,6)=3>1$ بينما في المثال رقم (2) فإن $gcd\,(5,2)=1$.

وهكذا نجد أن القاسم المشترك الأعظم لأمثال الحدودية يمكن أن يلعب دوراً في كونها أولية أم لا وذلك فقط في الحلقة $Z[x]$. لأجل ذلك سوف نورد التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i\in Z[x]$ $o\neq f(x)$. نسمي القاسم المشترك الأعظم للعناصر $a_0,a_1,\cdots,a_n\in Z$ برئيس الحدودية $f(x)$. أي أن رئيس الحدودية $f(x)$ هو $gcd\,(a_0,a_1,\cdots,a_n)$. وإذا كان $gcd\,(a_0,a_1,\cdots,a_n)=1$ نقول عن الحدودية $f(x)$ في هذه الحالة إنها رئيسية.

بالاعتماد على التعريف السابق نجد أنه إذا كانت $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i\in Z[x]$ وكان أحد الأمثال $a_i=\pm 1$ تكون الحدودية $f(x)$ رئيسية.

العلاقة بين الحدوديات الأولية والرئيسية نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 6 -3 -2.

كل حدودية أولية في $Z[x]$ ودرجتها أكبر من الصفر هي حدودية رئيسية.

البرهـــان.

لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i \in Z[x]$ حدودية أولية فـــوق Z وأن $\partial f(x)=n>0$.

لنفرض جدلاً أن الحدودية $f(x)$ ليست رئيسية عندئذ $gcd(a_0,a_1,\cdots,a_n)=b>1$ ومنه توجد عناصر $d_i \in Z$ بحيث $a_i=bd_i$ لأجل جميع القيم $0\le i\le n$ ومنه

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i=\sum_{i=0}^{n}(bd_i)x^i=b(\sum_{i=0}^{n}d_i x^i)$$

لنفرض أن $h(x)=\sum_{i=0}^{n}d_i x^i$ وأن $g(x)=b$ فنجد أن $\partial h(x)=\partial f(x)>0$ وأن $g(x)\neq\pm 1$ وحسب التمهيدية (6 -3 -1) فإن كلاً مـــن الحـــدوديتين $h(x)$ و $g(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$ وهذا يناقض كون الحدوديـــة $f(x)$ أوليـــة فـــي $Z[x]$. مما سبق نجد أن $gcd(a_0,a_1,\cdots,a_n)=1$ وبالتالي الحدوديـــة $f(x)$ هـــي حدودية رئيسية.

لأجل متابعة دراستنا للحدوديات الأولية لابد لنا من المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 6 -3 -3.

جداء حدوديتين رئيسيتين هو حدودية رئيسية.

البرهـــان.

لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i, g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_i x^i \in Z[x]$ حيث $a_i,b_i \in Z$ أياً كان $0\le i\le n$ حدوديتان رئيسيتان.

لنفرض جدلاً أن الحدوديـــة $f(x).g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}c_k x^k \in Z[x]$ غيـــر رئيـــسية حيث $c_k \in Z$ أياً كان $0\le k\le n+m$ عندئـــذ $gcd(c_0,c_1,\cdots,c_{n+m})=u>1$

وبما أن كل عدد صحيح أكبر من الواحد يقبل القسمة على عدد أولي لنفرض أن العدد الأولي p يقسم u ولنفـرض أن $\bar{a}_i = a_i \ mod - p$, $\bar{b}_j = b_j \ mod - p$ عندئـذ يكون $\bar{a}_i, \bar{b}_j \in Z_p$ وذلك أياً كان $o \le i \le n$, $o \le j \le m$ وبالتالي يكون

$$\overline{f(x)} = \sum_{i=o}^{n} \bar{a}_i x^i , \overline{g(x)} = \sum_{i=o}^{m} \bar{b}_i x^i \in Z_p[x]$$

من جهة أخرى بما أن p يقسم u فإن p يقسم c_i ومنـه $\bar{c}_i = c_i \ mod - p = o$ وذلك أياً كان $o \le i \le n+m$ ومنه فإن $\overline{f(x).g(x)} = \overline{f(x)}.\overline{g(x)} = o$ وبما أن $Z_p[x]$ منطقة تكاملية نجد إنه إما $\overline{f(x)} = o$ أو $\overline{g(x)} = o$.

إذا كان $\overline{f(x)} = o$ عندئذ يكون $\bar{a}_i = o$ وبالتالي a_i يقبل القسمة على p وذلك أيـاً كان $o \le i \le n$ ومنه فـإن $gcd(a_o, a_1, \cdots, a_n) = p \ne 1$ وهـذا يناقض كـون الحدودية $f(x)$ رئيسية. كذلك الأمر إذا كان $\overline{g(x)} = o$ تكـون الحدوديـة $g(x)$ غير رئيسية وهذا أيضاً غير ممكن. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x).g(x)$ هـي حدودية رئيسية.

يمكن تعميم المبرهنة السابقة بالشكل الآتي:

نتيجـة.

جداء أي عدد منته من الحدوديات الرئيسية هو حدودية رئيسية.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة الآتية والتي تبين لنا متى تكون الحدودية الرئيـسية أولية.

مبرهنـة 6-3-4.

القضايا الآتية صحيحة:

1 - كل حدودية رئيسية في $Z[x]$ وغير أولية فوق Q تكون غير أولية في $Z[x]$.

2 - كل حدودية من $Z[x]$ وغير أولية فوق Q تكون غير أولية في $Z[x]$.

البرهـان.

1 - لتكن $f(x) \in Z[x]$ حدودية رئيسية وغير أولية في $Q[x]$ عندئذ يوجد $g(x), h(x) \in Q[x]$ بحيث $f(x) = g(x).h(x)$. لنفرض أن a هو جداء المقامات لأمثال الحدودية $g(x)$ و b هو جداء المقامات لأمثال الحدودية $h(x)$ عندئذ يكون $a.g(x), b.h(x) \in Z[x]$. لنفرض أن c_1 رئيس الحدودية $a.g(x)$ و c_2 رئيس الحدودية $b.h(x)$ عندئذ $a.g(x) = c_1.g_1(x)$ و $b.h(x) = c_2.h_1(x)$. وبما أن $\partial g(x) > o, \partial h(x) > o$ فإن $\partial g_1(x) > o$ و $\partial h_1(x) > o$ كما أن كلاً من $g_1(x), h_1(x)$ هي حدوديات رئيسية وبما أن

$$ab.f(x) = c_1.g_1(x).c_2.h_1(x) = c_1c_2.g_1(x).h_1(x)$$

وبما أن جداء حدوديتين رئيسيتين هو حدودية رئيسية وذلك حسب المبرهنة (6-3-3) فإن الحدودية $g_1(x).h_1(x)$ هي حدودية رئيسية ومنه فإن رئيس الحدودية $c_1c_2.g_1(x).h_1(x)$ هو c_1c_2.

من جهة أخرى بما أن الحدودية $f(x)$ رئيسية فإن رئيس الحدودية $abf(x)$ هو ab وبما أن $abf(x) = c_1c_2.g_1(x).h_1(x)$ نجد أن $ab = c_1c_2$. مما سبق نجد أن $f(x) = g_1(x).h_1(x)$ وحيث أن $\partial g_1(x) > o$ و $\partial h_1(x) > o$ وهذا يبين لنا أن الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Z[x]$.

2 - لتكن $\varphi(x) \in Z[x]$ حدودية غير أولية فوق Q ولنفرض أن α هو رئيس الحدودية $\varphi(x)$ عندئذ $\varphi(x) = \alpha.\mu(x)$ حيث $\mu(x)$ حدودية رئيسية في $Z[x]$ وبما أن الحدودية $\varphi(x)$ غير أولية في $Q[x]$ فإن الحدودية $\mu(x)$ تكون غير أولية $Q[x]$ لأنه إذا كانت الحدودية $\mu(x)$ أولية في $Q[x]$ وبما أن $\mu(x) = \alpha^{-1}\varphi(x)$ فإنه حسب المبرهنة (6-2-6) تكون الحدودية $\varphi(x)$ أولية في $Q[x]$ وهذا غير ممكن. أصبح لدينا $\mu(x)$ حدودية رئيسية في $Z[x]$ وغير أولية في $Q[x]$ وحسب (1) نجد أن الحدودية $\mu(x)$ غير أولية في $Z[x]$ ومنه يوجد $h_2(x), g_2(x) \in Z[x]$ بحيث $\partial g_2(x) > o$ و $\partial h_2(x) > o$ وتحققان $\mu(x) = g_2(x).h_2(x)$ ومنه يكون $\varphi(x) = [\alpha.g_2(x)].h_2(x)$ وهذا يبين لنا أن الحدودية $\varphi(x)$ غير أولية في $Z[x]$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة المبرهنة الآتية والتي تبين لنا متى تكون الحدوديات فوق Z أولية.

مبرهنة 6-3-5.

لتكن $f(x) \in Z[x]$ وأن $\partial f(x) > o$. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحدودية $f(x)$ أولية في $Q[x]$ هو أن تكون أولية في $Z[x]$.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ أولية في $Q[x]$ وأنها غير أولية في $Z[x]$ عندئذ تكون الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Q[x]$ وهذا غير ممكن ومنه تكون الحدودية $f(x)$ أولية في $Z[x]$.

كفاية الشرط. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ أولية في $Z[x]$ وغير أولية في $Q[x]$ عندئذ حسب المبرهنة (6-3-4) تكون الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Z[x]$ وهذا غير ممكن ومنه نجد أن الحدودية $f(x)$ أولية في $Q[x]$.

من خلال المبرهنة الآتية سوف نورد اختباراً مهماً للحدوديات الأولية فوق Z.

مبرهنة 6-3-6.

ليكن p عدداً أولياً و $f(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \in Z[x]$ حيث $\partial f(x) \geq 1$. لنفرض أن $a_i = a_i \bmod p$ عندئذ $\overline{f}(x) = \sum_{i=o}^{n} \overline{a}_i x^i \in Z_p[x]$. إذا كانت الحدودية $\overline{f}(x)$ أولية في $Z_p[x]$ وكان $\partial f(x) = \partial \overline{f}(x)$ عندها تكون الحدودية $f(x)$ أولية فوق Q (وبالتالي أولية فوق Z).

البرهان.

لنفرض جدلاً أن الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Q[x]$ عندئذ حسب المبرهنة (6-3-4) تكون الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Z[x]$ وبالتالي يوجد في $Z[x]$ عناصر $g(x), h(x)$ بحيث $\partial g(x) > o$ و $\partial h(x) > o$ وتحققان

$f(x)=g(x).h(x)$ ومنه يكون $\partial g(x)<\partial f(x)$ و $\partial h(x)<\partial f(x)$.

لنفرض أن $h(x)=\sum_{i=0}^{n}d_i x^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_i x^i$ حيث $d_i,b_j\in Z$ لأجل جميع القيم $0\le i\le n$ و $0\le j\le m$.

ولنفرض أن $\overline{d_i}=d_i \bmod -p$ و $\overline{b_j}=b_j \bmod -p$ عندئذ يكون

$$\overline{g(x)}=\sum_{i=0}^{n}\overline{b}_i x^i,\ \overline{h(x)}=\sum_{i=0}^{n}d_i x^i\in Z_p[x]$$

وأن $\overline{f(x)}=\overline{g(x)}.\overline{h(x)}$ وبما أن $\partial f(x)=\partial\overline{f(x)}$ نجد أن $\partial\overline{g(x)}\le\partial g(x)<\partial f(x)$ وأن $\partial\overline{h(x)}\le\partial h(x)<\partial\overline{f(x)}$ ومنه يكون $\partial\overline{h(x)}>0$ و $\partial\overline{g(x)}>0$ وهذا يناقض كون الحدودية $\overline{f(x)}$ أولية في $Z_p[x]$. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ أولية في $Q[x]$ وبالتالي في $Z[x]$.

لنورد الآن عدداً من الأمثلة كتطبيق على المبرهنات السابقة.

أمثلة.

1 - لتكن $f(x)=21x^3-3x^2+2x+9\in Z[x]$.

من أجل $p=2$ نجد أن $2 \bmod -2=0$ و $-3 \bmod -2=1$ و $21 \bmod -2=1$ و $9 \bmod -2=1$ ومنه يكون $\overline{f(x)}=x^3+x^2+1\in Z_2[x]$ وأن $\partial\overline{f(x)}=3=\partial f(x)$. من جهة أخرى بما أن $Z_2=\{0,1\}$ حقل وأن $\overline{f(1)}=1$ و $\overline{f(0)}=1$ نجد أن الحدودية $\overline{f(x)}$ لا تملك أصفاراً في الحقل Z_2 وحسب التمهيدية (6-2-5) نجد أن الحدودية $\overline{f(x)}$ أولية فوق Z_2 وحسب المبرهنة (6-3-6) تكون الحدودية $f(x)$ أولية في $Z[x]$.

2 - لتكن $f(x)=21x^3-3x^2+2x+8\in Z[x]$.

من أجل $p=2$ نجد أن $2 \bmod -2=0$ و $-3 \bmod -2=1$ و $21 \bmod -2=1$ و $8 \bmod -2=0$ ومنه يكون $\overline{f(x)}=x^3+x^2=x^2(x+1)\in Z_2[x]$ وأن $\partial\overline{f(x)}=3=\partial f(x)$. من جهة أخرى بما أن $Z_2=\{0,1\}$ حقلاً وأن $\overline{f(1)}=0$ و $\overline{f(0)}=0$ نجد أن الحدودية $\overline{f(x)}$ تملك أصفاراً في الحقل Z_2 وحسب التمهيدية (6-2-4) نجد أن الحدودية $\overline{f(x)}$ غير أولية فوق Z_2. وهنا نلاحظ

أن المبرهنة (6-3-6) لا تعطينا جواباً حول الحدودية $f(x)$ إن كانت أولية في $Z[x]$ أم لا.؟ لأجل ذلك لا بد من البحث عن عدد أولي آخر.

بفرض $p=5$ عندئذ $-3 \bmod -5 = 2$ و $21 \bmod -5 = 1$ و $2 \bmod -5 = 2$ و $8 \bmod -5 = 3$ ومنه يكون $\overline{f(x)} = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \in Z_5[x]$ وأن $\partial \overline{f(x)} = 3 = \partial f(x)$. من جهة أخرى بما أن $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ حقلاً وأن $\overline{f(4)} = 2$ و $\overline{f(3)} = 4$ و $\overline{f(2)} = 3$ و $\overline{f(1)} = 3$ و $\overline{f(0)} = 3$ نجد أن الحدودية $\overline{f(x)}$ لا تملك أصفاراً في الحقل Z_5 وبما أن $\partial \overline{f(x)} = 3$ فإنه حسب التمهيدية (6-2-5) تكون الحدودية $\overline{f(x)}$ أولية فوق Z_5 وحسب المبرهنة (6-3-6) تكون الحدودية $f(x)$ أولية فوق Q وبالتالي فوق Z.

3 - لتكن $f(x) = (3/7)x^4 - (2/7)x^3 + (9/35)x + 3/5 \in Q[x]$. أثبت أن الحدودية $f(x)$ أولية فوق Q.

لنأخذ الحدودية $h(x) = 35f(x) = 15x^4 - 10x^3 + 9x + 21$ فنجد أن $h(x) \in Z[x]$.

من أجل العدد الأولي $p=2$ نجد أن $15 \bmod -2 = 1$ و $-10 \bmod -2 = 0$ و $21 \bmod -2 = 1$ و $9 \bmod -2 = 1$ ومنه يكون $\overline{h(x)} = x^4 + x + 1 \in Z_2[x]$ وأن $\partial \overline{h(x)} = 4 = \partial h(x)$. من جهة أخرى بما أن $Z_2 = \{0,1\}$ حقلاً وأن $\overline{h(1)} = 1$ و $\overline{h(0)} = 1$ نجد أن الحدودية $\overline{h(x)}$ لا تملك أصفاراً في الحقل Z_2.

لنفرض جدلاً أن الحدودية $\overline{h(x)}$ غير أولية في $Z_2[x]$ عندئذ يوجد $g(x), \varphi(x) \in Z_2[x]$ بحيث $\overline{h(x)} = g(x)\varphi(x)$ وأن $\partial g(x) > 0$ و $\partial \varphi(x) > 0$. وبما أن $\partial \overline{h(x)} = 4$ سوف نميز حالتين:

- $\partial g(x) = 3, \partial \varphi(x) = 1$ عندها نجد أن الحدودية $\varphi(x)$ تملك صفراً في الحقل Z_2 وبالتالي فإن الحدودية $\overline{h(x)}$ تملك صفراً في Z_2 وهذا غير ممكن.

- $\partial g(x) = 2, \partial \varphi(x) = 2$ نجد أن الحدودية $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ حيث $a_0, a_1, a_2 \in Z_2$ و $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ حيث $b_0, b_1, b_2 \in Z_2$ ومنه يكون

$$\overline{h(x)} = a_2 b_2 x^4 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)x^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 +$$

$$+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

وبالتالي يكون:

- $a_2b_2=1$ أي أن $a_2=b_2=1$.
- $a_2b_1+a_1b_2=0$ أي أن $a_1+b_1=0$.
- $a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0$ أي أن $b_0+a_1b_1+a_0=0$.
- $a_1b_0+a_0b_1=1$.
- $a_0b_0=1$ ومنه يكون $a_0=b_0=1$.

بالتعويض في المعادلات السابقة نجد أن $a_1b_1=0$ وأن $a_1+b_1=1$ و $a_1+b_1=0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الحدودية $\overline{h(x)}$ هي حدودية أولية في $Z_2[x]$. وحسب المبرهنة (6-3-6) تكون الحدودية $h(x)$ أولية في $Q[x]$ وحسب التمهيدية (6-2-6) تكون الحدودية $f(x)=(1/35)h(x)$ أولية في $Q[x]$.

لنورد الآن اختباراً مهماً آخر للحدوديات الأولية والذي يسمى اختبار أيزنشتاين *Fredinand Eisenstein* 1823–1852 وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 6-3-7. (اختبار أيزنشتاين 1850).

لتكن $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$. إذا وجد عدد أولي p يحقق كلاً مما يأتي:

- p لا يقسم a_n.
- p يقسم كلاً من $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0$.
- p^2 لا يقسم a_0.

عندئذ تكون الحدودية $f(x)$ أولية فوق Q وبالتالي فوق Z.

البرهان.

لنفرض أن الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Q[x]$ عندئذ تكون الحدودية غير أولية في $Z[x]$ ومنه توجد $g(x),h(x)\in Z[x]$ بحيث $\partial g(x)>0,\partial h(x)>0$ تحققان $f(x)=g(x).h(x)$ ومنه $\partial h(x)<\partial f(x)$ و $\partial g(x)<\partial f(x)$.

لنفرض أن

$$g(x)=b_r x^r+b_{r-1}x^{r-1}+\cdots+b_1x+b_0 : \quad b_i\in Z$$

$$h(x)=c_s x^s+c_{s-1}x^{s-1}+\cdots+c_1x+c_0 : \quad c_i\in Z$$

بما أن $f(x)=g(x).h(x)$ عندئذ يكون $n=s+r$ وأن $a_n=b_rc_s$ وكذلك $a_0=b_0c_0$. بما أن p يقسم a_0 عندئذ إما p يقسم b_0 أو p يقسم c_0.

لنفرض أن p يقسم b_0 عندئذ p لا يقسم c_0 لأنه إذا كان p يقسم c_0 نجد أن p^2 يقسم a_0 وهذا غير محقق فرضاً.

كذلك بما أن p لا يقسم a_n فإن p لا يقسم b_r. لنفرض أن أول معاملات $g(x)$ التي لا تقبل القسمة على p هو b_i وبما أن $a_i=b_ic_0+b_{i-1}c_1+\cdots+b_0c_i+b_1c_{i-1}$ وبما أن p يقسم a_i فرضاً فإن p يقسم الطرف الأيمن من المساواة السابقة وبالتالي فهو يقسم جميع الحدود في هذه المساواة وبالتالي يكون p قاسماً للحد b_1c_{i-1} وبما أن p لا يقسم b_i فإن p يقسم c_{i-1} وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ هي حدودية أولية في $Q[x]$ وبالتالي في $Z[x]$.

مثال.

1 - أثبت أن الحدودية $f(x)=x^6+9x^4+12x^2+6\in Z[x]$ هي حدودية أولية في $Q[x]$.

ليكن $p=3$. فنجد أن p لا يقسم $a_n=1$ وأن p يقسم $9,12,6$ كما أن $p^2=9$ لا يقسم 6 وحسب معيار أيزنشتاين فإن الحدودية $f(x)$ أولية في $Q[x]$ وبالتالي أولية في $Z[x]$.

2 - أثبت أن الحدودية $\varphi(x)=x^4+3x^2+3\in Z[x]$ هي حدودية أولية في $Q[x]$.

ليكن $p=3$. فنجد أن p لا يقسم $a_n=1$ وأن p يقسم 3 كما أن $p^2=9$ لا يقسم $a_0=3$ وحسب معيار أيزنشتاين فإن الحدودية $\varphi(x)$ أولية في $Q[x]$ وبالتالي أولية في $Z[x]$.

3 - أثبت أن الحدودية $\psi(x)=3x^5+15x^4-20x^3+10x+20\in Z[x]$ هي حدودية أولية في $Q[x]$.

ليكن $p=5$. عندئذ فإن p لا يقسم $a_n=3$ كما أن p يقسم $15,-20,10,20$ وأن $p^2=25$ لا يقسم $a_o=20$ وحسب معيار أيزنشتاين فإن الحدودية $\psi(x)$ أولية في $Q[x]$ وبالتالي أولية في $Z[x]$.

وجدنا سابقاً ومن خلال المبرهنة (6 -1 -10) أن حلقة الحدوديات على أي حقل هي حلقة تحليل وحيد والخطوة الآتية من دراستنا تتضمن إثبات أن حلقة الحدوديات $Z[x]$ هي حلقة تحليل وحيد. والبداية ستكون مع المبرهنة الآتية:

مبرهنة 6 -3 -8.

كل حدودية رئيسية في $Z[x]$ ودرجتها أكبر من الصفر تكتب على شكل جداء منته لحدوديات أولية في $Z[x]$ درجة كل منها أكبر من الصفر.

البرهان.

لتكن $f(x)\in Z[x]$ حدودية رئيسية وأن $\partial f(x)>o$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب درجة $f(x)$.

لنفرض أن $\partial f(x)=1$. بما أن $f(x)\neq\pm1$ فإنه حسب التمهيدية (6 -3 -1) تكون الحدودية $f(x)$ غير قابلة للقلب في $Z[x]$.

لتكن $g(x),h(x)\in Z[x]$ بحيث $f(x)=g(x).h(x)$ وبما أن $\partial f(x)=1$ عندئذ إما $\partial g(x)=o$ أو $\partial h(x)=o$.

- إذا كان $\partial g(x)=o$ عندئذ $g(x)=a$ حيث $o\neq a\in Z$ وأن $\partial h(x)=1$.

نفرض أن b هو رئيس الحدودية $h(x)$ عندئذ يكون $h(x)=b\,h_1(x)$ حيث $h_1(x)$ حدودية رئيسية في $Z[x]$ ومنه $f(x)=ab\,h_1(x)$ وبما أن الحدودية $f(x)$ رئيسية نجد أن $ab=1$ ومنه يكون $a=h=1$ وهذا يبين لنا حسب التمهيدية (6 -3 -1) أن الحدودية $g(x)$ قابلة للقلب في $Z[x]$.

- بشكل مشابه نجد أنه إذا كانت $\partial h(x)=o$ فإن الحدودية $h(x)$ تكون قابلة للقلب في $Z[x]$. مما سبق نجد أن الحدودية $f(x)$ هي حدودية أولية في $Z[x]$.

لنفرض الآن أن المبرهنة صحيحة لأجل كل حدودية رئيسية من $Z[x]$ ودرجتها أقل من درجة $f(x)$. بما أن $\partial f(x) > o$ عندئذ الحدودية $f(x)$ غير قابلة للقلب.

إذا كانت الحدودية $f(x)$ أولية يتم المطلوب. لنفرض أن الحدودية $f(x)$ غير أولية في $Z[x]$ عندئذ يوجد $h(x), p(x) \in Z[x]$ بحيث $f(x) = h(x).p(x)$ وأن درجة كل من $h(x), p(x)$ أكبر من الصفر. لنفرض أن b_1 هو رئيس الحدودية $h(x)$ وأن b_2 هو رئيس الحدودية $p(x)$ عندئذ $h(x) = b_1.h_1(x)$ و $p(x) = b_2.p_1(x)$ حيث $h_1(x), p_1(x) \in Z[x]$ وأن كل منهما حدودية رئيسية. ومنه يكون $f(x) = b_1 b_2 h_1(x).p_1(x)$ وبما أن الحدودية $f(x)$ رئيسية نجد أن $b_1 = b_2 = 1$ وبالتالي يكون $h(x) = h_1(x)$ و $p(x) = p_1(x)$ وهذا يبين لنا أن كلاً من $h(x), p(x)$ هي حدوديات رئيسية درجة كل منهما أكبر من الصفر وأقل من درجة $f(x)$ وحسب الفرض الاستقرائي فإن كلاً من الحدوديتين $h(x), p(x)$ تكتب على شكل جداء منته لحدوديات أولية في $Z[x]$ ودرجة كل منها أكبر من الصفر. وهكذا نجد أن الحدودية $f(x)$ تكتب على شكل جداء منته لحدوديات أولية في $Z[x]$ ودرجة كل منها أكبر من الصفر.

لنورد الآن نص المبرهنة الأساسية في الحساب.

مبرهنة **6-3-9.** (المبرهنة الأساسية في الحساب).

كل عدد صحيح أكبر من الواحد هو إما عدد أولي أو جداء منته لأعداد أولية وهذا الجداء وحيد بمعنى أنه إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً وكان

$$n = q_1 q_2 \cdots q_t = p_1.p_2 \cdots p_r$$

حيث q_i, p_j أعداد أولية أياً كان $1 \le i \le t$ و $1 \le j \le r$ فإن $t = r$ وبعد إجراء تبديل على الأدلة يكون $p_i = q_i$ أياً كان $1 \le i \le t$.

البرهان.

أنظر في كتاب البنى الجبرية (1) لمؤلفه د. حمزة حاكمي.

نأتي الآن إلى إثبات أن حلقة الحدوديات $Z[x]$ هي حلقة تحليل وحيد.

مبرهنـــة 6 -3 -10.

كل حدودية من $Z[x]$ مغايرة للصفر و غير قابلة للقلب في $Z[x]$ يمكـــن كتابتهـــا في $Z[x]$ على الشكل

$$b_1 b_2 \cdots b_s . p_1(x).p_2(x).\cdots.p_m(x)$$

حيث b_i حدوديات أولية درجتها صفر وأن $p_j(x)$ هي حدوديات أولية درجتها أكبر من الصفر وذلك أياً كان $i = 1,2,\cdots,s$ و $j = 1,2,\cdots,m$. بالإضافة لذلك إذا كان

$$b_1 b_2 \cdots b_s . p_1(x).p_2(x).\cdots.p_m(x) = c_1 c_2 \cdots c_t\, q_1(x) q_2(x) \cdots q_n(x)$$

حيث c_i حدوديات أولية درجتها صفر وأن $q_j(x)$ هي حدوديات أولية درجتها أكبر من الصفر وذلك أياً كـــان $i = 1,2,\cdots,t$ و $j = 1,2,\cdots,n$ فـــإن $s = t$ و $n = m$ وبعد إعادة الترقيم يكون $b_i = \pm c_i$ أياً كان $i = 1,2,\cdots,s$ وأن $p_i(x) = \pm q_i(x)$ أياً كان $i = 1,2,\cdots,n$.

البرهـــان.

لتكن $f(x) \in Z[x]$ حدودية مغايرة للصفر وغير قابلة للقلب في $Z[x]$.

إذا كانت $\partial f(x) = o$ عندئذ $f(x) = a$ حيث $o \neq a \in Z$ وأن $a \neq \pm 1$ وحـــسب المبرهنة (6 -3 -9) يتم المطلوب. لنفـــرض أن $\partial f(x) > o$ ولنفـــرض أن b هـــو رئيس الحدودية $f(x)$ عندئـــذ $f(x) = b f_1(x)$ حيـــث $f_1(x) \in Z[x]$ هـــي حدوديـــة رئيـــسية وأن $\partial f_1(x) > o$ وحـــسب المبرهنـــة (6 -3 -8) نجـــد أن $f_1(x) = p_1(x).p_2(x).\cdots.p_m(x)$ حيث $p_j(x)$ حدوديات أوليـــة فـــي $Z[x]$ درجة كـــل منهـــا أكبـــر مـــن الـــصفر وحـــسب المبرهنـــة (6 -3 -9) نجـــد أن $b = b_1 b_2 \cdots b_s$ حيث $b_i \in Z$ حدوديات أولية فوق Z درجتها تـــساوي الـــصفر ومنه يكون $f(x) = b_1 b_2 \cdots b_s . p_1(x).p_2(x).\cdots.p_m(x)$.

الـ وحدانيـ ة. لنفرض أن

$$f(x) = b_1 b_2 \cdots b_s p_1(x) p_2(x) \cdots p_m(x) = c_1 c_2 \cdots c_t q_1(x) q_2(x) \cdots q_n(x)$$

حيث b_i, c_i هي حدوديات أولية درجة كل منها تساوي الصفر وأن $p_i(x), q_i(x)$ هي حدوديات أولية درجة كل منها أكبر من الـــصفر. لنفـــرض أن $c = c_1 c_2 \cdots c_t$ و

$b = b_1 b_2 \cdots b_s$. بما أن الحدوديات $p_i(x), q_i(x)$ هي حدوديات أولية درجة كل منها أكبر من الصفر فإنه حسب التمهيدية (6-3-2) فإن كلاً من الحدوديات $p_i(x)$ و $q_i(x)$ هي حدوديات رئيسية وحسب نتيجة المبرهنة (6-3-3) فإن كلاً من $p_1(x).p_2(x).\cdots.p_m(x)$ و $q_1(x)q_2(x).\cdots q_n(x)$ هو حدودية رئيسية وهذا يؤدي بدوره إلى أن $b_1 b_2 \cdots b_s = c_1 c_2 \cdots c_t$ وحسب المبرهنة (6-3-9) نجد أن $s = t$ وأن $b_i = \pm c_i$ وذلك أياً كان $i = 1,2,\cdots,s$. وبما أن الحلقة Z منطقة تكاملية نجد أن

$$p_1(x).p_2(x).\cdots.p_m(x) = \pm q_1(x)q_2(x).\cdots q_n(x)$$

بالنظر إلى الحدوديات $p_i(x), q_i(x)$ على أنها عناصر من $Q[x]$ وبملاحظة أن $p_1(x)$ تقسم الجداء $q_1(x)q_2(x).\cdots.q_n(x)$ فإنه حسب المبرهنة (6-2-10) نجد أن الحدودية $p_1(x)$ تقسم إحدى الحدوديات $q_i(x)$. لنفرض أن الحدودية $p_1(x)$ تقسم الحدودية $q_i(x)$ ولنعيد ترقيم الحدوديات $q_j(x)$ بحيث تكون $p_1(x)$ تقسم $q_1(x)$ وبما أن الحدودية $q_1(x)$ أولية في $Q[x]$ وذلك حسب المبرهنة (6-3-5) نجد أن $q_1(x) = (\alpha/\beta)p_1(x)$ حيث $\alpha, \beta \in Z$ وبما أن كل من الحدوديات $p_1(x)$ و $q_1(x)$ رئيسية نجد أن $\alpha/\beta = \pm 1$ ومنه يكون $p_1(x) = \pm q_1(x)$ وبما أن الحلقة $Z[x]$ منطقة تكاملية نجد أن

$$p_2(x).p_3(x).\cdots.p_m(x) = \pm q_2(x)q_3(x).\cdots q_n(x)$$

لنكرر العملية السابقة لأجل الحدودية $p_2(x)$ ثم $p_3(x)$ وهكذا.

- إذا كان $m < n$ عندئذ بعد m من الخطوات نجد أن

$$1 = \pm q_{m+1}(x)q_{m+2}(x).\cdots q_n(x)$$

وهذا غير ممكن.

- إذا كان $m > n$ عندئذ بعد n من الخطوات نجد أن

$$p_{n+1}(x).p_{n+2}(x).\cdots.p_m(x) = \pm 1$$

وهذا أيضاً غير ممكن. مما سبق نجد أن $n = m$ وأن $p_i(x) = \pm q_i(x)$.

لنورد الآن مثالاً يبين لنا أن حلقة الحدوديات $Z[x]$ ليست حلقة مثاليات رئيسية.

مثـــال.

الحلقة $Z[x]$ ليست حلقة مثاليات رئيسية.

الحـــل.

لنأخـــذ المجموعـــة $I=\{f(x):f(x)\in Z[x];f(o)=o\ mod-2\}$. إن المجموعة I تشكل مثالياً في $Z[x]$ أنظر التمرين المحلول رقم (5). لنبرهن على أنه لا يوجد في $Z[x]$ عنصر $h(x)$ يحقق $I=\langle h(x)\rangle$.

لنفرض جدلاً أن $I=\langle h(x)\rangle$ حيث $h(x)\in Z[x]$. بمـــا أن $2\in I$ فإنـــه يوجـــد $f(x)\in Z[x]$ بحيث $2=h(x)f(x)$ ومنه فإن

$$\partial(h(x)f(x))=\partial h(x)+\partial f(x)=\partial 2=o$$

وبالتالي يكون $\partial h(x)=o$ أي أن $h(x)=a$ حيـــث $o\neq a\in Z$. لنوجـــد قيمـــة العنصر a. بما أن $h(1)f(1)=2$ فإنه إما $h(1)=\pm 1$ أو $h(1)=\pm 2$. بما أن $1\notin I$ نجد أن $h(x)=\pm 2$. من جهة أخرى بما أن $x\in I$ فإنه يوجـــد $g(x)\subset Z[x]$ بحيث $x=h(x)g(x)$ ومنه نجد أن $x=\pm 2g(x)$ وهذا غير ممكن. مما ســـبق نجد أنه لا يوجد $h(x)\in Z[x]$ بحيث $I=\langle h(x)\rangle$ وهذا يبين لنـــا أن المثـــالي I ليس مثالياً رئيسياً وبالتالي فإن الحلقة $Z[x]$ ليست حلقة مثاليات رئيسية. ◊

بالاعتماد على المثال الأخير يمكننا صياغة النتيجة المهمة الآتية:

نتيجـــة.

إذا كانت D حلقة مثاليات رئيسية فإن $D[x]$ ليـــست بالـــضرورة حلقـــة مثاليـــات رئيسية. ◊

Damascus University

تمـــاريـــن محـلـــولـــة (6)

1 - أثبت أن المثالي $A = \langle x \rangle$ أولي في $Z[x]$ وليس أعظمياً.

الحـــل.

نلاحظ أولاً أن $A = \langle x \rangle = x.Z[x]$ بمعنى آخر أياً كان $f(x) \in A$ فإنـــه إمـــا $f(x) = o$ أو $\partial f(x) > o$ كما أن $A \neq Z[x]$ لأنه أياً كان $o \neq a \in Z$ فـــإن $a \in Z[x]$ وأن $\partial(a(x) = a) = o$ وبالتالي فإن $a \notin A$.

لنعرف العلاقة $\varphi : Z \to Z[x]/A$ بالشكل الآتي $\varphi(a) = a + A$ وذلك أيـــاً كـــان $a \in Z$ فنجد أن φ تشاكل حلقي لأنه أياً كان $a,b \in Z$ فإن

$$\varphi(a+b) = (a+b)+A = (a+A)+(b+A) = \varphi(a)+\varphi(b)$$

$$\varphi(ab) = (ab)+A = (a+A).(b+A) = \varphi(a).\varphi(b)$$

كما أن التطبيق φ متبـــاين لأنـــه إذا كـــان $c,d \in Z$ بحيـــث $\varphi(c) = \varphi(d)$ فـــإن $c + A = d + A$ وبالتـــالي يكـــون $c - d \in A$ ومنـــه يكـــون $c - d = x f(x)$. لنفرض أن $f(x) \in Z[x]$ حيث $f(x) = \sum_{i=o}^{n} d_i x^i$ حيث $d_i \in Z$ فنجد أن

$$c - d = d_n x^{n+1} + d_{n-1} x^n + \cdots + d_1 x^2 + d_n x$$

ومنه نجد أن $d_n = d_{n-1} = \cdots = d_1 = d_n = o$ أي إن $c - d = o$ وبالتـــالي $c = d$ وهذا يبين لنا أن التطبيق φ متباين. كما أن φ غامر لأنه إذا كان $\overline{\lambda}(x) \in Z[x]/A$ فإن $\overline{\lambda(x)} = \lambda(x) + A$ حيث $\lambda(x) \in Z[x]$. لنفـــرض أن $\lambda(x) = \sum_{i=o}^{n} c_i x^i$ حيث $c_i \in Z$ عندئذ

$$\lambda(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_o =$$

$$= x(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1) + c_o$$

بفـــرض أن $\lambda(x) = x\,\mu(x) = c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1$ عندئـــذ $\mu(x) \in Z[x]$ ومنه يكون

$$\overline{\lambda(x)} = \lambda(x) + A = (x\,\mu(x) + c_0) + A =$$
$$= (x\,\mu(x) + A) + (c_0 + A) = c_0 + A$$

وبما أن $c_0 \in Z$ نجد أن $\varphi(c_0) = c_0 + A = \overline{\lambda(x)}$ وهذا يبين لنا أن التطبيق φ غامر. مما سبق نجد أن φ تماثل حلقي. وبما أن Z منطقة تكاملية نجد أن $Z[x]/A$ منطقة تكاملية أيضاً وحسب المبرهنة (5-1-2) نجد أن المثالي A أولي في $Z[x]$. لنفرض جدلاً أن المثالي A أعظمي في $Z[x]$ عندئذ تكون الحلقة $Z[x]/A$ حقلاً وبما أن $Z[x]/A \cong Z$ نجد أن Z حقل وهذا غير صحيح. مما سبق نجد أن المثالي A ليس أعظمياً في $Z[x]$.

2 - لنأخذ الحقل $Z_3 = \{0,1,2\}$ ولتكن $p(x) = x^2 + 1 \in Z_3[x]$ وللنفرض أن $A = \langle p(x) \rangle$. أثبت أن الحلقة $Z_3[x]/A$ حقل ثم أوجد عناصر هذا الحقل.

الحل.

نلاحظ أن $p(0) = 1$ وأن $p(1) = p(2) = 2$ وهذا يبين لنا أن الحدودية $p(x)$ لا تملك أصفاراً في الحقل Z_3 وبما أن $\partial p(x) = 2$ فإنه حسب التمهيدية (6-2-5) تكون الحدودية $p(x)$ أولية في Z_3. ومنه حسب المبرهنة (6-2-11) تكون الحلقة $Z_3[x]/A$ حقلاً.

ليكن $\overline{f(x)} \in Z_3[x]/A$ عندئذ $\overline{f(x)} = f(x) + A$ حيث $f(x) \in Z_3[x]$ وحسب خوارزمية القسمة لأجل العنصرين $f(x), p(x)$ في $Z_3[x]$ فإنه يوجد عناصر $q(x), r(x)$ بحيث $f(x) = q(x)p(x) + r(x)$ حيث إما $r(x) = 0$ أو $\partial r(x) < \partial p(x) = 2$ ومنه نجد أن $r(x) = ax + b$ حيث $a,b \in Z_3$ وهكذا نجد أن $\overline{f(x)} = f(x) + A = [q(x)p(x) + r(x)] + A = r(x) + A$ ومنه $Z_3[x]/A = \{(ax+b) + A : a,b \in Z_3\}$ أي أن

$$Z_3[x]/A = \{A, 1+A, 2+A, (x+1)+A, (x+2)+A, (2x+1)+A,$$
$$(2x+2)+A, x+A, 2x+A\}$$

3 - ليكن p عدداً أولياً ولتكن $Z_p[x]$ حلقة الحدوديات فوق Z_p. أثبت أن

$$x^{p-1}-1=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-(p-1))$$

في $Z_p[x]$.

الحـل.

بما أن p عدداً أولياً فإن الحلقة $Z_p=\{0,1,2,\cdots,(p-1)\}$ حقل ومنه فـإن كـل عنصر من Z_p مغاير للصفر يملك مقلوباً في Z_p أي أن $U(Z_p)=Z_p\setminus\{o\}$ وبما أن المجموعة $U(Z_p)$ زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الضرب وأن مرتبتها $(p-1)$ فإنه أياً كان $a\in U(Z_p)$ فإن $a^{p-1}=1$ أي إنه أياً كان $o\neq a\in Z_p$ فـإن $a^{p-1}=1$ ومنه $a^{p-1}-1=o$. لنأخذ الحدودية $f(x)=x^{p-1}-1$ فنجـد أن $f(x)\in Z_p[x]$ وأنه أياً كان $o\neq a\in Z_p$ فإن $f(a)=o$ وهذا يبين لنا أن كل عنصر $o\neq a\in Z_p$ هو صفر للحدودية $f(x)=x^{p-1}-1$ وبالتالي فإنه حسب التمهيدية (6-1-7) فـإن $x-a$ يقسم الحدودية $f(x)$ في $Z_p[x]$.

بمـا أن $f(1)=o$ فـإن $x-1$ يقـسم الحدوديـة $f(x)$ فـي $Z_p[x]$ ومنـه يوجد $\varphi_1(x)\in Z_p[x]$ بحيث $f(x)=(x-1)\varphi_1(x)$ وبما أن $f(2)=o$ نجد أن $\varphi_1(2)=o$ ومنه فإن $x-2$ يقسم الحدودية $\varphi_1(x)$ في $Z_p[x]$ وبالتالي يوجـد $\varphi_2(x)\in Z_p[x]$ بحيث $\varphi_1(x)=(x-2)\varphi_2(x)$ ومنه

$$f(x)=(x-1)(x-2)\varphi_2(x)$$

وبما أن $f(3)=o$ نجد أن $2\varphi_2(3)=o$ ومنه فإن $\varphi_2(3)=o$ وذلك لأن Z_p حقـل وبالتـالي فـإن $x-3$ يقسم الحدوديـة $\varphi_2(x)$ فـي $Z_p[x]$ ومنـه يوجـد $\varphi_3(x)\in Z_p[x]$ بحيث $\varphi_2(x)=(x-3)\varphi_3(x)$ وبالتالي يكون

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\varphi_3(x)$$

نتابع بهذا الشكل إلى أن نصل إلى العنصر $a=p-1$ ومنه يكون

$$x^{p-1}-1=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-(p-1))$$

4 - لتكن R حلقة و $R[x]$ حلقة الحدوديات فوق R. عندئذ:

1. إذا كان A مثالياً في R فإن $A[x]$ مثالي في $R[x]$.
2. إذا كانت الحلقة R تبديلية وكان B مثالياً أولياً في R فإن $B[x]$ مثالي أولي في $R[x]$.

الحل.

1 - لنفرض أن A مثالي في R إن

$$A[x]=\{f(x):f(x)\in R[x];f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i;a_i\in A;o\le i\le n\}$$

بما أن $o\in A$ عندئذ $o\in A[x]$ وبالتالي المجموعة $A[x]$ غير خالية.

ليكن $f(x),g(x)\in A[x]$ ولنفرض أن $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$ عندئذ $a_i,b_i\in A$ وبما أن A مثالي في R فإن $a_i-b_i\in A$ ومنه

$$f(x)-g(x)=\sum_{i=0}^{\max\{n,m\}}(a_i-b_i)x^i\in A[x]$$

ليكن $h(x)\in A[x]$ و $\varphi(x)\in R[x]$ ولنفرض أن $h(x)=\sum_{i=0}^{k}d_ix^i$ و $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{t}c_ix^i$ عندئذ $d_j\in A$ و $c_i\in R$. بفرض أن $\varphi(x)h(x)=\mu(x)$

وأن $\mu(x)=\sum_{k=0}^{s+t}\alpha_kx^k$ حيث $\alpha_k=\sum_{k=i+j}c_id_j$.

بما أن A مثالياً في R وأن $d_i\in A$ و $c_i\in R$ نجد أن $c_id_j\in A$ وبالتالي يكون $\alpha_k=\sum_{k=i+j}c_id_j\in A$ ومنه نجد أن $\mu(x)=\sum_{k=0}^{s+t}\alpha_kx^k\in A[x]$. بطريقة مشابهة نجد أنه أياً كان $\psi(x)\in A[x]$ و $\lambda(x)\in R[x]$ فإن $\psi(x)\lambda(x)\in A[x]$. مما سبق نجد أن المجموعة $A[x]$ مثالي في $R[x]$.

2 - لنفرض أن الحلقة R تبديلية وأن B مثالي أولي في R عندئذ حسب (1) فإن $B[x]$ مثالي في $R[x]$. من جهة أخرى لما كان المثالي B مثالياً أولياً في R

عندئذ $B \neq R$ ومنه يوجد $b \in R$ بحيث $b \notin B$ ومنه $f(x) = bx \in R[x]$ وأن $f(x) \notin B[x]$ وهذا يبين لنا أن $B[x] \neq R[x]$.

ليكن $f(x), g(x) \in R[x]$ بحيث $f(x).g(x) \in B[x]$ ولنفرض أن $f(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=m}^{m} b_i x^i$ حيث $a_i, b_i \in R$ ولنفرض أن

$$f(x).g(x) = h(x) = \sum_{i=o}^{n+m} c_i x^i$$

حيث $c_k = \sum_{k=i+j} a_i b_j$ بما أن $h(x) \in B[x]$ عندئذ فإن $c_k \in B$ لأجل جميع القيم $o \leq k \leq n+m$.

- لدينا $c_n = a_n b_o \in B$ وبما أن المثالي B أولياً في R عندئذ إما $a_o \in B$ أو $b_o \in B$. لنفرض أن $b_o \notin B$ عندئذ يكون $a_o \in B$ كما أنه في هذه الحالة يكون $g(x) \notin B[x]$. لنبرهن على أن $f(x) \in B[x]$ أي لنبرهن على أن $a_i \in B$ أياً كان $o \leq i \leq n$.

- لدينا أيضاً $c_1 = a_n b_1 + a_1 b_n \in B$ وبما أن $a_n \in B$ نجد أن $a_n b_1 \in B$ ومنه يكون $a_1 b_n = c_1 - a_n b_1 \in B$ وبما أن $b_n \notin B$ وأن B أولي نجد أن $a_1 \in B$.

- وأيضاً لدينا $c_2 = a_n b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_n \in B$ وبما أن $a_1, a_n \in B$ نجد أن $a_n b_2, a_1 b_1 \in B$ ومنه يكون $a_2 b_n = c_2 - a_n b_2 - a_1 b_1 \in B$ وبما أن $b_n \notin B$ نجد أن $a_2 \in B$. نتابع بهذا الشكل ومن خلال الاستقراء بحسب n. لنفرض أنه تم إثبات أن $a_o, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in B$ ولنبرهن على أن $a_n \in B$. بما أن $c_n = \sum_{n=i+j} a_i b_j \in B$ أي $c_n = a_o b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_o \in B$ وأن $a_o, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in B$ نجد أن $a_n b_o = c_n - (a_o b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1) \in B$ وبما أن $b_o \notin B$ نجد أن $a_n \in B$ وهكذا نجد أن $a_o, a_1, a_2, \cdots, a_n \in B$ ومنه فإن $f(x) \in B[x]$ وهذا يبين لنا أن المثالي $B[x]$ أولي في $R[x]$.

5 - لتكن $Z[x]$ حلقة الحدوديات فوق Z ولتكن

$$K=\{f : f \in Z[x]; f(o)=o \bmod -2\}$$

أثبت أن: 1 - المجموعة K مثالي في $Z[x]$.

2 - المثالي K أولي في $Z[x]$.

الحل.

1 - نلاحظ أن المجموعة K غير خالية لأن $o \in K$. ليكن $f, g \in K$ عندئذ كلاً من $f(o), g(o)$ هي أعداد زوجية وبما أن فرق عددين زوجيين هو أيضاً عدد زوجي نجد أن $(f-g)(o)=f(o)-g(o)=o \bmod -2$ ومنه يكون $f-g \in K$.

