الرياضيات الاقتصادية والادارية

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

منشورات جامعة دمشق

كلية الاقتصاد



الرياضيات الاقتصادية والإدارية

تأليف

الدكتور
عبد الرزاق الفاضل
أستاذ مساعد في قسم الإحصاء

الدكتور
قاسم النعيمي
أستاذ مساعد في قسم الإحصاء

الدكتور
ياسر الجندي
مدرس في قسم الإحصاء

الدكتور
عثمان نقار
مدرس في قسم الإحصاء

جامعة دمشق

١٤٢٥- ١٤٢٦ هـ

٢٠٠٤ - ٢٠٠٥ م

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفهرس

المحتويات	الصفحة
الفصل الأول:	١٧
I – التوابع الاقتصادية	
I-1- التوابع الاقتصادية للطلب والعرض	١٩
I-1-1- تمهيد	١٩
I-1-2- تابع الطلب.	٢٠
I-1-3- تابع العرض	٢٢
I-1-4- التوازن الجزئي للسوق	٢٣
I-1-5- الميل والمرونة في التوابع الاقتصادية.	٢٧
I-1-5-1- الميل	٢٧
I-1-5-2- المرونة	٢٨
I-1-5-3- خواص المرونة	٢٩
I-1-5-4- المرونة الجزئية	٣٠
I-1-5-5- مرونةالطلب	٣١
I-1-5-6- مرونة الطلب السعرية	٣٢
I-1-5-7- مرونةالطلب الإيرادية.	٣٣
I-1-5-8- مرونةالطلب المتقاطعة.	٣٣
I-1-5-9- مرونةالعرض السعرية.	٣٥
أسئلة وتمارين غير محلولة	٣٧
I-2- التوابع الاقتصادية للدخل والتكلفة والربح	٤٠
I-2-1- تابع الدخل	٤٠
I-2-1-1- الدخل المتوسط	٤٠
I-2-1-2- الدخل الهامشي	٤٠
I-2-2- تابع التكلفة الكلية	٤٢
I-2-2-1- مرونة التكلفة المتوسطة	٤٣

I-2-3- تابع الربح الكلي ٤٥
I-2-3-1- سياسة المنشأة في ظل السوق الاقتصادية ٤٥
I-2-3-2- سياسة المنشأة في ظل المنافسة التامة ٤٦
I-2-3-3- تأثير الضريبة على الربح ٤٨
I-2-3-4- تحقيق أقصى عائد ضريبي ٤٩
I-2-3-5- توزيع الضريبة بين المنتج والمستهلك في حالة المنافسة التامة. ٥٠
أسئلة وتمارين. ٥٣
I-3- التوابع الاقتصادية للإنتاج والمنفعة ٥٥
I-3-1- تابع الإنتاج ٥٥
I-3-1-1- الإنتاجية الحدية ٥٦
I-3-1-2- الإنتاجية المتوسطة بالنسبة للعمل ٥٦
I-3-1-3- الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال ٥٦
I-3-1-4- تابع الإنتاج كوب ـ دوغلاس ٥٧
I-3-1-5- دراسة تحولات تابع الإنتاج ٥٩
I-3-1-6- المرونةالجزئية لتابع الإنتاج ٦٠
I-3-1-7- منحنيات السواء ٦١
I-3-1-8- منحنيات الناتج المتساوي ٦٢
I-3-2- تابع المنفعة ٦٣
I-3-2-1- المنفعة الحدية الهامشية ٦٤
I-3-2-2- فائض المستهلك ٦٤
I-3-2-3- فائض المنتج. ٦٨
I-3-2-4- مرونة طلب فائض المستهلك ٧١
أسئلة وتمارين غير محلولة ٧٤
٧٩

الفصل الثاني :

II- التطبيقات الاقتصادية للنهايات الحدية الحرة والمقيدة

٨١
II-1- تمهيد ٨١
II-2- الدوال ذات المتغيرات المتعددة

II-3- مجموعة تعريف الدالة ٨٣
II-4- نهاية دالة ذات متغيرين ٨٤
استمرار دالة ذات متغيرين ٨٦
II-5- الاشتقاق الجزئي ٨٧
II-6- الاشتقاق الجزئي المثالي ٩٠
II-7- مصفوفة هيسيان ٩٢
نظرية تشفارز ٩٦
II-8- التفاضل الكلي "التام" ٩٧
II-9- التفاضل على منحن ١٠٦
II-10- مشتقات الدوال المركبة ١٠٨
II-11- مشتقات الدوال الضمنية ١١١
التفاضلات المتتالية ١١٤
II-12- الدوال المتجانسة المتعددة المتغيرات. ١١٤
II-13- النهايات العظمى والصغرى ١١٧
أولاً: النقاط الحرجة (النهايات) الحرة (غير المقيدة) ١٢٢
تمارين ومسائل ١٤٣
ثانياً: النهايات الحدية (القيم القصوى) المقيدة لتابع ١٥٤
التابع ذو المتغيرين المستقلين ١٥٥
التابع ذو n متغير مستقل ١٦٥
حالة وجود أكثر من شرط يقيد المتغيرات المستقلة ١٧٠
تفسير مضروب لاغرانج ١٧٧
الفصل الثالث: ١٨١
III- التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات
III-1- الحل المصفوفي للنماذج الاقتصادية الخطية ١٨٣
1- النموذج الخطي التوازني لسوق سلعة واحدة ١٨٣
2- النموذج الخطي لتوازن سوق سلعتين فأكثر ١٨٧
3- نموذج توازن الدخل القومي بالشكل المصفوفي ١٩١

III-2- تطبيق المصفوفات على سلسلة ماركوف ١٩٦
مصفوفة ماركوف النظامية ٢٠٩
مصفوفة ماركوف الماصة ٢١٢
أمثلة غير محلولة ٢١٧
III-3- جدول المدخلات ــ المخرجات ٢١٩
مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج ٢٢٧
تمارين غير محلولة ٢٣٥
٢٣٧

الفصل الرابع:

IV- نماذج النمو الاقتصادي

IV-1- تمهيد ٢٣٩
IV-2- نموذج هارود ــ دومار ٢٤٠
٢٥١

الفصل الخامس:

V- نظرية الرسوم والمخططات الشبكية

V-1- تمهيد ٢٥٣
V-2- بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية ٢٥٥
V-3- تطبيقات نظرية الرسوم ٢٦٢
V-3-1- مسألة أقصر مسار ٢٦٢
V-3-1-1- خوارزمية بلمان ٢٦٤
V-3-1-2- خوارزمية إيجاد أقصر مسار في رسم غير موجه أضلاعه ذات وزن موجب ٢٧٠
V-3-2- مسألة التدفق الأعظمي ٢٧٧
V-3-2-1- فرضيات خوارزمية التدفق الأعظمي ٢٧٨
V-3-2-2- خوارزمية التدفق الأعظمي ٢٧٨
V-3-3- المسار الحرج ٢٨٤
V-3-3-1- القواعد الخاصة برسم شبكة المسار الحرج ٢٨٧
V-3-3-2- حسابات المسار الحرج في شبكة CPM ٢٩١

V-3-3-3- حساب الوقت الفائض في شبكة المسار الحرج CPM ٢٩٥
تمارين عامة ٢٩٨
الفصل السادس : ٣٠١

VI- التنهيج الخطي

مقدمة في بحوث العمليات ٣٠٣
VI-1 - البرمجة الخطية ٣٠٨
VI-1-1- تمهيد ٣٠٨
VI-1-2- تعاريف أولية ٣١٣
VI-1-2-1- أمثلة اقتصادية على مسائل البرمجة الخطية. ٣١٣
VI-1-2-2- الصيغة العاملة لمسائل البرمجة الخطية. ٣١٥
VI-1-2-3- أشكال مسائل البرمجة الخطية. ٣١٩
VI-1-2-4- تحويل مسألة البرمجة الخطية. ٣٢١
VI-1-2-5- مسألة البرمجة الخطية بشكلها العام. ٣٢٧
VI-1-3- حل مسألة البرمجة الخطية. ٣٣٤
VI-1-3-1- الطريقة البيانية ٣٣٥
VI-1-3-2- خوارزمية (طريقة) السمبلكس. ٣٤٥
VI-1-3-2-1- الانتقال من حل أساسي إلى حل آخر. ٣٤٨
VI-1-3-2-2- معيار المثلوية ٣٥٢
VI-1-3-2-3- معيار الدخول في القاعدة (الأساس). ٣٥٤
VI-1-3-2-4- معيار الخروج من القاعدة (الأساس). ٣٥٥
VI-1-3-2-5- خوارزمية السمبلكس الأولية ٣٥٦
VI-1-3-3- التطبيق العملي لخوارزمية السمبلكس ٣٥٩
VI-1-3-4- حالات خاصة في مسائل البرمجة الخطية ٣٧١
VI-1-4- الازدواجية (الثنائية) في البرمجة الخطية ٣٧٥
VI-1-4-1- صياغة الثنائية (الازدواجية ــ الترافقية) في البرمجة الخطية. ٣٩٥
VI-1-4-2- تعريف الازدواجية (الترافقية). ٤٠٤
VI-1-4-3- النظرية الأساسية للازدواجية ٤٠٥


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

VI-3- مسألة التخصيص (التعيين) ٥٤٢
VI-3-1- مقدمة ٥٤٦
VI-3-2- الصياغة الرياضية لمسائل التخصيص ٥٤٩
VI-3-3- الطرق المستخدمة في حل هذه المشكلات ٥٤٩
VI-3-3-1- طريقة العد الكامل ٥٥١
VI-3-3-2- الطريقة المجرية ٥٦٩
VI-3-4- معالجة مسائل التخصيص وفق طريقة النقل ٥٧١
VI-3-5- معالجة مسائل التخصيص وفق طريقة البرمجة الخطية. ٥٧٤
VI-3-6- بعض المشكلات التي تصادفنا لدى حل مسائل التخصيص. ٥٧٤
VI-3-6-1- استحالة القيام بعملية التخصيص ٥٧٦
VI-3-6-2- المسألة غير المتوازنة ٥٧٩
VI-3-7- الثنائية في مسألة النقل. ٥٨٥
المصطلحات باللغة الانكليزية ٥٩٥
المراجع

Damascus University

من جهود أن يسهم ولو بنصيب قليل في تقدم العلم بل انه يتعذر عليه أن يلم إلماماً جدياً بالنتائج التي وصلت إليها الأبحاث الاقتصادية في هذه السنوات الأخيرة» [٤] .

وفي سنة ١٩٥٤كتب P.Samuelson[٥] : «دعنا لا نخفي الحقيقة على أنفسنا، إن الرياضيات تثير مشكلة نفسية لدى كل اقتصادي من الجيل الحاضر، وكل منا يواجه هذه المشكلة بأسلوبه الخاص. فالبعض يلجأ إلى تصعيد شعوره ويتحول من الاقتصاد النظري إلى تاريخ المذاهب أو إلى اقتصاديات العمل، والبعض الآخر يحاول مصارعة الوحش فيقضي ناعسا عطلة الأسبوع منكباً على كتاب R.G.Allen القيم.

ويحقق آخرون نوعا من التوازن الشخصي في هذا الشأن دون أن يتحجوا في إقناع أنفسهم فيما إذا كانت الهضاب البعيدة الخضراء حقاً أم أن الكروم الظاهرة فيها أشجار مر في حقيقتها».

إن ما نستنتجه من هذه الكتابات أن أساليب التحليل الرياضي أصبحت ومما لا شك فيه، الطريقة والمنهاج اللذان يدعمان بهما مختلف العلوم «سواء علوما إنسانية أو علمية حيوية» والتي تجذب العديد من العاملين بها، لما فيها من روعة الإبداع والجمال والتناسق، بعدما كانتا مجرد علما نظريا بحتا غير قادر على التدخل لحل المشاكل العديدة التي تصادف مختلف العلوم كافة.

وكون أن المكتبة العربية بالذات حوت العديد من المؤلفات بمختلف المواضيع، فلقد جاء مؤلفنا هذا، قصد أن يضع الطالب أمام مواضيع وأبحاث عديدة يمكنه من صهر ما لديه من معلومات نظرية بحتة ضمن قالب رياضي تطبيقي.

---

(٤) مجلة مصر المعاصرة-مايو و يوليو 1950

(٥) مجموعة الأبحاث المنشورة في مجلة:
Economique et Mathematique Z.Nasr:The'oie Review of Economics and Statistics

ولقد تم سرد كافة أبحاث هذا المؤلف بأسلوب وطريقة ومنهج يتناسب مع قدرات مختلف طلبة كلية الاقتصاد، حيث تم إغناء كافة الفقرات بإيضاحات مناسبة لما تحويه من مفاهيم رياضية مدعمة بأمثلة عديدة محولة بصورة مبسطة وفق عمليات رياضية منطقية متسلسلة، مستخدمين البراهين الابتدائية المعروضة بدقة تامة وبمنهجية سهلة الفهم للغالبية العظمى من الطلبة.

كما ركزنا قدر الإمكان على أن نترك للطالب الكثير بل والعديد من المسائل والتمارين غير المحلولة لتعميق هذه الأفكار الرياضية ولتنمية قدراته العقلية.

ولا يجب أن يغيب عن ذهننا أن السادة الأساتذة والزملاء الذين يعكفون على إبداء الرأي وتقييم مؤلف ما ينقسمون إلى فئتين:

الأولى: ترى أن كافة نقاط وفقرات المؤلف يجب أن تعرض بشكل واضح وجلي بعيد عن أي غموض كي لا يجهد الطالب ويبعده عن المطلوب وبالوقت نفسه لا يخلق ملل لدى طالب آخر وأيضاً حتى لا يضع مؤلفه أمام شبهات سوء فهم لفكرة لم يتم شرحها بالكفاية المطلوبة.

الثانية: ترى أن المؤلف الذي يكون مبسطاً وسهلاً لكافة نقاطه وموضوعاته ولا ترقى أفكاره للمستوى العلمي اللائق هو بمثابة مؤلف محلي أو بمثابة مجموعة محاضرات جمعت ضمن غلاف ليس إلا.

لقد تم إعداد هذا المؤلف بالشكل الذي ينسجم ومفردات مقرر الرياضيات الاقتصادية والإدارية مستغنين ما أمكن عن المواضيع والأبحاث التي يغنى طالب كلية الاقتصاد عنها، كما لم نتطرق إلى بعض براهين ما قد يصعب على الطالب فهمها ، قصد جعل حجم المؤلف مقبولا لا يوهم قارئه بعدد صفحاته.

أما المواضيع التي تناولها هذا المؤلف فهي:

- مقدمة في التوابع الاقتصادية.
- التطبيقات الاقتصادية للمشتقات.
- التطبيقات الاقتصادية للنهايات الحدية غير المقيدة.
- التطبيقات الاقتصادية للنهايات الحدية المقيدة.
- التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات.
- نماذج النمو الاقتصادي.
- نظرية الشبكات.
- التنهيج الخطي.

حيث قام بكتابة الفصلين الثاني والسادس الدكتور عبد الرزاق الفاضل والفصل الأول الدكتور قاسم النعيمي والفصلين الثالث والرابع الدكتور ياسر الجندي والفصلين الثاني والخامس الدكتور عثمان نقار.

لم ننسى بعون الله كل ما وقع بين أيدينا من كتب ومؤلفات تم الاطلاع عليها – حفاظاً على الأمانة العلمية– أن نسردها ضمن قائمة مراجع هذا المؤلف.

نأمل أن نكون قد قدمنا لطلبتنا ولأبناءنا الأعزاء بعملنا المتواضع هذا ما قد يساعدهم على تفهم واستيعاب هذا المقرر والوصول بهم إلى أمنيتهم المنشودة.

غايتنا نقل هذا العلم لا بناءنا ليكونوا افضل أمة أخرجت للناس، وليكونوا حملة لواء العلم يديروا به الطريق لما يليهم.

والله من وراء القصد

الدكتور عبد الرزاق الفاضل

الفصل الأول

1- التوابع الاقتصادية

1-1- التوابع الاقتصادية للطلب والعرض

1-1-1- تمهيد

1-1-2- تابع الطلب.

1-1-3- تابع العرض

1-1-4- التوازن الجزئي للسوق

1-1-5- الميل والمرونة في التوابع الاقتصادية.

1-2- التوابع الاقتصادية للدخل والتكلفة والربح

1-2-1- تابع الدخل

1-2-2- تابع التكلفة الكلية

1-2-3- تابع الربح الكلي

1-3- التوابع الاقتصادية للإنتاج والمنفعة

1-3-1- تابع الإنتاج

1-3-2- تابع المنفعة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

1-1- التوابع الاقتصادية للطلب والعرض .

1-1-1- تمهيد:

يعود استخدام النظريات الرياضية في التحليل الاقتصادي إلى بداية القرن السابع عشر، إذ نشر برنولي عام 1739 كتابه الشهير عن مفهوم المنفعة، باستخدام نظرية الألعاب. طبق العالم الرياضي كورنو في عام 1838 ، التحليل الرياضي لتفسير الظواهر التي تشكل الأسعار. أما العالم الرياضي دوبيوي استخدم أول مرة في عام 1844 التحليل الاقتصادي باستخدام الرسوم البيانية في تفسير تمايز الأسعار.

ورغم كل ذلك فإن التحليل الاقتصادي لم يأخذ ما يكفي من العناية والاهتمام إلا بولادة المدرسة الكلاسيكية الجديدة، والتي استعملت أول مرة مفهوم المنفعة الهامشية. إذ يعد العالم الرياضي فالراس وتلاميذه باريتو وبارون أول من شكل مدرسة لوزان في عام 1874، لتحليل الاقتصاد رياضياً. وفي بداية القرن التاسع عشر ونتيجة انتشار الحاسبات الإلكترونية ونظراً لسرعة المعالجات ظهر علم جديد، مستفيداً من النظريات الاقتصادية التي ظهرت في العالم النظريات الكلاسيكية والنظريات الاشتراكية عند ماركس وانجلس والمدرسة الاقتصادية الغربية البرجوازية، وبالاستناد إلى النظريات الرياضية الحديثة، باستخدام الكم المتراكم من الإحصاءات الاقتصادية، أطلق على هذا العلم القياس الاقتصادي أو ما يعرف بالاقتصاد القياسي.

إن استخدام الرموز الرياضية للتعبير عن الظواهر الاقتصادية تبين إنه أفضل بكثير من استخدام التعبير الأدبي الذي يحتل مساحات واسعة من الإنشاءات الأدبية للظواهر المدروسة. وأيضاً من الصعوبة بمكان إقامة البراهين

العلمية لإثبات الظواهر الاقتصادية، لذلك استخدام الرياضيات في تحليل وتفسير النظريات الاقتصادية حقق فوائد جمة نذكر منها:

- تمتاز المعالجة الرياضية بالوضوح والاختصار وسهولة إقامة البراهين.
- إمكانية استخدام النظريات الرياضية في البراهين الاقتصادية.
- إمكانية معالجة الحالات العامة وتعميم النظريات المثبتة.
- إمكانية الاستفادة من التقدم العلمي والتكنولوجي في سرعة معالجة البيانات والمعلومات المتراكمة لتحليل الظواهر الاقتصادية.

وسوف نقوم بعرض مبسط لاستخدام الرياضيات لدراسة التوابع الاقتصادية المبسطة والتي تتم معالجتها بالمنظور السكوني، و نترك المعالجات الديناميكية للدراسات المتقدمة.

1 -1-2- تابع الطلب.

تنص النظرية الاقتصادية على أن الكميات المطلوبة من سلعة معينة تتناسب عكساً مع سعر السلعة P و أسعار السلع المكملة R وتتناسب طرداً مع أسعار السلع المنافسة S ومع الدخل التصرفي Y في حالة السلع الاعتيادية أما في حالة السلع الرديئة وسلع جيفن (Giffin) فالعلاقة تكون عكسية. وهناك عوامل أخرى كثيرة تكون مؤثرة في الطلب على السلع منها أذواق المستهلكين والتقدم التقني في إنتاج السلعة T.

يمكننا أن نعبر عن هذه النظرية بشكل رياضي كتابع اقتصادي على النحو التالي:

$$D = f(P ; R ; S ; Y ; K ; T ;...)$$

أو على الشكل التالي:

$$D = a - bP - cR + dS + eY + hK + rT$$

حيث أن: a -- ثابتة العلاقة و b ; c ; d ; e; h ; r – معاملات العلاقة. وتتحدد قيمة وإشارة هذه المعاملات حسب السلعة المدروسة.

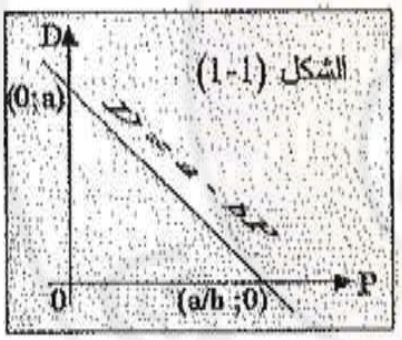
من اجل دراسة تابع الطلب على مستوى طلبة المستوى الثاني سنكتفي باستعراض تابع الطلب بدلالة السعر وافتراض بقية المتغيرات ثابتة.

تابع الطلب بالتعريف هو عبارة عن مجموع الكميات المطلوبة من قبل جميع المستهلكين في وحدة الزمن. وعندئذ نستطيع كتابة تابع الطلب بدلالة السعر على الشكل التالي:

$$D = f(P) = a + bP$$

حيث أن: P تمثل السعر و b ; a – معاملات ثابتة معينة تخضع للنظرية الاقتصادية.

واعتماداً على النظرية الاقتصادية، فإن الزيادة في الكمية المطلوبة من سلعة ما يتناسب عكساً مع سعر السلعة.



الشكل (1-1)

وبناء على ذلك يصبح تابع الطلب على النحو التالي:

$$D = f(P) = a - bP$$

حيث أن: $b; a > 0$

نستطيع تمثيل هذه العلاقة بشكل بياني على محاور إحداثية بعد أن نحدد نقطتين إحداثيتين وهما: (0; a) ، (a/b ;0) على الشكل (1-1).

و مشتق تابع الطلب بالنسبة لـ P هو: $D' = -b$

هذا يعني أن المشتق قيمة ثابتة سالبة مما يبين أن التغير بين D ; P هو تغير عكسي.

1-1-3- تابع العرض.

يقصد بتابع العرض أن جميع الكميات المعروضة على المستهلكين في وحدة الزمن هي بقصد البيع لتأمين احتياجات المستهلكين.

وتابع العرض يشبه تابع الطلب من حيث الشكل، ولكن يختلف عن تابع الطلب من حيث العوامل المحددة والمؤثرة على العرض، فنجد أن تابع العرض يتأثر بعدة متغيرات منها: سعر السلعة المعروضة، والعلاقة طردية بين سعر السلعة والكمية المعروضة، أسعار السلع المنافسة وبعلاقة عكسية. وعوامل أخرى مثل رأس المال والعمل ومستوى التقدم التقني والظروف الفنية المحددة لعملية الإنتاج. يمكن أن نكتب تابع العرض على الشكل التالي:

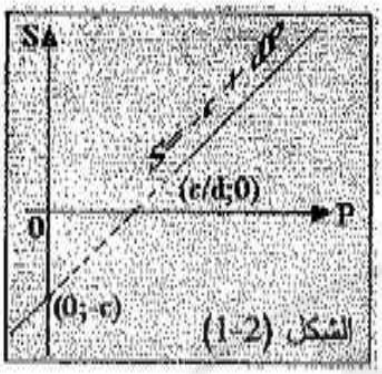
$$S = f(P; R; K; L; T)$$

إن دراسة تابع العرض بشكله هذا يُعَدّ عملاً معقداً ويستوجب دراسات رياضية متقدمة. ولتبسيط دراسة تابع العرض سوف ندرسه بدلالة سعر السلعة المدروسة مع افتراض بقية العوامل المحددة لتابع العرض الأخرى ثابتة. أي على النحو التالي:

$$S = g(P) = c + dP$$

حيث أن: $c;\ d > 0$ قيم ثابتة تخضع للنظرية الاقتصادية. علماً بأنّ الكمية المعروضة من سلعة معينة تزداد بازدياد الأسعار وتنقص بنقصانها. أي العلاقة بينها طردية لذلك يكتب تابع العرض على النحو التالي:

$$S = f(P) = -c + dP$$



الشكل (2-1)

مع مراعاة أن ثابتة العلاقة سالبة (-c) وتبين ذلك من خلال التجارب العملية لتوفيق تابع العرض. نستطيع تمثيل هذه العلاقة بشكل بياني على محاور إحداثية بعد أن نحدد نقطتين إحداثيتين وهما: (c/d; 0) (0; - c) على الشكل (2-1)، نحسب مشتق تابع العرض بالنسبة لـ P ويساوي: $S' = d$

هذا يعني أن المشتق قيمة ثابتة موجبة مما يبين أن التغير بين P ; S هو تغير طردي.

1-1-4- التوازن الجزئي للسوق.

المقصود بالتوازن الجزئي للسوق هو التوازن من أجل سلعة واحدة أو عدد محدد من السلع، ونلجأ إلى هذا الأسلوب من أجل تبسيط الدراسة. وعلى أساس أن بقية العوامل المؤثرة بالسوق ثابتة. ويجب ألا يغيب عن ذهننا أن توازن السوق له علاقة بسلوك المنتج وسلوك المستهلك. وأن المنتج يسعى لتحقيق أعظم ربح عن طريق تقليل التكلفة الإنتاجية وزيادة الإنتاج بينما يسعى المستهلك إلى الحصول على أعظم منفعة له من خلال أسعار السلع الاستهلاكية. لذا يجب أن نبحث عن كيفية توفيق التوازن بين المنتج والمستهلك في الوقت نفسه بغية تحقيق غاية كل منهما.

نفترض أن السلعة المدروسة يتم تداولها في سوق معزولة، مهمل فيها أثر العوامل الاقتصادية الأخرى المحددة للسوق. أي تحليلنا سيكون جزئياً، ولا يتعرض للتدخلات بين السوق المفترضة وبقية الأسواق. نعبر عن ذلك رياضياً على النحو التالي:

$$D = S \rightarrow f(P) = g(P)$$

$$D = f(P) = a - bP \qquad (1)$$

$$S = g(P) = c + dP \qquad (2)$$

$$f(P) = a - bP = g(P) = c + dP \qquad (3)$$

ونعلم أن: $d\ ;\ c > 0$ و $b;\ a > 0$

ولنحاول حل هذا النموذج على افتراض وجود المنافسة التامة. وذلك من خلال إيجاد قيم المتغيرات المحددة لهذا النموذج $P\ ;\ D\ ;\ S$ على النحو التالي:

نوجد السعر التوازني من العلاقة (3):

$$a + c = dP + bP \Rightarrow a + c = (d + b)P \Rightarrow$$

$$\overline{P} = \frac{a + c}{d + b}$$

أما الكمية التوازنية فهي تساوي الكمية المعروضة والتي بدورها تساوي الكمية المطلوبة بتعويض السعر التوازني في العلاقة (1) أو (2) من (1) نجد:

$$D = a - b\left(\frac{a + c}{d + b}\right) = \frac{a(d + b) - b(a + c)}{d + b} =$$

$$Q = \overline{S} = \overline{D} = \frac{ad - bc}{d + b}$$

لكي يكون لجملة المعادلات الخطية أعلاه حل مشترك وله مدلول اقتصادي لابد من حقق الشروط التالية:

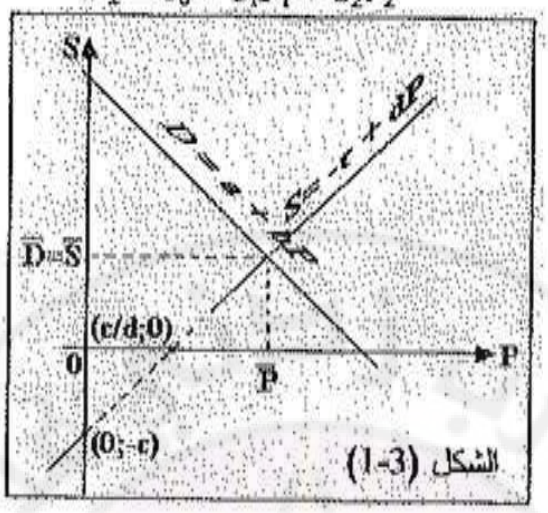
$$\overline{S} = \overline{D} > 0\ ;\ \overline{P} > 0\ ;\ ad > bc$$

يمكننا تمثيل ذلك على المحاور الإحداثية من الربع الموجب كما هو موضح بالشكل (3-1).

يمكننا تعميم هذه الدراسة على أكثر من سلعة واحدة، فعندئذ يصبح شكل تابع الطلب على النحو التالي:

$$D_1 = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$

$$D_2 = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$



الشكل (1-3)

أما تابع العرض فيكون له الشكل التالي:

$$S_1 = c_0 + c_1P_1 + c_2P_2$$

$$S_2 = d_0 + d_1P_1 + d_2P_2$$

حيث أن: $d_0; d_1; d_2; c_0; c_1; c_2; b_0; b_1; b_2; a_0; a_1; a_2$ - وهي عبارة عن ثوابت توازن السوق في حال وجود سلعتين. عندئذ شرط التوازن هو:

$$(a_0 - c_0) + (a_1 - c_1)P_1 + + (a_2 - c_2)P_2 = 0$$

$$(b_0 - d_0) + (b_1 - d_1)P_1 + +(b_2 - d_2)P_2 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين حلاً مشتركاً، نستطيع تحديد الأسعار التوازنية في السوق $P_1; P_2$ و تحديد الكميات التوازنية $S_1; S_2; D_1; D_2$ أيضاً.

بتعميم هذه النتيجة على كبير من السلع من أجل n سلعة نحصل على المعادلات التالية للكميات المطلوبة:

$$D_1 = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$

$$D_2 = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_n = e_0 + e_1P_1 + e_2P_2 + \ldots + e_nP_n$$

أما الكميات المعروضة:

$$S_1 = c_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + \ldots + c_nP_n$$
$$S_2 = d_0 + d_1P_1 + d_2P_2 + \ldots + d_nP_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = r_0 + r_1P_1 + r_2P_2 + \ldots + r_nP_n$$

فيكون توازن السوق عندئذ على نحو التالي:

$$(a_0 - c_0) + (a_1 - c_1)P_1 + (a_2 - c_2)P_2 + \ldots + (a_n - c_n)P_n = 0$$
$$(b_0 - d_0) + (b_1 - d_1)P_1 + (b_2 - d_2)P_2 + \ldots + (a_n - c_n)P_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(e_0 - r_0) + (e_1 - r_1)P_1 + (c_2 - r_2)P_2 + \ldots + (e_n - r_n)P_n = 0$$

حيث أن : $a_i ; b_i\, c_i; d_i ; e_i ; r_i > 0$ و $i = 1; 2; \ldots; n$

وبحل المعادلات حلاً مشتركاً نحدد الأسعار التوازنية $\bar{P}_1; \bar{P}_2; \ldots; \bar{P}_n$ والكميات التوازنية:

$$Q = \bar{D}_1;\ \bar{D}_2;\ \ldots;\ \bar{D}_n = \bar{S}_1;\ \bar{S}_2;\ \ldots;\ \bar{S}_n$$

مثال (1-1): أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية للنموذج التالي:

$$D = 10 - 3P \ ; S = -2 + 3P$$

الحل:

نطبق شرط التوازن $D = S$ فنجد:

$$10 - 3P = -2 + 3P$$

ومنه نجد أن: $6P = 12 \Rightarrow \bar{P} = 2$

وبتعويض السعر التوازني في أي من معادلات النموذج نحصل على الكمية التوازنية:

$$Q = \overline{D} = 10 - 3 * 2 = 4$$

$$Q = \overline{S} = -2 + 3 * 2 = 4$$

1-1-5- الميل والمرونة في التوابع الاقتصادي.

Elasticity and Slope in Economic Functions

1-1-5-1- الميل (Slope): هو عبارة عن ظل الزاوية الواقعة بين الخط المستقيم والمحور الإحداثي الأفقي، ويأخذ الميل قيمة موجبة أو سالبة وذلك حسب شكل التابع الناظم للمستقيم. والميل هو عبارة عن التغير في المتغير التابع على التغير بالمتغير المستقل.

مثال (2-1): ليكن لدينا تابع الطلب التالي: $D = 7 - 3P$ فإذا تغير السعر فإنه سيؤدي إلى تغير الطلب: لو أن السعر أخذ قيماً محددة كما هو موضح في الجدول (1-5)، فإن الطلب يأخذ القيم المقابلة لهما هي في الجدول أدناه:

جدول (١-5)

D	7 - 2P	P
5	7 - 2(1)	1
3	7 - 2(2)	2
1	7 - 2(3)	3

ومن الجدول نجد:

$$\frac{\Delta D}{\Delta P} = \frac{3-5}{2-1} = -2 = \frac{1-3}{3-2} = -2$$

وهو ثابت بالنسبة للمعادلة الخطية. 2- هذا يعني أن الميل يساوي إلى
وفي هذه الحالة قيمته سالبة أي أن العلاقة عكسية بين المتغير التابع والمتغير المستقل. هذا ونستطيع تحديد الميل مباشرة من شكل التابع. إذا كان لدينا تابع من الشكل $Y = 20 + 0.3\ X$

هذا يعني أن ميل هذا التابع هو 0.3 وهو موجب ويدل على أن العلاقة الخطية طردية.

1-1-5-2- المرونة (Elasticity): هي عبارة عن درجة حساسية التابع أي ما يطرأ على التابع من تغيرات نتيجة تغير المتغيرات المستقلة.

أما التعريف الرياضي للمرونة: فهو عبارة عن التغير النسبي في المتغير التابع $\Delta Y/Y$ مقسوما على التغير النسبي في المتغير المستقل $\Delta X/X$. ونرمز للمرونة بـــ $E_X(Y)$.

بفرض لدينا تابع ما $Y = f(X)$ وإن المتغير المستقل X يأخذ تزايداً قدره ΔX فيتغير من جراء ذلك المتغير التابع ويأخذ تزايداً قدره ΔY. فحسب تعريف المرونة نكتب:

$$E_x(Y) = \frac{\Delta Y/Y}{\Delta X/X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} * \frac{X}{Y}$$

نأخذ نهاية هذه العلاقة الناتجة عندما ΔX تنتهي إلى الصفر فنحصل:

$$E_x(Y) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} * \frac{X}{Y} = \frac{dy}{dx} * \frac{X}{Y} = Y' * \frac{X}{Y}$$

إذاً المرونة هي عبارة عن مشتق التابع مضروباً بقيمة المتغير المستقل عند نقطة معينة على قيمة التابع عند هذه النقطة. أي المرونة هي ما يطرأ على حساسية التابع نتيجة التغيرات التي تطرأ على المتحول X. وبشكل أدق يمكن

القول ما هي إلا تعبيرٌ واضحٌ للدلالة على درجة حساسية المتغير التابع مقدرة بنسبة مئوية وذلك حينما يطرأ تغيرٌ على المتغير المستقل بمقدار واحد بالمائة.

تمييز النتائج الحاصلة:

أ- إذا كانت $E_X(Y) > 0$ فالمرونة موجبة وهذا يعني أن علاقة الاستجابة طردية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

ب- إذا كانت $E_X(Y) < 0$ أي المرونة سالبة وتعني أن علاقة الاستجابة عكسية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

ج- إذا كانت $E_X(Y) = 0$ أي المرونة معدومة ويعني ذلك عدم وجود أي استجابة بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

1-1-5-3- خواص المرونة

أ – مرونة جداء تابعين: $E_X(Y*Z) = E_X(Y) + E_X(Z)$

$$E_x(Y*X) = \frac{dyz}{dx} * \frac{X}{Y*Z} = \frac{dy}{dx} * \frac{X}{Y} + \frac{dz}{dx} * \frac{X}{Z}$$

أي نقول إن مرونة جداء تابعين يساوي إلى مرونة التابع الأول زائد مرونة التابع الثاني.

مثال (٣-٥): أوجد مرونة التابع التالي: $Y = (5X^2 - 3X + 4)*e^{5X}$

الحل:

نفرض أن: $V = 5X^2 - 3X + 4 \; ; \; U = e^{5X}$

$$E_x(V*U) = E_x(V) + E_x(U) = (10X - 3) * \frac{X}{Y} + (5e^{5x}) * \frac{X}{Y} =$$

$$= \frac{10X^2 - 3X}{5X^2 - 3X + 4} + \frac{(5e^{5X})X}{e^{5X}} = \frac{10X^2 - 3X}{5X^2 - 3X + 4} + 5X$$

ب – مرونة تابع كسري:

$$E_X(Y/Z) = E_X(Y) - E_X(Z)$$

$$E_x\left(\frac{Y}{Z}\right) = \frac{d(y/z)}{dx} * \frac{X}{Y/Z} = \frac{dy}{dx} * \frac{X}{Y} - \frac{dz}{dx} * \frac{X}{Z} = E_x(Y) - E_x(Z)$$

أي أن مرونة تابع كسري يساوي إلى مرونة الصور (البسط) ناقصاً مرونة المقام (المخرج).

1-1-5-4- المرونات الجزئية

كما أشرنا سابقاً إن التوابع الاقتصادية في الواقع تضم أكثر من متغير فعندئذ من أجل حساب المرونة يتطلب هذا الأمر حساب المرونات الجزئية بالنسبة لكل متغير على حدة، وذلك من أجل تحديد الحساسية النسبية لكل متغير بشكل مستقل عن الأخر.

إذا كان لدينا التابع الاقتصادي من الشكل: $Y = f(X_1; X_2; \ldots; X_n)$

فإن مرونة مثل هذا التابع يجب أن تأخذ بالنسبة لجميع المتغيرات المستقلة X_i، حيث أن: $i = 1; 2; \ldots; n$ نحسب المرونة على الشكل التالي:

$$E_{x_i}(Y) = \lim_{\Delta X_i \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X_i} * \frac{X_i}{Y} = \frac{dy}{dx_i} * \frac{X_i}{Y} =$$

$$= E_{x_1}(Y) + E_{x_2}(Y) + \ldots + E_{x_n}(Y)$$

إذاً نعرف المرونة الكلية للتابع الاقتصادي على أنها حاصل جمع المرونات الجزئية بالنسبة لجميع المتحولات.

1-1-5-5- مرونات الطلب Elasticity of Demand

لقد بينا سابقاً أن الكمية المطلوبة هي عبارة عن تابع لعدد من العوامل أي المتغيرات المستقلة وذكرنا من أهمها: سعر السلعة، وأسعار السلع البديلة والمكملة، ودخل المستهلك، وأذواق المستهلكين، والتقدم التقني للإنتاج وغيرها. والآن يمكننا حساب المرونات الجزئية بالنسبة لأي متغير من هذه المتغيرات:

مرونة الطلب السعرية (Price Elasticity of Demand): ويعتبر هذا المؤشر من أهم المؤشرات التي يجب تناولها بالبحث والدراسة لأنها تقيس لنا سلوك المستهلك بالنسبة للعلاقة ما بين سعر السلعة P والكمية المطلوبة D. وكنا قد حددنا تابع الطلب بالنسبة للسعر بالتابع التالي: $D = f(P) = a - bP$

عندئذ مرونة الطلب السعرية تأخذ الشكل:

$$E_p(D) = D' * \frac{P}{D} = -b * \frac{P}{a - bP}$$

نلاحظ أن مرونة الطلب السعرية في الحالات العادية تكون إشارتها سالبة، وهذا يتوافق مع النظرية الاقتصادية أي قيمتها المطلقة النسبية تعكس التناقص الذي يطرأ على الكمية المطلوبة وذلك عندما يزداد السعر بمقدار وحدة واحدة. أما في حالة السلع الرديئة أو سلع جيفن قد تكون إشارتها موجبة.

ومن العلاقة الرياضية التي توصلنا إليها نلاحظ التالي: تساوي المرونة للصفر إذا كان السعر مساوياً الصفر، وتصبح ما لانهاية عندما الكمية تساوي إلى الصفر.

مثال (4-1): أوجد مرونة تابع الطلب السعرية التالي: $D = 30 - 3P$ من أجل $P = 3$; $P = 4$.

وهي عبارة عن التغير النسبي في الكمية المطلوبة على التغير النسبي في أسعار السلع البديلة والمكملة. وبمعنى أخر هي الاستجابة النسبية للكمية المطلوبة من سلعة ما عندما تتغير أسعار السلع البديلة والمكملة. نعبر رياضياً عن المرونة المتقاطعة في حالة السلعة المنافسة أو البديلة:

$$E_{P_i} = \frac{\Delta D/D}{\Delta P_i/P_i} = \frac{\Delta D}{\Delta P_i} * \frac{P_i}{D} = D'_{P_i} * \frac{P_i}{D}$$

حيث أن: $\Delta D/\Delta P_i$ – تمثل الميل (وذلك على فرض أن جميع العوامل الأخرى المؤثرة في الطلب ثابتة) وهذا الميل موجب دائماً في حالة السلع الاعتيادية، لأن الارتفاع في أسعار السلع المنافسة سيؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة من هذه السلعة. ولذلك فالمرونة في هذه الحالة موجبة. و نعبر رياضياً عن المرونة المتقاطعة في حالة السلعة المتممة أو المكملة:

$$E_{P_k} = \frac{\Delta D/D}{\Delta P_k/P_k} = \frac{\Delta D}{\Delta P_k} * \frac{P_k}{D} = D'_{P_k} \cdot \frac{P_k}{D}$$

حيث أن: $\Delta D/\Delta P_k$ – تمثل الميل (وذلك على فرض أن جميع العوامل الأخرى المؤثرة في الطلب ثابتة) ودائماً هذا الميل سالب في حالة السلع الاعتيادية، لأن الارتفاع في أسعار السلع المتممة سيؤدي إلى تحول المستهلك عن هذه السلعة إلى السلع البديلة. ولذلك فالمرونة في هذه الحالة سالبة. فمثلاً الطلب على البنزين مرتبط بالطلب على السيارات، يتأثر سلباً بارتفاع أسعار السيارات، أي أن المنفعة المتحققة من السلعة المكملة مرتبطة بتوفر السلعة الأخرى.

1-1-5-9- مرونة العرض السعرية *Price Elasticity of Supply*

هي عبارة عن التغير النسبي في الكمية المعروضة على التغير النسبي في السعر، أي مدى استجابة الكمية المعروضة من سلعة ما إزاء تغير سعر هذه السلعة في وحدة الزمن، وعلاقتها الرياضية على الشكل التالي:

$$E_p(S) = \frac{\Delta S/S}{\Delta P/P} = \frac{\Delta S}{\Delta P} * \frac{P}{S} = S_p' * \frac{P}{S}$$

ومرونة العرض السعرية موجبة في حالة السلع الاعتيادية، لأن المنتج سيزيد من عرضه للسلعة حين يرتفع السعر عليها من أجل تحقيق ربحاً أعلى.

أمثلة محلولة

مثال (1-7): أحسب مرونة الطلب السعرية لتوابع الطلب التالية من أجل $P = 2$:

$$2D = 5 - P \; ; \quad 3D + 0.5P = 12 \; ; \quad P = 25 - 0.5D$$

الحل:

$$P = 25 - 0.5D \Rightarrow D = \frac{25}{0.5} - \frac{1}{0.5}P \Rightarrow D = 50 - 2P$$

$$E_p(D) = D_p' * \frac{P}{D} = (-2) * \frac{2}{50 - 2(2)} = -0.09$$

$$2D = 10 - 2P \Rightarrow D = \frac{10}{2} - \frac{2}{2}P \Rightarrow D = 5 - P$$

$$E_p(D) = D_p' * \frac{P}{D} = -(-1) * \frac{2}{5 - (2)} = -0.666$$

$$3D + 0.5P = 12 \Rightarrow D = \frac{12}{3} - \frac{0.5}{3}P \Rightarrow D = 4 - 0.1667P$$

$$E_p(D) = D_p' * \frac{P}{D} = (-0.1667) * \frac{2}{4 - (01667) * 2} = -0.54545$$

مثال (1-8): أحسب مرونة الطلب السعرية لتوابع العرض التالية من أجل

$P = 8 + 0.4S$; $3P - 0.5S = 7$; $2S = -4P = -15$: $P = 10$

الحل:

$$P = 8 + 0.4S \Rightarrow S = \frac{-8}{0.4} + \frac{1}{0.4}P \Rightarrow S = -20 + 2.5P$$

$$E_p(S) = S'_p * \frac{P}{S} = (2.5) * \frac{10}{-20 + 2.5 * (10)} = 5$$

$$3P - 0.5S = 7 \Rightarrow S = \frac{-7}{0.5} + \frac{3}{0.5}P \Rightarrow S = -14 + 6P$$

$$E_p(S) = S'_p * \frac{P}{S} = (6) * \frac{10}{-14 + 6 * (10)} = 1.3$$

$$2S - 4P = -15 \Rightarrow S = -7.5 + 2P$$

$$E_p(S) = S'_p * \frac{P}{S} = (7) * \frac{10}{-7.5 + 2 * (10)} = 1.6$$

أسئلة وتمارين غير محلوله

احسب مرونة الطلب السعرية لتوابع الطلب التالية من أجل P = 3:

$3D = 6 - P$; $2D + 0.5P = 18$; $P = 20 - 0.75D$

(2): أحسب مرونة الطلب السعرية لتوابع العرض التالية من أجل

$P = 8 + 0.4S$; $3P - 0.5S = 7$; $2S = -4P = -15$; $P = 10$

(3): إذا علمت أن تابع الطلب على إحدى السلع التموينية هو:

$$D = 52 - 0.25P_1 + 0.4P_2 + 0.5Y$$

حيث أن: D – تمثل الكمية المطلوبة من السلعة و P_1 – تمثل سعر السلعة و P_2 – تمثل أسعار السلع البديلة، و Y – تمثل الدخل التصرفي للفرد. والمطلوب:

أ – أوجد مرونة الطلب السعرية عندما: $Y = 100$; $P_2 = 15$; $P_1 = 6$.

ب– أوجد مرونة الطلب المتقاطعة عندما: $Y = 100$; $P_2 = 15$; $P_1 = 6$.

ج– أوجد مرونة الطلب الدخلية عندما: $Y = 200$; $P_2 = 6$; $P_1 = 3$.

(4): إذا علمت أن تابعي الطلب والعرض على المشروبات الغازية هو:

$$D = 50 - 0.4P \quad ; \quad S = -4 + 0.15P$$

وإذا علمت أن الضريبة الحكومية مقدارها $t = 4$ ، والمطلوب:

أ– حساب السعر التوازني والكمية التوازنية قبل الضريبة وبعدها.

ب– حساب مرونتي الطلب والعرض السعرية عند نقطتي التوازن قبل الضريبة وبعدها.

ج- و إذا علمت أن الحكومة استبدلت الضريبة بتلقي إعانة من الشركات المنتجة للمشروبات الغازية و مقدارها ٢ عن الوحدة الواحدة من الإنتاج بين تأثير ذلك على السعر والكمية التوازنية.

(5): أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية النموذج التالي:

$$D= 15 - 4.5P \; ; S= 4 + 6P \; ; \; D = S$$

(6): أوجد مرونة التابع التالي: $Y = (3X^2 - 4X + 10)*e^{3X}$

(7): أوجد مرونة تابع الطلب السعرية التالي: $D = 10 - P$ من أجل $P = 4 \; ; \; P = 3$.

(8): أوجد المرونات الجزئية للعلاقة التالية: $D_1 = 15 - 3P_1 + 4.5P_2$

(9): بفرض أن الكميات المعروضة من مادة الرز في بلدين مختلفين معينة بالنموذج التالي: $D_1 = 15 - P_1 \; ; \; S_1 = -25 + 6P_1$

$$D_2 = 32 - 2P_2 \; ; \; S_2 = 15 + 7P_2$$

حيث إن: $D_1 \; ; \; S_1$ - تمثل على التوالي الكمية المطلوبة والكمية المعروضة من الرز في البلد الأول. $D_2 \; ; \; S_2$ - تمثل على التوالي الكمية المطلوبة والكمية المعروضة من الرز في البلد الثاني. والمطلوب:

أ - أوجد سعر الطن الواحد من مادة الرز، وكذلك الكميات المستهلكة منه حين يتحقق التوازن بين الكمية المطلوبة والمعروضة في سوق كلا البلدين، علماً بأنه لا يوجد أي تبادل تجاري ما بين البلدين.

ب – أوجد سعر الطن الواحد من مادة الرز، وكذلك الكميات المستهلكة منه حين يتحقق التوازن بين الكمية المطلوبة والمعروضة في سوق كلا البلدين، علماً بأنه يوجد تبادل تجاري حر ما بين البلدين.

جـ – أحسب مرونة الطلب السعرية ومرونة العرض السعرية عند السعر التوازني.

Damascus University

1-2- التوابع الاقتصادية للدخل والتكلفة والربح.

1-2-1- تابع الدخل.

الدخل فيما يخص المنشآت هو كمية الأموال التي تسعى المنشأة التجارية لتحصيلها من جراء بيع أو تسويق منتجاتها.

أما التعريف المحاسبي للدخل فهو عبارة عن جداء الكمية المبيعة (مقدرة بوحداتها القياسية) في سعر الوحدة الواحدة القياسية للمنتج. ونعبر عن ذلك رياضياً:

$$R = X*P$$

حيث إن: X – تمثل الكمية المبيعة مقدرة بوحدة القياس المناسبة.

P – تمثل السعر للوحدة الواحدة.

علاقة الدخل الكلي للمنشأة تتعلق إذاً بمقدار الكميات المبيعة من الإنتاج. أي نرمز لذلك رياضياً: R (X) والكمية المبيعة والتي هي عبارة عن الكمية المطلوبة من قبل المستهلكين والتي تمثل تابع الطلب D (P) = X . ونعبر عن علاقة الدخل الكلي للمنشأة والذي يختلف عن العلاقة المحاسبية التي استعرضناها أعلاه كتابع رياضي على الشكل التالي:

$$R(X) = D(P).P$$

وكما هو معلوم لنا إن الطاقة الإنتاجية لأي منشأة اقتصادية محدودة ولا يمكن تجاوزها إلا بتحسين وسائل الإنتاج على المدى الطويل. ولكن لزيادة الإيراد على المدى القصير فإننا قد نستطيع التحكم بالسعر أي زيادة السعر لزيادة الإنتاج.

1-2-1-1- حساب الدخل المتوسط

ونحصل عليه من خلال قسمة الدخل الكلي على الكمية المبيعة D(P)=X .ونرمز له بـ AR ونكتب:

$$AR = \frac{R(X)}{X} = \frac{D(P) * P}{X} = P$$

هذا يعني أن الدخل المتوسط يساوي إلى سعر الوحدة المبيعة من الإنتاج.

1-2-1-2- الدخل الهامشي (الحدي) للمنشأة

هو عبارة عن المشتق الأول لتابع الدخل الكلي. ونرمز له بـــ MR ونكتب:

$$MR = R'(X) = \frac{\delta R}{\delta x}$$

العلاقة بين تابع الدخل الكلي للمنشأة الاقتصادية والدخل المتوسط والدخل الحدي (الهامشي) ومرونة الطلب السعرية:

لتحديد هذه العلاقة لابد من العودة إلى تابع الطلب وتعريفه من وجهة نظر المستهلك الذي يسعى لتحقيق أعلى منفعة (أكبر كمية ممكنة بأقل سعر ممكن) وعبرنا عن ذلك سابقاً بـــ $D = f(P) = a - bP$. بينما المنشأة الاقتصادية تسعى لتحقيق أكبر دخل ممكن وبأقل التكاليف، فعندئذ تابع الطلب لها يكون من الشكل: $P = g(D) = g(X)$ ، أي السعر يتحدد بالكمية المطلوبة. حيث $g(D)$ – تمثل تابع الكمية المبيعة أو المنتجة أو المطلوبة. فإذا عوضنا علاقة السعر الجديدة في تابع الدخل الكلي نحصل على:

$$R(X) = D(P)*P = D(P)*g(D)$$

نحسب الدخل الهامشي فنجد:

$$MR = g'(D) * D(P) + g(D)$$

معلوم أن : $g'(D) = P'(D) = \frac{\delta P}{\delta D}$

$$MR = g'(D) * D(P) + P$$

$$MR = \frac{\delta D}{\delta P} * D(P) + P$$

وقد حسبنا سابقاً مرونة الطلب السعرية والتي تساوي إلى:

$$E_p(D) = -D' * \frac{P}{D} = -\frac{\delta D}{\delta P} * \frac{P}{D}$$

ننسب السعر إلى مرونة الطلب السعرية ، فنجد:

$$\frac{P}{E_p(D)} = \frac{P}{-\frac{\delta D}{\delta P} * \frac{P}{D}} = -\frac{\delta P}{\delta D} * D$$

نعوض هذه النتيجة في تابع الإيراد الهامشي التي حصلنا عليها أعلاه فنجد:

$$MR = -\frac{P}{E_p(D)} + P \Rightarrow MR = P\left(1 - \frac{1}{E_p(D)}\right)$$

من هذه العلاقة نستنتج:

أ- إذا كانت $E_p(D) = 1$ فإن $MR = 0$ أي الدخل الكلي لا يتغير بنقصان السعر وزيادة الكمية المطلوبة أو العكس.

ب- إذا كانت $E_p(D) > 1$ فإن $MR > 0$ أي الدخل الكلي يتأثر بتقلبات السعر والكمية المطلوبة، أي يزداد بنقصان السعر وزيادة الكمية المطلوبة والعكس صحيح.

ح- إذا كانت $E_p(D) < 0$ فإن $MR < 0$ أي الدخل الكلي (يتغير) أي ينقص بنقصان السعر وزيادة الكمية المطلوبة ويزداد بزيادة السعر والكمية المطلوبة.

1-2-2- تابع التكلفة الكلية.

الشكل العام لتابع التكلفة الكلية على النحو التالي:

$$C(X) = rX^3 - eX^2 + cX + k$$

عندئذ فإن التكلفة الحدية والتي هي عبارة عن المشتق الأول لتابع التكلفة الكلية يساوي إلى:

$$MC = 3rX^2 - 2eX + c$$

ومن أجل تحديد الكمية التي تعطي أقل كلفة حدية ممكنة، لابد من تحقق الشرطين التاليين:

أ- نحسب المشتق الأول ونجعله مساوياً للصفر وهو الشرط الضروري:

$$MC' = -2e + 6rX = 0$$

أي أن: $$X = 2e / 6r$$

ب- أما المشتق الثاني فيجب أن تكون قيمته أكبر من الصفر حتى تكون التكلفة الحدية أصغر ما يمكن وهو الشرط الكافي:

$$MC'' = 6rX > 0$$

وواضح أن القيمة $X = 2e / 6r$ هي أدنى تكلفة حدية نظراً لتحقق الشرطين الضروري والكافي.

مرونة تابع التكلفة الكلية

تبين لنا درجة تغير التكلفة الكلية، حين يتغير الإنتاج، وهي نسبة تغير التكلفة الكلية على التغيرات النسبية لمستوى الإنتاج.

$$E_x(C) = MC * \frac{X}{C(X)}$$

ومن العلاقة أعلاه: نستنتج أن المرونة عبارة عن مقلوب التكلفة الكلية المتوسطة مضروباً بتابع التكلفة الهامشية.

1-2-2-1- مرونة التكلفة المتوسطة

$$E_x(AC) = AC'_x * \frac{X}{AC} \; ; \; AC = \frac{C(X)}{X} \Rightarrow AC'_x = \frac{C'(X) - C(X)}{X^2}$$

$$E_x(AC) = \frac{C'(X) - C(X)}{X^2} * \frac{X}{AC} = \frac{C'(X) - C(X)}{X^2} - \frac{X^2}{C(X)} =$$

$$= \frac{C'(X)}{C(X)} - 1 = \frac{\delta C}{\delta X} * \frac{X}{C(X)} - 1 = \frac{X}{C(X)} * \frac{\delta C}{\delta X} - 1 = E_x(C) - 1$$

ومنه نستنتج أن الفرق بين مرونة التكلفة الكلية ومرونة التكلفة المتوسط يساوي إلى الواحد: $E_x(C) - E_x(AC) = 1$

جعلنا التكلفة الكلية المتوسطة مساوية إلى التكلفة الحدية فإن مرونة
" " سطة تصبح معدومة الأمر الذي يدل على أن التكلفة المتوسطة
جة هي قيمة ثابتة.

ال **(12-1)**: حدد مدير التكاليف في شركة بلودان لصناعة الغسالات
تكلفة الحدية عند مستوى الإنتاج x على النحو الآتي:

$$M C' = M g'(X) = 3X^2 - 200X + 1000$$

والمطلوب: تحديد التكلفة الكلية لإنتاج الدفعة الأولى والمكونة من ٥ غسالات ، مع العلم أن التكلفة الكلية لإنتاج أول غسالة بلغت 5000 وحدة نقدية.

الحل: معلومٌ أن علاقة التكلفة الحدية بالتكلفة الكلية هي أن الأولى تعتبر مشتقاً للثانية وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$C(X) = \int M g'(X) dx = \int (3X^2 - 200X + 1000) dx =$$

$$= 3\int X^2 \delta x - 200 \int X \delta x + 1000 \int \delta x$$

$$C(X) = X^3 - 100X^2 + 1000X + C$$

معلوم أن إنتاج الغسالة الأولى هو: $C(1) = 5000 \Leftarrow$

$$5000 = (1)^3 - 100(1)^2 + 1000(1) + C$$

وبالتالي: $C = 4599$

فيكون تابع التكلفة الكلية على الشكل التالي:

$$C(x) = X^3 - 100X^2 + 1000X + 4599$$

ومنه نجد أن تكاليف إنتاج خمس غسالات هو:

$$C(5) = (5)^3 - 100(5)^2 + 1000(5) + 4599$$

$$C(5) = 7224$$

وهي التكلفة الكلية اللازمة لإنتاج خمس غسالات.

1-2-3- تابع الربح الكلي.

وهو عبارة عن الدخل ناقصاً التكلفة ونعبر عن ذلك رياضياً:

$$\pi(X) = R(X) - C(X)$$

حيث أن: $\pi(X)$ - تمثل تابع الربح الكلي. و $R(X)$ - تمثل تابع الدخل الكلي. $C(X)$ - تمثل تابع التكلفة الكلية.

وعند دراسة تابع الربح يفضل الأخذ بعين الاعتبار حالتي السوق، أي بين حالة السوق الاحتكارية وحالة السوق في ظل المنافسة الكاملة.

1-2-3-1- سياسة المنشأة الاقتصادية في ظل السوق الاحتكارية:

بما أن هدف أي منشأة اقتصادية هو السعي لتحقيق الربح الأعظمي، لذلك في هذه السوق المنشأة الاقتصادية تسعى إلى تحديد الكميات الإنتاجية الواجب طرحها في دون التعرض إلى سعر المنتج. لأن سعر المنتج سوف يتحدد في هذه الحالة طبقاً لنظريتي العرض والطلب. أو أن تلجأ المنشأة إلى تحديد السعر وهذا الأمر الذي سيؤدي إلى تحديد الكميات المعروضة.

ومن أجل تحقيق الربح الأعظمي في ظل هذه السوق فلابد من تحقيق الشرطين الضروري والكافي أي مساواة المشتق الأول بالصفر ويجب أن يكون المشتق الثاني أصغر من الصفر. أي:

أ- $\pi'(X) = R'(X) - C'(X) \rightarrow R'(X) = C'(X)$

ب- $R''(X) < C''(X)$

عندئذ تكون المعالجة على الشكل التالي:

1- حالة تحديد الكمية المعروضة وترك السعر ليتحدد من خلال السوق عندئذ السعر يتحدد بدلالة الكمية على النحو التالي:

$$P = g(X)$$

تابع الربح يأخذ الشكل التالي:

$$\pi(X) = R(X) - C(X) = P * X - C(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi'_p(X) = \frac{\delta x}{\delta p} * P + \frac{\delta x}{\delta x} * X - \frac{\delta c}{\delta x} = 0$$

ويحقق المنتج أعظم ربح له عندما:

$$\frac{\delta c}{\delta x} = \frac{\delta p}{\delta x} * X + P$$

2- أما في حالة تحديد السعر والتخلي عن تحديد الكمية المطلوبة للسوق فإن علاقة الكمية المطلوبة تتبع السعر من الشكل: $X = \Phi(P)$ عندئذ تابع الربح يصبح على النحو التالي:

$$\pi(X) = R(X) - C(X) = P * X - C(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi'_p(X) = \frac{\delta x}{\delta p} * P + \frac{\delta x}{\delta x} * X - \frac{\delta c}{\delta x} = 0$$

ويحقق المنتج أعظم ربح له عندما: $\frac{\delta c}{\delta x} = X + \frac{\delta x}{\delta p} * P$

من هذه العلاقة نجد أن: التكلفة متغير تابع بالنسبة لحجم الإنتاج X، وحجم الإنتاج X تابع للسعر P ، فلو قمنا بتطبيق علاقة اشتقاق تابع التابع لهذه العلاقة المركبة لحصلنا على:

$$\frac{\delta c}{\delta x} = \frac{\delta p}{\delta x} * X + P$$

وهي نفس العلاقة السابقة في حالة تحديد الكمية والتخلي عن السعر.

1-2-3-2- سياسة المنشأة الاقتصادية في ظل المنافسة التامة

في هذه الحالة لا تستطيع المنشأة التحكم في السعر لأنه ثابت ولا يتأثر بالكمية المعروضة وإنما تلجأ المنشأة الاقتصادية إلى التحكم في تقليل حجم

التكاليف إلى أدنى حد باستخدام أنجع أساليب التقدم التقني وتقليل الهدر في المواد الأولية.

ومن أجل تحقيق الربح الأعظمي في ظل هذه السوق فلابد من تحقيق الشرطين الضروري والكافي أي مساواة المشتق الأول بالصفر ويجب أن يكون المشتق الثاني أصغر من الصفر. أي:

أ- $\pi'(X) = R'(X) - C'(X) \rightarrow R'(X) = C'(X)$

ب- $R''(X) = C''(X)$

إذاً الشرط الأول يدل على أن الكلفة الهامشية تساوي الدخل الهامشي، وهو عبارة عن السعر، أي الدخل المتوسط أيضاً في ظل المنافسة التامة.

تحديد الكمية التي تحقق أعظم ربح:

$$\pi(X) = R(X) - C(X) \; ; \quad R = aX - bX^2 \; ; \quad C = k + cX + eX^2$$

$$\pi(X) = aX - bX^2 - k - cX - eX^2 = -k + (a-c)X - (b+e)X^2$$

$$\pi'(X) = (a-c) - 2(b+e)X = 0 \Rightarrow X = \frac{a-c}{2(b+e)}$$

أما المشتق الثاني فهو:

$$\pi''(X) = -2(b+e) < 0$$

بما أن المشتق الثاني قيمته أصغر من الصفر، فهذا يعني أن القيمة:

$$X = \frac{a-c}{2(b+e)}$$

تحقق أعظم ربح ممكن للمنشأة الاقتصادية.

ويمكن توضيح هذه النتيجة من خلال الشكل البياني (6-1).

$$T' = \frac{a - c - 2t}{2(b+e)} = 0 \Rightarrow a - c - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{a-c}{2}$$

أما المشتق الثاني فهو:

$$T'' = \frac{-2}{2(b+e)} = \frac{-1}{(b+e)} < 0$$

ومنه نستنتج أن المعدل الضريبي الذي يحقق للحكومة أقصى عائد ضريبي هو:

$$t = \frac{a-c}{2}$$

1-2-3-5- توزيع الضريبة بين المنتج والمستهلك في حالة المنافسة التامة

في حالة المنافسة التامة فإن فرض الضريبة سيعرض المنشآت الإنتاجية إلى الانتقال لمنحيات تكاليف أعلى الأمر الذي يؤدي إلى انخفاض السعر التوازني، وظهور سعر توازني جديد. وهذا الأمر يستدعي توزيع عبء الضريبة بين المستهلك والمنتج، ويتوقف ذلك على مرونة تابعي العرض والطلب.

السعر بدلالة الكمية المطلوبة له الشكل:

$$P = a - bX$$

بينما السعر بدلالة الكمية المعروضة بعد فرض الضريبة يصبح له الشكل:

$$P - t = c + dX$$

نطبق شرط التوازن من أجل إيجاد الكمية التوازنية والسعر التوازني قبل فرض الضريبة فنجد:

$$D = S \Rightarrow a - bX = c + dX \Rightarrow \bar{X} = \frac{a-c}{b+d}$$

$$\bar{P} = \bar{D} = \bar{S} = a - b\left(\frac{a-c}{b+d}\right) = \frac{ab + ad - (ab - bc)}{b+d} = \frac{ad + bc}{b+d}$$

أما الكمية التوازنية والسعر التوازني بعد فرض الضريبة:

$$D = S = a - bP = c + dP + t \Rightarrow \bar{X}^* = \frac{a-c-t}{b+d}$$

$$\bar{P}^* = \bar{D} = \bar{S} = a - b\left(\frac{a-c-t}{b+d}\right) = \frac{ab + ad - (ab - bc - bt)}{b+d} =$$

$$= \frac{ad + bc + bt}{b+d} = \frac{ad + bc}{b+d} + \frac{bt}{b+d} = \bar{P} + \frac{bt}{b+d}$$

وتابع العائد الضريبي عيناه سابقاً على الشكل التالي:

$$T = t * X = t * \frac{a-c-t}{2(b+e)} = \frac{ta - tc - t^2}{2(b+e)}$$

وجدنا أنه يحقق العائد الأعظم من أجل معدل ضريبي يساوي إلى:

$$t = \frac{a-c}{2}$$

التفسير للنتيجة التي حصلنا عليها أن المستهلك يدفع سعراً أعلى بعد فرض الضريبة بمقدار: $\frac{bt}{b+d}$

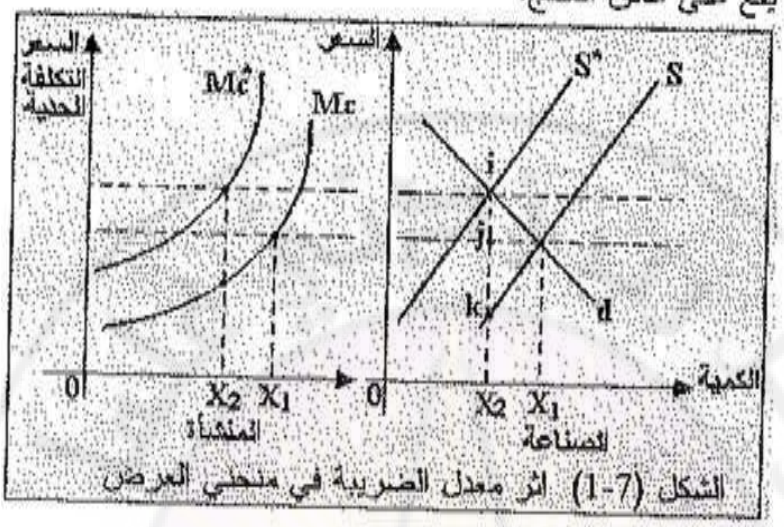
أي يتحمل المستهلك النسبة: $\frac{b}{b+d}$

بينما المنتج سوف يتحمل متمم هذه القيمة إلى الواحد أي المقدار:

$$\frac{d}{b+d}$$

يوضح الشكل (7-1). أن فرض ضريبة على وحدات الإنتاج أدى إلى انتقال منحني التكاليف الحدية للمنشأة من Mc إلى Mc* وانتقال منحني العرض للصناعة ككل إلى S* . وكما هو واضح من الرسم البياني إن معدل

الضريبة يساوي إلى t يساوي إلى ik ويتحمل المستهلك ما نسبته ik / ij والباقي يقع على عاتق المنتج.



الشكل (7-1) اثر معدل الضريبة في منحني العرض

أسئلة وتمارين غير محلولة

(1): حدد أحد الاقتصاديين تابعي الطلب على السلعتين A, B على النحو التالي: $D_a = (700 - 4P_1 + 2P_2)$, $D_b = (400 - P_1 - 3P_2)$

حيث أن: D_a , D_b عبارة عن الكميات المطلوبة مقدرة بالطن

و P_1 , P_2 سعر الطن لكل سلعة من السلع.

والمطلوب:

1- أوجد P1 , P2 اللذين يحققان أعظم دخل كلي ممكن.

2- احسب كميات كل سلعة A , B من السلع والدخل الأعظمي.

3- احسب مرونة الطلب على السلعة A والسلعة B من أجل:

$P_1 = 50$, $P_2 = 45$

(2): ملذ فترة وجيزة عيين موظف ملم بعلم الاقتصاد في إدارة مصنع المطابخ الخشبية، واستطاع تحديد تابع الإيراد الكلي والتكلفة الكلية لإنتاج هذا المصنع أسبوعياً على النحو التالي:

$$R = 500X - 5X^2 \qquad C = 30X - 150$$

حيث إن: X- تمثل الكميات المبيعة.

والمطلوب:

1- أوجد الإيراد الأعظمي الذي سوف يحققه هذا المصنع أسبوعيا.

2- حدد الكمية والسعر اللذين يجعلان الربح أعظمياً، وحدد كمية الربح الأعظمي.

3- بين كيف يتغير السعر الأمثل إذا ارتفعت التكلفة الثابتة إلى 100 ألف وحدة نقدية.

4- احسب مرونة الدخل الكلي ومرونة التكلفة الكلية عند مستوى الناتج الذي يحقق الربح الأعظمي.

(3): إذا كان تابع الطلب من الشكل: $D = a - bP$

حيث إن: a ; b قيمتان ثابتتان وموجبتان.

والمطلوب: أثبت أن مرونة الطلب السعرية تساوي إلى الواحد عندما الإيراد الحدي يساوي صفراً.

(4): إذا كان تابع الطلب لإحدى المنشآت الاقتصادية في سوق احتكارية على النحو التالي: $D = 30 - 2P$ وتابع التكاليف المتوسطة هو:

$$AC = 10/X + 25 + 0.7X$$

والمطلوب:

أ- احسب قيمة (X) التي تعطي أكبر إيراد ممكن.

ب- احسب قيمة (X) التي تعطي أكبر ربح ممكن.

ج- بين تأثير أقصى ربح في حال فرض ضريبة مقطوعة على المنشأة الاقتصادية مقدارها: $t = 2$.

د- بين أثر فرض ضريبة على الوحدة الواحدة المنتجة مقدارها $t = 0.25$ على كمية الإنتاج التي تعطي أقصى ربح ممكن.

(5): إذا كان تابع العرض لإحدى المنشآت الاقتصادية في سوق احتكارية على النحو التالي: $S = -15 + 0.3P$ وتابع الطلب هو: $D = 25 - P$

والمطلوب:

أ- بفرض إنه تم فرض ضريبة بمعدل ما على الوحدة الواحدة المنتجة، أحسب هذا معدل الذي يحقق أعظم عائد ضريبي.

ب- ناقش أهم محددات هذا المعدل الضريبي.

ج- مثل النتائج بيانياً.

(6): إذا كان تابع الربح لإحدى المنشآت الاقتصادية النحو التالي:

$$\pi = 40X_1 + 25X_1 - X_2^2 - 2X_1^2 + X_1X_2 - 5$$

والمطلوب:

أ- أحسب الكميات التي تحقق أعظم ربح.

ب- أحسب أعظم ربح تحققه المنشأة الاقتصادية.

1-3- التوابع الاقتصادية للانتاج والمنفعة.

1-3-1- تابع الإنتاج.

تابع الإنتاج عبارة عن العلاقة التابعية التي تربط بين حجم الإنتاج من جهة، وحجم عوامل الإنتاج من جهة أخرى. تغطي دالة (تابع) الإنتاج رقعة واسعة من الأدب الاقتصادي نظراً لأهميتها في تحليل اقتصاديات العمالة الإنتاجية. وكما هو معلوم إن الناتج في صورة سلعة استهلاكية و إنتاجية يتولد في العملية الإنتاجية فحسب، وذلك من خلال تأثير الإنسان في مواد العمل وتغير مواصفتها الفيزيائية و الكيميائية بمساعدة أدوات العمل.

و بالتالي يمكننا أن نقول بشكل أكثر تحديداً إن تابع ما هو العلاقة بين مجموع عناصر الإنتاج والناتج مع الأخذ بعين الاعتبار التقدم العلمي والتقدم التقني. وعندئذ تابع الإنتاج يأخذ الشكل التالي:

$$Q = f(K; L; T; \ldots)$$

حيث إن:

Q - حجم الناتج (Output) مقيساً بالقيمة المضافة الإجمالية أو بقيمة الناتج المحلي الإجمالي في حالة تقدير تابع الإنتاج على الصعيد الكلي.

K - قيمة أدوات العمل (رأس المال).

L - حجم العمالة مقاساً بمعدل عدد المشتغلين أو بمجموع عدد الساعات الفعلية للعمل المبذول خلال السنة.

T- التقدم التقني (أو التطور الزمني).

سنكتفي بدراسة تابع الإنتاج بدلالة متغيرين وهما العمل ورأس المال. ونكتب التابع على النحو التالي:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

1-1-3-1- الإنتاجية الحدية: نستطيع أن نميز نوعين من الإنتاجية الحدية بالنسبة للمتغيرين المستقلين المحددين لتابع الإنتاج في أبسط أشكاله، وهما العمل L ورأس المال K.

1-1-3-2- الإنتاجية الحدية بالنسبة للعمل (Marginal Product):

$$\frac{\delta Q}{\delta L} > 0$$

و تفسر الإنتاجية الحدية للعمل على أن عملية دفع عنصر عمل إضافي إلى العملية الإنتاجية يؤدي إلى تحقيق زيادة في الإنتاج. ولكن لمعرفة نوعية الزيادة وكيفتها، نأخذ المشتق الثاني لتابع الإنتاج بالنسبة للعمل، فنجد:

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta L^2} < 0$$

وبما أن المشتق الثاني أصغر من الصفر، هذا يعني أن الناتج ينمو نمواً متباطئاً نتيجة زيادة عنصر العمل بمعدل نمو ثابت. أي أن مقدار الزيادة المتحققة في الناتج نتيجة دفع عنصر إضافي من العمل إلى العملية الإنتاجية يؤدي إلى الزيادة بمعدل متناقص.

1-1-3-3- الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال: $\frac{\delta Q}{\delta K} > 0$

ونجد بالطريقة نفسها الطريقة نجد أن زيادة أدوات العمل باستمرار يؤدي إلى زيادة قيمة الناتج، فيما إذا كان عدد المشتغلين ثابتاً. إلا إن نسبة الزيادة في الناتج لا تتماشى مع حجم أدوات الإنتاج المتكدسة أي أن معدل الزيادة سيكون متناقصاً، وذلك بسبب محدودية عنصر العمل الثابت. المشتق الثاني:

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta K^2} < 0$$

1-3-1-4- تابع (تابع) كوب – دوغلاس (Cobb-Douglas)

لقد ساهمت الإنجازات العلمية عبر التاريخ لكثير من الاقتصاديين عن نتائج هامة في دراسة وبناء تابع الإنتاج ، إذ تعود هذه المساهمات إلى الفكر النيو كلاسيكي وبالذات إلى الاقتصادي فونثونين Vonthunen عام 1982، والذي أكد إمكانية تعظيم الإنتاج الإجمالي في حالة تخفيض الموارد بصورة تحقق تساوي عوائدها الحدية ولم يعلن عن تابع الإنتاج صراحة إلا عندما استخدم الاقتصادي السويدي ويكسيل Wicksell الوصول إلى تابع الانتاج ذي الإحلال المستمر بين عوامل الإنتاج في عام 1894 . وهذا يعتبر أول إنجاز في استخدام المعادلات الرياضية لتحديد العلاقة بين مستلزمات الإنتاج والإنتاج. اعتبر هذا الإنجاز الأول في استخدام المعادلات الرياضية . على الرغم من هذا الاكتشاف إلا أن الأساس التقني الإحصائي والتطبيقي للعلاقة بين عوامل الإنتاج والمخرجات تم وضعه بشكل مقبول للدراسة والتحليل حين وضع الاقتصادي دوغلاس Douglas وزميله الرياضي كوب Cobb علاقة تابعية عرفت فيما بعد باسم تابع الإنتاج كوب–دوغلاس Cobb-Douglas ، ومن خلالها استطلعا قياس علاقة الإنتاج للصناعة الأمريكية في عام 1928 مستخدمين بيانات حكومية. تم تطويرها من قبل الاقتصاديين . وقد حقق تابع الإنتاج هذا قفزة نوعية من حيث تم استخدام رأس المال الثابت في الصناعة السلعية وبيانات التاريخ الصناعي تحت حالة معينة من المعرفة الفنية.

وأخذ هذا التابع الشكل الرياضي بعد تعديله من قبل بعض الاقتصاديين المهتمين بالدراسات التطبيقية ليصبح على النحو الآتي:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

حيث أن:

Q – حجم الناتج (Output) مقيساً بالقيمة المضافة الإجمالية أو بقيمة الناتج المحلي الإجمالي في حالة تقدير تابع الإنتاج على الصعيد الكلي.

K – قيمة أدوات العمل (رأس المال).

ويقاس رأس المال الثابت على نطاق الوحدة الواحدة على أساس إجمالي قيمة الأصول الثابتة، أما على الصعيد القومي فإنه يُقاس على أساس تراكم رأس المال الثابت من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$K_t = K_0 + \sum_{i=t}^{t} (I_i - D_i)$$

وحيث:

K_t– قيمة رأس المال المتراكم في نهاية الفترة (t).

K_0 – قيمة رأس المال الثابت في سنة الأساس.

I_i – إجمالي تكوين رأس المال في السنة (i).

D_i – قيمة رأس المال الثابت المستهلك (الاهتلاكات) في السنة (i)

L – حجم العمالة مقيساً بمعدل عدد المشتغلين أو بمجموع عدد الساعات الفعلية للعمل المبذول خلال السنة.

A– معامل التناسب، وهو يعكس كفاءة توافق عوامل الإنتاج.

ولا بد من الإشارة قبل البدء في دراسة تابع الإنتاج هذا ،تحديد مكوناته ذات الدلالة التطبيقية كمؤشرات اقتصادية ذات الصلة بالعملية الإنتاجية والإنتاج الاقتصاد الوطني ومنها:

α – تمثل مرونة الإنتاج بالنسب للعمل. أي إذا زاد متغير العمل بمقدار ١% فإن الإنتاج يزداد بمقدار α مع ثابت بقية العناصر.

β – تمثل مرونة الإنتاج بالنسب للعمل. أي إذا زاد متغير رأس المال بمقدار ١% فإن الإنتاج يزداد بمقدار β مع ثابت بقية العناصر.

الأهمية النسبية للعمل : $S.I. = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$

الأهمية النسبية للعمل : $S.K. = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$

تابع الإنتاج كوب–دوغلاس Cobb-Douglas حدد العلاقة بين مستوى العائد ومستوى الإنتاج وذلك من خلال العلاقات التالية:

1– حالة ثبات عائد بالنسبة لمستوى الإنتاج $\alpha + \beta = 1$

2– حالة تناقص العائد بالنسبة لمستوى الإنتاج $\alpha + \beta < 1$

3– حالة تزايد العائد بالنسبة لمستوى الإنتاج $\alpha + \beta > 1$

أيضاً تم استخدام تابع إنتاج كوب–دوغلاس Cobb-Douglas في قياس الكثافة الرأسمالية أو كثافة العمل على النحو الآتي:

أ– إذا كانت العلاقة: $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ تعتبر الصناعة ذات كثافة العمل.

ب– إذا كانت العلاقة: $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ تعتبر الصناعة ذات كثافة العمل.

1-3-1-5– دراسة تحولات تابع الإنتاج

الإنتاج الوسطي بالنسبة للعمل: $AP_L = \frac{Q}{L}$

وهو عبارة عن متوسط إنتاجية الوحدة الواحدة من عامل الإنتاج K في وحدة الزمن، ويقاس بوحدة مركبة وحدة الزمن على وحدة العمل.

الإنتاج الوسطي بالنسبة للعمل: $AP_K = \frac{Q}{K}$

وهو عبارة عن متوسط إنتاجية الوحدة الواحدة من عامل الإنتاج K في وحدة الزمن، ويقاس بوحدة مركبة وحدة الزمن على وحدة رأس المال.

الإنتاجية الحدية للعمل:

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = \alpha * A * L^{\alpha-1} K^{\beta} = \frac{\alpha Q}{L}$$

الإنتاجية الحدية لرأس المال:

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = \beta * A * L^{\alpha} K^{\beta-1} = \frac{\beta Q}{K}$$

1-3-1-6- المرونات الجزئية لتابع الإنتاج

المرونة بالنسبة للعمل:

$$E_L(Q) = \frac{\delta Q}{\delta L} * \frac{L}{Q} = \alpha * A * L^{\alpha-1} K^{\beta} = \frac{\alpha Q}{A * L^{\alpha} K^{\beta}} = \alpha$$

المرونة بالنسبة لرأس المال:

$$E_K(Q) = \frac{\delta Q}{\delta K} * \frac{K}{Q} = \beta * A * L^{\alpha} K^{\beta-1} = \frac{\beta Q}{A * L^{\alpha} K^{\beta}} = \beta$$

من أعلاه نستنتج أن: α، β ذات معنى اقتصادي هام في تابع كوب –دوغلاس فهي عبارة عن مرونة تابع الإنتاج بالنسبة لرأس المال والعمل على التوالي. أي α تعبر عن التغير للإنتاج إلى معدل التغير النسبي في العمل، وβ تعبر عن التغير النسبي للإنتاج إلى معدل التغير النسبي لرأس المال.

1-3-1-7- منحنيات السواء Indifference Curves

يستخدم هذا النوع من المنحيات حين نريد دراسة سلوك المستهلك وسلوك المنتج إذ يفترض أن يكون سلوك المستهلك هو تحقيق أقصى منفعة ممكنة من خلال إنفاق دخله التصرفي، على افتراض أن تابع المنفعة عند المستهلك من الشكل:

$$U = AX_1^{\alpha}X_2^{\beta}$$

حيث: (U) ترمز للمنفعة. و(X1)، (X2) سلعتان يفاضل بينهما المستهلك، أما (α ; β) فهي قيم ثابتة و (A) ثابت التناسب. نحسب معدل الإحلال الحدي (Marginal Rate of Substitution) بين السلعتين عند مستوى ثابت من المنفعة. ويعرف معدل الإحلال الحدي بين السلعتين على أنه معدل استبدال السلعة (X1) محل السلعة (X2) التي يرغب في الحصول عليها مقابل التخلي عن وحدة واحدة من السلعة (X1) بحيث يحافظ المستهلك على القدر نفسه من الإشباع (المنفعة). ونكتب:

$$MRSL_{X_1.X_2} = \frac{\delta X_2}{\delta X_1}$$

ومن تابع المنفعة أعلاه يمكننا أن نكتب:

$$X_2 = U^{\frac{1}{\beta}}A^{-\frac{1}{\beta}}X_1^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

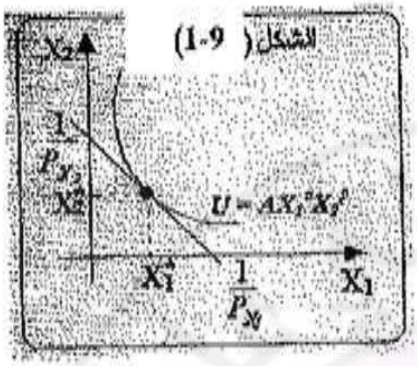
$$\frac{\delta X_2}{\delta X_1} = \left(-\frac{1}{b}\right)U^{\frac{1}{\beta}}A^{\frac{1}{\beta}}X_1^{-\frac{(\alpha+\beta)}{\beta}}$$

على افتراض أن الدخل التصرفي للمستهلك (Ic). وإن أسعار السلعتين (PX1)، (PX2)، فعندئذ نكتب معادلة خط الميزانية على الشكل التالي:

$$Ic = X_1 * PX_1 + X_2 * PX_2$$

أما القيمة المطلقة لميل خط الميزانية فيساوي: $\frac{\delta X_2}{\delta X_1} = \frac{P_{X_1}}{P_{X_2}}$

إذاً يحقق المستهلك المنفعة القصوى حين ينفق دخله التصرفي على التركيبة السلعتين الواقعة على خط الميزانية والتي يمس عندها منحني السواء خط الميزانية. أنظر الشكل (1-9).



الشكل (1-9)

1-3-1-8- منحيات الناتج المتساوي Isoquants

عند مستوى معين من الإنتاج يمكننا دراسة عناصر الإحلال بين عناصر الإنتاج، فإذا فرضنا أن مستوى الإنتاج حسب تابع كوب-دوغلاس يساوي إلى (Q_0) $Q_0 = AL_{\alpha}K_{\beta}$. وإذا حافظنا على هذا المستوى وغيرنا في عناصر الإنتاج فإننا نحصل على كمية الإنتاج نفسها ولكن مساهمة عناصر الإنتاج مختلفة. على فرض أن (K) تابع لـ (L) ولنبحث عن طبيعة الخط البياني الممثل لتغيرات التابع (K) حين يتغير المتغير (L) مع المحافظة التغير في القسم الموجب. لنشتق التابع بالنسبة (L) نجد أن:

$$\frac{\delta Q_0}{\delta L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} + \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}(\frac{\delta K}{\delta L}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\delta K}{\delta L} = -\frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$$

$$TMST_{K,L} = -\frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$$

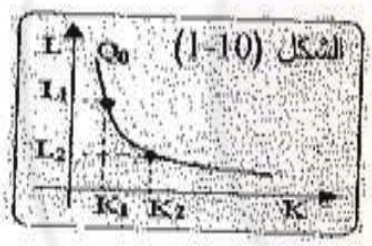
ونرمز بـ $TMST_{K,L}$ لمعامل إحلال رأس المال محل العمل أو ما نسميه معدل الإحلال الحدي التقني (Marginal Rate of Technical Substitution).

نوجد المشتق الثاني للعلاقة لتحديد فيما إذا كان التغير يتم بالاتجاه الموجب أو السالب فنجد:

$$\frac{\delta^2 K}{\delta L^2} = \frac{\alpha K}{\beta L^2} - \frac{\alpha}{\beta} * \left(\frac{-\alpha K}{\beta L}\right) = \frac{\alpha(1+\alpha)K}{\beta(1+\beta)L^2} > 0$$

و بما أن الناتج قيمة موجبة دوماً، نستنتج أن المنحني البياني الممثل لتغيرات (K) حين تتحول (L) متناقص دوماً، ويتجه تقعره نحو الأعلى.

نلجأ عادة إلى أسلوب إحلال عناصر الإنتاج حين يرتفع سعر الوحدة من أحد العناصر المكونة لعملية الإنتاج، ومن أجل المحافظة على مستوى الإنتاج نلجأ إلى عملية الإحلال التقني. ويقاس المعدل الحدي للإحلال التقني لعناصر الإنتاج بالقيمة المطلقة لميل المماس عند نقطة التماس لمنحني التابع، وهذا الميل قيمته دوماً سالبة. انظر الشكل (10-1).



الشكل (10-1)

1-3-2- تابع المنفعة.

تبين لنا نظرية المستهلك أن تابع المنفعة يربط بين المنفعة الكلية التي يجنيها المستهلك وبين كمية السلعة للاستهلاك من السلعة. ونرمز لتابع المنفعة بالرمز التالي: U(X). وبفرض وجود (n) سلعة فإن المستهلك يوزع دخله التصرفي على هذه السلع حسب المنفعة التي يجنيها:

$$U(X) = f(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n)$$

وفي الوقت نفسه عند المستهلك عدة مستويات من توابع المنفعة نتيجة تعدد المنتجين وتعدد أسعار البيع وتعدد أشكال الاستهلاك. وبما أن تابع المنفعة يهدف إلى تأمين أكبر حد من الإشباع لحاجات المستهلك الضرورية. الأمر الذي يفسر تابعية هذا التابع لعدة متغيرات وكل متغير يعطي تابع منفعة جديداً. ولكن أي هذه التوابع هو الأفضل ؟ نجد أن أفضل هذه التوابع هو الذي يحقق للمستهلك درجة المنفعة الأعظمية.

1-3-2-1- المنفعة الحدية (الهامشية)

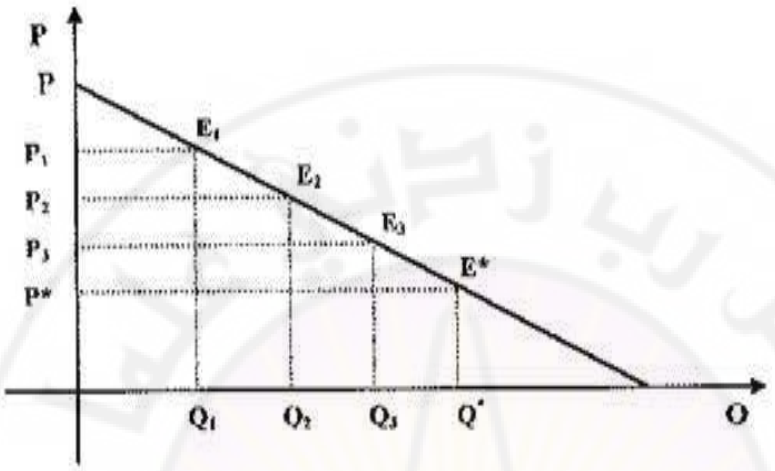
يبين المشتق الأول التغير الحاصل في المنفعة الكلية للمستهلك نتيجة في الصغر للكمية المستهلكة، ونرمز للمنفعة الحدية بـ $MU = U(X)'$.

أما المشتق الثاني لتابع المنفعة فيدل على طبيعة المنفعة التي يجنيها المستهلك. فإذا كانت قيمة المشتق الثاني للمنفعة اصغر من الصفر $(U(X)'' < 0)$ فهذا يعني تناقص المنفعة الهامشية حين تزداد الكمية المستهلكة (X)، والعكس صحيح.

1-3-2-2- فائض المستهلك Consumer's Surplus

فائض المستهلك : هو عبارة عن الفرق بين ما يحصل عليه المستهلك من منفعة تشبع حاجته وبين ما ينفقه بشكل فعلي. على فرض أن السعر التوازني في السوق هو OP^* فإن المستهلك يشتري الكمية التي يحتاجها (OQ^*) ويدفع السعر (OP^*) لكل وحدة مشتراة . أي أن المستهلك يدفع القيمة $(OP^*).(OQ^*)$. وفي الوقت الذي نلاحظ فيه أن المستهلك مستعد لدفع السعر (OP_1) من أجل الحصول على الكمية (OQ_1) ، والسعر (OP_2) من أجل الحصول على الكمية (OQ_2) والسعر (OP_3) من أجل الحصول على الكمية (OQ_3) وهكذا هو

مستعد لدفع أسعار مختلفة عند مستويات مختلفة تقع على المنحنى التوازني للطلب ، انظر الشكل (11-1).



الشكل (11-1)

أي أن المستهلك مستعد لدفع سعر لكل كمية تفوق الكمية التوازنية للسوق عند السعر التوازني للسوق باستثناء الوحدة الأخيرة ، فهو مستعد أن يدفع فيها السعر التوازني فقط . وتفسير ذلك هو سريان قانون المنفعة الحدية المتناقصة.

من خلال الرسم نلاحظ أن المستهلك مستعد لان يدفع مبلغ وقدره (OPEQ*) في حين إنه يدفع بالفعل المبلغ فقط (OP*EQ*). أي أن الفرق بين المبلغين(P*PE) يعرف بفائض المستهلك.

ويلاحظ أن هذا الفائض يزداد كلما انخفض سعر الوحدة التوازني. وبالتالي فإنه لإيجاد فائض المستهلك نكامل تابع الطلب ضمن المجال (OQ*) فنحصل على المساحة المحصورة تحت منحنى الطلب، وتمثل المبلغ الذي يكون المستهلك مستعداً لدفعه، ثم نطرح منه المبلغ الذي يدفعه المستهلك فعلاً، وهو عبارة عن الكمية التوازنية ضرب السعر فنحصل على فائض المستهلك. بعبارة

أخرى فإن الفائض هو عبارة عن المساحة التي نحصل عليها من تكامل تابع الطلب مطروحاً منه تابع السعر.

مثال (25-1): حدد مدير الإنتاج تابع الطلب لمنتج قلم الرصاص كما يلي:

$$D = f(x) = 25 - 0.85X$$

حيث X- تمثل الكمية المشتراة من هذه السلعة.

والمطلوب:

1- أوجد فائض المستهلك عند شرائه تلك السلعة بسعر 12 ليرةسورية للقلم الواحد (أي أوجد فائض المستهلك عندما: $D = 12$).

2- أوجد فائض المستهلك حين ينخفض سعر شراء القلم إلى خمس ليرات أي $D = 5$.

الحل:

بمساواة تابع الطلب $D = f(x) = 25 - 0.85X$

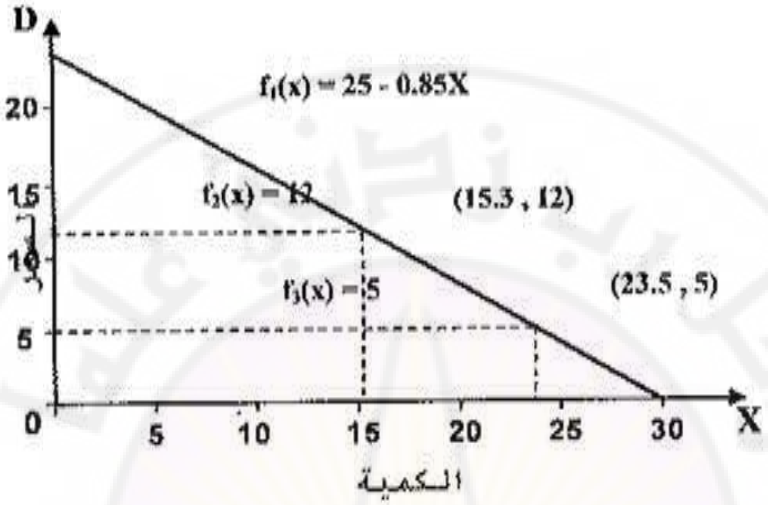
وتابع السعر $D = 12$ نجد:

$$12 = 25 - 0.85X$$

وبالتالي فإن:

$$0.85X = 25 - 12 = 13 \Rightarrow X = \frac{13}{0.85} = 15.3$$

ويكون شكل تابع الطلب ومساحة فائض المستهلك كما في الرسم التالي:



الشكل (12-1)

ويكون فائض المستهلك عند سعر $D = f_2(x) = 12$ يساوي:

$$\int_0^{15.3} (25 - 0.85X - 12)\delta x = \left[13X - \frac{0.85}{2}X^2\right]_0^{15.3} =$$

$$= \left[13(15.3) - 0.425(15.3)^2\right]_0^{15.3} = [198.9 - 99.49] = 99.41$$

لإيجاد فائض المستهلك عند سعر $D = f_3(X) = 5$ نساوي تابع الطلب بتابع السعر فنجد:

$$5 = 25 - 0.85X \Rightarrow X = \frac{20}{0.85} = 23.53$$

ويكون فائض المستهلك عند سعر $D = f_3(X) = 5$ مساوياً:

$$\int_0^{23.53}[f_1(X) - f_3(X)]dx = \int_0^{23.53}[25 - 0.85X - 5]dx =$$

$$= \int_0^{25.53}[20 - 0.85X]dx = \left[25X - 0.425X^2\right]_0^{25.53} =$$

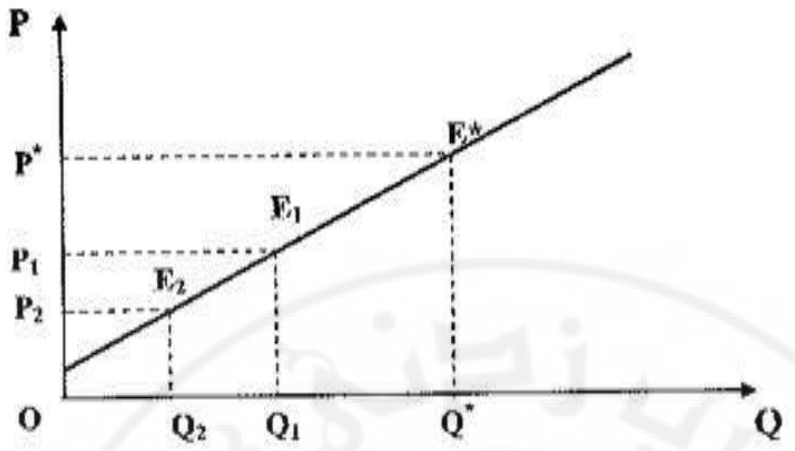
$$= 25(25.53) - 0.425(25.53)^2 = 361.25$$

1-3-2-3- فائض المنتج Producer's Surplus

كما أن للمستهلك فائضاً، فإن للمنتج فائضاً أيضاً وهذا الفائض يعبر عن الفرق بين سعر البيع عند التوازن وسعر البيع حسب منحنى تابع العرض الذي يكون المنتج على استعداد للبيع بموجبه .

فإذا فرضنا أن سعر التوازن في السوق هو (P*) فإن المنتج على استعداد أن يبيع الكمية التوازنية (Q*)، ويحصل على المبلغ (OP*OQ*) . في حين أن المنتج يقبل السعر (OP_1) من أجل الكمية (OQ_1) . وكذلك السعر (OP_2) من أجل الكمية (OQ_2) وهكذا دواليك . أي أن المنتج يقبل سعراً اقل لكميات تقل عن الكمية التوازنية ما عدا الوحدة الأخيرة حيث إنه يبيعها عند السعر التوازني فقط . وذلك بسبب تأثير قانون الغلة المتناقصة وازدياد التكاليف الحدية بزيادة الإنتاج .

إذا نلاحظ أن المنتج مستعد للقبول بالمبلغ (PP*OQ*) في حين إنه يستلم بالفعل المبلغ (OP*EQ*) والفرق بين القيمتين يدعى بفائض المنتج .



الشكل (1-13)

وبالتالي فإن فائض المنتج هو عبارة عن المساحة المحصورة بين سعر التوازن *OP ومنحنى تابع العرض ويمكن حسابها بتكامل تابع العرض ضمن المجال [O, Q*] . سنوضح ذلك من خلال استعراض المثال التالي:

مثال(1-26): حدد مدير الإنتاج تابعي الطلب والعرض على منتجه الرئيس على النحو التالي:

تابع الطلب: $D = f_1(X) = 10 - 0.75X$

تابع العرض: $S = f_2(X) = 5 + 0.45X$

والمطلوب: تحديد فائض المستهلك وفائض المنتج.

الحل:

لإيجاد فائض المستهلك وفائض المنتج نحتاج إلى مساواة تابعي العرض والطلب لتحديد سعر التوازن: $f_1(X) = f_2(X)$

$$10 - 0.75X = 5 + 0.45X \Rightarrow 5 = 1.2X \Rightarrow X = \frac{5}{1.2} = 4.167$$

وبالتالي فإن سعر التوازن يكون هو السعر المقابل للكمية $X = 4.167$

وبالتعويض عن X في تابع العرض أو تابع الطلب نجد:

$$f_3(X) = 10 - 0.75(4.167) = 6.875$$

الآن وبعد معرفة سعر البيع للوحدة الواحدة عند التوازن نستطيع الحصول على كل من فائض المستهلك وفائض المنتج كما يلي:

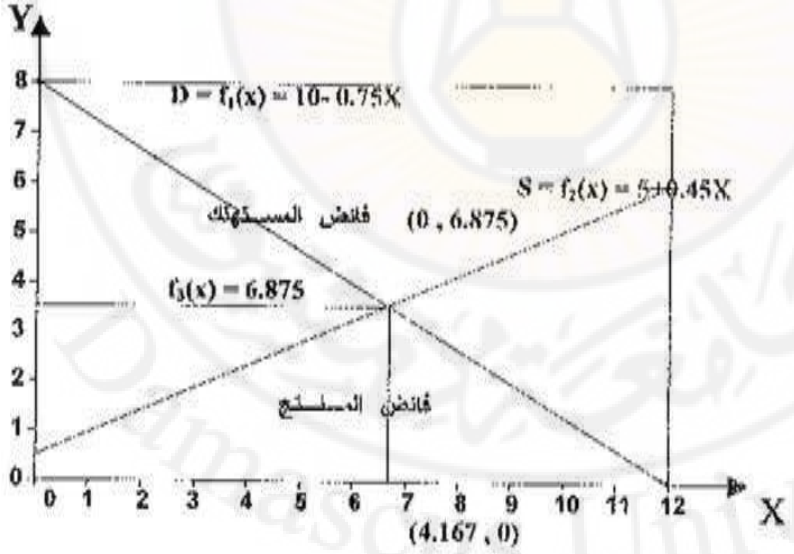
$$\text{فائض المستهلك} = \int_0^{4.167} [f_1(X) - f_3(X)]\,dx$$

$$= \int_0^{4.167} [(10 - 0.75X) - (6.875)]\,dx =$$

$$= \int_0^{4.167} [3.125 - 0.75X]\,dx = \left[3.125X - 0.375X^2\right]_0^{4.167}$$

$$= \left[3.125(4.167) - 0.375(4.167)^2\right] = 6.511$$

كما هو موضح في الرسم التالي:



الشكل (14-1)

$$\text{فائض المنتج} = \int_0^{4.167}[f_3(X)-f_2(X)]dx =$$

$$= \int_0^{4.167}[(6.875)-(5+0.45X)]dx = \int_0^{4.167}[1.875-0.45X]dx =$$

$$= \left[1.875X-0.225X^2\right]_0^{4.167} = \left[1.875(4.167)-(0.225)(4.167)^2\right] =$$

$$= [7.813-3.907] = 3.906$$

ملاحظة: يمكننا حساب فائض المستهلك وفائض المنتج في حالة التوابع اللاخطية بنفس الطريقة السابقة.

1-3-2-4- مرونة طلب فائض المستهلك

إذا كان لتابع الطلب الشكل التالي: $D = AP^{-\alpha}$

فإن مرونة الطلب السعرية تساوي:

$$\frac{\delta D}{\delta P}*\frac{P}{D} = -\alpha AP^{-\alpha-1}\left(\frac{P}{AP^{-\alpha}}\right) = \frac{-\alpha AP^{-\alpha-1+1}}{AP^{-\alpha}} = -\alpha$$

نحسب فائض المستهلك من العلاقة أعلاه من خلال عملية التكامل:

$$P = \left(\frac{D}{A}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = A^{-\frac{1}{\alpha}}D^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\int_0^{Q^*} A^{-\frac{1}{\alpha}}D^{\alpha}\delta D = \left[\frac{A^{-\frac{1}{\alpha}}D^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}\right]_0^{Q^*} = \frac{A^{-\frac{1}{\alpha}}D^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

نلاحظ ما يلي: عندما $\frac{1}{\alpha} < 1$ هذا يعني أن : $\alpha > 1$ أي أن المساحة تحت المنحني تكون غير محددة ، وتكون المساحة تحت المنحني محددة إذا كان $\frac{1}{\alpha} > 1$ أي : $\alpha < 1$

المبلغ الذي يكون المستهلك مستعداً لدفعه هو: Q^*P^* وعندما: $Q^* = Q$ فإن السعر يكون:

$$P^* = A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

والمبلغ المدفوع يساوي إلى :

$$P^*Q^* = A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right) = A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

وفائض المستهلك عندئذ يساوي إلى :

$$\frac{A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[\frac{1}{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right]$$

$$A^{\frac{1}{\alpha}}\left(Q^*\right)^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]$$

أي أن فائض المستهلك في توابع الطلب ذات المرونات الثابتة يساوي نسبة ثابتة من الإنفاق الفعلي.

مثال (26-1): ليكن لدينا تابع الطلب على إحدى السلع ذات الشكل:

$$D = 75X^{-0.5}$$

و **المطلوب** : احسب فائض المستهلك حين يكون السعر التوازني للسلعة 25 .

