الإحصاء (4)

الطرق اللاوسيطية في الاستدلال الإحصائي

السنة : الرابعة

القسم : احصاء رياضي

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

الإحصاء (4)

الطرق اللاوسيطية في الاستدلال الإحصائي

الدكتور

عدنان عمورة

أستاذ مساعد في قسم الإحصاء الرياضي

جامعة دمشق

1430 – 1431 هـ

2009 – 2010 م

Nonparametric Methods for Statistical Inference

Damascus University

الفهرس

الموضوع	الصفحة
مقدمة	9
الباب الأول	11
الفصل الأول	13
مفهوم الإحصاء اللاوسيطي وطرق الاستدلال الإحصائي اللاوسيطي	
1-1- مفهوم و مقدمة	13
1-2- تعريفات أولية	14
1-3- مزايا الطرق اللاوسيطية	18
1-4- عيوب الطرق اللاوسيطية	19
1-5- متى تستخدم الطرق اللاوسيطية	20
1-6- كفاءة الطرق اللاوسيطية	20
1-7- اختيار الاختبار اللاوسيطي المناسب	21
1-8- اختبارات العينة الواحدة	22
1-9- اختبارات العينتين المستقلتين	23
1-10- اختبارات العينتين المرتبطتين	23
1-11- اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين	24

1-12- اختبارات أكثر من عينتين مرتبطتين	24
1-13- مقاييس الارتباط	24
الباب الثاني : اختبارات العينة الواحدة	27
الفصل الثاني : اختبار ذي الحدين	29
الفصل الثالث : اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق	37
الفصل الرابع : اختبار كولموغوروف – سمير نوف	59
الفصل الخامس : اختبار كاي – تربيع للاستقلال	75
الفصل السادس : اختبار الإشارة	95
الفصل السابع : اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة	111
الفصل الثامن : اختبار التتابع	129
الباب الثالث : اختبار العينتين المستقلتين	139
الفصل التاسع : اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين	141
الفصل العاشر : اختبار الوسط لعينتين مستقلتين	153
الفصل الحادي عشر : اختبار مان ونتي لعينتين مستقلتين	163
الفصل الثاني عشر : اختبار كولموغوروف – سمير نوف للعينتين المستقلتين	171
الفصل الثالث عشر : اختبار والدولفويتز لتتابع العينتين المستقلتين	181
الباب الرابع : اختبارات العينتين المرتبطتين	191
الفصل الرابع عشر : اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين	193

الفصل الخامس عشر : اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينتين المرتبطتين 201

الفصل السادس عشر : اختبار ماكنيمار 209

الباب الخامس : اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين 219

الفصل السابع عشر : اختبار الوسط لأكثر من عينتين مستقلتين 221

الفصل الثامن عشر : اختبار كروسكال واليس 231

الباب السادس : اختبار أكثر من عينتين مرتبتطين 249

الفصل التاسع عشر : اختبار فريدمان 251

الفصل العشرون : اختبار كوكران 269

الباب السابع : مقاييس الارتباط 281

الفصل الحادي والعشرون : معامل ارتباط سبيرمان للرتب 283

الفصل الثاني والعشرون : معامل ارتباط فاي 297

الفصل الثالث والعشرون : معامل ارتباط كريمر 307

الفصل الرابع والعشرون : معامل ارتباط كندال 317

الملاحق : 331

1) الكثافات الاحتمالية ، و خصائصها العددية ، و مجالات الثقة 333

2) الجداول الإحصائية 337

3) قائمة بالمصطلحات العلمية (إنكليزي – عربي) 399

4) قائمة بالمراجع العلمية . 415

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مقدمة الكتاب

بسم الله الرحمن الرحيم

إن العلم والمعرفة كنز واهتداء لا حدود لهما ، وقضية الوصول لحقيقة التغيرات في مجتمع معين ، وحقيقة الاختلافات ما بين المجتمعات أصبحت مسألة مهمة جداً في مختلف نواحي الحياة الإجتماعية ، والتربوية ، والصحية ، والنفسية ، والاقتصادية، والهندسية ، والزراعية ... الخ . ولهذا تحتاج في كثير من الأحيان إلى حجج، وبراهين ، وأدلة علمية لإيضاح الصورة ، ويمكن لأن تنحصر هذه الأدلة العلمية لهذه العلوم ، ولكافة مناحي الحياة بلا استثناء ، في الطرق ، والإجراءات ، والأساليب التي تندرج تحت علم الإحصاء . ويندرج الجزء الأكبر منها تحت المفاهيم الإحصائية اللاوسيطية . أي الطرق العلمية الإحصائية اللاوسيطية في الاستدلال الإحصائي ، واستنباط الاستنتاجات ، واتخاذ القرارات في شتى التطبيقات، وذلك في الحالات التي لا تتطلب افتراضات قوية حول توزيع المجتمع ؛ إضافة إلى أن بعضها يمكن استخدامه في حالات بيانات وصفية أو رتبية أو مدّية (مجالية) أو نسبية . وتسمى الاختبارات اللاوسيطية المستخدمة في ثنايا فصول هذا الكتاب بالاختبارات الحرة لعدم تقيدها بمقاييس معينة (وسطاء) للعينّات أو المجتمعات .

وقد اعتمدت في هذا الكتاب على المنحى التطبيقي أكثر من المنحى النظري ، نظراً لأهمية موضوعات الكتاب ، وفائدته منه التي تعود على الإحصائيين ، وغير المختصين والذين يضطرون لاستخدام الطرق اللاوسيطية في الاستدلال الإحصائي من أجل دراساتهم ، وأبحاثهم .

ولفهم موضوعات الكتاب ، وإدراكها يجب أن يكون مستخدم هذا الكتاب ملماً بالرياضيات ، وبمبادئ الاحتمالات ، والاستدلال الإحصائي .

وتتناول موضوعات الكتاب الأبواب والفصول التالية :

الباب الأول : و يدرس مفهوم الإحصـــاء اللاوســيطي ، وطــرق الاســتدلال الإحصـــائي اللاوسيطي

الباب الثاني : يتناول اختبارات العينة الواحدة .

الباب الثالث : يتناول اختبارات العينتين المستقلتين .

الباب الرابع : يتناول اختبارات العينتين المرتبطتين .

الباب الخامس : يتناول اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين .

الباب السادس : يتناول اختبارات أكثر من عينتين مرتبطتين .

الباب السابع : يتناول مقاييس الإرتباط .

ولقد ضمن كل فصل من فصول الأبواب السابقة الجــداول الإحصـــائية اللازمـــة لإنجـــاز الاختبار وكذلك الحقنا بالكتاب ملحقاً عــن التوزيعــات الاحتماليــة الشــهيرة (منقطعــة أو متصــلة) وخصائصــها ، وقائمــة بمصــطلحات الكتــاب باللغــة الأجنبيــة ، وبفهــرس لمحتويات الكتاب ، وبمفردات المقرر مع معاني المفردات باللغة الأجنبية .

وفي الختام أقدم شكري الجزيل لكل من ساهم في إصــدار هــذا الكتــاب مــن مقــوميين علميين ، ومقوم لغوي ، للجهات الإدارية ، والفنية كافــة ولمــن قــام بتنضــيد الكتــاب ، وإخراجه .

ونسأل الله عز وجل أن يعود هذا الكتــاب بــالنفع ، والافــادة منــه لكــل مــن يقصــده ، وأرحب بكل ملاحظة أو اقتراح تؤدي لتصويب هذا الكتاب ، وتطويره .

والله الموفق .

المؤلف

الأستاذ المساعد الدكتور

عدنان عمورة

الباب الأول

الفصل الأول :

مفهوم الإحصاء اللاوسيطي وطرق الاستدلال الإحصائي اللاوسيطي

"Concept of Nonparametric Statistics and the Methods of Nonparametric Statistics "

1-1- مقدمة ومفهوم

1-2- تعريفات أولية

1-3- مزايا الطرق اللاوسيطية

1-4- عيوب الطرق اللاوسيطية

1-5- متى تستخدم الطرق اللاوسيطية ؟

1-6- كفاءة الطرق اللاوسيطية

1-7- اختيار الاختبار اللاوسيطي المناسب

1-8- اختبارات العينة الواحدة

1-9- اختبارات العينتين المستقلتين

1-10- اختبارات العينتين المرتبطتين

1-11- اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين

1-12- اختبارات أكثر من عينتن مرتبطتين

1-13- مقاييس الارتباط

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

مفهوم الإحصاء اللاوسيطي وطرق الاستدلال الإحصائي اللاوسيطي

1-1- مقدمة , ومفهوم : تكتسب الطرق الإحصائية اللاوسيطية جاذبية خاصة لدى العاملين في مجال البحث العلمي . ومن أسباب ذلك أنها لا تتطلب افتراضات قوية حول توزيع المجتمع كما هو الحال عادة في طرق الإحصاء الوسيطي في الاستدلال الإحصائي ؛ إضافة إلى أن بعضها يمكن استخدامه حتى في حالة البيانات المقاسة بمقاييس دنيا , كالمقياس الاسمي .

إن التعامل مع الطرق الإحصائية اللاوسيطية يتطلب من الباحث أو الدارس أن يكون ملماً بمبادئ الاحتمالات , والاستدلال الإحصائي .

يطلق مصطلح طرق وسيطية على الطرق التي تستخدم للاستدلال على وسيط وتستند إلى افتراضات قوية حول توزيع المجتمع ، بينما يستخدم مصطلح طرق لاوسيطية أو طرق غير معتمدة على التوزيع على الطرق التي لا تستخدم للاستدلال على وسيط أو لا تستند إلى افتراضات قوية حول توزيع المجتمع .

فمثلاً : اختبار ستودنت (t) للمتوسط هو طريقة وسيطية ؛ لأنها تُستخدَم للاستدلال على وسيط , وهو متوسط المجتمع , ونفترض توزيعاً طبيعياً محدداً للمجتمع . بينما لدراسة الاستقلال أو الملائمة فنستخدم طرق لا وسيطية ؛ لأنها لا تستخدم للاستدلال على وسيط ولا تفترض توزيعاً معيناً للمجتمع المدروس .

الإحصاء علم قديم استخدمه الإنسان منذ أمد بعيد , وارتبط ارتباطاً وثيقاً بعدد السكان وبحصر والثروات , والممتلكات , و تقديرها , ومن ثم تقدير وحساب الضرائب والاستقطاعات المترتبة على ذلك من قبل الدولة . ثم توسع استخدام الإحصاء , وشمل جمع و بيانات المواليد , والوفيات , والاستهلاك , والإنتاج , والتجارة الخارجية , والإجراءات

المالية ، و تنظيمها , ثم أصبح حاجة ماسة في الأمور المتعلقة بتصريف شؤون الدولة والمؤسسات والأفراد فيما يتعلق بجمع البيانات , وتصنيفها وعرضها , ومعالجتها واستخلاص النتائج منها . وبعد تطور نظرية الاحتمال بقوانينها التجريدية في القرن السادس عشر أخذ علم الإحصاء وضعه المهم في تحليل المعلومات الرقمية , والوصفية , وعمل الاستنتاجات , والاستدلالات التي تساعد في صياغة القرارات المناسبة . وكان لعلماء القرنين الثامن عشر , والتاسع عشر دورهم البارز في هذا التطور , مثل : بيرنولي و لابلاس و غاوس و بواسون و تشيبتشيف ، وظهر في القرن العشرين كثير من العلماء الذين أسهموا مساهمة فاعلة في تطوير النظريات , والطرق الإحصائية من أمثال غوست , وبيرسون ونيمن , وفيشر , وايبول , واسبيرمان , وبيتسن , وباتلت , وكندال , وغيرهم من لاحصر لهم .

يقسم الإحصاء إلى قسمين : الإحصاء الوصفي , والإحصاء الاستدلالي ، فالإحصاء الوصفي هو الذي يصف الخصائص , والملامح الرئيسة المميزة للبيانات ، أما الإحصاء الاستدلالي فهو الذي يتعلق بعمل الاستنتاجات , والاستدلالات التي تساعد في صياغة القرارات المناسبة, و صياغتها ، أي أنه يستخدم نتائج وصف البيانات في أغراض التنبؤات المستقبلية و تحليلها , وفي اتخاذ القرارات المناسبة تجاه المشكلة محل البحث .

ونعني بالإحصاء التطبيقي بأنه تطبيق للنظريات , والأساليب , والطرق الإحصائية في المجالات المختلفة . وهذا يمثل العلاقة المتميّزة للإحصاء مع العلوم الطبيعية , والاجتماعية المختلفة ، حيث يمكن للإحصاء المساعدة في تحليل الظواهر الاجتماعية تحليلاً علمياً .

1-2- تعريفات أولية :

المجتمع الإحصائي : هو مجموعة مفردات ذات خصائص مشتركة أو محددة تحديداً معيناً و قد تكون مجموعة المفردات هذه مجموعة أشخاص أو مجموعة حيوانات أو مجموعة أشياء. والمجتمع الإحصائي قد يكون محدوداً وقد يكون غير محدود .

العيّنة : هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيار مفرداتها بحيث تحمل خصائص المجتمع, وصفاته جميعها , وتمثلها أصدق تمثيل . فمن البيانات التي تؤخذ من العينة يتم تعميم النتائج على المجتمع الإحصائي جميعه , وهذا هو عمل الإحصاء الاستدلالي .

وسيط المجتمع : هو كل مقياس إحصائي يرتبط بالمجتمع , ويميز مفرداته جميعها .

إحصائية العينة : هي المقياس التي يرتبط بالعينة , ويميز مفرداتها .

المتغير : هو خاصية أو صفة تأخذ قيماً مختلفة من مفردة إلى أخرى من مفردات المجتمع أو العينة . فإذا كان المتغير يحمل بيانات رقمية فالمتغير عندئذ هو متغير كمي ، وإذا كان المتغير يحمل بيانات وصفية فيسمى متغيراً وصفياً أو نوعياً . وهناك متغيرات منفصلة وهي التي تأخذ قيماً أو أوصافاً محددة ، ومتغيرات متصلة (مستمرة) فهي التي تأخذ أية قيمة بين قيمتين مثل الطول , والوزن , ودرجة الحرارة.... .

وتصنف المتغيرات بشكل أكثر تفصيلاً إلى أربعة أنواع , وهي على الترتيب من الأدنى إلى الأعلى :

1) متغيرات اسمية –2) متغيرات رتبية – 3) متغيرات مجالية (مديّة)–4) متغيرات نسبية.

1) المتغير الاسمي : هو المتغير الذي لا تحمل بياناته غير معنى التشابه والاختلاف , مثل: مكان الميلاد , والحالة الاجتماعية أو الحالة العائلية أو .... وهذه المتغيرات تكون وصفية أو رقمية وصفية .

2)المتغير الرتبي : و يكون المتغير رتبياً إذا أمكن ترتيب بياناته بحيث يكون هناك معنى لهذا الترتيب مثل متغير تقديرات الطلاب (ممتاز – جيد جداً – جيد – مقبول – راسب) أومتغير الميول , والاتجاهات (أوافق بشدة – أوافق – غير متأكد – لا أوافق– لا أوافق بشدة)... .

3)المتغير المجالي : و هو المتغير الذي يمكن من خلاله معرفة الفرق المطلق بين بياناته التي لا بد أن تكون عددية , و يكون الصفر فيها ليس قيمة حقيقية ، مثل : متغير درجة الحرارة , ومتغير معدل الذكاء والمتغيرات المعيارية .

4) المتغير النسبي : يسمى المتغير متغيراً نسبياً إذا أمكن معرفة الفرق المطلق بين بياناته العددية التي يكون الصفر فيها عدداً حقيقياً ذا معنى ، فمتغيرات الطول , والوزن , والدخل والعمر , والسرعة , ونحوها متغيرات نسبية . حيث يعني الصفر بالنسبة للدخل انعدامه التام, وبالنسبة للعمر لحظة الميلاد . وهنا يمكن مقارنة المقاييس ببعضها من حيث الفرق, و المضاعفات .

وتجدر الإشارة هنا إلى أن المتغيرات النسبية تحقق كل خواص الأعداد الحقيقية حيث يمكن إجراء كل العمليات الرياضية على قيمها , ومن ثم فإنها تأتي في المرتبة الأولى بين التصنيفات الأربعة ، تليها المتغيرات المجالية ثم المتغيرات الرتبية , وأخيراً المتغيرات الاسمية . وبالتالي فإن الإجراءات , والطرق الإحصائية التي تستخدم لمرتبة المتغيرات الأدنى نسبياً يمكن استخدامها لمرتبة المتغيرات الأعلى منها . ولكن العكس ليس صحيحاً إذ إن بعض الإجراءات والطرق الإحصائية التي تستخدم لمرتبة المتغيرات الأعلى نسبياً لا يمكن استخدامها لمرتبة المتغيرات الأدنى مرتبة منها .

-ومن مزايا الطرق اللاوسيطية إمكانية تطبيقها على بيانات مقاسة بمستويات قياس دنيا , مثل : المقياس الاسمي , والترتيبي ، بل إن إمكانية تطبيق طريقة على بيانات مقاسة بهذين المقياسين يكفي لتصنيفها كطريقة لاوسيطية .

- **الفرض الإحصائي** : هو توقع أو حدس أو تخمين أو ادعاء بخصوص وسيط مجتمع معين أو خاصية معينة للمجتمع . واختبار الفرضيات يشير إلى قبول أو رفض ما عن خاصية غير معلومة للمجتمع .

- **فرض العدم** (H_0) : وهو الفرض الذي يتم اختياره بناءً على معلومات معينة من العينة . ويعني فرض العدم ؛ عدم وجود فرق يذكر أو فروق تذكر لخاصية معينة من خواص المجتمع عما يجب أو يفترض أو يعتقد أن تكون عليه ، وأن هذا الفرق أو هذه الفروق إن وجدت فهي مجرد صدفة ليس غير .

- **الفرض البديل (H_1)**: وهو فرض بديل لفرض العدم وعلى نقيض أو اختلاف منه , ويعني وجود فرق أو فروق تذكر لخاصية معينة من خواص المجتمع عما يجب أن تكون عليه , وليست لمحض الصدفة . وهذا الفرض قد يكون ذا اتجاه واحد (أيمن أو أيسر) أو ذا اتجاهين (عدم مساواة) .

- **الخطأ من النوع الأول** : وهو احتمال رفض فرضية العدم , علماً أنها صحيحة , ونرمز له بـــ $\propto$.

- **الخطأ من النوع الثاني** : وهو احتمال قبول فرضية العدم , علماً أنها خاطئة , ونرمز له بـــ β أي احتمال قبول H_0 علماً بأنها خاطئة (H_1 صحيحة) .

- **مستوى المعنوية** : (مستوى الأهمية – مستوى الدلالة الإحصائية) وهو الحد الأقصى للوقوع في الخطأ من النوع الأول , ونرمز له بـــ $\propto$ (احتمال رفض H_0 علماً أنها صحيحة) .

فمثلاً : إذا كان $\propto = 0.05$ يعني أنه إذا تم تكرار التجربة مئة مرة متماثلة , فإنه يمكن رفض فرض العدم , وهو في الواقع صحيح في خمس حالات فقط مقابل خمس وتسعين حالة يكون فيها رفض فرض العدم , وهو غير صحيح ؛ أي نسبة الثقة بالقرار الذي تم اتخاذه يكون 95% سليم , وصحيح , مقابل نسبة خطأ تكون بحد أقصى 5% .

- **مستوى المعنوية المشاهد (المصاحب) أو المستوى الحرج** : وهو ما يسمى بقيمة P (P-Value) ونرمز له بـــ PV . وهو أقل مستوى معنوية يؤدي لرفض H_0 عند مشاهدة قيمة معينة للإحصائية حيث إن PV هو احتمال الحصول على قيمة للإحصائية تساوي أو تكون أكثر تطرفاً (أكبر إذا كانت كبيرة , و أصغر إذا كانت صغيرة) من القيمة المشاهدة للإحصائية . بينما $\propto$ هو حجم منطقة الرفض التي تحددها .

فمثلاً : إذا كان توزيع الإحصائية طبيعياً وكانت منطقة الرفض المختارة تتكون من القيم التي تزيد عن 1.64 , فإن مستوى المعنوية (احتمال وقوع قيمة في منطقة الرفض) هو

0.05 ، وإذا كانت القيمة المشاهدة للإحصائية هي 2.58 مثلاً , فإن احتمال قيمة تساويها أو تزيد عنها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري هي 0.005 هذا الاحتمال هو المستوى الحرج P.V وهو أصغر مستوى معنوية يمكن اختياره , ويؤدي لرفض H_0 .

وتجدر الإشارة هنا إلى أن كل البرامج , والحزم الإحصائية المشهورة في الاستدلال الإحصائي مثل : SAS ; SPSS ; BMDP ; NCSS ; Minitab ; ...

وغيرها تعطي مستوى المعنوية المشاهد PV لقيمة الاختبار , ويكون القرار في اختبار H_0 مقابل H_1 كالتالي : إذا كان : $PV > \propto$ فهذا يعني قبول H_0 (و رفض H_1) و إذا كان $PV \leq \propto$ فهذا يعني رفض H_0 (وقبول H_1).

1-3- مزايا الطرق اللاوسيطية : تتميز الطرق اللاوسيطية بمزايا عدة مقارنة بالطرق الوسيطية , ومن أهمها :

1) قلة الافتراضات المطلوبة : حيث لا تتطلب افتراضات كثيرة حول توزيع المجتمع , كما هو الحال عادة في الطرق الوسيطية حيث يكون الإحصائي غير متأكد إذا ما كانت الافتراضات التي تقوم عليها متحققة في بياناته . و تكون في الطرق اللاوسيطية الافتراضات عامة مثل : افتراض أن التوزيع متصل ، فمثلاً اختبار (t) للفرق بين متوسطين من عينتين مستقلتين هو اختبار وسيطي يفترض لاستخدامه أن يكون التوزيع طبيعياً للمجتمعين وأحياناً بتباينين متساويين . أما الاختبار الشبيه اللاوسيطي لهذا الاختبار , فلا يتطلب أكثر من أن يكون للمجتمعين توزيعاً متصلاً .

2) إمكانية التطبيق على البيانات الوصفية , والترتيبية : بل إنها تقبل في بعض الأحيان أن يكون المتغير التابع اسمياً أو رتبياً .

3) السرعة في جمع البيانات , وتحليلها : بما أن البيانات المستخدمة في الطرق اللاوسيطية تكون عادة بمقاييس دنيا مثل الاسمي والترتيبي ولا تتطلب حجم عينة كبير أو حسابات معقدة فإنه يمكن جمع البينات , وتحليلها بسرعة أكبر .

4) **سهولة الفهم** : تقوم غالبية الطرق اللاوسيطية على مفاهيم بسيطة تستند عادة إلى فكرة التباديل أو العشوائية , وهذا يسهل استيعابها وتفهم المنطق الذي يسندها بالنسبة لغير المختصين في الرياضيات , والإحصاء .

5) **إمكانية إعطاء عبارات احتمالية مضبوطة** : إن التوزيع الاحتمالي للكثير من الإحصائيات في الطرق اللاوسيطية يكون مضبوطاً وبالتالي P.V (مستوى المعنوية المشاهد) في اختبار الفروض تكون مضبوطة (أي تعطى تماماً) وليس تقريبية , كما هو الحال في الإحصاء الوسيطي حيث يعتمد مدى تقريبها على تحقق الافتراضات التي تقوم عليها .

6) **سعة مجال التطبيق** : إن إمكانية تطبيق الطرق اللاوسيطية على البيانات ذات مستويات القياس المنخفضة , مثل : البيانات الاسمية , والترتيبية ، وإمكانية استخدامها في مسائل الاستدلال غير المرتبطة بوسطاء كاختبارات عشوائية توالي مجموعة من القيم ، إضافة لعدم تقيدها بافتراضات كثيرة جعل مجال تطبيق هذه الطرق أوسع منه في الطرق الوسيطية .

7) **تستخدم في حالة التوزيعات شديدة الالتواء أو التوزيعات الحرة غير المقيدة .**

8) **بعض الاختبارات اللاوسيطية أقوى من شبيهاتها الوسيطية خاصة في العينات الصغيرة.**

1-4- عيوب الطرق اللاوسيطية :

1) تكون أقل كفاءة من الطرق الوسيطية عند استيفاء الطرق الوسيطية لمتطلباتها أو افتراضاتها . وهذا ما يعرف بالكفاءة النسبية للطرق اللاوسيطية بالمقارنة مع الطرق الوسيطية .

2) أنها قد لا تستخدم كل المعلومات المتاحة ، وذلك لأنها لا تشترط الكثير من الخصائص المتعلقة بالبيانات , وتوزيعها .

3) أنها قد تقضي إلى نتائج تكون أكثر عمومية ، طالما أن افتراضات هذه الطرق , ومتطلباتها قليلة أو ضعيفة نسبياً.

4) الاختبارات بصفة عامة أقل قوة في الطرق اللاوسيطية منها في شبيهاتها الوسيطية خاصة في حالة العينات الكبيرة, وعند تحقق الافتراضات التي تقوم عليها الطريقة الوسيطية.

5) قلة الافتراضات ، يشجع عدم اشتراط عينات كبيرة ، وسهولة الحسابات المطلوبة في معظم الطرق اللاوسيطية الكثير من الباحثين أحياناً على تفضيل الطريقة اللاوسيطية رغم وجود طريقة وسيطية ذات قوة أكبر .

1-5- متى تستخدم الطرق اللاوسيطية : على ضوء ما سبق , فإن الطرق اللاوسيطية تكون مناسبة في الحالات التالية :

1) إذا كانت الفروض المراد اختبارها لا تتعلق بوسيط معين من وسطاء المجتمع .

2) إذا كان عدد البيانات أو حجم العينات صغيراً نسبياً .

3) إذا كانت البيانات مقاسة على المقياس الاسمي أو الترتيبي أو تكون بينات عد (على شكل تكرارات "بينات مبوّبة بفئات ").

4) إذا كان مقياس البيانات أقل من المقياس المطلوب للطرق الوسيطية .

5) إذا كانت افتراضات استخدام الطرق الوسيطية غير متحققة .

6) إذا كان المطلوب تقديم نتائج , ومؤشرات في أسرع وقت ممكن ولا تتوفر حاسبات ذات كفاءة عالية لإنجاز ذلك .

1-6- كفاءة الطرق اللاوسيطية : يقصد بكفاءة الطرق اللاوسيطية كفاءتها النسبية بالمقارنة مع الطرق الوسيطية . والكفاءة النسبية للاختبار هي مقدار الزيادة في حجم العينة اللازم لجعل الاختبار ذا كفاءة عالية نسبياً ، فإذا كان A و B اختبارين وكان الاختبار A أكفأ من الاختبار B ، فإن الكفاءة النسبية للاختبار B هي نسبة حجم العينة المتعلق بالاختبار A إلى حجم العينة المتعلق بالاختبار B أي : $R.E(B) = \frac{n(A)}{n(B)}$ حيث R.E(B) تمثل الكفاءة النسبية للاختبار B . n(A) تمثل حجم العينة المتعلق بالاختبارA و n(B) تمثل حجم العينة المتعلق بالاختبار B . وعليه يمكن أن يكون الاختبار A اختباراً وسيطياً مستوفياً لشروط

استخدامه , والاختبار B اختباراً لا وسيطياً بشروط أقل أولا تذكر . فإذا كان الاختبار B يتطلب عينة حجمها 40 ليكون بمثل كفاءة الاختبار A الذي له عينة من الحجم 32 وبالتالي فالكفاءة النسبية للاختبار B هي : $R.E(B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{32}{40} = 0.8$ أي أنه لكي تتساوى كفاءة الاختبار B مع كفاءة الاختبار A فإن الاختبار B يحتاج لـــ10 حالات لكل 8 حالات للاختبار A .

1-7- اختيار الاختبار اللاوسيطي المناسب :

إذا كانت الطرق اللاوسيطية هي الخيار المتاح للاستخدام ، بعد الأخذ في الاعتبار نوع البيانات وخصائصها وطبيعة المجتمع الذي سحبت منه هذه البيانات , وحجم العينة , وغير ذلك ، فإن الخطوة التالية : تكمن في اختيار الاختبار اللاوسيطي المناسب ، ونظراً لوجود العديد من الاختبارات اللاوسيطية , فإن اختيار الاختبار اللاوسيطي المناسب يعتمد على :

1) مقياس البيانات : اسمياً أو رتبياً أو مجالياً أو نسبياً حيث معلوم أن الاختبار الذي يصلح لمقياس أعلى في الترتيب يمكن أن يستخدم للمقياس الذي دونه ، ولكن من الأفضل اختيار الاختبار الذي يصلح للمقياس نفسه .

2) عدد العينات أو المجموعات : وهذا يعني إما عينة واحدة أو عينتين أو أكثر من عينتين. وعلى هذا تم تقسيم الطرق , والاختبارات اللاوسيطية إلى : اختبارات العينة الواحدة ثم اختبارات العينتين ثم اختبارات أكثر من عينتين .

3) استقلالية أو ارتباط العينات : ففي حالة وجود عينتين و أكثر, فإن الاختبارات , والطرق اللاوسيطية تنقسم إلى : اختبارات عينتين مستقلتين ، اختبارات عينتين مرتبطتين ، اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين , واختبارات أكثر من عينتين مرتبطتين .

4) المطلوب اختباره من البيانات : هذا يعتمد على هدف البحث : كأن يكون دراسة علاقة أو ارتباط بين متغيرين و مجموعتين ، دراسة فروق من ناحية المركز أو التشتت بين

مجموعتين أو بين أكثر من مجموعتين ، اختبار نسبة داخل المجموعة أو العينة الواحدة ، اختبار نمط عشوائية البيانات .

1-8- اختبارات العينة الواحدة : وهي :

1) اختبار ذي الحدين : يعتمد هذا الاختبار على النسبة الملاحظة في عينة معينة بحيث تكون هذه العينة مأخوذة عشوائياً من المجتمع ، ودراسة الفرق بين النسبة الملاحظة في عينة معينة والقيمة التي يفترض أن تكون عليها في المجتمع .

2) اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق (التطابق) : و يستخدم في معرفة إمكانية تطابق التكرارات المشاهدة لكل فئة (صنف) من فئات المتغير النوعي مع ما هو متوقع لها .

3) اختبار كولموغورف – سمير نوف : وهو اختبار جودة توافق (تطابق) توزيع عينة عشوائية معينة مع توزيع نظري معين . وهذه التوزيعات النظرية المعينة هي: التوزيع المنتظم – التوزيع الطبيعي – توزيع بواسون – التوزيع الأسي .

4) اختبار كاي – تربيع للاستقلال : يهدف الاختبار إلى تحديد فيما إذا كانت هناك استقلالية في علاقة متغيرين أو أكثر في المجتمع , ومعرفة معنوية هذه العلاقة .

5) اختبار الإشارة : هذا الاختبار يتعامل مع البيانات التي تكون أو يتم تحويلها إلى سلسلة من الإشارات السالبة والموجبة . ويستخدم الاختبار للاستدلال على وسط هذا المجتمع (القيمة التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها) . ويكون الاستدلال على الوسط بدلاً من الاستدلال على المتوسط لعدم التحقق من شرط تماثل المجتمع .

6) اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة : وهو اختبار أكثر كفاءة من اختبار الإشارة السابق ، بحيث يستخدم هذا الاختبار مقدار الفرق بين أية قيمة والوسط بجانب إشارة الفرق .

7) اختبار التتابع : إن اختبار التتابع للعينة الواحدة هو أحد الاختبارات التي تساعد في اختبار عشوائية العينة بالنسبة لمتغير ثنائي أو متغير يتم تحويله إلى حالة ثنائية.

– وهناك اختبارات أخرى , مثل : اختبار الكمى – اختبار مكنمار للتغير – اختبار كوكس – استيوارت للاتجاه العام – اختبارات ليليفورس للعينة الواحدة – اختبار شابيرو – ويلك .

1-9- اختبارات العينتين المستقلتين :

1) اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب : يستخدم هذا الاختبار لمقارنة وسطي أو متوسطي مجتمعين في ضوء عينتين عشوائيتين مستقلتين منهما .

2) اختبار الوسط للعينتين المستقلتين : و يستخدم لاختبار فيما إذا كانت عينتان أو مجموعتان مستقلتان من البيانات تنتميان إلى مجتمعين لهما وسط متساوٍ, وينسب الاختبار إلى مود و وستنبيرغ .

3) اختبار مان وتني : يستخدم للمقارنة بين بيانات عينتين مستقلتين لمعرفة فيما إذا كانت العينتان تنتميان لمجتمع واحد أو لمجتمعين متماثلين , ويعد هذا الاختبار أول اختبار يتعامل مع حالات عدم التساوي بالنسبة للعينات .

4) اختبار كولموغوروف – سمير نوف للعينتين المستقلتين : وهو يهتم بمعرفة فيما إذا كانت عينتان مستقلتان من البيانات تنتميان لمجتمع واحد أو لمجتمعين متماثلين من حيث الموضع , والتشتت .

5) اختبار والد ولفويتز لتتابع العينتين المستقلتين : يهدف الاختبار إلى معرفة تطابق مجتمعي عينتين مستقلتين من حيث الموقع , والتجانس , والالتواء , وما إلى ذلك باستخدام عدد حالات تتابع العينتين , وهو امتداد لاختبار التتابع لعينة واحدة .

1-10- اختبارات العينتين المرتبطتين :

1) اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين : وهو امتداد لاختبار الإشارة للعينة الواحدة ويستخدم هذا الاختبار للاستدلال على الوسط لمجتمعي عينتين مرتبطتين , وهو يصلح للبيانات النوعية الرتبية على الأقل .

2) اختبار ويلكوكسن للرتب ذات الإشارة للعينتين المرتبطتين : وهو امتداد لاختبار ويلكوكسن للرتب ذات الإشارة للعينة الواحدة , وهو طريقة معدّلة من اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين بحيث يأخذ في الاعتبار ليس اتجاه الفرق فقط , وإنما حجم ذلك الفرق .

3) اختبار ماكنيمار : و يهتم خاصة بمعرفة وجود علاقة بين عينتين أو متغيرين ثنائيين مرتبطين بحيث يكون لكل متغير وضعان فقط ، ويكون الاختبار مفيداً في الحالات التي يراد فيها معرفة معنوية الفرق الذي يطرأ قبل أثر معين وبعده .

1-11- اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين :

1) اختبار الوسط لأكثر من عينتين مستقلتين : وهو امتداد لاختبار الوسط لعينتين مستقلتين، ويهدف هذا الاختبار إلى اختبار انتماء عدة عيّنات مستقلة من البيانات إلى مجتمعات لها وسط متساوٍ .

2) اختبار كريسكال واليس : و يختبر تماثل عدة عيّنات مستقلة ، وبهذا يكون الاختبار مناظراً لتحليل التباين الأحادي في الاختبارات الوسيطية , وهو امتداد لاختبار مان وتيني للعينتين المستقلتين في الاختبارات اللاوسيطية .

1-12- اختبارات أكثر من عينتين مرتبطتين :

1) اختبار فريدمان : وهو ما يعرف بتحليل التباين الثنائي لفريدمان , وهو بديل لا وسطي لتحليل التباين الثنائي الوسيطي عند فشل الأخير بالإيفاء بافتراضاته , و يستخدم عند التعامل مع أكثر من عينتين مرتبطتين .

2) اختبار كوكران : وهو تعميم لاختبار ماكنيمار للعينتين المرتبطتين , و يساعد هذا الاختبار على معرفة تساوي فاعلية عدة معالجات في قطاعات مختارة . تقوم فلسفة هذا الاختبار على الكشف عما إذا كان مجموع الحالات لأحد الوضعين يختلف بين المعالجات .

1-13- مقاييس الارتباط :

1) معامل ارتباط اسبيرمان للرتب : و يقيس درجة العلاقة بين متغيرين لهما مقياس رتبي على الأقل .

2) معامل ارتباط فاي : و يقيس درجة العلاقة بين متغيرين اسميين ثنائيين حيث يكون المتغيران منفصلين بصورة ثنائية مثل (نعم ولا ، خطأ وصواب ...) .

3) معامل ارتباط كريمر: يستخدم معامل ارتباط كريمر لقياس درجة العلاقة بين متغيرين اسميين أو رتبين لكل منها عدد من الفئات أو الأوضاع .

4) معاملات ارتباط كندال : وعرفت باسم Tau-A ؛ Tau-B ؛ Tau-C وقد استخدم كندال المعلومات الناتجة من اتفاق أو عدم اتفاق اتجاه التغير في قياس كل زوجين من الحالات للمتغيرين، وتصلح جميع معاملات ارتباط كندال للعلاقة بين المتغيرات الرتبية أو المجالية أو النسبية .

– وتجدر الإشارة إلى أن هناك اختبار كويد , وهو امتداد لاختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة ويستخدم في الحالة نفسها التي يستخدم فيها اختبار فريدمان ، أي عندما نرغب في مقارنة آثار عدة معالجات تمثلها عينات غير مستقلة .

وهناك اختبار ديرين للقطاعات غير التامة المتوازنة . واختبار الرتب المربعة لتساوي تباينين واختبار سيجل – توكي وهو اختبار للرتب المربعة .

وهناك اختبار بيرنيوم – هول لاختبار تساوي دوال التوزيع لـ K عينة وهو امتداد لاختبار كولموغوروف – سمير نوف ذي الطرفين . واختبار كاي – تربيع لـK عينة وذلك لاختبار إذا ما كانت المجتمعات التي أخذت منها العينات لها التوزيع نفسه . واختبار x^2 لـ K نسبة وهو يختبر تساوي نسب النجاح في الـ K مجتمع .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الباب الثاني

اختبارات العينة الواحدة

(Test of one Sample)

الفصل الثاني : اختبار ذي الحدين (Binomial Test)

الفصل الثالث : اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق

(Chi-Square Goodness –of –Fit Test)

الفصل الرابع : اختبار كولموغوروف – سمير نوف

(Kolmogrove – Smirnov Test)

الفصل الخامس : اختبار كاي – تربيع للاستقلال

(Chi-Square Test of Independence)

الفصل السادس : اختبار الإشارة (Sign Test)

الفصل السابع : اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة

(Wilcoxon Signed Ranked Test)

الفصل الثامن : اختبار التتابع (Runs Test)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

اختبار ذي الحدين

2-1- مفهوم الاختبار

2-2- متطلبات الاختبار , وشروطه

2-3- فرضيات الاختبار

2-4- إجراء الاختبار

2-5- المقارنة والقرار

2-6- أمثلة محلولة

2-7- تمارين غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني

اختبار ذي الحدين للعينة الواحدة

2-1- مفهوم الاختبار: يرتبط هذا الاختبار بالمتغيرات الثنائية , وهي المتغيرات التي تأخذ قيمتين فقط ، وتستخدم في الكثير من المجالات , ومثال على ذلك :

متغير الجنس (ذكر وأنثى) – متغير التعليم (متعلم أو غير متعلم) – الحالة الاجتماعية (متأهل أو غير متأهل) ... . ففي كل الحالات السابقة نجد المشاهدات أو الحالات من مجتمع ما تنتمي إلى وضع أو آخر من وضعين مستقلين غير متداخلين.

فإذا كانت نسبة الحالات التي تنتمي إلى أحد الوضعين في المجتمع هي P , فإن نسبة الحالات التي تنتمي إلى الوضع الآخر هي (1-P) . وقيمة P قد تختلف من مجتمع إلى آخر، ولكنها ثابتة في المجتمع المدروس . وإذا كانت قيمة P ثابتة في مجتمع ما , فهذا لا يعني أن أية عينة مأخوذة من هذا المجتمع ينتج عنها قيمة مساوية لـــ P وعليه يعتمد اختبار ذي الحدين على النسبة الملاحظة في عينة مأخوذة عشوائياً من المجتمع . ومن الطبيعي وجود فروق بين النسبة الملاحظة في عينة ما والقيمة التي يفترض أن تكون عليها P في المجتمع . ولكن ما يهم هو معرفة مدى كبر هذا الفرق من الناحية الإحصائية .

2-2- متطلبات الاختبار, وشروط : تتمثل هذه الشروط , والمتطلبات لاختبار ذي الحدين كالتالي : 1) أن تكون البيانات من عدد من التجارب المتكررة .

2) أن تكون نتيجة كل تجربة أحد وضعين : نجاح أو فشل .

3) أن تكون التجارب مستقلة عن بعضها البعض .

4) أن يكون احتمال وضع معين (نجاح أو فشل) ثابتاً خلال التكرارات المستقلة كلها للتجربة الثنائية .

2-3- فرضيات الاختبار :

فرضية العدم (الفرضية الأساسية): تتمثل فرضية العدم للاختبار في أن النسبة في المجتمع لأحد وضعي المتغير الثنائي تساوي قيمة معينة a أي : $H_0 : P \geq a$ أو $H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{a}$ أو $H_0 : \mathrm{P} \leq \mathrm{a}$. فإذا كانت $a = \frac{1}{2}$ فإن ذلك يعني أنه لا توجد فروق تذكر بين نسبة الحالات في الوضعين ؛ أي نسبة حدوث النجاح تساوي نسبة حدوث الفشل ، وأن الفرق بينهما صدفة لاغير .

والفرضية البديلة : يمكن أن تكون $H_1 : P < a$ أو $H_1 : P \neq a$ أو $H_1 : \mathrm{P} > a$ على الترتيب حيث الأولى تمثل اختبار من الطرف الأيسر والثانية تمثل اختباراً من الطرفين والثالثة تمثل اختباراً من الطرف الأيمن .

2-4- إجراء الاختبار : هنا نميّز حالتين :

1) أن يكون حجم العينة صغيراً ($n \leq 20$) . - 2) أن يكون حجم العينة كبيراً (n>20).

1) من أجل عينة صغيرة الحجم : أي $n \leq 20$ ، تعتمد طريقة الاختبار على حساب عدد الحالات x التي تنتمي لأحد الوضعين (وهو النجاح) ثم حساب القيمة المعنوية المصاحبة للاختبار (مستوى المعنوية المشاهد) P.V ، حيث يكون من أجل :

- اختبار من الطرفين :

$H_0 : \mathrm{P} = \mathrm{a}$ مقابل $H_1 : P \neq a$: $P.V = P[X \leq x] + P[X > n - x]$

وكون X متغيراً ثنائياً فإن كثافته الاحتمالية تعطى تحت صحة H_0 بالشكل :

$$f_X(\mathrm{x}) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} P_a{}^i (1 - p_a)^{n-i}; i = 0,1,2,3, \dots n$$

ومنه :

$$P.V = \sum_{i=0}^{x} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} P^i (1-P)^{n-i} + 1 - \sum_{i=0}^{n-x} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{i}} P^i (1-P)^{n-i}$$

وكحالة خاصة إذا كانت P=0.5 فإن :

$P.V = 2P[X \leq x]$ لأن $P[X > n - x] = P[X \leq x]$

- وفي حالة الاختبار من طرف واحد , وهو الأيمن : اي $P \leq a$: H_0 مقابل $H_1: P > a$ فإن مستوى المعنوية المشاهد يحسب من :

$$P.V = P[X > n - x] = 1 - P[X \leq n - x]$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{n-x} \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i}$$

- وفي حالة الاختبار من طرف أيسر : أي $P \geq a$: H_0 مقابل $H_1 : P < a$

فإن مستوى المعنوية المشاهد يحسب من :

$$P.V = P[X \leq x] = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i}$$

2) من أجل العينة كبيرة الحجم أي (n>20) : فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي المقرّب من توزيع ذي الحدين ، ومن المعلوم أن متوسط توزيع ذي الحدين يساوي $\mu = nP$ ؛ (P احتمال النجاح) وتباينه $\sigma^2 = nP(1-P)$. وعليه يكون اختبار فرضية العدم بواسطة المتغير المعياري : $Z_0 = \frac{X-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$ حيث $Z \sim N(0,1)$. ولكن كون توزيع ذي الحدين توزيع منفصل وأن التوزيع الطبيعي توزيع متصل ، فإن الاختبار يمكن تصحيحه لحالة الاستمرار بإضافة أو طرح القيمة 0.5 من القيمة X المشاهدة . وبالتالي :

$Z_0 = \frac{X \pm 0.5 - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$ حيث تضاف القيمة 0.5 إذا كانت X<nP ، وتطرح القيمة 0.5 إذا كانت X>nP .

2-5- المقارنة , والقرار :

من أجل الاختبار بعينة صغيرة الحجم ، إذا كان P.V أقل من مستوى معنوية الاختبار $\propto$ أو يساويه فإنه يرفض H_0 ويقبل H_1 ، وإذا كان P.V أكبر من $\propto$ فإنه يقبل H_0 ويرفض H_1.

ومن أجل الاختبار بعينة كبيرة الحجم ، نقارن Z_0 بالعدد المقابل للاحتمال $\propto$ و ذلك من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (جدول رقم (1)) ، فإذا وقعت القيمة الحسابية Z_0 في

منطقة الرفض، فإنه يرفض فرض العدم , ويقبل الفرض البديل ، وإلا فإنه يقبل فرض العدم، ويرفض الفرض البديل . ويمكن بالمقابل حساب مستوى المعنوية المشاهد في هذه الحالة من العلاقة $P.V = P[Z \geq Z_0]$ إذا كان الاختبار من طرف أيمن أو $P.V = P[Z \leq Z_0]$ إذا كان الاختبار من الطرف الأيسر أو $P.V = 2P[Z \geq Z_0]$ إذا كان الاختبار من الطرفين .

ثم نقارن P.V مع مستوى المعنوية $\propto$ فإذا كان :

$P.V \leq \propto$ فهذا يعني رفض H_0 وقبول H_1 وإذا كان $P.V > \propto$ فهذا يعني قبول H_0 ورفض H_1.

2-6- أمثلة محلولة :

مثال (2-1) : في دراسة حول عدم الارتياح في العمل ، وأثر ذلك في الرجال ، والنساء ، تم توجيه السؤال عن عدم الراحة في العمل لعينة مؤلفة من 16 رجلاً وامرأةً ، فكانت الأجوبة كالتالي : 3 رجال و 13 امرأة بأنهن غير مرتاحات بالعمل . اختبر أن الرجال أقل شعوراً بعدم الراحة بالعمل من النساء ، وذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

الحل :

لتكن P نسبة الرجال غير المرتاحين بالعمل ، فتكون (1-P) نسبة النساء غير المرتاحات بالعمل .

وتكون فرضية العدم : $H_0: P \geq 0.5$ والفرضية البديلة $H_1: P < 0.5$ فالاختبار من الطرف الأيسر .

وبملاحظة أن n=16 ، فهنا الاختبار بعينة صغيرة الحجم ، ولدينا X=3 على الأكثر بالنسبة للرجال . ومستوى المعنوية المشاهد يكون :

$$P.V = P[X \leq 3] = \sum_{i=0}^{3} \binom{16}{i} (\frac{1}{2})^i (\frac{1}{2})^{16-i} = \sum_{i=0}^{3} \binom{16}{i} (\frac{1}{2})^{16} = 0.0106$$

(حيث إن الاحتمال يتم حسابه من جدول توزيع ذي الحدين المرفق جدول رقم (5)) .

وكون مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ وبمقارنة P.V=0.0106 مع $\propto$ نجد أن $P.V<\propto$ وبالتالي يرفض H_0 ويقبل H_1، أي هناك دلالة إحصائية بأن نسبة غير المرتاحين بالعمل لدى الرجال أقل مما هي عليه لدى النساء .

مثال (2-2) : في دراسة إحصائية حول وجود التفائل بالحياة عند طلاب المرحلة الجامعية الأخيرة ، تم سؤال عينة عشوائية من 60 طالباً وطالبة ، فأجاب 15 منهم أنهم متفائلون بالحياة ، بينما أجاب الباقون بعدم تفاؤلهم بالحياة أبداً . وإذا كان متوقعاً أن يكون هناك متفائل واحد مقابل ثلاثة غير متفائلين .

فالمطلوب : اختبر عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ومستوى المعنوية $\propto = 0.01$ بعد النسبة المتوقعة عن نتيجة العينة المشاهدة .

الحل :

لتكن p نسبة الطلاب ، والطالبات المتفائلين بالحياة . فتكون 1-p نسبة الطلاب ، والطالبات غير المتفائلين بالحياة . وتكون فرضية العدم من الشكل : $H_0: P \geq 0.25$ والفرضية البديلة: $H_1: P < 0.25$.

وكون حجم العينة n=60 أكبر من 20، عندئذ يستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين .

ويكون : $\mu = nP = (60)(0.25) = 15$

$$\sigma^2 = nPq = (60)(0.25)(0.75) = 11.25 \Rightarrow \sigma = 3.354$$

وقيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0، تكون من الشكل : $Z_0 = \frac{x \pm 0.5 - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$

هنا x=15 و nP=15 وبالتالي لانضيف ، ولا نطرح 0.5 وبالتالي :

$Z_0 = \frac{x-nP}{\sqrt{nP(1-P)}} = \frac{15-15}{3.354} = 0$ ثم نحسب مستوى المعنوية المشاهد من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (1) كالتالي :

$P.V = P[Z < Z_0] = P[Z < 0] = 0.5$ وبالمقارنة مع $\propto = 0.05$ أو $\propto = 0.01$

نجد ان P.V>$\propto$

و يستدل من هذا على قبول H_0 ورفض H_1. أي أن نسبة الطلاب والطالبات المتفائلين بالحياة هي فعلاً لا تختلف كثيراً عما كان متوقعاً ، وسائداً من قبل أي بنسبة 25% .

2-7- تمرينات غير محلولة :

1) في بلد معين ساد الاعتقاد بأن نسبة الإصابة بمرض معين لا تزيد عن 6% من أفراد المجتمع . أخذت عينة عشوائية من 32 حالة ، فوجد أن من بينهم 4 حالات مصابة بالمرض ، اختبر بمستوى % 5 من المعنوية ، بأن نسبة الإصابة بالمرض في المجتمع تفوق ما كان يعتقد .

2) في دراسة لتوحيد الزي الجامعي للطالبات أفادت 13 طالبة في عينة عشوائية من 18 طالبة بضرورة ذلك في حين رفضت بقية الطالبات في العينة توحيد الزي بأية طريقة . هل يمكن القول : إن إجابات طالبات العينة تمثل المجتمع الذي تم اختيارهن منه ، وذلك بمستوى معنوية $\propto = 0.01$.

3) أوضحت عينة عشوائية من 15 بقالية في منطقة معينة أن 3 منها تبيع نوعاً معيناً من المنظفات . هل يمكن الادعاء عند مستوى المعنوية 0.05 أن نسبة البقاليات التي تبيع هذا النوع من المنظفات يزيد عن 0.10 .

الفصل الثالث

اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق

3–1– مفهوم الاختبار

3–2– متطلبات الاختبار وشروطه

3–3– فرضيات الاختبار

3–4– إجراء الاختبار

3–5– المقارنة ، والقرار

3–6– أمثلة محلولة

3–7– ملاحظات ، وأمثلة محلولة

3–8– تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق (التطابق)

Chi – square Goodness of Fit Test

3-1- مفهوم الاختبار : كثيراً ما يواجه الباحث بمتغيرات تحتوي عدداً من الفئات أو التصنيفات تزيد على اثنين ، مثل :

- متغير الحالة الاجتماعية (متزوج – أعزب – مطلق – أرمل)
- متغير المستوى التعليمي (أساسي – ثانوي – جامعي – ما فوق الجامعي)
- متغيرات السلوك (دائماً – غالباً – أحياناً – نادراً – أبداً – بدون رأي)

تسمى مثل هذه المتغيرات بالمتغيرات الفئوية ، وهي أشمل من المتغيرات الثنائية . وهذه المتغيرات قد يتم تقسيمها بشكل ثنائي (مثل : متغير المستوى التعليمي : مستوى التعليم دون الجامعي ، ومستوى التعليم فوق الجامعي) . وقد تكون المتغيرات الفئوية اسمية ، مثل : متغير الحالة الاجتماعية ، ومتغير اللون ، وقد تكون المتغيرات الفئوية رتبية مثل متغير المستوى التعليمي أو متغيرات الميول ، والسلوك ، وقد تكون في الأصل مجالية أو نسبية تم تقسيمها إلى فئات أو أصناف معينة لتصبح متغيرات رتبية ، مثل : متغير العمر الذي يمكن تقسيمه إلى فئات عمرية أو متغير الدرجات الذي يمكن تحويله إلى تقديرات .

يستخدم اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق في معرفة إمكانية توافق التكرارات الملاحظة لكل فئة أو صنف من فئات المتغير الفئوي مع ما هو متوقع لها .

3-2- متطلبات الاختبار وشروطه: يتطلب هذا الاختبار الشروط الآتية :

1) أن تكون بيانات العينة عشوائية ، ومستقلة .

2) أن تنتمي البيانات لفئات أو أصناف ، ولا يهم إذا كانت هذه الفئات اسمية أو رتبية.

3) أن تكون الفئات أو الأصناف شاملة ، وغير متداخلة .

3-3- فرضيات الاختبار : إذا كان هناك عدد K من الفئات غير المتداخلة للمتغير العشوائي الفئوي ، وكانت نسبة الحالات التي تنتمي إلى الفئة i هي P_i حيث i=1,2,...,K عندئذ : فرضية العدم : $H_0: P_i = a_i; i = 1,2, \dots, K$

والفرضية البديلة : $H_1: P_i \neq a_i; i = 1,2, \dots, K$

وهو اختبار من الطرفين .

وكحالة خاصة : إذا كانت النسبة متساوية لكل الفئات فإن $H_0: P_i = \frac{1}{K}; i = 1,2,..,K$

مقابل : $H_1: P_i \neq \frac{1}{K}; i = 1,2,..,K$

4-3- إجراء الاختبار : إذا كان n يمثل العدد الكلي للحالات ، وكانت نسبة الحالات التي تنتمي إلى الفئة i هي P_i ؛ فإن العدد المتوقع للحالات (التكرار المتوقع) في الفئة i هو : $E_i = nP_i$ حيث i=1,2,...,K . ويقابل هذا العددَ المتوقعَ عددٌ مشاهدٌ (التكرار المشاهد) من العينة يساوي O_i لكل فئة i بحيث إن : $\sum_{i=1}^{K} O_i = n$ وبمقارنة التكرار المشاهد مع التكرار المتوقع الناظر له في كل فئة i ، فإن اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق يكون على الشكل التالي : $x_0^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ أي أن الاختبار يساوي مجموع مربع فروق التكرار المشاهد من التكرار المتوقع مقسوماً على التكرار المتوقع . فإذا كان التوافق كبيراً بين التكرار المشاهد ، والتكرار المتوقع في كل فئة i فإن الفرق $(O_i - E_i)$ يكون صغيراً ، وعليه تكون قيمة x^2 صغيرة ، والعكس . وبشكل عام ، فإنه كلما كانت قيمة x^2 كبيرة زاد التأكيد على أن العدد الملاحظ (المشاهد) لم يأت من مجتمع يحكمه فرض العدم ، وتتبع قيمة x_0^2 توزيع كاي – تربيع بدرجة من الحرية $\nu = K - 1$.

وفي الحالة الخاصة : إذا كانت النسبة P_i متساوية لكل فئات i حيث i=1,2,..,K فإن التكرار المتوقع E_i يكون من الشكل $E_i = \frac{n}{K}$، i=1,2,...,K

3-5- المقارنة ، والقرار : إذا كانت القيمة العددية لإحصائية الاختبار x_0^2 أكبر من القيمة النظرية لاحصائية الاختبار ، والمحسوبة من جدول توزيع كاي – تربيع (3) عند مستوى المعنوية $\propto$ ودرجة الحرية $\gamma = K - 1$ ، عندئذ يرفض فرض العدم H_0 ويقبل الفرض البديل H_1 بعدم تساوي نسبة الحالات لكل فئة بما هو متوقع لها . أما إذا كانت x_0^2 أقل أو تساوي نظيرتها الجدولية عند مستوى المعنوية $\propto$ بـ $\gamma = K - 1$ درجة من الحرية ، فإنه يقبل فرض العدم بتطابق التكرار المشاهد مع التكرار المتوقع لكل فئة ويرفض الفرض البديل.

يمكن أيضاً حساب مستوى المعنوية المشاهد PV من العلاقة $PV = P[X^2 \geq x_0^2]$ عند درجة الحرية $\gamma = K - 1$ ثم يقارن مع مستوى المعنوية $\propto$ ويكون القرار كالتالي : إذا كانت : $PV \leq \propto$ فإنه يرفض H_0 ويقبل H_1 وإذا كانت $PV > \propto$ فإن يقبل H_0 ويرفض H_1 .

3-6- أمثلة محلولة :

مثال (3-1): تم رصد عدد الحوادث المرورية اليومية الحاصلة في منطقة معينة خلال فترة زمنية معينة ، وكان توزيع هذه الحوادث على أيام الأسبوع كالتالي :

الأيام	SAT	Sun	Mon	Tu	WE	ThE	FRI	المجموع
عدد الحوادث	18	22	16	20	20	24	20	n=140

والمطلوب : اختبر عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ تماثل نسبة عدد الحوادث لأيام الأسبوع.

الحل :

إن فرضـــية العـــدم هـــي $H_0: P_i = \frac{1}{7}$ مقابـــل $H_0: P_i \neq \frac{1}{7}$ لكـــل i=1,2,3,4,5,6,7

والتكرار المتوقع لعدد الحوادث لكل يوم يكون (تحت صحة H_0) من الشكل :

$E_i = nP_i = \frac{n}{K} = \frac{140}{7} = 20$ من أجل i=1,2,3,4,5,6,7

وعليه فإن قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0:

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} =$$

$$0.2 + 0.2 + 0.8 + 0 + 0 + 0.8 + 0 = 2$$

والقيمة النظرية لإحصائية الاختبار عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

ودرجة الحرية $\gamma = K - 1 = 7 - 1 = 6$ ومن جدول توزيع كاي – تربيع نحسب

$$x_{1-\propto}^2(\gamma) = x_{1-0.01}^2(6) = x_{0.99}^2(6) = 16.812$$

وبمقارنة $x_0^2 = 2$ مع $x_{1-\propto}^2(\gamma) = 16.812$ نجد أن $x_0^2 < x_{1-\propto}^2(\gamma)$

وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أن نسبة عدد الحوادث لكل أيام الأسبوع متساوية .

ويستدل من ذلك على أن نسبة عدد الحوادث لا تتأثر بيوم معين من أيام الأسبوع ، وأن أية فروق في نسبة عدد الحوادث بين أيام الأسبوع هي مجرد صدفة ليس غير .

مثال (3–2) :

ليكن X يدل على عدد جزيئات $\propto$ المنبعثة من الباريوم (133) في $\frac{1}{10}$ من الثانية ، ولاحظنا 50 فترة مشاهدة لـــ X . فحصلنا من خلال عداد غايغر على مايلي :

7	4	3	6	4	4	5	3	5	3
5	5	3	2	5	4	3	3	7	6
6	4	3	11	9	6	7	4	5	4
7	3	2	8	6	7	4	1	9	8
5	4	9	3	9	7	7	9	3	10

وصنّفنا الخرج وفق مايلي :

$$A_1 = \{0,1,2,3\}; A_2 = \{4\}; A_3 = \{5\}; A_4 = \{6\}; A_5 = \{7\};$$
$$A_6 = \{8,9,10,\dots\}$$

والمطلوب : هل عدد الجزيئات X يتوزع وفق بواسون عند مستوى المعنوية 0.05 ؟

الحل :

$$H_1 : X \not\sim Poi(\mu) \quad ; \quad H_0 : X \sim Poi(\mu)$$

وكون μ مجهولة ، فنقدّرها من مشاهدات العينة :

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_1^n X_i}{n} = \frac{7+4+\cdots+3+10}{50} = 5.34$$

$$X \sim Poi(\mu) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \; ; x = 0,1,2,\dots$$

$$= \frac{(5.34)^x}{x!} e^{-5.34} \; ; x = 0,1,2,\dots$$

لنحسب النسب المتوقعة من هذه الدراسة تحت صحة H_0 :

$$P_1 = P(A_1) = P[X \le 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]$$

$$= e^{-5.34} + (5.34).e^{-5.34} + \frac{(5.34)^2}{2} e^{-5.34} + \frac{(5.34)^3}{6} e^{-5.34} = \boxed{0.22}$$

$$P_2 = P(A_2) = P[X = 4] = \frac{(5.34)^4}{4!} e^{-5.34} = \boxed{0.162}$$

$$P_3 = P(A_3) = P[X = 5] = \frac{(5.34)^5}{5!} e^{-5.34} = \boxed{0.174}$$

$$P_4 = P(A_4) = P[X = 6] = \frac{(5.34)^6}{6!} e^{-5.34} = \boxed{0.154}$$

$$P_5 = P(A_5) = P[X = 7] = \frac{(5.34)^7}{7!} e^{-5.34} = \boxed{0.118}$$

$$P_6 = P(A_6) = P[X \ge 8] = 1 - P(X \le 7) = 1 - 0.828 = \boxed{0.172}$$

والتكرار المتوقع : حيث n=50 ؛ i=1,2,3,4,5,6 ؛ $E_i = nP_i$

$E_1 = (50)(0.22) = 11$; $E_2 = (50)(0.162) = 8.1$

$E_3 = (50)(0.174) = 8.7$; $E_4 = (50)(0.154) = 7.7$

$E_5 = (50)(0.118) = 5.9$; $E_6 = (50)(0.172) = 8.6$

ومنه لدينا النتائج التالية :

الأصناف	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	المجموع
O_i	9	7	5	7	9	13	50
E_i	8.1	8.7	7.7	5.9	8.6	11	≈ 50

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(13-11)^2}{11} + \frac{(9-8.1)^2}{8.1} + \frac{(7-8.7)^2}{8.7} + \frac{(5-7.7)^2}{7.7} + \frac{(7-5.9)^2}{5.9} + \frac{(9-8.6)^2}{8.6} = \boxed{1.967}$$

ثم نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من :

$$x_{1-\alpha}^2(\gamma) = x_{1-0.05}^2(K-1-1) = x_{0.95}^2(6-2) = x_{0.95}^2(4) = \boxed{9.49}$$

وبمقارنة $x_0^2 = 1.967$ مع $x_{1-\alpha}^2(\gamma) = 9.49$ نجد أن $x_0^2 < x_{1-\alpha}^2(\gamma)$

وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 أي نقبل أن عدد الجزيئات X المشاهدة تتوافق (تتطابق) مع توزيع بواسون .

مثال (3-3) :

تنافست ثمانية أحزاب معينة في دولة معينة في الفوز بمقاعد البرلمان في اقتراع عام في ذلك البلد . الجدول التالي يبيّن نسبة عدد المقاعد التي توقعها المراقبون قبل الاقتراع وعدد المقاعد التي حصل عليها كل حزب بعد الاقتراع .

الحزب	1	2	3	4	5	6	7	8	المجموع
النسبة	0.20	0.20	0.15	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05	100%
عدد المقاعد	92	105	86	71	33	59	19	35	n=500

اختبر وبمستوى معنوية 5% تطابق توقعات المراقبين مع ما أفضت إليه نتائج الاقتراع .

الحل :

فرض العدم : بناءً على النسب المتوقعة لعدد المقاعد لكل حزب فإن فرض العدم يكون عل النحو التالي :

$H_0: P_1 = 0.20 \; ; \; P_2 = 0.20 \; ; \; P_3 = 0.15 \; ; \; P_4 = 0.15 \; ; \; P_5 = 0.10 \; ;$

$P_6 = 0.10 \; ; \; P_7 = 0.05 \; ; \; P_8 = 0.05$

والفرض البديل لفرض العدم هو أن P_i لا تساوي النسب المتوقعة المبينة في فرض العدم $i=1,2,...8$ وكون أن العدد الكلي لعدد مقاعد البرلمان هو 500 (مجموع عدد المقاعد) فإن العدد المتوقع E_i لمقاعد كل حزب بموجب النسب المتوقعة في فرض العدم يساوي :

$E_1 = nP_1 = (500)(0.20) = 100 \; ; \; E_2 = nP_2 = (500)(0.20) = 100 \; ;$

$E_3 = nP_3 = (500)(0.15) = 75 \; ; \; E_4 = nP_4 = (500)(0.15) = 75 \; ;$

$E_5 = nP_5 = (500)(0.10) = 50 \; ; \; E_6 = nP_6 = (500)(0.10) = 50 \; ;$

$E_7 = nP_7 = (500)(0.05) = 25 \; ; E_8 = nP_8 = (500)(0.05) = 25 \; ;$

وقيمة إحصائية الاختبار :

$$x_0^2 = \frac{(92-100)^2}{100} + \frac{(105-100)^2}{100} + \frac{(86-75)^2}{75} + \frac{(71-75)^2}{75} + \frac{(33-50)^2}{50} + \frac{(59-50)^2}{50} + \frac{(19-25)^2}{25} + \frac{(35-25)^2}{25} = \boxed{15.56}$$

وباستخدام جدول كاي – تربيع و بـ $\gamma = K - 1 = 8 - 1 = 7$ درجة من الحرية ، ومستوى المعنوية $\propto = 0.05$ فإن القيمة الجدولية تساوي $x^2_{(7)} = 14.07$ وكون $x_0^2 > x^2_{(7)}$ فإنه يرفض فرض العدم ، ويقبل الفرض البديل . وبهذا يستدل بعدم تطابق نسب توقعات المراقبين لمقاعد كل حزب مع ما أفضت إليه نتائج الاقتراع .

مثال (3-4) : يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 223 موظفاً في اختبار للذكاء، وبما أن المتوسط الحسابي ، والانحراف المعياري لمجتمع الدراسة مجهولان ، فقد تم تقديرهما من العينة ، حيث كان $\bar{X} = 74.47$ والانحراف المعياري S=19.658 . والمطلوب : هل يمكن القول : إن هذه العينة سحبت من مجتمع توزيع طبيعي ، وذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ؟

فئة الدرجة	[←,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[	[90, 100[	[100, 110[	[110, →]
عدد الموظفين	10	12	17	37	55	51	34	5	2

الحل :

إن فرضية العدم : $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: X \nsim N(\mu, \sigma^2)$ وهنا يمكن أن نستخدم مقدّرات μ و σ^2 حيث $\hat{\mu} = \bar{X} = 74.47$ و $\hat{\sigma} = S = 19.658$.

إن احتمال الوقوع في أية فئة من الفئات للمتغير X الذي يمثل درجات الموظفين هو التكرار النسبي المتوقع بها ، أما في حالة التوزيعات المتصلة كالتوزيع الطبيعي ، هذا الاحتمال تمثله المساحة تحت المنحني الطبيعي بين حدي الفئة .

لذلك ، نحسب المساحة قبل 40 ثم من 40 إلى 50 ثم من 50 إلى 60 وهكذا ... حتى المساحة أكبر من 110 . ولإنجاز هذا الحساب نحول من متغير طبيعي إلى متغير طبيعي معياري مثل :

$$Z_1 = \frac{40-74.47}{19.658} = -1.75 \ ; \ Z_2 = \frac{50-74.47}{19.658} = -1.24 \ ;$$

$$Z_3 = \frac{60-74.47}{19.658} = -0.74 \ ; \ldots$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نحسب الاحتمالات الموافقة للفئات، وحسب قيم Z المعيارية الناتجة :

$$P[Z < -1.75] = 0.0401 \ ; \ P[40 \leq X \leq 50] =$$

$$P[-1.75 \leq Z \leq -1.24] = P[Z < -1.24] - P[Z < -1.75]$$

$$= 0.1075 - 0.0401 = 0.0674$$

وهكذا ... .

وبعد حساب الاحتمالات المتوقعة لكل فئة ، يمكننا حساب التكرار المتوقع لكل فئة وفق العلاقة $E_i = nP_i = (223)P_i$; i=1,2,...,9=K فيكون مثلاً :

$$E_1 = nP_1 = (223)(0.0401) = 8.94 \ ;$$
$$E_2 = nP_2 = (223)(0.0674) = 15.03, \ldots$$

والجدول التالي يلخص كل النتائج الحاصلة أعلاه :

الفئات	O_i	Z_i	P_i	E_i
[← , 40[	10	$Z_1 = -1.75$	0.0401	8.94
[40 , 50[	12	$Z_2 = -1.24$	0.0674	15.03
[50 , 60[	17	$Z_3 = -0.74$	0.1221	27.23
[60 , 70[	37	$Z_4 = -0.23$	0.1794	40.01
[70 , 80 [	55	$Z_5 = 0.28$	0.2013	44.89
[80 , 90[	51	$Z_6 = 0.79$	0.1749	39.00
[90 , 100[	34	$Z_7 = 1.30$	0.1180	26.31
[100 , 110[	5	$Z_8 = 1.81$	0.0617	13.76
[110 , →]	2	-	0.0351	7.83
المجموع	n=223		1	223

ثم نحسب بعدئذ القيمة الحسابية لإحصائية الاختبار تحت صحة H_0:

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(10-8.94)^2}{8.94} + \frac{(12-15.03)^2}{15.03} + \cdots + \frac{(2-7.83)^2}{7.83} = 22.94$$

ثم نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار اعتماداً على مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ والاختبار من جهة اليمين لتوزيع كاي تربيع بدرجة من الحرية

$\gamma = (K-1) - 2 = (9-1) - 2 = 6$ (حيث طرحنا هنا 2 أيضاً من درجة الحرية (K-1) لأننا قدّرنا من العينة وسيطين μ و σ) وبالتالي يكون لدينا :

$$x^2_{1-\propto}(\gamma) = x^2_{1-0.05}(6) = x^2_{0.95}(6) = 12.592$$

وبمقارنة $x_0^2 = 22.94$ مع $x^2_{1-\propto}(\gamma) = 12.592$ نجد أن $x_0^2 > x^2_{1-\propto}(\gamma)$

وبالتالي نرفض H_0 ونقبل H_1 أي أن درجات الذكاء عند الموظفين لا تتبع التوزيع الطبيعي .

3-7- ملاحظات :

1- إن تقريب توزيع الإحصائية x^2 بتوزيع كاي – تربيع النظري إذا كانت التكرارات المتوقعة كبيرة ، ولكن إذا كانت التكرارات المتوقعة صغيرة ، فالتوزيع لن يكون صحيحاً ، وهنا سنتبع قاعدة الإحصائي كوكران ، ونعد التقريب مقبولاً إذا لم تكن هناك تكرارات متوقعة E_i؛ i=1,2,...,K أقل من واحد وكانت نتيجة عدد التكرارات المتوقعة التي تقل عن 5 لا تزيد على 20% .

وفي حالة عدم تحقق ذلك يمكن محاولة التخلص من المشكلة بالتضحية ببعض التصنيفات المتجاورة بدمجها ببعض حتى تزول المشكلة .

2- أحياناً عند حساب الاحتمالات P_i نضطر لتقدير بعض الوسطاء كالمتوسط الحسابي أو التباين مثلاً ، فإذا حدث ذلك ، يجب طرح درجة الحرية مقابل كل وسيط يتم تقديره . فمثلاً إذا تم تقدير عدد r من الوسطاء ، تكون درجات الحرية لتوزيع كاي – تربيع هي $\nu = K - 1 - r$، واختبار كاي – تربيع لجودة التوافق يستخدم الطرف الأيمن .