ليكن $\varphi \in K$ عندئذ أياً كان $\mu \in Z[x]$ فإن $(\mu\varphi)(o)=\mu(o)\varphi(o)=o \bmod -2$ وذلك لأن جداء أي عنصرين أحدهما زوجي يكون الناتج عدد زوجياً وهذا يبين لنا أن $\mu\varphi \in K$. مما سبق نجد أن المجموعة K هي مثالي في $Z[x]$.

2 - نلاحظ على سبيل المثال أن $f(x)=x+1 \in Z[x]$ وأن $f(o)=1 \neq o \bmod -2$ أي أن $f \notin K$ وهذا يبين لنا أن $K \neq Z[x]$. ليكن $f, g \in Z[x]$ بحيث $f, g \in K$ عندئذ $(fg)(o)=f(o)g(o)=o \bmod -2$ ومنه فإن الجداء $f(o)g(o)$ هو عدد صحيح زوجي وبالتالي فإن أحد العددين $f(o)$ أو $g(o)$ على الأقل هو عدد زوجي وهذا يبين لنا أنه إما $g(o)=o \bmod -2$ أو $f(o)=o \bmod -2$ وبالتالي إما $f \in K$ أو $g \in K$. مما سبق نجد أن المثالي K أولي في $Z[x]$.

تعريف.

لتكن $F[x]$ حلقة الحدوديات على الحقل F وليكن $f(x), g(x) \in F[x]$. نقول عن الحدوديتين $f(x), g(x)$ إنهما أوليتان فيما بينهما إذا تحقق الشرط الآتي: أياً كان $\theta(x) \in F[x]$ وكان $\theta(x)$ يقسم كلاً من $f(x), g(x)$ فإن $\partial\theta(x)=o$.

6 - لتكن $F[x]$ حلقة الحدوديات على الحقل F ولتكن $f(x), g(x)$ حدوديتين أوليتين فيما بينهما في $F[x]$. أثبت أنه توجد $h(x), q(x) \in F[x]$ تحققان

$$f(x)q(x)+g(x)h(x)=1$$

الحـــل.

لنأخذ المجموعـــة $A=\{f(x)r(x)+g(x)p(x):r(x),p(x)\in F[x]\}$.
إن المجموعة A تشكل مثالياً في $F[x]$ (أثبت ذلك). وبما أن F حقـــلاً فإنـــه حـــسب المبرهنة (6-1-9) فإن الحلقة $F[x]$ هي حلقة مثاليات رئيسية ومنه فإن المثـــالي A هـــو مثـــالي رئيـــسي فـــي $F[x]$ وبالتـــالي يوجـــد $\theta(x)\in F[x]$ بحيـــث $A=\theta(x).F[x]$ وبما أن

$$f(x)=f(x).1+g(x)o\in A$$
$$g(x)=f(x)o+g(x).1\in A$$

فإنـــه يوجـــد $h_u(x),d_o(x)\in F[x]$ بحيـــث $f(x)=h_u(x)\theta(x)$ و $g(x)=d_o(x)\theta(x)$ وهذا يبين لنا أن $\theta(x)$ يقسم كـــلاً مـــن $f(x),g(x)$ وبما أن $f(x),g(x)$ أوليين فيما بينهما ينـــتج أن $\partial\theta(x)=o$ أي أن $\theta(x)=a$ حيث $o\neq a\in F$ ومنه فإن العنصر a قابل للقلب فـــي $F[x]$ وأن $a\in A$ وبالتـــالي يكون $A=F[x]$ أي أن $1\in A$ ومنه فإن $f(x)q(x)+g(x)h(x)=1$ حيث $h(x),q(x)\in F[x]$.

7 - لتكن $Z[x]$ حلقة الحدوديات فوق Z ولنأخذ المجموعة

$$I=\{f(x):f(x)\in Z[x];\ f(o)=o\}$$

1. أثبت أن المجموعة I تشكل مثالياً في الحلقة $Z[x]$.
2. أثبت أن المثالي I أولي في الحلقة $Z[x]$.
3. أثبت أن المثالي I ليس أعظمياً في الحلقة $Z[x]$.

الحـــل.

1 - نتركه كتمرين للقارئ.

2 - بما أن $f(x)=x+1\in Z[x]$ وأن $f(o)=1\neq o$ نجد أن $f(x)\notin I$ ومنه فإن $I\neq Z[x]$. لـــيكن $g(x),h(x)\in Z[x]$ بحيـــث $g(x)\cdot h(x)\in I$ عندئـــذ

$g(o)\cdot h(o)=o$. لنفـــرض أن $g(x)=\sum_{i=o}^{n}a_i x^i$ و $h(x)=\sum_{i=o}^{m}b_i x^i$ حيـــث $a_i,b_i\in Z$ ولنفرض أن $g(x)\cdot h(x)=\sum_{k=o}^{n+m}c_k x^k$ حيث $c_k=\sum_{k=i+j}a_i b_j$. بمـــا أن $g(o)\cdot h(o)=o$ نجد أن $c_k=o$ لأجل جميع القيم $o\le k\le n+m$ ومنـــه يكـــون $c_o=a_o b_o=o$ وبما أن $a_o,b_o\in Z$ وأن Z منطقة تكاملية نجد أنـــه إمـــا $a_o=o$ أو $b_o=o$. إذا كان $a_o=o$ عندئذ يكون $g(x)=\sum_{i=o}^{n}a_i x^i$ ومنـــه $g(o)=o$ وبالتـــالي $g(x)\in I$. إذا كان $b_o=o$ عندئذ يكون $h(x)=\sum_{i=o}^{m}b_i x^i$ ومنـــه فـــإن $h(o)=o$ وبالتالي $h(x)\in I$. مما سبق نجد أن المثالي I أولي في $Z[x]$.

3 - لنفرض جدلاً أن المثالي I أعظمي في الحلقة $Z[x]$ عندئذ وحـــسب المبرهنـــة (5-1-14) تكون الحلقة $Z[x]/I$ حقلاً.

لنعرف التطبيق $\varphi:Z[x]\to Z$ بالشكل التالي: أياً كـــان $h(x)=\sum_{i=o}^{n}d_i x^i\in Z[x]$ فإن $\varphi(h(x))=d_o$ فنجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي لأنـــه أيـــاً كـــان $f(x)$ و $g(x)$ عناصر من $Z[x]$ بحيـــث $f(x)=\sum_{i=o}^{n}a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{i=o}^{m}b_i x^i$ وحيـــث $a_i,b_j\in Z$ لأجل جميع القيم $o\le i\le n$ و $o\le j\le m$ عندئذ

$$\varphi(f(x)+g(x))=\varphi(\sum_{i=o}^{n}a_i x^i+\sum_{i=o}^{m}b_i x^i)=\varphi(\sum_{i=o}^{\max(n,m)}(a_i+b_i)x^i)=$$

$$=a_o+b_o=\varphi(f(x))+\varphi(g(x))$$

لنفرض أن $f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=o}^{n+m}c_k x^k$ حيث $c_k=\sum_{k=i+j}a_i b_j$ عندئذ

$$\varphi(f(x)\cdot g(x))=\varphi(\sum_{k=o}^{n+m}c_k x^k)=c_o=a_o\cdot b_o=\varphi(f(x))\cdot\varphi(g(x))$$

كما أن $\varphi(1)=1$. مما سبق نجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي وهو أيضاً غامر لأنه أياً كان $d\in Z$ فإن $x+d\in Z[x]$ ويحقق $\varphi(x+d)=d$ وحسب المبرهنة (5-1-3) نجد أن $Z[x]/Ker\,\varphi\cong Z$.

لنبرهن الآن على أن $Ker\,\varphi=I$. ليكن $\lambda(x)\in Ker\,\varphi$ عندئذ $\lambda(x)\in Z[x]$.

لنفرض أن $\lambda(x)=\sum_{i=0}^{s}c_ix^i$ حيث $c_i\in Z$ عندئذ $\varphi(\lambda(x))=o$ وأن $\varphi(\lambda(x))=c_o$

ومنه نجد أن $c_o=o$ وبالتالي $\lambda(x)=\sum_{i=1}^{n}c_ix^i$ وهذا يبين لنا أن $\lambda(o)=o$ وبالتالي يكون $\lambda(x)\in I$ ومنه يكون $Ker\,\varphi\subseteq I$. ليكن $\mu(x)\in I$ عندئذ يكون $\mu(x)\in Z[x]$ وأن $\mu(o)=o$ وهذا يبين لنا أن $\mu(x)=\sum_{i=1}^{r}r_ix^i$ ومنه يكون $\varphi(\mu(x))=r_o=o$ وبالتالي نجد أن $\mu(x)\in Ker\,\varphi$ أي أن $I\subseteq Ker\,\varphi$. مما سبق نجد أن $Ker\,\varphi=I$ وهكذا نجد أن $Z[x]/I\cong Z$ وبما أن $Z[x]/I$ حقل نجد أن Z حقل وهذا غير صحيح ومنه فإن المثالي I ليس أعظمياً في الحلقة $Z[x]$.

8 - ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات فوق الحقل F ولتكن $p(x)\in F[x]$ و $A=\langle p(x)\rangle$. إذا كانت $f(x),g(x)\in F[x]$ تحققان الشروط:

1. $\partial f(x)<\partial p(x)$ و $\partial g(x)<\partial p(x)$.
2. $f(x)+A=g(x)+A$.

أثبت أن $f(x)=g(x)$.

الحل.

لنفرض جدلاً أن $f(x)\neq g(x)$ عندئذ $f(x)-g(x)\neq o$ وحسب (1) فإن

$$\partial(f(x)-g(x))\leq max\{\partial f(x),\partial g(x)\}<\partial p(x)$$

من جهة أخرى بما أن $f(x)+A=g(x)+A$ فإن $f(x)-g(x)\in A$ وبما أن $A=\langle p(x)\rangle$ فإنه يوجد $\lambda(x)\in F[x]$ بحيث $f(x)-g(x)=p(x)\cdot\lambda(x)$ ومنه

$$\partial(f(x)-g(x))=\partial p(x)+\partial\lambda(x)\geq\partial p(x)$$

وهذا يناقض كون $f(x)-g(x)\neq o$. مما سبق نجد أن $f(x)=g(x)$.

تمـــاريـــن (6)

1 - عين كلاً من $U(Z[x])$ و $U(R[x])$.

2 - ليكن $f(x)=4x^3+2x^2+x+3, g(x)=3x^4+3x^3+2x^2+x+4$ حيث $f(x),g(x)\in Z_5[x]$. أوجد $f(x)+g(x)$ و $f(x).g(x)$.

3 - ليكن $f(x)=x^3+2x+4, g(x)=3x+2\in Z_5[x]$ أوجد باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)$.

4 - ليكن $f(x)=5x^4+3x^3+1, g(x)=3x^2+2x+1\in Z_7[x]$ أوجد باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)$.

5 - أثبت أن الحدودية $f(x)=2x+1\in Z_4[x]$ قابلة للقلب في $Z_4[x]$.

6 - ليكن p عدداً أولياً أوجد $U(Z_p[x])$.

7 - أوجد جميع حلول المعادلة $x^2-x+2=0$ في الحلقة $Z_3[i]$.

8 - بين أي من الحدوديات الآتية هي حدوديات أولية فوق Q.

- $f(x)=x^5+9x^4+12x^2+6$
- $g(x)=x^4+x+1$
- $h(x)=x^4+3x^2+3$
- $q(x)=x^5+5x^2+1$
- $\mu(x)=8x^3-6x^2+1$
- $\lambda(x)=(5/2)x^5+(9/2)x^4+15x^3+(7/3)x^2+6x+3/14$

9 - أثبت أن الحدودية $g(x)=x^2+x+4$ أولية فوق Z_{11}.

10 - لتكن $f(x)=x^3+6\in Z_7[x]$ أكتب $f(x)$ على شكل جداء لحدوديات أولية فوق Z_7.

11 - لتكن $f(x)=x^3+x^2+x+1\in Z_2[x]$ أكتب $f(x)$ على شكل جداء لحدوديات أولية فوق Z_2.

12 - أثبت أن الحدودية $f(x)=x^3+x^2+x+1$ غير أولية فوق Q.

13 - ليكن $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً ولنعرف العلاقة $\overline{f}: R[x] \to S[x]$ بالشكل الآتي: أياً كان $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ فإن $\overline{f}(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) x^i$. أثبت أن $\overline{f}$ تشاكل حلقي.

14 - أثبت أنه إذا كانت الحلقتان R, S متماثلتين فإن الحلقتين $R[x], S[x]$ متماثلتين أيضاً.

15 - أثبت أن الحدودية $f(x) = x^5 + 2x + 4 \in Z[x]$ أولية فوق Z وذلك بالاعتماد على المبرهنة (6-2-8).

16 - أوجد كلاً من $q(x)$ و $r(x)$ بحيث $f(x) = q(x).g(x) + r(x)$ حيث $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2, g(x) = x^2 + 2x - 3$ في $Z_7[x]$.

17 - أثبت أن المثالي $\langle x^2 + 1 \rangle$ أولي في $Z[x]$ ولكنه ليس أعظمياً.

18 - أثبت أن الحلقة $R[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ حقل حيث R حقل الأعداد الحقيقية.

19 - ليكن p عدداً أولياً أثبت أن مميز الحلقة $Z_p[x]$ هو p.

20 - لتكن R حلقة التوابع المستمرة من $\mathfrak{R}$ إلى $\mathfrak{R}$. أثبت أن المجموعة

$$A = \{f : f \in R;\ f(o) = o\}$$

مثالي أعظمي في R.

21 - لأجل أي عدد أولي p أثبت أن الحدودية $x^4 + 1$ غير أولية فوق Z_p.

22 - أثبت أن المثالي $\langle x \rangle$ أعظمي في $Q[x]$.

23 - لتكن $Z_5[x]$ حلقة الحدوديات فوق الحقل Z_5 و $A = \langle x^2 + x + 1 \rangle$. أوجد مقلوب العنصر $(2x + 3) + A$ في الحلقة $Z_5[x]/A$.

24 - لتكن $Z_2[x]$ حلقة الحدوديات فوق الحقل Z_2 ولـيكن $A = \langle x^3 + x + 1 \rangle$. أثبت أن الحلقة $Z_2[x]/A$ حقل ثم أوجد جميع عناصره.

25 - لتكن $Z_3[x]$ حلقة الحدوديات فوق الحقل Z_3 ولـيكن $B = \langle x^2 + x + 1 \rangle$. أثبت أن الحلقة $Z_3[x]/B$ ليست حقلاً.

26 - لتكن $Z[i]$ حلقة غاوص و $D = \langle 1 - i \rangle$. أثبت أن الحلقة $Z[i]/D$ حقل.

27 - ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات فوق F . لنأخذ المجموعة

$$K=\{f(x):f(x)\in F[x];f(a)=o,\forall a\in F\}$$

والمطلوب:

1. أثبت أن المجموعة K مثالي في $F[x]$.
2. إذا كان الحقل F منتهياً أثبت أن المثالي K غير منته.
3. إذا كان الحقل F غير منته أثبت أن المثالي K منته.

28 - أثبت أن الحدودية x^4+1 أولية فوق Q وغير أولية فوق حقل الأعداد الحقيقية.

29 - بفرض أن $f(x)=3x^2+4x+3\in Z_5[x]$. أثبت أن الحدودية $f(x)$ يمكن كتابتها بالشكل $(3x+2)(x+4)$ وأيضاً بالشكل $(4x+1)(2x+3)$.

30 - ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة الحدوديات فوق F . ولنأخذ المجموعة

$$I=\{f(x):f(x)=\sum_{i=o}^{n}a_ix^i;n\in N;a_i\in F;\sum_{i=o}^{n}a_i\}$$

أثبت أن المجموعة I مثالي في الحلقة $F[x]$.

31 - ليكن m عدداً صحيحاً موجباً ولنفرض أنه أياً كان $a\in Z$ فإن $a=a \bmod m$. أثبت أن التطبيق $\varphi:Z[x]\to Z_m[x]$ المعرف بالشكل $\varphi(\sum_{i=o}^{n}a_ix^i)=\sum_{i=o}^{n}\bar{a}_ix^i$ هو تشاكل حلقي غامر.

32 - ليكن F حقلاً و $f(x)=\sum_{i=o}^{n}a_ix^i\in F[x]$. أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $g(x)=x-1$ قاسماً للحدودية $f(x)$ هو أن يكون $\sum_{i=o}^{n}a_i=o$.

33 - أوجد جميع الحدوديات الأولية من الدرجة الثانية في الحلقة $Z_3[x]$.

34 - ليكن F حقلاً و $p(x)\in F[x]$. إذا كانت الحدودية $f(x)$ أولية فوق F وكان $A=\langle p(x)\rangle$. أثبت أن المجموعة $I=\{a+A;a\in F\}$ حقل جزئي من الحقل $F[x]/A$ يماثل F .

35 - أياً كان $m,n \in Z$ أثبت أن الحدودية $x^3+(5m+1)x+5n+1$ تكون أولية فوق Z.

36 - أثبت أن الحدودية x^4+15x^3+7 أولية فوق Q.

Damascus University

الفصـــــل الســـــابـــع

تمـــديـــدات الحقـــــول

من خلال دراستنا السابقة للحلقات يمكننا القول إنه أصبح بمقدورنا التمييـز بـين نوعين من الحقول حقول منتهية وحقول غير منتهية. فعلى سبيل المثال وجدنا مـن خلال التمرين المحلول (6-2) أن $Z_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ هـو حقـل منتـه مرتبتـه 9 بينما $R[x]/\langle x^2+1\rangle$ حقل غير منته لأنه يماثل حقل الأعداد العقدية (المركبة).

في هذا الفصل سوف نورد عدد من المفاهيم والمبرهنات المتعلقة بنظريـة الحقـول بشكل عام وبالحقول المنتهية بشكل خاص والذي يمثل الجزء الأكثر متعة من الجبـر المجرد.

7 - 1. تمـديـد الحقـــول.

تعريـــف.

نقول عن الحقل E إنه ممدد للحقل F إذا كان $F \subseteq E$. بمعنى آخر نقـول عـن الحقل F إنه ممدد للحقل F إذا كان F حقلاً جزئياً من الحقل E.

ملاحظـــة.

لابد من التنويه إلى أنه إذا كان الحقل E ممدداً للحقل F فـإن العمليـات الثنائيـة المعرفة على F هي ذاتها العمليات الثنائية المعرفة على الحقل E.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل حقل يعتبر ممدد لأي حقل جزئي منه.

تعريـــف.

ليكن E تمديداً للحقل F و $a_1,a_2,\cdots,a_n \in E$. سوف نرمز إلى أصغر حقل جزئي في E يحوي كلاً من F والمجموعة $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ بالرمز $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

لندرس الآن طبيعة الحقل $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 7 -1 -1.

ليكن E حقلاً ممدداً للحقل F و $a_1,a_2,\cdots,a_n \in E$. إن الحقـــل $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ يساوي إلى تقاطع جميع الحقول الجزئية في E والتي كل منها يحوي F والمجموعـــة $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

البرهـــان.

لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة جميع الحقول الجزئية في الحقل E والتي كـــل منهـــا يحوي الحقل F والمجموعة $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ عندئذ $F(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \Im$ ومنه

$$\bigcap_{K\in\Im} K \subseteq F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

من جهة أخرى لما كان $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ هو أصغر حقل جزئي في الحقل E يحوي F والمجموعة $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ عندئذ أياً كان $D \in \Im$ فـــإن $F(a_1,a_2,\cdots,a_n) \subseteq D$ وبالتـــالي يكـــون $F(a_1,a_2,\cdots,a_n) \subseteq \bigcap_{K\in\Im} K$ ممـــا ســـبق نجـــد أن $F(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \bigcap_{K\in\Im} K$.

نأتي الآن لدراسة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 7 -1 -2.

ليكن E حقلاً ممدداً للحقل F. عندئذ:

1. أياً كان $a \in F$ فإن $F(a) = F$.
2. أياً كان $a,b \in E$ فإن $F(a,b) = F(a)(b) = F(b)(a)$.
3. أياً كان $a,b \in F$ بحيث $a \neq o$ وكان $d \in E$ فإن $F(d) = F(ad+b)$.

البرهـــان.

1 - بما أن $a \in F$ عندئذ فإن F هو أصغر حقل يحوي كلاً من الحقل F والعنـــصر a ومنه $F(a) = F$.

2 - لنفرض أن $K = F(a)$ عندئذ K هو أصغر حقل جزئي في E يحوي كلاً من F و a وبما أن $F(a,b)$ حقـــلاً جزئيـــاً فـــي E يحـــوي كـــلاً مـــن F و a نجـــد أن $K \subseteq F(a,b)$. وهذا يبين لنا أن الحقل $F(a,b)$ هـــو ممـــدد للحقـــل K وبمـــا أن

$b \in F(a,b)$ وأن $K(b)$ هو أصغر حقل جزئي في $F(a,b)$ يحوي كلاً من K و b نجد أن $K(b) \subseteq F(a,b)$. من جهة أخرى بما أن $K(b) \subseteq E$ وأن الحقل $K(b)$ يحوي كلاً من F والعناصر a,b وأن $F(a,b) \subseteq E$ وهو أصغر حقل جزئي في E يحوي كلاً من F والعناصر a,b نجد أن $F(a,b) \subseteq K(b)$. مما سبق نجد أن $F(a,b) = K(b)$ ومنه $F(a,b) = F(a)(b)$.

بطريقة مشابهة نجد أن $F(a,b) = F(b)(a)$.

3 - ليكن $a,b \in F$ بحيث $a \neq o$ و $d \in E$ عندئذ يكون $a,b \in F \subseteq F(d)$ ومنه فإن $a,b,d \in F(d)$ وبما أن $F(d)$ حقلاً فإن $ad \in F(d)$ وأن $ad+b \in F(d)$ وحسب (1) نجد أن $F(ad+b) = F(d)$.

مهمتنا الآن هي البحث عن وجود تمديد لحقل ما يحوي صفراً لحدودية مفروضة والبداية ستكون مع المبرهنة الآتية:

مبرهنة 7-1-3.

ليكن F حقلاً و $P(x)$ حدودية أولية في الحلقة $F[x]$ عندئذ يوجد تمديد E للحقل F يحوي صفراً للحدودية $P(x)$.

البرهان.

بما أن الحدودية $P(x)$ أولية في الحلقة $F[x]$ عندئذ وحسب المبرهنة (6-2-7) فإن المثالي $A = \langle P(x) \rangle$ هو مثالي أعظمي في $F[x]$ وحسب المبرهنة (5-1-14) تكون حلقة الخارج $F[x]/A$ حقلاً.

لنفرض أن $E = F[x]/A$ ولنعرف التطبيق $\varphi : F \to E$ بالشكل الآتي: أياً كان $a \in F$ فإن $\varphi(a) = a + A$ فنجد أن φ هو تشاكل حلقي لأنه أياً كان $a,b \in F$ فإن

$$\varphi(a+b) = (a+b)+A = (a+A)+(b+A) = \varphi(a)+\varphi(b)$$

$$\varphi(ab) = ab+A = (a+A).(b+A) = \varphi(a).\varphi(b)$$

كما أن التطبيق φ متباين لأنه إذا كان $a,b \in F$ بحيث $\varphi(a) = \varphi(b)$ عندئذ يكون $a+A = b+A$ ومنه $a-b \in A$. وبما أن $A = \langle p(x) \rangle$ فإنه يوجد $g(x) \in F[x]$ بحيث $a-b = p(x).g(x)$. إن $g(x) = o$ لأنه إذا كان $g(x) \neq o$ نجد أن

$$\partial(a-b)=\partial p(x)+\partial g(x)$$

وبما أن الحدودية $p(x)$ أولية في $F[x]$ فإن $\partial p(x)>o$ وهكذا نجد أن $o=\partial(a-b)\geq\partial p(x)>o$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $g(x)=o$ وبالتالي $a-b=o$ أي أن $a=b$ أصبح لدينا φ تشاكل متباين.

لنضع $Im\,\varphi=K$ فنجد أن $\varphi:F\to K$ هو تشاكل متباين وغامر أي تماثل وبما أن F حقلاً فإن K يكون حقلاً و $K\subseteq E$. بما أن الحقلان F,K متماثلين فإنه يمكن المطابقة بينهما وباعتبار أن الحقل F هو حقل جزئي في الحقل E. مما سبق نجد أن الحقل E هو تمديد للحقل F.

لنبرهن الآن على أن الحقل E يحوي صفراً للحدودية $p(x)$. بما أن $p(x)\in F[x]$ لنفترض أن $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o$ حيث $a_n,a_1,\cdots,a_n\in F$ ولنبرهن على أن العنصر $x+A\in E$ هو صفر للحدودية $p(x)$. إن

$$p(x+A)=a_n(x+A)^n+a_{n-1}(x+A)^{n-1}+\cdots+a_1(x+A)+a_o=$$
$$=a_n(x^n+A)+a_{n-1}(x^{n-1}+A)+\cdots+a_1(x+A)+a_o=$$
$$=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o)+A=P(x)+A=o+A=A$$

وهذا يبين لنا أن العنصر $x+A\in E$ هو صفر للحدودية $p(x)$.

نأتي الآن لدراسة المبرهنة الأساسية في نظرية الحقول والتي تسمى مبرهنة كرونكر *Kroneker'sTheorem* 1887.

مبرهنة 7-1-4.

ليكن F حقلاً و $f(x)\in F[x]$ بحيث $\partial f(x)>o$. عندئذ يوجد تمديد E للحقل F يحوي صفراً للحدودية $f(x)$.

البرهان.

بما أن F حقلاً عندئذ حسب المبرهنة (6-1-11) فإن الحلقة $F[x]$ هي حلقة تحليل وحيد وبما أن $f(x)\in F[x]$ وأن $\partial f(x)>o$ فإنه حسب المبرهنة (6-2-2) فإن $f(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$ وبالتالي يوجد في $F[x]$ عنصر أولي ولنكن

$p(x)$ ويقسم $f(x)$ في $F[x]$ ومنه يوجد $\lambda(x) \in F[x]$ بحيث $f(x) = p(x)\lambda(x)$. وبما أن الحدودية $p(x)$ أولية في $F[x]$ فإنه حسب المبرهنة (7-1-3) يوجد تمديد E للحقل F يحوي صفراً للحدودية $p(x)$ ولنكن α إن $\alpha \in E$ وأن $f(\alpha) = p(\alpha)\lambda(\alpha) = o$ أي إن α هو صفر للحدودية $f(x)$. مما سبق نجد أنه يوجد تمديد E للحقل F يحوي صفراً للحدودية $f(x)$.

لنورد الآن بعض الأمثلة توضح لنا فكرة المبرهنات السابقة.

أمثلة.

1 - لتكن $f(x) = x^2 + 1 \in Q[x]$. واضح أن الحدودية $f(x)$ هي حدودية أولية في $Q[x]$ وحسب المبرهنة (7-1-3) فإنه يوجد حقل ممدد للحقل Q هو $E = Q[x]/A$ حيث $A = \langle P(x) \rangle$ وهذا الحقل يحوي صفراً للحدودية $f(x)$ هو $x + A \in E$. لأن

$$f(x + A) = (x + A)^2 + 1 = (x^2 + 1) + A = o + A = A$$

نعلم أن الحدودية $f(x) = x^2 + 1$ تملك جذراً (صفراً) عقدياً (مركباً) هو $i = \sqrt{-1}$ ولكن ما نرغب في توضيحه هنا أننا نبني حقلاً يحوي حقل الأعداد النسبية Q وجذراً للحدودية $x^2 + 1$ وذلك باستخدام الحقل Q فقط.

2 - لنأخذ الحدودية $f(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 2 \in Z_3[x]$. نلاحظ أن الحدودية $f(x)$ غير أولية فوق Z_3 (تأكد من ذلك). وبما أن Z_3 حقل فإنه حسب المبرهنة (6-1-11) تكون الحلقة $Z_3[x]$ حلقة تحليل وحيد وبما أن $\partial f(x) > o$ فإن الحدودية $f(x)$ يمكن كتابتها بصورة وحيدة على شكل جداء منته لعناصر أولية من الحلقة $Z_3[x]$ بالشكل الآتي $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2x + 2)$ وبما أن الحدودية $x^2 + 1$ هي حدودية أولية في الحلقة $Z_3[x]$ فإنه حسب المبرهنة (7-1-3) يوجد تمديد $E = Z_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ للحقل Z_3 يحوي صفراً للحدودية $x^2 + 1$ وبما أن أي صفر للحدودية $x^2 + 1$ هو صفر للحدودية $f(x)$ يكون لدينا $E = Z_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ هو

حقل ممدد للحقل Z_3 ويحوي صفراً للحدودية $f(x)$ وهذا الحقل منته ومؤلف من تسعة عناصر.

من جهة أخرى بما أن الحدودية $x^3+2x+2 \in Z_3[x]$ هي حدودية أولية في $Z_3[x]$ فإنه حسب المبرهنة (7-1-3) يوجد تمديد $E_1 = Z_3[x]/\langle x^3++2x+2\rangle$ للحقل Z_3 يحوي صفراً للحدودية x^3+2x+2 وبالتالي يكون E_1 ممدداً للحقل Z_3 ويحوي صفراً للحدودية $f(x)$ وهذا الحقل مؤلف من 27 عنصراً.

3 - أوجد عناصر الحقل $Q(\sqrt{3},\sqrt{5})$.

لدينا حسب المبرهنة (7-1-2) أن $Q(\sqrt{3},\sqrt{5}) = Q(\sqrt{3})(\sqrt{5})$.

ليكن $x \in Q(\sqrt{3},\sqrt{5})$ عندئذ فإن $x = a+b\sqrt{5}$ حيث $a,b \in Q(\sqrt{3})$ وبالتالي فإن $a = a_1+a_2\sqrt{3}$ و $b = b_1+b_2\sqrt{3}$ حيث $a_1,a_2,b_1,b_2 \in Q$ وهكذا نجد أن

$$x = a_1+a_2\sqrt{3}+(b_1+b_2\sqrt{3})\sqrt{5} = a_1+a_2\sqrt{3}+b_1\sqrt{5}+b_2\sqrt{15}$$

ومنه فإن $Q(\sqrt{3},\sqrt{5}) = \{a_1+a_2\sqrt{3}+b_1\sqrt{5}+b_2\sqrt{15} : a_1,a_2,b_1,b_2 \in Q\}$.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 7-1-5.

ليكن F حقلاً و $P(x)$ حدودية أولية في الحلقة $F[x]$ وليكن E تمديداً ما للحقل F و $a \in E$ صفراً للحدودية $P(x)$. عندئذ فإن:

1 - $F(a) \cong F[x]/\langle p(x)\rangle$.

2 - إذا كانت $\partial p(x) = n$ عندئذ أياً كان $h \in F(a)$ فإن العنصر b يمكن التعبير عنه بصورة وحيدة على النحو الآتي:

$$b = c_{n-1}a^{n-1}+c_{n-2}a^{n-2}+\cdots+c_1a+c_n$$

حيث $c_{n-1},c_{n-2},\cdots,c_1,c_o \in F$.

البرهـــان.

1 - لدينا $F(a)$ حقل وهو أصغر حقل يحوي كلاً من F والعنصر a. من جهة أخرى بما أن الحدودية $p(x)$ أولية فوق الحقل F فإنه حسب المبرهنة (6-2-7) يكون المثالي $\langle p(x)\rangle$ هو مثالي أعظمي في الحلقة $F[x]$ وبالتالي فإنه حسب المبرهنة (5-1-14) تكون حلقة الخارج $F[x]/\langle p(x)\rangle$ حقلاً.

لنعرف التطبيق $\varphi: F[x] \to F(a)$ بالشكل الآتي: أياً كان $f(x) \in F[x]$ فإن $\varphi(f(x)) = f(a)$ فنجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي وذلك بحسب التمرين المحلول (7-3). لنبرهن الآن على أن $Ker\,\varphi = \langle p(x)\rangle$. بما أن العنصر a هو صفر للحدودية $p(x)$ أي $p(a) = o$ نجد أن $\varphi(p(x)) = p(a) = o$ وهذا يبين لنا أن $p(x) \in Ker\,\varphi$ ومنه يكون $\langle p(x)\rangle = p(x)F[x] \subseteq Ker\,\varphi$.

من جهة أخرى بما أن الحدودية $\mu(x) = 1 \in F[x]$ وأن $\mu(x) = 1 \neq o$ نجد أن $\mu(x) \notin Ker\,\varphi$ وهذا يبين لنا أن المثالي $Ker\,\varphi \subset F[x]$ وبما أن المثالي $\langle p(x)\rangle$ أعظمياً في الحلقة $F[x]$ نجد أن $Ker\,\varphi = \langle p(x)\rangle$ وحسب المبرهنة (3-1-5) نجد أن $F[x]/Ker\,\varphi \cong Im\,\varphi$ وبالتالي يكون $F[x]/\langle p(x)\rangle \cong Im\,\varphi$.

من جهة ثالثة بما أن $F[x]/\langle p(x)\rangle$ حقلاً فإن $Im\,\varphi$ حقل أيضاً بالإضافة إلى ذلك فإن $Im\,\varphi \subseteq F(a)$. لنبرهن الآن على أن $Im\,\varphi = F(a)$.

ليكن $d \in F$ عندئذ الحدودية $\lambda(x) = d \in F[x]$ وأن $\varphi(\lambda(x)) = \lambda(a) = d \in Im\,\varphi$ وهذا يبين لنا $F \subseteq Im\,\varphi$. كذلك بما أن الحدودية $\theta(x) = x \in F[x]$ وأن $\varphi(\theta(x)) = \theta(a) = a \in Im\,\varphi$ نجد أن الحقل $Im\,\varphi$ يحوي كلاً من F والعنصر a وبما أن $F(a)$ هو أصغر حقل يحوي كلاً من F والعنصر a نجد أن $F(a) \subseteq Im\,\varphi$. مما سبق نجد أن $Im\,\varphi = F(a)$ وهكذا نجد أن $F[x]/\langle p(x)\rangle \cong F(a)$.

2 - ليكن $b \in F(a)$ عندئذ بما أن $F[x]/\langle p(x)\rangle \cong F(a)$ فإنه يوجد في الحلقة $F[x]/\langle p(x)\rangle$ عنصر $g(x) + \langle p(x)\rangle$ بحيث يكون $\varphi(g(x) + \langle p(x)\rangle) = b$ وحيث $g(x) \in F[x]$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q(x), r(x) \in F[x]$ بحيث $g(x) = q(x)p(x) + r(x)$ حيث إنه إما $r(x) = o$ أو $\partial r(x) < \partial p(x)$ ومنه

$$g(x)+\langle p(x)\rangle=[q(x)p(x)+r(x)]+\langle p(x)\rangle=$$
$$=(q(x)p(x)+\langle p(x)\rangle)+(r(x)+\langle p(x)\rangle)=$$
$$=\langle p(x)\rangle+(r(x)+\langle p(x)\rangle)=r(x)+\langle p(x)\rangle$$

وهكذا نجد أن

$$\varphi(g(x)+\langle p(x)\rangle)=\varphi(r(x)+\langle p(x)\rangle)=b$$

وحسب تعريف التشاكل φ في (1) نجد أن $r(a)+\langle p(a)\rangle=b$ وبما أن a هو صفر للحدودية $p(x)$ ينتج أن $r(a)=b$ وبما أن $\partial p(x)=n$ وأنه إما $r(x)=o$ أو $\partial r(x)<\partial p(x)$ فإن $r(x)=\sum_{i=o}^{n-1}c_i x^i$ حيث $c_{n-1},c_{n-2},\cdots,c_1,c_o\in F$. وهكذا نجد أن $r(a)=\sum_{i=o}^{n-1}c_i a^i=b$ وبالتالي يكون $c_{n-1}a^{n-1}+c_{n-2}a^{n-2}+\cdots+c_1a+c_o=b$ وهذه الكتابة وحيدة لأن التشاكل φ ايزومورفيزم (تماثل).

مثـــال.

لنأخذ الحدودية $f(x)=x^6-2\in Q[x]$.

حسب اختبار أيزنشتاين فإن الحدودية $f(x)$ هي حدودية أولية فوق الحقل Q وأن $a=\sqrt[6]{2}=2^{1/6}$ هو صفر للحدودية $f(x)$ وحسب المبرهنة (7-1-5) فإن $Q(\sqrt[6]{2})\cong Q[x]/\langle f(x)\rangle$ كما أن المجموعة $\{1,2^{1/6},2^{2/6},2^{3/6},2^{4/6},2^{5/6}\}$ تشكل قاعدة للحقل $Q(\sqrt[6]{2})$ فوق الحقل Q وبالتالي يكون

$$Q[x]/\langle f(x)\rangle\cong Q(\sqrt[6]{2})=\{c_o+c_1 2^{1/6}+c_2 2^{2/6}+c_3 2^{3/6}+c_4 2^{4/6}+c_5 2^{5/6}:$$
$$c_i\in Q;i=o,1,2,3,4,5\}$$

7 - 2. حقـــول التفـــريـــق.

تعريـــف.

ليكن الحقل E تمديداً ما للحقل F و $f(x) \in F[x]$.

- نقول عن الحدودية $f(x)$ إنها تتفرق في الحقل E إذا أمكن كتابة الحدودية $f(x)$ على شكل جداء لمضاريب خطية في $E[x]$.

- نقول عن الحقل E إنه حقل تفريق الحدودية $f(x)$ فوق F إذا كانـــت الحدوديـــة $f(x)$ تتفرق في الحقل E ولا تتفرق في أي حقل آخر K يحقق $F \subseteq K \subsetneq E$.

ينتج من التعريف مباشرة أن حقل التفريق لحدودية ما لا يعتمد فقط على الحدودية ذاتها ولكن يعتمد أيضاً على الحقل الذي تتفرق فيها الحدودية نفسها. بالاعتماد على ما سبق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$. إن حقل التفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقـل F هو أصغر حقل تتفرق فيه الحدودية $f(x)$ فوق F.

أمثـــلة.

1 - لنأخذ الحدودية $f(x) = x^2 - 2 \in Q[x]$ فنجد أن الحدودية $f(x)$ تتفـــرق فـــي حقل الأعداد الحقيقية R والذي يحوي الحقل Q على الشكل

$$f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

بينما حقل التفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q فهو الحقل

$$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$$

وذلك لأن $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \in Q(\sqrt{2})[x]$.

2 - لنأخذ الحدودية $f(x) = x^2 + 1 \in Q[x]$ فنجد أن الحدودية $f(x)$ تتفـــرق فـــي حقل الأعداد المركبة C والذي يحوي الحقل Q على الشكل

$$f(x)=(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})$$

بينما حقل التفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q فهو الحقل $Q(i)=\{a+bi : a,b \in Q\}$ وذلك لأن $f(x)=(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1}) \in Q(i)[x]$.

ملاحظة.

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$ بحيث $\partial f(x)>0$. إذا أمكن كتابة $f(x)$ على شكل جداء لمضاريب خطية على الشكل $b(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ في تمديد ما E للحقل F عندئذ يكون الحقل $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ هو حقل التفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F.

لندرس الآن ومن خلال المبرهنة الآتية أي الحدوديات التي تملك حقل تفريق.

مبرهنة 7-2-1.

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$ إذا كانت $\partial f(x)>0$ عندئذ يوجد حقل تفريق E للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F.

البرهان.

سوف نورد البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي بحسب درجة الحدودية $f(x)$.

- إذا كانت $\partial f(x)=1$ عندئذ $f(x)=a_1x+a_0$ حيث $a_1,a_0 \in F$ وأن $a_1 \neq 0$ وبما أن F حقلاً فإن $-a_1^{-1} \in F$. لنضع $x_0=-a_1^{-1}a_0$ فنجد أن $f(x)=a_1(x-x_0)$ وهنا نجد أن الحقل $F(x_0)$ هو حقل تفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F وبما أن $x_0 \in F$ نجد أن $F(x_0)=F$ أي أن F هو حقل تفريق للحدودية $f(x)$.

- لنفرض أن $\partial f(x)>1$ وأن المبرهنة صحيحة لأجل جميع الحقول وجميع الحدوديات التي درجة كل منها أصغر من درجة $f(x)$. عندئذ بحسب المبرهنة (7-1-4) فإنه يوجد تمديد E للحقل F يحوي صفراً للحدودية $f(x)$ ولكن a_1 وحسب التمهيدية (7-1-6) فإن الحدودية $x-a_1 \in E[x]$ تقسم $f(x)$ في $E[x]$ وبالتالي يوجد $g(x) \in E[x]$ بحيث يكون $f(x)=(x-a_1)g(x)$ وبما أن $\partial f(x)=\partial(x-a_1)+\partial g(x)$ وأن $\partial(x-a_1)=1$ نجد أن $\partial g(x)<\partial f(x)$ وحسب الفرض الاستقرائي فإنه يوجد حقل تفريق K للحدودية $g(x)$ فوق الحقل E.

وهذا يبين لنا أن الحقل K يحوي الحقل E وجميع أصفار الحدودية $f(x)$ ولتكن $a_1, a_2, \cdots, a_n$. وهكذا نجد أن الحقل $F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ هو حقل تفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F.

أمثلة.

1 - لنأخذ الحدودية $f(x) = x^4 - x^2 - 2 \in Q[x]$ فنجد أن

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$$

وهذا يبين لنا أن جميع أصفار الحدودية $f(x)$ هي $\mp\sqrt{2}, \mp i$ وبالتالي يكون حقل التفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q هو $Q(\sqrt{2}, i)$ وبحسب المبرهنة (7-1-2) يكون

$$Q(\sqrt{2}, i) = Q(\sqrt{2})(i) = \{a + bi : a, b \in Q(\sqrt{2})\} =$$
$$= \{a_1 + a_2\sqrt{2} + (b_1 + b_2\sqrt{2})i : a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q\}$$

2 - أوجد حقل التفريق للحدودية $f(x) = x^3 - 1 \in Q[x]$ فوق الحقل Q.

نلاحظ أولاً أن جميع أصفار الحدودية $x^3 - 1$ هي $1, -1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$ وبالتالي يكون أصغر حقل يحوي الحقل Q وجميع أصفار الحدودية $x^3 - 1$ هو الحقل $Q(\sqrt{3})$. مما سبق نجد أن $Q(\sqrt{3})$ هو حقل تفريق للحدودية $x^3 - 1$.

سوف نعالج الآن المسألة الآتية:

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$ عندئذ أي حقلي تفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F يكونان متماثلين. الخطوة الأولى للوصول إلى هذا الهدف يلزمنا الحقيقة الآتية والتي سوف نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 7-2-2.

ليكن F و K حقلين و $\varphi : F \to K$ تماثل حقلي. ولتكن $p(x) \in F[x]$ حدودية أولية فوق الحقل F و a صفر للحدودية $p(x)$ في تمديد ما للحقل I. إذا كان b صفر للحدودية $\varphi(p(x)) \in K[x]$ في تمديد ما للحقل K عندئذ يوجد تماثل حقلي $\mu : F(a) \to K(b)$ من أجله $\mu(a) = b$.

البرهـــان.

بما أن $p(x)\subset F[x]$ هي حدودية أولية فوق الحقل F وأن a هو صفر للحدودية $p(x)$ في تمديد ما للحقل F فإنه حسب المبرهنة (7-1-5) يكون $F[x]/\langle p(x)\rangle$ حقلاً وأن $F(a)\overset{\alpha}{\cong}F[x]/\langle p(x)\rangle$ من أجله $\alpha(a)=x+\langle p(x)\rangle$.

من جهة أخرى بما أن $\varphi:F\to K$ تماثلاً حقلياً فإنه حسب التمرين المحلول (7-4) يمكن تمديد هذا التماثل إلى التماثل الحلقي $\varphi:F[x]\to K[x]$ وبما أن الحدودية $p(x)$ أولية فوق الحقل F فإنه حسب التمرين المحلول (7-5) تكون الحدودية $\varphi(p(x))$ حدودية أولية فوق الحقل K وبما أن العنصر b هو صفر للحدودية $\varphi(p(x))\in K[x]$ في تمديد ما للحقل K فإنه حسب المبرهنة (7-1-5) يكون $K[x]/\langle\varphi(p(x))\rangle$ حقلاً وأن $K(b)\overset{\beta}{\cong}K[x]/\langle\varphi(p(x))\rangle$ و أن

$$\beta(b)=x+\langle\varphi(p(x))\rangle$$

لنبرهن على أن التطبيق $\theta:F[x]/\langle p(x)\rangle\to K[x]/\langle\varphi(p(x))\rangle$ المعرف بالشكل التالي: أياً كان $f(x)+\langle p(x)\rangle\in F[x]/\langle p(x)\rangle$ فإن

$$\theta(f(x)+\langle p(x)\rangle)=\varphi(f(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle$$

هو تماثل حقلي. إن التطبيق θ هو تشاكل لأنه أياً كان

$$\lambda(x)+\langle p(x)\rangle,\psi(x)+\langle p(x)\rangle\in F[x]/\langle p(x)\rangle$$

$$\theta([\lambda(x)+\langle p(x)\rangle]+[\psi(x)+\langle p(x)\rangle])=\theta[(\lambda(x)+\psi(x))+\langle p(x)\rangle]=$$
$$=\varphi((\lambda(x)+\psi(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle=[\varphi(\lambda(x))+\varphi(\psi(x))]+\langle\varphi(p(x))\rangle=$$
$$=[\varphi(\lambda(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle]+[\varphi(\psi(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle]=$$
$$=\theta(\lambda(x)+\langle p(x)\rangle)+\theta(\psi(x)+\langle p(x)\rangle)$$

كما أن

$$\theta([\lambda(x)+\langle p(x)\rangle].[\psi(x)+\langle p(x)\rangle])=\theta((\lambda(x).\psi(x))+\langle p(x)\rangle)=$$
$$=\varphi((\lambda(x).\psi(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle=[\varphi(\lambda(x)).\varphi(\psi(x))]+\langle\varphi(p(x))\rangle=$$
$$=[\varphi(\lambda(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle].[\varphi(\psi(x))+\langle\varphi(p(x))\rangle]=$$

$$= \theta(\lambda(x) + \langle p(x) \rangle).\theta(\psi(x) + \langle p(x) \rangle)$$

مما سبق نجد أن θ تشاكل. كما أن التطبيق θ متباين لأنه إذا كان $\lambda(x) + \langle p(x) \rangle \subset Ker\,\theta$ عندئذ يكون $\theta(\lambda(x) + \langle p(x) \rangle) = o = \langle \varphi(p(x)) \rangle$ ومنه فإن $\varphi(\lambda(x)) + \langle \varphi(p(x)) \rangle = \langle \varphi(p(x)) \rangle$ وبالتالي يكون $\varphi(\lambda(x)) \in \langle \varphi(p(x)) \rangle$ ومنه توجد $q_o(x) \subset K[x]$ بحيث

$$\varphi(\lambda(x)) = \varphi(p(x))q_o(x)$$

وبما أن التطبيق $\varphi : F[x] \to K[x]$ تماثل فإنه توجد $q(x) \in F[x]$ بحيث $\varphi(q(x)) = q_o(x)$ ومنه يكون

$$\varphi(\lambda(x)) = \varphi(p(x)).\varphi(q(x)) = \varphi(p(x)q(x))$$

وبالتالي يكون $\lambda(x) = p(x)q(x) \subset \langle p(x) \rangle$ وهذا يبين لنا أن $\lambda(x) + \langle p(x) \rangle = \langle p(x) \rangle$ أي أن التشاكل θ متباين.

كما أن التطبيق θ غامر لأنه إذا كان $\eta_o(x) + \langle \varphi(p(x)) \rangle \in K[x]/\langle \varphi(p(x)) \rangle$ فإن $\eta_o(x) \in K[x]$ ولكون التشاكل $\varphi : F[x] \to K[x]$ تماثلاً فإنه يوجد $\eta(x) \in F[x]$ بحيث يكون $\varphi(\eta(x)) = \eta_o(x)$ ومنه نجد أن $\eta(x) + \langle p(x) \rangle$ هو عنصر من $F[x]/\langle p(x) \rangle$ وأن

$$\theta(\eta(x) + \langle p(x) \rangle) = \varphi(\eta(x)) + \langle \varphi(p(x)) \rangle = \eta_o(x) + \langle \varphi(p(x)) \rangle$$

وهذا يبين لنا أن التشاكل θ غامراً. مما سبق نجد أن التطبيق θ تماثل.