الحل:

على افتراض أن السعر التوازني يساوي ٢٥ كما وهو وارد بالفرض نعوض في المعادلة $P^* = 75X^{-0.5}$ لإيجاد الكمية التوازنية فنجد:

$$25 = \frac{75}{\sqrt{X}} \Rightarrow 25 * \sqrt{X} = 75 \Rightarrow X = Q^* = \frac{75^2}{25^2} = 9$$

المبلغ الذي يدفعه فعلاً المستهلك هو: $P^* \bullet Q^* = 25 * 9 = 225$

أما فائض المستهلك فهو يساوي: $225 * \left[\frac{1}{2-1}\right] = 225$

وللتأكد من ذلك نكامل تابع الطلب $D = 75X^{-0.5}$ فنجد:

$$\int_0^{Q^*} 75X^{-0.5} dx = \frac{75X^{-0.5+1}}{0.5} = \frac{75 * (9)^{0.5}}{0.5} = 450$$

للحصول على فائض المستهلك نطرح من الناتج مبلغ المنفق فعلاً فنجد:

$$\frac{75(9)^{-0.5+1}}{1.5} - 75(9)^{0.5} = 225$$

أسئلة وتمارين غير محلوله

(1): حدد أحد الاقتصاديين تابعي الطلب على السلعتين A , B على النحو التالي:

$$D_A = (150 - 1.5P_1 + 0.7P_2)\ ,\ D_B = (100 - 0.5P_1 - P_2)$$

حيث أن: D_A , D_B عبارة عن الكميات المطلوبة مقدرة بالطن و P_1 , P_2 سعر الطن لكل سلعة من السلع. والمطلوب:

1- أوجد P_1 , P_2 اللذين يحققان أعظم دخل كلي ممكن.

2- احسب كميات كل سلعة A , B من السلع والدخل الأعظمي.

3- احسب مرونة الطلب على السلعة A والسلعة B من أجل: $P_1=40$, $P_2=30$.

(2): منذ فترة وجيزة عُيّن موظف ملم بعلم الاقتصاد في إدارة مصنع المطابخ الخشبية، استطاع تحديد تابع الإيراد الكلي والتكلفة الكلية لإنتاج هذا المصنع أسبوعياً على النحو التالي: $C=10X-25$; $R=50X-X^2$

حيث أن: X- تمثل الكميات المبيعة. والمطلوب:

1- أوجد الإيراد الأعظمي الذي سوف يحققه هذا المصنع أسبوعيا.

2- حدد الكمية والسعر اللذين يجعلان الربح أعظمياً، و حدد كمية الربح الأعظمي.

3- بين كيف يتغير السعر الأمثل إذا ارتفعت التكلفة الثابتة إلى ١٥٠ ألف وحدة نقدية.

4- احسب مرونة الدخل الكلي ومرونة التكلفة الكلية عند مستوى الناتج X=20 الذي يحقق الربح الأعظمي.

(3): حدد أحد الاقتصاديين تابعي الطلب على السلعتين A، B على الشكل التالي: $D_A = 300 - 3P_1 - P_2$ ، $D_B = 200 - P_1 - 2P_2$

حيث أن: D_A ، D_B الكميات مقدرة بالطن و P_1 ، P_2 سعر الطن الواحد من كل سلعة. والمطلوب:

أ- أوجد P_1 ، P_2 اللذين يحققان أعظم دخل كلي ممكن.

ب- أحسب كميات كل سلعة على حدة D_A ، D_B والدخل الأعظمي.

ج- أحسب مرونتي الطلب والعرض عند السعر التوازني.

(4): عرف ما يلي:

تابع الطلب، تابع العرض، التوازن الجزئي للسوق، المرونة، الميل، مرونات الطلب، مرونة العرض السعرية، مرونة الطلب السعرية، المرونة المتقاطعة، مرونة الطلب الجزئية.

(5): منذ فترة وجيزة عين موظّف ملم بعلم الاقتصاد في إدارة مركز لتصنيع المطابخ الخشبية، استطاع تحديد تابع الإيراد الكلي والتكلفة الكلية لإنتاج هذا المصنع أسبوعياً على الشكل التالي:

$$R = 200X - 4X^2 \quad ; \quad C = 40X + 100$$

والمطلوب:

1- أوجد الإيراد الأعظمي الذي سوف يحققه هذا المصنع في الأسبوع.

2- عين الكمية و السعر اللذين يحققان الربح الأعظمي. وحدد قيمة هذا الربح.

(6): قدر أحد الاقتصاديين تابع الإنتاج في منشأة صناعية أخذ بعين الاعتبار العمل ورأس المال على الشكل التالي: $Q = \frac{1}{2}\sqrt[4]{K * L^3}$

والمطلوب منك كاقتصادي متمرن إذا علمت أن $K = 20 ; L = 30$ حساب:

1- الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال.

2- الإنتاجية الوسطية بالنسبة للعمل.

3- المرونات الجزئية للإنتاج وتفسير النتائج.

4- تحديد درجة تجانس تابع الإنتاج.

5- تحديد معامل الإحلال (الاستبدال) لـ K محل L مع المحافظة على مستوى الإنتاج.

(7):ليكن لدينا تابع الإنتاج التالي: $Q = \frac{1}{2}\sqrt{X_1 * X_2 * X_3}$ والمطلوب:

1- حساب الإنتاجية الحدية والوسطية للعامل X_1 فيما إذا علمت:

$$Q = 12 \; ; \; X_3 = 64 \; ; \; X_2 = 27 \; ; \; X_1 = 8$$

2- حساب المرونة الجزئية بالنسبة لكل عامل من العوامل السابقة.

3- حدد درجة تجانس التابع.

(8): أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج كما يلي إذا كانت x الكمية ؟

1) $y_2 = f_2(X) = 150 - \frac{5}{13}X \; ; \quad y_1 = f_1(X) = 5 - 0.025\,X$

2) $y_2 = f_2(x) = x2 + 50 \; , \quad y_1 = f_1(x) = x_2 - 1000x + 2500$

(9): لنفرض أن تابع الإيرادات الحدية يأخذ الشكل:

$MR = R(x) = 30x - x^2$ ، حيث x - عدد الوحدات المبيعة.

والمطلوب إيجاد تابع الإيرادات الكلية.

(10): إذا كانت التكلفة الحدية لإحدى المنشآت الإنتاجية عند مستوى الإنتاج x معطاة بالتابع:

$$MC = C(x) = \frac{1}{25}x^2 - 2x + 105$$

وبافتراض أن التكلفة الثابتة هي 1900 وحدة نقدية.

المطلوب: أوجد:

أ- تابع التكاليف الكلية للمنشأة.

ب- التكاليف الحقيقية لإنتاج وحدة إضافية بعد إنتاج 25 وحدة.

(11): بافتراض أن الإيراد الحدي MR والتكلفة الحدية MC لإحدى المنشآت هي:

$$MC = C'(x) = \frac{1}{5}x^2 - 3x + 100 \quad ; \quad MR = R'(x) = 140 - x$$

علماً بأن التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج 25 وحدة هي 3800 وحدة نقدية.

والمطلوب:

أ – إيجاد التكاليف الثابتة للإنتاج.

ب – إيجاد تابع الربح بالنسبة لـ x.

جـ – إيجاد مستوى الإنتاج الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

د – مثّل بيانياً الإيراد الحدي والتكلفة الحدية.

(12): إذا كانت التكاليف الحدية لأحد المعامل هي $4(x-3)^2$ للوحدة الإنتاجية الواحدة. أوجد الزيادة الممكن تحققها في التكاليف الكلية إذا تغيّر مستوى الإنتاج من 7 وحدات إلى 13 وحدة.

(13): قدّر عدد سكان بعد خمس سنوات في مدينة معطى معدل التغير السنوي لسكانها بالعلاقة: $\Delta = 2100 + 11t^{\frac{1}{3}}$

حيث يبلغ عدد سكانها الحالي 45000 نسمة.

وقل رب زدني علما
Damascus University

الفصل الثاني

II- التطبيقات الاقتصادية للنهايات الحدية الحرة و المقيدة

II-1- تمهيد

II-2- الدوال ذات المتغيرات المتعددة

II-3- مجموعة تعريف الدالة

II-4- نهاية دالة ذات متغيرين- استمرار دالة ذات متغيرين

II-5- الاشتقاق الجزئي

II-6- الاشتقاق الجزئي المثالي

II-7- مصفوفة هيسيان- نظرية تشفارز

II-8- التفاضل الكلي "التام"

II-9- التفاضل على منحن

II-10- مشتقات الدوال المركبة

II-11- مشتقات الدوال الضمنية- التفاضلات المتتالية

II-12- الدوال المتجانسة المتعددة المتغيرات.

II-13- النهايات العظمى والصغرى

أولاً: النقاط الحرجة (النهايات) الحرة (غير المقيدة)

ثانياً: النهايات الحدية (القيم القصوى) المقيدة لتابع

التابع ذو المتغيرين المستقلين

التابع ذو n متغير متسقل

حالة وجود أكثر من شرط يقيد المتغيرات المستقلة

تفسير مضروب لاغرانج

التعبير عن هذه الظاهرة من خلال علاقة رياضية تـــربط المتغيـــرات بعضـــها ببعض ، هذه العلاقة الرياضية ليست إلا التابع.

فكما نعلم أن الدارس للظواهر الاقتصادية ، يستطيع أن يتوصّل وبسهولة إلى ما نصت عليه النظرية الاقتصادية من أن هناك علاقة تربط بين الكمية المستهلكة " سواء من قبل الأسرة أو الفرد" ودخل هذه الأســـرة أو الفـــرد ، وأن الكميـــة المطلوبة من سلعة معينة ترتبط بمتغيرات متعددة منها : سعر السلعة ذاتهـــا ، أسعار السلع البديلة ، دخل الأسرة ، .....، و أن الكمية المعروضة من سلعة معينة ترتبط أيضاً بمتغيرات متعددة منها : أسعار السلع الأخرى ، تكلفة السلعة ذاتها ، رأس المال ، العمل .....

إذاً هذه الظواهر الاقتصادية لابد وللتعرف عليها بشكل دقيق من إيجاد مثل هذا النوع من العلاقات الرياضية ، أي إيجاد تلك التوابع التي تـــربط بينهـــا وبـــين متغيراتها المتعددة.

لقد وجدنا أن هناك توابع تتبع متغيراً واحداً ، إذ يقابل كل عنصر من مجموعة التعريف "المنطلق" عنصراً واحداً من مجموعة القيم "المســـتقر" ، إلا أن هنـــاك توابع تتبع متغيرين فأكثر من مجموعتي أو من عدة مجموعـــات " المنطلـــق " تقابل عنصراً واحداً فقط من مجموعة القيم (المستقر) نستطيع كتابة هذه التوابع بالشكل التالي :

$$x, y \xrightarrow{\quad f \quad} z \quad , \quad x, y, z \in R * R * R$$

"تابع يتبع متغيرين x , y مستقلين"	$z = f(x, y)$
تابع يتبع ثلاثة متغيرات x_1, x_2, x_3 مستقلة	$z = f(x_1, x_2, x_3)$
تابع يتبع n متغيراً $x_1, x_2, \ldots x_n$ مستقلاً	$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

أمثلة :

$$z = f(x_1, x_2) = 3x_1x_2^3 - 2x_1^2x_2$$

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 4x_1x_2x_3$$

وبشكل عام نقول عن الدالة المعرفة وفق العلاقة التالية :

$$F : X \subseteq R^n \rightarrow Y \subseteq R ; (X_1, X_2, \ldots\ldots) \rightarrow Y$$

إنها دالة عددية لعدة متغيرات مستقلة $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$

II-3- **مجموعة تعريف الدالة " نطاق الدالة"** : وجدنا سابقاً وحين دراستنا للدوال العددية " وبالذات الدوال ذات المتغير الواحد " أننا كنا نقابل كل قيمة للمتغير x من المنطلق " النطاق" x "حيث $x \subseteq R$" بقيمة عددية من المستقر "المدى " Y " حيث $Y \subseteq R$ "

إن ما ينطبق على الدوال ذات المتغير الواحد من نظريات و قواعد ينطبق على الدوال ذات المتغيرات العديدة - شريطة الأخذ بعين الاعتبار منطلق "النطاق" ومستقر "مدى" الدوال ذات المتغيرات المتعددة وذلك حسب عدد متغيرات كل دالة من هذه الدوال .

فكما نعلم أن الدالة ذات المتغير الواحد لها مجموعة تعريف "منطلق- نطاق" هو مجال من R و ليكن [a , b] ، أما في الدوال ذات المتغيرين فإن مجموعة تعريفها تكون مجموعة جزئية D من R^*R ، إذ تكون عناصر مجموعة تعريفها أزواجاً مرتبة(x ,y) من الأعداد الحقيقية هذه العناصر يمكن تمثيلها بمنطقة من المستوى $X \circ Y$ ، أما مستقرها "مداها" فهو قطعة خطية من

المحور الإحداثيين y مثلاً " أو R " أي مستقرها هو مجموعة جزئية من R " أو R " .

ـ والدالة ذات المتغيرات الثلاثة لها مجموعة تعريف مجال من D عبارة عن مجموعة جزئية من R*R*R إذ يتم ربط كل ثلاثي مرتب (x,y,z) من D بعدد حقيقي واحد من الدالة المعنية.

ـ و هكذا نستطيع التعميم على الدالة ذات n متغيراً ، إذ يتم مقابلة كل مجموعة جزئية D من "R بعنصر من R .

فمثلاً في الدالتين التاليتين نستطيع التعرف على مجموعة تعريف كل منها كما يلي :إن مجموعة تعريف " نطاق" الدالة التالية :

$$Z = f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+4y^2)}$$

هي أن يكون ما تحت الجذر ≥ 0 ، أي أن يكون $X^2+4Y^2 \leq 1$

كما و أن مجموعة تعريف الدالة التالية:

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 - 4xy - 3 \qquad "X^2+Y^2<16"$$

هي المنطقة المحصورة داخل الدائرة $"x^2+y^2=16"$ التي مركزها 0 ونصف قطرها 4 ولا تدخل فيها النقاط الواقعة على محيطها لذا نسميها منطقة مفتوحة .

ومجموعة تعريف الدالة :

$$z = f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2-25} \quad "x^2+y^2 \leq 9"$$

تمثل المنطقة المحصورة داخل الدائرة $X^2+Y^2=9$ التي مركزها 0 ونصف قطرها3 والنقاط التي تقع على محيطها.

II-4- نهاية دالة ذات متغيرين : نستطيع التوصل إلى النهايات من نهايات الدوال ذات المتغير الواحد ، شريطة الانتباه إلى مجموعة التعريف .

لنفرض أن $z = f(x,y)$ دالة معرفة على D و (x_0, y_0) نقطة ما داخل المنطقة أو على محيطها ، فإذا أمكن إيجاد عدد ما وليكن b بحيث أنه مهما يكن العدد الموجب $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث تتحقق العلاقة التالية :

$$|f(x,y) - b| < \varepsilon$$

وذلك من أجل جميع النقاط الواقعة بجوار (X_0, Y_0) " أي من أجل $0 < X^2 + Y^2 < \delta$ " فإننا نقول عن b إنها نهاية للدالة $z = f(x,y)$ وذلك حين تنتهي (x,y) إلى (x_0, y_0) ، ونرمز لهذا بالرمز :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = b$$

أو

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = b$$

بمعنى آخر : نقول إن الدالة $z = f(x,y)$ تسعى إلى b حين تسعى (x,y) نحو (x_0, y_0) إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta \Rightarrow f(x,y) - b < \varepsilon$$

وإذا لم تنتم النقطة (x_0, y_0) إلى المنطقة D ، فيصبح الشرط السابق على النحو التالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta \Rightarrow f(x,y) - b < \varepsilon$$

فمثلاً : إذا أردنا أن نحسب أن نهاية التابع

$$z = f(x,y) = x^2 - 3y^2$$

من أجل $(x,y) \to (5,2)$ لوجدنا أن :

$$\lim_{\substack{X \to 5 \\ Y \to 2}} (x^2 - 3y^2) = 13$$

وإذا أردنا أن نتعرف على نهاية التابع :

$$z = f(x,y) = \frac{3x - y}{2x + 5y}$$

من أجل $(x,y) \to (2,1)$ لوجدنا أن :

$$\lim_{\substack{X \to 2 \\ Y \to 1}} \frac{3x - y}{2x + 5y} = 5/9$$

استمرار دالة ذات متغيرين : تكون الدالة $z = f(x,y)$ مستمرة أو متصلة ، عند النقطة (X_0, Y_0) "حيث (X_0, Y_0) نقطة داخل D منطقة تعريف الدالة " إذا تحقق الشرط التالي:

$$\lim_{(X,Y) \to (X_0, Y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

وتكون الدالة $z = f(x,y)$ مستمرة على المنطقة D إذا كانت الدالة z مستمرة في كل نقطة من نقاط D.

إذاً إن استمرار الدالة $z = f(x,y)$ يعني تحقق ثلاثة شروط وهي :

١- أن تكون الدالة $z = f(x,y)$ معرفة في النقطة (X_0, Y_0) " أي وجود $f(X_0, Y_0)$ "

٢- أن يكون للدالة $z = f(x,y)$ نهاية وذلك من أجل $(x,y) \to (x_0, y_0)$ أي وجود $\lim_{(X,Y) \to (X_0, Y_0)} f(x,y)$

٣- أن تكون نهاية الدالة $z = f(x,y)$ تساوي $f(x_0, y_0)$

مثال : ادرس استمرار الدالة التالية :

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ \\ s & ;(0,0) \text{ في النقطة } (x,y) = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة $z = f(x,y)$ معرفة في النقطة $(0,0)$ ، إلا أن

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$$

بمعنى آخر إن :

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$$

إذاً فالدالة غير مستمرة في النقطة $(0,0)$ ،

مثال : ادرس استمرار الدالة التالية :

$$z = f(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x^2+y^2 < \ell^2 \\ 0 & ; x^2+y^2 \geq \ell^2 \end{cases}$$

هذه الدالة غير مستمرة على جميع نقاط محيط الدائرة $x^2 + y^2 = \ell^2$

II-5- الاشتقاق الجزئي :

وجدنا أن مشتق الدوال ذات المتغير الواحد يعطي من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Damascus University

أما حين وجود أكثر من متغير فإن الاشتقاق لا يتغير بل يبقى صالحاً شـــريطة اعتبار بقية المتغيرات كثوابت عددية مشتقاتها معدومة .

فإذا كان لدينا التابع :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

المعرف والمستمر فإن :

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)}{\partial x_1} = f'_{x1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} =$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)}{\Delta x_1}$$

وهكذا بالنسبة لأي متغير مهما كان .

إذاً إن تعريف المشتق الجزئي للدالة y بالنسبة لـــ x_1 عند النقطة $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ هو أن نشتق بالنسبة لـــ x_1 ونعتبر بقية المتغيرات ثوابت عددية ، نرمز لهـذا المشتق الجزئي بأحد الرموز التالية :

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)}{\partial x_1} \quad \left| \begin{array}{c} \text{أو} \quad f'_{x_1}, \; Y'_{x_1}, \; \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \end{array} \right.$$

مثال : لنفرض أن $v = f(x, y, z) = (x, y)^z$

إن :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = z.(xy)^{z-1}.y \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial Y} = z.(xy)^{z-1}.x$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = (xy)^z . \ln(x, y)$$

مثال : إذا فرضنا أن :

$$z = tg\ \frac{y}{x}$$ فإن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\cos^2 \frac{y}{x}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{\cos^2 y/x}$$

مثال :إذا فرضنا أن :

$$u = f(x,y,z) = x^3 y^3 z + 2x^2 - 3y + z^2 - 9$$

فإن : $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^3 z + 4x$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3 y^3 z - 3 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3 y^3 + 2z$$

مثال : لنفرض أن :

$$u = f(x,y,z) = z^{xy}$$

إن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y.z^{xy}.\ln z \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x.z^{xy}.\ln z$$

$$\frac{du}{dz} = x.y.z^{xy-1}$$

مثال : إذا فرضنا أن :

$z^c = x^a . y^b$ حيث a , b , c ثوابت عددية .

أثبت أن : $\frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

$$bx \frac{\partial z}{\partial x} = ay \frac{\partial z}{\partial y}$$

لنلاحظ أن :

$$cz^{c-1}\frac{\partial z}{\partial y} = bx^{a}.y^{b-1} \quad ،$$

$$cz^{c-1}.\frac{\partial z}{\partial x} = ax^{a-1}.y^{b}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{bx}{ay}$$

بالتبديل في العلاقة المطلوبة نجد أن :

$$\frac{bx}{c}.a.x^{a-1}.y^{b}.z^{1-c} = \frac{ay}{c}.b.x^{a}.y^{b-1}.z^{1-c}$$

وهي علاقة محققة .

أما لتحقيق العلاقة الأخرى ، فبالتبديل فيها نجد أنها محققة :

$$\frac{ay}{bx}.bx^{a}.y^{b-1}.z^{\frac{c-1}{c}}.cz^{c-1}.x^{1-a}.y^{-b}.\frac{c}{a} = 1$$

II-6- الاشتقاق الجزئي المتتالي :

قد يتطلب منا إيجاد المشتقات الجزئية المتتالية لدالة تتبع أكثر من متغير ، إن الأسلوب المتبع في هذا الاشتقاق لا يختلف عن الاشتقاق المتتالي لدالة تتبع متغيراً واحداً ، إلا بالأخذ بعين الاعتبار المتغير الذي من أجله نجري عملية الاشتقاق.

فإذا فرضنا أن لدينا الدالة $z = f(x,y)$ المعرفة والمستمرة والقابلة للاشتقاق على منطقة D .

" أي أن $z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$ ، $z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$ موجودان "

فإن كلاً من z'_x , z'_y دالتان بالنسبة لـ x , y ، فإذا كانا مستمرين وقابلين للاشتقاق في تلك المنطقة D وإذا أردنا إيجاد المشتقات الجزئية لها أيضاً فإن مشتقاتها الجزئية المتتالية ليست إلا مشتقات جزئية من المرتبة الثانية .

حيث نجد أن هناك أربعة مشتقات جزئية "بل سنجد ٣ مشتقات جزئية فقط" نرمز لهذه المشتقات بأحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{d}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = Z''_{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = z''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}$$

وهنا نلاحظ أن المشتقين الجزئيين Z''_{yx}, Z''_{xy} متساويان فلا يوجد أي اختلاف بينهما بمعنى آخر لا تغير في ناتج عملية الاشتقاق بالنسبة لـ x أولاً ثم بالنسبة لـ y ثانياً أو العكس ، كون عملية الاشتقاق تتمتع بالخاصة التبديلية .

نستطيع وبالأسلوب نفسه التوصل إلى المشتقات الجزئية من المرتبة الثالثة ، فالرابعة ..... وحتى المرتبة n .

فإذا كانت لدينا الدالة $z = f(x,u,v)$ فإن مشتقاتها الجزئية هي :

$$\frac{\partial f(x,u,v)}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial u}$$

إذ نكون أمام ثلاثة مشتقات جزئية من المرتبة الأولى ، كما و نكون أمام ٩ مشتقات جزئية من المرتبة الثانية وهي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial u} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

و إذا كانت لدينا الدالة $z = f(x, y, u, v)$ فيكون لها 4 مشتقات جزئية من المرتبة الأولى ، و 16 مشتقاً جزئياً من المرتبة الثانية ..... وهكذا نستطيع التعميم.

II-7- مصفوفة هيسيان :

هي مصفوفة مربعة الشكل من المرتبة n : " n عدد متحولات الدالة : $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ " عناصرها المشتقات الجزئية الثانية والتي عددها n^2 ونرمز لها بالرمز $H(n,n)$ ونسمي محدد هذه المصفوفة بالمحدد الهيسي.

مثال : إذا كانت لدينا الدالة $z = f(x, y)$ فإن مصفوفة هيسيان التي تقابلها هي :

$$H_{(2,2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Damascus University

وإذا كانت لدينا الدالة $Z = f(X,u,v)$ فإن مصفوفة هيسيان التي تقابلها هي :

$$H_{(3,3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{bmatrix}$$

وإذا كانت الدالة $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ فإن مصفوفة هيسيان التي تقابلها هي:

$$H_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{fx_1 \partial x_3} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} & \frac{d^2 f}{\partial x_i \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3} \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

مثال : إذا فرضنا أن :

$$z = f(x,y) = e^{x(1+y)}$$

فإن

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (1+y)e^{x(1+y)}$$

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{x(1+y)}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = e^{x(1+y)} + x(1+y).e^{x(1+y)}$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = e^{x(1+y)} + x(1+y).e^{x(1+y)}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (1+y)^2 e^{x(1+y)}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{x(1+y)}$$

مثال: إذا فرضنا أن :

$$z = f(x,y) = x\cos y + ySinx$$

أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية.

إن :

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y\cos x$$

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x\sin y + \sin x$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + \cos x$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin y + \cos x$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -ySinx$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos y$$

مثال : بفرض أن :

$$z = f(x,y) = e^{-2y} \cdot \cos 2x$$

أوجد قيمة المقدار الآتي :

$$Z''_{xx} + Z_{yy}$$

إن :

$$Z'_x = -e^{-2y} \cdot 2\sin 2x$$

$$Z'_{xx} = -4e^{-2y} \cdot \cos 2x$$

$$Z'_y = -2e^{-2y} \cdot \cos 2x$$

$$Z'_{yy} = -4e^{-2y} \cdot \cos 2x$$

إذاً إن :

$$Z''_{xx} + Z''_{yy} = 0$$

مثال : بفرض أن :

$$z = f(x,y) = e^{x^2-y^2} \cdot \sin(2xy)$$

والمطلوب : التحقق من صحة معادلة لابلاس التالية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

لنلاحظ أن :

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x.e^{x^2-y^2}.\sin(2xy) + 2y.e^{x^2-y^2}.\cos(2xy)$$

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y.e^{x^2-y^2} - \sin(2xy) + 2x.e^{x^2-y^2}.\cos(2xy)$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}.\sin(2xy) + 4x^2 e^{x^2-y^2}.\sin(2xy) + 4xy\, e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)$$

$$+4xye^{x^2-y^2}.\cos(2xy) - 4y^2 e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{x^2-y^2}.\sin(2xy) + 4y^2 e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)$$

$$-4xy.e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)-4xy\ .\ e^{x^2-y^2}.\cos(2xy)$$

$$-4x^2.e^{x^2-y^2}.\sin(2xy)$$

بالتبديل في معادلة لابلاس نجد أنها محققة.

نظرية تشفارز : تبين لنا هذه النظرية أن المشتقات الجزئية بالنسبة لمتغيرين مختلفين لدالة متعددة المتغيرات لا تتأثر بترتيب المتغيرين .

ـــ إذا تحقق في جوار (x_0,y_0) ما يلي :

١- وجود $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ واستمرارهما

٢- وجود $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ واستمرارهما

فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

إذاً فالدالة ذات المتغيرين يكون لها ثلاثة مشتقات جزئية من المرتبة الثانية أثناء الحساب وليس أربعة كما وان هناك أربعة مشتقات جزئية من المرتبة الثالثة هي :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\ ،\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\ ،\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\ ،\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

ويمكن تعميم هذه النظرية على المشتقات الجزئية من مراتب عليا للدالة ذات المتغيرين على النحو التالي:

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m.\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n.\partial n^m}$$

عادة ما تكون المشتقات الجزئية غير كافية للتعبير عن أن الدالة تتبع كل المتحولات بالوقت نفسه.

11-8- التفاضل الكلي "التام" : لنفرض أن الدالة $z = f(x,y)$ " x,y متغيران مستقلان " ولنفرض أن كلاً من x,y قد أخذ تزايداً قدره $DX \neq 0$ ، $\Delta y \neq 0$ فعندها يأخذ Z تزايداً قدره $\Delta z \neq 0$ وبالتبديل يصبح التابع :

قبل التزايد : $z = f(x,y)$

بعد التزايد : $z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

لنضيف ونطرح المقدار $f(x, y + \Delta y)$ فنجد أن :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

واستناداً لتعريف الاشتقاق الجزئي وبعد قسمة الطرفين على ΔX ، نجد أن :

$$\Delta z = \frac{\Delta z_1}{\Delta x} \Delta x + \frac{\Delta z_2}{\Delta y} \Delta y$$

فإذا ما جعلنا $\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$ فعندها يصبح $\Delta x = dx$ ، $\Delta y = dy$ ، $\Delta z = dz$

وبالتالي فالعلاقة السابقة تصبح:

$$dz = z'_1 dx + z'_2 dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

نعرف التفاضل الكلي(التام) من المرتبة الأولى للدالة $dz = f(x,y)$ ونرمز له بالرمز dz كما يلي:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f'_x(x,y).dx + f'_y(x,y).dy$$

آخذين بعين الاعتبار أن dx ، dy ، dz هي تغيرات صغيرة موافقة للمتغيرات والدالة ((على الأقل واحدة منها يمكن أن تكون صغيرة جداً بقدر ما نريد))(*).

(*) جاكلين فوراسوتيه : الرياضيات التطبيقية على الاقتصاد .
ترجمة د. محمد الحجار – المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر - بيروت- شارع الحمراء الطبعة الأولى ١٤٠٩ – ١٩٨٩

ـ نستطيع أيضاً وبنفس الأسلوب إيجاد التفاضل الكلي ((التام)) من المرتبة الثانية وهو ليس إلا التفاضل الكلي للتفاضل الكلي من المرتبة الأولى والذي نرمز له بالرمز d^2z

على النحو التالي :

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(df)}{\partial x}dx + \frac{\partial(df)}{\partial y}dy$$

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy)dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

وباعتبار أن : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ((حسب نظرية تشفارز)) نجد أن :

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

نُسمّي العلاقة السابقة بالتفاضل الكلي ((التام)) من المرتبة الثانية.

نستطيع التعميم : إذا فرضنا أن لدينا الدالة :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

تابعاً لـ n متحولاً $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ وقابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفه (على الأقل مرتين متتاليتين).

فإن التفاضل الكلي ((التام)) من المرتبة الأولى هو :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx_2 + \ldots\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

أو

$$dy = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \ldots\ldots\ldots + f'_{x_n}dx_n$$

إن dy تابعٌ قابلٌ للاشتقاق وبالتالي نستطيع إيجاد تفاضله الكلي والذي ليس إلا التفاضل الكلي من المرتبة الثانية(تفاضل التفاضل الكلي من المرتبة الأولى) إذ نجد أن:

$$d^2y = d(dy) = \frac{\partial(dy)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(dy)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial(dy)}{\partial x_n}dx_n$$

إذا عوضنا كل dy بقيمة نجد أن :

$$d^2y = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right)dx_1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right)dx_2 + \ldots\ldots +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right)dx_n$$

أو بشكل آخر :

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}dx_2dx_1 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial x_n}dx_1dx_n +$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}dx_2dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_n}dx_2dx_n$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n\partial x_1}dx_1dx_n + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n\partial x_2}dx_ndx_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}dx^2{}_n$$

يمكن أن نعرف وبالأسلوب نفسه المشتق الكلي ((التام)) للتـــابع $Z = f(X,Y)$ انطلاقاً من علاقة التفاضل الكلي :

$$dz = f'_x dx + f'_Y dy$$

وذلك بقسمة طرفيها على dx إذ نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = f'_X + f'_Y\frac{dy}{dx}$$

مثال : لنفرض أن : $u = f(x,y,z) = e^{X^2+Y^2}.\sin^2 z$

إن

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$du = 2Xe^{X^2+Y^2}.\ \sin z dz + 2ye^{X^2+Y^2}.\ \sin^2 z dy + 2\sin z\ .\ e^{X^2+Y^2}.\ \cos z dz$$

مثال : بفرض أن :

$$u = f(x,y,z) = \ln y \sin e^{Xy}$$

فإن :

$$du = \frac{y\cos e^{XY}}{y\sin e^{XZ}}.ze^{XZ}dx + \frac{\sin e^{XZ}}{y\sin e^{XZ}}dy + \frac{y\cos e^{XZ}}{y\sin e^{XZ}}e^{XZ}.dz$$

مثال : بفرض أن لدينا التابع :

$$z = f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2 + x^3y^3 - 10$$

ـ أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى ثم من الرتبة الثانية:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y^2 + 3x^2y^3$$

$$\frac{dz}{dy} = 3x^2 - 4xy + 3x^3y^2$$

$$dz = (6xy - 2y^2 + 3x^2y^3)dx + (3x^2 - 4xy + 3x^3y^2)dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{dz}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y + 6xy^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x + 6x^3y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 4y + 9x^2y^2$$

أي أن :

$$d^2z = (6y + 6xy^3)dx^2 + (6x - 4y + 9x^2y^2)dydx + (6x^3y - 4x)dy^2$$

ملاحظة : تستفيد أيضاً من التفاضل الكلي في التعرف على القيمة التقريبية لمقدار تغير تابع ما حينما يطرأ على متحولاته تغيرات طفيفة.

مثال: أوجد التفاضل الكلي للتابع :

$$w = f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 - 3y + 2z^2}$$

لدينا :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{3}(x^2 - 3y + 2z^2)^{-\frac{2}{3}}.2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{3}(x^2 - 3y + 2z^2)^{-\frac{2}{3}}.(-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{3}(x^2 - 3y + 2z^2)^{-\frac{2}{3}}.(4z)$$

$$du = (\frac{2}{3}xdx - dy + \frac{4}{3}zdz).(x^2 - 3y + 2z^2)^{\frac{-2}{3}}$$

مثال : لنفرض أن كمية الطلب على سلعة معينة ما تعطي من خلال العلاقة الرياضية التالية :

$$u = cy\sqrt[3]{z} \cdot e^{-3X}$$

حيث : X سعر الوحدة الواحدة من السلعة ، y ، X سعر الوحدة الواحدة من سلع أخرى بديلة و c ثابت عددي موجب.

لنفرض أننا نحصل على توازن السوق من أجل $X = 2$ ، $Y = 1$ ، $Z = 8$ والمطلوب : احسب مقدار التغير في كمية الطلب على هذه السلعة ((اعتباراً من حالة توازن معينة مع بقاء قيمة Z ثابتة)) حين يتناقص كل من X و Y على الترتيب بمقدار 0.3 و 0.2

نعلم أن : $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}du + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

أي أن :

$$du = -3cy\sqrt[3]{z}.e^{-3x}dx + c\sqrt[3]{z}.e^{-3x}dy + \frac{c}{3}.y.z^{-\frac{2}{3}}.e^{-3x}dz$$

و من أجل قيم توازن السوق : $dz=0$ ، $dy=-0.2$ ، $dx=-0.3$ نجد أن :

$$du = 0.136c$$

هذا يعني أن التغير الذي حدث في الأسعار أدى إلى زيادة الطلب على هذه السلعة بمقدار 0.136

نظرية : الشرط اللازم و الكافي ليكون :

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

تفاضل تام ((كلي)) هو :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

مثال : أثبت أن الدالة :

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

تفاضل تام الدالة $z=f(x,y)$ ثم أوجد هذه الدالة .

لدينا أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

ولكي يكون تفاضلاً تاماً يجب تحقيق الشرط التالي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

أي أن :

$$\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ولإيجاد الدالة $z=f(x,y)$ يمكن أن نسلك إحدى الطريقتين التاليتين :

الطريقة الأولى : لدينا $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$$f=-\int\frac{ydx}{x^2+y^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+c(y)$$

ولتعيين الثابتة $c(y)$ نشتق بالنسبة لـ y فنجد أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{-2y}{x^2+y^2}+c'(y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$c'(y)=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}$$ أي أن

$$c(y)=x\int\frac{dy}{x^2+y^2}+\int\frac{ydy}{x^2+y^2}$$

$$-Arctg\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+k$$ ((k ثابتة التكامل))

إذاً إن :

$$z=f(x,y)=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+Arctg\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|+k$$

$$z = f(x,y) = ArcTg\frac{y}{x} + k$$

الطريقة الثانية : لدينا $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$z = f(x,y) = x\int \frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$= ArcTg\frac{y}{x} + C(x)$$

ولتعين الثابتة c (x) نشتق بالنسبة لـ x فنجد أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + c'(x)$$

أي أن :

$$\frac{-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + c'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

أي أن :

$$c'(y) = -\frac{y}{y^2+x^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

إذاً

$$c(x) = k$$

أي أن

$$z = f(x,y) = Arctg\frac{y}{x} + k$$

مثال : أثبت أن :

$$y\cos(xy)dx + (x\cos(xy) - \cos y)dy$$

تفاضلاً تاماً للدالة $z = f(x,y)$ ثم أوجد هذه الدالة.

لنلاحظ أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Y.\cos(xy) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x.\cos(xy) - \cos y$$

حتى يكون تفاضلاً تاماً يجب أن يتحقق الشرط التالي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\text{Cos (xy)} - \text{y x Sin (xy)} = \text{Cos (xy)} - \text{xy Sin (xy)}$$

لإيجاد الدالة : $z = f(x,y)$ أيضاً لدينا طريقتان :

الطريقة الأولى : لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y.\cos(xy)$$

$$z = f(x,y) = y \int \cos xy \; dx$$

$$= \text{Sin xy} + C(y)$$

لتعيين الثابتة c(y) : نشتق بالنسبة لـ y : فنجد أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x.\cos xy + c'(y) = x\cos xy - \cos y$$

أي أن :

$$c'(y) = -\cos y$$

و منه :

$$c(y) = -\sin y + k$$

أي أن :

$$Z = f(x,y) = \sin xy - \sin y + k$$

الطريقة الثانية : لدينا

$$\frac{\partial f}{dy} = x\cos xy - \cos y$$

$$z = f(x,y) = x\int\cos(xy)dy - \int\cos y\ dy$$
$$= \sin xy - \sin y + c(x)$$

لتعيين الثابتة c(x) نشتق بالنسبة لـــ x فنجد أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y.\cos(xy) + c'(x) = y.\cos xy$$

أي أن : $c'(x) = 0$

(k ثابتة التكامل) $c(x) = k$

و منه :

$$z = f(x,y) = \sin xy - \sin y + k$$

II-9- التفاضل على منحن : لنفرض أنه $z = f(x,y)$ و أن كلاً من المتغيرين المستقلين x,y معطى بدلالة متغير اخر و ليكن t (أي أن $x = g(t)$ و $y = h(t)$) فإذا كانت كلٌ من هذه الدوال قابلة للتفاضل فإن :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

يمكن التحقق من صحة العلاقة السابقة ، انطلاقاً من أن :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

و بقسمة الطرفين على dt نحصل على المطلوب .

مثال : بفرض أن :

$$z = f(x, y) = e^{x^2 y}$$

و أن : $x = t \operatorname{Sin} t$, $y = t \operatorname{Cos} t$

ـــ فالمطلوب أوجد $\frac{dz}{dt}$ و ذلك من أجل $t = \frac{\pi}{2}$

إن :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

أي أن :

$$\frac{dz}{dt} = 2xye^{x^2 y} \cdot (\sin t + t\cos t) + x^2 e^{x^2 y}(\cos t - t\sin t)$$

و إذا ما جعلنا $t = \frac{\pi}{2}$ لوجدنا أن :

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 2xye^{x^2 y} - x^2 e^{x^2 y}\frac{\pi}{2}$$

$$0 \quad (\frac{\pi}{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^3}{8}$$

مثال : بفرض أن :

$$u = f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$$

و أن :

$$X = 2t \quad , \quad y = \frac{1}{t} \quad , \quad z = t^2$$

فالمطلوب أوجد $\frac{dz}{dt}$ عن طريق قانون التفاضل على منحنٍ ثم مباشرة بطريقة الاشتقاق :

لدينا :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{2}{y} + (-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z})(\frac{-1}{t^2}) + (-\frac{y}{z^2}.2t)$$

$$= 2t + \frac{2t^3}{t^2} - \frac{1}{t^4} - \frac{2t}{t^5} = 4t - \frac{3}{t^4}$$

لنحسب الآن u بدلالة t فنجد أن :

$$u = u(t) = 2t^2 + \frac{1}{t^3}$$

$$\frac{du}{dt} = 4t - \frac{3}{t^4}$$

II- 10- مشتقات الدوال المركبة : بفرض أن $z = f(x,y)$ و أن كلاً من x , y

هو دالة للمتغيرين u,v أي أن :

$$x = g(u , v) \qquad , \qquad y = \varphi(u , v)$$

و بالتالي فإن z تتبع أيضاً u , v هي : إن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع z بالنسبة للمتحولين u,v هي :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

تسمى هاتان القاعدتان باسم قاعدتي السلسلة :

نستطيع البرهان على هاتين القاعدتين على النحو التالي :

لنعتبر أن كلاً من x,y هو متغير مستقل ، إن التفاضل الكلي لـ z كتابع لـ x,y هو :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1\text{-II})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \qquad (2\text{-II})$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dx$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

لنبدل في المعادلة (1-II) قيمة dx و dy فنجد أن :

$$dz = \frac{dz}{dx}\left(\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{dv}dv\right) + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv\right)$$

إذا ما قارنا العلاقة الأخيرة مع العلاقة (2-II) لوجدنا أنه :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial v}$$

مثال : لنفرض أن Wكمية الإنتاج لسلعة معينة تعطى من خلال العلاقة التالية :

$$w = f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 5z^2$$

حيث أن x متحول مستقل أما y , z فيتبع كلاً منهما لـــ x من خلال العلاقات التالية :

$$y = 5x + 7 \qquad z = z - 2x$$

إن :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

بالتبديل نجد أن :

$$\frac{dw}{dx} = 4x + 2y * 5 + (-10z)(-2) = 4x + 10y + 20z$$

لنعوض كلاً من z , y بدلالة x فنجد أن :

$$\frac{dw}{dx} = 4x + 10(5x + 7) + 20(3 - 2x)$$
$$= 4x + 50x + 70 + 60 - 40x$$
$$= 14x + 130$$

و نحصل على النتيجة نفسها فيما لو بدلنا كلاً من y,z بقيمتها في عبارة لها ثم اشتقينا بالنسبة لـــ x .

مثال : لنفرض أن : $z = f(x , y)$

و أن : $x = u \cos x - v \sin \propto$

$y = u \sin x + v \cos \propto$

حيث $\propto$ ثابتة عددية ، برهن أن :

$$(\frac{\partial z}{\partial y})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{\partial z}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2$$

الحل : لدينا :

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 = (Z_x^{\,1})^2 \quad , \quad (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (Z_y^{\,1})^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=Z'_x.\cos\ \alpha+Z'_y.\sin\ \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}=Z'_x.(-\sin\ \alpha)+Z'_y.\cos\ \alpha$$

$$(\frac{\partial z}{\partial u})^2=(Z'_x)^2.\cos^2\alpha+(Z'_x)^2.\sin^2\alpha+2Z'_x.Z'_y\cos\alpha\sin\alpha$$

$$(\frac{\partial z}{\partial v})^2=(Z'_x)^2.\sin^2\alpha+(Z'_y)^2.\cos^2\alpha-2Z'_x.Z'_y.\cos\alpha\sin\alpha$$

و بالتبديل في العلاقة المطلوبة ، نجد أنها محققة .

II-11- مشتقات الدوال الضمنية :

وجدنا أن الشكل العام للدالة الضمنية هو $z=f(x,y)=0$

فإذا أخذنا العلاقة السابقة :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

و جعلنا فيها $t=x$ لوجدنا أن :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

و باعتبار أن $\frac{dz}{dx}=0$ فإن :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial z}{\partial x} \;/\; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

(حيث $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ كما و أن $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقان موجودان)

أي أن : $$y'_x = -\frac{du}{dx} = -\frac{Z'_x}{Z'_y} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

و إذا كان التابع الضمني يتبع متحولين اثنين فشكله العام هو :

$$u = f(x , y , z) = 0$$

وإذا كان التابع قابلاً للاشتقاق بالنسبة لـ x,y في منطقة تعريفه ، فبالإمكان التعرف على مشتقيه الجزئيين بالأسلوب السابق نفسه، إذ نجد أن :

$\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ أو $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \;/\; \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \;/\; \frac{\partial f}{\partial z}$$

" حيث $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ "

يمكن التعميم : إذا فرضنا أن لدينا التابع الضمني :

$$f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n , z) = 0$$

فإن بالإمكان إيجاد مشتقات z بالنسبة لكل من $x_1,x_2,\ldots x_n$ (دون رده ((١)) تابع صريح

و ذلك من خلال كتابته بالشكل : $z = g(x_1,x_2,\ldots xn)$ كما يلي :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}}{f'_z} \qquad \forall i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

بمعنى آخر إن :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{f'_{x_2}}{f'_z} , \ldots\ldots\ldots$$

شريطة أن يكون $f'z \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{f'_{x_n}}{f'z}$$

مثال : لنفرض أن لدينا التابع الضمني التالي :

$$f(x,y,z) = 3xy^2z - x^2yz^2 + 4x - 5xyz = 0$$

إن مشتقاته الجزئية هي :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{3y^2z - 2xyz^2 + 4 - 5yz}{3xy^2 - 2x^2yz - 5xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{6xyz - x^2z^2 - 5yz}{3xy^2 - 2x^2yz - 5xy}$$

مثال(*) : بفرض أن :

$$\cos(x^2\sqrt{y^3}) + 4xe^y = 2e^{xy}$$

إن : مشتقه بالنسبة لـ X

$$y'_x = \frac{2x\sqrt{y^3}\sin(x^2\sqrt{y^3}) - 4e^y + 2ye^y}{-y^{\frac{-2}{3}}x^2\sin(x^2\sqrt{y^3}) + 4xe^y - 2xe^{xy}}$$

مثال(**) : بفرض أن :

$$\text{Sin}\ (xy\sqrt[3]{y}) = 5xy$$

(*)سؤال ورد في عام 93 - 1994 في الفصل الأول ـ جامعة قاريونس ـ بنغازي ـ ليبيا

(**)سؤال ورد في عام 93 - 1994 في الفصل الثاني ـ جامعة قاريونس ـ بنغازي ـ ليبيا

أن :

$$y'_x = \frac{-\frac{6y}{5}\cos(xy\sqrt[5]{y}) + 5y}{\frac{6}{5}\cdot y^{\frac{1}{5}}.x.\cos(xy\sqrt[5]{y}) - 5x}$$

التفاضلات المتتالية : بفرض أن لدينا $z = f(x,y)$ و أن نظرية تشغازتز محققة للمشتقات الجزئية المتتالية من مراتب عليا . إن التفاضلات المتتالية لهذه الدالة هي :

لقد وجدنا أن :

$$d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy)dy$$

$$d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{2\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 \cdot z$$

التفاضل الثالث للدالة :

$$d^3 z = (\frac{d}{dx}dx + \frac{d}{dy}dy)^3 \cdot z$$

و هكذا نجد أن التفاضل النوني لدالة هو :

$$d^n z = (\frac{d}{dx}dx + \frac{d}{dy}dy)^n . z$$

II-12- الدوال المتجانسة المتعددة المتغيرات : نقول عن الدالة :

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

أنها دالة متجانسة من الدرجة t بالنسبة للمتغيرات $x_1, x_2, \ldots x_n$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^t . f(x_1, \ldots x_n) = t.y$$

و ذلك مهما يكن $x_1, x_2, \ldots x_n$ و λ الثابت الاختياري الموجب . أي أنه إذا بدلنا كل x_i بـ λx_i فإننا نحصل على $\lambda^t . y$ و هذا يعني أن Y يزداد و بمقدار λ^t مرة .

مثال : أثبت أن الدالة التالية متجانسة ، ثم أوجد درجة تجانسها :

$$Z = f(x,y) = xy^2 + 2yx^2 + 4x^3 + 8y^3$$

لنبدل كل x بـ λx و y بـ λy فنجد أن :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x . \lambda^2 y^2 + 2\lambda y . \lambda^2 x^2 + 4\lambda^3 x^3 + 8\lambda^3 y^3$$
$$= \lambda^3 (xy^2 + 2yx^2 + 4x^3 + 8y^3$$
$$= \lambda^3 . f(x,y)$$

إذاً فالدالة متجانسة من الدرجة الثالثة .

مثال : أثبت أن الدالة التالية متجانسة ، ثم أوجد درجة تجانسها :

$$f(x,y) = (4x^2 + 3xy) \sin \frac{x}{y}$$

الحل:

لنبدل كل x بـ λx و y بـ λy فنجد أن :

$$f(\lambda x, \lambda y) = (4\lambda^2 x^2 + 3\lambda x \lambda y) \sin \frac{\lambda x}{\lambda y}$$
$$= \lambda^2 (4x^2 + 3xy) \sin \frac{x}{y}$$
$$= \lambda^2 . f(x,y)$$

إذا الدالة متجانسة و درجة تجانسها هي الثانية .

نظرية أولر و خاصة التجانس : لنفرض أن لدينا الدالة :

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

المتجانسة من الدرجة t فإذا كانت قابلة للتفاضل فهي تحقق العلاقة التالية :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = t.f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

أو بشكل آخر $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = t \cdot f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

و التي تدعى بعلاقة أولر .

البرهان : بما أن الدالة متجانسة ، إذاً فهي تحقق تعريف التجانس ، أي أن :

$$f(\lambda x_1, \lambda y_2, \ldots\ldots \lambda x_n) = \lambda^t . f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

لنشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ λ فنجد أن :

$$\frac{df}{d\lambda} = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda x_2} + x3 \frac{\partial f}{\partial \lambda x_3} + \ldots\ldots\ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial \lambda x_n} = t.\lambda^{t-1} . f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

و باعتبار أن λ ثابت اختياري موجب ، فإذا أخذنا $\lambda = 1$ لحصلنا على علاقة أولر

مثال : بفرض أن :

$$z = f(x, y) = (x^3 + 4y^3) arctg \frac{x}{y}$$

برهن أن : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$

الحل:

إن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 arctg \frac{x}{y} + \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} (x^3 + 4y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12y^2 arctg \frac{x}{y} + \frac{-\frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} (x^3 + 4y^3)$$

و بالتبديل في العلاقة المطلوب برهانها ، نجد أنها محققة .

مثال : إذا كانت لدينا الدالة التالية :

$$Z = f(x,y) = x^2 \sin\frac{y}{x} + y^2 \cos\frac{y}{x}$$

برهن أن :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2z$$

لنلاحظ أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(\frac{y}{x}) + (-y)\cos\frac{y}{x} - y^2.(\frac{-y}{x^2})\sin\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2.\frac{1}{x}.\cos(\frac{y}{x}) + 2y\cos\frac{y}{x} - y^2.\frac{1}{x}.\sin\frac{y}{x}$$

و بالتبديل في العلاقة المطلوب برهانها نجد أنها محققة .

II-13- النهايات العظمى و الصغرى : نعلم أنه

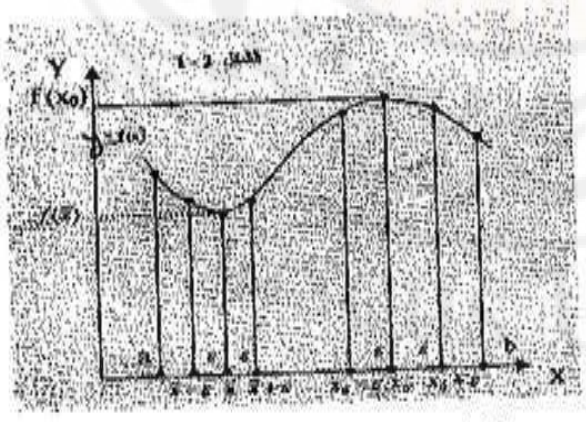
إذا كان لدينا التابع $y = f(x)$

المعروف و المستمر ضمن مجال معين

وليكن [a,b] و إذا فرضنا أن منحنية

هو كما في الشكل (2-1)

و إذا كان $x_0 \in [a,b]$



فيكون للتابع y قيمته عظمى موضعية (نهاية عظمى) في هذه النقطة و لتكن $f(x_0)$

إذا وجد جوار لـ x_0 و ليكن $]X_0-\varepsilon, X_0-\varepsilon[$ تحقق أية نقطة من نقاطه العلاقة التالية :

$$f(x_0) \geq f(x)$$

و إذا كانت $\bar{x} \in [a,b]$ فيكون للتابع y

قيمة صغرى موضعية (نهاية صغرى) .

و لتكن $f(\bar{x})$ حين وجود جوار لـ و ليكن $]\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}-\varepsilon[$ تحقق أي نقطة من نقاطه العلاقة التالية : $f(\bar{x}) \leq f(x)$

ـ نسمي القيم الموضعية أو الصغرى (النهايات العظمى أو الصغرى) للتابع y بالقيم القصوى ، كما نسمي النقطة x_0 ($\bar{x}$) بالنقطة (النهاية) القصوى للتابع:

النقاط الحرجة : تكون النقطة x_0 نقطة حرجة للتابع $y = f(x)$ إذا كان مشتقه ينعدم عند تلك النقطة ، أي $f'(x_0)=0$

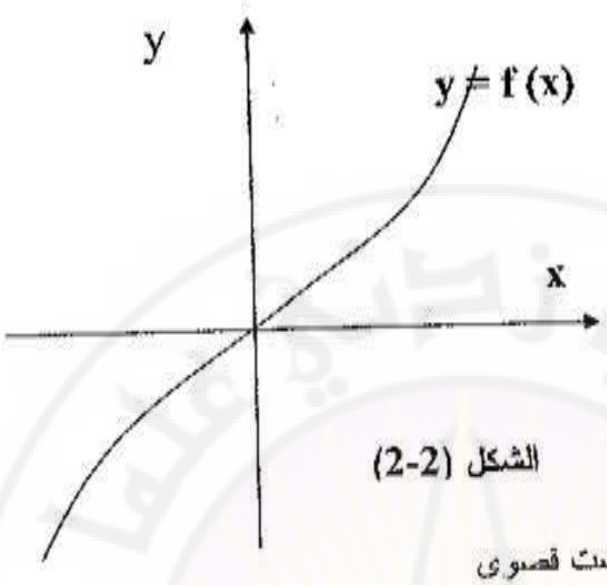
ـ فالنقاط الحرجة هي بالتعريف مجموعة النقاط المنتمية إلى مجموعة تعريف التابع و التي تقابل القيم (النهايات)العظمى و الصغرى و النقط الشاذة للتابع .

إن هناك علاقة وطيدة بين النقاط (النهايات) القصوى و النقاط الحرجة تبينها النظرية التالية :

إن أية نقطة قصوى للتابع $y = f(x)$ هي نقطة حرجة لذاك التابع ، هذا يعني أنه في النقطة القصوى للتابع يكون المشتق معدوماً. إن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً ، أي يمكن أن تكون النقطة الحرجة للتابع $y = f(x)$ نقطة قصوى ويمكن أن لا تكون ،

و المثال على ذلك التابع $y = f(x) = x^3$

الذي منحنيه كما في الشكل (2-2) .



الشكل (2-2)

حيث X=0 حرجة وليست قصوى

مثال : عين النهايات العظمى و الصغرى للتابع :

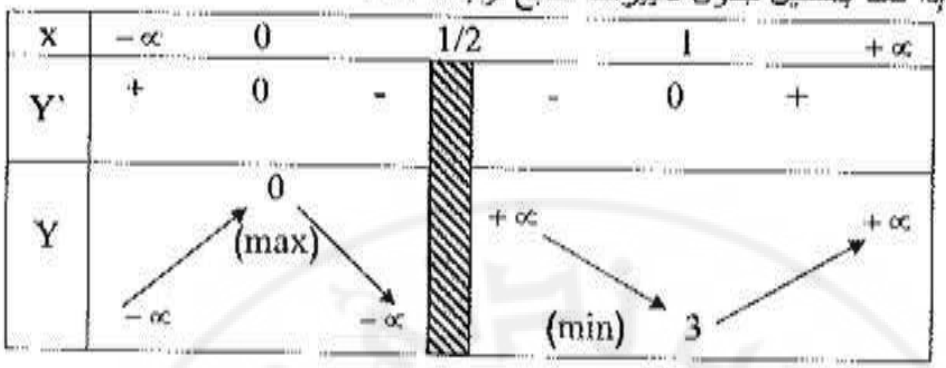
$$y = \frac{3x^2}{2x - 1}$$

إن مجموعة تعريف التابع $R \setminus \{\frac{1}{2}\}$ فلإيجاد النهايات نبحث عن النقاط الحرجة عن طريق إيجاد المشتق الأول :

$$y'_x = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$$

نعدم المشتق الأول $6x(x-1) = 0$ فنجد أن هناك قيمتين توافقان نهايتين هما (0,0) و (1,3)

إذا قمنا بتشكيل جدول تغييرات التابع لوجدنا أنه :



نلاحظ من الجدول أن التابع y متزايد في المجال $]\ 0, -\infty\ [$ ثم أصبح متناقصاً في المجال[*] $]\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ [$ فالنقطة (0) تجعل للتابع Y قيمة عظمى و قيمتها تساوي الصفر . أما في المجال $]\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\ [$ فقد تناقص التابع ثم أخذ بالتزايد في المجال $]1, +\infty[$ إذاً فالنقطة (3 , 1) تجعل للتابع قيمة صغرى مساوية 3 .

مثال : عين النهايات العظمى و الصغرى للتابع :

$$y = 3x^2(x-2)^2$$

طبعاً مجموعة تعريف التابع هي R للتعرف على النقاط الحرجة نوجد المشتق الأول و نعدمه .

$$y'_x = 6x(x-2)^2 + 6x^2(x-2) = 0$$

إذاً فالنقاط الحرجة هي : (2) و (1) و (0)

و حتى نتعرف على طبيعة هذه النقاط سوف نوجد المشتق الثاني .

(*) نلاحظ في المثال أن القيمة الصغرى للتابع هي أكبر من القيمة العظمى و هذا يعكس دراستنا للقيم القصوى الموضعية و ليست للقيم القصوى المطلقة .

$$/ y''_x = 6(2x-3)^2 + 12x(x-3) \neq 0$$

نشكل جدول التغيرات فنجد أنه :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'	−		0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	min 0	↗	3 max	↘	min 0	↗	$+\infty$

و كما نلاحظ أنه التابع متناقص في المجال $]-\infty, 0[$ ثم متزايد في المجال $]0, 1[$ ثم متناقص في المجال $]1, 2[$ ثم متزايد في $]2, \infty[$ ، هذا يعني أن النقاط الحرجة السابقة هي نهايات حدية . النقطتان (0 , 0) و (2 , 0) تجعلان للتابع قيمة صغرى مساوية الصفر . أما النقطة (3 , 1) فهي تجعل للتابع قيمة عظمى مساوية 3 .

ـــ مما سبق نلاحظ أنه حتى نتعرف على النقاط القصوى ليس كافياً أن تكون هذه النقاط حرجة بل لا بد من تحقق شروط أخرى .

سوف نتعرف على النقط الحرجة من خلال الحالتين التاليتين :

أولاً : حالة عندما تكون كلٌ من المتحولين x,y غير مقيدين بأي شرط، أي حالة النقط الحرجة (النهايات) الحرة ـــ غير المقيدة .

ثانياً : حالة عندما يكون المتحولان x,y مرتبطين بشرط (هذا الشرط ليس إلا علاقة رياضية) أو بأكثر من شرط ، أي حالة النقط الحرجة (النهايات) المقيدة .

أولاً : النقاط الحرجة (النهايات) الحرة (غير المقيدة) :

لنفرض أن لدينا التابع $y = f(x)$ و أن x_0 نقطة حرجة له . حتى تكون هذه النقطة موافقة لقيم صغرى للتابع $y = f(x)$ فإنها تحقق الشرطين التاليين :

$$f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) > 0$$

و حتى تكون موافقة لقيمة عظمى للتابع يجب أن تحقق الشرطين التاليين :

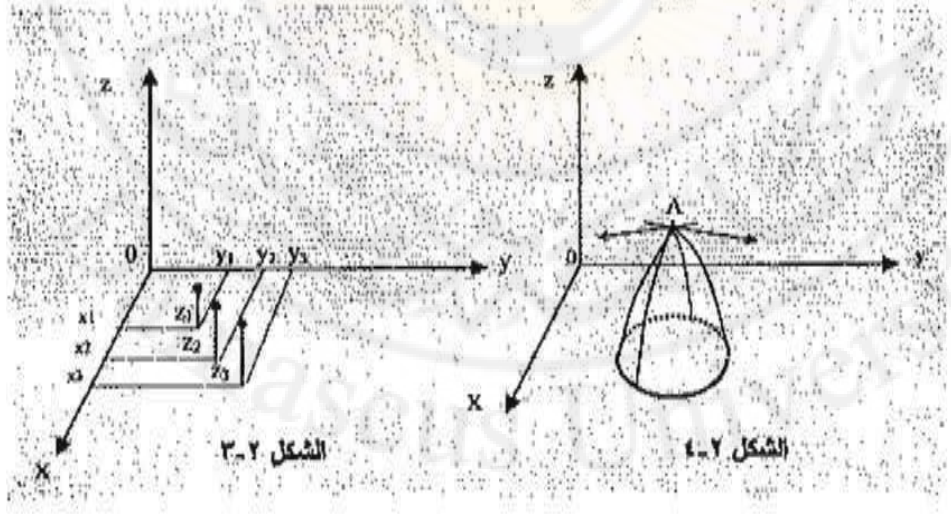
$$f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) < 0$$

و حتى تكون موافقة لقيمة شاذة للتابع يجب أن تحقق الشرطين التاليين :

$$f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) = 0$$

لنفرض أن لدينا التابع $z = f(x, y)$ المعرف و المستمر في مجموعة تعريف كل من المتحولين x , y و القابل للتفاضل مرتين متتاليتين على الأقل و ذي المتحولين x و y المستقلين بعضهما عن البعض (لا يوجد أية علاقة رياضية تربط بعضهما ببعض) .

ـ تمثل المجموعة تعريف هذا التابع x مجموعة القيم (x,y) التي تجعل z معيناً و التي يمكن تمثيلها بمنطقة في المستوى $x0y$ حيث تقع قيم z فوق هذا المستوي و على المحور $0z$ في الفضاء R^3 .



الشكل ٢ـ٣ الشكل ٢ـ٤

إن تمثيل هذا التابع بيانياً من خلال المحاور الإحداثية المتعامدة وفق الشكل (3-2) أما ما يمثله هذا التابع $z = f(x,y)$ من شكل فهو القبة الواردة في الشكل (2-4) و إذا ما نظرنا إلى الشكل لوجدنا أن النقطة A تمثل أعلى نقطة فيها (أعظم القيم و التي هي قمة القبة) و إذا ما تم وضع القبة بشكل مقلوب فإن النقطة A تمثل أدنى قيمة لها .

نقول إن للدالة $z = f(x,y)$ نهاية عظمى عند النقطة (X_0,Y_0) إذا وجد جوار لهذه النقطة بحيث أن :

مهما تكن النقطة (x,y) المنتمية إلى الجوار فإن $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$، أما إذا كان $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ ، لكل (x,y) في ذلك الجوار فيقال إن للدالة نهاية صغرى عند النقطة (a,b) .

نسمي النقطة (x_0,y_0) الموافقة للنهاية (القيمة) الصغرى أو العظمى اسم نقطة قصوى للتابع . من هنا نستطيع تعريف النقاط الحرجة(*) للتابع $z = f(x,y)$ بأنها النقط التي يكون فيها :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$$

بمعنى آخر تكون النقط (x_0,y_0) نقطة حرجة للتابع إذا كان $z = f(x,y)$ إذا كان :

$$dz = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{df(x_0, y_0)}{dy} = dy = 0$$

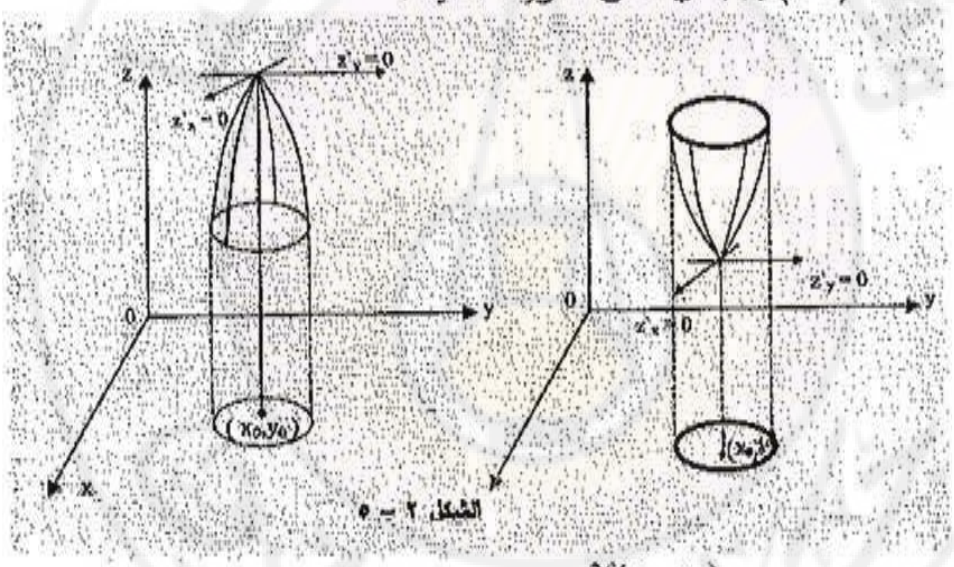
و باعتبار أن كلاً من dx , dy كيفيان لا يمكن أن يساويا منها الصفر ، لذا فإن العلاقة السابقة تتحقق عندما يكون:

(*) ـ النقاط الحرجة : هي النهايات العظمى أو الصغرى أو الشلالة (نقاط السرج) .

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

و لقد وجدنا حينما تعرفنا على النقاط الحرجة للتابع $y = f(x)$ أن هناك علاقة وطيدة بين النقط الحرجة و النقاط القصوى له و الشيء يذكر هنا أيضاً في التابع $z = f(x,y)$ ، فهنا لدينا علاقة وطيدة بين النقط الحرجة و النقط القصوى ، فإذا كانت لدينا النقطة (x_0 , y_0) حرجة فهذا ليس معناه أن تكون نقطة محتوى للتابع ، إلا أن النقطة القصوى للتابع هي حتماً نقطة حرجة.

إذاً حتى تكون النقطة الحرجة (x_0 , y_0) موافقة لقيمة نهاية صغرى للتابع z الشكل (2-5) يجب أن تحقق الشروط التالية :



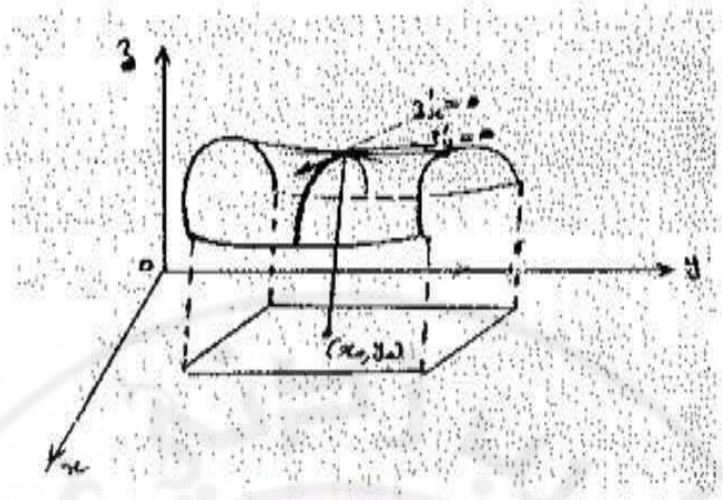
الشكل ٢ ـ ٥

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$d^2f(x_0 , y_0) > 0$$

Damascus University



الشكل (2-7)

و حتى تكون النقطة الحرجة (x_0 , y_0)

موافقة لقيمة عظمى لتابع Z الشكل (2 - 6)

يجب أن تحقق الشروط التالية :

$$f'_x(x_0 , y_0) = \frac{\partial f(x_0 , y_0)}{\partial x} = 0$$

$$f'_y(x_0 , y_0) = \frac{\partial f(x_0 , y_0)}{\partial y} = 0$$

و في حال كانت النقطة (x_0 , y_0) محققة للشروط التالية :

$$f'_x(x_0 , y_0) = \frac{\partial f(x_0 , y_0)}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$f'_y(x_0 , y_0) = \frac{\partial f(x_0 , y_0)}{\partial y} = 0$$

$$d^2f(x_0 , y_0) = 0$$

فعندها نسميها بنقطة السرج الشكل (2-7)

يمكن صياغة ما سبق من خلال النظرية التالية :

بفرض أن لدينا التابع $z = f(x,y)$ القابل للتفاضل مرتين على الأقل . تكون النقطة (x_0 , y_0) نقطة حرجة للتابع Z ضمن مجموعة تعريفه، إذا كان التفاضل التام للتابع z مطابقاً الصفر (*) أي إذا كان :

$$dz = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{dx} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{dy} dy = 0$$

و باعتبار أن dx,dy لا يمكن لهما أن ينعدما ، فالعلاقة السابقة تتحقق عندما يكون :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

و تكون هذه النقطة (x_0 , y_0) موافقة لقيمة (نهاية) صغرى للتابع z إذا كانت $d^2f(x_0,y_0) > 0$ و موافقة لقيمة (نهاية) عظمى للتابع z إذا كانت $d^2f < 0$ (x_0,y_0)

و موافقة لقيمة شاذة إذا كانت $d^2f(x_0,y_0) = 0$.

(*)تعبر هذه النظرية عن الشرط اللازم فقط و ليس الشرط الكافي ، فقد ينعدم كلاً من f'_x و f'_y عن نقطة ما ، دون أن تكون هذه النقطة نهاية عظمى أو صغرى .

فإذا أخذنا الدالة $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ نلاحظ أن :

$$f'_x = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 2x = 0 \quad , \quad f'_y = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -2y = 0$$

من أجل النقطة (0,0) = (x0,y0) و مع ذلك فإن الدالة $z = f(x,y)$

ليس لها نهاية صغرى أو عظمى عند النقطة (0,0) و ذلك لأن $z = f(x,y) = 0$ فهذه النقطة (0,0) التي تعدم f'_x و f'_y و التي لوحت بنهاية هي نقطة السرج (نقطة شاذة) .

لقد وجدنا سابقاً في علاقة التفاضل الكلي (التام) من المرتبة الثانية أن :

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy$$

لنفرض أن :

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad , \quad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

عندها تكتب العلاقة السابقة كما يلي :

$$d^2f = A\,dx^2 + 2C\,dxdy + Bdy^2$$

بإتمام الطرف الأيمن لمربع كامل بالنسبة لـ x (نضيف و نطرح مربعاً نصف أمثال dx

$\left(\pm \frac{C^2}{A} dy^2 \right)$ نجد أن :

$$d^2 f = Adx^2 + 2Cdxdy + Bdy^2 + \frac{C^2}{A} dy^2 - \frac{C^2}{A} dy^2$$

$$= A(dx + \frac{C}{A} dy)^2 + (\frac{AB - C^2}{A})dy^2$$

(حيث $dx \neq 0$ ، $dy \neq 0$)

فإذا عدنا إلى الشروط السابقة الواردة في النقطة الحرجة نجد أن :

ـ يكون $d^2f < 0$ في النقطة الحرجة (x_0 , y_0) و ذلك من أجل

$$A < 0 \quad , \quad B < 0 \quad , \quad AB - C^2 > 0$$

و إذا عوضنا كل من A , B , C بقيمها لوجدنا أن :

$$AB - C^2 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = |H_2|$$

حيث سمينا هذا المعين بمعين هيسيان من المرتبة الثانية و رمزنا له بـ $|H_2|$.

أما $\Lambda = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$ فنرمز له بـ H_1 و نسمي معين هيسيان من المرتبة الأولى .

ـ يكون التفاضل الكلي $d^2f(x_0,y_0) > 0$ و ذلك من أجل :

$$AB - C^2 > 0 \quad , \quad B > 0 \quad , \quad A > 0$$

فإذا عوضنا C , B , Λ بقيمها لوجدنا أن :

$$AB - C = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix} \right|_{(x_0,y_0)} = H_2$$

و أيضاً $$H_1 = A = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$$

إذاً مما سبق نستطيع صياغة هذه الشروط من خلال النظرية التالية :

نظرية(*) : لنفرض أن لدينا التابع $z = f(x,y)$ القابل للاشتقاق و أن (x_0,y_0) نقطة تحقق : $f'_x(x_0,y_0) = 0$ و $f'_y(x_0,y_0) = 0$

(*)- نلاحظ في هذه النظرية أن هذا الشرط هو كاف و غير لازم لوجود القيم القصوى في كل الحالات.

فإن هذه النقطة توافق القيمة العظمى للتابع z إذا كانت قيمة المعين الهيسي $|H_2|$ موجبة وقيمة المعين الهيسي $|H_1|$ سالبة بالقياس إلى تلك النقطة (x_0,y_0) و توافق القيمة الصغرى للتابع z إذا كانت قيمة كل من المعينين H_1 و H_2 موجبة من أجل تلك النقطة (x_0,y_0) .

مثال : بين نوعية نقط النهايات و السرج ، إن وجدت للدالة التالية :

$$Z = f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 4y - 12x$$

إن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 12 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4y + 4$$

$$= 0 \Longrightarrow x = 2 \qquad = 0 \Longrightarrow y = -1$$

إذاً فالنقطة (1- , 2) نقطة حرجة ، و لمعرفة طبيعتها نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0 \qquad = 6 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

كما و أن : $h = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 > 0$

إذاً فالنقطة (1- , 2) صغرى .

مثال : أوجد النقاط القصوى للدالة التالية :

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x$$

$$= 0 \Longrightarrow 3y^2 + 3x = 0 \qquad = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 3y = 0$$

إذاً تكون أمام النقطتين (-1 ، -1) و (0 , 0)

و لمعرفة طبيعة هاتين النقطتين نوجد المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

$$\Lambda = |H| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

إذاً فالنقطة (0,0) هي نقطة سرج و ليست نقطة عظمى أو صغرى .

أما بالنسبة للنقطة (-1 , -1) فنلاحظ أن :

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = -6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y = -6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

$$|H| = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$ والمحدد الهيسي هو

فالنقطة (-1، -1) هي نهاية عظمى .

مثال : بفرض أن دالتي الطلب لسلعتين (1) و (2) هما :

$$D_1 = 300 - 3P_1 - P_2$$

$$D_2 = 200 - P_1 - 2P_2$$

حيث D_1 ، D_2 الكميات المطلوب بالطن من السلعتين (1) و (2) و P_1 و P_2

سعر الطن الواحد من كل سلعة ، و المطلوب إيجاد P_1 ، P_2 اللـذان يحققـان أعظم (إيراد) دخل كلي .

إن دالة الدخل (الإيراد) الكلي هي :

$$R(p_1,p_2) = p_1 \cdot D_1 + p_2 \cdot D_2$$

$$R(p_1,p_2) = 300\ p1 - 3P_1^2 - 2\ P_1P_2 + 200P_2 - 2P_2^2$$

إذاً إن :

$$\frac{\partial R}{\partial P_1} = 300 - 6p_1 - 2p_2 = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial P_2} = 200 - 4p_2 - 2p_1 = 0$$

بحل جملة المعادلتين :

$$300 - 6p1 - 2\ p_2 = 0$$
$$200 - 4\ p_2 - 2\ p_1 = 0$$

نجد أن :

$$p_1 = 40 \quad , \quad p_2 = 30$$

إذاً فالنقطة التي تعدم المشتقين الجزئيين من المرتبة الأولى هي (30,40) و هي نقطة حرجة لنوجد المشتقين الجزئيين من المرتبة الثانية .

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_1^2} = -6 < 0 \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial p_2^2} = -4 > 0 \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial p_1 \partial p_2} = -2 < 0$$

كما و أن قيمة المحدد الهيسي :

$$\Delta 1I_{(2,2)} = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

أي أن النقطة (40 , 30) هي عظمى ، إذاً فأعظم دخل ممكن أن يتحقق عندما يكون سعر الطن من السلعة (١) مساوياً ٤٠ وحدة نقدية و سعر الطن الواحد من السلعة (2) مساوياً 30 وحدة نقدية ، و تكون الكمية المطلوبة (D_1) من السلعة (1) هي :

$$D_1 = 300 - 2 * 40 - 30 = 150\ t$$

و تكون الكمية المطلوبة (D_2) من السلعة (١) هي :

$$D_2 = 200 - 40 - 2 * 30 = 100\ t$$

و يكون الدخل (الإيراد) الأعظمي هو :

$$R = 150 * 40 + 100 * 300 = 9000\ P.U$$

التعميم : لنفرض أن لدينا التابع :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

المعرف و المستمر و القابل للاشتقاق في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه، (n عدد صحيح موجب) بـــ n متحول $x_1, x_2, \ xn$

تكون النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n)$ نقطة حرجة للتابع $y = f(x_1 \ldots \ xn)$ إذا انعدمت كافة مشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى في هذه النقطة .

أي إذا حققت .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x1}(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f x_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = f x_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

بمعنى آخر : إذا كان التفاضل الكلي التام للتابع y في تلك النقطة مطابقاً للصفر أي أن :

$$d Z = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

و حتى يتحقق هذا التفاضل يجب أن تكون كافة المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial xi}$ في تلك النقطة كلاً منها يساوي الصفر أي أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \ , \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

و للتعرف على نوعية هذه النقطة ، نحتاج إلى معرفة إشارة التفاضل الثاني d^2z للتابع في تلك النقطة :

$$d^2Z = d\,(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_2} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial x_2} dx + \ldots. +$$

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x_n} dxn$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots.. + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) dx_1 +$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots.. + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) dx_2 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots.. + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) dx_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots.. + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) dx_n$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1\, dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial xn} dx_1\, dx_n$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2\, dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial xn} dx_2\, dx_n$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1\, dx_n + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} dx_2\, dx_n + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 n} dxn^2$$

حيث نشكل من هذه المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial xi\, \partial xj}$ الواردة في d^2z مصفوفة هيسيان

من المرتبة $n * n$ و منها نشكل المعين الرئيسي $|Hn|$ " على غرار تشكيل المعين الهيسي H2 السابق "

$$H_{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i dx_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 x_n} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Damascus University

و الذي نستخلص منه المعينات الأقل رتبة $|H_3|$ ، $|H_2|$ ، $|H_1|$ ، ... حيث أن :

$$|H_1| = \frac{d^2 f}{dx_1^2}$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial 2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^1} \end{vmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots\ldots \bar{x}_n)$$

$$|H_3| = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{f x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}1, x2, \ldots\ldots, x_n)}$$

$|H_4|$ ---------- $|H_{n-1}|$

و هنا نيمز الحالات التالية :

- إذا كانت قيمة هذه المعينات ذات إشارات متناوبة (بدءاً من الإشارة السالبة للمعين الأول H1) أي أن :

$$|H_1| < 0 \ , |H_2| > 0 \ , \ |H_3| < 0 \ , \ldots (-1)^n |H_n| > 0$$

- بمعنى آخر : إذا كانت المحددات الرئيسية ذات الرتب الفردية سالبة و المحددات الرئيسية ذات الرتب الزوجية موجبة .
- فالنقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \ldots \bar{x}_n)$ توافق قيمة عظمى للتابع :

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots \ldots x_n)$$

لأنه يجب أن يكون $d^2z < 0$ عند تلك النقطة :

- إذا كانت قيمة هذه المعينات ذات إشارات موجبة :

$$|H_1| > 0 \ , |H_2| > 0 \ , \ |H_3| > 0 \ , \ldots (-1)^n |H_n| > 0$$

فالنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \ldots \bar{x}_n)$ توافق قيمة صغرى للتابع :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots \ldots x_n)$$

لأنه يجب أن يكون $d^2z > 0$ في تلك النقطة .

- إذا كانت قيمة المعينات غير ما ورد في الحالتين السابقتين ، ليست جميعها متناوبة و لا هي أيضاً بالموجبة فعندها توافق النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \ldots \bar{x}_n)$ القيمة الشاذة (نقطة شاذة) أي حينما تكون $\Delta H < 0$ و في حال كانت $\Delta H = 0$ فلا نستنتج أي شيء .

مثال : أوجد النقاط الحرجة للتابع :

$$Z = f(x,y,4) = x^2 + xy^2 + yz - z^2y + 5$$

ثم حدد نوعية كل نقطة من هذه النقاط و أوجد قيمة التابع عند كل نقطة .

لنوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ثم لنعدمها :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + z - z^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y - 2zy = 0$$

بحل جملة المعادلات السابقة نجد أن :

$X = 0$	$y = 0$	$z = 0$
$X = -\frac{\sqrt[3]{4}}{8}$	$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$z = \frac{1}{2}$
$X = 0$	$y = 0$	$z = 1$

و للتعرف على نوعية كل نقطة من هذه النقاط ، نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع عند كل نقطة . بالنسبة للنقطة الأولى (0,0,0)

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0,0)} = 2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0,0)} = 2x = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0,0)} = 2y = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right|_{(0,0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_{(0,0,0)} = 1-2z = 1 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(0,0,0)} = -2y = 0$$

ثم لنشكل المحددات الهيسية فنجد أن :

$$|H_3| = -2 < 0 \qquad |H_2| = 0 \qquad |H_1| = 2 > 0$$

و نلاحظ هنا أن المحددات الهيسية غير محققة لأي شرط من الشروط ، و بالتالي فالنقطة (0,0,0) هي نقطة شاذة .

أما بالنسبة للنقطة الثانية ($-\frac{\sqrt[3]{4}}{8}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{2}$) فنجد أن :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-\frac{\sqrt{4}}{8},\sqrt{\frac{1}{4}},\frac{1}{2})} = 2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-\frac{\sqrt{4}}{8},\sqrt{\frac{1}{4}},\frac{1}{2})} = 2x - \frac{\sqrt{4}}{4} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(-\frac{\sqrt{4}}{8},\sqrt{\frac{1}{4}},\frac{1}{2})} = 2y - 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x dz}\right|_{(-\frac{\sqrt{4}}{8},\sqrt{\frac{1}{4}},\frac{1}{2})} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_{(-\frac{\sqrt{4}}{8},\sqrt{\frac{1}{4}},\frac{1}{2})} = 1 - 2z = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(-\frac{\sqrt{4}}{8},\sqrt{\frac{1}{4}},\frac{1}{2})} = -2y = -2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

ثم لتشكل المحددات الهيسية فنجد أن :

$$|H_1| = 2 > 0 \qquad |H_2| = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt{16} < 0 \qquad |H_3| = -2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt{16}\right] > 0$$

و هنا نلاحظ أن هذه المحددات لا تحقق لأي شرط من شروط النقط الحرجة .

أما بالنسبة للنقطة التالية (1 , 0 , 0) فنجد أن :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0,1)} = 2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0,1)} = 2x = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0,1)} = 2y = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right|_{(0,0,1)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0,1)} = 1 - 2z = -1 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(0,0,1)} = -2y = 0$$

لتشكل المحددات الهيسية ، فنجد أن :

$|H_1| = 2 > 0$ $\qquad$ $|H_2| = 0 > 0$ $\qquad$ $|H_3| = 2 > 0$

أي أن النقطة (0,0,1) توافق قيمة صغرى للتابع و مساوية لـ f(0,0,1)=5

مثال : عين النقاط الحرجة للتابع :

$$Z = f(x,y) = 6x + 4y - x^2 - y^2$$

ثم حدد نوعيتها و احسب قيم التابع عند تلك النقطة .

إن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى عند تلك النقطة .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y = 0$$

إن النقطة التي توافق هاتين المعادلتين هي (3,2)

و للتعرف على نوعية هذه النقطة ، نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع عند تلك لنقطة :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(3,2)} = -2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(3,2)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(3,2)} = -2$$

لنشكل المحددات الهيسية فنجد أن :

$$|H_1| = -2 < 0 \qquad |H_2| = 4 > 0$$

إذاً الإشارات متناوبة فللتابع نهاية عظمى عند النقطة (3,2) و قيمته 19

مثال : عين النهايات العظمى و الصغرى للتابع :

$$U = f(x,y,z) = 2x + 3z - yz - y^2 - z^2 - x^2$$

حيث x,y,z متحولات مستقلة .

لنوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ثم لنعدمها :

$$\frac{df}{dx} = 2 - 2x = 0 \qquad \frac{df}{dy} = -z - 2y = 0 \qquad \frac{df}{dz} = 3 - y - 2z = 0$$

فنحصل على جملة معادلات خطية بحلها نجد أن :

$$x = 1 \qquad y = -1 \qquad z = 2$$

إذاً فالنقطة (1,-1,2) ينعدم من أجلها المشتقات الجزئية للتابع u

للتعرف على نوعية هذه النقطة نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع عند تلك النقطة.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-1,2)} = -2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,-1,2)} = -2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,-1,2)} = 0$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dxdz}\right|_{(1,-1,2)} = 0 \qquad \left.\frac{d^2 f}{dxdy}\right|_{(0,-1,2)} = -1 \qquad \left.\frac{d^2 f}{dz^2}\right|_{(1,-1,2)} = -2$$

إذاً فالمحددات الهيسية هي :

$$|H_1| = -2 < 0 \qquad |H_2| = 4 > 0 \qquad |H_3| = -6 > 0$$

إذاً لها إشارات متناوبة ، وبالتالي فالنقطة تمثل نهاية عظمى للتابع وقيمته هي (4)

مثال : عين النهايات العظمى و الصغرى للتابع .

$$U = f(x,y,z) = x^2 e^y - 2y^2 e^x + 3z^2 e^x$$

حيث كل من x,y,z متحولات مستقلة .

لنوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ثم لنعدمها :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y + 3x^2 e^x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^y + x^2 e^y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6ze^x = 0$$

بحل جملة المعادلات نجد أنها تنعدم من أجل (0,0,0)

لنبحث عن نوعية هذه النقطة من خلال المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ، فنجد أن :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0,0)} = 2e^y + 6xe^x + 3x^2e^x = 2$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0,0)} = -2ye^y$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0,0)} = -2e^x + x^2e^y = -2$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_{(0,0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_{(0,0,0)} = 6ze^x = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(0,0,0)} = 6e^x = 6$$

إن المحددات الهيسية هي:

$$|H_1| = 2 > 0 \qquad |H_2| = -4 > 0 \qquad |H_3| = -24 > 0$$

نلاحظ عدم تحقق شرطي النهايات العظمى والصغرى، إذاً فالنقطة (0,0,0) لا تمثل نهاية للتابع.

مثال: عين النهايات العظمى والصغرى للتابع:

$$Z = f(x,y) = \ln (x^2+y^2)^2 - 4xy$$

حيث x,y متحولان مستقلان.

إن المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{x^2+y^2} - 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x}{x^2+y^2} - 4x$$

بالعدامها و حل جملة المعادلتين نجد أن : $x = 0$, $y = 0$

و هو الحل الأول ، و هذا الحل مرفوض لأن التابع فيه غير معين .

الحل الثاني هو : $x = 1$, $y = 1$

الحل الثالث هو : $x = -1$, $y = -1$

لنتعرف على طبيعة الحل الأول (1 , 1) لهذا نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = -2 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} = -\frac{17}{4} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = 0$$

لنشكل المحددات الهيسية ، فنجد أن :

$$|H_1| = 0 \qquad H_2 = -\frac{289}{18} < 0$$

نلاحظ عدم تحقق شرطي النهاية العظمى و الصغرى ، فليس للتابع نهاية عند النقطة (1 , 1) أما للتعرف عن النقطة (-1 , -1) فنجد أن :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1)} = \frac{3}{2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,-1)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(-1,-1)} = 6$$

لنشكل المحددات الهيسية ، فنجد أن :

$$|H_1| = \frac{3}{2} > 0 \qquad |H_2| = -36 < 0$$

نلاحظ أيضاً عدم تحقق شرطي النهاية العظمى و الصغرى ، فليس للتابع عند النقطة (-1 , -1) نهاية .

تمارين و مسائل

أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ، لكل من الدوال التالية :

$Z = f(x,y) = ye^{x}$

$Z = f(x,y) = \arcsin\frac{y^2}{x}$

$Z = f(x,y) = x^{y}$

$Z = f(x,y) = 5xy - e^{xy}$

$Z = f(x,y) = xy\sin\frac{y}{x}$

$Z = f(x,y) = \ln xy - tg^2 x$

$Z = f(x,y) = xye^{x}\ arctg\sqrt{1+x^2}$

$Z = f(x,y) = \sin xye^{x}$

$Z = f(x,y) = e^{x\sin y}$

$Z = f(x,y) = 3^{arctg\ e^{xy}}$

$Z = f(x,y) = \sin x^{xy}$

$Z = f(x,y) = \sin arc\sin e^{xy}$

$Z = f(x,y) = (\sin x.\ln xt)^{x}$

$Z = f(x,y) = \ln yx.\cos xy$

$Z = f(x,y) = xy^{\sin xy}$

٣- بفرض أن : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ برهن أن :

$$2y - 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad , \quad 2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

٤- بفرض أن : $z = f(x,y) = arc\ \sin\frac{y}{2x}$ برهن أن :

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$$

٥- بفرض أن : $z = f(x,y) = x^2\sin(\frac{y}{x}) + y^2\cos(\frac{y}{x})$ برهن أن :

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} = 2f$$

٦- بفرض أن $z = f(x,y) = \ln(x+y)$ برهن أن :

$$\ln\frac{df}{dx} + \ln\frac{df}{dy} = -2f$$

٧- بفرض أن $z = f(x,y) = x^2y + xy^2$ برهن أن :

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}=(x+y)^2$$

8- بفرض أن $z=f(x,y)=\sin x^3 y+2x\cos x e^{y}$ أوجد كلاً من :

$$Z'_x\ ,\ Z'_y\ ,\ Z''_{xx}\ ,\ Z''_{yy}\ ,\ Z''_{xy}\ ,\ Z''_{yx}.$$

9- برهن أن كلاً من الدوال التالية ، معادلة لابلاس $Z''_{xx}+Z''_{yy}=0$

$$Z=f(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy) \qquad Z=f(x,y)=arctg(\frac{y}{x})$$

$$Z=f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad Z=f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$$

$$Z=f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$$

10- أوجد كلاً من :

$$Z'_x\ ,\ Z'_y\ ,\ Z''_{xx}\ ,\ Z''_{yy}\ ,Z''_{xy}\ ,\ Z_{yx}.$$

لكلاً من الدوال التالية :

$$\boxed{Z=f(x,y)=xy\sin x\ e^{y}}$$

$$Z=f(x,y)=e^{XY}-\ln xy$$

$$Z=f(x,y)=\sin\cos\frac{x}{y}$$

$$Z=f(x,y)=\frac{x}{y}\arcsin\frac{y}{x}$$

$$Z=f(x,y)=\sin e^{\sin XY}$$

$$Z=f(x,y)=(x^2+y^2)arctg\frac{x}{y}$$

$$Z=f(x,y)=\arccos e^{\frac{x}{y}}$$

$$Z=f(x,y)=\tan g\ xy^{\sin X}$$

$$Z=f(x,y)=xy^{XY}$$

$$Z=f(x,y)=x^2y.e^{\sin XY}$$

$$Z = f(x,y) = \ln e^{xy}$$

$$Z = f(x,y) = \ln(x^2 + ye^x)$$

$$\boxed{Z = f(x,y) = (\sin\ x)^{\sin\ y}}$$

$$Z = f(x,y) = x^2 \sin xy - 3^{xy}$$

١١- بفرض أن ماورد في السؤال السابق 10 هي دوال ضمنية "مستمرة" فالمطلوب إيجاد مشتقات هذا الدوال .

١٢- أوجد التفاضل الكلي "التام" لكل من الدوال التالية :

$$Z = f(x,y) = (\frac{xy^2}{e^x})$$

$$Z = f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$Z = f(x,y) = xy^2 - 3\sin xy$$

$$Z = f(x,y) = x^{xy}$$

$$Z = f(x,y) = arctg\frac{x}{y}$$

$$Z = f(x,y) = \frac{x}{y} arctg\frac{y}{x}$$

١٣- بفرض أن : $u = f(x,y,z) = \frac{y}{z} + \frac{y}{z}$

حيث $Z = 3t^2$ $\quad Y = \frac{5}{t^2}$ $\quad X = 4t$

أوجد du بطريقة التفاضل على ملحني ، ثم بطريقة مباشرة .

14- بفرض أن لدينا الدالتين :

$$u = u(x,y) \quad , \quad v = v(x,y)$$

و أن التعويض :

$u = r\cos\theta$ $\quad Y = r\sin\theta$

يحول المعادلتين $u'_Y = -v'_X$ إلى المعادلتين $u'_X = v'Y$ و

$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$ $\quad u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ و

أوجد v'_X $\quad ,u'_Y$

15- لنفرض أن $Z = f(x,y) = 2xy + e^X \sin y$

حيث $X = ve^u$ $\quad ,$ $Z = 2uv$

أوجد : Z'_v و Z'_u

16 – بفرض أن $Z = f(x,y)$ وأن

$X = r\cos\theta$ $\quad Y = r\sin\theta$

برهن أن $Z_X^2 + Z_Y^2 = Z_r^2 + \frac{1}{r^2}Z_\theta^2$

أي أن $(\frac{dz}{fX})^2 + (\frac{dz}{dY})^2 = (\frac{dz}{dr})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{dz}{d\theta})^2$

17 – بفرض أن :

$u = f(x,y,z) = z\sin\frac{y}{x}$ وأن :

$X = 2r^3 + 3s$ $\quad Y = r - 3s^2$ $\quad Z = 3r^2 + 2s^2$

أوجد : $\frac{du}{dr}$ $\quad ,$ $\frac{du}{ds}$

Damascus University

18- بفرض أن : $Z = f(x,y) = x^2 - y^2$ و أن

$X = e^t \cos t \qquad Y = e^t \sin t$

أوجد $\left.\frac{dZ}{dt}\right|_{\frac{\pi}{2}}$

19 - بفرض أن $Z = f(X,Y) = X^2 - 3XY + Y^3$ وأن :

$X = \sin\theta \qquad Y = \cos\theta$

أوجد $\left.\frac{dZ}{d\theta}\right|_{\frac{\pi}{2}}$

20- بفرض أن $Z = f(X,Y)$ وأن :

$X = \ln\sqrt{u^2 + v^2} \qquad Y = arctg\frac{v}{u}$

أثبت أن : $Z_X^2 + Z_Y^2 = (u^2 + v^2)(Z_u^2 + Z_v^2)$

21 - بفرض ان $Z = f(X,Y) = X\ln Y + Y\ln X$

حيث $X = e^{3u-2v} \qquad Y = e^{2u+3v}$

أوجد كلاً من Z_u ، Z_v

22- بفرض أن : $Z = f(X,Y) = \ln\sqrt{X^2 + Y^2} - 2e^{XY}$

وأن $X = e^u sn\ v \qquad Y = e^u \cos v$

أوجد كلاً من : Z_u ، Z_v

23- برهن أن كلاً مما يلي هو تفاضل "تام" كلي لدالـــة $Z = f(X,Y)$ يطلـــب إيجادها:

$$(2XY^2 + 3Y\cos 3X)dX + (2X^2Y + sn'3X0dY$$

$$(Y^2 \ln\frac{Y}{X} - Y^2)dX + (2XY\ln\frac{Y}{X} + XY)dY$$

$$(3X^2Y - 2Y^2)dX + (X^3 - 4XY + 6Y^2)dY$$

$$(X^2 + Y^2)dX + 2XYdY$$

$$(2XY)dX + (X^2 + 2Y)dY$$

24- عين نقاط النهايات العظمى و الصغرى (إن وجدت) ونقاط السرج لكل من الدوال التالية:

$$Z = f(x,y) = (x-2)^2 y + y^2 - y$$

$$Z = f(x,y) = 8x^2 + 7y^2 + 4y - 12x + 5$$

$$Z = f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 8xy$$

$$Z = f(x,y) = x^3 - yx + x^2 + y^2 + 4$$

$$Z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$$

$$Z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 25$$

$$Z = f(z,y) = x^2 + 3xy - y + y^2 + 2yz + z^2$$

$$Z = f(x,y) = (4x^3 + xy - x^2 + 2y^2 - 9)$$

$$Z = f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 8xy$$

$$Z = f(x,y) = (x^2 + 3x - xy + y^2 - 7)$$

$$Z = f(x,y) = 2x^2 - x^3 + 4xy - 4y^2 - 5)$$

$$Z = f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x^4}{2}$$

$$Z = f(x,y) = 3x^2 - 12y^2 + 2x^3 + 3x^2y^2$$

$$Z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$
$$Z = f(x,y) = xy^2 (3x - 6y - 2)$$
$$Z = f(x,y) = (x^2 + y^2) / n + y - 1$$
$$Z = f(x,y) = xy - \ln (x^2 + y^2)$$
$$Z = f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$$

25- تحقق إذا كان كلٌ من :

$$2x(x^3 + y^3)dx + 3Y^2(x^{+2} + y^2)dy$$

$$e^Y dx + x(e^Y + 1)dy$$

$$(2x + y)dx + (x + 2y)dy$$

$$(1 + e^X)dy + e^X (y - x)dx$$

$$[e^{X+Y} + e^{X \cdot Y}](dx + dy)$$

تفاضلاً تاماً وفي حال كان تفاضلاً تاماً يطلب إيجاد الدالة $Z = f(x,y)$

25 – بفرض أن دالتي الطلب لسلعتين (١) و (٢) هما :

$$D1 = 500 - P_1 - 2P_2$$
$$D2 = 800 - P_1 - 4P_2$$

حيث D1 ، D2 الكميات المطلوبة بالطن من السلعتين (١) و (٢) و P_1 ، P_2 سعر الطن الواحد من كل سلعة ، و المطلوب إيجاد P_1 ، P_2 اللذين يحققان أعظم دخل كلي .

26 – بفرض أن تابعي الطلب لسلعتين (١) و (٢) هما :

$$D1 = 300 - 3P_1 - P_2$$
$$D2 = 800 - P_1 - 3P_2$$

حيث D1 ، D2 الكميات المطلوبة بالطن من السلعتين (١) و (٢) و P_1 ، P_2 سعر الطن لكل سلعة ، و المطلوب إيجاد P_1 ، P_2 اللذين يحققان أعظم دخل كلي ممكن .

27 – ينتج مصنع سلعتين (A) و (B) تابع التكلفة الكلية لهذا المصنع هو :

$$C = C(x_1,x_2) = 10000 + 3x_1^2 + 5x_2^2 - 120\,x_1 - 400\,x_2$$

حيث x_1 ، x_2 كمية إنتاج السلعتين A ، B و المطلوب ما هي كمية الإنتاج من السلعتين A ، B التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن ، ثم ما هي قيمة هذه التكلفة من أجل كميتي الإنتاج .

28 – منشأة زراعية أنتجت في إحدى السنوات نوعين من البطاطا نوع (١) ونوع (٢) فإذا علمت أن تابعي الطلب لهذين النوعين هما :

$$D1 = 200 - 2P_1 - P_2$$
$$D2 = 300 - P_1 - 3P_2$$

حيث D1 ، D2 الكميات المطلوبة بالطن من نوعي البطاطا و P_1 ، P_2 سعر الطن لكلا النوعين ،فإذا كان لدى المنشأة الزراعية رغبة في الوصول لأعظم ما يمكن من دخلها فما هو P_1 ، P_2 في تحقيق هذا ؟

29 – شركة صناعية تنتج سلعتين (١) و (٢) حيث x_1 الكمية المنتجة من السلعة (١)

و الكمية x_2 المنتجة من السلعة (٢) فإذا فرضنا أن العلاقة بين تابع الكلفة الكلية لهذه الشركة C و الكميات المنتجة من السلعتين x_1 , x_2 هي :

$$C(x_1,x_2) = 10000 + 4x_1^2 + 6x_2^2 - 120\,x_1 - 144\,x_2$$

فالمطلوب : إيجاد كمية الإنتاج من x_1 , x_2 اللتين تجعلان لتابع الكلفة أقل قيمة ممكنة ثم ايجاد الكلفة الكلية .

30 – منشأة تنتج سلعتين (١) و (٢) فإذا فرضنا أن تابع المنفعة u لأحد المستهلكين و المتعلق باستهلاك هاتين السلعتين هو :

$$u(x_1,x_2) = 15 - 0,7x_1^2 + 6x_1 - 0,04X_2^2 + 10\,x_2$$

حيث رمزنا بـ x_1 , x_2 لكمية السلعتين (١) و (٢) فالمطلوب تعيين الكميات x_2 , x_1 اللتين تجعلان لتابع المنفعة u أعظم قيمة ممكنة ثم إيجاد القيمة العظمى لهذا التابع .

31 - منشأة صناعية تنتج سلعتين (١) و (٢) دخلها الكلي يتعلق بالكميات المبيعة و ذلك وفق المعادلة التالية :

$$R(x_1,x_2) = 500x_1 - 5x_1^2 + 242x_2 - 14x_2^2$$

حيث الكميات المبيعة من كلتا السلعتين (١) و (٢) فإذا فرضنا أن إنتاج هاتين السلعتين لهما تابع تكلفة كلي ممثل بالمعادلة التالية :

$$C(x_1,x_2) = 150 + 4x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2$$

فالمطلوب :

١- عين الكميات المبيعة من السلعتين (١) و (٢) اللتين تحققان للمنشأة أعظم ربح ممكن.

٢- عين الدخل الكلي و الكلفة الكلية .

٣- عين أعظم ربح ممكن .

32- وضع أحد التجار تسعيرة لثلاث سلع (١) و (٢) و(٣) على النحو التالي : P_1 للسلعة (١) و P_2 للسلعة (٢) و P_3 للسلعة (٣) حيث الكميات المطلوبة من هذه السلع هي توابع الأسعار وفقاً للعلاقات التالية :

$$D1 = 50 - 5P_1 - 2P_2$$
$$D2 = 80 - 4P_2 - 3P_3$$
$$D3 = 60 - 3P_1 - 12P_3$$

فإذا أراد هذا التاجر الحصول على أعظم ما يمكن من الدخل فما هي أسعار السلع الثلاث التي تحقق ذلك ؟

33 – ينتج أحد المصانع ثلاث سلع (١) و (٢) و (٣) فإذا فرضنا أن الكمية المطلوبة من كل سلعة من هذه السلع تتعلق بأسعار السلع الباقية وفق العلاقات التالية :

$$D1 = 70 - 3P_1 - 2P_2$$
$$D2 = 50 - 2P_2 - P_3$$
$$D3 = 40 - 2P_1 - 5P_3$$

حيث D1 ، D2 ، D3 الكميات المطلوبة من السلع الثلاث و P_2 ، P_1 ، P_3 أسعار الوحدة للسلع الثلاث فالمطلوب : أوجد الكميات المطلوبة من X_1 ، X_3 ، X_2 التي تحقق للمصنع أعظم دخل ممكن .

34– أوجد النقاط الحرجة للتابع :

$$Z = f(x,u) = 2x^2 - y^2 + 4xy - x$$

علماً بأن هناك شرطاً يربط المتحولات هو :

$$g(x,u) = 2x - y - 1$$

35– عين النقاط الحرجة للتابع :

$$Y = f(x) = 5x^3$$

علماً بأن هناك شرطاً يربط متحوله هو :

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 4) = 0$$

36- عين النقاط الحرجة للتابع :

$$U = f(x,y,z) = 5xyz$$

و بين طبيعتها علماً بأن المتحولات ترتبط من خلال العلاقة التالية :

$$g(x,y,z) = x + y + z - 6$$

37- عين النقاط الحرجة للتابع :

$$Z = f(x,y) = 5xy$$

علماً بأن لمتحولاته x ، y تغيرات مرتبطة من خلال الشرط التالي :

$$g(x,y) = 2x - 3y - 6$$

38- عين النقاط الحرجة للتابع : $Z = f(x,y) = 5x + 3xy$

علماً بأن لمتحولاته x ، y تغيرات مرتبطة من خلال الشرط التالي :

$$g(x,y) = x + 2y - 10$$

39- لنفرض أن Q الكمية المنتجة من سلعة معينة في وحدة الزمن تصنعها منشأة إنتاجية في سوق تسودها شروط المنافسة الكاملة كما في العلاقة التابعية التالية :

$$Q = Q(x,y) = 3xy$$

حيث : x كمية المواد الأولية التي تدخل عملية الإنتاج واللازمة ، y كمية العمل المطلوبة للقيام بعملية الإنتاج ، و لفرض أن هذين المتغيرين x ، y مرتبطان بشرط الميزانية :

$$g(x,y) = 2x + 2y - c$$ (c ثابتة عددية موجبة)

و **المطلوب** : تحديد كمية العمل y و كمية المواد الأولية x اللتين تحققان أكبر إنتاج ممكن لهذه المنشأة .