مثال (3-5) : يمثل البيان التالي عدد الحوادث الأسبوعية التي وقعت على إحدى الطرق خلال 100 أسبوع متتالية :

عدد الحوادث الأسبوعية	0	1	2	3	(4 فأكثر)
عدد الأسابيع	45	35	12	5	3

هل يمكن القول : إن عدد الحوادث الأسبوعية يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادث واحد كل أسبوع ، وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ؟

الحل :

لدينا فرضية العدم :

H_0 : (عدد الحوادث الأسبوعية يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادثة واحدة أسبوعياً)

H_1 : (عدد الحوادث الأسبوعية لا يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادث واحد كل أسبوع)

وإذا كان X يمثل المتغير الدال على عدد الحوادث الأسبوعي ، وتحت صحة H_0 فإن:

$$X \sim Poi(\mu = 1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} = \frac{1}{x!e};\ x = 0,1,2,3,4,\ldots$$

$$x = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{e} = 0.37;\ x = 1 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{e} = 0.37;$$

$$x = 2 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{2e} = 0.185\ ;\ x = 3 \Rightarrow P_4 = \frac{1}{3!e} = 0.062;$$

$$x \geq 4 \Rightarrow P_5 = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{x!e} = 0.013$$

والتكرار المتوقع : $E_i = nP_i$ ، أي من أجل n=100 يكون :

$$E_1 = \mathrm{nP_1} = (100)(0.37) = 37 = E_2\ ;$$

$$E_3 = \mathrm{nP_3} = (100)(0.185) = 18.5\ ; E_4 = \mathrm{nP_4} = (100)(0.062) = 6.2$$

$$E_5 = \mathrm{nP_5} = (100)(0.013) = 1.3$$

والجدول التالي يلخص هذه النتائج :

X_i (عدد الحوادث الأسبوعية)	0	1	2	3	4 فأكثر)
التكرار المشاهد O_i	45	35	12	5	3
النسبة المتوقعة P_i	0.37	0.37	0.185	0.062	0.013
التكرار المتوقع E_i	37	37	18.5	6.2	1.3

ويلاحظ هنا أن التكرار المتوقع الأخير أقل من 5 لذلك نضيفه مع التكرار المشاهد إلى تكرارات الفئة السابقة لها ، فنحصل بالتالي على الجدول التالي :

	0	1	2	(3 فأكثر)
O_i	45	35	12	8
P_i	0.37	0.37	0.185	0.075
E_i	37	37	18.5	7.5

ومنه تكون قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(45-37)^2}{37} + \frac{(35-37)^2}{37} + \frac{(12-18.5)^2}{18.5} + \frac{(8-7.5)^2}{7.5} = \boxed{4.15}$$

ومن أجل $\alpha = 0.05$ و $\gamma = K - 1 = 4 - 1 = 3$ نحسب من جدول x^2 القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $x_{1-\alpha}^2(\gamma) = x_{0.95}^2(3) = 7.84$ أي أكبر من x_0^2 ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 وهذا يستدل بأن عدد الحوادث الأسبوعية يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادث واحد أسبوعياً .

مثال (3-6) : يمثل البيان التالي عدد الحرائق الشهرية التي وقعت في إحدى المدن خلال الستين شهراً الماضية :

عدد الحرائق الشهرية	0	1	2	3	4
عدد الشهور	28	17	10	3	2

هل يمكن القول : إن عدد الحرائق الشهرية يتبع توزيع بواسون وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$ ؟

الحل :

ليكن X المتغير الدال على عدد الحرائق الشهرية عندئذ :

$$H_1: X \nsim Poi(\mu) \text{ مقابل } H_0: X \sim Poi(\mu)$$

وتحت صحة H_0 :

$$X \sim Poi(\mu) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \; ; \; x = 0,1,2,3,4$$

وكون μ مجهولاً يمكننا تقديره من البيان : .

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{1}^{k} f_i} = \frac{1}{60}[0 + 17 + 20 + 9 + 8] = \boxed{0.9}$$

ومنه $P_i = f(x_i) = P[X = x_i] = \frac{(0.9)^{x_i}}{x_i!} e^{-0.9}$; $x_i = 0,1,2,3,4, \ldots$

i=0,1,2,3,4,...

ومنه نجد :

(X_i عدد الحرائق الشهرية)	0	1	2	3	4
(O_i التكرار المشاهد)	28	17	10	3	2
(P_i النسبة المتوقعة)	0.41	0.37	0.16	0.049	0.011
(E_i التكرار المتوقع)	24.6	22.2	9.6	3.0	0.6

$$(E_i = nP_i = (60)P_i \; ; \; i = 1,2,3,4)$$

ويلاحظ أن التكرارات المتوقعة الأخيرة كلها أقل من 5 ؛ لذلك نقوم بتجميعها مع تكرارات الفئة السابقة فنحصل بالتالي على :

X_i	0	1	(2 فأكثر)
O_i	28	17	15
E_i	24.6	22.2	13.2

و تكون قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{k=3} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(28-24.6)^2}{24.6} + \frac{(17-22.2)^2}{22.2} + \frac{(15-13.2)^2}{13.2} = \boxed{1.933}$$

وعند مستوى المعنوية : $\alpha = 0.10$ و $\gamma = K - 1 - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$ ومن جدول كاي تربيع نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار :

$x_0^2 < x_{1-\alpha}^2(\gamma)$ نجد أن x_0^2 وبالمقارنة مع $x_{1-\alpha}^2(\gamma) = x_{0.90}^2(1) =$ 2.71

وهذا يستدل قبول H_0 ورفض H_1 أي عدد الحرائق الشهرية يتبع توزيع بواسون .

مثال (3-7):

يمثل البيان التالي أعمار مجموعة من المصابيح (n=50) بالسنين :

0.01	0.09	0.37	0.72	0.34	1.05	2.21	3.5	4.9	2.34
1.64	0.81	1.56	1.25	3.61	4.71	0.07	0.44	0.98	1.49
2.40	3.82	0.23	0.46	0.91	1.37	2.51	3.94	0.15	0.47
1.69	2.60	0.12	0.57	1.72	2.71	0.14	0.58	1.83	2.91
0.26	0.66	1.91	2.84	0.28	0.69	1.12	0.33	0.77	1.34

والمطلوب: هل عمر المصابيح يتبع التوزيع الأسي، وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$؟

الحل :

لنصنّف أولاً الأعمار ضمن خمس فئات وطول فئة كل واحد :

فئات الأعمار	[0, 1[	[1, 2[	[2, 3[	[3, 4[	[4 ,5]
التكرار المشاهد O_i	24	12	8	4	2
مركز الفئة i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$

وتكون فرضية العدم من أجل X المتغير الدال على عمر المصباح :

$H_0: X \sim exp(\lambda)$ مقابل $H_1: X \nsim exp(\lambda)$

وتحت صحة H_0 يكون : $x > 0$; $X \sim exp(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$

و: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ ;\ x > 0$

ولكن λ مجهول ، ويمكن تقديره من البيان حيث :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{\sum f_i}{\sum f_i(x_i)} = \frac{50}{(24)\left(\frac{1}{2}\right)+(12)\left(\frac{3}{2}\right)+(8)\left(\frac{5}{2}\right)+(4)\left(\frac{7}{2}\right)+(2)\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \boxed{0.6} \quad \Rightarrow F_X(x) = P[X \le x] = 1 - e^{-0.6x}$$

$$P[a \le X \le b] = P[X \le b] - P[X \le a] = F(b) - F(a) =$$

$$e^{-0.6(a)} - e^{-0.6(b)}$$

وباستخدام الصيغة الأخيرة يمكن حساب P_i الموافقة لكل فئة i ، فنحصل من أجل $(n=50)$ على :

الفئات	[0, 1[	[1, 2[	[2, 3[	[3, 4[	[4 ,5]
O_i	24	12	8	4	2
P_i	0.5	0.25	0.13	0.06	0.032
$E_i = nP_i$	25	12.5	6.5	3	1.6

وبالتالي نحصل على :

الفئات	[0, 1[	[1, 2[	[2, →[	
O_i	24	12	14	; $n=50$
E_i	25	12.5	11.1	

وقيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(24-25)^2}{25} + \frac{(12-12.5)^2}{12.5} + \frac{(14-11.1)^2}{11.1} = \boxed{0.82}$$

أي $x_0^2 = \boxed{0.82}$. والقيمة النظرية لإحصائية الاختبار تكون :

$$x_{1-\alpha}^2(\gamma) = x_{0.95}^2(1) = 3.84 \text{ حيث}$$

$(\gamma = K - 1 - 1 = 3 - 1 - 1 = 1)$ وبالمقارنة نجد أن $x_0^2 < x_{1-\alpha}^2(\gamma)$ أي نقبل H_0 ونرفض H_1 ويستدل من هذا أنّ عمر المصابيح يتوزع وفق التوزيع الأسي .

3-8- تمرينات غير محلولة :

1) تم سؤال 300 متسوق في سوق تجاري مركزي أي يوم من أيام الأسبوع الذي يفضل المتسوق فيه شراء حاجياته ، و كانت النتائج كما يلي :

اليوم	SAT	SUN	MON	TUE	WEN	THE	FRI	المجموع
عدد المتسوقين O_i	10	20	40	40	50	80	60	n=300

و المطلوب : عند مستوى المعنوية 0.05 =∝

هل تعني النتائج الحاصلة أن أيام الأسبوع متساوية من حيث الأفضلية في التسوق فيها ؟

2) قذفنا قطعة نقد 140 مرة , فحصلنا على 60 مرة للصورة و 80 مرة للكتابة, و المطلوب : عند مستوى المعنوية 0.05 =∝, هل يمكننا أن نقول : إن قطعة النقد متوازنة .

أعد السؤال من أجل *n=1000* و عدد الصور الحاصلة 460 و الكتابات 540 و ذلك عند مستوى المعنوية0.01 =∝ ثم عند 0.05 =∝.

3) يحدد في علم الوراثة أن بعض الصفات تورّث بنسبة 1 إلى 3 أي أن $\frac{1}{4}$ النسل على المدى الطويل سيتصف بصفة معينة , و ثلاثة أرباع سوف لا يتصف بهذه الصفة. و لقد

وجدنا من عينة من الحجم 9693 من ذباب الفواكه أن 1981 منها لها عيون بيضاء و 7712 لها عيون حمراء . و المطلوب : عند مستوى الأهمية $\propto = 0.05$, اختبر الفرضية التالية : نسبة الذباب ذي العيون البيضاء إلى الذباب ذي العيون الحمراء هي 1 إلى 3 .

4) من علم الوراثة نأخذ مسألة تصالب نوعين من البازلياء , فقد أحصى ماندل بذور النباتات كما في الجدول أدناه ؛ و تقول نظرية ماندل في الوراثة إن هذه التوافرات يجب أن تكون بنسبة 1 : 3 : 3 :9 أي ($\frac{9}{16}$ يجب أن يكون مستديراً و أصفر – $\frac{3}{16}$ يجب أن يكون مجعداً و أصفرَ – $\frac{3}{16}$ يجب أن يكون مستديراً و أخضرَ – $\frac{1}{16}$ يجب أن يكون مجعداً و أخضرَ) هل يمكننا القول من خلال بيانات هذا الجدول إنها تتلاءم مع نظرية ماندل ، و ذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$: •

الصنف	التكرار المشاهد O_i	التكرار المتوقع E_i	الفروق $O_i - E_i$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
مستدير وأصفر $\frac{9}{16}$	315	312.75	2.25	0.016
مجعد وأصفر $\frac{3}{16}$	101	104.25	-3.25	0.101
مستدير وأخضر $\frac{3}{16}$	108	104.25	3.75	0.135
مجعد و أصفر $\frac{1}{16}$	32	34.75	-2.75	0.218
المجموع	n=556	556		0.470

5) ألقينا قطعة نقد معدنية 200 مرة ، فظهر لدينا 115 صورة ، و 85 كتابة , اختبر الفرض القائل إن قطعة النقد غير متحيزة ، و ذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ثم $\propto = 0.01$؟

6) يعتقد أن عدد الجزيئات المنبعثة من مصدر إشعاعي يتوزع وفق بواسون بالوسيط $\mu = 2$ راقبنا عدد الجزيئات المنبعثة في 100 متتالية من فترة العشر ثواني و كانت النتائج كالتالي :

عدد الجزيئات	0	1	2	3	4	5 فأكثر
عدد الفترات الموافقة	11	30	25	20	10	4

و المطلوب : هل نقبل هذا الادعاء بأن التوزيع بواسوني لعدد الجزيئات المنبعثة عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$.

7) يعتقد أن حياة ناقل تتبع التوزيع الأسي بالوسيط $\lambda = 0.45$ سنة تم اختيار 50 ناقلاً من هذه النواقل ، و كانت النتيجة كالتالي :

مدة حياة الناقل	[0 , 1[	[1, 2[	[2, 3[	[3,→ [
التكرار المشاهد لعدد النواقل المعطلة	21	16	9	4

و المطلوب : هل تقبل بصحة الادعاء عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع

اختبار كولموغورف – سميرنوف للعينة الواحدة

4–1 – مفهوم الاختبار

4–2 – متطلبات الاختبار و شروطه

4–3 – فرضية العدم ، و الفرضية البديلة

4–4 – إجراء الاختبار

4–5 – المقارنة ، و القرار

4–6 – مقارنة الاختبار المدروس مع اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق

4–7 – تمرينات محلولة

4–8 – تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الرابع

اختبار كولموغورف – سميرنوف للعينة الواحدة

4-1- مفهوم الاختبار : إن هذا الاختبار يدرس جودة تطابق توزيع عينة عشوائية معينة مع توزيع نظري معين , لمعرفة فيما إذا كانت القيم الملاحظة للعينة تنتمي إلى التوزيع النظري ، والتوزيعات النظرية المعينة هي : التوزيع (المنتظم – الطبيعي – البواسوني – الأسي) .

ويعتمد الاختبار على إيجاد التوزيع التراكمي لتكرارات القيم الملاحظة للعينة S(x) , و مقارنته بالتوزيع التراكمي لهذه القيم بموجب التوزيع النظري المعين F(x) . وكلما كان الفرق بين F(x) و S(x) كبيراً كان ذلك أدعى إلى قبول عدم تطابق توزيع العينة مع التوزيع المعين . و في المقابل كلما كان الفرق بين F(x) و S(x) صغيراً كان تطابق توزيع العينة مع التوزيع المعين أمراً محققاً .

4-2- متطلبات الاختبار و شروطه :

1 – أن تكون بيانات العينة عشوائية ، و مستقلة عن بعضها البعض من توزيع يراد التعرف إليه .

2- أن يكون قياس البيانات رتبياً على الأقل .

4-3- فرضية العدم و الفرضية البديلة :

يتمثل فرض العدم في أن القيم الملاحظة من العينة تتبع توزيعاً نظرياً معيناً مثل : التوزيع المنتظم أو الطبيعي أو الأسي أو توزيع بواسون . فإذا كان S(x) هو التوزيع التراكمي للقيم

الملاحظة من العينة و F(x) هو التوزيع التراكمي للقيم بموجب التوزيع النظري المعين ، فإن فرض العدم يكون : H_0 : F(x) = s(x)

و الفرض البديل : قد يكون الفرض من اتجاهين : H_1 : F(x) ≠ S(x)

أو من اتجاه واحد من اليمين : H_1 : F(x) > S(x) (الاتجاه الموجب)

أو من اتجاه واحد من اليسار : H_1 : F(x) < S(x) (الاتجاه السالب) .

4-4 – إجراء الاختبار : يتوقف الاختبار على حساب قيم F(x) و S(x) بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل قيم البيانات في المجتمع ، و أن دالة الكثافة لـــ x هي f(x) و بالتالي من أجل أية قيمة x من قيم العينة ، فإن F(x) يساوي احتمال أن تكون قيم المتغير العشوائي X بموجب التوزيع المعين أقل أو تساوي x أي $F(x) = P[X \leq x]$

فإذا كان X توزيعاً منفصلاً ، فإن : $F(x) = \sum_{X \leq x} f(x)$

و إذا كان X توزيعاً منفصلاً ، فإن : $F(x) = \int_{X \leq x} f(x)dx$

و بالنتيجة لكل قيمة x من قيم العينة فإن التوزيع التراكمي للتكرارات الملاحظة S(x) يساوي $\frac{f^+}{n}$ حيث f^+ تمثل مجموع التكرارات للقيم التي أقل أو تساوي x و n يمثل العدد الكلي للتكرارات (مجموع التكرارات) .

فإذا كان r هو عدد القيم المختلفة للعينة فإنه و بالنسبة **للاختبار ذي الاتجاهين** فإن الفرق بين التوزيعين التراكميين يعطى بالعلاقة :

$$D = \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq r}[|S(X_i) - F(X_i)|]$$

و إذا كان التوزيع المعين هو التوزيع الطبيعي أو الأسي فإن قيمة D يمكن حسابها بالشكل التالي :

$$D = Max \left\{ \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq r}[|S(X_i) - F(X_i)|] , \underset{1 \leq i \leq r}{\mathrm{Max}} [|S(X_{i-1}) - F(X_i)|] \right\}$$

حيث $S(X_0) = 0$

و في حالة الاختبار من اليمين ، فإن : $D = Max_{1 \le i \le r}[S(X_i) - F(X_i)]$

أما في حالة الاختبار من اليسار ، فإن : $D = Max_{1 \le i \le r}[F(X_i) - S(X_i)]$

4-5 – المقارنة ، و القرار : نقارن القيمة الحسابية لـــ D مع القيمة الجدولية من جدول كولموغوروف للعينة الواحدة بحجم عينة n و مستوى معنوية $\propto$ و ذلك بعد تحديد طبيعة الاختبار (اختبار ذو اتجاه واحد أو ذو اتجاهين) و لتكن $D_n(\propto)$.

فإذا كانت $D > D_n(\propto)$ فإنه يرفض فرض العدم ، و يقبل الفرض البديل ، و يستدل من ذلك بعدم تطابق توزيع العينة مع التوزيع النظري المعيّن .

أما إذا كانت $D \le D_n(\propto)$ فإنه يقبل فرض العدم ، و يرفض الفرض البديل ، و يستدل بتطابق توزيع العينة مع التوزيع النظري المعيّن .

4-6 – مقارنة الاختبار المدروس مع اختبار كاي– تربيع لجودة التطابق :

بالمقارنة مع اختبار كاي تربيع لجودة التطابق فإن اختبار كولموغوروف – سميرنوف يعد الأفضل حيث :

اختبار x^2 لجودة التطابق	اختبار كولموغوروف – سميرنوف
1- يستعمل مع البيانات الاسمية أي لا يستفاد الفائدة الأكبر من قياس البيانات الأعلى قياساً من ذلك .	1- يستعمل البيانات الرتبية ، و المجالية ، و النسبية ، الأمر الذي يسمح بالاستفادة من القياس الأعلى للبيانات .
2- البيانات أو المجموعات تدمج عندما تكون التكرارات المتوقعة لها أقل من 5 .	2- لا تتم عملية الدمج هذه .
3- لا يصلح عندما يكون حجم العينة صغيراً جداً .	3- يصلح حتى لو كان حجم العينة صغيراً جداً .

4-7 تمرينات محلولة :

مثال (4-1) : إذا كانت تقديرات عشرة من الطلاب في صف معين هي :

ممتاز – مقبول – ممتاز – جيد جداً – جيد جداً – ممتاز – جيد جداً – جيد جداً – ممتاز – جيد جداً . وحيث أن التقديرات المتاحة و رمزها هي : ممتاز (5) , جيد جداً (4), جيد (3), مقبول (2), راسب (1) و المطلوب : اختبر و بمستوى المعنوية 0.05 أن تقديرات الطلاب تتبع التوزيع المنتظم بالنسبة للقيم 1,2,3,4,5 .

الحل :

إذا كان X يمثل التقديرات الممنوحة للطلاب , فإن الجدول التالي يوضح التكرار f المقابل لـــ x :

x	f	f^+	$S(x)=\frac{f^+}{n}$	f(x)	F(x)	S(x)-F(x)	| S(x)-F(x)|
1	0	0	0	0.2	0.2	-0.2	0.2
2	1	1	0.1	0.2	0.4	-0.3	0.3
3	0	1	0.1	0.2	0.6	-0.5	0.5
4	5	6	0.6	0.2	0.8	-0.2	0.2
5	4	10	1.0	0.2	1.0	0	0.0
المجموع	n=10						

$H_1 : X \nsim U(1,2,3,4,5)$ ؛ $H_0 : X \sim U\,niform\,(1,2,3,4,5)$

و يوضح الجدول أعلاه التكرار f و التكرار التراكمي f^+ و S(x) و f(x) و F(x) و |S(x) – F(x)|

حيث $\mathbf{S(x)} = \frac{f^+}{n}$. و التوزيع الاحتمالي النظري على المدى (1,2,3,4,5) هو :

$f(x) = \frac{1}{5}$; x = 1,2,3,4,5

و تكون دالة التوزيع F(x) بالشكل :

$$F(x) = \sum_{X \le x} f(x) = \sum_{X \le x} \frac{1}{5} \quad ; \quad x = 1,2,3,4,5$$

و بناء على النتائج الحاصلة في الجدول السابق ، فإن :

$$D = \mathrm{Max}_{1 \le i \le r}[|S(x) - F(x)|] = \mathrm{Max}_{1 \le i \le r}[0.2,0.3,0.5,0.2,0.0] = 0.5$$

و باستخدام جدول كولموغوروف لقيم D ، وذلك من أجل n=10 و عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ فيكون $D_n(\propto) = D_{10}(0.05) = 0.409$ (من الطرفين) . و بالتالي نجد أن $D > D_n(\propto)$.

و منه نرفض فرض العدم ، و نقبل الفرض البديل H_1 أي يستدل من ذلك أن توزيع تقديرات الطلاب لا يتطابق مع التوزيع المنتظم في المدى (1,2,3,4,5) .

مثال (4–2) : يبيّن الجدول التالي عدد الأيام f التي حدث خلالها عدد x من الحوادث في منطقة معينة في فترة معينة .

X	0	1	2	3	4	5
F	1	2	7	3	1	1

و كانت الدراسات السابقة قد أوضحت أن توزيع الحوادث يتبع توزيع بواسون بمعدل يساوي حادثين في اليوم . اختبر و بمستوى معنوية 0.01 أن توزيع الحوادث يتطابق مع ما أوضحته الدراسات السابقة .

الحل :

إذا كان X يمثل عدد الحوادث الواقعة في اليوم , عندئذ :

$H_1 : X \nsim poi(\mu = 2)$ و الفرضية البديلة $H_0 : X \sim poi(\mu = 2)$

$$f_X(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} / H_0 \Rightarrow f_X(x) = \frac{(2)^x}{x!} e^{-2} \quad ; \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

(حيث $e^{-2} = 0.13534$) و يكون :

$$F(x) = \sum_{X \le x} \frac{2^x}{x!} e^{-2} \; ; \; x = 0,1,2,3,4,5$$

و يكون $S(x) = \frac{f^+}{n}$ ؛ $n = 15$ و يبين الجدول التالي قيم كل من S(x) ، F(x) و الفرق المطلق بينهما :

X	f	f^+	S(x)	f(x)	F(x)	S(x)-F(x)	| S(x)-F(x)|
0	1	1	0.06667	0.13534	0.13534	-0.06867	0.06867
1	2	3	0.20000	0.27067	0.40601	-0.20601	0.20601
2	7	10	0.66667	0.27067	0.67668	-0.01001	0.01001
3	3	13	0.86667	0.18045	0.85713	0.00954	0.00954
4	1	14	0.93333	0.09022	0.94735	0.01402	0.01402
5	1	15	1.0000	0.03609	0.98344	0.01656	0.01656
	n =15			≈ 1			

و يكون بالتالي : $D = \text{Max}_{1 \le i \le r}[|S(x) - F(x)|] = 0.20601$

و باستخدام جدول كولموغوروف (6) من أجل n=15 و مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ يكون $D_n(\propto) = D_{15}(0.01) = 0.404$.

و بمقارنة D مع $D_n(\propto)$ نجد أن $D < D_n(\propto)$ و القرار هو قبول H_0 و رفض H_1 و يستدل من هذا أن توزيع الحوادث يتطابق مع ما أوضحته الدراسات السابقة في أنه يتبع بواسون بمعدل يساوي حادثين في اليوم .

مثال (4-3) : البيانات التالية مثل أوزان 20 شخصاً (بالكغ) تم اختيارهم عشوائياً في منطقة معينة :

83 74 93 90 84 90 75 90 80 92 90 88 84

82 76 80 84 82 78 86

اختبر بمستوى معنوية 0.01 أن توزيع الأوزان يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 85 كغ و انحراف معياري 15 كغ .

الحل :

إذا كان X المتغير الدال على وزن الشخص ، فإن $H_0 : X \sim N(85, (15)^2)$ مقابل $H_1 : X \nsim N(85, (15)^2)$

و يلخص الجدول التالي الحسابات اللازمة لإنجاز الحسابات .

في البدء يتم ترتيب الأوزان تصاعدياً ثم نحسب :

$\mu = 85$; $\sigma = 15$; $n = 20$; $r = 13$; f

i	X_i	f	f^+	$S(X_i)$	$S(X_{i-1})$	$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$	$F(X_i) = P[Z \leq Z_i]$	$D_1 = \lvert S(X_i) - F(X_i) \rvert$	$D_2 = \lvert S(X_{i-1}) - F(X_i) \rvert$
1	74	1	1	0.05	0.00	-0.73	0.23	0.18	0.23
2	75	1	2	0.10	0.05	-0.67	0.25	0.15	0.20
3	76	1	3	0.15	0.10	-0.6	0.27	0.12	0.17
4	78	1	4	0.20	0.15	-0.47	0.32	0.12	0.17
5	80	2	6	0.30	0.20	-0.33	0.37	0.07	0.17
6	82	2	8	0.40	0.30	-0.20	0.42	0.02	0.12
7	83	1	9	0.45	0.40	-0.13	0.45	0.00	0.05
8	84	3	12	0.60	0.45	-0.07	0.47	0.13	0.02
9	86	1	13	0.65	0.60	0.02	0.53	0.12	0.07
10	88	1	14	0.70	0.65	0.20	0.58	0.12	0.07
11	90	4	18	0.90	0.70	0.33	0.63	0.27	0.07
12	92	1	19	0.95	0.90	0.47	0.68	0.27	0.22
13	93	1	20	1.00	0.95	0.53	0.70	**0.30**	**0.25**
r=13		20							

و يتضح من الجدول أن :

$$D = \text{Max}\left[\underset{1\le i\le r}{\text{Max}}[|S(x_i) - F(x_i)|]\ ;\ \underset{1\le i\le r}{\text{Max}}[|S(x_{i-1}) - F(x_i)|]\right] =$$

$$Max[Max(D_1), Max(D_2)] = Max[0.30, 0.25] = 0.30$$

و باستخدام جدول كولموغروف عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ و n=20 ستكون من أجل اختبار من الطرفين : $D_n(\propto) = D_{20}(0.01) = 0.352$

و كون D=0.30 نجد أن $D < D_n(\propto)$ و بالتالي نقبل H_0 و نرفض H_1 . و بهذا يستدل بأن أوزان الأشخاص في العينة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 85 (كغ) و انحراف معياري 15 كغ .

مثال (4-4) : يوضّح العمود الأول من الجدول التالي الوقت المستغرق x في أداء خدمة معينة بخط تجميع صناعي ما حسب المشاهدات في عينة عشوائية .

و المطلوب : اختبار إذا ما كان وقت الخدمة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 25 ، و ذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

الحل :

$H_0 : X \sim exp(\lambda)$ مقابل $H_1 : X \nsim exp(\lambda)$ حيث $\lambda = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{25} = 0.04$

$$F(x) = P[X \le x] = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0.04x} \quad ; \ x > 0$$

الرقم	X_i	f	f^+	$S(X_i)$	$S(X_{i-1})$	$F(X_i)$	$\lvert S(X_i) - F(X_i)\rvert$	$\lvert S(X_{i-1}) - F(X_i)\rvert$
1	0.8	1	1	0.05	0.00	0.0315	0.0185	0.0315
2	0.9	1	2	0.10	0.05	0.0354	0.0646	0.0146
3	1.7	1	3	0.15	0.10	0.0657	0.0843	0.0343
4	2.8	1	4	0.20	0.15	0.1060	0.0940	0.0440
5	3.1	1	5	0.25	0.20	0.1166	0.1334	0.0834
6	3.2	1	6	0.30	0.25	0.1201	0.1799	0.1299
7	5.4	1	7	0.35	0.30	0.1943	0.1557	0.1057
8	6.2	1	8	0.40	0.35	0.2196	**0.1804= sup**	0.1304
9	12.4	1	9	0.45	0.40	0.3910	0.0590	0.0090
10	15.5	1	10	0.50	0.45	0.4621	0.0379	0.0121
11	17.6	1	11	0.55	0.50	0.5054	0.0446	0.0054
12	20.4	1	12	0.60	0.55	0.5578	0.0422	0.0078
13	22.8	1	13	0.65	0.60	0.5983	0.0517	0.0017
14	35.7	1	14	0.70	0.65	0.7602	0.0602	0.1102
15	50.8	1	15	0.75	0.70	0.8689	0.1189	**0.1689= sup**
16	51.1	1	16	0.80	0.75	0.8705	0.0705	0.1205
17	60.2	1	17	0.85	0.80	0.9100	0.0600	0.1100
18	61.4	1	18	0.90	0.85	0.9142	0.0142	0.0642
19	62.5	1	19	0.95	0.90	0.9179	0.0321	0.0179
20	68.1	1	20	1.00	0.95	0.9342	0.0656	0.0156
		20						

و لدينا $n = 20$ و كلها مختلفة ، فإن نسبة التكرار هي $\frac{1}{20} = 0.05$

$$F(0.8) = 1 - e^{-(0.04)(0.8)} = 0.0315 \; ; \; F(68.0) = 1 - e^{-(0.04)(68.1)}$$

$$= 0.9342$$

و بيّن الجدول أعلاه الحسابات اللازمة كلها لاختبار كولموغوروف – سميرنوف لجودة التطابق , و يكون

$$D = Max[\text{Max}_{1\le i\le 20}|S(X_i) - F(X_i)| \; ; \; \text{Max}_{1\le i\le 20}|S(X_{i-1}) - F(X_i)| \,]$$

$$= Max[0.1804, 0.1689] = 0.1804$$

و من أجل $n = 20$ و $\alpha = 0.05$ و من جدول كولموغوروف و الاختبار من الطرفين نجد: $D_n(\alpha) = 0.294$ و بالتالي $D > D_n(\alpha)$ أي نقبل H_0 و يستدل هنا أن توزيع وقت الخدمة يتبع التوزيع الأسي بمتوسط حسابي 25 دقيقة .

مثال (5-4) : يمثل الجدول التالي عدد الحرائق الشهرية التي وقعت في إحدى المدن خلال الـ 60 شهراً الماضية . و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$ ، هل يمكننا القول: إن عدد الحرائق الشهرية يتبع التوزيع البواسوني .

عدد الحرائق الشهرية	0	1	2	3	4	المجموع
عدد الشهور	28	17	10	3	2	60

الحل :

إذا X المتغير الدال على عدد الحرائق الشهرية عندئذ: $H_0 : X \sim poi(\mu)$ مقابل $H_1 : X \nsim poi(\mu)$ ؛ $\alpha = 0.10$ و الاختبار من الطرفين .

x	f	f^+	$S(x_i)$	f(x)	F(x)	$\lvert S(x_i)-F(x_i)\rvert$
0	28	28	0.4667	0.4066	0.4066	**0.0601=sup**
1	17	45	0.7500	0.3659	0.7725	0.0225
2	10	55	0.9167	0.1647	0.9372	0.0205
3	3	58	0.9667	0.0494	0.9866	0.0199
4	2	60	1	0.0111	0.9977	0.0023
المجموع	60			1		

و هنا $\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{\sum_i f_i X_i}{\sum_i f_i} = \frac{54}{60} = 0.9$

$$X \sim poi(\mu) \Leftrightarrow f_x(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} = \frac{(0.9)^x}{x!}e^{-0.9} \quad ; \quad x = 0,1,2,3,4$$

$$f(0) = \frac{(0.9)^0}{0!}e^{-0.9} = 0.4066 \; ; \; f(1) = \frac{(0.9)^1}{1}e^{-0.9} = 0.3659 \; ;$$

$$f(2) = \frac{(0.9)^2}{2}e^{-0.9} = 0.1647 \; ; \; f(3) = \frac{(0.9)^3}{6}e^{-0.9} = 0.0494 \; ;$$

$$f(4) = \frac{(0.9)^4}{4!}e^{-0.9} = 0.0111 \; ;$$

و تكون إحصائية الاختبار من جدول الحسابات أعلاه :

$$D = Max[|S(x_i) - F(x_i)|] = 0.0601$$

و من جدول كولموغوروف – سميرنوف نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من أجل $n=60$ و $\alpha = 0.10$ و الاختبار من الطرفين :

$$D_n(\alpha) = D_{60}(0.1) = \frac{1.22}{\sqrt{n}} = \frac{1.22}{\sqrt{60}} = 0.16$$

و بمقارنة $D = 0.0601$ مع $D_n(\alpha) = 0.16$ نجد أن $D < D_n(\alpha)$ و بالتالي نقبل H_0 و نرفض H_1 أي أن عدد الحرائق الشهرية يتلاءم مع توزيع بواسون .

4-8 – تمرينات غير محلولة :

1) يوضح التوزيع التكراري التالي توزيع الوقت بالثانية الذي يتطلبه أداء عمل معين بخط تجميع ما :

فئة الوقت	عدد العمال (التكرار)
[5,10[	38
[10,20[	51
[20,30[	62
[30,40[	74

[40,50[	83
[50,60[	91
[60,70[	81
[70,80[	72
[90,90[	61
[90,100[	52
[100,110[	35
	700

اختبر إذا ما كان يمكن القول : إن توزيع الوقت طبيعي عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$

توجيه بالحل :

$\propto= 0.05$, $n=700$, $H_1 : X \nsim N(\mu, \sigma^2)$, $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 54.85 \ ; \ \hat{\sigma}^2 = 748.96 \ ; \ \hat{\sigma} = 27.37$$

$$D = Max[D_1, D_2] = \text{Max}\,[0.9727, 0.9227] = 0.97$$

$$D_n(\propto) = D_{700}(0.05) = \frac{1.36}{\sqrt{n}} = \frac{1.36}{\sqrt{700}} = 0.05$$

و يكون $D > D_n(\propto)$, نرفض H_0 و نقبل H_1 $X \nsim N(\mu, \sigma^2)$.

2) في دراسة امتدت لـــ 300 يوم وجد صاحب متجر أن توزيع عدد المرات التي طلبت فيها سلعة كما في الجدول أدناه :

عدد المرات التي طلبت فيها السلعة (x)	عدد الأيام التي طلبت فيها السلعة (f)
0	3
1	9
2	21
3	38
4	46
5	54

49	6
34	7
20	8
16	9
6	10
3	11
1	12
0	13

هل يتوافق هذا التوزيع مع توزيع بواسون بمتوسط 6 و ذلك عند مستوى المعنوية 0.05 .

توجيه بالحل :

$H_0 : X \sim poi(\mu = 6)$; $H_1 : X \nsim poi(6)$; $n=300$; $\propto = 0.05$

(حسب اختبار x^2 لجودة التوافق أو اختبار كولموغوروف – سميرنوف) .

$x_0^2 = 34.04$; $x_{1-\propto}^2(k-1) = X_{0.95}^2(11-1) = X_{0.95}^2(10) = 18.31$

نرفض H_0 و نقبل H_1 أي $X \nsim poi(\mu = 6)$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

اختبار كاي- تربيع للاستقلال

5-1- مفهوم الاختبار

5-2- متطلبات الاختبار و شروطه

5-3- فرضيات الاختبار

5-4- جدول الاقتران ، و إجراء الاختبار

5-5- المقارنة ، و القرار

5-6- ملاحظة حول استخدام اختبار كاي-تربيع

5-7- أمثلة محلولة

5-8- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

اختبار كاي- تربيع للاستقلال

5-1- مفهوم الاختبار : يعد اختبار كاي - تربيع للاستقلال من الاختبارات و الإجراءات الإحصائية الأكثر شهرة و استخداماً , و لاسيما في المجالات المختلفة من حياتنا اليومية (اجتماعياً , و تربوياً , و نفسياً , و طبياً , و صناعياً , و زراعياً , و اقتصادياً , و ....) . و يهدف الاختبار إلى معرفة فيما إذا كان هناك استقلال بالعلاقة ما بين متغيرين أو أكثر في مجتمع الدراسة . حيث يكون المتغيران مستقلين إذا كان توزيع أحدهما لا يعتمد على الآخر , و يكون المتغيران غير مستقلين إذا كان معرفة قيمة أحدهما تساعد في التنبؤ بقيمة المتغير الآخر . و ينسب هذا الاختبار إلى كارل بيرسون الذي قدمه عام 1900 ميلادي .

5-2- متطلبات الاختبار و شروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون البيانات مأخوذة من عيّنة عشوائية بسيطة بحجم n من العناصر من مجتمع الدراسة .

2) أن تصنف عناصر العينة وفق مستويات أو فئات المتغيرات المراد اختبار العلاقة بينها بحيث إن كل عنصر من عناصر العيّنة يجب أن ينتمي إلى فئة واحدة فقط من فئات كل متغير . و هذا يعني أن تكون الفئات لكل متغير شاملة , و غير متداخلة .

3) أن تكون البيانات عبارة عن تكرارات , و ليست نسباً مئوية أو قياساً معيناً .

4) أن تكون بيانات كل متغير مستقلة عن بيانات المتغير الآخر أو المتغيرات الأخرى .

5) ألا تكون التكرارات المشاهدة لتقاطع فئات المتغيرات صغيرة جداً أو معدومة .

5-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم H_0 تمثل أن المتغيرَين بفئاتهما المختلفة مستقلان (أي لا علاقة تذكر بين المتغيرين). و الفرض البديل H_1 يتمثل في أن المتغيرين غير مستقلين (أي أنه توجد بين المتغيرَين علاقة ذات دلالة إحصائية) .

5-4- جدول الاقتران , و إجراء الاختبار :

إن جدول الاقتران هو جدول يصنف فيه كل عنصر من عناصر العيّنة وفق فئات المتغيرات محل البحث بحيث إن العناصر المشتركة لفئات المتغيرات تشكل قيماً مشاهدة من العناصر. و كمثال على ذلك جدول الاقتران المشترك الثنائي لتصنيف القيم المشاهدة للعينة n وفق فئات متغيرين يمثل أحدهما المتغير السطري , و عدد فئاته r و يمثل الآخر المتغير العمودي و عدد فئاته c , و في كل خلية من خلايا جدول الاقتران تكون قيمة المشاهدة n_{ij} للفئة i من فئات المتغير السطري , و الفئة j من فئات المتغير العمودي تعبّر عن عدد الحالات أو المشاهدات التي تحقق خاصية الفئة i من المتغير السطري و خاصية الفئة j من المتغير العمودي .

و يكون $n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ عبارة عن المجموع الهامشي لقيم المشاهدات لأي فئة i من فئات المتغير السطري حيث $i = 1,2,\ldots\ldots,r$.

و يكون $n_{.j} = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}$ عبارة عن المجموع الهامشي لقيم المشاهدات لأي فئة j من فئات المتغير العمودي حيث $j = 1,2,\ldots\ldots,c$.

أما المجموع الكلي , فهو مجموع قيم المشاهدات لكل فئات المتغير السطري , و يساوي أيضاً مجموع قيم المشاهدات لكل فئات المتغيرالعمودي , و يساوي كذلك حجم العينة n أي أن $n = \sum_{i=1}^{r} n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$

		فئات المتغير العمودي						المجموع السطري
		1	2	....	j	....	c	
فئات المتغير السطري	1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
	2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2c}	$n_{2.}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
	i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{ic}	$n_{i.}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
	r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
المجموع العمودي		$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.c}$	n

و تحت صحة فرضية العدم H_0 نحسب قيمة إحصائية الاختبار , حيث يقارن الاختبار القيمة المشاهدة في كل خلية من جدول الاقتران بالقيمة المتوقعة للمشاهدة تحت صحة H_0 . و يتم حساب القيم المتوقعة للمشاهدات في كل خلية اعتماداً على مفهوم نظرية الاحتمالات , و من أجل أحداث مستقلة حيث :

$$E_{ij} = n\,P_{ij} = (n)\left[\left(\frac{n_{i.}}{n}\right)\left(\frac{n_{.j}}{n}\right)\right] = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\ ;\quad i = 1,2,\ldots.,r\ \ ;j = 1,2,\ldots..,c$$

و بالتالي فاختبار كاي– تربيع يقوم على مقارنة فيما إذا كانت القيمة المشاهدة في كل خلية ij مطابقة أو مقاربة للقيمة المتوقعة E_{ij} تحت صحة H_0 , فإحصائية الاختبار عندئذ تأخذ الشكل :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

فإذا كان هناك تقارب ما بين n_{ij} و E_{ij} من أجل كل خلية , فإن الفرق $(n_{ij} - E_{ij})$ سيكون صغيراً , و بالتالي تكون قيمة x_0^2 صغيرة , و العكس صحيح . و كلما كانت قيمة x_0^2 كبيرة نسبياً زاد احتمال أن القيمة المشاهدة لم تأتِ من مجتمع يحكمه فرض العدم .

5-5- المقارنة , والقرار : نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من جدول كاي-تربيع (3) عند المستوى $\propto$ من المعنوية ودرجة الحرية $\gamma = (r-1)(c-1)$

أي نحسب : $x_{1-\propto}^2(\gamma)$. ثم نقارن x_0^2 مع $x_{1-\propto}^2(\gamma)$ و يكون القرار كالتالي :

إذا كان $x_0^2 > x_{1-\propto}^2(\gamma)$ فإنه يرفض فرض العدم , و يقبل الفرض البديل .

و إذا كان $x_0^2 \leq x_{1-\propto}^2(\gamma)$ فإنه يقبل فرض العدم , و يرفض الفرض البديل .

5-6- ملاحظة حول استخدام اختبار كاي – تربيع :

إذا كان عدد فئات كل المتغيرات المعنية بالاختبار يساوي 2 فإن القيمة المتوقعة للمشاهدات لكل خلية من تقاطع فئات المتغيرات يجب ألا تقل عن 5 . و إذا كان عدد الفئات لبعض المتغيرات أكبر من 2 فإن العدد المتوقع للمشاهدات لكل خلية من تقاطع فئات المتغيرات الذي يقل عن 5 يجب ألا يسود لأكثر من 20% من الخلايا , و ألا يكون هناك عدد متوقع أقل من واحد بأي حال من الأحوال . فإذا كان العدد المتوقع للمشاهدات يقع في الحالات السابقة , فإنه يمكن دمج بعض فئات المتغيرات ليكون العدد المتوقع كبيراً . و لكن عملية الدمج هذه يجب أن تكون ذات معنى للفئات .

5-7- أمثلة محلولة :

مثال(5-1) : يبيّن الجدول التالي تصنيف عيّنة من 200 مشاهد حسب العمر و البرنامج التلفزيوني المفضل .

(القيم داخل الأقواس هي القيم المتوقعة للمشاهدات ضمن كل خلية) .

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, هل يمكن اعتبار البرنامج الذي يفضله المشاهد مستقلاً عن عمره ؟

نوع البرنامج / فئة العمر	أطفال	رياضة	أفلام	المجموع
أقل من 15	*25 ;(8.8)*	*10 ; (20.0)*	*10 ; (16.2)*	45
من 15 إلى أقل من 30	*8 ; (16.6)*	*55 ; (37.8)*	*22 ; (30.6)*	85
من 30 إلى 60	*6 ; (13.7)*	*24 ; (31.0)*	*40 ; (25.2)*	70
المجموع	39	89	72	200

الحل :

لدينا $n=200$ و $\propto = 0.05$ و تكون :

(البرنامجُ الذي يفضله المشاهد مستقلٌ عن عمره) : H_0 مقابل (البرنامج الذي يفضله المشاهد مستقلٌ عن عمره) : H_1 .

و لحساب قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 , نحسب أولاً القيم المتوقعة للمشاهدات في الخلايا من العلاقة :

$$E_{ij} = \frac{(n_{i.})(n_{.j})}{n} \; ; \quad i = 1,2,3 \; ; j = 1,2,3$$

(مثل : $E_{11} = \frac{(n_{1.})(n_{.1})}{n} = \frac{39\times45}{200} = 8.8$ و هكذا .....)

و في الجدول أعلاه يشاهد القيم المتوقعة ما ضمن قوسين . ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة من العلاقة :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}- E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(25-8.8)^2}{8.8} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(10-16.2)^2}{16.2} + \frac{(18-16.6)^2}{16.6} + \frac{(55-37.8)^2}{37.8} + \frac{(22-30.6)^2}{30.6} + \frac{(6-13.7)^2}{13.7} + \frac{(24-31)^2}{31} + \frac{(40-25.2)^2}{25.2}$$

$$= 266.7$$

ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار النظرية من أجل $\propto = 0.05$ و توزيع كاي-تربيع بدرجة من الحرية $\gamma = (r-1)(c-1) = (3-1)(3-1) = 4$ و ذلك من جدول كاي – تربيع $x_{1-\propto}^2(\gamma) = x_{0.95}^2(4) = 9.488$ و منه نجد أن : $x_0^2 > x_{1-\propto}^2(\gamma)$ و بالتالي يرفض H_0 و يقبل H_1 أي هناك علاقة ما بين البرنامج المفضل للمشاهد و عمره .

مثال(5-2) : يمثل الجدول التالي أوضاع 180 مدخناً , مصنفة حسب درجات إدمانهم من جهة , و إصابتهم بالضغط الشرياني من جهة أخرى .

(حيث الأعداد ما بين قوسين ضمن الخلايا تعبر عن القيمة المتوقعة للمشاهدة في كل خلية).

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبار إذا ما كان هناك علاقة بين التدخين و الإصابة بارتفاع الضغط الشرياني .

الحل :

لدينا هنا $n=180$ و $\propto = 0.05$.

درجة التدخين / الإصابة بالمرض	مدخن بكثرة	مدخن وسط	غير مدخن	المجموع السطري
مصاب بالضغط الشرياني	*30 (23.68)*	*36 (29.97)*	*21 (33.35)*	87
غيرمصاب بالضغط الشرياني	*19 (25.32)*	*26 (32.03)*	*48 (35.65)*	93
المجموع العمودي	*49*	*62*	*69*	*n=180*

حيث نحسب القيمة المتوقعة المشاهدة لكل خلية من العلاقة :

$$E_{ij} = \frac{(n_{i.})(n_{.j})}{n} \; ; \quad i = 1,2 \; ; j = 1,2,3$$

(مثلاً : $E_{22} = \frac{(n_{2.})(n_{.2})}{n} = \frac{93\times62}{180} = 32.03$ و هكذا .....)

ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 , حيث إن :

(درجة التدخين مستقلة عن الإصابة بالمرض) H_0 مقابل (درجة التدخين غير مستقلة عن الإصابة بالمرض) H_1 .

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(30-23.68)^2}{23.68} + \frac{(36-29.97)^2}{29.97} + \frac{(21-33.35)^2}{33.35} + \frac{(19-25.32)^2}{25.32} + \frac{(26-32.03)^2}{32.03} + \frac{(48-35.65)^2}{35.65} = 14.463$$

ثم نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ و التوزيع لإحصائية الاختبار هو كاي – تربيع بدرجة من الحرية .

$\gamma = (r-1)(c-1) = (2-1)(3-1) = 2$ و ذلك من جدول كاي – تربيع :

$x_{1-\propto}^2(\gamma) = x_{0.95}^2(2) = 5.991$ و بمقارنة $x_0^2 = 14.463$ مع $x_{1-\propto}^2(\gamma) =$ 5.991 نجد أن :

$x_0^2 > x_{1-\propto}^2(\gamma)$ و بالتالي يرفض H_0 و يقبل H_1 أي هناك علاقة ما بين التدخين و الإصابة بالضغط الشرياني .

مثال (5–3) : تم توزيع 400 طالب , و طالبة حسب كليّاتهم , و حسب جنسهم و فق الجدول التالي ؛ (حيث تدل القيمة ما بين قوسين على القيمة المتوقعة لكل خلية من خلال التصنيف) .

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto= 0.01$, يراد أن نختبر الفرضية التالية :

<< لا علاقة لانضمام الطالب لكلية معينة مع جنسه >> .

الكلية / الجنس	إدارة	هندسة	فنون	تمريض	صيدلة	المجموع السطري
ذكر	21 (16.625)	16 (9.5)	145 (152)	2 (7.125)	6 (4.75)	190
أنثى	14 (18.375)	4 (10.5)	175 (168)	13 (7.875)	4 (5.25)	210
المجموع العمودي	35	20	320	15	10	400

الحل :

لدينا هنا $n=400$ ، $\propto= 0.01$

وفرضية العدم : (ليس هناك علاقة لانضمام الطالب لكلية معينة مع جنسه) : H_0

والفرضية البديلة : (هناك علاقة ما بين انضمام الطالب لكلية معينة مع جنسه) : H_1

ومن أجل ذلك ، نحسب أولاً القيمة المتوقعة لكل خلية من خلايا التصنيف من العلاقة :

$$E_{ij} = \frac{(n_i)(n_j)}{n} \; ; i = 1,2; \quad j = 1,2,3,4,5$$

(مثلاً : $E_{14} = \frac{(n_1)(n_4)}{n} = \frac{(190)(15)}{400} = 7.125$ وهكذا ... بالنسبة لبقية الخلايا) .

ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{5}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(21-16.625)^2}{16.625} + \cdots + \frac{(4-5.25)^2}{5.25} = 18.93$$

وتحسب بعدئذ قيمة إحصائية الاختبار النظرية حسب $\propto= 0.01$ والتوزيع لإحصائية الاختبار هو كاي – تربيع بدرجة من الحرية :

$$\gamma = (r-1)(c-1) = (2-1)(5-1) = 4$$

من جدول كاي – تربيع : $x^2_{1-\alpha}(\gamma) = x^2_{0.99}(4) = 13.277$

وبمقارنة $x_0^2 = 18.93$ مع $x^2_{1-\alpha}(\gamma) = 13.277$ نجد أن $x_0^2 > x^2_{1-\alpha}(\gamma)$ ومنه يرفض H_0 ويقبل H_1 أي أن اختيار الطالب لكليته ليس مستقلاً عن جنسه بل هناك علاقة بينهما .

مثال (5-4) : في استطلاع للرأي حول قضية تَهُمّ البلد ، تم سؤال عينة من 374 مواطناً حيث كان موقفهم من القضية بأحد الأشكال التالية (معارض ، محايد ، مؤيد) وبناءً على انتماءاتهم السياسية (حزب (1) ؛ حزب (2) ؛ حزب (3)) ، وكان لدينا الجدول التالي لهذا التصنيف ،(حيث الأعداد داخل قوسين تعني القيمة المتوقعة لكل خلية من خلايا التصنيف).

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, يراد اختبار الفرضية التالية :

<< هناك علاقة ملموسة بين الانتماء السياسي , والرأي بالقضية المطروحة >> .

الرأي / الحزب	معارض	محايد	مؤيد	المجموع السطري
حزب (1)	86 (65.69)	12 (19.79)	50 (62.52)	148
حزب (2)	64 (55.93)	20 (16.84)	42 (53.23)	126
حزب (3)	16 (44.38)	18 (13.37)	66 (42.25)	100
المجموع العمودي	166	50	158	374

الحل :

إن فرضية العدم : (لا علاقة بين رأي المواطن بالقضية , وانتمائه السياسي) : H_0

والفرضية البديلة : (هناك علاقة بين رأي المواطن بالقضية , وانتمائه السياسي) : H_1

ثم يحسب أولاً القيمة المتوقعة لكل خلية من خلايا التصنيف وفق العلاقة

$$E_{ij} = \frac{(n_i)(n_j)}{n} \; ; i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3$$

(مثلاً : $E_{32} = \frac{(n_3)(n_2)}{n} = \frac{(100)(50)}{374} = 13.37$ وهكذا ...) .

وبالتالي تكون قيمة إحصائية الاختبار :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(86-65.69)^2}{65.69} + \cdots + \frac{(66-42.25)^2}{42.25} = 49.091$$

ثم تحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار ، حسب $\propto = 0.05$ وتوزيع إحصائية الاختبار هو كاي – تربيع بدرجة من الحرية :

$$\gamma = (r-1)(c-1) = (3-1)(3-1) = 4$$

أي من جدول توزيع كاي – تربيع نحسب : $x_{1-\propto}^2(\gamma) = x_{0.95}^2(4) = 9.488$

وهي أقل من $x_0^2 = 49.091$ وبالتالي ترفض H_0 وتقبل H_1 أي أن رأي المواطن بالقضية المطروحة يعتمد على انتمائه السياسي .

مثال(5-5) : لدراسة العلاقة بين مورثة لون الشعر , ومورثة لون العينين في إحدى المدن. تم اختيار عيّنة من 400 شخص , وتم تصنيفهم حسب لون الشعر , ولون العينين في الجدول التالي : هل يمكن القول إنه لا توجد علاقة بين لون الشعر ولون العينين ؟ وذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$:

جدول الاقتران (لون الشعر × لون العينين)				
لون العينين / لون الشعر	أسود	أخضر	أزرق	المجموع
أسود	50 **(34.5)**	54 **(50.75)**	41 **(50.75)**	$n_{1.}$ 145
بني	38 **(39.6)**	46 **(46.20)**	48 **(46.20)**	$\mathbf{n}_{2.}$ 132
أشقر	22 **(24.9)**	30 **(29.05)**	31 **(29.05)**	$\mathbf{n}_{3.}$ 83
أحمر	10 **12.0**	10 **14.0**	20 **14.0**	$\mathbf{n}_{4.}$ 40
المجموع	$\mathbf{n}_{.1} = 120$	$\mathbf{n}_{.2} = 140$	$\mathbf{n}_{.3} = 140$	$\mathbf{n} = 400$

الحل :

لدينا فرضية العدم : (لا توجد علاقة بين لون الشعر ولون العينين) : H_0

مقابل الفرضية البديلة : (توجد علاقة بين لون الشعر ولون العينين) : H_1

وتحت صحة الفرض H_0 : نقوم بحساب التكرارات المتوقعة :

$$E_{ij} = \frac{(n_{.j})\times(n_{i.})}{n} \; ; i = 1,2,3,4; \quad j = 1,2,3 \qquad ((i,j) \text{ لكل خلية})$$

ولقد دونّا النتائج في الجدول باللون الغامق .

ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{r=4}\sum_{j=1}^{c=3}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(50-34.5)^2}{34.5} + \cdots + \frac{(20-14.0)^2}{14} = 6.75$$

ومن أجل $\propto = 0.01$ أي :

نحسب القيمة $\gamma = (r-1)(c-1) = (4-1)(3-1) = 6,\ 1-\alpha = 0.09$ النظرية لإحصائية الاختبار (القيمة الحرجة) ،من جدول x^2 أي :

$x^2_{1-\alpha}(\gamma) = x^2_{0,99}(6) = 16.812$ وبمقارنة $x^2_0 = 6.75$ مع $x^2_{1-\alpha}(\gamma) = 16.812$ نجد أن $x^2_0 < x^2_{1-\alpha}(\gamma)$ ومنه نقبل H_0 أي أن لون الشعر مستقل عن لون العينين . أي ليس هناك علاقة بين لون الشعر , ولون العينين .

مثال(5-6): على شركة أن تختار بين ثلاثة نظم للتقاعد ، وقد سبرت رأي المستخدمين من خلال عيّنة مؤلفة من 600 عامل , وعاملة . وحصلت على المعلومات التالية (في الجدول أدناه) . وكان السؤال المطروح هو إذا ما كان اختيار المستخدمين مستقلاً عن تصنيفهم وفقاً لوظائفهم : وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ ؟

عدد المستخدمين الذين يفضلون / مستخدمو المصنع وفق وظائفهم	النظام A	النظام B	النظام C	المجموع
مستخدمو المصنع	160 **150**	39 $\mathbf{100/3}$	10 $\mathbf{50/3}$	$n_{1.}$ =200
موظفو الدواوين	140 **150**	40 $\mathbf{100/3}$	20 $\mathbf{50/3}$	$n_{2.}$ =200
المراقبون , والمشرفون	80 **75**	10 $\mathbf{100/6}$	10 $\mathbf{50/6}$	$n_{3.}$ =100
الإداريون	70 **75**	20 $\mathbf{100/6}$	10 $\mathbf{50/6}$	$n_{4.}$ =100
المجموع	$n_{.1} = 450$	$n_{.2} = 100$	$n_{.3} = 50$	n = 600

الحل :

نحسب التكرارات المتوقعة باستخدام العلاقة :

$$E_{ij} = \frac{(n_{.j})\times(n_{i.})}{n} \; ; i = 1,2,3,4; \quad j = 1,2,3 \quad \text{(لكل خلية } (i,j)\text{)}$$

وندون ذلك باللون الغامق في الجدول المفترض .

ويكون لدينا جدول الاقتران متكاملاً , وبالتالي نحسب قيمة إحصائية الاختبار x_0^2 تحت صحة H_0 حيث:

H_1 : (اختبار المستخدمين مستقلاً عن وظائفهم) : H_0 مقابل (لا يوجد استقلال)

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(160-150)^2}{150} + \cdots + \frac{(10-\frac{50}{6})^2}{\frac{50}{6}} = 11$$

وعند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$, $\gamma = (r-1)(c-1) = (4-1)(3-1) = 6$

نحسب $x_{1-\alpha}^2(\gamma)$ أي $x_{0.99}^2(6) = 16.812$ من جدول x^2 .

وبمقارنة $x_0^2 = 11$ مع $x_{1-\alpha}^2(\gamma) = 16.812$

نجد أن $x_0^2 < x_{1-\alpha}^2(\gamma)$ ومنه لا يمكننا رفض H_0 أي أن اختيار المستخدمين لنظامهم التقاعدي المفضل كان على الأرجح مستقلاً عن العمل الذي يشغلونه .

مثال (5-7): أراد فريق طبي أن يتعرّف فيما إذا كانت هنالك علاقة بين نوع الدم , وشدة الاصابة بمرض معين . لهذا قام الفريق الطبي بدراسة 1500 حالة , وصنفوها في الجدول التالي : ونريد أن نختبر فرضية العدم : (لا علاقة بين نوع الدم , وشدة المرض) : H_0 مقابل الفرضية البديلة : (هناك علاقة بين نوع الدم , وشدة المرض) : H_1 وذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ؟

نوع الدم / شدة الإصابة بالمرض	A	B	AB	O	المجموع
بسيطة	543 541.2	211 212.96	90 92.4	476 473.44	1320
متوسطة	44 43.05	22 16.94	8 7.35	31 37.66	105
شديدة	28 30.75	9 12.10	7 5.25	31 26.90	75
المجموع	615	242	105	538	1500

الحل :

لنشكل جدول الاقتران , و التكرارات المتوقعة حيث نحسبها من العلاقة :

$E_{ij} = \frac{(n_{.j})\times(n_{i.})}{n}$; $i = 1,2,3;\quad j = 1,2,3,4$ ولقد دوّنا ذلك باللون الغامق في جدول الاقتران (تحت صحة H_0) .

ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(543-541.2)^2}{541.2} + \cdots + \frac{(31-26.90)^2}{26.90} = 5.12$$

ومن أجل $\propto = 0.05$ أي $1-\propto = 0.95$ ودرجة الحرية :

$$\gamma = (r-1)(c-1) = (3-1)(4-1) = 6$$

تحسب قيمة $x_{1-\propto}^2(\gamma)$ من جدول كاي – تربيع أي :

$$x_{1-\propto}^2(\gamma) = x_{0.95}^2(6) = 12.592$$

وبمقارنة $x_0^2 = 5.12$ مع $x_{1-\propto}^2(\gamma) = 12.592$

نجد أن $x_0^2 < x_{1-\alpha}^2(\gamma)$ ومنه نقبل H_0 أي لا علاقة بين نوع الدم وشدة المرض (شدة الإصابة بالمرض) .

5-8 – تمرينات غير محلولة :

1) تم توزيع عينة من 180 طالباً على ثلاثة أساتذة ، لامتحانهم بموضوع معين فكانت نتائج الامتحان كالتالي :

الأستاذ / النتيجة	الأستاذ A	الأستاذ B	الأستاذ C	المجموع
ناجح	50	47	56	153
راسب	5	14	8	27
المجموع	55	61	64	180

والمطلوب عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ، يراد اختبار الفرضية التالية :

<< استقلال نتيجة الامتحان للطلاب عن الأساتذة >> .

(الأجوبة : $\gamma = 2$; $x_{1-\alpha}^2(\gamma) = 5.99$; $x_0^2 = 4.84$; (قبول H_0))

2) في دراسة حول عدد القطع الفاسدة التي ينتجها مصنع للمصابيح الكهربائية من قبل عماله الذين يعملون ضمن ورديات معينة (نهاراً ، مساءً ، ليلاً) ، تم دراسة عيّنة من 2835 مصباحاً ، فكانت النتائج التالية :

الوردية / نوع القطعة	النهار	المساء	الليل	المجموع
فاسدة	45	55	70	170
غير فاسدة	905	890	870	2665
المجموع	950	945	940	*2835*

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.025$ ، يراد اختبار الفرضية التالية :

<< لا علاقة بين عدد القطع الفاسدة وفترة تصنيعها في اليوم >> .

(الأجوبة: $\gamma = 2$; $x^2_{1-\propto}(\gamma) = 7.378$; $x^2_0 = 6.484$; قبول H_0)

3) يمثل الجدول التالي عدد الحوادث التي تعرض لها 500 سائق , وفئات أعمارهم التي تتراوح ما بين 18 و 50 عاماً ، خلال عام واحد في مدينة معينة .

عدد الحوادث	[18 , 25]	[26 , 40]	[41 , 50]	المجموع السطري
0	75	120	105	300
1	50	60	40	150
2	25	20	5	50
المجموع العمودي	150	200	150	500

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ ، يراد اختبار الفرضية التالية :

<<عدد الحوادث الحاصلة مستقلة عن عمر السائق >> .

(الأجوبة : $\gamma = 4$; $x^2_{1-\propto}(\gamma) = 13.3$; $x^2_0 = 19.6$; (رفض H_0)).

4) في دراسة حول العلاقة بين تعاطي المارجوانا كمخدر وسوء التكيف الاجتماعي . أجريت الدراسة على 100 شخص يتعاطون المارجوانا . وتم تصنيف النتائج وفق الجدول التالي :

أصناف المارجوانا / التكيف	ضعيف	وسط	شديد	المجموع السطري
أرق	10	5	7	22
عدوانية	11	7	18	36
ذهان مؤقت	6	11	7	24
لا توجد أعراض	10	6	2	18
المجموع العمودي	37	29	34	100

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، يراد اختبار الفرضية التالية :

<<لا علاقة بين مستوى تعاطي المارجوانا , وسوء التكيف الاجتماعي >> .

(الأجوبة: $\gamma = 6$; $x^2_{1-\propto}(\gamma) = 12.592$; $x^2_0 = 13.012$; (رفض H_0))

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

اختبار الإشارة للعينة الواحدة

6-1- مفهوم الاختبار

6-2- متطلبات الاختبار وشروطه

6-3- فرضيات الاختبار

6-4- إجراء الاختبار

6-5- المقارنة والقرار

6-6- حالة العيّنات الكبيرة

6-7- أمثلة محلولة

6-8- تمرينات غير محلولة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

اختبار الإشارة للعينة الواحدة

6-1- مفهوم الاختبار : يستخدم اختبار الإشارة للعينة الواحدة عادة للاستدلال على وسط المجتمع ، خاصة عندما يكون توزيع المجتمع غير متماثل ، وفي حالة تماثل المجتمع فإن الاستدلال على الوسط هو استدلال على المتوسط ، ويشكل الاختبار في هذه الحالة بديلاً لا وسيطياً لاختبار t للمتوسط , والاختبار الطبيعي للمتوسط في الحالة التي يكون فيها التباين معروفاً .

6-2- متطلبات الاختبار , وشروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون البيانات من عيّنة عشوائية من مجتمع وسطه غير معلوم .

2) أن تكون البيانات مقاسة بالمقياس الترتيبي على الأقل حيث الترتيب بالنسبة للوسط المفترض .

3) أن يكون المتغير محل الدراسة متصلاً (مستمراً) .

6-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم لاختبار الإشارة للعينة الواحدة تكون من الشكل $H_0: \mathrm{m} = \mathrm{m}_0$ حيث m وسط المجتمع . وذلك باستخدام عيّنة عشوائية من المشاهدات المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_n$ مأخوذة من ذلك المجتمع .

والفرضية البديلة لـــ H_0 تكون من الشكل :

$$H_1 : \mathrm{m} > \mathrm{m}_0 \quad \text{أو} \quad H_1 : \mathrm{m} < \mathrm{m}_0 \quad \text{أو} \quad H_1 : \mathrm{m} \neq \mathrm{m}_0$$

حيث يعتمد الاختبار بينها على توقعاتنا حول قيمة m بالنسبة لـــ m_0 في حالة عدم صحة H_0 ونستهدي في ذلك بعدد الإشارات الموجبة أو السالبة المشاهدة في العيّنة ، حيث حسب

تعريف الوسط بأنه القيمة التي في الوسط إذا رتبت المشاهدات تصاعدياً ، فإننا نتوقع تحت صحة H_0 ، أن يكون احتمال أن تكون قيمة في العيّنة أكبر من m_0 مساوياً لاحتمال أن تكون أصغر من m_0 أي :

$$P[(X_i - m_0) > 0] = P[(X_i - m_0) < 0] = 0.5 \ ; \ i = 1,2, \dots, n$$

حيث باستبدال أي فرق موجب بـــ (+) وأي فرق سالب بـــ (−) فإنه : تحت صحة H_0 يكون : P(+)=P(-)=0.5 وتحت صحة H_1 فإنه يكون P(+)>P(-) أو P(+)<P(-) أو $P(+) \neq P(-)$ على الترتيب .

ويكون S_+ عدد الإشارات الموجبة و S_- عدد الإشارات السالبة .

فمن أجل $H_0: m = m_0$ مقابل $H_1: m \neq m_0$ فإن هذا يكافئ

$H_1: P(+) \neq P(-) \neq \frac{1}{2}$ وتحت صحة H_0 يمكن أن نقول إنه لدينا n مشاهدة مستقلة، كل مشاهدة تأخذ إما النتيجة (+) أو (−) باحتمال P=0.5 ويكون $S_+ \sim b(n, P = 0.5)$ وأيضاً $E(S_+) = np = \frac{n}{2}$ فإنه نتيجة لرفض H_0 وقبول H_1 إذا كانت S_+ أكبر بكثير أو أقل بكثير من $\frac{n}{2}$ ويتخذ القرار في ضوء مستوى المعنوية $\propto$ و $P(S \geq S_+)$ إذا كان $S_+ < \frac{n}{2}$.

نسمي مستوى المعنوية المشاهد (P.V) لكل من $P(S \geq S_+)$ أو $P(S \leq S_+)$ حسب الحالة .

وتجدر الملاحظة هنا أننا استخدمنا عدد الإشارات الموجبة كإحصائية اختبار في التوضيح أعلاه ، إلا أنه كان بالإمكان استخدام عدد الإشارات السالبة S_- كإحصائية اختبار إذا شئنا .

وإذا كان S_+ كبيراً جداً من القيمة المتوقعة $\frac{n}{2}$ فإن هذا يدعم الفرض البديل $H_1: m > m_0$ وبالتالي فالاختبار ذو طرف أيمن . وفي هذه الحالة تستخدم S_+ كإحصائية اختبار ، ويتخذ القرار في ضوء $P.V = P[S \geq S_+]$.

أما إذا كان S_- أكبر بكثير من $\frac{n}{2}$ فإن هذا يدعم الفرض البديل $H_1 : \mathrm{m} < \mathrm{m}_0$ وهنا نستخدم S_- كإحصائية اختبار ، في اختبار ذي طرف أيمن . ويتخذ القرار في ضوء $P.V = P[S \geq S_-]$.

كما يمكن أيضاً أن نستخدم S_+ كإحصائية اختبار ولكن الاختبار في هذه الحالة سيكون ذا طرف أيسر ، ويتخذ القرار في ضوء $P.V = P[S \leq S_+]$.

أما إذا لم يكن هناك ما يجعلنا نرجح اختباراً ذا طرف معين ، كأن يكون S_+ و S_- ليست كبيرة جداً بدرجة كافية مقارنة بـــ $\frac{n}{2}$ أو لأي سبب نظري آخر فإننا نستخدم الصيغة $H_1 : \mathrm{m} \neq \mathrm{m}_0$.

ورغم أنه يمكننا أن نستخدم أياً من S_+ و S_- كإحصائية اختبار إلا أنه من الأنسب أن نختار أكبرهما كإحصائية اختبار ، ونقارن P.V (احتمال قيمة تساويها أو تزيد عنها) مع نصف مستوى المعنوية $\propto$.

وبما أن توزيع ذي الحدين يكون متماثلاً عندما تكون P=0.5 فإن احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تزيد عن S_+ يساوي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تقل عن $S_- = n - S_+$ ويمكن الاستفادة من هذه الحقيقة عند ايجاد الاحتمالات من جدول توزيع ذي الحدين (7) .

6-4- إجراء الاختبار : بعد تحديد فرضية العدم , والفرضية البديلة , ومعرفة مستوى المعنوية $\propto$. تحسب الفروقات $X_i - \mathrm{m}_0$ من أجل i=1,2,...n ، ثم يستبدل كل فرق موجب بإشارة (+) وكل فرق سالب بإشارة (−) وإذا كان هناك فرق يساوي الصفر (نقول أن هناك ربطةٌ قد حدثت) وتحذف المشاهدة المؤدية للربطة , ويتم تطبيق اختبار الإشارة على المشاهدات في العينة التي ليس بها ربطات فقط ما لم تكن نسبة الربطات (الأصفار) كبيرة بالنسبة لـــ n (مثلاً أكبر من 5%) . في مثل هذه الحال يمكن كحل إعطاء الإشارة +

لنصف الأصفار , وإشارة (-) للنصف الآخر ، وتحديد موقع الإشارة عشوائياً باستخدام قطعة نقود متوازنة مثلاً .

ونحسب عدد الإشارات الموجبة S_+ وعدد الإشارات السالبة S_- حيث $S_- = n - S_+$ و n هنا تكون عدد الإشارات الموجبة والسالبة أي حجم العينة بعد استبعاد الأصفار .

فإذا كانت $H_1 : m > m_0$ ، نستخدم S_+ كإحصائية اختبار في اختبار ذي طرف أيمن ومن جدول التوزيع التراكمي لذي الحدين بالوسطاء (n ; P=0.5) فوجد عند n و $S = S_+$ وتحت العمود المعنون << يمين >> قيمة P.V وهي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تزيد عن S_+ إذا كانت H_0 صحيحة .

إذا كان الفرض البديل من النوع $H_1 : m < m_0$ ، نستخدم S_- كإحصائية اختبار في اختبار ذي طرف أيمن (أيضاً نستخدم S_+ في اختبار ذي طرف أيسر) ومن الجدول نحسب مستوى المعنوية المشاهد P.V .

وإذا كان الفرض البديل من النوع $H_1 : m \neq m_0$ أي الاختبار من الطرفين , فمن الأفضل أن نستخدم الأكبر من بين (S_+ و S_-) كإحصائية اختبار ، فإذا كانت S_+ هي الأكبر مثلاً ، نوجد من الجدول ، احتمال قيمة تساوي أو تزيد عن S_+ أي $(P.V)^*$. وبما أن الاختبار ذو طرفين فإن $(P.V)^*$ هي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تزيد عن S_+ أو تساوي أو تقل عن $n - S_+$ وبالتالي $P.V = 2(P.V)^*$.