لنفرض أن $\mu = \beta^{-1}\theta\alpha : F(a) \to K(b)$ فنجد أن μ تماثل بالإضافة إلى ذلك فإن

$$\mu(a) = \beta^{-1}\theta\alpha(a) = (\beta^{-1}\theta)(\alpha(a)) = (\beta^{-1}\theta)(x + \langle p(x) \rangle) =$$

$$= \beta^{-1}(\varphi(x) + \langle \varphi(p(x)) \rangle) = \beta^{-1}(x + \langle \varphi(p(x)) \rangle) = b$$

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة الآتية والتي سوف نثبت من خلالها أن أي حقلي تفريق لحدودية ما هما حقلان متماثلان:

مبرهنـــة 7-2-3.

ليكن F و K حقلين و $\varphi:F\to K$ تماثلاً حقلياً. ولتكن $f(x)\in F[x]$. إذا كـــان E هو حقل تفريق الحدودية $f(x)$ فوق الحقل F و E' هو حقل تفريـــق للحدوديـــة $\varphi(f(x))$ فوق الحقل K عندئذ فإن $E\cong E'$.

البرهـــان.

سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب درجة الحدودية $f(x)$.

- إذا كان $\partial f(x)=1$ عندئذ $f(x)=a_1x+a_0$ حيث $a_1,a_0\in F$ وأن $a_1\neq o$ وبمـــا أن F حقل فإن $x_o=-a_1^{-1}a_0\in F$ ومنه $f(x)=a_1(x-x_o)\in F[x]$ وهذا يبين لنا أن $F=E$. من جهة أخرى ليكن $\varphi:F[x]\to K[x]$ التماثـــل الموافـــق للتماثـــل $\varphi:F\to K$ عندئذ $\varphi(f(x))=\varphi(a_1)x+\varphi(a_o)$ ولكون φ تماثلاً فـــإن $\varphi(a_1)\neq o$ وأن $\varphi(a_1),\varphi(a_o)\in K$ وبما أن K حقـــلاً فـــإن $y_o=-(\varphi(a_1))^{-1}\varphi(a_o)\in K$ وأن $\varphi(f(x))=\varphi(a_1)(x-y_o)\in K[x]$ وهذا يبين لنا أن $E'=K$. مما سبق نجد أن

$$E=F\overset{\varphi}{\cong}K=E'$$

- لنفرض الآن أن $\partial f(x)>1$ وأن المبرهنة صحيحة لأجل جميع الحدوديات التـــي درجة كل منها أصغر من $\partial f(x)$. بما أن F حقلاً فإنه حسب المبرهنة (6-1-11) فإن $F[x]$ حلقة تحليل وحيد بما أن $\partial f(x)>1$ فإنه حسب المبرهنة (6-2-2) فـــإن الحدودية $f(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$ وبالتالي فإن $f(x)$ يمكن كتابتهـــا علـــى شكل جداء منته لحدوديات أولية في $F[x]$.

ليكن $p(x)\in F[x]$ أحد العوامل الأولية للحدودية $f(x)$ وليكن a صفراً للحدودية $p(x)$ في الحقل E و b صفراً للحدودية $\varphi(p(x))$ في الحقل E' عندئـــذ حـــسب المبرهنة (7-2-2) فإنه يوجد تماثل حقلي $\alpha:F(a)\to K(b)$ من أجله $\alpha(a)=b$.

من جهـــة أخـــرى بمـــا أن a صـــفراً للحدوديـــة $f(x)$ فـــي الحقـــل $F(a)$ فـــإن $f(x)=(x-a)g(x)$ حيث $g(x)\in F(a)[x]$ عندئذ يكون E هو حقل تفريـــق للحدودية $g(x)$ فوق الحقل $F(a)$. كما أن E' هو حقل تفريق للحدوديـــة $\alpha(g(x))$

فوق الحقل $K(b)$ وبما أن $\partial g(x) < \partial f(x)$ فإنه حسب الفرض الاستقرائي يوجد تماثل $\mu : E \to E'$ موافق للتماثل α على $F(a)$ وبالتالي موافق للتماثل φ على F .

بالاعتماد على المبرهنتين الأخيرتين يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

ليكن F حقلاً و $f(x) \in F[x]$. عندئذ أي حقلي تفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F متماثلان.

البرهان.

لنفرض أن E و E' حقلا تفريق للحدودية $f(x)$ فوق الحقل F عندئذ بالاعتماد على المبرهنة (7-2-3) وبفرض أن $I : F \to F$ هو التماثل المطابق نجد أن $E \cong E'$.

مثال.

ليكن $a \in Q$ عدداً موجباً و لنأخذ الحدودية $f(x) = x^n - a \in Q[x]$. لنوجد أصفار الحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q. بفرض أن y هو صفر للحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q عندئذ $f(y) = 0$ ومنه $y^n = a$ أي إن $y = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{1}$. لنفرض أن $w = \sqrt[n]{1}$ فنجد أن $w^n = 1 = \cos 360 + i \sin 360$ وحسب قانون دوموافر فإن $w = \sqrt[n]{1} = \cos 360/n + i \sin 360/n$ حيث $n = 1,2,\cdots$ وأن $w^k \neq 1$ أياً كان $1 \leq k < n$ وبالتالي يكون $a^{1/n}, wa^{1/n}, w^2a^{1/n}, \cdots, w^{n-1}a^{1/n}$ هي جميع أصفار الحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q أو في الحقل $Q(\sqrt[n]{a}, w)$.

من أجل $n = 6, a = 3$ نجد أن $f(x) = x^6 - 3 \in Q[x]$ و أن

$$w = \sqrt[6]{1} = 1/2 + i\sqrt{3}/2, w^2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2, w^3 = -1$$

$$w^4 = -1/2 - i\sqrt{3}/2, w^5 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$$

وهكذا نجد أن أصفار الحدودية $f(x)$ فوق الحقل Q هي

$$\sqrt[6]{3}, (1/2 + i\sqrt{3}/2)\sqrt[6]{3}, (-1/2 + i\sqrt{3}/2)\sqrt[6]{3}, -\sqrt[6]{3},$$

$$(-1/2 - i\sqrt{3}/2)\sqrt[6]{3}, \quad (1/2 - i\sqrt{3}/2)\sqrt[6]{3}$$

7 - 3. التمديدات المنتهية.

ليكن E تمديداً للحقل F في هذه الحالة يمكن النظر إلى الحقل E على أنه فضاء شعاعي فوق الحقل F. بالاعتماد على هذه الحقيقة يمكننا صياغة التعريف الآتي:

تعريف.

ليكن E تمديداً للحقل F.

- نقول عن التمديد E إنه تمديد منته للحقل F من الدرجة n إذا كان بعد الفضاء الشعاعي E فوق F يساوي n ونرمز إلى ذلك $[E:F]=n$.
- إذا لم يكن التمديد E تمديداً منتهياً للحقل F نقول في هذه الحالة إن التمديد E هو تمديد غير منته للحقل F.

بالاعتماد على التعريف السابق نقول عن الحقل E إنه تمديد منته للحقل F درجته تساوي n إذا وجدت مجموعة جزئية من الحقل E منتهية ومؤلفة من n عنصر

$$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset E$$

تحقق الشرطين التاليين:

1 - أن تكون المجموعة S مجموعة مولدة للحقل E فوق الحقل F أي إنه أياً $y\in E$ فإن $y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$ حيث $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in F$.

2 - أن تكون المجموعة S مستقلة خطياً فوق F أي إنه من أجل أي مجموعة من العناصر $a_1,a_2,\cdots,a_n\in F$ وتحقق $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=o$ ينتج أن $a_1=a_2=\cdots=a_n=o$.

نسمي المجموعة S قاعدة للحقل E فوق الحقل F.

بمعنى آخر نقول عن التمديد E إنه تمديد منته للحقل F درجته تساوي n إذا وجدت مجموعة منتهية من عناصر الحقل E ومؤلفة من n عنصر تحقق: إن كل عنصر من الحقل E يكتب بصورة وحيدة على شكل تركيب خطي لعناصر هذه المجموعة بأمثال من الحقل F.

مثـــال.

إن حقل الأعداد العقدية (المركبة) C هو تمديد منته لحقل الأعداد الحقيقية R من الدرجة الثانية قاعدته المجموعة $\{1,i\}$. بينما حقل الأعداد العقدية هو تمديد غير منته لحقل الأعداد النسبية Q.

واحدة من الخواص المهمة للتمديدات المنتهية وهي خاصية التعدي نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 7-3-1.

ليكن K تمديداً منتهياً للحقل E و E تمديداً منتهياً للحقل F عندئذ يكون K تمديداً منتهياً للحقل F ويحقق $[K:F]=[K:E].[E:F]$.

البرهـــان.

بما أن الحقل K تمديداً للحقل E فإن $E \subseteq K$ كذلك بما أن الحقل E هو تمديد للحقل F فإن $F \subseteq E$ مما سبق نجد أن $F \subseteq K$ أي أن الحقل K هو تمديد للحقل F.

من جهة أخرى بما أن الحقل K هو تمديد منته للحقل E وأن الحقل E هو تمديد منته للحقل F لنفرض أن $n = [K:E]$ وأن $m = [E:F]$ ومنه توجد قاعدة للحقل K فوق E ومؤلفة من n عنصر ولتكن $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ وقاعدة للحقل E فوق الحقل F ومؤلفة من m عنصر ولتكن $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$. لنبرهن الآن على أن المجموعة $X.Y = \{y_j x_i : 1 \le j \le m, 1 \le i \le n\}$ تشكل قاعدة للحقل K فوق الحقل F.

ليكن $a \in K$ بما أن الحقل K تمديداً منتهياً للحقل E قاعدته المجموعة X فإن

$$a = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

حيث $a_i \in E$ من أجل جميع القيم $1 \le i \le n$.

من جهة أخرى بما أن $a_i \in E$ وأن الحقل E تمديداً منتهياً للحقل F قاعدته المجموعة Y فإن $a_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{im}y_m$ حيث $c_{ij} \in F$ أيـاً كان $1 \le j \le m$ و $1 \le i \le n$. وهكذا نجد أن

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_j)x_i=\sum_{i,j}c_{ij}(y_j x_i)$$

إن هذا يبين لنا أن المجموعة YX تولد الحقل E فوق الحقل F.

من جهة ثالثة لنفرض أن $\sum_{i,j}c_{ij}(y_j x_i)=o$ عندئذ يكون $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_j)x_i=o$.

وبما أن المجموعة X تشكل قاعدة للحقل K فوق E نجد أن $\sum_{i=1}^{n}c_{ij}y_j=o$ وبما أن المجموعة Y تشكل قاعدة للحقل E فوق الحقل F نجد أن $c_{ij}=o$ وذلك لأجل جميع القيم $1\le j\le m$ و $1\le i<n$. مما سبق نجد أن المجموعة YX تشكل قاعدة للحقل K فوق F وهذه المجموعة مؤلفة من mn عنصراً وبالتالي يكون لدينا

$$[K:F]=mn=[K:E].[E:F]$$

إن المبرهنة الأخيرة تتشابه إلى حد كبير مع مبرهنة لاغرانج الخاصة بالزمر المنتهية وهذه المبرهنة يمكن صياغتها بشكل آخر كما يأتي: إذا كان $F\subseteq E\subseteq K$ وكان K تمديداً منتهياً للحقل E و E تمديداً منتهياً للحقل F فإن:

- درجة تمديد كل من K فوق E ودرجة تمديد E فوق F تقسم درجة تمديد الحقل K فوق F أي إن كلاً من $[K:E]$ و $[E:F]$ تقسم $[K:F]$.
- درجة تمديد الحقل K فوق F تقبل القسمة على كل من درجة تمديد K فوق E و E فوق F أي أن $[K:F]$ تقبل القسمة على $[K:E]$ و $[E:F]$.

يمكن تعميم المبرهنة السابقة لأجل أي عدد منته من التمديدات المنتهية بالشكل الآتي:

مبرهنة 7-3-2.

لنأخذ السلسلة التالية من الحقول $F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_n$. إذا كان الحقل F_i تمديداً منتهياً للحقل F_{i-1} وذلك لأجل جميع القيم $i=2,3,\cdots,n$ عندئذ يكون الحقل F_n تمديداً منتهياً للحقل F_1 ويكون أيضاً

$$[F_n:F_1]=[F_n:F_{n-1}].[F_{n-1}:F_{n-2}].\cdots.[F_2:F_1].$$

البرهـــان.

يتم بطريقة مشابهة للمبرهنة (7-3-1).

أمثـــلة.

1 - أثبت أن الحقل $Q(\sqrt{5})$ هو تمديد منته للحقل Q درجته تساوي 2.

بما أن $Q \subseteq Q(\sqrt{5})$ فإن الحقل $Q(\sqrt{5})$ هو تمديد للحقـــل Q كمـــا أن المجموعـــة $\{1,\sqrt{5}\}$ تشكل قاعدة للحقل $Q(\sqrt{5})$ فـــوق Q لأنـــه أيـــاً كـــان $x \in Q(\sqrt{5})$ فـــإن $x = a+b\sqrt{5} = a.1+b\sqrt{5}$ حيث $a,b \in Q$. كـــذلك إذا كـــان $a+b\sqrt{5} = o$ حيـــث $a,b \in Q$ فإن $b = 0$ لأنه إذا كان $b \neq 0$ فإن $a/b \in Q$ $= \sqrt{5}$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $Q(\sqrt{5})$ هو تمديد منته للحقل Q وأن $[Q(\sqrt{5}):Q] = 2$.

2 - أثبت أن الحقل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هو تمديد منته للحقل $Q(\sqrt{5})$ درجته تساوي 2.

بما أن $\sqrt{5} \in Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ نجد أن $Q(\sqrt{5}) \subseteq Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ وهذا يبين لنـــا أن الحقـــل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هو تمديد للحقل $Q(\sqrt{5})$.

من جهة أخرى حسب المبرهنة (7-2-1) فإن $Q(\sqrt{5},\sqrt{3}) = Q(\sqrt{5})(\sqrt{3})$ وبالتالي أياً كان $x \in Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ فإن $x \in Q(\sqrt{5})(\sqrt{3})$ ومنـــه $x = a+b\sqrt{3} = a.1+b\sqrt{3}$ حيث $a,b \in Q(\sqrt{5})$ وهذا يبين لنا أن المجموعة $\{1,\sqrt{3}\}$ تولد الحقل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ فوق الحقل $Q(\sqrt{5})$ وهـــذه المجموعـــة مـــستقلة لأنـــه إذا كـــان $a+b\sqrt{3} = o$ حيـــث $a,b \in Q(\sqrt{5})$ فإن $b = 0$ لأنه إذا كان $b \neq 0$ فإن $\sqrt{3} = -a/b \in Q(\sqrt{5})$ وهذا غير صحيح لأنه أيضاً إذا كان $\sqrt{3} \in Q(\sqrt{5})$ فإن $\sqrt{3} = a_1 + b_1\sqrt{5}$ حيـــث $a_1,b_1 \in Q$ ومنه يكون $a_1 = \sqrt{3} - b_1\sqrt{5} \notin Q$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $b = 0$ وبالتالي $a = 0$ أي أن الحقـــل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هـــو تمديـــد منتـــه للحقـــل $Q(\sqrt{5})$ وأن $[Q(\sqrt{5},\sqrt{3}):Q(\sqrt{5})] = 2$.

3 - أثبت أن الحقل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هو تمديد منته للحقل Q درجته 4.

نلاحظ أن $Q \subseteq Q(\sqrt{5}) \subseteq Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ وهذا يبين لنا أن الحقل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هو تمديد للحقل Q. من جهة أخرى وجدنا حسب المثال (1) أن الحقل $Q(\sqrt{5})$ هو تمديد منته

للحقل Q وأن $[Q(\sqrt{5}):Q]=2$ وحسب المثال رقم (2) أن الحقل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هو تمديد منته للحقل $Q(\sqrt{5})$ وأن $[Q(\sqrt{5},\sqrt{3}):Q(\sqrt{5})]=2$ وحسب المبرهنة (7-2-1) نجد أن الحقل $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ هو تمديد منته للحقل Q وأن

$$[Q(\sqrt{5},\sqrt{3}):Q]=[Q(\sqrt{5},\sqrt{3}):Q(\sqrt{5})][Q(\sqrt{5}):Q]=2.2=4$$

وأن قاعدة التمديد $Q(\sqrt{5},\sqrt{3})$ فوق الحقل Q هي المجموعة $\{1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{15}\}$.

4 - أثبت أن $[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q]=6$.

لنأخذ الحقل $Q(\sqrt[3]{2})$ ولنأخذ الحدودية $f(x)=x^6-2\in Q[x]$ فنجد أن $f(x)\neq o$ وحسب معيار ايزنشتاين فإن الحدودية $f(x)$ هي حدودية أولية فوق Q وأن $\sqrt[3]{2}$ هو صفر للحدودية $f(x)$ في الحقل $Q(\sqrt[3]{2})$ وحسب المبرهنة (7-1-5) فإن المجموعة $\{1,2^{1/6},2^{2/6},2^{3/6},2^{4/6},2^{5/6}\}\subseteq Q(\sqrt[3]{2})$ تشكل قاعدة للحقل $Q(\sqrt[3]{2})$ فوق الحقل Q وبالتالي يكون $[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=6$.

من جهة أخرى نلاحظ أن $[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q]\subseteq Q(\sqrt[3]{2})$ لأن

$$\sqrt{2}=(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2})\in Q(\sqrt[3]{2}) \text{ وأن } \sqrt[3]{2}=(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2})\in Q(\sqrt[3]{2}).$$

كما أن $Q\subseteq Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})\subseteq Q(\sqrt[3]{2})$ وبما أن $[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=6$ فإن الحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ هو تمديد منته للحقل Q وحسب المبرهنة (7-3-1) فإن الحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ هو تمديد منته للحقل Q كما أن $[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q]\leq[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=6$.

من جهة ثانية بما أن $\sqrt{2},\sqrt[3]{2}\in Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ فإن $Q(\sqrt[3]{2})\subseteq Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ وأن $Q(\sqrt{2})\subseteq Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$ وبما أن $[Q(\sqrt{2}):Q]=2$ يقسم $[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q]$ وأن $[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=3$ يقسم $[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q]$ ينتج أن

$$[Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):Q]=[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=6.$$

7 - 4. التمـديـدات الجبـريـــة.

ليكن K تمديداً للحقل F و $a \in K$ وجدنا حسب التمرين المحلول لاحقـاً (7-3) أن التطبيق $\varphi: F[x] \to F(a)$ المعرف بالشكل الآتي $\varphi(f(x)) = f(a)$ وذلك أياً كان $f(x)$ مـن $F[x]$ هـو تـشاكل حلقـي وبمـا أن $F(a) \subseteq K$ فـإن التطبيـق $\varphi: F[x] \to K$ المعرف بالشكل $\varphi(f(x)) = f(a)$ وذلك أياً كـان $f(x) \in F[x]$ هو تشاكل حلقي. بالاعتماد على ما سبق يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 7-4-1.

ليكن K تمديداً للحقل F و $a \in K$. إذا فرضنا أن φ هو التـشاكل $\varphi: F[x] \to K$ المعرف بالشكل التالي $\varphi(f(x)) = f(a)$ وذلك أيـاً كـان $f(x) \in F[x]$. عندئـذ القضايا الآتية متكافئة:

1 - التشاكل φ ليس متبايناً.

2 - يوجد في $F[x]$ عنصر واحد على الأقل $h(x) \neq o$ من أجله $h(a) = o$.

3 - يوجد في F عناصر $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ حيث $(n \geq 1)$ ليست جميعها معدومة مـن أجلها $\sum_{i=0}^{n} c_i a^i = o$.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن التشاكل φ ليس متبايناً عندئـذ $Ker\,\varphi \neq \{o\}$ ومنـه يوجـد $h(x) \in Ker\,\varphi$ بحيث $h(x) \neq o$ وبالتالي يكون $\varphi(h(x)) = h(a) = o$ وهذا يبـين لنا أنه يوجد $h(x) \in F[x]$ و $h(x) \neq o$ من أجله $h(a) = o$.

(2) $\Leftarrow$ (3). لنفرض أنه يوجد $h(x) \in F[x]$ و $h(x) \neq o$ مـن أجلـه $h(a) = o$ ولنفرض أن $\partial h(x) = n$ عندئذ $h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ حيث $c_i \in F$ لأجل جميـع القـيم $0 \leq i \leq n$ وبما أن $h(x) \neq o$ فإن العناصر $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ ليست جميعها معدومة. من جهة أخرى بما أن $h(a) = o$ نجد أن $\sum_{i=0}^{n} c_i a^i = o$.

لنبرهن الآن على أن $(n \geq 1)$. لنفرض أن $(n = o)$ عندئذ يكون $h(x) = c_n \neq o$ وبما أن $o = h(a) = c_n$ نحصل على تناقض وهذا يبين لنا أن $n \geq 1$.

$(3) \Leftarrow (1)$. لنفرض أنه يوجد في F عناصر $c_o, c_1, c_2, \cdots, c_n$ حيث $n \geq 1$ ليست كلها معدومة تحقق $o = \sum_{i=o}^{n} c_i a^i$ عندئذ يكون $o \neq g(x) = \sum_{i=o}^{n} c_i x^i \in F[x]$ وأن $\varphi(g(x)) = g(a) = \sum_{i=o}^{n} c_i a^i = o$ ومنه فإن $g(x) \in Ker\,\varphi$ وبالتالي يكون $Ker\,\varphi \neq \{o\}$ وهذا يبين لنا أن التشاكل $\varphi : F[x] \to K$ ليس متبايناً.

بالاعتماد على البرهنة الأخيرة يمكننا صياغة التعريف الآتي:

تعريف.

ليكن الحقل E تمديداً للحقل F.

- نقول عن العنصر $a \in E$ إنه عنصر جبري فوق الحقل F إذا وجدت حدودية $o \neq f(x) \in F[x]$ بحيث يكون $f(a) = o$ أو بمعنى آخر نقول عن العنصر $a \in E$ إنه جبري فوق F إذا وجدت عناصر $c_o, c_1, c_2, \cdots, c_n \in F$ حيث $(n \geq 1)$ ليست جميعها معدومة تحقق $\sum_{i=o}^{n} c_i a^i = o$.
- ونقول عن التمديد E للحقل F إنه تمديد جبري إذا كان كل عنصر من الحقل E هو عنصر جبري فوق الحقل F.

تعريف.

ليكن F حقلاً نسمي كل تمديد للحقل F من الشكل $F(a)$ تمديداً بسيطاً للحقل F.

بالاعتماد على التعاريف السابقة يمكننا صياغة التمهيدية الآتية:

تمهيدية 7-4-2.

ليكن F حقلاً عندئذ أياً كان $a \in F$ فإن العنصر a هو عنصر جبري فوق الحقل F.

البرهان.

ليكن $a \in F$ عندئذ الحدودية $f(x) = x - a$ هي عنصر من الحلقة $F[x]$ وأن $f(x) \neq o$ بالإضافة إلى ذلك فإن $f(a) = o$ وحسب التعريف نجد أن العنصر a هو عنصر جبري فوق الحقل F .

نأتي الآن إلى المبرهنة المهمة الآتية:

مبرهنة 7-4-3.

ليكن K تمديداً للحقل F و $a \in K$ عنصراً جبرياً فوق الحقل F . عندئذ توجد حدودية $o \neq p(x) \in F[x]$ وغير قابلة للتحليل (أولية) في $F[x]$ من أجلها $p(a) = o$.

البرهان.

بما أن العنصر $a \in K$ هو عنصر جبري فوق الحقل F عندئذ حسب التعريف يوجد في $F[x]$ عنصر واحد على الأقل $o \neq f(x) \in F[x]$ من أجله $f(a) = o$. لنفرض أن $\partial f(x) = m$ عندئذ حسب المبرهنة (7-4-1) فإن $m \geq 1$. لنأخذ المجموعة

$$M = \{o \neq \lambda(x) \in F[x] : \partial \lambda(x) \geq 1; \lambda(a) = o\}$$

فنجد أن المجموعة M غير خالية لأن $f(x) \in M$. ثم لنأخذ المجموعة

$$\Im = \{s : s \in N^*; s = \partial \lambda(x), \forall \lambda(x) \subset M\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ هي مجموعة جزئية من N^* وغير خالية لأن $m \in \Im$ ومنه فإن المجموعة $\Im$ تحوي عنصراً أصغراً وليكن n إن $n \geq 1$.

من جهة أخرى بما أن $n \in \Im$ فإنه توجد حدودية $o \neq p(x) \in M \subseteq F[x]$ بحيث $\partial p(x) = n$ وبما أن $p(x) \in M$ فإن $p(a) = o$. لنبرهن الآن على أن الحدودية $p(x)$ هي حدودية أولية في $F[x]$. بما أن $\partial p(x) = n \geq 1$ فإنه حسب المبرهنة (6-2-2) تكون الحدودية $p(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$.

ليكن $g(x), \mu(x) \in F[x]$ بحيث $p(x) = g(x).\mu(x)$ عندئذ $g(x) \neq o$ و $\mu(x) \neq o$ وذلك لأن $p(x) \neq o$. لنفرض جدلاً أن كلاً من $g(x)$ و $\mu(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$ عندئذ حسب المبرهنة (6-2-2) فإن $\partial g(x) \geq 1$ و $\partial \mu(x) \geq 1$. وبما أن $\partial p(x) = \partial g(x) + \partial \mu(x)$ ينتج أن $\partial p(x) > \partial g(x)$ و

$\partial p(x) > \partial \mu(x)$. من جهة أخرى بما أن التطبيق $\varphi: F[x] \to K$ المعرف بالشكل التالي $\varphi(f(x)) = f(a)$ وذلك أياً كان $f(x) \in F[x]$ هو تشاكل حلقي نجد أن

$$\varphi(p(x)) = \varphi(f(x).\mu(x)) = \varphi(f(x))\varphi(\mu(x))$$

$$p(a) = g(a).\mu(a)$$

وبما أن $p(a) = o$ وأن K الحقل نجد أنه إما $g(a) = o$ أو $\mu(a) = o$. لنفرض أن $g(a) = o$ أصبح لدينا $o \neq g(x) \in F[x]$ وأن $\partial g(x) \geq 1$ و أن $g(a) = o$ و $\partial p(x) > \partial g(x)$ وهذا يناقض كون أن الحدودية $p(x)$ هي الحدودية ذات الدرجة الأصغر في $F[x]$ والتي من أجلها $p(a) = o$ وهذا يبين لنا أنه إما $g(x)$ قابلة للقلب أو $\mu(x)$ قابلة للقلب في $F[x]$ مما سبق نجد أن الحدودية $p(x)$ أولية في $F[x]$.

بالاعتماد على البرهنة الأخيرة يمكننا صياغة التعريف الآتي:

تعريف.

وجدنا أنه إذا كان E تمديداً للحقل F وكان $a \in E$ عنصراً جبرياً فوق الحقل F عندئذ يوجد في الحلقة $F[x]$ حدودية $p(x) \neq o$ وغير قابلة للتحليل (أولية) في $F[x]$ تحقق $p(a) = o$ وهي الحدودية ذات الدرجة الأصغر من بين جميع الحدوديات $o \neq f(x) \in F[x]$ والتي من أجلها $f(a) = o$. نسمي هذه الحدودية بالحدودية الأصغرية للعنصر الجبري a فوق الحقل F.

واحدة من الخواص المهمة للحدودية الأصغرية نوردها من خلال البرهنة الآتية:

مبرهنة 7-4-4.

ليكن E تمديداً للحقل F و $a \in E$ عنصراً جبرياً فوق الحقل F ولتكن $p(x)$ هي الحدودية الأصغرية للعنصر a فوق F. إذا كانت $f(x) \in F[x]$ بحيث $f(a) = o$ عندئذ فإن $p(x)$ تقسم $f(x)$ في $F[x]$.

البرهان.

لنفرض أن $f(x) \in F[x]$ بحيث $f(a) = o$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة لأجل العناصر $f(x), p(x)$ يوجد $q(x), r(x) \in F[x]$ تحقق

$$f(x)=q(x).p(x)+r(x)$$

حيث إما $r(x)=o$ أو $\partial r(x)<\partial p(x)$. من جهة أخرى بما أن التطبيق $\varphi:F[x]\to K$ المعرف بالشكل $\varphi(\lambda(x))=\lambda(a)$ وذلك أياً كان $\lambda(x)\in F[x]$ هو تشاكل حلقي نجد أن

$$\varphi(f(x))=\varphi(q(x).p(x)+r(x))=\varphi(q(x).p(x))+\varphi(r(x))=$$
$$=\varphi(q(x))\varphi(p(x))+\varphi(r(x))$$

ومنه يكون $f(a)=q(a).p(a)+r(a)$ وبالتالي فإن $r(a)=o$.

أصبح لدينا $o\neq r(x)\in F[x]$ و $\partial r(x)<\partial p(x)$ و $r(a)=o$ وهذا يناقض كون أن $p(x)$ هي الحدودية الأصغرية للعنصر الجبري a فوق الحقل F. مما سبق نجد أن $r(x)=o$ وبالتالي يكون $f(x)=q(x).p(x)$ وهذا يبين لنا أن الحدودية $p(x)$ تقسم الحدودية $f(x)$ فوق F.

خاصة مهمة أخرى من خواص الحدودية الأصغرية لعنصر جبري نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 7-4-5.

ليكن K تمديداً للحقل F و $a\in K$ عنصراً جبرياً فوق F. إذا كانت درجة الحدودية الأصغرية للعنصر a فوق الحقل F تساوي n عندئذ يكون $n=[F(a):F]$.

البرهان.

لنفرض أن العنصر $a\in K$ هو عنصر جبري فوق الحقل F ولنفرض أن $p(x)\in F[x]$ هي الحدودية الأصغرية للعنصر a فوق F وأن $\partial p(x)=n$. بما أن الحدودية $p(x)$ أولية فوق F وأن العنصر a هو صفراً للحدودية $p(x)$ عندئذ حسب المبرهنة (7-1-5) أياً كان $b\in F(a)$ فإن العنصر b يمكن التعبير عنه بصورة وحيدة على النحو $b=c_{n-1}a^{n-1}+c_{n-2}a^{n-2}+\cdots+c_1a+c_0$ حيث $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\in F$. وهكذا نجد أن المجموعة $\{1,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}\subseteq F(a)$ تشكل قاعدة للحقل $F(a)$ فوق F وهذا يبين لنا أن $n=[F(a):F]$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة المهمة الآتية:

نتيجـــة.

إذا كان K تمديداً للحقل F و $a \in K$ عنصراً جبرياً فوق F عندئذ يكون الحقـل $F(a)$ تمديداً منتهياً للحقل F.

أيضاً بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة التعريف الآتي:

تعريـــف.

لـــيكن K تمديـــداً للحقـــل F و $a \in K$ عنـــصراً جبريـــاً فـــوق F. إذا كـــان $[F(a):F]=n$ فإننا سوف نقول أن للعنصر a درجة تساوي n فوق F أو بمعنى آخر نسمي n بدرجة العنصر a فوق F.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة المهمة الآتية:

مبرهنـــة 7-4-6.

ليكن F حقلاً. عندئذ كل تمديد منته للحقل F هو تمديد جبري للحقل F.

البرهـــان.

لنفرض أن K تمديد منته للحقل F وأن $[K:F]=n$ ولـــيكن $a \in K$ عندئـــذ فـــإن المجموعة $\{1,a,a^2,\cdots,a^n\} \subset K$ مرتبطة خطياً فوق الحقل F وبالتالي توجد عناصر $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n \in F$ ليست جميعها معدومة تحقق $\sum_{i=0}^{n} c_i a^i = o$. بما أن العناصـــر $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n \in F$ ليست جميعها معدومة فـــإن $f(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in F[x]$ وأن $f(x) \neq o$ كما أن $f(a)=\sum_{i=0}^{n} c_i a^i = o$ وحسب التعريف نجد أن العنـــصر a هـــو عنصر جبري فوق الحقل F وبالتالي يكون الحقل K تمديداً جبرياً للحقل F.

ملاحظـــة.

إن عكس المبرهنة الأخيرة غير صحيح أي إنه ليس كل تمديد جبري هـو تمديـد منته ويعود السبب في ذلك إلى أنه إذا كان K تمديداً جبرياً للحقل F فإن كل عنصر $a \in K$ ذو درجة منتهية فوق F وذلك حسب التعريف الأخير بينما لو أخذنا الحقـل $Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \cdots)$ فنجد أن هذا الحقل هو تمديد جبري للحقل Q ولكنـه يحـوي عناصر لأجل كل درجة فوق Q.

نأتي الآن إلى دراسة خواص التمديدات الجبرية والبداية سوف تكون مع المبرهنـة الآتية:

مبرهنـــة 7-4-7.

ليكن K تمديداً للحقل F و $a \in K$. الشرط اللازم والكافي كي يكون العنـصر a جبرياً فوق الحقل F هو أن يكون الحقل $F(a)$ تمديداً منتهياً للحقل F.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن العنصر a هو عنصر جبري فـوق الحقـل F ولـتكن $p(x) \in F[x]$ الحدودية الأصـغرية للعنـصر الجبـري a فـوق الحقـل F ولأن $\partial p(x) = n$ عندئذ حسب المبرهنة (7-4-5) يكون $[F(a):F] = n$ وهذا يبين لنا أن الحقل $F(a)$ هو تمديد منته للحقل F.

كفاية الشرط. لنفرض أن الحقل $F(a)$ هو تمديد منته للحقل F عندئذ حسب المبرهنة (7-4-6) يكون الحقل $F(a)$ تمديداً جبرياً للحقل F وبالتالي يكون العنصر a جبريـاً فوق الحقل F.

خاصة مهمة أخرى للتمديدات الجبرية نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 7-4-8.

ليكن K تمديداً جبرياً للحقل E و E تمديداً جبرياً للحقل F عندئذ فـإن K هـو تمديد جبري للحقل F.

البرهـــان.

ليكن $a \in K$ عندئذ فإن العنصر a هو عنصر جبري فوق الحقـل E. ولنفـرض أن $p(x) \in E[x]$ هـي الحدوديـة الأصـغرية للعنـصر الجبـري a فـوق E وأن $\partial p(x) = n$ عندئذ $p(x) = \sum_{i=o}^{n} b_i x^i$ حيث $b_o, b_1, \cdots, b_n \in E$. لنفرض أن

$$F_o = F(b_o), F_1 = F_o(b_1), F_2 = F_1(b_2), \cdots, F_n = F_{n-1}(b_n)$$

عندئذ حسب المبرهنة (7-1-2) نجد أن $F_1 = F_o(b_1) = F(b_o)(b_1) = F(b_o, b_1)$

$$F_2 = F_1(b_2) = F_o(b_1)(b_2) = F(b_o, b_1, b_2)$$

.....

$$F_n = F_o(b_o, b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

كمـا أن $F \subseteq F_o \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1} \subseteq F_n$ وأن $p(x) \in F[x] \subseteq F_n[x]$. وهكـذا أصبح لدينا $o \neq p(x) \in F_n[x]$ وأن $p(a) = o$ وهذا يبين لنـا أن العنـصر a هـو عنصر جبري فوق F_n وحسب المبرهنة (7-4-7) فإن الحقل $F_n(a)$ هو تمديد منتـه للحقل F_n. من جهة أخرى بما أن العنصر $b_i \in E$ هو عنصر جبري فوق الحقل F وأن $[F_{i+1} : F_i] = [F_i(b_{i+1}) : F_i]$ فإنه حسب المبرهنة (7-4-7) يكـون الحقـل F_{i+1} تمديد منته للحقل F_i وذلك لأجل جميع القيم $i = o, 1, 2, \cdots, n$. وبمـا أن $F_n = F(b_o)$ هو تمديد منته للحقل F لأن العنصر $b_o \in E$ هو عنصر جبـري فـوق F وحـسب المبرهنة (7-3-2) نجد أن الحقل $F_n(a)$ هو تمديد منته للحقل F وأن

$$[F_n(a) : F] = [F_n(a) : F_n].[F_n : F_{n-1}] \cdots [F_1 : F_o].[F_o : F]$$

وحسب المبرهنة (7-4-6) يكون الحقل $F_n(a)$ تمديداً جبرياً للحقل F وبالتالي يكون العنصر a عنصراً جبرياً فوق F. مما سبق نجد أن كل عنصر $a \in K$ هو عنـصر جبري فوق الحقل F وحسب التعريف نجد أن الحقل K هو تمديد جبري للحقل F.

خاصة جديدة أخرى للتمديدات الجبرية وعلاقتها بالتمديدات المنتهية نوردهـا مـن خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 7-4-9.

ليكن E تمديداً للحقل F. الشرط اللازم والكافي كي يكون التمديـد E للحقـل F تمديداً منتهياً هو أن يكـون $E=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ حيـث $a_1,a_2,\cdots,a_n\in E$ هـي عناصر جبرية فوق F.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن E هو تمديد منته للحقل F وأن $[E:F]=n$ عندئذ توجد قاعدة $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ للحقل E فوق F. بمـا أن $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq E$ فـإن $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)\subseteq E$. من جهة أخرى ليكن $y\in E$ عندئذ فإن العنصر y يكتـب بصورة وحيدة على النحـو $y=c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n$ حيـث $c_1,c_2,\cdots,c_n\in F$ ومنه نجد أن $y=c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n\in F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ وهـذا يبـين لنـا أن $E\subseteq F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ مما سبق نجد أن $E=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

وبما أن E هو تمديد منته للحقل F فإنه حسب المبرهنة (7-4-6) يكون E تمديـداً جبرياً للحقل F وبالتالي فإن العناصر $a_1,a_2,\cdots,a_n\in E$ هي عناصر جبريـة فـوق الحقل F.

كفاية الشرط. لنفرض أن $a_1,a_2,\cdots,a_n\in E$ هي عناصر جبرية فوق الحقـل F وأن $E=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. لنضع $F_1=F(a_1),F_2=F_1(a_2),\cdots,F_n=F_{n-1}(a_n)$ فنجـد أن $F_2=F_1(a_2)=F(a_1)(a_2)=F(a_1,a_2)$ وأن

$$F_3=F_2(a_3)=F(a_1,a_2)(a_3)=F(a_1,a_2,a_3)$$

$$\cdots$$

$$F_n=F_{n-1}(a_n)=F(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})(a_n)=F(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n)$$

وبالتالي يكون $F\subseteq F_1\subseteq\cdots\subseteq F_{n-1}\subseteq F_n=E$.

من جهة أخرى بما أن العنصر a_1 هو عنصر جبري فوق F فإنه حسب المبرهنـة (7-4-7) يكون الحقل $F_1=F(a_1)$ تمديداً منتهياً للحقل F. كذلك بما أن العنـصر a_2 جبرياً فوق F فإن a_2 هو عنصر جبري فوق F_1 وبالتالي حسب المبرهنـة (7-4-7) يكون $F_2=F_1(a_2)$ تمديداً منتهياً للحقل F_1. وبما أن العنصر a_i جبري فوق الحقل F

فإن العنصر a_i يكون جبرياً فوق الحقل F_{i-1} وبالتالي يكـون الحقـل $F_i = F_{i-1}(a_i)$ تمديداً منتهياً للحقل F_{i-1} وذلك لأجل جميع القيم $i = 1,2,\cdots,n$ حيث $F_0 = F$. ومنـه حسب المبرهنة (7-3-2) يكون الحقل $F_n = E$ تمديداً منتهياً للحقل F وأن

$$[E:F] = [F_n:F_0] = [F_n:F_{n-1}][F_{n-1}:F_{n-2}]\cdots[F_2:F_1][F_1:F_0].$$

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــة.

ليكن K تمديداً للحقل F و $a_1,a_2,\cdots,a_n \in K$ عناصر جبرية فـوق الحقـل F. عندئذ يكون $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ تمديداً جبرياً للحقل F.

البرهـــان.

لنفـــرض أن $a_1,a_2,\cdots,a_n \in K$ عناصـــر جبريـــة فـــوق الحقـــل F ولنـــضع $E = F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ فنجد أن $a_1,a_2,\cdots,a_n \in E$ هي عناصر جبرية فوق الحقل F وحسب المبرهنة (7-4-9) يكون E تمديداً منتهياً للحقل F وحسب المبرهنة (7-4-5) يكون E تمديداً جبرياً للحقل F.

إن النتيجة الأخيرة تنص على أنه إذا كان الحقل K تمديداً للحقل F وكان K مولداً بعدد منته من العناصر الجبرية فوق F فإن K يكون تمديداً جبرياً للحقل F.

العـــلاقـــة الجبـــريـــة.

في هذه الفقرة سوف ندرس البنية الجبرية لمجموعة العناصر الجبرية فوق حقل ما وخواص هذه المجموعة والبداية سوف تكون مع التعريف الآتي:

تعريـــف.

ليكن K تمديداً للحقل F. نسمي مجموعة العناصر مـن K والجبريـــة فـــوق F بالغلاقة الجبرية للحقل F في K ونرمز إليها $\overline{F}$ أي إن

$$\overline{F} = \{a : a \in K ;\ a \text{ عنصر جبري فوق } F\}.$$

ينتج من التعريف مباشرة أن الغلاقة الجبرية $\overline{F}$ للحقل F هي مجموعة غير خالية لأن كل عنصر من الحقل F هو عنصر جبري فوق F أي أن $F \subseteq \overline{F}$ وذلك لأجل أي حقل F.

لندرس الآن ومن خلال التمهيدية الآتية البنية الجبرية للغلاقة الجبرية.

تمهيدية 7-4-10.

ليكن K تمديداً للحقل F. إن الغلاقة الجبرية $\overline{F}$ للحقل F في K تشكل حقلاً جزئياً في K يحوي F.

البرهان.

لنفرض أن $\overline{F}$ هي الغلاقة الجبرية للحقل F في K عندئذ $F \subseteq \overline{F} \subseteq K$. وهذا يبين لنا أن $0,1 \in \overline{F}$. ليكن $a,b \in \overline{F}$ عندئذ حسب التعريف فإن $a,b \in K$ وهذه العناصر هي عناصر جبرية فوق الحقل F. لنأخذ الحقل $F(a,b)$ فنجد أن $F(a,b) \subseteq K$ أي أن $F(a,b)$ حقل جزئي من الحقل K وبما أن العناصر a,b جبرية فوق F فإنه حسب نتيجة المبرهنة (7-4-9) فإن الحقل $F(a,b)$ هو تمديد جبري للحقل F.

من جهة أخرى بما أن $a,b \in F(a,b)$ وأن $F(a,b)$ حقل نجد أن $a-b \in F(a,b)$ وأن $ab^{-1} \in F(a,b)$ ولكون الحقل $F(a,b)$ تمديد جبري للحقل F فإن العناصر $a-b$ و ab^{-1} هي عناصر من K جبرية فوق F وبالتالي نجد أن $a-b, ab^{-1} \in \overline{F}$ وهذا يبين لنا أن $\overline{F}$ حقل جزئي من K يحوي F.

تمـــاريـــن محـــلـــولـــة (7)

1 - أثبت أن $Q(\sqrt{2},\sqrt{3}) = Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

الحـــل.

بما أن $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ حقل وأن $\sqrt{2},\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ فإن $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$

وحسب التعريف نجد أن $Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

من جهة أخرى بما أن $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ فإن

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

كذلك بما أن $9,\sqrt{2}+\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ فإن

$$9(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 9\sqrt{2}+9\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

وبما أن $Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ حقل فإن $-9\sqrt{2}-9\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ وهكذا نجد أن

$$11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+(-9\sqrt{2}-9\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

ولكون $1/2 \in Q$ نجد أن $1/2(2\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ وبما أن

$$\sqrt{3} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

نجد أن $\sqrt{2},\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ وحسب التعريف يكون لدينا

$$Q(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$.

مما سبق نجد أن $Q(\sqrt{2},\sqrt{3}) = Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

2 - أثبت أن $Q(4-i) = Q(1+i)$ حيث $i = \sqrt{-1}$.

الحـــل.

بما أن $Q(4-i)$ حقل وأن $4-i \in Q(4-i)$ فإن $-(4-i) = -4+i \in Q(4-i)$

وبما أن $5,-4+i \in Q(4-i)$ نجد أن $5+(-4+i) = 1+i \in Q(4-i)$ وبالتـــالي

يكـــون $Q(1+i) \subseteq Q(4-i)$. مـــن جهـــة أخـــرى بمـــا أن $Q(1+i)$ حقـــل وأن

$1+i \in Q(1+i)$ فإن $-(1+i) \in Q(1+i)$. أيضاً بما أن $5,-(1+i) \in Q(1+i)$

نجد أن $4-i=5-(1+i)\in Q(1+i)$ وبالتالي يكون $Q(4-i)\subseteq Q(1+i)$. مما سبق نجد أن $Q(4-i)=Q(1+i)$.

3 - ليكن E تمديداً للحقل F و $a\in E$. أثبت أن التطبيق $\varphi:F[x]\to F(a)$ المعرف بالشكل التالي: أياً كان $f(x)\in F[x]$ فإن $\varphi(f(x))=f(a)$ هو تشاكل حلقي.

الحل.

ليكن $f(x),g(x)\in F[x]$ ولنفرض أن $f(x)=\sum_{i=0}^{s}b_ix^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{t}c_ix^i$ و أن $t\geq s$ حيث $a_i,b_i\in F$ وذلك لأجل جميع القيم $1\leq i\leq t$ عندئذ يكون:

$$\varphi(f(x)+g(x))=\varphi(\sum_{i=0}^{s}b_ix^i+\sum_{i=0}^{t}c_ix^i)=\varphi(\sum_{i=0}^{t}(b_i+c_i)x^i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{t}(b_i+c_i)a^i=\sum_{i=0}^{t}(b_ia^i+c_ia^i)=\sum_{i=0}^{s}b_ia^i+\sum_{i=0}^{t}c_ia^i=$$

$$=f(a)+g(a)=\varphi(f(x))+\varphi(g(x))$$

كما أن

$$\varphi(f(x).g(x))=\varphi(\sum_{i=0}^{s}b_ix^i.\sum_{i=0}^{t}c_ix^i)=\varphi(\sum_{k=0}^{s+t}d_kx^k)=\sum_{k=0}^{s+t}d_ka^k$$

حيث $d_k=\sum_{k=i+j}b_ic_j$ وهكذا نجد أن

$$\varphi(f(x).g(x))=\varphi(\sum_{k=0}^{s+t}d_kx^k)=\sum_{k=0}^{s+t}(\sum_{k=i+j}b_ic_j)a^k=$$

$$=(\sum_{i=0}^{s}b_ia^i).(\sum_{i=0}^{t}c_ia^i)=f(a).g(a)=\varphi(f(x)).\varphi(g(x))$$

مما سبق نجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي.

4 - ليكن F و K حقلين. إذا كان $\varphi: K \to F$ تماثلاً حقلياً (تشاكلاً حلقياً متبايناً وغامراً) فإنه يمكن تمديد هذا التماثل إلى الحلقتين $F[x]$ و $K[x]$ لنحصل على تماثل حلقي $\varphi: K[x] \to F[x]$ معرف بالشكل الآتي: $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) x^i$ وذلك أياً كان $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$.

الحل.