40- لنعتبر أن الكمية المنتجة الوارة في المثال السابق تتبع ثلاثة متحولات وأن علاقتها الرياضية هي :

$$Q = Q(x,y,z) = 3xyz$$

حيث : z رأس المال و أن هذه المتغيرات تخضع لشرط الميزانية الذي يأخذ الشكل التالي:

$$g(x,y,z) = 2x - 3y + z - 2$$

لنبحث و ضمن هذا الشرط عن قيم z , y , x التي تحقق الوصول لأعظم ما يمكن من الإنتاج .

41- لنفرض أن لدينا تابع المنفعة المتعلق بأحد المستهلكين :

$$U = U(x_1,x_2) = 3x_1x_2$$

و لنفرض أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة (١) هو $P1 = 3m \cdot u$ و أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة (٢) هو $P_2 = 2m \cdot u$ فإذا علمت أن دخل الفرد في تلك الفترة الزمنية هو $300\ m \cdot u$ فالمطلوب ما هو الشكل الاستهلاكي الأمثل لهذا الفرد ؟

II- ثانياً: النهايات الحدية (القيم القصوى) المقيدة لتابع:

نحتاج في كثير من الأحيان إلى تحديد نهايات دالة معينة مع وجود قيود أو شروط محددة على العلاقة بين المتغيرات المستقلة التي تتضمنها هذه الدالة (التابع). مثال ذلك: تحديد النهاية العظمى لربح مؤسسة معينة تقوم بانتاج عدد من السلع حيث توجد علاقة محددة بين الكميات المنتجة من هذه السلع. مثال آخر على ذلك إيجاد كميات السلع التي يمكن للمستهلك استهلاكها مع الأخذ بعين الاعتبار ميزانية المستهلك و أسعار هذه السلع.

سنهتم هنا فقط بالقيود التي تكون على شكل مساواة، كما أننا سنبدأ بالتوابع ذات المتغيرين المستقلين، ثم ننتقل بعد ذلك إلى التوابع ذات n متغير مستقل.

1- التابع ذو المتغيرين المستقلين:

بفرض أن التابع الذي لدينا هو Z ، وهو تابع لمتغيرين مستقلين x و y:

$$Z = f(x, y) \qquad (٢-١)$$

و ليكن الشرط الذي يقيد تغيرات هذين المتغيرين هو:

$$g(x, y) = c \qquad (٢-٢)$$

حيث c هو مقدار ثابت.

و $g(x, y)$ هو تابع مفروض للمتغيرين x و y .

من أجل إيجاد النهايات الحدية للتابع Z مع أخذ الشرط (٢-٢) بالحسبان، يمكننا استخدام إحدى طريقتين:

1-1- الطريقة الأولى :

إذا كانت العلاقة (٢-٢) التي تمثل القيد قابلة للحل بالنسبة إلى أحد المتغيرين، فإننا نستخدم هذه الطريقة. في هذه الطريقة نقوم بحساب أحد المتغيرين بدلالة الآخر ثم نقوم بتعويض القيمة التي نجدها لهذا المتغير في التابع Z فنحصل بذلك على تابع بمتغير مستقل واحد فقط، نبحث بعد ذلك عن النهايات (القيم القصوى) غير المقيدة للتابع الناتج، فتكون هذه القيم هي القيم المطلوبة.

مثال :

المطلوب إيجاد نهايات التابع: $Z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$

بشرط أن: $x + y = 56$

الحل:

نحسب قيمة y بدلالة x من الشرط فنجد أن:

$$y = 56 - x$$

نقوم بتبديل قيمة y في التابع فنجد :

$$Z = 4x^2 + 3x(56 - x) + 6(56 - x)^2$$
$$Z = 7x^2 - 504x + 18816$$

$Z' = 14x - 504$

$Z' = 0 \Rightarrow x = 36$

نبدل قيمة x التي حصلنا عليها في الشرط فنجد أن:

$y = 56 - 36 = 20$

لتحديد نوع النهاية عند النقطة الحرجة $(x_0, y_0)=(36, 20)$ نحسب المشتق الثاني في هذه النقطة فنجد:

$Z'' = 14 > 0$ إذاً النهاية صغرى

أما قيمة Z عند نهايتها الصغرى فهي:

$Z = 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2$

$Z = 9744$

2-1- الطريقة الثانية: استخدام مضروب لاغرانج Lagrange

في هذه الطريقة نقوم بكتابة الشرط بالشكل التالي :

$$g(x, y) - c = 0 \qquad (٢-٣)$$

ثم نقوم بعد ذلك بتشكيل تابع جديد L ، نسميه تابع لاغرانج، يتضمن التابع الأساسي Z مضافاً إليه الشرط (٢-٣) بعد ضربه بمتغير جديد λ نسميه مضروب لاغرانج، فنحصل على مايلي:

$$L = f(x, y) + \lambda[\, g(x, y) - c] \qquad (٢-٤)$$

نقوم الآن بالبحث عن نهايات تابع لاغرانج L .

نوجد المشتقات الجزئية الأولى لهذا التابع بالنسبة إلى كل من متغيراته الثلاث، ثم نجعل هذه المشتقات مساوية للصفر، فنحصل على العلاقات الثلاث التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad (٢-٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \qquad (٢-٦)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) - c = 0 \qquad (٧-٢)$$

نلاحظ أن المشتق الجزئي بالنسبة لمضروب لاغرانج λ ليس إلا عبارة عن الشرط المفروض على المتغيرين x و y . نقوم الآن بحل المعادلات الثلاث السابقة فنحصل على نقطة حرجة للتابع L

(x_0, y_0, λ_0) أو أكثر . و من أجل معرفة فيما إذا كانت هذه النقطة الحرجة و التي توافق النقطة (x_0, y_0) هي نهاية للتابع Z ، فإننا نحسب التفاضل الكلي الثاني للتابع Z في هذه النقطة.

نعلم أن التفاضل الكلي الأول للتابع Z يعطى بالعبارة التالية :

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy \qquad (٨-٢)$$

نلاحظ أن التفاضلين dx و dy ليسا مستقلين و إنما هما مرتبطان ببعضهما بسبب وجود الشرط الذي يقيد تغيرات كل من x و y ، فإذا أخذنا تفاضل الطرفين في الشرط نجد :

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0 \qquad (٩-٢)$$

و هذه العلاقة تظهر أن كلاً من dx و dy تابع للآخر.

لنأخذ الآن التفاضل الثاني للتابع Z فنجد:

$$d^2 Z = d(dZ) = \frac{\partial (dZ)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dZ)}{\partial y} dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy\right) dy$$

$$=\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial(dy)}{\partial x}\right)\right]dx+\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}dx+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial(dy)}{\partial y}\right)\right]dy$$

$$=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dydx+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx+\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial(dy)}{\partial y}dy$$

$$=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dydx+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial Z}{\partial y}\left[\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx+\frac{\partial(dy)}{\partial y}dy\right]$$

وبما أن d^2y يكتب بالشكل :

$$d^2y=d(dy)=\frac{\partial(dy)}{\partial x}dx+\frac{\partial(dy)}{\partial y}dy$$

إذاً يمكن أن نكتب عبارة التفاضل الكلي للتابع Z بالشكل التالي :

$$d^2Z=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}dydx+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial Z}{\partial y}d^2y \qquad (١٠-٢)$$

و بنفس الأسلوب إذاأخذنا التفاضل الكلي الثاني للشرط $g(x,y)$ سوف نجد أن:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial g}{\partial y}d^2y=0 \qquad (١١-٢)$$

نحسب d^2y من العلاقة (٢-١١) فنجد :

$$d^2y=-\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}{\frac{\partial g}{\partial y}}dx^2-2\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}}dxdy-\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}{\frac{\partial g}{\partial y}}dy^2$$

نعوض قيمة d^2y في العلاقة (٢-١٠) فنحصل بالنتيجة و بعد الإصلاح على:

(٢-١٢)

$$d^2Z = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dy^2$$

و من العلاقة (٢-٦) نجد أنه في النقطة الحرجة يكون لدينا :

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \qquad (٢-١٣)$$

نوجد الآن المشتقات الجزئية الثانية للتابع L فيكون لدينا :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

و بتبديل λ بقيمتها من العلاقة (٢-١٣) نجد :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \qquad (٢-١٤)$$

و بنفس الطريقة نجد بقية المشتقات الجزئية الثانية للتابع L :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{\frac{\partial Z}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \qquad (٢-١٥)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\dfrac{\partial Z}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \qquad (١٦-٢)$$

و بذلك نستطيع كتابة العلاقة (٢-١٢) بالشكل التالي:

$$d^2 Z = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 \qquad (١٧-٢)$$

لكي يكون للتابع Z نهاية عظمى في النقطة الحرجة (x_0, y_0) الموافقة للنقطة الحرجة (x_0, y_0, λ) يكفي أن يكون d^2Z سالباً في تلك النقطة. و لكي يكون للتابع Z نهاية صغرى في النقطة الحرجة (x_0, y_0) الموافقة للنقطة الحرجة (x_0, y_0, λ) يكفي أن يكون d^2Z موجباً في تلك النقطة.

لنقم الآن بتركيب ما يسمى بمحدد هيسيان الموسع أو المحدد اليعقوبي، و نرمز له |J| :

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

يمكن أن نبرهن على أن d^2Z يكون موجباً إذا كان المحدد |J| سالباً، و بالعكس يكون d^2Z سالباً إذا كان المحدد |J| موجباً.

إذاً بالنتيجة يمكن القول أنه: حتى يكون للتابع Z نهاية عظمى في النقطة الحرجة (x_0, y_0) الموافقة للنقطة الحرجة (x_0, y_0, λ_0) يكفي أن تكون قيمة $|J|$ موجبة في هذه النقطة. و حتى يكون للتابع Z نهاية صغرى في النقطة الحرجة (x_0, y_0) الموافقة للنقطة الحرجة (x_0, y_0, λ_0) يكفي أن تكون قيمة $|J|$ سالبة في هذه النقطة.

مثال:

المطلوب إيجاد نهايات التابع: $Z = 4x^2 + 3xy + 6y^2$

بشرط أن: $x + y = 56$

الحل:

نكتب الشرط بالشكل التالي : $x + y - 56 = 0$

ثم نشكل تابع لاغرانج L كما يلي:

$$L = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda(x + y - 56)$$

نوجد المشتقات الجزئية الأولى للتابع L :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 3y + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3x + 12y + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 56$$

بمساواة هذه المشتقات بالصفر نحصل على ثلاث معادلات :

$$8x + 3y + \lambda = 0$$
$$3x + 12y + \lambda = 0$$
$$x + y - 56 = 0$$

بحل هذه المعادلات الثلاث نجد النقطة الحرجة $(x_0, y_0, \lambda_0)=(36, 20, -348)$ لتحديد فيما إذا كانت هذه النقطة الحرجة هي نهاية أم لا، نوجد المشتقات الجزئية الثانية للتابع L بالنسبة إلى المتغيرين x و y :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 12$$

كما نوجد المشتقات الجزئية الأولى للشرط g بالنسبة إلى المتغيرين x و y :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

ثم نركب محدد هيسيان الموسع |J| بالشكل التالي :

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix} = -14 < 0$$

بما أن |J| سالب فللتابع Z نهاية صغرى في النقطة (36, 20) . و تكون قيمة التابع في هذه النقطة :

$$Z = 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2$$
$$Z = 9744$$

مثال آخر :

إذا كانت دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما هي: $U=xy + 2y + x$

و كان سعر الوحدة من السلعة x يساوي 2 وحدة نقدية، و سعر الوحدة من السلعة y يساوي 5 وحدات نقدية، وكان المبلغ المخصص للانفاق على السلعتين يساوي 51 وحدة نقدية.

المطلوب: حدد عدد الوحدات التي يمكن للمستهلك أن يشتريها من السلعتين على أساس هذه القيود بحيث يحقق أقصى منفعة كلية ممكنة وفقاً لدالة المنفعة الخاصة به.

الحل:

قيد ميزانية المستهلك :

$$2x + 5y = 51$$

نقوم بتشكيل تابع لاغرانج L :

$$L = xy + 2y + x + \lambda(2x + 5y - 51)$$

نوجد المشتقات الجزئية الأولى للتابع L :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 1 + 2\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + 2 + 5\lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 5y - 51$$

بمساواة هذه المشتقات الجزئية الأولى بالصفر نحصل على ثلاث معادلات :

$$y + 1 + 2\lambda = 0$$
$$x + 2 + 5\lambda = 0$$
$$2x + 5y - 51 = 0$$

نقوم بحلها فنجد النقطة الحرجة

$$(x_0, y_0, \lambda_0) = (13,5,3)$$

لتحديد فيما إذا كانت هذه النقطة الحرجة نهاية (قيمة قصوى)، نوجد المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 5$$

نشكل محدد هيسيان الموسع :

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

بما أن $|J|>0$ فالمنفعة الكلية للمستهلك تبلغ نهايتها العظمى عندما يستهلك من السلعة x 13 وحدة و من السلعة y 5 وحدات. وبذلك يدفع ثمناً لهذه الوحدات:

$$2(13) + 5(5) = 51$$

أما المنفعة العظمى التي يحققها فهي :

$$U = (13)(5) + 2(5) + 13 = 88$$

2- التابع ذو n متغير مستقل :

لنأخذ الآن الحالة حيث يكون فيها للتابع Z أكثر من متغيرين مستقلين :

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (٢-١٨)$$

و بفرض أن هذه المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تخضع في تغيراتها للشرط التالي :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \quad (٢-١٩)$$

فمن أجل إيجاد نهايات التابع Z ضمن القيد المذكور، يمكن اتباع إحدى طريقتين:

2-1- الطريقة الأولى :

في هذه الطريقة نقوم بحساب أحد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى باستخدام العلاقة (٢-١٩)، ثم نعوض القيمة التي نجدها في التابع (٢-١٨) فنحصل بذلك على تابع ذو (n-1) متغير. نقوم بعد ذلك بإيجاد النهايات غير المقيدة لهذا التابع الأخير كما رأينا سابقاً.

<u>مثال:</u>

ليكن لدينا التابع التالي :

$$Z = 62x - 4y^2 + 24y + 2v - 2xv - 12 + 12xy$$

المطلوب: إيجاد نهاية هذا التابع ضمن القيد التالي:

$$-4y - x + v = 0$$

<u>الحل:</u>

نقوم بإيجاد قيمة المتغير V من الشرط بدلالة المتغيرين x و y فنجد:

$$v = x + 4y$$

نبدل قيمة v في التابع Z فنجد :

$$Z = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 12$$

نقوم الآن بإيجاد النهايات غير المقيدة لهذا التابع الأخير، نوجد المشتقات الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 64 - 4x + 4y = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 4x - 8y + 32 = 0$$

بحل المعادلتين السابقتين نجد النقطة الحرجة :

$$(x_0, y_0) = (40,24)$$

نوجد الآن المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -8$$

$$|H_1| = -4$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 16$$

بما أن $|H_1|<0$ و $|H_2|>0$ إذاً للتابع Z نهاية عظمى في النقطة الحرجة : $(x_0, y_0)=(40, 24)$

أما v_0 فهي :

$$v_0 = x + 4y = 40 + 4(24) = 136$$

2-2- الطريقة الثانية : استخدام مضروب لاغرانج

نقوم بتركيب تابع لاغرانج بالشكل التالي:

$$L = Z + \lambda(g - c)$$

حيث λ هو مضروب لاغرانج. وبذلك يكون L تابعاً لـ(n+1) متغير.

من أجل إيجاد نهايات التابع L نحسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع L كما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial Z}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \qquad (٢١-٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial Z}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \qquad (٢٢-٢)$$

...

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial Z}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \qquad (٢٣-٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g - c \qquad (٢٤-٢)$$

وبمساواة هذه المشتقات الجزئية بالصفر نحصل على (n+1) معادلة نقوم بحلها فنحصل على نقطة حرجة أو أكثر للتابع L . وللتعرف على طبيعة النقطة الحرجة هل هي نهاية عظمى أم صغرى أم غير ذلك، نحسب قيمة المحدد اليعقوبي في تلك النقطة، وقيم المحددات الجزئية: $|J_2|, |J_3|, \ldots, |J_n|$ الآتية:

$$|J_2| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \end{vmatrix}$$

$$|J_3| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

.....

.....

$$|J_n| = |J| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

فمن أجل أن يكون للتابع Z نهاية عظمى في النقطة التي توافق النقطة الحرجة للتابع L يكفي أن يتحقق في هذه النقطة ما يلي :

$$|J_2| > 0 \ , \ |J_3| < 0 \ , \ |J_4| > 0, \ \ldots$$

أي يكفي أن تتناوب إشارات هذه المحددات من موجب إلى سالب إلى موجب وهكذا.

أما من أجل أن يكون للتابع Z نهاية صغرى في النقطة التي توافق النقطة الحرجة للتابع L يكفي أن يتحقق في هذه النقطة ما يلي :

$$|J_2| < 0 \ , |J_3| < 0 \ , \ldots , |J_n| < 0$$

أي يكفي أن تكون إشارات هذه المحددات جميعها سالبة.

مثال:

ليكن لدينا التابع التالي :

$$Z = 62x - 4y^2 + 24y + 2v - 2xv - 12 + 12xy$$

المطلوب: إيجاد نهاية هذا التابع ضمن القيد التالي:

$$-4y - x + v = 0$$

الحل:

نركب تابع لاغرانج L :

$$L = 62x - 4y^2 + 24y + 12xy + 2v - 2xv - 12 + \lambda(-4y - x + v)$$

المشتقات الجزئية الأولى للتابع L هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 62 + 12y - 2v - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -8y + 24 + 12x - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = 2 - 2x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -4y - x + v = 0$$

بحل المعادلات الأربعة السابقة نجد النقطة الحرجة التالية:

$$(x_0, y_0, v_0, \lambda_0) = (40,24,136,78)$$

لتحديد فيما إذا كانت النقطة الحرجة نهاية أم لا، نركب المحدد الهيسوبي من المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=12,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial v}=-2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-8,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial v}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=-4,\quad \frac{\partial g}{\partial v}=1$$

$$|J_2|=\begin{vmatrix}0 & -1 & -4\\ -1 & 0 & 12\\ -4 & 12 & -8\end{vmatrix}=104$$

$$|J_3|=\begin{vmatrix}0 & -1 & -4 & 1\\ -1 & 0 & 12 & -2\\ -4 & 12 & -8 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-16$$

بما أن إشارات المحددات $|J2|>0$ ، $|J3|<0$ تتناوب من موجب إلى سالب إذاً فالتابع Z يبلغ نهايته العظمى في النقطة :

$$(x_0, y_0, v_0)=(40,24,136)$$

3- حالة وجود أكثر من شرط يقيد المتغيرات المستقلة:

ليكن لدينا التابع Z ذو n متغير مستقل :

$$Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (٢٥-٢)$$

و لتكن لدينا مجموعة من الشروط التي تقيد المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$
\begin{aligned}
&g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \\
&g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2 \\
&\ldots \\
&g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_m
\end{aligned}
\qquad (٢٦-٢)
$$

حيث $c_1, c_2, \ldots, c_m$ أعداد ثابتة.

إن عدد الشروط هو m و يجب أن يكون هذا العدد أقل أو يساوي عدد المتغيرات، أي: $n \geq m$

من أجل إيجاد نهايات التابع Z مع وجود مجموعة الشروط يمكننا اتباع إحدى طريقتين:

3-1- الطريقة الأولى :

نحسب من الشروط قيمة m متغير بدلالة المتغيرات الأخرى و نعوض في عبارة التابع Z فنحصل على عبارة جديدة للتابع Z تحتوي على n-m متغير مستقل، ثم نقوم بإيجاد النهايات غير المقيدة لهذا التابع بالطريقة المعتادة.

<u>مثال:</u>

ليكن لدينا التابع التالي:

$$Z = xv + yw - x - y - v + 12$$

المطلوب: إيجاد نهايته ضمن الشروط التالية:

$$v - 3x + 3y - w = 7$$
$$8y - 2w - 12x + 4v = 14$$

<u>الحل :</u>

من الشرط الأول نحسب المتغير v بدلالة باقي المتغيرات:

$$v = 7 + 3x - 3y + w$$

ثم نعوض في التابع و في الشرط الثاني فنجد:

$$Z = 3x^2 + 3x - 3xy + wx + yw + 2y + 5 - w$$

الشرط الثاني:

$$-4y+2w=-14$$

من الشرط الأخير نحسب w بدلالة باقي المتغيرات :

$$w=2y-7$$

نعوض قيمة w في Z فنحصل بالنتيجة على:

$$Z=3x^2-4x-yx+2y^2-7y+12$$

نقوم الآن بالبحث عن النهايات غير المقيدة للتابع Z ذو المتغيرين المستقلين x و y ، نوجد المشتقات الجزئية الأولى و نساويها بالصفر :

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=6x-4-y=0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=-x+4y-7=0$$

نحل هاتين المعادلتين فنجد النقطة الحرجة: $(x_0, y_0)=(1,2)$

لتحديد طبيعة هذه النقطة الحرجة، نوجد المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=6,\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=4$$

نركب المحددات الهيسية الجزئية:

$$|H_1|=6$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix}6 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=23$$

بما أن $|H_1|>0$ و $|H_2|>0$ إذا فللتابع نهاية صغرى في هذه النقطة الحرجة.

يمكننا حساب قيمة كل من w و v الموافقة للنقطة الحرجة :

$$w_0=2(2)-7=-3$$

$$v_0=7+3(1)-3(2)-3=1$$

2-3- الطريقة الثانية: استخدام مضاريب لاغرانج

في هذه الطريقة نقوم بكتابة القيود بالشكل التالي:

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) - c_1 = 0$$
$$g_2(x_1, x_2, ..., x_n) - c_2 = 0$$
$$...$$
$$g_m(x_1, x_2, ..., x_n) - c_m = 0$$

ثم نركب تابع لاغرانج:

$$L = Z + \lambda_1(g_1 - c_1) + \lambda_2(g_2 - c_2) + ... + \lambda_m(g_{1m} - c_m)$$

حيث المتغيرات $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ هي مضاريب لاغرانج.

نلاحظ أن التابع L هو تابع لـ n+m متغير، من أجل إيجاد نهاياته الحدية نحسب المشتقات الجزئية الأولى ثم نساويها بالصفر، فنحصل بذلك على جملة المعادلات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial Z}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial Z}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_2} = 0$$
$$...$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial Z}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1 - c_1 = 0$$
$$...$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = g_m - c_m = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على نقطة حرجة:

$$(x_{1,0}, x_{2,0}, ..., x_{n,0}, \lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, ..., \lambda_{m,0})$$

أو أكثر.

و من أجل كل نقطة حرجة نحسب المحدد اليعقوبي |J| و المحددات الجزئية : $|J_2|, |J_3|, \ldots, |J_n|$ كالتالي:

$$|J_2| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

...

...

$$|J_n| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

و حتى يكون للتابع Z نهاية عظمى من أجل النقطة الحرجة : $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n,0})$

المقابلة للنقطة الحرجة $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n,0}, \lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \ldots, \lambda_{m,0})$

فإنه يكفي أن يتحقق في تلك النقطة الحرجة تناوب إشارات المحددات البيعقوبية الجزئية بالشكل التالي:

$$|J_2| > 0,\ |J_3| < 0,\ |J_4| > 0, \ldots.$$

أما بالنسبة للنهاية الصغرى فإنه يكفي أن يتحقق في تلك النقطة الحرجة سلبية كافة المحددات اليعقوبية الجزئية أي:

$$|J_2| < 0,\ |J_3| < 0,\ |J_4| < 0, \ldots, |J_n| < 0$$

مثال :

المطلوب إيجاد نهاية التابع التالي:

$$Z = x_2 x_1 + x_1^2 - x_2^2 + 19x_2$$

ضمن الشروط:

$$x_1 + 2x_2 = 11$$
$$x_1 + x_2 = 7$$

الحل:

نكتب الشرطين بالشكل التالي :

$$x_1 + 2x_2 - 11 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 7 = 0$$

ثم نركب تابع لاغرانج كما يلي:

$$L = x_2 x_1 + x_1^2 - x_2^2 + 19x_2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 11) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 7)$$

نأخذ الآن المشتقات الجزئية الأولى للتابع L :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2x_2 + 19 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 - 11 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 - 7 = 0$$

نحل جملة المعادلات الأربعة السابقة فنحصل على النقطة الحرجة التالية :

$$(x_{1,0}, x_{2,0}, \lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}) = (3, 4, -4, -6)$$

لمعرفة طبيعة هذه النقطة الحرجة للتابع L الموافقة للنقطة الحرجة $(x_{1,0},\ x_{2,0})$ للتابع Z ، نشكل المحدد اليعقوبي:

$$|J| = |J_2| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

بما أن $|J_2|=1>0$ إذاً فالنقطة الحرجة (3, 4) للتابع Z الموافقة للنقطة الحرجة (3, 4, -4, -6) هي نهاية عظمى للتابع و يأخذ Z فيها قيمة عظمى هي:

$$Z = (4)(3) + (3)^2 - (4)^2 + 19(4) = 81$$

2-4- تفسير مضروب لاغرانج:

لنأخذ مسألة إيجاد نهايات التابع $Z = f(x, y)$ مع وجود القيد: $g(x, y) = c$

لحل هذه المسألة بطريقة مضروب لاغرانج قمنا بتشكيل تابع لاغرانج L و بإيجاد المشتقات الجزئية الأولى له، ثم بمساواة هذه الأخيرة بالصفر حصلنا على المعادلات التالية:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$
$$g - c = 0$$

بحل هذه المعادلات نحصل على النقطة الحرجة (x_0, y_0, λ_0) و يفرض أن هذه النقطة تحقق الشروط الكافية لوجود نهاية للتابع Z . ولتكن نهاية التابع في هذه النقطة هي :

$$Z_0 = f(x_0, y_0)$$

و لنبحث الآن عن تفسير لمضروب لاغرانج λ_0 . من الواضح لدينا أن النقطة الحرجة التي حصلنا عليها نتيجة حل المعادلات السابقة مرتبط بالثابت c بسبب وجود الشرط، و بذلك تكون القيم x_0, y_0, λ_0 تابعة للقيمة الثابت c أي أن:

$$x_0 = x(c)$$
$$y0 = y(c)$$
$$\lambda 0 = \lambda(c)$$

و ستكون أيضاً النهاية Z_0 للتابع Z تابعة أيضاً لـ c :

$$Z_0 = f(x_0, y_0) = Z(c)$$

ولأن الشرط يتحقق من أجل النقطة (x_0, y_0) فإنه يمكننا أن نكتب:

$$Z_0 = f(x_0, y_0) + \lambda_0[g(x_0, y_0) - c]$$

و لنأخذ مشتق Z_0 بالنسبة إلى c فنجد:

$$\frac{dZ_0}{dc} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\cdot\frac{dx_0}{dc} + \frac{\partial f}{\partial y_0}\cdot\frac{dy_0}{dc} + \frac{d\lambda_0}{dc}[g(x_0, y_0) - c] + \lambda_0\left[\frac{\partial g}{\partial x_0}\cdot\frac{dx_0}{dc} + \frac{\partial g}{\partial y_0}\cdot\frac{dy_0}{dc} - 1\right]$$

$$\frac{dZ_0}{dc} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda_0\frac{\partial g}{\partial x_0}\right)\frac{dx_0}{dc} + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} + \lambda_0\frac{\partial g}{\partial y_0}\right)\frac{dy_0}{dc} + \frac{d\lambda_0}{dc}[g(x_0, y_0) - c] - \lambda_0$$

و بما أن المعادلات المذكورة أعلاه تكون محققة في النقطة (x_0, y_0, λ_0) نجد أن المقادير الموضوعة بين أقواس في العلاقة السابقة تكون مساوية للصفر، وبالنتيجة يكون لدينا:

$$\frac{dZ_0}{dc} = -\lambda_0$$

و بهذا نجد أن القيمة المثلى لمضروب لاغرانج λ_0 تقيس لنا أثر الشرط المفروض على النهاية Z_0 للتابع Z. أي أنها تمثل مقدار التغير الذي يصيب

النهاية Z_0 للتابع Z عندما يتغير الثابت c الموجود في الشرط بمقدار وحدة واحدة فقط.

و بنفس الطريقة نستطيع تفسير مضاريب لاغرانج عند تعدد الشروط في المسألة المطروحة.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الثالث

III- التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات

III-1- الحل المصفوفي للنماذج الاقتصادية الخطية

1- النموذج الخطي التوازني لسوق سلعة واحدة

2- النموذج الخطي لتوازن سوق سلعتين فأكثر

3- نموذج توازن الدخل القومي بالشكل المصفوفي

III-2- تطبيق المصفوفات على سلسلة ماركوف

مصفوفة ماركوف النظامية

مصفوفة ماركوف الماصة

أمثلة غير محلولة

III-3- جدول المدخلات ــ المخرجات

مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج

تمارين غير محلولة

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

إن استخدام الرياضيات في الاقتصاد هو بحد ذاته ضرورة ملحة على اعتبار أن الرياضيات تشكل الأداة والوسيلة التي نستطيع بواسطتها إيجاد وطرح الحلول لمعظم المشاكل الاقتصادية، كما أن استخدام الحاسبات الإلكترونية التي مكنت الباحث من حل المسائل المعقدة والتي لولاها لعزف الكثيرون عن الخوض في إيجاد الحل الرياضي لتلك المسائل المتعددة واكتفوا بطرح أمثلة نموذجية بسيطة تاركين للآخرين عملية إيجاد الحلول للمسائل الأكثر تعقيداً. وعادةً ما يلجأ الاقتصاديون إلى استخدام طرائق وأدوات وأساليب رياضية كثيرة لحل مختلف المسائل الاقتصادية، ولعل المصفوفات هي إحدى هذه الأساليب الرياضية.

إن أهم التطبيقات الاقتصادية للمصفوفات والتي سوف نتناولها في هذا الفصل هي:

١- الحل المصفوفي للنماذج الاقتصادية الخطية.
٢- تطبيق المصفوفات على سلسلة ماركوف.
٣- جدول المدخلات ـ المخرجات.

III- 1 - الحل المصفوفي للنماذج الاقتصادية الخطية:

١- النموذج الخطي التوازني لسوق سلعة واحدة.

بفرض أن معادلات هذا النموذج معرفة كما يلي:

$x_d = a - bp$ تابع الطلب

$x_s = -c + dp$ تابع العرض

$x_d = x_s$ شرط التوازن

نستطيع أن نكتب معادلات النموذج كما يلي:

$$x_d + ox_s + bp = a$$
$$ox_d + x_s - dp = -c$$
$$x_d - x_s + op = 0$$

وبكتابة المعادلات السابقة مصفوفياً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ x_s \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = G$$

وبحل المعادلة المصفوفية السابقة:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = 1(-b) + 1(-d) + 0 \Rightarrow |\Delta| = -b-d = -(b+d) \neq 0$$

أي أنه للمصفوفة حل وحيد.

نوجد مصفوفة العوامل المشاركة:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}1 & -d\\ -1 & 0\end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix}0 & -d\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} \\ (-)\begin{vmatrix}0 & b\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & b\\ 1 & 0\end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0 & b\\ 1 & -d\end{vmatrix} & (-)\begin{vmatrix}1 & b\\ 0 & -d\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -d & -d & -1\\ -b & -b & 1\\ -b & d & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد المصفوفة المساعدة:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} -d & -b & -b\\ -d & -4 & d\\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد مقلوب المصفوفة: $A^{-1}=\frac{1}{|\Delta|}\tilde{A}$

$$A^{-1}=\frac{1}{(b+d)}\begin{bmatrix} -d & -b & -b\\ -d & -b & d\\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم التوازنية: $\bar{X}=A^{-1}.G$

$$X=-\frac{1}{(b+d)}\begin{bmatrix} -d & -b & -b\\ -d & -b & d\\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ -c\\ 0 \end{bmatrix}=-\frac{1}{(b+d)}\begin{bmatrix} bc-ad\\ bc-ad\\ -(a+c) \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد أن السعر التوازني هو $P = \frac{a+c}{b+d}$

والكمية التوازنية هي:

$$\overline{x} = \frac{ab - bc}{b + d}$$

تطبيق:

ليكن لدينا تابعيا العرض والطلب وشرط التوازن لسوق ما والمطلوب إيجاد القيم التوازنية مصفوفياً:

$$x_s = -2 + 2p$$
$$x_d = 18 - 2p$$
$$x_s = x_d$$

الحل:

$$x_s + ox_d - 2p = -2$$
$$ox_s + x_d + 2p = 18$$
$$x_s - x_d + op = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_d \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0&-2\\-1&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&-2\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-2\\0&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&2&+1\\2&-2&1\end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد أن $\bar{x}=8$ و $\bar{p}=5$

٢- النموذج الخطي لتوازن سوق سلعتين فأكثر:

لنفرض أنه يتبادل في السوق سلعتين وأن النموذج الخطي لسوق سلعتين معرف بالمعادلات الخطية التالية (تابعي طلب وتابعي عرض وشرطي توازن).

$$x_{d_1}=a_0+a_1p_1+a_2p_2 \qquad x_{d_2}=c_0+c_1p_1+c_2p_2$$

$$x_{s_1}=b_o+b_1p_1+b_2p_2 \qquad x_{s_2}=d_o+b_1p_1+b_2p_2$$

$$x_{d_1}=x_{s_1} \qquad x_{d_2}=x_{s_2}$$

نختصر النموذج بمعادلتين خطيتين بدلالة p_1 ، p_2 كما يلي:

من شرطي التوازن نجد أن:

$$x_{d_1}=x_{s1}\Rightarrow$$

$$a_0+a_1p_1+a_2p_2=b_o+b_1p_1+b_2p_2\Rightarrow a_1p_1-b_1p_1+a_2p_2-b_2p_2=b_0-a_0$$

$$(a_1-b_1)p_1+(a_2-b_2)p_2=b_0-a_0.....(1)$$

$$x_{d_2}=x_{s_2}\Rightarrow$$

$$c_0+c_1p_1+c_2p_2=d_o+d_1p_1+d_2p_2\Rightarrow c_1p_1-d_1p_1+c_2p_2-d_2p_2=d_0-c_0$$

$$(c_1-d_1)p_1+(c_2-d_2)p_2=d_0-c_0.....(2)$$

$$A \cdot P = G$$

$$AP = G$$

$$P = A^{-1}G$$

لحل النموذج نوجد أولاً المحدد:

$$|\Delta| = (a_1-b_1)(c_2-d_2)-(c_1-d_1)(a_2-b_2) \neq 0$$

ثم نوجد المصفوفة المساعدة $\tilde{A}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}(c_2-d_2) & (b_2-a_2)\\ (d_1-c_1) & (a_1-b_1)\end{bmatrix}$$

ومن ثم نوجد المقلوب $A^{-1}=\frac{1}{|\Delta|}=\tilde{A}$

$$\begin{bmatrix}\bar{P}_1\\ \bar{P}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{(a_1-b_1)(c_2-d_2)-(c_1-d_1)(a_2-b_2)}\begin{bmatrix}(c_2-d_2) & (b_2-a_2)\\ (c_1-d_1) & (a_1-b_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(b_0-a_0)\\ (d_0-c_0)\end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_1=\frac{(c_2-d_2)(b_0-a_0)(d_0-c_0)}{(a_1-b_1)(c_2-d_2)(a_2-b_2)} \quad , \quad P_2=\frac{(d_1-c_1)(b_0-a_0)+(d_0-c_0)}{(a_1-b_1)(c_1-d_1)(a_2-b_2)}$$

وبتعويض قيمة $\bar{P}_1$ و $\bar{P}_2$ في إحدى معادلتي النموذج لكل سوق سلعة ينتج الكمية التوازنية في سوق كل سلعة من السلعتين.

تطبيق:

ليكن نموذج سوق سلعتين معرفاً بالمعادلات الخطية التالية:

المطلوب إيجاد القيم التوازنية في كل سوق.

$$x_{d_1} = 20 - 8p_1 + p_2$$

$$x_{s_1} = 3p_1$$

$$x_{d_1} = x_{s_1}$$

$$x_{d_1} = 19 + 2p_1 + 4p_2$$

$$x_{s_1} = -11 + 2p_2$$

$$x_{d_2} = x_{s_2}$$

الحل: من شرطي التوازن في كل سوق:

$$x_{d_1} = x_{s_1} \Rightarrow 20 - 8p_1 + p_2 = -7 + 3p_1 \quad \Rightarrow 11p_1 - p_2 = 27 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x_{d_2} = x_{s_2} \Rightarrow 19 + 2p_1 - 4p_2 = -11 + 2p_2 \Rightarrow 2p_1 - 6p_2 = -30 \ldots\ldots(2)$$

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -30 \end{bmatrix}$$

المحدد: $|A| = 11(-6) - (2)(1) = -66 + 2 = -66 \neq 0$

المساعدة: $$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$$

المقلوب: $$A^{-1} = -\frac{1}{64} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$$

نعوض في معادلات النموذج:

$$\bar{x}_1 = -7 + 3\bar{p}_1 = -7 + 9 = 2$$

$$\bar{x}_2 = -11 + 2\bar{p}_2 = -11 + 12 = 1 \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = 2 \ , \ \bar{x}_2 = 1$$

تطبيق:

ليكن النموذج التالي ممثلاً لسوق ثلاث سلع والمطلوب إيجاد القيم التوازنية:

$$x_{d_1} = 20 - 3p_1 + p_2 + p_3 \qquad x_{d_2} = 30 + p_1 + 5p_2$$

$$x_{s_1} = p_1 \qquad x_{s_2} = -3 + 2p_2$$

$$x_{d_1} = x_{s_1} \qquad x_{d_2} = x_{s_2}$$

$$x_{d_3} = 15 + p_1 + 3p_3$$

$$x_{s_2} = -1 + 3p_3$$

$$x_{d_3} = x_{s_3}$$

الحل:

من شروط التوازن الثلاثة نجد:

$$x_{d_1} = x_{s_1} \Rightarrow 20 - 3p_1 + p_2 + p_3 \qquad \Rightarrow 4p_1 - p_2 - p_3 = 20.....(1)$$

$$x_{d_2} = x_{s_2} \Rightarrow 30 + p_1 - 5p_2 = -3 + 2p_2 \Rightarrow p_1 - 7p2 + 0p_3 = -33...(2)$$

$$x_{d_3} = x_{s_3} \Rightarrow 15 + p_1 - 3p3 = -1 + 3p_3 \Rightarrow p_1 + op2 - 6p_3 = -16...(3)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -33 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = 4(-7)\ (-6) - (-1)(-6) + (-1)(7) = 155 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 42 & +6 & 7 \\ -6 & -23 & -1 \\ -7 & -1 & -27 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 42 & -6 & -7 \\ 6 & -23 & -1 \\ 7 & -1 & -27 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{155}\begin{bmatrix} 42 & -6 & -7 \\ 6 & -23 & -1 \\ 7 & -1 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{155}\begin{bmatrix} 42 & -6 & -7 \\ 6 & -23 & -1 \\ 7 & -1 & -27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ -33 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,4 \\ 5,77 \\ 3,9 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{P}_1 = 7,4 \ , \ \bar{P}_2 = 5,77 \ , \ \bar{P}_3 = 3,9$$

وبالتعويض في معادلات العرض في سوق كل سلعة نستنتج الكميات التوازنية:

$$\bar{x}_1 = \bar{p}_1 = 7.4$$

$$\bar{x}_2 = -3 + 2\bar{p}_2 = -3 + 2(5.77) = 8,54$$

$$\bar{x}_3 = -1 + 3\bar{p}_3 = -1 + 3(3.9) = 10.7$$

وبالانتقال إلى الحالة الأعم والتي تكون فيها السوق حاوية على عدد كبير من السلع ولتكن (n) سلعة. بالطبع سيتكون لدينا n معادلة لمستوى الطلب لكل سلعة من السلع وكذلك n معادلة لمستوى العرض لكل سلعة من السلع و n شرط توازن، وبالطبع فإن حل هذا النموذج سيكون عن طريق اللجوء إلى جبر المصفوفات والحاسبات الإلكترونية لإيجاد الأسعار التوازنية والكميات التوازنية.

٣- نموذج توازن الدخل القومي بالشكل المصفوفي:

معادلات النموذج هي:

١- شرط التوازن: الدخل القومي = الانفاق الكلي: $Y = C + I + G$

حيث Y تمثل الدخل القومي و C الاستهلاك الكلي و I الإنفاق الكلي على الاستثمار وتمثل G الإنفاق الحكومي و T الإيراد الحكومي الممثل بالضرائب.

٢- تابع الاستهلاك : $C = a + b(y-t)$

حيث تمثل y-t الدخل التصرفي.

٣- تابع مستوى الضريبة t: $T = t.y$

حيث تمثل t معدل الضريبة

وبإعادة تشكيل المعادلات السابقة مصفوفياً نجد

$$\begin{aligned} y - c + oT &= I + G \\ -by + c - bT &= a \\ -ty + oc + T &= o \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & +1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+G \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \,.\, X = B$$

$$AX = B$$
$$X = A^{-1}B$$

ولحل النموذج نوجد أولاً المحددة:

$$|\Delta| = 1\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -b & b \\ -t & 1 \end{vmatrix} + 0 \quad \Rightarrow \quad |\Delta| = 1 - b(1-t) \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} +1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -b & b \\ -t & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -b & 1 \\ -t & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -t & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b(1-t) & t \\ 1 & 1 & t \\ -b & -b & 1-b \end{bmatrix}$$

Damascus University

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b(1-t) & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|\Delta|} \cdot \overline{A} = \frac{1}{1-B(1-t)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b(1-t) & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b(1-t)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -b \\ b(1-t) & 1 & -b \\ t & t & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I+G \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I+G+a}{1-b(1-t)} \\ \frac{a+b(1-t)(I+G)}{1-B(1-t)} \\ t.\overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\overline{Y} = \frac{a+i+g}{1-b(1-t)} \ , \ \overline{c} = \frac{a+b(1-t)(I+G)}{1-b(1-t)} \ , \ \overline{T} = t.\overline{Y}$$

تطبيق:

أوجد القيم التوازنية للدخل y وللاستهلاك c ولمستوى الضريبة T للنموذج التوازني للدخل القومي التالي:

$$Y = C + I + G$$
$$C = 60 + 0.7\,(Y-T) = 60 + 0.7 - 0.7T$$
$$T = 0.3\,Y$$
$$I = I_0 = 30$$
$$G = G_0 = 20$$

الحل: من شرط التوازن

$$Y\ C+0T = 50$$
$$-0.7Y + C + 0.7T = 60 \Rightarrow$$
$$-0.3Y + 0C + T = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0.7 & +1 & 0.7 \\ -0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = 1.\ [(+1)\ (1)] - (-1)\ [(-0.7)\ (1) - (-0.3)\ (0.7)] + 0 = 0.51 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} +1 & +0.49 & +0.3 \\ +1 & 1 & +0.3 \\ -0.7 & -0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & -0.7 \\ 0.49 & 1 & -0.7 \\ +0.3 & +0.3 & +0.3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = +\frac{1}{0.51}\begin{bmatrix} +1 & +1 & -0.7 \\ 0.49 & 1 & -0.7 \\ +0.3 & +0.3 & +0.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = +\frac{1}{0.51}\begin{bmatrix} +1 & +1 & -0.7 \\ 0.45 & 1 & -0.7 \\ +0.3 & +0.3 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215.7 \\ 165.7 \\ 64.7 \end{bmatrix}$$

تمارين:

١- إذا علمت أن تابعي العرض والطلب في سوق سلعة كانا كما يلي:

$$x_s = -5 + 2p$$

$$x_d = 10 - p$$

والمطلوب إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية.

٢- بفرض أنه لدينا النموذج التوازني التالي لسوق سلعتين. المطلوب إيجاد القيم التوازنية:

$x_{d_1} = 20 - 3p_1 + 2p_2$ $x_{d_2} = 10 + 2p_1 - p_2$

$x_{s_1} = -4 + 2p_1$ $x_{s_2} = -2 + 3p_2$

$x_{d_1} = x_{s1}$ $x_{d_2} = x_{s_2}$

٣- ليكن النموذج التوازني التالي لسوق ثلاث سلع. والمطلوب إيجاد الكميات والأسعار التوازنية:

$x_{d_1} = 10 - 2p_1 + p_2 + p_3$ $x_{d_2} = +33 + p_1 - 7p_2$ $x_{d_3} = 16 + p_1 - 3p_2 - 3p_3$

$x_{s_1} = -2 + p_1$ $x_{s_2} = -3 + 7_{p2}$ $x_{s_3} = -1 + 2p3$

$x_{d_1} = x_{s1}$ $x_{d_2} = x_{s_2}$ $x_{d_3} = x_{s_3}$

٤- بفرض أن $t = 0.2$ وأن $G = 140$ و $I = 280$ و $C = 300 + 0 - 8\,(y-t)$ والمطلوب إيجاد القيم التوازنية لكل من الدخل والاستهلاك وإيرادات القطاع الحكومي.

Damascus University

III- 2- تطبيق المصفوفات على سلسلة ماركوف(*).

١- لنفترض أن لدينا سلسلة من التجارب العشوائية ولتكن r تجربة بحيث أن:

$$a_1 , a_2 , \ldots\ldots a_i, \ldots\ldots, a_j, \ldots\ldots\ldots, a_r$$

هي مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها من التجارب السابقة. ويفرض أن التجارب غير مستقلة بعضها عن بعض وبالتالي فإن نتائج هذه التجارب غير مستقلة وبالتالي تكون نتيجة لكل تجربة مرتبطة بنتيجة التجربة التي قبلها وتؤثر في نتيجة التجربة التي بعدها. أي أن:

$$a_i \cap a_j \neq \phi$$

٢- وبفرض أن P_{ij} هو احتمال الانتقال من النتيجة i إلى النتيجة j ضمن سلسلة نتائج التجارب العشوائية السابقة.

من (١) و (٢) نعرف سلسلة ماركوف بأنها سلسلة احتمالات الانتقال من حالة إلى حالة أخرى ضمن سلسلة نتائج التجارب العشوائية. ويمكن تمثيل سلسلة ماركوف هذه بمصفوفة عناصرها عبارة عن احتمالات الانتقال من حالة إلى أخرى كما يلي: عناصر السطر الأول هي عبارة عن احتمالات الانتقال من الحالة الأولى إلى أي حالة من الحالات المكونة لسلسلة ماركوف. وعناصر السطر الثاني هي عبارة عن احتمالات الانتقال من الحالة الثانية على أي حالة أخرى، وعناصر السطر i هي عبارة عن احتمالات الانتقال من الحالة i إلى أي حالة أخرى من الحالات المكونة لسلسلة ماركوف،وهكذا. أما عناصر العمود الأول فهي عبارة عن احتمالات الوصول إلى الحالة الأولى وصولاً من أي حالة

(*) انظر د. خلف مطر الجراد: الرياضيات الاقتصادية والإدارية منشورات جامعة دمشق - ١٩٨٣

من الحالات المكونة للسلسلة ماركوف. وعناصر العمود الثاني هي عبارة عن احتمالات الوصول إلى الحالة الثانية وصولاً من أي حالة من الحالات المكونة للسلسلة، وعليه فالعمود i هو عبارة عن احتمالات الوصول إلى الحالة j من أي حالة من الحالات المكونة لسلسلة ماركوف. فلو افترضنا أن سلسلة ماركوف تتكون من ثلاث حالات، فإن مصفوفة احتمالات الانتقال تأخذ الشكل التالي:

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

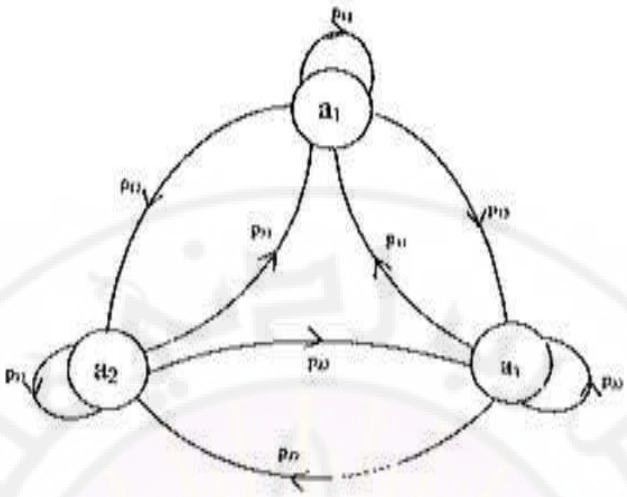
ولكي تكون المصفوفة M مصفوفة احتمالات الانتقال مصفوفة ماركوفية يجب أن تحقق الشروط التالية:

١- أن تكون مصفوفة مربعة.

٢- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ أي أن مجموع عناصر كل سطر تساوي الواحد

٣- $0 \le p_{ij} \le 1$

كما ويمكن أن نمثل مصفوفة احتمالات الانتقال M شبكياً إذ تمثل الحالات المكونة للسلسلة بعقد واحتمالات الانتقال بين الحالات المكونة للسلسلة بالأسهم الواصلة بين هذه العقد كما يلي:



إن أهم مسألة تعالجها مصفوفة ماركوف هي إيجاد احتمال الانتقال من حالة إلى حالة أخرى وذلك خلال n (مرحلة زمنية، مرحلة، .....)،ولنرمز لهذا الاحتمال بالرمز P_{ij}^{n} وعلى ذلك يمكن كتابة مصفوفة احتمالات الانتقال خلال n خطوة كما يلي:

$$M^{n} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11}^{n} & p_{12}^{n} & p_{13}^{n} \\ p_{21}^{n} & p_{22}^{n} & p_{23}^{n} \\ p_{31}^{n} & p_{32}^{n} & p_{33}^{n} \end{bmatrix} \end{array}$$

فلو أردنا مثلاً الوصول إلى مصفوفة احتمالات الانتقال خلال خطوتين أي إلى المصفوفة M^2 والتي هي:

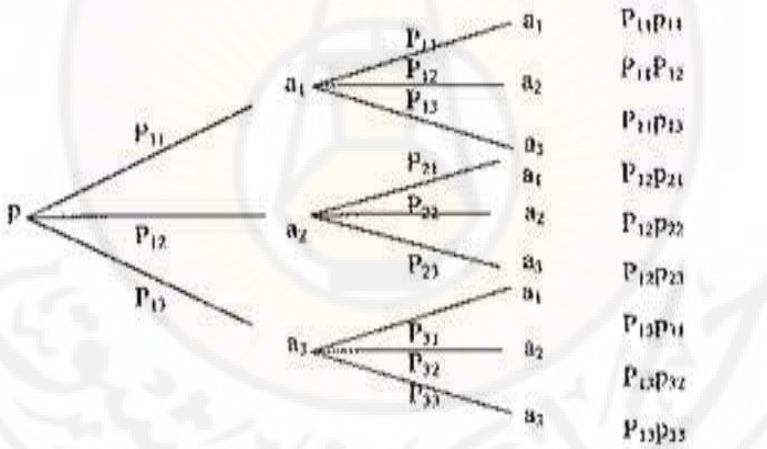
a_1	a_2	a_3		a_1	a_2	a_3		a_1	a_2	a_3

$$M^2 = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 & p_{13}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & p_{23}^2 \\ p_{31}^2 & p_{32}^2 & p_{33}^2 \end{bmatrix} = (M = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot M = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix})$$

والتي يمكن حسابها من خلال المصفوفة M نفسها مع ملاحظة أن العنصر P_{ij}^2 ليس مربعاً للعنصر P_{ij} إنما المصفوفة M^2 هي مربع للمصفوفة M.

كما ويمكن الوصول إلى حسابات M^2 عن طريق حساب كل سطر من أسطرها بطريقة شجرة الاحتمالات كما يلي:

أولاً: نحسب السطر $P_{11}^2\ P_{12}^2\ P_{13}^2$ أي السطر الذي يمثل احتماله الانتقال من الحالة الأولى إلى بقية الحالات المكونة للمصفوفة الماركوفية كما يلي:



ويكون احتمال الانتقال من الحالة a_1 إلى الحالة a_1 خلال خطوتين:

$$P_{11}^2 = P_{11}P_{11} + P_{12}P_{21} + P_{13}P_{31}$$

ويكون احتمال الانتقال من الحالة a_1 إلى الحالة a_2 خلال خطوتين:

$$p_{12}^2 = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{32}$$

ويكون احتمال الانتقال من الحالة a_1 إلى الحالة a_3 خلال خطوتين:

$$p_{13}^2 = p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33}$$

وبالطريقة نفسها نحسب احتمالات الانتقال من الحالة الثانية إلى بقية الحالات المكونة لسلسلة ماركوف ومن الحالة الثالثة إلى بقية الحالات المكونة لسلسلة ماركوف.

بذلك ينتج معنا السطران الثاني والثالث $P_{21}^2\ P_{22}^2\ P_{23}^2$ و $P_{31}^2\ P_{32}^2\ P_{33}^2$

وبوضعهما في أماكنهما في المصفوفة M^2 ينتج

$$M^2 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 & p_{13}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 & p_{23}^2 \\ p_{31}^2 & p_{32}^2 & p_{33}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

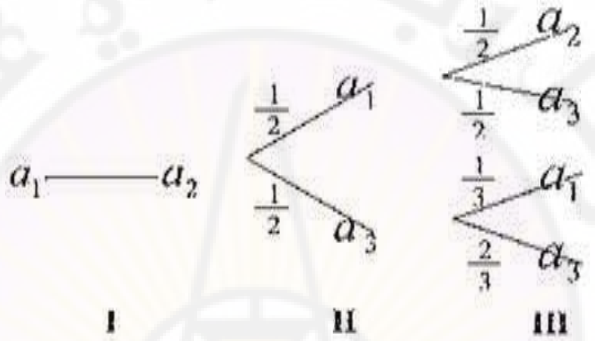
مثال:

لو افترضنا أن لدينا المصفوفة M مصفوفة احتمالات الانتقال التالية والمكونة من ثلاث حالات:

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_1 & a_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & p_{23}'' \\ p_{31}'' & p_{32}'' & p_{33}'' \end{pmatrix} \end{array}$$

فلمعرفة احتمال الانتقال من أي حالة إلى أي حالة أخرى خلال ثلاث خطوات يجب علينا البحث عن العناصر المكونة للمصفوفة M^3

أي يجب علينا في البدء البحث عن العناصر المكونة للسطر الأول والتي هي احتمالات الانتقال من الحالة الأولى إلى الحالات الأخرى المكونة للسلسلة. والتي هي كما يلي:

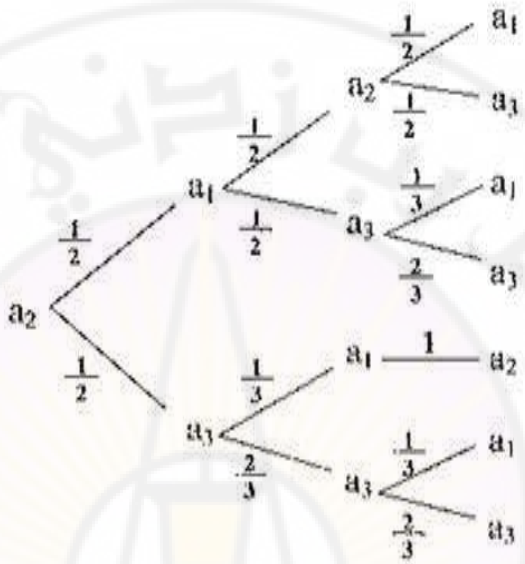


وبالتالي فإن: $P_{11}^3 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P_{12}^3 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ و $P_{13}^3 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$

علماً بأن العنصر الذي يأخذ القيمة 0 في المصفوفة M يعني استحالة الانتقال إلى هذا العنصر ضمن السطر والعمود اللذين يقع هذا العنصر ضمن تقاطعهما.

والآن ننتقل للبحث عن عناصر السطر الثاني في المصفوفة M^3 الذي هو احتمالات الانتقال من الحالة الثانية إلى بقية الحالات المكونة للسلسلة أي $P_{21}^2\ P_{22}^2\ P_{23}^2$ كما



وبالتالي فإن:

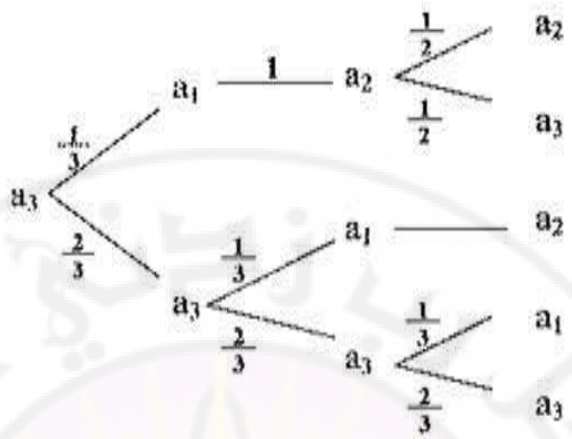
$$P_{21}^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{36}$$

$$P_{22}^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{7}{24}$$

$$P_{23}^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{37}{72}$$

Damascus University

وبالأسلوب نفسه نوجد عناصر السطر الثالث للمصفوفة M^3



$$P_{31}^{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$P_{32}^{3} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{7}{18}$$

$$P_{33}^{3} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{25}{54}$$

ومما سبق نستطيع أن نشكل المصفوفة M^3 كما يلي:

$$M^3 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{36} & \frac{7}{24} & \frac{37}{72} \\ \frac{4}{27} & \frac{7}{18} & \frac{25}{54} \end{bmatrix} \end{array}$$

ويمكن أيضاً أن نصل للمصفوفة M^3 كما يلي:

أي عن طريق ضرب المصفوفة M بنفسها ثلاث مرات

$$M^2 = M \cdot M$$
$$M^3 = M^2 \cdot M$$

الآن لنفترض أن لدينا سلسلة ماركوفية مكونة من ثلاث حالات a_1, a_2, a_3 وإن احتمالات الانتقال بين الحالات الثلاث معطاة في المصفوفة M مصفوفة احتمالات الانتقال كما يلي:

وبفرض أننا نود الانطلاق من أي حالة من الحالات المكونة وبشكل عشوائي والوصول إلى أي حالة من الحالات المكونة

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

وذلك خلال n خطوة. على ذلك نستطيع أن نعرف التوزيع الاحتمالي الابتدائي في لحظة الانطلاق (لحظة الصفر) والمتمثل في شعاع احتمال المنطلق، أي التوزيع الاحتمالي عند بدء العملية العشوائية حيث P_i هو احتمال أن يكون النظام في الحالة عند لحظة معينة.

ونكتب: $P^0 = [P_1^0 P_2^0 P_3^0]$ حيث P^0 هو شعاع احتمالات الانطلاق المختلفة لجميع الحالات المحتملة لسلسلة ماركوف. وبالأسلوب نفسه نجد أن الشعاع P^n : $P^0 = [P_1^0 P_2^0 P_3^0]$

هو التوزيع الاحتمالي عند الخطوة n أي التوزيع الاحتمالي للنظام عند لحظة معينة، ولتكن بعد n خطوة أي هو شعاع احتمالات الوصول المختلفة لجميع الحالات المحتملة لسلسلة ماركوف وخلال n خطوة.

من المقارنة بين الشعاعين p^0 , p^n وكل سطر محتوى داخل المصفوفة يمكننا القول إن عناصر الشعاع p^n تحقق المعادلات التالية:

$$P_1^n = p_1^{n-1} p_{11} + p_2^{n-1} p_{21} + p_3^{n-1} p_{31}$$
$$P_2^n = p_1^{n-1} p_{12} + p_2^{n-1} p_{22} + p_3^{n-1} p_{32}$$
$$P_3^n = p_1^{n-1} p_{13} + p_2^{n-1} p_{23} + p_3^{n-1} p_{33}$$

إن المعادلات الثلاث السابقة ما هي إلا تطبيق للمعادلة الآتية:

$$p^n = p^{n-1} M$$

حيث $p^n = [P_1^n \ P_2^n \ P_3^n]$ هو شعاع احتمال الوصول إلى مختلف الحالات المكونة خلال n خطوة.

و $p^{n-1} = [P_1^{n-1} \ P_2^{n-1} \ P_3^{n-1}]$ هو شعاع احتمال الوصول إلى مختلف الحالات المكونة خلال (n-1) خطوة.

و M هي مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، ومما سبق نستطيع أن نكتب:

$$P^1 = P^0 M$$
$$P^2 = P^1 M = P^0 M(M) = P^0 M^2$$
$$P^3 = P^2 M = P^0 M^2 (M) = P^0 M^3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$P^{n-1} = P^{n-2} M = P^0 M^2 M = P^0 M^{n-1}$$
$$P^n = P^{n-1} M = P^0 M^{n-1} M = P^0 M^n$$

أي أن احتمال الوصول إلى مختلف الحالات الممكنة للسلسلة وخلال n خطوة هو حاصل جداء شـــــعاع احتمال المنطلق P^0 بمصفوفـــــة احتمالات الانتقال M مرفوعة للقوة n .

مثال:

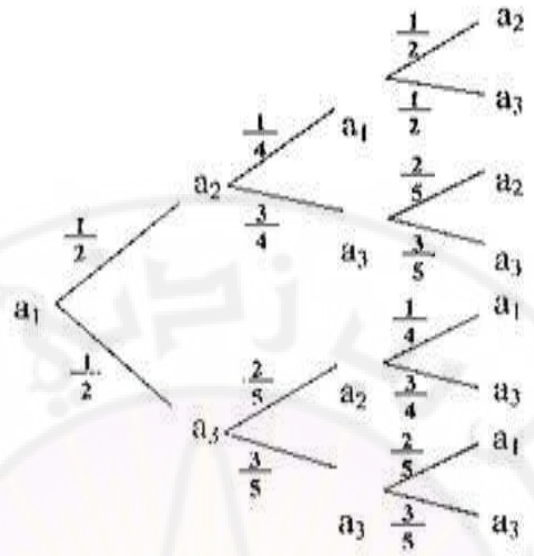
لنفرض أن لدينا سلسلة مكونة من ٣ حالات، وأن احتمالات الانتقال بـــين مختلف هذه الحالات تأخذ شكل المصفوفة التالية:

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_1 & a_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \cdot & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

وأن شعاع احتمالات المنطلق $p^0 = [\frac{1}{4} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{4}]$

المطلوب:

١- حساب احتمال الانتقال من الحالة الأولى إلى الحالة الثالثـــة خلال ثلاث خطوات.



$$P_{13}^{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

$$P_{13}^{3} = \frac{247}{400}$$

٢- حساب احتمال الوصول إلى الحالة الأولى خلال ثلاث خطوات

$$P'' = P^0 M''$$

$$P^3 = P^0 M^3$$

نحسب المصفوفة M^3:

$$M^3 = M.M.M = M^2.M$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{36} & \frac{7}{24} & \frac{37}{72} \\ \frac{4}{27} & \frac{7}{18} & \frac{25}{54} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{2}{4} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{27}{40} \\ 0 & \frac{17}{40} & \frac{23}{40} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{25} & \frac{33}{50} \end{bmatrix}$$

$$M^2 \cdot M = M^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{27}{40} \\ 0 & \frac{17}{40} & \frac{23}{40} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{25} & \frac{33}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{400} & \frac{133}{400} & \frac{274}{400} \\ \frac{17}{160} & \frac{23}{100} & \frac{531}{800} \\ \frac{60}{1000} & \frac{314}{1000} & \frac{626}{8000} \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}\right] = \begin{bmatrix} \frac{20}{400} & \frac{133}{400} & \frac{247}{400} \\ \frac{17}{160} & \frac{23}{100} & \frac{531}{800} \\ \frac{60}{1000} & \frac{314}{1000} & \frac{626}{8000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{258}{3200} & \frac{2213}{8000} & \frac{5142}{8000} \end{bmatrix}$$

وبالتالي $P_1^3 = \frac{258}{3200}$ ، وكان بالإمكان التوصل إلى قيمة P_1^3 مباشرة عن طريق ضرب عناصر الشعاع P^0 بالعمود الأول للمصفوفة M^3 ولكن آثرنا أن نستخرج عناصر الشعاع P^3 كي نستخدمه في الطلب اللاحق للمسألة.

٣- حساب احتمال الوصول إلى الحالة الثالثة وخلال ٤ خطوات.

لدينا: $p^n = p^{n-1} M$

فيكون: $p^4 = P^3 M = [P_1^4 \ P_2^4 \ P_3^4]$

إذاً:

$$P^4 = \begin{bmatrix} \frac{258}{3200} & \frac{2213}{8000} & \frac{5142}{8000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \Rightarrow P_1^4$$

الآن بفرض أن لدينا المصفوفة M مصفوفة احتمالات الانتقال والشعاع P^0 شعاع احتمالات المنطلق.

نقول عن الشعاع P^0 شعاع احتمالات المنطلق إنه شعاع احتمالات ثابتة W إذا تحقق الشرط التالي: $P^0 M = P^0 = W$

حين يكون حاصل جداء شعاع احتمال المنطلق بالمصفوفة (أو بأي قوة من قواها) شعاع المنطلق نفسه.

فلو كان لدينا الشعاع P^0 كما يلي: $P^0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

والمصفوفة M

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$W = P^0 M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

أي أن الشعاع P^0 هو شعاع احتمالات ثابتة W

إن ما يدعونا للقول إن الشعاع P^0 هو شعاع ثابت أن احتمالات المنطلق ثابتة لا تتغير بتغير الزمن، أي ثابتة مع تغير المراحل. وهذا ما يدعونا للقول إن سلسلة ماركوف متوقفة.

مصفوفة ماركوف النظامية:

نقول عن مصفوفة ماركوفية إنها مصفوفة ماركوف النظامية فيما إذا كانت في أي قوة من قواها لا تحتوي إلا على عناصر موجبة تختلف عن الصفر.

نستفيد من مصفوفة ماركوف النظامية لحساب قيم عناصر شعاع الاحتمالات الثابتة.

لو كان لدينا المصفوفة M كما يلي:

$$M=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}$$

وشعاع W : $W=[W_1 \quad W_2]$

$$[W_1 \quad W_2]\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}=[\underbrace{(1-a)w_1+bw_2}_{W_1} \quad \underbrace{aw_1+(1-b)w_2}_{W_2}]$$

$w_1(1-a) + bw_2=w_1$

$w_1 + aw + bw_2=w_1$

$aw_1 = bw_2$

$w_2 = 1 - w_1$

$aw_1 = b\,(1-w_1)$

$aw_1 = b - bw_1$

$aw_1 + bw_1 = b$

$(a+b)\, w_1 = b$

$$w_1=\frac{b}{a+b} \quad , \quad w_2=\frac{a}{a+b}$$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة M كما يلي: $M=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

والمطلوب حساب الشعاع w

$$[w_1 \quad w_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{3}{7}$$

$$w_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

مثال:

لو افترضنا أن لدينا المصفوفة التالية:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

المطلوب حساب الشعاع W

$$[w_1 \quad w_2 \quad w_3] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[\underbrace{\frac{3w_1}{4} + \frac{w_3}{4}} \quad \underbrace{\frac{w_1}{4} + \frac{2w_3}{3}} \quad \underbrace{\frac{w_2}{3} + \frac{w_3}{4}} \right]$$

$$\frac{3w_1}{4} + \frac{w_3}{4} = w_1 \rightarrow 3w_1 + w_3 = 4w_1 \rightarrow w_1 = w_3$$

$$\frac{w_2}{3} + \frac{w_3}{2} = w_2 \rightarrow 2w_2 + 3w_3 = 6w_2 \rightarrow 2w_2 = 3w_3 \rightarrow w_2 = \frac{3w_3}{2}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_1 + \frac{3w_1}{2} + w_1 = 1 \rightarrow 2w_1 + 3w_1 + 2w_1 = 2$$

$$7w_1 = 2 \rightarrow w_1 = w_3 = \frac{2}{7} \quad , \quad w_2 = \frac{3}{7}$$

وبالتالي: $W = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

مصفوفة ماركوف الماصة:

بفرض أن لدينا سلسلة مكونة من ثلاث حالات، وأن هذه السلسلة تأخذ شكل المصفوفة الماركوفية التالية:

$$M^2 = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

نجد من المصفوفة السابقة أن احتمال الانتقال بين الحالات المكونة للسلسلة هي معدومة مهما كان عدد الخطوات. لأننا نجد أن هنا تأكيداً على البقاء في كل حالة من الحالات الثلاث.

لو حاولنا تمثيل المصفوفة السابقة شبكياً فلن نجد شبكة بل هناك حلقة حول كل حالة، ولا يوجد أقواس أو مسارات.

والحالات هذه نسميها سلسلة راكدة.

إذاً نعتبر أن أي حالة هي حالة ماصة حين يكون هناك تأكيد على البقاء في الحالة واستحالة الانتقال منها. وعلى ذلك فإن مصفوفة ماركوف الماصة هي أي مصفوفة من مصفوفات ماركوف فيما إذا كان فيها على الأقل حالة واحدة ماصة.

إذاً، إن أي سلسلة ماركوفية تكون في الحالة الماصة فيما إذا كان هناك استحالة في الانطلاق من هذه الحالة على أية حالة أخرى من الحالات المكونة

لسلسلة ماركوف، وحتى يمكن القول إن سلسلة ماركوف هي سلسلة ماصة يجب توفر شرطين أساسيين:

١- في السلسلة يوجد على الأقل حالة واحدة ماصة.

٢- هناك إمكانية الانتقال من أي حالة من الحالات المكونة لسلسلة ماركوف إلى تلك الحالة الماصة وليس من الضروري من خطوة واحدة فقط.

الآن لو افترضنا أن سلسلة ماركوف تأخذ شكل المصفوفة التالية:

$$M^2 = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

فيمكننا القول إن الحالتين a_0 , a_4 تشكلان حالتين ماصتين، أما بقية الحالات فهي حالات غير ماصة، ويمكننا الانتقال من أي منها إلى الحالات الماصة a_0 , a_4 .

من ناحية أخرى عندما يكون لدينا سلسلة ماركوفية تحتوي على بعض الحالات الماصة كما هي الحال في مثالنا السابق فإنه يمكن حساب عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى الحالات الماصة انطلاقاً من حالات غير ماصة، فمن المصفوفة السابقة يمكن حساب عدد الخطوات اللازمة (الزمن اللازم،

المراحل اللازمة) للوصول إلى الحالتين a_0 , a_4 انطلاقاً من الحالات a_3 , a_2 , a_1 كما يلي:

١- نقوم بتجميع الحالات الماصة بعضها إلى جانب بعض.

٢- نقوم بتقسيم المصفوفة ذات الشكل الجديد إلى مصفوفات، وذلك للتفريق بين الحالات الماصة والحالات غير الماصة كما يلي:

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

حيث:

I : المصفوفة الأحادية وهي مصفوفة ماركوفية ماصة وكما نجد بأنها مصفوفة راكدة.

O: المصفوفة الصفرية وتعبر عن استحالة الانتقال من الحالات الماصة إلى حالات غير ماصة.

R : المصفوفة القانونية: مصفوفة احتمالات الانتقال من الحالات غير الماصة إلى الحالات الماصة.

Q : المصفوفة النظامية: مصفوفة احتمالات الانتقال بين الحالات غير الماصة.

٣- نحسب المصفوفة $N = [I - Q]^{-1}$ كما يلي:

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$|I - Q| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

المصغرات

$$(I - Q)_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

المصفوفة المشاركة

$$(I - Q)^{+} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ +\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

المساعدة

$$(\widetilde{I - Q}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = (I - Q)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الشعاع T هو :

$$T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وبجمع عناصر كل سطر من أسطر المصفوفة N^{-1} نتوصل إلى الشعاع العمودي T الذي يعبر كل عنصر من عناصره عن الزمن الذي نمضيه في كل حالة من الحالات الثلاث قبل الوصول إلى الحالة الماصة.

الآن، إن احتمالات الوصول إلى الحالات الماصة a_0 , a_4 انطلاقاً من الحالات غير الماصة a_3,a_2,a_1 يمكن الحصول عليها فيما لو استخدمنا العلاقة التالية والحصول على المصفوفة B التي تعبر عن احتمالات الوصول إلى الحالات الماصة انطلاقاً من $B = (I - Q)^{-1} R = N^{-1} R$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{matrix} a_1 & a_4 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Damascus University

أمثلة غير محلولة:

تمرين(١):

من خلال دراسة إحدى الأسواق الاستهلاكية تبين أن عدد المستهلكين الحاليين هو (12000) مستهلك منهم (9000) زبائن المشروع A والباقي زبائن المشروع B، وفي كل شهر يخسر المشروع A (20%) من زبائنه الذين يذهبون إلى المشروع B والذي بدوره يخسر كل شهر (40%) من زبائنه الذين يكسبهم المشروع A . المطلوب:

١- وضع المصفوفة الماركوفية التي تصور حركة الزبائن بين المشروعين.

٢- حساب عدد الزبائن الثابت لكل من المشروعين.

٣- حساب الزمن اللازم للوصول إلى عدد الزبائن الثابت.

تمرين (٢):

ثلاثة مطارات C,B,A تهبط فيها طائرة وفق النظام التالي:

إذا أقلعت الطائرة من A فإنها سوف تحط في B دائماً. وإذا أقلعت من B فإنها سوف تحط في C، ولكن إن أقلعت الطائرة من C يمكن لها أن تحط في كل من A أو B بالاحتمال نفسه، المطلوب:

١- وضع المصفوفة الماركوفية التي تصور حركة هبوط الطائرة.

٢- ما هو احتمال وجود الطائرة في كل من المطارات الثلاثة في الهبوط الثالث إذا علمت أن الطائرة كانت في المطار C عندما أقلعت.

تمرين (٣):

يمتلك أحد المزارعين قطعة أرض مساحتها 23000 هكتاراً وقد خصص 10000 هكتار لزراعة الحبوب و 9000 هكتار لزراعة الخضروات و (25%) من أراضي الخضراوات إلى زراعة الحبوب و (40%) من أراضي البقول إلى زراعة الخضروات. المطلوب:

١- وضع المصفوفة الماركوفية التي تصور حركة التنقل بين المحاصيل الزراعية

٢- حساب المساحة الثابتة للأراضي المزروعة لكل صنف.

تمرين (٤):

من خلال دراسة العمل اليومي لإحدى المؤسسات تبين أن المدير العام ينجز ربع العمل ويحول الباقي إلى مدير شؤون العاملين، وأن مدير شؤون العاملين يحول نصف العمل إلى المدير العام والنصف الآخر يحوله إلى مدير الشؤون المالية. وأن مدير الشؤون المالية يحول ثلاثة أرباع العمل إلى مدير شؤون العاملين والباقي يتركه جانباً والمطلوب:

١- حساب عدد ساعات عمل كل من المدراء الثلاثة.

٢- لو افترضنا أن عدد الاضبارات الواردة إلى المؤسسة هو مائة إضبارة منها (32) سلمت إلى المدير العام و (28) إلى مدير شؤون العاملين و (40) إلى مدير الشؤون المالية. ما هو عدد الإضبارات المتوقع إنجازها في اليوم.

III- 3- جدول المدخلات ــ المخرجات

إن أحد التطبيقات الاقتصادية المهمة للمصفوفات هو استخدامها في تكوين جدول المدخلات ــ المخرجات. هناك حقيقة هامة في الاقتصاد مفادها أن الفروع والقطاعات الاقتصادية متشابكة فيما بينها وهو أمر ليس بجديد، ففي عام ١٧٠٨ وضع كيناي ما يسمى بالجدول الاقتصادي. وظهرت هذه الحقيقة في الجزء الثاني من كتاب رأس المال لكارل ماركس عام ١٨٧٢.

ووضع فالراس عام ١٨٧٧ نموذجاً توازنياً يصور التداخل والتشابك بين القطاعات الإنتاجية، إلا أن الدراسات التطبيقية التي تتعلق بالتشابكات القطاعية ودراسة الارتباط بين الظواهر الاقتصادية والاستفادة منها بدأت عام ١٩٣١ حين وضع ليونتيف نموذجه عن تحليل المدخلات والمخرجات وقد عرف هذا النموذج باسمه فيما بعد.

وقد وجد هذا النموذج فيما بعد تطبيقات مهمة في المجالات الاقتصادية وخاصة من أجل التنسيق بين أهداف الخطة الاقتصادية (كتخطيط الإنتاج، والتجارة الخارجية. إلخ)، وذلك لمنع حدوث أي اختناقات أو نقص في المواد الأولية اللازمة للإنتاج.

إذاً يعتمد نموذج المدخلات ــ المخرجات في أساسه النظري على شروط التوازن الاقتصادي العام المحدد بمجموعة من المعادلات الخطية الآنية، ويعتبر هذا النموذج كغيره من النماذج تبسيطاً للواقع الاقتصادي، ويعتبر أداة للتخطيط، وتوضيح التداخل بين أنشطة النظام الاقتصادي المختلفة والبحث عن مصادر اختلال التوازن في هذا النظام الاقتصادي الإنتاجي.

إن الهدف من دراسة هذا الجدول هو معرفة كيفية استخدام المصفوفات في النواحي الاقتصادية، لذلك فإننا سنعالج جدول المدخلات ـ المخرجات في أبسط صورة له، ألا وهو النموذج السكوني وسيجد القارئ تطبيقات أكثر تطوراً في كتب أخرى تتعلق بالاقتصاد الرياضي والتخطيط الاقتصادي والتجارة الخارجية... إلخ.

يبنى هذا الجدول على افتراض تقسيم الاقتصاد إلى قطاعين: الأول صناعي، حيث يقسم بدوره إلى عدد من الفروع ينتج كل منها سلعة أو خدمة واحدة فقط، كما تنتج كل سلعة أو خدمة في قطاع اقتصادي واحد فقط، الأمر الذي يجعل الاقتصاد القومي يحتوي على عدد من الفروع الإنتاجية بمقدار ما يوجد من السلع والخدمات، لذلك باختصار نقول إن جدول المدخلات ـ المخرجات يبنى على فكرة استحالة إنتاج سلعتين مختلفتين في القطاع الإنتاجي نفسه أو إنتاج سلعة واحدة في قطاعين إنتاجيين مختلفين، ويمكن أن نصف هذا القطاع بقطاع الطلب الوسيط والذي هو الطلب على المواد التي تستخدم في إنتاج السلع الموجهة لإشباع الطلب النهائي.

القطاع الثاني هو قطاع الطلب النهائي والذي يمكن له (للطلب النهائي) أن يتضمن الطلب النهائي على السلع الاستهلاكية اللازمة لإشباع حاجات القطاع الاستهلاكي والسلع المخصصة للتصدير الخارجي والسلع المخزنة... إلخ.

الآن لو قسمنا قطاع الطلب الوسيط (القطاع الصناعي) في اقتصاد ما إلى عدد من الفروع ولتكن ثلاثة فروع ينتج كل منها سلعة واحدة أو خدمة واحدة فقط.

ولو نظرنا على ناتج كل قطاع نجد أن قسماً منه يستخدم في الفروع الإنتاجية، بما فيها القطاع ذاته كمدخل في العملية الإنتاجية لكل قطاع، والقسم الآخر يستهلك بشكل نهائي (قطاع الطلب النهائي) مما سبق نستطيع أن نقول إن كل قطاع يقوم بتصريف قسم من إنتاجه ببيعه كسلعة لقطاع الطلب النهائي، والقسم الآخر ببيعه كمادة خام للصناعات الأخرى حيث يعتبر كمدخل (سلعة وسيطة) في العمليات الإنتاجية بما فيها القطاع الإنتاجي نفسه (أي أنه يحتجز لنفسه قسماً من إنتاجه لإعادة إدخاله في العملية الإنتاجية للقطاع).

فالقطاع الأول مثلاً يبيع القطاع الثاني جزءاً من إنتاجه لاستخدامها في إنتاج القطاع الثاني، ويبيع القطاع الثالث أيضاً جزءاً من إنتاجه لاستخدامها في إنتاج القطاع الثالث. ويُبقي لنفسه جزءاً لإدخاله في عملية الإنتاج في القطاع نفسه، كما يبقى قسم من إنتاج القطاع الأول يذهب لقطاع الاستهلاك النهائي.

لكي يتمكن القطاع من الإنتاج لا بد له من مدخلات (سلع وسيطة) يشتريها من الفروع الأخرى إضافة إلى المدخلات التي يحتجزها لنفسه من إنتاجه الخاص. ولإتمام عملية الإنتاج في كل قطاع يلزم إضافة تكلفة الإنتاج المتمثلة بالأجور والضرائب ... إلخ. والتي يمكن أن تمثل في قطاع خاص يعبر عنه بقطاع العمل أو القيمة المضافة وهذا ما يمكن اعتباره كمدخل من المدخلات. وتعبر القيمة المضافة عن الفرق بين الإنتاج الكلي لقطاع ما وما استخدمه هذا القطاع من القطاعات الأخرى، وتتضمن القيمة المضافة إذاً فيما تتضمنه الرواتب والأجور، الضرائب والأرباح، الريع، الفائدة.... إلخ.

من كل ما سبق نستطيع أن نقول إن القراءة الأفقية لكل قطاع في الجدول تسمح لنا بمعرفة كيف يوزع كل قطاع إنتاجه. والقراءة العمودية تسمح لنا

بمعرفة مصادر السلع والخدمات التي أدت إلى تكوين الإنتاج وكيف تستخدم الفروع الإنتاجية المخرجات كمدخلات في عملياتها الإنتاجية.

مما سبق نستطيع أن نشكل جدول المدخلات ــ المخرجات كما يلي:

	الاستهلاك الوسيط	الاستهلاك النهائي	مجموع المخرجات (إجمالي الإنتاج)
	القطاع الأول الثاني ..... j ..... n		
القطاع الأول الثاني i n	X_{11} ..... X_{12} ..... X_{1j} ..... X_{1n} X_{21} ..... X_{22} ..... X_{2j} ..... X_{2n} X_{i1} ..... X_{i2} ..... X_{ij} ..... X_{in} X_{n1} ..... X_{n2} ..... X_{nj} ..... X_{nn}	D_1 D_2 D_i D_n	X_1 X_2 Xi X_n
القيمة المضافة v	V_1 ..... V_2 ..... V_j ..... V_n	$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} V_i$	
مجموع المخرجات (إجمالي الإنتاج)	X_1 ..... X_2 ..... X_j ..... X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum$

وبافتراض أن:

X_i : إجمالي إنتاج القطاع i

X_j : إجمالي إنتاج القطاع j

X_{ij} : ذلك الجزء من إنتاج القطاع في المبيع إلى القطاع j

D_{ij} : الطلب النهائي (الاستهلاك النهائي) على منتجات القطاع i

V_j : القيمة المضافة في القطاع i

I_{ij} : n,.....,2,1

مما سبق نستطيع أن نكتب المعادلة التوازنية للقطاع i كما يلي:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + D_i \quad \text{.....(1)}$$

والمعادلة التوازنية للقطاع j كما يلي:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j \quad \text{.....(2)}$$

نلاحظ من الجدول أن القطاعات المختلفة التي يتكون منها الاقتصاد القومي تظهر مرتين، مرة بوصفها قطاعات منتجة ومرة بوصفها قطاعات مستهلكة.

وكما ذكرنا سابقاً وكما هو موضح في الجدول نجد أن المعادلة (١) توضح كيف تتصرف الصناعة (i) في منتجاتها، بينما المعادلة (2) توضح كيف تبني الصناعة (j) إنتاجها.

ومن المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{j=1}^{n} V_j \quad \text{.....(3)}$$

أي أن إجمالي القيمة المضافة تساوي إلى إجمالي الطلب النهائي، وهذا ما يعرف بإجمالي الناتج المحلي

$$GDP = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{j=1}^{n} V_j \quad \text{.....(3)}$$

Damascus University

ويمكن البرهان على أن لمجموع القيم المضافة يساوي مجمـــوع الطلـــب النهائي في حالة اقتصاد ذي قطاعين من ثم تعميم البرهان لعدد n من القطاعات لنحصل على المعادلة (٣) كما يلي:

بتطبيق المعادلتين (١) و (٢) نحصل بالنسبة للقطاع الأول على:

$$x_1 = x_{11}+x_{21}+v_1 \qquad (1)$$

$$x_1 = x_{11}+x_{12}+D_1 \qquad (2)$$

وبالنسبة للقطاع الثاني نحصل على:

$$x_2 = x_{21}+x_{22}+v_2 \qquad (3)$$

$$x_2 = x_{21}+x_{22}+D_2 \qquad (4)$$

ومن المعادلات الأربعة السابقة نجد أن:

$$x_{11}+x_{21}+v_1 = x_{11}+x_{12}+D_1$$

و $x_{12}+x_{22}+v_2 = x_{21}+x_{22}+D_2$

وبالاختصار نجد:

$$x_{21} - x_{12} = D_1 - V_1$$

و $x_{12} - x_{21} = D_2 - V_2$

وبجمع المعادلتين نجد:

$$x_{21} - x_{12} + x_{12} - x_{21} = D_1 - V_1 + D_2 - V_2$$

وبالإصلاح:

$$D_1+D_2-(V_1+V_2) = 0$$

ومنه: $D_1+D_2 = V_1+V_2$

وبالتعميم نجد: $\sum_{i=1}^{2} D_i = \sum_{j=1}^{2} V_j$

من الواضح أن الجدول يتألف من أربعة أقسام هي:

١- **الربع الأول:** ويمثل مصفوفة الاستهلاكات الوسيطة من المرتبة (n,n) ويبين

كيفية استخدام جزء من مخرجات قطاع ما في بقية القطاعات الإنتاجية كمادة وسيطة في إنتاج هذه القطاعات.

ونستطيع أن نكتب:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots\dots + x_{ij} + \dots\dots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

أو $$x_{1j} + x_{2j} + \dots\dots + x_{ij} + \dots\dots + x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

٢- **الربع ' اني:** هو شعاع الطلب النهائي من المرتبة (n,1) ويبين استخدام جزء من خرجات قطاع ما لغايات غير إنتاجية إذ تستهلك دون أن تؤدي إلى خلق سلع جديدة، ويضم الاستهلاك النهائي الخاص والعام (الحكومي) والتكوين الرأسمالي (صافي تكوين رأس المال وتعويض احتلال رؤوس الأموال) والزيادة في المخزون وصافي التعامل مع العالم الخارجي (الصادرات ـ الواردات).

نكتب العلاقة:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + D_i$$

وهي كما ذكرنا سابقاً المعادلة التوازنية للقطاع i (ميزان مخرجات القطاع i)

٣- **الربع الثالث:** وهو عبارة عن شعاع القيمة المضافة أو شعاع المدخلات الأولية من المرتبة (1,n) ويضم كما ذكرنا الأجور والرواتب، الأرباح، الفوائد مع رأس المال المستخدم، الريع، الضرائب المباشرة على عملية الإنتاج.

فإذا فرضنا أن V_j تمثل قيمة المدخلات الذاتية في القطاع j . نستطيع أن نكتب:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + V_j$$

وتسمى هذه العلاقة بميزان مدخلات القطاع j

٤- **الربع الرابع:** يمثل التوازن بين إجمالي القيمة المضافة وإجمالي الطلب النهائي من جهة وبين العرض الكلي والطلب الكلي للاقتصاد القومي بمجمله من جهة أخرى.

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

و $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$ تمثل هذه المساواة شرط التوازن للنموذج

مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج:

رأينا أن x_{ij} تمثل منتجات القطاع i التي تستخدم كسلعة وسيطة في القطاع j . والتي تمثل بتعبير آخر كما رأينا المدخلات الوسيطة التي يستخدمها القطاع j من القطاع i في عملياته الإنتاجية. الآن لو نسبنا المدخلات الوسيطة لكل قطاع إلى مجمل المدخلات للقطاع نفسه لحصلنا على العلاقة التالية:

$a_{ij} = \frac{xi_j}{x_j}$ حيث يطلق على هذه العلاقة بالمعامل الفني للإنتاج ويعبر a_{ij} عن النسبة اللازمة من منتجات القطاع i لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع j .

وبالتالي فإن العلاقة : $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + V_j$

يمكننا أن نكتبها بالشكل: $X_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j + V_j$ لأن $x_{ij} = ai_j x_j$

والعلاقة: $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + D_i$

تكتب: $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + D_i$

وبالتالي فإن نسبة القيمة المضافة لهذا القطاع تساوي إلى:

$$Vj = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ij}}{X_j}$$

الآن بالنسبة لجميع القطاعات نستطيع أن نكتب المعادلة التوازنية للنموذج كما يلي:

$$X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1j}x_j + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + D_1$$

$$X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2j}x_j + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n + D_2$$

$$\vdots$$

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{ij}x_j + \ldots\ldots\ldots + a_{in}x_n + D_i$$

$$X_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nj}x_j + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n + D_n$$

مصفوفياً نستطيع أن نكتب العلاقات السابقة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nj} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_i \\ D_n \end{bmatrix}$$

$$X = \quad A \quad X + D$$

مما سبق نكتب مصفوفياً:

$$X = AX + D$$

$$X - AX = D$$

$$(I-A)X = D \qquad \Rightarrow X = \frac{D}{I-A}$$

$$X = (I-A)^{-1} D$$

حيث:

X: شعاع الإنتاج الإجمالي.

و A: مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج.

و I : المصفوفة الأحادية تكون من درجة مناسبة لـ A

و D: شعاع الطلب النهائي.

حيث تساعدنا العلاقة $X = (I-A)^{-1} D$ في حال معرفة حجم الطلب النهائي المتوقع في سنة الهدف في حساب قيمة الإنتاج الإجمالي لمختلف قطاعات الاقتصاد القومي.

إن أهم الأسباب التي تؤدي إلى وجود فروق بين القيم المخططة والقيم الفعلية في سنة الهدف هي:

١- افتراض ثبات المعاملات الفنية للإنتاج.

٢- افتراض بنية هيكلية ثابتة في الاقتصاد القومي.

٣- التوازن الذي يدرسه النموذج هو توازن سكوني أي أنه لم يأخذ بعين الاعتبار عاملي الزمن والتطور والتقني للاقتصاد.

وفي كل الأحوال يبقى نموذج المدخلات المخرجات كغيره من ا
مبسطاً للواقع ولا يمكنه أن يحيط بجميع مظاهر العلاقات الاقتصادية
ولكنه مع ذلك يبقى أداة تحليل جيدة وطريقة بحث فعالة لإيجاد مصادر ال
الاقتصاد القومي.

مثال:

لنفترض أن هناك اقتصاداً يتكون من ثلاثة قطاعات، وأن مصفوفة المعاملات الفنية تأخذ الشكل التالي:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

ولنفترض أنه تم التخطيط لتحقيق طلب نهائي على سلع القطاعات الثلاثة كما يلي:

القطاع:	x_1	x_2	x_3
الهدف:	700	2100	1400

المطلوب إيجاد مستويات إنتاج القطاعات الثلاثة التي تحقق هذه الأهداف والقيمة المضافة لكل قطاع.

الحل:

١- نقوم بحساب المصفوفة (I-A):

$$(I-A)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.4&0.1&0.1\\0.1&0.4&0.1\\0.1&0.1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&-0.1&-0.1\\-0.1&0.6&-0.1\\-0.1&-0.1&0.6\end{bmatrix}$$

٢- نقوم بحساب محددة المصفوفة (I-A):

$$|I-A|=\begin{vmatrix}0.6&-0.1&-0.1\\-0.1&0.6&-0.1\\-0.1&-0.1&0.6\end{vmatrix}\begin{matrix}0.6&-0.1\\-0.1&0.6\\-0.1&-0.1\end{matrix}$$

$$|I-A| = (0.216-0.001-0.001)-(0.006+0.006+0.006)$$

$$= 0.124-0.018 = 0.196$$

٣- نقوم بحساب مصفوفة المصغرات \(I-A)

$$(I-A)^{1}=\begin{bmatrix}0.35&-0.07&0.07\\-0.07&0.35&-0.07\\0.07&-0.07&0.35\end{bmatrix}$$

٤- نقوم بحساب مصفوفة العوامل المشاركة: $(I-A)_{ij}$

$$(I-A)_{ij}=\begin{bmatrix}0.35&0.07&0.07\\0.07&0.35&0.07\\0.07&0.07&0.35\end{bmatrix}$$

٥- نقوم بحساب المصفوفة المساعدة $(I-A)$

$$(I-A)=\begin{bmatrix}0.35&0.07&0.07\\0.07&0.35&0.07\\0.07&0.07&0.35\end{bmatrix}$$

٦- نقوم بحساب المقلوب (I-A)-1

$$(I-A)^{-1}=\frac{1000}{196}\begin{bmatrix}0.35 & 0.07 & 0.07\\ 0.07 & 0.35 & 0.07\\ 0.07 & 0.07 & 0.35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{25}{14} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{25}{14} & \frac{5}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & \frac{25}{14}\end{bmatrix}$$

نقوم الآن بتطبيق العلاقة $X=(I-A)^{-1}D$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{25}{14} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{25}{14} & \frac{5}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & \frac{25}{14}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}700\\ 210\\ 0\\ 140\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2500\\ 4500\\ 3500\end{bmatrix}$$

من العلاقة:

نجد $V_j=1-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$

$v_1 = 1-(0.4+0.1+0.1)=0.4$

$v_1 = 0.4(2500)=1000$

ومنه:

$v_2 = 1-(0.1+0.4+0.1)=0.4$ و

$v_2 = 0.4(4500)=1800$

$v_3 = 1-(0.1+0.1+0.4)=0.4$ و

$v_3 = 0.4\,(3500)=1400$

الآن لو تغير الطلب النهائي لأحد القطاعات بمقدار وحدة واحدة. ما هو أثر هذا التغير على إنتاج كل قطاع وما هو أثر هذا التغير على الإنتاج الكلي.

يمكن حساب أثر هذا التغير من خلال حساب مضاعفات المدخلات والمخرجات. فلو افترضنا في مثالنا السابق أن الطلب النهائي على منتجات القطاع الأول x_1 زاد من 700 إلى 701 فإنه وبسبب تشابك القطاعات الاقتصادية سوف تؤدي هذه الزيادة إلى تغيرات في قيمة الناتج الإجمالي لجميع القطاعات وبالتالي الإنتاج الكلي.

من المعادلة المصفوفية $X=(I-A)^{-1}D$ نجد:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{14} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{25}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & \frac{25}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 701 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25017875 \\ 450035714 \\ 350035714 \end{bmatrix}$$

ويتضح مما سبق أن تغير الطلب النهائي بالنسبة لمنتجات القطاع الأول x_1 بمقدار وحدة واحدة أدى إلى تغير مخرجات هذا القطاع بمقدار (1.7875) وحدة بالاتجاه نفسه وإلى تغير مخرجات القطاع الثاني بمقدار (0.35714) بالاتجاه نفسه أيضاً. ويمكن حساب الأثر الكلي لتغير الطلب النهائي على منتجات القطاع الأول بمقدار وحدة عن طريق جمع التغيرات التي حدثت في مخرجات القطاعات كلها. وبذلك يكون مضاعف القطاع x_1 ونرمز له بـ k_1 يساوي

$$k_1 = 1.7875 + 0.35714 + 0.35714 = 2.49978$$

أي أن زيادة الطلب النهائي بمقدار وحدة واحدة على منتجات القطاع الأول أدت إلى زيادة في مجمل إنتاج جميع القطاعات بمقدار 2.5 وحدة تقريباً. وبذلك يكون مضاعف القطاع الأول $k_1 = 2.5$

Damascus University

تمارين غير محلولة

التمرين الأول:

في الجدول التالي معلومات تتعلق باقتصاد إحدى الدول.

القطاعات ↓ مبيعات ←	1	2	3	طلب نهائي	إنتاج إجمالي
1	40	50	60	110	260
2	120	30	30	120	300
3	60	90	40	180	370
أجور	30	90	160		
أرباح	10	40	80		
إنتاج إجمالي	260	300	370		

المطلوب:

١) احسب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج A.

٢) أوجد المعاملات الفنية الخاصة بالأجور والإنتاج.

٣) أوجد حجم الإنتاج الضروري لتلبية الطلب النهائي المتوقع التالي: القطاع الأول 130، الثاني 140، الثالث 200.

٤) أوجد حجم مخرجات القطاع الأول التي تذهب للاستخدام الوسيط.

التمرين الثاني:

بلغ حجم الطلب النهائي على منتجات القطاعات الثلاثة في اقتصاد إحدى الدول كما يلي:

القطاع الأول 9 الثاني 14 الثالث 9. وقد بلغت المدخلات الأولية (القيمة المضافة) على التوالي 8 ، 20، 4. فإذا أعلمنا بأن قيمة محددة

المصفوفة (I-A) يساوي إلى $\frac{322}{1000}$ وأن مصفوفة العوامل المشاركة هي

$$\begin{bmatrix} 0.67 & 0.41 & 0.12 \\ 0.29 & 0.61 & 0.1 \\ 0.31 & 0.43 & 0.44 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

أ- حساب حجم الإنتاج الإجمالي في القطاعات الثلاثة عندما يصبح الطلب النهائي 18، 21، 14 على التوالي.

٢- حساب حجم المدخلات الأولية الجديدة في القطاعات الثلاثة.

Damascus University

الفصل الرابع

IV- نماذج النمو الاقتصادي

IV- 1- تمهيد

IV- 2 - نموذج هارود – دومار

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

IV- 1- تمهيد:

يعرف النمو الاقتصادي بأنه الزيادة المستمرة ولفترة طويلة الأجل نسبياً في الناتج وبالتالي في نصيب الفرد من الدخل القومي. وترى نظريات النمو التقليدية في أن معدل النمو الاقتصادي يعتمد بشكل كبير على الاستثمار. وعلى ذلك فإن تخفيض الاستهلاك الجاري وتوجيه الوفر الناجم عن الاستهلاك إلى الاستثمار سيؤدي هذا إلى ارتفاع معدل النمو وزيادة الطاقة الإنتاجية للمجتمع، وسيؤدي هذا الاستثمار الجديد إلى زيادة التكوين الرأسمالي الذي هو أحد عوامل النمو الأساسية، وهذا ما تراه النظريات التقليدية الحديثة بالإضافة إلى أنها ترى أن تزايد حجم القوة العاملة تشكل عاملاً آخر من عوامل النمو.

سندرس في هذا الفصل وبشكل مبسط بعض نماذج النمو الاقتصادي، وهي تعتمد على التراكم الرأسمالي في غياب التقدم التقني (نعتبره حيادياً على الرغم من أهميته وذلك من أجل التبسيط) وللتبسيط أيضاً نفترض وجود سلعة واحدة متجانسة تستخدم في الوقت ذاته لأغراض الاستثمار والاستهلاك كما في نموذج هارود دومار مثلاً. إذ يسمح هذا التبسيط بصياغة تابع إنتاج يقاس فيه رأس المال والناتج بوحدات عينية من طبيعة السلعة- أما شمول نماذج النمو الاقتصادي وتفصيلها فيقتضي إدخال العديد من التغيرات والمعاملات سواء تم اعتبار الاقتصاد كوحدة متكاملة أم قسم إلى قطاعات وفق معايير معينة. كما ذكرنا سنتعرض لبعض نماذج النمو الاقتصادي بشكل مبسط ومختصر وذلك من خلال دراسة النماذج الآتية:

١- نموذج هارود دومار.
٢- نموذج اتيشيمورا.

٣- نموذج الكلاسيكيين المجددين.

٤- نموذج شعيري وبردنو.

IV- 1- نموذج هارود- دومار:

عند بداية الاهتمام بنظرية النمو قام كل من هارود ودومار بنشر مقالين مستقلين يعتبران أساساً لما سمي فيما بعد بنموذج هارود دومار. ويتصف هذا النموذج أنه من أكثر نماذج النمو الاقتصادي بساطة وشيوعاً وجموداً في آن واحد. ومن خصائصه أنه يفترض عدم وجود مجال للإحلال بين عناصر الإنتاج المختلفة. فيفترض جمود معامل رأس المال للعمل والناتج. ويترتب على هذا الافتراض عدم استقرار مجرى نمو الدخل التوازني، أي أنه إذا انحرف الدخل القومي عن مجراه التوازني فإنه لن يعود تلقائياً إلى المجرى نفسه. ويفرق نموذج هارود- دومار بين ما يسمى بمعدل النمو الطبيعي، وهو معدل نمو الدخل الذي يضمن استخدام الموارد المتاحة استخداماً كاملاً، ويساوي معدل نمو القوة العاملة، ومعدل النمو المرغوب فيه الذي يتوقف على معدل الادخار القومي ومعامل رأس المال للناتج ويضمن معدل النمو المرغوب فيه استثمار جميع المدخرات، أي انه يتميز بتعادل الاستثمار المقدر مع المدخرات المقدرة. ولا يتساوى المعدل إلا بالصدفة، فإذا كان الثاني أكبر من الأول واجه الاقتصاد القومي تضخماً مستمراً، أما إذا كان الأول أكبر من الثاني عانى الاقتصاد القومي كساداً مزمناً. إلا أن الاقتصادي سولو قد بين في أن إسقاط افتراض عدم الإحلال بين عناصر الإنتاج يقضي على هذه الخاصية ويضمن عودة الدخل القومي إلى النمو بمعدل يساوي المعدل الطبيعي إذا انحرف عنه في فترة من الفترات.

إذاً باختصار يفترض نموذج هارود- دومار تزايد القوة العاملة بمعدل ثابت يستوعبه الطلب في سوق السلعة بصورة كاملة وبذلك يرافق الاستخدام الكامل للعمل الاستخدام الكامل لرأس المال تتلخص إذاً المشكلة التي يطرحها النموذج في تحقق النمو الاقتصادي (زيادة الدخل) بمعدل ثابت بشكل يتناسب مع الاستخدام الكامل لرأس المال والقوة العاملة في وقت واحد.

ومن الضروري أن نذكر قبل البدء بعرض النموذج وحله بأن معدل نمو الدخل المرغوب فيه يعتمد على تفاعل قُوّتيْ المضاعف الذي هو مقلوب الميل الحدي للادخار، والمعجل الذي يبين العلاقة بين الاستثمار وتغير الدخل القومي، إذ إنّ زيادة الناتج بمعدل معين تحتاج لزيادة رأس المال (الاستثمار)، ويحدد مقدار هذه الزيادة في رأس المال (كمية الاستثمار) العامل الحدي لرأس المال للناتج الذي هو النسبة بين زيادة رأس المال وزيادة الدخل.

يتضمن نموذج هارود - دومار المتغيرات التالية:

Y: صافي الناتج القومي (الدخل القومي).

g: معدل نمو الناتج القومي الصافي.

C: الاستهلاك القومي.

S: الادخار القومي.

I: الاستثمار الصافي.

K: رأس المال القومي.

n: معدل النمو السكاني أو معدل نمو القوة العاملة.

- أن جميع المتغيرات السابقة عدا (n,g) مقيسة بوحدات عينيـــة أو بأســـعار ثابتة كما ويتضمن النموذج المعاملات التالية:

v : معامل رأس المال للناتج ونستخدم هنا المعامل الحدي الذي يعبر عـــن نسبة بين الاستثمار الصافي وزيادة الناتج القومي الصافي كما ذكرنا سابقاً.

c: الميل الحدي للاستهلاك.

s: الميل الحدي للإدخار ويساوي (1-c) كما يسمى معدل الإدخار القومي.

u: معامل تاب القوة العاملة إلى الناتج القومي.

t: تشير إلى الزمن الذي نفترضه بأنه مستمر. ويعبـــر عـــن معـــدل تغيـــر المتغيرات المختلفة مع الزمن بمعاملها التفاضلي الأول بالنسبة للزمن.