6-5- المقارنة , والقرار : عند مستوى المعنوية $\propto$ وبعد حساب P.V حسب نوع الاختبار سواء كان من الطرف الأيمن أو من الطرف الأيسر أو من الطرفين ، نقارن (P.V) مع $\propto$.

فإذا كان : $P.V \leq \propto$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1 .

وإذا كان : $P.V > \propto$ فإننا نقبل H_0 و نرفض H_1 .

6-6- حالة العيّنات الكبيرة : من المعلوم أن توزيع ذي الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي مع زيادة حجم العينة ، وأن التوزيع ذي الحدين $b(n, P = \frac{1}{2})$ يمكن تقريبه بشكل جيد بتوزيع طبيعي وفق $N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ ، حتى إذا كانت n صغيرة نسبياً ، مثلاً إحدى عشرة فأكثر ، وبناء عليه من أجل $(n \geq 11)$ يمكن استخدام تقريب التوزيع الطبيعي الذي يتيح لحساب قيم (P.V) وإيجاد القيم الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري . وإحصائية الاختبار هنا تصبح من الشكل : $Z = \frac{(S \pm 0.5) - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ التي لها التوزيع الطبيعي تحت صحة H_0 .

وتمثل S الاحصائية المستخدمة S_+ أو S_- ، أما (0.5) فهو تصحيح ييتس للانتقال من توزيع منفصل إلى توزيع متصل ، ونأخذ (0.5+) إذا كانت $(S < \frac{n}{2})$ ونأخذ (0.5−) إذا كانت $(S > \frac{n}{2})$ ، أي تكون موجبة عند استخدام الطرف الأيسر من التوزيع الطبيعي , وسالبة عند استخدام الطرف الأيمن .

6-7- أمثلة محلولة :

مثال (6-1) : في مصنع لتعبئة مادة غذائية في أكياس صغيرة ، صممت آلة بحيث يكون وزن الكيس 2 غرام ؛ بعد فترة من الإنتاج ، تم أخذت عيّنة عشوائية من 15 كيساً , وكانت أوزانها كالتالي :

2.09 ; 2.12 ; 2.0 ; 1.98 ; 1.97 ; 1.99 ; 2.1 ; 1.98 ; 1.98
1.95 ; 1.96 ; 2.03 ; 1.99 ; 1.98 ; 1.99

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، يراد اختبار الفرضية التالية :

<< وسط الوزن لا زال 2 غرام (أي لم يتغير وسط الوزن) >> .

الحل :

1) فرضية العدم : $H_0: m = 2$ مقابل $H_1: m \neq 2$ ولدينا n=15 ولإجراء الاختبار نأخذ جدول الفروق والإشارة المقابلة التالي :

X	$X - m_0 \ ; \ m_0 = 2$	الإشارة
1.98	−0.02	-
1.98	−0.02	-
2.1	0.10	+
1.99	−0.01	-
1.97	−0.03	-
1.98	−0.02	-
2.0	0.00	ربطة
2.12	0.12	+
2.09	0.09	+
1.99	−0.01	–
1.98	−0.02	–
1.99	−0.01	–
2.03	0.03	+
1.96	−0.04	–
1.95	−0.05	–

وهنا نلاحظ أن هناك ربطة واحدة , وحجم العينة يصبح كالتالي : n=14 وأيضاً : $S_+ = S_- = 104$ وبما أن عدد الإشارات السالبة أكبر بكثير من الموجبة فمن الأنسب أن

نستخدم S_- كإحصائية اختبار . ومن جدول ذي الحدين ، واستخدام S=10 في العمود يمين و n=14 نجد أن $(P.V)^* = 0.0898$ وتكون :

$P.V = 2(P.V)^* = (2)(0.0898) = 0.1796$ (لأن الاختبار من الطرفين).

وبمقارنة PV=0.1796 مع مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ نجد أن $PV > \propto$ وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أن الوسط يساوي 2 .

2) لنكرر الاختبار باستخدام تقريب التوزيع الطبيعي ذي الحدين . حيث وجدنا $S_- = 10$ و $S_+ = 4$ وبالتالي نأخذ S=10 و n=14 و لأننا سنستخدم الطرف الأيمن من التوزيع فإن قيمة Z عند التعويض بقيم n و S :

$$Z_0 = \frac{(S-0.5)-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{(10-0.5)-\frac{14}{2}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = 1.34$$

وبما أن الاختبار ذا طرفين فإننا نوجد من جدول التوزيع الطبيعي احتمال قيمة تساوي أو تزيد على 1.34 ونضربها بـــــ 2 للحصول على (P.V)

$$P.V = 2P[Z \geq 1.34] = 2(1 - P[Z \leq 1.34]) = 2(1 - 0.9099)$$
$$= 2(0.0901) = 0.1802$$

وهو أكبر من $\propto = 0.05$ وبالتالي نقبل H_0 أي m=2 .

يلاحظ أن الفرق بين PV=0.1796 عند استخدامنا ذا الحدين و PV=0.7802 عند استخدام التقريب الطبيعي هو 0.0006 مما يعني جودة التقريب .

مثال (6-2) : كانت ماكينات التعبئة في منشأة صناعية للمنظفات مصمّمة بحيث يكون وزن العبوة (2.7) K.G . اخترنا بعد فترة من عملية الإنتاج عينة عشوائية من 20 عبوة ، وكانت أوزانها :

2.6	2.5	2.3	2.8	2.9	2.10	2.6	2.7	2.7	2.5
2.8	2.9	2.8	2.10	2.8	2.9	2.9	2.8	2.10	2.8

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، يراد اختبار الفرض بأن وسط الوزن لا زال 2.7 K.G مقابل بأنه تغير ؟

ثم اعد الاختبار نفسه باستخدام تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع ذي الحدين .

الحل :

1) $H_0: m = 2.7$ مقابل $H_1: m \neq 2.7$ ولدينا n=20 ولننشئ جدول الفروق والإشارات:

X	$X - m_0 \ ; \ m_0 = 2.7$	الإشارة
2.6	−0.1	-
2.5	−0.2	-
2.3	−0.4	−
2.8	0.1	+
2.9	0.2	+
2.10	−0.6	-
2.6	−0.1	−
2.7	ربطة 0	+
2.7	ربطة 0	−
2.5	−0.2	−
2.8	0.1	+
2.9	0.2	+
2.8	+0.1	+
2.10	−0.6	−
2.8	0.1	+

2.9	0.2	+
2.9	0.2	+
2.8	0.1	+
2.10	−0.6	−
2.8	0.1	+

و يلاحظ أن عدد الربطات هو 2 من أصل 20 وهو يمثل 10% من بيانات العينة ، لذلك سوف نوزعها بشكل عادل على (+) و (−) .

وبالتالي يكون لدينا : $S_+ = 11$; $S_- = 9$ وكون الاختبار من طرفين , فإن إحصائية الاختبار هي : $S=\max(S_-, S_+) = 11$. ومن جدول ذي الحدين حيث n=20 و S=11 و P=0.5 تكون :

$$P.V = 2P(T \geq 11) \quad = (2)(0.4119) = 0.8238$$

وهو أكبر من $\propto = 0.05$ وبالتالي نقبل H_0 أي m=2.7 ، أي أن الآلة مازالت محافظة على الوزن المطلوب .

2) باستخدام تقريب ذي الحدين بالتوزيع الطبيعي ، حيث :

$n = 20$; $S_+ = 11 \Rightarrow S = 11$ و $S_- = 9$ وإحصائية الاختبار تحت صحة H_0 تكون :

$$Z_0 = \frac{(S-0.5)-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{(11-0.5)-\frac{20}{2}}{\frac{\sqrt{20}}{2}} = 0.22$$

ومنه كون الاختبار من الطرفين :

$$P.V = 2(P.V)^* = 2P[Z \geq 0.22] = 2(1 - P[Z \leq 0.22]) =$$
$$2(1 - 0.5871) = 2(0.4129)$$
$$\Rightarrow P.V = 0.8258 > \propto = 0.05$$

وبالتالي تقبل H_0 أي أن ماكينات التعبئة ما زالت محافظة على الوزن المطلوب .

مثال (6-3) : اختيرت عينة عشوائية مؤلفة من 15 طفلاً من إحدى المدارس الابتدائية ، فكانت أطوالها بالسنتيمترات :

97.3	95.7	97.1	96.3	97.0
100.2	97.4	95.0	93.6	99.2
96.7	97.1	97.0	98.0	95.5

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ ؛ اختبر فرض العدم $H_0: \mathrm{m} = 98$ مقابل $H_1: \mathrm{m} < 98$

الحل :

لدينا $H_0: \mathrm{m} = 98$ ؛ $H_1: \mathrm{m} < 98$ و $\propto = 0.01$ ؛ n=15 ويلاحظ أن هناك مشاهدة واحدة تساوي 98 وبالتالي نهملها ، ويبقى n=14 ونعد حجم العيّنة الجديد هو 14 والاختبار من الطرف الأيسر .

X	$X - m_0 \ ; \ m_0 = 98$	الإشارة
97.3	-0.7	-
95.7	-2.3	-
97.1	-0.9	-
96.3	-1.7	-
97.0	-1.0	-
100.2	2.2	+

97.4	−0.6	−
95.0	−3	−
93.6	−4.4	−
99.2	1.2	+
96.7	−1.3	−
97.1	−0.9	−
97.0	−1.0	−
98.0	ربطة 0	
95.5	−2.5	−

ومن جدول الفروقات , والإشارات نجد أن $S_+ = 2$; $S_- = 12$ ومن أجل n=14 تكون $P.V = P(T \geq 12) = 0.0065$ وهي أقل من $\propto = 0.01$ وبالتالي نرفض H_0 ونقبل H_1 أي أن الطول أقل من 98 سنتيمتر .

(نأخذ بالمثل $P.V = P(T \leq 12) = 0.0065$ ونحصل على الناتج نفسه .

مثال (6−4) : تبيّن البيانات التالية زمن الشحن بالساعات لبعض أنواع البطاريات

1.7 ; 1.2 ; 2.0 ; 1.5 ; 1.8 ; 1.6 ; 2.0 ; 1.3 ; 0.9 ; 2.2 ; 1.5

استخدم اختبار الإشارة عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ؛ لاختبار أن هذا الشاحن يعمل بوسط 1.8 ساعة .

الحل :

$H_0: m = 1.8$ مقابل $H_1: m \neq 1.8$ ؛ $\propto = 0.05$ ولدينا n=11 .

X	$X - m_0 \ ; \ m_0 = 1.8$	الإشارة
1.5	−0.3	−
2.2	0.4	+
0.9	−0.9	−
1.3	−0.5	−
2.0	0.2	+
1.6	−0.2	−
1.8	ربطة 0	
1.5	−0,3	−
2.0	0.2	+
1.2	−0.6	−
1.7	−0.1	−

ومن جدول الفروقات , والإشارات نجد : أن لدينا ربطة واحدة , وبالتالي يصبح حجم العينة n=10 ويلاحظ أن :

أن $S_- = 7 \ ; \ S_+ = 3$ والاختبار من الطرفين S=max (7,3)=7 ومستوى المعنوية المشاهد يكون :

$$P.V = 2(P.V)^* = 2P[T \geq 7] \quad = (2)(0.1719) = 0.3438$$

وبالمقارنة مع $\propto = 0.05$ نجد أن PV> $\propto$ وبالتالي نقبل $H_0 : \mathrm{m} = 1.8$ و نرفض H_1 .

6-8- تمرينات غير محلولة :

تمرين 1 – في فحص مخبري بنسبة تركيز فيتامين معين في مضاد حيوي أخذت عينة عشوائية من 10 أقراص من المضاد حيث كانت نسبة الفيتامين فيها لكل 10 غرامات كما يلي:

1.7	2.3	2.1	1.9	2.2
1.9	1.8	1.8	1.7	1.9

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ استخدم اختبار الإشارة لاختبار وسط نسبة الفيتامين في أقراص المضاد الحيوي لا يقل عن 2 غرام لكل 10 غرامات .

تمرين 2- أوضحت دراسة سابقة أجريت على مجموعة من الأطفال حديثي الولادة بمنطقة معينة أن وزن الطفل عند الولادة يكون بحدود 7.5 رطل .

أخذت عيّنة عشوائية بعد ذلك من 30 طفلاً حديثي الولادة في تلك المنطقة حيث كانت أوزانهم كما في الجدول التالي :

7.8	8.3	9.7	8.4	8.9	9.3
9.1	7.3	9.00	8.1	7.4	8.2
7.9	8	8.3	9.0	9.2	8.7
7.5	8.3	8.9	6.9	8.1	8.8
7.6	9.1	9.2	7.8	8.5	8.5

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ اختبر أن وسط وزن الطفل عند الولادة على الأكثر 7.5 رطل.


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع

اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينة الواحدة

7-1- مفهوم الاختبار

7-2- متطلبات الاختبار وشروطه

7-3- فرضيات الاختبار

7-4- إجراء الاختبار

7-5- القرار

7-6-حالة العيّنات الكبيرة

7-7- أمثلة محلولة

7-8- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع

اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينة الواحدة

7-1- مفهوم الاختبار : يستخدم اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للاستدلال على وسط المجتمع ، خاصة عندما يكون توزيع المجتمع متماثلاً (حيث في حالة تماثل المجتمع فإن الاستدلال على الوسط هو استدلال على المتوسط) وهو مثل اختبار الإشارة , لكنه أكثر كفاءة منه .

إذ اتضح أن الكفاءة النسبية لاختبار الإشارة بالنسبة لاختبار ستودنت (t) إذا كان توزيع المجتمع طبيعياً هي فقط في حدود 0.637 بينما هي لاختبار ويلكوكسن 0.95 . واختبار ويلكوكسن هذا يستخدم بيانات مقاسة بمقياس فوق ترتيبي (مجالي أو نسبة) . حيث إن استخدام اختبار الإشارة يؤدي لضياع معلومات متاحة ؛ لأنه لا يستفيد من مقدار الاختلاف بين القيم ؛ وإنما فقط موقع كل منها بالنسبة للوسط ، في مثل هذه الحالات نحتاج لاختبار يضع مقادير الاختلافات بين القيم في الاعتبار ويكون بالتالي أيضاً أكثر كفاءةً من اختبار الإشارة وهنا سنرى أن اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة يحقق ذلك من خلال استخدامه لإشارات القيم (بالنسبة للوسط) ومقاديرها في الوقت نفسه .

7-2- متطلبات الاختبار وشروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون البيانات من عيّنة عشوائية من مجتمع وسطه غير معلوم.
2) أن يكون المتغير محل البحث (الدراسة) مستمراً .
3) أن يكون قياس البيانات مجالياً على الأقل (مدياً على الأقل) .
4) أن يكون توزيع بيانات مجتمع العيّنة متماثلاً .

3-7- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم تكون من الشكل $H_0 : m = m_0$ حيث m هو وسط المجتمع . والفرضية البديلة ستكون من أحد الأشكال التالية :

$$H_1 : m > m_0 \quad \text{أو} \quad H_1 : m < m_0 \quad \text{أو} \quad H_1 : m \neq m_0$$

4-7- إجراء الاختبار : سنفترض أن لدينا عيّنة عشوائية من المشاهدات $X_1, X_2, \dots, X_n$ ومسحوبة من مجتمع متصل (أو متصل بجوار m_0) ومتماثل حول m_0.

- نحسب أولاً الفرق d بين كل قيمة في العينة والوسط المفترض m_0 أي نحسب : $d_i = X_i - m_0 \; ; \; i = 1, \dots, n$ (حيث تحذف حالات الربطات ،أي الحالات التي يكون فيها الفرق صفراً) وبالتالي n الجديدة هو حجم العينة بعد حذف حالات الصفر.
- ثم نرتب الفروقات المطلقة (أي يتم تجاهل الإشارة فيها) : $|d_i|$ تصاعدياً .

وإذا تساوت قيمتان أو أكثر في الرتبة تعطي كل منها الوسط الحسابي لرتبها إذا لم تكن متساوية . فمثلاً إذا كانت أصغر قيمتين في العيّنة متساويتين والثالثة أكبر منها ، وبما أن ترتيبهما إذا كانتا مختلفتين سيكون 1 و 2 فإننا نعطي كلاً منهما متوسط هاتين الرتبتين كرتبة ، أي تُعطى كل منهما الرتبة 1.5 .

- نعطي كل ترتيب إشارة الفرق d الذي نتج عنه .
- ثم نحسب مجموع الرتب الموجبة T_+ ومجموع الرتب السالبة T_- .
- وبما أننا افترضنا أن التوزيع متماثلاً حول الوسط ، فإنه إذا كان فرض العدم صحيحاً ، فإن احتمال الحصول على فرق d موجب , وبمقدار معين يساوي احتمال الحصول على فرق d سالب وبالمقدار نفسه وبالتالي تحت صحة H_0 نتوقع أن تتساوى T_+ مع T_- .
- يمكننا أن نحدد الفرضية البديلة H_1 حسب توقعاتنا لاتجاه الوسط ، ويمكن أن نسترشد في ذلك بالقيمة النسبية لـ T_+ و T_- ، فإذا كانت T_+ أكبر بكثير من T_- فهذا يدعم $H_1 : m > m_0$ ، وإذا كانت T_- أكبر بكثير من T_+ فإن هذا يدعم $H_1 : m < m_0$ أما إذا تقاربت T_+ و T_- في القيمة فهذا يدعم $H_1 : m \neq m_0$.

• ومن أجل تحديد إحصائية الاختبار ، يلاحظ أولاً أن مجموع T_+ و T_- هو عبارة عن مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى n وهو $\frac{n(n+1)}{2}$ وبالتالي: T_+ ، T_- هي أعداد صحيحة موجبة وتحقق $[0 \le T_+ \le \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad 0 \le T_- \le \frac{n(n+1)}{2}]$ ويمكن أن تستخدم كإحصائية اختبار ، ويكون توزيع المعاينة تحت صحة H_0 لكل منهما متطابقاً ومتماثلاً بمتوسط حسابي $\frac{n(n+1)}{4}$.

وبالتالي يعتمد اختبار الإحصائية T_+ أو T_- على الفرضية البديلة H_1 حيث :

- إذا كانت الفرضية البديلة من الشكل : $H_1 : m > m_0$ نستخدم T_+ كإحصائية اختبار ويكون مستوى المعنوية المشاهد من الشكل $P.V = P[T \ge T_+]$ (بالطرف الأيمن من التوزيع) .
- إذا كانت $H_1 : m < m_0$ فنستخدم T_- كإحصائية اختبار , ونحسب $P.V = P[T \ge T_-]$ (في الطرف الأيمن من التوزيع أيضاً) .

  وتجدر الإشارة هنا إلى أنه يمكن استخدام T_+ كإحصائية اختبار , ولكن $P.V = P[T \le T_+]$ (في الطرف الأيسر من التوزيع) .
- وإذا كانت الفرضية البديلة من الشكل: $H_1 : m \ne m_0$ ، فإن عدد الإشارات الأكبر يؤخذ كإحصائية اختبار ، ويحسب الاحتمال من الطرف الأيمن أيضاً . ويكون $P.V = 2\,(P.V)^* = 2P[T \ge \max(T_+, T_-)]$

• ولإيجاد قيمة مستوى المعنوية المشاهد (المستوى الحرج) P.V ، فإنه لأي حجم $n \le 15$ فإن جدول ويلكوكسن للرتب المؤشرة (8) يعطي قيمة (P.V) الذي يمثل احتمال قيمة تساوي أو تزيد على T حيث $T = Max(T_-, T_+)$ وهي المعطاة بالعمود المشار إليه "يمين" ، كما يعطي الجدول احتمال قيمة تساوي أو تقل عن T حيث $T = Min(T_-, T_+)$ وهي بالعمود المشار إليه بـــ "يسار" . ويلاحظ من الجدول أن

احتمال قيمة تساوي أو تزيد عن $T = Max\,(T_-, T_+)$ يساوي احتمال قيمة تساوي أو تقل عن $T = Min\,(T_-, T_+)$، فمثلاً إذا كانت :

n=4 فإن $T_- + T_+ = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4\times5}{2} = 10$ وإذا كانت $T_+ = 9$ فإن $T_- = 1$ ومن الجدول نجد أن $P[T \geq 9] = P[T \leq 1] = 0.125$.

نتيجة لذلك يمكننا دائماً أن نختار عدد الإشارات الأكبر كإحصائية اختبار سواء كان الاختبار ذا طرف أيمن أو ذا طرف أيسر أو طرفين .

وبالتالي من الجدول نجد $P.V = P^*$ (إذا كان الاختبار من طرف واحد ، أيمن أو أيسر) ويكون $P.V = 2P^*$ إذا كان الاختبار من طرفين .

ملاحظة : إذا كان T عدداً كسرياً 57.5 ، نوجد الاحتمال عند القيمتين الصحيحتين حولها أي عند 57 ؛ 58 ، ونأخذ متوسطهما ، ويمكن أن نأخذ أصغر الاحتمالين إذا أردنا التحفظ .

7-5- القرار : تقارن (P.V) الناتجة مع مستوى المعنوية $\propto$ ، فإذا كان :

$(P.V) < \propto$ فإنه يرفض H_0 ويقبل H_1 .

$(P.V) \geq \propto$ فإنه يقبل H_0 ويرفض H_1 .

7-6- حالة العيّنات الكبيرة : إذا كان حجم العينة n أكبر من 15 بحيث لا نستطيع استخدام جدول ويلكوكسن للرتب المؤشرة ، يمكن الاستفادة من الحقيقة التي تقول أنه تحت صحة H_0 فإن كل من T_+ و T_- تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي : $\mu_t = \frac{n(n+1)}{4}$ وبتباين : $\sigma_t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$ وبالتالي فإنه يمكن استخدام إحصائية الاختبار Z التالية : (تحت صحة H_0) : $Z_0 = \frac{T-0.5-\mu_t}{\sigma_t} \sim N(0,1)$ التي تأخذ بعين الاعتبار تصحيح ييتس للاتصال . وتكون T إما T_+ أو T_- (أيهما أكبر) . ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، نحسب :

$P.V = P[Z \geq Z_0]$ (إذا كان الاختبار من طرف واحد) .

$\frac{P.V}{2} = P[Z \geq Z_0]$ (إذا كان الاختبار من طرفين) .

ويتأثر تقريب التوزيع الطبيعي كثيراً ، إذا كانت هناك عقد (ربطات) كثيرة , أي حالات كثيرة تتساوى فيها الفروق المطلقة ، أما إذا لم يكن عدد الربطات كثيراً , فيمكن تحسين الوضع بتعديل الانحراف المعياري σ_t ليصبح من الشكل :

$$\sigma_t^* = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i^3 - \sum_{i=1}^{m} f_i}{48}}$$

حيث m تمثل عدد الفروق المطلقة التي توجد عندها عقد (ربطات) و f_i عدد مرات تكرار الفرق المطلق i .

7-7- أمثلة محلولة :

مثال (7-1) : بالعودة للمثال (6-1) صفحة 109 والمتعلق بتعبئة الشاي في أكياس ، بحيث يكون وزن الكيس 2 غرام . يراد اختبار $H_0 : m = 2$ مقابل $H_1 : m \neq 2$ عن طريق اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة , وعند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

الحل :

لنبني أولاً جدول الفروق , والرتب المؤشرة :

X_i	$d_i = X_i - 2$	ترتيب $d_i \rightarrow \lvert d_i \rvert$			رتب $\lvert d_i \rvert$	الرتب المؤشرة
1.98	-0.02	1	-0.01	0.01	2	-2
1.98	-0.02	2	-0.01	0.01	2	-2
2.10	+0.10	3	-0.01	0.01	2	-2
1.99	-0.01	4	-0.02	0.02	5.5	-5.5
1.97	-0.03	5	-0.02	0.02	5.5	-5.5
1.98	-0.02	6	-0.02	0.02	5.5	-5.5
2.00	0	7	-0.02	0.02	5.5	-5.5
2.12	+0.12	8	-0.03	0.03	8.5	-8.5
2.09	+0.09	9	+0.03	0.03	8.5	+8.5

1.99	-0.01	10	−0.04	0.04	10	-10
1.98	-0.02	11	-0.05	0.05	11	-11
1.99	-0.01	12	+0.09	0.09	12	+12
2.03	+0.03	13	+0.10	0.10	13	+13
1.96	-0.04	14	+0.12	0.12	14	+14
1.95	-0.05					

و يوضح هذا الجدول الفروقات , والفروقات المطلقة , ورتب الفروقات المطلقة , والرتب المؤشرة بالترتيب . حيث يلاحظ عند إيجاد رتب $|d_i|$ بالعمود الرابع ، تلاحظ أن أصغر قيمة لـــ $|d_i|$ هي 0.01 وقد تكررت ثلاث مرات ، ولو كانت هذه القيم مختلفة لكان ترتيبها 3،2،1 لذلك نعطي كل قيمة 0.01 الرتبة $\frac{1+2+3}{3} = 2$.

وبالمثل من أجل 0.02 والمكررة أربع مرات , فإن رتبة 0.02 هي : $\frac{4+5+6+7}{4} = 5.5$ وهكذا ... ، بينما نلاحظ أن 0.04 تأتي العاشرة بالترتيب التصاعدي , وهي وحيدة فرتبتها هي ترتيبها أي 10 .

وبعد حذف القيمة التي تساوي الوسط 2 يصبح حجم العينة n = 14 ويكون لدينا بالتالي :

مجموع الرتب الموجبة :

$$T_+ = 8.5 + 12 + 13 + 14 = 47.5$$

ومجموع الرتب السالبة :

$$T_- = 2 + 2 + 2 + 5.5 + 5.5 + 5.5 + 5.5 + 8.5 + 10 + 11 = 57.5$$

ويلاحظ أن $T_+ + T_- = 47.5 + 57.5 = 105$ وهو فعلاً مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 14 حيث يكون هذا المجموع $\frac{(14)(14+1)}{2} = 105$ وهذا يمثل اختباراً لصحة الحسابات .

بما أن الاختبار ذو طرفين نأخذ أكبر المجموعين وهو $T_- = 57.5$. ومن جدول ويلكوكسن للرتب المؤشرة ، نجد عند n=14 و T=57 بالعمود المشار إليه بـــ " يمين " أن $\frac{PV}{2} = P_1^* = 0.404$ ، كما نجد عند n=14 و T=58 بالعمود نفسه $\frac{PV}{2} = P_2^* = 0.380$، ويؤخذ متوسط القيمتين 0.404 و 0.380 نحصل على تقدير لـــ P^* والخاص بـــ 57.5 وهو 0.392 ومنه :

$$\frac{PV}{2} = \widehat{P}^* = 0.392 \Rightarrow P.V = (2)(0.932) = 0.784$$

وبمقارنة PV=0.784 مع $\propto = 0.05$ نجد أن $PV > \propto$ وبالتالي تقبل H_0 أي m=2 .

• إذا كررنا الاختبار لـــ $H_0 : m = 2$ مقابل $H_1 : m \neq 2$ وعند $\propto = 0.01$ بتطبيق تقريب التوزيع الطبيعي (مفهوم عيّنات كبيرة الحجم) .

سنجد من جدول الفروق المطلقة , والرتب المؤشرة أن هناك عقداً عند: 0.01 ;0.02 ;0.03 وتكراراتها هي : 3 ؛ 4 ؛ 2 على الترتيب ، وبالتالي فإن المقدار المطروح تحت الجذر في صيغة الانحراف المعياري هو :

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{3} f_i^3 - \sum_{i=1}^{3} f_i}{48} = \frac{[(2)^3+(4)^3+(3)^3] - (2+4+3)}{48} = 2.06$$

ومن أجل $T_- = 57.5$ و n=14 فإن :

$$\mu_t = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{(14)(14+1)}{4} = 52.5 \quad ;$$

$$(\sigma_t^2)^* = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - 2.06 = 253.75 - 2.06 = 251.69$$

ومنه : $(\sigma_t)^* = \sqrt{251.69} = 15.865$ وبالتالي :

$$Z_0 = \frac{T - 0.5 - \mu_t}{\sigma_t^*} = \frac{57.5 - 0.5 - 52.5}{15.865} = 0.28$$

وبالتالي كون الاختبار من الطرفين ، فإن :

$$\frac{PV}{2} = P[Z > Z_0] = P[Z > 0.28] = 1 - P[Z < 0.28] = 1 - 0.6103$$
$$= 0.3897 \Rightarrow \frac{PV}{2} = 0.3897 \Rightarrow P.V = (2)(0.3897) = 0.7794$$

وبالمقارنة مع $\propto = 0.05$ نجد أن $PV > \propto$ ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 أي m=2 .

• وتجدر الملاحظة هنا أن PV=0.784 في حالة عيّنات صغيرة الحجم و PV=0.7794 في حالة عيّنات كبيرة الحجم فإن الفرق بينهما (0.7794-0.784=0.0046) فهذا يعد تقريباً جيداً .

مثال (7-2) : في دراسة حول المدة الزمنية التي يقضيها مرضى السكري في إحدى المشافي ، تم سحب عينة عشوائية من 12 مريضاً , وسجلت مدة إقامتهم في المشفى قيد الدراسة , وجاءت النتائج على النحو التالي :

13 , 10 , 11, 12 , 8 , 9 , 8 , 7, 10 , 11, 12 , 10

والمطلوب : عند مستوى الدلالة $\propto = 0.025$ يراد اختبار الفرضية التالية : << إن وسط الزمن الذي يقضيه مريض السكري في المشفى هو 9 أيام >> مقابل (الوسط يزيد على 9) .

الحل :

إن $H_0 : m = 9$ مقابل $H_1 : m > 9$ ؛ $\propto = 0.025$ ؛ n=12 ومن جدول الفروقات المطلقة , والرتب المؤشرة الناتج نحصل على :

X_i	$d_i = X_i - 9$	$d_i \rightarrow \lvert d_i \rvert$ ترتيب			$\lvert d_i \rvert$ رتب	الرتب المؤشرة
13	4	1	+1	1	3	+3
10	1	2	-1	1	3	-3
11	2	3	-1	1	3	-3
12	3	4	+1	1	3	+3
8	-1	5	+1	1	3	+3
9	0(حذف)	6	+2	2	7	+7
8	-1	7	-2	2	7	-7
7	-2	8	+2	2	7	+7

10	1	9	+3	3	9.5	+9.5
11	2	10	+3	3	9.5	+9.5
12	3	11	+4	4	11	+11
10	1					

هناك فرق صفري واحد وبالتالي تصبح n = 11 ويكون :

$$T_+ + T_- = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(11)(12)}{2} = 66$$

ومن الجدول نجد أن:

$$T_+ = 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 9.5 + 9.5 + 11 = 53$$

$$T_- = 3 + 3 + 7 = 13$$

ويلاحظ هنا أن :

$$T_+ + T_- = 53 + 13 = 66$$

وتكون إحصائية الاختبار T=T_+ =53 ومن أجل n=11 والاختبار من طرف واحد أيمن نحسب $P.V = P[T \geq 53] = 0.042$ وبمقارنة PV=0.042 والناتجة من جدول ويلكوكسن للرتب المؤشرة ، مع مستوى المعنوية $\propto = 0.025$ نجد أن $PV > \propto$ وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 أي m=9 .

مثال (7-3) : لتكن لدينا البيانات التالية التي تمثل نتائج اختبار مقاومة الكسر لألواح الخشب المصنعة وفق طريقة جديدة وغير مكلفة :

20 , 42 , 18 , 21 , 22 , 35 , 19 , 18 , 26 , 20 , 21 , 32 , 22 , 20 , 24

وبفرض أن قيمة وسط المجتمع لاختبار مقاومة الكسر لألواح الخشب المصنعة وفق الطريقة القديمة يساوي 25 ، هل أدت طريقة تصنيع الألواح الخشبية الجديدة إلى تحسن جوهري في مقاومة هذه الألواح للكسر عن الطريقة القديمة , وذلك من أجل مستوى المعنوية $\propto = 0.05$

مع افتراض أن العينة كبيرة و من دون تعديل للانحراف االمعياري و من دون معامل تصحيح .

الحل :

لدينا $H_0 : m = 25$ مقابل $H_1 : m > 25$ ؛ $\propto = 0.05$ ؛ n=15 ولننشئ جدول الفروقات المطلقة , ورتبها , والرتب المؤشرة :

X_i	$d_i = X_i - 25$	$d_i \rightarrow \lvert d_i \rvert$ ترتيب			رتب $\lvert d_i \rvert$	الرتب المؤشرة
24	-1	1	-1	1	1.5	-1.5
20	-5	2	+1	1	1.5	+1.5
22	-3	3	-3	3	3.5	-3.5
32	+7	4	-3	3	3.5	-3.5
21	-4	5	-4	4	5.5	-5.5
20	-5	6	-4	4	5.5	-5.5
26	+1	7	-5	5	8	-8
18	-7	8	-5	5	8	-8
19	-6	9	-5	5	8	-8
35	+10	10	-6	6	10	-10
22	-3	11	+7	7	12	+12
21	-4	12	-7	7	12	-12
18	-7	13	-7	7	12	-12
42	+17	14	+10	10	14	+14
20	-5	15	+17	17	15	+15

ويلاحظ أن :

$$T_+ + T_- = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(15)(16)}{2} = 120$$

ويكون :

$T_+ = 1.5 + 12 + 14 + 15 = 42.5$

$T_- = 1.5 + 3.5 + 3.5 + 5.5 + 5.5 + 8 + 8 + 8 + 10 + 12 + 12 = 77.5$

وكون العينات كبيرة الحجم وإحصائية الاختبار :

$T = MAX(T_-, T_+) = \text{MAX}(77.5, 42.5) = 77.5$

نأخذ إحصائية Z : $Z = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t}$ حيث $\mu_t = \frac{n(n+1)}{4} = 60$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} = \sqrt{\frac{(15)(15+1)(2(15)+1)}{24}} = 17.61$$

ومنه $Z_0 = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} = \frac{77.5-60}{17.61} \approx 1$ ثم نحسب مستوى المعنوية المشاهد :

$\text{P.V} = \text{P}[\text{Z} \geq 1] = 1 - \text{P}[\text{Z} \leq 1] = 1 - 0.8413$ أي PV=0.1587 وبالمقارنة مع $\propto = 0.05$ نجد أن $PV > \propto$ أي نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أن طريقة تصنيع الألواح الخشبية الجديدة لم تؤد إلى تحسن جوهري في مقاومة هذه الألواح للكسر عن الطريقة القديمة وذلك باحتمال ثقة % 95 .

مثال (7-4) : اختيرت عينة مؤلفة من 17 طالباً من طلاب كلية العلوم ، فكانت أوزانهم بالكيلوغرام كما يلي :

66	82	72	78	68	67	70	61	69	64	65	76	77
71	69	68	59									

والمطلوب عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، يراد اختبار الفرضية التالية :

<< وسط أوزان طلاب الكلية هو 70 K.G ضد الفرض البديل بأن الوسط أقل من 70 >> و من دون تعديل للانحراف المعياري .

الحل :

لدينا $H_0 : m = 70$ ؛ $H_1 : m < 70$ ؛ $\alpha = 0.05$ ؛ $n=17$ ولنأخذ جدول المشاهدات والفروق المطلقة والرتب المؤشرة:

X_i	$d_i = X_i - 70$	ترتيب $d_i \rightarrow \lvert d_i \rvert$			رتبة $\lvert d_i \rvert$	الرتب المؤشرة
66	-4	1	-1	1	2	-2
82	+12	2	+1	1	2	+2
72	+2	3	-1	1	2	-2
78	+8	4	+2	2	5	+5
68	-2	5	-2	2	5	-5
67	-3	6	-2	2	5	-5
70	0	7	-3	3	7	-7
61	-9	8	-4	4	8	-8
69	-1	9	-5	5	9	-9
64	-6	10	-6	6	10.5	-10.5
65	-5	11	+6	6	10.5	+10.5
76	+6	12	+7	7	12	+12
77	+7	13	+8	8	13	+13
71	+1	14	-9	9	14	-14
69	-1	15	-11	11	15	-15
68	-2	16	+12	12	16	+16
59	-11					

وهنا نجد أن :

$$T_- = 2 + 2 + 5 + +5 + 7 + 8 + 9 + 10.5 + 14 + 15 = 77.5$$

$$T_+ = 2 + 5 + 10.5 + 12 + 13 + 16 = 58.5$$

ويلاحظ أن $T_+ + T_- = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(16)(17)}{2} = 136$ مما يدل على صحة الحسابات ، ومن أجل $T_+ = 58.5$ إحصائية اختبار والاختبار من الطرف الأيسر و n=16 كبيرة نستخدم تقريب التوزيع الطبيعي من دون تعديل بالانحراف المعياري و من دون معامل التصحيح .

$$Z = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} \; ; \; \mu_t = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{16\times17}{4} = 68$$

$$\sigma_t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{(16)(17)(33)}{24} = 374 \Rightarrow \sigma_t = 19.34$$

وبحساب إحصائية الاختبار :

$$Z_0 = \frac{T-\mu_t}{\sigma_t} = \frac{58.5-68}{19.34} = -0.49$$

ثم نحسب مستوى المعنوية المشاهد من أجل اختبار من الطرف الأيسر:

$$P.V = P[Z \leq -0.49] = 0.3121$$

وبالمقارنة مع $\propto = 0.05$ نجد أن $PV > \propto$ أي نقبل H_0 ونرفض H_1 وبالتالي ، فإننا نستنتج أن وسط أوزان طلاب كلية العلوم m=70 K.G.

مثال (7–5) : تبيع شركة لمادة القهوة انتاجها بعبوات تزن 100 غرام ، أُخِذَت عيّنة عشوائية من 16 عبوة من إنتاج هذه الشركة ، وكانت أوزان العبوات كما في الجدول أدناه (مع الفروقات المطلقة , والرتب المؤشرة). والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ يراد اختبار أن وسط وزن عبوات القهوة من إنتاج هذه الشركة لا يساوي 100 غرام, وذلك باستخدام اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة .

الحل :

لدينا $H_0 : m = 100$ مقابل $H_1 : m \neq 100$ ؛ $\propto = 0.05$ ؛ n=16 والجدول التالي يبيّن الفروقات المطلقة والرتب المؤشرة:

X_i	$d_i = X_i - 100$	$d_i \rightarrow \lvert d_i \rvert$ ترتيب			رتب $\lvert d_i \rvert$	الرتب المؤشرة
94	-6	1	+1	1	2	+2
90	-10	2	+1	1	2	+2
98	-2	3	-1	1	2	-2
96	-4	4	-2	2	5	-5
101	+1	5	-2	2	5	+5
93	-7	6	+2	2	5	-7
96	-4	7	-3	3	7	-8.5
101	+1	8	-4	4	8.5	-8.5
89	-11	9	-4	4	8.5	-10
91	-9	10	-5	5	10	-11
97	-3	11	-6	6	11	-12
99	-1	12	-7	7	12	-13
95	-5	13	-8	8	13	-14
92	-8	14	-9	9	14	-15
98	-2	15	-10	10	15	-16
102	+2	16	-11	11	16	

يلاحظ أولاً: $T_+ + T_- = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(16)(17)}{2} = 136$ ومن الجدول نجد أن :

$T_+ = 2 + 2 + 5 = 9$

$T_- = 2 + 5 + 5 + 7 + 8.5 + 8.5 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 127$

ويلاحظ أنه فعلاً $T_+ + T_- = 9 + 127 = 136$ وهذا ما يؤكد صحة الحسابات .

و إحصائية الاختبار تكون $T = MAX(T_+, T_-) = \text{MAX}(9,177)$ أي T=127 Z .

وكون n=16>15 و T=127 نطبق تقريب التوزيع الطبيعي ونأخذ : $Z_0 = \frac{T-0.5-\mu_t}{\sigma_t}$

حيث : $\mu_t = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{(16)(17)}{4} = \frac{136}{2} = 68$ والتباين :

$$\sigma_t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{(16)(17)(33)}{24} = 374 \Rightarrow \sigma_t = \sqrt{374} = 19.34$$

ومنه : $Z_0 = \frac{T-0.5-\mu_t}{\sigma_t} = \frac{127-0.5-68}{19.34} = 3.02$

وكون الاختبار من طرفين ، فإن مستوى المعنوية المشاهد يكون من الشكل :

$$\frac{\text{P.V}}{2} = \text{P}[\text{Z} \geq Z_0] = 1 - \text{P}[\text{Z} \leq Z_0] = 1 - \text{P}[\text{Z} \leq 3.02] = 1 - 0.9987$$

$\frac{\text{P.V}}{2} = 0.0013 \Rightarrow P.V = (2)(0.0013) = 0.0026$ وبمقارنة $P.V = 0.002$ مع $\propto = 0.05$ نجد أن $PV < \propto$ ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 أي $m \neq 100$ غرام .

7-8- تمرينات غير محلولة :

1) توضح البيانات التالية متوسط الإنتاج اليومي في فترة معينة بمصنع معين

18	17.5	18.4	19	16.9	17	18.5	17.6	18.8	18.5	15
17	18.9	20	18.1	19.2	16.5	14	21			

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ استخدم اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة لاختبار وسط الإنتاج بأنه يساوي 18 .

2) في مصنع للكونسرة ، إذا كانت آلات التعبئة مصممة بحيث يكون وزن العبوة 1.5 كغ وبعد فترة من عملية الإنتاج ، تم اختيار عينة عشوائية من 14 عبوةً , وكانت أوزانها :

1.35	1.55	1.5	1.49	1.51	1.52	1.48
1.49	1.52	1.6	1.30	1.51	1.52	1.48

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ و$\propto = 0.01$ ، استخدم اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة لاختبار وسط وزن العبوة بأنه يساوي 1.5 كغ .

3) إذا كانت أطوال الذين يلتحقون بالخدمة الإلزامية في بلد معين ما يجب ألا يقل عن 70 بوصة عند الالتحاق ، أخذت عينة عشوائية من سجلات لمستجدين التحقوا بالخدمة مؤخراً ، حيث كانت أطوالهم بالبوصة كالتالي :

69	65	64	71	69	67	68	70	71	66
70	68	67	65	72	69	64	67	72	71
69	67	68	66	66	71	69	68	70	73

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto= 0.01$، يراد اختبار وسط أطوال المستجدين بأنه أقل من 70 بوصة .

الأجوبة :

$$\begin{pmatrix} H_0 : \mathrm{m} = 70 \ ; \ H_1 : \mathrm{m} < 70 \ ; \ \propto= 0.01 \ ; n = 30 \ ; \ \mathrm{T}_- = 315 \ ; \\ \mathrm{T}_+ = 63 \ ; \mathrm{T} = \mathrm{T}_- \ ; \mathrm{Z} = -3.03 \ ; \mathrm{P.V} = 0.0013 \ ; (\ H_0 \text{ رفض }) \end{pmatrix}$$

الفصل الثامن

اختبار التتابع للعينة الواحدة

8-1- مفهوم الاختبار

8-2- متطلبات الاختبار, وشروطه

8-3- فرضيات الاختبار

8-4- إجراء الاختبار

8-5- المقارنة , و القرار

8-6- تمرينات محلولة

8-7- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن

اختبار التتابع للعينة الواحدة

8-1- مفهوم الاختبار : كثيراً ما تحتاج في الدراسات الإحصائية لمعرفة إذا ما كان تتالي مجموعة من المشاهدات يمثل نمطاً عشوائياً , و هو ما يطلب في طرق الاستدلال الإحصائي , و مراقبة ضبط الجودة , و كذلك في السلاسل الزمنية يهمنا إذا ما كانت المشاهدات المأخوذة في فترات زمنية متتالية تعكس اتجاهاً عاماً من نوع ما أم هي ببساطة عشوائية , و من خلال اختبار التتابع يتم فيه اختبار عشوائية تتالي (تتابع) ما ؛ أي اختبار عشوائية العيّنة بالنسبة لمتغير ثنائي أو متغير يتم تحويله إلى حالة ثنائية .

8-2- متطلبات الاختبار و شروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون بيانات التحليل عبارة عن متتالية من المشاهدات تم رصدها بموجب ترتيب وقوعها .

2) البيانات المتتالية تتبع لصنفين فقط و أن يكون الصنفان شاملين وغير متداخلين .

8-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم تكون : (التتالي عشوائي) :H_0

و الفرضية البديلة : (التتالي ليس عشوائياً) : H_1 و هو ذو اتجاهين .

و أحياناً يعتقد بأن الانحراف عن العشوائية يميل لأحد الاتجاهين (يمين أو يسار).

8-4- إجراء الاختبار : يعتمد الاختبار على عدد حالات التتابع الحاصلة في مشاهدات العينة , حيث يعرف التتابع بأنه استمرار لوضع معين من وضعي المتغير الثنائي إلى حين ظهور الوضع الآخر , و يرمز لعدد حالات التشابه بالرمز r , فإذا كان اتجاه قياس عيّنة ما عن المتوسط العام كالتالي : A A B B B A B B B B A A A

حيث تعني A زيادة المشاهدة عن المتوسط العام و B نقصان المشاهدة عن المتوسط العام .

فهنا نلاحظ أن عدد حالات التتابع r=5 , فهذه العينة تبدأ من اليسار بحالة تتابع لـــ A مرتين ثم حالة تتابع لـــ B ثلاث مرات ثم حالة تتابع لـــ A مرة واحدة ثم حالة تتابع لـــ B أربع مرات ثم أخيراً حالة تتابع لـــ A ثلاث مرات . إن عدد حالات التتابع في العينة يعطي دلالات حول عشوائية العينة , حيث إنه كلما كان العدد كبيراً كان تناوب وضعي المتغير الثنائي كثيراً , و بالتالي عشوائية العينة , و كلما كان عدد حالات التتابع قليلاً كان تناوب وضعي المتغير الثنائي قليلاً و بالتالي يبتعد عن عشوائية العيّنة , فإذا كان عدد مفردات أحد وضعي المتغير الثنائي هو n_1 و عدد مفردات الوضع الآخر للمتغير الثنائي هو n_2 و العدد الكلي لمشاهدات العينة هو n (حيث $n=n_1+n_2$) , فإن اختبار التتابع يدرس من أجل n صغيرة ثم n كبيرة . و يكون $n_1 \leq n_2$.

1- حالة عيّنة صغيرة الحجم : إذا كان كل من n_1 و n_2 لا يزيد على 20 فإن القيمة المشاهدة r (عدد حالات التتابع) تقارن مع نظيرتها من جدول التتابع المرفق و هو بمستوى معنوية $\propto = 0.05$ حالياً و هو مؤلف من قسمين , القسم الأول منه يعطي قيم R التي هي أقل أو تساوي القيمة المشاهدة r باحتمال 0.025 , بينما يعطي القسم الثاني قيم R التي أكبر من القيمة المشاهدة r باحتمال 0.025 . أو نستخدم [جدول توزيع التتابعات r (المرفق) , حيث يعطي الجدول القيم n_1 و n_2 وقيمة P^* و هي الاحتمال التراكمي من الطرف الأيمن أو الأيسر, و حتى قيمة r ثم جدول توزيع التتابعات لأعلى و أسفل قيم P^* هي الاحتمالات التراكمية حتى r^* من الطرفين الأيسر و الأيمن] . و إذا عرفنا التوزيع التكراري لـــ r عند n_1 و n_2 أمكن تحديد القيمة (أو القيمتين في حالة اختبار ذو طرفين) الحرجة لـــ r حسب مستوى المعنوية $\propto$ و نوعية الاختبار , و بذلك يتسنى اتخاذ قرار حول العشوائية بمقارنة القيمة المشاهدة لـــ r مع القيمة الحرجة . و كذلك يمكن إيجاد قيمة P من :

$P = P[R \geq r]$ إذا كان الاختبار من الطرف الأيمن أو $P = P[R \leq r]$ في حالة اختبار من طرف أيسر من جدول توزيع التتابعات r عند n_1 ، n_2 ، r

(محددة بحيث $n_1 \leq n_2$) لذلك ندع لاستخدام هذا الجدول n_1 لعدد الحالات الأقل دائماً إذا اختلفت الحالات بالعدد .

2- حالة عيّنة كبيرة الحجم : أي إذا كان أي من n_1 أو n_2 يزيد على 20 , فإن التتابع R يتبع عموماً التوزيع الطبيعي بتوقع , و تباين كالتالي :

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{\mathrm{n}} + 1 \; ; \; \sigma_R^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-\mathrm{n})}{\mathrm{n}^2(\mathrm{n}-1)} \; ; (\mathrm{n} = n_1 + n_2)$$

و نختبر فرضية العدم بعشوائية العينة أولاً من حساب إحصائية الاختبار تحت صحة H_0:

$$Z = \frac{r-[\frac{2n_1n_2}{n}+1]}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-\mathrm{n})}{\mathrm{n}^2(\mathrm{n}-1)}}} \text{ أو } Z = \frac{r\pm0.5-\mu_R}{\sigma_R}$$

(تكون0.5 + إذا كان الاختبار من الطرف الأيسر و 0.5- من الطرف الأيمن) .

ثم نقارن القيمة الحسابية لـــ z بالقيمة النظرية لها الناتجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري بمستوى معنوية $\propto$. أو نحسب قيمة P من جدول التوزيع الطبيعي المعياري حسب نوعية الاختبار (أيمن – أيسر – طرفان) , وفق ما رأينا في الاختبارات السابقة .

8-5- المقارنة , و القرار : من أجل الجدول الأول , إذا كانت القيمة المشاهدة r واقعة بين القيمتين الحرجتين الصغرى , و الكبرى , فإنه يقبل فرض العدم بعشوائية مشاهدات العينة , و إلا فإنه يرفض .

و إذا كان الاختبار من الطرف الأيسر ؛ أي أنه يتوقع عدداً قليلاً جداً من حالات التتابع , فإن القسم الأول أو القيمة الحرجة الصغرى من الجدول هي التي تستخدم , وإذا كان الاختبار من طرف أيمن ، أي أنه يتوقع عدداً كبيراً جداً من حالات التتابع ، فإن القسم الثاني أو القيمة الحرجة الكبرى من الجدول هي التي تستخدم . و بالتالي إذا كانت القيمة المشاهدة r أقل من القيمة الحرجة الصغرى أو أكبر من القيمة الحرجة الكبرى فإنه يرفض فرض العدم و يقبل الفرض البديل , و إلا فإنه يقبل فرض العدم , و يرفض الفرض البديل , و يمكن بالمقابل

حساب مستوى المعنوية المشاهد P.V=P و يقارن مباشرة مع مستوى المعنوية $\propto$ و نتخذ القرار المناسب عندئذ بقبول أو رفض H_0 حسب ما رأينا في الاختبارات السابقة .

و من أجل عيّنات كبيرة الحجم نقارن القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار Z مع القيمة النظرية لها و التي تنتج من جدول (Z) عند مستوى المعنوية , فإذا وقعت Z خارج حدود منطقة قبول H_0 فإنه يرفض فرض العدم و يقبل الفرض البديل H_1 و إلا فإنه يقبل H_0 و يرفض H_1 , و يمكننا هنا أيضاً حساب P.V=P و مقارنته مع $\propto$ لاتخاذ القرار المناسب .

8-6- تمرينات محلولة :

مثال (8-1) : تم إجراء عشر عمليات جراحية متتالية في مشفى معين خلال يومين و كانت حالة المرضى بعد العمليات كالآتي : S S F S F S F F S S

حيث يدل الرمز S على تحسن حالة المريض بعد العملية , و الرمز F على تراجع حالة المريض بعد العملية . اختبر عشوائية تتابع نتائج هذه العمليات بمستوى معنوية 5% .

الحل :

إن فرضية العدم : [نتائج العمليات الجراحية بالمشفى تتتابع بشكل عشوائي] : H_0

و الفرضية البديلة : [نتائج العمليات الجراحية بالمشفى تتتابع بشكل غير عشوائي] : H_1

و لإنجاز الاختبار : يلاحظ تتابع حالتي تحسن أو تراجع صحة المريض , حيث نجد أنها تبدأ بحالتي تحسن , ثم حالة تراجع ثم حالة تحسن ثم حالة تراجع ثم حالة تحسن ثم حالة تراجع ثم حالتي تحسن , و بذا يكون عدد حالات التتابع r لهذه العينة يساوي7 , و هناك 4 حالات تراجع أي $n_1 = 4$ و ست حالات تحسن أي $n_2 = 6$, و من جدول التتابع , نجد القيمة الجدولية الصغرى عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ تساوي 2 , و القيمة الجدولية الكبرى تساوي 9 . و هذا يعني أن العينة العشوائية بهذا الحجم يتوقع لها أن تحتوي على حالات تتابع أكثر من 2 و أقل من 9 .

و بما أن القيمة المشاهدة لعدد حالات التتابع r=7 تقع في المدى المتوقع لحالات التتابع و هو بين 2 و 9 , و بالتالي فإنه يقبل فرض العدم , و يرفض الفرض البديل . و بهذا يستدل بأن نتائج العمليات الجراحية بالمشفى تتابع بشكل عشوائي , أي أنه لا مجال للشك في عشوائية العينة .

مثال (8-2): أراد باحث أن يعرف فيما إذا كان وصول الرجال و النساء لمكان العمل يتم بشكل عشوائي , لذلك تمت مراقبة وصول خمسين شخصاً للمكان , و كان ترتيب وصولهم كالتالي :

M F M F M M M F F M F M F M F M M M M F M F M F M M F F F M F M F M F M F M F M M F M M F M M M M F M F M M

حيث M تدل على الرجل و F تدل على المرأة . اختبر بمستوى معنوية $\propto = 0.01$ عشوائية تسلسل وصول الرجال و النساء لمكان العمل .

الحل :

إن فرضية العدم :[تتابع وصول الرجال و النساء لمكان العمل يتم بشكل عشوائي دون تحيز أو ترتيب معين] : H_0 .

و الفرضية البديلة : [يمكن أن يكون الفرض البديل في اتجاهين ويتمثل في أن تتابع وصول الرجال و النساء لمكان العمل لا يتم بشكل عشوائي] : H_1 .

و لانجاز الاختبار نلاحظة أن n = 50 و أن عدد حالات التتابع r = 35 وأن عدد النساء n_1 = 20 و عدد الرجال n_2 = 30 و أن القيمة كبيرة الحجم فيكون متوسط R :

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{\mathrm{n}} + 1 = \frac{(2)(20)(30)}{50} + 1 = 25;$$

و تباين R : $\sigma_R^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-\mathrm{n})}{\mathrm{n}^2(\mathrm{n}-1)} = \frac{(2)(20)(30)[(2)(20)(30)-50]}{(50)^2(50-1)} = 11.265$

و بالتالي تحت صحة H_0 تكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار :

$$Z = \frac{r-\mu_R}{\sigma_R} = \frac{35-25}{\sqrt{11.265}} = 2.98$$

و بحساب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار و التي تكون من أجل مستوى المعنوية 1% و من جدول التوزيع الطبيعي المعياري تساوي 2.58 , أي أن القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار تقع خارج منطقة القبول [-2.58,2.58] و بالتالي نرفض H_0 و نقبل H_1 و يستدل من هذا بعدم عشوائية تتابع وصول الرجال و النساء لمكان العمل .

مثال (8-3) : آلة لتعبئة الشاي في أكياس صغيرة , كانت أوزان 20 كيساً متتالية كما يلي (بالغرام):

2.0 , 2.1 , 1.98 , 1.99 , 2.0 ,1.89 , 1.95 , 1.97 , 1.99 , 2.0 , 1.94 , 2.0
1.96, 1.97 , 1.99 , 2.1 , 2.2 , 2.0 , 2.0 , 2.0

اختبر عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ فرضية العدم : (التتالي عشوائي) : H_0 مقابل الفرضية البديلة : (التتالي غير عشوائي) : H_1

الحل :

إن وسط الأوزان 1.995 و سنستخدمه كمعيار , فنستبدل كل قيمة أكبر منه بـــ A و كل قيمة أصغر منه بـــ B , و هذا يؤدي إلى التالي :

A A B B A B B B B A B A B B B A A A A A

و منه نجد $n_1 = 10$ (عدد حالات A)

$n_2 = 10$ (عدد حالات B)

و عدد حالات التتابع هي r =9

و من الفرضية البديلة التي تدل على الاختبار من الطرفين , و حجم العينتين صغير نستخدم جدول توزيع التتابع R حيث $n_1 = n_2 = 10 ; r = 9$

نجد مستوى المعنوية المشاهد :

$$\frac{PV}{2} = P^* = 0.242 \Rightarrow PV = (2)(0.242) = 0.484$$

و يلاحظ أن $PV > \alpha = 0.05$ أي نقبل H_0 و نرفض H_1

أي أن التتالي بالأوزان كان عشوائياً .

مثال (8-4): لنفرض أن طريقة صناعية تنتج قضباناً فولاذية و أننا نقيس قطر كل منها . و قد و جدنا بين القضبان الأربعين الأولى ست عشرة حالة تتجاوز الوسط . و لنختبر الفرضية بأن هذه الطريقة الصناعية تنتج قضباناً تختلف أقطارها بصورة عشوائية . لدينا هنا حكماً $n_1 = n_2 = 20$ (باعتبار أنه لا بد أن يكون نصف المشاهدات فوق الوسط و النصف الآخر تحت الوسط , و ذلك وفقاً لتعريف الوسط).

و عدد حالات التتابع المشاهدة r=16 يقع بين القيمتين الحرجتين الصغرى , و الكبرى وهي من أجل $n_1 = n_2 = 20$ و r=16 تكون بين 14 و 27 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

و بالتالي فإنه يقبل فرض العدم , و يرفض الفرض البديل , و بهذا يستدل بأن نتائج قياس قطر كل من القضبان تكون عشوائية , و بالتالي فاختلاف أقطار القضبان يتم بصورة عشوائية .

8-7- تمرينات غير محلولة :

1) في مؤسسة كبيرة كانت آخر 20 ترقية للموظفين و الموظفات قد تمت على النحو التالي:

M F M M F M F M M M F F M F M F F M M F

حيث F ترمز للأنثى و M ترمز للرجل

هل يمكن القول إن الترقيات كانت عشوائية بالنسبة للجنس؟ ذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

2) في مطار معين و في فترة معينة تمت ملاحظة وصول الطائرات في مواعيدها المعلنة حيث كانت على النمط التالي :

Y N Y Y N Y Y Y N N Y N Y N Y N N Y N Y Y Y Y N Y N N Y N Y Y Y Y N
N N Y Y Y Y N N Y Y N Y N Y N N

حيث Y تعني وصول الطائرة في موعدها المعلن أو قبله , و N تعني تأخر الطائرة عن الوصول في موعدها .

اختبر عند مستوى المعنوية 5% عشوائية نمط وصول الطائرات .

3) يدعي خبير في تذوق الشاي أنه قادر على التمييز بين نوعين من الشاي من خلال تذوقه لكأس مصنوع من كل منهما , و في تجربة تحوي 20 محاولة استطاع في أربع عشرة منها أن يميّز بصورة صحيحة بين النوعين , و كان ذلك وفقاً للترتيب التالي :

+ + - - + + + + + + - - - + + + + + + -

حيث يرمز + للحكم الصحيح , و – للحكم الخاطئ .

هل التتابع ما بين الحكم الصحيح و الحكم الخاطئ عشوائياً و ذلك عند مستوى المعنوية $\propto=0.05$.

4) وجد ترتيب النباتات الصحيحة و المريضة في صف نباتات الفريز على الشكل التالي :

H H D H H H H H D H D D D H H H H H H H H H H H

فهل يلقي هذا الترتيب شكاً على كون النباتات المريضة مبعثرة بصورة عشوائية بين النباتات الصحيحة ؟ و ذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

الباب الثالث

اختبارات العينتين المستقلتين

(Test of Two Independent Sample)

الفصل التاسع :

اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب(Wilcoxon Rank Sum Test)

الفصل العاشر :

اختبار الوسط للعينتين المستقلتين

(Median Test For The Two Independent Samples)

الفصل الحادي عشر :

اختبار مان وتني (Mann-Whitney Test)

الفصل الثاني عشر :

اختبار كولموغوروف – سميرنوف للعينتين المستقلتين

(Kolmogorv – Smirnov Test For Two Independent Samples)

الفصل الثالث عشر :

اختبار والدولفوتيز لتتابع العينتين المستقلتين

(Wald-Wolfowitz Runs Test For The Independent Samples)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين

9-1- مفهوم الاختبار

9-2- المتطلبات , والشروط

9-3- فرضيات الاختبار

9-4- إجراء الاختبار

9-5- اختبار ويلكوسكن لمجموع الرتب في حالة العيّنات الكبيرة

9-6- تمرينات محلولة

9-7- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع

اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين

9-1- مفهوم الاختبار : قد يحتاج أحياناً مقارنة وسطي أو متوسطي مجتمعين في ضوء عينتين عشوائيتين مستقلتين منهما, مثلاً في دراسة لمتوسط إنتاج أشجار الزيتون في المنطقتين A و B في موسم معين , نأخذ عينة عشوائية من الأشجار بالمنطقة A و عينة عشوائية أخرى مستقلة من الأشجار بالمنطقة B ثم نستخدم بيانات العينتين لاختبار فرض حول وسط أو متوسط الإنتاج في المنطقتين , فإذا كان توزيع المجتمع ليس طبيعياً , و التباين مجهولاً في المنطقتين فإنه يتعذر استخدام اختبار ستودنت إذا كان حجم العينتين صغيراً .

9-2- المتطلبات و الشروط : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) وجود مجتمعين يمثلان المتغيرين المتصلين X و Y .

2) توزيع X و Y متطابقين من حيث الشكل و المعالم و أنهما إذا اختلفا فسيختلفان من حيث الموضع و تحديداً الوسط .

3) العيّنات المستخدمة من X و Y مستقلة .

4) البيانات مقاسة على مقياس مجالي على الأقل أو مقاسة على مقياس ترتيبي بحيث يمكن مقارنة أي قيمة في إحدى العيّنتين بأي قيمة في العيّنة الأخرى . حيث $X_1, X_2, \dots, X_{n_X}$ من مجتمع X ، $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_Y}$ من مجتمع Y .

9-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم تكون $H_0 : m_X = m_Y$

حيث m_X وسط X , و m_Y وسط Y في المجتمع .

و الفرضية البديلة يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية :

$$H_1 : m_X \neq m_Y \; ; \; H_1 : m_X < m_Y \; ; \; H_1 : m_X > m_Y$$

4-9- إجراء الاختبار : لإنجاز الاختبار ندمج قيم العينتين , و ترتب القيم في العينة المدمجة من الأصغر للأكبر , و كأنها تنتمي لعيّنة واحدة , و في حالة تساوي قيمتين أو أكثر تعطي كل منها الوسط الحسابي لرتبها إذا لم تكن متساوية . لتكن :

T_X مجموع رتب قيم العينة المأخوذة من مجتمع X .

T_Y مجموع رتب قيم العينة المأخوذة من مجتمع Y .

و لاختبار H_0 يمكننا أن نستخدم أياً من الإحصائيات الآتية كإحصائية اختبار T_X أو T_Y , حيث نلاحظ أن مجموع T_X و T_Y هو مجموع الأعداد الطبيعية الـــ $n_X + n_Y$ الأولى أي:

$$\frac{n_X(n_X+1)}{2} \leq T_X \leq n_X n_Y + \frac{n_X(n_X+1)}{2}$$ و يكون : $\frac{(n_X+n_Y)(1+n_X+n_Y)}{2}$

و متوسطها تحت H_0 هو $\frac{n_X(n_X+n_Y+1)}{2}$

و ذلك لأن :

$$\frac{(n_X+n_Y)(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{n_X(n_X+1)}{2} + \frac{n_Y(n_Y+1)}{2} + \frac{2n_X n_Y}{2} = n_X n_Y + \frac{n_X(n_X+1)}{2}$$

(لأن $\frac{n_Y(n_Y+1)}{2} = 0$ بما يتعلق بـــ T_X).

و كذلك متوسط T_X تحت صحة H_0 يكون :

$$\frac{\left[\frac{n_X(n_X+1)}{2}\right]+\left[n_X n_Y+\frac{n_X(n_X+1)}{2}\right]}{2} = \frac{n_X(n_X+1)+2n_X n_Y+n_X(n_X+1)}{4}$$

$$= \frac{2[n_X n_Y+n_X(n_X+1)]}{4} = \frac{n_X(n_X+n_Y+1)}{2}$$

أما توزيعهما فهو متماثل حول هذا المتوسط .

و بعد حساب T_X مجموع رتب قيم X في العينة المدمجة (و يمكن أيضاً استخدام T_Y).

نستخدم T_X كإحصائية إختبار . و المبرر لذلك أنه إذا كانت هناك اختلافات حقيقية بين m_X و m_Y فإن معظم الرتب الصغيرة ستذهب غالباً لقيم إحدى العينتين بينما معظم الرتب الكبيرة

تذهب لقيم العينة الأخرى . و بالتالي فإن المجموعين T_X و T_Y سيختلفان كما سيختلف كل منهما بشكل كبير عن قيمته المتوقعة تحت صحة H_0 .

تحدّد الفرضية البديلة حسب حجم T_X النسبي بالنسبة لقيمتها المتوقعة تحت H_0 و هي $\frac{n_X(n_X+n_Y+1)}{2}$ فإذا كانت قيمة T_X أكبر بكثير من هذه القيمة , فإن هذا يعني أن معظم رتب X أكبر من معظم رتب Y و في هذه الحالة يمثل للفرضية البديلة : $H_1: m_X > m_Y$.

و إذا كانت قيمة T_X أقل بكثير من القيمة المتوقعة , فإن هذا يدعم الفرضية البديلة $H_1: m_X < m_Y$ و عدا ذلك نختار $H_1: m_X \neq m_Y$.

و من جدول توزيع إحصائية ويلكوكسن لمجموع الرتب المرفق , و باستخدام T_X و n_X و n_Y نوجد قيمة P^* ثم (P.V) حسب نوعية الاختبار , و نقارنها بمستوى المعنوية $\propto$ و نرفض H_0 إذا كانت $P.V \leq \propto$.

و الجدول المذكور يعطي لأي n_X , n_Y معينة قيمة P^* و هي احتمال قيمة تساوي أو تزيد عن T_X عندما تكون T_X تساوي أو تزيد عن متوسطها , و نستخدم الطرف الأيمن , كما أن P^* تعطي قيمة تساوي أو تقل عن T_X عندما تساوي أو تقل عن متوسطها , و نستخدم الطرف الأيسر . و نتيجة لتماثل توزيع T_X حول متوسطه الحسابي ؛ فإن الاحتمالات المتناظرة في الطرفين متساوية . و الجدول يفترض أن $n_X \leq n_Y \leq 10$

و لهذا فإذا كانت $n_X > n_Y$ نأخذ كإحصائية اختبار T_Y ليمكن استخدام الجدول .

9-5- اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب في حالة العينات الكبيرة :

إذا كان حجم العيّنتين كبيراً يمكن الاستفادة من حقيقة أن توزيع T_X في حالة صحة H_0 و العينات كبيرة هي التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\mu_X = \frac{n_X(n_X+n_Y+1)}{2}$ و انحراف معياري $\sigma_X = \sqrt{\frac{n_X n_Y(n_X+n_Y+1)}{12}}$

و باستخدام تصحيح ييتس للاتصال فإننا نأخذ كإحصائية اختبار لفرض العدم :

$Z = \frac{T_X \pm 0.5 - \mu_X}{\sigma_X}$ الاحصائية $H_0: m_X - m_Y = m_0$

حيث نأخذ (+0.5) عند استخدام الطرف الأيسر من توزيع (Z)

نأخذ (−0.5) عند استخدام الطرف الأيمن من توزيع (Z) حيث $Z \sim N(0,1)$

و يمكن بالتالي إيجاد قيمة (P.V) حسب نوعية الاختبار ذي طرف أو طرفين .

9-6- تمرينات محلولة :

مثال (9-1) : توضح البيانات التالية الأعمار بالساعات لنوعين من مصابيح الإضاءة A , B تم استخدامها بشكل مستمر, وذلك في عينتين مستقلتين من النوعين :

النوع A	441	396	433	453	407	426	373		
النوع B	413	412	417	445	383	424	403	433	439

و المطلوب : استخدم اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لمعرفة ما إذا كان بالإمكان الادعاء بأن وسط العمر متساوٍ للنوعين من أجل مستوى معنوية $\propto = 0.05$.

الحل :

لنرتب مشاهدات العينتين من الأصغر للأكبر, و كأنها تنتمي لعينة واحدة , ونضع مشاهدات A بخط غامق و مشاهدات B بخط فاتح , و الجدول التالي يوضح النتائج الحاصلة , حيث نرمز للنوع A بالرمز X و للنوع B بالرمز Y و يكون لدينا :

$$T_X = 1 + 3 + 5 + 10 + 11.5 + 14 + 15 = 60.5$$

$$T_Y = 2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11.5 + 13 + 15 = 75.5$$

(و للتأكد من صحة المجاميع , نتذكر أن مجموع T_X و T_Y يجب أن يساوي :

$$\frac{(n_X+n_Y)(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{(7+9)(7+9+1)}{2} = 136 = T_X + T_Y = 60.5 + 75.5$$

و هذا ما يؤكد صحة المجموعين .

عائدية القياس	المشاهدة	الترتيب	رتبة المشاهدة
A	373	1	1
B	383	2	2
A	396	3	3
B	403	4	4
A	407	5	5
B	412	6	6
B	413	7	7
B	417	8	8
B	424	9	9
A	426	10	10
B	433	11	11.5
A	433	12	11.5
B	439	13	13
A	441	14	14
B	445	15	15
A	453	16	16

و بما أن n_X أصغر من n_Y و من أجل $T_X = 60.5$ و $n_X = 7$ و $n_Y = 9$, و بما أنه لم يحدد اتجاه معين للفرق بين الوسطين في حالة رفض H_0 و الفرق بين T_X و T_Y لا يجعلنا نتوقع اختلافاً كبيراً جداً بين أي منهما و وسطهما و بالتالي نختبر $H_0: m_X = m_Y$ مقابل $H_1: m_X \neq m_Y$ أي اختبار من الطرفين و يتسنى لنا بالتالي استخدام جدول توزيع إحصائية ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين , و يلاحظ أيضاً :

متوسط قيمة T_X : $ET_X = \frac{n_X(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{(7)(7+9+1)}{2} = 59.5$

ومتوسط قيمة T_Y : $ET_Y = \frac{n_Y(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{(9)(7+9+1)}{2} = 76.5$

و كون $T_X = 60.5$ فإننا سنستخدم الطرف الأيمن من توزيع T_X. و من الجدول الإحصائي المرفق المذكور لاحقاً و عند $n_X = 7 ; n_Y = 9$; $T_X = 60$ (و بالعمود أيمن) نجد $P_1^* = 0.500$, و عند $n_X = 7 ; n_Y = 9$; $T_X = 61$ (بالعمود أيمن) نجد $P_2^* = 0.459$ ثم بأخذ $P^* = \frac{P_1^* + P_2^*}{2} = \frac{0.5+0.459}{2}$ أي $P^* = 0.4795$

كقيمة تقريبية عند $T_X = 60.5$, و كون الاختبار من الطرفين فإن

$$(P.V)=2P^* = (2)(0.4795) = 0.9590$$

و هو أكبر من $\propto = 0.05$ و بالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أن وسط العمر متساوٍ للنوعين A و B .