ليكن $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in K[x]$ ولنفرض أن $n \geq m$ حيث $a_i, b_i \in K$ وذلك لأجل جميع القيم $1 \leq i \leq n$ عندئذ

$$\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i) = \varphi(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i + b_i) x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [\varphi(a_i) + \varphi(b_i)] x^i = \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) x^i + \sum_{i=0}^{m} \varphi(b_i) x^i = \varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) +$$

$$+ \varphi(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)$$

لنفرض أن $(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i) = \sum_{k=0}^{n+m} d_k x^k$ حيث $d_k = \sum_{k=i+j} a_i b_j$ و $0 \leq k \leq n + m$ فنجد أن

$$\varphi[(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i).(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)] = \varphi(\sum_{i=0}^{n+m} d_k x^k) = \sum_{i=0}^{n+m} \varphi(d_k) x^k$$

ومنه فإن

$$\varphi(d_k) = \varphi(\sum_{k=i+j} a_i b_j) = \sum_{k=i+j} \varphi(a_i b_j) = \sum_{k=i+j} \varphi(a_i) \varphi(b_j)$$

وهكذا نجد أن

$$\varphi[(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i).(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)] = (\sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) x^i).(\sum_{i=0}^{m} \varphi(b_i) x^i) =$$

$$= \varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i).\varphi(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)$$

مما سبق نجد أن التطبيق $\varphi:K[x]\to F[x]$ هو تشاكل حلقي. وهو أيضاً متباين لأنه إذا كان $\varphi(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i)=\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)$ ينتج أن $\sum_{i=0}^{m}\varphi(b_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}\varphi(a_i)x^i$ وهذا يبين انا أن $n=m$ بالإضافة إلى ذلك فإن $\varphi(a_i)=\varphi(b_i)$ وذلك لأجل جميع القيم $0\le i\le n$ وبما أن $\varphi:K\to F$ تماثل ينتج أن $a_i=b_i$ وذلك لأجل جميع القيم $0\le i\le n$ وهكذا نجد أن $\sum_{i=0}^{n}a_i x^i=\sum_{i=0}^{m}b_i x^i$ أي أن التشاكل $\varphi:K[x]\to F[x]$ متباين. وهو أيضاً غامر لأنه إذا كان $\sum_{i=0}^{t}c_i' x^i\in F[x]$ عندئذ يكون $c_i'\in F$ أياً كان $0\le i\le t$ وبما أن التطبيق $\varphi:K\to F$ تماثل فإنه يوجد $c_i\in K$ بحيث $\varphi(c_i)=c_i'$ وذلك لأجل جميع القيم $0\le i\le t$ وهذا يبين لنا أن الحدودية $\sum_{i=0}^{t}c_i x^i\in K[x]$ وأن

$$\varphi(\sum_{i=0}^{t}c_i x^i)=\sum_{i=0}^{t}\varphi(c)x^i=\sum_{i=0}^{t}c_i' x^i$$

وبالتالي يكون التطبيق $\varphi:K[x]\to F[x]$ غامراً. مما سبق نجد أن التطبيق $\varphi:K[x]\to F[x]$ هو تماثل.

5 - ليكن F و K حقلين. إذا كان $\varphi:F\to K$ تماثلاً حقلياً وإذا كانت الحدودية $p(x)\in F[x]$ حدودية أولية فوق الحقل F عندئذ تكون الحدودية $\varphi(p(x))\in K[x]$ حدودية أولية فوق الحقل K.

الحل.

لنفرض أن $\varphi:F\to K$ تماثل حقلي عندئذ حسب التمرين المحلول (7-4) يمكن تمديد هذا التماثل إلى التماثل الحلقي $\varphi:F[x]\to K[x]$ المعرف بالشكل الآتي:

أياً كان $\sum_{i=0}^{n}c_i x^i\in F[x]$ فإن $\varphi(\sum_{i=0}^{n}c_i x^i)=\sum_{i=0}^{n}\varphi(c_i)x^i$. لنفرض أن الحدودية $p(x)\in F[x]$ أولية فوق الحقل F عندئذ تكون الحدودية $p(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$ وحسب المبرهنة (6-2-2) تكون $\partial p(x)\ge 1$. لنفرض أن

$\partial p(x) = m \geq 1$ عندئذ يكون $p(x) = \sum_{i=o}^{m} d_i x^i$ حيث $d_i \in F$ وأن $d_m \neq o$ ومنه يكون $\varphi(p(x)) = \sum_{i=o}^{m} \varphi(d_i) x^i \in K[x]$ لأن $\varphi(d_i) \in K$ وذلك لأجل جميع القيم $o \leq i \leq m$ وبما أن φ تماثل وأن $d_m \neq o$ فإن $\varphi(d_m) \neq o$ وبالتالي فإن $\partial \varphi(p(x)) = m \geq 1$ وحسب المبرهنة (6-2-2) فإن الحدودية $\varphi(p(x))$ غير قابلة للقلب في $K[x]$. من جهة أخرى لتكن $g_o(x), \theta_o(x) \in K[x]$ بحيث $\varphi(p(x)) = g_o(x)\theta_o(x)$ ولنفرض جدلاً أن كلاً من $g_o(x)$ و $\theta_o(x)$ غير قابلة للقلب في $K[x]$ عندئذ وحسب المبرهنة (6-2-2) فإن $\partial g_o(x) \geq 1$ وأن $\partial \theta_o(x) \geq 1$. وبما أن التطبيق $\varphi: F[x] \to K[x]$ هو تماثل فإنه يوجد $g(x), \theta(x) \in F[x]$ بحيث $\varphi(g(x)) = g_o(x)$ و $\varphi(\theta(x)) = \theta_o(x)$ ومنه يكون

$$\varphi(p(x)) = g_o(x).\theta_o(x) = \varphi(\theta(x))\varphi(g(x)) = \varphi(g(x).\theta(x))$$

وبما أن التطبيق $\varphi: F[x] \to K[x]$ تماثل ينتج أن $p(x) = g(x).\theta(x)$ وبما أن $\partial \theta_o(x) \geq 1$ وأن $\partial g_o(x) \geq 1$ ينتج أن $\partial \theta(x) \geq 1$ و $\partial g(x) \geq 1$ وحسب المبرهنة (6-2-2) فإن كلاً من $\theta(x)$ و $g(x)$ غير قابلة للقلب في $F[x]$ وهذا يناقض كون الحدودية $p(x)$ أولية فوق F وهذا يبين لنا إنه إما $g_o(x)$ قابلة للقلب أو $\theta_o(x)$ قابلة للقلب في $K[x]$. مما سبق نجد أن الحدودية $\varphi(p(x))$ هي حدودية أولية فوق الحقل K.

6 - ليكن $a, b \in Q$ بحيث $b \neq o$. أثبت أن $Q(\sqrt{a}) = Q(\sqrt{b})$ عندما وفقط عندما يوجد $c \in Q$ من أجله $a = bc^2$.

الحل.

لزوم الشرط. لنفرض أن $Q(\sqrt{a}) = Q(\sqrt{b})$. إذا كان $\sqrt{b} \in Q$ عندئذ يكون $Q(\sqrt{a}) = Q(\sqrt{b}) = Q$ وهذا يبين لنا أن $\sqrt{a} \in Q$ وبما أن $\sqrt{b} \neq o$ لنضع $c = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ فنجد أن $c \in Q$ وأن $a = bc^2$. إذا كان $\sqrt{b} \notin Q$ عندئذ يكون $Q(\sqrt{b}) \neq Q$ وبالتالي $Q(\sqrt{a}) \neq Q$ وهذا يبين لنا أن $\sqrt{a} \notin Q$ وبما أن

$\sqrt{a} \in Q(\sqrt{a}) = Q(\sqrt{b})$ فإنه يوجد $r, c \in Q$ بحيث $\sqrt{a} = r + c\sqrt{b}$ وهنا نجد أن $r = o$ لأنه إذا كان $r \neq o$ و $c = o$ نجد أن $\sqrt{a} = r \in Q$ وهذا غير ممكن. أي أن $r = o$ وبالتالي $\sqrt{a} = c\sqrt{b}$ أي أن $a = bc^2$.

كفاية الشرط. لنفرض أن $a = bc^2$ حيث $c \in Q$ فنجد أن $\sqrt{a} = c\sqrt{b} \in Q(\sqrt{b})$ عندئذ حسب المبرهنة (7 - 1 - 2) فإن $Q(\sqrt{a}) = Q(c\sqrt{b}) = Q(\sqrt{b})$.

تعريف.

ليكن K تمديداً للحقل F. نقول عن الحقل F إنه مغلق جبرياً في K إذا كان $F = \bar{F}$.

7 - ليكن F حقلاً. أثبت أنه إذا كانت درجة كل حدودية أولية في $F[x]$ تساوي الواحد فإن الحقل F يكون مغلقاً جبرياً.

الحل.

ليكن K تمديداً للحقل F و $\bar{F}$ الغلاقة الجبرية للحقل F في K حسب التمهيدية (7 - 4 - 10) فإن $F \subseteq \bar{F}$. ليكن $a \in \bar{F}$ عندئذ $a \in K$ كما أن العنصر a جبري فوق F. لنفرض أن $p(x) \in F[x]$ هي الحدودية الأصغرية للعنصر a فوق الحقل F عندئذ $p(x)$ هي حدودية أولية فوق F وحسب الفرض فإن $\partial p(x) = 1$ وبالتالي يكون $p(x) = b_1 x + b_o$ حيث $b_o, b_1 \in F$ بالإضافة إلى ذلك فإن $p(a) = o$ ومنه يكون $b_1 a + b_o = o$ وبالتالي $a = -b_1^{-1} b_o \in F$ وهذا يبين لنا أن $\bar{F} \subseteq F$. مما سبق نجد أن $F = \bar{F}$ وبالتالي الحقل F مغلق جبرياً.

تمـــاريـــن (7)

1 - أثبت أن $Q(\sqrt{3},\sqrt{5})=Q(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

2 - أوجد حقل تفريق الحدودية x^4-1 فوق الحقل Q.

3 - أوجد حقل تفريق للحدودية $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ فوق الحقل Q.

4 - اكتب العنصر $(3+4\sqrt{2})^{-1}$ على الشكل $a+b\sqrt{2}$ حيث $a,b\in Q$.

5 - عين جميع الحقول الجزئية في الحقل $Q(\sqrt{2})$.

6 - اكتب الحدودية x^3+2x+1 على شكل جداء لمضاريب خطية فوق تمديد ما للحقل Z_3.

7 - أكتب الحدودية x^8-x على شكل جداء مضاريب لحدوديات أولية فوق Z_2.

8 - أوجد العناصر $a,b,c\in Q$ والتي من أجلها

$$(1+\sqrt[3]{4})(2-\sqrt[3]{2})=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}.$$

9 - أثبت أن الحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2},\cdots)$ هو تمديد جبري للحقل Q ولكنه ليس تمديداً منتهياً للحقل Q.

10 - أوجد حقل تفريق للحدودية x^4-x^2-2 فوق الحقل Z_3.

11 - أوجد كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ فوق الحقل Q.

12 - أوجد درجة التمديد للحقل $Q(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ فوق الحقل $Q(\sqrt{15})$ ثم أوجد قاعدة هذا التمديد.

13 - أوجد درجة التمديد للحقل $Q(\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2})$ فوق الحقل Q ثم أوجد قاعدة هذا التمديد.

14 - أوجد حقل التفريق للحدودية x^3+x+1 فوق الحقل Z_2 ثم أكتب الحدودية x^3+x+1 على شكل جداء لمضاريب خطية فوق حقل التفريق هذا.

15 - لتكن α,β عناصر غير جبرية (متسامية) فوق الحقل Q. أثبت أن كلاً من $\alpha+\beta$ و $\alpha.\beta$ هي أيضاً عناصر غير جبرية (متسامية) فوق الحقل Q.

16 - ليكن K تمديداً منتهياً للحقل F درجته عدد أولي. أثبت أنه أياً كان $a\in K$ فإنه إما $F(a)=F$ أو $F(a)=K$.

17 - ليكن E تمديداً للحقل F و $a,b\in E$. إذا كان العنصر a جبرياً فوق F ودرجته n وكان العنصر b جبرياً فوق F ودرجته m وكان العددان n,m أوليين فيما بينهما فأثبت أن $[F(a,b):F]=n.m$.

18 - ليكن K تمديداً للحقل F و $a\in K$. أثبت أن $[F(a):F(a^3)]$ إما تساوي الواحد أو تساوي 3.

19 - ليكن K تمديداً للحقل F وليكن E_1,E_2 حقلين بحيث $F\subseteq E_1\subseteq K$ و $F\subseteq E_2\subseteq K$. إذا كان كل من العددين $[E_1:F]$ و $[E_2:F]$ هو عدد أولي فأثبت أنه إما $E_1=E_2$ أو $E_1\cap E_2=F$.

20 - ليكن K تمديداً للحقل F و $a,b\in K$. إذا كان العنصر b جبرياً فوق F أثبت أن $[F(a,b):F(a)]\le[F(a,b):F]$.


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصـــل الثـــامـــن

الحلقـــات البسيـــطـــة والمـــوضعيـــة

في هذا الفصل سوف ندرس بعضاً من صفوف الحلقات والعلاقة فيما بينها والبداية سوف تكون مع الحلقة البسيطة.

8 - 1. الحـــلقـــات البسيطـــة.

تعريـــف.

نقول عن الحلقة R إنها بسيطة إذا كان $R^2 \neq o$ وأن R لا تحوي مثاليات تختلف عن R و $\{o\}$.

إن الشرط $R^2 \neq o$ يعني أن عملية الضرب في R ليست هي العمليـــة الـــصفرية بمعنى آخر يوجد في R عناصر a,b مغايرة للصفر بحيث $ab \neq o$.

ينتج من التعريف مباشرة التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 8-1-1.

لتكن R حلقة بسيطة. عندئذ:

1. المثالي $\{o\}$ هو مثالي أعظمي في R.
2. المثالي R هو مثالي أصغري في R.
3. $J(R)=\{o\}$.

البرهـــان.

نتركه للقارئ كتمرين.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة الآتية والتي تعطينا تصنيفاً كاملاً للحلقات التبديليـــة البسيطة.

مبرهنـــة 8 -1 -2.

لتكن R حلقة تبديلية. الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R بسيطة هو أن تكون حقلاً.

البرهـــان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحلقة R بسيطة عندئذ $R^2 \neq o$ وبالتالي يوجد في R عناصر a,b بحيث $ab \neq o$. وبما أن $a,1 \in R$ ينتج أن $1 \neq o$ لأنه إذا كان $1 = o$ عندئذ أياً كان $d \in R$ فإن $d = d.1 = d\,o = o$ وهذا يناقض كون $R^2 \neq o$. لإثبات أن الحلقة R حقل يكفي إثبات أن كل عنصر من R مغاير للصفر يملك مقلوباً.

ليكن $o \neq a \in R$ عندئذ Ra هو مثالي في R ولأن $Ra \neq o$ ولكون الحلقة R بسيطة ينتج أن $Ra = R$ ومنه يوجد $b \in R$ بحيث $ba = 1$ أي إن العنصر a يملك مقلوباً في R. مما سبق نجد أن R حقل.

كفاية الشرط. لنفرض أن R حقل عندئذ $o,1 \in R$ ولأن $1 \neq o$ وهذا يبين لنا أن $R^2 \neq o$ وحسب التمهيدية (2 -2 -5) ينتج أن الحلقة R بسيطة. ₀

ينتج عن المبرهنة السابقة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 8 -1 -3.

لتكن R حلقة تبديلية و A مثالياً في R. القضايا الآتية متكافئة:

1. الحلقة R/A بسيطة.
2. الحلقة R/A حقل.
3. المثالي A أعظمي في R.

البرهـــان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). ينتج من المبرهنة (8 -1 -2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3). ينتج من المبرهنة (5 -1 -14). ₀

نأتي الآن إلى دراسة الحلقات البسيطة غير التبديلية والبداية سوف تكون مع التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 8-1-4.

كل جسم هو حلقة بسيطة.

البرهـــان.

لنفرض أن R جسم عندئذ R حلقة وتحوي عنصرين $0,1$ وأن $1 \neq 0$ وهذا يبين لنا أن $R^2 \neq 0$. ليكن $A \neq 0$ مثالياً في R عندئذ يوجد $0 \neq a \in A$ وحسب المبرهنة (4-1-4) يكون العنصر a قابلاً للقلب في R ومنه $A = R$ وحسب التعريف نجد أن الحلقة R بسيطة.

لندرس الآن المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 8-1-5.

لتكن R حلقة و $A \neq 0$ مثالياً في R. القضايا الآتية متكافئة:

1. الحلقة R/A بسيطة.
2. المثالي A أعظمي في R.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R/A بسيطة عندئذ $(R/A)^2 \neq \bar{0}$ ومنه نجد أن $1+A \neq A$ وبالتالي فإن $1 \notin A$ أي إن $A \neq R$. ليكن K مثالياً في R بحيث $A \subsetneq K$ وحسب التمهيدية (2-3-3) نجد أن $\bar{K} = K/A$ مثالي في الحلقة R/A وأن $\bar{K} \neq \bar{0}$ ولكون الحلقة R/A بسيطة ينتج أن $\bar{K} = R/A$ ومنه فإن $1+A \in K/A$ وبالتالي يوجد $x+A \in K/A$ حيث $x \in K$ يحقق $1+A = x+A$ وهكذا فإن $1-x \in A \subsetneq K$ وبالتالي يكون $1 = x+(1-x) \in K$ ومنه فإن $K = R$ وهذا يبين لنا أن المثالي A أعظمي في R.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن المثالي A أعظمي في R. عندئذ $1 \notin A$ ومنه $1+A \neq A$ وهذا يبين لنا أن $(R/A)^2 \neq \bar{0}$. ليكن $\bar{K} \neq \bar{0}$ مثالي في الحلقة R/A عندئذ حسب التمهيدية (2-3-3) فإن $\bar{K} = K/A$ حيث K مثالي في R وأن $A \subsetneq K$ وبما أن

المثالي Λ أعظمي في R نجد أن $K = R$ ومنه يكون $K = R/\Lambda$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R/Λ بسيطة.

نأتي الآن إلى دراسة واحدة من المبرهنات المهمة المتعلقة بالحلقات البسيطة:

مبرهنة 8-1-6.

حلقة المصفوفات المربعة من المرتبة n فوق أي جسم هي حلقة بسيطة.

البرهان.

ليكن D جسماً ولنفرض أن $R = M_n(D)$ هي حلقة المصفوفات المربعة فوق D من المرتبة n. سوف نورد البرهان للسهولة من أجل $n = 2$. لنفرض أن $R = M_2(D)$ حلقة المصفوفات المربعة فوق D من المرتبة الثانية بما أن D جسماً فإنه حسب التمهيدية (8-1-4) يكون D حلقة بسيطة وبالتالي يوجد $a,b \in D$ بحيث $ab \neq o$. لنفرض أن $a_o = \begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix}, b_o = \begin{bmatrix} b & o \\ o & o \end{bmatrix}$ فنجد أن $a_o, b_o \in R$ وأن $a_o b_o = \begin{bmatrix} ab & o \\ o & o \end{bmatrix} \neq o$ وهذا يبين لنا أن $R^2 \neq o$. ليكن $\Lambda \neq o$ مثالياً في R عندئذ يوجد $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Lambda$ حيث $a,b,c,d \in D$ ومنه نجد أن أحد العناصر a,b,c,d على الأقل مغاير للصفر وهنا سوف نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى. إذا كان $a \neq o$ عندئذ بما أن D جسماً فإنه يوجد مقلوب للعنصر a في D وليكن a^{-1} ومنه $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ وبالتالي يكون $\begin{bmatrix} a^{-1} & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R$ وبما أن A مثالياً في R نجد أن $\begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{-1} & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in A$. من جهة أخرى بما أن $\begin{bmatrix} o & a \\ o & o \end{bmatrix} \in R$ وأن Λ مثالياً R نجد أن $\begin{bmatrix} o & a \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & a \\ o & o \end{bmatrix} \in \Lambda$ وبما أن $\begin{bmatrix} o & o \\ a^{-1} & o \end{bmatrix} \in R$ وأن Λ مثالياً في R نجد أن $\begin{bmatrix} o & a \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o & o \\ a^{-1} & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & o \\ o & 1 \end{bmatrix} \in \Lambda$

وهكـــذا نجـــد أن $\begin{bmatrix}1 & o\\ o & o\end{bmatrix},\begin{bmatrix}o & o\\ o & 1\end{bmatrix}\in A$ ولكـــون A مثاليـــاً فـــي R ينـــتج أن $\begin{bmatrix}1 & o\\ o & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & o\\ o & o\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}o & o\\ o & 1\end{bmatrix}\in A$ وهذا يبين لنا أن $A=R$.

الحالة الثانية. إذا كانت العناصر a,b مغايرة للصفر عندئذ وبما أن A مثالياً في R نجد أن $\begin{bmatrix}a & o\\ o & o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ o & o\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & o\\ o & o\end{bmatrix}\in A$ وحسب الحالة الأولى نجد أن $A=R$.

الحالة الثالثة. إذا كانت العناصر a,b,c مغايرة للصفر عندئذ وبما أن A مثالياً فـــي R نجد أن

$$\begin{bmatrix}a & o\\ c & o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & o\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & o\\ o & o\end{bmatrix}\in A$$

كما أن

$$\begin{bmatrix}a & o\\ o & o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & o\\ o & o\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & o\\ c & o\end{bmatrix}\in A$$

وحسب الحالة الأولى نجد أن $A=R$.

الحالة الأخيرة. إذا كانت العناصر a,b,c,d جميعها مغايرة للصفر عندئذ وبما أن A مثالياً في R نجد أن

$$\begin{bmatrix}a & b\\ o & o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & o\\ o & o\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in A$$

وحسب الحالة الثانية نجد أن $A=R$.

مما سبق نجد أنه لا توجد في R مثاليات تختلف عن $\{o\}$ و R وهذا يبين لنا أن الحلقة R هي حلقة بسيطة.

إن المبرهنة الأخيرة يمكن تعميمها على النحو الآتي:

مبرهنـــة 8-1-7.

حلقة المصفوفات المربعة من المرتبة n حيث $n\in Z^+$ فوق أي حلقة بسيطة هـــي أيضاً حلقة بسيطة.

البرهـــان.

لنفرض أن R هي حلقة بسيطة وأن $R_1 = M_n(R)$ هي حلقة المصفوفات المربعة فوق R من المرتبة n. سوف نورد البرهان للسهولة من أجل $n=2$. لنفرض أن $R_1 = M_2(R)$ حلقة المصفوفات المربعة فوق R من المرتبة الثانية بما أن الحلقة R بسيطة فإن $R^2 \neq o$ ومنه يوجد $a,b \in R$ بحيث $ab \neq o$. لنفرض أن $a_o = \begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix}$, $b_o = \begin{bmatrix} b & o \\ o & o \end{bmatrix}$ فنجد أن $a_o, b_o \in R_1$ وأن $a_o b_o = \begin{bmatrix} ab & o \\ o & o \end{bmatrix} \neq o$ وهذا يبين لنا أن $R_1^2 \neq o$. ليكن $A \neq o$ مثالياً في R_1 عندئذ يوجد $o \neq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$ حيث $a,b,c,d \in R$ ومنه نجد أن أحد العناصر a,b,c,d على الأقل مغاير للصفر. وهنا سوف نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى. إذا كان $a \neq o$ عندئذ يكون $\begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix} \in A$. من جهة أخرى بما أن $a \neq o$ فإن RaR هو مثالي في R مغاير للصفر لأن $a \in RaR$ وبما أن الحلقة R بسيطة نجد أن $R = RaR$ ومنه يوجد $x,y \in R$ بحيث $xay = 1$. وهكذا نجد أن $\begin{bmatrix} ay & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & o \\ o & o \end{bmatrix} \in A$ فإن A مثالياً في R_1 وبما أن $\begin{bmatrix} y & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$

وبما أن $\begin{bmatrix} x & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$ وأن A مثالياً في R_1 نجد أن

$$\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xay & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ay & o \\ o & o \end{bmatrix} \in A$$

من جهة أخرى بما أن $\begin{bmatrix} o & ay \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$ وبما أن A مثالياً في R_1 نجد أن

$\begin{bmatrix} o & ay \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o & ay \\ o & o \end{bmatrix} \in A$ وبما أن $\begin{bmatrix} o & o \\ x & o \end{bmatrix} \in R_1$ وأن A مثالي في R_1 ينتج أن $\begin{bmatrix} o & o \\ o & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & o \\ x & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o & ay \\ o & o \end{bmatrix} \in A$ وهكذا نجد أن

ولكون A مثالياً في R_1 نجد أن $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} o & o \\ o & 1 \end{bmatrix} \in A$

$$\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o & o \\ o & 1 \end{bmatrix} \in A$$

وهذا يبين لنا أن $A = R_1$.

الحالة الثانية. إذا كانت العناصر a,b مغايرة للصفر عندئذ $\begin{bmatrix} a & b \\ o & o \end{bmatrix} \in A$ وبما أن A مثالياً في R_1 وأن $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$ نجد أن $\begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in A$

وحسب الحالة الأولى نجد أن $A = R_1$.

الحالة الثالثة. إذا كانت العناصر a,b,c مغايرة للصفر عندئذ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & o \end{bmatrix} \in A$ وبما أن A مثالياً في R_1 وأن $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$ نجد أن $\begin{bmatrix} a & o \\ c & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in A$ أيضاً بما أن A مثالياً في R_1 وأن $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$ ينتج أن $\begin{bmatrix} a & o \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & o \\ c & o \end{bmatrix} \in A$

وحسب الحالة الأولى نجد أن $A = R_1$.

الحالة الأخيرة. إذا كانت العناصر a,b,c,d جميعها مغايرة للصفر عندئذ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$ وبما أن A مثالياً في R_1 وأن $\begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \in R_1$ نجد أن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & o \\ o & o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$$

وحسب الحالة الثانية نجد أن $A = R_1$.

مما سبق نجد أنه لا يوجد في الحلقة R_1 مثاليات تختلف عن $\{o\}$ و R_1 وهذا يبين لنا أن الحلقة R_1 هي حلقة بسيطة.

ملاحظة.

كان بالامكان استنتاج المبرهنة (8-1-6) من خلال المبرهنة (8-1-7) وذلك لأن كل جسم عبارة عن حلقة بسيطة ولكن أردت من خلال إثبات كلاً من المبرهنتين أن يشعر القارئ بمتعة التعامل مع حلقات المصفوفات.

8 - 2. الحلقات الأولية.

لننتقل الآن إلى دراسة صف جديد من الحلقات يحوي صف الحلقات البسيطة وهو صف الحلقات الأولية.

تعريف.

نقول عن الحلقة R إنها أولية إذا كان $AB \neq \{o\}$ لأجل أي مثاليين A, B من R مغايرين للصفر.

ينتج من التعريف مباشرة التمهيدية الآتية:

تمهيدية 8 -2 -1.

كل حلقة بسيطة هي حلقة أولية.

البرهان.

لتكن R حلقة بسيطة و A, B مثاليين في R مغايرين للصفر عندئذ $A = B = R$ ومنه $AB = R^2 \neq \{o\}$. وهذا يبين لنا أن الحلقة R أولية.

لنورد الآن المبرهنة الآتية والتي تصف لنا الحلقات الأولية:

مبرهنة 8 -2 -2.

لتكن R حلقة. القضايا الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R أولية.

2 - لأجل أي مثالي يساري $K \neq o$ في R فإن $l(K) = o$.

3 - أجل أي مثالي يميني $H \neq o$ في R فإن $r(H) = o$.

4 - لأجل أي عنصرين $a, b \in R$ مغايرين للصفر فإن $aRb \neq \{o\}$.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R أولية وأن $K \neq o$ مثالي يساري في R. ليكن $x \in l(K)$ عندئذ $xK = o$ وبما أن $K \neq o$ فإنه يوجد $o \neq y \in K$ بحيث $xy = o$.

لنفرض جدلاً أن $x \neq o$ عندئذ كل من RxR و RyR مثالي في R مغاير للصفر وأن

$(RxR)(RyR) = RxR^2yR \subseteq (Rx)(Ry)R \subseteq (Rx)KR = R(xK)R = o$

ومنه يكون $o = (RxR)(RyR)$ وهذا يناقض كون الحلقة R أولية مما سبق نجد أن $x = o$ وذلك أياً كان $x \in l(K)$ أي إن $o = l(K)$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لتكن A,B مثاليين مغايرين للصفر في R ولنفرض جدلاً أن $AB = \{o\}$ عندئذ وبما أن B مثالياً يسارياً في R فإنه حسب الفرض يكون $l(B) = \{o\}$ وبما أن $AB = \{o\}$ نجد أن $A \subseteq l(B) = \{o\}$ أي أن $A = \{o\}$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أن $AB \neq \{o\}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Leftarrow$ (4). ليكن $a,b \in R$ عنصرين مغايرين للصفر ولنفرض جدلاً أن $aRb = \{o\}$. بما أن $Rb \neq \{o\}$ مثالياً يسارياً في R فإنه حسب الفرض يكون $l(Rb) = \{o\}$ وبما أن $aRb = \{o\}$ فإن $a \in l(Rb) = \{o\}$ أي أن $a = o$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أن $aRb \neq \{o\}$.

(4) $\Leftarrow$ (1). لتكن A,B مثاليين مغايرين للصفر في R عندئذ يوجد $o \neq a \in A$ و $o \neq b \in B$. لنفرض جدلاً أن $AB = \{o\}$ عندئذ $aRb \subseteq AB = \{o\}$ أي أن $aRb = \{o\}$ وهذا يناقض الفرض ومنه $AB \neq \{o\}$ وبالتالي الحلقة R هي حلقة أولية.

لندرس الآن العلاقة بين الحلقات الأولية والمثاليات الأولية في الحلقات التبديلية وذلك من خلال البرهنة الآتية:

مبرهنة 8-2-3.

لتكن R حلقة تبديلية و P مثالياً في R. الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي P أولياً في R هو أن تكون حلقة الخارج R/P حلقة أولية.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي P هو مثالي أولي في الحلقة R ولنكن $\overline{A},\overline{B}$ مثاليين في حلقة الخارج R/P بحيث $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{o}$ عندئذ $\overline{A} = A + P$ و $\overline{B} = B + P$

حيث A,B مثاليان في الحلقة R وأن $(A+P).(B+P)=P$ وبالتالي يكون $A.B+P=P$ وهذا يبين لنا أن $A.B\subseteq P$ وبما أن المثالي P أولي في الحلقة R نجد أنه إما $A\subseteq P$ أو $B\subseteq P$ وبالتالي إما $A+P=P$ أو $B+P=P$ أي إنه إما $\overline{A}=\overline{o}$ أو $\overline{B}=\overline{o}$ وهذا يبين لنا أن حلقة الخارج R/P هي حلقة أولية.

كفاية الشرط. لنفرض الآن أن حلقة الخارج R/P هي حلقة أولية عندئذ يكون $P\neq R$. ليكن K,D مثاليين في الحلقة R بحيث $K.D\subseteq P$ عندئذ يكون $K.D+P=P$ ومنه يكون $(K+P).(D+P)=P$ وهنا نجد أن $\overline{K}=K+P$ وأن $\overline{D}=D+P$ مثاليان في الحلقة R/P وأن $\overline{K}.\overline{D}=\overline{o}$ وبما أن حلقة الخارج R/P أولية نجد أنه إما $\overline{K}=\overline{o}$ أو $\overline{D}=\overline{o}$ وبالتالي يكون إما $K+P=P$ أو $D+P=P$ وهذا يبين أنه إما $K\subseteq P$ أو $D\subseteq P$ وبالتالي يكون المثالي P أولياً في الحلقة R.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن R حلقة تبديلية و P مثالياً في الحلقة R. الشروط الآتية متكافئة:

1. المثالي P أولي في الحلقة R.
2. حلقة الخارج R/P منطقة تكاملية.
3. حلقة الخارج R/P حلقة أولية.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). حسب المبرهنة (5-1-2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3). حسب المبرهنة (8-2-3).

8 - 3. الحلقات الموضعية.

في هذه الفقرة سوف ندرس الحلقات التي تحوي مثالياً أعظمياً واحداً فقط.

تعريف.

نقول عن الحلقة R إنها موضعية إذا حوت مثالياً يسارياً (يمينياً) أعظمياً واحداً فقط.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل حقل هو حلقة موضعية.

سوف نبدأ دراستنا لهذا الصف من الحلقات في الحالة التبديلية وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 8-3-1.

لتكن R حلقة تبديلية. الشروط التالية متكافئة:

1 - الحلقة R موضعية.

2 - العناصر غير القابلة للقلب في R تشكل مثالياً في R لا يساوي R.

3 - أياً كان $a \in R$ إما a أو $1-a$ قابل للقلب.

4 - المثالي $J(R)$ أعظمي في R.

5 - الحلقة $R/J(R)$ حقل.

البرهان.

(1) $\leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R موضعية عندئذ يوجد في R مثالي أعظمي واحد فقط وليكن M. ليكن $a \in M$ عندئذ a غير قابل للقلب في R لأن $R \neq M$.

من جهة أخرى ليكن $b \in R$ عنصراً غير قابل للقلب عندئذ حسب المبرهنة (4-1-3) يوجد في R مثالي أعظمي وليكن M_0 بحيث $b \in M_0$ وحسب الفرض فإن $M = M_0$ ومنه $b \in M$. وهكذا نجد أن العناصر غير القابلة للقلب في R تشكل مثالياً لا يساوي R.

(2) $\leftarrow$ (3). لنفرض أن I مجموعة العناصر غير القابلة للقلب في R وحسب الفرض فإن I مثالي في R وأن $I \neq R$ ومنه $1 \notin I$. ليكن $a \in R$ عندئذ نميز حالتين:

- إذا كان $a \notin I$ فإن a قابل للقلب في R.

- إذا كان $a \in I$ وبما أن $I \neq R$ ينتج أن $1-a \notin I$ وبالتالي يكون العنصر $1-a$ قابل للقلب في R.

(3) $\Leftarrow$ (4). ليكن A مثالياً في R بحيث $J(R) \subset A$ ومنه يوجد $a \in A$ بحيث $a \notin J(R)$. لنفرض جدلاً أن a غير قابل للقلب في R عندئذ أياً كان $x \in R$ فإن العنصر xa غير قابل للقلب وحسب الفرض يكون العنصر $1-xa$ قابلاً للقلب في R وحسب المبرهنة (4-3-1) ينتج أن $a \in J(R)$ وهذا غير ممكن ومنه نجد أن a قابل للقلب في R وبالتالي $A = R$ مما سبق نجد أن المثالي $J(R)$ أعظمي في R.

(4) $\Leftarrow$ (5). ينتج من المبرهنة (5-1-14).

(5) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة $R/J(R)$ حقل عندئذ حسب المبرهنة (5-1-14) يكون المثالي $J(R)$ أعظمياً في R. لنبرهن على أنه وحيد. ليكن M_1 مثالياً أعظمياً آخر في R عندئذ حسب تعريف $J(R)$ ينتج أن $J(R) \subset M_1$ وبما أن المثالي $J(R)$ أعظمياً وأن $M_1 \neq R$ نجد أن $J(R) = M_1$. وهذا يبين لنا أن المثالي $J(R)$ هو المثالي الأعظمي الوحيد في R وبالتالي تكون الحلقة R موضعية.

نأتي الآن إلى دراسة الحلقة R عندما يكون الأساس الأولي فيها مثالياً أعظمياً والتي تعطينا نتائج مثيرة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 8-3-2.

لتكن R حلقة تبديلية. القضايا الآتية متكافئة:

1. يوجد في R مثالي أولي واحد فقط.
2. الحلقة R موضعية و $rad\ R = J(R)$.
3. كل عنصر من R إما قابل للقلب أو عديم القوى.
4. المثالي $rad\ R$ أعظمي في R.
5. الحلقة $R/rad\ R$ حقل.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن B هو المثالي الأولي الوحيد في R عندئذ $rad\,R = B$ و لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة المثاليات الأعظمية في R عندئذ أياً كان $M \in \Im$ فإن $M = B$ وذلك لأن كل مثالي أعظمي هو مثالي أولي ومنه $\Im = \{B\}$ وحسب التعريف نجد أن الحلقة R موضعية وأن $J(R) = B$ وبالتالي $rad\,R = J(R)$.

(2) $\Leftarrow$ (3). ليكن $a \in R$ بما أن الحلقة R موضعية عندئذ إما a أو $a-1$ قابل للقلب.

- إذا كان a قابل للقلب يتم المطلوب.

- لنفرض أن a غير قابل للقلب عندئذ أياً كان $x \in R$ فإن العنصر xa غير قابل للقلب في R وحسب الفرض يكون العنصر $1-xa$ قابلاً للقلب في R. وحسب المبرهنة (4-3-1) ينتج أن $a \in J(R)$ وبما أن $rad\,R = J(R)$ نجد أن $a \in rad\,R$ وحسب المبرهنة (5-1-4) نجد أن العنصر a عديم القوى.

(3) $\Leftarrow$ (4). ليكن D مثالياً في R بحيث $rad\,R \subsetneq D$ عندئذ يوجد $d \in D$ بحيث $d \notin rad\,R$. بما أن $d \notin rad\,R$ فإنه حسب المبرهنة (5-1-4) نجد أن العنصر d ليس عديم القوى وحسب الفرض نجد أن العنصر d قابل للقلب وبالتالي $1 \in D$ أي أن $D = R$ وهكذا نجد أن المثالي $rad\,R$ أعظمي في R.

(4) $\Leftarrow$ (5). ينتج من المبرهنة (5-1-14).

(5) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة $R/rad\,R$ حقل عندئذ حسب المبرهنة (5-1-14) يكون المثالي $rad\,R$ أعظمياً في R وحسب التمهيدية (5-1-13) نجد أن المثالي $rad\,R$ أولي في R. ليكن P مثالياً أولياً آخر في R ومنه نجد أن $rad\,R \subseteq P$.

ليكن $b \in P$ ولنفرض جدلاً أن $b \notin rad\,R$ عندئذ العنصر $b + rad\,R$ مغاير للصفر في $R/rad\,R$ وبما أن $R/rad\,R$ حقلاً فإنه يوجد $c + rad\,R \in R/rad\,R$ بحيث $(b + rad\,R)(c + rad\,R) = 1 + rad\,R$ ومنه $1 - bc \in rad\,R$ وبالتالي يكون $1 - bc \in rad\,R \subseteq P$ وبما أن $bc \in P$ نجد أن $1 \in P$ أي إن $P = R$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أن $b \in rad\,R$ وبالتالي $P \subseteq rad\,R$ ومنه يكون $rad\,R = P$ وهذا يبين لنا أن $rad\,R$ هو المثالي الأولي الوحيد في R.

المبرهنة الآتية تصف لنا الحلقة الموضعية بشكل تام:

مبرهنـــة 8 -3 -3.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R موضعية.
2. $J(R)$ مثالي يساري أعظمي في R.
3. مجموعة العناصر غير القابلة للقلب من اليسار في R مغلقة بالنسبة للجمع.
4. $J(R)=\{x : x \in R; Rx \neq R\}$
5. المثالي $J(R)$ أعظمي في R.
6. الحلقة $R/J(R)$ جسم.
7. $J(R)=\{x : x \in R;$ غير قابلة للقلب $x\}$.
8. أياً كان $a \in R$ إما a أو $a-1$ قابل للقلب في R.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R موضعية عندئذ يوجد في R مثالي يساري أعظمي واحد فقط وليكن M ومنه $J(R)=M$.

(2) $\Leftarrow$ (3). لنفرض أن K هي مجموعة العناصر غير القابلة للقلب من اليسار في الحلقة R عندئذ K غير خالية لأن $o \subset K$. ليكن $x, y \in K$ عندئذ $x \subset J(R)$ لأنه إذا كان $x \notin J(R)$ فإن $Rx+J(R)=R$ لأن المثالي اليساري $J(R)$ أعظمي في R. من جهة أخرى بما أن المثالي اليساري $J(R)$ صغير في R نجد أن $Rx=R$ وهذا يبين لنا أن العنصر x قابل للقلب من اليسار وهذا يناقض كون $x \in K$ ومنه نجد أن $x \in J(R)$. بطريقة مشابهة نجد أن $y \in J(R)$ وبما أن $J(R)$ مثالياً نجد أن $x+y \in J(R)$ وبما أن $J(R) \neq R$ فإن العنصر $x+y$ غير قابل للقلب من اليسار في R ومنه فإن $x+y \in K$.

(3) $\Leftarrow$ (4). نعلم أن $J(R) \neq R$. ليكن $x \in J(R)$ عندئذ $Rx \neq R$ لأنه إذا كان $Rx=R$ فإن $R=Rx \subset J(R) \subseteq R$ أي أن $J(R)=R$. وهذا غير ممكن وهكذا نجد أن العنصر x غير قابل للقلب من اليسار ومنه $J(R) \subseteq \{x : x \in R; Rx \neq R\}$.

ليكن $y \in R$ بحيث $Ry \neq R$ عندئذ أياً كان $r \in R$ فإن $R(ry) \neq R$ لأنه إذا كان $R(ry) = R$ نجد أن $R = R(ry) \subseteq Ry \subset R$ وبالتالي يكون $Ry = R$ وهذا غير ممكن. ومنه فإن العنصر ry غير قابل للقلب من اليسار وبما أن $1 = ry + (1 - ry)$ وحسب الفرض نجد أن العنصر $1 - ry$ قابل للقلب من اليسار وذلك أياً كان $r \in R$ وحسب المبرهنة (4-3-1) نجد أن $y \in J(R)$ وهذا يبين لنا أن $\{x : x \in R; Rx \neq R\} \subseteq J(R)$ مما سبق نجد أن $J(R) = \{x : x \in R; Rx \neq R\}$.

(4) $\Leftarrow$ (5). نعلم أن $J(R)$ مثالي في R وأن $J(R) \neq R$. ليكن D مثالياً في R بحيث $J(R) \subsetneq D$ عندئذ يوجد $d \in D$ بحيث $d \notin J(R)$ وحسب الفرض يكون $Rd = R$ ومنه $R = Rd \subseteq D \subseteq R$ وبالتالي يكون $R = D$ وهذا يبين لنا أن المثالي $J(R)$ أعظمي في R.

(5) $\Leftarrow$ (6). ينتج من المبرهنة (4-1-4).

(6) $\Leftarrow$ (7). بما أن $J(R) \neq R$ عندئذ أياً كان $a \in J(R)$ فإن العنصر a غير قابل للقلب ومنه نجد أن $J(R) \subseteq \{x : x \in R;$ x غير قابلة للقلب$\}$. ليكن $b \in R$ عنصراً غير قابل للقلب ولنفرض جدلاً أن $b \notin J(R)$ عندئذ $\bar{R} = R/J(R) \ni \bar{b} = b + J(R)$ وأن $\bar{b} \neq \bar{0}$ وبما أن $\bar{R}$ جسماً يكون العنصر $\bar{b}$ قابلاً للقلب في $\bar{R}$ وبالتالي يوجد عنصر $\bar{\bar{c}} \in \bar{R}$ بحيث $\bar{b}\bar{\bar{c}} = \bar{\bar{c}}\bar{b} = \bar{1}$ ومنه نجد أن $1 - cb \in J(R)$ وبالتالي يوجد $z \in J(R)$ بحيث $1 - cb = z$ ومنه يكون $1 = cb + z \in Rb + J(R)$ وبالتالي يكون $Rb + J(R) = R$ وبما أن المثالي اليساري $J(R)$ صغيراً في R نجد أن $Rb = R$ وبالتالي يكون العنصر b قابلاً للقلب من اليسار. من جهة أخرى بما أن $1 - bc \subset J(R)$ فإنه يوجد $z_1 \in J(R)$ بحيث $1 - bc = z_1$ ومنه يكون $1 = bc + z_1 \in bR + J(R)$ وبالتالي نجد أن $R = bR + J(R)$ وبما أن المثالي اليميني $J(R)$ صغير في R نجد أن $bR = R$ أي أن العنصر b قابل للقلب من اليمين في R. مما سبق نجد أن العنصر b قابل للقلب وهذا يناقض الفرض ومنه نجد أن $b \in J(R)$ وبالتالي $J(R) \supseteq \{x$ غير قابلة للقلب $; x \in R : x\}$ وهكذا نجد أن

$J(R) = \{x$ غير قابلة للقلب $; x \in R : x\}$.

(7)$\Leftarrow$(8). ليكن $a \in R$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $a \notin J(R)$ عندئذ حسب الفرض فإن العنصر a قابل للقلب.

- إذا كان $a \in J(R)$ عندئذ فإنه حسب المبرهنة (4-3-2) يكون العنصر $a-1$ قابلاً للقلب في R. مما سبق نجد أنه أياً كان $a \in R$ إما a أو $a-1$ قابل للقلب في R.

(8)$\Leftarrow$(2). ليكن M مثالياً يسارياً في R بحيث $J(R) \subsetneq M$ عندئذ يوجد $x \in M$ بحيث $x \notin J(R)$ وحسب المبرهنة (4-3-1) يوجد $y_{\circ} \in R$ بحيث $y_{\circ}x-1$ غير قابل للقلب وحسب الفرض يكون العنصر $y_{\circ}x$ قابلاً للقلب وبما أن $y_{\circ}x \in M$ نجد أن $M = R$ وهذا يبين لنا أن المثالي $J(R)$ أعظمي في R.

(2)$\Leftarrow$(1). لنفرض أن المثالي اليساري $J(R)$ أعظمي في R وليكن K مثالياً يسارياً آخر في R عندئذ $J(R) \subseteq K$. وبما أن $K \neq R$ وحسب الفرض نجد أن $J(R) = K$ وهذا يبين لنا أن $J(R)$ هو المثالي اليساري الأعظمي الوحيد في R وحسب الفرض تكون الحلقة R موضعية.

إن الخاصة الرابعة من المبرهنة الأخيرة تنص على أن مجموعة العناصر غير القابلة للقلب من اليسار في الحلقة R تشكل مثالياً في R لا يساوي R. كما أن الخاصة السابعة تنص على أن مجموعة العناصر غير القابلة للقلب في R تشكل مثالياً لا يساوي R. بالإضافة إلى ذلك يمكن الاستنتاج من المبرهنة الأخيرة والخاصة الخامسة بالذات أن كل حلقة بسيطة هي حلقة موضعية.

Damascus University

الفصـــل التـــاســـع

الحـلقـــات الأرتينيـــة والنيـوثـريـــة

في هذا الفصل سوف نعالج صنفين من الحلقات الأول ويدعى الحلقـات الأرتينيـة نسبة إلى الرياضي *Emil Artin* 1898 – 1962 والثاني ويدعى الحلقات النيوثرية نسبة إلى الرياضية *Emmy Noether* 1882 – 1935 وقد كان لهذين النوعين من الحلقـات دوراً مهماً في تطوير نظرية الحلقات بشكل خاص والجبر المجرد بشكل عام.

9 - 1. الحـلقـــات الأرتينيـــة.

تعريـف.

نقول عن الحلقة R إنها أرتينية من اليسار (اليمين) إذا كانت تحقق شرط انقطـاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليسارية (اليمينية) المغايرة للصفر.

بمعنى آخر لأجل أي سلسلة متناقصة من المثاليات اليسارية (اليمينية) المغايرة للصفر في R على الشكل

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

يوجد $n \in N^*$ بحيث $A_k = A_n$ وذلك أياً كان $k \geq n$ أي أن $\cdots = A_{n+1} = A_n$.

في هذه الفقرة وعند الحديث عن الحلقات الأرتينية اليسارية سـوف نـسقط كلمـة اليسارية وذلك بهدف الاختصار ونكتفي بذكر الحلقة الأرتينية ويقصد بها من اليسار.

التمهيدية الآتية تعطينا شرطاً مكافئاً لمفهوم الحلقة الأرتينية.

تمهيديـة 9 -1 -1.

من أجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R أرتينية.

2 - كل مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية من R والتي كل منها لا يـساوي الصفر تحوي عنصراً أصغرياً.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لتكن $\mathfrak{I}$ مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي الصفر ولنفرض جدلاً أن المجموعة $\mathfrak{I}$ لا تحوي عنصراً أصغرياً. لـيكن $A_1 \in \mathfrak{I}$ بما أن A_1 ليس أصغرياً في $\mathfrak{I}$ فإنه يوجد $A_2 \in \mathfrak{I}$ بحيث $A_2 \subsetneq A_1$. أيضاً بما أن A_2 ليس عنصراً أصغرياً في $\mathfrak{I}$ فإنه يوجد $A_3 \in \mathfrak{I}$ بحيث $A_3 \subsetneq A_2$ ومنه $A_3 \subsetneq A_2 \subsetneq A_1$. نتابع بهذا الشكل ولنفرض أنه تم الحصول على العنصر $A_n \in \mathfrak{I}$ والذي يحقق $A_n \subsetneq A_{n-1}$ ولكون العنصر A_n ليس أصغرياً في $\mathfrak{I}$ فإنه يوجد $A_{n+1} \in \mathfrak{I}$ بحيث $A_{n+1} \subsetneq A_n$. وهكذا بالمتابعة نحصل على السلسة المتناقصة من المثاليات اليسارية $\cdots \subsetneq A_n \subsetneq A_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq A_3 \subsetneq A_2 \subsetneq A_1$ في R وهذه السلسلة لا نهائية وهذا يناقض الفرض مما سبق نجد أن المجموعة $\mathfrak{I}$ تحوي عنصراً أصغرياً.