يمكن عرض النموذج وفق صيغتين نفترض في الأولى وجود تابع للناتج يتصف بعائدية ثابتة، فإذا كانت $\frac{1}{v}$ مقلوب معامل رأس المال الناتج، فيكون تابع الناتج $Y = \frac{K}{v}$.

ولدينا العلاقة $y = u\ t$ التي تصف ظروف العمل في أثناء القيام بالعمليـــة الإنتاجية.

(أي مستوى الطلب على العمل في السوق السلعية)

الصيغة الثانية تبرز الأثر المتداخل للمضاعف والمعجل (المسرع) وتعتمد هذه الصيغة على الاستثمار I الذي يعرف على أنه معـــدل تغيـــر رأس المـــال بالنسبة للزمن t، نكتب العلاقة: $I = \frac{dk}{dt}$

وبفرض أن معدل تغير الدخل القومي (الناتج) يتناسب مع الاستثمار الصافي. وباستخدام (v) التي تربط بين تغيرات الناتج (الدخل القومي) وتغيرات رأس المال (ندعى v بمعامل التناسب بينهما) يمكن التعبير عما سبق بعلاقة المعجل (المسرع) كما يلي:

$$I = V \frac{dy}{dt}$$

ومما سبق نستطيع أن نكتب:

$$\frac{dk}{dt} = I = V \frac{dy}{dt}$$

من الواضح أن هذا النموذج يهتم بالطابع المزدوج للاستثمارات. فمن جهة نجد أن الاستثمارات هي مكون من مكونات الطلب الكلي، وزيادة الاستثمار ستؤدي إلى زيادة الطلب الكلي ليس فقط بشكل مباشر وإنما أيضاً عن طريق أثر الزيادة في الاستثمار على الدخل، وهو ما يتحدد بقيمة المضاعف.

إن شرط التوازن في السوق السلعية يتمثّل بالمساواة التالية:

$$Y = C + I$$

وبما أن الادخار القومي S يعرف على أنه الفرق بين الدخل والاستهلاك، أي أنه الجزء غير المستهلك من الدخل القومي.

أي أن: $S = Y - C$ وبالتالي فإن شرط التوازن السابق يمكن التعبير عنه كمايلي: $S = I$

وبفرض أن تابع الاستهلاك هو تابع خطي يمر بمركز الإحداثيات أي أنه يمثل نسبة ثابتة موجبة من الدخل نكتب: $C = c\,Y$

مما سبق نستطيع أن نكتب تابع الادخار كما يلي: $S = (1-C)\,Y = sY$

وبتعويض الاستثمار والادخار في شرط التوازن نكتب:

$$s\,y = v.\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{s}{v}y$$

وتدل هذه العلاقة على معدل النمو في صافي الناتج القومي ومعدل النمو هذا متناسب مع حجم الناتج القومي. ولو رمزنا لمعامل التناسب $\frac{s}{v}$ بـ g

أي: $g = \frac{s}{v}$ نكتب:

$$\frac{dy}{dt} = g.Y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{Y} = g.dt$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الأولى. وباستخدام خواص التابع الأسي في نماذج النمو يمكننا أن نكتب:

$$Y_t = Y_0 e^{gt}$$

حيث Y_t الناتج القومي في الفترة t و y_0 الناتج القومي في فترة الأساس $t = 0$ و g معدل التناسب (معدل نمو الدخل). وبالعودة إلى المعادلة التفاضلية السابقة نستطيع أن نكتب:

$$Y_0 \le Y < Y_t$$

$$0 \le t \qquad \text{حيث}$$

وبمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية يكون:≤

$$\int_{Y_0}^{Y_t} \frac{dy}{Y} = g \int_0^t dt$$

$$\log [y]_{Y_0}^{Y_t} = g[t]_0^t = gt$$

$$\log y_t - \log y_0 = g \cdot t \qquad \text{وبالتالي}$$

$$\log \frac{y_t}{y_0} = g.t \Rightarrow \frac{Y_t}{Y_0} = e^{g.t}$$

$$\Rightarrow \quad y_t = y_0 \, e^{(g/v)t}$$

أي أن النتيجة الأخيرة تشير إلى أن الدخل القومي ينمو بمعدل ثابت: $g = \frac{s}{v} > 0$

إن التوازن في سوق العمل يتحقق حين يتساوى مستوى عرض القوة العاملة إلى مستوى الطلب عليها. ويتم ذلك حين نصل إلى الاستخدام الكامل للقوة العاملة.

إن القوة العاملة تزداد بمقدار ثابت هو (n) وفقاً لتطبيقات التابع الأسي وكما مر معنا سابقاً فنجد أن:

$$L = L_0 e^{nt}$$

وكما رأينا سابقاً إن مستوى الطلب على العمل في السوق السلعية متمثلة في العلاقة التالية وباستخدام المعامل u : $L = u \cdot y$ إذاً نستطيع أن نكتب العلاقة كما يلي:

$$L = u\, y_0\, e^{gt}$$

مما سبق يتساوى العرض مع الطلب في سوق العمل إذا تحققت المساواة:

$$L_0 e^{nt} = L_0 e^{gt}$$

وذلك إذا كان: $L_0 = u\, y_0$

مما سبق نجد أن التوازن في سوق العمل يتحقق إذا تحقق الشرط:

$$g = n = \frac{s}{v}$$

أي إذا تساوى معدل النمو المرغوب فيه (g) مع معدل النمو الطبيعي (n) وبتوفر هذا الشرط نستطيع أن نستنتج انطلاقاً من العلاقة $y = y_0 e^{gt}$ ما يلي:

$$I = I_0 e^{gt}$$

$$L = L_0 e^{gt}$$

وترتبط القيم البدائية مع بعضها البعض كما يلي:

$$I_0 = u_0 y_0$$

$$I_0 = s y_0$$

ونستطيع أيضاً أن نستنتج معدل نمو الاستهلاك

$$C = cY \quad \Rightarrow \quad C = c y_0 e^{gt}$$

وبفرض أن الاستهلاك في الفترة $t = 0$ (فترة الأساس) نكتب:

$$C = c_0 y_0 \quad \Rightarrow \quad C = c_0 e^{gt}$$

أي أن الاستهلاك القومي ينمو بمعدل نمو الناتج القومي نفسه.

إذا افترضنا الآن أن معدل نمو السكان السنوي هو (n) وأن تعداد السكان في فترة الأساس $t = 0$ هو N_0 وفي الفترة t هو N نستطيع أن نكتب العلاقة التي تعكس نمو السكان: $N = N_0 e^{nt}$

وإذا رمزنا إلى نصيب الفرد من الدخل القومي في اللحظة t بالرمز y فإن:

$$y = \frac{Y}{N} = \frac{Y_0 e^{gt}}{N_0 e^{nt}} = \frac{Y_0}{N_0} e^{(g-n)t}$$

حيث Y_0 هو دخل الفرد في فترة الأساس $t = 0$ أي: $y_0 = \frac{Y_0}{N_0}$ وبالتالي فإن معدل نمو نصيب الفرد القومي هو عبارة عن الفرق بين معدل نمو صافي الناتج القومي و (n) معدل نمو السكان.

الآن وبالعودة للعلاقة: $Y_t = Y_0 e^{gt}$

نستطيع التمييز بين الحالات الثلاث لمساواة الناتج وذلك تبعاً لقيمة g كما يلي:

١- $g = \frac{s}{v} < 0$ أي أن معدل النمو سالب عندها Y_t تميل إلى الصفر بنفس إشارة Y_0 وتشير هذه الحالة إلى أن المجتمع يستهلك رأس المال بالتدريج وينجم عن ذلك تناقص طاقته الإنتاجية حتى تتلاشى، والسبب في هذا هو كون $1-c < 0$ أي أن $c > 1$ أي أن الميل الاستهلاكي أكبر من الواحد وبالتالي فإن $s < 0$

أي أن الميل الادخاري سالب.

٢- $g = \frac{s}{v} = 0$ وبالتالي فإن المقدار $e^{gt} = 1$ مما يؤدي إلى المساواة التالية $Y_t = Y_0$ أي أن مستوى الدخل القومي ثابت عند حالته الابتدائية وتشير هذه الحالة إلى أن المجتمع يستهلك كل ما ينتج وبالتالي تبقى طاقته الإنتاجية ثابتة، وبتعبير آخر تنجم هذه الحالة عن تساوي الميل الحدي للاستهلاك إلى الواحد والميل الحدي للادخار إلى الصفر وهو ما يترجم بالركود الاقتصادي.

٣- $g = \frac{\Delta}{v} > 0$ أي أن معدل النمو موجب وبالتالي فإن المقدار $e^{gt} > 1$ وبذلك يزداد الدخل القومي (Y_t) بمعدل ثابت يساوي إلى g بافتراض أن $Y_0 > 0$ وهي الحالة الشائعة أما إذا كان $Y_0 < 0$ فإن الدخل القومي يتناقص بانتظام بمعدل g وهذا متعذر عملياً.

Damascus University

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الخامس

V- نظرية الرسوم والمخططات الشبكية

V-1- تمهيد

V-2- بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية

V-3- تطبيقات نظرية الرسوم

V-3-1- مسألة أقصر مسار

V-3-1-1- خوارزمية بلمان

V-3-1-2- خوارزمية إيجاد أقصر مسار في رسم غير موجه أضلاعه ذات وزن موجب

V-3-2- مسألة التدفق الأعظمي

V-3-2-1- فرضيات خوارزمية التدفق الأعظمي

V-3-2-2- خوارزمية التدفق الأعظمي

V-3-3- المسار الحرج

V-3-3-1- القواعد الخاصة برسم شبكة المسار الحرج

V-3-3-2- حسابات المسار الحرج في شبكة CPM

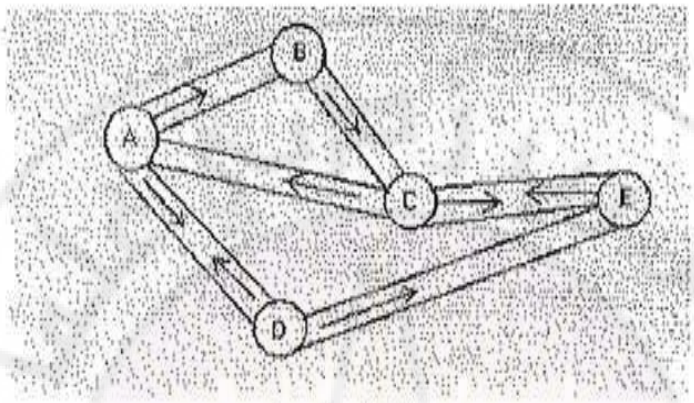
V-3-3-3- حساب الوقت الفائض في شبكة المسار الحرج CPM

تمارين عامة

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

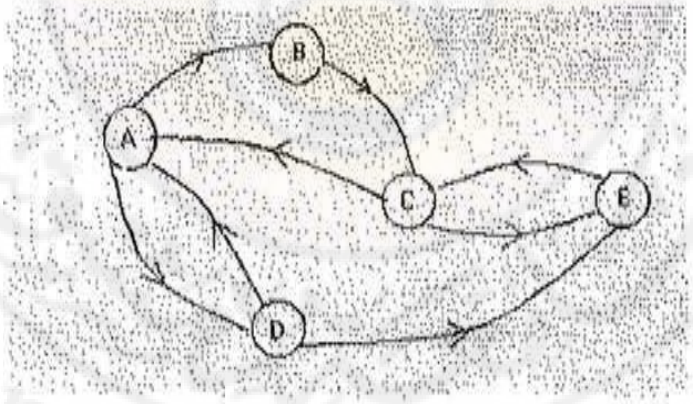
V- 1- تمهيد.

لتكن لدينا مجموعة من المدن A و B و C و D و E تصل فيما بينها مجموعة من الطرق كما هو موضح في الشكل التالي :



الشكل (V-1)

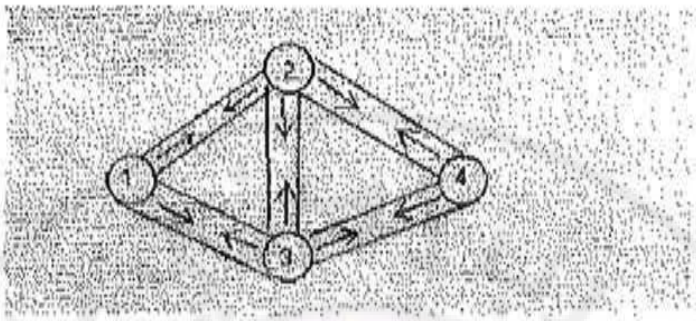
يمكن تمثيل خارطة الطرق السابقة باستخدام دوائر تحمل أرقاماً أو أحرفاً نسميها عقداً، نصل فيما بينها بخطوط موجهة نسميها أقواساً كما في الشكل :



الشكل (V-2)

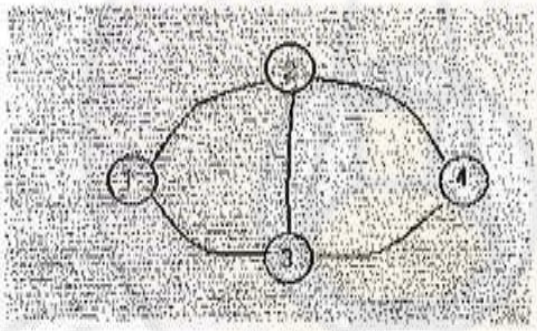
يطلق على هذا الشكل اسم "رسم موجه" directed graph .

أما إذا كانت الطرق التي تصل بين مختلف المدن جميعها ذات اتجاهين كما في خارطة الطرق التالية :



الشكل (٧-3)

فإنه يمكن تمثيل هذا الشكل باستخدام عقد تمثل المدن و خطوط غير موجهة تصل بين هذه العقد نسميها أضلاعاً كما يظهر في الشكل التالي :



الشكل (٧-4)

يطلق على هذا الشكل اسم "رسم" graph .

بالنظر إلى التمثيل السابق لشبكة الطرق، نلاحظ أن هنالك الكثير من الأنظمة أو الحالات العملية التي يمكن تمثيلها بمجموعة من النقاط نسميها عقداً، ومجموعة من الخطوط الموجهة نسميها أقواساً، أو مجموعة من الخطوط غير الموجهة نسميها أضلاعاً، هذه الخطوط تعبر عن علاقات معينة تربط بين أزواج العقد.

وقد نتج عن ذلك مانسميه اليوم بـ"نظرية الرسوم" graph theory و هذه النظرية تقوم بدراسة العلاقات التي نقوم بتمثيلها برسوم غير موجهة إذا كانت متناظرة، ورسوم موجهة إذا كانت غير متناظرة. و بما أن المشكلات التي يمكن تقع في دائرة "نظرية الرسوم" متعددة، فإن هذه النظرية أصبحت تحتل أهمية خاصة في معالجة الكثير من المسائل المطروحة في بحوث العمليات. ونقوم عادة بإرفاق قيم عددية بالعقد أو بالخطوط التي يتكون منها "الرسم" أو "الرسم الموجه" للتعبير عن تكاليف، أو مسافات، أو احتمالات ...الخ، و يطلق على هذا النوع من الرسوم اسم "الشبكات" Networks.

V- 2- بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية.

تعريف الرسم: الرسم هو مجموعة غير خالية ومنتهية من العقد (Nodes) التي تربط بينها خطوط غير موجهة (أضلاع). فالشكل (V-1) هو عبارة عن رسم يتكون من 4 عقد و خمسة أضلاع. نرمز لمجموعة العقد بـ V وتكتب كما يلي:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

أما مجموعة أضلاعه فنرمز لها E و هي تكتب كما يلي:

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

فإذا كانت V مجموعة عقد الرسم و E مجموعة أضلاعه، فيمكننا أن نكتب الرسم بشكل مختصر بالشكل:

$$G = (V(G), E(G)) \text{ أو } G = (V, E) \text{ أو } G(V, E)$$

تعريف الرسم الموجه: الرسم الموجه هو مجموعة غير خالية ومنتهية من العقد (Nodes) التي تربط بينها خطوط موجهة (أقواس). فالشكل (V-2) هو عبارة عن رسم موجه، مجموعة عقده (أو رؤوسه) هي:

$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

و مجموعة أقواسه هي:

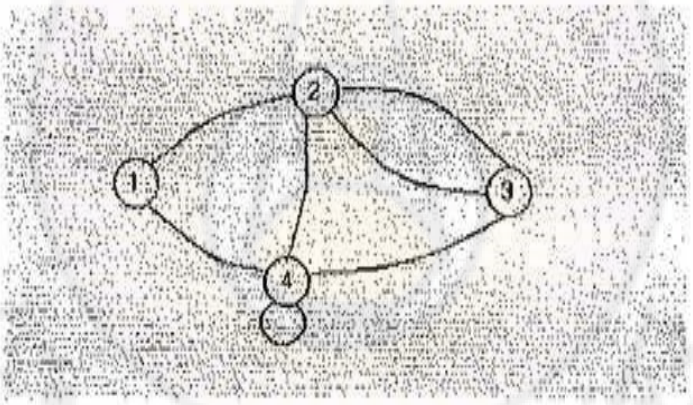
$$E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (C, A), (C, E), (D, A), (D, E), (E, C)\}$$

فإذا كانت V مجموعة عقد الرسم الموجه و E مجموعة أقواسه فيمكن أن نكتب الرسم الموجه بالشكل المختصر :

D=(V, E) أو D=(V, E)

تعريف مرتبة و حجم الرسم:

إذا كان لدينا رسم (أو رسم موجه) عدد عناصر مجموعة رؤوسه هو p و عدد عناصر مجموعة أضلاعه (أو أقواسه) هو q قلنا إن هذا الرسم من المرتبة p والحجم q ، و نعبر عن ذلك بالثنائية (p, q) يمكن لرسم أو رسم موجه أن يحوي أضلاعاً أو أقواساً تربط رؤوساً بنفسها. نطلق على مثل هذه الأضلاع اسم حلقة "Loop" كما في الرسم (5-V)الذي يحتوي على حلقة عند الرأس 4 :



الشكل (5-V)

كما يمكن لرسم أو رسم موجه أن يحتوي على عدة أضلاع أو أقواس متوازية أو متعددة، فمثلاً الرسم (5-V) يحوي ضلعين متوازيين يربطان العقدتين 2 و 3 .

تعريف الرسم البسيط :

يقال عن رسم (أو رسم موجه) أنه بسيط إذا لم يكن يحتوي على حلقات و لا على أضلاع (أو أقواس) متوازية.

العقدتان المتجاورتان:

نقول عن عقدتين i و j من رسم أنهما متجاورتان "adjacent" إذا وجد ضلع من الرسم يربط بينهما $e=(i,j)$ ونقول عندها أن الضلع e يرتكز على كل من i و j .

الضلعان المتجاوران :

نقول عن ضلعين e_1 و e_2 مختلفين من رسم أنهما متجاوران إذا وجد بينهما عقدة ارتكاز مشتركة.

تعريف بداية القوس و نهايته:

إذا كان الضلع (i,j) هو قوس في رسم موجه D نقول إن العقدة i مجاورة للعقدة j و نقول إن i هي بداية القوس و j هي نهايته، و نقول عندئذ إن القوس (i,j) يرتكز من i إلى j . أما إذا كان القوس (j,i) هو من أقواس D فإن العقدة j مجاورة للعقدة i و نقول إن j هي بداية القوس و i هي نهايته، كما أن القوس (j,i) يرتكز من j إلى i .

وبذلك نرى أن معرفة العقد المتجاورة والأضلاع المتجاورة و معرفة عقد الارتكاز في رسم (أو رسم موجه) تمكننا من معرفة الرسم بشكل كامل، و قد جرت العادة على تمثيل ذلك باستخدام المصفوفات كالتالي:

تعريف مصفوفة الارتكاز : incidence matrix

مصفوفة الارتكاز A لرسم هي مصفوفة عناصرها a_{ik} معرفة كما يلي :

$$a_{ik}=\begin{cases}1 & \text{إذا ارتكز الضلع } k \text{ على الرأس } i\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

و حسب هذا التعريف فإن مصفوفة الارتكاز للرسم (٥-٤) هي كالتالي :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



نلاحظ أن كل عمود في المصفوفة السابقة يحتوي على العدد 1 مرتين فقط وهذا يدل على وجود ضلع يرتكز على رأسين في كل عمود.

تعريف مصفوفة الارتكاز لرسم موجه:

تعرف مصفوفة الارتكاز C لرسم موجه عناصرها c_{ik} بالشكل التالي:

$$c_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت نهاية القوس } k \text{ هي العقدة } i \\ -1 & \text{إذا كانت بداية القوس } k \text{ هي العقدة } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبالاعتماد على هذا التعريف يمكن أن نضع مصفوفة الارتكاز للرسم الموجه (2-V) كالتالي:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



نلاحظ في هذه المصفوفة أن كل عمود يحتوي على كل من 1+ و 1- مرة واحدة فقط إذ يشير 1- إلى بداية القوس و 1+ إلى نهاية القوس و بذلك يظهر واضحاً اتجاه القوس.

و بذلك يبدو لنا واضحاً أن تمثيل الرسوم أوالرسوم الموجهة باستخدام مصفوفة الارتكاز كاف للدلالة بشكل كامل على هذه الرسوم أو الرسوم الموجهة، و هذا التمثيل يستخدم للتعامل مع الرسوم أو الرسوم الموجهة بواسطة الحاسوب.

من الممكن أيضاً تمثيل الرسوم و الرسوم الموجهة بالاعتماد على فكرة العقد المتجاورة الذي يعطينا في هذه الحالة مانسميه بمصفوفة التجاور.

تعريف مصفوفة التجاور لرسم : adjacency matrix

مصفوفة التجاور B لرسم G هي مصفوفة عناصرها b_{ij} تعرف بالشكل التالي:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الضلع } (i,j) \text{ من أضلاع } G \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حسب هذا التعريف فإن مصفوفة التجاور للرسم (٥-٤) تكون كما يلي:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

نلاحظ أن هذه المصفوفة هي مصفوفة متناظرة أي أن $b_{ij} = b_{ji}$

تعريف مصفوفة التجاور لرسم موجه:

إن مصفوفة التجاور B لرسم موجه D هي مصفوفة عناصرها e_{ij} تعرف بالشكل التالي:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان القوس } (i,j) \text{ من أقواس } D \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و بذلك فإن مصفوفة التجاور للرسم الموجه (٥-٢) تكتب بالشكل التالي:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

تعريف درجة عقدة في رسم:

درجة عقدة v في رسم هي عدد الأضلاع المرتكزة على هذه العقدة، ونرمز لها بالرمز $\delta(v)$.

ففي الرسم (٥-٤) مثلاً نجد أن:

$$\delta(1) = 2, \delta(2) = 3, \delta(3) = 3, \delta(4) = 2$$

تعريف الدرجة الخارجة و الدرجة الداخلة لرسم موجه:

الدرجة الخارجة للعقدة i : هي عدد الأقواس التي تتجه لخارج العقدة i و نرمز لها : $\overleftarrow{d}(i)$

الدرجة الداخلة للعقدة i : هي عدد الأقواس التي تتجه نحو العقدة i $\overrightarrow{d}(i)$ و نرمز لها :

و تعرف درجة العقدة i ، و التي نرمز لها $d(i)$ بالشكل التالي:

$$d(i) = \overleftarrow{d}(i) + \overrightarrow{d}(i)$$

تعريف المنبع و المصب: Destination & Source

في رسم موجه يطلق اسم "منبع" على العقدة التي درجتها الداخلة تساوي الصفر.

و يطلق اسم "مصب" على العقدة التي درجتها الخارجة تساوي الصفر.

تعريف السير : Walk

السير بين عقدتين v_0 و v_n من رسم $G=(V, E)$ هو مجموعة من الأضلاع المتتابعة

$$W = ((v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n))$$

على الشكل التالي:

و نسمي v_0 بداية السير و v_n نهايته، كما نسمي عدد أضلاع السير w بـ"طول السير".

على سبيل المثال في الرسم (٥-٤) لدينا السير بين العقدة ١ و العقدة ٤ :

$$W_1 = ((1,2),(2,3),(3,4))$$

نسمي السير الذي تكون أضلاعه المتلاحقة مختلفة بالسلسلة "Chain" . و إذا كانت عقده أيضاً مختلفة نسميه "سلسلة أولية".

و نقول عن سير إنه مفتوح إذا كانت عقدة البداية فيه مختلفة عن عقدة النهاية، و إلا قلنا بأنه مغلق "Closed" .

تعريف المسار: Path

المسار في رسم $G = (V, E)$ هو سير جميع عقده مختلفة فيما عدا عقدة البداية و النهاية حيث يمكن أن تكونا متساويتين.

نقول عن مسار إنه مفتوح إذا كان السير المحدد له مفتوحاً.

و نقول عن مسار إنه مغلق إذا كان السير المحدد له مغلقاً.

تعريف الدارة: Circuit

الدارة في رسم هي سلسلة مغلقة تحتوي على ضلع واحد على الأقل من ذلك الرسم.

تعريف الدورة: Cycle

الدورة هي دارة مختلفة العقد.

تعريف العقد المترابطة:

نقول عن عقدتين من رسم غير موجه أنهما مترابطتان إذا وجد بينهما مسار من G.

تعريف الرسم الموزون: Weighted graph

هو رسم يقترن بكل ضلع e من أضلاعه عددٌ حقيقي نسميه وزن هذا الضلع ونرمز له w(e) .

تعريف الشبكة: Network

هي رسم موجه موزون يملك منبعاً و مصباً.

V-3- تطبيقات نظرية الرسوم.

في الحالات التطبيقية التي سنعرضها نعطي الأضلاع في رسم (أو الأقواس في رسم موجه) أوزاناً للدلالة على أشياء معينة مثل طول أو مسافة هذا الضلع (أو القوس)، تكلفة الانتقال أو نقل وحدة معينة عبر هذا الضلع (أو القوس)، طاقة الضلع (القوس) من حيث عدد السيارات التي يمكن أن تمر عليه لو نظرنا إليه كطريق، أو من حيث كمية الكهرباء أو الماء التي يمكن تتدفق عبره فيما لو اعتبرناه جزءاً من شبكة ماء أو كهرباء أو أنابيب لتوزيع النفط...الخ.

V-3-1- مسألة أقصر مسار. The shortest path problem

نصطلح في هذه الفقرة على استخدام الرمز (ij) للدلالة على الضلع الذي يصل العقدة i بالعقدة j . و سنرمز لوزن هذا الضلع بالرمز w(ij) ، كما سنرمز لمجموعة المسارات التي تربط بين العقدتين u و v بالرمز P(uv) . فإذا كان p(uv) أحد هذه المسارات فإن وزنه يعرف على أنه مجموع أوزان الأضلاع التي يتكون منها هذا المسار، و لنرمز لهذا الوزن بالرمز w(p) . إن مسألة أقصر

مسار بين عقدتين u و v من رسم مترابط تهدف إلى إيجاد مسار من المجموعة p(uv) يملك أقل وزن ممكن.

إن مسألة أقصر مسار لها تطبيقات متعددة: فإذا نظرنا لوزن الضلع على أنه تكلفة نقل على طول ذلك الضلع فإن مسألة أقصر مسار بين عقدتين u و v تعني عندئذٍ إيجاد أقل تكلفة نقل من u إلى v .

أما إذا نظرنا لوزن الضلع (ij) على أنه الزمن اللازم للانتقال من i إلى j فإن مسألة أقصر مسار بين عقدتين u و v تعني عندئذٍ إيجاد أقل زمن ممكن للانتقال من u إلى v .

بفرض أن لدينا مساراً p(uv) من u إلى v و أن هذا المسار يحتوي على دارة c و لنرمز p'(uv) للمسار من u إلى v الذي لا يحتوي على الدارة فيكون إذاً:

$$w(p) = w(p') + w(c)$$

حيث : w(c) وزن الدارة

w(p') وزن المسار غير الحاوي على الدارة

فإذا كان w(c) سالباً فلا يوجد عندئذٍ حل لمسألة أقصر مسار و ذلك لأنه يمكننا استخدام الدارة c عدداً غير محدد من المرات. و لو كان w(c) غير سالب فمن الواضح أن $w(p) \geq w(p')$ و بالتالي فإن p' أفضل من p .

نطلق على المسارات من النوع p' التي لا تحتوي على دارات، و التي تختلف فيها عقدة البداية عن عقدة النهاية، اسم المسارات الأولية.

سنقتصر في مسألة أقصر مسار بين u و v على إيجاد أقصر مسار أولي من G يربط بين u و v .

هنالك خوارزميات متعددة لمعالجة مثل هذه المسألة، سنعرض منها فقط خوارزميتين: إحداهما تستخدم في حالة رسم موجه و الثانية في حالة رسم غير موجه جميع أوزان أضلاعه موجبة.

V-3-1-1- خوارزمية بلمان : Bellman algorithm

تعطي خوارزمية Bellman أقصر مسار من المنبع s إلى المصب D في شبكة لاتحوي دارات. و هي بالوقت نفسه تعطي أقصر مسار من المنبع s إلى أي عقدة من عقد الشبكة. سنقوم بتوضيح هذه الخوارزمية و خطواتها من خلال مثال، كم سنستخدم في شرحنا الرموز التالية :

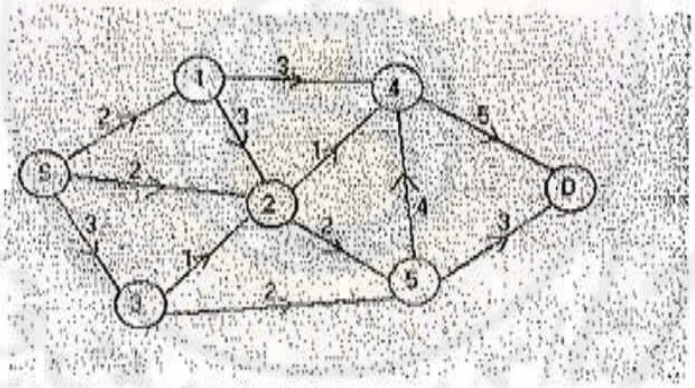
$\alpha(j)$ وزن أقصر مسار بين عقدة المنبع s و العقدة j

$B(j)$ العقدة التي تسبق العقدة j في أقصر مسار بين s و j

تمييز العقدة j : يتم بوضع علامة ما على هذه العقدة أو بجوارها، أما العلامة التي سنستخدمها فهي النجمة *.

مثال :

لتكن لدينا الشبكة التالية :



الشكل (V-6)

حيث تمثل الأعداد المعطاة على الأقواس أوزان هذه الأقواس.

المطلوب: إيجاد أقصر مسار من المنبع s إلى المصب D في هذه الشبكة.

خطوات الخوارزمية هي :

الخطوة (١):

نضع $\pi(S)=0$ و $B(S)=S$ ثم نميز العقدة S بالعلامة المختارة : •

و نعرف المجموعة P بالشكل التالي : $P=\{S\}$

كما نعرف العقدة أو العقد المرشحة للدخول في P بأنها تلك العقد التي تكون نهاية لقوس أو أقواس تنطلق من عقدة أو عقد تحمل العلامة •. ففي مثالنا نجد أن كل من العقدتين (1) و (3) هي نهاية لقوس ينطلق من العقدة S المعلمة فهي مرشحة للدخول في P . أما العقدة (2) فنجد أنها نهاية أيضاً لقوس ينطلق من العقدة (1) و لقوس ينطلق من العقدة (3) ، وهذه العقد غير معلمة حتى الآن إذاً فالعقدة (2) غير مرشحة للدخول في P .

الخطوة (٢):

إذا كانت j عقدة مرشحة للدخول في P نقوم بما يلي:

١. نقوم بإضافة j إلى P ثم نعلم العقدة j

٢. يتم حساب $\pi(j)$ $\pi(j) = \min\{\pi(i) + w(ij)\}$

من العلاقة : حيث i هي عقدة معلمة ينطلق منها قوس إلى j .

٣. إن العقدة i_0 التي تحقق العلاقة السابقة نقول عنها إنها تسبق العقدة j أي: $B(j)=i_0$.

٤. نرفق بكل عقدة من العقد الزوج $(\pi(j), B(j))$ حيث أن:

$\pi(j)$ يدل على وزن أقصر مسار من S إلى j

و $B(j)$ تدل على العقدة التي تسبق j .

ففي مثالنا نجد أن كل من العقد (1) و (3) مرشحتان للدخول في P ، نقوم إذاً بإضافتهما إلى P حيث تصبح : $P=\{S,1,3\}$

و بالنسبة للعقدة (1) نجد أن :

$$\pi(1) = \min\{\pi(S) + w(S1)\} = 0 + 2 = 2$$

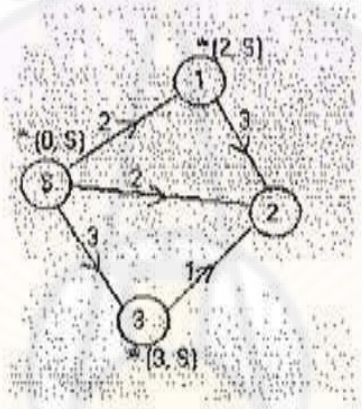
و بالتالي فإن : $B(1) = S$

أما بالنسبة للعقدة (3) فنجد أن :

$$\pi(3) = \min\{\pi(S) + w(S3)\} = 0 + 3 = 3$$

و بالتالي فإن : $B(3) = S$

و بذلك علينا أن نقوم بتعليم كل من العقدة (1) و العقدة (3) ، وإرفاق الزوج (S ,2) بالعقدة (1) و الزوج (3, S) بالعقدة (3) كما في الشكل التالي:



الشكل (V-5)

الخطوة (٣):

نكرر العمل بالخطوة (٢) حتى نصل إلى عقدة المصب (D) و عند ذلك نحصل على أقصر مسار من s إلى كل من العقد و ذلك بالنظر إلى الأزواج $[\pi(j), B(j)]$ المقرونة بهذه العقد.

لنتابع الآن حل مثالنا:

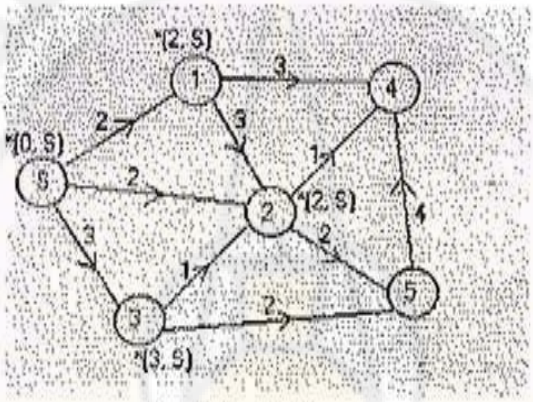
أصبحت العقدة (2) مرشحة للدخول في المجموعة P لأن جميع الأقواس التي تنتهي عندها تنطلق من عقد معلمة، و بذلك نجد :

$P = \{S, 1, 3, 2\}$

$$\pi(2) = \min\{\pi(i) + w(i2)\}; i \in \{S,1,3\}$$
$$= \min\{\pi(S) + w(S2) = 0 + 2 = 2;$$
$$\pi(1) + w(12) = 2 + 3 = 5;$$
$$\pi(3) + w(32) = 3 + 1 = 4\} = 2$$

و بما أن أقل قيمة نحصل عليها عندما $i = S$ فإن $u(2) = S$ و الزوج الذي يجب إرفاقه بالعقدة (2) هو (2, S) .

و بملاحظة الشكل (٥-٨) :



الشكل (V-8)

نجد أن العقدة (5) هي العقدة الوحيدة المرشحة للدخول في P ، يصبح لدينا إذاً:

$$\pi(5) = \min\{\pi(i) + w(i5)\}; i \in \{2,3\}$$
$$= \min\{\pi(2) + w(25) = 2 + 2 = 4;$$
$$\pi(3) + w(35) = 3 + 2 = 5\} = 4$$

P = { S, 1, 3, 2, 5 }

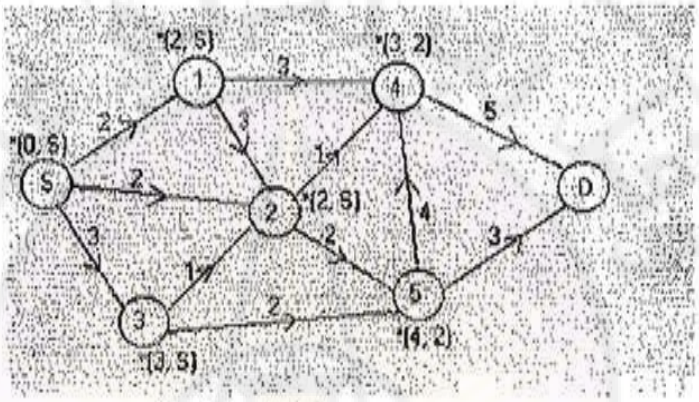
إن أدنى قيمة نحصل عليها عندما $i = 2$ أي أن: $u(5) = 2$ نرفق إذاً الزوج (4, 2) بالعقدة (5) و نقوم بتعليمها.

الآن العقدة المرشحة للدخول في P هي العقدة (4) نجد عندئذ:

P = (S, 1, 3, 5, 4)

$$\pi(4) = \min\{\pi(i), w(i4)\}; i \in \{1,2,5\}$$
$$= \min\{\pi(1) + w(14) = 2+3 = 5;$$
$$\pi(2) + w(24) = 2+1 = 3;$$
$$\pi(5) + w(54) = 4+4 = 8\} = 3$$

إن أدنى قيمة نحصل عليها عندما $i=2$ إذاً $B(4)=2$ و بالتالي نرفق الزوج (3, 2) بالعقدة (4) و نقوم بتعليمها فنحصل على الشكل التالي :



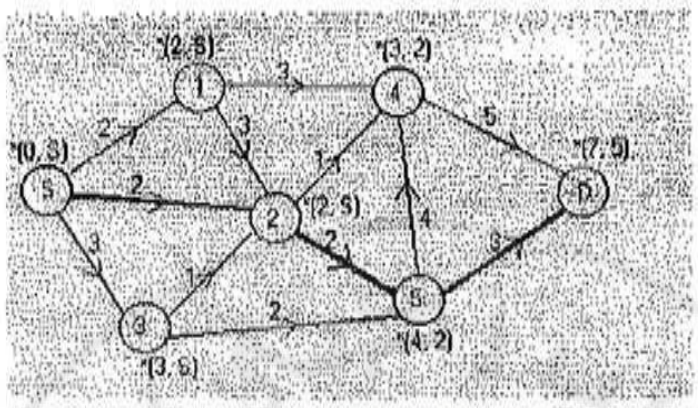
الشكل (V-9)

من الشكل السابق نرى أن العقدة الوحيدة المرشحة للدخول في P هي العقدة D المتبقية ، نجد إذاً:

$P = \{S, 1, 3, 2, 5, 4, D\}$

$$\pi(D) = \min\{\pi(i) + w(iD)\}; i \in \{4,5\}$$
$$= \min\{\pi(4) + w(4D) = 3+5 = 8;$$
$$\pi(5) + w(5D) = 4+3 = 7\} = 7$$

نجد أن أدنى قيمة محققة عندما $i=5$ إذاً $B(D)=5$ و بالتالي نرفق الزوج (7, 5) بعقدة المصب و نقوم بتعليمها. تصبح الشبكة لدينا :



الشكل (5-10)

و يتضح من الشكل الأخير أن أقصر مسار من s إلى العقدة D هو : S→2→5→D

و أن وزن هذا المسار هو: 7

كما يمكننا من هذا الشكل إيجاد أقصر مسار من العقدة s إلى العقدة i ، فعلى سبيل المثال : أقصر مسار من s إلى العقدة (4) هو: S→2→4

أما وزنه فهو : 3

سنقوم بتلخيص ما قمنا به باستخدام خوارزمية بلمان ضمن الجدول التالي:

تكرار	P	العقدة المرشحة	$\pi(j)$	$\pi(j)$	المسار	طول المسار
1	{S}	1	$\min\{\pi(S)+w(S1)\}=2$	S	S→1	2
		3	$\min\{\pi(S)+w(S3)\}=3$	S	S→3	3
2	{S, 1, 3}	2	$\min\{\pi(i)+w(i2)\}=2$; $i\in\{S, 1, 3\}$	S	S→2	2
3	{S, 1, 3, 2}	5	$\min\{\pi(i)+w(i5)\}=4$; $i\in\{2, 3\}$	2	S→2→5	4
4	{S, 1, 3, 2, 5}	4	$\min\{\pi(i)+w(i4)\}=3$; $i\in\{1, 2, 5\}$	2	S→2→4	3
5	{S, 1, 3, 2, 5, 4}	D	$\min\{\pi(i)+w(iD)\}=7$; $i\in\{4, 5\}$	5	S→2→5→D	5

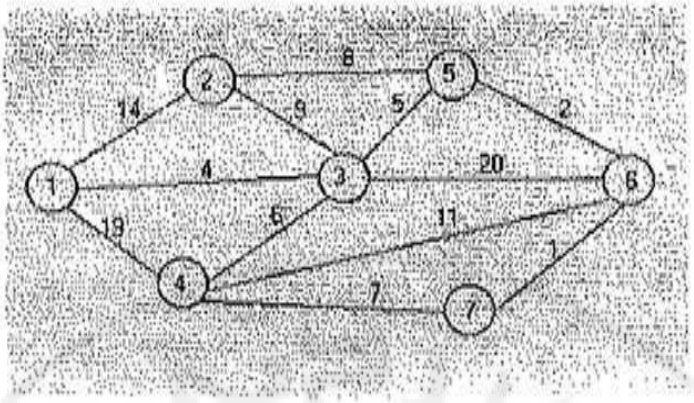
ملاحظة:

يمكن تطبيق خوارزمية بلمان لحل مسألة أقصر مسار في شبكة غير موجهة إذا كانت أوزان جميع الأضلاع في هذه الشبكة موجبة، إذ يتم تحويل الشبكة غير الموجهة إلى شبكة موجهة باستبدال كل ضلع (ij) بقوسين (i,j) و (j, i) نعطي لكل منهما وزن الضلع (ij) . إن عملية الاستبدال هذه ستشكل لنا دارات في الشبكة الموجهة الناتجة، و مع ذلك فإن هذه الدارات ان يكون لها أثر فيما لو تم استخدام المسارات الأولية فقط، و هذا سيتطلب مزيداً من التدقيق على نوعية المسارات المستخدمة أثناء الحل. و من أجل تجاوز كل ذلك فإننا سنقدم خوارزمية لمعالجة مسألة أقصر مسار في رسم غير موجه موزون ومترابط، و وزن كل ضلع من أضلاعه عدد حقيقي موجب.

V-3-1-2- خوارزمية إيجاد أقصر مسار في رسم غير موجه أضلاعه ذات وزن موجب:

سنقوم بتوضيح هذه الخوارزمية من خلال المثال التالي:

شركة مقرها الرئيسي في المدينة رقم (1) و لها ستة فروع أخرى في مدن مختلفة، و يقوم مدير الشركة من فترة لأخرى بتفقد هذه الفروع، لذلك فهو يرغب معرفة الطرق الأقل تكلفة بين المركز في المدينة (1) و كل من فروعها علماً بأنه لا توجد أحياناً طريق مباشرة من مدينة لأخرى. إن شبكة الطرق و التكاليف موضحة في الشكل التالي:



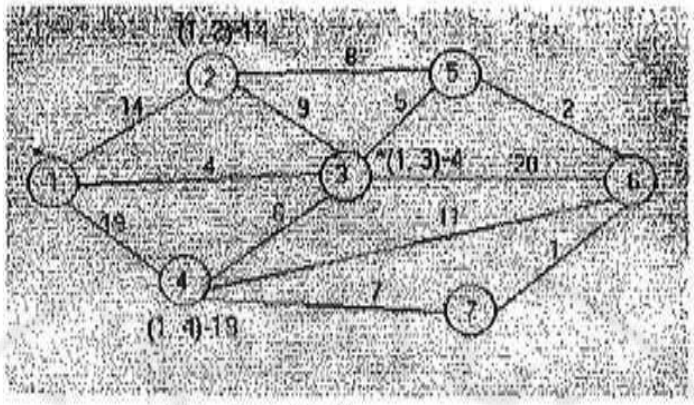
الشكل (V-11)

خطوات الخوارزمية:

الخطوة (١) :

نقوم بوضع العلامة * على العقدة الابتدائية (١) ثم نحدد العقد التي ترتبط بشكل مباشر بهذه العقدة و نرمز لكل عقدة بالرمز w-(i, j) حيث يرمز (i, j) إلى الضلع الذي يصل العقدة i بالعقدة j مباشرة، أما w فترمز لوزن المسار من العقدة (١) إلى العقدة (j) .

ثم نقوم بتعليم العقدة ذات الوزن الأقل من هذه العقد بالعلامة *، ففي مثالنا نجد أن الخطوة الأولى تعطي الشكل التالي:



الشكل (V-12)

و نتيجة لهذه الخطوة نجد أن عقد الشبكة تقسم إلى ثلاث مجموعات:

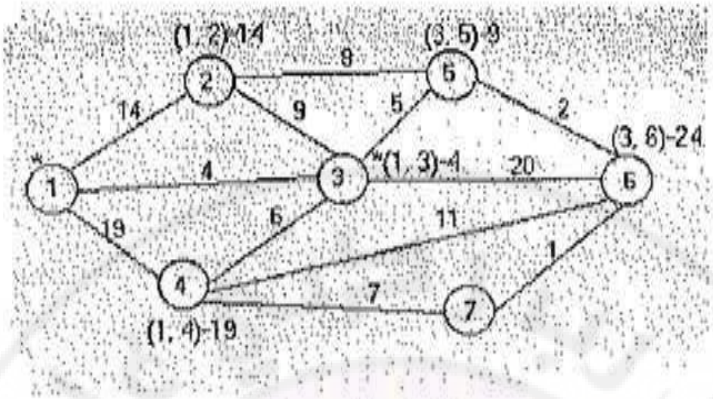
١. العقد المعلمة بالعلامة *

٢. العقد المرمزة بالشكل w-(i, j)

٣. العقد غير المرمزة و غير المعلمة

الخطوة (٢):

أ. نأخذ آخر عقدة معلمة بالعلامة * و نبحث عن العقد المرتبطة بها مباشرة و التي لاتحمل العلامة * و غير المرمزة، ثم نقوم بترميز هذه العقد حسب الترميز w-(i, j) . في مثالنا نجد أن آخر عقدة معلمة هي العقدة (3) ، أما العقد المرتبطة بها مباشرة و التي لاتحمل علامة و غير المرمزة فهما العقدتان (5) و (6) ، نقوم بترميزهما كما يظهر في الشكل التالي:



الشكل (V-13)

ب. نقوم بإعادة ترميز العقد التي تم ترميزها في الخطوة السابقة و التي لاتحمل علامة * (و هما في مثالنا العقدتان 2 و 4)، فإذا كان الترميز السابق للعقدة هو: (i_r, j)-w_r و الترميز اللاحق للعقدة هو : (i_s, j)-w_s فإننا نختار الترميز ذا الوزن الأقل أي: $w = \min(w_r, w_s)$ ثم نقوم بتعليم هذه العقد بالعلامة * و نعيد ترميزها وفقاً للوزن الأقل.

ففي مثالنا نجد أنه بالنسبة للعقدة (2) : الترميز السابق (1, 2)-14

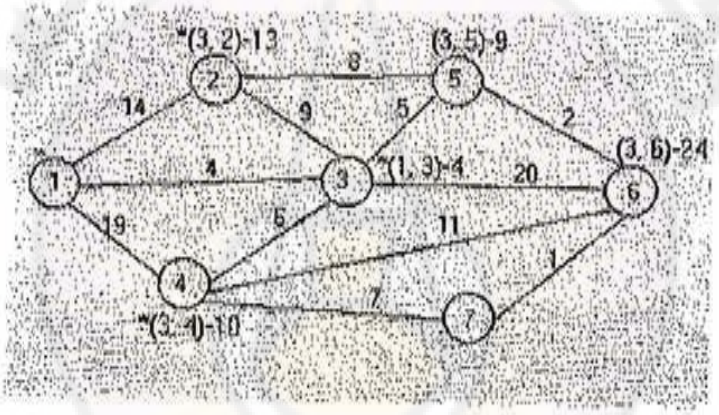
أما الترميز اللاحق عن طريق العقدة المعلمة (3) فهو: (1, 3)-13

و بما أن : $w = \min(14, 13) = 13$ أي أن الترميز اللاحق أفضل من الترميز السابق لذلك فإننا نعلم العقدة (2) بالعلامة * و نعيد ترميزها بالشكل (1, 2)-13 ما دامت لاترتبط مباشرة بأي عقد معلمة سوى العقدتين (1) و (3) . و في حال وجود أكثر من عقدة مرمزة و غير معلمة فإننا نتعامل معها بنفس طريقة التعامل مع العقدة (2) .

في مثالنا نجد أن هنالك عقدة أخرى مرمزة و غير معلمة و هي العقدة (4) ، إن الترميز السابق للعقدة (4) هو: (4)-19 ،1. أما الترميز اللاحق لها عن طريق العقدة (3) فهو: (3, 4)-10

و بذلك نجد أن الترميز اللاحق لها أفضل من الترميز السابق لأن: w = min(19, 10) = 10

لذلك فإننا نقوم بتعليمها بالعلامة * بما أنها لاترتبط مباشرة بأي عقد معلمة غير العقدتين (1) و (3) كما نعيد ترميزها وفقاً للترميز الأفضل. و بذلك يصبح الشكل لدينا في هذه الخطوة كالتالي:



الشكل (V-14)

الخطوة (٣):

نكرر الخطوة السابقة لكل من العقد المعلمة في هذه الخطوة و التي تتصل مباشرة بالعقد غير المرمزة و غير المعلمة، و بالعقد المرمزة و غير المعلمة حتى يتم تعليم جميع العقد، و من ثم نأخذ المسارات وأوزانها من الترميز النهائي للعقد.

ففي مثالنا: لقد قمنا في الخطوة السابقة بتعليم العقدتين (2) و (4)

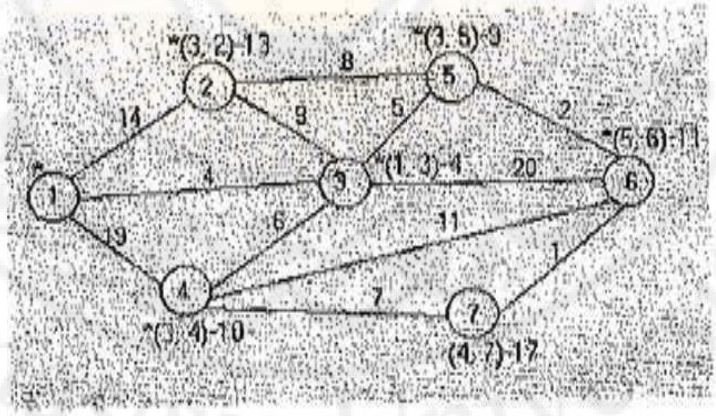
العقدة (2): لايتصل بها مباشرة أية عقد غير مرمزة و غير معلمة (عقد من النوع الثالث)، و يتصل بها عقدة مرمزة و غير معلمة (عقدة من النوع الثاني) و هي العقدة (5) ، نقوم بإعادة ترميزهما فنجد:

أن الترميز السابق للعقدة (5) هو 9-(5, 3) ، أما الترميز اللاحق عن طريق العقدة (2) فهو 21-(2, 5) الترميز السابق إذاً أفضل، لذلك نختار الترميز السابق للعقدة (5) و نقوم بتعليمها بالعلامة *.

بالنسبة للعقدة (4): يرتبط بها مباشرة العقدة (7) و هي من النوع الثالث، ترميزها يكون بالشكل 17-(4,7) و يرتبط بها مباشرة العقدة (6) و هي من النوع الثاني، نجد بالنسبة للعقدة (6) أن: ترميزها السابق هو 24-(3,6) ، أما ترميزها اللاحق عن طريق العقدة (4) فهو 21-(4,6) ، إلا أن العقدة (6) ترتبط مباشرة أيضاً بعقدة معلمة و هي العقدة (5) لذلك يجب إعادة ترميزها عن طريق العقدة (5) ، و الذي يكون بالشكل: 11-(5,6)

إن أفضل ترميز للعقدة (6) هو عن طريق العقدة (5) لأن: $w = \min(17, 24, 11) = 11$

لذلك نختار هذا الترميز للعقدة (6) و نقوم بوضع العلامة * بجوارها.

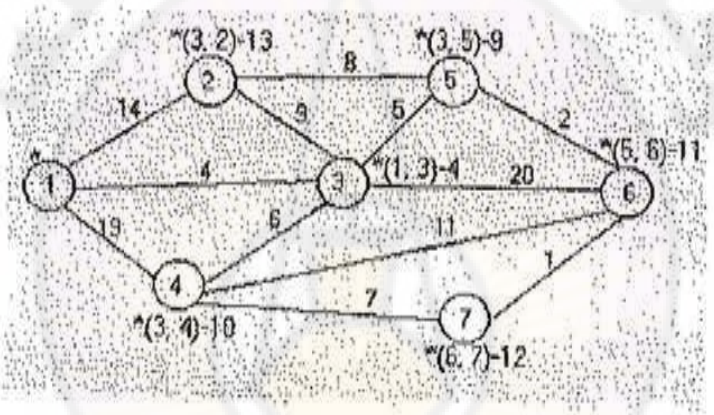


الشكل (V-15)

أصبح لدينا الآن العقدة (6) هي آخر عقدة معلمة و هي تتصل مباشرة بالعقدة (7) فقط، أما العقدة (7) فهي من النوع الثاني (مرمزة و غير معلمة) و بإعادة ترميزها نجد أن:

الترميز السابق للعقدة (7) هو (17، 7، 4)-17 ، أما الترميز اللاحق عن طريق العقدة (6) فهو (12، 7، 6)-12 ، إذاً الترميز اللاحق أفضل لأن: w = min(17, 12) = 12 لذلك نقوم باختياره و من ثم نعلم العقدة (7) .

يصبح لدينا الشكل الذي يعطي النتائج النهائية كالتالي:



الشكل (V-16)

إن الترميزات النهائية لعقد الشكل السابق تعطي أقصر مسار من العقدة الابتدائية (1) إلى كل من العقد الأخرى . فعلى سبيل المثال الترميز (12، 7، 6)-12 يعني أن أقصر مسار من العقدة (1) إلى العقدة (7) يكلف 12 ، و هو يأتي عن طريق العقدة (6) وبالعودة إلى العقدة (6) نجد أن ترميزها النهائي يأتي من العقدة (5) ، و بالعودة إلى العقدة (5) نجد أن ترميزها النهائي يأتي من العقدة (3) ، و بالعودة إلى هذه الأخيرة نجد أن ترميزها النهائي يأتي من العقدة الابتدائية (1) . و بالنتيجة فإن أقصر مسار من العقدة (1) إلى العقدة (7) هو: 1→3→5→6→7

ووزنه هو: 12

و بالطريقة نفسها يمكن تحديد المسار الأقصر لأي عقدة في الرسم بطريقة التراجع.

يمكننا الآن تلخيص نتائج تطبيق الخوارزمية على مثالنا في الجدول التالي:

تكرار	آخر عقدة معلمة j	عقدة غير معلمة مرتبطة مباشرة بـ j	ترميز سابق للعقدة k	ترميز لاحق للعقدة k	ترميز و تعليم نهائي للعقدة k	أقصر مسار من العقدة الابتدائية إلى العقدة k	وزن المسار
1	1	2 3 4	(1,2)-14 (1,3)-4 (1,4)-19	(1,3)-4	(1,3)-4	1→3	4
2	3	2 4 5 6	(1,2)-14 (1,4)-19 (3,5)-9 (3,6)-24	(3,2)-13 (3,4)-10	(3,2)-13 (3,4)-10	1→3→2 1→3→4	13 10
3	2	5	(3,5)-9	(2,5)-21	(3,5)-9	1→3→5	9
4	4	6 7	(3,6)-24 (4,7)-17	(4,6)-21			
5	5	6	(3,6)-24 (4,6)-21	(5,6)-11	(5,6)-11	1→3→5→6	11
6	6	7	(4,7)-17	(6,7)-12	(6,7)-12	1→3→5→6→7	12

نلاحظ في الجدول السابق أننا احتجنا إلى 6 تكرارات من أجل إيجاد أقصر مسار لرسم غير موجه فيه 7 عقد. إذاً بشكل عام يمكن القول أننا نحتاج إلى n-1 تكرار إذا كان الرسم يحتوي على n عقدة، لأننا سنقوم بتعليم جميع العقد و من ثم تكرار العمل لكل عقدة معلمة ماعدا العقدة الأخيرة التي عند تعليمها تكون الخوارزمية قد انتهت و يتوقف عندها التكرار.

V-2-3- مسألة التدفق الأعظمي: The maximal flow problem

إذا كان لدينا شبكة موجهة فإن مسألة التدفق الأعظمي تهدف إلى إيجاد أكبر تدفق ممكن من المنبع إلى المصب. فإذا كانت هذه الشبكة شبكة طرق مثلاً، فإن طاقة القوس في هذه الحالة تمثل عدد السيارات التي يمكن أن تعبر هذه القوس في وحدة الزمن (باعتبار أن القوس هو طريق ذو اتجاه وحيد) إن مسألة التدفق الأعظمي في هذه الحالة تهدف إلى إيجاد أكبر عدد ممكن من السيارات يمكن أن

تنتقل بين نقطتين (منبع و مصب في شبكة طرق). أما إذا كانت هذه الشبكة تمثل شبكة ماء أو كهرباء أو...الخ ، فإن مسألة التدفق الأعظمي تهدف إلى إيجاد أكبر تدفق ممكن من الماء أو الكهرباء أو...الخ بين عقدتين: منبع ومصب في الشبكة. بالنظر إلى الأمثلة السابقة، نجد أن المجال يتسع ليشمل عدداً كبيراً من التطبيقات يمكن معالجتها باستخدام فكرة التدفق الأعظمي.

V-3-2-1- فرضيات خوارزمية التدفق الأعظمي:

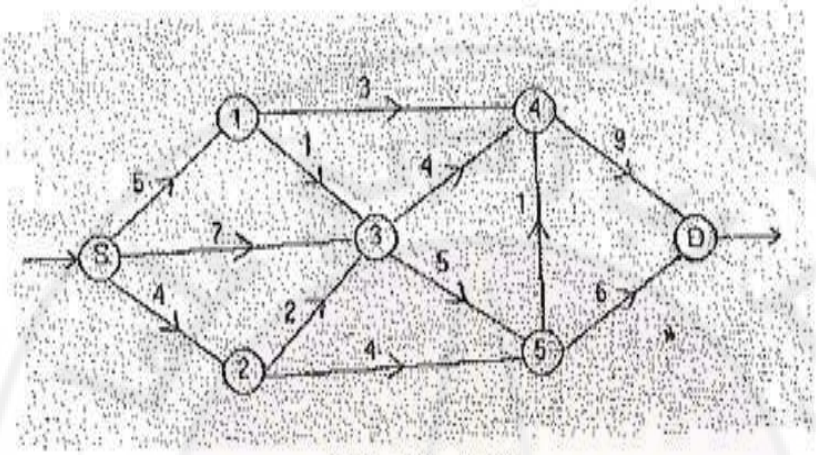
قبل أن نبدأ بالخوارزمية، نعرض بعض المصطلحات و الفرضيات الخاصة بالخوارزمية:

- إن طاقة القوس هي عدد حقيقي موجب و هي تعني تدفقاً من نوع ما من بداية هذا القوس إلى نهايته.
- نفترض أن التدفق الداخل لأية عقدة يساوي التدفق الخارج منها، و هذا ما نسميه عادة بقانون "حفظ التدفق" باستثناء عقدتي المنبع و المصب طبعاً، إذ يكون التدفق الخارج من المنبع يساوي التدفق الداخل في المصب و نسمي هذا التدفق باسم "قيمة التدفق".
- إذا كان لدينا مسار مابين المنبع و المصب فإن "التدفق الممكن" عبر هذا المسار يعرف على أنه أقل طاقة من طاقات الأقواس التي تشكل هذا المسار؛ و هذا منطقي فمن غير الممكن أن نمرر على طول المسار تدفقاً يتجاوز أكبر تدفق ممكن لأحد الأقواس المشكلة لهذا المسار. أي بكلمة أخرى: لا يمكننا أن نتجاوز طاقة أقل الأقواس في هذا المسار.

V-3-2-2- خوارزمية التدفق الأعظمي:

سنقوم بتوضيح خطوات هذه الخوارزمية من خلال المثال التالي:

لتكن لدينا شبكة الطرق التالية التي تصل بين المدينة s و المدينة d و لتكن الأرقام المرفقة على أقواس هذه الشبكة تمثل أكبر عدد (بالآلاف) من السيارات يمكن أن تعبر هذه الأقواس في الساعة.



الشكل (V-17)

إن مسألة التدفق الأعظمي في هذه الشبكة تعني إيجاد مسار من هذه الشبكة يملك أكبر تدفق ممكن.

فلو أخذنا المسارات الثلاثة التالية:

$P_1 : S \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow D$
$P_2 : S \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow D$
$P_3 : S \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow D$

لو جدنا أن التدفق الممكن لها هو:

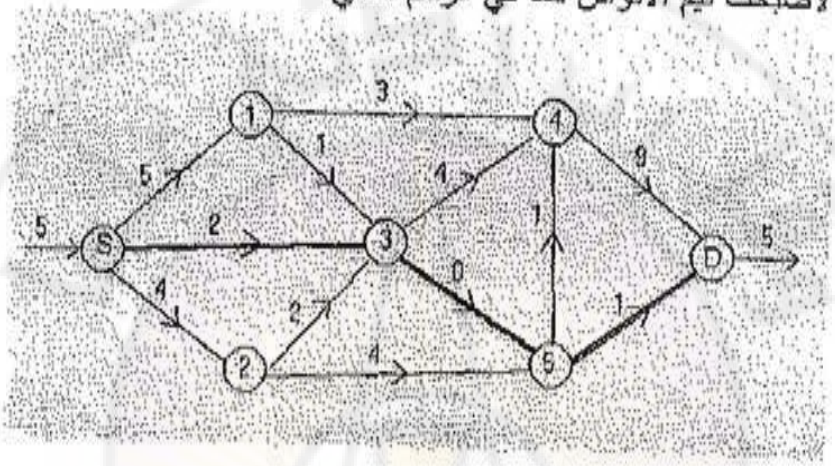
$P_1 = 3$
$P_2 = 5$
$P_3 = 4$

و من الواضح أن P_1 أفضل من P_3 و P_2 فهو يسمح بتدفق أكبر من السيارات.

أما الخطوات التي يجب اتباعها لإيجاد أفضل مسار (أي المسار ذو التدفق الأعظمي) فهي:

الخطوة (١):

نوجد مساراً من المنبع إلى المصب يملك تدفقاً ممكناً ثم نطرح التدفق الممكن لهذا المسار من جميع طاقات الأقواس في هذا المسار. فلو أخذنا في مثالنا المسار P_2 الذي تدفقه الممكن 5 و طرحنا 5 من طاقات الأقواس التي تشكل P_2 لأصبحت قيم الأقواس كما في الرسم التالي:



الشكل (V-18)

لقد كتبنا قيمة التدفق الممكن للمسار عند المنبع S و المصب D و هو 5 بالنسبة للمسار P_2 .

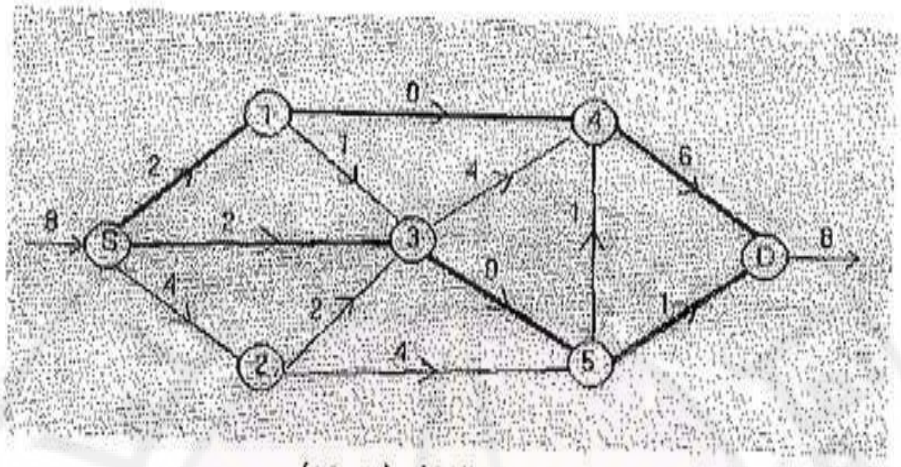
الخطوة (٢) :

نكرر الخطوة (١) من أجل جميع المسارات الممكنة من المنبع S إلى المصب D حتى نصل إلى الحل الأمثل وفقاً للقاعدة التالية:

يكون التدفق الناتج هو التدفق الأمثل إذا أصبحت طاقات جميع المسارات مساوية للصفر و تكون قيمته عندها هي القيمة المتجمعة من التدفقات الممكنة لهذه المسارات.

فلو كررنا في مثالنا العمل بالنسبة للمسار P_1 لوجدنا أن قيمة التدفقات المتجمعة :

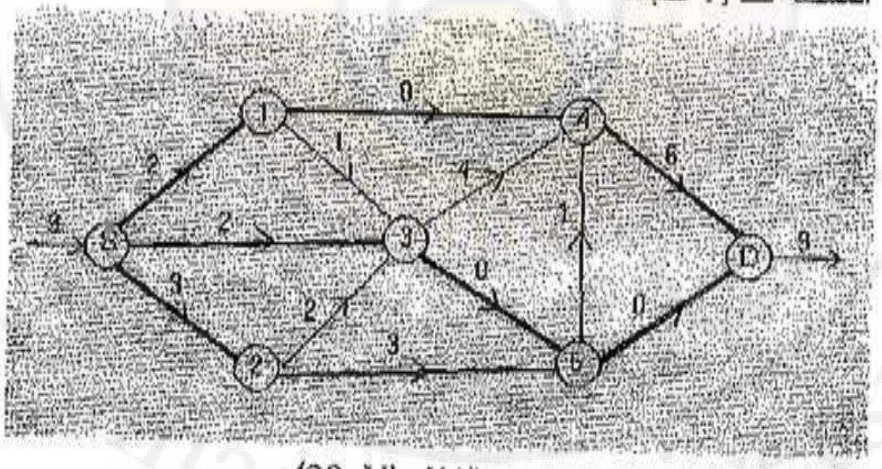
$5 + 3 = 8$



الشكل (V-19)

لو أخذنا المسار P_3: نجد أن طاقته أصبحت 1 نضيفها إلى التدفق المتجمع و نطرحها من قيم الأقواس

المشكلة لـــ P_3 فنجد:

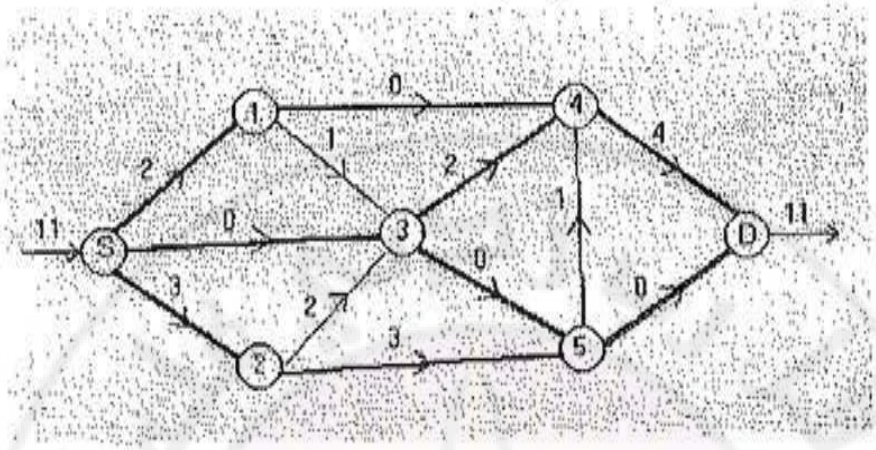


الشكل (V-20)

لو اعتبرنا الآن المسار :

$P_4 : S \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D$

نجد أن طاقته تساوي 2 نقوم بإضافتها إلى التدفق المتجمع و نطرحها من قيم الأقواس المشكلة لهذا المسار فنجد:

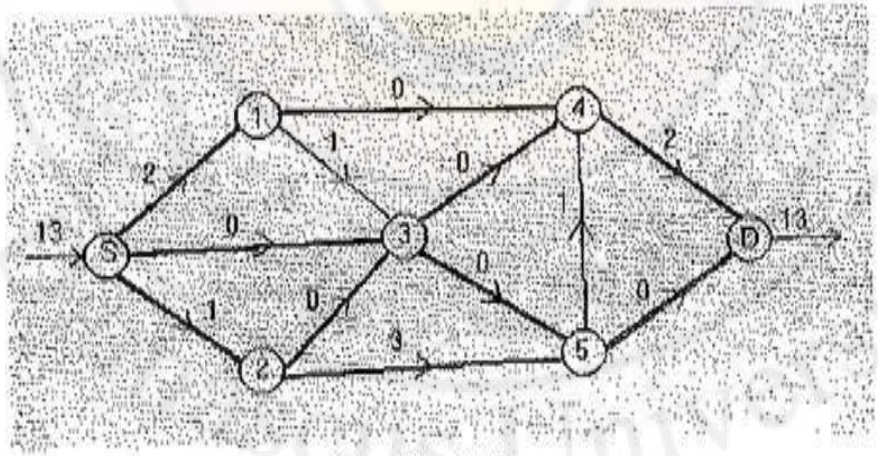


الشكل (5-21)

لنأخذ الآن المسار :

$P_1 : S \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow D$

طاقته تساوي 2 نقوم بإضافتها إلى التدفق المتجمع و نطرحها من قيم الأقواس المشكلة لهذا المسار فنجد:

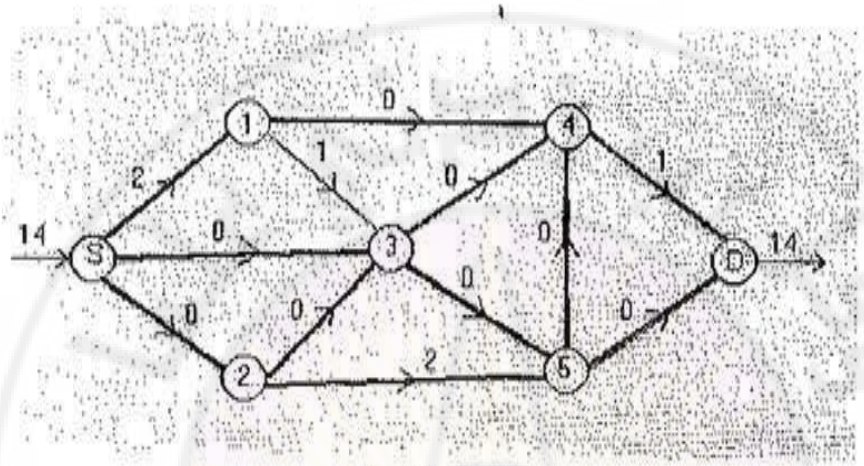


الشكل (V-22)

لو اعتبرنا الآن المسار :

$$P_4 : S \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow D$$

طاقته تساوي 1 نقوم بإضافتها إلى التدفق المتجمع فيصبح 14 و نطرحها من قيم الأقواس المشكلة لهذا المسار كما يظهر في الشكل التالي:



الشكل (V-23)

إن التدفق الذي حصلنا عليه في الشكل الأخير هو التدفق الأعظمي الممكن بين المنبع S و المصب D لأن طاقة أي مسار من S إلى D في الشكل (V-23) أصبحت صفراً. إذاً فالعدد الأعظمي للسيارات الذي يمكن أن يمر كل ساعة من S إلى D يساوي 14000 سيارة.

و لتحديد جدول تدفق السيارات نقارن الشكل (V-17) بالشكل (V-23) فنلاحظ التخفيض التالي في الطاقات:

الانتقال	التخفيض
من S إلى 1	3
من 1 إلى 4	3
من S إلى 3	7
من 3 إلى 4	4
من S إلى 2	4
من 2 إلى 3	2
من 2 إلى 5	2
من 3 إلى 5	5
من 5 إلى 4	1
من 5 إلى D	6
من 4 إلى D	8

و هذه التخفيضات تعتبر تدفقات السيارات عبر هذه الطرق و تكون جدول التدفق الأمثل.

V-3-3- المسار الحرج: CPM (Critical Path Method)

نعلم أن أي مشروع يتكون من مجموعة من الأنشطة المتداخلة و المترابطة وفق تسلسل منطقي محدد يجب مراعاته عند القيام بتنفيذ المشروع. فبعض الأنشطة لا يمكن البدء بها قبل استكمال تنفيذ أنشطة أخرى، فعلى سبيل المثال: إذا كان المشروع بناء سكنياً فلا يمكن البدء بإقامة الجدران قبل إقامة الأساسات و الأعمدة ، إذاً تحديد تسلسل الأنشطة له أهمية بالغة. كما أن هنالك أنشطة يمكن أن تنفذ بنفس الوقت مثل: التمديدات الكهربائية و تمديدات المياه ...الخ. إذاً

نلاحظ أن بعض أنشطة مشروع البناء السكني يمكن أن تتزامن و بعض الأنشطة الأخرى تنفذ وفق ترتيب زمني محدد. وينطبق هذا الأمر على كثير من المشروعات، و ما يهمنا عند تنفيذ مشروعات كهذه هو معرفة الأمور التالية:

١. معرفة التداخل و التسلسل المنطقي للأنشطة التي يتكون منها المشروع.
٢. معرفة متى يجب أن يبدأ تنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع و متى يجب أن ينتهي.
٣. معرفة الأنشطة الأكثر أهمية (أي الأنشطة الحرجة) و التي يؤدي التأخير في تنفيذها إلى تأخير في تنفيذ كامل المشروع، و معرفة الأنشطة الأقل أهمية (أي غير الحرجة) و التي يمكن تأجيل تنفيذها بعض الوقت دون أن يؤدي ذلك لأي تأخير في تنفيذ المشروع.

إن معرفة الأمور السابقة يسمح لنا بتحقيق مجموعة من الأهداف نلخصها فيما يلي :

١. وضع خطة لتنفيذ المشروع بأقل زمن ممكن .
٢. دراسة إمكانية تغيير تسلسل الأنشطة بحيث نقلل من زمن تنفيذ المشروع.
٣. إعادة توزيع الموارد المتاحة بحيث يمكن التعجيل في تنفيذ الأنشطة الحرجة و تأخير تنفيذ الأنشطة غير الحرجة.

إن أسلوب المسار الحرج CPM يساعدنا في تحقيق هذه الأهداف و هو يعتمد على التحليل العلمي لتخطيط المشروعات و جدولتها و مراقبتها و ضبطها. و قد تم تطويره مابين عامي ١٩٥٦م و ١٩٥٨م. من أجل دراسة المشروعات بهذا الأسلوب ، نلجأ إلى تمثيلها بواسطة شبكة موجهة توضح لنا طريقة تداخل و ترابط و تسلسل الأنشطة و الحوادث المكونة لهذه المشروعات، حيث تعبر

الأقواس في هذه الشبكة عن الأنشطة و تعبر العقد عن الحوادث. و سنبدأ أولاً بتعريف بعض المصطلحات الخاصة بشبكة CPM .

بعض التعاريف الأساسية:

النشاط (Activity):

هو جهد يتطلب موارد و يحتاج لوقت محدد لاستكماله و يكون النشاط دائماً محدداً بحادثين : حادث بداية النشاط و حادث نهاية النشاط.

الحادث (Event):

هو إنجاز واحد أو اكثر من الأنشطة عند نقطة محددة من الزمن. و للوصول إلى حادث لا بد من إنجاز جميع الأنشطة التي تسبقه. يمكن النظر للحادث على أنه هدف نسعى إليه و إلى الأنشطة التي تسبقه على أنها وسائل للوصول إليه باستثناء الحادث الذي يحدد بداية المشروع و نسميه حادث المصدر، كما نسمي حادث نهاية المشروع بحادث المصب.

المشروع (Project):

هو مجموعة من الأنشطة و الحوادث المعروفة البداية و النهاية.

النشاط الحرج (Critical activity):

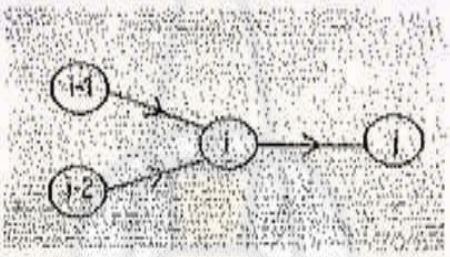
هو نشاط يترتب على أي تأخير في زمن تنفيذه مهما كان طفيفاً تأخير في زمن تنفيذ المشروع بأكمله.

المسار الحرج (Critical path):

هو مسار يتكون من الأنشطة الحرجة المتتابعة من بداية المشروع و حتى نهايته، أي: من عقدة المنبع إلى عقدة المصب في الشبكة الممثلة للمشروع.

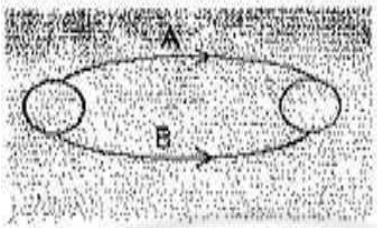
V-3-3-1- القواعد الخاصة برسم شبكة المسار الحرج:

١. يمثل كل نشاط بقوس موجه،و كل حادث بعقدة على شكل دائرة صغيرة، و نقوم بتخصيص رقم لحادث بداية النشاط أصغر من الرقم المخصص لحادث نهاية النشاط، وبذلك تتحدد معنا جهة التقدم في كل نشاط. إن طول القوس لا يتناسب بالضرورة مع مدة النشاط، و إنما نرفق زمن تنفيذ النشاط مع القوس. وبالنسبة لكل حادث لا يمكن أن تبدأ أية أنشطة ما لم تنجز الأنشطة التي تنتهي في هذا الحادث. ففي الشكل (٢٤-٥) نرى تمثيلاً بيانياً للنشاط (i, j) الذي يبدأ من الحادث (i) و ينتهي في الحادث (j) و كما نرى أن النشاط (i,j) لا يمكن أن يبدأ قبل أن تنتهي الأنشطة (i-1,i) و (i-2,i) :



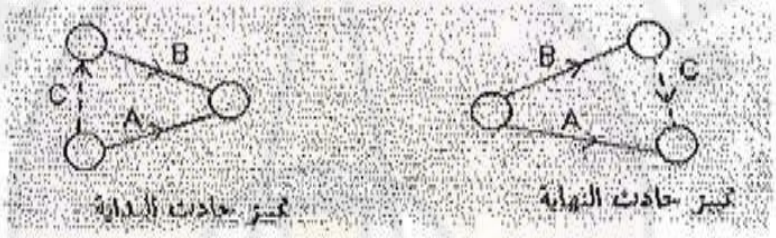
الشكل (V-24)

٢. لا يمكن أن يكون لنشاطين في آن واحد الحادث الخلفي نفسه و الحادث الأمامي . و إذا كان هنالك نشاطات يمكن إنجازهما في آن واحد فإننا نقوم بإدخال نشاط وهمي بشكل خط منقط و مدة زمنية تساوي صفراً إما لتمييز الحادث الخلفي أو الحادث الأمامي للنشاطين. فإذا كان لدينا مثلاً نشاطات A و B ينفذان في آن واحد فيكون من الخطأ تمثيلهما بالشكل التالي :



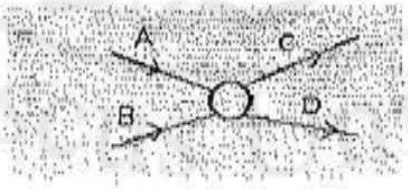
الشكل (V-25)

و لتمييزهما ندخل النشاط الوهمي c لتمييز إما حادث البداية أو حادث النهاية كما هو موضح بالشكل التالي:



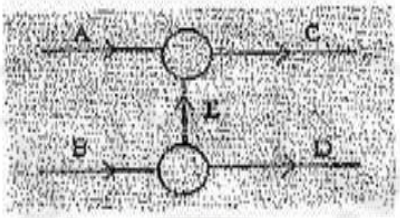
الشكل (V-26)

يمكن أيضاً استخدام النشاط الوهمي الذي لايستهلك زمناً و لايحتاج إلى أية موارد لتأسيس العلاقات المنطقية في الشبكة. مثال ذلك: لنفرض أن النشاطين A و B يسبقان النشاط C و أن النشاط D يلي النشاط B فقط. ففي هذه الحالة يكون تمثيل الأنشطة خاطئاً لو استعملنا الشكل التالي :



الشكل (V-27)

فهذا الشكل يظهر أن النشاط D يلي كلّ من النشاطين A و B أيضـــاً. و التمثيـــل الصحيح للمحافظة على التسلسل المنطقي للأنشطة هو بإدخال النشاط الوهمي E كما في الشكل التالي:



الشكل (V-28)

٣. من أجل ضمان تأسيس علاقات الأسبقية بين الأنشطة بشكل صحيح في الشبكة ، يجب علينا الإجابة عند إضافة أي نشاط جديد إلى الشـــبكة عـــن الأسئلة التالية:

أ) ما هي الأنشطة التي يجب أن تنجز قبل أن يبدأ هذا النشاط؟

ب) ما هي الأنشطة التي يمكن أن تحدث بتزامن مع هذا النشاط؟

ت) ما هي الأنشطة التي يجب أن تلي هذا النشاط؟

٤. يرفق مع كل قوس الزمن اللازم لانجاز النشاط الذي يمثله هذا القوس.

مثال:

ارسم شبكة CPM التي تتضمن الأنشطة التالية: (الزمن بالأيام)

النشاط	الزمن	النشاط	الزمن
A	4	F	7
B	3	G	1
C	5	H	5
D	6	I	2
E	2	J	3

بحيث تحقق علاقات الأسبقية التالية:

١) A و B هي الأنشطة الأولى في المشروع و يمكن أن تبدأ بآن واحد

٢) A يسبق C و D

٣) E يتلو كل من A و B

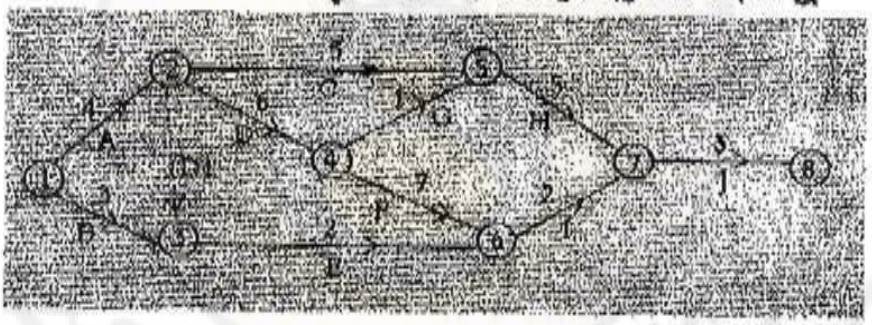
٤) G و F يتلوان D

٥) C و G يسبقان H

٦) F و E يسبقان I

٧) J يتلو كل من H و I و هو النشاط النهائي في المشروع

إن الشبكة المطلوبة موضحة بالشكل التالي:



الشكل (V-29)

لقد استخدمنا في هذه الشبكة النشاط الوهمي D1 لبناء علاقات الأسبقية بشكل صحيح، كما قمنا بترقيم الحوادث بشكل تصاعدي بحيث تظهر بوضوح وجهة التقدم في المشروع.

V-3-3-2-حسابات المسار الحرج في شبكة CPM :

تتم حسابات المسار الحرج على مرحلتين : المرحلة الأولى يطلق عليها مرحلة الانتقال نحو الأمام Forward pass ، و أما المرحلة الثانية فيطلق عليها مرحلة الانتقال نحو الوراء Backward pass .

و لتوضيح حسابات هاتين المرحلتين سوف نستخدم الشبكة السابقة في الشكل (29-V)

أولاً- حسابات مرحلة الانتقال نحو الأمام :

نبدأ حسابات هذه المرحلة اعتباراً من حادث بداية الشبكة و نتحرك نحو الأمام باتجاه حادث نهاية الشبكة، و عند كل حادث نحدد الوقت المبكر لوقوع هذا الحادث وهو يمثل الرقم الأول من اليسار من الثنائية التي ترفقها بهذا الحادث.

أما الوقت المبكر The Earliest Time لوقوع حادث ، فيعرف على أنه: الوقت الذي يقع فيه الحادث ، مباشرة بعد استكمال تنفيذ جميع الأنشطة التي تسبقه و في أقرب وقت ممكن، ونرمز له: ET_j

و يمكن حساب ET_j من العلاقة التالية:

$$ET_j = \max_i \{ET_i + T_{ij}\}$$
$$ET_1 = 0$$

حيث:

T_{ij} هو زمن تنفيذ النشاط (i,j)

ET_i هو الوقت المبكر لحادث بداية المشروع باعتبار أن العقدة (i) تمثل بداية المشروع

لنرى الآن كيف نقوم بحسابات مرحلة الانتقال نحو الأمام على الشبكة التي لدينا:

حسب القاعدة فإن حادث البداية : $ET_1 = 0$

نقوم بوضع هذه القيمة كرقم أول في الثنائية التي تقع فوق الحادث (1) .

و بما أنه لدينا نشاط وحيد (1, 2) ينتهي في الحادث (2) بزمن $T_{12} = 4$ ، نجد إذاً:

$$ET_2 = ET_1 + T_{12} = 0 + 4 = 4$$

و هذه القيمة توضع كرقم أول في الثنائية المرافقة للحادث (2) . إن الحادث التالي الذي يجب أن نأخذه بعين الاعتبار هو الحادث (3) ، وبما أنه يوجد نشاطان هما (1, 3) و (2, 3) ينتهيان في الحادث (3) ،فيكون لدينا:

$$ET_3 = \max_{i=1,2}\{ET_i + T_{i3} = 0 + 3 = 3,$$
$$ET_2 + T_{23} = 4 + 0 = 4\} = 4$$

و هذه القيمة توضع كرقم أول في الثنائية المرافقة للحادث (3) .

$$ET_4 = ET_2 + T_{24} = 4 + 6 = 10$$

و نستمر بالعمليات الحسابية بالأسلوب نفسه لجميع الحوادث المتبقية فنجد:

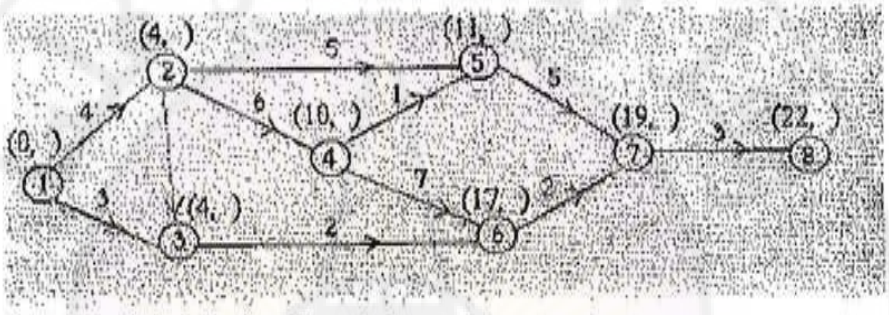
$$ET_5 = \max_{i=2,4}\{ET_2 + T_{25} = 4 + 5 = 9,$$
$$ET_4 + T_{45} = 10 + 1 = 11\} = 11$$

$$ET_6 = \max_{i=3,4}\{ET_3 + T_{36} = 4 + 2 = 6,$$
$$ET_4 + T_{46} = 10 + 7 = 17\} = 17$$

$$ET_7 = \max_{i=5,6}\{ET_5 + T_{57} = 11+5 = 16,$$
$$ET_6 + T_{67} = 17+2 = 19\} = 19$$

$$ET_8 = ET_7 + T_{78} = 19+3 = 22$$

و هكذا باكتمال حسابات الانتقال نحو الأمام تصبح لدينا الشبكة بالشكل التالي:



الشكل (V-30)

ثانياً- حسابات مرحلة الانتقال نحو الوراء :

إن حسابات هذه المرحلة تبدأ من حادث نهاية الشبكة، ثم يتم الانتقال إلى الوراء حتى نصل إلى حادث بداية الشبكة. و تهدف هذه المرحلة إلى حساب "الوقت المتأخر" the Latest Time لوقوع الحادث ؛ و نرمز له بالرمز LT_i . و يمكن تعريف الوقت المتأخر على أنه: أبعد وقت يمكن أن يقع فيه الحادث ؛ دون أن يتسبب ذلك في أي تأخير في زمن تنفيذ المشروع ككل ضمن الوقت المحدد له مسبقاً. و نعتبر هنا أن الوقت المحدد مسبقاً لتنفيذ المشروع بكامله، بأنه الوقت المبكر

الذي نحصل عليه عند حادث نهاية الشبكة في حسابات مرحلة الانتقال نحو الأمام. و بالتالي إذا كانت $i=n$ هو الحادث النهائي فإن :

$$LT_n = ET_n$$

وهي تشكل بداية حسابات الانتقال نحو الوراء. أما لحساب باقي العقد فنطبق القاعدة التالية:

$$LT_i = \min_j \{LT_j - T_{ij}\}$$

و نضع القيم الناتجة لكل حادث كرقم ثان في الثنائية المرفقة بالحدث. و عليه فإن قيم LT تحدد كما يلي:

$LT_8 = 22$

$LT_7 = LT_8 - T_{78} = 22 - 3 = 19$

$LT_5 = LT_7 - T_{57} = 19 - 5 = 14$

$LT_6 = LT_7 - T_{67} = 19 - 2 = 17$

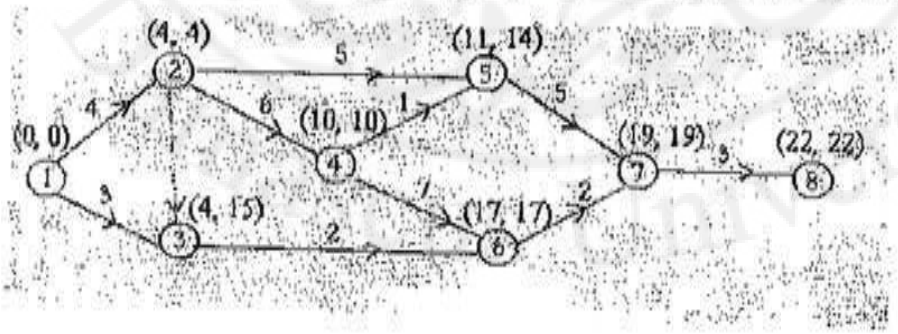
$$LT_4 = \min_{j=5,6}\{LT_6 - T_{46} = 17 - 7 = 10,$$
$$LT_5 - T_{45} = 14 - 1 = 13\} = 10$$

$LT3 = LT6 - T36 = 17 - 2 = 15$

$$LT_2 = \min_{j=5,4,3}\{LT_5 - T_{25} = 14 - 5 = 9,$$
$$LT_4 - T_{24} = 10 - 6 = 4,$$
$$LT_3 - T_{23} = 15 - 0 = 15\} = 4$$

$$LT_1 = \min_{j=2,3}\{LT_2 - T_{12} = 4 - 4 = 0,$$
$$LT_3 - T_{13} = 15 - 3 = 12\} = 0$$

و هكذا باكتمال حسابات الانتقال نحو الوراء يكون لدينا الشبكة التالية :



الشكل (V-31)

نستخدم الآن نتائج الحسابات السابقة في المرحلتين لتحديد المسار الحرج. كما ذكرنا سابقاً بأن المسار الحرج يتشكل من سلسلة متتابعة من الأنشطة الحرجة، اعتباراً من عقدة المنبع إلى عقدة المصب. و حتى نقول عن النشاط (i, j) أنه نشاط حرج يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة التالية :

١. $ET_i = LT_i$
٢. $ET_j = LT_j$
٣. $ET_j - ET_i = LT_j - LT_i = T_{ij}$

و هذه الشروط تظهر لنا أنه لايوجد وقت فائض بين الوقت المبكر و الوقت المتأخر لوقوع الحادث لكل نشاط حرج. و يترجم الكلام السابق بتحقق المساواة بين مركبتي الثنائية المرافقة لحادث البداية، و كذلك بين مركبتي الثنائية المرافقة لحادث النهاية لكل نشاط حرج.

و بذلك نجد أن الأنشطة الحرجة في مثالنا هي:

(1, 2) ، (2, 4) ، (4, 6) ، (6, 7) ، (7, 8) و هي تحدد المسار الحرج في الشبكة التي درسناها و هو يساوي 22 وحدة زمنية . يمكن أيضاً كتابة المسار الحرج بالشكل:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$

و يظهر المسار الحرج أن أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع هو 22 وحدة زمنية و إن أي تأخير في زمن تنفيذ أي نشاط حرج سوف ينعكس على زمن تنفيذ المشروع ككل ، و يؤدي إلى تأخير التنفيذ.

أما الأنشطة الأخرى غير الحرجة فيمكن التأخير في تنفيذها ضمن حدود معينة دون أن يؤثر ذلك في زمن تنفيذ المشروع بأكمله.

V-3-3-3-حساب الوقت الفائض في شبكة المسار الحرج CPM :

بعد أن نحدد المسار الحرج ، يجب علينا حساب الوقت الفائض للأنشطة غير الحرجة، طبعاً الوقت الفائض للنشاط الحرج يساوي الصفر و هذا ما يجعله نشاطاً حرجاً.

نميز عادة بين نوعين من الأوقات الفائضة:

١. الوقت الفائض الإجمالي Total Float : و هو عبارة عن الفرق بين الحد الأقصى للوقت المتاح لإنجاز النشاط $(LT_j - ET_i)$ و بين مدته الفعلية T_{ij} أي أن : $TF_{ij} = LT_j - ET_i - T_{ij}$

٢. الوقت الفائض الحر Free Float : و هو عبارة عن الوقت الذي يمكن أن نؤخر فيه النشاط (i, j) دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير في الوقت المبكر لبدء النشاط الذي يليه مباشرة و نرمز له FF_{ij} ، و يتم حسابه بالشكل التالي:

$$FF_{ij} = ET_j - ET_i - T_{ij}$$

نلاحظ أن الوقت الفائض الحر حسب هذا التعريف لنشاط غير حرج لا يمكن أن يزيد عن الوقت الفائض الكلي لهذا النشاط.

و تجدر الملاحظة إلى أن النشاط الحرج يجب أن يكون كل من وقته الفائض الإجمالي ووقته الفائض الحر يساوي الصفر. أما النشاط غير الحرج فوقته الفائض الإجمالي يجب أن يختلف عن الصفر، أما وقته الفائض الحر فيمكن أن يساوي أو لا يساوي الصفر.

نلخص حسابات المسار الحرج و كذلك حسابات الأوقات الفائضة للأنشطة غير الحرجة الخاصة بالمثال الذي عالجناه في الجدول التالي:

النشاط (i, j)	المدة T_{ij}	الوقت المبكر للحادث i ET_i	الوقت المبكر للحادث j ET_j	الوقت المتأخر للحادث i LT_i	الوقت المتأخر للحادث j LT_j	فائض الوقت الإجمالي TF_{ij}	فائض الوقت الحر FF_{ij}

1-2	4	0	4	0	4	0*	0
1-3	3	0	4	0	15	12	1
2-4	6	4	10	4	10	0*	0
2-5	5	4	11	4	14	5	2
3-6	2	4	17	15	17	11	11
4-5	1	10	11	10	14	3	0
4-6	7	10	17	10	17	0*	0
5-7	5	11	19	14	19	3	3
6-7	2	17	19	17	19	0*	0
7-8	3	19	22	19	22	0*	0

* تشير إلى النشاط الحرج

بالاعتماد على الجدول السابق نستطيع أن نعرف إلى أي مدى يمكننا أن نـــؤخر في زمن تنفيذ الأنشطة غير الحرجة دون أن يؤخر ذلك زمن تنفيذ المشـــروع، مما يسمح لنا بإعادة توزيع الموارد، بحيث نركز على الأنشطة الحرجة كـــي لا يحدث فيها أي تأخير مستفيدين من الوقت الفائض للأنشطة الحرجة.

Damascus University

تمارين عامة

1- أوجد الرسم الممثل بمصفوفة الارتكاز التالية:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a, b) (a, c) (b, c) (b, e) (c, e) (c, d) (d, e)

ثم أوجد درجة كل رأس من رؤوس الرسم.

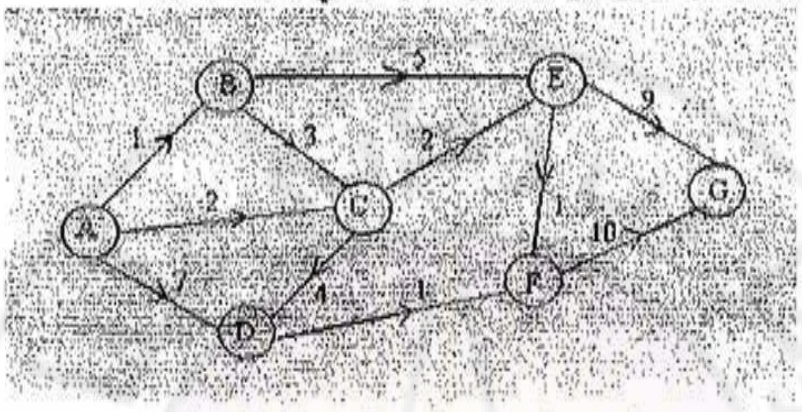
2- أوجد الرسم الموجه الممثل بمصفوفة الارتكاز التالية:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

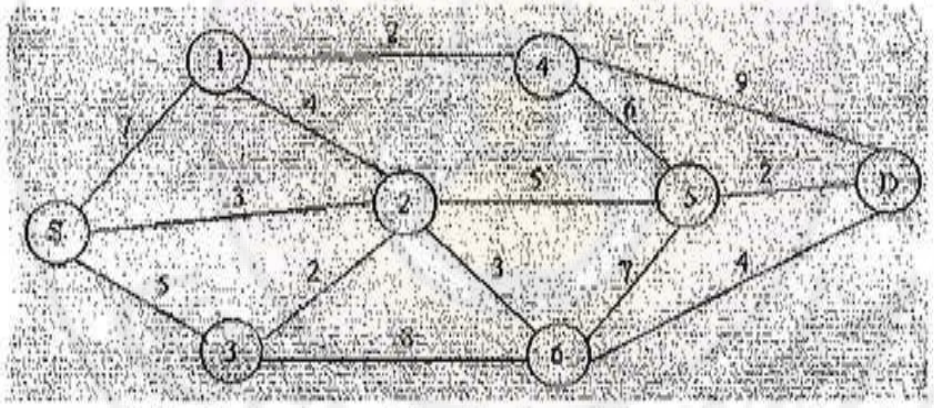
(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 5) (3, 2) (3, 4) (4, 6) (5, 6)

ثم أوجد درجة كل رأس من رؤوس الرسم الموجه.

3- أوجد أقصر مسار بين العقدتين A و G في الشبكة التالية:

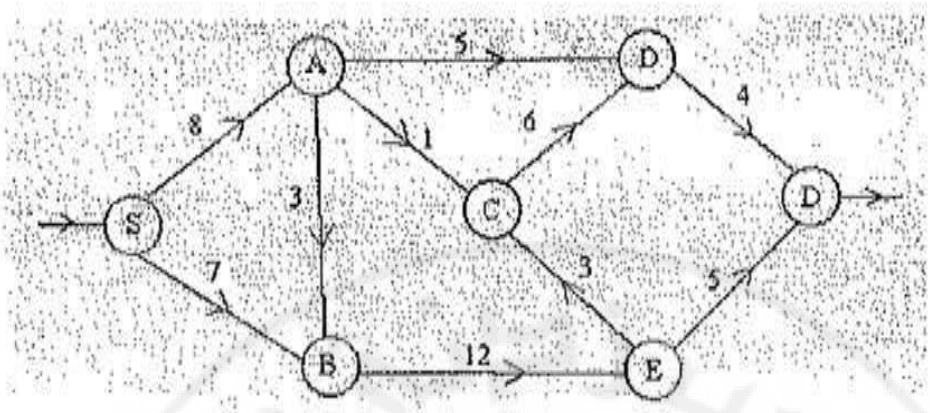


4- أوجد أقصر مسار بين العقدتين S و D في الشبكة التالية:



و ما هو أقصر مسار من العقدة s إلى كل عقدة من عقد هذه الشبكة ؟

5- تقوم إحدى شركات الغاز بضخ الغاز من مركز الإنتاج S إلى مركز التصدير d عبر شبكة الأنابيب الموضحة في الشكل التالي:



حيث تمثل الأرقام المبينة على الشكل حجم الغاز الذي يمكن ضخه في الساعة عبر أنابيب هذه الشبكة. فما الحجم الأعظم لتدفق الغاز من مركز الإنتاج s إلى مركز التصدير D في الساعة ؟

6- لتكن لدينا الأنشطة الخاصة بأحد المشاريع و أزمنتها كما هو موضح في الجدول التالي:

النشاط	الزمن	الأنشطة السابقة له مباشرة
A	5	-
B	9	-
C	3	-
D	7	B
E	8	B
F	2	E
G	7	A, D
H	10	B
I	4	C, F
J	3	A, D
K	6	G, H, I
L	5	C, F

المطلوب:

ارسم شبكة CPM الممثلة لهذا المشروع، و من ثم حدد المسار الحرج و الأوقات الفائضة الإجمالية و الحرة.

الفصل السادس

VI- التهيج الخطي (*)

مقدمة في بحوث العمليات

VI-1 - البرمجة الخطية

VI-1-1- تمهيد

VI-1-2- تعاريف أولية

VI-1-3- حل مسألة البرمجة الخطية.

VI-1-4- الازدواجية (التنالية) في البرمجة الخطية

VI-1-5- تحليل الحساسية في البرمجة الخطية

VI-2- مسألة النقل

VI-2-1- تمهيد

VI-2-1- الصيغة الرياضية لمسألة النقل

VI-2-3- تعيين الحل الأولي

VI-2-4- طرق تعيين الحل الأمثل

VI-2-5- حالات خاصة في مسائل النقل

VI-2-6- مسألة النقل ذات المراكز الوسيطية

VI-3- مسألة التخصيص (التعيين)

VI-3-1- مقدمة

VI-3-2- الصياغة الرياضية لمسائل التخصيص

VI-3-3- الطرق المستخدمة في حل هذه المشكلات

VI-3-4- معالجة مسائل التخصيص وفق طريقة النقل

VI-3-5- معالجة مسائل التخصيص وفق طريقة البرمجة الخطية.

VI-3-6- بعض المشكلات التي تصادفنا لدى حل مسائل التخصيص.

VI-3-7- التنالية في مسألة النقل.

(*) البرمجة الخطية " التهيج الخطي " وفقا لتسمية بعض المصطلحات العربية وتمشيا مع ما يستعمل من هذه المصطلحات في الجامعات العربية الأخرى .