مثال(9-2): لمقارنة إنتاجية نوع معين من الأشجار في مزرعتين A و B , تم أخذ عينة عشوائية من A و عينة عشوائية مستقلة عن الأولى من B , و سجل إنتاج كل شجرة في كل من العينتين بالكيلوغرام في موسم معين , و كانت النتائج التالية :

العينة من A	36	25	28	32	25	29	40	36	
العينة من B	38	32	35	40	24	29	35	48	33

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, هل يمكن الاستنتاج من هذه البيانات أن وسط الإنتاجية متساوٍ في المزرعتين , وذلك باستخدام اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب .

الحل :

لنرمز أولاً بالرمز X لإنتاج الأشجار من المزرعة A و نرمز بالرمز Y لإنتاج الأشجار من المزرعة B , فيكون من الجدول المرفق الذي يحسب رتب المشاهدات في العينتين :

$$n_X = 8 ; n_Y = 9 ; T_X = 58.5 ; T_Y = 94.5$$

حيث يلاحظ أن :

$$T_X + T_Y = \frac{(n_X+n_Y)(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{(8+9)(8+9+1)}{2} = 153$$

و هذا يساوي 153=94.5+58.5 أي هذا ما يؤكد صحة الحسابات .

كما نلاحظ أن : $n_X < n_Y$ و من جدول توزيع إحصائية ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين و عند :

$$T_X = 58.5 \; ; \; n_X = 8 \; ; n_Y = 9$$

و اختبار $H_0 : m_X = m_Y$ مقابل $H_1 : m_X \neq m_Y$ حيث نجد أن :

$$ET_X = \frac{n_X(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{(8)(8+9+1)}{2} = 72$$

$$ET_Y = \frac{n_Y(n_X+n_Y+1)}{2} = \frac{(9)(8+9+1)}{2} = 81$$

عائدية القياس	المشاهدات	الترتيب	رتبة المشاهدات
B	24	1	1
A	25	2	2.5
A	25	3	2.5
A	28	4	4
A	29	5	5.5
B	29	6	5.5
A	30	7	7
A	32	8	8.5
B	32	9	8.5
B	33	10	10
B	35	11	11.5
B	35	12	11.5
A	36	13	13
B	38	14	14
A	40	15	15.5
B	40	16	15.5
B	48	17	17

و بمقارنة T_X مع ET_X نجد الفارق 13.5 و كذلك الفارق بين T_Y و ET_Y و بالتالي لا يميل أحد الوسطين إلى الآخر , و يكون عندئذ الفرض البديل $H_1: m_X \neq m_Y$

و باستخدام الجدول نجد :

من أجل : $T_X = 58$; $n_X = 8$; $n_Y = 9$ نجد $P_1^* = 0.1$

و من أجل : $T_X = 59$; $n_X = 8$; $n_Y = 9$ نجد $P_2^* = 0.118$

ومنه $P^* = \frac{P_1^* + P_2^*}{2}$ أي $P^* = \frac{0.100+0.118}{2} = 0.109$

ويكون مستوى المعنوية المشاهد كون الاختبار من الطرفين :

P.V=$2P^* = (2)(0.109) = 0.218$ و هو أكبر من $\alpha = 0.05$ و منه يرفض H_1 و يقبل H_0 أي $m_X = m_Y$ أي أن وسط الانتاج متساوٍ عند أشجار المزرعتين.

9-7- تمرينات غير محلولة

1) استخدمت عينة من 5 مرضى لمعرفة رد فعل استخدامهم لعقار معين و سجلت قياسات الاستجابة (بموجب مقياس معين) حيث كانت القياسات هي :

85 ; 79 ; 69 ; 47 ; 55 و في ذات الوقت استخدمت عينة أخرى مستقلة مؤلفة من ثلاث أشخاص كعينة ضابطة و سجلت قياسات استجاباتهم كالتالي :

76 ; 82 ; 43 .

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$, اختبار وجود فروق تذكر بين العينتين وذلك باستخدام اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب .

2) في دراسة لمعرفة أثر طريقة حديثة في التدريس على تحصيل الطلاب , اختيرت عينتان من الطلاب بطريقة عشوائية , و تم تطبيق الطريقة الحديثة على إحدى العينتين في حين أخضعت العينة الأخرى للطريقة التقليدية , و بعد اختبار طلاب العينتين كانت درجاتهم كالتالي :

درجات الطلاب بالطريقة التقليدية	5	4	1	5	6	3	3	2	5	5	
درجات الطلاب بالطريقة الحديثة	6	2	4	7	4	7	6	7	5	7	6	1

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ و باستخدام اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب اختبار أفضلية الطريقة الحديثة في التدريس على الطريقة القديمة من حيث تأثيرها في تحصيل الدرجات للطلاب .

3) في دراسة لمعرفة أثر برنامج معين في تخفيض الوزن لدى الرجال و النساء الذين يعانون من الوزن الزائد , اختيرت عينتان عشوائياً من الرجال , و النساء الذين أخضعوا للبرنامج و أخذت قياسات النقص في الوزن لهم بعد انتهاء البرنامج حيث كانت كالتالي :

النقص في الوزن عند الرجال	2.3	3.0	2.6	3.8	2.0	4.2	0.9	2.5	0.2	1.3	0.7
	3.7	0.8	1.6	0.5	1.2	0.1	2.7	4.0	1.7	1.5	
النقص في الوزن عند النساء	2.8	1.0	2.1	0.4	3.1	1.4	0.6	1.3	3.2	2.0	1.9
	2.2	0.5	1.6	1.5	1.1	0.6	3.4	3.5	2.4		

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ و باستخدام اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب اختبار تأثير البرنامج في خفض وزن النساء أكثر من خفضه لوزن الرجال .


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل العاشر

اختبار الوسط للعينتين المستقلتين

10-1- مفهوم الاختبار

10-2- متطلبات الاختبار وشروطه

10-3- فرضيات الاختبار

10-4- إجراء الاختبار

10-5- المقارنة و القرار

10-6- أمثلة محلولة

10-7- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل العاشر

اختبار الوسط للعيّنتين المستقلتين

10-1- مفهوم الاختبار : يستخدم هذا الاختبار لمعرفة فيما إذا كانت عيّنتان أو مجموعتان مستقلتان من البيانات تنتميان إلى مجتمعين لهما الوسط نفسه ويعرف هذا الاختبار باختبار مودووستنبرغ .

10-2- متطلبات الاختبار وشروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون بيانات العينتين المستقلتين مأخوذة عشوائياً , ورتبية على الأقل .

2) أن يكون المتغير المدروس مستمراً .

3) إذا كان لمجتمعي العينتين الوسط نفسه ، فإنه لكل مجتمع يكون الاحتمال P هو ذاته أن تكون أية قيمة أكبر من الوسط .

10-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم تقول إن مجتمعي العينتين متماثلين أي لهما وسط متساوٍ ، والفرضية البديلة في عدم تماثل مجتمعي العينتين ؛ أي عدم تساوي الوسط في المجتمعين .

10-4- إجراء الاختبار : يعتمد الاختبار في البداية على دمج العينتين , وإيجاد الوسط المشترك لهما ومن ثم تقسيم البيانات في جدول اقتران ثنائي مشترك وفق :

1) كونها أكبر من الوسط (أو أصغر منه أو تساويه) .

2) كونها تنتمي إلى العينة الأولى أو الثانية .

وبالتالي جدول الاقتران يتكون من أربع خلايا ، فإذا كان n_1 يمثل حجم العينة الأولى و n_2 حجم العينة الثانية و $(n = n_1 + n_2)$ فإن جدول الاقتران الثنائي المشترك يكون بالشكل التالي :

العينة	الأولى	الثانية	المجموع
أكبر من الوسط	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
أصغر من أو يساوي الوسط	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
المجموع	n_1	n_2	N

ويكون n_{11} عدد البيانات التي تنتمي إلى العينة الأولى التي أكبر من الوسط .

n_{21} عدد البيانات التي تنتمي إلى العينة الأولى التي ليست أكبر من الوسط .

n_{12} عدد البيانات التي تنتمي إلى العينة الثانية التي أكبر من الوسط .

n_{22} عدد اللبيانات التي تنتمي إلى العينة الثانية التي ليست أكبر من الوسط .

$n_{1.}$ عدد البيانات من العينة المدمجة والتي أكبر من الوسط .

$n_{2.}$ عدد البيانات من العينة المدمجة والتي ليست أكبر من الوسط .

ومن الجدول السابق فإنه يمكن ملاحظة أن توزيع العينة لـ n_{11} و n_{12} تحت صحة H_0 يتبع التوزيع فوق الهندسي أي $P_{.}(n_{11}, n_{12}) = \frac{\binom{n_1}{n_{11}}\binom{n_2}{n_{12}}}{\binom{n}{n_{1.}}}$

ولكن حساب قيمة الاحتمال بهذه الطريقة يكون غير عملي ، خاصة إذا كان حجم العينة كبيراً، وبالتالي نستخدم تقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع ذي الحدين لاختبار الفرق بين نسبة البيانات التي أكبر من الوسط في العينة الأولى ونسبة البيانات التي أكبر من الوسط في العينة الثانية ويكون الاختبار عندئذ :

$$Z = \frac{\left(\frac{n_{11}}{n_1}\right)-\left(\frac{n_{12}}{n_2}\right)}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad ; P = \frac{n_{1.}}{n}$$

فإذا كانت H_0 صحيحة , وحجم العينة كبيراً , فإن Z تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري (يمكن تربيع طرفي العلاقة Z واستخدام توزيع كاي تربيع بدرجة واحدة من الحرية بدلاً من التوزيع الطبيعي المعياري) وبالتالي قيمة إحصائية الاختبار تكون :

$$\chi^2 = \frac{\mathbf{n}(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_1 n_2 n_{1.} n_{2.}}$$

10-5- المقارنة , و القرار : إذا تم استخدام التوزيع الطبيعي والاحصائية Z ، عندها تقارن القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار Z مع القيمة النظرية الناتجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية $\propto$ ، فإذا وقعت القيمة المشاهدة لـــ Z في أي من منطقتي الرفض فإنه ترفض H_0 وتقبل H_1 ، وإلا فإنه تقبل H_0 وترفض H_1 .

أما إذا تم حساب قيمة x^2 فإنها تقارن مع القيمة الناتجة من جدول توزيع كاي – تربيع بدرجة واحدة من الحرية عند مستوى المعنوية $\propto$. وبالتالي إذا كانت :

$\chi^2 > \chi^2_{1-\propto}(\gamma = 1)$ فإنه ترفض H_0 وتقبل H_1 ، وإذا كانت :

$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\propto}(\gamma = 1)$ فإنه تقبل H_0 وترفض H_1

ويمكننا أيضاً حساب مستوى المعنوية المشاهد P.V وهو احتمال أن تكون الاحصائية أكبر أو تساوي القيمة المشاهدة لقيمة Z أو لقيمة χ^2 ونقارنها مع $\propto$ فإذا كانت $P.V < \propto$ فإنه ترفض H_0 وتقبل H_1 وإذا كانت $P.V \geq \propto$ فإنه تقبل H_0 وترفض H_1 .

10-6- أمثلة محلولة

مثال (10-1) : إذا كانت درجات عينتين عشوائيتين من الطلاب في مؤسسة تعليمية معينة في اختبار ما لمقرر معين كالتالي :

العيّنة (1)	5	1	5	2	4	3	7	8	6	1	9	5
العيّنة(2)	7	7	1	5	2	2	6	4	8	3	1	6

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ اختبر عدم تماثل درجات الطلاب في مجتمعي العينتين .

الحل :

إن فرضية العدم تقول بوجود تماثل في درجات طلاب مجتمعي العينتين ، أي أن لمجتمعي العينتين وسطاً متساوياً .

والفرضية البديلة تقول بعدم وجود تماثل في درجات طلاب مجتمعي العينتين .

نحسب الوسط المشترك بعد دمج العينتين , وترتيبهما من الأصغر إلى الأكبر أو العكس حيث يلاحظ أن عدد البيانات الكلي هو n=24 ؛ $n_1 = n_2 = 12$

1 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 9

حيث ترتيب الوسط $O_m = \frac{n+1}{2} = 12.5$

$$m = \frac{X_{12}+X_{13}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$

وجدول الاقتران الموافق سيكون من الشكل :

العينة	الأولى	الثانية	المجموع
أكبر من الوسط	n_{11}=4	n_{12}=5	n_1.=9
أصغر من أو يساوي الوسط	n_{21}=8	n_{22}=7	n_2.=15
المجموع	n_1=12	n_2=12	n=24

وتكون قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0:

$$x^2 = \frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_1 n_2 n_{1.} n_{2.}} = \frac{(24)[(4)(7)-(5)(8)]^2}{(12)(12)(9)(15)} = 0.178$$

ثم نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من جدول كاي – تربيع بدرجة واحدة من الحرية , وعند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ أي نحسب $\chi^2_{1-\propto}(\gamma) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.841$ ونقارن $x^2 = 0.178$ مع $\chi^2_{1-\propto}(\gamma) = 3.841$ فنجد أن $x^2 < \chi^2_{1-\propto}(\gamma)$ ومنه نقبل الفرضية العدمية H_0 ونرفض H_1 (البديلة) . ومن هذا يستدل بتماثل درجات طلاب مجتمعي العينتين من حيث تساوي وسطي درجات المجتمعين .

مثال (10–2) : في مقياس لمستوى الذكاء عند مجموعتين من الأشخاص ، مجموعة من الذكور , وأخرى من الإناث لهم السوية نفسها من العمر والمستوى التعليمي كانت النتائج كالتالي :

مجموعة الذكور	16	22	29	24	16	30	31	27	28	25
	23	28	27	26	29	26	35	32	20	33
مجموعة الإناث	21	19	31	25	18	19	20	32	16	18
	22	24	29	17	23					

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ ، اختبر أن لمجتمعي المجموعتين وسطاً غير متساوٍ بالنسبة لمقياس مستوى الذكاء .

الحل :

إن فرضية العدم تقضي بعدم وجود فروق حقيقية في مقياس مستوى الذكاء لمجتمعي المجموعتين ، أي أن للمجتمعين وسطاً متساوياً بمستوى الذكاء .

والفرضية البديلة تقضي بوجود فروق حقيقية في مقياس مستوى الذكاء لمجتمعي المجموعتين أي أن للمجتمعين وسطاً مختلفاً بمستوى الذكاء .

ويلاحظ أن العيّنة المدمجة من الحجم n=35 حيث $n_1 = 20$ يمثل حجم عينة الذكور, و $n_2 = 15$ يمثل حجم عيّنة الإناث , والعيّنة المدمجة من العينتين والمرتبة تصاعدياً تكون :

16	16	16	17	18	18	19	19	20	20	21	22	22	23	23
24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	29	30	31
31	32	32	33	35										

وترتيب الوسط $O_m = \frac{n+1}{2} = \frac{35+1}{2} = 18$ والوسط عندئذ هو المقياس ذو الترتيب 18 في العيّنة المدمجة تصاعدياً أي m=25 .

وبالتالي جدول الاقتران الموافق لهذا البيان يكون من الشكل التالي :

العينة	الأولى	الثانية	المجموع
أكبر من الوسط	n_{11}=13	n_{12}=3	$n_{1.}$=16
أصغر أو يساوي الوسط	n_{21}=7	n_{22}=12	$n_{2.}$=19
المجموع	n_1=20	n_2=15	n=35

وبحساب إحصائي الاختبار تحت صحة H_0 :

$$Z = \frac{\left(\frac{n_{11}}{n_1}\right) - \left(\frac{n_{12}}{n_2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{n_{1.}}{n}\right)\left(1-\frac{n_{1.}}{n}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{13}{20} - \frac{3}{15}}{\sqrt{\left(\frac{16}{35}\right)\left(1-\frac{16}{35}\right)\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}\right)}} = 2.645$$

وبحساب مستوى المعنوية المشاهد من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$$P.V = P[Z \geq 2.645] = 1 - P[Z \leq 2.65] = 1 - 0.9960 = 0.004$$

وبالمقارنة مع مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ نجد أن : $P.V < \propto$ و يستدل من هذا رفض H_0 وقبول H_1 أي أن هناك فروقاً حقيقية في مستوى الذكاء ما بين الذكور, والإناث ؛ أي أن المجتمعين لهما وسطاً غير متساوٍ بالنسبة لمقياس مستوى الذكاء .

10-7- تمرينات غير محلولة :

1) في دراسة لتأثير نقص مادة اليود في الغذاء على نشاط الغدة الدرقية عند الإنسان ، تم استخدام عينتين من الأشخاص ، حيث أعطي غذاء للعينة الأولى بدون وجود اليود , ولفترة معينة من الزمن ، وتركت العينة الثانية لتكون عيّنة ضابطة ؛ أي أعطي الأشخاص غذاء يحوي اليود وللفترة نفسها من الزمن , وبعد إنجاز التجربة تم تسجيل درجة النشاط للغدة الدرقية في العينتين , وكان لدينا الجدول التالي :

العينة (I)	33	29	22	21	35	30	28	31	17	34	25
العينة (II)	26	16	23	18	20	24	16	19	27	32	

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، اختبر عدم تماثل درجات النشاط للغدة الدرقية في مجتمعي العينتين , وذلك باستخدام اختبار الوسط لعينتين مستقلتين .

2) في دراسة حول عمر نوعين من المصابيح الكهربائية ، تم أخذ عينتين متساويتين عشوائياً من كل نوع ، حيث كانت الأعمار كالتالي :

العينة (1)	1296	1393	1384	1422	1372	1323	1243	1387	1290
	1299	1422	1370	1313	1349	1287	1366	1415	1304
العينة (2)	1275	1295	1392	1326	1412	1304	1287	1335	1321
	1298	1402	1393	1388	1421	1259	1386	1344	1416

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ ثم $\alpha = 0.05$ ، اختبر عدم تساوي وسط عمر المصابيح لمجتمعي العينتين .

Damascus University

الفصل الحادي عشر

اختبار مان وتني لعينتين مستقلتين

11-1- مفهوم الاختبار

11-2- متطلبات الاختبار وشروطه

11-3- فرضيات الاختبار

11-4- إجراء الاختبار

11-5- أمثلة محلولة

11-6- حالة عينّات كبيرة الحجم

11-7- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الحادي عشر

اختبار مان وتني لعينتين مستقلتين

11-1- مفهوم الاختبار : إن هذا الاختبار مثل اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين ، فهو يهتم في مقارنة وسطي أو متوسطي مجتمعين في ضوء عينتين عشوائيتين مستقلتين منهما ، وهو من أكثر الإجراءات اللاوسيطية انتشاراً أو استخداماً ، حيث يستخدم الاختبار للمقارنة بين بيانات عينتين مستقلتين لمعرفة فيما إذا كانت العينتان تنتميان لمجتمع واحد أو لمجتمعين متماثلين .

11-2- متطلبات الاختبار وشروطه : يتطلب اختبار مان وتني الشروط التالية :

1) أن تكون بيانات العينتين المستقلتين مأخوذة عشوائياً .

2) أن تكون بيانات العينتين رتبية على الأقل .

3) أن يكون المتغير محل البحث متغيراً متصلاً أو مستمراً .

4) أن تختلف دوال توزيع مجتمعي العينتين في المركز فقط ، هذا إذا كانت مختلفة بالأصل.

11-3- فرضيات الاختبار : الفرضيات هنا هي مثل فرضيات اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين ، حيث تكون فرضية العدم : $H_0: m_x = m_y$ حيث m_x هو وسط المجتمع X ، m_y هو وسط المجتمع Y .

والفرض البديل يأخذ أحد الأشكال التالية :

$$H_1: m_x \neq m_y \; ; \; H_1: m_x < m_y \; ; \; H_1: m_x > m_y$$

أي أن فرضية العدم تتمثل في أن مجتمعي العينتين متماثلان ، أي أن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما وسط متساوٍ .

11-4- إجراء الاختبار: بإتباع المراحل المدروسة نفسها في اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب لعينتين مستقلتين ، حيث ندمج قيم العينتين : $X_1, X_2, \dots, X_{n_x}$ من X و $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y}$ من Y ثم نقوم بترتيب القيم في العينة المدمجة من الأصغر للأكبر ونأخذ T_X مجموع رتب قيم العيّنة المأخوذة من المجتمع X و T_Y مجموع رتب قيم العيّنة المأخوذة من المجتمع Y .

ولاختبار H_0 يمكننا أن نستخدم إحصائية الاختبار التالية : $\coprod_X$ ، $\coprod_Y$ حيث : $\coprod_X = T_x - \frac{n_x(n_x+1)}{2}$ ، حيث تتراوح قيمة $\coprod_X$ بين الصفر و $n_x n_y$ ومتوسطها تحت H_0 هو $\frac{n_X n_Y}{2}$. وتوزيعها متماثل حول المتوسط $\frac{n_X n_Y}{2}$ مما يسهل جدولتها . ونسمي هذا الاختبار باختبار $\coprod$، وجدول الكميات لاختبار مان ونتي عند n_X و n_Y معينة يعطي القيمة $\coprod_P$ في الطرف الأيسر لتوزيع $\coprod$ التي تسبقها مساحة P وقيم P التي يوفرها الجدول هي 0.10; 0.05; 0.025; 0.01; 0.005; 0.001 ومن أجل P كبيرة نستخدم العلاقة $\coprod_{1-P} = n_1 n_2 - \coprod_P$

ويقوم الاختبار على حساب القيمة المشاهدة لـ $\coprod$ ومقارنتها بالقيمة (أو القيمتين) الحرجة (الحرجتين) بمستوى المعنوية $\propto$.

فإذا كان الاختبار ذا طرفين لا نرفض H_0 إذا كانت : $\coprod_{\frac{\propto}{2}} \leq \coprod \leq \coprod_{1-\frac{\propto}{2}}$ أما إذا كان ذو طرف أيمن فلا نرفض H_0 إذا كانت $\coprod \leq \coprod_{1-\propto}$ وإذا كان الاختبار ذو طرف أيسر لا نرفض H_0 إذا كانت $\coprod \geq \coprod_{\propto}$

(ملاحظة : في حالة التوزيعات المتماثلة فإن الوسط والمتوسط يتطابقان ، وفي هذه الحالة يمكن اعتبار الاختبار كاختبار للفرق بين متوسطين أيضاً) .

11-5- أمثلة محلولة

مثال (11-1) : بالعودة للمثال (9-1) وجدنا أن : $n_x = 7$; $n_y = 9$; $T_X = 60.5$ وبالتالي تكون قيمة الإحصائية المشاهدة لـ $\coprod$ هي :

$$\amalg_0 = T_X - \frac{n_X(n_X+1)}{2} = 60.5 - \frac{7\times 8}{2} = 32.5$$

ومن جدول $\amalg$ وبأخذ $\propto = 0.05$ والاختبار من الطرفين نجد أن القيمة الحرجة الصغرى المقابلة لـ $n_1 = n_X = 7$ و $n_2 = n_Y = 9$ و P=0.025 هي $\amalg_{0.025} = 13$ وبالتالي فالقيمة الحرجة الكبرى تكون :

$$\amalg_{1-\frac{\propto}{2}} = \amalg_{0.975} = n_X n_Y - \amalg_{0.025} = 7 \times 9 - 13 = 50$$

وبما أن $\amalg_0 = 32.5$ فنجد بالتالي أن $\amalg_{0.025} < \amalg_0 < \amalg_{0.975}$

و يستدل من هذا قبول H_0 ورفض H_1 أي تساوي الوسطين ، وهذه النتيجة هي نفسها التي حصلنا عليها في اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب .

مثال (11-2) : بالعودة للمثل (9-2) وجدنا أن :

$$n_1 = n_x = 8 \; ; n_2 = \; n_y = 9 \; ; T_X = 58.5 \; ; T_Y = 94.5$$

ولدينا $H_0: m_x = m_y$ مقابل $H_0: m_x \neq m_y$

وتكون قيمة إحصائية الاختبار $\amalg_0 = T_X - \frac{n_X(n_X+1)}{2} = 58.5 - \frac{(8)(8+1)}{2} = 22.5$

ومن جدول $\amalg$ والاختبار من الطرفين لدينا :

$$\propto = 0.05 \; ; \frac{\propto}{2} = 0.025 \; ; 1 - \frac{\propto}{2} = 0.975$$

ولدينا $n_1 = 8$ و $n_2 = 9$ ويكون : $\amalg_{\frac{\propto}{2}} = \amalg_{0.025} = 16$

$$\amalg_{1-\frac{\propto}{2}} = \amalg_{0.975} = n_x n_y - \amalg_{\frac{\propto}{2}} = (8)(9) - 16 = 56$$

وبالمقارنة ما بين $\amalg_0 = 22.5$ و $\amalg_{\frac{\propto}{2}} = 16$ ؛ $\amalg_{1-\frac{\propto}{2}} = 56$ نجد بالتالي :

$\amalg_{\frac{\propto}{2}} < \amalg_0 < \amalg_{1-\frac{\propto}{2}}$ ومنه نقبل H_0 أي $m_x = m_y$ ، أي تساوي الوسطين .

11-6- حالة عيّنات كبيرة الحجم

إذا كانت كل من $n_1 = n_x$ و $n_2 = n_y$ أكبر من 20 فإن الإحصائية :

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \approx N(0,1)$$

وبالتالي يمكن مقارنة القيمة المشاهدة لـ Z تحت صحة H_0 بالقيم الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

11-7- تمرينات غير محلولة

1) استخدمت عينة من 7 رياضيين لمعرفة مدى استجابتهم مع منشط معين أثناء دخولهم المنافسات وقيست الاستجابة وفق مقياس معين , وكانت القياسات كالتالي :

80 ; 79 ; 69 ; 60 ; 47 ; 55 ; 50 وفي الوقت ذاته استخدمت عيّنة أخرى من خمسة أشخاص , وسجلت قياسات استجاباتهم بالشكل التالي : 79 ; 55 ; 47 ; 40 ; 80 .

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، استخدم اختبار مان وتني بوجود فروق معنوية تذكر بين العينتين .

2) إذا كان الإنتاج اليومي (بالواحدات) لنوعين من الآلات الإنتاجية , ولعدد من الأيام كما يلي :

X (الآلة I)	26	21	20	20	24	28	19	22	29	17	25	26
Y (الآلة II)	23	27	18	25	22	25	26	24	28	23	21	22

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ اختبر تماثل الإنتاج بواسطة الآلتين وذلك باستخدام اختبار مان وتني لعينتين مستقلتين .

3) بالعودة للتدريب الثالث في الفصل التاسع ، طبق اختبار مان وتني عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ لاختبار تأثير البرنامج في خفض وزن النساء أكثر من خفضه لوزن الرجال .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني عشر

اختبار كولموغوروف – سمير نوف

للعينتين المستقلتين

12–1– مفهوم الاختبار

12–2– متطلبات الاختبار وشروطه

12–3– فرضيات الاختبار

12–4– إجراء الاختبار

12–5– أمثلة محلولة

12–6– تمرينات غير محلولة

Damascus University


وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثاني عشر

اختبار كولموغوروف – سمير نوف

للعينتين المستقلتين

12-1- مفهوم الاختبار : قد يكون لدينا عيّنتان عشوائيتان مستقلتان , ونريد أن نعرف إذا ما كانتا قد جاءتا من التوزيع نفسه ، في هذه الحالة يمكن أن نستخدم اختبار كولموغوروف – سمير نوف للعينتين المستقلتين ، ويتميز هذا الاختبار بحساسيته أي قدرته على اكتشاف كل أنواع الاختلافات بين التوزيعين . ويعتمد الاختبار على إيجاد التوزيع التراكمي لتكرارات القيم المشاهدة للعينتين , وحساب الفرق بينهما . فإذا كان الفرق كبيراً كان ذلك دليلاً على قبول عدم انتماء العينتين إلى مجتمع واحد أو مجتمعين متماثلين ، أما إذا كان الفرق صغيراً , فإن ذلك يعني انتماء العينتين إلى مجتمع واحد أو إلى مجتمعين متماثلين من حيث الموضع والتشتت .

12-2- متطلبات الاختبار وشروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون العينتان عشوائيتين مستقلتين ، الأولى : $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ حجمها n_1 والثانية حجمها n_2 وهي $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$. ومسحوبتين من مجتمعين متصلين , وتوزيعهما F(X) ، F(Y) على الترتيب .

2) أن تكون قياسات البيانات رتبياً على الأقل .

12-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم تكون من الشكل $H_0 : F(X) = F(Y)$ حيث F(X) التوزيع التراكمي لمشاهدات العينة الأولى في المجتمع و F(Y) التوزيع التراكمي لمشاهدات العينة الثانية في المجتمع .

والفرضية البديلة H_1 قد تكون من أحد الأشكال التالية :

$H_1 : F(X) \neq F(Y)$ أو $H_1 : F(X) > F(Y)$ أو $H_1 : F(X) < F(Y)$

أو قد تكون $H_0 : F(X) \leq F(Y)$ مقابل $H_1 : F(X) > F(Y)$

أو قد تكون $H_0 : F(X) \geq F(Y)$ مقابل $H_1 : F(X) < F(Y)$

12-4- إجراء الاختبار : نحسب S(X) دالة التوزيع التراكمية للعيّنة الأولى و S(Y) دالة التوزيع التراكمية للعينة الثانية ، تماماً كما حسبناها في الاختبار من أجل عيّنة واحدة .

ومن الواضح إذا كانت H_0 صحيحة , والعينتان من التوزيع نفسه فإن الفرق بين S(X) و S(Y) لن يكون كبيراً ، لهذا فإن أكبر فرق مطلق بينهما يمثل إحصائية الاختبار المناسبة .

وإذا كانت الفرضية البديلة من الشكل $H_1 : F(X) \neq F(Y)$ أي اختبار من الطرفين فإن إحصائية الاختبار تكون أكبر قيمة للفرق |S(X)-S(Y)| .

أما إذا كانت الفرضية البديلة من الشكل $H_1 : F(X) > F(Y)$ أي اختبار من الطرف الأيمن، فإن إحصائية الاختبار تكون أكبر قيمة للفرق [S(X)-S(Y)] وإذا كانت الفرضية البديلة من الشكل $H_1 : F(X) < F(Y)$ أي اختبار من الطرف الأيسر ، فإن إحصائية الاختبار تكون أكبر قيمة للفرق [S(Y)-S(X)]

إذا كان حجم العينتين متساوٍ $(n_1 = n_2)$ نستخدم جدول القيم الحرجة بالطرف الأيمن لتوزيع إحصائية سمير نوف لعينتين متساويتي الحجم (المرفق) وعند مستويات المعنوية $\propto$: 0.10 ; 0.05 ; 0.025 ; 0.01 ; 0.005 لاختبار من طرف واحد , ومستويات المعنوية $\propto$: 0.20 ; 0.10 ; 0.05 ; 0.02 ; 0.01 لاختبار من الطرفين .

وفي حالة $n_1 \neq n_2$ نحصل على القيم الحرجة من كميات بتوزيع إحصائية سمير نوف لعينتين بحجمين مختلفين (الجدول الثاني المرفق) ، حيث N_1 تشير لحجم العينة الأصغر و N_2 لحجم العينة الأكبر ، وفي حالة حجم عينة أكبر مما بالجدول نحسب القيم الحرجة من صيغ التقدير المعطاة أسفل الجدول ، وفي جميع الحالات نرفض H_0 بمستوى معنوية $\propto$ إذا

كانت القيمة المشاهدة أكبر من الحرجة ، وهناك جداول أخرى لسمير نوف من أجل حسابات هذا الاختبار .

12-5- أمثلة محلولة

مثال (12-1) : تمثل البيانات التالية متوسط الإنتاج اليومي من الحليب باللتر في فترة محددة لعينتين عشوائيتين مستقلتين من الأبقار بالمزرعتين A ، B ، وقد تم ترتيب القيم في كل عينة:

العينة من (A)	29.3	32	33.5	36.4	36.8	39.1	40	42		
العينة من (B)	23.6	25.1	28.4	30.1	37.2	38.5	38.7	39	41	44

هل يمكن الادعاء بأن توزيع إنتاج البقرة من الحليب لا يختلف في المزرعتين ؟

الحل :

إن فرضية العدم : $H_0 : F(X) = F(Y)$ لكل Y،X .

والفرضية البديلة : $H_1 : F(X) \neq F(Y)$ لـــ X وY واحدة على الأقل .

العينة الأولى هي الأصغر حيث لدينا $n_1 = 8$ و $n_2 = 10$. والجدول التالي يبين التوزيع التراكمي المشاهد لكلا العينتين والفرق بينهما , والفرق المطلق .

ونجد في الجدول ظهور القيم في العينتين حسب ترتيبهما ، ثم نحسب تكرار كل قياس والتكرار التجميعي الصاعد لقيم X وكذلك التكرار التجميعي الصاعد لقيم Y في العينتين .

ثم نحسب S(X) دالة التوزيع التكراري المشاهد في العيّنة من A

ونحسب S(Y) دالة التوزيع التكراري المشاهد في العينة من B

ثم نحسب الفرق المطلق |S(X)-S(Y)| من أجل كل قيم Y،X في العينتين .

وبما أن الاختبار من الطرفين فإن إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

D=MAX[|S(X)-S(Y)|]=0.3

ومن الجدول المرفق الذي يحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من أجل

$\propto= 0.05$; $n_2 = 10$; $n_1 = 8$. والاختبار من الطرفين يكون :

$$D_{n_1 n_2}(\propto) = \frac{23}{40} = 0.575$$

X_i	f_{X_i}	f_X^+	S(X)	Y_j	f_{Y_j}	f_y^+	S(Y)	|S(X)-S(Y)|	
		0	0	23.6	1	1	0.1	0.1	-
		0	0	25.1	1	2	0.2	0.2	-
		0	0	28.4	1	3	0.3	0.3	-
29.3	1	1	0.125				0.3	0.175	-
			0.125	30.1	1	4	0.4	0.275	-
32.0	1	2	0.250				0.4	0.150	-
33.5	1	3	0.375				0.4	0.025	–
36.4	1	4	0.500				0.4	0.1	+
36.8	1	5	0.625				0.4	**0.225**	+
			0.625	37.2	1	5	0.5	0.125	+
			0.625	38.5	1	6	0.6	0.025	+
			0.625	38.7	1	7	0.7	0.075	-
			0.625	39.0	1	8	0.8	0.175	-
39.1	1	6	0.750				0.8	0.05	–
40.0	1	7	0.875				0.8	0.075	+
			0.875	41.0	1	9	0.9	0.025	–
42.0	1	8	1				0.9	0.1	+
			1	44.0	1	10	1	0	
	$n_1 = 8$				$n_2 = 10$				

وكون D=0.3 و $D_{n_1n_2}(\propto) = 0.575$ نجد أن $D<D_{n_1n_2}(\propto)$ وبالتالي تقبل H_0 وترفض H_1 ، أي أن التوزيع غير مختلف في المزرعتين .

إذا كان الاختبار من الطرف الأيمن ، فإن القيمة المشاهدة للإحصائية هي أكبر فرق بين الفروق الموجبة أي D=MAX[|S(X)-S(Y)|]=0.225 ومن جدول سمير نوف المرفق والعينات مختلفة الحجم ومن أجل $\propto= 0.05$; $n_2 = 10$; $n_1 = 8$ واختبار من طرف واحد نجد $D_{n_1n_2}(\propto) = \frac{21}{40} = 0.525$ وهو أكبر من D مما يعني أيضاً قبول H_0 .

مثال (12-2) : في تنافس رياضي ما بين الرجال والنساء ، كانت الدرجات المسجلة لستة من الرجال وخمس من النساء كالتالي :

الرجال	251	252	276	278	209	236
النساء	230	257	224	238	206	

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$ ، اختبر تماثل درجات الرجال مع درجات النساء في هذا التنافس .

الحل :

إن فرضية العدم : $H_0 : F(X) = F(Y)$ حيث F(X) توزيع درجات الرجال و F(Y) توزيع درجات النساء .

والفرضية البديلة : $H_1 : F(X) \neq F(Y)$

ولإجراء الاختبار نرتب درجات العينتين تصاعدياً مع تمييز درجات كل عينة ونبني جدول الفرق S(x)-S(y) ثم الفرق المطلق .

Y	X	f_Y	f_X	f_y^+	f_X^+	S(Y)	S(X)	S(X)-S(Y)	|S(X)-S(Y)|
	206		1	0	1	0	$^1/_5$	$+^1/_5$=+0.2	0.2
209		1		1	1	$^1/_6$	$^1/_5$	+0.033	0.033
	224		1	1	2	$^1/_6$	$^2/_5$	+0.233	0.233
	230		1	1	3	$^1/_6$	$^3/_5$	+0.433	0.433
236		1		2	3	$^1/_3$	$^3/_5$	+0.267	0.267
	238		1	2	4	$^1/_3$	$^4/_5$	+0.467	0.467
251		1		3	4	$^1/_2$	$^4/_5$	+0.3	0.3
252		1		4	4	$^2/_3$	$^4/_5$	+0.13	0.13
	257		1	4	5	$^2/_3$	1	+0.33	0.33
276		1		5	5	$^5/_6$	1	+0.167	0.167
278		1		6	5	1	1	0	
		$n_1 = 6$	$n_2 = 5$						

وتكون إحصائية الاختبار المشاهدة تحت صحة H_0 :

D=MAX[|S(X)-S(Y)|]=0.467

وبالعودة لجدول سمير نوف للعينتين غير المتساويتين ومن أجل $\propto= 0.05$ و $n_1 = 6$ ، $n_2 = 5$ نجد أن :

$D_{n_1 n_2}(\propto) = D_{5,6}(0.05) = 0.67$ (الاختبار من الطرفين)

وبمقارنة D=0.467 مع $D_{n_1 n_2}(\propto) = 0.67$ نجد أن $D_{n_1 n_2}(\propto)$ > D وهذا يعني قبول H_0 ورفض H_1 و يستدل من هذا على تماثل توزيع درجات الرجال مع توزيع درجات النساء في هذا التنافس الرياضي .

12-6- تمرينات غير محلولة

1) إذا كان توزيع تقديرات عينة من طلاب الكليات الأدبية وعينة من طلاب الكليات العلمية في جامعة معينة كالتالي :

عيّنة طلاب الكليات الأدبية	11	15	18	9	5	2
عيّنة طلاب الكليات العلمية	4	8	9	23	15	1
التقدير	ضعيف جداً	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز

والمطلوب : عند مستوى المعنوية 0.01 ، اختبار وجود فروق ذات دلالة إحصائية في التقديرات بين طلاب الكليات الأدبية , وطلاب الكليات العلمية .

2) اعتقد باحث أن الطلاب يبدعون في التحصيل في جو تنافسي أكثر من إبداعهم في جو تعاوني ، فاختار عينتين من الطلاب بطريقة عشوائية حيث تم تدريس مجموعة العينة الأولى في جو تنافسي ومجموعة العينة الثانية في جو تعاوني ، والجدول التالي يمثل درجات طلاب العينتين :

العينة (1)	18	15	17	15	16	17	14	16	14	16	18
العينة (2)	13	14	12	14	13	15	11	12	13	15	15

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، اختبر وجود فروق حقيقية في الدرجات بين الطلاب الذين تم تدريسهم في جو تنافسي , والطلاب الذين تم تدريسهم في جو تعاوني .

Damascus University

الفصل الثالث عشر

اختبار والد ولغويتز لتتابع العينتين المستقلتين

13-1- مفهوم الاختبار

13-2- متطلبات الاختبار و شروطه

13-3- فرضيات الاختبار

13-4- إجراء الاختبار , و المقارنة , و القرار

13-5- أمثلة محلولة

13-6- ملاحظة في معالجة التساوي في الرتب

13-7- أمثلة محلولة

13-8- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث عشر

اختبار والدولغويتز لتتابع العينتين المستقلتين

13-1- مفهوم الاختبار : إن هذا الاختبار امتداد لاختبار التتابع لعينة واحدة , حيث إنّ التتابع هو تسلسل أو تواصل لوضع معين لمتغير معيّن إلى حين ظهور وضع آخر للمتغير أو انتهاء البيانات , و يهدف الاختبار إلى معرفة تطابق مجتمَعَي عينتين مستقلتين من حيث الموقع و التجانس و الالتواء باستخدام عدد حالات تتابع العينتين .

13-2- متطلبات الاختبار , و شروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1- أن تكون البيانات لعينتين عشوائيتين مستقلتين .

2- أن يكون المتغير محل البحث متصلاً .

3- أن تكون قياسات البيانات رتبية على الأقل .

13-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم تتمثل في كون مجتمعي العينتين متطابقين في الموقع , و التجانس , و الالتواء , و بقية الخصائص .

و الفرضية البديلة تتمثل في كون مجتمعي العينتين غير متطابقين سواء من ناحية الموقع أو التجانس أو الالتواء أو غير ذلك . و غالباً ما يكون هذا الاختبار من الطرفين .

13-4- إجراء الاختبار و المقارنة في القرار : لإنجاز الاختبار نتبع المراحل التالية:

1- ندمج بيانات العينتين في عينة واحدة , فإذا كان n_1 يمثل حجم العينة الأولى و n_2 حجم العينة الثانية , و بالتالي ($n=n_1+n_2$) يمثل حجم العينة المدمجة .

2- ترتيب البيانات تصاعدياً مع تمييز بيانات كل عينة .

3- تحسب عدد حالات التتابع التي تنجم من تتابع بيانات كل عينة من العينيتن , و نرمز له بـــ r .

4- تحسب قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة التي تعتمد على كون حجم العينتين صغيراً أو كبيراً .

1- عندما يكون حجم العينتين صغيراً : إذا كان حجم كل من العينتين 20 مشاهدة أو أقل , فإن القيمة المحسوبة تقارن مع نظيرتها الجدولية من جدول توزيع R عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, و هذا الجدول يتكون من فرعين , حيث يعطي الفرع الأول قيم R التي تكون أقل أو تساوي القيمة المشاهدة r باحتمال 0.025 و بحسب حجم العينتين , بينما يعطي الفرع الثاني قيم R التي تكون أكبر من القيمة المشاهدة r باحتمال يساوي 0.025 تبعاً لحجم العينتين .

إذا كانت القيمة المشاهدة r واقعة خارج القيمتين الحرجتين الصغرى و الكبرى الناتجة عند مستوى المعنوية $\propto$ و الاختبار من الطرفين فإنه ترفض H_0 و تقبل H_1 بعدم تطابق مجتمعي العينتين . و إذا كانت r واقعة بين هاتين القيمتين فإنه تقبل فرضية العدم H_0 و ترفض H_1 أي يقبل تطابق مجتمعي العينتين .

و إذا كان الاختبار من الطرف الأيسر , أي أنه يتوقع عدداً قليلاً جداً من حالات التتابع , فإن القيمة الحرجة الصغرى من جدول R هي التي تستخدم , و إذا كان الاختبار من الطرف الأيمن , أي أنه يتوقع عدداً كبيراً جداً من حالات التتابع , فإن القيمة الحرجة الكبرى من الجدول هي التي تستخدم , و بالتالي إذا كانت r أقل من القيمة الحرجة الصغرى أو أكبر من القيمة الحرجة الكبرى فإنه ترفض H_0 و تقبل H_1 , و إلا فإنه تقبل H_0 و ترفض H_1.

2- عندما يكون حجم العينة كبيراً : أي إذا كانت $n_1 > 20$ أو $n_2 > 20$ أو كلاهما , فإن توزيع R يتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بتوقع , و تباين كالتالي :

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n} + 1 \quad ; \quad \sigma_R^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n-1)}$$

و تحت صحة H_0 نحسب إحصائية الاختبار Z كالتالي :

$$Z_0 = \frac{r-[\frac{2n_1n_2}{n}+1]}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n-1)}}}$$

و يمكن استخدام معامل تصحيح الاختبار للاتصال , و ذلك بطرح 0.5 من الفرق المطلق بين قيمة r و قيمة التوقع μ_R لتصبح القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار من الشكل :

$$Z_0 = \frac{\left|r - \left[\frac{2n_1n_2}{n}+1\right]\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n-1)}}}$$

ثم نحسب مستوى المعنوية الحرج (مستوى المعنوية المشاهد) P.V وفق : $P[Z \geq Z_0] =$ PV و نقارنه مع $\propto$ و نقبل H_0 إذا كان $P.V \geq \propto$ و نرفض H_0 إذا كان $P.V < \propto$.

13-5- أمثلة محلولة :

مثال (13-1): في دراسة حول مستوى الذكاء عند الأطفال من سن معين , خضعت عيّنتان من الأطفال الذكور , و الإناث , و كانت درجات مستوى الذكاء عندهم كالتالي :

درجات مستوى الذكاء عند الأطفال الذكور	72	81	66	70	17	54	63	39	28	14	34	46
	39	51	36	41	68	57	23	34	43	79	44	38
درجات مستوى الذكاء عند الأطفال الإناث	42	35	30	67	15	8	10	19	29	33	27	11

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبر تماثل درجات مستوى الذكاء لمجتمعي العينتين .

الحل :

إن فرضية العدم هنا تتمثل بتماثل درجات مستوى الذكاء لمجتمعي الأطفال الذكور و الإناث. و الفرضية البديلة تتمثل في عدم تماثل درجات مستوى الذكاء لمجتمعي الأطفال الذكور و الإناث .

ولإنجاز الاختبار نرمز بالرمز B لدرجات الأطفال الذكور , و بالرمز G لدرجات الأطفال الإناث , و الجدول التالي يبيّن تتابع درجات العينتين بعد دمجهما في عينة واحدة , و ترتيبها تصاعدياً :

الدرجة	8	10	11	14	15	17	19	23	27	28	29	30
الرمز	G	G	G	B	G	B	G	B	G	B	G	G
الدرجة	33	34	34	35	36	38	39	39	41	42	43	44
الرمز	G	B	B	G	B	B	B	B	B	G	B	B
الدرجة	46	51	54	57	63	66	67	68	70	72	79	81
الرمز	B	B	B	B	B	B	G	B	B	B	B	B
	حيث يلاحظ أن : $n_1 = 24\ ;\ n_2 = 12\ ;\ n = 36\ ;\ r = 16$											

و تكون قيمة إحصائية الاختبار المشاهد تحت صحة H_0 :

$$Z_0 = \frac{\left|r - \left[\frac{2n_1n_2}{n} + 1\right]\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)}}} = \frac{\left|16 - \left[\frac{(2)(24)(12)}{36} + 1\right]\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{(2)(24)(12)((2)(24)(12) - 36)}{(36)^2(36-1)}}} = 0.19$$

و بحساب مستوى المعنوية المشاهد P.V , حيث الاختبار من الطرفين :

$$\frac{P.V}{2} = P[Z \geq Z_0] = P[Z \geq 0.19] = 1 - P[Z \leq 0.19] = 1 - 0.5753$$

$$= 0.4247 \Rightarrow P.V = (2)(0.4247) = 0.8494$$

و بالتالي نجد أن $P.V > \alpha = 0.05$ أي نقبل H_0 و نرفض H_1 و منه يستدل أن مجتمعي الأطفال الذكور و الأطفال الإناث متطابقان بدرجات مستوى الذكاء من حيث الموقع , و التجانس , و الالتواء ... .

13-6- ملاحظة : معالجة التساوي في الرتب :

كون المتغير المدروس متصلاً , فإنه يجب ألا تكون هناك حالات لتساوي رتب قيم العينتين . و لكن عند التطبيق العملي نجد أحياناً تساوي أكثر من قيمة في الرتبة الواحدة , و قد نجد ذلك في العينة نفسها أو في العينتين , فالتساوي في الرتب داخل العينة الواحدة لا يؤثر في عدد حالات التتابع r , و بالتالي لا يؤثر في قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة . و لكن التساوي في الرتب على نطاق العينتين هو الذي يؤثر في حساب عدد حالات التتابع , و بالتالي يؤثر في r قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة. و في هذه الحالة فإنه يمكن ترتيب قيم (رتب) العينتين بحيث يمكن الحصول على أعلى قيمة لـــ r و أدنى قيمة لها ثم أخذ متوسط القيمتين ليعطي قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة r .

13-7- أمثلة محلولة

مثال (13-2) : تم أخذ قياسات لأعراض معينة من مرض معين من عينتين :

العينة الأولى من المرضى فعلاً , و العينة الثانية من غير المرضى , و كانت القياسات كالتالي:

عينة المرضى	6.0	4.9	1.6	3.6	4.2	8.7	7.5	1.4	1.0	0.3
عينة غير المرضى	1.4	2.6	0.8	2.2	1.3	0.1	0.9	1.7	5.4	

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبر تماثل مجتمعي العينتين .

الحل :

إن فرضية العدم H_0 تتمثل في تماثل قياسات الأعراض لمجتمعي العينتين .

و الفرضية البديلة H_1 تتمثل في عدم تماثل قياسات الأعراض لمجتمعي العينتين .

ولإجراء الاختبار , يلاحظ أولاً أن القياس 1.4 موجود في العينتين , و بالتالي يمكن حساب قيمتين للتتابع (قيمة دنيا و قيمة عليا) ثم استخراج متوسط القيمتين ليعطي قيمة r .

فإذا أعطي الرمز A لقياسات عينة المرضى و الرمز B لقياسات العينة من غير المرضى و بعد دمج العينتين في مجموعة واحدة و ترتيبها تصاعدياً , نحصل على الجدول التالي الذي يبين حساب القيمة الدنيا لـــ r , حيث تم إتباع القيمة 1.4 الأولى لمجموعة غير المرضى و القيمة 1.4 الثانية لمجموعة

المرضى . أما عند إتباع القيمة 1.4 الأولى لمجموعة المرضى و القيمة 1.4 الثانية لمجموعة غير المرضى , فهو يحسب لنا حالة القيمة العليا لـــ r .

القياس	0.1	0.3	0.8	0.9	1.0	1.3	1.4	1.4	1.6	1.7
الرمز	B	A	B	B	A	B	B	A	A	B
التتابع	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7
القياس	2.2	2.6	3.6	4.2	4.9	5.4	6.0	7.5	8.7	
الرمز	B	B	A	A	A	B	A	A	A	
التتابع	7	7	8	8	8	9	10	10	10	

القياس	0.1	0.3	0.8	0.9	1.0	1.3	1.4	1.4	1.6	1.7
الرمز	B	A	B	B	A	B	A	B	A	B
التتابع	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
القياس	2.2	2.6	3.6	4.2	4.9	5.4	6.0	7.5	8.7	
الرمز	B	B	A	A	A	B	A	A	A	
التتابع	9	9	10	10	10	11	12	12	12	

و يلاحظ من الجدول أعلاه أن قيمة r الدنيا هي 10 و قيمة r العليا هي 12 و بالتالي تكون قيمتها الفعلية هي متوسط هاتين القيمتين أي : $r = \frac{10+12}{2} = 11$

و عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ وحيث $n_1 = 10$ و $n_2 = 9$ نجد القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من جدول R المرفق , حيث نجد أن القيمة الدنيا لإحصائية الاختبار هي 5 و القيمة العليا هي 16 .

وبما أن $r = 11$ فإن $(R = 5) < (r = 11) < (R = 16)$

عندئذ يقبل فرض العدم H_0 و يرفض الفرض البديل H_1 .

و من هذا يستدل بتماثل قياسات أعراض المرضى لمجتمعي العينتين من حيث الموقع , و التجانس و الالتواء و بقية الخصائص .

13-8- تمرينات غير محلولة :

1) إذا كان توزيع حب الشباب لعينة عشوائية من الذكور و عينة عشوائية من الإناث في منطقة معينة كالتالي :

توزيع حب الشباب	لا يوجد	منخفض	متوسط	مرتفع	المجموع
عند الذكور	20	11	10	6	47
عند الإناث	17	13	9	4	43

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبر تماثل مجتمعي الدراسة في توزيع حب الشباب عند الذكور , و عند الإناث في المنطقة المعنية .

2) في دراسة لمعرفة أثر عقار معين في معالجة مرض السكر , أخضعت عينة من المرضى للعقار, و تركت عينة أخرى لتكون ضابطة (من دون عقار) . و البيانات التالية تمثل قياس المرضى للعينتين :

عينة العقار	182 213 188	151 211 164	166 184 172	160 120 165	174 117 176	254 203 256	193 155 171	239 214 201	197 147 186	
العينة الضابطة	209 187	216 214	179 209	178 191	180 125	217 223	195 152	187 297	312 231	

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$, اختبر تماثل مجتمعي الدراسة لعينة العقار و العينة الضابطة و ماذا تستنتج عن تأثير العقار في خفض مستوى السكر عند المرضى .

3) في عينة مكونة من 20 مريضاً في سرطان الرئة , تم تقسيمهم عشوائياً لعينتين متساويتين بالحجم , حيث تمت معالجة كل عينة بنوع معين من العلاج و الدواء و البيانات التالية توضح القياسات الناتجة من المرضى (بمقياس معين) للعينتين بعد العلاج :

العينة (1)	23	12	28	19	22	11	9	24
العينة (2)	17	34	26	30	13	25	20	15

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$, اختبر تماثل قياسات المرض عند مجتمعي العينتين المدروستين .

الباب الرابع

اختبارات العينتين المرتبطتين

(Tests Of Tow Related Samples)

الفصل الرابع عشر :

اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين

(Sign Test For The Two Related Samples)

الفصل الخامس عشر :

اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينتين المرتبطتين

(Wilcoxon Signed Ranked Test For The Two Related Samples)

الفصل السادس عشر :

اختبار ماكينمار (MC'nemar Test)

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع عشر

اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين

14-1- مفهوم الاختبار

14-2- متطلبات الاختبار و شروطه

14-3- فرضيات الاختبار

14-4- إجراء الاختبار

14-5- أمثلة محلولة

14-6- ملاحظة

14-7- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع عشر

اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين

14-1- مفهوم الاختبار : إذا أردنا على سبيل المثال مقارنة وسط الوقت في مصنع قبل تطبيق إجراءات معينة ، و بعدها , حيث تمثل العينتان الوقت المستغرق للمجموعة نفسها من العمال ، و لكن قبل الإجراءات وبعدها ، و هي تزاوجية ، لأنه يتوفر لكل عامل زوج من القياسات إحداهما الوقت الذي استغرقه في العمل قبل الإجراءات ، و الآخر الوقت المستغرق بعد الإجراءات , و هنا نقول إنه لدينا اختبار لعينتين تزاوجيتين (مرتبطتين).

و الجدير بالذكر ليس ضرورياً أن تكون القيمتان التزاوجيتان للوحدة نفسها , إذ يكفي أن يربطهما رابط ما , مثلاً في مقارنة طريقتين لتعليم اللغة , يمكن استخدام عينة من التوائم ، و تعليم أحد التوءمين (في كل زوج توائم) بطريقة ، و الآخر بالطريقة الأخرى .

14-2- متطلبات الاختبار و شروطه : يتطلب الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون العينتان أو المجموعتان غير مستقلتين , أي أنه توجد n من البيانات الزوجية .
2) أن تكون بيانات كل زوج من العينتين المرتبطتين مستقلة عن بيانات أي زوج آخر .
3) أن يكون قياس البيانات رتبياً على الأقل .
4) أن يكون المتغير محل البحث متصلاً .

14-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم في اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين في عدم وجود فرق بين وسطي المجتمعين المدروسين أي : $H_0: m_1 = m_2$ حيث m_1 يمثل وسط مجتمع العينة الأولى و m_2 يمثل وسط مجتمع العينة الثانية .

و الفرضية البديلة تمثل : $H_1: m_1 \neq m_2$ أو $H_1: m_1 > m_2$ أو $H_1: m_1 < m_2$

أي من طرفين أو طرف أيمن أو طرف أيسر على الترتيب .

14-4- إجراء الاختبار : نرمز لقيم إحدى العينتين التزاوجيتين بالمتغير X و قيم الأخرى بالمتغير Y , و يكون لدينا بالتالي البيانات المشاهدة للعينتين التي هي أزواج مرتبة

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_i, Y_i), \dots, (X_n, Y_n)$$

حيث كل قيمة للمتغير X يقابلها قيمة معينة لـــ Y , و عدد قيم X يساوي عدد قيم Y و هو في هذه العينة n . و قد يمثل البيان المشاهدات (X_i, Y_i) حيث i = 1,2,3,.....,n من وحدتين يربط بينهما رابط ما مثل أن يكونا من زوج التوائم رقم i حيث i = 1,2,3,.....,n , و الزوج المرتب (X_i, Y_i) هو في الواقع مشاهدة واحدة من متغير عشوائي ذي الحدين .

و لاختبار H_0 مقابل H_1 بأحد أشكالها الثلاث نحسب الفروقات $X_i - Y_i$ لكل i في بيانات العينتين التزاوجيتين , و نحدد إشارة كل زوج ، فنضع "+" إذا كان $X_i - Y_i > 0$ و نضع "–" إذا كان $X_i - Y_i < 0$, بعد حذف حالات الأصفار , ثم نطبق اختبار الاشارة في حالة العينة الواحدة المستخدم في الفصل السادس من الباب الثاني في هذا الكتاب .

14-5- أمثلة محلولة

مثال (14-1) : يمثل البيان التالي متوسط الإنتاج اليومي لكل 10 بقرات تم اختيارها عشوائياً في مزرعة لإنتاج الألبان قبل X و بعد Y (تغذيتها بنوع من العلف يعتقد أنه يزيد الإنتاج) .

X (قبل)	30	31	29	35	32	40	36	30	33	32
Y (بعد)	31.5	34.5	31.3	35	29	44	34	35	36	33

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبار صحة الفرضية التالية : إن وسط الفروقات في الإنتاج (X-Y) معدوم مقابل الفرق بأنه أقل من الصفر أي

$H_1: m_1 < m_2$ مقابل $H_0: m_1 - m_2 = 0$

إن الجدول التالي يوضح قيم X و Y و إشارات الفروقات (X-Y) من أجل كل زوج من العينة التزاوجية .

X	Y	إشارة الفرق X-Y
30	31.5	-
31	34.5	-
29	31.3	-
35	35	0 (ربطه)
32	29	+
40	44	–
36	34	+
30	35	–
33	36	–
32	33	–

هنا نجد أنه لدينا ربطة (فرق صفري واحد) و بالتالي تكون n=9

و يكون عدد الإشارات السالبة $S_- = 7$ و عدد الإشارات الموجبة $S_+ = 2$

و تكون إحصائية الاختبار $S = Max(S_- , S_+) = 7$ و بأخذ S=7 و n=9 و العودة لجدول ذي الحدين :

$P.V = P[S \geq 7] = 0.0898$ (حيث الاختبار من طرف واحد) و هو أكبر من $\propto = 0.05$ و بالتالي نقبل فرضية العدم H_0 أي لا فرق بين وسطي الإنتاج سواء قبل تغذيتها أو بعد تغذيتها بنوع العلف الجديد .

14-6- ملاحظة : يكون المطلوب في بعض الأحيان اختبار الفرضية و هي أن وسط الفروقات يساوي مقداراً معيناً , مثل : m_0 حيث $m_0 \neq 0$ أي $H_0: m_1 - m_2 = m_0$ مقابل $H_1: m_1 - m_2 \neq m_0$ (مثلاً).

هنا نحدد إشارات الفروقات $(X_i - Y_i) - m_0$ لكل i و تكون S_+ و S_- عدد الإشارات الموجبة و السالبة بالترتيب بين هذه الإشارات ثم نطبق اختبار الإشارة بالطريقة نفسها التي استخدمناها في حالة اختبار $H_0: m_1 - m_2 = 0$.

مثال (14-2): يمثل البيان التالي متوسط الزيادة في الوزن خلال فترة معينة من الزمن لمجموعة من الأشخاص قبل X و بعد Y الدال على اتباع نظام غذائي يهدف لزيادة الوزن خلال فترة زمنية مساوية للفترة المتعلقة بـــ X و كان لدينا النتائج التالية :

X (قبل)	3.0	3.5	2.9	3.2	4.0	3.8	3.7	3.5	3.9	3.6
Y(بعد)	3.5	3.4	3.0	3.2	4.4	3.7	4.0	3.8	4.1	3.5

و المطلوب :عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$, هل يمكن الادعاء بأن وسط الفروقات (X-Y) معدوم .

الحل :

لدينا $H_0: m_X - m_Y = 0$ مقابل $H_1: m_X - m_Y \neq 0$

و من أجل إنجاز الاختبار , ننشئ جدول الفروقات و إشاراتها التالي :

X	Y	إشارة الفرق (X-Y)
3.0	3.5	-
3.5	3.4	+
2.9	3.0	-
3.2	3.2	0 (ربطة)
4.0	4.4	–
3.8	3.7	+
3.7	4.0	–
3.5	3.8	–
3.9	4.1	–
3.6	3.5	+

يلاحظ من الجدول أنه لدينا ربطة واحدة (فرق صفري واحد) و بالتالي تحذف من الدراسة .

ويصبح حجم العينة من الشكل n=9 . و يلاحظ أيضاً أن $S_+ = 3$, $S_- = 6$

و يلاحظ أن $S_- >> S_+$, نأخذ $S=\text{Max}(S_-, S_+) = 6$

و من أجل $n = 9$ و $S = 6$ فإن مستوى المعنوية المشاهد يحسب من :

$\frac{P.V}{2} = P[S \geq 6] = 0.2539$ (كون الاختبار من الطرفين)

و منه P.V=(2)(0.2539)=0.51 و هو أكبر من $\alpha = 0.05$ و بالتالي نقبل H_0 و نرفض H_1

أي أن وسط الزيادة في الوزن هو نفسه قبل X و بعد Y .

14-7- تمرينات غير محلولة

1) يوضح البيان التالي متوسط الإنتاج اليومي للعامل قبل (X) و بعد (Y) تدريب العامل على أساليب متطورة في الإنتاج:

X (قبل)	40	45	39	42	50	48	47	45	49	46	44
Y (بعد)	45	44	40	42	54	47	50	48	51	45	41

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبار الفرضية التالية :

<< إن وسط الفروقات (X-Y) معدوم >> .

2) في مجموعة عشوائية من 10 توائم كل من ذكر و أنثى تم قياس أطوال المجموعة و الحصول على فرق الطول لكل توءم في الجدول التالي حيث الإشارة "+" تعني أن الذكر أطول من الأنثى و الإشارة "–" تعني غير ذلك.

التوأم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الإشارة	+	+	–	+	–	+	–	–	–	–

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبر وجود فرق في الطول بالنسبة للتوءم بين الذكر والأنثى .

3) في تقويم تربوي لمعرفة مدى وجود تحسن في أداء الطلاب في مادة معينة من الاختبار الدوري الأول إلى الاختبار الدوري الثاني , تم أخذ عينة عشوائية من 100 طالب , و رصدت تقديراتهم في الاختبارين . و أفادت النتائج أن 59 طالباً تحسن أداؤهم مقابل 26 تراجع أداؤهم في حين بقيت درجات 15 طالباً على ما هي عليه .

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$, هل يستدل بأن أداء الطلاب قد تحسن من الاختبار الأول إلى الاختبار الثاني .

$$\left(\begin{array}{c} \text{توجيه: } n = 85 \text{ ؛ } S = 26 \text{ حيث } E(S) = 42.5 , S_- = 59 , S_+ = 26 \\ Z = -3.47 , V(S) = 21.25 \text{ والنتيجة رفض } H_0 \end{array}\right)$$

الفصل الخامس عشر

اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينتين المرتبطتين

15-1- مفهوم الاختبار

15-2- شروط الاختبار و متطلباته

15-3- فرضيات الاختبار

15-4- إنجاز الاختبار

15-5- أمثلة محلولة

15-6- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس عشر

اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينتين المرتبطتين

15-1- مفهوم الاختبار : هذا الاختبار هو تعميم لاختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة للعينة الواحدة , و هو طريقة معدّلة للاختبار السابق (اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين) حيث أن هذا الاختبار يأخذ بعين الاعتبار ليس فقط اتجاه الفرق ؛ و إنما حجم ذلك الفرق , و يعد بديلاً موازياً لاختبار ستودنت للعينتين المرتبطتين في الإحصاء الوسيطي .

15-2- شروط الاختبار و متطلباته : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تكون العينتان غير مستقلتين , و أن تكون مشاهدات كل زوج من العينتين المرتبطتين مستقلة عن مشاهدات أي زوج آخر .

2) أن يكون قياس البيانات (المشاهدات) مجالياً على الأقل .

3) أن يكون توزيع مشاهدات الفرق بين كل زوج متماثلاً .

15-3- فرضيات الاختبار : إذا كان m_1 يمثل وسط مجتمع العينة الأولى وm_2 وسط مجتمع العينة الثانية من العينة التزاوجية . فعندئذ تكون فرضية العدم من الشكل :

$H_0 : m_1 = m_2$ أما الفرضية البديلة فتأخذ أحد الأشكال التالية :

$H_1 : m_1 \neq m_2$ أو $H_1 : m_1 > m_2$ أو $H_1 : m_1 < m_2$ (أي من طرفين أو طرف أيمن أو طرف أيسر على الترتيب).

15-4- إنجاز الاختبار : تماماً كما رأينا في اختبار الإشارة , فإن اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة لعينتين تزاوجيتين هو اختبار ويلكوكسن نفسه للرتب المؤشرة للعينة الواحدة

لكن هنا تؤخذ الفروقات بين قيم X و Y في الأزواج المرتبة (X,Y) و نتبع مراحل العمل نفسها في اختبار ويلكوكسن للعينة الواحدة .

15-5- أمثلة محلولة :

مثال (15-1) : تمثل البيانات التالية متوسط الإنتاج اليومي من الألبان لكل من 10 بقرات تم اختيارها عشوائياً من مزرعة معينة , و ذلك قبل X و بعد Y (تغذيتها بنوع معين من الأعلاف بهدف زيادة الإنتاج) .

X (قبل)	30	31	29	35	32	40	36	30	33	32
Y (بعد)	31.5	34.5	31.3	35	31	44	34	35	36	33

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبار صحة الفرضية القائلة بأن وسط الفروقات في إنتاج الألبان معدوم .

الحل :

إن فرضية العدم $H_0 : m_X = m_Y$ مقابل $H_1 : m_X \neq m_Y$ أي اختبار من الطرفين .

ثم ننشئ جدول الرتب المؤشرة لبيانات العينة التزاوجية :

X	Y	X-Y	ترتيب |X_Y| → (X-Y)			رتبة |X_Y|	الرتب المؤشرة
30	31.5	- 1.5	1	- 1.0	1	1	- 1
31	34.5	- 3.5	2	- 1.5	1.5	2	- 2
29	31.3	- 2.3	3	+ 2	2	3	+ 3
35	35	0	0	0	0	-	-
32	31	+ 3.0	4	- 2.3	2.3	4	- 4
40	44	- 4.0	5	+ 3.0	3	5.5	+ 5.5
36	34	+ 2.0	6	- 3.0	3	5.5	- 5.5
30	35	- 5.0	7	- 3.5	3.5	7	- 7
33	36	- 3.0	8	- 4.0	4	8	- 8
32	33	- 1.0	9	- 5.0	5	9	- 9

و من الجدول أعلاه نجد أن n = 9 (بسبب وجود فرق صفري واحد)

$$T_+ = 3 + 5.5 = 8.5$$

$$T_- = 1 + 2 + 4 + 5.5 + 7 + 8 + 9 = 36.5$$

و احصائية الاختبار : $T = Max(T_- , T_+) = 36.5$

و من جدول توزيع إحصائية اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة (المرفق) و عند n = 9 و في العمود " يمين " نوجد احتمال قيمة تساوي أو تزيد على T = 36 و احتمال قيمة تساوي أو تزيد على T = 37 حيث نجد $P_1^* = 0.064$, $P_2^* = 0.049$ بالترتيب .

و كتقريب لاحتمال قيمة تساوي أو تزيد على T = 36.5 نأخذ متوسطها أي :

$$P^* = \frac{P_1^* + P_2^*}{2} = \frac{0.064 + 0.049}{2} = 0.059$$

و كون الاختبار من الطرفين فإن مستوى المعنوية المشاهد P.V يحسب كالتالي :

$$\frac{P.V}{2} = P^* \Rightarrow P.V = 2P^* = (2)(0.059) = 0.118$$

و هو أكبر من $\alpha = 0.05$ و بالتالي نقبل H_0 و نرفض H_1 أي لا فرق بين وسط الإنتاج من الألبان قبل X وبعد Y .

ملاحظة : قد يكون أحياناً المطلوب اختبار $H_0 : m_1 - m_2 = m_0$ حيث $m_0 \neq 0$ في هذه الحالة يوجد رتب فروقات $|(X_i - Y_i) - m_0|$ و تكون T_+ ؛ T_- هي مجموع الرتب الموجبة و السالبة بالترتيب لهذه الفروقات , و نتمم الاختبار كما في الحالة السابقة : $H_0 : m_1 = m_2$

مثال (15-2) : خضعت مجموعة من الطلاب لبرنامج تدريبي في التربية الرياضية , و تم تسجيل الدرجات التي حصل عليها الطلاب , و الجدول التالي يوضح هذه الدرجات قبل و البرنامج بعده التدريبي لعينة عشوائية من الطلاب :

X (قبل البرنامج)	63	69	75	48	58	66	76	61
Y (بعد البرنامج)	82	79	74	43	54	78	80	81

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبر الفرضية القائلة بوجود فروق ذات دلالة إحصائية في درجات الطلاب قبل البرنامج وبعده .

الحل : إن فرضية العدم هي $H_0 : m_X = m_Y$ و الفرضية البديلة $H_1 : m_X \neq m_Y$

و لننشئ جدول الرتب المؤشرة .

X	Y	X-Y	ترتيب |X_Y| → (X-Y)			رتبة |X_Y|	الرتب المؤشرة
63	82	- 19	1	+ 1	1	1	+ 1
69	79	- 10	2	+ 4	4	2.5	+ 2.5
75	74	+ 1	3	- 4	4	2.5	- 2.5
48	43	+ 5	4	+ 5	5	4	+ 4
58	54	+ 4	5	- 10	10	5	- 5
66	78	- 12	6	- 12	12	6	- 6
76	80	- 4	7	- 19	19	7	- 7
61	81	- 20	8	- 20	20	8	- 8

و من الجدول نجد أن : n = 8 ؛ $T_+ = 1 + 2.5 + 4 = 7.5$

$$T_- = 2.5 + 5 + 6 + 7 + 8 = 28.5$$

و إحصائية الاختبار : $T = Max(T_- , T_+) = 28.5$

و من جدول توزيع إحصائية اختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة (المرفق) و عند n = 8 و في العمود " يمين" نجد احتمال قيمة تساوي أو تزيد على T = 28 و هي $P_1^* = 0.098$

و كذلك احتمال قيمة تساوي أو تزيد على T = 29 و هي $P_2^* = 0.074$

و كتقريب لاحتمال قيمة تساوي أو تزيد على T = 28.5 نأخذ متوسطها الحسابي أي :

$$P^* = \frac{P_1^* + P_2^*}{2} = \frac{0.098 + 0.074}{2} = 0.086$$

و كون الاختبار من الطرفين , فإن مستوى المعنوية المشاهد (P.V) يكون كالتالي :

$$\frac{P.V}{2} = P^* \Rightarrow P.V = 2P^* = (2)(0.086) = 0.172$$

و هو أكبر من مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ و بالتالي نقبل H_0 و نرفض H_1 أي لا فرق يذكر بين درجات الطلاب قبل البرنامج و بعده .