(2) $\Leftarrow$ (1). لتكن $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_m \supseteq \cdots$ سلسلة متناقصة من المثاليات اليسارية المغايرة للصفر في R ولنأخذ المجموعة $\mathfrak{I} = \{A_i : i = 1,2,3,\cdots\}$ وحسب الفرض يوجد في $\mathfrak{I}$ عنصر أصغري وليكن A_n عندئذ أياً كان $k \geq n$ فإن $A_k = A_n$ لأنه إذا كان $A_k \neq A_n$ فإن $A_k \subsetneq A_n$ وهذا يناقض كون A_n عنصراً أصغرياً في $\mathfrak{I}$ مما سبق نجد إنه أياً كان $k > n$ فإن $A_k = A_n$ أي إن السلسلة

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_m \supseteq \cdots$$

تنقطع وهذا يبين لنا أن الحلقة R أرتينية.

لنبدأ الآن بدراسة الحلقات الأرتينية وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـة 9-1-2.

لتكن R حلقة أرتينية و $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً عندئذ:

1 - الحلقة $Im f$ أرتينية.

2 - إذا كان التشاكل f غامراً فإن الحلقة S تكون أرتينية.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن الحلقة R أرتينية ولما كان f تشاكلاً حلقياً وحسب المبرهنة (3-1-1) فإن Imf حلقة. لتكن $\Im$ مجموعة من المثاليات اليسارية في Imf والتي كل منها لا يساوي الصفر. بما أنه أياً كان $K \in \Im$ فإن K مثالي يساري في Imf مغاير للصفر عندئذ وحسب المبرهنة (3-1-2) فإن $f^{-1}(K)$ مثالي يساري في R مغاير للصفر لأنه إذا كان $f^{-1}(K) = \{o\}$ عندئذ $K \subseteq f(\{o\}) = \{o\}$ وهذا غير ممكن.

لنأخذ المجموعة $\Im_o = \{f^{-1}(K) : K \in \Im\}$ فنجد أن $\Im_o$ مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي الصفر. وبما أن الحلقة R أرتينية فإنه يوجد في $\Im_o$ عنصر أصغري وليكن $f^{-1}(K_o)$ حيث $K_o \in \Im$. لنبرهن على أن K_o هو عنصر أصغري في المجموعة $\Im$.

ليكن $A \subset \Im$ بحيث $A \subseteq K_o$ عندئذ $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(K_o)$ لأنه إذا كان $a \in f^{-1}(A)$ عندئذ $f(a) \in A \subseteq K_o$ ومنه $a \in f^{-1}(K_o)$ وبما أن العنصر $f^{-1}(K_o)$ أصغرياً في $\Im_o$ نجد أن $f^{-1}(A) = f^{-1}(K_o)$ ومنه $A = K_o$ وهذا يبين لنا أن العنصر K_o هو عنصر أصغري في $\Im$ مما سبق نجد أن الحلقة Imf أرتينية.

2 - إذا كان f غامراً عندئذ يكون $S = Imf$ وحسب (1) تكون الحلقة S أرتينية.

بالاعتماد على التمهيدية الأخيرة يمكننا صياغة التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 9-1-3.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. إذا كانت الحلقة R أرتينية عندئذ فإن حلقة الخارج R/A أرتينية أيضاً.

البرهـــان.

ينتج مباشرة من التمهيدية الأخيرة.

المبرهنة الآتية تصف لنا طبيعة أساس جاكبسون للحلقة الأرتينية.

مبرهنـــة 9-1-4.

إذا كانت الحلقة R أرتينية عندئذ المثالي $J(R)$ عديم القوى.

البرهـــان.

لنفرض أن الحلقة R أرتينية بما أن $J(R)$ مثالي يساري في R عندئذ أياً كان $n \in N^*$ فإن $(J(R))^n$ هو أيضاً مثالي يساري في R. إذا وجد $k \in N^*$ بحيث $(J(R))^k = o$ يتم المطلوب. لنفرض جدلاً أنه أياً كان $s \in N^*$ فإن $(J(R))^s \neq o$ عندئذ نحصل على السلسلة الآتية

$$J(R) \supseteq (J(R))^2 \supseteq \cdots \supseteq (J(R))^s \supseteq \cdots$$

وهي سلسلة متناقصة من المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي الصفر وبما أن الحلقة R أرتينية فإنه يوجد $n \in N^*$ بحيث $(J(R))^n = (J(R))^k$ وذلك أياً كان $k \geq n$.

لنفرض أن $B = (J(R))^n$ عندئذ $B^2 = B \neq \{o\}$. لنأخذ المجموعة

$$\Im = \{D : R \text{ مثالي يساري في } D ; D \subseteq B ; BD \neq o\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $B \in \Im$ وأن $\{o\} \notin \Im$ وبما أن الحلقة R أرتينية فإنه حسب التمهيدية (9-1-1) يوجد في $\Im$ عنصر أصغري وليكن A ومنه فإن $A \neq \{o\}$ مثالي يساري في R وأن $A \subseteq B$ و $BA \neq \{o\}$ وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $Ba \neq \{o\}$ أي أن $a \neq o$ وبما أن Ba مثالياً يسارياً في R مغاير للصفر وأن $Ba \subseteq BA \subseteq BB = B$ و $BBa = B^2a = Ba$ أن نجد $Ba \in \Im$ و $Ba \subseteq A$ وبما أن A أصغرياً في $\Im$ نجد أن $Ba = A$ وبالتالي يكون $a \in Ba$ ومنه يوجد $b \in B$ بحيث $a = ba$ وبما أن $b \in B = (J(R))^n \subseteq J(R)$ فإنه حسب المبرهنة (4-3-3) فإن العنصر $1-b$ قابل للقلب في R وبالتالي يوجد $c \in R$ بحيث $c(1-b) = 1$ وبالتالي $c(1-b)a = a$ ومنه يكون $a = ca - cba = ca - ca = o$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أنه يوجد $i \in N^*$ بحيث $(J(R))^i = o$ وهكذا نجد أن المثالي $J(R)$ عديم القوى.

ينتج من المبرهنة الأخيرة النتيجة المهمة الآتية:

نتيجة.

إذا كانت الحلقة R أرتينية عندئذ يكون $J(R)$ أكبر مثالي عديم القوى في R.

المبرهنة الآتية تبين لنا العلاقة بين المثاليات العديمة والمثاليات عديمة القوى في الحلقات الأرتينية.

مبرهنة 9-1-5.

لتكن R حلقة أرتينية و B مثالياً يسارياً في R. الشرط اللازم والكافي كي يكون المثالي اليساري B عديم القوى هو أن يكون عديماً.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري B عديم القوى عندئذ وحسب التمهيدية (4-2-4) فإن B يكون عديماً.

كفاية الشرط. لنفرض أن المثالي اليساري B عديم وحسب المبرهنة (4-3-5) فإن $B \subseteq J(R)$. من جهة أخرى بما أن الحلقة R أرتينية فإنه حسب المبرهنة (9-1-4) يكون $J(R)$ عديم القوى وبالتالي يوجد $n \in N^*$ بحيث $(J(R))^n = o$ ومنه نجد أن $B^n = \{o\}$ أي أن B عديم القوى.

لمتابعة دراستنا للحلقات الأرتينية لابد لنا من التمهيدية الآتية:

تمهيدية 9-1-6.

لتكن R حلقة و $a \in R$ بحيث إن العنصر $a^2 - a$ عديم القوى. عندئذ إما a عديم القوى أو أن العنصر $e = ap(a)$ هو عنصر جامد حيث $p(x) \in Z[x]$.

البرهان.

لنفرض أن العنصر $a^2 - a$ عديم القوى عندئذ يوجد $k \in N^*$ بحيث $(a^2 - a)^k = o$. إذا كان العنصر a عديم القوى يتم المطلوب. لنفرض أن العنصر a ليس عديم القوى عندئذ $a^n \neq o$ أياً كان $n \in N$. من جهة أخرى بما أن $(a^2 - a)^k = o$ عندئذ بالنشر حسب دستور ثنائي الحد نجد أن $a^k = a^{k+1} p_o(a)$ حيث $p_o(x) \in Z[x]$ ومنه يكون

$$a^k = a^k (ap_n(a)) = a^k (ap_o(a))^2$$

بتكرار هذه العملية عدد من المرات نجد أن

$$a^k = a^k (ap_n(a))^k = a^{2k} (p_n(a))^k$$

وبما أن $a^k \neq o$ نجد أن العنصر $e_n = a^k (p_n(a))^k \neq o$ ومنه فإن

$$e_n^2 = [a^{2k} (p_n(a))^k](p_o(a))^k = a^k (p_n(a))^k = e_n$$

لنضع $p(a) = a^{k-1}(p_n(a))^k$ فنجد أن العنصر $e = a.p(a)$ هو عنصر جامد في R حيث $p(x) \in Z[x]$.

نأتي الآن إلى غايتنا المنشودة وهي دراسة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــة 9 -1 -7.

لتكن R حلقة أرتينية و $B \neq \{o\}$ مثالياً يسارياً في R ليس عديم القوى عندئذ فإن B يحوي عنصر جامد مغاير للصفر.

البرهـــان.

لنفرض أن $B \neq \{o\}$ مثالي يساري في R ليس عديم القوى عندئذ حسب المبرهنـــة (4-3-5) فإن $B \not\subset J(R)$. لنفرض أن $\bar{R} = R/J(R)$ عندئذ حسب المبرهنة (4-3-4) فإن $J(\bar{R}) = \bar{o}$ وهذا يبين لنا حسب المبرهنة (4-3-5) أن الحلقة $\bar{R}$ لا تحـــوي مثاليات عديمة القوى. لنفرض أن $\bar{B} = B + J(R)$ عندئذ $\bar{B} \neq \{\bar{o}\}$ ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{\bar{K} : \bar{K} \neq \bar{o}; \bar{K} \subseteq \bar{B}\}$$ مثالي يساري في $\bar{R}$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $\bar{B} \in \Im$ وبما أن الحلقة R أرتينية فإنـــه حـــسب التمهيدية (9-1-3) تكون الحلقة $\bar{R}$ أرتينية أيضاً ومنه يوجد في المجموعة $\Im$ عنصر أصغري وليكن $\bar{D}$. إن $\bar{D}$ مثالي يساري أصغري في الحلقـــة $\bar{R}$ ويحقـــق $\bar{D} \subseteq \bar{B}$ وحسب المبرهنة (4-2-3) فإن $\bar{D} = \bar{R}\bar{e}$ حيث $\bar{e}$ عنصر جامد في $\bar{R}$ مغاير للصفر ومنه $\bar{e} \in \bar{D} \subseteq \bar{B}$ وبالتـــالي فـــإن $\bar{e} = a + J(R)$ حيـــث $a \in B$ وأن $\bar{e} = \bar{a}$. بمـــا أن $\bar{e}^2 = \bar{e}$ نجد أن $a^2 + J(R) = a + J(R)$ وبالتالي يكـــون $a^2 - a \in J(R)$. مـــن جهة أخرى بما أن الحلقة R أرتينية فإنه حسب المبرهنـــة (9-1-4) فـــإن المثـــالي $J(R)$ عديم القوى وبما أن $a^2 - a \in J(R)$ نجد أن العنصر $a^2 - a$ عديم القوى. من جهة أخرى نلاحظ أنه لأجل أي عدد صـــحيح موجـــب k فـــإن $a^k \notin J(R)$ لأن $\bar{a}^k = \bar{e}^k = \bar{e} \neq o$ وهذا يبين لنا أن العنصر a ليس عديم القوى وحسب التمهيديـــة

(9-1-6) فإن العنصر $g = a.p(a)$ هو عنصر جامد في R مغاير للصفر حيث $p(x) \in Z[x]$ وأن $g \in B$.

المبرهنة الآتية تبين لنا طبيعة المثاليات الأصغرية وأثرها في الحلقات الأرتينية.

مبرهنة 9-1-8.

لتكن R حلقة أرتينية و B مثالياً يسارياً أصغرياً في R ليس عديم القوى عندئذ:

1. المثالي اليساري B مولد بعنصر جامد.
2. المثالي اليساري B هو حد مباشر في الحلقة R.
3. المثالي اليساري B هو حد مباشر في أي مثالي يساري D في R يحوي B.

البرهان.

1 - بما أن B مثالياً يسارياً أصغرياً ليس عديم القوى في R عندئذ حسب المبرهنة (9-1-7) فإن B يحوي عنصراً جامداً e مغايراً للصفر ومنه فإن Re مثالي يساري في R مغاير للصفر وأن $Re \subseteq B$ وبما أن B أصغري نجد أن $B = Re$.

2 - وجدنا حسب (1) أن $B = Re$ حيث e عنصر جامد في R مغاير للصفر وحسب المبرهنة (2-4-2) فإن B هو حد مباشر في R.

3 - وجدنا حسب (2) أن B هو حد مباشر في R ومنه $R = B \oplus A$ حيث A مثالي يساري في R. ليكن D مثالياً يسارياً في R بحيث $B \subseteq D$ ولنبرهن على أن $D = B \oplus (D \cap A)$ واضح أن $B + (D \cap A) \subseteq D$.

ليكن $d \in D$ عندئذ $d \in R$ ومنه يوجد $b \in B$ و $a \in A$ بحيث $d = b + a$ وبما أن $b \in B \subseteq D$ نجد أن $d - b = a \in D$ ومنه يكون $d = b + a \in B + (D \cap A)$ وبالتالي $D \subseteq B + (D \cap A)$. مما سبق نجد أن $D = B + (D \cap A)$ كما أن $B \cap (D \cap A) \subseteq B \cap A = \{o\}$ أي أن B هو حد مباشر في أي مثالي يساري D يحوي B.

المبرهنة الآتية تعطينا خاصة مهمة أخرى لكل من المثاليات عديمة القوى في الحلقات الأرتينية ولأساس جاكبسون لهذه الحلقات.

مبرهنـــة 9-1-9.

لتكن R حلقة أرتينية ولنفرض أن N هو مجموع المثاليات اليسارية عديمة القـوى في R. عندئذ:

1. N هو مثالي عديم القوى في R.
2. المثالي N يحوي جميع المثاليات اليمينية عديمة القوى في R.
3. حلقة الخارج R/N لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر.
4. $N = J(R)$.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن $\Im = \{A_i : i \in I\}$ مجموعة جميع المثاليات اليسارية عديمة القوى في الحلقة R وأن $N = \sum_{i \in I} A_i$. إن N هو مثالي يساري في R.

لنفرض جدلاً أن المثالي اليساري N ليس عديم القوى في R عندئذ حسب المبرهنـــة (9-1-7) فإن N يحوي عنصر جامد e مغاير للصفر ومنه $e = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ حيث n عدد صحيح موجب وأن $x_{ij} \in A_{ij}$ أياً كان $1 \le j \le n$ ومنه $e \in \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$.

من جهة أخرى بما أن كلاً من A_{ij} هو مثالي يساري عديم القوى فإنه حسب المبرهنة (4-2-8) يكون المثالي اليساري $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ عديم القوى وهكذا نجد أن $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ هو مثالي يساري عديم القوى في R ويحوي عنصر جامد e مغاير للصفر مما يناقض التمهيدية (4-2-10). مما سبق نجد أن المثالي اليساري N عـديم القـوى فـي R وبالتـالي يوجد $m \in N^*$ بحيث $N^m = o$. لنبرهن الآن على أن N هو مثالي في R.

بما أن N مثالياً يسارياً في R عندئذ حسب التمهيدية (2-2-2) نجـد أن NR هـو مثالي في R وأن

$$(NR)^m = N \underbrace{(RN)(RN)\cdots(RN)}_{m-1 \text{ once}} R \subseteq N^m R = oR = o$$

وهذا يبين لنا أن المثالي NR عديم القوى في R وبما أن كل مثالي هو مثالي يساري نجد أن $NR \subseteq \sum_{i \in I} A_i = N$ ومنه فإن $NR \subseteq N$.

من جهة ثالثة بما أنه أياً كان $x \in N$ فإن $x.1 \in NR$. x نجد أن $N \subseteq NR$ وبالتالي يكون $N = NR$ وهذا يبين لنا أن N هو مثالي في R وأنه عديم القوى أيضاً.

2 - ليكن B مثالياً يمينياً عديم القوى في R عندئذ يوجد $t \in N^*$ بحيث $B^t = o$. من جهة أخرى فإنه حسب التمهيدية (2-2-2) فإن RB هو مثالي يساري في R وأن

$$(RB)^t = R\underbrace{(BR)(BR)\cdots(BR)}_{t \text{ مرة}}B \subseteq RB^t = Ro = o$$

وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري RB عديم القوى وحسب (1) نجد أن $RB \subseteq \sum_{i \in I} A_i = N$ وبالتالي $RB \subseteq N$ وبما أنه أياً كان $y \in B$ فإن $y = 1.y \in RB$ نجد أن $B \subseteq N$.

3 - وجدنا حسب (1) أن N هو مثالي في R وبالتالي فإن R/N هي حلقة خارج. لنبرهن الآن على أن هذه الحلقة لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر.

بما أن المثالي N (حسب 1) عديم القوى في R فإنه يوجد $m \in N^*$ بحيث $N^m = o$. من جهة أخرى ليكن $\overline{K}$ مثالياً عديم القوى في الحلقة R/N عندئذ حسب التمهيدية (2-3-3) فإن $\overline{K} = K/N$ حيث أن K هو مثالي في R يحوي N كما أنه يوجد $\lambda \in N^*$ بحيث $\overline{K}^\lambda = \overline{o}$. بما أن K هو مثالي في R عندئذ فإن K^λ هو أيضاً مثالي في R. لنبرهن الآن على أن $K \subseteq N$.

ليكن $x \in K^\lambda$ عندئذ فإن $x = \sum a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\lambda}$ حيث $a_{i_j} \in K$ من أجل جميع القيم $1 \le j \le \lambda$ ومنه

$$(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\lambda}) + N = (a_{i_1} + N)(a_{i_2} + N)\cdots(a_{i_\lambda} + N) \in \overline{K}^\lambda = o$$

وهذا يبين لنا أن

$$x + N = (\sum_i a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\lambda}) + N = \sum_i [(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\lambda}) + N] =$$
$$= \sum_i (a_{i_1} + N)(a_{i_2} + N)\cdots(a_{i_\lambda} + N) = \overline{o}$$

أي أن $x+N=N$ ومنه $x\in N$. مما سبق نجد أن $K^{\lambda}\subseteq N$ وبالتالي فإن $(K^{\lambda})'''\subseteq N'''=o$ أي أن $K^{\lambda'''}=o$ وهكذا نجد أن المثالي K عديم القوى في R. وبما أن K هو مثالي يساري وعديم القوى فإنه حسب (1) نجد أن $K\subseteq N$ وبالتالي يكون $\overline{K}=K/N=\overline{o}$. مما سبق نجد أن الحلقة R/N لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر.

4 - بما أن الحلقة R أرتينية عندئذ حسب نتيجة المبرهنة (9-1-4) فإن $J(R)$ هو أكبر مثالي عديم القوى في R وبما أن N هو مثالي عديم القوى في R حسب (1) نجد أن $N\subseteq J(R)$. من جهة أخرى بما أن الحلقة R أرتينية فإنه حسب المبرهنة (9-1-4) فإن المثالي $J(R)$ عديم القوى في R وهكذا فإن $J(R)$ هو مثالي يساري عديم القوى في R وحسب (1) فإن $J(R)\subseteq N$ ومنه $J(R)\subseteq\sum_{i\in I}\Lambda_i=N$ مما سبق نجد أن $N=J(R)$.

9 - 2. الحلقات النيوثرية.

تعريف.

نقول عن الحلقة R إنها نيوثرية من اليسار (اليمين) إذا كانت تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة للمثاليات اليسارية (اليمينية) والتي كل منها لا يساوي R.

بمعنى آخر لأجل أي سلسلة متزايدة من المثاليات اليسارية (اليمينية) والتي كل منها لا يساوي R على الشكل

$$A_1 \subset A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m \subseteq \cdots$$

يوجد $n \in N^*$ بحيث $A_n = A_k$ وذلك أياً كان $k \geq n$ أي أن $\cdots = A_{n+1} = A_n$.

في هذه الفقرة وعند الحديث عن الحلقات النيوثرية اليسارية سوف نسقط كلمة اليسارية وذلك بهدف الاختصار ونكتفي بذكر الحلقة النيوثرية ويقصد بها من اليسار.

التمهيدية الآتية تعطينا شرطاً مكافئاً لمفهوم الحلقة النيوثرية.

تمهيدية 9-2-1.

من أجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R نيوثرية.

2 - كل مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية من R والتي كل منها لا يساوي R تحوي عنصراً أعظمياً.

البرهان.

(1) $\Rightarrow$ (2). لتكن $\Im$ مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي R ولنفرض جدلاً أن المجموعة $\Im$ لا تحوي عنصراً أعظمياً ولتكن $B_1 \in \Im$ بما أن B_1 ليس أعظمياً في $\Im$ فإنه يوجد $B_2 \in \Im$ بحيث $B_1 \subset B_2$. أيضاً بما أن B_2 ليس عنصراً أعظمياً في $\Im$ فإنه يوجد $B_3 \in \Im$ بحيث $B_2 \subset B_3$ ومنه $B_1 \subset B_2 \subset B_3$.

نتابع بهذا الشكل ولنفرض أنه تم الحصول على العنصر $B_n \in \Im$ والذي يحقق $B_{n-1} \subsetneq B_n$ ولكون العنصر B_n ليس أعظمياً في $\Im$ فإنه يوجد $B_{n+1} \in \Im$ بحيث $B_n \subsetneq B_{n+1}$. وهكذا بالمتابعة نحصل على السلسلة المتزايدة من المثاليات اليسارية في R

$$B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq B_3 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n \subsetneq B_{n+1} \subsetneq \cdots$$

وهذه السلسة لا نهائية وهذا يناقض الفرض مما سبق نجد أن المجموعة $\Im$ تحوي عنصراً أعظمياً.

(2) $\Leftarrow$ (1). لتكن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq B_m \subseteq \cdots$ سلسلة متزايدة من المثاليات اليسارية والتي كل منها لا يساوي R ولنأخذ المجموعة $\Im = \{B_i : i = 1,2,3,\cdots\}$ وحسب الفرض يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي وليكن B_n عندئذ أياً كان $k \geq n$ فإن $B_k = B_n$ لأنه إذا كان $B_k \neq B_n$ فإن $B_n \subsetneq B_k$ وهذا يناقض كون B_n عنصراً أعظمياً في $\Im$ مما سبق نجد إنه أياً كان $k > n$ فإن $B_k = B_n$ أي أن السلسلة

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots$$

تتقطع وهذا يبين لنا أن الحلقة R نيوثرية.

العلاقة بين الحلقات النيوثرية والتشاكلات الحلقية نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 9-2-2.

لتكن R حلقة نيوثرية و $f : R \to S$ تشاكلاً حلقياً عندئذ:

1 - الحلقة Imf نيوثرية.

2 - إذا كان التشاكل f غامراً فإن الحلقة S تكون نيوثرية.

البرهان.

1 - لنفرض أن الحلقة R نيوثرية وبما أن f تشاكل حلقي فإنه حسب المبرهنة (3-1-1) فإن Imf حلقة. لتكن $\Im$ مجموعة من المثاليات اليسارية في Imf والتي كل منها لا يساوي Imf. بما أنه أياً كان $K \subset \Im$ فإن K مثالي يساري في Imf لا يساوي Imf عندئذ وحسب المبرهنة (3-1-2) فإن $f^{-1}(K)$ هو مثالي يساري في

R ولا يساوي R لأنه إذا كان $f^{-1}(K) = R$ عندئذ $1 \in f^{-1}(K)$ وبالتالي يكون $K = Imf$ وهذا يناقض كون $K \in \Im$. لنأخذ المجموعة $\Im_0 = \{f^{-1}(K) : K \in \Im\}$ فنجد أن $\Im_0$ مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي R وبما أن الحلقة R نيوثرية فإنه يوجد في $\Im_0$ عنصر أعظمي وليكن $f^{-1}(K_0)$ حيث $K_0 \in \Im$. لنبرهن على أن K_0 هو عنصر أعظمي في المجموعة $\Im$. ليكن $B \in \Im$ بحيث $K_0 \subseteq B$ عندئذ $f^{-1}(K_0) \subseteq f^{-1}(B)$ لأنه إذا كان $b \in f^{-1}(K_0)$ عندئذ $f(b) \in K_0 \subseteq B$ ومنه $b \in f^{-1}(B)$ وبما أن العنصر $f^{-1}(K_0)$ أعظمياً في $\Im_0$ وأن $f^{-1}(B) \neq R$ نجد أن $f^{-1}(K_0) = f^{-1}(B)$ ومنه $K_0 = B$ وهذا يبين لنا أن العنصر K_0 هو عنصر أعظمي في $\Im$ مما سبق نجد أن الحلقة Imf نيوثرية.

2 - إذا كان f غامراً عندئذ يكون $S = Imf$ وحسب (1) تكون الحلقة S نيوثرية.

بالاعتماد على التمهيدية الأخيرة يمكننا صياغة التمهيدية الآتية:

تمهيدية 9-2-3.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R. إذا كانت الحلقة R نيوثرية عندئذ فإن حلقة الفارق R/A نيوثرية أيضاً.

البرهان.

ينتج مباشرة من التمهيدية الأخيرة.

نعلم أن أي حلقة واحدية تعد مثالياً يسارياً منتهي التوليد. مولده بواحد الحلقة بينما ليس بالضرورة أن يكون كل مثالي (مثالي أحادي الجانب) منتهي التوليد والمبرهنة الآتية تبين لنا أنه في الحلقة النيوثرية كل مثالي (مثالي أحادي الجانب) يكون منتهي التوليد.

مبرهنة 9-2-4.

الشروط الآتية متكافئة لأجل أي حلقة R:

1. الحلقة R نيوثرية.
2. كل مثالي يساري في R منتهي التوليد.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R نيوثرية ولنفرض جدلاً أنه يوجد في R مثالي يساري A ليس منتهي التوليد عندئذ $A \neq R$ و $A \neq \{o\}$ ومنه يوجد $a_1 \in A$ بحيث $Ra_1 \subset A$ ومنه يوجد $a_2 \subset A$ بحيث $a_2 \notin Ra_1$ وبالتالي $Ra_1 \subsetneq Ra_1 + Ra_2 \subsetneq A$ لأن A ليس منتهي التوليد ومنه يوجد $a_3 \in A$ بحيث $a_3 \notin Ra_1 + Ra_2$ ومنه $Ra_1 \subsetneq Ra_1 + Ra_2 + Ra_3 \subsetneq A$. لنفرض أنه تم الحصول على العنصر $a_n \in A$ بحيث $a_n \notin \sum_{i=1}^{n-1} Ra_i$ عندئذ

$$Ra_1 \subsetneq Ra_1 + Ra_2 \subsetneq Ra_1 + Ra_2 + Ra_3 \subsetneq \cdots \subsetneq \sum_{i=1}^{n-1} Ra_i \subsetneq \sum_{i=1}^{n} Ra_i \subseteq A$$

نتابع بالاستقراء فنحصل على سلسلة متزايدة من المثاليات اليسارية من R والتي لاتنقطع وهذا يناقض الفرض. مما سبق نجد أن أي مثالي يساري في R منتهي التوليد.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض جدلاً أن الحلقة R نيوثرية عندئذ توجد سلسلة متزايدة من المثاليات اليسارية في R غير المنقطعة ولتكن

$$A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n \subsetneq \cdots$$

لنفرض أن $K = \cup A_i$ عندئذ حسب التمهيدية (2-2-1) يكون K مثالياً يسارياً في R وغير منتهي التوليد لأنه إذا كان K منتهي التوليد فإنه توجد مجموعة منتهية $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\} \subseteq K$ بحيث $K = \sum_{i=1}^{m} Rb_i$ وبما أنه أياً كان $1 \leq i \leq m$ فإن $b_i \in \cup A_i$ فإنه يوجد دليل t بحيث $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\} \subseteq A_t$ ومنه $A_t = A_{t+1}$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أن الحلقة R نيوثرية.

وجدنا حسب التمهيدية (5-2-2) أن كل حلقة مثاليات رئيسية تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة للمثاليات وبالتالي فإن كل حلقة مثاليات رئيسية هي حلقة نيوثرية. ينتج عن ذلك أن كل من الحلقات الآتية: حلقة الأعداد الصحيحة Z جميع الحقول حلقة الحدوديات فوق حقل جميعها حلقات نيوثرية.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة المهمة الآتية والتي تسمى بمبرهنة هلبرت عن القاعدة.

مبرهنة 9-2-5.

حلقة الحدوديات فوق أي حلقة هي حلقة نيوثرية.

البرهان.

لنفرض أن R حلقة نيوثرية ولتكن $R_1 = R[x]$ حلقة الحدوديات فوق R. وليكن M مثالياً يسارياً في R_1 ولنبرهن على أن M منتهي التوليد.

- إذا كان $M = \{o\}$ يتم المطلوب.
- لنفرض أن $M \neq \{o\}$ ولنأخذ المجموعة:

$$M_i = \{o \neq \alpha \in R ; \exists s(x) \in M ; \partial s(x) = i ; s(x) \text{ في } x^i \text{ أمثال } \alpha\} \cup \{o\}$$

حيث $i = 0,1,2,\cdots$. إن M_i مثالي يساري في R أياً كان $i = 0,1,2,\cdots$ بالإضافة إلى ذلك فإن $M_i \subseteq M_{i+1}$ وذلك أياً كان $i = 0,1,2,\cdots$ لأنه إذا كان $\alpha \in M_i$ فإنه توجد $s(x) \in M$ بحيث $\partial s(x) = i$ وأن α أمثال x^i في $s(x)$. بفرض أن $s_1(x) = xs(x)$ فنجد أن $s_1(x) \in M$ لأن M مثالي يساري في R_1 وأن $\partial s_1(x) = i+1$ و أن α أمثال x^{i+1} في $s_1(x)$ ومنه حسب تعريف M_{i+1} نجد أن $\alpha \in M_{i+1}$ أي أن $M_i \subseteq M_{i+1}$.

لنفرض أن t هو أصغر عدد صحيح غير سالب من أجله $M_t \neq \{o\}$ بما أنه أياً كان $i = 0,1,2,\cdots$ فإن M_i مثالي يساري في R وأن $M_i \subseteq M_{i+1}$ فإن

$$M_t \subseteq M_{t+1} \subseteq M_{t+2} \subseteq \cdots \subseteq \cdots$$

هي سلسلة متزايدة من المثاليات اليسارية في الحلقة R وبما أن الحلقة R نيوثرية فإنه بالإمكان إيجاد عدد صحيح r $(r \geq t)$ بحيث يكون $M_r = M_k$ أياً كان $k \geq r$.

بالإضافة إلى ذلك فإن المثاليات اليسارية $M_t, M_{t+1}, M_{t+2}, \cdots, M_r$ منتهية التوليد وذلك حسب المبرهنة (9-2-4). لنفرض أن المجموعات المنتهية

$$\{a_{t_1}, a_{t_2}, \cdots, a_{t_{n_t}}\} \subseteq M_t \quad a_{t_j} \neq o ; 1 \leq j \leq n_t$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\{a_{r_1}, a_{r_2}, \cdots, a_{r_{n_r}}\} \subseteq M_r \quad a_{r_j} \neq o ; 1 \leq j \leq n_r$$

هي المجموعات المولدة للمثاليات اليسارية $M_t, M_{t+1}, M_{t+2}, \cdots, M_r$ على الترتيب. لنفرض أن f_{ij} حيث $(i = t, t+1, \cdots, j = 1,2,\cdots,n_i)$ عناصر من M والتي تحقق $\partial f_{ij} = i$ وأمثال الحد x^i في f_{ij} هي a_{ij}. لنفرض أن B هو المثالي اليساري المولدة بالمجموعة $\left\{f_{ij} : \begin{cases} i = t, t+1, \cdots \\ j = 1,2,\cdots,n_i \end{cases}\right\}$ ولنبرهن على أن $M = B$ واضح أن $B \subseteq M$.

ليكن $f \in M$ وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $f = o$ عندئذ $f \in B$.
- لنفرض أن $f \neq o$ وأن $\partial f = d$ حيث $d \geq t$ وأن a أمثال الحد x^d في f.

لنفرض أن $d \leq r$ عندئذ $a \in M_d$ وبما أن المجموعة $\{a_{d_1}, a_{d_2}, \cdots, a_{d_{n_d}}\} \subset M_d$ هي المجموعة المولدة للمثالي اليساري M_d عندئذ $a \in \sum_{i=1}^{n_d} Ra_{d_i}$ وبالتالي بالامكان كتابة العنصر a على الشكل

$$a = c_1 a_{d_1} + c_2 a_{d_2} + \cdots + c_{n_d} a_{d_{n_d}} ; \quad c_i \in R; 1 \leq i \leq n_d$$

ومنه فإن الحدودية $f - (c_1 f_{d_1} + c_2 f_{d_2} + \cdots + c_{n_d} f_{d_{n_d}})$ إما أن تساوي الصفر أو أن درجتها أصغر من d. إذا كان $f - (c_1 f_{d_1} + c_2 f_{d_2} + \cdots + c_{n_d} f_{d_{n_d}}) = o$ نجد أن

$$f = (c_1 f_{d_1} + c_2 f_{d_2} + \cdots + c_{n_d} f_{d_{n_d}}) \in B$$

أما إذا كان $\partial[f - (c_1 f_{d_1} + c_2 f_{d_2} + \cdots + c_{n_d} f_{d_{n_d}})] < d$ فبمتابعة العمل السابق عدد منته من المرات سنتوصل إلى إيجاد عنصر $g \in B$ بحيث $f - g = o$ وبالتالي يكون $f = g \in B$.

لنفرض أن $d > r$ عندئذ $M_d = M_r$ وبما أن $f \in M$ درجته d وأن a أمثال الحد x^d في f نجد أن $a \in M_d$ وبما أن المجموعة $\{a_{r_1}, a_{r_2}, \cdots, a_{r_{n_r}}\}$ هي المجموعة المولدة للمثالي اليساري M_r فإن $a \in \sum_{i=1}^{n_r} Ra_{r_i}$ وبالتالي بالامكان كتابة العنصر a على الشكل الآتي

$$a = b_1 a_{r_1} + b_2 a_{r_2} + \cdots + b_{n_r} a_{r_{n_r}} ; \quad b_i \in R; 1 \leq i \leq n_r$$

ومنه فإن الحدودية

$$f - (b_1x^{d-r_1}f_{r_1} + b_2x^{d-r_2}f_{r_2} + \cdots + b_{n_r}x^{d-r}f_{r_{n_r}})$$

إما أن تساوي الصفر أو أن درجتها أصغر من d. إذا كان

$$f - (b_1x^{d-r_1}f_{r_1} + b_2x^{d-r_2}f_{r_2} + \cdots + b_{n_r}x^{d-r}f_{r_{n_r}}) = o$$

عندئذ

$$f = (b_1x^{d-r_1}f_{r_1} + b_2x^{d-r_2}f_{r_2} + \cdots + b_{n_r}x^{d-r}f_{r_{n_r}}) \in B$$

إذا كان

$$\partial[f - (b_1x^{d-r_1}f_{r_1} + b_2x^{d-r_2}f_{r_2} + \cdots + b_{n_r}x^{d-r}f_{r_{n_r}})] < d$$

فبمتابعة العمل السابق عدداً منتهياً من المرات سنتوصل إلى إيجاد عنصر $h \in B$ بحيث يكون $f - h = o$ أو $\partial(f - h) \le r$ بالتالي يكون $f \in B$.

مما سبق نجد أن $M \subseteq B$ وبالتالي يكون $M = B$ أي أن المثالي اليساري M منته التوليد وحسب المبرهنة (9-2-4) تكون الحلقة $R_1 = R[x]$ نيوثرية.

وجدنا في الفقرة (4-2) من خلال دراستنا للمثاليات اليسارية (اليمينية) العديمة والعديمة القوى أن كل مثالي يساري (يميني) عديم القوى يكون عديماً وذلك من خلال التمهيدية (4-2-4). سوف ندرس الآن واحدة من الحالات الخاصة التي يكون فيها العكس صحيحاً ولأجل ذلك لابد لنا من المبرهنة الآتية:

مبرهنة (9-2-6).

لتكن R حلقة نيوثرية لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر عندئذ:

1. كل مثالي يميني عديم في R يساوي الصفر.
2. كل مثالي يساري عديم في R يساوي الصفر.

البرهان.

1 - ليكن A مثالياً يمينياً عديماً في الحلقة R. إذا كان $A = \{o\}$ يتم المطلوب.

لنفرض أن $A \neq \{o\}$ عندئذ يوجد $a \in A$ بحيث $a \neq o$. لنضع $U = aR$ فنجد أن U هو مثالي يميني في R مغاير للصفر كما أن U عديم في R لأنه أياً كان $x \in U$ فإن

$x \in aR \subseteq AR \subseteq A$ وبما أن المثالي اليميني A عديم فإنه يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n = o$ وهذا يبين لنا أن كل عنصر من U هو عنصر عديم القوى وبالتالي يكون المثالي اليميني U عديماً.

ليكن $u \in U$ وبما أن المثالي اليميني U عديماً فإنه يوجد $m \in N^*$ بحيث $u^m = o$ ومنه $u^{m-1}u = o$ وهكذا نجد أن المجموعة $l(u) = \{r : r \in R ; ru = o\}$ غير خالية وتشكل مثالياً يسارياً في R مغايراً للصفر وذلك لأن $u^{m-1} \in l(u)$.

لنأخذ المجموعة $\Im = \{l(v) : o \neq v \subset U\}$ فنجد أن المجموعة $\Im$ هي مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية في R المغايرة للصفر وذلك لأن $l(u) \in \Im$ وبما أن الحلقة R نيوثرية فإنه يوجد في المجموعة $\Im$ عنصر أعظمي وليكن $l(u_o)$ حيث $o \neq u_o \in U$ وبالتالي يكون $l(u_o)$ مثالياً يسارياً أعظمياً في R من هذا النوع.

ليكن $x \in R$ عندئذ فإن $u_o x \in U$ وأن $l(u_o) \subseteq l(u_o x)$ وذلك لأنه إذا كان $b \in l(u_o)$ فإن $bu_o = o$ ومنه $b(u_o x) = (bu_o)x = ox = o$ وبالتالي يكون $b \in l(u_o x)$ وبما أن $u_o \neq o$ فإنه يوجد $x_o \in R$ بحيث $u_o x_o \neq o$ وأن $u_o x_o \in U$ وهذا يبين لنا أن $l(u_o x_o) \in \Im$ كما أن $l(u_o) \subseteq l(u_o x_o)$ وبما أن $l(u_o)$ عنصراً أعظمياً في المجموعة $\Im$ نجد أن $l(u_o) = l(u_o x_o)$.

من جهة أخرى ليكن $y \in R$ بحيث $u_o y \neq o$ وبما أن $u_o \in U$ وأن U مثالياً يمينياً في R فإن $u_o y \in U$ ولكون المثالي اليميني U عديماً فإنه يوجد $s \in N^*$ بحيث $(u_o y)^s = o$. لنفرض أن k هو أصغر عدد صحيح موجب من أجله $(u_o y)^k = o$ عندئذ فإن $(u_o y)^{k-1} \neq o$ كما أن

$$(u_o y)^{k-1} = \underbrace{(u_o y)(u_o y)\cdots(u_o y)}_{k-1 \text{ مرة}} = u_o[y \underbrace{(u_o y)(u_o y)\cdots(u_o y)}_{k-2 \text{ مرة}}] = u_o z$$

حيث $z = y \underbrace{(u_o y)(u_o y)\cdots(u_o y)}_{k-2 \text{ مرة}} \in R$ وبما أن $u_o z \in U$ مغاير للصفر فإن $l(u_o y) \in \Im$ كما أن $l(u_o) \subseteq l(u_o z)$ لأنه إذا كان $c \in l(u_o)$ فإن $cu_o = o$ ومنه $c(u_o z) = (cu_o)z = oz = o$ وهكذا فإن $c \in l(u_o z)$ أي أن $l(u_o) \subseteq l(u_o z)$ وبما أن $l(u_o)$ عنصراً أعظمياً في المجموعة $\Im$ نجد أن $l(u_o) = l(u_o z) = l((u_o y)^{k-1})$.

من جهة أخرى بما أن $(u_o y).(u_o y)^{k-1} = (u_o y)^k = o$ نجد أن $u_o y \in l((u_o y)^{(-1)}) = l(u_o)$ وهذا يبين لنا أن $(u_o y)u_o = o$ أي أن $u_o y u_o = o$.

مما سبق نجد أن المساواة $u_o y u_o = o$ صحيحة أياً كان $y \in R$ ومنه فإن $u_o R u_o = o$ وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري Ru_o عديم القوى لأنه إذا كان $n \geq 2$ عدداً صحيحاً فإن

$$(Ru_o)^n = \underbrace{(Ru_o)(Ru_o)\cdots(Ru_o)}_{n\ \text{مرة}} = R(u_o R u_o)\underbrace{(Ru_o)\cdots(Ru_o)}_{n-2\ \text{مرة}} = o$$

وحسب التمهيدية (4-2-5) فإن الحلقة R في هذه الحالة تحوي مثالياً عديم القوى مغاير للصفر مما يناقض الفرض وهكذا نجد أن $A = \{o\}$.

2 - ليكن B مثالياً يسارياً عديماً في R. إذا كان $B = \{o\}$ يتم المطلوب.

نفرض جدلاً أن $B \neq \{o\}$ عندئذ يوجد $o \neq b \in B$ ومنه فإن $U = bR$ هو مثالي يميني في R مغاير للصفر. لنبرهن على أن المثالي اليميني U عديم. ليكن $u \in U$ عندئذ $u = by$ حيث $y \in R$ وبما أن $b \in B$ وأن B مثالياً يسارياً في R فإن $yb \in B$ ولكون المثالي اليساري B عديم فإنه يوجد $n \in N^*$ بحيث $(yb)^n = o$ ومنه

$$u^{n+1} = (by)^{n+1} = \underbrace{(by)(by)\cdots(by)}_{n+1\ \text{مرة}} = b\underbrace{(yb)(yb)\cdots(yb)}_{n\ \text{مرة}} y = b(yb)^n y = o$$

وهذا يبين لنا أن المثالي اليميني U عديم وحسب (1) نجد أن $U = \{o\}$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $B = \{o\}$.

بالاعتماد على المبرهنة الأخيرة نأتي الآن لدراسة المبرهنة المهمة الآتية والتي تسمى مبرهنة *Utumi - Levitzki*.

مبرهنة 9-2-7.

لتكن R حلقة نيوترية. عندئذ:

1. كل مثالي يساري عديم في R يكون عديم القوى.
2. كل مثالي يميني عديم في R يكون عديم القوى.

البرهـــان.

1 - ليكن A مثالياً يسارياً عديماً في الحلقة R.

- إذا كان $A=\{o\}$ عندئذ يكون A عديم القوى.

- لنفرض أن $A\neq\{o\}$ عندئذ يوجد في R مثالي عديم القوى $M\neq\{o\}$ لأنه إذا لم يوجد في R مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر فإنه حسب المبرهنة (9-2-6) يكون $A=\{o\}$ وهذا غير ممكن.

لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة جميع المثاليات اليسارية عديمة القوى في R إن $\Im\neq\phi$ لأن $M\in\Im$ وبما أن الحلقة R نيوترية فإنه يوجد في $\Im$ عنصر أعظمي وليكن K ومنه فإن K مثالي يساري عديم القوى أعظمي في R وبالتالي يوجد $n\in N^{*}$ بحيث $K^{n}=\{o\}$. من جهة أخرى بما أن K مثالياً يسارياً في R فإنه حسب التمهيدية (2-2-2) فإن KR مثالي في R كما أن

$$(KR)^{n}=K\underbrace{(RK)(RK)\cdots(RK)}_{n-1\ \text{once}}R\subseteq K\underbrace{(KK\cdots K)}_{n-1\ \text{over}}R=K^{n}R=o$$

وهذا يبين لنا أن المثالي KR عديم القوى في R.

لنفرض أن $N=KR$ ولنبرهن على أن المثالي عديم القوى N أعظمي في R.

ليكن D مثالياً عديم القوى في R يحقق $N\subseteq D\subset R$ عندئذ فإن $D\in\Im$ وبما أن K عنصراً أعظمياً في $\Im$ فإن $D\subseteq K$ ومنه $D\subseteq K\subseteq KR=N$ وهكذا نجد أن $N=D$ وهذا يبين لنا أن N هو مثالي عديم القوى أعظمي في R.

لنأخذ حلقة الخارج $\overline{R}=R/N$ عندئذ حسب التمهيدية (9-2-3) تكون الحلقة $\overline{R}$ نيوترية. لنبرهن الآن على أن الحلقة $\overline{R}$ لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر. ليكن $\overline{B}$ مثالياً عديم القوى في الحلقة $\overline{R}$ عندئذ حسب التمهيدية (2-3-3) فإن $\overline{B}=B/N$ حيث B مثالي في R يحقق $N\subset B$. من جهة أخرى بما أن المثالي $\overline{B}$ عديم القوى فإنه يوجد $m\in N^{*}$ بحيث $\overline{B}^{m}=\overline{o}$ ومنه

$$\overline{B}^{m}=(B+N)^{m}=B^{m}+N=N$$

وهذا يبين لنا أن $N \subseteq B'''$ وبما أن $N'' = o$ نجد أن $(B'')'' = o$ وبالتالي فإن $B''''' = o$ وهكذا نجد أن المثالي B عديم القوى في R وبما أن N هو المثالي عديم القوى الأعظمي في R نجد أن $B \subseteq N$ وبالتالي يكون $\overline{B} = \overline{o}$ مما سبق نجد أن الحلقة $\overline{R}$ هي حلقة نيوثرية لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر.

لنبرهن الآن على أن $N \subseteq A$. لنفرض جدلاً أن $A \not\subset N$ ولنأخذ التشاكل القانوني الغامر $\pi : R \to \overline{R} = R/N$ عندئذ حسب المبرهنة (3-1-2) فإن $\pi(A)$ هو مثالي يساري في الحلقة $\overline{R}$ كما أن $\pi(A) \neq \overline{o}$ لأنه إذا كان $\pi(A) = o$ نجد أن $A + N = N$ وبالتالي $A \subseteq N$ وهذا غير ممكن.

من جهة أخرى ليكن $y \in \pi(A)$ عندئذ يوجد $a \in A$ بحيث $y = \pi(a)$ وبما أن المثالي اليساري A عديماً فإنه يوجد $s \in N^*$ بحيث $a^s = o$ وبالتالي يكون

$$y^s = (\pi(a))^s = (a+N)^s = a^s + N = N = \overline{o}$$

وهذا يبين لنا أنه أياً كان $y \in \pi(A)$ فإن العنصر y عديم القوى وبالتالي فإن المثالي اليساري $\pi(A)$ هو مثالي يساري عديم في $\overline{R}$ وحسب المبرهنة (9-2-6) فإن $\pi(A) = o$ وهذا يناقض كون $\pi(A) \neq \overline{o}$. مما سبق نجد أن $A \subseteq N$ وبالتالي فإن المثالي اليساري A عديم القوى في R.

2 - ليكن B مثالياً يمينياً عديماً في الحلقة R.