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

مقدمة في بحوث العمليات :

ان من أهم المشكلات التي تعانيها غالبية دول العالم سواء أكانت متقدمة أم نامية هي معوقات وصعوبات عمليات الإنتاج وأتمتته والناجمة عن محـــدوديات الموارد " سواء أكانت بشرية متمثلة بـــ : أطباء ، مهندسين ، فنيين ، اداريـــين ... أم مادية متمثلة بـــ : رؤوس الأموال ، وسائل الإنتاج ، السدود ... " أو في قلتها وندرتها . وهي من المواضيع التي وجهت الباحثين والعاملين فـــي الإدارة للبحث عن طرق عملية ووسائل رياضية، تجعل عمليـــة اتخـــاذهم للقـــرارات ناجحة، بغية استخدامهم للموارد المحدودة بالشكل الأمثل والأفضل ســـواء فـــي تحقيق أكبر ربح " عائد " ممكن أم في أقل تكاليف إجمالية ممكنة . تعد الأســـس والأساليب العلمية من إحصائية ورياضية والمطبقة فـــي التخطـــيط والتنظـــيم والرقابة والهادفة إلى الاستخدام الأمثل والأفضل للموارد ركائز بحوث العمليات " O.R.=Operating Research"

يصعب علينا معرفة أصل وبدايات بحوث العمليات لأن هنـــاك مـــن قـــام بأبحاث وأنجز أعمالا يمكن اعتبارها في وقتنا الحاضر بحوث عمليات مثلا :

- لقد قام القائد البطل المسلم خالد بن الوليد بمباغتة الروم الـذين توقعـوا قدومه الى ساحة القتال ، حينما اجتاز صحراء بلاد الشام في أقصر وقت ممكن عوضا عن سلوكه لطريق طويلة .

- لقد وجدت كتابات عنها في القرن التاسع عشر فـــي كتـــاب اقتصـــاديات الآلات والتصـــنيع Economy of Machinary & Man ufactures لتشـــارلز باباج charles Babbage .

– وفي عام ١٩١٠ قام المهندس الدانماركي ايـرلنج A.K.Erlang بنشـر أبحاث مهمة بتسيير عمليات معالجة تذبذب طلبات الرد على الهـاتف بسـكان مدينة كوبنهاجن ، إذ أخذت عملياته هذه شكل نظرية صفوف الانتظار .

– وفي عام ١٩١٤ نشر العالم البريطاني لانكستر Lanchaster بحثا يبين فيه علاقة فعالية السلاح وتفوق مقدرة الكائن البشري .

– قام العالم توماس أديسون T.Edison بوضع الطرق الأكثر فعاليـة فـي تقليل خسائر السفن لدى مواجهة الغواصات المعادية في الحرب العالمية الأولى.

ومما لا شك فيه أن بدايات بحوث العمليات كانت في مسـائل المثلويـة " التفضيل " Optimization Problems " التي تبحث عن التعظـيم أو التقليـل، كمصدر من المصادر المحددة منذ أكثر من حذف قرن ونصف ، اذ تم تطبيقها على إيجاد حلول مسائل عديدة فـي مجـالات العـوم الفيزيائيـة والهندسـية والاقتصادية عن طريق حساب التفاضل Differantial Calculus ، ثم ما لبثت أن تطورت مسائل المثلوية هذه في بداية الثلاثينات إذ عرفت بمسائل البرمجـة Programming Problems إلاّ أن التفكير المركز والعمل الجاد في هذا المجال كان حديث العهد نسبياً إذ تعود بدايات التفكير إلى الحرب العالمية الثانية ، وان نتائج الابحاث والدراسات التي قام بها العديد من المختصين والعلماء في بـلاد عديدة طبقت في مجالات عديدة .

١–حينما اعترضت القوات البريطانية مشكلات متنوعة تتعلق بتخصـيص مواردها العسكرية بالشكل الذي يتناسب مع أفضل التكتيكات العسكرية سواء من الناحية الهجومية أم الدفاعية ، وكان لا بد من التوصل إلى حلولها . لهذا كلفت السلطات البريطانية مجموعة من الخبراء والباحثين في مجالات علمية متعـددة

دراسة المشكلات الاستراتيجية والتكتيكية التي كان لا بد من التوصل الى حلولها والمتعلقة بتحديد أمور مواقع الأسلحة ومستويات التسليح المختلفة لدى الدفاعات الجوية والبحرية في الجزر البريطانية ، إذ كان الهدف الرئيسي لهذه المجموعة دراسة كيفية تحقيق الاستخدام الأفضل والأمثل للموارد البشرية والمادية والتعرف عليها وتحديد الحل الأمثل الذي يضمن التخصيص الأمثل لهذه الموارد " خاصة فعالية الرادارات العسكرية في رصد الطائرات واستخدام قاذفات القنابل في تحقيق النصر، وذلك بأقل خسارة بشرية ومادية " . وفي عام ١٩٤١ أسهمت نتائج الاستغلال الأمثل للموارد العسكرية في كسب بريطانيا العديد من المعارك مثل : إحدى معارك الطيران الفاصلة ، إحدى معارك الباسيفيكي وأخرى في شمال المحيط الأطلسي . وباعتبار أن هذا الفريق أخذ يتعامل مع بحوث على عمليات (عسكرية) لهذا أطلق على مجموعة هذه الدراسات بحوث العمليات وقد أخذت مجالا واسعا تدخل كل الأبحاث والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التخصيص Assignment Problems ومسائل اتخاذ القرارات Decision Problems .

٢-لأن هذه الدراسة كانت مجدية وناجحة وأدت الى نتائج متقدمة . فقد قامت السلطات العسكرية الأمريكية بتكوين مجموعة مماثلة من الخبراء والباحثين لدراسة المشكلات الاستراتيجية والتكتيكية وبتوسيع كبير وبالذات أساليب مشكلات التفضيل الأكثر فعالية ، إذ شملت المشكلات المتعلقة بنقل المعدات والمؤن والذخائر الحربية وتحديد المسارات المثلى للغواصات والقطع البحرية لتجنب ضربها من قبل العدو، وتخطيط عمليات زرع الألغام في البحار والمحيطات ، واستخدام الأجهزة الإلكترونية في القوات الأميركية التي وجدت في أنحاء مختلفة في العالم .

تبع بريطانيا وأمريكا في هذا الخصوص كندا ، إذ قامت بتكوين مجموعة مماثلة كلفت بدراسة الأبحاث المختلفة في مجال العمليات الحربية وللغاية نفسها.

بعد نهاية الحرب العالمية الثانية ، أخذ انتشار واستخدام بحوث العمليات الشكل الواسع والعميق في وضع الحلول الكثيرة والمجدية ، لتدخل في المجالات الصناعية المختلفة مثل : صناعة الطائرات والصواريخ والآليات والأدوية والأطعمة وصناعة البترول وفي مؤسسات الاتصالات السلكية واللاسلكية ومؤسسات النقل ... ومما ساعد على هذا الانتشار العدد الكبير والهائل في المنتجات الصناعية وتوافرها في الأسواق المحلية والإقليمية والدولية وشدة المنافسة بين المنشآت والمؤسسات الصناعية ، واستخدام الحواسيب الإلكترونية في تسهيل العمليات والتوصل إلى النتائج بسهولة وسرعة فائقة .

لقد نالت حرب الخليج الحظ الأوفر في نقل الجيش الأمريكي من أمريكا وقواعده المنتشرة في شتى بقاع العالم إلى قواعد مختلفة في شبه جزيرة العرب من خلال الامكانيات المتاحة " كالطائرات وأماكن هبوطها وحمولتها القصوى ولوازم الجيش" ، و تحديد المطلوب من صواريخ باتريوت وأماكن نشرها لمنع وصول صواريخ سكود العراقية .

يطلق عادة على مجموعة الأدوات والأساليب القياسية والطرق العلمية من طرق رياضية وإحصائية "لتنظيم تعاون العمليات والأنشطة داخل نظام ما" والتي يستطيع من خلالها العاملون في مجالات الإدارة من الوصول لاتخاذ قرارات سليمة ذات دقة وموضوعية تصد تحقيق الاستخدام الأمثل والأفضل للموارد البشرية والمادية المتاحة ببحوث العمليات.

ولقد ارتأيت أن أصوغ مجموعة الأدوات والأساليب القياسية الكمية هذه من خلال أبحاث شاملة عبر تطبيقات واقعية يستطيع الفرد ، سواء المبتدأ من الإلمام بها أم كان عاملا في مجال الإدارة من الاستزادة من هـذا المجـال المتطـور معرجا في بعض النواحي إلى الأسس والقوانين والبراهين الرياضية المناسـبة لمستوى المختص بغية الشرح والتوضيح للأفكار والآراء الواجب تطبيقها فـي هذه الأبحاث ، حريصا كل الحرص على إمكانيات ما لدى الطالب من استيعاب لمعاني الرياضيات والمستوى الذي لديه متوخيا الحذر من النقاط الرياضية التي تخيف الطالب وتبعده عن الهدف والغاية التي من أجلها طلب العلم والتعلم لرفع المستوى الثقافي والعلمي لديه .

إن نماذج بحوث العمليات متعددة نذكر منها :

- البرمجة الرياضية (*) Mathematical Programming
- نماذج تحليل الشبكات Network Models
- الإدارة العلمية للمخزون Inventory Models
- نماذج صفوف الانتظار Waiting lines Models
- أساليب المحاكاة Simulation Techniques
- نماذج المنافسة Competition Models
- النماذج الديناميكية Dynamic Models

(*) تضم البرمجة الرياضية أبحاثا متعددة :
مسألة النقل – البرمجة الخطية – البرمجة المعيارية – البرمجة الخطية بأكثر من تابع هدف – البرمجة الخطية في الأعداد الصحيحة – البرمجة العشوائية .

- نظرية القرارات Decision Theory
- النماذج المسلكية Bchanioral Models
- الطرق الاستكشافية Heuristic Methods
- ضم الطرق وابتكارها في بحوث العمليات

.Combined and inventiue methods in O.R

وسوف نتعرف في هذا الفصل على الأبحاث التالية :

البرمجة الخطية " التهيج الخطي سابقا "

مسألة النقل

مسألة التخصيص

نظرية الطوابير .

VI-1- البرمجة الخطية : Linear Programming

VI-1-1- تمهيد :

تعد البرمجة الخطية Programming Linear حديثة العهد نسبيا إذ لا يزيد عمرها على عقد واحد ، وقد كانت بداياتها في الاستخدامات العسكرية ثم ما لبثت ان انتقلت الى مجالات أخرى في معالجة المسائل الادارية في قطاعات متعددة . ويعد جورج دانتزيغ George Dantzig عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات أول من قدم طريقة عملية لحل مسائل البرمجة الخطية والتي تدعى بطريقة السمبلكس وذلك في سنة ١٩٤٧ بالتعاون مع مجموعة من العلماء

العاملين في القوات الجوية الأمريكية . إلا أن تفاصيل هذه الطريقة لم تنتشر إلا في عام ١٩٥٦.

سميت البرمجة كونها تبحث في اختيار برنامج معين يحقق الهدف المطلوب من بين مجموعة من البرامج الممكنة ، وأما سبب الخطية فيعود إلى أن جميع العلاقات الرياضية التي تربط متغيرات المسألة المدروسة والتي تشكل النموذج الرياضي هي علاقات خطية .

لقد كان لفعالية البرمجة الخطية في معالجة مشكلات الإدارة المعقدة الأثر الواضح في الاستخدامات العسكرية التقليدية والحديثة والاستخدامات الزراعية وفي صناعة تكرير البترول – وفي مجالات رقابة الإنتاج وتخطيط عمليات النقل ومعالجة الفاقد والضائع من الخدمات في عمليات الإنتاج .

تعرف البرمجة الخطية بانها العملية المنتظمة التي نستطيع باستخدامها حل مسألة ما يوجد بين عناصرها علاقات ثابتة . هذه العملية المنتظمة ليست سوى أسلوب رياضي يتدخل في توزيع الأفضل والأمثل لمجموعة من الموارد البشرية والمادية المتاحة على عدد من الحاجيات التي تتطلب تلك الموارد ، وذلك ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة ، وبما أنها أسلوب رياضي، إذن فهي طريقة رياضية تتمثل في صورة معادلات أو متراجحات لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة بغية تحقيق هدف معين ، وقد أخذ أول تطبيق لمسائل البرمجة الخطية هيئة نموذج يعمل على حل مشكلة التوسع الاقتصادي الذي ساعد العالم الروسي ليونتيف Leontief في تكوين نموذج المدخلات والمخرجات input – ouput .

تستند البرمجة الخطية الى مبدأين اثنين :

المبدأ الأول : هو مبدأ الخطية ، والمقصود بمبدأ الخطية ، وهو وجود علاقات ثابتة ومحددة بين المتغيرات المؤثرة في المشكلة موضوع البحث ، بحيث أن أي تغيير في قيمة أحدها سوف يؤدي الى تغيير ثابت في قيمة الآخر .

المبدأ الثاني : هو مبدأ الأكيدية والمقصود بمبدأ الأكيدية: هو أنه ليس من المتوقع حدوث أية تغييرات في قيم المتغيرات التي تؤثر في مشكلة ما.

تكمن أهداف البرمجة الخطية عادة في شكلين اثنين :

الشكل الأول : تعظيم الربح .

الشكل الثاني : تخفيض "تقليل"الكلفة .

أما الغاية الأساسية في مسألة البرمجة الخطية فتكمن في مشكلة البحث عن الحل المثل الذي قد يكون في صورة أعظم ربح أو أدنى تكلفة " بمعنى آخر عن حلول لمسائل المثلوية Optimization Problems تلك المسائل التي تبحث عن تعظيم أو تقليل قيمة تابع ما " ، إذ يمكن التعبير عن هذه الصورة بتابع خطي يتكون من عدد من المتغيرات تتحدد قيمته " سواء العظمى أو الصغرى " في حدود بعض القيود التي تأخذ شكل معادلات أو متراجحات خطية .

وتعد البرمجة الخطية بالأساس الطريقة السليمة لعلاج مجموعة خاصة " مسائل البرمجة العامة Programming Problems " من المشكلات الإدارية التي تتعلق وبشكل عام بمشكلات تخصيص الموارد " سواء أكانت هذه الموارد نادرة أم محدودة الكمية " حيث يوجد عدد كبير من بدائل هذه الموارد ، والمشكلة تتركز في كيفية اتخاذ القرار بشأن توزيع هذه الموارد بين البدائل شريطة تحقيق الحد الأقصى من الفاعلية الاقتصادية .

إن المشكلات الإدارية التي تتدخل فيها مشكلة تخصيص الموارد كثيرة منها:

- مشكلة تحديد خطوط الإنتاج وتنظيم العملية الإنتاجية بغية الحصول على أكبر كمية من الإنتاج وذلك ضمن ظروف معينة .

- مشكلة تحديد العناصر المكونة لسلعة معينة والتوصل إلى الحد الأدنى للهدر .

- مشكلة توزيع الإنتاج بين الآلات المختلفة والتوصل إلى الاختيار السليم لطرق الإنتاج المتنوعة عن طريق جدولة الآلات في العمليات الإنتاجية .

- مشكلة التوصل إلى الطاقة الإنتاجية القصوى للآلات والمعدات واستخدام طاقات النقل المحدودة لتوزيع إنتاج ما أو مسافرين إلى أمكنة مختلفة .

- مشكلة توزيع ميزانية محدودة للدعاية والإعلان على مؤسسات إعلانية مختلفة.

- مشكلة توزيع الزمن المحدد للإداريين على أعمال مجالات متعددة .

أما العناصر الأساسية التي تتدخل في مسألة البرمجة الخطية فهي :

الهدف : تعيين المشكلة موضوع الدراسة بالشكل الرياضي الدقيق ، بمعنى آخر تحديد هدف المشكلة وغايتها بالشكل الواضح والمحدد والذي هو إما تحقيق أقصى ربح أو أعظم فائدة أو أقل تكلفة أو تحميل الآلات اقتصاديا ، أو تقليل العوادم ،.... حيث يطلق على هذا الهدف تابع الهدف Objective Function . يعد تابع الهدف مقياس المثالية في حل مسألة البرمجة الخطية إذ إن قيمة هذا التابع تدلنا على الاختيار الصحيح والناجح لحل المسألة ويسمى الحل الذي يحقق هذا الهدف الحل الأمثل (الحل المثالي) .

القيود Constraints : الإمكانات المتوافرة من الموارد البشرية والمادية المتعلقة بالمشكلة والذي دعوناه بمحدودية الموارد البشرية والمادية المتاحة

وندرتها سواء هذه الموارد في رؤوس أموال مستثمرة ، أم في العمال والفنيين والمهندسين والإداريين ، إذ لولا هذه الندرة لما وجدت المشكلة . وتمثل القيود من خلال مجموعة من المعادلات أو المتراجحات " أو الاثنين معا " التي تأخذ شكل تعابير رياضية Mathematical Expression تبين الشروط الواجب توفرها في حل المشكلة المدروسة.فمثلا يتعلق حجم الإنتاج بالمواد الأولية المتاحة وعدد ساعات العمل ويتحدد الربح بحجم الإنتاج والتكلفة ... الخ .

البدائل : وجود بدائل في العمليات الإنتاجية ، أي وجود حلول بديلة في المشكلات لأن وجود حل وحيد للمشكلة لا يعني أن هناك مشكلة . كأن يكون بمقدور المؤسسة الإنتاجية تصنيع أنواع مختلفة من السلعة x1,x2,x3,x4,x5,...,xn بنسب مختلفة وفق خطط معينة .

الكم : إمكان التعبير عن الإمكانات من خلال أرقام عددية مثلا : كمية الإنتاج بعدد الوحدات المنتجة ، رؤوس المال بالقطع النقدية المتداولة ، اليد العاملة بعدد العمال ، الطاقة الإنتاجية بعدد ساعات العمل إما أسبوعيا أو شهريا أو سنويا أو موسميا ...

الخطية Linearity: توفر العلاقة الرياضية الخطية بين جميع العوامل والمتغيرات المكونة للمشكلة سواء في تابع الهدف أم في القيود المفروضة على المشكلة من معادلات أو متراجحات حيث التعبير الرياضي للشكل الخطي للمتغيرات هو :

$$a_1x_1+a_2 x_2 +a_3 x_3 +...+a_n x_n$$

باعتبار ان : a_i قيم عددية ثابتة وذلك مهما تكن i ، x_i متغيرات لا يمكن لأحدها أن يأخذ أحد الأشكال التالية :

$x_k.x_p$, x_k/x_p , x_n "n ≠1" , log x وذلك مهما يكن الدليل i

كل هذه العناصر الأساسية لمسألة البرمجة الخطية تدخل في الشكل الرياضي لهذه المسألة والذي يحوي علاقات رياضية معينة تأخذ شكل معادلات أو متراجحات أو الاثنين معا إضافة إلى تابع الهدف ومتراجحات المتغيرات غير السلبية .

وأخيراً فالبرمجة الخطية ليست إلا فرعا من الفروع المتعلقة بالبرمجة الرياضية وتضم هذه الأخيرة : البرمجة الخطية التي تشمل الأبحاث التالية :

- طريقة الخطوط البيانية
- الطريقة المبسطة " طريقة السمبلكس "
- نماذج النقل .
- طريقة التعيين .

البرمجة غير الخطية وتتضمن :

- البرمجة التربيعية .
- البرمجة الديناميكية .

VI-1-2- تعاريف أولية :

VI-1-2-1- أمثلة اقتصادية على مسائل البرمجة الخطية :

مثال (١) : تتم عملية تصنيع ثلاثة منتجات p1 و p2 و p3 باستخدام أربع مواد أولية M1 و M2 و M3 و M4 . فإذا علمت أن المتاح من هذه المواد الأولية والعوامل الفنية " الاستهلاكات الخاصة " ومردود الوحدة الواحدة معطى وفق الجدول التالي :

Py / MI	العوامل الفنية			المتاح بالعلن
	P1	P2	P3	
M1	1	2	2	16
M2	2	3	1	12
M3	1	2	5	10
M4	4	3	2	18
مردود الوحدة الواحدة	3	2	1	

الجدول (VI-1)

فالمطلوب تحديد الكميات X1 و X2 و X3 التي يجب إنتاجها من P1 و P2 و P3 بالشكل الذي نحقق فيه أعظم ما يمكن من الأرباح .

نستطيع وبالعودة إلى الجدول السابق تشكيل النموذج الرياضي لهذه المسألة:

$$\text{Max } z=3x_1+2x_2+x_3$$

$$x_1+2x_2+2x_3 \le 16$$

$$2x_1+3x_1+x_3 \le 12$$

$$x_1+2x_2+5x_3 \le 10$$

$$x_1+3x_2+2x_3 \le 18$$

$$x1, x2, x3 \ge o$$

مثال (٢) :

لدى منشأة زراعية لتربية الحيوانات نوعان من علف الحيوانات F1 ، F2 يدخلان في تصنيع العليقة العلفية التي من الضروري أن تحتوي على ٤ عناصر غذائية هي A, B, C, D، . فإذا علمت أن معطيات هذه المسألة هي كما في الجدول التالي " الجدول (VI-2) "

نوعية الوحدات الغذائية	عدد الوحدات الغذائية الموجودة في كغ علف		عدد الوحدات الغذائية المطلوب توافرها في كل عليقة علفية
	F1	F2	
A	١٠٠	–	٤٠٠
B	–	١٠٠	٦٠٠
C	١٠٠	٢٠٠	٢٠٠٠
D	٢٠٠	١٠٠	١٧٠٠

الجدول (VI-2)

وإن تكلفة الكغ الواحد من العلف F1 هو ٢ وحدة نقدية والكلغ الواحد من العلف F2 هو ٠,٨ وحدة نقدية فالمطلوب تحديد النموذج الرياضي للعليقة العلفية بالشكل الذي تحقق التكلفة الدنيا .

لنرمز بـ x_1 للكمية التي تدخل في العلف F1 وبـ x_2 للكمية التي تدخل في العلف F2 عندها يمكن صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي :

$$\text{Min}z = 2x_1 + 0.8x_2$$

$$100\ x_1 \geq 400$$

$$100\ x_2 \geq 600$$

$$100\ x_1 + 200x_2 \geq 2000$$

$$200\ x_1 + 100x_2 \geq 1700$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

VI-1-2-2- الصيغة العامة لمسائل البرمجة الخطية :

من خلال الامثلة السابقة نلاحظ النقاط التالية :

- أن قيود مسألة البرمجة الخطية يمكن أن تكون متراجحات Inequality و (أو) معادلات Equation .

- يمكن أن تأخذ المتراجحات الشكل ≤ (أكبر أو تساوي) و (أو) الشكل التالي ≥ (أصغر أو تساوي) .

- تابع الهدف أو تابع الغرض : إما أن تكون الغاية منه التقليل أو التعظيم .

- المتغيرات " المتحولات " يجب أن تكون موجبة (توجد بعض المسائل التي تكون من أجلها المتحولات غير موجبة أو لا على التعيين ، ولكن ضمن أمور معينة لن نضعها في حسابنا في أبحاثنا هذه) .

وحتى يمكن كتابة بعض الوقائع المرتبطة بمسألة البرمجة الخطية من خلال الصيغة الاساسية سوف نأخذ الأمور التالية :

i : (i =1,2,3,...m) رقم ترتيب القيود (مثلا : رقم ترتيب المواد الأولية أو المصادر المتاحة) "غالبا n>m "

j :(j =1,2,3,...n) رقم ترتيب المتغيرات " المتحولات " (مثلا : رقم ترتيب المنتجات المأخوذة بعين الاعتبار) .

bi: (i =1,2,3,...m) الحدود المطلقة (مثلا : الكميات المتاحة من المواد الأولية) وهي كميات ثابتة في مسألة البرمجة الخطية تمثل حجم الموارد المتوافرة للإنتاج .

xj : (j =1,,,2,3,.. n) متغيرات " متحولات " المسألة (مثلا : الكميات التي تدخل في العملية الإنتاجية) .

aij المعاملات التقانية (مثلا : الكميات من المصادر i اللازمة من أجل تصنيع كميات المنتجات j) وهي كميات ثابتة في مسألة البرمجة الخطية تمثل النفقات المعيارية للموارد الإنتاجية اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج .

C_j : كميات ثابتة في مسألة البرمجة الخطية .

وباعتبار أن غالبية مسائل البرمجة الخطية هو التعرف على أمثلية تخصيص الموارد وفق المتغيرات الداخلة في المسألة فإن المعاني الاقتصادية لـ: cj,bi,aij هي :

a_{ij} : هي كمية المورد i التي تحتاجها الواحدة في الإنتاج j لتحقيق ربح " أو كلفة " لكل وحدة من الإنتاج قدره c_j ضمن الإمكانات المتاحة " الكميات المتوفرة " bi .

إذا وضعنا في حسابنا الملاحظات والنقاط السابقة نستطيع تعريف الشكل العام لمسائل البرمجة الخطية على النحو التالي :

يطلب تحديد القيمة المثلى للصيغة الخطية التالية : (تعظيما او تقليلا) .

$$F=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+...+c_nx_n$$

بحيث تحقق المتحولات $x_1,x_2,x_3..x_n$ المعادلات والمتراجحات التالية :

$$i_1x_1+ai_2x_2+..+ai_nx_n\geq bi \qquad (i=1,2,..m_1)\ a$$

$$.ai_1x_1+ai_2x_2+..ai_nx_n=bi \qquad (i=m_1+1,..m_2)$$

$$،ai_1x_1+ai_2x_2+..ai_nx_n=bi \qquad (i=m_2+1,..m)$$

وشرط عدم السلبية المفترض تحقيقه نتيجة معاني المجاهيل .

$$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0, \quad x_3\geq 0, \quad x_n\geq 0$$

حيث $m_2\leq m$ $m_1\geq 1$, وغالبا $m<n$

إن الشكل العام هذا يمكن كتابته بالشكل المختصر التالي :

$$\text{Min (Max) } f = \text{Min (Max)} \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \qquad (VI\text{-}1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & i = 1,2,...,m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = m_1+1,...,m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & i = m_1+1,...,m_2 \end{array}\right\} \quad \text{(VI-2)}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,...,n \qquad \text{(VI-3)}$$

يسمى التابع (VI-1) تابع الغرض (تابع الهدف Objective Function ، تابع الفعالية). أما المعادلات أو المتراجحات (VI-2) والتي تصف الشروط التي من خلالها تبدو الظاهرة الاقتصادية المدروسة فتسمى القيود التقانية والمتراجحات (VI-3) شروط عدم السلبية .

سنقدم فيما يلي بعض الملاحظات " التعاريف " الشعاعية : لنلاحظ أن

$a_i = (a_{i1},a_{i2},a_{i3},...,a_{in})$ (حيث :I=1,2,3,...,n) هو الشعاع الأفقي لمعاملات المتحولات في القيد i.

$x= (x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ الشعاع العمودي للمتحولات .

$c= (c_1,c_2,c_3,...,c_n)$ الشعاع الأفقي لمعاملات المتحولات في تابع الهدف .

ضمن هذه الملاحظات يصبح لمسائل البرمجة الخطية الشكل الشعاعي التالي:

$$\text{Min (max) } f = \min (\max)\ C.X$$

$$a_iX \geq bi \qquad i=1,2,...,m_1$$

$$a_iX = bi \qquad i=m_1+1,...,m_2$$

$$a_iX \leq bi \qquad i=m_2+1,...,m$$

$$X \geq 0$$

VI-1-2-1-3- أشكال مسائل البرمجة الخطية:

تختلف مسائل البرمجة الخطية فيما بينها باختلاف تابع الهدف والقيود الداخلة في تركيب كل مسألة من هذه المسائل . ويمكن النظر إلى هذا الاختلاف إما من اختلاف هدف المسألة " التعظيم أو التقليل " أو من اختلاف اتجاه المتراجحات الداخلة في تركيب مسألة البرمجة .

نقول إن لمسألة البرمجة الخطية الشكل النظامي " المعياري – القياسي " Standard Form ، فيما إذا كانت جملة القيود (VI-2) هي جملة مساواة ، بمعنى آخر $m_1=0$ و $m_2 = m$.

إذن فالشكل النظامي هو :

$$\min (\max) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad 1 \le i \le m$$

$$x_j \ge 0 \qquad 1 \le j \le n$$

إذا وجدنا في مسألة البرمجة الخطية ذات الشكل min أن القيود كافة هي من الشكل $\ge$ (أو إذا وجدنا في مسألة البرمجة الخطية ذات الشكل max ان القيود كافة هي من الشكل $\le$) فإننا سنقول إن مسألة البرمجة الخطية تلك هي ذات الشكل القانوني " Canonical Form "

إذن فمسألة البرمجة الخطية ذات الهدف Min تأخذ الشكل القانوني التالي:

$$Min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad 1 \le i \le m$$

$$x_j \geq 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

أما مسألة البرمجة الخطية ذات الهدف Max فتأخذ الشكل القانوني التالي:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

إذا وجدنا في مسألة البرمجة الخطية ذات الشكل Min أو Max أن القيود فيها تأخذ متراجحات مختلطة من الشكل ≤ و ≥ و = فعندها نقول إن مسألة البرمجة الخطية تلك هي ذات الشكل المختلط «الاعتيادي» «Ordinary Form».

مثال:

$$Max\ (Min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\leq$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq bi \qquad 1 \leq i \leq m$$

$$=$$

$$x_j \geq 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

لنفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وإن شعاع الحدود المطلقة هو: $b = (b_1, b_2, \ldots b_m)$

من خلال الفرضيات السابقة، نلاحظ أن الشكلين السابقين (النظامي والقانوني) لمسألة البرمجة الخطية يمكن كتابتهما بالشكل المصفوفي وفق الجدول التالي (VI-3)

الشكل القانوني	الشكل القانوني	الشكل النظامي	الشكل المختلط	الشكل المختلط	الشكل المختلط
$Min Z = Min c$	$Max Z = Max c$	$Min(Max)Z = Min(Max)CX$	$Min Z = Min c$	$Max Z = Max c$	$Min(Max)Z = Min(Max)cx$
$Ax \geq B$	$Ax \leq B$	$Ax = B$	$Ax \leq B$	$Ax \geq B$	$\geq$ $Ax \leq B$ $=$
$x \geq o$	$x \geq o$	$x \geq o$	$x \geq o$	$x \geq o$	$x \geq o$

نسمي المصفوفة A مصفوفة المعاملات، والشعاع العمودي b شعاع الحدود المطلقة، أما الشعاع الأفقي C فهو شعاع معاملات تابع الهدف (أو شعاع معاملات تابع الفرض).

VI-1-2-4- تحويل مسألة البرمجة الخطية:

يجب التنويه إلى أن حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس لا يمكن أن يتم من خلال الشكل القانوني أو الاعتيادي، بل يجب تحويل هذا الشكل إلى الشكل النظامي «المعياري – القياسي» حتماً.

إن عملية وضع مسألة البرمجة الخطية بالشكل النظامي، أو بالشكل القانوني يمكن تحقيقه من خلال التحويلات التالية:

T_1 – تحويل الهدف min إلى الهدف max (أو بالعكس) يتم من خلال الاستعانة بالعلاقة التالية:

$$\text{Min } (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) = - \max (- c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n)$$

مثال:

$$MinZ = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \Rightarrow MaxZ = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

T_2 – تحويل اتجاه المتراجحات يتم من خلال عملية الضرب بـ (١ -)

فمثلاً:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + .. + a_{in}\, x_n \le b_i$$

تصبح بعد ضرب طرفيها بـ (١-) كما يلي:

$$-a_{i1}\, x_1 - a_{i2}\, x_2 \ldots - a_{in}\, x_n \ge -b_i$$

T3 – تحويل معادلة ما إلى متراجحة يتم من خلال متراجحتين ذات اتجاهين مختلفين، فمثلاً المعادلة:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n = b_i$$

تكافئ المتراجحتين ذات الاتجاهين المختلفين:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \ge b_i$$

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \le b_i$$

وهنا يجب علينا تحويل إحدى المتراجحتين «وذلك حسب نوعية تابع الهدف» بالشكل الذي نحصل من خلاله على الشكل القانوني للمسألة فإذا فرضنا أن تابع الهدف هو Max فيجب علينا عندها تحويل المتراجحة الأولى ≥ إلى الشكل ≤ ، وذلك بضرب طرفيها بالإشارة السالبة إذ تكون أمام المتراجحتين «المعادلتين للمساواة» التاليتين:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \le b_i$$

$$-a_{i1}\, x_1 - a_{i2}\, x_2 - \ldots - a_{in}\, x_n \le -b_i$$

ونلاحظ أنه من خلال هذا التحويل تساوي قيم معاملات المتغيرات، إلا أنها مختلفة بالإشارة، الأمر الذي يمكننا من القول إن متغيرات المتراجحتين غير محددة الإشارة، إذ نجد أن إشارة المعاملات تارة موجبة وتارة أخرى سالبة.

أيضاً إن المتراجحة من نوع ≤ والتي طرفها الأيسر بالقيمة المطلقة، يمكن الاستعاضة عنها من خلال متراجحتين:

بفرض أن: $|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n| \le b_i$

فعندها نجد: $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \le b_i$

$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \ge -\,b_i$

أو بالشكل التالي: $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \le b_i$

$-\,a_{i1}\,x_1 - a_{i2}\,x_2 - \ldots - a_{in}\,x_n \le +\,b_i$

وهنا نلاحظ أيضاً أن المتغيرات $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ متغيرات غير محددة الإشارات.

في حالة وجود x_i متغير غير محدد الإشارة فإننا نلجأ لكتابته بالشكل $(x^-_i\ ,\ x^+_i)$ حيث قيمته تتحدد من خلال الفرق المطلق بين كميته في حالة x^+_i, x^-_i.

Γ_4 – تحويل المتراجحات إلى معادلات يتم على النحو التالي:

a) المتراجحة ذات الشكل:

$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \le b_i$

تحول إلى معادلة من الشكل:

$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n + Y = b_i$

وذلك من خلال إضافة متغير ما وليكن Y (غير سالب) ويسمى متغير التعويض (متغيراً راكداً متغيراً حراً، متغيراً ساكناً Slack variable).

b) المتراجحة ذات الشكل:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geq b_i$$

تحول إلى معادلة من الشكل:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n - Y = b_i$$

وذلك من خلال طرح متغير ما وليكن y (غير سالب) ويسمى متغير التعويض (متغيراً إضافياً Surplus variable).

إن متغيرات التعويض (التبديل) تظهر في تابع الهدف $f = c.x$ بمعاملات معدومة.

T_5 – إذا صادف وجود متغير ما بالشكل $x \leq$ ، فإنه يعوض به متغير آخر (غير سالب).

$$x = -x$$

أمثلة على تحويل الشكلين القانوني والنظامي:

1 – إن مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\min f = \min (2x_1 + 5x_2 - x_3)$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$
$$-x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0$$

بالتحويل (T4) يعطينا الشكل النظامي التالي:

$$\min f = \min (2x_1 + 5x_2 - x_3)$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$
$$- x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_5 = 3$$
$$x1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0 , x_4 \geq 0 , x_5 \geq 0$$

حيث x_4 , x_5 متغيرات قياسية.

ومن خلال التحويلات $(T_2 - T_4)$ نحصل على الشكل القانوني التالي:

$$\min f = \min (2x_1 + 5x_2 - x_3)$$
$$- x_1 - 4x_2 - x_3 \geq - 10$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$- 2x_1 + x_2 - 2x_2 \geq - 8$$
$$- x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0$$

2 – إن مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 30$$
$$|x_1 + x_2 + x_3| \leq 20$$

$x_1 , x_2 \geq 0$ و x_3 غير محدد الإشارة.

يمكن تحويلها إلى الشكل القانوني وفق تابع الهدف Max كما يلي:

$$\text{Max } z = - 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

أما المتراجحات فهي :

المتراجحة الأولى متوافقة مع تابع الهدف تترك دون تغيير.

المتراجحة الثانية فنلجأ إلى تغيير اتجاهها وذلك بضربها بـ (-1).

$$- x_1 + 3x_2 + x_3 \leq - 15$$

القيد الثالث هو عبارة عن معادلة تحول إلى متراجحتين:

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 30$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 30$$

ثم نحول المتراجحة الثانية إلى متراجحة أصغر أو يساوي «تتوافق مع تابع الهدف Max» وذلك بضربها بإشارة (-1)

$$- 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \leq - 30$$

أما القيد الأخير فهو متراجحة من الشكل $0 \leq$ (أصغر أو يساوي) طرفها الأيسر بالقيمة المطلقة نحوله إلى متراجحتين من الشكل:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \text{ و } - x_1 - x_2 - x_3 \leq 20$$

يبقى لدينا موضوع x_3 المتغير غير المحدد الإشارة إذ نلجأ إلى كتابته كما يلي:

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-$$

حيث: $x_3^+ \geq 0$ و $x_3^- \geq 0$

وأخيراً فإن مسألة البرمجة الخطية السابقة تكتب بالشكل التالي:

$$\text{Max } z = - 2x_1 + 3x_2 - 5 (x_3^+ - x_3^-)$$

$$2x_1 + x_2 + 3 (x_3^+ - x_3^-) \leq 10$$

$$- x_1 + 3x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \leq - 15$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5 (x_3^+ - x_3^-) \leq 30$$
$$- 3x_1 - 2x_2 - 5 (x_3^+ - x_3^-) \leq - 30$$
$$x_1 + x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \leq 20$$
$$- x_1 - x_2 - (x_3^+ - x_3^-) \leq 20$$
$$x_1 , x_2 , x_3^+ , x_3^- \geq 0$$

VI-1-2-5- مسألة البرمجة الخطية بشكلها العام:

إن الصيغة العامة لجملة ذات m معادلة خطية تحوي n مجهولاً «حيث m < n» هي:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_3 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \text{(VI-4)}$$

نحصل من خلال حل المعادلة i على الشعاع العمودي:

$$X'_i = (X_1' , X_2' , X_3' , \ldots . X_n')'$$

الذي يحقق المعادلة i:

$$a_{i1} x_1' + a_{i2} x_2' + \ldots + a_{in} x_n' = b_i$$

ونحصل من خلال حل الجملة (5 . 2) على الشعاع:

$$X' = (X_1' , X_2' , X_3' , \ldots . X_n')$$

الذي يمثل حل سائر معادلات الجملة.

نقول إن الجملة (VI-4) هي جملة مناسبة (قابلة للحل، ممكنة، منسجمة) فيما إذا كانت تقبل حلاً أو أكثر، ونقول إن الجملة (VI-4) هي جملة غير مناسبة فيما إذا لم تقبل أي حل من الحلول.

وحتى نتمكن من أن نضع في حسابنا فئة خاصة من الحلول المتعلقة بالجملة (VI-4) والتي بالإمكان استخدامها في شرح الطريقة العامة لحل مسائل البرمجة الخطية، سوف نحول هذه الجملة إلى جملة مكافئة لها على النحو التالي:

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{1,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{1n} \cdot x_n &= b_1' \\ x_2' + a'_{2,m+1} x_{m+1} + \ldots + a'_{2n} \cdot x_n &= b_2' \\ x_m + a'_{m,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{mn} \cdot x_n &= b_m' \end{aligned} \qquad (VI-5)$$

إن الجملة التي حصلنا عليها تسمى الجملة النظامية الأساسية (الجملة النظامية ذات أساس) «حيث فرضنا أن رتبة مصفوفة المعاملات مساوية عدد المعادلات».

وحتى نحصل على مثل هذه الجملة يمكن استخدام الطريقة التالية:

لنضرب كل معادلة i من معادلات الجملة (VI-4) بعدد حقيقي k_i $(i = 1, 2, \ldots m)$.

ثم لنجمع هذه المعادلات طرفاً لطرف فنحصل على المعادلة التالية:

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n = d \qquad (VI-6)$$

حيث:

$$d_j = k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \ldots + k_m a_{mj}$$
$$d = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_m b_m$$
$$«j = 1, 2, \ldots, n»$$

تسمى المعادلة (VI-6) التركيب الخطي(*) للمعادلات الـ m التابعة للجملة (VI-4). لنلاحظ أن أي حل للجملة (VI-4) هو أيضاً حل للتركيب الخطي لمعادلات الجملة المذكورة. وحتى نحصل على معادلة ما من المعادلات الواردة في (VI-5) ولتكن، مثلاً، المعادلة i حيث يكون للمتحول x_i المعامل ١ وأما لمعاملات المتحولات:

$$x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$$

القيمة صفر، علينا حل الجملة التالية:

$$d_1 = 0 \ldots d_{i-1} = 0 , d_i = 1 , d_{i+1} = 0 , \ldots d_m = 0 \qquad (VI\text{-}7)$$

بالمجاهيل $k_1 , k_2 , \ldots , k_m$ ونحصل بالتالي على المعادلة:

$$x_i + a'_{i,m+1} \cdot x_{m+1} + a'_{i,m+2} \cdot x_{m+2} + \ldots + a'_{i,n} \cdot x_n = b'_i$$

حيث:

$$a'_{il} = k_1 a_{1l} + k_2 a_{2l} + \ldots + k_m a_{ml}$$

$$b'_i = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_m b_m$$

«l = m + 1 , ... n»

يعاد هذا الأسلوب من أجل i = 1 , 2 , ...m ونحصل على جملة من الشكل (VI-5) نتيجة العمليات الجبرية للجملة (VI-4).

(*) نعلم أن الأشعة x1 , x2 , ... xn هي غير مستقلة خطياً (مرتبطة خطياً) فيما إذا وجدت الأعداد الحقيقية λ1 , λ2 , ... λn (ليست جميعها معدومة) وبحيث أن:

λ1x1 + λ2x2 + ... + λnxn = 0

وأن الأشعة : x1 , x2 , ... xn هي مستقلة خطياً فيما إذا كانت المعادلة السابقة لا يمكن تحققها إلا من أجل:

λ1 = λ2 = λ3 = ... = λn = 0

فإذا كانت الأشعة x1 , x2 , ... xn مستقلة خطياً عندئذ فإن:

x = μ1x1 + μ2x2 + ... + μnxn

«حيث μ1 , μn ∈ R» تسمى التركيب الخطي لـ x1 , x2 , ... xn.

وبشكل عام إذا رمزنا بـــ:

$$p_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad , \ldots p_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad , \ldots p_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

لأشعة المركبات a_{ij} حيث:

$i = 1 , 2 , \ldots m$

$j = 1 , 2 , \ldots n$

فإن الأشعة تشكل معرفة ضمن فراغ Rm ذي البعد m. فإذا كانت رتبة المصفوفة A هي m أي:

Rang A = m

عندئذ تكون الـ m شعاع p_j مستقلة خطياً، ونقول إنها تشكل أساساً «قاعدة» في الفراغ Rm.

نقول إن الشعاع x يمثل حلاً أساسياً (حلاً ذا أساس) للمسألة بالشكل التخطيطي فيما إذا حققت المعادلة $Ax = b$، والأشعة p_j (المطابقة للمركبات x_j غير المعدومة) للمعادلة الشعاع x هي مستقلة خطياً.

تسمى المتحولات $x_m \ldots , x_2 , x_1$ في الجملة (٦ – ٢) متحولات أساسية «متحولات الأساس» أما المتحولات $x_n \ldots , x_{m+1}$ فهي متحولات غير أساسية «متحولات خارج القاعدة» وإذا حقق الشعاع x أيضاً شروط عدم السلبية أي $x_j \geq 0$ فيسمى عندها الحل الأساسي الممكن «الحل الأساسي المقبول». إذا كانت رتبة المصفوفة A مساوية m أي:

$$\text{Rang } A = m$$

فعندها نسمي الحل الحل الأساسي الممكن اللامتردي، وله تماماً m مركبة غير معدومة، أما في الحالة العكسية فنسميه المتردي.

وإذا فرضنا أن $b_m \ldots , b_2 , b_1$ في الجملة (VI-5) هي موجبة، في هذه الحالة وحسب التعاريف يكون:

$$x_1 = b_1 , x_2 = b_2 , \ldots x_m = b_m , x_{m+1} = 0 , \ldots x_n = 0$$

حلاً أساسياً ممكناً «حلاً ممكناً ذا أساس».

لنلاحظ أن أشعة الأعمدة التي توافق المتحولات الأساسية $x_1 , x_2 , \ldots x_m$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\m\end{bmatrix}$$

هي أشعة مستقلة خطياً.

في الجملة البدائية (VI-4) الأساس(*) «القاعدة» هي مجموعة معاملات متحولات الأساس.

لنفرض أن B القاعدة الموافقة لـ m شعاعاً مستقلاً خطياً في الصورة:

(*) إن تسمية الأساس «القاعدة» يأتي من حقيقة كون أن الأشعة m الممثلة خطياً الحلول الأساسية تشكل أساساً في الفراغ الإقليدي ذي الـ m بعداً.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

إن B هي مصفوفة مربعة الشكل محددتها مغايرة للصفر وفي مثل هذه المصفوفة تكون القاعدة B مساوية على الأكثر.

$$C_n^m \frac{n!}{m!(n-m)}$$

والتي يمكن تكوينها بأعمدة المصفوفة A.

لنرمز بـ S للمصفوفة المكونة من أعمدة A الموافقة للمتحولات غير الأساسية B (متحولات خارج القاعدة). إذا أمكن كتابة الشعاع $x = (x_1, x_2, \ldots X_n)$ وفق الصيغة (x^B, x^S) حيث:

$x^B = (x_1, x_2, \ldots X_m)$

$x^S = (x_{m+1}, \ldots x_n)$

هي الأشعة الموافقة للمصفوفة B والمصفوفة S، عندها يمكن كتابة جمل المعادلات $AX = b$ وفق الصيغة التالية:

$$(B,S)\begin{bmatrix} x^B \\ x^S \end{bmatrix} = b$$

لنجر عملية الضرب فنجد أن:

$$B \times X^B + S \times X^S = b$$

وبضرب الطرفين بـ B^{-1} نجد أن:

$$X^B = B^{-1} \times b - B^{-1} \times S \times X^S$$

لنلاحظ وبسهولة أن الحل الأساسي يمكن أن نحصل عليه وذلك بعدم المتحولات غير الأساسية.

نسمي حلاً أمثل لمسألة البرمجة الخطية، الحل الممكن الأساسي الذي يُقوِّم «يقلل أو يعظم» تابع الهدف.

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

إن الحل الأمثل يمكن أن يكون أيضاً حلاً أساسياً متردياً.

وفيما يلي سوف نضع إحدى النظريات الأساسية في البرمجة الخطية:

إذا كانت مسألة البرمجة الخطية غير المتردية تقبل حلاً أمثل، عندها يجب أن يكون أحد حلولها الأساسية على الأقل حلاً أمثل.

بما أن مسألة البرمجة الخطية هي ليست متردية، هذا يعني أن رتبة مصفوفة معاملات القيود مساوية عدد المعاملات، إذن نستطيع تخفيض جملة المعادلات لجملة أخرى مستخدمين التحويلات المنجزة على معاملات المجاهيل في الحل الأمثل ونكون بهذا الشكل قد حصلنا على حل أساسي وهو الحل الأمثل.

بالنتيجة يمكن إيجاد الحل الأمثل من خلال دراسة الحلول الأساسية، وعدد الحلول الأساسية هو محدود «ولا يتجاوز الـ C_n^m».

أمثلة:

1) حوّل مسألة البرمجة الخطية التالية من الشكل القانوني إلى الشكل النظامي:

$$\begin{aligned} &MaxZ = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ &2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 15 \\ &2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 9 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &MaxZ = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ &2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + S_1 = 10 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_2 = 15 \\ &2x_1 + 5x_2 + x_3 + S_3 = 9 \\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

2) حوّل مسألة البرمجة الخطية التالية من الشكل القانوني إلى الشكل النظامي:

$$\begin{aligned} &Min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 5 \\ &2x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 7 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Min Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3 \\ &x_1 + x_2 + x_3 - S_1 + R_1 = 2 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 - S_2 + R_2 = 5 \\ &2x_1 + x_2 + 5x_3 - S_3 + R_3 = 7 \\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, R_1, R_2, R_3 \ge 0 \end{aligned}$$

M مقدار كبير جداً

3) حوّل مسألة البرمجة الخطية التالية من الشكل المختلط إلى الشكل النظامي:

$$\begin{aligned} &Mi(Ma)Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ &2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 10 \\ &x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9 \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &Mi(Ma)Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 \mp MR_1 \mp MR_2 \\ &2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - S_1 + R_1 = 10 \\ &x_1 + 3x_2 + 5x_3 + S_2 = 9 \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 + R2 = 5 \\ &x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \ge 0 \end{aligned}$$

VI-1-3- حل مسألة البرمجة الخطية:

نعالج في التوصل إلى حلول مسألة البرمجة الخطية طريقتين:

الطريقة الأولى: وتدعى بالطريقة البيانية «Graphical Method».

الطريقة الثانية: وتدعى بالطريقة الجبرية «Algebric Method».

الطريقة الثالثة: مسألة البرمجة الخطية بشكلها العام وحلها باستخدام خوارزمية «طريقة» السمبلكس «Simplex Algorithm».

VI-1-3-1- الطريقة البيانية:

نلجأ إلى هذه الطريقة حينما يكون عدد متغيرات مسألة البرمجة الخطية المطلوب حلها مكوناً من ثلاثة متغيرات فما دون وذلك لأن الاعتماد الرئيسي في هذا الحل يكمن في الرسم الهندسي للقيود المكونة لهذه المسألة، وتمتاز هذه الطريقة في كونها تعطي أفكار البرمجة الخطية ومفهومها «للقيود – لتابع الهدف – لمنطقة الحلول الممكنة – والحل المثالي والمعنى الاقتصادي للمتراجحات أيضاً» بالشكل الملموس، إضافة إلى ذلك إنها من أبسط الطرق وأسهلها في حل مسائل البرمجة الخطية والتي تعالج المشكلات المختلفة كافة في مجالات الإنتاج والتسويق والأفراد و... ...

للتعرف على هذه الطريقة سوف نتطرق إلى الأمثلة التالية:

مثال (3): يدخل في تصنيع منتجين p_1 و p_2 مادتان أوليتان متوفرتان لدى المصنع بكميات متاحة $b_1 = 24$ و $b_2 = 32$ فإذا علمت أن مردود كل من هذين المنتجين والعوامل الفنية «الاستهلاكات الخاصة» هي كما في الجدول التالي:

الإنتاج	P_1	P_2	الكمية المتاحة
B_1	3	4	24
B_2	8	4	32
مردود الوحدة الواحدة	5	3	

(الجدول VI-2)

والمطلوب: تحديد الخطة المثلى لإنتاج هذا المصنع من خلال تشكيل نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة.

الحل: نرمز بـ x_1 لعدد الوحدات المنتجة من p_1 و x_2 لعدد الوحدات المنتجة من p_2 عندها ومن الجدول نستطيع وضع نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

تمثل العلاقة الأولى $Z = 5x_1 + 3x_2$ تابع هدف المسألة والذي في حالتنا هذه يكمن في تعظيم أكبر قدر ممكن من الأرباح من خلال تحديد عدد الوحدات المنتجة في هذا المصنع. أما المتراجحة الأولى $3x_1 + 4x_2 \leq 24$ فتبين أن الكميات المتوفرة من المادة الأولية R_1 والتي تدخل في تركيب المنتجين فهي ٢٤ وحدة.

والمتراجحة الثانية $x_1 + 4x_2 \leq 32$ فتبين أن الكميات المتوفرة من المادة الأولية R_2 والتي تدخل في تركيب المنتجين هي ٣٢ وحدة.

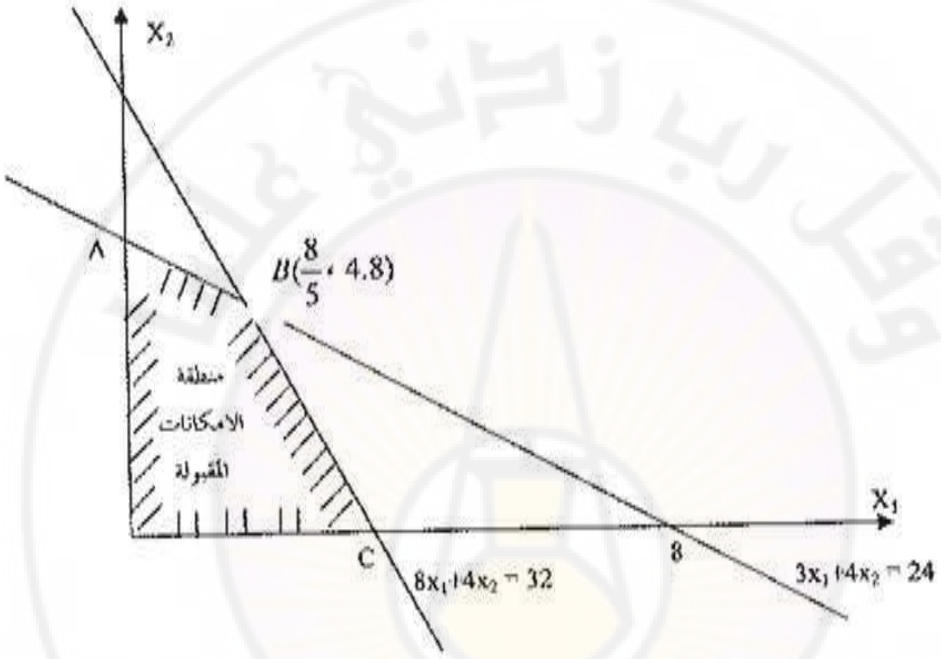
وأما $x_1, x_2 \geq 0$ فتبين أن الكميات المنتجة من p_1 و p_2 يجب أن تكون موجبة.

لنرسم الآن المستقيمين:

$$3x_1 + 4x_2 = 24$$
$$8x_1 + 4x_2 = 32$$

كما في الشكل (VI-3).

إن منطقة الإمكانات المقبولة «الحلول الممكنة» هي المضلع OABC المظلل. أما كيفية التعرف على تلك النقطة من الضلع والتي تحقق تابع الهدف «أي أن تجعل قيمته أعظم ما يمكن» فيتم على النحو التالي:



الشكل (VI-3)

لنرسم مستقيماً يمثل تابع الهدف $z = 5x_1 + 3x_2$ ميله $\left(\frac{3}{5}\right)$ ويمر من مبدأ الإحداثيات ، ثم نحرك هذا المستقيم بالشكل الذي يحافظ على ميله ، وبحيث يمسح كامل منطقة الإمكانات المقبولة، إن أعلى نقطة (آخر نقطة) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ من منطقة الحلول المتاحة، هي النقطة التي تحقق المتراجحات وتجعل لتابع الهدف القيمة العظمى. وكون أن عملية المسح هذه بغاية الدقة وإن أي خطأ في تقدير هذه النقطة يؤدي إلى خطأ في القيمة العظمى لتابع الهدف لهذا سوف

نستبدل بهذا العمل نص نظرية تقول بأن هذه النقطة التي تحقق القيمة العظمى لتابع الهدف هي أحد رؤوس مضلع منطقة الحلول المتاحة. فإذا ما تعرفنا على إحداثيات هذه النقط وعوضنا هذه الإحداثيات في تابع الهدف عندها نستطيع إيجاد النقطة التي تجعل من تابع الهدف أعظم ما يمكن، هذا يعني أن:

$$O(0,0) = 5*0 + 3*0 = 0$$
$$A(0,6) = 5*0 + 3*6 = 18$$
$$B\left(\frac{8}{5}, 4.8\right) = 5*\frac{8}{5} + 3*4.8 = 22.4$$
$$C(4,0) = 5*4 + 3*0 = 20$$

إذن فالنقطة $B\left(\frac{8}{5}, 4.8\right)$ هي النقطة التي تجعل لتابع الهدف القيمة العظمى، هذا يعني أن على المصنع أن ينتج $\frac{8}{5}$ وحدة من السلعة P_1 و ٤,٨ وحدة من السلعة P_2 حتى يصل لأعظم ما يمكن من الأرباح.

أخيراً يمكن وضع جدول يبين لنا نسب استخدام المواد الأولية الداخلة في تصنيع المنتجين على النحو التالي:

المادة الأولية	الكمية المستهلكة لإنجاز الخطة المثلى	الكمية المتاحة	نسب الاستخدام %
R_1	$3*\frac{8}{5} + 4 \cdot 4.8 = 24$	24	$\frac{24}{24} = \%100$
R_2	$8*\frac{8}{5} + 4 \cdot 4.8 = 32$	32	$\frac{32}{32} = \%100$

الجدول (VI-4)

مثال (4): يود صاحب منشأة دواجن أن تحصل دواجنه على ثلاث مواد غذائية أساسية C, B, A إذ يحتاج يومياً إلى 10 وحدة من A و14 وحدة من B و12

وحدة من C والعلف x_1 يحتوي على وحدة واحدة من A و 2 وحدة من B ووحدة واحدة من C. أما العلف x_2 فيحتوي على وحدة واحدة من A ووحدة واحدة من B وثلاث وحدات من C. وكلفة الوحدة الواحدة من x_1 هي 5 وحدات نقدية وكلفة الوحدة الواحدة من x_2 هي 7 وحدات نقدية. فالمطلوب تحديد النسبة التي تدخل في العلف والتي تحقق غاية صاحب المنشأة وبأقل التكاليف الممكنة.

الحل: إن بالإمكان وضع كافة معطيات المسألة في الجدول التالي:

العلف / الغذاء	العلف الأول x_1	العلف الثاني x_2	المتاح
A	1	1	10
B	2	1	14
C	1	3	12
التكلفة	5	7	

الجدول (VI-5)

ومن الجدول نستطيع أيضاً تشكيل نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$\text{Min } z = 5x_1 + 7x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 14$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

تمثل العلاقة الأولى تابع الهدف في المسألة والذي يكمن في تقليل «تدنية» التكاليف، بمعنى آخر العمل على جعل قيم x_1, x_2 أقل ما يمكن.

أما المتراجحة الأولى $x_1 + x_2 \geq 10$ فتبين أن حاجة الدواجن من المادة الغذائية A هي على الأقل 10.

والمتراجحة الثانية $2x_1 + x_2 \geq 14$ فتبين أن حاجة الدواجن من المادة الغذائية B هي على الأقل 14.

والمتراجحة الثالثة $x_1 + 3x_2 \geq 12$ فتبين أن حاجة الدواجن من المادة الغذائية C هي على الأقل 12.

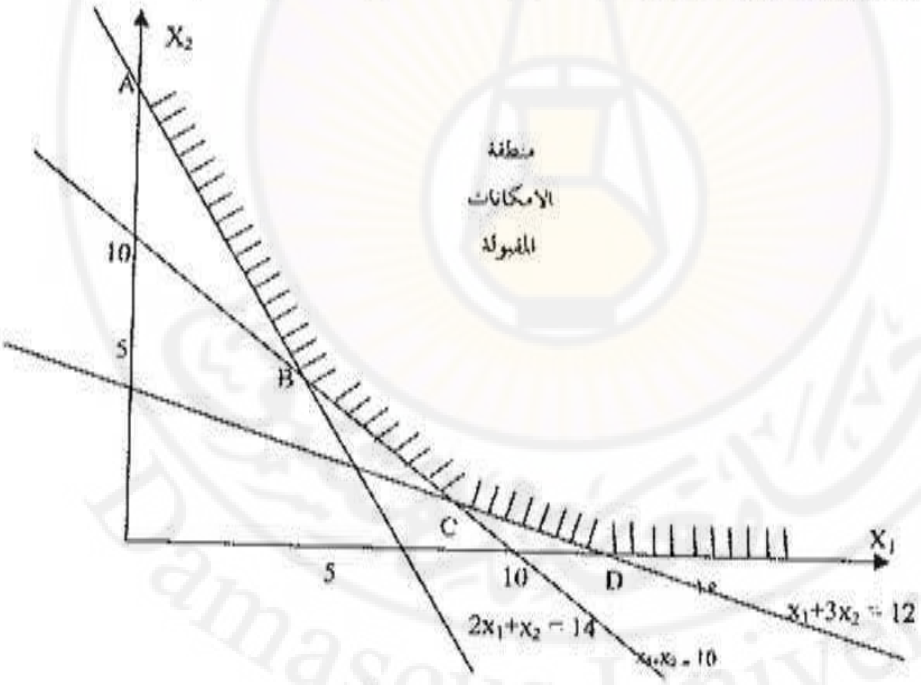
وأما شرط عدم السلبية فيأتي من أن $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$.

ونرسم المستقيمات: $x_1 + x_2 = 10$

$2x_1 + x_2 = 14$

$x_1 + 3x_2 = 12$

وذلك للتعرف على مضلع منطقة الحلول المتاحة. من الشكل **(VI-6)** نلاحظ أن:



الشكل (VI-6)

منطقة الإمكانات المقبولة هي المنطقة المظللة والمحصورة في الربع الأول من خلال محوري الإحداثيات $0x_1$ و $0x_2$ والنقاط A, B, C, D المحددة من خلال تقاطع المستقيمات السابقة ونستطيع إيجاد النقطة التي تحقق الحل المقبول والتي تجعل من تابع الهدف أقل ما يمكن كما يلي:

$$A(0,4) = 5 * 0 + 14 * 7 = 98$$
$$B(4,6) = 5 * 4 + 6 * 7 = 62$$
$$C(9,1) = 5 * 9 + 1 * 7 = 52$$
$$D(12,0) = 5 * 12 + 0 * 7 = 60$$

إذن فالنقطة التي تحقق تابع الهدف هي C(9,1) وقيمة تابع الهدف هي ٥٢ وحدة وذلك من أجل $x_1 = 9$ و $x_2 = 1$.

مثال (5): تتم عملية تصنيع منتجين p_1 و p_2 مستخدمين أربع مواد أولية M_1 و M_2 و M_3 و M_4 فإذا علمت أن المواد المستخدمة في تصنيع هذين المنتجين والعوامل الفنية «الاستهلاكات الخاصة» ومردود الوحدة الواحدة معطى وفق الجدول التالي:

P_j / M_i	العوامل الفنية		المتاح بالطن
	P_1	P_2	
M_1	4	4	16
M_2	3	6	18
M_3	7	0	21
M_4	0	4	10
مردود الوحدة الواحدة	3	5	

الجدول (VI-7)

فالمطلوب تحديد الكميات x_1 و x_2 التي يجب إنتاجها من p_1 و p_2 وذلك بغية الوصول إلى أعظم ما يمكن من الأرباح.

الحل: من خلال الاطلاع على جدول المعطيات نستطيع صياغة نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 16$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 18$$

$$7x_1 \leq 21$$

$$4x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث: العلاقة (١) تمثل تابع الهدف الذي يكمن في تعظيم الأرباح وذلك من خلال إنتاج أكبر ما يمكن من الوحدات التي يجب على المصنع تصنيعها.

أما المتراجحة (١) $3x_1 + 6x_2 \leq 18$ فتعطينا الكميات المتاحة من المادة الأولية M_1 التي تدخل في تركيب المنتجين p_1 و p_2.

والمتراجحة (٢) $x_1 + 6x_2 \leq 18$ فتعطينا الكميات المتاحة من المادة الأولية M_2 التي تدخل في تركيب المنتجين p_1 و p_2.

والمتراجحة (٣) $7x_1 \leq 21$ فتعطينا الكميات المتاحة من المادة الأولية M_3 التي تدخل في تركيب المنتجين p_1 و p_2.

والمتراجحة (٤) $4x_2 \leq 10$ تعطينا الكميات المتاحة من المادة الأولية M_4 التي تدخل في تركيب المنتجين p_1 و p_2.

تعد المتراجحات الأربع السابقة قيوداً فنية يتم تحديدها من خلال الخطة الإنتاجية التي تضعها إدارة المصنع والتي تدخل في عملية التصنيع.

وأما $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ فتبين أن الكميات المنتجة من p_1 والكميات المنتجة من p_2 يجب أن تكون موجبة دوماً، وهذا ما قصدناه بشرط عدم السلبية.

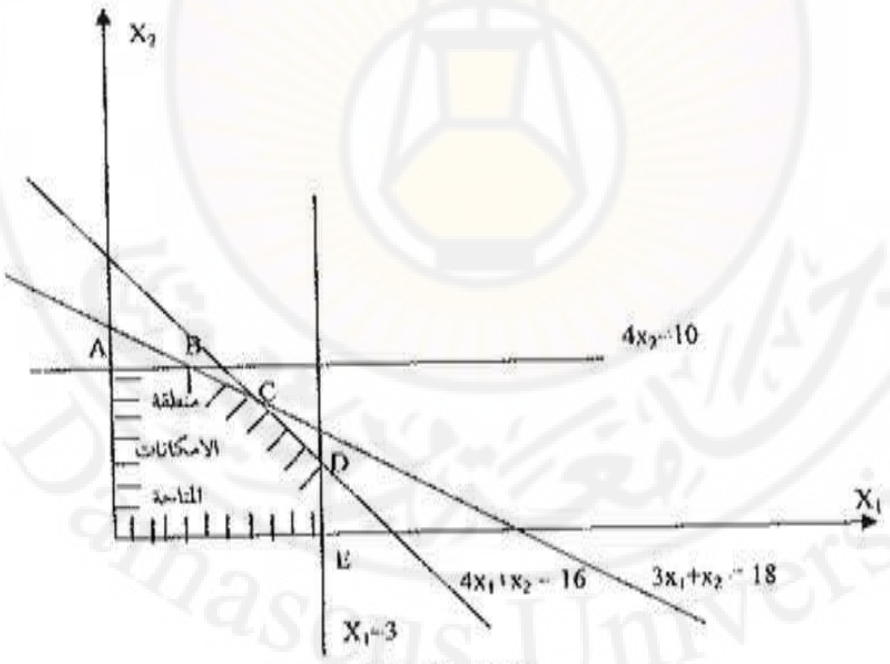
وإذا قمنا برسم المستقيمات: $4x_1 + 4x_2 = 16$

$3x_1 + 6x_2 = 18$

$7x_1 = 21$

$4x_2 = 10$

كما في الشكل التالي: (VI-8) وجدنا أن منطقة الحلول «الإمكانات المتاحة» المقبولة والتي تحقق المتراجحات هي القسم المظلل في الشكل نفسه.



الشكل (VI-8)

أي أن المضلع OABCDE والمظلل هو الذي يمثل منطقة الإمكانات المقبولة. أما كيفية التعرف على تلك النقطة من المضلع والتي تحقق تابع الهدف «أي تجعل لتابع الهدف أعظم ما يمكن من القيم». فيتم على النحو التالي:

لنرسم مستقيماً يمثل تابع الهدف $Z = 3x_1 + 5x_2$ ميله $\left(\frac{5}{3}\right)$ ويمر من مبدأ الإحداثيات . ثم لنحرك هذا المستقيم بالشكل الذي يحافظ على ميله، وبحيث يمسح كامل منطقة الإمكانات المقبولة، إن أعلى نقطة «آخر نقطة» $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ من منطقة الحلول المتاحة، هي النقطة التي تحقق المتراجحات وتجعل لتابع الهدف القيمة العظمى. وباعتبار أن عملية المسح هذه تتطلب دقة متناهية وأن أي خطأ في عملية المسح هذه يمكن أن يعطينا حلاً مغايراً للحقيقة، لهذا نستطيع التحول عن عملية المسح هذه والاستعاضة عنها بالنظرية التي تعطينا هذه النقطة وهي ليست إلا أحد رؤوس المضلع المظلل. فإذا تعرفنا على إحداثيات هذه الرؤوس وبدلنا هذه الإحداثيات في تابع الهدف عندها نستطيع إيجاد النقطة التي تجعل من تابع الهدف أعظم ما يمكن، هذا يعني أن:

$$O(0,0) = 3*0 + 5*0 = 0$$
$$A(0,2.5) = 3*0 + 5*2.5 = 12.5$$
$$B(1,2.5) = 3*1 + 5*2.5 = 15.5$$
$$C(2,2) = 3*2 + 5*2 = 16$$
$$D(3,1) = 3*3 + 5*1 = 14$$
$$E(3,0) = 3*3 + 5*0 = 9$$

إذن فالنقطة C(2,2) هي النقطة التي تجعل تابعاً لهدف له القيمة العظمى، هذا يعني أن على المصنع أن ينتج /٢/ وحدتين من السلعة p1 و/٢/ وحدتين من السلعة p2 حتى يصل لأعظم ما يمكن من الأرباح.

أخيراً يمكن وضع جدول يبين لنا نسبة الاستخدام من المواد الأولية الداخلة في التصنيع على النحو التالي:

المادة الأولية	الكمية المستهلكة للإنجاز الخطة المثلى	الكمية المتاحة	نسبة الاستخدام
M_1	4 * 2 + 4 * 2 = 16	16	16/16 = 100 %
M_2	3 * 2 + 6 * 2 = 18	18	18/18 = 100 %
M_3	7 * 2 = 14	٢١	14/21 = 66 %
M_4	4 * 2 = 8	10	8/10 = 80%

الجدول (VI-9)

VI-1-3-2- خوارزمية «طريقة» السمبلكس[٣]:

في عام ١٩٤٧ قدم العالم الرياضي الأمريكي جورج دانتزيغ «G.B.Dantzig» خوارزمية «طريقة» من أجل حل مسألة البرمجة الخطية، إلا أنها لم تنتشر إلا في عام ١٩٥١ وهذه الخوارزمية هي خوارزمية السمبلكس، وتدعى أيضاً لدى بعض المهتمين والمؤلفين بالطريقة المبسطة.

تعد خوارزمية السمبلكس الطريقة العامة والوحيدة التي يمكن تطبيقها على غالبية مسائل البرمجة الخطية، وتمتاز هذه الطريقة عن الطريقة البيانية أو الطريقة الجبرية بنقاط متعددة أهمها:

---

(٣) خوارزمية «الغوريتم» هي سلسلة عمليات رياضية منسوبة إلى العالم العربي الخوارزمي الذي عاش في القرن التاسع الميلادي في آسيا الوسطى.

- تعالج مسائل البرمجة الخطية كافة لأنها تتمتع بدرجة عالية من الكفاية والدقة.

- تستطيع تطبيقها على المسائل التي تحوي عدداً كبيراً من المتغيرات.

- تستخدم جبر المصفوفات بدلاً من الجبر العادي.

- تصل إلى أفضل النتائج من جملة حلول تنتج بطريقة الحل المتسلسل «اتباع مراحل متعددة».

- تبين لنا ما إذا كانت أفضل النتائج السابقة تمثل حلاً أمثل أم لا.

- تستند إلى عمليات منطقية منتظمة وسهلة بغية الوصول إلى الحل الأمثل.

إن المفهوم الأساسي في خوارزمية السمبلكس مكون من ثلاث خطوات:

١ – التوصل إلى حل أولي ممكن (حل أولي مقبول) يجعل قيمة المتغيرات الأصلية كافة معدومة وقيم المتغيرات الإضافية كافة موجبة، ومن أجل هذا الحل تكون قيمة تابع الهدف في المسألة معدومة.

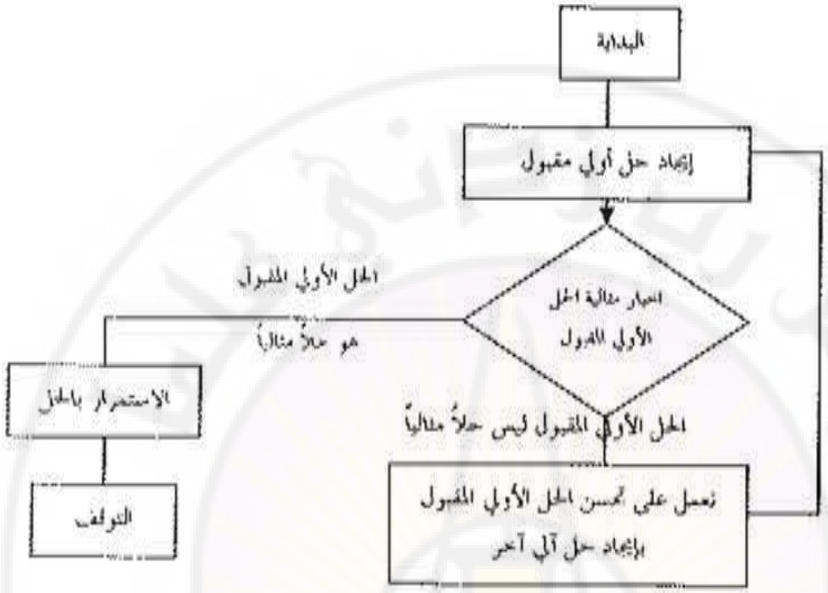
٢ – ننطلق من الحل الأولي المقبول السابق ونطبق عليه اختبار المثالية حيث نميز حالتين:

آ – الحل الأولي المقبول هو حل مثالي للمسألة.

ب – الحل الأولي المقبول ليس حلاً مثالياً وعندها ننتقل إلى الخطوة الثالثة التالية.

٣ – إيجاد حل أولي آخر أفضل من الحل الأولي المقبول السابق وذلك عن طريق الاستعاضة (إدخال) بقيمة المتغيرات المعدومة (بإخراج) أحد المتغيرات الإضافية ذات القيمة الموجبة. (أي استخدام طريقة خاصة سنأتي إلى شرحها مستقبلاً)، ثم نكرر الخطوة الثانية من جديد فإذا لم يكن الحل حلاً مثالياً نعيد من

جديد الخطوة الثالثة... وهكذا إلى أن نصل إلى أفضل الحلول (الحل المثـــالي).
إذن نستطيع وضع مخطط الخطوات الثلاث بالشكل التالي: (الشكل VI-10)



الشكل (VI-10)

فإذا فرضنا أنه لدينا مسألة البرمجة الخطية ذات الشكل الرياضي التالي:

$$\max f = \max (2x_1 + 3x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \leq 0$$

فإن خوارزمية السمبلكس تقوم في بداية حلها على افتراض أن يكـــون الفرق بين عدد المتغيرات والذي نرمز له بـــ N وعدد قيودها والذي نرمز لـــه بـــ M أي (N – M) مساوياً الصفر فمثلاً: في المسألة السابقة لـــدينا N = 4 و M = 2 أي أن N – M = 0 إذن فحتى يتحقق الشرط السابق ينبغـــي أن يكـــون

لمتغيرين اثنين القيمة صفر وحتى نتمكن من بداية حل مسألة البرمجة الخطية بحل أساسي أولي ممكن، نعد قيم المتغيرات الأصلية مساوية الصفر (وهما في مثالنا $x_1 = x_2 = 0$) ثم نحول المتغيرات الأصلية والتي نعدها في بداية حل المسألة متغيرات غير أساسية (لأن قيمة كل منها معدومة) إلى متغيرات أساسية (قيمة كل منها ≠ الصفر).

يتحقق الحل الأمثل في مسألة التعظيم عندما تكون جميع المعاملات في تابع الهدف الموجودة في جدول الحل معدومة أو تمثل قيماً موجبة.

VI-1-2-3-1- الانتقال من حل أساسي إلى حل آخر:

نستخدم خوارزمية السمبلكس الشكل النظامي في مسائل البرمجة الخطية:

$$\min(\max) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(VI-8)}$$

$$\Sigma \quad a_{ij} \quad x_j = b_i \qquad \text{(VI-9)}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{(VI-10)}$$

حيث: $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$

سوف نفترض أن الجملة (2,18) تؤدي إلى الشكل التالي:

$$X_1 + a_{1,m+1}\ x_{m+1} + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \qquad \text{(VI-9)}$$

$$x_2 + a_{2,m+1}\ x_{m+1} + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2$$

$$x_m + a_{m,m+1}\ x_{m+1} + \ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \qquad \text{(VI-11)}$$

من الواضح أن المعاملات a_{ij} والحدود المطلقة b_i في الجملة (VI-11) تختلف عن مثيلاتها في الجملة النظامية البدائية (VI-9) وأن المتحولات قد أدخلت بأدلة

نفسها: وللتبسيط فقط تم استخدام الرموز المعروفة نفسها علماً بأن هناك بعض الاختلافات في الرموز.

سوف نفترض أن $b_i > 0$ «$i = 1,2, \ldots m$» وكحل بدائي أساسي ممكن سوف نأخذ:

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots x_r = b_r \ldots x_m = b_m, x_{m+1} = \ldots = x_k = \ldots = x_n = 0 \quad \text{(VI-12)}$$

أما تابع الهدف (VI-8) فيأخذ القيمة:

$$f_1 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_m b_m \qquad \text{(VI – 13)}$$

لنفترض أن المتحول x_r «$1 \le r \le m$» من القاعدة (الأساس) يمكن أن يحتل مكان المتحول x_k «$m+1 \le k \le n$». إن ما فرضناه ليس بالطبع ممكناً إلا إذا كانت بعض الشروط التي سوف تأتي على ذكرها محققة.

ولتحقيق مثل هذا التعويض، سوف نستخدم المعاملات k_i المستخدمة في الفقرة (٢،١،٣). إن معادلة التركيب الخطي المتعلقة بمعادلات الجملة (VI-11) هي:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_m x_m + (k_1 a_{1,m+1} + k_2 a_{2,m+1} + \ldots k_m a_{m,m+1}) x_{m+1} + \ldots + (k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \ldots + k_m a_{mn}) x_n = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_m b_m$$

ومن أجل الحصول على جملة نظامية جديدة ذات أساس، نعوض بالمتحول xk المتحول xr في الأساس ونضع الشروط المناسبة:

- من أجل المعادلة i:

$$k_i = 1 \qquad i = 1,2,\ldots m$$
$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{i-1} = k_{i+1} = \ldots = k_{r-1} = k_{r+1} = \ldots = k_m = 0 \qquad \text{(VI-14)}$$
$$k_1 a_{1k} + k_2 a_{2k} + \ldots + k_i a_{rk} + \ldots + k_m a_{mk} = 0$$

حيث فرضنا أن «i < r» وذلك من أجل $1 \le r \le m$ و $m+1 \le k \le n$ من العلاقات (VI-14) نستنتج أن:

$$k_r = \frac{-a_{ik}}{a_{rk}} \qquad \text{(VI-15)}$$

من أجل المعادلة r:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{r-1} = k_{r+1} = \ldots = k_m = 0 \qquad \text{(VI-16)}$$

$$k_1 a_{1k} + k_2 a_{2k} + \ldots + k_r a_{rk} + \ldots + k_m a_{rm} = 1$$

من العلاقة (VI-16) نجد أن:

$$k_r = \frac{1}{a_{rk}}$$

العمل: نظامية ذات الأساس سوف تكون:

أيضاً: $\forall i = 1,2 \ldots r-1, r+1, \ldots m$:«

$$x_i - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} x_r + \left(a_{i,m+1} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{r,m+1} \right) x_{m+1} + \ldots +$$

$$\left(a_{i,k+1} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{r,k-1} \right) x_{k-1} + \left(a_{i,k+1} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{r,k+1} \right) x_{k+1}$$

$$+ \ldots + \left(a_{in} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{rn} \right) x_n = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} b_r \qquad (8-17)$$

$$\frac{1}{a_{rk}} x_r + \frac{a_{r,m+1}}{a_{rk}} x_{m+1} + \ldots + x_k + \ldots + \frac{a_{rn}}{a_{rk}} = \frac{b_r}{a_{rk}}$$

أي أن:

$$x_1 = b_1 - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} b_r, \ldots, x_{r-1} = b_{r-1} - \frac{a_{r-1k}}{a_{rk}} b_r \,, \qquad \text{(VI-18)}$$

$$x_{r+1} = b_{r+1} - \frac{a_{r+1k}}{a_{rk}} b_r, \ldots, x_m = b_m - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} b_r \,,$$

$$x_k = \frac{b_r}{a_{rk}}, \ldots, x_r = 0 \,, x_{m+1} = 0 \ldots x_{k-1} = 0, x_{k+1} = 0, \ldots x_n = 0$$

إن عمليات الانتقال هذه من جملة نظامية أساسية لأخرى وأيضاً من حل أساسي لآخر تسمى بالارتكاز «الإرشاد». أما العنصر a_{rk} والذي يتدخل في التحويلات المعنية كافة فيسمى المرتكز «المرشد، عنصر الدوران».

من (VI-17) و (VI-18) نستطيع وبشكل عام كتابة صيغ تبديل معاملات المصفوفة A بتغيير القاعدة:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \quad 1 \le j \le n \qquad \text{(VI-19)}$$

$$a'_{ij} = a - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \; a_{rj} \quad 1 \le i \le m \quad «i \ne r»$$

$$1 \le j \le n \qquad \text{(VI-20)}$$

أما الجملة (VI-18) فإن قيم المتحولات الأساسية تتغير بالصيغ:

$$x'_r = \frac{x_r}{a_{rk}} \qquad \text{(VI-21)}$$

$$x'_i = x_i - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \; x_r \quad «i \ne r» \qquad \text{(VI-22)}$$

لنلاحظ أن هذه الصيغ متشابهة.

من خلال عملية الارتكاز هذه يمكن القول أن المتحول x_r قد خرج من القاعـــدة أما المتحول x_k فقد دخل إلى القاعدة.

VI-3-2-2- معيار المثلوية:

لنحسب القيم الجديدة لتابع الهدف من أجل الحل الأساسي (VI-18).

$$\cdot_2 = \cdot_1\left(\cdot_1 - \frac{\cdot_{1k}}{\cdot_{rk}}\cdot_r\right) + \ldots + \cdot_{r-1}\left(\cdot_{r-1} - \frac{\cdot_{r-1k}}{\cdot_{rk}}\cdot_r\right) +$$
$$\cdot_{r+1}\left(\cdot_{r+1} - \frac{\cdot_{r+1k}}{\cdot_{rk}}\cdot_r\right) + \ldots + \cdot_m\left(\cdot_m - \frac{\cdot_{mk}}{\cdot_{rk}}b_r\right) +$$
$$+ \ldots + c_k\frac{b_r}{a_{rk}} \qquad (8-23)$$

من العلاقة (VI-13) و (VI-23) نلاحظ أننا قد حصلنا على تحسين:

$$J_{12} = f_1 - f_2 = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_{r-1}b_{r-1} + c_rb_r + c_{r+1}b_{r+1} + \ldots + c_mb_m$$
$$- c_1\left(b_1 - \frac{a_{1k}}{a_{rk}}b_r\right) - \ldots - c_{r-1}\left(b_{r-1} - \frac{a_{r-1k}}{a_{rk}}b_r\right) - c_{r+1}\left(b_{r+1} - \frac{a_{r+1,k}}{a_{rk}}b_r\right) -$$
$$- \ldots - c_m\left(b_m - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}b_r\right) - c_k\frac{b_r}{a_{rk}}$$

$$f_1 - f_2 = \frac{b_r}{a_{rk}}\left(c_1a_{1k} + \ldots + c_{r-1}a_{r-1,k} + c_{r+1}a_{r+1,k} + \ldots c_ma_{mk} - c_k + c_rb_r\right)$$

$$f_1 - f_2 = \frac{b_r}{a_{rk}}\left(c_1a_{1k} + \ldots + c_{r-1}a_{r-1k} + c_ra_{rk} + c_{r+1}a_{r+1k} + \ldots + c_ma_{mn} - c_k\right) = \frac{b_r}{a_{rk}}\left(Z_k - C_k\right)$$

حيث: $Z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i\, a_{ik}$

وبشكل عام:إذا كانت I مجموعة أدلة المتحولات الأساسية الموافقة لقاعدة ما B و

$Z_k = \Sigma\, c_i\, a_{ik}$

$i \in I$

فإن علاقة التحسين تصبح على النحو التالي:

$$F_1 - F_2 = \frac{b_r}{a_{rk}}(Z_k - C_k) \qquad r \in I \qquad \text{(VI-24)}$$

حيث سنفرض أن $a_{rk} > 0$

نظرية: يكون الحل الأساسي الممكن X^B الموافق للقاعدة B حلاً مثالياً لمسألة التقليل وفق الشكل النظامي إذا كان:

$$Z_k - C_k \leq 0 \qquad k = 1,2,\ldots n \qquad \text{(VI - 25)}$$

من العلاقة (VI-24) نستنتج أنه في حالة مسألة التقليل فإن التحسين يكون من خلال المتراجحة $f_1 < f_2$ أو $f_1 - f_2 > 0$ والحل المثالي نحصل عليه عندما لا يكون هناك أي تحسين.

بمعنى آخر من أجل $k \neq 1$ لدينا $f_1 - f_2$ أو $Z_k - C_k \leq 0$. إذا كان x_k هو متحول أساسي $(k \in I)$ عندئذ $Z_k = C_k$ و $Z_k - C_k = 0$

$(a_{ik} = 0, i \in I, i \neq k, a_{kk} = 1)$

إن هذه النظرية لا تحتاج لأي برهان كونها محققة.

نظرية: يكون الحل الأساسي الممكن X^B الموافق للقاعدة B حلاً مثالياً لمسألة التعظيم وفق الشكل النظامي إذا كان:

$$z_k - c_k \geq 0 \qquad k = 1,2, \ldots n \qquad \text{(VI-26)}$$

إذا كانت المسألة هي مسألة تعظيم فيجب أن يكون التحسين من أجل $f_2 > f_1$ أو $f_1 - f_2 < 0$.

والحل المثالي نحصل عليه عندما لا يكون هناك إمكان أي تحسين، بمعنى آخر:

$z_k - c_k \geq 0$ وذلك من أجل $k \in I$

وإذا كان $k \in I$ فإن $z_k - c_k = 0$

نتيجة: يكون الحل مثالياً وحيد التعيين:

أ) إذا كان $z_k - c_k < 0$ وذلك من أجل $k \notin I$ في مسألة التقليل.

ب) إذا كان $z_k - c_k > 0$ وذلك من أجل $k \notin I$ في مسألة التعظيم.

وبالعكس إذا كان $z_k - c_k = 0$ من أجل $k \notin I$ فيكون لدينا لا نهاية من الحلـــول المثالية.

نتيجة: إذا كان لدينا:

$z_k - c_k < 0$ وذلك من أجل $k \in I$

و $a_{ik} \leq 0$ من أجل كل الأدلة $i \notin I$

عندئذ مسألة التعظيم تقبل حلاً مثالياً هو $+\infty$.

VI-1-3-2-3-1- معيار الدخول في القاعدة (الأساس):

من العلاقة (2, 33) ينتج أن المتحول الذي يدخل في الأساس (القاعدة) هـــو x_k في حال كون التحسين $(f_1 - f_2)$ أعظمياً، وهذا معناه أنه يجب أن يحقق العلاقة:

$$\frac{b_r}{a_{rk}}|Z_k - C_k| = \max_{J \in I} \frac{b_r}{a_{rj}}|Z_j - C_j| \qquad \text{(VI-27)}$$

ولأن الخوارزمية المطبقة لا يمكن أن تتغير بشكل ملموس فيما إذا طبق معيار الدخول في القاعدة (الأساس) العبارة:

$$\max_{j \in I} |Z_j - C_j|$$

فإننا سوف نحصل بالمقابل على تبسيط للحسابات.

نلجأ في التطبيقات العملية لتطبيق الفقرتين التاليتين:

أولاً: من أجل مسألة التقليل: إذا وجد هناك أكثر من دليل $j \in I$ يحقق المتراجحة $Z_k - C_k > 0$ عندما نختار من بين هذه الأدلة الدليل k الذي يجعل الفرق $Z_k - C_k$ أكبر ما يمكن، أي:

$$Z_k - C_k = \max_{\substack{j \in I \\ Z_k - C_k > 0}} (Z_j - C_j) \qquad \text{(VI-28)}$$

ثانياً: من أجل مسألة التعظيم: إذا وجد هناك أكثر من دليل $j \in I$ يحقق المتراجحة $Z_k - C_k < 0$ فعندما نختار من بين هذه الأدلة الدليل k الذي يجعل الفرق $Z_j - C_j$ أقل ما يمكن، أي:

$$Z_k - C_k = \min_{\substack{j \in I \\ Z_k - C_k < 0}} (Z_j - C_j) \qquad \text{(VI-29)}$$

VI-1-3-2-4- معيار الخروج من القاعدة (الأساس):

حتى تكون القاعدة (الأساس) الجديدة ممكنة (مقبولة) يجب أن يكون:

$$x'_i = x_i - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} x_r \geq 0$$

أو:

$$\frac{x_i}{a_{ik}} - \frac{x_r}{a_{rk}} \geq 0$$

أو:

$$0 \leq \frac{x_i}{a_{ik}} \leq \frac{x_i}{a_{ik}}$$

وحيث أن x_i هو متحول لا على التعيين من القاعدة (الأساس) فنستنتج أن المتحول الذي يخرج من القاعدة هو x_r حيث:

$$\frac{x_r}{a_{rk}} = \min \frac{x_i}{a_{ik}} \qquad \text{(VI-30)}$$

شريطة أن يكون $a_{ik} > 0$

VI-1-3-2-5- خوارزمية السمبلكس الأولية:

من أجل تطبيق المعايير السابقة وخوارزمية السمبلكس فإن جملة المعادلات والقاعدة B والأبعاد $z_j - c_j$ و ... إلخ يمكن وضعها ضمن الجدول (VI-11) وهو يتألف وبآن واحد من التكرار الصفري «المرحلة صفر» لخوارزمية السمبلكس.

Cs	C_j		C_1	C_2	C_r	C_m	C_{m+}	C_k	C_{k+1}	C_n
	الأساس	P_0	P_1	P_2	P_r	P_m	P_{m+}	P_k	P_{k+1}	P_n
C_1	X_1	b_1	1				a_{1m+1}	a_{1k}	a_{1k+1}	a_{1n}
C_2	X_2	b_2		1			a_{2m+1}	a_2	a_{2k+1}	a_{2n}
C_r	x_r	b_r		1			a_{rm+1}	a_{rk}	a_{rk+1}	a_m
C_m	X_m	b_m				1	a_{mm+1}	a_{mk}	a_{mk+1}	a_{mn}
$Z_j - C_j$		Z	0	0	0	0	Z_{m+1} C_{m+1}	$Z_k - C_k$		$Z_n - C_n$

المرحلة صفر (التكرار الصفري) الجدول (VI-11)

نستطيع في الجدول (VI-11) التعرف على الرموز بمختلف أنواعها وبالتالي يمكن تطبيق خوارزمية السمبلكس من خلال الجدول (VI-11) إن تكرار ما (مرحلة ما) لخوارزمية السمبلكس يمكن أن تتألف من الخطوات التالية:

الخطوة I:

نحسب $Z_j - C_j$ «حيث $j = 1,2, \ldots n$».

الخطوة II:

إذا كان من أجل سائر الأدلة $j = 1,2, \ldots n$ لدينا $Z_j - C_j \geq 0$ من أجل مسألة التعظيم أو $Z_j - C_j \leq 0$ من أجل مسألة التقليل. عندئذ فالخوارزمية تنتهي عند

هذه الخطوة، وتكون محققة شروط المثلوية (VI-25) و (VI-26) والحل هو حل مثالي.

الخطوة III:

إذا كان من أجل الأدلة j لدينا المتراجحة $Z_j - C_j < 0$ في مسألة التعظيم أو $Z_j - C_j > 0$ في مسألة التقليل. فإن الشعاع العمودي

$P_j = (a_{1j}\ a_{2j} \dots a_{mj})$

له المركبات $a_{ij} \leq 0$ (حيث $1 \leq i \leq m$) عندما يكون للمسألة حلول غير محددة، أي هناك حل مثالي لا نهائي «لا توجد لدينا شروط حتى نتمكن من تطبيق المعيار (VI-30).

الخطوة IV:

يحدد المتحول x_k الذي يدخل في القاعدة «المعيار (VI-28)، (VI-29)».

$$|Z_k - C_k| = \max_j |Z_j - C_j|$$

والمتحول x_r الذي يخرج من القاعدة «المعيار (٣٩،٢)».

$$\frac{x_r}{a_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{x_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0 \right\}$$

والمرشد «المرتكز» هو a_{rk}.

الخطوة V:

تطبق صيغ تحويل القاعدة (VI-22) و (VI-29) ثم نعود إلى الخطوة I والتكرار التالي. إن حساب الأبعاد $(Z_j - C_j)$ يتم بقواعد حساب المعاملات a_{ij} نفسها والمتحولات x_i في القاعدة.

$$Z'_j - C_j = Z_j - C_j - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}(Z_k - C_k)$$

حيث تحسب $Z'_j - C_j$ مباشرة، ونستنتج مباشرة وبسهولة من العلاقات (VI-19) و (VI-20)

أن قيمة تابع الهدف هي:

$$f' = f - \frac{x_r}{a_{rk}}(Z_k - C_k)$$

وتحسين تابع الهدف هو:

$$I = \frac{x_r}{a_{rk}}|Z_k - C_k|$$

يوجد المرشد (المرتكز) في تقاطع السطر r مع العمود k وذلك حينما تكون $|Z_k - C_k|$ عظمى.

VI-1-3-3- التطبيق العملي لخوارزمية السمبلكس:

يعد تطبيق الأسلوب السابق الوارد في فقرة مسألة البرمجة الخطية بشكلها العام معقداً وصعباً، الأمر الذي يجعلنا القيام بتحليل نماذج المسائل التي تبين لنا طبيعة القيود، وفيما إذا كانت متراجحات أم معادلات من خلال تحويلات نظام «شكل ما» إلى نظام آخر. فسوف نحول المسائل إلى الأشكال التي تسمح لنا بالتطبيق المباشر لخوارزمية السمبلكس.

- أولاً: حالة المساواة «=» في هذه الحالة تكون مسألة البرمجة الخطية معطاة وفق الشكل النظامي «حيث $b_i \geq 0$ و $i = 1,2, \ldots m$».

$$Max\ (Min\ )Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots m \\ j = 1,2,\ldots n \end{matrix}$$

$$x_i \geq 0$$

لندخل متحولات اصطناعية(*) غير سالبة $R_1, R_2, \ldots R_i$ عندها تأخذ جملة القيود الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i = b_i$$

أما تابع الهدف Z فيكتب:

* في حالة التعظيم:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j - MR_1 - MR_2 \ldots - MR_m$$

* في حالة التقليل:

$$Z = \sum C_j X_j + MR_1 + MR_2 \ldots + MR_m$$

حيث M ثابتة وهمية كبيرة للغاية.

(*) إن إدخال المتحولات الاصطناعية لن يغير المفهوم الشكلي، ومن الضروري أن تكون المتحولات المساعدة كافة معدومة في الحل المثالي.

بالحقيقة ليس للمتغيرات الاصطناعية أي معنى لكون أنها أداة حسابية تدخل في إيجاد الحل الأولي لمسألة البرمجة الخطية ثم تختفي أثناء الحل وقبل الوصول للحل الأمثل.

وهنا علينا إضافة أعمدة لجدول السمبلكس بقدر عدد المتغيرات الاصطناعية والحل البدائي يمكن أن يكون:

$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, $R_1 = b_1, R_2 = b_2, ..., R_m = b_m$

– ثانياً: حالة المتراجحة « ≤ أصغر أو يساوي» وعندها تكون مسألة البرمجة الخطية معطاة من خلال الشكل القانوني بالمتراجحات ذات الشكل « ≤».

سوف نفترض أن $b_i \geq 0$ من أجل $i = 1,2,.... m$

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_j \qquad \begin{matrix} i = 1,2,...m \\ j = 1,2,...n \end{matrix}$$

$x_i \geq 0$

لندخل المتحولات الإضافية «الحرة – الساكنة Slack Variables» M اللاسالبة:

$S_1, S_2, ... S_m$ عندها تصبح جملة القيود على النحو التالي:

$$\sum a_{ij} x_j + S_i = b_i$$

وتابع الهدف هو:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + OS_1 + OS_2 .... + OS_m = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} OS_i$$

وأيضاً هنا نضيف لجدول السمبلكس m عموداً بعدد المتغيرات الإضافية في القيود ويكون الحل الأساسي الأولي هو:

$S_1 = b_1, S_2 = b_2, ..., S_m = b_m$

– ثالثاً: حالة المتراجحة « ≥ أكبر أو يساوي» وفي هذه الحالة فإن مسألة البرمجة الخطية معطاة من خلال الشكل القانوني بالمتراجحات ذات الشكل « ≥».

لنفترض أن $b_i \geq 0$ من أجل $i = 1,2,\ldots m$

$$MinZ = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j \geq b_j \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots m \\ j = 1,2,\ldots n \end{matrix}$$

$$X_j \geq 0$$

لندخل المتحولات الإضافية «التعويض Surplus Variables» اللاسالبة $S_1, S_2, \ldots S_m$ عندها تصبح جملة القيود على النحو التالي:

وذلك بعد إدخال المتحولات الاصطناعية اللاسالبة: $R_1, R_2, \ldots R_m$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - S_i + R_i = b_i \qquad i = 1,2,\ldots m$$

ويأخذ تابع الهدف الشكل التالي:

$$Min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} OS_i + \sum_{i=1}^{m} MR_i$$

وكحل أساسي أولي نجد أن:

$$R_1 = b_1, R_2 = b_2, \ldots, R_m = b_m$$

تطبيق: ضع جدول السمبلكس الأولي لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max Z = 10x_1 + 20x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

إن الصيغة المعيارية هي:

$$Max\,Z = 10x_1 + 20x_2 + 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2$$
$$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6$$
$$x_1 + x_2 + S_2 = 3$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ويكون جدول السمبلكس الأولي هو:



تطبيق:

مسألة (٦) أوجد حل نموذج البرمجة الخطية التالي بطريقة السمبلكس:

$$Max\, Z = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.5x_3 + 0.8x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24000$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12000$$
$$6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 30000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

الحل: لنكتب الصيغة المعيارية:

$$Max\, Z = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.5x_3 + 0.8x_4 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + S_1 = 24000$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + S_2 = 12000$$
$$6x_1 + 3x_3 + x_4 + S_3 = 30000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

جدول السمبلكس هو الجدول (VI-12)

		C_j	0.4	0.2	0.5	0.8	0	0	0
C_B	Basic		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3
0	S_1	24000	1	2	4	0	1	0	0
0	S_2	12000	3	5	1	0	0	1	0
0	S_3	30000	6	0	3	1	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - CJ$			-0.4	-0.2	-0.5	-0.8	0	0	0
0.8	X_4	30000	1/8	1/4	1/2	1	1/8	0	0
0	S_2	12000	3	5	1	0	0	1	0
0	S_3	1100	8/47		1	0	0	0	1
	Z_j	2400	1/10		5.2	0.8	0.8	0	0
$Z_j - C_j$			-0.3	0	-0.1	0	0.1	0	0
0.8	X_4	2500	0	1/25	11/4	1	1/8	-1/25	0
0.4	X_1	4000	1	5/3	1/3	0	0	1/3	0
0	S_3	3500	0	-231/25	13/25	0	-1/8	-47/24	1
	Z_j	36000	0.4	0..7	0.5	0.8	0.1	0.1	0
$Z_j - C_j$			0	0	0	0	0.1	0.1	0

الجدول (VI-12)

مسألة (٧): أوجد حل النموذج التالي بطريقة السمبلكس:

$$
\begin{aligned}
&Min\, z = x_1 - x_2 - 3x_3 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\
&4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\
&3x_1 + x_3 \le 5 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل: لنكتب الشكل المعياري أولاً:

$$
\begin{aligned}
Min\, z = {} & x_1 - x_2 - 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 + S_1 = 1 \\
& -4x_1 + 2x_2 - x_3 + S_2 = 2 \\
& 3x_1 + x_3 + S_3 = 5
\end{aligned}
$$

Damascus University

	C_j		1	-1	-3	0	0	0
C_B	Basic		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3
0	S_1	1	2	-1	1	1	0	0
0	S_2	2	-4	2	-1	0	1	0
0	S_3	5	3	0	1	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
Z_j —	C_j		-1	1	↑3	0	0	0
-3	X_3	1	2	-1	1	1	0	0
0	S_2	3	-2	↑	0	1	1	0
0	S_3	4	1	1	0	-1	0	1
	Z_j	-3						
Z_j —	C_j		-7	4 ↑	0	-3	0	0
-٣	X_3	4	0	0	1	2	1	0
-١	X_2	3	-٢	1	0	1	1	0
0	S_3	1	3	0	0	-2	-1	1
	Z_j	-15	2	-1	-3	-7	-4	0
$Z_j - C_j$			↑1	0	0	-7	-1	0
3	X_3	4	0	0	1	2	1	0
-1	X_2	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3
+1	X_1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3
	Z_j	-46/3						
$Z_j - C_j$			0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3

الجدول (VI-13)

ملاحظة: يتم ترتيب المتغيرات التي تشكل القاعدة في جدول السمبلكس الأولي «العمود الثاني من اليسار» بالشكل الذي يتجانس ويتوافق مع ترتيب أشعة

الواحدة في جدول السمبلكس ومع ترتيب القيود كما جاءت في النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية وبالشكل الذي نحصل فيه على أشعة مصفوفة الواحدة كما هي معرفة.

		C_j	2	5	4	0	0	M	M
C_B	Basic		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2
M	R_1	50	1	-2	1	0	0	1	0
0	S_1	30	2	1	3	1	0	0	0
M	R_2	100	3	1	1	0	-1	0	1
	Z_j	150 M	4 M	- M	2 M	0	- M	M	M
$Z_j - C_j$			4 M-2	- M - 5	2 M -4	0	- M	0	0
M	R_1	35	0	-5/2	-1/2	-1/2	0	1	0
2	X_1	15	1	1/2	3/2	1/2	0	0	0
M	R_2	55	0	-1/2	-7/2	-3/2	-1	0	1
	Z_j	90 M +30	2	1-3M	3-4M	1 - 2M	- M	M	M
$Z_j - C_j$			0	-4-3M	-4M-1	1 - 2M	- M	0	0

الجدول (VI-14)

حالة خاصة:

$$
\begin{aligned}
Max\ \ Z &= 40x_1 + 10x_2 \\
4x_1 + 2x_2 &\le 16 \\
2.5x_1 + x_2 &\le 12 \\
4.2x_1 + 1.5x_2 &\le 16 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

مسألة (٩): أوجد حل نموذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس.

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

الحل: إن الشكل المعياري هو:

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - MR_1 - MR_2 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + R_1 &= 3 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + R_2 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

لنضع جدول السمبلكس الجدول (VI-15)

Damascus University

		C_J	5	3	4	-1	- M	- M
C_B	Basic		X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2
- M	R_1	3	1	6	2	+2	1	0
- M	R_2	3	2	2	+1	1	0	1
	Z_J	- 6 M	- 3 M	- 5 M	- 3 M	- 3 M	- M	- M
$Z_J - C_J$			-3M-5	-5M-3 ↑	-3M-4	-3M-1	0	0
3	X_2	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
- M	R_2	1	4/3	0	-1/3	-1/3	- 2/3	0
	Z_J	3 - M	$-\frac{4}{3}M$	0	$\frac{M}{3}+2$	$\frac{M}{3}+2$	$\frac{2M}{3}+1$	- M
$Z_J - C_J$				0	$M-2$	$\frac{1}{3}M+1$	$\frac{5M}{3}+1$	0
3	X_2	٧/٤	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
5	X_1	٣/٤	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
	Z_J	6	5	3	$\frac{9}{4}-\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}+\frac{15}{4}$
$Z_J - C_J$			0	0	- 3 ↑	0	-1 + M	3 + M
4	X_3	1	0	4/3	1	1	2/3	- 1/3
5	X_1	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
	Z_J	9	5	$\frac{5}{3}+\frac{16}{3}$	4	4	$\frac{8}{3}-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}+\frac{10}{3}$
$Z_J - C_J$			0	4	0	5	1 + M	2 + M

إذن الحل هو :

$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0$

$Z = 9$

الجدول (VI-15)

VI-1-3-4- حالات خاصة في مسائل البرمجة الخطية(*):

هناك بعض الحالات الخاصة في مسائل البرمجة الخطية والتي تصادفنا في أثناء الحل سواءً في الطريقة البيانية أم في طريقة السمبلكس حيث نقف عندها عاجزين عن إيجاد الحل الأمثل والتعرف على قيم المتغيرات الأساسية للمسألة. يمكن تصنيف هذه الحالات كما يلي:

- حالة تعذر الحل «عدم وجود حل ممكن» Infeasibility.