15-6- تمرينات غير محلولة :

1) توضح البيانات التالية درجات مجموعة من الطلاب في امتحان اللغة الأجنبية قبل خضوعهم لدورة تقوية باللغة و بعده بهدف تحسين مستواهم باللغة :

X (قبل)	70	75	69	72	80	78	77	75	79	76
Y (بعد)	75	74	70	72	84	77	80	78	81	75

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$, اختبار صحة الادعاء بأن وسط الفروقات بين الدرجات قبل الامتحان و بعده معدوماً .

2) خضع 16 شخصاً لنظام غذائي معين يهدف إلى تخفيض الوزن ، و تخفيض مستوى الكوليسترول عندهم . ثم تم قياس مستوى الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص قبل اتباع النظام الغذائي و بعده لفترة محددة من الزمن :

X (قبل)	204	221	231	260	232	238	246	317
	277	249	208	199	307	267	215	233
Y (بعد)	201	213	232	235	227	219	198	294
	243	225	210	203	281	222	197	226

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، هل هناك فروق تذكر بين مستويات الكوليسترول قبل X وبعد Y (إتباع النظام الغذائي).

Damascus University

الفصل السادس عشر

اختبار ماكنيمار للعينتين المرتبطتين

16-1- مفهوم الاختبار

16-2- متطلبات الاختبار وشروطه

16-3- فرضيات الاختبار

16-4- انجاز لاختبار

16-5- أمثلة محلولة

16-6- تمرينات غير محلولة

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل السادس عشر

اختبار ماكنيمار للعينتين المرتبطتين

16-1- مفهوم الاختبار : يهتم هذا الاختبار بمعرفة وجود علاقة بين عينتين أو متغيرين ثنائيين مرتبطين بحيث يكون لكل متغير وصفان فقط ، كأن يكون مثلاً (قبل ظرف معين وبعده ، قبل معالجة معينة وبعدها ، نعم ولا ، وجود وعدم وجود صفة معينة ... .) .

ويكون الاختبار مفيداً في الحالات التي يراد فيها معرفة معنوية الفرق الذي يطرأ قبل أثر معين وبعده ويكون المتغيران مرتبطين إذا كانت البيانات تؤخذ من الحالات نفسها أو من حالات مرتبطة بالضرورة مثل التوءم أو الزوجين أو فرعين من شركة واحدة .

وإذا كان المتغيران ليسا بثنائيين ، فإنه يمكن تحويلهما إلى ثنائيين عند نقطة قطع أو فصل معينة واستخدام (+) للوضع الأول بالمتغير الأول أو الثاني و إشارة (-) للوضع الثاني بالمتغير الأول أو الثاني .

16-2- متطلبات الاختبار , وشروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن يكون هناك عينتان مرتبطتان من البيانات للحالات نفسها أو لحالات مرتبطة .

2) أن يكون قياس البيانات اسمياً ثنائياً لكل عينة وبالتالي يكون لدينا جدول اقتران مؤلف من أربع خلايا بالشكل (+ + ، + - ، - + ، - -) .

3) أن تكون البيانات مستقلة بين الحالات .

16-3- فرضيات الاختبار : إذا كانت P_1 تمثل نسبة الحالات التي تتبع الوضع الأول (+) للمتغير الأول و P_2 تمثل نسبة الحالات التي تتبع الوضع الأول (+) للمتغير الثاني . فإن فرضية العدم تكون من الشكل : $H_0 : P_1 = P_2$ أو $H_0 : P_1 - P_2 = 0$

والفرضية البديلة تكون من الشكل : $H_1 : P_1 \neq P_2$ أو $H_1 : P_1 - P_2 \neq 0$

16-4- إنجاز لاختبار : إن اختبار ماكنيمار يعتمد بشكل رئيسٍ على جدول الاقتران الممكن تشكيله (2×2) للمتغيرين الثنائيين :

المتغير الثاني / المتغير الأول	+	−	المجموع
+	O_{11}	O_{12}	$O_{11}+O_{12}$
−	O_{21}	O_{22}	$O_{21}+O_{22}$
المجموع	$O_{11}+O_{21}$	$O_{12}+O_{22}$	n

حيث نجد أن $n = O_{11}+O_{12}+O_{21}+O_{22}$ و (O_{ij}) : i=1,2 ; j=1,2 تدل على عدد الحالات التي هي من الوضع i من المتغير الأول والوضع j من المتغير الثاني .

وكذلك O_{11} تمثل عدد الحالات التي لم يتغير وضعها الإيجابي من المتغير الأول إلى المتغير الثاني .

تمثل O_{22} عدد الحالات التي لم يتغير وضعها السلبي من المتغير الأول إلى المتغير الثاني .

أما O_{12} تمثل عدد الحالات التي تغير وضعها من الإيجابي للمتغير الأول إلى السلبي للمتغير الثاني

و O_{21} تمثل عدد الحالات التي تغير وضعها من السلبي للمتغير الأول إلى الإيجابي للمتغير الثاني .

وعليه يكون عدد الحالات التي حدث فيها تغيير للوضع هي $O_{12}+O_{21}$ ، وبالتالي بغض النظر عن اتجاه التغيير , فإن العدد المتوقع للحالات التي حدث فيها تغيير هي :

$E_{ij} = \frac{O_{12}+O_{21}}{2}$: $i \neq j$ وباستخدام إحصائية كاي – تربيع للفرق بين O_{ij} و E_{ij} يكون لدينا :

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad ; i \neq j$$

$$= \frac{(O_{12}-\frac{(O_{12}+O_{21})}{2})^2}{\frac{(O_{12}+O_{21})}{2}} + \frac{(O_{21}-\frac{(O_{12}+O_{21})}{2})^2}{\frac{(O_{12}+O_{21})}{2}} = \frac{(O_{12}-O_{21})^2}{O_{12}+O_{21}}$$

وتحت صحة H_0 فإن إحصائية x_0^2 تتبع توزيع كاي – تربيع بدرجة واحدة من الحرية . ولكن بما أن توزيع كاي – تربيع هو توزيع متصل واستخدم لتقريب التوزيع المنفصل لعدد الحالات في الخلية في جدول الاقتران ، عندئذ يجب استخدام معامل تصحيح لهذا الانتقال وهو بطرح قيمة (1) من القيمة المطلقة للفرق $(O_{12}-O_{21})$ وبالتالي تصبح إحصائية الاختبار من الشكل :

$$x_0^2 = \frac{[|O_{12}-O_{21}|-1]^2}{O_{12}+O_{21}}$$

ثم تقارن قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة x_0^2 مع القيمة النظرية لها من جدول توزيع كاي – تربيع بدرجة واحدة من الحرية , ومستوى معنوية $\propto$ أي : $x_\alpha^2(\gamma)$ ؛ $\gamma = 1$

وإذا كانت $x_0^2 > x_\alpha^2(\gamma)$ فهذا يؤدي لرفض H_0 وقبول H_1 .

وإذا كانت $x_0^2 \leq x_\alpha^2(\gamma)$ فهذا يؤدي لقبول H_0 ورفض H_1 .

ملاحظة : بناء على القيم المشاهدة في جدول الاقتران : O_{11} ; O_{12} ; O_{21}; O_{22} فإن نسبة الحالات التي تتبع الوضع الأول للمتغير الأول تقدّر بالمقدار $\widehat{P_1}$ حيث :

$\widehat{P_1} = \frac{O_{11}+O_{12}}{n}$ وكذلك نسبة الحالات التي تتبع الوضع الأول للمتغير الثاني تقدّر بـ $\widehat{P_2}$ حيث $\widehat{P_2} = \frac{O_{11}+O_{21}}{n}$ والفرق بين النسبتين :

$$\widehat{P_1} - \widehat{P_2} = \frac{O_{11}+O_{12}}{n} - \frac{O_{11}+O_{21}}{n} = \frac{O_{12}-O_{21}}{n}$$

وتحت صحة H_0 فإن القيمة المتوقعة لـ $\frac{O_{12}-O_{21}}{n}$ تساوي الصفر , ولقد أوضح ماكنيمار بأن إحصائية الاختبار تكون $Z_0 = \frac{O_{12}-O_{21}}{\sqrt{O_{12}+O_{21}}}$

حيث Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت $O_{12} + O_{21} \geq 10$ ثم تقارن القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار Z_0 بالقيمة الملاحظة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى المعنوية $\propto$ التي تحدد منطقة قبول H_0.

فإذا كانت Z_0 خارج منطقة القبول فإنه يرفض H_0 ويقبل H_1 ، وإذا كانت Z_0 داخل منطقة القبول فإنه يقبل H_0 ويرفض H_1.

يمكننا أيضاً هنا استخدام مستوى المعنوية المشاهد P.V ، كما رأينا في الاختبارات السابقة .

16-5- أمثلة محلولة :

مثال (16-1) : تم توجيه سؤال إلى 150 شخصاً في منطقة معينة حول الرأي بقضية خدمية معينة لهذه المنطقة فأجاب 97 منهم مع القضية . وبعد حملة دعائية حول هذه القضية تم توجيه السؤال إلى الأشخاص أنفسهم وأجاب منهم 110 مع القضية . وإذا تبين أن 10 أشخاص فقط ظل رأيهم كما هو عليه في معارضة القضية قبل الحملة الدعائية وبعدها .

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$، اختبر أثر الحملة الدعائية في تغيير آراء الأشخاص بخصوص القضية الخدمية .

الحل :

إذا كانت P_1 تمثل نسبة الأشخاص الذين يؤيدون القضية الخدمية قبل الحملة الدعائية .

و كانت P_2 تمثل نسبة الأشخاص الذين يؤيدون القضية الخدمية بعد الحملة الدعائية .

فإن فرضية العدم تكون : $H_0: P_1 = P_2$ والفرضية البديلة $H_1: P_1 \neq P_2$

وبناءً على ما لدينا من معطيات في هذه الدراسة يكون لدينا جدول الاقتران بالشكل التالي :

بعد الحملة الدعائية / قبل الحملة الدعائية	(نعم) +	(لا) −	المجموع
+ (نعم)	67 O_{11}	30 O_{12}	97 $O_{11}+O_{12}$
− (لا)	43 O_{21}	10 O_{22}	53 $O_{21}+O_{22}$
المجموع	$O_{11}+O_{21}=110$	$O_{12}+O_{22}=40$	n=150

وعليه تكون إحصائية الاختبار من الشكل :

$$x_0^2=\frac{(O_{12}-O_{21})^2}{O_{12}+O_{21}}=\frac{(30-43)^2}{30+43}=2.32$$

وباستخدام جدول كاي – تربيع بدرجة واحدة من الحرية , ومستوى المعنوية $\propto= 0.01$ نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $x_\alpha^2(\gamma=1)=x_{0.01}^2(1)=6.63$ وكون $x_0^2<x_{0.01}^2(1)$ عندئذ نقبل H_0 ونرفض H_1 ويستدل من ذلك بعدم جدوى الحملة الدعائية في تغيير آراء الأشخاص حول القضية الخدمية .

مثال (16-2) : أبدى 71 طالباً من أصل 120 طالباً في مدرسة معينة عدم حبهم للمدرسة ، تم استخدام أسلوب إرشادي معين لتغيير اتجاهات الطلاب نحو المدرسة ، فأبدى 35 طالباً فقط من المجموعة في نهاية الفصل بعدم حبهم للمدرسة ، إذ ظل 11 طالباً على عدم حبهم للمدرسة في نهاية الفصل . والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$ اختبار أثر الأسلوب الارشادي في تغيير اتجاهات الطلاب نحو المدرسة .

الحل :

لتكن P_1 تمثل نسبة الطلاب الذين لا يحبون المدرسة قبل الأسلوب الإرشادي .

ولتكن P_2 تمثل نسبة الطلاب الذين لا يحبون المدرسة بعد تطبيق الأسلوب الإرشادي .

عندئذ فرضية العدم تكون من الشكل : $H_0: P_1 = P_2$ والفرضية البديلة $H_1: P_1 \neq P_2$

وبناءً على ما هو متوفر في هذه الدراسة ، يكون جدول الاقتران المشترك بالشكل التالي :

بعد / قبل	لا يحبون المدرسة +	يحبون المدرسة −	المجموع
لا يحبون المدرسة +	O_{11} =11	O_{12} =60	$O_{11} + O_{12}$ =71
يحبون المدرسة −	O_{21} =24	O_{22} = 25	$O_{21} + O_{22}$ =49
المجموع	$O_{11} + O_{21} = 35$	$O_{12} + O_{22} = 85$	n=120

و تكون إحصائية الاختبار: $x_0^2 = \frac{[|O_{12}-O_{21}|-1]^2}{O_{12}+O_{21}} = \frac{(|60-24|-1]^2}{60+24} = 14.583$

لحساب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار ، نستخدم جدول كاي – تربيع عند $\gamma = 1$ و $\propto = 0.05$ نجد : $x_\alpha^2(\gamma) = x_{0.05}^2(1) = 3.84$

وكون $x_0^2 > x_\alpha^2(\gamma)$ عندئذ نرفض H_0 ونقبل H_1 أي أن الأسلوب الإرشادي في تغيير اتجاهات الطلاب نحو المدرسة قد تغير وليس نفسه قبل تطبيق الأسلوب الإرشادي .

16-6- تمرينات غير محلولة:

1) لا حظ باحث يهتم بسلوك الأطفال أن الأطفال الذين يلتحقون برياض الأطفال في بادئ الأمر لا يميلون إلى الاحتكاك مع الأطفال في سنهم ؛ بل إلى الأكبر منهم ، ولكن ومع مرور الزمن , وانتظامهم في برنامج رياض الأطفال فإنهم يميلون إلى الاحتكاك مع الأطفال في سنهم أكثر من الاحتكاك مع الأكبر منهم . ولدى مراقبة 30 طفلاً التحقوا برياض الأطفال واستمروا بها مدة من الزمن ، حصل الباحث على المعلومات في جدول التوافق التالي :

احتكاك الأطفال بعد مدة بالروضة / احتكاك الأطفال عند التحاقهم بالروضة	+ (مع الكبار)	– (مع الصغار)	المجموع
+ (مع الكبار)	11	12	23
– (مع الصغار)	3	4	7
المجموع	14	16	n=30

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، اختبر أثر برنامج رياض الأطفال في تأثيره على سلوكيات الأطفال تجاه القضية بالاحتكاك مع الكبار أو الصغار .

(توجيه $x_0^2 = 4.27$ ؛ $x_{0.05}^2 = 3.84$) .

2) في استطلاع لآراء الآباء حول تبكير مواعيد الحضور للمدارس ، أجاب 31 فقط من 110 بالموافقة ، وبعد استماع الآباء لجدوى ذلك من قبل المختصين أجاب 63 منهم بالموافقة، إذا كان عدد من وافقوا على تبكير مواعيد الحضور في الحالتين يساوي 21 ، اختبر وبمستوى معنوية $\propto = 0.05$ اختلاف آراء الآباء في الحالتين .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الباب الخامس

اختبارات أكثر من عينتين مستقلتين

(Tests of More Than Two Independent Samples)

الفصل السابع عشر : اختبار الوسط لأكثر من عينتين مستقلتين

(Median Test for More Than Two Independent Samples)

الفصل الثامن عشر : اختبار كروسكال واليس

(Kruscal Wallis Test)

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع عشر

اختبار الوسط لأكثر من عينتين مستقلتين

17-1- مفهوم الاختبار

17-2- متطلبات الاختبار وشروطه

17-3- فرضيات الاختبار

17-4- إجراء الاختبار

17-5- أمثلة محلولة

17-6- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السابع عشر

اختبار الوسط لأكثر من عينتين مستقلتين

17-1- مفهوم الاختبار : هنا نختبر الفرض بأن عدة عينّات مستقلة جاءت من مجتمعات لها الوسط نفسه . وهو امتداد لاختبار الوسط لعينتين مستقلتين .

17-2- متطلبات الاختبار وشروطه :

1) أن تكون العيّنات مستقلة , وعشوائية , ورتبية على الأقل .

2) أن تكون البيانات مستقلة داخل كل عينة , وبين العينات .

3) أن يكون المتغير المدروس مستمراً .

4) إذا كان لمجتمعات العينات وسط واحد ؛ فإن الاحتمال P هو ذاته أن تكون أية قيمة أكبر من الوسط .

17-3- فرضيات الاختبار : إذا كان m_i وسط مجتمع العينة i حيث i=1,2,...,K عندها تكون فرضية العدم : $H_0: m_1 = m_2 = \cdots = m_K$ أي أن المجتمعات التي تنتمي إليها العينات متماثلة (أي لها وسط متساوٍ) . والفرضية البديلة أن المجتمعات التي تنتمي إليه العيّنات غير متماثلة أي $H_1: m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_K$

17-4- إجراء الاختبار : يعتمد الاختبار في البداية على دمج العينات في مجموعة واحدة , و يكون $n = \sum_{i=1}^{K} n_i$ حيث n_i يمثل حجم العينة i من أجل i = 1,2,.....,K (حيث لدينا K عينة مستقلة) ثم يوجود الوسط المشترك للبيانات بعد ترتيبها من الأصغر للأكبر، ثم نقسّم المشاهدات الخاصة بكل عينة على أساس أنها أكبر من الوسط أو أصغر منه (أو تساويه) ثم نحسب قيمة إحصائية الاختبار (كما في الاختبار من أجل عينتين مستقلتين) .

ويكون جدول الاقتران المشترك كالتالي :

العينات	1	2	...	I	... ...	K	المجموع
أكبر من الوسط	n_{11}	n_{12}	...	n_{1i}	... ...	n_{1K}	$n_{1.}$
أصغر أو يساوي الوسط	n_{21}	n_{22}	...	n_{2i}	... ...		$n_{2.}$
المجموع	n_1	n_2	...	n_i	... ...	n_K	n

حيث n_{1i} يمثل عدد المشاهدات من العينة i التي هي أكبر من الوسط حيث : i=1,2,...,K

و n_{2i} يمثل عدد المشاهدات من العينة i التي هي أصغر أو يساوي الوسط حيث : i=1,2,...,K

$n_{1.}$ يمثل عدد المشاهدات الكلي من العينات التي هي أكبر من الوسط

$n_{2.}$ يمثل عدد المشاهدات الكلي من العينات والتي هي أصغر أو تساوي الوسط حيث :

$$n_{1.} + n_{2.} = n$$

وتحت صحة H_0 بأن مجتمعات هذه العينات لها وسط متساوٍ يعني اختبار أن هذه المجتمعات متجانسة بالنسبة للبيانات التي أكبر من الوسط المشترك أو أصغر منه . وعليه يمكن اختبار فرضية العدم بواسطة x^2 والتي تكون من الشكل :

$$x^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{K}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \; ; \; i = 1,2 \quad ; \; j = 1,2,\dots,K$$

حيث $E_{ij} = \frac{n_{i.}n_j}{n}$; i=1,2 ; j=1,2,...,K

ومنه تكون $x^2 = \frac{n^2}{n_{1.}n_{2.}}\sum_{j=1}^{K}\frac{\left(n_{1j}-\frac{n_{1.}n_j}{n}\right)^2}{n_j} \; ; \; j = 1,2,\dots,K$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{n^2}{n_{1.}n_{2.}} \sum_{j=1}^{K} \frac{{n_{1j}}^2}{n_j} - \frac{n\ n_{1.}}{n_{2.}}\ ;\ j = 1,2,\dots,K$$

وفي حالة $n_{1.} = n_{2.}$ فإن x^2 تساوي :

$$x^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(n_{1j} - n_{2j})^2}{n_j}\ ;\ j = 1,2,\dots,K$$

ثم تقارن x^2 الناتجة مع $x_{\alpha}^2(\gamma)$ من جدول كاي – تربيع المرفق عند مستوى المعنوية α ودرجة الحرية $\gamma = K - 1$ ونتخذ القرار كالتالي :

إذا كان $x^2 > x_{\alpha}^2(\gamma)$ فهذا يؤدي إلى رفض H_0 وقبول H_1 .

وإذا كان $x^2 \leq x_{\alpha}^2(\gamma)$ فهذا يؤدي إلى قبول H_0 ورفض H_1 .

17-5- أمثلة محلولة

مثال (17-1) : في تجربة لمعرفة وجود فروق ملموسة في مبيعات محصول معين في أربع مناطق مختلفة ، كانت جملة المبيعات (وفق وحدة نقدية معينة) لعدد من الأيام التي تم اختبارها عشوائياً كالتالي :

العينة(I)	28	35	36	38	37	32	40	44	36	32	35	33
العينة(II)	37	29	34	50	43	40	38	47	41	39	36	35
العينة(III)	38	36	44	35	45	46	40	42	36	34	35	34
العينة(IV)	27	31	26	29	30	34	30	45	42	29	35	33

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ ، اختبر عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية في مبيعات المحصول بين المناطق الأربع .

الحل :

إن فرضية العدم تتمثل في أن مبيعات المحصول بشكل عام متماثلة في المناطق الأربع أي أن المبيعات لها وسط متساوٍ في المناطق الأربع , وهذه (H_0) .

والفرضية البديلة لـــ H_0 وهي H_1 تتمثل بعدم تحقق (H_0) . أي أن المبيعات لها وسط غير متساوٍ بالنسبة لمبيعات المحصول عموماً .

ويلاحظ هنا أن $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 12$ و $n = \sum_{i=1}^{K} n_i = (4)(12) = 48$ وبعد دمج العينات وترتيب المشاهدات تصاعدياً :

26	27	28	29	29	29	30	30	31	32	32	33	33	34	34	34	34
35	35	35	35	35	35	36	36	36	36	36	37	37	38	38	38	
39	40	40	40	41	42	42	43	44	44	45	45	46	47	50		

وترتيب الوسط يكون $O_m = \frac{n+1}{2} = \frac{48+1}{2} = 24.5$ فالوسط هو متوسط القيمتين الرابعة والعشرين والخامسة والعشرين أي أن :

$$m = \frac{36+36}{2} = \boxed{36}$$

وجدول الاقتران المشترك , والذي يوضح عدد القيم التي تزيد على 36 وكذلك عدد القيم التي تساوي أو تقل عن 36 لكل عينة :

العينات	I	II	III	IV	المجموع
أكبر من 36	$n_{11} = 4$	$n_{12} = 8$	$n_{13} = 6$	$n_{14} = 2$	$n_{1.} = 20$
تساوي أو تقل عن 36	$n_{21} = 8$	$n_{22} = 4$	$n_{23} = 6$	$n_{24} = 10$	$n_{2.} = 28$
المجموع	$n_1 = 12$	$n_2 = 12$	$n_3 = 12$	$n_4 = 12$	$n = 48$

وتكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$x^2 = \frac{n^2}{n_{1.}n_{2.}} \sum_{j=1}^{K} \frac{\left(n_{1j} - \frac{n_{1.}n_j}{n}\right)^2}{n_j}$$

$$= \frac{(48)^2}{(20)(28)} \left[\frac{(4 - \frac{20\times12}{48})^2}{12} + \frac{(8 - \frac{20\times12}{48})^2}{12} + \frac{(6 - \frac{20\times12}{48})^2}{12} + \frac{(2 - \frac{20\times12}{48})^2}{12} \right]$$

$$= 6.86$$

ومن جدول توزيع كاي – تربيع وعند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$

ودرجة الحرية $\gamma = K - 1 = 4 - 1 = 3$ تكون القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من الشكل $x^2_{\propto}(\gamma) = x^2_{0.01}(3) = 11.34$

وبمقارنة القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار $x^2 = 6.86$ مع القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $x^2_{\propto}(\gamma) = 11.34$ نجد أن $x^2 < x^2_{\propto}(\gamma)$ ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1، ويستدل من ذلك بعدم وجود فروق معنوية في مبيعات المحصول بين المناطق الأربع ، أي أن المناطق الأربع لها وسط متساوٍ بالنسبة لمبيعات المحصول عموماً .

مثال (17–2) : ترغب شركة للكهرباء في معرفة إذا ما كان الوقت (بالأيام) الذي يمضي من يوم تسلم المستفيد للفاتورة إلى يوم تسديده لها يختلف حسب المنطقة التي يقطنها . والبيانات التالية تمثل نتائج أربع عيّنات عشوائية أخذت من المناطق : A ، B ، C ، D .

المنطقة A	27	17	21	26	25	18	17	23	17	23	20
المنطقة B	13	13	14	11	13	13	9	13	14	15	
المنطقة C	11	13	19	13	16	13	12	17	19	16	18
المنطقة D	7	13	14	9	12	8	12	12	19	13	

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ، اختبار التالي : هل يمكن الادعاء بأن وسط الوقت متساوٍ في المناطق الأربع ؟

الحل :

نلاحظ أولاً : $n_1 = 11$; $n_2 = 10$; $n_3 = 11$; $n_4 = 10$ و n=42

وبترتيب المشاهدات تصاعدياً نحصل على :

7 8 9 9 11 11 12 12 12 12 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13
14 14 14 15 16 16 17 17 17 17 18 18 19 19 19 20 21 23 23 25 26 27

بما أن n=42 زوجياً فإن ترتيب الوسط $O_m = \frac{n+1}{2} = \frac{42+1}{2}$ أي $O_m = 21.5$ فالوسط هو متوسط القيمتين اللتين يكون ترتيبهما 21 , 22 أي $m = \frac{14+14}{2} = 14$

وبالتالي : فجدول الاقتران يكون من الشكل التالي الذي يوضح عدد القيم التي تزيد على 14 وكذلك عدد القيم التي تساوي أو تقل عن 14 لكل عينة :

العينات	العينة من A	العينة من B	العينة من C	العينة من D	المجموع
أكبر من 14	$n_{11} = 11$	$n_{12} = 1$	$n_{13} = 6$	$n_{14} = 1$	$n_{1.} = 19$
تساوي أو تقل عن 14	$n_{21} = 0$	$n_{22} = 9$	$n_{23} = 5$	$n_{24} = 9$	$n_{2.} = 23$
المجموع	$n_1 = 11$	$n_2 = 10$	$n_3 = 11$	$n_4 = 10$	n=42

وتكون قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة تحت صحة الادعاء :

$$x^2 = \frac{n^2}{n_{1.}n_{2.}} \sum_{j=1}^{K} \frac{\left(n_{1j} - \frac{n_{1.}n_j}{n}\right)^2}{n_j} \quad ; \quad j = 1,2,\dots,K = 4$$

$$= \frac{(42)^2}{(19)(23)} \left[\frac{(11 - \frac{19\times11}{42})^2}{11} + \frac{(1 - \frac{19\times10}{42})^2}{10} + \frac{(6 - \frac{19\times11}{42})^2}{11} + \frac{(1 - \frac{19\times10}{42})^2}{10} \right]$$

$$= 23.66$$

ومن جدول كاي – تربيع وعند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ و درجة الحرية $\gamma = K - 1 = 3$ يكون $x_{\propto}^2(\gamma) = x_{0.05}^2(3) = 7.81$ وبالمقارنة مع $x^2 = 23.66$ نجد أن $x^2 > x_{0.05}^2(3)$ ومنه ترفض H_0 بأن الوسط متساوٍ .

17-6- تمرينات غير محلولة :

1) في تجربة استعمال أربعة مخصبات (أسمدة) وتأثيرها على إنتاج الذرة الصفراء تم أخذ عينة من كل نوع من أنواع المخصبات المستخدمة , ومراقبة الإنتاج الحاصل من استخدام المخصب (بآلاف الأطنان) فحصلنا على الجدول التالي :

عينة المخصب (A)	5	7	6	7	6	9	7	6	3	3	5	3	4	8	5	2	6	7
عينة المخصب (B)	9	3	6	9	7	6	7	2	7	6	6	3	3	2	3	5	3	2
عينة المخصب (C)	7	9	9	8	7	5	2	4	4	3	2	4	1	3	4	4	6	2
عينة المخصب (D)	8	3	4	9	8	6	1	5	2	1	3	5	9	6	2	6	1	4

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، اختبر تساوي وسط الإنتاج من الذرة الصفراء بالنسبة للمخصبات الأربعة .

2) لمقارنة ثلاثة أنواع من البطاريات الجافة ، أخذت عينة من كل نوع , وكانت الأعمار (بالساعات) كالتالي :

النوع (A)	24	28	20	30	25	24	26	31	
النوع (B)	29	57	33	31	28	27	24	26	26
النوع (C)	34	21	25	27	22	21	27		

والمطلوب : عند مستوى المعنوية 0.05 =α، اختبر أن وسط العمر متساوٍ للأنواع الثلاثة.

قال رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن عشر

اختبار كروسكال واليس

18-1- مفهوم الاختبار

18-2- شروط و متطلبات الاختبار

18-3- فرضيات الاختبار

18-4- اجراء الاختبار

18-5- أمثلة محلولة

18-6- المقارنات المتعددة بعد رفض H_0 في اختبار كروسكال – واليس .

18-7- أمثلة محلولة

18-6- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثامن عشر

اختبار كروسكال واليس

18-1- مفهوم الاختبار : يمكن بهذا الاختبار أن نختبر تساوي K وسط لـ K مجتمع سحبت منها K عينة مستقلة واحدة من كل مجتمع ، هذا الاختبار هو تعميم مباشر لاختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب المؤشرة واختبار مان – وتني لعينتين مستقلتين من عينتين إلى K عينة ؛ حيث إذا كانت توزيعات المجتمعات متماثلة عندما يتطابق وسط كل مجتمع مع متوسطه فيصبح اختبار كروسكال – واليس اختباراً لتساوي عدة متوسطات ، مما يجعل منه البديل اللاوسطي لاختبار تحليل التباين ذي العامل الواحد , والتصميم التجريبي في هذه الحالة هو تصميم تام العشوائية ، وهذا الاختبار يكون عادة أكثر كفاءة من اختبار الوسط للعينات المستقلة لأنه يستفيد من رتب القيم وليس فقط من موقعها بالنسبة للوسط ، أما إذا قورن باختبار تحليل التباين الوسيطي أو اختبار F فإننا نجد أن الكفاءة النسبية لاختبار كروسكال – واليس بالنسبة لاختبار F من أجل عينات كبيرة الحجم لا تقل أبداً عن 0.864 وتصل 0.955 إذا كان توزيع المجتمعات طبيعياً .

18-2- شروط الاختبار , و متطلباته : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) توفرK عينة عشوائية من K مجتمع من الأحجام $n_1 , n_2 , \dots , n_K$، عينة من كل مجتمع.
2) أن تكون مشاهدات العيّنة مستقلة داخل العينات وبين العينات .
3) أن يكون القياس رتبياً على الأقل .
4) أن يكون المتغير المدروس متصلاً .

18-3- فرضيات الاختبار : إذا كان m_i وسط المجتمع i حيث i=1,2,...K فإن فرضية العدم H_0 تتمثل بالشكل $m_1 = m_2 = \dots = m_K$ أي أن المجتمعات التي تنتمي

إليها هذه العينات لها وسط متساوٍ ؛ أي أن لها متوسط رتب متساوٍ بالنسبة للمتغير المدروس.

والفرضية البديلة H_1 تكون من الشكل (عدم تحقق H_0) أي هناك اختلاف بين m_K على الأقل بين اثنين منها . وهذا يعني أن متوسط الرتب لمجتمعات هذه العينات غير متساوٍ بالنسبة للمتغير المدروس .

18-4- إجراء الاختبار : إذا كان لدينا K عينة عشوائية مستقلة من K مجتمع متصل . ترتب جميع القيم بغض النظر عن العيّنة التي تنتمي إليها من الأصغر للأكبر (كما في اختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب) ، ثم تحسب R_i مجموع الرتب للعينة i ، ومن أجل n_i حجم العيّنة i فإن $n = \sum_{i=1}^{K} n_i$ سيكون حجم العيّنة المدمجة . وتحت صحة H_0، فإن كل قيمة من الـ n قيمة سيكون لها الفرصة نفسها في أن يكون لها أي من الرتب 1,2,...,n . وبالتالي فإن الترتيب المتوقع لأي مشاهدة تحت صحة H_0 من الشكل : $\frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$

ومجموع الرتب المتوقع للعينة i هو بالتالي $(n_i).(\frac{n+1}{2})$.

وبناء على ذلك فإن الفرق بين مجموع الرتب المشاهد R_i ومجموع الرتب المتوقع تحت H_0 أي $(n_i).(\frac{n+1}{2})$ يبيّن مدى صحة H_0 ، فكلما كان الفرق كبيراً كان في عدم مصلحة H_0 وهذا هو الأساس الذي يستند إله اختبار كروسكال – واليس وتكون حسب كروسكال – واليس إحصائية الاختبار من الشكل :

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{(R_i - \frac{n_i(n+1)}{2})^2}{n_i} = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

وتكون بالتالي H القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار .

ومن جدول القيم الحرجة لاختبار كروسكال – واليس أو جدول كاي – تربيع حسب ما يلي :

1) إذا كان عدد العينات 3 وأحجام العينات (n_1, n_2, n_3) لا تزيد عن 5 . وإذا كانت القيمة المشاهدة لـــ H تساوي قيمة بالجدول تماماً (حيث الجدول يعطي احتمال الحصول على قيم تساوي أو تزيد على قيم مختارة لـــ H) فإن هذا الاحتمال يكون هو مستوى المعنوية المشاهد (P.V) وبناء عليه تقارن قيمة (P.V) مع مستوى المعنوية $\propto$ وترفض H_0 إذا كان $P.V \leq \propto$.

2) إذا كانت هناك قيم لـــ n_i وK غير التي يسمح بها الجدول يمكن إيجاد قيمة (P.V) من جدول كاي –تربيع بدرجة من الحرية $\gamma = K - 1$ في اختبار ذي طرف أيمن .

3) إذا كانت هناك قيم متساوية (ربطات) كثيرة فإنها سيؤثر على قدرة الاختبار على اكتشاف الاختلافات بين الأوساط إن كانت هناك اختلافات وعليه ، فإذا كانت نتيجة الاختبار غير معنوية , وكانت هناك ربطات فيمكن تعديل H بقسمتها على المقدار. $C = 1 - \sum_j \frac{(f_j^3 - f_j)}{n^3 - n}$ حيث f_j ترمز لعدد القيم المتساوية في الربطة j . هذه القسمة تؤدي لتضخيم H وهي ليست ضرورية إذا كانت H غير المعدّلة معنوية .

18-5- أمثلة محلولة :

مثال (18-1) : من أجل مقارنة تأثير ثلاث طرق A,B,C لعرض سلعة على حجم المبيعات منها . استخدمت الطريقة A في 5 مخازن تجارية ، والطريقة B في 3 مخازن تجارية والطريقة C في 4 متاجر ، وقد روعي أن تكون المخازن التجارية متشابهة , وتم توزيع الطرق على المخازن التجارية بطريقة عشوائية تامة . وفيما يلي حجم المبيعات من السلعة (وفق وحدة نقدية معينة) خلال أسبوع معين في المخازن التجارية المختلفة .

الطريقة	حجم المبيعات (بالوحدة النقدية)				
A	6	4.5	6.6	5	4.9
B	7	6	8		
C	4	3.7	4	4.2	

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto= 0.01$ ، اختبر صحة الادعاء بأن وسط المبيعات متساوٍ للطرق الثلاث .

الحل :

إن (وسط المبيعات متساوٍ للطرق الثلاث) : H_0

(وسط المبيعات غير متساوٍ بالنسبة للطرق الثلاث) : H_1

ومن أجل إنجاز الاختبار ، ترتب مشاهدات العينات الثلاث تصاعدياً كالتالي :

القيم	3.7	4	4	4.2	4.5	4.9	5	6	6	6.6	7	8
الرتب	1	2.5	2.5	4	5	6	7	8.5	8.5	10	11	12
العيّنة	C	C	C	C	A	A	A	A	B	A	B	B

ومجاميع الرتب :

$R_1 = 5 + 6 + 8.5 + 10 = 36.5$ (للعينة A)

$R_2 = 8.5 + 11 + 12 = 31.5$ (للعينة B)

$R_3 = 1 + 2.5 + 2.5 + 4 = 10$ (للعينة C)

وتكون $n = n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 3 + 4 = 12$. وبالتالي تحت صحة H_0 ، تكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار :

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{(12)(13)}\left[\frac{(36.5)^2}{5} + \frac{(31.5)^2}{3} + \frac{(10)^2}{4}\right] - (3)(13) = 8.91$$

ومن جدول القيم الحرجة لكروسكال – واليس المرفق حيث لدينا :

$H = 8.91$, $n_1 = 5$; $n_2 = 4$; $n_3 = 3$ (للتوافق مع التعامل بالجدول بدلنا بترتيب B و C)

نجد أن قيمة (P.V) لأقرب قيمة لـ 8.91 و هي 7.4449 هي 0.01 ، وكون 8.91 أكبر من 7.4449 ، فإن قيمة (P.V) الحقيقية (أي المقابلة لـ 8.91) ستكون أقل من 0.01 =∝ ، ولذلك نرفض H_0 أي عدم تساوي الأوساط . وبالتالي لاداعي لتعديل H ؛ لأننا رفضنا H_0 .

مثال (18-2) : ترغب شركة للكهرباء في معرفة ما إذا كان الوقت (بالأيام) الذي يمضي من يوم تسلم المستفيد للفاتورة إلى يوم تسديده لها يختلف حسب المنطقة التي يعيش فيها . والبيانات التالية تمثل نتائج أربع عينات عشوائية أخذت من المناطق A؛B؛C؛D .

المنطقة 1:(A)	27	17	21	26	25	18	17	23	17	23	20	$n_1 = 11$
المنطقة 2 :(B)	13	13	14	11	13	13	9	13	14	15		$n_2 = 10$
المنطقة 3:(C)	11	13	19	13	16	13	12	17	19	16	18	$n_3 = 11$
المنطقة 4: (D)	7	13	14	9	12	8	12	12	19	13		$n_4 = 10$

والمطوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، استخدم اختبار كروسكال – واليس لاختبار الفرضية القائلة بأن وسط الوقت متساوٍ للمناطق الأربع .

الحل :

إن $H_0 : m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ (حيث m_i هو وسط المنطقة i و i=1,2,3,4)

والفرضية البديلة : (ليست كل الأوساط متساوية) H_1: . ونريد أن نختبر H_0 مقابل H_1 عند مستوى المعنوية $\propto$ حيث $\propto = 0.05$.

والجدول التالي يوضح القيم المرتبة تصاعدياً , ورتبها , وعائديتها للعينة المدمجة حيث :

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 11 + 10 + 11 + 10 = 42$$

التسلسل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
القيم مرتبة تصاعدياً	7	8	9	9	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	13
الرتب	1	2	3.5	3.5	5.5	5.5	8.5	8.5	8.5	8.5	15.5	15.5	15.5	15.5	15.5
العائدية	D	D	B	D	B	C	C	D	D	D	B	B	B	B	B
التسلسل	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
القيم مرتبة تصاعدياً	13	13	13	13	13	14	14	14	15	16	16	17	17	17	17
الرتب	15.5	15.5	15.5	15.5	15.5	22	22	22	24	25.5	25.5	28.5	28.5	28.5	28.5
العائدية	C	C	C	D	D	B	B	D	B	C	C	A	A	A	C
التسلسل	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42			
القيم مرتبة تصاعدياً	18	18	19	19	19	20	21	23	23	25	26	27			
الرتب	31.5	31.5	34	34	34	36	37	38.5	38.5	40	41	42			
العائدية	A	C	C	C	D	A	A	A	A	A	A	A			

وإذا رمزنا لمجموع الرتب D؛C؛B؛A . بـــ R_1، R_2 ، R_3 R_4 على الترتيب ، فتكون هذه المجاميع كالتالي :

$$R_1 = 28.5 + 28.5 + 28.5 + 31.5 + 36 + 37 + 38.5 + 38.5 + 40 + 41 + 42 = 390$$

$$R_2 = 3.5 + 5.5 + 15.5 + 15.5 + 15.5 + 15.5 + 15.5 + 22 + 22 + 24 = 154.5$$

$$R_3 = 5.5 + 8.5 + 15.5 + 15.5 + 25.5 + 25.5 + 28.5 + 31.5 + 34 + 34 = 239.5$$

$$R_4 = 1 + 2 + 3.5 + 8.5 + 8.5 + 8.5 + 15.5 + 15.5 + 22 + 34 = 119$$

و تكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار تحت صحة H_0 من الشكل :

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{(42)(43)} \left[\frac{(390)^2}{11} + \frac{(154.5)^2}{10} + \frac{(239.5)^2}{11} + \frac{(119)^2}{10} \right] - (3)(43)$$

$$\Rightarrow H = 22.79$$

وبما أن أحجام العينات وعددها هنا لا تتيح استخدام جدول القيم الحرجة لكروسكال – واليس لذا نستخدم جدول توزيع كاي – تربيع بدرجة من الحرية $\gamma = K - 1$ أي $\gamma = 4 - 1 = 3$ ولاختبار من الطرف الأيمن ، نجد أن أقرب قيمة لـــ H هي 12.838 وأن احتمال قيمة تساوي أو تزيد على هذه القيمة هو فقط 0.005 أي P.V<0.005 وبالتالي $P.V < \propto$ (حيث $\propto = 0.05$) ومنه ترفض H_0 وتقبل H_1 أي ليس كل الأوساط متساوية .

ملاحظة على المثال : رغم وجود ربطات كثيرة في مشاهدات العيّنة المدمجة في هذا المثال إلا أننا لا نحتاج لتعديل H مادامت معنوية ، وكتوضيح للتعديل ستسحب القيمة الممكنة لتعديل H فيما لو احتجنا لها : هناك 10 مجموعات من القيم المتساوية , وبالتالي هناك 10 قيم لـــ f تفاصيلها كمايلي :

$f_1 = 2$ (عدد مرات تكرار الرقم 9)

$f_2 = 2$ (عدد مرات تكرار الرقم 11)

$f_3 = 4$ (عدد مرات تكرار الرقم 12)

$f_4 = 10$ (عدد مرات تكرار الرقم 13)

$f_5 = 3$ (عدد مرات تكرار الرقم 14)

$f_6 = 2$ (عدد مرات تكرار الرقم 16)

$f_7 = 4$ (عدد مرات تكرار الرقم 17)

$f_8 = 2$ (عدد مرات تكرار الرقم 18)

$f_9 = 3$ (عدد مرات تكرار الرقم 19)

$f_{10} = 2$ (عدد مرات تكرار الرقم 23)

وبالتالي نجد :

$$C = 1 - \sum_j \frac{(f_j^3 - f_i)}{n^3 - n} = 1 - \frac{1}{(42)^3 - (42)} [(2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (4^3 - 4) + (10^3 - 10) + (3^3 - 3) + (2^3 - 2) + (4^3 - 4) + (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + (2^3 - 2)] = 0.98$$

18-6- المقارنات المتعددة بعد رفض H_0 في اختبار كروسكال – واليس :

بعد رفض فرضية العدم H_0 في اختبار كروسكال – واليس , وبالتالي قبول H_1 أي هناك فروق معنوية ما بين الأوساط للمجتمعات المدروسة ، لا بد من معرفة حقيقة هذه الفروق ، أي إجراء مقارنات متعددة لمعرفة العينات التي بينها اختلاف والتي ليس فيها اختلاف ، وهذه المقارنات يمكننا أن نجريها عن طريق الفرق المطلق بين متوسطي مجموع رتب كل زوجين من العينات وعلى التتالي ، أي : $D_{ij} = |\overline{R_i} - \overline{R_j}|$, $i \neq j$ i=1,2,...,k

حيث $\overline{R_i} = \frac{R_i}{n_i}$ من أجل i=1,2,...,K وذلك بأن نقارن D_{ij} مع Z_{ij} حيث

$$Z_{ij} = \left[Z_{1-\frac{\alpha}{k(k-1)}}\right] \cdot \sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{12}\right)\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \quad ; \quad \begin{cases} i \neq j \, ; i, j = 1,2, \dots \dots, k \\ j > i \end{cases}$$

حيث n_i ، n_j هما حجما العينتين i ، j و $Z_{1-\frac{\propto}{k(k-1)}}$ هي القيمة الناتجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري التي تجعل المساحة على يمين التوزيع مساوية $\frac{\propto}{k(k-1)}$.

وإذا كانت العينات متساوية بالحجم $n_1 = n_2 = \cdots = n_K$ فإن Z_{ij} تصبح من الشكل :

$$Z_{ij} = \left[Z_{1-\frac{\propto}{k(k-1)}}\right] \cdot \sqrt{\frac{K(n+1)}{6}}$$

18-7- أمثلة محلولة :

مثال (18-3) : في تصميم تام العشوائية لتجربة استخدام أربع طرق مختلفة لزراعة القمح ، حيث كانت الوحدات التجريبية متساوية المساحات وتأثير ذلك على الانتاج كان لدينا المشاهدات التالية :

الطريقة (I)	76	81	74	79	79	76	72	83	80	75	81
الطريقة (II)	70	70	69	65	72	76	68	73	81	77	
الطريقة (III)	85	83	78	75	77	74	79	80	71		
الطريقة (IV)	68	82	80	81	79	69	67	66			

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ ، اختبر عدم تساوي وسط الانتاج للطرق الأربع .

الحل :

لنفترض أن m_i هو وسط الانتاج للطريقة i حيث i=1,2,3,4

ومنه فرضية العدم : $H_0 : m_1 = m_2 = m_3 = m_4$

والفرضية البديلة : (ليس كل الأوساط متساوية) : H_1

ولدينا $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 11 + 10 + 9 + 8 = 38$ (حجم العيّنة المدمجة)

والجدول التالي يوضح القيم الرتبة تصاعدياً , ورتبها , وعائديتها للعينة المدمجة :

التسلسل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
القيم مرتبة تصاعدياً	65	66	67	68	68	69	69	70	70	71	72	72	73	74
الرتب	1	2	3	4.5	4.5	6.5	6.5	8.5	8.5	10	11.5	11.5	13	14.5
العائدية	I	IV	IV	II	IV	II	IV	II	II	III	I	II	II	I
التسلسل	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
القيم مرتبة تصاعدياً	74	75	75	76	76	76	77	77	78	79	79	79	79	80
الرتب	14.5	16.5	16.5	19	19	19	21.5	21.5	23	25.5	25.5	25.5	25.5	29
العائدية	III	I	III	I	I	II	II	III	III	I	I	III	IV	I
التسلسل	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38				
القيم مرتبة تصاعدياً	80	80	81	81	81	81	82	83	83	85				
الرتب	29	29	32.5	32.5	32.5	32.5	35	36.5	36.5	38				
العائدية	III	IV	I	I	II	IV	IV	I	III	III				

وتكون مجموع الرتب لقيم الانتاج لكل طريقة على النحو التالي :

$$R_1 = 263 \ ; \ R_2 = 125.5 \ ; \ R_3 = 214.5 \ ; \ R_4 = 138$$

وتكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار :

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{(38)(39)} \left[\frac{(263)^2}{11} + \frac{(125.5)^2}{10} + \frac{(214.5)^2}{9} + \frac{(138)^2}{8} \right] - (3)(39)$$

H = (0.0081)[15355.866] - 117 = 7.383

ولوجود عدد من حالات التساوي فإنه يمكن تصحيح قيمة الاختبار وحساب قيمة f_j، f_j^3:

الرتبة	4.5	6.5	8.5	11.5	14.5	16.5	19	21.5	25.5	29	32	34.5	36.5	المجموع
f_j	2	2	2	2	2	2	3	2	4	3	3	2	2	
$f_j^3 - f_j$	6	6	6	6	6	6	24	6	60	24	24	6	6	186

وتكون قيمة معامل التصحيح :

$$C = 1 - \sum_j \frac{(f_j^3 - f_i)}{n^3 - n} = 1 - \frac{186}{(38)^3 - (38)} = 1 - 0.0034 = 0.99661$$

وتصبح H المعدّلة من الشكل : $H = \frac{7.383}{0.99661} = 7.41$

ومن جدول توزيع كاي – تربيع , وعند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ ودرجة حرية $\gamma = K - 1 = 4 - 1 = 3$ تكون القيمة النظرية لإحصائية الاختبار : $x^2_{1-\alpha}(\gamma) = x^2_{0.99}(3) =$ 11.34 وكون $H < x^2_{1-\alpha}(\gamma)$ عندئذ نقبل H_0 ونرفض H_1 وبالتالي وسط الانتاج متساوٍ للطرق الأربع .

مثال(18-4) : في دراسة حول تأثير ثلاث طرق في التعليم في مدرسة المبدعين ، وبعد انتهاء البرنامج تم أخذ درجات الطلاب لعينة عشوائية من 12 طالباً وفق التالي :

الطريقة الأولى	91	83	78	96	88
الطريقة الثانية	75	72	64	82	
الطريقة الثالثة	73	79	75		

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$، اختبر وجود فروق معنوية ما بين الطرق الثلاث في التعليم , وأثرها في مستوى أداء الطلاب المبدعين .

الحل :

إن فرضية العدم H_0 : [لا توجد فروق ملموسة في القياسات للطرق التعليمية الثلاث]

و الفرضية البديلة H_1 : [توجد فروق ملموسة في القياسات للطرق التعليمية الثلاث]

ولاجراء الاختبار ، نعد أن مشاهدات العينات تنتمي لعينة واحدة حجمها n حيث $n =$

$n_1 + n_2 + n_3 = 5 + 4 + 3 = 12$. والجدول التالي يبين ترتيب , ورتب المشاهدات والعائدية لها كالتالي :

التسلسل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
القيم مرتبة تصاعدياً	64	72	73	75	75	78	79	82	83	88	91	96
الرتب	1	2	3	4.5	4.5	6	7	8	9	10	11	12
العائدية للعينة	2	2	3	2	3	1	3	2	1	1	1	1

وتكون مجموع الرتب للدرجات لكل طريقة كالتالي :

$$R_1 = 6 + 9 + 10 + 11 + 12 = 48$$

$$R_2 = 1 + 2 + 4.5 + 8 = 15.5$$

$$R_3 = 3 + 4.5 + 7 = 14.5$$

والقيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار تكون من الشكل :

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{(12)(13)} \left[\frac{(48)^2}{5} + \frac{(15.5)^2}{4} + \frac{(14.5)^2}{3} \right] - (3)(13) = 6.46$$

وبالعودة لجدول كروسكال واليس وعند $n_1 = 5$ ، $n_2 = 4$ ، $n_3 = 3$ وعند مستوى المعنوية $\propto = 0.10$ فإن القيمة النظرية من الجدول تكون 4.52 , وكون H = 6.46 , فإن H>4.52 وبالتالي نرفض H_0 ونقبل H_1 أي هناك فروق تذكر في الدرجات بالنسبة للطرق التعليمية الثلاث .

ولمعرفة مواضع الاختلاف بين العينات ، نحسب أولاً متوسط مجموع الرتب لكل عينة ثم نأخذ الفرق المطلق بين متوسطي مجموع رتب كل زوجين من العينات أي :

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{n_1} = \frac{48}{5} = 9.6 \; ; \; \overline{R_2} = \frac{R_2}{n_2} = \frac{15.5}{4} = 3.875 \; ;$$

$$\overline{R_3} = \frac{R_3}{n_3} = \frac{14.5}{3} = 4.833$$

والجدول التالي يبيّن الفروق المطلقة بين متوسطات المجاميع :

D_{ij} الفروق المطلقة	$\overline{R_1} = 9.6$	$\overline{R_2} = 3.875$	$\overline{R_3} = 4.833$
$\overline{R_1} = 9.6$	-	5.725	4.767
$\overline{R_2} = 3.875$		-	0.958
$\overline{R_3} = 4.833$			-

وكون $\propto = 0.10$ فإن $\frac{\propto}{K(K-1)} = \frac{0.10}{(3)(2)} = 0.0167$

وعليه , فإن قيمة Z التي تجعل المساحة على يمين التوزيع الطبيعي المعياري تساوي 0.0167 هي 2.13 ومنه :

$$Z_{ij} = \left[Z_{1-\frac{\propto}{k(k-1)}}\right] . \sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{12}\right)\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \quad ; j > i \; ; \; i,j = 1,2,3$$

$$Z_{ij} = (2.13)\sqrt{\left(\frac{(12)(13)}{12}\right)\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \quad ; n_1 = 5; +n_2 = 4; +n_3 = 3$$

$$Z_{12} = (2.13)\sqrt{(13)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)} = 5.152$$

$$Z_{13} = (2.13)\sqrt{(13)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)} = 5.591$$

$$Z_{23} = (2.13)\sqrt{(13)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)} = 5.849$$

وبالمقارنة ما بين D_{ij} و Z_{ij} نجد أن :

$$D_{12} > Z_{12} \; ; \; D_{13} < Z_{13} \; ; \; D_{23} < Z_{23}$$

وبالتالي هناك فروق معنوية ذات دلالة إحصائية في الدرجات بين الطريقة الأولى , والطريقة الثانية , ولكن ليس هناك فروق معنوية ما بين الطريقة الأولى , والطريقة الثالثة , وما بين الطريقة الثانية , والطريقة الثالثة .

18-8- تمرينات غير محلولة

1) لمقارنة ثلاثة أنواع من البطاريات الجافة ، أخذت عينة من كل نوع , وكانت الأعمار بالساعات كالتالي :

النوع A	24	28	20	30	25	24	26	31	
النوع B	29	57	33	31	28	27	24	26	26
النوع C	34	21	25	27	22	21	27		

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$، اختبر بأن وسط العمر متساوٍ للأنواع الثلاثة باستخدام اختبار كروسكال – واليس .

2) استخدمت خمسة مستويات لمعالجة تجريبية معينة . وفي نهاية التجربة تم أخذ قياس أداء الوحددات التجريبية في العيّنات في هذه المستويات على مقياس رتبي , فكانت العلاقات الحاصلة للوحدات كالتالي :

العيّنة (1)	36	31	29	27	34	28	39	32	38	37	35	36
العيّنة (2)	24	21	28	25	32	25	30	25	26	25	22	31
العيّنة(3)	25	27	36	35	23	25	26	27	29	33	27	29
العيّنة (4)	30	25	29	34	35	28	27	34	38	33	32	42
العيّنة (5)	23	22	21	27	24	25	29	33	26	28	24	22

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$، اختبر وجود فروق تذكر في أداء الوحدات التجريبية نتيجة لاختلاف المستويات .

3) أجريت تجربة لدراسة تأثير نوعين من الأدوية في مرض الانفلونزا ، حيث أعطي الدواء الأول لعينة من المرضى , والدواء الثاني لعينة أخرى , واستخدمت عينة ثالثة لتكون ضابطة (دون دواء) . أجريت التجربة في ظروف متشابهة للعينات الثلاث , وكانت أيام الشفاء لمرضى العينات الثلاث كالآتي :

العيّنة الأولى	7	7	5	9	6
العيّنة الثانية	6	2	3	2	4
العيّنة الثالثة	4	3	6	1	

والمطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.10$ ، اختبر عدم تماثل أيام الشفاء لمجتمعات العينات الثلاث , ووضح الفروق بينها إن وجدت .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الباب السادس

اختبار أكثر من عينتين مرتبطتين

(Tests For More Than Two Related Samples)

الفصل التاسع عشر : اختبار فريدمان (Friedman Test)

الفصل العشرون : اختبار كوكران (Cochran Test)

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع عشر

اختبار فريدمان

19-1- مفهوم الاختبار

19-2- متطلبات الاختبار و شروطه

19-3- فرضيات الاختبار

19-4- إجراء الاختبار

19-5- أمثلة محلولة

19-6- اختبار مماثل لاختبار فريدمان و هو اختبار كويد

19-7- مثال محلول

19-8- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل التاسع عشر

اختبار فريدمان

19-1- مفهوم الاختبار : إن اختبار فريدمان أو ما يعرف بتحليل التباين الثنائي لفريدمان ، و هو بديل لا وسيطي لتحليل التباين الثنائي الوسيطي عند فشل الأخير بالإيفاء بافتراضاته ، و يستخدم الاختبار عند التعامل مع أكثر من عينتين مرتبطتين حيث تخضع الحالات أو المفردات لظروف تجريبية مختلفة . و يمكن النظر لهذا الاختبار بأنه امتداد لاختبار الإشارة للعينّات التزاوجية .

و نذكر على سبيل المثال التصميم الملائم للتجربة الممكن أن نطبق عليها هذا الاختبار , فمثلاً لنفترض تجربة لمقارنة أربعة أنواع من إطارات السيارات من حيث الفترة التي تنقضي قبل تلف الإطار , قد تتأثر المقارنة بين المعالجات (أنواع الإطارات بالسيارة) التي يوضع فيها الإطار , فالزيادة قدرة التجربة على كشف الاختلافات الحقيقية بين المعالجات ينبغي إزالة أثر السيارة حتى لا يختلط مع أثر المعالجة , و يمكن أن يتم ذلك مثلاً عن طريق مراعاة أن يطبق كل نوع إطار في كل سيارة , و بالتالي توحد الظروف لجميع المعالجات من حيث أثر السيارة . و في الحالة العامة يكون لدينا عدد t من المعالجات ، و عدد r من مستويات العامل المؤثر التي تسمى عادة قطاعات . و إذا كانت كل معالجة تطبق مرة واحدة في كل قطاع , فإن أحجام القطاعات تكون متساوية ، و كل منها به t وحده تجربة . و تطبق المعالجات في القطاعات بطريقة عشوائية مستقلة . و في بعض التطبيقات يمكن اعتبار أنه لدينا عدد t من العينات حجم كل منها r ، و أن هذه العينات غير مستقلة ؛ لأن المشاهدات فيها تقع في r مجموعة ، و المشاهدات في كل مجموعة يربط بينها القطاع الذي تقع فيه . يوصف مثل هذا التصميم بالتصميم بقطاعات عشوائية ، و يسمى تحليل التباين المرافق له

بتحليل التباين الثنائي (المعالجات و القطاعات) (Two-Way ANOVA) حيث يتطلب تحليل التباين الثنائي في الإحصاء الوسيطي عدة افتراضات منها أن يكون توزيع الخطأ طبيعياً .

19-2- متطلبات الاختبار و شروطه : يتطلب هذا الاختبار الشروط التالية :

1) أن تحتوي البيانات على عدد n من الحالات أو المفردات المستقلة تسمى قطاعات ، بحيث تخضع كل من هذه القطاعات لعدد k من المعالجات .

2) أن يكون المتغير المدروس مستمراً .

3) ألا يكون هناك تفاعل بين القطاعات ، و المعالجات .

4) أن تكون هناك إمكانية لترتيب البيانات في كل قطاع من الأصغر للأكبر أو العكس , أي أن البيانات يجب أن تكون رتبية على الأقل .

19-3- فرضيات الاختبار : إن فرضية العدم H_0 تتمثل بأن جميع آثار المعالجات متساوية ؛ أي جميع متوسطات المعالجات متساوية أو أن المجتمعات داخل القطاعات متماثلة أي أنه لا توجد فروق ملموسة بين مجتمعات المعالجات .

و الفرضية البديلة H_1 لفرضية العدم H_0 تقول بوجود فروق تذكر بين مجتمعات المعالجات أي أنه ليس كل متوسطات المعالجات متساوية .

19-4- إجراء الاختبار : إذا كان لدينا k معالجة ، و كل معالجة طبقت مرة واحدة في كل من n قطاع بحيث يكون تطبيق المعالجات داخل القطاع بطريقة عشوائية مستقلة , و لنفترض أن النتائج تم عرضها في جدول من n صفاً و k عموداً , حيث يمثل كل صف قطاعاً ، و كل عمود معالجة , و القطاعات قد تكون مثلاً , n شخصاً يطلب من كل منهم ترتيب k نوعاً (معالجة) من سلعة معينة , حسب الأفضلية , و قد تكون n سيارة ذات مواصفات مختلفة ، و المعالجات 4 أنواع من الإطارات , حيث يطبق كل نوع في كل

سيارة ، و حيث تكون المشاهدة عمر الإطار . و المشاهدات قد تمثل رتباً ، كما في الحالة الأولى أو غير ذلك كما في الحالة الثانية . و في الحالة الأخيرة يجب أن يكون من الممكن ترتيبها داخل القطاع.

و لتكن Y_{ij} ترمز للمشاهدة في الخلية (i , j) ، أي المشاهدة الناتجة من تطبيق المعالجة j في القطاع i .

و لاختبار فرضية العدم بأن جميع آثار المعالجات متساوية تتبع ما يلي :

1) في كل قطاع i إذا لم تكن المشاهدات $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iK}$ تمثل رتباً نرتبها تصاعدياً ، و نأخذ رتبها .

2) نحسب مجموع رتب كل معالجة و نرمز لمجموع الرتب للمعالجة j بـ R_j أي $R_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}$.

3) نحسب قيمة إحصائية الاختبار لفريدمان , تحت صحة H_0 :

$$T_f = \frac{(n-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} {R_j}^2 - \frac{nK(K+1)^2}{4}\right]}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K} {r_{ij}}^2 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} {R_j}^2}$$

و هي تتبع تقريباً توزيع فيشر (F) بدرجة من الحرية للبسط $\gamma_1 = K - 1$ و درجة من الحرية للمقام $\gamma_2 = (n-1)(K-1)$ و يكون القرار برفض H_0 عند مستوى المعنوية $\propto$ إذا كانت $T_f > F_{1-\propto}(\gamma_1, \gamma_2)$ حيث $F_{1-\propto}(\gamma_1, \gamma_2)$ هي القيمة النظرية لإحصائية الاختبار ، و الناتجة من جدول (F) عند مستوى المعنوية $\propto$ و $\gamma_1 = K - 1$ و $\gamma_2 = (n-1)(K-1)$.

و تجدر الإشارة هنا إلى أن إحصائية الاختبار لفريدمان يمكن أن تكتب بصورة أبسط من السابقة كالتالي :

$$T_f = \frac{12}{nK(K+1)}\left(\sum_{j=1}^{K} {R_j}^2\right) - 3n(K+1)$$

و لكن هنا نقارن هذه القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار بالقيمة الحرجة بالطرف الأيمن لتوزيع χ^2 بدرجة من الحرية $\gamma = K - 1$.

غير أن الأبحاث الأخيرة أكدت أن تقريب توزيع إحصائية فريدمان بتوزيع فيشر (F) يتفوق على تقريب توزيع إحصائية فريدمان بتوزيع كاي – تربيع (χ^2) , هذا إضافة إلى أن التقريب بـ (F) يستخدم حتى في وجود ربطات , لهذا يفضل استخدامها .

و في كل الأحوال إذا كانت نتيجة اختبار فريدمان رفض H_0 , يمكن أيضاً استخدام إحدى طرق المقارنات المتعددة لمقارنة أزواج المعالجات المختلفة لمعرفة في أي زوج يوجد اختلاف معنوي بين المعالجتين , و كما رأينا في اختبار (كروسكال – واليس) هناك عدة طرق لذلك .

و في الطريقة التالية تعد المعالجتين j , j` مختلفتين إذا تحققت المتباينة :

$$\left|R_j - R_{j`}\right| > t_{1-\frac{\propto}{2}} \sqrt{\frac{2n(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K} r_{ij} \quad -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} R_j{}^2}{(n-1)(K-1)}}$$

حيث $t_{1-\frac{\propto}{2}}$ هي قيمة t التي تسبقها مساحة $\left(1 - \frac{\propto}{2}\right)$ تحت منحني توزيع ستودنت (t) بدرجة من الحرية $\gamma = (n-1)(K-1)$.

4) يمكننا معالجة التساوي في الرتب , رغم أننا نفترض بأن المتغير محل الدراسة يجب أن يكون متصلاً كالتالي : إذا وجدت حالات كثيرة من تساوي الرتب ، يجب أن تصحح قيمة الاختبار (χ^2) أي :

بمعامل التصحيح C التالي : $T_f = \frac{12}{nK(K+1)}\left(\sum_{j=1}^{K} R_j{}^2\right) - 3n(K+1)$

$$C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{K}(\sum(f^3 - f))}{nK(K^2-1)}$$

حيث f هي عدد الحالات المتساوية للرتب المعينة للقطاع i و بالتالي تكون القيمة المعدّلة لإحصائية الاختبار من الشكل :

$$T_f = \left[\frac{12}{nK(K+1)}\left(\sum_{j=1}^{K} R_j{}^2\right) - 3n(K+1)\right] \Big/ \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{K}(\sum(f^3-f))}{nK(K^2-1)}\right]$$

ملاحظة : إذا كان عدد المعالجات k صغيراً و كذلك عدد القطاعات n ، فإن القيمة الحسابية لـ T_f نقارن القيمة الجدولية من جدول فريدمان للمعالجات ، و القطاعات الصغيرة , فإذا كان T_f أكبر من القيمة الجدولية المناظرة ، فإنه ترفض H_0 و تقبل H_1 , و إلا فإنه تقبل H_0 و ترفض H_1 .

و كذلك يمكننا بعد رفض H_0 في اختبار فريدمان أن نعرف المعالجات التي وقع بينها اختلاف ، و التي ليس بينها اختلاف ، و لعدد كبير من القطاعات بمقارنة :

$$D_{jj`} = |R_j - R_{j`}| \quad \text{مع} \quad Z_{jj`} = \left[Z_{1-\frac{\propto}{K(K-1)}}\right].\sqrt{\frac{nK(K+1)}{6}}$$

حيث $Z_{1-\frac{\propto}{K(K-1)}}$ تنتج من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، و هي القيمة التي تجعل المساحة على يمين التوزيع تساوي $\frac{\propto}{K(K-1)}$.

19-5- أمثلة محلولة :

مثال (19-1) : طلب من كل من 4 ربات منازل ترتيب ثلاثة أنواع من المنظفات A , B , C حسب تفضيلها له و كانت النتائج كما يلي :

نوع المنظفات / ربة المنزل	A 1	B 2	C 3
1	2	1	3
2	2	1	3
3	1	2	3
4	3	1	2
R_j	8	5	11

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$ اختبار الفرض بأنه لا توجد اختلافات في تفضيل أنواع المنظفات مقابل الفرض بأنها لا تفضل بالدرجة نفسها .

الحل :

لدينا $\propto = 0.05$ من أجل اختبار [لا توجد اختلافات في تفضيل أنواع المنظفات] :H_0

مقابل [لا تفضل أنواع المنظفات بالدرجة نفسها] :H_1

و المعالجات هنا : هي أنواع المنظفات ، و القطاعات : هي ربات المنازل , و المشاهدات : تمثل رتباً داخل القطاع ، و بالتالي لا تحتاج لترتيب . أي أن Y_{ij} هنا هي r_{ij} ، و لدينا أيضاً : $k = 3$; $n = 4$; $R_1 = 8$; $R_2 = 5$; $R_3 = 11$

و يكون :

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} r_{ij}^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$+3^2 + 1^2 + 2^2 = 56$$

$$\sum_{j=1}^{3} R_j^2 = 8^2 + 5^2 + 11^2 = 210$$

و تكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$T_f = \frac{(n-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} R_j{}^2 - \left[nK(K+1)^2/4\right]\right]}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K} r_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} R_j{}^2}$$

$$= \frac{(4-1)\left[\frac{1}{4}(210) - \left[(4)(3)(4)^2/4\right]\right]}{56 - \frac{1}{4}(210)} = 3.86$$

و بالعودة لجدول فيشر (F) , نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار عند درجة الحرية $\gamma_2 =$

$$(n-1)(K-1) = (4-1)(3-1) = 6$$

$$\propto = 0.05 \quad \text{و} \quad \gamma_1 = K - 1 = 3 - 1 = 2$$

نجد : $F_{1-\propto}(\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 6) = F_{0.95}(2,6) = 5.14$

و بالتالي $T_f < F_{1-\propto}(\gamma_1, \gamma_2)$ أي نقبل H_0 و نرفض H_1 مما يستدل من ذلك بأن الأنواع الثلاثة لا تختلف في الأفضلية . و هنا لا حاجة للمقارنات المتعددة .

مثال (19-2): في تجربة لاختبار وجود فروق بين أربع معالجات , تم استخدام 11 مجموعة كل منها تحتوي على 4 حالات متماثلة , بحيث أخضعت كل حالة لمعالجة معينة .

و الجدول التالي يبيّن القياسات المتعلقة بكل حالة في المجموعة المعينة ، و للمعالجة المعينة.

المجموعة / المعالجة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	1	2	10	12	1	10	4	10	10	14	3
II	4	3	0	11	3	3	12	4	4	4	2
III	8	13	11	13	10	11	10	5	9	7	4
IV	0	1	3	10	0	9	11	3	3	2	13

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$, اختبر تماثل القياسات المعطاة للمعالجات الأربع .

الحل :

إن فرضية العدم H_0 تكون بالشكل التالي : (إن مجتمعات القياسات للمعالجات الأربع متماثلة ؛ أي أن المعالجات الأربع تؤدي إلى نتائج متساوية) .

و الفرضية البديلة H_1 تكون بالشكل التالي : (إن مجتمعات القياسات للمعالجات الأربع غير متماثلة ؛ أي أن المعالجات الأربع ليس لها نتائج متساوية) .

و لإنجاز الاختبار , تكون المجموعات في هذه الدراسة بمثابة القطاعات و عليه $n = 11$ و بما أن كل مجموعة تخضع لأربع معالجات ؛ فإن $k = 4$.

و باستبدال القياسات في كل مجموعة برتب هذه القياسات , نحصل على الجدول التالي الذي يعطي الرتب المقابلة للقياسات ، و مجموع الرتب لكل معالجة .

(القطاعات)

المجموعة / المعالجة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	المجموع
I	2	2	3	3	2	3	1	4	4	4	2	$R_1 = 30$
II	3	3	1	2	3	1	4	2	2	2	1	$R_2 = 24$
III	4	4	4	4	4	4	2	3	3	3	3	$R_3 = 38$
IV	1	1	2	1	1	2	3	1	1	1	4	$R_4 = 18$

و بالتالي نجد : $R_1 = 30$; $R_2 = 24$; $R_3 = 38$; $R_4 = 18$

و هي تمثل مجموع رتب كل معالجة j : j=1,2,3,4 .

و تكون إحصائية الاختبار لفريدمان بالشكل البسيط كالتالي :

$$T_f = \frac{12}{nK(K+1)}\left(\sum_{j=1}^{K} {R_j}^2\right) - 3n(K+1)$$

$$T_f = \frac{12}{(11)(4)(5)}\left((30)^2 + (24)^2 + (38)^2 + (18)^2\right) - 3(11)(5))$$

$$= 11.95$$

و باستخدام جدول كاي – تربيع بدرجة من الحرية $\gamma = K - 1 = 4 - 1 = 3$

و عند مستوى المعنوية $\propto = 0.10$ نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار :

$$\chi^2{}_{1-\propto}(\gamma) = \chi^2{}_{0.90}(3) = 6.25$$

و بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار $T_f = 11.95$ مع القيمة النظرية لإحصائية الاختبار ، و هي $\chi^2{}_{1-\propto}(\gamma) = 6.25$ نجد أن $T_f > \chi^2{}_{1-\propto}(\gamma)$

و بالتالي نرفض H_0 و نقبل H_1 ؛ مما يستدل من ذلك بأن القياسات غير متساوية للمعالجات الأربع .

و بما أنه تم رفض H_0 و قبول H_1 فهنا تجدر الإشارة إلى معرفة أماكن الاختلاف بالقياسات ما بين هذه المعالجات ، و عليه يمكننا بناء جدول الفروق : $D_{jj`} = |R_j - R_{j`}|$

$D_{jj`} = \lvert R_j - R_{j`} \rvert$	$R_1 = 30$	$R_2 = 24$	$R_3 = 38$	$R_4 = 18$
$R_1 = 30$	–	6	8	12
$R_2 = 24$		–	14	6
$R_3 = 38$			–	20
$R_4 = 18$				–

و كون $\propto = 0.10$ فإن $\frac{\propto}{K(K-1)} = \frac{0.10}{(4)(3)} = 0.0083$

و من جدول (Z) تكون :

$$Z_{1-\frac{\propto}{K(K-1)}} = Z_{1-0.0083} = Z_{0.9917} = 2.395 \approx 2.4$$

و تكون بالتالي :

$$Z_{jj`} = \left[Z_{1-\frac{\propto}{K(K-1)}}\right] . \sqrt{\frac{nK(K+1)}{6}} = (2.4). \sqrt{\frac{(11)(4)(5)}{6}} \approx 14.533$$

و بمقارنة $D_{jj`}$ مع $Z_{jj`}$ من أجل $j \neq j`$ سنجد أن : $j , j` = 1,2,3,4$

هناك فروق معنوية بين المعالجة الثالثة و المعالجة الرابعة كون :

$(D_{3\,4} = 20) > (Z_{3\,4} = 14.533)$ و لا توجد فروق تذكر فيما عدا ذلك .