- إذا كان $B = \{o\}$ عندئذ يكون B عديم القوى.

- لنفرض أن $B \neq \{o\}$ عندئذ يوجد في R مثالي عديم القوى $M \neq \{o\}$ لأنه إذا لم يوجد في R مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر فإنه حسب المبرهنة (9-2-6) يكون $B = \{o\}$ وهذا غير ممكن.

حسب (1) وجدنا أنه يوجد في الحلقة R مثالي عديم القوى أعظمي هو N كما أن حلقة الخارج $\overline{R} = R/N$ هي حلقة نيوثرية لا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر. لنبرهن الآن على أن $B \subseteq N$.

لنفرض جدلاً أن $B \not\subset N$ ولنأخذ التشاكل القانوني الغامر $\pi : R \to \overline{R} = R/N$ عندئذ حسب المبرهنة (3-1-2) فإن $\pi(B)$ هو مثالي يميني في الحلقة $\overline{R}$ كما أن

$\pi(B) \neq \overline{o}$ لأنه إذا كان $\pi(B) = \overline{o}$ نجد أن $B + N = N$ وبالتالي $B \subseteq N$ وهـذا غير ممكن.

من جهة أخرى ليكن $x \in \pi(B)$ عندئذ يوجد $b \in B$ بحيث $x = \pi(b)$ وبما أن المثالي اليميني B عديماً فإنه يوجد $t \in N$ بحيث $b' = o$ وبالتالي يكون

$$x' = (\pi(b))' = (b + N)' = b' + N = N = \overline{o}$$

وهذا يبين لنا أنه أياً كان $x \in \pi(B)$ فإن العنصر x عديم القوى وبالتالي فإن المثالي اليميني $\pi(B)$ هو مثالي يميني عـديم فـي $\overline{R}$ وحسب المبرهنـة (9-2-6) فـإن $\pi(B) = \overline{o}$ وهذا يناقض كون $\pi(B) \neq \overline{o}$. مما سبق نجد أن $B \subseteq N$ وبالتالي فـإن المثالي اليميني B عديم القوى في R.

لنورد الآن حالة خاصة المبرهنة (9-2-4) وذلك من أجل الحلقات التبديلية وذلـك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـة 9-2-8.

لتكن R حلقة تبديلية. الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R نيوثرية.
2. كل مثالي أولي في الحلقة R هو مثالي منتهي التوليد.

البرهـان.

(1) $\Rightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R نيوثرية عندئذ حسب المبرهنة (9-2-4) فإن كـل مثالي في R هو مثالي منتهي التوليد ومنه يكون كل مثالي أولي في الحلقة R منتهـي التوليد.

(2) $\Rightarrow$ (1). لنفرض أن كل مثالي أولي في الحلقة R منتهي التوليد ولنفرض جدلاً أن الحلقة R ليست نيوثرية عندئذ حسب المبرهنة (9-2-4) يوجد في الحلقة R مثـالي A ليس منتهي التوليد. لنفرض أن $\Im$ هي مجموعة كل المثاليات في R غير منتهيـة التوليد عندئذ $\Im \neq \phi$ لأن $A \in \Im$ كما أنه أياً كان $B \in \Im$ فإن $B \neq R$ لأن R مثـالي منتهي التوليد. وبما أن الحلقة R نيوثرية فإنه حسب التمهيدية (9-2-1) يوجد في $\Im$

عنصر أعظمي وليكن D إن D مثالي أعظمي في الحلقة R وحسب التمهيدية (5 - 1 -13) فإن D هو مثالي أولي في الحلقة R وحسب الفرض فإن المثالي D منتهي التوليد وهذا يناقض كون $D \subset \mathfrak{N}$. مما سبق نجد أن الحلقة R نيوثرية.

9 - 3. الحلقات نصف البسيطة.

تعريف.

نقول عن الحلقة R إنها نصف بسيطة إذا كانت الحلقة R أرتينية من اليسار (اليمين) وكان $J(R) = \{o\}$.

سوف نبدأ دراستنا في هذه الفقرة مع المبرهنة الآتية والتي تعطينا شرطاً مكافئاً آخر للحلقة نصف البسيطة.

مبرهنة 9 -3 -1.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R نصف بسيطة.
2. الحلقة R أرتينية من اليسار (اليمين) ولا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة عندئذ حسب التعريف فإن الحلقة R أرتينية من اليسار (اليمين) وأن $J(R) = \{o\}$. ليكن A مثالياً عديم القوى في R بما أن الحلقة R أرتينية عندئذ حسب نتيجة المبرهنة (9 -1 -4) فإن $J(R)$ هو أكبر مثالي عديم القوى في R ومنه $A \subset J(R)$ وبما أن $J(R) = \{o\}$ نجد أن $A = \{o\}$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R أرتينية من اليسار (اليمين) ولا تحوي مثاليات عديمة القوى مغايرة للصفر عندئذ حسب المبرهنة (9 -1 -4) فإن المثالي $J(R)$ يكون عديم القوى وحسب الفرض يكون $J(R) = \{o\}$ وحسب التعريف نجد أن الحلقة R نصف بسيطة.

وجدنا حسب التمهيدية (4-2-5) أن الشرط اللازم والكافي كي تحوي الحلقة R مثالياً يسارياً (يمينياً) عديم القوى مغايراً للصفر هو أن تحوي مثالياً عديم القوى مغايراً للصفر بالاعتماد على هذه التمهيدية يمكننا تعميم المبرهنة (9-3-1) على الشكل الآتي:

مبرهنة 9-3-2.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R نصف بسيطة.
2. الحلقة R أرتينية من اليسار (اليمين) ولا تحوي مثاليات أحادية الجانب عديمة القوى مغايرة للصفر.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (9-3-1) والتمهيدية (4-2-5).

لمتابعة دراستنا للحلقات نصف البسيطة لابد لنا من التمهيدية الآتية:

تمهيدية 9-3-3.

لتكن R حلقة نصف بسيطة عندئذ كل مثالي يساري في R مغاير للصفر يحوي حداً مباشراً الحلقة R.

البرهان.

لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة وليكن B مثالياً يسارياً في R مغايراً للصفر.

- إذا كان المثالي اليساري B أصغرياً في R عندئذ وبما أن $J(R)=\{o\}$ فإن B ليس عديم القوى وحسب المبرهنة (9-1-8) فإن B يكون حداً مباشراً في الحلقة R.
- لنفرض أن المثالي اليساري B ليس أصغرياً في R ولنأخذ المجموعة

$$\Im=\{K : R \text{ مثالي يساري في } K,\ K\neq o; K\subset B\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $B\in\Im$ وبما أن الحلقة R نصف بسيطة فإن الحلقة R أرتينية وحسب التمهيدية (9-1-1) يوجد في $\Im$ عنصر أصغري وليكن B_o. إن B_o مثالي يساري أصغري في R وأن $B_o\subset B$ وبما أن $J(R)=\{o\}$ فإن

B_n ليس عديم القوى وحسب المبرهنة (9-1-8) فإن B_n هو حد مباشر في R. مما سبق نجد أن المثالي اليساري B يحوي حداً مباشراً B_n للحلقة R.

سوف ندرس الآن واحدة من أهم المبرهنات المتعلقة بالحلقات نصف البسيطة.

مبرهنـــة 9-3-4.

لتكن R حلقة نصف بسيطة عندئذ كل مثالي يساري (يميني) في R مغاير للـصفر هو حد مباشر في الحلقة R.

البرهـــان.

لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة وليكن B مثالياً يسارياً في R مغايراً للـصفر عندئذ فإن B ليس عـديم القـوى فـي R لأنـه إذا كـان B عـديم القـوى فـإن $B \subseteq J(R) = \{o\}$ وبالتالي فإن $B = \{o\}$ وهذا غير ممكن.

بما أن الحلقة R أرتينية و B مثالياً يسارياً في R ليس عـديم القـوى فإنـه حـسب المبرهنة (9-1-7) فإن B يحوي عنصراً جامداً e مغايراً للـصفر. بمـا أن $e \in B$ عنصر جامد مغاير للصفر فإن $B = Re \oplus [B \cap R(1-e)]$.

إذا كان $B \cap R(1-e) = \{o\}$ نجد أن $B = Re$ وبما أن $R = Re \oplus R(1-e)$ نجد أن $R = B \oplus R(1-e)$ وهذا يبين لنا أن B حد مباشر في R.

لنفرض جدلاً أنه لا يوجد في R عنصر جامد e مغاير للصفر وينتمي إلى B بحيـث $B \cap R(1-e) \neq \{o\}$. ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{g : g \in R; g \neq o; g = g^2; g \in B\}$$

إن $\Im$ هي مجموعة العناصر الجامدة في R المغايرة للصفر والتي كل منها ينتمي إلى المثالي اليساري B. إن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $e \in \Im$.

لأجل كل عنصر $g \in \Im$ لنضع $A(g) = B \cap R(1-g)$ فنجد أن $A(g)$ هـو مثـالي يساري في R مغاير للصفر وذلك لأجل كل عنصر $g \in \Im$ حسب الفرض الجدلي.

لنأخذ المجموعة $\Im_n = \{A(g) : g \in \Im\}$ فنجد أن المجموعـة $\Im_n$ غيـر خاليـة لأن $A(e) = B \cap R(1-e) \in \Im_n$ أي إن المجموعة $\Im_n$ هي مجموعة غير خاليـة مـن

المثاليات اليسارية في R والتي كل منها لا يساوي الصفر وبما أن الحلقة R أرتينية فإنه يوجد في المجموعة $\Im_n$ عنصر أصغري وليكن $A(e_n)$ حيث $e_n \in \Im$. وهكذا فإن $A(e_n) = B \cap R(1-e_n)$ هو مثالي يساري أصغري في R مغاير للصفر وبالتالي فهو ليس عديم القوى وذلك لأن الحلقة R نصف بسيطة أي إن $(A(e_n))^2 \neq \{o\}$ وحسب المبرهنة (4-2-3) فإن $A(e_n) = Re_1$ حيث e_1 عنصر جامد في R مغاير للصفر ومنه $e_1 \in B \cap R(1-e_n)$ أي أن $e_1 \in B$ كما أن $e_1 \in R(1-e_n)$ وبالتالي يوجد $y \in R$ بحيث $e_1 = y(1-e_n)$ وبما أن $1-e_n$ عنصراً جامداً في R نجد أن

$$e_1 = y(1-e_n) = y(1-e_n)(1-e_n) = e_1(1-e_n)$$

ومنه نجد أن $e_1e_n = o$ أي أن $e_1e_n = y(1-e_n)e_n = o$. لنضع $f = e_n + e_1 - e_ne_1$ فنجد أن f عنصر جامد في R كما أن $f \neq o$ لأنه إذا كان $f = o$ عندئذ يكون $e_n + e_1 = e_ne_1$ ومنه $e_1e_n = o$ وبما أن $e_1e_n + e_1 = e_ne_1e_1$ نجد أن $e_1 = o$ وهذا يناقض كون $e_1 \neq o$ وبالتالي يكون $f \neq o$ وبما أن $e_1 \in B$ وأن B مثالياً يسارياً في R نجد أن $e_ne_1 \in B$ وأيضاً بما أن $e_n \in B$ نجد أن $f = e_n + e_1 - e_ne_1 \in B$ وحسب الفرض الجدلي فإن $A(f) = B \cap R(1-f) \neq o$ وبالتالي يكون $A(f) \in \Im_n$. لنبرهن على أن $A(f) \subseteq A(e_n)$.

ليكن $x \in A(f)$ عندئذ $x \in B$ وأن $x \in R(1-f)$ ومنه يوجد $a \in R$ بحيث $x = a(1-f)$ وبالتالي يكون $xf = a(1-f)f = o$ أي إن $xf = o$ وبالتالي يكون $xfe_n = o$ وبما أن $fe_n = e_n + e_1e_n - e_ne_1e_n = e_n$ نجد أن $xe_n = o$ وبما أن $x = xe_n + x(1-e_n) = x(1-e_n)$ نجد أن $x \in R(1-e_n)$ وهذا يبين لنا أن $x \in B \cap R(1-e_n) = A(e_n)$ وبما أن $x \in B$ نجد أن $x \in A(e_n)$ وهكذا نجد أن $A(f) \subseteq A(e_n)$. وبما أن $A(e_n)$ عنصراً أصغرياً في $\Im_n$ نجد أن $A(f) = A(e_n)$. لنبرهن الآن على أن $e_1 \notin A(f)$. لنفرض أن $e_1 \in A(f)$ عندئذ يكون $e_1 \in R(1-f)$ ومنه يوجد $b \in R$ بحيث $e_1 = b(1-f)$ وبما أن $1-f$ عنصراً جامداً في R نجد أن

$$e_1 = b(1-f) = b(1-f)(1-f) = e_1(1-f)$$

وهكذا نجد أن $e_1 = e_1 - e_1f$ وبالتالي يكون $e_1f = o$. من جهة أخرى لدينا

$$e_1 f = e_1(e_0 + e_1 - e_0 e_1) = e_1 e_0 + e_1 - e_1 e_0 e_1$$

وبما أن $e_1 e_0 = o$ نجد أن $e_1 f = e_1$ أي أن $e_1 = e_1 f = o$ وهذا غير ممكن وهكذا نجد أن $e_1 \notin A(f)$ وبما أن $A(e_0) = Re_1$ نجد أن $e_1 \in A(e_0)$ وهكذا نجد أن $A(f) \neq A(e_0)$ أصبح لدينا $A(f) \subset A(e_0)$ وهذا يناقض كون العنصر $A(e_0)$ أصغرياً في المجموعة Σ_0. مما سبق نجد أن B حد مباشر في R.

ولخدة من النتائج المهمة للبرهنة الأخيرة والمتعلقة بالمثاليات في الحلقات نصف البسيطة نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 9-3-5.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R مغايراً للصفر عندئذ $A = Re = eR$ حيث $e \neq o$ عنصر جامد مركزي في R.

البرهان.

لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة وليكن A مثالياً في R مغايراً للصفر عندئذ A مثالي يساري في R مغاير الصفر وحسب المبرهنة (9-3-4) فإن A هو حد مباشر في R ومنه $A = Re$ حيث e عنصر جامد في R مغاير للصفر. من جهة أخرى بما أن كلاً من $(1-e)R$ و A هو مثالي يميني في R فإن $B = A \cap (1-e)R$ هو مثالي يميني في R كما أن $B \subseteq A$ وبما أن $B \subseteq (1-e)R$ فإن $eB \subseteq e(1-e)R = \{o\}$ وهذا يبين لنا أن $eB = \{o\}$. لنبرهن الآن على أن $A = Ae$. ليكن $x \in A$ عندئذ وبما أن $A = Re$ فإنه يوجد $r \in R$ بحيث $x = re$ ومنه $x = re = ree = xe$ وبالتالي $x = xe \in Ae$ أي أن $Ae \subseteq A$. ليكن $y \in Ae$ عندئذ يوجد $a \in A$ بحيث $y = ae$ وبما أن $a, e \in A$ نجد أن $y = ae \in A$ أي أن $Ae \subseteq A$. مما سبق نجد أن $A = Ae$. وهكذا نجد أن $B^2 = BB \subset AB = AeB = \{o\}$ ومنه نجد أن المثالي اليميني B عديم القوى في R وبالتالي $B \subseteq J(R) = \{o\}$ وذلك لأن الحلقة R نصف بسيطة.

ليكن $x \in A$ وبما أن A مثالياً يسارياً في R نجد أن $(1-e)x \subset A$ كما أن $(1-e)x \in (1-e)R$ ومنه فإن $(1-e)x \in A \cap (1-e)R = B = \{o\}$ أي أن

$(1-e)x = o$ وبالتالي $x = ex$ وذلك أياً كان $x \in A$ وهذا يبين لنا أن $A \subseteq eA$ ومنه $A \subseteq eA \subseteq eR \subseteq AR \subseteq A$ أي إن $A = eR$. مما سبق نجد أن $A = Re = eR$.

لنبرهن الآن على أن العنصر e مركزي في R. ليكن $c \in R$ عندئذ $ec \in A = Re$ ومنه يوجد $r \in R$ بحيث $ec = re = ree = ece$. أيضاً بما أن $ce \in A = eR$ فإنه يوجد $r_0 \in R$ بحيث $ce = er_0 = eer_0 = ece$ وهذا يبين لنا أن $ce = ec$ وذلك أياً كان $c \in R$ أي إن العنصر e مركزي في R.

واحدة من الخواص المهمة للحلقات نصف البسيطة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 9 -3 -6.

لتكن R حلقة نصف بسيطة عندئذ:

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

حيث A_i مثالي يساري أصغري في R مغاير للصفر وذلك أياً كان $i = 1,2,\cdots,n$.

البرهان.

لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة وليكن $A \neq o$ مثالياً يسارياً مغايراً للصفر في R. ولنأخذ المجموعة

$$\Im = \{K : R \text{ مثالي يساري في } K,\ K \neq o; K \subseteq B\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $A \subset \Im$ وبما أن الحلقة R أرتينية فإنه يوجد في $\Im$ عنصر أصغري وليكن A_1. إن A_1 مثالي يساري أصغري في R وأن $A_1 \subseteq A$ وبما أن $J(R) = \{o\}$ فإن A_1 ليس عديم القوى وحسب المبرهنة (9 -1 -8) فإن A_1 حد مباشر في R ومنه $R = A_1 \oplus A_1'$ حيث A_1' مثالي يساري في R.

- إذا كان $A_1' = \{o\}$ يتم المطلوب.
- لنفرض أن $A_1' \neq \{o\}$ ولنأخذ المجموعة

$$\Im_1 = \{H : R \text{ مثالي يساري في } H \neq o; H \subseteq A_1'\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im_1$ غير خالية لأن $A_1' \in \Im_1$ ولكون الحلقة R أرتينية فإنه يوجد في $\Im_1$ عنصر أصغري وليكن A_2. إن A_2 مثالي يساري أصغري في R مغاير للصفر

وأن $A_2 \subseteq A_1'$ وبما أن $J(R)=o$ فإن A_2 ليس عديم القوى وحسب المبرهنة (9-1-8) فإن A_2 حد مباشر في R ومنه $A_1' = A_2 \oplus A_2'$ حيث A_2' مثالي يساري في R وهكذا فإن $R = A_1 \oplus A_2 \oplus A_2'$.

- إذا كان $A_2' = \{o\}$ يتم المطلوب.
- لنفرض أن $A_2' \neq \{o\}$ عندئذ بمتابعة العمل بالشكل السابق نحصل على السلسلة

$$A_1' \supset A_2' \supset A_3' \supset \cdots \supset \cdots$$

وهي سلسلة متناقصة من المثاليات اليسارية المغايرة للصفر في R وبما أن الحلقة R أرتينية فإن السلسلة السابقة سوف تنقطع بعد عدد منته من الخطوات وهكذا فإننا نحصل على المجموع المباشر التالي $R = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ حيث A_i مثالي يساري في R مغاير للصفر وذلك أياً كان $i = 1,2,\cdots,n$.

نأتي الآن إلى دراسة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 9-3-7.

كل حلقة نصف بسيطة هي حلقة نيوترية.

البرهان.

لنفرض أن R حلقة نصف بسيطة ولتكن

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_m \subseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من المثاليات اليسارية في الحلقة R والتي كل منها لا يساوي R عندئذ حسب التمهيدية (2-2-1) فإن $K = \bigcup_i A_i$ هو مثالي يساري في R وبما أن الحلقة R نصف بسيطة نجد أن K هو حد مباشر في R وبالتالي يوجد في R عنصر جامد e بحيث $K = Re$. بما أن $e \in K = \bigcup_i A_i$ فإنه يوجد دليل واحد على الأقل وليكن j بحيث $e \in A_j$. لنفرض أن k هو أول دليل من أجله $e \in A_k$ عندئذ وبما أن A_k مثالياً يسارياً في R نجد أن $Re \subseteq A_k$. وهكذا نجد أن $K = Re \subseteq A_k \subseteq \bigcup_i A_i = K$ أي أن $K = A_k$ ومنه نجد أنه أياً كان $n \geq k$ فإن $A_k \subseteq A_n$ كما أن

$A_k = K = \bigcup_i A_i \supseteq A_n$. مما سبق نجد أن $A_n = A_k$ وذلك أيا كان $n \geq k$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R نيوثرية. ■

Damascus University

الفصـــل العـــاشـــر

الحـــلقـــات المنتظمـــة

في هذا الفصل سوف ندرس نوع مهم من الحلقات وهي الحلقات المنتظمة والقريبة من المنتظمة ويعد الرياضي *Von Neumann* 1936 أول من أدخل مفهوم الانتظام في الحلقات وقد شغل هذا الموضوع كثير من الرياضيين وقد وجدت كثير من المحاولات الناجحة لتعميم هذا المفهوم مـن قبـل *I. Kaplansky* 1968 و *R. Goodeart* 1979 وغيرهم. وقد حفل عقد التسعينات من القرن الماضي بدراسة هذه المحاولات.

أول ما سنبدأ به دراستنا في هذا الفصل هو الحلقات المنتظمة.

10 - 1. الحـلقـــات المنتظمـــة.

تعريـف.

نقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كان لأجل كل عنـصر $a \in R$ يوجـد $x \in R$ بحيث $a = axa$.

لنورد الآن بعضاً من الشروط المكافئة لمفهوم الحلقات المنتظمة وذلك من خـلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـة 10 -1- 1.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R منتظمة.
2. كل مثالي يساري (يميني) رئيسي في R هو حد مباشر في R.
3. كل مثالي يساري (يميني) منتهي التوليد في R هو حد مباشر في R.

البرهـان.

(1) $\Leftarrow$ (2). ليكن A مثالياً يسارياً رئيسياً في R عندئذ $A = Ra$ حيث $a \in R$ وحسب الفرض يوجد $x \in R$ بحيث $a = axa$. لنضع $e = xa$ فنجد أن $e = e^2$ وحسب المبرهنة (2-4-2) نجد أن Re هو حد مباشر للحلقة R كما أن

$$A = Ra = Raxa \subseteq Rxa = Re$$

ليكن $y \in Re$ عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $y = be$ ومنه $y = be = bxa \in Ra$ وبالتالي يكون $Re \subseteq Ra$. مما سبق نجد أن $Ra = Re$ أي إن المثالي اليساري $A = Ra$ هو حد مباشر في R.

(2) $\Leftarrow$ (3). ليكن B مثالياً يسارياً منتهي التوليد في R ولنفرض أن B مولد بالمجموعة $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subset R$ عندئذ $B = \sum_{i=1}^{n} Rb_i$. سوف نورد البرهان بالاستقراء حسب n.

من أجل $n = 1$ فإن $B = Rb_1$ وحسب الفرض يكون B حداً مباشراً في الحلقة R.

لنفرض أن القضية صحيحة لأجل $n-1$ عندئذ $B = \sum_{i=1}^{n-1} Rb_i + Rb_n$. لنضع $D = \sum_{i=1}^{n-1} Rb_i$ فنجد أن $B = D + Rb_n$ وأن D مثالي يساري في R منتهي التوليد ومولد بـ $n-1$ عنصر وحسب الفرض الاستقرائي يكون $D = Re$ حيث $e = e^2$ ومنه $B = Re + Rb_n$ وبما أن $1 = e + (1-e)$ نجد أن $b_n = b_n e + b_n(1-e)$ ومنه أياً كان $r \in R$ فإن $rb_n = rb_n e + rb_n(1-e)$ وبالتالي يكون $rb_n \in Re + Rb_n(1-e)$ وهكذا نجد أن $Rb_n \subseteq Re + Rb_n(1-e)$.

من جهة أخرى بما أن $b_n(1-e) = b_n - b_n e$ نجد أنه أياً كان $d \in R$ فإن

$$d\,b_n(1-e) = d\,b_n - d\,b_n e = d\,b_n + (-d\,b_n)e \in Rb_n + Re$$

ومنه يكون $Rb_n(1-e) \subseteq Rb_n + Re$ وهكذا نجد أن

$$Re + Rb_n \subseteq Re + Re + Rb_n(1-e) = Re + Rb_n(1-e) \subseteq$$
$$\subseteq Re + Re + Rb_n = Re + Rb_n$$

مما سبق نجد أن $Re + Rb_n = Re + Rb_n(1-e)$. وبما أن $Rb_n(1-e)$ مثالياً يسارياً رئيسياً فإنه حسب الفرض يوجد $f \in R$ بحيث $f = f^2$ وأن $Rb_n(1-e) = Rf$ ومنه يكون $Re + Rb_n(1-e) = Re + Rf$ كما أن $fe = o$.

لنضع $g = (1-e)f$ فنجد أن $g = g^2$ لأن

$$g^2 = (1-e)f(1-e)f = (f - ef)(f - ef) = f^2 - fef - ef^2 + efef =$$
$$= f - ef = (1-e)f = g$$

كما أن $eg = ge = o$ وأن $Rg = Rf$ لأن $g = (1-e)f \in Rf$ أي أن $Rg \subseteq Rf$.

من جهة أخرى بما أن $f = f^2 = f(1-e)f = fef$ ومنه $f \in Rg$ وبالتالي $Rf \subseteq Rg$. مما سبق نجد أن $Rg = Rf$. وهكذا نجد أن

$$Re + Rb_n = Re + Rf = Re + Rg$$

لنبرهن أن $R(e+g) = Re + Rg$. لدينا $R(e+g) \subseteq Re + Rg$ ليكن $x \in Re + Rg$ عندئذ يوجد $x_1, x_2 \in R$ بحيث $x = x_1e + x_2g$ كما أن

$$x(e+g) = (x_1e + x_2g)(e+g) = x_1e + x_1eg + x_2ge + x_2g = x_1e + x_2g = x$$

ومنه نجد أن $x \in R(e+g)$ وهكذا فإن $Re + Rg \subseteq R(e+g)$. مما سبق نجد أن $R(e+g) = Re + Rg$ كما أن $(e+g)^2 = (e+g)$ ومنه يكون

$$B = Re + Rb_n = Re + Rg = R(e+g)$$

وهذا يبين لنا أن المثالي اليساري B هو حد مباشر للحلقة R.

(3) $\leftarrow$ (1). ليكن $a \in R$ عندئذ وحسب الفرض فإن $Ra = Re$ حيث $e^2 = e \in R$ وبما أن $e \in Ra$ فإنه يوجد $x \in R$ بحيث $e = xa$ وبما أن $R = Re \oplus R(1-e)$ فإن $R = Ra \oplus R(1-e)$. من جهة أخرى بما أن $1 = e + (1-e)$ فإن $1 = xa + (1-e)$ ومنه $a = axa + a(1-e)$ وبالتالي يكون $a - axa = a(1-e) \in R(1-e)$ كما أن $a - axa \in Re \cap R(1-e) = \{o\}$ ومنه نجد أن $a - axa = (1-ax)a \in Ra = Re$ وبالتالي يكون $a = axa$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R منتظمة.

التمهيدية الآتية تبين لنا أن أساس جاكبسون للحلقات المنتظمة يساوي الصفر.

تمهيديـــة 10 -1 -2.

لتكن R حلقة منتظمة عندئذ $J(R)=\{o\}$.

البرهـــان.

ليكن $a \in J(R)$ بما أن الحلقة R منتظمة فإنـــه يوجـــد $x \in R$ بحيـــث $a = axa$.
لنضع $e = ax$ فنجد أن $e^2 = ee = axax = ax = e$ أي إن العنصر e هـــو عنـــصر جامد في R. من جهة أخرى بما أن $J(R)$ مثالياً في R فإن $e = ax \in J(R)$ وحسب المبرهنة (4-3-2) فإن العنصر $1-e$ قابل للقلب في R وبالتالي يوجد $y \in R$ بحيث $(1-e)y = 1$ ومنـــــه $e = e(1-e)y = ey - ey = o$ وبالتـــــالي يكـــــون $a = axa = ea = o$. مما سبق نجد أن $J(R)=\{o\}$.

المبرهنة الآتية تعطينا واحدة من الخواص المهمة التي تتمتع بها الحلقات المنتظمة.

مبرهنـــة 10 -1 -3.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R منتظمة.
2. لأجل أي مثالي يمينـــي H وأي مثـــالي يـــساري L فـــي الحلقـــة R فـــإن $H \cap L = HL$.

البرهـــان.

(1) $\Rightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R منتظمة وليكن H مثالياً يمينياً و L مثالياً يسارياً في الحلقة R عندئـــذ $HL \subseteq HR \subseteq H$ و $HL \subseteq RL \subseteq L$ وهـــذا يبـــين لنـــا أن $HL \subseteq H \cap L$. من جهة أخرى ليكن $a \in H \cap L$ وحسب الفرض يوجـــد $x \in R$ بحيث $a = axa$ وبما أن H مثالي يمينـــي فـــي R فـــإن $ax \in H$ ومنـــه نجـــد أن $a = axa \in HL$ أي أن $H \cap L \subseteq HL$. مما سبق نجد أن $H \cap L = HL$.

(2) $\Rightarrow$ (1). ليكن $a \in R$ عندئذ aR هو مثالي يميني في R و Ra مثالي يساري فـــي R وحسب الفرض فإن $aR \cap Ra = aRRa = aRa$ وبما أن $a \in aR \cap Ra$ نجـــد أن $a \in aRa$ وبالتالي يوجد $y \in R$ بحيث $a = aya$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R منتظمة.

لندرس الآن بعض الخواص المهمة الحلقة المنتظمة وذلك من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 10-1-4.

لتكن R حلقة منتظمة. عندئذ:

1. لأجل أي عنصر جامد $e \in R$ فإن الحلقة eRe منتظمة.
2. لأجل أي مثالي A في R فإن حلقة الخارج R/A منتظمة.
3. كل عنصر قاسم للصفر من اليسار يكون قاسماً للصفر من اليمين.
4. كل عنصر قاسم للصفر من اليمين يكون قاسماً للصفر من اليسار.
5. كل عنصر من R وليس قاسماً للصفر يكون قابلاً للقلب.

البرهان.

1 - لنفرض أن $e \in R$ عنصر جامد وليكن $a_0 \in eRe$ عندئذ $a_0 \in R$ وبما أن الحلقة R منتظمة فإنه يوجد $x \in R$ بحيث $a_0 = a_0 x a_0$. من جهة أخرى بما أن $a_0 \in eRe$ فإنه يوجد $a \in R$ بحيث $a_0 = eae$ كما أن $x_0 = exe \in eRe$ ويحقق

$$a_0 x_0 a_0 = (eae)(exe)(eae) = (eae)x(eae) = a_0 x a_0 = a_0$$

وهذا يبين لنا أن الحلقة eRe منتظمة.

2 - لنفرض أن A مثالي في R وليكن $\bar{a} \in R/A$ عندئذ $\bar{a} = a + A$ حيث $a \in R$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $a \in A$ عندئذ $\bar{a} = a + A = \bar{o}$ ومنه يكون $\bar{a}\,\bar{o}\,\bar{a} = \bar{o} = \bar{a}$.

- إذا كان $a \notin A$ عندئذ وبما أن الحلقة R منتظمة فإنه يوجد $x \in R$ يحقق $a = axa$ كما أن $x \notin A$ لأنه إذا كان $x \in A$ ولما كان A مثالياً في R نجد أن $a \in A$ وهذا غير ممكن. ومنه $\bar{x} = x + A \subset R/A$ وأن

$$\bar{a}\,\bar{x}\,\bar{a} = (a + A)(x + A)(a + A) = axa + A = a + A = a$$

مما سبق نجد أن الحلقة R/A منتظمة.

3 - ليكن $a \in R$ قاسماً للصفر من اليسار عندئذ $a \neq o$ كما أنه يوجد $o \neq b \in R$ بحيث $ab = o$ وبما أن الحلقة R منتظمة فإنه يوجد $o \neq x \in R$ بحيث $a = axa$.

لنضع $ax = e$ فنجد أن e عنصر جامد في R وأن $e \neq o$ كما أن $ea = a$ ومنه يكون

$(1-e)a=o$ و أن $(1-e)\in R$ كما أن $(1-e)\neq o$ لأنه إذا كان $1-e=o$ نجد أن $e=1$ وبالتالي $ax=1$ وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب من اليمين وهذا يناقض التمهيدية (1-4-1) لأن العنصر a قاسم للصفر من اليسار.

4 - يبرهن بطريقة مشابهة.

5 - ليكن $a\in R$ عنصراً ليس قاسماً للصفر في R وبما أن الحلقة R منتظمة يوجد $x\in R$ بحيث $a=axa$. لنضع $ax=e$ نجد $ea=a$ ومنه $(1-e)a=o$ وبما أن العنصر a ليس قاسماً للصفر من اليمين فإن $1-e=o$ وبالتالي $e=1$ أي أن $ax=1$ وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب من اليمين. لنضع $xa=f$ فنجد أن $a=af$ ومنه $a(1-f)=o$ وبما أن العنصر a ليس قاسماً للصفر من اليسار نجد أن $1-f=o$ أي أن $f=1$ ومنه $xa=1$ وهذا يبين لنا أن العنصر a قابل للقلب من اليسار. مما سبق نجد أن العنصر a قابل للقلب.

ندرس الآن العلاقة بين الحلقات المنتظمة والحلقات نصف البسيطة وذلك من خلال البرهنة الآتية:

مبرهنة 10-1-3:

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R نصف بسيطة.
2. الحلقة R أرتينية ومنتظمة.

البرهان.

(1) $\Rightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة عندئذ حسب التعريف نجد أن الحلقة R أرتينية وأن $J(R)=\{o\}$. لنبرهن على أن الحلقة R منتظمة.

ليكن $a\in R$ وهذا نميز حالتين:

- إذا كان $a=o$ عندئذ أياً كان $x\in R$ فإن $a=axa$.

- لنفرض أن $a\neq o$ عندئذ فإن Ra هو مثالي يساري في R مغاير للصفر وبما أن الحلقة R نصف بسيطة فإنه حسب البرهنة (9-3-4) فإن Ra ... مباشر في R

وبالتالي يوجد في R مثالي يساري B بحيث $R = Ra \oplus B$ وبما أن $1 \in R$ فإنه يوجد $x \in R$ و $b \in B$ بحيث $1 = xa + b$ ومنه $a = axa + ab$ وبما أن Ra مثالياً يسارياً في R فإن $a, axa \in Ra$ وبالتالي يكون $a - axa \in Ra$.

من جهة أخرى بما أن B مثالياً يسارياً في R وأن $b \in B$ نجد أن $a - axa = ab \subset B$ ومنه فإن $a - axa \in Ra \cap B = \{o\}$ وهذا يبين لنا أن $a = axa$ وبالتالي تكون الحلقة R منتظمة.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R أرتينية ومنتظمة بما أن الحلقة R منتظمة فإنه حسب التمهيدية (10 -1 -2) يكون $J(R) = \{o\}$ وحسب التعريف نجد أن الحلقة R نصف بسيطة.

لمتابعة دراستنا للحلقات المنتظمة لابد لنا من التمهيدية الآتية:

تمهيدية 10 -1 -6.

لتكن R حلقة منتظمة و e عنصراً جامداً في R. عندئذ:

1. $l(e) = l(eR) = R(1-e)$.
2. $r(e) = r(Re) = (1-e)R$.
3. أياً كان $a \in R$ فإن $l(r(Ra)) = Ra$.
4. أياً كان $a \in R$ فإن $r(l(aR)) = aR$.

البرهان.

1 - ليكن $x \in R$ عندئذ $xa = o$ وبما أن $(1-e) + e = 1$ نجد أن

$$x = xe + x(1-e) = x(1-e)$$

ومنه نجد أن $x \in R(1-e)$ أي أن $l(e) \subseteq R(1-e)$. ليكن $y \in R(1-e)$ عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $y = b(1-e)$ ومنه يكون $ye = b(1-e)e = b(e-e^2) = bo = o$ وهذا يبين لنا أن $y \in l(e)$ أي أن $R(1-e) \subseteq l(e)$ مما سبق نجد أن $l(e) = R(1-e)$. لنبرهن الآن على أن $l(e) = l(eR)$. ليكن $z \in l(e)$ عندئذ يكون $ze = o$ ومنه $zeR = o$ وبالتالي يكون $z \in l(eR)$ أي إن $l(e) \subseteq l(eR)$. ليكن

$z_n \in l(eR)$ عندئذ فإن $z_n eR = o$ وبما أن $1 \in R$ نجد أن $z_n e = o$ ومنه $z_n \in l(e)$ أي أن $l(eR) \subseteq l(e)$. مما سبق نجد أن $l(e) = l(eR)$ وهكذا نجد أن $l(e) = l(eR) = R(1-e)$.

2 - يبرهن بطريقة مشابهة للحالة (1).

3 - ليكن $a \in R$ وبما أن الحلقة R منتظمة فإنه حسب المبرهنة (10 -1 -1) يكون المثالي اليساري Ra جداً مباشراً في R وبالتالي يوجد في R عنصر جامد g بحيث يكون $Ra = Rg$ وحسب (2) نجد أن $r(Ra) = r(Rg) = (1-g)R$ وحسب (1) نجد أن $Ra = l((1-g)R) = l(r(Ra))$.

4 - يبرهن بطريقة مشابهة للحالة (3).

علاقة أخرى بين الحلقات المنتظمة ونصف البسيطة نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 10 -1 -7.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R نصف بسيطة.
2. الحلقة R نيوثرية ومنتظمة.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة عندئذ حسب المبرهنة (9 -3 -7) تكون الحلقة R نيوثرية. من جهة أخرى بما أن الحلقة R نصف بسيطة فإنه حسب التعريف يكون $J(R) = \{o\}$. لنبرهن الآن على أن الحلقة R منتظمة.

ليكن $a \in R$ وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $a = o$ عندئذ أياً كان $x \in R$ فإن $a = axa$.

- لنفرض أن $a \neq o$ عندئذ فإن Ra هو مثالي يساري في R مغاير للصفر وبما أن الحلقة R نصف بسيطة فإنه حسب المبرهنة (9 -3 -4) فإن Ra هو حد مباشر في R وبالتالي يوجد في R مثالي يساري B بحيث $R = Ra \oplus B$ وبما أن $1 \in R$ فإنه يوجد

$x \in R$ و $b \in B$ بحيث $1 = xa + b$ ومنه $a = axa + ab$ وبما أن Ra مثالياً يسارياً في R فإن $a, axa \in Ra$ وبالتالي يكون $a - axa \in Ra$.

من جهة أخرى بما أن B مثالياً يسارياً في R وأن $b \in B$ نجد أن $a - axa \cdot ab \in B$ ومنه فإن $a - axa \in Ra \cap B = \{o\}$ وهذا يبين لنا أن $a = axa$ وبالتالي تكون الحلقة R منتظمة.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R نيوثرية ومنتظمة بما أن الحلقة R نيوثرية فإنه حسب المبرهنة (9-2-4) يكون المثالي اليساري A منتهي التوليد في R وبما أن الحلقة R منتظمة فإنه حسب المبرهنة (10-1-1) يكون المثالي اليساري A حداً مباشراً في R وهذا يبين لنا أن الحلقة R نصف بسيطة.

سوف ندرس الآن واحدة من الخواص المهمة للحلقات المنتظمة وعلاقتها بعادم العنصر. ولأجل ذلك لابد لنا من التمهيدية الآتية:

تمهيدية 10-1-8.

لتكن R حلقة لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر. عندئذ:

1. أياً كان $a,b \in R$ بحيث $ab = o$ فإن $ba = o$.
2. أياً كان $a \in R$ فإن $r(a) = l(a)$.

البرهان.

1 - ليكن $a,b \in R$ بحيث $ab = o$ عندئذ يكون $(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)b = o$ وبما أن الحلقة R حلقة لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة الصفر نجد أن $ba = o$.

2 - ليكن $x \in r(a)$ عندئذ $ax = o$ وحسب (1) نجد أن $xa = o$ ومنه $x \in l(a)$ وبالتالي يكون $r(a) \subseteq l(a)$. ليكن $y \in l(a)$ عندئذ يكون $ya = o$ وحسب (1) نجد أن $ay = o$ ومنه $y \in r(a)$ وبالتالي يكون $l(a) \subseteq r(a)$. مما سبق نجد أن $r(a) \subseteq l(a)$.

مبرهنـــة 10 -1 -9.

لتكن R حلقة لا تحوي عناصر عديمة القوى سغايرة للصفر. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R منتظمة.
2. أياً كان $a \subset R$ فإنه يوجد $x \in R$ بحيث $Ra = l(x)$.

البرهـــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R منتظمة. ليكن $a \subset R$ عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $a = aba$. لنفرض أن $ba = e$ عندئذ فإن e هو عنصر جامد في R لأن

$$e^2 = ee = (ba)(ba) = b(aba) = ba = e$$

كما أن $Ra = Re$ لأن $Ra = Raba \subseteq Rba = Re$ وأن $Re = Rba \subseteq Ra$.

لنضع $e' = 1 - e$ فنجد أن e' عنصر جامد في R. لنبرهن على أن $l(e') = Re$. ليكن $y \in l(e')$ عندئذ $ye' = o$ ومنه $y(1-e) = o$ وبالتالي يكون $y = ye \subset Re$ وهكذا نجد أن $l(e') \subseteq Re$. ليكن $z \in Re$ عندئذ يوجد $r \in R$ بحيث $z = re$ وبالتالي يكون $ze' = re(1-e) = r(e-e) = ro = o$ ومنه نجد أن $z \in l(e')$ وهذا يبين لنا أن $Re \subseteq l(e')$ وهذا يبين لنا أن $l(e') = Re$. مما سبق نجد أن $Ra = Re = l(e')$.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $o \neq a \in R$ عندئذ حسب الفرض فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $Ra = l(b)$ وهذا سوف نميز حالتين:

- إذا كان a ليس قاسماً للصفر في R عندئذ وبما أن $a \in l(b)$ نجد أن $ab = o$ ومنه يكون $b = o$ وبالتالي فإن $Ra = l(b) = l(o) = R$ ومنه يوجد $x \in R$ بحيث $xa = 1$ وبالتالي يكون $axa = a$.

- لنفرض أن a قاسماً للصفر في R عندئذ وبما أن $a \subset l(b)$ فإن $ab = o$ وحسب التمهيدية (10 -1 -8) يكون $ba = o$ وأن $b \neq o$. لنبرهن الآن على أن $r(a) \cap r(b) = \{o\}$. ليكن $w \in r(a) \cap r(b)$ عندئذ يكون $w \in r(a)$ ومنه $aw = o$ كما أن $w \in r(b)$ وحسب التمهيدية (10 -1 -8) نجد أن $w \in r(b) = l(b) = Ra$ وبالتالي يوجد $z \in R$ بحيث $w = za$ ومنه

$$w^2 = w\,w = (za)(za) = (za)w = z(aw) = zo = o$$

وبما أن الحلقة R لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر نجد أن $w = o$ أي أن $r(a) \cap r(b) = \{o\}$.

لنبرهن الآن على أن العنصر $\lambda = a + b$ ليس قاسماً للصفر في R.

ليكن $y \in R$ بحيث $\lambda y = o$ ومنه نجد أن $(a+b)y = o$ وبالتالي فإن $ay + by = o$ أي أن $ay = -by$ وأن $b(ay) = (ba)y = oy = o$ ومنه فإن $ay \in r(b)$. كما أن

$$a(ay) = a(-by) = (ab)(-y) = o(-y) = o$$

أي أن $ay \in r(a)$ وهذا يبين لنا أن $ay \in r(a) \cap r(b) = \{o\}$ وبالتالي فإن $ay = o$ وبما أن $ay = -by$ نجد أن $by = o$ وبالتالي يكون $y \in r(a) \cap r(b) = \{o\}$ أي أن $y = o$ وهكذا نجد أن العنصر $\lambda = a + b$ ليس قاسماً للصفر في R.

من جهة أخرى بما أن $\lambda a = (a+b)a = a^2 + ab = a^2$ أي أن $\lambda a = a^2$ وحسب الفرض يوجد $\beta \subset R$ بحيث $R\lambda = l(\beta)$ وبما أن $\lambda \in R\lambda = l(\beta)$ نجد أن $\lambda\beta = o$ وبما أن λ ليس قاسماً للصفر في R نجد أن $\beta = o$ ومنه $R\lambda = l(\beta) = l(o) = R$ وبالتالي يوجد $\gamma \subset R$ بحيث $\gamma\lambda = 1$ وبما أن $\lambda a = a^2$ نجد أن $\gamma\lambda a = \gamma a^2$ أي أن $a = \gamma a^2$ وهكذا نجد أن

$$(a - a\gamma a)^2 = (a - a\gamma a)(a - a\gamma a) = a^2 - a^2\gamma a - a\gamma a^2 + (a\gamma a)(a\gamma a) =$$

$$= a^2 - a^2\gamma a - a^2 + a^2\gamma a = o$$

وبما أن الحلقة R لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر نجد أن $a - a\gamma a = o$ ومنه فإن $a = a\gamma a$. مما سبق نجد أن الحلقة R منتظمة.

Damascus University

10 - 2. I_0 - حلقات.

ذكرنا سابقاً بأنه وجدت كثير من المحاولات لتعميم مفهوم الانتظام في الحلقات وفي هذه الفقرة سوف ندرس واحدة من أهم هذه المحاولات ويعد *W .K .Nichlson* أول من درس هذه المحاولة وذلك في عام 1975 ثم تابعه بعد ذلك كل من *H .Hamza* عام 1999 و *A .A .Tugenbaev* عام 2005 . وبداية هذه الفقرة سوف تكون مع التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة R إنها I_0–حلقة إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ يوجد عنصر $x \in R$ مغاير للصفر يحقق $x = xax$.

ينتج من التعريف مباشرة التمهيدية الآتية:

تمهيدية 10 -2 -1.

إذا كانت R عبارة عن I_0–حلقة عندئذ $J(R) = \{o\}$.

البرهان.

لنفرض أن الحلقة R هي I_0–حلقة ولنفرض جدلاً أن $J(R) \neq \{o\}$ عندئذ يوجد $a \in J(R)$ بحيث $a \neq o$ وحسب الفرض يوجد $x \in R \quad x \neq o$ بحيث $x = xax$.

لنضع $e = ax$ فنجد أن e هو عنصر جامد في R لأن

$$e^2 = ee = axax = a(xax) = ax = e$$

ولما كان $J(R)$ مثالياً في R وكان $a \in J(R)$ نجد أن $e = ax \in J(R)$ ومنه $1 - e$ قابل للقلب في R وبالتالي يوجد $y \in R$ بحيث $(1-e)y = 1$ وبالتالي يكون

$$e = e(1-e)y = (e-e)y = oy = o$$

أي أن $ax = o$ ومنه نجد أن $x = xax = o$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أن $J(R) = \{o\}$..

نأتي الآن لدراسة المبرهنة الآتية والتي تعطينا شروطاً مكافئة لمفهوم I_0 حلقة.

مبرهنـــة 10 -2 -2.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R عبارة عن I_0–حلقة.
2. كل مثالي يساري مغاير للصفر في R يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.
3. كل مثالي يميني مغاير للصفر في R يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R هي I_0–حلقة وليكن $L \neq o$ مثالياً يسارياً في R عندئذ يوجد $a \in L$ بحيث $a \neq o$ وحسب الفرض يوجد $x \in R$ $x \neq o$ يحقق $x = xax$. لنضع $e = xa$ فنجد أن e هو عنصر جامد في R لأن

$$e^2 = e\,e = (xa)(xa) = (xax)a = xa = e$$

كما أن $e \neq o$ لأنه إذا كان $e = o$ نجد أن $x = xax = ex = ox = o$ ولما كان L مثالياً يسارياً في R وكان $a \in L$ نجد أن $e = xa \in L$.

(2) $\Leftarrow$ (1). ليكن $b \neq o$ $b \in R$ عندئذ يكون Rb مثالياً يسارياً في R مغايراً للصفر وحسب الفرض يوجد في R عنصر جامد $e \neq o$ بحيث $e \in Rb$ ومنه يوجد $r \in R$ بحيث $e = rb$ وأن $r \neq o$. لنضع $y = rar$ فنجد أن

$$yay = (rar)a(rar) = (ra)(ra)(ra)r = e\,e\,e\,r = er = rbr = y$$

كما أن $y \neq o$ لأنه إذا كان $y = o$ نجد أن $rar = o$ ومنه يكون

$$e = ra = (ra)(ra) = (rar)a = oa = o$$

وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن الحلقة R هي I_0–حلقة.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). يبرهن بطريقة مشابهة. ◊

مبرهنـــة 10 -2 -3.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R عبارة عن I_0–حلقة.