تعني هذه الحالة عدم وجود حل للمشكلة بالشكل الذي يحقق احتياجات القيود كافة وذلك كون أن هناك قيوداً متعارضة:

مثال:

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = x_1 + 5x_2 \\
&3x_1 + x_2 \le 5 \\
&3x_1 + x_2 \ge 5 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال (٨): أوجد حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام خوارزمية السمبلكس:

$$
\begin{aligned}
&Min\ z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&x_1 - 2x_2 + x_3 = 50 \\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\
&3x_1 + x_2 + x_3 \ge 100 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&Min\ z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
&x_1 - 2x_2 + x_3 + R_1 = 50 \\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + S_1 = 30 \\
&3x_1 + x_2 + x_3 - S_2 + R_2 = 100 \\
&x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(*) على الطالب التأكد من مضمون هذه الحالات بالطريقة البيانية وبطريقة السمبلكس معاً.

حالة خاصة: حالة تعذر الحل عدم وجود حل ممكن.

إن جدول السمبلكس هو الجدول (VI-14)

أو حين تكون منطقة الحلول المتاحة غير واقعة في الربع الأول، الأمر الذي لا يحقق معه شرط عدم السلبية.

مثال:

$$
\begin{aligned}
&Max\, z = 8x_1 + 3x_2 \\
&-6x_1 - 3x_2 \le 20 \\
&3x_1 - 4x_2 \le 10 \\
&-x_1 - 2x_2 \ge 3 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ونلاحظ هذا في الطريقة البيانية واضحاً. أما إذا لجأنا لحل المشكلة بطريقة السمبلكس فنجدها في نهاية الحل «آخر مرحلة» إن خوارزمية السمبلكس قد انتهت وجميع معاملات تابع الهدف موجبة في حالة التعظيم وسالبة في حالة التقليل، إلا أن هناك متغيراً اصطناعياً «من المتغيرات الأساسية» لم يخرج من الحل وهو بقيمة موجبة.

– الحلول غير المحدودة Unbounded Solution «عدم توفر الحدود Unboundness»:

تعرف هذه الحالة أيضاً بمنطقة الحل المفتوح وتعني أن المنطقة المظللة مفتوحة بدون نهاية وليس هناك حدود على الحل وغيرها في مسائل التعظيم إذ يمكن لمتغير ما من متغيرات المسألة المطلوب حلها أن يأخذ أية زيادة أو نقصان دون أن يخالف أي قيد من قيود هذه المسألة، «هذه الحالة يمكن التحدث عنها نظرياً أما واقعياً فلا نجدها مطلقاً». الأمر الذي ينتج عن زيادة في قيمة

تابع الهدف بشكل يصل إلى اللانهاية ونجد هذه الحالة في تطبيق طريقة السمبلكس حيث نجد أن جميع أرقام عمود الارتكاز سالبة أو معدومة*.

مثال:

$$Max\, Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 \geq 10$$
$$2x_2 \geq 19$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- وجود عدة حلول مثالية «المثلوية البديلة Alternate Optimal Solution»:

وهنا نكون أمام عدة حلول مثلى «أي لدينا أكثر من حل أمثل. لانهاية من الحلول المثلى» وتنتج حينما يكون ميل تابع الهدف موازياً لميل أحد قيود النموذج.

مثال:

$$Max\, z = x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 6x_2 \leq 7$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

وحين تطبيق خوارزمية السمبلكس نجد في السطر الأخير من المرحلة النهائية أن قيم المتغيرات غير الداخلة في الحل معدومة.

- حالة التردي «الدورانية – الانحلال» «Degeneracy».

تصادفنا هذه الحالة حينما تحوي جملة القيود قيدين متساويين أو قيد ينتج عن قيد آخر بمعنى آخر وجود قيد فائض Redundancy.

---

* على الطالب التأكد من هذه الحالات بالطريقة البيانية وبطريقة السمبلكس معاً.

مثال:

$$Max\, Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$2x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1 + 2x_2 \le 28$$
$$x_1 \le 30$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

مثال آخر:

$$Max\, Z = x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 14$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

حيث نجد أن الحل بالطريقة البيانية عادياً وسهلاً، لا يخلق لنا أي مشاكل سوى أن نقطة الحل الأمثل يتم تحديدها من عدة قيود لا لزوم لبعضها.

وأحياناً في أثناء تطبيق خوارزمية السمبلكس والتوصل إلى حل نموذج البرمجة الخطية وعند الانتقال من مرحلة لأخرى نجد أننا لا نستطيع تحديد المتغير الذي سوف يحل محل المتغير الخارج وذلك كون أن نواتج القسمة b_i/a_{ij} متساوية، وكما نلاحظ أيضاً أن قيمة تابع الهدف واحدة في المرحلتين المتجاورتين معاً. وهنا يفضل اختيار السطر الذي يحوي على أكبر قيمة في عمود الحل، ومع كل هذا نجد أن إمكانية تكرارية المراحل والخطوات دون أن يطرأ أي تحسين على قيمة الحل الأمثل واردة تماماً.

VI-1-4- الإزدواجية «الثنائية» في البرمجة الخطية «Duality»:

بعد نشر طريقة السمبلكس، أخذ المختصون والعاملون بهذا المجال الإسراع في استخدام وتطوير البرمجة الخطية «وكان من بينهم العالم جال Gale» إذ توصلوا إلى صياغة جديدة لمسائل البرمجة الخطية عن طريق ما يعرف بالمشكلة الثنائية «الترافقية» Duality Problem لمشكلة البرمجة الخطية. وتبين لهم أن لكل مسألة برمجة خطية شكلين «صورتين» يختلفان من حيث الصيغة الرياضية لكل شكل، إلا أن لهما صفات واحدة يمكن التعرف عليها من أحد الشكلين في أثناء الحل.

نسمي أحد الشكلين بالمسألة الأصلية «Primal Problem» «الصورة الأصلية – الوجه الأول» ونسمي الشكل الأخر بالمسألة الثنائية «Dual Problem» «الصورة الثنائية – الوجه الأخر».

نستطيع التعرف على هذين الشكلين من خلال المثال التالي:

مثال (10): لنفرض أننا أمام إحدى مسائل التنظيم الغذائي المتضمنة المعطيات الواردة في الجدول التالي «الجدول (VI-16)»

الغذاء ونوعيته / محتويات الغذاء	A_1	A_2	A_3	الكمية الضرورية
B_1	2	3	1	100
B_2	1	2	3	120
تكلفة الوحدة الواحدة	3	2	4	

الجدول (VI-16)

يمكن صياغة المسألة رياضياً من الجدول السابق فنجد أن:

$$Min\, z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 120$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

لنحل هذه المسألة بطريقة السمبلكس. إن الشكل النظامي لهذا النموذج هو:

$$Min\, z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + OS_1 + OS_2 + MR_1 + MR_2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - S_1 + R_1 = 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - S_2 + R_2 = 120$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

وجدول السمبلكس هو الجدول (VI-17)

Damascus University

		C_j	3	2	4	0	0	M	M
C_B	Basic		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2
M	R_1	100	2	1	1	-1	0	1	0
M	R_2	120	1	2	3	0	-1	0	1
Z_j		220 M	3 M	3M	4 M	- M	- M	M	M
$Z_j - C_j$			3M-3	3M - 2 ↑	4M-4	- M	- M	0	0
2	X_3	100/3	2/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0
M	R_2	160/3	-1/3	0	→ 7/3	2/3	-1	-2/3	1
Z_j		$\frac{200+160M}{3}$	$\frac{4-M}{3}$	2	$\frac{2+7M}{3}$	$\frac{-2+2M}{3}$	- M	$\frac{2-2M}{3}$	M
$Z_j - C_j$			$\frac{5-M}{3}$	0	$\frac{7M-10}{3}$ ↑	$\frac{-2+2M}{3}$	- M	$\frac{2-5M}{3}$	0
2	X_1	180/7	5/7	1	0	-3/7	1/7	3/7	-1/7
4	X_3	160/7	-1/7	0	1 →	2/7	-3/7	-2/7	3/7
Z_j		1000/7	6/7	2	4	2/7	-10/7	-2/7	10/7
$Z_j - C_j$			-15/7	0	0	2/7 ↑	-10/7	$-\frac{2}{7}-M$	$\frac{10}{7}-M$
2	X_2	60	1/2	1	3/2	0	-1/2	0	1/2
0	S_1	80	-1/2	0	7/2	1	-3/2	-1	3/2
Z_j		120	1	2	3	0	-1	0	1
$Z_j - C_j$			-2	0	-1	0	-1	- M	1-M

الجدول (VI-17)

انتهت خوارزمية السمبلكس وحل المسألة هو:

$X_1 = 0, X_2 = 60, X_3 = 0, S_1 = 80$

$Z = 120$

لنفترض الآن أننا أمام مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$Max\, w = 100y_1 + 120y_2$$
$$2y_1 + y_2 \le 3$$
$$3y_1 + 2y_2 \le 2$$
$$y_1 + 3y_2 \le 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

لنحاول حلها بخوارزمية السمبلكس أيضاً.

إن الشكل النظامي لهذه المسألة هو:

$$Max\, w = 100y_1 + 120y_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$2y_1 + y_2 + S_1 = 3$$
$$3y_1 + 2y_2 + S_2 = 2$$
$$y_1 + 3y_2 + S_3 = 4$$
$$y_1, y_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

ويكون جدول السمبلكس كما يلي الجدول (VI-18)

		C_z	100	120	0	0	0
C_b	Basic		y_1	y_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1	3	2	1	1	0	0
0	S_2	2	3	□	0	1	0
0	S_3	4	1	3	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			-100	-120	0	0	0
0	S_1	2	1/2	0	1	-1/2	0
120	Y_2	1	3/2	1	0	1/2	0
0	S_3	1	-7/2	0	0	-3/2	1
Z_j		120	180	120	0	60	0
$Z_j - C_j$			80	0	0	60	0

الجدول (VI-18)

إذا أجرينا مقارنة بين الحلين السابقين فإننا نستطيع التوصل إلى أسلوب صياغة الثنائية وكيفية تشكيل النموذج الرياضي لها من المسألة الأصلية.

مثـــال (11): يحدد الأطباء البيطريون عادة في مراكز تربية المواشـــي القيمـــة الغذائية «لكل نوع من أنواع المواشي» التي تعطى ضمن وحدات علفيـــة لكـــل رأس من رؤوس الماشية وذلك حسب الهدف في تربية القطيع.

في حين يرى الاقتصاديون أن هذه القيم الغذائية يجب تأمينها لقطعـــان الماشية بأقل التكاليف الممكنة.

فإذا افترضنا أن لدينا عدداً من الأعلاف المختلفة الأسعار والتي تحتوي علـــى القيمة الغذائية السابقة وبكميات مختلفة فعندها يجب علينا التفتيش عـــن خليطـــة علفية بحيث تحقق القيمة الغذائية المطلوبة وبأقل التكاليف. لنفـــرض أن لـــدينا نوعين من الأعلاف وأننا أمام ٣ أنواع من القيم الغذائية ذات الكميات المتاحـــة ٩، ٨، ١٢ وتركيب كل نوع من العلفين وسعر تكلفة الوحدة الواحدة كما هي في الجدول التالي (VI-19)

العلف / القيمة الغذائية	العلف 1	العلف 2	المتاح
بروتينات	3	1	9
أملاح	1	2	8
فيتامينات	1	6	12
تكلفة الكغ الواحد	4	6	

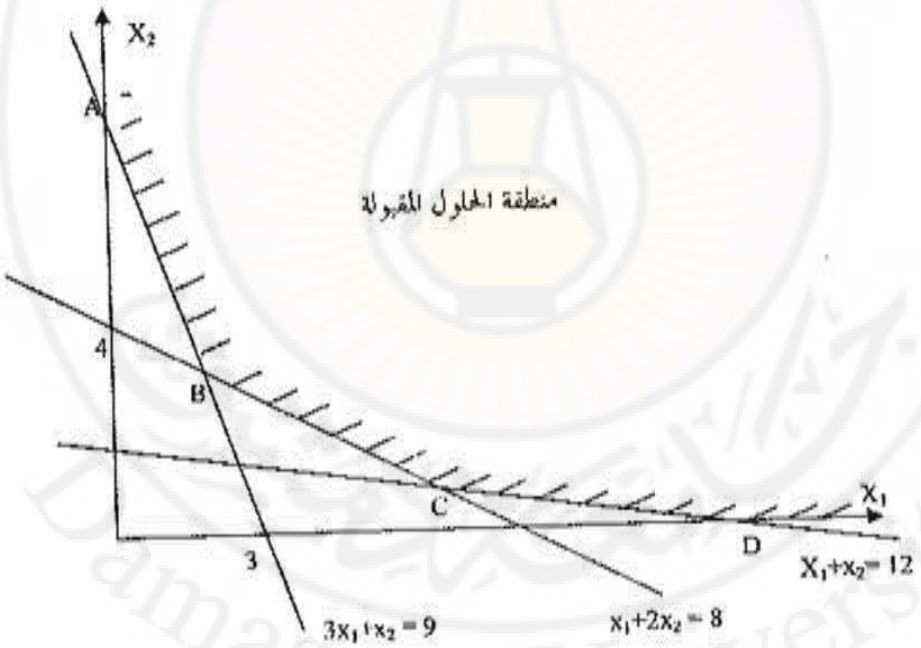
الجدول (VI-19)

فالمطلوب إيجاد نموذج البرمجة الخطي لهذه المسألة ثم إيجاد العليقة العلفية التي توفر للقطيع القيمة الغذائية وبأقل التكاليف الممكنة.

الحل: لنلاحظ أن نموذج البرمجة الخطية، يمكن إيجاده بسهولة من الجدول:

$$Min\, z = 4x_1 + 6x_2$$
$$3x_1 + x_2 \geq 9$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل بالطريقة البيانية: نرسم الشكل (VI-20) ونوجد مضلع منطقة الحلول المقبولة.



لدينا:

$$A(0,9) = 4*0 + 6*9 = 54$$
$$B(2,3) = 4*2 + 6*3 = 26$$
$$C(6,1) = 4*6 + 6*1 = 30$$
$$D(12,0) = 4*12 + 6*0 = 48$$

نلاحظ أن النقطة التي تجعل اقيمة تابع الهدف أقل ما يمكن هي (2,3) B وقيمة تابع الهدف هي 26 وحدة.

لنحاول الآن حل هذا النموذج من خلال طريقة السمبلكس:

إن الشكل النظامي للنموذج هو:

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3$$
$$3x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 9$$
$$3x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 9$$
$$3x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 9$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

ويكون جدول السمبلكس «الجدول VI-20 » الموافق لهذا الشكل هو:

Damascus University

		C_j	3	2	4	0	0	M	M	M
C_B	Basis		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3
M	R_1	9	3	1	-1	0	0	1	0	0
M	R_2	8	1	2	0	-1	0	0	1	0
M	R_3	12	1	6	0	0	-1	0	0	1
Z_0		29 M	5 M	9 M	-M	-M	-M	M	M	M
$Z_j - C_j$			5M-4	9 M-6	-M	-M	-M	0	0	0
M	R_1	7	17/6	0	-1	0	1/6	1	0	-1/6
M	R_2	4	4/6	0	0	-1	2/6	0	1	-2/6
6	X_2	2	1/6	1	0	0	-1/6	0	0	1/6
Z_1		12+1M	$\frac{2M+6}{6}$	6	-M	-M	$\frac{3M-6}{6}$	M	M	$\frac{6-3M}{6}$
$Z_1 - C_1$			$\frac{2M-3}{6}$	0	-M	-M	$\frac{3M-6}{6}$	0	0	$-\frac{3}{2}M$
Z_1	X_1	42/17	1	0	-6/17	0	1/17	6/17	0	-1/17
	R_2	40/17	0	0	4/17	-1	5/17	-4/17	1	-5/17
2	X_2	27/17	0	1	1/17	0	-3/17	-1/17	0	3/17
Z_2		$\frac{6M+330}{17}$	4	6	$\frac{4M-18}{17}$	-M	$\frac{5M-14}{17}$	$\frac{4M+18}{17}$	M	$\frac{-5M+1}{17}$
$Z_2 - C_2$			0	0	$\frac{4M-18}{17}$	-M	$\frac{5M-14}{17}$	$\frac{2M+18}{17}$	0	$\frac{-22M+1}{17}$
4	X_1	2	1	0	-2/5	1/5	0	2/5	-1/5	0
0	S_2	8	0	0	4/5	-17/5	1	-4/5	17/5	-1
6	X_2	3	0	1	1/5	-3/5	0	-1/5	3/5	0
Z_3		26	4	6	-2/5	-14/5	0	2/5	14/5	0
$Z_3 - C_3$			0	0	-2/5	-14/5	0	$-M$	$\frac{14}{5} - M$	-M

الجدول (VI-20)

إذن نلاحظ ومن السطر الأخير أن خوارزمية السمبلكس قد انتهـت وأن الحـل النهائي هو:

$X_1 = 2, X_2 = 3, S_3 = 8$

وقيمة تابع الهدف هي: 26

ونلاحظ أن نتائج خوارزمية السمبلكس متطابقة تماماً مع الطريقة البيانية. لنوجد الآن النموذج المرافق «الوجه الآخر» للمسألة الأصلية، فنجد أن:

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 9y_1 + 8y_2 + 12y_3 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &\le 4 \\ y_1 + 2y_2 + 6y_3 &\le 6 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن الشكل النظامي «المعياري» للنموذج المرافق السابق هو:

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 9y_1 + 8y_2 + 12y_3 + 0S_1 + 0S_2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 + S_1 &= 4 \\ y_1 + 2y_2 + 6y_3 + S_2 &= 6 \\ y_1, y_2, y_3, S_1, S_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

أما الحل وفق خوارزمية السمبلكس فيكون على النحو التالي «الجدول (VI-22)»:

		C_j	9	8	12	0	0
C_B	Basic		y_1	y_2	Y_3	S_1	S_2
0	S_1	4	3	1	1	1	0
0	S_2	6	1	2	4	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			-9	-8	-12	0	0
0	S_1	3	17/6	4/6	0	1	-1/6
12	Y_3	1	1/6	2/6	1	0	1/6
Z_j		12	2	4	12	0	2
$Z_j - C_j$			-7	-4	0	0	2
9	Y_1	18/17	1	4/17	0	6/17	-1/17
12	Y_3	14/17	0	5/17	1	-1/17	3/17
Z_j		330/17	9	96/17	12	42/17	27/17
$Z_j - C_j$			0	-40/17	0	42/17	27/17
9	Y_1	2/5	1	0	-4/5	2/5	-1/5
8	Y_2	14/5	0	1	17/5	-1/5	3/5
		26	9	8	20	2	+3
			0	0	8	2	3

الجدول (VI-22)

إذن خوارزمية السمبلكس قد انتهت ونلاحظ أن حل النموذج المرافق هو:

$y_1 = 2/5, y_2 = 14/5, z = 26$

مثال (12):

- لنفرض أن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$Max\, z = 3x_1 + 4x_2$$
$$2.5x_1 + x_2 \le 20$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 30$$
$$x_1 + 2x_2 \le 16$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

والمطلوب:

١ - أوجد حل هذا النموذج وفق خوارزمية السمبلكس.

٢ - أوجد الوجه المرافق ثم حله وفق خوارزمية السمبلكس أيضاً.

٣ - فسر حلول كلاً من النموذجين من خلال الخوارزميتين.

١) نكتب النموذج بالشكل المعياري النظامي:

$$Max\ z = 3x_1 + 4x_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

$$\frac{5}{2}x_1 + x_2 + S_1 = 20$$

$$3x_1 + 3x_2 + S_2 = 30$$

$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 16$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

		C_j	20	30	16	0	0	M	M
			y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	R_1	R_2
M	R_1	3	5/2	3	1	-1	0	1	0
M	R_2	4	1	3	2	0	-1	0	1
	Z_j	7 M	7/2 M	6 M	3 M	- M	- M	M	M
$Z_j - C_j$			$M-20$	6M-30	3 M-16	- M	- M	0	0
30	Y_2	1	5/6	1	1/3	-1/3	0	1/3	0
M	R_2	1	-3/2	0	1	1	-1	-1	1
	Z_j	30+ M	$5-\frac{3}{2}M$	30	10+M	-10+M	- M	10- M	M
$Z_j - C_j$			$5-\frac{3}{2}M$	0	↑ -6+M	-10+M	- M	10-2M	0
30	Y_2	2/3	4/3	1	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3
16	Y_3	1	-3/2	0	1	1	- 1	-1	1
	Z_j	36	16	30	16	- 4	- 6	٤	6
$Z_j - C_j$			- 4	0	0	- 4	- 6	4-M	6-M

الجدول (VI-23)

نقول إن خوارزمية السمبلكس قد انتهت وأن الحل هو:

$$, y_3 = 1, Z_y = 36\frac{2}{3} y_2 =$$

٢) الوجه المرافق هو:

$$\begin{aligned} Min\, Z &= 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 \\ \frac{5}{2}y_1 + 3y_2 + y_3 &\geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ولحله وفق خوارزمية السمبلكس نحوله للشكل المعياري النظامي:

$$\begin{aligned} Min\, Z = 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 + OS_1 + OS_2 + MR_1 + MR_2 \\ 5/2y_1 + 3y_2 + y_3 - S_1 + R_1 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 - S_2 + R_2 = 4 \\ y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Damascus University

		C_j	3	4	0	0	0
			X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
0	S_1	20	5/2	1	1	0	0
0	S_2	30	3	3	0	1	0
0	S_3	16	1	—	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			- 3	↑ - 4	0	0	0
0	S_1	12	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	S_2	6	3/2	0	0	1	-3/2
4	X_2	8	1/2	1	0	0	1/2
	Z_j	32	2	4	0	0	2
$Z_j - C_j$			- 1 ↑	0	0	0	2
0	S_1	4	0	0	1	-3/4	3/2
3	X_1	4	1	0	0	3/2	- 1
4	X_2	6	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1
	Z_j	36	3	4	0	2/3	1
$Z_j - C_j$			0	0	0	2/3	1

الجدول (VI-24)

نقول أن خوارزمية السمبلكس قد انتهت وأن الحل هو:

$X_1 = 4, X_2 = 6, S_1 = 4$

وأن $Z = 36$

٣) نلاحظ أن قيمة تابع الهدف في كلتا الحالتين واحد ويساوي (36). ونلاحظ أن قيمة X_1, X_2 في المسألة الأولى هي نفسها قيمة المتغيرات الساكنة في المسألة الثانية. S_1, S_2 ولكن مع تغير الإشارة. $S_1 = -4 \ , X_1 = 4$

$S_2 = -6 \ , X_2 = 6$

وأن قيمة y_2 و y_3 في المسألة الثانية هي نفسها قيمة المتغيرات الحرة (الساكنة) في المسألة الأولى: $y_3 = 1 \ , S_3 = 1$

$y_2 = 2/3 \ , S_2 = 2/3$

مثال (١٣): لنفرض أن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

١) تابع الهدف: $\text{Min } Z = 2x_1 + 4x_2$

٢) القيود: $2x_1 + x_2 \geq 14$

$x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 + 3x_2 \geq 18$

٣) عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

والمطلوب:

1 – أوجد حل هذا النموذج باستخدام خوارزمية السيمبلكس.

2 – أوجد النموذج المرافق ثم حله أيضاً بخوارزمية السيمبلكس.

3 – قارن حلول هذين النموذجين بعضهما ببعض.

1) نوجد الشكل المعياري للنموذج

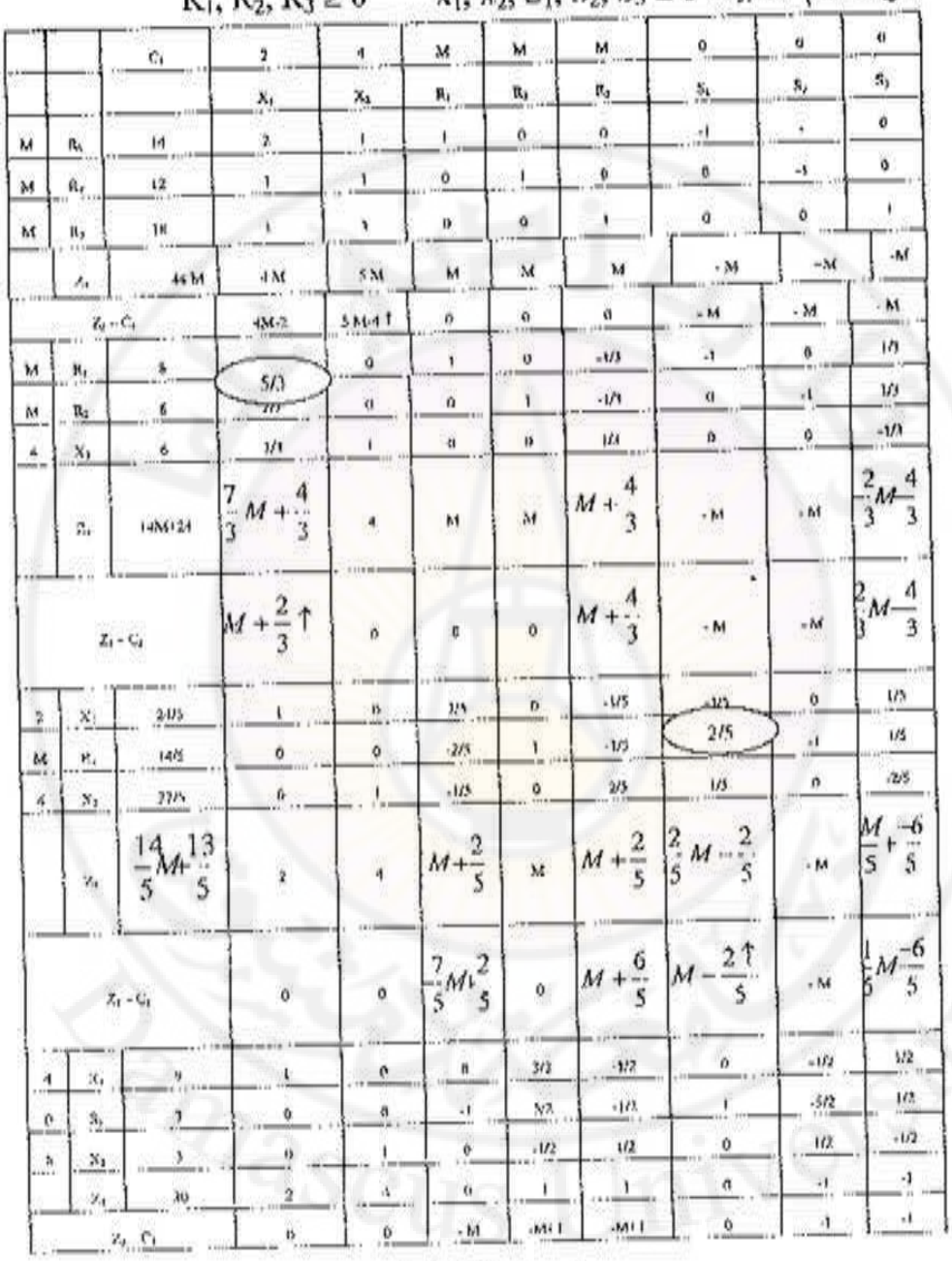
$\text{Min } Z = 2x_1 + 4x_2 + MR_1 + MR_2 + MR_3 + O.S_1 + O.S_2 + O.S_3$

$2x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 14$

$x_1 + x_2 - S_2 + R_2 = 12$

$x_1 + 3x_2 - S_3 + R_3 = 18$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$ $\quad R_1, R_2, R_3 \geq 0$



الجدول (VI-25)

انتهت الخوارزمية والحل هو:

$X_1 = 9, X_2 = 3, S_1 = 7$

٢) النموذج المرافق هو: $\text{Max } Z = 14y_1 + 12y_2 + 18y_3$

القيود: $2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$

$y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 4$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

تحويل إلى نموذج قياسي:

$\text{Max } Z = 14y_1 + 12y_2 + 18y_3 + 0.S_1 + 0.S_2$

$2y_1 + y_2 + y_3 + S_1 = 2$

$y_1 + y_2 + 3y_3 + S_2 = 4$

$y_1, y_2, y_3, S_1, S_2 \geq 0$

Damascus University

		C_j	14	12	18	0	0
			y_1	y_2	Y_3	S_1	S_2
0	S_1	2	2	1	1	1	0
0	S_2	4	1	1	3	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			-14	-12	-18 ↑	0	0
0	S_1	2/3	5/3	2/3	0	1	-1/3
18	Y_3	4/3	1/3	1/3	1	0	1/3
	Z_j	24	6	6	18	0	6
$Z_j - C_j$			- 8 ↑	- 6	0	0	6
14	y_1	2/5	1	3/5	0	3/5	-1/5
18	Y_3	6/5	0	1/5	1	-1/5	2/5
	Z_j	136/5	14	46/5	18	24/5	22/5
$Z_j - C_j$			0	-14/5 ↑	0	24/5	22/5
12	y_2	1	5/2	1	0	3/2	-1/2
18	Y_3	1	1/2	0	1	-1/2	1/2
	Z_j	30	21	12	18	9	3
$Z_j - C_j$			7	0	0	9	3

الجدول (VI-26)

انتهت الخوارزمية وقيمة تابع الهدف = 30

$y_2 = 1, y_3 = 1$

3) بمقارنة الحلول لهذين النموذجين نجد أن النتيجة في حالة Min هي قيمة تابع الهدف في حالة Min = قيمة تابع الهدف في حالة Max = 30

إن $X_1 = 9$ في حالة Min

$X_2 = 3$ في حالة Min

وعند التحويل للنموذج المرافق في حالة Max أصبح

X_1, X_2 يقابل S_1, S_2 وبمقارنة قيمة S_1, S_2 في حالة Max نجد أن:

(Min) $9 = X_1 =$ $9 = S_1$ (Max)

(Min) $3 = X_2 =$ $3 = S_2$ (Max)

أما قيمة S_1 في حالة Min والتي = ٧

يقابلها قيمة y_1 في حالة Max والتي = ٧ أيضاً.

ملاحظات هامة: إذا عدنا إلى الأمثلة الأخيرة فإننا نستنتج النقاط التالية:

1 – بمقارنة جدولي طريقة السمبلكس للمسألة الأصلية وللمسألة الثنائية نجد أن الحل في جدول السمبلكس للمسألة الثنائية هو أبسط وأسهل من الحل الموجود في جدول السمبلكس للمسألة الأصلية. الأمر الذي يبين لنا أن حل نماذج البرمجة الخطية بتحويلها إلى نماذج برمجة خطية ثنائية يفيدنا حين يكون لدينا عدد كبير من الصفوف وبمتغيرات أقل، إذ تعطينا المسألة الثنائية في هذه الحالة عدداً قليلاً من الصفوف بأعمدة أكثر وبالتالي فينتج عن هذا تقليل تكرارات مراحل طريقة السمبلكس.

2 – إن عدد الصفوف في جدول السمبلكس للمسألة الأصلية يساوي عدد الأعمدة في جدول السمبلكس للمسألة الثنائية وبالعكس، الأمر الذي ينبهنا إلى الشكل الذي يكون حله بطريقة السمبلكس هو أسهل وأبسط وغالباً الشكل الذي يكون فيه عدد

الصفوف أقل «في حالة تساوي عدد الصفوف في المسألتين الأصلية والثنائية فإننا نأخذ الشكل الذي يكون فيه عدد الأعمدة أقل».

3 – نتائج حل المسألة «المثال (١١)» في الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس واحد لم يختلفا مطلقاً وهو:

$X_1 = 2, X_2 = 3, Z = 26$

4 – قيمة تابع الهدف في الطرق الثلاث للحل «الطريقة البيانية – طريقة السمبلكس للمسألة الأصلية – طريقة السمبلكس للمسألة الثنائية» واحد أيضاً وهو: $Z = 26$.

5 – هناك علاقة وطيدة بين القيم التي حصلنا عليها في الجدول الأخير «آخر مرحلة» في طريقتي «خوارزمية السمبلكس للمسألة الأصلية وخوارزمية السمبلكس للمسألة الثنائية» الحل. الأمر الذي يبين لنا ماهية ارتباط المسألة الأصلية بالمسألة الثنائية وأن الحل الأمثل لإحدى المسألتين يمكن إيجاده من المسألة الأخرى بشكل مباشر.

هذه العلاقة يمكن شرحها على النحو التالي:

– إن قيم $X_1 = 2, X_2 = 3$ التي حصلنا عليها في الجدول الأخير لطريقة السمبلكس للمسألة الأصلية يمكن ملاحظتها في السطر الأخير من جدول السمبلكس الأخير للمسألة الثنائية وفي عمودي المتغيرات الإضافية S_1 و S_2.

– إن قيمة المتغير الإضافي $S3 = 8$ الموجودة في جدول السمبلكس الأخير للمسألة الأصلية هي نفس قيمة المتغير $y_3 = 8$ «الموجود في عمود y_3» الذي لم يدخل في نتيجة حل طريقة السمبلكس للمسألة الثنائية.

- إن نتيجة حل طريقة السمبلكس للمسألة الثنائية والتي هي:

$y_1 = 2/5, y_2 = 14/5$

يمكن ملاحظتها في عمودي S_1 و S_2 من الجدول الأخير في طريقة السمبلكس للمسألة الأصلية «باختلاف الإشارة السالبة نتيجة تغيير تابع الهدف من Min إلى Max».

6 - يجب الانتباه إلى أنه حينما نكون أمام متغيرات غير محددة الإشارة في نموذج برمجة خطي ما ونود حل هذا النموذج وفق طريقة السمبلكس فيجب علينا الأخذ بعين الاعتبار المتغيرات غير محددة الإشارة ووضعها في جدول السمبلكس بإشاراتها الموجبة والسالبة مثلها مثل أيّ متغيرات أخرى.

7 - إن بالإمكان التوصل إلى نتائج حل مسألة برمجة خطية «أصلية أو ثنائية» حينما نعرف نتائج حل إحدى هاتين المسألتين مباشرة دون اللجوء إلى طريقة السمبلكس وذلك من خلال الملاحظات التالية:

* لقد وجدنا أن قيمة تابع الهدف في كلتا المسألتين هو واحد له نفسها القيمة وذلك حين وجود حل.

* إذا كانت قيمة أحد حلول المسألة الأصلية غير معدوم فإن قيمة المتغير الإضافي المقابل له في الوجه الآخر «المسألة الثنائية» يجب أن تكون مساوية للصفر.

* إذا كانت قيمة أحد المتغيرات الإضافية في المسألة الأصلية غير معدوم فإن قيمة أحد متغيرات الحل المقابل له في المسألة الثنائية يجب أن تكون مساوية للصفر.

فإذا طبقنا هذه النقاط على المسألة «المثال ١١» لوجدنا أن:

$\text{Min } Z = 4x_1 + 6x_2$

$3x_1 + x_2 - S_1 = 9$

$x_1 + 2x_2 - S_2 = 8$

$x_1 + 6x_2 - S_3 = 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

لقد وجدنا أن الحل هو:

$x_1 = 2, x_2 = 3, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 8$

وفق النقاط السابقة يجب أن يكون:

$A_1 = 0 \quad A_2 = 0 \quad y_1 \neq 0 \quad y_2 \neq 0 \quad y_3 = 0$

في نموذج المسألة الثنائية والذي هو:

$$\begin{aligned} &Max \ \ w = 9y_1 + 8y_2 + 12y_3 \\ &3y_1 + y_2 + y_3 + A_1 = 4 \\ &y_1 + 2y_2 + 6y_3 + A_2 = 6 \end{aligned}$$

بالتبديل نجد أن:

$3y_1 + y_2 = 4$

$y_1 + 2y_2 = 6 \quad \Rightarrow y_1 = 2/5, y_2 = 14/5$

وهو نفس الحل فيما لو طبقنا خوارزمية السمبلكس.

VI-1-4-1- صياغة الثنائية «الازدواجية – الترافقية» في البرمجة الخطية:

تتم صياغة النموذج المرافق «النموذج الثنائي» من النموذج الأصلي «الأولـــي» وفق القواعد التالية:

– كل قيد في المسألة الأصلية يقابله متغير في النموذج «المسألة الثنائية» الآخر.

– كل متغير في المسألة الأصلية يقابله قيد في المسألة الثنائية.

- معاملات «أمثال» تابع الهدف في المسألة الأصلية تصبح ثوابت «حدود مطلقة» الأطراف اليمنى للقيود في المسألة الثنائية.

- ثوابت «الحدود المطلقة» الأطراف اليمنى في المسألة الأصلية تصبح ثوابت «معاملات – أمثال» تابع الهدف في المسألة الثنائية.

- دالة الهدف في المسألة الأصلية عكس تابع الهدف في المسألة الثنائية والعكس بالعكس.

إن هذه الصياغة يمكن وصفها على النحو التالي: الجدول الجدول (VI-27)

المشكلة الأولية Primal Problem المسألة الأولية	المشكلة الثنائية Dual Problem المسألة الازدواجية «الترافقية»
$max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,2,....m_1$	$y_i \leq 0 \quad i = 1,2,.....m_1$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = m_1 + 1,....m_2$	y_i لا على التعيين $i = m_1 + 1,....m_2$
	$Y_i \geq 0 \quad I = m_2+1,.....m$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = m_2 + 1,....m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1,2,....n_1$
	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j = n_1 + 1,....n_2$
$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,.....n1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = n_2 + 1,....n$
x_j لا على التعيين $j = n_1+1,....n_2$	
$x_j \leq 0 \quad j = n_2+1, ...n$	

الجدول (VI-27)

أما اتجاه المتراجحات ونوعيتها « ≤ أو ≥ أو =» وعددها فيعالج حسب طبيعة كل شكل من أشكال النموذج الأصلي على النحو التالي:

I – الشكل القانوني «المتوافق»: يتصف هذا النموذج بأن اتجاه المتراجحات فيه موافق (متطابق) مع دالة الهدف أي:

* إذا كانت دالة الهدف Max فإن اتجاه المتراجحات من النوع أصغر أو يساوي.

* إذا كانت دالة الهدف Min فإن اتجاه المتراجحات من النوع أكبر أو يساوي.

* جميع المتغيرات في المسألة الثنائية أكبر أو تساوي الصفر أي تحقق شروط عدم السلبية وهنا تكون عملية صياغة النموذج الثنائي من النموذج الأولي بسيطة إذ تقلب اتجاه المتراجحات من أصغر أو يساوي إلى أكبر أو يساوي والعكس بالعكس.

مثال: لنفرض أن الصيغة الأولى هي:

$$\begin{aligned} Max\, Z &= 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\le 30 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\le 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 &\le 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

أما الصيغة الثنائية فهي:

$$\begin{aligned} Min W &= 30y_1 + 40y_2 + 50y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\ge 5 \\ 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 &\ge 8 \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 &\ge 7 \end{aligned}$$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

II – الشكل المختلط: وهو النموذج الذي تكون فيه جميع القيود «المتراجحات» على شكل معادلات «مساواة» أو بعضها.

* يحوي تابع الهدف على المتغيرات الأصلية والإضافية والراكدة فقط دون إدخال المتغيرات الاصطناعية.

* المتراجحات «القيود» يجب أن تكون متوافقة مع تابع الهدف ويجب عدم إدخال المتغيرات الاصطناعية.

* جميع المتغيرات في المسألة الثنائية غير محددة الإشارة ما لم يظهر ما يثبت عكس ذلك.

مثال: لنفرض أن لدينا النموذج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&Min\, Z = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\
&4x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8 \\
&2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 18
\end{aligned}
$$

إن حل هذا النموذج وفق خوارزمية السمبلكس هو كما ورد في الجدول **(VI-28)**:

		C_j	5	3	7	M	M	0	0
	الأساس	الحل	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	S_2	S_1
M	R_1	10	1	2	1	1	0	0	0
M	R_2	8	←	1	- 3	0	1	0	- 1
0	S_2	18	2	3	5	0	0	1	0
	Z_1	18 M	5 M	3 M	-2M	M	M	0	- M
$Z_1 - C_1$			5M-5 ↑	3M-3	-2M-7	0	0	0	- M
M	R_1	8	0	7/4	7/4	1	-1/4	0	1/4
5	X_1	2	1	1/4	-3/4	0	1/4	0	-1/4
0	S_2	14	0	5/2	13/2	0	-1/2	1	1/2
	Z_2	8M+10	5	$\frac{7M}{4}+\frac{5}{4}$	$\frac{7M-15}{4}$	M	$\frac{5-M}{4}$	0	$\frac{M-5}{4}$
$Z_2 - C_2$			0	$\frac{7M-7}{4}$	$\frac{M-43}{4}$	0	$\frac{-5M}{4}$	0	$\frac{M-5}{4}$
3	X_2	32/7	0	1	1	4/7	-1/7	0	1/7
5	X_1	6/7	1	0	- 1	-1/7	2/7	0	-2/7
0	S_2	18/7	0	0	4	-10/7	-1/7	1	1/7
	Z_3	126/7	5	3	- 2	1	1	0	- 1
$Z_3 - C_3$			0	0	- 9	1- M	1- M	0	-1

الجدول (VI-28)

لنكتب هذا النموذج بالشكل النظامي «الموحد - المعياري» دون إدخال المتغيرات الاصطناعية.

$$Min\,Z = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + OS_1 + OS_2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 - S_1 = 8$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + S_2 = 18$$

لدينا ٥ متغيرات في تابع الهدف فيكون لدينا في المسألة الثنائية عدد القيود = عدد المتغيرات.

$$Max\,W = 10y_1 + 8y_2 + 18y_3$$
$$y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 5$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 3$$
$$y_1 - 3y_2 + 5y_3 \le 7$$

$$0y_1 - y_2 + 0y_3 \le 0 \quad \Rightarrow -y_2 \le 0$$
$$0y_1 + 0y_2 + y_3 \le 0 \quad \Rightarrow y_3 \le 0$$

III – الشكل العام: إن اتجاه المتراجحات مرتبط بعدد القيود في المسألة الثنائية الذي هو مرتبط بعدد المتغيرات في المسألة الأصلية «حيث متغيرات المسألة إما أكبر أو تساوي الصفر أو غير محددة الإشارة».

* إن إشارة المتراجحة في المسألة الثنائية يطابق دالة الهدف في المسألة الثنائية.

* إذا كان القيد في المسألة الأصلية يوافق دالة الهدف الأصلية فإن المتغير المقابل في المسألة الثنائية يحقق شرط عدم السلبية.

* إذا كان القيد في المسألة الأصلية على شكل مساواة فإن المتغير المقابل في المسألة الثنائية غير محدد أو مقيد بالإشارة.

* إذا كان المتغير في المسألة الأصلية يحقق شرط عدم السلبية فإن القيد المقابل له في المسألة الثنائية على شكل متراجحة متفقة مع دالة الهدف.

* إذا كان المتغير في المسألة الأصلية غير محدد بالإشارة فإن القيد المقابل في المسألة الثنائية يكون على شكل معادلة «مساواة».

مثال: لنفرض أن لدينا النموذج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \Rightarrow -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 20$$
$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -12$$
$$-6x_1 - 7x_2 + 0x_3 \le -30$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

إن المسألة الثنائية هي:

$$Min\ W = 16y_1 + 20y_2 - 12y_3 - 30y_4$$
$$-3y_1 - 3y_2 + y_3 + 6y_4 \le -5$$
$$-y_1 - 4y_2 + y_3 + 7y_4 \le -3$$
$$-2y_1 - y_2 + 3y_3 + 0y_4 \le -4$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

أو بشكل آخر:

$$3y_1 + 3y_2 - y_3 - 6y_4 \ge 5$$
$$y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 7y_4 \ge 3$$
$$2y_1 + y_2 - 3y_3 + 0y_4 \ge 4$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

وبشكل عام: يمكن القول إننا إذا كنا أمام الشكل المختلط لنموذج البرمجة الخطية بغض النظر عن صفة هذا النموذج، أي إذا كنا أمام تابع الهدف Min Z والقيود ذات إشارات مختلفة «أو كنا أمام تابع الهدف Max Z والقيود ذات إشارات مختلفة».

فلكتابة النموذج المرافق ما علينا إلا أن نعيد كل شكل من الأشكال إلى الشكل القانوني المتعلق به ثم نطبق الفقرات السابقة.

مثال (١): أوجد النموذج المرافق لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 &\le 5 \\ 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 24 \end{aligned}$$

الحل: لنعيد هذا الشكل إلى الشكل القانوني المتعلق بتابع الهدف Max Z فنجد أن:

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 3x_1 + 4x_2 \\ x_1 &\le 5 \\ 3x_2 &\le 12 \\ -3x_2 &\le -12 \\ -2x_1 - 3x_2 &\le -24 \end{aligned}$$

إذن النموذج المرافق «الوجه الآخر» للنموذج الأصلي هو:

$$\begin{aligned} Max W &= 5y_1 + 12y_2 - 12y_3 - 24y_4 \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 - 2y_4 &\ge 3 \\ 0y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 3y_4 &\ge 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

مثال (٢): أوجد النموذج المرافق لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} Min\ Z &= 8x_1 + 3x_2 \\ x_1 &\le 5 \\ 5x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل: لنعيد هذا الشكل إلى الشكل القانوني المتعلق بتابع الهدف Min Z فنجد أن:

$$
\begin{aligned}
&Min\, Z = 8x_1 + 3x_2 \\
&-x_1 \geq -5 \\
&-5x_2 \geq -4 \\
&5x_2 \geq 4 \\
&4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

إذن فالنموذج المرافق «الوجه الآخر» للنموذج الأصلي هو:

$$
\begin{aligned}
&Max\, Z = -5y_1 - 4y_2 + 4y_3 + 12y_4 \\
&-y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 4y_4 \leq 8 \\
&0y_1 - 5y_2 + 5y_3 + 3y_4 \leq 3 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

ملاحظة: إذا أمعنا النظر بالأطراف اليمنى للمتراجحات في أثناء التحويل نجد أن بعض هذه الثوابت هي سالبة، وهنا قد يتبادر إلى الذهن أننا قد خالفنا قواعد فرضيات البرمجة الخطية المتعلقة بشروط عدم السلبية وذلك باعتبار أن بعض المقادير الواردة في هذه النماذج هي ذات إشارات سالبة سواءً أكان الهدف هو في التعظيم Max Z «أو في التقليل Min Z».

إلا أن هذا لا ينافي الفرضيات مطلقاً كون أن هذه المقادير في النموذج الأصلي قد حلت مكان أمثال «معاملات» تابع الهدف في النموذج المرافق ولا شيء يشير إلى تجاوز شروط عدم السلبية في تابع الهدف.

VI-1-4-2- تعريف الازدواجية "الترافقية":

بشكل عام، نستطيع تعريف ثنائية المسائل الازدواجية من خلال العلاقات التطابقية التالية ضمن الجدول (VI-27).

حيث استخدمنا في الجدول السابق (VI-27) الرموز التالية:

في المسألة الأولية:

x_j: المتحولات.

A_{ij}: المعاملات التقنية "$i = 1,2,\ldots m$ ؛ j".

b_i: الحدود المطلقة "$i = 1,2,\ldots m$".

C_j: معاملات تابع الهدف.

في المسألة الازدواجية:

y_i: المتحولات.

a_{ij}: المعاملات التقنية.

C_j: الحدود المطلقة.

b_i: معاملات تابع الهدف.

إن تطابق التعريف يسمح بالقراءة إما من اليمين أو اليسار أو من اليسار إلى اليمين (في الحالة الأولى المسألة الازدواجية تصبح أولية والعكس بالعكس).

VI-1-4-3- النظرية الأساسية للازدواجية:

في مسألتين من مسائل البرمجة الخطية التي تكون ثنائية المسائل الازدواجية لا توجد فقط علاقة شكلية، بل هناك علاقة متينة لحلولها، مكونة للنظرية الأساسية للازدواجية. ويمكن القول إنه من أجل أية ثنائية للمسائل الازدواجية (٢،٥١) لدينا واحدة وفقط واحدة من الحالات التالية:

١) إذا كان للمسألتين معاً حلول ممكنة (مقبولة)، عندما فللمسألتين معاً حلول مثلى وقيم توابع الهدف توافق:

$\min C'x = \max by$

٢) إذا كانت المسألة الأولية ليس لها حلول ممكنة، فيوجد لمسألة الثنائية المقابلة لها حل أمثل هو لانهاية.

٣) عدم وجود أية حلول ممكنة لأية مسألة من المسألتين.

نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة أن النظرية الأساسية تتحقق في الحالة (١) وقيمة توابع الهدف هي متطابقة وتطابق القيمة ٢٤٠ وحدة. إن هذا صحيح أيضاً إذا وضعنا في حسابنا الناحية الاقتصادية، لأن غرض المسألة الأولى (تقليل كلفة المركبات التي تكون الوجبة الغذائية) هو مشابه لغرض المسألة الثانية تعظيم قيم العناصر الغذائية في الوجبة.

VI-1-4-4 – المعنى الهندسي للثنائية:

لنأخذ مسألة الغذاء الأساسي، إن المسألة الأولية هي:

$2x_2 + 2x_3 + x_3 \geq 160$

$x_1 + 2x_3 + x_3 \geq 150$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$\min f = \min [4x_2 + 3x_2 + 9x_3]$$

أما المسألة الازدواجية فهي:

$$\max g = \max (160\, y_2 + 150\, y_2)$$

$$2y_1 + y_2 \leq 4$$

$$2y_1 + 2\, y_2 \leq 3$$

$$y_1 + y_2 \leq 9$$

$$y_1 , y_2 \geq 0$$

إذا قمنا بتحليل تابع الهدف للمسألة الازدواجية (g(y فتظهر لنا بوضوح الطبيعة الاقتصادية للمؤثرات y_1، y_2 إنها تمثل تقدير العلاقات المستخدمة في البرنامج الأمثل. إن كلاً من y_j يبين لنا نمو تابع الهدف المحدد لاستخدام إحدى وحدات الوجبة المعنية. إذن فإن y_j معنى أحد الأسعار التي يجب أن تضرب بمحتوى المركب i لكل عنصر j بحيث لا يتجاوز مجموع هذه المضاريب a_{ji}، y_i سعر العنصر "الغذاء" j، بمعنى آخر إن y_i تمثل الأسعار الموحدة للمضاريب للمركبات الغذائية S_2, S_1.

في حالة المسألة الازدواجية يكون التفسير سهلاً واضحاً أما في نماذج أخرى لمسائل البرمجة الخطية فيكون هذا التفسير غير واضح كفاية (فمثلاً: في مسائل الخياطة والتفصيل، والمزج والنقل...).

تسمى الأبعاد y_i أسعار الظل وتستخدم هذه الأسعار لتحليل علاقات اقتصادية معنية في المسألة.

فمثلاً: في المسألة الأولية إذا أردنا زيادة إحدى مركبات الشعاع b بوحدة واحدة (مثلاً 161عوضاً عن 160) فحسب النظرية الأساسية للازدواجية لدينا:

$$\min f = \max g$$

وسوف نستنتج أن تابع الهدف يزداد بـ y_i. وبشكل عام من أجل زيادة وحدة واحدة لـ b_i فإن تابع الهدف سوف يزداد بمقدار y_i، إذن فهو يبين لنا كيفية تعديل قيمة تابع الهدف عندما يعدل الشعاع b.

VI-1-4-5- حلول الازدواجية الممكنة "الحلول المقبولة اللازدواجية":

نسمي الحل الأساسي x (ليس من الضروري أن يكون حلاً ممكناً)، الموافق للأساس B الذي يكون من أجله محققاً معيار المثلوية (1.3.2.2) الحل الأساسي الممكن للازدواجية. ويجب التذكير أن الحل الممكن للازدواجية هو إشارة للمسألة الأولية.

إن الحل الأساسي الممكن للازدواجية المطابق للتعريف الذي يحقق القيود والتقانية $Ax \geq b$ ويحقق معيار المثلوية الحل الأساسي الممكن للازدواجية. ويجب التركيز أن الحل الممكن للازدواجية هو إشارة للمسألة الأولية.

نقول Y أن x يمثل حلاً مثالياً إذا كان x يمثل حلاً ممكناً للازدواجية بالمركبات الموجبة.

VI-1-4-6- خوارزمية السمبلكس الازدواجية:

إذا وضعنا في حسابنا النظرية الأساسية للازدواجية فمن خلال تطبيق خورزامية السمبلكس على المسألة الازدواجية نحصل على خوارزمية جديدة للمسألة الأولية تسمى خوارزمية السمبلكس الازدواجية. بالحقيقة أن هذه الخوارزمية هي خوارزمية للمسألة الأولية مثلها مثل خوارزمية السمبلكس ولكن بالافتراضات التالية:

- في الوقت الذي تعطينا فيه خوارزمية السمبلكس الحلول الأساسية الممكنة فإن خوارزمية السمبلكس الازدواجية تعطينا الحلول الأساسية الممكنة للازدواجية.

- في مسالة التقليل وفي خوارزمية السمبلكس نجد أن تابع الهدف يتناقص نحو الأدنى، أما في خوارزمية السمبلكس الازدواجية فهو يزداد نحو الأدنى.

- إن خوارزمية السمبلكس الازدواجية تتم في جدول كما في خوارزمية السمبلكس الأولية، وكل تكرار (كل مرحلة) يتألف من الخطوات التالية:

الخطوة I: إذا كان من أجل سائر الأدلة $i = 1,2,,... m$ لدينا $x_i \geq 0$ وحصلنا على حل أمثل فإن الخوارزمية تنتهي، أما في الحالة العكسية فتستمر وننتقل إلى الخطوة II.

الخطوة II: لتكن I مجموعة الأدلة $1 \leq i \leq m$ والتي يكون من أجلها $x_i < 0$. إن المتحول x_r يخرج من القاعدة فيما إذا كان:

$$x_r = \min_{i \in I} (x_i)$$

الخطوة III: إذا كان $a_{rj} \geq 0$ فالمسألة ليس لها حل أمثل والخوارزمية تنتهي.

الخطوة IV: إذا وضعنا في حسابنا السطر r في الجدول و J مجموعة الأدلة $1 \leq j \leq n$ والتي من أجلها $a_{rj} < 0$. فإن المتحول x_k يدخل في الأساس فيما إذا كان:

$$\frac{Z_k - C_k}{a_{rk}} = \min_{j \in J} \left\{ \frac{|Z_j - C_j|}{a_{rj}} \right\}$$

الخطوة V: نعوض في القاعدة B المتحول x_r بالمتحول x_k، فنتيجة تحويلات جدول السمبلكس بالصيغ (239, 2,36) نجد أن المرشد هو a_{rk} ثم نعود إلى

الخطوة I. وهكذا نجد أن خوارزمية السمبلكس الازدواجية هي ازدواجية خوارزمية السمبلكس.

سوف نتناول في الفقرة التالية أمثلة على تطبيقات خوارزمية سمبلكس الازدواجية:

VI-1-4-7- تعيين أحد الحلول الأساسية الممكنة للازدواجية:

لإيجاد حل أساسي ممكن للازدواجية سوف نميز الحالتين التاليتين:

a) جميع معاملات تابع الهدف غير سالبة (لنفترض أن المسألة هي مسألة تقليل) في هذه الحالة نتحقق من شروط المثلوية $Z_j - C_j \leq 0$. مباشرة نأخذ كأساس المتحولات الإضافية فنحصل على أساس ممكن للازدواجية:

مثال:

$$\min (4x_1 + 3x_2 + 9x_3)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 160$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 150$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

لندخل المتحولات الإضافية S_1, S_2 فنجد أن:

$$- 2x_1 - 2x_2 - x_3 + S_1 = - 160$$

$$- x_1 - 2x_2 - x_3 + S_2 = 150$$

بتطبيق خوارزمية السمبلكس الازدواجية نحصل على الجدول التالي (الجدول VI-29):

		C_j	4	3	9	0	0
C_B	Basic	Z_j	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2
0	S_1	-160	-2	-2	-1	1	0
0	S_2	-150	-1	-2	-1	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$			-4	-3	-9	0	0
3	X_2	80	1	1	½	-1/2	0
0	S_2	10	1	0	0	-1	1
Z_j		240	3	3	3/2	-3/2	0
$Z_j - C_j$			-1	0	-7/2	-3/2	0

الجدول (VI-29)

للاحظ أن جدول السمبلكس الأولي سيتضمن حلاً ممكناً للازدواجية. وفي أول مرحلة يخرج من القاعدة المتحول الإضافي S_1 لأنه في العمود Z_j هناك مركبة بقيمة دنيا سالبة.

يدخل في القاعدة المتحول X_2 لأنه يوافق النسبة $\frac{Z_j - C_j}{a_{ij}}$ الدنيا، بمعنى آخر:

$$\text{Min}\left\{\frac{4}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{1}\right\} = \frac{3}{2}$$

تتم عملية الارتكاز كما في خوارزمية السمبلكس، حيث نفترض المرتكز القيمة المرفقة وهي (-2) في تقاطع السطر S_1 والعمود X_2

b) ليست جميع معاملات تابع الهدف غير سالبة، وفي هذه الحالة ندخل قيداً إضافياً.

$X_m + x_{j1} + x_{j2} + \ldots x_{jk} = M$

حيث M عدد كبير جداً و x_M متحول جديد، أما x_{j1} ، x_{j2} ،x_{j3}.. فهي متحولات توافق المعاملات $C_j > 0$، نطبق خوارزمية السمبلكس الأولية على المسألة النظامية ذات القيد الإضافي ووفق هذا الاتجاه لتكون حلاً أساسياً ممكناً لأن شروط المثلوية محققة، بعد تطبيق خوارزمية السمبلكس نستنتج ما إذا كانت المسألة الأولية لها حل أساسي ممكن أم لا. وفي الحالة التي يكون فيها للمسألة حل أساسي ممكن فعندها نطبق خوارزمية السمبلكس الازدواجية.

مثال (13): أوجد نموذج البرمجة الخطية التالي مستخدماً طريقة السمبلكس ثم أوجد الوجه الآخر "النموذج الثنائي" له ثم حله بطريقة السمبلكس أيضاً(*).

$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل: إن الشكل المعياري لهذا النموذج هو:

$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 + 0S_3$

$2x_1 + x_2 + S_1 = 10$

$x_1 + x_2 - S_2 + R_1 = 8$

$5x_1 + 2x_2 - S_3 = 18$

$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, S_3 \geq 0$

وجدول السمبلكس الموافق هو الجدول (VI-30).

(*) على الطالب القيام بحل النموذج الثنائي بطريقة السمبلكس.

		C_z	4	3	0	0	M	0
C_B	Basic		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	S_3
0	S_1	10	2	1	1	0	0	0
-M	R_1	8	1	1	0	-1	1	0
0	S_3	18	5	2	0	0	0	1
	Z_J	-8M	-M	-M	0	M	-M	0
$Z_J - C_J$			-M-4	-M-3	0	M	0	0
0	S_1	14/5	0	+1/5	1	0	0	-2/5
-M	R_1	22/5	0	3/5	0	-1	1	-1/5
4	X_1	18/5	1	2/5	0	0	0	1/5
Z_J		$\frac{-22M+72}{5}$	4	$\frac{-3M+8}{5}$	0	M	-M	$\frac{M+4}{5}$
$Z_J - C_J$			0	$\frac{-3m-7}{5}$	0	M	0	$\frac{M+4}{5}$
0	S_1	4/3	0	0	1	1/3	-1/3	-1/3
3	X_2	22/3	0	1	0	-5/3	5/3	-1/3
4	X_1	2/3	1	0	0	2/3	-2/3	1/3
		74/3	4	3	0	-7/3	7/3	1/3
			0	0	0	-7/3	7/3+M	1/3
0	S_1	1	-1/2	0	1	0	0	-1/2
3	X_2	9	5/2	1	0	0	0	1/2
0	S_2	1	3/2	0	0	1	-1	1/2
	Z_J	27	15/2	3	0	0	0	3/2
$Z_J - C_J$		///////	7/2	0	0	0	M	3/2

الجدول (VI-30)

إذن انتهت الخوارزمية والحل هو:

$S_1 = 1 \qquad S_2 = 1 \qquad X_2 = 9 \qquad Z = 27$

إن النموذج الثنائي "الوجه الآخر" للمسألة الأصلية هو:

$$\text{Min } W = 10y_1 + 8y_2 + 18y_3$$

$$2y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 4$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$y_1 \geq 0$$

$$-y_2 \geq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

مثال (١٤): أوجد حل نموذج البرمجة الخطية التالي بطريقة السمبلكس، ثم أوجد الوجه المرافق للنموذج الأصلي وحله بطريقة السمبلكس أيضاً(*):

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 7x_2$$

$$2x_1 \leq 3$$

$$3x_2 = 10$$

$$3x_1 + x_2 \geq 18$$

$$x_1 \geq 0 \text{ و } x_2 \geq 0$$

الحل: إن الشكل المعياري للنموذج هو:

$$\text{Min } Z - 4x_1 + 7x_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + MR_1 + MR_2$$

$$2x_1 + S_1 = 3$$

$$3x_2 + R_1 = 10$$

$$3x_1 + x_2 - S_2 + R_2 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

وجدول السمبلكس المرافق هو الجدول (VI-31)

-	-	C	4	7	0	0	M	M
C_B	Basic	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2
0	S_1	3	2	0	1	0	0	0
M	R_1	10	0	3	0	0	1	0
M	R_2	18	1	1	0	-1	0	1
Z_j		28M	3M	4M	0	-M	M	M
$Z_j - C_j$		-	3M-4	4M-7	0	-M	0	0
0	S_1	3	2	0	1	0	0	0
7	x_2	10/3	0	1	0	0	1/3	0
M	R_2	44/3	3	0	0	-1	-1/3	1
Z_j		$\frac{44M+70}{3}$	3M	7	0	-M	$\frac{1-M}{3}$	M
$Z_j - C_j$			3M-4	0	0	-M	$\frac{1-4M}{3}$	0
4	X_1	3/2	1	0	1/2	0	0	0
7	X_2	10/3	0	1	0	0	1/3	0
M	R_2	61/6	0	0	-3/2	-1	-1/3	1
		$\frac{176+61M}{6}$	4	7	$2-\frac{3M}{2}$	-M	$\frac{7-M}{3}$	M
			0	0	$2-\frac{3M}{2}$	-M	$\frac{7-4M}{3}$	0

الجدول (VI-31)

لنلاحظ أننا انتهينا من خوارزمية السمبلكس والمتغير الاصطناعي R_2 لم يخرج من الحل.

الوجه المرافق للنموذج الأصلي هو:

$$\text{Max } w = -3y_1 + 10y_2 + 18y_3$$
$$-2y_1 + 3y_3 \le 4$$
$$3y_2 + y_3 \le 7$$
$$y_1, y_3 \ge 0$$

y_2 غير محدود بالإشارة.

أو بشكل آخر:

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 7x_2$$
$$-2x_1 \ge -3$$
$$3x_2 \ge 10$$
$$-3x_2 \ge -10$$
$$3x_1 + x_2 \ge 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Max } Z = 3y_1 + 10y_2 + 18y_3$$
$$2y_1 + 3y_2 \le 4$$
$$3y_2 + y_3 \le 7$$
$$y_1 \le 0 \; y_2, y_3 \ge 0$$

مسألة (15):

أوجد النموذج المرافق للنموذج الخطي التالي ثم الحل بطريقة السمبلكس للمسألة الأصلية(*):

$$\text{Min } Z = x_2 - x_4 - 3x_5$$
$$X_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$$
$$-4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2$$

(*) على الطالب القيام بحل النموذج المرافق بطريقة السمبلكس.

$3x_2 + x_5 + x_6 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

لإيجاد النموذج المرافق:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & +1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Min } Z = 0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 - 3x_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

النموذج المرافق هو:

$\text{Max } Z = y_1 + 2y_2 + 5y_3$

أو بشكل آخر

$y_1 \leq 0$

$2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1$

$y_2 \leq 0$

$-y_1 + 2y_2 \leq -1$

$y_1 - y_2 + y_3 \leq -3$

$y_3 \leq 0$

$\Longrightarrow$

$\text{Max } Z = y_1 + 2y_2 + 5y_3$

$2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1$

$-y_1 + 2y_2 \leq -1$

$y_1 - y_2 + y_3 \leq -3$

غير محدد الإشارة y_1, y_2, y_3

أما جدول السمبلكس هو الجدول (V1-32)

$\text{Min } Z = 0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 - 3x_5 + MR_1 + MR_2 + MR_3$

$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + R_1 = 1$

$-4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + R_2 = 2$

$3x_2 + x_5 + x_6 + R_3 = 5$

		C_x	0	1	0	-1	-3	0	M	M	M
C_b	Basic		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R_1	R_2	R_3
M	R_1	1	1	2	0	-1	1	0	1	0	0
M	R_2	2	0	-4	1	2	1	0	0	1	0
M	R_3	5	0	3	0	0	1	1	0	0	1
	Z_j	8M	M	M	M	M	3M	M	M	M	M
$Z_j - C_j$			M	M-1	M	M+2	3M-3	M	0	0	0
-3	x_5	1	1	2	0	-1	1	0	1	0	0
M	R_2	1	-1	-6	1	3	0	0	-1	1	0
M	R_3	4	-1	1	0	1	0	1	-1	0	1
Z_j		5M-3	-2M-3	-5M-6	M	4M+3	-3	M	-2M-3	M	M
$Z_j - C_j$			-2M-3	-5M-7	M	4M+4	0	M	-3M-3	0	0
-3	x_5	4/3	2/3	0	1/3	0	1	0	2/3	1/3	0
-1	x_4	1/3	-1/3	-2	1/3	1	0	0	-1/3	1/3	0
M	R_3	11/3	-2/3	3	-1/3	0	0	1	-2/3	-1/3	0
		$\frac{11M}{3}$	$-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}M$	2+3M	$\frac{4}{3}+\frac{M}{3}$	-1	-3	M	$\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$	$-\frac{3}{4}M$	0
$Z_j - C_j$			$\frac{-5-2}{3}$	1+3M	$\frac{-4-M}{3}$	0	0	M	$\frac{5}{3}(1-\frac{M}{3})$	$\frac{4}{3}(1-\frac{M}{3})$	-M
-1	x_4	25/9	-7/9	0	11/9	1	0	2/3	-7/9	1/9	0
1	x_2	11/9	-2/9	1	-1/9	0	0	1/3	-2/9	-1/9	0
-3	x_5	4/3	2/3	0	1/3	0	1	0	2/3	1/3	0
	Z_j	-50/9	-13/9	1	$\frac{-11}{9}$	-1	-3	-1/3	-13/9	-11/9	0
$Z_j - C_j$			-13/9	0	$\frac{-11}{9}$	0	0	-1/3	$-\frac{13}{9}$	$-\frac{11}{9}-M$	-M

الجدول (VI-32)

والحل المطلوب هو: $x_2 = \frac{11}{9}, x_4 = \frac{25}{9}, x_5 = \frac{4}{3}, Z = -\frac{50}{9}$

وبالعودة إلى الجدول نجد أن حل المسألة المرافقة هو:

$$y_1 = -\frac{13}{9}, y_2 = -\frac{11}{9}, y_3 = -\frac{1}{3} \Rightarrow Z = -\frac{50}{9}$$

ملاحظة:

إذا عدنا إلى النموذج الخطي الأصلي، لوجدنا أن هناك إمكانية لحل هذا النموذج، بطريقة أخرى دون إدخال المتغيرات الاصطناعية التي بموجبها نحصل على القاعدة كون أن هناك بعض المتغيرات الموجودة في النموذج تشكل لنا القاعدة، وبالتالي لا نحتاج لإيجاد قاعدة جديدة عن طريق إدخال المتغيرات الاصطناعية كما نجد من حل المثال من خلال جدول السمبلكس التالي الجدول (VI-33):

-	-	C_x	0	1	0	-1	-3	0
C_β	Basic	-	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_1	1	1	2	0	-1	(1)	0
0	x_3	2	0	-4	1	2	1	0
0	x_6	5	0	3	0	0	1	1
Z_j	-	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		-	0	-1	0	+1	3	0
-3	x_5	1	-1	2	0	-1	1	0
0	x_3	1	-1	-6	1	(3)	0	0
0	x_6	-4	-1	1	0	1	0	1
Z_j	-	-3	-3	-6	0	3	-3	0
$Z_j - C_j$		-	-3	-7	0	4	0	0
-3	x_5	4/3	2/3	0	1/3	0	1	0
-1	x_4	1/3	-1/3	-2	1/3	1	0	0
0	x_6	11/3	-2/3	(3)	-1/3	0	0	1
Z_j	-	-13/3	-5/3	2	-4/3	-1	-3	0
$Z_j - C_j$		-	-5/3	1	-4/3	0	0	0
-3	x_5	4/3	2/3	0	1/3	0	1	0
-1	x_4	25/9	-7/9	0	-1/9	1	0	2/3
1	x_2	11/9	-2/9	1	1-/9	0	0	1/3
Z_j	-	-50/9	-13/9	1	-11/9	-1	-3	-1/3
$Z_j - C_j$		-	-13/9	0	-11/9	0	0	-1/3

الجدول (VI-33)

إذن فالحل هو :

$$x_2 = \frac{11}{9}, x_4 = \frac{25}{9}, x_5 = \frac{4}{3} \Rightarrow Z = -\frac{50}{9}$$

أما حل المسألة المرافقة هو :

$$y_1 = -\frac{13}{9}, y_2 = -\frac{11}{9}, y_3 = -\frac{1}{3} \Rightarrow Z = -\frac{50}{9}$$

VI-1-5- تحليل الحساسية في البرمجة الخطية:

يقصد بتحليل الحساسية في البرمجة الخطية دراسة مدى تأثير الحلول المثلى وتحديد هذه الحلول وذلك في ضوء تأثير متغيرات «معطيات» نموذج البرمجة الخطية، وبمعنى آخر المدى الذي يمكن من خلاله تغيير بعض المعطيات دون أن يؤثر هذا التغيير في الحل الأمثل للمسألة.

هذه المتغيرات «المعطيات» قد تكون:

- معاملات تابع الهدف «مساهمات العوامل».

- قيم الأطراف اليمنى من القيود «المتراجحات» والتي تعرف بالمصادر المتاحة والمتوفرة.

- احتياجات العوامل «المعاملات الفنية للقيود».

سوف يتم التعرف على تحليل الحساسية هذا مستخدمين طريقة ما بعد المثالية Post optimality analysis أو تحليل الحساسية Sensitivity Analysis أو تحليل ماذا لو What if analysis وفق المدخل التالي:

بفرض أننا أعددنا خطة لتصنيع أحد المنتجات وفق افتراضات (معطيات) معينة:

- أسعار شراء المواد الأولية التي تدخل في العملية الإنتاجية.

- أجور الأيدي العاملة.
- العوامل الخارجية المساعدة في العملية الإنتاجية.
- الكميات المنتجة في نهاية العملية الإنتاجية.
- أسعار بيع المنتج.
- الطلب على هذا المنتج والذي يمكن أن يتغير من حين لآخر.

ماذا سيحدث فيما لو تغيرت مثل هذه المعطيات «الفرضيات»:

- عدم توفر المادة الأولية بالشكل الكافي «ارتفاع سعرها».
- ارتفاع أجور اليد العاملة «هجرة اليد العاملة وعدم توفرها».
- حدوث خلل في العوامل الخارجية المساعدة في العملية الإنتاجية.
- تدني أسعار البيع..

وهل نلجأ إلى إعادة تخطيط الإنتاج وحل مشكلة الخطة والبرنامج الإنتاجي هذه أم هل هناك معالجات وأساليب أخرى نستطيع العودة إليها والاستعانة بها.

سوف نتعرف على هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

التطبيق: تود المؤسسة العامة لاستصلاح الأراضي دراسة التأثير الاقتصادي لمشاريعها من خلال زراعة منطقة معينة من الأرض المستصلحة بنوعين من المحاصيل القمح والشعير. فإذا كان لدى المؤسسة معطيات تفيد أن الدونم الواحد من القمح يتطلب كمية من المياه والأيدي العاملة أكثر مما يتطلبه الشعير، وأن إنتاج الدونم الواحد من الشعير هو أعلى من إنتاج الدونم الواحد من القمح وأن أسعار هذه المحاصيل متغيرة، إلا أن السعر الحالي للطن من القمح هو 150

وحدة نقدية وللشعير هو 100 وحدة نقدية والمعطيات اللازمة لهذه العملية هـــي كما في الجدول التالي: الجدول (VI-34).

المصدر / الإنتاج	القمح	الشعير	المتاح المتوفر
الأيدي العاملة «عدد العمال»	3	4	15
كمية المياه المطلوبة للدونم الواحد وبالاف الأمتار المكعبة	9	3	20
الإنتاج طن/دونم	3	4	
سعر الطن الواحد «وحدة نقدية»	150	100	

الجدول (VI-34)

سوف نتعرف على حل هذه المشكلة – وسوف ندرس تأثير التغيـــرات الحاصلة في كل من معاملات تابع الهدف والمصادر والمعاملات الفنية للقيـــود بطريقتين:

– الطريقة الهندسية «البيانية».

– طريقة السمبلكس بشكل مفصل كون أنها تقدم للباحث مفاهيم ومعلومات كثيرة حول المعضلة والوضع الإنتاجي ومقادير التغير المسموح به والإجراء الممكـــن اتخاذه.

سوف نرمز بـــ x_1 عدد الدونمات المزروعة بالقمح.

بـــ x_2 عدد الدونمات المزروعة بالشعير.

وبما أن سعر الطن الواحد من القمح هو 150 وحدة نقدية وأن الدونم الواحد من القمح ينتج 3 طن، إذن مردود القمح هـــو x_1 450 ومـــردود الشـــعير x_2 400. وبالتالي فتابع الهدف والمتمثل للمردود الكلي للإنتاج هو:

$$\text{Max } Z = 450\, x_1 + 400\, x_2$$

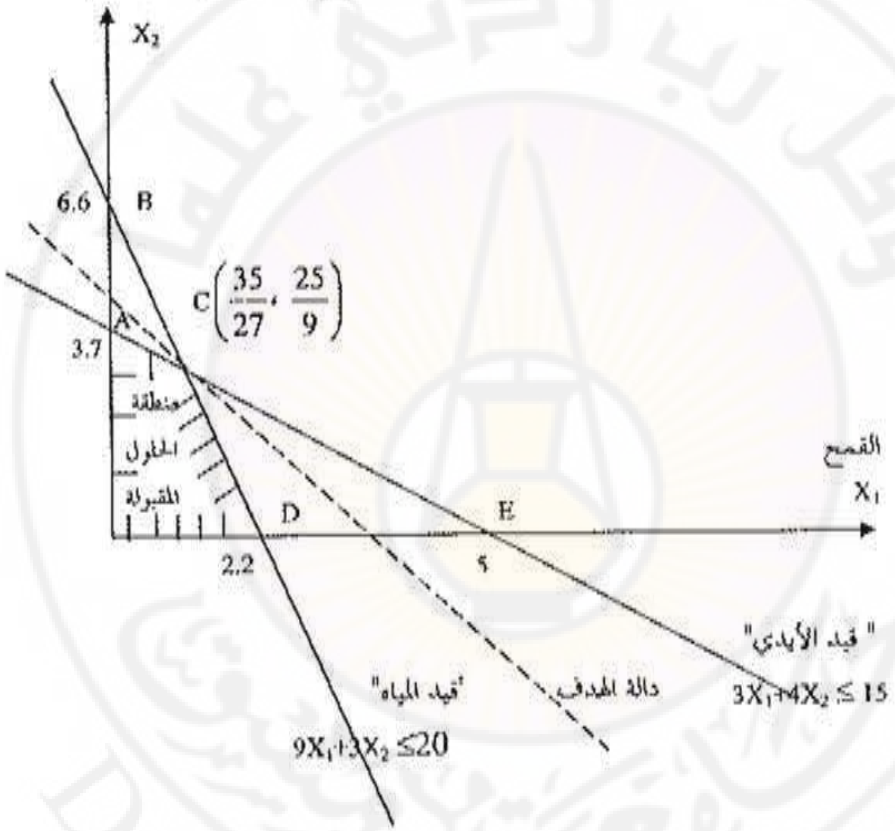
ضمن القيود «الشروط» التالية:

$3x_1 + 4x_2 \leq 15$ «قيد الأيدي العاملة».

$9x_1 + 3x_2 \leq 20$ «قيد المياه»

$x_1, x_2 \geq 0$

ويكون حل المسألة بيانياً وبطريقة السمبلكس كما يلي: الشكل (٣٥ - ٨).



الشكل (VI-35)

إذن بالعودة إلى الشكل والحل بالطريقة البيانية نجد أن الأمثل هو في زراعة $\frac{35}{27}$ دونم من القمح و $\frac{25}{9}$ دونم من الشعير وأن المردود الكلي هو:

$$Z = 450 * \frac{35}{27} + 400 * \frac{25}{9} = 583.33 + 1111.11 = 1694.44$$

أما الحل بطريقة السمبلكس:

$\text{Max } Z = 450x_1 + 400x_2$
$3x_1 + 4x_2 \le 15$
$9x_1 + 3x_2 \le 20$
$x_1, x_2 \ge 0$

الشكل النظامي هو:

$\text{Max } Z - 450x_1 + 400x_2 + 0.S_1 + 0.S_2$
$3x_1 + 4x_2 + S_1 = 15$
$9x_1 + 3x_2 + S_2 = 20$
$x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$

وجدول السمبلكس هو الجدول (VI-36):

C_B	المتغيرات الأساسية	الحل	x_1	x_2	S_1	S_2
	C_j		450	400	0	0
0	S_1	15	3	4	1	0
0	S_2	20	9	3	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		450	400	0	0
0	S_1	25/3	0	3	1	-1/3
450	x_1	20/9	1	1/3	0	1/9
		1000	450	150	0	50
	$C_j - Z_j$		0	250	0	-50
400	x_2	25/9	0	1	1/3	-1/9
450	x_1	35/27	1	0	-1/9	4/27
	Z_j	1694.44	450	400	400 450 / 3 9	400 180 / 9 27
	$C_j - Z_j$		0	0	-83.33	-22.22

الجدول (VI-36)

إذن من خلال الحل نجد أن كلاً من x_1، x_2 متغيران أساسيان، إذا تغيرت قيمتها فسوف تؤثر في الحل الأمثل.

سوف ندرس حدود هذا التغير وفق منحيين:

I – ثبات الحل الأمثل والحفاظ عليه.

II – تحسين الحل الأمثل.

وبالطريقتين: البيانية – السمبلكس.

أولاً: التغير في معاملات تابع الهدف «التغير في مساهمات المتغيرات في دالة الهدف»:

سوف نبحث في الحالتين التاليتين:

أ – التغير في مساهمات (أمثال، معاملات) المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف.

ب – التغير في مساهمات (أمثال، معاملات) المتغيرات الأساسية في دالة الهدف.

أ – التغير في مساهمات (أمثال، معاملات) المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف:

ما هو مقدار التغير في معاملات دالة الهدف؟، أي إلى أي حد يمكن أن تتغير هذه المعاملات بحيث يبقى الحل أمثل ودون أن يدخل S_1، S_2 في مزيج الحل.

من السطر الأخير في الجدول يجب أن يبقى الحل (القيم) في السطر الأخير ≥ 0 «في حالة التعظيم» أي أن:

$$C_j - Z_j \leq 0 \Leftrightarrow C_j \leq Z_j$$

إن قيمة S_1 في الجدول والمقابلة لـ Z_j هي ٨٣,٣

إن قيمة S_1 في الجدول والمقابلة لـ C_Z هي ٠

إذن فالمساهمة الحدية لـ S_1 يمكن زيادتها من الصفر حتى 83.3 وأيضاً إن المساهمة الحدية لـ S_2 يمكن زيادتها من الصفر حتى 22.22 إذن فالمدى الذي تبقى فيه المساهمات C_j فعالة بالنسبة لـ S_1 هي:

$-\infty \leq S_1$ بالنسبة لـ $C_j \leq ٨٣,٣$

$-\infty \leq S_2$ بالنسبة لـ $C_j \leq ٢٢,٢$

ب – التغير في مساهمات (أمثال، معاملات) المتغيرات الأساسية في دالة الهدف:

الطريقة البيانية: 1 – بالعودة إلى الشكل البياني نلاحظ أن:

طالما أن ميل دالة الهدف يقع بين ميلي القيدين المتقاطعين عند النقطة C $(\frac{35}{27}, \frac{25}{9})$ فإن هذه النقطة ستبقى هي نقطة الحل الأمثل وأن قيمة دالة الهدف ستبقى مثلى، وأن دوران خط دالة الهدف في اتجاه عقارب الساعة سوف يؤدي إلى انخفاض في ميل هذه الدالة إلى أن يتم التطابق مع قيد المياه، حيث نكون أمام حل أمثل بديل هو النقطة D. كما وأن دوران خط دالة الهدف في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة سوف يؤدي إلى ازدياد في ميل هذه الدالة إلى أن يتم التطابق مع قيد الأيدي، حيث نكون أمام حل أمثل بديل هو النقطة A، إذن فحتى تبقى النقطة C هي نقطة الحل الأمثل يجب أن تتحقق المتراجحة المثلثية «المضاعفة»:

ميل قيد الأيدي ≤ ميل دالة الهدف ≤ ميل قيد المياه

ميل قيد الأيدي هو: $x_1 \frac{15}{4} - \frac{3}{4} 3x_1 + 4x_2 = 15 \Rightarrow x_2 =$ «$-\frac{3}{4} \text{tg} =$»

ميل دالة الهدف هو: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{Z}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} x_1$ «$\text{tg} = x_2 = -\frac{c_1}{c_2}$»

ميل قيد المياه هو: $9x_1 + 3x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = \frac{20}{3} - \frac{9}{3} x_1$ «$\text{tg} = -3$»

إذن: $-3 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{3}{4}$

وهنا نميز بين الأمرين التاليين:

(*) إذا ثبت سعر الطن الواحد من القمح «أي $C_1 = 450$» عندها نجد أن مردود الشعير يتراوح بين:

$$-3 \leq -\frac{450}{c_2} \leq -\frac{3}{4}$$

$$150 \leq c_2 \leq 600$$

150 ← 250 → ← 200 → 600

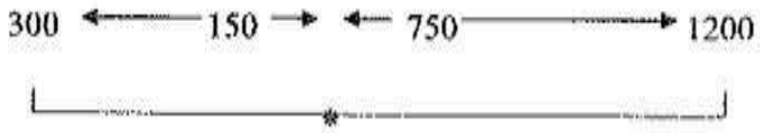
*

400

(*) أما إذا ثبت سعر الطن الواحد من الشعير «أي $c_2 = 400$» عندها نجد أن مردود القمح يتراوح بين:

$$-3 \leq -\frac{c_1}{400} \leq -\frac{3}{4}$$

$$1200 \leq c_1 \leq 300$$



إذن فالحل الأمثل وقيمة دالة الهدف لن تتغير بتغير C_1، C_2 طالما بقيت ضمن الحدود المحسوبة سابقاً.

II – تستطيع بشكل آخر فلسفة الحل على النحو التالي:

إن ميل دالة الهدف هو :

$$-\frac{c_1}{c_2} = -\frac{450}{400} = -\frac{9}{8}$$

حيث c_1 مردود الدونم الواحد المزروع بالقمح و c_2 مردود الدونم الواحد المزروع بالشعير. الآن لنفترض أن سعر الطن الواحد من القمح يتغير (وليس ثابتاً) فما هي الحدود التي تحصره شريطة بقاء الحل أمثل (أي البرنامج الإنتاجي مقبولاً) ويحقق الربح المطلوب؟

للإجابة عن هذا نعود إلى الشكل البياني:

كون أن سعر الطن الواحد من القمح هو ١٥٠ وحدة (والذي هو أعلى من سعر طن الشعير) فإذا ارتفع سعر الطن الواحد من القمح فالمنطق (مع ثبات سعر طن الشعير) يقول إن زراعة القمح هي أفضل من زراعة الشعير (بمعنى آخر إذا ارتفع c_1 فإن الميل $\frac{c_1}{400}$ سيزداد وهذا يؤدي إلى دوران خط تابع الهدف المنقط باتجاه عقارب الساعة حتى ينطبق على قيد المياه). بمعنى آخر سوف يكون لدينا:

ميل دالة الهدف المنقط = ميل قيد المياه.

(في حالة تدوير الخط المنقط باتجاه عقارب الساعة مرة أخرى بحيث يتجاوز قيد المياه فسوف يتغير الحل وهذا لا نرغب به).

إذن الحل يبقى أمثل ما دام الخط المنقط لم يدر أكبر من ميل قيد المياه، أي أن:

ميل قيد المياه هو $-\frac{9}{3}$ وهو يساوي $-\frac{c_1}{400}$

$$-\frac{c_1}{400} \geq -3$$

$$c_1 \leq 1200$$

إذن فالحد الأعلى هو ١٢٠٠ وحدة نقدية، فإذا ارتفع السعر أكثر من ١٢٠٠ وحدة نقدية، فإن الخطة الإنتاجية ستكون زراعة القمح فقط دون الشعير.

وبالمناقشة نفسها، نجد أنه إذا نقص سعر الطن الواحد من القمح، فالمنطق يقول إن زراعة الشعير أفضل من زراعة القمح لأن نقصان c_1 يجعل الميل $-\frac{c_1}{400}$ ينقص ويجعل خط دالة الهدف يدور باتجاه عكس عقارب الساعة لينطبق على قيد الأيدي العاملة، بمعنى آخر سوف يكون لدينا:

ميل دالة الهدف = ميل قيد الأيدي

$$-\frac{c_1}{400} \leq -\frac{3}{4}$$

$$c_1 \geq 300$$

إذن فالحل يبقى أمثل ما دام الخط المنقط لم يَدُرْ بمقدار أقل من ميل قيد الأيدي العاملة.

الآن لنفترض أن سعر الطن الواحد من الشعير يتغير «وليس ثابتاً» فما هي الحدود التي تحصره شريطة بقاء الحل أمثل «أي البرنامج الإنتاجي مقبولاً» ويحقق الربح المطلوب؟

للإجابة عن هذا نعود إلى الشكل البياني ولدالة الهدف، كون أن سعر الطن الواحد من الشعير هو 100 وحدة (والذي هو أقل من سعر طن القمح فإذا ارتفع سعر الطن الواحد من الشعير (وثبت سعر الطن الواحد من القمح) فإن المنطق يقول إن زراعة الشعير ستكون أكثر ربحاً، بمعنى آخر إذا زادت قيمة c_2 فإن الميل $-\frac{450}{c_2}$ سينقص وهذا يؤدي إلى دوران الخط المنقط باتجاه عكس دوران عقارب الساعة حتى ينطبق على قيد الأيدي العاملة، وإذا ما استمر الدوران فإن الخط المنقط سيخرج من النقطة C$(\frac{35}{27},\frac{25}{9})$ (نقطة الحل الأمثل) وسيتغير الحل الأمثل (وهذا لا نرغب فيه).

إذن الحل يبقى أمثلاً ما دام الخط المنقط لم يتجاوز قيد الأيدي العاملة أي أن:

$$-\frac{450}{c_2} \le -\frac{3}{4}$$

$$c_2 \le 600$$

إذن فالحد الأعلى هو 600 وحدة نقدية، فإذا ارتفع السعر أكثر من 600 وحدة فإن الخطة الإنتاجية ستكون زراعة الشعير فقط دون القمح.

طريقة السمبلكس: ماذا سيحدث لو تغيرت أسعار محصول القمح (ارتفع أو انخفض سعر الطن الواحد من القمح وبفرض أن سعر الطن الواحد من الشعير بقي ثابتاً) (معامل x_1 أي c_1) وما هي الحدود الدنيا والعليا للأسعار شريطة الحفاظ على أمثلية الحل.

لنفرض أن δ_1 (موجبة أو سالبة) هو التغير الذي طرأ على مردود القمح عندها يصبح معامل x_1 في دالة الهدف $450 + \delta_1$ ويصبح تابع الهدف:

$$Z = (450 + \delta_1)\, x_1 + 400 x_2$$

ويصبح الجدول الأخير في طريقة السمبلكس كما يلي الجدول (VI-37)

		C_j	$450+\delta_1$	400	0	0
C_B	القاعدة	الحل	x_1	x_2	S_1	S_2
400	x_2	25/9	0	1	1/3	-1/9
$450+\delta_1$	x_1	35/27	1	0	-1/9	4/27
	Z_j	$1694.44 + \frac{25}{9}\delta_1$	$450+\delta_1$	400	$83.3 - \frac{\delta_1}{9}$	$22.2 + \frac{4\delta_1}{27}$
	C_j-Z_j		0	0	$-83.3+\frac{\delta_1}{9}$	$-22.2-\frac{4\delta_1}{27}$

الجدول (VI-37)

وحتى يبقى الحل في الجدول الأخير حلاً أمثل يجب أن تكون القيم في الصف الأخير سالبة لأن المسألة هي مسألة تعظيم «والعكس صحيح في حالة التقليل»

$$-22.2-\frac{4\delta_1}{27} \le 0 \quad \text{و} \quad -83.3+\frac{\delta_1}{9} \le 0$$

أي يجب أن يكون:

$$-150 = -149.985 \le \delta_1 \le 749.7 = 750$$

أي أن مدى التغير في مردود x_2 يمكن تمثيله كما يلي:

$$٤٥٠ - ١٥٠ \leq x_2 \text{ مردود} \leq ٧٥٠ + ٤٥٠$$

$$٣٠٠ \leq x_2 \text{ مردود} \leq ١٢٠٠$$

وهو نفس الجواب الذي حصلنا عليه.

كان بالإمكان التوصل إلى هذا من الجدول النهائي في طريقة السمبلكس وفق الخطوات التالية:

١ – نختار صف المتغير الأساسي الذي نرغب في التعرف على حدود معاملـه في دالة الهدف «مثلاً صف x_1 إذ نود التعرف على حدود c_1».

٢ – نفرض أن مقدار التغير لـ c_1 سيكون δ_1.

٣ – نختار معاملات دالة الهدف غير المعدومة وبالقيمة المطلقة فقط (أي القيم الموجودة في صف $Z_j - C_j$ فقط) ثم نجمعها مع المعاملات المقابلة لها في صف المتغير الأساسي الذي تم اختياره في (١) بعد ضرب كلٍ منها بالقيم δ_1 ثم نجعل الناتج ≤ 0.

بمعنى آخر إذا فرضنا أننا نود التعرف على المعامل الموجب في دالة الهـدف $\overline{C}_j$ «$j = 1, 2, \ldots\ldots n$» للمتغير الأساسي x_i الذي تـم اختيـاره «$i = 1, 2, \ldots\ldots m$» فإن:

$$\overline{c}_j + \delta_i * \overline{a}_{ij} \geq 0$$

حيث $\overline{a}_{ij}, \overline{c}_j$ المعاملات في الجدول الأخير للحل الأمثل.

من الجدول الأمثل الجدول (VI-38):

		C_J	450	400	0	0
C_β	المتغيرات الأساسية	الحل	x_1	x_2	S_1	S_2
400	x_2	25/9	0	1	1/3	-1/9
450	x_1	35/27	1	0	-1/9	4/27
	Z_J	1694.44	450	400	$\frac{400}{3}$ $\frac{450}{9}$	$\frac{400}{9}$ + $\frac{1800}{27}$
$Z_J - C_J$			0	0	-83.33	-22.22

الجدول (V-38)

لنختار صف x_1 أي $i = 1$ فتكون المعاملات غير المعدومة وبالقيمة المطلقة هي:

$$\bar{c}_4 = 22.22, \quad \bar{c}_3 = 83.33$$

حيث يكون:

$$\bar{c}_3 + \delta_1 * \frac{-1}{9} \geq 0$$

$$\bar{c}_4 + \frac{4}{27} * \delta_1 \geq 0$$

أي أن:

$$83.33 - \frac{\delta_1}{9} \geq 0 \quad \text{و} \quad 22.22 + \frac{4\delta_1}{27} \geq 0$$

$$\delta_1 \leq 750 \qquad \delta_1 \geq -150$$

أي أن: $-١٥٠ \le \delta_1 \le ٧٥٠$

وبما أن معامل x_1 هو مبيعات الدونم الواحد من القمح وهو ٤٥٠ لذا فإن الحدود العليا والدنيا لمردود القمح ستكون محصورة بين:

$$٤٥٠ - ١٥٠ = ٣٠٠ \text{ و } ٤٥٠ + ٧٥٠ = ١٢٠٠$$

أما إذا اخترنا صف x_2 أي $i = 2$ فتكون المعاملات غير المعدومة وبالقيم المطلقة هي:

$$\bar{c}_4 = 22.22, \quad \bar{c}_3 = 83.33$$

حيث يكون لدينا:

$$22.22 - \frac{\delta_2}{9} \ge 0 \text{ و}$$

$$\delta_2 \le 200$$

$$83.33 + \frac{\delta_2}{3} \ge 0$$

$$\delta_1 \ge -250$$

$$-٢٥٠ \le \delta_2 \le ٢٠٠$$

وبما أن معامل x_2 هو مبيعات الدونم الواحد من الشعير وهو ٤٠٠ لذا فإن الحدود الدنيا والعليا لمردود الشعير ستكون محصورة بين:

$$٤٠٠ - ٢٥٠ = ١٥٠ \text{ و } ٤٠٠ + ٢٠٠ = ٦٠٠$$

وهي الأجوبة نفسها التي حصلنا عليها في الطريقة البيانية.

إن أي تجاوز لهذه الحدود سواء بالزيادة أم النقصان سوف يؤدي إلى دخول أحد المتغيرات غير الأساسية في الحل وبالتالي سوف يتغير الحل الأمثل.

طريقة أخرى للسمبلكس في حساب التغير في مساهمات المتغيرات في دالة الهدف: تكمن في الخطوات التالية:

١ – نقسم عناصر الصفر الأخير ($C_j - Z_j$) من الجدول الأخير في طريقة السمبلكس على الصف الممثل للمتغير الأساسي الداخل في الحل، ويكون تركيزنا هنا على معاملات المتغيرات التي لم تدخل في الحل النهائي.

٢ – نحدد أصغر قيمة موجبة ونطرحها من دالة الهدف الأساسية لتمثل الحد الأدنى لدالة هدف ذاك المتغير.

٣ – نحدد اكبر قيمة سالبة ثم نضيف قيمتها المطلقة إلى دالة الهدف الأساسية لتمثل الحد الأعلى.

٤ – في حالة عدم وجود قيمة فإننا نعتبر أن القيمة الموجبة هي ما لا نهاية (∞) وكذلك نفس الشيء بالنسبة للقيمة السالبة.

بتطبيق هذه الخطوات نجد أن:

بالنسبة لـ x_1 لدينا:

$C_j - Z_j$	$\Rightarrow$	0	0	-83.3	-22.22
x_1	$\Rightarrow$	1	0	-1/9	4/27

نقسم القيم الواقعة تحت S_1 و S_2 فقط.

$$\frac{-22.22}{4/27} = -150 \qquad \frac{-83.3}{-1/9} = 750$$

إذن: الحد الأدنى: $300 = 150 - 450$

الحد الأعلى: $1200 = 750 + 450$

بالنسبة لـ x_2 لدينا:

$C_j - Z_j$	$\Rightarrow$	0	0	-83.3	-22.22
x_2	$\Rightarrow$	0	1	1/3	-1/9

بقسمة القيم الواقعة تحت S_1 و S_2 فقط:

$$\frac{-22.22}{-1/9} = 200 \qquad \frac{-83}{3} = -250$$

إذن الحد الأعلى: 400 - 250 = 150

الحد الأعلى: 400 + 200 = 600

وهي الأجوبة نفسها التي كنا قد حصلنا عليها سابقاً.

ملاحظة: لا يجوز تغيير معاملات دالة الهدف لجميع المتغيرات بالوقت نفسه، لأن تغييرهما معاً يعني التغير الكامل للحل وظهور حل جديد.

ثانياً: تغير المصادر «المتوفر - المتاح - المتيسر»:

يمكن تقسيم المصادر إلى قسمين:

مصادر غير كافية ومصادر فائضة وذلك اعتماداً على استهلاكها أو عدم استهلاكها بالكامل بغية الوصول إلى الهدف «الخطة المثلى».

فمثلاً: المصدر المتعلق باليد العاملة هو من المصادر غير الكافية نظراً لأن $S_1 = 0$

كما وإن المصدر المتعلق بكمية المياه هو من المصادر غير الكافية نظراً لأن $S_2 = 0$

لذا فإن أية زيادة في هذا المصدر سوف يؤثر إيجابياً في قيمة دالة الهدف، أما لو كانت $S_1 > 0$ و $S_2 > 0$ فإنها تكون من نوعية المصادر الفائضة وإن زيادتها لا تؤثر في قيمة دالة الهدف بل تزيد من حالة الفيضان التي نصادفها.

نستطيع تعريف وحدة تقييم المصدر على أنها مقدار الزيادة التي يمكن أن تطرأ على قيمة دالة الهدف نتيجة زيادة المصدر وحدة واحدة، ويمكن الحصول على

وحدات تقييم المصادر من خلال جدول الحل وبالذات من معادلة Z في الجدول (قيم $S_1, S_2, \ldots\ldots$) فمثلاً وحدة تقييم المصدر الأول هي ٨٣,٣٣ بمعنى آخر إن زيادة المصدر الأول وحدة واحدة سوف يزيد قيمة الفائدة بمقدار ٨٣,٣٣ وبهذا يمكن عرض معادلة Z اعتماداً على هذه الوحدات:

$$Z = 1694.44 - (83.33S_1 + 22.22S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 + \ldots..)$$

نلاحظ من المعادلة السابقة أن زيادة S_1 تقلل من قيمة Z ولكن في الوقت نفسه تحقق فائدة، وذلك بالإقلال من مصدر القوة العاملة:

$$3x_1 + 4x_2 + S_1 = 15$$

كما نلاحظ أن بقية المصادر S_3، S_4، S_5،... إذا وجدت فهي لا تؤثر في قيمة تابع الهدف لا بالزيادة ولا بالنقصان والجدير بالذكر أن التغيير في المصادر المتاحة يؤدي إلى التغير في منطقة الحل الممكن، وبالتالي في قيمة الحل الأمثل.

سوف نبحث في تغير المصادر المتاحة في العملية الإنتاجية. يرتبط كل مصدر من المصادر بمتغير أساسي فمثلاً: اليد العاملة يرتبط بالمتغير S_1 لذا لا بد من تحديد مدى التغير (حدي التغير) بالزيادة والنقصان في هذا المتغير والتي تؤثر في قيمة دالة الهدف شريطة الحفاظ على الحل الأمثل، فمثلاً إن أية زيادة في S_1 سوف يؤدي إلى زيادة في مصدرها.

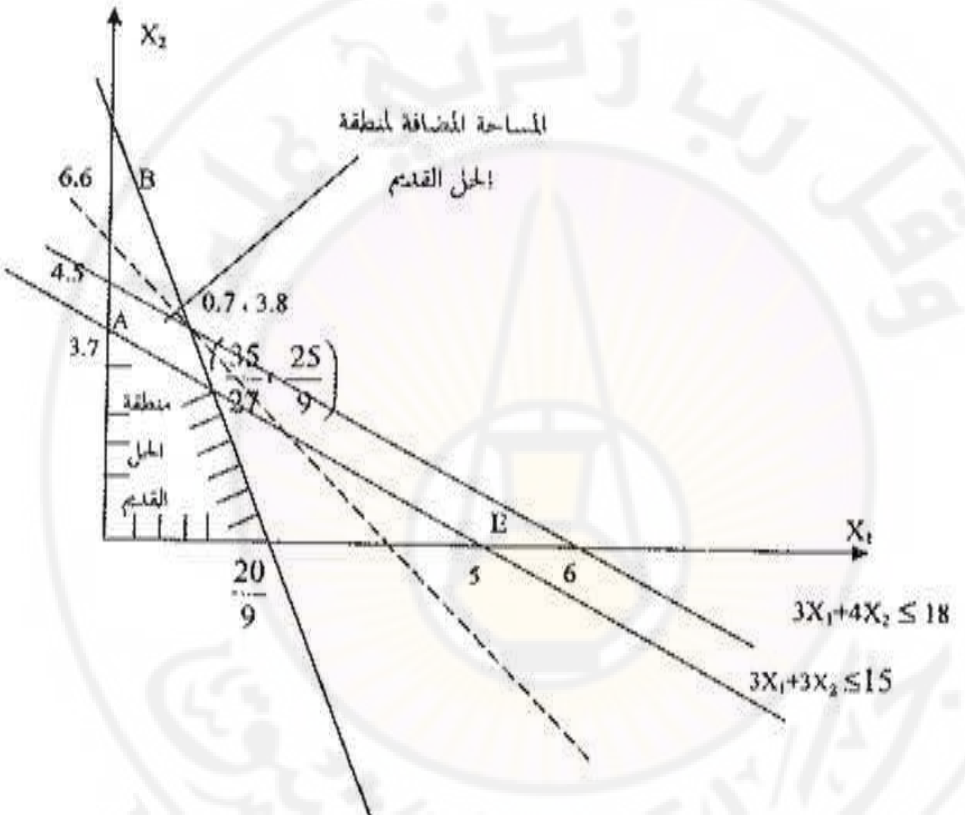
وفي مثالنا إذا فرضنا أن المصدر (الأيدي العاملة) قد يتغير فما هي حدود هذا التغير شريطة الحفاظ على أمثلية الحل.

لنفرض أن المصدر المتعلق باليد العاملة أخذ زيادة قدرها δ ولتكن $\delta = 3$ وعندها يصبح القيد المتعلق بهذا المصدر:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 18$$

وبالعودة إلى الحل البياني نجد أن مساحة منطقة الحلول الممكنة قد أخذت زيادة الشكل (٣٩ – ٨) كما ونجد أن نقطة الحل الأمثل أصبحت (٣,٨، ٠,٧) وبالتالي فإن القيمة الجديدة لدالة الهدف أصبحت:

$$Z = 0.7 * 450 + 3.8 * 400 = 315 + 1520 = 1835$$



الشكل (VI-39)

بزيادة قدرها 140.56 = 1694.44 - 1835

إذن معدل الزيادة في العائد هي: $\frac{140.56}{3} = 46.9$ لكل وحدة عمل «لكل عامل».

إن التغير في قيمة دالة الهدف الناجم عن إضافة وحدة واحدة إلى الطرف الأيمن يطلق عليه سعر الظل. إذن فسعر الظل بالنسبة للمصدر الأول «اليد العاملة» هو ٤٦,٩ وحدة نقدية.