19-6- اختبار مماثل لاختبار فريدمان ، و هو اختبار كويد(Quade Test):

- **مفهوم الاختبار** : يستخدم اختبار كويد – و هو امتداد لاختبار ويلكوكسن للرتب المؤشرة في الحالة نفسها التي يستخدم فيها اختبار فريدمان . أي عندما نرغب في مقارنة آثار عدة معالجات تمثلها عينات غير مستقلة , و سبب عدم الاستقلال هو أن كل عينة تتكون من n مشاهدة أخذت من n قطاعاً يحوي كل منها جميع المعالجات. و الهدف مقارنة آثار المعالجات بعد إزالة تأثير القطاعات .

- **متطلبات و شروط الاختبار** : المتطلبات و الشروط هي نفسها التي أتى على ذكرها اختبار فريدمان , بالإضافة إلى الشرط التالي ؛ و هو إمكانية ترتيب القطاعات من حيث مدى البيانات فيها .

- **فرضيات الاختبار** : و كما تم الافتراض في اختبار فريدمان حيث لدينا k معالجة و n قطاع و أن Y_{ij} تمثل المشاهدة الناتجة من تطبيق المعالجة j في القطاع i . و بالتالي تكون فرضية العدم [جميع آثار المعالجات متساوية] : H_0

و الفرضية البديلة : [عدم تساوي جميع آثار المعالجات] : H_1

- **إجراء الاختبار** : لإنجاز الاختبار يتم اتباع الخطوات التالية :

1) في كل قطاع i إذا لم تكن المشاهدات تمثل رتباً , نرتبها تصاعدياً ، و نرمز لرتبة المشاهدة Y_{ij} بـــ r_{ij}.

2) في كل قطاع i , نحسب مدى القيم فيه ، أي أكبر قيمة في القطاع i مطروحاً منها أصغر قيمة فيه .

3) نرتب القطاعات من الأصغر للأكبر حسب مقدار المدى , فنعطي القطاع ذا أصغر مدى الرتبة (1) و الذي يليه أكبر مدى (2) و هكذا ... . و في حالة الربطات نعطي القطاعات التي لها المدى نفسه متوسط رتبها إذا كانت مختلفة . و لتكن Q_1 , Q_2 , ... , Q_n هي الرتب التي أعطيت للقطاعات 1 ,2 , ... , n بالترتيب .

4) نحسب القيم حيث : $S_{ij} = Q_i \cdot \left[r_{ij} - \frac{K+1}{2}\right]$

حيث $\frac{K+1}{2}$ هو متوسط الرتب في القطاع i (حيث إن مجموع الرتب 1 ,2 , ... , k داخل القطاع i هو $\frac{K(K+1)}{2}$ و متوسطها $\frac{K(K+1)}{2K}$ أي $\frac{K+1}{2}$) .

و المقدار داخل القوس يقيس الفرق بين رتبة المشاهدة الناتجة عن المعالجة j في القطاع i و بين متوسط رتب المشاهدات الناتجة عن جميع المعالجات في ذلك القطاع . أما الضرب في Q_i فهو لأخذ الأهمية النسبية للقطاع الذي تقع فيه المشاهدة في الاعتبار .

5) نحسب قيمة إحصائية كويد المشاهدة و هي :

$$T_q = \frac{\frac{(n-1)}{n}\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}\right)^2}{\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} S_{ij}{}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}\right)^2}{n}}$$

و هذه الإحصائية تتبع في حالة عدم وجود اختلافات بين المعالجات تقريباً توزيع F بـــ $\gamma_1 = K - 1$, $\gamma_2 = (n-1)(K-1)$.

و بالتالي لاختبار صحة H_0 نقارن T_q مع القيمة الحرجة من جدول فيشر (F) في اختبار من الطرف الأيمن $F_{1-\alpha}(\gamma_1, \gamma_2)$.

و القرار يكون :

برفض H_0 إذا كان : $T_q \geq F_{1-\alpha}$ و قبول H_0 إذا كان : $T_q < F_{1-\alpha}$

و عندما نرفض H_0 و يرغب في معرفة المعالجات المختلفة بالآثار , يمكن أن تعد المعالجة j مختلفة عن المعالجة `j معنوياً إذا تحققت المتباينة :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} S_{ij} - \sum_{i=1}^{n} S_{ij`}\right| > \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).\sqrt{\frac{2n\left[\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} S_{ij}{}^2 - \sum_{j=1}^{K}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}\right)^2}{n}\right]}{(n-1)(K-1)}}$$

حيث $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ نحصل عليها من جدول ستودنت بدرجة من الحرية .

ملاحظة :

(إذا كان المقام في صيغة T_q صفراً , نرفض H_0 و يكون $P.V = \left(\frac{1}{K!}\right)^{n-1}$) .

19-7- مثال محلول

مثال (19-3) : لمقارنة أربعة أنواع من زيوت التشحيم O_1 , O_2 , O_3 , O_4 تم استخدام كل منها في 6 سيارات . حسب متوسط استهلاك البنزين بالغالون للمائة كيلومتر . و الجدول التالي يوضح النتائج حيث القيم داخل الأقواس تمثل رتب المشاهدات المقابلة لها داخل القطاعات :

رقم السيارة	نوع الزيوت				المدى	Q_i
	O_1	O_2	O_3	O_4		
1	8 (2)	10 (3)	11 (4)	7 (1)	4	3
2	8 (2)	11 (3.5)	11 (3.5)	7.4 (1)	3.6	2
3	9 (2)	11 (3)	13 (4)	8 (1)	5	5.5
4	8.5 (2)	10 (3)	12 (4)	7.5 (1)	4.5	4
5	10 (2)	13 (4)	11.6 (3)	8 (1)	5	5.5
6	9.5 (3)	9.4 (2)	10 (4)	9 (1)	1	1

الحل :

لدينا $k = 4$ و $n = 6$ ثم تم تحديد رتب القيم داخل كل قطاع r_{ij} و وضعت داخل أقواس, كذلك تم حساب المدى للقيم في كل قطاع ، و رتبت القطاعات حسب المدى ، وو ضعت هذه النتائج في العمود قبل الأخير ، و العمود الأخير بالترتيب . بعد ذلك نحسب S_{ij} للرتب المختلفة من القاعدة :

$$S_{ij} = Q_i\left(r_{ij} - \frac{K+1}{2}\right) = Q_i(r_{ij} - 2.5)$$

و الجدول التالي يوضح قيم S_{ij} المختلفة :

(مثلاً) : ... ; $S_{11} = Q_1(r_{11} - 2.5) = (3)(2 - 2.5) = -1.5$

S_{ij}	O_1	O_2	O_3	O_4
1	- 1.5	1.5	4.5	- 4.5
2	- 1	2	2	- 3.0
3	- 2.75	2.75	8.25	- 8.25
4	- 2	- 2	6	- 6
5	- 2.75	8.25	2.75	- 8.25
6	0.5	- 0.5	1.5	- 1.5
$\sum_{i=1}^{6} S_{ij}$	- 9.5	12	25	- 31.5

و من هذا الجدول نحصل على المقادير :

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{4} {S_{ij}}^2 = (-1.5)^2 + \cdots + (-1.5)^2 = 450.5$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{6} S_{ij}\right)^2 = (-9.5)^2 + (12)^2 + (25)^2 + (-31.5)^2$$

$$= 308.6$$

و بالتالي فالقيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار :

$$T_q = \frac{\frac{(n-1)}{n}\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}\right)^2}{\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} {S_{ij}}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}\right)^2}{n}}$$

$$\Rightarrow T_q = \frac{\frac{(6-1)}{6}(308.6)}{450.5 - \frac{308.6}{6}} = 0.644$$

و من جدول (F) بـ $\gamma_1 = K - 1 = 3$ و

$\propto = 0.05$ و $\gamma_2 = (n-1)(K-1) = (6-1)(4-1) = 15$,

نجد القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $F_{1-\propto}(\gamma_1, \gamma_2) = F_{0.95}(3,15) = 3.29$

ومنه $T_q < F_{1-\alpha}$

و منه نقبل H_0 و نرفض H_1 أي تساوي آثار أنواع الزيوت .

19-8- تمرينات غير محلولة :

1) تم عرض 4 متقدمين لوظيفة معينة على لجنة معاينة من 4 أشخاص . إذا أعطى كل عضو باللجنة درجة معينة للمتقدمين الأربعة , و كانت الدرجات المعطاة كما في الجدول التالي :

المتقدم للوظيفة / عضو اللجنة	A	B	C	D
I	18	16	17	19
II	16	15	18	17
III	18	16	18	19
IV	15	15	17	17

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$, اختبار عدم تماثل الدرجات المعطاة من قبل أعضاء اللجنة للمتقدمين للوظيفة .

(ملاحظة: أعضاء اللجنة هي القطاعات $n = 4$ والمتقدمون للوظيفة هي المعالجات $k = 4$).

2) تم أخذ عينة عشوائية لدرجات 10 طلاب يدرسون أربعة مقررات مختلفة (الإحصاء – الاحتمالات – التحليل الرياضي – الجبر الخطي) , حيث كانت هذه الدرجات (من 20) كما يلي :

الطلاب / المقرر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الإحصاء	12	15	14	11	15	12	18	13	9	7
الاحتمالات	13	14	11	15	12	13	16	12	16	8
التحليل الرياضي	11	15	7	16	13	8	12	7	11	12
الجبر الخطي	14	19	9	18	12	14	20	10	13	10

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبر وجود فروق تذكر في أداء الطلاب بين المقررات الأربعة .

3) طلب من كل 10 أشخاص يعانون من التهاب المفاصل ترتيب ثلاثة أدوية لتخفيف الألم A , B , C حسب تفضيلهم لها , و كانت النتائج كالتالي :

الشخص / الدواء	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1
B	2	2	2	3	2	3	1	3	1	3
C	3	3	3	2	3	2	3	2	3	2

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, اختبار التالي : << هل تقدم هذه البيانات دليلاً كافياً بأن الأدوية الثلاثة لا تختلف من حيث تفضيل المرضى لها >>.

الفصل العشرون

اختبار كوكران

20-1- مفهوم الاختبار

20-2- متطلبات الاختبار و شروطه

20-3- فرضيات الاختبار

20-4- إجراء الاختبار و المقارنة

20-5- أمثلة محلولة

20-6- تمرينات غير محلولة

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل العشرون

اختبار كوكران

20-1- مفهوم الاختبار : اشتهر هذا الاختبار باسم اختبار كوكران للمشاهدات المرتبطة و هو يطبق في الحالات نفسها التي يطبق فيها اختباري فريدمان و كويد , أي حالة تصميم القطاعات العشوائية , و لكنه يختلف عنها في أنه لا يستخدم الرتب , كما أن كل معالجة في اختبار كوكران تؤدي لواحدة من نتيجتين فقط . و هذا يضفي على الاختبار مرونة إذ يمكن تطبيقه حتى على البيانات المقاسة بمقياس اسمي ما دامت ثنائية الطبيعة . و على سبيل المثال قد يطلب من كل من n مدرس لغة انكليزية أن يقوم بتدريس كل من k تلميذ بواحدة من k طريقة بحيث يتم اختيار الطريقة التي تطبق على التلميذ بطريقة عشوائية . فإذا أخضع جميع التلاميذ لاختبار في هذه اللغة ؛ فإن نتيجة أي تلميذ يمكن تصنيفها إما نجاح أو رسوب . فإذا رمزنا للنجاح بـــ "1" و للرسوب بـــ "0" فإن نتائج التجربة يمكن عرضها في جدول من n صفاً و k عموداً بحيث تكون كل مشاهدة فيه 1 أو 0 . و بالتالي هذا الاختبار يستخدم في التجارب الإحصائية المصممة وفق التصميم بقطاعات تامة العشوائية ، و يساعد في معرفة فاعلية عدة معالجات في قطاعات مختارة , و ترتكز فكرة الاختبار على الكشف عما إذا كان مجموع الحالات لأحد الوضعين يختلف بين المعالجات . و يعد اختبار كوكران تعميماً لاختبار ماكينمار للعينتين المرتبطتين .

20-2- متطلبات الاختبار و شروطه : يتطلب اختبار كوكران الشروط التالية :

1) أن تحتوي البيانات على استجابات من عدد من القطاعات على عدد من المعالجات المستخدمة .
2) أن تكون الاستجابات ثنائية بحيث يعد أحد الوضعين نجاحاً و الآخر فشلاً ، و يعطى النجاح الرقم "1" في حين يعطى الفشل الرقم "0" .
3) أن يتم اختيار القطاعات عشوائياً من عدد من القطاعات الممكنة .
4) أن يكون عدد القطاعات كبيراً نسبياً .

20-3- فرضيات الاختبار : لتكن Y_{ij} هي المشاهدة في الصف i و العمود j حيث يكون R_i مجموع الصف i و C_j مجموع العمود j أي :

$$R_i = \sum_{j=1}^{K} Y_{ij} \quad ; \; C_j = \sum_{i=1}^{n} Y_{ij} \quad ; \; \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{j=1}^{K} C_j = N$$

و Y_{ij} متغير ثنائي عشوائي يمثل استجابات القطاعات على عدد المعالجات حيث : j =1,2,....,K ; i=1,2,.....,n و إذا رمزنا بـ P_{ij} لاحتمال النجاح للمتغير Y_{ij} فإن حيث j k,.....,2,1= ; n,.....,2,1=i

$$P_{ij} = P[Y_{ij} = 1] \; ; \; i=1,2,.....,n \; ; \; =1,2,....,k$$

(حيث n عدد القطاعات و k عدد المعالجات)

و فرضية العدم H_0 تقول : إن المعالجات لها تأثير أو مفعول متساوٍ .

أي : $P_{i1} = P_{i2} = \cdots = P_{iK} \; ; i = 1,2, \dots, n$

و هذا يعني أن احتمال النجاح للمعالجة في كل قطاع متساوٍ بالنسبة للمعالجات و منه :

$$H_0 : P_{i1} = P_{i2} = \cdots = P_{iK} \; ; i = 1,2, \dots, n$$

و الفرضية البديلة لـH_0 و هي H_1 تتمثل بأن المعالجات ليس لها تأثير أو مفعول متساو أي :

$$H_1 : P_{ij} \neq P_{ij`} \quad ; \quad j, j` \in K \; ; \; j \neq j`$$

20-4- إجراء الاختبار و المقارنة :

ضمن الفرضيات ، و الشروط السابقة , و كون مجموع العمود j هو C_j و هو مجموع n متغير عشوائي مستقل ، فإن المتغير Z_j و هو من الشكل :

$$Z_j = \frac{C_j - E(C_j)}{\sqrt{V(C_j)}}$$ (حيث $E(C_j)$ هو توقع Z_j و $V(C_j)$ هو تباين Z_j)

يتبع تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري في حالة n كبيرة اعتماداً على مبرهنة النهاية المركزية. و بما أن مجموع مربعات k متغير مستقل يتبع كل منها N(0,1) ، فإن هذا المجموع يتوزع حسب توزيع كاي – تربيع بدرجة من الحرية k أي :

$$T_C = \sum_{j=1}^{K} Z_j^2 = \sum_{j=1}^{K} \left(\frac{C_j - E(C_j)}{\sqrt{V(C_j)}} \right)^2 \sim \chi^2_{(\gamma=K)}$$

و من جهة أخرى يمكن تقدير القيمة المتوقعة لمجموع العمود j أي بمتوسط مجاميع الأعمدة في العينة : أي $\hat{E}(C_j) = \sum_{j=1}^{K} \frac{C_j}{K} = \frac{N}{K}$ و تحت صحة H_0 ، فإن قيم P_{ij} تتساوى في الصف i ، و بالتالي يمكن تقديرها بمتوسط ذلك الصف أي: $\frac{R_i}{K}$ و الذي يمثل نسبة النجاح في الصف i , و كون Y_{ij} متغيراً يأخذ القيمة 1 باحتمال P_{ij} و 0 باحتمال $(1-P_{ij})$ فإنها تتبع توزيع برنولي بالوسيط P_{ij} و يكون التباين لـــ Y_{ij} عندئذ: $V(Y_{ij}) = P_{ij}(1 - P_{ij})$

و التي يمكن تقديرها بـــ $\hat{V}(Y_{ij}) = \frac{R_i}{K}\left(1 - \frac{R_i}{K}\right)$

و بما أن تطبيق المعالجات في القطاعات مستقل ، فإن Y_{ij} مستقلة بين القطاعات مما يعطي :

$$V(C_j) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_{ij}) \Rightarrow \hat{V}(C_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{K}\left(1 - \frac{R_i}{K}\right)$$

و كون هذا المقدّر يميل عادة ليكون صغيراً جداً ، فقد رأى كوكران تحسينه بضربه في المعامل $\frac{K}{K-1}$ ليصبح : $\hat{V}(C_j) = \frac{K}{K-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{K}\left(1 - \frac{R_i}{K}\right)$

و إحصائية الاختبار لكوكران تصبح من الشكل :

$$T_C = \frac{K-1}{K}\sum_{j=1}^{K} \frac{\left(C_j - \frac{N}{K}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{K}\left(1 - \frac{R_i}{K}\right)} = \frac{(K-1)\sum_{j=1}^{K}\left(C_j - \frac{N}{K}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} R_i\left(1 - \frac{R_i}{K}\right)}$$

و التي تتبع تحت صحة H_0 , توزيع كاي - تربيع بـــ $\gamma = K - 1$ درجة من الحرية . و منه نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من جدول توزيع كاي – تربيع بدرجة حرية $\gamma = K - 1$ و مستوى معنوية $\propto$ أي نحسب : $\chi^2_{1-\propto}(\gamma)$

و نقارنها مع القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار T_C و يكون القرار كالتالي :

إذا كان : $T_C > \chi^2_{1-\propto}(\gamma)$ فإننا نرفض H_0 و نقبل H_1.

و إذا كان : $T_C \leq \chi^2_{1-\alpha}(\gamma)$ فإننا نقبل H_0 و نرفض H_1 .

20-5- أمثلة محلولة :

مثال (20-1) : طلب من 10 مدرسين أن يقوم كل منهم بتدريس 3 تلاميذ مادة في اللغة الإنكليزية , حيث يدرّس أحدهم بالطريقة الأولى ، و الآخر بالطريقة الثانية ، و الثالث بالطريقة الثالثة , و تم إجراء اختبار لجميع التلاميذ بعد انتهاء الدراسة , و سجل للتلميذ الذي حصل على نجاح "1" و للتلميذ الذي حصل على رسوب "0" .

و الجدول التالي يوضح نتائج التجربة ، و مجاميع الصفوف ، و الأعمدة .

رقم المدرس i (القطاع)	رقم الطريقة (المعالجة)j			مجموع الصف
	1	2	3	
1	1	1	1	3
2	1	1	1	3
3	0	1	0	1
4	1	1	1	3
5	0	0	1	1
6	0	1	0	1
7	1	1	1	3
8	1	1	1	3
9	0	1	1	2
10	1	1	1	3
مجموع العمود C_j	6	9	8	المجموع الكلي N=23

و المطلوب : عند مستوى المعنوية α= 0.05 , اختبار الادعاء بأن الطرق الثلاث لتعليم اللغة الإنكليزية لا تختلف فيما بينها بالأثر على نتيجة التلميذ .

الحل :

من الجدول لدينا N = 23 ; n = 10 ; k = 3

و تكون فرضية العدم :

[الطرق الثلاث لتعليم اللغة الإنكليزية لا تختلف فيما بينها بالأثر على نتيجة التلميذ] : H_0

و الفرضية البديلة :

[الطرق الثلاث لتعليم اللغة الإنكليزية تختلف فيما بينها بالأثر على نتيجة التلميذ] : H_1

و ذلك عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

و يكون :

$$\sum_{j=1}^{K}\left(C_j - \frac{N}{K}\right)^2 = \left(6 - \frac{23}{3}\right)^2 + \left(9 - \frac{23}{3}\right)^2 + \left(8 - \frac{23}{3}\right)^2$$

$$= 2.79 + 1.77 + 0.11 = 4.67$$

$$\sum_{i=1}^{10} R_i\left(1 - \frac{R_j}{K}\right) = 3\left(1 - \frac{3}{3}\right) + 3\left(1 - \frac{3}{3}\right) + (1)\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 3\left(1 - \frac{3}{3}\right) + (1)\left(1 - \frac{1}{3}\right) + (1)\left(1 - \frac{1}{3}\right) + (3)\left(1 - \frac{3}{3}\right) + (3)\left(1 - \frac{3}{3}\right) + (2)\left(1 - \frac{2}{3}\right) + (3)\left(1 - \frac{3}{3}\right) = 2.67$$

و منه تكون القيمة المشاهدة لإحصائية اختبار كوكران تحت صحة H_0 :

$$T_C = \frac{(K-1)\sum_{j=1}^{K}\left(C_j - \frac{N}{K}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} R_i\left(1 - \frac{R_j}{K}\right)} = \frac{(3-1)(4.67)}{2.67} = 3.5$$

و لحساب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار اعتماداً على مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ ، و الاختبار من الطرف الأيمن ، و التوزيع لإحصائية الاختبار هو كاي – تربيع بدرجة من الحرية $\gamma = K - 1 = 3 - 1 = 2$ ، أي نحسب $\chi^2_{1-\propto}(\gamma)$ من جدول توزيع كاي – تربيع : $\chi^2_{1-\propto}(\gamma) = \chi^2_{1-0.05}(2) = \chi^2_{0.95}(2) = 5.99$

و كون $T_C = 3.5$ و $\chi^2_{1-\propto}(\gamma) = 5.99$ فإن $T_C < \chi^2_{1-\propto}(\gamma)$ و بالتالي نقبل H_0 بأن طرق التعليم لا تختلف بالأثر على نتيجة التلميذ .

مثال (20-2) : تم فحص كفاءة أداء أربعة أجهزة آلية بواسطة مجموعة عشوائية من خبراء مختصين ، و ذلك بموجب نقاط فحص معينة . و الجدول التالي يبيّن نتيجة فحص كل خبير لكل جهاز حيث يبيّن الرقم "1" أن الجهاز ذو كفاءة معينة ، و الرقم "0" أن الجهاز ليست له الكفاءة المعينة . و يحوي الجدول أيضاً مجموع الصف ، و مجموع العمود .

الخبير (القطاع) i	الجهاز j (المعالجة)				مجموع الصف R_j
	A	B	C	D	
I	1	1	0	1	3
II	0	1	0	0	1
III	1	1	1	1	4
IV	0	1	0	1	2
V	1	0	0	1	2
VI	0	0	0	0	0
VII	1	1	1	0	3
VIII	1	0	0	0	1
IX	1	1	1	1	4
مجموع العمود C_j	6	6	3	5	المجموع الكلي N=20

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ اختبار عدم تماثل كفاءة الأجهزة الأربعة .

الحل :

لدينا $k = 4$; $n = 9$; $N = 20$

و فرضية العدم H_0 تكون من الشكل التالي : عدم وجود فروق تذكر في الكفاءة بين الأجهزة الأربعة .

و الفرضية البديلة H_1 تكون من الشكل التالي : وجود فروق تذكر في الكفاءة بين الأجهزة الأربعة .

و هنا يلاحظ أن الأجهزة الأربعة هي بمثابة المعالجات و الخبراء التسعة هي بمثابة القطاعات .

و يكون لدينا من أجل حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار لكوكران :

$$\sum_{j=1}^{K=4}\left(C_j-\frac{N}{K}\right)^2=\left(6-\frac{20}{4}\right)^2+\left(6-\frac{20}{4}\right)^2+\left(3-\frac{20}{4}\right)^2+\left(5-\frac{20}{4}\right)^2=6$$

$$\sum_{i=1}^{n=9}R_i\left(1-\frac{R_j}{K}\right)=$$

$$3\left(1-\frac{3}{4}\right)+(1)\left(1-\frac{1}{4}\right)+4\left(1-\frac{4}{4}\right)+(2)\left(1-\frac{2}{4}\right)+$$

$$(2)\left(1-\frac{2}{4}\right)+(0)\left(1-\frac{0}{4}\right)+(3)\left(1-\frac{3}{4}\right)+(1)\left(1-\frac{1}{4}\right)+$$

$$(4)\left(1-\frac{4}{4}\right)=5$$

و منه تكون T_C من الشكل : $T_C=\frac{(K-1)\sum_{j=1}^{K}\left(C_j-\frac{N}{K}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}R_i\left(1-\frac{R_j}{K}\right)}=\frac{(4-1)(6)}{5}=3.6$

و القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $\chi^2_{1-\alpha}(\gamma)$ حيث $\gamma=K-1=3-1=2$ و $1-\alpha=$ 0.95 تنتج من جدول كاي – تربيع حيث $\chi^2_{0.95}(3)=7.81$ و بالتالي $T_C<\chi^2_{0.95}(3)$ مما يؤدي لقبول H_0 و رفض H_1 أي لا توجد فروق تذكر في كفاءة الأداء بين الأجهزة الآلية الأربعة .

20-6- تمرينات غير محلولة :

1) في دراسة لمعرفة تأثير طبيعة المقابلة على إجابات ربات المنازل لبند معين من مسح اجتماعي تم تدريب مجموعة من الأشخاص على ثلاثة أنواع من المقابلات : (ودية – رسمية – عدائية) و في المقابل فقد تم تقسيم الأسر إلى 12 مجموعة بحيث تتكون كل مجموعة من 3 أسر ذات ظروف متماثلة ، و تم توزيع الأشخاص المدربين (على الأنواع الثلاثة من المقابلات) عشوائياً على الأسر الثلاث في كل مجموعة .

و الجدول التالي يبيّن إجابات ربات المنازل وفقاً لطبيعة المقابلة ، وذلك تجاه البند المعين على شكل : نعم "1" و لا "0" :

الأسرة (القطاع i)	طبيعة المقابلة (المعالجة) j		
	A	B	C
I	1	0	0
II	1	1	0
III	1	1	0
IV	1	1	1
V	1	0	0
VI	0	0	0
VII	0	1	0
VIII	0	0	0
IX	1	1	1
X	1	1	0
XI	0	1	0
XII	1	1	0

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ ، اختبار اختلاف إجابات ربات المنازل للبند المعين بين الأنواع الثلاثة لطبيعة المقابلة .

(توجيه : لدينا $k = 3$; $n = 12$; $N = 18$) .

2) قامت لجنة من خمسة مختصين بمقابلة سبعة متقدمين لوظيفة معينة , حيث طلب من كل عضو باللجنة تقريراً عن ملاءمة كل متقدم للوظيفة . و الجدول التالي يبيّن نتيجة تقرير كل عضو باللجنة لكل متقدم , حيث يبيّن الرقم "1" ملاءمة المتقدم للوظيفة في حين يبيّن الرقم "0" عدم ملاءمة المتقدم للوظيفة .

المختص	المتقدم للوظيفة						
	1	2	3	4	5	6	7
I	1	0	1	0	1	1	1
II	0	1	0	1	1	0	1
III	1	0	1	1	0	1	1
IV	1	1	0	1	1	1	0
V	0	1	1	1	1	0	1

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$, اختبار عدم تماثل ملاءمة المتقدمين السبعة للوظيفة .

3) استخدمت أربعة اختبارات (A , B , C , D) للتأكد من وجود مرض معين حيث تم تطبيق كل من الاختبارات الأربعة على 10 حالات تشكو من أعراض المرض .

و الجدول التالي يمثل نتيجة كل اختبار , حيث يبيّن الرقم "1" وجود المرض في حين يبيّن الرقم "0" عدم وجود المرض .

الحالة	الاختبار			
	A	B	C	D
1	0	0	1	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	1	0	0	1
5	0	0	0	0
6	0	1	0	0
7	1	0	0	0
8	0	0	0	1
9	1	0	1	0
10	1	0	0	1

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ اختبار عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين الاختبارات الأربعة فيما يتعلق بوجود المرض .

Damascus University

الباب السابع

مقاييس الارتباط (Correlation Scales)

الفصل الواحد و العشرون : مُعامل ارتباط إسبيرمان للرتب

(Spearmans Coefficient Of Rank Correlation)

الفصل الثاني و العشرون : مُعامل ارتباط فاي

(Phi Correlation Coefficient)

الفصل الثالث و العشرون : مُعامل ارتباط كريمر

(Cramers Correlation Coefficient)

الفصل الرابع و العشرون : مُعامل ارتباط كندال

(Kendalls Crrelation Coefficient)

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الحادي و العشرون

مُعامل ارتباط إسبيرمان للرتب

21-1- مفهوم الارتباط

21-2- متطلبات الارتباط و شروطه

21-3- مُعامل الارتباط

21-4- أمثلة محلولة

21-5- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الحادي و العشرون

مُعامل ارتباط إسبيرمان للرتب

نتناول في هذا الباب طرق الاستدلال على العلاقة بين متغيرين أو أكثر لبيانات مقاسة بالمقياس الترتيبي ، و سبق أن ناقشنا في فصول سابقة العلاقة بين المتغيرات حين تكون البيانات مقاسة بالمقياس الاسمي . و بما أن الطريقة التي تصلح لبيانات مقاسة بمقياس ما تصلح أيضاً للبيانات المقاسة بمقياس أعلى , فإن الطرق المطروحة في هذا الباب تصلح أيضاً للبيانات المقاسة بمقياس فترة أو نسبة .

فإذا كانت البيانات لمتغيرين X و Y مقاسة بالمقياس الترتيبي على الأقل ، فيمكننا اختبار الفرض بأنهما مستقلين , أو قياس قوة العلاقة بينهما باستخدام مُعامل إسبيرمان لارتباط الرتب أو كندال تاو . و لندرس الآن الفصل الحادي و العشرين و هو مُعامل ارتباط إسبيرمان لارتباط الرتب .

21-1- مفهوم الارتباط : يستخدم مُعامل ارتباط إسبيرمان للرتب لقياس قوة العلاقة بين متغيرين لهما مقياس رتبي على الأقل , و لقد قدم هذا الاختبار (لقياس الارتباط) تشارلز إسبيرمان عام 1904 ميلادي . فإذا كان لدينا متغيران X و Y فإن مُعامل إسبيرمان يُستخدم لاختبار فرض العدم بأن المتغيرين مستقلان ، أو لقياس قوة العلاقة بينهما , كما يمكن أن يستخدم أيضاً لمعرفة ما إذا كان هناك اتجاه عام للمتغير Y عندما يمثل X الزمن .

21-2- متطلبات الارتباط و شروطه : يتطلب مُعامل ارتباط إسبيرمان الشروط التالية:

1) أن تكون البيانات زوجية من عينة عشوائية من n من الحالات أو المشاهدات يكون لكل حالة i : (i =1,2,.....,n) قياسان يمكن الرمز لهما بـــ (X_i , Y_i) .

2) أن يكون قياس البيانات رتبياً على الأقل .

3) أن يتم ترتيب كل من قياسات X_i و قياسات Y_i في اتجاه واحد .

4) أن يتم طرح رتب القياسين في اتجاه واحد , أي أن يتم طرح قياسات X_i من قياسات Y_i للحالات جميعها أو طرح قياسات Y_i من قياسات X_i للحالات جميعها.

21-3- مُعامل الارتباط : لنفرض أن لدينا العينتان التزاوجيتان :

$$(X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , \dots , (X_i, Y_i) , \dots , (X_n, Y_n)$$

حيث تمثل X_i و Y_i : (i =1,2,.....,n) قيم المتغير X و Y بالترتيب .

و هنا نميّز حالتين :

- **الحالة الأولى :** أن تكون القيم X_i و Y_i تمثل رتباً , أي أنه في الزوج (X_i, Y_i) تمثل X_i رتبة قيمة X في المشاهدة i , حينما ترتب قيم X في العينة تصاعدياً بينما تمثل Y_i رتبة قيمة Y في المشاهدة i حينما ترتب قيم Y في العينة تصاعدياً , في هذه الحالة يطبق مُعامل إسبيرمان على بيانات العينة مباشرة .

- **الحالة الثانية :** أن تكون القيم (X_i, Y_i) رتباً . في هذه الحالة يجب ترتيبها بمعنى أنه تستبدل X_i في الزوج المرتب (X_i, Y_i) برتبتها بين قيم X , و كذلك تستبدل Y_i برتبتها بين قيم Y , و عند الربطات (تساوي قيم) تعطى كل قيمة الوسط الحسابي لرتبها إذا لم تكن متساوية ثم يطبق مُعامل إسبيرمان على الرتب .

يَقيس مُعامل إسبيرمان درجة التوافق النسبي بين الرتب المتقابلة للمتغيرين في الأزواج المرتبة (X_i, Y_i) حيث i = 1,2,...,n , فإذا رمزنا لرتبة X_i بـــ $R(X_i)$ و رتبة Y_i بـــ $R(Y_i)$ ورمزنا للفرق بين الرتبتين بـــ D_i حيث :

$$D_i = R(X_i) - R(Y_i) \; ; i = 1,2, \dots , n$$

فإن مُعامل إسبيرمان للرتب يحسب كالتالي : $r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)}$

حيث r_s يرمز لمُعامل إسبيرمان للرتب .

و السبب في استخدام مجموع مربعات الفروق D_i بدلاً عن مجرد مجموعها هو أن هذا المجموع دائماً صفر فلا يعطى مقياساً , أما طرح المقدار :

$$\frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{\frac{n(n^2-1)}{3}}$$

فسببه أن المقدار المضروب بـــ 2 في الطرف الأيمن يمثل درجة عدم التوافق النسبي بين الرتب المتقابلة , حيث إنه يمكن إثبات أن المقام $\frac{n(n^2-1)}{3}$ هو أكبر قيمة ممكنة لـــ $\sum_{i=1}^{n} D_i^2$ و هي القيمة التي تكون في حالة عدم التوافق التام بمعنى أن أصغر قيمة لـــ X تقابلها أكبر قيمة لـــ Y و هكذا . و بالتالي فإن الطرح من 1 يقيس درجة التوافق النسبي أو الارتباط .

و بما أن عدم التوافق التام يعكس ارتباطاً تاماً لكن عكسياً , كان الضرب في 2 قبل الطرح من 1 حتى يقيس المُعامل الارتباط موجباً كان أو عكسياً .

و تتراوح قيمة مُعامل إسبيرمان بين 1− و 1+ .

و بالإضافة لاستخدام مُعامل إسبيرمان كمقياس لقوة العلاقة بين المتغيرين , فإنه يمكن استخدامه لاختبار فرض العدم بأن المتغيرين مستقلان ، أي اختبار فرضية العدم H_0 : (المتغيران مستقلان) مقابل الفرضية البديلة H_1 :

a) (توجد علاقة بين المتغيرين) : H_1 القيم الكبيرة لـــ X تميل لأن ترافق القيم الكبيرة لـــ Y أو أن القيم الكبيرة لـــ X تواكبها قيماً صغيرة لـــ Y , هذه حالة اختبار ذي طرفين .

b) أو (توجد علاقة طردية) : H_1 : أي أن القيم الكبيرة لـــ X تميل لأن تواكب القيم الكبيرة لـــ Y ، أي : اختبار ذو طرف أيمن .

C) أو (توجد علاقة عكسية) : H_1 : و يعني ذلك أن القيم الكبيرة لـــ X تميل لأن ترافق القيم الصغيرة لـــ Y . الاختبار ذو طرف أيسر .

في الحالة التي تمثل فيها X الزمن تفسر الفرضيات البديلة a , b , c بعدم وجود اتجاه عام , وجود اتجاه عام موجب , وجود اتجاه عام سالب على الترتيب .

و لاختبار H_0 مقابل أي من الفرضيات البديلة a أو b أو c , تستخدم r_s كإحصائية اختبار.

و إذا كانت $n \leq 30$ نوجد القيم الحرجة لـــ r_s من جدول القيم الحرجة التقريبية لمُعامل إسبيرمان r_s المرفق . و ذلك حسب قيمة n و$\propto$ و نوعية الاختبار (ذو طرف أو طرفان).

و يعطي الجدول القيم الحرجة بالطرف الأيمن r_s^* بحيث احتمال قيمة تزيد عليها يساوي أو يقل عن $\propto$. نظير هذه القيمة أي r_s^* – هي القيمة الحرجة بالطرف الأيسر التي احتمال قيمة تقل عنها يساوي أو يقل عن $\propto$. لهذا فالجدول يصلح للقيم الحرجة بالطرفين .

و عندما تكون n>30 يمكن الاستفادة من الحقيقة التي تقول إن : $Z = r_s.\sqrt{n-1}$ تتبع تحت صحة H_0 التوزيع الطبيعي المعياري . لهذا نقارن القيمة المشاهدة لـــ Z بالقيمة (أو القيمتين) الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z) .

و بالتالي يمكننا أن نقول : إن القرار يصبح كما يلي :

إذا كانت قيمة مُعامل الارتباط المحسوبة r_s أكبر من القيمة النظرية r_s^* فنرفض فرضية العدم H_0 و تقبل الفرضية البديلة ، و يستدل من ذلك دلالة مُعامل الارتباط (وجود ارتباط بين المتغيرين) . أما إذا كانت $r_s \leq r_s^*$ فإنه تقبل H_0 و ترفض H_1 مما يستدل من ذلك بأن الارتباط غير معنوي ، أي : عدم وجود ارتباط بين المتغيرين .

و من أجل حجم العينة الكبير n>30 , و بعد تحديد مناطق رفض ، و قبول H_0 اعتماداً على مستوى المعنوية $\propto$ و نوع الاختبار ، و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار .

نقارن القيمة المحسوبة لإحصائية الاختبار Z مع هذه المناطق , و تقبل H_0 إذا كانت Z في منطقة القبول ، و ترفض H_0 إذا كانت Z في منطقة الرفض .

21-4- أمثلة محلولة :

مثال (21-1) : لدراسة العلاقة بين درجات الموظف في اختبار تأهيلي (X) و تقويم المشرف على أدائه (Y) توفرت البيانات التالية لعينة تزاوجية حجمها 10 موظفين :

X	13	41	72	24	57	100	84	36	92	57
Y	31	19	81	43	50	74	63	24	100	96

و المطلوب :

1) احسب مُعامل إسبيرمان لارتباط الرتب .

2) عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$, اختبار الفرضية التالية : هناك علاقة طردية بين الدرجة في الاختبار التأهيلي ، و تقويم المشرف .

الحل :

1- الجدول التالي يبين رتب X ، و رتب Y ، و الفرق بين الرتب و مربع الفرق بين الرتب:

X_i	Y_i	R(X_i)	R(Y_i)	D_i	D_i^2
13	31	1	3	-2	4
41	19	4	1	3	9
72	81	7	8	-1	1
24	43	2	4	-2	4
57	50	5.5	5	0.5	0.25
100	74	10	7	3	9
84	63	8	6	2	4

36	24	3	2	1	1
92	100	9	10	-1	1
57	96	5.5	9	-3.5	12.25
المجموع					**45.5**

حيث إن فرضية العدم : [المتغيران مستقلان] :H_0

و الفرضية البديلة : [توجد علاقة طردية] :H_1

و يكون : $D_i = \mathrm{R}(X_i) - \mathrm{R}(Y_i)$; i=1,2,...,n

و مُعامل إسبيرمان للرتب يكون :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{(6)(45.5)}{(10)(100-1)} = 0.724$$

2- باستخدام جدول إسبيرمان من أجل n = 10 و $\alpha = 0.05$ و الاختبار من الطرف الأيمن نجد القيمة النظرية لإحصائية الاختبار : r_s^* =0.5515 و كون r_s^* أقل من r_s (القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار) فإننا نرفض H_0 و نقبل H_1 أي أن المتغيرين مرتبطان طردياً .

مثال (21-2) : لدراسة العلاقة بين الدخل ، و الإنفاق في شهر معين ، و ذلك لعدد من الحالات التي تم اختيارها عشوائياً من منطقة معين :

الحالة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
الدخل X	1420	1400	1320	1330	1365	1415	1445	1400	1405	1315	1310	1360	1440	1335
الإنفاق Y	910	740	830	780	850	875	900	890	880	820	840	835	870	860

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط إسبيرمان بين المتغيرين ، و دلالته الإحصائية عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$.

الحل :

يوضح الجدول التالي مربع الفروق ما بين رتب X (الدخل) و Y (الانفاق) :

i	X_i الواردة	Y_i الواردة	X_i تصاعدياً	رتب X_i	Y_i تصاعدياً	رتب Y_i	المقابلة R(Y_i) لـ R(X_i)		D_i	D_i^2
1	1420	910	1310	1	740	1	12	14	-2	4
2	1400	740	1315	2	780	2	8.5	1	7.5	56.25
3	1320	830	1320	3	820	3	3	4	-1	1
4	1330	780	1330	4	830	4	4	2	2	4
5	1365	850	1335	5	835	5	7	7	0	0
6	1415	875	1360	6	840	6	11	10	1	1
7	1445	900	1365	7	850	7	14	13	1	1
8	1400	890	1400	8.5	860	8	8.5	12	-3.5	12.25
9	1405	880	1400	8.5	870	9	10	11	-1	1
10	1315	820	1405	10	875	10	2	3	-1	1
11	1310	840	1415	11	880	11	1	6	-5	25
12	1360	835	1420	12	890	12	6	5	1	1
13	1440	870	1440	13	900	13	13	9	4	16
14	1335	860	1445	14	910	14	5	8	-3	9
	المجموع									132.5

و تكون قيمة مُعامل إسبيرمان لارتباط الرتب :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{(6)(132.5)}{(14)((14)^2-1)} = 0.71$$

و هذا يعني وجود علاقة مباشرة (موجبة) بين الدخل X و الإنفاق Y .

و بحساب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من جدول إسبيرمان , حيث n = 14 و فإن و $\alpha = 0.05$ فإن $r_s^* = 0.4593$ وهو أصغر من $r_s = 0.71$: $(r_s > r_s^*)$

عندئذ نرفض H_0 ، و نقبل H_1 أي وجود علاقة ارتباطية ذات دلالة إحصائية بين الدخل X و الإنفاق Y في الشهر ذاته و المنطقة المعينين .

مثال (21-3) : في دراسة للكشف عن العلاقة بين المستوى التعليمي ، و الوضع الاقتصادي للشخص تم تقسيم كل من المتغيرين إلى خمس فئات ، يتراوح مداها من 1 (المستوى الأدنى) إلى 5 (المستوى الأعلى) . أوجد مُعامل الارتباط بين المتغيرين ، و دلالته الإحصائية عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$, إذا كانت البيانات كالتالي :

المستوى التعليمي X	1	2	3	5	1	2	4	2	3	4	4	3	4	1	5	2
المستوى الاقتصادي Y	2	4	4	4	1	5	3	3	1	2	2	5	4	4	3	3

المستوى التعليمي X	4	1	2	5	5	2	3	5	1	3	3	2	3
المستوى الاقتصادي Y	5	1	2	5	2	2	4	2	4	4	3	5	4

الحل :

يوضح الجدول التالي رتب X ، و رتب Y ، المقابلة ، والفروق D_i ومربع هذه الفروق D_i^2 :

i	X_i	X_i تصاعدياً	$R(X_i)$	Y_i	Y_i تصاعدياً	$R(Y_i)$	المقابلة $R(Y_i)$ لـ $R(X_i)$		D_i	D_i^2
1	1	1	3	2	1	2	3	7	-4	16
2	2	1	3	4	1	2	9	20	-11	121
3	3	1	3	4	1	2	16	20	-4	16
4	5	1	3	4	2	7	27	20	7	49
5	1	1	3	1	2	7	3	2	1	1
6	2	2	9	5	2	7	9	27	-18	324
7	4	2	9	3	2	7	22	13	9	81
8	2	2	9	3	2	7	9	13	-4	16
9	3	2	9	1	2	7	16	2	14	196
10	4	2	9	2	2	7	22	7	15	225
11	4	2	9	2	3	13	22	7	15	225
12	3	2	9	5	3	13	16	27	-11	121
13	4	3	16	4	3	13	22	20	2	4
14	1	3	16	4	3	13	3	20	-17	289
15	5	3	16	3	3	13	27	13	14	196
16	2	3	16	3	4	20	9	13	-4	16
17	4	3	16	5	4	20	22	27	-5	25
18	1	3	16	1	4	20	3	2	1	1
19	2	3	16	2	4	20	9	7	2	4
20	5	4	22	5	4	20	27	27	0	0
21	5	4	22	2	4	20	27	7	20	400
22	2	4	22	2	4	20	9	7	2	4
23	3	4	22	4	4	20	16	20	-4	16
24	5	4	22	2	4	20	27	7	20	400
25	1	5	27	4	5	27	3	20	-17	289
26	3	5	27	4	5	27	16	20	-4	16
27	3	5	27	3	5	27	16	13	4	16
28	2	5	27	5	5	27	9	27	-18	324
29	3	5	27	4	5	27	16	20	-4	16

و يلاحظ أن : $\sum_{i=1}^{n} D_i^2 = 3407$ و يكون مُعامل ارتباط إسبيرمان للرتب من الشكل :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{(6)(3407)}{(29)((29)^2-1)} = 0.16$$

و هذا يعني وجود علاقة إيجابية ليست قوية بين المستوى التعليمي X و المستوى الاقتصادي Y .

و من أجل اختبار (X,Y مستقلان) :H_0 مقابل (X.Y مرتبطان) :H_1

نحسب إحصائية الاختبار لـــ Z: $Z = r_s.\sqrt{n-1} = (0.16).\sqrt{29-1} = 0.847$

و نحدد من أجل مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ و الاختبار من الطرفين ، و التوزيع لإحصائية الاختبار هو توزيع طبيعي معياري مناطق رفض H_0 ، و قبول H_0 حيث منطقة الرفض تحدد بـــ w حيث :

$$w = \{(X_1, \dots, X_n) : Z \in]-\infty, Z_{\frac{\propto}{2}}[\vee]Z_{1-\frac{\propto}{2}}, +\infty[\}$$

$$w = \{(X_1, \dots, X_n) : Z \in]-\infty, Z_{0.005}[\vee]Z_{0.995}, +\infty[\}$$

و من جدول (Z) نجد :

$$w = \{(X_1, \dots, X_n) : Z \in]-\infty, -2.58[\vee]2.58, +\infty[\}$$

و منطقة قبول H_0 تكون :

$$S - w = \{(X_1, \dots, X_n) : Z \in [-2.58, 2.58]\}$$

(حيث S فراغ العيّنات)

و بمقارنة Z = 0.847 مع w و S – w نجد أن $Z \in S - w$ أي تقع في منطقة القبول لـــ H_0 و بالتالي ؛ فإن المستوى التعليمي X مستقل عن المستوى الاقتصادي Y . و إن أية علاقة بينهما ليست أكثر من مجرد صدفة .

21-5- تمرينات غير محلولة :

1) تمثل البيانات التالية مجموع ساعات الغياب (X) من مقرر دراسي ، و الدرجة (Y) التي تم الحصول عليها ، و ذلك بعد نهاية فترة دراسية معينة و لعدد من الطلاب تم اختيارهم عشوائياً:

X	8	5	4	6	10	4	2	2	6	4	8	10	2	4	2	6	10	8
Y	67	74	81	68	61	79	83	87	69	80	66	60	90	67	75	82	64	71

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط إسبيرمان للرتب ، و ادرس الدلالة الإحصائية بين X و Y عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$.

2) في دراسة إحصائية للعلاقة بين نسبة نجاح الطالب في الشهادة الثانوية ، و معدله التراكمي في نهاية السنة الدراسية الأولى في إحدى الجامعات تم الحصول على البيانات التالية ، و ذلك لعينة عشوائية من 21 طالباً .

و المطلوب : أوجد مُعامل إسبيرمان لارتباط الرتب ما بين نسبة نجاح الطالب في الشهادة الثانوية (X) ، و معدله (Y) التراكمي في نهاية السنة الأولى بالجامعة , ثم أوجد الدلالة الاحصائية للارتباط ما بين X و Y عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

X	85.6	88.3	90.7	86.4	89.1	87.0	92.2	91.5	85.0	86.2	93.1
Y	3.93	3.29	4.12	3.91	4.05	3.56	3.78	4.03	3.77	3.72	4.13

	86.8	85.4	92.6	87.7	88.8	91.6	85.6	89.4	87.1	90.3
	3.95	3.86	4.10	3.69	3.94	3.99	4.01	3.95	3.79	4.16

3) فيما يلي الزمن (بالدقيقة) الذي استغرقه كل من 12 ميكانيكياً لتجميع أجزاء آلة معينة في فترة الصباح X و في فترة المساء Y :

X	10.8	16.6	11.1	10.3	12.0	15.1	13.7	18.5	17.3	14.2	14.8	15.3
Y	15.1	16.8	10.9	14.2	13.8	21.5	13.2	21.1	16.4	19.3	17.4	19.0

و المطلوب : أوجد مُعامل إسبيرمان لارتباط الرتب ، و اختبر عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$ استقلال X عن Y .

Damascus University

الفصل الثاني و العشرون

مُعامل ارتباط فاي

22-1- مفهوم المُعامل

22-2- متطلبات الارتباط و شروطه

22-3- مُعامل الارتباط

22-4- أمثلة محلولة

22-5- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثاني و العشرون

مُعامل ارتباط فاي

22-1- مفهوم المُعامل : يستخدم مُعامل ارتباط فاي لقياس درجة العلاقة بين متغيرين اسميين ثنائيين , حيث يكون المتغيران منفصلين بصورة ثنائية مثل : نعم و لا , خطأ و صواب , نجاح و رسوب , تالف و صالح للاستخدام , ... و بالتالي يتميّز هذا المُعامل بأنه يعطى في حالة جداول توافق 2 × 2 , و ليس ضرورياً أن تكون مستويات الخاصتين ترتبية .

22-2- متطلبات الارتباط و شروطه :

1) أن تكون البيانات زوجية من عينة عشوائية من n من الحالات أو المفردات بحيث يكون لكل حالة i (i = 1,2,...,n) قياسان يمكن الرمز لهما بـ X_i و Y_i .

2) أن يكون قياس البيانات اسمياً ثنائياً , حيث يمثل أحد الوضعين نجاحاً ، و الآخر فشلاً.

22-3- مُعامل الارتباط : إذا رمزنا بـ "1" للنجاح و بـ "0" للفشل لكل من المتغيرين X وY قيد الدراسة ، فإنه يمكن وضع تصنيف القياسات X_i و Y_i بشكل جدول توافق ثنائي مشترك كما يلي :

Y / X	1	0	المجموع السطري $n_{i.}$
1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
0	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
المجموع العمودي $n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

حيث: $n = n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22} = n_{1.} + n_{2.} = n_{.1} + n_{.2}$

و يعطي مُعامل ارتباط فاي ($\emptyset$) بالعلاقة التالية : $\emptyset = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{\sqrt{n_{1.}.n_{2.}.n_{.1}.n_{.2}}}$

و تتراوح قيمة الارتباط بين 0 ,1- في حالة العلاقة العكسية (غير المباشرة أو السالبة) و بين 0 , 1 في حالة العلاقة الطردية (المباشرة أو الإيجابية) . ففي حالة العلاقة المباشرة الكاملة يكون $\emptyset = 1$ و العلاقة غير المباشرة الكاملة يكون $\emptyset = -1$.

و بعد حساب مُعامل ارتباط فاي ، فإنه يمكن عمل الدلالة الاحصائية له ، و اختبار $H_0 : \emptyset = 0$ مقابل $H_1 : \emptyset \neq 0$ أي وجود علاقة أو ارتباط بين المتغيرين .

و الاختبار الإحصائي لدلالة الارتباط هو χ^2 حيث : $\chi^2 = n\,\emptyset^2$

و نقارن القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار χ^2 مع القيمة النظرية لإحصائية الاختبار من جدول كاي- تربيع عند مستوى المعنوية $\propto$ و درجة الحرية $\gamma = (2-1)(2-1) = 1$.

و نحسب $\chi^2_{1-\propto}(1)$ و إذا كانت $\chi^2 > \chi^2_{1-\propto}(1)$ فهذا يدل على رفض H_0 و قبول H_1 ، و منه يستدل على وجود دلالة إحصائية بمعنوية العلاقة بين X و Y .

و إذا كانت $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\propto}(1)$ عندئذ نقبل H_0 و نرفض H_1 أي لا علاقة تذكر بين X و Y .

22-4- أمثلة محلولة :

مثال (22-1) : في دراسة لوجود علاقة بين الأرق و عدم الرغبة بالنعاس تم الحصول على التكرارات في جدول توافق مشترك لعينة من 50 شخصاً كالتالي :

عدم الرغبة بالنعاس / الأرق	نعم	لا	المجموع السطري $n_{i.}$
نعم	17	10	27
لا	8	15	23
المجموع العمودي $n_{.j}$	25	25	n = 50

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط فاي للعلاقة بين المتغيرين ، و دلالته الإحصائية عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$.

الحل :

لدينا $n = 50 ; n_{11} = 17 \ ; \ n_{12} = 10 \ ; \ n_{21} = 8 \ ; \ n_{22} = 15$

$n_{1.} = 27 ; \ n_{2.} = 23 \ ; \ n_{.1} = 25 \ ; \ n_{.2} = 25$

و بالتالي يكون مُعامل ارتباط فاي :

$$\emptyset = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{\sqrt{n_{1.}.n_{2.}.n_{.1}.n_{.2}}} = \frac{(17)(15)-(10)(8)}{\sqrt{(27)(23)(25)(25)}} = 0.281$$

و كون $\emptyset = 0.281$ فهذا يدل على وجود علاقة مباشرة بين الأرق ، و عدم الرغبة بالنعاس فالذين يشكون من الأرق لا يبدون رغبة بالنعاس ، و هم أكثر من الذين لا يشكون من الأرق ، و لديهم رغبة بالنعاس .

و لاختبار دلالة مُعامل فاي للارتباط , فإن إحصائية الاختبار تكون :

$$\chi^2 = n\,\emptyset^2 = (50)(0.28)^2 = 3.95$$

و القيمة النظرية لإحصائية الاختبار نجدها من جدول كاي – تربيع عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$ و $\gamma = 1$:

$\chi^2_{1-\alpha}(\gamma) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.84$ و بالمقارنة مع $\chi^2 = 3.95$ سنجد أن

$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(\gamma)$ أي نرفض H_0 بأن $\emptyset = 0$ ، و نقبل H_1 بأن $\emptyset \neq 0$ ؛ مما يستدل من ذلك بأن العلاقة ما بين الأرق و عدم الرغبة بالنعاس ذات دلالة إحصائية معنوية ، فالعلاقة بينهما جوهرية ، و حقيقية .

مثال (22–2) : تم تدريس 80 طالباً بطريقتين مختلفتين لمادة اللغة العربية ، و لوحظ نجاح معظمهم ، و رسوب البعض الآخر . و الجدول التالي يبيّن توزيع الذين نجحوا ، و الذين رسبوا ، و ذلك بالنسبة للطريقتين (I,II) :

النتيجة / الطريقة	نجاح	رسوب	المجموع السطري $n_{i.}$
I	14	19	33
II	30	17	47
المجموع العمودي $n_{.j}$	44	36	n = 80

المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط فاي بين طريقة التدريس ، و النجاح بالمادة ، و ادرس الدلالة الإحصائية لهذا الارتباط عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$.

الحل :

لدينا من جدول التوافق ما يلي :

$$n = 80 ; n_{11} = 14 ; n_{12} = 19 ; n_{21} = 30 ; n_{22} = 17$$

$$n_{1.} = 33 ; \ n_{2.} = 47 ; n_{.1} = 44 ; n_{.2} = 36$$

و تكون بالتالي قيمة مُعامل فاي للارتباط بين المتغيرين :

$$\emptyset = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{\sqrt{n_{1.}.n_{2.}.n_{.1}.n_{.2}}} = \frac{(14)(17)-(19)(30)}{\sqrt{(33)(47)(44)(36)}} = -0.212$$

و بالتالي فالارتباط بين المتغيرين عكسي أي غير مباشر ، و هذا يعني أن الرسوب بالطريقة (I) أكثر من الرسوب بالطريقة الثانية (II) و كذلك النجاح بالطريقة (II) أكثر من النجاح بالطريقة (I) .

و لاختبار الدلالة الإحصائية لمُعامل الارتباط $\emptyset$ ما بين طريقة التدريس ، و النجاح بالمادة , نحسب إحصائية للاختبار المشاهدة :

$$\chi^2 = n\,\emptyset^2 = (8)(-0.212)^2 = 3.60$$

ثم نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار: $\chi^2_{1-\alpha}(\gamma) = \chi^2_{0.99}(\gamma = 1) = 6.63$

و بالمقارنة مع $\chi^2 = 3.60$ نجد أن $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(\gamma)$ أي نقبل H_0 أي $\emptyset = 0$ و نرفض H_1 أي $\emptyset \neq 0$, و يستدل من هذا أن العلاقة ما بين طريقة التدريس ، و النجاح بالمادة ليست ذات دلالة إحصائية ؛ أي لا توجد علاقة ملموسة ما بين طريقة التدريس ، و النجاح بالمادة .

22-5- تمرينات غير محلولة :

1) في دراسة لمعرفة وجود علاقة بين التدخين ، و سرطان الرئة تم الحصول على التكرارات في جدول التوافق المشترك التالي ، و ذلك لعينة من 250 شخصاً .

سرطان الرئة / التدخين	نعم	لا	المجموع $n_{i.}$
نعم	112	28	140
لا	16	94	110
المجموع $n_{.j}$	128	122	250

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط فاي للعلاقة ما بين التدخين ، و الإصابة بمرض سرطان الرئة ، و ادرس معنوية الارتباط عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ و $\propto = 0.05$.

2) تم فحص عيّنة عشوائية من 100 شخص لمعرفة وجود علاقة بين مرض السكري ، و ارتفاع الضغط الشرياني ، و كانت نتائج الفحص كما في جدول التوافق المشترك التالي :

الضغط الشرياني / السكري	نعم	لا	المجموع $n_{i.}$
نعم	30	10	40
لا	20	40	60
المجموع $n_{.j}$	50	50	100

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط فاي للعلاقة ما بين مرض السكري ، و ارتفاع ضغط الدم و ادرس معنوية الارتباط عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

3) في دراسة حول وجود علاقة بين الرغبة في شرب المشروبات الغازية ، و جنس الشخص (ذكر أو أنثى) ، تم دراسة عيّنة عشوائية من 200 شخص في منطقة معينة ، فكان جدول التوافق المشترك لهذه الدراسة التالي :

الجنس / الرغبة في شرب المشروبات الغازية	ذكر	أنثى	$n_{i.}$
نعم	44	29	73
لا	56	71	127
$n_{.j}$	100	100	200

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط فاي بين الرغبة في شرب المشروبات الغازية ، و جنس الشخص ، و ادرس معنوية الارتباط عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$.

4) يوضح الجدول التالي تصنيف 100 تلميذ حسب الوقت الذي يخصصونه لقراءة الكتب و الذي يخصصونه لمشاهدة التلفزيون و فق ما يلي :

الكتب / التلفزيون	قصيرة	طويلة	$n_{i.}$
نعم	7	33	40
لا	13	47	60
$n_{.j}$	20	80	100

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط فاي بين مدة قراءة الكتب ، و مدة مشاهدة التلفزيون ، و ادرس معنوية الارتباط عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$.

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث و العشرون

معامل ارتباط كريمر

23-1- مفهوم المُعامل

23-2- متطلبات الارتباط و شروطه

23-3- مُعامل الارتباط

23-4- أمثلة محلولة

23-5- تمرينات غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث و العشرون

معامل ارتباط كريمر

23-1- مفهوم المعامل : يستخدم مُعامل ارتباط كريمر لقياس درجة العلاقة بين متغيرين اسميين أو رتبيين لكل منها عدد من الفئات أو الأوضاع . و بهذا يكون مُعامل ارتباط كريمر أعم من مُعامل ارتباط فاي من حيث إنه يصلح لأكثر من وضعين للمتغيرين المدروسين . و من عيوب هذا المُعامل أنه يكبر عندما يزداد عدد مستويات المتغيرين ، و لكنه لا يتأثر بعدد المشاهدات الكلي n .

23-2- متطلبات الارتباط و شروطه :

1) أن تكون البيانات زوجية من عيّنة عشوائية من n من الحالات أو المفردات بحيث يكون لكل حالة i : (i =1,2,.....,n) قياسان يمكن الرمز لها بـــ X_i و Y_i .

2) أن يكون قياس البيانات اسمياً أو رتبياً .

23-3- مُعامل الارتباط : حسب فئات المتغيرين قيد الدراسة , يتم تصنيف البيانات في جدول توافق مشترك (r × c) حيث r يمثل عدد أوضاع (حالات – فئات) المتغير الأول ، و c يمثل عدد أوضاع (حالات – فئات) المتغير الثاني كما يلي :

r x c		المتغير الثاني							المجموع
		1	2	...	j	...	...	C	السطري
المتغير الأول	1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	...	n_{1c}	$n_{1.}$
	2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	...	n_{2c}	$n_{2.}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	...	⋮	⋮
	i	n_{i1}	n_{i2}	...		...	...	n_{ic}	$n_{i.}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	...	⋮	⋮
	r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	...	n_{rc}	$n_{r.}$
المجموع العمودي		$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	...	$n_{.C}$	n

حيث n_{ij} يمثل عدد الحالات التي تنتمي للفئة i من المتغير الأول ، و للفئة j من المتغير الثاني حيث $i = 1,2,\ldots,r$ ، $j = 1,2,\ldots,c$ ، $n_{i.}$ يمثل عدد حالات الفئة i من المتغير الأول حيث $i = 1,2,\ldots,r$ و $n_{.j}$ يمثل عدد حالات الفئة j من المتغير الثاني حيث :

$j = 1,2,\ldots,c$ و n يمثل العدد الكلي لحالات العينة المدروسة ، و يكون :

$$n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{.j}$$

و يكون مُعامل ارتباط كريمر من الشكل :

$$r_c = \sqrt{\frac{P-1}{m-1}} \; ; P = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{{n_{ij}}^2}{(n_{i.})(n_{.j})} \; ; m = \min(r, C)$$

و من أجل دراسة الدلالة الإحصائية لمُعامل ارتباط كريمر ، فإن فرضية العدم H_0 و التي تمثل انعدام مُعامل الارتباط في المجتمع أي : $H_0 : R_c = 0$

(حيث R_c يمثل مُعامل ارتباط كريمر بين المتغيرين في المجتمع). و يمثل الفرض البديل $H_1 : R_c \neq 0$ (اختبار من الطرفين) .

و الاختبار الإحصائي لدلالة مُعامل ارتباط كريمر هو : $\chi^2 = \frac{nr_c{}^2}{1-r_c{}^2}$

و القيمة النظرية لإحصائية الاختبار تحسب من جدول كاي – تربيع عند مستوى المعنوية $\propto$ و درجة الحرية $\gamma = (r-1)(c-1)$ أي ${\chi^2}_{1-\propto}(\gamma)$.

و يكون القرار كالتالي :

إذا كان لدينا ${\chi^2}_{1-\propto}(\gamma) < \chi^2$ فإنه يرفض H_0 و يقبل H_1 و هذا يدل على وجود علاقة قوية بين المتغيرين , أما إذا كان ${\chi^2}_{1-\propto}(\gamma) \leq \chi^2$ فإنه يقبل H_0 و يرفض H_1 ، و هذا يدل على عدم و جود دلالة إحصائية بقوة العلاقة بين المتغيرين .

23-4- أمثلة محلولة :

مثال (23-1) : إذا كانت التقديرات التي حصل عليها طلاب عينة عشوائية من 130 طالباً في مقررين مختلفين كما يلي :

		المقرر الثاني				المجموع
		مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز	
المقرر الأول	مقبول	6	8	7	6	27
	جيد	5	10	17	4	36
	جيد جداً	5	18	14	6	43
	ممتاز	4	9	6	5	24
المجموع		20	45	44	21	130

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, أوجد درجة مُعامل ارتباط كريمر بين المقررين ، و ادرس الدلالة الإحصائية لهذا الارتباط .

الحل :

لنحسب أولاً مُعامل ارتباط كريمر :

$$r_c = \sqrt{\frac{P-1}{m-1}} \; ; \; m = \min(r, C) = \min(4\,, 4) = 4$$

$$P = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{{n_{ij}}^2}{(n_i)(n_j)} = \frac{(6)^2}{(27)(20)} + \frac{(8)^2}{(27)(45)} + \cdots + \frac{(5)^2}{(24)(21)}$$

$$= 1.056$$

ومنه : $r_c = \sqrt{\frac{P-1}{m-1}} = \sqrt{\frac{1.056-1}{4-1}} = 0.137$

و الناتج يعني وجود علاقة مباشرة بين المتغيرين , أي الطالب الذي يحصل على تقدير عال في أحد المقررين يحصل على تقدير عال كذلك في المقرر الآخر , و الذي يحصل على تقدير منخفض في أحد المقررين يحصل على تقدير منخفض أيضاً في المقرر الآخر .

و لدراسة الدلالة الإحصائية لمُعامل ارتباط كريمر , نحسب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار . وذلك من أجل اختبار $H_0 : R_c = 0$ مقابل $H_1 : R_c \neq 0$ عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$:

$$\chi^2 = \frac{n{r_c}^2}{1-{r_c}^2} = \frac{(130)(0.137)^2}{1-(0.137)^2} = 2.487$$

و بالعودة لجدول كاي – تربيع , عند مستوى المعنوية $\propto$, و الاختبار من الطرفين و درجة الحرية $\gamma = (r-1)(c-1) = (4-1)(4-1) = 9$, نحسب القيمة النظرية لإحصائية الاختبار $\chi^2{}_{1-\propto}(\gamma) = \chi^2{}_{1-0.05}(9) = \chi^2{}_{0.95}(9) = 16.92$

و بالمقارنة مع القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار : $\chi^2 = 2.487$

نجد أن : $\chi^2 < \chi^2{}_{1-\propto}(\gamma)$ و بالتالي نقبل فرض العدم H_0 ، و نرفض الفرض البديل H_1

و يستدل من هذا أن درجة الارتباط بين المقررين ليست حقيقية (جوهرية) ؛ لا بل عشوائية أي لا توجد علاقة تذكر بين تقديرات الطلاب في المقررين .

مثال (23-2) : في دراسة إحصائية حول الرأي بقضية معينة , تم سؤال عينة عشوائية من 125 شخصاً بمستويات مختلفة من التعليم (جامعي – معهد – ثانوي) و تم الحصول على آراء مختلفة حول القضية (مؤيد جداً , مؤيد , غير مؤيد , بدون رأي)

و كان لدينا جدول التوافق التالي :

المؤهل العلمي		الرأي حول القضية المعينة				المجموع
		مؤيد جداً	مؤيد	غير مؤيد	من دون رأي	
	جامعي	32	16	5	3	56
	معهد	11	15	7	4	37
	ثانوي	7	10	9	6	32
المجموع		50	41	21	13	125

و المطلوب : عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$, أوجد مُعامل ارتباط كريمر بين مستوى التعليم ، و الرأي ، و ادرس معنوية الارتباط الناتج .

الحل :

نحسب أولاً :

$$P = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{{n_{ij}}^2}{(n_{i.})(n_{.j})} = \frac{(32)^2}{(56)(50)} + \frac{(16)^2}{(56)(41)} + \cdots + \frac{(6)^2}{(32)(13)}$$

$$\Rightarrow P = 1.135$$

و كون : r=3 ; c=4 فإن $m = \min(r, C) = \min(3, 4) = 3$

و بالتالي يكون مُعامل ارتباط كريمر من الشكل :

$$r_c = \sqrt{\frac{P-1}{m-1}} = \sqrt{\frac{1.135-1}{3-1}} = 0.26$$

و هذا يدل على وجود علاقة مباشرة (إيجابية) بين المستوى التعليمي ، و الرأي بالقضية المطروحة .

و لاختبار الدلالة الإحصائية ، و المعنوية لمُعامل ارتباط كريمر , نأخذ فرضية العدم $H_0 : R_c = 0$ مقابل $H_1 : R_c \neq 0$ عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$:

و تكون القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار من الشكل :

$$\chi^2 = \frac{n{r_c}^2}{1-{r_c}^2} = \frac{(125)(0.26)^2}{1-(0.26)^2} = 9.063$$

و تكون القيمة النظرية لإحصائية الاختبار :

$$\chi^2{}_{1-\propto}(\gamma) = \chi^2{}_{1-0.01}\Big(\gamma = (r-1)(c-1)\Big) =$$

$$\chi^2{}_{0.99}\Big(\gamma = (3-1)(4-1)\Big) = \chi^2{}_{0.99}(6) = 16.81$$

و بالمقارنة مع $\chi^2 = 9.063$ نجد أن $\chi^2 < \chi^2{}_{1-\propto}(\gamma)$ و بالتالي نقبل H_0 و نرفض H_1

و يدل هذا على عدم وجود علاقة جوهرية بين مستوى التعليم ، و الرأي في القضية المطروحة.

23-5- تمرينات غير محلولة :

1) تم تصنيف أداء عيّنة عشوائية من 145 طالباً و طالبة يدرسون مقرراً معيناً في كلية الصيدلة حسب أدائهم في الاختبار العلمي ، و الاختبار النظري للمقرر كما في الجدول المشترك التالي :

الأداء بالنظري / الأداء بالعملي	جيد و ما فوق	وسط	ضعيف	المجموع
جيد و ما فوق	12	16	14	42
وسط	15	23	18	56
ضعيف	17	20	10	47
المجموع	44	59	42	145

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط كريمر بين مستوى الأداء بعملي المقرر ، و الأداء بنظري المقرر , ثم عند مستوى المعنوية $\propto = 0.05$, ادرس معنوية الارتباط الناتج .

2) في دراسة حول العلاقة بين لون الزهرة ، و رائحتها , تم أخذ عينة من 150 زهرة في منطقة معينة ، و كان بالتالي جدول التوافق المشترك التالي :

رائحة الزهرة / لون الزهرة	قوية	عادية	لا يوجد رائحة	المجموع
بنفسجي	14	9	8	31
أبيض	25	12	10	47
أحمر	15	16	7	38
أصفر	11	17	6	34
المجموع	65	54	31	150

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط كريمر ما بين لون الزهرة ، و رائحتها , ثم عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$, ادرس معنوية هذا الارتباط .

Damascus University

الفصل الرابع و العشرون

معامل ارتباط كندال

24-1- مفهوم معامل الارتباط

24-2- متطلبات ارتباط كندال و شروطه

24-3- معامل الارتباط

24-4- أمثلة محلولة

24-5- تمرينات غير محلولة

Damascus University


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الرابع و العشرون

معامل ارتباط كندال

24-1- مفهوم معامل الارتباط : هذا المُعامل يشبه مُعامل إسبيرمان حيث يمكن تطبيقه على البيانات التي تكون على شكل رتب أو تحول إلى رتب , و تتميز معاملات كندال أو كندال تاو بأن توزيعها يتجه للتوزيع الطبيعي بشكل أسرع حينما يزداد حجم العينة ؛ مما يجعلها الخيار الأفضل في حالة العينات الكبيرة .