2 - كل مثالي يساري رئيسي مغاير للصفر في R يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

3 - كل مثالي يميني رئيسي مغاير للصفر في R يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R هي I_0-حلقة وليكن Ra مثالياً يسارياً رئيسياً في R مغايراً للصفر حسب المبرهنة (10-2-2) فإن المثالي اليساري Ra يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

(2) $\Rightarrow$ (1). ليكن $a \in R \quad a \neq o$ عندئذ يكون Ra مثالياً يسارياً رئيسياً في R مغايراً للصفر وحسب الفرض يوجد في R عنصر جامد $e \neq o$ بحيث $e \in Ra$ ومنه يوجد $y \in R$ بحيث $e = ya$. إن $y \neq o$ لأن $e \neq o$. لنضع $x = yay$ فنجد أن $x \neq o$ لأنه إذا كان $x = o$ فإن $e = ee = yaye = xa = o$ وهذا غير ممكن. كما أن

$$xax = yayayay = eeey = ey = yay = x$$

وحسب التعريف نجد أن الحلقة R عبارة عن I_0-حلقة.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (2).$_0$

شرط مكافئ آخر لمفهوم I_0-حلقة نورده من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 10-2-4.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R عبارة عن I_0-حلقة.
2. أياً كان $a \in R$ فإن $r(a)$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.
3. أياً كان $a \in R$ فإن $l(a)$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). ينتج من المبرهنة (10-2-2) وذلك لأن $r(a)$ مثالي يميني في R.

(2) $\Leftarrow$ (1). ليكن $a \in R$ إذا كان $a = o$ عندئذ فإن $o = oxo$. لنفرض أن $a \neq o$ عندئذ يكون $1-a \in R$ وأن $1-a \neq 1$ وحسب الفرض يوجد عنصر جامد $e \in R$ بحيث $e \in r(1-a)$ ومنه نجد أن $e = o$ $(1-a)e = o$ وبالتالي يكون $e = ae$ وبما أن e عنصراً جامداً نجد أن $e = eae$ وحسب تعريف I_0-حلقة نجد أن R عبارة عن I_0-حلقة.

التكافؤ (1) ⇔ (3) يبرهن بشكل مشابه للتكافؤ (1) ⇔ (2). ◊

مبرهنـــة 10 -2 -5.

لتكن R عبارة عن I_0- حلقة عندئذ لأجل أي عنصر جامد $e \in R$ فإن الحلقة eRe عبارة عن I_0- حلقة.

البرهـــان.

ليكن $a \in eRe$ عندئذ $a \in R$ وبما أن R عبارة عن I_0-حلقة فإنـــه يوجـــد $x \in R$ بحيث $x = xax$. من جهة أخرى بما أن $a \in eRe$ فإنه يوجد $b \in R$ بحيـــث $a = ebe$ ومنـــه نجـــد أن $a = ebe = e(ebe)e = eae$. لنـــضع $y = exe$ فنجـــد أن $y \in eRe$ وأن $y \neq o$. لأنه إذا كـــان $y = o$ عندئـــذ يكـــون $exe = o$ ومنـــه $exa = exeu = o$ وبالتـــالي $axa = aexa = o$ ومنـــه نجـــد أن $xaxa = o$ أي أن $xa = o$ ومنـــه يكون $x = xax = o$ وهذا غير ممكن. بالإضافة إلى ذلك فإن

$$yay = (exe)a(exe) = (ex)(eae)(xe) = e(xax)e = exe = y$$

وهذا يبين لنا أن الحلقة eRe عبارة عن I_0- حلقة. ◊

Damascus University

10 - 3. الحلقات π - المنتظمة.

سوف ندرس في هذه الفقرة تعميم من نوع جديد للحلقات المنتظمة من أجلها $J(R)\neq o$. ولتكن البداية مع التعريف الآتي:

تعريف.

نقول عن الحلقة R إنها π-منتظمة إذا كان لأجل أي عنصر $a\in R$ يوجد عدد طبيعي $n\in N$ و $x\in R$ بحيث $a^n=a^nxa^n$.

نتيجة.

ينتج من التعريف مباشرة أن كل حلقة منتظمة هي حلقة π-منتظمة فيها $J(R)=o$.

لندرس الآن واحدة من الحالات التي يتطابق فيها مفهوما الحلقات المنتظمة و الحلقات π-المنتظمة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 10 -3 -1.

لتكن R حلقة تبديلية. الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R منتظمة.
2. الحلقة R هي π-منتظمة فيها $J(R)=o$.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). ينتج مباشرة من التعريف والتمهيدية (10 -1 -2).

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R هي π منتظمة فيها $J(R)=o$ وليكن $a\in R$. إذا كان $a=o$ عندئذ $a=axa$ وذلك أياً كان $x\in R$. لنفرض أن $a\neq o$ عندئذ وبما أن الحلقة R هي π-منتظمة يوجد عدد طبيعي $n\in N$ و $b\in R$ بحيث $a^n=a^nba^n$. إن $a^n\neq o$ لأنه إذا كان $a^n=o$ عندئذ يكون العنصر a عديم القوى وحسب المبرهنة (5 -1 -4) نجد أن $a\in rad\ R$ وبما أن $rad\ R\subseteq J(R)$ وذلك حسب المبرهنة (5 - 1 -15) وبالتالي يكون $a\in J(R)=o$ أي أن $a=o$ وهذا يناقض كون $a\neq o$. لنضع $e=ba^n$ فنجد أن $e\in R$ عنصر جامد مغاير للصفر وأن $1-e\in R$ عنصر

جامـد وإن $1-e \neq 1$. مـن جهـة أخـرى بمـا أن $a^n = a^n b a^n = a^n e$ نجـد أن $a^n(1-e)=o$ وبما أن الحلقة R تبديلية فإن

$$[a(1-e)]^n = a^n.(1-e)^n = a^n(1-e) = o$$

وهكذا نجد أن العنصر $a(1-e)$ هو عديم القوى وبالتالي يكون $a(1-e) \in J(R) = o$ ومنه فإن $a = ae$ وبما أن $e = ba^n \in Ra$ فإنه يوجد $y \in R$ بحيث $e = ya$ وهكـذا نجد أن $a = a.ya$ مما سبق نجد أن الحلقة R منتظمة.

لندرس الآن بعض من الخواص للحلقات π-المنتظمة.

تمهيديـة 10 -3 -2.

لتكن R حلقة π-منتظمة عندئذ:

1. المثالي $J(R)$ عديم في R.
2. حلقة الخارج $R/J(R)$ هي حلقة π-منتظمة.

البرهـان.

1 - ليكن $a \in J(R)$ وبما أن الحلقة R هي π-منتظمة فإنه يوجـد $n \in N$ و $x \in R$ بحيث $a^n = a^n x a^n$ ومنه فإن $a^n(1-xa^n)=o$. من جهة أخرى بمـا أن $a \in J(R)$ فإن $a^n \in J(R)$ وحسب المبرهنة (4-3-2) أياً كان $y \in R$ يكون العنـصر $1-ya^n$ قابلاً للقلب في R وهذا يبين لنا أن العنصر $1-xa^n$ قابل للقلب في R ومنه نجـد أن $a^n = o$ أي أن العنصر a عديم القوى وبالتالي يكون المثالي $J(R)$ عديماً في R.

2 - نتركه كتمرين للقارئ.

تمهيديـة 10 -3 -3.

لتكن R حلقة π-منتظمة عندئذ كل مثالي يساري (يميني) في R إما يكون عـديماً أو يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

البرهـان.

لنفرض أن الحلقة R هي π-منتظمة وليكن A مثالياً يسارياً في R. إذا كان المثالي اليساري A عديماً يتم المطلوب. لنفرض أن المثالي اليساري A ليس عـديماً عندئـذ

يوجد $0 \neq a \in A$ بحيث أن العنصر a ليس عديم القـــوى ومنـــه أيـــاً كـــان $m \in N$ فإن $a^m \neq 0$. من جهة أخرى بما أن الحلقة R هي π-منتظمة فإنه يوجـــد $n \in N$ و $x \in R$ بحيث $a^n = a^n x a^n$ وأن $a^n \neq 0$. لنضع $e = xa^n$ فنجد أن e هـــو عنـــصر جامد في R وأن $e \neq 0$ لأنه إذا كان $e = 0$ فإن $a^n = a^n x a^n = e a^n = 0$ وهذا غيـــر ممكن كما أن $e = xa^n = (xa^{n-1})a \in Ra \subseteq A$.

خاصة أخرى للحلقات π- المنتظمة نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـــة 10 -3 -4.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1. الحلقة R هي π-منتظمة.
2. أياً كان $a \in R$ يوجد $n \in N$ بحيث $a^n R \cap Ra^n = a^n Ra^n$.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R هي π-منتظمة وليكن $a \in R$ عندئذ يوجد $n \in N$ و $x \in R$ بحيث $a^n = a^n x a^n$. من جهة أخرى لدينا $a^n Ra^n \subseteq a^n R \cap Ra^n$. لـــيكن $y \in a^n R \cap Ra^n$ عندئذ $y = z_1 a^n = a^n z_2$ حيث $z_1, z_2 \in R$ ومنه

$$y = a^n z_2 = a^n x a^n z_2 = a^n x z_1 a^n \in a^n Ra^n$$

أي أن $a^n R \cap Ra^n \subseteq a^n Ra^n$. مما سبق نجد أن $a^n R \cap Ra^n = a^n Ra^n$.

(2) $\Leftarrow$ (1). ليكن $a \in R$ وحسب الفرض يوجد $n \in N$ بحيث $a^n R \cap Ra^n = a^n Ra^n$ وبما أن $a^n \in a^n R \cap Ra^n = a^n Ra^n$ يوجد $x \in R$ بحيث $a^n = a^n x a^n$ أي أن الحلقة R هي π-منتظمة.

تمهيديـــة 10 -3 -5.

لتكن R حلقة و $a \in R$ عندئذ:

1. إذا انقطعت السلسلة المتناقصة من المثاليات اليمينية

$$aR \supseteq a^2 R \supseteq a^3 R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

أي إذا وجد $n \in N$ بحيث $a^n R = a^k R$ وذلك أياً كان $k \geq n$ فإن السلسلة المتزايدة من المثاليات اليسارية

$$l(a) \subseteq l(a^2) \subseteq l(a^3) \subseteq \cdots \subseteq \cdots$$

تنقطع أي يوجد $m \in N$ بحيث $l(a^m) = l(a^t)$ وذلك أياً كان $t \geq m$.

2. إذا انقطعت السلسلة المتناقصة من المثاليات اليسارية

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

أي إذا وجد $n \in N$ بحيث $Ra^n = Ra^k$ وذلك أياً كان $k \geq n$ فإن السلسلة المتزايدة من المثاليات اليمينية

$$r(a) \subseteq r(a^2) \subseteq r(a^3) \subseteq \cdots \subseteq \cdots$$

تنقطع أي يوجد $m \in N$ بحيث $r(a^m) = r(a^t)$ وذلك أياً كان $t \geq m$.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن السلسلة المتناقصة من المثاليات اليمينية

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

تنقطع عندئذ يوجد $n \in N$ بحيث $a^nR = a^{n+1}R = \cdots = a^tR = \cdots$ وذلك أيـاً كـان $k \geq n$ نعلم أن $l(a^s)$ هو مثـالي يـساري فـي R وذلـك أيـاً كـان $s \in N$ وأن $l(a^s) \subseteq l(a^{s+1})$ ومنه نحصل على السلسلة المتزايدة من المثاليات اليسارية

$$l(a) \subseteq l(a^2) \subseteq l(a^3) \subseteq \cdots \subseteq \cdots$$

ولنبرهن على أن $l(a^n) = l(a^{n+1})$. لدينا $l(a^n) \subseteq l(a^{n+1})$ ليكن $y \in l(a^{n+1})$ عندئذ يكون $ya^{n+1} = o$ وبما أن $a^n \in a^nR = a^{n+1}R$ فإنه يوجد $x \in R$ بحيث $a^n = a^{n+1}x$ ومنه فإن $ya^n = ya^{n+1}x = o$ وبالتالي يكون $l(a^{n+1}) \subseteq l(a^n)$ مما سـبق نجـد أن $l(a^n) = l(a^{n+1})$ وبالتالي $l(a^n) = l(a^t)$ وذلك أياً كان $t \geq n$.

2 - يبرهن بطريقة مشابهة.

نعلم أنه إذا كانت R حلقة و $e \in R$ عنصر جامد مغاير للصفر فإن $1 - e \in R$ هـو أيضاً عنصر جامد في R وأن $e(1-e) = o$. لأجل ذلك سوف ندخل التعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة و e,g عناصر جامدة في R مغايرة للصفر. نقول عن العنصرين e,g إنهما متعامدان في R إذا كان $eg=o$.

تعريف.

لتكن R حلقة و $\{e_i\}_{i\in I}$ مجموعة من العناصر الجامدة في R المغايرة للصفر. نقول عن المجموعة $\{e_i\}_{i\in I}$ إنها تشكل نظاماً متعامداً في R إذا حققت الشروط الآتية:

1. أياً كان $i,j\in I$ بحيث $i\neq j$ فإن $e_ie_j=o$.
2. $1=\sum_{i\in I}e_i$.

تمهيدية 10-3-6.

لتكن R حلقة و $\{e_i\}_{i\in I}$ مجموعة من العناصر الجامدة في R المغايرة للصفر. الشروط الآتية متكافئة:

1. المجموعة $\{e_i\}_{i\in I}$ إنها تشكل نظاماً متعامداً في R.
2. $R=\sum_{i\in I}\oplus Re_i$.
3. $R=\sum_{i\in I}\oplus e_iR$.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن المجموعة $\{e_i\}_{i\in I}$ تشكل نظاماً متعامداً في R. واضح أن $\sum_{i\in I}Re_i\subseteq R$ وبما أن المجموعة $\{e_i\}_{i\in I}$ تشكل نظاماً متعامداً في R فإن $1=\sum_{i\in I}e_i$ ومنه أياً كان $x\in R$ فإن

$$x=x.1=x.(\sum_{i\in I}e_i)=\sum_{i\in I}x\,e_i\in\sum_{i\in I}Re_i$$

ومنه نجد أن $R\subseteq\sum_{i\in I}Re_i$ وبالتالي يكون $R=\sum_{i\in I}Re_i$. للبرهن على أن المجموع $\sum_{i\in I}Re_i$ هو مجموع مباشر.

ليكن $y \in Re_i \cap (\sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} Re_j)$ عندئذ بما أن $y \in Re_i$ يوجد $r \in R$ بحيث $y = re_i$.

من جهة أخرى بما أن $y \in \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} Re_j$ فإنه توجد عناصر $r_j \in R$ بحيث

$$y = r_1 e_{j_1} + r_2 e_{j_2} + \cdots + r_k e_{j_k} \qquad j_s \neq i$$

ومنه فإن y كما أن $ye_i = (re_i)e_i = re_i = y$

$$y = ye_i = (r_1 e_{j_1} + r_2 e_{j_2} + \cdots + r_k e_{j_k})e_i = r_1(e_{j_1}e_i) + r_2(e_{j_2}e_i) + \cdots$$
$$\cdots + r_k(e_{j_k}e_i) = o$$

وذلك لأن العناصر e_i هي عناصر جامدة في R وتشكل نظاماً متعامداً في R وهكذا نجد أن $y = o$ أي أن $Re_i \cap (\sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} Re_j) = \Phi$ مما سبق نجد أن $R = \sum_{i \in I} \oplus Re_i$.

(1)$\Leftarrow$(2). لنفرض أن $R = \sum_{i \in I} \oplus Re_i$ وليكن $i \in I$ عندئذ $e_i \in R$ ومنه توجد عناصر $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in R$ بحيث $e_i = \lambda_1 e_{k_1} + \lambda_2 e_{k_2} + \cdots + \lambda_n e_{k_n}$ ومنه أياً كان $j \in I$ بحيث $i \neq j$ فإن $e_j e_i = e_j \lambda_1 e_{k_1} + e_j \lambda_2 e_{k_2} + \cdots + e_j \lambda_n e_{k_n}$ كما أن $e_j e_i \in Re_{k_1} + Re_{k_2} + \cdots + Re_{k_n} \subseteq \sum_{\substack{s \in I \\ s \neq i}} Re_s$ وأن $e_j e_i \in Re_i$ ومنه نجد أن

$$e_j e_i = Re_i \cap \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} Re_j = o$$

أي أن $e_j e_i = o$ وذلك أياً كان $i, j \in I$ بحيث $i \neq j$. من جهة أخرى بما أن $1 \in R$ فإن

$$1 = \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \cdots + \alpha_m e_{i_m} \qquad (1)$$

ومنه فإن

$$e_{i_1} = \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} e_{i_1} + \cdots + \alpha_m e_{i_m} e_{i_1}$$

أي أن $e_{i_1} = \alpha_1 e_{i_1}$ بالتعويض في (1) نجد أن $1 = e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \cdots + \alpha_m e_{i_m}$ كذلك فإن

$$e_{i_2} = e_{i_1} e_{i_2} + \alpha_2 e_{i_2} + \alpha_3 e_{i_1} e_{i_3} + \cdots + \alpha_m e_{i_m} e_{i_2}$$

ومنه فإن $e_{i_1} = \alpha_2 e_{i_2}$ وهكذا نجد أن $1 = e_{i_1} + e_{i_2} + \alpha_3 e_{i_3} + \cdots + \alpha_m e_{i_m}$ نتابع بهذا الشكل نجد أن $1 = e_{i_1} + e_{i_2} + e_{i_3} + \cdots + e_{i_m}$ مما سبق نجد أن المجموعة $\{e_i\}_{i \in I}$ تشكل نظاماً متعامداً في R.

التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (3) يبرهن بطريقة مشابهة.

المبرهنة الآتية تبين لنا أن صف الحلقات نصف البسيطة لا تحوي أنظمة متعامدة مغايرة للصفر.

مبرهنة 10-3-7.

لتكن R حلقة نصف بسيطة عندئذ:

1. يوجد في R نظام متعامد منته من العناصر الجامدة.
2. أي نظام متعامد من العناصر الجامدة في R هو نظام منته.

البرهان.

1 - لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة عندئذ حسب المبرهنة (9-3-6) فإن

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

حيث A_i مثالي يساري في أصغري في R مغاير للصفر $i = 1,2,\cdots,n$ وحسب المبرهنة (9-3-4) فإن $A_i = Re_i$ حيث e_i عنصر جامد في R مغاير للصفر وذلك لأجل جميع القيم $i = 1,2,\cdots,n$ ومنه نجد أن

$$R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_n$$

وحسب التمهيدية (10-3-6) فإن المجموعة $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ تشكل نظاماً متعامداً وهذا النظام منته.

2 - لنفرض أن الحلقة R نصف بسيطة عندئذ حسب المبرهنة (9-3-7) فإن الحلقة R هي حلقة نيوترية. لنفرض جدلاً أنه يوجد في R نظام متعامد غير منته ولتكن $\{e_i\}_{i \in I}$ عندئذ حسب التمهيدية (10-3-7) فإن $R = \sum_{i \in I} \oplus Re_i$. لنضع

$$A_1 = Re_1$$

$$A_2 = Re_1 \oplus Re_2$$
$$A_3 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$$
$$\vdots$$
$$A_n = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus \cdots \oplus Re_n$$
$$\vdots$$

فنجد أن A_i هو مثالي يساري في R وذلك أياً كان $i \in I$ كما أن $A_i \subseteq A_{i+1}$. واضح أن $A_i \subset A_{i+1}$. لنبرهن على أن $A_i \neq A_{i+1}$. لنفرض أن $A_i = A_{i+1}$ عندئذ نجد أن

$$Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_i = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_i \oplus Re_{i+1}$$

ومنه نجد أن

$$e_{i+1} \in Re_{i+1}, \quad e_{i+1} \in Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_i$$

أي أن

$$e_{i+1} \in Re_{i+1} \cap (Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_i) \subseteq Re_{i+1} \cap (\sum_{\substack{j \in I \\ j \leq i+1}} \oplus Re_j) = o$$

وهذا يبين لنا أن $e_{i+1} = o$ وهذا غير ممكن ومنه فإن $A_i \neq A_{i+1}$. بهذا الشكل فإننا نحصل على السلسلة المتزايدة من المثاليات اليسارية المغايرة للصفر في R الآتية

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

وهذه السلسلة لا تنقطع مما يناقض كون الحلقة R نيوترية. مما سبق نجد أنه لا يمكن وجود نظام متعامد غير منته في R. بمعنى آخر فإن كل نظام متعامد في R هو نظام منته.

تعريف.

لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة R إنها قوية الانتظام إذا حققت الشرط الآتي: أياً كان $a \in R$ يوجد $x \in R$ يحقق $a^2 x = a$.

تمهيدية 10 -3 -8.

الحلقة قوية الانتظام لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر.

البرهـــان.

لنفرض أن R حلقة قوية الانتظام. لنفرض جدلاً أنه يوجد في R عنصر عديم القوى a مغاير للصفر عندئذ يوجد $m \in N^*$ بحيث $a^m = o$. لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^n = o$ عندئذ يكون $n > 1$ لأن $a \neq o$. وبما أن الحلقة R قوية الانتظام فإنه يوجد $x \in R$ بحيث $a^2x = a$. من جهة أخرى بما أن $a^n = o$ فإن $a^n x = o$ ومنه نجد أن

$$a^n x = a^{n-2}(a^2 x) = a^{n-2}a = a^{n-1} = o$$

وهذا يناقض كون n هو أصغر عدد صحيح موجب من أجله $a^n = o$. مما سبق نجد أن الحلقة R لا تحوي عناصر عديمة القوى مغايرة للصفر. ◊

المبرهنة الآتية تبين لنا أن كل حلقة قوية الانتظام هي حلقة منتظمة.

مبرهنـــة 10 -3 -9.

كل حلقة قوية الانتظام هي حلقة منتظمة.

البرهـــان.

لنفرض أن R حلقة قوية الانتظام ولـيكن $a \in R$ عندئـذ يوجـد $x \in R$ بحيـث $a^2x = a$ ومنه فإن $a - axa \in R$ ولأن

$$(a - axa)^2 = (a - axa)(a - axa) = (a^2 - a^2xa - axa^2 + axa^2xa) =$$

$$= a^2 - a^2 - axa^2 + axa^2 = o$$

وهكذا نجد أن العنصر $a - axa$ هو عديم القوى في R وبمـا أن الحلقـة R قويـة الانتظام وحسب التمهيدية (10 -3 -8) فإن الحلقة R لا تحوي عناصر عديمة القـوى مغايرة للصفر وبالتالي يكون $a - axa = o$ أي أن $a = axa$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R منتظمة. ◊

مبرهنـــة 10 -3 -10.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليسارية في R والتي من الشكل

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

2 - الحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليمينية في R والتي من الشكل

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة من المثاليات اليسارية في R والتي من الشكل

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

إذا وجد $m \in N$ بحيث $a^m = o$ عندئذ يكون

$$a^mR = a^{m+1}R = a^{m+2}R = \cdots$$

أي إن السلسلة المتناقصة من المثاليات اليمينية الآتية:

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

تنقطع وذلك أياً كان $a \in R$ وبذلك يتم المطلوب.

لنفرض أن $a^m \neq o$ وذلك أياً كان $m \in N$ عندئذ وحسب الفـرض فـإن السلسلة المتناقصة الآتية:

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

تنقطع وبالتالي يوجد $n \in N$ بحيث $Ra^n = Ra^{n+1} = Ra^{n+2} = \cdots$ وبالتالي يوجد $x \in R$ بحيث $a^n = xa^{n+1}$ وأن $x \neq o$ لأن $a^n \neq o$. لنأخذ السلسلة المتناقصة من المثاليات اليسارية الآتية:

$$Rx \supseteq Rx^2 \supseteq Rx^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وحسب الفرض فإن هذه السلسلة تنقطع ومنه يوجد $m \in N$ بحيث

$$Rx^m = Rx^{m+1} = Rx^{m+2} = \cdots$$

وبالتالي يوجد $y \in R$ بحيث $x^m = yx^{m+1}$ وأن $y \neq o$.

لنضع

$$\alpha = a^{n+m} \quad \beta = x^{n+m} \quad \gamma = y^{n+m}$$

فنجد أن $\alpha = \beta\alpha^2$ لأن

$$\alpha = a^{n+m} = xa^{n+1}a^m = xa^n a^{m+1} = x^2 a^{n+1}a^{m+1} = x^2 a^n a^{m+2} = \cdots =$$
$$= x^{n+m}a^{2(n+m)} = \beta\alpha^2$$

وبالطريقة نفسها نجد أن $\beta = \gamma\beta^2$. وبما أن $\gamma - \alpha \in R$ وحسب الفرض فإن السلسلة المتناقصة من المثاليات اليسارية الآتية:

$$R(\gamma-\alpha) \supseteq R(\gamma-\alpha)^2 \supseteq R(\gamma-\alpha)^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

تنقطع وبالتالي يوجد $t \in N$ بحيث

$$R(\gamma-\alpha)^t = R(\gamma-\alpha)^{t+1} = \cdots$$

ومنه يوجد $z \in R$ بحيث

$$(\gamma-\alpha)^t = z(\gamma-\alpha)^{t+1} \qquad (1)$$

كما أن

$$\gamma\beta\alpha = \gamma\beta\beta\alpha^2 = \gamma\beta^2\alpha^2 = \beta\alpha^2 = \alpha$$

ومنه نجد أن

$$\gamma\alpha = \gamma\beta\alpha^2 = (\gamma\beta\alpha)\alpha = \alpha\alpha = \alpha^2$$

وهكذا فإن $\gamma\alpha - \alpha^2 = o$ أي أن $(\gamma-\alpha)\alpha = o$ وبالاعتماد على العلاقة الأخيرة نجد:

$$(\gamma-\alpha)^2\beta^2 = (\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)\beta^2 = \gamma^2\beta^2 - \gamma\alpha\beta^2 - \alpha\gamma\beta^2 + \alpha^2\beta^2 =$$

$$= (\gamma^2\beta^2 - \alpha\gamma\beta^2) - (\gamma\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2) = (\gamma - \alpha)\gamma\beta^2 - (\gamma - \alpha)\alpha\beta^2 =$$
$$= (\gamma - \alpha)\gamma\beta^2 = (\gamma - \alpha)\beta$$

وبالتالي فإن

$$(2) \quad \begin{cases} (\gamma - \alpha)\beta = (\gamma - \alpha)^2\beta^2 = (\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha)\beta^2 = \\ = (\gamma - \alpha)^3\beta^3 = \cdots = (\gamma - \alpha)^s\beta^s \end{cases}$$

حيث $s = 1,2,3\cdots$. وهكذا يكون

$$\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha = \gamma\beta\alpha - \alpha\beta\alpha + \alpha\beta\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha =$$
$$= (\gamma\beta\alpha - \alpha\beta\alpha) + (\alpha\beta\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha) =$$
$$= (\gamma - \alpha)\beta\alpha + \alpha(\beta\alpha - \alpha\beta^2\alpha) =$$
$$= (\gamma - \alpha)\beta\alpha + \alpha(\gamma\beta^2\alpha - \alpha\beta^2\alpha) =$$
$$= (\gamma - \alpha)\beta\alpha + \alpha(\gamma - \alpha)\beta^2\alpha$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن

$$\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha = (\gamma - \alpha)^{t+1}\beta^{t+1}\alpha + \alpha(\gamma - \alpha)^t\beta^t\beta\alpha =$$
$$= (\gamma - \alpha)^{t+1}\beta^{t+1}\alpha + \alpha(\gamma - \alpha)^t\beta^{t+1}\alpha =$$
$$= [(\gamma - \alpha) + \alpha](\gamma - \alpha)^t\beta^{t+1}\alpha = \gamma(\gamma - \alpha)^t\beta^{t+1}\alpha$$

وباستخدام العلاقة (1) نجد أن

$$\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha = \gamma(\gamma - \alpha)^t\beta^{t+1}\alpha = \gamma z^2(\gamma - \alpha)^{t+2}\beta^{t+1}\alpha$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن

$$\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha = \gamma z^2(\gamma - \alpha)^2\beta\alpha = \gamma z^2(\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha)\beta\alpha =$$
$$= \gamma z^2(\gamma - \alpha)(\gamma\beta\alpha - \alpha\beta\alpha) = \gamma z^2(\gamma - \alpha)(\alpha - \alpha\beta\alpha) =$$
$$= \gamma z^2(\gamma - \alpha)\alpha - \gamma z^2(\gamma - \alpha)\alpha\beta\alpha$$

وبما أن $(\gamma - \alpha)\alpha = o$ نجد أن $\alpha - \alpha^2\beta^2\alpha = o$ وبالتالي يكون:

$$(3) \qquad \alpha = \alpha^2\beta^2\alpha$$

ومنه فإن $a^{n+m} = a^{2(n+m)}(\beta^2\alpha)$ بفرض $k = n + m$ نجد أن $k \in N$ وأن $a^k = a^{2k}\beta^2\alpha = a^{k+1}(a^{k-1}\beta^2\alpha)$ أي أن

$$a^k R = a^{k+1}(a^{k-1}\beta^2\alpha)R \subseteq a^{k+1}R \subseteq a^k R$$

وبالتالي يكون

$$a^k R = a^{k+1}R = a^{k+2}R = \cdots$$

وهو المطلوب.

(2) $\Leftarrow$ (1). يبرهن بطريقة مشابهة تماماً.

مبرهنـــة 10 -3- 11.

لتكن R حلقة. إذا حققت الحلقة R شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليسارية في R والتي من الشكل

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك لأجل كـ عنصر $a \in R$. عندئذ تكون الحلقة R هي π- منتظمة.

البرهـــان.

لنفرض أن الحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليسارية في R والتي من الشكل

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

إذا وجد $m \in N$ بحيث $a^m = o$ عندئذ يكون $a^m x a^m = a^m$ وذلك أيـــاً كـــان $x \in R$ وبذلك يتم المطلوب.

لنفرض أن $a^n \neq o$ وذلك أياً كان $n \in N$ بمتابعة البرهان كما ورد فـــي المبرهنـــة (10- 3- 10) نصل إلى العلاقة (3) وهي $\alpha = \alpha^2\beta^2\alpha$. بفرض $0 = \alpha\beta^2$ نجـــد أن $\alpha = \alpha\theta\alpha$ وبما أن $\alpha = a^{n+m}$ نجد أن $a^{n+m} = a^{n+m}\theta a^{n+m}$ وهكذا تكون الحلقة R حلقة π - منتظمة.

بالاعتماد على المبرهنتين (10 -3- 10) و(10 -3- 11) يمكننا صـــياغة النتيجـــة الآتية:

نتيجـــة.

لتكن R حلقة. إذا حققت الحلقة R شرط انقطاع الـــسلاسل المتناقـــصة للمثاليـــات اليمينية التي من الشكل:

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$ عندئذ تكون الحلقة R حلقة π – منتظمة.

إن عكس المبرهنة (10 -3- 11) غير صحيح.

المبرهنة الآتية تعطينا الشرط اللازم والكافي كي يكون عكس المبرهنـــة (10 -3- 11) صحيحاً وهذه المبرهنة توضح لنا العلاقة بين الحلقات π – المنتظمة والحلقـــات التي لا تحوي أنظمة متعامدة غير منتهية من العناصر الجامدة.

مبرهنـــة 10 -3 -12.

لتكن R حلقة. الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R هي π–منتظمة وحلقة الخارج $R/J(R)$ نصف بسيطة.

2 - حلقة الخارج $R/J(R)$ نصف بسيطة والحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليسارية في R والتي من الشكل

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

3 - حلقة الخارج $R/J(R)$ نصف بسيطة والحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليمينية في R والتي من الشكل

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

4 - الحلقة R هي π–منتظمة وأن R لا تحوي نظاماً متعامداً غير منته من العناصر الجامدة المغايرة للصفر.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (4). لنفرض أن الحلقة R هي π-منتظمة وأن حلقة الخارج $R/J(R)$ نصف بسيطة عندئذ حسب المبرهنة (10 -3- 7) فإن حلقة الخارج $R/J(R)$ لا تحوي نظام متعامد غير منته من العناصر الجامدة وبالتالي فإن الحلقة R لا تحوي نظاماً متعامداً غير منته من العناصر الجامدة لأنه إذا كان $\{e_i\}_{i\in I}$ نظاماً متعامداً من العناصر الجامدة في R غير منته فإن $\{\bar{e}_i\}_{i\in I}$ يكون نظاماً متعامداً غير منته من العناصر الجامدة في $\bar{R}$ وهذا غير ممكن.

(4) $\Leftarrow$ (1). واضح أن الحلقة R هي π-منتظمة. ليكن $\bar{A} \neq \bar{o}$ مثالياً يسارياً في الحلقة $\bar{R} = R/J(R)$ عندئذ يكون $\bar{A} = A + J(R)$ حيث A مثالي يساري في R وأن $A \not\subset J(R)$ ومنه يوجد في A عنصر a بحيث $a^m \neq o$ وذلك أياً كان $m \in N$. وبما أن الحلقة R هي π-منتظمة فإنه يوجد $n \in N$ و $x \in R$ بحيث $a^n = a^n x a^n$ وبالتالي فإن $e_1 = xa^n \in Ra \subseteq A$ هو عنصر جامد في R مغاير للصفر وأن $e_1 \in A$ ومنه

$$A = Re_1 \oplus [A \cap R(1-e_1)]$$

وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $A \cap R(1-e_1) \subseteq J(R)$ عندئذ يكون $\bar{A} = \bar{R}\bar{e}_1$ وهذا يبين لنا أن $\bar{A}$ هو حد مباشر في الحلقة $\bar{R}$ وبالتالي تكون حلقة الخارج $\bar{R} = R/J(R)$ نصف بسيطة.
- إذا كان $A \cap R(1-e_1) \not\subset J(R)$ لنفرض أن $A_1 = A \cap R(1-e_1)$ فنجد أن A_1 هو مثالي يساري في R وأن $A_1 \not\subset J(R)$ وبما أن الحلقة R هي π-منتظمة فإنه يوجد في R عنصر جامد e_n مغاير للصفر بحيث $e_n \in A_1$ أي أن $e_o \in A_1 = A \cap R(1-e_1)$ ومنه فإن $e_n \in R(1-e_1)$ وبالتالي يوجد $\lambda \in R$ بحيث $e_o = \lambda(1-e_1)$ وبما أن $1-e_1$ هو عنصر جامد في R نجد أن

$$e_o = \lambda(1-e_1) = \lambda(1-e_1)(1-e_1) = e_o(1-e_1)$$

وبالتالي يكون $e_o e_1 = o$ أي أن $e_o = e_n - e_n e_1$. لنضع $e_2 = (1-e_1)e_n$ فنجد أن e_2 هو عنصر جامد في R لأن

$$e_2^2 = (1-e_1)e_n(1-e_1)e_n = (e_n - e_1e_n)(e_n - e_1e_n) =$$
$$\therefore e_n - e_ne_1e_n - e_1e_n + e_1e_ne_1e_n = e_n - e_1e_n = (1-e_1)e_n = e_2$$

كما أن $e_2 \neq o$ لأنه إذا كان $e_2 = o$ نجد أن $(1-e_1)e_\alpha = o$ ومنه يكون $e_\alpha - e_1 e_\alpha = o$ أي أن $e_1 e_\alpha = e_\alpha$ وبالتالي يكون $e_\alpha = e_\alpha e_\alpha = e_\alpha e_1 e_\alpha = o$ وهذا غير ممكن. كما أن $e_2 e_1 = (1-e_1)e_\alpha e_1 = o$ وأن $e_1 e_2 = e_1(1-e_1)e_\alpha = o$ أي أن $e_2 e_1 = e_1 e_2 = o$ وبما أن $e_\alpha = \lambda(1-e_1)$ نجد أن

$$e_2(1-e_1)e_\alpha = (1-e_1)\lambda(1-e_1) \in R(1-e_1)$$

وبالتالي يكون

$$R(1-e_1) = Re_2 \oplus [Re_2 \cap R(1-e_1)]$$

$$R = Re_1 \oplus R(1-e_1) = Re_1 \oplus Re_2 \oplus [Re_2 \cap R(1-e_1)]$$

من جهة أخرى بما أن $A_1 = A \cap R(1-e_1)]$ هو مثالي يساري في R وأن $e_\alpha \in A_1$ فإن $e_2 = (1-e_1)e_\alpha \in A_1$ ومنه يكون $A_1 = Re_2 \oplus [A_1 \cap Re_2]$ وهكذا نجد أن

$$A = Re_1 \oplus [A \cap R(1-e_1)] = Re_1 \oplus Re_2 \oplus [A_1 \cap Re_2]$$

وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $A_1 \cap Re_2 \subseteq J(R)$ نجد أن $\overline{A} = \overline{R}\overline{e}_1 \oplus \overline{R}\overline{e}_2$ أي أن $\overline{A}$ هو حد مباشر في الحلقة R وبذلك يتم المطلوب.
- إذا كان $A_1 \cap Re_2 \not\subset J(R)$ فإن المثالي اليساري $A_1 \cap Re_2$ يحوي عنصر جامد مغاير للصفر. وبما أن الحلقة R لا تحوي أنظمة متعامدة غير منتهية من العناصر الجامدة المغايرة للصفر فإن هذه العملية سوف تتوقف بعد عدد منته من الخطوات بمعنى آخر سوف نجد عدد منته من العناصر الجامدة المغايرة للصفر $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_t \in R$ تحقق

$$A = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_t \oplus [A_\alpha \cap R(1-e_t)]$$

حيث A_α مثالي يساري في R وأن $A_\alpha \subseteq A$ وأن $A_\alpha \cap R(1-e_t) \subseteq J(R)$ ومنه يكون

$$\overline{A} = \overline{R}\overline{e}_1 \oplus \overline{R}\overline{e}_2 \oplus \cdots \oplus \overline{R}\overline{e}_t$$

وبالتالي يكون $\overline{A}$ حد مباشر في الحلقة $\overline{R}$ وهذا يبين لنا أن الحلقة $\overline{R}$ نصف بسيطة.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). ينتج من المبرهنة (10-3-10).

(1) $\Leftarrow$ (2). حسب الفرض فإن حلقة الخارج $R/J(R)$ نصف بسيطة. ليكن $a \in R$ ولنأخذ السلسلة المتناقصة من المثاليات اليسارية في R والتي من الشكل:

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

إذا وجد $m \in N$ بحيث $a^m = o$ نجد أن

$$Ra^m = Ra^{m+1} = Ra^{m+2} = \cdots$$

وهذا يبين لنا أن السلسلة السابقة تنقطع وبذلك يتم المطلوب.

لنفرض أن $a^m \neq o$ وذلك أياً كان $m \in N$ وبما أن الحلقة R هي حلقة π-منتظمة يوجد $n \in N$ و $x \in R$ بحيث $a^n = a^n x a^n$ ومنه فإن $e = xa^n$ هو عنصر جامد في R مغاير للصفر وأن

$$Ra^n = Ra^n x a^n \subseteq Rxa^n = Re = Rxa^n \subseteq Ra^n$$

أي أن $Ra^n = Re$ وهذا يبين لنا أنه لأجل كل $k \in N$ يوجد $s \in N$ بحيث $s \geq k$ وأن $Ra^s = Re_1$ حيث e_1 عنصر جامد في R مغاير للصفر وبما أن حلقة الخارج $R/J(R)$ نصف بسيطة فإن الحلقة R لا تحوي نظاماً غير منته من العناصر الجامدة المغايرة للصفر وبالتالي فإنه يوجد $t \in N$ بحيث $Ra^t = Ra^{t+1} = Ra^{t+2} = \cdots$ وهذا يبين لنا أن السلسلة المتناقصة المفروضة تنقطع.

(2) $\Leftarrow$ (1). حسب الفرض فإن الحلقة $R/J(R)$ نصف بسيطة. لنفرض أن الحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليسارية في R والتي من الشكل:

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$. عندئذ وحسب المبرهنة (10-3-10) فإن الحلقة R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة للمثاليات اليمينية في R والتي من الشكل:

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وذلك أياً كان $a \in R$.

ليكن $a \in R$ وهنا نميز حالتين:

- إذا وجد $m \in N$ بحيث $a^m = o$ نجد أن $a^m = a^m x a^m$ وذلك أياً كان $x \in R$ وهذا يبين لنا أن الحلقة R هي حلقة π-منتظمة.

- لنفرض أن $a^m \neq o$ وذلك أياً كان $m \in N$ عندئذ وحسب الفرض فإن السلسلة المتناقصة من المثاليات اليسارية

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

تتقطع وبالتالي يوجد $n \in N$ بحيث $Ra^n = Ra^{n+1} = Ra^{2n} = Ra^k$ وذلك أياً كان $k \geq n$.

كذلك فإن السلسة المتناقصة من المثاليات اليمينية في R والتي من الشكل

$$aR \supseteq a^2R \supseteq a^3R \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

وبالتالي يوجد $m \in N$ بحيث أن

$$a^mR = a^{m+1}R = a^{2m}R = a^sR$$

وذلك أياً كان $s \geq m$.

لنضع $K = Ra^n$ فنجد أن $K \neq o$ لأن $a^n \neq o$ وأن K مثالي يساري في R وأن $a^n \in K$ كما أن $Ka^n = Ka^{2n}$ مثالي يساري في R وأن

$$Ka^n = Ra^na^n = Ra^{2n} = Ra^n = K$$

أي أن $Ka^n = K$. لنأخذ المثالي اليساري $l(a^n)$ عندئذ يكون $l(a^n) \cap K$ مثالياً يسارياً في R وأن $l(a^n) \cap K \neq K$ لأنه إذا كان $l(a^n) \cap K = K$ ينتج أن $K \subseteq l(a^n)$ ومنه يكون $a^n \in K \subseteq l(a^n)$ وبالتالي فإن $a^{2n} = o$ وهذا غير ممكن.

لنبرهن على أن $l(a^n) \cap K = o$. ليكن $x \in l(a^n) \cap K$ عندئذ $xa^n = o$ وبما أن $x \in K = Ra^n$ فإنه يوجد $z \in R$ بحيث $x = za^n$ ومنه نجد أن

$$x = za^{2n} = za^n a^n = xa^n = o$$

أي أن $z \in l(a^{2n})$ وحسب التمهيدية (10 -3- 5) فإن $l(a^{2n}) = l(a^n)$ ومنه نجد أن $z \in l(a^n)$ أي أن $x = za^n = o$ مما سبق نجد أن $l(a^n) \cap K = o$.

من جهة أخرى بما أن $Ka^n = K$ وأن $a^n \in K$ فإنه يوجد $e \in K$ بحيث $ea^n = a^n$ وبما أن $e \in K = Ra^n$ فإن $e = ya^n$ حيث $y \in R$. بالإضافة لذلك فإن $e^2a^n = ea^n$ ومنه $(e^2 - e)a^n = o$ وبالتالي يكون $e^2 - e \in l(a^n)$ وبما أن $e \in K$ فإن $e^2 \in K$ ومنه $e^2 - e \in K$ وهذا يبين لنا أن $e^2 - e \in K \cap l(a^n) = o$ وهكذا نجد أن $e^2 = e$

أي أن e هو عنصر جامد في R وأن $Re \subseteq Ra^n$ لأن $e = ya^n$. لنبرهن الآن على أن $Ra^n = Re$. بما أن $Re \subseteq Ra^n$ فإن $Ra^n = Re \oplus [Ra^n \cap R(1-e)]$ وذلك لأن Re هو حد مباشر في الحلقة R. ليكن $x \in Ra^n \cap R(1-e)$ عندئذ $x \in Ra^n = K$ وأن $x \in R(1-e)$ ومنه $x = x_1(1-e)$ حيث $x_1 \in R$ وهكذا فإن

$$xa^n = x_1(1-e)a^n = x_1(1-e)ea^n = o$$

وبالتالي $x \in l(a^n)$ ومنه فإن $x \in l(a^n) \cap K = o$ أي أن $x = o$ ومنه يكون $Ra^n \cap R(1-e) = o$ وهذا يبين لنا أن $Ra^n = Re$. وبما أن e هو عنصر جامد في R فإن $R = Re \oplus R(1-e)$ ومنه $R = Ra^n \oplus R(1-e)$ وبما أن $1 \in R$ يوجد $y_1, y_2 \in R$ بحيث $1 = y_1a^n + y_2(1-e)$ ومنه $a^n = a^n y_1 a^n + a^n y_2(1-e)$ وبالتالي نجد $a^n - a^n y_1 a^n \in Ra^n = Re$ و $a^n - a^n y_1 a^n = a^n y_2(1-e) \in R(1-e)$ وهكذا فإن $a^n - a^n y_1 a^n \in Re \cap R(1-e) = o$ وبالتالي $a^n - a^n y_1 a^n = o$ ومنه يكون $a^n = a^n y_1 a^n$ أي أن الحلقة R هي π-منتظمة.

الفصـــل الحـــادي عشـــر

حـلقـــات القسمـــة

توجد أنواع خاصة من الحلقات تعرف من خلال مفهوم القسمة " الضعيفة " وهذه القسمة تشبه إلى حد كبير خوارزمية القسمة المعرفة لأجل حلقة المثاليات الرئيسية. إن مفهوم القسمة الضعيفة هو تعميم لخوارزمية القسمة ولأجل الحلقات التبديلية يتطـابق مفهومي خوارزمية القسمة والقسمة الضعيفة.

11 - 1. حـلقـة القسمـة.

سوف ندرس الآن الحلقات التي تحقق الشرطين الثاني والثالث من تعريف الحلقـة الإقليدية الوارد في الفصل الخامس. لأجل ذلك لابد لنا من بعض التعاريف.

تعريـف.

لتكن R حلقة لا تحوي قواسم للصفر نسمي كل تطبيق (دالة) $\varphi: R^* \to N$ دالـة عددية صحيحة غير سالبة على R^* حيث $R^* = R \setminus \{o\}$.

يمكن تمديد الدالة φ على R بأن نضع $\varphi(o) = -\infty$.

نأتي الآن لدراسة المبرهنة الآتية:

مبرهنـة 11 -1 -1.

لتكن R حلقة لا تحوي قواسم للصفر و $\varphi: R^* \to N$ دالة عددية صـحيحة غيـر سالبة معرفة على R حيث $\varphi(o) = -\infty$. الشروط الآتية متكافئة:

1 - أياً كان $a,b \in R$ بحيث $b \neq o$ فإنه يوجد $q,r \in R$ يحققـان $a = bq + r$ حيـث إما $r = o$ أو $\varphi(r) < \varphi(b)$.

2 - أيـــاً كـــان $a,b \in R^*$ بحيـــث $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ فإنـــه يوجـــد $c \subset R$ بحيـــث $\varphi(a-bc) < \varphi(a)$.

البرهـــان.

(1) $\Leftarrow$ (2). ليكن $a,b \in R^*$ بحيث $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ عندئـذ حسب (1) فإنـه يوجـد $q,r \in R$ بحيث $a = bq + r$ وأنه إما $r = o$ أو $\varphi(r) < \varphi(b)$.

- إذا كان $r = o$ عندئذ $a = bq$ وبالتالي يكون $a - bq = o$ وهنا نأخذ $q = c$ فنجد أن $a - bc = o$ و أن $\varphi(a-bc) = \varphi(o) = -\infty < \varphi(a)$ لأن $a \neq o$.

- لنفرض أن $\varphi(r) < \varphi(b)$. لدينا $a = bq + r$ لنأخذ $c = q$ نجد أن $a = bc + r$ ومنه فإن $a - bc = r$ وبالتالي يكون $\varphi(a-bc) = \varphi(r) < \varphi(b) \leq \varphi(a)$ وهذا يبين لنـــا أن $\varphi(a-bc) < \varphi(a)$.