لنفرض أن القيد الآخر المتعلق بالمياه أخذ زيادة قدرها β ولكن β = 5 عندها يصبح القيد المتعلق بهذا المصدر:

$$9x_1 + 3x_2 \leq 25$$

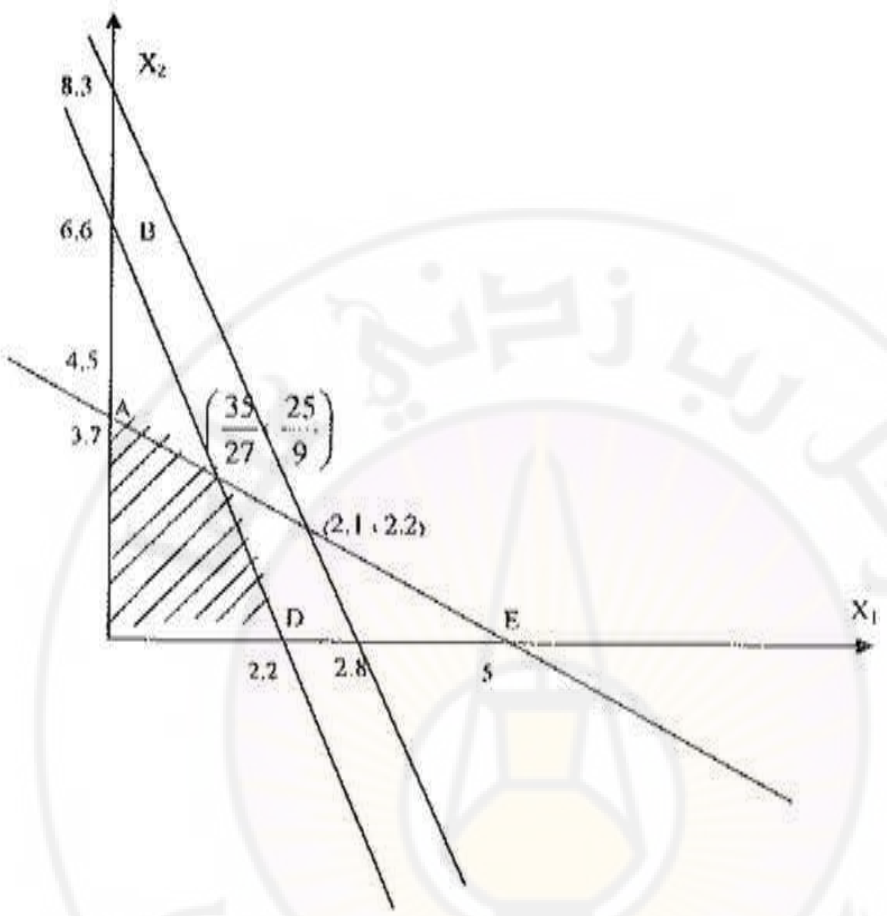
وبالعودة إلى الحل البياني نجد أن مساحة منطقة الحلول الممكنة قد أخذت زيادة، كما ونجد أن نقطة الحل الأمثل أصبحت (٢,٢، ٢,١) وبالتالي فإن القيمة الجديدة لدالة الهدف أصبحت:

$$Z = 2.1 * 450 + 2.2 * 400 = 945 + 880 = 1825$$

بزيادة قدرها $1825 - 1694.44 = 130.56$

إذن معدل الزيادة في العائد لكل وحدة مياه هي: $\frac{130}{5} = 26.112$

يمكن تفسير هذا المعدل بأنه سعر الظل للوحدة الواحدة من المياه.



الشكل (VI-40)

تعميم الطريقة البيانية: لنفرض أن α مقدار تغير الأيدي العاملة فبالعودة إلى الحل البياني عندها نجد أن قيد الأيدي العاملة يبقى محافظاً على ميله فإذا كانت $\alpha > 15$ فإن قيد الأيدي العاملة سيتحرك نحو الأعلى محافظاً على ميله حتى تتطبق النقطة A(0, 3.7) على النقطة B(0,6.6) B وبالتالي فإن أعظم قيمة يمكن أن تتغير فيها الأيدي العاملة دون تغير في الحل الأمثل هي:

$$3 * 0 + 4 * 6.6 = \alpha$$

$\alpha = 26.4$

أما إذا كانت $\alpha < 15$ فإن قيد الأيدي العاملة سوف يتحرك نحو الأسفل محافظاً على ميله حتى تنطبق النقطة E (5, 0) على النقطة D (2.2, 0) وبالتالي فإن أدنى قيم يمكن أن تتغير فيها الأيدي العاملة دون أن يطرأ أي تعديل على قيمة الحل الأمثل هي:

$3 * 2.2 + 4 * 0 = \alpha$

$\alpha = 6.6$

إذن فالحدان الأدنى والأعلى لعدد العمال الذين يمكن أن يتغير فيها هذا المصدر دون أن يؤثرا في قيمة الحل الأمثل في البرنامج هما:

$\alpha_1 = 26.4$, $\alpha_2 = 6.6$

وبنفس المناقشة إذا فرضنا أن مصدر المياه قد تغير فما هي حدود هذا التغير المسموح به دون أن يتغير الحل الأمثل. الشكل (٤١ - ٨).

إذا فرضنا أن مقدار التغير هو $\beta > 20$ فإن قيد المياه سوف يتحرك نحو الأعلى محافظاً على ميله حتى تنطبق النقطة D (2.2, 0) على النقطة E (5.0) وبالتالي فإن أعظم قيمة يمكن أن تتغير فيها كمية المياه دون أن يتأثر الحل الأمثل هي:

$9 * 5 + 3 * 0 = \beta$

$\beta = 45$

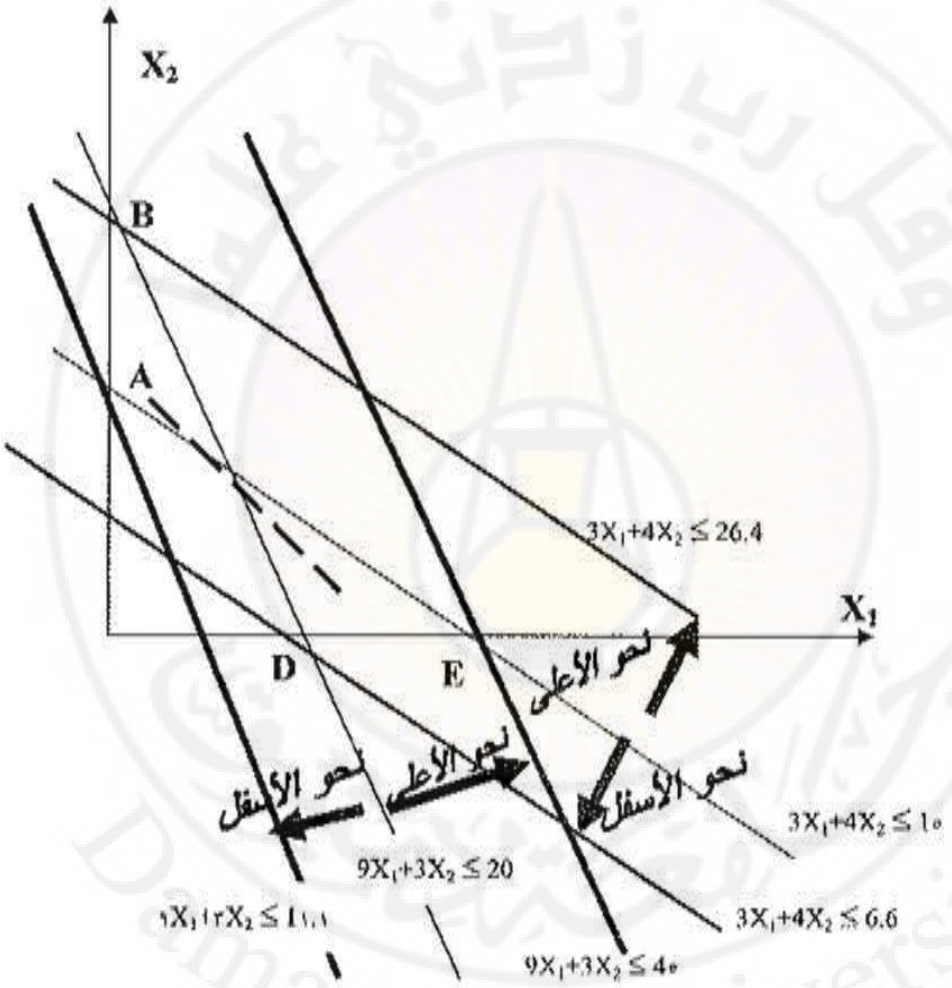
أما إذا كانت $\beta < 20$ فإن قيد المياه سوف يتحرك نحو الأسفل محافظاً على ميله حتى تنطبق النقطة B (0, 6.6) على النقطة A(0, 3.7) وبالتالي فإن أدنى قيمة يمكن أن تتغير فيها كمية المياه دون أن يتأثر الحل الأمثل هي:

$9 * 0 + 3 * 3.7 = \beta$

$\beta = 11.1$

إذن فالحدان الأدنى والأعظم لكمية المياه اللذان يمكن أن يتغير فيها هذا المصدر دون أن يؤثران في الحد الأمثل للبرنامج هما:

$\beta_1 = 45, \beta_2 = 11.1$



الشكل (VI-41)

طريقة السمبلكس:

نستطيع بأسلوب نفسه التعرف على تغيير معاملات المتغيرات الأساسية في تابع الهدف أن نتعرف على تغير المصادر «أي التعرف على الحدود الدنيا والعليا لهذه المصادر». فإذا فرضنا أن عدد العمال قد تغير بمقدار β_1 «زيادة أو نقصان موجب أو سالب» فإننا نحصل ومن خلال العمليات التي نجريها في جدول السمبلكس وحتى الوصول إلى الحل الأمثل على:

$$\frac{35}{9}+\frac{\beta_1}{3}\geq 0\Rightarrow \beta_1\geq -8.33$$

$$\frac{35}{27}-\frac{\beta_1}{9}\geq 0\Rightarrow \beta_1\leq 11.66$$

إذن $-88.33 \leq \beta_1 \leq 11.66$

أي أن عدد العمال يجب أن يتراوح بين (٨,٣٣ - ١٥) و (١١,٦٦ + ١٥) أي أن عدد العمال يكون محصوراً بين ٢٦,٦٦ و ٦,٦٧ عاملاً.

حتى نتوصل إلى النتيجة السابقة باستخدام الحل الأمثل (الجدول الأخير) نتبع الخطوات التالية:

١ - نختار القيد المطلوب دراسة حدوده الدنيا والعليا.

٢ - نختار عمود المتغير غير الأساسي الذي أضيف إلى القيد الأصلي.

٣ - يتحدد مقدار التغير β_i بالصيغة التالي:

$b_i + \beta_i . \alpha_{ij} \geq 0$ «i = m + 1, ... n»

التطبيق: من أجل القيد الأول «قيد الأيدي العاملة»:

$$\frac{25}{9}+\frac{1}{3}\beta_1\geq 0\Rightarrow \beta_1\geq -8.33$$

$$\frac{35}{27}+(-\frac{1}{9}\beta_1)\geq 0 \Rightarrow \beta_1 \leq 11.66$$

من أجل القيد الثاني «قيد المياه»:

$$\frac{25}{9}+(-\frac{1}{9}\beta_2)\geq 0 \Rightarrow \beta_2 \leq 25$$

$$\frac{35}{27}+\frac{4}{27}\beta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_2 \geq -\frac{35}{4} = -8.75$$

إذن كمية المياه تتراوح بين (25 + 20) و (8.75 - 20) أي أن كمية المياه يجب أن تكون محصورة بين 45 و 11.25 وهي أجوبة الطريقة البيانية نفسها.

هناك طريقة عملية يمكن تطبيقها على جدول السمبلكس تتلخص بالخطوات التالية:

١ - نقسم عناصر عمود الكميات في الحل النهائي على معاملات المتغيرات غير الأساسية المقابلة لها. فمثلاً: إذا أردنا إيجاد حدود المصدر للقيد الأول فإننا نقسم عناصر عمود الكميات على معاملات S_1، وبالنسبة للقيد الثاني نقسم عناصر عمود الكميات على معاملات S_2، وهكذا...

٢ - تؤخذ أقل قيم موجبة وتطرح من الكمية الأصلية للحصول على الحد الأدنى لمصدر القيد.

٣ - تؤخذ القيمة المطلقة لأكبر قيمة وتضاف إلى الكمية الأصلية للحصول على الحد الأعلى للمصدر.

٤ - في حالة عدم الحصول على نتائج من إشارة معينة، فإننا نأخذ ما لا نهاية تلك الإشارة سواء بالسلب أو الموجب.

التطبيق: بالنسبة للقيد الأول:

الكميات	S_1		
25/9	1/3	بالقسمة	$\frac{25/9}{1/3} = 8.33$
		⇒	
35/27	-1/9		$\frac{35/27}{-1/9} = -11.66$

إذن : الحد الأدنى $15-8.33 = 6.67$

الحد الأعلى $15+11.66 = 26.66$

بالنسبة للقيد الثاني:

الكميات	S_2		
25/9	-1/9	بالقسمة	$\frac{25/9}{-1/9} = -25$
		⇒	
35/27	4/27		$\frac{35/27}{4/27} = 8.75$

إذن: الحد الأدنى $20 - 8.75 = 11.25$

الحد الأعلى $20 + 25 = 45$

ثالثاً: تغير معاملات المتغيرات في القيود «التغير في احتياجات العوامل – المعاملات الفنية»:

حينما يكون التغير في المعاملات التكنولوجية متمثلاً في: استبدال آلة قديمة بآلة حديثة استبدال عمال بأيدي خبيرة أكثر، تغيير في طرق الإنتاج وأساليبه أو حتى في مواصفات الإنتاج، إن مثل هذا التغيير سوف يؤثر في احتياجات الإنتاج من الأقسام الإنتاجية المختلفة، فالتغيير في احتياجات

المتغيرات من المصادر اللازمة للإنتاج يؤدي إلى تغير في معاملات هذه المتغيرات في متراجحات القيود.

لنتعرف على أثر هذا التغير على الحل الأمثل الذي توصلنا إليه حسب افتراضات معينة.

لنفترض أن النموذج الرياضي لمثالنا أصبح على النحو التالي:

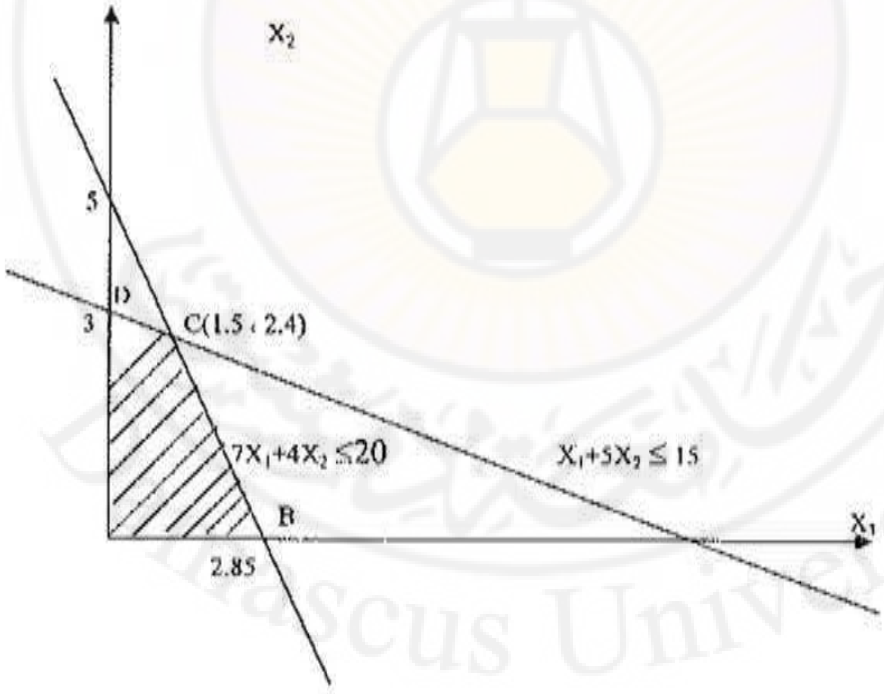
$$\text{Max } Z = 450\,x_1 + 400\,x_2$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$7x_1 + 4x_2 \le 20$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

إذا استعنا بالطريقة البيانية الشكل (VI-42) فسوف نجد أن:



الشكل (VI-42)

النقطة	قيمة دالة الهدف Z
0 (0, 0)	450 * 0 + 400 * 0 = 0
B (2.85, 0)	450 * 2.85 + 400 * 0 = 1282.5
C (1.5, 2.4)	450 * 1.5 + 400 * 2.4 = 1635
D (0, 3)	450 * 0 + 400 * 3 = 1200

إذن نلاحظ أن الربح قد تغير من ١٦٩٤,٤٤ وحدة نقدية فأصبح ١٦٣٥ وحدة نقدية إذن فالنقطة المثلى قد تغيرت. هذا يعني إعادة الحل بالكامل، حيث أن معالجتها انطلاقاً من الحل الأمثل هو أكثر تعقيداً من إعادة الحل.

مسائل وتمارين عامة

١ – أوجد حل كلٍّ من النماذج المبرمجة الخطية التالية بطريقة السمبلكس:

a) Max $Z = 5x_1 + 6x_2$

$x_1 + 2x_2 \le 20$

$2x_1 + x_2 \le 18$

$x_1, x_2 \ge 0$

b) Max $Z = 6x_1 + 7x_2$

$x_1 + x_2 \le 8$

$2x_1 + 3x_2 \le 18$

$x_1, x_2 \ge 0$

c) Min $Z = 2x_1 + 3x_2$

$x_1 + 5x_2 \ge 10$

$2x_1 + 3x_2 \ge 8$

$3x_1 + x_2 \ge 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

d) Min $Z = 4x_1 + x_2$

$3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \ge 6$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$S_1 = 1,\ x_2 = \frac{9}{5}$

$x_1 = \frac{2}{5},\ R_2 = R_1 = S_2 = 0$

$Z = 17/5$

e) Max $Z = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 16$

$3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 20$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12$

$6x_1 + 7x_2 + 0x_3 \ge 30$

f) Max $Z = 7x_1 + 5x_2$

$3x_1 + 2x_2 \le 16$

$2x_1 + x_2 \le 10$

$x_1 + 2x_2 \le 12$

$x_1 = 2,\ x_2 = 5$

$x_1 = 2$, $x_2 = 18/7$ $\quad y_2 = 1$

$x_3 = 26/7$, $y_3 = 44/2$

$y_1 = y_2 = y_4 = 0$

g) Max $Z = 50x_1 + 40x_2$

$2x_1 + 5x_2 \leq 20$

$8x_1 + 5x_2 \leq 40$

$5x_1 + 6x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

h) Max $Z = 40x_1 + 10x_2$

$4x_1 + 2x_2 \leq 16$

$2.5x_1 + x_2 \leq 12$

$4.2x_1 + 4.5\, x_2 \leq 16$

$x_1, x_2 \geq 0$

- أوجد النموذج المرافق للنموذج الأصلي التالي ثم أوجد حلاً لكليهما:

Max $Z = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4$

$2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1$

$2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

- أوجد النموذج المرافق للنموذج الأصلي التالي ثم أوجد حلاً لكليهما:

Min $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 2$

$-x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3$

$1 + x_2 - 2x_3 \geq 6$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Damascus University

- أوجد النموذج المرافق للنموذج الأصلي التالي ثم أوجد حلاً لكليهما:

a) Min $Z = 2x_1 + 8x_2$

$5x_1 \leq 4$

$3x_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 \geq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

b) Min $Z = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$

$4x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 18$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

c) Max $Z = 10x_1 + 8x_2 + 18x_3$

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 4$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$

$x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 7$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

d) Max $Z = 8x_1 + 6x_2 + 9x_3$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 10$

$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 20$

$3x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

e) Min $Z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 8$

$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$

$3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 9$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

f) Max $Z = -4x_1 + 12x_2 - 12x_3 + 18x_4$

$-5x_1 + 3x_2 \leq 2$

$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Damascus University

VI-2- مسألة النقل *Transportation Problem*

VI-2- تمهيد:

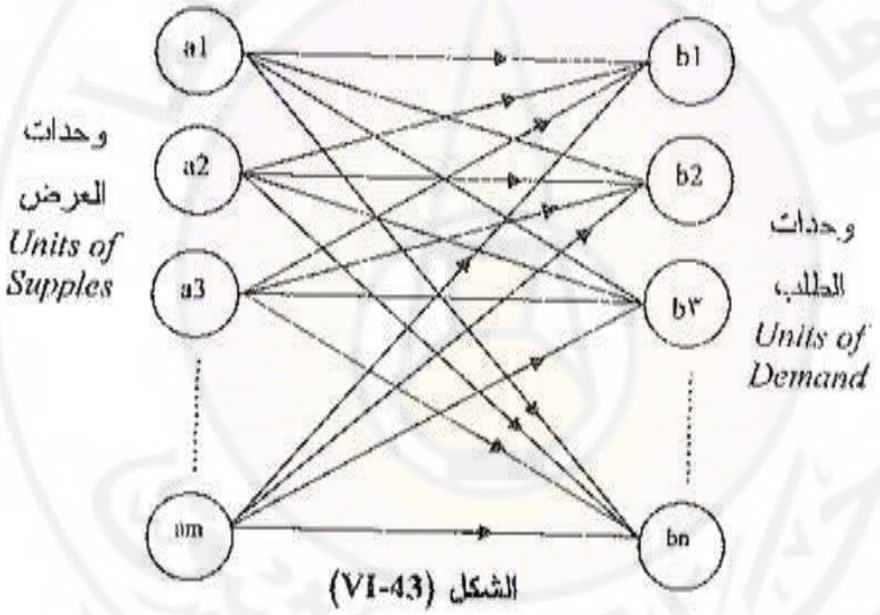
بدأت في الثلاثينات من هذا القرن مسائل النقل تأخذ دوراً فعالاً في دراستها والتعرف على مشكلاتها والبحث في التوصل إلى حلولها عندما قام العالم هتشكوك *F. Y. Hitchcock* عام ١٩٤١. بتكوين إحدى مسائل البرمجة الخطية وهي مسألة النقل وحلها قبل أن ينشر دانتزيغ عمله في التشكيل الرياضي لبعض مسائل البرمجة الخطية وحلها عام ١٩٤٧. وكان العالم كوبمانز *T. C. Koopmans* في عام ١٩٤٧ يعمل على حل المسألة نفسها، وذلك بعد أن سبق العالم كانتروفيتش *Kantro vitch*.

وما لبث أن تبلورت الأمور، إذ تمخضت من هذه الدراسات نتائج وطرائق إلا أنها لم تنشر إلا في عام ١٩٤٩ حيث أعلن عن طريقة رياضية لحل مثل هذا النوع من المسائل.

إن من الحالات الخاصة لمسائل البرمجة الخطية تلك الحالات التي تتطلب نقل منتج متجانس «سلعة ما» من مصادر مختلفة إلى مراكز استهلاك «جهات متغيرة»حيث يمكن معالجة مثل هذه الحالات الخاصة عن طريق ما يعرف بمسائل النقل «التوزيع» *Transportation Problems*.

إذن بكل بساطة فإن مسألة النقل هي من المسائل التي يختص بطريقة نقل منتج متجانس من مراكز الإنتاج «التخزين» إلى مراكز الاستهلاك «الانتفاع» بالشكل الذي نحصل من خلاله على أفضل توزيع ممكن وبأقل ما يمكن من تكاليف النقل.

إذا ما أخذنا مسألة النقل بشكل عام لوجدنا أن هنـاك m مركـزاً للتزويـد «للتمويل» حيث لكل منها قدرة معينة «كمية متاحة من المادة المطلوبـة» و n مركز للانتفاع «للاستهلاك» حيث لكل منها حاجته اللازمة، كما وأن هناك تكلفة نقل الوحدة الواحدة من أحد مراكز التزويد m إلى أحد مراكز الاستهلاك n حيث يكون المطارب هو تحويل مراكز الاستهلاك بالحاجة اللازمة من مراكز التزويد شريطة تحقيق أقل ما يمكن من تكاليف النقل (انظر الشكل **VI-43**).



الشكل (VI-43)

حيث:

$a_1, a_2, \ldots am$ مراكز التصدير «التمويل»

$b_1, b_2, \ldots bn$ مراكز الاستهلاك «الانتفاع»

$x_{11}, x_{12}, x_{ij}, \ldots x_{mn}$ $i = 1, 2, \ldots m$ $j = 1, 2, \ldots n$	عدد الوحدات اللازم نقلها المعمول i إلى المستهلك j والتي تلعب دوراً أساسياً في إيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل
$C_{11}, C_{12}, \ldots C_{ij}, \ldots C_{mn}$ $i = 1, 2, \ldots m$ $j = 1, 2, \ldots n$	تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المعمل i إلى المستهلك j والتي هي قيم عددية توضع في إحدى الزاويتين العلويتين في جدول النقل.

إذن تبحث مسائل النقل في إيجاد أفضل طريق يمكن أن تتم فيها عملية نقل البضائع من المعولين «المزودين» إلى المستهلكين «المنتفعين». ويكمن المحتوى العام لمسألة النقل في إيجاد مخطط أمثل لنقل منتج متجانس وحيد، آخذين بعين الاعتبار الإمكانات المتاحة للمعولين «المزودين» والحاجات الضرورية واللازمة للمنتفعين «المستهلكين» بالشكل الذي تقال «تخفض» فيه تكلفة[1] النقل أو الرقم المرفق بـ «طن – كم المقطوع».

سوف نقوم بشرح مسائل النقل من خلال المثال التالي:

مثال (1):

لنفرض أن لدينا أربعة مراكز لحن (أربعة مراكز تمويل) وخمسة مراكز استهلاك (انتفاع) فإذا علمت أن تكاليف النقل والكميات المتوفرة والحاجة للمراكز الاستهلاكية هي معطاة من خلال الجدول (VI-44) الوحدة الواحدة من مركز التمويل إلى مركز الاستهلاك j.

1- يأخذ الكثير من المسائل السعر المرحل للنقل من مراكز التزويد إلى مراكز الاستهلاك عوضاً عن التكاليف.

مراكز الانتفاع / مراكز التمويل	1	2	3	4	5	المناخ المتوفر
1	2 x11	1 x12	3 x13	7 x14	6 x15	120
2	7 x21	9 x22	5 x23	4 x24	2 x25	100
3	4 x31	5 x32	1 x33	3 x34	2 x35	150
4	10 x41	9 x42	4 x43	5 x44	3 x45	130
المطلوب	100	200	50	70	80	500

الجدول (VI-44)

فالمطلوب تمديد المخطط الأمثل المتعلق بتقليل (تخفيض) تكاليف النقل وذلك من خلال تمديد xij للكمية المنقولة من مركز التمويل i إلى مركز الانتفاع j.

إذا نظرنا إلى الجدول من خلال المفهوم الاقتصادي لهذه المسألة ومفهومنا لنماذج البرمجة الخطية لوجدنا أن بالإمكان تشكيل المعادلات التالية:

$$x11 + x12 + x13 + x14 + x15 = 120$$
$$x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = 100$$
$$x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 150$$

$$x41 + x42 + x43 + x44 + x45 = 130$$
$$x11 + x21 + x31 + x41 = 100$$
$$x12 + x22 + x32 + x42 = 200$$
$$x31 + x23 + x33 + x43 = 50$$
$$x14 + x22 + x34 + x44 = 70$$
$$x15 + x25 + x35 + x45 = 80$$

والتي هي بمثابة قيود النموذج الرياضي، وباعتبار أن xij هي الكمية المنقول من مراكز التمويل إلى مراكز الانتفاع لذا فهذه الكميات يجب أن تحقق الشرط : $Xij \geq 0 \quad \forall i, j$

نحن أمام جملة من المعادلات عددها 9 معادلات ذات 20 مجهولاً، هذا يعني أن لجملة المعادلات السابقة حلولاً منتهية وغير منهية. وإن ما يهمنا من هذه الحلول تلك الحلول التي تحقق الحل الأمثل وتعطينا ما يمكن من التكاليف من خلال تابع الهدف التالي:

$$T = 2n_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 7x_{14} + 6x_{15} + 7x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} + 2x_{25} + 4x_{31} + 5x_{32} + x_{33} + 3x_{34} + 2x_{35} + 10x_{41} + 9x_{42} + 4x_{43} + 5x_{44} + 3x_{45}$$

VI-2-2- الصيغة الرياضية لمسألة النقل:

ليكن لدينا m مركز توزيع «تمويل» لمنتج موحد ما وليكن n و p مركز استهلاك لهذا المنتج. إذا رمزنا لكميات المنتج المتوفرة لدى الـ m مركزاً بـ $a_1, a_2, \ldots a_m$ ولحاجة الـ n مركز استهلاك بـ $b_1, b_2, \ldots b_n$ وبـ x_{ij} «حيث: $i = 1, 2, \ldots m$ و $j = 1, 2, \ldots n$» الكميات الواجب توزيعها من الممول i إلى المستهلك j وبـ Cij «حيث: $i = 1, 2, \ldots m$ و $j = 1, 2, \ldots n$» للكلفة

الموحدة لنقل المنتج P من الممول i إلى المستهلك j فإن عناصر مسألة التوزيع هذه يمكن تنظيمها ضمن جدول نسميه مصفوفة النقل «الجدول (3 . 1) والذي سيستخدم فيما بعد في تمثيل الشكل الرياضي لمسألة النقل.

نجد لمسائل النقل نوعين:

الأول: مسائل النقل المتزنة.

الثاني: مسائل النقل غير المتزنة "سوف تعالج تحت عنوان حالات خاصة في مسائل النقل".

أولاً: مسائل النقل المتزنة:

مبدئياً لنفترض أن المتوفر (المتاح) الكلي لدى m مزوداً من المنتج P يساوي المطلوب (الضروري) الكلي لـ n مستهلك. أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (8\text{-}31)$$

عندها نستطيع الآن كتابة العلاقات التي تربط الكميات الموزعة من قبل الممولين و الكميات المطلوبة من قبل المستهلكين على النحو التالي:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \qquad (8\text{-}32)$$

إلى مراكز الاستهلاك / من مراكز التزويد	المركز C_1	المركز C_2	.....	المركز Cj	.....	المركز Cn	الانتاج والتوفر
المركز F_1	c_{11}	c_{12}	.....	c_{1j}	.....	c_{1n}	a_1
	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1n}	
المركز F_2	c_{21}	c_{22}	.....	c_{2j}	.....	c_{2n}	a_2
	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2n}	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
المركز F_i	c_{i1}	c_{i2}	.....	c_{ij}	.....	c_{in}	a_i
	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{in}	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
المركز F_m	c_{m1}	c_{m2}	.....	c_{mj}	.....	c_{mn}	a_m
	x_{m1}	x_{m2}		x_{mj}		x_{mn}	
Demand المطلوبات الضرورية والمطلوبة	b_1	b_2		b_j		b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

الجدول (VI-45)

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad (8-33)$$

وحيث أن الكميات الموزعة لا يمكن أن تكون سالبة، فلدينا أيضاً:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \textbf{(8-34)}$$

إن عملية تقليل (تخفيض) قيمة تابع الهدف ستتم من خلال وضع الشرط التالي:

$$\min F = \min \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad x_{ij} \right) \qquad \textbf{(VI-35)}$$

يتطلب حل مسألة النقل إيجاد حل أو أكثر من مجموعة حلول جملة القيود [(VI-32) – (VI-34)] «واضعين في حسابنا الشرط (VI-31) الذي يحقق لتابع الهدف (VI-35) القيمة الدنيا».

لنكتب الآن المصفوفة A المرفقة بالجملة (VI-32) ، (VI-33)، لنرمز بـ $V^{(j)}$ للشعاع العمودي الذي يوافق المجاهيل x_{ij}. إن الحمل (VI-32)، (VI-33) مؤلفة من $(m + n)$ معادلة و $m \cdot n$ مجهولاً.

$(m + n)$ معادلة و $m \cdot n$ مجهولاً.



(VI-36)

وحيث أن كل مجهول x_{ij} يظهر في المعادلات **(VI-32)** و **(VI-33)** مرتين في المعادلة i من الجملة **(VI-32)** وفي المعادلة j من الجملة **(VI-33)** فينتج لدينا

إن لكل عمود v_{ij} فقط عنصرين يساوي كل منها الواحد، أما الباقي من العناصر فهي معدومة.

سنبين فيما يلي أن جملة القيود التي تحوي $(m + n - 1)$ معادلة مستقلة، واحدة منها نستطيع استنتاجها من المعادلات الباقية.

نظرية (1): رتبة المصفوفة A هي $(m + n - 1)$.

البرهان: لنرمز بـ $r(A)$ لرتبة المصفوفة A، سوف نبرهن على هذه النظرية من خلال النقطتين التاليتين:

النقطة الأولى: $r(A) \leq m + n - 1$

النقطة الثانية: $r(A) = m + n - 1$

برهان النقطة الأولى:

إن للمصفوفة A، $(m + n)$ سطراً و (m, n) عموداً، ولكن من أجل $m \geq 2$، $2 \geq m$ لدينا $m.n \leq m + n$. فهذا يعني أن مرتبة أكبر المصفوفات الجزئية المربعة والتي يمكن الحصول عليها من المصفوفة A هي $(m + n)$ «إذن رتبة A هي أصغر أو تساوي $m + n$» ولكي نبرهن على أن هذه الرتبة لا يمكن أن تساوي $m + n$، يجب أن نبين أنه لا توجد أية مصفوفة $(m + n) \times (m + n)$ ليست أحادية. لأجل هذا يكفي أن نبين أية معادلة من معادلات (VI-33) و (VI-32) يمكن أن تنتج من المعادلات الأخرى. فمثلاً: إن آخر علاقة في الجملة (VI-33) هي:

$$\sum_{i=1}^{m} x_m = b_n$$

تنتج من العلاقات الباقية

لأن:

$$x_{in} = \sum_{j=1}^{n} \qquad x_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \quad x_{ij}$$

وهذا يعني أن:

$$\sum_{i=1}^{m} \quad x_{in} = \left(\sum_{j=1}^{n} \quad x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} \quad x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad x_{ij}$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \quad \sum_{i=1}^{m} \quad x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \quad a_i - \sum_{j=1}^{n-1} \quad b_j = \sum_{j=1}^{n} \quad b_j - \sum_{i=1}^{n-1} \quad b_j = b_n$$

برهان النقطة الثانية:

حتى نبرهن أن رتبة A هي بالضبط $(m + n - 1)$ يكون كافياً أن نأخذ مصغراً عن الصفر ومن المرتبة $(m + n - 1)$.

إن مصغراً مثل هذا يكون مكوناً من الأعمدة التالية:

$$V^{1n}, V^{2n}, V^{3n}, \ldots V^{mn}, V^{11}, V^{12}, \ldots V^{1n-1}$$

باستثناء السطر الأخير

Damascus University



هذا المصغر وفق نظرية لابلاس يساوي الواحد.

فيما يلي سوف ندخل بعض التعاريف التالية:

تعريف *I*: نسمي حلاً ممكناً لمسألة ما، أية جملة من الأعداد *xij* التي تحقق العلاقات (٣٢-٨) و (٣٤-٨).

تعريف *II*: نسمي حلاً أمثل لمسألة نقل ما، أي حل ممكن يعمل على (تقليل) تابع الهدف (٣٥-٨).

تعريف *III*: نسمي الحل الأساسي الممكن غير المتردي لمسألة نقل ما، أي حل ممكن والذي له تماماً *(m + n - 1)* مركبة موجبة، حيث الباقي *(m + n - mn- 1)* من المركبات تكون معدومة.

تعريف IV: نسمي حلاً أساسياً أمثل غير متردد لمسألة نقل ما، أي حل أساسي غير ممكن غير متردد يعمل على تقليل تابع الهدف (٣٥-٨).

تعريف V: نسمي حلاً أساسياً متردياً، كل حل يحتوي أقل من $(m + n - 1)$ مركبة غير معدودة.

ملاحظة: اعتماداً على نظرية *I*، نستنتج أن كل حل أساسي غير متردد يحوي تماماً على مجاهيل مختلفة عن الصفر بقدر ما تحويه الجملة من معادلات مستقلة.

نظرية II: تؤلف مجموعة الحلول الممكنة لمسألة نقل ما مجموعة غير خالية ومحدودة.

البرهان: نكتفي أن نبرهن أن:

1 – مجموعة الحلول هي غير خالية.

2 – تابع الهدف هو معين ومحدود.

1 – إذا قبلنا أن المادة التي يجب أن تنقل قابلة للتجزئة بكفاية فالحل الممكن هو:

$$x_{ij} = \frac{a_i \quad b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} = \frac{a_i \quad b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}$$

بالحقيقة إن:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i \, b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i$$

وهي العلاقة (*VI-32*)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \, b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j$$

وهي العلاقة (*VI-33*). ومن التعريف نستنتج أيضاً أن $0 \geq xij$.

2 – بما أن $0 \geq Cij$ ، $0 \geq xij$ هذا يعني أن تابع الهدف F هو محدود من الأسفل القيمة صفر، أي أن $0 \geq F(x)$.

أيضاً، إن التابع $F(x)$ هو تابع مستمر كونه كثير حدود في xij، اى أن أي تابع مستمر ومحدود من الأسفل يمس القيمة الدنيا، نقطة واحدة على الأقل x.

تعتمد خوارزمية حل مسألة النقل على النظرية التالية:

إذا قبلت مسألة نقل ما حلاً أو أكثر من الحلول المثلى (من نقطة افتراض أن توزيع الهدف خطية) عندها على الأقل سيكون أحد هذه الحلول المثلى حلاً أساسياً لمادة النقل.

اعتماداً على هذه النظرية لنفتش عن الحلول المثلى لمسألة النقل من بين الحلول الأساسية الممكنة أي من الحلول التي لها على الأكثر $(m + n - 1)$ مركبة مغايرة للصفر.

بالحقيقة تتضمن حل مسألة النقل مرحلتين أساسيتين هما:

1 – تعيين حل بدائي (حل أولي).

2 – تعيين حل أمثل.

والمرحلة الثانية بحد ذاتها تتضمن أيضاً نقطتين:

a – التحقق من أمثلية الحل «حيث نبدأ بالتحقق من أمثلية الحل الأولي».

b – تحسين الحل في حالة كون هذا الحل ليس مثالياً.

VI-2-3 – تعيين الحل الأولي:

إن تعيين الحل الأولي يتم من خلال طرائق متعددة وهي:

I – طريقة الزاوية الشمالية الغربية «الطريقة القطرية».

II – طريقة العنصر الأقل في السطر «طريقة التكاليف الأقل في السطر».

III – طريقة العنصر الأقل في العمود «طريقة التكاليف الأقل في العمود».

IV – طريقة العنصر الأقل في الجدول «طريقة الفروق العظمى – طريقة أوجل – طريقة التكاليف الأقل في الجدول».

VI-2-3-1 – طريقة الزاوية الشمالية الغربية *North-west corner method*:

لنعد إلى المثال الوارد في الفقرة *I-1*. إن الأرقام العددية الموجودة في الزوايا العليا اليمنى في المربعات تمثل *Cij* تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مركز التمويل *i* إلى مركز الانتفاع *j*، أما *xij* فهي الكمية اللازم نقلها من مركز

التحويل i إلى مركز الانتفاع j بحيث تصل في نهاية التوزيع إلى المخطط الأمثل للنقل والذي يعطينا أقل ما يمكن من تكاليف النقل.

تأتي تسمية طريقة الزاوية الشمالية الغربية من أن أول توزيع يجب أن يتم في المربع الموجود في الزاوية الشمالية الغربية ثم إلى المربع الذي يليه والمحصور أيضاً في الزاوية الشمالية الغربية و... هكذا.

أول مربع موجود في الزاوية الشمالية الغربية يجب أن يوزع له الكمية $x11$ من الممول (١) إلى المنتفع (١) بحيث تمثل القيمة الأدنى من بين الكميتين الموجودتين لدى الممول (١) والمنتفع (١) أي:

$$min\ (100, 120) = 100$$

إذن فالمنتفع (١) قد أخذ كامل حاجته من الممول (١) والذي ما زال لديه 20 وحدة وهو لن يستلم أية كمية من بقية الممولين.

نعيد التوزيع من جديد. ثاني مربع موجود في الزاوية الشمالية الغربية يجب أن يوزع له الكمية $x12$ من الممول (١) إلى المنتفع (٢) بحيث تقل القيمة الأدنى من بين الكميتين الموجودتين لدى الممول (١) والمنتفع (٢) أي:

$$min\ (200, 20) = 20$$

إذن فالممول (١) قد وزع كامل كميته إلى المنتفع (٢) فما زال بحاجة كمية قدرها (180) وحدة. إذن فالمربع الثالث الموجود في الزاوية الشمالية الغربية يجب أن يوزع له الكمية $x22$ من الممول (٢) إلى المنتفع (٢) بحيث تمثل القيمة الأدنى من بين الكميتين الموجودتين لدى الممول (٢) والمنتفع (٢)، أي أن:

$$min = (100, 80) = 100$$

إذن وبالأسلوب السابق نفسه نكرر خطوات العمل حتى يتم توزيع الكميات المتوفرة في مراكز التمويل إلى مراكز الانتفاع حيث نكون أمام جدولا الحل الأولي.

	1	2	3	4	5	المتاح
1	10 [2]	20 [1]	- [3]	- [7]	- [6]	120
2	- [7]	100 [9]	- [5]	- [4]	- [2]	100
3	- [4]	80 [5]	50 [1]	20 [3]	- [2]	150
4	- [10]	- [9]	- [4]	50 [5]	80 [3]	130
اللازم	100	200	50	70	80	500

الجدول (VI-46)

تعد طريقة العمل السابقة اقتصادية ومفيدة غايتها التعرف مباشرة على القيم الموزعة، أما تكلفة النقل الموافقة لهذه الطريقة فهي:

$$F1 = 100 * 2 + 20 + 100 * 9 + 80 + 5 + 50 * 1 + 20 * 3 + 50 + 5 + 80 * 3 = 2120\ m.n$$

VI-2-3-2- طريقة العنصر الأقل تكلفة في السطر:

تتلخص هذه الطريقة في أن عملية توزيع الكميات تتم سطراً بسطر وذلك من خلال التكلفة الدنيا الموجودة في السطر، فإذا عدنا إلى مثالنا السابق لوجدنا أن عملية التوزيع تتم على النحو التالي:

لنأخذ السطر الأول للممول الأول فيتبين أن أقل تكلفة فيه هـي (١) حيـث المنتفع (٢) يحتاج ٢٠٠ وحدة يستطيع أن يقدم له الممول (١) على الأكثر مـا لديه وهو ١٢٠ وحدة إذن $X_{12} = 120$.

إذن وفق هذه العملية يكون الممول إلى (١) قد وزع كامل مـا لديـه إلـى المنتفع (٢) والذي ما زال بحاجة إلى ٨٠ وحدة. الأمر الذي يجعلنا ننتقل إلـى السطر الثاني (الممول ٢). إن اقل تكلفة في هذا السطر هي ٢ والمنتفع ٢ بحاجة لـ ٨٠ وحدة حيث يستطيع الممول (٢) تزويده بهذه الكمية ويبقى لدى الممـول (٢) ٢٠ وحدة يوزعها على المنتفع الرابع...

إذن وهكذا نستمر بهذا الأسلوب إلى أن يتم تكوين جدول التوزيـع وفـق الجدول (*VI-46*).

	1	2	3	4	5	المتاح
1	- [2]	120 [1]	- [3]	- [7]	- [6]	120
2	- [7]	- [9]	- [5]	20 [4]	80 [2]	100
3	50 [4]	- [5]	50 [1]	50 [3]	- [2]	150
4	50 [10]	80 [9]	- [4]	- [5]	- [3]	130
اللازم	100	200	50	70	80	500

الجدول (*VI-47*)

إن تكلفة النقل الموافقة لهذه الطريقة هي:

$$F_2 = 120 * 1 + 20 * 4 + 80 * 2 + 50 * 3 + 50 * 1 + 50 * 4 + 50 * 10 + 80 * 9 = 1980\ m.\ n$$

VI-3-3-2- طريقة العنصر الأقل تكلفة في العمود:

إذا لاحظنا تسمية هذه الطريقة نجد أن عملية التوزيع هي شبيهة بالطريقة السابقة تماماً إلا أنها هنا تأخذ العمود بدلاً من السطر.

بتطبيق خطوات التوزيع نحصل على الجدول (*VI-48*).

	1		2		3		4		5		المتاح
1	100	2	20	1	-	3	-	7	-	6	120
2	-	7	30	9	-	5	70	4	-	٢	١٠٠
٣	-	٤	150	٥	-	١	-	٣	-	٢	١٥٠
٤	-	1	-	9	50	٤	-	٥	80	٣	١٣٠
اللازم	١٠٠		٢٠٠		٥٠		٧٠		٨٠		٥٠٠

الجدول (*VI-48*)

وبالتالي فإن تكلفة النقل الموافقة لهذه الطريقة هي:

$$F_3 = 100 * 2 + 20 * 1 + 30 * 9 + 150 * 5 + 70 * 4 + 50 * 4 + 80 * 3 = 1960\ m.\ n$$

VI-2-3-4- طريقة العنصر الأقل في الجدول «طريقة أقل التكاليف»

الطريقة المختصرة *Least cost method , Short-cut method*:

تأتي هذه الطريقة من مشاركة الطريقتين السابقتين معاً، إذ يكمن الاختيار هنا للتكلفة الأقل الموجودة في الجدول بكامله. وتتكون هذه الطريقة بالتوزيع المتكرر والمتسلل للكميات الضرورية واللازمة للمنتفعين من خلال معيار الكلفة الأقل في الجدول، المثال (١).

فإذا عدنا لوجدنا أن التكلفة الأقل في الجدول هي (١) التي يقابلها الكمية x_{12} أو الكمية x_{33}. فإذا ما أمعنا النظر في الكميات المتاحة لدى الممول (١) أو الممول (٣) وأيضاً الكميات المطلوبة واللازمة للمنتفع (٢) والمنتفع (٣) لوجدنا أن التوزيع المناسب يكمن في توزيع اكبر كمية متاحة شريطة تحقيق ما لدى الممول وما يحتاجه المنتفع. وفي مثالنا هذا نجد أن الكمية المناسبة هي x_{12} والتي تقابل ١٢٠ وحدة مرسلة من الممول (١) إلى المنتفع (٢). ثم تنتقل التكلفة الأقل إلى التي تلي التكلفة السابقة ونوزع وفق الأسلوب السابق فنحصل على الجدول (*VI-49*).

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	المتاح
1	- (2)	*120* (1)	- (3)	- (7)	- (6)	*120*
2	*20* (7)	- (9)	- (5)	- (4)	*80* (2)	*100*
3	*30* (4)	- (5)	*50* (1)	*70* (3)	- (2)	*150*
4	*50* (1)	*80* (9)	- (4)	- (5)	- (3)	*130*
اللازم	*100*	*200*	*50*	*70*	*80*	*500*

الجدول (*VI-49*)

وبالتالي التكلفة الموافقة لعملية النقل هذه هي:

$$F_4 = 120 * 1 + 20 * 7 + 80 * 2 + 30 * 4 + 50 * 1 + 70 * 3 + 50 * 1 + 10 + 80 * 9 = 2020\ m.n$$

VI-2-3-2-5- طريقة الفروق العظمى(*):

تمتاز هذه الطريقة بسهولتها وبساطتها ودقتها كون أنها من الطرق القريبة إلى البرمجة الخطية اذا كان انتشارها بين الإداريين واسعاً جداً، كما وأن أعلى البيان الذي نتوصل إليه في العادة غالباً ما يكون أقرب إلى المثال إن لم يكن حلاً مثالياً.

يكمن تطبيق هذه الطريقة في إرفاق جدول النقل المعطى ببعض الأسطر والأعمدة التي تسمى بأسطر وأعمدة الفروق تحسب قيمتها، وذلك بأخذ الفروق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تليها مباشرة سواءً للأسطر أم للأعمدة حيث توضع هذه الفروق في الأسطر والأعمدة التي تم حساب الفروق بموجبها. (تسمى الأرقام التي نضعها في أسطر وأعمدة الفروق بأرقام فام). ثم نختار من سطر وعمود الفروق اكبر فرق حيث نوزع في هذا السطر أو العمود ومن التكلفة الأقل الكمية الموافقة للمتاح وللضروري.

وحينما نجد أن هناك أكثر من فرقٍ متساوٍ فعندها نأخذ الفرق الموافق لأقل تكلفة، وفي الحالة التي نجد أن هناك أكثر من تكلفة قليلة فعندها نختار التكلفة الموافقة لتوزيع اكبر كمية متاحة.

وبعد كل توزيع نعمل على حذف السطر أو العمود الموافق للتوزيع ثم نعيد حساب الفروق ثم نسلك طريقة التوزيع نفسها.

فإذا عدنا إلى مثالنا السابق لوجدنا أن الجدول الموافق لهذه الطريقة هو الجدول (VI-50).

(*) – لهذه الطريقة تسميات عديدة منها أيضاً: طريقة فام VAM، طريقة فوجل Vogel's Method، طريقة الجزاء أو العقوبة Penelty Method، طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method.

	1	2	3	4	5	المنتاج					
1	2	1	3	7	6	120	1	-	-	-	
	-	120	-	-	-						
2	7	9	5	4	2	100	2	2	2	2	2
	80	-	-	-	20						
3	4	5	1	3	2	150	1	1	1	-	-
	20	80	50	-	-						
4	10	9	4	5	3	130	1	1	1	2	2
	"		-	70	60						
الكلفة	100	200	50	70	80	500					

2	4*	2	2	1
3	4*	3	1	1
3	-	3*	1	1
3*	-	-	1	1
-	-	-	1	1

الجدول (VI-50)

وتكون كلفة النقل وفق هذه الطريقة هي:

$$F_5 = 120 * 1 + 560 * 8 + 400 * 2 + 50 * 1 + 20 * 4 + 40 + 70 * 5 + 60 * 3 = 1780$$

ملاحظات عامة حول تطبيق كافة طرق الحصول على الحل البدائي:

1 – لنلاحظ أن تكاليف النقل التي حصلنا عليها لدى تطبيقنا لهذه الطريق هي:

– بتطبيق طريقة الزاوية الشمالية الغربية كانت تكلفة النقل هي $F_1 = 2120$

– بتطبيق طريقة الأقل تكلفة في السطر كانت تكلفة النقل هي $F_2 = 1980$

– بتطبيق طريقة الأقل تكلفة في العمود كانت تكلفة النقل هي $F_3 = 1960$

– بتطبيق طريقة الأقل تكلفة في الجدول كانت تكلفة النقل هي $F_4 = 2020$

– بتطبيق طريقة الفروق العظمى $F_5 = 1760$

إلا أن أقل هذه التكاليف جاء من خلال تطبيق طريقة الفروق العظمى.

2– يتبين لنا من خلال التطبيقات العملية للمسائل أنه إذا كان عدد الأسطر «عدد الممولين» هو أقل من عدد الأعمدة «عدد المنتفعين» فإن طريقة العنصر الأقل تكلفة في السطر هي أكثر ميزة من غيرها. أما حينما يكون عدد الممولين «عدد الأسطر» اكبر من عدد المنتفعين «عدد الأعمدة» فإن طريقة العنصر الأقل تكلفة في العمود هي أكثر ميزة من غيرها. وحين عدد الممولين «عدد الأسطر» كبيرٌ وبالتالي عدد الأعمدة «عدد المنتفعين»كبيراً أيضاً فعندها تكون طريقة العنصر الأقل تكلفة في الجدول أكثر ميزة من غيرها.

VI-2-4 – طرق تعيين الحل الأمثل:

لتحسين الحل ننطلق دوماً من الحل البدائي (الأولي) الذي توصلنا إليه من خلال إحدى الطرق السابقة:

تكمن عملية تحسين الحل الابتدائي (الأولي) من فكرة نقل كمية معينة من مربع مشغول إلى مربع آخر غير مشغول شريطة تقليل التكلفة الكلية، فإذا كانت العملية ممكنة فعندها يتطلب إعادة توزيع بقية الكميات في المربعات بحيث يتحقق توازن الحل. أي بحيث يتساوى مجموع الكميات الموزعة في كل سطر (عمود) بالشكل الذي يتطابق معه المتاح (المتوفر) الكلي مع الضروري (اللازم) الكلي. بعد هذا تكرر العملية نفسها بالشكل الذي نلحظ فيه تقليل التكلفة الكلية في كل مرة حتى الوصول إلى تكلف كلية واحدة في مرتين متتاليتين فعندها يكون الحل الذي توصلنا إليه حلاً أمثلاً.

هناك طريقتان لحسين الحل الابتدائي (الأولي):

- الطريقة التوزيعية.

- الطريقة التوزيعية المعدلة *Multiplier Method* «طريقة المضاريب». طريقة المتغيرات الثنائية «المضاعف».

VI-2-4-1 – الطريقة التوزيعية:

تستند خوارزمية هذه الطريقة إلى المراحل التالية التي يجب تطبيقها على كل مربع غير مشغول:

1 – تتم عملية تحديد المربع المشغول الذي نقل منه كمية معينة إلى مربع آخر غير مشغول من خلال تشكيل مضلع مغلق (شكل هندسي مكون من أضلاع

أفقية وشاقولية) إحدى زواياه هي المربع غير المشغول وبقية الزوايا الأخـــرى هي مربعات مشغولة بكميات تم تحديدها وفق إحدى طرق الحل الابتدائي.

2 – يعطى لكل زاوية من زوايا المضلع المغلق الإشارة + فـــ – ابتداء من المربع غير المشغول.

3– نحسب التوفير «التقليل» $\delta(j\ ,\ i)$ في التكلفة بالنسبة لكل مربـــع $(j\ ,\ i)$ غير مشغول وذلك بنتيجة تحويل وحدة واحدة، إذ نفهم بموجب هذا التحويل أننا أضفنا كمية معينة إلى المربع الذي له إشارة (+) في المضلع ونقصنا الكميـــة نفسها من المربع الذي له إشارة (–) في المضلع نفسه.

بالحقيقة إذا أمعنا النظر في المرحلة الثالثة فإننا بشكل عملي حولنا الكميـــة الأقل بين الكميات التي لها إشارة (–) في المضلع المذكور وليس كمية وحدة واحدة.

4 – نفتش عن المضلعات التي لها القيم العددية السالبة، ثم نختار من بـــين هذه المضلعات المضلع الذي له أكبر قيمة سالبة والذي يمثـــل أفضـــل تحويـــل للكمية التي يجب نقلها من مكان لآخر.

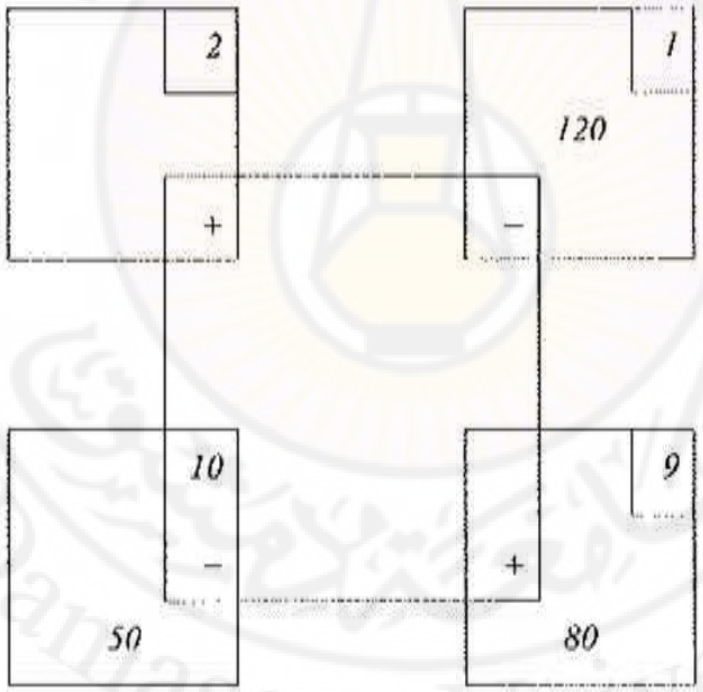
5 – نضيف القيمة العددية الموافقة لهذا المضلع إلى القيم العددية التي لهـــا الإشارات الموجبة ونطرحها من القيم العددية التي لها الإشارات السالبة وذلـــك وفق ما ورد في (٣).

6 – نحصل بعد هذا التحويل على توزيع جديد للكميات نحسب من خلالـــه التكلفة الكلية المثلى.

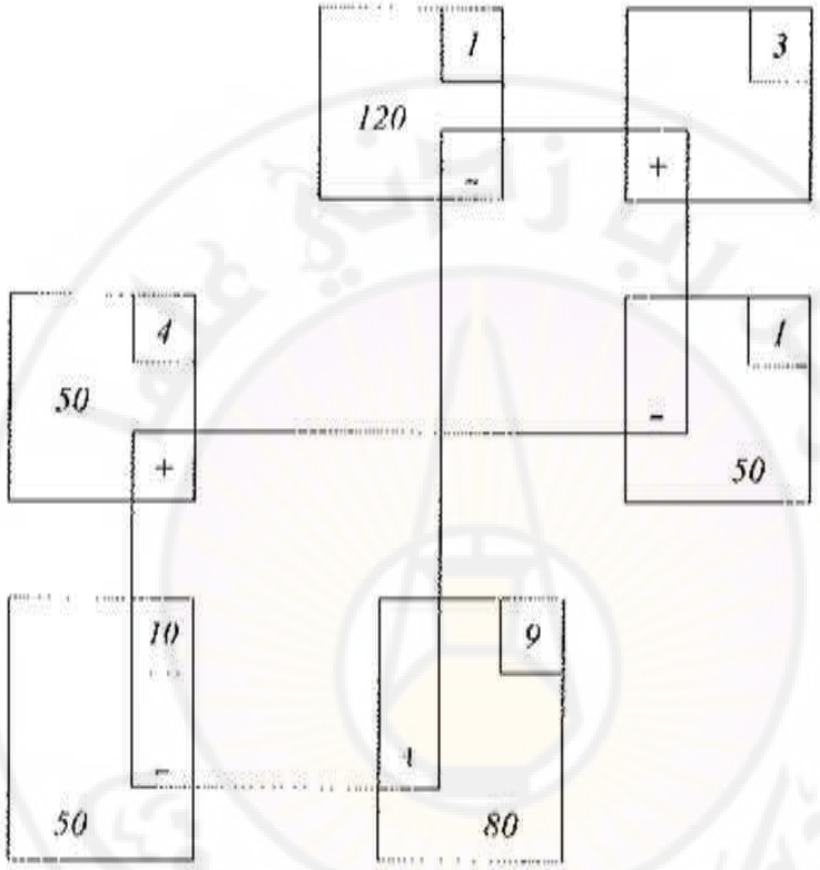
7 – نكرر الخطوات السابقة من جديد حتى نصل إلى تساوي تكلفتين كليتين ناتجتين عن توزيعين متتاليين إذ تنتهي هذه الطريقة وتكون التكلفة الكلية التي توصلنا إليها هي الحل الأمثل لهذا التوزيع.

فإذا عدنا إلى المثال السابق، وانطلقنا من الحل الأولي (البدائي) الناتج بتطبيق طريقة العنصر الأقل تكلفة في السطر لوجدنا أن خطوات تحسين الحل السابقة على النحو التالي:

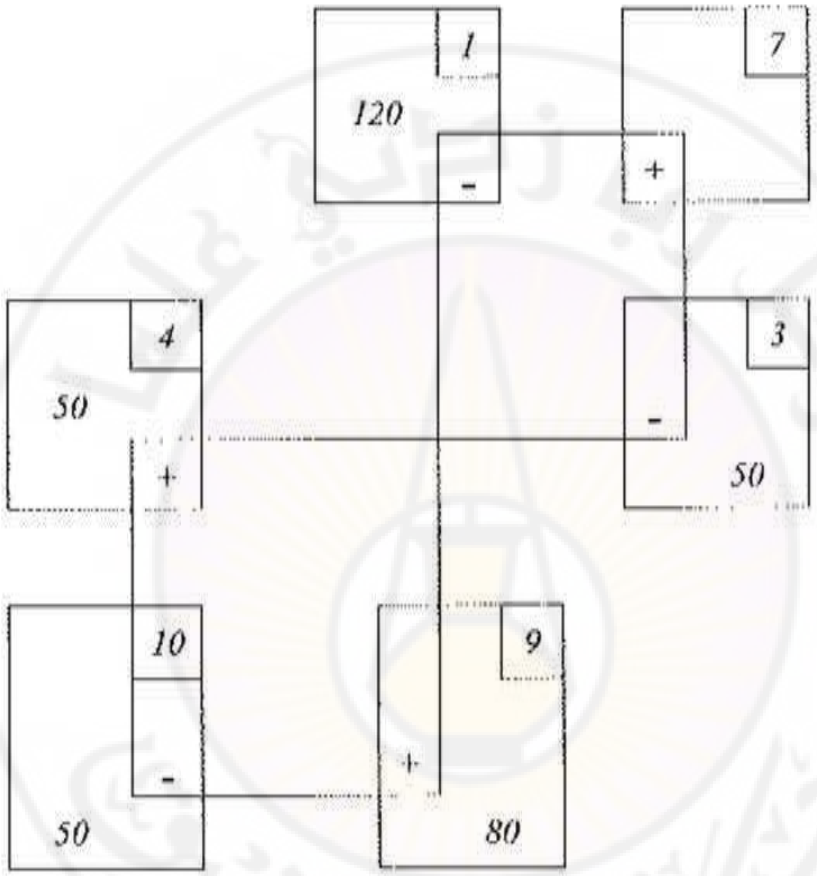
1 – المضلعات المغلقة هي: بالنسبة للمربع (1 ، 1) لدينا المضلع التالي:



بالنسبة للمربع (3 ، 1) لدينا المضلع

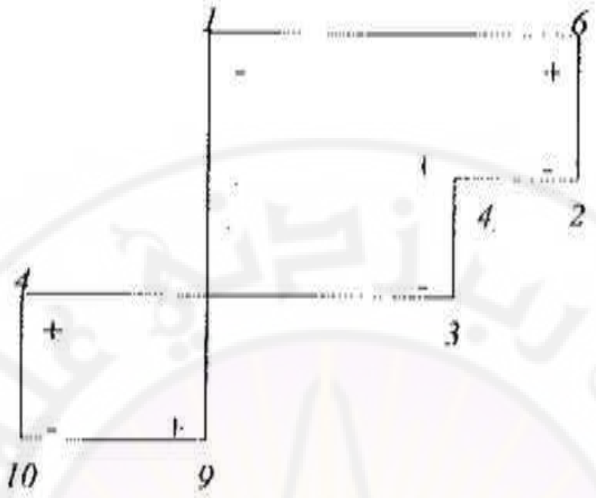


بالنسبة للمربع (4 ، 1) لدينا المضلع التالي



وبالطريقة نفسها نستطيع التوصل إلى هذه المضلعات وبشكل مختصر كما يلي:

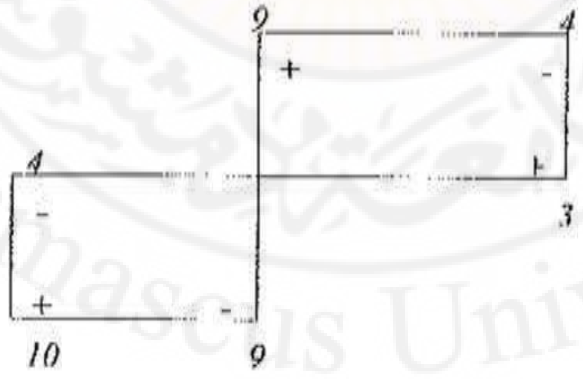
بالنسبة للمربع (5 ، 1)



بالنسبة للمربع (1 ، 2)



بالنسبة للمربع (2 ، 2)



بالنسبة للمربع (2 ، 3)



بالنسبة للمربع (3 ، 2)



بالنسبة للمربع (5 ، 3)



بالنسبة للمربع (3 ، 4)

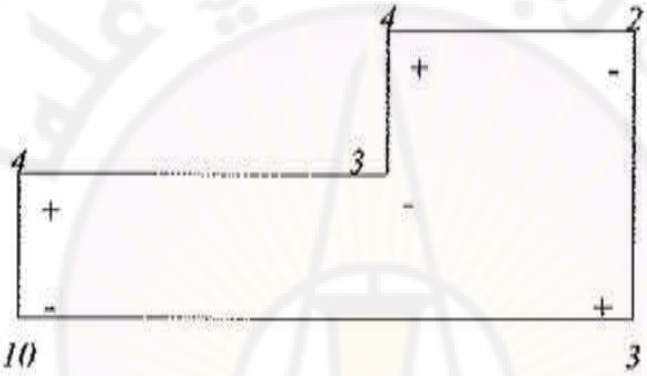


Damascus University

بالنسبة للمربع (4 ، 4)



بالنسبة للمربع (5 ، 4)



حيث نكون أمام عدد من المضلعات المغلقة بقدر عـدد المربعـات غيـر المشغولة.

2 – نعطي الإشارات + فـ – لزوايا كل مضلع (انظر المضلعات السابقة) ابتداء من إشارة + للمربع غير المشغول.

3 – نحسب الآن التوفير (التقليل) التخفيض في تكاليف النقل $\delta(i,j)$ بالنسبة لكل مربع من المربعات السابقة حيث نجد أن:

بالنسبة للمضلع (1 ، 1) نجد أن:

$$\delta(1,1) = 2 - 1 + 9 - 10 = 0$$

بالنسبة للمضلع (3 ، 1) نجد أن:

$$\delta(1,3) = +3 - 1 + 9 - 10 + 4 - 1 = 4 > 0$$

بالنسبة للمضلع (4 ، 1) نجد أن:

$$\delta(1,4) = +7 - 1 + 4 - 10 + 9 - 3 = 6 > 0$$

بالنسبة للمضلع (5 ، 1) نجد أن:

$$\delta(1,5) = +6 - 2 + 4 - 3 + 4 - 10 + 9 - 1 = 7 > 0$$

بالنسبة للمضلع (1 ، 2) نجد أن:

$$\delta(2,1) = 7 - 4 - 4 + 3 = 2 > 0$$

بالنسبة للمضلع (2 ، 2) نجد أن:

$$\delta(2,2) = +9 - 4 + 3 - 9 + 10 - 4 = 5 > 0$$

بالنسبة للمضلع (3 ، 2) نجد أن:

$$\delta(2,3) = +5 - 4 + 3 - 1 = 3 > 0$$

$$\delta(3,2) = +5 - 9 + 10 - 4 = 2 > 0$$

$$\delta(4,3) = +4 + 4 - 10 - 1 = -3 < 0$$

$$\delta(3,5) = +4 - 2 + 2 - 3 = 1 > 0$$

$$\delta(4,4) = -3 + 5 - 10 + 4 = -4 > 0$$

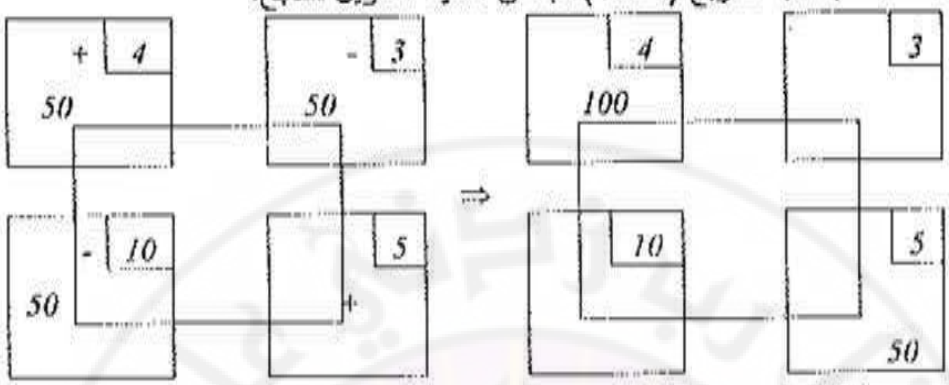
$$\delta(4,5) = +4 - 2 - 3 + 3 - 10 + 4 = -4 < 0$$

4 – إن المضلعات التي لها القيم السالبة هي المضلعات الموافقة للمربعات:

(4 ، 4) – (4 ، 3) – (4 ، 5)

وهناك مضلعان لهما القيمة العددية السالبة نفسها وهي (٤ –) هما الموافقان للمربعان (5 ، 4) و (4 ، 4).

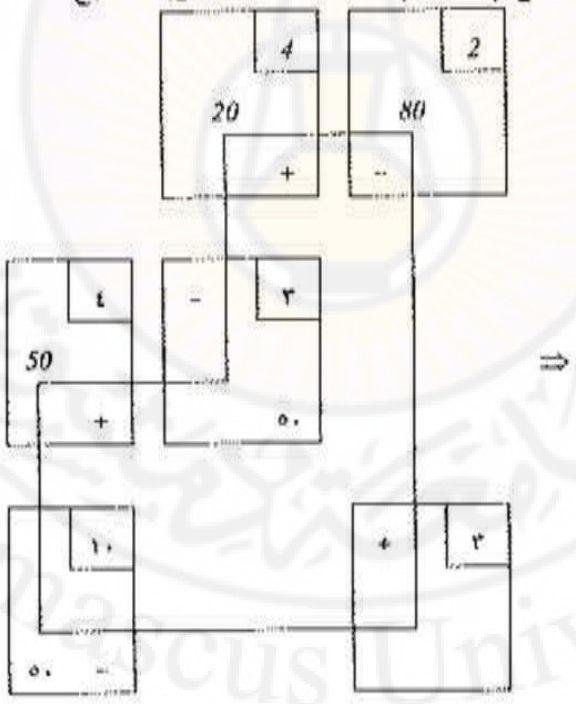
5 – بالنسبة للمربع (4 ، 4) نجد أن عملية التحويل تصبح:



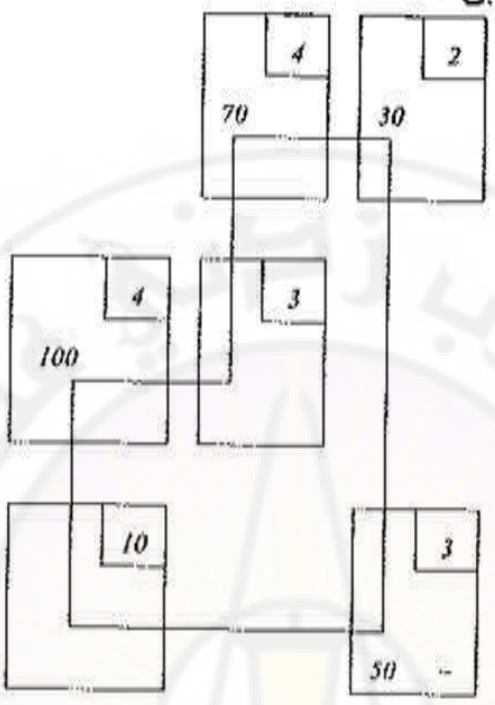
وإذا حسبنا المرحلة التالية (6) من خلال تكاليف هذا التوزيع لوجدنا أن:

$1780 - 250 + 400 + 720 : 50 + 160 + 80 : 120 = 1$

أما إذا أخذنا المربع (6 ، 4) نجد أن عملية التحويل تصبح:



يتبع الشكل السابق :



وإذا حسبنا المرحلة التالية (٦) من خلال تكاليف هذا التوزيع لوجدنا أن:

$$F = 120 + 50 + 720 + 400 + 280 + 60 + 150 = 1420$$

وإذا أردنا التعرف على هذا التوزيع في مسألتنا لوجدنا الجدول (VI-51):

	1	2	3	4	5	المتاح
1	2	1 120	3	7	6	120
2	7	9	5	4 70	2 30	100
3	4 100	5	1 50	3	2	150
4	1	9 80	4	5	3 50	130
اللازم	100	200	50	70	80	500

الجدول (VI-51)

لنلاحظ أن المربع (٥ ، ٤) يوافق حل مثال أفضل من الحل المثالي للمربع (5 ، ٤) الذي قيمة التكليف الكلية فيه ١٧٨٠.

نكرر الآن المراحل نفسها من جديد ونحسب التكاليف كما مرد في المرحلة (٧).

VI-2-4-2*-الطريقة التوزيعية المعدلة «المتغيرات الثنائية – المضاعف – حجر النقل» *Modified Distribution Method

وجدنا في الطريقة التوزيعية السابقة أن التعرف على الحل الأمثل «التكلفة المثلى للنقل» يكمن في تشغيل مضلعات مغلقة عديدة ثم اختيار المضلع الموافق للحل الأمثل وفق المراحل التي ذكرنا.

يكمن جوهر الطريقة التوزيعية المعدلة في عدم التعرض لهذه المضلعات المغلقة وإعطائنا المربع الذي وفقه يمكن إجراء أفضل التعويلات حيث من خلال

هذا المربع يمكن تشكيل المضلع الموافق له ثم إجراء التمويلات الضرورية واللازمة للتوصل إلى الحل الأمثل.

أما كيفية التوصل إلى المربع المناسب بغية التحقق فيما إذا كان الحل الأولي مثالياً أم لا فإننا نرفق بكل سطر من أسطر جدول النقل المتغير u_i وبكل عمود المتغير ϑ_j ثم لتشكيل العلاقات التي نحددها على الأكثر $(m + n - 1)$ والتي تمول $m + n$ مجهول:

$$u_i + \vartheta_j = C_{ij}$$

C_{ij} الكلفة الموحدة للنقل الموجودة في المربع $(i\ ,\ j)$ وذلك من أجل جميع المربعات $(i\ ,\ j)$ المشغولة والتي من خلالها نستطيع حساب قيم المتغيرات u_i ، ϑ_j وذلك مهما يكن الدليلان i والدليل j بعد فرض أحد المتغيرات مساوياً للصفر.

بعدها نحسب الفروق:

$$C_{ij} - (u_i + \vartheta_j)$$

وذلك من أجل جميع المربعات غير المشغولة.

فإذا كان $C_{ij} - (u_i + \vartheta_j) \geq 0$ من أجل جميع المربعات غير المشغولة فالحل الأولي «البدائي» الذي توصلنا إليه هو حل أمثل ولا توجد تمويلات للحصول على حل أفضل من السابق.

أما إذا كان $C_{ij} - (u_i + \vartheta_j) < 0$ من أجل بعض المربعات غير المشغولة «واحد على الأقل» فهذا معناه أن هناك تمويلات أفضل توصلنا إلى حل أفضل

من الحل السابق، إذ نعتبر أن أفضل تمويل هو التمويل الموافق للمربـــع (i, j) والذي يحقق العلاقة التالية:

$$C_{ij} - (u_i + \vartheta_j) = Min\{C_{ij} - (u_i + \vartheta_j)\}$$

الآن بعد أن تعرفنا على المربع الذي يعطينا أفضل تمويل، عنـــدها نشـــكل المضلع المغلق الموافق لهذا المربع ونكمل خطوات الحل كما ورد في الطريقـــة التوزيعية إذ نتوصل إلى الحل الأمثل.

ثم نكرر خطوات هذه الطريقة لحين التوصل إلى أن الحل الأمثل ليس له أفضل فيه فإذا طبقنا هذه الطريقة على المثال السبق لوجدنا من الجدول (VI-52)

	1	2	3	4	5	المتاح	
1	2	1 120	3	7	6	120	u_1
2	7	9	5	4 20	2 80	100	u_2
3	4 50	5	1 50	3 50	2	150	u_3
4	10 50	9 80	4	5	3	130	u_4
اللازم	100	200	50	70	80	500	
	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	ϑ_5		

الجدول (VI-52)

إن المعادلات هي:

$$u_1 + \vartheta_2 = 1$$

$$u_2 + \vartheta_4 = 4$$

$$u_2 + \vartheta_5 = 2$$

$$u_3 + \vartheta_1 = 4$$

$$u_3 + \vartheta_3 = 1$$

$$u_3 + \vartheta_4 = 3$$

$$u_4 + \vartheta_4 = 10$$

$$u_4 + \vartheta_2 = 9$$

أما حل هذه الجملة من المعادلات فيكون:

I – لنفرض أن $u_1 = 0$ فنجد أن:

$u_2 = 3$	$u_3 = 2$	$U_4 = 8$
$\vartheta_1 = 2$	$\vartheta_2 = 1$	$\vartheta_3 = -1$
$\vartheta_4 = 1$	$\vartheta_5 = -1$	

II – أما إذا فرضنا $u_3 = 0$ فنجد أن:

$u_1 = -2$	$u_2 = 1$	$u_4 = 6$
$\vartheta_1 = 4$	$\vartheta_2 = 3$	$\vartheta_3 = 1$
$\vartheta_4 = 3$	$\vartheta_5 = -1$	

لنبدل الآن قيم المتغيرات u_i و ϑ_j التي حصلنا عليها من العلاقة

$$C_{ij} - (u_i + \vartheta_j)$$

ولنتعرف على إشارة هذه العلاقة[1]:

من الحل *(I)* نجد بالتبديل أن:

$$2 - (u_1 + \vartheta_1) = 2 - (0 + 2) = 0$$

$$3 - (u_1 + \vartheta_3) = 3 - (0 - 1) = 4$$

---

١ – لاحظ أن فرضية المتغير المعدوم تلعب دوراً فعالاً في إيجاد المربع غير المشغول الذي ننطلق منه.

$7-(u_1+g_4)=7-(1+1)=6$

$6-(u_1+g_5)=6-(0-1)=7$

$7-(u_2+g_1)=7-(3+2)=2$

$9-(u_4+g_2)=9-(3+1)=5$

$5-(u_2+g_3)=5-(3-1)=1$

$5-(u_3+g_2)=5-(2+1)=2$

$2-(u_3+g_5)=2-(2-1)=1$

$4-(u_4+g_3)=4-(8-1)=-3<0$

$5-(u_4+g_4)=5-(8+1)=-4<0$

$3-(u_4+g_5)=5-(8-1)=2<0$

إذن فالمربع الموافق لأفضل تحويل هو المربع (٤ ، ٤).

ومن الحل *(II)* نجد بالتبديل أن:

$2-(-2+4)=0$

$3-(-2+1)=4$

$7-(-2+3)=6$

$6-(-2+1)=7$

$7-(1+4)=2$

$9-(1+3)=5$

$5-(1+1)=3$

$5-(0+3)=2$

$2-(0+1)=1$

$4-(6+1)=-3<0$

$5-(6+3)=-4<0$

$3-(6+1)=-4<0$

لنلاحظ وفق هذه الطريقة أننا حصلنا على المربعين نفسيهما (4،4) و (4،5) الواردين في الطريقة التوزيعية الآن نكمل بأسلوب الطريقة التوزيعية نفسها.

تطبيق عام (1):

لنأخذ مثالنا الرئيسي السابق ومعه الحل الأولي (البدائي) وفق طريقة الفروق ولنحاول العمل على تحسينه وفق الطريقة التوزيعية والطريقة التوزيعية المعدلة.

وجدنا أن جدول النقل والحل الأولي وفق طريقة الفروق هو الجدول (VI-53) التالي:

	1	2	3	4	5	المتاح					
1	2	1	3	7	6	120	1	-	-	-	
		120	-	-	-						
2	7	9	5	4	2	100	2	2	2	2	2
	80	-	-	-	20						
3	4	5	1	3	2	150	1	1	1	1	-
	20	80	50	-	-						
4	10	9	4	5	3	130	1	1	1	2	2
	-	-	-	70	60						
اللازم	100	200	50	70	80	500					
	2	4	2	1	1						
	3	4	3	1	1						
	3	-	3	1	1						
	3	-	-	1	1						
	3	-	-	2	1						

الجدول (VI-53)

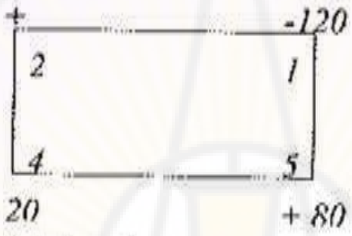
والتكلفة الكلية للنقل هي:

$$F = 120 + 40 + 560 + 80 + 400 + 50 + 350 + 180 = 1780$$

أولاً – لنعمل الآن على تحسين الحل الأولي وفق الطريقة التوزيعية:

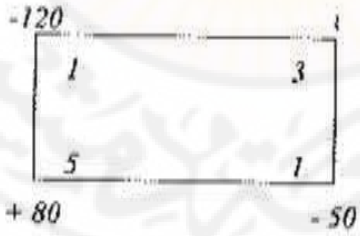
– نشكل المضلعات المغلقة ونحسب التخفيض في تكاليف النقل $\delta_{(i,j)}$ بالنسبة لكل مربع من المربعات فنجد أن:

بالنسبة للمربع $(1 \, ، \, 1)$:



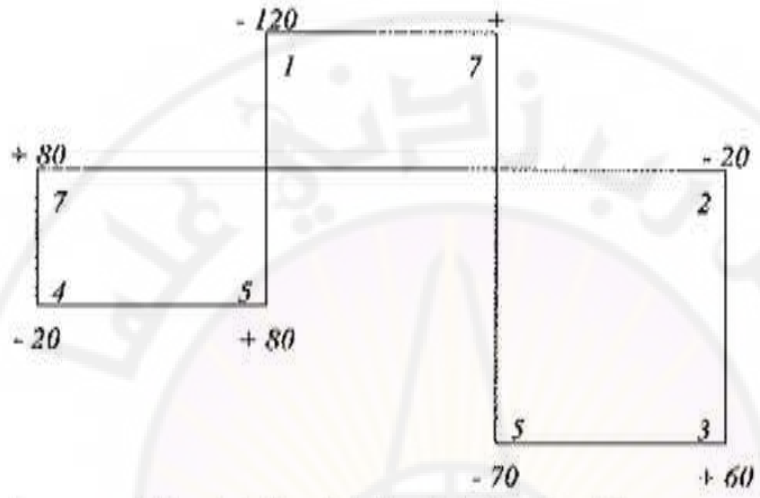
$$\delta_{(1,1)} = +2 - 1 - 4 + 5 = 2$$

بالنسبة للمربع $(1 \, ، \, 3)$:



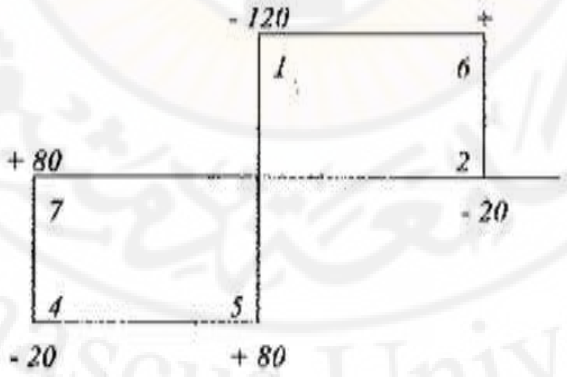
$$\delta_{(1,3)} = +3 - 1 + 5 - 1 = 6$$

بالنسبة للمربع (4 ، ١):



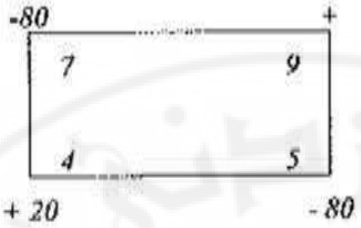
$$\delta_{(1,4)} = +7 - 1 + 7 - 4 + 5 - 5 + 3 - 2 = 10$$

بالنسبة للمربع (5 ، 1):



$$\delta_{(1,5)} = -1 + 6 - 2 + 7 - 4 + 5 = 11$$

بالنسبة للمربع (2 ، 2):



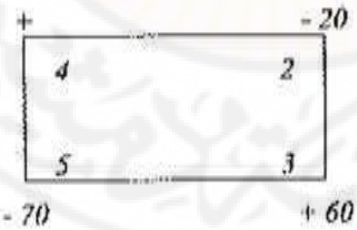
$$\delta_{(2,2)} = +9 - 7 + 4 - 5 = 1$$

بالنسبة للمربع (3 ، 2):



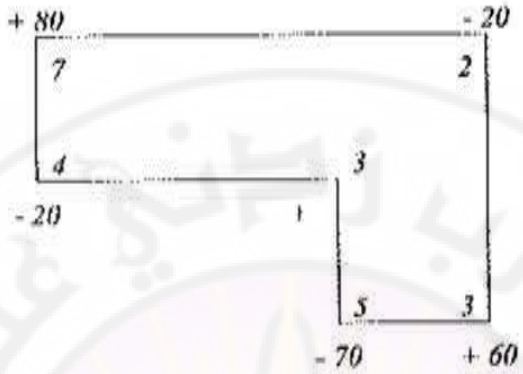
$$\delta_{(2,3)} = -7 + 5 + 4 - 1 = 1$$

بالنسبة للمربع (4 ، 2):



$$\delta_{(2,4)} = +4 - 5 - 2 + 3 = 0$$

بالنسبة للمربع (4 ، 3):



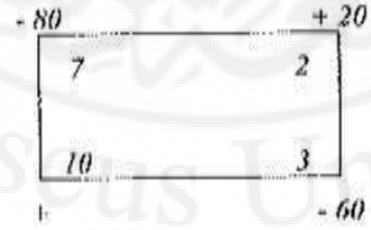
$$\delta_{(3,4)} = -2 + 3 - 5 + 3 - 4 + 7 = 2$$

بالنسبة للمربع (5 ، 3):



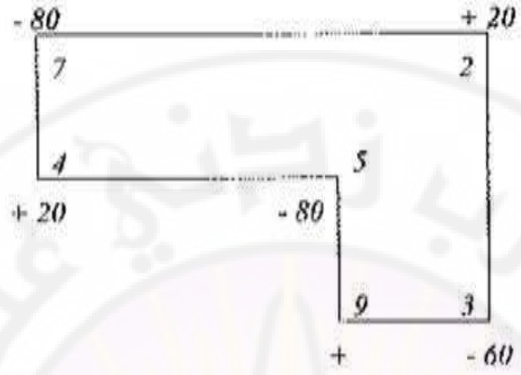
$$\delta_{(3,5)} = -2 + 7 + 2 - 4 = 3$$

بالنسبة للمربع (1 ، 4):



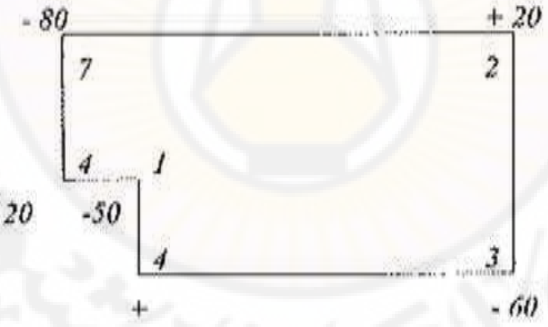
$$\delta_{(4,1)} = +2 - 3 + 10 - 7 = 2$$

بالنسبة للمربع (2 ، 4):



$$\delta_{(4,2)} = -3 + 2 + 9 - 5 + 4 - 7 = 0$$

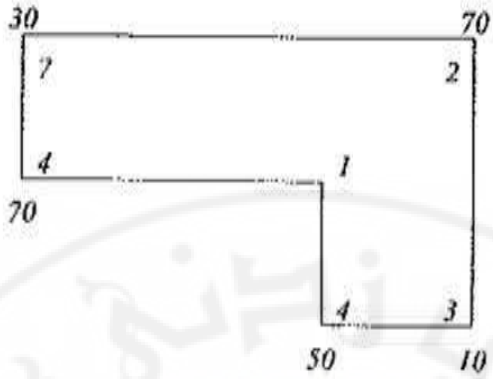
بالنسبة للمربع (3 ، 4):



$$\delta_{(4,3)} = -3 + 4 + 2 - 1 + 4 - 7 = -1 < 0$$

إذن فالمربع الذي بموجبه يمكن إجراء التمويلات بحيث نصل إلى حل أفضل هو المربع (3 ، 4).

حيث يصبح هذا المضلع وفق التمويلات على النحو التالي:



ويكون التوزيع داخل جدول النقل وفق الجدول (*VI-54*)

	1	2	3	4	5	
1	2	1 120	3	7	6	120
2	7 30	9	5	4	2 70	100
3	4 70	5 80	1	3	2	150
4	10	9	4 50	5 70	3 10	130
	100	200	50	70	80	500

الجدول (*VI-54*)

وتكون التكلفة الكلية للنقل هي:

$$F = 120 + 210 + 280 + 400 + 140 + 200 + 350 + 30 = 1730$$

نأخذ من جديد الخطوات السابقة لإعادة تحقيق الحل السابق.

ثانياً – لنعمل الآن على تحسين الحل الأولي وفق الطريقة التوزيعية المعدلة:

لدينا جدول النقل الموضح بالحل الأولي وفق طريقة فام على النحو التالي:

الجدول (*VI-55*) والمرفق به المتغيرات ui و j^{ϑ}.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
	1	2	3	4	5		
1	2	1 120	3	7	6	120	u_1
2	7 80	9	5	4	2 20	100	u_2
3	4 20	5 80	1 50	3	2	150	u_3
4	10	9	4	5 70	3 60	130	u_4
	100	200	50	70	80	500	

الجدول (*VI-55*)

لتشكل المعادلات التالية بالنسبة للمربعات المشغولة:

$$u1 + \vartheta 2 = 1$$
$$u2 + \vartheta 1 = 7$$
$$u2 + \vartheta 5 = 2$$
$$u3 + \vartheta 1 = 4$$
$$u3 + \vartheta 2 = 5$$
$$u3 + \vartheta 3 = 1$$

$u4 + \vartheta_4 = 5$

$u4 + \vartheta_5 = 3$

ويكون حل الجملة بعد فرض $u3 = 0$ هو :

$u_1 = 4$	$u_2 = 3$	$u_4 = 4$
$\vartheta_1 = 4$	$\vartheta_2 = 5$	$\vartheta_3 = 1$
$\vartheta_4 = 1$	$\vartheta_5 = -1$	

الآن لنبدل العلاقة «وذلك من أجل المربعات غير المشغولة»:

$C_{ij} - (u_i + \vartheta_j)$

وذلك للتعرف على إشارتها:

$2 - (u_1 + \vartheta_1) = 2 - (-4 + 4) = 2$

$3 - (u_1 + \vartheta_3) = 3 - (-4 + 1) = 6$

$7 - (u_1 + \vartheta_4) = 7 - (-4 + 1) = 10$

$6 - (u_1 + \vartheta_5) = 6 - (-4 - 1) = 11$

$9 - (u_2 + \vartheta_2) = 9 - (3 + 5) = 1$

$5 - (u_2 + \vartheta_3) = 5 - (3 + 1) = 1$

$4 - (u_3 + \vartheta_4) = 4 - (3 + 1) = 0$

$3 - (u_3 + \vartheta_3) = 3 - (5 + 1) = 2$

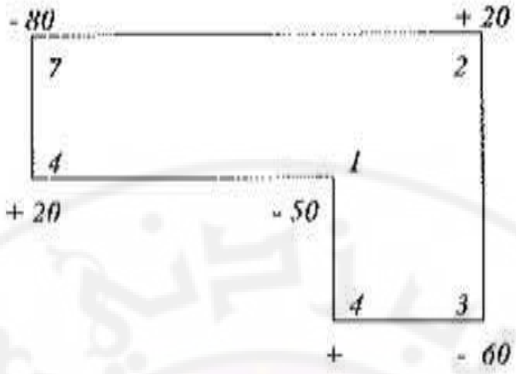
$2 - (u_3 + \vartheta_5) = 2 - (0 - 1) = 3$

$10 - (u_4 + \vartheta_1) = 10 - (4 + 4) = 2$

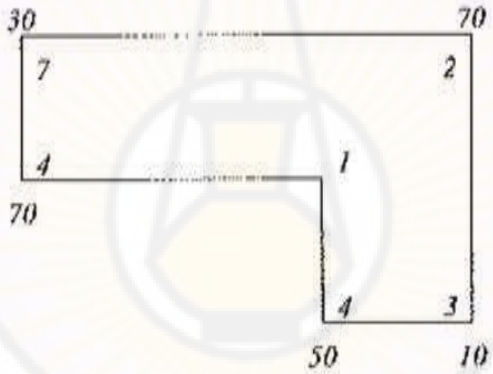
$9 - (u_4 + \vartheta_2) = 9 - (4 + 5) = 0$

$4 - (u4 + \vartheta_3) = 4 - (4 + 1) = -1 < 0$

إذن فالمربع الذي من خلاله نستطيع إجراء التحويلات التي توصلنا لحل افضل هو المربع (3 ، 4) ويكون المضلع الموافق لهذا المربع هو :



أما التحويل فهو وفق المضلع التالي:



أما التوزيع فهو داخل الجدول (*VI-55*)

وبالتالي فالتكلفة الكلية للنقل هي:

$F = 1730$

نأخذ الآن من جديد الخطوات السابقة لإعادة تحسين الحل السابق.

تطبيق عام (2)

لتفرض أن لدينا جدول النقل التالي: إن الحل الأولي هو:

طريقة الزاوية الشمالية الغربية

	1	2	3	4	المتاح
1	6 [100]	7 [250]	8 [350]	9 -	700
2	5 -	2 -	4 50	4 550	600
3	7 -	2 -	6 -	7 300	300
4	3 -	6 -	7 -	8 150	150
الضروري	100	250	400	1000	1750

$Z = 6000 + 1750 + 2800 + 200 + 2200 + 2100 + 1200 = 9770$

طريقة الأقل تكلفة في السطر

	1	2	3	4	المتاح
1	6 [100]	7 [250]	8 [350]	9 -	700
2	5 -	2 -	4 50	4 550	600
3	7 -	2 -	6 -	7 300	300
4	3 -	6 -	7 -	8 50	150
الضروري	100	250	400	1000	1750

$Z = 9770$

طريقة الأقل تكلفة في العمود

	1	2	3	4	المتاح
1	6 -	7 -	8 -	9 700	700
2	5 -	2 -	4 400	4 200	600
3	7 -	2 250	6 -	7 50	300
4	3 100	6 -	7 -	8 50	150
الضروري	100	250	400	1000	1750

$Z = 6300 + 800 + 1600 + 350 + 500 + 400 + 300 = 10250$

أسطر الفروق

	1	2	3	4	المتاح						
	6	7	8	9							
	-	-	300	400							
2	5	2	4	4	600	2	1	0	-	-	u_2
	-	-	-	600							
3	7	2	6	7	300	4	1	1	1	-	u_3
	-	250	50	-							
4	3	6	7	8	150	3	4	1	1	-	u_4
	100	-	50	-							
الضروري	100	250	400	1000	1750						
أعمدة الفروق	2	4	2	3							
	-	-	2	3							
	-	-	2	3							
	-	-	1	1							
	-	-	-	-							
	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4							

$Z = 2400 + 3600 + 2400 + 300 + 500 + 350 + 300 = 9850$

تحسين الحل بطريقة التوزيع المعدلة لجدول النقل الأخير والسابق:

$u_1 + \vartheta_3 = 8$ $\quad u_1 + \vartheta_4 = 9$ $\quad u_2 + \vartheta_4 = 4$

$u_3 + \vartheta_2 = 2$ $\quad u_3 + \vartheta_3 = 6$ $\quad u_4 + \vartheta_1 = 3$

$u_4 + \vartheta_3 = 7$

لحل جملة المعادلات نفرض أن: $u_1 = 0$

$$\vartheta_3 = 8 \qquad \vartheta_4 = 9 \qquad u_2 = -5$$
$$\vartheta_2 = 4 \qquad u_4 = -1 \qquad u_3 = -2$$
$$\vartheta_1 = 4$$

نحسب الفروق $C_{ij} - (u_i + \vartheta_j)$ من أجل المربعات غير المشغولة

$$6 - (u_1 + \vartheta_1) = 7 - (4) = 3$$
$$7 - (u_1 + \vartheta_2) = 7 - (4) = 3$$
$$5 - (u_2 + \vartheta_1) = 5 - (-1) = 6$$
$$2 - (u_2 + \vartheta_2) = 2 - (-1) = 3$$
$$4 - (u_2 + \vartheta_3) = 4 - (3) = 1$$
$$7 - (u_3 + \vartheta_1) = 7 - (2) = 5$$
$$7 - (u_3 + \vartheta_4) = 7 - (7) = 0$$
$$6 - (u_4 + \vartheta_2) = 6 - (13) = -7 < 0$$
$$8 - (u_4 + \vartheta_4) = 8 - (8) = 0$$

إذن المضلع المناسب هو للمربع (2 , 4).

-2 250	+6 50
+6	-7 50

إذن تصبح المربعات الموافقة هي:

2 200	6 100
6 50	7 0

وتصبح قيمة تابع الهدف في تحسين الحل هي: $Z = 10000$

نطبق من جديد الطريقة التوزيعية المعدلة:

$u_1 + \vartheta_3 = 8$ $u_1 + \vartheta_4 = 9$ $u_2 + \vartheta_2 = 4$

$u_3 + \vartheta_2 = 2$ $u_3 + \vartheta_3 = 6$ $u_4 + \vartheta_1 = 3$

$u_4 + \vartheta_2 = 6$

بحل هذه الجملة نجد أن:

$u_1 = 0$ $\vartheta_3 = 8$ $\vartheta_4 = 9$

$u_2 = -5$ $u_3 = -2$ $\vartheta_2 = 5$

$u_4 = 1$ $\vartheta_1 = 3$

لنحسب الفروق $\vartheta C_{ij} = (u_i + \vartheta_j)$ بالنسبة للمربعات غير المشغولة:

	+8 300	-9 400
+2 200	-6 100	
-6 50		+8

	8 350	-9 350
2 250	6 50	
6 0		8 50

$6 - (u_1 + v_1) = 6 - (3) = 3$

$7 - (u_1 + v_2) = 7 - (5) = 2$

$5 - (u_2 + v_1) = 5 - (1) = 4$

$2 - (u_2 + v_2) = 2 - (0) = 2$

$4 - (u_2 + v_3) = 4 - (3) = 1$

$7 - (u_3 + v_1) = 7 - (1) = 6$

$7 - (u_3 + v_4) = 7 - (7) = 0$

$8 - (u_4 + v_1) = 8 - (10) = -2 < 0$

$7 - (u_4 + v_3) = 7 - (9) = -2 < 0$

إن قيمة تابع الهدف في الحل الجديد هي: 9850

مثال: لنفرض أن لدينا جدول النقل التالي: إن الحل الأولي هو:

طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	1	2	3	4	المتاح
1	3 (13)	1 (4)	2 (0)	5 (0)	17
2	4 (-)	6 (13)	1 (5)	3 (-)	18
3	4 (-)	2 (-)	5 (2)	7 (13)	15
الضروري	13	17	7	13	50

$Z = 227$

الحل مقبول

طريقة العنصر الأقل تكلفة في السطر:

	1	2	3	4	المتاح
1	3 (-)	1 (17)	2 (0)	5 (0)	17
2	4 (-)	6 (-)	1 (7)	3 (11)	18
3	4 (13)	2 (-)	5 (-)	7 (2)	15
الضروري	13	17	7	13	50

إن الحل متردد

$Z = 123$

طريقة العنصر الأقل في العمود:

	1	2	3	4	المتاح
1	3 (13)	1 (4)	2 (-)	5 (-)	17
2	4 (-)	6 (-)	1 (7)	3 (11)	18
3	4 (-)	2 (13)	5 (-)	7 (2)	15
الضروري	13	17	7	13	50

الحل مقبول

$Z = 123$

تابع الهدف بعد التحسين

$Z = 119$

ملاحظة هامة:

نلاحظ في طريقة العنصر الأقل تكلفة في السطر أن الحل متردٍ إلا أن قيمة تابع الهدف هي ١٢٣ وهي نفس قيمة تابع الهدف في طريقة العنصر الأقل في العمود والحل ليس متردياً.

طريقة الفروق العظمى:

ونلاحظ أن الحل هنا متردٍ.



تحسين الحل:

لنأخذ الحل المعطى وفق طريقة العنصر الأقل في الجدول ولنطبـــق عليـــه الطريقة التوزيعية المعدلة:

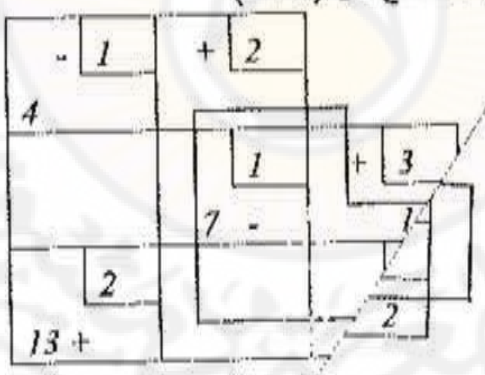
$$u_1 + \vartheta_1 = 3 \quad u_1 + \vartheta_2 = 1 \quad u_2 + \vartheta_3 = 1$$
$$u_3 + \vartheta_4 = 3 \quad u_3 + \vartheta_3 = 6 \quad u_4 + \vartheta_2 = 2$$
$$U_3 + \vartheta_4 = 7$$

نجد أن:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 3 \qquad u_4 = 1$$
$$\vartheta_1 = 3 \qquad \vartheta_2 = 1 \qquad \vartheta_3 = 4$$
$$\vartheta_4 = 6$$

نحسب الفروق $\vartheta C_{ij} - (u_i + \vartheta)$:

المربع الموافق للمضلع هو (3 ، 1)



$$C_{13} - (u_1 + \vartheta_3) = 2 - 4 = -2$$
$$C_{14} - (u_1 + \vartheta_4) = 5 - 6 = -1$$
$$C_{12} - (u_2 + \vartheta_1) = 4 - 0 = 4$$
$$C_{22} - (u_2 + \vartheta_2) = 6 + 2 = 8$$

$$C_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 4 = 0$$
$$C_{33} - (u_3 + v_3) = 5 - 5 = 0$$

ثم نكمل كما مر معنا سابقاً.

كيفية تحسين الحل المتردي:

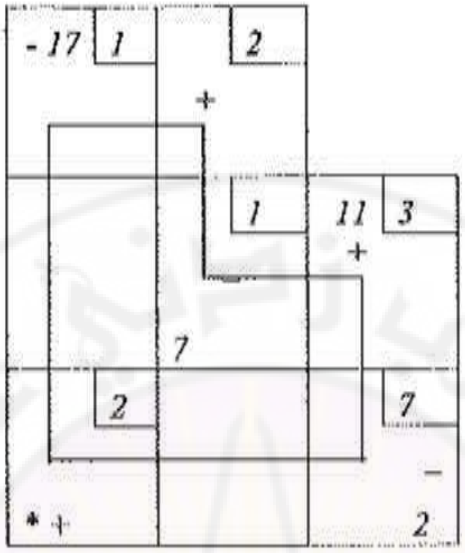
لنأخذ الحل الأولي المتردِ الوارد في المثال السابق والمحسوب وفق طريقة العنصر الأقل تكلفة في السطر.

	1	2	3	4	المتاح
1	3	1	2	5	17
	-	17	-	-	
2	4	6	1	3	18
	-	-	7	11	
3	4	2	5	7	15
	13	*	-	2	
الضرورة	13	17	7	13	50

لنلاحظ أن عدد المربعات المشغولة هو أقل من $m + n - 1$ لذا الحل الذي بين أيدينا هو متردٍ سوف نعمل على تحسينه بالطريقة التوزيعية.

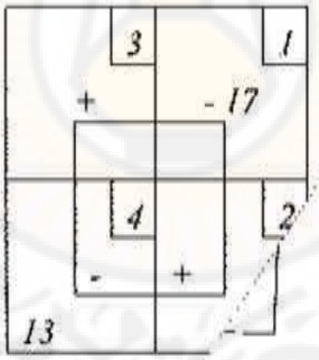
سوف نعتبر أن أحد المربعات غير المشغولة هو مربع مثل وليكن المربع (٢ ، ٣) المشار إليه بـ * ، لنشكل المضلعات بالنسبة لربعات غير المشغولة:

المربع (3 ، 1)



$\delta_{(1,3)} = 2 - 1 - 1 + 3 - 7 + 2 = -2$

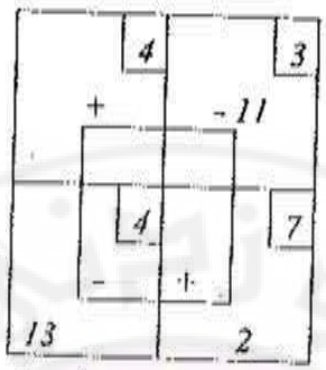
المربع (1، 1)



$\delta_{(1,1)} = 3 - 1 + 2 - 4 = 0$

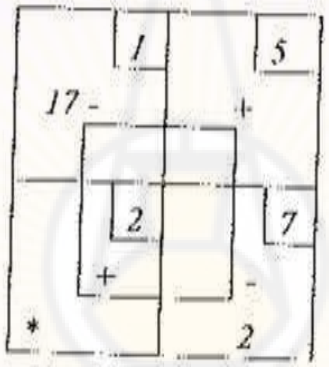
Damascus University

المربع (2 ، 1)



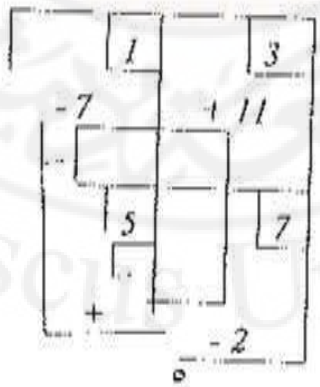
$\delta_{(2,1)} = 4 - 3 + 7 - 4 = 4$

المربع (1 ، 4)



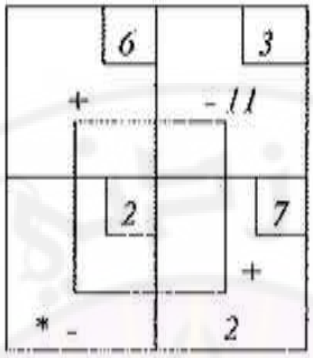
$\delta_{(1,4)} = 1 - 5 - 7 + 2 = -1$

المربع (3 ، 3)



$\delta_{(3,3)} = -1 + 3 - 7 + 5 = 0$

المربع (2 ، 2)



$\delta_{(2,2)} = +6 - 3 - 2 + 7 = 8$

إذن المضلع المناسب هو الموافق للمربع (3 ، 1)

ويكون الحل المحسن في الجدول التالي:

	1	2	3	4	متاح
1	3	1	2	5	17
	-	15	2	-	
2	4	6	1		18
	-	-	5	1	
3	4	2	5	2	15
	13	2	-	-	
الضروري	13	17	7	13	50

إن قيمة تابع الهدف هي $Z = 19$ ونلاحظ أن الحل أصبح مقبولاً وليس متردياً.