و يستخدم مُعامل كندال تاو مقياساً لقوة العلاقة أو الارتباط بين متغيرين ، و لاختبار استقلال متغيرين , و لاختبار وجود اتجاه عام عندما يمثل أحد المتغيرين الزمن . و هذا المُعامل يصلح من أجل متغيرات رتبية أو مجالية (على مدى معين) أو نسبية .

24-2- متطلبات ارتباط كندال و شروطه :

1) أن تكون البيانات (المشاهدات) زوجية من عينة عشوائية من الحجم n من الحالات (المشاهدات) بحيث يكون لكل حالة i (i = 1,2,.....,n) قياسان يمكن أن نرمز لها بـ X_i و Y_i .

2) أن يكون قياس البيانات رتبياً على الأقل .

24-3- مُعامل الارتباط :

إذا كان X يمثل المتغير الدال على قياسات المتغير الأول ، و Y يمثل المتغير الدال على قياسات المتغير الثاني ، و كانت (X_i , Y_i) , (X_j , Y_j) تمثل زوج قياس الحالتين i و j على الترتيب للمتغيرين , فإنه يقال : إن هناك حالة توافق (اتفاق) إذا كانت X_j أكبر من X_i و Y_j أكبر من Y_i أو كانت X_j أقل من X_i و Y_j أقل من Y_i . و يقال : إن هناك حالة عدم توافق

(عدم اتفاق) بين زوج قياس الحالتين إذا كانت X_j أكبر من X_i و Y_j أقل من Y_i أو كانت X_j أقل من X_i و Y_j أكبر من Y_i . أما إذا كان زوج قياس الحالتين i و j متساوياً بالنسبة لأحد المتغيرين أو لكليهما ، فعندئذ يقال : إن هناك حالة تساو Tie.

1) **معامل ارتباط تو- A** : و هو صورة بسيطة للارتباط ، وضعه كندال ، و يرمز له بـ τ_a و هو يعطى بالعلاقة : $\tau_a = \frac{P-Q}{n(n-1)/2}$

حيث P تمثل عدد حالات الاتفاق بين زوج قياس كل حالتين بالنسبة للمتغيرين .

و Q تمثل عدد حالات عدم الاتفاق بين زوج قياس كل حالتين بالنسبة للمتغيرين .

و n يمثل العدد الكلي للحالات .

و في حالة كون حالات الاتفاق هي السائدة لكل زوج من القياسات للمتغيرين ، فإن $P = \frac{n(n-1)}{2}$ و منه يصبح معامل ارتباط تو-A كالتالي :

$$\tau_a = \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 0}{\frac{n(n-1)}{2}} = 1$$

أما إذا كانت حالات عدم الاتفاق هي السائدة لكل زوج من القياسات للمتغيرين ، فإن $Q = \frac{n(n-1)}{2}$ و عليه يكون مُعامل ارتباط تو-A كالتالي :

$$\tau_a = \frac{P-Q}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{0-\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = -1$$

و هذا يدل على أن قيمة معامل ارتباط تو-A تتراوح بين 1- و 1+ في حالة عدم وجود حالات تساوٍ في القياسات . أما في حالة وجود حالات تساوٍ في القياسات ؛ فإن قيمة مُعامل تو-A لا تصل إلى الارتباط الكامل الموجب أو السالب (± 1) و لهذا اقترح كندال مُعامل ارتباط تو-B .

و لدراسة الدلالة الإحصائية لمُعامل ارتباط تو–A , نختبر فرضية العدم $H_0 : T_a = 0$ مقابل $H_1 : T_a \neq 0$ عند مستوى المعنوية $\propto$, حيث T_a يرمز لمعامل ارتباط تو–A بين المتغيرين في المجتمع .

و بعد معرفة عدد الحالات n ، فإن إحصائية الاختبار ستكون تحت صحة H_0 :

$$Z = \frac{P-Q}{\sqrt{\frac{n(n-1)(2n+1)}{18}}}$$

و التوزيع لإحصائية الاختبار هو الطبيعي المعياري ، و بعد حساب Z نقارنها مع قيمة Z النظرية التي يحدد من أجلها (حسب مستوى المعنوية $\propto$ ، و نوع الاختبار من طرف أو طرفين ، و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار) مناطق رفض أو قبول H_0 ، ثم نقارن Z المشاهدة مع مناطق الرفض أو القبول لاتخاذ القرار المناسب , فإذا وقعت Z المشاهدة في منطقة الرفض ، فإننا نرفض H_0 ، ونقبل H_1 ، ويستدل من ذلك أن الارتباط بين المتغيرين ذو دلالة إحصائية أي أنه قوي ، أما إذا وقعت Z المشاهدة في منطقة القبول، فإننا نقبل H_0 ، و نرفض H_1 . و هذا يدل على أن الارتباط بين المتغيرين غير معنوي ، و هو مجرد ارتباط عشوائي ليس ذا دلالة إحصائية .

2) **مُعامل ارتباط تو–B** : هو تعديل من كندال لمعامل ارتباط تو–A لتصل قيمة مُعامل الارتباط للحد الأقصى ± 1 أو قريبة منها ، و نرمز لهذا المُعامل بـ τ_b و يعطى بالعلاقة التالية :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{\sqrt{(P+Q+R)(P+Q+C)}}$$

حيث R تمثل عدد الحالات التي تتساوى فيها قياسات المتغير الأول فقط بين زوج قياس كل حالتين .

و C تمثل عدد الحالات التي تتساوى فيها قياسات المتغير الثاني فقط بين زوج قياس كل حالتين . و يكون : $-1 \leq \tau_b \leq 1$

و الارتباط الكامل المباشر أي $\tau_b = 1$ أو غير المباشر أي $\tau_b = -1$ لا يحدث إلا في حالة تساوي القياسات المختلفة للمتغيرين . و بناء على ذلك قدم كندال مُعامل ارتباط تو–C للتغلب على هذه المشكلة .

و لدراسة الدلالة الإحصائية لمعامل ارتباط تو – B , نختبر فرضية العدم $H_0 : \tau_b = 0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \tau_b \neq 0$ عند مستوى المعنوية $\propto$, حيث τ_b يرمز لمُعامل ارتباط تو–B في المجتمع ما بين المتغيرين . و H_1 يعني وجود ارتباط جوهري بين المتغيرين بينما H_0 تعني بعدم وجود ارتباط بين المتغيرين .

و من أجل ذلك تكون إحصائية الاختبار Z من الشكل :

$$Z = \frac{\tau_b}{\sqrt{\frac{(4)(r+1)(c+1)}{9nrc}}}$$

و هي تتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري .

و حيث إن : r تمثل عدد القياسات المختلفة للمتغير الأول .

و c تمثل عدد القياسات المختلفة للمتغير الثاني .

و بعد حساب قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة Z (تحت صحة H_0) يمكننا أن نقارنها بالقيمة الجدولية من جدول (Z) عند مستوى المعنوية $\propto$ ، و نوع الاختبار (من طرف واحد أو من طرفين) . و تحدّ عندئذ مناطق رفض ، و قبول H_0 , و نتخذ القرار المناسب في قبول H_0 أو رفضها تماماً كما رأيناه في اختبار تو–A .

3) **مُعامل ارتباط تو–C** : اقترح كندال هذا المعامل للارتباط لمعالجة الارتباط الكلي (التام) سواء كان إيجابياً أو سلبياً و هي حالة تساوي القياسات المختلفة للمتغيرين , و يرمز لهذا المعامل بـــ τ_c و هو يعطى بالعلاقة التالية :

$$\tau_c = \frac{2m(P.Q)}{n^2(m-1)} \quad ; m = \min(r, c)$$

أي أن m تساوي أقل عدد للقياسات المختلفة للمتغير الأول أو الثاني ، و هنا يمكن أن تصل قيمة معامل ارتباط تو-C الحد الأقصى (± 1) أو قريبة منها ، و ذلك بغض النظر عن وجود حالات تساو في القياسات أو وجود عدم تساوٍ في عدد القياسات المختلفة للمتغيرين .

و لدراسة الدلالة الاحصائية لهذا المعامل من الارتباط , سنختبر العدم $H_0 : T_c = 0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : T_c \neq 0$, حيث T_c هو معامل ارتباط تو-C في التجمع للمتغيرين المدروسين ، و H_0 تعني عدم وجود ارتباط بين المتغيرين ، و H_1 تعني وجود ارتباط حقيقي بين المتغيرين .

و إحصاء الاختبار يكون من الشكل :

$$Z = \frac{\tau_c}{\sqrt{\frac{(4)(r+1)(c+1)}{9nrc}}}$$

حيث : r يمثل عدد القياسات المختلفة للمتغير الأول .

و C يمثل عدد القياسات المختلفة للمتغير الثاني .

و التوزيع لإحصائية الاختبار يكون التوزيع الطبيعي المعياري .

و اعتماداً على مستوى المعنوية $\propto$ ، و نوع الاختبار (من طرف واحد أو من طرفين) و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار , يمكننا تحديد مناطق رفض أو قبول H_0 . و نقارن Z المُشاهَدة مع هذه المناطق لاتخاذ القرار المناسب برفض أو قبول H_0 ، و ذلك كما رأيناه تماماً في دراسة الدلالة الإحصائية لمُعامل ارتباط تو-A .

24-4- أمثلة محلولة :

مثال (24-1) : إذا كان ترتيب أداء خمسة من المتسابقين (E , D , C , B , A) في مسابقة معينة بواسطة لجنتين من المحكمين كالتالي :

الترتيب	1	2	3	4	5
لجنة التحكيم الأولى	E	B	A	C	D
لجنة التحكيم الثانية	B	A	E	D	C

و المطلوب : أوجد معامل كندال تو–A للعلاقة بين ترتيب لجنة التحكيم الأولى ، و ترتيب لجنة التحكيم الثانية ، و ادرس الدلالة الإحصائية لهذا المعامل عند مستوى المعنوية $\propto= 0.05$.

الحل :

إذا كان ترتيب لجنة التحكيم الأولى تمثل قياسات المتغير الأول ، و أن تريتب لجنة التحكيم الثانية تمثل قياسات المتغير الثاني , فيمكن تشكيل جدول لحساب P و Q , حيث الجدول يوضح الأزواج مرتبة تصاعدياً بالنسبة لقياسات المتغير الأول ، و يعطي عدد الأزواج المتوافقة و غير المتوافقة مع الأزواج المرتبة :

الأزواج المرتبة	عدد الأزواج المتوافقة	عدد الأزواج غير المتوافقة
(E,B)	1	3
(D,C)	1	2
(C,D)	1	1
(B,A)	0	1
(A,E)	0	0

و يكون بالتالي P = 3 (عدد القيم المتوافقة) و Q = 7 (عدد القيم غير المتوافقة) .

و بالتالي كون n = 5 , فإن معامل ارتباط كندال تو–A يكون من الشكل :

$$\tau_a = \frac{P-Q}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{3-7}{\frac{(5)(4)}{2}} = -0.4$$

و هذا يدل أن العلاقة بين ترتيب لجنة التحكيم الأولى ، و ترتيب لجنة التحكيم الثانية غير مباشرة . و لدراسة الدلالة الإحصائية لقيمة الارتباط , نريد اختبار فرضية العدم :

$H_0 : T_a = 0$ مقابل $H_1 : T_a \neq 0$ و إحصائية الاختبار المشاهدة تحت صحة H_0 تكون من الشكل : $Z = \frac{P-Q}{\sqrt{\frac{n(n-1)(2n+1)}{18}}} = \frac{3-7}{\sqrt{\frac{(5)(4)(11)}{18}}} = -1.14$

و من أجل $\propto = 0.05$ و الاختبار من الطرفين ، و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار تكون منطقة الرفض من الشكل :

$$w_0 = \left\{\underline{X} : Z \in]-\infty , -Z_{\frac{\propto}{2}} [\ V\ ] Z_{1-\frac{\propto}{2}} , +\infty [\right\}$$

$$w_0 = \left\{\underline{X} : Z \in]-\infty , -Z_{0.025} [\ V] Z_{0.975} , +\infty [\ \right\}$$

$$w_0 = \left\{\underline{X} : Z \in]-\infty , -1.96 [\ V] 1.96 , +\infty [\right\}$$

و منطقة القبول : $S - w_0 = \{\underline{X} : Z \in]-1.96 , 1.96]\}$

و بمقارنة Z = -1.14 مع w_0 و $S - w_0$ نجد أن $Z \in (S - w_0)$

أي تقع في منطقة القبول ، و بالتالي نقبل H_0 ، و نرفض H_1 , و بالتالي ؛ فإن العلاقة بين ترتيب لجنة التحكيم الأولى ، و ترتيب لجنة التحكيم الثانية غير قوية .

مثال (24-2) : إذا كانت درجات عينة من الطلاب في مقرري الإحصاء ، و التحليل في قسم الرياضيات بعد الامتحان الفصلي كالتالي :

الاحصاء	14	20	17	14	11	15	14	13	18	8
التحليل	15	19	16	12	14	16	13	11	19	12

و المطلوب : أوجد مُعامل كندال تو-B للعلاقة بين درجات الطلاب في المقررين ، و ادرس الدلالة الإحصائية لهذا الارتباط عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$.

الحل :

إذا كانت درجات الطلاب في مقرر الإحصاء تمثل قياسات المتغير الأول ، و كانت درجات الطلاب في مقرر التحليل تمثل قياسات المتغير الثاني ، و لننشئ جدول الأزواج المرتبة تصاعدياً بالنسبة لدرجات الطلاب في مقرر الإحصاء ، و نحسب فيه عدد الأزواج المتوافقة، و عدد الأزواج غير المتوافقة مع الأزواج المرتبة ، و منه يمكننا حساب P و Q كما يلي :

الأزواج المرتبة	عدد الأزواج المتوافقة	عدد الأزواج غير المتوافقة
(8,12)	7	1
(11,14)	5	3
(13,11)	7	0
(14,12)	4	0
(14,13)	4	0
(14,15)	4	0
(15,17)	2	0
(17,16)	2	0
(18,19)	0	0
(20,19)	0	0

و يكون : $P = 7 + 5 + 7 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 35$ و $Q = 1 + 3 = 4$

و عدد الأزواج المتساوية R في قياسات المتغير الأول هو 3 ؛ لأن القيمة 14 تكررت ثلاث مرات , أما بالنسبة للمتغير الثاني فإنه توجد قيمتان (12,19) ، و تكرر كل منها مرتين ، و بالتالي فإن عدد الأزواج المتساوية C في قياسات المتغير الثاني تساوي 2 حيث إنه بالنسبة لـــ R يكون $\binom{3}{2} = 3$ و بالنسبة لـــ C يكون $\binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 2$

و بالتالي ؛ فإن قيمة معامل ارتباط تو–B تكون من الشكل :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{\sqrt{(P+Q+R)(P+Q+C)}} = \frac{35-4}{\sqrt{(35+4+3)(35+4+2)}} = 0.747$$

و هذا يدل على وجود علاقة مباشرة بين درجات الطلاب في مقرر الإحصاء ، و درجاتهم في مقرر التحليل ، و أن قيمة هذا الارتباط $\tau_b = 0.747$.

و لدراسة معنوية هذا الارتباط , نختبر فرضية العدم $H_0 : \tau_b = 0$ مقابل $H_1 : \tau_b \neq 0$ عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$.

حيث نلاحظ أن عدد القيم المختلفة r لقياسات المتغير الأول تساوي 8 ، و عدد القيم المختلفة c لقياسات المتغير الثاني تساوي 8 , فإن قيمة إحصائية الاختبار المشاهدة تحت صحة H_0 تكون من الشكل : $Z = \frac{\tau_b}{\sqrt{\frac{(4)(r+1)(c+1)}{9nrc}}} = \frac{0.747}{\sqrt{\frac{(4)(8+1)(8+1)}{9(10)(8)(8)}}} = \frac{0.747}{0.2372} = 3.149$

و اعتماداً على مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ و الاختبار من الطرفين ، و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار , سنحدد مناطق رفض ، و قبول H_0.

حيث تكون منطقة الرفض من الشكل :

$$w_0 = \left\{\underline{X} : Z \in]-\infty , -Z_{\frac{\propto}{2}} [\ V\ ] Z_{1-\frac{\propto}{2}} , +\infty [\right\}$$

$$w_0 = \{\underline{X} : Z \in]-\infty , -Z_{0.005} [\ V\ ] Z_{0.995} , +\infty [\ \}$$

$$w_0 = \{\underline{X} : Z \in]-\infty , -2.58 [\ V\ ] 2.58 , +\infty [\}$$

و منطقة قبول H_0 تكون من الشكل : $S - w_0 = \{\underline{X} : Z \in [-2.58 , 2.58]\}$

و بمقارنة القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار $Z = 3.149$ مع w_0 و $S - w_0$ فإننا نجد أن $Z \in w_0$ و بالتالي ترفض H_0 ، و تقبل H_1 ، أي أن معامل الارتباط τ_b لا يساوي الصفر، و بالتالي فإن العلاقة بين درجات الطلاب في مقرر الإحصاء ، و درجاتهم في مقرر التحليل هي علاقة قوية .

24-5- تمرينات غير محلولة :

1) إذا كان ترتيب دول منطقة معينة في كرة القدم بموجب التصنيف الإقليمي لهذه الدول في العام الحالي ، و السابق كما يلي :

الدولة	A	B	C	D	E	F	G	H	I
الترتيب الحالي	4	8	6	7	1	3	9	5	2
الترتيب السابق	3	6	5	9	4	2	8	7	1

و المطلوب : أوجد معامل ارتباط كندال تو-A للعلاقة بين ترتيب العام الحالي ، و ترتيب العام السابق , ثم ادرس الدلالة الإحصائية لهذا الارتباط عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

2) لدراسة العلاقة بين درجات الموظف في اختبار تأهيلي X و تقويم مشرفه على أدائه Y , توفرت البيانات التالية لعينة تزاوجية حجمها 10 موظفين :

X	57	92	36	84	100	57	24	72	41	13
Y	96	100	24	63	74	50	43	81	19	31

و المطلوب : احسب معامل ارتباط كندال تو-B بين درجات الاختبار التأهيلي ، و تقويم المشرف , و ادرس معنوية هذا الارتباط عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

3) فيما يلي الزمن بالساعة الذي استغرقه كل من 12 مهندساً لإبداء الرأي حول مشروع معين ، وذلك في الأسبوع الأول من الدراسة ثم في الأسبوع الثاني من الدراسة :

الأسبوع الأول	10.8	16.6	11.1	10.3	12.0	15.1	13.7	18.5	17.3	14.2	14.8
الأسبوع الثاني	15.1	16.8	10.9	14.2	13.8	21.5	13.2	21.1	16.4	19.3	17.4

و المطلوب : احسب معامل ارتباط كندال – تو المناسب ما بين الرأي في الأسبوع الأول ، و الرأي في الأسبوع الثاني من حيث الزمن المستغرق , و ادرس الدلالة الإحصائية لهذا الارتباط عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$.

4) إذا كان الوزن بالكيلو غرام ، و الطول بالبوصة لعشرة طلاب في إحدى المؤسسات كالتالي :

الوزن	66	68	73	71	62	68	75	73	75	70
الطول	65	64	69	69	62	63	68	70	70	69

و المطلوب : أوجد مُعامل ارتباط كندال تو–(B ثم C) بين الوزن ، و الطول , و ادرس الدلالة الإحصائية لهذا الارتباط عند مستوى المعنوية $\propto = 0.01$ ثم $\propto = 0.05$.


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الملاحق

1) الكثافات الاحتمالية ، و خصائصها العددية ، و مجالات الثقة

2) الجداول الإحصائية

3) المصطلحات العلمية

4) المراجع العلمية للاستزادة و الاطلاع

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

1) الكثافات الاحتمالية ، و خصائصها العددية ، و مجالات الثقة

DISCRETE DISTRIBUTION

Bernoulli

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0,1$$
$$M(t) = 1 - p + pe^t$$
$$\mu = p\,, \sigma^2 = p(1-p)$$

Binomial

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}\,, x = 0,1,2,\dots,n$$
$$M(t) = (1-p+pe^t)^n$$
$$\mu = np\,, \sigma^2 = np(1-p)$$

Geometric

$$f(x) = (1-p)^x p\,, x = 0,1,2,\dots$$
$$M(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}\,, t < -\ln(1-p)$$
$$\mu = \frac{1-p}{p},\ \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Negative Binomial

$$f(x) = \frac{(x+r-1)!}{x!(r-1)!}p^r(1-p)^x\,, x = 0,1,2,\dots$$
$$M(t) = \frac{p^r}{[1-(1-p)e^t]^r}\,, t < -\ln(1-p)$$
$$\mu = \frac{r(1-p)}{p},\ \sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\,, x = 0,1,2,\dots$$
$$M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$
$$\mu = \lambda\,,\ \sigma^2 = \lambda$$

Hypergeometric

$$f(x) = \frac{\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x}}{\binom{n}{r}}\,, x \le r\,, x \le n_1\,, r-x \le n_2$$
$$\mu = \frac{rn_1}{n}$$
$$\sigma^2 = \frac{rn_1n_2(n-r)}{n^2(n-1)}$$

CONTINUOUS DISTRIBUTION

Uniform

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\ , a \le x \le b$$

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}\ , t \neq 0\ ; M(0) = 1$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}\ , \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponential

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\ ,\ 0 \le x < \infty$$

$$M(t) = \frac{1}{1-\theta t}\ , t < 1/\theta$$

$$\mu = \theta\ , \sigma^2 = \theta^2$$

Gamma

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\propto)\theta^{x}} x^{\propto -1} e^{-x/\theta}\ ,\ 0 \le x < \infty$$

$$M(t) = \frac{1}{(1-\theta t)^{x}}\ , t < 1/\theta$$

$$\mu = \propto \theta\ , \sigma^2 = \propto \theta^2$$

Chi – Square

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2}\ ,\ 0 \le x < \infty$$

$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}\ , t < \frac{1}{2}$$

$$\mu = r\ ,\ \sigma^2 = 2r$$

Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-[(x-\mu)^2/2\sigma^2]}\ , -\infty < x < \infty$$

$$M(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$E(X) = \mu\ ,\ Var(X) = \sigma^2$$

CONFIDENCE INTERVALS

Parameter	Assumptions	Endpoints
μ	$N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 *Known*	$\overline{x} \pm Z\alpha/2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
μ	$N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 *unKnown*	$\overline{x} \pm t\alpha/2(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$
$\mu_X - \mu_Y$	$N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ σ_X^2, σ_Y^2 *Known*	$\overline{x} - \overline{y} \pm Z\alpha/2 \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}$
$\mu_X - \mu_Y$	$N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, *unKnown*	$\overline{x} - \overline{y} \pm t\alpha/2(n+m-2)$ $\times \sqrt{\left(\frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$
$\mu_d = \mu_X - \mu_Y$	Dependent distributions	$\overline{d} \pm t\alpha/2(n-1) \frac{s_d}{\sqrt{n}}$
σ^2	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{(n-1)s^2}{x^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{x^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$
$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$	$N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ Independent Distributions	$\frac{s_X^2/s_Y^2}{F\alpha/2(n-1, m-1)}, F\alpha/2(m-1, n-1) \frac{s_X^2}{s_Y^2}$
p	$b(n, p)$ n is large	$\frac{y}{n} \pm Z\alpha/2 \sqrt{\frac{y/n(1-y/n)}{n}}$
$p_1 - p_2$	$b(n_1, p_1)$ $b(n_2, p_2)$ Independent distributions	$\frac{y_1}{n_1} - \frac{y_2}{n_2}$ $\pm Z\alpha/2 \sqrt{\frac{y_1/n_1(1-y_1/n_1)}{n_1} + \frac{y_2/n_2(1-y_2/n_2)}{n_2}}$

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

2) الجداول الإحصائية

1- الجدول (Z) – جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

2- جدول توزيع ستودنت (t) .

3- جدول توزيع ($\mathcal{X}^2$) (كاي – تربيع) .

4- جدول فيشر (F) .

5- جدول توزيع ذو الحدين .

6- القيم الحرجة بالطرف الأيمن لاختبار كولموغوروف – سميرنوف .

7- جدول التوزيع التراكمي لذي الحدين بالوسطاء n و p=0.5 .

8- جدول توزيع إحصائية اختبار ويلكوكسن للرتب المُعَلّمة .

9- جدول القيم الحرجة الصغرى للتتابع .

10- جدول القيم الحرجة الكبرى للتتابع .

11- توزيع عدد التلاحقات r .

12- توزيع إحصائية ويلكوكسن لمجموع الرتب .

13- كميات لاختبار مان – وتني .

14- القيم الحرجة بالطرف الأيمن لتوزيع إحصائية سميرنوف لعينتين متساويتي الحجم .

15- كميات بتوزيع إحصائية سميرنوف لعينتين بحجمي مختلفين .

16- جدول سميرنوف للعينتين المستقلتين المتساويتين .

17- جدول سميرنوف للعينتين المستقلتين غير المتساويتين .

18- جدول توزيع مربع كاي X^2 (حساب من الطرف الأيمن) .

19- جدول كروسكال واليس للعيّنات الصغيرة .

20- جدول فريدمان .

21- توزيع t .

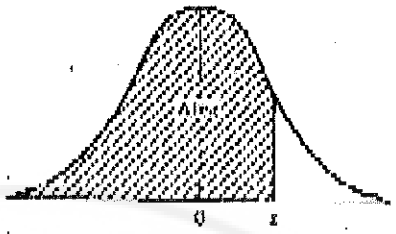
22- جدول توزيع F .

23- جدول اسبيرمان للقيم الحرجة للارتباط .

Damascus University

1) الجدول (Z)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



Areas Under the Normal Curve

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

2) جدول توزيع ستودنت (t)

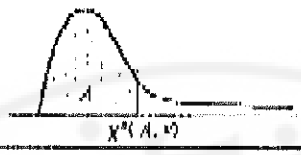
df	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
df	$-t_{.60}$	$-t_{.70}$	$-t_{.80}$	$-t_{.90}$	$-t_{.95}$	$-t_{.975}$	$-t_{.99}$	$-t_{.995}$

عند قراءة الجدول من الأسفل نضع إشارة ـ قبل القيم الموجودة في متن الجدول . وعند حساب قيمة t من أجل درجة حرية غير مذكورة في الجدول من الأفضل استخدام مقلوب درجات الحرية في عملية التناسب بدلاً من درجات الحرية نفسها .

3) جدول توزيع (χ^2)

Percentiles of the χ^2 Distribution

Entry is $\chi^2(A;\nu)$ where $P[\chi^2(\nu) \le \chi^2(A;\nu)] = A$



ν	.005	.010	.025	.050	.100	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^3393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
40	19.79	20.71	22.16	23.65	26.51	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Damascus University

4) جدول فيشر (F)



$$F(A;\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{F(1-A;\nu_1,\nu_2)}$$

Den. df	A	Numerator df 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241
	.975	648	800	864	[illegible]	922	937	948	957	963
	.99	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022
	.995	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091
	.999	405,280	500,000	540,380	562,500	576,400	585,940	592,870	598,140	602,280
2	.50	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199
	.999	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4
3	.50	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.975	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9
	.999	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9
4	.50	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5
5	.50	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
	.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	27.2
6	.50	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.02	1.03	1.04
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7
7	.50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3

Percentiles of the F Distribution

Denom. df	A	Numerator df								
		10	12	15	20	24	30	60	120	∞
1	.50	3.04	3.07	3.09	3.12	3.13	3.16	3.19	3.20	3.26
	.90	60.2	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	63.0	63.1	63.3
	.95	242	244	246	248	249	250	252	253	254
	.975	969	977	985	993	997	1,001	1,010	1,014	1,018
	.99	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,313	6,339	6,366
	.995	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,253	25,359	25,464
	.999	605,620	610,670	615,760	620,910	623,500	626,100	631,340	633,970	636,620
2	.50	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.43	1.44
	.90	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
	.95	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	.975	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
	.99	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	200
	.999	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	.50	1.18	1.20	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
	.90	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
	.95	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.57	8.55	8.53
	.975	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9
	.99	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.3	26.2	26.1
	.995	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.1	42.0	41.8
	.999	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.4	124.0	123.5
4	.50	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.18	1.18	1.19
	.90	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
	.95	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
	.975	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.36	8.31	8.26
	.99	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
	.995	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.6	19.5	19.3
	.999	48.1	47.4	46.8	46.1	45.8	45.4	44.7	44.4	44.1
5	.50	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.14	1.15
	.90	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
	.95	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.43	4.40	4.36
	.975	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.12	6.07	6.02
	.99	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.20	9.11	9.02
	.995	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.4	12.3	12.1
	.999	26.9	26.4	25.9	25.4	25.1	24.9	24.3	24.1	23.8
6	.50	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13
	.90	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.76	2.74	2.72
	.95	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.74	3.70	3.67
	.975	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	4.96	4.90	4.85
	.99	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88
	.995	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.12	9.00	8.88
	.999	18.4	18.0	17.6	17.1	16.9	16.7	16.2	16.0	15.7
7	.50	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10
	.90	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.51	2.49	2.47
	.95	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.30	3.27	3.23
	.975	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.25	4.20	4.14
	.99	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65
	.995	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.31	7.19	7.08
	.999	14.1	13.7	13.3	12.9	12.7	12.5	12.1	11.9	11.7

(continued) Percentiles of the F Distribution

Denom. df	q	Numerator df								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	.50	0.4888	0.7967	0.8660	0.9015	0.9248	0.9371	0.9466	1.00	1.01
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8
9	.50	0.4844	0.7949	0.8652	0.9006	0.9239	0.9362	0.9458	0.9530	1.00
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1
10	.50	0.4829	0.7939	0.8645	0.8998	0.9232	0.9356	0.9451	0.9525	0.9582
	.90	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.92	9.52	9.20	8.96
12	.50	0.4844	0.7929	0.8638	0.8988	0.9221	0.9345	0.9439	0.9512	0.9569
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.33	5.18
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48
15	.50	0.4828	0.7920	0.8633	0.8978	0.9211	0.9333	0.9427	0.9497	0.9559
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.975	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
20	.50	0.4722	0.7916	0.8616	0.8964	0.9200	0.9322	0.9416	0.9485	0.9540
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
24	.50	0.4669	0.7914	0.8613	0.8965	0.9202	0.9325	0.9420	0.9490	0.9545
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

Damascus University

(continued) Percentiles of the F Distribution

Denominator df	ϵ	Numerator df: 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
8	.50	1.03	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09
	.90	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
	.95	3.08	3.04	3.01	2.97	2.95	2.93	2.89	2.87	2.83
	.975	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.78	3.73	3.67
	.99	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.03	4.95	4.86
	.995	7.01	6.81	6.61	6.41	6.30	6.19	5.98	5.88	5.75
	.999	11.1	10.8	10.5	10.3	10.1	9.73	9.53	9.33	9.12
9	.50	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.07	1.08
	.90	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.21	2.18	2.16
	.95	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.79	2.75	2.71
	.975	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.45	3.39	3.33
	.99	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31
	.995	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.41	5.30	5.19
	.999	9.43	9.17	8.90	8.64	8.51	8.38	8.12	8.00	7.88
10	.50	1.01	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07
	.90	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.11	2.08	2.06
	.95	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.62	2.58	2.54
	.975	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.20	3.14	3.08
	.99	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91
	.995	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.86	4.75	4.64
	.999	8.75	8.48	8.19	7.90	7.75	7.60	7.32	6.98	6.76
12	.50	0.9996	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.05	1.05	1.06
	.90	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.96	1.93	1.90
	.95	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.38	2.34	2.30
	.975	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.84	2.79	2.72
	.99	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.54	3.45	3.36
	.995	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.12	4.01	3.90
	.999	7.39	7.08	6.71	6.40	6.25	6.09	5.76	5.59	5.42
15	.50	0.9977	0.9989	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05
	.90	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76
	.95	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.16	2.11	2.07
	.975	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.52	2.46	2.40
	.99	3.89	3.80	3.67	3.52	3.45	3.37	3.20	3.11	2.87
	.995	4.62	4.43	4.25	4.07	3.97	3.87	3.68	3.58	3.48
	.999	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.64	4.48	4.31
20	.50	0.9966	0.9977	0.9989	1.00	1.01	1.01	1.03	1.03	1.03
	.90	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.68	1.64	1.61
	.95	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.95	1.90	1.84
	.975	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.22	2.16	2.09
	.99	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.61	2.52	2.42
	.995	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	2.92	2.81	2.69
	.999	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.70	3.54	3.38
24	.50	0.9961	0.9972	0.9983	0.9994	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03
	.90	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
	.95	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
	.975	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.08	2.01	1.94
	.99	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.40	2.31	2.21
	.995	3.59	3.42	3.25	3.08	2.97	2.87	2.66	2.55	2.43
	.999	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.29	3.14	2.97

Damascus University

(continued) **Percentiles of the *F* Distribution**

Den. df	A	Numerator df 1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	.50	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.927	0.939	0.948
	.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
	.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
60	.50	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.917	0.928	0.937
	.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.975	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
	.999	12.0	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
120	.50	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.912	0.923	0.932
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
	.999	11.4	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38
∞	.50	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.907	0.918	0.927
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10

Damascus University

(concluded) Percentiles of the F Distribution

Den df		Numerator df								
		10	12	15	20	24	30	60	120	∞
30	.50	0.955	0.956	0.978	0.989	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02
	.90	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.54	1.50	1.46
	.95	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.74	1.68	1.62
	.975	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	1.94	1.87	1.79
	.99	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.25	2.11	2.01
	.995	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.42	2.30	2.18
	.999	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	2.92	2.76	2.59
60	.50	0.945	0.956	0.967	0.978	0.983	0.989	1.00	1.01	1.01
	.90	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.40	1.35	1.29
	.95	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.53	1.47	1.39
	.975	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.67	1.58	1.48
	.99	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.84	1.73	1.60
	.995	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	1.96	1.83	1.69
	.999	3.54	3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.25	2.08	1.89
120	.50	0.939	0.950	0.961	0.972	0.978	0.983	0.994	1.00	1.01
	.90	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.32	1.26	1.19
	.95	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.43	1.35	1.25
	.975	2.16	2.05	1.95	1.82	1.76	1.69	1.53	1.43	1.31
	.99	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.66	1.53	1.38
	.995	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.75	1.61	1.43
	.999	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	1.95	1.77	1.54
∞	.50	0.934	0.945	0.956	0.967	0.972	0.978	0.989	0.994	1.00
	.90	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.24	1.17	1.00
	.95	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.32	1.22	1.00
	.975	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.39	1.27	1.00
	.99	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.47	1.32	1.00
	.995	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.53	1.36	1.00
	.999	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.66	1.45	1.00

Damascus University

5) جدول توزيع ذو الحدين لـ n ، p و y .

القيمة في الجدول مقابل n ، p و y معينة هي

احتمال قيمة تساوي أو تقل عن Y لذي الحدين بمعالم n و P .

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664
	1	.9928	.9720	.9392	.8960	.8438	.7840	.7182	.6480	.5748
	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585
	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931
	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636
	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415
	3	.9999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8826	.8208	.7447
	4	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9777	.9590	.9308
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152
	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4449	.3294	.2338	.1586	.1024
	2	.9962	.9743	.9262	.8520	.7564	.6471	.5323	.4199	.3164
	3	.9998	.9973	.9879	.9667	.9294	.8740	.8002	.7102	.6083
	4	1.0000	.9998	.9988	.9953	.9871	.9712	.9444	.9037	.8471
	5	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9962	.9910	.9812	.9643
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9984	.9963
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	$p = .50$	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
1	0	.5000	.4500	.4000	.3500	.3000	.2500	.2000	.1500	.1000	.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.2500	.2025	.1600	.1225	.0900	.0625	.0400	.0225	.0100	.0025
	1	.7500	.6975	.6400	.5775	.5100	.4375	.3600	.2775	.1900	.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.1250	.0911	.0640	.0429	.0270	.0156	.0080	.0034	.0010	.0001
	1	.5000	.4252	.3520	.2818	.2160	.1562	.1040	.0608	.0280	.0072
	2	.8750	.8336	.7840	.7254	.6570	.5781	.4880	.3859	.2710	.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.0625	.0410	.0256	.0150	.0081	.0039	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3125	.2415	.1792	.1265	.0837	.0508	.0272	.0120	.0037	.0005
	2	.6875	.6090	.5248	.4370	.3483	.2617	.1808	.1095	.0523	.0140
	3	.9375	.9085	.8704	.8215	.7599	.6836	.5904	.4780	.3439	.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.0312	.0185	.0102	.0053	.0024	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.1873	.1312	.0870	.0540	.0308	.0156	.0067	.0022	.0005	.0000
	2	.5000	.4069	.3174	.2352	.1631	.1035	.0579	.0266	.0086	.0012
	3	.8125	.7438	.6630	.5716	.4718	.3672	.2627	.1648	.0815	.0226
	4	.9688	.9497	.9222	.8840	.8319	.7627	.6723	.5563	.4095	.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.0156	.0083	.0041	.0018	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.1094	.0692	.0410	.0223	.0109	.0046	.0016	.0004	.0001	.0000
	2	.3438	.2553	.1792	.1174	.0705	.0376	.0170	.0059	.0013	.0001
	3	.6562	.5585	.4557	.3529	.2557	.1694	.0989	.0473	.0158	.0022
	4	.8906	.8364	.7667	.6809	.5798	.4661	.3446	.2235	.1143	.0328
	5	.9844	.9723	.9533	.9246	.8824	.8220	.7379	.6229	.4686	.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.0078	.0037	.0016	.0006	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0625	.0357	.0188	.0090	.0038	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000
	2	.2266	.1529	.0963	.0556	.0288	.0129	.0047	.0012	.0002	.0000
	3	.5000	.3917	.2898	.1998	.1260	.0706	.0333	.0121	.0027	.0002
	4	.7734	.6836	.5801	.4677	.3529	.2436	.1480	.0738	.0257	.0038
	5	.9375	.8976	.8414	.7662	.6706	.5551	.4233	.2834	.1497	.0444
	6	.9922	.9848	.9720	.9510	.9176	.8665	.7903	.6794	.5217	.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084
	1	.9428	.8131	.6572	.5033	.3671	.2553	.1691	.1064	.0632
	2	.9942	.9619	.8948	.7969	.6785	.5518	.4278	.3154	.2201
	3	.9996	.9950	.9786	.9437	.8862	.8059	.7064	.5941	.4770
	4	1.0000	.9996	.9971	.9896	.9727	.9420	.8939	.8263	.7396
	5	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9958	.9887	.9747	.9502	.9115
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9964	.9915	.9819
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9983
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046
	1	.9288	.7748	.5995	.4362	.3003	.1960	.1211	.0705	.0385
	2	.9916	.9470	.8591	.7382	.6007	.4628	.3373	.2318	.1495
	3	.9994	.9917	.9661	.9144	.8343	.7297	.6089	.4826	.3614
	4	1.0000	.9991	.9944	.9804	.9511	.9012	.8283	.7334	.6214
	5	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9900	.9747	.9464	.9006	.8342
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9957	.9888	.9750	.9502
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9986	.9962	.9909
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9992
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025
	1	.9139	.7361	.5443	.3758	.2440	.1493	.0860	.0464	.0233
	2	.9885	.9298	.8202	.6778	.5256	.3828	.2616	.1673	.0996
	3	.9990	.9872	.9500	.8791	.7759	.6496	.5138	.3823	.2660
	4	.9999	.9984	.9901	.9672	.9219	.8497	.7515	.6331	.5044
	5	1.0000	.9999	.9986	.9936	.9803	.9527	.9051	.8338	.7384
	6	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9965	.9894	.9740	.9452	.8980
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9952	.9877	.9726
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983	.9955
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014
	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139
	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652
	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911
	4	.9999	.9972	.9841	.9496	.8854	.7897	.6683	.5328	.3971
	5	1.0000	.9997	.9973	.9883	.9657	.9218	.8513	.7535	.6331
	6	1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9924	.9784	.9499	.9006	.8262
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9957	.9878	.9707	.9390
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
8	0	.0039	.0017	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0352	.0181	.0085	.0036	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.1445	.0885	.0498	.0253	.0113	.0042	.0012	.0002	.0000	.0000
	3	.3633	.2604	.1737	.1061	.0580	.0273	.0104	.0029	.0004	.0000
	4	.6367	.5230	.4059	.2936	.1941	.1138	.0563	.0214	.0050	.0004
	5	.8555	.7799	.6846	.5722	.4482	.3215	.2031	.1052	.0381	.0058
	6	.9648	.9368	.8936	.8309	.7447	.6329	.4967	.3428	.1869	.0572
	7	.9961	.9916	.9832	.9681	.9424	.8999	.8322	.7275	.5695	.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.0020	.0008	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0195	.0091	.0038	.0014	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0898	.0498	.0250	.0112	.0043	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.2539	.1658	.0994	.0536	.0253	.0100	.0031	.0006	.0001	.0000
	4	.5000	.3786	.2666	.1717	.0988	.0489	.0196	.0056	.0009	.0000
	5	.7461	.6386	.5174	.3911	.2703	.1657	.0856	.0339	.0083	.0006
	6	.9102	.8505	.7682	.6627	.5372	.3993	.2618	.1409	.0530	.0084
	7	.9805	.9615	.9295	.8789	.8040	.6997	.5638	.4005	.2252	.0712
	8	.9980	.9954	.9899	.9793	.9596	.9249	.8658	.7684	.6126	.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0107	.0045	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0547	.0274	.0123	.0048	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	3	.1719	.1020	.0548	.0260	.0106	.0035	.0009	.0001	.0000	.0000
	4	.3770	.2616	.1662	.0949	.0473	.0197	.0064	.0014	.0001	.0000
	5	.6230	.4956	.3669	.2485	.1503	.0781	.0328	.0099	.0016	.0001
	6	.8281	.7340	.6177	.4862	.3504	.2241	.1209	.0500	.0128	.0010
	7	.9453	.9004	.8327	.7384	.6172	.4744	.3222	.1798	.0702	.0115
	8	.9893	.9767	.9536	.9140	.8507	.7560	.6242	.4557	.2639	.0861
	9	.9990	.9975	.9940	.9865	.9718	.9437	.8926	.8031	.6513	.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	.0005	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0059	.0022	.0007	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0327	.0148	.0059	.0020	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.1133	.0610	.0293	.0122	.0043	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	4	.2744	.1738	.0994	.0501	.0216	.0076	.0020	.0003	.0000	.0000
	5	.5000	.3669	.2465	.1487	.0782	.0343	.0117	.0027	.0003	.0000
	6	.7256	.6029	.4672	.3317	.2103	.1146	.0504	.0159	.0028	.0001
	7	.8867	.8089	.7037	.5744	.4304	.2867	.1611	.0694	.0185	.0016
	8	.9673	.9348	.8811	.7999	.6873	.5448	.3826	.2212	.0896	.0152
	9	.9941	.9861	.9698	.9394	.8870	.8029	.6779	.5078	.3026	.1019
	10	.9995	.9986	.9964	.9912	.9802	.9578	.9141	.8327	.6862	.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008
	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083
	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421
	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345
	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044
	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269
	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004
	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049
	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269
	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929
	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279
	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268
	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002
	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029
	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170
	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632
	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672
	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373
	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9989	.9961	.9886
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9978
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n	y	p = .50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
12	0	.0002	.0001	.0000	.0000	0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0032	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0193	.0079	.0028	.0008	.0002	0000	0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0730	.0356	.0155	.0056	.0017	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	4	.1938	.1117	.0573	.0255	.0095	.0028	.0006	.0001	.0000	.0000
	5	.3872	.2607	.1582	.0846	.0386	.0143	.0039	.0007	.0001	.0000
	6	.6128	.4731	.3348	.2127	.1178	.0544	.0194	.0046	.0005	.0000
	7	.8062	.6956	.5618	.4167	.2763	.1576	.0726	.0239	.0043	.0002
	8	.9270	.8655	.7747	.6533	.5075	.3512	.2054	.0922	.0256	.0022
	9	.9807	.9579	.9166	.8487	.7472	.6093	.4417	.2642	.1109	.0196
	10	.9968	.9917	.9804	.9576	.9150	.8416	.7251	.5565	.3410	.1184
	11	.9998	.9992	.9978	.9943	.9862	.9683	.9313	.8578	.7176	.4596
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0017	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0112	.0041	.0013	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0461	.0203	.0078	.0025	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.1334	.0698	.0321	.0126	.0040	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000
	5	.2905	.1788	.0977	.0462	.0182	.0056	.0012	.0002	.0000	.0000
	6	.5000	.3563	.2288	.1295	.0624	.0243	.0070	.0013	.0001	.0000
	7	.7095	.5732	.4256	.2841	.1654	.0802	.0300	.0075	.0009	0000
	8	.8666	.7721	.6470	.4995	.3457	.2060	.0991	.0342	.0065	.0003
	9	.9539	.9071	.8314	.7217	.5794	.4157	.2527	.1180	.0342	.0031
	10	.9888	.9731	.9421	.8868	.7975	.6674	.4983	.3080	.1339	.0245
	11	.9983	.9951	.9874	.9704	.9363	.8733	.7664	.6017	.3787	.1354
	12	.9999	.9996	.9987	.9963	.9903	.9762	.9450	.8791	.7458	.4867
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0009	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0065	.0022	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0287	.0114	.0039	.0011	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0898	.0426	.0175	.0060	.0017	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.2120	.1189	.0583	.0243	.0083	.0022	.0004	.0000	.0000	.0000
	6	.3953	.2586	.1501	.0753	.0315	.0103	.0024	.0003	.0000	.0000
	7	.6047	.4539	.3075	.1836	.0933	.0383	.0116	.0022	.0002	.0000
	8	.7880	.6627	.5141	.3595	.2195	.1117	.0439	.0115	.0015	.0000
	9	.9102	.8328	.7207	.5773	.4158	.2585	.1298	.0467	.0092	.0004
	10	.9713	.9368	.8757	.7795	.6448	.4787	.3018	.1465	.0441	.0042
	11	.9935	.9830	.9602	.9161	.8392	.7189	.5519	.3521	.1584	.0301
	12	.9991	.9971	.9919	.9795	.9525	.8990	.8021	.6433	.4154	.1530
	13	.9999	.9998	.9992	.9976	.9932	.9822	.9560	.8972	.7712	.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	v	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001
	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017
	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107
	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424
	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204
	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608
	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522
	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001
	1	.8108	.5147	.2839	.1407	.0635	.0261	.0098	.0033	.0010
	2	.9571	.7892	.5614	.3518	.1971	.0994	.0451	.0183	.0066
	3	.9930	.9316	.7899	.5981	.4050	.2459	.1339	.0651	.0281
	4	.9991	.9830	.9209	.7982	.6302	.4499	.2892	.1666	.0853
	5	.9999	.9967	.9765	.9183	.8103	.6598	.4900	.3288	.1976
	6	1.0000	.9995	.9944	.9733	.9204	.8247	.6881	.5272	.3660
	7	1.0000	.9999	.9989	.9930	.9729	.9256	.8406	.7161	.5629
	8	1.0000	1.0000	.9998	.9985	.9925	.9743	.9329	.8577	.7441
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9929	.9771	.9417	.8759
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9938	.9809	.9514
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951	.9851
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9991	.9965
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	$p = .50$	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
15	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0037	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0176	.0063	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0592	.0255	.0093	.0028	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1509	.0769	.0338	.0124	.0037	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000
	6	.3036	.1818	.0950	.0422	.0152	.0042	.0008	.0001	.0000	.0000
	7	.5000	.3465	.2131	.1132	.0500	.0173	.0042	.0006	.0000	.0000
	8	.6964	.5478	.3902	.2452	.1311	.0566	.0181	.0036	.0003	.0000
	9	.8491	.7392	.5968	.4357	.2784	.1484	.0611	.0168	.0022	.0001
	10	.9408	.8796	.7827	.6481	.4845	.3135	.1642	.0617	.0127	.0006
	11	.9824	.9576	.9095	.8273	.7031	.5387	.3518	.1773	.0556	.0055
	12	.9963	.9893	.9729	.9383	.8732	.7639	.6020	.3958	.1841	.0362
	13	.9995	.9983	.9948	.9858	.9647	.9198	.8329	.6814	.4510	.1710
	14	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9953	.9866	.9648	.9126	.7941	.5367
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0021	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0106	.0035	.0009	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0384	.0149	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.1051	.0486	.0191	.0062	.0016	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.2272	.1241	.0583	.0229	.0071	.0016	.0002	.0000	.0000	.0000
	7	.4018	.2559	.1423	.0671	.0257	.0075	.0015	.0002	.0000	.0000
	8	.5982	.4371	.2839	.1594	.0744	.0271	.0070	.0011	.0001	.0000
	9	.7728	.6240	.4728	.3119	.1753	.0796	.0267	.0056	.0005	.0000
	10	.8949	.8024	.6712	.5100	.3402	.1897	.0817	.0235	.0033	.0001
	11	.9616	.9147	.8334	.7108	.5501	.3698	.2018	.0791	.0170	.0009
	12	.9894	.9719	.9349	.8661	.7541	.5950	.4019	.2101	.0684	.0070
	13	.9979	.9934	.9817	.9549	.9006	.8029	.6482	.4386	.2108	.0429
	14	.9997	.9990	.9967	.9902	.9739	.9365	.8593	.7161	.4853	.1892
	15	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9967	.9900	.9719	.9257	.8147	.5599
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000
	1	.7922	.4818	.2525	.1182	.0501	.0193	.0067	.0021	.0006
	2	.9497	.7618	.5198	.3096	.1637	.0774	.0327	.0123	.0041
	3	.9912	.9174	.7556	.5489	.3530	.2019	.1028	.0464	.0184
	4	.9988	.9779	.9013	.7582	.5739	.3887	.2348	.1260	.0596
	5	.9999	.9953	.9681	.8943	.7653	.5968	.4197	.2639	.1471
	6	1.0000	.9992	.9917	.9623	.8929	.7752	.6188	.4478	.2902
	7	1.0000	.9999	.9983	.9891	.9598	.8954	.7872	.6405	.4743
	8	1.0000	1.0000	.9997	.9974	.9876	.9597	.9006	.8011	.6626
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9969	.9873	.9617	.9081	.8166
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9968	.9880	.9652	.9174
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9970	.9894	.9699
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9975	.9914
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000
	1	.7735	.4503	.2241	.0991	.0395	.0142	.0046	.0013	.0003
	2	.9419	.7338	.4797	.2713	.1353	.0600	.0236	.0082	.0025
	3	.9891	.9018	.7202	.5010	.3057	.1646	.0783	.0328	.0120
	4	.9985	.9718	.8794	.7164	.5187	.3327	.1886	.0942	.0411
	5	.9998	.9936	.9581	.8671	.7175	.5344	.3550	.2088	.1077
	6	1.0000	.9988	.9882	.9487	.8610	.7217	.5491	.3743	.2258
	7	1.0000	.9998	.9973	.9837	.9431	.8593	.7283	.5634	.3915
	8	1.0000	1.0000	.9995	.9957	.9807	.9404	.8609	.7368	.5778
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9946	.9790	.9403	.8653	.7473
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9939	.9788	.9424	.8720
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9986	.9938	.9797	.9463
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9986	.9942	.9817
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	$p = .50$	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
17	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0012	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0064	.0019	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0245	.0086	.0025	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0717	.0301	.0106	.0030	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1662	.0826	.0348	.0120	.0032	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000
	7	.3145	.1834	.0919	.0383	.0127	.0031	.0005	.0000	.0000	.0000
	8	.5000	.3374	.1989	.0994	.0403	.0124	.0026	.0003	.0000	.0000
	9	.6855	.5257	.3595	.2128	.1046	.0402	.0109	.0017	.0001	.0000
	10	.8338	.7098	.5522	.3812	.2248	.1071	.0377	.0083	.0008	.0000
	11	.9283	.8529	.7361	.5803	.4032	.2347	.1057	.0319	.0047	.0001
	12	.9755	.9404	.8740	.7652	.6113	.4261	.2418	.0987	.0221	.0012
	13	.9936	.9816	.9536	.8972	.7981	.6470	.4511	.2444	.0826	.0088
	14	.9988	.9939	.9877	.9673	.9226	.8363	.6904	.4802	.2382	.0503
	15	.9999	.9994	.9979	.9933	.9807	.9499	.8818	.7475	.5182	.2078
	16	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9977	.9925	.9775	.9369	.8332	.5819
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0038	.0010	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0154	.0049	.0013	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0481	.0183	.0058	.0014	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.1189	.0537	.0203	.0062	.0014	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.2403	.1280	.0576	.0212	.0061	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000
	8	.4073	.2527	.1347	.0597	.0210	.0054	.0009	.0001	.0000	.0000
	9	.5927	.4222	.2632	.1391	.0596	.0193	.0043	.0005	.0000	.0000
	10	.7597	.6085	.4366	.2717	.1407	.0569	.0163	.0027	.0002	.0000
	11	.8811	.7742	.6257	.4509	.2783	.1390	.0513	.0118	.0012	.0000
	12	.9519	.8923	.7912	.6450	.4656	.2825	.1329	.0419	.0064	.0002
	13	.9846	.9589	.9058	.8114	.6673	.4813	.2836	.1206	.0282	.0015
	14	.9962	.9880	.9672	.9217	.8354	.6943	.4990	.2798	.0982	.0109
	15	.9993	.9975	.9918	.9764	.9400	.8647	.7287	.5203	.2662	.0581
	16	.9999	.9997	.9987	.9954	.9858	.9605	.9009	.7759	.5497	.2265
	17	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9944	.9820	.9464	.8499	.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

n	y	p = .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000
	1	.7547	.4203	.1985	.0829	.0310	.0104	.0031	.0008	.0002
	2	.9335	.7054	.4413	.2369	.1113	.0462	.0170	.0055	.0015
	3	.9869	.8850	.6841	.4551	.2631	.1332	.0591	.0230	.0077
	4	.9980	.9648	.8556	.6733	.4654	.2822	.1500	.0696	.0280
	5	.9998	.9914	.9463	.8369	.6678	.4739	.2968	.1629	.0777
	6	1.0000	.9983	.9837	.9324	.8251	.6655	.4812	.3081	.1727
	7	1.0000	.9997	.9959	.9767	.9225	.8180	.6656	.4878	.3169
	8	1.0000	1.0000	.9992	.9933	.9713	.9161	.8145	.6675	.4940
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9911	.9674	.9125	.8139	.6710
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9977	.9895	.9653	.9115	.8159
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9972	.9886	.9648	.9129
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9884	.9658
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9969	.9891
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000
	1	.7358	.3917	.1756	.0692	.0243	.0076	.0021	.0005	.0001
	2	.9245	.6769	.4049	.2061	.0913	.0355	.0121	.0036	.0009
	3	.9841	.8670	.6477	.4114	.2252	.1071	.0444	.0160	.0049
	4	.9974	.9568	.8298	.6296	.4148	.2375	.1182	.0510	.0189
	5	.9997	.9887	.9327	.8042	.6172	.4164	.2454	.1256	.0553
	6	1.0000	.9976	.9781	.9133	.7858	.6080	.4166	.2500	.1299
	7	1.0000	.9996	.9941	.9679	.8982	.7723	.6010	.4159	.2520
	8	1.0000	.9999	.9987	.9900	.9591	.8867	.7624	.5956	.4143
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9974	.9861	.9520	.8782	.7553	.5914
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9961	.9829	.9468	.8725	.7507
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9949	.9804	.9435	.8692
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9987	.9940	.9790	.9420
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985	.9935	.9786
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9936
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Damascus University

6) القيم الحرجة بالطرف الأيمن لاختبار كولموغروف – سميرنوف

طرف واحد	α =	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	α =	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
طرفين	α =	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α =	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
n =	1	.900	.950	.975	.990	.995	21	.226	.259	.287	.321	.344
	2	.684	.776	.842	.900	.929	22	.221	.253	.281	.314	.337
	3	.565	.636	.708	.785	.829	23	.216	.247	.275	.307	.330
	4	.493	.565	.624	.689	.734	24	.212	.242	.269	.301	.323
	5	.447	.509	.563	.627	.669	25	.208	.238	.264	.295	.317
	6	.410	.468	.519	.577	.617	26	.204	.233	.259	.290	.311
	7	.381	.436	.483	.538	.576	27	.200	.229	.254	.284	.305
	8	.358	.410	.454	.507	.542	28	.197	.225	.250	.279	.300
	9	.339	.387	.430	.480	.513	29	.193	.221	.246	.275	.295
	10	.323	.369	.409	.457	.489	30	.190	.218	.242	.270	.290
	11	.308	.352	.391	.437	.468	31	.187	.214	.238	.266	.285
	12	.296	.338	.375	.419	.449	32	.184	.211	.234	.262	.281
	13	.285	.325	.361	.404	.432	33	.182	.208	.231	.258	.277
	14	.275	.314	.349	.390	.418	34	.179	.205	.227	.254	.273
	15	.266	.304	.338	.377	.404	35	.177	.202	.224	.251	.269
	16	.258	.295	.327	.366	.392	36	.174	.199	.221	.247	.265
	17	.250	.286	.318	.355	.381	37	.172	.196	.218	.244	.262
	18	.244	.279	.309	.346	.371	38	.170	.194	.215	.241	.258
	19	.237	.271	.301	.337	.361	39	.168	.191	.213	.238	.255
	20	.232	.265	.294	.329	.352	40	.165	.189	.210	.235	.252
					Approximation for $n > 40$			$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Damascus University

7)التوزيع التراكمي لذو الحدين بمعالم n و P = 0.5

قيمة P^* هي احتمال قيمة تساوي أو تقل عن S عندما يكون $S \le 0.5\,n$ ونستخدم الطرف الأيسر، بينما هي احتمال قيمة تساوي أو تزيد عن S عندما تكون $S \ge 0.5n$ ونستخدم الطرف الأيمن، يشار للطرف الأيسر والأيمن بـ " يسار " و " يمين " بالترتيب. و S يمكن أن تؤخذ S_+ أو S_- لا فرق.

n	يسار T	P^*	يمين T	n	يسار T	P^*	يمين T	n	يسار T	P^*	يمين T
1	0	.5000	1	12	0	.0002	12	17	0	.0000	17
2	0	.2500	2		1	.0032	11		1	.0001	16
	1	.7500	1		2	.0193	10		2	.0012	15
3	0	.1250	3		3	.0730	9		3	.0064	14
	1	.5000	2		4	.1938	8		4	.0245	13
4	0	.0625	4		5	.3872	7		5	.0717	12
	1	.3125	3		6	.6128	6		6	.1662	11
	2	.6875	2	13	0	.0001	13		7	.3145	10
5	0	.0312	5		1	.0017	12		8	.5000	9
	1	.1875	4		2	.0112	11	18	0	.0000	18
	2	.5000	3		3	.0461	10		1	.0001	17
6	0	.0156	6		4	.1334	9		2	.0007	16
	1	.1094	5		5	.2905	8		3	.0038	15
	2	.3438	4		6	.5000	7		4	.0154	14
	3	.6562	3	14	0	.0000	14		5	.0481	13
7	0	.0078	7		1	.0009	13		6	.1189	12
	1	.0625	6		2	.0065	12		7	.2403	11
	2	.2266	5		3	.0287	11		8	.4073	10
	3	.5000	4		4	.0898	10		9	.5927	9
8	0	.0039	8		5	.2120	9	19	0	.0000	19
	1	.0352	7		6	.3953	8		1	.0000	18
	2	.1445	6		7	.6047	7		2	.0004	17
	3	.3633	5	15	0	.0000	15		3	.0022	16
	4	.6367	4		1	.0005	14		4	.0096	15
9	0	.0020	9		2	.0037	13		5	.0318	14
	1	.0195	8		3	.0176	12		6	.0835	13
	2	.0898	7		4	.0592	11		7	.1796	12
	3	.2539	6		5	.1509	10		8	.3238	11
	4	.5000	5		6	.3036	9		9	.5000	10
10	0	.0010	10		7	.5000	8	20	0	.0000	20
	1	.0107	9	16	0	.0000	16		1	.0000	19
	2	.0547	8		1	.0003	15		2	.0002	18
	3	.1719	7		2	.0021	14		3	.0013	17
	4	.3770	6		3	.0106	13		4	.0059	16
	5	.6220	5		4	.0384	12		5	.0207	15
11	0	.0005	11		5	.1051	11		6	.0577	14
	1	.0059	10		6	.2272	10		7	.1316	13
	2	.0327	9		7	.4018	9		8	.2517	12
	3	.1133	8		8	.5982	8		9	.4119	11
	4	.2744	7						10	.5881	10
	5	.5000	6								

ـــ $n > 20$ يمكن استخدام

$$Z+R = \frac{s_+ - 0.5 - .5n}{.5\sqrt{n}} \qquad Z-R = \frac{s_- - 0.5 - .5n}{.5\sqrt{n}}$$

8) جدول توزيع إحصائية اختبار ويلكوكسن للرتب المُعلمة

n	يسار T	P*	يمين T	n	يسار T	P*	يمين T	n	يسار T	P*	يمين T	n	يسار T	P*	يمين T
2	0	.250	3		7	.074	29		18	.188	37	12	0	.000	78
	1	.500	2		8	.098	28		19	.216	36		1	.000	77
3	0	.125	6		9	.125	27		20	.246	35		2	.001	76
	1	.250	5		10	.156	26		21	.278	34		3	.001	75
	2	.375	4		11	.191	25		22	.312	33		4	.002	74
	3	.625	3		12	.230	24		23	.348	32		5	.002	73
4	0	.062	10		13	.273	23		24	.385	31		6	.003	72
	1	.125	9		14	.320	22		25	.423	30		7	.005	71
	2	.188	8		15	.371	21		26	.461	29		8	.006	70
	3	.312	7		16	.422	20		27	.500	28		9	.008	69
	4	.438	6		17	.473	19	11	0	.000	66		10	.010	68
	5	.562	5		18	.527	18		1	.001	65		11	.013	67
5	0	.031	15						2	.001	64		12	.017	66
	1	.062	14	9	0	.002	45		3	.002	63		13	.021	65
	2	.094	13		1	.004	44		4	.003	62		14	.026	64
	3	.156	12		2	.006	43		5	.005	61		15	.032	63
	4	.219	11		3	.010	42		6	.007	60		16	.039	62
	5	.312	10		4	.014	41		7	.009	59		17	.046	61
	6	.406	9		5	.020	40		8	.012	58		18	.055	60
	7	.500	8		6	.027	39		9	.016	57		19	.065	59
6	0	.016	21		7	.037	38		10	.021	56		20	.076	58
	1	.031	20		8	.049	37		11	.027	55		21	.088	57
	2	.047	19		9	.064	36		12	.034	54		22	.102	56
	3	.078	18		10	.082	35		13	.042	53		23	.117	55
	4	.109	17		11	.102	34		14	.051	52		24	.133	54
	5	.156	16		12	.125	33		15	.062	51		25	.151	53
	6	.219	15		13	.150	32		16	.074	50		26	.170	52
	7	.281	14		14	.180	31		17	.087	49		27	.190	51
	8	.344	13		15	.213	30		18	.103	48		28	.212	50
	9	.422	12		16	.248	29		19	.120	47		29	.235	49
	10	.500	11		17	.285	28		20	.139	46		30	.259	48
7	0	.008	28		18	.326	27		21	.160	45		31	.285	47
	1	.016	27		19	.367	26		22	.183	44		32	.311	46
	2	.023	26		20	.410	25		23	.207	43		33	.339	45
	3	.039	25		21	.455	24		24	.232	42		34	.367	44
	4	.055	24		22	.500	23		25	.260	41		35	.396	43
	5	.078	23	10	0	.001	55		26	.289	40		36	.425	42
	6	.109	22		1	.002	54		27	.319	39		37	.455	41
	7	.148	21		2	.003	53		28	.350	38		38	.485	40
	8	.188	20		3	.005	52		29	.382	37		39	.515	39
	9	.234	19		4	.007	51		30	.416	36	13	0	.000	91
	10	.289	18		5	.010	50		31	.449	35		1	.000	90
	11	.344	17		6	.014	49		32	.483	34		2	.000	89
	12	.406	16		7	.019	48		33	.517	33		3	.001	88
	13	.469	15		8	.024	47						4	.001	87
	14	.531	14		9	.032	46						5	.001	86
8	0	.004	36		10	.042	45						6	.002	85
	1	.008	35		11	.053	44						7	.002	84
	2	.012	34		12	.065	43						8	.003	83
	3	.020	33		13	.080	42						9	.004	82
	4	.027	32		14	.097	41						10	.005	81
	5	.039	31		15	.116	40								
	6	.055	30		16	.138	39								
					17	.161	38								

Damascus University

n	T	P	T	n	T	P	T	n	T	P	T	N	T	P	T
13	11	.007	80	14	16	.010	89	15	0	.000	120	16	31	.003	99
	12	.009	79		17	.012	88		1	.000	119		32	.060	98
	13	.011	78		18	.015	87		2	.000	118		33	.068	97
	14	.012	77		19	.018	86		3	.000	117		34	.076	96
	15	.016	76		20	.021	85		4	.000	116		35	.084	95
	16	.020	75		21	.025	84		5	.000	115		36	.094	94
	17	.024	74		22	.029	83		6	.000	114		37	.104	93
	18	.029	73		23	.034	82		7	.001	113		38	.115	92
	19	.034	72		24	.039	81		8	.001	112		39	.126	91
	20	.040	71		25	.045	80		9	.001	111		40	.138	90
	21	.047	70		26	.052	79		10	.001	110		41	.151	79
	22	.055	69		27	.059	78		11	.002	109		42	.165	78
	23	.064	68		28	.068	77		12	.002	108		43	.180	77
	24	.073	67		29	.077	76		13	.003	107		44	.195	76
	25	.084	66		30	.086	75		14	.003	106		45	.211	75
	26	.095	65		31	.097	74		15	.004	105		46	.227	74
	27	.108	64		32	.108	73		16	.005	104		47	.244	73
	28	.122	63		33	.121	72		17	.006	103		48	.262	72
	29	.137	62		34	.134	71		18	.008	102		49	.281	71
	30	.153	61		35	.148	70		19	.009	101		50	.300	70
	31	.170	60		36	.163	69		20	.011	100		51	.319	69
	32	.188	59		37	.179	68		21	.013	99		52	.339	68
	33	.207	58		38	.196	67		22	.015	98		53	.360	67
	34	.227	57		39	.213	66		23	.018	97		54	.381	66
	35	.249	56		40	.232	65		24	.021	96		55	.402	65
	36	.271	55		41	.251	64		25	.024	95		56	.423	64
	37	.294	54		42	.271	63		26	.028	94		57	.445	63
	38	.318	53		43	.292	62		27	.032	93		58	.467	62
	39	.342	52		44	.313	61		28	.036	92		59	.489	61
	40	.368	51		45	.335	60		29	.042	91		60	.511	60
	41	.393	50		46	.357	59		30	.047	90				
	42	.420	49		47	.380	58								
	43	.446	48		48	.404	57								
	44	.473	47		49	.428	56								
	45	.500	46		50	.452	55								
14	0	.000	105		51	.476	54								
	1	.000	104		52	.500	53								
	2	.000	103												
	3	.000	102												
	4	.000	101												
	5	.001	100												
	6	.001	99												
	7	.001	98												
	8	.002	97												
	9	.002	96												
	10	.003	95												
	11	.003	94												
	12	.004	93												
	13	.005	92												
	14	.007	91												
	15	.008	90												

عندما تكون قيمة n >15 استخدم جدول التوزيع الطبيعي لايجاد احتمال قيمة تساوي أو تزيد عن T و ذلك باستخدام الإحصائية .

$$Z = \frac{T-0.5-n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

حيث T أكبر T_+ و T_-

(9

جدول القيم الحرجة الصغرى للتتابع

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

جدول القيم الحرجة الكبرى للتتابع

n_1	n_2																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4				9	9														
5			9	10	10	11	11												
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7				11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8				11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9					13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10					13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11					13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12					13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13						15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14						15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15						15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16							17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17							17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18							17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19							17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20							17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

(10

11) توزيع عدد التلاحقات r

يعطى الجدول لقيم n_1 و n_2 و r قيمة P^* وهي الاحتمال التراكمي من الطرف الأيمن أو الأيسر (حسب ما موضح فوق كل جدول) وحتى قيمة r

– احتمالات الطرف الأيسر –

n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*
2	2	2	.333	2	18	2	.011	3	14	2	.003	4	10	2	.002
2	3	2	.200			3	.105			3	.025			3	.01
		3	.500			4	.284			4	.101			4	.06
2	4	2	.133	3	3	2	.100			5	.350			5	.20
		3	.400			3	.300	3	15	2	.002			6	.41
2	5	2	.095	3	4	2	.057			3	.022	4	11	2	.00
		3	.333			3	.200			4	.091			3	.01
2	6	2	.071	3	5	2	.036			5	.331			4	.05
		3	.286			3	.143	3	16	2	.002			5	.17
2	7	2	.056			4	.429			3	.020			6	.37
		3	.250	3	6	2	.024			4	.082	4	12	2	.00
2	8	2	.044			3	.107			5	.314			3	.00
		3	.222			4	.345	3	17	2	.002			4	.04
2	9	2	.036	3	7	2	.017			3	.018			5	.15
		3	.200			3	.083			4	.074			6	.33
		4	.491			4	.283			5	.298	4	13	2	.00
2	10	2	.030	3	8	2	.012	4	4	2	.029			3	.00
		3	.182			3	.067			3	.114			4	.05
		4	.455			4	.236			4	.371			5	.13
2	11	2	.026	3	9	2	.009	4	5	2	.016			6	.30
		3	.167			3	.055			3	.071	4	14	2	.00
		4	.423			4	.200			4	.262			3	.00
2	12	2	.022			5	.491			5	.500			4	.03
		3	.154	3	10	2	.007	4	6	2	.010			5	.12
		4	.396			3	.045			3	.048			6	.27
2	13	2	.019			4	.171			4	.190	4	15	2	.00
		3	.143			5	.455			5	.405			3	.00
		4	.371	3	11	2	.005	4	7	2	.006			4	.02
2	14	2	.017			3	.038			3	.033			5	.10
		3	.133			4	.148			4	.142			6	.24
		4	.350			5	.423			5	.333	4	16	2	.00
2	15	2	.015	3	12	2	.004	4	8	2	.004			3	.00
		3	.125			3	.033			3	.024			4	.02
		4	.331			4	.130			4	.109			5	.09
2	16	2	.013			5	.396			5	.279			6	.22
		3	.118	3	13	2	.004	4	9	2	.003	5	5	2	.00
		4	.314			3	.029			3	.018			3	.04
2	17	2	.012			4	.114			4	.085			4	.16
		3	.111			5	.371			5	.236			5	.35
		4	.298							6	.471				

Damascus University

تابع احتمالات الطرف الأيسر

n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*
5	6	2	.004	5	14	2	.000	6	11	2	.000	7	9	2	.000
		3	.024			3	.002			3	.001			3	.001
		4	.110			4	.011			4	.009			4	.010
		5	.262			5	.044			5	.036			5	.035
5	7	2	.003			6	.125			6	.108			6	.108
		3	.015			7	.299			7	.242			7	.231
		4	.076			8	.496			8	.436			8	.427
		5	.197	5	15	2	.000	6	12	2	.000	7	10	2	.000
		6	.424			3	.001			3	.001			3	.001
5	8	2	.002			4	.009			4	.007			4	.006
		3	.010			5	.037			5	.028			5	.024
		4	.054			6	.108			6	.087			6	.080
		5	.152			7	.272			7	.205			7	.182
		6	.347			8	.460			8	.383			8	.355
5	9	2	.001	6	6	2	.002	6	13	2	.000	7	11	2	.000
		3	.007			3	.013			3	.001			3	.001
		4	.039			4	.067			4	.005			4	.004
		5	.119			5	.175			5	.022			5	.018
		6	.287			6	.392			6	.070			6	.060
5	10	2	.001	6	7	2	.001			7	.176			7	.165
		3	.005			3	.008			8	.338			8	.296
		4	.029			4	.043	6	14	2	.000			9	.684
		5	.095			5	.121			3	.001	7	12	2	.000
		6	.239			6	.296			4	.004			3	.000
		7	.455			7	.500			5	.017			4	.003
5	11	2	.000	6	8	2	.001			6	.058			5	.013
		3	.004			3	.005			7	.151			6	.046
		4	.022			4	.028			8	.299			7	.117
		5	.077			5	.086	7	7	2	.001			8	.247
		6	.201			6	.226			3	.004			9	.428
		7	.407			7	.413			4	.025	7	13	2	.000
5	12	2	.000	6	9	2	.000			5	.078			3	.000
		3	.003			3	.003			6	.209			4	.002
		4	.017			4	.019			7	.383			5	.010
		5	.063			5	.063	7	8	2	.000			6	.035
		6	.170			6	.175			3	.002			7	.095
		7	.365			7	.343			4	.015			8	.208
5	13	2	.000	6	10	2	.000			5	.051			9	.378
		3	.002			3	.002			6	.149	8	8	2	.000
		4	.013			4	.013			7	.296			3	.001
		5	.053			5	.047							4	.009
		6	.145			6	.137							5	.032
		7	.330			7	.287							6	.100
						8	.497							7	.214
														8	.405

Damascus University

تابع احتمالات الطرف الأيسر

n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*	n_1	n_2	r	P^*
8	9	2	.000	9	9	2	.000	10	10	2	.000	11	11	2	[illegible]
		3	.001			3	.000			3	.000			3	[illegible]
		4	.005			4	.003			4	.001			4	[illegible]
		5	.020			5	.012			5	.004			5	[illegible]
		6	.069			6	.044			6	.019			6	[illegible]
		7	.157			7	.109			7	.051			7	[illegible]
		8	.319			8	.238			8	.128			8	[illegible]
		9	.500			9	.399			9	.242			9	[illegible]
8	10	2	.000	9	10	2	.000			10	.414			10	[illegible]
		3	.000			3	.000	10	11	2	.000			11	[illegible]
		4	.003			4	.002			3	.000	11	12	2	[illegible]
		5	.013			5	.008			4	.001			3	[illegible]
		6	.048			6	.029			5	.003			4	[illegible]
		7	.117			7	.077			6	.012			5	[illegible]
		8	.251			8	.179			7	.035			6	[illegible]
		9	.419			9	.319			8	.092			7	[illegible]
8	11	2	.000	9	11	2	.000			9	.185			8	[illegible]
		3	.000			3	.000			10	.335			9	[illegible]
		4	.002			4	.001			11	.500			10	[illegible]
		5	.009			5	.005	10	12	2	.000			11	[illegible]
		6	.034			6	.020			3	.000	12	12	2	[illegible]
		7	.088			7	.055			4	.000			3	[illegible]
		8	.199			8	.135			5	.002			4	[illegible]
		9	.352			9	.255			6	.008			5	[illegible]
8	12	2	.000			10	.430			7	.024			6	[illegible]
		3	.000	9	12	2	.000			8	.067			7	[illegible]
		4	.001			3	.000			9	.142			8	[illegible]
		5	.006			4	.001			10	.271			9	[illegible]
		6	.025			5	.003			11	.425			10	[illegible]
		7	.067			6	.014							11	[illegible]
		8	.159			7	.040							12	[illegible]
		9	.297			8	.103								
		10	.480			9	.205								
						10	.362								

n_1	n_2	r	P	n_1	n_2	r	P	n_1	n_2	r	P	n_1	n_2	r	P
2	2	4	.333	4	10	9	.152	5	14	11	.118	7	7	11	.003
2	3	5	.200			10	.324			10	.214			12	.0004
		4	.200	4	11	9	.174	6	12	11	.129			12	.0012
3	4	5	.200			8	.330			10	.227			11	.0018
3	5	5	.286	4	12	9	.183	6	6	12	.2842			10	.1298
3	6	5	.227			8	.333			11	.1013			9	.1282
3	7	5	.491	4	13	9	.196			10	.1987	7	8	12	.0002
3	8	5	.491			9	.191			9	.1772			11	.0018
3	9	6	.107	4	14	9	.231			8	.1772			10	.0112
		5	.200			8	.423	6	7	13	.0604			12	.0001
3	10	6	.0714	4	15	9	.154			12	.0018			11	.1124
		5	.250			8	.446			11	.0034			10	.2276
		4	.467	4	16	9	.2402			10	.1121			9	.4884
3	11	7	.0971			8	.479			9	.2227	7	9	12	.0001
		6	.2381	1	3	10	.0238			8	.2292			11	.0058
3	12	7	.2159			9	.1049	6	8	13	.0015			11	.0012
		6	.1357			8	.1357			12	.0018			12	.0084
3	13	7	.1457			9	.1172			11	.0064			11	.1426
		6	.417	1	4	11	.0333			10	.1149			10	.3176
3	14	7	.2222			10	.0024			9	.3214	7	10	12	.0002
		6	.4697			9	.0690	6	9	13	.0006			11	.0010
4	4	6	.2222			8	.2424			12	.0022			13	.0062
4	5	7	.2364			9	.1479			11	.0010			12	.1171
4	6	7	.2302	2	7	11	.0028			10	.0026			11	.3777
4	7	7	.3611			10	.0041			9	.0121			10	.4791
4	8	7	.1961			9	.1258	6	10	13	.0012	7	11	13	.0004
4	9	7	.4321			8	.3498			12	.0042			12	.0017
4	10	8	.1429	3	8	11	.0106			11	.0106			11	.0061
4	11	8	.2645			10	.0371			10	.0284			12	.0120
4	12	7	.4691			9	.0227	6	11	13	.0017			11	.0118
4	13	8	.0839			8	.4524			12	.0030	7	12	13	.0007
		7	.2154	3	9	11	.0060			11	.0178			12	.0023
		6	.3571			10	.0028			10	.0106			11	.0004
4	14	9	.0634			9	.2386	6	12	13	.0002			12	.0179
		8	.4078			8	.4980			11	.0074			11	.0178
		7	.2308	3	10	11	.0046			11	.0117	7	13	13	.0010
		6	.3608			10	.0126			10	.0044			12	.0042
5	5	7	.2659			9	.1127	6	13	13	.0001			12	.0126
		6	.1310	4	11	11	.0028			12	.0042			12	.0014
		7	.3310			10	.0134			11	.0027			11	.0050
5	7	8	.0962			9	.0464			10	.0126	8	8	14	.0008
		6	.1797	5	11	11	.0077	6	14	13	.0030			13	.0023
		7	.2398			10	.0181			12	.0111			14	.0002
5	8	8	.0871			9	.0423			11	.0299			11	.0017
		8	.3212	3	12	11	.0062			10	.0082			12	.0100
		7	.4407			10	.0297							11	.0234
5	9	9	.0608			9	.0841							10	.0402
		8	.2333												

تابع احتمالات الطرف الأيمن

n_1	n_2	r	P*	n_1	n_2	r	P*	n_1	n_2	r	P*	n_1	n_2	r	P*
8	9	17	.000	9	9	18	.000	10	10	20	.000	11	11	22	.0
		16	.001			17	.000			19	.000			21	.0
		15	.004			16	.003			18	.000			20	.0
		14	.020			15	.012			17	.001			19	.0
		13	.061			14	.044			16	.004			18	.0
		12	.157			13	.109			17	.019			17	.0
		11	.298			12	.238			16	.051			16	.0
		10	.500			11	.399			15	.128			15	.1
8	10	17	.000	9	10	19	.000			14	.242			14	.2
		16	.002			18	.000			13	.414			13	.4
		15	.010			17	.001	10	11	21	.000	11	12	23	.0
		14	.036			16	.008			20	.000			22	.0
		13	.097			15	.026			19	.000			21	.0
		12	.218			14	.077			18	.003			20	.0
		11	.379			13	.166			17	.010			19	.0
8	11	17	.001			12	.319			16	.035			18	.0
		16	.004			11	.490			15	.085			17	.0
		15	.018	9	11	19	.000			14	.185			16	.0
		14	.057			18	.001			13	.320			15	.1
		13	.138			17	.003			12	.500			14	.3
		12	.278			16	.015	10	12	21	.000			13	.4
		11	.453			15	.045			20	.000	12	12	24	.0
8	12	17	.001			14	.115			19	.001			23	.0
		16	.007			13	.227			18	.006			22	.0
		15	.029			12	.395			17	.020			21	.0
		14	.080							16	.056			20	.0
		13	.183							15	.125			19	.0
		12	.337							14	.245			18	.0
										13	.395			17	.0
														16	.1
														15	.2
														14	.4

لقيم n_1 و n_2 أكبر من 12 و $(n_1 + n_2) = N > 20$ يمكن حساب

$$z = \frac{r = 0.5 - [-2n_1 n_2 / N]}{\sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - N)}{N^2 (N-1)}}}$$

حيث الإشارة في البسط تكون "+" للطرف الأيسر و "-" للأيمن ، وإيجاد قيم p* التقريبية (احتمال قيمة أقل من Z بالطرف الأيسر أو قيمة أكبر منها بالأيمن) من جدول التوزيع الطبيعي.