(2) $\Leftarrow$ (1). ليكن $a,b \in R$ بحيث $b \neq o$. نميز حالتين:

- الحالة الأولى.

- إذا كـــان $a \neq o$ عندئـــذ فـــإن $\varphi(a),\varphi(b) \in N$ وهنـــا نجـــد أنـــه إمـــا $\varphi(a) < \varphi(b)$ أو $\varphi(a) \geq \varphi(b)$.

- إذا كان $\varphi(a) < \varphi(b)$ نأخذ هنا $q = o$ و $r = a$ فنجد أن $a = bq + r$ وأن $\varphi(r) = \varphi(a) < \varphi(b)$.

- الحالة الثانية. لنفرض أن $\varphi(a) \geq \varphi(b)$. لدينا فـــي هـــذه الحالـــة $a,b \in R^*$ وأن $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ عندئذ حسب الفرض يوجد $x \in R$ بحيث $\varphi(a-bx) < \varphi(a)$.

لنأخذ المجموعة

$$\Im = \{\varphi(a-by) : \varphi(a-by) < \varphi(a); y \in R\}$$

فنجد أن المجموعة $\Im$ غير خالية لأن $\varphi(a-bx) \in \Im$ وبما أن $\Im \subseteq N$ فإنه يوجد في المجموعة $\Im$ عنصر أصغر وليكن $\varphi(a-bq)$ حيث $q \in R$. لنبـــرهن الآن علـــى أن $\varphi(a-bq) < \varphi(b)$. بما أن $\varphi(a-bq),\varphi(b) \in N$ فإنه إمـــا $\varphi(a-bq) < \varphi(b)$ أو $\varphi(a-bq) \geq \varphi(b)$. لنفرض أن $\varphi(a-bq) \geq \varphi(b)$ عندئذ يكـــون $o \neq a-bq \in R$ ومنه نجد أن $a-bq, b \in R^*$ وحسب الفرض يوجد $c \in R$ بحيث

$$\varphi(a-bq-bc)<\varphi(a-bq)<\varphi(a)$$

وذلك لأن $\varphi(a-bq)\in\Im$ ومنه $\varphi(a-b(q+c))<\varphi(a)$ وهذا يبين لنا أن $\varphi(a-b(q+c))\in\Im$ و $\varphi(a-b(q+c))<\varphi(a-bq)$ وهذا غير ممكن لأن العنصر $\varphi(a-bq)$ هو عنصر أصغر في المجموعة $\Im$. مما سبق نجد أن $\varphi(a-bq)<\varphi(b)$. لنضع $r=a-bq$ فنجد أن $a=bq+r$ وأن

$$\varphi(r)=\varphi(a-bq)<\varphi(b)$$

وهكذا نجد أنه يوجد $q,r\in R$ بحيث $a=bq+r$ وأنه إما $r=0$ أو $\varphi(r)<\varphi(b)$.

لنورد الآن تعريف حلقة القسمة.

تعريف.

لتكن R حلقة لا تحوي قواسم للصفر و $\varphi:R^*\to N$ دالة عددية صحيحة غير سالبة معرفة على R^* حيث $\varphi(o)=-\infty$. نقول إن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة φ إذا حققت أحد الشروط المتكافئة الواردة في المبرهنة (11 - 1 - 1).

هدفنا التالي إيجاد صورة أكثر وضوحاً لحلقات القسمة ولأجل ذلك لابد لنا من بعض التمهيديات وسنذكر بداية بالتمهيدية الآتية:

تمهيدية 11 -1 -2.

لأجل أي حلقة R توجد أسرة من المجموعات الجزئية في R وغير الخالية $\{S_i\}_{i\in N}$ بحيث

$$S_o\supseteq S_1\supseteq S_2\supseteq S_3\supseteq\cdots.$$

البرهان.

لتكن R حلقة نعلم أنه لأجل أي عنصرين $a,b\in R$ فإن $a+bR=\{a+br:r\in R\}$.

لتكن S مجموعة جزئية وغير خالية في R^* ولنعرف المجموعة

$$S'=\{s:s\in S;a+sR\subseteq S,a\in R\}.$$

بناءً على ذلك لنعرف لأجل كل عدد طبيعي $n\in N$ المجموعة S_n بالشكل الآتي:

$$S_o=R^*,\quad S_1=S_o',\quad S_2=S_1',\quad S_3=S_2',\quad\cdots$$

أي أنه أياً كان $n \in N$ فإن $S_n = R^*$ وأن $S_{n+1} = S'_n$.

إن المجموعات S_i تشكل سلسلة متناقصة لأن $S_1 = S'_0 \subseteq S_0$ وذلك حسب تعريف المجموعة S'. وأنه أياً كان $n \in N$ فإن $S_{n+1} = S'_n \subseteq S_n$ أي أن

$$R^* = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \cdots .$$

لندرس الآن خواص المجموعات S_i التي تم بناؤها في التمهيدية (11-1-2) وذلك في حلقة قسمة من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 11-1-3.

لتكن R حلقة قسمة بالنسبة لدالة عددية صحيحة غير سالبة θ معرفة على R^*. ولنأخذ أسرة المجموعات $\{S_i\}_{i\in N}$ التي تم بناؤها في التمهيدية (11-1-2). عندئذ:

1 - أياً كان $x \in S_n$ فإن $\theta(x) \geq n$.

2 - $\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i = \phi$.

البرهان.

1 - لنفرض أن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى دالة عددية صحيحة غير سالبة $\theta: R^* \to N$ معرفة على R^* ولتكن $\{S_i\}_{i\in N}$ أسرة المجموعات التي تم بناؤها في التمهيدية (11-1-2). لنبرهن بالاستقراء وبحسب n على أنه أياً كان $x \in S_n$ فإن $\theta(x) \geq n$.

- من أجل $n = 0$. ليكن $x \in S_n = R^*$ عندئذ وبما أن $\theta: R^* \to N$ فإن $\theta(x) \geq 0$.

- من أجل $n = 1$. ليكن $x \in S_1 = S'_0$ عندئذ $x \in R^*$ وأن $a + xR \subseteq S_n = R^*$ حيث $a \in R$. أصبح لدينا $a, x \in R$ وأن $x \neq 0$ وبما أن الحلقة R هي حلقة قسمة فإنه حسب التعريف الحلقة R تحقق الشرط الأول من المبرهنة (11-1-1) وبالتالي يوجد $q, r \in R$ بحيث $a = xq + r$ وأنه إما $r = 0$ أو $\theta(r) < \theta(x)$. وهنا نجد ن

$$r = a - xq = a + x(-q) \in a + xR \subseteq S_n = R^*$$

أي أن $r \neq 0$ وبالتالي يكون $\theta(r) < \theta(x)$. بما أن $r \neq 0$ فإن $r \in R^* = S_n$ وبالتالي يكون $\theta(r) \geq 0$ ومنه $\theta(x) > \theta(r) \geq 0$ أي أن $\theta(x) > 0$ وبالتالي $\theta(x) \geq 1$.

لنفرض أنه أياً كان $x \in S_{n-1}$ فإن $\theta(x) \geq n-1$ ولنبرهن على أنه أياً كان $x \in S_n$ فإن $\theta(x) \geq n$. ليكن $x \in S_n$ عندئذ

$$x \in S_n = S'_{n-1} = \{s : s \in S_{n-1},\ a + xR \subseteq S_{n-1},\ a \in R\}$$

وهنا نجد أن $x \neq o$ وبما أن $a, x \in R$ فإنه حسب الشرط (2) من المبرهنة (11 -1- 1) وذلك لأن الحلقة R حلقة قسمة يوجد $q, r \in R$ بحيث $a = xq + r$ وأنه إما $r = o$ أو $\theta(r) < \theta(x)$. ومنه فإن

$$r = a - xq = a + x(-q) \in a + xR \subseteq S_{n-1} \subseteq S_n = R^*$$

وهذا يبين أن $r \neq o$ وبالتالي يكون $\theta(r) < \theta(x)$ وبما أن $r \in S_n$ فإنه حسب الفرض الاستقرائي $\theta(r) \geq n-1$ وهكذا نجد أن $\theta(x) > \theta(r) \geq n-1$ وبالتالي يكون $\theta(x) \geq n$. مما سبق نجد أنه أياً كان $x \in S_n$ فإن $\theta(x) \geq n$.

2 - لنبرهن الآن على أن $\bigcap_{n \in N} S_n = \Phi$. لنفرض جدلاً أن $\bigcap_{n \in N} S_n \neq \Phi$ عندئذ يوجد $y \in \bigcap_{n \in N} S_n$ ومنه أياً كان $n \in N$ فإن $y \in S_n$ وأن $y \neq o$. من جهة أخرى بما أنه أياً كان $n \in N$ فإن $S_n \subseteq R^*$ يكون $\theta(y) \in N$. لنفرض أن $\theta(y) = m$ عندئذ $m+1 \in N$ وأن $\theta(y) = m < m+1$ وهذا يبين لنا أن $y \notin S_{m+1}$ وهذا غير ممكن مما سبق نجد أن $\bigcap_{n \in N} S_n = \Phi$.

لندرس الآن المبرهنة المهمة الآتية:

مبرهنة 11 -1- 4.

لتكن R حلقة قسمة بالنسبة إلى دالة عددية صحيحة غير سالبة معرفة على R^*. عندئذ توجد دالة عددية صحيحة غير سالبة φ معرفة على R تحقق:

1. أياً كان $a, b \in R$ فإن $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$.
2. $\varphi(1) = o$.
3. أياً كان $b \in R^*$ فإن $\varphi(b) \geq o$.
4. $\varphi(o) = -\infty$.

وأن الحلقة R تكون حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة φ. بالإضافة إلى ذلك فإنه أياً كان $a \in R$ فإن $\varphi(a) \leq \lambda(a)$ وذلك لأجل أي دالة عددية صحيحة غير سالبة λ بالنسبة إليها تكون الحلقة R حلقة قسمة.

البرهان.

لنفرض أن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى دالة عددية صحيحة غير سالبة $\theta: R^* \to N$ معرفة على R^* وأن $\theta(o) = -\infty$.

لنأخذ في المجموعة R^* ولنأخذ أسرة المجموعات $\{S_i\}_{i \in N}$ التي تم بناؤها في التمهيدية (2-1-11) عندئذ وحسب التمهيدية (3-1-11) أياً كان $x \in S_n$ فإن $\theta(x) \geq n$ كما أن $\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i = \phi$.

لنعرف على المجموعة R^* دالة $\varphi: R^* \to N$ بالشكل الآتي: أياً كان $x \in R^*$ عندئذ وبما أن $\bigcap_{i \in N} S_i = \phi$ فإنه يوجد $m \in N$ بحيث $x \in S_m$ وأن $x \notin S_{m+1}$. لنضع

$$\varphi(x) = max\ \{m : x \in S_m\}$$

لنبرهن الآن على أنه أياً كان $x \in R^*$ فإن $x \in S_n$ عندما وفقط عندما $\varphi(x) \geq n$.

لنفرض أن $x \in S_n$ عندئذ يكون $n \in max\ \{m : x \in S_m\}$ ومنه نجد أن $max\ \{m : x \in S_m\} \geq n$ وبالتالي يكون $\varphi(x) \geq n$. لنفرض أن $\varphi(x) \geq n$ عندئذ يكون $max\ \{m : x \in S_m\} \geq n$. لنضع $t = max\ \{m : x \in S_m\}$ فنجد أن $t \geq n$ و بما أن المجموعات S_i تحقق

$$S_n \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$$

نجد أن $x \in S_n \subseteq S_n$ أي أن $x \in S_n$. كما أن $\varphi(x) \leq \theta(x)$ وذلك أياً كان $x \in R^*$ لأنه إذا كان $x \in R^*$ وأن $\varphi(x) = n = max\ \{m : x \in S_m\}$ نجد أن $x \in S_n$ وبالتالي يكون $\varphi(x) \geq n$ أي أن $\varphi(x) \leq \theta(x)$.

لنبرهن الآن على المطلوب:

1 - ليكن $a,b,c \in R$ عندئذ يكون $c + abR \subseteq c + aR$ وهنا نميز حالتين:

- الحالة الأولى. إذا كان $c + abR = c + aR$ عندئذ يكون $ab, a \in S_n$ وهنا نجد أن

$$\varphi(ab) = max\{m : ab \in S_m\} = max\{m : a \in S_m\} = \varphi(a)$$

أي أن $\varphi(ab) = \varphi(a)$.

- الحالة الثانية. إذا كان $c + abR \subsetneq c + aR$ عندئذ يوجد $t, m \in N$ بحيث $t \neq m$ وأن $c + abR \subseteq S_t$ و $c + aR \subseteq S_m$. وبما أن $c + abR \subsetneq c + aR$ نجد أن $t > m$ أي أن $S_t \subseteq S_m$ وهنا نجد أن

$$\varphi(ab) = max\{t : ab \in S_t\} \geq max\{m : a \in S_m\} = \varphi(a)$$

أي أن $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ مما سبق نجد أن $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$.

2 - بما أن $1 \in R^* = S_n$ وأن $1 \notin S_n$ أياً كان $n \in N^*$ نجد أن

$$\varphi(1) = max\{m : 1 \in S_m\} = o$$

3 - وجدنا حسب (1) أنه أياً كان $a, b \in R$ فإن $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ فإذا كان $b \in R^*$ و $a = 1$ نجد أن $\varphi(b) \geq \varphi(1) = o$ أي أنه أياً كان $b \in R^*$ فإن $\varphi(b) \geq o$.

4 - واضح أن $\varphi(o) = -\infty$.

لنبرهن الآن على أن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة φ .

ليكن $a, b \in R$ بحيث $b \neq o$ وبما أن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة الصحيحة غير السالبة θ فإنه يوجد $q, r \in R$ بحيث $a = bq + r$ وأنه إما $r = o$ أو $\theta(r) < \theta(b)$.

- إذا كان $r = o$ يتم المطلوب.

- إذا كان $r \neq o$ عندئذ يكون $\theta(r) < \theta(b)$. لنفرض أن $b \in S_m$, $r \in S_n$ عندئذ يكون $\theta(b) > \theta(r) \geq n$ ومنه فإن $m > n$ وبالتالي يكون

$$\varphi(r) = max\{n : r \in S_n\} \leq max\{m : b \in S_m\} = \varphi(b)$$

أي أن $\varphi(r) < \varphi(b)$ وهكذا نجد أن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة φ .

واضح من خلال بناء الدالة φ أن هذه الدالة هي دالة "أصغرية" بالنسبة إلى جميع الدوال θ التي من أجلها تكون الحلقة R حلقة قسمة.

وجدنا من خلال التمهيدية (11 -1 -2) أن أي حلقة تحوي أسرة من المجموعات الجزئية وغير الخالية $\{S_i\}_{i\in N}$ تحقق

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

بالاعتماد على هذه الحقيقة والتمهيدية (11 -1 -3) وكذلك المبرهنة (11 -1 -4) يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 11 -1 -5.

لتكن R حلقة ولتكن $\{S_i\}_{i\in N}$ أسرة المجموعات الجزئية من R والتي تم بناؤها في التمهيدية (11 -1 -2). الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R حلقة قسمة هو أن يكون $\bigcap_{i\in N} S_i = \phi$.

البرهان.

لزوم الشرط. لنفرض أن الحلقة R هي حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة الصحيحة غير السالبة θ المعرفة على R^* ولنأخذ أسرة المجموعات الجزئية $\{S_i\}_{i\in N}$ التي تم بناؤها في التمهيدية (11 -1 -2) عندئذ حسب التمهيدية (11 -2 -3) يكون $\bigcap_{i\in N} S_i = \phi$ وبهذا يتم المطلوب. كفاية الشرط. ينتج مباشرة من المبرهنة (11 -1 -4).

أمثلة.

1 - حلقة كثيرات الحدود $F[x]$ فوق أي حقل F هي حلقة قسمة بالنسبة إلى الدالة الصحيحة غير السالبة $\partial : (F[x])^* \to N$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $f(x) \in (F[x])^*$ فإن $\partial(f(x)) = deg\, f(x)$. واضح أن الدالة ∂ هي دالة صحيحة غير سالبة معرفة على $(F[x])^*$ لأنه أياً كان $f(x) \in (F[x])^*$ فإن

$$\partial(f(x)) = deg\, f(x) \geq o$$

وأن $\partial(o) = -\infty$ وهذه الدالة تحقق شروط المبرهنة (11 -1 -1) لأنه أياً كان $f(x), g(x) \in F[x]$ وكان $g(x) \neq o$ وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q(x), r(x) \in F[x]$ بحيث $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ وأنه إما $r(x) = o$ أو أن

$deg\, r(x) < deg\, g(x)$ أي أن $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ وبالتالي فإنه حسب المبرهنة (11 -1 -4) تكون الحلقة $F[x]$ حلقة قسمة.

2 - كل حلقة إقليدية هي حلقة قسمة (أنظر التعريف في بداية الفصل).

3 - حلقة الأعداد الصحيحة هي حلقة قسمة (لأنها حلقة إقليدية) وذلك بالنسبة إلى الدالة الصحيحة غير السالبة $d : Z^* \to N$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $a \in Z^*$ فإن $d(a) = |a|$.

سنحاول الآن تعميم الدالة الصحيحة غير السالبة في حالة المثال (1).

تعريف.

لتكن R حلقة و $d : R^* \to N$ دالة معرفة على R^*. نسمي الدالة d دالة درجية إذا حققت الشروط الآتية:

1 - أياً كان $a \in R^*$ فإن $d(a) \geq o$ وأن $d(o) = -\infty$.

2 - أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $d(a-b) \leq max\{d(a),d(b)\}$.

3 - أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $d(ab) = d(a)+d(b)$.

لنورد الآن التمهيدية الآتية والتي تعطينا بعضاً من خواص الدالة الدرجية.

تمهيدية 11 -1 -6.

لتكن R حلقة و $d : R^* \to N$ دالة درجية معرفة على R^*. عندئذ:

1 - $d(1) = o$.

2 - أياً كان $a \in R^*$ فإن $d(a) = d(-a)$.

3 - أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $d(a+b) \leq max\{d(a),d(b)\}$.

4 - إذا كان العنصر $a \in R^*$ قابلاً للقلب في R فإن $d(a) = o$.

البرهان.

1 - لدينا حسب البند (3) من تعريف الدالة الدرجية أنه أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $d(ab) = d(a) + d(b)$ وبالتالي إذا كان $b = 1$ نجد أن $d(a.1) = d(a) + d(1)$ ومنه فإن $d(1) = d(a) - d(a) = o$.

2 - لنبرهن أولاً على أن $d(-1) = o$. لدينا حسب البند (3) من تعريف الدالة الدرجية أن $o = d(1) = d((-1)(-1)) = d(-1) + d(-1)$ وبما أن $-1 \in R^*$ فإن $d(-1) \geq o$ ومنه نجد أن $d(-1) = o$. ليكن $a \in R^*$ عندئذ

$$d(-a) = d((-1)a) = d(-1) + d(a) = o + d(a) = d(a)$$

3 - ليكن $a,b \in R^*$ عندئذ فإن

$$d(a+b) = d(a-(-b)) \leq max\{d(a), d(-b)\} = max\{d(a), d(b)\}$$

4 - ليكن $a \in R^*$ عنصراً قابلاً للقلب في R عندئذ يوجد $b \in R^*$ بحيث $ab = 1$ ومنه

$$o = d(1) = d(ab) = d(a) + d(b)$$

وهكذا نجد أن $d(a) = d(b) = o$. ◊

أمثلة.

1 - لأجل أي جسم K توجد دالة درجية $d : K^* \to N$ تحقق أياً كان $a \in K^*$ فإن $d(a) = o$ (تحقق من ذلك).

2 - لتكن $K[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الجسم K. إن الدالة الصحيحة غير السالبة المعرفة بالشكل التالي: $d : (K[x])^* \to N$ أياً كان $f(x) \in (K[x])^*$ فإن $d(f(x)) = deg\, f(x)$ هي دالة درجية.

11 - 2. المـرشحـات.

تعريـف.

لتكن R حلقة لأجل كل عدد طبيعي $n \in N$ لنأخذ زمرة جزئية R^n مـن الزمـرة $(R,+)$ بالإضافة إلى $R^{-\infty}$. لنضع

$$\Sigma = \{R^m : m = -\infty, 0,1,2,3,\cdots\}$$

نقول عن أسرة الزمر الجزئية Σ إنها تشكل مرشحة للحلقة R إذا حققت الـشروط الآتية:

1 - $R^{\infty} = \{0\}$.

2 - $R^{-\infty} \subset R^0 \subseteq R^1 \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^m \subseteq R^{m+1} \subseteq \cdots$.

3 - $R = \bigcup_{n \in N} R^n$.

4 - $R^n . R^m \subseteq R^{n+m}$.

5 - $1 \in R^0$.

مثـال.

لتكن $R = F[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق أي حقل F وليكن $d : R^* \to N$ الدالـة الدرجية المعرفة بالشكل الآتي: $d(f(x)) = deg\ f(x)$ وذلك : أياً كان $f(x) \in R^*$. لأجل كل عدد طبيعي $m \in N$ لنأخذ المجموعة

$$R^m = \{f(x) : f(x) \in R^*,\ \ d(f(x)) = deg\ f(x) \le m\}$$

وأن $R^{-\infty} = \{0\}$. فنجد أنه أياً كان $m \in N$ فـإن المجموعـة R^m غيـر خاليـة لأن $g(x) = x^m \in R^m$. بالإضافة إلى ذلك فإن المجموعة R^m تشكل زمرة جزئية مـن الزمـرة $(R,+)$ لأنـه أيـاً كـان $f(x), g(x) \in R^m$ فـإن $deg\ f(x) \le m$ و $deg\ g(x) \le m$ وبالتالي يكون

$$deg\ (f(x) - g(x)) = max\ \{deg\ f(x), deg\ g(x)\} \le m$$

أي أن $f(x) - g(x) \in R^m$.

بالإضافة إلى ذلك فإن $d(0)=deg\,0=-\infty$ وأن $d(1)=deg\,1=0$ أي أن $R^{-\infty}=\{0\}$ وأن $1\in R^0$. كما أنه أياً كان $m\in N$ فإن $R^m\subseteq R^{m+1}$ لأنه إذا كان $f(x)\in R^m$ فإن $deg\,f(x)\le m<m+1$ وبالتالي يكون $f(x)\in R^{m+1}$ وهكذا نجد أن

$$R^{-\infty}\subset R^{\circ}\subseteq R^1\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^m\subseteq R^{m+1}\subseteq\cdots$$

كما أن $R=\bigcup_{n=0}^{\infty}R^n$. لنبرهن أن $R^n.R^m\subseteq R^{n+m}$. ليكن $f(x)\in R^n$ و $g(x)\in R^m$ عندئذ يكون $deg\,f(x)\le n$, $deg\,g(x)\le m$ ومنه فإن

$$d(f(x).g(x))=deg\,(f(x).g(x))=deg\,f(x)+deg\,g(x)\le n+m$$

ومنه نجد أن $f(x)g(x)\in R^{n+m}$.

مما سبق نجد أن الأسرة Σ تشكل مرشحة للحلقة R.

من خلال المثال الأخير وجدنا أنه من خلال الدالة الدرجية المعرفة $F[x]$ (حلقة الحدوديات على حقل) استطعنا إيجاد مرشحة للحلقة R. غايتنا الآن إيجاد دالة غير سالبة على الحلقة من خلالها دوماً يمكن توليد مرشحة لهذه للحلقة لنعرف أولاً هذه الدالة.

تعريف.

لتكن R حلقة نسمي كل دالة $v:R^*\to N$ معرفة على R و تحقق الشروط الآتية:

1 - $v(o)=-\infty$.

2 - أياً كان $a\in R^*$ فإن $v(a)\ge o$.

3 - أياً كان $a,b\in R^*$ فإن $v(a-b)\le max\{v(a),v(b)\}$.

4 - أياً كان $a,b\in R^*$ فإن $v(ab)\le v(a)+v(b)$.

5 - $v(1)=o$.

دالة ترشيح موجبة على R.

نأتي الآن لدراسة المبرهنة الآتية والتي من خلالها نثبت أنه إذا أمكن إيجاد دالة ترشيح موجبة على حلقة ما فإن هذه الدالة تولد لنا مرشحة لهذه الحلقة.

مبرهنـــة 11 -2- 1.

كل دالة ترشيح موجبة معرفة على حلقة ما تولد مرشحة لهذه الحلقة.

البرهـــان.

لتكن R حلقة و $v : R^* \to N$ دالة ترشيح معرفة علـــى R . لنـــضع $R^{-o} = \{o\}$ و لأجل كل عدد طبيعي $m \in N$ لنأخذ المجموعة

$$R^m = \{a : a \in R^*, \quad v(a) \le m\}$$

لنضع $$\Sigma = \{R^m : m = -\infty, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

لنبرهن على أن الأسرة Σ تشكل مرشحة للحلقة R . لنبرهن أنه أياً كان $R^m \in \Sigma$ فإن R^m زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$.

ليكن $a, b \in R^m$ عندئذ فإن $v(a) \le m$ و $v(b) \le m$ ومنه

$$v(a-b) \le max\{v(a), v(b)\} \le m$$

وهكذا نجد أن $a - b \in R^m$ أي أن R^m زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$.

1 - واضح أن $R^{\infty} = \{0\}$.

2 - إن $R^n . R^m \subseteq R^{n+m}$ لأنه إذا كان $x \in R^n . R^m$ عندئذ فإن $x = ab$ حيث $a \in R^n$ و $b \in R^m$ وأن $v(x) = v(ab) \le v(a) + v(b) \le n + m$ وهذا يبين لنا أن $x \in R^{n+m}$.

3 - إن $R^n \subseteq R^{n+1}$ وذلـــك أيـــا كـــان $n \in N$ لأنـــه إذا كـــان $a \in R^n$ فـــإن $v(a) \le n < n+1$ وبالتالي يكون $a \in R^{n+1}$ أي أن $R^n \subseteq R^{n+1}$.

4 - إن $R = \bigcup_{n=o}^{\infty} R^n$. واضح أن $\bigcup_{n=o}^{\infty} R^n \subseteq R$.

- ليكن $a \in R$ إذا كان $a = o$ فإن $v(a) = -\infty$ وبالتالي $a \in R^{-o}$.

- لنفرض أن $a \ne o$ عندئذ فإن $v(a) \in N$ لنفرض أن $v(a) = t$ حيث $t \in N$ عندئـــذ يكون $a \in R^t \subseteq \bigcup_{n=o}^{\infty} R^n$ ومنه يكون $R \subseteq \bigcup_{n=o}^{\infty} R^n$ وبالتالي يكون $R = \bigcup_{n=o}^{\infty} R^n$.

5 - إن $1 \in R^0$ لأن $v(1) = o$.

مما سبق نجد أن الأسرة Σ تشكل مرشحة للحلقة R .

وجدنا من خلال المبرهنة (11 -2- 1) أن كل دالة ترشيح موجبة على حلقة ما R تولد لنا مرشحة لهذه الحلقة. سوف ندرس الآن مبرهنة العكس أي سوف ندرس إمكانية تعريف دالة ترشيح موجبة على الحلقة من خلال مرشحة لهذه الحلقة.

مبرهنة 11 -2- 2.

كل مرشحة لحلقة ما تعرف لنا دالة ترشيح موجبة على هذه الحلقة.

البرهان.

لتكن R حلقة ولتكن Σ مرشحة لهذه الحلقة عندئذ

$$\Sigma = \{R^n : n = -\infty, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

لنعرف على الحلقة R الدالة $v : R^* \to N$ بالشكل الآتي: $v(o) = -\infty$ لأن $R^{-\infty} = \{o\}$. ليكن $a \in R$ بحيث $a \neq o$ بما أن $a \in R = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ فإنه يوجد $m \in N^*$ بحيث $a \in R^m$. نضع

$$v(a) = min\{m : m \in N^*, a \in R^m\}$$

وذلك لأنه في مجموعة الأعداد الطبيعية N دوما يوجد العنصر الأصغري وهذا العنصر وحيد. لنبرهن الآن أن الدالة $v : R^* \to N$ هي دالة ترشيح موجبة.

1 - واضح أن $v(o) = -\infty$.

2 - كما أنه أياً كان $a \in R^*$ فإن $v(a) \geq o$ لأن

$$v(a) = min\{m : m \in N^*, a \in R^m\}$$

3 - ليكن $a, b \in R^*$ ولنبرهن أن $v(a-b) \leq max\{v(a), v(b)\}$. بما أن $R = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ فإنه يوجد $n, m \in N^*$ بحيث $a \in R^n$ و $b \in R^m$ وبفرض أن $m \leq n$ نجد أن $R^m \subseteq R^n$ وبالتالي يكون $a, b \in R^n$ وبما أن R^n زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$ نجد أن $a - b \in R^n$ وبالتالي يكون

$$v(a-b) = min\{s : s \in N^*, a-b \in R^s\} \leq n = max\{n, m\}$$
$$\leq max\{v(a), v(b)\}$$

4 - ليكن $a,b \in R^*$ ولنبرهن أن $v(ab) \le v(a)+v(b)$. بما أن $a,b \in R = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ فإنه يوجد $n,m \in N^*$ بحيث $a \in R^n$ و $b \in R^m$ ومنه فإن $ab \in R^n R^m \subseteq R^{n+m}$ وبالتالي يكون

$$v(ab) = min\{s : s \in N^*, ab \in R^s\} \le n+m \le v(a)+v(b)$$

5 - $v(1) = o$ لأن $1 \in R^o$ فقط. مما سبق نجد أن الدالة $v : R^* \to N$ هي دالة ترشيح موجبة.

بالاعتماد على المبرهنتين (11-2-1) و(11-2-2) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

الشرط اللازم والكافي لوجود مرشحة على حلقة ما R هو أن توجد دالة ترشيح موجبة معرفة على هذه الحلقة.

تعريف.

لتكن R حلقة نسمي كل دالة $v : R^* \to Z$ معرفة على R حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة دالة ترشيح سالبة على R إذا حققت الشروط الآتية:

1 - $v(o) = -\infty$.

2 - أياً كان $a \in R^*$ فإن $v(a) \le o$.

3 - أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $v(a-b) \le max\{v(a),v(b)\}$.

4 - أياً كان $a,b \in R^*$ فإن $v(ab) \le v(a)+v(b)$.

5 - $v(1) = o$.

بالتوازي مع دالة الترشيح الموجبة والمرشحة (الموجبة) سوف نقوم ببناء مرشحة على الحلقة تتوافق ودالة الترشيح السالبة ولنبدأ بالتعريف الآتي:

تعريف.

لتكن R حلقة لأجل كل عدد طبيعي $n \in N$ لنأخذ زمرة جزئية R^{-n} من الزمرة $(R,+)$ بالإضافة إلى $R^{-\infty}$. لنضع

$$\Im = \left\{ R^{-m} : -m = 0, -1, -2, -3, \cdots, \infty \right\}$$

نقول عن أسرة الزمر الجزئية $\Im$ إنها تشكل مرشحة سالبة للحلقة R إذا حققت الشروط الآتية:

1 - $R^{-0} = \{0\}$.

2 - $R^{-(m+1)} \subseteq R^{-m}$

3 - $R = R^{0} \supseteq R^{-1} \supseteq R^{-2} \supseteq \cdots \supseteq R^{-m} \supseteq R^{-(m+1)} \supseteq \cdots$.

4 - $R^{-n} R^{-m} \subseteq R^{-(n+m)}$

5 - $\bigcap_{n=0}^{\infty} R^{-n} = o$.

6 - $1 \in R^{0}$.

لندرس الآن العلاقة بين دالة الترشيح السالبة والمرشحة السالبة لحلقة.

مبرهنـــة 11 -2 -3.

كل دالة ترشيح سالبة معرفة على حلقة R تعرف على هذه الحلقة مرشحة سالبة.

البرهـــان.

لتكن $\nu : R^{*} \to Z$ دالة ترشيح سالبة معرفة على R. لأجل كـــل عـــدد طبيعـــي $m \in N$ لنعرف المجموعة

$$R^{-m} = \{a : a \in R; \nu(a) \leq -m\}$$

و $R^{-\infty} = \{o\}$. بما أن $m \in N$ أياً كـــان $-\infty < -m$ وبمـــا أن $\nu(o) = -\infty$ نجـــد أن $o \in R^{-m}$ وذلك أياً كان $m \in N$ وهذا يبين لنا أن المجموعات R^{-m} غير خالية.

ليكن $a, b \in R^{-m}$ ولنبرهن على أن $a - b \in R^{-m}$. بما أن $a, b \in R$ فإن

$$\nu(a - b) \leq max\{\nu(a), \nu(b)\} \leq -m$$

وذلك لأن $\nu(a) < -m$ و $\nu(b) < -m$ ومنه نجد أن $a - b \in R^{-m}$ وهذا يبين لنا أن المجموعـــات الجزئيـــة R^{-m} هـــي زمـــر جزئيـــة مـــن الزمـــرة $(R, +)$. كمـــا أن $R^{-(m+1)} \subseteq R^{-m}$ لأنه إذا كان $a \in R^{-(m+1)}$ فـــإن $\nu(a) \leq -(m+1) \leq -m$ وبالتـــالي

$a \in R^{m}$ وبما أن $v(1)=o$ نجد أن $1 \in R^{o}$. ليكن $a \in R$ بحيث $a \neq o$ عندئذ يكون $v(a) \leq -m < o$ حيث $m \in N$ ومنه نجد أن $a \in R^{n}$ وهذا يبين لنا أن $R = R^{n}$.

كما أن $R^{m}.R^{-n} \subseteq R^{-(m+n)}$ لأنه إذا كان $x \in R^{m}.R^{-n}$ فإن $x = ab$ حيث $a \in R^{-m}$ و $b \in R^{-n}$ ومنه $v(a) < -m$ و $v(b) < -n$ وبالتالي يكون

$$v(ab) \leq v(a)+v(b) \leq -m-n = -(n+m)$$

ومنه فإن $x = ab \in R^{-(m+n)}$. مما سبق نجد أن أسرة المجموعات $\Im$ تشكل مرشحة سالبة للحلقة R.

سوف ندرس الآن مبرهنة العكس أي سوف ندرس إمكانية تعريف دالة ترشيح سالبة على الحلقة من خلال مرشحة سالبة لهذه الحلقة وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة 11-2-4.

كل مرشحة سالبة لحلقة ما تعرف على هذه الحلقة دالة ترشيح سالبة.

البرهان.

لتكن R حلقة و $\Im = \{R^{-m} : m = o,1,2,3,\cdots,\infty\}$ مرشحة سالبة لهذه الحلقة وليكن $a \in R$ $a \neq o$ بما أن $\bigcap_{m=o}^{\infty} R^{-m} = o$ فإنه يوجد عدد أصغري m بحيث يكون $a \in R^{-m}$ و $a \notin R^{-(m+1)}$ وذلك لأن مجموعة الأعداد الطبيعية تحتوي دائماً على عنصر أصغري وحيد. لنعرف على الحلقة R الدالة $v : R^{*} \to Z$ بالشكل الآتي:

$v(o) = -\infty$ وأياً كان $a \in R^{*}$ فإن $v(a) = -m$ حيث أن m يحقق أن $a \in R^{-m}$ وأن $a \notin R^{-(m+1)}$. لنبرهن الآن على أن الدالة v هي دالة ترشيح سالبة. واضح من خلال التعريف أن $v(o) = -\infty$ وأن $v(a) \leq o$ وذلك أياً كان $a \in R^{*}$.

ليكن $a,b \in R^{*}$ ولنفرض أن $v(a) = -n$ وأن $v(b) = -m$ عندئذ يكون $a \in R^{-n}$ و $a \notin R^{-(n+1)}$ كما أن $b \in R^{-m}$ و $b \notin R^{-(m+1)}$. بما أن $-n, -m \in Z$ لنفرض أن $-n \geq -m$ عندئذ يكون $R^{-m} \subseteq R^{-n}$ ومنه فإن $a,b \in R^{-n}$ وبالتالي فإن $a-b \in R^{-n}$ لأن R^{-n} زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$. كما أن $a-b \notin R^{-(n+1)}$ لأنه إذا كان $a-b \in R^{-(n+1)}$ وبما أن

$$R^{-(n+1)} \subseteq R^{-m} \subseteq R^{-(n+1)} \subseteq R^{-n}$$

وأن $R^{-(n+1)} \subseteq R^{-m}$ نجد أن $b \in R^{-m}$ ، $a-b \in R^{-(n+1)}$ ولكون $R^{-(n+1)}$ زمرة جزئية نجد أن $a=(a-b)+b \in R^{-(n+1)}$ وهذا غير ممكن.

مما سبق نجد أن $a-b \notin R^{-(n+1)}$ ومنه فإن $v(a-b) \leq -n$ وبالتالي

$$v(a-b) \leq -n = max\{-n,-m\} = max\{v(a),v(b)\}$$

ليكن $a,b \in R^*$ ولنبرهن على أن $v(ab) \leq v(a)+v(b)$. ضمن الفرضيات نفسها السابقة لدينا $a \in R^{-n}$ و $b \in R^{-m}$ وأن $a \notin R^{-(n+1)}$ و $b \notin R^{-(m+1)}$ وأيضاً $v(a) = -n$ و $v(b) = -m$ ومنه $ab \in R^{-n}.R^{-m} \subseteq R^{-(n+m)}$ أي أن

$$v(ab) \leq -(n+m) = (-n)+(-m) = v(a)+v(b)$$

وأن $v(1) = 0$. مما سبق نجد أن v هي دالة ترشيح سالبة على R .

بالاعتماد على المبرهنتين الأخيرتين يمكننا أيضاً صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

الشرط اللازم والكافي لوجود مرشحة سالبة على حلقة ما R هو أن توجد دالة ترشيح سالبة معرفة على هذه الحلقة.

المصطلحات العلمية

(إنكليزي - عربي)

Abelain group	زمرة تبديلية
Absorption laws	قانون الامتصاص
Addition modulo	الجمع بالمقاس
Addition group of integers modulo-n	زمرة الجمع الصحيحة بالمقاس-n
Algebra	الجبر
of sets	جبر المجموعات
Algebraic	جبري
closure	الغلاقة الجبرية
element	العنصر الجبري
extension	التمديد الجبري
Algebraically closed field	حقل مغلق جبرياً
Annihilator	عادم
Left annihilator	عادم يساري
Right annihilator	عادم يميني
Ascending chain condition	شرط انقطاع السلاسل
Associates	تجميع
Associativity	تجميعي
Automorphism	تماثل
of a field	تماثل حقلي
of a ring	تماثل حلقي
of a group	تماثل زمري

Bijective map	تطبيق غامر
Binary operation	قانون تشكيل(عملية ثنائية)
Cancellation	اختصار
Cartesian product of two sets	الجداء الديكارتي لمجموعتين
Center	مركز
of a ring	مركز الحلقة
Characteristic of ring	مميز الحلقة
Closure under an operation	مغلق تحت تأثير عملية
Commutative operation	عملية تبديلية
Co- prime integers	أعداد أولية فيما بينها
Degree	درجة
of an extension	درجة التمديد
of a polynomial	درجة كثير الحدود
Direct product of rings	الجداء المباشر للحلقات
Direct sum	مجموع مباشر
Direct sum of ideals	المجموع المباشر للمثاليات
Division algorithm	خوارزمية القسمة
Divisor	قاسم
of zero	قاسم للصفر
Element(s)	عنصر
algebraic	عنصر جبري
fixed	عنصر ثابت
degree of element	درجة عنصر
identity element	عنصر وحدة
inverse of element	مقلوب عنصر

nilpotent element	عنصر عديم القوى
order of element	مرتبة العنصر
primitive element	عنصر غير قابل للتحليل
idempotent element	عنصر جامد
Extension	تمديد
algebraic	تمديد جبري
degree of extension	درجة التمديد
extension field	حقل التمديد
finite extension	تمديد منته
infinite extension	تمديد غير منته
simple extension	تمديد بسيط
Factor	عامل
factor ring	حلقة خارج
Field	حقل
algebraic closure of field	الغلاقة الجبرية لحقل
field algebraically closed	حقل مغلق جبرياً
definition of field	تعريف الحقل
extension field	حقل تمديد
field of quotients	حقل النسب
field of splitting	حقل التفريق
Function(s)	تابع
codomain	مجموعة قيم(مستقر) تابع
composition	تركيب التوابع
domain	مجموعة تعريف(منطلق) تابع
one-to-one	تابع متباين

onto	تابع غامر
Gaussian integers ring	حلقة غاوص الصحيحة
Generator	مولد
Homomorphism	تشاكل
homomorphism of rings	تشاكل حلقي
fundamental Theorem of	النظرية الأساسية للتشاكلات
kernel of	نواة تشاكل
Ideal	مثالي
definition of ideal	تعريف المثالي
finitely generated ideal	مثالي منتهي التوليد
maximal	مثالي أعظمي
minimal	مثالي أصغري
nil	المثالي العديم
nilpotent ideal	مثالي عديم القوى
prime	مثالي أولي
principal	المثالي الرئيسي
proper	مثالي جزئي تام
sum of ideals	مجموع مثاليات
Small ideal	مثالي صغير
test	اختبار المثالي
trivial	المثالي التافه
right ideal	مثالي يميني
left ideal	مثالي يساري
large ideal	مثالي كبير
Idempotent	جامد

Idempotent element	عنصر جامد
Identity element	عنصر وحدة
Integral domain	منطقة تكاملية
Inverse element	مقلوب (معكوس) عنصر
Inverse image	الصورة العكسية
Isomorphism(s)	تماثل
first Theorem	نظرية التماثل الأولى
of rings	تماثل حلقي
second theorem for rings	نظرية التماثل الحلقي الثانية
third theorem for rings	نظرية التماثل الحلقي الثالثة
Kernel of a homomorphism	نواة التشاكل
Last common multiplication	المضاعف المشترك الأصغر
Mapping	تطبيق
one to one	تطبيق متباين
on to	تطبيق عامر
one to one on to	تطبيق تقابل
Matrix	مصفوفة
addition	جمع المصفوفات
determinant of	معين مصفوفة
multiplication	جداء المصفوفات
Minimal polynomial	حدودية أصغرية
Natural homomorphism	التشاكل الطبيعي
Natural mapping	التطبيق الطبيعي
Nilpotent element	عنصر عديم القوى
Operation	قانون تشكيل (قانون)

associative	قانون تشكيل تجميعي
binary	قانون تشكيل داخلي (عملية ثنائية)
table for	جدول قانون التشكيل
Polynomial(s)	حدودية
constant	حدودية ثابتة
degree	درجة الحدودية
irreducible	حدودية غير قابلة للتحليل
Prime	أولي
element	عنصر أولي
ideal	مثالي أولي
integer	عدد أولي
relatively	أوليان فيما بينهما
Principal ideal domain	منطقة مثاليات رئيسية
Radical	أساس
Jacobson	أساس جاكبسون
ring	أساس الحلقة
Prime radical	الأساس الأولي
Ring(s)	حلقة
Artinian ring	حلقة أرتينية
characteristic of	مميز الحلقة
commutative	حلقة تبديلية
definition of	تعريف الحلقة
direct summand of	المجموع المباشر لحلقات
homomorphism	تشاكل حلقي
of polynomials	حلقة الحدوديات

with unity	حلقة واحدية
Noetherian	حلقة نيوثرية
Endomorphism ring	حلقة التشاكلات
Regular ring	حلقة منتظمة
Strongly regular ring	حلقة قوية الانتظام
Semi-simple ring	حلقة نصف بسيطة
Simple ring	حلقة بسيطة
Local ring	حلقة محلية (موضعية)
Subfield	حقل جزئي
Subring	حلقة جزئية
test	اختبار الحلقة الجزئية
Unique factorization domain	منطقة تحليل وحيد
Well defined function	تابع معرف جيداً
Zero	صفر
Zero multiple	مضاعف الصفر
of a polynomial	صفر حدودية
Zero divisor	قاسم للصفر

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

المـــراجـــــع العـــلميـــــة

1 – *Anderson F. W. & Fuller K. R. Rings and categories of modules, New York. Springer* 1973 .

2 – *Amitsur S. A. Remarks on principal ideal rings, Osaka Math. J.* 15 (1963), 59 – 69 .

3 – *Atyah M. & Macdunald I. G. Introduction to commutative algebra,* 1969 .

4 – *Behrens E. A. Ring theory, London: Acad. Press.* 1972 .

5 – *Bourbaki N. Alge'bre commutative. Ch.* 1 – 2, *Paris,* 1961 .

6 – *Bourbaki N. Alge'bre commutative. Ch.* 3 – 4 , *Paris,* 1961 .

7 – *Jacobson N. Theory of rings, Providence,* 1943 .

8 – *Jacobson N. Structure of rings, Providence,* 1964 .

9 – *Goodearl K. R. Von Neumann regular rings, Pitman:* 1979 .

10 – *Goodearl K. R. Ring theory: Non-singular rings and modules, Pure and Appl.* 1976 .

11 – *Gallian J. A. Contemporary abstract algebra, Toronto* 1994 .

12 – *Golan, J. S. Torsion Theories, Longman, New York,* 1986 .

13 – *Kaplansky I. Commutative rings, Boston,* 1970 .

14 – *Kaplansky I. Rings of operators, New York,* 1968 .

15 – *Kaplansky I. Fields and rings, Chicago,* 1972 .

16 – *Kasch F. Modules and rings, London Math. Soc. Mono.* 1982 .

17 – *Kertesz A. Lectures on artinian rings, Budapest: Akad.* 1987 .

18 – *Kruse R. L. & Price D. T. Nilpotent rings, New York,* 1969 .

19 – *Lang S. Algebra,* 1965 .

20 – *Lambek J. Lectures on rings and modules, Blaisdell, Mass.* 1966 .

21 – *Lam T. Y.:A First course in Non-commutative Rings. Springer* 2001 .

22 – *Mc Connell J. C. Robson J. C. Non commutative noetherian rings, Chictestes* 1987 .
23 – *Rowen L. H. Polynomial identities on ring theory*, 1980 .
24 – *Rowen, L. H. Ring Theory, Academic Press* 1988 .
25 – *Chatters, A. W. & Hajarnavis, C. R. Rings With Chain Conditions, Pitman, Bosto* 1980 .
26 – *Cohn P. M. Free rings and their relations, New York. London.- Acad. Press*, 1971 .
27 – *Clark, J. & Wisbuer, R. Supplements and Projectivity in Module Theory, Basel* 2006 .
28 – *Faith C. Algebra: Ring, modules and Categories*, 1981 .
29 – *Faith C. Algebra: Ring theory*, 1979 .
30 – *Herstein I. N. Topics in ring theory, Chicago*, 1969 .
31 – *Herstein I. N. Non commutative rings*, 1968 .
32 – *Hamza H.* I_0 *– Rings and* I_0 *– modules, Math. J. Okayama Univ.* 40 (1998), *p.* 91 – 97 .[2000] .
33 – *Nicholson W. K. I – Rings, Trans. Amer. Math. Soc.* 207 , (1975). *P.* 361 – 373 .

34 – *Nicholson W. K. & Yousef M. F. Cambridge Univ. Press* 2003 .
35 – *Tuganbaev A. A. Rings Closed to Regular, Kluwer* 2002 .
36 – *Wedderburn B. L. Algebra*, 1967 .
37 – *Wisbauer, R.Foundations of Modules and Rings, Gordon*,1991
38 – *Yue Chi Ming R. On (Von Neumann) regular rings, Proc. Edinburgh. Math. Soc. V* 19 (1974), *P.* 89 – 91 .

39 حمزة ابراهيم حاكمي. بنى جبرية (1) منشورات جامعة دمشق 2006 م.

اللجنـــــة العـلميـــــة

الأستاذ الدكتور عبد الواحد أبو حمدة	قسم الرياضيات جامعة دمشق.
الأستاذ المساعد الدكتور عبد اللطيف هنانو	قسم الرياضيات جامعة دمشق.
الأستاذ المساعد الدكتورة إيمـــان الخوجـــة	قسم الرياضيات جامعة البعث.

المدقـــق اللغـــوي

الأستاذ الدكتور: عمر مصطفى

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University