لنستخدم الآن الطريقة التوزيعية المعدلة:

$$u_1 + \vartheta_2 = 3 \quad u_1 + \vartheta_3 = 2 \quad u_2 + \vartheta_3 = 1$$
$$U_2 + \vartheta_4 = 3 \quad u_3 + \vartheta_1 = 4 \quad u_4 + \vartheta_2 = 2$$

الحل:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = -1 \qquad u_4 = 1$$
$$\vartheta_1 = 3 \qquad \vartheta_2 = 1 \qquad \vartheta_3 = 2$$
$$\vartheta_4 = 4$$

لنحسب الفروق: $\vartheta C_{ij} - (u_i + \vartheta_j)$ بالنسبة للمربعات غير المشغولة:

$$C_{11} - (u_1 + \vartheta_1) = 3 - (3) = 0$$
$$C_{14} - (u_1 + \vartheta_4) = 5 - (4) = 1$$
$$C_{21} - (u_2 + \vartheta_1) = 4 - (2) = 2$$
$$C_{22} - (u_2 + \vartheta_2) = 6 - (0) = 6$$
$$C_{33} - (u_3 + \vartheta_3) = 5 - (3) = 2$$
$$C_{34} - (u_3 + \vartheta_3) = 7 - (5) = 2$$

ونلاحظ أن $\vartheta C_{ij} - (u_i + \vartheta_j) \geq 0$ إذن فالطريقة انتهت وحل مسألة النقل هو:

$$x_{12} = 15 \qquad x_{13} = 2 \qquad x_{23} = 5$$
$$x_{24} = 13 \qquad x_{31} = 13 \qquad x_{32} = 2$$

وقيمة تابع الهدف هي $Z = 119$

VI-2-5 – حالات خاصة في مسائل النقل:

تتصف مسألة النقل من خلال التحليل والتعرف على حلها بالصفات التالية:

1 – عدد المربعات المشغولة «أي عدد المربعات التي توزع فيها الكميات» هو $(m + n - 1)$ في سائر خطوات الحل « m و n عدد اسطر مصفوفة النقل وأعمدتها».

2 – يساوي مجموع الكميات المتاحة في مراكز الإرسال مجموع الكميات اللازمة لمراكز التوزيع.

3 – جميع الطرق بين الممولين والمنتفعين قابلة للاستعمال.

والجدير بالذكر ،أننا إذا أخذنا النواحي العملية بالشكل الواسع فإننا نجد الكثير من الحالات التي لا تخضع لمثل الصفات السابقة. إذ علينا أن نعدها بحق حالات خاصة وسيتم معالجتها كما في الحالات التالية:

VI-2-5-1- المسألة المنحلة «المتردية»:

في الحالات التي يكون فيها الحل حاوياً أقل من $(m + n - 1)$ مربعاً مشغولاً فإننا نكون أمام حل أساسي منحل « أو حل أساسي متردد».

لنقبل «بدون برهان» النظرية التالية التي تعطي الشرط اللازم والكافي حتى يكون حل مسألة النقل منحلاً «متردياً».

نظرية: نقبل مسألة النقل المحققة للعلاقات $(1 - 8 \, ، \, 5 - 8)$حلاً منحلاً إذا وفقط إذا وجدنا جملة أدلة:

$$I_1 = \{i_1,...i_s\} \subset I = \{1,2,...m\}$$

$$J_1 = \{j_1,...i_1\} \subset I = \{1,2,...n\}$$

بحيث تتحقق العلاقة التالية:

$$\Sigma a_i = \Sigma b_j$$
$$i \in I_1 \quad j \in J_1$$

حسب النظرية هذه نستطيع القول إن انحلال الحل يظهر إما في البداية، أي في الحل الأولي إذ يكون هذا الحل منحلاً، أو في أثناء عملية المسألة أو حتى في الحل المثالي. ونتيجة ظهور الحل المنحل، يمكن أن نجد وحين تطبيق طريق تحسن أحد الحلول بعض الصعوبات والتي نقدمها على النحو التالي:

a – **الطريقة التوزيعية:** في حالة تطبيق هذه الطريقة وحين ظهور أحد الحلول المنحلة، فإننا لن نستطيع تعيين «دارة» محيط المضلع القابل للتحويل من أجل المربعات كافة غير المشغولة. وذلك على النحو الذي كنا قد تعرضنا له في الفقرة (٨-٤-١) والذي يمر من خلال المربعات المشغولة باستثناء المربع الأول. لأننا في هذه الحالة سوف نفتش عن محيطات لمضلعات تمر من خلال مربعات متعددة غير مشغولة، شريطة توافق الإشارات وأن تكون ذات إشارة موجبة. نسمي مثل هذه المحيطات «الدارات» بالدارات المنحلة.

إن التعقيد الذي يصادفنا في أثناء حل مسالة النقل المنحلة يعود لحقيقة أنه من أجل مربع ما غير مشغول يوجد الكثير من الدارات المنحلة.

حيث في الحالة التي نتمكن فيها من إزالة انحلال الحل فإن علينا الانتقال إلى حل أكثر ميزة، لذا يجب علينا اختياره من بين الدارات المنحلة التي يكون لها الميزة. وحتى نستطيع من فهم هذه العملية سنفترض أنه ومن أجل مسالة

تحتوي على 4 مموانين و 5 منتفعين قد حصلنا وبنتيجة تكرار معين على الحل الوارد في الجدول (VI-56).

نستطيع التحقق بسهولة أن الحل هو منحل وقيمة تابع الهدف من أجل هذا الحل هو ١٠١٠ وحدة.

المنتفع / الممول	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الكمية المتاحة
F_1	6	6	10	5	4	20
F_2	10	4	6	4	8	80
		20		40	20	
F_3	6	5	3	2	5	40
F_4	5	7	7	4	6	60
	50			10		
الكمية الضرورية	50	20	40	50	40	200

الجدول (VI-56)

***b* – الطريقة التوزيعية المعدلة:** لنفترض أنه وبأسلوب تحسين أحد الحلول نفسه، ظهر لدينا حل منحل (متردٍ) فيه s $(s < m + n - 1)$ عنصراً مختلفاً عن الصفر.

إن الجملة المتعلقة بـ u و v أي:

$$U_i + V_j = C_{ij} \qquad X_{ij} \neq 0 \; , i = 1,...m$$

ستحوي $(m+n)$ معادلة و s $(s < m+n-1)$ مجهولاً. فهذه الجملة هي ممكنة وغير معينة من المرتبة $(m+n-1-s)$ لحلها يجب أن نعطي قيماً لا على التعيين لـ $(m+n-1-s)$ متغيراً من بين u و v حيث في النهاية نستطيع العمل وبشكل اعتيادي. مصفوفة الفروق:

$$C_{ij} = (u_i + v_j)$$

تعطينا دارة تحويل ذات ميزة والتي يمكن أن تكون دارة متردية.

VI-2-5-2- حالة تجاوز الكمية الكلية المتاحة للممولين الكمية الكلية اللازمة:

في هذه الحالة لدينا العلاقة التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

لحل هذه المسالة ندخل مستهلكاً خيالياً B_{n+1} يستلم الكمية المساوية الفروق بين المتاح الكلي والضروري الكي أي أن:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وتعد المسافات بين الممولين والمستهلكين الخياليين مساوية الصفر وذلك لأن المستهلك ليس موجوداً على الواقع. هذا العمل يعني إضافة عمود آخر لمصفوفة النقل عناصره كلها أصفار. بهذا الشكل نستطيع حل مسالة النقل من خلال الطرق السابقة، ونجد في الجدول النهائي الذي يعطي الحل المثالي وفي عمود المستهلك الخيالي، الكميات الباقية التي تبقى لدى المنتفعين المعينين كمخزون.

VI-2-5-3- حالة تجاوز الكمية الكلية الضرورية الكمية الكلية المتاحة:

في هذه الحالة لدينا العلاقة التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$$

إن المسائل التي هي من هذا النوع يمكن تصنيفها على النحو التالي:

a – التقيد بالأولية وذلك فيما يتعلق بتوزيع الكميات الموجودة.

b – عدم التقيد بالأولوية.

عندما تأخذ المسألة التصنيف *(a)* عندها يتم تحقيق غايات المستهلكين كافة أو الذين يجب أن توزع عليهم الكميات حسب الأولوية. ومسألة النقل هذه يمكن أن تحل عبر الطرق المعروفة مسبقاً.

أما التصنيف *(b)* ولأننا لا نعرف المستهلكين الذين لا يودون استلام كامل كمياتهم فلحل هذه المسألة ندخل ممولاً خيالياً. إن الكمية التي يجب أن تكون ممولة تعدها مساوية الفرق بين الضروري الكلي والضروري المتاح.

وهذا الشكل نصل ومن جديد لمسألة نقل متزنة والتي يكون فيها مجموع الكميات الضرورية مساوياً مجموع الكميات المرفقة.

بالحقيقة من الممول الخيالي لا تنقل أية كمية وتكاليف النقل من هذا الممول إلى كل مستهلك ستكون مساوية الصفر وتفسير الحل هو في أن المنتفع والذي يأخذ توزيع كمية معينة في حل المسألة من الممول الخيالي لن يستلم في الحقيقة هذه الكمية.

– تطبيق على حالة مسائل النقل غير المتزنة(*):

لنفرض أن لدينا جدول النقل لمنتج متجانس على النحو التالي: الجدول (*VI-57*)

	1	2	3	4	المتاح
1	10	0	20	11	17
2	12	7	9	20	16
3	0	14	16	18	5
اللازم المطلوب	7	16	15	10	

الجدول (*VI-57*)

والمطلوب:

١ – أوجد الحل الابتدائي لهذه المسألة بطريقة الزاوية الشمالية ثم بطريقة الفروق العظمى «فام».

٢ – استخدم ولمرة واحدة فقط طريقتي تحسين الحل وذلك في التوصل إلى التكاليف الكلية لمسألة النقل هذه.

الحل:

نلاحظ قبل كل شيء أن مسألة النقل هذه غير متزنة، لهذا نضيف لها سطراً (ممولاً) وهمياً A لنحقق التوازن على النحو التالي وفي الجدول (*VI-58*).

(*) المسألة وردت في امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي ١٩٩٧–١٩٩٨.

	1	2	3	4	المتاح
1	10	0	20	11	17
2	12	7	9	20	16
3	0	14	16	18	5
A	0	0	0	0	١٠
اللازم المطلوب	7	16	15	10	48

الجدول (VI-58)

نوجد الحل البدائي (الأولي) وفق طريقة الزاوية الشمالية الغربيـــة، حيـث نحصل على الجدول (VI-59) التالي:

	1	2	3	4	المتاح
1	10 7	0 10	20 -	11 -	17
2	12 -	7 6	9 10	20 -	16
3	0 -	14 -	16 5	18 -	5
A	0 -	0 -	0 -	0 10	١٠
اللازم المطلوب	7	16	15	10	48

الجدول (VI-59)

أما الحل البدائي (الأولي) وفق طريقة الفروق العظمى «فام» فهـي وفـق الجدول (VI-60).

	1	2	3	4	المتاح					
1	10 1	0 16	20 -	11 -	17	10	10	10	10	1
2	12 1	7 -	9 15	20 -	16	2	2	2	5	12
3	0 5	14 -	16 -	18 -	5	14	-	-	-	-
A	0 -	0 -	0 -	0 10	10	0	0	-	-	-
المطلوب اللازم	7	16	15	10	48					

10	7	9	11
10	7	9	11
2	7	11	9
2	7	–	–
2	–	–	–

الجدول (VI-60)

في حين يرى شمشاك وغيرهم ممن عملوا في هذا المضمار *Shimshak el. Al* أنه وعند حساب الفروق سواء في السطر أو في العمود الوهمي *A* عدم الأخـذ

بعين الاعتبار التكاليف الصفرية الموجودة في السطر (العمود) الـوهمي A ثـم تطبيق طريقة الفروق العظمى «فام» بحذافيرها كما في الجدول (*VI-61*).

	1	2	3	4	المتاح					
1	10 -	0 16	20 -	11 1	17	10	10	10	10	1
2	12 2	7 -	9 5	20 9	16	2	2	2	5	12
3	0 5	14 -	16 -	18 -	5	14	-	-	-	-
A	0 -	0 -	0 10	0 -	10	0	0	-	-	-
المطلوب اللازم	7	16	15	10	48					
	10	7	7	7						
	2	7	9	11						
	2	7	11	9						
	2	7	--	9						
	2	--	--	9						

الجدول (*VI-61*)

في حين يرى جويل *Goyal* أن تكاليف مربعات السطر (العمود) الوهمي A يجب أن تكون أكبر تكلفة في جدول النقل ثم تطبيق طريقة الفروق العظمى كما هي معروفة حيث نكون أمام الجدول (*VI-62*).

	1	2	3	4	المناح						
1	10 -	0 16	20 -	11 1	17	10	10	10	١	-	-
2	12 1	7 -	9 15	20 -	16	2	2	5	8	8	-
3	0 5	14 -	16 -	18 -	5	14	-	-	-	-	-
4	20 1	20 -	20 -	20 9	10	0	0	-	-	-	-
المطلوب للأقل	7	16	15	10	48						
	10	7	7	7							
	2	7	11	9							
	2	7	–	9							
	2	–	–	–							
	8	–	–	0							
	–	–	–	–							

الجدول (VI-62).

وإذا حسبنا التكاليف الكلية للنقل وفق هذه الحلول الأولية وجدنا أن:

التكلفة وفق طريقة الزاوية الشمالية الغربية $F_1 = 282$

التكلفة وفق طريقة الفروق العظمى $F_2 = 157$

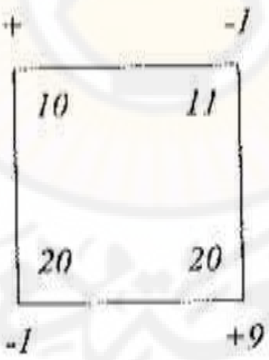
التكلفة وفق طريقة الفروق العظمى «شمشاك» $F_3 = 260$

التكلفة وفق طريقة الفروق العظمى «جويل» $F_4 = 158$

لنعمل الآن على تحسين هذا الحل منطلقين من الحل الأولي الناتج بطريقة الفروق العظمى «فام» وفق اقتراح جويل ومن الجدول (VI-62).

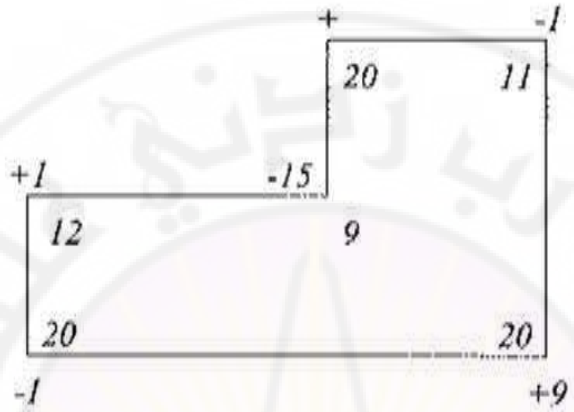
– نبدأ بطريقة التوزيع وتشكيل المضلعات ثم حساب التخفيض في الكلفة δ (i, j) بالنسبة لكل مربع من المربعات المشغولة.

بالنسبة للمربع $(1 ، 1)$



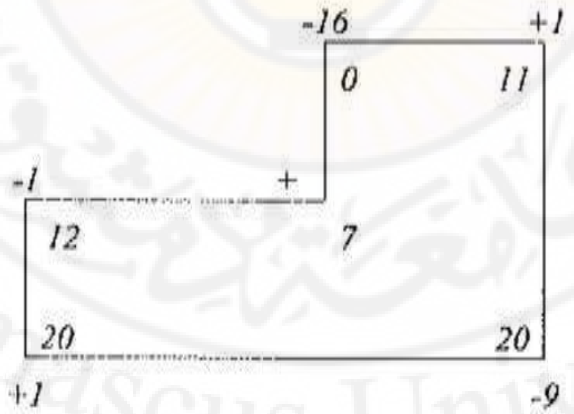
$$\delta_{(1,1)} = +10 - 11 + 20 - 20 = -1$$

بالنسبة للمربع (3 ، 1)



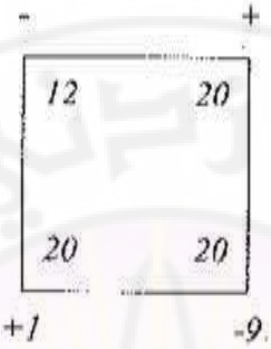
$$\delta_{(1,3)} = -11 + 20 - 9 + 12 - 20 + 20 = 12$$

بالنسبة للمربع (2 ، 2)



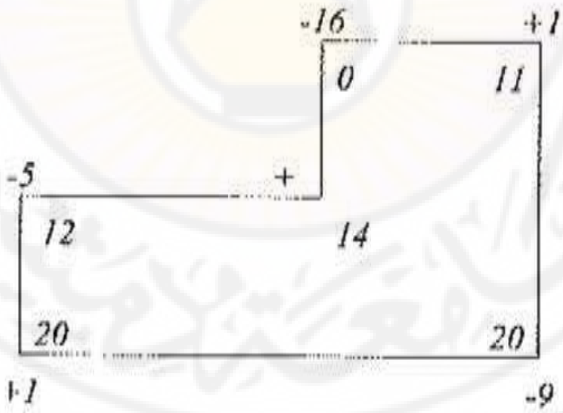
$$\delta_{(2,2)} = +11 - 0 + 7 - 12 + 20 - 20 = 6$$

بالنسبة للمربع (4 ، 2)



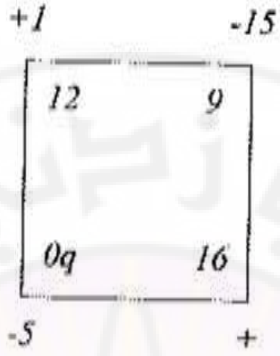
$$\delta_{(2,4)} = +20 - 12 + 20 - 20 = 8$$

بالنسبة للمربع (2 ، 3)



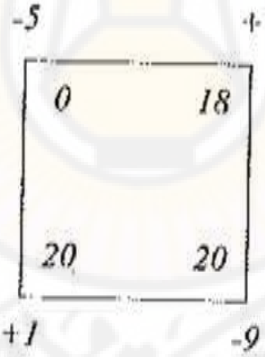
$$\delta_{(3,2)} = +11 - 0 + 14 - 0 + 20 - 20 - 25$$

بالنسبة للمربع (3، 3)



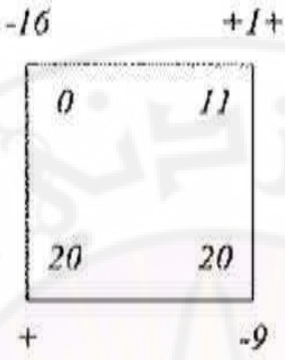
$$\delta_{(3,3)} = +16 - 0 + 12 - 9 = 19$$

بالنسبة للمربع (4 ، 3)



$$\delta_{(3,4)} = -20 + 20 - 5 + 18 = 13$$

بالنسبة للمربع (2 ، 4)



$$\delta_{(4,2)} = +20 - 20 - 0 + 11 = +11$$

بالنسبة للمربع (3 ، 4)



$$\delta_{(4,3)} = +20 - 20 + 12 - 9 = 3$$

نلاحظ أن جميع قيم $\delta(i\ ,\ j)$ موجبة إذن فليس هناك إمكانية لتحسين الحل. والحل الأولي الذي أوجدناه هو حل أمثل.

- طريقة التوزيع المعدلة: نرفق بكل سطر u_i وبكل عمود ϑ_j وتحسين قيم هذه المتغيرات من خلال العلاقة $\vartheta_j C_{ij} = u_i +$.

$u_1 + \vartheta_2 = 0$ $\quad u_1 = 0$ $\quad u_2 = 3$

$u_1 + \vartheta_4 = 11$

$u_2 + \vartheta_1 = 12$ $\quad u_3 = 9$ $\quad u_4 = 9$

$u_2 + \vartheta_3 = 9$ $\quad \Rightarrow$

$u_3 + \vartheta_1 = 0$ $\quad \vartheta_1 = 9$ $\quad \vartheta_2 = 0$

$u_4 + \vartheta_1 = 20$

$u_4 + \vartheta_4 = 20$ $\quad \vartheta_3 = 6$ $\quad \vartheta_3 = 11$

ثم لنتعرف على إشارة المقدار $(\vartheta C_{ij} -) u_i +$.

$C_{11} - (u_1 + \vartheta_1) = 10 - (0 + 9) = 1$

$C_{13} - (u_1 + \vartheta_3) = 20 - (0 + 6) = 14$

$C_{22} - (u_2 + \vartheta_2) = 12 - (3 + 0) = 9$

$C_{24} - (u_2 + \vartheta_4) = 20 - (3 + 11) = 6$

$C_{32} - (u_3 + \vartheta_2) = 14 - (-9 + 0) = 23$

$C_{33} - (u_3 + \vartheta_3) = 16 - (-9 + 6) = 19$

$C_{34} - (u_3 + \vartheta_4) = 18 - (-9 + 11) = 16$

$C_{42} - (u_4 + \vartheta_2) = 20 - (9 + 0) = 11$

$C_{43} - (u_4 + \vartheta_3) = 20 - (9 + 6) = 5$

إذن فالإشارة موجبة وبالتالي ليس هناك إمكانية لتحسين الحل. والحل الأولي الذي أوجدناه هو حل أمثل.

VI-2-5-4- حالة عدم إمكانية عبور طريق ما:

في التطبيقات العملية يمكن بوقت ما ولأسباب خارجية استحالة عبور طريق ما (أو أكثر) تصل بين الممول والمنتفع، أو يمكن طرق المسألة من ناحية أخرى، وهي حينما يكون خط الإنتاج المتعلق بطلبات أحد الممولين يستلزم مواد أولية ذات مواصفات خارجية.

نستطيع في التطبيقات العملية رد هذه الحالة إلى الأوضاع التالية:

1 – يمكن بوقت ما ولأسباب خارجية استحالة عبور طريق ما (أو أكثر من طريق) تصل بين الممول والمنتفع.

2 – حينما يكون خط الإنتاج المتعلق بأحد الممولين يستلزم مواد أولية ذات مواصفات خارجية.

3 – عندما يكون المتاح الكلي أقل من الضروري اللازم وبعض المنتفعين بحاجة لاستلام كامل الكمية اللازمة.

وبما أنه وفي وسائل النقل غايتها تقليل كلفة (تقصير الطرق) النقل، فإنه من أجل الطرق التي نود استبعادها بين بعض الممولين والمنتفعين قصد تحقيق إحدى الوضعيات الثلاث السابقة، أو وضعيات أخرى مشابهة لها نرفق وبشكل واقعي التكاليف (أو المسافات) الكبيرة التي تجعل وبشكل أكيد تلك الطرق لا تظهر وكأنها مستعملة في المخطط المثالي للنقل.

VI-2-6 – مسألة النقل ذات المراكز الوسيطية

VI-2-6-1 – تمهيد:

في التطبيقات العملية نلتقي وبشكل واسع بمسائل التوزيع «التمويل – الانتفاع» والتي يحدث أن يكون بين مراكز التزويد وتلك التوزيع مراكز وسيطية، إذ يمكن عد هذه المراكز وكأنها مراكز لمعالجة المواد الأولية، أو عقد بسيطة في شبكات النقل.

يحصل في مثل هذه الحالات أن عملية التوزيع «النقل» تتم على مرحلتين وهما:

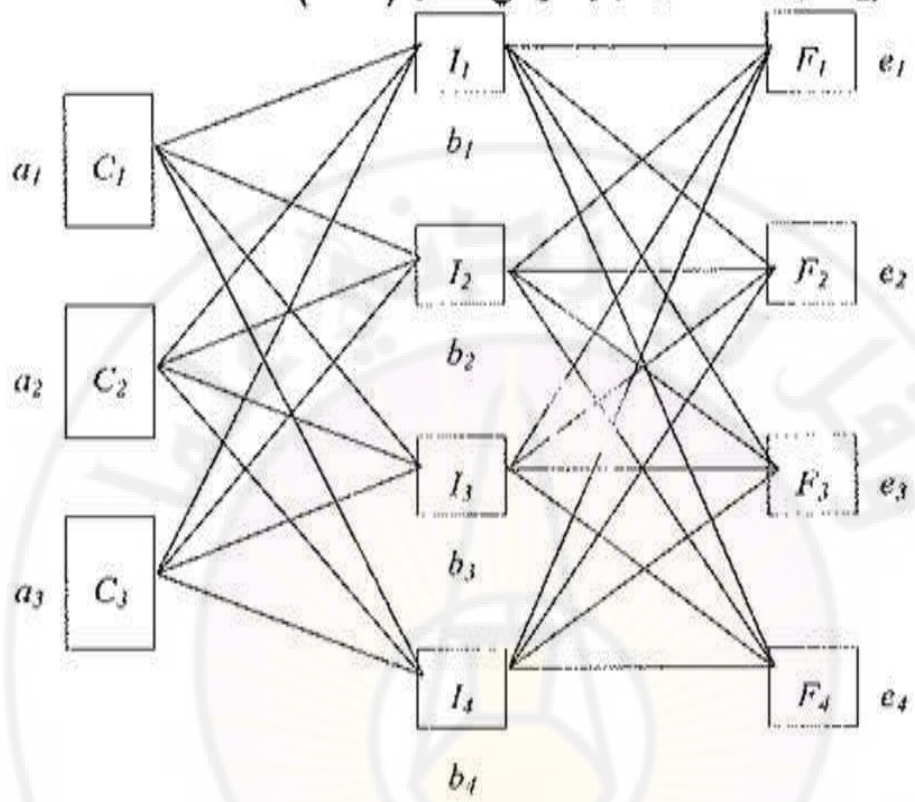
a – من المراكز الأولية «مراكز الاستثمار» نحو المراكز الوسيطية «معامل إنتاجية».

b – من المراكز الوسيطية نحو المراكز النهائية المرسلة إليها «مراكز الاستهلاك».

لتوضيح فكرة هذا النوع من مسائل النقل المعقدة هذه سوف نستعين بالمثال التالي الذي نضعه من خلال المخطط (VI-69) التالي:

مثال: من المراكز الأولية الثلاثة C_1, C_2, C_3 حيث الكميات على التسلسل a_1, a_2, a_3 تنتقل المادة الأولية إلى أربعة مراكز وسيطية I_1, I_2, I_3, I_4 ذات حجوم b_1, b_2, b_3, b_4. بعد معالجة هذه المواد الأولية في هذه المراكز الوسيطية ينتقل الإنتاج النهائي إلى أربعة مراكز للاستهلاك النهائي F_1, F_2, F_3, F_4 ذات حجوم e_1, e_2, e_3, e_4.

إن تمثيل هذا المثال شبكياً هو في الشكل (٦٩-٨).



الشكل (VI-69)

2-6-2-VI- نماذج مسائل النقل ذات المراكز الوسيطية:

نرمز للحجوم الكلية لنماذج هذه المراكز على النحو التالي:

من أجل المراكز الأولية $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$

من أجل المراكز الوسيطية $B = \sum_{i=1}^{m} B_i$

من أجل المراكز النهائية $E = \sum_{i=1}^{P} e_i$

إن حجم المراكز الوسيطية من الممكن أن يكون محدوداً ومن الممكن أن يكون غير محدود، الأمر الذي يضعنا أمام نوعين من المسائل:

1 – مسائل النقل ذات المراكز الوسيطية وبأحجام محدودة.

2 – مسائل النقل ذات المراكز الوسيطية وبأحجام غير محدودة.

أولاً: مسائل النقل ذات المراكز الوسيطية وبأحجام محدودة.

يمكن تصنيف هذا النوع من المسائل إلى مجموعتين وذلك حسب العلاقة الكائنة بين حجوم المراكز الأولية (و / أو) المراكز الوسيطية وحجوم المراكز النهائية على النحو التالي:

a – مسائل متزنة (و/أو) لديها زيادة وذلك عندما A (و/أو) $E \le B$.

b– مسائل عجز عندما A (و / أو) $E \ge B$.

سوف نتطرق إلى *(a)* و *(b)* بالشكل المفصل:

a – مسائل متزنة (و/أو) لديها زيادة: إن العلاقات بين الحجوم الثلاثة للتخزين يمكن أن تأخذ إحدى الصيغ التالية:

$A = B = E$ (*1 – a*

$A > B = E$ (*2 – a*

$A = B > E$ (*3 – a*

$A > B > E$ (*4 – a*

$A < B > E$ (5 – a «$E \leq A$ عندما «فقط وذلك

وبما أنه وفي أغلب الحالات يكون حجم المراكز النهائية هو أقل من «أو على الأكثر مساوياً» حجم المراكز الوسيطية فمن المفضل عدم اللجوء إلى عمليات النقل غير المجدي إلى المراكز الوسيطية، لكميات غير مطلوبة للمراكز الاستهلاكية.

إن شكل حل هذه المسائل كما يلي:

1 – $A = B = E$: وتعد أبسط حالة وتتألف من مسألتين عاديتين من مسائل النقل.

2 – $A > B = E$: هذا النوع من المسائل يحل عن طريق إدخال مركز وسيطي خيالي يوزع له الكمية *(A-B)* المتبقية عن عدم الإرسال من المركز البدائي *A*.

3 – حالة $A = B > E$: في هذه الحالة تعود المسألة للحالة (*1*) وذلك بتخزين الفرق *(A-E)* لدى المراكز الأولية.

4 – حالة $A > B > E$: تحل بالطريقة نفسها الواردة في الحالة السابقة.

5 – حالة $A < B > E$: «عندما $A \leq E$».

إن حل هذا النوع من مسائل النقل ذي المراكز الوسيطية يتطلب اتباع الخطوات التالية:

1 – يعين الحل المثالي لأول مسألة نقل من المراكز الأولية نحو المراكز الوسيطية.

II – يعين الحل المثالي لثاني مسألة نقل من المراكز الوسيطية نحو المراكز النهائية.

III – نطابق بين حلول المرحلتين السابقتين.

IV – تحدد الكميات التي لا تنقل إلى المراكز الوسيطية «بالشكل المشابه لما ورد في الحالة (*3*)».

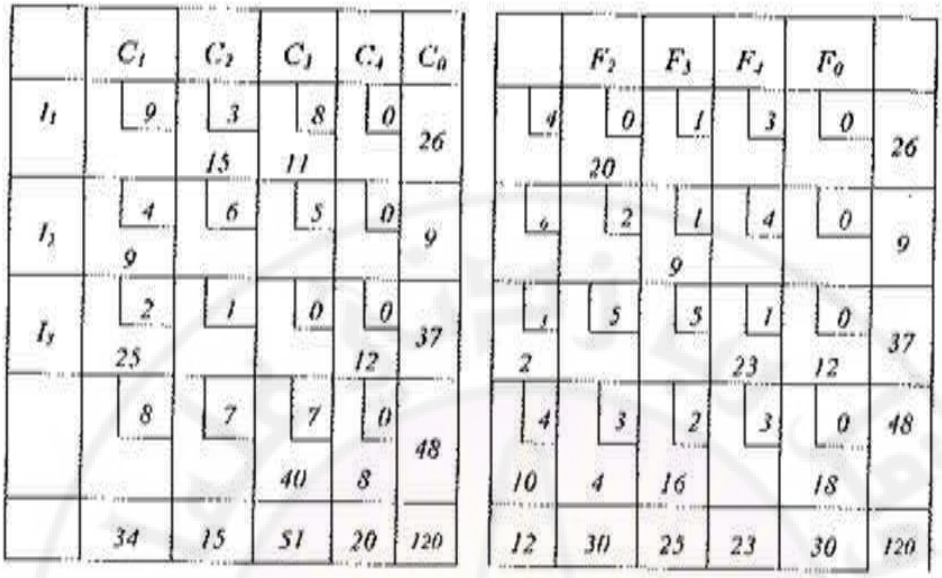
وفيما يلي سوف نقوم بحل مسألة من هذا النوع المعقد مجتازين المراحل المعلنة سابقاً كافة.

إن معطيات المسألة هي:

$$A = 100\ ,\ B = 120\ ,\ E = 90$$

إن حلول هاتين المسألتين هي كما وردت في الجدول (*VI-70*)

الوضع الموافق للحلول الناتجة: إذا قمنا بفحص الجزء الأيسر من الجدول (*VI-70*) «الحل المثالي لأول مسألة نقل» نبين بأن المركز الوسيطي I_1 لم يستلم (*8*) وحدات أما المركز الوسيطي I_2 فلم يستلم (*12*) وحدة من المراكز الابتدائية «إذ إن استلام هذه الوحدات كان من قبل مركز خيالي C_0». ونتيجة فحص الجزء الأيمن من الجدول (*VI-70*) «الحل المثالي لثاني مسألة نقل» نتبين بأن المركز الوسيطي I_3 لم يسلم (*2*) وحدتين والمركز الوسيطي I_4 لم يسلم (*28*) وحدة المراكز النهائية.

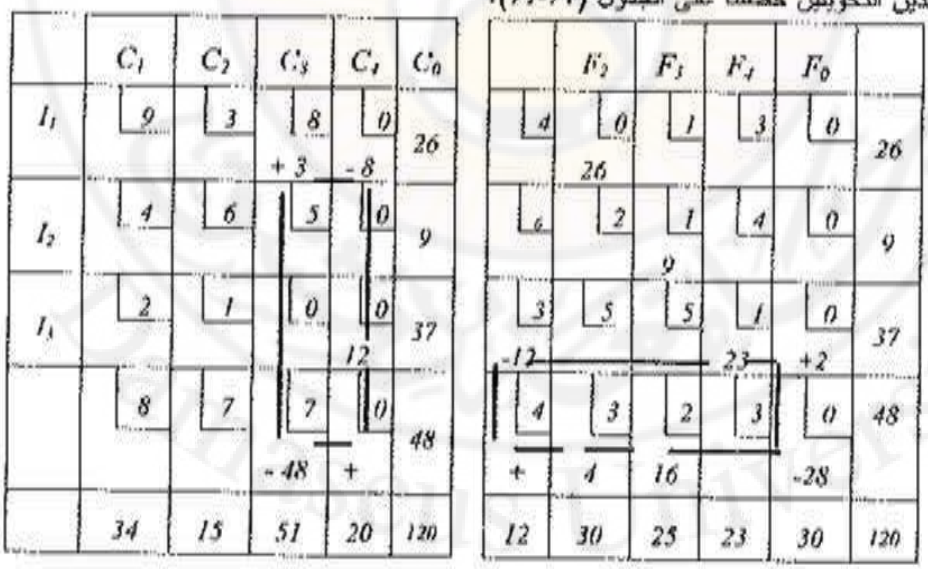


	C_1	C_2	C_3	C_4	C_0
I_1	9	3	8	0	26
		15	11		
I_2	4	6	5	0	9
	9				
I_3	2	1	0	0	37
	25			12	
	8	7	7	0	48
			40	8	
	34	15	51	20	120

	F_2	F_3	F_4	F_0	
4	0	1	3	0	26
	20				
6	2	1	4	0	9
		9			
1	5	5	1	0	37
2			23	12	
4	3	2	3	0	48
10	4	16		18	
12	30	25	23	30	120

الجدول (VI-71)

إن الوضع الموافق يجب أن يتم سطراً سطراً بوساطة محيطات التحويل المضلعة، وفي حالة مسألتنا هذه فقد أجري تحولان لمضلعين موافقين للدارات في الجدول (VI-70)، حيث من خلال هذين التحويلين حصلنا على الجدول (VI-71).



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_0
I_1	9	3	8	0	26
			+ 3	- 8	
I_2	4	6	5	0	9
I_3	2	1	0	0	37
				12	
	8	7	7	0	48
			- 48	+	
	34	15	51	20	120

	F_2	F_3	F_4	F_0	
4	0	1	3	0	26
	26				
6	2	1	4	0	9
		9			
3	5	5	1	0	37
-12			23	+2	
4	3	2	3	0	48
+	4	16		-28	
12	30	25	23	30	120

الجدول (VI-70)

من خلال تحليل الحل ينتج أن الكميات التي لن تنقل إلى المراكز الوسيطية هي:

- للمراكز I_3 لن نقل (١٢) لأن المراكز النهائية ليست بحاجة لهذه الكميات.

- للمركز I_4 لن ينقل (١٨) وحدة هذه الكمية غير مطلوبة من المراكز النهائية إذ في الحل المعطى من الجزء الأيسر من الجدول (*VI-71*) سيستلم المركز I_4 (٣٠) وحدة من المركز C_1 «وليس ٤٠ وحدة بالشكل الموافق للحل» لأن مثل هذه الكميات ستخزن لدى المراكز الوسيطية. وبنتيجة هذا التحويل سيتم تغيير مكان التخزين إضافة لبعض تكاليف النقل.

b – مسألة العجز: إن العلاقات الكائنة بين الحجوم الثلاثة للتخزين هي على الشكل التالي:

$$A < B = E\,(1-b$$
$$A = B < E\,(2-b$$
$$A > B < E\,(3-b$$
$$A < B < E\,(4-b$$
$$A < B > E\,(5-b \text{ «فقط عندما } A < E$$

نلاحظ في الحالات هذه كلها، أن حجم المراكز النهائي أو الضروري المتعلق بالمستهلك هو أكبر من (أو على الأقل يساوي) حجم المركز الوسيطي.

في حال المسائل ذات العجز الحتمي أو التخزين توجد حالتان هما:

I – عندما لا يوضع في الحسبان تحقيق أولوية عدد معين من المستهلكين.

II – عندما يوضع في الحسبان تحقيق أولوية عدد معين من المستهلكين.

سوف نقدم في الجدول (VI-72) نموذج حل هذه المسائل وذلك في الحالتين السابقتين:

الرقم	المسألة	مسائل العجز في النقل			
		بدون أولويات		بوجود أولويات	
		المسألة الأولى (3-a , 4-b)	المسألة الثانية (4-b , 1-b)	المسألة الأولى (3-a , 4-b)	المسألة الثانية (4-b, 1-b)
1 - b	$A < B = E$	١ – مركز أولى وهمي ٢– الحل	– الحل	١– تحقيق الأولوية ٢ - الحل	– الحل
2-b	$A=B<E$	١ – الحل	1– مركز وسيطي وهمي 2– الحل	الحل	1– الأولوية 2– الحل
3-b	$A=B<E$	1 – مركز وسيطي وهمي 2– الحل	1– مركز وسيطي وهمي 2– الحل	1 – الأولوية 2– الحل	1– الأولوية 2 – الحل
4-b	$A<B<E$	1– مركز وسيطي وهمي 2– الحل	1– مركز وسيطي وهمي 2 – الحل	1– الأولوية 2– الحل	1 – الأولوية 2 – الحل
5-b	1– مركز بدائي وهمي 2 – الحل	1– مركز بدائي وهمي 2– الحل	1 – مركز نهائي وهمي 2– الحل	1– تحقيق الأولوية 2– الحل	1– تحقيق الأولوية 2– الحل

الجدول (VI-72)

ثانياً – مسائل النقل ذات المراكز الوسيطية وبدون حجوم محددة:

هناك حالة خاصة لمسائل النقل ذات المراكز الوسيطية هي تلك الحالة التي يمكن عد حجوم المراكز الوسيطية– من الناحية العملية– غير محدودة بالنسبة للكميات التي يجب أن تمر من هذه المراكز.

إن معرفتنا للمتاح لدى المراكز الأولية والضروري لذي المراكز النهائية ومسافات النقل «الكلفة» من المراكز الأولية فالمراكز الوسيطية وحتى المراكز النهائية يجعلنا نتساءل عن التوزيع الأمثل لكميات المراكز الأولية ومن المراكز الوسيطية نحو المراكز النهائية بحيث أن التكاليف الكلية للنقل تكون دنيا. إن جدول مسائل النقل هذا سيأخذ الشكل التالي:

- الممولين: المراكز الأولية.
- المستهلكين «المنتفعين» المراكز النهائية.
- تكاليف النقل تحدد باختيار المجموع الأدنى لتكاليف النقل من كل مركز أولي نحو كل مركز نهائي. واضعين في حسابنا لمكان المرور بالمراكز الوسيطية كافة.

مثال: يطلب توزيع الكميات الموجودة لدى المراكز الأولية (C_1, C_2, C_3) بالشكل الموافق لضرورات المراكز النهائية (F_1, F_2, F_3, F_4) عبر المراكز الوسيطية (I_1, I_2, I_3, I_4) ذات الحجوم غير المحدودة بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن، علماً بأن المتاح لدى المراكز الأولية والضروري لدى المراكز النهائية ومسافات النقل «الكلفة» من المراكز الأولية وحتى المراكز

الوسيطية ثم من المراكز الوسيطية وحتى المراكز النهائية معطى من خلال الجدول (*VI-73*) التالي:

	I_1	I_2	I_3	I_4	
C_1	6	2	7	5	25
C_2	3	4	3	4	43
C_3	1	5	8	9	63
	∞	∞	∞	∞	131 / ∞

الجدول (*VI-73 a*)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
I_1	7	4	2	4	∞
I_2	8	9	1	7	∞
I_3	15	11	8	8	∞
I_4	9	6	5	5	∞
	31	18	29	25	31 / ∞

الجدول (*VI-73 b*)

إن تعيين كلفة النقل الدنيا من كل مركز أولي نحو كل مركز نهائي بالمراكز الوسيطية كافة يكون على النحو التالي:

$$C_{11} = min\,(6+7,\ 2+8,\ 7+15,\ 5+9) = 10$$
$$C_{12} = min\,(6+4,\ 2+9,\ 7+11,\ 5+6) = 10$$
$$C_{13} = min\,(6+2,\ 2+10,\ 7+8,\ 5+5) = 8$$
$$C_{14} = min\,(6+4,\ 2+7,\ 7+8,\ 5+5) = 9$$
$$C_{21} = min\,(3+7,\ 4+8,\ 3+11,\ 4+9) = 10$$
$$C_{22} = min\,(3+4,\ 4+9,\ 3+11,\ 4+6) = 7$$
$$C_{23} = min\,(3+2,\ 4+10,\ 3+8,\ 4+5) = 5$$

$$C_{24} = min\,(3+4,\ 4+7,\ 3+7,\ 4+5) = 7$$
$$C_{31} = min\,(10+7,\ 5+8,\ 8+15,\ 9+9) = 13$$
$$C_{32} = min\,(10+4,\ 5+9,\ 8+11,\ 9+6) = 14$$
$$C_{33} = min\,(10+2,\ 5+10,\ 8+8,\ 9+5) = 12$$
$$C_{34} = min\,(10+4,\ 5+7,\ 8+8,\ 9+5) = 12$$

تعود المسالة الآن لمسألة توزيع من المراكز الأولية وحتى المراكز النهائية مستخدمين أقرب المراكز الوسيطية، كما في الجدول (VI-74).

	F_1	F_2	F_3	F_4	
C_1	10	10	8	9	25
C_2	10	7	5	7	43
C_3	13	14	12	12	63
	31	18	29	25	131 / 103

الجدول (VI-74)

والآن يمكن حل المسالة بشكل عادي والتوصل إلى الحل الأمثل.

3-VI – مسألة التخصيص «التعيين»

Assignment Problem

1-3-VI – مقدمة:

تعود غالبية الأبحاث والدراسات التي يقوم بها المختصون في مجالات مختلفة وعديدة من هذا الكون على الإنسان مهما كانت مكانته في هذا المجتمع بغية الحصول إلى أقصى قدر من المنفعة بكل تصرفاته وأفعاله سواء أكانت هذه المنفعة من خلال تقليل هدف أم تعظيم هدف ما. وفقاً لإمكانات محدودة ومتوفرة يمكن اختيارها من مجموعة بدائل عديدة لكل منها عائد محدد ومعروف أو تكلفة معروفة ومحددة من خلال معلومات وخبرات معروفة مسبقاً، أو من خلال دراسات حديثة تم استقاؤها من الواقع.

هنالك مسائل اقتصادية متعددة يمكن حلها ووضع نموذج لها بوساطة العلاقات الرياضية التي تكون من النموذج الرياضي لمسائل النقل. وتعتبر مسألة التخصيص «التعيين» إحدى المسائل الخاصة في مسائل البرمجة الخطية التي لها طبيعة معينة مستوحاة من مسائل النقل والتي تسعى لحل مسألة تقليل التكاليف / تعظيم العوائد من خلال صياغة مناسبة لمجموعة من البدائل والاستخدامات المتوافرة.

ويجب الانتباه إلى معالجة هدف كل مسألة منفرداً، إذ إن الطرق المستخدمة في هذه المعالجة تأخذ بعين الاعتبار الهدف (التقليل – التعظيم) سواءً التقليل في التكاليف أم التعظيم في الأرباح (الإيرادات).

وهناك الكثير من العاملين في هذا المجال أمثال دوير *P. . S. Dwyer* وفلود *M. M. Flood* وكاهن *W. Kuhn*.

يمكن تصنيف هذه المسائل على النحو التالي:

a – مسائل توزيع العمال على الآلات «توزيع الوظائف والأعمال على مجموعة من الآلات أو على مجموعة من الأفراد» بحيث نحقق أقل ما يمكن من تكاليف أداء هذه الوظائف.

مثال: ضمن ورشة في إحدى المؤسسات الإنتاجية لدينا n آلة ذات نوعية مختلفة يقابلها n عاملاً يعملون على هذه الآلات، فإذا علمت أن إنتاجية العمال على كل آلة من هذه الآلات مختلفة فالمطلوب التوزيع الأمثل لـ n عاملاً على الـ n آلة بحيث نحصل على إنتاجية عظمى.

إذا رمزنا بـ C_{ij} لإنتاجية العامل I على الآلة j فإن الصيغة الرياضية للمسألة هذه تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,...n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,...n$$

$$(x_{ij} = 0 \text{ أو } 1)\ x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1,2,...n$$

$$(\min)\max \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij}$$

(C_{ij} قيمة ثابتة ومعروفة مسبقاً).

وتعد هذه الصيغة الرياضية حالة خاصة من النموذج الرياضي لمسألة النقل والذي فيه:

$$a_i = b_j = 1$$

b – مسائل التوزيع الأمثل للإنتاج على الآلات:

ضمن ورشة لدينا m آلة تصنيع والتي ينجز عليها n قطعة، فإذا علمنا:

- الإنتاج بالساعة الواحدة آلة عملية تصنيع من أجل كل قطعة مطلوب تصنيعها.
- الزمن المتاح لكل آلة.

فيطلب تعيين التوزيع الأمثل للقطع على الآلات بالشكل الذي يؤمن تصنيع القطع كافة والحصول على أعظم ربح.

نلاحظ من معطيات المسألة بأن مؤشرات الضروري ليست معلومة بالنسبة لوحدة القياس نفسها «القطع والساعات». وحتى نقوم بحل المسألة يجب أن يكون معلوماً لدينا المؤشران السابقان بشكل أن يكونا مشروحين لوحدة القياس نفسها ومن أجل هذا سوف نأخذ ساعة عمل الآلة ما لا على التعيين مساوية الواحدة والتي سوف نعدها اصطلاحاً (ساعة – آلة) بشكل اعتيادي، أما آلة التصنيع المعنية فسوف نعدها آلة اعتيادية.

c – مسائل التوزيع الأمثل لكميات الإنتاج بالمؤسسات «بالشركات»:

ضمن فرع صناعي ما لنفرض أننا نعلم:

- كمية الإنتاج ضمن تسلسل لنوعيات معينة «خط إنتاج ما» قيد التصنيع.

حجم الإنتاج لكل مؤسسة في الفرع الصناعي ذاته.

- سعر تكلفة وحدة المنتج بكل مؤسسة من المؤسسات ومن أجل كل نوع.

والمطلوب: التوزيع الأمثل لكميات إنتاج سائر النوعيات بالمؤسسات، بحيث تحقق كميات الإنتاج التكاليف الدنيا بكل فرع.

d - التوزيع الأمثل لكميات الإنتاج لمنتج متجانس بين مؤسسات أحد القطاعات الصناعية واضعين في حسابنا تكاليف الإنتاج والنقل.

مثال: منتج متجانس مصنع في m مؤسسة يجب أن يصل n منتفعاً متواجدين بأماكن مختلفة فإذا علمنا:

- تكاليف النقل من كل مؤسسة إلى كل مستهلك.
- سعر التكلفة.
- كمية إنتاج كل مؤسسة.
- الضروري لكل مستهلك.

والمطلوب: التوزيع الأمثل بحيث تكون التكاليف الكلية للإنتاج وللنقل أدنى ما يمكن.

ونجد هذه المسألة في مجالات عديد منها:

- في مجالات النقل: عدد وسائط النقل والسائقين عليها المستخدمة في خط ما.
- في مجالات الصناعة: توزيع العمال على أعمال معينة.
- في مجالات التسويق: توزيع السلع المعروضة في الأسواق وعملية جني أكبر العوائد من خلال هذا التوزيع.

توزيع مندوبي المبيعات المختص كل منهم بمنتج ما والعوائد الناتجة.

إذا أمعنا النظر في هذه المسائل نلاحظ أن هناك شروطاً معينة أخذت بعين الاعتبار في أثناء صياغتها ومن أهمها:

- تساوي الأعمال والوظائف مع عدد الموارد:

«عدد العمال = عدد الآلات»

«عدد السلع المنتجة = عدد مندوبي المبيعات»

- الوسيلة المتوفرة مخصصة لأداء عمل واحد فقط وكل عمل مخصص لوسيلة واحدة.

- التكاليف والأرباح معلومة مسبقاً ومحددة بشكل تقريبي بغية تحليلها.

- كون أن الثوابت الداخلة في كل مسألة «التكاليف والأرباح كقيم عددية» لها معنى اقتصادي فهي قيم موجبة تحقق شروط عدم السلبية.

VI-3-2- الصياغة الرياضية لمسائل التخصيص «التعيين»:

سوف نتعرف على النموذج الرياضي لهذا النوع من المسائل من خلال التطبيق العملي:

تطبيق (١) لنفرض أننا أمام « $n = 4$ » أربعة وظائف أو أعمال تؤدى من قبل «$m = 4$» أربعة أفراد أو عمال وإن أي فرد أو عامل يمكنه أداء أي وظيفة وذلك بقدرات وكفاءات مختلفة من وظيفة لأخرى الأمر الذي نفهم منه بأن تكاليف العمل متباينة وفقاً لتباين الفرد مع الوظيفة المنجزة.

لنفرض أن تكاليف أداء كل فرد من أفراد الأربعة على هذه الوظائف الأربعة المختلفة فقط من خلال القيم العددية التي يمكن وضعها ضمن مصفوفة «مصفوفة تكلفة الأداء» على النحو التالي:

الوظائف / الأفراد	I	II	III	IV
1	16	10	18	20
2	10	14	20	16
3	14	8	9	18
4	13	17	19	25

تكلفة أو مصفوفة الفرصية الكلية

القيم العددية التي تكون المصفوفة «مصفوفة تكلفة الأداء أو مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية» هي بمثابة C_{ij} تكلفة أداء الفرد i للوظيفة j «كل شخص خصص لأداء وظيفة واحدة أو كل وظيفة يؤديها شخص واحد» فالفرد (1) إذا أدى الوظيفة I تكلفته هي 16 وحدة نقدية وإذا أدى الوظيفة II فتكلفته هي 10 وحدات. وإذا أدى الوظيفة III فتكلفته هي 18 وحدة نقدية وهكذا ...

فهدف المشكلة هو العمل على تقليل التكاليف الكلية لأداء هذه الوظائف من خلال تخصيص الفرد المناسب لأداء الوظيفة المناسبة.

بما أن هذه المسالة تعد حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية لهذا سوف نسلك طريق المعالجة الرياضية نفسها في التوصل لحلها.

باعتبار أن كل وظيفة يجب أن يؤديها فرد واحد «أي كل فرد يجب أن يؤدي وظيفة واحدة» وكون أن عدد الوظائف مساوياً عدد الأفراد = ٤ لهذا فإننا

نكون أمام عدد الطرائق التي بموجبها تتم عملية التعيين «التخصيص» قدرها $n_1 = 24$ طريقة فإذا فرضنا أن:

$x_{ij} =$ «إذا كان الفرد i يؤدي الوظيفة j» ١

«إذا كان الفرد i لا يؤدي الوظيفة j» ٠

وأن:

$Cij =$ تكلفة أداء العمل قبل الفرد من قبل الفرد i

أو تكلفة أداء العمل i من قبل الفرد i

أو تكلفة أداء الفرد i للعمل j

عندها يتمكن وضع الصيغة الرياضية لهذه المسألة على النحو التالي:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,3,4$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,3,4$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (x_{ij} = 0 \text{ أو } 1)$$

VI-3-3- الطرق المستخدمة في حل هذه المشكلات:

توجد طرق عدة لحل مثل هذا النوع من المسائل أهمها:

- طريقة العد الكامل «التوافق المختلفة» *Different Combination Method*.
- الطريقة المجرية *Hungarian Method*.
- الطريقة المختصرة *Short-cut Method*
- طريقة النقل *Transportation Method*.
- طريقة البرمجة الخطية *Huieen Programming Method*.

VI-3-3-1- طريقة العد الكامل:

تستند هذه الطريقة على نظرية الاحتمالات من حيث عدد البدائل التي تكونها المسألة والمتعلقة بعدد طرق تبادل عدد العناصر «الأفراد» على عدد الآلات «الوظائف» واختيار الأفضل والأسهل منها وذلك وفق صيغة mi لعدد التبادل المأخوذة m مرة.

تكمن صعوبة تطبيق هذه الطريقة في الحسابات (التي تتطلب الجهد والوقت) وليس كونها أنها تستند فإذا عدنا إلى مثالنا السابق حيث $m = 4$ وأردنا أن نتعرف على عدد البدائل وجدنا أننا أمام $u_i = 4, 3, 2$ بديل وبالتالي فسنتعرف على كيفية إيجاد هذه البدائل فسوف ننطلق من $m = 2$ فـ $m = 3$ و...

مثال (2): بفرض أن لدينا عنصري A ، B يعملان على آليتين II و I حيث يستغرق كل منهما زمناً مختلفاً عن الآخرين في عملية إنتاج كل نوع وذلك وفق الجدول التالي:

العناصر \ الآلات	I	II
A	10	16
B	14	12

إذا أمعنا النظر في هذا الجدول وجدنا أننا أمام مرحلتين هما:

1 – أن يعمل A على الآلة I و b على الآلة II وأن يعمل B على الآلة I حيث الزمن المتوفر هو 26 = 12 + 14 وكما نلاحظ أن البديل الأول هو الأنسب الأفضل.

مثال (3): لدينا 3 عناصر A- B- C و3 آلات I, II, III فإذا علمت أن مصفوفة تكاليف إنجاز هذه الأعمال من قبل العناصر الثلاثة هي:

العناصر \ الوظائف	I	II	III
A	8	6	14
B	10	5	12
C	14	4	6

العنصر A ينجز العمل I بتكلفة قدرها 8 وحدات نقدية وينجز العمل II بتكلفة قدرها 6 وحدات نقدية وينجز العمل III بتكلفة قدرها 14 وحدة نقدية... وهكذا نحن نكون أمام عدد من البدائل (الخيارات) قدره:

$3! = 3.2.1 = 6$

وهذه البدائل (الخيارات) يمكن وضعها ضمن جدول على النحو التالي:

الرقم	نوعية البديل	تكلفة البديل
1	A_1, B_2, C_3	$8 + 5 + 6 = 19$
2	A_1, B_3, C_2	$8 + 12 + 4 = 24$
3	B_1, A_2, C_3	$10 + 6 + 6 = 22$
4	B_1, A_3, C_2	$10 + 14 + 4 = 28$
5	C_1, A_3, B_2	$14 + 5 + 14 = 33$
6	C_1, A_2, B_3	$14 + 6 + 12 = 32$

وكما نلاحظ البديل 1 (A_1, B_2, C_3) هو أفضل البدائل وتكلفته هي 19 وحدة نقدية إذ يخصص العمل I للعنصر A والعمل II للعنصر B والعمل III للعنصر C بالخطوات نفسها نستطيع أخذ مثال في حالة $n=4$ و $n=5$ و ...

ملاحظة (١) في حالة المسألة من نوع التعظيم (الإيرادات) عندها نأخذ بالبديل الذي له أكبر قيمة عددية.

VI-3-3-2- الطريقة المجرية «الهنغارية»:

نسبت هذه الطريقة إلى العالم المجري د. كوينج *D. Konig* والذي يعود له الفضل الأكبر في إيجادها وتطويرها بمساعدة العالم يجير فاري وعلماء آخرين.

بشكل عام إذا كنا أمام n عنصراً يقابل ذلك n آلة (وظيفة) «أي أمام مصفوفة ذات n سطر و n عمود غالباً ما يطلق عليها مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية». ورمزنا بـ x_{ij} لأحد عناصر هذه المصفوفة C_{ij} للتكلفة الناتجة عن أداء العنصر i للعمل II «للوظيفة» j حيث كل عنصر i يؤدي وظيفة (عمل) واحدة j كما وأن كل j يمكن أن يؤدي العنصر i فقط».

واستخدمنا بعض الخواص العامة للعمليات المطبقة على المصفوفات وبالات الخاصة التي تنص على أن: إضافة أو طرح مقدار ما ولیكن x إلى عناصر سطر ما لا يغير من صفة المصفوفة بل يمكن أن يغير من قيمة المداول الاقتصادي الممثل لهذه المصفوفة، بمعنى آخر أن الحل الأمثل الناتج في المصفوفة المعدلة هو نفسه الحل الأمثل للمصفوفة الأصلية. فإن بالإمكان الوصول إلى تغيير للمقدار C_{ij} x_{ij} (زيادة أو نقصان) وفق خطوات عديدة تستند إليها الطريقة المجرية.

سوف نشرح هذه الخطوات من خلال المثال التالي:

مثال (٤): لنعد إلى التطبيق العملي ولنفرض أننا أمام ٤ عناصر يقابلهم ٤ وظائف (آلات) وأن مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية وهي:

الوظائف / العناصر	I	II	III	IV
1	16	10	18	20
2	10	14	20	16
3	14	8	9	18
4	13	17	19	25

والمطلوب إيجاد البديل الأمثل لتخفيض التكاليف.

الخطوة الأولى: نطبق هذا الخاصة المتعلقة بالعمليات على المصفوفات والتي ذكرناها مسبقاً وذلك من خلال إيجاد مصفوفة تكلفة الفرصة وذلك بطرح كافة عناصر كل سطر من أصغر هذه العناصر، إذ نحصل من خلال عملية الطرح هذه على عنصر الصفر مرة واحدة على الأقل ونسمي المصفوفة الناتجة

عن عملية الطرح بالمصفوفة المعدلة المراجعة الأولية *Initially Reduced Matrix* وهي من الشكل:

العناصر \ الآلات	I	II	III	IV
1	4	0	8	10
2	0	4	10	6
3	6	0	1	10
4	0	4	6	12

وتحوي أسطر هذه المصفوفات على عنصر معدوم واحد فقط على الأقل.

ثم نجري العمل نفسه بالنسبة لكل عمود من أعمدة المصفوفة المعدلة الأولية حيث نحصل بعد ذلك على مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية *Total Opportunity cost*.

العناصر \ الآلات	I	II	III	IV
1	4	0	7	4
2	0	4	9	0
3	6	0	0	4
4	0	4	5	6

بالحقيقة من الناحية الرياضية لم نجرِ أي تعديل على الحل الأمثل للمصفوفة الأصلية وللمصفوفة المعدلة الأولية أو مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية وذلك وفق خواص المصفوفات لأن الحل يعتبر حلاً أمثل إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ x_{ij} = 0 \quad \text{«مجموع تكاليف الفرص معدوم»}$$

يستفيد هذا العمل الذي قمنا به (إضافة إلى النواحي الرياضية) على المفهوم الاقتصادي لتكلفة الفرصة *Opportunity cost* المرتبطة بعدم استغلال الموارد المتوفرة استغلالاً أمثل. في مثالنا نجد أن الفرد *(1)* يمكن أن يؤدي أي عمل من الأعمال الأربعة إلا أن أقل تكلفة في هذه الأعمال هو ما يناسب العمل *II* بتكلفة قدرها *10* وحدات نقدية. فإذا خصص هذا الفرد بالعمل *IV* الذي تكلفته *20* وحدة نقدية فنكون بذلك قد خسرنا فرصة توفير *10* وحدات نقدية... وهكذا الأمر بالنسبة لبقية الأعمال. أيضاً يمكن النظر إلى الجدول بشكل آخر باعتبار أن هناك أربعة أفراد يمكنهم أداء العمل *I* فإن تخفيض الفرد *(2)* لأداء العمل *(1)* الذي تكلفته *10* وحدات نقدية يجعل تكلفة الفرصة معدومة أما إذا خصص العمل *(1)* للفرد *(2)* فإن تكلفة الفرصة هي *(6 = 10 − 16) 6* وحدات نقدية يمكن هدرها بنتيجة هذا التخصيص... وهكذا الأمر بالنسبة لبقية الأفراد.

الخطوة الثانية: نتحقق في هذه الخطوة من تخصيص الفرد الواحد لأداء عمل واحد بتكلفة فرصة مساوية الصفر وذلك من خلال وجود أربعة أصفار فنقوم في مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية بحيث يكون مجموع تكاليف الفرص معدوماً من أجل تخصيص الأفراد كافة من مختلف الأعمال حيث نتيجة ذلك يكون التخصيص أمثل وبالتالي الحل أمثل.

أما عملية التحقق من ذلك فيكون من خلال رسم أقل ما يمكن من الخطـوط المستقيمة الأفقية أو (و) الشاقولية شريطة أن تفيد هذه الخطوط جميع الأصفار، فإذا كان عدد هذه الخطوط مساوياً لعدد أسطر (درجة المصفوفة) (أو أعمـدة) المصفوفة فيعني ذلك بأن الحل هو حل أمثل. أما إذا كان عدد هذه الخطوط هو أقل من (درجة المصفوفة) عدد الأسطر (الأعمدة) فالحل الذي توصلنا إليه هـو حل أمثل وبالتالي بالإمكان تحسينه والوصول إلى حل أمثل فإذا عدنا إلى مثالنا وجدنا أن الخطوط هي كما في الجدول التالي:

	I	II	III	IV
1	4	0	7	4
2	0	4	9	0
3	6	0	0	4
4	0	4	5	6

أو بشكل آخر ⇒

	I	II	III	IV
1	4	0	7	4
2	0	4	9	0
3	6	0	0	4
4	0	4	5	6

نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هو 4 خطوط ويساوي درجة المصفوفة 4.

إذن فالحل الذي توصلت إليه أمثل وبالتالي مهما حاولنا فلن نستطيع تحسين هذا الحل.

أما قيمة الحل فهو:

تخصيص العامل 1 على الآلة II.

تخصيص العامل 2 على الآلة IV.

تخصيص العامل 3 على الآلة III.

تخصيص العامل 4 على الآلة I.

والتكاليف الكلية هي: $C = 10 + 16 + 9 + 19 = 48\ M.U.$

الخطوة الثالثة: لنفرض أن عدد الخطوط هو أقل من درجة المصفوفة عندها ننتقل إلى الخطوة الثانية إذ نفتش عن أصغر قيمة من القيم غير المغطاة بالخطوط المستقيمة ونطرحها من العناصر غير المغطاة ونضيفها إلى العناصر (القيم) الواقعة في تقاطع الخطوط المستقيمة.

ثم نجري عملية تخصيص ونتحقق من جديد من أن عدد الخطوط المرسومة يساوي درجة المصفوفة... وهكذا...

مثال (5): لدى شركة سيروليكس للتلفاز ٤ خطوط إنتاج يتم من خلالها تصنيع أربعة أنواع من التلفاز ١٤ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٢٩ فإذا علمت أن البيانات المتعلقة بتكاليف إنتاج هذه الأنواع الأربعة على خطوط الإنتاج الأربعة معطاة وفق الجدول التالي:

الأفراد \ الخطوط	I	II	III	IV
1	10	17	12	8
٢	22	14	6	19
3	32	15	11	13
4	9	18	5	7

فالمطلوب تحديد الحل الأمثل لهذا التخصيص.

الحل:

الخطوة I: بطرح عناصر كل سطر من أقل قيمة في ذاك السطر نجد أن:

الخطوط / الأفراد	I	II	III	IV
1	2	9	4	0
٢	16	8	0	13
3	21	4	0	2
4	4	13	0	2

وبطرح عناصر كل عمود من أقل قيمة في ذاك العمود نجد أن:

الخطوط / الأفراد	I	II	III	IV
1	0	5	4	0
2	14	4	0	13
3	19	0	0	2
4	2	9	0	2

الخطوة II: نرسم الخطوط المستقيمة فنجد أن:

الخطوط / الأفراد	I	II	III	IV
1	0	5	4	0
2	14	4	0	13
3	19	0	0	2
4	2	9	0	2

لنلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة لا يساوي درجة المصفوفة 4 إذن ننتقل إلى الخطوة III.

الخطوة III: نفتش عن أصغر قيمة من القيم التي لا تغطيها الخطوط المستقيمة إذ نطرح هذه القيمة من القيم غير المغطاة ونضيف هذه القيمة إلى القيم الواقعة في تقاطع الخطوط المستقيمة فنجد الجدول التالي:

الخطوط / الأفراد	I	II	III	IV
1	0	5	6	0
2	12	2	0	11
3	19	0	2	2
4	0	7	0	0

ثم لنرسم الخطوط المستقيمة من جديد في الجدول التالي:

	I	II	III	IV
1	0	5	6	0
2	12	2	0	11
3	19	0	2	2
4	0	7	0	0

أو بشكل آخر ⇒

	I	II	III	IV
1	0	5	6	5
2	12	2	0	11
3	19	0	2	2
4	0	7	0	0

إذن وفق هذه الخطوط نكون قد قمنا بتغطية الأصفار في الجدول وعدد هذه الخطوط مساوٍ لدرجة المصفوفة، إذن فالحل الذي حصلنا عليه هو حل أمثل وهو على النحو التالي:

I	II	III	IV	
١		٢	١	تخصيص النوع الأول لإنتاجه على الخط I (أو على الخط الرابع).
أو	٣	أو	أو	تخصيص النوع الثاني لإنتاجه على الخط III
٤		٤	٤	تخصيص النوع الثالث لإنتاجه على الخط II
				تخصيص النوع الرابع لإنتاجه على الخط IV (أو على الخط الأول)

أو على شكل شجرة



أما قيمة التكاليف الكلية فهي:

$$C = 10 + 6 + 15 + 7 = 38\ M.u.$$

أو

$$C = 8 + 6 + 15 + 9 = 38\ M.u.$$

وهنا نلاحظ أن قيمة التكاليف الكلية 38 وحدة نقدية من خلال التوزيعين مهما اختلفا.

مثال (6): لدى شركة للإنشاءات 4 ورشات عمل يتم من خلالها إنجاز 4 مهمات «مشاريع» فإذا علمت أن البيانات المتعلقة بتكاليف إنجاز هذه المهمات الأربعة من خلال الورشات الأربع معطاة وفق الجدول التالي:

ورشات / مهمات	I	II	III	IV
1	20	15	16	18
2	16	22	14	10
3	10	12	8	17
4	13	10	11	9

فالمطلوب تحديد الحل الأمثل للتخصيص مع مراعاة برامج التخصيص المتنوعة.

من خلال إجراء الخطوات المتتالية نحصل على المصنوعات التالية:

مهمات \ ورشات	I	II	III	IV
1	3	0	1	3
2	4	12	4	0
3	0	4	0	9
4	2	1	2	0

مهمات \ ورشات	I	II	III	IV
1	5	0	1	3
٢	6	12	4	0
3	0	4	0	9
4	4	1	2	0

مهمات \ ورشات	I	II	III	IV
1	3	0	1	3
2	4	12	4	0
3	0	4	0	9
4	2	1	2	0

إذن فالحل ليس أمثل ننتقل إلى المرحلة التالية:

مهمات \ ورشات	I	II	II 1	IV
1	3	0	1	4
2	3	11	3	0
3	0	4	0	10
4	1	0	1	0

مهمات \ ورشات	I	II	III	IV
1	3	0	1	4
2	3	11	3	0
3	0	4	0	10
4	1	0	1	0

إذن فالحل ليس أمثل، نعيد المرحلة السابقة فنجد أن:

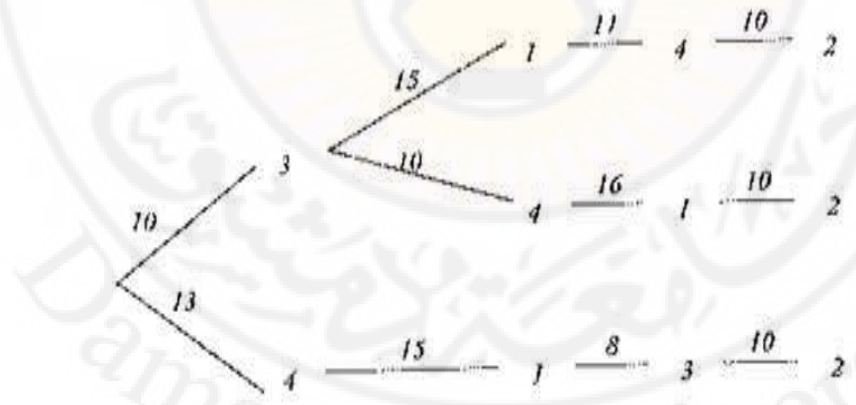
مهمات \ ورشات	I	II	III	IV
1	2	0	0	4
2	2	11	2	0
3	0	5	0	11
4	0	0	0	0

مهمات \ ورشات	I	II	III	IV
1	2	0	0	4
2	2	11	2	0
3	0	5	0	11
4	0	0	0	0

وهنا أن عدد الخطوط المستقيمة = عدد الأسطر = عدد الأعمدة = درجة المصفوفة

إذن فالحل الذي توصلنا إليه هو حل أمثل ونكون أمام خيارات عديدة يمكن التعرف عليها من خلال الشجرة التالية:

الخط الأول I	الخط الثاني II	الخط الثالث III	الخط الرابع IV
3	1	1	
أو	أو	أو	
		3	2
4	4	أو	
		4	



وبالتالي فإن تكاليف كل خيار هي كما يلي:

$10 + 15 + 11 + 10 = 46$

$10 + 10 + 16 + 10 = 46$

$13 + 15 + 8 + 10 = 46$

ملاحظة (1) : نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة (وبالذات المثال السابق مباشرة) أن الحل الأمثل قد لا يكون وحيداً من حيث الخيارات «من حيث برامج التخصيص» أما من حيث الكلفة فإن له القيمة ذاتها دون خلاف.

ملاحظة (2) : حينما نعالج مسائل التخصيص الشكل الآخر للهدف وهو تعظيم الدخل (الإيراد) «أي إيجاد الحد الأقصى من الأرباح» فهناك اختلاف بسيط في خوارزمية إيجاد أفضل تخصيص وقيمة هذا التخصيص. وكون أن الأمر هذا يعود إلى موضوع الربح وعائد العمل وطبيعة العمل لذا يجب تحويل مصفوفة العائد (الربح) إلى مصفوفة تكلفة «مصفوفة فرص ضائعة» ثم نطبق خطوات الخوارزمية السابقة نفسها حيث نفتش عن الإيراد الأعظمي للخيار «البديل» الذي نركز عليه من خلال أسلوبين هما:

أ - الأسلوب الأول: يتم تحويل مصفوفة الفوائد إلى مصفوفة تكلفة (مصفوفة فرص ضائعة) *Opportunity – Loss Matrix* وذلك بطرح جميع عناصر مصفوفة العوائد من أكبر قيمة في هذه المصفوفة، ثم نجري عليها الخطوات السابقة نفسها حيث نقاس المواجهة من خلال الفرق بين الربح الفعلي الذي نحصل عليه من أداء عمل ما والربح الأكثر الذي يأتي من التخصيص الأمثل لأداء هذا العمل.

مثال (7): لنفرض أن لدينا عدة شركات (٤ شركات) تسوق عدة منتجات متشابهة (4 منتجات هي: برادات – غسالات – تلفزيونات – مسجلات) تحمل نفس المواصفات، فإذا فرضنا أن مصفوفة عوائد هذه المنتجات هي كما يلي فالمطلوب تحديد الترخيص الذي له هدف تعظيم الأرباح.

الإنتاج / الشركات	برادات	غسالات	تلفزيونات	مسجلات
I	10	8	12	14
II	20	12	16	9
III	18	10	20	18
IV	12	8	10	20

الحل: لنلاحظ أنه إذا خصصت الشركة II لتسويق منتج البرادات فإنها ستحقق أكبر عائد هو 20 وحدة نقدية وتكون الفرصة الضائعة هي: $0 = 20 - 20$

أما إذا خصصت الشركة II لتسويق منتج المسجلات والذي يحقق عائداً وقدره ٩ فإن الفرصة الضائعة هي عبارة عن $11 = 9 - 20$ (11 وحدة نقدية) وبالأسلوب نفسه نتعرف على بقية التخصيصات. إذن أن مصفوفة الفرص الضائعة (مصفوفة التكاليف) لمصفوفة العوائد السابقة هي:

الإنتاج / الشركات	برادات	غسالات	تلفزيونات	مسجلات
I	10	12	8	6
II	0	8	4	11
III	2	10	0	2
IV	8	12	10	0

نوجد أصغر قيمة في مصفوفة التكاليف ونطبق عملية الطرح بالنسبة للأعمدة فنجد أن:

الإنتاج / الشركات	برادات	غسالات	تلفزيونات	مسجلات
I	10	4	8	6
II	0	0	4	11
III	2	2	0	2
IV	8	4	10	0

ثم عملية الطرح (بالنسبة للأسطر) إذ نحصل على مصفوفة الفرص الضائعة الكلية ونرسم الخطوط المستقيمة لتغطية الأصفار.

الإنتاج / الشركات	براد ات	غسالات	تلفزيونات	مسجلات
I	6	0	4	2
II	0	0	4	11
III	2	2	0	2
IV	8	4	11	0

إذن فالحل أمثل (كون أن عدد الخطوط = عدد الأعمدة = عدد الأسطر = درجة المصفوفة) وبالتالي فإن برنامج التخصيص وإجمالي العائد هما:

$$II \rightarrow I \rightarrow III \rightarrow IV$$

$$20 + 8 + 20 + 20 = 68\ M.u.$$

II – الأسلوب الثاني: نوجد مصفوفة الفرص الضائعة وذلك بطرح كل عنصر من عناصر كل صف من أكبر عنصر في هذا الصف، ثم نطرح كل عنصر من عناصر (كل عمود) من العنصر الأقل في هذا العمود، حيث نحصل ومن خلال هذا العمل على المصفوفة التي نجري عليها التخصيص، «يمكن عكس العملية والبدء بعناصر الأعمدة ثم عناصر الأسطر».

مثال (8) : بعد مرور خمس سنوات على تشغيل أحد المصانع تبين أن هناك ضرورة لازمة لإعادة توزيع العمل على الورش وذلك من خلال خبراتهم ومقدراتهم الفنية بالشكل الذي يحصل فيه المصنع على أعظم عائد من هذا التوزيع وقد تبين أن مصفوفة العوائد وتشغيل ورش الإنتاج من قبل أربعة عناصر هي على النحو التالي:

الورش / العناصر	التجهيز	التجميع	الفحص	التغليف
I	8	16	9	4
II	10	14	20	18
III	8	10	14	16
IV	12	20	6	16

فالمطلوب وضع برنامج تخصيص العناصر على الورش بالشكل الذي يحصل فيه المصنع على أعظم ما يمكن من العوائد.

الحل: نحدد أكبر عناصر الصنوف ثم نجري عملية الطرح فنجد:

الورش / العناصر	التجهيز	التجميع	الفحص	التغليف
I	8	0	7	12
II	10	6	0	2
III	8	6	2	0
IV	8	0	14	4

نحدد أصغر عناصر الأعمدة ثم نجري عملية الطرح فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة الكلية ثم نرسم الخطوط المستقيمة فنجد أن:

الورش / العناصر	التجهيز	التجميع	الفحص	التغليف
I	0	0	7	12
II	2	6	0	2
III	0	6	2	0
IV	0	0	14	4

بما أن: عدد الخطوط = عدد الأعمدة = عدد الأسطر = درجة المصفوفة

إذن فالحل أمثل وبالتالي فإن برنامج التخصيص وإجمالي العائد هما:

$I \rightarrow IV \rightarrow II \rightarrow III$

$8 + 20 + 20 + 16 = 54\ m.u.$

$IV \rightarrow I \rightarrow II \rightarrow III$

$21 + 16 + 20 + 16 = 54$

VI-3-4 – معالجة مسائل التخصيص وفق طريقة النقل:

وجدنا أن حل مسائل النقل يكمن في تخفيض تكاليف (أو في تعظيم عوائد العملية من خلال العمل المطلوب إنجازه) وأن هناك ما يعرف بالطلب والعرض وبكلفة نقل الوحدة الواحدة.

إن عملية حل مسائل التخصيص من خلال مفهوم مسائل النقل يكمن في:

– تمثيل القيمة العددية الموجودة في مسائل التخصيص بتكاليف الوحدة الواحدة لنقل المنتج النهائي ووضع هذه القيم في زوايا المربعات.

- تحديد التكاليف الإجمالية للأعمال التي ينجزها العمل ثم القيم العظمى المنجزة.

- تخفيض تكاليف النقل هذه ضمن تابع الهدف «أو تعظيم الإيرادات».

مثال (3) : لنفرض أننا أمام المثال (3) وأن مصفوفة التكاليف هي كما وردت في المثال.

لتصيغ هذه المصفوفة من خلال جدول النقل كما يلي:

الوظائف / العناصر	I	II	III	الكمية المتاحة
A	8	6	14	1
B	10	5	12	1
C	14	4	6	1
الكلفة المطلوبة	1	1	1	3

ثم نطبق إحدى طرق حل مسائل التوزيع «النقل» يؤخذ في تطبيق إحدى طرق حل مسائل النقل على هذا النوع من مسائل التخصيص كون أننا في هذه الطريقة مقيدين وفق مراحل عديدة يفرضها أسلوب الحل، الأمر الذي يخالف فرضية مسائل التخصيص«إن كل عنصر يجب أن يؤدي عملاً وحيداً فقط أو أن

أي عمل يجب أن ينجز من قبل عنصر واحد». ومع كل هذا نستطيع وضع النموذج الرياضي لهذه المسالة على النحو التالي:

$$min\ Z = 8\,x_{11} + 6\,x_{12} + 14\,x_{13} + \ldots + 4\,x_{32} + 6\,x_{33}$$

أما القيود فهي:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \forall\, i, j = 1,2,3$$

حيث من خلال حل مسالة النقل هذه نستطيع التوصل إلى التكلفة الدنيا من خلال إيجاد قيمة تابع الهدف .

VI-3-5 – معالجة مسائل التخصيص وفق طريقة البرمجة الخطية:

باعتبار أن بالإمكان حل مسائل التخصيص وفق طريقة مسالة النقل التي هي حالة من مسائل البرمجة الخطية، إذن فبالإمكان أيضاً تناول مسالة التخصيص وفق مسالة البرمجة الخطية.

يأتي هذا الأمر من اعتبارات عديدة أهمها أن مصفوفة التكاليف في مسائل التخصيص هي مربعة الشكل لهذا فإن خصائص حل مسائل البرمجة الخطية يمكن تطبيقها على مسائل التخصيص من حيث أن:

- العناصر أو الآلات هي بمثابة المتاح «المتوفر والتي تكون قيمها مساوية الواحد».

- الإنتاج أو الأعمال المخصصة هي بمثابة الضروري «اللازم والتي تكون قيمها مساوية الواحد».

- التكاليف «العوائد» C_{ij} معلومة مسبقاً.

- x_{ij} هو الحل الأمثل الذي نفتش عنه والذي يحقق تابع الهدف «سواءً في التقليل أو في التعظيم» والمتمثل في إحدى القيمتين الصفر أو الواحد الصحيح.

ويكون النموذج الرياضي لمسألة التخصيص في حالة التكاليف على النحو التالي:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} C_{ij}$$

$$C_{ij} \geq 0$$

C_{ij} ثوابت معروفة مسبقاً.

والقيود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

وبما أن هذه القيم يحتمل أن تكون مساوية الواحد الصحيح أو الصفر لهذا فيمكن كتابة :

$$x_{ij} = x^2_{ij} \quad «x_{ij} \geq 0»$$

مثال (10) : لنأخذ المثال (4) إن مصفوفة التكاليف هي:

الأفراد \ الوظائف	I	II	III	IV
1	16	10	18	20
2	10	14	20	16
3	14	8	9	18
4	13	17	19	25

وبالتالي فإن صياغة مشكلة التخصيص هذه وفق شكل برنامج خطي تتم على النحو التالي:

$$\min Z = 16x_{11} + 10x_{12} + \ldots + 19x_{43} + 25x_{44}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

ثم نتابع الحل وفق طريقة البرمجة الخطية وجداول السمبلكس.

VI-3-6- بعض المشكلات التي تصادفنا لدى حل مسائل التخصيص:

تستند مشاكل التخصيص وكما وجدت إلى فرضيتين:

- إن كل عمل ينجز من قبل فرد واحد (أو أن الفرد الواحد ينجز عملاً واحداً فقط)

- المصفوفة التي نتعامل معها هي مربعة الشكل «عدد الوظائف = عدد الأفراد».

أحياناً ولاعتبارات معينة (وغالباً ما يحدث في حياتنا العملية) لا يتم تحقيق هاتين الفرضيتين، سوف نتعرف على حقيقة هاتين الفرضيتين من خلال:

VI-3-6-1- استحالة القيام بعملية التخصيص:

هناك بعض الأعمال التي يتطلب إنجازها أكثر من شخص «أفراد لديهم خبرة وكفاءة واختصاص ومهارة» الأمر الذي يناقض الفرضية الأولى وبالتالي عدم وجود تخصيص للمشكلة بمعنى آخر استحالة القيام بعملية التخصيص.

تتم معالجة مثل هذه الحالة وذلك بإعطاء كل عنصر له مواصفات مختلفة (عن بقية العناصر) تكلفة عالية جداً نرمز لها بأحد الرموز A, B, C... ثم نطبق خواص الحل المتعارف عليها نفسها.

مثال (11) : لنفرض أن مصفوفة تكاليف الفرص الضائعة التالية:

الوظائف / الأفراد	I	II	III	IV
1	16	20	8	A
2	7	10	13	14
3	9	A	13	20
4	14	18	A	6

هنا نلاحظ أن تكلفة تخصيص الفرد الأول بإنجاز العمل *IV* هي عالية جداً وأيضاً أن تكلفة تخصيص الفرد الثالث بإنجاز العمل *II* هي عالية جداً وأيضاً أن تكلفة تخصيص الفرد الرابع بإنجاز العمل *III* هي عالية جداً وبالتالي فتخصيص هؤلاء الأفراد بإنجاز الأعمال هو مستحيل.

فإذا ما طبقنا خطوات حل هذه المسالة ووجدنا أن هناك عدم إمكانية أخذ العنصر ذي التكلفة العليا فعندها تستحيل عملية التخصيص.

بتطبيق عملية الطرح نجد أن:

الوظائف / الأفراد	I	II	III	IV
1	8	12	0	A-8
٢	0	3	6	7
3	0	A-9	4	11
4	8	12	A-6	0

الوظائف / الأفراد	I	II	III	IV
1	0	9	0	A-8
2	0	0	6	7
3	0	A-12	4	11
4	8	9	A-6	0

بما أن عدد الخطوط = درجة المصفوفة إذن فالتخصيص أمثل، ويكون برنامج التخصيص هو:

تخصيص الفرد الأول لإنجاز العمل *III*

تخصيص الفرد الثاني لإنجاز العمل *II*

تخصيص الفرد الثالث لإنجاز العمل *I*

تخصيص الفرد الرابع لإنجاز العمل *IV*

والتكلفة الكلية هي:

$$8 + 10 + 9 + 6 = 33\ m.u$$

2-6-3-VI - المسألة غير المتوازنة:

في هذه المسألة نكون أمام مصفوفة تكاليف ليست مربعة الشكل «أي أن عدد الوظائف لا يساوي عدد الأفراد» وبالتالي فجعلها مصفوفة تكليف مربعة يكون بإضافة سطر (عمود) وهمي *Dummy* قيمه العددية معدومة بالشكل الذي يمكن استبعاده من حل المسالة دون أن يؤثر في قيمة تابع الهدف وبالتالي يغير من حل المسألة.

أما التفسير الواقعي لإضافة هذا السطر (العمود) الوهمي فيكون من خلال: بطالة أحد العناصر خلال فترة زمنية محددة حيث تكون تكاليف (عوائد) عمله مساوية الصفر وبالتالي فإن إنجاز عمله يكون مؤجلاً لحين عودته إلى العمل (أو عدم توفر متطلبات العمل).

مثال (*12*) : لنفرض أننا أمام مصفوفة تكاليف تمثل إنجاز ٤ أشخاص لثلاثة أعمال على النحو التالي:

الوظائف / الأفراد	I	II	III
1	10	6	4
2	4	8	12
3	12	10	14
4	4	9	10

والمطلوب إيجاد البرنامج التخصصي الأمثل وقيمة التكاليف.

الحل: نلاحظ أننا أمام مصفوفة غير مربعة لنضيف عمود وهمي من خلاله نجعل المصفوفة مربعة الشكل:

الوظائف / الأفراد	I	II	III	IV
1	10	6	4	0
2	4	8	12	0
3	12	10	14	0
4	7	9	10	0

لنلاحظ من خلال إضافة عمود وهمي قيم معدومة نكون قد اجتزنا مرحلة من مراحل الحل وذلك وجود أصغر قيمة في الأسطر وهي الصفر، ننتقل لعملية الطرح بالنسبة للأعمدة فنجد أن:

الوظائف / العناصر	I	II	III	IV
1	6	0	0	0
2	0	2	8	0
3	8	4	10	0
4	6	3	6	0

نلاحظ أن الحل ليس أمثل (عدد الخطوط لا يساوي درجة المصفوفة) نكمل خوارزمية الحل فننتقل إلى خطوة أخرى حيث نحصل على مصفوفة تكاليف أخرى.

الوظائف / الأفراد	I	II	III	IV
1	6	0	0	3
2	0	2	8	3
3	5	1	7	0
4	0	0	3	0

والحل الذي حصلنا عليه هو أمثل والبرنامج التخصيصي هو:

أن ينجز العنصر الأول العمل III

أن ينجز العنصر الثاني العمل I

أن ينجز العنصر الثالث العمل IV حيث يستبعد عن العمل

أن ينجز العنصر الرابع العمل II

ونلاحظ أن العنصر الثالث المكلف بإنجاز العمل IV قد استبعد عن العمل لعدم الحصول على وفر في الكلفة من جراء إنجازه للعمل IV.

والتكلفة الكلية هي:

$$4 + 4 + 9 = 17\ m.u.$$

7-3-VI – الثنائية في مسألة النقل:

تعد مسألة النقل حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية التي تكتب بالشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad 1 \le i \le m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad 1 \le i \le n$$

$$x_{ij} \ge 0$$

$$\left(\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad x_{ij} \right)$$

في الشروط التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad a_i \ge 0 , b_j \ge 0$$

إن ثنائية مسألة النقل هذه هي:

$$u_i + v_j \le 0_{ij} \qquad 1 \le I \le m , 1 \le j \le n$$

u_i , v_j لا على التعيين.

$$\max\left(\sum_{j=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right)$$

إذن فطريقة التوزيع المعدلة تحل فقط مسألة النقل في الشكل الثاني.

مثال (13):لتكن لدينا مسالة النقل التالية المعرفة من خلال الجدول (VI-75)

	C_1	C_2	C_3	C_4	المنتاج الكلي	
F_1	5 x_1	2 x_2	3 x_3	9 x_4	20	a_1
F_2	3 x_5	8 x_6	6 x_7	4 x_8	15	a_2
F_3	6 x_9	4 x_{10}	1 x_{11}	4 x_{12}	25	a_3
الضروري الكلي	12	14	10	24	60	
	b_1	b_2	b_3	b_4		

الجدول (VI-75)

في كل مربع أشرنا للمتحول x_K الذي يبين لنا الكمية المنقولة من F_i إلى C_j.

أما مسالة النقل وفق صيغة إحدى مسائل البرمجة الخطية تكتب على النحو التالي:

$$min\ (5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 3x_6 + 8x_6 + 6x_7 + 4x_8 + 6x_9 + 4x_{10} + x_{11} + 5x_{12})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 15$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 25$$

$$x_1 + x_5 + x_9 = 12$$

$$x_2 + x_6 + x_{10} = 14$$

$$x_3 + x_7 + x_{11} = 10$$

$$x_4 + x_8 + x_{12} = 24$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , \ldots x_{12} \geq 0$$

فإذا وضعنا في حسابنا أن المسألة مكتوبة وفق الصيغة النظامية فإن ثنائيـــة مسالة النقل هذه هي:

$$max\ (20\ U_1 + 15\ U_2 + 25\ U_3 + 12\ V_1 + 14\ V_2 + 10\ V_3 + 24\ V_4)$$

$$U_1 + V_1 \leq 5 , U_2 + V_1 \leq 3 , U_3 + V_1 \leq 6$$

$$U_1 + V_2 \leq 2 , U_2 + V_2 \leq 8 , U_3 + V_2 \leq 4$$

$$U_1 + V_3 \leq 3 , U_2 + V_3 \leq 6 , U_3 + V_3 \leq 1$$

$$U_1 + V_4 \leq 9 , U_2 + V_4 \leq 4 , U_4 + V_3 \leq 5$$

$U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, V_4$ لا على التعيين، حيث الحل يكـــون بطريقـــة الفروق العظمى في مسالة النقل.

تمارين ومسائل

1 – منشأة حديثة العهد تود تصنيع ٤ منتجات متجانسة في فروعها الأربعة بحيث يتم تصنيع منتج واحد في كل فرع فإذا علمت أن تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة بالنسبة لكل منتج في كل فرع معطى من خلال الجدول التالي:

الإنتاج / الفروع	*I*	*II*	*III*	*IV*
1	*14*	*5*	*10*	*17*
2	*6*	*20*	*16*	*13*
3	*12*	*4*	*8*	*9*
4	*10*	*16*	*12*	*4*

والمطلوب: أوجد البرامج التخصصية التي تقلل تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة.

2 – يطلب إيجاد البرنامج التخصصي ذي التكلفة الدنيا لتخصيص *4* أفراد على *4* وظائف علماً بأن مصفوفة تكاليف الفرص الضائعة هي:

العناصر / الوظائف	*I*	*II*	*III*	*IV*
1	*10*	*8*	*14*	*20*
2	*13*	*16*	*10*	*8*
3	*17*	*12*	*4*	*12*
4	*9*	*16*	*18*	*14*

3 – لجأت إدارة استصلاح الأراضي إلى استصلاح 4 مناطق زراعية وتود تخصيصها لزراعة 4 منتجات بحيث تخصص كل منتج بمنطقة فإذا علمت أن تكاليف زراعة الدونم الواحد في كل منطقة هو كما ورد في الجدول التالي:

الوظائف / العناصر	I	II	III	IV
1	8	10	14	16
2	20	12	8	10
3	10	4	12	6
4	12	14	10	14

فالمطلوب: إيجاد البرنامج التخصصي وتكلفته.

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

المصطلحات العلمية باللغة الإنكليزية

A

Abscisa	إحداثي سيني
Activities	فعاليات- أنشطة
Applications	تطبيقات
Approximation	تقريب
Arbitrary	اختياري
Arbitrary Constant	ثابت اختياري
Artificial Variables	متغيرات اصطناعية
Assignment Method	طريقة التعيين
Assignment Prablem	مسألة التعيين
Auxiliary	مساعد
Average Cost	كلفة متوسطة

B

Basis	أساس "قاعدة"
Basic	أساسي"قاعدي"
Basic Vectors	أشعة قاعدة
Basic Solution	حل أساسي
Basic Variables	متغيرات أساسية
Basic Feasible Solution	حل أساسي مقبول" ممكن"

C

Calculus	حساب التفاضل و التكامل

Canonical Form	الشكل القانوني
Certainly	مبدأ الأكيدية
Closed Interval	مجال مغلق
Coefficient	معامل
Column	عمود
Constant Coefficients	معاملات ثابتة
Canstraints	قيود
Continuous Function	تابع مستمر "متصل"
Convex set	مجموعة محدبة
Correlation	ارتباط
Cost function	تابع كلفة

D

Decision Making	اتخاذ القرار
Degeneracy	انحلال-تردي
Degree	درجة
Demand Function	تابع طلب
Dependent Variables	متغيرات تابعة
Degenerate Solution	حل متردي "منحل"
Determinant	محدد-معين
Diagonal	قطر
Diet	تنظيم غذائي
Differential	تفاضل
Differential Calculus	حساب التفاضل

Damascus University

Dimension	حجوم--أبعاد
Dual	مرافق
Duality	ثنائية-ازدواج-ترافق
Duality Problem	المسألة الترافقية
Dual Linear Programs	برامج خطية ترافقية
Dynamic Programming	برمجة ديناميكية

E

Economic seiences	علوم اقتصادية
Economic table	جدول اقتصادي
Economic function	تابع
Economist	اقتصادي
Element	عنصر
Elasticity	مرونة
Elementary transformations	تحويلات أولية
Elementary Function	تابع أولي
Elimination	حذف
Estimation	تقدير
Evoluation	تقييم
Eulers Theorem	نظرية أولر

F

Feasible solution	الحلول الممكنة "المقبولة"
Feasible region	منطقة الامكانيات "الحلول الممكنة"
Feasible basic Solution	حل أساسي ممكن
First Feasible solution	أول حل مقبول

Formula	قالب- صيغة
Function	دالة- تابع
Function differentiation	تغير تابع

G

Game Theory	نظرية الألعاب
General Solution	حل عام
Graph	خط بياني- مخطط- شبكة
Graphical	طريقة المخططات- طريقة الشبكات

H

Homogenous Function	تابع متجانس
Hyperspace	مجسم
Hypothesis	فرضية

I

Identical	مطابق
Identity	متطابقة
Implicit differentiation	اشتقاق جزئي
Improving Solution	تحسين الحل
Income eles ticity of demand	مرونة الطلب الايرادية
Independent variable	متغير مستقل
Onformation	معلومات
Inequality	متباينة- متراجحة
Initial conditions	شروط ابتدائية
Initional Feasible Solution	حل أولي مقبول (ممكن)

Integer	عدد صحيح
Integral Calculus	حساب التكامل
Integration	تكامل
Integration Factor	عامل التكامل
Iterations	تتابع- مراحل
Ineerval	مجال

L

Law	قانون
Lincar	خطي
Linear Programming	تنهيج خطي- برمجة خطي
Linear Form	تركيب خطي
Linear System	جملة خطية
Lincar Constraints	شروط خطية
Linear Indepcndent	استقلال خطي
Linear equation	معادلة خطية
Linear Function	تابع خطي
Linearity Independent	مستقل خطياً
Linearity dependevt	غير مستقل خطياً- مرتبط خطياً

M

Marginal Cost	كلفة حدية
Mathematical Model	نموذج رياضي
Mathematical Formulation	تشكيل رياضي
Mathematical Programming	برمجة رياضية
Matrix	مصفوفة

Maximization	تعظيم
Maximum	الأعظم- الأقصى
Minimum	الأقل- الأدنى
Minimum Column Cost Method	طريقة التكاليف الأقل في العمود
Minimum Raw Column Cost	طريقة التكاليف الأقل في السطر
Minimum Table Column Cost	طريقة التكاليف الأقل في الجدول
Minimization	تخفيض- تقليل
Model	نموذج
Modified Distribution Method	طريقة التوزيع المعدلة
Multiplicity	ضرب- تكرار

N

Necessary And Sufficient Condition	شرط لازم وكافي
Network	شبكة
Network Analysis	تحليل الشبكات
Non Basic Variables	متغيرات غير أساسية
Non Negativity Restrictions	شروط عدم السلبية
Non Degenerate Solution	حل سليم "صحيح"
North West Corner Method	طريقة الزاوية الشمالية الغربية
Numerical	عددي
Numerical Function	تابع عددي

O

Object	هدف
Objective Function	تابع هدف

Operator	مؤثر
Operations Research	بحوث العمليات
Optimum	القيمة المثلى
Optimum Solution	الحل المثالي
Order	رتبة
Overall Product	إنتاج إجمالي

P

Partial Differentiation	اشتقاق جزئي
Partial Elaslfcity	مرونة جزئية
Partial Elaslicity Of Function	مرونة جزئية للتابع
Particular Solution	حل خاص
Penalty Method	طريقة العقوبة "الجزاء"
Pivot	عنصر الدوران-مرشد-مرتكز
Polynomiol	كثير "متعدد" الحدود
Polyhedron	متعد الأضلاع والزوايا- متعد الجوانب- مجسم- متعدد الاوجه والزوايا
Price Elasticity Of Demand	مرونة الطلب السعرية
Primal	أولي
Primal Problem	المسألة الأولية "الأساسية"
Procedure	أسلوب- طريقة
Production Planning	تنظيم الإنتاج
Production Function	تابع الإنتاج
Profit Function	تابع ربح
Program	برنامج "نهج"

Programming	برمجة "تنهيج"
Q	
Quadratic Programming	برمجة تربيعية
Queuing Theory	نظرية الصفوف
R	
Random	عشوائي
Random Samples	عينات عشوائية
Random Variables	متحولات عشوائية
Rank	رتبة
Real Root	جذر حقيقي
Real Constant	ثابت حقيقي
Reducible	قابل للاختزال
Replacement	استهلاك
Resource allocation Problems	مشكلات تخصيص الموارد
Restrictions	قيود
Root	جذور
Row	سطر
S	
Scalar	عدد سلمي
Scientific Method	طريقة علمية
Scientific Inventory Management	الإدارة العلمية للمخزون
Semi Space	نصف الفراغ
Segment	قطعة

Shadow Prices	أسعار الظل
Slack Variables	ماغيرات لإضافية "راكدة"
Slope Of The Tangent	ميل المماس
Side	ضلع
Simplex Method	الطريقة المبسطة - طريقة السمبلكس
Simplex Table	جدول السمبلكس
Singular Solution	حل وحيد
Standard Notations	رموز قياسية
Statistic	احصاء
Substitution	تعويض
Subset	مجموعة جزئية
Sum	مجموع
Surplus Variables	متغيرات إضافية
Supply Function	تابع عرض
Symmetric Distribution	التوزيع المتماثل
Symmetric Discrete Distribution	التوزيع المتماثل المنقطع
System Analysis	تحليل النظم

T

Table	جدول
Tangent	مماس
Term	حد
Total Cost	كلفة كلية
Total Differential	تفاضل كلي
Total Differentiation	اشتقاق كلي

Trajectory	مسار
Transformation	تحويل
Transportation Models	نماذج النقل
Transportation Methods	طريقة النقل
Transportation Network	شبكة النقل
Transportation Problems	مسائل النقل

U

Unique	فريد – وحيد
Universal Set	مجموعة كلية
Utility Function	تابع المنفعة

V

Voriables	متغيرات
Voriables Coefficients	معاملات متغيرة
Vector	شعاع
Vector Space	فراغ شعاعي
Vogel Method	طريقة فوجل
Vertex	رأس – قمة – ذروة

المراجع

١ -- د . أحمد الأشقر : الاقتصاد الرياضي – منشورات جامعة حلب -- كلية الاقتصاد والتجارة مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ١٩٨٢ -- ١٩٨٣.

٢ -- د . عبد القادر الأفندي : الرياضيات الاقتصادية -- منشورات جامعة حلب -- كلية العلوم الاقتصادية مؤسسة الأمالي الجامعية ١٩٧٧ – ١٩٧٨ .

٣ -- د . ناديا أيوب : نظرية القرارات الإدارية -- منشورات جامعة دمشق -- مطبعة طبرين ١٩٨٨ -- ١٩٨٩ .

٤ – د . زيد تميم البلخي – مقدمة في بحوث العمليات – جامعة الملك سعود -- الرياض قسم الإحصاء وبحوث العمليات -- كلية العلوم -- الطبعة الأولى ١٩٩٨.

٥ -- د . لطيف عبد رجب الحكيم -- د . عبد الجليل آدم المنصوري : مدخل إلى البرمجة الخطية جامعة قاريونس -- بنغازي – دار دمشق للطباعة والنشر ١٩٨٦ .

٦-- د . محمد سمير دركزلي – د . سمير جحير : الرياضيات الاقتصادية والادارية – منشورات جامعة حلب -- كلية الاقتصاد -- مدير الكتب والمطبوعات الجامعية ١٩٨٨ .

٧-- د . ابراهيم محمد العلي : الرياضيات الاقتصادية -- جامعة تشرين -- كلية الاقتصاد -- مديرية الكتب والمطبوعات ١٩٨٨ – ١٩٨٩ .

٨-- د . ابراهيم محمد العلي : بحوث العمليات لطلاب السنة الرابعة – جامعة تشرين -- كلية الاقتصاد – مطبعة دار الكتاب بدمشق ١٩٩٠ – ١٩٩١ .

٩– د . عبد الرزاق الفاضل : الرياضيات العالية -- منشورات جامعة دمشق -- مطبعة المدينة ١٩٨٧ – ١٩٨٨ .

المراجع الأجنبية

1. Jack and S. Bradley. Essential Mathematics for Economists . Wiley and Sons, London, 1980.
2. E.T. Douiling . Mathematics for Economists. McGraw – Hill, USA, 1980.
3. M. Timberel . Mathematics for Economists. Blackwell Oxford , 1985 .
4. S. Glaister . Mathematical Methods for Economists. Blackwell Oxford, 1984.
5. F.S. Budnick . Applied Mathematics: for Business, Economics and Social Sciences. McGraw - Hill, Japan, 1979.
6. M. Timbrell . Mathematics for Economists. Blackwell, Oxford, 1985.
7. Calculus with applications an computing (vol I): Peter lax, Samuel Bursten and Anneli lax.
8. Mathematics with application: Laurence D. Haffman , Michael Orkin. Mcgraw- Hill Book Company
9. Mathematics for Business applications: Harold D. Shane. Published by charles E, Merill Publishing Company.
10. Calculus "Fifth Edition": Stanley I. Grossman, University of Montana and University College London, SAUNDERS /HBJ/ Soundess College publrshing.

اللجنة العلمية :

الأستاذ الدكتور خلف مطر الجراد

الأستاذ الدكتور محمد سمير دركزنلي

الأستاذ الدكتور سمير حجير

المدقق اللغوي :

الأستاذ الدكتور خليل الموسى

- حقوق الطبع و الترجمة و النشر محفوظة لمديرية الكتب و المطبوعات -

وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University