12)توزيع احصالية ويلكوكسن لمجموع الرتب

عند n_x و n_y معينة، قيمة P^* هي احتمال قيمة تساوي أو تقل عن T_x عندما تكون $T_x \le n_x \frac{(n_x+n_y+1)}{2}$ ونستخدم الطرف الأيسر (قيمة T_x بالعمود يسار)، بينما تعطى P^* احتمال قيمه تساوي أو تزيد عن T_x عندما $T_x \ge n_x \frac{(n_x+n_y+1)}{2}$ ونستخدم الطرف الأيمن (T_x بالعمود يمين)، $n_x \le n_y$.

n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x
	$n_x = 1$				$n_x = 2$				$n_x = 2$		
1	1	.500	2	2	3	.167	7	8	3	.022	19
2	1	.333	3		4	.333	6		4	.044	18
	2	.667	2		5	.667	5		5	.089	17
3	1	.250	4	3	3	.100	9		6	.133	16
	2	.500	3		4	.200	8		7	.200	15
4	1	.200	5		5	.400	7		8	.267	14
	2	.400	4		6	.600	6		9	.356	13
	3	.600	3	4	3	.067	11		10	.444	12
5	1	.167	6		4	.133	10		11	.556	11
	2	.333	5		5	.267	9	9	3	.018	21
	3	.500	4		6	.400	8		4	.036	20
6	1	.143	7		7	.600	7		5	.073	19
	2	.286	6	5	3	.048	13		6	.109	18
	3	.429	5		4	.095	12		7	.164	17
	4	.571	4		5	.190	11		8	.218	16
7	1	.125	8		6	.286	10		9	.291	15
	2	.250	7		7	.429	9		10	.364	14
	3	.375	6		8	.571	8		11	.455	13
	4	.500	5	6	3	.036	15		12	.545	12
8	1	.111	9		4	.071	14	10	3	.015	23
	2	.222	8		5	.143	13		4	.030	22
	3	.333	7		6	.214	12		5	.061	21
	4	.444	6		7	.321	11		6	.091	20
	5	.556	5		8	.429	10		7	.136	19
9	1	.100	10		9	.571	9		8	.182	18
	2	.200	9	7	3	.028	17		9	.242	17
	3	.300	8		4	.056	16		10	.303	16
	4	.400	7		5	.111	15		11	.379	15
	5	.500	6		6	.167	14		12	.455	14
10	1	.091	11		7	.250	13		13	.545	13
	2	.182	10		8	.333	12				
	3	.273	9		9	.444	11				
	4	.364	8		10	.556	10				
	5	.455	7								
	6	.545	6								

n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x
	$n_x = 3$				$n_x = 3$				$n_x = 4$		
3	6	.050	15	8	6	.006	30	4	10	.014	26
	7	.100	14		7	.012	29		11	.029	25
	8	.200	13		8	.024	28		12	.057	24
	9	.350	12		9	.042	27		13	.100	23
	10	.500	11		10	.067	26		14	.171	22
4	6	.029	18		11	.097	25		15	.243	21
	7	.057	17		12	.139	24		16	.343	20
	8	.114	16		13	.188	23		17	.443	19
	9	.200	15		14	.248	22		18	.557	18
	10	.314	14		15	.315	21	5	10	.008	30
	11	.429	13		16	.388	20		11	.016	29
	12	.571	12		17	.461	19		12	.032	28
5	6	.018	21		18	.539	18		13	.056	27
	7	.036	20	9	6	.005	33		14	.095	26
	8	.071	19		7	.009	32		15	.143	25
	9	.125	18		8	.018	31		16	.206	24
	10	.196	17		9	.032	30		17	.278	23
	11	.286	16		10	.050	29		18	.365	22
	12	.393	15		11	.073	28		19	.452	21
	13	.500	14		12	.105	27		20	.548	20
6	6	.012	24		13	.141	26	6	10	.005	34
	7	.024	23		14	.186	25		11	.010	33
	8	.048	22		15	.241	24		12	.019	32
	9	.083	21		16	.300	23		13	.033	31
	10	.131	20		17	.364	22		14	.057	30
	11	.190	19		18	.432	21		15	.086	29
	12	.274	18		19	.500	20		16	.129	28
	13	.357	17	10	6	.003	36		17	.176	27
	14	.452	16		7	.007	35		18	.238	26
	15	.548	15		8	.014	34		19	.305	25
7	6	.008	27		9	.024	33		20	.381	24
	7	.017	26		10	.038	32		21	.457	23
	8	.033	25		11	.056	31		22	.543	22
	9	.058	24		12	.080	30				
	10	.092	23		13	.108	29				
	11	.133	22		14	.143	28				
	12	.192	21		15	.185	27				
	13	.258	20		16	.234	26				
	14	.333	19		17	.287	25				
	15	.417	18		18	.346	24				
	16	.500	17		19	.406	23				
					20	.469	22				
					21	.531	21				

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

n_y	يسار T_x	p^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	p^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	p^*	يمين T_x
	$n_x = 4$				$n_x = 4$				$n_x = 5$		
7	10	.003	38	9	10	.001	46	5	15	.004	40
	11	.006	37		11	.003	45		16	.008	39
	12	.012	36		12	.006	44		17	.016	38
	13	.021	35		13	.010	43		18	.028	37
	14	.036	34		14	.017	42		19	.048	36
	15	.055	33		15	.025	41		20	.075	35
	16	.082	32		16	.038	40		21	.111	34
	17	.115	31		17	.053	39		22	.155	33
	18	.158	30		18	.074	38		23	.210	32
	19	.206	29		19	.099	37		24	.274	31
	20	.264	28		20	.130	36		25	.345	30
	21	.324	27		21	.165	35		26	.421	29
	22	.394	26		22	.207	34		27	.500	28
	23	.464	25		23	.252	33	6	15	.002	45
	24	.536	24		24	.302	32		16	.004	44
8	10	.002	42		25	.355	31		17	.009	43
	11	.004	41		26	.413	30		18	.015	42
	12	.008	40		27	.470	29		19	.026	41
	13	.014	39		28	.530	28		20	.041	40
	14	.024	38	10	10	.001	50		21	.063	39
	15	.036	37		11	.002	49		22	.089	38
	16	.055	36		12	.004	48		23	.123	37
	17	.077	35		13	.007	47		24	.165	36
	18	.107	34		14	.012	46		25	.214	35
	19	.141	33		15	.018	45		26	.268	34
	20	.184	32		16	.027	44		27	.331	33
	21	.230	31		17	.038	43		28	.396	32
	22	.285	30		18	.053	42		29	.465	31
	23	.341	29		19	.071	41		30	.535	30
	24	.404	28		20	.094	40				
	25	.467	27		21	.120	39				
	26	.533	26		22	.152	38				
					23	.187	37				
					24	.227	36				
					25	.270	35				
					26	.318	34				
					27	.367	33				
					28	.420	32				
					29	.473	31				
					30	.527	30				

Damascus University

n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_y	P^*	يمين T_y
	$n_x = 5$				$n_x = 5$				$n_x = 6$		
7	15	.001	50	9	15	.000	60	6	21	.001	57
	16	.003	49		16	.001	59		22	.002	56
	17	.005	48		17	.002	58		23	.004	55
	18	.009	47		18	.003	57		24	.008	54
	19	.015	46		19	.006	56		25	.013	53
	20	.024	45		20	.009	55		26	.021	52
	21	.037	44		21	.014	54		27	.032	51
	22	.053	43		22	.021	53		28	.047	50
	23	.074	42		23	.030	52		29	.066	49
	24	.101	41		24	.041	51		30	.090	48
	25	.134	40		25	.056	50		31	.120	47
	26	.172	39		26	.073	49		32	.155	46
	27	.216	38		27	.095	48		33	.197	45
	28	.265	37		28	.120	47		34	.242	44
	29	.319	36		29	.149	46		35	.294	43
	30	.378	35		30	.182	45		36	.350	42
	31	.438	34		31	.219	44		37	.409	41
	32	.500	33		32	.259	43		38	.469	40
8	15	.001	55		33	.303	42		39	.531	39
	16	.002	54		34	.350	41	7	21	.001	63
	17	.003	53		35	.399	40		22	.001	62
	18	.005	52		36	.449	39		23	.002	61
	19	.009	51		37	.500	38		24	.004	60
	20	.015	50	10	15	.000	65		25	.007	59
	21	.023	49		16	.001	64		26	.011	58
	22	.033	48		17	.001	63		27	.017	57
	23	.047	47		18	.002	62		28	.026	56
	24	.064	46		19	.004	61		29	.037	55
	25	.085	45		20	.006	60		30	.051	54
	26	.111	44		21	.010	59		31	.069	53
	27	.142	43		22	.014	58		32	.090	52
	28	.177	42		23	.020	57		33	.117	51
	29	.218	41		24	.028	56		34	.147	50
	30	.262	40		25	.038	55		35	.183	49
	31	.311	39		26	.050	54		36	.223	48
	32	.362	38		27	.065	53		37	.267	47
	33	.416	37		28	.082	52		38	.314	46
	34	.472	36		29	.103	51		39	.365	45
	35	.528	35		30	.127	50		40	.418	44
					31	.155	49		41	.473	43
					32	.185	48		42	.527	42
					33	.220	47				
					34	.257	46				
					35	.297	45				
					36	.339	44				
					37	.384	43				
					38	.430	42				
					39	.477	41				
					40	.523	40				

Damascus University

n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x
	$n_x = 6$				$n_x = 6$				$n_x = 7$		
8	21	.000	69	9	41	.228	55	7	28	.000	77
	22	.001	68		42	.264	54		29	.001	76
	23	.001	67		43	.303	53		30	.001	75
	24	.002	66		44	.344	52		31	.002	74
	25	.004	65		45	.388	51		32	.003	73
	26	.006	64		46	.432	50		33	.006	72
	27	.010	63		47	.477	49		34	.009	71
	28	.015	62		48	.523	48		35	.013	70
	29	.021	61	10	21	.000	81		36	.019	69
	30	.030	60		22	.000	80		37	.027	68
	31	.041	59		23	.000	79		38	.036	67
	32	.054	58		24	.001	78		39	.049	66
	33	.071	57		25	.001	77		40	.064	65
	34	.091	56		26	.002	76		41	.082	64
	35	.114	55		27	.004	75		42	.104	63
	36	.141	54		28	.005	74		43	.130	62
	37	.172	53		29	.008	73		44	.159	61
	38	.207	52		30	.011	72		45	.191	60
	39	.245	51		31	.016	71		46	.228	59
	40	.286	50		32	.021	70		47	.267	58
	41	.331	49		33	.028	69		48	.310	57
	42	.377	48		34	.036	68		49	.355	56
	43	.426	47		35	.047	67		50	.402	55
	44	.475	46		36	.059	66		51	.451	54
	45	.525	45		37	.074	65		52	.500	53
9	21	.000	75		38	.090	64	8	28	.000	84
	22	.000	74		39	.110	63		29	.000	83
	23	.001	73		40	.132	62		30	.001	82
	24	.001	72		41	.157	61		31	.001	81
	25	.002	71		42	.184	60		32	.002	80
	26	.004	70		43	.214	59		33	.003	79
	27	.006	69		44	.246	58		34	.005	78
	28	.009	68		45	.281	57		35	.007	77
	29	.013	67		46	.318	56		36	.010	76
	30	.018	66		47	.356	55		37	.014	75
	31	.025	65		48	.396	54		38	.020	74
	32	.033	64		49	.437	53		39	.027	73
	33	.044	63		50	.479	52		40	.036	72
	34	.057	62		51	.521	51		41	.047	71
	35	.072	61						42	.060	70
	36	.091	60						43	.076	69
	37	.112	59						44	.095	68
	38	.136	58						45	.116	67
	39	.164	57						46	.140	66
	40	.194	56						47	.168	65

Damascus University

n_y	T_x	P^*	T_x	n_y	T_x	P^*	T_x	n_y	T_x	P^*	T_x
	$n_x = 7$				$n_x = 7$				$n_x = 8$		
8	48	.198	64	10	28	.000	98	8	36	.000	100
	49	.232	63		29	.000	97		37	.000	99
	50	.268	62		30	.000	96		38	.000	98
	51	.306	61		31	.000	95		39	.001	97
	52	.347	60		32	.001	94		40	.001	96
	53	.389	59		33	.001	93		41	.001	95
	54	.433	58		34	.002	92		42	.002	94
	55	.478	57		35	.002	91		43	.003	93
	56	.522	56		36	.003	90		44	.005	92
9	28	.000	91		37	.005	89		45	.007	91
	29	.000	90		38	.007	88		46	.010	90
	30	.000	89		39	.009	87		47	.014	89
	31	.001	88		40	.012	86		48	.019	88
	32	.001	87		41	.017	85		49	.025	87
	33	.002	86		42	.022	84		50	.032	86
	34	.003	85		43	.028	83		51	.041	85
	35	.004	84		44	.035	82		52	.052	84
	36	.006	83		45	.044	81		53	.065	83
	37	.008	82		46	.054	80		54	.080	82
	38	.013	81		47	.067	79		55	.097	81
	39	.016	80		48	.081	78		56	.117	80
	40	.021	79		49	.097	77		57	.139	79
	41	.027	78		50	.115	76		58	.164	78
	42	.036	77		51	.135	75		59	.191	77
	43	.045	76		52	.157	74		60	.221	76
	44	.057	75		53	.182	73		61	.253	75
	45	.071	74		54	.209	72		62	.287	74
	46	.087	73		55	.237	71		63	.323	73
	47	.105	72		56	.268	70		64	.360	72
	48	.126	71		57	.300	69		65	.399	71
	49	.150	70		58	.335	68		66	.439	70
	50	.176	69		59	.370	67		67	.480	69
	51	.204	68		60	.406	66		68	.520	68
	52	.235	67		61	.443	65	9	36	.000	108
	53	.268	66		62	.481	64		37	.000	107
	54	.303	65		63	.519	63		38	.000	106
	55	.340	64						39	.000	105
	56	.379	63						40	.000	104
	57	.419	62						41	.001	103
	58	.459	61						42	.001	102
	59	.500	60						43	.002	101

Damascus University

n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x
	$n_x = 8$				$n_x = 8$				$n_x = 9$		
9	44	.003	100	10	36	.000	116	9	45	.000	126
	45	.004	99		37	.000	115		46	.000	125
	46	.006	98		38	.000	114		47	.000	124
	47	.008	97		39	.000	113		48	.000	123
	48	.010	96		40	.000	112		49	.000	122
	49	.014	95		41	.000	111		50	.000	121
	50	.018	94		42	.001	110		51	.001	120
	51	.023	93		43	.001	109		52	.001	119
	52	.030	92		44	.002	108		53	.001	118
	53	.037	91		45	.002	107		54	.002	117
	54	.046	90		46	.003	106		55	.003	116
	55	.057	89		47	.004	105		56	.004	115
	56	.069	88		48	.006	104		57	.005	114
	57	.084	87		49	.008	103		58	.007	113
	58	.100	86		50	.010	102		59	.009	112
	59	.118	85		51	.013	101		60	.012	111
	60	.138	84		52	.017	100		61	.016	110
	61	.161	83		53	.022	99		62	.020	109
	62	.185	82		54	.027	98		63	.025	108
	63	.212	81		55	.034	97		64	.031	107
	64	.240	80		56	.042	96		65	.039	106
	65	.271	79		57	.051	95		66	.047	105
	66	.303	78		58	.061	94		67	.057	104
	67	.336	77		59	.073	93		68	.068	103
	68	.371	76		60	.086	92		69	.081	102
	69	.407	75		61	.102	91		70	.095	101
	70	.444	74		62	.118	90		71	.111	100
	71	.481	73		63	.137	89		72	.129	99
	72	.519	72		64	.158	88		73	.149	98
					65	.180	87		74	.170	97
					66	.204	86		75	.193	96
					67	.230	85		76	.218	95
					68	.257	84		77	.245	94
					69	.286	83		78	.273	93
					70	.317	82		79	.302	92
					71	.348	81		80	.333	91
					72	.381	80		81	.365	90
					73	.414	79		82	.398	89
					74	.448	78		83	.432	88
					75	.483	77		84	.466	87
					76	.517	76		85	.500	86

Damascus University

n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x	n_y	يسار T_x	P^*	يمين T_x
	$n_x = 9$				$n_x = 9$				$n_x = 10$		
10	45	.000	135	10	78	.178	102	10	73	.007	137
	46	.000	134		79	.200	101		74	.009	136
	47	.000	133		80	.223	100		75	.012	135
	48	.000	132		81	.248	99		76	.014	134
	49	.000	131		82	.274	98		77	.018	133
	50	.000	130		83	.302	97		78	.022	132
	51	.000	129		84	.330	96		79	.026	131
	52	.000	128		85	.360	95		80	.032	130
	53	.001	127		86	.390	94		81	.038	129
	54	.001	126		87	.421	93		82	.045	128
	55	.001	125		88	.452	92		83	.053	127
	56	.002	124		89	.484	91		84	.062	126
	57	.003	123		90	.516	90		85	.072	125
	58	.004	122						86	.083	124
	59	.005	121						87	.095	123
	60	.007	120		$n_x = 10$				88	.109	122
	61	.009	119						89	.124	121
	62	.011	118	10	55	.000	155		90	.140	120
	63	.014	117		56	.000	154		91	.157	119
	64	.017	116		57	.000	153		92	.176	118
	65	.022	115		58	.000	152		93	.197	117
	66	.027	114		59	.000	151		94	.218	116
	67	.033	113		60	.000	150		95	.241	115
	68	.039	112		61	.000	149		96	.264	114
	69	.047	111		62	.000	148		97	.289	113
	70	.056	110		63	.000	147		98	.315	112
	71	.067	109		64	.001	146		99	.342	111
	72	.078	108		65	.001	145		100	.370	110
	73	.091	107		66	.001	144		101	.398	109
	74	.106	106		67	.001	143		102	.427	108
	75	.121	105		68	.002	142		103	.456	107
	76	.139	104		69	.003	141		104	.485	106
	77	.158	103		70	.003	140		105	.515	105
					71	.004	139				
					72	.006	138				

إذا كانت قيمة n_x أو n_y أكبر من 10 يمكن أن نستخدم الإحصالية Z و جدول التوزيع الطبيعي حيث :

$$Z = \frac{T_X \pm 0.5 - n_X(n_X+n_Y+1)/2}{\sqrt{n_X\, n_Y(n_X+n_Y+1)/12}}$$

و حيث تكون الإشارة في البسط موجبة عند استخدام الطرف الأيسر و سالبة عند استخدام الطرف الأيمن .
و توزيع Z هو التوزيع الطبيعي المعياري ؛ أي أن الاحتمالات P^* تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي بإيجاد احتمال قيمة تساوي أو تقل على Z بالطرف الأيسر و احتمال قيمة تساوي أو تزيد على Z بالطرف الأيمن

13) كميات لاختبار مان – وتني

n_1	p	$n_1 \times 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
	.025	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	.05	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	.10	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	.005	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
3	.01	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6
	.025	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	.05	0	1	1	2	2	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
	.10	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
	.005	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9
4	.01	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	9	8	9	10	10	11
	.025	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15
	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	.10	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23
	.001	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8
	.005	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
5	.01	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	.025	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
	.05	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26
	.10	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31
	.001	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	.005	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19
6	.01	0	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23
	.025	0	2	3	4	6	7	9	11	12	14	16	17	18	20	22	23	25	26	28
	.05	1	3	4	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33
	.10	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39
	.001	0	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
	.005	0	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25
7	.01	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29
	.025	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
	.05	1	3	5	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40
	.10	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	42	44	47
	.001	0	0	0	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22
	.005	0	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
8	.01	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35
	.025	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42
	.05	2	4	6	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48
	.10	3	6	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.001	0	0	0	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27
	.005	0	1	2	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37
9	.01	0	2	4	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41
	.025	1	3	5	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49
	.05	2	5	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.10	3	6	10	13	16	19	23	26	29	32	36	39	42	46	49	53	56	59	63
	.001	0	0	1	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33
	.005	0	1	3	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43
10	.01	0	2	4	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48
	.025	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56
	.05	2	5	8	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63
	.10	4	7	11	14	18	22	25	29	33	37	40	44	48	52	55	59	63	67	71

كميات لاختبار مان – وتني

n_1	p	n_1n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38
	.005	0	1	3	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
11	.01	0	2	5	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54
	.025	1	4	7	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63
	.05	2	6	9	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70
	.10	4	8	12	16	20	24	28	32	37	41	45	49	53	58	62	66	70	74	79
	.001	0	0	1	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43
	.005	0	2	4	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55
12	.01	0	3	6	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61
	.025	2	5	8	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
	.05	3	6	10	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78
	.10	5	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	64	68	73	78	82	87
	.001	0	0	2	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49
	.005	0	2	4	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61
13	.01	1	3	6	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
	.025	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77
	.05	3	7	11	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85
	.10	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	75	80	85	90	95
	.001	0	0	2	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55
	.005	0	2	5	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68
14	.01	1	3	7	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74
	.025	2	6	10	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84
	.05	4	8	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93
	.10	5	11	16	21	26	32	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103
	.001	0	0	2	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60
	.005	0	3	6	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74
15	.01	1	4	8	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81
	.025	2	6	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91
	.05	4	8	13	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101
	.10	6	11	17	23	28	34	40	46	52	58	64	69	75	81	87	93	99	105	111
	.001	0	0	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66
	.005	0	3	6	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80
16	.01	1	4	8	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88
	.025	2	7	12	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99
	.05	4	9	15	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108
	.10	6	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120
	.001	0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71
	.005	0	3	7	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87
17	.01	1	5	9	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94
	.025	3	7	12	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
	.05	4	10	16	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116
	.10	7	13	19	26	32	39	46	53	59	66	73	80	86	93	100	107	114	121	128
	.001	0	1	4	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77
	.005	0	3	7	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93
18	.01	1	5	10	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101
	.025	3	8	13	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113
	.05	5	10	17	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124
	.10	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	78	85	92	99	107	114	121	129	136
	.001	0	1	4	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83
	.005	1	4	8	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100
19	.01	2	5	10	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108
	.025	3	8	14	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120
	.05	5	11	18	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131
	.10	8	15	22	29	37	44	52	59	67	74	82	90	98	105	113	121	129	136	144
	.001	0	1	4	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89
	.005	1	4	9	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106
20	.01	2	6	11	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115
	.025	3	9	15	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128
	.05	5	12	19	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139
	.10	8	16	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	120	128	136	144	152

14) القيم الحرجة بالطرف الأيمن لتوزيع احصائية سميرنوف
لعينتين متساويتي الحجم

طرف واحد	α =	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	α =	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
طرفين	α =	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	α =	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
n =	3	2/3	2/3				20	6/20	7/20	8/20	9/20	10/20
	4	3/4	3/4	3/4			21	6/21	7/21	8/21	9/21	10/21
	5	3/5	3/5	4/5	4/5	4/5	22	7/22	8/22	8/22	10/22	10/22
	6	3/6	4/6	4/6	5/6	5/6	23	7/23	8/23	9/23	10/23	10/23
	7	4/7	4/7	5/7	5/7	5/7	24	7/24	8/24	9/24	10/24	11/24
	8	4/8	4/8	5/8	5/8	5/8	25	7/25	8/25	9/25	10/25	11/25
	9	4/9	5/9	5/9	6/9	6/9	26	7/26	8/26	9/26	10/26	11/26
	10	4/10	5/10	6/10	6/10	7/10	27	7/27	8/27	9/27	11/27	11/27
	11	5/11	5/11	6/11	7/11	7/11	28	8/28	9/28	10/28	11/28	12/28
	12	5/12	5/12	6/12	7/12	7/12	29	8/29	9/29	10/29	11/29	12/29
	13	5/13	6/13	6/13	7/13	8/13	30	8/30	9/30	10/30	11/30	12/30
	14	5/14	6/14	7/14	7/14	8/14	31	8/31	9/31	10/31	11/31	12/31
	15	5/15	6/15	7/15	8/15	8/15	32	8/32	9/32	10/32	12/32	12/32
	16	6/16	6/16	7/16	8/16	9/16	34	8/34	10/34	11/34	12/34	13/34
	17	6/17	7/17	7/17	8/17	9/17	36	9/36	10/36	11/36	12/36	13/36
	18	6/18	7/18	8/18	9/18	9/19	38	9/38	10/38	11/38	13/38	14/38
	19	6/19	7/19	8/19	9/19	9/19	40	9/40	10/40	12/40	13/40	14/40
					Approximation for $n > 40$:			$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.92}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.15}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.30}{\sqrt{n}}$

15) كميات بتوزيع إحصائية سميرنوف لعينتين

بحجمين مختلفين . التقريب أسفل الجدول للعينات الكبيرة

طرف واحد	α =	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
طرفين	α =	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
$N_1 = 1$	$N_2 =$ 9	17/18				
	10	9/10				
$N_1 = 2$	$N_2 =$ 3	5/6				
	4	3/4				
	5	4/5	4/5			
	6	5/6	5/6			
	7	5/7	6/7			
	8	3/4	7/8	7/8		
	9	7/9	8/9	8/9		
	10	7/10	4/5	9/10		
$N_1 = 3$	$N_2 =$ 4	3/4	3/4			
	5	2/3	4/5	4/5		
	6	2/3	2/3	5/6		
	7	2/3	5/7	6/7	6/7	
	8	5/8	3/4	3/4	7/8	
	9	2/3	2/3	7/9	8/9	8/9
	10	3/5	7/10	4/5	9/10	9/10
	12	7/12	2/3	3/4	5/6	11/12
$N_1 = 4$	$N_2 =$ 5	3/5	3/4	4/5	4/5	
	6	7/12	2/3	3/4	5/6	5/6
	7	17/28	5/7	3/4	6/7	6/7
	8	5/8	5/8	3/4	7/8	7/8
	9	5/9	2/3	3/4	7/9	8/9
	10	11/20	13/20	7/10	4/5	4/5
	12	7/12	2/3	2/3	3/4	5/6
	16	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16
$N_1 = 5$	$N_2 =$ 6	3/5	2/3	2/3	5/6	5/6
	7	4/7	23/35	5/7	29/35	6/7
	8	11/20	5/8	27/40	4/5	4/5
	9	5/9	3/5	31/45	7/9	4/5
	10	1/2	3/5	7/10	7/10	4/5
	15	8/15	3/5	2/3	11/15	11/15
	20	1/2	11/20	3/5	7/10	3/4
$N_1 = 6$	$N_2 =$ 7	23/42	4/7	29/42	5/7	5/6
	8	1/2	7/12	2/3	3/4	3/4
	9	1/2	5/9	2/3	13/18	7/9
	10	1/2	17/30	19/30	7/10	11/15
	12	1/2	7/12	7/12	2/3	3/4
	18	4/9	5/9	11/18	2/3	13/18
	24	11/24	1/2	7/12	5/8	2/3

α =	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
α =	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
$N_1 = 7$ $N_2 =$ 8	27/56	33/56	5/8	41/56	3/4
9	31/63	5/9	40/63	5/7	47/63
10	33/70	39/70	43/70	7/10	5/7
14	3/7	1/2	4/7	9/14	5/7
28	3/7	13/23	15/28	17/28	9/14
$N_1 = 8$ $N_2 =$ 9	4/9	13/24	5/8	2/3	3/4
10	19/	21/40	23/40	27/40	7/10
12	11/24	1/2	7/12	5/8	2/3
16	7/16	1/2	9/16	5/8	5/8
31	13/32	17/16	1/2	9/16	9/32
$N_1 = 9$ $N_2 =$ 10	7/15	1/2	26/45	2/3	31/45
12	4/9	1/2	5/9	11/18	2/3
15	19/45	22/45	8/15	3/5	29/45
18	7/18	4/9	1/2	5/9	11/18
36	13/36	5/12	17/36	19/36	5/9
$N_1 = 10$ $N_2 =$ 15	2/5	7/15	1/2	17/30	19/30
20	2/5	9/20	1/2	11/20	3/5
40	7/20	2/5	9/20	1/2	
$N_1 = 12$ $N_2 =$ 15	23/60	9/20	1/2	11/20	7/12
16	3/8	7/16	23/48	13/24	7/12
18	13/36	5/12	17/36	19/36	5/9
20	11/30	5/12	7/15	31/60	17/30
$N_1 = 15$ $N_2 =$ 20	7/20	2/5	13/30	29/60	31/60
$N_1 = 16$ $N_2 =$ 20	27/80	31/80	17/40	19/40	41/80
	$1.07\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.22\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.36\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.52\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.63\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$

16) جدول اسميرنوف للعينتين المستقلتين المتساويتين

n	اختبار ذو اتجاهين		اختبار ذو اتجاه واحد	
	α = 0.05	α = 0.01	α = 0.05	α = 0.01
3			2/3	
4	3/4		3/4	
5	4/5	4/5	3/5	4/5
6	4/6	5/6	4/6	5/6
7	5/7	5/7	4/7	5/7
8	5/8	6/8	4/8	5/8
9	5/9	6/9	5/9	6/9
10	6/10	7/10	5/10	6/10
11	6/11	7/11	5/11	7/11
12	6/12	7/12	5/12	7/12
13	6/13	8/13	6/13	7/13
14	7/14	8/14	6/14	7/14
15	7/15	8/15	6/15	8/15
16	7/16	9/16	6/16	8/16
17	7/17	9/17	7/17	8/17
18	8/18	9/18	7/18	9/18
19	8/19	9/19	7/19	9/19
20	8/20	10/20	7/20	9/20
21	8/21	10/21	7/21	9/21
22	8/22	10/22	8/22	10/22
23	9/23	10/23	8/23	10/23
24	9/24	11/24	8/24	10/24
25	9/25	11/25	8/25	10/25
26	9/26	11/26	8/26	10/26
27	9/27	11/27	8/27	11/27
28	10/28	12/28	9/28	11/28
29	10/29	12/29	9/29	11/29
30	10/30	12/30	9/30	11/30
31	10/31	12/31	9/31	11/31
32	10/32	12/32	9/32	12/32
33	11/33	13/33	9/33	12/33
34	11/34	13/34	10/34	12/34
35	11/35	13/35	10/35	12/35
36	11/36	13/36	10/36	12/36
37	11/37	13/37	10/37	13/37
38	11/38	14/38	10/38	13/38
39	11/39	14/39	10/39	13/39
40	12/40	14/40	10/40	13/40
>40	1.92/√n	2.30/√n	1.73/√n	2.15/√n

17)جدول اسميرنوف للعينتين المستقلتين غير المتساويتين

n_1	n_2	اختبار ذو اتجاهين		اختبار ذو اتجاه واحد	
		$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	9				
1	10				
2	3				
2	4				
2	5			4/5	
2	6			5/6	
2	7			6/7	
2	8	7/8		7/8	
2	9	8/9		8/9	
2	10	9/10		4/5	
3	4			3/4	
3	5	4/5		4/5	
3	6	5/6		2/3	
3	7	6/7		5/7	6/7
3	8	3/4		3/4	7/8
3	9	7/9	8/9	2/3	8/9
3	10	4/5	9/10	7/10	9/10
3	12	3/4	11/12	2/3	5/6
4	5	4/5		3/4	4/5
4	6	3/4	5/6	2/3	5/6
4	7	3/4	6/7	5/7	6/7
4	8	3/4	7/8	5/8	7/8
4	9	3/4	8/9	2/3	7/9
4	10	7/10	4/5	13/20	4/5
4	12	2/3	5/6	2/3	3/4
4	16	11/16	13/16	5/8	3/4
5	6	2/3	5/6	2/3	5/6
5	7	5/7	6/7	23/35	29/35
5	8	27/40	4/5	5/8	4/5
5	9	31/45	4/5	3/5	7/9
5	10	7/10	4/5	3/5	7/10
5	15	2/3	11/15	3/5	11/15
5	20	3/5	3/4	11/20	7/10

تابع جدول اسميرنوف للعينتين المستقلتين غير المتساويتين

n_1	n_2	اختبار ذو اتجاهين		اختبار ذو اتجاه واحد	
		$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
6	7	29/42	5/6	4/7	5/7
6	8	2/3	3/4	7/12	3/4
6	9	2/3	7/9	5/9	13/18
6	10	19/30	11/15	17/30	7/10
6	12	7/12	3/4	7/12	2/3
6	18	11/18	13/18	5/9	2/3
6	24	7/12	2/3	1/2	5/8
7	8	5/8	3/4	33/56	41/56
7	9	40/63	47/63	5/9	5/7
7	10	43/70	5/7	39/70	7/10
7	14	4/7	5/7	1/2	9/14
7	28	15/28	9/14	13/28	17/28
8	9	5/8	3/4	13/24	2/3
8	10	23/40	7/10	21/40	27/40
8	12	7/12	2/3	1/2	5/8
8	16	9/16	5/8	1/2	5/8
8	32	1/2	19/32	7/16	9/16
9	10	26/45	31/45	1/2	2/3
9	12	5/9	2/3	1/2	11/18
9	15	8/15	29/45	22/45	3/5
9	18	1/2	11/18	4/9	5/9
9	36	17/36	5/9	5/12	19/36
10	15	1/2	19/30	7/15	17/30
10	20	1/2	3/5	9/20	11/20
10	40	9/20		2/5	1/2
12	15	1/2	7/12	9/20	11/20
12	16	23/48	7/12	7/16	13/24
12	18	17/36	5/9	5/12	19/36
12	20	7/15	17/30	5/12	31/60
15	20	13/30	31/60	2/5	29/60
16	20	17/40	41/80	31/80	19/40
>16	>20	$1.36\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$	$1.63\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$	$1.22\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$	$1.52\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$

18) جدول توزيع مربع كاي χ^2

ν	α											
	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.00	0.02	0.06	0.15	0.45	1.07	1.64	2.71	3.84	5.41	6.63	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	7.82	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	9.84	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.19	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.47
5	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.52
6	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.09	26.12
9	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.67	27.88
10	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.16	23.21	29.59
11	4.57	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.62	24.72	31.26
12	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	24.05	26.22	32.91
13	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	25.47	27.69	34.53
14	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	26.87	29.14	36.12
15	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	28.26	30.58	37.70
16	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.47	23.54	26.30	29.63	32.00	39.25
17	8.67	10.09	12.00	13.53	16.34	19.51	21.61	24.77	27.59	31.00	33.41	40.79
18	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	32.35	34.81	42.31
19	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	33.69	36.19	43.82
20	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.77	25.04	28.41	31.41	35.02	37.57	45.31
21	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	29.62	32.67	36.34	38.93	46.80
22	12.34	14.04	16.31	18.10	21.34	24.94	27.30	30.81	33.92	37.66	40.29	48.27
23	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	38.97	41.64	49.73
24	13.85	15.66	18.06	19.94	23.34	27.10	29.55	33.20	36.42	40.27	42.98	51.18
25	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	41.57	44.31	52.62
26	15.38	17.29	19.82	21.79	25.34	29.25	31.79	35.56	38.89	42.86	45.64	54.05
27	16.15	18.11	20.70	22.72	26.34	30.32	32.91	36.74	40.11	44.14	46.96	55.48
28	16.93	18.94	21.59	23.65	27.34	31.39	34.03	37.92	41.34	45.42	48.28	56.89
29	17.71	19.77	22.48	24.58	28.34	32.46	35.14	39.09	42.56	46.69	49.59	58.30
30	18.49	20.60	23.36	25.51	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	47.96	50.89	59.70
40	26.51	29.05	32.34	34.87	39.34	44.16	47.27	51.81	55.76	60.44	63.69	73.40
50	34.76	37.69	41.45	44.31	49.33	54.72	58.16	63.17	67.50	72.61	76.15	86.66
60	43.19	46.46	50.64	53.81	59.33	65.23	68.97	74.40	79.08	84.58	88.38	99.61
70	51.74	55.33	59.90	63.35	69.33	75.69	79.71	85.53	90.53	96.39	100.43	112.32
80	60.39	64.28	69.21	72.92	79.33	86.12	90.41	96.58	101.88	108.07	112.33	124.84
90	69.13	73.29	78.56	82.51	89.33	96.52	101.05	107.57	113.15	119.65	124.12	137.21
100	77.93	82.36	87.95	92.13	99.33	106.91	111.67	118.50	124.34	131.14	135.81	149.45

19) جدول كريسكال واليس للعينات الصغيرة

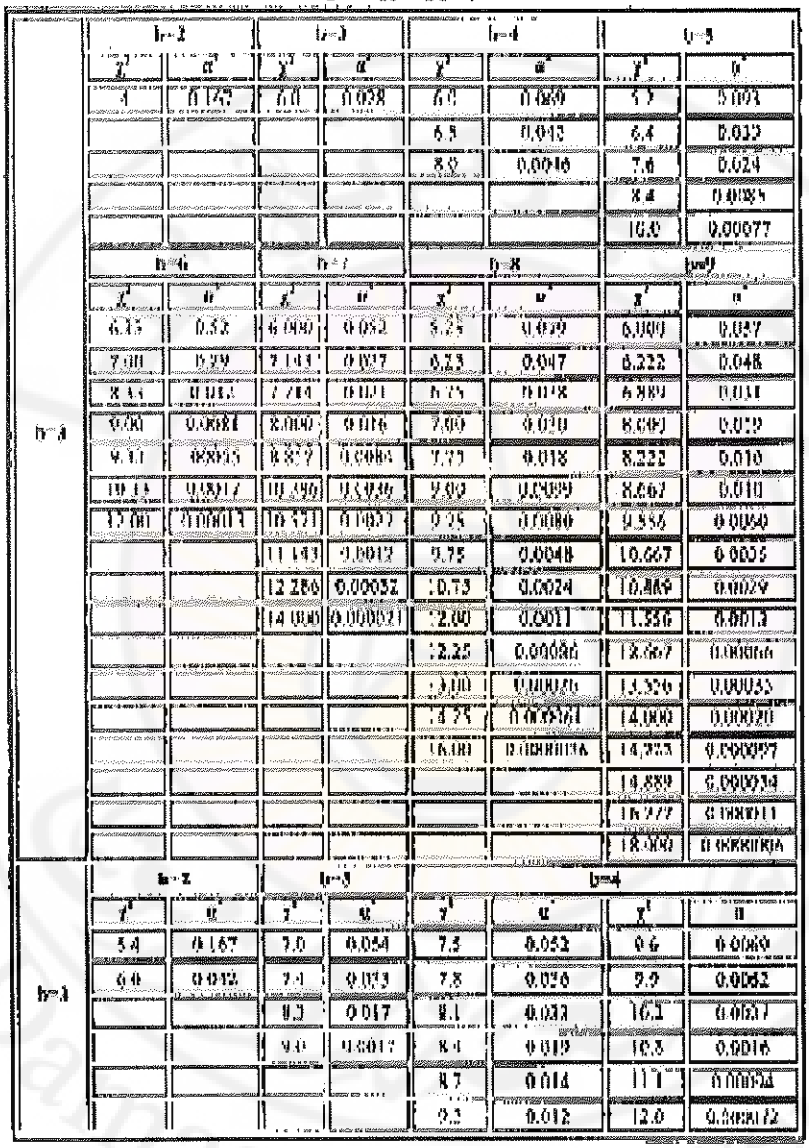
n_1	n_2	n_3	H	α'	n_1	n_2	n_3	H	α'
2	1	1	2.7000	0.500	4	3	2	6.4444	0.008
2	2	1	3.6000	0.200				6.3000	0.11
2	2	2	4.5714	0.67				5.4444	0.046
			3.7143	0.200				5.4000	0.051
3	1	1	3.2000	0.300				4.5111	0.98
3	2	1	4.2857	0.100				4.4444	0.102
			3.8571	0.133	4	3	3	6.7455	0.10
3	2	2	5.3572	0.29				6.70091	0.013
			4.7143	0.048				5.7909	0.046
			4.5000	0.067				5.7273	0.50
			4.4643	0.105				4.7091	0.092
3	3	1	5.1429	0.043				4.7000	0.101
			4.5714	0.100	4	4	1	6.6667	0.10
			4.0000	0.129				6.1667	0.022
3	3	2	62.500	0.011				4.9667	0.048
			5.3611	0.032				4.8667	0.054
			5.1389	0.061				4.1667	0.082
			4.5556	0.100				4.0667	0.102
			4.2500	0.121	4	4	2	7.0364	0.006
3	3	3	7.2000	0.004				6.8727	0.011
			6.4889	0.011				5.4545	0.46
			5.6889	0.029				5.2364	0.052
			5.6000	0.050				4.5545	0.098
			5.0667	0.086				4.4455	0.103
			4.6222	0.100	4	4	3	7.1439	0.010
4	1	1	3.5714	0.200				7.1364	0.011
4	2	1	4.8214	0.057				5.5985	0.049
			4.5000	0.076				5.5758	0.051
			4.0179	0.114				4.5455	0.099
4	2	2	6.0000	0.014				4.4773	0.102
			5.3333	0.033	4	4	4	7.6538	0.008
			5.1250	0.052				7.5385	0.011
			4.4583	0.100				5.6923	0.049
			4.1667	0.105				5.6538	0.054
4	3	1	5.8333	0.021				4.6539	0.097
			5.2083	0.50	5	1	1	3.8571	0.143
			5.0000	0.057	5	2	1	5.2500	0.036
			4.0556	0.093				5.0000	0.048

تابع جدول كريسكال واليس للعينات الصغيرة

n_1	n_2	n_3	H	α^*
5	2	2	6,5333	0,008
			6,1333	0,013
			5,1600	0,034
			5,0400	0,056
			4,3733	0,090
5	3	1	6,4000	0,012
			4,9600	0,048
			4,8711	0,052
			4,0178	0,095
			3,8400	0,123
5	3	2	6,9091	0,009
			6,8218	0,010
			5,2509	0,049
			5,1055	0,052
			4,6509	0,091
			4,4945	0,101
5	3	3	7,0788	0,009
			6,9818	0,011
			5,6485	0,049
			5,5152	0,051
			4,5333	0,097
			4,4121	0,109
5	4	1	6,9545	0,008
			6,8400	0,011
			4,9855	0,044
			4,8600	0,056
			3,9873	0,098
			3,9600	0,102
5	4	2	7,2045	0,009
			7,1182	0,010
			5,2727	0,049
			5,2682	0,050
			4,5409	0,098
			4,5182	0,101
5	4	3	7,4449	0,010
			7,3949	0,011
			5,6564	0,049
			5,6308	0,050

n_1	n_2	n_3	H	α^*
5	4	4	7,7604	0,009
			7,7440	0,011
			5,6571	0,049
			5,6176	0,50
			4,6187	0,100
			4,5527	0,102
5	5	1	7,3091	0,009
			6,8364	0,011
			5,1273	0,046
			4,9091	0,053
			4,1091	0,086
			4,0364	0,105
5	5	2	7,3385	0,010
			7,2692	0,010
			5,3385	0,047
			5,2462	0,051
			4,6231	0,097
			4,5077	0,100
5	5	3	7,5780	0,010
			7,5429	0,010
			5,7055	0,046
			5,6264	0,051
			4,5451	0,100
			4,5363	0,102
5	5	4	7,8229	0,010
			7,7914	0,010
			5,6657	0,049
			5,6429	0,050
			4,5229	0,099
			4,5200	0,101
5	5	5	8,0000	0,009
			7,9800	0,010
			5,7800	0,049
			5,6600	0,051
			4,5600	0,100
			4,5000	0,102

20) جدول فريدمان



21) توزيـــع t

(احتمال قيمة تساوي أو تقل عن القيمة المعطاة بالجدول) P

درجات الحرية	.6	.75	.9	.95	.975	.99	.995	.9975	.999	.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Damascus University

(22

جدول توزيع F

(القسم 0.75)

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30
22	1.39	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25
40	1.36	1.44	1.42	1.41	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21
60	1.35	1.42	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.19	1.17
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.23	1.21	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

تابع جدول (F)

الكمي (0.90)

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

تابع جدول (F)

الكمي (0.95)

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.30	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

تابع جدول (F)

الکمی (0.975)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	963.3	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	3.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.

تابع جدول (F)

الفا (0.99)

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

23) جدول اسبيرمان للقيم الحرجة للارتباط

n	0.1000	0.0500	0.0250	0.0100	0.0050	0.0010
4					0.9000	0.9000
5			0.7000	0.7000	0.8000	0.7000
6		0.8286	0.8857	0.8286	0.7714	0.6000
7	0.7143	0.6929	0.8571	0.7429	0.6786	0.5357
8	0.6429	0.7381	0.8095	0.7143	0.6190	0.5000
9	0.6000	0.6167	0.7667	0.6833	0.5833	0.4667
10	0.5636	0.5818	0.7333	0.6545	0.5515	0.4424
11	0.5364	0.5545	0.7091	0.6091	0.5273	0.4182
12	0.5035	0.5273	0.6713	0.5804	0.4965	0.3956
13	0.4835	0.4945	0.6429	0.5549	0.4780	0.3791
14	0.4637	0.4747	0.6220	0.5324	0.4593	0.3626
15	0.4464	0.4536	0.6000	0.5179	0.4429	0.3500
16	0.4324	0.4324	0.5824	0.5000	0.4265	0.3382
17	0.4265	0.4162	0.5637	0.4853	0.4118	0.3265
18	0.4118	0.3971	0.5490	0.4706	0.3994	0.3147
19	0.3977	0.3825	0.5333	0.4579	0.3895	0.3070
20	0.3850	0.3684	0.5203	0.4451	0.3789	0.2977
21	0.3745	0.3545	0.5078	0.4351	0.3688	0.2909
22	0.3638	0.3426	0.4963	0.4241	0.3597	0.2830
23	0.3536	0.3309	0.4854	0.4136	0.3518	0.2767
24	0.3470	0.3191	0.4748	0.4061	0.3435	0.2704
25	0.3393	0.3106	0.4654	0.3977	0.3363	0.2646
26	0.3333	0.3023	0.4564	0.3894	0.3299	0.2588
27	0.3257	0.2946	0.4481	0.3823	0.3236	0.2540
28	0.3180	0.2868	0.4401	0.3745	0.3175	0.2490
29	0.3147	0.2794	0.4320	0.3685	0.3113	0.2443
30	0.3079	0.2727	0.4251	0.3620	0.3059	0.2400

3) المصطلحات العلمية إنكليزي – عربي

- A -

Acceptance Region	منطقة القبول
Accuracy	الدقة
Adjustment Data	تعديل البيانات
Alternative Hypothesis	الفرض البديل
Analysis Of Covariance	تحليل التغاير
Analysis Of Variance	تحليل التباين
Applied Statistics	الإحصاء التطبيقي
Associated Level Of Significance (P.V)	مستوى المعنوية المشاهد

- B -

Balanced Incomplete Blocks Design	تصميم القطاعات غير التامة المتوازنة
Base	أساس (أو قاعدة)
Bernolli Distribution	توزيع برلوني
Bias	تحيّز
Binomial Distribution	توزيع ذو الحدين
Binomial Test	اختبار ذو الحدين
Birnbaum – Hall Test	اختبار بيرنبوم – هول
Blocks	قطاعات

- C -

Calculus Of Probability	حساب الاحتمالات
Categorical Variable	متغير فئوي
Cauchy Distribution	توزيع كوشي
Central Limit Theorem	مبرهنة النهاية المركزية
Chi – Square Goodness – Of –Fit Test	اختبار كاي – تربيع لجودة التوافق
Chi – Square Test Of Independence	اختبار كاي – تربيع للاستقلال
Chi – Square Test For K-Proportions	اختبار كاي – تربيع لـ K نسبة
Cochran's Test	اختبار كوكران
Cochran Test For Related Observations	اختبار كوكران للمشاهدة المرتبطة
Combinations	التوافيق
Composite Hypothesis	فرضية مركبة
Concordant Pairs	زوجان متجانسان
Consistency	اتساق
Consistence Estimator	مقدّر متسق
Continuous Variable	متغير مستمر
Contingency Table	جدول الاقتران
Contingency Coefficient	معامل التوافق
Continuous Probability Distribution	التوزيع الاحتمالي المستمر
Critical Level Of Significance	مستوى المعنوية الحرج
Cramer's Correlation Coefficient	معامل ارتباط كريمر
Cramer's Contingency Coefficient	معامل توافق كريمر
Critical Value	قيمة حرجة

Count Data	بيانات عد
Critical Region	المنطقة الحرجة
Cox –stuart Test for trend	اختبار كوكس – إستيوارت للاتجاه

- D -

Data	بيانات (معطيات)
Deciles	العشيرّيات
Decision Function	دالة قرار
Decision Space	فضاء القرار
Decision Theory	نظرية القرار
Deductive Statistics	الإحصاء الاستنباطي
Degrees Of Freedom	درجات الحرية
Density Function	دالة كثافة
Dependent Variable	متغير تابع
Descriptive Statistics	الإحصاء الوصفي
Discrete Probability Distribution	التوزيع الاحتمالي المنفصل
Distribution – Free Methods	طرق غير معتمدة على التوزيع
Deviation	انحراف

- E -

Effect	تأثير
Efficiency	الكفاءة
Efficiency Of Estimate	فعالية تقدير
Elementary Hypothesis	فرضية ابتدائية

Empirical Distribution Function	دالة التوزيع التراكمية المشاهدة
Error Of Estimate	خطأ التقدير
Error Of Variance	خطأ التباين
Error Size	حجم الخطأ
Estimation	تقدير
Estimator	مقدّر
Estimation of Probability	تقدير الاحتمال
Estimation of Proportion	تقدير النسبة
Expectation	توقع
Expected Frequencies	التكرارات المتوقعة
Expected Value	القيمة المتوقعة
Exponential Distribution	توزيع أسي

- F -

Factor	عامل
Factors Analysis	تحليل العوامل
F – Distribution	توزيع فيشر
Finit Population	مجتمع محدود
Fisher's Exact Test	اختبار فيشر المضبوط تماماً
Frequency	تكرار
Frequency Curve	منحني التكرار
Frequency Density	كثافة التكرار
Friedman's Test	اختبار فريدمان

Function Of Random Variable	دالة في متغير عشوائي
Fundamental Principle Of Counting	المبدأ الأساسي للعد

- G -

Gamma Distribution	توزيع غاما
Gaussian Curve	منحني غوص

- H -

Histogram	مدرج تكراري
Homogeneous	متجانس
Homogeneity Test	اختبار التجانس
Hybergeometric	توزيع فوق هندسي
Hypotheses test	اختبار الفرضيات

- I -

Independent Variable	متغير مستقل
Inductive Statistics	الإحصاء الاستنتاجي
Inferential Statistics	الإحصاء الاستدلالي
Infinite Population	مجتمع غير محدود
Interval Confidence	مجال ثقه
Interval Estimation	تقدير مجالي
Iterative Methods	طرق تكرارية

Interval Scale	امقياس الفترة (المجال)
Interval Variabl	متغير مجالي
Introduction To Statistics	مقدمة عن الإحصاء
Inverse Correlation	ارتباط عكسي

- J –

Joint Distribution	توزيع مشترك
Joint Function	دالة مشتركة
Joint Regression	انحدار مشترك

- K -

Kendall's Correlation Coefficients	معاملات ارتباط كندال
Kolmogorov-Smirnov Test For The One Sample	اختبار كولموغوروف– سميرنوف للعينة الواحدة
Kolmogorov-Smirnov Test For The Two Independent Samples	اختبار كولموغوروف للعينتين المستقلتين
Kruskal Wallis Test	اختبار كروسكال واليس
Kurtosis	تفلطح

- L –

Lambda (Asymmetric and Symmetric)	لامبدا (λ) التماثلية و غير التماثلية
Large Sample	عينة صغيرة

Least Squares Method	طريقة المربعات الصغرى
Level Of Significance	مستوى المعنية
Likelihood	إمكان
Likelihood Ratio Test	اختبار نسبة الإمكان
Lillifors (One Sample) Test	اختبارات ليليفورس للعينة الواحدة
Linear Correlation	ارتباط خطي
Linear Regression	انحدار خطي
Local Averaging Estimator	مقدّر المتوسط المحلي
Local Polynomial Estimator	مقدّر كثيرة الحدود المحلي
Location Parameters	وسطاء الموضع
Loglinear Models	نماذج خطية اللوغاريتم
Loss Function	دالة خسارة

- M –

Mann – Whitney Test	اختبار مان – ونتني
Mantel – Haenzel Estimator	مقدّر مانتل – هاينزل
Marginal Distribution	توزيع هامشي
Median ; Mean	متوسط
Mean Squares Error	متوسط مربعات الخطأ
Measures Of Central Tendency	مقاييس النزعة المركزية
Measures Of Variations	مقاييس التشتت
Maximum Likelihood Estimation	تقدير المعقولية العظمى
Mcnemar Test	اختبار ماكنيمار

Minimum Variance	تباين أصغري
Mode	منوال
Moments Generating Functions	الدوال المولدة للعزوم
Multivariate Analysis	تحليل متعدد المتغيرات

- N –

Neyman – Pearson	نيمان – بيرسون
Nominal Scale	مقياس اسمي
Nominal Variable	متغير اسمي
Non – Linear Correlation	ارتباط غير خطي
Non Parametric Methods	طرق لا وسيطية
Non Parametric Partial Correlation	الارتباط الجزئي اللاوسيطي
Non Parametric Regression	الانحدار اللاوسيطي
Normal Distribution	توزيع طبيعي
Null Hypothesis	فرضية العدم

- O -

Observed Frequencies	التكرارات المشاهدة
Observed Value	القيمة المشاهدة
One Sample Sign Test	اختبار الإشارة للعينة الواحدة
One Sample Tests	اختبارات العينة الواحدة
One – Tailed	ذيل واحد

Ordinal Scale	المقياس الترتيبي
Ordinal Variable	متغير رتبي

- P –

Parameter	وسيط المجتمع
Parametric Methods	طرق وسيطية
Parameters Space	فضاء الوسطاء
Paired Samples	عينّات تزاوجية
Partial Correlation	ارتباط جزئي
Pearson's Mean-Square Contingency Coefficient	معامل بيرسون لمتوسط مربعات التوافق
Penalty Function Estimator	مقدّر دالة الجزاء
Permutations	التباديل
Percentiles	الميئينات
Phi – Correlation Coefficient	معامل ارتباط فاي
Point Estimation	تقدير نقطي
Poisson Distribution	توزيع بواسون
Population Parameter	وسيط مجتمع
Power Function	دالة قوة
Power Of The Test	قوة الاختبار
Probability Density Function	دالة الكثافة الاحتمالية
Probability Theory	نظرية الاحتمال
Pth Quintile	الكمي ذو الرتبة P
P - Value	القيمة –P (مستوى المعنوية المشاهد)

- Q –

Quade Test	اختبار كويد
Qualitative Analysis	تحليل وصفي
Qualitative Data	بيانات وصفية
Qualitative Variable	متغير وصفي
Quantitative Data	بيانات كمية
Quantitative Variable	متغير كمي
Quintiles	الكميّات
Quintile Test	اختبار الكمي
Questionnaire	استبيان
Quartiles	الربيعيات

- R –

Randomization	العشوائية
Randomized Blocks Design	تصميم قطاعات عشوائية
Random Distribution	توزيع عشوائي
Random Error	خطأ عشوائي
Random Numbers	أرقام عشوائية
Random Sample	عينة عشوائية
Random Selection	اختيار عشوائي
Random Variable	متغير عشوائي
Rang	مدى
Ranks Tests	اختبارات الرتب
Rank Correlation	ارتباط الرتب

Rate	معدل
Ratio	نسبة
Ratio Scale	مقياس النسبة
Relative Frequency	تكرار نسبي
Relative Efficiency	الكفاءة النسبية
Relative Risk	الخطر النسبي
Regression Equation	معادلة الانحدار
Rejection Region	منطقة الرفض
Reliability	وثوقية
Risk Function	دالة مخاطرة

- S –

Sample	عينة
Sample Statistic	إحصاء العينة
Sample Design	تصميم العينة
Sample Moment	عزم العينة
Sampling	معاينة
Sampling Distribution Of The Statistic	توزيع المعاينة للإحصائية
Sampling Space	فضاء المعاينة
Sequential Analysis	تحليل تتابعي
Shapiro Wilk Test	اختبار شابيرو ويلك
Siegle – Tukey Test	اختبار سيفل – توكي
Significance	معنوية
Simple Hypothesis	فرضاً بسيطاً
Simple Sampling	معاينة بسيطة

Size Of Sample	حجم العينة
Skewness	التواء
Small Sample	عيّنات صغيرة
Space Of Experiment	فضاء التجربة
Spearman's Coefficient Of Rank Correlation	معامل ارتباط سبيرمان للرتب
Special Distribution	التوزيعات الخاصة
Square Error Function	دالة خطأ تربيعي
Standard Deviation	انحراف معياري
Standard Error	خطأ معياري
Standard Normal Distribution	توزيع طبيعي معياري
Statistical Inference	استدلال إحصائي
Statistical Population	المجتمع الإحصائي
Statistical Terminologies	مصطلحات إحصائية
Statistical Hypothesis	الفرضية الإحصائية
Statistical Methods	طرق إحصائية
Statistics	إحصاء
Stratified Sample	عينة طبقية
Student Distribution	توزيع ستودنت
Survey	مسح (استقصاء)
Symmetric	متماثل (معتدل)
Systematic Sampling	معاينة منتظمة
Sam Of Square Distribution	توزيع مجموع المربعات
Sufficient Statistics	إحصاء كاف

- T -

Table	جدول
Test	اختبار
Test Statistic	الاختبار الإحصائي
Test of Significance	اختبار المعنوية
T – Distribution	التوزيع – t
The Sign test For The One Sample	اختبار الإشارة للعينة الواحدة
The Runs test For The One Sample	اختبار التتابع للعينة الواحدة
The Median Test For The Two Independent Samples	اختبار الوسط للعينتين المستقلتين
The Sign Test For The Two Related Samples	اختبار الإشارة للعينتين المرتبطتين
The Median Test For More Than Two Independent Samples	اختبار الوسط لأكثر من عينتين مستقلتين
Treatments	معالجات
The Null Distribution	التوزيع العدمي للإحصائية
The Median Test	اختبار الوسط
Two – Tailed	اتجاهان (ذيليان)
Two Way Analysis Of Variance	تحليل التباين الثنائي
Type I Error	الخطأ من النوع الأول
Type II Error	الخطأ من النوع الثاني

- U -

Unbiasedness	عدم التحيّز
Uncertainty Coefficient U	معامل عدم التأكد U
Uniform Distribution	توزيع منتظم
Uniform Most Powerful Test	الاختبار الأكثر قوة بانتظام
Uniqueness	الوحدانية
Up And Down Run Test	اختبار لأعلى و أسفل
Unit Of Measurement	وحدة القياس

- V -

Variable	متغير
Variance	تباين
Variance Analysis	تحليل التباين
Variation	اختلاف
Variation Coefficient	معامل اختلاف
Vital Statistics	إحصاء حيوي

- W -

Wald-Wolfowitz Runs Test For The Two Independent Samples	اختبار والدولفويتز لتتابع العينتين المستقلتين
Weights	أوزان
Weibull Distribution	توزيع ويبول

Wilcoxon Signed Ranked Test For The One Sample	اختبار ويلكوكسن للرتب ذات الإشارة للعينة الواحدة
Wilcoxon Signed Ranked Test For The Two Related Samples	اختبار ويلكوكسن للرتب ذات الإشارة للعينتين المرتبطتين

- X - Y - Z -

Yates Correlation For Continuity	تصحيح ييتس للاستمرار
Yule Coefficient	معامل يول

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

4) المراجع العلمية للاستزادة و الاطلاع

ا. المراجع الأجنبية :

1) Conover , W.J. 1988 , Practical Non Parametric Statistics ; New York , J. Wiley & Sons Inc .
2) Devore , Berk . 2007 , Modern Mathematical Statistical With Applications , Cengeg .
3) Devore , Berk . 2008 , Statistical , Cengeg .
4) Gibbons , J.D . 1971 , Non Parametric Statistical Inference , New York ; Mc . G-hill Bool .
5) Gibbons , J.D & Chakraborti , S . 2003 , Non Parametric Statistical Inference , New York ; Marcel Deckker .
6) Hollander , Myles and Douglas A. Wolfe . 1999 Non Parametric Statistics Method , New York , Wiley .
7) Maritz , J.S 1995 , Distribution – Free Statistical Methods , New York , Chapman & Hall .
8) Navidi ; 2007 , Statistical For Engineers And Scientists , New York , Mc.Graw-Hill .
9) Randelo , R.H. & Wolf , D.A .1979 , Introduction To The Theory Of Non Parametric Statistics , New York , J.Wiley & Sons .
10) Robert V. Hogg , Elliot , A. Tanis , 1983 , Probability and Statistical Inference ; New York , Macmillar . Publishing Co , Inc .

II. المراجع العربية :

1) د. أنيس كنجو – 1977 – الإحصاء ، و ميادين تطبيقه (1,2) – مؤسسة الرسالة – بيروت .

2) د. أمين ابراهيم آدم – 2005 – المبادئ الأساسية الإحصائية في الطرق التطبيقية اللامعلمية , مردمك – مكة المكرمة .

3) د. جلال مصطفى الصياد – 1998 – مقدمة في الطرق الإحصائية – الرياض.

4) د. جلال مصطفى الصياد – 1993 – الاستدلال الإحصائي – دار المريخ – الرياض .

5) د. زكريا الشربيني – 1990 – الإحصاء اللابارامتري في العلوم النفسية ، و التربوية و الاجتماعية – القاهرة – مكتبة الانجلو .

6) د. زين العابدين عبد الرحيم البشير . د. أحمد بن درويش عمر عابد – 2004 الطرق الإحصائية اللامعلمية – الرياض – مكتبة الرشد .

7) د. عدنان عمورة – 1990 – الاحتمالات – جامعة دمشق .

8) د. عدنان عمورة – 1996 – تصميم التجارب – جامعة دمشق .

9) د. محمد صبح , د. عدنان عمورة , د. عزات قاسم – 2000 – نظرية الاحتمالات – جامعة دمشق .

اللجنة العلمية :

أ. م. د. حسان عاقل

أ. م. د. عزات قاسم

أ. م. د. محمد بشير غرة

المدقق اللغوي :

د. فخري بوش

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University